Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Δ. Π. Μ. Σ. «Μαθηματικη Προτυποποιηση
σε Συγχρονες Τεχνολογιες και την Οικονομια»

Μεταπτυχιακη Διπλωματικη Εργασια

Μέθοδοι των
Feynman Path Integrals
στα Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων

Θεωρία και Στοχαστική Προσομοίωση

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Ι. ΣΤΟΥΡΑΣ

Κωνσταντίνος Ι. Στούρας

Μέθοδοι των **Feynman Path Integrals** στα Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων

Θεωρία και Στοχαστική Προσομοίωση

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Κωνσταντίνος Ι. Στούρας
Ph.D. Candidate in Technology and Operations Management
INSEAD
Boulevard de Constance 77305 Fontainebleau Cedex, France
e-mail: konstantinos.stouras@insead.edu
web page: users.ntua.gr/kstouras/

Επιβλέπων

Βασίλης-Γιώργος Παπανικολάου
Καθηγητής
Τομέας Μαθηματικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: papanico@math.ntua.gr
web page: www.math.ntua.gr/∼papanico/

Μέλη Επιτροπής

Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς
Καθηγητής
Τομέας Μαθηματικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: trassias@math.ntua.gr
web page: www.math.ntua.gr/∼trassias/

Ιωάννης Σπηλιώτης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τομέας Μαθηματικών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, ΤΚ. 15780,
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα
e-mail: jspil@math.ntua.gr
web page: www.math.ntua.gr/∼jspil/

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε σε περιβάλλον LaTeX από τον συγγραφέα.

Αφιερώνεται στους καθηγητές μου
του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου,
που μου μετέδωσαν την αγάπη τους για τα Μαθηματικά,
και που στήριξαν τον αγώνα μου για το «επόμενο βήμα»...

Αρχή ήμισυ παντός

Πλάτων (427-347 π.Χ.)

Περίληψη

Ο στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να περιγράψει μια εναλλακτική προσέγγιση στη θεωρία των στοχαστικών μοντέλων των επιτοκίων χρησιμοποιώντας μια έμμεση σύνδεση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ), με τη θεωρία των Πιθανοτήτων και τη Στοχαστική Ανάλυση. Η σύνδεση αυτή ανακαλύφθηκε αρχικά από τον R. Feynman, αλλά επεκτάθηκε και αυστηροποιήθηκε με την έρευνα του M. Kač οδηγώντας στην περίφημη Feynman-Kač formula. Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, οι λύσεις μιας συγκεκριμένης κλάσης ΜΔΕ (παραβολικού τύπου) επιδέχονται μια στοχαστική αναπαράσταση. Αρχικά, συνδυάζουμε πορίσματα της Feynman-Kač θεωρίας με τη χρηματοοικονομική θεωρία με στόχο την τιμολόγηση ομολόγων σε συνθήκες μη κερδοσκοπίας. Ως δύο εφαρμογές, μελετούμε με πιθανοθεωρητικές μεθόδους το μοντέλο του Vasiček και το μοντέλο των Ho-Lee καταλήγοντας σε αναλυτικούς τύπους της τιμής του ομολόγου. Στο παράρτημα παρατίθεται ένας αλγόριθμος τύπου Monte Carlo τιμολόγησης ομολόγων, δοθέντος ενός στοχαστικού μοντέλου των επιτοκίων.

Λέξεις και φράσεις κλειδιά: Feynman Kač formula, μοντέλο του Vasiček, μοντέλο των Ho-Lee.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Abstract

The purpose of this thesis is to describe an alternative theory of stochastic interest rate modeling using tools from the subtle connection of Partial Differential Equations (PDEs), with the theory of Probability and Stochastic Analysis. The latter link was originally discovered by R. Feynman, but was further extended and made rigorous by the research work of M. Kač resulting to the famous Feynman-Kač formula. Under suitable conditions, the solutions of a particular class of PDEs (of parabolic type) are subject to a stochastic representation. Firstly, we combine the Feynman-Kač results with the theory of Mathematical Finance resulting in the zero-coupon bond pricing formula under no arbitrage conditions. As two applications, we study by probability methods the Vasiček and the Ho-Lee models, providing solutions in closed form. In the appendix, we provide a Monte Carlo algorithm of bond pricing, given a stochastic model of the interest rates.

Keywords and phrases: Feynman-Kač formula; interest rate modeling; Vasiček model; Ho-Lee model.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο να δώσει μια συνοπτική περιγραφή της θεωρίας των στοχαστικών μοντέλων των επιτοκίων χρησιμοποιώντας μια έμμεση σύνδεση της ευρύτερης περιοχής των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ), με τη Στοχαστική Ανάλυση. Αποτελεί την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θέλω να πιστεύω πως στις σελίδες που ακολουθούν παρέχεται μια καλή, πρώτη προσέγγιση στην επίλυση με Πιθανότητες ντετερμινιστικών ΜΔΕ των Χρηματοοικονομικών, εκφράζοντας τις λύσεις αυτών (όποτε υπάρχουν) ως path integrals. Τα τελευταία θα μπορούσαν να αποδοθούν στα ελληνικά ως "ολοκληρώματα πάνω σε διαδρομές" και εισήχθησαν ευρετικά για πρώτη φορά από τον μεγάλο Φυσικό Richard Feynman κατά την επαναδιατύπωση της Κβαντομηχανικής στη διδακτορική του διατριβή στο Princeton το 1942.

Από τότε, διάφοροι μαθηματικοί και μαθηματικοί φυσικοί προσπάθησαν να θεμελιώσουν αυστηρά τα όσα ο Feynman διαισθητικά εννοούσε, αλλά χωρίς ένα γενικό αποτέλεσμα. Παρ' όλα αυτά, το 1949 ο Μαθηματικός Mark Kač έδειξε με μια ευφυή απόδειξη, ότι η εξίσωση του Schrödinger της Κβαντομηχανικής μπορούσε να μετασχηματιστεί στη γνωστή Μερική Διαφορική Εξίσωση της θερμότητας για την οποία το μετασχηματισμένο "ολοκλήρωμα" του Feynman αναγόταν στο ολοκλήρωμα Wiener, ένα γνήσιο ολοκλήρωμα με την Lebesgue έννοια της αριθμήσιμης αθροιστικότητας. Οι μετέπειτα καρποί της έρευνας των Robert Cameron, Tosio Kato και Edward Nelson εμφύσησαν το όνειρο σε κάθε φυσικό ότι πιθανότατα ολόκληρη η Φυσική θα μπορούσε να ξαναγραφτεί σε όρους "αθροισμάτων ιστοριών". Αλλά και το γενικό όφελος για τα Μαθηματικά ήταν μεγάλο· για πολύ γενικές ΜΔΕ, των οποίων η *ύπαρξη λύσης* και μόνο θα ήταν ένα ιδιαίτερα απαιτητικό πρόβλημα, η Feynman-Kač formula μας παρέχει (κάτω από κάποιες "χαλαρές" προϋποθέσεις) τη *μορφή της λύσης* σε "κλειστό τύπο". Έτσι, γίνεται ευκολότερη η μελέτη ασυμπτωτικών ιδιοτήτων ΜΔΕ όπως η ευστάθεια λύσης, η έκρηξη λύσης κ.ά.

Η επονομαζόμενη *Feynman-Kač formula* έγινε εξαιρετικά χρήσιμη για διάφορους λόγους, ταύτοχρονα για τα Μαθηματικά και τη Φυσική, και προσφάτως και για τα Χρηματοοικονομικά, αλλά δε λύνει από μόνη της το πρόβλημα απόδοσης νοήματος στο ολοκλήρωμα του Feynman. Η Feynman-Kač formula προτείνει, ωστόσο, μια πρώτη προσέγγιση στο εν λόγω ολοκλήρωμα. Επιπρόσθετα, ένα τέτοιο αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις εφαρμογές.

Μια σημαντική εφαρμογή αυτής της θεωρίας των path integrals αποτέλεσε μια νέα απόδειξη του Νόμου του Τόξου Ημιτόνου (Arcsin Law) του Paul Lévy από τον Kač. Ο νόμος αυτός έχει τεράστια πρακτική χρησιμότητα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατανοηθούν φαινόμενα που μεταβάλλονται με μια τυχαία μορφή και που αντίκεινται ιδιαίτερα στη διαίσθησή μας.

Επιπρόσθετα, τα τελευταία είκοσι χρόνια υπήρξε μια πρωτοφανής αύξηση της ζήτησης εργαλείων και μεθόδων της λεγόμενης *Στοχαστικής Ανάλυσης* από τον αναπτυσσόμενο κλάδο των Μαθηματικών Χρηματοοικονομικών (Mathematical Finance, MF). Εκεί, στοχαστικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση κινδύνων και την τιμολόγηση των διαφόρων χρηματοοικονομικών προϊόντων και των παραγώγων (options) αυτών.

Σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει σε άλλες περιοχές των παραγώγων, η *μοντελοποίηση των επιτοκίων* (interest-rate modeling) είναι ένας κλάδος του MF όπου ως τώρα δεν έχει προταθεί κάποιο γενικό μοντέλο ως "πρότυπο" σημείο αναφοράς[1]. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν στην αγορά τέτοια πρότυπα μοντέλα για τις διάφορες υποκατηγορίες των παραγώγων των επιτοκίων. Ωστόσο, αυτά δε συμβαδίζουν, συνήθως, με τη θεωρία και δε μπορούν να χρησιμοποιηθούν από κοινού για την τιμολόγηση άλλων παραγώγων με υποκείμενο τίτλο επιτόκια. Η (στοχαστική) αναπαράσταση των τιμών τέτοιων προϊόντων που δίνει η Feynman-Kač formula μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια εναλλακτική προσέγγιση στην τιμολόγηση με κυριότερο όπλο της τη δυνατότητα *στοχαστικής προσομοίωσης*. Στην πράξη, μια αναλυτική λύση μπορεί να είναι περισσότερο "επίπονο" να βρεθεί υπολογιστικά με ακρίβεια, από ότι μια αριθμητική προσέγγισή της.

Μια σύντομη περιγραφή των περιεχομένων ακολουθεί· για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Πίνακα Περιεχομένων.

Το Κεφ. 1 εισάγει τον αναγνώστη σε κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες της αγοράς των ομολόγων. Μαθηματικές και Χρηματοοικονομικές γνώσεις καταστρατηγούνται στο Κεφ. 2 για την τιμολόγηση ομολόγων μέσω στοχαστικής μοντελοποίησης των επιτοκίων. Τέλος, στο Παράρτημα παρέχονται συμπληρωματικές έννοιες της Στοχαστικής Ανάλυσης, καθώς και ο κώδικας των υλοποιήσεων αυτής της εργασίας.

Περιγραφή της στοιχειοθέτησης της εργασίας

Η εργασία αυτή στοιχειοθετήθηκε από τον γράφοντα σε περιβάλλον LaTeX και ένα μέρος της σε XeLaTeX (ένα σύστημα στοιχειοθεσίας που επεκτείνει το LaTeX ώστε να δουλέψει με το Unicode και με μοντέρνα format γραμματοσειρών, όπως το OpenType) αντιμετωπίζοντας στην αρχή τρομερά προβλήματα στη συγγραφή ενός δίγλωσσου κειμένου με κύρια γλώσσα την Ελληνική. Οι δυνατότητες αυτού του λογισμικού ανοικτού κώδικα (open-source) εκμεταλλεύτηκαν στο έπακρο. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί πως δόθηκε έμφαση πρώτα στον *ηλεκτρονικό* αναγνώστη του ηλεκτρονικού βιβλίου (ebook), και δευτερευόντως στον *"παραδοσιακό"* αναγνώστη του χαρτιού· αν ικανοποιούνται οι ανάγκες του πρώτου, αυ-

[1] Το γνωστό "LIBOR market model" αναδύεται ως ένας πιθανός υποψήφιος για αυτό το ρόλο.

τομάτως ικανοποιούνται και του δευτέρου. Οι παραπομπές σε διάφορα σημεία του κειμένου είναι αρκετές, κάτι που ενώ είναι "ένα πάτημα του ποντικιού" ηλεκτρονικά, πιθανότατα να κουράζει σε μια εκτυπωμένη έκδοση. Οι εικόνες απεικονίστηκαν από το λογισμικό ανοικτού κώδικα "R", έπειτα από εκτενείς αριθμητικούς υπολογισμούς.

Για τη βελτίωση της *αισθητικής εικόνας* του κειμένου, και κατά συνέπεια της ανάγνωσης και κατανόησης των εννοιών που ακολουθούν, δημιουργήθηκε επίσης ένα LaTeX style file (επέκτασης .sty) που επανορίζει όλη τη δομή (απόσταση από το περιθώριο, στυλ επικεφαλίδων, κεντράρισμα εικόνων κ.ά.). Σημαντική βοήθεια σε όλους τους κανόνες *ορθής* στοιχειοθέτησης κειμένου παρείχε η "Βίβλος" της Τυπογραφίας *The Chicago Manual of Style* [12].

Όσον αφορά την *λογική οργάνωση* του κειμένου:

- Θα ήταν χρήσιμο ο αναγνώστης να συμβουλευτεί τη συνοπτική Λίστα Συμβολισμών της σελίδας 57 πριν αρχίσει την ανάγνωση αυτής της εργασίας, και να επανέρχεται σε αυτήν όποτε κρίνει απαραίτητο.

- Στη σελίδα 59 υπάρχουν όλες οι βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν. Να σημειωθεί ότι η Βιβλιογραφία δημιουργήθηκε *αυτόματα* με τη βοήθεια του BibTeX δημιουργώντας εύκολα μια βάση δεδομένων από την τοποθεσία MathSciNet.

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον δάσκαλό μου, Καθηγητή Βασίλη Παπανικολάου, επιβλέποντα αυτής της εργασίας, για την καθοδήγηση, τη βοήθεια, και το χρόνο που μου αφιέρωσε, τόσο κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, όσο και για την εξασφάλιση των επόμενων βημάτων στις σπουδές μου.

Επιπρόσθετα, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ιωάννη Σπηλιώτη για την πρόθυμη ανταπόκρισή του στις απορίες μου τόσο στα πλαίσια της εργασίας αυτής, όσο και στα πλαίσια των δραστηριοτήτων μου στο χώρο. Θα ήθελα να τονίσω ότι η κατανόηση της σχετικής βιβλιογραφίας της παρούσης εργασίας κατέστη δυνατή χάρη στις γνώσεις που απέκτησα από το μάθημα της Στοχαστικής Ανάλυσης, το οποίο πρώτος δίδαξε στη χώρα μας σε προπτυχιακό επίπεδο.

Επιπλέον, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή Θεμιστοκλή Μ. Ρασσιά, μέλος της τριμελούς επιτροπής της παρούσας εργασίας, ο οποίος κατά τη διδασκαλία των μαθημάτων "Μαθηματική Ανάλυση Ι" και "Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ" στο 1ο και 2ο εξάμηνο αντίστοιχα, έθεσε τις βάσεις για την ενασχόληση μου με τα Μαθηματικά. Τον ευχαριστώ επίσης και για όλη την καθοδήγηση που μου προσέφερε, μέσα από πολυάριθμες συζητήσεις για τα πανεπιστήμια, τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους, που είχαμε αυτή την τόσο δύσκολη, και συνάμα, καθοριστική χρονιά για το μέλλον μου.

Ακόμη, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών Αθανάσιο Γιαννακόπουλο, τον Επίκουρο Καθηγητή του Πανεπιστη-

μίου Αιγαίου Στέλιο Ξανθόπουλο, και τον Λέκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς Νικόλαο Εγγλέζο για τις πολύτιμες συζητήσεις που είχαμε κατά τη διεξαγωγή του 7ου Θερινού Σχολείου στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά τον προηγούμενο Ιούλιο.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου για όσα μου δίδαξαν και για την καθοδήγηση στην ως τώρα φοιτητική μου ζωή.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την οικογένειά μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και στήριξη που μου προσέφεραν καθ΄ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ελπίζω οι ιδέες και οι έννοιες που παρουσιάζονται να αποτελέσουν κίνητρο περαιτέρω ανάλυση από μελλοντικούς φοιτητές, εξερευνώντας μια πραγματικά εκπληκτική περιοχή της διεπαφής των Μαθηματικών με τα Χρηματοοικονομικά.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

Κωνσταντίνος Ι. Στούρας

Περιεχόμενα

> Υπάρχουν 10^{11} αστέρια στον γαλαξία. Αυτό συνήθως ήταν ένα μεγάλο νούμερο. Αλλά είναι *μόνο* 100 δις. Είναι λιγότερο από το δημοσιονομικό έλλειμμα! Συνηθίζαμε να τους αποκαλούμε αστρονομικούς αριθμούς. Στη σημερινή εποχή πρέπει να τους αποκαλούμε *οικονομικούς* αριθμούς.
>
> *Richard Feynman (1918-1988)*

Κεφάλαιο *1*

Χαρακτηριστικά Γνωρίσματα των Ομολόγων

The bearish make money, the bullish make money and the pigs get slatered.

A trader's quote

Στον χώρο της διαχείρισης των επενδύσεων (investment management), η πιο σημαντική απόφαση που πρέπει να παρθεί είναι αυτή της *βέλτιστης* τοποθέτησης του κεφαλαίου προς επένδυση, στις διάφορες επενδυτικές κλάσεις (asset classes). Οι κύριες επενδυτικές κλάσεις είναι οι *μετοχές* και τα *ομόλογα*[1]. Υπάρχουν όμως και άλλες, "εναλλακτικές" επενδυτικές κλάσεις όπως οι επενδύσεις σε *ακίνητα* (real estate investments), τα *αμοιβαία κεφάλαια* (hedge funds), ή οι επενδύσεις σε *εμπορεύματα* (commodities), όπως, για παράδειγμα, επενδύσεις σε χρυσό, πετρέλαιο ή σε πολύτιμα έργα τέχνης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιοριστούμε σε μία από τις δύο κύριες επενδυτικές κλάσεις: τα ομόλογα.

Μολονότι πολλοί άνθρωποι έλκονται συνήθως από ενθουσιώδεις ιστορίες συνυφασμένες με τις μετοχές -όλοι μας θα έχουμε ακούσει για κάποιον που επένδυσε σε μετοχές μιας μικρής εταιρείας και κέρδισε αρκετά ώστε να "αποσυρθεί" σε μια νεαρή ηλικία- θα δούμε, μέσα από την μελέτη των ομολόγων, ότι η πολλαπλότητα των πιθανών αυτών επενδυτικών προϊόντων ανοίγει ένα εκπληκτικό πεδίο έρευνας και επενδύσεων. Παρόλο που συχνά επισκιάζονται από τη μαζική προβολή της αγοράς των μετοχών, τα ομόλογα παίζουν ένα καθοριστικό ρόλο στα χαρτοφυλάκια επενδύσεων των ατομικών επενδυτών ή των επενδυτικών οργανισμών.

Για τις έννοιες που θα παρουσιαστούν στις επόμενες ενότητες έχει ουσιωδώς χρησιμοποιηθεί η ύλη του Προγράμματος εκπαίδευσης (Chartered Financial Analyst® Program)

[1] Στο εξής με την λέξη "ομόλογα" θα αναφερόμαστε στην πολύ γενικότερη έννοια των (χρηματοοικονομικών) προϊόντων δανεισμού (fixed income securities). Τα τελευταία, κατά λέξη θα μπορούσαν να μεταφραστούν ως "τίτλοι σταθερού εισοδήματος". Η προέλευση του όρου αυτού δεν είναι τυχαία· τα ομόλογα *είναι* ένα είδος σταθερού εισοδήματος, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

του CFA® Institute[2] και συγκεκριμένα ο 5ος τόμος του Level I, *Equity and Fixed Income,* 2010.

1.1 Εισαγωγή

Στην πιο απλή του μορφή, ένα *ομόλογο* είναι μια οικονομική υποχρέωση μιας οντότητας, η οποία υπόσχεται να πληρώσει ένα προκαθορισμένο σύνολο χρημάτων σε συγκεκριμένες μελλοντικές ημερομηνίες. Η οντότητα που υπόσχεται να πληρώνει καλείται *εκδότης* (issuer) του ομολόγου. Ο επενδυτής που αγοράζει ένα τέτοιο ομόλογο καλείται *δανειστής* (ή πιστωτής). Εδώ παρατηρείται και μια πρώτη σύγχυση αναφορικά με την έννοια του ομολόγου: η οντότητα που *ζητά* χρήματα είναι ο εκδότης του δανείου (δανειζόμενος), και όχι αυτός που *έχει* το ομόλογο (δανειστής). Παραδείγματα εκδοτών ομολόγων είναι οι κεντρικές κυβερνήσεις διαφόρων κρατών, όπως η κυβέρνηση των Ηνωμένων Πολιτειών ή η Γερμανική κυβέρνηση, οίκοι που σχετίζονται με μια κεντρική κυβέρνηση, όπως οι Fannie Mae και Freddie Mac στις ΗΠΑ, μια πόλη ή ένας δήμος, όπως η πόλη της Νέας Υόρκης ή ολόκληρο το Ελληνικό Δημόσιο, ένας οργανισμός όπως η Google, και υπερεθνικές κυβερνήσεις, όπως η Παγκόσμια Τράπεζα. Αντίστοιχα, επενδυτές σε ένα ομόλογο από τα προηγούμενα μπορεί να είναι ατομικοί επενδυτές, επενδυτικοί οργανισμοί ή και κυβερνήσεις κρατών.

Οι δόσεις που ο εκδότης του ομολόγου έχει υποσχεθεί να καταβάλλει στις προκαθορισμένες ημερομηνίες έχουν δύο συνιστώσες: τόκους (interest) και το αρχικό κεφάλαιο (principal). Η δεύτερη συνιστώσα αντιστοιχεί στην αποπληρωμή του δανειζομένου κεφαλαίου και ο τόκος σε ένα ποσοστό αυτού, όχι κατ΄ ανάγκην σταθερό.

Πριν από τη δεκαετία του ′80, τα ομόλογα ήταν απλά επενδυτικά προϊόντα. Εξαιρώντας την περίπτωση αθέτησης αποπληρωμής (*default*) του εκδότη, ο επενδυτής ενός ομολόγου γνώριζε για *πόσο καιρό* θα λαμβάνει τόκο και το *πότε* η ποσότητα χρημάτων που δάνεισε θα του αποπληρωθεί. Επιπρόσθετα, οι περισσότεροι επενδυτές αγόραζαν τότε ομόλογα με την πρόθεση να τα κρατήσουν ως την ημερομηνία λήξης (ωρίμανσής) τους (maturity date).

Από το 1980, ο χρηματοοικονομικός κόσμος των δανείων και των ομολόγων άλλαξε ριζικά. Πρώτον, τα σχετιζόμενα με τα ομόλογα προϊόντα έγιναν απίστευτα πολυπλοκότερα. Υπάρχουν χαρακτηριστικά πολλών ειδών ομολόγων που κάνουν εξαιρετικά δύσκολο να προσδιοριστεί το *πότε* θα αποπληρωθούν τα χρήματα που έχουν επενδυθεί και για *πόσο καιρό* θα λαμβάνεται ο τόκος, ή ακόμη και το *ποσό* του τόκου που θα ληφθεί. Δεύτερον, ο "κλασικός" επενδυτής που κράταγε τα λεφτά του ως τη λήξη του ομολόγου έχει πλέον αντικατασταθεί από μεγάλους επενδυτικούς οργανισμούς, που εμπορεύονται ενεργά τα διάφορα είδη ομολόγων (traders[3]).

[2] www.cfainstitute.org

[3] Οι traders κατά το "δόγμα" της σελ. 1 αγοράζουν και πουλούν τους διάφορους χρηματοοικονομικούς τίτλους, ανάλογα με το τι συμφέρει περισσότερο, εξού και ο όρος χρηματοοικονομικά "προϊόντα" (making money out of money).

Στις επόμενες ενότητες θα δούμε συνοπτικά τα διαφορετικά γνωρίσματα των ομολόγων από την απλούστερη, αλλά ουσιαστική, "γλώσσα" της αγοράς[4] και στο Κεφ. 2 θα επιχειρήσουμε μια μαθηματική ανάλυση των στοχαστικών μοντέλων των επιτοκίων με τη βοήθεια της γνώριμής μας Feynman-Kač formula. Τα τελευταία μοντέλα έχουν προταθεί για την διερεύνηση των ποσοτικών χαρακτηριστικών των ομολόγων, αλλά για τη χρήση τους είναι αναγκαία η απαιτητική "γλώσσα" του Στοχαστικού Λογισμού (βλ. [91]).

1.2 Συμβόλαια ομολόγων και όροι

Το συμβόλαιο που προσδιορίζει λεπτομερώς όλα τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις του εκδότη και των επενδυτών ενός ομολόγου έχει τη διεθνή ονομασία *bond indenture*. Οι επενδυτές (bondholders) θα αντιμετώπιζαν κατά καιρούς μεγάλη δυσκολία στον προσδιορισμό του εάν ο εκδότης κρατάει όλες τις υποσχέσεις του που υπαγορεύει το συμβόλαιο. Αυτό το πρόβλημα όμως επιλύεται για όλα τα μέλη της συμφωνίας φέρνοντας έναν σύνδικο (trustee) ως τρίτο μέλος του bond indenture. Το τελευταίο αναγνωρίζει τον καταπιστευματοδόχο ως αντιπρόσωπο των τοκομεριδίων των επενδυτών.

Ως μέρος του συμβολαίου, υπάρχουν καταφατικοί όροι (affirmative covenants) και περιοριστικοί όροι (negative covenants). Οι καταφατικοί όροι ορίζουν δραστηριότητες που ο δανειζόμενος (δηλαδή ο εκδότης του ομολόγου) υπόσχεται να κάνει. Οι περιοριστικοί όροι επιβάλλουν ορισμένους περιορισμούς στις δραστηριότητες του δανειζομένου.

Οι συνηθέστεροι καταφατικοί όροι είναι:

1. η αποπληρωμή των τόκων και του αρχικού κεφαλαίου σε μια χρονική βάση,
2. η πληρωμή όλων των φόρων και άλλων υποχρεώσεων όταν αυτές προκύψουν,
3. η διατήρηση όλης της περιουσίας στην εργασία του δανειζομένου σε καλή κατάσταση,
4. η αποστολή περιοδικών αναφορών στον καταπιστευματοδόχο δηλώνοντας ότι ο δανειζόμενος είναι σε συμφωνία με το συμβόλαιο,
5. η διατήρηση κάποιων οικονομικών δεικτών.

Για παράδειγμα, ο δανειζόμενος μπορεί να υποσχεθεί να διατηρεί τον current ratio[5] της εταιρείας του στην τιμή του δύο ή υψηλότερα. Εάν αυτή η τιμή του current ratio δεν διατηρείται, τότε το ομόλογο θα μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε (τεχνική) αθέτηση (technical default).

[4] Η πλειονότητα των εννοιών που θα αναφέρουμε αποτελούν έννοιες των ομολόγων που εκδίδονται στις ΗΠΑ. Ενώ η αγορά ομολόγων των ΗΠΑ είναι η μεγαλύτερη αγορά ομολόγων στον κόσμο με μια ποικιλία προϊόντων και εκδοτών, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σημαντική ανάπτυξη των αγορών δανεισμού άλλων χωρών, καθώς οι δανειστές έχουν μετατοπιστεί από την χρηματοδότηση μέσω τραπεζών στην έκδοση ομολόγων. Η τάση αυτή αναμένεται να συνεχιστεί.

[5] Πρόκειται για λογιστικό δείκτη και ορίζεται ως ο λόγος του τρέχοντος ενεργητικού προς το τρέχον παθητικό, $current\ ratio = \frac{current\ assets}{current\ liabilities}$.

Αντίστοιχα, οι συνηθέστεροι περιοριστικοί όροι είναι:

1. περιορισμοί στις πωλήσεις των περιουσιακών στοιχείων της εταιρείας (η εταιρεία δε μπορεί να τα πουλήσει και να ξεχρεώσει, επειδή έχουν δεσμευθεί στους όρους),

2. περιορισμοί στη δυνατότητα του δανειολήπτη να λάβει επιπρόσθετα δάνεια.

Για παράδειγμα, η χώρα μας, η Ελλάδα, αυτή τη περίοδο (2010) βρίσκεται ως γνωστόν σε έντονη οικονομική πίεση από το Διεθνές Νομισματικό Ταμείο (IMF), ώστε να μην αθετήσει τους όρους του δανείου που έλαβε. Γι΄ αυτό και σε τακτά χρονικά διαστήματα, ειδικοί ελεγκτές του IMF διεξάγουν διάφορους ελέγχους στο κατά πόσον συλλέγονται οι φόροι, πως χρησιμοποιούνται τα χρήματα του δανείου κτλ. Εάν κάποια στιγμή δεν μπορούμε να αποπληρώσουμε κάποια δόση, θα μπουν σε ισχύ οι περιοριστικοί όροι του συμβολαίου με πολύ δυσμενείς συνέπειες για τον τόπο.

1.3 Διάρκεια ως τη λήξη

Η *διάρκεια ως τη λήξη* (term to maturity) ενός ομολόγου είναι ο αριθμός των ετών που απομένουν για την τελευταία δόση. Η *ημερομηνία λήξης* (maturity date) ενός ομολόγου αναφέρεται στην ημερομηνία που το δάνειο θα πάψει να υπάρχει, όπου ο εκδότης θα αποπληρώσει το ομόλογο. Για παράδειγμα, μια περιγραφή ενός ομολόγου μπορεί να γράφει "ως τις 9/9/2020".

Στην πράξη, στην αγορά αναφέρονται στο "χρόνο ως τη λήξη" ενός ομολόγου ως απλά "maturity". Όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια (βλ. §1.8) μπορεί να υπάρχουν όροι στο συμβόλαιο που να επιτρέπουν είτε ο εκδότης του ομολόγου είτε ο επενδυτής αυτού να αλλάξει το χρόνο ως τη λήξη ενός ομολόγου.

Υπάρχουν ομόλογα με οποιαδήποτε maturity, αλλά τυπικά η μεγαλύτερη είναι αυτή των 30 ετών. Παρολαυτά, η Walt Disney Co. τον Ιούλιο του 1993 εξέδωσε ομόλογα με ημερομηνία λήξης 9/15/2093[6], κάνοντάς τα 100-ετή ομόλογα τη στιγμή της έκδοσης. Το Δεκέμβρη του 1993, η Tennessee Valley Authority εξέδωσε ομόλογα που λήγουν στις 12/15/2043, κάνοντάς τα 50-ετή ομόλογα τη στιγμή της έκδοσης. Αλλά αυτά δεν είναι τα συνήθη παραδείγματα στην αγορά ομολόγων.

Υπάρχουν τρεις τουλάχιστον λόγοι που ο προσδιορισμός του χρόνου ως τη λήξη ενός ομολόγου είναι σημαντικός:

1. Ο χρόνος ως τη λήξη δείχνει τη χρονική περίοδο στην οποία ο επενδυτής του ομολόγου μπορεί να αναμένει να λάβει τις δόσεις των τόκων και τον αριθμό των ετών πριν το αρχικό κεφάλαιο έχει πλήρως αποπληρωθεί.

2. Η απόδοση (yield) που προσφέρεται σε ένα ομόλογο για να προσελκύσει επενδυτές εξαρτάται από το χρόνο ως τη λήξη. Η σχέση μεταξύ της απόδοσης και της λήξης

[6] Ακολουθώντας την αμερικάνικη σύμβαση, οι ημερομηνίες θα γράφονται ως μήνας/ημέρα/έτος.

(maturity) ενός ομολόγου καλείται *Καμπύλη Αποδόσεων* (yield curve), και θα διερευνηθεί στο Κεφ. 2.

3. Η τιμή ενός ομολόγου θα μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ζωής του, καθώς τα επιτόκια στην αγορά αλλάζουν. Η *μεταβλητότητα της τιμής* (price volatility) ενός ομολόγου είναι μια συνάρτηση του χρόνου ως τη λήξη (μεταξύ άλλων παραγόντων). Πιο συγκεκριμένα, ceteris paribus μπορεί να δειχθεί ότι όσο μεγαλύτερη η maturity, τόσο μεγαλύτερη η μεταβλητότητα της τιμής, ως αποτέλεσμα της αλλαγής στα επιτόκια (βλ. Εικόνα 1.1 και Παρατήρηση 1.1).

1.4 Par value

Η τελική αξία (*par value*) ενός ομολόγου είναι η ποσότητα χρήματος που ο δανειζόμενος συμφωνεί να επαναπληρώσει στον επενδυτή του ομολόγου ως την (ή στην) ημερομηνία λήξης. Αυτή η τιμή αναφέρεται επίσης με τους όρους "*principal value*", ή "*face value*".

Τα ομόλογα μπορεί να έχουν οποιαδήποτε par value. Για να διακρίνονται μεταξύ τους τα διαφορετικά ομόλογα, έχει υιοθετηθεί η πρακτική της αναφοράς της τιμής ενός ομολόγου ως ένα ποσοστό της par value. Μια τιμή "90" ενός ομολόγου με par value $1,000 ερμηνεύεται ως ότι το ομόλογο πωλείται σε 90% της par value, δηλαδή στην τιμή $900. Ανάλογα, αν ένα ομόλογο με par value $8,000 πωλείται για $8,800, λέγεται ότι πωλείται για "110".

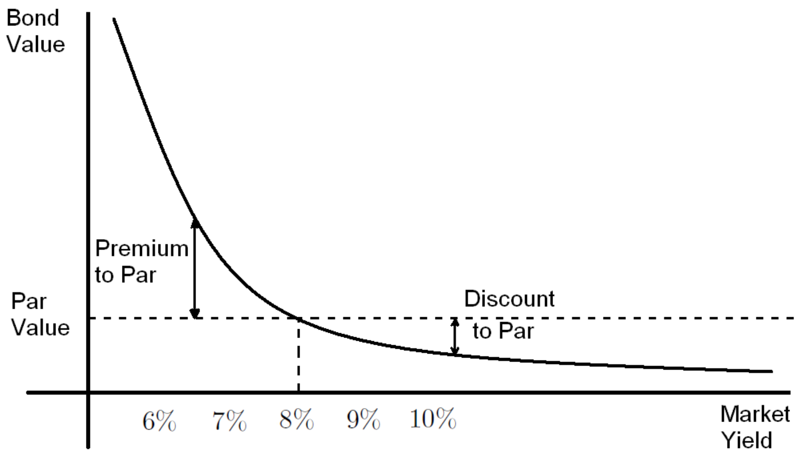
Όταν υπολογίζουμε την τιμή (σε *US*$) ενός ομολόγου των ΗΠΑ, το ομόλογο πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε μια τιμή ανά $1 της par value. Στη συνέχεια, αυτή πολλαπλασιάζεται με την par value ώστε να βρούμε την τιμή σε δολλάρια. Στον Πίνακα 1.1 προσφέρονται κάποια παραδείγματα του πως είναι η τιμή ενός ομολόγου σε δολλάρια, δεδόμενης της τιμής του ομολόγου που λέγεται στην αγορά και της par value αυτού.

Αναφερόμενη τιμή	Τιμή ανά $1 της par value (4 σ. ψ.[α΄])	Par value	Τιμή σε δολλάρια
"96 1/4"	0.925	1,000	962.50
"102 7/8"	1.0288	5,000	5,143.75
"109 9/16"	1.0956	10,000	10,956.25
"68 11/32"	0.6834	100,000	68,343.75

[α΄] Συμβολισμός: σημαντικά ψηφία.

Πίνακας 1.1 Εξοικείωση με τους συμβολισμούς της αγοράς των ομολόγων.

Παρατηρούμε ότι ένα ομόλογο μπορεί να πωλείται ή να αγοράζεται κάτω ή πάνω από την par value αυτού. Όταν ένα ομόλογο πωλείται ή αγοράζεται κάτω (πάνω) από την par value, λέγεται ότι εμπορεύεται σε discount (premium). Ο λόγος που μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο δίνεται στην επόμενη ενότητα.



Εικ. 1.1 Απόδοση της αγοράς συναρτήσει της τιμής ομολόγου για ένα 8% ομόλογο με κουπόνια.

1.5 Ονομαστικό επιτόκιο και κουπόνια

Το επιτόκιο κουπονιού

(*coupon rate*), επίσης γνωστό ως *ονομαστικό επιτόκιο* (nominal rate) είναι το επιτόκιο που ο εκδότης ενός ομολόγου συμφωνεί να πληρώνει κάθε χρόνο. Με τον όρο *κουπόνι* (coupon) εννοούμε την *ετήσια* ποσότητα των δόσεων που δίνονται στους επενδυτές του ομολόγου, μέχρι τη λήξη. Το κουπόνι προσδιορίζεται πολλαπλασιάζοντας το ονομαστικό επιτόκιο με την τελική αξία του ομολόγου. Δηλαδή ισχύει

$$Coupon = Coupon\ rate \times Par\ value \tag{1.1}$$

Για παράδειγμα, ένα ομόλογο με 9% ονομαστικό επιτόκιο και τελική αξία $\$1,000$ θα πληρώνει ετήσιες δόσεις των $90.

Στις ΗΠΑ, η συνήθης πρακτική είναι για τον εκδότη να πληρώνει κάθε κουπόνι σε δύο εξαμηνιαίες δόσεις. Για ένα είδος ομολόγου, τα MBSs (Mortgage-backed securities) ή τα ABSs (Asset-backed securities) συνήθως πληρώνουν τόκους μηνιαία. Αλλά για ομόλογα που εκδίδονται σε κάποιες αγορές εκτός των ΗΠΑ, οι δόσεις των κουπονιών γίνονται μόνο μία φορά το χρόνο.

Το ονομαστικό επιτόκιο επηρεάζει, επίσης, την "ευαισθησία" της τιμής του ομολόγου στις αλλαγές των επιτοκίων της αγοράς. Στην Παρατήρηση 1.1 δείχνουμε ότι ceteris paribus όσο *μεγαλύτερο* το κουπόνι, τόσο *μικρότερη* η μεταβλητότητα της τιμής, ως αποτέλεσμα της αλλαγής στα επιτόκια της αγοράς.

Όταν το ονομαστικό επιτόκιο ενός ομολόγου *ισούται* με την απόδοση της αγοράς (market yield), το ομόλογο θα πωλείται στην τελική αξία (*par value*) του. Όταν εκδίδονται, το ονομαστικό επιτόκιο των ομολόγων είναι συνήθως ίσο ή κοντά στην επικρατέστερη απόδοση της αγοράς στα παρόμοια ομόλογα, έτσι ώστε τα ομόλογα να "βγαίνουν" αρχικά στην (ή κοντά στην) τελική αξία (par value) τους. Εάν η απαιτούμενη από την αγορά απόδοση για ένα ομόλογο στη συνέχεια *ανέβει*, η τιμή του ομολόγου θα *πέσει* και τότε λέγεται ότι το ομόλογο πωλείται *κάτω* από την par value του (*trading at discount*). Η απαιτούμενη απόδοση μπορεί να αυξηθεί, επειδή τα επιτόκια της αγοράς έχουν αυξηθεί, επειδή η επιπρόσθετη απόδοση, για την οποία οι επενδυτές απαιτούν να αποζημιωθούν, έχει αυξηθεί, ή επειδή ο κίνδυνος (risk) του ομολόγου έχει αυξηθεί από τη στιγμή της έκδοσης. Αντίθετα, αν η απαιτούμενη απόδοση *πέσει*, η τιμή του ομολόγου θα *αυξηθεί* και το ομόλογο θα πωλείται *πάνω* από την par value του (*trading at premium*). Τα συμπεράσματα αυτά παριστάνονται πιο γλαφυρά στο αριθμητικό Παράδειγμα 1.6.

Στην Εικόνα 1.1 έχουμε κάνει ένα (πρόχειρο) γράφημα της απόδοσης της αγοράς συναρτήσει της τιμής ομολόγου για ένα 8% ομόλογο με κουπόνια. Το γράφημα αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς φαίνονται όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της τιμής ενός ομολόγου, που προηγουμένως περιγράψαμε.

Παρατήρηση 1.1.

Στην Εικόνα 1.1 παρατηρούμε ότι η *παράγωγος* $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}Y}(Y)$ (όπου V: η τιμή του ομολόγου και Y: η απόδοση της αγοράς) για αποδόσεις *μικρότερες* του 8% μεγαλώνει (η κλίση *αυξάνεται*), ενώ μικραίνει για αποδόσεις *μεγαλύτερες* του 8% (η κλίση *μειώνεται*). Αυτό δεν είναι καθόλου συμπτωματικό και συνδέεται με ένα ευρέως διαδεδομένο μέτρο του κινδύνου των επιτοκίων (*interest rate risk*) την *duration.* Η τελευταία έννοια δεν έχει καμία σχέση με αυτήν της maturity. Στη πραγματικότητα, αν δύο ομόλογα έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, αλλά διαφορετική maturity, εκείνο με την *μεγαλύτερη* maturity, θα έχει και τη *μεγαλύτερη* duration, μιας και η τιμή του θα έχει μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή για μια συγκεκριμένη αλλαγή στις αποδόσεις τις αγοράς.

Επιπρόσθετα, όπως φαίνεται κι από την Εικόνα 1.1 όταν τα κουπόνια αυξάνουν, η duration μικραίνει και συνεπώς το interest rate risk πέφτει. Συνεπώς, για δύο κατά τα άλλα πανομοιότυπα ομόλογα, εκείνο με το μεγαλύτερο ονομαστικό επιτόκιο (ή κουπόνι) θα έχει την μικρότερη duration. Η τιμή του ομολόγου με το *μεγαλύτερο* κουπόνι θα αλλάξει *λιγότερο* για μια δεδομένη αλλαγή στις αποδόσεις, από ότι θα κάνει η τιμή του ομολόγου με το μικρότερο κουπόνι.

1.5-1 Zero coupon bonds

Δεν πληρώνουν όλα τα ομόλογα δόσεις περιοδικά. Όπως μαρτυρά και ο τίτλος αυτής της υποενότητας τα ομόλογα που έχουν συμφωνηθεί να μη πληρώνουν περιοδικά τις δόσεις των κουπονιών ονομάζονται *ομόλογα χωρίς κουπόνια* (zero coupon bonds). Αυτά πληρώνουν μόνο την τελική αξία (par value) στη λήξη (maturity) και ο τόκος αυτών προκύπτει από το γεγονός ότι τα zero coupon bonds πωλούνται αρχικά κάτω από την par value τους (at discount to par). Συγκεκριμένα, ο τόκος ισούται με τη διαφορά μεταξύ της par value και της αρχικής αξίας έκδοσης του ομολόγου. Για παράδειγμα, εάν ένας επενδυτής αγοράσει ένα ομόλογο χωρίς κουπόνια για $80, ο τόκος είναι $20. Αυτός είναι η διαφορά μεταξύ της par value ($100) και της αρχικής αξίας έκδοσης ($80) του ομολόγου.

Κίνδυνος επανεπένδυσης

Ίσως ο αναγνώστης αναρωτηθεί γιατί να εκδόσει κανείς ομόλογα χωρίς κουπόνια. Ο λόγος συνδέεται με ένα από τα πολλά είδη κινδύνων που σχετίζονται με τα ομόλογα, και συγκεκριμένα με το επονομαζόμενο *κίνδυνο επανεπένδυσης* (reinvestment risk). Ο εκάστοτε επενδυτής αντιμετωπίζει πάντα το πρόβλημα του που να επενδύσει τα χρήματα που του επιστρέφονται από τις δόσεις του ομολόγου. Η μη επιθυμητή κατάσταση για τον επενδυτή είναι να επενδύσει το αποπληρωμένο του, σιγά σιγά, κεφάλαιο σε ένα νέο ομόλογο με χαμηλότερο επιτόκιο.

Αυτός ο κίνδυνος επανεπένδυσης για έναν τίτλο με τα χαρακτηριστικά των ομολόγων είναι ιδιαίτερα κρίσιμο να κατανοηθεί. Πολύ συχνά λέγεται από κάποιους στην αγορά ότι τίτλοι που πληρώνουν μηνιαία κουπόνια "συμφέρουν", επειδή ο επενδυτής έχει την ευκαιρία να επανεπενδύσει πιο συχνά τα χρήματά του, χρησιμοποιώντας ένα μεγαλύτερο ποσοστό αυτών, εν συγκρίσει με ένα ομόλογο που πληρώνει μόνο ανά εξάμηνο τα κουπόνια του. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει σε ένα περιβάλλον φθίνοντων επιτοκίων, που θα κάνει τους δανειζομένους να επιταχύνουν τις δόσεις του δανείου τους και θα αναγκάσει, επομένως, τους επενδυτές να πρέπει να επανεπενδύσουν τα χρήματά τους σε χαμηλότερα επιτόκια.

Συνεπώς, κατανοώντας την έννοια του reinvestment risk, μπορούμε να εκτιμήσουμε περισσότερο γιατί τα ομόλογα χωρίς κουπόνια είναι πιο ελκυστικά σε συγκεκριμένους επενδυτές. Επειδή δεν υπάρχει καμία δόση κουπονιού να επανεπενδυθεί, δεν υπάρχει καθόλου reinvestment risk. Δηλαδή ένα zero coupon bond απαλοίφει το reinvestment risk. Όμως, αυτή είναι η θετική πλευρά στη "ζυγαριά" του ρίσκου. Η αρνητική πλευρά είναι ότι, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 1.1, όσο μικρότερα τα κουπόνια (για κάποια δεδομένη maturity), τόσο μεγαλύτερο το interest rate risk. Συνεπώς, ομόλογα χωρίς καθόλου κουπόνια (κάποιας δεδομένης maturity) εκθέτουν τους επενδυτές σε μεγαλύτερο interest rate risk απ΄ ότι τα ομόλογα με κουπόνια.

Παρατήρηση 1.2.

Στο Κεφ. 2 θα μελετήσουμε κάποια στοχαστικά μοντέλα πρόβλεψης των επιτοκίων για την απλοποιημένη περίπτωση των zero coupon bonds, καθώς για άλλου είδους ομόλογα η ανάλυση είναι τελείως διαφορετική (βλ. επόμενες ενότητες και την Παρατήρηση 1.3).

1.5-2 Step-up notes

Υπάρχουν ομόλογα που πληρώνουν ένα ονομαστικό επιτόκιο που αυξάνεται με το χρόνο. Αυτά ονομάζονται *step-up notes*, επειδή όπως υποδηλώνει και ο αγγλικός όρος το ονομαστικό τους επιτόκιο "σκαρφαλώνει" με το χρόνο. Ένα πραγματικό παράδειγμα[7] step-up note αποτελεί η 10-ετής έκδοση των Extendible Step-up Deposit Notes, Series I-10 της Barclays Bank PLC που εκδόθηκαν στις 28 Μαΐου 2010. Τα κουπόνια (ονομαστικά επιτόκια) για τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα ήταν τα εξής:

4.75% από 5/28/2010 έως 5/27/2011

4.75% από 5/28/2011 έως 5/27/2014

5.25% από 5/28/2014 έως 5/27/2015

5.25% από 5/28/2015 έως 5/27/2016

5.25% από 5/28/2016 έως 5/27/2017

5.25% από 5/28/2017 έως 5/27/2018

6.25% από 5/28/2018 έως 5/27/2019

7.00% από 5/28/2019 έως 5/27/2020

Παρατηρούμε πως η διαφορά στα κουπόνια των συγκεκριμένων ομολόγων αυξάνεται κατά πολύ με το χρόνο (από 4.75% στην ημερομηνία έκδοσης σε 7.00% στη λήξη).

1.5-3 Deferred coupon bonds

Υπάρχουν ομόλογα που οι δόσεις τους αναβάλλονται για ένα συγκεκριμένο αριθμό χρόνων. Δηλαδή δεν πληρώνουν τίποτα κατά τη διάρκεια της περιόδου αναβολής. Στο τέλος αυτής, ο εκδότης του *deferred coupon bond* πληρώνει περιοδικά τις δόσεις μέχρι τη λήξη του ομολόγου. Προφανώς, οι δόσεις των τόκων που λαμβάνονται μετά την περίοδο αναβολής είναι υψηλότερες από ότι θα μπορούσαν να ήταν έαν ο εκδότης πλήρωνε τόκους από την έκδοση του ομολόγου. Οι δόσεις αυτές είναι υψηλότερες, ώστε να αποζημιώνουν τον επενδυτή για την έλλειψη τόκων στην περίοδο αναβολής.

Παρατήρηση 1.3.

Στον πραγματικό κόσμο υπάρχουν επίσης και τα κυμαινόμενου επιτοκίου ομόλογα (*floating rate securities*) στα οποία το ονομαστικό επιτόκιο αλλάζει ανάλογα με ένα ***επιτόκιο αναφοράς*** (όπως το London InterBank Offered Rate [LIBOR]) προσθέτοντας ή αφαιρώντας ένα επιτόκιο που μπορεί να μην είναι σταθερό, αλλά να αλλάζει με προκαθορισμένες στο indenture τιμές. Σκοπός όμως του κεφαλαίου αυτού είναι να επεξηγήσουμε απλά τις έννοιες που σχετίζονται με το Κεφ. 2, αλλά και να δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή του επενδυτικού κόσμου των ομολόγων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην ύλη του CFA® Institute, Level II.

[7] `http://www.tmx.com/en/news_events/news_releases/5-27-2010_TSX-NewListingBXS.html`

1.6 Τιμολόγηση ομολόγων για την περίπτωση διακριτού ανατοκισμού

Τιμολόγηση είναι η διαδικασία του προσδιορισμού της δίκαιης τιμής (fair value) ενός οικονομικού αγαθού. Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δώσουμε τις γενικές αρχές της τιμολόγησης των ομολόγων, για αυτό και εξετάζουμε την ρεαλιστική περίπτωση του διακριτού ανατοκισμού. Η τιμολόγηση ομολόγων με συνεχή ανατοκισμό μελετάται μερικώς στο Κεφ. 2 και συνεπώς τα απλά παραδείγματα που θα ακολουθήσουν είναι κρίσιμα για τις επόμενες γενικεύσεις.

Θεμελιώδους σημασίας έννοια στον κόσμο των επενδύσεων αποτελεί η ακόλουθη έννοια της παρούσας αξίας.

Ορισμός 1.4 (Present Value)**.**
Η *παρούσα αξία* (Present Value, PV) ενός απλού αθροίσματος χρηματοροών (cash flows, CF) είναι η τωρινή αξία μιας χρηματοροής που προσδοκάται να ληφθεί σε κάποιο σημείο στο μέλλον. Με άλλα λόγια είναι η ποσότητα χρημάτων που πρέπει να επενδυθούν σήμερα, σε ένα συγκεκριμένο επιτόκιο απόδοσης για μια δεδομένη χρονική περίοδο, ώστε να καταλήξουν να έχουν μια συγκεκριμένη αξία στο μέλλον. Δηλαδή η παρούσα αξία δίνεται από τον τύπο

$$PV_t := \frac{ECF_t}{(1+i)^t} \tag{1.2}$$

όπου ECF_t: η αναμενόμενη χρηματοροή τη στιγμή t και i το επιτόκιο απόδοσης.

Το επιτόκιο i του προηγούμενου τύπου συχνά αναφέρεται και ως *απαιτούμενη απόδοση (*required rate of return ή discount rate), αλλά καλείται επίσης και *κόστος ευκαιρίας* (opportunity cost), ή *κόστος κεφαλαίου* (cost of capital). Όπως και να το ονομάσουμε, αναπαριστά το επιτόκιο που μπορεί να αποδόσει μια επένδυση κάθε περίοδο ανατοκισμού.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η συνάρτηση της $PV(t)$ θα είναι *φθίνουσα* (για δοθέν επιτόκιο και ECF_t).

Η αξία, τώρα, μιας επένδυσης είναι το άθροισμα των παρουσών αξιών όλων των αναμενόμενων χρηματοροών (δηλαδή για ένα ομόλογο εννοούμε τις δόσεις των τόκων). Δηλαδή υποθέτοντας ότι υπάρχουν N το πλήθος αναμενόμενες χρηματοροές, η αξία (V) μιας επένδυσης (ενός ομολόγου) θα είναι το άθροισμα

$$V \equiv NPV_N := \sum_{t=1}^{N} PV_t \tag{1.3}$$

Οι αναμενόμενες χρηματοροές της εξίσωσης (1.2) ονομάζονται και *μέλλουσα αξία* (Future Value, FV). Η FV είναι δηλαδή η αξία που θα έχει μια τωρινή κατάθεση όταν ανατοκίζεται με επιτόκιο i. Οι έννοιες FV και PV συνδέονται στενά μεταξύ τους και συγκεκριμένα ισχύει

$$FV = PV\ (1+i)^t \tag{1.4}$$

Έχοντας ορίσει όλες τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με τις χρηματοροές, προχωρούμε σε κάποια διαφωτιστικά παραδείγματα τιμολόγησης ομολόγων που τοκίζονται σε *διακριτά* χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα 1.5 (Ομόλογο με σταθερή απόδοση).

Έστω ένα ομόλογο που πληρώνει κουπόνια των \$100 ετήσια για 10 χρόνια (maturity) με par value \$1,000 με σταθερό επιτόκιο 8%. Τότε η αξία του ομολόγου θα είναι

$$\begin{aligned} V &= \frac{100}{1.08} + \frac{100}{1.08^2} + \frac{100}{1.08^3} + \ldots + \frac{100 + 1,000}{1.08^{10}} \\ &= \frac{100}{1.08} + \frac{100}{1.08^2} + \frac{100}{1.08^3} + \ldots + \frac{1,100}{1.08^{10}} \\ &= \$1,134.20 \end{aligned} \tag{1.5}$$

■

Παράδειγμα 1.6 (Αλλαγές στην απαιτούμενη απόδοση ομολόγου).

Έστω ομόλογο με par value \$1,000, 8% εξαμηνιαία κουπόνια, και τρία χρόνια ως τη λήξη. Θα υπολογίσουμε την τιμή του PV για επιτόκια (*yield to maturity*, YTM) 6%, 8% και 10%.

Επιτόκιο (i%)	Περίοδοι ανατοκισμού (N)	FV (\$)	Δόσεις (\$)	PV[α΄] (\$)
$3\ \left(=\frac{6}{2}\right)$	$6\ (=3\times 2)$	$1,000$	$40\ \left(=\frac{80}{2}\right)$	$-1,054.172 > par$
$4\ \left(=\frac{8}{2}\right)$	$6\ (=3\times 2)$	$1,000$	$40\ \left(=\frac{80}{2}\right)$	$-1,000.000 = par$
$5\ \left(=\frac{10}{2}\right)$	$6\ (=3\times 2)$	$1,000$	$40\ \left(=\frac{80}{2}\right)$	$-949.243 < par$

[α΄] Το αρνητικό πρόσημο συμβολίζει ότι ο επενδυτής *δίνει* δολλάρια (αγοράζοντας το ομόλογο).

Εδώ δείχνουμε κάτι που είπαμε και προηγουμένως στην §1.5: εάν η απόδοση ως τη λήξη του ομολόγου (YTM) *ισούται* με το ονομαστικό επιτόκιο αυτού (8%), τότε η τιμή του ομολόγου είναι *ίση* με την par value του (\$1,000). Εάν το YTM είναι υψηλότερο (χαμηλότερο) από ότι το ονομαστικό επιτόκιο, τότε λέμε ότι το ομόλογο εμπορεύεται κάτω (πάνω) από την par value (*is trading at a discount (premium) to par*). ■

Τα παραδείγματα αυτά μας δείχνουν αρκετά ποιοτικά χαρακτηριστικά των ομολόγων, που θα απαιτήσουμε τα μοντέλα του Κεφ. 2 να ικανοποιούν (ως διαγνωστικό έλεγχο).

1.7 Διάφορα είδη επιτοκίων: Διακριτή Περίπτωση

Όπως αναφέραμε στην §1.5-2 υπάρχουν ομόλογα που πληρώνουν διαφορετικά επιτόκια μέχρι τη λήξη τους. Συνεπώς, το επιτόκιο που θα ζητούσε ένας επενδυτής ομολόγου να δανείσει χρήματα για ένα χρόνο από σήμερα δεν ταυτίζεται κατ΄ ανάγκην με το επιτόκιο που θα ζητούσε για να δανείσει για ένα χρόνο σε πέντε ή δέκα χρόνια μετά. Τα κατάλληλα αυτά επιτόκια για κάθε μελλοντική δόση ενός ομολόγου ονομάζονται *επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης* (spot rates) και θα τα συμβολίζουμε με S_k, όπου k: η διάρκεια της περιόδου δανεισμού.

Παρατήρηση 1.7.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διασαφηνιστεί ότι το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (spot rate) διαφέρει από το *επιτόκιο ως τη λήξη* (YTM). Το τελευταίο είναι ένα *σταθερό* επιτόκιο που κάνει την παρούσα αξία των υποσχόμενων πληρωμών ενός ομολόγου ίση με την τιμή του στην αγορά. Αντίθετα, το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης ταυτίζεται με την απόδοση ενός ομολόγου χωρίς κουπόνια, δηλαδή ενός τίτλου που πληρώνει *μία* μόνο χρηματοροή σε μια μελλοντική ημερομηνία.

Τα spot rates διαφορετικών χρονικών περιόδων που τιμολογούν ορθά (παράγουν δηλαδή τιμές ομολόγων ίσες με αυτές της αγοράς) τις χρηματοροές ενός ομολόγου ονομάζονται *επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης μη κερδοσκοπίας* (arbitrage-free spot rates) ή η *καμπύλη των επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης* (spot rate curve).

Το επόμενο απλό παράδειγμα καθιστά σαφή την σπουδαία έννοια των spot rates και το πως αυτά συνδέονται με την τιμολόγηση των ομολόγων.

Παράδειγμα 1.8.

Έστω ένα 6% ομόλογο με maturity 1.5 χρόνια και par value \$1,000. Έστω επίσης ότι τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης (εκπεφρασμένα ως ημιετήσια YTM) είναι:

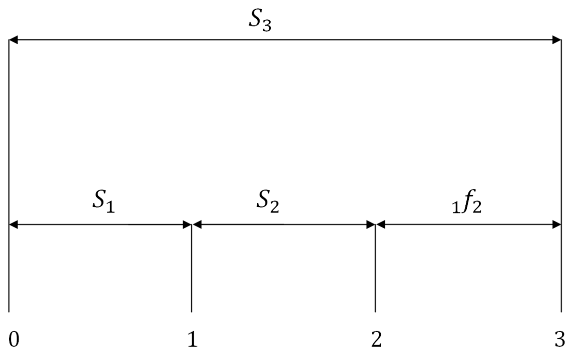
- 6 μήνες = 5%
- 1 χρόνο = 6%
- 1.5 χρόνια = 7%

Υπολογίζοντας την παρούσα αξία της επένδυσης βρίσκουμε

$$PV = \frac{30}{1.025} + \frac{30}{1.03^2} + \frac{1,030}{1.035^3} = \$986.55$$

Αυτή θα ήταν η *δίκαιη τιμή* πώλησής του ομολόγου (fair value). Αν αυτό πωλείται στην αγορά προς \$995, τότε ένας trader θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί αυτήν την ευκαιρία κερδοσκοπίας αγοράζοντας τις μεμονωμένες χρηματοροές, να τις συγχωνεύσει μεταξύ τους για να δημιουργήσει ένα νέο ομόλογο με σταθερό επιτόκιο (αυτό της αγοράς) διάρκειας 1.5 ετών, και έπειτα να το πουλήσει ξανά. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε ένα άμεσο και ακίνδυνο κέρδος των $995.00 - 986.55 = \$8.45$ ανά ομόλογο. ∎

Άμεσα συνδεόμενη με την έννοια των επιτοκίων τρεχουσών τοποθετήσεων είναι η έννοια των *επιτοκίων μελλοντικών τοποθετήσεων*. Τα επιτόκια μελλοντικών τοποθετήσεων ή



Εικ. 1.2 Γραφική σχέση μεταξύ των forward rates και spot rates.

επιτόκια πρόσω (forward rates) είναι το επιτόκιο που πρέπει να δίνει ένα ομόλογο σε κάποια μελλοντική ημερομηνία. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ πρέπει να εμπεριέχει ταυτόχρονα τη διάρκεια της περιόδου δανεισμού, αλλά και το πότε (στο μέλλον) θα δανείζονται/επιστρέφονται τα χρήματα του ομολόγου. Συνεπώς, με ${}_1f_2$ συμβολίζουμε το επιτόκιο του να δανειστούμε για *ένα* χρόνο, *δύο* χρόνια από τώρα. Απαιτούμε να ισχύει το ακόλουθο γενικό σχήμα:

> "το επιτόκιο του να δανειστούμε σήμερα για 3 χρόνια ισούται με το επιτόκιο του να δανειστούμε για 1 χρόνο, τρεις φορές διαδοχικά".

Αυτό φορμαλιστικά γράφεται ως ότι

$$(1+S_3)^3 \equiv (1+\,{}_1f_0)\,(1+\,{}_1f_1)\,(1+\,{}_1f_2) \tag{1.6}$$

Ισοδύναμα,

$$S_3 \equiv \sqrt[3]{(1+\,{}_1f_0)\,(1+\,{}_1f_1)\,(1+\,{}_1f_2)} - 1 \tag{1.7}$$

Δηλαδή το spot rate S_3 είναι ο *γεωμετρικός μέσος* (geometric mean) των forward rates ${}_1f_0$, ${}_1f_1$ και ${}_1f_2$. Επιπρόσθετα, αν ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τους συμβολισμούς μπορεί άμεσα να επαληθεύσει ότι

$$(1+S_4)^4 = (1+S_2)^2\,(1+\,{}_2f_2)^2$$

και ότι

$$\begin{aligned}(1+S_3)^3 &= (1+\,{}_2f_0)^2\,(1+\,{}_1f_2)\\ &= (1+\,{}_2f_0)^2\,(1+\,{}_1f_2)\\ &= (1+\,{}_1f_0)\,(1+\,{}_1f_1)\,(1+\,{}_1f_2)\\ &= (1+S_1)\,(1+S_2)\,(1+\,{}_1f_2)\end{aligned}$$

Οι έννοιες αυτές θα γενικευτούν στην §2.3, όπου θα εξετάσουμε τα συνεχή ανάλογά τους.

1.8 Embedded options ομολόγων

Στον επενδυτικό κόσμο του δανεισμού είναι αρκετά συχνό μια έκδοση ενός ομολόγου να εμπεριέχει στο indenture έναν όρο που να δίνει στον εκδότη και/ ή στον επενδυτή του ομολόγου ένα *δικαίωμα* (option) να μπορεί να κάνει μια ενέργεια έναντι του άλλου αντισυμβαλλομένου. Το δικαίωμα αυτό εξασκείται *προαιρετικά* από τον εκάστοτε δικαιούχο (στην περίπτωση που τον συμφέρει). Τα δικαιώματα αυτά αναφέρονται ως "εμφυτευμένα" στα ομόλογα δικαιώματα (embedded options in bonds) για να τα διακρίνουμε από τα υπόλοιπα *options* που μπορούν να αγοραστούν σε ένα χρηματιστήριο ή σε μια OTC αγορά.

Τα συνηθέστερα embedded options ομολόγων που δίνονται στους εκδότες (δανειζόμενους) είναι:

- ένα άνω φράγμα (cap) στην κύμανση των επιτοκίων του ομολόγου,
- το δικαίωμα να προπληρώσουν ένα μέρος των δόσεων, πριν από την προγραμματισμένη ημερομηνία τους,
- το δικαίωμα να αποπληρώσουν πλήρως (call provision) το αρχικό κεφάλαιο που δανείστηκαν.

Το άνω φράγμα (cap) στην κύμανση των επιτοκίων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *δικαίωμα* στον εκδότη του ομολόγου που να μην απαιτεί καμία ενέργεια από μέρους του αν *ανέβουν* τα επιτόκια. Ουσιαστικά, ο επενδυτής του ομολόγου έχει εξασφαλίσει (από το indenture) στον εκδότη το δικαίωμα να μην πληρώσει περισσότερο από ότι ένα ορισμένο επιτόκιο (cap).

Αντίστοιχα, τα συνηθέστερα embedded options ομολόγων που δίνονται στους επενδυτές (δανειστές) είναι:

- ένα κάτω φράγμα (floor) στην κύμανση των επιτοκίων του ομολόγου,
- το δικαίωμα να ζητήσουν την άμεση και πλήρη αποπληρωμή (put provision) του αρχικού κεφαλαίου που δάνεισαν.

Ενώ ένα *άνω* φράγμα στα επιτόκια ωφελεί τον *εκδότη* του ομολόγου αν τα επιτόκια *ανέβουν*, ένα *κάτω* φράγμα (floor) αυτών ωφελεί τον *επενδυτή* εάν τα επιτόκια *πέσουν*, αφού σταθεροποιεί το διαθέσιμο (ονομαστικό) επιτόκιο των κουπονιών.

Παρατηρούμε ότι η εξάσκηση των τελευταίων δικαιωμάτων για τον εκδότη και των επενδυτή εξαρτάται από το επίπεδο των επιτοκίων που κυριαρχούν στην *αγορά* των ομολόγων. Τα δικαιώματα του *εκδότη* (επενδυτή) αποκτούν περισσότερη αξία, όσο περισσότερο τα προηγούμενα επιτόκια *πέφτουν* (ανεβαίνουν). Τα άνω και κάτω φράγματα επίσης επηρεάζονται από τις μεταβολές των επιτοκίων της αγοράς. Αλλά για τον *εκδότη* (επενδυτή) το δικαίωμα του *άνω* (κάτω) φράγματος στα επιτόκια του ομολόγου αποκτά περισσότερη αξία, όσο περισσότερο τα επιτόκια της αγοράς *ανεβαίνουν* (κατεβαίνουν).

Τέλος, όπως αναφέραμε στην §1.1 τα σχετιζόμενα με τα ομόλογα προϊόντα έχουν γίνει αρκετά πολύπλοκα. Ένας από τους λόγους είναι η ύπαρξη των embedded options στα ομόλογα, τα οποία κάνουν ακόμα πιο δύσκολο να προβλεφθούν οι μελλοντικές χρηματοροές ενός τίτλου. Οι χρηματοροές ενός τίτλου ομολόγου ορίζονται όμως ως οι τόκοι και το αρχικό κεφάλαιο. Συνεπώς, για να τιμολογήσει κανείς ένα ομόλογο με embedded options, είναι απαραίτητο

1. να μοντελοποιήσει τους παράγοντες που προσδιορίζουν το εάν ένα τέτοιο δικαίωμα θα εξασκηθεί ως τη λήξη του ομολόγου, και
2. στην περίπτωση των δικαιωμάτων που δίνονται στους εκδότες/ επενδυτές του ομολόγου, να μοντελοποιήσει τη συμπεριφορά των εκδοτών/ επενδυτών ώστε να προσδιορίσει τις αναγκαίες συνθήκες για αυτούς να εξασκήσουν το δικαίωμά τους.

Είναι, επομένως, εξαιρετικά κρίσιμο να αναπτυχθούν μοντέλα για τα δυναμικά των επιτοκίων και για τους κανόνες εξάσκησης των embedded options. Μια μοντελοποίηση του δεύτερου σκέλους θα μπορούσε να γίνει με τη θεωρία του Behavioral Finance (Χρηματοοικονομικά της Συμπεριφοράς των Επενδυτών). Μια μοντελοποίηση του πρώτου σκέλους, όμως, θα μπορούσε να γίνει με τις μεθόδους της Στοχαστικής Ανάλυσης, και αυτό είναι το αντικείμενο του Κεφ. 2.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων

In the short term the market is a popularity contest; in the long term it is a weighing machine.

W. Buffett

Ως γνωστόν ένα δολλάριο σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα δολλάριο αύριο. Πιο γενικά, χρήματα που επενδύονται για διαφορετικούς χρονικούς ορίζοντες, T, αποφέρουν διαφορετικά κέρδη, αντίστοιχα του ρυθμού μεταβολής των επιτοκίων, $R(T)$. Η συνάρτηση αυτή καλείται Καμπύλη Αποδόσεων. Κάθε μέρα η καμπύλη αυτή αλλάζει, και η t-χρονικά μεταβαλλόμενη εκδοχή της συμβολίζεται με $R(t;T)$. Παρ' όλα αυτά τα επιτόκια δεν εμπορεύονται άμεσα, αλλά παράγονται από τις τιμές των ομολόγων που εμπορεύονται στην αγορά ομολόγων. Αυτό οδηγεί στην κατασκευή μοντέλων ομολόγων και στην τιμολόγηση ομολόγων μέσω επιχειρημάτων μη κερδοσκοπίας των αγορών (§2.2). Μαθηματικά, τα προηγούμενα περιγράφονται υποθέτοντας ένα κατάλληλο μέτρο, που κάνει μια συγκεκριμένη σ.α. martingale. Έχοντας ορίσει τις κατάλληλες έννοιες στις ενότητες §2.1 και §2.3, αλλά και στο Κεφ. 1, παραθέτουμε στην ακόλουθη §2.4 τα κυριότερα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία και στις εφαρμογές, αναλύοντας ιδιαίτερα στις §2.5-1 και §2.5-2 τα μοντέλα του Vasiček και των Ho και Lee αντίστοιχα. Στην ανάλυση μας επικεντρωνόμαστε στις κυριότερες μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε τέτοια μοντέλα, χωρίς να μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες του πως προσδιορίζονται οι συντελεστές τους, ώστε να συμφωνούν τα αποτελέσματα με ό,τι παρατηρείται στην αγορά (calibration). Απλή αναφορά σε τέτοια ζητήματα γίνεται στα γενικά σχόλια αυτού του κεφαλαίου, στην §2.6. Χρήσιμες βιβλιογραφικές αναφορές αποτελούν τα κλασικά στο χώρο των στοχαστικών επιτοκίων συγγράμματα [4], [81], [9], [83] και [21] και τα άρθρα [2], [35], [93], [33],[8], [34]. Τέλος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει μια "φυσική" θεώρηση των Χρηματοοικονομικών στα βιβλία [3], [65], [57] και [55] του μοντέρνου κλάδου της Κβαντικής Χρηματοοικονομικής Θεωρίας.

2.1 Ομόλογα χωρίς κουπόνια

Χωρίς βλάβη γενικότητας[1] θεωρούμε ένα ομόλογο χωρίς κουπόνια (βλ. §1.5-1) με maturity T, το οποίο έχει par value \$1. Στο εξής θα αναφερόμαστε σε αυτό ως ένα T-*ομόλογο.* Επιπρόσθετα, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για την ανάλυσή μας:

Συμβολισμός 2.1.

Για κάθε $0 \leq t \leq T$:

$P(t, T) :=$ Η τιμή τη χρονική στιγμή t ενός ομολόγου χωρίς κουπόνια με maturity T.

Ουσιαστικά, $P(t, T)$ είναι η τιμή ενός T-ομολόγου τη χρονική στιγμή t, στην *αγορά.* Η παρατήρηση αυτή είναι πολύ σημαντική, γιατί υπονοεί πως η τιμή της αγοράς μπορεί να μην ταυτίζεται κατά ανάγκην με τη *δίκαιη τιμή* (fair value) του ομολόγου. Γι' αυτό στην τιμολόγηση τέτοιων τίτλων θα απαιτήσουμε η δύο αυτές τιμές να είναι ίσες (βλ. εξίσωση (2.5) παρακάτω). Διαφορετικά, κατά το Παράδειγμα 1.8 της σελ. 12 ένας κερδοσκόπος θα μπορούσε να εκμεταλλευτεί μια τέτοια ευκαιρία βγάζοντας κέρδος χωρίς κάποιο ρίσκο.

Παρατήρηση 2.2.

Ως γνωστόν, όλα τα χρηματοοικονομικά προϊόντα, όσο πολύπλοκα και να είναι, μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα απλούστερων. Στην περίπτωση μας, ένα ομόλογο *με* κουπόνια πληρώνει σε πολλαπλές ημερομηνίες και μπορεί, συνεπώς, να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων *χωρίς* κουπόνια, με την πληρωμή στη λήξη των οποίων να ισούται με την πληρωμή μιας δόσης του συνολικού ομολόγου. Μαθηματικά, αυτό μεταφράζεται πολύ απλά ως ακολούθως. Ένα ομόλογο που πληρώνει κουπόνι τιμής c_i τη στιγμή T_i, $i = 1, \ldots, n$, με par value \$1 τη στιγμή $T = T_n$ έχει τιμή τη στιγμή $t < T$:

$$P_{coupon}(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ t \in (T_{i-1}, T_i]}}^{n} c_i P(t, T_i) + P(t, T_n) \tag{2.1}$$

Το *πραγματικό επιτόκιο* ενός λογαριασμού καταθέσεων (γνωστό και ως effective annual rate, EAR), ο οποίος ανατοκίζεται n-φορές το χρόνο, μπορεί να εκφραστεί μέσα από το επιτόκιο κάθε περιόδου[2], PR (periodic rate) ως εξής:

$$EAR := (1 + PR)^n - 1 \tag{2.2}$$

[1] Ο λόγος που θα περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση των zero-coupon bonds είναι γιατί αφενός μεν η ανάλυση ομολόγων με κουπόνια είναι ανάλογη (βλ. Παρατήρηση 2.2), αλλά και αφετέρου γιατί δε θα ασχοληθούμε έτσι τι θα συνέβαινε σε περίπτωση αθέτησης των όρων του indenture από κάποιον από τους αντισυμβαλλομένους. Επιπρόσθετα, τα ομόλογα που θα θεωρήσουμε είναι απαλλαγμένα από τα embedded options της §1.8.

[2] Το επιτόκιο κάθε περιόδου ισούται με το ονομαστικό επιτόκιο του ομολόγου δια το πλήθος των περιόδων ανατοκισμού, δηλαδή

$$PR = \frac{\text{ονομαστικό επιτόκιο}}{n}$$

Προφανώς, το EAR ενός 8% λογαριασμού καταθέσεων, ανατοκιζόμενος μία φορά το χρόνο, δεν είναι το ίδιο με το EAR ενός 8% λογαριασμού καταθέσεων, ανατοκιζόμενος κάθε μήνα. Όσο μεγαλύτερη η συχνότητα ανατοκισμού, τόσο μεγαλύτερο το πραγματικό επιτόκιο εν συγκρίσει με το επιτόκιο κάθε περιόδου.

Θεωρώντας τώρα *συνεχή* ανατοκισμό[3] και ότι ο λογαριασμός καταθέσεων μας αποδίδει (στιγμιαίο) επιτόκιο $r(t)$, οι καταθέσεις μας θα πρέπει να αξίζουν τη στιγμή t ποσότητα δολλαρίων ίση με

$$\beta(t) := e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s} \tag{2.3}$$

ως λύση της εξίσωσης

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\beta}(t) = r(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

Παρατήρηση 2.3.

Στον τύπο 2.3 αναγνωρίζουμε ότι το $r(\cdot)$ είναι το γνώριμό μας από την §1.7 (στιγμιαίο) επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (instantaneous spot rate) και ότι το $\frac{1}{\beta(\cdot)}$ είναι ουσιαστικά η *αθροιστική παρούσα αξία* (Net Present Value, NPV) της σελ. 10. Για έναν ακριβέστερο ορισμό, βλ. παρακάτω §2.3 στη σελ. 27.

Για να αποφύγουμε την κερδοσκοπία στην αγορά των ομολόγων πρέπει να ισχύει μια συγκεκριμένη σχέση μεταξύ των ομολόγων και των επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης. Συγκεκριμένα, απαιτούμε να ισχύει η εξής *σχέση τιμολόγησης*:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \tag{2.5}$$

Επαληθεύουμε την ορθότητα της σχέσης αυτής, επειδή

$$P(T, T) = 1$$

και

$$\beta(T) = e^0 = 1$$

Όλοι αυτοί οι συμβολισμοί και οι σχέσεις, όσο γενικοί και αν φαίνονται μας περιορίζουν αρκετά γιατί ισχύουν μόνο υπό μια υπόθεση που έμμεσα κάναμε· ότι τα επιτόκια, $r(\cdot)$ είναι *ντετερμινιστικά* (deterministic). Επιτρέποντας το επιτόκιο να μεταβάλλεται *τυχαία*, η τιμή του ολοκληρώματος $\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s$ είναι επίσης τυχαία, και στο μέλλον του χρόνου t όπου η τιμή $P(t, T)$ είναι γνωστή, η προηγούμενη σχέση (2.5) ισχύει μόνο "κατά μέσον όρο" (με την έννοια της εξ. 2.9). Συνεπώς, πρέπει να ορίσουμε τις συναρτήσεις r και P ως *τυχαίες μεταβλητές* σε έναν κατάλληλο χώρο πιθανότητας.

[3] Είναι γνωστό ότι για $x \in \mathbb{R}$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} e^x$$

2.1-1 Τιμολόγηση ομολόγων με στοχαστικά επιτόκια

Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $\left(\Omega,\, \mathcal{F}^B_{T^*},\, \mathrm{P}\right)$ όπου $\mathcal{F}^B_{T^*} = \sigma\left(B_s,\, 0 \le t \le T^*\right)$ για κάθε $T^* \in [0,\, +\infty)$ η *τυπική διύλιση* της κίνησης Brown ή απλούστερα η "ιστορία" ή το "παρελθόν" της $\{B_t\}_{t\ge 0}$ μέχρι τη στιγμή T^*. *Διαισθητικά*, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν γνωρίζουμε την $\{B_t\}_{0\le t\le T^*}$, τότε γνωρίζουμε για *κάθε* ενδεχόμενο στην ιστορία $\mathcal{F}^B_{T^*}$, αν αυτό συνέβη ή όχι, και αντιστρόφως.

Μέσα σε αυτόν τον χώρο πιθανότητας θεωρούμε τις $\mathcal{F}^B_{T^*}$-προσαρμοσμένες ανελίξεις[4] $P\left(t,\, T\right)$ και $\beta\left(t\right)$ για κάθε $t \le T \le T^*$. Επειδή η $P\left(t,\, T\right)$ είναι η τιμή ενός T-ομολόγου με par value \$1 απαιτούμε για κάθε $t \le T \le T^*$ να ισχύουν:

$$
\begin{aligned}
P\left(t,\, T\right) &\ge 0 \qquad \text{με πιθανότητα 1 (σ.β.)}\\
P\left(T,\, T\right) &= 1 \qquad \text{με πιθανότητα 1 (σ.β.)}
\end{aligned}
$$

Για την μοντελοποίησή μας θεωρούμε επίσης ότι για κάθε $t \in [0,\, T^*]$, η απεικόνιση

$$
(t,\, +\infty) \ni T \mapsto P\left(t,\, T\right) \in [0,\, +\infty)
$$

είναι συνεχής και συνεχώς διαφορίσιμη (δηλαδή είναι C^1).

Όμως, με τα προηγούμενα, έχουμε ήδη φτάσει σε ένα αρκετά αφηρημένο επίπεδο θεωρητικής γενίκευσης. Η διαίσθησή μας δουλεύει καλά στην §1.6, αλλά εδώ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στην ερμηνεία των προκύπτοντων αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, το συνεχές των περιόδων λήξης T (maturities) των ομολόγων κάνει το μοντέλο της αγοράς να έχει *άπειρα* ομόλογα και συνεπώς δημιουργεί μια επιπόσθετη πολυπλοκότητα. Στη βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διαφορετικές προσεγγίσεις που περιλαμβάνουν πεπερασμένα χαρτοφυλάκια, όπου κάθε στιγμή επιτρέπονται μόνο πεπερασμένα ομόλογα, και άπειρα χαρτοφυλάκια, τα οποία τιμολογούνται με κάποιο μέτρο (measure) πιθανότητας (σελ. [34], [13]).

Προσέγγιση 1η

Μόνο πεπερασμένα, N το πλήθος ομόλογα, με λήξεις $T_1,\, T_2,\, \ldots,\, T_N$ είναι διαθέσιμα στην αγορά προς επένδυση. Έστω $\mu_C\left(t,\, T_i\right)$ το ποσοστό του διαθέσιμου κεφαλαίου (*capital*, C) προς επένδυση, τη στιγμή t, στο T_i-ομόλογο. Η αξία $V\left(\cdot\right) \equiv V^{C,\mu}\left(\cdot\right)$ του χαρτοφυλακίου ομολόγων ως προς την στρατηγική επένδυσης $\mu_C\left(\cdot,\cdot\right)$ του διαθέσιμου κεφαλαίου (C). Τότε η V ικανοποιεί την εξίσωση

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{V}\left(t\right) &= \sum_{i=1}^{N} \mu_C\left(t,\, T_i\right)\, \frac{\mathrm{d}P}{P}\left(t,\, T_i\right)\\
V\left(0\right) &= C
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

[4] Ακριβέστερα, η $P\left(\cdot,\cdot\right)$ είναι ένα *τυχαίο πεδίο* (random field), αφού για κάθε $T \in [0,\, +\infty)$, η $P\left(\cdot,\, T\right)$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη.

Προσέγγιση 2η

Για κάθε $T \in [0, +\infty)$ άπειρα T-ομολόγα είναι διαθέσιμα στην αγορά προς επένδυση. Τότε με $\mu_C(t, [S, T))$ συμβολίζουμε το ποσοστο του διαθέσιμου κεφαλαίου (C) προς επένδυση, τη στιγμή t, σε ομόλογα που λήγουν κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T)$. Το συνεχές ανάλογο της (2.6) για την αξία, V, του χαρτοφυλακίου ομολόγων ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{V}(t) &= \int_t^{\infty} \frac{\mathrm{d}P}{P}(t, T)\, \mathrm{d}\mu_C(t, \mathrm{d}T) \\ V(0) &= C \end{aligned} \tag{2.7}$$

Αυτή θα είναι και η προσέγγιση που θα υιοθετήσουμε εμείς στην ανάλυσή μας.

Αλλά και η αρχή της μη κερδοσκοπίας της σελ. 12 έχει αλλάξει κατά πολύ. Για μια επέκταση της θεωρίας μη κερδοσκοπίας σε συνεχή χρόνο ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [4], [2], [82].

Σε όλες τις προηγούμενες διαφορετικές προσεγγίσεις η αρχή της μη κερδοσκοπίας των αγορών διαμορφώνεται με τη βοήθεια της ακόλουθης υπόθεσης [33], [56]:

> Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας, Q (επονομαζόμενο *Ισοδύναμο Martingale Μέτρο*, IMM) ισοδύναμο[5] του μέτρου πιθανότητας P, τέτοιο ώστε ταυτόχρονα για όλα τα $T \leq T^*$, η ανέλιξη, $\left\{\frac{P(t,T)}{\beta(t)}\right\}_{0 \leq t \leq T}$ να είναι martingale.

Παρατήρηση 2.5.

Στη βιβλιογραφία το μέτρο P ερμηνεύεται ως "υποκειμενική πιθανότητα", δηλαδή ως την πιθανότητα που αντανακλά τις προτιμήσεις των επενδυτών απέναντι στον κίνδυνο [86]. Αντίθετα, το μέτρο πιθανότητας Q θεωρείται "ουδέτερο" στον κίνδυνο (risk neutral), αφού καθιστά martingale την αξία $\frac{1}{\beta(T)}$ του ομολόγου.

Η προηγούμενη υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει μέτρο $Q \sim$ P έτσι ώστε για κάθε $0 \leq t \leq T$

$$E_Q\left[\frac{1}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[\frac{P(T, T)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{P(t, T)}{\beta(t)} \tag{2.8}$$

όπου η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ συμβολίζει κατά τα γνωστά όλη τη διαθέσιμη πληροφορία μέχρι και τη στιγμή t. Επειδή τώρα η τ.μ. $\beta(t)$ έχει υποθεθεί $\mathcal{F}_t$- μετρήσιμη, μπορεί να "περάσει" μέσα στη μέση τιμή και να έχουμε το συνεχές ανάλογο της συνθήκης τιμολόγησης των ομολόγων που περιγράψαμε στη σελ. 12:

---

[5]

Ορισμός 2.4 (Ισοδύναμα μέτρα).
Έστω ο χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. Δύο μέτρα Q, P καλούνται *ισοδύναμα* στον $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ αν για κάθε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}_t$ με $Q(A) = 0$ ισχύει ότι $\mathrm{P}(A) = 0$. Αν επιπρόσθετα τα μέτρα Q, P είναι μέτρα πιθανότητας τότε ισχύει επιπλέον ότι για κάθε ενδεχόμενο $B \in \mathcal{F}_t$ με $Q(B) = 0$, θα έχουμε ότι και $\mathrm{P}(A) = 0$. Συμβολικά, γράφουμε $Q \sim$ P.

$$P(t, T) = E_Q\left[\frac{\beta(t)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2.9}$$

Όπως εύστοχα συμπληρώνει η Klebaner [56]:

> "Η σχέση (2.9) δείχνει ότι ένα T-ομόλογο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *παράγωγο* (derivative) στο επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης (spot rate)".

Παρατήρηση 2.6.

Από την (2.9) φαίνεται ξεκάθαρα ότι για κάθε $t \in [0, T^*]$ η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto P(t, T) \in [0, +\infty)$$

είναι *εκθετικά φθίνουσα* αν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης είναι $r(t) \geq 0$ σχεδόν[6] για κάθε $t \in [0, T^*]$. Το γεγονός αυτό συνάδει αρμονικά με το γράφημα της σελ. 6, το οποίο είναι και το *αναμενόμενο.*

Συνεπώς, από τις (2.8) (2.9) έχουμε και τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.7 (Τιμή ομολόγου ουδέτερη στον κίνδυνο)**.**

Έστω μια $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη τ.μ. $Y\colon \Omega \to [0, +\infty)$. Τότε το τυχαίο πεδίο

$$P(t, T; Y) := E_Q\left[Y\, e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

καλείται η *Q-κινδυνοουδέτερη τιμή* (Q-risk-neutral price) της Y τη στιγμή $t \in [0, T^*]$.

2.2 Μοντέλα ομολόγων προσαρμοσμένα στην κίνηση Brown

Σε αυτή την ενότητα στόχο μας είναι να παράγουμε την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (ΣΔΕ) για την τιμή ομολόγου, $P(t, T)$, υπό το μέτρο πιθανότητας Q, ξεκινώντας μόνο από την IMM Υπόθεση. Η ΣΔΕ υπό το μέτρο πιθανότητας, P, παράγεται τότε άμεσα, ως συνέπεια μιας ιδιότητας αναπαράστασης των στοχαστικών ανελίξεων. Ως συνήθως, αυτή η ιδιότητα υποδεικνύει την *ύπαρξη* κάποιων συγκεκριμένων ανελίξεων, αλλά δε μας λέει τίποτα για το πως να τις βρούμε.

Ας θεωρήσουμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathrm{P})$. Υποθέτουμε ότι η ανέλιξη $r(t)$ των spot rates παράγει τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$, και ότι η ανελίξεις των ομολόγων $P(t, T)$, είναι για

[6] Εννοούμε ότι η πιθανότητα

$$P[r(t) \geq 0] = 1 \qquad \forall\, t \in [0, T^*]$$

κάθε $t \leq T < T^{*}$ $\mathcal{F}_t^{B^{\mathrm{P}}}$-προσαρμοσμένες. Η ΙΜΜ Υπόθεση δίνει την τιμή του ομολόγου από την εξίσωση (2.9). Το martingale

$$Z_t := \frac{P\left(t,\,T\right)}{\beta\left(t\right)} = E_Q\left[e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{2.10}$$

είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένο. Από ένα γνωστό αποτέλεσμα της Στοχαστικής Ανάλυσης (βλ. [29]) υπάρχει προσαρμοσμένη ανέλιξη, X_t, της μορφής $X\left(t\right) = \int_0^t \upsilon\left(t,\,T\right)\mathrm{d}B_t^Q$, όπου B_t^Q είναι μία Q-κίνηση Brown, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{P\left(t,\,T\right)}{\beta\left(t\right)}\right) &= \left(\frac{P\left(t,\,T\right)}{\beta\left(t\right)}\right)\mathrm{d}X_t \\ &= \upsilon\left(t,\,T\right)\left(\frac{P\left(t,\,T\right)}{\beta\left(t\right)}\right)\mathrm{d}B_t^Q \end{aligned} \tag{2.11}$$

Όμως, επειδή η $\frac{P(t,T)}{\beta(t)}$ είναι στοχαστική ανέλιξη, το διαφορικό $\mathrm{d}\left(\frac{P(t,T)}{\beta(t)}\right)$ είναι στοχαστικό και πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με το Λήμμα Itô σε διαφορική μορφή, επιλέγοντας $f\left(x,y\right) = \frac{x}{y}$. Τότε για την ανέλιξη $Z_t = \frac{P_t(T)}{\beta_t}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} dZ_t =& f_x\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)dP_t\left(T\right) + f_y\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)d\beta_t + f_{xx}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)d\left(P_t\left(T\right)\right)^2 \\ &+ f_{xy}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)dP_t\left(T\right)d\beta_t + f_{yy}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)d\beta_t^2 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τις πράξεις στη σχέση (1.27), σελ. 14 στο [91] βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} dY_t^2 &= 0, & dX_t dY_t &= 0 \\ f_x\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right) &= \frac{1}{\beta_t} & f_y\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right) &= -\frac{P_t\left(T\right)}{\beta_t^2} \\ f_{xy}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right) &= -\frac{1}{\beta_t^2} & f_{xx}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right) &= 0 \\ f_{yy}\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right) &= \frac{P_t\left(T\right)}{\beta_t^3} & & \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Η (2.11) από την (2.12) και τον ορισμό (2.4) της β_t γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{P\left(t,\,T\right)}{\beta\left(t\right)}\right) &= f_x\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)dP_t\left(T\right) + f_y\left(P_t\left(T\right),\,\beta_t\right)d\beta_t \\ &= \frac{1}{\beta_t}dP_t\left(T\right) - \frac{P_t\left(T\right)}{\beta_t^2}r_t\beta_t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.13}$$

Και, συνεπώς, καταλήγουμε στην ΣΔΕ για την τιμή του T-ομολόγου, $P\left(t,\,T\right)$, υπό το ΙΜΜ μέτρο πιθανότητας Q:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{P}\left(t,\,T\right) = r\left(t\right)\mathrm{d}t + \upsilon\left(t,\,T\right)\mathrm{d}B_t^Q} \tag{2.14}$$

Αυτή είναι και η *εξίσωση τιμολόγησης για τα ομόλογα και τα δικαιώματα πάνω σε αυτά* (βλ. §1.8).

Παρατήρηση 2.8.

Παρατηρούμε ότι η απόδοση ενός λογαριασμού καταθέσεων με συνεχή, *τυχαίο* ανατοκισμό $r(t)$ ικανοποιεί την (2.4). Αντίθετα, ένα ομόλογο ικανοποιεί την (2.14) η οποία είναι ίδια η (2.4) με την προσθήκη ενός *στοχαστικού* όρου $\sigma(t, T)\,\mathrm{d}B_t^Q$. Συνεπώς, αυτό κάνει τις επενδύσεις σε ομόλογα να έχουν μεγαλύτερο ρίσκο από ότι (οι επίσης τυχαίες) αποδόσεις ενός λογαριασμού καταθέσεων.

Στη συνέχεια θα βρούμε την ΣΔΕ για την τιμή ενός T-ομολόγου υπό το "πραγματικό" μέτρο πιθανότητας P. Επειδή τα μέτρα πιθανότητας είναι ισοδύναμα ($\mathrm{P} \sim Q$), από το Θεώρημα Αναπαράστασης των Martingales [29] υπάρχει μια $\mathcal{F}_{T^*}^{B^{\mathrm{P}}}$-προσαρμοσμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ανέλιξη $\tau^Q\colon [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$Z^Q(t) := 1 + \int_0^t \tau^Q(s)\,\mathrm{d}B_s \tag{2.15}$$

όπου $Z^Q(t) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dP}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ για κάθε $0 \le t < \infty$ το αντίστοιχο *εκθετικό martingale* (exponential martingale). Επειδή $Z^Q(\cdot) > 0$ σ.β., μπορούμε να ορίσουμε την ανέλιξη

$$q^Q(t) := \frac{\tau^Q}{Z^Q}(t)$$

για κάθε $0 \le t < \infty$ και να καταλήξουμε ότι η

$$Z^Q(t) = 1 + \int_0^t Z^Q(s)\,q^Q(s)\,\mathrm{d}B_s$$

είναι μια ΣΔΕ με λύση

$$Z^Q(t) = \exp\left(\int_0^t q^Q(s)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(q^Q(s)\right)^2 \mathrm{d}s\right) \tag{2.16}$$

Το γνωστό Θεώρημα Girsanov μας εξασφαλίζει, τελικά, ότι η ανέλιξη

$$B_t^{\mathrm{P}} := B_t^Q - \int_0^t q^Q(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.17}$$

είναι μια κίνηση Brown υπό το μέτρο P. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, στο εξής θα αναφερόμαστε στην ανέλιξη της (2.17) ως απλά B_t. Αντικαθιστώντας τη διαφορική μορφή της (2.17) $B_t = B_t^Q - q^Q(t)\,\mathrm{d}t$ στην (2.14), συμπεραίνουμε την ΣΔΕ για την τιμή του T-ομολόγου υπό το P:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{P}(t, T) = \left(r(t) - \upsilon(t, T)\,q^Q(t)\right)\mathrm{d}t + \upsilon(t, T)\,\mathrm{d}B_t} \tag{2.18}$$

Παρατήρηση 2.9.

Από την (2.18) έπεται ότι η ανέλιξη $-q^Q(\cdot)$ είναι η υπερβάλλουσα απόδοση (excess return) του ομολόγου, πάνω από το χωρίς ρίσκο επιτόκιο, εκπεφρασμένη στις συνήθεις μονάδες· δεν είναι άλλο από το γνωστό μας risk premium της §1.5. Πρόκειται ουσιαστικά για την ανταμοιβή που ζητάει η αγορά των ομολόγων για το ρίσκο που αναλαμβάνει επενδύοντας σε ένα τέτοιο ομόλογο.

Όμως, τα προηγούμενα θεωρήματα μίλησαν απλώς για την *ύπαρξη* της ανέλιξης $q^Q(\cdot)$ και τα μοντέλα (2.14) και (2.18) δε μπορούν από μόνα τους να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της. Μόνο η *αγορά* μπορεί να κάνει κάτι τέτοιο! Παρολαυτά, η συνηθέστερη υπόθεση είναι να παίρνουμε ότι $q^Q(t) = q$ είναι μια σταθερά.

2.3 Διάφορα είδη επιτοκίων: Συνεχή Περίπτωση

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να γενικεύσουμε κατάλληλα τα πρακτικά αποτελέσματα της §1.7, ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στα μοντέλα (2.14) και (2.18). Αρχικά, θα ορίσουμε το *επιτόκιο πρόσω* forward rate διαισθητικά μέσω ενός παραδείγματος.

Θεωρούμε τους χρόνους $0 \leq t \leq S < T < \infty$. Τη στιγμή t κάνουμε ένα συμβόλαιο, εκδίδουμε (πουλάμε) ένα S-ομόλογο και παίρνουμε (δανειζόμαστε) $\$P(t, S)$. Χρησιμοποιώντας όλο αυτό το κεφάλαιο, έστω ότι επενδύουμε σε (αγοράζουμε) $\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$-το πλήθος T-ομόλογα. Η NPV_t, λοιπόν, της επένδυσής μας (τη στιγμή t) ισούται με μηδέν. Τη στιγμή S, το S-ομόλογο λήγει και συνεπώς ως εκδότες του *πληρώνουμε* \$1 στον επενδυτή του. Τη (μεταγενέστερη) στιγμή T τώρα, το T-ομόλογο λήγει, και συνεπώς *παίρνουμε* $\$\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο συμβόλαιο τη στιγμή t, μια επένδυση ενός δολλαρίου αποφέρει τη στιγμή S με ένα *χωρίς κίνδυνο επιτόκιο* $\$\frac{P(t,S)}{P(t,T)}$, τη στιγμή T.

Το *χωρίς κίνδυνο επιτόκιο* αυτό καλείται *προθεσμιακό επιτόκιο* ή *επιτόκιο πρόσω* ενός ομολόγου που λήγει κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T]$ που εκδόθηκε τη στιγμή t, και θα το συμβολίζουμε ως $R(t; S, T)$. Το συνεχές ανάλογο της (2.2) δίνει σε αυτήν την περίπτωση τη σχέση

$$\frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \exp\left(R(t; S, T) \cdot (T - S)\right)$$

Συνεπώς, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.10 (Προθεσμιακό επιτόκιο στο διάστημα [S,T])**.**

Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t \leq S < T < \infty$. Έστω, επίσης, ομόλογο χωρίς κουπόνια με λήξη κάπου μεταξύ του χρονικού διαστήματος $[S, T]$, που εκδόθηκε τη στιγμή t. Το κινδυνοουδέτερο επιτόκιο $R(t; S, T)$ αυτού του ομολόγου καλείται *προθεσμιακό επιτόκιο* (ή *επιτόκιο πρόσω*) *στο διάστημα* $[S, T]$ (forward rate in $[S, T]$) υπολογισμένο τη στιγμή t και δίνεται από τη σχέση

$$R\left(t;\, S,\, T\right) := -\frac{1}{T-S}\left[\ln P\left(t,\, T\right) - \ln P\left(t,\, S\right)\right] \tag{2.19}$$

Στέλνοντας στη συνέχεια το $S \to t$, $\ln P\left(t,\, t\right) \equiv 1$, και συνεπώς ορίζουμε

Ορισμός 2.11 (Βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στο διάστημα [t,T])**.**
Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t < T < \infty$. Έστω, επίσης, T-ομόλογο χωρίς κουπόνια, που εκδόθηκε τη στιγμή t. Η απόδοση αυτού του T-ομολόγου, που εκδόθηκε τη στιγμή t, καλείται *βραχυπρόθεσμο επιτόκιο ή επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης*
(spot rate) *για το διάστημα* $[t,\, T]$ και δίνεται από τη σχέση

$$R\left(t;\, T\right) := R\left(t;\, t,\, T\right) = -\frac{1}{T-t}\left[\ln P\left(t,\, T\right)\right] \tag{2.20}$$

Σχόλιο 2.12.
Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.7 της σελ. 12 το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο spot rate *δεν* ταυτίζεται με το *επιτόκιο ως τη λήξη* (Yield To Maturity, YTM). Αυτό είναι μια εσφαλμένη ερμηνεία των επιτοκίων, που συναντάται σε πολλά συγγράμματα Στοχαστικών Οικονομικών Μαθηματικών γραμμένα από Μαθηματικούς (βλ. για παράδειγμα [56] σελ. 323). Στο [4], σελ. 361 παρατίθεται η *ορθή* (οικονομική) ερμηνεία του ΥΤΜ.

Ορισμός 2.13 (Καμπύλη Αποδόσεων)**.**
Για σταθερό t, η απεικόνιση

$$\left(t,\, +\infty\right) \ni T \mapsto R\left(t;\, T\right) \in \left(0,\, +\infty\right) \tag{2.21}$$

καλείται *Καμπύλη Αποδόσεων* (Term Structure of Interest Rates ή και Yield Curve) *τη στιγμή* t, και προσδιορίζει επίσης τις τιμές των ομολόγων από τη σχέση

$$P\left(t,\, T\right) = e^{-R(t;\, T)\cdot(T-t)} \tag{2.22}$$

Παρατήρηση 2.14.
Κατά την Παρατήρηση 2.2 για ένα ομόλογο *με* κουπόνια, η (2.22) λόγω της (2.1) γίνεται

$$P_{coupon}\left(t\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ t\in(T_{i-1},T_i]}}^{n} c_i\, e^{-R_{coupon}(t)\cdot(T_i-t)} + e^{-R_{coupon}(t)\cdot(T_n-t)}$$

Παίρνοντας ένα $h > 0$ και θέτοντας στην (2.19) $S := T - h$ έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} R\left(t;\, T-h,\, T\right) &= \lim_{h\to 0^+}\left\{-\frac{1}{h}\left[\ln P\left(t,\, T\right) - \ln P\left(t,\, T-h\right)\right]\right\} \\ &= -\frac{\partial \ln P}{\partial T}\left(t,\, T\right)\end{aligned}$$

Ορισμός 2.15. [Στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο και καμπύλη προθεσμιακών επιτοκίων]

Έστω η ακολουθία χρόνων $0 \leq t < T < \infty$. Έστω, επίσης, T-ομόλογο χωρίς κουπόνια, που εκδόθηκε τη στιγμή t. Τότε το *στιγμιαίο επιτόκιο μέλλουσας τοποθέτησης* ή απλά το *στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο* (instantaneous forward rate) του προηγούμενου ομολόγου με τιμή $P(t, T)$ θα συμβολίζεται ως $f(t, T)$ και δίνεται από τη σχέση

$$f(t, T) := -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T) \tag{2.23}$$

Επιπρόσθετα, η απεικόνιση

$$(t, +\infty) \ni T \mapsto f(t, T) \in (0, +\infty) \tag{2.24}$$

καλείται *Καμπύλη Προθεσμιακών Επιτοκίων* (Forward-Rate Curve) τη στιγμή t.

Ολοκληρώνοντας την (2.23) για $t \leq s \leq T$ στο διάστημα $[s, T]$ παίρνουμε

$$P(t, T) = P(t, s) \exp\left(-\int_s^T f(t, u)\,\mathrm{d}u\right) \tag{2.25}$$

και θέτοντας $s := t$ στην (2.25) έχουμε την τιμή ενός T-ομολόγου από τα προθεσμιακά επιτόκια

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)\,\mathrm{d}u\right) \tag{2.26}$$

Το *στιγμιαίο επιτόκιο τρέχουσας τοποθέτησης* (instantaneous spot rate) τη στιγμή t είναι επομένως

$$r(t) := f(t, t) \tag{2.27}$$

Έτσι, είναι άμεσος (και ίδιος) ο ορισμός της $\beta(t)$ της εξίσωσης (2.3) ως στοχαστικής ανέλιξης.

Η σύγκριση του ορισμού (2.23) και της προηγούμενης ισότητας (2.20) αποκαλύπτει την σχέση

$$R(t; T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, u)\,\mathrm{d}u \tag{2.28}$$

δηλαδή τα βραχυχρόνια επιτόκια είναι, διαισθητικά, "μέσοι όροι" των στιγμιαίων προθεσμιακών επιτοκίων. Η σχέση (2.28) δείχνει ότι κατά κάποιον τρόπο τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω είναι πιο θεμελιώδεις ποσότητες από τα επιτόκια τρέχουσας τοποθέτησης και, συνεπώς, ένα πιο "ελκυστικό" σημείο αναφοράς ανάπτυξης μοντέλων των *δυναμικών* (dynamics) των αποδόσεων.

Σχόλιο 2.16.

Βλέπουμε εδώ ότι η $r(\cdot)$ *δεν μπορεί να είναι σταθερά* όπως στο μοντέλο των Black-Scholes, αφού από τον ορισμό της στην εξίσωση (2.27) είναι μια (γνήσια) *στοχαστική ανέλιξη*.

Προς την κατεύθυνση του modelling της τιμής T-ομολόγων θεωρώντας στοχαστικά επιτόκια χρειαζόμαστε πρώτα ένα μοντέλο περιγραφής των στιγμιαίων επιτοκίων επιτοκίων τρέχουσας τοποθέτησης. Έπειτα, μέσω της εξ. (2.9) και της ουσιαστικής βοήθειας της Feynman-Kač formula θα δούμε πως μπορούμε να καταλλήξουμε σε κάποια μοντέλα με επιθυμητές ιδιότητες (βλ. Πίνακα 2.1). Με το ακόλουθο Θεώρημα αποδεικνύουμε μια πρώτη σύνδεση μεταξύ των εξισώσεων περιγραφής των προθεσμιακών επιτοκίων και αυτών που περιγράφουν τα βραχυχρόνια επιτόκια.

Θεώρημα 2.17.

Έστω ένα T-ομόλογο και μια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Έστω ότι το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο τη στιγμή t, $f(t, T)$, ικανοποιεί την ΣΔΕ (υπό το μέτρο πιθανότητας P*)*

$$\mathrm{d}f(t, T) = \alpha(t, T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, T)\,\mathrm{d}B_t \tag{2.29}$$

όπου $\{B_t\}$ είναι μία P*-κ.Β. και οι ανελίξεις[7] $\alpha(\cdot, T)$, $\sigma(\cdot, T)$ είναι $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένες και συνεχείς. Τότε το βραχυχρόνιο επιτόκιο τη στιγμή t, $r(t)$ είναι ανέλιξη Itô και έχει ΣΔΕ της μορφής*

$$\mathrm{d}r(t) = \kappa(t)\,\mathrm{d}t + \lambda(t)\,\mathrm{d}B_t \tag{2.30}$$

όπου

$$\kappa(t) := \alpha(t, t) + \frac{\partial}{\partial T} f(t, T)\Big|_{T=t} \qquad \text{και} \qquad \lambda(t) := \sigma(t, t) \tag{2.31}$$

Απόδειξη. Για $0 \le t \le \tau \le T$ ολοκληρώνοντας την (2.29) στο $[0, T]$ παίρνουμε

$$f(t, \tau) = f(0, \tau) + \int_0^t \alpha(s, \tau)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, \tau)\,\mathrm{d}B_s \tag{2.32}$$

Η (2.32) για $\tau := t$ λόγω του ορισμού (2.27) δίνει

$$r(t) = f(0, \tau) + \int_0^t \alpha(s, \tau)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, \tau)\,\mathrm{d}B_s \tag{2.33}$$

Από την άλλη, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} f(0, \tau) &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f(0, T)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u \\ &= r(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f(0, T)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$\alpha(s, \tau) = \alpha(s, s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \alpha(s, T)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u$$

$$\sigma(s, \tau) = \sigma(s, s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \sigma(s, T)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u$$

[7] Ακριβέστερα, κατά την υποσημείωση της σελ. 20 πρόκειται για *τυχαία πεδία*.

Από τις οποίες, η σχέση (2.33) γίνεται

$$\begin{aligned}
r\left(t\right) = r\left(0\right) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f\left(0,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u \\
&+ \int_0^t \alpha\left(s,\, s\right) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s,\, s\right) \mathrm{d}B_s \\
&+ \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \alpha\left(s,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u \\
&+ \int_s^t \frac{\partial}{\partial T} \sigma\left(s,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη στοχαστική μορφή του Θεωρήματος Fubini[8] εναλλάσσουμε τα ολοκληρώματα και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
r\left(t\right) = r\left(0\right) &+ \int_0^t \alpha\left(s,\, s\right) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s,\, s\right) \mathrm{d}B_s \\
&+ \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial T} f\left(0,\, T\right)\Big|_{T=u} + \int_0^u \frac{\partial}{\partial T} \alpha\left(s,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}s \right. \\
&\left. + \int_0^u \frac{\partial}{\partial T} \sigma\left(s,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Η (2.32) απλοποιεί κατά πολύ την (2.34) και δίνει

$$\begin{aligned}
r\left(t\right) &= r\left(0\right) + \int_0^t \alpha\left(s,\, s\right) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\left(s,\, s\right) \mathrm{d}B_s \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} f\left(u,\, T\right)\Big|_{T=u} \mathrm{d}u \\
&= r\left(0\right) + \int_0^t \left[\alpha\left(s,\, s\right) + \frac{\partial}{\partial T} f\left(s,\, T\right)\Big|_{T=s} \right] \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \sigma\left(s,\, s\right) \mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

Η εφαρμογή των ορισμών της (2.31) δίνει τελικά το ζητούμενο (σε ολοκληρωτική αναπαράσταση):

$$r\left(t\right) = r\left(0\right) + \int_0^t \kappa\left(s\right) \mathrm{d}s + \int_0^t \lambda\left(s\right) \mathrm{d}B_s \qquad \square$$

Σχόλιο 2.18.

Οι στοχαστικές ανελίξεις $\alpha\left(\cdot,\, T\right)$, $\sigma\left(\cdot,\, T\right)$ και οι αρχικές συνθήκες $f\left(0,\, T\right)$ καλούνται *παράμετροι του μοντέλου* (2.29) και υπολογίζονται μέσω μιας διαδικασίας που λέγεται *calibration*. Η υπόθεση (2.29) που κάναμε για τα επιτόκια πρόσω, στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως η *HJM Συνθήκη Συμβατότητας*, από την έρευνα των Heath-Jarrow-Morton [35].

[8] Για μια απόδειξη βλ. [86].

Θεώρημα 2.19.

Έστω ένα T-ομόλογο και μια χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Έστω ότι η τιμή του T-ομολόγου, $P(t, T)$, τη στιγμή t, ικανοποιεί την ΣΔΕ (2.18) *(υπό το μέτρο πιθανότητας* P*), δηλαδή κυβερνάται από τα δυναμικά*

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}(t, T) = m(t, T)\,\mathrm{d}t + \upsilon(t, T)\,\mathrm{d}B_t$$

όπου $m(t, T) := r(t) - \upsilon(t, T)\, q^Q(t)$.

Τότε το στιγμιαίο επιτόκιο πρόσω τη στιγμή t, $f(t, T)$, ικανοποιεί την ΣΔΕ (2.29)*:*

$$\mathrm{d}f(t, T) = \alpha(t, T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, T)\,\mathrm{d}B_t$$

όπου

$$\alpha(t, T) = \upsilon(t, T)\frac{\partial \upsilon}{\partial T}(t, T) - \frac{\partial m}{\partial T}(t, T)$$
$$\sigma(t, T) = -\frac{\partial \upsilon}{\partial T}(t, T)$$

Απόδειξη. Ο ορισμός του στιγμιαίου προθεσμιακού επιτοκίου (2.23):

$$f(t, T) := -\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t, T)$$

συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{d}f(t, T) := -\frac{\partial \mathrm{d}\ln P}{\partial T}(t, T)$$

Όμως, το διαφορικό $\mathrm{d}\ln P(t, T)$ είναι στοχαστικό και συνεπώς δεν υπολογίζεται με τους νόμους της κλασικής Ανάλυσης, αλλά με την εφαρμογή του κανόνα του Itô, του Κεφαλαίου 1 στο [91]:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{\partial}{\partial T}\left[\mathrm{d}\ln P(t, T)\right] &= -\tfrac{\partial}{\partial T}\left[\tfrac{1}{P(t,T)}\mathrm{d}P(t, T) - \tfrac{1}{2P^2(t,T)}\left(\mathrm{d}P(t, T)\right)^2\right] \\
&= -\tfrac{\partial}{\partial T}\left[\left(m(t, T) - \tfrac{1}{2}\left(\upsilon(t, T)\right)^2\right)\mathrm{d}t + \upsilon(t, T)\,\mathrm{d}B_t\right] \\
&= \left[-\tfrac{\partial m}{\partial T}(t, T) + \upsilon(t, T)\tfrac{\partial \upsilon}{\partial T}(t, T)\right]\mathrm{d}t - \tfrac{\partial \upsilon}{\partial T}(t, T)\,\mathrm{d}B_t
\end{aligned}$$

Δηλαδή, τελικά, έχουμε τη ζητούμενη έκφραση (2.29)

$$\mathrm{d}f(t, T) = \alpha(t, T)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, T)\,\mathrm{d}B_t \qquad \square$$

Το Θεώρημα 2.19 προσδιορίζει τα δυναμικά της Καμπύλης Προθεσμιακών Επιτοκίων και μας λέει ότι τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω είναι ανελίξεις Itô . Ισχύει και *αντίστροφα* με την ακόλουθη έννοια.

Θεώρημα 2.20.

Εάν τα στιγμιαία επιτόκια πρόσω $f(\cdot, T)$ ικανοποιούν τα δυναμικά της (2.29)*, τότε οι* *τιμές ενός T-ομολόγου $P(t, T)$ είναι ανελίξεις Itô και ικανοποιούν τα δυναμικά της* (2.18)*:*

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}(t, T) = \left[r(t) + A(t, T) + \frac{1}{2}(S(t, T))^2\right]\mathrm{d}t + S(t, T)\,\mathrm{d}B_t \tag{2.35}$$

όπου

$$A(t, T) := -\int_t^T \alpha(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad S(t, T) := -\int_t^T \sigma(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2.36}$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (2.26) συνεπάγεται ότι

$$P(t, T) = e^{Y(t, T)} \tag{2.37}$$

όπου

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= -\textstyle\int_t^T f(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= -\textstyle\int_t^T f(0, \tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_t^T \int_0^t \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\tau - \int_t^T \int_0^t \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}B_u \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini εναλλάσσουμε τα ολοκληρώματα, και στη συνέχεια τα "σπάμε" σε περισσότερα:

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= -\textstyle\int_t^T f(0, \tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_t^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_t^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \\ &= -\textstyle\int_0^T f(0, \tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \\ &\quad + \textstyle\int_0^T f(0, \tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Fubini και πάλι

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= Y(0, T) - \textstyle\int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \\ &= -\textstyle\int_0^T f(0, \tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \\ &\quad + \textstyle\int_0^T \left[f(0, \tau) + \int_0^\tau \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}u + \int_0^\tau \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}B_u\right]\mathrm{d}\tau \\ &= Y(0, T) - \textstyle\int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u - \int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \\ &\quad + \textstyle\int_0^T f(\tau, \tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= Y(0, T) + \textstyle\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_u^T \alpha(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}u \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \int_u^T \sigma(u, \tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}B_u \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την Itô formula στην (2.37) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P(t, T) &= \mathrm{d}\left[e^{Y(t, T)}\right] \\ &= P(t, T)\,\mathrm{d}Y(t, T) + \frac{1}{2}P(t, T)\,(\mathrm{d}Y(t, T))^2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Εφαρμόζοντας στην (2.38) τον κανόνα γινομένου (1.29) της σελ. 14 στο [91], και χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα παίρνουμε τελικά το ζητούμενο:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{P}(t,\,T) &= \left[r(t) - \int_t^T \alpha(t,\,\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,\,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right]\mathrm{d}t \\ &\quad + \left[-\int_t^T \sigma(t,\,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}B_t \\ &= \left[r(t) + A(t,\,T) + \frac{1}{2}(S(t,\,T))^2\right]\mathrm{d}t + S(t,\,T)\,\mathrm{d}B_t\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.21.

Ενθυμούμενοι την εξίσωση για το χαρτοφυλάκιο ομολόγων (2.7) της σελ. 21 θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα δυναμικά της (2.35) επενδύοντας σε ομόλογα που λήγουν *σήμερα*. Αυτό μαθηματικά ερμηνεύεται θέτοντας

$$\mu_C(t,\,T) := \delta(t,\,T) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = T \\ 0, & \text{αν } t \neq T \end{cases}$$

και λαμβάνοντας

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{V}(t) &= \left[r(t) + A(t,\,t) + \frac{1}{2}(S(t,\,t))^2\right]\mathrm{d}t + S(t,\,t)\,\mathrm{d}B_t \\ &= r(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ισοδύναμα:

$$V(t) = e^{\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}$$

Δηλαδή καταλήξαμε ότι η $V(t)$ *ταυτίζεται* με την ανέλιξη $\beta(t)$ της σελ. 19. Γι' αυτό, το χαρτοφυλάκιο ομολόγων (2.7) είναι το λεγόμενο *replicating portfolio* για τις επενδύσεις μας.

Κατά τα σχόλια της §2.2 θα μπορούσαμε να ξαναγράψουμε τα δυναμικά της τιμής ενός T-ομολόγου της (2.35) ως προς τη νέα κ.Β. $\left\{B_t^Q\right\}_{t\geq 0}$ υπό το IMM μέτρο πιθανότητας Q:

$$\mathrm{d}\left(\frac{P(t,\,T)}{\beta(t)}\right) = \frac{P(t,\,T)}{\beta(t)}\left\{\left[A(t,\,T) + \frac{1}{2}(S(t,\,T))^2\right]\mathrm{d}t + S(t,\,T)\,\mathrm{d}B_t^Q\right\} \tag{2.39}$$

Αλλά η IMM Υπόθεση, όπως αναφέραμε στη σελ. 23 συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ανέλιξη Itô είναι ένα Q-martingale και συνεπώς από το Λήμμα 1.23 του Κεφαλαίου 1 στο [91] θα έχει drift ίσο με μηδέν. Δηλαδή η IMM Υπόθεση απαιτεί

$$A(t,\,T) + \frac{1}{2}(S(t,\,T))^2 \equiv 0$$

και μια απλή παραγώγιση ως προς την μεταβλητή T της λήξης των T-ομολόγων δίνει

$$\frac{\partial}{\partial T} A\left(t,\, T\right) + S\left(t,\, T\right) \frac{\partial}{\partial T} S\left(t,\, T\right) = 0$$

Ενθυμούμενοι τους ορισμούς των $A\left(t,\, T\right)$, $S\left(t,\, T\right)$ στη σχέση (2.36) καταλήγουμε στη συνθήκη

$$\alpha\left(t,\, T\right) = \sigma\left(t,\, T\right) \cdot \left(\int_t^T \sigma\left(t,\, u\right) \mathrm{d}u\right) \tag{2.40}$$

Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως *HJM Συνθήκη Συμβατότητας* (HJM Compatibility Condition) ή ως *HJM Συνθήκη Μη Κερδοσκοπίας* [35].

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα κρίσιμα αποτελέσματα στο επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 2.22 (Τιμή ομολόγου μοντελοποιώντας τα επιτόκια πρόσω).

Αν ικανοποιείται η HJM Συνθήκη Συμβατότητας (2.40)*, και τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια δίνονται από ένα μοντέλο της μορφής της* (2.30)

$$\mathrm{d}r\left(t\right) = \kappa\left(t\right) \mathrm{d}t + \sigma\left(t,\, t\right) \mathrm{d}B_t \tag{2.41}$$

τότε τα προθεσμιακά επιτόκια θα ικανοποιούν υπό το κινδυνοουδέτερο μέτρο Q την ΣΔΕ

$$\mathrm{d}f\left(t,\, T\right) = \sigma\left(t,\, T\right) \cdot \left(\int_t^T \sigma\left(t,\, u\right) \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t + \sigma\left(t,\, T\right) \mathrm{d}B_t^Q \tag{2.42}$$

Επιπρόσθετα, η τιμή ενός T-ομολόγου θα ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις για κάθε χρονική στιγμή $t \leq T$:

$$\mathrm{d}P\left(t,\, T\right) = P\left(t,\, T\right) \cdot \left\{ r\left(t\right) \mathrm{d}t - \left(\int_t^T \sigma\left(t,\, \tau\right) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}B_t^Q \right\} \tag{2.43}$$

$$P\left(t,\, T\right) = P\left(0,\, T\right) e^{\int_0^t \left[r(s) - \frac{1}{2}\left(\int_s^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u\right)^2\right]\mathrm{d}s - \int_0^t \left[\int_s^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}B_s} \tag{2.44}$$

Απόδειξη. Η κλειστή μορφή (2.44) για την τιμή ενός T-ομολόγου προκύπτει ως η λύση της ΣΔΕ (2.43). □

Χρησιμοποιώντας την (2.44) για δύο ημερομηνίες λήξης $T_1 \neq T_2$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 2.23 (Σχέση ομολόγων με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης).

Έστω ένα T_1-ομόλογο και ένα T_2-ομόλογο με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης. Τότε για κάθε $t \leq T_1 < T_2$ οι τιμές των δύο αυτών ομολόγων συνδέονται μέσω της σχέσης

$$P\left(t,\, T_2\right) = \frac{P\left(0,\, T_2\right)}{P\left(0,\, T_1\right)} P\left(t,\, T\right)\, e^{\int_0^t \left[-\frac{1}{2}\left(\int_{T_1}^{T_2} \sigma(s,u)\mathrm{d}u\right)^2\right]\mathrm{d}s - \int_0^t \left[\int_{T_1}^{T_2} \sigma(s,u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}B_s}$$

Παρατήρηση 2.24.

Αν η ΣΔΕ (2.42) επιλύεται σε κλειστή μορφή, τότε η αναγκαία τιμή της $r(t)$ στον τύπο (2.44) θα δίνεται από τον ορισμό (2.27):

$$r(t) := f(t,\, t)$$

Κάτι τέτοιο όμως είναι εξαιρετικά σπάνιο και γι΄ αυτό η συνήθης πρακτική είναι αντιμετώπιση της (2.42) με *(στοχαστική) προσομοίωση* (βλ. για παραάδειγμα τον Αλγ. B.4, σελ. 55).

Ωστόσο, στα μοντέλα που θεωρούμε στην μετέπειτα §2.5 παραθέτουμε αναλυτική λύση στην τιμή του ομολόγου και στην Καμπύλη των Αποδόσεων.

2.4 Μοντέλα για το spot rate

Όπως αναφέραμε στο Πόρισμα 2.22 ένα μοντέλο για τη τιμή ενός T-ομολόγου μπορεί να αναπτυχθεί μέσω ενός μοντέλου για τα (στιγμιαία) βραχυπρόθεσμα επιτόκια. Επιπρόσθετα, μέσω της (2.20) δύναται να υπολογιστεί και η Καμπύλη των Αποδόσεων (Term Structure of Interest Rates ή και Yield Curve). Τα μοντέλα αυτά ορίζονται υπό το "πραγματικό" μέτρο πιθανότητας P, και το $r(t)$ θεωρείται ότι ακολουθεί μια ΣΔΕ της μορφής (2.41)

$$\mathrm{d}r(t) = \kappa(r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(r(t))\,\mathrm{d}B_t \tag{2.45}$$

Ωστόσο, γνωρίζουμε ότι η τιμή $P(t,\, T)$ του T-ομολόγου ικανοποιεί την (2.9)

$$P(t,\, T) = E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Παρατηρώντας την τελευταία σχέση, βλέπουμε ότι χρειάζεται τον υπολογισμό της σ.α. $r(\cdot)(\equiv r(\cdot,\, T))$ υπολογισμένη υπό το P, ενώ η ζητούμενη μέση τιμή είναι ως προς το κινδυνοουδέτερο μέτρο πιθανότητας Q! Συνεπώς, χρειάζεται η ΣΔΕ που ικανοποιεί η $r(\cdot)$ υπό το Q.

Μια πρώτη προσέγγιση θα ήταν να εκφράσουμε τη προηγούμενη μέση τιμή ως προς το P (και έτσι να χρησιμοποιήσουμε απλά την (2.45)) ως εξής[9]

$$E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] = E_{\mathrm{P}}\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s + \int_t^T q^Q(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_t^T \left(q^Q(s)\right)^2 \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right],$$

αλλά μια τέτοια μέση τιμή μοιάζει να είναι ακόμα δυσκολότερο να υπολογιστεί, ακόμα και στις απλές περιπτώσεις.

Μια διαφορετική προσέγγιση θα ήταν να μεταβούμε από το P προς το IMM Q χρησι-

[9]Χρησιμοποιούμε απλά τον ορισμό της $Z^Q(\cdot)$ της σελ. 24.

μοποιώντας την (2.17) στη διαφορική της μορφή

$$\mathrm{d}B_t^Q = \mathrm{d}B_t^{\mathrm{P}} - q^Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Συνεπώς, υπό το Q η (2.45) γίνεται

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r(t) &= \left[\kappa(r(t)) + \sigma(r(t))\; q^Q(t)\right]\mathrm{d}t + \sigma(r(t))\,\mathrm{d}B_t^Q \\ &= m(r(t))\,\mathrm{d}t + \sigma(r(t))\,\mathrm{d}B_t^Q \end{aligned} \tag{2.46}$$

Το κλειδί για τη συνέχεια είναι η παρατήρηση ότι αν $r(\cdot)$ είναι η λύση της (2.46), τότε κατά το Θεώρημα A.4 θα ικανοποιεί (υπό το Q) την Ιδιότητα Markov (βλ. Παράρτημα A). Δηλαδή μπορούμε να "ξεκινήσουμε" την $r(\cdot)$ σε ένα σημείο x_T, που εξαρτάται από την ημερομηνία λήξης T, και το αποτέλεσμα να είναι ανεξάρτητο της "ιστορίας" της ανέλιξης μέχρι τη στιγμή t (για οποιοδήποτε t). Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] = E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid r(t) = x_T\right] \tag{2.47}$$

Κατά την Θεωρία του Κεφαλαίου 3 του [91], το δεύτερο μέλος (2.47) δεν είναι άλλο κατά την παρατήρηση της σελ. 66 του [91] από μια συνάρτηση $u:\ \mathbb{R}\times[0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$u(x,\,t) = E_Q\left[f(x_T)\,\exp\left(-\int_t^T r\left(X_s^{t,x},\,s\right)\mathrm{d}s\right)\right] \tag{2.48}$$

όπου $f(x_T)\equiv 1$ και $\{X_s^{t,x}\}_{s\in[0,\,T]}$, όπως στο Θεώρημα 3.29, σελ. 64 στο [91]. Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος αυτού ικανοποιούνται και σταθεροποιώντας το χρόνο λήξης, T[10], η συνάρτηση της u θα είναι λύση μιας γενικής Εξίσωσης τύπου Black-Scholes της μορφής:

$$u_t(x,\,t) = -\frac{1}{2}\sigma^2(x)\;u_{xx}(x,\,t) + m(x)\;u_x(x,\,t) + r(x)\;u(x,\,t) \tag{2.49}$$

με τη συνάρτηση u να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(x,\,T) = f(x_T)\equiv 1 \tag{2.50}$$

Λύνοντας την ΜΔΕ (2.49), λόγω της (2.9) η τιμή, $P(t,\,T)$, ενός T-ομολόγου θα δίνεται από την

$$P(t,\,T) = u(r(t)\,,\,t)$$

Συνεπώς, δοθέντος μιας εξίσωσης (μοντέλου) για τα επιτόκια της μορφής (2.45) έχουμε την τιμή ενός T-ομολόγου καθώς και την Καμπύλη των Αποδόσεων ως

[10] Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον τρόπο η r γίνεται πλέον *μιας* μεταβλητής. Τότε το Θεώρημα 3.29 του [91] ισχύει ανάλογα (βλ. Παρατήρηση A.7).

$$\begin{aligned} R\,(t;\,T) &= -\frac{1}{T-t}\left[\ln P\,(t,\,T)\right] \\ &= -\frac{1}{T-t}\left[\ln u\,(r\,(t)\,,\,t)\right] \end{aligned} \tag{2.51}$$

Σε περιπτώσεις που το σχήμα επίλυσης αυτό και πάλι δεν επαρκεί γιατί η ΜΔΕ (2.49) επιλύεται δύσκολα (ακόμη και με Αριθμητική Ανάλυση), η Feynman-Kač σύνδεση Ανάλυσης και Θεωρίας Πιθανοτήτων μας δίνει τη λύση της Στοχαστικής Προσομοίωσης. *Προσομοιώνουμε*, δηλαδή, τις λύσεις ενός μοντέλου για τα επιτόκια της μορφής (2.45) και τρέχοντας μια *Μέθοδο Monte Carlo* προσεγγίζουμε τη μέση τιμή (2.47). Ως συνήθως, η συνολική ακρίβεια αυτών των προσομοιώσεων μπορεί εύκολα να αμφισβητηθεί, αλλά στη περίπτωση που τα βήματα της διακριτοποίησης είναι αρκετά μικρά, η Feynman-Kač Θεωρία μας εξασφαλίζει ότι οι προσομοιώσεις θα είναι έγκυρες. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα Β, όπου παραθέτουμε ένα ψευδοκώδικα τιμολόγησης ομολόγων με τη μορφή του Αλγ. Β.6. Τέλος, σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις μπορούμε με μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων να τιμολογήσουμε ομόλογα υπολογίζοντας (θεωρητικά) την τιμή της (2.47) (βλ. §2.5)· κάτι τέτοιο, όμως, είναι η εξαίρεση του κανόνα.

Στον Πίνακα 2.1 της σελ. 46 παρατίθενται μερικά από τα διασημότερα στοχαστικά μοντέλα για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο από το απλούστερο στο συνθετότερο, μαζί με τις σχετικές τους ιδιότητες από το υπέροχο βιβλίο των Brigo και Mercurio [9], αλλά και από άρθρα της Βιβλιογραφίας (ακολουθούν). Οι συμβολισμοί *M*, *V*, *D*, *CIR*, *HL*, *EV*, *HW*, *BK*, *MM*, *CIR++* και *EEV* σημαίνουν αντίστοιχα το μοντέλο του Merton, το μοντέλο του Vasiček [93], το μοντέλο του Dothan [19], το μοντέλο των Cox, Ingersoll και Ross [14], το μοντέλο των Ho και Lee, το Εκθετικό Vasiček μοντέλο, το μοντέλο των Hull και White [38], το μοντέλο των Black και Karasinski [5], το μοντέλο των Mercurio και Moraleda [67], το CIR++ μοντέλο και το Επεκτεταμένο Εκθετικό Vasiček μοντέλο. Επίσης, με N, Y συμβολίζουμε το "όχι" και το "ναι" αντίστοιχα, και το N^* ερμηνεύεται ως ότι η πιθανότητα τα επιτόκια να είναι αρνητικά *μπορεί να είναι μηδενική* κάτω από κατάλληλες συνθήκες στη ντετερμινιστική συνάρτηση $f\,(t)$. Ακόμη, τα $\mathcal{N}$, $L\mathcal{N}$, $NC\chi^2$, $SNC\chi^2$, $SN\mathcal{N}$ συμβολίζουν αντίστοιχα κανονική, λογαριθμοκανονική, μη κεντρική χ^2, μετατοπισμένη, μη κεντρική χ^2, και μετατοπισμένη λογαριθμοκανονική κατανομή. Τέλος, με *A.B.P.* συμβολίζουμε την ύπαρξη αναλυτικής λύσης για την τιμή του ομολόγου, και με *A.O.P.* συμβολίζουμε την ύπαρξη αναλυτικής λύσης για την τιμή δικαιωμάτων (options) επί των ομολόγων.

Όλα τα προαναφερθέντα μοντέλα είναι υποψήφια για προσομοίωση, αλλά πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί, γιατί το καθένα έχει διαφορετικές ιδιότητες. Επιπρόσθετα, για τα μοντέλα που στην 5η στήλη του Πίνακα 2.1 έχουν την τιμή "Υ" μπορούμε να *επαληθεύσουμε* την προσομοιωμένη με την αναλυτική τους λύση.

Τα μοντέλα αυτά είναι της γενικής μορφής (2.45)

$$\mathrm{d}r\,(t) = \kappa\,(r\,(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,(r\,(t))\,\mathrm{d}B_t \tag{2.52}$$

αλλά οι συναρτήσεις $\kappa\left(r\left(\cdot\right)\right)$ και $\sigma\left(r\left(\cdot\right)\right)$ εμπεριέχουν *παραμέτρους* που πρέπει να υπολογιστούν *πριν* το στάδιο της επίλυσης. Επιλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντανακλούν όσο περισσότερο μπορούν τις τιμές των ομολόγων ή των παραγώγων τους, που έχουν παρατηρηθεί στην αγορά. Η διαδικασία της προσαρμογής αυτής καλείται *calibration*, και δε θα την αναλύσουμε.

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να τιμολογήσουμε ομόλογα υπολογίζοντας τη μέση τιμή (2.47), αφού πρώτα έχουμε υπολογίσει μια αναλυτική λύση για το επιτόκιο, r_t, με μεθόδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

2.5 Υπολογισμός της Καμπύλης των Αποδόσεων ομολόγων

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε την αναλυτική μορφή της Καμπύλης Αποδόσεων ομολόγων υπό το μοντέλο του Vasiček μέσω των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων και έπειτα υπό το μοντέλο των Ho και Lee, μέσω μοντέλου των επιτοκίων πρόσω. Χρήσιμες συμπληρωματικές βιβλιογραφικές αναφορές είναι τα βιβλία [9] και [4] και τα άρθρα [5], [14], [19], [38] και οι σημειώσεις [7].

2.5-1 Το μοντέλο του Vasiček

Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο στο μοντέλο του Vasiček από τον Πίνακα 2.1 ικανοποιεί την ακόλουθη ΣΔΕ:

$$\mathrm{d}r_t = \left[a\ (b - r_t)\right]\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t \quad r_0 = r > 0 \tag{2.53}$$

Η συγκεκριμένη ΣΔΕ είναι υπό το (αντικειμενικό) μέτρο Π. Θα αλλάξουμε το μέτρο αυτό σε ένα κινδυνοουδέτερο μέτρο, Q, για ένα εξαιρετικά κρίσιμο λόγο. Μόνο υπό μια κινδυνοουδέτερη πιθανότητα είναι δυνατή η *εξάλειψη κάθε ευκαιρίας κερδοσκοπίας* κατά την τιμολόγηση ομολόγων (§2.4), και επίσης γνωρίζουμε ότι οι τιμές των ομολόγων της (2.9) είναι *martingale* μόνο υπό μια τέτοια πιθανότητα που ικανοποιεί τη Συνθήκη Μη Κερδοσκοπίας της §2.2.

Έτσι, από τον τύπο (2.18) και την Παρατήρηση 2.9, η εξίσωση (2.53) γίνεται

$$\mathrm{d}r_t = \left[a\ (b^\star - r_t)\right]\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t^Q,$$

όπου θέσαμε $q^Q\left(t\right) := q \in \mathbb{R}$ και $b^\star := b - \frac{q\sigma}{a}$.

Ο κύριος στόχος αυτής της υποενότητας είναι να βρούμε τον τύπο του Vasiček της τιμής ενός ομολόγου, και συνεπώς και της Καμπύλης των Αποδόσεων. Ξεκινάμε από τη συνθήκη τιμολόγησης μη κερδοσκοπίας (2.9) και κάνουμε πράξεις:

$$\begin{aligned} P\left(t,\,T\right) &= E_Q\left[e^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= E_Q\left[e^{-\int_t^T (r(s)+b^\star-b^\star)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} P\left(t,\,T\right) &= e^{-\int_t^T b^\star \mathrm{d}s}\, E_Q\left[e^{-\int_t^T (r(s)-b^\star)\mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-b^\star (T-t)}\, E_Q\left[e^{-\int_t^T X_s^\star \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right], \end{aligned} \tag{2.54}$$

όπου θέσαμε $X_s^\star := r_s - b^\star$. Από το Θεώρημα 3.29 του [91] της Feynman-Kač Θεωρίας και συγκεκριμένα τον τύπο (3.55) της σελ. 65 του [91] γνωρίζουμε ότι η σ.α. $\{X_t^\star\}$ είναι λύση της ακόλουθης γραμμικής ΣΔΕ:

$$\mathrm{d}X_t^\star = -aX_t^\star\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t^Q \tag{2.55}$$

Από τη χρονική ομοιογένεια της (2.55) και την Ιδιότητα Markov της λύσης της, $X_s^{0,x} = xe^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B_t^Q$ (βλ. και Παράρτημα A) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{-\int_t^T X_s^\star \mathrm{d}s} \mid \mathcal{F}_t\right] &= E_Q\left[e^{-\int_0^{T-t} X_s^{\star\,0,x}\mathrm{d}s} \mid x = X_t^\star\right] \\ &= F\left(T-t,\,x\right)\Big|_{x=X_t^\star} \\ &= F\left(T-t,\,X_t^\star\right) \\ &= F\left(T-t,\,r_t - b^\star\right), \end{aligned}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση με τύπο $F\left(\vartheta, x\right) = E_Q\left[e^{-\int_0^\vartheta X_s^x \mathrm{d}s}\right]$. Μπορεί να δειχθεί από τη θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων ότι η σ.α. $Y_t = \int_0^\vartheta X_s^x \mathrm{d}s \sim \mathcal{N}\left(\mu,\,\sigma^2\right)$ [56]. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} F\left(\vartheta, x\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}F_Y\left(y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-2y\sigma^2 - y^2 + 2\mu y - \mu^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2 + \left(2\mu - 2\sigma^2\right)y + \mu^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Προσθαφαιρούμε κατάλληλα και παίρνουμε

$$\begin{aligned} F\left(\vartheta, x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2 + 2\left(\mu-\sigma^2\right)y + \mu^2 + \left(\mu-\sigma^2\right)^2 - \left(\mu-\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(y - \left(\mu-\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu^2 - 2\mu\sigma^2 + \sigma^4 - \mu^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-\left(\mu-\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}, \end{aligned}$$

αφού η $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-\left(\mu-\sigma^2\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right)$ είναι σ.π.π. της $\mathcal{N}\left(\mu-\sigma^2,\,\sigma^2\right)$.

Επομένως

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{-\int_0^\vartheta X_s^x \mathrm{d}s}\right] &= E_Q\left[e^{-Y}\right] \\ &= e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{-E_Q[Y]+\frac{1}{2}V_Q[Y]} \\ &= e^{-E_Q\left[\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s\right]+\frac{1}{2}V_Q\left[\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s\right]} \end{aligned} \tag{2.56}$$

Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} E_Q\left[\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s\right] &= \int_0^\vartheta E_Q\left[X_s^x\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\vartheta xe^{-as}\mathrm{d}s \\ &= \frac{x}{a}\left(1-e^{-a\vartheta}\right) \end{aligned} \tag{2.57}$$

και για τη διασπορά

$$\begin{aligned} V_Q\left[\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s\right] &= Cov\left(\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s,\,\int_0^\vartheta X_u^x\mathrm{d}u\right) \\ = E_Q\left[\int_0^\vartheta X_s^x\mathrm{d}s\int_0^\vartheta X_u^x\mathrm{d}u\right] &- \int_0^\vartheta E_Q\left[X_s^x\right]\mathrm{d}s\int_0^\vartheta E_Q\left[X_u^x\right]\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\vartheta\int_0^\vartheta\left(E_Q\left[X_s^xX_u^x\right]-E_Q\left[X_s^x\right]\,E_Q\left[X_u^x\right]\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\vartheta\int_0^\vartheta Cov\left(X_s^x,\,X_u^x\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{2.58}$$

Όμως, η συνδιακύμανση ισούται με

$$\begin{aligned} Cov\left(X_s^x,\,X_u^x\right) &= E_Q\left[\left(X_s^x-E_Q\left[X_s^x\right]\right)\,\left(X_u^x-E_Q\left[X_u^x\right]\right)\right] \\ &= \sigma^2e^{-a(s+u)}E_Q\left[\int_0^s e^{aw}\mathrm{d}B_w^Q\int_0^u e^{a\tau}\mathrm{d}B_\tau^Q\right] \\ &= \sigma^2e^{-a(s+u)}\int_0^{s\wedge u}e^{2ar}\mathrm{d}r \\ &= \sigma^2e^{-a(s+u)}\frac{e^{2a(s\wedge u)}-1}{2a} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Λόγω συμμετρίας της $Cov\left(\cdot,\cdot\right)$ ως προς την ευθεία $u=s$ στην ορθογώνια περιοχή $[0,\,\vartheta]\times[0,\,\vartheta]$ αρκεί να δουλέψουμε στην περιοχή $\{(s,\,u):\ 0<u<s\}$. Συνδυάζοντας τις (2.59) και (2.58) έχουμε

$$
\begin{aligned}
V_Q\left[\int_0^{\vartheta} X_s^x \mathrm{d}s\right] &= 2\int_0^{\vartheta}\int_0^{s} Cov\left(X_s^x,\, X_u^x\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^{\vartheta}\int_0^{s} \sigma^2 e^{-a(s+u)}\frac{e^{2au}-1}{2a}\mathrm{d}s\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε ότι

$$
V_Q\left[\int_0^{\vartheta} X_s^x \mathrm{d}s\right] = \frac{\vartheta\sigma^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a\vartheta}\right) - \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a\vartheta}\right)^2 \tag{2.60}
$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.57) και (2.60) στην (2.56) βρίσκουμε την $F(\vartheta, x)$ σε κλειστή μορφή. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
F(\vartheta, x) &:= E_Q\left[e^{-\int_0^{\vartheta} X_s^x \mathrm{d}s}\right] \\
&= \exp\left(\frac{x}{a}\left(1-e^{-a\vartheta}\right) + \frac{\vartheta\sigma^2}{2a^2} - \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a\vartheta}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a\vartheta}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό της τιμής του ομολόγου υπό το μοντέλο του Vasiček. Η (2.54) λόγω της (2.61) γίνεται

$$
\begin{aligned}
P(t,\, T) &= e^{-b^{\star}(T-t)}\, e^{\frac{x}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)+\frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2}-\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2} \\
&= e^{-(T-t)\, R(t;\, T)},
\end{aligned} \tag{2.62}
$$

όπου κατά τους συμβολισμούς της (2.51) $R(t;\, T)$ είναι η απόδοση του ομολόγου στην περίοδο $[t,\, T]$ και μπορεί να θεωρηθεί ως το μέσο επιτόκιο για την χρονική περίοδο $[t,\, T]$. Η απόδοση του ομολόγου μπορεί να υπολογιστεί πολύ απλά αντιστρέφοντας τον προηγούμενο τύπο:

$$
\begin{aligned}
R(t;\, T) &= \frac{b^{\star}(T-t) - \frac{x}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) - \frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2} + \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right) + \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2}{T-t} \\
&= b^{\star} - \frac{\sigma^2}{2a^2} - \frac{1}{a(T-t)}\left[\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left(b^{\star} - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t\right) - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right] \\
&= R_{\infty} - \frac{1}{a(T-t)}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left[R_{\infty} - r_t - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\right],
\end{aligned}
$$

όπου

$$
R_{\infty} = \lim_{T-t\to\infty} R(T-t;\, T) = b^{\star} - \frac{\sigma^2}{2a^2}
$$

και η $R(t;\, T)$ υπολογίζεται για $x = X_t^{\star}\ (:= r_t - b^{\star})$.

Επομένως, υπό το μοντέλο του Vasiček η τιμή και η απόδοση ενός ομολόγου δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$
P(t,\, T) = e^{-b^{\star}(T-t)+\frac{x}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)+\frac{(T-t)\sigma^2}{2a^2}-\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2} \tag{2.63}
$$

και

$$R\,(t;\,T) = R_\infty - \frac{1}{a\,(T-t)}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left[R_\infty - r_t - \frac{\sigma^2}{4a^2}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\right] \tag{2.64}$$

Παρατήρηση 2.25.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε πως κατά την απόδειξη των (2.63) και (2.64) στηριχτήκαμε ουσιωδώς στη Feynman-Kač Θεωρία, αλλά με έναν τρόπο αρκετά *έμμεσο*. Βασιστήκαμε στην ανάλυση των προηγούμενων ενοτήτων τιμολόγησης μέσω ύπαρξης του IMM και χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα Markov. Ο Vasiček [93] συμπέρανε τον προηγούμενο, πολύπλοκο τύπο (2.63) επιλύοντας τη ΜΔΕ 2.49! Οι υπολογισμοί του όμως δεν ήταν το ίδιο εύκολοι με τους προηγούμενους.

Ας παρατηρήσουμε λίγο ακόμη τις αναλυτικές λύσεις (2.63) για τα δυναμικά (2.53). Τα τελευταία είναι εύκολα επιλύσιμα ως

$$r_t = b - e^{-at}\,(b - r_0) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}\mathrm{d}B_s \tag{2.65}$$

ή υπό το κινδυνοουδέτερο μέτρο, Q, ισχύει

$$r_t = b^\star - e^{-at}\,(b^\star - r_0) + \sigma\int_0^t e^{a(t-s)}\mathrm{d}B_s^Q \tag{2.66}$$

Στη συνέχεια παρατηρήστε δύο πράγματα. Πρώτον, η μακροχρόνια μέση τιμή (υπό το Q) είναι $b^\star$,

$$\lim_{t\to\infty} E\,[r_t] = \lim_{t\to\infty} E\left[b^\star - e^{-at}\,(b^\star - r_0)\right] = b^\star$$

Δεύτερον, εξ ορισμού της $X_t^\star$ $(:= r_t - b^\star)$, η ανέλιξη $\{X_t^\star\}$ *επαναφέρεται* στο μηδέν, $\lim_{t\to\infty} E\,[X_t^\star] = \lim_{t\to\infty} E\,[r_t] - b^\star = 0$. Συνεπώς, η σ.α. $\{r_t\}$ επαναφέρεται στη μέση τιμή της: αν η r_t είναι πάνω από τη μέση τιμή, τότε ο ντετερμινιστικός όρος στην (2.66) είναι αρνητικός, ωθώντας τη συνάρτηση των επιτοκίων να μειώνεται· αν η r_t είναι κάτω από τη μέση της τιμή, τότε ο ντετερμινιστικός όρος στην (2.66) είναι θετικός, ωθώντας τα επιτόκια, r_t, να αυξάνονται. Η *επαναφορά στη μέση τιμή* (mean reversion property) είναι μια επιθυμητή ιδιότητα κατά τη μοντελοποίηση των επιτοκίων.

Επιπρόσθετα, μόλις η απεικόνιση $(t,\,+\infty) \ni T \mapsto P\,(t,\,T) \in [0,\,+\infty)$ είναι γνωστή, γνωρίζουμε *ολόκληρη* την Καμπύλη των Αποδόσεων τη στιγμή t από τον τύπο (2.64). Αυτό σημαίνει ότι, αν $t = 0$ είναι ο αρχικός χρόνος, η αρχική Καμπύλη των Αποδόσεων είναι η *έξοδος* (output) του μοντέλου, εξαρτώμενη από τους παραμέτρους a, b, σ στα δυναμικά (2.53) (και την αρχική συνθήκη r_0).

Παρ΄ όλα αυτά το αρχικό μοντέλο του Vasičekέχει διάφορα μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, τα επιτόκια μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές με θετική πιθανότητα, όπως αποτυπώνεται στον Πίνακα 2.1, σελ. 46. Για την επίλυση τέτοιων παθολογικών περιπτώσεων προτάθηκε στη συνέχεια το μοντέλο των Cox, Ingersoll και Ross [14]

$$\mathrm{d}r_t = \left[\alpha\ (b - r_t)\right] \mathrm{d}t + \left[\sigma\sqrt{r_t}\right] \mathrm{d}B_t, \quad r_0 = r > 0 \tag{2.67}$$

Το μοντέλο αυτό οδηγεί σε θετικά επιτόκια, και έχει κλειστή μορφή. Είναι όμως πιο δύσκολο να το χειριστεί κανείς και να το προσαρμόσει στα δεδομένα της αγοράς, καθώς σε αντίθεση με τη λογαριθμοκανονική κατανομή των επιτοκίων του Vasiček, σε ένα τέτοιο CIR μοντέλο τα επιτόκια ακολουθούν μη-κεντρική χ^2 κατανομή. Στην αγορά χρησιμοποιούνται αρκετές παραλλαγές των μοντέλων του Πίνακα 2.1, ανάλογα με τις εκάστοτε ανάγκες.

Παρατήρηση 2.26.

Στην αγορά έχει παρατηρηθεί ότι καθώς περνά ο χρόνος και ένα ομόλογο λήγει (δηλαδή καθώς το $t \to T$), η μεταβλητότητα των τιμών του φθίνει, δηλαδή ο συντελεστής του στοχαστικού όρου ενός μοντέλου επιτοκίων της γενικής μορφής (2.52) πρέπει να είναι μια φθίνουσα συνάρτηση. Συνεπώς, ένας από τους λόγους που το μοντέλο του Vasiček δεν έχει πρακτική σημασία είναι η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας, σ· ήταν όμως μια πρώτη προσέγγιση. Επανερχόμενοι στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε ότι τα μοντέλα που είναι δυνητικά εφαρμόσιμα είναι αρκετά πολυπλοκότερα.

2.5-2 Το μοντέλο των Ho και Lee

Στην υποενότητα αυτή αναζητούμε την αναλυτική λύση του Ho-Lee μοντέλου

$$\mathrm{d}r_t = \mu\,(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t \quad r_0 = r > 0 \tag{2.68}$$

Θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική απόδειξη από ότι στην §2.5-1 κάναμε για το μοντέλο του Vasiček. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 2.22 της σελ. 33 για τα επιτόκια πρόσω. Από την (2.68) υποθέτουμε και πάλι σταθερή μεταβλητότητα: $\sigma\,(t, T) := \sigma$ και $\int_t^T \sigma \mathrm{d}u = \sigma\ (T - t)$. Συνεπώς, η ΣΔΕ για τα επιτόκια πρόσω, (2.42), γίνεται

$$\mathrm{d}f\,(t, T) = \sigma^2\ (T - t)\ \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t^Q$$

Δηλαδή

$$f\,(t, T) = f\,(0, T) + \sigma^2 t\,\left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma\,B_t^Q \tag{2.69}$$

και επομένως

$$r_t := f\,(t, t) = f\,(0, t) + \sigma^2\frac{t^2}{2} + \sigma\,B_t^Q \tag{2.70}$$

Απαλοίφοντας την κίνηση Brown στην (2.69) μέσω της (2.70): $\sigma\,B_t^Q = r_t - f\,(0, t) - \sigma^2\frac{t^2}{2}$ παίρνουμε

$$f\,(t, T) = r_t + \sigma^2 t\ (T - t) + f\,(0, T) - f\,(0, t) \tag{2.71}$$

Η σχέση (2.71) δείχνει [56] ότι τα επιτόκια πρόσω για δύο διαφορετικές ημερομήνίες λήξης T_1, T_2 διαφέρουν κατά ένα ντετερμινιστικό όρο

$$f(t,\,T_1) - f(t,\,T_2) = f(0,\,T_1) - f(0,\,T_2) + \sigma^2 t\ (T_1 - T_2)$$

και συνεπώς είναι τέλεια συσχετισμένα. Συνεπώς, τα δύο είδη επιτοκίων r_t και $f(t,\,T)$ θα είναι επίσης *τέλεια συσχετισμένα*. Το γεγονός αυτό μοιάζει να μη συμφωνεί με ό,τι παρατηρείται στην αγορά και συνιστά, συνεπώς, ένα "έμμεσο" μειονέκτημα του μοντέλου 2.68.

Η τιμή του ομολόγου σε όρους επιτοκίων πρόσω (2.26) είναι

$$\begin{aligned} P(t,\,T) &= \exp\left(-\int_t^T f(t,\,u)\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^T f(0,\,u)\,\mathrm{d}u - \sigma^2\int_t^T t\left(u-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}u - \sigma\,B_t^Q\,(T-t)\right) \end{aligned}$$

Όμως, από τον ορισμό των επιτοκίων πρόσω (2.23) έχουμε $-\int_t^T f(0,\,u)\,\mathrm{d}u = \ln P(0,\,T) - \ln P(0,\,t)$ και καταλήγουμε

$$P(t,\,T) = \frac{P(0,\,T)}{P(0,\,t)}\exp\left(-\frac{\sigma^2 t\,T\,(T-t)}{2} - \sigma\,B_t^Q\,(T-t)\right) \tag{2.72}$$

Απαλοίφοντας και πάλι την κ.Β., βρίσκουμε την εξίσωση της τιμής του ομολόγου *συναρτήσει του βραχυπρόθεσμου επιτοκίου*, r_t:

$$P(t,\,T) = \frac{P(0,\,T)}{P(0,\,t)}\exp\left(-(T-t)\,r_t - \frac{\sigma^2 t\ (T-t)^2}{2} + (T-t)\ f(0,\,t)\right) \tag{2.73}$$

Από την (2.73) εύκολα βρίσκουμε την Καμπύλη των Αποδόσεων , αφού εξ ορισμού

$$R(t;\,T) = -\frac{1}{T-t}\,\ln P(t,\,T)$$

Παρατήρηση 2.27.

Οι αναλυτικές λύσεις (2.69) και (2.72) μπορούν εύκολα να προσομοιωθούν και τα ποιοτικά τους χαρακτηριστικά να ελεγχθούν γραφικά (βλ. Παράρτημα B, σελ. 53).

Κατά το κλείσιμο αυτού του κεφαλαίου κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε κάποια γενικά σχόλια για τη μοντελοποίηση.

2.6 Γενικά σχόλια για τη μοντελοποίηση ομολόγων

Οι χρηματοοικονομικοί κίνδυνοι που αντιμετωπίζει μια επιχείρηση/ οργανισμός είναι *αμφίσημοι*: "κερδίζω", ή "χάνω". Εν τούτοις, οι αποζημιώσεις για τον κίνδυνο που καλούνται να φέρουν οι επενδυτές είναι μόνο στον *θετικό* άξονα. Όμοια, οι αποζημιώσεις που καλείται να πληρώσει ένα Ασφαλιστικό Ταμείο είναι μόνο στον θετικό άξονα.

Επιπρόσθετα, οι κίνδυνοι αυτοί θα μπορούσαν να χωριστούν, γενικά, στις κατηγορίες του Credit Risk, Market Risk και του Operational Risk. Το λεγόμενο *Πρόβλημα του Enterprise Risk Management* (ERM) απαιτεί να μην υπολογίζεται κάθε μία συνιστώσα κινδύνου μεμονωμένα (ανεξάρτητα με τις άλλες), αλλά να υπολογίζεται και *ο βαθμός εξάρτησης* (συσχέτισής) τους.

Συγκεκριμένα, κατά την επιλογή ενός μοντέλου, πρέπει κανείς να θέτει τα ακόλουθα ερωτήματα [9]:

- Μήπως τα δυναμικά του συνεπάγονται με θετική πιθανότητα αρνητικά επιτόκια;
- Τι κατανομή συνεπάγονται τα δυναμικά για το επιτόκιο (ή αποζημίωση); Έχει, για παράδειγμα, παχιές ουρές; Είναι συμμετρική; Πόσες κορυφές έχει;
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί με εξαρτημένες κατανομές (τα λεγόμενα multifactor models);
- Έχουν αναλυτική λύση οι εξισώσεις της τιμής των ομολόγων;
- Έχουν αναλυτική λύση οι εξισώσεις των τιμών των παραγώγων επί των ομολόγων;
- Έχει το μοντέλο την ιδιότητα της επαναφοράς στη μέση τιμή, ενώ, αντίστοιχα, η διασπορά του δεν απειρίζεται;
- Τι είδους δομές για την μεταβλητότητα συνεπάγεται το μοντέλο;
- Πόσο κατάλληλο είναι το μοντέλο για μια Monte Carlo Προσομοίωση;
- Τα συγκεκριμένα δυναμικά του μοντέλου επιτρέπουν την εκτίμηση με ιστορικά δεδομένα των παραμέτρων του;
- ...

Αυτά τα ερωτήματα είναι κεντικής σημασίας για την κατανόηση των θεωρητικών και πρακτικών αποτελεσμάτων κάθε μοντέλου για τα (στοχαστικά) επιτόκια. Ωστόσο, στο κεφάλαιο αυτό, έγινε προσπάθεια να απαντηθούν αρκετά από τα προηγούμενα ερωτήματα μέσα από την ανάλυση κάποιων ειδικών κλάσεων μοντέλων. Προφανώς, η πληρότητα τους εξαρτάται κατά πολύ από τη σημασία και πρακτική χρησιμότητα του εκάστοτε μοντέλου.

Ένα κλασικό πρόβλημα με τα προηγούμενα μοντέλα είναι η *ενδογενής φύση* τους. Εάν έχουμε την αρχική καμπύλη των τιμών των ομολόγων χωρίς κουπόνια $T \mapsto P^{Market}(0, T)$ από την αγορά, επιθυμούμε το μοντέλο μας να ενσωματώνει αυτήν την καμπύλη· χρειαζόμαστε να εξαναγκάζουμε τις παραμέτρους του μοντέλου να παράγουν μια μοντελοποιημένη καμπύλη των τιμών, όσο πιο κοντά στην παρατηρούμενη καμπύλη της αγοράς. Για παράδειγμα, στην προαναφερθείσα περίπτωση του μοντέλου του Vasiček, χρειαζόμαστε με κάποια *διαδικασία βελτιστοποίησης* να επιλέξουμε κατάλληλα τις τιμές των a, b και σ, έτσι ώστε η αρχική μοντελοποιημένη καμπύλη $T \mapsto P^{Model}(0,\, T;\, a,\, b,\, \sigma,\, r_0)$ να συμπίπτει ει δυνατόν καλύτερα με την παρατηρούμενη $T \mapsto P^{Market}(0,\, T)$ στην αγορά.

Επιπρόσθετα, παρ' όλο που οι τιμές $P^{Market}(0,\, T)$ παρατηρούνται για την ακρίβεια μόνο σε πεπερασμένου πλήθους ημερομηνίες λήξεις T_i: $P^{Market}(0,\, T_i)$, *τρεις παράμετροι δεν είναι αρκετοί* για να αναπαράγουν ικανοποιητικά μια δοθείσα Καμπύλη Αποδόσεων. Συγκεκριμένα, κάποιες ειδικές μορφές καμπυλών δεν μπορούν ποτέ να παρατηρηθούν από το μοντέλο του Vasiček, ό,τι τιμές κι αν επιλέξουμε για τους παραμέτρους των δυναμικών.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι τέτοια μοντέλα είναι "καταδικασμένα": δεν μπορούν να αναπαράγουν ικανοποιητικά την αρχική Καμπύλη Τιμών, και, συνεπώς, η όποια συζήτηση για τις δομές της μεταβλητότητας και για την πραγματικότητα είναι *μάταιη*.

Για να βελτιωθεί μια τέτοια κατάσταση, θεωρούνται συνήθως *εξωγενή μοντέλα*, δηλαδή μοντέλα στα οποία η τωρινή Καμπύλη Τιμών δίνεται εξωγενώς. Τέτοια μοντέλα δημιουργούνται τροποποιώντας κατάλληλα τα προηγούμενα ενδογενή μοντέλα. Η βασική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι ότι ο μετασχηματισμός από ένα ενδογενές σε ένα εξωγενές μοντέλο είναι η εισαγωγή "χρονικά μεταβαλλόμενων" παραμέτρων. Ουσιαστικά, για την περίπτωση του μοντέλου του Vasiček, κάνει κανείς το εξής:

$$\mathrm{d}r_t = [a\ (b - r_t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t \ \rightsquigarrow\ \mathrm{d}r_t = [a\ (b\,(t) - r_t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$$

Έτσι, η ευελιξία της χρονικά εξαρτώμενης συνάρτησης $b\,(t)$ μας επιτρέπει να την ορίσουμε σε όρους της αγοράς με τέτοιον τρόπο ώστε το μοντέλο να αναπαράγει *ακριβώς* την Καμπύλη Τιμών τη στιγμή $t = 0$. Για παράδειγμα, τα EV, HW, BK και CIR++ μοντέλα του Πίνακα 2.1 είναι εξωγενή.

Μοντέλο	Δυναμικά	$P[r<0]>0$	$r\sim$	A.B.P.	A.O.P.
M	$\mathrm{d}r_t = \mu \mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$	N	$\mathcal{N}$	Y	Y
V	$\mathrm{d}r_t = [a\ (b-r_t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$	Y	$\mathcal{N}$	Y	Y
D	$\mathrm{d}r_t = [\mu\, r_t]\,\mathrm{d}t + \sigma r_t\,\mathrm{d}B_t$	N	$L\mathcal{N}$	Y	N
CIR	$\mathrm{d}r_t = [\alpha\ (b-r_t)]\,\mathrm{d}t + [\sigma\sqrt{r_t}]\,\mathrm{d}B_t$	N*	$NC\chi^2$	Y	Y
HL	$\mathrm{d}r_t = \mu\,(t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$	N	$\mathcal{N}$	Y	Y
EV	$\mathrm{d}r_t = [r_t\ (\alpha - b\,\ln r_t)]\,\mathrm{d}t + [\sigma\, r_t]\,\mathrm{d}B_t$	N*	$L\mathcal{N}$	N	N
HW	$\mathrm{d}r_t = [\alpha\ (b\,(t) - r_t)]\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_t$	Y	$\mathcal{N}$	Y	Y
BK	$\mathrm{d}r_t = [r_t\ (\alpha\,(t) - b\,\ln r_t)]\,\mathrm{d}t + [\sigma\, r_t]\,\mathrm{d}B_t$	N	$L\mathcal{N}$	N	N
MM	$\mathrm{d}r_t = \left[r_t\ \left(\alpha\,(t) - \left(\lambda - \frac{\gamma}{1+\gamma t}\right)\ln r_t\right)\right]\mathrm{d}t + [\sigma\, r_t]\,\mathrm{d}B_t$	N	$L\mathcal{N}$	N	N
CIR++	$r_t = x_t + f\,(t)\,,\quad \mathrm{d}x_t = [\alpha\ (b-x_t)]\,\mathrm{d}t + [\sigma\sqrt{x_t}]\,\mathrm{d}B_t$	N*	$SNC\chi^2$	Y	Y
EEV	$r_t = x_t + f\,(t)\,,\quad \mathrm{d}x_t = [x_t\ (\alpha - b\,\ln x_t)]\,\mathrm{d}t + [\sigma\, x_t]\,\mathrm{d}B_t$	N*	$SN\mathcal{N}$	N	N

Πίνακας 2.1 Σύνοψη των στοχαστικών μοντέλων για τα επιτόκια και κάποιων γνωστών ιδιοτήτων τους.

Παράρτημα

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Παράρτημα *A*

Η Ιδιότητα Markov των Λύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε μερικά αποτελέσματα που απορρέουν από την λεγόμενη *ιδιότητα Markov των λύσεων μιας Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης* (ΣΔΕ). Διαισθητικά, η ιδιότητα αυτή συνοψίζεται στο ότι η μελλοντική συμπεριφορά μιας σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ μετά τη χρονική στιγμή s, εξαρτάται μόνο από την τιμή X_s και δεν επηρεάζεται από την ιστορία της ανέλιξης πριν από τη στιγμή s. Μοντέλα στοχαστικών ανελίξεων που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται *Μαρκοβιανά μοντέλα*. Η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά κρίσιμη και μας επιτρέπει, για παράδειγμα, να δείξουμε ότι αν η σ.α. των επιτοκίων είναι Μαρκοβιανή, τότε η *μελλοντική* τιμή των επιτοκίων εξαρτάται μόνο από την τιμή που έχουν τα επιτόκια την *παρούσα* χρονική στιγμή και όχι από το πως αυτά ήταν στο παρελθόν. Μια τέτοια ιδιότητα είναι επιθυμητή στο modelling, και τα Μαρκοβιανά μοντέλα αναπτύσσονται για την τιμολόγηση options, γιατί υποστηρίζονται από πλήθος εμπειρικών μελετών. Ωστόσο, η ιδιότητα Markov έρχεται σε αντίθεση με τη λεγόμενη στη γλώσσα των Χρηματοοικονομικών "*technical analysis*", διαδικασία πρόβλεψης των τιμών ενός προϊόντος, μέσα από την ανάλυση των τιμών του παρελθόντος και αναζητώντας *τάσεις* (trends).

Εκφράζοντας τα παραπάνω με Μαθηματικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

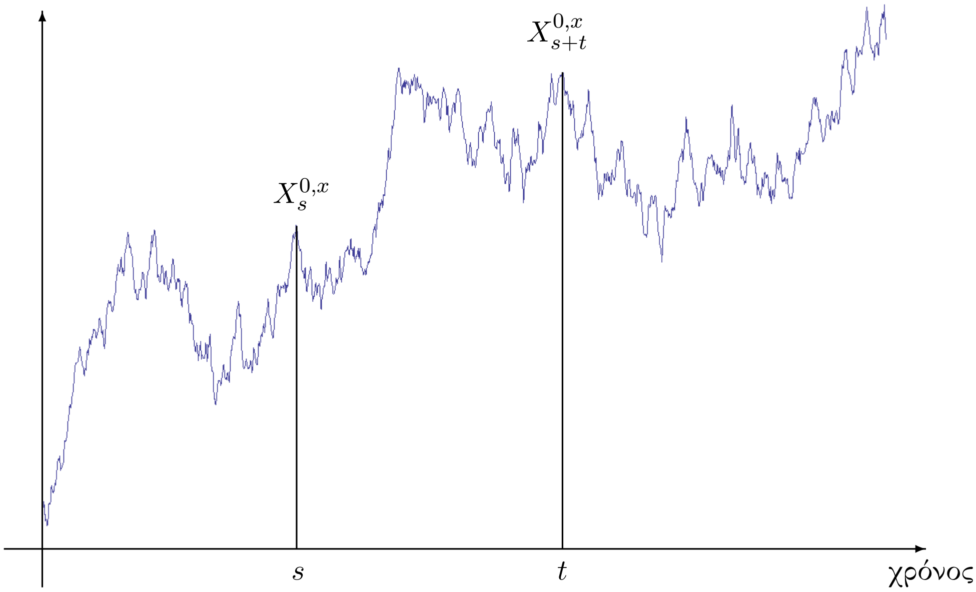
Ορισμός A.1 (Ιδιότητα Markov)**.**

Μια $\mathcal{F}_t$-προσαρμοσμένη σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$ θα λέμε ότι έχει την *ιδιότητα Markov*, αν για κάθε συνάρτηση Borel, f, και για κάθε s, t με $s \leq t$ έχουμε

$$E\left[f\left(X_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(X_t\right) \mid X_s\right] \tag{A.1}$$

Το πρώτο μέλος της (A.1) είναι μια τ.μ. ως μέση τιμή δεσμευμένη ως προς την "ιστορία" της σ.α. μέχρι τη στιγμή s. Το δεύτερο μέλος είναι μια τ.μ. ως μέση τιμή με τυχαία "αρχική τιμή". Συνεπώς, η ισότητα ισχύει με την σχεδόν βέβαια έννοια. Επιπρόσθετα, θέτοντας $f := 1_{(\alpha,b)}$ η (A.1) μπορεί να γραφτεί ως

$$P\left[\alpha < X_t < b \mid \mathcal{F}_s\right] = P\left[\alpha < X_t < b \mid X_s\right] \tag{A.2}$$



Εικ. A.1 Η ιδιότητα Markov της ανέλιξης $\left\{X_t^{0,x}\right\}_{t\geq 0}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα για τις λύσεις της ακόλουθης ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= \mu\left(X_t,\, t\right)\mathrm{d}x + \sigma\left(X_t,\, t\right)\mathrm{d}B_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{A.3}$$

Είναι διαισθητικά ξεκάθαρο από την (A.2) γιατί οι λύσεις ΣΔΕ θα πρέπει να έχουν την ιδιότητα Markov. Για ένα μικρό $\varepsilon > 0$, δεδομένου ότι $X_s = x$, η τιμή $X_{s+\varepsilon}$ εξαρτάται από τη διαφορά $B_{t+\varepsilon} - B_t$, που ως γνωστόν είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισάγουμε έναν συμβολισμό που να αναφέρει το *πότε* και από *που* ξεκίνησε η σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$.

Συμβολισμός A.2.

Έστω η σ.α. $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Με $\{X_s^{t,x}\}$, $s \geq t$ συμβολίζουμε την προηγούμενη σ.α. που ξεκίνησε τη στιγμή t από το σημείο x. Επιπρόσθετα, για απλοποίηση, με $\{X_s^x\}_{s\geq 0}$ θα συμβολίζουμε την $\{X_s^{0,x}\}_{s\geq 0}$, δηλαδή την σ.α. που ξεκινάει τη στιγμή 0 από το σημείο x (βλ. και Εικόνα A.1).

Σε ολοκληρωτική μορφή η (A.3) γράφεται:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s \mu\left(X_u^{t,x},\, u\right)\mathrm{d}u + \int_t^s \sigma\left(X_u^{t,x},\, u\right)\mathrm{d}B_u \tag{A.4}$$

Εξ ορισμού, η $\{X_s^{t,x}\}_{s\geq 0}$ ορίζεται για κάθε $(t,\, x)$ σ.β.. Ωστόσο, υποθέτοντας ότι η (A.3) έχει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, είναι δυνατή η κατασκευή μιας σ.α. που εξαρτάται από τα $(t,\, x,\, s)$, και η οποία είναι συνεχής σχεδόν βεβαίως ως προς αυτές τις μεταβλητές και είναι η λύση της εν λόγω εξίσωσης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι δύσκολο να αποδειχθεί και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [29], Κεφ. 3 για μια απόδειξη και για την πλήρη διατύπωση των όσων ακολουθήσουν.

Λήμμα A.3.
Αν η (A.3) *έχει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, τότε για κάθε* $s \geq t$

$$X_s^{0,x} = X_s^{t, X_t^x} \qquad P - \text{σ.β.}$$

Έτσι, η ιδιότητα Markov (A.1) μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως.

Θεώρημα A.4 (Ιδιότητα Markov των λύσεων).
Έστω $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *να είναι η λύση της* (A.3). *Τότε αυτή έχει την ιδιότητα Markov ως προς την* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *που παράγει η κίνηση Brown. Επιπρόσθετα, για κάθε Borel συνάρτηση* f *έχουμε (με την σ.β. έννοια)*

$$E\left[f\left(X_t\right) | \mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(X_t^{s,x}\right)\right] \tag{A.5}$$

Παρατήρηση A.5.
Η ισότητα (A.5) γράφεται συχνά στη Βιβλιογραφία [56] και ως

$$E\left[f\left(X_t\right) | \mathcal{F}_s\right] = \left. E\left[f\left(X_t^{s,x}\right)\right]\right|_{x=X_s} \tag{A.6}$$

Διερωτόμαστε τώρα αν το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει και όταν θεωρήσουμε μια συνάρτηση που εξαρτάται από όλη την ανέλιξη μετά τη στιγμή s. Τα επόμενα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα, όταν κάνουμε υπολογισμούς στην τιμολόγηση ομολόγων μέσω ενός στοχαστικού μοντέλου για τα επιτόκια.

Θεώρημα A.6.
Έστω $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *να είναι η λύση της* (A.3) *και* r: $\mathbb{R}\times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ *μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε* $T > t$ *και* f *όπως προηγουμένως ισχύει (με την σ.β. έννοια) ότι*

$$E\left[f\left(X_{\mathrm{T}}\right) \exp\left(-\int_t^T r\left(X_u, u\right) \mathrm{d}u\right) | \mathcal{F}_t\right] = E\left[f\left(X_T^{t,X_t}\right) \exp\left(-\int_t^T r\left(X_u^{t,X_t}, u\right) \mathrm{d}u\right)\right]$$

ή κατά την Παρατήρηση A.5:

$$E\left[f\left(X_{\mathrm{T}}\right) \exp\left(-\int_t^T r\left(X_u, u\right) \mathrm{d}u\right) | \mathcal{F}_t\right] = \left. E\left[f\left(X_T^{t,x}\right) \exp\left(-\int_t^T r\left(X_u^{t,x}, u\right) \mathrm{d}u\right)\right]\right|_{x=X_t}$$

Παρατήρηση A.7.
Όταν οι συναρτήσεις μ, σ στην (A.3) δεν έχουν εξάρτηση από το χρόνο (η ανέλιξη λέγεται τότε *χρονικά ομογενής*), μπορεί να δειχθεί ότι η κατανομή της $X_{t+T}^{t,x}$ είναι η ίδια με

εκείνης της $X_{\mathrm{T}}^{0,x}$. Αυτό συνεπάγεται ότι, εάν η f είναι μια φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$E\left[f\left(X_{t+T}^{t,x}\right)\right] = E\left[f\left(X_{\mathrm{T}}^{0,x}\right)\right]$$

Επεκτείνοντας αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί ότι όταν η r είναι σταθερή ως προς τη δεύτερη της μεταβλητή (για τα επιτόκια ομολόγων: χρόνος λήξης), τότε

$$E\left[f\left(X_{t+T}^{t,x}\right)\,\exp\left(-\int_t^{t+T} r\left(X_u^{t,x}\right)\mathrm{d}u\right)\right] = E\left[f\left(X_{\mathrm{T}}^{0,x}\right)\,\exp\left(-\int_0^{T} r\left(X_u^{0,x}\right)\mathrm{d}u\right)\right]$$

Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση A.7, για τα επιτόκια r ενός ομολόγου με σταθερό χρόνο λήξης T το Θεώρημα A.6 παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα A.8.

Αν $\{X_t\}_{t\geq 0}$, r *είναι όπως στο* Θεώρημα A.6, *τότε για κάθε* $T > t$

$$E\left[f\left(X_T\right)\,\exp\left(-\int_t^{T} r\left(X_u\right)\mathrm{d}u\right) \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[f\left(X_{T-t}^{0,x}\right)\,\exp\left(-\int_0^{T-t} r\left(X_u^{0,x}\right)\mathrm{d}u\right)\right]\Bigg|_{x=X_t} \tag{A.7}$$

Το Πόρισμα A.8 κατά τα σχόλια της §2.1-1 μας διευκολύνει στον υπολογισμό της μέσης τιμής (2.9) που με τη σειρά της μας δίνει την τιμή ενός T-ομολόγου.

Παράρτημα $\mathcal{B}$

Υλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν

Στο κεφάλαιο αυτό συμπεριλαμβάνονται οι κώδικες που παρήγαγαν τις εικόνες της εργασίας, αλλά και μια προσπάθεια υλοποίησης των θεωρητικών αποτελεσμάτων του Κεφ. 2.

Αλγόριθμος Β.1 Προσομοίωση της 2D-κίνησης Brown.

Είσοδος: t_0, B_0, Δt

Έξοδος: $(B_0, \ldots, B_N)$

Για $i = 1, 2, \ldots, N$ **επανάλαβε**

  $t_i \longleftarrow t_{i-1} + \Delta t$

  Παρήγαγε $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

  $B_i \longleftarrow B_{i-1} + Z\sqrt{\Delta t}$

Τέλος_Επανάληψης

Επέστρεψε $(B_0, \ldots, B_N)$

Υλοποιώντας τον Αλγ. Β.1 στη γλώσσα R κατασκευάζουμε τους ακόλουθους δύο κώδικες. Μια έξοδος του Αλγ. Β.2 φαίνεται στην Εικόνα 4.3, σελ. 86 στο [91]. Ο Αλγ. Β.5 αποτελεί μικρή τροποποίηση του προηγουμένου, ώστε να συμπεριλάβει την έννοια του χρόνου διακοπής (stopping time) του Κεφαλαίο 1 του [91]. Η Εικόνα 1.1 στο [91] αποτελεί την έξοδο του Αλγ. Β.5.

Στον Αλγ. Β.4 παρατίθεται η πιο απλή μορφή του Σχήματος Euler-Maruyama, που χρησιμοποιείται για την αριθμητική προσέγγιση (προσομοίωση) λύσεων Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων. Ο Αλγ. Β.3 αποτελεί απλή παράθεση του υπολογισμού του ολοκληρώματος (συνεχές «άθροισμα") μιας συνάρτησης, της οποίας γνωρίζουμε μόνο κάποιες (διακριτές) της τιμές.

Τέλος, ο Αλγ. Β.6 είναι μια διακριτή προσέγγιση της τιμής ενός T-ομολόγου υποθέτοντας ότι τα επιτόκια ακολουθούν ένα μοντέλο της μορφής του Πίνακα 2.1, σελ. 46. Ο Αλγ. Β.6 χρησιμοποιεί ουσιαστικά μια Monte Carlo προσέγγιση της μέσης τιμής (2.48), σελ. 35. Τα όποια ζητήματα σύγκλισης αυτού, ξεφεύγουν από τους σκοπούς της παρούσης εργασίας, αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στον [32]. Μας ενδιαφέρει, όμως,

Κ. Ι. Στούρας, *Εφαρμογή των Feynman Path Integrals στα Στοχαστικά Μοντέλα Επιτοκίων*.
Διπλωματική Εργασία

το κατά πόσο η λύση της ΣΔΕ που επιλύεται ταυτίζεται με τη λύση του (ντετερμινιστικού) Προβήματος Αρχικών Τιμών (2.49), (2.50) (σελ. 35). Για περισσότερα βλ. Κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα τα σχόλια της ενότητας 3.6 στο [91].

Αλγόριθμος B.2 Κώδικας σε R για την προσομοίωση της κίνησης Brown.

```
> k <- 5000
> Dt <- 0.0002
> W <- c(0,rep(NA,k-1))
> for(i in 2:k)
+ {
+ z <- rnorm(1,0,1)
+ W[i] <- W[i-1]+z*sqrt(Dt)
+ }
> plot(W,type='l')
> abline(h=0)
```

Αλγόριθμος Β.3 Διακριτή προσέγγιση ολοκληρώματος Riemann.

Είσοδος: T, M, $(r_0, \ldots, r_M)$

1: $\Delta t \longleftarrow \frac{T}{M}$

2: **Υπολόγισε**

$$\hat{I}\,(t) \longleftarrow \sum_{j=1}^{M} r_j \cdot \Delta t$$

3: **Επέστρεψε** $\hat{I}\,(t)$

Αλγόριθμος Β.4 Αριθμητική επίλυση Στοχαστικής Διαφορικής Εξίσωσης (σχήμα Euler-Maruyama).

Είσοδος: T, M, B_0, r_0, ΣΔΕ

1: $\Delta t \longleftarrow \frac{T}{M}$

2: **Για** $i = 1, 2, \ldots, M$ **επανάλαβε**

3: $t_{i+1} \longleftarrow t_i + \Delta t$

4: **Παρήγαγε** $Z^{(i)} \sim \mathcal{N}\,(0, 1)$

5: **Υπολόγισε**

$$\Delta B^{(i)} \longleftarrow Z^{(i)} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

6: **Υπολόγισε**

$$r_{i+1} \longleftarrow r_i + m\,(r_i, t_i)\,\mathrm{d}t + \sigma\,(r_i, t_i)\,\Delta B^{(i)}$$

7: **Τέλος_Επανάληψης**

8: **Επέστρεψε** $(r_0, \ldots, r_M)$

Αλγόριθμος Β.5 Κώδικας σε R για την προσομοίωση τριών κινήσεων Brown με χρόνους διακοπής.

```
> k <- 4000
> Dt <- 0.0002
> M <- 0.5
> t <- seq(0,k, Dt)
>
> W1 <- c(0,rep(NA,k-1))
> W2 <- c(0,rep(NA,k-1))
> W3 <- c(0,rep(NA,k-1))
> BM <- cbind(W1, W2, W3)
>
> simaia <- c(0, 0, 0)
> flag <- c(NA, NA, NA)
>
> for(j in 1:3){
+ for(i in 2:k)
+ {
+ if ( simaia[j]==0 ){
+ z <- rnorm(1,0,1)
+ check <- BM[i-1, j] + z*sqrt(Dt)
+ if ( check>=M ){
+ simaia[j] <- 1
+ flag[j] <- i-1
+ BM[i, j] <- M
+ break
+ }
+ else{
+ BM[i, j] <- BM[i-1, j] + z*sqrt(Dt)
+ }
+ }
+ else{
+ simaia[j] <- 1
+ flag[j] <- i-1
+ break
+ }
+ }
+ }
```

Αλγόριθμος B.6 Προσομοίωση της τιμής ομολόγων μέσω της Feynman-Kač formula.

Είσοδος: N, risk premium, interest-rate model, maturity του ομολόγου

Έξοδος: Εκτίμηση της τιμής του ομολόγου, $\hat{V}$

Δώσε ένα (σταθερό) risk premium, $q^Q(t) := q$.

Για $k = 1, 2, \ldots, N$ **επανάλαβε**

  Παρήγαγε αρχική τιμή $r_0^{(k)} \sim \mathcal{U}(0, 1)$

  Χρησιμοποίησε τον Αλγ. B.4 και λύσε μια ΣΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r_t^{(k)} &= \left[\kappa\left(r_t^{(k)}\right) + \sigma\left(r_t^{(k)}\right) q\right] \mathrm{d}t + \sigma\left(r_t^{(k)}\right) \mathrm{d}B_t^Q \\ &= m\left(r_t^{(k)}\right) \mathrm{d}t + \sigma\left(r_t^{(k)}\right) \mathrm{d}B_t^Q \end{aligned}$$

  Χρησιμοποίησε τον Αλγ. B.3 και υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$\hat{I}^{(k)}(t) \longleftarrow \int_t^T \hat{r}_s^{(k)} \mathrm{d}s$$

  Υπολόγισε

$$\hat{Y}^{(k)}(t) \longleftarrow e^{-\hat{I}^{(k)}(t)}$$

Τέλος_Επανάληψης

$\hat{Y}(t) \longleftarrow \left(\hat{Y}^{(1)}(t), \ldots, \hat{Y}^{(N)}(t)\right)$

$\hat{E}_Q\left[\hat{Y}(t)\right] \longleftarrow \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \hat{Y}^{(k)}(t)$

$\hat{V} \longleftarrow \hat{E}_Q\left[\hat{Y}(t)\right]$

Επέστρεψε $\hat{V}$

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή

Συμβολισμοί

διάφορες μεταβλητές:

B_t	κίνηση Brown
$\mathcal{F}_t$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$	κλάσεις (οικογένειες) συνόλων
$(\mathscr{F}f)(s)$	μετασχηματισμός Fourier της f στο s
$(\mathscr{L}f)(s)$	μετασχηματισμός Laplace της f στο s
$u(x, t)$	λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης για (x, t)
X_t, X, $X(t)$	τυχαία μεταβλητή
$\boldsymbol{x}$	διάνυσμα
x	αριθμός

γενικά μαθηματικά σύμβολα:

$\Longleftrightarrow$	ισοδυναμία
$\equiv$	ταυτίζεται με
$\Longrightarrow$	συνεπαγωγή
$[a, b]$	το κλειστό διάστημα $\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$
$[a, b)$	το ημιανοικτό διάστημα $a \le x < b$ (ανάλογα $(a, b]$, (a, b))
$\triangle$	$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, η Λαπλασιανή (Laplasian)
$s \wedge u$	$\min\{s, u\}$
$\mathbb{C}$	το σύνολο των μιγαδικών αριθμών
$\subseteq$	υποσύνολο του, $\subset$ γνήσιο υποσύνολο
$\exp()$	εκθετική συνάρτηση (exponential)
$E[\,]$	μέση τιμή
$\in$	ανήκει σε
$\in \mathcal{C}^k[a, b]$	k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη
f^+	$\max\{f, 0\}$
$\hbar$	$1.054571\ J \cdot sec$, η σταθερά του Planck διαιρεμένη με 2π
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$	το σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$
$\ln$	φυσικός λογάρθμος
$\mathbb{N}$	το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	ακολουθεί Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2
$P[\,]$	πιθανότητα
$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\sim \mathcal{U}(0, 1)$	ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$
$V[\,]$	διασπορά
Ω	δειγματικός χώρος

υποδείξεις στην οργάνωση:

§	ενότητα (ή υποενότητα)
2.71	αριθμός της υποενότητας 2.71 (Το δεύτερο ψηφίο σε όλες τις αριθμήσεις των υποενοτήτων αναφέρεται στην ενότητα και το ψηφίο μετά την "-" στην υποενότητα)

Βιβλιογραφία

Οι βιβλιογραφικές αναφορές είναι ταξινομημένες με αλφαβητική σειρά, κατά την *αγγλική* αλφάβητο (και όχι σύμφωνα με την εμφάνισή τους στο κείμενο). Αναφορές με περισσότερους από ένα συγγραφέα έχουν ταξινομηθεί σύμφωνα με το επίθετο του πρώτου.

[1] S. Albeverio, R. Høegh-Krohn και S. Mazzucchi. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals. An Introduction.* Springer Verlag, Berlin/ Heidelberg, 2η έκδοση, 2008.

[2] P. Artzner και F. Delbaen. Term structure of interest rates: The martingale approach. *Adv. Appl. Math.*, **10**:95–129, 1989.

[3] B. Baaquie. *Quantum Finance - Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates.* Cambridge University Press, 2004.

[4] T. Björk. *Arbitrage Pricing Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, 1998.

[5] F. Black και P. Karasinski. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal*, **47**:52–59, 1991.

[6] F. Black και M. Scholes. Pricing of Options and Corporate Liabilities. *J. Political Econ.*, **81**:637–654, 1973.

[7] A. Brace. Swaprate Volatilies in BGM. *FMMA NOTES*, 1998.

[8] A. Brace, D. Gatarek και M. Musiela. The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Math. Finance*, **7**:127–156, 1997. No 2.

[9] D. Brigo και F. Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice.* Springer-Verlag, 2006.

[10] F. E. Burk. *A Garden of Integrals.* Dolciani Mathematical Expositions, 2007.

[11] R. Cameron. A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals. *J. Math. and Phys.*, **39**:126–141, 1960.

[12] *The Chicago Manual of Style*, 15η έκδοση, University of Chicago Press, Chicago, 2003.

[13] R. Cont. Modelling term structure dynamics: an infinite dimensional approach. *Lyapunov Institute Workshop on Mathematical Finance*, 1998. Rocquencourt.

[14] J. C. Cox, Ingersoll J. E. και S. A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, **53**:385–407, 1985.

[15] M. J. Crawley. *The R Book.* John Wiley and Sons, 2007.

[16] P. J. Daniell. A general form of integral. *Annals of Mathematics*, **19**:279–94, 1918.

[17] P. J. Daniell. Integrals in an infinite number of dimensions. *Annals of Mathematics*, **20**:281–288, 1919.

[18] P. J. Daniell. Further properties of the general integral. *Annals of Mathematics*, **21**:203–220, 1920.

[19] L. U. Dothan. On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, **6**:59–69, 1978.

[20] N. Dunford και J. Schwartz. *Linear Operators.* Interscience Publishers, 1963.

[21] J. Dupačová και J. Štěpán. *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[22] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth, 1984.

[23] P. Erdös και M. Kač. On the number of positive sums of independent random variables. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**:1011–1020, 1947.

[24] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, τόμος 1. John Wiley & Sons, 1950.

[25] R. Feynman. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics.* PhD dissertation, Princeton University, Department of Physics, Ιούνιος-Αύγουστος 1942. Πρόσφατα εκδόθηκε ως *Feynman's Thesis - A New Approach To Quantum Theory*, edited by Laurie M. Brown (Northwestern University, USA, 2005).

[26] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics. *Reviews of Modern Physics*, **20**:367–387, 1948. (Βασισμένο στην Διδακτορική Διατριβή του Feynman, Princeton, 1942 [25]).

[27] Δ. Φουσκάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Στατιστική.* 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2010.

[28] A. Friedman. *Partial Differential Equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[29] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations*, τόμος 1. Academic Press, 1975.

[30] I. M. Gelfrand και A. M. Yaglom. Integration in functional spaces. *J. Math. Phys.*, **1**:48–69, 1960.

[31] J. Gerald και M. Lapidus. *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus.* Oxford University Press, 2000.

[32] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer-Verlag, 2004.

[33] K. Hamza, S. D. Jacka και F. C. Klebaner. The EMM conditions in a general model for interest rates. *Applied Probability*, 2005.

[34] J. M. Harrison και S. R. Pliska. A stochastic model of continuous trading: Complete markets. *Stoch. Proc. Appl.*, **15**:313–316, 1983.

[35] D. Heath, R. Jarrow και A. Morton. Bond pricing and the Term Structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, **60**:77–105, 1992.

[36] S. Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, **13**:585–625, 1993.

[37] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff και L. Streit. *White Noise: An Infinite Dimensional Calculus.* Kluwer Academic Publishers, 1993.

[38] J. Hull και A. White. Pricing Interest Rate Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, **3**:573–592, 1990.

[39] D. H. Hyers, G. Isac και Th. M. Rassias. *Topics in Nonlinear Analysis and Applications.* World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, 1997.

[40] D. H. Hyers, G. Isac και Th. M. Rassias. *Stability of Functional Equations in Several Variables.* Birkhǎuser Boston, Basel, Berlin, 1998.

[41] K. Itô. Stochastic integral. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20**:519–524, 1944.

[42] K. Itô. *On Stochastic Differential Equations*, τόμος 4. Memoir, Amer. Math. Soc., 1951.

[43] K. Itô. Extension of stochastic integrals. *Proc. International Symp. Stochastic Diff. Equations*, **20**:95–109, 1978. Kinokuniya.

[44] K. Itô και H. P. McKean. *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Springer Verlag, 1965.

[45] M. Kac. Integration in Function Spaces and Some of its Applications. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.

[46] M. Kac. On Distributions of certain Wiener functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:1–13, 1949.

[47] M. Kac. On some connections between probability theory and differential integral equations. Στο *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, σελίδες 89–215, 1951.

[48] M. Kac. An Application of Probability Theory to the study of Laplace's equation. *Ann. de Sociètè. Math. Polonaise.*, **25**:122–130, 1953.

[49] M. Kac. On some probabilistic aspects of classical Analysis. *Amer. Math. Monthly.*, **77**:586–597, 1970.

[50] J. P. Kahane. Brownian motion and Classical Analysis. *Bull. London Math. Soc.*, **7**:145–155, 1976.

[51] G. Kallianpur και V. G. Papanicolaou. Exact computation of Feynman-type integrals involving Gaussian random fields. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment Journal*, **14**(1):33–49, Μάρτιος 2000. Springer Berlin/ Heidelberg.

[52] Σ. Καρανάσιος. *Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές.* Ε. Μ. Π., 2009.

[53] I. Karatzas και S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, 1991.

[54] G. Keller, G. Kersting και U. Rösler. On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Z. Wahrscheinlichkeit.*, **68**:163–189, 1984.

[55] D. Khandekar, S. Lawande και K. Bhagwat. *Path-Integral Methods and their Applications.* World Scientific, 1993.

[56] F. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus With Applications.* Imperial College Press, 2η έκδοση, 2006.

[57] H. Kleinert. *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics Polymer Physics and Financial Markets.* World Scientific, 5η έκδοση, 2009.

[58] P. E. Kloeden και E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[59] P. E. Kloeden, E. Platen και H. Schurz. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[60] Γ. Ε. Κοκολάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Ανάλυση Χρονοσειρών.* 8ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.

[61] Γ. Ε. Κοκολάκης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Ανελίξεις.* 7ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.

[62] H. H. Kuo. *White Noise Distribution Theory.* CRC Press, 1996.

[63] H. H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration.* Springer-Verlag, 2006.

[64] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogénes. *Compositia Mathematica*, **7**:283–339, 1939.

[65] S. Mazzucchi. *Mathematical Feynman Path Integrals and their Applications.* World Scientific, 2009.

[66] H. P. McKean. Δ plus a bad potential. *J. Math. Phys.*, **18**:1277–1279, 1977.

[67] F. Mercurio και J.M. Moraleda. An Analytically Tractable Interest Rate Model with Humped Volatility. *European Journal of Operational Research*, **120**:205–214, 2000.

[68] F. Mittelbach, D. Carlisle Goosens, M. (με J. Braams και C. Rowley). *The LATEX Companion.* Addison-Wesley, Reading, MA, 2η έκδοση, 2004.

[69] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics.* Princeton University Press, Princeton, 1955.

[70] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, 2η έκδοση, 1995.

[71] V. G. Papanicolaou. Short Time Asymptotics for the Trace of One- and Multi-Dimensional Schrödinger Semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **107** (4):927–935, 1989.

[72] V. G. Papanicolaou. On the Convergence of the Feynman Path Integral for a Certain Class of Potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **31** (2):342–347, 1990.

[73] V. G. Papanicolaou. The Probabilistic Solution of the Third Boundary Value Problem for Second Order Elliptic Equations. *Probability Theory and Related Fields*, **87**:27–77, 1990.

[74] Β. Γ. Παπανικολάου. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές.* 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2010.

[75] Θ. Μ. Ρασσιάς. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Μαθηματική Ανάλυση I.* 1ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.

[76] Θ. Μ. Ρασσιάς. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Μαθηματική Ανάλυση II.* 2ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.

[77] Th. Rassias. On the stability of the linear mapping in Banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **72**:297–300, 1978.

[78] Th. Rassias. On the stability of functional equations and a problem of Ulam. *Acta Appl. Math.*, **62**:23–130, 2000.

[79] Th. Rassias. On the stability of minimum points. *Mathematica*, **45** (68) (1):93–104, 2003.

[80] Th. M. Rassias. *Functional Equations, Inequalities and Applications.* Kluver Academic Publishers, Dodrecht, Boston, London, 2003.

[81] R. Rebonato. *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives.* Princeton University Press, 2002.

[82] D. Revuz και M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer Verlag, New York, 2η έκδοση, 1999.

[83] R. Seydel. *Tools for Computational Finance.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2η έκδοση, 2004.

[84] S. Shreve, P. Chalasani και S. Jha. Stochastic Calculus and Finance. Lecture Notes, Ιούλιος 1997.

[85] S. Smale. *The Mathematics of Time: Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[86] Ι. Σπηλιώτης. *Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά.* Συμμετρία, 2004.

[87] Ι. Σπηλιώτης. *Σημειώσεις στο Μάθημα: Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές.* 9ο εξ., ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2009.

[88] J. Spiliotis. Certain results on a parabolic type Monge-Ampère equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **163**(2):484–511, 1992.

[89] J. Spiliotis και J. Tsinias. Notions of exponential robust stochastic stability, ISS and their Lyapunov characterizations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **13**:173–187, 2003.

[90] J. M. Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[91] Κ. Ι. Στούρας. *Πιθανοθεωρητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων και η Αναπαράστασή τους μέσω Path Integrals.* Διπλωματική Εργασία, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, 2010.

[92] L. Tan και S. Xiang. On the Aleksandrov-Rassias problem and the Hyers-Ulam-Rassias stability problem. *Banach J. Math. Anal.*, **1**:11–22, 2007.

[93] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the Term Structure. *J. Fin. Econ.*, **5**:177–188, 1977.

[94] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[95] N. Wiener. *Math. Physics*, **2**, 1923; *Proc. London Math. Soc.* **22**, 454, 1924; *Acta Math.* **55**, 117, 1930.

[96] N. Wiener. *Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems.* MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.