Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών

Σκέδαση Superradiance στη Horndeski Θεωρία

Άντρη Μαχάττου

Επιβλέπων: Παπαντωνόπουλος Ελευθέριος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Διπλωματική Εργασία
Αθήνα 2017

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία υλοποιήθηκε στη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Ε.Μ.Π στον τομέα της φυσικής, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Ελευθέριου Παπαντωνόπουλου.
Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ε. Παπαντωνόπουλο για την επίβλεψή της εργασίας, καθώς και για τη συνεχή και πολύτιμη βοήθεια του. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Κωνσταντίνο Ντρέκη και Στέλλας Κιορπελίδη για την αμέριστη βοήθεια τους στην εργασία μου, και το Γιώργο Φίλιο για την εκμάθηση του LaTeX .
Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γόνείς μου, για τη στήριξη τους στις σπουδές μου και τη σταδιοδρομία μου, και το φίλο μου, Γιώργο Χαλκιαδάκη, που μου πρόσφερε όποια βοήθεια μπορούσε όλο αυτό τον καιρό.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικά Εργαλεία

1.1 Καθορισμός Γεωμετρίας

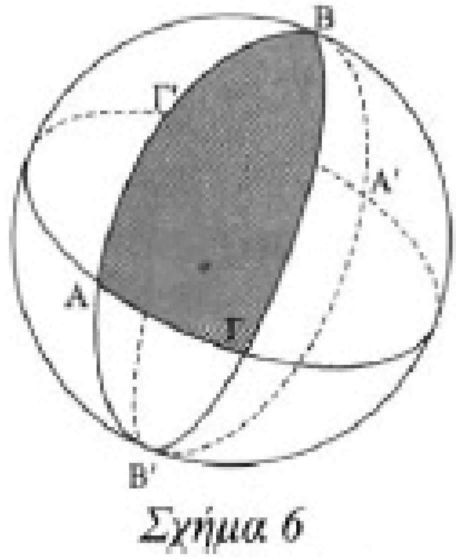
Στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους και ο Γερμανός καθηγητής της Φέρντιναντ Καρλ Σβάικαρτ είχαν τις πρωτογενής ιδέες της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά κανένας από τους δύο δεν δημοσίευσε κανένα αποτέλεσμα. Στη συνέχεια, γύρω στο 1830, ο Ούγγρος μαθηματικός Γιάνος Μπολιάι και ο Ρώσσος μαθηματικός Νικολάι Ιβάνοβιτς Λομπατσέφσκι δημοσιεύουν χωριστά πραγματείες για την υπερβολική γεωμετρία. Ως εκ τούτου,η υπερβολική γεωμετρία θα ονομαστεί $Bolyai - Lobachevskian$ γεωμετρία, ενώ οι δύο μαθηματικοί, ανεξάρτητα μεταξύ τους, γίνονται οι βασικοί συντάκτες της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Ο Μπολιάι τελειώνει το έργο του, αναφέροντας ότι δεν είναι δυνατόν να αποφασίσει, σύμφωνα με τη μαθηματική λογική και μόνο, αν η γεωμετρία του φυσικού σύμπαντος είναι Ευκλείδεια ή μη Ευκλείδεια, δίνοντας έτσι μόνος του την απάντηση ότι αυτό είναι αρμοδιότητα των φυσικών επιστημών. Ο Μπέρναρντ Ρίμαν, σε μια διάσημη διάλεξη του το 1854, ίδρυσε το πεδίο Γεωμετρία $Riemann$, κατασκεύασε μια άπειρη οικογένεια από γεωμετρίες που δεν είναι Ευκλείδειες με την απλούστερη από αυτές την ελλειπτική γεωμετρία. Η ιδέα των διαφορετικών γεωμετριών μπορεί να περιγραφεί εύκολα στις δύο διαστάσεις. Για παράδειγμα είναι γνωστό ότι στον επίπεδο χώρο για τις εσωτερικές γωνιές του τριγώνου ισχύει:

$$\sum(tringle\ angles) = \pi \tag{1.1}$$

Στην επιφάνεια μιας σφαίρας όμως τέτοιου είδους συμπεράσματα της επίπεδης γεωμετρίας αντικαθίστανται από διαφορετικά θεωρήματα. Οι ευθείες γραμμές μπορούν να οριστούν ως η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων, δηλαδή ως κυκλικά τμήματα των εξωτερικών κύκλων. Για ένα σφαιρικό τρίγωνο εμβαδού A ισχύει:

$$\sum(tringle\ angles) = \pi + \frac{A}{\alpha^2} \tag{1.2}$$

όπου α είναι η ακτίνα της σφαίρας. Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι το άθροιμα των εσωτερικών γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου είναι πάντοτε μεγαύτερο του π. Για τρίγωνα με μικρό εμβαδό ($\frac{A}{\alpha^2} \ll 1$) το αποτέλεσμα προσεγγίζεται από αυτό του επίπεδου χώρου. Για μια γενική περιγραφή της γεωμετρίας χρησιμοποιούμε διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό, ώστε όλη η γεωμετρία να ανάγεται στο καθορισμό αποστάσεων μεταξύ ζευγών γειτονικών σημείων.



Σχήμα 1.1: Σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Το τρίγωνο αποτελείται από τμήματα δύο μεσημβρινών, από το Βόρειο Πόλο εώς τον Ισημερινό και το τμήμα του Ισημερινού ανάμεσά τους. Και τα τρία αντιστοιχού σε τμήματα μεγίστων κύκλων και συνεπώς σε ευθείες γραμμές στη γεωμετρία της σφαίρας.

1.2 Μετρική

Μια γεω*μ*ετρική ποσότητα που χαρακτηρίζει ένα χώρο είναι η απόσταση δύο ση*μ*είων και οι χώροι στους οποίους έχει καθορισθεί ένας τρόπος *μ*έτρησης αποστάσεων λέγονται *μ*ετρικοί χώροι.
Στον τρισδιάστατο Ευκλείδιο χώρο η απειροστή απόσταση δύο σημείων, σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίδεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.3}$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί ως:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

όπου $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής και ονομάζεται μετρική , που στον Ευκλείδιο χώρο είναι η:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Μια άλλη περίπτωση μετρικού χώρου είναι ο τετραδιάστατος χώρος $Minkowski$ (επίπεδος χωρόχρονος).

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.6}$$

Η γεωμετρία που τον καθορίζει είναι μη Ευκλείδια αλλά είναι επίπεδη. Η μετρική $Minkowski$

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφη μετρική $g^{\mu\nu}$ έτσι ώστε να παραμένει αναλοίωτο το στοιχειώσης μήκος:

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.8}$$

όπου δ είναι το δέλτα του $Kronecker$.

1.3 Απεικονίσεις

Έστω δύο σύνολα Χ, Υ. *Απεικόνιση* είναι ο κανόνς με τον οποίο αναθέτουμε το $\psi \in Y \forall x \in X$ και γράφουμε:

$$f : X \mapsto Y \tag{1.9}$$

Εάν η φ ορίζεται από ένα συγκεκριμένο τύπο τότε:

$$f : x \mapsto f(x) \tag{1.10}$$

Μπορούν να υπάρχουν δύο ή περισσότερα χ που να αντιστοιχούν στο ίδιο $\psi \in Y$. Ένα υποσύνολο του Χ του οποίου τα στοιχεία απεικονίζονται στο $\psi \in Y$ κάτω από την f καλείται αντίστροφη εικόνα του ψ και συμβολίζεται με $f^{-1}(\psi) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. Το σύνολο Χ καλείται πεδίο ορισμού της απεικόνισης ενώ το Υ καλείται σύνολο τιμών της απεικόνισης. Η εικόνα της απεικόνισης είναι $f(X) = \{\psi \in Y \mid \psi = f(x)$ για κάποια $x \in X\} \subset Y$. Εάν μια απεικόνιση ικανοποιεί μία συγκεκριμένη συνθήκη τότε:

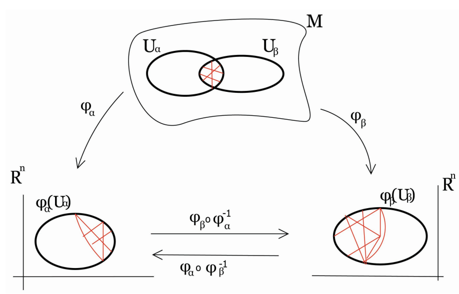
- $f : X \mapsto Y$ καλείται $injective$ αν $x \neq x\prime \Rightarrow f(x) \neq f(x\prime)$
- $f : X \mapsto Y$ καλείται $surjective$ αν $\forall \psi \in Y \exists x : f(x) = \psi$
- $f : X \mapsto Y$ καλείται $bijective$ αν ισχύουν τα δύο προηγούμενα.

Αν υποθέσουμε ότι μια αλγεβρική δομή (πολλαπλασιασμός ή πρόσθεση) είναι δοσμένη σε σύνολα Χ,Υ τότε αν $f : X \mapsto Y$ διατηρεί τις αλγεβρικές δομές τότε η f λέγεται ομομορφισμός. Αν ο ομομορφισμός f είναι $bijective$ η f λέγεται ισομορφισμός.

1.4 Πολλαπλότητα

Το γεωμετρικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι η 4-διάστατη πολλαπλότητα. Στα μαθηματικά μια πολλαπλότητα είναι ένας Τοπολογικός χώρος που τοπικά μοιάζει με Ευκλείδειο χώρο. Πιο συγκεκριμένα, κάθε σημείο ενός $n-$διάστατων πολλαπλοτήτων έχει μια Γειτονία που είναι ένας ομοιομορφισμός στον Ευκλείδειο χώρο διάστασης n.
Πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ είναι μια $n-$διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Ο $\mathcal{M}$ είναι ένας τοπολογικός χώρος.
- Παρέχεται στη Μ μια οικογένεια από ζευγάρια $\{(U_i, \phi_i)\}$.
- Το σύνολο $\{U_i\}$ είναι μια οικογένεια από ανοικτά σύνολα που καλύπτουν την $\mathcal{M}$: $\cup_i U_i = \mathcal{M}$. Τα ϕ_i είναι ομοιομορφισμοί από τα U_i στο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
- Δοθέντων των U_α ,U_β:$U_\alpha \cap U_\beta \neq \oslash$ η *bitjective* απεικόνιση $\psi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \phi_\beta^{-\alpha}$:$\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ είναι απειροστά διαφορίσιμη.



Σχήμα 1.2: Διαφορίσιμη Πολλαπλότητα

Τα (U_i, ϕ_i) καλούνται χάρτης ή σύνολο συντεταγμένων ενώ το σύνολο $\{(U_i, \phi_i)\}$ καλείται Άτλαντας. Το υποσύνολο U_i καλείται γειτονιά συντεταγμένων ενώ η ϕ_i καλείται συνάρτηση συντετεγμένων. Η ϕ_i αναπαριστάται από n συναρτήσεις $\{x^1(p), ..., x^n(p)\}$. Το σημείο p του $\mathcal{M}$ υφίσταται ανεξαρτήτως συντεταγμένων.

1.4.1 Λογισμός πάνω σε πολλαπλότητες

Ορισμός Έστω $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$, με $\mathcal{M}$ $m-$πολλαπλότητα και $\mathcal{N}$ n-πολλαπλότητα. Τότε απεικονίζεται ένα σημείο $p \in \mathcal{M}$ σε ένα σημείο $f(p) \in \mathcal{N}$ με $f : p \mapsto f(p)$. Διαλέγοντας ένα χάρτη (U, ϕ) στον $\mathcal{M}$ και (V, ψ) στον $\mathcal{N}$ και $p \in U$, $f(p) \in V$. Τότε ισχύει:

$$\psi f \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

Τότε λέμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι διαφορομορφικός του $\mathcal{N}$

1.4.2 Διανύσματα σε πολλαπλότητα

Ορισμός: Έστω η παράγωγος κατεύθυνσης μιας συνάρτησης $f(\gamma(t))$ κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ στο $t=0$ (τυχαίο σημείο p) σε τοπικό σύστημα σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt}\mid_{t=0}=\frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x^\mu}\mid_{t=0}\frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt}\mid_{t=0} \tag{1.12}$$

Δηλαδή αντιστοιχούμε την $\frac{d}{dt}$ σε ένα διαφορικό τελεστή X:

$$X=X^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\mu}), \mu\epsilon\ X^\mu=\frac{dx^\mu(\gamma(t))}{dt}\mid_{t=0} \tag{1.13}$$

που δρα πάνω στην f.

Έτσι όλα τα εφαπτομενικά διανύσματα που αντιστοιχούν σε όλες τς διαφορετικές καμπύλες που περνάνε από το σημείο p αποτελούν τον εφαπτομενικό χώρο και συμβολίζεται ως $T_p\mathcal{M}$. Ως διάνυσμα βάσης θεωρούμε το σύνολο των μερικών παραγώγων $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}=\{\partial_\mu\}$. Ως γεωμετρικό αντκείμενο που είναι ένα διάνυσμα θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς $Poincare$ δηλαδή το σύνολο περιστροφών, προωθήσεων (στροφές χώρου-χρόνου) και μετατοπίσεων. Έτσι μπορούμε να μετασχηματίσουμε από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο με απλή διαδικασία:

$$X=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\tilde{X}^\nu\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\mu} \tag{1.14}$$

και ο μετασχηματισμός είναι:

$$X^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial\tilde{x}^\nu}\tilde{X}^\nu \tag{1.15}$$

1.4.3 Δυαδικά Διανύσματα σε πολλαπλότητα

Θεωρώντας τον εφαπτομενικό χώρο $T_p\mathcal{M}$ μπορούμε να ορίσουμε τον δυαδικό εφαπτόμενο χώρο $T_p^*\mathcal{M}$ που περιέχει τα δυϊαδικά διανύσματα $\omega: T_p\mathcal{M}\mapsto\mathbb{R}$ τα οποία λέγονται και 1-μορφές.
Ένα από παράδειγμα είναι το διαφορικό df μιας συνάρτησης $f\in F(\mathcal{M})$, όπου $F(\mathcal{M})$ ο χώρος των συναρτήσεων πάνω στα σημεία της πολλαπλότητας που δρα πάνω σε ένα διάνυσμα V:

$$\langle df,V\rangle=V[f]=V^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\in\mathbb{R} \tag{1.16}$$

Αφού $df=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}dx^\mu$, ορίζουμε τη βάση των 1-μορφων ως $\{dx^\mu\}$ και τότε:

$$\langle dx^\mu,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\rangle=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}=\delta^\mu_\nu \tag{1.17}$$

Έτσι μια αυθαίρετη 1-μορφή γράφεται:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \ or \ \tilde{\omega}_\nu d\tilde{x}^\nu \tag{1.18}$$

με τον μετασχηματισμό:

$$\omega_\mu = \tilde{\omega}_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tag{1.19}$$

1.5 Τανυστές

Τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα) είναι δυο ειδικές περιπτώσεις μιας πιο γενικής έννοιας, που ονομάζεται τανυστής τάξεως n, του οποίου ο προσδιορισμός σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων απαιτεί 3^n αριθμούς, που ονομάζονται συνιστώσες του τανυστή. Τα βαθμωτά μεγέθη είναι τανυστές μηδενικής τάξεως με μια συνιστώσα(ορίζονται πλήρως όταν δοθεί το μέτρο), τα διανύσματα είναι τανυστές πρώτης τάξεως με 3 συνιστώσες(ορίζεται πλήρως όταν δοθεί το μέτρο, η κατεύθυνσή του) και οι τάσεις είναι τανυστές δεύτερης τάξης με εννέα συνιστώσες.
Αν θεωρησουμε μια καμπύλη που διέρχεται από κάποιο σημείο Α σε ένα χώρο (μια πολλαπλότητα) n διαστάσεων. Η καμπύλη αυτή θα καθορίζεται από n συναρτήσεις μιας βαθμωτής ποσότητας λ της μορφής:

$$x^\mu = z^\mu(\lambda) \tag{1.20}$$

Αν στο σημείο Α αντιστοιχεί η τιμή της παραμέτρου λ τότε σε ένα διπλανό σημείο A' η τιμή της παραμέτρου θα είναι $\lambda + d\lambda$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ως εφαπτόμενο διάνυσμα u^μ στο σημείο Α το:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{1.21}$$

Το εφατόμενο διάνυσμα που ορίζεται από αυτή τη σχέση λέγεται ανταλλοίωτο διάνυσμα.
Ένας μετασχηματισμός από το x^μ σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}^\mu$ ορίζεται από τις ν εξισώσεις:

$$\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^\nu) \qquad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.22}$$

και ο αντίστροφός του είναι:

$$x^\mu = g^\mu(\tilde{x}^\nu) \qquad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.23}$$

Ένα απειροστό διάνυσμα dx^ν που ορίζεται σε ένα σύστημα x^μ θα μετασχηματίζεται σε ένα άλλο σύστημα $\tilde{x}^\mu$ ως:

$$d\tilde{x}^\mu = \sum \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = \sum \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \qquad \gamma\iota\alpha \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.24}$$

Έστω το ανταλλοίωτο διάνυσμα υ^μ έχει οριστεί σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ, τότε οι συνιστώσες του σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων ($\tilde{x}^\mu$), θα δίνονται από μετασχηματισμούς της μορφής:

$$\tilde{\upsilon}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^n u} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \sum_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \upsilon^\nu \tag{1.25}$$

Έστω μια βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x)$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων x^μ τότε οι n μερικοί παραγώγοι $\dfrac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ μετασχηματίζονται στο νέο σύστημα συντεταγμένων ως:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \tag{1.26}$$

Μια $n-$άδα ποσοτήτων $b_\mu = \{b_0.b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ που μετασχηματίζεται όπως οι μερικοί παραγώγοι μιας βαθμωτής συνάρτησης ονομάζεται συναλλοίωτο διάνυσμα. Οι σχέσεις μετασχηματισμού είναι:

$$b_\mu = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{b}_\nu \tag{1.27}$$

1.5.1 Τανυστές σε Πολλαπλότητα

Όπως και στον επίπεδο χώρο ($\mathbb{R}^\nu$) μπορούμε να ορίσουμε ένα (k,l) σαν μια πολυγραμμική απεικόνιση από μια συλλογή k δυαδικών διανυσμάτων και l διανυσμάτων στο $\mathbb{R}$ με συνιστώσες:

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} = T(dx^{\mu_1}, \ldots, dx^{\mu_k}; \partial_{\nu_1}, \ldots, \partial_{\nu_l}) \tag{1.28}$$

που είναι ισοδύναμο με την έκφραση:

$$T = T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \ldots \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_l} \tag{1.29}$$

Οι τανυστές αυτοί μετασχηματίζουν τους πάνω δείκτες σαν τον μετασχηματισμό των διανυσμάτων και τους κάτω δείκτες σαν αυτόν των δυαδικών διανυσμάτων, επομένως γράφουμε:

$$T^{\mu_1{}' \ldots \mu_k{}'}_{\nu_1{}' \ldots \nu_l{}'} = \frac{\partial x^{\mu_1{}'}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k{}'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1{}'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l{}'}} T^{\mu_1 \ldots \mu_k}_{\nu_1 \ldots \nu_l} \tag{1.30}$$

Μερικές από τις ιδιότητες των τανυστών είναι οι παρακάτω:

- Συστολή, $T^{ab}_{bc} = T^a_c$ (θεωρούμε άθροιση ως προς το δείκτη b)
- $T^\sigma_{(\mu_1 \ldots \mu_n)\rho} = \dfrac{1}{n!}(T^\sigma_{\mu_1 \ldots \mu_n \rho}+$άθροισμα μεταθέσεων των δεικτών $\mu_1 \ldots \mu_n)$
- $T^\sigma_{[\mu_1 \ldots \mu_n]\rho} = \dfrac{1}{n!}(T^\sigma_{\mu_1 \ldots \mu_n \rho}-$ άθροισμα εναλλαγής προσήμου των μεταθέσεων των δεικτών $\mu_1 \ldots \mu_n)$

1.6 Συναλλοίωτη Παράγωγος

Η μερική παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου (τανυστής μηδενιής τάξης) $\phi = \psi(x^\alpha)$ οδηγεί σε διάνυσμα(τανυστή πρώτης τάξης)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^\lambda} \tag{1.31}$$

Θεωρούμε τώρα τη μερική παράγωγο ενός ανταλλοίωτου διανυσματικού πεδίου $(A^\lambda(x^\mu))$, και συμβολίζουμε τη μερική παράγωγο του ως:

$$\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\kappa} \equiv A^\lambda_{;}\kappa \tag{1.32}$$

τότε ο μετασχηματισμός του $A^\lambda_{;\kappa}$ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων $\tilde{x}^\kappa$ οδηγεί στη σχέση:

$$A^\mu_{;\alpha} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\tilde{A}^\nu\right) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\rho}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\tilde{A}^\nu\right) \tag{1.33}$$

$$= \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\rho}\frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha}\tilde{A}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \tilde{A}^\nu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tag{1.34}$$

Άρα η μερκή παράγωγος ενός τανυστή δεν είναι καλός τανυστής.Αν ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης ήταν μηδέν τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μερική παράγωγος ενός διανύσματος οδηγεί σε τανυστή δεύτερης τάξης. Επομένως χρειαζόμαστε μία παράγωγο η οποία θα μας δίνει καλούς τανυστές. Αυτή είναι η συναλλοίωτη παράγωγος και συμβολίζεται $\bigtriangledown_\mu$.
Η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται πάνω σε μία πολλαπλότητα ως ο τελεστής που πηγαίνει ένα τανυστή τύπου (k,l) σε ένα τύπου $(k,l+1)$ και απαιτώντας να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- $\nabla(T+S) = \nabla T + \nabla S$
- $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$
- $\nabla_\mu(T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^{\ \ \lambda}_{\mu\ \ \lambda\rho}$
- $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$

με τα T και S να είναι τανυστές ενώ το ϕ βαθμωτό(τανυστής μηδενικής τάξης).

Κανόνες Παραγώγισης

- Η συναλλοίωτη παράγωγος διανύσματος είναι:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\omega_\nu \tag{1.35}$$

- Η συναλλοίωτη παράγωγος δυαδικού διανύσματος είναι:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \tag{1.36}$$

- Η συναλλοίωτη παράγωγος τανυστή είναι:

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_k} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\sigma\lambda} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \ldots + \Gamma^{\mu_k}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1\ldots\lambda}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &\quad -\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_1} T^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\lambda\ldots\nu_l} - \ldots - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu_l} T^{\mu_1\ldots\mu_k}_{\nu_1\ldots\lambda}\end{aligned} \tag{1.37}$$

Από τη απαίτηση το $\nabla_\mu V^\nu$ να μετασχηματίζεται σαν τανυστής έχουμε:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \nabla_\mu V^\nu \tag{1.38}$$

Το αριστερό μέλος γράφεται:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} (\partial_\mu V^\nu) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'} \tag{1.39}$$

Και το δεξί μέλος:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.40}$$

Εξισώνοντας τις δύο τελευταίες έχουμε:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^{\lambda'} + (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda \tag{1.41}$$

Όμως ο δείκτης ν μπορεί να γίνεται λ αφού είναι όρος άθροίσματος, άρα οι συνιστώσες του διανύσματος γίνονται:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} (\partial_\mu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}) \tag{1.42}$$

Οι ποσότητες $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ ονομάζονται συνδέσεις. Η παραπάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι συνδέσεις δεν είναι τανυστές, αλλά ποσότητες που ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και μέσω αυτών γίνεται δυνατός ο ορισμός μιας αναλλοίωτης μορφής παραγώγισης.

1.7 Παράλληλη Μεταφορά

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο α_μ, θα συμβολίσουμε με $\alpha_\mu(P)$ το διάνυσμα στη θέση P και με $\alpha_\mu(P')$ αυτό που βρίσκεται στη θέση P'. Τα P και P' απέχουν κατά dx^μ. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα:

$$\delta^{(1)} \alpha_\mu(P') - \alpha_\mu(P) = \alpha_\mu(P) + \alpha_{\mu,\nu} dx^\nu - \alpha_\mu(P) = \alpha_{\mu,\nu} dx^\nu \tag{1.43}$$

η οποία όμως δεν είναι διάνυσμα (ή τανυστής).
Θέλουμε λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα στο σημείο P' που να μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με το διάνυσμα $\alpha_\mu(P)$. Γι αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη σύνδεση ώστε να δημιουργήσουμε μια μέθοδο εύρεσης του ισοδυνάμου διανύσματος

του $\alpha_\mu(P)$ σε ένα γειτονικό σημείο P'. Με αυτό τον τρόπο θα γίνει δυνατόν τανυστικές εξισώσεις που ορίζονται σε κάποιο σημείο P να ισχύουν και σε ένα κοντινό σημείο P'. Έστω λοιπόν ότι το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $A_\mu(P') = \alpha_\mu(P) + \delta\alpha_\mu$ τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_\mu(P') - A_\mu(P') \qquad &= \alpha_\mu + \delta^{(1)}\alpha_\mu - (\alpha_\mu + \delta\alpha_\mu) \\ &= \delta^{(1)}\alpha_\mu - \delta\alpha_\mu = \alpha_{\mu,\nu}dx^\nu - \delta\alpha_\mu \end{aligned} \tag{1.44}$$

Άρα η ποσότητα $\delta\alpha_\mu$ είναι ανάλογη του dx^ν και του αρχικού διανύσματος $\alpha_\mu(P)$.

$$\delta\alpha_\mu = C^\lambda_{\mu\nu}\alpha_\lambda dx^\nu \tag{1.45}$$

όπου η ποσότητα $C^\lambda_{\mu\nu}$ δεν είναι υποχρεωτικά τανυστής. Αντικαταστούμε τώρα την παραπάνω μορφή του $\delta\alpha_\mu$ στην (1.44) και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\alpha_{\mu,\nu}dx^\nu - \delta\alpha_\mu = (\alpha_{\mu,\nu} - C^\lambda_{\mu\nu}\alpha_\lambda)dx^\nu \tag{1.46}$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι διάνυσμα , άρα θα πρέπει και το δεξίο μέλος να είναι διάνυσμα (ή τανυστής). Για να συμβαίνει αυτό πρέπει τα $C^\lambda_{\mu\nu}$ να ισούνται με $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, δηλαδή να είναι συνδέσεις του χώρου. Έτσι οι ποσότητα εντός της παρένθεσης είναι η συναλοίωτη παράγωγος του διανύσματος α_μ και είναι τανυστής. Άρα αν ένα διάνυσμα που ορίζεται στο σημείο P το μεταφέρω παράλληλα σε ένα κοντινό σημείο P' η μεταβολή που θα υποστεί υπολογίζεται από την σχέση:

$$\delta\alpha_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\alpha_\lambda dx^\nu \tag{1.47}$$

Κατά ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι η μεταβολή που θα υποστεί ένα ανταλοίωτο διάνσμα είναι:

$$\delta\alpha_\mu = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\alpha_\lambda dx^\nu \tag{1.48}$$

1.7.1 Τα σύμβολα Christoffel

Οι συνδέσεις σε ένα τυχαίο χώρο (μια πολλαπλότητα) στον οποίο δεν έχει οριστεί ακόμα μετρικός τανυστής, χρησιμοποιήθηκαν για να ορίσουμε τη παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος. Η παράλληλη μεταφορά εξασφάλιζε ότι το μέτρο ενός τυχαίου διανύσματος παραμένει σταθερό κατά τη μεταφορά του από ένα σημείο P σε ένα σημείο P'. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \mid \alpha_\mu(P) \mid = &\qquad \mid \alpha_\mu(P') \mid \\ g_{\mu\nu}\alpha^\mu(P)\alpha^\nu(P) = &\quad g_{\mu\nu}\alpha^\mu(P')\alpha^\nu(P') \end{aligned} \tag{1.49}$$

Αλλά επειδή τα P και P' απέχουν μεταξύ τους dx^ρ προσεγγιστικά θα ισχύει:

$$g_{\mu\nu}(P') \approx g_{\mu\nu}(P) + g_{\mu\nu,\rho}(P)dx^\rho \tag{1.50}$$

$$\alpha^\mu(P') \approx \alpha^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}(P)\alpha^\sigma(P)dx^\rho \tag{1.51}$$

Αντικαθιστώντας αυτά στην (1.49) έχουμε:

$$\big(g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\big)\alpha^\mu\alpha^\nu dx^\rho = 0 \tag{1.52}$$

επείδή όμως οι μετατοπίσεις και το διάνυσμα είναι τυχαία, για να ισχύει αυτή η εξίσωση πρέπει:

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} = 0 \tag{1.53}$$

Η σχέση αυτή ταυίζεται με τη συναλλοίωτη παράγωγο του μετρικού τανυστή οπότε έχουμε:

$$g_{\mu\nu,\rho} = 0 \tag{1.54}$$

δηλαδή, η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή είναι μηδέν(*Λήμμα Ricci*).
Επιπλέον, από την εξίσωση (1.53) μπορούν να υπολογιστούν οι συνιστώσες των συνδέσεων $\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}$ αν δοθεί ο μετρικος τανυστής $g_{\mu\nu}$. Για τον πλήρη καθορισμό των συνιστωσών της σύνδεσης σε ένα $n-$διάστατο χώρο απαιτούνται n^3 εξισώσεις. Η εξίσωση (1.53) δίνει τη δυνατότητα για $nn(n+1)/2$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις επειδή είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες mu και ν, που σημαίνει ότι για να υπολογίσουμε με μοναδικό τρόπο τις συνιστώσες των συνδέσεων αυτές θα πρέπει να είναι συμμετρικές. Δηλαδή, οι συνδέσεις στους χώρους *Riemann* είναι συμμετρικές.
Αν στη σχέση (1.53) εναλλάξουμε τους δείκτες έχουμε:

$$g_{\nu\rho,\mu} - g_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - g_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} = 0 \tag{1.55}$$

και συνεχίζοντας την εναλλαγή έχουμε:

$$g_{\rho\mu,\nu} - g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - g_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} = 0 \tag{1.56}$$

Προσθέτοντας τώρα τις (1.53) και (1.55), και αφαιρώντας την (1.56) καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu}) \tag{1.57}$$

Η παραπάνω σχέση καθορίζει με μοναδικό τρόπο τις συνδέσεις του χώρου *Riemann* και ονομάζονται σύμβολα *Christoffel*.

1.8 Γεωδαισιακές Καμπύλες

Γεωδαισιακή είναι η καμπύλη ελάχιστου μήκους που συνδέει δύο σημεία του χωροχρόνου. Είναι η γενίκευση της ευθείας γραμμής σε Καμπύλους Χώρους. Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, τα σώματα (τόσο τα υλικά όσο και το φως) όταν κινούνται ελεύθερα, δηλαδή μόνον υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου στο οποίο βρίσκονται, δεν ακολουθούν οποιεσδήποτε καμπύλες τροχιές, αλλά τις γεωδαισιακές διαδρομές του τετραδιάστατου χωροχρόνου. Έστω ότι το μήκος μια καμπύλης $x^{\mu}(s)$ που ενώνει δύο σημεία Α κα Β είναι S και δίνεται από μια σχέση της μορφής:

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(x^{\alpha})\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right]^{1/2} ds \tag{1.58}$$

Μια γειτονική καμπύλη $\psi^\mu(s)$ που συνδέει τα ίδια σημεία θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\psi^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu \tag{1.59}$$

με $\xi^\mu = 0$ στα άκρα A και B. Το μήκος της νέας καμπύλης είναι:

$$\tilde{S} = \int_A^B \left[g_{\mu\nu}(\psi^\alpha)\frac{d\psi^\mu}{ds}\frac{d\psi^\nu}{ds}\right]^{1/2} ds \tag{1.60}$$

Για απλότητα αντικαθιστούμε:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \kappa\alpha\iota \quad v^\mu = \frac{d\psi^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} + \epsilon\frac{d\xi^\mu}{ds}$$

επίσης

$$f(x^\alpha, u^\alpha) = [g_{\mu\nu}(x^\alpha)u^\mu u^\nu]^{1/2} \tag{1.61}$$

$$\tilde{f}(\psi^\alpha, v^\alpha) = [g_{\mu\nu}(\psi^\alpha)v^\mu v^\nu]^{1/2} = f(x^\alpha, u^\alpha) + \epsilon(\xi^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \frac{\xi^\alpha}{ds}\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}) + O(\epsilon^2) \tag{1.62}$$

Μπορώ να ορίσω την διαφορά $\delta S = \tilde{S} - S$, η οποία πρέπει α μηδενίζετα αφού το μήκος S θέλω να είναι ακρότατο, δηλαδή η απόσταση των σημείων A και B να είναι ελάχιστη. Οπότε:

$$\begin{aligned} \delta S \quad &= \int_A^B \delta f ds = \int_A^B (\tilde{f} - f) ds \\ &= \epsilon\int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha})\right]\xi^\alpha ds + \epsilon\int_A^B \frac{d}{ds}(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\xi^\alpha) ds \end{aligned} \tag{1.63}$$

Ο δεύτερος όρος είναι προφανώς μηδέν αφού στα άκρα του διαστήματος $\xi^\alpha = 0$. Άρα το μήκος θα γίνει ακρότατο αν:

$$\delta S = \epsilon\int_A^B \left[\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha})\right] ds = 0 \tag{1.64}$$

Όμως το διάνυσμα ξ^α είναι τυχαίο γι' αυτό η συνθήκη του ακρότατου είναι:

$$\frac{d}{ds}(\frac{\partial f}{\partial u^\mu}) - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.65}$$

Η Λαγκραζιανή για ένα ελεύθερο σωματίδιο είναι:

$$L = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \equiv f^2 \tag{1.66}$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}L^{-1/2} \tag{1.67}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}L^{-1/2} \tag{1.68}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στη (1.65) καταλήγουμε στη συνθήκη ακρότατου μήκους $Euler - Lagrange$:

$$\frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.69}$$

Για να βρούμε τη σχέση που δίνει τις γεωδαιτικές εξισώσεις αντικαθιστούμε την Λαγκραζιανή στη πιο πάνω σχέση.

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = g_{\mu\nu}\frac{\partial u^\mu}{\partial u^\alpha}u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu\frac{\partial u^\nu}{\partial u^\alpha} = g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\alpha u^\nu + u^\mu\delta^\nu_\alpha) = 2g_{\mu\alpha}u^\mu \tag{1.70}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu \tag{1.71}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}(2g_{\mu\alpha}u^\mu) - g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu = 0\\
&2\frac{dg_{\mu\alpha}}{ds}u^\mu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} - g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu = 0\\
&2g_{\mu\alpha,\nu}u^\nu u^\mu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} - g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu = 0\\
&g_{\mu\alpha,\nu}u^\nu u^\mu + g_{\nu\alpha,\mu}u^\mu u^\nu + 2g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} - g_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu = 0\\
&g_{\mu\alpha}\frac{du^\mu}{ds} + \frac{1}{2}[g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\alpha\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}]u^\mu u^\nu = 0 \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα αυτή με $g^{\rho\alpha}$ καταλήγουμε στην εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{du^\rho}{ds} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0 \tag{1.73}$$

Συχνότερα η γενική μορφή των γεωδαιτικών σε ένα αυθαίρετα καμπυλωμένο χωρόχρονο συναντάται στη μορφή

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \tag{1.74}$$

Πρόκειται για τέσσερις εξισώσεις, μια για κάθε τιμή του ανεξάρτητου δείκτη ρ. Το σύνολο αυτών των εξισώσεων ονομάζεται γεωδαισιακή εξίσωση και αποτελεί τη βασική εξίσωση κίνησης δοκιμαστιών σωματιδίων στον καμπυλομένο χωρόχρονο.

1.9 Γεωμετρία Riemann

1.9.1 Τανυστής Riemann

Ο τανυστής *Riemann* αποτελέι θεμελειώδες μέγεθος της γεωμετρίας *Riemann* επειδή καθορίζει με μοναδικό τρόπο τη καμπυλότητα του χωρόχρονου. Η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης σε ένα καμπύλο χωρόχρονο μεταβάλει το διάνυσμα κατά μια ποσότητα που είναι ανάλογη ενός τανυστή 4−ης τάξης, τον τανυστή καμπυλότητας ή τανυστή *Riemann*. Ο τανυστής *Riemann* είναι συνάρτηση των σύμβολων $Christoffel$ και των παραγώγων τους:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\epsilon}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\gamma} \tag{1.75}$$

Ο μηδενισμός του τανυστή *Riemann* οδηγεί στον επίπεδο χωρόχρονο.

1.9.2 Ιδιότητες

Η μελέτη των συμμετριών του τανυστή *Riemann* διευκολίνεται αν θεωρήσουμε την ολικά συναλλοίωτη μορφή του:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}}\right) \tag{1.76}$$

Η καμπυλότητα *Riemann* διαθέτει ένα πλήθος συμμετριών που ισχύουν εν γένει αλλά αποδεικνύονται και απευθείας από την (1.76):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{1.77}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{1.78}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{1.79}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0 \tag{1.80}$$

Σύμφωνα με αυτές τις συμμετρίες οι $4^4 = 256$ συνιστώσες της καμπυλότητας *Riemann* δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Στη πραγματικότητα στο τετραδιάστατο χωρόχρονο λαμβάνουμε $\dfrac{N^2(N^2-1)}{12} = 20$ ανεξάρτητες συνιστώσες.

1.9.3 Τανυστής Ricci

Η συστολή του τανυστή *Riemann* οδηγεί σε ένα τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή *Ricci*.

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} = g^{\lambda\delta}R_{\lambda\alpha\delta\beta} \tag{1.81}$$

Η καμπυλότητα *Ricci* μπορεί να εκφραστεί απευθείας σε σχέση με τα σύμβολα $Christoffel$ μέσω της:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\lambda\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\lambda} \tag{1.82}$$

Περαιτέρω συστολή του τανυτή *Ricci* οδηγεί στη δημιουργία βαθμωτής καμπυλότητας *Ricci*:

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\lambda\delta} R_{\lambda\alpha\delta\beta} \tag{1.83}$$

Στις 4 διαστάσεις ο τανυστής *Ricci* έχει $\dfrac{4(4+1)}{2} = 10$ ανεξάρτητες συνιστώσες, ενώ ο τανυστής *Riemann* έχει 20. Συνεπώς ο μηδενισμός του τανυστή *Ricci* δεν συνεπάγεται τον μηδενισμό του τανυστή *Riemann*. Δηλαδή για $R_{\alpha\beta} = 0$ δεν σημαίνει ότι ο χώρος είναι επίπεδος, όμως σημαίνει ότι ο χώρος είναι κενός ύλης-ενέργειας.

1.9.4 Τανυστής Einstein

Ένας από τους σημαντικότερους τανυστές στη μελέτη της βαρύτητας είναι ο τανυστής *Einstein*. Μέσω της ταυτότητας *Bianchi* μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή καμυλότητας *Einstein*.

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda;\sigma} + R_{\mu\nu\lambda\sigma;\kappa} + R_{\mu\nu\sigma\kappa;\lambda} = 0 \qquad \text{(Ταυτότητα Bianchi)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}$ έχουμε:

$$g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda;\sigma} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\lambda\sigma;\kappa} + g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\sigma\kappa;\lambda} = 0 \tag{1.84}$$

και επειδή $\nabla_s g^{\alpha\beta} = 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} & (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda})_{;\sigma} + (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\lambda\sigma})_{;\kappa} + (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} R_{\mu\nu\sigma\kappa})_{;\lambda} = 0 \\ \Rightarrow \quad & R_{;\sigma} - (g^{\mu\kappa} R_{\mu\sigma})_{;\kappa} - (g^{\nu\lambda} R_{\nu\sigma})_{;\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Κάνοντας τώρα αλλαγή τους δείκτες $\nu \leftrightarrow \mu$ και $\lambda \leftrightarrow \kappa$ στο τελευταίο όρο έχουμε:

$$R_{;\sigma} - 2(g^{\mu\kappa} R_{\mu\sigma})_{;\kappa} = 0 \tag{1.86}$$

όμως $R_{;\sigma} = \delta^{\kappa}_{\sigma} = g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} R_{;\kappa} = (g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} R)_{;\kappa}$.Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} & (g^{\mu\kappa} g_{\mu\sigma} R - 2 g^{\mu\kappa} R_{\mu\sigma})_{;\kappa} = 0 \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} (R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R) = 0 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Ορίζουμε τώρα τον τανυστή *Einstein*, $G_{\mu\nu}$, ως:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{1.88}$$

Για τον οπόιο εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} G_{\mu\sigma} = 0 \\ & \Rightarrow g^{\mu\kappa} \nabla_{\kappa} G_{\mu\sigma} = 0 \\ & \Rightarrow \nabla^{\mu} G_{\mu\sigma} = 0 \end{aligned} \tag{1.89}$$

Ο τανυστής *Einstein* υπακούει πάντα σε αυτή τη διαφορική εξίσωση σε κάθε γεωμετρία.

1.10 Συμμετρίες και Διανύσματα Killing

Στη φύση είναι δύσκολο να περιγράψουμε ακριβώς ένα σύστημα καθώς περιέχει πολύπλοκους υπολογισμούς. Με την εύρεση, όμως, των συμμετριών μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς και να περιγράψουμε το σύστημα με μία καλή προσέγγιση. Για παράδειγμα στο διάστημα ένα άστρο κατά προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ως μια συμμετρική σφαίρα αν και στην πραγματικότητα στην επιφάνεια του γίνονται συχνά εκρήξεις που το κάνουν να χάνει αυτήν την συμμετρία. Στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας έχουμε μεγαλύτερη ανάγκη αυτών των συμμετριών, γιατί η φύση των μη γραμμικών εξισώσεων *Einstein* είναι δύσκολο να λυθούν επακριβώς.

Θεωρούμε λοιπόν ότι μια πολλαπλότητα διακατέχεται από συμμετρία όταν η μετρική της παραμένει αναλλοίωτη κάτω από κάποιον μετασχηματισμό που απεικονίζει την πολλαπλότητα στον εαυτό της: Η μετρική είναι ίδια από το ένα σημείο της πολλαπλότητας σε άλλο. Επίσης μπορεί διαφορετικοί τανυστές να έχουν διαφορετικές συμμετρίες. Οι συμμετρίες της μετρικής λέγονται ισομετρίες. Μια μετρική λοιπόν έχει ισομετρία κάτω απο μια συντεταγμένη $(x^{\sigma *})$, όταν η μετρική είναι ανεξάρτητη από την συνάρτηση της συντεταγμένης, γιατί τότε συνεπάγεται συμμετρία της μετρικής κάτω από οποιαδήποτε μετάθεση με μια σταθερά της εν λόγω συντεταγμένης:

$$\partial_{\sigma *} g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{\sigma *} \to x^{\sigma *} + \alpha^{\sigma *} \;:\; \iota\sigma o\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha \tag{1.90}$$

Θεωρώντας την γεωδαισιακή πάνω σε μια πολλαπλότητα και θεωρόντας την γενίκευση της ταχύτητας $U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$ και της ορμής $p^\mu = mU^\mu$ κάνουμε τον παρακάτω συλλογισμό:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau} &= 0 \\
\Leftrightarrow m\frac{dx^\nu}{d\tau}\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + m\frac{dx^\nu}{d\tau}\Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau} &= 0 \\
\Leftrightarrow m\frac{dx^\nu}{d\tau}\big(\partial_\nu m\frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}m\frac{dx^\lambda}{d\tau}\big) &= 0 \\
\Leftrightarrow p^\nu(\partial_\nu p^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}p^\lambda) &= 0 \\
\Leftrightarrow p^\nu \nabla_\nu p^\mu &= 0
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Η προηγούμενη σχέση είναι η γεωδαισιακή εκφρασμένη στη μορφή γενικευμένης ορμής. Από την προηγούμενη μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

$$p^\nu(\partial_\nu p_\mu + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}p^\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^\nu \partial_\nu p_\mu - p^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} p_\lambda = 0 \tag{1.92}$$

Όμως οι δύο όροι ξεχωριστά είναι:

$$p^\nu \partial_\nu p_\mu = 0 \tag{1.93}$$

και

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} p_\lambda p\nu &= \tfrac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}) p_\lambda p\nu \\ &= \tfrac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\mu}) p_\sigma p\nu \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}) p_\sigma p\nu \end{aligned} \tag{1.94}$$

Τότε

$$m\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\sigma\nu}) p_\sigma p_\nu \tag{1.95}$$

Έτσι όταν έχουμε μια ισομετρία στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ τότε έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \tag{1.96}$$

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε το διάνυσμα $Killing$ στην κατεύθυνση $x^{\sigma*}$ το οποίο αντιστοιχεί σε μια ισομετρία ως εξής:

$$K = \partial_{\sigma*} \quad \Leftrightarrow \quad K^\mu = (\partial_{\sigma*})^\mu = \delta^\mu_{\sigma*} \tag{1.97}$$

Τότε

$$p_{\sigma*} = K^\nu p_\nu = K_\nu p^\nu \tag{1.98}$$

έτσι μπορούμε να γράψουμε μια ισομετρία στην μορφή:

$$\frac{dp_{\sigma*}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0 \tag{1.99}$$

όμως

$$\begin{aligned} p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) &= p^\mu (\nabla_\mu K_\nu) p^\nu + p^\mu K_\nu (\nabla_\mu p^\nu) \\ &= p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu \\ &= p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)} \end{aligned} \tag{1.100}$$

Έτσι η εξίσωση $Killing$ γράφεται:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \tag{1.101}$$

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις Κίνησης NLH

Σε αυτό κεφάλαιο θα μελετήσουμε την κλασική θεωρία που περιγράφει την φύση και κυρίως τις κινήσεις των σωματιδίων μέσα σε αυτήν. Τα προβλήματα που δίνει η φύση είναι προβλήματα δυναμικής και για την περιγραφή αυτών χρειαζόμαστε εξισώσεις οι οποίες να αποδίδουν όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Τέτοιες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις *Newton* (διαφορικές εξισώσεις 2−βαθμού ως προς την παράμετρο του χρόνου). Ωστόσο μια διαφορετική προσέγγιση των εξισώσεων αυτών αποτελούν οι εξισώσεις *Lagrange* και *Hamilton*, οι οποίες είναι γενίκευση των εξισώσεων του Νεύτωνα και μας αποδίδουν μια εικόνα μόνο των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας του προβλήματος με την βοήθεια των εξισώσεων περιορισμών της κίνησης.

2.1 Εξισώσεις Newton

Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα: Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα κάθε σώμα, που βρίσκεται μέσα σε ένα αδρανειακό σύστημα, διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας, ή ευθύγραμμης και η ομαλής κίνησής του, εφόσον καμία εξωτερική δύναμη δεν επιδρά για τη μεταβολή της ή η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με 0.

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} = constant \tag{2.1}$$

Αν σε ένα σύστημα αναφοράς ισχύει ο νόμος αυτός τότε το σύστημα καλείται Αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα: Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα, ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.

$$\sum \vec{F} = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt}m\frac{d\vec{x}}{dt} \tag{2.2}$$

Ο νόμος αυτός ονομάζεται και ¨Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής' και πρόκειται για πειραματικό νόμο. Σε περίπτωση σταθερής μάζας παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$\sum \vec{F} = m\vec{\alpha} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \tag{2.3}$$

Το έργο (W) που προκαλεί μια δύναμη και ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της δύναμης πάνω σε μια καμπύλη C(α,β) (με α,β εννοούμε τα άκρα της καμπύλης):

$$W = \int_C \vec{F} dx = \int_C m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta m\frac{d}{dt}\big[\frac{1}{2}\big(\frac{d\vec{x}}{dt}\big)^2\big] = m\big(\frac{d\vec{x}(\alpha)}{dt}\big)^2 - m\big(\frac{d\vec{x}(\beta)}{dt}\big)^2 \tag{2.4}$$

Σε περίπτωση που το ολοκλήρωμα αυτό είναι μηδέν για κάποια καμπύλη τότε λέμε ότι η δύναμη αυτή καλείται συντηρητική πάνω σε αυτήν την καμπύλη. Από το θεώρημα $Stokes$ όπου για μια επιφάνεια S που έχει ως όριο την καμπύλη C έχουμε ότι:

$$W = \int_C \vec{F} dx = \int_S (\nabla \times \vec{F}) dS = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0 \tag{2.5}$$

Άρα

$$\vec{F} = -\nabla V \tag{2.6}$$

Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα: Οι δυνάμεις που εξασκούνται από την αλληλεπίδραση δύο σωμάτων (1 και 2) είναι πάντα ίσες κατά το μέτρο και αντίθετες κατά τη φορά. Οι δύο δυνάμεις δράση-αντίδραση ασκούνται πάντοτε σε ύο διαφορετικά σώματα. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι αν F_{12} είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2 και F_{21} η αντίστοιχη δύναμη που ασκεί το σώμα 2 στο σώμα 1, τότε:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{2.7}$$

Ο νόμος αυτός, που είναι απόρροια της ¨αρχής διατήρησης της ορμής¨, λέγεται και ¨Νόμος δράσης-αντίδρασης¨. Αυτή η ονομασία προκύπτει από τον ορισμό: ¨Για κάθε δράση μιας δύναμης, υπάρχει μια αντίθετη δύναμη αντίδρασης¨.

2.2 Λαγκραζιανός Φορμαλισμός

Οι εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος προκύπτουν από την ερχή ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον, η οποία καταλήγει στις εξισώσεις $Euler - Langrange$ στις οποίες υπισέρχεται η Λαγκραζιανή.
Η Λαγκραζιανή ενός μηχανικού συστήματος είναι συναρτήση των γενικευμένων συντεταγμένων, των οποίων η χρονική εξέλιξη μας καθορίζει τη τροχιά ενός σώματος που κινείται υπό την επίδραση δεδομένου δυναμικού. Αν Τ είναι η κινητική ενέρφεια και V το δυναμικότότε η Λαγκραζιανή ισούτε με $L = T - V$.
Σύμφωνα με την αρχή ελάχιστης δράσης του Χάμιλτον η τροχιά ενός συστήματος Ν βαθμών ελευθερίας καθορίζεται από την ελαχιστοποιήση της δράσης S.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t)\big) dt \tag{2.8}$$

Θεωρούμε μικρή μεταβολή $dq(t)$ στη τροχιά από $q(t_1)$ εώς $q(t_2)$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \big[\frac{\partial L}{\partial q(t)}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t))}\delta \dot{q}(t)\big]dt \tag{2.9}$$

Επειδή $\delta\dot{q}(t) = \dfrac{d(q(t))}{dt}$ και ολοκληρώνοντας τον δεύτερο ορο κατά παράγοντες έχουμε:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta q(t)\big(\frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)})\big)dt + \big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)}\delta q(t)\big]_{t_1}^{t_2} \tag{2.10}$$

Όμως επειδή οι πιθανές τροχιές ξεκινούν από το t_1 και τελειώνουν στο t_2 ο τελευτείος όρος μηδενίζεται ($\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$). Επίσης αυτή η μεταβολή της δράσης πρέπει να ισχύει για κάθε $\delta q(t)$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση $Euler - Langrange$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} - \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} = 0 \tag{2.11}$$

Μερικές φορές οι εξισώσεις $E-L$ μας προσφέρουν μια σταθερά της κίνησης με έναν απλό τρόπο. Αν μια από τις γενικευμένες συντεταγμένες δεν παρουσιάζεται στην Λαγκρανζιανή του προβλήματος τότε:

$$\frac{\partial L}{\partial q^b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} = 0 \;\Leftrightarrow\; p_b = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \tag{2.12}$$

Η τελευταία ποσότητα αποτελεί την Γενικευμένη Συζυγή Ορμή. Δηλαδή αν μια γενικευμένη μεταβλητή είναι ασήμαντη τότε η συζυγής της μεταβλητή μας δίνει ένα σύνολο από αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες. Δηλαδή αν η αρχική φάση ενός σημείου βρίσκεται πάνω σε μια υποπολλαπλότητα της οποίας η εξίσωση είναι $p_b =$σταθερό τότε η κίνηση παραμένει πάνω στην υποπολλαπλότητα.

2.3 Φορμαλισμός Hamilton

Μπορούμε τη Λαγκραζιανή του συστήματος να τη γράψουμε σε μορφή $\widehat{L}(q,p;t) = L(q,\dot{q},t)$, τότε έχουμε δύο μεταβλητές για παραγώγιση q,p:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{L}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + p_b\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha}\\ \Leftrightarrow \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q^\alpha} - p_b\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^\alpha} &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q^\alpha}(\widehat{L} - p_b\dot{q}^b) &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ομοίως για τη μεταβλητή p καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{L}}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p^\alpha} &= p_b\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial p^\alpha}(p_b\dot{q}^b) - \frac{\partial q_b}{\partial p^\alpha}\dot{q}^b\\ \frac{\partial}{\partial p^\alpha}(\widehat{L} - p_b\dot{q}^b) &= -\dot{q}^\alpha\end{aligned} \tag{2.14}$$

Θέτουμε $H(q,p;t) = p_b\dot{q}^b - \widehat{L}(q,p;t))$ την Χαμιλτονιανή του συστήματος και ορίζουμε τις Κανονικές Εξισώσεις Χάμιλτον ως:

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial q^\alpha} = -\frac{\partial L(p,q;t)}{\partial q^\alpha} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial \dot{q}^\alpha} = -\frac{d}{dt}p_\alpha = \dot{p}_\alpha \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial}{\partial p^\alpha}\big(p_b\dot{q}^b - \widehat{L}(q,p;t)\big) \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial H(q,p;t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,p;t)}{\partial t} \tag{2.17}$$

2.4 Σύστημα με συνεχές πλήθος βαθμών ε-λευθερίας

Η προσέγγιση των *Langrange* και *Hamilton* προτείνει ότι οι γενικευμένες συναρτήσεις $q(t)$ πρέπει να αντικαθείστονται από τις πεδιακές συναρτήσεις $\phi(x,t)$.

$$r \to x \quad q_i(t) = q(r,t) \to \phi(x,t) \tag{2.18}$$

Δεδομένου ότι το ϕ είναι συνεχείς συνάρτηση του x , μπορούμε να επεκτείνουμε το φορμαλισμό από το διακριτό σύστημα με συντεταγμένες $q_i(t)$ σε σύστημα με συνεχείς συντεταγμένες $\phi(x,t)$:

$$L(q_i,\dot{q}_i,t) \to \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}, x_\mu) \tag{2.19}$$

όπου $\mathcal{L}$ είναι η Λαγκραζιανή πυκνότητα. Οπότε οι εξισώσεις πεδίου $Euler - Langrange$ γίνονται:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{2.20}$$

2.5 Θεώρημα Noether

Η σύνδεση των συμμετριών με τους νόμους διατήρησης αποτελεί το θεώρημα *Noether*.Αν θεωρήσουμε σύστημα που περιγράφεται από τη Λαγκραζιανή:

$$L = \int \mathcal{L} d^3x \tag{2.21}$$

και έχει εξίσωση κίνησης την $Euler - Langrange$, τότε κάθε συνεχείς μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη τη δράση $S = \int L dt$ συνεπάγεται ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος:

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \tag{2.22}$$

Με άλλα λόγια το θεώρημα λέει ότι κάθε συμμετρία της φύσης συνεπάγεται ένα νόμο διατήρησης και αντίστροφα. Για παράδειγμα αν η Λαγκραζιανή του συστήματος είναι ανεξάρτητη από τη θέση της αρχής των αξόνων τότε το σύστημα διατηρεί την ορμή του με την πάροδο του χρόνου, ή αν είναι ανεξάρτητη από τη γωνία μέτρησης τότε το διατηρούμενο μέγεθος είναι η στροφορμή.

Απόδειξη

Έστω ότι η $\mathcal{L}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από κάποια ομάδα συμμετρίας G , δηλαδή κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{2.23}$$

όπου

$$\delta\phi(x) = \epsilon H(\phi(x)) \tag{2.24}$$

όπου ϵ είναι χωροχρονικά ανεξάρτητες μικρές παράμετροι και $H(\phi(x))$ είναι μια συνάρτηση που καθορίζεται από το είδος της μεταβολής που επιβάλουμε. Η δράση πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αυτό το μετασχηματισμό και η αντίστοιχη αλλαγή στη Λαγκραζιανή θα είναι:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \tag{2.25}$$

και επειδή $\delta(\partial_\mu\phi) \equiv \partial_\mu\phi' - \partial_\mu\phi = \partial_\mu(\delta\phi)$ αντικαταστόντας στην $Euler-Langrange$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} \qquad &= \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \\ &= \partial_\mu\big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\big] \\ &= \epsilon\partial_\mu\big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}H(\phi(x))\big] \end{aligned} \tag{2.26}$$

Συνεπώς αν $\delta\mathcal{L} = 0$:

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \tag{2.27}$$

Η ποσότητα J_μ είναι η διατηρούμενη ποσότητα και ισούτε με:

$$J_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}H(\phi(x)) \tag{2.28}$$

Κεφάλαιο 3

Φυσική των Καμπύλων Χώρων

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μερικά στοιχεία της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σύμφωνα με αυτήν η κάθε είδους μάζα προκαλεί καμπύλωση του χωρόχρονου γύρω της. Επομένως πρέπει να μελετήσουμε την φυσική γύρω από τέτοια αντικείμενα που προκαλούν καμπύλωση στον χωρόχρονο. Η Γενική Σχετικότητα είναι η γενίκευση της Νευτώνειας Θεωρίας για την Βαρύτητα.

3.1 Νευτώνεια Βαρύτητα

3.1.1 Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης

Ο νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα καθορίζει τη βαρυτική δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί μια σημειακή μάζα M σε μια άλλη σημειακή μάζα m σε απόσταση r. Η δύναμη είναι ελκτική, με διεύθυνση την ευθεία μεταξύ των δύο μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του r^2.

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e_r} \tag{3.1}$$

όπου $\vec{e_r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από τη μάζα M στη m, και G είναι η βαρυτική σταθερά του Νεύτωνα. Η βαρυτική δύναμη στη m μπορεί να γραφτεί σε μορφή βαθμίδας κάποιου δυναμικού Φ:

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi \tag{3.2}$$

Τότε το βρυτικό δυναμικό είναι της μορφής:

$$\Phi = G\frac{M}{r} \tag{3.3}$$

3.1.2 Αρχή της Ισοδυναμίας

Εισάγοντας το νόμο της βαρυτικής δύναμης στο νόμο κίνησης του Νεύτωνα $\vec{F} = m\vec{\alpha}$, παίρνουμε:

$$\vec{\alpha} = -\vec{\nabla}\Phi \tag{3.4}$$

Αυτή η σχέση περιγράφει τη πρόταση ότι όλα τα σώματα πέφτουν στο βαρυτικό πεδίο με την ίδια επιτάχυνση ανεξαρτήτως της μάζας ή της σύστασης τους. Η μάζα στο δέυτερο μέλος της εξίσωσης διέπει τις αδρανειακές ιδιότητες του σώματος και αποκαλείται αδρανειακή μάζα, m_I, του σώματος. Η μάζα στο πρώτο μέλος της εξίσωσης αποτελεί ένα μέτρο τς δύναμης της βαρυτικής έλξης μεταξύ των σωμάτων και ονομάζεται βαρυτική μάζα, m_G, του σώματος. Τα πειράματα δείχνουν ότι όλα τα σώατα πέφτουν με την ίδια επιτάχυνση σε ένα βαρυτικό πεδίο. Επομένως, η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα θα πρέπει να είναι ανάλογες με μία σταθερά αναλογίας όμοια για όλα τα σώματα. Η βαρυτική μάζα μπορεί να οριστεί να είναι ίση με την αδρανειακή μάζα ενός σώματος.

$$m_I = m_G \tag{3.5}$$

Στις μέρες μας υπάρχουν πολλά πειράματα που επιβεβαιώνουν με μεγάλη ακρίβεια την παραπάνω αρχή. Ο Γαλιλαίος πρώτος το 1610 επιβεβαίωσε πειραματικά με εκκρεμή στα οποία είχε αναρτήσει μάζες από διαφορετικό υλικό ότι ο λόγος $\frac{m_G - m_I}{m_G}$ είναι μικρότερος του 2×10^{-3}. Ο Νεύτωνας το 1680 βελτίωσε ακόμη περισσότερο την ακρίβεια του πειράματος του Γαλιλαίου θέτωντας το όριο 10^{-3}. Στις αρχές του 19ου αίωνα ο *Bessel* βελτίωσε κατά σχεδόν δύο τάξεις μεγέθους την ακρίβεια του παραπάνω πειράματος θέτωντας το όριο στο 2×10^{-5}. Στη συνέχεια ο *Eötvös* (1890 και 1908), χρησιμοποιώντας εκκρεμές στρέψης βελτίωσε την ακρίβεια στο 3×10^{-9} ενώ διαδοχικά πειράματα από τους *Dicke* (1964) 3×10^{-11} , *Braginsky* (1971) 9×10^{-13} , *Kuroda and Mio* (1989) 8×10^{-10} , *Adelberger*(1990) 1×10^{-11} βελτίωσαν την ακρίβεια των προηγούμενων μετρήσεων.

3.1.3 Εξίσώση Νεύτωνα για το Βαρυτικό Πεδίο

Στη γενική περίπτωση που η μάζα m έλκτεται από περισσότερες μάζες, ή ακόμα καλύτερα μια κατανομή μαζών σε διάφορες θέσεις, τότε το βαρυτικό δυναμικό είναι το ολοκλήρωμα των βαρυτικών δυναμικών στο στοιχειώδη όγκο d^3r:

$$\Phi = -\int \frac{G\rho_\mu(r')}{\mid r - r' \mid} d^3r' \tag{3.6}$$

Τότε το βαρυτικό πεδίο ορίζεται από ένα βαθμωτό δυναμικό και ισχύει η σχεση:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho_\mu(r) \tag{3.7}$$

όπου ∇^2 είναι η Λαπλασιανή $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Αυτή η εξίσωση, που αντιστοιχεί στην εξίσωση *Poisson* για την ηλεκτροστατική, είναι η εξίσωση πεδίου για τη Νευτώνεια βαρύτητα.

3.2 Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Η γενική θεωρία της σχετικότητας ή γενική σχετικότητα είναι η θεωρία βαρύτητας που προτάθηκε από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν, και η οποία περιγράφει τη βαρυτική δύναμη μέσω των καμπυλώσεων του χωροχρόνου παρουσία μάζας.

3.2.1 Αρχές Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας διέπεται από τις εξής αρχές ισοδυναμίας:

1. Ασθενής Αρχή της Ισοδυναμίας: Η αδρανειακή και η βαρυτική μάζα είναι ίσες.

2. Αρχή Ισοδυναμίας $Einstein$: Τοπικά στον χωρόχρονο οι νόμοι της φυσικής ελαττώνονται σε εκείνους της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας όπου η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα.

3. Ισχυρή Αρχή Ισοδυναμίας: Το αποτέλεσμα ενός τοπικού πειράματος (βαρυτικό ή όχι) σε ένα freely falling εργαστήριο είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας και της θέσης του εργαστηρίου στον χωρόχρονο.

Σύμφωνα με την Αρχή Ισοδυναμίας του $Einstein$ τοπικά θα μπορούμε να έχουμε μετρική του χώρου του $Minkowski$ ενώ οι αποκλίσεις από αυτήν θα είναι μηδαμινές:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.8}$$

Επομένως η γεωμετρία χαρακτηρίζεται από κάποια πολλαπλότητα που τοπικά θα μοιάζει με τον χωρόχρονο που περιγράφει ο χώρος $Minkowski$. Όλη αυτήν την φιλοσοφία μπορούμε να την συ$\mu\mu$αζέψουμε σε μια συνταγή γνωστή ως Αρχή Ελάχιστης Ζεύξης:

1. Πάρε έναν νόμο του επίπεδου χωρόχρονου

2. Γράψε τον σε αναλλοίωτη από συντεταγμένες μορφή (τανυστική μορφή)

3. Ισχυρίσου ότι ο προκύπτον νόμος ισχύει σε καμπύλο χωρόχρονο.

Επομένως παίρνουμε την εξίσωση ευθείας:

$$\frac{d^2x^\mu}{dl^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx^\nu}{dl}\partial_\nu\frac{\partial x^\mu}{dl} = 0 \Rightarrow \frac{dx^\nu}{dl}\nabla_\nu\frac{\partial x^\mu}{dl} = 0 \tag{3.9}$$

Η οποία αποτελεί την γεωδαισιακή καμπύλη! Έτσι και για την βαρύτητα θα πρέπει να πάρουμε την τροχιά του σωματιδίου σε ένα βαρυτικό πεδίο σύμφωνα με τον Νεύτωνα και να εξάγουμε μια εξίσωση ,την εξίσωση του $Einstein$ για την βαρύτητα, που θα έχει ως όριο τις εξισώσεις του Νεύτωνα.

3.3 Τανυστής Ενέργειας - Ορμής

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής ($T_{\mu\nu}$) αποτελεί βασικό στοιχείο κάθε θεωρίας για τη βαρύτητα. Στη ΓΘΣ θα πρέπει να αναφερόμαστε, εκτός από τη πυκνότητα ύλης, και στη πυκνότητα ενέργειας. Για τη πυκνότητα ενέργειας σε ένα σύστημα αναφοράς γίνετε συνδυασμός πυκνότητας ενέργειας, πυκνότητας ροής ενέργειας και πυκνότητας ροής ορμής. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι πηγή της βαρύτητας και κατά συνέπεια η αιτία ύπαρξης της καμπυλότητας του χωρόχρονου είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Τα στοιχεία του πίνακα εμηνεύονται ως:

- $T_{00} = \epsilon$ πυκνότητα ενέργειας
- $T_{i0} = \pi_i$ πυκνότητα ορμής στη κατεύθυνση i
- $T_{0i} = \dfrac{\Delta p_i}{\Delta A \Delta t}$ ενεργειακή ροή στη κατεύθυνση i
- τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ο τανυστής τάσεων $Cauchy$ στις 3 διαστάσεις, με τον ένα δείκτη να δείχνει την επιφάνεια άσκησης της τάσης και τον άλλο να δείχνει την κατεύθυνση.

Ένας απλός τρόπος απεικόνισης του τανυστή τάσης-ενέργειας επιτυγχάνται με τη βοήθεια του κινούμενου κουτιού σωματιδίων. Έστω ότι τα σωματίδια στο εσωτερικό του κουτιού βρίσκονται σε ηρεμία ως προς το κουτί και έχουν μάζα ηρεμίας m. Στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπου το κουτί κινείται με ταχύτητα V, η ενέργεια του κάθε σωματιδίου είναι $m\gamma$, όπου $\gamma = (1-V)^{-1/2}$. Η πυκνότητα ενέργειας ισούτε με:

$$\epsilon \equiv T^{00} = mn\gamma^2 = mnu^t u^t \tag{3.11}$$

και η πυκνότητα ορμής:

$$\pi^i = T^{i0} = mn\gamma^2 V^i = mnu^i u^t \tag{3.12}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να δούμε ότι για τον τανυστή τάσης-ενέργειας των σωματιδίων στο εσωτερικό του κουτιού έχουμε:

$$T^{\alpha\beta} = mnu^\alpha u^\beta = \mu u^\alpha u^\beta \tag{3.13}$$

όπου $u^\alpha = (\gamma, \gamma\vec{V})$ είναι η τετραταχύτητα του κουτιού και $\mu \equiv mn$ η πυκνότητα μάζας ηρεμίας.

3.3.1 Ιδανικό Ρευστό

Η πίεση ενός ρευστού συνιστά το απλούστερο παράδειγμα τάσης. Σε ένα ρευστό σε ηρεμία, η δύναμη που ασκείται πάνω σε μια επιφάνεια είναι πάντα κάθετη στην τελευταία και ίδια για όλες τις διευθύνσεις. Ο τανυστής τάσης είναι επομένως διαγώνιος, με όλες τις τιμές της κύριας διαγωνίου να ισουνται με p:

$$T^{ij} = p\delta^{ij} \tag{3.14}$$

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπου το ρευστό βρίσκεται σε ηρεμια, χαρακτηρίζεται από τη πυκνότητα ενέργειας του ρ, την πίεση p και τη τάση-ενέργεια του που είναι:

$$T^{\alpha\beta} = diag(\rho, p, p, p) \tag{3.15}$$

Όμως ένα ρευστό συνήθως δεν ηρεμεί, αλλά αντίθετα κινείτε με μια τετραταχύτητα $u(x)$ διαφορετική από σημείο σε σημείο. Ο τανυστής τάσης-ενέργειας, επομένως εξαρτάται από τη $u(x)$, καθώς και τα $\rho(x)$ και $p(x)$. Η πιο γενική μορφή που μπορεί να σχηματιστεί με την u και τη μετρική $\eta^{\alpha\beta}$, χωρίς τη χρήση παραγώγων, είναι η $T^{\alpha\beta} = Au^{\alpha}u^{\beta} + B\eta^{\alpha\beta}$, όπου $u^{\alpha} = 1, \vec{0}$. Οι συντελεστές Α και Β προσδιορίζονται μέσω της απαίτησης, η τάση-ενέργεια να απλοποιείται στην (3.15) στο σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή σε ηρεμία ως προς το ρευστό. Συνεπώς καταλήγουμε στη:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u^{\beta} + \eta^{\alpha\beta}p \tag{3.16}$$

Η τάση-ενέργεια του ιδανικού ρευστού χρησιμοποιείται συχνά για τη μοντελοποιήση της ύλης σε διάφορες περιπτώσεις όπως το εσωτερικό των άστρων νετρονίων, στις πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας, στο αέριο των γαλαξιών, στην ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου και στην ενέργεια του κενού. Η τάση-ενέργεια (3.13) αποτελεί παράδειγμα ενός ιδανικού ρευστού, όπου η πίεση αποκτά μηδενική τιμή, το οποίο σύμφωνα με την ορολογία της γενικής σχετικότητας , ονομάζεται σκόνη.

3.3.2 Τοπική Διατήρηση της Ενέργειας-Ορμής στον Καμπυλωμένο Χωρόχρονο

Η προηγούμενη ανάλυση σχετικά με τη τάση-ενέργεια έγινε στα πλαίσια της ειδικής σχετικότητας. Όμως ο ρόλος της τάσης-ενέργειας είναι να αποτελέσει μια πηγή χωροχρονικής καμπυλότητας στην εξίσωση *Einstein*. Η προφανής γενίκευση της (3.16) είναι:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^{\alpha}u^{\beta} + g^{\alpha\beta}p \tag{3.17}$$

Στον επίπεδο χωρόχρονο, η ενέργεια και η ορμή της ύλης διατηρούνται. Οι νόμοι διατήτησης μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση με τις συνιστώσες της τάσης-ενέργειας. Επειδή ολες οι συνιστώσες του τετρανύσματος της ενέργειας-ρμής παραμένουν αναλλοίωτες, οι νόμοι διατήρησης γις την ενέργεια και την ορμή παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} = 0 \tag{3.18}$$

Η εξίσωση αυτή δεν ικανοποιέιται πλέον στη γενικευμένη μορφή τάσης-ενέργειας. Η φυσική γενίκευση της όμως στον καμπυλωμένο χωρόχρονο ικάνοποιέιται:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.19}$$

όπου ∇_β είναι η συναλλοίωτη παράγωγος. Η σχέση αυτή χαρακτηρίζεται ως τοπική διατήρηση της ενέργειας-ορμής. Ωστόσο, δεν αποτελεί νομο διατήρησης όπως η (3.18). Η ενέργεια της ύλης παρουσία δυναμικής χωροχρονικής καμπυλότητας δεν διατηρείται, αλλά μεταβάλλεται σε αντίδραση ως προς αυτή. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ακτινοβολία μικροοκυματικού υποβάθρου. Καθώς το διάστημα διαστέλλεται, η πυκνότητα ενέργειας και η θερμοκρασία ακτινοβολίας ελαττώνονται.

3.4 Εξίσωση Einstein

Η εξίσωση *Einstein* που συσχετίζει τη καμπυλότητα με τη πυκνότητα ενέργειας είναι μια θεμελειώδης εξίσωση της κλασικής φυσικής. Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι το μέτρο της πυκνότητας ύλης ενέργειας, δηλαδή το $T_{\alpha\beta}$ είναι ανάλογο με το μέτρο καμπυλότητας. Ένα τέτοιο μέτρο αποτελέι η καμπυλότητα *Ricci*, $R_{\alpha\beta}$ και οι συστολές του, R(βαθμωτή καμπυλότητα *Ricci*). Συνεπώς καταλήγουμε μπορεί να προκύψει η σχέση:

$$R_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} R = \kappa T_{\alpha\beta} \tag{3.20}$$

για κάποιες σταθερές κ και λ που πρέπει να προσδιοριστούν. Εφαρμόζοντας τον τελεστή ∇^β και στα δύο μέλη τη εξίσωσης (3.20), βρίσκουμε το συνδιασμό των $R_{\alpha\beta}$ και $g_{\alpha\beta}R$ για να ικανοποιείται η εξίσωση τοπικής διατήρησης (3.19). Ειδικότερα, ο συνδιασμός αυτός προκύπτει από την ταυτότητα *Bianchi*:

$$\nabla_\beta \big(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\big) = 0 \tag{3.21}$$

Άρα η μόνη τιμή που μπορεί να πάρει το λ ώστε να επαληθεύεται η σχέτη τοπικής διατήρησης είναι $\lambda = -\frac{1}{2}$. Αυτό που απομένει δηλαδή είνια να προσδιορίσουμε τη τιμή για το κ. Το κ πρέπει να είναι ανάλογη της σταθεράς βαρυτικής σύζευξης G. Η ακριβής τιμή, όπως θα δούμε παρακάτω, καθορίζεται από το Νευτώνιο όριο ως $8\pi G$ (σε μονάδες $c = 1$). Η εξίσωση *Einstein* παίρνει τη μορφή:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{3.22}$$

Σε μονάδες $c \neq 1$ το κ παίρνει τη τιμή $\kappa = 8\pi G/c^4$.
Όπως είδαμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης *Einstein* ισούται με το τανυστή καμπυλότητας *Eisntein* και η εξίσωση μπορεί να γραφτεί σε πιο συμπαγή μορφή ως:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{3.23}$$

3.5 Το Νευτώνειο Όριο

Η γενική σχετικότητα οφείλει να αναπαράγει το νόμο αντίστροφου τετραγώνου της Νευτώνειας βαρύτητας στο όριο της μικρής χωροχρονικής καμπυλότητας. Στο Νευτώνειο όριο τα σωματίδια θα πρέπει να κινούνται με ταχύτητες αρκετά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός και το βαρυτικό πεδίο να είναι ασθενές και στατικό. Για τη περίπτωση στατικής μετρικής ασθενούς πεδίου έχουμε:

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{3.24}$$

Σε ένα σύστημα ανφοράς οπου η ύλη κινείτε με ταχύτητες, V, μικρές συγκριτικά με τη ταχύτητα του φωτός, η κυρίαρχη μορφή ενέργειας είναι η ενέργεια ηρεμίας. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας ηρεμίας, μ, είναι αρκετά μικρή ώστε να παράγει μια μικρή χωροχρονική καμπυλότητα για μικρό Φ. Επίσης η κινητική ενέργεια ($\propto \mu V^2$), και η δυναμική ενέργεια ($\propto \mu\Phi$) είναι μικρότερες και αμελητέες. Έτσι το $T_{\alpha\beta}$ με $u^\alpha = (1,\vec{0})$ αποτελεί μια καλή πρώτη προσέγγιση της τάσης-ενέργειας της μη σχετικιστικής ύλης. Η μόνη μη αμελητέα ποσότητα του $T_{\alpha\beta}$ είναι:

$$T^{tt} = \mu \tag{3.25}$$

Όλες οι υπόλοιπες συνιστώες του $T_{\alpha\beta}$ είναι το πολύ της τάξης του μV^2.
Ο τανυστής *Einstein* $G_{\alpha\beta}$ μπορεί να υπολογιστεί για τη Νευτώνεια μετρική, σε πρώτη προσέγγιση των μικρών τιμών του Φ ως:

$$G_{tt} = 2\nabla^2\Phi \tag{3.26}$$

και οι υπόλοιπες συνιστώσες του $G_{\alpha\beta}$ είναι της τάξης του Φ^2.
Αντικαθιστώντας αυτά στην εξίσωση (3.20), για $\lambda = -1/2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\nabla^2\Phi &= \kappa\mu \\ \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi &= \frac{\kappa}{2}\mu \end{aligned} \tag{3.27}$$

και αντιστοιχώντας αυτή με την Νευτώνεια εξίσωση πεδίου (3.7), μπορούμε να εξισώσουμε το $\kappa = 8\pi G$.

Κεφάλαιο 4

Λύσεις των Εξισώσεων Πεδίου του Einstein

Οι εξισώσεις του *Einstein* είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι μαθηματικές μας γνώσεις δεν επιτρέπουν την γενική επίλυση τους. Εν τούτοις, αν θεωρήσουμε ότι η ζητούμενη λύση έχει μερικές συμμετρίες, προερχόμενες από συγκεκριμένες φυσικές παραδοχές τότε είναι δυνατή η εξεύρεση λύσεων που μπορούν να αναπαραστούν το χωρόχρονο εκτός και εντός αστρικών αντικειμένων που παρατηρούμε. Τέτοιες παραδοχές είναι για παράδειγμα ότι η πηγή του πεδίου είναι σφαιρικά συμμετρική ή αξονικά συμμετρική, είτε ότι ο χωρόχρονος μακρυά από την πηγή είναι επίπεδος. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μερικές από τις πλέον σημαντικές λύσεις των εξισώσεων *Einstein*, όμως η μόνη λύση που θα μελετηθεί λεπτομερώς είναι η απλούστερη σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση *Schwarzschild*.

4.1 Λύση Schwarchild

4.1.1 Μετρική Schwarchild

Η πιο προφανής εφαρμογή της θεωρίας της βαρύτητας είναι στο σφαιρικά συμμετρικό βαρυτικό πεδίο. Στη Γενική Σχετικότητα η μοναδική λύση σφαιρικής συμμετρίας στο κενό είναι η μετρική Schwarchild. Σε σφαιρικές συντεταγμένες $\{$t,r,$\theta, \phi\}$ η μετρική δίνεται από:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r})dt^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}dr^2 + r^2\Omega \tag{4.1}$$

όπου

$$d\Omega = d\theta + sin^2\theta + d\phi^2 \tag{4.2}$$

Αφού ενδιαφερόμαστε για την λύση έξω από το σφαιρικό σώμα, θέλουμε την εξίσωση Einstein στο κενό

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4.3}$$

Έχουμε υποθέσει ότι η πηγή μας είναι στατική και σφαιρικά συμμετρική, άρα θέλουμε και οι λύσεις να έχουν τις ίδιες ιδιότητες. Αφού η πηγή είναι στατική τότε έχουμε 2 σύνθήκες: οι συνιστώσες της μετρικής είναι ανεξάρτητες του χρόνου, και δεν υπάρχει σύνδεση χώρου-χρόνου $(dtdx^i + dx^i dt)$.
Η λύση πρέπει να γίνεται μετρική $Minkoswki$ σε κάποιο όριο$(r \to \infty)$. Άρα ξεκινάμε με τη μετρική Minkowski σε πολικές συντεταγμένες, $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$.

$$ds^2_{Minkowski} = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.4}$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους όρους της μετρικής με διαφορετικούς συντελεστές αρκεί να είναι συναρτήσεις μόνο του r. Διαλέξαμε μορφή εκθετικών για να μην αλλάζει η μορφή των προσήμων.

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \tag{4.5}$$

Για απλοποιήση σε στατική, σφαιρικά συμμετρική μετρική μπορούμε να ορίσουμε νέα συντεταγμένη $\overline{r}$:

$$\overline{r} = e^{\gamma(r)} r \tag{4.6}$$

και έτσι έχουμε:

$$d\overline{r} = e^{\gamma(r)} dr + e^{\gamma(r)} r d\gamma(r) = e^{\gamma}(r) dr (1 + r\frac{d\gamma(r)}{dr}) \tag{4.7}$$

οπότε η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = e^{-2\alpha(r)} dt^2 + (1 + r\frac{d\gamma(r)}{dr})^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} d\overline{r}^2 + \overline{r}^2 d\Omega^2 \tag{4.8}$$

Θέτοντας

$$\overline{r} \to r$$

$$(1 + r\frac{d\gamma(r)}{dr}) e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} \to e^{2\beta(r)}$$

Η μετρική (4.8) γίνεται:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.9}$$

Παίρνοντας αυτή τη μετρική και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Einstein στο κενό $(R_{\mu\nu} = 0)$ λύνουμε για τις συναρτήσεις $\alpha(r)$ και $\beta(r)$. Βρίσκουμε τα σύμβολα Christoffel από την:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \tag{4.10}$$

όπου $g_{\mu\nu}$ ο τανυστής:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Έτσι θα πάρουμε τα παρακάτω σύμβολα Christoffel:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^t_{tr} = \partial_r a & \Gamma^r_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r a & \Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2\beta}sin^2\theta \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\beta} & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^r_{rr} = \partial_r \beta & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -sin\theta cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \dfrac{cos\theta}{sin\theta}
\end{array}$$

Από τα σύμβολα Christoffel βρίσκουμε τον τανυστή Riemann από τη σχέση:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon}\Gamma^\epsilon_{\beta\gamma} \tag{4.11}$$

Και έτσι έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
R^t_{rtr} &= \partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 \\
R^t_{\theta t\theta} &= -re^{-2\beta}\partial_r\alpha \\
R^t_{\phi t\phi} &= -re^{-2\beta}sin^2\theta\partial_r\alpha \\
R^r_{\theta r\theta} &= re^{-e\beta}\partial_r\beta \\
R^r_{\phi r\phi} &= re^{-2\beta}sin^2\theta\partial_r\beta \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} &= (1-e^{-2\beta})sin^2\theta
\end{aligned}$$

Και ο τανυστής Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}\left(\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right) \\
R_{rr} &= -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}\left(r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1\right) + 1 \\
R_{\phi\phi} &= sin^2\theta R_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

Η βαθμωτη καμπυλότητα Ricci εκφράζεται από τη σχέση:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = e^{-2\beta}\left(\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) + \frac{1}{r^2}(1-e^{2\beta})\right) \tag{4.12}$$

Ο τανυστής Ricci θέλουμε να ισούτε με μηδέν. Αφού τα R_{tt} και R_{rr} θα πρέπει να εξαφανίζονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 &= e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} \\
&= \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Το οποίο είναι $\alpha = -\beta + c$ όπου το c είναι σταθερά. Θέτουμε το c ίσο με μηδέν για $t \to e^{-c}t$ και έχουμε $\alpha = -\beta$.
Έπειτα παίρνουμε το $R_{\theta\theta} = 0$:

$$\begin{aligned} & e^{-2\beta}\Big(r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1\Big) + 1 = 0 \\ & \Rightarrow e^{2\alpha}\Big(-r(2\partial_r\alpha) - 1\Big) = -1 \\ & \Rightarrow 2re^{2\alpha}\partial_r\alpha + e^(2\alpha) = 1 \\ & \Rightarrow \partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Λύνοντας τη διαφορική παίρνουμε:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r} \tag{4.15}$$

οπου R_s είναι η ακτίνα $Schwarchild$.
Από τις $\alpha = -\beta$ και (1.15) προκείπτει ότι η μετρική γίνεται:

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_s}{r})dt^2 + (1 - \frac{R_s}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.16}$$

Έτσι μένει μόνο το R_s σαν βαθμός ελευθερίας. Για να ερμηνεύσουμε το R_s σε όρους με φυσικές παραμέτρους βλέπουμε ότι στην (4.1) η συνιστώσα tt της μετρικής είναι:

$$g_{tt} = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big) \tag{4.17}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε το $R_s = 2GM$ καταλήγουμε στη μετρική $Schwarchild$. Με αυτό το στοιχειώδες μήκος είναι δυνατό να περιγράψουμε διάφορες μετρίσιμες ποσότητες (όπως οι τροχιές , ενέργεια , στροφορμή κ.λ.π.) σωματίων που κινούνται γύρω από σφαιρικά βαρυτικά σώματα. Το πρόβλημα όμως που παρουσιάζει αυτό το στοιχειώδες μήκος είναι ότι δεν περιγράφει σωστά την γεωμετρία όταν η ακτινική απόσταση γίνεται 0 η $2GM$. Και αποκαλούμε ότι η μετρική παρουσιάζει απροσδιοριστία σε αυτά τα σημεία. Όμως η ακτίνα $2GM$ δεν είναι παρά μια "ψευδαίσθηση" και με έναν μετασχηματισμό μπορεί το στοιχείο μήκους να περιγράψει σε τέτοιες αποστάσεις την γεωμετρία. Παρόλα αυτά εμείς θέλουμε να περιγράψουμε τη γεωμετρία γύρω από τέτοια βαρυτικά σώματα μακρυά από την ακτίνα $2GM$ επομένως η μετρική αυτή είναι ικανοποιητική.

4.1.2 Γεωδαισιακές της Λύσης Schwarchild

Για να καταλάβουμε τη μετρική $Schwarchild$ πρέπει να δούμε τη συμπεριφορά της γεωδαισιακής. Τα μη μηδενικά σύμβολα $Christoffel$ είναι:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^r_{tt} = \dfrac{GM}{r^3}(r - 2GM) & \Gamma^r_{rr} = -\dfrac{GM}{r(r-2GM)} & \Gamma^t_{tr} = \dfrac{GM}{r(r-2GM)} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -(r - 2GM) & \Gamma^\phi_{r\phi} = \dfrac{1}{r} \\ \Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2GM)sin^2\theta & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -sin\theta cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \dfrac{cos\theta}{sin\theta} \end{array}$$

Βρίσκουμε τις εξισώσεις της γεωδαισιακής από τη σχέση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} = 0 \tag{4.18}$$

Η γεωδαισιακή μετατρέπεται στις παρακάτω τέσσερις εξισώσεις:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)}\frac{dr}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda} = 0 \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3}(r-2GM)\big(\frac{dt}{d\lambda}\big)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)}\big(\frac{dr}{d\lambda}\big)^2 \\ -(r-2GM)\Bigg(\big(\frac{d\theta}{d\lambda}\big)^2 + sin^2 d\theta\big(\frac{d\phi}{d\lambda}\big)^2\Bigg) = 0\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} - sin\theta cos\theta\big(\frac{d\theta}{d\lambda}\big)^2 = 0 \tag{4.21}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} + 2\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \tag{4.22}$$

Αυτές οι τέσσερις εξισώσεις αποτελούν τις Γεωδαισιακές Εξισώσεις της μετρική $Schwarzchild$.Αντί να επιλύσουμε αυτές τις εξισώσεις που η δυσκολία είναι αρκετά μεγάλη, μπορούμε να απλοποιήσουμε τα πράγματα δουλεύοντας με τις συμμετρίες της μετρική $Schwarzchild$. Όπως ξέρουμε η μετρική είναι σφαιρικά συμμετρική, γιάυτό έχουμε τέσσερα Killling vectors: 3 για τη σφαιρική συμμετρία και 1 για τη μετατροπή του χρόνου. Κάθε ένα από αυτά οδηγεί σε σταθερά για τη κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου. Δηλαδή:

$$K_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} = constant \tag{4.23}$$

Επίσης η ποσότητα της κίνησης της γεωδαισιακής, ϵ, είναι σταθερή σε όλη τη διαδρομή.

$$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \tag{4.24}$$

Για τα σωματίδια χωρίς μαζα το ϵ ισούτε με μηδέν ($\epsilon = 0$), ενώ για τα βαριά σωματίδια με μάζα $\lambda = \tau$ και $\epsilon = -g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = 1$. Αναπτύσοντας αυτή τη σχέση προκείπτει ότι:

$$-\epsilon = -\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{dt}{d\lambda}\big)^2 + (1 - \frac{2GM}{r}\big)^{-1}\big(\frac{dr}{d\lambda}\big)^2 + r^2\big(\frac{d\phi}{d\lambda}\big)^2 \tag{4.25}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με $(1 - \frac{2GM}{r})$:

$$-E^2 + \big(\frac{dr}{d\lambda}\big)^2 + \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\big(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\big) = 0 \tag{4.26}$$

όπου για άμαζα σωματίδια το E και L είναι η ενέργεια και η στροφορμή, ενώ για σωματίδια με μάζα E είναι η ενέργεια και L η στροφορμή ανά μονάδα μάζας.

$$E = \big(1 - \frac{2GM}{r}\big)\frac{dt}{d\lambda} = K_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \tag{4.27}$$

$$\kappa\alpha\iota \;\; L = r^2\frac{d\phi}{d\lambda} = R_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \tag{4.28}$$

Η (4.26) μπορεί να γραφεί ως η εξίσωση σωματιδίου μοναδιαίας μάζας και ενέργειας $\mathcal{E}$ που κινείται σε μια διάσταση:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff}(r) \tag{4.29}$$

όπου

$$\mathcal{E} = \frac{E^2}{2} \tag{4.30}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \tag{4.31}$$

Η οποία είναι μια εξίσωση ενός κλασσικού σωματίου με μοναδιαία μάζα και ενέργεια $\mathcal{E}$ που κινείται σε ένα μονοδιάστατο συναμικό V_{eff}. Με αυτόν τον τρόπο περιγράφουμε τις τροχιές σωματίων γύρω από βαρυτικά σώματα μακρυά από την ακτίνα $2GM$ που προκαλεί κατάρρευση της μετρικής.
Γενικά η συμπεριφορά του σωματιδίου είναι να κινείται στο δυναμικό μέχρι να συναντησει το *turning point* στο σημείο $V = \mathcal{E}$ και τότε ξεκινά να κινείται σε άλλες κατευθύνσεις. Υπάρχουν περιπτώσεις που το *turning point* δεν υπάρχει και έτσι το σωματίδιο συνεχίζει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση, και άλλες φορές, όταν το δυναμικο είναι σταθερό $\frac{dV}{dr} = 0$ το σωματίδιο κινείται σε κύκλους με ακτινα r_c σταθερή.

$$V'(r) = \frac{\epsilon GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} - \frac{3GML^2}{r^4}\gamma = 0 \tag{4.32}$$

Οπότε για τη Νευτώνια βαρύτητα, το $\gamma = 0$, για σταθερό δυναμικό το σωματίδιο θα κινείται σε κύκλο με ακτίνα

$$r_c = \frac{L^2}{\epsilon GM} \tag{4.33}$$

Στη Γενική Σχετικότητα το δυναμικό διαφέρει από ότι στη Νευτώνια κατά τον όρο $\frac{GML^2}{r^3}$, αφού τώρα $\gamma = 1$. Άρα για βαριά σωματίδια:

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM} \tag{4.34}$$

Για μεγάλα L, υπαρχουν δύο κυκλικές τροχιές, μια σταθερή και μια ασταθής.

$$r_c = \begin{cases} \frac{L^2}{GM} & (unstable) \\ 3GM & (stable) \end{cases} \tag{4.35}$$

Αυτές οι δύο τροχιές απέχουν κατά πολύ η μία από την άλλη. Όσο μικραίνει το L οι δύο τροχιές πλησιάζουν, και ταυτίζονται όταν μηδενιστεί η διακρίνουσα. Για

$$L = \sqrt{12}GM \tag{4.36}$$

έχουμε

$$r_c = 6GM \tag{4.37}$$

Η ακτίνα $r_c = 6GM$ είναι η μικρότερη ακτίνα που εμφανίζονται σταθερές κυκλικές τροχιές στη μετρική *Schwarchild*. Δηλαδή οι λύσεις *Schwarchild* δίνουν σταθερές κυκλικές τροχιές για $r > 6GM$ και ασταθείς για $3GM < r < 6GM$.

4.2 Η λύση των Tolman-Oppenheimer-Volkov

Η πιο γενική έκφραση για το γραμμικό στοιχείωδες μήκος σε σφαιρική συμμετρία είναι:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{4.38}$$

Αν η ύλη δε παρουσιάζει εγκάρσιες καταπονήσεις και κίνηση της μάζας τότε ο τανυστής ενέργειας ορμής είναι:

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(\rho, -p, -p, -p) \tag{4.39}$$

όπου p και ρ είναι η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας αντίστοιχα. Από το νόμο διατήρησης ενέργειας ορμής προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$T^{\mu\nu}_{\nu} = \frac{\partial p}{\partial r} + (p+\rho)\Gamma^{\mu}_{tt}u^t u^t = 0 \tag{4.40}$$

όπου το $\Gamma^{\mu}_{tt} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{tt,\nu} = -\frac{1}{2}e^{\nu}\nu'$. Οπότε πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $g_{\mu\lambda}$ λαμβάνουμε:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{p+\rho}{2}\nu' \tag{4.41}$$

που είναι η σχετικιστική μορφή της εξίσωσης υδροστατικής ισοροπίας. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις *Einstein* στη μορφή:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G\big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\big) \tag{4.42}$$

για να βρούμε δύο ακόμα εξισώσεις που απαιτούνται για τον υπολογίσμό της κατανομής της ύλης. Οι όροι του δεξιού μέρους της παραπάνω εξίσωσης δίνουν:

$$T_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}T = \frac{e^{\nu}}{2}(3p+\rho) \tag{4.43}$$

$$T_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}T = \frac{e^{\lambda}}{2}(\rho - p) \tag{4.44}$$

$$T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}T = \frac{r^2}{2}(\rho - p) \tag{4.45}$$

$$T_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}T = \frac{r^2 sin^2\theta}{2}(\rho - p) \tag{4.46}$$

Για τις συνιστώσες του τανυστή *Riemann* έχουμε:

$$tt: \qquad \frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r}=-4\pi Ge^{\lambda}(3\rho+p) \tag{4.47}$$

$$rr: \qquad \frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r}=4\pi Ge^{\lambda}(\rho-p) \tag{4.48}$$

$$\theta\theta: \qquad 1-e^{-\lambda}\big(1+\frac{r^2}{2}(\nu'-\lambda')\big)=-4\pi G(\rho-p) \tag{4.49}$$

Συνδιάζοντας κατάλληλα τις παραπάνω και την κοσμολογική σταθερά Λ ίση με το μηδέν παίρνουμε:

$$8\pi p=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2} \tag{4.50}$$

$$8\pi\rho=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} \tag{4.51}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις μαζί με την (4.41) αποτελούν τις εξισώσεις πεδίου του *Einstein* και μαζί με την $\rho=\rho(p)$ καθορίζουν την μηχανική ισορροπία της κατανομής της ύλης καθώς και την εξάρτηση της μετρικής από το r.

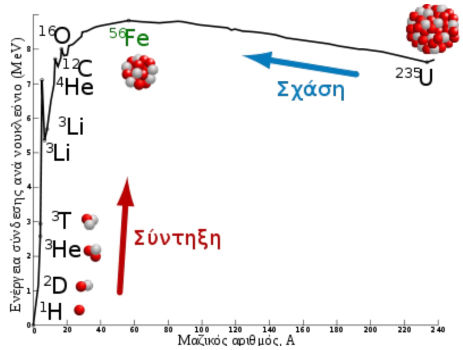
Κεφάλαιο 5

Μελανές Οπές και Φαινόμενο Superradiance

5.1 Μελανές Οπές

Οι Μελανές Οπές ή αλλιώς Μαύρες Τρύπες αποτελούν την κατάληξη μιας ακατάσχετης βαρυτικής κατάρρευσης. Η ζωή ενός άστρου χαρακτηρίζεται από τη διαρκη σύγκρουση μεταξύ δύο δυνάμεων, της βαρυτικής δύναμης συμπίεσης και των δυνάμεων διόγκοσης θερμαινόμενων αερίων. Η γέννηση ενός άστρου ξεκινά με τη βαρυτική κατάρευση ενός νέφους αστρικών αερίων αποτελούμενου κυρίως από υδρογόνο και ήλιο. Η θέρμανση, λόγω της συμπίεσης, αυξάνει τη θερμοκρασία του σχηματιζόμενου αστρικού πυρήνα σε τέτοιο βαθμό που αρχίζουν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, στις οποίες γίνεται καύση υδρογόνου για τη παραγωγή ηλίου και τη ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας. Έπειτα το άστρο περνά σε μια ευσταθή κατάσταση κατά την οποία χάνει ενέργεια μέσω ακτινοβοίας και αυτό αντισταθμίζει την ενέργεια που παράγεται από τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Άφου εξαντληθεί το υδρογόνο στον αστρικό πυρήνα ξεκινά μια νέα φάση βαρυτικής συστολής. Λόγω της συμπίεσης προκαλείται αύξηση της θερμοκρασίας μέχρι του σημείου που ενεργοποιούνται οι αντιδράσεις καύσης ηλίου και η παραγωγή βαρύτερων στοιχείων. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το σοιχείο ^{56}Fe επειδή έχει την υψηλότερη ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο.

Όταν τελικά εξαντληθούν τα θερμοπυρηνικά καύσιμα ενός άστρου υπάρχουν δύο πιθανά ενδεχόμενα. Είτε το άστρο να καταλήξει σε ισορροπία, δηλαδή να συντηρείται εξισορροπώντας τη δύναμη της βαρύτητας από κάποια με θερμική πίεσης, είτε δεν καταλήγει σε ισορροπία και οδηγείται τελικά στη βαρυτική κατάρρευση και τελικά στο σχηματισμο μιας μελανής οπής. Άρα είναι γιγάντια σώματα της τάξεως των αστέρων και περιγράφονται από σημαντική συγκέντρωση μάζας σε μια πολύ μικρή περιοχή του χώρου (*singularity*) , ώστε η δύναμη της βαρύτητας να μην επιτρέπει σε οτιδήποτε να ξεφύγει από αυτήν, παρά μόνο μέσω κβαντικής συμπεριφοράς.



Σχήμα 5.1: Στο διάγραμμα δίνεται η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο πυρήνα A ως συνάρτηση του συνολικού αριθμού νουκλεονίων του.

Όπως προβλέπεται από την Γενική Σχετικότητα, η παρουσία μεγάλης μάζας παραμορφώνει τον χωρόχρονο κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα μονοπάτια που λαμβάνονται από τα σωματίδια να στρέφονται προς την μάζα. Εφόσον οι μαύρες τρύπες δεν μπορούν να εκπέμψουν κανενός είδους φως ή άλλο στοιχείο, η μελέτη τους βασίζεται στην μελέτη της κίνησης σωματιδίων έξω από αυτήν, παρά στο απροσπέλαστο εσωτερικό τους.

5.1.1 Οι Νόμοι των Μελανών Οπών

Οι νόμοι της Θερμοδναμικής αντιστοιχούν σε ένα νόμους μηχανικής που υπακούει μια μελανή οπή.Ένα σύστημα σε θερμική ισορροπία σήμαινει οτι έχει αποκατασταθεί σε μια σταθερή κατάσταση, η οποία αντιστοιχίζεται σε μια σταθερή μαύρη τρύπα.

1. Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία η θερμοκρασία παραμένει σταθερή. Ο ανάλογος νόμος της μηχανικής μιας μαύρης τρύπας είναι ότι μια σταθερή μαύρη τρύπα έχει σταθερή επιφανειακή βαρύτητα στον ορίζοντα

2. $$dE = TdS - pdV \tag{5.1}$$

   Αντιστοιχίζοντας τις ποσότητες $E \leftrightarrow M$, $S \leftrightarrow A_H/4G$ και $T \leftrightarrow k/2\pi$ όπου M είναι η μάζα της μαυρής τρύπας, A_H είναι η επιφάνεια του ορίζοντα και $k = 2\pi T_H$ ορίζεται ως η επιφανειακή βαρύτητα της μαύρης τρύπας.Έτσι η αντίστοιχη σχέση που θα ικανοποιούν οι διακυμάνσεις αυτών των ποσοτήτων σε μια μαύρη τρύπα είναι:

   $$\delta M = \frac{k}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \tag{5.2}$$

3. Η εντροπία ενός απομονωμένου συστήματος δεν μειώνεται ποτέ. Αντίστοιχα για μια μαύρη τρύπα ισχύει ότι η επιφάνεια του ορίζοντα δεν μειώνεται ποτέ.

5.2 Φαινόμενο Superradiance

Εύλογα, μπορεί να προκύψει το ερώτημα αν η βαρυτική δύναμη δεν επιτρέπει στα σωματίδια να διαφύγουν από αυτήν τότε πως μπορούν να ακτινοβοληθούν στο άπειρο;

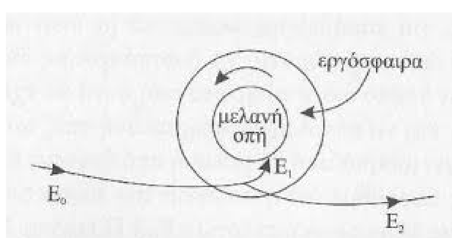
Διαδικασίες ενίσχυσης ακτινοβολίας έχουν μια μακράν ιστορία, ξεκινώντας από τις απαρχές της Κβαντομηχανικής,όταν ο *Klein* έδειξε ότι η εξίσωση *Dirac* επιτρέπει στα ηλεκτρόνια να μεταδίδονται ακόμα και σε κλασσικά απαγορευμένες περιοχές. Το 1954, ο *Dicke* εισήγαγε την έννοια *Superradiance*, στεκόμενος σε μια συλλογή φαινομένων κατά τα οποία η ακτινοβολία ενισχύεται μετά από μια αλληλουχία εκπομπών. Το 1971, ο *Zel′ dovich* έδειξε ότι, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, η σκέδαση ακτινοβολίας από περιστρεφόμενες απορροφητικές επιφάνειες έχει ως αποτέλεσμα κύματα με μεγαλύτερο πλάτος. Το φαινόμενο αυτό είναι πλέον ευρέως γνωστό ως *Superradiance* και απαιτεί μια αρχική ακτινοβολία, θεωρώντας την μονοχρωματική με συχνότητα ω, να ικανοποιεί την σχέση:

$$\omega < m\Omega \tag{5.3}$$

όπου m είναι ο αζιμουθιακός αριθμός σε σχέση με τον άξονα περιστροφής και Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

5.3 Διαδικασία Penrose

Η διαδικασία *Penrose* για εξαγωγή ενέργειας από μία περιστρεφόμενη μελανή οπή, αναφέρεται στον εξής μηχανισμό: Αν ένα σωμάτιο σταλεί στην εργόσφαιρα μιας μαύρης τρύπας μπορούμε να το διασπάσουμε σε δύο κομμάτια, έτσι ώστε ένα από αυτά να εξέλθει με μεγαλύτερη ενέργεια από το εισερχόμενο σωμάτιο. Το άλλο σωμάτιο θα φέρει αρνητική ενέργεια και θα εισέλθει στη μελανή οπή.



Σχήμα 5.2: *Penrose Process*

Αποδεικνύεται επίσης, ότι υπάρχει ένα κυματικό ανάλογο του μηχανισμού του *Penrose*. Αν ένα κύμα σταλεί προς μία μελανή οπή, ένα μέρος του θα απορροφηθεί από αυτήν, αλλά το υπόλοιπο θα την αποφύγει και θα συνεχίσει να διαδίδεται. Στις περισσότερες περιπτώσεις το εξερχόμενο κύμα θα έχει χαμηλότερη ένταση από το εισερχόμενο. Ωστόσο, αν η συχνότητα και η χωρική συμπεριφορά του κύματος επιλεχθούν μ' ένα συγκεκριμένο τρόπο και το κύμα σταλεί προς την εργόσφαιρα μιας περιστρεφόμενης μαύρης οπής, το μέρος του κύματος που θα απορροφηθεί από τη μελανή οπή θα έχει αρνητική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι το εξερχόμενο κύμα θα έχει μεγαλύτερη ενέργεια από το εισερχόμενο, άρα και μεγαλύτερη ένταση από το εισερχόμενο. Αυτό το φαινόμενο (το οποίο προτάθηκε ανεξάρτητα από τους $Zel'\ dovich$ και $Misner$) καλείται $superradiance\ scatter$.

5.4 Φαινόμενο Superradiance σε Μελανές Οπές

Θεωρούμε ένα χωρόχρονο στατικό και αξονοσυμμετρικό. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι διαταραχές, που διαδίδονται σε μια καθορισμένη μετρική, μπορούν να εκφραστούν σε όρους μιας κυματοσυνάρτησης Ψ. Η τελευταία ικανοποιεί μια εξίσωση $Schrodinger$:

$$\frac{d^2\Psi}{dr_*^2} + V_{eff}\Psi = 0 \tag{5.4}$$

Το V_{eff} περιέχει όλη την πληροφορία για την καμπυλότητα του χωρόχρονου καθώς και για τις ιδιότητες του πεδίου. Το $r_* \in (-\infty, +\infty)$ καλείται συντεταγμένη '$tortoise$' και αντιστοιχεί στη περιοχή $r \in [r_+, \infty)$. Ενας τρόπος για να κάνουμε ξεκάθαρο ότι το κύμα δεν μπορεί να φύγει στο άπειρο υποθέτουμε ασυμπτωτική επιπεδότητα και ότι το δυναμικό είναι σταθερό στα όρια(πηγάδι δυναμικού), τότε προκύπτει η ασυμπτωτική συμπεριφορά.

$$\Psi = \begin{cases} Te^{-ik_H r_*} + Oe^{ik_H r_*} & for \;\; r_* \to -\infty \\ Re^{-ik_\infty r_*} + Ie^{ik_\infty r_*} & for \;\; r_* \to +\infty \end{cases} \tag{5.5}$$

όπου r_+ είναι η ακτίνα στον ορίζοντα και $k_H^2 = V_{eff}(r \to r_+)$, $k_\infty^2 = V_{eff}(r \to \infty)$. Αυτές οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε ένα αρχικό κύμα πλάτους I, σε έν αανακλώμενο κύμα πλάτους R και σε ένα διαδιδόμενο πλάτους T στον ορίζοντα. Ο όρος O περιγράφει μια υποθετική εξερχόμενη ροή κατα μήκος της επιφάνειας $r = r_+$ που στην περίπτωση που έχουμε ορίζοντα μηδενίζεται. Αν θεωρήσουμε ότι το δυναμικό είναι πραγματικό, τότε, εφόσον ο χωρόχρονος είναι στατικός, οι εξισώσεις των πεδίων θα είναι αναλοίωτες κάτω απο τους μετασχηματισμούς ούς $t \to -t$ και $\omega \to -\omega$. Τότε υπάρχει μια άλλη λύση $\bar{\Psi}$ η οποία θα ικανοποιεί τις συζηγής συνοριακές συνθήκες. Οι λύσεις Ψ και $\bar{\Psi}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και έτσι για την κάθε μια η $Wronskian$ είναι ανεξάρτητη της r_*. Επομένως η $Wronskian$ υπολογισμένη στον ορίζοντα, $W = 2ik_H(|T|^2 - |O|^2)$, θα πρέπει να είναι ίση με αυτήν στο άπειρο $W = -2ik_\infty(|R|^2 - |I|^2)$. Εξισώνοντας λοιπόν τις δύο $Wronskian$, έχουμε:

$$|R|^2 = |I|^2 - \frac{k_H}{k_\infty}(|T|^2 - |O|^2) \tag{5.6}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $k_H/k_\infty < 0$ τότε το κύμα ενισχύεται, αφού $|R|^2 > |I|^2$.

Κεφάλαιο 6

Σταθερότητα Superradiant στη Μελανή Οπή Hordenski

6.1 Το Φυσικό Σύστημα

Η μετρική της *Horndeski black hole* μάζας M, με φορτίο Q είναι:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{15[4\kappa r^2(2-\Lambda r^2) - Q^2]^2}{r^4}\frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2 \tag{6.1}$$

όπου

$$F(r) = 48\kappa^2\Lambda^2 r^4 - 320\kappa^2\Lambda r^2 + 120\kappa(8\kappa + \Lambda Q^2) - \frac{M}{r} + 240\kappa\frac{Q^2}{r^2} - 5\frac{Q^4}{r^4} \tag{6.2}$$

και

$$X = \frac{15[4\kappa r^2(2-\Lambda r^2) - Q^2]^2}{r^4} \tag{6.3}$$

Ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο που περιγράφεται από την εξίσωση *Klein–Gordon* συζεύγνυται με τη *Hordenski black hole*

$$[(\nabla^\nu - iqA^\nu)(\nabla_\nu - iqA_\nu) - \mu^2]\Psi = 0 \tag{6.4}$$

εδώ τα q και μ είναι το φορτίο και η μάζα του πεδίου και A είναι το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό της μάυρης τρύπας

$$A_0(r) = \sqrt{15}(\frac{Q^3}{3r^3} - \frac{8\kappa Q}{r} - 4\kappa\Lambda r Q) \tag{6.5}$$

Αναλύουμε το πεδίο ως $\Psi = \Psi_{lm}(t, r, \theta, \phi)$

$$\Psi_{lm} = e^{im\phi}S(\theta)R(r)e^{-i\omega t} \tag{6.6}$$

όπου l είναι ο δείκτης σφαιρικής αρμονικής και m ο δείκτης αζιμουθιακής αρμονικής $(-l < m < l)$ και ω η συχνότητα. Στη πιο πάνω εξίσωση το R είναι το ακτινικό μέρος και S το γωνιακό. Κάνουμε τις πράξεις αναλυτικά στην $K-G$:

$$
\begin{aligned}
&[(\nabla^{\nu} - iqA^{\nu})(\nabla_{\nu} - iqA_{\nu}) - \mu^2]\Psi = 0 \\
&\nabla^{\nu}\nabla_{\nu}\Psi - iq\nabla^{\nu}(A_{\nu}\Psi) - iqA^{\nu}\nabla_{\nu}\Psi - q^2A^{\nu}A_{\nu}\Psi - \mu^2\Psi = 0 \\
&\partial^{\nu}\partial_{\nu}\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - iq\nabla^{\nu}(A_{\nu})\Psi - iqA_{\nu}\nabla\Psi - iqA^{\nu}\nabla_{\nu}\Psi - q^2A^{\nu}A_{\nu}\Psi - \mu^2\Psi = 0 \\
&g^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - \Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_{\mu}\Psi - iq(\partial_{\nu}A^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\sigma}A^{\sigma})\Psi - 2iqg^{\nu\mu}A_{\mu}\partial_{\nu}\Psi - q^2g^{\nu\mu}A_{\nu}A_{\mu}\Psi - \mu^2\Psi = 0
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

όπου

$$
g_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} -F(r) & 0 & 0 & 0] \\ 0 & \dfrac{X}{F(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{6.8}
$$

Τα μη μηδενικά σύμβολα $Christoffel$ είναι:

$$\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2F}\frac{dF}{dr}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{rr} = \frac{F}{2X}\frac{d(\frac{X}{F})}{dr}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta} = -\frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_r g_{\phi\phi} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}\partial_\theta g_{\phi\phi} = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

Επίσης

$$\Gamma^{rt}_{t} = \frac{1}{2} g_{tt} g^{rr} \partial_r g^{tt} = -\frac{1}{2X}\frac{dF}{dr}$$

$$\Gamma^{rr}_{r} = \frac{1}{2} g_{rr} g^{rr} \partial_r g^{rr} = \frac{1}{2}\frac{d(\frac{F}{X})}{dr}$$

$$\Gamma^{r\theta}_{\theta} = \frac{1}{2} g_{\theta\theta} g^{rr} \partial_r g^{\theta\theta} = -\frac{F}{Xr}$$

$$\Gamma^{r\phi}_{\phi} = \frac{1}{2} g_{\phi\phi} g^{rr} \partial_r g^{\phi\phi} = -\frac{F}{Xr}$$

$$\Gamma^{\theta\phi}_{\phi} = \frac{1}{2} g_{\phi\phi} g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο της (6.7):

-
$$\begin{aligned} g^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu\Psi &= g^{tt}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + g^{rr}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + g^{\theta\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + g^{\phi\phi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{\omega^2\Psi}{F} + \frac{F}{X}\frac{d^2R}{dr^2}Se^{im\phi}e^{-i\omega t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \end{aligned}$$

-
$$\begin{aligned} -\Gamma^{\mu\nu}_{\nu}\partial_\mu\Psi &= -\big(\Gamma^{rt}_{t}\partial_r\Psi + \Gamma^{rr}_{r}\partial_r\Psi + \Gamma^{r\theta}_{\theta}\partial_r\Psi + \Gamma^{r\phi}_{\phi}\partial_r\Psi + \Gamma^{\theta\phi}_{\phi}\partial_\phi\Psi\big) \\ &= \frac{1}{2X}\frac{dF}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{d(F/X)}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{2F}{rX}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \end{aligned}$$

-
$$\partial_\nu A^\nu = \partial_t A^t = 0$$

-
$$\Gamma^{\nu}_{\nu\sigma}A^\sigma = 0$$

-
$$-2iqg^{\nu\mu}A_\mu\partial_\nu\Psi = -2q\omega\frac{A}{F}\Psi$$

-
$$-q^2g^{\nu\mu}A_\nu A_\mu\Psi = q^2\frac{A^2}{F}\Psi$$

Έτσι η $K-G$ παίρνει τη παρακάτω μορφή:

$$\frac{\omega^2\Psi}{F}+\frac{F}{X}\frac{d^2R}{dr^2}Se^{im\phi}e^{-i\omega t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$
$$+\frac{1}{2X}\frac{dF}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{d(F/X)}{dr}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{2F}{rX}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$$
$$-2q\omega\frac{A}{F}\Psi+q^2\frac{A^2}{F}\Psi-\mu^2\Psi=0 \qquad (6.9)$$

Οι όροι $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$ παριστάνουν το τελεστή της στροφορμής L.

$$\widehat{L}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad (6.10)$$

Όταν ο τελεστής της στροφορμής δράσει στην κυμματοσυνάρτηση Ψ μας δίνει ιδιοτιμές $-l(l+1)$. Αντικαταστώντας λοιπόν στην (6.9) την ιδιοτιμή της στροφορμής και τη κυμματοσυνάρτηση $\Psi=e^{im\phi}SRe^{-i\omega t}$ και απαλοίφοντας τα $e^{im\phi}Se^{-i\omega t}$ παίρνουμε:

$$\frac{\omega^2}{F}R+\frac{F}{X}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{2X}\frac{dF}{dr}\frac{dR}{dr}-\frac{1}{2}\frac{d(F/X)}{dr}\frac{dR}{dr}+\frac{2F}{rX}\frac{dR}{dr}$$
$$-2q\omega\frac{A}{F}R+q^2\frac{A^2}{F}R-\frac{l(l+1)}{r^2}R-\mu^2R=0$$

$$\frac{F}{X}\frac{d^2R}{dr^2}+\left(\frac{1}{2X}\frac{dF}{dr}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\frac{dF}{dr}X-F\frac{dX}{dr}}{X^2}\Big)+\frac{2F}{rX}\right)\frac{dR}{dr}+$$
$$\Big(\frac{\omega^2}{F}-2q\omega\frac{A}{F}+q^2\frac{A^2}{F}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\mu^2\Big)R=0 \qquad (6.11)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ορίσουμε:

$$\Delta=\frac{Fr^2}{\sqrt{X}} \qquad (6.12)$$

και

$$U=\left(\omega r^2-qAr^2\right)^2-\Delta\left(\sqrt{X}l(l+1)+\mu^2\sqrt{X}r^2\right) \qquad (6.13)$$

Οπότε η εξίσωση (6.11) παίρνει τη μορφή:

$$\Delta\left(\frac{d}{dr}\Delta\frac{dR}{dr}\right)+UR=0 \qquad (6.14)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής

$$\psi=\Delta^{\frac{1}{2}}R \qquad (6.15)$$

η εξίσωση κίνησης του πεδίου παίρνει τη μορφή:

$$\Delta \frac{d}{dr}\left(\Delta \frac{d}{dr}\left(\psi \Delta^{-1/2}\right)\right) + U\psi\Delta^{-1/2} = 0$$
$$\Delta \frac{d}{dr}\left(\Delta^{1/2}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{2}\Delta^{-1/2}\frac{d\Delta}{dr}\psi\right) + U\psi\Delta^{-1/2} = 0$$
$$\Delta^{3/2}\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{4}\Delta^{-1/2}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2\psi - \frac{1}{2}\Delta^{1/2}\frac{d^2\Delta}{dr^2}\psi + U\psi\Delta^{-1/2} = 0$$
$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{4\Delta^2}\left((\frac{d\Delta}{dr})^2 - 2\Delta\frac{d^2\Delta}{dr^2} + 4U\right)\psi = 0 \tag{6.16}$$

η εξίσωση (6.16) μπορεί τώρα να γραφτεί σαν εξίσωση *Schrondinger*

$$\frac{d\psi^2}{dr^2} + V\psi = 0 \tag{6.17}$$

όπου

$$V = \frac{1}{4\Delta^2}\left((\frac{d\Delta}{dr})^2 - 2\Delta\frac{d^2\Delta}{dr^2} + 4U\right) \tag{6.18}$$

6.2 Συνοριακές Συνθήκες

Η εξίσωση (6.18) είναι *like Schrondinger* αφού το r ορίζεται στη περιοχή $r \in [r_+, \infty)$. Η συντεταγμένη "*tortoise*", r_*, αντιστοιχίζει αυτή τη περιοχή σε ολόκληρο τον άξονα, $r_* \in (-\infty, +\infty)$. Θεωρώντας τώρα τον μετασχηματισμό $dr = \frac{F(r)}{\sqrt{X(r)}}dr^*$ και εφαρμόζοντας τον στη (6.14) καταλήγουμε στην εξίσωση *Schrondinger*. Έχουμε λοιπόν τους μετασχηματισμούς:

$$\frac{d}{dr} = \frac{\sqrt{X(r)}}{F(r)}\frac{d}{dr^*}$$
$$\frac{d^2}{dr^2} = \left(\frac{1}{2}\frac{dX(r)}{dr}\frac{1}{\sqrt{X(r)}F(r)} - \frac{dF(r)}{dr}\frac{\sqrt{X(r)}}{F^2(r)}\right)\frac{d}{dr^*} + \frac{X(r)}{F^2(r)}\frac{d^2}{dr^{*2}}$$

και εφαρμόζοντας τους στην (6.14) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2R(r^*)}{dr^{*2}} + \frac{2F(r)}{r\sqrt{X(r)}}\frac{dR(r^*)}{dr^*} + \frac{r^2\left(\omega - qA_0(r)\right)^2 - F(r)\left(l(l+1) + r^2\mu^2\right)}{r^2}R(r^*) = 0 \tag{6.19}$$

Μπορούμε να απαλαγούμε από τον όρο της πρώτης παραγώγου του $R(r^*)$. Αυτό γίνεται γενικά για μια εξίσωση της μορφής $x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$, μέσω του μετασχηματισμού $x(t) = g(t)h(t)$. Βρίσκουμε τότε μια καινούρια εξίσωση και η απαίτηση να εξαλείφεται η πρώτη παράγωγος οδηγεί στον προσδιορισμό της συνάρτησης $g(t)$:

$$g(t) = e^{-\frac{1}{2}\int A(t)dt}$$

Η εξίσωση για το $h(t)$ θα είναι τότε της μορφής:

$$h''(t) + \left[B(t) - \frac{A'(t)}{2} - \frac{A^2(t)}{4}\right] h(t)) = 0$$

Για την εξίσωση (6.19) βλέπουμε εύκολα ότι παίρνει την μορφή:

$$\frac{d^2R}{dr_*^2} + \frac{U}{r^4}R = 0 \tag{6.20}$$

Εμείς ενδιαφερόμαστε για τις λύσεις εκείνες που δίνουν εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα, r_+, και δέσμια κατάσταση στο άπειρο. Υπολογίζουμε τις συχνότητες:

$$k_H^2 = V_{eff}(r \to r_+) = (\omega - qA(r_H))^2 \tag{6.21}$$

$$k_\infty^2 = V_{eff}(r \to \infty) = \infty \tag{6.22}$$

Η λύση για ένα εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα γεγονότων είναι:

$$R \sim \exp\{-i(\omega - qA(r_+))r_*\}, \qquad r \to r_+ \; (r_* \to -\infty) \tag{6.23}$$

όμως δεν υπάρχει λύση για ένα δέσμιο εκπεμπόμενο κύμα στο άπειρο.

6.3 Λ=0

Για τη περίπτωση που η κοσμολογική σταθερά Λ ισούτε με το μηδεν έχουμε τη μετρική:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{3(8\kappa r^2 - Q^2)^2}{r^4}\frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2 \tag{6.24}$$

με τα $F(r)$ και $X(r)$ τώρα να είναι:

$$F(r) = 192\kappa^2 - \frac{M}{r} + 48\kappa\frac{Q^2}{r^2} - \frac{Q^4}{r^4} \tag{6.25}$$

$$X(r) = \frac{3(8\kappa r^2 - Q^2)^2}{r^4} \tag{6.26}$$

Το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό της μαύρης τρύπας είναι:

$$A_0(r) = \sqrt{15}(\frac{Q^3}{3r^3} - 8\kappa\frac{Q}{r}) \tag{6.27}$$

και είναι προφανής ότι στο άπειρο μηδενίζεται. Ακολουθώντας τη ίδια διαδικασία με τα παραπάνω, αλλά για τα νέα X, F, και A, καταλήγουμε στις λύσεις για τη περίπτωση που το $\Lambda = 0$. Υπολογίζουμε τις συχνότητες:

$$\begin{aligned} k_H^2 = V_{eff}(r \to r_+) &= \lim_{r \to r_+}\left[\left(\frac{\omega r^2 - qr^2A(r \to r_+)}{r^2}\right)^2 - \frac{F}{r^2}\big(l(l+1) + \mu^2 r^2\big)\right] \\ &= (\omega - qA(r_H))^2 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} k_\infty^2 = V_{eff}(r \to \infty) &= \lim_{r \to \infty}\left[\left(\frac{\omega r^2 - qr^2A(r \to \infty)}{r^2}\right)^2 - \frac{F}{r^2}\big(l(l+1) + \mu^2 r^2\big)\right] \\ &= \omega^2 - 192\kappa^2\mu^2 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Οπότε η λύση για ένα εισερχόμενο κύμα στον ορίζοντα γεγονότων είναι:

$$R \sim \exp\{-i(\omega - qA(r_+))r_*\}, \qquad r \to r_+ \ (r_* \to -\infty) \tag{6.30}$$

και η λύση για ένα δέσμιο εκπεμπόμενο κύμα στο άπειρο είναι:

$$R \sim \exp\left\{ - i\sqrt{\omega^2 - 192\kappa^2\mu^2}r_*\right\}, \qquad r \to \infty \ (r_* \to \infty) \tag{6.31}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση:

$$|R|^2 = |I|^2 - \frac{\omega - qA(r_+)}{\sqrt{\omega^2 - 192\kappa^2\mu^2}}(|T|^2 - |O|^2) \tag{6.32}$$

Οπότε για να έχουμε ενύσχιση του σκεδαζόμενου κύματος πρέπει να ισχύει:

$$\omega < qA(r_+) \tag{6.33}$$

Άρα

$$\omega < q\left(\sqrt{15}(\frac{Q^3}{3r_H^3} - \frac{8\kappa Q}{r_H})\right) \tag{6.34}$$

6.3.1 Το Δυναμικό

Αν γυρίσουμε τώρα στο δυναμικό της εξίσωσης κίνησης του πεδίου στις κανονικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\Delta^2}\left[(\frac{d\Delta}{dr})^2 - 2\Delta\frac{d^2\Delta}{dr^2} + 4U\right] \\ &= \frac{1}{4\Delta^2}(\frac{d\Delta}{dr})^2 - \frac{1}{2\Delta}\frac{d^2\Delta}{dr^2} + \frac{U}{\Delta^2} \\ &= \left[\frac{1}{2F}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r} - \frac{1}{4X}\frac{dX}{dr}\right]^2 + \frac{1}{2F}\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dF}{dr} - \frac{1}{2FX}\frac{dX}{dr}\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2} \\ &\quad - \frac{2}{2Xr}\frac{dX}{dr} - \frac{1}{4X}\frac{d^2X}{dr^2} + \frac{3}{8X^2}(\frac{dX}{dr})^2 + \frac{XU}{F^2r^4} \end{aligned} \tag{6.35}$$

Οπότε αντικαθειστώντας τις συναρτήσεις $F(r)$, $X(r)$ και $U(r)$ και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στο δυναμικό:

$$\begin{aligned}
V = &\frac{1}{r^2} + \frac{6Q^4}{(Q^2 r - 8\kappa r^3)^2} + \frac{-5Q^4 + 24\kappa Q^2 r^2}{(Q^2 r - 8\kappa r^3)^2} + \frac{2(4Q^4 - 96\kappa Q^2 r^2 + M r^3)}{r^6} \\
&+ \frac{4Q^2}{Q^2 r^2 - 8\kappa r^4} + \frac{10Q^4 - 144\kappa Q^2 r^2 + M r^3}{r^2\big(Q^4 - 48\kappa Q^2 r^2 + r^3(M - 192\kappa^2 r)\big)} \\
&- \frac{2Q^2(4Q^4 - 96\kappa Q^2 r^2 + M r^3)}{r^2(Q^2 - 8\kappa r^2)\big(Q^4 - 48\kappa Q^2 r^2 + r^3(M - 192\kappa^2 r)\big)} + \Bigg(\frac{1}{r} + \frac{Q^2}{8\kappa r^3 - Q^2 r} \\
&- \frac{\big(4Q^4 - 96\kappa Q^2 r^2 + M r^3\big)\big(Q^4 - 48\kappa Q^2 r^2 + r^3(M - 192\kappa^2 r)\big)}{2r^9}\Bigg)^2 \\
&+ \frac{(Q^2 - 8\kappa r^2)^2}{3r^2\big(Q^4 - 48\kappa Q^2 r^2 + r^3(M - 192\kappa^2 r)\big)^2}\Bigg(9(Q^4 - 48\kappa Q^2 r^2 \\
&+ r^3(M - 192\kappa^2 r))\big(l(l+1) + r^2\mu^2\big) + (\sqrt{15}qQ(Q^2 - 24\kappa r^2) - 3r^3\omega)^2\Bigg)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

6.4 Συμπεράσματα

Για να έχουμε αστάθεια λόγω *superradiance* απαιτείται:

(α) τα σκεδαζόμενα πεδία να ενισχύονται

(β) η ύπαρξη πηγαδιού δυναμικού έξω από τη μαύρη τρύπα

Όπως είδαμε, για τη περίπτωση που η κοσμολογική σταθερά είναι άνιση του μηδενός δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια συνθήκη για την ύπαρξη του φαινομένου *superradiance*. Στη περίπτωση όμως που η κοσμολογική σταθερά είναι μηδέν, $\Lambda = 0$, βρίσκουμε τη συνθήκη για τη σκέδαση *superradiance*.

$$\omega < q\Bigg(\sqrt{15}\big(\frac{Q^3}{3r_H^3} - \frac{8\kappa Q}{r_H}\big)\Bigg)$$

Βρήκαμε το δυναμικό για τη δεύτερη περίπτωση και με την περαιτέρω μελέτη του, μπορούμε να δούμε αν υπάρχει πηγάδι έξω από τη μελανή οπή, ώστε το σωματίδιο να μπορεί να πραγματοποιήσει αλλεπάλληλες σκεδάσεις και να συμπαιρένουμε αν η μελανή οπή είναι σταθερή ή όχι!

Βιβλιογραφία

1. James B. Hartle - Gravity An Introduction to Einstein's General Relativity, San Fransisco Addison Wesley. 2003

2. Sean M. Carroll - Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity, San Fransisco Addison Wesley. 2004

3. Richard Brito,Vitor Cardoso,Paolo Pani - Superradiance, September 7, 2015

4. J. D. Bekenstein, "Extraction of energy and charge from a black hole", Phys. Rev. D **7**, 949 (1973)

5. S. Hod, "Stability of the extremal Reissner-Nordstrom black hole to charged scalar perturbations" Phys. Lett. B 713, 505 (2012)

6. S. Hod, "No-bomb theorem for charged Reissner-Nordstroem black holes", Phys. Lett. B 718, 1489 (2013)

7. T. Kolyvaris and E. Papantonopoulos, "Superradiant Amplification of a Scalar Wave Coupled Kinematically to Curvature Scattered off a Reissner-Nordstrom Black Hole", arXiv:1702.04618 [gr-qc]

8. A. Cisterna and C. Erices, "Asymptotically locally AdS and flat black holes in the presence of an electric field in the Horndeski scenario", arXiv: 1401.4479, (2014)

9. "Gravitation Collapse of Matter Coupled to High Curvature", May 10, 2015

10. R. Goswami and P. S Joshi, "Naked Singularity formation in scalar field collapse"