



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης

Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της
Ισορροπίας των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη
Μέθοδο των Τεκνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για
Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής με τη
Συνεχή Συζυγή Μέθοδο

Διπλωματική Εργασία

Καρανικόλας Βασίλειος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής
Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης

**Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της Ισορροπίας
των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη Μέθοδο των
Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για Αεροδυναμική
Βελτιστοποίηση Μορφής με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο**

Διπλωματική Εργασία

Καρανικόλας Βασίλειος

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2018

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη-προγραμματισμός και πιστοποίηση λογισμικού αριθμητικής επίλυσης ροών που εμφανίζουν περιοδικότητα, με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, σε εφαρμογές βελτιστοποίησης μορφής μεμονωμένου αεροδυναμικού σώματος, με τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο. Κατά τη διάρκεια αυτής της διπλωματικής εργασίας, επεκτάθηκε ήδη υπάρχον λογισμικό επίλυσης διδιάστατης, ατρίβους ροής, συμπιεστού ρευστού, που αναπτύχθηκε από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ. Για την παραγωγή μη-δομημένου, καρτεσιανού πλέγματος, το λογισμικό αυτό χρησιμοποιεί τη Μέθοδο Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell Method), που ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των Μεθόδων Εμβαπτιζόμενων Ορίων (Immersed Boundary Method).

Ειδικότερα, το λογισμικό που αναπτύχθηκε, επιλύει περιοδικές ροές τόσο στο ευθύ όσο και στο συζυγές πρόβλημα, με γνωστή τη διέγερση της επ' άπειρο γωνίας ροής, σε προβλήματα εξωτερικής αεροδυναμικής, γύρω από μια αεροτομή. Αρχικά, η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόζεται στις πεδιακές εξισώσεις της πρωτεύουσας ροής και γίνεται μια σύντομη πιστοποίηση των αποτελεσμάτων, σε σχέση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πιστοποιημένο λογισμικό επίλυσης της ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της χρονο-προέλασης (time-marching). Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόζεται στις πεδιακές συζυγείς εξισώσεις ροής και πιστοποιείται σε τέσσερις εφαρμογές βελτιστοποίησης μορφής μεμονωμένου αεροδυναμικού σώματος. Τα αποτελέσματα από τη βελτιστοποίηση αυτή αναφέρονται σε διαφορετικού τύπου αεροτομές, διεγέρσεις γωνίας της επ' άπειρο ροής, οριακών συνθηκών και περιόδου διέγερσης του φαινομένου. Η ανάπτυξη του λογισμικού έγινε σε γλώσσα C++.



National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Fluids Section
Lab of Thermal Turbomachines
Parallel CFD & Optimization Unit

Formulation and Programming of the Harmonic Balance Technique for the Continuous Adjoint Method Based Aerodynamic Shape Optimization, using the Cut Cell Method

Diploma thesis

Karanikolas Vasileios

Advisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, 2018

Abstract

The aim of this diploma thesis is the development-programming and validation of software, that numerically solves periodic flows, with the Harmonic Balance Method, in airfoil shape optimization applications, with the Continuous Adjoint Method. An already extistent software, originally developed by PCopt of NTUA, that solves 2D, inviscid and compressible flows, has been extended. This software uses the Cut-Cell Method, which belongs in a wider class of Immersed Boundary Methods, for the generation of unstructured, cartesian grids.

Specifically, the developed software is used in external aerodynamics problems and solves periodic flows for both the primal and adjoint problem, with a known stimulation of the infinite flow angle. First, the Harmonic Balance Method is applied in the primal field equations and is briefly validated by the software, which developed by the PCopt of NTUA and uses the time-marching method. Also, the Harmonic Balance Method is applied in the field adjoint equations and is validated in four different applications of airfoil shape optimization. The results refer to airfoils of different shape, periodic changes in the infinite flow angle, boundary conditions and periods of oscillation. The software development was made in C++.

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας σημαίνει το τέλος των σπουδών μου στη Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του ΕΜΠ. Γι' αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω ορισμένα πρόσωπα που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς και στην εμπειρία μου από τη σχολή τα τελευταία πέντε χρόνια.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Κ. Χ. Γιαννάκογλου, που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα σε αυτήν την εργασία. Επίσης, τον ευχαριστώ για την προθυμία που έδειξε για επίλυση αποριών, τη διόρθωση της εργασίας αυτής, καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Σαμούχο για το ζήλο που έδειξε στην επίλυση και επεξήγηση όποιων αποριών προέκυπταν, όσον αφορά το κομμάτι της ανάπτυξης του λογισμικού.

Επίσης, ευχαριστώ τους φίλους και συμφοιτητές μου, που μου πρόσφεραν τη στήριξη και συντροφιά τους όλα αυτά τα χρόνια στη σχολή.

Τέλος, το θερμότερο "ευχαριστώ" το οφείλω στην οικογένειά μου, που με αρκετές θυσίες και υπομονή, μου πρόσφεραν την ψυχολογική και υλική στήριξη που χρειαζόμουν, για να πραγματοποιήσω τα όνειρά μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	iv
Abstract	v
Ευχαριστίες	vi
Ακρωνύμια	ix
1 Εισαγωγή	1
1.1 Στόχος και δομή της διπλωματικής εργασίας	1
2 Η Μέθοδος Τεμνόμενων Κυφελών	3
2.1 Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	3
2.2 Κατηγορίες Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	4
2.2.1 Συνεχής Προσέγγιση (Continuous Forcing Approach) . . .	5
2.2.2 Διακριτή Προσέγγιση (Discrete Forcing Approach)	7
2.2.3 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Μεθόδων Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων	9
2.2.4 Μέθοδος Τεμνόμενων Κυφελών (Cut-Cell Method)	10
2.3 Διακριτοποίηση Υπολογιστικού Χωρίου	11
2.3.1 Τρόπος Αποθήκευσης Δεδομένων με τη Δομή Quadtree .	15
3 Διακριτοποίηση εξισώσεων Euler	19
3.1 Οι Εξισώσεις Euler	19
3.1.1 Η εξίσωση Τελείων Αερίων	20
3.1.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων Euler με την Μέθοδο των Πε- περασμένων Όγκων	21
3.2 Διακριτοποίηση Ατριβών Όρων	23
3.2.1 Υπολογισμός Ιακωβιανού Μητρώου	24
3.2.2 Καθορισμός Τάξης Ακρίβειας Διακριτοποίησης	29
3.2.2.1 Χωρική Διακριτοποίηση 1ης Τάξης	29
3.2.2.2 Χωρική Διακριτοποίηση 2ης Τάξης	30
3.2.2.3 Χρήση Περιοριστή	31
3.2.3 Διατύπωση του Σχήματος Roe	32
3.3 Διακριτοποίηση Χρονικών Όρων	35
3.4 Οριακές Συνθήκες	36
3.4.1 Οριακές Συνθήκες στα Στερεά Όρια	36

3.4.2	Οριακές Συνθήκες στα Επ' άπειρο Όρια	37
3.5	Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης Εξισώσεων Euler	38
3.5.1	Προσθήκη Ψευδοχρονικού Όρου	40
3.5.2	Υπολογισμός Διαγώνιων και Μη-Διαγώνιων Όρων	43
4	Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών	49
4.1	Εισαγωγή	49
4.2	Μαθηματική Θεμελίωση	49
4.2.1	Εφαρμογή της Μεθόδου για Δύο Αρμονικές	52
4.2.2	Γενίκευση για Περισσότερες από Δύο Αρμονικές	56
4.3	Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις	58
4.4	Πιστοποίηση Αποτελεσμάτων της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών για το Ευθύ Πρόβλημα	62
4.4.1	Περιγραφή Χαρακτηριστικών του Προβλήματος	62
4.4.2	Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις	68
4.4.2.1	Επίλυση με Διαφορετικό Αριθμό Αρμονικών και Σύγκριση	72
5	Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη, Συμπιεστή Ροή	75
5.1	Εισαγωγή	75
5.2	Μαθηματική Διατύπωση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	76
5.2.1	Συνάρτηση Κόστους/Στόχου	76
5.2.2	Μεταβλητές Σχεδιασμού	77
5.2.3	Ανάπτυξη Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου	78
5.2.4	Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση (FAE)	84
5.2.5	Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (ABC)	86
5.2.6	Παράγωγοι Ευαισθησίας (SD)	86
5.3	Εφαρμογή της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στη Συζυγή Πεδιακή Εξίσωση	87
5.3.1	Εφαρμογή της Μεθόδου για Τρεις Αρμονικές	89
6	Πιστοποίηση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε Βελτιστοποίηση Μορφής	95
6.1	Περιγραφή Χαρακτηριστικών του Προβλήματος	95
6.2	Περίπτωση 1η - Μη-Συμμετρική Αεροτομή	98
6.3	Περίπτωση 2η - Διχητική Ροή	108
6.4	Περίπτωση 3η - Μικρότερη Περίοδος Διέγερσης	116
6.5	Περίπτωση 4η - Πολύπλοκη Διαταραχή της Επ' Άπειρο Γωνίας	126
7	Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα	133
	Βιβλιογραφία	137

Ακρωνύμια

ΕΜΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

CFD	Computational Fluid Dynamics
PCopt	Parallel CFD & Optimization Unit
NTUA	National Technical University of Athens
IBM	Immersed Boundary Methods
IB	Immersed Boundary
DLM	Distributed Lagrange Multiplier
IIM	Immersed Interface Method
HB	Harmonic Balance
RMSE	Root-Mean-Square Error
FAE	Field Adjoint Equation
ABC	Adjoint Boundary Condition
SD	Sensitivity Derivative

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στόχος και δομή της διπλωματικής εργασίας

Στόχος αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων διαδιάστατης μη-συνεκτικής και μη-μόνιμης ροής, συμπιεστού ρευστού, και η βελτιστοποίηση μεμονωμένων αεροδυναμικών σωμάτων, με τη χρήση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών, σε χωρίο με Τεμνόμενες Κυψέλες (Cut-Cell). Από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ παρασχέθηκε ήδη υπάρχον λογισμικό, που επιλύει μη-μόνιμες ατριβείς ροές Euler, σε χωρίο με Τεμνόμενες Κυψέλες, με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Το λογισμικό που αναπτύχθηκε στα πλαίσια αυτής της εργασίας, είναι γραμμένο σε γλώσσα C++ και επεκτείνει το υπάρχον, ως προς την επίλυση περιοδικών ροών με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών για το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα

Η δομή αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι:

- **Κεφάλαιο 2:** Εκθέτονται περιγραφικά διάφορες τεχνικές πλεγματοποίησης, που χαρακτηρίζονται ως Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων, οι οποίες επιτρέπουν βύθιση του στερεού ορίου σε χωρίο με καρτεσιανό πλέγμα. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται αναλυτικότερα η Μέθοδος των Τεμνόμενων Κυψελών, η διαδικασία πλεγματοποίησης που εφαρμόζεται σε αυτή τη διπλωματική εργασία και τα οφέλη που παρέχει στην εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου.
- **Κεφάλαιο 3:** Διακριτοποιούνται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων οι διδιάστατες εξισώσεις Euler, για μη-συνεκτική ροή, συμπιεστού ρευστού. Παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες του προβλήματος και αναλύεται ο επαναληπτικός αλγόριθμος επίλυσης των εξισώσεων αυτών.
- **Κεφάλαιο 4:** Για περιοδική (μη-μόνιμη) ροή, με γνωστή διέγερση αποδει-

κνύεται συνοπτικά το σύστημα εξισώσεων επίλυσης της ροής με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών. Στη συνέχεια, πιστοποιούνται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών, σε σχέση με τη Μέθοδο της Χρονο-Προέλασης, σε πεδίο ροής γύρω από μια συμμετρική αεροτομή.

- **Κεφάλαιο 5:** Διατυπώνεται η μαθηματική έκφραση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου, για διδιάστατη, μη-μόνιμη και μη-συνεκτική ροή, συμπιεστού ρευστού, και εκφράζονται η Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση (FAE), οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (ABC) και οι Παράγωγοι Ευαισθησίας (SD). Επίσης, εφαρμόζεται η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών για το συζυγές πρόβλημα.
 - **Κεφάλαιο 6:** Πιστοποιούνται σε τέσσερις εφαρμογές τα αποτελέσματα που δίνει η διαδικασία βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής σώματος, με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, σε σχέση με τη Μέθοδο Χρονο-Προέλασης.
 - **Κεφάλαιο 7:** Παρατάσσονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών, καθώς και τα τελικά οφέλη και οι περιορισμοί που αυτή παρουσιάζει. Επίσης, αναφέρονται κάποιες ενδεικτικές προτάσεις για μελλοντικές διπλωματικές εργασίες πάνω στο ίδιο πεδίο.
-

Κεφάλαιο 2

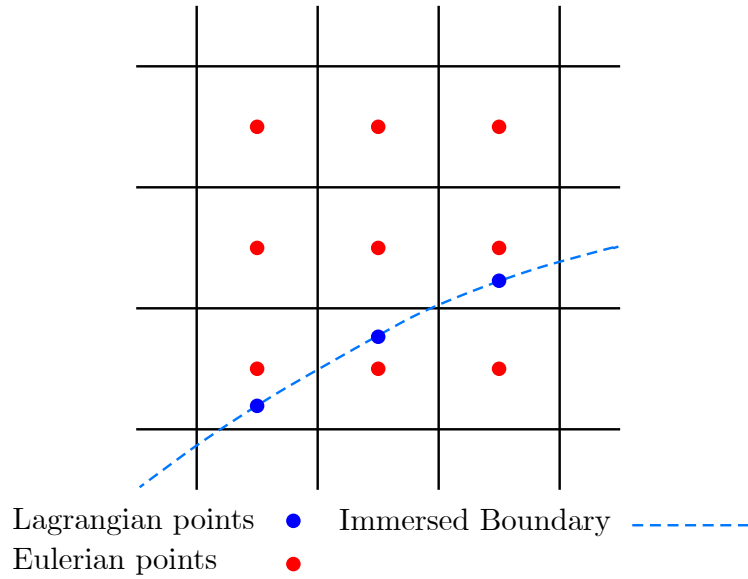
Η Μέθοδος Τεμνόμενων Κυψελών

2.1 Μέθοδοι Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Με τον όρο "Μέθοδος μη-οριόδετων πλεγμάτων" (*Immersed Boundary Method - IBM*), ονομάζεται η μέθοδος που αναπτύχθηκε πρώτα από τον Charles S. Peskin [1], ο οποίος προσομοίωσε την καρδιακή λειτουργία και τη ροή του αίματος διαμέσου της καρδιάς, επιλύοντας τις τριδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή [2][3], η διακριτοποίηση του χωρίου γίνεται με καρτεσιανό πλέγμα (*Cartesian Grid*), του οποίου τα όρια δεν προσαρμόζονται στη γεωμετρία του υπό μελέτη σώματος. Παρατηρείται, λοιπόν, ότι, το στερεό σώμα "εμβαπτίζεται" στο πλέγμα και συνεπώς, το στερεό όριο τέμνει κάποιες από τις κυψέλες του υπολογιστικού χωρίου. Επομένως, υπάρχουν οι ροϊκές (*fluid*) κυψέλες, οι οποίες ανήκουν εξ ολοκλήρου στο ρευστό, οι στερεές (*solid*) κυψέλες, οι οποίες είναι πλήρως "βυθισμένες" στο στερεό όριο και οι τεμνόμενες (*cut*) κυψέλες, οι οποίες τέμνονται εν μέρει από το όριο της γεωμετρίας.

Η IBM είναι παράλληλα μαθηματική διατύπωση και αριθμητικό σχήμα. Η μαθηματική διατύπωση χρησιμοποιεί ένα μίγμα μεταβλητών Euler και Lagrange. Οι μεταβλητές αυτές συνδέονται μέσω εξισώσεων αλληλεπίδρασης, στις οποίες η γενικευμένη συνάρτηση του Dirac (*Dirac delta function*)¹ παίζει καθοριστικό ρόλο. Στο αριθμητικό σχήμα, το οποίο βασίζεται στη διατύπωση της IBM, η περιγραφή των ροϊκών ποσοτήτων γίνεται με μεταβλητές Euler (*Eulerian variables*), οι οποίες καθορίζονται από το σταθερό καρτεσιανό πλέγμα. Από την άλλη, η περιγραφή του κινούμενου στερεού βασίζεται σε μεταβλητές Lagrange (*Lagrangian variables*), οι οποίες καθορίζονται από ένα καμπυλόγραμμο πλέγμα που κινείται ελεύθερα διαμέσου του Euler πλέγματος, χωρίς να περιορίζεται καθόλου ως προς την προσαρμογή

του σε αυτό [4].



Σχήμα 2.1: Σταθερό πλέγμα που χρησιμοποιεί περιγραφή μεταβλητών Euler για την αποθήκευση των ροϊκών μεγεθών και εμβαπτιζόμενο στερεό όριο (immersed boundary) που χρησιμοποιεί περιγραφή μεταβλητών Lagrange.

2.2 Κατηγορίες Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Για ατριβή ροή ασυμπίεστου ρευστού, γύρω από στερεό σώμα, ισχύουν οι εξισώσεις Euler:

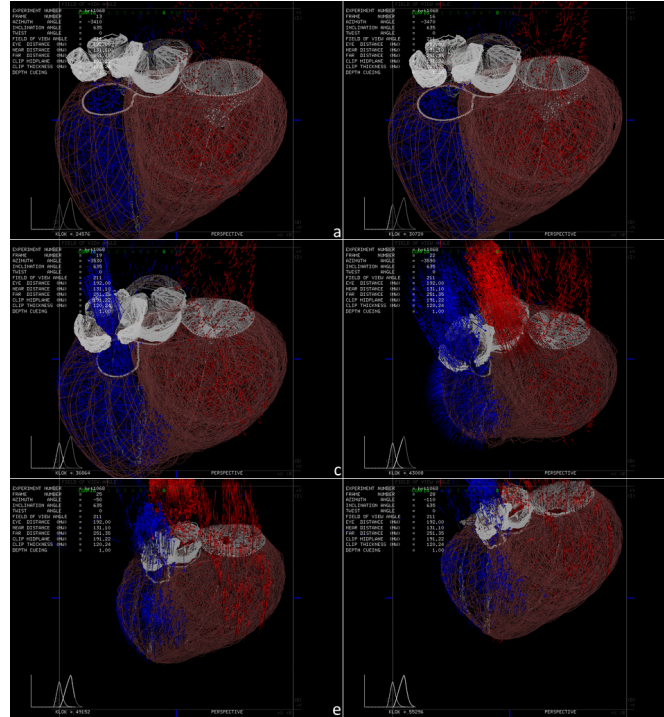
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad , \quad \text{στο } \Omega_f \quad (2.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_\Gamma \quad , \quad \text{στο } \Gamma_b \quad (2.3)$$

όπου $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ είναι η ταχύτητα του ρευστού, $\vec{p} = \vec{p}(\vec{x}, t)$ είναι η στατική πίεση του ρευστού, ρ η πυκνότητά του, Ω_f είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το ρευστό και Γ_b είναι η επιφάνεια του στερεού σώματος.

¹Συνάρτηση δέλτα: $\delta(x) = \begin{cases} +\infty & , \text{ για } x = 0 \\ 0 & , \text{ για } x \neq 0 \end{cases}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$



Σχήμα 2.2: Έξι στιγμιότυπα από έναν πλήρη κύκλο λειτουργίας της καρδιάς, όπως μοντελοποιήθηκε μέσω της IBM από τους David M. McQueen, Charles S. Peskin και Estarose Wolfson [5]

2.2.1 Συνεχής Προσέγγιση (Continuous Forcing Approach)

Στη συνεχή προσέγγιση, χρησιμοποιείται μια συνάρτηση επιβολής (*forcing function*) \vec{f} , η οποία προσομοιάζει την επίδραση του στερεού ορίου σε όλη την έκταση του υπολογιστικού χωρίου. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως όρος πηγής, που προστίθεται στη Σχέση 2.1 και έχει αυξημένη επίδραση στις κυψέλες κοντά στο στερεό όριο και αποσβένει μακριά από αυτό [4].

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = \vec{F}_k \quad (2.4)$$

Διάφορες μέθοδοι που ακολουθούν τη Συνεχή Προσέγγιση και εφαρμόζουν παραλλαγές της συνάρτησης επιβολής είναι [6]:

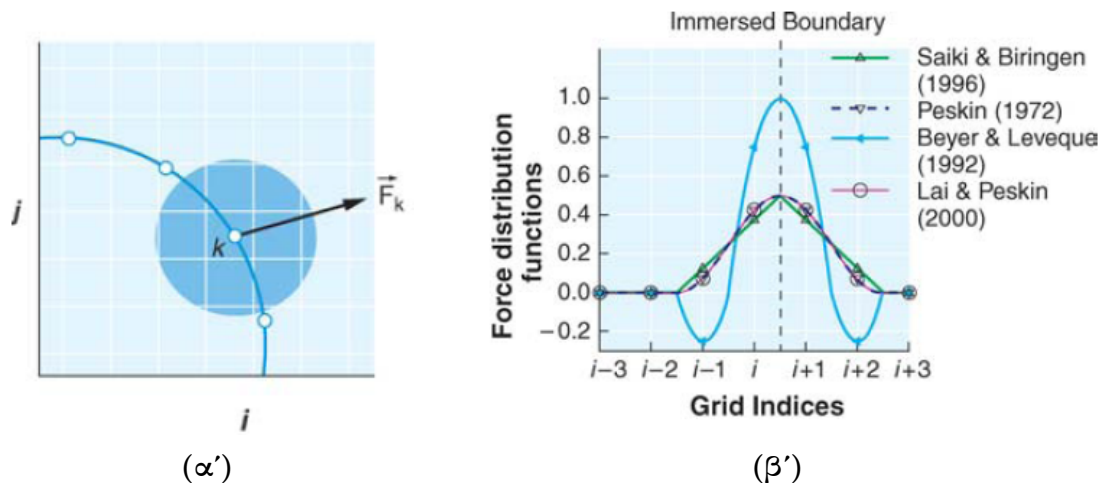
- Ελαστικά όρια (Elastic boundaries): Χρησιμοποιήθηκαν από τον Charles S. Peskin το 1972 για την προσομοίωση της καρδιακής λειτουργίας [1][4]. Όπως προαναφέρθηκε, η μέθοδος αυτή είναι ένα μίγμα μεταβλητών Euler και Lagrange, και πεπερασμένων διαφορών, που υπολογίζει την αλληλεπίδραση της ροής με ένα ευέλικτο εμβαπτιζόμενο όριο. Ο Peskin καθορίζει τη συνάρτηση επιβολής $\vec{f}(\vec{x}, t)$ μέσω μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης Δέλτα (δ) και την

εφαρμόζει από κάθε σημείο Lagrange του στερεού ορίου σε μια γειτονική ομάδα σταθερών σημείων Euler του διακριτού πλέγματος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.3α'.

- Άκαμπτα όρια (Rigid boundaries): Η πρώτη προσέγγιση στα άκαμπτα όρια έγινε από τους D. Goldstein, R. Handler και L. Sirovich [7]. Η κύρια ιδέα αυτής της μεθόδου είναι, η μεταχείριση της επιφάνειας του στερεού σώματος ως ένα πρακτικώς υπάρχον όριο, ενσωματωμένο στη ροή. Το όριο αυτό ασκεί δύναμη στο ρευστό, έτσι ώστε το ρευστό να παραμείνει ακίνητο πάνω στην επιφάνεια του στερεού ορίου (συνθήκη μη-ολίσθησης). Στην πράξη, ο Goldstein κ.α. φρόντισαν τα σημεία του στερεού ορίου να ταυτίζονται με κόμβους του πλέγματος. Ωστόσο, για να δημιουργηθεί λεία επιφάνεια, αντί για κλιμακωτή με γωνίες, η οριακή δύναμη πολλαπλασιάζεται με μια περιορισμένη κατανομή Gauss, έτσι ώστε οι γειτονικοί πλεγματικοί κόμβοι να λάβουν μέρος της επίδρασης της δύναμης.
- Μέθοδος Κατανεμημένου Πολλαπλασιαστή Lagrange (Distributed Lagrange Multiplier Method - DLM): Στην DLM, όπως αναπτύχθηκε από τους R. Glowinski, T.W. Pan και J. Périaux [8], χρησιμοποιούνται πολλαπλασιαστές Lagrange στο εμβαπτιζόμενο άκαμπτο όριο (για να ικανοποιείται η συνθήκη μη-ολίσθησης) και προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία στο νέο πρόβλημα.
- Μέθοδος Εμβαπτιζόμενης Διεπαφής (Immersed Interface Method - IIM): Στην IIM, όπως αναπτύχθηκε από τους L. Lee και R.J. Leveque [9], χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις της δύναμης των ελαστικών ορίων και η διεπαφή ανιχνεύεται ρητά με Lagrangian τρόπο.

Το βασικό πλεονέκτημα της συνεχούς προσέγγισης είναι ότι, οι παραπάνω μέθοδοι είναι ανεξάρτητοι της υποκείμενης χωρικής διακριτοποίησης, σε αντίθεση με τις μεθόδους που είναι βασισμένες στη διακριτή προσέγγιση (*discrete forcing approach*). Επομένως, αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί σε έναν έτοιμο επιλύτη Navier-Stokes με σχετική ευκολία.

Ένα μειονέκτημα της συνεχούς προσέγγισης είναι ότι, η εξομάλυνση της συνάρτησης επιβολής οδηγεί, εκ φύσεως, στη δυσκολία ακριβούς αναπαράστασης της επιφάνειας του εμβαπτιζόμενου ορίου. Συνεπώς, οι προσεγγίσεις αυτές είναι ακατάλληλες για χρήση σε ροές με υψηλό αριθμό Reynolds. Ένα ακόμα μειονέκτημα είναι η απαίτηση της επίλυσης των κύριων εξισώσεων, όχι μόνο στις κυψέλες του πεδίου ροής, αλλά και μέσα στο εμβαπτιζόμενο σώμα. Με αύξηση του αριθμού Reynolds, αυξάνεται και η αναλογία υπολογιστικών κυψελών μέσα στο όριο [10].



Σχήμα 2.3: (α'): Εφαρμογή συνάρτησης επιβολής από Lagrangian σημεία του στερεού ορίου, στους περιβάλλοντες Eulerian κόμβους του πλέγματος. (β'): Συναρτηρήσεις κατανομής της δύναμης επιβολής, όπως υπολογίζονται σε διάφορες μελέτες

2.2.2 Διακριτή Προσέγγιση (Discrete Forcing Approach)

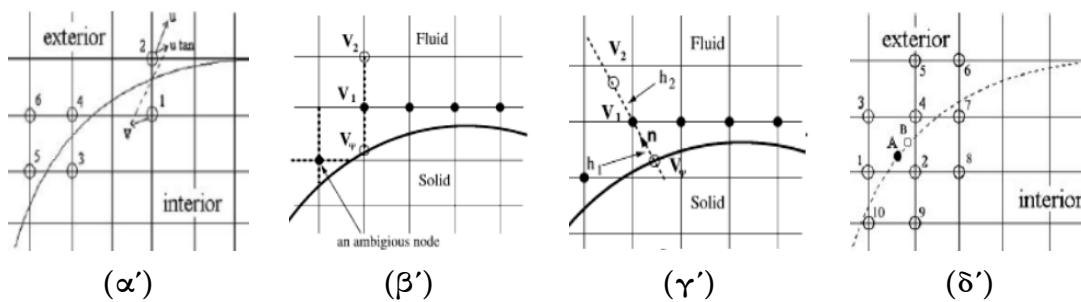
Στη Διακριτή Προσέγγιση, δεν χρειάζεται να υπολογιστεί κάποια συνάρτηση επιβολής οριακών συνθηκών, οπότε είναι καταλληλότερη για υψηλούς αριθμούς Reynolds, σε αντίθεση με τη Συνεχή Προσέγγιση. Σύμφωνα με αυτές τις μεθόδους, η διακριτοποίηση του υπολογιστικού χώρου παραμένει ανεπηρέαστη από το σώμα και η επίδραση του στερεού ορίου γίνεται μετά το πέρας της διακριτοποίησης αυτής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι βασικότερες μέθοδοι που αναπτύχθηκαν με Διακριτή Προσέγγιση [6]:

- Μέθοδος άμεσης επιβολής (*Direct forcing method*): Αναπτύχθηκε από τον J. Mohd-Yusof [11] και χρησιμοποιεί έναν όρο επιβολής, ο οποίος καθορίζεται από τη διαφορά μεταξύ των παρεμβαλλόμενων ταχυτήτων στα οριακά σημεία και στις επιθυμητές (φυσικές) οριακές ταχύτητες και συνεπώς, εξουδετερώνει τα σφάλματα που προκύπτουν μεταξύ των δύο κατανομών. Ειδικότερα, δημιουργεί ένα στρώμα εσωτερικών και εξωτερικών σημείων, συμμετρικά ως προς το εμβαπτιζόμενο όριο και εκτελεί μια σταθμισμένη γραμμική παρεμβολή για τις ταχύτητες των εξωτερικών σημείων, επιβάλλοντας, με αυτόν τον τρόπο, την επιθυμητή επαπτομενική ταχύτητα στο όριο. Η μέθοδος αργότερα βελτιώθηκε από τους Fadlun [12], Balaras [13], Gilmanov [14], Zhang [15], Choi [16], Ikeno [17] κ.α. Παραδείγματα της μεθόδου άμεσης επιβολής, όπως αναπτύχθηκαν από διάφορες μελέτες, φαίνονται στο Σχήμα 2.4.
- Μέθοδος των Ψευδο-Κυψελών (*Ghost-Cell IBM*): Αναπτύχθηκε από τους Yu-Heng Tseng και Joel H. Ferziger [18] και σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, επιχειρείται μια υψηλότερης τάξης αναπαράσταση του ορίου, χρησιμοποιών-

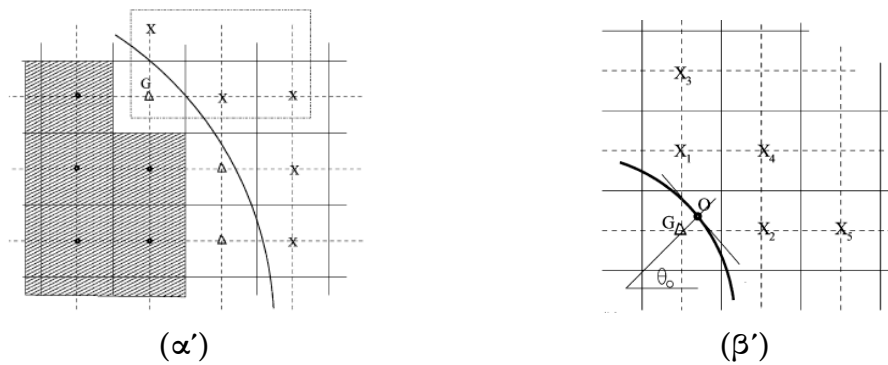
τας μια ζώνη με ψευδο-κυψέλες μέσα στο σώμα. Ψευδο-κυψέλες ονομάζονται οι κυψέλες, οι οποίες έχουν τουλάχιστον μια γειτονική κυψέλη με κόμβο μέσα στο ρευστό. Για κάθε μια τέτοια κυψέλη, πρέπει να δημιουργηθεί ένα σχήμα παρεμβολής, το οποίο έμμεσα ενσωματώνει την οριακή συνθήκη στο εμβαπτιζόμενο όριο. Μια απλή λύση για το σχήμα παρεμβολής είναι η διγραμμική παρεμβολή (*bilinear interpolation*) για διδιάστατο πεδίο ή τριγραμμική (*trilinear interpolation*) για τριδιάστατο. Ένα άλλο σχήμα είναι ο συνδυασμός γραμμικής (στην εφαπτομενική διεύθυνση) και πολυωνυμικής παρεμβολής (στην κανονική διεύθυνση). Εκτενέστερη αναφορά και εμβάθυνση στη μέθοδο των Ψευδο-Κυψελών, παρουσιάζεται στη διπλωματική εργασία της Δανάης Χατζηνικολάου[19]. Παράδειγμα της μεθόδου των Ψευδο-κυψελών φαίνεται εποπτικά στο Σχήμα 2.5.

Ένα πλεονέκτημα των μεθόδων διακριτής προσέγγισης είναι ότι, όλες μπορούν να αναπαραστήσουν λεπτομερώς το εμβαπτιζόμενο όριο (IB), το οποίο είναι αναγκαία συνθήκη για την επίλυση ροών με υψηλούς αριθμούς Reynolds. Δεν εισάγουν επιπλέον περιορισμούς σταθερότητας για την αναπαράσταση στερεών σωμάτων, επειδή ο χρήστης δεν καθορίζει πλέον παραμέτρους για συναρτήσεις επιβολής οριακών συνθηκών. Επίσης, οι μέθοδοι διακριτής προσέγγισης απεμπλέκουν τις εξισώσεις μεταξύ κόμβων ρευστού και κόμβων στερεού σώματος.

Ένα μειονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι η ισχυρή εξάρτηση που έχουν από τη μέθοδο διακριτοποίησης, σε αντίθεση με τις μεθόδους της συνεχούς προσέγγισης. Ωστόσο, το γεγονός αυτό επιτρέπει άμεσο έλεγχο στην αριθμητική ακρίβεια, σταθερότητα και στις διακριτές ιδιότητες διατήρησης του επιλύτη. Ένα ακόμα μειονέκτημα, το οποίο δεν έχουν οι μέθοδοι συνεχούς προσέγγισης, είναι η αδυναμία ευθείας εφαρμογής, μιας και η διακριτοποίηση προηγείται της επιβολής οριακών συνθηκών, καθώς και η δυσκολία περιγραφής κινούμενης γεωμετρίας.



Σχήμα 2.4: Σχηματικές αναπαραστάσεις παρεμβολής μεταξύ εσωτερικών και εξωτερικών σημείων για τη διακριτή προσέγγιση. (α'): Mohd-Yusof [11], (β'): Fadlun [12], (γ'): Balaras [13], (δ'): Zhang [15]



Σχήμα 2.5: (α'): Διακριτοποίηση χωρίου με τη μέθοδο Ghost-Cell. \mathbf{X} είναι το κέντρο κυψελών ρευστού, Δ είναι το κέντρο των ghost-cells. (β'): Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας γραμμικής παρεμβολής οριακών συνθηκών από σημείο ghost-cell \mathbf{G} , σε σημείο \mathbf{O} του IB.

2.2.3 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα Μεθόδων Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων

Οι διάφορες μέθοδοι εμβαπτιζόμενων ορίων (IBM) παρουσιάζουν πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα σε σχέση με τις κλασικές μεθόδους οριόδετων (*body-fitted*) πλεγμάτων (δομημένο, μη-δομημένο ή υβριδικό πλέγμα), οι οποίες προσαρμόζουν το πλέγμα στην εκάστοτε γεωμετρία.[6]

Πλεονεκτήματα

Το κυριότερο πλεονέκτημα των IBM είναι η ευκολία δημιουργίας πλέγματος, αφού το πλέγμα είναι καρτεσιανό και δεν επηρεάζεται από την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας. Οι IBM αποδεικνύονται, λοιπόν, γρηγορότερες σε σχέση με τις μεθόδους πλεγματοποίησης με δομημένα ή μη-δομημένα πλέγματα, αφού η παράλειψη υπολογισμού ανταλλοιώτων και συναλλοιώτων διανυσματικών βάσεων σε κάθε κόμβο, σε συνδυασμό με τη δημιουργία απλού καρτεσιανού πλέγματος, εξοικονομούν μνήμη και υπολογιστική ισχύ. Επίσης, σε περίπτωση που γίνεται ανάλυση ροής με κινούμενη γεωμετρία (με μικρές μετακινήσεις), το πλέγμα παραμένει αμετάβλητο στο μεγαλύτερο μέρος του και αλλάζει μόνο κοντά στο στερεό όριο. Οπότε, η διαδικασία επίλυσης γίνεται πιο στιβαρή και ενισχύεται περαιτέρω η ευκολία και ταχύτητα γένεσης πλέγματος, σε σχέση με τις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων, οι οποίες απαιτούν αναπλεγματοποίηση του χωρίου μετά από κάθε επανάληψη στο χρόνο.

Μειονεκτήματα

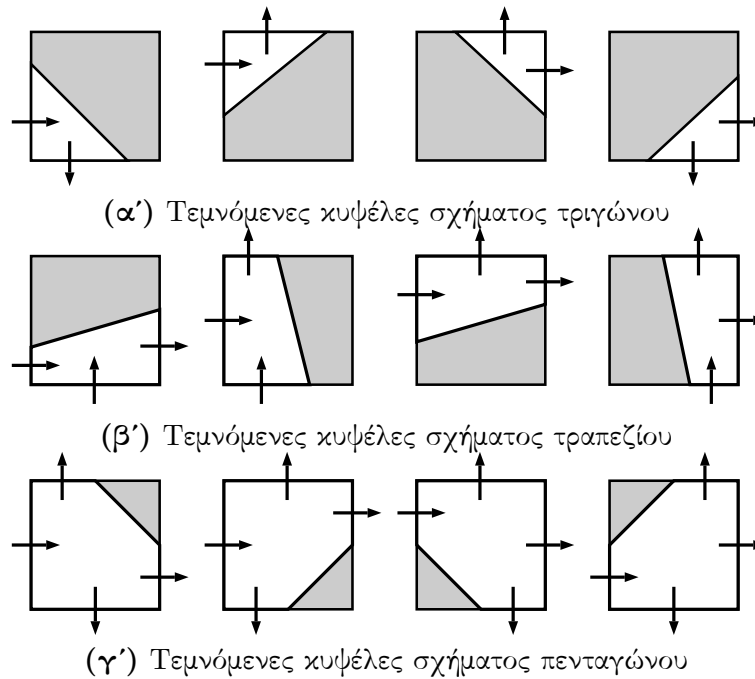
Το βασικό μειονέκτημα των IBM είναι η δυσκολία επιβολής οριακών συνθηκών στο στερεό όριο. Επειδή το κέντρο των οριακών κυψελών δεν συμπίπτει με το στερεό όριο, εισέρχεται αυτομάτως σφάλμα, από τη μεταφορά της πληροφορίας από το κέντρο αυτό σε σημείο πάνω στο στερεό όριο. Η ιδιαιτερότητα αυτή των IBM, επιφέρει αρνητικές συνέπειες στη συντηρητική ιδιότητα των ροϊκών εξισώσεων [20] και καθιστά τη μέθοδο αυτή λιγότερο ακριβή από τις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων, οι οποίες καθορίζουν απλούστερα και ακριβέστερα τις οριακές συνθήκες

της ροής στο στερεό όριο, αφού η γένεση του πλέγματος λαμβάνει άμεσα τη γεωμετρική πληροφορία από το όριο. Ένα ακόμα μειονέκτημα είναι ότι, σε περίπτωση συνεκτικών ροών, καθώς αυξάνεται ο αριθμός Reynolds, στις IBM η αύξηση της πυκνώσης του καρτεσιανού πλέγματος κοντά στο στερεό όριο, είναι εντονότερη σε σχέση με την αντίστοιχη αύξηση σε αυτή τη περιοχή με τις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων [10].

2.2.4 Μέθοδος Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell Method)

Η μέθοδος διακριτοποίησης του χωρίου που χρησιμοποιείται σε αυτή τη διπλωματική εργασία είναι η **Μέθοδος Τεμνόμενων Κυψελών** (*Cut-Cell Method*). Η μέθοδος Cut-Cell μπορεί να κατηγοριοποιηθεί στις μεθόδους διακριτής προσέγγισης, αλλά παράλληλα διαφοροποιείται σημαντικά, αφού το βασικό της στοιχείο είναι η τομή των κυψελών (δηλαδή η αλλαγή της γεωμετρίας των κυψελών), που τέμνονται από το εμβαπτιζόμενο όριο. Έτσι, λοιπόν, το καρτεσιανό πλέγμα κόβεται και προσαρμόζεται στην εκάστοτε γεωμετρία. Οι τεμνόμενες κυψέλες που θα προκύψουν, θα έχουν σχήμα τριγωνικό, τραπεζοειδές ή πενταγωνικό (Σχήμα 2.6). Επίσης, η μέθοδος Cut-Cell δίνει τη δυνατότητα διακριτοποίησης με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Η δυνατότητα αυτή της μεθόδου έχει ως αποτέλεσμα, να είναι η μόνη διακριτή μέθοδος IB, η οποία ικανοποιεί ρητά, τόσο σε κάθε κυψέλη ξεχωριστά, όσο και σε όλο το υπολογιστικό χωρίο, τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας της ροής [10]. Επίσης, ένα ακόμα πλεονέκτημα της μεθόδου τεμνόμενων κυψελών, σε σχέση με άλλες διακριτές μεθόδους IB είναι η εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, γιατί οι εξισώσεις ροής δεν επιλύονται στους κόμβους του χωρίου που βρίσκονται εντός των στερεών ορίων.

Η μεθοδολογία αυτή αρχικά διατυπώθηκε σε καρτεσιανό πλέγμα για ατριβείς ροές (D.K. Clarke κ.α. [21]) και αργότερα εφαρμόστηκε σε τυρβώδεις ροές (Udaykumar κ.α. [22], Ye κ.α. [23]). Αργότερα, η μέθοδος Cut-Cell βελτιώθηκε από τον Kirkpatrick κ.α. [24], για καμπύλο στερεό όριο σε τριδιάστατο πεδίο ροής, εισάγοντας την ιδέα συγχώνευσης πολύ μικρών κυψελών με μεγαλύτερες γειτονικές. Η ιδιότητα αυτή θα ενεργοποιούνταν, αν από τη διαδικασία τομής προέκυπταν πολύ μικρές κυψέλες, οι οποίες θα είχαν αρνητικές συνέπειες στην αριθμητική ευστάθεια του συστήματος [10]. Ωστόσο, η βελτίωση αυτή δεν υιοθετείται στην παρούσα διπλωματική εργασία.



Σχήμα 2.6: Επισκόπηση όλων των πιθανών σχημάτων που προκύπτουν από τομή των κυψελών από το στερεό όριο [6]

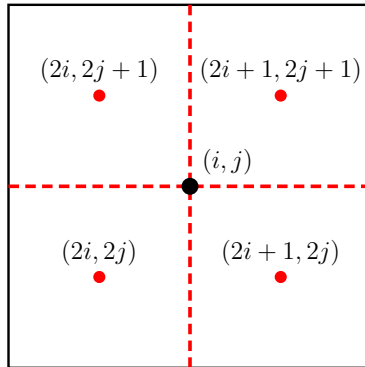
2.3 Διακριτοποίηση Υπολογιστικού Χωρίου

Το υπολογιστικό χωρίο αρχικά διακριτοποιείται με επαναληπτική διαδικασία, έτσι ώστε να αποθηκευτούν τα ροϊκά μεγέθη στους κόμβους που θα προκύψουν. Θα χρησιμοποιηθεί μέθοδος που ανήκει στην κατηγορία των Μεθόδων Μη-Οριόδετων Πλεγμάτων. Για να γίνει η διακριτοποίηση, ο χρήστης αρχικά καθορίζει τις διαστάσεις του ορθογωνικού υπολογιστικού χωρίου στις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις (x, y), τη θέση του μέσου της χορδής της αεροτομής σε σχέση με το πλέγμα, το μέγιστο (V_{max}), ελάχιστο (V_{min}) και οριακό (V_{lim}) εμβαδόν των κυψελών, καθώς και μια απόσταση (d_{max}) ομαλοποίησης της πυκνώσης των κυψελών στο τελικό χωρίο, που θα εξηγηθεί αργότερα. Επίσης, χρησιμοποιείται η δένδρική δομή Quadtree², για αποτελεσματικότερη αποθήκευση του πλέγματος και συνεπώς, εξοικονόμηση μνήμης και υπολογιστικού χρόνου.

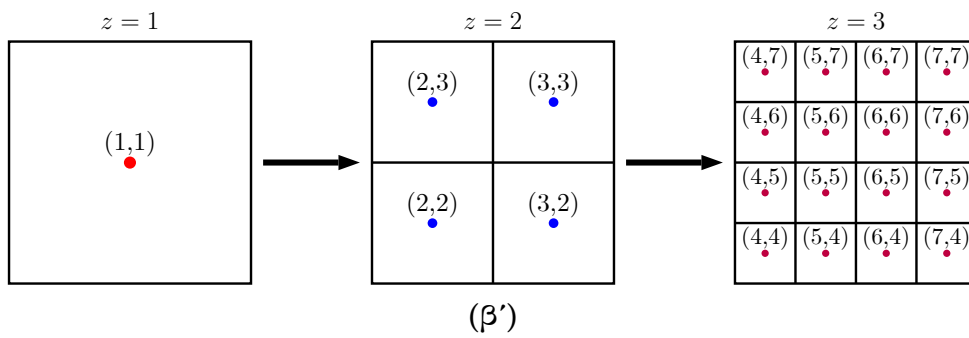
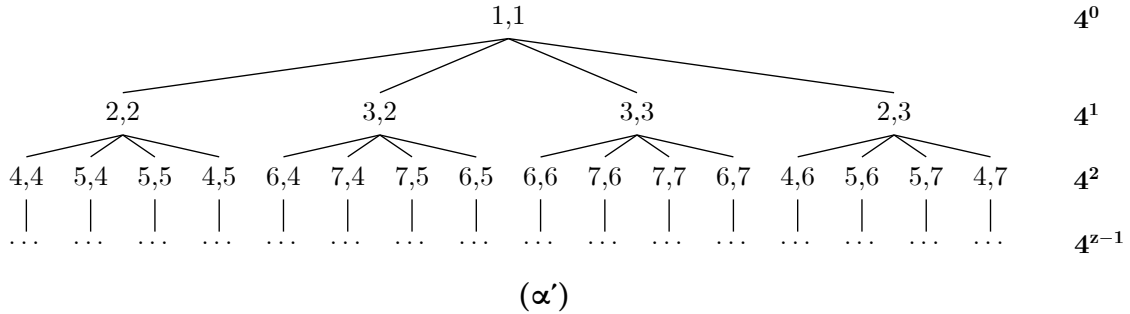
Ο αλγόριθμος πλεγματοποίησης εκτελεί τη διακριτοποίηση του χωρίου σειριακά και χρησιμοποιεί διάφορους μηχανισμούς που διασφαλίζουν την τελική ποιότητα του πλέγματος. Το αρχικό χωρίο είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις, αυτές που έχει καθορίσει από πριν ο χρήστης. Σύμφωνα με τη δένδρική δομή Quadtree, το χωρίο αυτό διασπάται σε τέσσερις κυψέλες, και στη συνέχεια, με επαναληπτική διαδικασία, κάθε νέα κυψέλη διασπάται σε τέσσερις μικρότερες

² Δένδρική δομή δεδομένων, η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα στον τομέα ανάλυσης εικόνων (image processing), εξαιτίας του ευφυούς τρόπου αποθήκευσης και ταχείας αναζήτησης δεδομένων.

μέχρι να προκύψει ένα ομοιόμορφο πλέγμα, όπου το εμβαδόν κάθε κυψέλης θα είναι μικρότερο του μεγίστου (V_{max}). Προφανώς, ισχύει ότι, οι τέσσερις νέες κυψέλες ("children") έχουν τις ίδιες αναλογίες πλευρών με τη μεγαλύτερη κυψέλη ("parent"), από όπου προέκυψαν. Μέχρι αυτό το βήμα, η ύπαρξη της γεωμετρίας αγνοήθηκε, έτσι ώστε να φτιαχτεί ομοιόμορφο πλέγμα. Έτσι, σε αυτό το σημείο, το πλήθος των κυψελών του χωρίου βρίσκεται εύκολα, γνωρίζοντας τον αριθμό των επιπέδων της δενδρικής δομής, ή ισοδύναμα τον αριθμό των διαιρέσεων. Επομένως, το υπολογιστικό χωρίο αποτελείται από 4^{z-1} κυψέλες, όπου z ο αριθμός των επιπέδων στη δενδρική δομή, με $z = 1$ το πρώτο επίπεδο.



Σχήμα 2.7: Ονομασία των νέων κυψελών που προκύπτουν από τη διάσπαση μιας κυψέλης (i, j) , για αποθήκευση σύμφωνα με την δενδρική δομή Quadtree.

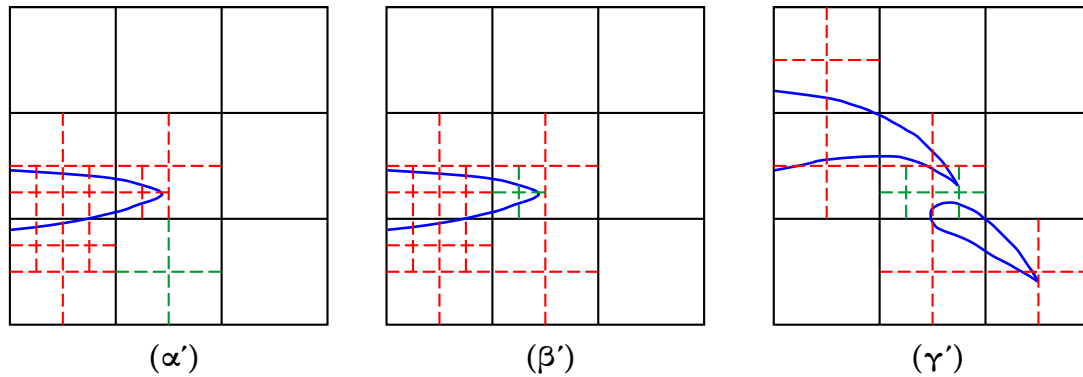


Σχήμα 2.8: (α'): Δενδρική μορφή Quadtree, με ονομασία σύμφωνα με το Σχήμα 2.7. Οι κυψέλες που βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο. Στη δεξιά στήλη φαίνεται το πλήθος των κυψελών ανά επίπεδο. [2][38] (β'): Διασπάσεις μιας κυψέλης σε αντιστοιχία με το (α').

Για το επόμενο βήμα, λαμβάνεται υπόψη, πλέον, η παρουσία της γεωμετρίας στο χωρίο. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο πλεγματοποίησης, κάθε κυψέλη που τέμνεται από το στερεό όριο διασπάται στα τέσσερα, μέχρι το εμβαδόν των νέων κυψελών, που θα προκύψουν με κάθε διάσπαση, να βρίσκεται μέσα σε ένα μικρό εύρος τιμών, μικρότερες από την τιμή του ελάχιστου εμβαδού V_{min} . Το εύρος αυτό χρησιμοποιείται, σε περίπτωση που το V_{min} δεν έχει σχέση αναλογίας $1 : 4^{z-1}$ με το αρχικό εμβαδόν του χωρίου. Σε αυτό το σημείο, έχει δημιουργηθεί ένα πλέγμα, όπου η ομάδα των μεγαλύτερων κυψελών βρίσκεται κοντά στα επ' άπειρο όρια του χωρίου και έχει εμβαδό μικρότερο ή ίσο του V_{max} , η ομάδα των μικρότερων κυψελών που βρίσκεται κοντά ή τέμνεται από το στερεό όριο και έχει εμβαδόν κατά τι μικρότερο του V_{min} και οι ενδιάμεσες ομάδες κυψελών, με εμβαδόν που ανήκει στο εύρος τιμών (V_{min}, V_{max}).

Οι μηχανισμοί που αναφέρθηκαν προηγουμένως ενεργοποιούνται σε αυτό το σημείο, για να διασφαλίσουν την ποιότητα του πλέγματος, ομαλοποιώντας τη μετάβαση από τις μικρότερες στις μεγαλύτερες κυψέλες. Για να γίνει αυτό, θα διασπαστούν κάποιες επιπλέον κυψέλες, εάν ικανοποιούν τα παρακάτω τρία κριτήρια.

1. Αν δύο γειτονικές κυψέλες απέχουν δύο ή περισσότερα επίπεδα διάσπασης (στη δένδρική δομή του Σχήματος 2.8α') μεταξύ τους, τότε διασπάται η μεγαλύτερη κυψέλη. Επακόλουθο αυτού του κριτηρίου είναι και το πόρισμα που λέει ότι, κάθε κυψέλη μπορεί να γειτνιάζει με το πολύ οκτώ κυψέλες. Συνεπώς, κάθε κυψέλη πρέπει να μοιράζεται κάθε πλευρά με το πολύ δύο κυψέλες. Η εφαρμογή του κριτηρίου αυτού φαίνεται στο Σχήμα 2.9α'.
 2. Αν το στερεό όριο τέμνει μία πλευρά μιας κυψέλης δύο φορές, τότε αυτή η κυψέλη διασπάται, μέχρι το στερεό όριο να τμήσει κάθε πλευρά το πολύ μία φορά. Το κριτήριο αυτό εφαρμόζεται, για να μην προκύψουν τεμνόμενες κυψέλες με περίπλοκη γεωμετρία (δηλαδή οτιδήποτε εκτός από τρίγωνο, τραπέζιο ή πεντάγωνο). Η εφαρμογή του κριτηρίου αυτού φαίνεται στο Σχήμα 2.9β'.
 3. Αν υπάρχουν δύο γεωμετρίες, των οποίων τα στερεά όρια τέμνουν μια κυψέλη σε όλες τις πλευρές περισσότερο από δύο φορές, τότε η κυψέλη διασπάται επιπλέον. Ο λόγος για την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού είναι ότι, συνήθως στην περιοχή μεταξύ δύο διαφορετικών γεωμετριών, στην οποία τα αεροδυναμικά φαινόμενα είναι εντονότερα, χρειάζονται περισσότεροι κόμβοι για αποθήκευση των ροϊκών μεγεθών. Η εφαρμογή του κριτηρίου αυτού φαίνεται στο Σχήμα 2.9γ'.
-



Σχήμα 2.9: (α'): Κριτήριο 1: η κυψέλη που διασπάστηκε με πράσινο χρώμα είχε πριν διαφορά 2 ή περισσότερων επιπέδων από τις γειτονικές. (β'): Κριτήριο 2: η κυψέλη διασπάστηκε με πράσινο χρώμα γιατί το στερεό όριο έτεμνε δύο φορές μια πλευρά της. (γ'): Κριτήριο 3: οι κυψέλες διασπάστηκαν με πράσινο χρώμα γιατί τέμνονταν πάνω από 2 φορές από τις δύο γεωμετρίες.[38]

Μετά από την εφαρμογή των κριτηρίων, προκύπτει ένα πλέγμα στο οποίο μπορούν να επιλυθούν οι εξισώσεις ροής. Όμως, παρατηρείται ότι, υπάρχει ακόμα απότομη μετάβαση από τις κυψέλες μικρότερου εμβαδού σε μεγαλύτερου, δηλαδή η γεωμετρία επηρεάζει το μέγεθος των κυψελών μόνο σε μια μικρή σχετικά περιοχή. Αν πρόκειται να γίνει η επίλυση των ροϊκών εξισώσεων για πιο περίπλοκες γεωμετρίες, θα υπάρχει απώλεια πληροφορίας, αφού σε αυτήν τη περίπτωση η ροή θα επηρεάζεται σε μεγαλύτερη περιοχή από την παρουσία της γεωμετρίας. Επομένως, εισάγεται μια σιγμοειδής συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, για να εφαρμοστεί μια ομαλή πύκνωση στο πλέγμα. Αυτή είναι η:

$$f = \begin{cases} -2x^3 + 3x^2 & , \quad \text{αν } 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{με } x = \frac{d}{d_{max}} \quad (2.5)$$

όπου d η απόσταση κάθε κυψέλης από το στερεό όριο και d_{max} η μέγιστη απόσταση ομαλοποίησης, η οποία καθορίστηκε από το χρήστη. Για αποστάσεις $d < d_{max}$ η σιγμοειδής συνάρτηση αυξάνεται, όσο αυξάνεται και η απόσταση d και λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, 1, όταν $d \geq d_{max}$. Η σιγμοειδής συνάρτηση της Σχέσης 2.5 χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του κρίσιμου εμβαδού των κυψελών προς διάσπαση:

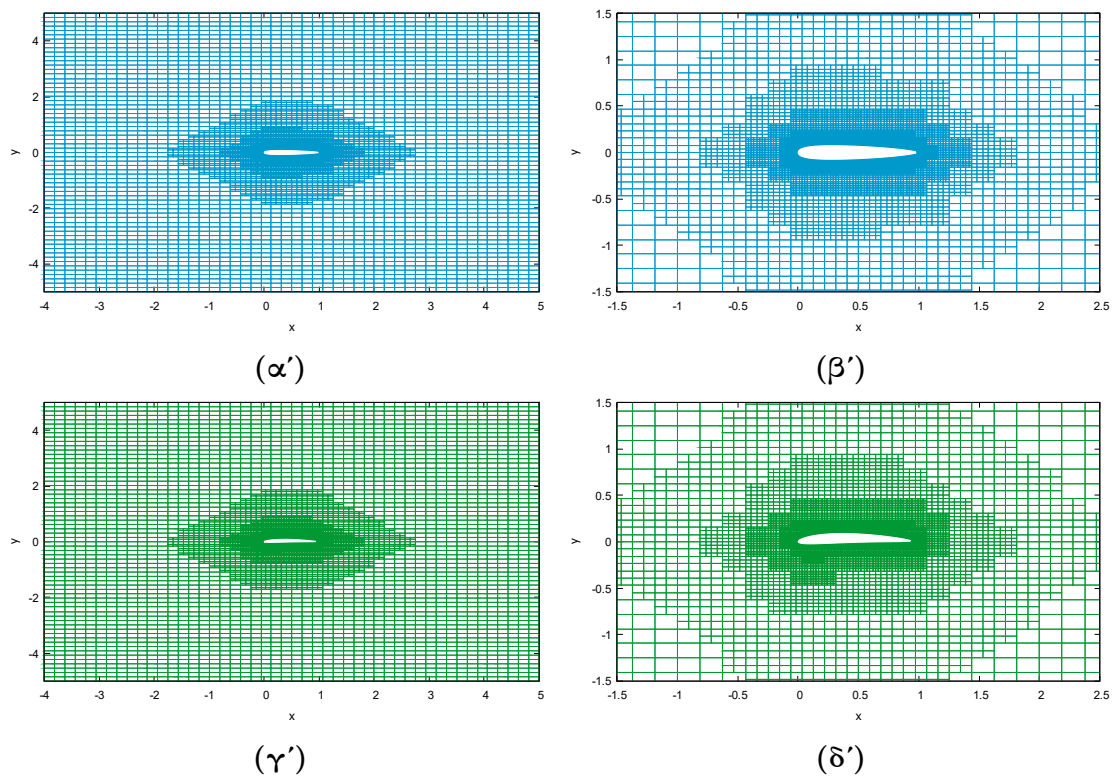
$$V_{crit} = fV_{max} + (1 - f)V_{min} \quad (2.6)$$

Για μια κυψέλη με εμβαδόν V_{cell} που απέχει από το στερεό όριο $d < d_{max}$, αν ισχύει $V_{cell} > V_{crit}$, τότε η κυψέλη αυτή διασπάται.

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται η Μέθοδος των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell IBM). Οι κυψέλες, οι οποίες βρίσκονται πάνω στο στερεό όριο, τέμνονται από το ευθύ-

γραμμο τμήμα που ορίζουν τα σημεία, από όπου έχει εισέλθει και εξέλθει το στερεό όριο από την κυψέλη. Είναι προφανές, ότι όσο πυκνότερο το πλέγμα στην περιοχή κοντά στο στερεό όριο, τόσο ακριβέστερα μπορεί να προσεγγιστεί η γεωμετρία. Τα πιθανά σχήματα, που μπορεί να προκύψουν από αυτή την τομή, είναι τρίγωνο, τραπέζιο και πεντάγωνο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.6. Το παλιό κέντρο της κυψέλης μετατοπίζεται στο βαρύκεντρο του καινούργιου σχήματος που δημιουργήθηκε.

Τελικά, προκύπτει ένα πλέγμα καλής ποιότητας, όπου στη συνέχεια, οι εξισώσεις ροής διακριτοποιούνται με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων και επιλύονται. Τα ροϊκά δεδομένα αποθηκεύονται στο βαρύκεντρο κάθε κυψέλης (κεντροκυβελική διατύπωση / cell centered formulation).



Σχήμα 2.10: (α'): Το τελικό πλέγμα γύρω από μια συμμετρική αεροτομή (β'): Μεγέθυνση γύρω από τη συμμετρική αεροτομή. (γ'): Το τελικό πλέγμα γύρω από μια αεροτομή NACA 4410 (δ'): Μεγέθυνση γύρω από την αεροτομή NACA 4410.

2.3.1 Τρόπος Αποθήκευσης Δεδομένων με τη Δομή Quadtree

Η ονομασία των κυψελών-παιδιά, που προκύπτουν από μια μεγαλύτερη κυψέλη-γονιός, δόθηκε στο Σχήμα 2.7 και εφαρμόστηκε ως παράδειγμα στο Σχήμα 2.8. Σύμφωνα με αυτή την δομή που εφαρμόστηκε, κάθε κυψέλη του χωρίου μπορεί να συσχετισθεί με την αρχική και δε χρειάζεται να αποθηκευτεί η σχέση της τελικής

με τις ενδιάμεσες. Η δομή Quadtree επιταχύνει κατά πολύ την διαδικασία αποθήκευσης και αναζήτησης των δεδομένων του πλέγματος, μειώνοντας παράλληλα την απαιτούμενη μνήμη, σε σχέση με τις μεθόδους πλεγματοποίησης οριόδετων πλεγμάτων. Με σκοπό την αναδόμηση του πλέγματος, αποθηκεύονται οι μετρητές (i, j) , τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αρχικής κυψέλης και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κυψελών που τέμνονται από τα στερεά όρια [2].

Η σχέση που δίνει το επίπεδο L κάθε κυψέλης είναι:

$$L = \lfloor (\log_2 i + 1) \rfloor = \lfloor (\log_2 j + 1) \rfloor \quad (2.7)$$

όπου παρατηρείται η συμμετρία των εξισώσεων ως προς τους μετρητές (i, j) . Με γνωστό το επίπεδο κάθε κυψέλης, μπορούν να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών κάθε κυψέλης:

$$\Delta x = \frac{\Delta X_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.8)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.9)$$

όπου $(\Delta X_{(1,1)}, \Delta Y_{(1,1)})$ τα μήκη των πλευρών της αρχικής κυψέλης $(1, 1)$. Το εμβαδόν κάθε κυψέλης, επίσης, υπολογίζεται ως:

$$V = \frac{V_{(1,1)}}{(2^{L-1})^2} = \frac{V_{(1,1)}}{4^{L-1}} \quad (2.10)$$

Επιπλέον, μπορούν να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου κάθε κυψέλης:

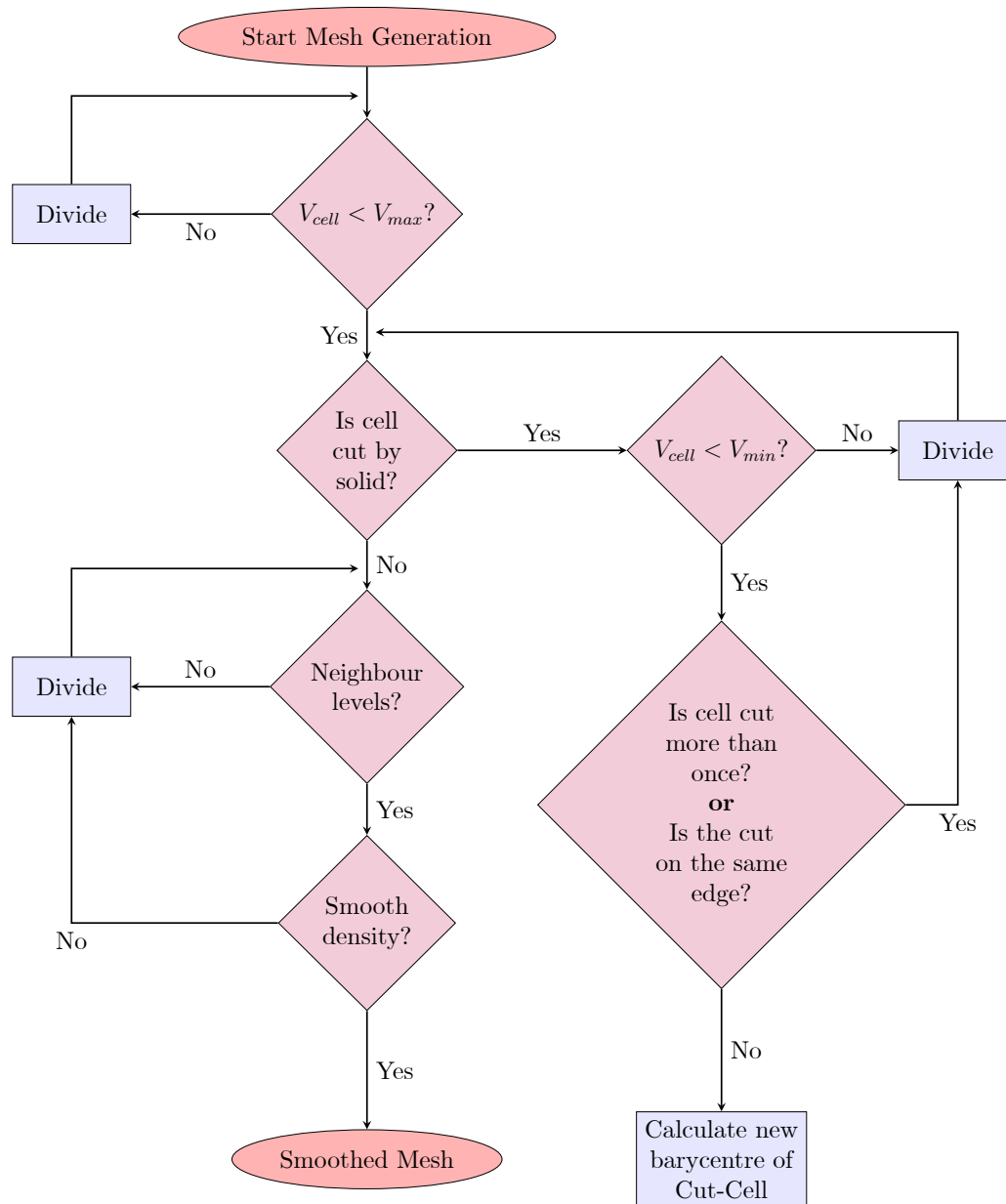
$$x = X_{(1,1)} - \frac{3}{2}\Delta X_{(1,1)} + \left(i + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta X_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.11)$$

$$y = Y_{(1,1)} - \frac{3}{2}\Delta Y_{(1,1)} + \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta Y_{(1,1)}}{2^{L-1}} \quad (2.12)$$

όπου $(X_{(1,1)}, Y_{(1,1)})$ οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου της αρχικής κυψέλης.

Επομένως, παρατηρείται πως ο τρόπος υπολογισμού των γεωμετρικών χαρακτηριστικών κάθε κυψέλης είναι πολύ απλός, αρκεί να είναι γνωστή η αρχική κυψέλη και τα επίπεδα διάσπασης. Οι υπολογισμοί είναι όμοιοι και για τις δύο κατευθύνσεις, γεγονός που οφείλεται στο καρτεσιανό πλέγμα που δημιουργήθηκε. Σε σύγκριση με τις μεθόδους οριόδετων πλεγμάτων, πλέον μπορεί να κατασκευαστεί πυκνό πλέγμα για υψηλή ακρίβεια στην περιοχή ενδιαφέροντος της ροής, γρήγορα και χωρίς να χρειάζεται αποθήκευση όλων των χαρακτηριστικών του πλέγματος.

Τέλος, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος πλεγματοποίησης ως διάγραμμα ροής, στο Σχήμα 2.11.



Σχήμα 2.11: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου πλεγματοποίησης για τη μέθοδο των τεμνόμενων κυψελών, όπου φαίνονται οι λήψεις αποφάσεων για κάθε κυψέλη, που σχετίζονται με τα κριτήρια που επιβάλλονται, για να προκύψει πλέγμα καλής ποιότητας. [2][38]

Κεφάλαιο 3

Διακριτοποίηση εξισώσεων Euler

3.1 Οι Εξισώσεις Euler

Οι μη-μόνιμες εξισώσεις Euler εκφράζουν σε διαφορική μορφή τους νόμους διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας για μια μη συνεκτική ροή συμπιεστού ρευστού. Το σύστημα των εξισώσεων αυτών περιγράφεται από μια σύντομη σχέση, η οποία περιέχει από τρεις, για μονοδιάστατη ροή, έως πέντε εξισώσεις, για τριδιάστατη ροή. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, θα αναλυθεί διδιάστατο πεδίο ροής [2][3], οπότε το σύστημα των εξισώσεων Euler θα αποτελείται από τέσσερις εξισώσεις:

- συνέχειας
- ορμής κατά x
- ορμής κατά y
- ενέργειας

Οπότε, οι εξισώσεις μη συνεκτικής ροής, συμπιεστού ρευστού, μπορούν να γραφούν σε συνεπτυγμένη μορφή, σε διδιάστατο πεδίο, ως:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = \vec{0} \quad (3.1)$$

όπου \vec{U} το διάνυσμα των συντηρητικών μεγεθών (*conservative units*), \vec{f}_x και \vec{f}_y τα διανύσματα ατρίβους ροής (*inviscid fluxes*) στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

Το διάνυσμα των συντηρητικών μεγεθών γράφεται ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού, u , v οι καρτεσιανές συνιστώσες της ταχύτητας \vec{U} και E_t η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, που δίνεται από τη σχέση:

$$E_t = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3.3)$$

όπου e η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας, με p η στατική πίεση και γ ο λόγος θερμοχωρητικότητας (ή εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής τελείων αερίων).

Τα διανύσματα ατρίβους ροής κατά τους άξονες x και y γράφονται ως:

$$\vec{f}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{f}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.1.1 Η εξίσωση Τελείων Αερίων

Θεωρείται πως το ρευστό που βρίσκεται στο χωρίο είναι τέλειο αέριο, οπότε εκφράζεται από την καταστατική εξίσωση Τελείων Αερίων [25]:

$$p = \rho R_g T \quad (3.5)$$

όπου p η στατική πίεση, ρ η πυκνότητα, T η θερμοκρασία του αερίου και $R_g = c_p - c_v$ η σταθερά του τέλειου αερίου.

Οι ειδικές θερμοχωρητικότητες με σταθερή πίεση (c_p) και με σταθερό όγκο (c_v) ορίζονται ως ο λόγος του συναλλασσόμενου ποσού θερμότητας μεταξύ του θερμοδυναμικού συστήματος και του περιβάλλοντός του προς τη μεταβολή της θερμοκρασίας του, κρατώντας σε κάθε περίπτωση τα αντίστοιχα μεγέθη πίεσης και όγκου σταθερά. Παράλληλα, εφαρμόζοντας τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο προκύπτει:

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad \text{και} \quad c_v = \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v \quad (3.6)$$

όπου h η ειδική ενθαλπία και e η ειδική εσωτερική ενέργεια. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται με τη σχέση:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (3.7)$$

Αν θεωρηθεί πως, οι ειδικές θερμοχωρητικότητες έχουν σταθερή τιμή με αλλαγές της θερμοκρασίας εξαιτίας της αποδεδειγμένης αμελητέας εξάρτησης από αυτήν, από τη Σχέση 3.8 συνεπάγεται ότι:

$$e = c_v T \text{ και } h = c_p T \quad (3.8)$$

Τέλος, ο εκθέτης ισεντροπικής μεταβολής ορίζεται από το λόγο των ειδικών θερμοχωρητικότητων ως εξής:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (3.9)$$

Συμπερασματικά, λαμβάνοντας υπόψη τις Σχέσεις 3.5 έως 3.9 υπολογίζεται η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου της Σχέσης 3.3:

$$E_t = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3.10)$$

Αντίστοιχα, υπολογίζεται και η ολική ειδική ενθαλπία:

$$h_t = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1) \rho} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (3.11)$$

3.1.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων Euler με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων

Όπως παρουσιάστηκε και στα προηγούμενα, οι διδιάστατες εξισώσεις Euler σε διανυσματική μορφή εκφράζονται με μια εξίσωση:

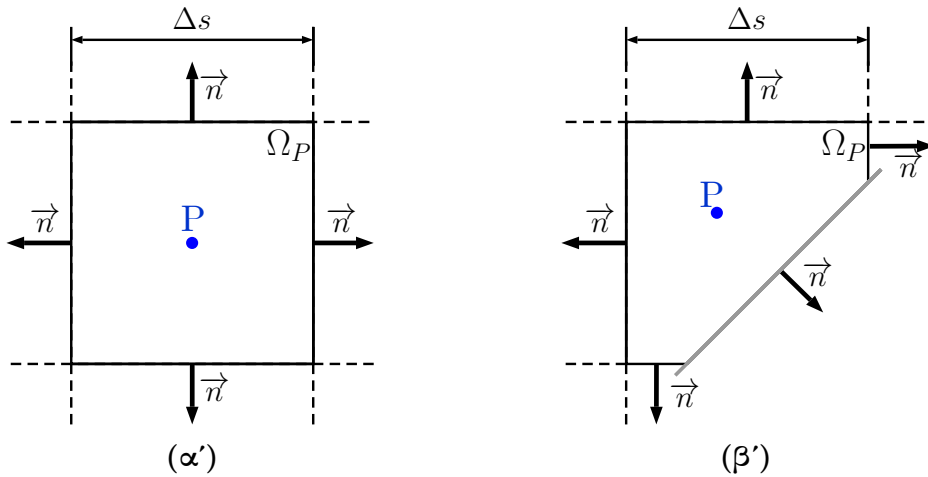
$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = \vec{0} \quad (3.12)$$

Το σύστημα εξισώσεων της Σχέσης 3.12 μπορεί να γραφεί και σε ταυνοστική μορφή:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (3.13)$$

Ο δείκτης $i = (1, 2, 3, 4)$ δείχνει τα τέσσερα συντηρητικά μεγέθη και ο δείκτης $k = (1, 2) \equiv (x, y)$ είναι επαναλαμβανόμενος και δείχνει άθροιση στις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις.

Η επίλυση του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων της Σχέσης 3.12 θα γίνει με τη μέθοδο των **πεπερασμένων όγκων**. Η διακριτοποίηση των εξισώσεων γίνεται στο βαρύκεντρο κάθε κυψέλης του πλέγματος. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.1, το κέντρο κάθε κυψέλης δε βρίσκεται απαραίτητα στο κέντρο του τετραγώνου, αλλά στο βαρύκεντρο, σε περίπτωση που η κυψέλη τέμνεται από τα στερεά όρια.



Σχήμα 3.1: (α'): Ο όγκος Ω_P σε τετραγωνική κυψέλη. Το κέντρο της κυψέλης είναι και το κέντρο του τετραγώνου. (β'): Ο όγκος Ω_P σε κυψέλη που τέμνεται από το στερεό σώμα. Το κέντρο της μετατοπίζεται στο βαρύκεντρο.[38]

Η Σχέση 3.12 ολοκληρώνεται στον όγκο Ω_P :

$$\int_{\Omega_P} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} \right) d\Omega = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{R}_P := \underbrace{\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega}_{\text{temporal}} + \underbrace{\int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} \right] d\Omega}_{\text{inviscid}} = \vec{0} \quad (3.14)$$

Στη Σχέση 3.14 παρατηρείται ότι, υπάρχει ένας χρονικά μεταβαλλόμενος όρος (*tem-*

poral) και ένας χρονικά μόνιμος όρος (*inviscid*), που αναπαριστά την επίδραση της ατριβούς ροής. Η διακριτοποίηση του δεύτερου όρου είναι πιο πολύπλοκη από του πρώτου και παρουσιάζεται στη συνέχεια.

3.2 Διακριτοποίηση Ατριβών Όρων

Αρχικά, θα διακριτοποιηθούν μόνο οι χρονικά μόνιμοι ατριβείς όροι της Σχέσης 3.14, που περιέχουν μόνο τις μερικές παραγώγους των διανυσμάτων ατριβούς ροής (*inviscid*). Εφαρμόζοντας το **Θεώρημα Απόκλισης Green Gauss** (*Green Gauss Divergence Theorem*), το επιφανειακό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επικαμπύλιο και συνεπώς, η επίλυση των εξισώσεων γίνεται πλέον στα όρια και όχι στον όγκο του χωρίου:

$$\int_{\Omega_P} \left[\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} \right] d\Omega = \oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds = \oint_S [\vec{f}_x \cdot n_x + \vec{f}_y \cdot n_y] ds \quad (3.15)$$

όπου $\vec{\mathbf{F}} = (\vec{f}_x, \vec{f}_y)$ η πυκνότητα της ροής, η οποία παραμένει σταθερή κατά μήκος κάθε πλευράς του όγκου ελέγχου και $\vec{n} = [n_x, n_y]^T$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο σε κάθε πλευρά της κυψέλης.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της Σχέσης 3.15 προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$I^{inv} := \oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n} ds \approx \sum_{Q \in neigh(P)} \vec{F}_{n,PQ}^{inv} \Delta s \quad (3.16)$$

όπου Q είναι οι $neigh(P)$ σε αριθμό γειτονικές κυψέλες της P , $\vec{F}_{n,PQ}^{inv}$ είναι το αριθμητικό διάνυσμα της ατριβούς ροής που διαπερνά την κοινή επιφάνεια (*face*) μεταξύ των κυψελών P και Q , και Δs το μήκος κάθε πλευράς.

Όπως φαίνεται από την γραφή της Σχέσης 3.16, το κάθετο διάνυσμα ($\vec{F}_{n,PQ}^{inv}$) στην πλευρά μεταξύ δύο γειτονικών κυψελών θεωρείται σταθερό κατά μήκος όλης της κοινής πλευράς. Το σφάλμα της προσέγγισης αυτής εισάγεται όταν η τιμή του $\vec{F}_{n,PQ}^{inv}$ στο μέσο κάθε πλευράς αναπαριστά την πραγματική διακύμανση της τιμής αυτής σε όλη την πλευρά. Οπότε, η ελαχιστοποίηση της τιμής του μήκους κάθε πλευράς Δs παίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της λύσης. Σε υπολογιστικές κυψέλες μακριά από το στερεό σώμα, τα μεγέθη της ροής δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Αντίθετα, στην περιοχή κοντά και πίσω από το στερεό σώμα η ροή επηρεάζεται έντονα από την παρουσία του και οι μεταβολές των μεγεθών είναι απότομες. Οπότε, για ακριβέστερη προσέγγιση της πραγματικότητας κρίνεται αναγκαίο, το μήκος Δs κάθε πλευράς κοντά στο στερεό όριο να είναι οσοδήποτε μικρό, δηλαδή

το υπολογιστικό πλέγμα να πυκνωθεί αρκετά σε αυτή την περιοχή.

Το διάνυσμα \vec{F}_n^{inv} στις πλευρές κάθε κυψέλης γράφεται ως:

$$\vec{F}_n^{inv} = \vec{F} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_x \\ \rho v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + pn_y \\ (\vec{u} \cdot \vec{n})(Et + p) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.1 Υπολογισμός Ιακωβιανού Μητρώου

Για την περαιτέρω ανάλυση της διακριτοποίησης των εξισώσεων Euler, ορίζεται το συνιστάμενο Ιακωβιανό μητρώο $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\underline{\mathbf{A}} := (\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y), \quad \text{όπου } \mathbf{A}_x = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}} \text{ και } \mathbf{A}_y = \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}} \quad (3.18)$$

Στην αρχική Σχέση 3.12 εμφανίζονται τα Ιακωβιανά μητρώα, με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας για τις παραγώγους. Δηλαδή, για $\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} = \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}$ και $\frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}$, η εξίσωση αυτή γίνεται:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} = \vec{0} \quad (3.19)$$

Το Ιακωβιανό μητρώο \mathbf{A} ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y \Leftrightarrow \\ \mathbf{A} &= \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial \vec{U}} n_y \Leftrightarrow \\ \mathbf{A} &= \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{F}_n}{\partial \vec{U}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Επίσης, υπενθυμίζεται ότι, το διάνυσμα \vec{F}_n^{inv} , όπως έχει καθοριστεί από τη Σχέση

3.17, γράφεται:

$$\vec{F}_n^{inv} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (\vec{u} \cdot \vec{n}) (Et + p) \end{bmatrix}$$

Για την μαθηματική εύρεση του μητρώου \mathbf{A} της Σχέσης 3.20, πρέπει να παραγωγιστεί το διάνυσμα \vec{F}_n^{inv} ως προς τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής \vec{U} . Για να γραφούν ευκολότερα οι πράξεις, οι συντηρητικές μεταβλητές μετονομάζονται ως:

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Με αυτήν την ονομασία των συντηρητικών μεταβλητών, το κάθετο διάνυσμα της ταχύτητας στην επιφάνεια της γεωμετρίας (κανονικό διάνυσμα της ταχύτητας - *normal velocity*) $\vec{u} \cdot \vec{n}$ γράφεται:

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = u n_x + v n_y = \frac{u_2 n_x + u_3 n_y}{u_1}$$

Η στατική πίεση γράφεται:

$$p = (\gamma - 1) \left(E_t - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right) = (\gamma - 1) \left(u_4 - \frac{1}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right)$$

Αντικαθιστώντας στη Σχέση 3.17, υπολογίζεται:

$$\vec{F}_n^{inv} = \begin{bmatrix} u_2 n_x + u_3 n_y \\ \frac{u_2}{u_1} (u_2 n_x + u_3 n_y) + (\gamma - 1) \left(u_4 - \frac{1}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) n_x \\ \frac{u_3}{u_1} (u_2 n_x + u_3 n_y) + (\gamma - 1) \left(u_4 - \frac{1}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) n_y \\ \left(\gamma u_4 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1} \right) \frac{u_2 n_x + u_3 n_y}{u_1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Στη συνέχεια, καθένα από τα τέσσερα στοιχεία του διανύσματος \vec{F}_n^{inv} της Σχέσης 3.22 παραγωγίζεται με κάθε ένα από τα τέσσερα στοιχεία του πίνακα των συντηρητικών μεγεθών της Σχέσης 3.21, οπότε προκύπτουν τα 16 στοιχεία - παράγωγοι του μητρώου \mathbf{A} :

- $\frac{\partial F_{n1}}{\partial u_1} = 0$
- $\frac{\partial F_{n1}}{\partial u_2} = n_x$
- $\frac{\partial F_{n1}}{\partial u_3} = n_y$
- $\frac{\partial F_{n1}}{\partial u_4} = 0$

- $\frac{\partial F_{n2}}{\partial u_1} = -u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) n_x$
- $\frac{\partial F_{n2}}{\partial u_2} = \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma) u n_x$
- $\frac{\partial F_{n2}}{\partial u_3} = u n_y - (\gamma - 1) v n_x$
- $\frac{\partial F_{n2}}{\partial u_4} = (\gamma - 1) n_x$

- $\frac{\partial F_{n3}}{\partial u_1} = -v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) n_y$
- $\frac{\partial F_{n3}}{\partial u_2} = v n_x - (\gamma - 1) u n_y$
- $\frac{\partial F_{n3}}{\partial u_3} = \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma) v n_y$
- $\frac{\partial F_{n3}}{\partial u_4} = (\gamma - 1) n_y$

- $\frac{\partial F_{n4}}{\partial u_1} = \left(-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma - 1) (u^2 + v^2) \right) (\vec{u} \cdot \vec{n})$
- $\frac{\partial F_{n4}}{\partial u_2} = \left(\frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) \right) n_x - (\gamma - 1) u (\vec{u} \cdot \vec{n})$
- $\frac{\partial F_{n4}}{\partial u_3} = \left(\frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) \right) n_y - (\gamma - 1) v (\vec{u} \cdot \vec{n})$
- $\frac{\partial F_{n4}}{\partial u_4} = \gamma (\vec{u} \cdot \vec{n})$

Τελικά, οι παραπάνω παράγωγοι αντικαθίστανται στον γενικό τύπο του μητρώου **A**:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \vec{F}_n^{inv}}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{n1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial u_2} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial u_3} & \frac{\partial F_{n1}}{\partial u_4} \\ \frac{\partial F_{n2}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{n2}}{\partial u_2} & \frac{\partial F_{n2}}{\partial u_3} & \frac{\partial F_{n2}}{\partial u_4} \\ \frac{\partial F_{n3}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{n3}}{\partial u_2} & \frac{\partial F_{n3}}{\partial u_3} & \frac{\partial F_{n3}}{\partial u_4} \\ \frac{\partial F_{n4}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_{n4}}{\partial u_2} & \frac{\partial F_{n4}}{\partial u_3} & \frac{\partial F_{n4}}{\partial u_4} \end{bmatrix}$$

οπότε, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -u(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_x \\ -v(\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)n_y \\ \left(-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2 + v^2)\right)(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}(:, 2) &= \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)un_x \\ vn_x - (\gamma-1)un_y \\ \left(\frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_x - (\gamma-1)u(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}(:, 3) &= \begin{bmatrix} n_y \\ un_y - (\gamma-1)vn_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2-\gamma)vn_y \\ \left(\frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2)\right)n_y - (\gamma-1)v(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}(:, 4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma-1)n_x \\ (\gamma-1)n_y \\ \gamma(\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται ότι, ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\vec{F}_n^{inv} = \mathbf{A}\vec{U}} \tag{3.24}$$

Οι ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{A} είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\
 \lambda_3 &= \vec{u} \cdot \vec{n} + c \\
 \lambda_4 &= \vec{u} \cdot \vec{n} - c
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Το μητρώο \mathbf{A} έχει δεξιά (\vec{r}) και αριστερά (\vec{l}) ιδιοδιανύσματα. Για αυτά ισχύει:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \vec{r}_k = \vec{0} \quad \text{και} \quad (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \vec{l}_k = \vec{0}$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεως 4×4

Μετά από πράξεις, τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= [1 \quad u \quad v \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2)]^T \\
\vec{r}_2 &= [0 \quad n_y \quad -n_x \quad n_y u - n_x v]^T \\
\vec{r}_3 &= [\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} + n_x \quad \frac{v}{c} + n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} + \vec{u} \cdot \vec{n}]^T \\
\vec{r}_4 &= [\frac{1}{c} \quad \frac{u}{c} - n_x \quad \frac{v}{c} - n_y \quad \frac{1}{2c}(u^2 + v^2) + \frac{c}{\gamma-1} - \vec{u} \cdot \vec{n}]^T
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\vec{l}_1 &= [1 - (\gamma-1)\frac{u^2+v^2}{2c^2} \quad (\gamma-1)\frac{u}{c^2} \quad (\gamma-1)\frac{v}{c^2} \quad -(\gamma-1)\frac{1}{c^2}] \\
\vec{l}_2 &= [n_x v - n_y u \quad n_y \quad -n_x \quad 0] \\
\vec{l}_3 &= [-\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{n} + (\gamma-1)\frac{u^2+v^2}{4c} \quad \frac{n_x}{2} - (\gamma-1)\frac{u}{2c} \quad \frac{n_y}{2} - (\gamma-1)\frac{v}{2c} \quad (\gamma-1)\frac{1}{2c}] \\
\vec{l}_4 &= [\frac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{n} + (\gamma-1)\frac{u^2+v^2}{4c} \quad -\frac{n_x}{2} - (\gamma-1)\frac{u}{2c} \quad -\frac{n_y}{2} - (\gamma-1)\frac{v}{2c} \quad (\gamma-1)\frac{1}{2c}]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Έχοντας υπολογίσει τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου \mathbf{A} , αυτό μπορεί να διαγωνοποιηθεί και να γραφεί στη μορφή:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \tag{3.28}$$

Ο πίνακας \mathbf{P} περιέχει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα και έχει μορφή γραμμής, ο \mathbf{P}^{-1} περιέχει τα αριστερά ιδιοδιανύσματα και έχει μορφή στήλης και τέλος, ο διαγώνιος πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ περιέχει τις ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{A} . Δηλαδή, είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= [\vec{r}_1 \quad \vec{r}_2 \quad \vec{r}_3 \quad \vec{r}_4], \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \\ \vec{l}_4 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vec{u} \cdot \vec{n} - c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

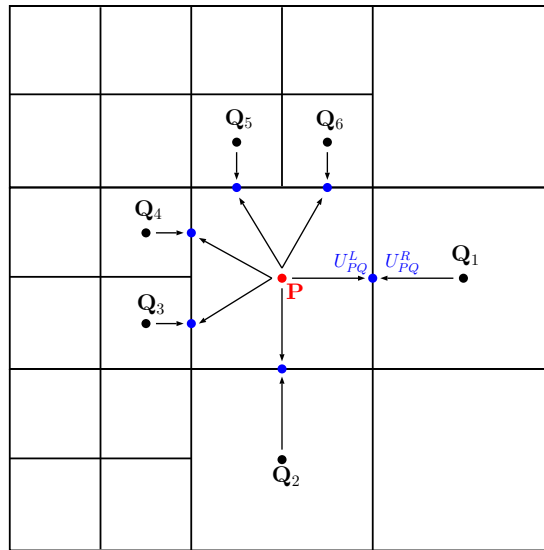
Επίσης, ορίζονται τα μητρώα \mathbf{A}^+ και \mathbf{A}^- :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^+ = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{A}^- = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{P}^{-1} \end{cases} \Rightarrow |\mathbf{A}| = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- \tag{3.30}$$

όπου τα μητρώα \mathbf{A}^+ και \mathbf{A}^- περιέχουν τις θετικές και τις αρνητικές ιδιοτιμές του μητρώου \mathbf{A} αντίστοιχα.

3.2.2 Καθορισμός Τάξης Ακρίβειας Διακριτοποίησης

Για τη συνέχεια είναι αναγκαίο, εξαιτίας της διακριτοποίησης που έγινε, να μεταφερθούν οι τιμές των συντηρητικών μεταβλητών από τα βαρύκεντρα των υπολογιστικών κυψελών, στο μέσο κάθε πλευράς μεταξύ δύο γειτονικών κυψελών. Επειδή το πλέγμα είναι μη δομημένο, κάθε κυψέλη μπορεί να συνορεύει με πάνω από 4 κυψέλες. Δηλαδή, υπάρχει η περίπτωση μία κυψέλη να συνορεύει με δύο άλλες μικρότερες κυψέλες σε μια κατεύθυνση. Επομένως, η πληροφορία από το βαρύκεντρο της κυψέλης θα μεταφερθεί στα μέσα των κοινών πλευρών των μικρότερων γειτονικών κυψελών, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Μεταφορά της πληροφορίας από την κυψέλη P και τις γειτονικές Q στις κοινές τους πλευρές. Ο αριθμός των γειτονικών κυψελών κυμαίνεται από 2, για τις γωνιακές, έως 8, όταν μία κυψέλη συνορεύει μόνο με μικρότερες κυψέλες.

3.2.2.1 Χωρική Διακριτοποίηση 1ης Τάξης

Αν επιλεγεί χωρική διακριτοποίηση ακρίβειας 1ης τάξης (*first order accurate scheme*), η πληροφορία από το βαρύκεντρο κάθε κυψέλης μεταφέρεται αυτούσια στο μέσο κάθε πλευράς. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Σχήματος 3.2, προκύπτει:

$$\vec{U}_{PQ}^L = \vec{U}_P \quad \text{και} \quad \vec{U}_{PQ}^R = \vec{U}_Q \quad (3.31)$$

Η μέθοδος αυτή ενδείκνυται σε περίπτωση που ζητείται μείωση του υπολογιστικού κόστους της διαδικασίας. Όμως, παρουσιάζει μειωμένη ακρίβεια, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται μόνο όταν απαιτούνται γρήγορα αποτελέσματα.

3.2.2.2 Χωρική Διακριτοποίηση 2ης Τάξης

Αν επιλεγεί χωρική διακριτοποίηση 2ης τάξης (*second order scheme*), τα συντηρητικά μεγέθη της ροής μεταφέρονται από τα βαρύκεντρα των κυψελών στα μέσα των κοινών πλευρών με μια προσαύξηση. Χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα Taylor, κρατώντας μόνο τους όρους 1ης τάξης. Έτσι, επιτυγχάνεται αύξηση της ακρίβειας προσέγγισης σε σχέση με τη χωρική διακριτοποίηση 1ης τάξης:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{PQ}^L &= \vec{U}_P + \overline{PM} \cdot (\nabla \vec{U})_P \\ \vec{U}_{PQ}^R &= \vec{U}_Q + \overline{QM} \cdot (\nabla \vec{U})_Q\end{aligned}\quad (3.32)$$

όπου $(\nabla \vec{U})_P = \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)$ και $(\nabla \vec{U})_Q = \left(\frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial x}, \frac{\partial \vec{U}_Q}{\partial y} \right)$. Τα \overline{PM} και \overline{QM} είναι τα διανύσματα των αποστάσεων από τα βαρύκεντρα P και Q , στο μέσο M της κοινής πλευράς.

Ο υπολογισμός των πρώτων παραγώγων του αναπτύγματος Taylor, $(\nabla \vec{U})_P$ και $(\nabla \vec{U})_Q$, θα γίνει με την μέθοδο των **ελαχίστων τετραγώνων**, ορίζοντας μια συνάρτηση σφάλματος προς ελαχιστοποίηση. Αυτή η διαδικασία θα εξασφαλίσει την όσο δυνατόν καλύτερη ακρίβεια στην εκτίμηση των ροϊκών μεγεθών, που προεκβάλλονται στις γειτονικές κυψέλες.

Γράφοντας τη Σχέση 3.32 για κάθε γειτονική κυψέλη Q , ισχύει:

$$\vec{U}_Q \approx \vec{U}_P + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y \quad (3.33)$$

με $\Delta x = x_Q - x_P$ και $\Delta y = y_Q - y_P$.

Αφού ισχύει $\Delta \vec{U} = \vec{U}_Q - \vec{U}_P$, τότε η Σχέση 3.33 γράφεται:

$$\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y - \Delta \vec{U} \approx 0 \quad (3.34)$$

Η Σχέση 3.34 παριστάνει τη διαφορά της πραγματικής τιμής των μεγεθών ροής στην κυψέλη Q , με την εκτίμηση αυτής μέσω του αναπτύγματος Taylor.

Η Σχέση 3.34 αναφερόταν στο σφάλμα μεταφοράς της τιμής μόνο για μία γειτονική κυψέλη Q . Η συνάρτηση σφάλματος προς ελαχιστοποίηση ορίζεται ως το τετράγωνο

του αθροίσματος των σφαλμάτων αυτών για όλες τις γειτονικές κυψέλες της P :

$$E = \sum_{i=1}^{neigh(P)} \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right)^2 \quad (3.35)$$

όπου $neigh(P) \in [2, 8]$ όπως προαναφέρθηκε.

Η συνάρτηση σφάλματος E της Σχέσης 3.35 παραγωγίζεται ως προς τις χωρικές παραγώγους και θέτοντας τη μηδέν, προκύπτει ένα σύστημα 2×2 με αγνώστους τις δύο χωρικές παραγώγους $\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x}$ και $\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \right)} &= \sum_{i=1}^{neigh(P)} 2 \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta x_i = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \right)} &= \sum_{i=1}^{neigh(P)} 2 \left(\frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \Delta x_i - \Delta \vec{U}_i \right) \Delta y_i = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Το σύστημα της Σχέσης 3.36 μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta x_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta y_i &= \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta y_i + \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta y_i \Delta y_i &= \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta y_i \Delta \vec{U}_i \end{aligned} \quad (3.37)$$

Το σύστημα 3.37 μπορεί να γραφεί και σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta x_i & \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta y_i \\ \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta y_i & \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta y_i \Delta y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{U}_P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta x_i \Delta \vec{U}_i \\ \sum_{i=1}^{neigh(P)} \Delta y_i \Delta \vec{U}_i \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

3.2.2.3 Χρήση Περιοριστή

Στο σύστημα 3.38 παρατηρείται ότι, οι τιμές των χωρικών παραγώγων παρουσιάζουν υψηλές υπερακοντίσεις, εξαιτίας των μικρών συντελεστών και την ευαισθησία του συστήματος σε μικρές αλλαγές [26]. Για τη θεραπεία του προβλήματος αυτού, χρησιμοποιείται **περιοριστής** (*limiter*), που αναπτύχθηκε από τους Barth & Jespersen [27] και διορθώθηκε από τον Venkatakrishnan [28]. Σύμφωνα με τον

περιοριστή, η πρώτη εξίσωση του συστήματος 3.32 ξαναγράφεται ως:

$$\left(\vec{U}_{PQ}^L\right)^* = \vec{U}_P + \Pi_P \overline{PM} \cdot \left(\nabla \vec{U}\right)_P \quad (3.39)$$

όπου Π_P ο περιοριστής και $\left(\vec{U}_{PQ}^L\right)^*$ η τιμή των προεκβεβλημένων μεταβλητών μετά τη χρήση του περιοριστή.

Ορίζονται οι ακόλουθες ποσότητες:

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}_{PQ}^L \\ \vec{U}_{min} &= \min\left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}\right) \\ \vec{U}_{max} &= \max\left(\vec{U}, \vec{U}_{Q_i}\right) \\ \Phi(x) &= \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση ομαλοποίησης που εισήγαγε ο Venkatakrishnan, έτσι ώστε να είναι παντού παραγωγίσιμη.

Η σχέση από την οποία υπολογίζεται ο περιοριστής Π_P , είναι:

$$\Pi_{P,j} = \begin{cases} 1 & , \tilde{U}_j = U_{P,j} \\ \Phi\left(\frac{U_{max,j} - U_{P,j}}{U_j - U_{P,j}}\right) & , \tilde{U}_j > U_{P,j} \\ \Phi\left(\frac{U_{min,j} - U_{P,j}}{U_j - U_{P,j}}\right) & , \tilde{U}_j < U_{P,j} \end{cases} \quad , \text{για } j = (1, 2, 3, 4) \quad (3.41)$$

3.2.3 Διατύπωση του Σχήματος Roe

Για τον υπολογισμό των διανυσμάτων ατρίβους ροής, χρησιμοποιείται το προσεγγιστικό **Σχήμα Roe** (*Roe approximate Riemann Solver*) [29], στο κέντρο της κοινής επιφάνειας των γειτονικών κυψελών P και Q .

$$\vec{F}_{n,PQ}^{inv} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}_{n,PQ}^L + \vec{F}_{n,PQ}^R \right) - \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \left(\vec{U}_{PQ}^L - \vec{U}_{PQ}^R \right) \quad (3.42)$$

όπου $\left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right|$ το μητρώο τεχνητής συνεκτικότητας (*artificial viscosity matrix*), που προκύπτει από τη Σχέση 3.30 και υπολογίζεται από τις κατά Roe μέσες τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών στο μέσο της κοινής πλευράς δύο γειτονικών κυψελών P και Q . Επίσης, οι τιμές \vec{U}_{PQ}^L και \vec{U}_{PQ}^R είναι οι προεκβεβλημένες συντηρητικές

μεταβλητές της ροής στο μέσο της κοινής πλευράς των κυψελών P και Q , όπως υπολογίζονται, είτε από τη Σχέση 3.31 για ακρίβεια 1ης τάξης, είτε από τη Σχέση 3.32 για ακρίβεια 2ης τάξης.

Αν θεωρηθεί πως, το διάνυσμα $\vec{V} = [\rho \ u \ v \ p]^T$ είναι το διάνυσμα πρωτευουσών μεταβλητών της ροής, τότε το διάνυσμα μέσων τιμών κατά Roe είναι:

$$\vec{V} = [\tilde{\rho} \ \tilde{u} \ \tilde{v} \ \tilde{p}]^T \quad (3.43)$$

Η μέση, κατά Roe, τιμή της πυκνότητας υπολογίζεται ως:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_R \cdot \rho_L} \quad (3.44)$$

Οι μέσες, κατά Roe, τιμές των δύο συνιστωσών της ταχύτητας υπολογίζονται ως:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_R}u_R + \sqrt{\rho_L}u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (3.45)$$

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_R}v_R + \sqrt{\rho_L}v_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (3.46)$$

Η μέση τιμή της ολικής ειδικής ενθαλπίας κατά Roe είναι:

$$\tilde{h}_t = \frac{\sqrt{\rho_R}h_{t,R} + \sqrt{\rho_L}h_{t,L}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad (3.47)$$

Αυτή συνδέεται με τη στατική πίεση μέσω της Σχέσης 3.11. Οπότε, η μέση, κατά Roe, τιμή της στατικής πίεσης δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\tilde{\rho}\tilde{h}_t - \frac{1}{2}\tilde{\rho}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) \right] \quad (3.48)$$

Η μέση, κατά Roe, τιμή της ταχύτητας του ήχου θα χρησιμοποιηθεί στο διαγώνιο πίνακα Λ της Σχέσης 3.29 και υπολογίζεται ως:

$$\tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1) \left(\tilde{h}_t - \frac{1}{2}\tilde{v}^2 \right)} \quad (3.49)$$

Τελικά, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ατρίβους και χρονικά μόνιμου όρου θα γραφεί στην τελική διακριτοποιημένη μορφή, αντικαθιστώντας τη Σχέση 3.42 στη 3.16.

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds &\approx \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \vec{F}_{n,PQ}^{inv} \Delta s \Rightarrow \\ \oint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} ds &\approx \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\vec{F}_{n,PQ}^L + \vec{F}_{n,PQ}^R \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \left(\vec{U}_{PQ}^L - \vec{U}_{PQ}^R \right) \right] \Delta s \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Η τελική διανυσματική σχέση ξαναγράφεται και σε τανυστική μορφή. Αν θεωρηθεί ότι, οι εκθέτες L και R αναφέρονται στην αριστερή και δεξιά κυψέλη, δηλαδή στην P και Q αντίστοιχα, το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής στις κυψέλες αυτές, γράφεται τανυστικά ως:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{n,PQ}^L &= \vec{\mathbf{F}}^P \cdot \vec{\mathbf{n}} = \left(\vec{f}_x \cdot n_x + \vec{f}_y \cdot n_y \right) \Big|_P = f_{ij}^P n_j^k \\ \vec{F}_{n,PQ}^R &= \vec{\mathbf{F}}^Q \cdot \vec{\mathbf{n}} = \left(\vec{f}_x \cdot n_x + \vec{f}_y \cdot n_y \right) \Big|_Q = f_{ij}^Q n_j^k \end{aligned} \quad (3.51)$$

όπου ο δείκτης $i = (1, 2, 3, 4)$ δηλώνει τον αύξοντα αριθμό των τεσσάρων συντηρητικών μεταβλητών για διδιάστατη ροή, ο επαναλαμβανόμενος δείκτης $j = (1, 2) \equiv (x, y)$ δηλώνει άθροισμα σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein στις δύο καρτεσιανές συντεταγμένες και ο $k \in \text{neigh}(P)$ αντιπροσωπεύει τις κοινές επιφάνειες των γειτονικών κυψελών με την κυψέλη P.

Όμοια τα διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών γίνονται:

$$\begin{aligned} \vec{U}_{PQ}^L &= U_i^{P',k} \\ \vec{U}_{PQ}^R &= U_i^{Q',k} \end{aligned} \quad (3.52)$$

όπου οι εκθέτες P' και Q' δηλώνουν ότι, χρησιμοποιούνται οι προεκβολές των συντηρητικών μεγεθών στα μέσα των υπό μελέτη κοινών επιφανειών από τα βαρύκεντρα των κυψελών P και Q αντίστοιχα.

Το Ιακωβιανό μητρώο τεχνητής συνεκτικότητας $|\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}|$ της Σχέσης 3.42 γίνεται ομοίως:

$$|\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| = \tilde{\mathbf{A}}_j^k n_j^k \quad (3.53)$$

όπου κι εδώ, ομοίως, ο επαναλαμβανόμενος δείκτης $j = (1, 2) \equiv (x, y)$ δηλώνει άθροισμα.

Άρα, τελικά, η ταυστική γραφή της Σχέσης 3.50 είναι:

$$\oint_S f_{ij} n_j ds \approx \sum_{k=1}^{neigh(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} (f_{ij}^P n_j^k + f_{ij}^Q n_j^k) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_j^k n_j^k| (U_i^{P',k} - U_i^{Q',k}) \right] \Delta s^k \right\} \quad (3.54)$$

με $i = (1, 2, 3, 4)$ και $j = (1, 2) \equiv (x, y)$.

3.3 Διακριτοποίηση Χρονικών Όρων

Ο χρονικός όρος (*temporal*) της Σχέσης 3.14 διακριτοποιείται ευκολότερα σε σχέση με τους ατριβείς όρους. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα Leibniz, ο χρονικός όρος γράφεται:

$$\int_{\Omega_P^{m+1}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_P^{m+1}} \vec{U} d\Omega - \int_{\partial\Omega_P^{m+1}} \underbrace{\vec{u}_{\text{grid}}^{m+1} \cdot \vec{n}^{m+1}}_{\rightarrow 0} \vec{U} d(\partial\Omega) \quad (3.55)$$

Στη Σχέση 3.55, ο δεύτερος όρος περιέχει την ταχύτητα παραμόρφωσης του ορίου του όγκου ολοκλήρωσης ($\vec{u}_{\text{grid}}^{m+1}$) και επομένως αφορά κινούμενη γεωμετρία. Επειδή σε αυτή τη διπλωματική εργασία δεν επιτρέπονται κινούμενα όρια, δηλαδή ισχύει $\Omega_P^{m+1} = \Omega_P^m, \forall m \in \mathbb{N}$ και $\vec{u}_{\text{grid}} = \vec{0}$, ο όρος αυτός μηδενίζεται.

Εκτελείται διακριτοποίηση του πρώτου όρου της Σχέσης 3.55, χρησιμοποιώντας σχήμα πίσω διαφύρισης στο χρόνο με 2ης τάξης ακρίβεια:

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} d\Omega \approx \frac{\Omega_P}{2\Delta t} (3\vec{U}_P^{m+1} - 4\vec{U}_P^m + \vec{U}_P^{m-1}) \quad (3.56)$$

όπου \vec{U}_P^{m-1} , \vec{U}_P^m και \vec{U}_P^{m+1} είναι οι τιμές του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών σε 3 διαδοχικές χρονικές στιγμές, που ισαπέχουν στο χρόνο κατά Δt . Επίσης, όπως παρατηρείται από τη Σχέση 3.56, η εύρεση της τιμής του διανύσματος \vec{U}_P^{m+1} απαιτεί την εύρεση και των αντίστοιχων τιμών στις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Η Σχέση 3.56 σε τανυστική μορφή γράφεται εύκολα ως:

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial U_i}{\partial t} d\Omega \approx \frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3U_i^{P,m+1} - 4U_i^{P,m} + U_i^{P,m-1} \right) \quad (3.57)$$

3.4 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο πρόβλημα εντοπίζονται στα **στερεά όρια** (S_w) και **επ' άπειρο όρια** (S_∞).

3.4.1 Οριακές Συνθήκες στα Στερεά Όρια

Η οριακή συνθήκη που επιβάλλεται στα στερεά όρια του χωρίου είναι η **συνθήκη μη εισχώρησης** της ταχύτητας, αφού προσομοιώνεται ατριβής ροή. Σύμφωνα με αυτή, επιβάλλεται μηδενισμός του κάθετου στην επιφάνεια της γεωμετρίας διανύσματος της ταχύτητας (*normal velocity*):

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{0} \quad (3.58)$$

Επομένως, από τη Σχέση 3.17 το αριθμητικό διάνυσμα της ατριβούς ροής στα στερεά όρια (*wall*) γίνεται:

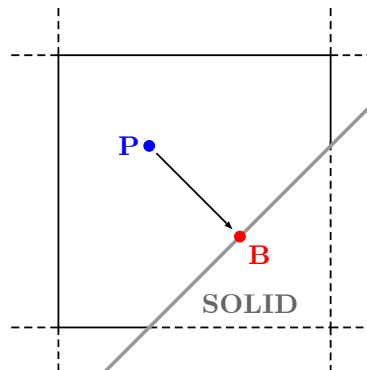
$$\vec{F}_{n,wall}^{inv} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Από τη Σχέση 3.59 παρατηρείται ότι, στα στερεά όρια ασκούνται μόνο οι δυνάμεις πίεσης κάθετα σε αυτό.

Όπως έχει προαναφερθεί, η επίλυση της ροής εκτελείται στο βαρύκεντρο κάθε κυψέλης, όπου όμως δεν υπάρχει στερεό όριο. Οπότε, για να εφαρμοστεί η συνθήκη στο όριο, η τιμή στο βαρύκεντρο της κυψέλης προεκβάλλεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που τέμνει την κυψέλη, δηλαδή σε ένα σημείο B πάνω στο όριο. Η προεκβολή αυτή γίνεται με χρήση της σχέσης του Taylor, με παρόμοιο τρόπο με τη Σχέση 3.32:

$$\vec{U}_B = \vec{U}_P + \overline{PB} \cdot \left(\nabla \vec{U} \right)_P \quad (3.60)$$

Οπότε, η οριακή συνθήκη 3.59 θα εφαρμοστεί στις τιμές \vec{U}_B , που θα βρεθούν μετά την προεκβολή από το βαρύκεντρο.



Σχήμα 3.3: Εφαρμογή της οριακής συνθήκης στο σημείο B του στερεού ορίου μετά από προεκβολή των συντηρητικών μεγεθών από το βαρύκεντρο της κυψέλης P [38].

3.4.2 Οριακές Συνθήκες στα Επ' άπειρο Όρια

Αρχικά, θεωρείται ότι, στα όρια του υπολογιστικού χωρίου τα μεγέθη της ροής ταυτίζονται με αυτά της επ' άπειρο ροής. Οπότε, θα πρέπει να εισαχθεί μια παραδοχή, κατά την οποία, πρέπει να υπάρχει αρκετή απόσταση μεταξύ των επ' άπειρο ορίων και της γεωμετρίας, έτσι ώστε η ροή σε αυτή τη περιοχή να παραμένει πρακτικά ανεπηρέαστη από την παρουσία της γεωμετρίας. Αύξηση της απόστασης αυτής συνεπάγεται και αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Άρα, ο χρήστης ευθύνεται για τη βέλτιστη επιλογή της απόστασης των επ' άπειρο ορίων από τη γεωμετρία. Συνήθως, η απόσταση δίνεται σαν ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους της χορδής της αεροτομής και θεωρείται ικανοποιητική όταν είναι ίση με 10 χορδές.

Στα επ' άπειρο όρια του χωρίου επιβάλλονται οριακές συνθήκες Dirichlet, μεταξύ των οριακών κυψελών του χωρίου και των ψευδόκομβων. Οι ψευδόκομβοι αυτοί, τοποθετούνται εξωτερικά του υπολογιστικού χωρίου και λαμβάνουν τις τιμές των πρωτεύουσών μεταβλητών των οριακών κυψελών. Επομένως, γίνεται εφικτός ο υπολογισμός του αριθμητικού διανύσματος $\vec{F}_{n,\infty}^{inv}$ της ροής που εισέρχεται/εξέρχεται από την οριακή πλευρά της κυψέλης (κοινή με τον ψευδόκομβο), με χρήση του Σχήματος Roe (Σχέση 3.42).

3.5 Επαναληπτικός Αλγόριθμος Επίλυσης Εξισώσεων Euler

Συνοψίζοντας, το σύστημα εξισώσεων της σχέσης του υπολοίπου 3.14 μετά από την διακριτοποίηση του ατριβούς και του χρονικού όρου, όπως παρουσιάστηκε στις Ενότητες 3.2 και 3.3, γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{R}_P = & \frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3\vec{U}_P^{m+1} - 4\vec{U}_P^m + \vec{U}_P^{m-1} \right) + \\ & + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\vec{F}_{n,PQ}^L + \vec{F}_{n,PQ}^R \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \left(\vec{U}_{PQ}^L - \vec{U}_{PQ}^R \right) \right] \Delta s \right\} \Bigg|^{m+1} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

ή σε τανυστική γραφή:

$$\begin{aligned} R_i = & \frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3U_i^{P,m+1} - 4U_i^{P,m} + U_i^{P,m-1} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\text{neigh}(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(f_{ij}^P n_j^k + f_{ij}^Q n_j^k \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_j^k n_j^k| \left(U_i^{P',k} - U_i^{Q',k} \right) \right] \Delta s^k \right\} \Bigg|^{m+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

όπου ο δείκτης m δηλώνει τη χρονική στιγμή.

Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων είναι η **Δέλτα διατύπωση** (*Delta-formulation*) [30], κατά την οποία το μη-γραμμικό σύστημα γραμμικοποιείται. Η τελική λύση του διανύσματος των συντηρητικών μεγεθών συμβολίζεται με \vec{U}^* και είναι άγνωστη. Η αρχικά γνωστή λύση \vec{U} δεν επαληθεύει το σύστημα εξισώσεων, δηλαδή είναι: $\vec{R}_P(\vec{U}) \neq \vec{0}$. Αν ονομαστεί $\Delta\vec{U}$ η διανυσματική διαφορά της τελικής λύσης από την προσωρινή τιμή του πεδίου, δηλαδή αν ισχύει:

$$\Delta\vec{U} = \vec{U}^* - \vec{U} \Rightarrow \vec{U}^* = \vec{U} + \Delta\vec{U}$$

τότε, εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα Taylor με 2ης τάξης ακρίβεια στη Σχέση 3.61,

προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{R}_P(\vec{U}^*) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{R}_P(\vec{U} + \Delta\vec{U}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{R}_P(\vec{U}) + \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} + \mathcal{O}(\Delta\vec{U}^2) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Στο ανάπτυγμα Taylor διατηρούνται μόνο οι δύο πρώτοι όροι, δημιουργώντας σφάλμα $Err = \mathcal{O}(\Delta\vec{U}^2)$. Επομένως, η τελική έκφραση της εξίσωσης προς επίλυση είναι:

$$\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}} \Delta\vec{U} = -\vec{R}_P(\vec{U}) \quad (3.63)$$

Αυτή μπορεί να γραφεί και σε τανυστική μορφή ως:

$$\frac{\partial R_i}{\partial U_j} \Delta U_j = -R_i \quad (3.64)$$

Στη Σχέση 3.64, ο δείκτης $i = (1, 2, 3, 4)$ είναι ελεύθερος και δείχνει πως, σε κάθε υπολογιστική κυψέλη, υπάρχει ένα γραμμικό σύστημα 4×4 . Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης $j = (1, 2, 3, 4)$ χρησιμοποιείται για να δείξει άθροιση σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein.

Η μορφή της Σχέσης 3.63 συναντάται συχνά στην επίλυση συστημάτων με αριθμητικές μεθόδους και αποδίδεται συμβολικά με τη σχέση:

$$\boxed{[NUMERICS] \Delta\vec{U} = [PHYSICS]} \quad (3.65)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (*LHS - Left Hand Side*) καθορίζει το τρόπο σύγκλισης και μπορεί να δεχθεί μικρές αλλαγές που διευκολύνουν τη σύγκλιση, ενώ το δεξί μέλος της εξίσωσης (*RHS - Right Hand Side*) σχετίζεται με την ακρίβεια της λύσης. Επομένως, αφήνεται στην κρίση του χρήστη να επέμβει στον όρο *[NUMERICS]* κατά το δοκούν, αλλά πάντα σε λογικά πλαίσια, έτσι ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή λύση γρηγορότερα σε μεγαλύτερο εύρος προβλημάτων. Αντίθετα, ο όρος *[PHYSICS]* δεν επιδέχεται αλλαγές γιατί έχει να κάνει με την φυσική του προβλήματος. Σε περίπτωση που αλλαχθεί, το πρόβλημα θα συγκλίνει σε διαφορετική λύση.

3.5.1 Προσθήκη Ψευδοχρονικού Όρου

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της Σχέσης 3.61, είτε της Σχέσης 3.62, χρησιμοποιείται η μέθοδος του διπλού χρονικού βήματος (*dual time stepping*). Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, κάθε πραγματική χρονική στιγμή επιλύεται σαν ένα χρονικά μόνιμο πρόβλημα (*steady*), αλλά η χρονική μεταβολή καθορίζεται από τους αντίστοιχους χρονικούς όρους της σχέσης. Ο όρος "διπλό χρονικό βήμα" δικαιολογείται, γιατί στην εξίσωση του υπολοίπου προστίθεται ένας επιπλέον ψευδοχρονικός όρος, έτσι ώστε το σύστημα να αποκτήσει υπερβολική μορφή στο χωρο-χρόνο και να επιτευχθεί ευκολότερη σύγκλιση, με την ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας του συστήματος εξισώσεων.

Οπότε, σε αυτήν τη διπλωματική εργασία γίνεται επέμβαση στον όρο $[NUMERICS]$ προσθέτοντας έναν ψευδοχρονικό όρο στην αρχική εξίσωση Euler (Σχέση 3.1), δηλαδή θα προκύψει:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}}_{\text{pseudo-time}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_{\text{time}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y}}_{\text{inviscid}} = \vec{0} \quad (3.66)$$

όπου t ο πραγματικός χρόνος και τ ο ψευδοχρόνος.

Όμοια με τη Σχέση 3.14, το ογκικό ολοκλήρωμα του πρώτου όρου της Σχέσης 3.66 στον όγκο ελέγχου Ω_P διακριτοποιείται με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων σε κεντροκυβελική διατύπωση. Άρα, ισχύει:

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} d\Omega = \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \right)_P^{n+1} \Omega_P \quad (3.67)$$

όπου n ο μετρητής των ψευδοχρονικών επαναλήψεων.

Στη συνέχεια, η ψευδοχρονική παράγωγος της Σχέσης 3.67 διακριτοποιείται στον χρόνο, με σχήμα 1ης τάξης ακρίβειας.

$$\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \right)_P^{n+1} \Omega_P \approx \left(\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta \tau} \Omega_P \right) \Big|_P = \left(\frac{\Delta \vec{U}^{n+1}}{\Delta \tau} \Omega_P \right) \Big|_P \quad (3.68)$$

Ο δείκτης P εισήχθη, για να γίνει ξεκάθαρο ότι, κάθε κυψέλη P έχει το δικό της ψευδοχρονικό βήμα $\Delta \tau_P$. Οπότε, ανάλογα με την τιμή του βήματος, θα υπάρχουν κυψέλες που προπορεύονται στον ψευδοχρόνο σε σχέση με άλλες, επειδή μπορούν να αντέξουν μεγαλύτερα ψευδοχρονικά βήματα χωρίς να χάνουν την ευστάθειά στη σύγκλιση της λύσης τους. Έτσι, επιτυγχάνεται ταχύτερη σύγκλιση του πεδίου. Η

τεχνική αυτή θα εφαρμοστεί μέσω της συνθήκης **CFL** (*Courant-Friedrichs-Lewy*) [31].

$$\Delta_{TP} = CFL \frac{\Omega_P}{C} \quad (3.69)$$

όπου CFL είναι ο αριθμός Courant-Friedrichs-Lewy και ο όρος C υπολογίζεται από τη σχέση:

$$C = (|u_i^P| + c^P) S_i^P \quad (3.70)$$

όπου ο διπλός δείκτης i δηλώνει άθροιση, $|u_i^P|$ είναι το μέτρο της κάθε συνιστώσας της ταχύτητας του βαρύκεντρου P , c^P η τοπική ταχύτητα του ήχου και S_i^P η προβολή όλων των τμημάτων που απαρτίζουν τα όρια του όγκου ελέγχου της κυψέλης P κατά τη κατεύθυνση i και δίνεται από τη σχέση:

$$S_i^P = \frac{1}{2} \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left\{ |n_i^{PQ}| \Delta s_i \right\} \quad (3.71)$$

όπου $|n_i^{PQ}|$ είναι το μέτρο του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος στην κοινή επιφάνεια των κυψελών P και Q και Δs_i το μήκος κάθε επιφάνειας που μελετάται.

Επίσης, αξίζει να σημειωθεί πως, ο αριθμός αυτός μπορεί να λάβει τιμές πολύ μεγαλύτερες τιμές της μονάδας, αυξάνοντας αρκετά το ψευδοχρονικό βήμα, αφού το σχήμα είναι σημειακά πεπλεγμένο (*point-Implicit*).

Στον κώδικα που δημιουργήθηκε από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, ο αριθμός CFL ξεκινά από μια ελάχιστη τιμή (π.χ. $CFL_{min} = 10^{-3}$), αυξάνεται γραμμικά μέχρι ένα καθορισμένο από το χρήστη αριθμό επαναλήψεων και τελικά, μένει σταθερός μέχρι το τέλος στη μέγιστη τιμή του (π.χ. $CFL_{max} = 20$). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται, επειδή στις πρώτες επαναλήψεις το σύστημα είναι ευαίσθητο στις αλλαγές και μια μεγάλη τιμή του CFL μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια και τελικά, να αποκλίνει. Οπότε, χρησιμοποιώντας μικρές τιμές του CFL στην αρχή, εφαρμόζεται ένα είδος υποχαλάρωσης (*under-relaxation*), που θα βοηθήσει το σύστημα ως προς τη σύγκλιση. Μετά από ένα καθορισμένο αριθμό επαναλήψεων (π.χ. 300), ο CFL παίρνει τη μέγιστη τιμή του και το πρόγραμμα γίνεται ταχύτερο, αφού πλέον τα ψευδοχρονικά βήματα είναι αρκετά μεγάλα. Ενδεικτικές τιμές για τον CFL φαίνονται στο διάγραμμα του Σχήματος 3.4.

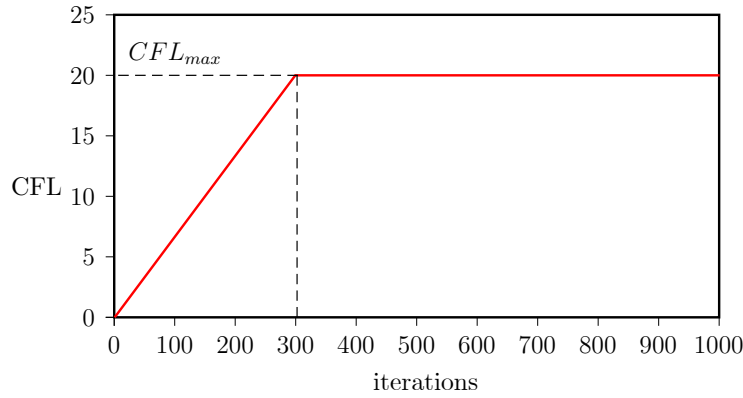
Η σχέση του υπολοίπου (Σχέση 3.61), με την προσαύξηση του ψευδοχρονικού

όρου, γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{R}_P = & \underbrace{\left(\frac{\Delta \vec{U}^{n+1}}{\Delta \tau} \Omega_P \right)}_{\text{pseudo-time}} \Big|_P + \underbrace{\frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3\vec{U}_P^{m+1} - 4\vec{U}_P^m + \vec{U}_P^{m-1} \right)}_{\text{time}} + \\ & + \underbrace{\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\vec{F}_{n,PQ}^L + \vec{F}_{n,PQ}^R \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_{PQ}| \left(\vec{U}_{PQ}^L - \vec{U}_{PQ}^R \right) \right] \Delta s \right\}}_{\text{inviscid}} \Big|^{m+1} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.72)$$

ή σε τανυστική μορφή:

$$\begin{aligned} R_i = & \underbrace{\frac{\Delta U_i^{P,n+1}}{\Delta \tau} \Omega_P}_{\text{pseudo-time}} + \underbrace{\frac{\Omega_P}{2\Delta t} \left(3U_i^{P,m+1} - 4U_i^{P,m} + U_i^{P,m-1} \right)}_{\text{time}} + \\ & + \underbrace{\sum_{k=1}^{\text{neigh}(P)} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(f_{ij}^P n_j^k + f_{ij}^Q n_j^k \right) - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}_j^k n_j^k| \left(U_i^{P',k} - U_i^{Q',k} \right) \right] \Delta s^k \right\}}_{\text{inviscid}} \Big|^{m+1} = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$



Σχήμα 3.4: Ο αριθμός CFL αυξάνεται γραμμικά μέχρι ένα σημείο και έπειτα μένει σταθερός στην τιμή CFL_{max}

3.5.2 Υπολογισμός Διαγώνιων και Μη-Διαγώνιων Όρων

Αν το υπολογιστικό χωρίο έχει N κυψέλες, τότε τα διανύσματα \vec{R} και $\Delta\vec{U}$ καθώς και ο πίνακας $\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}}$ γράφονται:

$$\vec{R} = \left[\vec{R}_1 \quad \vec{R}_2 \quad \dots \quad \vec{R}_{N-1} \quad \vec{R}_N \right]^T \quad 4N \times 1 \quad (3.74)$$

Κάθε στοιχείο του υπολοίπου αντιστοιχεί σε μία κυψέλη του χωρίου και είναι ένα διάνυσμα τεσσάρων υπολοίπων, που αντιστοιχούν στις τέσσερις συντηρητικές μεταβλητές της ροής, δηλαδή είναι ένα διάνυσμα διάστασης 4×1 . Όμοια και για το διάνυσμα $\Delta\vec{U}$ ισχύει:

$$\Delta\vec{U} = \left[\Delta\vec{U}_1 \quad \Delta\vec{U}_2 \quad \dots \quad \Delta\vec{U}_{N-1} \quad \Delta\vec{U}_N \right]^T \quad 4N \times 1 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\vec{R}_1}{\partial\vec{U}_1} & \frac{\partial\vec{R}_1}{\partial\vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial\vec{R}_1}{\partial\vec{U}_{N-1}} & \frac{\partial\vec{R}_1}{\partial\vec{U}_N} \\ \frac{\partial\vec{R}_2}{\partial\vec{U}_1} & \frac{\partial\vec{R}_2}{\partial\vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial\vec{R}_2}{\partial\vec{U}_{N-1}} & \frac{\partial\vec{R}_2}{\partial\vec{U}_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\vec{R}_{N-1}}{\partial\vec{U}_1} & \frac{\partial\vec{R}_{N-1}}{\partial\vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial\vec{R}_{N-1}}{\partial\vec{U}_{N-1}} & \frac{\partial\vec{R}_{N-1}}{\partial\vec{U}_N} \\ \frac{\partial\vec{R}_N}{\partial\vec{U}_1} & \frac{\partial\vec{R}_N}{\partial\vec{U}_2} & \dots & \frac{\partial\vec{R}_N}{\partial\vec{U}_{N-1}} & \frac{\partial\vec{R}_N}{\partial\vec{U}_N} \end{bmatrix} \quad 4N \times 4N \quad (3.76)$$

Για την παράγωγο $\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}}$ οι διαστάσεις κάθε στοιχείου δεν είναι διάστασης 4×1 , όπως πριν. Επειδή, κάθε μία από τις τέσσερις μεταβλητές του υπολοίπου \vec{R} (σε μία κυψέλη) παραγωγίζεται με κάθε μία από τις τέσσερις συντηρητικές μεταβλητές του \vec{U} , κάθε στοιχείο του πίνακα $\frac{\partial\vec{R}}{\partial\vec{U}}$ έχει διάσταση 4×4 . Δηλαδή, για την παράγωγο

μιας τυχαίας κυψέλης κ με μια μ θα ισχύει:

$$\frac{\partial R_{\kappa,i}}{\partial U_{\mu,j}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\kappa,1}}{\partial \rho_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,1}}{\partial (\rho u)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,1}}{\partial (\rho v)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,1}}{\partial E_\mu} \\ \frac{\partial R_{\kappa,2}}{\partial \rho_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,2}}{\partial (\rho u)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,2}}{\partial (\rho v)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,2}}{\partial E_\mu} \\ \frac{\partial R_{\kappa,3}}{\partial \rho_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,3}}{\partial (\rho u)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,3}}{\partial (\rho v)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,3}}{\partial E_\mu} \\ \frac{\partial R_{\kappa,4}}{\partial \rho_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,4}}{\partial (\rho u)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,4}}{\partial (\rho v)_\mu} & \frac{\partial R_{\kappa,4}}{\partial E_\mu} \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, γίνεται η ανάλυση της Ιακωβιανής ορίζουσας $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ της Σχέσης 3.76. Η διαγώνιος (*Diag*) αναλύεται ξεχωριστά από τα υπόλοιπα στοιχεία (*Off - Diag*) της εν λόγω ορίζουσας.

Διαγώνια Μητρώα

Στην διαγώνιο του πίνακα $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ περιέχονται οι πίνακες διάστασης 4×4 , όπου το υπόλοιπο κάθε μίας από τις N κυψέλες παραγωγίζεται με τις συντηρητικές μεταβλητές της ροής της ίδιας κυψέλης. Επομένως, παραγωγίζεται το υπόλοιπο της Σχέσης 3.72 ως προς το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} και προκύπτει το μητρώο της διαγωνίου $[D]_P^m$

$$[D]_P^m \triangleq \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_P^{m+1}} = \frac{\Omega_P}{\Delta \tau} \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{3\Omega_P}{2\Delta t} \mathbf{I}_{4 \times 4} + \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_P + \left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \right) \Delta_{SPQ} \right\} \quad (3.77)$$

όπου $\mathbf{I}_{4 \times 4}$ ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 4×4 .

Μη Διαγώνια Μητρώα

Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$, είναι οι παράγωγοι μεταξύ δύο διαφορετικών κυψελών P και Q , για τους οποίους διατυπώνεται το μη-διαγώνιο μητρώο $[OffD]_P^m$.

$$[OffD]_{PQ}^m \triangleq \frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}_Q^{m+1}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_Q - \left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \right) \Delta_{SPQ} \quad (3.78)$$

Όταν δύο κυψέλες P και Q δεν γειτνιάζουν, δηλαδή δεν έχουν κοινή πλευρά, το μη-διαγώνιο μητρώο αυτών των δύο κυψελών μηδενίζεται. Άρα, ισχύει:

$$[OffD]_{PQ}^m = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}_Q - \left| \tilde{\mathbf{A}}_{PQ} \right| \right) \Delta_{SPQ} & , \text{ αν } P \text{ και } Q \text{ γειτνιάζουν} \\ 0 & , \text{ αν } P \text{ και } Q \text{ δε γειτνιάζουν} \end{cases} \quad (3.79)$$

Συνοψίζοντας, η παράγωγος $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{U}}$ της Σχέσης 3.63 αντικαθίσταται με τις εκφράσεις των διαγώνιων και μη-διαγώνιων μητρώων (Σχέσεις 3.77 και 3.78)

$$\underbrace{[D]_P^m \Delta \vec{U}_P^{m+1}}_{\text{Διαγώνιος όρος}} + \underbrace{\sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \{[OffD]_{PQ}^m \Delta \vec{U}_Q^{m+1}\}}_{\text{Μη διαγώνιοι όροι}} = -\vec{R}_P^m \quad (3.80)$$

Για εποπτικούς λόγους, για N κυψέλες στην m χρονική στιγμή, το σύστημα της Σχέσης 3.63 που επιλύεται γράφεται και σε μητρική μορφή :

$$\begin{bmatrix} [D]_1^m & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & [OffD]_{PQ}^m & \cdots & [D]_P^m & \cdots & [OffD]_{PQ'}^m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & [D]_N^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{U}_1^{m+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_P^{m+1} \\ \vdots \\ \Delta \vec{U}_N^{m+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{R}_1^m \\ \vdots \\ \vec{R}_P^m \\ \vdots \\ \vec{R}_N^m \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Από τη μητρική γραφή του συστήματος στη Σχέση 3.81, καθώς και από τις σχέσεις υπολογισμού των διαγώνιων και μη-διαγώνιων μητρώων (Σχέσεις 3.77 και 3.78), παρατηρείται πως, ο πίνακας του $[NUMERICS]$ τμήματος, δηλαδή ο πίνακας $\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}}$, είναι πολύ αραιός, καθώς περιέχει κατά κόρον μηδενικούς όρους. Σε κάθε γραμμή υπάρχουν το πολύ εννέα μη μηδενικά στοιχεία (σίγουρα ένα διαγώνιο μητρώο $[D]_P^m$ και το πολύ 8 μη-διαγώνια μητρώα $[OffD]_{PQ}^m$, όσα δηλαδή και ο μέγιστος αριθμός των γειτονικών κυψελών). Ωστόσο, επειδή το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι μη-δομημένο, το μητρώο δεν έχει μπλοκ-διαγώνια μορφή (δηλαδή τα μη-μηδενικά στοιχεία δεν είναι διατεταγμένα σε διαγωνίους) και επομένως, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές ταχείας επίλυσης συστημάτων [3]. Προφανώς, για εξοικονόμηση μνήμης δεν αποθηκεύεται όλος ο πίνακας $\frac{\partial \vec{R}_P}{\partial \vec{U}}$, αλλά μόνο το διαγώνιο και μη-διαγώνια μητρώα (διάστασης 4×4) κάθε κυψέλης σε ένα διάνυσμα, που θα αναφέρεται σε αυτή τη κυψέλη, και τα υπόλοιπα μηδενικά στοιχεία του πίνακα αγνοούνται.

Ο υπολογισμός των διανυσμάτων $\Delta \vec{U}_P^{m+1}$ για κάθε καινούρια χρονική στιγμή γίνεται με τη μέθοδο **Jacobi**. Οπότε, η Σχέση 3.80 έρχεται σε επιλύσιμη μορφή:

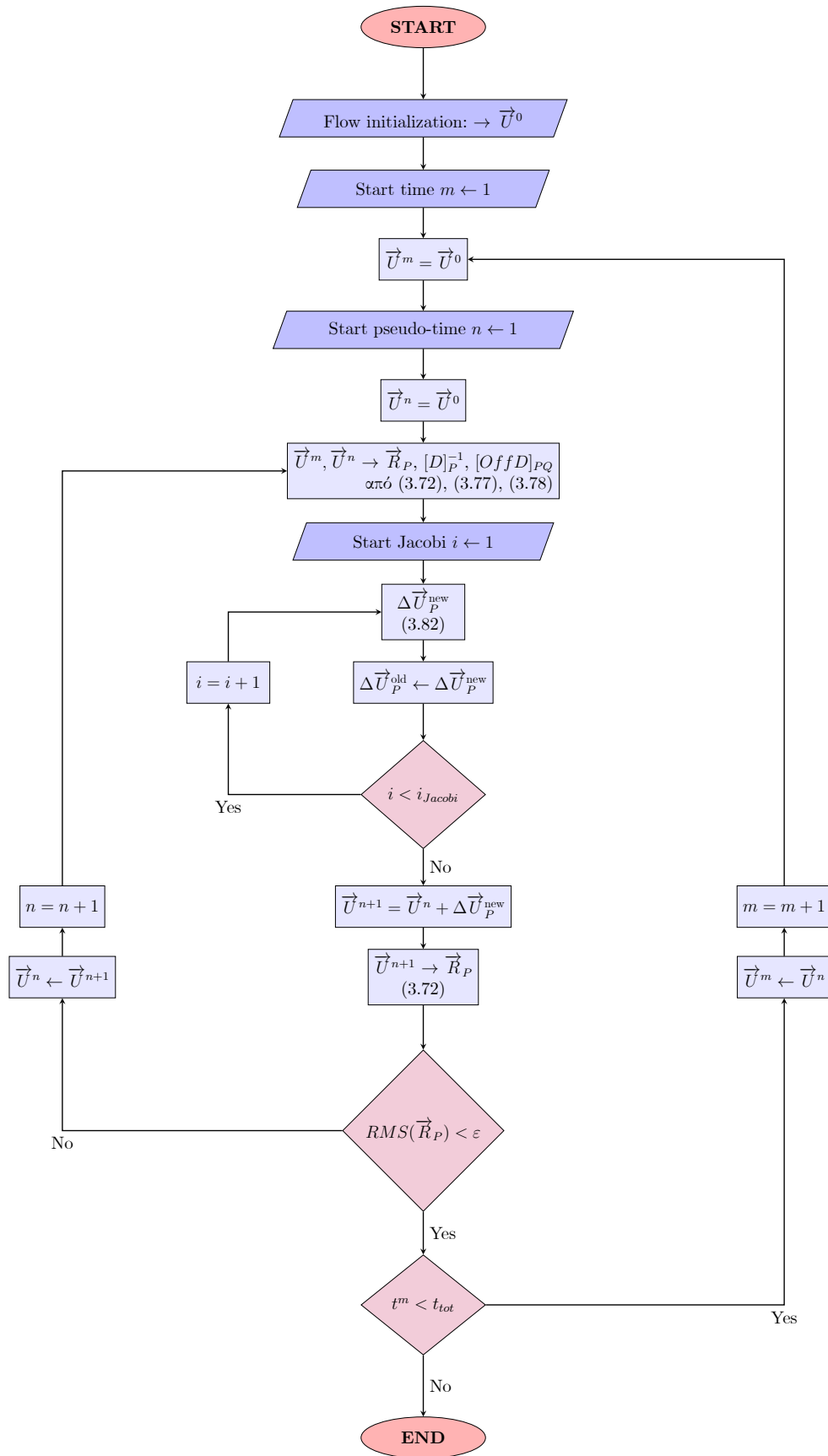
$$\begin{aligned} [D]_P |^{\text{old}} \Delta \vec{U}_P^{\text{new}} &= -\vec{R}_P - \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \{[OffD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q\} \Big|_{\text{old}} \Rightarrow \\ \Delta \vec{U}_P^{\text{new}} &= [D]_P^{-1} \left[-\vec{R}_P - \sum_{Q \in \text{neigh}(P)} \{[OffD]_{PQ} \Delta \vec{U}_Q\} \right] \Big|_{\text{old}} \end{aligned} \quad (3.82)$$

όπου τα μητρώα \vec{R}_P , $\Delta\vec{U}_Q$, $[D]_P^{-1}$ και $[OffD]_{PQ}$ υπολογίζονται στην τρέχουσα ψευδοχρονική στιγμή n .

Ανακεφαλαιώνοντας, οι διδιάστατες και χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Euler επιλύονται με προσθήκη ψευδοχρονικού όρου, για ευκολότερη σύγκλιση, και χρήση της μεθόδου Jacobi, για τον υπολογισμό της διόρθωσης της Δέλτα-διατύπωσης. Ο αλγόριθμος επίλυσης αποτελείται από τρεις επαναληπτικές διαδικασίες.

- Στον εσωτερικό και μικρότερο βρόχο εκτελείται η μέθοδος Jacobi, όπου υπολογίζεται η διόρθωση του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών ($\Delta\vec{U}$), μέχρι ένα καθορισμένο αριθμό επαναλήψεων (i_{Jacobi}). Ο αριθμός αυτός επιλέγεται από το χρήστη με σκοπό να προκύψει γρήγορα μια ικανοποιητική τιμή της διόρθωσης $\Delta\vec{U}_P^{new}$. Ειδικά στις πρώτες ψευδοχρονικές επαναλήψεις, όπου για μια τιμή της διόρθωσης δεν ικανοποιούνται οι πεδιακές εξισώσεις, δεν ωφελεί να γίνεται τελική σύγκλιση στο παρόν πεδίο, αφού η διόρθωση θα αλλάξει στις επόμενες επαναλήψεις.
- Ο δεύτερος και ενδιάμεσος βρόχος εκτελείται στον ψευδοχρόνο (δείκτης n) πάντα σε μια σταθερή χρονική στιγμή t^m και ανανεώνει την τιμή του διανύσματος των συντηρητικών μεταβλητών, μέχρις ότου η RMS τιμή του υπολοίπου \vec{R}_P να γίνει μικρότερη από ένα καθορισμένο (από το χρήστη) σφάλμα ϵ .
- Ο τρίτος και μεγαλύτερος βρόχος εκτελείται στο χρόνο (δείκτης m) και είναι υπεύθυνος για τη χρονο-προέλαση του προβλήματος ροής προσαιζάνοντας τον πραγματικό χρόνο με ένα καθορισμένο χρονικό βήμα. Ο αλγόριθμος τελειώνει όταν ο πραγματικός χρόνος έχει φτάσει στο τελευταίο χρονικό σημείο t_{tot} , που έχει καθορίσει ο χρήστης.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται συνοπτικά ένα διάγραμμα ροής του προαναφερθέντος αλγορίθμου στο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου επίλυσης των χρονικά μη-μόνιμων εξισώσεων Euler [2][38]

Κεφάλαιο 4

Η Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών

4.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών (*harmonic balance*) εφαρμόζεται για επίλυση περιοδικών φαινομένων ροής. [25] [32] Οι οριακές συνθήκες μεταβάλλονται εξαναγκασμένα στο χρόνο με περιοδικότητα και με συγκεκριμένη συχνότητα. Επομένως, προκύπτει ένα μη-μόνιμο πεδίο ροής (*unsteady*), που όμως με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής, παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα ως προς την ταχύτητα επίλυσης σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης (*time-marching*).

4.2 Μαθηματική Θεμελίωση

Με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, γίνεται δυνατός ο υπολογισμός των μεγεθών της περιοδικής ροής με μεταφορά από το πεδίο του χρόνου, στο πεδίο των συχνοτήτων. Η τελική λύση προσεγγίζεται με άθροισμα όρων σειράς Fourier. Οι χρονικά μόνιμες εξισώσεις αντιστοιχούν σε πραγματικά χρονικά σημεία μέσα σε μια περίοδο και λύνονται ταυτόχρονα και διαδοχικά, σε αντίθεση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης, όπου οι εξισώσεις ροής λύνονται ξεχωριστά για κάθε χρονικό βήμα. Αναλυτικότερη αναφορά στη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών, καθώς και απόδειξη της εξίσωσης ισορροπίας των αρμονικών με χρήση μιγαδικών αριθμών, γίνεται στη διπλωματική εργασία του Νικόλαου Μακρή[33].

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώ-

σεων που λύνεται είναι το εξής (Σχέση 3.1):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_y}{\partial y} = \vec{0} \quad (4.1)$$

Για διευκόλυνση γραφής, η χρονική παράγωγος $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ γράφεται ως $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$ και οι παράγωγοι των διανυσμάτων ροής (fluxes) αντικαθίστανται από τον όρο χωρικού υπολοίπου (*spatial residual*) $\vec{R}(\vec{U}(t))$. Άρα, το σύστημα εξισώσεων, στο οποίο βασίζεται η ανάλυση που ακολουθεί, είναι:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{R}(\vec{U}(t)) = 0 \quad (4.2)$$

Στη Σχέση 4.2 το διάνυσμα των συντηρητικών μεγεθών $\vec{U} = \vec{U}(t)$ είναι το πεδίο της ροής που πρέπει να υπολογιστεί, η αλλιώς η λύση του πεδίου της ροής. Όπως φαίνεται και στη Σχέση 3.2 ισούται με:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Μέσω γνωστών εκφράσεων ισχύει $\vec{R} = \vec{R}(\vec{U}(t))$, δηλαδή το υπόλοιπο \vec{R} εξαρτάται από τη λύση της ροής \vec{U} .

Η προϋπόθεση της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι ότι, η περιοδικότητα της ροής προκαλείται από εξαναγκασμένη ταλάντωση μεγεθών της ροής, όπως η αρχική γωνία ή η οριζόντια ταχύτητα της ροής, με σταθερή και γνωστή περίοδο διέγερσης T . Επίσης, προκύπτει και $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Στη συνέχεια, προσεγγίζονται μέσω σειρών Fourier τα χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία \vec{U} και \vec{R} με χρήση N_H συχνοτήτων. Έτσι, με χρήση του αλγορίθμου FFT (*Fast Fourier Transform*) [34] [35], αυτά γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \vec{U}(t) &= \hat{U}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left[\hat{U}_{an} \cos(\omega n t) + \hat{U}_{bn} \sin(\omega n t) \right] \\ \vec{R}(t) &= \hat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left[\hat{R}_{an} \cos(\omega n t) + \hat{R}_{bn} \sin(\omega n t) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Από το ζεύγος εξισώσεων της Σχέσης 4.4 παρατηρείται πως, για τον υπολογισμό των πεδίων $\vec{\mathbf{U}}$ και $\vec{\mathbf{R}}$, είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των πραγματικών πεδίων $(\hat{\mathbf{U}}_0, \hat{\mathbf{U}}_{an}, \hat{\mathbf{U}}_{bn})$ και $(\hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{R}}_{an}, \hat{\mathbf{R}}_{bn})$ αντίστοιχα, με $n = 1, \dots, N_H$. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των συχνοτήτων-αρμονικών N_H , τόσο ακριβέστερη αναμένεται να είναι η μέθοδος αυτή στην προσέγγιση της πραγματικής λύσης.

Από τις Σχέσεις 4.4, υπολογίζεται η παράγωγος του διανύσματος των συντηρητικών μεγεθών ως προς το χρόνο:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N_H} \left[-\hat{\mathbf{U}}_{an} \omega n \sin(\omega n t) + \hat{\mathbf{U}}_{bn} \omega n \cos(\omega n t) \right] \quad (4.5)$$

Στη συνέχεια, οι Σχέσεις 4.4 και 4.5 αντικαθίστανται στο αρχικό σύστημα ΜΔΕ της ροής 4.2 και έτσι προκύπτει:

$$\hat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} \left[(\hat{\mathbf{U}}_{bn} \omega n + \hat{\mathbf{R}}_{an}) \cos(\omega n t) \right] + \sum_{n=1}^{N_H} \left[(-\hat{\mathbf{U}}_{an} \omega n + \hat{\mathbf{R}}_{bn}) \sin(\omega n t) \right] = 0 \quad (4.6)$$

Η Σχέση 4.6 πρέπει να ικανοποιείται για κάθε αρμονική, οπότε πρέπει να ικανοποιούνται και οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_0 = 0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{bn} \omega n + \hat{\mathbf{R}}_{an} = 0, & \text{για } n = 1, \dots, N_H \\ -\hat{\mathbf{U}}_{an} \omega n + \hat{\mathbf{R}}_{bn} = 0, & \text{για } n = 1, \dots, N_H \end{cases} \quad (4.7)$$

Το σύστημα της Σχέσης 4.7 αποτελείται από $2N_H + 1$ εξισώσεις. Στο σύστημα αυτό, στόχος είναι ο υπολογισμός των $\hat{\mathbf{U}}_0$, $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$, έτσι ώστε να μπορεί στη συνέχεια να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός στο πεδίο του χρόνου μέσω της Σχέσης 4.4. Η αρχική μη-γραμμική σχέση ($\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}(\vec{\mathbf{U}}(t))$) δείχνει πως, κάθε $\hat{\mathbf{R}}_0$, $\hat{\mathbf{R}}_{an}$ ή $\hat{\mathbf{R}}_{bn}$ εξαρτάται από όλα τα $\hat{\mathbf{U}}_0$, $\hat{\mathbf{U}}_{an}$ και $\hat{\mathbf{U}}_{bn}$ κατά άγνωστο τρόπο. Με στόχο την αποφυγή της παραπάνω δυσκολίας σύνδεσης των συντελεστών, ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

- Πραγματοποιείται χρονική διακριτοποίηση της λύσης $\vec{\mathbf{U}}$ και του χωρικού υπολοίπου $\vec{\mathbf{R}}$ σε $N_T = 2N_H + 1$ ισομήκη χρονικά διαστήματα μέσα στην περίοδο T , με $\Delta t = \frac{T}{2N_H + 1} = \frac{2\pi}{2N_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{a}{\omega}$, όπου ορίστηκε ο βοηθητικός αριθμός

$a = \frac{2\pi}{2N_H+1}$. Ορίζονται τα πεδία:

$$\vec{\mathbf{U}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_0) \\ \mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{R}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_0) \\ \mathbf{R}(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \mathbf{R}(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

- Είναι δυνατό, για καθένα από τα διανύσματα $\vec{\mathbf{U}}_{HB}$ και $\vec{\mathbf{R}}_{HB}$, δηλαδή για κάθε διακριτή χρονική στιγμή, να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις της χρονικής σειράς Fourier. Με αυτόν τον τρόπο, δεδομένου ότι οι άγνωστοι συντελεστές Fourier είναι $2N_H + 1$ σε αριθμό, κάθε πεδίο $\widehat{\mathbf{U}}$ και $\widehat{\mathbf{R}}$ του συστήματος της Σχέσης 4.7 μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των χρονικά διακριτών πεδίων των $\vec{\mathbf{U}}$ και $\vec{\mathbf{R}}$ της Σχέσης 4.8 αντίστοιχα. Ουσιαστικά, μέσω ενός διακριτού μετασχηματισμού Fourier (*Discrete Fourier Transformation - DFT*) πραγματοποιείται σκόπιμη μετάβαση από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου.
- Τέλος, γίνεται αντικατάσταση των εκφράσεων που θα προκύψουν από το δεύτερο βήμα στο σύστημα 4.7. Με αυτόν τον τρόπο, θα προκύψει τελικά, ένα σύστημα εξισώσεων διατυπωμένο στο πεδίο του χρόνου, όπου όμως θα συσχετίζει σε κάθε του εξίσωση τα πεδία $\widehat{\mathbf{U}}$ και $\widehat{\mathbf{R}}$ στις $2N_H + 1$ χρονικές στιγμές μέσα σε μία περίοδο, για τα οποία όμως υπάρχει διαθέσιμη συσχέτιση μέσω της σχέσης $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}(\vec{\mathbf{U}}(t))$.

4.2.1 Εφαρμογή της Μεθόδου για Δύο Αρμονικές

Η μέθοδος, που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα, εφαρμόζεται για $N_H = 2$ αρμονικές. Σε αυτήν την περίπτωση η περίοδος T χωρίζεται σε $N_T = 2N_H + 1 = 5$ ισομήκη χρονικά διαστήματα, δηλαδή με $\Delta t = \frac{T}{5}$.

Επομένως, για δύο αρμονικές, το διάνυσμα των μεταβλητών της ροής (λύση) $\mathbf{U}(t)$ γράφεται σύμφωνα με την εξίσωση της Σχέσης 4.4 ως

$$\mathbf{U}(t) = \widehat{\mathbf{U}}_0 + \widehat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(\omega t) + \widehat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(\omega t) + \widehat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(2\omega t) + \widehat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(2\omega t) \quad (4.9)$$

όπου πρέπει να υπολογιστούν 5 άγνωστα πεδία τιμών $\widehat{\mathbf{U}}_0$, $\widehat{\mathbf{U}}_{a1}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{b1}$, $\widehat{\mathbf{U}}_{a2}$ και $\widehat{\mathbf{U}}_{b2}$. Άρα, μετά από τη χρονική διακριτοποίηση της λύσης υπάρχουν 5 πεδία τιμών μέσα

στην περίοδο της:

$$\vec{\mathbf{U}}_{HB} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(t_0) \\ \mathbf{U}(t_0 + \Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 2\Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 3\Delta t) \\ \mathbf{U}(t_0 + 4\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Έχει αναφερθεί και στα προηγούμενα ότι, $\Delta t = \frac{a}{\omega}$, με $a = \frac{2\pi}{2N_H+1} \stackrel{N_H=2}{=} \frac{2\pi}{5}$. Αν θεωρηθεί πως το σημείο αναφοράς στο χρόνο είναι $t_0 = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, από την παρεμβολή της Σχέσης 4.9, καθένα από τα πέντε πεδία λύσεων U_0 , U_1 , U_2 , U_3 και U_4 αντιστοιχεί σε πραγματικά πεδία λύσεων στις χρονικές στιγμές:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &\rightarrow t = 0 \\ \mathbf{U}_1 &\rightarrow t = 1\frac{a}{\omega} = 1\frac{2\pi}{5\omega} \\ \mathbf{U}_2 &\rightarrow t = 2\frac{a}{\omega} = 2\frac{2\pi}{5\omega} \\ \mathbf{U}_3 &\rightarrow t = 3\frac{a}{\omega} = 3\frac{2\pi}{5\omega} \\ \mathbf{U}_4 &\rightarrow t = 4\frac{a}{\omega} = 4\frac{2\pi}{5\omega} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(0) + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(0) + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(0) + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(0) \\ \mathbf{U}_1 = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(1a) + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(1a) + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(2a) + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(2a) \\ \mathbf{U}_2 = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(2a) + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(2a) + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(4a) + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(4a) \\ \mathbf{U}_3 = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(3a) + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(3a) + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(6a) + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(6a) \\ \mathbf{U}_4 = \hat{\mathbf{U}}_0 + \hat{\mathbf{U}}_{a1} \cos(4a) + \hat{\mathbf{U}}_{b1} \sin(4a) + \hat{\mathbf{U}}_{a2} \cos(8a) + \hat{\mathbf{U}}_{b2} \sin(8a) \end{cases} \quad (4.12)$$

Το σύστημα της Σχέσης 4.12 μπορεί να γραφεί και σε μητρική μορφή ως:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_0 \\ \hat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \hat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \hat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

όπου ορίζεται το μητρώο συντελεστών:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Αποδεικνύεται πως ο αντίστροφος του \mathbf{E}^{-1} είναι ο πίνακας \mathbf{E} , που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά από το πεδίο των συχνοτήτων, στο πεδίο του χρόνου, και γράφεται ως:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Άρα, το σύστημα της Σχέσης 4.13 μπορεί να γραφεί (για $N_H = 2$ αρμονικές), ως:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{U}}_0 \\ \widehat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_4 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Με γνωστά τα $\vec{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^T$ και τα $\vec{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4)^T$, εκφράζονται τα συστήματα:

$$\widehat{\vec{\mathbf{U}}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{U}} \quad \text{και} \quad \widehat{\vec{\mathbf{R}}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{R}} \quad (4.17)$$

Το σύστημα 4.7 των $2N_H + 1$ συστημάτων εξισώσεων, για $N_H = 2$, γράφεται ως:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \widehat{\mathbf{R}}_0 \\ -\omega \widehat{\mathbf{U}}_{b1} = \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \omega \widehat{\mathbf{U}}_{a1} = \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \\ -2\omega \widehat{\mathbf{U}}_{b2} = \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \\ 2\omega \widehat{\mathbf{U}}_{a2} = \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \end{array} \right.$$

ή σε μητρική μορφή:

$$\omega \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{U}} = \widehat{\mathbf{R}} \Rightarrow \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{U}}_0 \\ \widehat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{R}}_0 \\ \widehat{\mathbf{R}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{b1} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{a2} \\ \widehat{\mathbf{R}}_{b2} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

όπου ορίζεται το μητρώο \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Ορίζεται το μητρώο \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E} \quad (4.20)$$

Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις 4.17 και 4.18 προκύπτει:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{U}} \\ \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{R}} \\ \widehat{\mathbf{R}} = \omega \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{U}} \end{cases} \Rightarrow \omega \mathbf{A} \mathbf{E} \vec{\mathbf{U}} = \mathbf{E} \vec{\mathbf{R}} \Rightarrow \omega \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E} \vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{R}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} + \omega \mathbf{D} \vec{\mathbf{U}} = 0} \quad (4.21)$$

Η Σχέση 4.21 είναι η βασική **εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών** (*harmonic balance equation*) και είναι αντίστοιχη του αρχικού συστήματος ΜΔΕ της Σχέσης 4.2.

Απομένει ο προσδιορισμός του μητρώου \mathbf{D} . Ισχύει:

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & \sin(a) & -\cos(a) & 2\sin(2a) & -2\cos(2a) \\ 0 & \sin(2a) & -\cos(2a) & 2\sin(4a) & -2\cos(4a) \\ 0 & \sin(3a) & -\cos(3a) & 2\sin(6a) & -2\cos(6a) \\ 0 & \sin(4a) & -\cos(4a) & 2\sin(8a) & -2\cos(8a) \end{bmatrix}$$

Στην απόδειξη της εξίσωσης των αρμονικών 4.21 ορίστηκε ο πίνακας $\mathbf{D} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}$. Υπολογίζονται τα στοιχεία του \mathbf{D} για $N_H = 2$:

- $\mathbf{D}_{1,1} = 0$
- $\mathbf{D}_{1,2} = -\frac{1}{5} [-2\sin(a) - 4\sin(2a)] = \frac{2}{5} [\sin(a) + 2\sin(2a)]$
- $\mathbf{D}_{1,3} = -\frac{1}{5} [-2\sin(2a) - 4\sin(4a)] = \frac{2}{5} [\sin(2a) + 2\sin(4a)]$
- $\mathbf{D}_{1,4} = -\frac{1}{5} [-2\sin(3a) - 4\sin(6a)] = \frac{2}{5} [\sin(3a) + 2\sin(6a)]$
- $\mathbf{D}_{1,5} = -\frac{1}{5} [-2\sin(4a) - 4\sin(8a)] = \frac{2}{5} [\sin(4a) + 2\sin(8a)]$
- $\mathbf{D}_{2,2} = -\frac{1}{5} [2\sin(a)\cos(a) - 2\sin(a)\cos(a) + 4\sin(2a)\cos(2a) - 4\sin(2a)\cos(2a)] = 0$
- $\mathbf{D}_{3,4} = -\frac{1}{5} [2\sin(2a)\cos(3a) - 2\sin(3a)\cos(2a) + 4\sin(4a)\cos(6a) - 4\sin(6a)\cos(4a)] =$
 $= -\frac{1}{5} [2\sin(2a)\cos(2a) + 2\sin(2a)\cos(2a) - 4\sin(a)\cos(a) - 4\sin(a)\cos(a)] =$
 $= -\frac{2}{5} [2\sin(2a)\cos(2a) - 4\sin(a)\cos(a)] = -\frac{2}{5} [\sin(4a) - 2\sin(a)] =$
 $= \frac{2}{5} [\sin(a) + 2\sin(2a)]$

Με την ίδια λογική, υπολογίζονται και τα υπόλοιπα στοιχεία του \mathbf{D} και παρατηρείται ότι, υπακούουν στο γενικό τύπο:

$$\boxed{\mathbf{D}_{i,j} = \frac{2}{5} [\sin\{a(j-i)\} + 2\sin\{2a(j-i)\}]}, \text{ για } N_H = 2$$

4.2.2 Γενίκευση για Περισσότερες από Δύο Αρμονικές

Σε περίπτωση που χρησιμοποιηθούν περισσότερες από δύο αρμονικές ($N_H \geq 2$) στην προσέγγιση των πεδίων $\vec{\mathbf{U}}(t)$ και $\vec{\mathbf{R}}(t)$ με σειρές Fourier, ακολουθεί η γενίκευση των προηγούμενων. Θεωρώντας ότι $t_0=0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, προκύπτουν οι ακόλουθοι γενικοί τύποι:

Όταν θα έχει βρεθεί η λύση στο πεδίο των μεταβλητών ροής $\vec{\mathbf{U}}$, μετά από επίλυση του συστήματος εξισώσεων 4.21, πρέπει να υπολογιστεί και το πεδίο $\widehat{\mathbf{U}}$ των συντελεστών Fourier. Η σχέση που θα επιτρέψει τη μεταφορά της λύσης από το πεδίο των συχνοτήτων στο πεδίο του χρόνου είναι:

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{U}}$$

η οποία, στη γενική περίπτωση, γράφεται αναλυτικότερα:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{U}}_0 \\ \widehat{\mathbf{U}}_{a1} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{b1} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{U}}_{aN_H} \\ \widehat{\mathbf{U}}_{bN_H} \end{bmatrix} = \frac{1}{N_T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & \cdots & 2 \cos((N_T - 1)a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & \cdots & 2 \sin((N_T - 1)a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 \cos(N_H a) & 2 \cos(2N_H a) & \cdots & 2 \cos((N_T - 1)N_H a) \\ 0 & 2 \sin(N_H a) & 2 \sin(2N_H a) & \cdots & 2 \sin((N_T - 1)N_H a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{N_T-2} \\ \mathbf{U}_{N_T-1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Ο γενικός πίνακας μετασχηματισμού \mathbf{E} είναι:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{N_T} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & \cdots & 2 \cos((N_T - 1)a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & \cdots & 2 \sin((N_T - 1)a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 \cos(N_H a) & 2 \cos(2N_H a) & \cdots & 2 \cos((N_T - 1)N_H a) \\ 0 & 2 \sin(N_H a) & 2 \sin(2N_H a) & \cdots & 2 \sin((N_T - 1)N_H a) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα \mathbf{E} είναι:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cdots & \cos(N_H a) & \sin(N_H a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cdots & \cos(2N_H a) & \sin(2N_H a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos((N_T - 2)a) & \sin((N_T - 2)a) & \cdots & \cos(N_H(N_T - 2)a) & \sin(N_H(N_T - 2) \cdot a) \\ 1 & \cos((N_T - 1)a) & \sin((N_T - 1)a) & \cdots & \cos(N_H(N_T - 1)a) & \sin(N_H(N_T - 1) \cdot a) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Ο γενικός τύπος που δίνει τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{D} είναι:

$$\mathbf{D}_{i,j} = \frac{2}{N_T} \sum_{\kappa=1}^{N_H} \kappa \cdot \sin [a\kappa (j - i)] \quad (4.25)$$

Όπως παρατηρείται, από τη Σχέση 4.25, τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα \mathbf{D} είναι μηδενικά ενώ τα συμμετρικά στοιχεία ως προς τη διαγώνιο είναι αντίθετα. Δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{D}_{i,i} = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{D}_{i,j} = -\mathbf{D}_{j,i}$$

Τέλος, το μητρώο \mathbf{A} προκύπτει ανάλογα με το πλήθος N_H των αρμονικών ως εξής:

$$\mathbf{A}_{i,j} = \begin{cases} -n & , \text{για } i=2n \text{ και } j=2n+1 \\ n & , \text{για } i=2n+1 \text{ και } j=2n \\ 0 & , \text{για κάθε άλλο συνδυασμό} \end{cases} \quad , \text{για } n \in \mathbb{N} \text{ με } 1 \leq n \leq N_H \quad (4.26)$$

4.3 Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

Τελικά, σύμφωνα με τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών δε λύνονται οι χρονικά μη-μόνιμες εξισώσεις Euler (Σχέση 4.2) στο πεδίο του χρόνου. Η μαθηματική ανάλυση έγινε στο πεδίο των συχνοτήτων, αλλά πραγματικά το σύστημα των $N_T = 2N_H + 1$ όπως έχει γραφτεί στη Σχέση 4.21 επιλύεται και πάλι στο χρόνο:

$$\vec{\mathbf{R}} + \omega \mathbf{D} \vec{\mathbf{U}} = 0$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης είναι το διάνυσμα του χωρικού υπολοίπου (*spatial residual*) και, σύμφωνα με τις Σχέσεις 3.18 και 3.19, μπορεί να γραφτεί:

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}^{inv} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} = \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial y}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 4.21 προκύπτει μια άλλη μορφή της τελικής εξίσωσης ισορροπίας των αρμονικών που περιέχει ως άγνωστο μόνο το διάνυσμα των

συντηρητικών μεγεθών \vec{U} .

$$\mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + \omega \mathbf{D} \vec{U} = 0 \quad (4.27)$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η μορφή της εξίσωσης 4.21 και της 4.27, γράφονται και σε τανυστική μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}^m}{\partial x_k} + \omega D_{mn} U_{ni} &= 0 \\ A_{ijk}^m \frac{\partial U_j^m}{\partial x_k} + \omega D_{mn} U_{ni} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Στην εξίσωση 4.28, ο δείκτης $m=(1, 2, \dots, N_T)$ δείχνει τον αύξοντα αριθμό κάθε μιας από τις N_T εξισώσεις. Ο δείκτης $n=(1, 2, \dots, N_T)$ δείχνει άθροισμα του όρου $\omega \mathbf{D} \vec{U}$ σε μια από τις m εξισώσεις, δηλαδή χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσει σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein το άθροισμα $\omega \sum_{n=1}^{N_T} D_{mn} U_{ni}$. Οι δείκτες $i, j=(1, 2, 3, 4)$ δείχνουν τα 4 συντηρητικά πεδία $\rho, \rho u, \rho v, E_t$ αντίστοιχα. Ο δείκτης $k=(1, 2)$ δείχνει τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις για διδιάστατη ροή ($x_1=x, x_2=y$).

Μεθοδολογία επίλυσης:

Σύμφωνα με την ανάπτυξη της θεωρίας της μεθόδου που προηγήθηκε, ακολουθείται η παρακάτω μεθοδολογία για τον υπολογισμό του πεδίου των συντηρητικών μεγεθών της ροής \vec{U} σε κάθε χρονική στιγμή:

- Επιλύεται το σύστημα 4.21 των $2N_H + 1$ εξισώσεων και υπολογίζεται το πεδίο ροής \vec{U} σε κάθε μία από τις $2N_H + 1$ ισαπέχουσες χρονικές στιγμές μιας περιόδου.
- Επιλύεται η εξίσωση της Σχέσης 4.22 και υπολογίζεται το πεδίο $\widehat{\vec{U}}$ των συντελεστών Fourier.
- Γίνεται, έτσι, διαθέσιμο το πραγματικό πεδίο των συνιστωσών της ροής $\vec{U}(t)$ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσω της Σχέσης 4.4 για τις N_H αρμονικές.

Παρατηρήσεις και σχόλια:

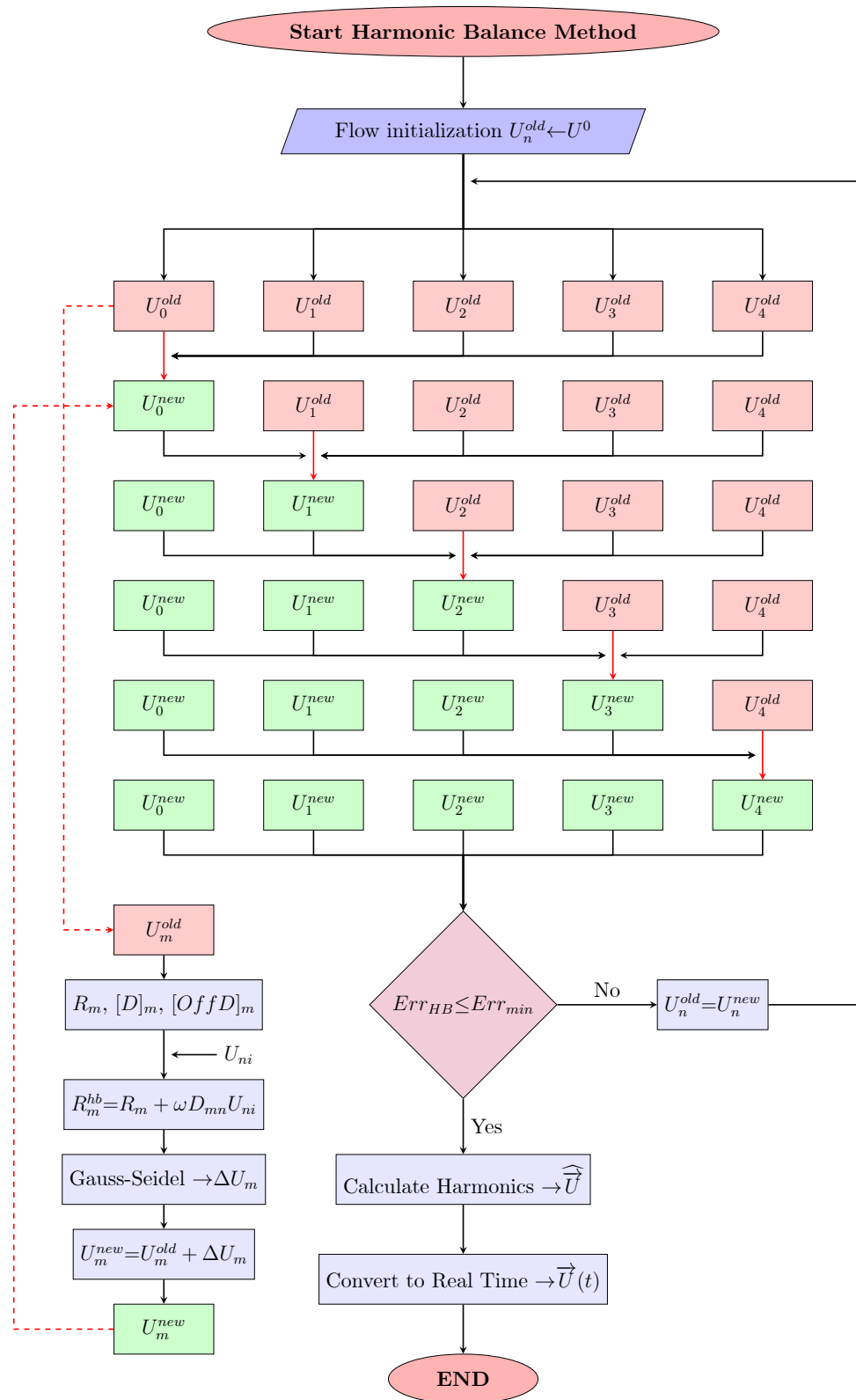
Παρόλο που η μαθηματική θεμελίωση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών γίνεται στο πεδίο των συχνοτήτων, η αριθμητική επίλυση γίνεται στο πεδίο του χρόνου. Δηλαδή, η επίλυση των μόνιμων εξισώσεων Euler γίνεται σε N_T ισαπέχουσες χρονικές στιγμές, οι οποίες συμπίπτουν με τις τιμές της τελικής λύσης μετά το μετασχηματισμό Fourier.

Με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών, αποφεύγεται η επίλυση του μη-μόνιμου (*unsteady*) πεδίου της ροής με τη μέθοδο χρονο-προέλασης (*time-marching*), αλλά επιλύονται $2N_H + 1$ χρονικά μόνιμες (*steady*) εξισώσεις ταυτόχρονα, οι οποίες είναι πεπλεγμένες μεταξύ τους. Το θετικό με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών είναι ότι, εξοικονομείται πολύτιμος χρόνος από την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τελικά, μετά το μετασχηματισμό Fourier, το πεδίο της ροής μπορεί να αποτυπωθεί με την επιθυμητή λεπτομέρεια χωρίς καθόλου υπολογιστικό κόστος. Αντίθετα, η άλλη μέθοδος εξαρτάται κυρίως από το χρονικό βήμα επίλυσης, γεγονός που την καθιστά πολύ αργή σε περίπτωση που απαιτείται υψηλή ανάλυση του πεδίου ροής με μεγάλο πλήθος χρονικών βημάτων.

Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών εξαρτάται από το πλήθος των αρμονικών N_H , καθώς το πλήθος εξισώσεων που λύνονται είναι $C \cdot (2N_H + 1)$, με C το πλήθος των κόμβων του πλέγματος. Επίσης, επειδή αυτές οι $2N_H + 1$ χρονικά μόνιμες και πεπλεγμένες εξισώσεις κάθε κόμβου πρέπει να λυθούν ταυτόχρονα, απαιτείται η αποθήκευση και των $2N_H + 1$ πεδίων, δεσμεύοντας με αυτόν τον τρόπο αρκετή μνήμη στον υπολογιστή.

Από την εισαγωγή του κεφαλαίου αναφέρθηκε ότι, η συχνότητα (άρα και η περίοδος) της ταλάντωσης είναι γνωστή, αφού η μέθοδος προορίζεται για εφαρμογή εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός βασικού μεγέθους του διανύσματος της αρχικής ταχύτητας. Έτσι, γνωρίζοντας την τιμή της συχνότητας ταλάντωσης, αυτή μπορεί να συσχετισθεί με το βέλτιστο πλήθος αρμονικών. Από δοκιμές [25] παρατηρήθηκε ότι, οι υψηλότερες συχνότητες ταλάντωσης της περιοδικής ροής απαιτούν περισσότερες αρμονικές για να προσεγγιστούν καλύτερα. Από την άλλη, όσο αυξάνεται η συχνότητα και η περίοδος ταλάντωσης ελαττώνεται, τόσο δυσκολότερη γίνεται η προσέγγιση της χρονικής παραγωγού της λύσης $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$ της εξίσωσης 4.5.

Στο μητρώο \mathbf{D} , που υπολογίζεται από τη Σχέση 4.25, η διαγώνιος του είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι, επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων της Σχέσης 4.28, στο δεύτερο όρο ($\omega D_{mn} U_{ni}$) υπάρχουν όλα τα διανύσματα \mathbf{U} των υπόλοιπων $2N_H$ εξισώσεων, αλλά όχι το διάνυσμα \mathbf{U} της εξίσωσης που λύνεται. Επίσης, το άθροισμα κάθε γραμμής και κάθε στήλης ξεχωριστά προκύπτει μηδέν, διότι ο \mathbf{D} είναι αντισυμμετρικός ($\mathbf{D} = -\mathbf{D}^T$).



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροής αλγόριθμου επίλυσης ροής με τη Μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών, για 5 πεδία τιμών U_i , λόγω της χρήσης 2 αρμονικών. Σε κάθε διαδικασία ανανέωσης τιμής των πεδίων λύσης (κόκκινο βέλος), περιέχεται ο μικρότερος αλγόριθμος που φαίνεται στο κάτω αριστερά μέρος του σχήματος.

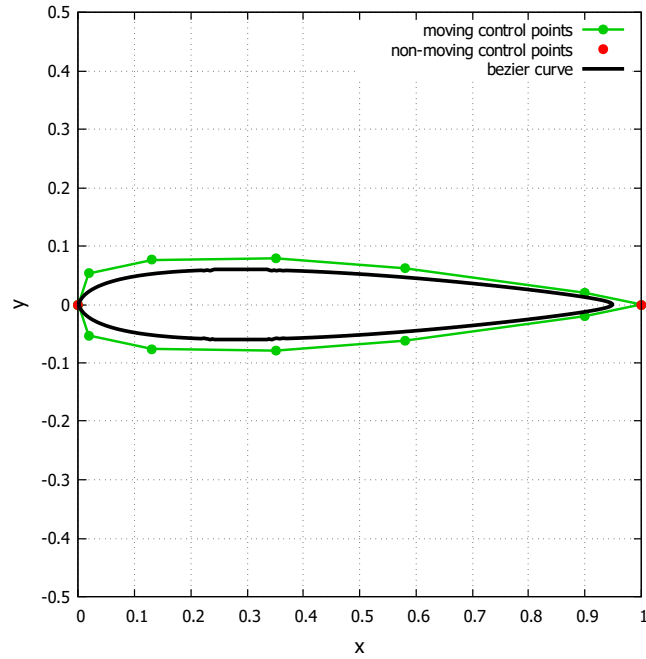
4.4 Πιστοποίηση Αποτελεσμάτων της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών για το Ευθύ Πρόβλημα

Σε αυτήν την ενότητα επιλύεται διδιάστατη, μη-συνεκτική ροή, συμπιεστού ρευστού σε ένα πρόβλημα εξωτερικής αεροδυναμικής, δηλαδή γύρω από μια μεμονωμένη αεροτομή. Η ροή επίσης είναι μη-μόνιμη, καθώς οι οριακές συνθήκες της ροής (π.χ. γωνία επ' άπειρο ροής) μεταβάλλονται περιοδικά στο χρόνο. Σκοπός είναι η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων της προσεγγιστικής μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών μόνο για το ευθύ πρόβλημα, σε σχέση με τα αποτελέσματα που δίνει η μέθοδος χρονο-προέλασης (*time-marching*). Η σύγκριση των δύο μεθόδων γίνεται μέσω διαγραμμάτων της μεταβολής του συντελεστή άνωσης (c_D) και οπισθέλκουσας (c_L) συναρτήσει του χρόνου και της γωνίας α_∞ της επ' άπειρο ταχύτητας ροής.

Αρχικά, παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά και οι συνθήκες του προβλήματος, τα οποία είναι κοινά και για τις δύο μεθόδους. Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση των ροϊκών εξισώσεων Euler έχει περιγραφεί στα Κεφάλαια 3 και 4 για τις μεθόδους χρονο-προέλασης και ισορροπίας των αρμονικών αντίστοιχα. Εφαρμογές με περισσότερη λεπτομέρεια στην ανταπόκριση της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, για εφαρμογές του πρωτεύοντος προβλήματος, παρουσιάζονται στη διπλωματική εργασία του Νικόλαου Μακρή[33].

4.4.1 Περιγραφή Χαρακτηριστικών του Προβλήματος

Η αεροτομή που χρησιμοποιείται για το πρόβλημα είναι τύπου NACA 0012 [36][37], η οποία παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier. Σε αυτήν την παραμετροποίηση χρησιμοποιούνται συνολικά 17 σημεία ελέγχου, από τα οποία 2 βρίσκονται ακλόνητα στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής (σημείο $(0, 0)$) και 5 στην ακμή εκφυγής (σημείο $(1, 0)$). Μετά την παραμετροποίηση, η γεωμετρία, που χρησιμοποιείται στην επίλυση, φαίνεται στο Σχήμα 4.2.



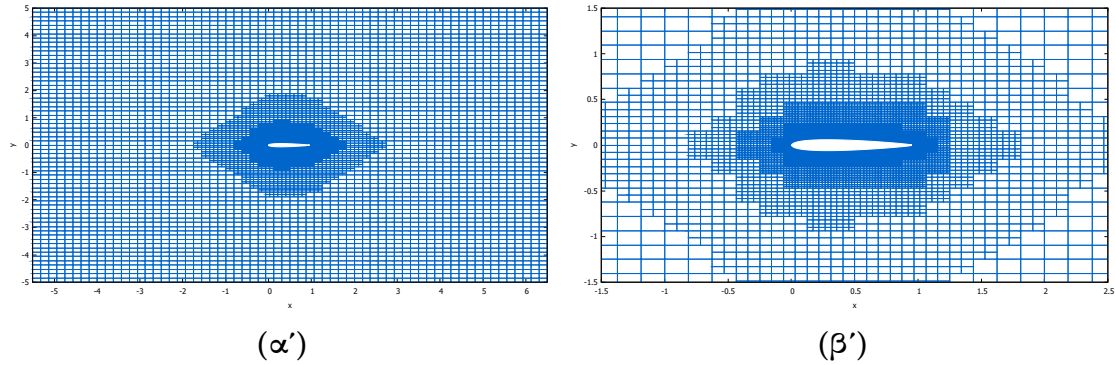
Σχήμα 4.2: Αεροτομή μετά από παραμετροποίηση με καμπύλες Βέζιερ, με 17 σημεία ελέγχου, σύμφωνα με αεροτομές τύπου NACA 0012.

Ύστερα από τον καθορισμό της γεωμετρίας, σειρά έχει η πλεγματοποίηση του χωρίου με τη μέθοδο "Cut-Cell", που αναλύθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο 2. Για τη συνέχεια, προσδιορίζονται τα βασικά στοιχεία του τελικού πλέγματος. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1, είναι:

Πίνακας 4.1: Βασικά στοιχεία πλέγματος, το οποίο κατασκευάστηκε με τη μέθοδο "Cut-Cell". Οι μονάδες βασίζονται πάνω στη μοναδιαία απόσταση των ακλόνητων σημείων Βέζιερ, που βρίσκονται στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής.

Βασικά στοιχεία πλέγματος	
Διαστάσεις υπολογιστικού χωρίου (x, y)	(12, 10)
Κέντρο βάρους αεροτομής	(0.5, 0.0)
Μέγιστο εμβαδόν κυψελών V_{max}	$1 \cdot 10^{-1}$
Ελάχιστο εμβαδόν κυψελών V_{min}	$5 \cdot 10^{-5}$
Οριακό εμβαδόν κυψελών V_{lim}	$1 \cdot 10^{-7}$
Απόσταση ομαλοποίησης πύκνωσης κυψελών d_{max}	5.0
Πλήθος κυψελών τελικού χωρίου	17770

Το τελικό πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.3:



Σχήμα 4.3: (α'): Το τελικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή τύπου NACA 0012 του προβλήματος (β'): Μεγέθυνση γύρω από την αεροτομή.

Η μη-μονιμότητα της ροής δημιουργείται με περιοδική μεταβολή των οριακών συνθηκών της και συγκεκριμένα, της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_∞ . Η ημιτονοειδής σχέση υπολογισμού της γωνίας α_∞ συναρτήσεως του χρόνου είναι:

$$\alpha_\infty(t) = \alpha_0 + \alpha_{ampl} \sin(\omega t) \quad (4.29)$$

όπου α_0 είναι η γωνία της επ' άπειρο ροής για $t=0$ και α_{ampl} το εύρος ταλάντωσης της γωνίας αυτής.

Η γωνιακή συχνότητα του φαινομένου καθορίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.30)$$

Επομένως, στην εφαρμογή αυτής της ενότητας επιλέγονται τα βασικά αυτά στοιχεία της διέγερσης της ροής, έτσι ώστε να αποκτήσει μη-μόνιμο χαρακτήρα:

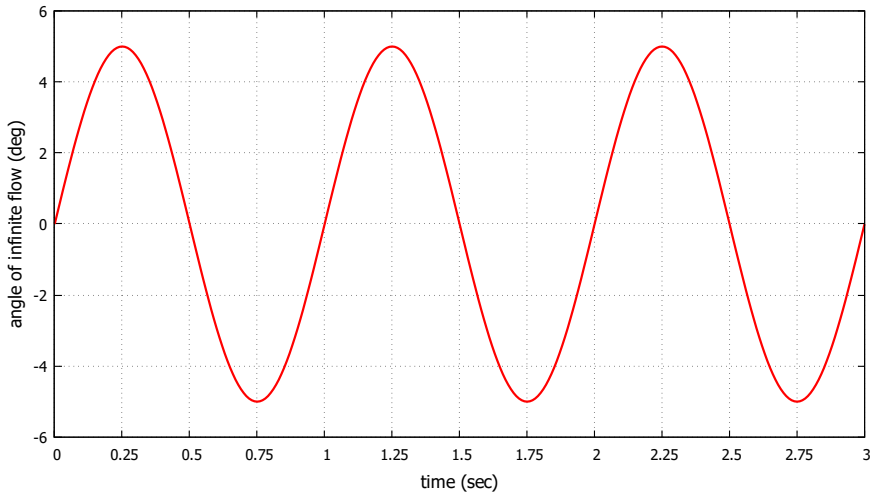
Πίνακας 4.2: Στοιχεία διέγερσης γωνίας της επ' άπειρο ροής

Στοιχεία διέγερσης ροής		
Περίοδος διέγερσης φαινομένου	$T(sec)$	1
Γωνιακή συχνότητα	$\omega(rad/sec)$	2π
Αρχική γωνία επ' άπειρο ροής	$\alpha_0(^{\circ})$	0
Εύρος ταλάντωσης γωνίας	$\alpha_{ampl}(^{\circ})$	5

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του Πίνακα 4.2, η Σχέση 4.29 γίνεται:

$$\alpha_\infty(t) = 0 + 5 \sin(2\pi t) \quad (4.31)$$

Το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_∞ συναρτήσει του χρόνου, φαίνεται στο Σχήμα 4.4:



Σχήμα 4.4: Γωνία της επ' άπειρο ροής α_∞ συναρτήσει του χρόνου.

Στον Πίνακα 4.3 προσδιορίζονται οι οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής, οι οποίες είναι ίδιες και στις τέσσερις ακμές του υπολογιστικού χωρίου και παραμένουν αμετάβλητες καθ' όλη τη διάρκεια της επίλυσης:

Πίνακας 4.3: Οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής και σταθερά μεγέθη

Οριακές συνθήκες ροής		
Πυκνότητα	ρ_∞ (kg/m^3)	1.2
Στατική πίεση	p_∞ (Pa)	$1 \cdot 10^5$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας	U_∞ (m/s)	100
Σταθερά μεγέθη ροής		
Ειδική σταθερά ξηρού αέρα	R_{da} (J/kgK)	287.058
Λόγος θερμοχωρητικότητας	γ	1.4

Στον Πίνακα 4.4 καθορίζονται τα βασικά στοιχεία του επιλύτη, που χρησιμοποιείται τόσο στη μέθοδο χρονο-προέλασης όσο και στη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών:

Πίνακας 4.4: Βασικά στοιχεία επιλύτη που χρησιμοποιούνται και στις δύο μεθόδους

Βασικά στοιχεία επιλύτη	
Μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος	Gauss-Seidel
Τάξη ακρίβειας χωρικής διακριτοποίησης	2η (3.32)
CFL_{max} (3.69)	20
Αριθμός επαναλήψεων για $CFL=CFL_{max}$	300
Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων	10000

Τέλος, τα ξεχωριστά χαρακτηριστικά κάθε μεθόδου είναι:

Πίνακας 4.5: Χαρακτηριστικά μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών και μεθόδου χρονο-προέλασης

Μέθοδος Ισορροπίας Αρμονικών		Μέθοδος Χρονο-Προέλασης	
Πλήθος αρμονικών N_H	3	Συνολικός χρόνος επίλυσης $t_{tot}(sec)$	3
Πλήθος πεδίων N_T	7	Χρονικό βήμα $\Delta t_{tm}(sec)$	0.05
Χρονική απόσταση πεδίων $\Delta t(sec)$	1/7	Πλήθος βημάτων	60
Ελάχιστη μεταβολή λύσης ΔSol_{HB}	10^{-6}	Ελάχιστο σφάλμα χωρικού υπολοίπου	10^{-6}

Η ελάχιστη μεταβολή λύσης για κάθε συντηρητικό μέγεθος, για τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών, προέκυψε από τη μέση τιμή του αθροίσματος των απόλυτων διαφορών όλων των $N_T=2N_H + 1$ πεδίων της χρονικής στιγμής (t), με την προηγούμενη ($t-1$), για κάθε ενεργή (*active*) κυψέλη. Υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta Sol_{HB,i} = \frac{\sum_{k=1}^{K_{act}} \left[\sum_{n=1}^{N_T} |U_i^t - U_i^{t-1}| \right]}{K_{act}} \quad (4.32)$$

όπου K_{act} το πλήθος των ενεργών κυψελών, όπου επιλύεται η ροή, U_i^t και U_i^{t-1} τα διανύσματα των συντηρητικών μεγεθών (διάστασης 4×1) για τις χρονικές στιγμές t και $t-1$. Ο δείκτης $i=(1, 2, 3, 4)$ δείχνει τον αύξοντα αριθμό των συντηρητικών μεγεθών.

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων γίνεται μέσω των συντελεστών άνωσης c_L και οπισθέλκουσας c_D , οι οποίοι υπολογίζονται σε κάθε χρονική στιγμή. Οι εξισώσεις που δίνουν τους συντελεστές αυτούς φαίνονται στη Σχέση 4.33:

$$c_L = \frac{-F_x \sin(\alpha_\infty) + F_y \cos(\alpha_\infty)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad (4.33)$$

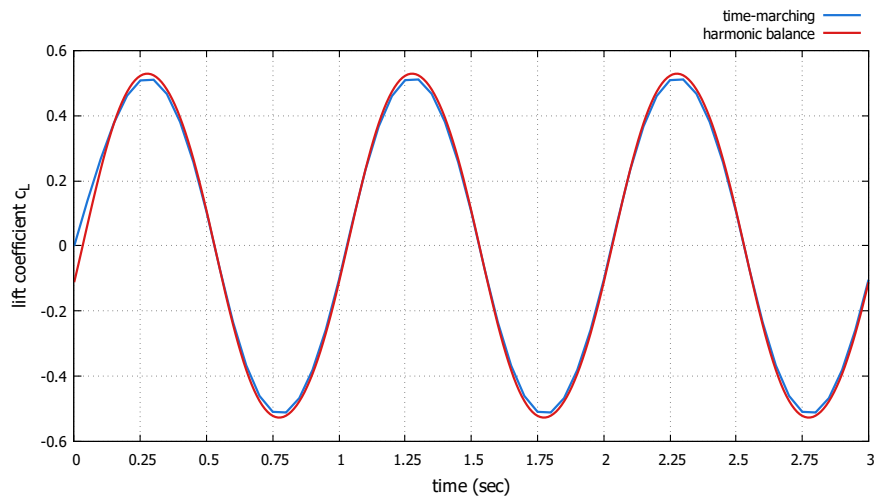
$$c_D = \frac{F_x \cos(\alpha_\infty) + F_y \sin(\alpha_\infty)}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$$

όπου ρ_∞ , U_∞ και α_∞ η πυκνότητα, η ταχύτητα και η χρονικά μεταβαλλόμενη γωνία της επ' άπειρο ροής αντίστοιχα και F_x , F_y οι συνιστώσες της δύναμης που ασκείται πάνω στο σώμα:

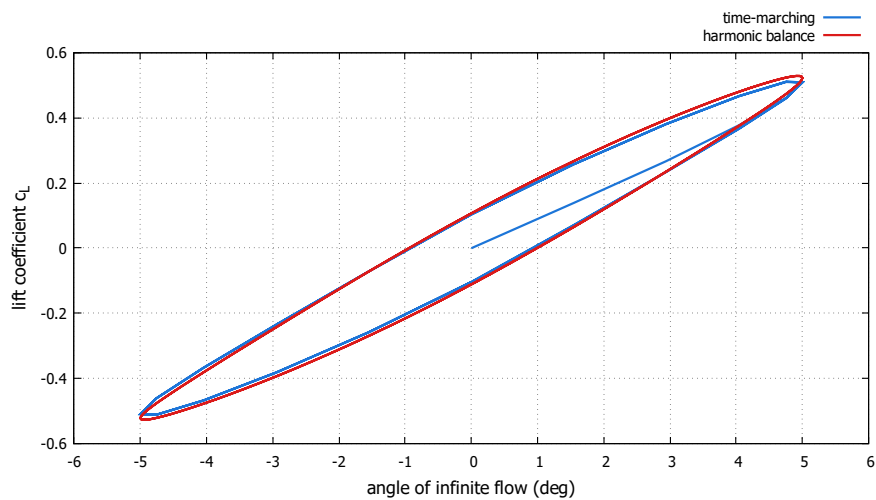
$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{\kappa}^{cut(P)} p_{\kappa} n_x^{\kappa} \Delta s_{\kappa} \\ F_y &= \sum_{\kappa}^{cut(P)} p_{\kappa} n_y^{\kappa} \Delta s_{\kappa} \end{aligned} \tag{4.34}$$

όπου p_{κ} η στατική πίεση κάθε κυψέλης P που τέμνεται από το περίγραμμα της αεροτομής ($cut(P)$), n_x^{κ} , n_y^{κ} τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις x και y , και Δs_{κ} το μήκος της ακμής της κυψέλης αυτής.

4.4.2 Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις

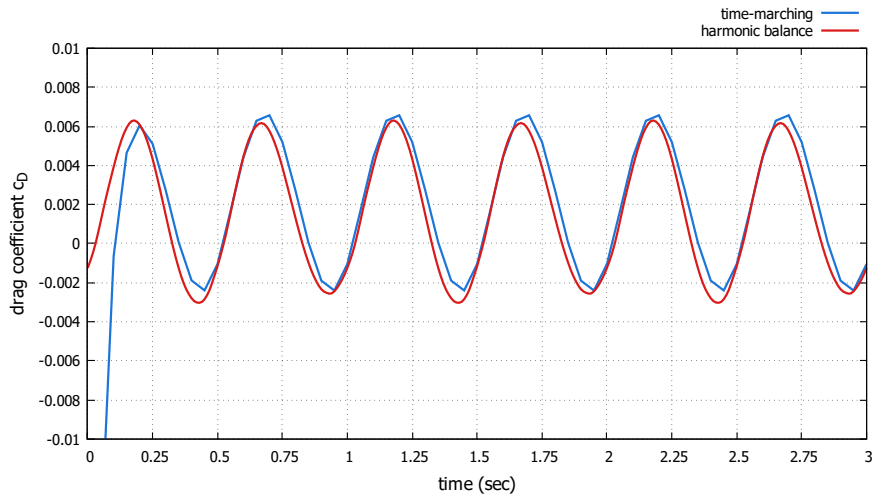


(α')

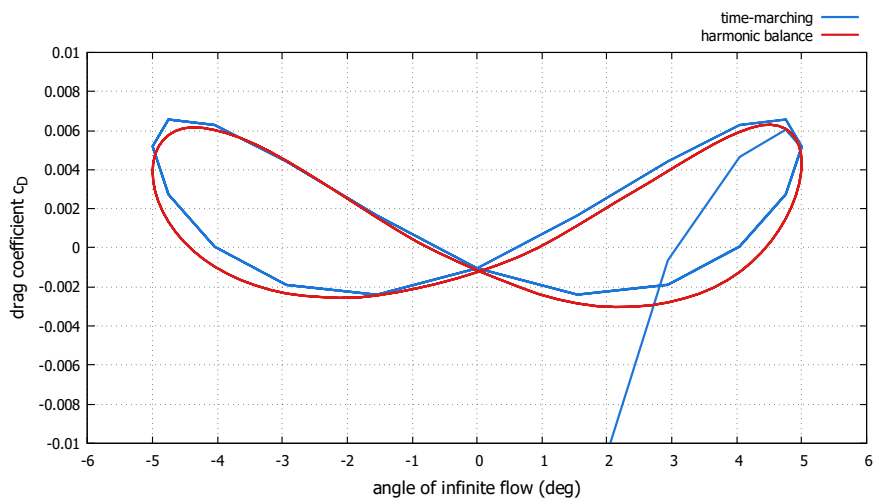


(β')

Σχήμα 4.5: (α'): Ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει του χρόνου (τρεις περίοδοι) για τη μέθοδο χρονο-προέλασης και τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών. (β'): Ο συντελεστής άνωσης συναρτήσει της γωνίας της επ' άπειρο ροής για τη μέθοδο χρονο-προέλασης και τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών.



(α')



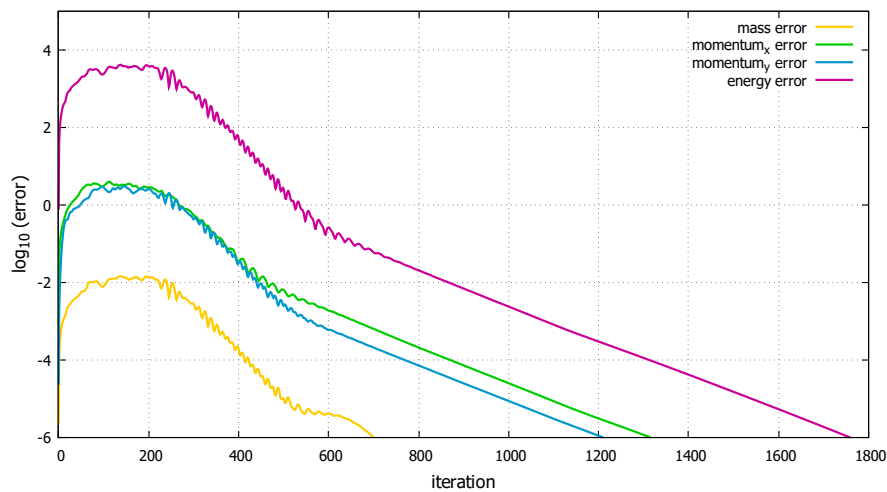
(β')

Σχήμα 4.6: (α'): Ο συντελεστής οπισθέλκουσας συναρτήσει του χρόνου (τρεις περίοδοι) για τη μέθοδο χρονο-προέλασης και τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών. (β'): Ο συντελεστής οπισθέλκουσας συναρτήσει της γωνίας της επ' άπειρο ροής για τη μέθοδο χρονο-προέλασης και τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών.

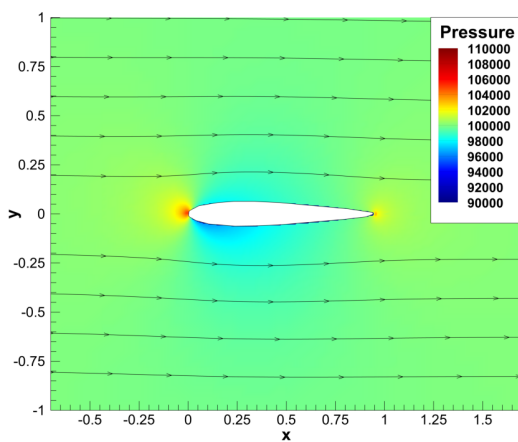
Στα διαγράμματα των Σχημάτων 4.5α' και 4.5β' παρατηρείται ότι, ο συντελεστής άνωσης c_L , όπως προέκυψε από την επίλυση της ροής μέσω της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη τιμή του (για την ίδια χρονική στιγμή), για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Η απόκλιση των τιμών του c_L στην πρώτη περίοδο της επίλυσης με χρονο-προέλαση, δικαιολογείται, γιατί εκεί το φαινόμενο βρίσκεται ακόμα σε μεταβατική κατάσταση. Στις επόμενες δύο περιόδους, όπου έχει αποκατασταθεί η σταθερότητα των τιμών μεταξύ των περιόδων, παρατηρείται ότι οι τιμές του συντελεστή άνωσης είναι σχεδόν ίδιες και για τις δύο μεθόδους. Παρόλα αυτά, παρατηρείται μια σχετικά μικρή απόκλιση στο εύρος ταλάντωσης.

Όμοια, στα διαγράμματα των Σχημάτων 4.6α' και 4.6β' παρατηρείται μερική ταύτιση των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας c_D , που προέκυψε από τις δύο μεθόδους. Ωστόσο, η γραφική παράσταση του συντελεστή οπισθέλκουσας μέσω της μεθόδου χρονο-προέλασης (Σχήμα 4.6α') είναι μετατοπισμένη κατά $+0.025sec$ στην κατεύθυνση x και $+5 \cdot 10^4$ στην κατεύθυνση y . Στο Σχήμα 4.6, η απόκλιση των τιμών του συντελεστή οπισθέλκουσας c_D , για τις δύο μεθόδους, φαίνεται μεγαλύτερη από αυτή του συντελεστή άνωσης c_L . Αυτό συμβαίνει, λόγω των μικρών τιμών του συντελεστή c_D (τάξη μεγέθους $\alpha 10^{-3}$), σε αντίθεση με αυτών του c_L (τάξη μεγέθους $\alpha 10^{-1}$), καθώς και στην επιλογή όχι τόσο πυκνού πλέγματος, στην περιοχή κοντά στο στερεό όριο.

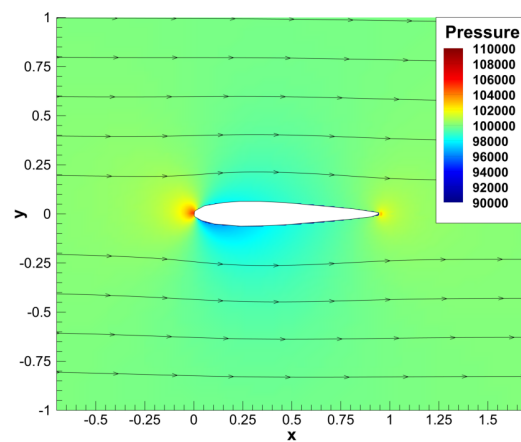
Στη συνέχεια, φαίνεται το διάγραμμα σύγκλισης των σφαλμάτων των τεσσάρων συντηρητικών μεγεθών, για την επίλυση της ροής με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών.



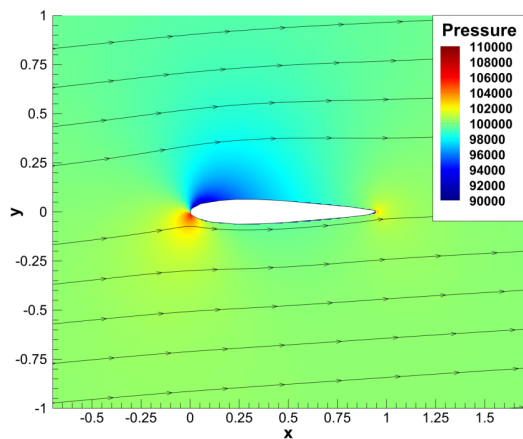
Σχήμα 4.7: Μέσο σφάλμα των επτά πεδίων για κάθε συντηρητικό μέγεθος: $mass=\rho$, $momentum_x=\rho u$, $momentum_y=\rho v$, $energy=E_t$



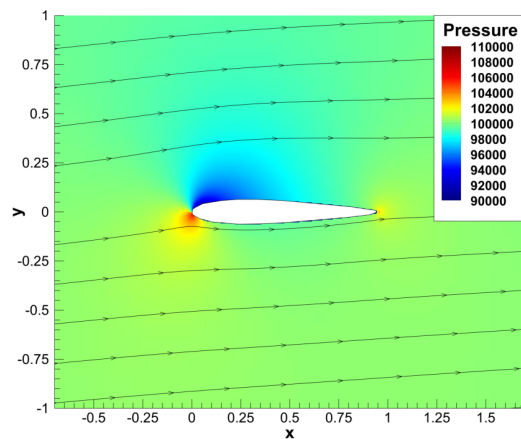
(α') harmonic balance $t=0$



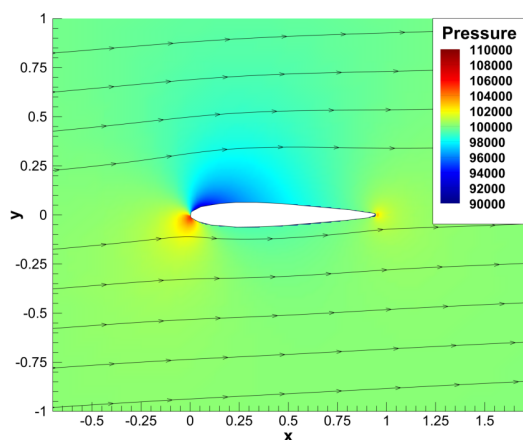
(β') time-marching $t=0$



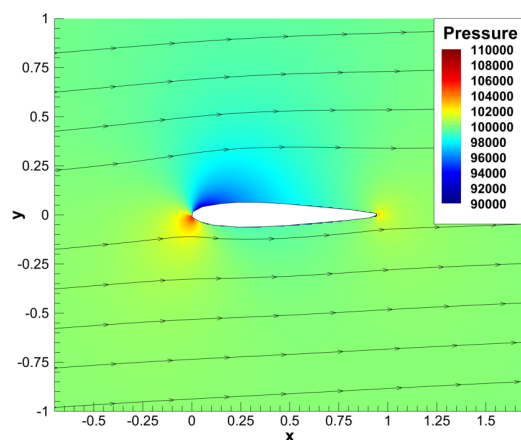
(γ') harmonic balance $t=0.2sec$



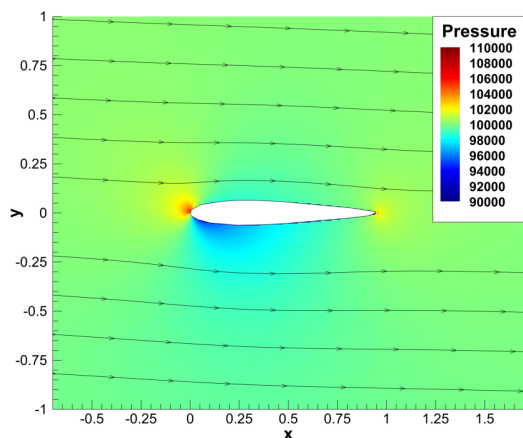
(δ') time-marching $t=0.2sec$



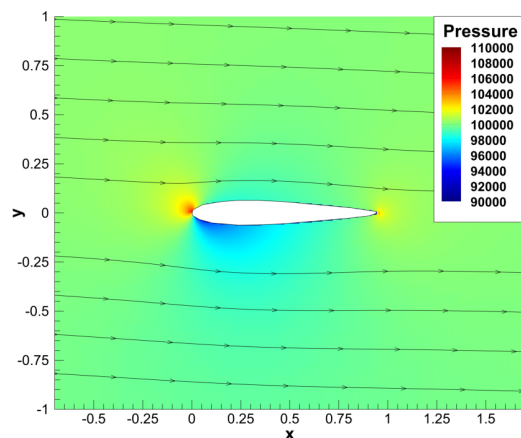
(ϵ') harmonic balance $t=0.4sec$



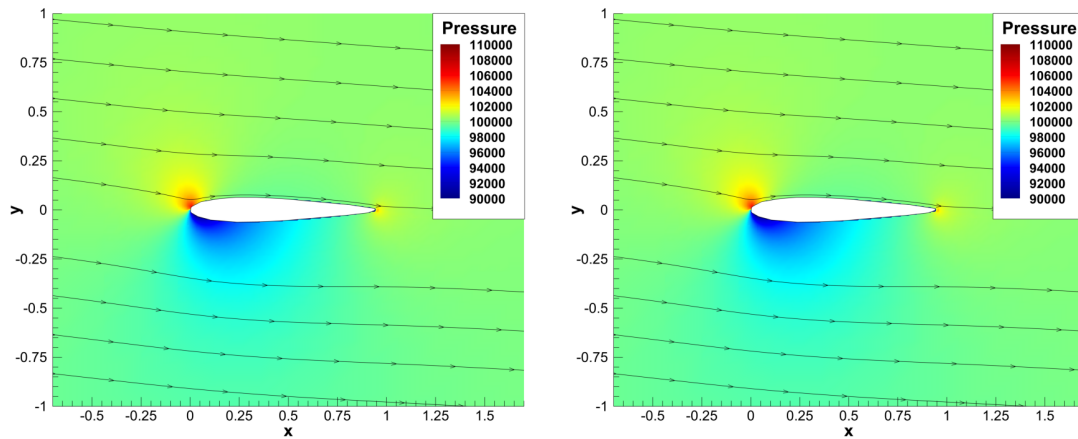
($\sigma\tau'$) time-marching $t=0.4sec$



(ζ') harmonic balance $t=0.6sec$



(η') time-marching $t=0.6sec$

(θ') harmonic balance $t=0.8sec$ (ι') time-marching $t=0.8sec$

Σχήμα 4.8: Σύγκριση πέντε πεδίων στατικής πίεσης μέσα σε μια περίοδο $T=1 sec$, όπως προέκυψαν από την επίλυση της ροής με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και με τη μέθοδο της Χρονο-προέλασης.

Στο Σχήμα 4.8 συγκρίνονται πέντε εικόνες του πρωτεύοντος πεδίου στατικής πίεσης μέσα σε μια περίοδο, όπως προέκυψαν από τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών ($N_H=3$), με τα αντίστοιχα της μεθόδου Χρονο-προέλασης. Στις εικόνες αυτές δεν παρατηρείται κάποια διαφορά στο πεδίο της πίεσης για τις δύο μεθόδους.

4.4.2.1 Επίλυση με Διαφορετικό Αριθμό Αρμονικών και Σύγκριση

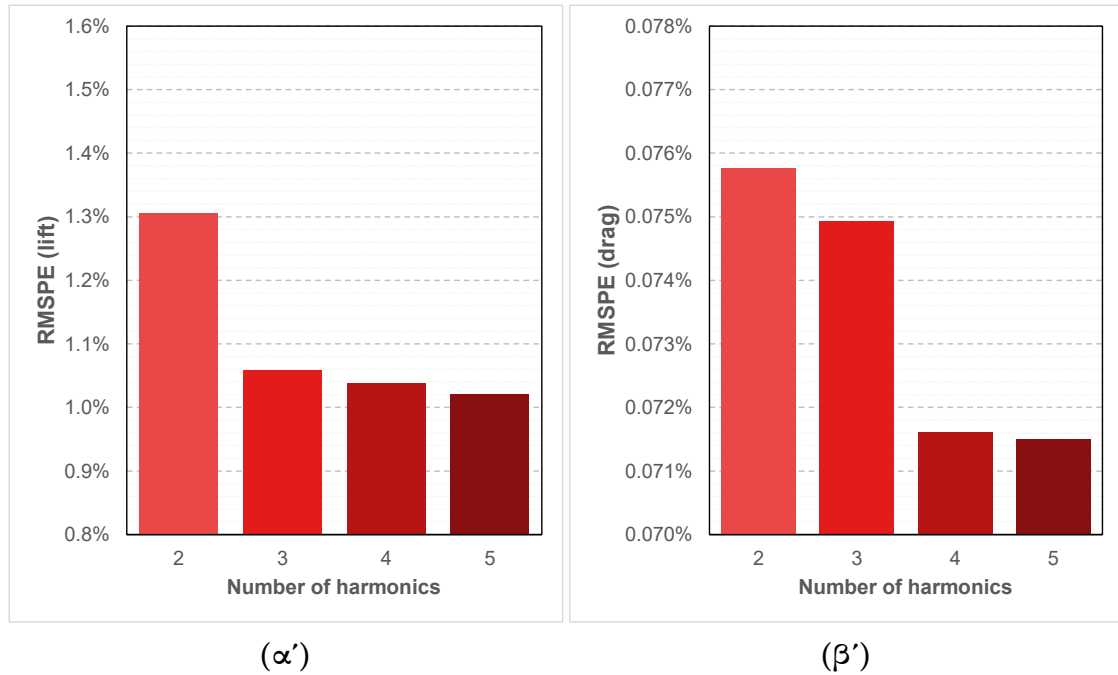
Το ίδιο πρόβλημα επιλύεται για μία έως και πέντε αρμονικές, με σκοπό την σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν, με τα αποτελέσματα της μεθόδου της χρονο-προέλασης και την εύρεση του βέλτιστου αριθμού αρμονικών, λαμβάνοντας υπόψη τον υπολογιστικό χρόνο και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Για τον υπολογισμό της ακρίβειας των αποτελεσμάτων κάθε επίλυσης με διαφορετικό αριθμό αρμονικών, χρησιμοποιείται η Ρίζα της Μέσης Τετραγωνικής Τιμής (*Root-Mean-Square Error - RMSE*), η οποία για δύο συναρτήσεις f και g , εκφράζεται ως:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f(n) - g(n))^2} \rightarrow RMSPE = RMSE \cdot 100\% \quad (4.35)$$

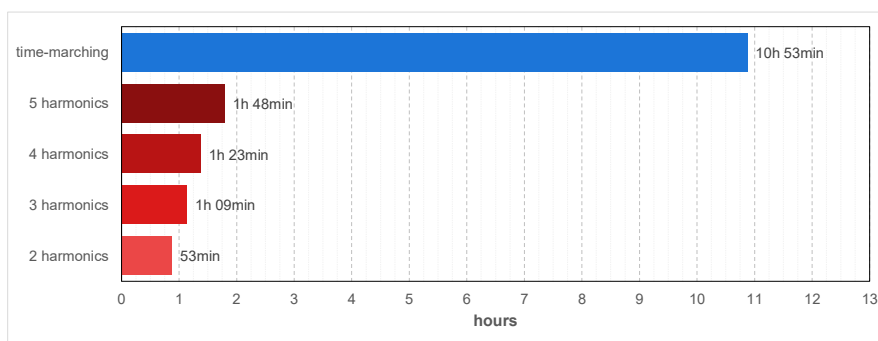
Οι καμπύλες του συντελεστή άνωσης και οπισθέλκουσας, για κάθε εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες της μεθόδου χρονο-προέλασης, για χρονικό διάστημα δύο περιόδων (Από $t=1sec$ έως $t=3sec$).

Οπότε, στο Σχήμα 4.9 φαίνονται τα ποσοστιαία σφάλματα RMS (RMSPE) για κάθε εφαρμογή με διαφορετικό αριθμό αρμονικών:



Σχήμα 4.9: (α'): Ιστόγραμμα για σύγκριση των τιμών RMSPE, που προέκυψαν από σύγκριση του συντελεστή άνωσης c_L κάθε εφαρμογής HB, για 2 έως 5 αρμονικές, με αυτόν της χρονο-προέλασης. (β'): Όμοια για το συντελεστή οπισθέλκουσας c_D .

Οι τιμές RMSPE για $N_H=1$ αρμονική, απορρίφθηκαν, γιατί είχαν σχετικά πολύ μεγαλύτερο σφάλμα από τις υπόλοιπες. Συγκεκριμένα: $RMSPE(c_L)_1=1.551\%$ και $RMSPE(c_D)_1=1.424\%$.



Σχήμα 4.10: Ιστόγραμμα σύγκρισης χρόνου εκτέλεσης ίδιου προβλήματος με τη μέθοδο ισορροπίας των αρμονικών (για 2 έως 5 αρμονικές) και με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης σε μηχάνημα με έναν επεξεργαστή Intel® Xeon® CPU E5520 @2.27GHz

Όπως ήταν αναμενόμενο, η επίλυση με τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών

είναι γρηγορότερη της επίλυσης με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Σε έναν επεξεργαστή Intel® Xeon® CPU E5520 @2.27GHz η μέθοδος της χρονο-προέλασης τερματίστηκε σε 10 ώρες και 53 λεπτά, ενώ η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών δεν ξεπέρασε τις 2 ώρες για καμία από τις διαφορετικές εφαρμογές. Όπως παρατηρείται από τα Σχήματα 4.9α' και 4.9β', η εφαρμογή της μεθόδου της ισορροπίας των αρμονικών για $N_H=3$ αρμονικές, δίνει μια καλή προσέγγιση των συντελεστών, εξοικονομώντας παράλληλα σημαντικό υπολογιστικό χρόνο (κατά 89% μικρότερος χρόνος επίλυσης από τη μέθοδο χρονο-προέλασης). Άρα, η συγκεκριμένη επιλογή πλήθους αρμονικών ενδείκνυται για προβλήματα με απλές διαταραχές της επ' άπειρο γωνίας, όπως αυτή της Σχέσης 4.31.

Ένα επιπλέον -περισσότερο αισθητικού χαρακτήρα- πλεονέκτημα της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών, είναι η λεπτομερέστερη απεικόνιση των γραμμών στα Σχήματα 4.5 και 4.6, σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Ο λόγος γι' αυτή τη διαφορά είναι ότι, ο υπολογιστικός χρόνος της πρώτης εξαρτάται από το χρονικό βήμα, ή αλλιώς το πλήθος προβλημάτων που επιλύει στο χρόνο, και συνεπώς, λεπτομερέστερη γραμμή συνεπάγεται αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Από την άλλη, ο υπολογιστικός χρόνος της μεθόδου HB εξαρτάται από το πλήθος των πεδίων στο χρόνο. Με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, όταν όλα τα πεδία τελικά συγκλίνουν, υπάρχει η δυνατότητα "ανοικοδόμησης" του πεδίου της λύσης λεπτομερέστερα, χωρίς καθόλου υπολογιστικό κόστος.

Κεφάλαιο 5

Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος για Μη-Μόνιμη, Συμπιεστή Ροή

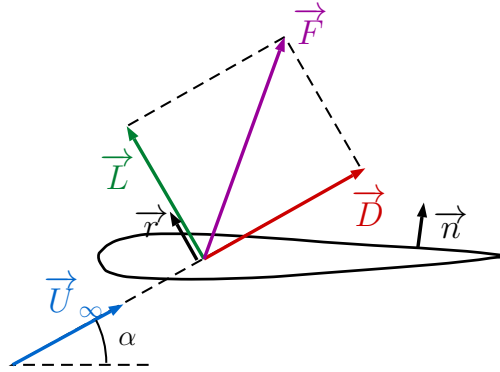
5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η συνεχής συζυγής διατύπωση των διδιάστατων εξισώσεων Euler για μη-μόνιμη, ατριβή και συμπιεστή ροή [38]. Αρχικά, επιλέγεται ένα πρόβλημα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης της μορφής ενός αεροδυναμικού σώματος (αεροτομή), εκφρασμένο από μια συνάρτηση κόστους/στόχου $F_{obj}=F_{obj}(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b})$ και υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης αυτής της συνάρτησης, στο χώρο των μεταβλητών σχεδιασμού \vec{b} . Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι βασικές πράξεις, έτσι ώστε να καθοριστούν οι μαθηματικές εκφράσεις της Συζυγούς Εξίσωσης (*Adjoint Equation (AE)*), των Συζυγών Οριακών Συνθηκών (*Adjoint Boundary Conditions (ABC)*) και των Παραγώγων Ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives (SD)*). Τέλος, η Πεδιακή Συζυγής Εξίσωση θα γραφεί σε μορφή, με την οποία μπορεί να επιλυθεί σύμφωνα με τη Μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών.

5.2 Μαθηματική Διατύπωση της Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

5.2.1 Συνάρτηση Κόστους/Στόχου

Σε αυτήν την εφαρμογή [39], αναλύεται ροή γύρω από αεροτομή σε πεδίο με επ' άπειρο όρια. Η συνάρτηση στόχου που επιλέχθηκε είναι η **μεγιστοποίηση του μέτρου της χρονικά μέσης δύναμης της άνωσης**.



Σχήμα 5.1: Διανύσματα άνωσης, οπισθέλκουσας και ολικής δύναμης, που προκαλούνται από το διάνυσμα της επ' άπειρο ταχύτητας ροής υπό γωνία α , καθώς και μοναδιαία διανύσματα κάθετα στη διεύθυνση ροής και επιφάνεια αεροτομής.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.1, η ταχύτητα \vec{U}_∞ της ροής στο άπειρο όριο του χωρίου (*Far field*) προκαλεί τις δυνάμεις της άνωσης \vec{L} και οπισθέλκουσας \vec{D} , οι οποίες είναι μεταξύ τους κάθετες και είναι οι συνιστώσες της ολικής δύναμης \vec{F} στην επιφάνεια της αεροτομής. Επίσης, φαίνονται το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{r} , το οποίο είναι εξ ορισμού παράλληλο με το διάνυσμα της δύναμης της άνωσης και το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} , το οποίο είναι κάθετο σε κάθε σημείο της επιφάνειας του στερεού ορίου S_w (αεροτομή).

Η ολική δύναμη \vec{F} στην επιφάνεια του στερεού ορίου προκαλείται από την ολοκλήρωση της στατικής πίεσης σε κάθε σημείο αυτής ως εξής:

$$\vec{F} = \int_{S_w} p \vec{n} ds$$

όπου p η στατική πίεση, \vec{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια της αεροτομής και S_w η επιφάνεια της αεροτομής.

Το μέτρο της δύναμης της άνωσης είναι η προβολή της ολικής δύναμης \vec{F} στην

διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \vec{r} . Άρα, είναι:

$$|\vec{L}| = \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_{S_w} p \vec{n} \cdot \vec{r} ds$$

Για απλούστερη παρουσίαση από εδώ και στο εξής, τα διανύσματα που εμφανίζονται σε ταυστική μορφή γράφονται με χρήση του δείκτη k , δηλαδή:

$$|\vec{L}| = \int_{S_w} p n_k r_k ds$$

Όπως παρουσιάστηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η ανάλυση της μη-μόνιμης ροής γίνεται σε μια περίοδο, που συγκεκριμένα είναι η περίοδος εξαναγκασμένης ταλάντωσης κάποιου από τα βασικά στοιχεία της ροής, όπως λ.χ. της επ' άπειρο γωνίας της ροής η αρχική γωνία α_∞ ή της οριζόντιας συνιστώσας της επ' άπειρο ταχύτητας U_∞ . Επομένως, έχει φυσική σημασία να θεωρείται ως στόχος η μεγιστοποίηση του μέτρου της **χρονικά μέσης** δύναμης της άνωσης $|\vec{L}|$, σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου. Οπότε, η συνάρτηση στόχου προς μεγιστοποίηση είναι:

$$F_{obj} = |\vec{L}| = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt \quad (5.1)$$

Στη Σχέση 5.1 το κλάσμα $\frac{1}{T}$ μπροστά από το διπλό ολοκλήρωμα είναι μια σταθερή ποσότητα και συνεπώς, δεν προσφέρει τίποτα στη διαδικασία μεγιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης. Οπότε, για λόγους συντομίας και απλότητας, παραλείπεται, και η τελική συνάρτηση στόχου είναι:

$$F_{obj} = \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt \quad (5.2)$$

5.2.2 Μεταβλητές Σχεδιασμού

Η συνάρτηση στόχου της Σχέσης 5.2 εξαρτάται από τις μεταβλητές σχεδιασμού \vec{b} και από το πεδίο ροής $\vec{U}(\vec{b})$, δηλαδή είναι $F_{obj} = F_{obj}(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b})$. Σε αυτήν την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση της μορφής του αεροδυναμικού σώματος, το οποίο είναι για παράδειγμα μια αεροτομή. Επομένως, οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι οι συντεταγμένες κάθε σημείου πάνω στην αεροτομή ή προκύπτουν από μια τεχνική παραμετροποίησης αυτής. Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιείται παραμετροποίηση του σχήματος της

αεροτομής με καμπύλες Bézier, όπου οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης είναι οι N σε αριθμό μεταβλητές σχεδιασμού. Άρα, το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού είναι $\vec{b} = b_q = (b_1, b_2, \dots, b_N)$, με b_1, b_2, \dots, b_N οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier.

Όπως προαναφέρθηκε, η συνάρτηση στόχου εξαρτάται τόσο από το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού, όσο και από το πεδίο ροής, που επιλύθηκε στο πρωτεύον πρόβλημα, όπως αυτό διακριτοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 3. Όμως, η λύση του πεδίου ροής $\vec{U}(\vec{b})$ εξαρτάται άμεσα από τις μεταβλητές σχεδιασμού, εξαιτίας της άρρηκτης σχέσης μεταξύ του χωρίου ροής και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του αεροδυναμικού σώματος. Επομένως, οι μεταβλητές σχεδιασμού δεν επηρεάζουν μόνο άμεσα τη συνάρτηση στόχου 5.2, αλλά και έμμεσα, μέσω της ροϊκής λύσης $\vec{U}(\vec{b})$.

5.2.3 Ανάπτυξη Συνεχούς Συζυγούς Μεθόδου

Στην επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος διατυπώθηκαν οι εξισώσεις Euler της ροής, οι οποίες αποτελούνται από το χρονικό όρο του πεδίου ροής και το μόνιμο όρο των διανυσμάτων ροής. Έτσι, από τις Σχέσεις 3.12 και 3.13 προκύπτει το σύστημα των ροϊκών εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος, γραμμένο σε ταυυστική μορφή:

$$R_i = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.3)$$

όπου $i=(1, 2, 3, 4)$ και $k=(1, 2) \rightarrow (x, y)$

Για την περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου, ορίζεται η **επαυξημένη αντικειμενική συνάρτηση** (*augmented objective function*) F_{aug} , η οποία αποτελείται από τη συνάρτηση στόχου, επαυξημένη με έναν εξ ορισμού μηδενικό όρο, αυτόν του γινομένου του υπολοίπου της Σχέσης 5.3 και των **συζυγών μεταβλητών** Ψ .

$$F_{aug} = F_{obj} + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt \Rightarrow$$

$$F_{aug} = \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt \quad (5.4)$$

Ο τελευταίος όρος της Σχέσης 5.4 είναι ένα χωρικό ολοκλήρωμα στον όγκο Ω του χωρίου ροής.

Για τη συνέχεια, πρέπει να γίνει ξεκάθαρη διάκριση μεταξύ των παραγώγων $\frac{\partial \Phi}{\partial b_q}$ και $\frac{\delta \Phi}{\delta b_q}$ [40]. Ορίζεται η ολική παράγωγος ενός ροϊκού μεγέθους Φ προς τις μεταβλητές

σχεδιασμού του προβλήματος.

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_q} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_q} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial b_q} \quad (5.5)$$

Η ολική παράγωγος του ροϊκού μεγέθους Φ αποτελείται από το λόγο μεταβολής του Φ προς τη μεταβολή των μεταβλητών b_q , χωρίς να ληφθεί υπόψη η μετακίνηση του πλέγματος, λόγω αλλαγής της σχεδιασμένης αεροδυναμικής μορφής, προσαυξημένου με την επιπλέον μεταβολή του Φ εξαιτίας της μετακίνησης αυτής.

Επομένως, παίρνοντας την ολική παράγωγο της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης προς τις μεταβλητές σχεδιασμού b_q ($q=1, \dots, N$), ισχύει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_q} = \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_q} \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt}_{T1} + \underbrace{\frac{\delta}{\delta b_q} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt}_{T2} \quad (5.6)$$

Στη συνέχεια, με την ανάπτυξη των επιμέρους όρων της Σχέσης 5.6, προκύπτουν επιπλέον όροι, οι οποίοι κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα:

- **FAE** (**F**ield **A**djoint **E**quation - Πεδιακή Συζυγής Εξίσωση)
- **ABC** (**A**djoint **B**oundary **C**ondition - Συζυγής Οριακή Συνθήκη)
- **SD** (**S**ensitivity **D**erivative - Παράγωγος Ευαισθησίας)

Αρχικά, αναλύεται ο όρος της συνάρτησης στόχου **T1** της Σχέσης 5.6.

$$\begin{aligned} \mathbf{T1} &\rightarrow \frac{\delta}{\delta b_q} \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt = \\ &\int_0^T \frac{\delta}{\delta b_q} \int_{S_w} p n_k r_k ds dt = \\ &\underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_q} (n_k r_k) ds dt}_{\mathbf{ABC}} + \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} (n_k r_k ds) dt}_{\mathbf{SD}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Με τη μεταβολή των τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού b_q , δηλαδή των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου της καμπύλης Bézier που χρησιμοποιείται για παραμετροποίηση της αεροτομής, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αεροτομής μεταβάλλονται. Άρα, επηρεάζεται και ο όγκος Ω του χωρίου ροής με αυτήν τη μεταβολή.

Οπότε, για να εισαχθεί η μερική παράγωγος $\frac{\partial}{\partial b_q}$ στο χωρικό ολοκλήρωμα του όρου **T2**, εφαρμόζεται το θεώρημα Leibniz.

$$\mathbf{T2} \rightarrow \frac{\delta}{\delta b_q} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega dt = \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta b_q} (\Psi_i R_i) d\Omega dt}_{\mathbf{T2a}} + \underbrace{\int_0^T \int_S \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{SD}} \quad (5.8)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα στη Σχέση 5.8 εμπλέκει τη μεταβολή των σημείων x_k της γεωμετρίας προς τη μεταβολή των μεταβλητών σχεδιασμού σε όλα τα όρια του χωρίου (με επιφάνεια S), γι' αυτό και λαμβάνεται ως παράγωγος ευαισθησίας (*Sensitivity Derivative* (**SD**)). Επίσης, αριθμός των σημείων x_k , που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, αυξάνει με την πύκνωση του πλέγματος κοντά στο στερεό όριο.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται ο όρος **T2a**:

$$\begin{aligned} \mathbf{T2a} &\rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\delta}{\delta b_q} (\Psi_i R_i) d\Omega dt = \\ &\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial b_q} R_i d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_q} d\Omega dt \stackrel{5.3}{=} \\ &\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt = \\ &\underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) d\Omega dt}_{\mathbf{T2b}} + \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt}_{\mathbf{T2c}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Αναπτύσσεται ο όρος **T2b**:

$$\begin{aligned} \mathbf{T2b} &\rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) d\Omega dt = \\ &\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_i}{\partial b_q} \right) d\Omega dt = \\ &\underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial b_q} \right) d\Omega dt}_{\mathbf{T2d}} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega dt}_{\mathbf{FAE}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Στον όρο **T2d**, η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial t}$ βγαίνει έξω από το χωρικό ολοκλήρωμα \int_{Ω} , γιατί με την πάροδο του χρόνου δεν μεταβάλλεται το σχήμα της αεροτομής. Έτσι, ο όρος

T2d γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T2d} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial b_q} \right) d\Omega dt &= \\
 \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega \right) dt &= \\
 \left[\int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega \right]_{t=0}^{t=T} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Επειδή το φαινόμενο είναι περιοδικό, η ποσότητα $\int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega$ είναι ίδια για $t=0$ και $t=T$. Οπότε, ο όρος **T2d** τελικά, μηδενίζεται.

Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3 (Σχέση 3.18), η μερική παράγωγος των διανυσμάτων ροής (*fluxes*) ως προς τα συντηρητικά μεγέθη, αναλύεται ως $\mathbf{A}_{ijk} = \frac{\partial f_{ik}}{\partial U_j}$. Εκτελώντας παράλληλα τον κανόνα της αλυσίδας, προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{A}_{ijk} &= \frac{\partial f_{ik}}{\partial U_j} \\
 \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} &= \frac{\partial f_{ik}}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial b_q}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} = \mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} \tag{5.12}$$

Ο δείκτης k αντικαθιστά το άθροισμα των όρων $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ και $\frac{\partial}{\partial z}$ και επιτρέπει την παρουσίαση των εξισώσεων σε τανυστική μορφή, σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein. Η μερική παράγωγος ως προς τις τρεις καρτεσιανές κατευθύνσεις $\frac{\partial}{\partial x_k}$ μπορεί να αντιμετωπιστεί με την μερική παράγωγο ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\partial}{\partial b_q}$. Αυτήν την ιδιότητα επιτρέπει η ύπαρξη μερικής παραγώγου, σε συνδυασμό με την ανεξαρτησία των x_k από τα b_q .

Στη συνέχεια, αναπτύσσεται ο όρος **T2c**:

$$\mathbf{T2c} \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial b_q} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} \right) d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} \right) d\Omega dt = \dots \tag{5.13}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green-Gauss στη Σχέση 5.13 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T2c} \rightarrow \dots &= \int_0^T \int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} d\Omega dt = \\
 &= \underbrace{\int_0^T \int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{T2e}} - \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} \right) d\Omega dt}_{\mathbf{FAE}}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Για την ανάλυση του όρου **T2e**, πρέπει να γίνει διάκριση των επιμέρους επιφανειών που συνθέτουν το όριο S , στο οποίο αναφέρεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα του όρου αυτού. Το όριο S περιλαμβάνει τα επ' άπειρο όρια και το στερεό όριο (αεροτομή), δηλαδή είναι $S=S_\infty \cup S_w$. Επομένως, το ολοκλήρωμα στο S γίνεται:

$$\mathbf{T2e} \rightarrow \int_0^T \int_S \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt = \underbrace{\int_0^T \int_{S_\infty} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{ABC}} + \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{T2f}} \quad (5.15)$$

Για τον όρο **T2f**, από τον ορισμό της ολικής παραγώγου, στη Σχέση 5.5, προκύπτει:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_q} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_q} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_q} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial b_q} = \frac{\delta \Phi}{\delta b_q} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_q}$$

Για να μη γίνει σύγχυση του δείκτη k που χρησιμοποιήθηκε στις Σχέσεις 5.12 με 5.15 και δείχνει άθροισμα στις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, με τον δείκτη k της ολικής παραγώγου (Σχέση 5.5), ο τελευταίος αντικαθίσταται με το δείκτη l .

Οπότε, ο όρος **T2f** γίνεται:

$$\mathbf{T2f} \rightarrow \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt = \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta f_{ik}}{\delta b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{T2g}} - \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{SD}} \quad (5.16)$$

Για την ανάπτυξη του όρου **T2g**, ισχύει:

$$\frac{\delta}{\delta b_q} (f_{ik} n_k) = \frac{\delta f_{ik}}{\delta b_q} n_k + \frac{\delta n_k}{\delta b_q} f_{ik} \Rightarrow \frac{\delta f_{ik}}{\delta b_q} n_k = \frac{\delta}{\delta b_q} (f_{ik} n_k) - \frac{\delta n_k}{\delta b_q} f_{ik}$$

Επομένως, ο όρος αυτός γίνεται:

$$\mathbf{T2g} \rightarrow \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta f_{ik}}{\delta b_q} n_k ds dt = \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta}{\delta b_q} (f_{ik} n_k) ds dt}_{\mathbf{T2h}} - \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt}_{\mathbf{SD}} \quad (5.17)$$

Υπενθυμίζεται ότι, το γινόμενο $f_{ik} n_k$ του όρου $\mathbf{T2h}$ είναι γραμμένο σε ταυνοστική μορφή, με το δείκτη $k=(1, 2)$ να δηλώνει την άθροιση, σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein.

$$f_{ik} n_k = f_{ix} n_x + f_{iy} n_y \quad (5.18)$$

Επίσης, ισχύει ότι, η κάθετη στο τοίχωμα συνιστώσα της ταχύτητας (*normal velocity*) γράφεται ως:

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = u n_x + v n_y$$

Άρα, γνωρίζοντας τον ορισμό των διανυσμάτων ροής (*fluxes*), από τη Σχέση 3.4, η Σχέση 5.18 μπορεί να γραφεί και σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ u (E_t + p) \end{bmatrix} n_x + \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ v (E_t + p) \end{bmatrix} n_y = \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u u_n + p n_x \\ \rho v u_n + p n_y \\ u_n (E_t + p) \end{bmatrix}$$

Στο στερεό όριο S_w , στο οποίο γράφεται το ολοκλήρωμα του όρου $\mathbf{T2h}$ ισχύει η συνθήκη μη-εισχώρησης (Σχέση 3.58) $u_n|_{S_w} = 0$. Όπως αναφέρθηκε και στη Σχέση 3.59, το αριθμητικό διάνυσμα της ροής στο στερεό όριο γίνεται:

$$(f_{ik} n_k)|_{S_w} = \begin{bmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έτσι, ο όρος **T2h** διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{T2h} \rightarrow & \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\delta}{\delta b_q} (f_{ik} n_k) ds dt = \\ & \int_0^T \int_{S_w} \Psi_2 \frac{\delta}{\delta b_q} (pn_x) ds dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_3 \frac{\delta}{\delta b_q} (pn_y) ds dt = \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

Οι δύο όροι της Σχέσης 5.19 που προκύπτουν μπορούν να ομαδοποιηθούν σε έναν, με χρήση του δείκτη $k=(1, 2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T2h} \rightarrow & \dots = \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta}{\delta b_q} (pn_k) ds dt = \\ & = \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_q} n_k ds dt}_{\mathbf{ABC}} + \underbrace{\int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt}_{\mathbf{SD}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Συνοψίζοντας:

Στην αρχική Σχέση 5.6 της παραγώγου της επαυξημένης αντικειμενικής συνάρτησης, αντικαθίστανται οι όροι που αναπτύχθηκαν από τις Σχέσεις 5.7, 5.8, 5.10, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 και 5.20. Οπότε, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_q} = & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} \right) d\Omega dt + \\ & + \int_0^T \int_{S_w} \frac{\delta p}{\delta b_q} (n_k r_k) ds dt + \int_0^T \int_{S_{\infty}} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} n_k ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} \frac{\delta p}{\delta b_q} n_k ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} (n_k r_k ds) dt + \int_0^T \int_S \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} n_k ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_q} n_k ds dt - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.4 Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση (FAE)

Οι όροι της Συζυγούς Πεδιακής Εξίσωσης, που εμφανίζονται στη Σχέση 5.21 είναι αυτοί που περιέχουν τον ρυθμό μεταβολής των συντηρητικών μεγεθών ως προς τις

μεταβλητές σχεδιασμού $\frac{\partial U_j}{\partial b_q}$:

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \frac{\partial U_i}{\partial b_q} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} \right) d\Omega dt \quad (5.22)$$

Στον πρώτο όρο της Σχέσης 5.22 αντιμετωπίζονται οι δείκτες i και j , έτσι ώστε να μπορούν να ομαδοποιηθούν και οι δύο όροι, με κοινό όρο την παράγωγο $\frac{\partial U_j}{\partial b_q}$. Οπότε, ισχύει:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial b_q} \right) d\Omega dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial U_j}{\partial b_q} d\Omega dt \end{aligned}$$

Λόγω της δυσκολίας υπολογισμού αυτής της παραγώγου, επιβάλλεται πως ο όρος που πολλαπλασιάζεται με αυτή είναι μηδενικός, έτσι ώστε τελικά να εξαφανιστεί. Επομένως, προκύπτει η **Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση** (*Field Adjoint Equation - FAE*) για τις μη-μόνιμες εξισώσεις Euler.

$$\boxed{-\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} = 0} \quad (5.23)$$

Υπενθυμίζεται ότι, η σχέση μη-μόνιμων εξισώσεων Euler για το πρωτεύον πρόβλημα είναι:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \mathbf{A}_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} = 0 \quad (5.24)$$

Οι Σχέσεις 5.23 και 5.24 φαίνονται εκ πρώτης όψης παρόμοιες. Στην εξίσωση του συζυγούς προβλήματος 5.23, στον όρο $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k}$, υπάρχει ο δείκτης i , ενώ στην εξίσωση του πρωτεύοντος προβλήματος 5.24, στον όρο $\frac{\partial U_j}{\partial x_k}$ υπάρχει ο j . Αυτή η διαφορά σημαίνει ότι, η παράγωγος $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k}$ πολλαπλασιάζεται με τις γραμμές (i) του μητρώου \mathbf{A} , ενώ η $\frac{\partial U_j}{\partial x_k}$ με τις στήλες του (j). Συνεπώς, στη διανυσματική γραφή της εξίσωσης 5.23 δε θα εισαχθεί ο πίνακας $\mathbf{A}(\vec{U})$, αλλά ο αντίθετος και ανάστροφος του $-\mathbf{A}(\vec{U})^T$.

Η Συζυγής Πεδιακή Εξίσωση μπορεί να γραφεί και σε διανυσματική μορφή, ως:

$$\boxed{-\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - \mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} = \vec{0}} \quad (5.25)$$

5.2.5 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες (ABC)

Οι Συζυγείς Οριακές Συνθήκες προκύπτουν από τα οριακά ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{S_\infty} \Psi_i n_k \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} ds dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} n_k \frac{\delta p}{\delta b_q} ds dt + \int_0^T \int_{S_w} (n_k r_k) \frac{\delta p}{\delta b_q} ds dt = \\ & = \int_0^T \int_{S_\infty} \Psi_i n_k \frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q} ds dt + \int_0^T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} n_k + n_k r_k) \frac{\delta p}{\delta b_q} ds dt \end{aligned} \quad (5.26)$$

Οι οριακές συνθήκες του συζυγούς προβλήματος επιβάλλονται στα στερεά όρια (S_w) και στα επ' άπειρο όρια (S_∞) του χωρίου. Επιβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποφευχθεί ο υπολογισμός των παραγώγων των ροϊκών μεγεθών ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή των $\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q}$ και $\frac{\delta p}{\delta b_q}$.

Για την αποφυγή υπολογισμού των $\frac{\partial f_{ik}}{\partial b_q}$ στα επ' άπειρο όρια (S_∞), απαιτείται:

$$\mathbf{ABC}|_{S_\infty} \rightarrow \Psi_i|_{S_\infty} = 0 \quad (5.27)$$

Για την αποφυγή υπολογισμού των $\frac{\delta p}{\delta b_q}$ στα στερεά όρια (S_w), απαιτείται:

$$\mathbf{ABC}|_{S_w} \rightarrow \Psi_{k+1}|_{S_w} n_k + n_k r_k = 0 \quad (5.28)$$

5.2.6 Παράγωγοι Ευαισθησίας (SD)

Οι υπόλοιποι μη μηδενικοί όροι της Σχέσης 5.21 αποτελούν τις παραγώγους ευαισθησίας $\frac{\delta F}{\delta b_q}$, δηλαδή τους ρυθμούς μεταβολής της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_q} &= \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} (n_k r_k ds) dt + \int_0^T \int_S \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} n_k ds dt - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_q} n_k ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i f_{ik} \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_{k+1} p \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt \end{aligned} \quad (5.29)$$

Οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι μηδενικοί για τα επ' άπειρο όρια του χωρίου S . Επομένως, στο δεύτερο όρο της Σχέσης 5.29 η παράγωγος των των συντεταγμένων των σημείων της γεωμετρίας ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού $\left(\frac{\partial x_k}{\partial b_q}\right)$ μηδενίζεται. Άρα, παραμένει ο ίδιος όρος, αλλά γραμμένος μόνο για τα στερεά όρια S_w . Οπότε, μετά από ομαδοποίηση των όρων της Σχέσης 5.29, προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_q} = & \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} (n_k r_k ds) dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} n_k ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_q} n_k ds dt + \int_0^T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_i f_{ik}) \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt \end{aligned} \quad (5.30)$$

Η εύρεση των παραγώγων ευαισθησίας επιτρέπει την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού μετά το πέρας κάθε κύκλου βελτιστοποίησης. Η ανανέωση αυτή εκφράζεται μέσω της μεθόδου απότομης ανόδου (μεγιστοποίηση αντικειμενικής):

$$b_q^{new} = b_q^{old} + \eta \cdot \frac{\delta F}{\delta b_q} \quad (5.31)$$

Ο συντελεστής η είναι σταθερός καθόλη τη διάρκεια της διαδικασίας βελτιστοποίησης, και προκύπτει από τη σχέση:

$$\eta = \frac{\max \text{ Displacement}}{\max \text{ Sensitivity Derivative}} \quad (5.32)$$

Υπολογίζεται στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης και ορίζεται ως το πηλίκο της μέγιστης μετατόπισης (καθορισμένη από το χρήστη) και της μέγιστης παραγώγου ευαισθησίας.

5.3 Εφαρμογή της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στη Συζυγή Πεδιακή Εξίσωση

Για την μαθηματική θεμελίωση και εύρεση της τελικής Συζυγούς Εξίσωσης Ισορροπίας των Αρμονικών, ακολουθείται η ίδια διαδικασία όπως και στο Κεφάλαιο 4, όπου βρέθηκε το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων (Σχέση 4.21) για το σύστημα διδιάστατων εξισώσεων Euler (Σχέση 3.12).

Για διευκόλυνση γραφής, η χρονική παράγωγος της Συζυγούς Πεδιακής Εξίσωσης γράφεται ως $-\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}$ και οι χωρικοί όροι γράφονται ως $-\mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} \rightarrow \vec{\Upsilon}(\vec{\Psi}(t))$, όπου $\vec{\Upsilon}$ το αντίστοιχο χωρικό υπόλοιπο (*spatial residual*) για το συζυγές πρόβλημα. Άρα η συζυγής πεδιακή εξίσωση γίνεται:

$$-\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + \vec{\Upsilon}(\vec{\Psi}(t)) = 0 \quad (5.33)$$

Στη συνέχεια, τα χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία της συζυγούς ροϊκής λύσης $\vec{\Psi}$ και του συζυγούς χωρικού υπολοίπου $\vec{\Upsilon}$ προσεγγίζονται μέσω σειρών Fourier, με χρήση M_H συχνοτήτων - αρμονικών. Οπότε, σε αντιστοιχία με τη Σχέση 4.4, γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}(t) &= \hat{\Psi}_0 + \sum_{m=1}^{M_H} \left[\hat{\Psi}_{am} \cos(\omega m t) + \hat{\Psi}_{bm} \sin(\omega m t) \right] \\ \vec{\Upsilon}(t) &= \hat{\Upsilon}_0 + \sum_{m=1}^{M_H} \left[\hat{\Upsilon}_{am} \cos(\omega m t) + \hat{\Upsilon}_{bm} \sin(\omega m t) \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Στην ανάλυση με σειρές Fourier για τη συζυγή πεδιακή εξίσωση, χρησιμοποιείται ο δείκτης $m=1, \dots, M_H$, για να γίνει ξεκάθαρο ότι, το πλήθος των αρμονικών M_H , που χρησιμοποιείται στο συζυγές πρόβλημα, δεν είναι αναγκαία ίσο με το πλήθος των αρμονικών N_H του ευθέως προβλήματος. Η ιδιότητα αυτή ισχύει, επειδή η ανάλυση στο συζυγές πρόβλημα είναι ανεξάρτητη της ανάλυσης που έγινε στο ευθύ.

Η μερική παράγωγος της συζυγούς ροϊκής λύσης ως προς το χρόνο υπολογίζεται ως:

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} = \sum_{m=1}^{M_H} \left[-\hat{\Psi}_{am} \omega m \sin(\omega m t) + \hat{\Psi}_{bm} \omega m \cos(\omega m t) \right] \quad (5.35)$$

Με αντικατάσταση της Σχέσης 5.34 και 5.35 στη Σχέση 5.33, προκύπτει:

$$\hat{\Upsilon}_0 + \sum_{m=1}^{M_H} \left[\left(-\hat{\Psi}_{bm} \omega m + \hat{\Upsilon}_{am} \right) \cos(\omega m t) \right] + \sum_{m=1}^{M_H} \left[\left(\hat{\Psi}_{am} \omega m + \hat{\Upsilon}_{bm} \right) \sin(\omega m t) \right] = 0 \quad (5.36)$$

Η Σχέση 5.36 πρέπει να ικανοποιείται για κάθε αρμονική $m=1, \dots, M_H$:

$$\begin{cases} \hat{\Upsilon}_0 = 0 \\ -\hat{\Psi}_{bm}\omega m + \hat{\Upsilon}_{am} = 0, & \text{για } m=1, \dots, M_H \\ \hat{\Psi}_{am}\omega m + \hat{\Upsilon}_{bm} = 0, & \text{για } m=1, \dots, M_H \end{cases} \quad (5.37)$$

Στο σύστημα αυτό, υπάρχουν $2M_H + 1$ εξισώσεις, όπως στο αντίστοιχο του ευθέως προβλήματος, στη Σχέση 4.7. Σε αντιπαράβολή με το σύστημα του ευθέως προβλήματος, στο σύστημα της Σχέσης 5.37 παρατηρείται ότι, τα πεδία της συζυγούς ροής $\hat{\Psi}_{am}$ και $\hat{\Psi}_{bm}$ είναι γραμμένα με αντίθετο πρόσημο, σε σχέση με τα αντίστοιχα $\hat{\Upsilon}_{am}$ και $\hat{\Upsilon}_{bm}$. Παρόλα αυτά, κι εδώ ισχύει ότι, κάθε $\hat{\Upsilon}_0$, $\hat{\Upsilon}_{am}$ ή $\hat{\Upsilon}_{bm}$ εξαρτάται από όλα τα $\hat{\Psi}_0$, $\hat{\Psi}_{am}$ και $\hat{\Psi}_{bm}$ κατά άγνωστο τρόπο. Οπότε, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το Κεφάλαιο 4, καθορίζεται ο μαθηματικός συσχετισμός των πεδίων αυτών.

Στη συνέχεια, θεωρείται προφανές ότι, η περίοδος T του φαινομένου είναι κοινή και για το ευθύ, και για το συζυγές πρόβλημα. Ωστόσο, το χρονικό διάστημα Δt μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με τον αριθμό των αρμονικών:

$$\Delta t = \frac{T}{2M_H + 1} = \frac{2\pi}{2M_H + 1} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\beta}{\omega}$$

όπου $\beta = \frac{2\pi}{2M_H + 1}$.

Οπότε, τα χρονικά μεταβαλλόμενα συζυγή πεδία $\vec{\Psi}$ και $\vec{\Upsilon}$ διακριτοποιούνται χρονικά σε $M_T = 2M_H + 1$ ισομήκη χρονικά διαστήματα, οπότε ορίζονται τα πεδία:

$$\vec{\Psi}_{HB} = \begin{pmatrix} \Psi(t_0) \\ \Psi(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \Psi(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad \vec{\Upsilon}_{HB} = \begin{pmatrix} \Upsilon(t_0) \\ \Upsilon(t_0 + \Delta t) \\ \vdots \\ \Upsilon(t_0 + T - \Delta t) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

5.3.1 Εφαρμογή της Μεθόδου για Τρεις Αρμονικές

Για εφαρμογή της θεωρίας με $M_H = 3$ αρμονικές η περίοδος T χωρίζεται σε $N_T = 2M_H + 1 = 7$ ισομήκη χρονικά διαστήματα, δηλαδή με $\Delta t = \frac{T}{7}$.

Επομένως, για τρεις αρμονικές, το διάνυσμα των μεταβλητών της συζυγούς ροής

$\Psi(t)$, για μια χρονική στιγμή t , γράφεται σύμφωνα με τη Σχέση 5.34 ως:

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(\omega t) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(\omega t) + \\ & \widehat{\Psi}_{a2} \cos(2\omega t) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(2\omega t) + \\ & \widehat{\Psi}_{a3} \cos(3\omega t) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(3\omega t) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Μετά από τη χρονική διακριτοποίηση της λύσης, υπάρχουν 7 πεδία τιμών μέσα στην περίοδο της:

$$\vec{\Psi}_{HB} = \begin{pmatrix} \Psi(t_0) \\ \Psi(t_0 + \Delta t) \\ \Psi(t_0 + 2\Delta t) \\ \Psi(t_0 + 3\Delta t) \\ \Psi(t_0 + 4\Delta t) \\ \Psi(t_0 + 5\Delta t) \\ \Psi(t_0 + 6\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Για $M_H=3$ αρμονικές, ισχύει $\beta = \frac{2\pi}{2M_H+1} = \frac{2\pi}{7}$. Για καθεμιά από τις επτά χρονικές στιγμές, το μπλοκ-διάνυσμα $\vec{\Psi}$ αναλύεται με σειρές Fourier, όπως στη Σχέση 5.39, και προκύπτει το σύστημα επτά εξισώσεων:

$$\begin{cases} \Psi_0 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(0) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(0) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(0) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(0) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(0) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(0) \\ \Psi_1 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(1a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(1a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(2a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(2a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(3a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(3a) \\ \Psi_2 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(2a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(2a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(4a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(4a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(6a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(6a) \\ \Psi_3 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(3a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(3a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(6a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(6a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(9a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(9a) \\ \Psi_4 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(4a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(4a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(8a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(8a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(12a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(12a) \\ \Psi_5 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(5a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(5a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(10a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(10a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(15a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(15a) \\ \Psi_6 = \widehat{\Psi}_0 + \widehat{\Psi}_{a1} \cos(6a) + \widehat{\Psi}_{b1} \sin(6a) + \widehat{\Psi}_{a2} \cos(12a) + \widehat{\Psi}_{b2} \sin(12a) + \widehat{\Psi}_{a3} \cos(18a) + \widehat{\Psi}_{b3} \sin(18a) \end{cases} \quad (5.41)$$

Το σύστημα της Σχέσης 5.41 μπορεί να γραφεί και σε μητρική μορφή ως:

$$\begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(3a) & \sin(3a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) & \cos(9a) & \sin(9a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) & \cos(12a) & \sin(12a) \\ 1 & \cos(5a) & \sin(5a) & \cos(10a) & \sin(10a) & \cos(15a) & \sin(15a) \\ 1 & \cos(6a) & \sin(6a) & \cos(12a) & \sin(12a) & \cos(18a) & \sin(18a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_0 \\ \widehat{\Psi}_{a1} \\ \widehat{\Psi}_{b1} \\ \widehat{\Psi}_{a2} \\ \widehat{\Psi}_{b2} \\ \widehat{\Psi}_{a3} \\ \widehat{\Psi}_{b3} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Όμοια, με γνωστά τα πεδία $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6)^T$ και

$\vec{\Upsilon}=(\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3, \Upsilon_4, \Upsilon_5, \Upsilon_6)^T$ εκφράζονται τα συστήματα:

$$\widehat{\Psi}=\mathbf{E} \cdot \vec{\Psi} \quad \text{και} \quad \widehat{\Upsilon}=\mathbf{E} \cdot \vec{\Upsilon} \quad (5.43)$$

Ο πίνακας \mathbf{E} , που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά από το πεδίο των συχνοτήτων, στο πεδίο του χρόνου, είναι ίδιος με τον αντίστοιχο πίνακα του Κεφαλαίου 4 και για $M_H=3$ αρμονικές, γράφεται ως:

$$\mathbf{E}=\frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \cos(a) & 2 \cos(2a) & 2 \cos(3a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(5a) & 2 \cos(6a) \\ 0 & 2 \sin(a) & 2 \sin(2a) & 2 \sin(3a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(5a) & 2 \sin(6a) \\ 2 & 2 \cos(2a) & 2 \cos(4a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(8a) & 2 \cos(10a) & 2 \cos(12a) \\ 0 & 2 \sin(2a) & 2 \sin(4a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(8a) & 2 \sin(10a) & 2 \sin(12a) \\ 2 & 2 \cos(3a) & 2 \cos(6a) & 2 \cos(9a) & 2 \cos(12a) & 2 \cos(15a) & 2 \cos(18a) \\ 0 & 2 \sin(3a) & 2 \sin(6a) & 2 \sin(9a) & 2 \sin(12a) & 2 \sin(15a) & 2 \sin(18a) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

με αντίστροφο τον:

$$\mathbf{E}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos(a) & \sin(a) & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(3a) & \sin(3a) \\ 1 & \cos(2a) & \sin(2a) & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(6a) & \sin(6a) \\ 1 & \cos(3a) & \sin(3a) & \cos(6a) & \sin(6a) & \cos(9a) & \sin(9a) \\ 1 & \cos(4a) & \sin(4a) & \cos(8a) & \sin(8a) & \cos(12a) & \sin(12a) \\ 1 & \cos(5a) & \sin(5a) & \cos(10a) & \sin(10a) & \cos(15a) & \sin(15a) \\ 1 & \cos(6a) & \sin(6a) & \cos(12a) & \sin(12a) & \cos(18a) & \sin(18a) \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Το σύστημα των $2M_H + 1$ εξισώσεων της Σχέσης 5.41 γράφεται, για $M_H=3$ αρμονικές, ως:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0=\widehat{\Upsilon}_0 \\ \omega \widehat{\Psi}_{b1}=\widehat{\Upsilon}_{a1} \\ -\omega \widehat{\Psi}_{a1}=\widehat{\Upsilon}_{b1} \\ 2\omega \widehat{\Psi}_{b2}=\widehat{\Upsilon}_{a2} \\ -2\omega \widehat{\Psi}_{a2}=\widehat{\Upsilon}_{b2} \\ 3\omega \widehat{\Psi}_{b3}=\widehat{\Upsilon}_{a3} \\ -3\omega \widehat{\Psi}_{a3}=\widehat{\Upsilon}_{b3} \end{array} \right.$$

ή σε μητρική μορφή:

$$\omega \mathbf{A}^T \cdot \widehat{\Psi} = \widehat{\Upsilon} \Rightarrow \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_0 \\ \widehat{\Psi}_{a1} \\ \widehat{\Psi}_{b1} \\ \widehat{\Psi}_{a2} \\ \widehat{\Psi}_{b2} \\ \widehat{\Psi}_{a3} \\ \widehat{\Psi}_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\Upsilon}_0 \\ \widehat{\Upsilon}_{a1} \\ \widehat{\Upsilon}_{b1} \\ \widehat{\Upsilon}_{a2} \\ \widehat{\Upsilon}_{b2} \\ \widehat{\Upsilon}_{a3} \\ \widehat{\Upsilon}_{b3} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

όπου ορίζεται το μητρώο \mathbf{A}^T :

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Το μητρώο \mathbf{A}^T είναι το ανάστροφο του μητρώου \mathbf{A} , όπως γράφτηκε στη Σχέση 4.19. Επίσης, επειδή είναι αντισυμμετρικό μητρώο, ισχύει $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Οπότε η Σχέση 5.46 γράφεται:

$$-\omega \mathbf{A} \cdot \widehat{\Psi} = \widehat{\Upsilon} \quad (5.48)$$

Από τη Σχέση 4.20, είναι γνωστό ότι ισχύει $\mathbf{D} = -\mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E}$.

Στη γενική περίπτωση, η ανάλυση του συζυγούς προβλήματος ακολουθεί την μαθηματική θεμελίωση του Κεφαλαίου 4, όπου παρουσιάζονται αναλυτικότερα οι γενικές μορφές των μητρώων \mathbf{E} , \mathbf{E}^{-1} , \mathbf{D} και \mathbf{A} . (Σχέσεις 4.23, 4.24, 4.25 και 4.26 αντίστοιχα)

Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις 5.43 και 5.48 προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \widehat{\Psi} = \mathbf{E} \cdot \vec{\Psi} \\ \widehat{\Upsilon} = \mathbf{E} \cdot \vec{\Upsilon} \Rightarrow -\omega \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{\Psi} = \mathbf{E} \cdot \vec{\Upsilon} \Rightarrow -\omega \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E} \vec{\Psi} = \vec{\Upsilon} \Rightarrow \\ \widehat{\Upsilon} = \omega \mathbf{A} \cdot \widehat{\Psi} \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\Upsilon} - \omega \mathbf{D} \vec{\Psi} = 0} \quad (5.49)$$

Η Σχέση 5.49 είναι η τελική συζυγής εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών και παριστάνει ένα σύστημα από $2M_H + 1$ εξισώσεις. Υπενθυμίζεται ότι, η αντίστοιχη εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών για το ευθύ πρόβλημα είναι (Σχέση 4.21):

$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} + \omega \mathbf{D} \vec{\mathbf{U}} = 0}$$

Παρατηρείται ότι, στη συζυγή εξίσωση ισορροπίας των αρμονικών, ο όρος πηγής $\omega \mathbf{D} \vec{\Psi}$ αφαιρείται από το χωρικό υπόλοιπο $\vec{\Upsilon}$, σε αντίθεση με την αντίστοιχη εξίσωση του ευθέως προβλήματος, όπου ο όρος πηγής $\omega \mathbf{D} \vec{\mathbf{U}}$ προστίθεται στο υπόλοιπο $\vec{\mathbf{R}}$.

Όπως καθορίστηκε στην αρχή της ενότητας αυτής, το συζυγές χωρικό υπόλοιπο είναι $\vec{\Upsilon} = -\mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}$. Αντικαθιστώντας στη Σχέση 5.49, προκύπτει μια άλλη μορφή της τελικής συζυγούς εξίσωσης ισορροπίας των αρμονικών, που περιέχει ως άγνωστο μόνο το πεδίο της συζυγούς ροϊκής λύσης $\vec{\Psi}$.

$$-\mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} - \omega \mathbf{D} \vec{\Psi} = 0 \quad (5.50)$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η μορφή της εξίσωσης 5.49 και της 5.50, γράφεται και σε ταυστική μορφή:

$$-A_{ijk}^m \frac{\partial \Psi_i^m}{\partial x_k} - \omega D_{mn} \Psi_{nj} = 0 \quad (5.51)$$

Για ευκολότερη σύγκριση μεταξύ των χαρακτηριστικών εξισώσεων για το ευθύ και το συζυγές πρόβλημα, αυτές παρουσιάζονται στη συνέχεια:

Ευθύ - Primal

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + A_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} + \omega \mathbf{D} \vec{U} &= 0 \\ \mathbf{A}_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + \omega \mathbf{D} \vec{U} &= 0 \\ A_{ijk}^m \frac{\partial U_j^m}{\partial x_k} + \omega D_{mn} U_{ni} &= 0\end{aligned}$$

Συζυγές - Adjoint

$$\begin{aligned}-\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - \mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + A_{ijk} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\Upsilon} - \omega \mathbf{D} \vec{\Psi} &= 0 \\ -\mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} - \omega \mathbf{D} \vec{\Psi} &= 0 \\ -A_{ijk}^m \frac{\partial \Psi_i^m}{\partial x_k} - \omega D_{mn} \Psi_{nj} &= 0\end{aligned}$$

Στις εξισώσεις, που είναι γραμμένες σε τανυστική μορφή, οι δείκτες $i, j=(1, 2, 3, 4)$ υποδηλώνουν τα τέσσερα συντηρητικά πεδία $\rho, \rho u, \rho v, E_t$ αντίστοιχα. Ο δείκτης $k=(1, 2)$ δείχνει τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις για διδιάστατη ροή ($x_1=x, x_2=y$). Ο δείκτης $m=(1, 2, \dots, N_T)$ ($m=(1, 2, \dots, M_T)$ για το συζυγές) δείχνει τον αύξοντα αριθμό κάθε μιας από τις N_T ή M_T εξισώσεις. Ο δείκτης $n=(1, 2, \dots, N_T)$ ($n=(1, 2, \dots, M_T)$ για το συζυγές) δείχνει άθροισμα του όρου $\omega \mathbf{D} \vec{U}$ ή $\omega \mathbf{D} \vec{\Psi}$ σε μια από τις m εξισώσεις.

Τελικά, παρατηρείται ότι οι διαφορές μεταξύ του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος, για τη μέθοδο της ισορροπίας των αρμονικών, είναι:

1. Το αντίθετο πρόσημο στους όρους μεταφοράς (*convection*) $-\mathbf{A}_x^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} - \mathbf{A}_y^T \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}$, το οποίο σημαίνει ότι, το συζυγές πρόβλημα κινείται ανάποδα στο χώρο.
2. Το διαφορετικό πρόσημο στον όρο πηγής που εισάγεται στην έκφραση του χωρικού υπολοίπου ($+\omega \mathbf{D} \vec{U}$ για το ευθύ, $-\omega \mathbf{D} \vec{\Psi}$ για το συζυγές).

Σε αντίθεση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης, όπου είναι αναγκαία η αντίστροφη επίλυση στο χρόνο για το συζυγές πρόβλημα, η μέθοδος της ισορροπίας των αρμονικών δεν υπόκειται σε αυτόν τον περιορισμό. Ο λόγος για αυτή την ιδιότητα είναι ότι, τα $2M_H + 1$ πεδία της λύσης, απεικονίζουν μεν τα πραγματικά πεδία στο χρόνο της τελικής λύσης $\Psi(t)$, αλλά επιλύονται δε ως χρονικά μόνιμα (*steady*) προβλήματα.

Κεφάλαιο 6

Πιστοποίηση της Μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε Βελτιστοποίηση Μορφής

Σε αυτό το κεφάλαιο εκτελούνται τέσσερις εφαρμογές βελτιστοποίησης μορφής ενός μεμονωμένου αεροδυναμικού σώματος, μια αεροτομή. Σκοπός είναι η πιστοποίηση των αποτελεσμάτων που δίνει η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, για το συζυγές πρόβλημα. Η πιστοποίηση αυτή γίνεται με τον έλεγχο των Παραγώγων Ευαισθησίας (Sensitivity Derivatives - SD) που δίνει η κάθε μέθοδος.

Στη συνέχεια, καθορίζονται τα κοινά χαρακτηριστικά και οι συνθήκες των τεσσάρων προβλημάτων. Η διαφοροποίησή τους έγκειται στην αλλαγή του τύπου της αεροτομής, της εξίσωσης διέγερσης της επ' άπειρο γωνίας ροής, των Αρμονικών που χρησιμοποιούνται, της περιόδου διέγερσης και της οριζόντιας συνιστώσας της επ' άπειρο ταχύτητας. Η επιλογή αυτή έγινε με σκοπό την προβολή των σημείων όπου η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών υπερισχύει της μεθόδου της χρονο-προέλασης και άλλων, όπου υπολείπεται.

6.1 Περιγραφή Χαρακτηριστικών του Προβλήματος

Εκτελούνται τέσσερις εφαρμογές βελτιστοποίησης αεροδυναμικής μορφής μιας μεμονωμένης αεροτομής, για τρεις κύκλους βελτιστοποίησης, με τη συνεχή συζυγή μέθοδο. Για την επίλυση του ευθέως προβλήματος χρησιμοποιείται η εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών (Σχέση 4.21) και για το συζυγές η συζυγής εξίσωση της Ισορροπίας των Αρμονικών (Σχέση 5.49).

Αρχικά, κάθε αεροτομή, των τεσσάρων εφαρμογών, παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier. Οι μεταβλητές σχεδιασμού b_q κάθε προβλήματος είναι οι συντεταγμένες (x, y) των σημείων ελέγχου των καμπυλών αυτών. Η αντικειμενική συνάρτηση προς μεγιστοποίηση, για την οποία κάθε αεροτομή βελτιστοποιείται, είναι η χρονικά μέση δύναμη της άνωσης (Σχέση 5.2):

$$F_{obj} = \int_0^T \int_{S_w} p n_k r_k ds dt$$

Οι παράγωγοι ευαισθησίας, και για τα δύο προβλήματα, υπολογίζονται από τη Σχέση 5.30:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_q} = & \int_0^T \int_{S_w} p \frac{\delta}{\delta b_q} (n_k r_k ds) dt + \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i R_i \frac{\partial x_k}{\partial b_q} n_k ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{S_w} \Psi_i \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_l} \frac{\delta x_l}{\delta b_q} n_k ds dt + \int_0^T \int_{S_w} (\Psi_{k+1} p - \Psi_i f_{ik}) \frac{\delta n_k}{\delta b_q} ds dt \end{aligned}$$

Εκτελείται η μέθοδος της απότομης ανόδου (μεγιστοποίηση αντικειμενικής), για ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού (Σχέση 5.31):

$$b_q^{new} = b_q^{old} + \eta \cdot \frac{\delta F}{\delta b_q}$$

Ως μέγιστη μετατόπιση έχει δοθεί η τιμή 0.005. Οπότε, για κάθε περίπτωση υπολογίζεται διαφορετικός συντελεστής η , στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης και έκτοτε, παραμένει σταθερός μέχρι το τέλος της διαδικασίας.

Οι τέσσερις περιπτώσεις για τις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, στο ευθύ και στο συζυγές πρόβλημα, καθώς και οι μεταβλητές συνθήκες κάθε μιας, φαίνονται στον Πίνακα 6.1:

Πίνακας 6.1: Τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών

	Περίπτωση 1η	Περίπτωση 2η	Περίπτωση 3η	Περίπτωση 4η
Αεροτομή	NACA 4410	NACA 0006	NACA 0012	NACA 0012
Περίοδος διέγερσης $T(sec)$	1.0	1.0	0.5	1.0
Διέγερση επ' άπειρο γωνίας $\alpha_\infty(^{\circ})$	$1 + 2 \sin(\omega t)$	$0 + 2 \sin(\omega t)$	$0 + 4 \sin(\omega t)$	$0 + 2 \sin(\omega t) + 0.5 \cos(4\omega t - \frac{2\pi}{3})$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας $U_\infty(m/s)$	150	250	100	150
Αρμονικές ευθέος N_H	3	4	4	6
Αρμονικές συζυγούς M_H	4	4	4	6

Οι περιπτώσεις του Πίνακα 6.1 εκτελούνται για τρεις κύκλους βελτιστοποίησης, με χρήση της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών. Οι ίδιες περιπτώσεις εκτελούνται παράλληλα και για τη μέθοδο χρονο-προέλασης, έτσι ώστε στο τέλος να γίνει πιστοποίηση της πρώτης, με σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας που προκύπτουν και από τις δύο.

Τα στοιχεία του επιλύτη του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι κοινά για όλες τις περιπτώσεις του Πίνακα 6.1, και φαίνονται στον Πίνακα 6.2:

Πίνακας 6.2: Βασικά στοιχεία επιλύτη που χρησιμοποιούνται και στις δύο μεθόδους

Βασικά στοιχεία επιλύτη	
Μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος	Gauss-Seidel
Τάξη ακρίβειας χωρικής διακριτοποίησης ευθέος	1η (3.31)
Τάξη ακρίβειας χωρικής διακριτοποίησης συζυγούς	1η (3.31)
CFL_{max} (3.69)	20
Αριθμός επαναλήψεων για $CFL=CFL_{max}$	300
Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων	10000

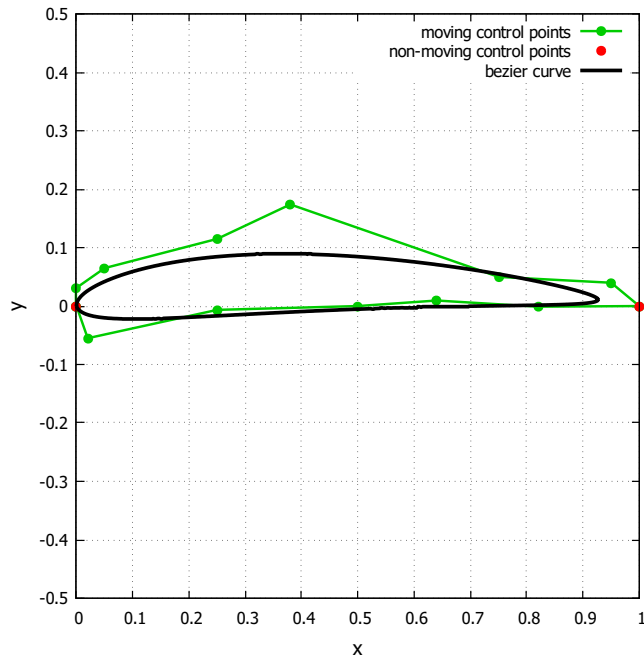
Οι δύο μέθοδοι εφαρμόζονται σε κάθε μια από τις τέσσερις περιπτώσεις του Πίνακα 6.2 για τρεις κύκλους βελτιστοποίησης. Στο τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης παράγονται οι Παράγωγοι Ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives - SD*), και οι συντεταγμένες των κινούμενων σημείων ελέγχου ανανεώνονται σύμφωνα με τη Σχέση 5.31, έτσι ώστε να δημιουργηθεί η νέα βελτιστοποιημένη γεωμετρία. Τα σημεία που παραμένουν ακλόνητα βρίσκονται στην ακμή πρόσπτωσης (σημείο (0, 0)) και εκφυγής (σημείο (1, 0)), για όλες τις διαφορετικές γεωμετρίες, και οι συντεταγμένες τους δεν μεταβάλλονται. Στη συνέχεια, γίνεται μερική αναπλεγματοποίηση στο υπολογιστικό χωρίο με την εκ νέου πύκνωση κάποιων κυψελών κοντά στο στερεό όριο και την τομή των οριακών κυψελών, σύμφωνα με τη μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell). Στο τέλος του 3ου κύκλου βελτιστοποίησης, εκτελείται το ευθύ πρόβλημα για τελευταία φορά, για να επιλυθεί η ροή με την τελική γεωμετρία.

Οι παράγωγοι ευαισθησίας (SD) που προέκυψαν από τις μεθόδους Ισορροπίας των Αρμονικών και Χρονο-προέλασης, συγκρίνονται με χρήση του ποσοστιαίου σφάλματος τιμών, μετά το τέλος κάθε κύκλου βελτιστοποίησης. Το ποσοστιαίο σφάλμα των παραγώγων ευαισθησίας υπολογίζεται για όλα τα κινούμενα σημεία ελέγχου από τη σχέση:

$$SDerr_i = \left| 1 - \frac{SD_{HB,i}}{SD_{TM,i}} \right| \cdot 100\% \quad (6.1)$$

6.2 Περίπτωση 1η - Μη-Συμμετρική Αεροτομή

Για την 1η Περίπτωση, βελτιστοποιείται μη-συμμετρική αεροτομή τύπου NACA 4410 [36][37], η οποία παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier, χρησιμοποιώντας 17 σημεία, από τα οποία τα 2 βρίσκονται ακλόνητα στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής (σημείο $(0, 0)$) και 4 στην ακμή εκφυγής (σημείο $(1, 0)$).



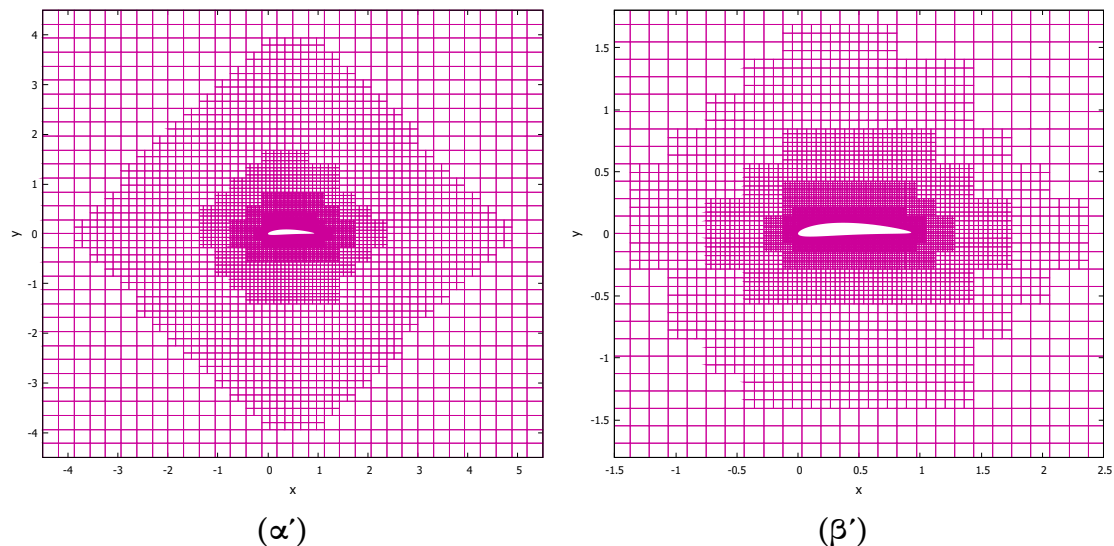
Σχήμα 6.1: Μη-συμμετρική αεροτομή μετά από παραμετροποίηση με καμπύλες Bézier, με 17 σημεία ελέγχου, σύμφωνα με αεροτομές τύπου NACA 4410.

Στη συνέχεια, το υπολογιστικό χωρίο διακριτοποιείται με τη μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell), που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2. Τα βασικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την πλεγματοποίηση, που φαίνονται στον Πίνακα 6.3, παραμένουν ίδια, έτσι ώστε να προκύψει ίδιο πλέγμα και για τις δύο μεθόδους.

Πίνακας 6.3: Βασικά στοιχεία πλέγματος, το οποίο κατασκευάστηκε με τη μέθοδο "Cut-Cell". Οι μονάδες βασίζονται πάνω στη μοναδιαία απόσταση των ακλόνητων σημείων Bézier, που βρίσκονται στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής.

Βασικά στοιχεία πλέγματος (Περίπτωση 1η)	
Διαστάσεις υπολογιστικού χωρίου (x, y)	(10, 9)
Κέντρο βάρους αεροτομής	(0.5, 0.0)
Μέγιστο εμβαδόν κυψελών V_{max}	$1 \cdot 10^{-1}$
Ελάχιστο εμβαδόν κυψελών V_{min}	$6 \cdot 10^{-5}$
Οριακό εμβαδόν κυψελών V_{lim}	$1 \cdot 10^{-7}$
Απόσταση ομαλοποίησης πύκνωσης κυψελών d_{max}	5.0
Πλήθος κυψελών τελικού χωρίου	15556

Το τελικό πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.2:

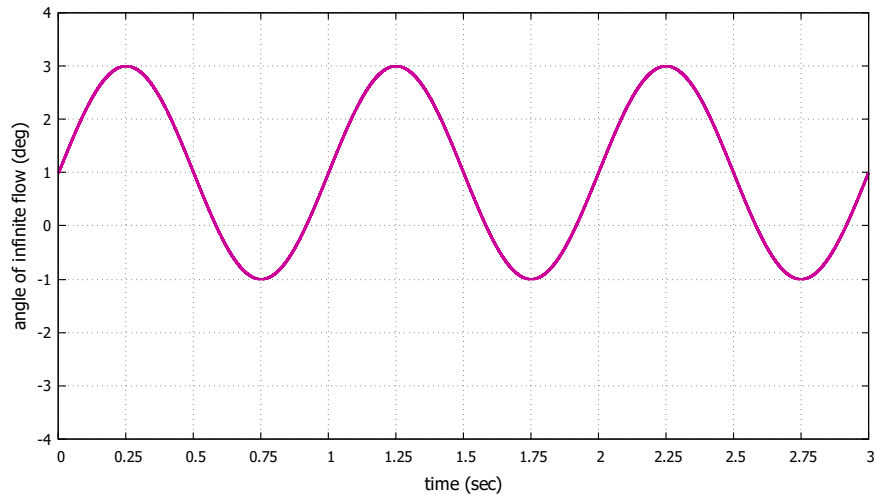


Σχήμα 6.2: (α'): Το τελικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή τύπου NACA 4410 του προβλήματος (β'): Μεγέθυνση γύρω από την αεροτομή.

Η ροή γίνεται περιοδική (μη-μόνιμη) με περιοδική διέγερση της επ' άπειρο γωνίας ροής α_∞ . Για περίοδο φαινομένου $T=1 \text{ sec}$, αρχική γωνία $\alpha_{\infty,0}=1^\circ$ και εύρος ταλάντωσης $\alpha_{ampl}=2^\circ$, η εξίσωση διέγερσης της επ' άπειρο γωνίας ροής είναι:

$$\alpha_\infty(t) = 1^\circ + 2^\circ \sin(2\pi t) \quad (6.2)$$

Το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_∞ συναρτήσεως του χρόνου, φαίνεται στο Σχήμα 6.3:



Σχήμα 6.3: Γωνία της επ' άπειρο ροής α_∞ συναρτήσει του χρόνου, για την 1η Περίπτωση. Περίοδος φαινομένου $T=1 \text{ sec}$

Οι οριακές συνθήκες της 1ης Περίπτωσης είναι κοινές για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, και παραμένουν σταθερές στις τέσσερις ακμές του υπολογιστικού χωρίου. Παρατίθενται στον Πίνακα 6.4:

Πίνακας 6.4: Οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής για την 1η Περίπτωση

Οριακές συνθήκες ροής		
Πυκνότητα	$\rho_\infty (\text{kg/m}^3)$	1.2
Στατική πίεση	$p_\infty (\text{Pa})$	$1 \cdot 10^5$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας	$U_\infty (\text{m/s})$	150

Τέλος, τα χαρακτηριστικά στοιχεία για τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου Χρονο-Προέλασης, φαίνονται στους Πίνακες 6.5 και 6.6 αντίστοιχα:

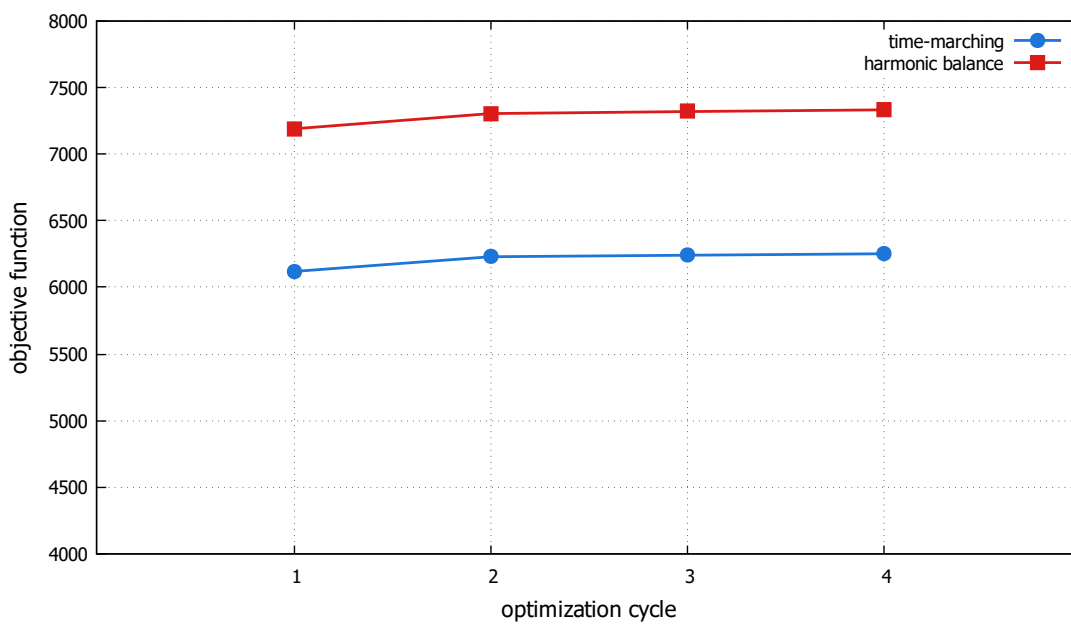
Πίνακας 6.5: Χαρακτηριστικά μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών για την 1η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

	Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών	
	ευθύ	συζυγές
Πλήθος Αρμονικών N_H	3	4
Πλήθος πεδίων N_T	7	9
Χρονική απόσταση πεδίων $\Delta t (\text{sec})$	0.1429	0.1111
Ελάχιστη μεταβολή λύσης ΔSol_{HB}	10^{-6}	10^{-8}

Πίνακας 6.6: Χαρακτηριστικά μεθόδου Χρονο-Προέλασης για την 1η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

	Μέθοδος Χρονο-Προέλασης	
	ευθύ	συζυγές
Συνολικός χρόνος επίλυσης $t_{tot}(sec)$	3	
Χρονικό βήμα $\Delta t_{tm}(sec)$	0.06	
Πλήθος χρονικών βημάτων	50	
Ελάχιστο σφάλμα χωρικού υπολοίπου	10^{-6}	10^{-8}

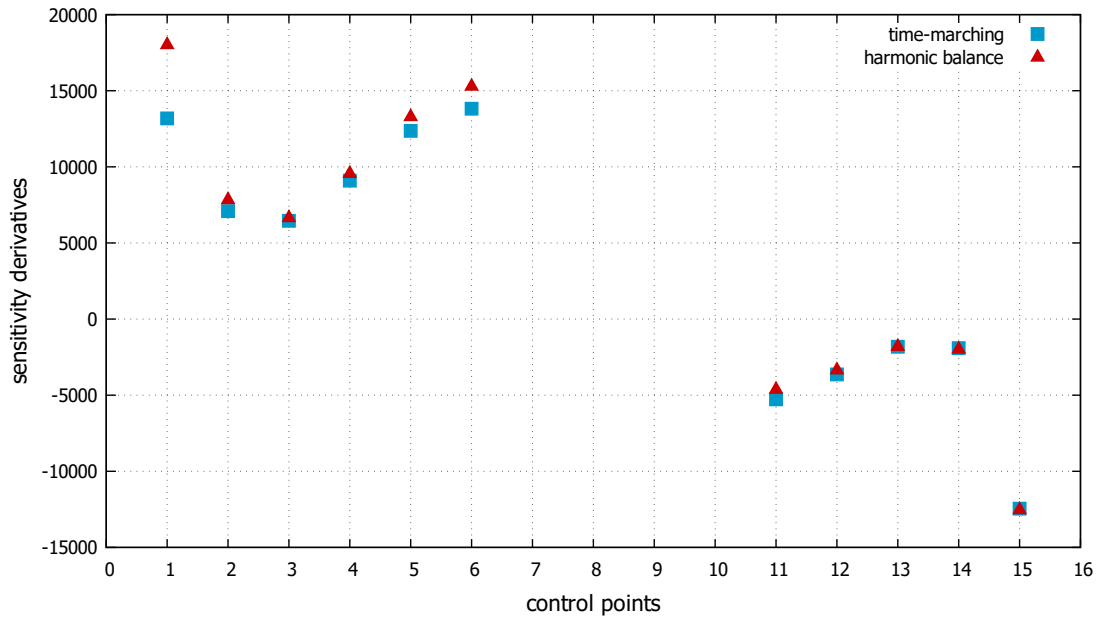
Η αντικειμενική συνάρτηση (συνάρτηση στόχου), που είναι η χρονικά μέση τιμή της άνωσης, υπολογίζεται στο τέλος της επίλυσης κάθε πρωτεύοντος προβλήματος. Δηλαδή, για τρεις κύκλους βελτιστοποίησης παράγονται τέσσερις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, για την οποία ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση της. Στο Σχήμα 6.4 φαίνονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και τη μέθοδο της χρονο-προέλασης:



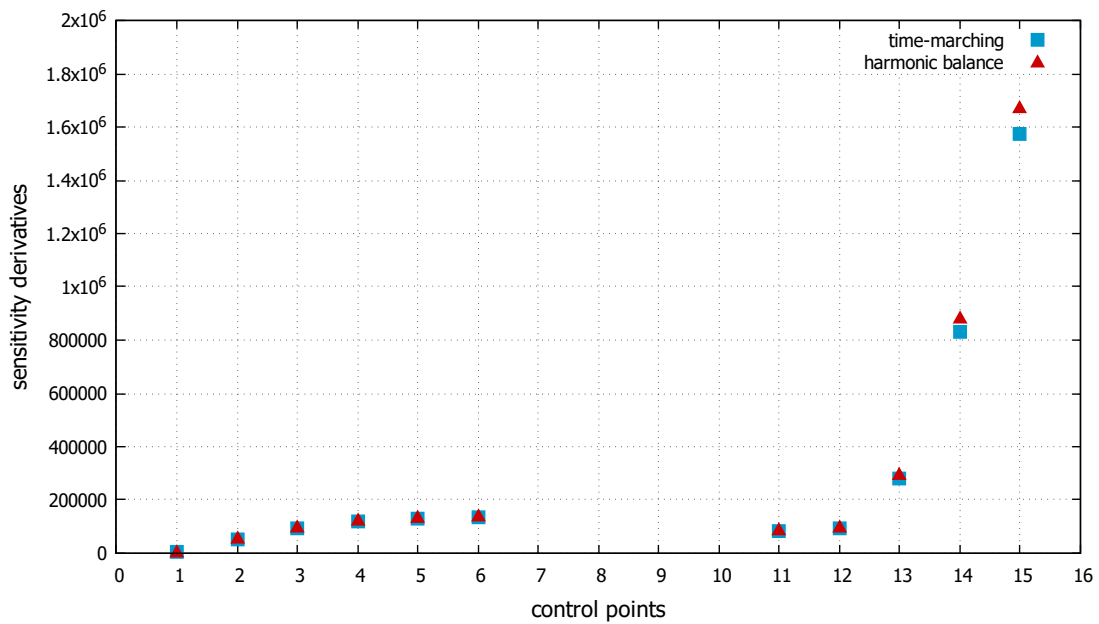
Σχήμα 6.4: Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου χρονο-προέλασης, σε 3 κύκλους βελτιστοποίησης, για την 1η Περίπτωση.

Εκτελώντας τρεις κύκλους βελτιστοποίησης και με τις δύο μεθόδους προκύπτουν οι παράγωγοι ευαισθησίας για κάθε σημείο ελέγχου, ακόμα και για αυτά τα οποία έχουν αρχικά δηλωθεί ως ακλόνητα. Έτσι, μιας και δεν έχει νόημα η σύγκριση των παραγώγων ευαισθησίας σε σημεία τα οποία δεν θα ανανεώσουν τις συντεταγμένες τους, δεν παρουσιάζονται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα τα σημεία, τα οποία παραλείπονται, είναι τα σημεία 0 και 16 $((x, y)=(0, 0))$ και τα 7 έως 10 $((x, y)=(1, 0))$.

Ενδεικτικά για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.5:



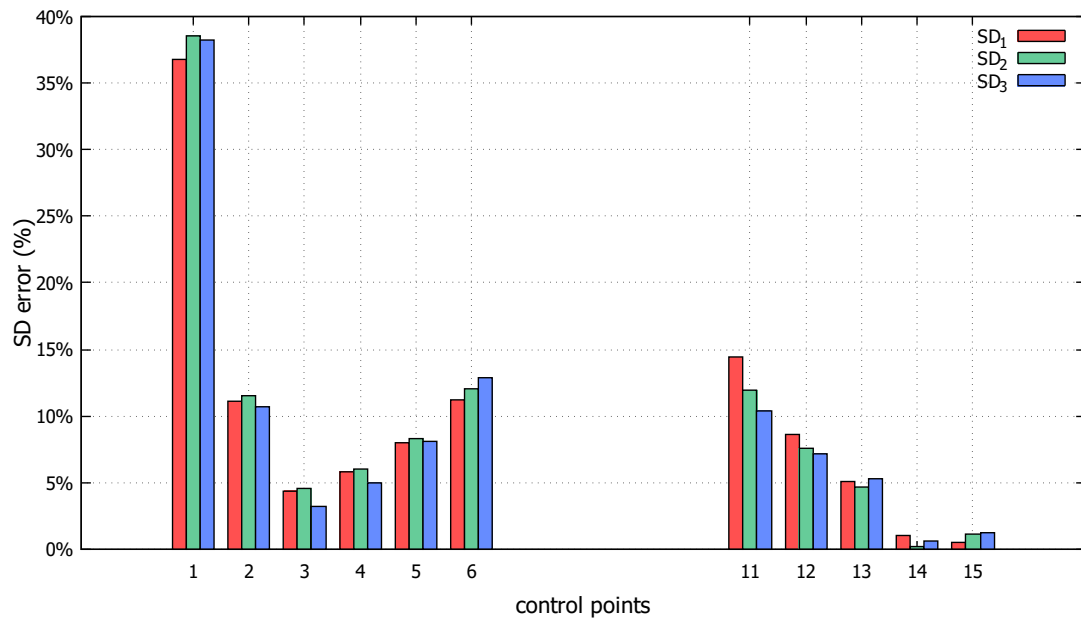
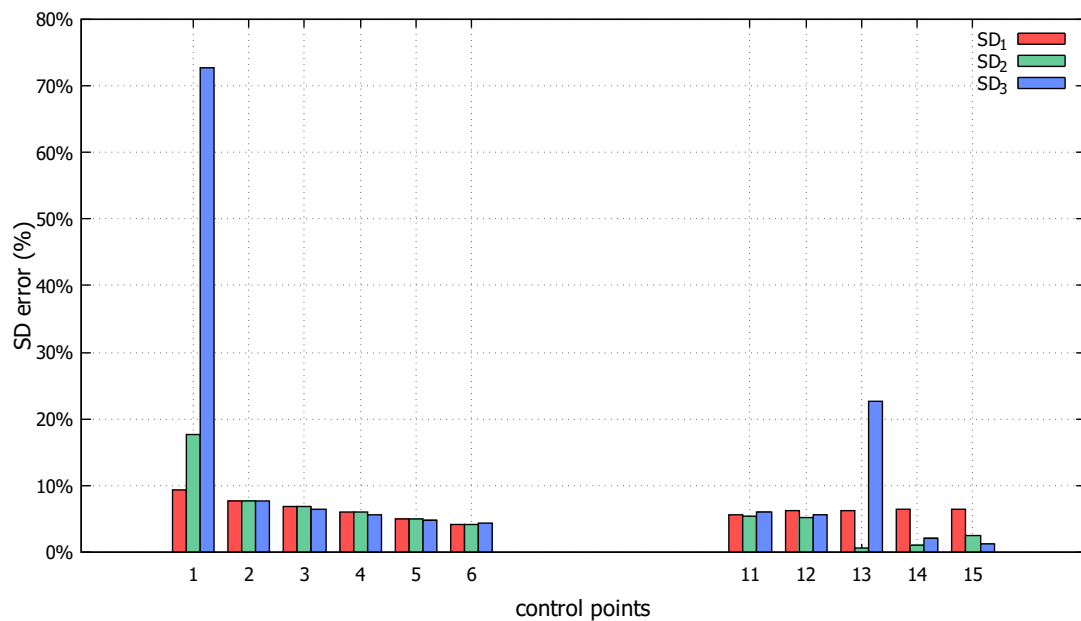
(α') Κατεύθυνση x



(β') Κατεύθυνση y

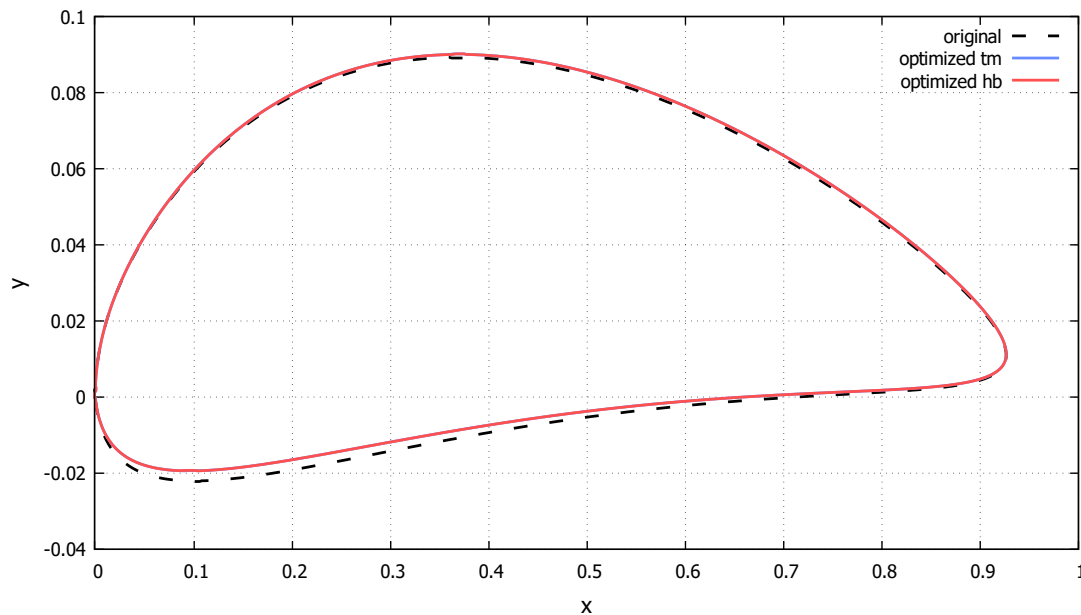
Σχήμα 6.5: Παράγωγοι ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 1ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.6 φαίνονται τα δύο ιστογράμματα ποσοστιαίου σφάλματος, κάθε κύκλου βελτιστοποίησης, για όλα τα σημεία ελέγχου και για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις:

(α') Κατεύθυνση x (β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.6: Ποσοστιαία Σφάλματα παραγώγων ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 1ης Περίπτωσης.

Μετά το τέλος του 3ου κύκλου βελτιστοποίησης, παράγεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή, από τη μετακίνηση των σημείων ελέγχου. Στο Σχήμα 6.7 φαίνεται η αρχική (*original*) και η βελτιστοποιημένη (*optimized*) μορφή της αεροτομής, για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών:



Σχήμα 6.7: Αρχική και βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 4410, μέσω των μεθόδων της χρονο-προέλασης και Ισορροπίας των Αρμονικών

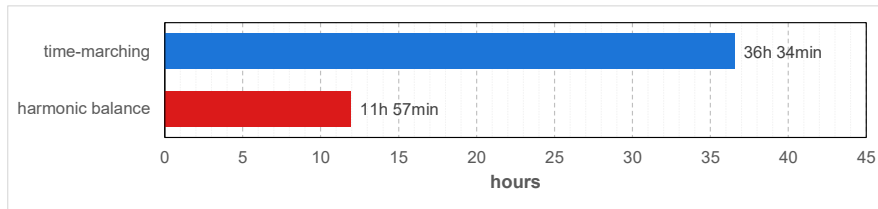
Από τα Σχήματα 6.5 και 6.6 παρατηρείται ότι, υπάρχουν σημαντικότερες αποκλίσεις στις τετμημένες των σημείων ελέγχου, και ιδιαίτερα σε αυτήν του σημείου 1. Το υψηλό ποσοστιαίο σφάλμα της τεταγμένης του σημείου 1 είναι πλασματικό, γιατί η παράγωγος ευαισθησίας σε αυτό το σημείο είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Παρόλα αυτά, οι παράγωγοι ευαισθησίας, όπως παρήχθησαν με εφαρμογή της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών, είναι σχετικά κοντά σε αυτές της μεθόδου χρονο-προέλασης, αφού το ποσοστιαίο σφάλμα δεν ξεπερνάει το 15% στις τετμημένες των σημείων ελέγχου και το 10% στις τεταγμένες. Παρόλα αυτά, το πρόσημο των παραγώγων ευαισθησίας είναι σωστό, οπότε η μετακίνηση των σημείων ελέγχου είναι προς τη σωστή κατεύθυνση.

Επίσης, από το Σχήμα 6.4 φαίνεται ότι, το σχετικό σφάλμα στις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης κυμαίνεται στο 17%. Μια τέτοια τιμή του σχετικού σφάλματος οφείλεται, πιθανώς, στην αυξημένη επίδραση που έχουν οι, έστω και μικρές, αποκλίσεις στις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας των δύο μεθόδων. Για παράδειγμα, οι SD της τεταγμένης του σημείου 15, φαίνεται να έχουν μικρό σφάλμα (Σχήμα 6.6β'). Όμως, το σφάλμα αυτό που ισούται με 6.4%, παραπλανά, διότι η διαφορά των παραγώγων ευαισθησίας είναι ίση με 10^5 , τιμή που εύκολα μπορεί να εκτρέψει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

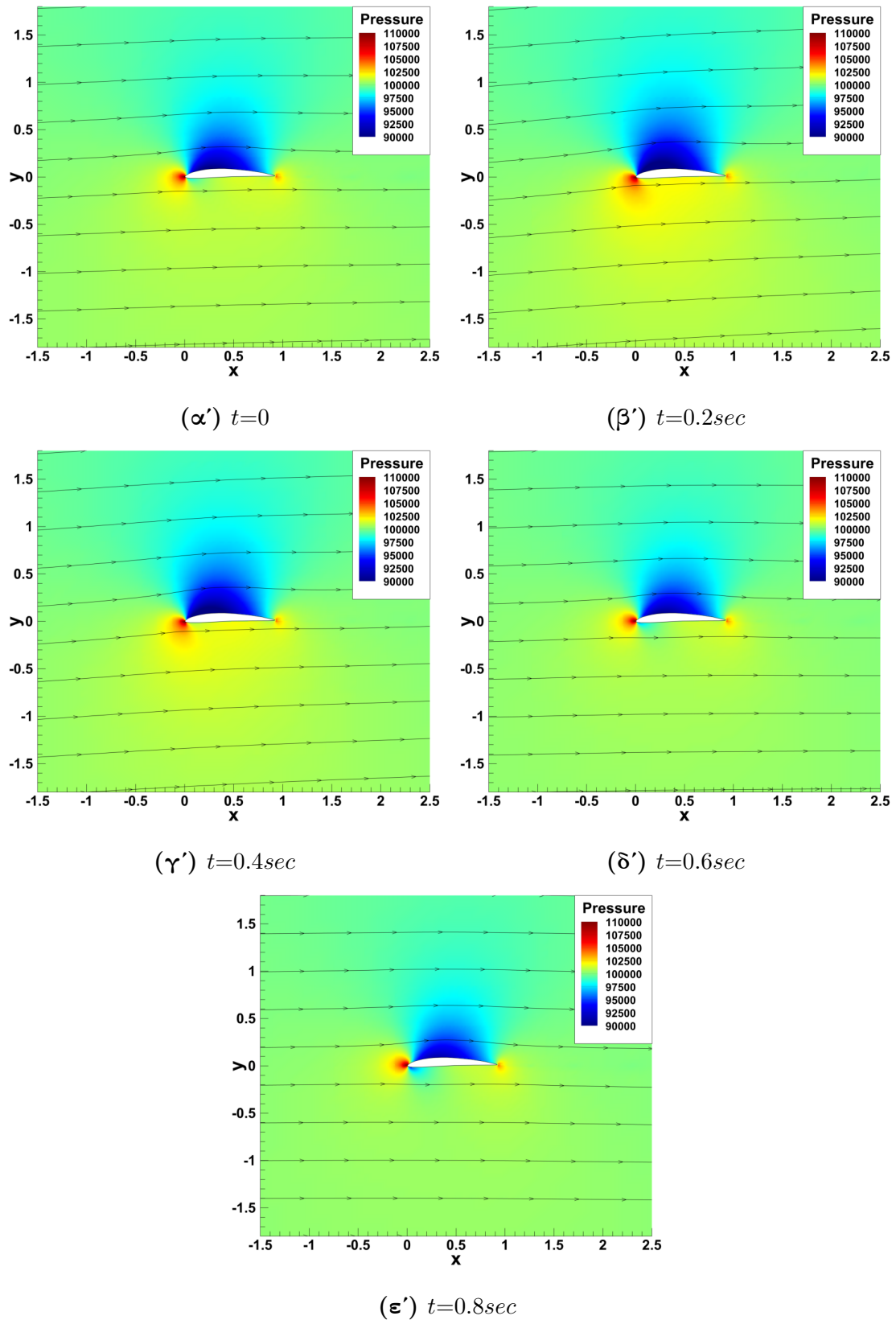
Παρά τις όποιες διαφορές προέκυψαν στις παραγώγους ευαισθησίας και στην αντικειμενική συνάρτηση, στο Σχήμα 6.7 φαίνεται ότι, οι τελικές βελτιστοποιημένες (*optimized*) αεροτομές, που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους, ταυτίζονται.

Τέλος, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, για την 1η Περίπτωση είναι κατά 67% γρηγορότερη της μεθόδου χρονο-προέλασης. Σε μηχανήμα με έναν επε-

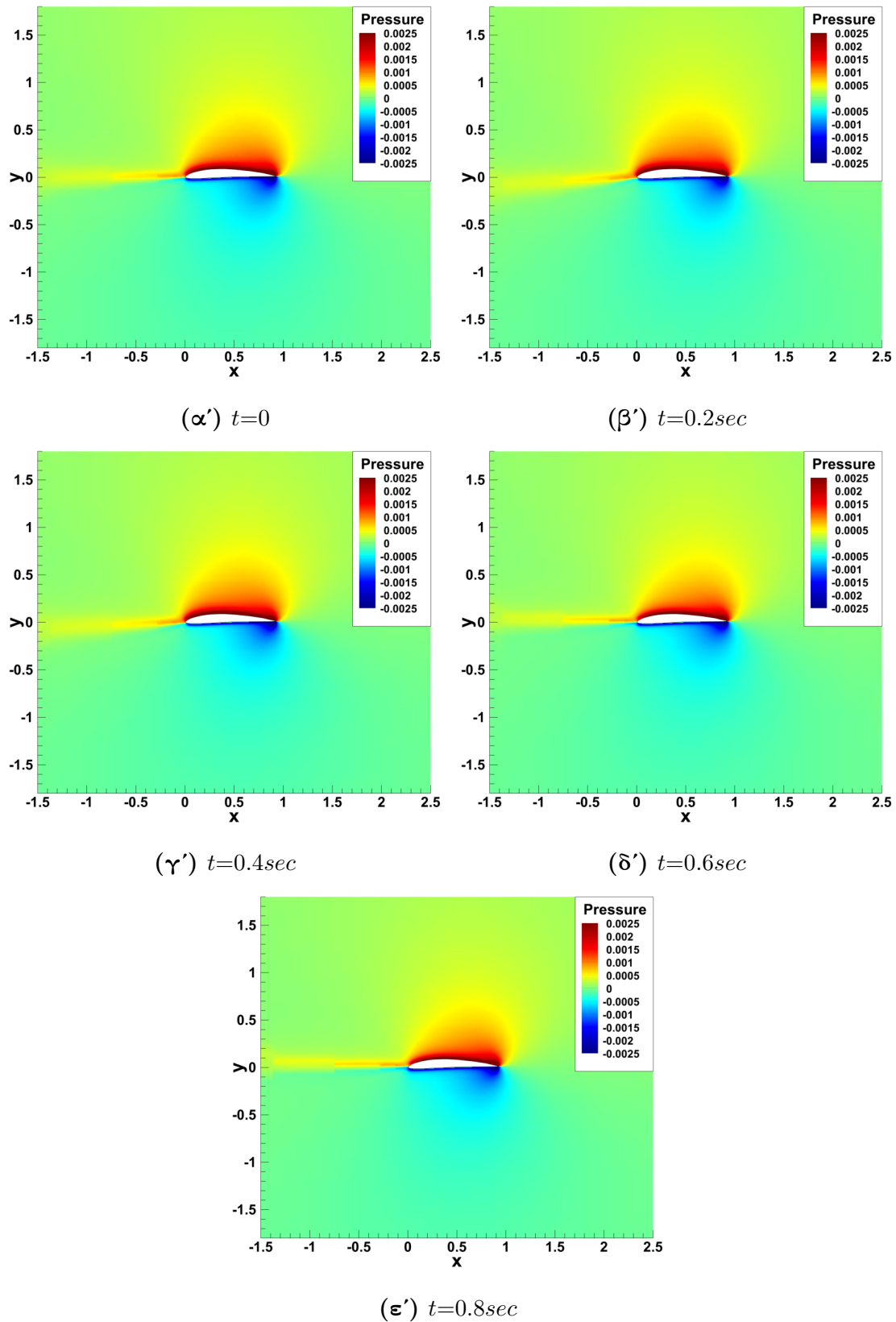
ξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz, η επίλυση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών τερματίστηκε σε 11 ώρες και 57 λεπτά, ενώ αυτή με τη μέθοδο χρονοπροέλασης σε 36 ώρες και 34 λεπτά.



Σχήμα 6.8: Ιστόγραμμα σύγκρισης χρόνου εκτέλεσης τριών κύκλων βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και με τη μέθοδο της χρονοπροέλασης, για την 1η Περίπτωση, σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz



Σχήμα 6.9: Περίπτωση 1η: Τελικά πρωτεύοντα πεδία στατικής πίεσης υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο. ($\Delta t=0.2\text{ sec}$)

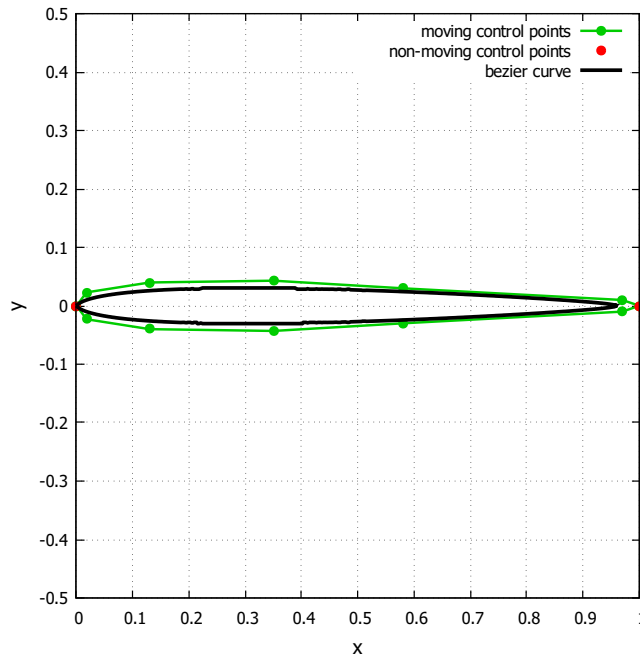


Σχήμα 6.10: Περίπτωση 1η: Τελικά συζυγή πεδία στατικής πίεσης υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο. ($\Delta t=0.2 sec$)

6.3 Περίπτωση 2η - Διηχητική Ροή

Για την περίπτωση αυτή, σκοπός είναι να μελετηθεί η δυνατότητα ανταπόκρισης της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών σε διηχητική ροή. Για αυτόν το λόγο, η οριζόντια συνιστώσα της επ' άπειρο ταχύτητας παίρνει την τιμή $U_\infty = 250 \frac{m}{s}$. Επομένως, επιλέγεται όσο το δυνατόν λεπτότερη αεροτομή, για να αποφευχθούν υψηλές τιμές του συντελεστή οπισθέλκουσας.

Έτσι, βελτιστοποιείται συμμετρική αεροτομή τύπου NACA 0006 [36][37], η οποία παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier, χρησιμοποιώντας 17 σημεία, από τα οποία τα 2 βρίσκονται ακλόνητα στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής (σημείο (0,0)) και 5 στην ακμή εκφυγής (σημείο (1,0)). Σε αυτή την εφαρμογή, χρησιμοποιούνται περισσότερα ακλόνητα σημεία ελέγχου στην ακμή εκφυγής, για να προκύψει πιο μυτερή άκρη, χωρίς όμως να οδηγείται και σε αστάθεια ο κώδικας.



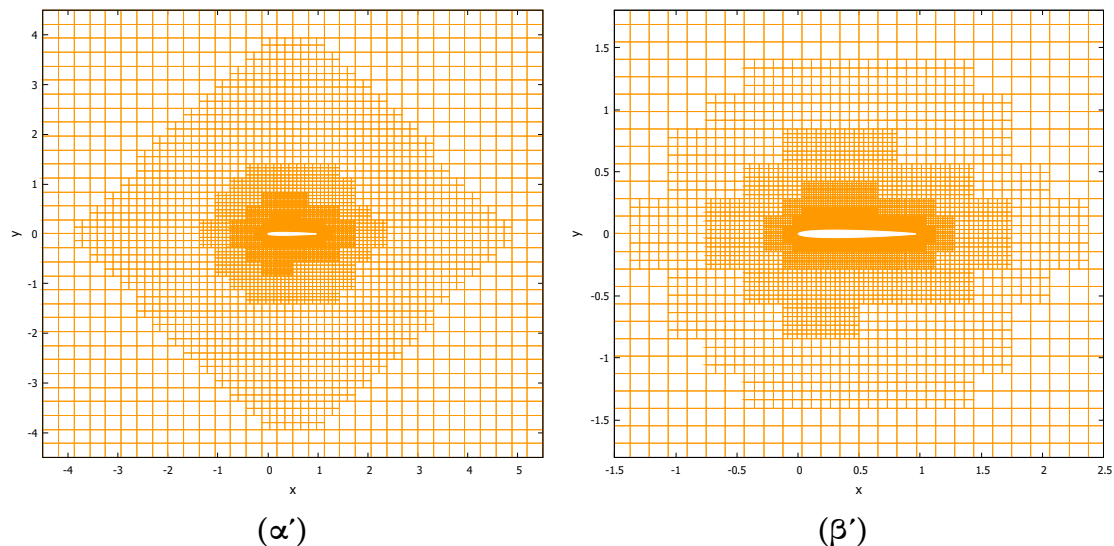
Σχήμα 6.11: Συμμετρική αεροτομή μετά από παραμετροποίηση με καμπύλες Bézier, με 17 σημεία ελέγχου, σύμφωνα με αεροτομές τύπου NACA 0006.

Όμοια με την 1η Περίπτωση, στον Πίνακα 6.7 καθορίζονται τα βασικά στοιχεία του πλέγματος:

Πίνακας 6.7: Βασικά στοιχεία πλέγματος, το οποίο κατασκευάστηκε με τη μέθοδο "Cut-Cell". Οι μονάδες βασίζονται πάνω στη μοναδιαία απόσταση των ακλόνητων σημείων Bézier, που βρίσκονται στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής.

Βασικά στοιχεία πλέγματος (Περίπτωση 2η)	
Διαστάσεις υπολογιστικού χωρίου (x, y)	(10, 9)
Κέντρο βάρους αεροτομής	(0.5, 0.0)
Μέγιστο εμβαδόν κυψελών V_{max}	$1 \cdot 10^{-1}$
Ελάχιστο εμβαδόν κυψελών V_{min}	$6 \cdot 10^{-5}$
Οριακό εμβαδόν κυψελών V_{lim}	$1 \cdot 10^{-7}$
Απόσταση ομαλοποίησης πύκνωσης κυψελών d_{max}	5.0
Πλήθος κυψελών τελικού χωρίου	14194

Το τελικό πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα 6.12:

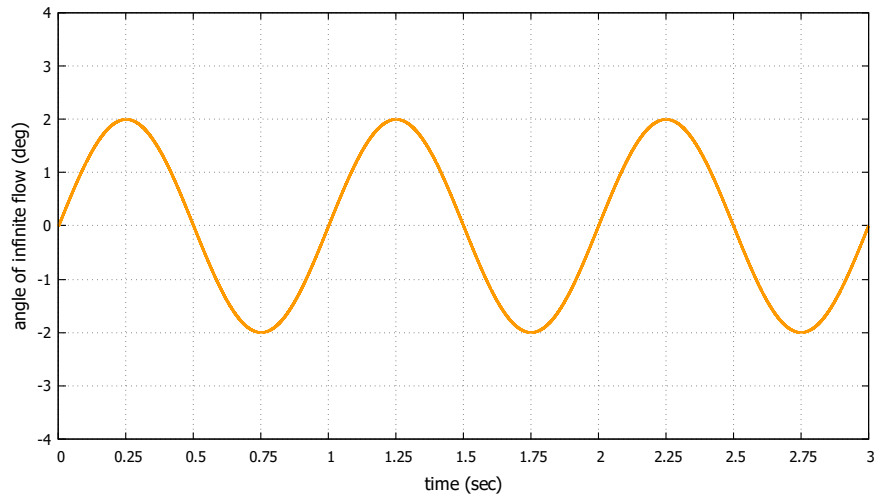


Σχήμα 6.12: (α'): Το τελικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή τύπου NACA 0006 του προβλήματος (β'): Μεγέθυνση γύρω από την αεροτομή.

Όμοια και σε αυτή την περίπτωση, η ροή είναι περιοδική με περίοδο $T=1 \text{ sec}$, γωνία της επ' άπειρο ροής $\alpha_{\infty,0}=1^\circ$ για $t=0$ και εύρος ταλάντωσης $\alpha_{ampl}=2^\circ$. Η εξίσωση που δίνει την επ' άπειρο γωνία ροής συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\alpha_{\infty}(t) = 0^\circ + 2^\circ \sin(2\pi t) \quad (6.3)$$

Το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_{∞} συναρτήσει του χρόνου, φαίνεται στο Σχήμα 6.13:



Σχήμα 6.13: Γωνία της επ' άπειρο ροής α_∞ συναρτήσει του χρόνου, για τη 2η Περίπτωση. Περίοδος φαινομένου $T=1 \text{ sec}$

Οι οριακές συνθήκες της 2ης Περίπτωσης φαίνονται στον Πίνακα 6.8:

Πίνακας 6.8: Οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής για την 2η Περίπτωση

Οριακές συνθήκες ροής		
Πυκνότητα	$\rho_\infty (\text{kg/m}^3)$	1.2
Στατική πίεση	$p_\infty (\text{Pa})$	$1 \cdot 10^5$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας	$U_\infty (\text{m/s})$	250

Χρησιμοποιώντας τα οριακά μεγέθη του Πίνακα 6.8, ο αριθμός Mach στα επ' άπειρο όρια, τη χρονική στιγμή $t=0$, υπολογίζεται ως:

$$M_{\infty,0} = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}} = 0.73$$

Η τιμή αυτή του Mach επιλέγεται με βάση τη πρόβλεψη ότι, η ροή θα επιταχυνθεί περαιτέρω στην περιοχή πάνω από την αεροτομή. Σε αυτήν την περιοχή ο αριθμός Mach προβλέπεται ότι θα πάρει τιμές $M > 1$ και συνεπώς, θα προκληθεί κύμα κρούσης.

Τέλος, τα χαρακτηριστικά στοιχεία για τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου Χρονο-Προέλασης, φαίνονται στους Πίνακες 6.9 και 6.10 αντίστοιχα:

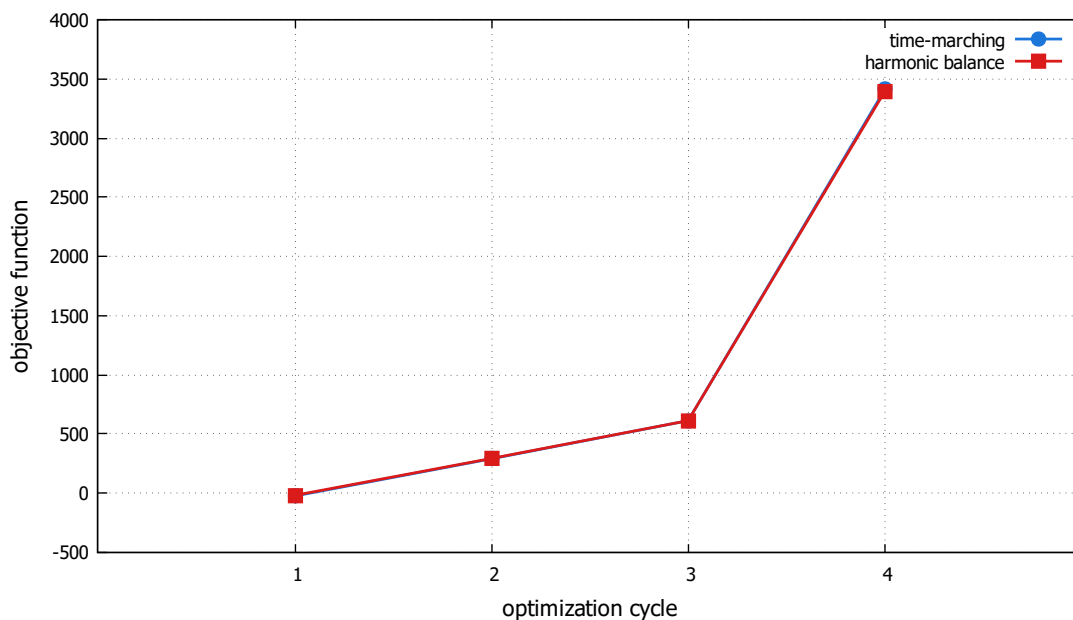
Πίνακας 6.9: Χαρακτηριστικά μεθόδου Ισοροπίας των Αρμονικών για την 2η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

Μέθοδος της Ισοροπίας των Αρμονικών		
	ευθύ	συζυγές
Πλήθος Αρμονικών N_H	4	4
Πλήθος πεδίων N_T	9	9
Χρονική απόσταση πεδίων $\Delta t(sec)$	0.1111	0.1111
Ελάχιστη μεταβολή λύσης ΔSol_{HB}	10^{-6}	10^{-8}

Πίνακας 6.10: Χαρακτηριστικά μεθόδου Χρονο-Προέλασης για την 2η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

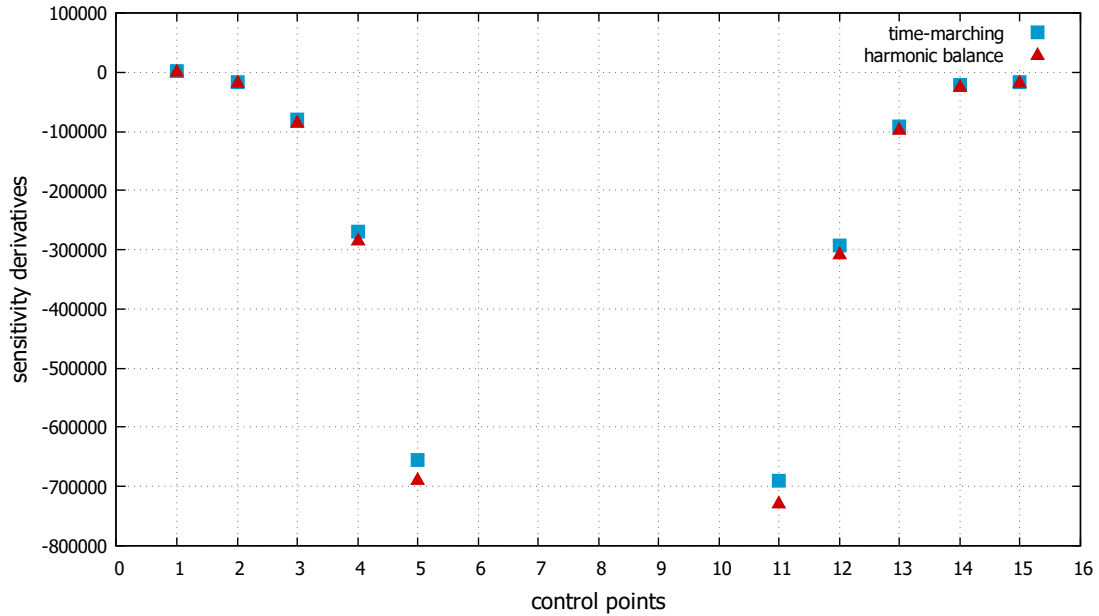
Μέθοδος Χρονο-Προέλασης		
	ευθύ	συζυγές
Συνολικός χρόνος επίλυσης $t_{tot}(sec)$	3	
Χρονικό βήμα $\Delta t_{tm}(sec)$	0.06	
Πλήθος χρονικών βημάτων	50	
Ελάχιστο σφάλμα χωρικού υπολοίπου	10^{-6}	10^{-8}

Στο Σχήμα 6.14 φαίνονται οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών και τη μέθοδο της χρονο-προέλασης:

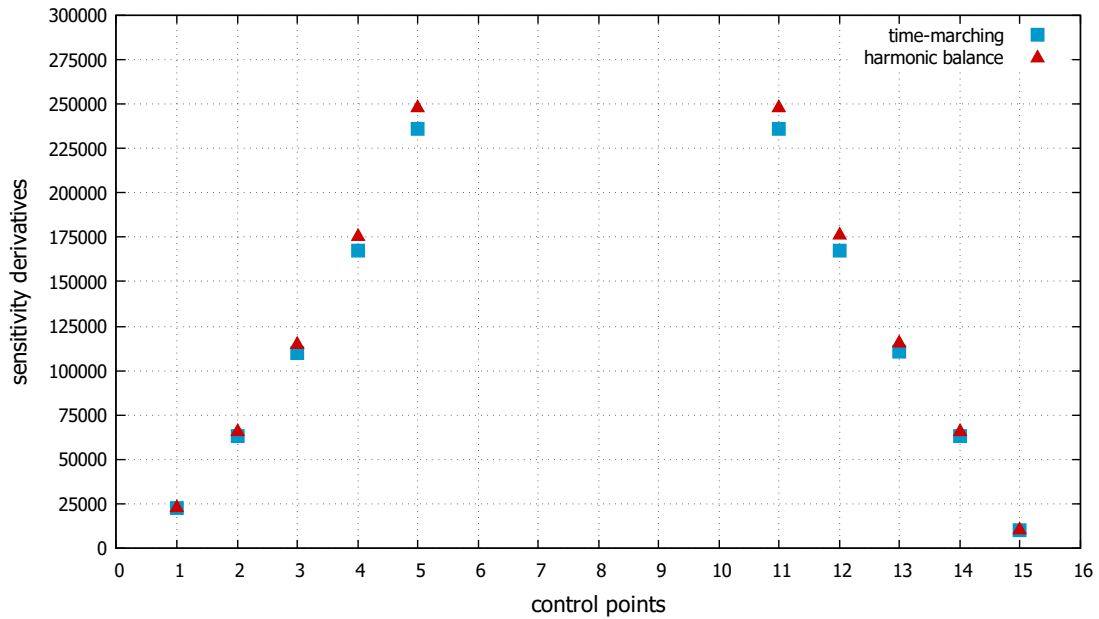


Σχήμα 6.14: Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισοροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου χρονο-προέλασης, σε 3 κύκλους βελτιστοποίησης, για τη 2η Περίπτωση.

Τα σημεία, τα οποία παραλείπονται επειδή είναι ακλόνητα, είναι τα σημεία 0 και 16 $((x, y)=(0, 0))$ και τα 6 έως 10 $((x, y)=(1, 0))$. Ενδεικτικά για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.15:



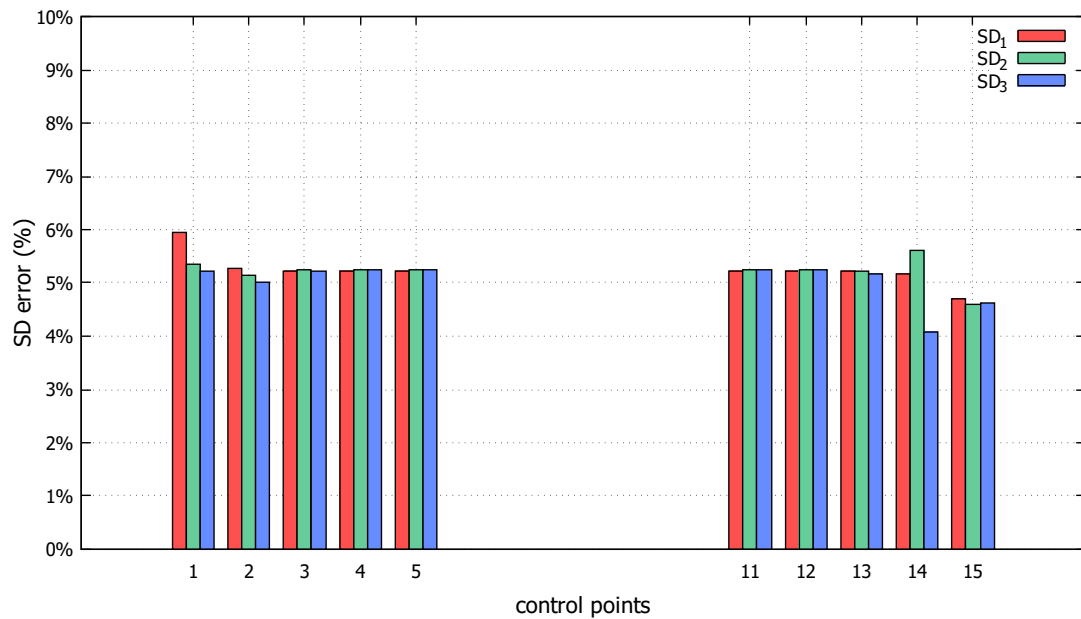
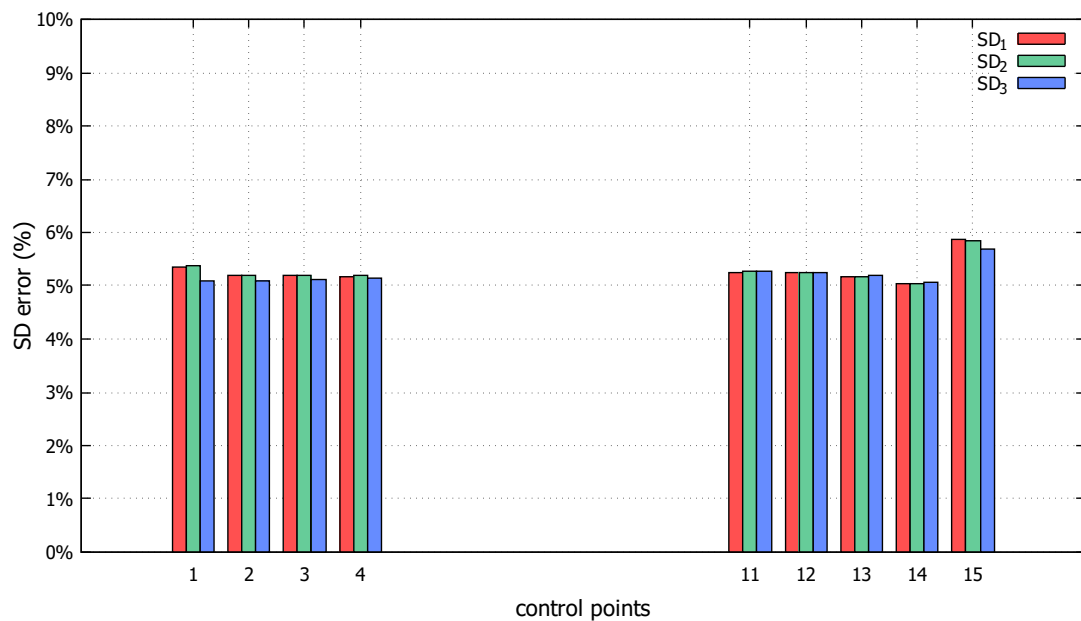
(α') Κατεύθυνση x



(β') Κατεύθυνση y

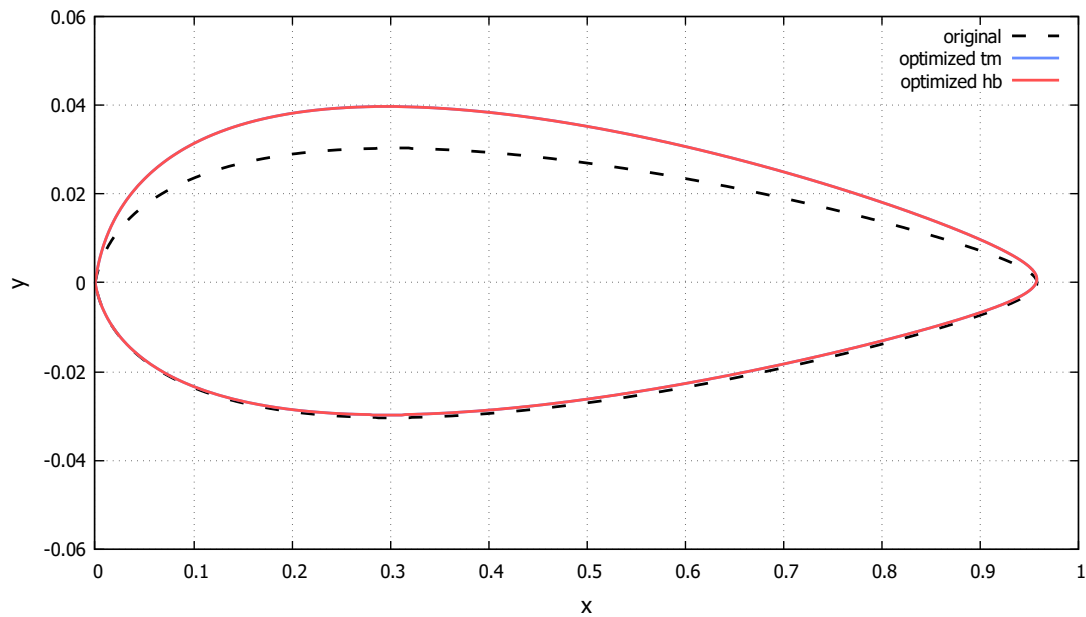
Σχήμα 6.15: Παράγωγοι ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 2ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.16 φαίνονται τα δύο ιστογράμματα ποσοστιαίου σφάλματος για όλα τα σημεία ελέγχου και για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις:

(α') Κατεύθυνση x (β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.16: Ποσοστιαία Σφάλματα παραγώγων ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 2ης Περίπτωσης.

Μετά το τέλος του 3ου κύκλου βελτιστοποίησης, παράγεται η βελτιστοποιημένη αεροτομή, από τη μετακίνηση των σημείων ελέγχου. Στο Σχήμα 6.17 φαίνεται η αρχική (*original*) και η βελτιστοποιημένη (*optimized*) μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0006, για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών:

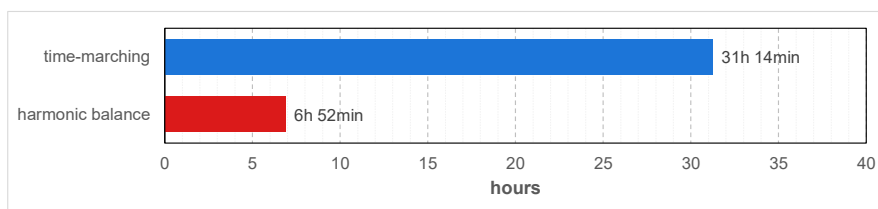


Σχήμα 6.17: Αρχική και βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0006, μέσω των μεθόδων της χρονο-προέλασης και Ισορροπίας των Αρμονικών

Από τα Σχήματα 6.5 και 6.6 παρατηρείται ότι, σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχει μεγαλύτερη ταύτιση τιμών των παραγώγων ευαισθησίας, απ' ό τι στην 1η Περίπτωση. Στα ιστογράμματα 6.16α' και 6.16β' τα ποσοστιαία σφάλματα δεν ξεπερνούν το 6%, γεγονός που αντικατοπτρίζεται και στην ταύτιση των βελτιστοποιημένων καμπυλών, από τις δύο μεθόδους, στο Σχήμα 6.17.

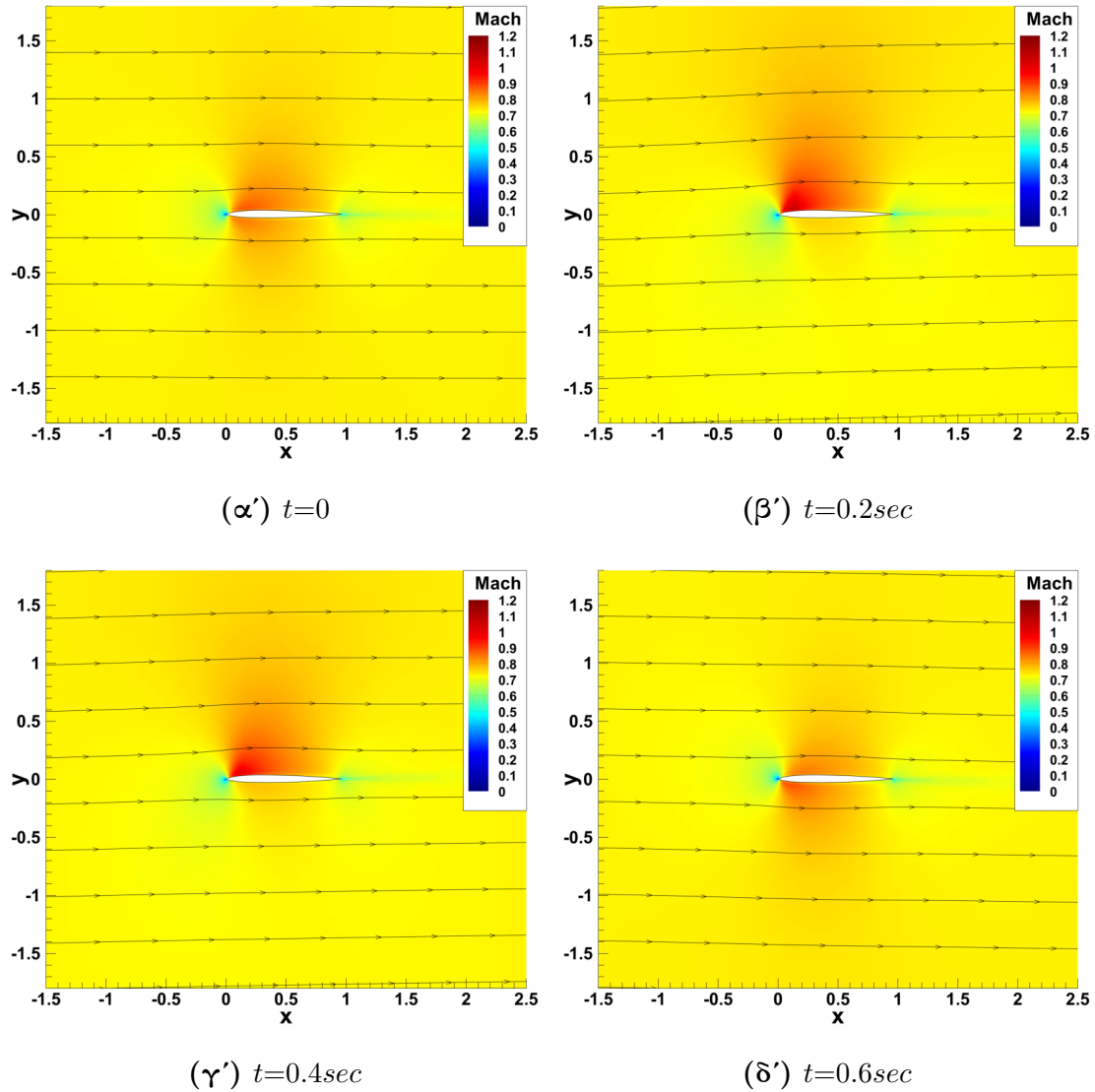
Επίσης, από το Σχήμα 6.17 προκύπτει ότι, για μεγιστοποίηση της άνωσης (Σχέση 5.2), η αεροτομή τείνει να καμπυλώσει και να μεγαλώσει το πάχος της.

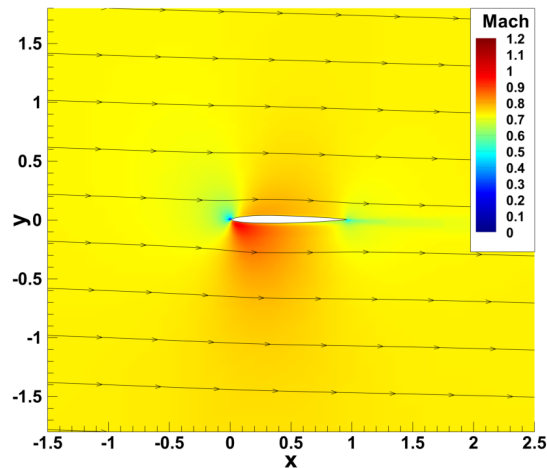
Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, για τη 2η Περίπτωση είναι κατά 74% γρηγορότερη της μεθόδου χρονο-προέλασης. Σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz, η επίλυση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών τερματίστηκε σε 6 ώρες και 52 λεπτά, ενώ αυτή με τη μέθοδο χρονοπροέλασης σε 31 ώρες και 14 λεπτά.



Σχήμα 6.18: Ιστόγραμμα σύγκρισης χρόνου εκτέλεσης τριών κύκλων βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, για τη 2η Περίπτωση, σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz

Η 2η Περίπτωση επιλέχθηκε με σκοπό τον έλεγχο της Ισορροπίας των Αρμονικών σε διηχητική ροή. Οπότε, κρίνεται σκόπιμο, στο Σχήμα 6.19, να παρουσιαστούν πέντε χρονικά ισαπέχουσες "φωτογραφίες" μέσα σε μια περίοδο, του τελικού πρωτεύοντος πεδίου του αριθμού Mach:





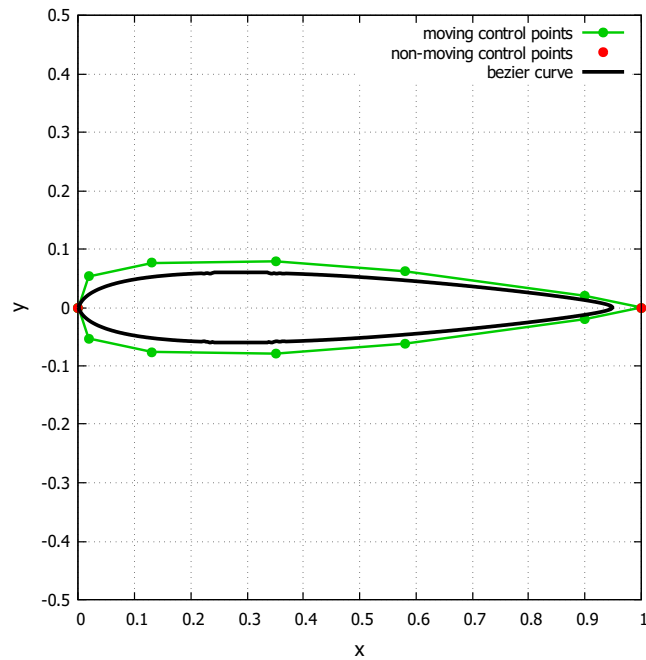
(ε') $t=0.8sec$

Σχήμα 6.19: Περίπτωση 2η: Τελικά πρωτεύοντα πεδία αριθμού Mach, υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο, για τη 2η Περίπτωση. ($\Delta t=0.2 sec$)

6.4 Περίπτωση 3η - Μικρότερη Περίοδος Διέγερσης

Στην περίπτωση αυτή, μελετάται η ανανταπόκριση της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών στην αλλαγή της περιόδου διέγερσης του φαινομένου.

Βελτιστοποιείται συμμετρική αεροτομή τύπου NACA 0012 [36][37], η οποία παραμετροποιείται με καμπύλες Bézier, χρησιμοποιώντας 17 σημεία, από τα οποία τα 2 βρίσκονται ακλόνητα στην ακμή πρόσπτωσης της αεροτομής (σημείο (0,0)) και 5 στην ακμή εκφυγής (σημείο (1,0)).



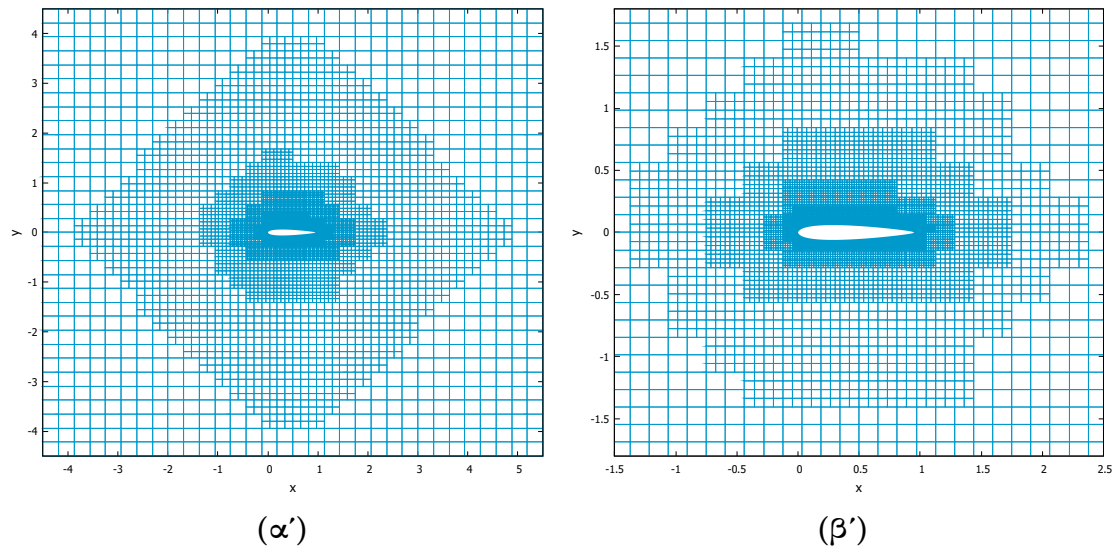
Σχήμα 6.20: Συμμετρική αεροτομή μετά από παραμετροποίηση με καμπύλες Bézier, με 17 σημεία ελέγχου, σύμφωνα με αεροτομές τύπου NACA 0012.

Στον Πίνακα 6.11 καθορίζονται τα βασικά στοιχεία του πλέγματος:

Πίνακας 6.11: Βασικά στοιχεία πλέγματος, το οποίο κατασκευάστηκε με τη μέθοδο "Cut-Cell". Οι μονάδες βασίζονται πάνω στη μοναδιαία απόσταση των ακλόνητων σημείων Bézier, που βρίσκονται στην ακμή πρόσπτωσης και εκφυγής της αεροτομής.

Βασικά στοιχεία πλέγματος (Περίπτωση 3η)	
Διαστάσεις υπολογιστικού χωρίου (x, y)	(10, 9)
Κέντρο βάρους αεροτομής	(0.5, 0.0)
Μέγιστο εμβαδόν κυψελών V_{max}	$1 \cdot 10^{-1}$
Ελάχιστο εμβαδόν κυψελών V_{min}	$6 \cdot 10^{-5}$
Οριακό εμβαδόν κυψελών V_{lim}	$1 \cdot 10^{-7}$
Απόσταση ομαλοποίησης πύκνωσης κυψελών d_{max}	5.0
Πλήθος κυψελών τελικού χωρίου	16594

Το τελικό πλέγμα φαίνεται στο Σχήμα 4.3:

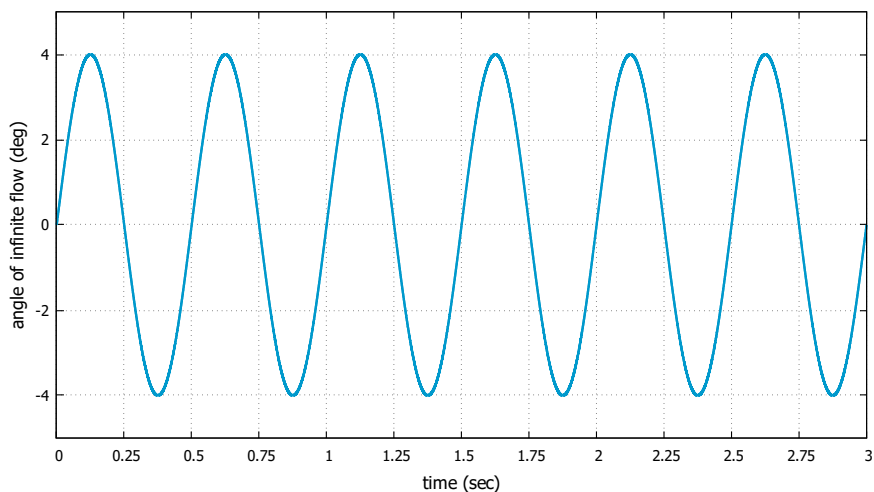


Σχήμα 6.21: (α'): Το τελικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή τύπου NACA 0012 του προβλήματος (β'): Μεγέθυνση γύρω από την αεροτομή.

Η ροή είναι περιοδική με περίοδο $T=0.5 \text{ sec}$, γωνία της επ' άπειρο ροής για $t=0$ $\alpha_{\infty,0}=0^\circ$ και εύρος ταλάντωσης $\alpha_{\text{ampl}}=4^\circ$. Η εξίσωση που δίνει την επ' άπειρο γωνία ροής συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\alpha_{\infty}(t) = 0^\circ + 4^\circ \sin(4\pi t) \quad (6.4)$$

Το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_{∞} συναρτήσει του χρόνου, φαίνεται στο Σχήμα 6.22:



Σχήμα 6.22: Γωνία της επ' άπειρο ροής α_{∞} συναρτήσει του χρόνου, για την 3η Περίπτωση. Περίοδος φαινομένου $T=0.5 \text{ sec}$

Οι οριακές συνθήκες της 3ης Περίπτωσης φαίνονται στον Πίνακα 6.12:

Πίνακας 6.12: Οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής για την 3η Περίπτωση

Οριακές συνθήκες ροής		
Πυκνότητα	$\rho_{\infty} (kg/m^3)$	1.2
Στατική πίεση	$p_{\infty} (Pa)$	$1 \cdot 10^5$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας	$U_{\infty} (m/s)$	100

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία για τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου Χρονο-Προέλασης, φαίνονται στους Πίνακες 6.13 και 6.14 αντίστοιχα:

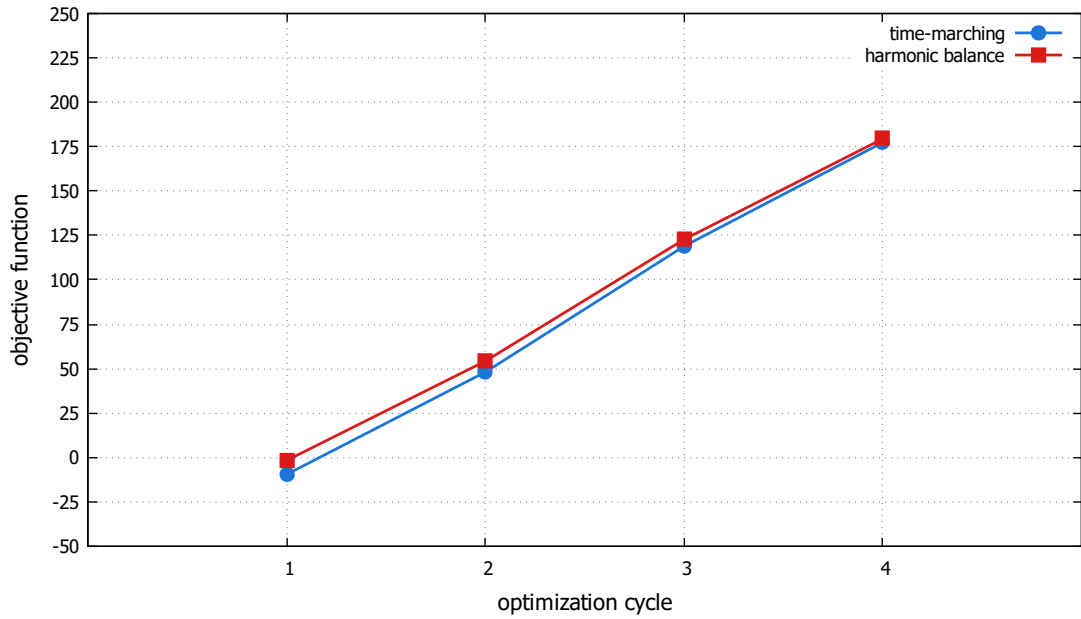
Πίνακας 6.13: Χαρακτηριστικά μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών για την 3η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών		
	ευθύ	συζυγές
Πλήθος Αρμονικών N_H	4	4
Πλήθος πεδίων N_T	9	9
Χρονική απόσταση πεδίων $\Delta t (sec)$	0.0556	0.0556
Ελάχιστη μεταβολή λύσης ΔSol_{HB}	10^{-6}	10^{-8}

Πίνακας 6.14: Χαρακτηριστικά μεθόδου Χρονο-Προέλασης για την 3η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

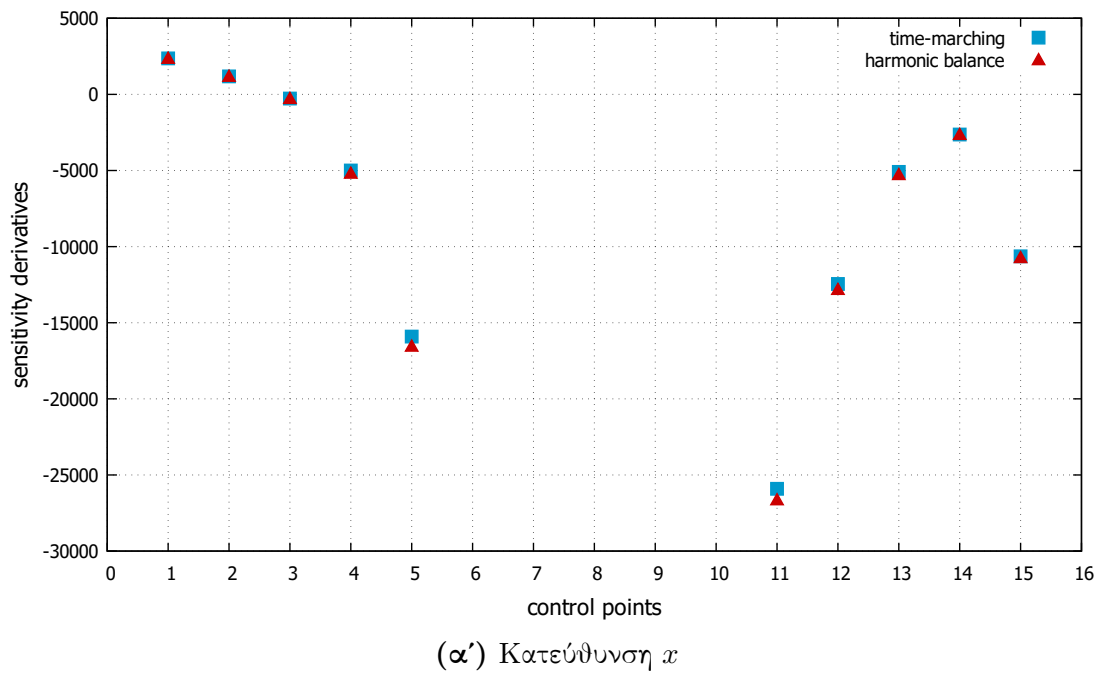
Μέθοδος Χρονο-Προέλασης		
	ευθύ	συζυγές
Συνολικός χρόνος επίλυσης $t_{tot} (sec)$	1.5	
Χρονικό βήμα $\Delta t_{tm} (sec)$	0.025	
Πλήθος βημάτων	60	
Ελάχιστο σφάλμα χωρικού υπολοίπου	10^{-6}	10^{-8}

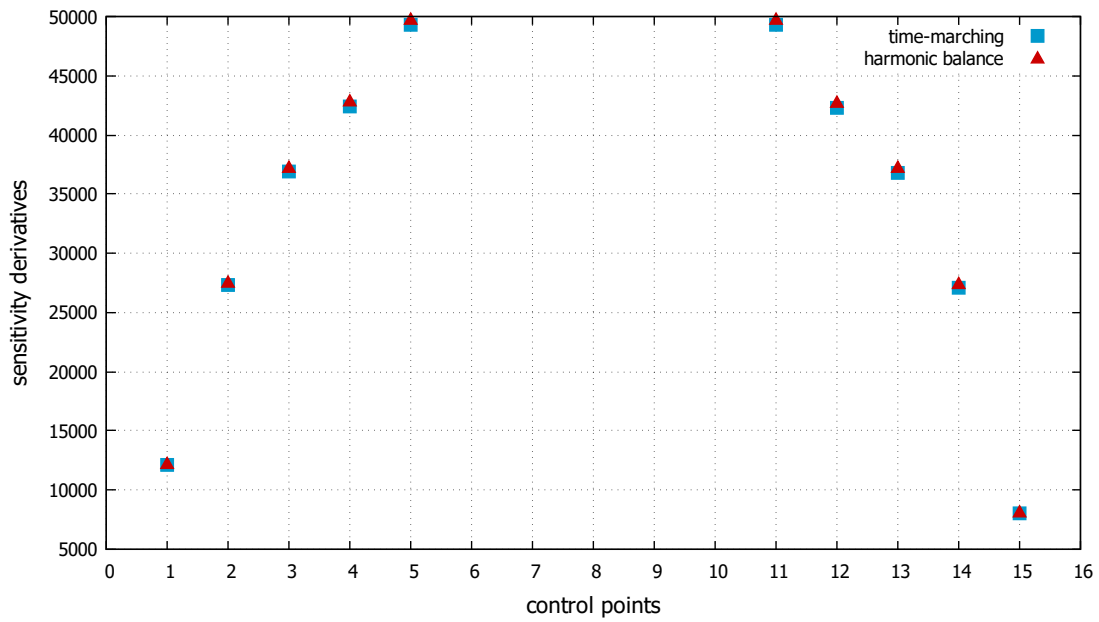
Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και τη μέθοδο της χρονο-προέλασης φαίνονται στο Σχήμα 6.23:



Σχήμα 6.23: Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου χρονο-προέλασης, σε 3 κύκλους βελτιστοποίησης, για την 3η Περίπτωση.

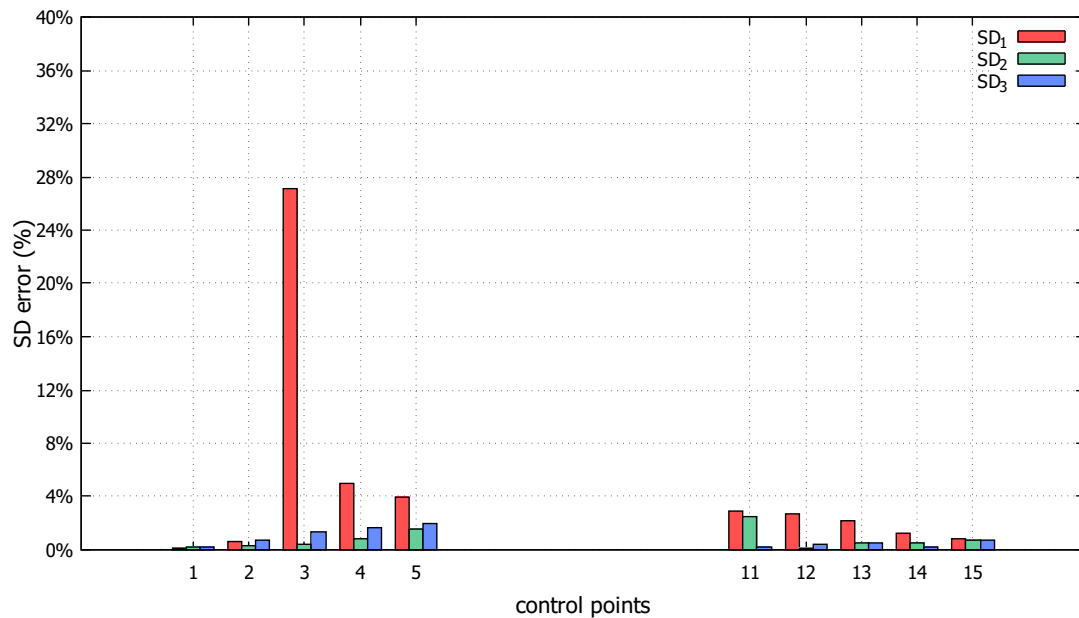
Τα σημεία, τα οποία παραλείπονται επειδή είναι ακλόνητα, είναι τα σημεία 0 και 16 $((x, y)=(0, 0))$ και τα 6 έως 10 $((x, y)=(1, 0))$. Ενδεικτικά για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.24:

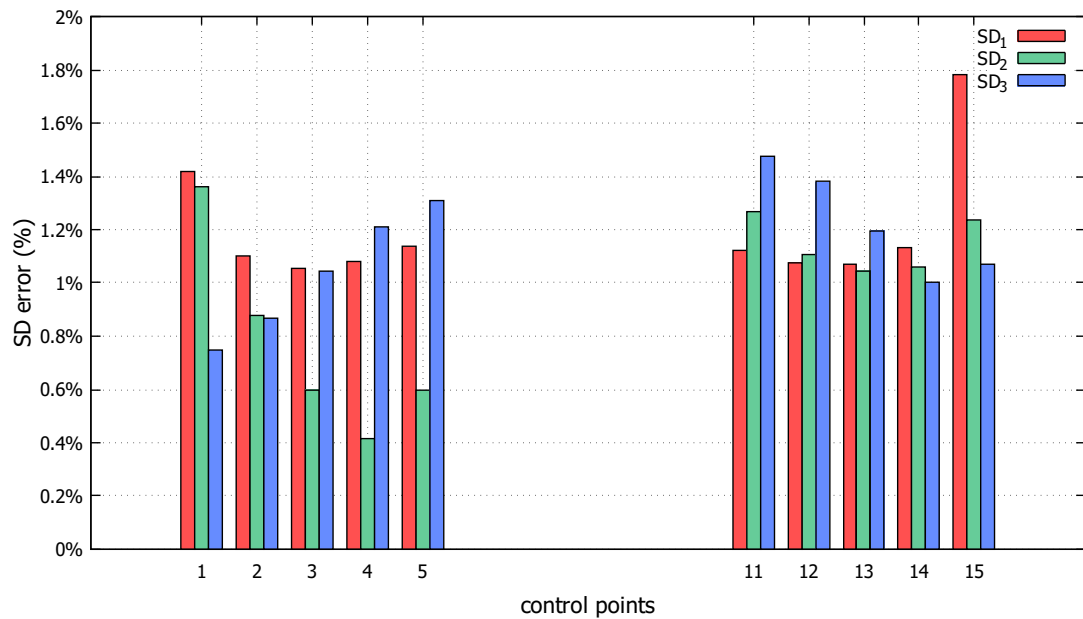


(β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.24: Παράγωγοι ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 3ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.25 φαίνονται τα δύο ιστογράμματα ποσοστιαίου σφάλματος για όλα τα σημεία ελέγχου και για τις δύο κατευθύνσεις:

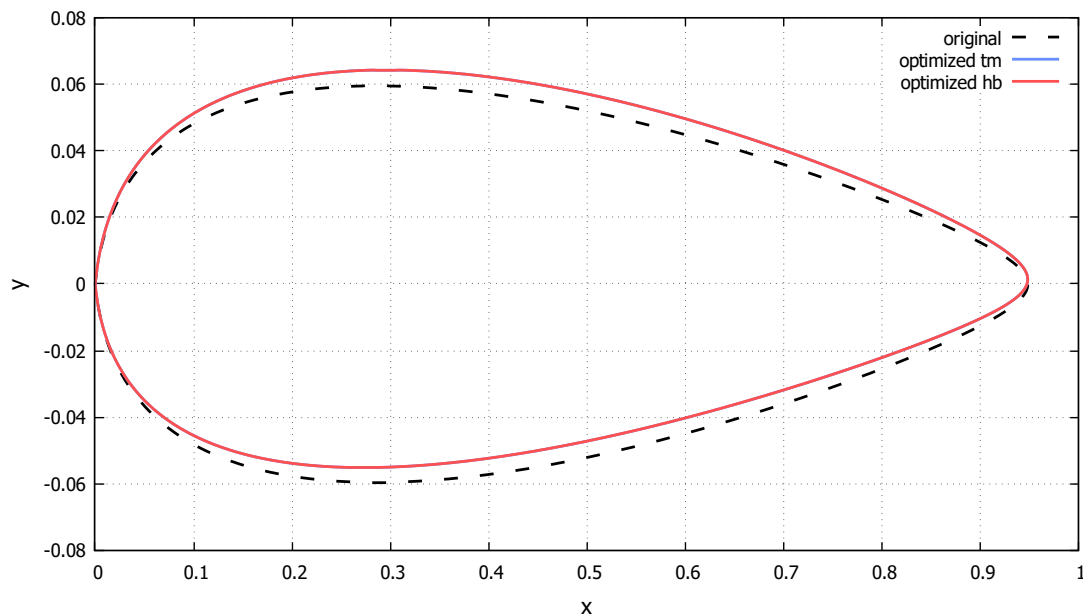
(α') Κατεύθυνση x



(β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.25: Ποσοστιαία Σφάλματα παραγώγων ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 3ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.26 φαίνεται η αρχική και η βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0012, για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, μετά από τρεις κύκλους βελτιστοποίησης:

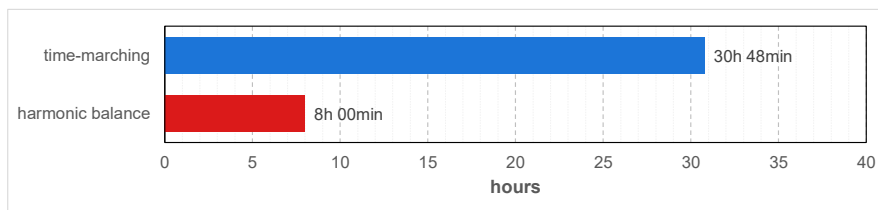


Σχήμα 6.26: Αρχική και βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0012, μέσω των μεθόδων της χρονο-προέλασης και Ισορροπίας των Αρμονικών

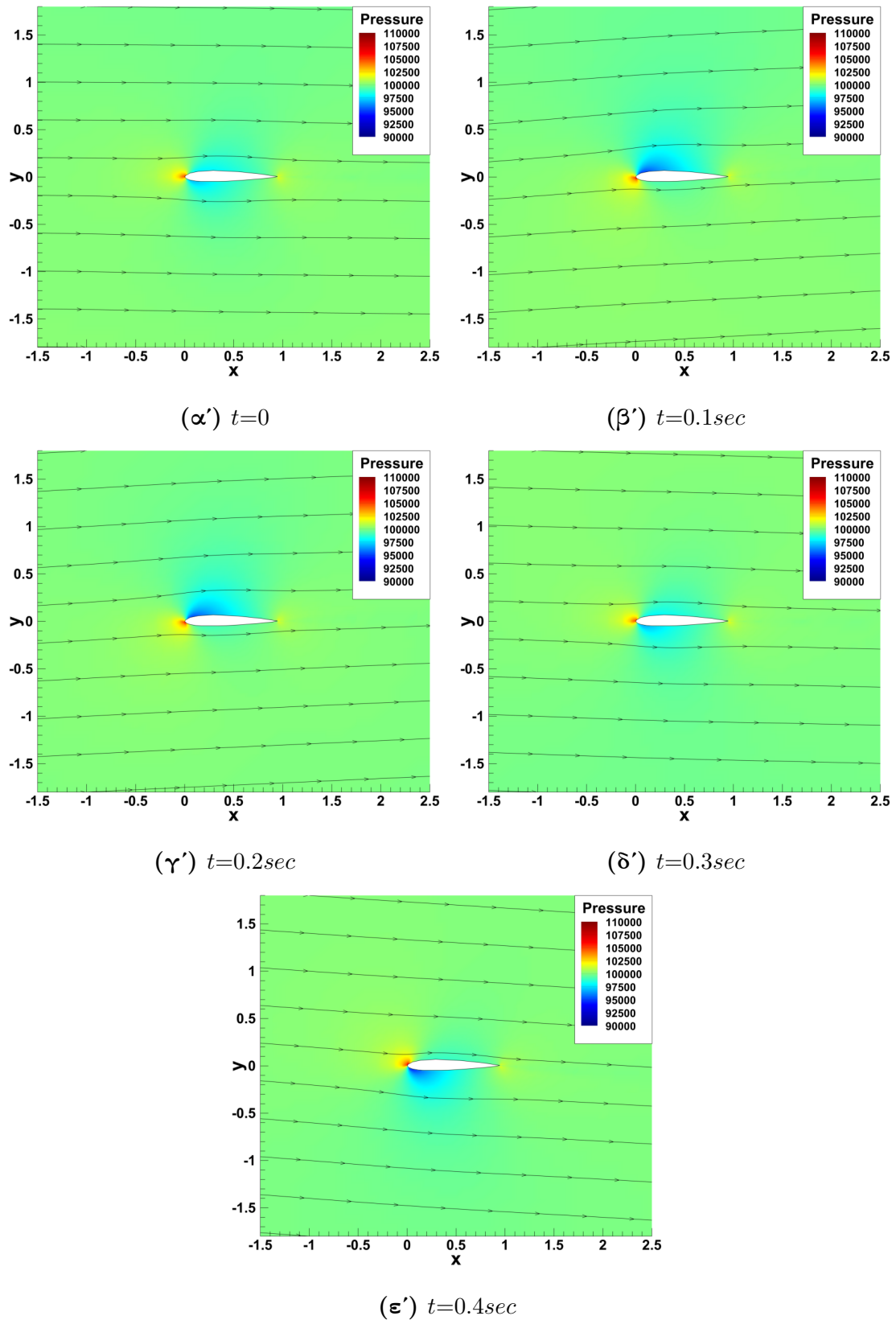
Όμοια με τη 2η Περίπτωση, από τα Σχήματα 6.5 και 6.6 υπάρχει κι εδώ ταύτιση τιμών των παραγώγων ευαισθησίας, της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Όπως φαίνεται στα ιστογράμματα 6.25α' και 6.25β', το ποσοστιαίο σφάλμα σε όλα τα σημεία είναι κάτω του 5%. Εξαιρέση είναι το σφάλμα της πρώτης παραγώγου του σημείου 3, το οποίο είναι πλασματικό, αφού η SD της τετμημένης του 3 είναι πολύ κοντά στο μηδέν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.24α'. Η απόδειξη ότι, η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση της μεθόδου χρονο-προέλασης, βρίσκεται στο Σχήμα 6.26, όπου φαίνεται ότι η καμπύλη που έδωσε η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών ταυτίζεται με αυτήν της χρονο-προέλασης.

Επίσης, από το Σχήμα 6.26 προκύπτει ότι, η αεροτομή τύπου NACA 0012 τείνει να καμπυλώσει προς τα πάνω, καθώς όλες οι παράγωγοι ευαισθησίας των σημείων ελέγχου, στην κατεύθυνση y , παίρνουν μεγάλες θετικές τιμές.

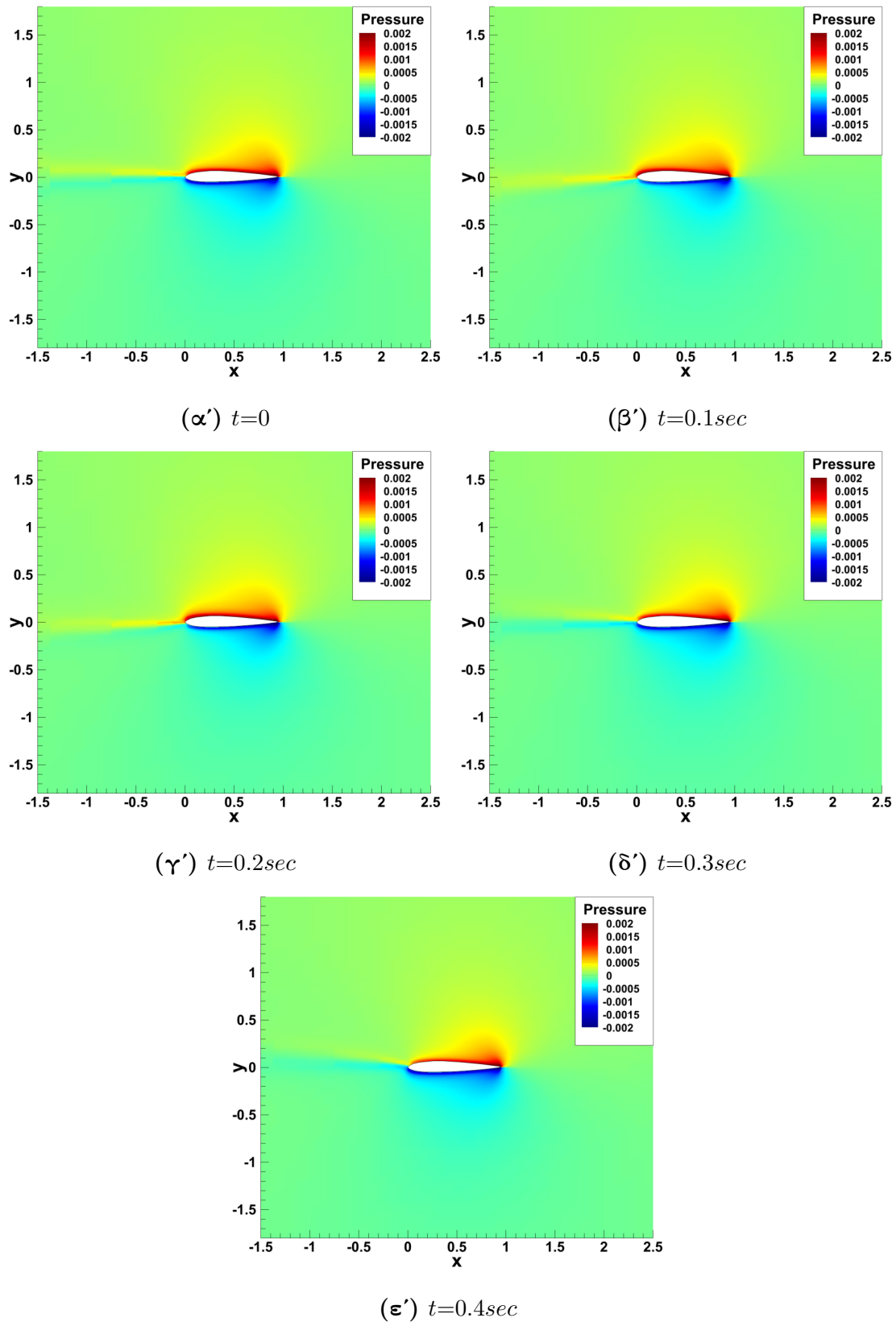
Η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, για την 3η Περίπτωση είναι κατά 78% γρηγορότερη της μεθόδου χρονο-προέλασης. Σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz, η επίλυση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών τερματίστηκε σε 8 ώρες, ενώ αυτή με τη μέθοδο χρονοπροέλασης σε 30 ώρες και 48 λεπτά.



Σχήμα 6.27: Ιστόγραμμα σύγκρισης χρόνου εκτέλεσης τριών κύκλων βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, για την 3η Περίπτωση, σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz



Σχήμα 6.28: Περίπτωση 3η: Τελικά πρωτεύοντα πεδία στατικής πίεσης υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο. ($\Delta t=0.1\text{ sec}$)



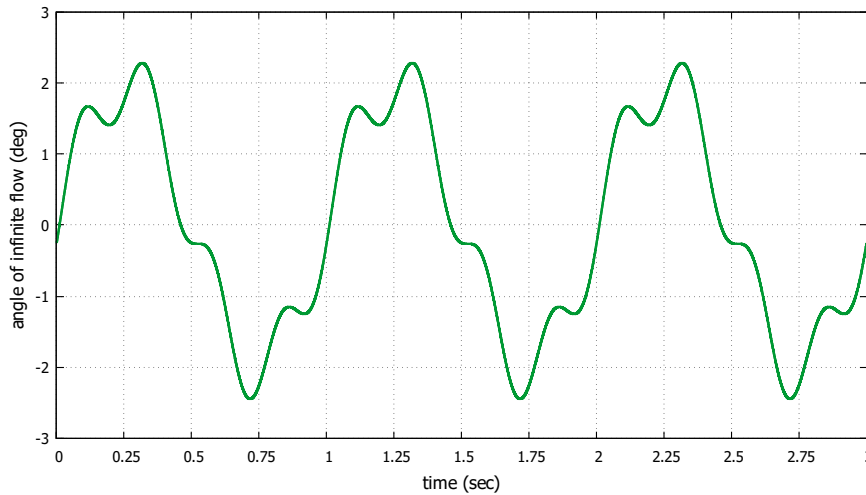
Σχήμα 6.29: Περίπτωση 3η: Τελικά συζυγή πεδία στατικής πίεσης υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο. ($\Delta t=0.1\text{ sec}$)

6.5 Περίπτωση 4η - Πολύπλοκη Διαταραχή της Επ' Άπειρο Γωνίας

Στην περίπτωση αυτή βελτιστοποιείται ξανά αεροτομή τύπου NACA 0012 (Σχήμα 6.20) σε περιοδική ροή, αλλά με πολύπλοκη διαταραχή γωνίας αυτή τη φορά, αποτελούμενη από σύνθεση περιοδικών συναρτήσεων. Για περίοδο διέγερσης φαινομένου $T=1 \text{ sec}$, η εξίσωση της επ' άπειρο γωνίας ροής για την 4η Περίπτωση, είναι:

$$\alpha_{\infty}(t) = 0^{\circ} + 2^{\circ} \sin(2\pi t) + 0.5^{\circ} \cos\left(8\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (6.5)$$

Το διάγραμμα μεταβολής της γωνίας της επ' άπειρο ροής α_{∞} συναρτήσεως του χρόνου, φαίνεται στο Σχήμα 6.30:



Σχήμα 6.30: Γωνία της επ' άπειρο ροής α_{∞} συναρτήσεως του χρόνου, για την 4η Περίπτωση. Περίοδος φαινομένου $T=1 \text{ sec}$

Το πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι το ίδιο με αυτό της 3ης Περίπτωσης. Τα βασικά στοιχεία του φαίνονται στον Πίνακα 6.11 και η μορφή του στο Σχήμα 4.3.

Οι οριακές συνθήκες της 4ης Περίπτωσης φαίνονται στον Πίνακα 6.15:

Πίνακας 6.15: Οριακές συνθήκες της επ' άπειρο ροής για την 4η Περίπτωση

Οριακές συνθήκες ροής		
Πυκνότητα	$\rho_{\infty} (\text{kg/m}^3)$	1.2
Στατική πίεση	$p_{\infty} (\text{Pa})$	$1 \cdot 10^5$
Μέτρο της επ' άπειρο ταχύτητας	$U_{\infty} (\text{m/s})$	150

Τα χαρακτηριστικά στοιχεία για τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και της

μεθόδου Χρονο-Προέλασης, φαίνονται στους Πίνακες 6.16 και 6.17 αντίστοιχα:

Πίνακας 6.16: Χαρακτηριστικά μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών για την 4η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

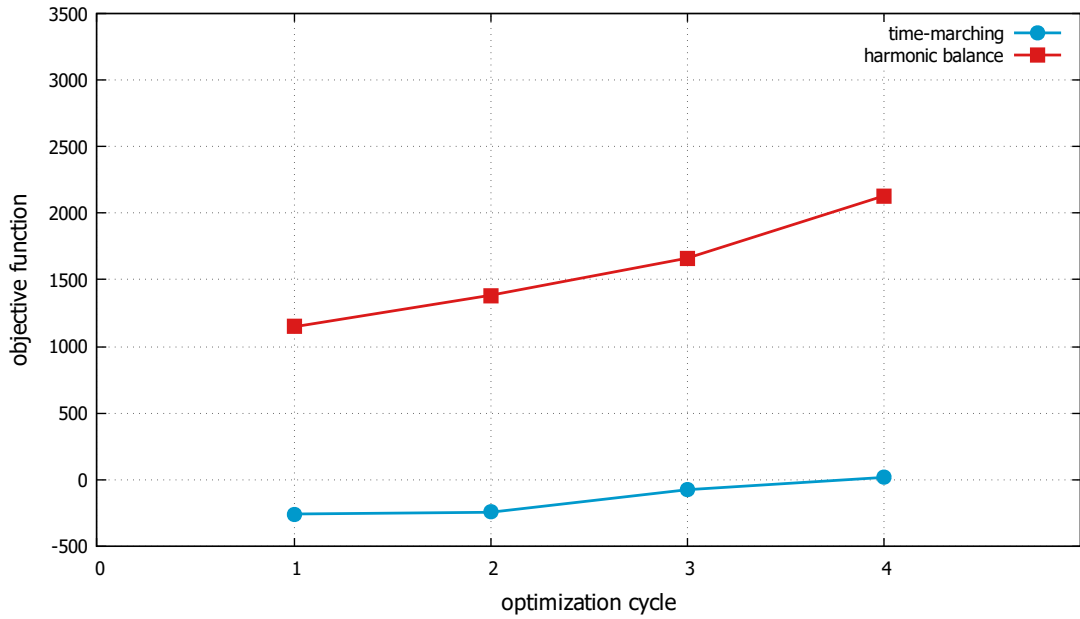
Μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών		
	ευθύ	συζυγές
Πλήθος Αρμονικών N_H	6	6
Πλήθος πεδίων N_T	13	13
Χρονική απόσταση πεδίων $\Delta t(sec)$	0.0769	0.0769
Ελάχιστη μεταβολή λύσης ΔSol_{HB}	10^{-6}	10^{-8}

Πίνακας 6.17: Χαρακτηριστικά μεθόδου Χρονο-Προέλασης για την 4η Περίπτωση στο ευθύ και συζυγές πρόβλημα

Μέθοδος Χρονο-Προέλασης		
	ευθύ	συζυγές
Συνολικός χρόνος επίλυσης $t_{tot}(sec)$	3	
Χρονικό βήμα $\Delta t_{tm}(sec)$	0.06	
Πλήθος χρονικών βημάτων	50	
Ελάχιστο σφάλμα χωρικού υπολοίπου	10^{-6}	10^{-8}

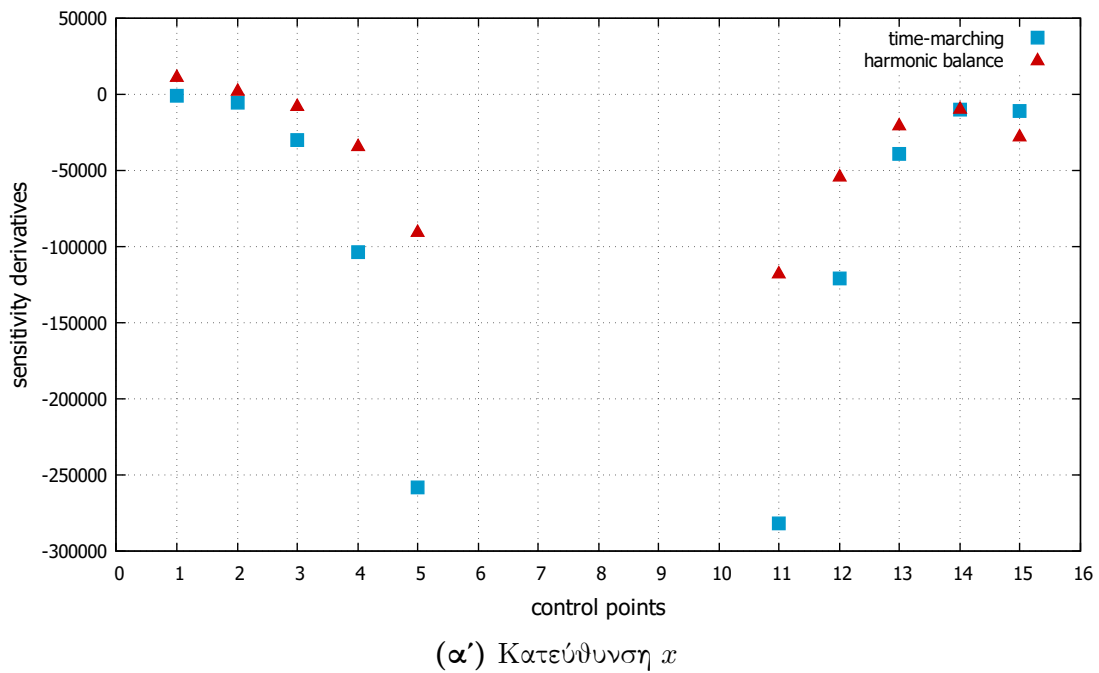
Όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.16, χρησιμοποιήθηκαν για πρώτη φορά έξι αρμονικές για το ευθύ και συζυγές πρόβλημα, εξαιτίας της περίπλοκης διαταραχής της επ' άπειρο γωνίας. Μετά από δοκιμές στο ευθύ πρόβλημα, παρατηρήθηκε ότι, σε πολύπλοκες διαταραχές χρειάζονται τουλάχιστον πέντε αρμονικές, για να μειωθούν ικανοποιητικά οι διαφορές με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης [33].

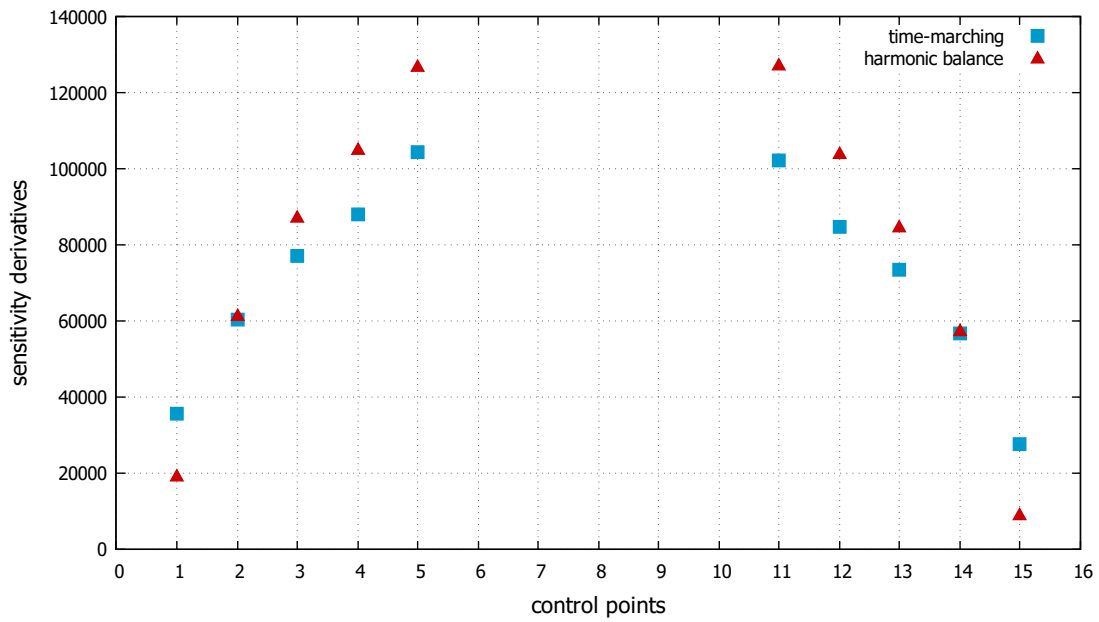
Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και τη μέθοδο της χρονο-προέλασης φαίνονται στο Σχήμα 6.31:



Σχήμα 6.31: Τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών και της μεθόδου χρονο-προέλασης, σε 3 κύκλους βελτιστοποίησης, για την 4η Περίπτωση.

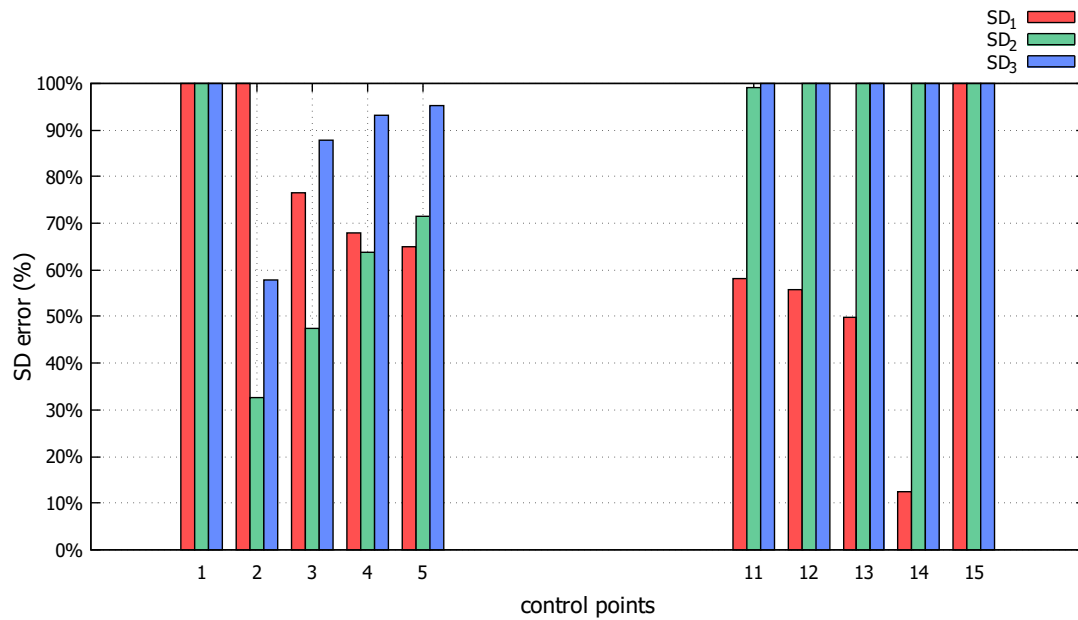
Γα σημεία, τα οποία παραλείπονται επειδή είναι ακλόνητα, είναι τα σημεία 0 και 16 $((x, y)=(0, 0))$ και τα 6 έως 10 $((x, y)=(1, 0))$. Ενδεικτικά για τον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης, οι παράγωγοι ευαισθησίας για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.32:

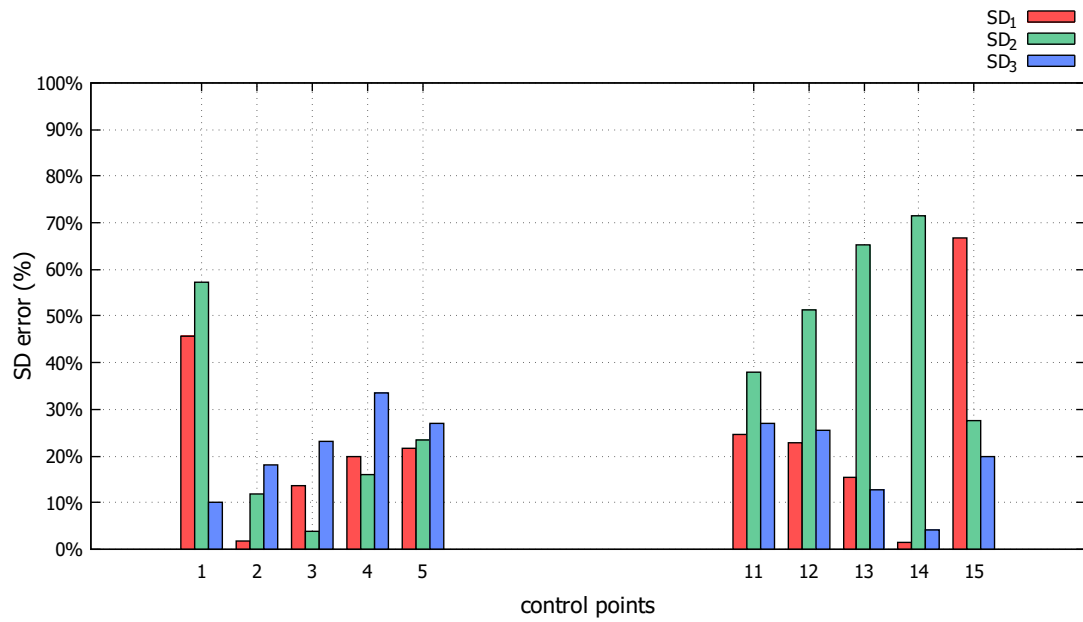


(β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.32: Παράγωγοι ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 3ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.33 φαίνονται τα δύο ιστογράμματα ποσοστιαίου σφάλματος για όλα τα σημεία ελέγχου και για τις δύο κατευθύνσεις:

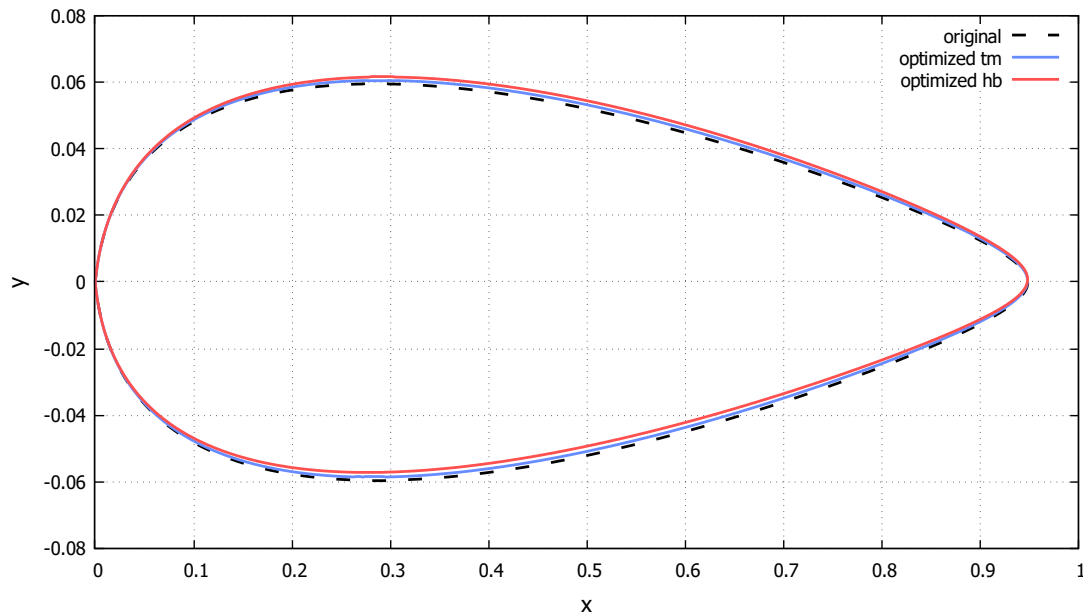
(α') Κατεύθυνση x



(β') Κατεύθυνση y

Σχήμα 6.33: Ποσοστιαία Σφάλματα παραγώγων ευαισθησίας των κινούμενων σημείων ελέγχου για τις δύο καρτεσιανές κατευθύνσεις, της 2ης Περίπτωσης.

Στο Σχήμα 6.34 φαίνεται η αρχική και η βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0012, για τη μέθοδο της χρονο-προέλασης και τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, μετά από τρεις κύκλους βελτιστοποίησης:

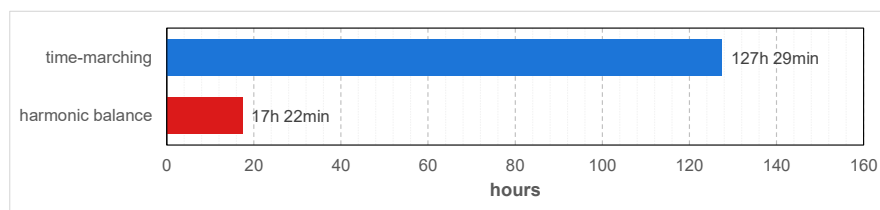


Σχήμα 6.34: Αρχική και βελτιστοποιημένη μορφή της αεροτομής τύπου NACA 0012, μέσω των μεθόδων της χρονο-προέλασης και Ισορροπίας των Αρμονικών

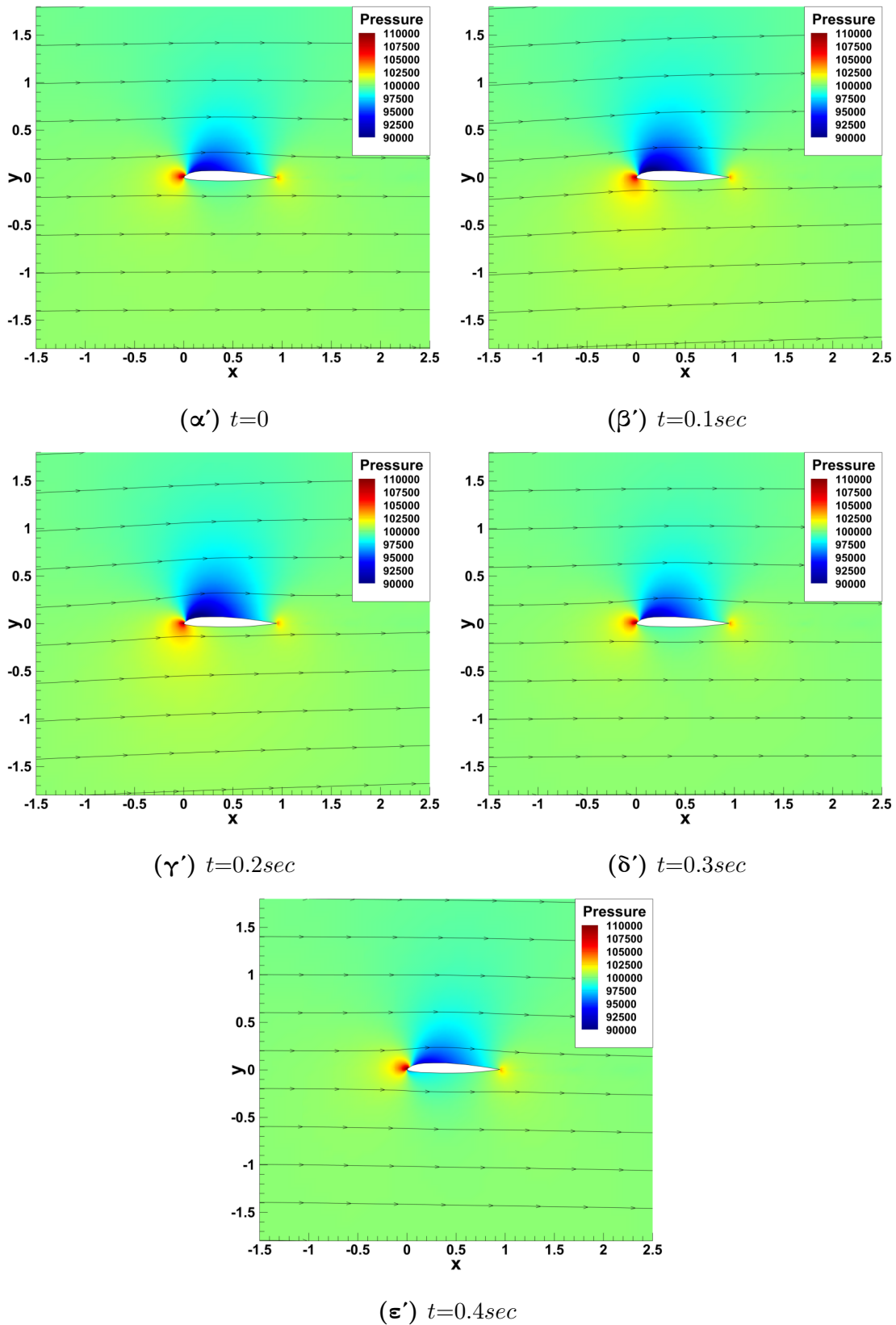
Σε αυτήν την περίπτωση ροής, από τη Μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών προέκυψαν τιμές παραγώγων ευαισθησίας, που παρουσιάζουν μεγάλα σφάλματα σε σχέση με τις αντίστοιχες τιμές τους από τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.32, τα σφάλματα αυτά είναι μεν αξιοσημείωτα, αλλά τουλάχιστον οι παράγωγοι ευαισθησίας της μεθόδου HB έχουν το ίδιο πρόσημο με αυτές της μεθόδου χρονο-προέλασης δε. Στο Σχήμα 6.34, είναι εμφανής η διαφορά μεταξύ των βελτιστοποιημένων αεροτομών που προκύπτουν από κάθε μέθοδο, αλλά και πάλι οι καμπύλες είναι αρκετά κοντά.

Επίσης, σε εφαρμογές, όπου η γωνία μεταβάλλεται περιοδικά κατά αυτόν τον πολύπλοκο τρόπο (Σχήμα 6.30), είναι δύσκολη η πρόβλεψη του βέλτιστου πλήθους αρμονικών, που χρειάζονται για να μειωθούν, όσο είναι δυνατόν, τα ποσοστιαία σφάλματα μεταξύ των παραγώγων ευαισθησίας των δύο μεθόδων. Επομένως, η 4η Περίπτωση χρησιμοποιείται και ως αντιπαράδειγμα στις προηγούμενες τρεις περιπτώσεις. Όταν η επ' άπειρο γωνία διεγείρεται σύμφωνα με εξισώσεις απλού τύπου (Σχέσεις 6.2, 6.3, 6.4) επαρκούν τρεις αρμονικές για μια πολύ καλή προσέγγιση του φαινομένου. Όμως, σε περίπτωση αρκετά πολύπλοκης περιοδικής διέγερσης της γωνίας (Σχέση 6.30), η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών μπορεί τελικά να μην είναι συμφέρουσα, μιας και χρειάζονται, αρχικά, αρκετές δοκιμές στο πλήθος των αρμονικών, για να βρεθεί το βέλτιστο, ως προς τον υπολογιστικό χρόνο και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Σε αυτή την περίπτωση, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών είναι κατά 86% γρηγορότερη της μεθόδου χρονο-προέλασης. Σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz, η επίλυση με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών τερματίστηκε σε 17 ώρες και 22 λεπτά, ενώ αυτή με τη μέθοδο χρονο-προέλασης σε 127 ώρες και 29 λεπτά.



Σχήμα 6.35: Ιστόγραμμα σύγκρισης χρόνου εκτέλεσης τριών κύκλων βελτιστοποίησης με τη μέθοδο Ισορροπίας των Αρμονικών και με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, για την 4η Περίπτωση, σε έναν επεξεργαστή Intel®Xeon®CPU E5520 @2.27GHz



Σχήμα 6.36: Περίπτωση 4η: Τελικά πρωτεύοντα πεδία στατικής πίεσης υπολογισμένα με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, για 5 ισαπέχουσες χρονικές στιγμές σε μια περίοδο. ($\Delta t=0.2\text{ sec}$)

Κεφάλαιο 7

Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία έγινε ανάπτυξη και πιστοποίηση λογισμικού εφαρμογής της Μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών (Harmonic Balance - HB) σε ήδη υπάρχων επιλύτη διδιάστατης μη-συνεκτικής ροής, συμπιεστού ρευστού. Ο επιλύτης αυτός, που αναπτύχθηκε από την ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, χρησιμοποιεί τη Μέθοδο Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell Method) για τη διακριτοποίηση του υπολογιστικού χωρίου και τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων σε κεντροκυβελική διατύπωση, για τη διακριτοποίηση των πεδιακών εξισώσεων Euler. Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμόζεται στις τελικές πεδιακές εξισώσεις του πρωτεύοντος προβλήματος. Γίνεται μια πρώτη πιστοποίηση αυτής σε μια εφαρμογή περιοδικής ροής, σε σχέση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης. Έπειτα, εφαρμόζεται και στην Συζυγή Πεδιακή Εξίσωση, όπως προέκυψε από τη Συνεχή Συζυγή Μέθοδο. Τέλος, η μέθοδος HB πιστοποιείται, σε αντιπαραβολή με την "κλασική" μέθοδο χρονο-προέλασης, σε τέσσερις διαφορετικές εφαρμογές βελτιστοποίησης μορφής μεμονωμένου αεροδυναμικού σώματος, με συνάρτηση στόχου, τη μεγιστοποίηση της χρονικά μέσης δύναμης της άνωσης.

Η μέθοδος HB εφαρμόζεται σε μη-μόνιμες ροές, στις οποίες οι οριακές συνθήκες της ροής (π.χ. η γωνία της επ' άπειρο ροής) διεγείρονται περιοδικά, με γνωστή την τιμή της περιόδου του φαινομένου. Αρχικά, σύμφωνα με την κρίση και την εμπειρία του χρήστη, επιλέγεται κατάλληλος αριθμός αρμονικών N_H , που χρησιμοποιείται σε μετασχηματισμό Fourier, για μεταφορά από το πεδίο του χρόνου, στο πεδίο των συχνοτήτων. Με τη μέθοδο HB επιλύονται ταυτόχρονα $2N_H + 1$ χρονικά μόνιμα προβλήματα, τα οποία αντιστοιχούν σε πραγματικά ισαπέχοντα στο χρόνο, $2N_H + 1$ πεδία ροής, που είναι πεπλεγμένα μεταξύ τους. Η επίλυση με τη μέθοδο αυτή γίνεται μέσω εισαγωγής ενός όρου πηγής, που εμπεριέχει όλα τα υπόλοιπα $2N_H$ χρονικά μόνιμα πεδία προς επίλυση, σε κάθε μια από τις χρονικά μόνιμες εξισώσεις του συστήματος, τόσο στο ευθύ όσο και στο συζυγές πρόβλημα.

Μέσα από την ανάπτυξη και την πιστοποίηση του λογισμικού μέσω των εφαρμογών βελτιστοποίησης μορφής, κατά τις οποίες μεταβάλλονταν οι οριακές συνθήκες ροής, ο τύπος κάθε αεροτομής προς βελτιστοποίηση, η περίοδος του φαινομένου και η εξίσωση διέγερσης της επ' άπειρο γωνίας ροής, προέκυψαν ορισμένα συμπεράσματα:

- Το βασικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών, σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, είναι η σημαντική **εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου**. Με τη μέθοδο HB λύνονται πεπλεγμένα $2N_H + 1$ πεδία ροής, τα οποία έχουν ίση απόσταση μεταξύ τους στο χρόνο, μέσα σε μια περίοδο. Οπότε, το υπολογιστικό κόστος εξαρτάται από την επιλογή του πλήθους των αρμονικών, σε αντίθεση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης, όπου εξαρτάται από το πλήθος των χρονικών βημάτων. Επίσης, με τη μέθοδο HB δεν υπολογίζεται το μεταβατικό φαινόμενο (*transient state*) της ροής, που σε απλές εφαρμογές χρειάζεται μία με δύο περιόδους για να εξαλειφθεί. Το κέρδος στον υπολογιστικό χρόνο υπερτίθεται κυρίως σε εφαρμογές βελτιστοποίησης μεμονωμένου αεροδυναμικού σώματος, όπου τόσο στο ευθύ, όσο και στο συζυγές πρόβλημα εφαρμόζεται η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών. Στις απλές ημιτονοειδείς διεγέρσεις της επ' άπειρο γωνίας ροής, που περιέχονται σε αυτήν την εργασία, αν επιλεγεί ο βέλτιστος αριθμός αρμονικών ($N_H=3$ ή 4), τότε αναμένεται εξοικονόμηση κατά 70% έως 80% του υπολογιστικού χρόνου, σε σχέση με τη μέθοδο χρονο-προέλασης, για τρεις κύκλους βελτιστοποίησης.
- Η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών προσφέρει και **εξοικονόμηση μνήμης**, σε σχέση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, όσον αφορά την χρήση του πρωτεύοντος πεδίου ροής στο συζυγές πρόβλημα. Η μέθοδος χρονο-προέλασης απαιτεί, αν όχι ολόκληρη, μερική αποθήκευση (*checkpointing method*) του πρωτεύοντος πεδίου ροής, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση του συζυγούς προβλήματος. Αντίθετα, στη μέθοδο HB, αποθηκεύονται μόνο τα $2N_H + 1$ πεδία αρμονικών ($\widehat{\mathbf{U}}$) του ευθέως προβλήματος, για κάθε υπολογιστική κυψέλη. Για κάθε χρονική στιγμή στη συζυγή επίλυση, τα πεδία αυτά, χρησιμοποιούνται για την "ανοικοδόμηση" του πραγματικού πρωτεύοντος πεδίου ροής, για τη στιγμή αυτή, μέσω του μετασχηματισμού Fourier, δίχως επιπλέον υπολογιστικό κόστος.
- Με κατάλληλη επιλογή αριθμού αρμονικών, η μέθοδος Ισορροπίας των Αρμονικών δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε εφαρμογές βελτιστοποίησης αεροτομών. Σε περίπτωση που η επ' άπειρο γωνίας ροής μεταβάλλεται περιοδικά κατά απλό τρόπο (ημιτονοειδής μεταβολή), η μέθοδος προσφέρει μεγάλη ακρίβεια στις τελικές τιμές των παραγώγων ευαισθησίας (*Sensitivity Derivatives - SD*) και της μορφής της τελικής βελτιστοποιημένης αεροτομής. Στις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, παρουσιάστηκαν σφάλματα που δεν ξεπερνούν το 5% για συμμετρικές και το 10% για τη μη-συμμετρική αεροτομή.
- Τα αποτελέσματα από τους τρεις κύκλους βελτιστοποίησης, που φαίνονται σε αυτή την εργασία, προέκυψαν από χωρική διακριτοποίηση σχήματος 1ης

τάξης ακρίβειας (*first order scheme*), με στόχο την εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου, κυρίως για την επίλυση με τη μέθοδο της χρονο-προέλασης. Σε περίπτωση επίλυσης με σχήμα 2ης τάξης ακρίβειας (*second order scheme*), αναμένονται τα ίδια αποτελέσματα για τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών.

- Σε απλές εφαρμογές, παρατηρήθηκε ότι η επίλυση του συζυγούς προβλήματος είναι πιο ευαίσθητη ως προς τη σύγκλιση, σε σχέση με το ευθύ. Για την αντιμετώπιση της ιδιαιτερότητας αυτής και την διευκόλυνση της σύγκλισης του συζυγούς, υπάρχει η δυνατότητα επίλυσής του με μεγαλύτερο αριθμό αρμονικών (M_H), σε σχέση με το ευθύ (N_H), μιας και η εφαρμογή της μεθόδου HB πραγματοποιείται ανεξάρτητα σε αυτά.
- Μία ιδιότητα της μεθόδου Ισορροπίας των αρμονικών είναι η δέσμευση μνήμης κατά την επίλυση του πεπλεγμένου συστήματος ροής. Η μέθοδος χρονο-προέλασης, επιλύει το σύστημα εξισώσεων ροής για κάθε χρονικό βήμα, αποθηκεύοντας απλά το τελικό πεδίο της προηγούμενης χρονικής στιγμής. Έτσι, η απαιτούμενη μνήμη αυξάνεται σταδιακά κατά την επίλυση, όσο γίνεται η προέλαση στο χρόνο και χρειάζεται η αποθήκευση των λύσεων των πεδίων των προηγούμενων χρονικών στιγμών. Αντίθετα, με τη μέθοδο της Ισορροπίας των Αρμονικών, όλα τα $2N_H + 1$ πεδία ροής που επιλύονται ταυτόχρονα, πρέπει να μένουν αποθηκευμένα στη μνήμη από την αρχή, μέχρι το τέλος της διαδικασίας επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων ροής, οπότε επιλύεται αριθμητικά μεγαλύτερο σύστημα.
- Επίσης, ένα επιπλέον βασικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι, χρειάζεται, αρχικά, αρκετή διερεύνηση ως προς την επιλογή του βέλτιστου πλήθους των αρμονικών N_H , για κάθε διαφορετική εφαρμογή. Όταν η περιοδική μεταβολή της επ' άπειρο γωνίας ροής είναι πιο πολύπλοκη από τις απλές ημιτονοειδείς μεταβολές, πρέπει να γίνουν αρκετές δοκιμές για την κατάλληλη πρόλεξη της ροής, με το βέλτιστο πλήθος αρμονικών. Από την εφαρμογή βελτιστοποίησης αεροτομής σε πεδίο ροής με πολύπλοκη μεταβολή της επ' άπειρο γωνίας, η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών, με $N_H=6$ αρμονικές, ήταν μεν πολύ πιο γρήγορη από τη μέθοδο της χρονο-προέλασης, αλλά τα τελικά αποτελέσματα έδειξαν ότι, αυτό το πλήθος των αρμονικών δεν ήταν αρκετό, παρουσιάζοντας μεγάλα σχετικά σφάλματα στις τιμές των παραγώγων ευαισθησίας.

Κλείνοντας, κρίνεται σκόπιμη η αναφορά σε προτάσεις για μελλοντικό ερευνητικό έργο στο πεδίο της μεθόδου Ισορροπίας των Αρμονικών.

- Η συνεχής συζυγής μέθοδος θα μπορούσε να εφαρμοστεί κατευθείαν στην τελική εξίσωση Ισορροπίας των Αρμονικών και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσέγγισης αυτής σε σχέση με την μέθοδο που παρουσιάστηκε σε αυτή τη διπλωματική εργασία.
- Εφικτή είναι, επίσης, η εφαρμογή της μεθόδου HB σε μη-οριόδετο πλέγμα, με κινούμενα στερεά όρια. Δηλαδή, η περιοδικότητα της ροής να μην προκαλείται

από την ταλάντωση των οριακών συνθηκών, αλλά και από την ταλάντωση της γεωμετρίας.

- Ενδιαφέρον θα είχε η εφαρμογή της μεθόδου HB σε εξισώσεις Navier-Stokes, με προσθήκη συνεκτικότητας και στη συνέχεια, σε τυρβώδεις ροές, με χρήση μοντέλων τύρβης.
 - Τέλος, σημαντικός υπολογιστικός χρόνος και μνήμη θα εξοικονομούταν, αν η μέθοδος της Ισορροπίας των Αρμονικών εφαρμοζόταν στο πεδίο μελέτης των στροβιλομηχανών, σε περιοδικές ροές που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση μεταξύ ρότορα και στάτορα.
-

Βιβλιογραφία

- [1] C. S. Peskin. “Flow Patterns Around Heart Valves: A Numerical Method”. In: *Journal of Computational Physics* 10 (1972), pp. 252–271. DOI: 10 . 1016/0021-9991 (72) 90065-4.
- [2] Κ. Σαμούχος. “Η συνεχής συζυγής μέθοδος σε μη-οριόδετα πλέγματα για τη βελτιστοποίηση στροβιλομηχανών.” Διδακτορική διατριβή (σε εξέλιξη). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- [3] Σ. Κατσανούλης. “Προγραμματισμός Λογισμικού για την Επίλυση Μη-Μόνιμων Πεδίων Ροής με Κινούμενα Στερεά Όρια με τη Μέθοδο των Τεμνόμενων Κυψελών (Cut-Cell)”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015.
- [4] C. S. Peskin. “The immersed boundary method”. In: *Acta Numerica* 11 (2002), pp. 479–517. DOI: 10 . 1017/S0962492902000077.
- [5] URL: <https://www.math.nyu.edu/faculty/peskin/myo3D/index.html>.
- [6] H. Bandringa. “Immersed Boundary Methods”. Master’s Thesis in Applied Mathematics. University of Groningen, 2010.
- [7] D. Goldstein, R. Handler and L. Sirovich. “Modeling a No-Slip Flow Boundary with an External Force Field”. In: *Journal of Computational Physics* 105(2) (1993), pp. 354–366. DOI: 10 . 1006/jcph.1993.1081.
- [8] R. Glowinski, T. W. Pan and J. Périaux. “Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies”. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 151(1) (1998), pp. 181–194. DOI: 10 . 1016/S0045-7825 (97) 00116-3.
- [9] L. Lee and R. J. Leveque. “An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations”. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25(3) (2003), pp. 832–856. DOI: 10 . 1137/S1064827502414060.
- [10] R. Mittal and G. Iaccarino. “Immersed Boundary Methods”. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005), pp. 239–261. DOI: 10 . 1146 / annurev.fluid.37.061903.175743.

- [11] J. Mohd-Yusof. “Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries”. In: *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs* 161(1) (1997), pp. 317–327. DOI: 10.1006/jcph.2000.6484.
- [12] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi and J. Mohd-Yusof. “Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations”. In: *Journal of Computational Physics* 161(1) (2000), pp. 35–60. DOI: 10.1006/jcph.2000.6484.
- [13] E. Balaras. “Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations”. In: *Computers & Fluids* 33(3) (2004), pp. 375–404. DOI: 10.1016/S0045-7930(03)00058-6.
- [14] A. Gilmanov, F. Sotiropoulos and E. Balaras. “A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids”. In: *Journal of Computational Physics* 191(2) (2003), pp. 660–669. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00321-8.
- [15] N. Zhang and Z. C. Zheng. “An improved direct-forcing immersed-boundary method for finite difference applications”. In: *Journal of Computational Physics* 221(1) (2007), pp. 250–268. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.06.012.
- [16] J. I. Choi, R. C. Oberoi, J. R. Edwards and J. A. Rosati. “An immersed boundary method for complex incompressible flows”. In: *Journal of Computational Physics* 224(2) (2007), pp. 757–784. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.10.032.
- [17] T. Ikeno and T. Kajishima. “Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations”. In: *Journal of Computational Physics* 226(2) (2007), pp. 1485–1508. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.05.028.
- [18] Y. H. Tseng and J. H. Ferziger. “A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry”. In: *Journal of Computational Physics* 192(2) (2003), pp. 593–623. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.07.024.
- [19] Δ. Χατζηνικολάου. “Προγραμματισμός και Εφαρμογή της Μεθόδου των Ψευδο-Κυψελών (Ghost-Cell) για 2Δ Χρονικά Μόνιμες Ατριβείς Ροές Συμπιεστού Ρευστού”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.
- [20] Γ. Μπεργελές. *Υπολογιστική Ρευστομηχανική, 5η έκδοση*. Εκδόσεις Συμεών, 2012. ISBN: 9789609400374.
- [21] D. K. Clarke, M. D. Salas and H. A. Hassan. “Euler calculations for multi-element airfoils using Cartesian grids”. In: *AIAA Journal* 24(3) (1986), pp. 353–358. DOI: 10.2514/3.9273.
- [22] H. S. Udaykumar, H. C. Kan, W. Shyy and R. Tran-Son-Tay. “Multiphase Dynamics in Arbitrary Geometries on Fixed Cartesian Grids”. In: *Journal of Computational Physics* 137(2) (1997), 366–405. DOI: 10.1006/jcph.1997.5805.
-

- [23] T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar and W. Shyy. “An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries”. In: *Journal of Computational Physics* 156(2) (1999), pp. 209–240. DOI: 10.1006/jcph.1999.6356.
- [24] M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield and J. H. Kent. “A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid”. In: *Journal of Computational Physics* 184(1) (2003), pp. 1–36. DOI: 10.1016/S0021-9991(02)00013-X.
- [25] Γ. Δ. Κανέλλης. “Θεμελίωση και προγραμματισμός της μεθόδου της Ισορροπίας των Αρμονικών στην αριθμητική επίλυση περιοδικών πεδίων ροής”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2011.
- [26] K. Michalak and C. Ollivier-Gooch. “Limiters for Unstructured Higher-Order Accurate Solutions of the Euler Equations”. In: *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (2008). DOI: 10.2514/6.2008-776.
- [27] T. J. Barth and D. C. Jespersen. “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”. In: *27th Aerospace Sciences Meeting* (1989). DOI: 10.2514/6.1989-366.
- [28] V. Venkatakrisnan. “On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions”. In: *31st Aerospace Sciences Meeting* (1993). DOI: 10.2514/6.1993-880.
- [29] P. L. Roe. “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”. In: *Journal of Computational Physics* 43(2) (1981), pp. 357–372. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90128-5.
- [30] Κ. Χ. Γιαννάκογλου. *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2003.
- [31] R. Courant, K. Friedrichs and H. Lewy. “Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik (On the partial differential equations of mathematical physics)”. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), 32–74. DOI: 10.1007/BF01448839.
- [32] Ν. Σημηριώτης. “Η συνεχής συζυγής μέθοδος για περιοδικές ροές, με εφαρμογή της μεθόδου ισορροπίας των αρμονικών στην επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2013.
- [33] Ν. Μακρής. “Διατύπωση και Προγραμματισμός της Τεχνικής της Ισορροπίας των Αρμονικών σε Επιλύτη Ροής με τη Μέθοδο των Τεμνομένων Κυψελών (Cut-Cell) για το Ευθύ και το Συζυγές (Adjoint) Πρόβλημα”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.
- [34] E. Chu and A. George. *Inside the FFT Black Box: Serial and Parallel Fast Fourier Transform Algorithms*. CRC Press, 2000. ISBN: 9781420049961.
- [35] R. Bracewell. *The Fourier Transform & Its Applications, 3rd edition*. The McGraw-Hill Companies, 1999. ISBN: 9780073039381.
-

- [36] J. Moran. *An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*. Dover Publications, 2010. ISBN: 9780486428796.
- [37] URL: <http://airfoiltools.com/airfoil/naca4digit>.
- [38] Π. Γ. Βρυώνης. “Μέθοδος των Τεμνομένων Κυψελών για 2Δ Χρονικά Μόνιμες και Μη-Μόνιμες Ροές. Προγραμματισμός και Διερεύνηση Προσταθεροποιητή Χαμηλών Αριθμών Mach για τον Ευθύ και Συζυγή Επιλύτη”. Διπλωματική Εργασία. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.
- [39] Κ. Χ. Γιαννάκογλου. *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2006.
- [40] E. M. Papoutsis-Kiachagias and K. C. Giannakoglou. “Continuous Adjoint Methods for Turbulent Flows, Applied to Shape and Topology Optimization: Industrial Applications”. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 23(2) (2016), 255–299. DOI: 10.1007/s11831-014-9141-9.