ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΑΙΟΥ

ΑΠΟ ΤΟΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΣΤΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΡΕΑΛΙΣΜΟ: ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΟ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΛΦΙΑ ΜΠΕΖΟΥ-ΒΡΑΚΑΤΣΕΛΗ

Επιτροπή: Αριστείδης Αραγεώργης, Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ (επιβλέπων)
Κώστας Στεργιόπουλος, Τομέας ΑΚΕΔ, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ
Πέτρος Στεφανέας, Τομέας Μαθηματικών, Σχολή ΕΜΦΕ, ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι να διερευνήσει την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων (σύνολα, αριθμοί, διανύσματα, κ.λπ.) με αφετηρία το γεγονός ότι τα μαθηματικά φαίνεται να είναι αναπόσπαστο συστατικό των καλύτερων επιστημονικών θεωριών. Ο κύριος άξονας είναι η αξιολόγηση επιχειρημάτων από το αναπόδραστο. Εξετάζονται οι διάφορες εκδοχές αυτών των επιχειρημάτων (Quine-Putnam, Colyvan, Baker) καθώς και οι κριτικές που έχουν ασκηθεί. Επίσης αναλύονται διάφορα παραδείγματα θεωρούμενων μαθηματικών εξηγήσεων εμπειρικών φαινομένων. Αναπτύσσονται επιχειρήματα για τις ακόλουθες θέσεις: (1) τα μαθηματικά είναι μη εξαλείψιμα από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες και παίζουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο σε αυτές αλλά (2) τα γεγονότα αυτά δεν μπορούν να αξιοποιηθούν ώστε να συναχθεί η ανεξάρτητη ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων μέσω κάποιου είδους συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση και, συνεπώς, (3) ένας συνδυασμός επιστημονικού ρεαλισμού με μαθηματικό αντιρεαλισμό φαίνεται καταρχήν εφικτός.

Abstract

The aim of this diploma thesis is to explore the existence of mathematical objects (sets, numbers, vectors, etc.) using as point of departure the fact that mathematics appears to be an indispensable constituent of the best scientific theories. The focus is the evaluation of indispensability arguments. Various versions of these arguments (Quine-Putnam, Colyvan, Baker) are examined as well as the criticisms marshaled against them. In addition, various examples of putative mathematical explanations of empirical facts are analyzed. Arguments are expounded in support of the following theses: (1) mathematics is ineliminable from our best scientific theories and has genuine explanatory role in them but (2) these facts cannot be used to infer the independent existence of mathematical objects via a sort of inference to the best explanation and, consequently, (3) a combination of scientific realism with mathematical antirealism is in principle possible.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Αριστείδη Αραγεώργη, Επίκουρο Καθηγητή του Ε.Μ.Π., για την αμέριστη βοήθεια και καθοδήγησή του. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κοντινούς μου ανθρώπους, ιδιαιτέρως τον Άγγελο, για τη στήριξη και την υπομονή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 1

Abstract 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 9

ΦΙΛΟΣΟΦΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 9

1.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΕΑΛΙΣΜΟΣ 9

1.2 ΦΙΛΟΣΟΦΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 18

ΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ 18

2.1 ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ ΤΩΝ QUINE-PUTNAM 19

2.2 ΟΛΙΣΜΟΣ 23

2.3 ΤΟ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟ 27

2.4 ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΕΞΗΓΗΣΗ 28

2.5 ΜΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΕΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΟΝΤΟΤΗΤΕΣ 30

2.6 ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ ΤΟΥ BAKER 31

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 33

ΕΝΣΤΑΣΕΙΣ ΕΝΑΝΤΙΟΝ ΤΟΥ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΣ 33

3.1 ΚΑΤΑΛΗΠΤΟΤΗΤΑ 33

3.2 ΣΥΜΒΑΣΙΟΚΡΑΤΙΑ 34

3.3 ΦΙΞΙΟΝΑΛΙΣΜΟΣ 36

3.4 Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ MADDY 43

3.5 Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ LENG 46

3.6 Η ΚΡΙΤΙΚΗ STEINER-BANGU 48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 50

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ 50

4.1 ΛΟΓΙΚΗ 50

4.2 ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ 54

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 57

ΕΞΗΓΗΤΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 57

5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ COLYVAN 57

5.2 ΕΝΣΤΑΝΣΕΙΣ MELIA 66

5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ BAKER 69

5.4 ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΞΗΓΗΣΗ 74

5.5 ΕΝΣΤΑΣΕΙΣ ΞΑΝΑ 76
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.. 88

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η φιλοσοφία των μαθηματικών είναι ένας κλάδος συγγενής με τη φιλοσοφία των επιστημών. Μελετά τις υποθέσεις, τα θεμέλια και τις συνέπειες των μαθηματικών, παρέχει μια άποψη της οντολογίας, της γνωσιολογίας και της μεθοδολογίας των μαθηματικών και κατανοεί τη θέση των μαθηματικών στη ζωή των ανθρώπων.

Ενώ οι φυσικές επιστήμες (φυσική, χημεία, βιολογία, γεωλογία), όμως, ασχολούνται με οντότητες που υπάρχουν στο χωροχρόνο, κάτι τέτοιο είναι αμφισβητήσιμο για τα *αντικείμενα* που μελετούν τα μαθηματικά (σύνολα, συναρτήσεις, αριθμοί, κ.λπ.). Επίσης, οι *μέθοδοι* έρευνας στα μαθηματικά φαίνεται να διαφέρουν σημαντικά από αυτές στις άλλες επιστήμες. Η μαθηματική γνώση φαίνεται να αποκτάται με παραγωγικό συλλογισμό (deductive reasoning) από βασικά αξιώματα και όχι με επαγωγικές μεθόδους (inductive methods). Ουσιαστικά, για την επέκταση των μαθηματικών, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι τα αξιώματα και τα πορίσματα αυτών. Δεν μας ενδιαφέρει η εμπειρική γνώση, ούτε οι παρατηρήσεις του φυσικού κόσμου· από κάποιες αξιωματικές προτάσεις προχωρούμε παραγωγικά σε οτιδήποτε έπεται.[1]

Τα μαθηματικά, λοιπόν, συνάγονται αναγκαίως από τις αξιωματικές προτάσεις, εν αντιθέσει με τη φυσική, π.χ., όπου χρησιμοποιούμε επαγωγικό συλλογισμό, με τα συμπεράσματα να μην είναι κατ' ανάγκην αληθή, απλώς να έχουν υψηλή πιθανότητα αλήθειας, αν οι προκείμενες είναι αληθείς.[2] Ακριβώς για αυτόν τον λόγο το καθεστώς (status) της μαθηματικής γνώσης είναι διαφορετικό από εκείνο των φυσικών επιστημών· οι θεωρίες των υπόλοιπων επιστημών μοιάζουν «λιγότερο σίγουρες» και πιο «ανοιχτές σε συζήτηση» και αναθεώρηση από ό,τι οι μαθηματικές.

Τα μαθηματικά φαίνεται να μελετούν *αφηρημένες οντότητες*: οντότητες που δεν έχουν θέσεις στον χώρο και τον χρόνο, είναι αμετάβλητες και αιτιακώς αδρανείς. Γεννώνται, λοιπόν, ερωτήματα σχετικά με τη *φύση* αυτών των οντοτήτων και το *πώς* μπορούμε να έχουμε γνώση για αυτές. Ποιος είναι ο ρόλος της ανθρωπότητας στην

[1] Αυτή, τουλάχιστον, φαίνεται να είναι μια *φορμαλιστική* εικόνα για τα μαθηματικά που θα αποδέχονταν πολλοί σύγχρονοι μαθηματικοί. Νοητικές διαδικασίες όπως διαίσθηση, ενόραση ή και εμπειρία αφορούν μάλλον την επινόηση εννοιών ή την εισαγωγή αξιωμάτων.

[2] Πρόκειται για αμιγώς *λογική* αναγκαιότητα, το είδος της αναγκαιότητας που απορρέει από την εγκυρότητα των παραγωγικών επιχειρημάτων.

ανάπτυξη των μαθηματικών; Τι σημαίνει το να αναφέρεσαι σε ένα μαθηματικό αντικείμενο; Ποια είναι η σχέση μεταξύ της λογικής και των μαθηματικών; Ποιοι είναι οι στόχοι της μαθηματικής έρευνας; Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στον αφηρημένο κόσμο των μαθηματικών και τον υλικό κόσμο; Μήπως τελικά τα μαθηματικά αντικείμενα ανήκουν με κάποιο τρόπο στον φυσικό κόσμο; Ή μήπως υπάρχουν ως ιδέες στον νου; Ή μήπως ανήκουν σε έναν άλλο πλατωνικό κόσμο;

Το φιλοσοφικό ερώτημα που θα διερευνηθεί σε αυτή την εργασία έχει να κάνει με την ύπαρξη ή μη των μαθηματικών οντοτήτων. Αλλά δεν θα αντιμετωπίσουμε γενικά το ερώτημα της ύπαρξης των μαθηματικών οντοτήτων. Θα περιοριστούμε στα εξής ερωτήματα. Μέσα από τη χρήση των μαθηματικών στις υπόλοιπες επιστήμες, μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι για την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων; Ποιος τελικά είναι ο ρόλος των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες; Είναι αυτός ο ρόλος αναπόσπαστος από την ανάπτυξη και εφαρμογή των επιστημών; Αν ο ρόλος των μαθηματικών είναι αναπόσπαστος, μπορούμε να συμπεράνουμε πως τα μαθηματικά *εξηγούν* τον φυσικό κόσμο ή απλώς είναι μια γλώσσα που μας βοηθάει να τον περιγράψουμε;

Ειδικότερα, θα διερευνήσουμε το εξής ερώτημα. Ο *επιστημονικός* ρεαλισμός (scientific realism) δεσμεύει στον *μαθηματικό* ρεαλισμό (mathematical realism); Όπως αναφέρει ο Ψύλλος (Psillos 1999), ο επιστημονικός ρεαλισμός συμπεριλαμβάνει τρεις θέσεις: (1) τη *μεταφυσική θέση* ότι ο κόσμος έχει μια ορισμένη δομή ανεξάρτητη από τη νόηση, (2) τη *σημασιολογική θέση* ότι η γλώσσα μιας επιστημονικής θεωρίας επιδέχεται κυριολεκτική ερμηνεία και (3) τη *γνωσιολογική θέση* ότι οι ώριμες και καλώς επικυρωμένες θεωρίες είναι (κατά προσέγγιση) αληθείς για τον κόσμο και, συνεπώς, οι οντότητες που αυτές οι θεωρίες θέτουν, ή παρόμοιες οντότητες, βρίσκονται στον κόσμο. Η δέσμευση, λοιπόν, στην αλήθεια των (επικυρωμένων) επιστημονικών θεωριών δεσμεύει στην ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων, δεδομένου ότι αυτές οι θεωρίες αξιοποιούν (αναγκαστικά;) μαθηματικές έννοιες και θεωρίες; Τι άλλες στάσεις απέναντι στις μαθηματικές οντότητες μπορεί να υιοθετήσει ένας επιστημονικός ρεαλιστής;

Η δομή της εργασίας έχει ως εξής. Αρχικά γίνεται μια σύντομη επισκόπηση βασικών σχολών και θέσεων στη φιλοσοφία των μαθηματικών (Κεφάλαιο 1). Στη συνέχεια επιχειρείται μια αναλυτική παρουσίαση των επιχειρημάτων που αποπειρώνται να συναγάγουν την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων από το αναπόδραστο της χρήσης μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες (Κεφάλαιο 2). Το Κεφάλαιο 3 αφιερώνεται σε παρουσίαση και κριτική αποτίμηση διαφόρων ενστάνσεων απέναντι σε αυτά τα επιχειρήματα από φιλοσόφους των μαθηματικών (Field, Maddy, Leng, Steiner, Bangu). Το Κεφάλαιο 4 θέτει το ζήτημα της διάκρισης μεταξύ μαθηματικών και λογικής με σκοπό να διερευνηθεί το ερώτημα της μη εξαλειψιμότητας των μαθηματικών από τις εμπειρικές επιστήμες. Τέλος, στο Κεφάλαιο 5 εξετάζονται κριτικά διάφορα παραδείγματα από τη βιβλιογραφία που στοχεύουν να καταδείξουν ότι τα μαθηματικά έχουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο στις επιστήμες. Η εργασία ολοκληρώνεται με την αναπάπτυξη των συμπερασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΦΙΛΟΣΟΦΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το κεντρικό, λοιπόν, ερώτημα είναι: αν και εφόσον τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστα από τις αληθείς (καλώς επικυρωμένες) επιστημονικές θεωρίες, μπορούμε να συναγάγουμε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων που αναφέρονται σε αυτές; Ας δούμε όμως πρώτα πώς συγκεκριμένες σχολές φιλοσοφίας κατανοούν τις μαθηματικές οντότητες και, γενικότερα, αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά.[3]

1.1 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΕΑΛΙΣΜΟΣ

Ο όρος «ρεαλισμός», γενικότερα, αποδίδεται σε οποιαδήποτε θεωρία μιλάει για πίστη σε κάτι πραγματικό, κάτι που υπάρχει στον πραγματικό κόσμο. Οι μαθηματικοί ρεαλιστές πιστεύουν πως τα μαθηματικά αντικείμενα, οι μαθηματικές οντότητες, υπάρχουν *ανεξάρτητα από τον μαθηματικό* – δηλαδή, ανεξάρτητα από την ανθρώπινη νόηση, τη γλώσσα ή την πρακτική των κοινοτήτων των μαθηματικών.[4] Τα μαθηματικά αντικείμενα, λοιπόν, δεν *εφευρίσκονται* από τους μαθηματικούς· υπάρχουν στον κόσμο και εμείς απλώς τα ανακαλύπτουμε. Υπό αυτή την οπτική, ένας κύκλος, λόγου χάριν, υπάρχει στον κόσμο ανεξαρτήτως από την κατασκευή του κύκλου από τον μαθηματικό, ακόμη κι από την ιδέα του κύκλου στον νου του μαθηματικού.

Δημοφιλής μορφή του μαθηματικού ρεαλισμού είναι ο *πλατωνισμός*, σύμφωνα με τον οποίο οι μαθηματικές οντότητες ανήκουν σε ένα κόσμο αφηρημένων οντοτήτων ανεξάρτητο από εμάς. Αλλά δεν είναι απαραίτητο να είναι πλατωνιστής ένας μαθηματικός ρεαλιστής. Πιο εμπειριστικές προσεγγίσεις σχετίζουν τα μαθηματικά αντικείμενα με φυσικά, υλικά, αντικείμενα ή γενικότερα με τη δομή του φυσικού, υλικού, σύμπαντος.

---

[3] Η επισκόπηση βασίζεται στα Αναπολιτάνος ([1985] 2009) και Shapiro ([2000] 2006).

[4] Επειδή κάποιος μπορεί να είναι ρεαλιστής ως προς ορισμένες μαθηματικές οντότητες (π.χ., τους φυσικούς αριθμούς) και αντιρεαλιστής ως προς άλλες (π.χ., τους φανταστικούς αριθμούς ή τα απειροσύνολα), μπορούμε να πούμε ότι ο μαθηματικός ρεαλισμός δεσμεύει στην ανεξάρτητη ύπαρξη τουλάχιστον μερικών μαθηματικών οντοτήτων.

Το πρωταρχικό, για αυτή την εργασία, είναι η πίστη των ρεαλιστών στην ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων. Το αν αυτή η ύπαρξη είναι ανεξάρτητη από τον μαθηματικό έρχεται σε δεύτερο στάδιο.

Από την άλλη, ένας αντιρεαλιστής ως προς τις μαθηματικές οντότητες πιστεύει ότι οι οντότητες αυτές δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από τον μαθηματικό. Και αυτό μπορεί να σημαίνει είτε (1) ότι οι μαθηματικές οντότητες απλώς δεν υπάρχουν είτε (2) ότι οι μαθηματικές οντότητες υπάρχουν αλλά εξαρτώνται από τον μαθηματικό (π.χ., είναι κατασκευές του νου). Ένα αντιρεαλιστής μπορεί, παρόλα αυτά, να πιστεύει ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν δισθενείς αληθοτιμές – δηλαδή, είναι αληθείς ή ψευδείς. Αλλά προσθέτει ότι οι οντότητες στις οποίες φαίνεται να αναφέρονται οι εν λόγω προτάσεις δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από τον μαθηματικό. Οι αληθοτιμές των μαθηματικών προτάσεων, για τους αντιρεαλιστές, έχουν νόημα μόνο *εσωτερικά* της δομής των μαθηματικών και της λογικής. Δεν αφορούν κάποιο πλατωνικό κόσμο αφηρημένων οντοτήτων, πέρα από τον υλικό, εμπειρικό, κόσμο και τον ψυχολογικό κόσμο του ανθρώπινου νου (ιδέες, παραστάσεις, εποπτείες, διασθήσεις, κ.λπ.). Ένας τέτοιος πλατωνικός κόσμος είναι απλώς φιλοσοφικός μύθος.

Ο ρεαλισμός, όπως είπαμε, θεωρεί πως οι μαθηματικές οντότητες, όπως, π.χ., οι πραγματικοί αριθμοί, υπάρχουν ανεξάρτητα από τον μαθηματικό. Στον πλατωνισμό οι οντότητες αυτές είναι αφηρημένες. Και εξ ορισμού οι αφηρημένες οντότητες είναι αιτιακώς αδρανείς· δεν μπορούν να αλληλεπιδρούν αιτιακά με υλικές ή αφηρημένες οντότητες. Δεν μπορεί, ειδικά, η αιτία (ή το αποτέλεσμα) μιας αφηρημένης οντότητας να είναι μια υλική οντότητα. Αλλά η γνώση μας για τα υλικά αντικείμενα στηρίζεται στην ικανότητά μας να τα αντιλαμβανόμαστε και, επομένως, να αλληλεπιδρούμε αιτιακά με αυτά. Δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο, όμως, για το πώς ο μαθηματικός έχει αποκτήσει γνώση για τις αφηρημένες μαθηματικές οντότητες. Αυτό αποτελεί την κύρια γνωσιολογική αδυναμία του πλατωνισμού.

Ο σύγχρονος μαθηματικός ρεαλισμός υποστηρίζεται κυρίως από το *επιχείρημα του αναπόδραστου* (indispensability argument)[5] με ένα διαφορετικό τρόπο από ό,τι στην πιο κλασική προσέγγιση. Οι Quine και Putnam υποστηρίζουν πως τα

[5] Μια πιο πλήρης απόδοση θα ήταν: *το επιχείρημα από το αναπόδραστο της χρήσης μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες*. Και, όπως θα δούμε, δεν πρόκειται για ένα μόνο επιχείρημα, αλλά μάλλον για μια οικογένεια συναφών επιχειρημάτων.

μαθηματικά είναι αναπόσπαστα από τις *εμπειρικές* επιστήμες. Έτσι, αποδεχόμενοι πως οι επιστημονικές θεωρίες εξηγούν (αληθώς) τον φυσικό κόσμο και επειδή τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστο κομμάτι τέτοιων εξηγήσεων, μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων. Ουσιαστικά, υπό μια τέτοια οπτική του ρεαλισμού, οι Quine και Putnam παρεκκλίνουν από τον κλασικό πλατωνισμό αφού «αποδεικνύουν» την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων *μέσα* από τον εμπειρικό κόσμο. Η φιλοσοφία των Quine και Putnam υποστηρίζει την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων ως την καλύτερη ερμηνεία της εμπειρίας, απομακρύνοντας έτσι τα μαθηματικά από το να ξεχωρίζουν από τις υπόλοιπες επιστήμες.

1.2 ΦΙΛΟΣΟΦΙΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μια σύντομη επισκόπηση των εικόνων που καλλιέργησαν για τα μαθηματικά διάφορες φιλοσοφικές σχολές και ρεύματα. Μερικές από αυτές κατέλαβαν κεντρικές θέσεις στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ενώ άλλες όχι.

Πλατωνισμός. Κατά τους πλατωνιστές, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι άφθαρτες αφηρημένες οντότητες και ανήκουν σε έναν άλλο κόσμο ανεξάρτητο από τον ανθρώπινο νου, τη γλώσσα και τη σκέψη του μαθηματικού. Όπως προαναφέραμε, ο μαθηματικός μπορεί μόνο να τα προσεγγίσει, να τα ανακαλύψει, και όχι να τα εφεύρει. Το πιο απλό που μπορούμε να σκεφτούμε ως παράδειγμα είναι ένας κύκλος που σχεδιάζει ένας μαθηματικός. Κατά τον Πλάτωνα, αυτός ο υλικός κύκλος είναι απλώς μια «κακή αντιγραφή», μια «ατελής μίμηση», της οντότητας *Κύκλος* που υπάρχει στον κόσμο των Ιδεών. Επιπλέον, και η σκέψη «κύκλος» δεν διαθέτει την τελειότητα της οντότητας *Κύκλος* που υπάρχει στον κόσμο των Ιδεών. Ιεραρχικά, το πρώτο παράδειγμα, ο σχεδιασμένος υλικός κύκλος, μοιάζει μακρύτερα από την οντότητα *Κύκλος* από ό,τι η σκέψη «κύκλος», διότι διαθέτει όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που τον κάνουν λιγότερο καλό, λιγότερο τέλειο, και έτσι περισσότερο «κακή αντιγραφή».

Όπως ήδη τονίσαμε, για τους πλατωνιστές, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι μη αιτιακές οντότητες. Επειδή ακριβώς ανήκουν σε αυτόν τον άλλον κόσμο, και όχι στον υλικό κόσμο, δεν σχετίζονται αιτιακά με οτιδήποτε υπάρχει στον χωροχρόνο μας. Έτσι για τους πλατωνιστές η πραγματικότητα είναι κάτι διαφορετικό, κάτι παραπέρα, από τον φυσικό κόσμο. Αλλά ο πλατωνισμός είναι παρακλάδι του ρεαλισμού. Για τον ρεαλιστή πλατωνιστή, η αλήθεια μιας πρότασης εδράζεται στην αντιστοιχία της με την αντικειμενική πραγματικότητα.

Όμως πώς γνωρίζουμε τέτοιες μαθηματικές αλήθειες; Η παραδοσιακή απάντηση των πλατωνιστών επικαλείται την ύπαρξη της *μαθηματικής εποπτείας*. Αλλά αυτή πρέπει να είναι μια λειτουργία του νου που *δεν* μπορεί να μελετηθεί επιστημονικά, όπως η αισθητηριακή αντίληψη. Επιπλέον, πώς είναι δυνατόν να εφαρμόζονται οι μαθηματικές αλήθειες στον φυσικό κόσμο; Εδώ ο πλατωνιστής πρέπει να επικαλεστεί την ύπαρξη κάποιας σχέσης μεταξύ του κόσμου των μαθηματικών αντικειμένων και του φυσικού κόσμου – π.χ., ότι ο δεύτερος «μιμείται» τον πρώτο, ότι έχει κατασκευαστεί με πρότυπα του πρώτου, κ.λπ.

Ιδεαλισμός. Ο ιδεαλισμός (παλαιότερα «ιδεοκρατία») είναι φιλοσοφικό ρεύμα που στο βασικό πρόβλημα της φιλοσοφίας που αφορά τη σχέση μεταξύ ανθρώπινου νου και εξωτερικού κόσμου, μεταξύ συνείδησης και ύλης, παίρνει θέση υπέρ της πρωταρχικότητας του πνεύματος, της νόησης και της συνείδησης. Οι ιδεαλιστές φιλόσοφοι υποστήριζαν ότι μόνο ο νους μας έχει πραγματική υπόσταση και ότι ο υλικός κόσμος είναι μόνο προϊόν των αισθήσεων, των παραστάσεων μας και των αντιλήψεών μας.[6] Γι’ αυτούς, τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, αλλά εξαρτώνται από τον ανθρώπινο νου, δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς.

Ο ιδεαλισμός, γενικά, φαίνεται να προσφέρει μια προσιτή λύση στο πρόβλημα της προέλευσης της μαθηματικής γνώσης. Αν τα μαθηματικά αντικείμενα προέρχονται από τον ανθρώπινο νου, η γνώση των μαθηματικών αντικειμένων είναι γνώση των προϊόντων του ανθρώπινου νου. Αλλά, πάλι, πώς είναι δυνατόν να εφαρμόζονται τα μαθηματικά με όλη τους την ακρίβεια στον εμπειρικό κόσμο; Εδώ ο ιδεαλιστής μπορεί να πει ότι και ο ίδιος ο κόσμος της εμπειρίας είναι «εν μέρει», με κάποιο τρόπο, διαμορφωμένος από τον ανθρώπινο νου.

Νατουραλισμός. Ο νατουραλισμός είναι ένα φιλοσοφικό ρεύμα που έδωσε μια καινούρια διάσταση στο πώς σκεφτόμαστε τη σχέση φιλοσοφίας και επιστήμης ή

[6] Ο υπερβατολογικός ιδεαλισμός του Kant, βέβαια, συμπεριλάμβανε και την ύπαρξη του κόσμου των νοουμένων, των πραγμάτων καθαυτά, που όμως δεν ήταν γνώσιμος. Από την άλλη, ο υποκειμενικός ιδεαλισμός του Berkeley δεχόταν και την ύπαρξη ενός ανώτατου νου, εκείνου του Θεού.

μαθηματικών. Ο νατουραλισμός για τα μαθηματικά υποστηρίχθηκε από τον Quine. Για τον Quine, η ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων είναι το ίδιο καλά επικυρωμένη όπως εκείνη των υπολοίπων οντοτήτων της επιστήμης.

Ο Quine υποστηρίζει πως δεν υπάρχει *πρώτη φιλοσοφία* (first philosophy). Η φιλοσοφία είναι απλώς συνέχιση της επιστήμης. Η φιλοσοφία δεν προηγείται, ούτε υπερτερεί, της επιστήμης. Μαζί η φιλοσοφία και η επιστήμη συγκροτούν την ολοκληρωμένη περιγραφή του κόσμου μας. Η επιστήμη είναι ο απόλυτος κριτής της αλήθειας και της ύπαρξης. Αυτή η θέση προφανώς αναδεικνύει μια μεγάλη προσήλωση και πίστη στην επιστημονική μέθοδο. Οι νατουραλιστές αναγνωρίζουν την επιτυχία της μεθόδου αυτής ως τρόπο απάντησης θεμελιωδών ερωτημάτων για τη «φύση» των πραγμάτων. Ουσιαστικά, ο Quine αντιλαμβάνεται την επιστήμη και τη φιλοσοφία ως *ένα*.

Αν θέλουμε λοιπόν να βρούμε απαντήσεις σε γνωσιολογικές και μεταφυσικές απαντήσεις –όπως «Τι γνωρίζουμε;» ή «Πώς γνωρίζουμε ό,τι γνωρίζουμε;» και «Τι οντότητες υπάρχουν;» ή «Τι *είναι*;» – πρέπει να κοιτάμε τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες για να αποφασίσουμε τι υπάρχει και τι πρέπει να πιστεύουμε. Οι νατουραλιστές απορρίπτουν κάθε μη επιστημονικό τρόπο απόφασης για το τι υπάρχει. Για παράδειγμα, ο νατουραλισμός μπορεί να απορρίπτει τη μετεμψύχωση για μυστικιστικούς λόγους, αλλά δεν θα την απέρριπτε αν οι καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες προϋπέθεταν την αλήθεια αυτής της υπόθεσης.

Πάντως, ο νατουραλισμός δεν δεσμεύει σε κάποια εκδοχή οντολογικού μαθηματικού ρεαλισμού. Ο νατουραλισμός είναι συμβατός με αντιρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες.

Εμπειρισμός. Ο εμπειρισμός είναι ένα ρεύμα με μακρά ιστορία στη φιλοσοφική παράδοση. Πολύ γενικά, οι εμπειριστές υποστηρίζουν ότι κάθε γνώση της πραγματικότητας –που μπορεί να διακρίνεται από γνώση καθαρά λογικών σχέσεων μεταξύ εννοιών ή ιδεών– βασίζεται ή ανάγεται, με κάποιο τρόπο, στην εμπειρία. Αυτή η θέση φαίνεται να έρχεται σε σύγκρουση με την a priori φύση των μαθηματικών. Έτσι ο εμπειριστής πρέπει είτε να αρνηθεί ότι τα μαθηματικά συγκροτούν γνώση της πραγματικότητας είτε να αρνηθεί ότι μαθηματικά είναι a priori. Στον εμπειρισμό του Hume, για παράδειγμα, τα μαθηματικά είναι a priori αλλά δεν συγκροτούν γνώση της πραγματικότητας, αφορούν απλώς «σχέσεις μεταξύ ιδεών». Η άλλη εκδοχή –ότι τα μαθηματικά δεν είναι a priori, δεν είναι ανεξάρτητα της εμπειρίας, απλώς φαίνεται να είναι– είχε ως σημαντικό εκπρόσωπο κατά τον 19ο αιώνα τον John Stuart Mill και συνεχιστή κατά τον 20ο αιώνα τον Quine. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή, η μαθηματική γνώση αποκτάται όπως η γνώση του εμπειρικού κόσμου.

Ιντουισιονισμός. Ο ιντουισιονισμός γενικά πρεσβεύει πως τα μαθηματικά είναι κατασκεύασμα του ανθρώπινου νου. Οι ιντουισιονιστές, με κύριους εκπροσώπους τους Brouwer και Heyting,[7] είναι αντιρεαλιστές ως προς τις μαθηματικές οντότητες. Επιπλέον, για αυτούς, η αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης έγκειται στην ικανότητά μας να την αποδείξουμε κατασκευαστικά. Είναι η ίδια η νοητική δραστηριότητα του μαθηματικού που αποδίδει αληθοτιμή στις προτάσεις των μαθηματικών.

Οι ιντουισιονιστές αποδέχονται μια πρόταση της μορφής '$p \vee q$' ως αληθή μόνο αν έχουμε μια απόδειξη της p ή έχουμε μια απόδειξη της q. Επομένως, δεν έχουμε δικαίωμα να ισχυριστούμε ότι η '$p \vee \neg p$' ("p ή όχι p") είναι σε κάθε περίπτωση αληθής (*αρχή του αποκλειόμενου τρίτου ή μέσου*), αφού υπάρχουν περιπτώσεις που μπορεί να μην μπορούμε να αποδείξουμε ούτε την p ούτε την άρνησή της $\neg p$. Με άλλα λόγια, η '$p \vee \neg p$' δεν είναι ταυτολογία για τους ιντουισιονιστές. Εξάλλου, οι ιντουισιονιστές επιτρέπουν τη χρήση δεσμευμένων μεταβλητών για αναφορά σε μαθηματικές οντότητες, μόνο όταν αυτές είναι ικανές να δημιουργηθούν από «υλικά» που προσδιορίζονται εκ των προτέρων.

Όλα αυτά έχουν σημαντικές συνέπειες για το τι μπορεί να αποδειχθεί στα μαθηματικά, αφού περιορίζουν τη χρήση της *εις άτοπον απαγωγής*. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένα μαθηματικός έχει αποδείξει ότι το κατηγόρημα K δεν εφαρμόζεται σε όλους τους φυσικούς αριθμούς, '$\neg(\forall x)Kx$'. Δεν δικαιούται να συμπεράνει ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός που δεν ικανοποιεί το κατηγόρημα K, '$(\exists x)\neg Kx$', όπως θα έκανε ένας κλασικός μαθηματικός. Ο ιντουισιονιστής μαθηματικός δικαιούται να καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα μόνο όταν έχει κατασκευάσει ένα φυσικό αριθμό n και έχει αποδείξει την '$\neg Kn$'.

[7] Πρόδρομος του ιντουισιονισμού υπήρξε ο Poincaré και σε κάποια περίοδο και ο Weyl.

Λογικισμός. Ο λογικισμός, με κύριους εκπροσώπους κατά τον $19^{ο}$ και $20^{ο}$ αιώνα τους Frege και Russell, υποστηρίζει το πρόγραμμα της αναγωγής των μαθηματικών στη λογική. Αυτό συμπεριλαμβάνει δυο θέσεις: (1) οι έννοιες των μαθηματικών μπορούν να παραχθούν από λογικές έννοιες μέσω ορισμών και (2) τα θεωρήματα των μαθηματικών μπορούν να παραχθούν τελικά από λογικά αξιώματα και ορισμούς μαθηματικών εννοιών μέσω καθαρής λογικής συναγωγής.

Ο ίδιος ο Frege προσπάθησε να αναγάγει την αριθμητική στη λογική, αλλά το πρόγραμμά του συνάντησε δυσκολίες (εμπεριείχε ασυνέπειες σαν αυτές που αναδεικνύει το παράδοξο του Russell). Σύγχρονοι λογικιστές («νεο-λογικιστές» ή «νεο-φρεγκεανοί») συνεχίζουν τον πρόγραμμα του Frege αποφεύγοντας τις αρχικές ασυνέπειές του.

Φορμαλισμός. Ο φορμαλισμός, με κύριο εκπρόσωπο τον Hilbert στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα, αποδοκιμάζει την τάση των λογικιστών να βρίσκουν καταφύγιο σε καθολικές έννοιες αλλά και απορρίπτει τη φαλκίδευση της καθιερωμένης μαθηματικής πρακτικής από τους ιντουισιονιστές. Ο φορμαλιστής, όπως και ο λογικιστής, αντιτάσσεται στο «σακάτεμα» των κλασικών μαθηματικών. Όμως, αντιτάσσεται επίσης στην αποδοχή αφηρημένων οντοτήτων γενικά, όπως ένας νομιναλιστής.

Ο φορμαλιστής θεωρεί τα (καθαρά) κλασικά μαθηματικά ως ένα παιχνίδι ασήμαντων σημειογραφιών, ένα παιχνίδι με σημεία ή σύμβολα χωρίς σημασία. Αυτό το παιχνίδι μπορεί, βέβαια, να έχει χρησιμότητα για τους φυσικούς και τους τεχνολόγους. Αλλά η χρησιμότητα για αυτούς δεν *προϋποθέτει* σημασία. Ούτε η επιτυχία των μαθηματικών να διατυπώνουν θεωρήματα και να βρίσκουν αντικειμενικές βάσεις για συμφωνία με τα αποτελέσματα άλλων προϋποθέτει σημασία.

Νομιναλισμός. Νομιναλισμός ή ονοματοκρατία αποκαλείται το φιλοσοφικό σύστημα σύμφωνα με το οποίο τα *καθόλου* (π.χ., ιδιότητες όπως η τριγωνικότητα) δεν έχουν ανεξάρτητη ύπαρξη από τα *καθέκαστα*, τα επιμέρους ατομικά πράγματα (π.χ., τα τριγωνικά αντικείμενα). Οι καθολικές έννοιες είναι απλώς λέξεις ή *ονόματα* για να περιγράφουμε τα επιμέρους πράγματα και, αν υπάρχουν, υπάρχουν μόνο στη σκέψη.[8] Στην ουσία, ο νομιναλισμός αποτελεί αντίρροπο φιλοσοφικό σύστημα προς

[8] Η άποψη ότι οι καθολικές έννοιες υπάρχουν, αλλά είναι «φτιαγμένες» από το νου, ονομάζεται *εννοιοκρατία*.

τον πλατωνισμό και συχνά προσδιορίζεται ως ταυτόσημος με τον αντιρεαλισμό ως προς τα καθόλου. Άνθισε κατά τον $14^{ο}$ αιώνα αλλά, ιστορικά, η αντιπαράθεση μεταξύ νομιναλισμού και ρεαλισμού στη δυτική φιλοσοφία έχει τις ρίζες της στην αντιπαράθεση του Αριστοτέλη με τη θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνα.

Ο νομιναλισμός αρνείται την πραγματική ύπαρξη των καθολικών εννοιών, με το επιχείρημα ότι η χρήση μιας τέτοιας έννοιας δεν συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιας ιδιαίτερης οντότητας, χωρίς όμως και να αρνείται τη χρήση τους. Κατά τους νομιναλιστές οι μόνες οντότητες έξω από τον ανθρώπινο νου είναι φυσικές και, συνεπώς, η επιστημονική αλήθεια βρίσκεται στη μελέτη της φύσης.

Στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ο νομιναλισμός απορρίπτει ριζοσπαστικά την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία, όπως υποστηρίζει, δεν είναι τίποτα άλλο παρά γλωσσικές κατασκευές. Τα μαθηματικά σύμφωνα με τους νομιναλιστές είτε δεν υπάρχουν καθόλου ως οντότητες ή τουλάχιστον δεν είναι αφηρημένες οντότητες ανεξάρτητες από τον νου. Ουσιαστικά κατασκευάζουμε μια γλώσσα (τα μαθηματικά) για να μας βοηθήσει να διατυπώσουμε θεωρίες για τον φυσικό κόσμο.

Ο *φιξιοναλισμός*[9] αποτελεί ιδιαίτερη εκδοχή του νομιναλισμού στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Ο φιξιοναλιστής μοιράζεται με τον μαθηματικό ρεαλιστή την πεποίθηση ότι οι μαθηματικές προτάσεις έχουν δισθενείς αληθοτιμές ανεξάρτητα από τον μαθηματικό, αλλά επιμένει ότι η αλήθεια ή το ψεύδος αυτών των προτάσεων δεν απορρέει από κάποιο ανεξάρτητο κόσμο μαθηματικών αντικειμένων. Οι αληθοτιμές των μαθηματικών προτάσεων προκύπτουν κατά τετριμμένο τρόπο από τη λογική τους δομή. Έτσι η πρόταση «Υπάρχει πρώτος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 10» είναι ψευδής ενώ η πρόταση «Όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι πρώτοι» είναι αληθής (αφού δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί). Κάθε φορά που μιλούμε για αριθμούς, ή χρησιμοποιούμε κάποια μαθηματική έννοια ή θεωρία, ουσιαστικά κάνουμε μια «υπόθεση», μια «ιστορία», μιλώντας σαν να υπήρχαν τα εν λόγω μαθηματικά αντικείμενα.

Όπως θα δούμε, ο Field απορρίπτει τα επιχειρήματα από το αναπόδραστο. Υποστήριξε, αντιθέτως, πως η χρήση των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες δεν

[9] Απόδοση του όρου “fictionalism” που έχει αποδοθεί και ως «μυθοκρατία» και «μυθοπλασιοκρατία».

είναι αναπόδραστη. Για να δικαιολογήσει τον ισχυρισμό αυτό, ο Field (1980) ανάπτυξε μια νομιναλιστική εκδοχή της νευτώνειας βαρύτητας. Θεώρησε ως *φυσικές* οντότητες τα σημεία και τις περιοχές του χωροχρόνου και εισήγαγε αρκετά αξιώματα ώστε να προκύψει μια δομή ισόμορφη με το R^4. Έτσι μπόρεσε να κατασκευάσει μια νευτώνεια θεωρία βαρύτητας χωρίς να αναφερθεί καθόλου σε αριθμούς, σύνολα ή συναρτήσεις. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά είναι ένας πολύ χρήσιμος μύθος (fiction). Η μαθηματικοποιημένη φυσική δεν είναι παρά ένας *απλούστερος* τρόπος να κάνεις φυσική. Τα ίδια τα μαθηματικά δεν παίζουν ρόλο στην εξήγηση των φυσικών φαινομένων. Οποιοδήποτε φυσικό γεγονός μπορεί καταρχήν να συναχθεί από μια νομιναλιστική φυσική θεωρία. Τα μαθηματικά είναι, λοιπόν, ψευδή με την έννοια ότι αναφέρονται σε ανύπαρκτες οντότητες, παρόλο που οι φυσικές εφαρμογές τους μπορεί να είναι αληθείς.

Ωστόσο, ο φιξιοναλισμός μοιάζει να έχει πολλά προβλήματα καθώς τελικά χρειάζεται αφηρημένα μοντέλα ή αφηρημένες οντότητες (όπως, π.χ., προτάσεις) για να δουλέψει. Ειδικά, το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field για τις φυσικές θεωρίες δεν έχει προχωρήσει. Στην περίπτωση της νευτώνειας βαρύτητας πέτυχε γιατί πρόκειται για μια θεωρία *πεδίων* πάνω στον χωρόχρονο. Όπως όμως είχε επισημάνει ο Malament (1982), στη βιβλιοκρισία του *Science without numbers*, είναι πολύ δύσκολο να σκεφτεί κανείς πώς θα προχωρούσε το πρόγραμμα σε θεωρίες που δεν είναι θεωρίες πεδίων, όπως η κβαντική μηχανική, χωρίς παραβίαση νομιναλιστικών δεσμεύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ

Η διαφωνία μεταξύ νομιναλιστών και πλατωνιστών οδήγησε σε ένα τύπο επιχειρημάτων που ονομάζονται *επιχειρήματα του αναπόδραστου* (indispensability arguments). Πολύ γενικά, επιχείρημα του αναπόδραστου είναι ένα επιχείρημα που επιχειρεί να εδραιώσει την αλήθεια κάποιας πρότασης βασιζόμενο στην αναγκαιότητα της πρότασης αυτής για την αναζήτηση και επίτευξη συγκεκριμένων σκοπών.

Ο ίδιος ο Putnam, βέβαια, ξεκαθαρίζει πως δεν πιστεύει ότι υπάρχει κάτι που είναι ο σκοπός –ο *ένας* σκοπός– της επιστήμης, αλλά πως υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί στόχοι για τον κάθε επιστήμονα (Putnam [1975] 1979, σ. 355). Έτσι, μπορούν να κατασκευαστούν διαφόρων ειδών επιχειρήματα του αναπόδραστου, ανάλογα το σκοπό της επιστήμης που θεωρεί κανείς. Αν, για παράδειγμα, η *εξήγηση* ορίζεται ως σκοπός, τότε έχουμε *εξηγητικό επιχείρημα του αναπόδραστου* (explanatory indispensability argument). Αν και τα επιχειρήματα αυτά συνήθως συνδέονται με τον ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες, η συλλογιστική τους έχει πολύ μεγαλύτερη εφαρμογή και χρήση. Πολλές φορές μπορεί να ερμηνευθεί, μάλιστα, ως μια εφαρμογή της *συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση* (inference to the best explanation) – κάτι που θα αναλυθεί παρακάτω.

Ο Colyvan εξετάζει αναλυτικά το κομμάτι του επιχειρήματος που αφορά τους *σκοπούς* για τους οποίους κάποιος ισχυρισμός είναι αναγκαίος, καθώς αυτή η ιδέα είναι κάπως ασαφής. Ο ίδιος φέρνει το παράδειγμα: «Πρέπει να πιστεύουμε ότι οι λευκοί είναι ηθικώς ανώτεροι των μαύρων, γιατί αυτό είναι αναγκαίο στο να δικαιολογήσουμε τη δουλεία των μαύρων»[10] (Colyvan 2001, σ. 7). Το επιχείρημα έχει τη μορφή επιχειρήματος του αναπόδραστου, αλλά είναι απαράδεκτο διότι οι σκοποί *δεν είναι σωστοί.*

Ο Colyvan διατυπώνει τα επιχειρήματα του αναπόδραστου ως εξής: «Αν η φαινομενική αναφορά σε κάποια οντότητα (ή κλάση οντοτήτων) ξ είναι μη εξαλείψιμη στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες, τότε πρέπει να πιστεύουμε

[10] “We should believe that whites are morally superior to blacks because doing so is indispensable to the purpose of justifying black slavery.”

στην ύπαρξη της ξ»[11] (Colyvan 2001, σ. 7). Δίνει, έτσι, λύση στον παραπάνω προβληματισμό ορίζοντας ως «σωστό σκοπό» τις *καλύτερες επιστημονικές θεωρίες μας*.

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε μια επισκόπηση των κυριοτέρων εκδοχών επιχειρημάτων του αναπόδραστου που στοχεύουν στη στήριξη του μαθηματικού ρεαλισμού.

2.1 ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ ΤΩΝ QUINE-PUTNAM

Η εφαρμογή των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες είναι ευρεία. Σχεδόν κάθε επιστημονικός κλάδος χρησιμοποιεί ένα κομμάτι των μαθηματικών, «από τη χρήση των ομάδων Lie στην κβαντομηχανική μέχρι τη χρήση διαφορικής γεωμετρίας στην κοσμολογία» (Colyvan 2001, σ. 6). Τα μαθηματικά παίζουν αδιαμφισβήτητα καθοριστικό ρόλο στη φυσική, τη μηχανική, τη βιολογία, τα οικονομικά κ.λπ. Στο ρόλο τους αυτό στηρίζεται το πιο γνωστό από τα επιχειρήματα του αναπόδραστου, το *επιχείρημα των Quine-Putnam* (the Quine-Putnam indispensability argument), το οποίο στοχεύει στην εδραίωση της ύπαρξης των αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων μέσω του ρόλου των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες.

Ο Quine, συγκεκριμένα, τονίζοντας τη σημασία αφηρημένων οντοτήτων στις καλύτερες φυσικές μας θεωρίες, λέει:

> Η επιστημονική συζήτηση, ερμηνευμένη ως συνήθως, είναι τόσο ανεπανόρθωτα δεσμευμένη σε αφηρημένα αντικείμενα –έθνη, είδη, αριθμούς, συναρτήσεις, σύνολα– όσο σε μήλα και άλλα σώματα. Όλα αυτά τα πράγματα εμφανίζονται ως τιμές των μεταβλητών στο συνολικό μας σύστημα του κόσμου. Οι αριθμοί και οι συναρτήσεις συνεισφέρουν στη φυσική θεωρία, τόσο γνήσια όσο και τα υποθετικά σωματίδια.[12] (Quine 1981, σ.149-150).

Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 347), ακολουθώντας τη γραμμή του Quine, γράφει:

> Η ποσόδειξη μαθηματικών οντοτήτων είναι αναπόσπαστη για την επιστήμη, τόσο την τυπική όσο και τη φυσική. Άρα πρέπει να δεχτούμε αυτού του είδους την ποσόδειξη. Αυτό, όμως, μας δεσμεύει να αποδεχθούμε την

---

[11] "If apparent reference to some entity (or class of entities) ξ is indispensable to our best scientific theories then we ought to believe in the existence of ξ."

[12] "Ordinary interpreted scientific discourse is as irredeemably committed to abstract objects- to nations, species, numbers, functions, sets- as it is to apples and other bodies. All these things figure as values of the variables in our overall system of the world. The numbers and functions contribute just as genuinely to physical theory as do hypothetical particles."

> ύπαρξη των εν λόγω μαθηματικών οντοτήτων. Αυτό το επιχείρημα, βέβαια, πηγάζει από τον Quine, ο οποίος έχει ήδη τονίσει για χρόνια τόσο το αναπόδραστο της ποσόδειξης πάνω σε μαθηματικές οντότητες, όσο και την πνευματική ανειλικρίνεια του να αρνείται κανείς την ύπαρξη αυτού που προϋποθέτει καθημερινά.[13]

Η μη εξαλειψιμότητα των μαθηματικών στην επιστήμη είναι το κρίσιμο σημείο πάνω στο οποίο στηρίζονται οι Quine και Putnam. Η επιστήμη λοιπόν -ή οποιοιδήποτε είναι οι στόχοι της- είναι η «αιτία» για την οποία οι μαθηματικές οντότητες είναι μη εξαλείψιμες. Ο Colyvan (2001, σ. 11) επαναδιατυπώνει το επιχείρημα των Quine-Putnam ως εξής:

> (Π1) Πρέπει να έχουμε οντολογική δέσμευση σε όλες, και μόνο σε εκείνες, τις οντότητες που είναι μη εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες.
>
> (Π2) Οι μαθηματικές οντότητες είναι μη εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες.
>
> ---
>
> (Σ) Πρέπει να έχουμε οντολογική δέσμευση στις μαθηματικές οντότητες.[14]

Και αυτή είναι η διατύπωση του επιχειρήματος στην οποία θα αναφέρομαι. Μια πιο αναλυτική επαναδιατύπωση του επιχειρήματος των Quine-Putnam έχει προσφέρει η Leng (2005, σ.175), κάνοντας χρήση 3 προκειμένων:

> (Π1) Το να υποθέτουμε μαθηματικά αντικείμενα είναι μη εξαλείψιμο από τη διατύπωση των καλύτερων επιστημονικών μας θεωριών. (Αναπόδραστο)
>
> (Π2) Πρέπει να κοιτάμε στην επιστήμη για το τι υπάρχει. (Οντολογικός Νατουραλισμός).

---

[13] "Quantification over mathematical entities is indispensable for science, both formal and physical; therefore we should accept such quantification; but this commits us to accepting the existence of the mathematical entities in question. This type of argument stems, of course, from Quine, who has for years stressed both the indispensability of quantification over mathematical entities and the intellectual dishonesty of denying the existence of what one daily presupposes."

[14] "a. We ought to have ontological commitment to all and only those entities that are indispensable to our best scientific theories; b. Mathematical entities are indispensable to our best scientific theories. Therefore: c. We ought to have ontological commitment to mathematical entities."

(Π3) Η επικύρωση που λαμβάνουν οι επιστημονικές μας θεωρίες επεκτείνεται σε όλες τις υποθέσεις της, μαθηματικές και φυσικές, εξίσου. (Επικυρωτικός Ολισμός)

(Σ) Πρέπει να πιστεύουμε στην ύπαρξη αυτών των μαθηματικών αντικειμένουν που απαιτούνται από τις επιστημονικές μας θεωρίες.[15]

Το επιχείρημα αυτό είναι έγκυρο και θεωρείται από πολλούς το δυνατότερο επιχείρημα υπέρ του μαθηματικού ρεαλισμού (πλατωνισμού). Στηρίζεται κυρίως στον εμπειρισμό, το νατουραλισμό και τον ολισμό.

Ο νατουραλισμός υποστηρίζει πως πρέπει να συμβουλευθούμε τις καλύτερες επιστημονικές θεωρίες μας για να αποφασίσουμε τι υπάρχει ή τι πρέπει να θεωρούμε πως υπάρχει. Μας δίνει λόγο να πιστεύουμε στις οντότητες που αναφέρονται μέσα στις καλύτερες θεωρίες μας και *μόνο* σε αυτές. Μόνο μέσα από τον νατουραλισμό είναι δυνατόν να φτάσουμε στο επιχείρημα του αναπόδραστου, διότι μόνο μέσα από τον νατουραλισμό οδηγούμαστε στην οντολογική δέσμευση των μαθηματικών ως αναπόσπαστο κομμάτι των καλύτερων επιστημονικών μας θεωριών.

Το αν πρέπει να πιστεύουμε σε *όλες* τις οντότητες που αναφέρονται μέσα στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες, τώρα, εξαρτάται από την εκδοχή του νατουραλισμού που υποστηρίζει κανείς. Αν ο νατουραλισμός μας δίνει το «*μόνο σε εκείνες*», το «*σε όλες*» το παίρνουμε από τον *επικυρωτικό ολισμό* (comfirmational holism). Στην επιχειρηματολογία του Quine εντοπίζονται δύο ολιστικά θέματα, τα οποία θα αναλυθούν στην επόμενη ενότητα. Ο Colyvan, ωστόσο, πιστεύει πως «το επιχείρημα στέκει και χωρίς τον επικυρωτικό ολισμό: απλώς είναι πιο ασφαλές μέσα τον ολισμό».[16] Ο Baker, επίσης, επαναδιατυπώνει το επιχείρημα έτσι ώστε να μη βασίζεται στον ολισμό – προσέγγιση που θα αναπτύξω επίσης σε επόμενη ενότητα.

Οι Quine και Putnam υποστηρίζουν πως τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστα από τις *εμπειρικές* επιστήμες. Έτσι, μέσα από την αποδοχή πως οι επιστημονικές θεωρίες εξηγούν τον φυσικό κόσμο και επειδή τα μαθηματικά είναι αναπόσπαστο κομμάτι αυτών, μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη των μαθηματικών

[15] “a. Positing mathematical objects is indispensable in formulating our best scientific theories; b. We should look to science to tell us what there is; c. The confirmation our scientific theories receive extends to all their posits, mathematical and physical, equally. Therefore: d. We ought to believe in the existence of those mathematical objects posited by our scientific theories.”

[16] “As a matter of fact, I think that the argument can be made to stand without confirmational holism: It’s just that it is more secure within holism.”

οντοτήτων. Σύμφωνα με τη συνολική φιλοσοφία των Quine και Putnam, αυτό είναι ένα εύλογο επιχείρημα που παρεκκλίνει όμως από τον κλασικό πλατωνισμό. Κι αυτό διότι τεκμηριώνει την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων *μέσα* από τον εμπειρικό κόσμο. Ο Putnam απέρριψε έντονα τον όρο «πλατωνιστής» που συνεπάγεται αναγνώριση μιας ειδικής οντότητας που δεν είναι απαραίτητη για τη μαθηματική πράξη με κάποια πραγματική έννοια. Υποστήριξε μια μορφή «καθαρού ρεαλισμού», η οποία απέρριπτε τις μυστικιστικές (υπερβατικές) έννοιες της αλήθειας και αποδεχόταν τον εμπειρισμό στα μαθηματικά. Για τον Putnam ([1975] 1979, σ. 356-357) καμία από τις προσεγγίσεις δεν είναι «περισσότερο αληθής» από άλλη: «Το βασίλειο των μαθηματικών γεγονότων επιδέχεται πολλές ισοδύναμες περιγραφές».[17]

Η ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων είναι η *καλύτερη* εξήγηση της εμπειρίας. Αυτή η θέση κάνει τα μαθηματικά να μην ξεχωρίζουν από τις υπόλοιπες επιστήμες. Δεδομένου ότι η φυσική πρέπει να μιλάει για ηλεκτρόνια προκειμένου να πει γιατί οι λαμπτήρες συμπεριφέρονται με έναν ορισμένο τρόπο, τα ηλεκτρόνια πρέπει να υφίστανται. Και δεδομένου ότι η φυσική πρέπει να μιλήσει για αριθμούς προκειμένου να προσφέρει οποιαδήποτε από τις εξηγήσεις της, οι αριθμοί πρέπει να υφίστανται.

Το επιχείρημα, λοιπόν, υποστηρίζει πως πρέπει *λογικά* να πιστεύουμε στην ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων, γιατί πρέπει να πιστεύουμε στην αλήθεια των καλύτερων διαθέσιμων επιστημονικών θεωριών και, για αυτές, η ποσόδειξη πάνω σε μαθηματικά αντικείμενα είναι *αναγκαία*. Αλλά τι σημαίνει «καλή επιστημονική θεωρία»; Εδώ μπορεί να επικαλεστεί κανείς διάφορες αρετές: εμπειρική επάρκεια, γονιμότητα, συνέπεια, εξηγητική ικανότητα, κ.ά. Βέβαια, το επιχείρημα στέκει αν μιλούμε απλώς για *αληθείς* φυσικές θεωρίες. Για την ύπαρξη των πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα, το επιχείρημα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

> (Π1) Η πραγματική ανάλυση αναφέρεται σε, και περιλαμβάνει μεταβλητές που λαμβάνουν ως τιμές, αφηρημένες οντότητες που λέγονται «πραγματικοί αριθμοί». Και αποδοχή της αλήθειας των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης δεσμεύει στην αποδοχή της ύπαρξης αυτών των οντοτήτων.

---

[17] "[…] the realm of mathematical facts admits of many equivalent descriptions."

(Π2) Η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική: η σύγχρονη φυσική δεν μπορεί να διατυπωθεί ή να αναπτυχθεί χωρίς προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης.

(Π3) Αν η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική, τότε όποιος αποδέχεται ότι η φυσική συγκροτεί αληθή περιγραφή της υλικής πραγματικότητας πρέπει να αποδεχθεί την αλήθεια των προτάσεων της πραγματικής ανάλυσης.

(Π4) Η φυσική είναι (κατά προσέγγιση) αληθής.

(Σ) Οι πραγματικοί αριθμοί υπάρχουν.

Σε αυτή την εκδοχή το επιχείρημα αναδεικνύει με σαφήνεια πώς από τον επιστημονικό ρεαλισμό περνάει κανείς στον μαθηματικό ρεαλισμό.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτουν διάφορα ζητήματα. Πρώτο, *πόσο* μη εξαλείψιμα από τις καλύτερες επιστημονικές θεωρίες είναι τα μαθηματικά; Πόσο οντολογικά δεσμευμένοι σε αυτά είμαστε; Δεύτερο, πώς μπορούμε να κατανοήσουμε τον ισχυρισμό ότι τα μαθηματικά είναι μη εξαλείψιμα; Τρίτο, ποιος είναι ο επιστημονικός σκοπός για τον οποίο τα μαθηματικά υποτίθεται πως είναι αναπόσπαστα από τις επιστήμες; Τέλος, η προκείμενη περί δέσμευσης σε *όλες*, και *μόνο* σε εκείνες, τις οντότητες, που είναι μη εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές θεωρίες χρήζει περαιτέρω διερεύνησης. Θα θίξουμε αυτά τα ζητήματα ξεκινώντας από το τελευταίο.

2.2 ΟΛΙΣΜΟΣ

Γενικά, ο όρος «ολισμός» αποδίδεται σε κάθε μεταφυσική, γνωσιολογική ή μεθοδολογική θέση που υπαγορεύει ότι το όλον είναι κάτι παραπάνω από τη συλλογή των μερών του. Το είδος του ολισμού που μας ενδιαφέρει εστιάζει στην ιδέα πως μια θεωρία σε μια επιστήμη (φυσική, βιολογία, χημεία, κοινωνιολογία, οικονομικά, κ.λπ.) πρέπει να θεωρείται ως *ένα* με τα μέρη της, δηλαδή πρέπει να αντιμετωπίζεται ως *όλον*. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται στο επιχείρημα του αναπόδραστου: η πίστη στην ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων δικαιολογείται από τα ίδια τα τεκμήρια που επικυρώνουν τη θεωρία ως όλον.

Στη φιλοσοφία του Quine, του κύριου υποστηρικτή του ολισμού σε αυτό το πλαίσιο, συναντάμε τουλάχιστον δύο διαφορετικές ολιστικές θέσεις. Η πρώτη είναι ο *σημασιολογικός ολισμός* (semantic holism), κατά Colyvan (2001, σ. 33), ή *μετριοπαθής / σχετικός ολισμός* (moderate / relative holism), κατά Quine (1981, σ. 71). Αυτός υποστηρίζει πως η ενότητα του νοήματος είναι στο σύνολο της γλώσσας και θεωρείται λιγότερο αμφισβητήσιμος εν γένει. Ο σημασιολογικός ολισμός έχει άμεση σχέση με την *απόρριψη της διάκρισης αναλυτικού / συνθετικού* από τον Quine (1951), αλλά και με τη θέση του περί *απροσδιοριστίας της μετάφρασης* (Quine [1960] 2013).

Ο Quine διέκρινε δύο μεγάλα δόγματα στον μοντέρνο εμπειρισμό. Το ένα είναι η πεποίθηση πως υπάρχει ένα θεμελιώδες χάσμα μεταξύ των αληθειών που είναι αναλυτικές (στηριγμένες σε σημασίες ανεξάρτητα από τα γεγονότα) και αληθειών που είναι συνθετικές (βασισμένες στα γεγονότα). Το άλλο δόγμα είναι ο *αναγωγισμός* (reductionism): η πεποίθηση πως κάθε πρόταση με νόημα είναι ισοδύναμη με κάποιο λογικό κατασκεύασμα από όρους που αναφέρονται στην άμεση εμπειρία. Κατά τον Quine και τα δύο αυτά δόγματα δεν στέκουν. Ο ίδιος γράφει: «Και τα δύο δόγματα είναι αβάσιμα. Μια επίδραση της εγκατάλειψής τους είναι η θόλωση του υποτιθέμενου ορίου μεταξύ της θεωρησιακής μεταφυσικής και της φυσικής επιστήμης. Ένα άλλο αποτέλεσμα είναι η στροφή προς τον πραγματισμό»[18] (Quine 1951, σ. 20).

Η άλλη ολιστική θέση του Quine είναι ο *επικυρωτικός ολισμός* (confirmational holism) που απορρέει από τη *θέση Duhem-Quine* (Duhem-Quine thesis). Η θέση Duhem-Quine είναι αληθής: καμία επιστημονική υπόθεση δεν μπορεί να υποβληθεί μόνη της σε εμπειρικό έλεγχο – πάντα απαιτούνται βοηθητικές υποθέσεις. Αλλά, κατά τον επικυρωτικό ολισμό, κάθε θεωρία επικυρώνεται ή αντικρούεται από την εμπειρία ως όλον – δεν υπάρχει τρόπος να απονείμει κανείς έπαινο ή ψόγο στις επιμέρους συνιστώσες της θεωρίας. Έτσι, σε περίπτωση αρνητικής εμπειρίας, η προτεινόμενη θεωρία μπορεί εν γένει να απορριφθεί μαζί με ό,τι «υλικά» χρησιμοποιεί· μπορεί να απορριφθεί, δηλαδή, οποιοδήποτε μέρος της θεωρίας ως αναπόσπαστο κομμάτι του όλου, καθώς ο ακριβής ρόλος του ή η θέση του μέσα στη θεωρία δεν έχει ιδιαίτερη σημασία.

[18] "Both dogmas are ill-founded. One effect of abandoning them is a blurring of the supposed boundary between speculative metaphysics and natural science. Another effect is a shift toward pragmatism."

Ο Colyvan (2001, σ. 34) παρατηρεί πως ο ίδιος ο Quine δίνει διάφορες διατυπώσεις της θέσης αυτής. Πράγματι διαβάζουμε:

> Το ψεύδος της ρητής παρατηρησιακής πρόβλεψης δεν διαψεύδει την υπόθεση. Αυτό που διαψεύδει είναι τη σύζευξη των προτάσεων που χρειάστηκαν για να συναχθεί η ρητή παρατηρησιακή πρόβλεψη. Για να ανακληθεί αυτή η σύζευξη, δεν χρειάζεται να ανακληθεί η εν λόγω υπόθεση· μπορούμε να ανακαλέσουμε αντί αυτής κάποια άλλη πρόταση της σύζευξης. Αυτή είναι η σημαντική ενόραση που ονομάζεται ολισμός.[19] (Quine [1990] 1992, σ. 13-14)

Εδώ ο Quine τονίζει τις μη επικυρωτικές (disconfirmational) πτυχές του ολισμού: όταν η θεωρία συγκρούεται με την παρατήρηση, μπορούν να γίνουν οποιεσδήποτε τροποποιήσεις στη θεωρία για να λυθεί η διαμάχη. Ακόμη:

> Το δόγμα του αναγωγισμού επιβιώνει στην υπόθεση ότι κάθε πρόταση, απομονωμένη από τις συνοδούς της, επιδέχεται επικύρωση ή αντίκρουση. Η αντιπρότασή μου είναι πως οι προτάσεις μας για τον εξωτερικό κόσμο έρχονται αντιμέτωπες με το δικαστήριο της αισθητηριακής εμπειρίας, όχι ατομικά, αλλά ως ενιαίο σώμα.[20] (Quine 1951, σ. 51)
>
> Όπως υποστήριξε ο Pierre Duhem το σύστημα ως σύνολο εισάγεται στην εμπειρία. Διδάσκεται μέσω της εκμετάλλευσης των ετερογενών και σποραδικών συνδέσμων του με την εμπειρία, και στέκεται ή καταρρέει, διατηρείται ή τροποποιείται, σύμφωνα με το αν συνεχίζει να μας εξυπηρετεί καλά ή άσχημα μπροστά στη συνεχιζόμενη εμπειρία.[21] (Quine 1953, σ. 199)

Στα δυο αυτά παραθέματα, ο Quine επισημαίνει τον ολιστικό χαρακτήρα της επικύρωσης: είναι αδύνατο να ελέγξεις μια επιστημονική υπόθεση, απομονώνοντάς την, γιατί οποιοσδήποτε εμπειρικός έλεγχος απαιτεί να υποθέσεις την αλήθεια μιας ή περισσότερων υποθέσεων. Το σώμα της θεωρίας ελέγχεται ως σύνολο, όχι ως απομονωμένες υποθέσεις. Έτσι, τα εμπειρικά δεδομένα δεν πρέπει να διαχωριστούν από τα θεωρητικά δεδομένα (αν φυσικά αυτό είναι δυνατόν): και τα δυο απορρίπτονται ή γίνονται αποδεκτά μαζί, διότι η θεωρία θεωρείται ως *ένα*. Συνεπώς,

---

[19] "The falsity of the observation categorical does not conclusively refute the hypothesis. What it refutes is the conjunction of sentences that was needed to imply the observation categorical. In order to retract that conjunction we don't have to retract the hypothesis in question; we could retract some other sentence of the conjunction instead. This is the important insight called holism."

[20] "The dogma of reductionism survives in the supposition that each statement, taken in isolation from its fellows, can admit of confirmation or infirmation at all. My counter suggestion is that our statements about the external world face the tribunal of sense experience not individually but only as a corporate body."

[21] "As Pierre Duhem urged, it is the system as a whole that is keyed to experience. It is taught by exploitation of its heterogeneous and sporadic links with experience, and it stands or falls, is retained or modified, according as it continues to serve us well or ill in the face of continuing experience."

οποιοδήποτε τεκμήριο έχουμε για τις επιστημονικές θεωρίες, έχουμε και για τις μαθηματικές οντότητες τις οποίες αυτές προϋποθέτουν.

Η θέση του επικυρωτικού ολισμού είναι ιδιαιτέρως αμφιλεγόμενη, με πολλούς φιλοσόφους να εγείρουν σημαντικά ερωτήματα εναντίον του. Η Penelope Maddy εκφράζει κάποιους πολύ σοβαρούς προβληματισμούς, τους οποίους θα αναλύσω στο τρίτο κεφάλαιο μαζί με τις περαιτέρω ενστάσεις της απέναντι στο επιχείρημα. Ο Mark Balaguer (2009, σ. 55-56) λέει:

> Η επικύρωση μπορεί να είναι ολιστική ως προς τα νομιναλιστικά κομμάτια των εμπειρικών θεωριών μας (στην πραγματικότητα, ακόμη και αυτό το αμφισβητώ), αλλά τα μαθηματικά κομμάτια των εμπειρικών θεωριών μας δεν επικυρώνονται από τα εμπειρικά ευρήματα. Για την ακρίβεια, τα εμπειρικά ευρήματα δεν προσφέρουν κανένα λόγο για να υποθέσουμε ότι τα μαθηματικά κομμάτια των εμπειρικών θεωριών μας είναι αληθή.[22]

Ένα άλλο κρίσιμο σημείο είναι με πόσους τρόπους μπορεί να τροποποιηθεί μια θεωρία όταν έρχεται αντιμέτωπη με ασύμβατα, με αυτήν, δεδομένα, αλλά και *πόση* θεωρία επικαλούμαστε.

Ο Colyvan (2001) τονίζει πως η επικύρωση ή μη δεν αφορά μία υπόθεση μόνο, αλλά ένα σώμα υποθέσεων. Έτσι υποστηρίζει πως για να απορρίψει κανείς τον επικυρωτικό ολισμό θα πρέπει στην καλύτερη περίπτωση να διαχωρίσει το μαθηματικό λεξιλόγιο από το εμπειρικό σε όλες τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες. Ακόμη, δηλαδή, και αν απορρίψει κανείς τον σημασιολογικό ολισμό, ισχυριζόμενος ότι η λογικο-μαθηματική γλώσσα είναι διαφορετικού είδους από την εμπειρική γλώσσα, αυτό δεν είναι αρκετό για να απορρίψει και τον επικυρωτικό ολισμό. Και φυσικά το ερώτημα που εγείρεται, τελικά, είναι: «Μπορεί κανείς να αποδέχεται τον επικυρωτικό ολισμό όπως διατυπώνεται, αλλά να απορρίπτει τον ισχυρισμό ότι οι μαθηματικές προτάσεις είναι ένα με το υπόλοιπο της επιστήμης;»[23] (Colyvan 2001, σ. 36).

Ο ολισμός, λοιπόν, είναι ένα επίμαχο σημείο του επιχειρήματος στο οποίο πολλοί φιλόσοφοι (όπως θα δούμε και στο τρίτο κεφάλαιο) έχουν επιτεθεί. Κάποιοι

[22] "Confirmation may be holistic with respect to the nominalistic parts of our empirical theories (actually, I doubt even this), but the mathematical parts of our empirical theories are not confirmed by empirical findings. Indeed, empirical findings provide no reason whatsoever for supposing that the mathematical parts of our empirical theories are true."

[23] "Might one accept conformational holism as stated, but reject the claim that mathematical propositions are one with the rest of science?"

αναφέρουν πως με την προσκόλληση στις θεωρίες ως ενιαία σύνολα αγνοοούμε την ποικίλη φύση των μαθηματικών. Τα μαθηματικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις εμπειρικές επιστήμες ως μια απλή υπολογιστική μηχανή ή ως μια περιγραφική συντομογραφία (Balaguer 2009, σ. 86). Μάλιστα, θα δούμε παρακάτω πως ο Baker θέλοντας να αποφύγει την εξάρτηση του επιχειρήματος από τον ολισμό, επαναδιατύπωσε το επιχείρημα απαλλαγμένο από τις ολιστικές του πτυχές.

2.3 ΤΟ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟ

Ας εξετάσουμε, τώρα, την έννοια του αναπόδραστου. Αρχικά, το αναπόδραστο δεν αποτελεί απλώς το αντίθετο του εξαλείψιμου καθώς, σύμφωνα με το θεώρημα του Craig, κάθε οντότητα θα ήταν εξαλείψιμη.[24] Αποτελεί το αντίθετο του εξαλείψιμου που είναι τέτοιο ώστε το αποτέλεσμα της εξάλειψής του να είναι μια «κακή» θεωρία – τουλάχιστον, «χειρότερη» εκείνης πριν την εξάλειψη. Πολλοί φιλόσοφοι, ακόμη και αυτοί που απορρίπτουν τελικά το επιχείρημα από το αναπόδραστο, πιστεύουν στο αναπόδραστο των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες – τέτοια είναι η περίπτωση της Leng όπως θα δούμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Το θέμα τώρα είναι να προσδιοριστεί ο βαθμός στον οποίο τα μαθηματικά είναι μη εξαλείψιμα από τις επιστήμες. Και αυτό γιατί το επιχείρημα του αναπόδραστου δικαιολογεί την πίστη σε τόσα μαθηματικά όσα χρειαζόμαστε για τις ανάγκες της επιστήμης. Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 346), για παράδειγμα, αναφέρει ότι οι ανάγκες της φυσικής από τη θεωρία συνόλων είναι παρόμοιες με εκείνες της καθαρής λογικής, ενώ ο Quine (1986, σ. 400) δηλώνει πως τα υψηλότερα επίπεδα της θεωρίας συνόλων δεν είναι παρά «μαθηματική ψυχαγωγία», χωρίς οντολογικά δικαιώματα, αφού δεν έχουν φυσικές εφαρμογές. Άλλοι πάλι είναι ακόμη πιο διαλλακτικοί και θεωρούν πως και αυτά έχουν οντολογικά δικαιώματα, εφόσον εφαρμόζονται σε άλλες περιοχές των μαθηματικών.

Μολονότι η χρήση και η χρησιμότητα των μαθηματικών στις επιστήμες είναι αδιαμφισβήτητη, το αν είναι μη εξαλείψιμα από αυτές δεν είναι τόσο εύκολο να

[24] Πολύ γενικά το θεώρημα του Craig έχει ως εξής (βλ. και Field 1980, σ. 8). Ως προς τη διαμέριση του λεξιλογίου μιας αξιωματικοποιήσιμης πρωτοβάθμιας θεωρίας *T* σε δυο κλάσεις, *t* και *o* (ας πούμε, θεωρητικό και παρατηρησιακό λεξιλόγιο), υπάρχει μια αξιωματικοποιήσιμη θεωρία *T**, στη γλώσσα της οποίας τα μοναδικά μη λογικά σύμβολα ανήκουν στην *o*, όλων και μόνο εκείνων των συνεπειών της *T* που είναι εκφράσιμες στην *o*. Έτσι υποτίθεται ότι μια θεωρία μπορεί να επαναξιωματικοποιηθεί ώστε να αποφύγει κάθε αναφορά σε «θεωρητικές οντότητες», χωρίς απώλεια σε παρατηρησιακές συνέπειες.

συναχθεί. Οι επιστήμες φαίνεται να μην μπορούν να διατυπώσουν θεωρίες και να συνάγουν συμπεράσματα χωρίς να ανατρέχουν στα μαθηματικά. Είναι όμως αυτός ο *μόνος* τρόπος ή απλώς *ένας* από αυτούς; Όπως ήδη είδαμε, αλλά και θα ξαναδούμε στο τρίτο κεφάλαιο, ο Hartry Field έχει προτείνει εναλλακτικές για να δείξει ότι η πραγματική ανάλυση είναι εξαλείψιμη από τη σύγχρονη φυσική.

2.4 ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΚΑΛΥΤΕΡΗ ΕΞΗΓΗΣΗ

Η *συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση* (inference to the best explanation) είναι είδος επαγωγικής μεθόδου που συγγενεύει με, αλλά δεν αντιστοιχεί απόλυτα στην, *απαγωγή* στο τρίπτυχο του Charles Sanders Peirce: παραγωγή, επαγωγή, απαγωγή (deduction, induction, abduction). Η μέθοδος προκρίνει την επιλογή μιας από ένα σύνολο εναλλακτικών υποθέσεων στη βάση του ότι προσφέρει την καλύτερη εξήγηση των εμπειρικών τεκμηρίων. Η απαγωγή του Peirce, από την άλλη, είναι ένας τρόπος δημιουργικής εικασίας υποθέσεων που μπορεί να μην μπορεί να θεωρηθεί ως κάποιο είδος συναγωγής.

Τόσο στην επιστήμη όσο και στην καθημερινή ζωή συμπεραίνουμε εξηγήσεις – δηλαδή, υποθέσεις που μπορούν να εξηγούν διάφορα φαινόμενα. Το κλασικό παράδειγμα είναι πώς εξηγούμε το νωπό γρασίδι. Αν το γρασίδι είναι υγρό, τότε πιθανώς έβρεξε. Η βροχή είναι η καλύτερη εξήγηση του υγρού γρασιδιού, ειδικά στη Νέα Αγγλία του Peirce. Δεν είναι όμως η καλύτερη εξήγηση και, π.χ., στην Αριζόνα στο απόγειο μιας περιόδου ξηρασίας· τα αυτόματα ποτιστικά ίσως να ήταν η καλύτερη εξήγηση εκεί και τότε (ειδικά αν, επιπλέον, ο δρόμος δεν είναι βρεγμένος). Βέβαια, η εισαγωγή μιας εξηγητικής υπόθεσης γεννά προβλέψεις που μπορούν να ελεγχθούν από περαιτέρω παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, η υπόθεση του αυτόματου ποτιστικού ακολουθείται από τον έλεγχο του δρόμου (αν είναι κι αυτός βρεγμένος ή όχι). Η παρατήρηση του δρόμου, τελικά, προσφέρει εμπειρική επικύρωση της υπόθεσης του αυτόματου ποτιστικού σε σχέση με την υπόθεση της βροχής.

Έτσι, από το γεγονός ότι *μια συγκεκριμένη υπόθεση θα εξηγούσε το παρατηρήσιμο δεδομένο καλύτερα από οποιαδήποτε άλλη* συμπεραίνουμε ότι *η υπόθεση αυτή είναι αληθής*. Γενικά, περισσότερες της μιας υποθέσεις μπορεί να το εξηγούν, οπότε πρέπει κανείς να απορρίψει τις εναλλακτικές υποθέσεις για να φτάσει στο συμπέρασμα.

Στο φιλοσοφικό πλαίσιο που μας ενδιαφέρει, ο Field δέχεται πως αν ο ρεαλιστής μπορεί να δείξει ότι οι μαθηματικές υποθέσεις (προτάσεις) είναι μη εξαλείψιμες στις εξηγήσεις των φυσικών φαινομένων, πρέπει να πιστέψουμε στην ύπαρξή των μαθηματικών οντοτήτων που αυτές προϋποθέτουν λόγω συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση. Έστω ότι έχουμε μια εξηγούσα πεποίθηση S για ένα φυσικό φαινόμενο (εξηγητέο), χωρίς την οποία έχουμε λόγους να υποθέτουμε πως δεν μπορούμε να έχουμε καμία εξήγηση του εν λόγω φαινομένου. Τότε:

> Αν μια πεποίθηση S παίζει μη εξαλείψιμο ρόλο στις εξηγήσεις των παρατηρήσεών μας, τότε, εφόσον όλα τα άλλα παραμένουν ίδια, πρέπει να την πιστέψουμε, ανεξάρτητα από το αν η πεποίθηση αυτή είναι η ίδια παρατηρησιακή ή αν οι οντότητες τις οποίες αφορά είναι παρατηρήσιμες.[25]
> (Field 1989, σ. 15)

Ο Field, άρα, συμπεραίνει πως δεν υπάρχει καταρχήν κανενός είδους διάκριση μεταξύ παρατηρήσιμων και μη παρατηρήσιμων οντοτήτων. Αν ένα φυσικό φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί καλύτερα μέσω μιας σειράς υποθέσεων (εξηγούντα), μεταξύ των οποίων έχουμε ένα μαθηματικό ισχυρισμό S, ο οποίος αποδεικνύεται μη εξαλείψιμος, τότε η συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση μας αναγκάζει να πιστέψουμε τη μαθηματική πρόταση S ως αληθή και τις μαθηματικές της οντότητες υπαρκτές. Για τον Field, όμως, αυτή η στρατηγική τελικά αποτυγχάνει.

Κάποιοι αποδέχονται τη συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση για τις σαφείς θεωρητικές υποθέσεις στις επιστήμες, την απορρίπτουν όμως στην περίπτωση των μαθηματικών. Ο Saatsi (2007, σ. 28) γράφει:

> Η μαθηματική μέθοδος είναι παραγωγική και δεν μπορεί να γίνει ένα με την εξηγητική επαγωγική μέθοδο που, όπως θα μπορούσε κανείς να επιχειρηματολογήσει, κυριαρχεί στις επιστημονικές συναγωγές. Καμία μαθηματική οντότητα δεν έχει εισαχθεί ποτέ ως *η καλύτερη εξήγηση* κάποιων (μαθηματικών ή φυσικών) φαινομένων. Καμία απαγωγική συναγωγή δεν έχει φέρει ποτέ νέα μαθηματικά γεγονότα στην προσοχή μας.

[25] "If a belief [S] plays an ineliminable role in explanations of our observations, then, other things being equal, we should believe it, regardless of whether that belief is itself observational, and regardless of whether the entities it is about are observable."

> Η μαθηματική γνώση ανήκει μόνο στο ευρύ συμπερασματικό υπόβαθρο και είναι έτσι εκτός των δικαιολογητικών ελιγμών του ρεαλιστή.[26]

Και πράγματι τέτοια φαίνεται να είναι η πρακτική των καθαρών μαθηματικών.

2.5 ΜΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΕΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΟΝΤΟΤΗΤΕΣ

Το επιχείρημα του αναπόδραστου φέρνει σε δύσκολη θέση τους νομιναλιστές που είναι ρεαλιστές σχετικά με τις θεωρητικές οντότητες της επιστήμης (ηλεκτρόνια, quarks, μαύρες τρύπες, κ.λπ.), αφού ουσιαστικά επικαλούνται κάτι παρόμοιο της λογικής αυτού του επιχειρήματος για να δικαιολογήσουν το ρεαλισμό για αυτές τις οντότητες. Τα θεωρητικά οφέλη που προκύπτουν από την υπόθεση μαθηματικών αντικειμένων είναι παρόμοια με αυτά που προκύπτουν από την υπόθεση μη παρατηρήσιμων φυσικών αντικειμένων. Αν και δεν υπάρχει άμεση εμπειρική «απόδειξη» για κανένα από τα δύο είδη, είναι εμφανές πως η αποδοχή τους έχει ως αποτέλεσμα μια καλύτερη επιστημονική θεωρία. Αν είναι εύλογο να αποδεχόμαστε μη παρατηρήσιμα φυσικά αντικείμενα στην οντολογία μας για *τέτοιους* λόγους, είναι εξίσου λογικό να δεχόμαστε και αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα.

Κοιτώντας την επιστημονική πρακτική, βλέπουμε πως η υπόθεση τέτοιων μη παρατηρήσιμων αντικειμένων δικαιολογείται με επίκληση και αισθητικών παραγόντων όπως η απλότητα, η οικονομία και η κομψότητα. Το επιχείρημα πως όσο πιο ελκυστική είναι η θεωρία, τόσο πιο δικαιολογημένα θα την προτιμήσουμε από τις εναλλακτικές, είναι ένα επιχείρημα αποδεκτό από την πλειοψηφία των φιλοσόφων. Ο Joseph Melia (2000, σ. 473) παραδέχεται:

> Αν μας δοθεί η επιλογή μεταξύ δύο θεωριών, οι οποίες είναι και οι δύο συμβατές με τα υπάρχοντα εμπειρικά τεκμήρια, πρέπει να ζυγίσουμε την απλότητα, την εξηγητική ισχύ, τις *a priori* πιθανότητες, την οικονομία, την κομψότητα, κ.λπ., των δύο θεωριών και να πιστέψουμε αυτή που θα συγκεντρώσει την υψηλότερη βαθμολογία συνολικά.[27]

---

[26] “Mathematical method is deductive and cannot be assimilated with the explanation-driven inductive method that arguably rules scientific inferences. No mathematical entity has ever been introduced as the best explanation of some (mathematical or physical) phenomena. No abductive inference has ever brought new mathematical facts to our attention. Mathematical knowledge . . . belongs only to the broad inferential background and is hence outside of the realist’s justificatory gambit.”

[27] “Given a choice between two theories, both of which are compatible with the existing empirical evidence, we should measure the two theories’ simplicity, their explanatory powers, their a priori probabilities, their economy and elegance etc., and place our belief in the theory that scores the most highly overall.”

Αυτοί, λοιπόν, που αποδέχονται την ύπαρξη των μη παρατηρήσιμων φυσικών αντικειμένων γιατί μέσω αυτής βελτιστοποιούνται οι επιστημονικές θεωρίες –και δέχονται, επομένως, κάποια εκδοχή ρεαλισμού για τα αντικείμενα αυτά– οφείλουν να αποδεχθούν ομοίως τα μαθηματικά αντικείμενα.

Ο Quine τονίζει πως οι φιλόσοφοι που δεν το αναγνωρίζουν αυτό έχουν δύο μέτρα και δύο σταθμά. Συγκεκριμένα, με παράδειγμα τον Carnap, γράφει:

> Σκεφθείτε το ερώτημα αν θα θεωρήσουμε τις κλάσεις ως οντότητες. Το ερώτημα είναι αν θα χρησιμοποιήσουμε ποσόδειξη για μεταβλητές που παίρνουν κλάσεις ως τιμές. Τώρα ο Carnap έχει υποστηρίξει ότι αυτό δεν ζήτημα που αφορά γεγονότα, αλλά ζήτημα επιλογής μιας βολικής γλωσσικής φόρμας, ενός βολικού εννοιολογικού σχήματος για την επιστήμη. Με αυτό συμφωνώ, αλλά μόνο υπό την προϋπόθεση ότι αυτό θα παραχωρηθεί γενικά στις επιστημονικές υποθέσεις. Ο Carnap έχει αναγνωρίσει πως είναι ικανός να διατηρήσει δυο μέτρα και δυο σταθμά για τα οντολογικά ερωτήματα και τις επιστημονικές υποθέσεις, κάνοντας απόλυτη διάκριση μεταξύ του αναλυτικού και του συνθετικού. Και δεν χρειάζεται να πω ξανά ότι αυτή είναι μια διάκριση που απορρίπτω [28](Quine 1951, σ. 43).

Σε αυτή την κατεύθυνση κινείται το επιχείρημα από το αναπόδραστο που έχει διατυπώσει ο Baker.

2.6 ΤΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ ΑΝΑΠΟΔΡΑΣΤΟΥ ΤΟΥ BAKER

Ο ολιστικός χαρακτήρας του επιχειρήματος Quine-Putnam σε συνδυασμό με τις κριτικές του ολισμού ώθησε τον Baker (2009) να παρουσιάσει μια εκδοχή του επιχειρήματος που δεν εξαρτάται από τον ολισμό. Αφετηρία ήταν η συζήτηση μεταξύ του Melia (2000, 2002), από την πλευρά νομιναλισμού, και του Colyvan (2001, 2002), από την πλευρά του πλατωνισμού. Και οι δυο συμφωνούσαν ότι προκειμένου να συναχθεί η ύπαρξη μιας μαθηματικής οντότητας που αναφέρεται μέσα σε μια φυσική θεωρία πρέπει η αναφορά σε αυτή την οντότητα να είναι αναπόδραστη αλλά για τον *σωστό λόγο*. Και τέτοιος λόγος είναι ο *εξηγητικός ρόλος*. Δηλαδή, ένα

[28] "Consider the question whether to countenance classes as entities. This is the question whether to quantify with respect to variables which take classes as values. Now Carnap has maintained that is a question not of matters of fact but of choosing a convenient language form, a convenient conceptual scheme for science. With this I agree, but only on the proviso that the same be conceded regarding scientific hypotheses generally. Carnap has recognized that he is able to preserve a double standard for ontological questions and scientific hypotheses only by assuming an absolute distinction between the analytic and the synthetic; and I need not say again that this is a distinction which I reject."

επιχείρημα του αναπόδραστου που επικαλείται τον εξηγητικό ρόλο των μαθηματικών οντοτήτων στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες θα ήταν αποδεκτό τόσο από τους νομιναλιστές όσο και από τους πλατωνιστές.

Πιο συγκεκριμένα, ο Baker (2009, σ. 613) προτείνει το παρακάτω *ενισχυμένο επιχείρημα από το αναπόδραστο* (enhanced indispensability argument):

> (Π1) Οφείλουμε ορθολογικά να πιστεύουμε στην ύπαρξη κάθε οντότητας που έχει ένα αναπόδραστο εξηγητικό ρόλο στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες.
>
> (Π2) Μαθηματικά αντικείμενα έχουν ένα αναπόδραστο εξηγητικό ρόλο στην επιστήμη.
>
> ---
>
> (Σ) Οφείλουμε ορθολογικά να πιστεύουμε στην ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων.

Η κεντρική ιδέα, λοιπόν, είναι ότι για μια επιτυχή πλατωνιστική χρήση του επιχειρήματος από το αναπόδραστο χρειάζονται παραδείγματα από την επιστημονική πρακτική στα οποία η υπόθεση μαθηματικών αντικειμένων οδηγεί σε *εξήγηση*. Έχουν όμως τα μαθηματικά αναπόδραστο εξηγητικό ρόλο; Υπάρχουν γνησίως μαθηματικές εξηγήσεις εμπειρικών φαινομένων; Ο ίδιος Baker δίνει καταφατική απάντηση και την τεκμηριώνει μέσω ενός παραδείγματος που αφορά τα *περιοδικά τζιτζίκια*, ένα φαινόμενο του οποίου η εξήγηση φαίνεται να εξαρτάται τόσο από εξελικτικά όσο και από μαθηματικά γεγονότα. Αυτό και άλλα τέτοια παραδείγματα θα συζητηθούν στο πέμπτο κεφάλαιο μαζί με κριτικές που έχουν δεχθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΝΣΤΑΣΕΙΣ ΕΝΑΝΤΙΟΝ ΤΟΥ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΣ

3.1 ΚΑΤΑΛΗΠΤΟΤΗΤΑ

Ένα ερώτημα που εγείρεται είναι το κατά πόσο μπορεί κανείς να συλλάβει προτάσεις όπως «οι αριθμοί υπάρχουν», «σύνολα υπάρχουν», «συναρτήσεις από χωροχρονικά σημεία σε πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν», κ.λπ. Αν αυτές είναι ψευδο-ισχυρισμοί, τότε κανένα επιχείρημα –πόσο μάλλον τα επιχειρήματα του αναπόδραστου– δεν είναι καλό για να πιστεύουμε σε αυτές. Γιατί αυτές οι προτάσεις να μην είναι καταληπτές όμως;

Αρχικά, τέτοιου είδους ισχυρισμοί συναντώνται μόνο στη φιλοσοφία. Για τον Putnam, όμως, αυτό είναι ένα κάπως ύποπτο επιχείρημα. Άλλο είναι να δείξεις πως οι εκφράσεις, στις οποίες στηρίζεται ένα συγκεκριμένο φιλοσοφικό πρόβλημα, είναι γλωσσικά παρεκκλίνουσες. Αν όντως δεν υπάρχει τρόπος να εκφράσεις το «πρόβλημα» χωρίς να «κακοποιείς» τη γλώσσα, τότε υπάρχουν έντονες υποψίες πως το «πρόβλημα» δεν είναι καθόλου ξεκάθαρο πρόβλημα (αν και πάλι αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα πως θα είναι και κυριολεκτικώς ακατάληπτες). Ωστόσο:

> Καθόλου όμως δεν είναι επιχείρημα κατά της καταληπτότητας ενός θεωρούμενου φιλοοφικού προβλήματος ή ισχυρισμού το ότι οι όροι-κλειδιά του είναι γλωσσικά παρεκκλίνοντες (ή, πιο ανεπίσημα, «παράξενοι» ή «αλλόκοτοι» ή οτιδήποτε) αν αυτή η «παρέκκλιση» (ή «παραξενιά» ή «αλλοκοτιά» ή οτιδήποτε) τεκμηριώθηκε αρχικά με επίκληση της ύποπτης αρχής ότι όροι και προτάσεις που εμφανίζονται μόνο στη φιλοσοφία είναι γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο παρεκκλίνοντες. Διότι η δυσκολία (φαίνεται να είναι περισσότερο από «δυσκολία» στην πραγματικότητα) είναι ότι δεν υπάρχουν γλωσσικές ενδείξεις για αυτό τον εντυπωσιακό ισχυρισμό[29] (Putnam [1975] 1979, σ. 348)

Κάθε κλάδος άλλωστε έχει τους δικούς του όρους. Αν η πρόταση «υπάρχουν υλικά

[29] "But it is no argument at all against the genuineness of a putative philosophical problem or assertion that its key terms are linguistically deviant (or, more informally, "odd", or "queer", or whatever), if that "deviancy" (or "oddness", or "queerness", or whatever) was only established in the first place by appealing to the dubious principle that terms and statements that occur only in philosophy are ipso facto deviant. For the difficulty (it appears to be more than "difficulty", in fact) is that there is no linguistic evidence for this startling claim."

αντικείμενα» δεν συναντάται εκτός της φιλοσοφίας, αυτό είναι επειδή μόνο οι φιλόσοφοι ενδιαφέρονται για το τι μας δεσμεύει να πιστεύουμε μια τόσο «προφανή» πρόταση. Μόνο οι φιλόσοφοι έχουν την επαγγελματική εκπαίδευση να θέσουν μια τέτοια ερώτηση δικαιολόγησης. Δεν υπάρχει γλωσσική ένδειξη ότι προτάσεις όπως «υπάρχουν αριθμοί» είναι *γλωσσικά* παρεκκλίνουσες – ότι παραβιάζουν, δηλαδή, τις νόρμες της φυσικής γλώσσας (που μπορεί να διαπιστωθούν με κατάλληλες επιστημονικές μεθόδους). Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 348), μάλιστα, υποστηρίζει πως το όλο επιχείρημα είναι κυκλικό:

> Η μορφή του επιχειρήματος είναι ξεκάθαρα κυκλική: τίθεται μια αρχή P (ότι υπάρχει κάτι λάθος με τις εκφράσεις που απαντούν μόνο στη φιλοσοφική συζήτηση)· δίνονται πολλά υποστηρικτικά παραδείγματα για την αρχή P (δηλαδή φιλοσοφικές προτάσεις και ερωτήσεις που θεωρούνται «περίεργες», «αλλόκοτες», κ.λπ.)· αλλά προκύπτει ότι αυτά τα υποστηρικτικά παραδείγματα είναι υποστηρικτικά παραδείγματα *μόνο* αν υποθέσουμε την αρχή P.[30]

Έτσι δεν υπάρχει τίποτα περίεργο σχετικά με ερωτήσεις γενικής ύπαρξης του τύπου «υπάρχουν οι αριθμοί;», ούτε με γενικές ερωτήσεις δικαιολόγησης του τύπου «τι μας δεσμεύει να πιστεύουμε ότι τα υλικά αντικείμενα υπάρχουν;». Και όταν κάποιες από αυτές απορρίπτονται, απορρίπτονται βάσει του κυκλικού επιχειρήματος παραπάνω.

3.2 ΣΥΜΒΑΣΙΟΚΡΑΤΙΑ

Μια άλλη ένσταση κατά των επιχειρημάτων του αναπόδραστου απορρέει από τη θέση ότι η αλήθεια της λογικής και των μαθηματικών θέμα *σύμβασης*. Η «Υπάρχουν αριθμοί» είναι αληθής συμβατικά· η δε εξαλειψιμότητα ή μη των αριθμών από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες είναι ένα ζήτημα άσχετο με την ουσία.

Για τον Putnam το επιχείρημα της συμβασιοκρατίας καταρρίπτεται όταν ρωτήσουμε τους υποστηρικτές του για λεπτομέρειες: «*Πώς ακριβώς* ορίζεται, βάσει της έννοιας της *σύμβασης*, η έννοια της αλήθειας, όταν αυτή εφαρμόζεται σε προτάσεις που χρησιμοποιούν ποσόδειξη πάνω σε αφηρημένες έννοιες;»:

---

[30] “The form of the argument is a straightforward circle: a principle P (that there is something wrong with locutions which occur only in philosophical discourse) is advanced; many supporting examples are given for the principle P (i.e., of philosophical statements and questions which are allegedly “odd”, “queer”, etc.); but it turns out that these supporting examples are supporting examples only if the principle P is assumed.”

> Ακόμη κι αν υποθέσουμε ότι κάποιες μαθηματικές προτάσεις είναι «αληθείς από σύμβαση», με την έννοια ότι είναι *άμεσα* αληθείς από σύμβαση, και ότι θα μπορούσαμε να τις καταγράψουμε, ο συμβασιοκράτης χρειάζεται κάποια έννοια συναγωγής για να διαχειριστεί τις μαθηματικές αλήθειες που δεν είναι, κατά καμία άποψη, άμεσα συμβατικές – δηλαδή, αυτές που χρειάζονται απόδειξη. Αλλά η έννοια της συναγωγής (εγκυρότητα της συνεπαγωγής) χρειάζεται τη θεωρία συνόλων για να οριστεί.[31] (Putnam [1975] 1979, σ. 350).

Πράγματι για να ορίσουμε σε μια τυπική γλώσσα ότι η πρόταση q έπεται από τις $p_1,...,p_n$, συμβολικά ότι $\{p_1, \dots, p_n\} \vDash q$, και συνεπώς ότι η υλική συνεπαγωγή $(p_1 \wedge ... \wedge p_n) \to q$ είναι λογικώς έγκυρη λέμε: δεν υπάρχει ερμηνεία της τυπικής γλώσσας στην οποία όλες οι $p_1,...,p_n$ είναι αληθείς και η q ψευδής. Αλλά αυτή η πρόταση χρησιμοποεί ποσόδειξη πάνω σε ερμηνείες («μοντέλα») που είναι μαθηματικές δομές (σύνολα με σχέσεις, συναρτήσεις, σταθερές).

Οπότε, η συμβασιοκρατία, ακόμη κι αν είναι σωστή, προϋποθέτει ποσόδειξη αφηρημένων οντοτήτων, ως κάτι που μπορεί να συλληφθεί πέραν της έννοιας μιας σύμβασης. Η μαθηματική αλήθεια καταλήγει, δηλαδή, να εξηγείται ως η αλήθεια άμεσης σύμβασης *και μαθηματικών*. Και, ακόμη, παραμένει το ερώτημα πόσο μεγάλο είναι πραγματικά το συμβατικό στοιχείο στα μαθηματικά.

Τέλος, χωρίς προσοχή, η συμβασιοκρατική θεωρία για τη μαθηματική αλήθεια μπορεί εύκολα να καταλήξει να συγκρουστεί με τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel.[32] Πράγματι, αν η μαθηματική αλήθεια είναι αποκλειστικά θέμα σύμβασης, τότε θα ήταν εύλογο κάθε μαθηματική θεωρία να μπορεί να αποδεικνύει, για κάθε πρόταση στη γλώσσα της, ή την ίδια την πρόταση ή την άρνησή της. Αλλά σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel, αυτό δεν συμβαίνει για πρωτοβάθμιες θεωρίες που είναι αξιωματικοποιήσιμες, συνεπείς και επεκτείνουν την αριθμητική Peano.

---

[31] “Even assuming that some mathematical sentences are “true by convention”, in the sense of being immediately true by convention, and that these could be listed, the conventionalist still requires some notion of implication in order to handle those truths of mathematics which are not, on any view, immediately conventional - i.e. which require proof. But the notion of implication (validity of the conditional) is one which requires set theory to define.”

[32] Για μια μη τεχνική εισαγωγή στα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel και τις συνέπειές τους, βλ. Αραγεώργης (2008).

3.3 ΦΙΞΙΟΝΑΛΙΣΜΟΣ

Ο φιξιοναλισμός υποστηρίζει ότι διάφορες οντότητες που *προϋποθέτει* ή *φαίνεται να προϋποθέτει* η επιστήμη (ή και ο κοινός νους) είναι απλώς «χρήσιμα κατασκευάσματα της φαντασίας» ή ότι, τέλος πάντων, *δεν μπορούμε να ξέρουμε* ότι είναι κάτι περισσότερο από «χρήσιμα κατασκευάσματα της φαντασίας».[33] Σε κάποιες περιπτώσεις, τέτοιοι ισχυρισμοί αφορούν, όχι μόνο μαθηματικά αντικείμενα, αλλά και κάποια (μη παρατηρήσιμα) υλικά αντικείμενα. Σε παλιότερες εκδοχές του, ο φιξιοναλισμός δεχόταν ότι η επιστήμη όντως *προϋποθέτει* αυτές τις οντότητες. Σε μια νεότερη εκδοχή του, ο φιξιοναλισμός υποστηρίζει ότι απλώς *νομίζουμε* ότι τις προϋποθέτει ενώ είναι εξαλείψιμες.

Η παλιότερη εκδοχή στοχεύει στην πιο άμεση αμφισβήτηση της «αποδεικτικής» αποτελεσματικότητας του επιχειρήματος του αναπόδραστου. Ο φιξιοναλιστής αυτού του τύπου θέλει να πει: «Κάποιες έννοιες (‘αριθμός’, ‘σύνολο’, ‘ηλεκτρόνιο’, κ.λπ.) είναι μη εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι οι οντότητες που αντιστοιχούν σε αυτές τις έννοιες υπάρχουν· δείχνει απλώς ότι αυτές οι οντότητες είναι χρήσιμα κατασκευάσματα της φαντασίας». Αλλά για να το πει αυτό, ο φιξιοναλιστής πρέπει να πει ότι οι καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες δεν είναι αληθείς, δεδομένου ότι η αλήθεια μιας πρότασης δεσμεύει στην πεποίθηση ότι οι οντότητες στις οποίες αναφέρεται η πρόταση, ή πάνω στις οποίες χρησιμοποιεί ποσόδειξη η πρόταση, υπάρχουν.[34] Αλλά με ποια έννοια κρίνονται *καλές* οι επιστημονικές μας θεωρίες, αν όχι από το ότι προσεγγίζουν την αλήθεια; Το ερώτημα αυτό θέτει το ζήτημα του σκοπού της επιστήμης. Ο φιξιοναλιστής μπορεί να καταφύγει στον *ινστρουμενταλισμό* (*εργαλειοκρατία*) και να ισχυριστεί ότι ο σκοπός της επιστήμης είναι μόνο η ακριβής περιγραφή και πρόβλεψη της εμπειρίας – ίσως, με τον *απλούστερο* δυνατό τρόπο.

Ο Putnam ([1975] 1979, κεφάλαιο 20) επιχειρηματολογεί ότι και αυτή η φιξιοναλιστική στρατηγική αποτυγχάνει. Επισημαίνει ότι το ερώτημα αν μια

---

[33] Π.χ., η φύση συμπεριφέρεται *ως εάν* (*as if*) να υπήρχαν οι εν λόγω οντότητες.

[34] Κατά τη συνήθη σημασιολογία της επιστημονικής και καθημερινής γλώσσας η αλήθεια της πρότασης «Ο 9 είναι ο αριθμός των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος» δεσμεύει στην ύπαρξη του αριθμού 9. Και η αλήθεια της πρότασης «Υπάρχουν πρώτοι αριθμοί» δεσμεύει στην ύπαρξη πρώτων αριθμών. Φυσικά, ο φιξιοναλιστής μπορεί να επινοήσει μια διαφορετική σημασιολογία (για τις μαθηματικές προτάσεις), αλλά αυτό έχει *κόστος*.

πρόταση είναι «αληθής» δεν μπορεί να διαχωριστεί από το ερώτημα αν είναι ορθολογικό να δεχθούμε αυτή την πρόταση (αφού είναι ορθολογικό να δεχθούμε ότι η *p είναι αληθής* ακριβώς στην περίπτωση που είναι ορθολογικό να δεχθούμε την *p*). Ο σκοπός όμως όλου του *εννοιολογικού συστήματος* είναι η ακριβής περιγραφή και πρόβλεψη της εμπειρίας (και η απλότητα), σύμφωνα με την ινστρουμενταλιστική προδιάθεση του φιξιοναλιστή. Επομένως είναι ορθολογικό να αποδεχόμαστε το εννοιολογικό μας σύστημα και να αποκαλούμε τις προτάσεις που το αποτελούν «αληθείς». Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 353-354) συμπεραίνει:

> Υπάρχει αδιαμφισβήτητα κάποια διορατικότητα σε αυτήν την απάντηση στον φιξιοναλισμό. Όσο στοιχειώδες και να είναι, είναι σωστό να θυμήσουμε στον φιξιοναλιστή ότι δεν μπορούμε να διαχωρίζουμε αυτό που κάνει ορθολογική την αποδοχή μιας πρότασης *p*, από αυτό που κάνει ορθολογική την αποδοχή του ότι η *p* είναι αληθής.[35]

Επιπλέον, για τον Putnam, η *απλότητα*, σε οποιαδήποτε μετρήσιμη μορφή (μικρότερο μήκος εκφράσεων, μικρότερο πλήθος λογικών συνδέσμων, μικρότερο πλήθος ορισμάτων των κατηγορημάτων κ.ο.κ.), είναι ένας μόνο από τους παράγοντες –και όχι ο σημαντικότερος– που επηρεάζουν τις ορθολογικές κρίσεις των επιστημόνων για τη σχετική ευλογοφάνεια ανταγωνιστικών θεωριών. Πράγματι, ο ινστρουμενταλιστής χρησιμοποιεί τη λέξη «απλότητα» για ένα περίπλοκο ζήτημα που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αλλά αυτό δεν είναι το κρίσιμο σημείο. Ο φιξιοναλιστής παραδέχεται ότι η εμπειρική επάρκεια –η ικανότητα μιας θεωρίας να περιγράφει με ακρίβεια *όλα* τα φαινόμενα– και η απλότητα αποτελούν εγγυήσεις για μια καλή θεωρία, που καθιστούν ορθολογική την αποδοχή της «για επιστημονικούς λόγους». Αλλά ο ινστρουμενταλιστής θα ρωτήσει τότε: «τι άλλους λόγους μπορεί να θέλει κανείς προτού θεωρήσει ορθολογικό να πιστέψει μια θεωρία;». Αν τα ίδια τα πράγματα που κάνουν τον φιξιοναλιστή να θεωρεί τους αριθμούς, τα σύνολα, τα υλικά αντικείμενα κ.λπ. ως «χρήσιμα κατασκευάσματα φαντασίας» δεν καθιστούν ορθολογικό το να πιστέψουμε στο *εννοιολογικό σύστημα* των αριθμών, των συνόλων, των υλικών αντικειμένων κ.λπ., τι μπορεί να καταστήσει ορθολογικό να πιστέψουμε οτιδήποτε;

[35] “Now, there is unquestionably some insight in this retort to fictionalism. Elementary as the point may be, it is correct to remind the fictionalist that we cannot separate the grounds which make it rational to accept a proposition *p* from the grounds which make it rational to accept that *p* is true.”

Η μόνη διέξοδος για τον φιξιοναλιστή είναι να πει ότι η πίστη σε ένα τέτοιο εννοιολογικό σύστημα δεν συμπεριλαμβάνει την πεποίθηση ότι οι προτάσεις του είναι αληθείς. Αλλά, όπως επισημαίνει ο Putnam, τέτοιοι σκεπτικιστές φιξιοναλιστές, ενώ δεν αμφιβάλλουν πως η επιστήμη θα οδηγήσει σε εμπειρικά επαρκείς θεωρίες – και, άρα, αποδέχονται την επαγωγή σε κάποιο σημείο, παρά την απουσία παραγωγικής (a priori) δικαιολόγησης–, αρνούνται να πιστέψουν ότι η επιστήμη οδηγεί σε *αληθείς* θεωρίες – και, άρα, απορρίπτουν την επαγωγή σε άλλο σημείο.

Γιατί δεν μπορούμε ποτέ να ξέρουμε αν οι επιστημονικές θεωρίες είναι αληθείς; Ο σκεπτικιστής φιξιοναλιστής λέει: «γιατί δεν μπορούμε να δώσουμε παραγωγική απόδειξη ότι είναι αληθείς, ακόμη και αν επιστρατεύσουμε όλη τη δυνατή παρατηρησιακή γνώση». Όμως δεν μπορούμε να δώσουμε παραγωγική απόδειξη ούτε της υπόθεσης ότι ο ήλιος θα ανατείλει αύριο! Έτσι, κατά τον Putnam, ο σκεπτικιστής φιξιοναλιστής είναι σκεπτικιστής με «μισή καρδιά». Αποδέχεται μερικώς την επαγωγή (ως κάτι που οδηγεί σε θεωρίες που επιτυγχάνουν ως προς την περιγραφή και πρόβλεψη των φαινομένων), αλλά όχι ολοκληρωτικά (ως κάτι που οδηγεί σε αληθείς πεποιθήσεις για τα πράγματα).

Εν γένει, ο Putnam διαφωνεί με την υπόθεση πως ο ένας και μοναδικός σκοπός της επιστήμης είναι η ακριβής περιγραφή και πρόβλεψη της εμπειρίας. Η υπόθεση, όμως, πως ο σκοπός της επιστήμης είναι ακριβώς αυτός αρκεί για να αντικρούσει τους φιξιοναλιστές: αν δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ του *να πιστεύεις στο p* και του *να πιστεύεις πως το p οδηγεί σε επιτυχείς περιγραφές και προβλέψεις*, τότε ο φιξιοναλισμός καταρρέει.

Σχετικά με τον «σκοπό της επιστήμης», ο Putnam δεν πιστεύει πως υπάρχει *κάτι* που είναι *ο σκοπός της επιστήμης*. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί στόχοι για τον κάθε επιστήμονα, και δεν έχουν όλοι οι επιστήμονες ως στόχο την πρόβλεψη. Ο ίδιος εξηγεί:

> Κάποιοι επιστήμονες ενδιαφέρονται κυρίως να ανακαλύψουν, για παράδειγμα, συγκεκριμένα γεγονότα για τις κοσμικές πηγές ραδιοκυμάτων, ή τα γονίδια, ή τα μεσόνια, ή οτιδήποτε. Θέλουν επιτυχείς προβλέψεις για να επικυρώσουν τις θεωρίες τους· δεν θέλουν τις θεωρίες τους για να αποκτήσουν προβλέψεις, οι οποίες, σε κάποιες περιπτώσεις, δεν έχουν το παραμικρό ενδιαφέρον από μόνες τους, παρά μόνο επειδή τείνουν να

εδραιώσουν την αλήθεια ή το ψεύδος κάποιας θεωρίας.[36] (Putnam [1975] 1979, σ. 355)

Έτσι, ενώ είναι αυθαίρετο να θεωρούμε πως όλοι οι επιστήμονες θέλουν την αλήθεια αυτή καθαυτή, πολλοί επιστήμονες νοιάζονται για αυτή επειδή (και όταν) είναι τεκμήριο αλήθειας.

Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 356) καταλήγει:

> Σε αυτό το σημείο έχουμε εξετάσει την ανταπάντηση στα επιχειρήματα του αναπόδραστου –δηλαδή, ότι μπορεί να είναι αναπόδραστο να πιστέψουμε στην *p* αλλά ότι η *p* μπορεί παρόλα αυτά να είναι ψευδής– και έχουμε απορρίψει αυτή την ανταπάντηση, όχι για τους συνήθεις επαληθευσιοκρατικούς ή εργαλειοκρατικούς λόγους, που φαίνεται να βασίζονται σε ψευδή δόγματα, αλλά επειδή είναι χαζό να συμφωνείς ότι ένας λόγος να αποδεχθείς την *p* εγγυάται την αποδοχή της *p* σε όλες τις επιστημονικές περιστάσεις, και μετά να προσθέτεις «αλλά ακόμα και αυτό δεν είναι *αρκετά καλό*». Μια τέτοια κρίση θα μπορούσε να γίνει μόνο αν κάποιος δεχόταν μια υπερ-επιστημονική μέθοδο ως ανώτερη της επιστημονικής μεθόδου· αλλά [εγώ], τουλάχιστον, δεν ενδιαφέρομαι να κάνω κάτι *τέτοιο*.

Το τελευταίο σημείο δείχνει ξεκάθαρα τις νατουραλιστικές προδιαθέσεις του Putnam.[37]

Ωστόσο, όπως έχουμε ήδη πει, υπάρχει μια νεότερη εκδοχή του φιξιοναλισμού που αποφεύγει το αντεπιχείρημα του Putnam. Σε αυτή την εκδοχή, οι αναφορές στις προβληματικές (για τον φιξιοναλιστή) οντότητες *είναι* εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες ενώ, ενδεχομένως, δεν μας φαίνεται εφικτό κάτι τέτοιο. Κύριος υποστηρικτής αυτής της φιξιοναλιστικής προσέγγισης στον μαθηματικό νομιναλισμό είναι ο Hartry Field που έχουμε αναφέρει ήδη στην ενότητα 1.2.

---

[36] "Some scientists are primarily interested in, for example, discovering certain facts about radio stars, or genes, or mesons, or what have you. They want successful predictions in order to confirm their theories; they do not want theories in order to obtain the predictions, which are in some cases of not the slightest interest in themselves, but of interest only because they tend to establish the truth or falsity of some theory."

[37] Οι επαληθευσιοκρατικοί λόγοι απόρριψης του φιξιοναλισμού, στους οποίους αναφέρεται ο Putnam στο παραπάνω απόσπασμα έχουν ως εξής. Ένας φιξιοναλιστής θέλει να πει, π.χ., ότι ενώ μπορεί να μην υπάρχουν ηλεκτρόνια, οι εμπειρίες μας μπορεί να είναι τέτοιες *ως εάν* να υπήρχαν ηλεκτρόνια. Αλλά κατά την *επαληθευσιοκρατία* (verificationism) που μεσουρανούσε το 1920-30 κάτι τέτοιο στερείται νοήματος: μια πρόταση που δεν μπορεί να επαληθευθεί εμπειρικά είναι *α-νόητη*. Όπως είναι γνωστό, η φιλοσοφία των επιστημών έχει έκτοτε παραμερίσει την επαλευθησιοκρατία λόγω διάφορων προβλημάτων που αναγνωρίζει και ο Putnam.

Ο Field υποστηρίζει τον αντιρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες, με κύριο προβληματισμό το πώς μπορούμε να έχουμε γνώση για αυτές. Ο ίδιος υποστηρίζει:

> Μια ρεαλιστική εικόνα των μαθηματικών εμπεριέχει την υπόθεση μεγάλης ποικιλίας αφύσικων οντοτήτων –οντοτήτων που υπάρχουν έξω από το χωροχρόνο και δεν έχουν καμία αιτιακή σχέση με εμάς ή οτιδήποτε μπορεί να παρατηρήσουμε– και δεν φαίνεται να υπάρχουν μηχανισμοί που θα μπορούσαν να εξηγήσουν πώς η ύπαρξη και οι ιδιότητες τέτοιων οντοτήτων μπορούν να γίνουν γνωστές.[38] (Field 1989, σ. 230)

Η αφετηρία, λοιπόν, είναι το γνωσιολογικό πρόβλημα του μαθηματικού ρεαλισμού στην πλατωνιστική εκδοχή του.

Ο Field έχει εγείρει αρκετές ενστάσεις κατά του επιχειρήματος του αναπόδραστου, προκαλώντας διάφορες πτυχές του. Το βασικό που αμφισβητεί είναι το αναπόδραστο των μαθηματικών. Ο Field δέχεται ότι πρέπει να στρεφόμαστε στις καλύτερες επιστημονικές θεωρίες μας, όμως δεν πιστεύει στην αναγκαιότητα των μαθηματικών για αυτές. Απορρίπτει, δηλαδή, την προκείμενη: «Η πραγματική ανάλυση είναι απαραίτητη για τη φυσική· η σύγχρονη φυσική δεν μπορεί να διατυπωθεί ή να αναπτυχθεί χωρίς προτάσεις της πραγματικής ανάλυσης».

Το πρόγραμμα του Field είναι να ξαναγραφεί κάθε φυσική θεωρία χωρίς αναφορά σε, ή ποσόδειξη πάνω σε, μαθηματικά αντικείμενα και να δειχθεί πως το περιεχόμενο της αρχικής θεωρίας διατηρείται σωστά στο νομιναλιστικό του αντίστοιχο. Ο ίδιος γράφει:

> Αν είχαμε μια νομιναλιστική θεωρία, θα ήταν νόμιμο να εισαγάγουμε τα μαθηματικά ως ένα βοηθητικό μηχανισμό στη συναγωγή συμπερασμάτων· και έχω προσπαθήσει να δείξω γιατί αυτός ο βοηθητικός μηχανισμός θα ήταν χρήσιμος, αλλά και ότι η χρησιμότητά του αυτή δεν αποτελεί λόγο να υποθέσουμε ότι αποτελείται από ένα σώμα αληθειών. Το πραγματικό ερώτημα είναι αν είναι δυνατή μια ελκυστική νομιναλιστική διατύπωση της φυσικής.[39] (Field [1980] 2016, σ. 42)

---

[38] “A realist view of mathematics involves the postulation of a large variety of aphysical entities – entities that exist outside of space-time and bear no causal relations to us or anything we can observe – and there just don't seem to be any mechanisms that could explain how the existence of and properties of such entities could be known.”

[39] “[…] if we had a nominalistic theory, then it would be legitimate to introduce mathematics as an auxiliary device that aids us in drawing inferences; and I have tried to indicate why that auxiliary device would be useful, and to show that its usefulness as an auxiliary device is no grounds whatever for supposing that it consists of a body of truths. The real question then is whether an attractive nominalistic formulation of physics is possible.”

Με την έκφραση «ελκυστική διατύπωση», ο Field ([1980] 2016, σ. 47) εννοεί μια «καθαρά εγγενή» διατύπωση που δεν επικαλείται τυχαίως επιλεγμένα αντικείμενα, ούτε τυχαίως επιλεγμένα συστήματα συντεταγμένων, ούτε κάτι παρόμοιο.

Έτσι, για τον Field, οι μαθηματικές θεωρίες δεν χρειάζεται να είναι αληθείς για να είναι σωστές:

> Η έννοια της αλήθειας θα μπορούσε να αποφευχθεί εδώ λέγοντας ότι η πρόταση «Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί» μπορεί να είναι «μαθηματικώς καλή» ακόμη και αν δεν υπάρχουν καν αριθμοί (πόσο μάλλον απείρως πολλοί πρώτοι αριθμοί)· και ότι το ίδιο ισχύει για πολλούς άλλους μαθηματικούς ισχυρισμούς. Αν τα μαθηματικά δεν χρειάζεται να είναι αληθή … για να είναι καλά, τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιοιούν; Ένας στόχος που έχει συχνά προταθεί είναι η συνέπεια.[40] (Field 1989, σ. 240)

Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν πολλές συνεπείς θεωρίες για τις οποίες οι μαθηματικοί δεν ενδιαφέρονται. Άρα η συνέπεια δεν είναι επαρκές κριτήριο «μαθηματικής ορθότητας». Ο Field, όμως, υποστηρίζει πως, αντίστοιχα, υπάρχουν και πολλές μαθηματικές θεωρίες που ένας ρεαλιστής θα θεωρούσε αληθείς και επίσης δεν έχουν κανένα ενδιαφέρον όπως, π.χ., μια θεωρία που ισχυρίζεται πως υπάρχουν τουλάχιστον δύο μαθηματικά αντικείμενα. Άρα, καταλήγει ο Field (1989, σ. 240), «το μαθηματικά καλό δεν μπορεί να αποτελείται ούτε μόνο από αλήθεια».[41]

Αυτό που χρειάζεται επιπλέον είναι να είναι οι μαθηματικές θεωρίες *συντηρητικές* (conservative) ως προς τις επιστημονικές θεωρίες. Η βασική ιδέα έχει ως εξής. Έστω N μια νομιναλιστική επιστημονική θεωρία και M μια μαθηματική θεωρία που μπορεί να προστεθεί στην N. Για κάθε πρόταση p στη νομιναλιστική γλώσσα της N, η p δεν είναι συνέπεια της $M+N$ εκτός εάν η p είναι συνέπεια της N από μόνη της. Ο Field ισχυρίζεται ότι τα *καλά* μαθηματικά είναι συντηρητικά ως προς την επιστήμη με αυτή την έννοια και, επομένως, συνεπή με κάθε νομιναλιστικό ισχυρισμό για τη μη μαθηματική (φυσική, κοινωνική) πραγματικότητα. Πράγματι, θα ήταν πολύ περίεργο αν τα καθιερωμένα μαθηματικά συνεπάγονταν ότι υπάρχουν τουλάχιστον δέκα μη μαθηματικά αντικείμενα στον υλικό κόσμο ή ότι η Παρισινή Κομμούνα ηττήθηκε. Σε

[40] “The notion of truth could be avoided here by simply saying that the assertion 'There are infinitely many prime numbers' can be "mathematically good" even if there are no numbers at all (hence, certainly not infinitely many prime numbers); and that the same holds for many other mathematical assertions. If mathematics needn't be true … to be good, then what condition must it satisfy? One goal that has occasionally been suggested as an alternative to truth is consistency.”

[41] “[…] "mathematical goodness" can't consist only of truth either.”

μια τέτοια περίπτωση, όλοι, εκτός από ακραίους ορθολογιστές, θα συμφωνούσαν πως τα καθιερωμένα μαθηματικά χρειάζονται αναθεώρηση (Field [1980] 2016, σ. 13).

Έτσι η διατύπωση νομιναλιστικών εκδοχών των καθιερωμένων φυσικών θεωριών είναι μόνο το πρώτο βήμα στο πρόγραμμα του Field. Το δεύτερο βήμα είναι η απόδειξη της συντηρητικότητας των μαθηματικών θεωριών ως προς αυτές τις νομιναλιστικές εκδοχές. Γιατί αν τα μαθηματικά είναι όντως συντηρητικά ως προς τη φυσική επιστήμη, τότε ακόμη και αν είναι χρήσιμα για τη συναγωγή φυσικών συμπερασμάτων, θα είναι καταρχήν εξαλείψιμα. Κάθε φυσικό συμπέρασμα που θα μπορούσε να προκύψει με τη βοήθεια των μαθηματικών, θα μπορούσε επίσης να προκύψει χωρίς αυτά.

Συνολικά, ο Field έχει μια ινστρουμενταλιστική (εργαλειοκρατική) άποψη για τα μαθηματικά στις φυσικές επιστήμες. Οι βασικές του θέσεις μπορούν να διατυπωθούν ως εξής. (F1) Η λειτουργία των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες είναι να βοηθούν στη διατύπωση των επιστημονικών νόμων και στη συναγωγή επιστημονικών προτάσεων από τους νόμους. (F2) Αν αυτή η χρήση των μαθηματικών αποδειχθεί πως είναι εξαλείψιμη, τότε η αλήθεια των μαθηματικών δεν είναι απαραίτητο να θεωρείται δεδομένη από την επιστήμη (οπότε το επιχείρημα Quine-Putnam υπονομεύεται). (F3) Υπάρχει όμως μια αναδιατύπωση των επιστημονικών θεωριών που αποφεύγει τελείως την αναφορά σε μαθηματικές οντότητες. Και (F4) οι μαθηματικοποιημένες επιστημονικές θεωρίες είναι απλώς συντηρητικές επεκτάσεις των αναδιατυπωμένων (όπως παραπάνω) θεωριών, έτσι ώστε κάθε μη μαθηματική συνέπεια των πρώτων να μπορεί να προκύψει και από τις δεύτερες.

Όπως έχουμε ήδη δει, ο Field προσπάθησε να δικαιολογήσει τις (F3) και (F4), αναδιατυπώνοντας τη νευτώνεια θεωρία βαρύτητας. Κατασκεύασε μια αναλυτική έκφραση του νευτώνειου χωροχρόνου με νομιναλιστικούς μόνο όρους (χωρίς αναφορές σε αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα). Ο τρόπος που προχώρησε είναι μέσω *θεωρημάτων αναπαράστασης* (representation theorems). Θεωρήματα τέτοιου τύπου δείχνουν πως τα μαθηματικά μπορούν να βοηθήσουν στη συναγωγή θεωρημάτων για ένα μη μαθηματικό τομέα (π.χ., τη φυσική), χωρίς να εισάγονται συνέπειες στον τομέα αυτό που δεν μπορεί να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση των μαθηματικών. Ουσιαστικά αυτό που κάνουμε είναι να αντικαθιστούμε μια εξωγενή εξήγηση (με τη χρήση μαθηματικών) με μια εγγενή εξήγηση. Αντί να ψάξουμε την εξήγηση εκτός της φυσικής και μέσω των μαθηματικών, την ψάχνουμε εντός της φυσικής. Η μαθηματική «εξήγηση» λοιπόν δεν εξηγεί (οπότε δεν είναι καν *εξήγηση*), αλλά αναπαριστά, και σε πολλές περιπτώσεις μάς βοηθάει να βρούμε, την εξήγηση που είναι εγγενής στη φυσική. Τα θεωρήματα αναπαράστασης δείχνουν πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά σε σχέση με μια μη μαθηματική θεωρία, και τελικά σε σχέση με μια μη μαθηματική εξήγηση. Αυτός, σύμφωνα με τον Field, είναι ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να κινούνται οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι για την εξάλειψη αφηρημένων μαθηματικών εννοιών.

Το πρόβλημα των θεωρημάτων αναπαράστασης είναι, όμως, πως πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι η προσθήκη μαθηματικών σε μη μαθηματικές θεωρίες δεν παράγει από μόνη της μη μαθηματικές συνέπειες που δεν έχουν ήδη αποδειχθεί πως συμβαίνουν. Ειδικότερα, για να εισαγάγουμε μια συνάρτηση ως μοντελοποίηση ενός φυσικού φαινομένου θα πρέπει να είμαστε σίγουροι πως οι μαθηματικές της ιδιότητες δεν επιβάλλουν κάποιες μη μαθηματικές συνέπειες, οι οποίες δεν έχουν δικαιολογηθεί εκτός του μαθηματικού τομέα – δηλαδή, δεν έχουν παρατηρηθεί.

Όπως έχουμε ήδη πει, το νομιναλιστικό πρόγραμμα του Field για τη φυσική δεν έχει προχωρήσει αρκετά μέχρι στιγμής ώστε να δικαιολογεί βάσιμη αισιοδοξία. Ωστόσο, ενδέχεται να μην «έχουμε προσπαθήσει» αρκετά ακόμη.

3.4 Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ MADDY

Η Penelope Maddy έχει διατυπώσει κάποιες πολύ σημαντικές ενστάσεις στο επιχείρημα του αναπόδραστου, συγκεκριμένα για την πρώτη προκείμενη. Το βασικό της επιχείρημα είναι πως ο επικυρωτικός ολισμός είναι λανθασμένος· για αυτήν δεν πρέπει να έχουμε δέσμευση σε *όλες* τις οντότητες που είναι μη εξαλείψιμες στις επιστημονικές μας θεωρίες. Μάλιστα, τα προβλήματα που αναφέρει έκαναν την ίδια να αλλάξει τις ρεαλιστικές απόψεις που είχε παλαιότερα, καθώς ο ρεαλισμός αυτός βασιζόταν σημαντικά στα επιχειρήματα του αναπόδραστου.

Η Maddy επικεντρώνεται, βασικά, στην ασυμβατότητα μεταξύ του νατουραλισμού και του ολισμού, καθώς μια ολιστική άποψη για τις επιστημονικές θεωρίες δεν μπορεί να εξηγήσει την –απαραίτητη, αν κανείς ασπάζεται το νατουραλισμό– ευλογοφάνεια συγκεκριμένων επιστημονικών και μαθηματικών πρακτικών. Οι ενστάσεις της απορρέουν κυρίως από το νατουραλισμό και τον ολισμό του Quine.

Η πρώτη της ένσταση αφορά κυρίως τον επικυρωτικό ολισμό σε σχέση με τη συμπεριφορά των επιστημόνων. Η Maddy (1992, σ. 280) υποστηρίζει πως η συμπεριφορά τους ως προς τα συστατικά μιας καλώς επικυρωμένης θεωρίας ποικίλει «από πίστη, μέχρι διστακτική ανοχή, μέχρι απόλυτη απόρριψη». Ενώ, όμως, ο νατουραλισμός επιτάσσει να σεβόμαστε τις μεθόδους των επιστημόνων, ο ολισμός δηλώνει πως οι επιστήμονες δεν πρέπει να έχουν διαφορετικές συμπεριφορές ως προς τις διαφορετικές οντότητες που αναφέρονται μέσα στις θεωρίες του. Η ίδια πιστεύει πως ο δρόμος του νατουραλισμού είναι ορθότερος. Αυτό, όμως, συνεπάγεται μη πίστη σε *όλες* τις οντότητες των καλύτερων θεωριών μας. Έτσι, η πρώτη προκείμενη πρέπει να καταρριφθεί.

Η Maddy δίνει το παράδειγμα της ιστορίας της ατομικής θεωρίας από τους αρχαίους Έλληνες μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα, οπότε δημιουργήθηκε η μοντέρνα ατομική θεωρία και τα άτομα έγιναν παγκοσμίως αποδεκτά ως πραγματικά. Για την Maddy ([1994] 1995, σ. 388), αν η θέση του Quine ήταν σωστή, οι επιστήμονες θα έπρεπε να έχουν αποδεχτεί τα άτομα ως πραγματικά γύρω στο 1860 όταν έγιναν κατά γενική αποδοχή η θεμελειώδης μονάδα της χημείας. Όμως πολλοί επιστήμονες, όπως και ο Poincaré, παρέμειναν σκεπτικοί για αρκετά χρόνια μετά. Η ίδια συμπεραίνει: «Το σημαντικότερο δίδαγμα της ιστορίας είναι ότι η συμπεριφορά του επιστήμονα απέναντι στη σύγχρονη επιστημονική πρακτική είναι σπανιώς κάτι τόσο απλό όσο μια ενιαία πίστη σε μια συνολική θεωρία».[42] (Maddy [1994] 1995, σ. 395). Για αυτήν, αν θέλει κανείς να ακολουθήσει το νατουραλισμό είναι απαραίτητο να διαχωρίσει το μη εξαλείψιμο από το χρήσιμο κομμάτι μιας θεωρίας. Πολλές εξιδανικευμένες φυσικές έννοιες, όπως «έδαφος χωρίς τριβή», «ιδανικό αέριο», κ.λπ. παίζουν σημαντικό (αν όχι αναπόσπαστο) ρόλο στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες. Οφείλουμε να είμαστε δεσμευμένοι και σε αυτές;

Αφού, λοιπόν, οι επιστημονικές θεωρίες δεν είναι ομογενείς ενότητες, το μαθηματικό κομμάτι των θεωριών είναι μέρος των πραγματικών ή των εξιδανικευμένων στοιχείων τους; Η Maddy υποστηρίζει το δεύτερο, καθώς οι ίδιοι οι επιστήμονες δεν θεωρούν το αναπόδραστο μιας μαθηματικής εφαρμογής ως ένδειξη αλήθειας. Οι επιστήμονες θα επικαλεστούν οτιδήποτε μαθηματικά χρειάζονται για να κάνουν τη δουλειά τους, χωρίς να νοιάζονται για την αλήθεια της εκάστοτε

[42] "The most important moral of the story is that the scientist's attitude toward contemporary scientific practice is rarely as simple as a uniform belief in some overall theory."

μαθηματικής θεωρίας, όπως για παράδειγμα, όταν χρησιμοποιείται η ψευδής υπόθεση ότι νερό είναι απείρως βαθύ στην ανάλυση κυμάτων. Η ίδια επισημαίνει:

> Οι επιστήμονες φαίνονται πρόθυμοι να χρησιμοποιήσουν ισχυρά μαθηματικά όποτε είναι χρήσιμο ή βολικό, χωρίς να ενδιαφέρονται για την προσθήκη *αφηρημένων οντοτήτων* στις οντολογίες τους, και πράγματι, ακόμη πιο απροσδόκητα, χωρίς να ενδιαφέρονται για την επιπρόσθετη φυσική δομή που προϋποτίθεται από αυτά τα μαθηματικά. Από τη μία, δεν υποβάλλουν αυτές τις μαθηματικές και δομικές υποθέσεις σε έλεγχο. Από την άλλη, δεν θεωρούν την εμπειρική επιτυχία μιας θεωρίας, που χρησιμοποιεί ισχυρά μαθηματικά, ως επιβεβαιώση των μαθηματικών ή δομικών υποθέσεων που εμπλέκονται.[43] (Maddy 1995, σ. 255)

Αυτό είναι κάτι που βλέπουμε από τη χρήση του συνεχούς στη φυσική. Οι πραγματικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται επειδή βολεύει. Δεν υπάρχει κανένας προβληματισμός σχετικά με την προσθήκη των τόσων επιπλέον οντοτήτων ή με το αν ο χώρος και ο χρόνος είναι όντως συνεχείς (όπως τους μοντελοποιούμε).

Αφού ο νατουραλισμός υποστηρίζει πως πρέπει να ακολουθούμε τη συμπεριφορά των επιστημόνων, το αναπόδραστο μιας μαθηματικής θεωρίας σε μια φυσική εφαρμογή δεν φαίνεται να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως τεκμήριο αλήθειας. Και αφού δεν έχουμε λόγο να πιστεύουμε ότι η μαθηματική θεωρία είναι αληθής, δεν έχουμε λόγο αν πιστεύουμε ότι και οι οντότητες που υποθέτει είναι πραγματικές.

Μια ακόμη ένσταση που διατυπώνει η Maddy αφορά τους ίδιους τους μαθηματικούς. Τι κάνουν όταν προσπαθούν να απαντήσουν ερωτήματα που είναι, π.χ., ανεξάρτητα από τα καθιερωμένα αξιώματα της θεωρίας συνόλων; Για να απαντηθούν τέτοια ερωτήματα έχουν προταθεί διάφορα νέα υποψήφια θεωρήματα για να συμπλήρωσουν τα ήδη υπάρχοντα. Τα επιχειρήματα που αναπτύσσονται, όμως, σε αυτή τη διαδιακασία δεν φαίνεται να έχουν καμία σχέση με φυσικές εφαρμογές. Θα έπρεπε, δηλαδή, οι μαθηματικοί αυτή να αξιολογούν τα νέα αξιώματα με βάση τις τελευταίες εξελίξεις στη φυσική, κάτι το οποίο δεν συμβαίνει. Ο επικυρωτικός ολισμός, λοιπόν, φαίνεται να επιτάσσει μια ολική αλλαγή της καθιερωμένης, όχι μόνο επιστημονικής, αλλά και μαθηματικής, πρακτικής (Maddy 1992, σ. 286–289).

[43] “Scientists seem willing to use strong mathematics whenever it is useful or convenient to do so, without regard to the addition of new *abstracta* to their ontologies, and indeed, even more surprisingly, without regard to the additional physical structure presupposed by that mathematics. On the one hand, they do not subject these mathematical and structural hypotheses to testing; on the other, they do not regard the empirical success of a theory using strong mathematics as confirming the mathematical or structural hypotheses involved.”

3.5 Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΗΣ LENG

Η Mary Leng (2005, 2010) αποδέχεται τον κεντρικό ρόλο των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες και ότι υπάρχουν γνησίως μαθηματικές εξηγήσεις εμπειρικών φαινομένων. Συγκεκριμένα, συμφωνεί πλήρως με το ότι το παράδειγμα των τζιτζικιών, το οποίο θα αναλύσουμε στο πέμπτο κεφάλαιο, είναι υπόδειγμα μιας μη εξαλείψιμης μαθηματικής εξήγησης ενός καθαρά φυσικού φαινομένου (και, άρα, «απόδειξη» του αναπόδραστου των μαθηματικών για την εμπειρική επιστήμη).

Για την Leng, όμως, η ύπαρξη γνήσιων μαθηματικών εξηγήσεων εμπειρικών φαινομένων δεν συνεπάγεται την ύπαρξη των εμπλεκομένων μαθηματικών αντικειμένων. Απορρίπτει, δηλαδή, την πρώτη προκείμενη του ενισχυμένου επιχειρήματος από το αναπόδραστο του Baker: «Οφείλουμε ορθολογικά να πιστεύουμε στην ύπαρξη κάθε οντότητας που έχει ένα αναπόδραστο εξηγητικό ρόλο στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες».

Η Leng είναι ρεαλίστρια ως προς τις επιστήμες και αποδέχεται τη συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση για τα τις υλικές θεωρητικές οντότητες. Την απορρίπτει, όμως, στην περίπτωση των μαθηματικών και επιχειρεί να συνδυάσει τον επιστημονικό ρεαλισμό με τον μαθηματικό φιξιοναλισμό. Για αυτήν, το αναπόδραστο των μαθηματικών δεν είναι κάτι που μας δεσμεύει σε *πραγματική*, αντί για *φανταστική*, ύπαρξη αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων.

Η Leng στηρίζεται βασικά στο ότι φανταστικές οντότητες *μπορούν* να παίξουν χρήσιμο ρόλο στις επιστημονικές θεωρίες. Εξιδανικευμένες φυσικές οντότητες χρησιμοποιούνται ευρέως στην επιστημονική πρακτική: έδαφος χωρίς τριβή, ιδανικά αέρια, ιδανικά ρευστά, σημειακές μάζες κ.λπ. Οι επιστήμονες, όμως, δεν δεσμεύονται στην ύπαρξη αυτών των οντοτήτων. Η Leng πιστεύει ότι πρέπει να ακολουθηθεί μια ανάλογη πορεία ως προς την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων.

Κατά την άποψή της, τόσο ο Baker όσο και ο Colyvan συμπεραίνουν αυθαίρετα πως οι προτάσεις που θεμελιώνουν μια μαθηματική εξήγηση είναι αληθείς. Η Leng υποστηρίζει πως το περιεχόμενο των μαθηματικών εξηγήσεων δεν χρειάζεται να είναι αληθές και, επομένως, τα αντικείμενα που προϋποθέτουν αυτές οι εξηγήσεις δεν χρειάζεται να υπάρχουν. Γράφει:

> Ο Baker και ο Colyvan έχουν (τουλάχιστον, δοκιμαστικά) δεχθεί πως οι θεωρίες μας ως σύνολο δεν χρειάζεται να είναι αληθείς για να είναι καλές, ότι κάνουν χρήση κάποιων ψευδών υποθέσεων με σκοπό να

αναπαραστήσουν αλήθειες σχετικά με τα φυσικά συστήματα.[44] (Leng 2005, σ. 180)

Για την Leng, ο *αναπαραστατικός* αυτός ρόλος των μαθηματικών είναι αυτό που κάνει τα μαθηματικά *καλές εξηγήσεις*, και όχι το αν είναι αληθή ή όχι.

> Μολονότι θέτουμε μαθηματικά αντικείμενα στο πλαίσιο των καλύτερων εξηγήσεών μας για τα εμπειρικά φαινόμενα, ο ρόλος που τα τιθέμενα μαθηματικά αντικείμενα παίζουν σε αυτές τις εξηγήσεις είναι ο ίδιος με το ρόλο που παίζουν σε οποιαδήποτε θεωρητική αναπαράσταση των εμπειρικών φαινομένων. Δηλαδή, αυτό που κάνει τις μαθηματικές εξηγήσεις *καλές* εξηγήσεις δεν είναι ότι οι μαθηματικές τους υποθέσεις είναι αληθείς για ένα βασίλειο πραγματικά υπαρκτών μαθηματικών αντικειμένων, αλλά μάλλον ότι επιτρέπουν καλές *αναπαραστάσεις* των μη μαθηματικών αντικειμένων που μοντελοποιούν.[45] (Leng 2010, σ. 245)

Έτσι, το να είναι φανταστικές οι μαθηματικές οντότητες δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να είναι και εξηγητικές ταυτόχρονα – θέση που υποστηρίζει αναφερόμενη στο παράδειγμα των τζιτζικιών και που θα αναλύσω στο πέμπτο κεφάλαιο. Η ίδια αναρωτιέται:

> Δεν θα μπορούσε μια μαθηματική εξήγηση να παίρνει αξία *ως εξήγηση* λόγω των συνθηκών που επιβάλλει σε υλικά, μη μαθηματικά συστήματα; Δεν θα μπορούσαν αυτές οι συνθήκες να επιβληθούν εξίσου καλά από μια φανταστική θεωρία όσο και από μια κυριολεκτικώς αληθή;[46] (Leng 2005, σ.180)

Με αυτό τον τρόπο, επιχειρείται μια σύζευξη του φιξιοναλισμού ως προς τις μαθηματικές οντότητες με τον εξηγητικό ρόλο των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες.

Από την άλλη, ο Baker (2009) βρίσκει τα επιχειρήματα και τα παραδείγματα της Leng ανεπαρκή ώστε να δείξουν ότι μια φιξιοναλιστική στρατηγική που απορρίπτει τη συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση για τις μαθηματικές οντότητες είναι

---

[44] "Baker and Colyvan have (at least tentatively) accepted that our theories as a whole need not be true to be good, that they may make use of some false hypotheses in order to represent truths about physical systems."

[45] "[…] even though we posit mathematical objects in the context of our best explanations of empirical phenomena, the role that mathematical posits play in these explanations is just the same as the role they play in any theoretical representations of empirical phenomena. That is, what makes the mathematical explanations *good* explanations is not that their mathematical hypotheses are true of a realm of really existing mathematical objects, but rather, that they allow for good *representations* of the non-mathematical objects they model."

[46] "Couldn't a mathematical explanation get its value as an explanation due to the conditions it imposes on concrete, non-mathematical systems? And couldn't these conditions be imposed equally well by a fictional theory as they would be by a literally true one?"

μια συνεπής θέση. Κατά αυτόν, δεν μπορείς να χρησιμοποιήσεις οντότητες «υπό αμφισβήτηση» για εξηγητικούς σκοπούς. Δίνει το παράδειγμα της «απώλειας» μάζας-ενέργειας στα προϊόντα της διάσπασης ενός ηλεκτρονίου που εξηγείται με την εκπομπή ενός νετρίνου. Γράφει, λοιπόν, ο Baker (2009, σ. 628):

> Εδώ εξηγώ την απούσα μάζα-ενέργεια υποθέτοντας τα νετρίνα. Η παρατηρημένη μάζα-ενέργεια είναι λιγότερη *επειδή* ένα (μη ανιχνευμένο) νετρίνο έχει εκπεμφθεί. Αλλά δεν βλέπω πώς μπορώ νομίμως να προσφέρω αυτή την εξήγηση, καταφεύγοντας ταυτόχρονα στον ασθενέστερο αντιγεγονοτικό υποθετικό λόγο (από φόβο μη δεσμευτώ στην ύπαρξη των νετρίνων): Αν υπήρχαν νετρίνα, τότε η «απώλεια» μάζας-ενέργειας στα προϊόντα της διάσπασης του ηλεκτρονίου θα ήταν λόγω ενός νετρίνου που θα είχε εκπεφθεί.[47]

Έτσι ο Baker υπερασπίζεται το ενισχυμένο επιχείρημα του αναπόδραστου από τις ενστάνσεις της Leng.

3.6 Η ΚΡΙΤΙΚΗ STEINER-BANGU

Αρχικά, ο Mark Steiner, αποδέχεται την ύπαρξη μαθηματικών εξηγήσεων στη φυσική και επισημαίνει πως ένα μεγάλο κομμάτι εξηγήσεων στην επιστήμη απαιτεί ανάλυση μαθηματικών εξηγήσεων στα καθαρά μαθηματικά. Κάνει, όμως, μια διάκριση:

> Η διαφορά μεταξύ μαθηματικών και φυσικών εξηγήσεων *φυσικών* φαινομένων μπορεί τώρα να υποβληθεί σε ανάλυση. Και στις δύο, γίνεται χρήση τόσο μαθηματικών, όσο και φυσικών, αληθειών. Όμως, μόνο στη μαθηματική εξήγηση ισχύει το εξής: όταν αφαιρέσουμε τη φυσική, μας μένει μια μαθηματική εξήγηση μιας μαθηματικής αλήθειας.[48] (Steiner 1978, σ.19)

Δηλαδή, μια μαθηματική εξήγηση ενός φυσικού γεγονότος είναι ουσιαστικά η μαθηματική εξήγηση ενός μαθηματικού γεγονότος (αν αφαιρέσουμε τους φυσικούς νόμους και τις φυσικές συνθήκες του δεδομένου φυσικού γεγονότος). Σε μια φυσική εξήγηση, όμως, δεν μένουμε με τίποτα (αν παρομοίως αφαιρέσουμε τη φυσική).

---

[47] "Here I am explaining the missing mass-energy by positing neutrinos. The observed mass-energy does not add up because an (undetected) neutrino has been emitted. But I do not see how I can legitimately offer this as the explanation while simultaneously retreating to the weaker subjunctive conditional (out of worry I am taking on a commitment to the existence of neutrinos): If there were neutrinos then the 'missing' mass-energy in the products of the electron decay would be due to a neutrino having been emitted."

[48] "The difference between mathematical and physical explanations of *physical* phenomena is now amenable to analysis. In the former, as in the latter, physical and mathematical truths operate. But only in mathematical explanation the case is this: when we remove the physics, we remain with a mathematical explanation of a mathematical truth!"

Πέραν αυτού, όμως, ο ίδιος υποστηρίζει πως το να επικαλούμαστε μαθηματικές εξηγήσεις στη φυσική για να συναγάγουμε πως υπάρχουν οι εμπλεκόμενες μαθηματικές οντότητες είναι αφελές, καθώς αυτό που χρειάζεται εξήγηση δεν μπορεί καν *να περιγραφεί* χωρίς τη χρήση μαθηματικής γλώσσας. Λέει χαρακτηριστικά (Steiner 1978, σ. 20): «Δεν μπορούμε να πούμε τι θα ήταν ο κόσμος χωρίς αριθμούς, καθώς η περιγραφή οποιασδήποτε εμπειρίας (εκτός από το απόλυτο τίποτα) προϋποθέτει την ύπαρξή τους».[49] Η ύπαρξη μαθηματικών εξηγήσεων για εμπειρικά φαινόμενα δεν μπορεί, λοιπόν, να χρησιμοποιηθεί ως επιχείρημα που επιβεβαιώνει την ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων, αφού η ύπαρξη αυτή –που υποτίθεται προσπαθούμε να αποδείξουμε– θεωρείται δεδομένη στην περιγραφή των φαινομένων που χρειάζονται εξήγηση.

Αυτό είναι ένα επιχείρημα που χρησιμοποιεί και ο Sorin Bangu (2008). Η μαθηματική γλώσσα παίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της ερώτησης που τίθεται προς απάντηση – όπως, λ.χ., στο παράδειγμα των περιοδικών τζιτζικιών του Baker («Γιατί είναι η περίοδος του κύκλου ζωής των τζιτζικιών πρώτος αριθμός;»). Η ερώτηση, όπως και η παρατήρηση στην οποία αντιστοιχεί («Η περίοδος του κύκλου ζωής των τζιτζικιών είναι πρώτος αριθμός»), είναι εκφρασμένη σε μια γλώσσα στην οποία η ύπαρξη των αριθμών και των ιδιοτήτων τους είναι προαπαιτούμενη. Στο πέμπτο κεφάλαιο παραθέτω πιο αναλυτικά την απάντηση του Bangu στο παράδειγμα των τζιτζικιών.

[49] “We cannot say what the world would be like without numbers, because describing any thinkable experience (except for utter emptiness) presupposes their existence”

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ

Ένα λεπτό σημείο όταν μιλάμε για μαθηματικές οντότητες είναι μέχρι «πού φτάνουν» τα μαθηματικά και τι εννοούμε όταν μιλάμε για αυτά. Ένας νομιναλιστής, όταν υποστηρίζει τον αντιρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες ή την αντικαταστασιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων, θα πρέπει να σκεφτεί αν είναι έτοιμος να κάνει κάτι αντίστοιχο και για τη λογική. Για αυτό το λόγο, στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσω αρχικά σε ποιο βαθμό μπορούμε να διαχωρίσουμε τα μαθηματικά από τη λογική. Σε δεύτερη φάση, θα εξετάσω τη σχετική θέση της θεωρίας συνόλων.

4.1 ΛΟΓΙΚΗ

Η έκταση της σύγχρονης λογικής είναι πολύ ευρεία. Συμπεριλαμβάνει (για κάθε λογικό σύστημα), γραμματική και σύνταξη, σημασιολογία, θεωρία μοντέλων, θεωρία αποδείξεων, εφαρμογές, μεταθεωρία και θεωρία υπολογισιμότητας. Τα καθαρά μαθηματικά θεμελιώνονται σε τέτοια λογικά συστήματα και, από την άλλη, *προσφέρουν τις ίδιες τις έννοιες και τις μεθόδους της λογικής*.

Παραδοσιακά, η θεωρία συνόλων θεωρείτο και αυτή «κομμάτι» της λογικής. Στα τέλη του 19^{ου} και τις αρχές του 20^{ου} αιώνα, οι πρωτοπόροι της σύγχρονης λογικής (Frege, Russell, Whitehead, κ.λπ.), χρησιμοποιούσαν ελεύθερα μαζί με πρωτοβάθμια ποσόδειξη πάνω σε άτομα (‘$\forall x$’, ‘$\exists x$’) και δευτεροβάθμια ποσόδειξη πάνω σε κλάσεις αντικειμένων (‘$\forall A$’, ‘$\exists A$’), πάνω σε κλάσεις κλάσεων αντικειμένων (‘$\forall A^2$’, ‘$\exists A^2$’) κ.ο.κ. Αργότερα πολλοί φιλόσοφοι, όπως ο Quine, ισχυρίστηκαν ότι η «δευτεροβάθμια λογική» δεν είναι *λογική* αλλά μέρος της θεωρίας συνόλων.

Όλα αυτά θέτουν το επιτακτικό ερώτημα: αν θέλουμε να απαλλάξουμε, για νομιναλιστικούς λόγους, την επιστήμη από τα μαθηματικά, πόσο «βαθιά» πρέπει να φτάσουμε; Για παράδειγμα, η εμπειρική επιστήμη δύσκολα μπορεί να προχωρήσει χωρίς «αρχές» σαν τις παρακάτω:

[B] Αν όλα τα *A* είναι *B* και όλα τα *B* είναι *C*, τότε όλα τα *A* είναι *C*.

Η λογική αλήθεια της [B] εκφράζει την εγκυρότητα του συλλογιστικού σχήματος της αριστοτελικής λογικής που αργότερα έφερε το όνομα “BARBARA”. Πρόκειται για αρχή της *λογικής* ή των *μαθηματικών*;

Από τη μια, αντιστοιχεί στον παρακάτω λογικά έγκυρο τύπο του πρωβάθμιου κατηγορηματικού λογισμού:

[B_1] $((\forall x)(Ax \rightarrow Bx) \wedge (\forall x)(Bx \rightarrow Cx)) \rightarrow (\forall x)(A\mathrm{x} \rightarrow C\mathrm{x})$.

Από την άλλη, αν ερμηνεύσουμε την [B] θεωρώντας τα *A, B, C* κλάσεις (σύνολα), τότε η [B] εκφράζει τη μεταβατικότητα της διμελούς σχέσης «είναι υποκλάση της» («είναι υποσύνολο του») και εκφράζεται εύλογα ως εξής:

[B_2] Για όλες τις κλάσεις *A, B, C*, αν η *A* είναι υποκλάση της *B* και η *B* είναι υποκλάση της *C*, τότε η *A* είναι υποκλάση της *C*.

Και σε αυτή την ερμηνεία φαίνεται να πρόκειται για αρχή της θεωρίας συνόλων. Βέβαια, ένας σύγχρονος σπουδαστής της λογικής θα διακρίνει απλώς τον λογικώς έγκυρο τύπο από την ερμηνεία του με τη βοήθεια της θεωρίας συνόλων. Αλλά πώς θα κατανοήσει την [B] ένας νομιναλιστής;

Οι νομιναλιστές, όπως είπαμε, είναι φιλόσοφοι που θεωρούν πως οι μαθηματικές οντότητες (όπως, π.χ., οι κλάσεις ή οι αριθμοί) δεν υπάρχουν. Έτσι ένας νομιναλιστής θα πρέπει, αντί της [B_2], να πει:

[B_3] Το ακόλουθο γίνεται αληθής *πρόταση* με οποιεσδήποτε *λέξεις* ή *φράσεις* του κατάλληλου *είδους* να αντικαθιστούν τα γράμματα *A, B, C*: «Αν όλα τα *A* είναι *B* και όλα τα *B* είναι *C*, τότε όλα τα *A* είναι *C*».

Και σε αυτή τη διατύπωση, οι εκφράσεις «πρόταση», «λέξεις», «φράσεις» κ.ο.κ. θα αναφέρονται σε *συγκεκριμένες γλωσσικές*, όχι σε αφηρημένες, οντότητες. Βλέπουμε, λοιπόν, πως η διαφωνία περί της ύπαρξης μαθηματικών οντοτήτων υπεισέρχεται στο ζήτημα της σωστής έκφρασης και ερμηνείας αποδεκτών λογικών αρχών.

Αλλά, όπως ισχυρίζεται ο Putnam ([1975] 1979, σ. 326), η [B_3] δεν είναι προτιμότερη της [B_2]. Διότι τι μπορούμε να εννοούμε με «λέξη ή φράση του κατάλληλου είδους»; Ακόμη και αν παραβλέψουμε την προβληματική για τον νομιναλιστή έκφραση «κατάλληλο είδος»,[50] πρέπει να αντιμετωπίσουμε το γεγονός ότι αναφερόμαστε σε όλες τις *δυνατές* (possible) λέξεις ή φράσεις του ενός ή του άλλου είδους και αυτή η έννοια *δεν είναι λιγότερο αφηρημένη* από εκείνη της κλάσης.

Ο νομιναλιστής θα μπορούσε να καταφύγει στο εξής: οι «λέξεις ή φράσεις του κατάλληλου είδους» στην [B_3] είναι όλα τα μονοθέσια κατηγορήματα σε μια τυπική γλώσσα *L*. Αυτό είναι τόσο σαφές ώστε ο έλεγχος του αν μια πεπερασμένη σειρά συμβόλων («γραμμάτων») είναι περίπτωση αντικατάστασης (substitution instance) της «Αν όλα τα *A* είναι *B* και όλα τα *B* είναι *C*, τότε όλα τα *A* είναι *C*» μπορεί να γίνει εντελώς μηχανικά, π.χ., από έναν υπολογιστή. Έτσι ο νομιναλιστής θα πρέπει να κατανοήσει την [B] ως εξής:

[B_4] Όλες οι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων που αποτελούν περιπτώσεις αντικατάστασης της «Αν όλα τα *A* είναι *B* και όλα τα *B* είναι *C*, τότε όλα τα *A* είναι *C*» σε μια τυπική γλώσσα *L* είναι αληθείς προτάσεις.

Αλλά το προβλήματα για τον νομιναλιστή εξακολουθούν να είναι πολλά και δύσκολα.

Πρώτο, ο νομιναλιστής θα πρέπει να ορίσει μια νομιναλιστικά αποδεκτή έννοια *αλήθειας*. Και συνήθως δεν θεωρούμε ως αληθείς ή ψευδείς τις ίδιες τις πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων (που ικανοποιούν κάποιο τυπικό συντακτικό κριτήριο) αλλά αυτά που αυτές *εκφράζουν*.[51] Δεύτερο, η [B_4] πρέπει να εφαρμόζεται σε όλες τις *δυνατές* πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων και όχι μόνο σε αυτές που υπάρχουν ως φυσικά αντικείμενα (π.χ., που έχουν γραφεί ως σημάδια από μελάνι πάνω σε χαρτί).[52] Και αυτή η έννοια των *δυνατών πεπερασμένων ακολουθιών συμβόλων* δεν φαίνεται να είναι νομιναλιστικά αποδεκτή, αφού δεν είναι λιγότερο αφηρημένη από εκείνη της κλάσης. Τέλος, όταν στις επιστήμες και αλλού χρησιμοποιούμε την [B], την χρησιμοποιούμε εννοώντας ότι θα δώσει μια λογική

---

[50] Τα *είδη* είναι πιο αποδεκτά, από νομιναλιστική σκοπιά, από τις *κλάσεις*;

[51] Ποια έννοια *αλήθειας* είναι, λοιπόν, διαθέσιμη στους νομιναλιστές; Η νομιναλιστική μεταφυσική, όπως νοείται συνήθως, προβλέπει μόνο φυσικές οντότητες. Το *αληθές*, όμως, δεν έχει νόημα για φυσικά αντικείμενα (π.χ., την ίδια τη γραπτή / γραμμένη πρόταση). Το *αληθές* αφορά αυτό που η πρόταση *λέει* δηλαδή το *γεγονοτικό περιεχόμενο* (factual content) στο οποίο αναφέρεται. Το νόημα μιας πρότασης δεν αποτελεί φυσικό αντικείμενο. Ο νομιναλιστής οφείλει κάποιου είδους ορισμό της αλήθειας, που είναι συνεπής με τη μεταφυσική του.

[52] Δεν μιλάμε, δηλαδή, για πραγματικές *εγγραφές* (inscriptions), αφού δεν είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι οι απείρως πολλές προτάσεις μιας τυπικής γλώσσας είναι γραμμένες κάπου. Μιλάμε για *δυνατές* εγγραφές ή ίσως για *τύπους* εγγραφών.

αλήθεια *ανεξάρτητα από τα ποια ονόματα κλάσεων* θα αντικαταστήσουν τα γράμματα *A*, *B*, *C*. Αν μια τυπική γλώσσα *L* περιείχε ονόματα για όλες τις κλάσεις αντικειμένων που θα μπορούσαν να σχηματιστούν, τότε θα μπορούσαμε απλώς να πούμε ότι όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασεις της [B] στην *L* είναι αληθείς. Αλλά προκύπτει ως θεώρημα από τη θεωρία συνόλων ότι *καμιά τυπική γλώσσα L δεν μπορεί να περιέχει ονόματα για όλες τις κλάσεις αντικειμένων που μπορούν να σχηματιστούν*, τουλάχιστον αν το πλήθος των αντικειμένων είναι άπειρο.[53]

Για λόγους σαν τους παραπάνω, ο Putnam ([1975] 1979, σ. 333) συμπεραίνει ότι αναφορά σε «κλάσεις», ή κάποιες άλλης μη φυσικές οντότητες, είναι απαραίτητη για την «επιστήμη» της λογικής. Επιπλέον ισχυρίζεται ότι η άποψη που εντάσσει τη δευτεροβάθμια λογική στα *μαθηματικά*, διαχωρίζοντάς την από τη λογική –μια άποψη που έχει υποστηρίξει ο Quine– όχι μόνο αντιτίθεται στην παράδοση των Frege, Russell, κ.λπ., αλλά και έχει παράδοξες συνέπειες. Πράγματι, ας πούμε ότι δεν θέλουμε να κατανοήσουμε την [B] ως αρχή της δευτεροβάθμιας λογικής:

[B_5] $(\forall A)(\forall B)(\forall C)(((\forall x)(Ax \to Bx) \wedge (\forall x)(Bx \to Cx)) \to (\forall x)(Ax \to Cx))$.

Τι μπορούμε να πούμε; Ότι όλες οι περιπτώσεις αντικατάστασης της [B_1] είναι λογικές αλήθειες; Ίσως, αλλά τότε και η παρακάτω πρόταση θα είναι αληθής:

[B_6] Αν όλα τα κλικάκια είναι μιζουράκια και όλα τα μιζουράκια είναι μπιλουράκια, τότε όλα τα κλικάκια είναι μπιλουράκια.

Σκεφθείτε, όμως, ότι για να είναι αληθής μια πρόταση της μορφής $(p \wedge q) \to r$ πρέπει είτε να είναι τουλάχιστον η μια από τις *p* και *q* ψευδής είτε να είναι η *r* αληθής. Αλλά κατά τον Putnam, οι εκφράσεις «Όλα τα κλικάκια είναι μιζουράκια»

[53] Η απόδειξη έχει ως εξής. Μια τυπική γλώσσα *L* έχει το πολύ ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο στοιχειωδών συμβόλων (κατηγορήματα, συναρτήσεις, σταθερές, μεταβλητές, συνδέσμους, ποσοδείκτες, παρενθέσεις). Επομένως, το σύνολο όλων πεπερασμένων ακολουθιών στοιχειωδών συμβόλων της *L* είναι επίσης το πολύ άπειρο αριθμήσιμο. Και επειδή οι καλώς σχηματισμένοι τύποι (κστ) της *L* δεν είναι παρά συντακτικά ορθές τέτοιες πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων, το σύνολο των κστ της *L* είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο. Αν μια μαθηματική θεωρία στην *L* προβλέπει την ύπαρξη ενός άπειρου συνόλου, έστω Ω, τότε το Ω θα έχει πληθικότητα τουλάχιστον ίση με εκείνη του συνόλου των φυσικών αριθμών. Και σύμφωνα με το θεώρημα του Cantor, το δυναμοσύνολο (σύνολο όλων των υποσυνόλων) $P(\Omega)$ του Ω θα έχει πληθικότητα αυστηρά μεγαλύτερη από εκείνη του Ω – θα είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως θα υπάρχουν στοιχεία του $P(\Omega)$, που δεν θα αντιστοιχούν σε κστ της *L*. Δηλαδή, θα υπάρχουν «κλάσεις» αντικειμένων που δεν θα έχουν κάποιο «όνομα» στην *L*. Στη θεωρία συνόλων *ZFC* (*Zermelo-Fraenkel με αξίωμα επιλογής C*), οδηγούμαστε σε ένα τέτοιο συμπέρασμα με αφετηρία το αξίωμα ύπαρξης απείρου: «Υπάρχει ένα σύνολο ω τέτοιο ώστε $\emptyset \in \omega$ και για κάθε x, αν $x \in \omega$, τότε $x \cup \{x\} \in \omega$».

και «Όλα τα μιζουράκια είναι μπιλουράκια» και «Όλα τα κλικάκια είναι μπιλουράκια» δεν εκφράζουν *ούτε αληθείς ούτε ψευδείς προτάσεις* – στερούνται νοήματος. Αντίθετα, το ότι τα κατηγορήματα «*x* είναι κοράκι», «*x* είναι μαύρο» και «*x* απορροφά φως» αληθεύουν για κάποια πράγματα, ενώ για άλλα όχι, προκύπτει από γνώση όχι μόνο της γλώσσας αλλά και του κόσμου. Και επομένως η αλήθεια της «Αν όλα τα κοράκια είναι μαύρα και όλα τα μαύρα πράγματα απορροφούν φως, τότε όλα τα κοράκια απορροφούν φως» δεν είναι θέμα μόνο λογικής (όπως θα έλεγε ο Quine) αλλά και *εξωλογικής* γνώσης.

4.2 ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Όλα τα κλασικά μαθηματικά θεμελιώνονται πάνω στη θεωρία συνόλων. Ένα διατεταγμένο ζεύγος $< x, y >$ είναι ένα σύνολο, $\{x, \{x, y\}\}$, μια διμελής σχέση είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών και μια συνάρτηση είναι μια διμελής σχέση f τέτοια ώστε αν $< x, u > \in f$ και $< x, v > \in f$ τότε $u = v$. Επιπλέον, οι φυσικοί αριθμοί 0, 1, 2, … μπορούν να οριστούν ως $\varnothing$ (κενό σύνολο), $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, … αντίστοιχα (κατά Zermelo). Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς μπορούν να οριστούν κατά τον συνήθη αναδρομικό τρόπο με τη βοήθεια της συνάρτησης s που απεικονίζει κάθε φυσικό στον επόμενό του.[54] Οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν να οριστούν ως κλάσεις ισοδυναμίας διατεταγμένων ζευγών φυσικών αριθμών.[55] Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να οριστούν ως κλάσεις ισοδυναμίας διατεταγμένων ζευγών ακεραίων (με μη μηδενική δεύτερη συνιστώσα).[56] Και, τέλος, οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να οριστούν ως κλάσεις ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών. Είναι σημαντικό ότι αυτές οι κατασκευές των κλασικών μαθηματικών δεν απαιτούν μόνο σύνολα ατόμων αλλά και σύνολα συνόλων ατόμων, σύνολα συνόλων συνόλων ατόμων, κ.ο.κ.

Ως επακόλουθο, η φυσική στηρίζεται και αυτή στη θεωρία συνόλων. Αλλά *απαιτεί* την *κλασική* θεωρία συνόλων; Υπάρχει κάποια νομιναλιστικά αποδεκτή έννοια που μπορεί να αντικαταστήσει εκείνη του συνόλου στη φυσική; Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 344-345) πρότεινε μια τέτοια έννοια.

---

[54] Π.χ., για την πρόσθεση, ορίζουμε: $m + 0 = m$ και $m + s(n) = s(m + n)$.
[55] Η σχέση ισοδυναμίας είναι: $< \alpha, \beta > \sim < \gamma, \delta >$ αν και μόνο αν $\alpha + \delta = \beta + \gamma$.
[56] Η σχέση ισοδυναμίας είναι: $< \alpha, \beta > \approx < \gamma, \delta >$ αν και μόνο $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια νομιναλιστική γλώσσα N με νομιναλιστικά αποδεκτούς ορισμούς των γραμματικών / συντακτικών κατηγοριών της καθώς και μια νομιναλιστικά αποδεκτή έννοια της αλήθειας. Τότε μπορούμε, αντί να μιλάμε για σύνολα, να μιλάμε για τους κστ της N που έχουν ακριβώς μια ελεύθερη μεταβλητή – π.χ., αντί να μιλάμε για το σύνολο όλων των κόκκινων πραγμάτων να μιλάμε για τον $R(x)$ («Το x είναι κόκκινο»). Και η «Το a ανήκει στο σύνολο των κόκκινων πραγμάτων» θα είναι «Η ‘$R(x)$’ είναι αληθής για το a», η οποία με τη σειρά της θα είναι ισοδύναμη με την «Το a είναι κόκκινο». Έστω τώρα N' η γλώσσα που παράγεται από την N επιτρέποντας ποσόδειξη πάνω σε όλα τα «σύνολα ατόμων» που ορίζονται στην N, N'' η γλώσσα που παράγεται από την N' επιτρέποντας ποσόδειξη πάνω σε όλα τα «σύνολα ατόμων» που ορίζονται στην N', κ.ο.κ. Τότε όλα αυτά τα «σύνολα ατόμων» –αυτά που ορίζονται στην N, στην N', στην N'', κ.ο.κ.– θα είναι περιπτώσεις «κατηγορηματικών» (“predicative”) «συνόλων»: καθένα από αυτά προϋποθέτει μια ολότητα που κατασκευάζεται σε προηγούμενο στάδιο (αρχίζοντας με την ολότητα των ατόμων) η οποία *δεν* το προϋποθέτει. Το κρίσιμο για τον νομιναλιστή είναι ότι όλη αυτή η συζήτηση περί «συνόλων» μπορεί να εκληφθεί ως *τρόπος του λέγειν* και να επεξηγηθεί με χρήση γραμματικών / συντακτικών εννοιών και της έννοιας της αλήθειας.

Είναι αυτή η «ασθενής έννοια συνόλου» επαρκής για τη φυσική; Η απάντηση εξαρτάται από το πόση πραγματική, μιγαδική, συναρτησιακή, κ.λπ., ανάλυση μπορεί να στηρίξει. Ο Putnam ([1975] 1979, σ. 346) φαίνεται να απαντάει θετικά:

> Οι συνολοθεωρητικές «ανάγκες» της φυσικής είναι εντυπωσιακά παρόμοιες με τις συνολοθεωρητικές ανάγκες της καθαρής λογικής. Και οι δυο κλάδοι χρειάζονται *κάποια* θεωρία συνόλων για να λειτουργήσουν κάπως. Και οι δυο κλάδοι μπορούν να «ζήσουν» –αλλά να ζήσουν άσχημα– με την πενιχρή δίαιτα των κατηγορηματικών συνόλων. Και οι δυο μπορούν να ζήσουν εξαιρετικά ευτυχισμένα με την πλούσια δίαιτα των μη κατηγορηματικών συνόλων.[57]

Ωστόσο, η συλλογιστική του Putnam εδράζεται στο πόσα μαθηματικά χρειαζόμαστε για τη διατύπωση ενός απλού φυσικού νόμου όπως ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, $F = Gm_1m_2/r^2$. Η σύγχρονη φυσική έχει ανάγκη από πολύ πιο πλούσιες μαθηματικές δομές (π.χ., χώρους Hilbert, ομάδες Lie, κ.λπ.) και το κατά

[57] “The set theoretic ‘needs’ of physics are surprisingly similar to the set theoretic needs of pure logic. Both disciplines need *some* set theory to function at all. Both disciplines can ‘live’ – but live badly – on the meager diet of only predicative sets. Both can live extremely happily on the rich diet of impredicative sets.”

πόσο κάποιο είδος κατηγορηματικών μαθηματικών (predicative mathematics) είναι επαρκές για την «ανασυγκρότηση» τέτοιων δομών είναι ένα ανοιχτό ζήτημα που υπερβαίνει το πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΞΗΓΗΤΙΚΟΣ ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο εξηγητικός ρόλος των μαθηματικών στις επιστήμες είναι ένα κρίσιμο σημείο, στο οποίο, όπως είδαμε, βασίστηκε ο Baker για να τροποποιήσει το επιχείρημα του αναπόδραστου. Ο Colyvan (2002, σ. 72) γράφει: «Δεν υπάρχει αμφιβολία πως η εξηγητική ικανότητα είναι μια θεωρητική υπεροχή (τουλάχιστον για τους επιστημονικούς ρεαλιστές)»[58]· και ο Melia (2002, σ. 75) συμφωνεί πως «η εξηγητική ισχύς μιας θεωρίας είναι επίσης υπεροχή μιας θεωρίας»[59]. Ακόμη, ο Field (1989, σ. 82) αναφέρει: «το κλειδί στη διαμάχη πλατωνισμού-νομιναλισμού είναι ένα ειδικό είδος επιχειρήματος αναπόδραστου: ένα που εμπεριέχει αναπόδραστο *για εξηγήσεις*».

Το αν τα μαθηματικά μπορούν να παίξουν εξηγητικό ρόλο στην επιστήμη είναι ένα πολύ επίμαχο θέμα. Ακόμη και αν βρεθούν καλά παραδείγματα για μαθηματική εξήγηση (όπου η εξήγηση αυτή είναι η καλύτερη για τα φαινόμενα που εξηγούμε), αυτό δεν συνεπάγεται άμεσα οντολογική δέσμευση στις μαθηματικές οντότητες. Ένα παράδειγμα μαθηματικής εξήγησης, για να έχει δεσμευτικό χαρακτήρα στην πεποίθηση ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων, πρέπει να μην επιδέχεται αντίστοιχη νομιναλιστική εξήγηση. Παρακάτω παρατίθενται κάποια από τα σημαντικά παραδείγματα φαινομένων, τα οποία έχουν συζητηθεί εκτενώς σχετικά με το ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στην εξήγησή τους.

5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ COLYVAN

Ο Colyvan υποστηρίζει πως τα καθαρά μαθηματικά μπορούν να είναι γνησίως εξηγητικά στην πραγμάτευση φυσικών φαινομένων και παρουσιάζει διάφορα παραδείγματα για τεκμηρίωση του ισχυρισμού του.

Αντίποδα καιρικά συστήματα. Ο Colyvan (2001, σ. 49) παρουσιάζει το προς εξήγηση φαινόμενο ως εξής:

> Ανακαλύπτουμε ότι σε μια χρονική στιγμή t_0 υπάρχουν δύο αντιδιαμετρικά σημεία p_1, p_2 πάνω στην επιφάνεια της γης με ακριβώς την ίδια θερμοκρασία

[58]"[…] there's no doubt that explanatory power is a theoretical virtue (at least for scientific realists)."
[59] "[…] explanatory power of a theory is also a virtue of a theory…"

και βαρομετρική πίεση. Ποια είναι η εξήγηση αυτής της σύμπτωσης; Παρατηρήστε ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν δυο συμπτώσεις για να εξηγηθούν εδώ: (1) Γιατί υπάρχουν *οποιαδήποτε* τέτοια αντιδιαμετρικά σημεία; (2) Γιατί τα p_1 και p_2 συγκεκριμένα;[60]

Για τον Colyvan υπάρχει μια καθαρά αιτιακή ιστορία που εξηγεί το (2), βασισμένη στο λεπτομερές ιστορικό των καιρικών συνθηκών στις περιοχές γύρω από τα p_1 και p_2. Αυτή η αιτιακή ιστορία δεν μπορεί να εξηγήσει το (1) όμως. Ο Colyvan (2001, σ. 49) γράφει ότι «μια τέτοια εξήγηση δεν εξηγεί γιατί τα p_1 και p_2 έχουν την *ίδια* θερμοκρασία και βαρομετρική πίεση, απλώς γιατί το καθένα έχει τη συγκεκριμένη θερμοκρασία και πίεση που έχει και ότι αυτές *τυχαίνει* να είναι οι ίδιες».[61] Ο Colyvan παρομοιάζει αυτού του είδους την εξήγηση με την εξήγηση 11 δυστυχημάτων στους δρόμους της πολιτείας New South Wales κατά τη διάρκεια του Πάσχα του 1995. Η αιτιακή ιστορία θα αποτελείται από τις αιτιακές ιστορίες των επιμέρους δυστυχημάτων, αλλά δεν θα εξηγήσει γιατί υπήρξαν ακριβώς 11. Για τον Colyvan, στη δεύτερη περίπτωση (αυτή των δυστυχημάτων), η έλλειψη της εξήγησης αυτής δεν είναι σημαντική καθώς δεν φαίνεται να υπάρχει κάτι (σημαντικό) περαιτέρω προς εξήγηση.

Αλλά η περίπτωση των αντίποδων καιρικών συστημάτων είναι διαφορετική. Η περαιτέρω εξήγηση σε αυτή την περίπτωση, όμως, βρίσκεται σε μια συνέπεια του θεωρήματος Borsuk-Ulam της αλγεβρικής τοπολογίας μαζί με κάποιες δομικές υποθέσεις (ότι η γη είναι τοπολογικά ισοδύναμη μιας σφαίρας και ότι η θερμοκρασία και η βαρομετρική πίεση μεταβάλλονται συνεχώς πάνω στην επιφάνεια της γης).[62] Για τον Colyvan, το θεώρημα αυτό μας δίνει το κομμάτι που λείπει από την εξήγηση του (1). Η εξήγηση αυτή, βέβαια, κάνει χρήση μη αιτιακών οντοτήτων, όπως «συνεχείς συναρτήσεις» και «σφαίρες» .

Ο Alan Baker (2005, σ. 226) έχει αμφιβολίες κατά πόσο το παράδειγμα είναι γνησίως εξηγητικό. Πρώτον, το να βρεις πραγματικά δύο τέτοια σημεία είναι σχεδόν

---

[60] "We discover that at some time t_0 there are two antipodal points p_1, p_2 on earth's surface with exactly the same temperature and barometric pressure. What is the explanation of this coincidence? Notice that there are really two coincidences to be explained here: (1) Why are there *any* such antipodal points? (2) Why p_1 and p_2 in particular?"

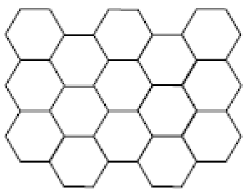
[61] "[…] an explanation such as this does not explain why p_1 and p_2 have the same temperature and barometric pressure, just why each has the particular temperature and pressure that they have, and that these *happen* to be the same."

[62] Αν $f\colon S^n \to R^n$ είναι μια συνεχής συνάρτηση από την n-σφαίρα στον n-διάστατο ευκλείδειο χώρο, τότε υπάρχει $x \in S^n$ τέτοιο ώστε $f(-x) = f(x)$. Η περίπτωση που ενδιαφέρει είναι η $n = 2$.

απίθανο· δεν είναι κάτι στο οποίο είναι πιθανό να πέσουμε πάνω κατά λάθος. Το φαινόμενο δεν είναι καν κάτι που οι μετεωρολόγοι θα έψαχναν, εκτός αν γνώριζαν ήδη τη συνέπεια του μαθηματικού θεωρήματος. «Το εξηγητέο πιθανότατα δεν θα μας παρουσιαζόταν, εκτός εάν (και έως ότου) είχαμε τις εξηγήσεις στο χέρι»[63] (Baker 2005, σ. 226). Σε αυτήν την περίπτωση όμως, ο Colyvan δεν φαίνεται να μας δίνει παράδειγμα εξήγησης, αλλά παράδειγμα *πρόβλεψης*.

Ο Baker (2000, σ. 226) θέτει έναν ακόμη προβληματισμό: «Αν οι μετεωρολόγοι ανακάλυπταν πράγματι δύο τέτοια αντιδιαμετρικά σημεία, θα θεωρούσαν ότι αυτό το φαινόμενο χρειάζεται εξήγηση;»[64] Αυτό είναι ένα κρίσιμο ερώτημα καθώς ο ίδιος ο Colyvan λέει πως ένα κριτήριο για *κατάλληλη εξήγηση* είναι ότι «πρέπει να κάνει τα φαινόμενα που εξηγούνται λιγότερα μυστήρια»[65] (Colyvan 2001, p.47). Υπάρχει, λοιπόν, σε αυτήν την περίπτωση όντως ένα *μυστήριο* που χρήζει εξήγησης; Ο Baker σχολιάζει την ειρωνεία που ενυπάρχει τόσο στο ότι ο Colyvan αντιφάσκει με το δικό του κριτήριο, όσο και στο ότι ο ίδιος ο χρησιμοποιεί τον όρο «σύμπτωση» για να περιγράψει το φαινόμενο αυτό· στην καθημερινότητα οι συμπτώσεις είναι ακριβώς τα γεγονότα που δεν χρειάζονται περαιτέρω εξήγηση.

Κερήθρες. Ένα άλλο παράδειγμα που δίνει ο Colyvan, με τον Aidan Lyon αυτή τη φορά, είναι από την εξελικτική βιολογία και αφορά τις κερήθρες των μελισσών. Το ερώτημα είναι γιατί το σχήμα της κερήθρας να είναι πάντοτε εξαγωνικό.



Κατά τους Lyon και Colyvan (2008, σ. 228):

[63] "The explanandum would probably not suggest itself to us unless and until we had the explanans in hand."
[64] "If meteorologists did discover two such antipodal points, would they consider this a phenomenon that was in need of explanation?"
[65] "I will assume only that an explanation must be enlightening -it must make the phenomena being explained less mysterious."

> Αυτό που χρήζει εξήγησης εδώ είναι γιατί η κερήθρα διαιρείται πάντοτε σε εξάγωνα και όχι σε κάποιο άλλο πολύγωνο (όπως τρίγωνα ή τετράγωνα), ή οποιοδήποτε συνδυασμό διαφορετικών πολυγώνων (κυρτών ή μη);[66]

Η πρώτη συνιστώσα της εξήγησης είναι βιολογική και ανάγεται στη Φυσική Επιλογή. Οι μέλισσες οι οποίες χρησιμοποιούν λιγότερο κερί για να φτιάξουν τις κερήθρες τους προτιμούνται από αυτές που χρησιμοποιούν παραπάνω χωρίς να χρειάζεται. Είναι, λοιπόν, εξελικτικό πλεονέκτημα η ελαχιστοποίηση της ποσότητας κεριού που θα χρησιμοποιήσουν. Και εδώ ακριβώς υπεισέρχεται η μαθηματική εξήγηση: «το εξάγωνο είναι ο καλύτερος τρόπος να χωρίσεις μια επιφάνεια σε ίσα μέρη με τη μικρότερη δυνατή περιμέτρο»[67] (Lyon και Colyvan 2008, σ. 228). Η απόδειξη προσφέρθηκε το 1999 από τον Thomas Hales (2001) και εξηγεί γιατί το εξάγωνο είναι ο βέλτιστος τρόπος να χωρίσεις μια επιφάνεια σε ισεμβαδικές περιοχές.

Έτσι, το *θεώρημα της κερήθρας* σε συνδυασμό με την εξελικτική εξήγηση συναποτελούν την πλήρη εξήγηση του φαινομένου αυτού. Τα μαθηματικά είναι απαραίτητα και αναγκαία στην εξήγηση του φαινομένου και, για αυτόν τον λόγο, είναι και τα ίδια εξηγητικά· διότι αλλιώς δεν θα *γνωρίζαμε τον λόγο*, δεν θα *κατανοούσαμε* το φαινόμενο.

Αλλά η προσέγγιση των Lyon και Colyvan στο παράδειγμα αυτό δεν είναι άμοιρη ενστάνσεων. Το μαθηματικό κομμάτι της εξήγησης προέρχεται από τη γεωμετρία και την τοπολογία. Ο Field, όμως, έχει δείξει ότι μπορούμε να μιλήσουμε νομιναλιστικά για τη γεωμετρία του νευτώνειου χωροχρόνου, οπότε είναι πιθανό ένα παρόμοιο αποτέλεσμα να εξαγόταν στο δικό του σύστημα. Αν αυτό είναι πιθανό, η νομιναλιστική εξήγηση θα είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο και η παραπάνω. Θα μπορούσε, μάλιστα, κανείς να επιχειρηματολογήσει πως η νομιναλιστική εξήγηση είναι καλύτερη αφού είναι πιο φυσική. Αυτό, βέβαια, προϋποθέτει ότι η νομιναλιστική εξήγηση να πληροί τις προϋποθέσεις που θέτει ο Field (1989, σ. 193):

---

[66] "What needs explaining here is why the honeycomb is always divided up into hexagons and not some other polygon (such as triangles or squares), or any combination of different (concave or convex) polygons."

[67] "The mathematical part of the explanation then comes from what is known as the honeycomb conjecture: a hexagonal grid represents the best way to divide a surface into regions of equal area with the least total perimeter."

> Να είναι ικανή να εξηγήσει τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος βάσει των εγγενών ιδιοτήτων του συστήματος, χωρίς να επικαλείται εξωγενείς οντότητες (μαθηματικές ή μη) των οποίων οι ιδιότητες είναι άσχετες με τη συμπεριφορά του συστήματος που εξηγείται.[68]

Αλλά είναι οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων άσχετες προς τη συμπεριφορά του συστήματος που εξηγείται;

Σύμφωνα με τον Juha Saatsi (2010, σ. 145) το παράδειγμα δεν δείχνει τίποτα άλλο, πέραν του ότι «έχουμε μια διαίσθηση πως τα μαθηματικά έχουν *κάποια σχέση* με τον λόγο για τον οποίο οι μέλισσες χτίζουν έτσι τις κερήθρες τους».[69] Κατά τον ίδιο, η σχέση των μαθηματικών έχει να κάνει με τον *τρόπο* που μας βοηθάει να γνωρίζουμε φυσικά εξηγητικά γεγονότα, αλλά «*αυτός* ο ρόλος δεν καθιστά τα μαθηματικά καθαυτά εξηγητικά» (Saatsi 2010, σ. 145). Αντί να μιλήσουμε για τη μαθηματική εξήγηση ξεχωριστά από τη βιολογική (για το «μαθηματικό κομμάτι της εξήγησης»), μπορούμε να πούμε πως τα μαθηματικά *αναπαριστούν* όλα τα δυνατά σχήματα για κερήθρες και λόγω αυτής της αναπαραστατικής ικανότητας των μαθηματικών μπορούμε να συμπεράνουμε πως το εξάγωνο είναι ο βέλτιστος τρόπος.

Η αντίθεση έχει ως εξής. Οι Lyon και Colyvan υποστηρίζουν πως αν δεν είχαμε τα μαθηματικά, δεν θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο εξηγητέο συμπέρασμα. Είναι μόνο μέσω των μαθηματικών που μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό. Έτσι, λοιπόν, τα μαθηματικά πραγματικά *εξηγούν* το φυσικό γεγονός. Αντίθετα, ο Saatsi υποστηρίζει πως τα μαθηματικά μπορούν να μας οδηγήσουν στην γνώση κάποιου φυσικού γεγονότος υπό την έννοια της *δικαιολόγησης* μιας υπόθεσης που το αφορά, χωρίς απαραίτητα να το εξηγούν ή να παίρνουν μέρος στην εξήγησή του:

> Τα μαθηματικά μπορεί να είναι μη εξαλείψιμα από το να μάθουμε το κρίσιμο φυσικό γεγονός, το οποίο μετά επικαλείται η πλήρης εξελικτική εξήγηση του φαινομένου. Δεν υπάρχει «μαθηματικό κομμάτι» σε αυτήν την εξελικτική εξήγηση. Μάλλον, τα μαθηματικά παίζουν ρόλο μόνο στο να *αναπαριστούν* φυσικά γεγονότα που αφορούν εμβαδόν και όγκο στον Ευκλείδειο χώρο, επιτρέποντάς μας να συνάγουμε συγκεκριμένα φυσικά γεγονότα από άλλα

[68] "[…] be able to explain the behavior of the physical system in terms of the intrinsic features of that system, without invoking extrinsic entities (whether non-mathematical or mathematical) whose properties are irrelevant to the behavior of the system being explained."
[69] "All we have is an intuition that mathematics is somehow relevant for knowing why the bees build their honeycomb the way they do."

> φυσικά γεγονότα, και άρα, προσφέροντας γνώση του κρίσιμου εξηγητικού φυσικού γεγονότος.[70] (Saatsi 2010, σ. 146).

Δεν υπάρχει, λοιπόν, μαθηματική εξήγηση, απλώς χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά για να αναπαραστήσουμε και να συναγάγουμε το βιολογικό γεγονός. Ένα φυσικό γεγονός (μπορεί να) ακολουθεί κάποιο προηγούμενο («αιτία»), για το οποίο γνωρίζουμε παραπάνω πράγματα. Με τη βοήθεια των μαθηματικών, μπορούμε να συναγάγουμε ένα επόμενο φυσικό γεγονός από το προηγούμενο. Όσο η ευκλείδεια γεωμετρία αναπαριστά σωστά τη δομή του *φυσικού* χώρου, μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε ώστε να βγάζουμε συμπεράσματα *για αυτόν*, όπως αντίστοιχα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν ακριβή χάρτη για να βγάλουμε συμπεράσματα για την τοπογραφία. Αλλά για τον Saatsi (2010, σ. 146): «τα γεγονότα για τον φυσικό χώρο δεν εξηγούνται από τα μαθηματικά, όπως αυτά της περιβάλλουσας τοπογραφίας δεν εξηγούνται από τον χάρτη»[71].

Τι όμως εξηγεί το ίδιο το φυσικό γεγονός; Πώς εξηγείται το γεγονός πως τα εξαγωνικά κελιά ελαχιστοποιούν το εμβαδόν των τοιχωμάτων των κελιών; Για τον Saatsi, η μαθηματική απόδειξη δεν είναι απαραίτητα εξήγηση του φυσικού γεγονότος – για παράδειγμα, η απόδειξη του Hale μπορεί να μην είναι τίποτα άλλο παρά μια εξήγηση *εσωτερική* στα μαθηματικά. Δεν μπορούμε να συνάγουμε πως η φυσική γεωμετρία (η οποία *αναπαριστάνεται* από τα μαθηματικά) εξηγείται από την μαθηματική απόδειξη.

Γενικώς, κάθε μαθηματική απόδειξη ξεκινάει από συγκεκριμένα αξιώματα και υποθέσεις. Μπορούμε να πούμε πως ακόμα και αυτά (αξιώματα και υποθέσεις) αναπαριστούν υπαρκτά γεγονότα στον φυσικό κόσμο, όμως η *συλλογιστική διαδικασία που οδηγεί στο συμπέρασμα* δεν μπορεί να αναπαριστά κάτι στον φυσικό κόσμο. Και αυτό διότι δεν υπάρχει *αιτιακή* σχέση μεταξύ των αξιωμάτων, των υποθέσεων και του συμπεράσματος. Τα γεγονότα που αναπαριστάνονται από τα αξιώματα δεν είναι *αιτιακά* υπεύθυνα για το εξηγητέο, ούτε το απαρτίζουν, ούτε το

[70] “Mathematics may be indispensable for getting to know this crucial physical fact to which the full evolutionary explanation of the phenomenon then appeals. There is no ‘mathematical part’ to this evolutionary explanation. Rather, mathematics only plays a role in representing physical facts concerning areas and volumes in Euclidean space, allowing us to infer certain physical facts from other physical facts, and hence providing us knowledge of the crucial explanatory physical fact.”
[71] “But facts about physical space are not thereby explained by mathematics, any more than facts about surrounding topography are explained by the map.”

ενοποιούν.

Ο Saatsi επιμένει πως η μαθηματική «εξήγηση» δεν προσθέτει ή αντικαθιστά κάτι στη βιολογική εξήγηση του φαινομένου· ουσιαστικά απλώς προσπαθεί να αποδείξει τον εαυτό της. Τα μαθηματικά δηλαδή δουλεύουν μόνο *μέσα* και *για* τα μαθηματικά.

> Τι ακριβώς προσθέτει η απόδειξη του Hales; Θα έλεγα ότι τροποποιεί τη δικαιολόγηση της εξηγητικής υπόθεσης. Η υπόθεση αφορά ένα εξηγητικό φυσικό γεγονός για το οποίο είχαμε μόνο επαγωγική δικαιολόγηση πριν από τον Hales. Η απόδειξη του θεωρήματος της κερήθρας απέδειξε το εξηγητικό φυσικό γεγονός πέρα από κάθε αμφιβολία (υπό την υπόθεση ότι ο φυσικός χώρος αναπαριστάνεται με ακρίβεια από την ευκλείδεια γεωμετρία), χρησιμοποιώντας την αναπαραστατική ικανότητα των μαθηματικών. Αλλά κάνοντας αυτό, η απόδειξη δεν προσθέτει ή αντικαθιστά την ίδια την εξήγηση. Παρόλα αυτά, η απόδειξη είναι γνωσιολογικώς πολύτιμη: μπορούμε τώρα περισσότερη ασφάλεια να πιστέψουμε στην εξελικτική εξήγηση.[72] (Saatsi 2010, σ. 147).

Προφανώς, χρειάζεται κάποια γέφυρα από τα μαθηματικά αξιώματα στις εμπειρικές προτάσεις ώστε η μαθηματική εξήγηση να αποτελεί εξήγηση *εμπειρικών* γεγονότων, και η γέφυρα αυτή χρήζει διερεύνησης ως προς τη φύση και την καταλληλότητά της. Αυτό όμως δεν σημαίνει πως η μαθηματική εξήγηση περιορίζεται μόνο στα καθαρά μαθηματικά. Οι Lyon και Colyvan (2007, σ. 242) γράφουν:

> Πράγματι, οι αρχές που γεφυρώνουν είναι αντιστοιχίσεις μεταξύ φυσικών συστημάτων και μαθηματικών δομών, και άρα και οι ίδιες αποτελούν μαθηματικές οντότητες (δηλαδή, απεικονίσεις). Αν ο νομιναλιστής σκοπεύει να εξουδετερώσει την κατάσταση με το να υπονοήσει πως αυτές επωμίζονται κάποιο από το εξηγητικό βάρος, αυτό φαίνεται να είναι ένας φτωχός δρόμος για να προχωρήσει.[73]

Σύμφωνα με τους Lyon και Colyvan, το ότι χρειάζεται γεφύρωση δεν σημαίνει πως αυτή είναι τίποτα περισσότερο από μια μετάδοση της μαθηματικής εξήγησης στον εμπειρικό τομέα. Αυτή την άποψη συμμερίζεται και ο Steiner ο οποίος, σε ένα

---

[72] "What exactly does Hales' proof add to this? I would argue that it alters our justification for the explanatory hypothesis. This hypothesis concerns an explanatory physical fact for which we had only inductive justification before Hales. The proof of the honeycomb theorem then demonstrated the explanatory physical fact beyond doubt (subject to the assumption that physical space is accurately represented by Euclidean geometry) by using the representational capacity of mathematics. But by virtue of doing this the proof does not supplement or change the explanation itself. Nevertheless, the proof is epistemically valuable: we can now more firmly believe in the evolutionary explanation."

[73] "Indeed, the bridge principles in question are mappings between physical systems and mathematical structures, and so are themselves mathematical entities (i.e., mappings). If the nominalist hopes to defuse the situation by having the bridge principles shoulder some of the explanatory load, this seems a poor way to proceed."

παράδειγμα που παραθέτει, αναφέρεται επίσης στην έννοια της γεφύρωσης, αναγνωρίζοντας μάλιστα και ποιες υποθέσεις λειτουργούν ως γέφυρες. Καταλήγει όμως, παρόλα αυτά, στο ότι *υπάρχουν* μαθηματικές εξηγήσεις στη φυσική:

> Στο παράδειγμά μας, η «γέφυρα» μεταξύ φυσικής και μαθηματικών είναι οι υποθέσεις ότι ο χώρος είναι τρισδιάστατος και ευκλείδειος και ότι η περιστροφή ενός άκαμπτου σώματος γύρω από ένα σημείο παράγει έναν ορθογώνιο, πραγματικό, κανονικό μετασχηματισμό.… Υπάρχουν, άρα, μαθηματικές εξηγήσεις στη φυσική.[74] (Steiner 1978, σ. 19)

Ας περάσουμε όμως σε άλλα παραδείγματα.

Κάμψη του φωτός. Ένα άλλο παράδειγμα του Colyvan (2001, σ. 47-49) είναι το παράδειγμα της *κάμψης του φωτός* κοντά σε ογκώδη (massive) σώματα: όσο πιο ογκώδες το σώμα, τόσο μεγαλύτερη η κάμψη. Κατά τον Colyvan, το παράδειγμα αυτό επιδέχεται μόνο *γεωμετρική*, και καμία αιτιακή, εξήγηση. Το εν λόγω φαινόμενο πρωτοπαρατηρήθηκε το 1919, συγκρίνοντας τη θέση ενός άστρου όταν το φως του περνούσε κοντά από τον ήλιο (κατά τη διάρκεια ηλιακής έκλειψης) σε σχέση με την κανονική θέση του.

Η επικρατούσα εξήγηση έρχεται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και είναι γεωμετρική. Δεν είναι ότι κάτι *προκαλεί* το φως να αποκλίνει από τον συνήθη δρόμο του, αλλά ότι το φως ταξιδεύει πάνω σε χωροχρονικές γεωδαισιακές και η καμπύλωση του χωροχρόνου είναι μεγαλύτερη γύρω από ογκώδη αντικείμενα. Θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως η μάζα του αντικειμένου *προκαλεί* την καμπύλωση του χωροχρόνου και, άρα, ότι υπάρχει αιτιακή εξήγηση. Για τον Colyvan (2001, σ. 48), όμως, υπάρχει δυσκολία να εκφράσεις, με έναν αιτιακά αποδεκτό τρόπο, *πώς* η μάζα προκαλεί την εν λόγω καμπύλωση και κάθε διατύπωση που θέτει τη μάζα ως *αιτία* της καμπύλωσης του χωροχρόνου είναι αντίθετη στη διαίσθησή μας.[75]

Ο Colyvan εντοπίζει ένα επιπλέον πρόβλημα: υπάρχουν λύσεις στην εξίσωση του Einstein για κενούς χωροχρόνους, στις οποίες η καμπύλωση του χωροχρόνου δεν είναι ταυτοτικά μηδέν (non-Minkowski vacuum solutions). Από αυτό

[74] "In our example, the 'bridge' between physics and mathematics is the assumptions that space is three-dimensional Euclidean, and that the rotation of a rigid body around a point generates an orthogonal, real, proper transformation.…There are, then, mathematical explanations in physics."

[75] Π.χ., δεν θα θέλαμε να δεχθούμε ότι υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας ή ορμής μεταξύ του σώματος και του χωροχρόνου.

συμπεραίνουμε, τουλάχιστον, πως η μάζα δεν μπορεί να είναι η *μόνη* αιτία της καμπύλωσης. Ο Colyvan (2001, σ. 48-49) συμπεραίνει: «Γιατί, λοιπόν, να επιμένουμε σε μια αιτιακή εξήγηση για την καμπύλωση σε σύμπαντα με μάζες; Εισηγούμε ότι δεν υπάρχει απολύτως κανένας λόγος και ότι πρέπει να δεχθούμε απλώς τη γεωμετρική εξήγηση για την κάμψη του φωτός».[76]

Συστολή FitzGerald-Lorentz. Ο Colyvan εξετάζει ακόμη το παράδειγμα της συστολής FitzGerald-Lorentz των κινούμενων σωμάτων κατά μήκος της κατεύθυνσης της κίνησής τους και αναζητά την εξήγηση αυτής της συστολής. Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας λέει πως ένα σώμα εν κινήσει σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς F υπόκειται σε συστολή FitzGerald-Lorentz: μείωση του μήκους του σώματος στην κατεύθυνση της κίνησής του, όπως μετράται από έναν ακίνητο παρατηρητή σε σχέση με το F. Εξήγηση των μετασχηματισμών Lorentz έχει δώσει ο Minkowski, επικαλούμενος την έννοια του χωροχρόνου ως μιας τετραδιάστατης πολλαπλότητας που εμπεριέχει τρεις χωρικές και μια χρονική διάσταση.

Ο Minkowski κατάλαβε πως η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός, ένα από τα αιτήματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά από την εξίσωση

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0$$

σε κάθε αδρανειακό σύστημα (με x_1, x_2, x_3 χωρικές συντεταγμένες, t χρονική συντεταγμένη και c σταθερά που αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του φωτός στο κενό). Εισήγαγε, ακόμη, τη φανταστική χρονική συντεταγμένη $x_4 = ict$ μετατρέποντας, έτσι, την εξίσωση στην

$$(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 = 0,$$

η οποία ικανοποιείται σε κάθε αδρανειακό σύστημα αν η ποσότητα

$$\sigma^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2$$

μένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς Lorentz. Αυτό δείχνει ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz, έτσι ορισμένοι, είναι ανάλογοι με τους

[76] “Why then insist on a causal explanation of the curvature in the universes *with* mass? I suggest that there is no reason at all and we ought to simply accept the geometric explanation for the bending of light.”

μετασχηματισμούς μετατόπισης και περιστροφής στην ευκλείδεια γεωμετρία. Η συστολή FitzGerald-Lorentz, δηλαδή, δεν αποτελεί μεγαλύτερο μυστήριο από την προφανή συστολή ενός αντικειμένου σε μία διάσταση, όταν διαλέγουμε νέο σύστημα αξόνων που έχει κάποια κλίση ως προς το παλιό.

Το αναλλοίωτο του μήκους υπό μετατόπιση και περιστροφή εκφράζεται μαθηματικά ως το αναλλοίωτο της ποσότητας $s^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2$ κάτω από γραμμικούς μετασχηματισμούς που δεν είναι ούτε συστολές ούτε διαστολές. Η ποσότητα s^2 , όμως, δεν είναι αναλλοίωτη υπό τους μετασχηματισμούς Lorentz στον χώρο Minkowski (μη αναλλοίωτη «εκεί» είναι η σ^2).

Εμφανώς, η παραπάνω εξήγηση είναι μια γνήσια γεωμετρική εξήγηση της συστολής, η οποία κάνει χρήση μη αιτιακών οντοτήτων, της γεωμετρικής δομής του χωροχρόνου Minkowski. Ο Colyvan (2001, σ. 51) συμπεραίνει: «Η κατά Minkowski γεωμετρική εξήγηση της συστολής Lorentz είναι μια μη αιτιακή εξήγηση που (αναπόδραστα) χρησιμοποιεί μαθηματικές οντότητες, όπως η μετρική Minkowski».[77]

5.2 ΕΝΣΤΑΝΣΕΙΣ MELIA

Η βασική ένσταση του Melia στα παραδείγματα του Colyvan είναι ότι ακόμη και αν το μαθηματικό οπλοστάσιο είναι μη εξαλείψιμο, ο ρόλος του σε αυτές τις περιπτώσεις είναι μόνο να επιλέξει ή και να καταγράψει αποτελεσματικά φυσικά αντικείμενα ή ιδιότητες. Γράφει:

> Όταν φτάνουμε να εξηγήσουμε το [φυσικό γεγονός] *F*, η καλύτερη θεωρία μας μπορεί να μας προσφέρει ως εξήγηση «Το *F* συνέβη επειδή το *P* είναι $\sqrt{2}$ μέτρα». Αλλά όλοι αναγνωρίζουμε ότι ενώ ο αριθμός $\sqrt{2}$ παρατίθεται στην εξήγησή μας, είναι το *μήκος* του *P* που ευθύνεται για το *F*, όχι το γεγονός ότι το μήκος παρουσιάζεται με έναν πραγματικό αριθμό.[78] (Melia 2002, σ. 76)

Και αλλού:

> Το T_2 εκφράζει το γεγονός ότι το *a* είναι $\frac{7}{11}$ μέτρα από το *b* χρησιμοποιώντας ένα κατηγόρημα τριών θέσεων που σχετίζει το *a* και το *b* με τον αριθμό $\frac{7}{11}$. Κανείς δεν πιστεύει ότι αυτό το γεγονός ισχύει χάρη σε κάποια σχέση τριών θέσεων μεταξύ των *a, b* και $\frac{7}{11}$. Οι διάφοροι αριθμοί χρησιμοποιούνται

[77] "The Minkowski geometric explanation of the Lorentz contraction is, arguably, a non-causal explanation (indispensably) employing mathematical entities such as the Minkowski metric."

[78] "[w]hen we come to explain *F*, our best theory may offer as an explanation '*F* occurred because *P* is $\sqrt{2}$ meters long'. But we all recognize, though the number $\sqrt{2}$ is cited in our explanation, it is the length of *P* that is responsible for F, not the fact that the length is picked out by a real number."

απλώς για να καταγράψουν διαφορετικές σχέσεις απόστασης· κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μια διαφορετική απόσταση.[79] (Melia 2000, σ. 473)

Ο μαθηματικός μηχανισμός σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι γνησίως εξηγητικός, γιατί ο ρόλος των αριθμών $\sqrt{2}, \frac{7}{11}$ είναι *αυθαίρετος*. Ο Baker (2005, σ. 28) θεωρεί πως η κατηγορία περί αυθαιρεσίας είναι σωστή μέχρι ενός σημείου, καθώς το ποιοι συγκεκριμένοι αριθμοί εμφανίζονται σε μια εξήγηση ενός δεδομένου φυσικού γεγονότος είναι αποτέλεσμα μιας γενικά αυθαίρετης επιλογής μονάδων. Ο ίδιος ο Baker εντοπίζει σε αυτό το στοιχείο και μια διαφοροποίηση μεταξύ των αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων και των θεωρητικών φυσικών αντικειμένων:

> Όταν μια επιστημονική θεωρία ποσοτικοποιεί τους πραγματικούς αριθμούς, εκμεταλλεύεται τη δομή των πραγματικών αριθμών για να φτιάξει ισχυρισμούς και προβλέψεις για το φυσικό κόσμο. Σε αντίθεση με τα φυσικά αντικείμενα, τα εξατομικευμένα μαθηματικά αντικείμενα δεν παίζουν θεωρητικό ρόλο ανεξάρτητα από τις δομές στις οποίες έχουν ενσωματωθεί. Αυτό είναι εν μέρει συνέπεια της αφηρημένης, και άρα μη αιτιακής, φύσης των μαθηματικών αντικειμένων. Αυτό έρχεται σε μεγάλη αντίθεση με το θεωρητικό ρόλο των φυσικών αντικειμένων. Ένα αστρονομικό αντικείμενο, πχ μια μαύρη τρύπα, μπορεί να υποτεθεί για να εξηγήσει ένα συγκεκριμένο σετ παρατηρήσεων, χωρίς απαραίτητα να συνδέεται με άλλα τέτοια αντικείμενα. Θα ήταν, όμως, παράξενο να φανταστούμε να ποσοτικοποιείται, από μια επιστημονική θεωρία, ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο, πχ το 17, χωρίς να παίζουν κάποιο θεωρητικό ρόλο τα υπόλοιπα μαθηματικά αντικείμενα που συμπληρώνουν τη μαθηματική δομή της οποίας μέρος αποτελεί το 17. [80] (Baker 2003, σ.53-54).

---

[79] "T_2 expresses the fact that *a* is $\frac{7}{11}$ meters from *b* by using a three place predicate relating *a* and *b* to the number $\frac{7}{11}$; nobody thinks that this fact holds in virtue of some three place relation connecting *a,b* and the number $\frac{7}{11}$. Rather, the various numbers are used merely to index different distance relations, each real number corresponding to a different distance."

[80] "When a scientific theory quantifies over real numbers, it is exploiting the structure of the real number line in order to make assertions and predictions about the physical world. Unlike concrete objects, individual mathematical objects play no theoretical role independently of the structures in which they are embedded. This is partly a consequence of the abstract, and hence presumably acausal, nature of mathematical objects. This is in sharp contrast to the theoretical role of concrete objects. A single astronomical object, say a black hole, may be postulated to explain a particular set of observations, without necessarily being linked to any other such objects. Yet it would be strange to imagine a particular mathematical object, say the number 17, being quantified over by a scientific theory without the rest of the mathematical objects which complete the mathematical structure of which 17 is a part also playing some theoritcal role."

Μια πιθανή απάντηση σε αυτό, λοιπόν, έχει ως εξής: δεν είναι τα μεμονωμένα, ατομικά, μαθηματικά αντικείμενα αναπόσπαστα στοιχεία της επιστήμης (παίζουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο στην επιστήμη), αλλά συγκεκριμένες μαθηματικές *θεωρίες* ή *δομές*. Στα προηγούμενα παραδείγματα η ποσόδειξη πραγματικών αριθμών είναι αναγκαία, ενώ η χρήση συγκεκριμένα του $\sqrt{2}$, όχι.

Ένα άλλο πρόβλημα είναι πως συχνά τα παραδείγματα του Colyvan βασίζονται στη γεωμετρία· αυτό είναι μαθηματικό ή φυσικό θέμα; Εξατομικευμένοι γεωμετρικοί όροι, όπως «τρίγωνο», μπορεί να αναφέρονται είτε σε μαθηματικά είτε σε φυσικά αντικείμενα. Αυτό είναι ένα επιχείρημα που χρησιμοποιείται συχνά από τους νομιναλιστές· διαφωνούν πως οι γεωμετρικές εξηγήσεις είναι γνήσια μαθηματικές. Ιστορικά, η ευκλείδεια γεωμετρία έχει εξελιχθεί από περιγραφέα του φυσικού χώρου σε αυτόνομο τυπικό σύστημα, και αυτό την καθιστά μια γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής.

Μια άλλη πτυχή των σχολίων του Melia είναι πως η αναφορά στους αριθμούς $\sqrt{2}$ ή $\frac{7}{11}$ στα παραπάνω παραδείγματα δεν είναι εξηγητική, επειδή οι αριθμοί δεν έχουν αιτιακές δράσεις. Εγείρεται εδώ ξανά το ερώτημα: αν η εξήγηση (τουλάχιστον των φυσικών φαινομένων) είναι πάντα αιτιακή, υπάρχει δυνατότητα συνδυασμού ενός μαθηματικού πλατωνισμού με τη θέση πως υπάρχουν γνήσιες μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων;

Ο Melia επιμένει πως ένα πρόβλημα με τα υποτιθέμενα παραδείγματα μαθηματικής εξήγησης έχει να κάνει με το ότι τα μαθηματικά αντικείμενα αποτυγχάνουν να έχουν έναν πραγματικά αιτιακό ρόλο. Για αυτόν, η διαφορά μεταξύ της υπόθεσης των quarks και αυτής των μαθηματικών οντοτήτων είναι ξεκάθαρη:

> Η υπόθεση των quarks καθιστά γνησίως τον κόσμο απλούστερο. […] διάφορα αντικείμενα υπάρχουν λόγω της ύπαρξης, των ιδιοτήτων και των σχέσεων των quarks. […] τα περίπλοκα αντικείμενα *οφείλουν την ύπαρξή τους* σε αυτά τα θεμελιώδη αντικείμενα.[81] (Melia 2000, σ. 474)

Παρόλα αυτά, ο Baker θεωρεί πως ο Melia δεν θέλει να απορρίψει εντελώς τη δυνατότητα μη αιτιακής εξήγησης φυσικών φαινομένων. Γράφει ο Melia (2000, σ.

[81] "Postulating quarks genuinely makes the world a simpler place. […] various objects do exist *in virtue of* the existence, properties and relations of quarks. […] the complex objects *owe their existence* to these fundamental objects."

474): «*μπορεί* να υπάρχουν εφαρμογές των μαθηματικών που καταλήγουν σε μια γνησίως πιο ελκυστική εικόνα του κόσμου, αλλά οι υποστηρικτές αυτής της εκδοχής του επιχειρήματος του αναπόδραστου οφείλουν να το αποδείξουν».[82] Ή, ίσως, το είδος χρησιμότητας που κατέχουν τα μαθηματικά να μην συνεισφέρει στην εξηγητική γνώση.

Για αυτούς τους λόγους, ο Baker θεώρησε ότι η διαμάχη Colyvan-Melia δεν είχε κατασταλάξει. Από τη μια, ο Colyvan δεν είχε προσφέρει αναμφίβολα παραδείγματα μαθηματικών εξηγήσεων φυσικών φαινομένων και, από την άλλη, ο Melia δεν είχε αποκλείσει πειστικά τη δυνατότητα τέτοιων εξηγήσεων. Και προσπάθησε να γείρει την πλάστιγγα προς τη μεριά του Colyvan προσφέροντας ένα πιο πειστικό παράδειγμα.

5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ BAKER

Ο Baker (2005, σ. 229), λοιπόν, παρουσιάζει ένα διαφορετικό παράδειγμα από την εξελικτική βιολογία ως γνήσια μαθηματική εξήγηση ενός φυσικού φαινομένου: *τον κύκλο ζωής των "περιοδικών" τζιτζικιών (periodical cicadas)*. Τρία είδη τζιτζικιών από το γένος *Magicicada* έχουν τον ίδιο ασυνήθιστο κύκλο ζωής. Σε κάθε είδος, το στάδιο της νύμφης παραμένει στο έδαφος για μια μεγάλη περίοδο και το ενήλικο τζιτζίκι αναδύεται μετά από 13 ή 17 χρόνια, ανάλογα με τη γεωγραφική περιοχή. Αυτό γίνεται συγχρονισμένα μεταξύ όλων των μελών ενός είδους σε μια δεδομένη περιοχή. Τα ενήλικα βγαίνουν όλα μέσα στις ίδιες λίγες ημέρες ημερών, ζευγαρώνουν, πεθαίνουν μερικές βδομάδες αργότερα και μετά ο κύκλος επαναλαμβάνεται.

Αρχίζουμε, λοιπόν, από το βασικό σημείο πως το φαινόμενο αυτό είναι κάτι που *χρήζει εξήγησης*, κάτι που διαπιστώνει κανείς αν κοιτάξει τη βασική βιβλιογραφία που υπάρχει γι' αυτό το θέμα, όπως πχ τα σχόλια του Yoshimura (1997, σ.112): «τα περιοδικά τζιτζίκια είναι μεταξύ των πιο ασυνήθιστων εντόμων του κόσμου, με τους μεγάλους και τέλεια συγχρονισμένους κύκλους ζωής τους»[83]. Αλλά ας αναλύσουμε πρώτα τι είναι αυτό που *χρειάζεται* να εξηγηθεί. Οι βιολόγοι βρίσκουν τις ιδιότητες του κύκλου ζωής των περιοδικών τζιτζικιών μυστήριες. Ποιες

[82] "There *may* be applications of mathematics that do result in a genuinely more attractive picture of the world – but defenders of this version of the indispensability argument have yet to show this."
[83] "Periodical cicadas are among the most unusual insects in the world, with their long and perfectly synchronized life cycles."

ιδιότητες, λοιπόν, τις καθιστούν τόσο μυστήριες; Ο Baker (2005, σ. 229-230) διακρίνει πέντε χαρακτηριστικά:

(1) Η μεγάλη διάρκεια του κύκλου ζωής τους.
(2) Η παρουσία δύο ξεχωριστών διαρκειών κύκλων ζωής, μέσα στο κάθε είδος, σε διαφορετικές περιοχές.
(3) Η περιοδική εμφάνιση των ενήλικων τζιτζικιών.
(4) Η συγχρονισμένη εμφάνιση των ενήλικων τζιτζικιών.
(5) Οι κύκλοι ζωής είναι πρώτοι αριθμοί .

Οι δύο πρώτες ιδιότητες αφορούν τη χρονική διάρκεια του κύκλου ζωής. Οι βιολόγοι πιστεύουν πως ο μεγάλος κύκλος ζωής των Magicicada οφείλεται στην χαμηλή διαθεσιμότητα θρεπτικών συστατικών για τις νύμφες και στη χαμηλή θερμοκρασία του εδάφους για πολύ καιρό. Αυτοί οι δύο περιβαλλοντικοί παράγοντες αναγκάζουν τις νύμφες να περνούν αρκετά χρόνια μέχρι να γίνουν ενήλικες. Στις νοτιότερες περιοχές όπου βρίσκονται, οι παράγοντες αυτοί είναι λιγότερο ισχυροί και έτσι θα μπορούσε να εξηγηθεί ότι οι κύκλοι ζωής εκεί είναι μικρότεροι. Οι δύο πρώτες ιδιότητες, δηλαδή, εξηγούνται από συγκεκριμένους οικολογικούς παράγοντες. Οι (3) και (4) έχουν να κάνουν με το συγχρονισμό των κύκλων ζωής διαφορετικών ατόμων. Δεδομένου του γεγονότος ότι οι νύμφες χρειάζονται αρκετά χρόνια για να αναπτυχθούν πλήρως και ότι το στάδιο κατά το οποίο είναι ενήλικες είναι πολύ σύντομο, η καθορισμένη περιοδική εμφάνισή τους έχει πλεονεκτήματα ως προς την μεγιστοποίηση των δυνατοτήτων ζευγαρώματος. Διασφαλίζεται πως οι απόγονοι μιας συγκεκριμένης γενιάς ζευγαρώματος θα εμφανιστούν όλοι την ίδια στιγμή, αρκετά χρόνια μετά. Ο συγχρονισμός έχει νόημα για τον ίδιο λόγο. Ειδικά σε περιοχές που μπορούν να συντηρήσουν μόνο σποραδικά τζιτζίκια, η εμφάνιση υποπληθυσμών σε διαφορετικές στιγμές καθιστά το ζευγάρωμα ιδιαιτέρως δύσκολο.

Οι παραπάνω εξηγήσεις, λοιπόν, βασίζονται σε βιολογικούς «νόμους» που πιθανώς να εφαρμόζονται σε οποιονδήποτε οργανισμό με μεγάλο κύκλο ζωής και σύντομο ενήλικο στάδιο. Αλλά τι συμβαίνει με την (5); Δεδομένου ενός συγχρονισμένου, περιοδικού, κύκλου ζωής, υπάρχει κάποιο εξελικτικό πλεονέκτημα στο να είναι η περίοδος αυτή πρώτος αριθμός;

Οι Goles, Schulz και Markus (GMS, 2001) πρότειναν μια εξήγηση που βασίζεται στην αποφυγή των θηρευτών τους. Υπέθεσαν μια περίοδο στο παρελθόν των Magicicada κατά την οποία αυτά δέχονταν επίθεση από τους θηρευτές τους, που είχαν μικρότερους περιοδικούς κύκλους ζωής. Προφανώς, υπάρχει πλεονέκτημα στο να συναντώνται τα τζιτζίκια όσο πιο σπάνια γίνεται με αυτούς τους θηρευτές. Η υπόθεση των GMS (2001, σ. 33) είναι πως η συχνότητα της διασταύρωσης ελαχιστοποιείται όταν η περίοδος των τζιτζικιών είναι *πρώτος αριθμός*. Για παράδειγμα, ένα θήραμα με κύκλο 12 χρόνων θα συναντηθεί (κάθε φορά που εμφανίζεται) με συγχρονισμένους θηρευτές που εμφανίζονται κάθε 1, 2, 3, 4, 6, 12 χρόνια, ενώ μια μετάλλαξη που εμφανίζει περίοδο 13 χρόνια έχει το πλεονέκτημα να γίνεται θύμα λιγότερων θηρευτών.

Από την άλλη, οι Cox και Carlton (1988, σ. 183) προσέφεραν μια εξήγηση που αφορά τη δημιουργία υβριδίων με άλλα παρόμοια υποείδη. Ένας σημαντικός παράγοντας για τα περιοδικά έντομα είναι να έχουν επαρκείς δυνατότητες ζευγαρώματος κατά τη διάρκεια της σύντομης, ενήλικης, ζωής τους. Εξίσου σημαντικό είναι, όμως, να αποφύγουν το ζευγάρωμα με υποείδη που έχουν διαφορετικούς κύκλους. Αν, για παράδειγμα, ένας πληθυσμός συγχρονισμένων τζιτζικιών με περίοδο 10 χρόνια ζευγαρώσει με κάποιον που έχει 15 χρόνια, τότε οι απόγονοι θα είχαν μια περίοδο περίπου 12-13 χρόνια. Οι απόγονοι-υβρίδια θα εμφανίζονταν μετά τον επόμενο κύκλο των 10 χρόνων και έτσι οι δυνατότητες ζευγαρώματος θα ήταν πολύ περιορισμένες. Ακόμη, είναι πιθανό να διέφεραν και μεταξύ τους όσον αφορά το μήκος του κύκλου ζωής. Ο Yoshimura (1997, σ. 113) πιστεύει πως υπήρχε ένα στάδιο στο παρελθόν όπου υπήρχαν διάφορα υποείδη τζιτζικιών με περιόδους μεταξύ 14 και 18 ετών και δείχνει πως τα τζιτζίκια με 17 χρόνια κύκλο θα διασταυρώνονταν λιγότερο συχνά με τζιτζίκια άλλων περιόδων.

Τα θεμέλια, όμως, και των δύο αυτών εξηγήσεων βρίσκονται στη *θεωρία αριθμών*, το κομμάτι των μαθηματικών που ερευνά τις βαθιές σχέσεις μεταξύ των ακεραίων. Ο μαθηματικός σύνδεσμος μεταξύ των πρώτων αριθμών και της ελαχιστοποίησης της διασταύρωσης περιόδων περιέχει την έννοια «ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο» (ΕΚΠ). Το ΕΚΠ δύο φυσικών αριθμών, α και β, είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός τον οποίο διαιρεί ακριβώς καθένα από τα τα α και β. Έστω, λοιπόν, ότι α και β είναι τα χρόνια των περιόδων των κύκλων ζωής δύο υποειδών τζιτζικιών Α και Β αντίστοιχα. Αν τα Α και Β διασταυρώνονται σε μια συγκεκριμένη χρονιά, τότε ο χρόνος της επόμενης διασταύρωσης δίνεται από το ΕΚΠ των α και β.

Ο Baker (2005, σ. 232) παραθέτει δύο λήμματα που περιέχουν όλα τα μαθηματικά για την υπόλοιπη εξήγηση:

ΛΗΜΜΑ 1. *Το ΕΚΠ δυο φυσικών αριθμών α και β είναι μέγιστο αν και μόνο αν οι α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους (ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι ο 1).*

ΛΗΜΜΑ 2. *Ένας φυσικός αριθμός α είναι πρώτος σχετικά με κάθε φυσικό αριθμό* $\beta < 2\alpha$ *αν και μόνο αν ο α είναι πρώτος αριθμός.*

Εφόσον οι θηρευτές έχουν σχετικά μικρούς κύκλους, αρκεί να δείξουμε ότι οι πρώτοι αριθμοί μεγιστοποιούν το ΕΚΠ σε σχέση με όλους τους μικρότερους αριθμούς – ότι, δηλαδή, για κάθε πρώτο αριθμό p και για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών α, β με $\alpha < p, \beta < p$, το ΕΚΠ των p, α είναι μεγαλύτερο από το ΕΚΠ των α, β. Αυτό όμως είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω λημμάτων.

Η δημιουργία υβριδίων θεωρείται πως γίνεται μόνο μεταξύ υποειδών που έχουν παρόμοιου μήκους περιόδους. Ο Yoshimura υποθέτει ότι ένα εύρος 4-5 χρόνων καθιστά το μήκος περιόδου «παρόμοιο». Για την εξήγηση με αναφορά στα υβρίδια, λοιπόν, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πρώτοι αριθμοί μεγιστοποιούν το ΕΚΠ τους σε σχέση με άλλους, “κοντινούς”, αριθμούς. Αυτό είναι, επίσης, άμεση συνέπεια των δύο παραπάνω λημμάτων. Έστω ένας πρώτος p και ένα διάστημα $[p - r, p + r]$. Αν $r < p$, οι υπόλοιποι αριθμοί στο διάστημα είναι μεταξύ του 1 και του $2p$, άρα ο p είναι πρώτος σχετικά με όλους αυτούς (από το Λήμμα 2).

Ο Baker (2005, σ. 233) διατυπώνει ένα εκτεταμένο επιχείρημα με πέντε βήματα που παρέχει μια παραγωγική-νομολογική εξήγηση:

(1) Μια περίοδος κύκλου ζωής που ελαχιστοποιεί τη διασταύρωση με άλλες (κοντινές, μικρότερες) περιόδους είναι εξελικτικά επωφελής. [*βιολογικός νόμος*]
(2) Περίοδοι που είναι πρώτοι αριθμοί ελαχιστοποιούν τη διασταύρωση (σε σύγκριση με αυτές που δεν είναι πρώτοι αριθμοί). [*θεωρία αριθμών*]

---

(3) Άρα οι οργανισμοί με περιοδικούς κύκλους ζωής είναι πιθανό να αναπτύξουν περιόδους που είναι πρώτοι αριθμοί. [*«μείγμα» βιολογικού και μαθηματικού νόμου*]
(4) Τα τζιτζίκια στο οικοσύστημα τύπου Ε περιορίζονται από βιολογικές συνθήκες σε περιόδους 14-18 ετών. [*οικολογικός περιορισμός*]

---

(5) Τα τζιτζίκια στο οικοσύστημα τύπου Ε είναι πιθανό να αναπτύξουν περιόδους 17 χρόνων.

Η εξήγηση περιέχει συγκεκριμένα οικολογικά δεδομένα, γενικούς βιολογικούς νόμους και αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών. Ο Baker υποστηρίζει πως το καθαρά μαθηματικό στοιχείο (2) είναι και βασικό στη συνολική εξήγηση και γνησίως εξηγητικό από μόνο του. Εξηγεί *γιατί* οι περίοδοι που είναι πρώτοι αριθμοί είναι εξελικτικά καλύτεροι. Επομένως, ως προς το υπόβαθρο της διαμάχης Colyvan-Melia, αυτή η μαθηματική εφαρμογή φέρει *εξηγητική ικανότητα*.

Πράγματι, το παράδειγμα των τζιτζικιών είναι χρήσιμο γιατί:

- Η εφαρμογή είναι εξωτερική των μαθηματικών: το φαινόμενο που εξηγείται δεν ανήκει στα καθαρά μαθηματικά.
- Το φαινόμενο χρειάζεται εξήγηση: ο κύκλος ζωής των περιοδικών τζιτζικιών θεωρείται «αξιοσημείωτος» και «μυστήριος» από τους βιολόγους.
- Το φαινόμενο έχει εξακριβωθεί ανεξαρτήτως από την εν λόγω εξήγηση (αλλιώς θα μιλούσαμε μάλλον για πρόβλεψη): το φαινόμενο ήταν γνωστό πριν από οποιαδήποτε εξήγηση με αναφορά σε πρώτους αριθμούς (είχε ανακαλυφθεί πριν από τουλάχιστον 300 χρόνια).

Αποτελεί όμως μια γνησίως *μαθηματική* εξήγηση; Όπως αναφέραμε ήδη στην ενότητα 5.2, ο Melia υποστήριξε (με αναφορά στα παραδείγματα του Colyvan) ότι τα μαθηματικά αντικείμενα χρησιμοποιούνται σε τέτοιες εφαρμογές απλώς για την επιλογή ή καταγραφή φυσικών ιδιοτήτων και σχέσεων. Ο Baker (2005, σ. 234), αντίθετα, ισχυρίζεται ότι δεν γίνεται κανείς να αρνηθεί πως τα μαθηματικά αντικείμενα *παίζουν ένα ρόλο* στην εξήγηση – χωρίς, όμως, αυτό να σημαίνει ότι *όλες* οι εξηγήσεις που εμπεριέχουν μαθηματικά είναι αυτομάτως μαθηματικές εξηγήσεις.

Αυτό που χρειάζεται να ελεγχθεί στο παράδειγμα των τζιτζικιών είναι αν το μαθηματικό συστατικό της εξήγησης είναι εξηγητικό *από μόνο του* και δεν λειτουργεί απλώς ως ένα περιγραφικό ή υπολογιστικό πλαίσιο για τη συνολική εξήγηση. Αυτό είναι πολύ δύσκολο, γιατί η φιλοσοφική ανάλυση *της ίδιας της εξήγησης* είναι ένα λεπτό ζήτημα.

5.4 ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΞΗΓΗΣΗ

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν διάφορες φιλοσοφικές προσεγγίσεις στην έννοια της *επιστημονικής απόδειξης*.[84] Δεν είναι καν σαφές ότι υπάρχει κάποιο πρότυπο επιστημονικής εξήγησης που καλύπτει όλες τις επιστημονικές χρήσεις. Από όλα τα πρότυπα επιστημονικής εξήγησης που έχουν προταθεί εκείνα που μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα εδώ είναι το παραγωγικό-νομολογικό (Π-Ν, deductive-nomological) πρότυπο, το αιτιακό-μηχανιστικό (causal-mechanical) πρότυπο και το πραγματιστικό (pragmatic) πρότυπο.

Κατά το Π-Ν πρότυπο, μια επιστημονική εξήγηση είναι ένα έγκυρο παραγωγικό επιχείρημα με συμπέρασμα την περιγραφή του εξηγητέου φαινομένου και προκείμενες που συμπεριλαμβάνουν τουλάχιστον ένα καθολικό νόμο της φύσης. Το παράδειγμα του Baker που αναπτύξαμε στην ενότητα 5.3 ταιριάζει ακριβώς σε αυτό το πρότυπο. Αρκεί κανείς ανάμεσα στους καθολικούς νόμους να συμπεριλάβει αξιώματα και θεωρήματα των μαθηματικών όπως η προκείμενη (2) από τη θεωρία αριθμών. Και αυτό φαίνεται επιτρεπτό αφού τα αξιώματα και θεωρήματα των μαθηματικών μοιράζονται με τους νόμους της φύσης διάφορα χαρακτηριστικά όπως καθολικότητα ή αναγκαιότητα. Μετά από μια τέτοια διεύρυνση του Π-Ν μοντέλου, η μαθηματική προκείμενη (2) θα παίζει ακριβώς τον ίδιο ρόλο με τον βιολογικό νόμο (1), αφού το Π-Ν μοντέλο δεν έχει τη δυνατότητα να διακρίνει περαιτέρω τα *εξηγητικά* από τα *μη εξηγητικά* συστατικά μιας εξήγησης.

Κατά το αιτιακό-μηχανιστικό πρότυπο, μια επιστημονική εξήγηση συνίσταται στην περιγραφή των αιτιακών μηχανισμών και των αιτιακών αλυσίδων γεγονότων που συγκροτούν το, και οδηγούν στο, εξηγητέο. Αυτό το μοντέλο αποκλείει τη δυνατότητα *οποιασδήποτε* γνήσιας μαθηματικής εξήγησης, στο βαθμό που τα μαθηματικά αντικείμενα (αν υπάρχουν) είναι *μη αιτιακά* (όπως, π.χ., για τον πλατωνισμό). Ωστόσο, αντιμετωπίζει σημαντικά προβλήματα που αφορούν τη διασάφηση της έννοιας της αιτιότητας αλλά και του ρόλου που παίζει η έννοια αυτή στις επιστήμες (πρβλ. τον σκεπτικισμό περί αιτιότητας του Hume). Επιπλέον, φαίνεται να υπάρχουν μη αιτιακές εξηγήσεις στις φυσικές επιστήμες.[85]

---

[84] Βλ, π.χ., Woodward ([2003] 2014).

[85] Το παράδειγμα οφείλεται στον Peter Lipton (όπως το παραθέτει ο Mancosu [2008] 2011). Ας υποθέσουμε ότι μια δέσμη ραβδιών ρίχνεται στον αέρα με μεγάλη περιστροφή έτσι ώστε να στροβιλίζονται και να ανατρέπονται καθώς πέφτουν. «Παγώνουμε τη σκηνή» καθώς τα ραβδιά

Κατά την πραγματιστική προσέγγιση, μια επιστημονική εξήγηση είναι μια απάντηση σε ερώτηση του τύπου «γιατί;» έτσι ώστε (1) η ίδια η ερώτηση να νοείται ως προς ένα σύνολο ερωτήσεων αντιπαραβολής («Γιατί συνέβη το Χ αντί του Y_1;», «Γιατί συνέβη το Χ αντί του Y_2;» κ.ο.κ.) και (2) η απάντηση να κρίνεται με βάση τις γνώσεις και τα ενδιαφέρονται του αποδέκτη της εξήγησης. Το παράδειγμα του Baker ταιριάζει και στην πραγματιστική προσέγγιση. «Γιατί τα περιοδικά τζιτζίκια έχουν περιόδους που είναι πρώτοι αριθμοί; Γιατί οι πρώτοι αριθμοί ελαχιστοποιούν τη συχνότητα διασταύρωσης με περιόδους άλλης χρονικής διάρκειας». Μάλιστα, ο Baker (2005, σ. 235) παρατηρεί πως έτσι αποκαλύπτονται αναλογίες με επιστημονικές εξηγήσεις που επικαλούνται την ύπαρξη θεωρητικών οντοτήτων και που θα αποδεχόταν τόσο ένας πλατωνιστής όσο και ένας νομιναλιστής: «Γιατί κάμπτεται το φως που προέρχεται από το γαλαξία Χ; Γιατί ανάμεσα στον Χ και σε εμάς υπάρχει μια μαύρη τρύπα».

Βέβαια, ένας από τους κύριους υποστηρικτές της πραγματιστικής προσέγγισης, ο Bas van Fraassen, αξιοποιούσε αυτή την προσέγγιση στο πλαίσιο ενός αντιρεαλισμού που απέρριπτε τη συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση. Ο Baker (2005, σ. 235, υποσημείωση 16) σημειώνει ότι η πραγματιστική προσέγγιση είναι συμβατή με εκδοχές ρεαλισμού. Και καταλήγει ότι η περίπτωση των περιοδικών τζιτζικιών προσφέρει ένα παράδειγμα γνήσιας μαθηματικής εξήγησης ενός φυσικού φαινομένου, σύμφωνα με τις επικρατέστερες απόψεις περί επιστημονικής εξήγησης. Τέλος, προσθέτει ότι το παράδειγμα αποφεύγει δυο κύριες ενστάσεις των νομιναλιστών: ότι (1) τα μαθηματικά αντικείμενα αποτελούν αυθαίρετες επιλογές για την καταγραφή φυσικών ιδιοτήτων και σχέσεων και ότι (2) τα παραδείγματα από τη γεωμετρία βασίζονται στο αμφιλεγόμενο καθεστώς της γεωμετρίας ως μαθηματικής θεωρίας ή ως θεωρίας του φυσικού χώρου. Προφανώς, το παράδειγμα με τα περιδικά τζιτζίκια δεν είναι γεωμετρικό και, επιπλέον, δεν υπάρχει τίποτα αυθαίρετο με τον ρόλο του 13 ή του 17 σε αυτή. Οι μονάδες στις οποίες μετρούνται οι περίοδοι (τα

βρίσκονται σε ελεύθερη πτώση και διαπιστώνουμε ότι αισθητά περισσότερα από αυτά βρίσκονται κοντά στην οριζόντια παρά κοντά στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν περισσότεροι τρόποι για να είναι ένα ραβδί κοντά στον οριζόντιο άξονα παρά κοντά στον κατακόρυφο άξονα. Ας σκεφτούμε ένα μόνο ραβδί με σταθερή θέση μέσου σημείου. Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους αυτό το ραβδί θα μπορούσε να είναι οριζόντιο (αν το περιστρέψουμε στο οριζόντιο επίπεδο), αλλά μόνο δύο τρόποι με τους οποίους θα μπορούσε να είναι κατακόρυφο (πάνω ή κάτω). Αυτή η ασυμμετρία παραμένει για θέσεις κοντά στον οριζόντιο και κοντά στον κάθετο άξονα. Αυτή η εξήγηση για τη φυσική κατανομή των ραβδιών αποτελείται από γενικά *γεωμετρικά* γεγονότα *που δεν μπορούν να θεωρηθούν αιτίες*.

χρόνια) δεν έχουν επιλεχθεί *ad hoc* αλλά με βάση τις φυσικές ιδιότητες του παραδείγματος και δεν υπάρχει τίποτα αυθαίρετο με το ότι το 13 και το 17 είναι πρώτοι αριθμοί.

5.5 ΕΝΣΤΑΣΕΙΣ ΞΑΝΑ

Για όλους τους παραπάνω λόγους, το παράδειγμα του Baker φαίνεται να είναι υπόδειγμα μαθηματικής εξήγησης φυσικού φαινομένου. Ωστόσο, ακόμη και αυτό το παράδειγμα μπορεί να μην είναι αρκετό για να στηρίξει τη συναγωγή του ρεαλισμού ως προς τις μαθηματικές οντότητες.

Η Mary Leng, ενώ δεν αρνείται τον εξηγητικό ρόλο των μαθηματικών στο παράδειγμα, ισχυρίζεται πως αυτός δεν τα εμποδίζει από το να είναι μυθοπλαστικά. Γράφει:

> Γιατί το ότι το 13 είναι πρώτος αριθμός μπορεί να αποτελέσει εξήγηση της συμπεριφοράς των τζιτζικιών; Μόνο επειδή η διαδοχή των χρόνων έχει μοντελοποιηθεί σωστά από το σύστημα των φυσικών αριθμών…. Μπορούμε να εξηγήσουμε την εφαρμογή του μαθηματικού αποτελέσματος όχι ως αποτέλεσμα της *ύπαρξης* του αριθμού 13 ή 17 με την ιδιότητα να είναι πρώτος, αλλά μάλλον επειδή έπεται από τις υποθέσεις της θεωρίας αριθμών ότι το 13 και το 17 είναι πρώτοι αριθμοί.[86] (Leng 2005, σ. 16)

Γενικότερα, η θέση της είναι ότι δεν οφείλουμε να δεσμευόμαστε στην ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων που θέτουν οι μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων, γιατί τα μαθηματικά μπορούν να παίξουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο χωρίς να είναι αληθή.

Σύμφωνα με τον Baker (2009), η Leng εδώ προσφέρει μιας «δεύτερης τάξης» εξήγηση. Δηλαδή, περιγράφει πώς μια μαθηματική εξήγηση είναι δυνατή, δεδομένου του φιξιοναλισμού. Όμως, δεν χρησιμοποιεί το μαθηματικό φιξιοναλισμό για να εξηγήσει ένα φυσικό εξηγητέο. Υπάρχει διαφορά μεταξύ του να αναγνωρίσει κανείς τη δυνατή αναλήθεια των εξηγούντων που προσφέρονται και του να μην πιστεύει σε

[86] "Why is it that the primeness of 13 can serve as an explanation of the cicada behavior? Only because the succession of years is correctly modeled by the natural number system. . . . [W]e can account for the applicability of the mathematical result not as due to there actually being a number 13 or 17 with the property of primeness, but rather because it follows from the assumptions of number theory that 13 and 17 are prime."

ένα εξηγούν ενώ ταυτόχρονα το παρουσιάζει ως απαραίτητο στοιχείο της εξήγησης. Ένας ιστορικός των επιστημών μπορεί να περιγράψει πως οι χημικοί θα μπορούσαν να εξηγήσουν την καύση με την υπόθεση του φλογιστού· αλλά θα ήταν πολύ περίεργο για ένα χημικό να εξηγήσει την καύση με την υπόθεση του φλογιστού υποστηρίζοντας παράλληλα ότι το φλογιστόν δεν υπάρχει. Ο Baker (2009, σ. 627) υποστηρίζει πως η Leng δεν έχει επιχείρημα εδώ, καθώς το να λες πως τα μαθηματικά αντικείμενα *θα μπορούσαν* να εξηγούν το φυσικό φαινόμενο χωρίς να υπάρχουν δεν καταρρίπτει την πίστη στα εν λόγω αντικείμενα – «όπως ακριβώς ένα επιχείρημα που δείχνει ότι *θα μπορούσα* να έχω μια «γραφειόμορφη» οπτική εικόνα, χωρίς να υπάρχει γραφείο μπροστά μου, δεν είναι –τουλάχιστον όχι προφανώς- επιχείρημα για να καταρρίψει την πίστη μου στην ύπαρξη του γραφείου».[87]

Ο Juha Saatsi, όπως έχω ήδη αναφέρει, κάνει επίσης διάκριση μεταξύ εξηγητικού και αναπαραστατικού ρόλου: «Η βασική μου ανησυχία σχετικά με όλα αυτά τα παραδείγματα είναι πως δεν διαχωρίζουν με ικανοποιητική σαφήνεια τον εξηγητικό από τον αναπαραστατικό ρόλο των μαθηματικών»[88] (Saatsi 2010, σ. 144) Για αυτόν, τα μαθηματικά αναπαριστούν τον κόσμο, αλλά δεν τον εκφράζουν πραγματικά. Το ότι τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται από τις θεωρίες για τον φυσικό κόσμο και μας βοηθούν να μάθουμε περισσότερα για αυτόν, δεν σημαίνει απαραίτητα πως τα ίδια τα μαθηματικά εξηγούν τον κόσμο, ή πως χωρίς αυτά δεν θα μπορούσε να κατανοηθεί ο κόσμος. Ο ρόλος τους αυτός μας βοηθά να τεκμηριώσουμε τις περιγραφές μας του κόσμου και να καταλήξουμε στα κατάλληλα συμπεράσματα· δεν εξηγούν, όμως, τον φυσικό κόσμο.

Έτσι ο Saatsi υποστηρίζει πως δεν υπάρχει «μείγμα» βιολογικής και μαθηματικής εξήγησης. Υπάρχει μόνο βιολογική εξήγηση, με βάση την εξέλιξη, και η μαθηματική εξήγηση είναι απλώς ένας τρόπος να την εκφράσουμε απλούστερα. Διευκρινίζει:

> Η αναπαραστατική ικανότητα των μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για να δικαιολογήσει την πίστη μας σε αυτό: όσο τα μαθηματικά αντιπροσωπεύουν πιστά τις κρίσιμες ιδιότητες του χρόνου (π.χ., τη γραμμικότητά του) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποκτήσουμε γνώση για δεδομένα όπως *Για περιόδους στο εύρος 14-18 χρόνων η*

[87] “Just as an argument that shows how I could have a desk-like visual image without there being a desk in front of me is not—or at least not obviously—an argument for suspending my belief in the existence of the desk.”
[88] “My general worry about all of these examples is that they do not separate with sufficient clarity the explanatory from the representational role of mathematics.”

περίοδος που ελαχιστοποιεί τη διασταύρωση είναι 17.[89] (Saatsi 2010, σ. 149-150)

Ακόμα υποστηρίζει πως τα μαθηματικά δεν είναι καν η αναπαραστατική μέθοδος με τα περισσότερα πλεονεκτήματα και πως δεν χρειαζόμαστε καν τα μαθηματικά για την προκειμένη εξήγηση (Saatsi 2010, σ. 150). Αρκεί να πάρει κανείς ένα πλήθος (το πολύ 20 από κάθε είδος) ράβδων μήκους 14, 15, 16, 17 και 18 cm και να τις παρατάξει κάτω έτσι ώστε το κάθε είδος να σχηματίζει μια γραμμή, η μια δίπλα στην άλλη. Το ΕΚΠ δεν είναι τίποτα άλλο παρά το μήκος στο οποίο οι εκάστοτε δύο γραμμές συμπίπτουν. Εύκολα παρατηρεί κανείς πως το ΕΚΠ είναι ξεκάθαρα μακρύτερο στα ζευγάρια που περιέχουν τη γραμμή των ράβδων μήκους 17 cm. Και αφού το μήκος αναπαριστά τη γραμμικότητα του χρόνου, έχουμε μια πιο γενική (χωρίς μαθηματικά) εξήγηση για το πώς μπορούμε να βρούμε την περίοδο, από 14 έως 18, που ελαχιστοποιεί τη διασταύρωση. Δηλαδή, δεν χρειαζόμαστε καν την έννοια του πρώτου αριθμού και του ΕΚΠ για να εξηγήσουμε «μαθηματικά» το φαινόμενο. Ουσιαστικά, κατά τον Saatsi, μπορούμε «να μιλήσουμε μαθηματικά χωρίς μαθηματικά». Η αναπαραστατική ιδιότητα των μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει και δικαιολογήσει τα λεγόμενα, όχι να τα εξηγήσει.

Ο Baker, όμως, είχε υποστηρίξει επίσης ότι η μαθηματική εξήγηση είναι *περισσότερο εξηγητική διότι είναι πιο γενική*. Υπάρχει κάτι κοινό σε καθεμιά από τις συγκεκριμένες εξηγήσεις, το οποίο είναι φανερό *μόνο αν* χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά. Έτσι έχουμε *επιπλέον κατανόηση και εξήγηση* του φαινομένου. Όχι μόνο ενοποιούμε τα παρόμοια συγκεκριμένα φαινόμενα, αλλά αντιμετωπίζουμε και ένα σύνολο δυνατοτήτων που (ακόμα) δεν έχουν πραγματωθεί. Με χρήση των μαθηματικών μπορούμε επίσης να *προβλέψουμε* ότι άλλοι οργανισμοί με περιοδικούς κύκλους ζωής είναι πιθανό να εμφανίζουν περιόδους που είναι πρώτοι αριθμοί (Baker 2009, σ. 621). Ο Saatsi (2010, σ. 152) ανταπαντά κατασκευάζοντας ένα γενικό εξηγητικό σχήμα, *χωρίς καθόλου μαθηματικά*, που *ενοποιεί*, *γενικεύει* και *προβλέπει* όπως επιθυμεί ο Baker:

---

[89] "The representational capacity of mathematics can be only employed to justify our belief in this fact: in as far as mathematics faithfully represents the critical features of time (e.g. its linearity) it can be employed to gain knowledge of facts such as *For periods in the range 14–18 years the intersection minimizing period is 17*."

(1) Μια περίοδος κύκλου ζωής που ελαχιστοποιεί τη διασταύρωση με άλλες (κοντινές, μικρότερες) περιόδους είναι εξελικτικά επωφελής. [*βιολογικός νόμος*]

(2) Υπάρχει μια μοναδική περίοδος T_x που ελαχιστοποιεί τη διασταύρωση με τις περιόδους στο εύρος $[T_1, \ldots, T_2]$ χρόνων. [*γεγονός για τον χρόνο*]

(3) Τζιτζίκια στο οικοσύστημα τύπου E είναι περιορισμένα σε χρόνους ζωής από T_1 ως T_2 χρόνια. [*οικολογικός περιορισμός*]

---

(4) Τζιτζίκια στο οικοσύστημα τύπου Ε είναι πιθανότερο λόγω εξέλιξης να αναπτύξουν περιόδους T_x χρόνων.

Δεν έρχεται, όμως, σε σύγκρουση με την επιστημονική πρακτική αυτή η οπτική; Δεν ισχύει ότι οι βιολόγοι, αφού είχαν εξηγήσεις για τη μεγάλη διάρκεια και την περιοδικότητα των κύκλων ζωής των τζιτζικιών, εξακολουθούσαν να διερωτώνται *γιατί* αυτές οι περίοδοι έχουν ακριβώς τις τιμές που έχουν; Και αυτό δεν οφειλόταν στο ότι και οι δυο γνωστές τιμές ήταν πρώτοι αριθμοί; Ο Saatsi (2010, σ. 153) αντιτείνει πρώτα ότι δεν είναι σαφές τι ακριβώς εννοούν οι βιολόγοι όταν λένε ότι το εξηγητέο είναι το γεγονός ότι οι περίοδοι είναι πρώτοι αριθμοί. Μπορεί απλώς να χρησιμοποιούν αυτό το μαθηματικό ιδίωμα για να πουν: και οι δυο κύκλοι ζωής των τζιτζικιών είναι περίοδοι που ελαχιστοποιούν τις διασταυρώσεις. Κατά δεύτερο λόγο, ακόμη και αν μερικοί βιολόγοι θεωρούν τη θεωρία αριθμών ως αναπόσπαστο μέρος της εξήγησης, απομένει στον / στη φιλόσοφο να εξετάσει κατά πόσον έχουν δίκιο.

Ωστόσο, ακόμη και αν δεχθούμε ότι για τους βιολόγους το εξηγητέο συμπεριλαμβάνει το γεγονός ότι οι περίοδοι των κύκλων ζωής των τζιτζικιών είναι πρώτοι αριθμοί, δεν μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την παραδοχή αυτή για να καταλήξουμε ανενδοίαστα στον μαθηματικό ρεαλισμό μέσω συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση. Έτσι, τουλάχιστον, διατείνεται ο Sorin Bangu (2008). Στο πλαίσιο μιας εξήγησης, το εξηγητέο θεωρείται *αληθές*. Επομένως η πρόταση «Η περίοδος του κύκλου ζωής των τζιτζικιών (σε χρόνια) είναι πρώτος αριθμός» πρέπει να θεωρείται αληθής. Με μια φρεγκεανή αναδιατύπωση, η πρόταση «Ο αριθμός που αντιστοιχεί στην έννοια *περίοδος του κύκλου ζωής των τζιτζικιών μετρημένη σε χρόνια* είναι πρώτος» πρέπει να είναι αληθής. Αλλά κατά τη συνήθη σημασιολογία, αυτό στέκει μόνο αν ένα *μαθηματικό αντικείμενο*, ένας αριθμός, ανήκει σε ένα *σύνολο*, το σύνολο των πρώτων αριθμών. Επομένως, θεωρώντας ότι η εξηγητέα πρόταση συμπεριλαμβάνει τον ισχυρισμό ότι η περίοδος του κύκλου ζωής των τζιτζικιών σε χρόνια είναι πρώτος αριθμός και θεωρώντας ότι αυτή η εξηγητέα προταση είναι αληθής (όπως απαιτεί η μέθοδος της συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση), ο Baker προϋποθέτει τον ρεαλισμό ως προς τις μαθηματικές οντότητες προτού καν επιχειρηματολογήσει υπέρ του (Bangu 2008, σ. 18). Σε αυτή την εκδοχή και αξιοποίησή του το επιχείρημα από το αναπόδραστο είναι ανοιχτό σε κατηγορίες κυκλικότητας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε μερικά από τα δημοφιλέστερα επιχειρήματα υπέρ του μαθηματικού ρεαλισμού (πλατωνισμού)· τα επιχειρήματα του αναπόδραστου. Τα επιχειρήματα αυτά συμπεραίνουν την ανεξάρτητη ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων μέσα από τον μη εξαλείψιμο ρόλο που έχουν μαθηματικές προτάσεις στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες. Χρησιμοποιούν, δηλαδή, ανάλογους συλλογιστικούς δρόμους με εκείνους που ακολουθεί ένας επιστημονικός ρεαλιστής για να συναγάγει την ύπαρξη θεωρητικών (μη παρατηρήσιμων) οντοτήτων όπως είναι τα στοιχειώδη σωματίδια στη φυσική υψηλών ενεργειών ή οι μαύρες τρύπες στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Έτσι θέτουν μια ιδιαίτερη πρόκληση στους επιστημονικούς ρεαλιστές: μπορούν να είναι «συνεπείς» χωρίς να είναι *και* μαθηματικοί ρεαλιστές;

Τα επιχειρήματα από το αναπόδραστο της χρήσης μαθηματικών στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες είναι ελκυστικά γιατί δεν έχουν τον «a priori φιλοσοφικό αέρα» άλλων επιχειρημάτων για τον μαθηματικό ρεαλισμό που βασίζονται στη σημασιολογία, τις διαισθήσεις μας κ.λπ. Τα επιχειρήματα από το αναπόδραστο έχουν *νατουραλιστικό* πνεύμα με την έννοια ότι στρέφονται στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες.

Ωστόσο, ο αδιαμφισβήτητα χρήσιμος ρόλος των μαθηματικών στις εμπειρικές επιστήμες δεν τα καθιστά «αυτομάτως» και μη εξαλείψιμα. Το πρώτο πράγμα για το οποίο πρέπει να αποφανθούμε, λοιπόν, είναι το αναπόδραστο των μαθηματικών, με την έννοια πως τα μαθηματικά δεν εξαλείφονται από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες ή, αν εξαλείφονται, οι θεωρίες που προκύπτουν δεν είναι εξίσου καλές.

Η πιο σημαντική προσπάθεια ενάντια στο αναπόδραστο των μαθηματικών είναι αυτή του Hartry Field στο *Science without numbers* – έργο στο οποίο περιέγραψε ένα πρόγραμμα για να ξαναγραφεί όλη η φυσική χωρίς αναφορά σε, ή ποσόδειξη πάνω σε, μαθηματικές οντότητες και έκανε το πρώτο βήμα στο πρόγραμμα αυτό κατασκευάζοντας μια νομιναλιστική εκδοχή της νευτώνειας θεωρίας βαρύτητας. Αλλά το πρόγραμμα αυτό δεν έχει προχωρήσει μέχρι στιγμής με επιτυχία σε άλλες θεωρίες όπως η κβαντική μηχανική. Ακόμη, όμως, και αν η στρατηγική του Field επεκταθεί σε άλλες φυσικές θεωρίες, η επιτυχία του προγράμματος θα εξαρτηθεί από το αν οι αναδιατυπωμένες φυσικές θεωρίες είναι (1) *εξίσου ελκυστικές* όσο και τα μαθηματικοποιημένα αρχέτυπά τους και (2) *γνήσια νομιναλιστικές* με την έννοια, όχι μόνο ότι είναι *συντηρητικές* ως προς τη φυσική, αλλά και ότι δεν προϋποθέτουν οντότητες η ύπαρξη των οποίων φέρνει σε δύσκολη θέση ένα νομιναλιστή (π.χ. προτάσεις, ιδιότητες, κ.λπ.). Φυσικά, για τίποτε από αυτά δεν μπορεί κανείς να εκφέρει κατηγορηματική άποψη. Αλλά, όπως είδαμε, ο Malament έχει ισχυρές αμφιβολίες όσον αφορά την επίτευξη του στόχου (2). Και θα μπορούσαμε ίσως να έχουμε ισχυρές αμφιβολίες και για την επίτευξη το στόχου (1) γιατί τα μαθηματικά *ενοποιούν* τις θεωρίες με τρόπους που έχουν και αισθητική αξία.[90] Ή, τουλάχιστον, έτσι έχουμε συνηθίσει να «βλέπουμε τα πράγματα».

Επιπροσθέτως, είδαμε πως τα μαθηματικά δεν μπορούν να διαχωριστούν από τη λογική. Ακόμη και αν κάποιος θέλει να θεωρήσει τις μαθηματικές οντότητες εξαλείψιμες από τις επιστημονικές θεωρίες, είναι έτοιμος να πει το ίδιο και για τη λογική; Η λογική διέπει κάθε συλλογισμό που διεξάγουμε στις επιστήμες, κάθε επιχείρημα που διατυπώνουμε και αξιολογούμε. Τέτοιοι συλλογισμοί συγκροτούν το βασικό σκελετό και μηχανισμό των επιστημών που είναι αδιαμφισβήτητα μη εξαλείψιμος. Από την άλλη, όμως, όπως δείξαμε στο τέταρτο κεφάλαιο, η λογική απαιτεί ένα υπόβαθρο μαθηματικών εννοιών.

Για όλους τους παραπάνω λόγους, φαίνεται εύλογο το συμπέρασμα ότι *τα μαθηματικά είναι μη εξαλείψιμα από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες*. Το ερώτημα τώρα είναι αν αυτή η αναπόδραστη χρήση των μαθηματικών στην επιστήμη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως τεκμήριο για την ανεξάρτητη ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων. Μια θετική απάντηση ακολουθεί τον εξής συλλογισμό. Οι καλώς επικυρωμένες επιστημονικές θεωρίες περιέχουν αναπόδραστα προτάσεις που αναφέρονται σε, ή χρησιμοποιούν ποσόδειξη πάνω σε, μαθηματικές οντότητες. Και επειδή κάθε τέτοια θεωρία αντιμετωπίζει την εμπειρία (πείραμα, παρατήρηση) ως *ενιαίο όλον*, δεσμευόμαστε, ως επιστημονικοί ρεαλιστές, στην αλήθεια τέτοιων προτάσεων και, συνεπώς, στην ύπαρξη των εμπλεκόμενων μαθηματικών οντοτήτων (όπως δεσμευόμαστε στην ύπαρξη των θεωρητικών φυσικών οντοτήτων). Αλλά,

[90] Για παράδειγμα, η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών ενοποιεί τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις στην άλγεβρα· αλλιώς θα έπρεπε να αντιμετωπίζουμε διαφορετικά την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$ από την εξίσωση $x^2 + 1 = 0$. Και ίσως η ενοποίηση αυτή επεκτείνεται και σε φυσικά φαινόμενα που διέπονται από τέτοιες εξισώσεις.

όπως επεσήμανε η Maddy (ενότητα 3.4), αυτό το επιχείρημα από το αναπόδραστο συγκρούεται με την πρακτική των επιστημόνων και, κατά συνέπεια, παύει να είναι νατουραλιστικό. Πράγματι, οι φυσικοί δεν στρέφονται σε πειράματα, π.χ., στον ηλεκτρομαγνητισμό, για να αποδεχθούν ή να απορρίψουν θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης. Από την άλλη, πολλοί μαθηματικοί κλάδοι εξελίσσονται ανεξάρτητα από τις ανάγκες της φυσικής. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η έρευνα για νέα υποψήφια αξιώματα (λ.χ., για μεγάλους πληθάριθμους) στη θεωρία συνόλων στην οποία δεν αναμένεται επαλήθευση των νέων μαθηματικών αξιωμάτων από φυσικές παρατηρήσεις. Ο επικυρωτικός ολισμός που, κατά Quine, στηρίζει εκδοχές των επιχειρημάτων από το αναπόδραστο στηρίζεται, με τη σειρά του, σε μια *εσφαλμένη* θεωρία επικύρωσης των επιστημονικών υποθέσεων.

Αλλά είδαμε ότι υπάρχει και μια παραλλαγή των επιχειρημάτων από το αναπόδραστο που βασίζεται στην έννοια της *εξήγησης*, όχι σε εκείνη της *επικύρωσης*. Αυτή η εκδοχή θεωρείται πιο ενδιαφέρουσα από την πλειονότητα των φιλοσόφων που ασχολούνται με το θέμα (Baker, Colyvan, Field, Leng, Melia, κ.ά.). Ένας επιστημονικός ρεαλιστής αποφαίνεται για το ποιες φυσικές οντότητες υπάρχουν, και ποιες όχι, με γνώμονα το αν αυτές είναι μη εξαλείψιμες από τις καλύτερες επιστημονικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων. Η οντολογική δέσμευση εξαρτάται από την καλύτερη εξήγηση: τα ηλεκτρόνια υπάρχουν, αφού η υπόθεση της ύπαρξής τους είναι αναπόσπαστο μέρος των ικανοποιητικότερων εξηγήσεων ηλεκτρομαγνητικών, χημικών, κ.λπ. φαινομένων. Μπορεί να αξιοποιηθεί ένα τέτοιο επιχείρημα *συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση* στο θέμα της ύπαρξης *μαθηματικών* αντικειμένων;

Προκειμένου να προσεγγίσει κανείς το ερώτημα αυτό, πρέπει να διερευνήσει πρώτα αν υπάρχουν *γνήσιες μαθηματικές* εξηγήσεις *εμπειρικών* φαινομένων. Ή μήπως τα μαθηματικά αποτελούν απλώς ένα εργαλείο για την περιγραφή ή αναπαράσταση των φαινομένων αυτών; Η βιβλιογραφία βρίθει από παραδείγματα φυσικών φαινομένων που *φαίνεται* να απαιτούν μαθηματικές προτάσεις για την εξήγησή τους. Αλλά οι ενστάσεις από την πλευρά των «νομιναλιστών» είναι πολλές.

Πρώτο, πολλοί (όπως ο Melia) θεωρούν προβληματικό το ότι οι μαθηματικές προτάσεις αντλούνται από κλάδους όπως η γεωμετρία ή η τοπολογία. Και αυτό γιατί οι θεωρίες που εντάσσονται σε αυτούς τους κλάδους θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως θεωρίες για τον *φυσικό* χώρο ή χωροχρόνο. Όμως, η γεωμετρία, παρόλο που μπορεί να είναι «πιο κοντά» στην εμπειρική επιστήμη, έχει την ίδια φύση με τα υπόλοιπα μαθηματικά. Η γεωμετρική γνώση αποκτάται με παραγωγικό συλλογισμό και η «επέκτασή» της χρειάζεται μόνο τα εκάστοτε υπάρχοντα αξιώματα και πορίσματα και όχι περαιτέρω εμπειρική παρατήρηση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι μη ευκλείδειες γεωμετρίες. Επίσης, τα γεωμετρικά θεωρήματα, όπως και τα πορίσματα άλλων μαθηματικών θεωριών, δεν είναι τόσο «ανοιχτά» σε επανεξέταση όσο οι προτάσεις των εμπειρικών επιστημών. Τέλος, υπάρχουν και παραδείγματα που δεν έχουν να κάνουν με τη γεωμετρία, αλλά με πιο «αφηρημένους» μαθηματικούς κλάδους όπως η θεωρία αριθμών (π.χ., το παράδειγμα με τα περιοδικά τζιτζίκια).

Ο κύριος προβληματισμός είναι, λοιπόν, εάν σε αυτά τα παραδείγματα ο ρόλος των μαθηματικών είναι *εξηγητικός* ή απλώς *αναπαραστατικός*. Οι μαθηματικές προτάσεις συμμετέχουν με μη εξαλείψιμο τρόπο στην εξήγηση του φυσικού φαινομένου; Ή απλώς το αναπαριστούν και επιτρέπουν τη συναγωγή προτάσεων για το φυσικό φαινόμενο από άλλες τέτοιες προτάσεις; Για τη δεύτερη εναλλακτική επιχειρηματολόγησε ο Saatsi. Ένας λόγος είναι ότι για την αξιοποίηση των μαθηματικών στη μελέτη φυσικών φαινομένων απαιτούνται «γέφυρες» από τις μαθηματικές στις φυσικές προτάσεις και πίσω. Αλλά, όπως σωστά παρατήρησαν οι Lyon και Colyvan, το ότι απαιτούνται τέτοιες «γέφυρες», προκειμένου μια μαθηματική εξήγηση να αποτελέσει εξήγηση κάποιου φυσικού φαινομένου, δεν σημαίνει πως αυτές οι «γέφυρες» κάνουν κάτι περισσότερο από μια *μετάδοση της εξήγησης*. Και αυτό δεν στερεί τα μαθηματικά από τον εξηγητικό τους ρόλο. Μπορεί ο Steiner να έχει δίκιο στο ότι οι μαθηματικές εξηγήσεις φυσικών φαινομένων είναι τελικά εξηγήσεις *μαθηματικών* γεγονότων, στις οποίες έχουμε προσθέσει περιγραφές ειδικών φυσικών συνθηκών. Όντως, η μαθηματική εξήγηση ενός φυσικού φαινομένου μπορεί να ανάγεται στην εξήγηση μιας μαθηματικής αλήθειας (αν αφαιρέσουμε τα συγκεκριμένα φυσικά δεδομένα), αλλά αυτή η μαθηματική αλήθεια αντιστοιχεί στη φυσική αλήθεια που περιγράφει. Πρόκειται για μια «γεφύρωση» που δεν καταργεί τον εξηγητικό ρόλο των μαθηματικών.

Μπορεί, επιπλέον, δεδομένης μιας μαθηματικής εξήγησης ενός φυσικού φαινομένου να είναι δυνατή η κατασκευή μιας μη μαθηματικής εξήγησης του ίδιου φαινομένου (όπως έδειξε ο Saatsi στο παράδειγμα με τα τζιτζίκια). Αλλά τέτοιες κατασκευές φαίνονται *ad hoc* και στερούνται έτσι επιθυμητών χαρακτηριστικών όπως η δυνατότητα γενίκευσης.

Για τους παραπάνω λόγους, υποστηρίζω ότι *υπάρχουν γνήσιες μαθηματικές εξηγήσεις εμπειρικών φαινομένων*. Όμως αυτό δικαιολογεί την πεποίθηση στην ανεξάρτητη ύπαρξη μαθηματικών οντοτήτων; Θα υποστηρίξω πως όχι.

Ο πρώτος λόγος είναι ότι η συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση, ενώ εφαρμόζεται στις εμπειρικές επιστήμες, δεν εφαρμόζεται στα μαθηματικά. Το πρόβλημα δεν είναι ότι η εισαγωγή μιας μαθηματικής οντότητας δεν μπορεί να εξηγήσει καλύτερα –υπό την οπτική της ενοποίησης, της κομψότητας, κ.λπ.– ένα σώμα μαθηματικών ή φυσικών γεγονότων. Αντίθετα, η εισαγωγή ενός αξιώματος που θέτει κάποια μαθηματική οντότητα μπορεί να ενοποιήσει κομμάτια των μαθηματικών, όπως συμβαίνει με το αξίωμα της επιλογής στη θεωρία συνόλων. Το πρόβλημα είναι ότι αυτή η εξηγητική, ενοποιητική, ικανότητα δεν απαιτεί την αλήθεια του αξιώματος και την πραγματική ύπαρξη της οντότητας, εκτός εάν κάτι τέτοιο προϋποτίθεται από το ίδιο το αίτημα της εξήγησης. Δηλαδή, στο σημείο αυτό οφείλουμε να ταχθούμε με τη Leng και να δεχθούμε ότι *τα μαθηματικά μπορούν να παίζουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο στις εμπειρικές επιστήμες όντας φιξιοναλιστικά ερμηνευμένα*.

Τέλος, όπως είδαμε στην ενότητα 5.5, *αιτήματα προς εξήγηση* φυσικών φαινομένων θέτουν από μόνα τους την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων, ανάλογα με το πώς διατυπώνονται και εφόσον υιοθετούμε για τα μαθηματικά την ίδια σημασιολογία που υιοθετούμε για τις επιστημονικές προτάσεις. Αν επιζητώ να εξηγήσω γιατί η περίοδος κύκλου ζωής ενός είδους τζιτζικιών *είναι πρώτος αριθμός*, τότε μπορώ να συναγάγω την ύπαρξη πρώτων αριθμών από την αλήθεια του ίδιου του εξηγητέου – χωρίς, δηλαδή, να οικοδομήσω μια μαθηματική εξήγηση για να χρησιμοποιήσω ύστερα την απαγωγική μέθοδο της συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση.

Πράγματι, τα μαθηματικά *είναι γλώσσα* που χρησιμοποιείται από τις εμπειρικές επιστήμες, όχι μόνο για να κατανοήσουν, αλλά και για να *περιγράψουν* τον εμπειρικό κόσμο. Το σημείο αυτό το έχουν τονίσει οι Steiner και Bangu στο πλαίσιο της φιλοσοφικής συζήτησης για τα επιχειρήματα του αναπόδραστου. Και ενώ φαίνεται να αποτελεί τετριμμένη παρατήρηση, έχει ιδιαίτερη σημασία: δείχνει ότι υπάρχουν πιο σύντομοι δρόμοι προς τον μαθηματικό ρεαλισμό.

Και ένα πρόσθετο επιχείρημα εναντίον της εφαρμογής της συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση σε ερωτήματα ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων. Αν θέλουμε μια τέτοια εφαρμογή να μας πει *ποια μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν*, όχι μόνο *ότι κάποια μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν*, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με το πρόβλημα της ιστορικής αλλαγής, όχι μόνο των φυσικών θεωριών, αλλά και των μαθηματικών θεμελιώσεών τους. Γενικά, η ίδια φυσική («νομιναλιστική» κατά Field) θεωρία T ενδέχεται να εμφυτεύεται σε διαφορετικές μαθηματικές θεωρίες, ας πούμε M_1 και M_2, καθεμιά από τις οποίες συνεισφέρει στην εξήγηση φαινομένων της T. Σε μια τέτοια περίπτωση, σε ποιες μαθηματικές οντότητες θα μας δεσμεύσει το επιχείρημα από το εξηγητικό αναπόδραστο; Σε εκείνες της M_1 ή σε εκείνες της M_2;

Βέβαια, για να ολοκληρωθεί ένα τέτοιο επιχείρημα απαιτεί ένα πειστικό παράδειγμα φυσικής θεωρίας T που δέχθηκε εναλλακτικές μαθηματικές θεμελιώσεις M_1 και M_2, *οι οποίες ήταν εξίσου καλές*. Δεν γνωρίζω αν υπάρχει κάποιο τέτοιο παράδειγμα.

Ένας κλασικός μαθηματικός θα μπορούσε στο σημείο αυτό να αντιτείνει ότι η επιλογή ανάμεσα στη M_1 και στη M_2 δεν έχει καμιά σημασία αφού *τα πάντα είναι σύνολα*! Αλλά το γεγονός ότι όλα τα αντικείμενα των κλασικών μαθηματικών μπορούν να αναπαρασταθούν στη θεωρία συνόλων ZFC σημαίνει πράγματι ότι πάντα *είναι* σύνολα; Μάλλον όχι, όπως ακριβώς και το γεγονός ότι κάθε ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί ως (δηλαδή, είναι ισόμορφη με) μια ομάδα μεταθέσεων (χάρη στο θεώρημα Cayley) δεν σημαίνει ότι τα μοναδικά μαθηματικά αντικείμενα που συγκροτούν ομάδες είναι μεταθέσεις (δηλαδή, 1-1 και επί απεικονίσεις ενός συνόλου στον εαυτό του). Τέλος τα ίδια τα μαθηματικά επιδέχονται εναλλακτικές θεμελιώσεις (π.χ., με τη θεωρία συνόλων ή με τη θεωρία κατηγοριών).[91]

Με δυο λόγια, το εξηγητικό επιχείρημα του αναπόδραστου δικαιολογεί την πίστη σε όσα μαθηματικά χρειαζόμαστε για τις εξηγητικά βέλτιστες επιστημονικές μας θεωρίες. Αλλά τόσο το ποια είναι η εξηγητικά βέλτιστη επιστημονική θεωρία όσο και τα ίδια τα θεμέλια των μαθηματικών που τη στηρίζουν μεταβάλλονται

[91] Τις συνέπειες αυτού του γεγονότος για τα επιχειρήματα από το αναπόδραστο έχει διερευνήσει ο Baker (2003).

ιστορικά. Όμως για ένα μαθηματικό ρεαλιστή (πλατωνιστή), τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς – και, συνεπώς, ανεξάρτητα και από την ιστορία των επιστημών και των μαθηματικών μας– ως στοιχεία ενός αμετάβλητου, άχρονου, κόσμου. Επομένως η συναγωγή στην καλύτερη εξήγηση, αν εφαρμοστεί στο ζήτημα της ύπαρξης μαθηματικών αντικειμένων, δεν μπορεί παρά να περιοριστεί σε ένα ιδιότυπο *αγνωστικισμό* για τις μαθηματικές οντότητες: *κάποιες* υπάρχουν αλλά δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (με βεβαιότητα) *ποιες*.

Συνοψίζοντας, τα μαθηματικά είναι μη εξαλείψιμα από τις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες και παίζουν γνήσιο εξηγητικό ρόλο σε αυτές. Ωστόσο, τα γεγονότα αυτά δεν μπορούν να αξιοποιηθούν ώστε να συναχθεί η ανεξάρτητη ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων μέσω κάποιου είδους συναγωγής στην καλύτερη εξήγηση. Ένας συνδυασμός επιστημονικού ρεαλισμού με μαθηματικό αντιρεαλισμό φαίνεται καταρχήν εφικτός.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναπολιτάνος, Δ. Α. ([1985] 2009): *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. 8η έκδοση. Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.

Αραγεώργης, Α. (2008): «Γενικευμένη μη πληρότητα: Κατανόηση και παρανόηση των θεωρημάτων μη πληρότητας του Gödel», *Cogito* **8***:* 84-91.

Baker, A. (2003): "The indispensability argument and multiple foundations for mathematics", *The Philosophical Quarterly* **53**: 49-67.

Baker, A. (2005): "Are there genuine mathematical explanations of physical phenomena?" *Mind* **114**/**454**: 223-238.

Baker, A. (2009): "Mathematical explanation in science", *The British Journal for the Philosophy of Science* **60**/**3**: 611-633.

Balaguer, M. (2009): "Realism and anti-realism in mathematics" στο A. D. Irvine (ed.), *Philosophy of Mathematics.* Handbook of the Philosophy of Science. Amsterdam: Elsevier, σ. 35-101.

Bangu, S. I. (2008): "Inference to the best explanation and mathematical realism", *Synthese* **160**/**1**: 13-20.

Colyvan M. (2001): *The indispensability of mathematics.* New York: Oxford University Press.

Colyvan, M. (2002): "Mathematics and aesthetic considerations in science", *Mind* **111**/**441**: 69-74.

Cox, R. T., & Carlton, C. E. (1988): "Paleoclimatic influences in the evolution of periodical cicadas (Insecta: Homoptera: Cicadidae: Magicicada spp.)", *American Midland Naturalist* **120**: 183-193.

Field, H. (1989): *Realism, mathematics and modality*. Oxford: Blackwell.

Field, H. ([1980] 2016): *Science without numbers*. 2nd edition. New York: Oxford University Press.

Goles, E., Schulz, O., & Markus, M. (2001): "Prime number selection of cycles in a predator-prey model", *Complexity* **6**/**4**: 33-38.

Hales, T. C. (2001): "The honeycomb conjecture", *Discrete & Computational Geometry* **25**/**1**: 1-22.

Leng, M. (2005): “Mathematical explanation” στο C. Cellucci and D. Gillies (eds.), *Mathematical Reasoning and Heuristics*. London: King's College Publications, σ. 167–189.

Leng, M. (2010): *Mathematics and reality*. New York: Oxford University Press.

Lyon, A., & Colyvan, M. (2008): “The explanatory power of phase spaces”, *Philosophia Mathematica*, **16**/**2**: 227-243.

Maddy, P. (1992): “Indispensability and practice”, *The Journal of Philosophy* **89/6**: 275-289.

Maddy, P. ([1994] 1995): “Taking naturalism seriously” στο D. Prawitz, B. Skyrms and D. Westerstahl (eds.), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, (Logic Methodology and Philosophy of Science IX). Sweden: Elsevier.

Maddy, P. (1995): “Naturalism and ontology”, *Philosophia Mathematica* **3**/**3**: 248-270.

Malament, D. (1982): “Review of Hartry Field’s *Science without numbers: A defense of nominalism*”, *The Journal of Philosophy* **79/9**: 523-534.

Mancosu, P. ([2008] 2011): “Explanation in mathematics” στο E. N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation/

Melia, J. (2000): “Weaseling away the indispensability argument”, *Mind* **109**/**435**: 455-480.

Melia, J. (2002): “Response to Colyvan”, *Mind* **111**/**441**: 75-79.

Psillos, S. (1999). *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*. London: Routledge.

Putnam, H. ([1975] 1979): “Philosophy of logic” στο *Philosophical Papers, Volume 1: Mathematics, Matter and Method*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, σ. 323-357.

Quine, W. v. O. (1951): “Two dogmas of empiricism”, *The Philosophical Review* **60**: 20-43.

Quine, W. v. O. (1981): *Theories and things*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Quine, W. v. O. (1986): “Reply to Charles Parsons” στο L. Hahn and P. Schilpp (eds.), *The Philosophy of W.v.O Quine*. La Salle, ILL: Open Court, σ. 396–403.

Quine, W. v. O. ([1990] 1992): *Pursuit of truth*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Quine, W. v. O. ([1960] 2013): *Word and object*. Foreword by P. S. Churchland. Preface by D. Føllesdal. Cambridge, MA: MIT Press.

Saatsi, J. (2007): "Living in harmony: Nominalism and the explanationist argument for realism", *International Studies in the Philosophy of Science* **21**/**1**: 19-33.

Saatsi, J. (2010): "The enhanced indispensability argument: Representational versus explanatory role of mathematics in science", *The British Journal for the Philosophy of Science* **62**/**1**: 143-154.

Shapiro, S. ([2000] 2006): *Σκέψεις για τα Μαθηματικά*. Μετάφραση: Κ. Αθ. Δρόσος, Δ. Σπανός. Επιστημονική επιμέλεια: Κ. Αθ. Δρόσος. Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Steiner, M. (1978): "Mathematics, explanation, and scientific knowledge", *Noûs* **12/1**: 17-28.

Woodward, J. ([2003] 2014): "Scientific Explanation" στο E. N. Zalta (ed.), *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. https://plato.stanford.edu/entries/scientific-explanation/

Yoshimura, J. (1997): "The evolutionary origins of periodical cicadas during ice ages", *The American Naturalist* **149**/**1**: 112-124.