ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κατασκευή και Επαλήθευση Μοντέλων “Minimax”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΗΣ

Αφροδίτης-Ειρήνης Λουριδά

ΑΜ: ge11028

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:

Ιωάννης Πολυράκης, Παναγιώτης Ψαρράκος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Α. Αρβανιτάκης   Σ. Λαμπροπούλου   Π. Ψαρράκος

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία είναι μία βιβλιογραφική ανασκόπηση, σκοπός της οποίας είναι να ελέγξουμε κατά πόσον το θεώρημα minimax του von Neumann εφαρμόζεται στην πράξη μελετώντας πειράματα και έρευνες που αφορούν σε ανταγωνιστικά παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών. Στην εισαγωγή περιγράφεται το θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση των εννοιών που επεξεργαζόμαστε και δίνονται παραδείγματα. Στο επόμενο κεφάλαιο μελετώνται πειράματα που έχουν γίνει για την επαλήθευση του θεωρήματος minimax, όπου παρατηρείται ότι οι παίκτες δεν ακολουθούν το minimax, όπως το ορίζει η θεωρία. Στην συνέχεια, μελετάται το θεώρημα minimax σε στοιχεία επαγγελματικών αγώνων τένις και σε πέναλτι. Παρατηρούμε ότι, ενώ στο τένις δεν φαίνονται να ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του minimax, στα πέναλτι ικανοποιούνται. Παρατίθεται και έρευνα για την αξιοπιστία των πειραματικών αποτελεσμάτων στην θεωρία παιγνίων, όπου ελέγχεται αν οι επαγγελματίες ποδοσφαιριστές αποδίδουν το ίδιο καλά και σε πειραματικές καταστάσεις. Αποδεικνύεται ότι και πάλι δρουν σύμφωνα με την ισορροπία. Τέλος, γίνεται αναφορά στην συμπεριφορική θεωρία παιγνίων και εξάγονται συμπεράσματα με βάση τα αποτελέσματα των ερευνών που μελετήθηκαν.

Abstract

This thesis is a literature review the purpose of which is to test whether von Neumann's minimax theorem is applicable to real situations by studying experiments and papers concerning competitive two person zero-sum games. In the beginning, the theory is presented and examples are given. In the next chapter, experiments on the minimax theorem are revised. However, we observe that the minimax theorem is not applied in the way theory prescribes. Furthermore, tennis serves and penalty kicks from professional games are modeled and examined, thus we observe that whereas in tennis we do not have perfect equilibrium play, in penalty kicks the results are consistent with theory. We then mention a study on whether experiments in game theory are accurate for predicting decision making by checking if professional football players can perform equally well in an experimental setting and they do. Finally, the progress in behavioral game theory is mentioned and the results of all the previous chapters are discussed.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες στον καθηγητή που βοήθησε στην υλοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, κύριο Ιωάννη Πολυράκη, για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη, τις γνώσεις και τις συμβουλές του. Ευχαριστώ, επίσης, ιδιαίτερα τον κοσμήτορα της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, για την βοήθειά του, καθώς και τα μέλη της τριμελούς επιτροπής για τον χρόνο που αφιέρωσαν για την κρίση αυτής της εργασίας.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή

Αντικείμενο μελέτης της ***θεωρίας παιγνίων*** είναι η λήψη αποφάσεων με σκοπό την μεγιστοποίηση του ατομικού οφέλους, ιδιαίτερα σε συνθήκες όπου το αποτέλεσμα εξαρτάται και από τις αποφάσεις όλων των συμμετεχόντων. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές μελετώνται και το άτομο λαμβάνει την απόφασή του έχοντας υπόψη του όλη την πληροφορία, με αποτέλεσμα να καταλήγει στην καλύτερη δυνατή λύση. Η θεωρία παιγνίων βοηθά με την χρήση μοντέλων να μελετηθεί συστηματικά η διαδικασία λήψης αποφάσεων.

Μοντέλο είναι η αναπαράσταση ενός συστήματος με την χρήση μαθηματικών εργαλείων. Όσο πιο απλό είναι ένα μοντέλο τόσο πιο χρήσιμο είναι. Δεν υπάρχει αντικειμενικός τρόπος να κρίνουμε αν ένα μοντέλο είναι σωστό ή λάνθασμένο, αρκεί αυτό να μην αγνοεί σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν το φαινόμενο που μελετούμε. Η επιλογή του εξαρτάται κάθε φορά από τον σκοπό για τον οποίο το χρησιμοποιούμε.

Κάθε παίγνιο αποτελείται από τους ***παίκτες***, δηλαδή τα άτομα που λαμβάνουν τις αποφάσεις, τις ***στρατηγικές*** τους, δηλαδή τις ενέργειες που μπορούν να ακολουθήσουν, την διαθέσιμη ***πληροφορία*** ώστε να ακολουθήσουν την καλύτερη στρατηγική και τις ***αποδόσεις***, δηλαδή το κέρδος των παικτών ανάλογα με τις στρατηγικές που τόσο αυτοί όσο και οι αντίπαλοί τους επιλέγουν να ακολουθήσουν. Θεωρούμε σε κάθε παίγνιο που μελετούμε ότι οι παίκτες είναι ***ορθολογικοί***, δηλαδή έχουν ως σκοπό τους την μεγιστοποίηση του κέρδους τους, ή αλλιώς της ***χρησιμότητάς*** τους, και ταυτόχρονα έχουν στην διάθεσή τους όλη την διαθέσιμη πληροφορία.

Εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων αφορούν διάφορους κλάδους. Για παράδειγμα, στον τομέα των οικονομικών διαπιστώνουμε ότι η θεωρία παιγνίων εφαρμόζεται στην βιομηχανική οργάνωση, στον σχεδιασμό μηχανισμών, ενδεικτικά, στον σχεδιασμό δημοπρασιών. Στην πολιτική οικονομία συναντάμε τα συνεργατικά παίγνια, για παράδειγμα στο πώς εξισορροπείται η φορολογία με την παροχή αγαθών. Άλλοι τομείς όπου εφαρμόζεται η θεωρία παιγνίων είναι η ψυχολογία, η κοινωνιολογία, η θεωρία υπολογιστών, ακόμα και η εξελικτική βιολογία, σχετικά με το ποια είδη έχουν την μεγαλύτερη πιθανότητα εξαφάνισης.

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες παιγνίων. Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με τα ***μη συνεργατικά παίγνια μηδενικού αθροίσματος*** και την μοντελοποίησή τους καθώς και με την επαλήθευσή τους στην πράξη.

Ιστορική Αναδρομή

Πολλοί μαθηματικοί και οικονομολόγοι ασχολήθηκαν με την θεωρία παιγνίων. Πρώτος ο **Antoine Augustin Cournot** το 1838 μελέτησε την ισορροπία σε δυοπώλιο, δηλαδή ανταγωνιστικές εταιρίες που λαμβάνουν τις αποφάσεις τους ξεχωριστά και ταυτόχρονα. Ουσιαστικά, ο Cournot εισήγαγε στα οικονομικά συναρτήσεις και πιθανότητες, καθώς και την έννοια που αργότερα θα ονομαζόταν ***ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής***.

John Von Neumann 1903-1957

Ο **John Von Neumann** έθεσε τα θεμέλια για την θεωρία των παίγνίων μηδενικού αθροίσματος. Με το θεώρημα μίνιμαξ (Minimax Theorem) το 1928 απέδειξε ότι στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών με τέλεια πληροφόρηση υπάρχει ζεύγος στρατηγικών και για τους δύο παίκτες, ώστε ο καθένας να ελαχιστοποιήσει την μέγιστη ζημία του. Ακολουθώντας αυτήν την στρατηγική οι παίκτες ακολουθούν την ***βέλτιστη στρατηγική***. Απέδειξε, επίσης, ότι οι στρατηγικές αυτές είναι αντίθετες, άρα ίσες κατά απόλυτη τιμή. Πριν από αυτό, η θεωρία παιγνίων δεν αποτελούσε ξεχωριστό κλάδο. Την θεωρία αυτή εξέλιξε με τον **Oscar Morgstern** με το «Theory of Economic Behavior» το 1944 ώστε να εφαρμόζεται και σε παίγνια με περισσότερους από δύο παίκτες και σε παίγνια με ατελή πληροφόρηση. Παίγνια μηδενικού αθροίσματος μελέτησε επίσης και ο **Emile Borel** το 1921.

John Forbes Nash Jr. 1928-2015

Ο **John Forbes Nash Jr.** μελέτησε την ισορροπία σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος, την ***ισορροπία Nash***, για την οποία βραβεύτηκε με το Βραβείο Νόμπελ Οικονομικών Επιστημών το 1994. Εισήγαγε την διαφορά ανάμεσα στα συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια. Τα μη συνεργατικά παίγνια είναι τα παίγνια, κατά τα οποία οι παίκτες δεν επικοινωνούν μεταξύ τους. Αντιθέτως, τα συνεργατικά παίγνια είναι τα παίγνια, κατά τα οποία οι παίκτες μπορούν να συνάψουν συμφωνίες ή να ανταλλάξουν απειλές. Σύμφωνα με τον Harsanyi, αν είχαν υπόψη τους ο Von Neumann και ο Morgstern την διαφορά αυτή, θα μπορούσαν να επεκτείνουν την θεωρία τους τόσο σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος, όσο και σε μη συνεργατικά παίγνια περισσότερων των δύο παικτών. Απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο μη συνεργατικό παίγνιο έχει ισορροπία Nash, ως λύση του παιγνίου. Ακολούθως, για τα συνεργατικά παίγνια απέδειξε ότι έχουν την διαπραγματευτική λύση κατά Nash (Nash Bargaining Solution, NBS).

Στην σύγχρονη εποχή η θεωρία παιγνίων έχει συμβάλει στην αναθεώρηση του τρόπου με τον οποίο αντιμετωπίζουμε διάφορα προβλήματα των οικονομικών και των άλλων κοινωνικών επιστημών.

Ισορροπία Nash

Σύμφωνα με την δημοσίευση του John Nash στο Annals of Mathematics με τίτλο «Μη συνεργατικά παίγνια» (Non-Cooperative Games), προκύπτει ότι το σύνολο των σημείων ισορροπίας ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων είναι το σύνολο με όλα τα ζεύγη συγκρουόμενων «καλών στρατηγικών».[1] Σε αυτήν την δημοσίευση όρισε τα σημεία ισορροπίας και απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο μη συνεργατικό παίγνιο πάντα έχει σημείο ισορροπίας.

Όρισε ως ***πεπερασμένο παίγνιο***: ένα παίγνιο με n παίκτες θα είναι ένα σύνολο από n παίκτες ή θέσεις, καθένα με ένα πεπερασμένο σχετικό σύνολο από καθαρές στρατηγικές· και όσον αφορά κάθε παίκτη i όρισε μια συνάρτηση p_i που αντιστοιχίζει το σύνολο όλων των n-άδων καθαρών στρατηγικών (S) στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ($p_i: S \to \mathbb{R}$). Η p_i ονομάζεται ***συνάρτηση χρησιμότητας*** του παίκτη i. ***Μεικτή στρατηγική*** s_i ενός παίκτη i θα είναι είναι σύνολο μη αρνητικών αριθμών που έχουν $\sum_{i=0}^{n} u_i = 1$ και είναι η πιθανότητα με την οποία παίζει ο παίκτης τις καθαρές στρατηγικές του. Μία n-άδα S είναι ***σημείο ισορροπίας***, αν και μόνον αν για κάθε i: $p_i(S) = \max[p_i(s, r_i)]$. Έτσι, το σημείο ισορροπίας είναι μια n-άδα S τέτοια, ώστε η μεικτή στρατηγική του κάθε παίκτη να μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητάς του, αν οι στρατηγικές όλων των άλλων παικτών μείνουν σταθερές. Δηλαδή, η στρατηγική του κάθε παίκτη είναι η ***βέλτιστη*** σε σχέση με όλες τις άλλες. Ο Nash, επιπλέον, απέδειξε ότι το σύνολο των σημείων ισορροπίας αποτελεί κλειστό υποσύνολο του χώρου των n-άδων S.

Την ύπαρξη σημείου ισορροπίας είχε αρχικά αποδείξει ο Nash στο ομότιτλο διδακτορικό του στο Princeton το 1949 βασιζόμενος στο γενικευμένο θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani[2]. Στην δημοσίευσή του το 1951 την αποδεικνύει χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Brouwer[3]. Κατασκευάζει έναν συνεχή μετασχηματισμό T στον χώρο των n-άδων S έτσι, ώστε τα σταθερά σημεία του T να είναι τα σημεία ισορροπίας του παιγνίου. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύει ότι ***κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει σημείο ισορροπίας***. Ωστόσο, όπως έχει αποδειχθεί, πολλές φορές είναι αδύνατον να το βρούμε λόγω της πολυπλοκότητας των παραμέτρων του παιγνίου, όπως για παράδειγμα στο κυκλοφοριακό πρόβλημα μιας πόλης.

Παίγνιο κανονικής μορφής είναι αυτό κατά το οποίο οι παίκτες κινούνται μία φορά και ταυτόχρονα. Αν τα ***σύνολα στρατηγικών*** είναι ανοιχτά σύνολα και οι συναρτήσεις χρησιμότητας είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Τότε ο ορίζοντας στρατηγικών $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ είναι ισορροπία Nash αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

---

[1] John F. Nash, Non-cooperative games, Annal. Math. 54 (1951), 286295.

[2] Αν K ⊂ R^n συμπαγές, κυρτό και μη κενό, τότε κάθε απεικόνιση φ : K → K με κλειστό γράφημα και κυρτές, μη κενές τιμές έχει σταθερό σημείο.

[3] Κάθε συνεχής απεικόνιση f : M → M, όπου M ⊂ R^n μη κενό, συμπαγές και κυρτό έχει σταθερό σημείο.

i. $\frac{\partial u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i} = 0$, για κάθε i

ii. Κάθε s_i^* είναι το μόνο στάσιμο σημείο της συνάρτησης $u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ με $s \in S_i$

iii. $\frac{\partial^2 u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0$, για κάθε i

Παράδειγμα ισορροπίας Nash: Το Δυοπώλιο του Cournot

Έστω ότι δύο εταιρίες κατασκευάζουν το ίδιο προϊόν και αποφασίζουν ταυτόχρονα πόση ποσότητα από αυτό θα παράγουν. Έστω ότι η εταιρία 1 αποφασίζει να παράγει ποσότητα q_1 και η εταιρία 2 ποσότητα q_2.

Τότε η ολική ποσότητα από το προϊόν που παράγεται είναι $q_{o\lambda} = q_1 + q_2$. Η ***τιμή ανά μονάδα προϊόντος*** στην αγορά είναι $p(q) = A - q$, με A σταθερό.

Το ***συνολικό κόστος παραγωγής*** για κάθε εταιρία είναι $c_i \cdot q_i$, όπου $i = 1{,}2$, $q_i \geq 0$, $c_i > 0$.

Το ***σύνολο στρατηγικών*** κάθε εταιρίας είναι το σύνολο των ποσοτήτων που κάθε εταιρία μπορεί να επιλέξει να παράγει και είναι το $(0, +\infty)$.

Ως γνωστόν, σκοπός κάθε εταιρίας είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος της. Το κέρδος αυτό εκφράζεται από την ***συνάρτηση χρησιμότητας***:

$$u_i(q_1, q_2) = q_i[\,p(q) - c_i] = q_i[A - q_1 - q_2 - c_i],\ i = 1{,}2.$$

Παρατηρώ ότι το κέρδος της μίας εξαρτάται από την παραγωγή της άλλης:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1[A - q_1 - q_2 - c_1] = -q_1^2 + (A - q_2 - c_1)q_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2[A - q_2 - q_1 - c_2] = -q_2^2 + (A - q_1 - c_2)q_2$$

Αφού επιλέγουν την ποσότητα που παράγουν ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, χρησιμοποιούμε ισορροπία Nash για την λύση του παιγνίου.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2q_1 + A - q_2 - c_1 = 0 \\ -2q_2 + A - q_1 - c_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} q_1 = \dfrac{c_2 + A - 2c_1}{3} \\ q_2 = \dfrac{c_1 + A - 2c_2}{3} \end{Bmatrix}$$

Επίσης, $\frac{\partial^2 u_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -2 < 0$ και $\frac{\partial^2 u_2(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} = -2 < 0$.

Άρα, ο ορίζοντας στρατηγικής ή, απλά, η στρατηγική (q_1^*, q_2^*) με $q_1^* = \frac{c_2+A-2c_1}{3}$ και $q_2^* = \frac{c_1+A-2c_2}{3}$ είναι η ισορροπία Nash του παιγνίου.

□

Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος και το Θεώρημα Minimax

Ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος περιγράφεται από έναν πίνακα αποδόσεων Α, $m \times n$ με πραγματικές τιμές. Ο ένας παίκτης διαλέγει μια γραμμή και ο άλλος μια στήλη. Οι γραμμές και οι στήλες λέγονται ***στρατηγικές***. Εξ ορισμού, η τιμή α_{ij} του πίνακα Α είναι η απόδοση του παίκτη-γραμμή, όταν διαλέγει την γραμμή i και ο παίκτης-στήλη διαλέγει την στήλη j. Η απόδοση του παίκτη-στήλη ορίζεται ως $-\alpha_{ij}$, από όπου και προέρχεται η ονομασία «μηδενικού αθροίσματος». Έτσι, α_{ij} είναι το ποσόν που «πληρώνει» ο παίκτης-στήλη στον παίκτη-γραμμή στην περίπτωση που συμβεί το (i, j).

Το ***θεώρημα Minimax*** του John von Neumann αναφέρει ότι:

Έστω $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγή και κυρτά σύνολα. Αν $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής κυρτή-κοίλη συνάρτηση, δηλαδή:

$$\boldsymbol{f}(\cdot, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R} \text{ είναι κυρτή για σταθερό } y, \text{ και}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \cdot) : \boldsymbol{Y} \to \mathbb{R} \text{ είναι κοίλη για σταθερό } x$$

Τότε:

$$\min_{x \in X} \left(\max_{y \in Y} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right) = \max_{y \in Y} \left(\min_{x \in X} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right)$$

Στην θεωρία παιγνίων μηδενικού αθροίσματος το χρησιμοποιούμε ως εξής:

Θεώρημα: Για κάθε παίγνιο Α δύο ατόμων,

$$\max_{\mathbf{x}} \left(\min_{\mathbf{y}} (\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}) \right) = \min_{\mathbf{y}} \left(\max_{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}) \right)$$

Όπου x η στρατηγική του παίκτη-γραμμή και y η στρατηγική του παίκτη-στήλη. Το θεώρημα Minimax ουσιαστικά υπαγορεύει ότι οι αποδόσεις κάθε παίκτη είναι οι ίδιες, είτε στην περίπτωση που ο ένας στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της ζημίας του, είτε ο άλλος στην μεγιστοποίηση της ζημίας του πρώτου.

Στα ανταγωνιστικά παίγνια δύο παικτών η λύση του παιγνίου υπολογίζεται ακριβώς με την χρήση γραμμικού προγραμματισμού και συγκεκριμένα με την μέθοδο ***Simplex***.[4] Αντίθετα, σε πεπερασμένα παίγνια μεικτής στρατηγικής αποδεικνύεται η ύπαρξη ισορροπίας με χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer, αλλά η λύση δεν μπορεί πάντα να υπολογιστεί. Όπως απέδειξαν οι Δασκαλάκης, Goldberg και

[4] Πολυράκης, Ι., 2016. *Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία.* Αθήνα: s.n.

Παπαδημητρίου[5] για τον υπολογισμό της λύσης κάποιες φορές απαιτείται άπειρος χρόνος, ακόμα και με υπολογιστή, διότι η πολυπλοκότητα είναι πάνω από πολυωνυμικού τύπου.

Στην θεωρία παιγνίων, και συγκεκριμένα στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, το θεώρημα Minimax δείχνει ότι η λύση που προκύπτει από το θεώρημα είναι η ίδια με αυτήν της ισορροπίας Nash.

Επειδή η υπόθεση του μηδενικού αθροίσματος επιβάλλει περιορισμούς στις ατομικές συναρτήσεις χρησιμότητας, μπορούμε να εξάγουμε σημαντικά επιπρόσθετα αποτελέσματα σχετικά με την ισορροπία για τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Η διαφορά των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος από τα άλλα είναι ότι ένα μη συνεργατικό παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος, αν οι αποδόσεις όλων των παικτών αθροίζουν στο 0 ανά n-άδα.

Έτσι αν $n = 2$:

$$u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0, \text{ για κάθε } s_1 \in S_1 \text{ και για κάθε } s_2 \in S_2$$

Μπορούμε να μετατρέψουμε κάθε παίγνιο σταθερού αθροίσματος σε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, όπου όλες οι αποδόσεις αθροίζουν σε k αφαιρώντας k από την κάθε συνάρτηση χρησιμότητας. Αυτήν την τεχνική θα χρησιμοποιήσουμε για να μοντελοποιήσουμε τις εκλογές σε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

Παράδειγμα: Πώς μοντελοποιούνται οι εκλογές σε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος

Έστω ότι καθένας από τους υποψηφίους μετράει την χρησιμότητά του με βάση τις ψήφους που λαμβάνει.

Έστω δηλαδή:

$u_1 = V_1$ και $u_2 = V_2$

όπου u_i η συνάρτηση χρησιμότητας κάθε υποψηφίου i και V_i οι ψήφοι του κάθε υποψηφίου i

Έστω, επίσης, ότι ανεξάρτητα με τις ενέργειές τους, τα V_i είναι σταθερά.

Δηλαδή,

$$V_1 + V_2 = k$$

Αν αφαιρέσουμε k από την συνάρτηση χρησιμότητας του 1 τότε:

[5] Constantinos Daskalakis, P. W. G. a. C. H. P., 2009. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. *SIAM Journal on Computing,* 39(1), p. 195–259.

$$u_1 = V_1 - k = V_1 - (V_1 + V_2) = -V_2$$

Έτσι, έχουμε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

Άρα, ο υποψήφιος 1 επιθυμεί να μειώσει τις ψήφους του 2, ενώ ο 2 να τις μεγιστοποιήσει.

Γιατί εκτιμούμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η υπόθεση του μηδενικού αθροίσματος στις πολιτικές διαδικασίες;

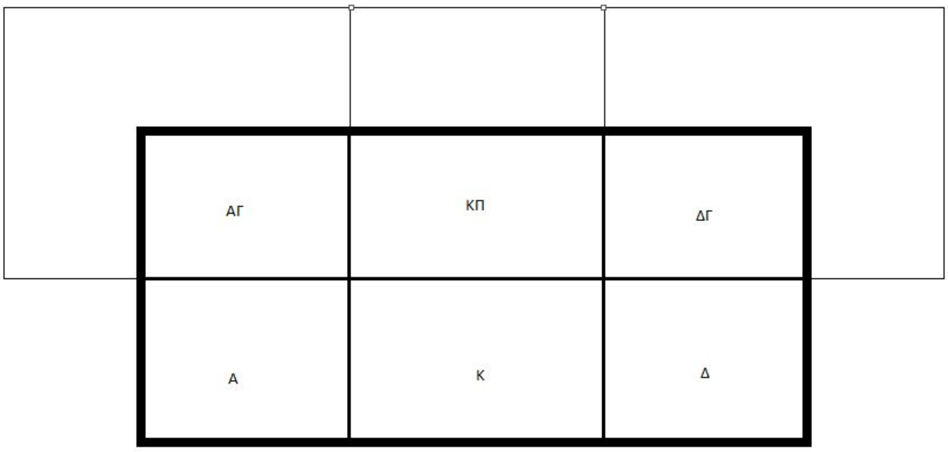
Έστω ότι κάνουμε μια σειρά από πειράματα για να επιβεβαιώσουμε τον ισχυρισμό ότι κάθε υποψήφιος σχετίζεται με τον αριθμό των ψήφων που λαμβάνει ο υποψήφιος 1 σε μία αναλογική εκλογική διαδικασία δύο υποψηφίων. Όταν η χρησιμότητα του 1 αυξάνεται, η χρησιμότητα του 2 μειώνεται. Ακόμα όμως και στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη μας τα πιθανά σφάλματα, είναι σχεδόν απίθανο οι χρησιμότητες των υποψηφίων να αθροίζουν στο μηδέν, για κάθε τιμή της u_1. Επομένως, θα μπορούσαμε, ενδεχομένως, να καταλήξουμε ότι δεν μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις εκλογές ως παίγνιο μηδενικού αθροίσματος και ότι οποιαδήποτε ψηφοφορία είναι απίθανο να πληροί τις προϋποθέσεις του μηδενικού αθροίσματος, ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, παρότι κομψά, παραμένουν χωρίς πρακτικό ενδιαφέρον.

Ωστόσο, μπορούμε να δούμε την υπόθεση του μηδενικού αθροίσματος ως μια χρήσιμη προσέγγιση, στην οποία τα πλεονεκτήματα υπερτερούν των μειονεκτημάτων. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην περίπτωση που δεν μπορούμε να μετρήσουμε άμεσα την χρησιμότητα, αλλά μπορούμε να περιγράψουμε τα αποτελέσματα με κάποιον αντικειμενικά μετρήσιμο τρόπο.

Άλλες καταστάσεις εκτός από τις εκλογές που μπορούμε να μοντελοποιήσουμε σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος είναι οι πόλεμοι, στους οποίους δεν μας ενδιαφέρουν οι απώλειες, παρά μόνον ποιος είναι ο νικητής και ποιος ο ηττημένος· η αναδιανομή του εισοδήματος, εφόσον δεν ενδιαφέρει τους συμμετέχοντες η ευημερία του συνόλου αλλά μόνον η μεγιστοποίηση του προσωπικού τους εισοδήματος· οι διεθνείς εμπορικές διαπραγματεύσεις στις οποίες οι ενδιαφερόμενοι βλέπουν τα διάφορα εμπόδια ως ευκαιρίες για διαπραγμάτευση με κάποια χώρα, εις βάρος των εργαζομένων κάποιας άλλης. Παρατηρούμε επομένως ότι καμμία από τις παραπάνω καταστάσεις δεν αποτελεί αμιγές παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, γιατί οι πόλεμοι έχουν οικονομικές και κοινωνικές επιπτώσεις, οι εναλλακτικοί τρόποι διάθεσης εισοδήματος και οι εμπορικές πολιτικές έχουν μικροοικονομικές επιπτώσεις στην οικονομία. Η υπόθεση του μηδενικού αθροίσματος, συνεπώς, είναι μία πολύτιμη πρώτη προσέγγιση που μας βοηθάει να καταλάβουμε τα κίνητρα των παικτών.

Παίγνιο Επιθετικού – Τερματοφύλακα

Η κατασκευή μοντέλων είναι μία δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία. Εδώ κατασκευάζουμε ένα απλό μοντέλο το οποίο στην συνέχεια λύνουμε με την μέθοδο ***Simplex***.



Θεωρούμε το γνωστό παίγνιο επιθετικού-τερματοφύλακα με περισσότερες επιλογές. Δηλαδή, ο επιθετικός χτυπάει πέναλτι και μπορεί να στοχεύσει αριστερά, κέντρο, δεξιά, αριστερή γωνία, κέντρο πάνω, δεξιά γωνία. Ο τερματοφύλακας έχει τις ίδιες επιλογές σχετικά με το πού θα πέσει. Για ευκολία, θεωρούμε το ίδιο αριστερά και δεξιά και για τους δύο βάσει του πώς το βλέπει ο επιθετικός. Πρόκειται για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, αφού ο επιθετικός θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να σκοράρει, ενώ ο τερματοφύλακας να την ελαχιστοποιήσει. Και οι δύο γνωρίζουν καλά την τεχνική και τις ικανότητες του αντιπάλου τους, το οποίο είναι μία πολύ ρεαλιστική υπόθεση δεδομένου ότι τέτοιου είδους πληροφορίες παρέχονται τόσο από τους ποδοσφαιρικούς συλλόγους όσο και από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το «καλό» πόδι του επιθετικού είναι το δεξί. Επομένως, μπορούμε λογικά να συμπεράνουμε ότι θα σκοράρει με μεγαλύτερη ευκολία στα αριστερά. Ο τερματοφύλακας, ως ενήμερος παίκτης, γνωρίζει αυτήν την κατάσταση και λαμβάνει τις κατάλληλες αποφάσεις.

Ιδανικά, ο επιθετικός θα ήθελε να στοχεύει μόνο στις γωνίες. Ωστόσο, κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα επίφοβο καθώς, παρόλο που είναι πιο δύσκολο να πιάσει την μπάλα ο τερματοφύλακας, υπάρχει ο κίνδυνος να βγει η μπάλα εκτός αγωνιστικού χώρου.

Διαμορφώνουμε τον πίνακα αποδόσεων για να λύσουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

		Τερματοφύλακας					
		Α	Δ	Κ	ΚΠ	ΑΓ	ΔΓ
	Α	0.6	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9
Επιθετικός	Δ	0.7	0.4	0.7	0.7	0.7	0.7
	Κ	0.7	0.7	0.3	0.6	0.8	0.8
	ΚΠ	0.5	0.5	0.4	0.3	0.5	0.5
	ΑΓ	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4
	ΔΓ	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2

Όπου:

Α: κάτω αριστερά, Δ: κάτω δεξιά, Κ: κέντρο, ΚΠ: κέντρο πάνω, ΑΓ: αριστερή γωνία, ΔΓ: δεξιά γωνία

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την επέκταση Solver του Microsoft Excel λύνουμε το πρόβλημα με την μέθοδο Simplex, δηλαδή μεγιστοποιούμε το άθροισμα κατά γραμμή για τον επιθετικό και ελαχιστοποιούμε ανά στήλη, αντίστοιχα, υπό τους περιορισμούς να είναι μικρότερο της μονάδας. Προκύπτει, έτσι ο παρακάτω πίνακας:

		Τερματοφύλακας						
		Α	Δ	Κ	ΚΠ	ΑΓ	ΔΓ	
	Α	0.6	0.9	0.8	0.9	0.8	0.9	0.231362
Επιθετικός	Δ	0.7	0.4	0.7	0.7	0.7	0.7	0.899743
	Κ	0.7	0.7	0.3	0.6	0.8	0.8	0.616967
	ΚΠ	0.5	0.5	0.4	0.3	0.5	0.5	0
	ΑΓ	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4	0
	ΔΓ	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0
		1.16161616	0.2020202	0.15151515	0	0	0	

Με Answer Report 1:

Microsoft Excel 14.0 Answer Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:26:27 PM
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine
Engine: Simplex LP
Solution Time: 0.031 Seconds.
Iterations: 3 Subproblems: 0
Solver Options
Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0.000001
Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$G$24	<= Δ	0	1.515151515

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$F$18	Α	0	1.161616162	Contin
$G$18	Δ	0	0.202020202	Contin
$H$18	Κ	0	0.151515152	Contin
$I$18	ΚΠ	0	0	Contin
$J$18	ΑΓ	0	0	Contin
$K$18	ΔΓ	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$23	Περιορισμοί:	1	$B$23<=$D$23	Binding	0
$B$24	Περιορισμοί:	1	$B$24<=$D$24	Binding	0
$B$25	Περιορισμοί:	1	$B$25<=$D$25	Binding	0
$B$26	Περιορισμοί:	0.742424242	$B$26<=$D$26	Not Binding	0.257575758
$B$27	Περιορισμοί:	0.606060606	$B$27<=$D$27	Not Binding	0.393939394
$B$28	Περιορισμοί:	0.454545455	$B$28<=$D$28	Not Binding	0.545454545

Sensitivity Report 1:

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:26:27 PM

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$18	Α	1.161616162	0	1	0.324324324	0.193548387
$G$18	Δ	0.202020202	0	1	0.315789474	0.428571429
$H$18	Κ	0.151515152	0	1	0.153846154	0.294117647
$I$18	ΚΠ	0	-0.151515152	1	0.151515152	1E+30
$J$18	ΑΓ	0	-0.151515152	1	0.151515152	1E+30
$K$18	ΔΓ	0	-0.212121212	1	0.212121212	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$23	Περιορισμοί:	1	0.606060606	1	0.621621622	0.142857143
$B$24	Περιορισμοί:	1	0.606060606	1	0.105263158	0.142857143
$B$25	Περιορισμοί:	1	0.303030303	1	0.076923077	0.285714286
$B$26	Περιορισμοί:	0.742424242	0	1	1E+30	0.257575758
$B$27	Περιορισμοί:	0.606060606	0	1	1E+30	0.393939394
$B$28	Περιορισμοί:	0.454545455	0	1	1E+30	0.545454545

Limits Report 1:

Microsoft Excel 14.0 Limits Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:26:27 PM

Cell	Objective Name	Value
$G$24	<=Δ	1.515151515

Cell	Variable Name	Value	Lower Limit	Objective Result	Upper Limit	Objective Result
$F$18	Α	1.161616162	0	0.353535354	1.161616162	1.515151515
$G$18	Δ	0.202020202	0	1.313131313	0.202020202	1.515151515
$H$18	Κ	0.151515152	0	1.363636364	0.151515152	1.515151515
$I$18	ΚΠ	0	0	1.515151515	0	1.515151515
$J$18	ΑΓ	0	0	1.515151515	0	1.515151515
$K$18	ΔΓ	0	0	1.515151515	0	1.515151515

Answer Report 2:

Microsoft Excel 14.0 Answer Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:39:25 PM
Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
Solver Engine
Solver Options

Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$K$24	τερματοφύλακας: ΔΓ	2.5	1.748071979

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$L$12:$L$17				

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$B$35	Περιορισμοί:	1.200514139	$B$35>=$D$35	Not Binding	0.200514139
$B$36	Περιορισμοί:	1	$B$36>=$D$36	Binding	0
$B$37	Περιορισμοί:	1	$B$37>=$D$37	Binding	0
$B$38	Περιορισμοί:	1	$B$38>=$D$38	Binding	0
$B$39	Περιορισμοί:	1.123393316	$B$39>=$D$39	Not Binding	0.123393316
$B$40	Περιορισμοί:	1.123393316	$B$40>=$D$40	Not Binding	0.123393316

Sensitivity Report 2:

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:39:25 PM

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$L$12:$L$17						

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$35	Περιορισμοί:	1.200514139	0	1	0.200514139	1E+30
$B$36	Περιορισμοί:	1	0.745501285	1	0.729166667	0.428571429
$B$37	Περιορισμοί:	1	0.411311054	1	0.380952381	0.36
$B$38	Περιορισμοί:	1	0.59125964	1	0.243243243	0.106430155
$B$39	Περιορισμοί:	1.123393316	0	1	0.123393316	1E+30
$B$40	Περιορισμοί:	1.123393316	0	1	0.123393316	1E+30

Και Limits Report 2:

Microsoft Excel 14.0 Limits Report
Worksheet: [excel αποδόσεις.xlsx]Sheet1
Report Created: 5/21/2017 9:39:25 PM

Cell	Objective Name	Value
$K$24	τερματοφύλακας: ΔΓ	1.748071979

Cell	Variable Name	Value	Lower Limit	Objective Result	Upper Limit	Objective Result
$L$12:$L$17						

Επομένως, για τον επιθετικό έχουμε μεγιστοποίηση στο (Α, Δ, Κ, ΚΠ, ΑΓ, ΔΓ) = (1.16161616, 0.2020202, 0.15151515, 0, 0, 0) με τιμή 1.51515152. Άρα καταλήγουμε ότι η **βέλτιστη στρατηγική για τον επιθετικό** είναι (Α, Δ, Κ, ΚΠ, ΑΓ, ΔΓ) = (0.76666667, 0.13333333, 0.1, 0, 0, 0). Δηλαδή, να στοχεύει αριστερά το 76,7%, δεξιά το 13,3% και κέντρο το 10%.

Για τον τερματοφύλακα έχουμε ελαχιστοποίηση στο (Α, Δ, Κ, ΚΠ, ΑΓ, ΔΓ) = (0.231362, 0,899743, 0.616967, 0, 0, 0) με τιμή 1.74807198. Άρα η **βέλτιστη στρατηγική για τον τερματοφύλακα** είναι (Α, Δ, Κ, ΚΠ, ΑΓ, ΔΓ) = (0.13235294, 0.51470588, 0.35294118, 0, 0, 0). Δηλαδή, να πέφτει αριστερά το 13,2%, δεξιά το 51,5% και κέντρο το 35,3%.

Παρατηρούμε βάσει αυτού του πίνακα αποδόσεων ότι κανέναν από τους δύο δεν συμφέρει να ασχοληθεί με την πάνω μεριά του τέρματος.

Και η λύση του παιγνίου είναι 66/100. Δηλαδή με αυτές τις στρατηγικές ο επιθετικός σκοράρει με 66% επιτυχία και ο τερματοφύλακας αποκρούει με 34% επιτυχία. Κάθε αλλαγή στην στρατηγική θα προκαλεί μείωση των ποσοστών αυτών υπέρ του αντιπάλου.

Πειράματα Ελέγχου της Υπόθεσης Minimax

Χάρη στην μελέτη ιδανικά ορθολογικών παικτών βοηθούμαστε σημαντικά στην κατανόηση ρεαλιστικών αντίστοιχων καταστάσεων με άτομα, εταιρίες ή φορείς. Άλλωστε, σε αυτό χρησιμεύουν τα μοντέλα μας· μελετώντας τα κατανοούμε καλύτερα την πραγματικότητα.

Δεν αρκεί όμως η θεωρητική μελέτη. Είναι αναγκαίο να ελέγξουμε ότι τα αποτελέσματα επαληθεύονται και στην πράξη. Συχνά είναι εξαιρετικά δύσκολο να ελεγχθεί κάτι τέτοιο, αφού οι προβλέψεις, συνήθως, εξαρτώνται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων χρησιμότητας καθώς και από τις αποδόσεις, παράμετροι που καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολο να έχουμε σαφή εικόνα του φυσικού κόσμου. Επιπροσθέτως, υπάρχει δυσκολία στον προσδιορισμό του συνόλου στρατηγικών και στην κατασκευή του πίνακα αποδόσεων του εκάστοτε παιγνίου. Αυτά έχουν ως αποτέλεσμα ακόμα και οι πιο σημαντικές ανακαλύψεις της θεωρίας παιγνίων να παραμένουν σε θεωρητικό επίπεδο.

Η πιο βασική ιδέα στην θεωρία παιγνίων είναι η υπόθεση του minimax. Παλιά πειράματα που είχαν γίνει με στόχο τον έλεγχο της υπόθεσης του minimax έτειναν να δίνουν, κατά κύριο λόγο, αρνητικά αποτελέσματα (Fox (1972), Brayer (1964), Lieberman (1960, 1962), Messick (1967), Rapoport κ.α. (1976)). Ο O’Neill παρατήρησε ότι σε αυτά τα πειράματα υπέθεταν ότι η χρησιμότητα σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος εξαρτάται μόνο από το προσωπικό κέρδος του κάθε παίκτη και είναι γραμμική συνάρτηση αυτού. Δεν είχε γίνει προσπάθεια να κατασκευαστεί η συνάρτηση χρησιμότητας του κάθε παίκτη ξεχωριστά και μετά να κατασκευαστεί ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου έτσι, ώστε να προκύπτουν χρησιμότητες μηδενικού αθροίσματος.

Το πείραμα του O’Neill

Το 1987 ο Barry O’Neill κατασκεύασε ένα πείραμα διαμορφωμένο, ώστε να ελέγχει τις υποθέσεις του θεωρήματος minimax σε επαναλαμβανόμενα παίγνια σταθερού αθροίσματος δύο ατόμων. Τα αποτελέσματα που εξήγαγε πλησίαζαν περισσότερο τις υποθέσεις του minimax σε σχέση με πειράματα του παρελθόντος χάρη στην απλότητα των κανόνων του παιγνίου και της συνάρτησης χρησιμότητας. Ξεπέρασε τα προβλήματα των προγενέστερών του κατασκευάζοντας έναν 4×4 πίνακα αποδόσεων με την ιδιότητα ότι η στρατηγική minimax του κάθε παίκτη είναι αμετάβλητη στο σύνολο που περιέχει όλες τις λογικές συναρτήσεις χρησιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι η λύση minimax παραμένει αμετάβλητη για οποιοδήποτε θετικό γραμμικό μετασχηματισμό οποιασδήποτε από τις χρησιμότητες των δύο παικτών. Ο O’Neill υποστήριξε ότι τα δικά του αποτελέσματα είναι πιο αξιόπιστα από αυτά που είχαν εξαγάγει οι παλιότεροί του λόγω του συγκριτικά πολύ ανώτερου σχεδιασμού του πειράματός του.

Η διατύπωση του παιγνίου του O'Neill είναι η εξής: 25 ζεύγη παικτών έπαιξαν 105 φορές ένα παίγνιο ταιριάσματος καρτών πρόσωπο με πρόσωπο. Οι παίκτες δεν ήξεραν εξ αρχής πόσες φορές θα επαναληφθεί το παίγνιο. Οι παίκτες διαλέγουν τις κάρτες τους *ταυτόχρονα*, τις δείχνουν στον αντίπαλό τους και σε έναν διαιτητή και πληρώνουν τον αντίπαλο όσο χρειάζεται. Στην αρχή του παιχνιδιού δίνεται σε κάθε παίκτη το ποσό των $2,50. Σε κάθε γύρο ο νικητής κερδίζει 5 λεπτά, τα οποία του δίνει ο ηττημένος. Πρόκειται για παίγνιο σταθερού αθροίσματος με τον παρακάτω πίνακα αποδόσεων:

		Παίκτης Στήλη			
		1	2	3	J
	1	-	+	+	-
Παίκτης Γραμμή	2	+	-	+	-
	3	+	+	-	-
	J	-	-	-	+

Τα σύμβολα 1, 2, 3 και J συμβολίζουν τις κάρτες άσσος, δύο, τρία και τζόκερ. Το σύμβολο «-» στον πίνακα αποδόσεων σημαίνει ήττα για τον παίκτη-γραμμή και το σύμβολο «+» νίκη.

Από ερωτηματολόγια φάνηκε ότι οι κανόνες του παιγνίου έγιναν κατανοητοί από τους παίκτες.

Λύθηκε το παίγνιο με την χρήση της μεθόδου Simplex για να επαληθευτεί η λύση του O'Neill με το πρόγραμμα Solver του Microsoft Excel.

	1	2	3	J
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	0
J	0	0	0	1
	0.5	0.5	0.5	1

παικτης-γραμμή: 2.5

<u>Περιορισμοί:</u>

1 =SUMPRODUCT(D9:G9,D13:G13) <= 1

1 =SUMPRODUCT(D10:G10,D13:G13) <= 1

1 =SUMPRODUCT(D11:G11,D13:G13) <= 1

1 =SUMPRODUCT(D12:G12,D13:G13) <= 1

άρα λύση:

		0.5	0.5	0.5	1
÷		2.5	2.5	2.5	2.5
		0.2	0.2	0.2	0.4

Το παίγνιο έχει μοναδική ισορροπία Nash, την (0.2, 0.2, 0.2, 0.4) και για τους δύο παίκτες. Η πιθανότητα νίκης για τον παίκτη-γραμμή στην ισορροπία, είναι 0.4. Αφού και οι δύο παίκτες μπορούν να εξασφαλίσουν το μερίδιό τους ακολουθώντας την στρατηγική αυτή, δεν υπάρχει λόγος, σύμφωνα με την θεωρία, να αποκλίνουν από την στρατηγική αυτήν, από ανεξάρτητους και ισόνομους συνδυασμούς της στρατηγικής ισορροπίας. Πράγματι, αυτός είναι ο μοναδικός συνδυασμός στρατηγικής ισορροπίας στο επαναλαμβανόμενο παίγνιο, αν υποθέσουμε ότι στόχος κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το άθροισμα των κερδών του.

Ο O'Neill επικεντρώθηκε στις παρατηρούμενες σχετικές συχνότητες των τεσσάρων επιλογών και στις αθροιστικές πιθανότητες νίκης.

TABLE I

RELATIVE FREQUENCIES OF CARD CHOICES IN O'NEILL'S EXPERIMENT [a]

		Column Player Choice				Marginal Frequencies For Row Player:
		1	2	3	J	
Row Player Choice	1	.044 (.040) [.004]	.043 (.040) [.004]	.043 (.040) [.004]	.091 (.080) [.005]	.221 (.200) [.008]
	2	.046 (.040) [.004]	.038 (.040) [.004]	.038 (.040) [.004]	.092 (.080) [.005]	.215 (.200) [.008]
	3	.049 (.040) [.004]	.032 (.040) [.004]	.037 (.040) [.004]	.085 (.080) [.005]	.203 (.200) [.008]
	J	.086 (.080) [.005]	.065 (.080) [.005]	.051 (.080) [.005]	.158 (.160) [.007]	.362 (.400) [.010]
Marginal Frequencies for Column Player:		.226 (.200) [.008]	.179 (.200) [.008]	.169 (.200) [.008]	.426 (.400) [.010]	

[a] Numbers in parentheses represent minimax predicted relative frequencies. Numbers in brackets represent standard deviations for observed relative frequencies under the minimax hypothesis.

Με βάση αυτόν τον πίνακα η θεωρία επιβεβαιώνεται με σφάλμα λιγότερο του 1%. Έτσι κατέληξε ότι το μοντέλο του minimax υποστηρίζεται από τα δεδομένα.

Η κριτική των James Brown και Robert Rosenthal του πειράματος του O’Neill

Στην δημοσίευσή τους με τίτλο «Testing the Minimax Hypothesis: A Re-Examination of O’Neill’s Game Experiment» στο περιοδικό Econometrica, οι Brown και Rosenthal επανεξετάζουν τα δεδομένα που αποκομίσθηκαν από το πείραμα του O’Neill. Καταλήγουν ότι υπάρχουν πολύ λιγότερες ενδείξεις ότι οι παίκτες δρουν σύμφωνα με το minimax από αυτές που πιστεύει ο O’Neill. Αντιθέτως, ανακαλύπτουν ότι οι κινήσεις των παικτών εξαρτώνται σε στατιστικά σημαντικό βαθμό από τις προηγούμενες κινήσεις των αντιπάλων τους, κάτι το οποίο ερμηνεύουν ως ένδειξη ότι οι ίδιοι οι παίκτες απορρίπτουν το minimax ως την ιδανική γραμμή δράσης για τις κινήσεις των αντιπάλων τους. Επίσης, διαπιστώνουν ότι δεν υπάρχουν στοιχεία που να υποδεικνύουν ότι οι παίκτες πλησιάζουν το minimax καθώς εξοικειώνονται περισσότερο με το παίγνιο (learning).

Τα πειράματα των Rapoport και Boebel

Οι Rapoport και Boebel έχοντας μελετήσει το πείραμα του O'Neill καθώς και την κριτική των συμπερασμάτων του από τους Brown και Rosenthal διεξήγαγαν δύο πειράματα για τον έλεγχο του μοντέλου minimax παρόμοια με αυτό του O'Neill.

Πείραμα 1

Στο Πανεπιστήμιο της Βόρειας Καρολίνα αναρτήθηκαν αγγελίες που ανέφεραν ότι προσφέρεται αμοιβή \$20 έως \$40 για συμμετοχή σε δύο φάσεις ενός πειράματος λήψης αποφάσεων. Ανταποκρίθηκαν 20 προπτυχιακοί και μεταπτυχιακοί φοιτητές για αμοιβή ανάλογη της απόδοσής τους (κίνητρο). Οι συμμετέχοντες έλαβαν μέρος ανά ζεύγη. Κάθε πείραμα είχε διάρκεια περίπου 100 λεπτών, κάτι το οποίο σε αυτό το πείραμα οι παίκτες γνώριζαν εξ αρχής.

Όπως και στο παίγνιο του O'Neill, οι παίκτες κάθονται ο ένας απέναντι στον άλλο σε τραπέζι σε ηχομονωμένο δωμάτιο. Μπροστά από κάθε παίκτη βρίσκεται εξ αρχής μία κάρτα που διαχωρίζει ποιος είναι ο παίκτης X και ποιος ο Y, δηλαδή ο παίκτης-γραμμή και στήλη αντίστοιχα. Επίσης, στην αρχή του παιχνιδιού δίνεται σε κάθε παίκτη μία υποχρέωση πληρωμής (IOU=I owe you) των \$15 για να την εξαργυρώσουν στο τέλος του πειράματος, οι οδηγίες του παιγνίου γραπτώς, πέντε κάρτες με τα γράμματα C, L, F, I, και O και ο πίνακας αποδόσεων του παιγνίου για τον παίκτη X, όπως φαίνεται παρακάτω. Στις οδηγίες τόνιζαν ότι τα γράμματα στις κάρτες δεν έχουν κάποια σημασία.

		Παίκτης Y				
		C	L	F	I	O
	C	W	L	L	L	L
	L	L	L	W	W	W
Παίκτης X	F	L	W	L	L	W
	I	L	W	L	W	L
	0	L	W	W	L	L

Ο πίνακας αποδόσεων του Y είναι ο αντίστροφος του X.

Η διαδικασία ήταν η εξής: κάθε παίκτης κατεβάζει μία από τις πέντε κάρτες, το ίδιο κάνει και ο αντίπαλός του ***ταυτόχρονα***, χωρίς να ξέρει ο ένας τι σκοπεύει να παίξει ο άλλος. Οι αποφάσεις των παικτών σχετικά με τις κάρτες που παίζουν κάθε φορά καθορίζουν ποιος κερδίζει και ποιος χάνει σε κάθε γύρο, σύμφωνα με τον πίνακα αποδόσεων. Στο φύλλο οδηγιών που δόθηκε στους παίκτες τόνιζαν ότι ο νικητής καθορίζεται λαμβάνοντας υπόψιν τις κάρτες που παίζει τόσο ο παίκτης όσο και ο αντίπαλός του και ότι τα συμφέροντα των δύο είναι αντικρουόμενα: η νίκη του ενός είναι η ήττα του άλλου. Σε κάθε γύρο ο παίκτης X μπορεί είτε να κερδίσει \$10, είτε να χάσει \$6 από τον παίκτη Y. Αντίστοιχα, ο παίκτης Y μπορεί είτε να κερδίσει \$6, είτε να χάσει \$10 από τον παίκτη X. Όπως φαίνεται, ο παίκτης X και ο παίκτης Y δεν έχουν τις ίδιες ευκαιρίες να κερδίσουν μεγάλα ποσά, γι' αυτό το πείραμα χωριζόταν σε δύο σετ με τους παίκτες να αλλάζουν ρόλους στο δεύτερο χωρίς, όμως, να παίζουν με τον ίδιο αντίπαλο. Τα δύο σετ διεξάγονταν με 2 έως 5 μέρες διαφορά. Στην αρχή του κάθε σετ έκαναν 10 δοκιμαστικούς γύρους, για να εξοικειωθούν οι συμμετέχοντες με τον πίνακα αποδόσεων και τους κανόνες και ακολουθούσαν 120 πραγματικοί γύροι.

Σκοπός, προφανώς, του κάθε παίκτη είναι να κερδίσει όσα περισσότερα χρήματα μπορεί. Η διαδικασία πληρωμής, η οποία αναγραφόταν ξεκάθαρα στο φύλλο οδηγιών που τους δόθηκε, ήταν ότι στην αρχή κάθε σετ ο κάθε παίκτης λάμβανε μία υποχρέωση πληρωμής (IOU) των \$15 και στο τέλος του δεύτερου σετ ο κάθε παίκτης διάλεγε τυχαία 3 παιχνίδια (γύρους) από το κάθε σετ. Τα κέρδη ή οι απώλειες προσθέτονταν ή αφαιρούνταν από τα \$15 και οι παίκτες πληρώνονταν απευθείας.

Πρόκειται για ένα 5×5 παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Κάθε παίκτης έχει πέντε καθαρές στρατηγικές: C, L, F, I, και O. Κάθε κελί στον πίνακα αποδόσεων δείχνει την απόδοση του παίκτη X όπου «W» σημαίνει νίκη (win) και «L» ήττα (loss). Σύμφωνα με την θεωρία του minimax και οι δύο παίκτες πρέπει να χρησιμοποιήσουν το διάνυσμα μεικτών στρατηγικών (3/8, 2/8, 1/8, 1/8, 1/8). Δηλαδή, πρέπει να διαλέγουν το C τρεις φορές πιο συχνά από τα F, I, O και το L δύο φορές πιο συχνά από τα F, I, και O. Αυτό σημαίνει ότι οι στρατηγικές F, I, O είναι συμμετρικές, επομένως, ο 5×5 πίνακας δεν είναι στην πραγματικότητα παρά ένας 3×3.

Αν οι παίκτες ακολουθήσουν την λύση minimax, ο παίκτης X θα κερδίζει το 37,5% των γύρων και ο παίκτης Y το 62,5% των γύρων. Το αναμενόμενο κέρδος για κάθε παίκτη είναι μηδενικό.

Τα Αποτελέσματα:

Ο αριθμός των συνολικών νικών ανά παίκτη φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Οι συχνότητες παρουσιάζονται ξεχωριστά για τους παίκτες X και Y. Η αναμενόμενη πιθανότητα νίκης για τον παίκτη X είναι 0,375 και στο πείραμα συνδυάζοντας όλα τα παιχνίδια και των 20 συμμετεχόντων οι νίκες του X θα έπρεπε να είναι 900 στα 2.400 παιχνίδια. Οι νίκες του X που παρατηρήθηκαν στην πραγματικότητα ήταν 959. Η διαφορά ανάμεσα στον παρατηρούμενο και τον αναμενόμενο αριθμό νικών είναι σημαντική, σύμφωνα με την κανονική προσέγγιση στην διωνυμική κατανομή ($z=2,49$, $p < 0,05$). Δηλαδή, οι παίκτες X στην αθροιστική μελέτη κέρδιζαν πολύ πιο συχνά από ό,τι θα περιμέναμε σύμφωνα με το θεώρημα minimax, αντίστοιχα οι Y πολύ πιο σπάνια.

NUMBER OF WINS BY PLAYER IN EXPERIMENTS 1 AND 2

No. of player	Experiment 1		No. of player	Experiment 2	
	Player X	Player Y		Player X	Player Y
1	46	77	1	49	73
2	44	74	2	52	71
3	41	75	3	43	74
4	60*	79	4	55	77
5	45	76	5	59*	69
6	43	75	6	44	61
7	51	57*	7	38	68
8	54	69	8	51	82
9	38	66	9	61*	76
10	37	82	10	56	59*
11	46	65	11	54	73
12	53	74	12	43	66
13	34	60*	13	59*	80
14	55	86	14	47	61*
15	54	71	15	49	65
16	45	66	16	46	71
17	56	83	17	58	64
18	63*	64	18	47	62
19	45	67	19	46	77
20	49	75	20	40	74
Mean	47.95	72.05		49.85	70.15
SD	7.72	7.72		6.72	6.72

* $p < 0.01$.

Αν όμως μελετήσουμε ξεχωριστά τον κάθε παίκτη, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, η υπόθεση του minimax απορρίφθηκε ($p < 0{,}01$) μόνο σε 4 από τις 40 περιπτώσεις. Επομένως, αν δεν κοιτάξουμε το αθροιστικό, σε ατομικό επίπεδο υποστηρίζεται το μοντέλο minimax.

Ακόμα, αν οι παίκτες παίζουν σύμφωνα με το μοντέλο minimax θα πρέπει για κάθε παίκτη ο αριθμός νικών του ως Χ και ο αριθμός νικών του ως Υ να είναι ανεξάρτητοι. Με το τεστ του Pearson βλέπουμε ότι είναι όντως ανεξάρτητες οι στήλες του παραπάνω πίνακα για το πείραμα 1 με 0,17 ($p > 0{,}05$) που και αυτό συμφωνεί με το μοντέλο του minimax.

Με τεστ x^2 στο αθροιστικό για το πείραμα 1 απορρίπτεται το μοντέλο minimax για οποιοδήποτε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

PREDICTED AND OBSERVED FREQUENCIES OF CHOICE IN EXPERIMENT 1

		Player Y					
		C	L	F	I	O	Overall
Player X	C	286	119	140	56	101	702
		337.5	225	112.5	112.5	112.5	900
		(17.0)	(14.3)	(10.4)	(10.4)	(10.4)	(23.7)
	L	246	141	169	74	102	732
		225	150	75	75	75	600
		(14.3)	(11.9)	(8.5)	(8.5)	(8.5)	(21.2)
	F	102	43	75	33	42	295
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
	I	98	52	62	37	38	287
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
	O	11[illegible]	77	77	38	79	384
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
	Overall	845	432	523	238	362	2400
		900	600	300	300	300	2400
		(23.7)	(21.2)	(16.2)	(16.2)	(16.2)	

Note. In each cell the top number is the observed frequency summed across subjects; the middle number is the predicted frequency; and the bottom number (in parentheses) is the predicted standard deviation.

Επειδή ατομικά ο αριθμός γύρων (120) είναι πολύ μικρότερος από τον συνολικό (2.400), τα τεστ που βασίζονται σε έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης, του minimax, σε ατομικό επίπεδο πολύ πιο δύσκολα θα την απορρίψουν σε σχέση με το αθροιστικό επίπεδο. Παρόλα αυτά, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και σε ατομικό επίπεδο, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Παρατηρούμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας της τάξης του 0,05 μόνο ένας παίκτης παίζει σύμφωνα με το minimax, ο παίκτης 13. Ενώ, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 υπάρχουν πέντε τέτοιοι παίκτες, οι 11, 12, 13, 17 και 20.

FREQUENCY DISTRIBUTIONS OF INDIVIDUAL CHOICES FOR ROW AND COLUMN PLAYERS: EXPERIMENT I

Player X (row)						Player Y (column)					
Player	*C*	*L*	*F*	*I*	*O*	Player	*C*	*L*	*F*	*I*	*O*
1**	22	38	22	20	18	1*	50	19	24	9	18
2*	28	36	19	20	17	2**	33	10	32	21	24
3*	49	40	8	6	17	3**	64	2	36	18	0
4**	31	54	14	10	11	4**	59	34	20	2	5
5**	27	26	21	21	25	5**	40	18	32	4	26
6**	23	40	16	24	17	6**	32	2	30	28	28
7	42	35	18	7	18	7**	39	28	26	8	19
8*	61	28	9	7	15	8**	36	22	33	17	12
9**	47	46	17	4	6	9**	41	7	52	3	17
10*	39	32	9	15	25	10**	49	36	20	2	13
11*	39	20	20	23	18	11	34	42	19	12	13
12*	39	42	12	8	19	12*	52	24	17	6	21
13	55	32	9	7	17	13	42	19	19	19	21
14**	28	45	3	22	22	14	47	20	19	15	19
15**	25	39	9	13	34	15**	38	16	24	7	35
16**	22	34	18	25	21	16**	27	25	32	18	18
17*	28	33	24	19	16	17	40	28	22	13	17
18**	22	35	19	20	24	18*	30	33	20	15	22
19**	27	38	17	12	26	19**	47	16	34	6	17
20*	48	39	11	4	18	20	45	31	12	15	17
Mean	35.10	36.60	14.75	14.35	19.20	Mean	42.25	21.60	26.15	11.90	18.10
SD	11.97	7.46	5.14	7.31	5.90	SD	9.54	11.01	9.09	7.17	7.64
Predicted	45	30	15	15	15	Predicted	45	30	15	15	15

* $p < 0.05$ by the χ^2 test.
** $p < 0.01$ by the χ^2 test.

Αν έπαιζαν όντως σύμφωνα με το minimax θα έπρεπε να ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική είτε ως παίκτες X είτε ως παίκτες Y. Για να ελεγχθεί κάτι τέτοιο αναλύθηκαν όλες οι κινήσεις των παικτών, όπως είχαν επανεξετάσει οι Brown και Rosenthal το πείραμα του O’Neill, για να δουν αν οι παίκτες παρουσίαζαν συσχέτιση μεταξύ των κινήσεών τους και του παρελθόντος του παιχνιδιού.

RESULTS FROM LIKELIHOOD RATIO TESTS OF SIX LOGIT MODELS EXPLAINING THE CHOICE OF CARD C IN EXPERIMENT 1

	Row players model						Column players model					
Subject	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	o	o
2	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	o	o
3	x	x	x	x	x	o	x	x	o	o	o	o
4	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
5	x	o	x	x	x	o	o	o	x	x	o	o
6	o	x	o	o	o	o	x	x	o	o	o	o
7	x	x	x	x	x	x	x	x	o	o	o	x
8	x	x	x	o	x	o	x	o	o	o	o	x
9	x	o	x	o	x	o	x	x	x	o	x	o
10	x	o	x	o	x	o	o	o	x	o	x	o
11	x	o	x	x	x	o	x	x	x	o	x	x
12	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
13	x	x	x	x	o	x	x	x	x	o	o	x
14	x	o	x	o	x	x	x	o	x	x	o	x
15	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
16	x	o	x	x	x	o	x	x	o	o	o	o
17	x	o	o	o	o	x	x	x	o	o	o	o
18	x	o	x	o	x	x	x	o	o	o	o	x
19	o	x	o	o	o	o	x	o	x	o	x	o
20	o	o	x	x	o	o	x	o	x	o	x	o
Frequency	14	9	14	9	12	6	15	10	8	2	5	6

Note. (x) A statistically significant ($p < 0.05$) test result. (o) An insignificant test result.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα από όλα τα τεστ συμπεραίνουμε ότι στο πείραμα 1 δεν βρίσκουμε **ούτε έναν** παίκτη του οποίου η συμπεριφορά να συμβαδίζει με το μοντέλο minimax.

Πείραμα 2

Το δεύτερο πείραμα που διεξήγαγαν ήταν ένας γραμμικός μετασχηματισμός του πρώτου. Ουσιαστικά προσέθεσαν $5 στα κέρδη κάθε παίκτη, δηλαδή για τον παίκτη X η νίκη απέφερε κέρδος $15 ενώ η ήττα -$1. Οι υπόλοιποι κανόνες και ο πίνακας αποδόσεων ήταν οι ίδιοι. Ο γραμμικός αυτός μετασχηματισμός αλλάζει την τιμή του παιγνίου και δίνει πλεονέκτημα στον έναν εκ των δύο αντιπάλων χωρίς, παρόλα αυτά, να επηρεάζει τα αποτελέσματα του minimax. Το πείραμα 2 σχεδιάστηκε για να ελέγξει την στρατηγική ισοτιμία της λύσης minimax.

Η θεωρία του minimax υπαγορεύει ότι το διάνυσμα μεικτής στρατηγικής είναι ακριβώς το ίδιο με του πειράματος 1, όπως και οι πιθανότητες νίκης για τους παίκτες Χ και Υ (0,375 για τον Χ και 0,625 για τον Υ). Η μόνη διαφορά έγκειται στην τιμή του παιγνίου η οποία είναι $5 για τον παίκτη Χ ενώ στο πείραμα 1 ήταν $0.

Τα Αποτελέσματα:

Όπως βλέπουμε στον πίνακα με τις συνολικές νίκες των Χ και Υ στο πείραμα 2, πάλι ο αριθμός των νικών για το Χ είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αναμενόμενο, όπως και στο πείραμα 1. Δηλαδή, αθροιστικά οι νίκες των Χ ήταν 997 από τις 2.400 ($z = 4{,}09$, $p > 0{,}001$), ενώ οι αναμενόμενες ήταν 900, όπως ακριβώς και στο πείραμα 1.

Σε ατομικό επίπεδο έχουμε αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά του πειράματος 1, αφού το minimax απορρίφθηκε σε επίπεδο 0,01 μόνο από 5 παίκτες, τους Χ: 5, 9 και 13 και τους Υ: 10 και 14. Η συσχέτιση Pearson μεταξύ των στηλών των Χ και Υ είναι 0,18 ($p > 0{,}05$) το οποίο υποστηρίζει το μοντέλο minimax.

Ωστόσο, όπως είδαμε οι έλεγχοι που βασίζονται μόνο στον αριθμό νικών δεν είναι πολύ ισχυροί.

PREDICTED AND OBSERVED FREQUENCIES OF CHOICE IN EXPERIMENT 2

		Player *Y*					
		C	*L*	*F*	*I*	*O*	Overall
Player *X*	*C*	296	133	126	74	107	736
		337.5	225	112.5	112.5	112.5	900
		(17.0)	(14.3)	(10.4)	(10.4)	(10.4)	(23.7)
	L	248	153	176	99	102	778
		225	150	75	75	75	600
		(14.3)	(11.9)	(8.5)	(8.5)	(8.5)	(21.2)
	F	63	50	50	34	42	239
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
	I	105	42	60	32	36	275
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
	O	119	85	73	40	55	372
		112.5	75	37.5	37.5	37.5	300
		(10.4)	(8.5)	(6.1)	(6.1)	(6.1)	(16.2)
		831	463	485	279	342	2400
	Overall	900	600	300	300	300	2400
		(23.7)	(21.2)	(16.2)	(16.2)	(16.2)	

Note. In each cell the top number is the observed frequency summed across subjects; the middle number is the predicted frequency; and the bottom number (in parentheses) is the predicted standard deviation.

Όπως και στο πείραμα 1, έτσι και στο δεύτερο πείραμα ο έλεγχος x^2 απορρίπτει τελείως την υπόθεση minimax.

FREQUENCY DISTRIBUTIONS OF INDIVIDUAL CHOICES FOR ROW AND COLUMN PLAYERS: EXPERIMENT 2

Player X (row)						Player Y (column)					
Player	*C*	*L*	*F*	*I*	*O*	Player	*C*	*L*	*F*	*I*	*O*
1**	25	49	14	16	16	1**	44	44	18	7	7
2**	34	52	3	3	28	2**	48	21	39	8	4
3**	15	34	25	25	21	3	41	20	23	17	19
4	41	26	14	15	24	4**	25	20	27	25	23
5**	23	55	6	28	8	5**	38	0	23	34	25
6*	44	44	13	12	7	6**	40	2	37	15	26
7	47	24	16	16	17	7**	22	41	15	21	21
8*	33	45	13	14	15	8	33	28	23	17	19
9**	26	47	16	19	12	9**	55	31	29	1	4
10**	68	8	5	9	30	10**	31	20	35	17	17
11	43	37	12	11	17	11	36	34	23	14	13
12**	18	23	30	16	33	12*	47	23	22	20	8
13*	31	43	15	11	20	13**	54	24	3	1	38
14**	33	51	7	5	24	14**	29	20	26	10	35
15*	44	34	12	7	23	15**	52	18	26	8	16
16**	44	47	8	9	12	16**	55	7	25	12	21
17**	47	50	13	5	5	17**	47	24	27	18	4
18*	50	27	4	20	19	18**	77	16	9	6	12
19**	28	55	5	14	18	19**	30	39	26	9	16
20*	42	27	8	20	23	20**	27	31	29	19	14
Mean	36.80	38.90	11.95	13.75	18.60	Mean	41.55	23.15	24.25	13.95	17.10
SD	12.60	12.99	6.81	6.61	7.52	SD	13.34	11.78	8.54	8.09	9.53
Predicted	45	30	15	15	15	Predicted	45	30	15	15	15

* $p < 0.05$ by the χ^2 test.
** $p < 0.01$ by the χ^2 test.

Παρατηρώντας τις συχνότητες με τις οποίες επιλέγουν οι παίκτες τις κάρτες στον παραπάνω πίνακα και συγκρίνοντάς τις με τις αντίστοιχες του πειράματος 1 διαπιστώνουμε ότι μοιάζουν πολύ. Διεξαγοντας t-tests καταλήγουμε ότι δεν υπάρχουν στοιχεία που να απορρίπτουν την στρατηγική ισοδυναμία. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ θετικό για να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε γενικά συμπεράσματα.

RESULTS FROM LIKELIHOOD RATIO TESTS OF SIX LOGIT MODELS EXPLAINING THE CHOICE OF CARD C IN EXPERIMENT 2

	Row players model						Column players model					
Subject	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	o	o	o	o	x	o	x	x	x	o	o	o
2	o	o	o	x	o	o	x	x	o	o	x	o
3	x	o	o	o	x	o	x	x	x	x	o	o
4	x	x	x	o	o	o	x	x	o	o	o	o
5	x	o	x	o	x	o	o	o	o	o	o	o
6	x	o	x	x	x	o	x	x	o	o	o	o
7	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
8	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
9	x	x	x	x	x	o	x	x	o	o	o	o
10	o	x	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
11	o	o	o	o	o	o	x	x	x	o	x	o
12	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	o	o
13	x	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
14	x	o	x	x	x	o	x	x	x	o	o	x
15	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
16	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
17	o	o	o	o	o	o	o	x	o	o	o	o
18	o	o	x	o	x	o	x	x	x	o	x	o
19	x	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o
20	o	o	o	o	o	o	x	o	x	o	x	o
Frequency	9	6	9	7	10	1	11	11	6	1	4	1

Note. A statistically significant ($p < 0.05$) test result. (o) An insignificant test result.

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε ότι μόνο οι επιλογές δεκατεσσάρων (X: 7, 11, 12, 15, 16, 17, Y: 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 19) από τους 40 παίκτες, των οποίων η επιλογή της κάρτας C συμφωνεί με το διωνυμικό μοντέλο, μόνο οι επιλογές των παικτών 7, 15 και 16 συμφωνούν, είτε παίζουν ως X, είτε ως Y. Και σε συνδυασμό και με τον πίνακα των συχνοτήτων των καρτών οι κατανομές των 11 από τους 14 αυτούς απέχουν πολύ από την μεικτή στρατηγική minimax. Οι τρεις εξαιρέσεις είναι οι παίκτες X: 7, 11 και Y: 8 των οποίων οι επιλογές σύμφωνα με όλους τους ελέγχους φαίνεται να συμβαδίζουν με το μοντέλο minimax.

Επαλήθευση της Θεωρητικής Λύσης Minimax στην Πράξη

Πολλές φορές οι συγγραφείς επιλέγουν να κατασκευάσουν πειράματα που ελέγχουν τις υποθέσεις των παιγνίων. Δυστυχώς, παρόλη την επιμελή προσπάθεια να δημιουργήσουν το ιδανικό πείραμα, πολλά από τα αποτελέσματά τους, συνήθως, δείχνουν ότι οι συμμετέχοντες δεν παίζουν σύμφωνα με τις θεωρητικές υποθέσεις της ισορροπίας. Για παράδειγμα, πολλά πειράματα έχουν γίνει για τον εμπειρικό έλεγχο της ισχύος του θεωρήματος minimax του von Neumann από τον O’Neill, Brown και Rosenthal 1990, Rapoport και Boebel 1992, Camerer 2003.

Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε ότι σε αυτού του είδους τα πειράματα οι συμμετέχοντες, ενδεχομένως, δεν έχουν ξαναβρεθεί σε αντίστοιχες καταστάσεις με αυτές που καλούνται να αντιμετωπίσουν και, παρόλο που κατά κανόνα πρόκειται για πολύ απλές καταστάσεις, είναι δύσκολο να αποκτήσουν κατάλληλη εξοικείωση με το εκάστοτε αντικείμενο στον περιορισμένο χρόνο κατά τον οποίο λαμβάνει χώρα το πείραμα. Αυτό έχει οδηγήσει και στην δημιουργία νέου κλάδου, αυτού της «μάθησης» (learning) σε πειραματικά παιχνίδια ή απλά της διαχείρισης παιγνίων χωρίς ισορροπία. Έτσι, παρόλο που θεωρητικά υπάρχουν αποτελέσματα χρήσιμα για την κατανόηση της ανθρώπινης συμπεριφοράς σε κοινωνικό και οικονομικό περιβάλλον, τα βασικά αποτελέσματα δεν χρήζουν πειραματικής και, κατά συνέπεια, εμπειρικής υποστήριξης.

Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να κάνουμε μια εμπειρική μελέτη της θεωρίας των στρατηγικών. Βασική αρχή σε τέτοιες περιπτώσεις είναι ότι οι ενέργειες του κάθε παίκτη δεν πρέπει να είναι προβλέψιμες από τον αντίπαλό του. Η θεωρία της μεικτής στρατηγικής, συμπεριλαμβανομένου του θεωρήματος Minimax του von Neumann και της ισορροπίας Nash, αποτελούν την βάση για να μελετήσουμε καταστάσεις στρατηγικών, στις οποίες οι παίκτες χρειάζεται να δρουν απρόβλεπτα. Θα χρησιμοποιήσουμε πραγματικά στοιχεία από παιχνίδια επαγγελματιών αθλητών, για να ελέγξουμε το θεώρημα minimax.

Το Θεώρημα Minimax στο Επαγγελματικό Τένις

Ο βασικός στόχος της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων είναι να εξηγήσει καταστάσεις στις οποίες οι αποφάσεις του ενός παίκτη χρειάζεται να μην είναι προβλέψιμες από τον αντίπαλό του. Η θεωρία της μεικτής στρατηγικής κατά Nash και το θεώρημα Minimax του von Neumann παραμένουν ακόμα τα βασικά εργαλεία για να επιτύχουμε αυτόν τον στόχο.

Σε πειραματικό επίπεδο φαίνεται να μην επαληθεύεται η θεωρία, από όπου και ανάγεται το ερώτημα: στην πραγματικότητα οι άνθρωποι χρησιμοποιούν οποιουδήποτε είδους στρατηγική σαν αυτήν που υπαγορεύει η θεωρία;

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον έλεγχο της υπόθεσης του θεωρήματος Minimax χρησιμοποιώντας πραγματικά στοιχεία από επαγγελματικούς αγώνες τένις, όπως έκαναν οι Walker και Wooders στην δημοσίευσή τους “Minimax Play at Wimbledon”[6] το 2001. Το πόρισμά τους ήταν ότι, πράγματι, οι δείκτες νίκης κορυφαίων επαγγελματιών στον χώρο του τένις σε σερβίς – δηλαδή στο χτύπημα το οποίο χρησιμοποιεί ο τενίστας για να ξεκινήσει ένα πόντο – και την απόκρουση αυτού, συμφωνούν με τις υποθέσεις του minimax. Ωστόσο, βρίσκουν ότι υπάρχει πρόβλημα στις επιλογές των παικτών οι οποίες δεν φαίνονται να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες, όπως υποθέτει το θεώρημα, δηλαδή καταλήγουν ότι ακόμα και οι επαγγελματίες παίκτες στην προσπάθειά τους να είναι απρόβλεπτοι, αλλάζουν την στρατηγική τους επηρεασμένοι από τις προηγούμενες κινήσεις.

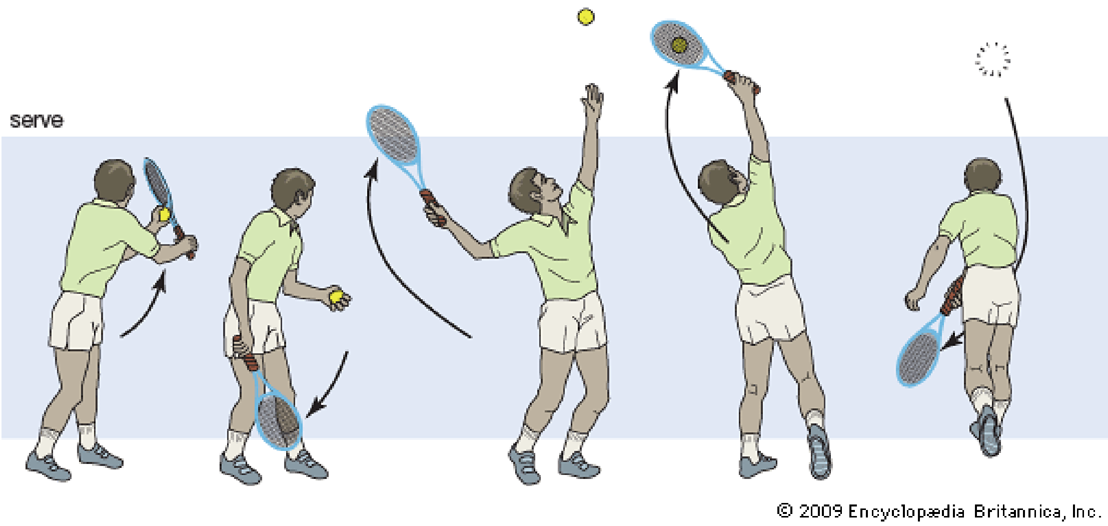
Αυτό όμως που βρήκαν ήταν μεγάλο βήμα, διότι έως τότε σε πειραματικό επίπεδο κάθε φορά απορρίπτονταν και οι δύο υποθέσεις του θεωρήματος minimax. Τα αποτελέσματά τους, λοιπόν, δείχνουν ότι όταν πρόκειται για παίκτες που έχουν μεγάλη εμπειρία και κίνητρο για την νίκη είμαστε πολύ πιο κοντά στην θεωρία συγκριτικά με τις πειραματικές καταστάσεις, όπου οι συμμετέχοντες είτε έχουν μικρή εμπειρία στο παίγνιο που συμμετέχουν, είτε δεν έχουν αρκετό κίνητρο για την νίκη, ώστε να λάβουν τις βέλτιστες αποφάσεις.

Οι Walker και Wooders εξηγούν αυτή την διαφορά ανάμεσα στα πειράματα και τα πραγματικά στοιχεία από επαγγελματίες δίνοντας το παράδειγμα του πόκερ. Αναφέρουν πως οι κανόνες του πόκερ είναι, πράγματι, πολύ απλοί, ωστόσο, κάποιος ο οποίος γνωρίζει καλά τους κανόνες χωρίς να έχει εμπειρία δεν θα έχει καλές επιδόσεις. Αντίστοιχα, στους πειραματικούς ελέγχους του minimax, παρόλη την απλότητα των κανόνων των παιγνίων, οι

[6] Walker, Mark, and John Wooders. 2001. "Minimax Play at Wimbledon." *American Economic Review*, 91(5): 1521-1538.

συμμετέχοντες δεν είχαν την κατάλληλη εμπειρία για να διαλέξουν την καλύτερη στρατηγική σε αυτό. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν «οι παίκτες καταλαβαίνουν πώς να παίξουν το παιχνίδι, αλλά όχι πώς να παίξουν το παιχνίδι *καλά*»[7], και είναι όντως, ιδιαίτερα δύσκολο στο σύντομο διάστημα στο οποίο εκτυλίσσεται ένα πείραμα να αποκτήσει κανείς τόση πολλή εμπειρία, ώστε οι κινήσεις του να είναι απρόβλετες για τον αντίπαλό του.

Ο λόγος που επιλέγουν το τένις, και συγκεκριμένα τα σερβίς στο τένις, είναι διότι σε έναν αγώνα τένις οι παίκτες χρειάζεται να εναλλάσσουν την κατεύθυνση προς την οποία σερβίρουν, αφού αν ο αντίπαλος ήξερε προς τα πού θα κατευθυνθεί η μπάλα οι αποκρούσεις του θα ήταν πολύ πιο επιτυχημένες. Παρόλο που οι επαγγελματίες παίκτες επιλέγουν όντως να εναλλάσσουν τις βολές τους υποσυνείδητα, όποια απόκλιση από την βέλτιστη στρατηγική γίνεται αμέσως αντιληπτή από έναν πεπειραμένο αντίπαλο. Παραδέχονται ότι το σπιν και η ταχύτητα επηρεάζουν το σερβίς, τα πρώτα σερβίς όμως, τα οποία και μελετούν συνήθως εκτελούνται όσο πιο κοντά στην αριστερή ή την δεξιά πλευρά του γηπέδου γίνεται. Κατά πολλούς το σερβίς και η επιδεξιότητα με την οποία εκτελείται καθορίζει τον νικητή του πόντου.



Οι Walker και Wooders χρησιμοποιούν ένα 2 × 2 μοντέλο του σερβίς σε σχέση με τους πόντους που κερδίζονται σε έναν αγώνα τένις. Έχουν συγκεντρώσει ένα σύνολο αποτελεσμάτων αποτελούμενο από όλους τους πόντους δέκα επαγγελματικών αγώνων τένις. Κάθε αγώνας δίνει τέσσερα 2 × 2 παιχνίδια πόντων, “point games”, με την χρήση των οποίων ελέγχουμε τις υποθέσεις του θεωρήματος minimax, άρα στο σύνολο έχουν 40 “point games”.

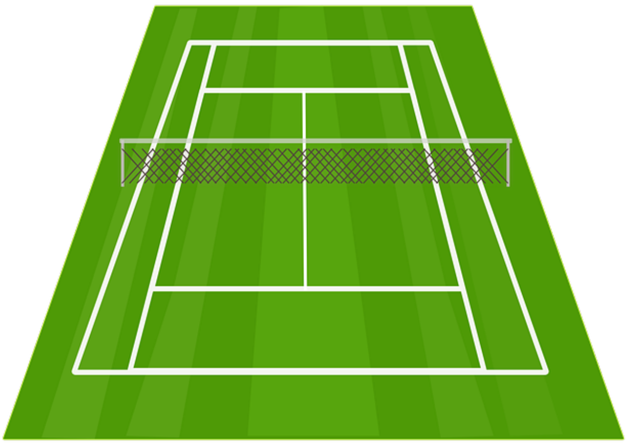
[7] “they are likely to understand how to *play* the game, but not how to play the game *well*”

Το μοντέλο των Walker και Wooders

Το μοντέλο είναι το εξής: θεωρούμε κάθε πόντο ως ένα απλό 2×2 παίγνιο απλής μορφής ανάμεσα σε δύο παίκτες.

	Α	Δ
Α	π_{AA}	$\pi_{A\Delta}$
Δ	$\pi_{\Delta A}$	$\pi_{\Delta\Delta}$

Κάθε πόντος ξεκινάει από το σερβίς. Θεωρούμε ότι κάθε φορά ο παίκτης που εκτελεί το σερβίς έχει δύο επιλογές: είτε να να το στείλει προς τα δεξιά (Δ) του αντιπάλου του, είτε προς τα αριστερά (Α) του. Ταυτόχρονα ο αντίπαλος καλείται να μαντέψει προς τα πού θα εκτελεστεί το σερβίς. Αντί για το 2×2 μοντέλο θα μπορούσαμε να έχουμε ένα άλλο που να λαμβάνει υπόψιν του περισσότερες θέσεις ανάμεσα στις οποίες θα έπρεπε να μαντέψει ο αντίπαλος, πάλι όμως θα είχαμε τα ίδια αποτελέσματα.



Αφού λάβουν τις αποφάσεις τους, δεξιά ή αριστερά, ο παίκτης που εκτελεί το σερβίς και ο αντίπαλός του, καθορίζεται ο νικητής του πόντου, είτε απευθείας, αν ο αντίπαλος δεν καταφέρει να αποκρούσει, είτε μετά από πολλές ανταλλαγές της μπάλας, είτε ακόμα και από ένα δεύτερο σερβίς αν το πρώτο είναι λάθος, “fault”. Οι Walker και Wooders δεν ασχολούνται με την μοντελοποίηση του παιχνιδιού μετά το σερβίς. Χρησιμοποιούν μια απλουστευμένη μορφή όπου οι αποδόσεις κάθε παίκτη, οι οποίες παρουσιάζονται σε καθένα από τα κελιά στον παραπάνω πίνακα, καθορίζονται ανάλογα με το αν επέλεξε δεξιά ή αριστερά στο σερβίς.

Ο παίκτης-γραμμή είναι αυτός που εκτελεί το σερβίς και ο παίκτης-στήλη αυτός που το δέχεται. Τα π_{ij} είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης που εκτελεί το σερβίς τον πόντο με $i = \{A, \Delta\}$ οι επιλογές του παίκτη που ελτελεί το σερβίς και $j = \{A, \Delta\}$ οι επιλογές του αντιπάλου του. Αφού ο πόντος θα κερδηθεί αναγκαστικά από έναν από τους δύο παίκτες, οι πιθανότητες να κερδίσει ο αντίπαλος είναι $1 - \pi_{ij}$. Θεωρούμε πως το μόνο μέλημα του κάθε παίκτη είναι να νικήσει τον πόντο. Επομένως οι πιθανότητες π_{ij} και $1 - \pi_{ij}$ είναι και οι αποδόσεις των παικτών στο 2×2 point game. Επειδή το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος, καθορίζεται πλήρως από τον πίνακα αποδόσεων του παίκτη που εκτελεί το σερβίς.

Η **πρώτη υπόθεση** που κάνουν είναι ότι κάθε πόντος στο τένις παίζεται ως 2×2 παίγνιο σταθερού αθροίσματος κανονικής μορφής με μοναδικό σημείο ισορροπίας υπό αυστηρά μεικτή στρατηγική. Το ιδανικό για να μελετήσουμε κάτι τέτοιο θα ήταν αν κάθε παιχνίδι τένις ήταν το ίδιο, δηλαδή, να είναι τα π_{ij} ίδια κάθε φορά. Τα π_{ij} εξαρτώνται από τις ικανότητες του εκάστοτε ζεύγους παικτών, ωστόσο, αυτά δεν αλλάζουν μόνο μεταξύ διαφορετικών αγώνων, αλλά μπορεί να αλλάξουν ακόμα και στην πορεία ενός συγκεκριμένου αγώνα, ανάλογα με το αν οι παίκτες βρίσκονται σε ισοπαλία ή σε πλεονέκτημα, ή ανάλογα με το ποιος από τους δύο εκτελεί το σερβίς. Για αυτόν τον λόγο θεωρούμε ότι σε κάθε αγώνα υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά παιχνίδια πόντου και θεωρούμε, επίσης, ότι δεν υπάρχει άλλο είδος. Επιπροσθέτως, είναι διαφορετικά για κάποιο ζευγάρι, αν αλλάξει η επιφάνεια του γηπέδου ή ο καιρός.

Η **δεύτερη υπόθεση** είναι αυτή ακριβώς που αναφέρεται παραπάνω, ότι σε κάθε αγώνα υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά παιχνίδια πόντου που χωρίζονται βάσει του ποιος εκτελεί το σερβίς και αν πρόκειται για ισοπαλία ή πλεονέκτημα.

Θέλουμε να μελετήσουμε με πραγματικά στοιχεία ότι η συμπεριφορά των παικτών σε κάθε παίγνιο πόντου σχετικά με την δεξιά ή αριστερή επιλογή θα βασίζεται σε εναλλαγή η οποία θα υπακούει στις υποθέσεις του θεωρήματος minimax. Δηλαδή, οι επιλογές θα είναι ανεξάρτητες διαδικασίες από διωνυμική διαδικασία που εξαρτάται πρώτον από το ποιος παίκτης εκτελεί το σερβίς και δεύτερον από το αν ο πόντος είναι ισοπαλία ή πλεονέκτημα. Η διωνυμική διαδικασία είναι κατά τα άλλα ανεξάρτητη και ισόνομη (i.i.d.) σε όλα τα σερβίς του αγώνα. Επιπλέον αν τα π_{ij} είναι γνωστά για τις τέσσερις κατηγορίες στις οποίες χωρίσαμε τους πόντους του αγώνα, τότε είναι εύκολο να υπολογίσουμε την ισορροπία και να ελέγξουμε το minimax με την χρήση του Simplex, και να βρούμε αν τα αποτελέσματα είναι όντως i.i.d. διωνυμική διαδικασία, όπως θα κάναμε και αν ήταν από πειραματικά αποτελέσματα.

Ωστόσο, σε έναν αγώνα τένις τα π_{ij} στον πίνακα αποδόσεων δεν είναι γνωστά. Το μόνο που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι προς τα πού εκτελείται το σερβίς και ποιος παίκτης κερδίζει τελικά τον πόντο. Αν οι παίκτες παίζουν όντως σύμφωνα με την θεωρία μεικτών στρατηγικών, τότε η αναμενόμενη απόδοση, όταν ο παίκτης στέλνει το σερβίς προς τα δεξιά, θα πρέπει να είναι η ίδια με την αναμενόμενη απόδοσή του, όταν στέλνει το σερβίς προς τα αριστερά.

Τα στοιχεία που συνέλεξαν είναι τα περισσότερα από τελικούς αγώνες από κορυφαία τουρνουά τένις, το οποίο εξασφαλίζει και ότι η νίκη είναι το ίδιο σημαντική και για τους δύο παίκτες. Εξασφαλίζει, επίσης, ότι οι παίκτες είναι επαρκώς ενημερωμένοι για τις ικανότητες του αντιπάλου τους, ώστε να έχουν στο μυαλό τους μια γενική ιδέα των π_{ij}. Τέλος, οι αγώνες είναι αρκετά εκτενείς, ώστε να συμπεριλαμβάνουν πολλούς πόντους ώστε να έχουμε καλύτερα ενημερωμένους στατιστικούς ελέγχους. Αποδίδουν την έκταση τέτοιων αγώνων στο ότι και οι δύο παίκτες δρουν με βάση την ισορροπία μεικτών στρατηγικών.

TABLE 1—TESTING FOR EQUALITY OF WINNING PROBABILITIES IN TENNIS DATA

			Serves			Mixture		Points Won		Win Rates			
Match	Server	Court	L	R	Total	L	R	L	R	L	R	Pearson statistic	p-value
74Wimbldn	**Rosewall**	Ad	37	37	74	0.50	0.50	25	26	0.68	0.70	0.063	0.802
74Wimbldn	**Rosewall**	Deuce	70	5	75	0.93	0.07	50	3	0.71	0.60	0.294	0.588
74Wimbldn	Smith	Ad	66	10	76	0.87	0.13	45	7	0.68	0.70	0.013	0.908
74Wimbldn	Smith	Deuce	53	29	82	0.65	0.35	33	14	0.62	0.48	1.499	0.221
80Wimbldn	**Borg**	Ad	19	73	92	0.21	0.79	11	50	0.58	0.68	0.758	0.384
80Wimbldn	**Borg**	Deuce	37	62	99	0.37	0.63	26	41	0.70	0.66	0.182	0.670
80Wimbldn	McEnroe	Ad	45	40	85	0.53	0.47	27	26	0.60	0.65	0.226	0.635
80Wimbldn	McEnroe	Deuce	44	44	88	0.50	0.50	28	32	0.64	0.73	0.838	0.360
80USOpen	**McEnroe**	Ad	39	40	79	0.49	0.51	23	30	0.59	0.75	2.297	0.130
80USOpen	**McEnroe**	Deuce	51	32	83	0.61	0.39	31	18	0.61	0.56	0.167	0.683
80USOpen	Borg	Ad	29	47	76	0.38	0.62	17	30	0.59	0.64	0.206	0.650
80USOpen	Borg	Deuce	30	50	80	0.38	0.63	20	26	0.67	0.52	1.650	0.199
82Wimbldn	**Connors**	Ad	32	46	78	0.41	0.59	16	32	0.50	0.70	3.052	0.081**
82Wimbldn	**Connors**	Deuce	76	15	91	0.84	0.16	51	8	0.67	0.53	1.042	0.307
82Wimbldn	McEnroe	Ad	32	39	71	0.45	0.55	23	24	0.72	0.62	0.839	0.360
82Wimbldn	McEnroe	Deuce	35	44	79	0.44	0.56	24	30	0.69	0.68	0.001	0.970
84French	**Lendl**	Ad	33	34	67	0.49	0.51	18	21	0.55	0.62	0.359	0.549
84French	**Lendl**	Deuce	26	45	71	0.37	0.63	19	31	0.73	0.69	0.139	0.710
84French	McEnroe	Ad	38	29	67	0.57	0.43	23	18	0.61	0.62	0.016	0.898
84French	McEnroe	Deuce	42	30	72	0.58	0.42	21	20	0.50	0.67	1.983	0.159
87Australn	**Edberg**	Ad	47	22	69	0.68	0.32	29	12	0.62	0.55	0.318	0.573
87Australn	**Edberg**	Deuce	19	56	75	0.25	0.75	12	40	0.63	0.71	0.456	0.499
87Australn	Cash	Ad	38	27	65	0.58	0.42	19	14	0.50	0.52	0.022	0.883
87Australn	Cash	Deuce	39	29	68	0.57	0.43	25	16	0.64	0.55	0.554	0.457
88Australn	**Wilander**	Ad	32	36	68	0.47	0.53	20	25	0.63	0.69	0.365	0.546
88Australn	**Wilander**	Deuce	20	56	76	0.26	0.74	16	35	0.80	0.63	2.045	0.153
88Australn	Cash	Ad	40	23	63	0.63	0.37	22	13	0.55	0.57	0.014	0.907
88Australn	Cash	Deuce	37	37	74	0.50	0.50	19	25	0.51	0.68	2.018	0.155
88Masters	**Becker**	Ad	50	26	76	0.66	0.34	30	18	0.60	0.69	0.626	0.429
88Masters	**Becker**	Deuce	53	31	84	0.63	0.37	38	20	0.72	0.65	0.472	0.492
88Masters	Lendl	Ad	55	21	76	0.72	0.28	43	15	0.78	0.71	0.383	0.536
88Masters	Lendl	Deuce	46	38	84	0.55	0.45	24	23	0.52	0.61	0.589	0.443
95USOpen	**Sampras**	Ad	20	37	57	0.35	0.65	12	28	0.60	0.76	1.524	0.217
95USOpen	**Sampras**	Deuce	33	26	59	0.56	0.44	20	22	0.61	0.85	4.087	0.043*
95USOpen	Agassi	Ad	39	16	55	0.71	0.29	29	13	0.74	0.81	0.298	0.585
95USOpen	Agassi	Deuce	30	29	59	0.51	0.49	17	17	0.57	0.59	0.023	0.879
97USOpen	**Korda**	Ad	55	19	74	0.74	0.26	42	16	0.76	0.84	0.513	0.474
97USOpen	**Korda**	Deuce	52	30	82	0.63	0.37	38	19	0.73	0.63	0.852	0.356
97USOpen	Sampras	Ad	33	51	84	0.39	0.61	21	32	0.64	0.63	0.007	0.934
97USOpen	Sampras	Deuce	50	43	93	0.54	0.46	33	28	0.66	0.65	0.008	0.929
	Totals		1,622	1,404	3,026	0.54	0.46	1,040	918	0.64	0.65	30.801	0.852

* Indicates rejection at the 5-percent level of significance.
** Indicates rejection at the 10-percent level of significance.

Στον παραπάνω πίνακα οι αγώνες διαχωρίζονται με οριζόντιες γραμμές και υπάρχουν τέσσερις στήλες για κάθε αγώνα. Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε διαφορετικό παίγνιο πόντου, όπως τα ορίσαμε παραπάνω με ad (advantage) να σημαίνει πλεονέκτημα και deuce ισοπαλία. Θέλουμε να ελέγξουμε αν αυτά τα αποτελέσματα προέρχονται από το ότι οι παίκτες παίζουν σύμφωνα με την ισορροπία κατά Nash σε μεικτές στρατηγικές.

Για κάθε πόντο από τους 10 αγώνες αναγράφεται η κατεύθυνση προς την οποία εκτελέστηκε το σερβίς (δεξιά ή αριστερά) και αν ο παίκτης που εκτέλεσε το σερβίς τελικά κέρδισε τον πόντο. Ο λόγος που στο μοντέλο δεν συμπεριλαμβάνεται το κέντρο ως επιλογή είναι, γιατί παρατηρήθηκε ότι μόνο το 6% των σερβίς είχαν κατεύθυνση προς το κέντρο. Επίσης, δεν λαμβάνονται υπόψη τα δεύτερα σερβίς και συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση μόνο τα πρώτα. Στις στήλες “Mixture” αναφέρονται οι σχετικές συχνότητες κάθε κατεύθυνσης του σερβίς και στις στήλες “Win Rates” αναφέρονται οι σχετικές συχνότητες με τις οποίες κερδίζονται οι πόντοι. Ο νικητής του κάθε αγώνα γράφεται με έντονη γραμματοσειρά (bold).

Πρώτα, είναι αναγκαίο να ελέγξουμε αν η πιθανότητα νίκης είναι η ίδια για τα δεξιά και τα αριστερά σερβίς. Παριστάνουμε τα δεδομένα που έχουμε συλλέξει σαν τυχαία δείγματα από δύο διωνυμικές διαδικασίες, μία από τα αριστερά, η οποία καθορίζει τον νικητή του πόντου, όταν εκτελεστεί σερβίς προς τα αριστερά και μία αντίστοιχη για τα δεξιά. Οι παράμετροι κάθε διωνυμικής διαδικασίας δεν είναι γνωστές και, μάλιστα, είναι πιθανόν να είναι διαφορετικές για κάθε αγώνα. Θεωρούμε, αρχικά, κάθε αγώνα ξεχωριστά και ελέγχουμε την μηδενική υπόθεση ότι οι παράμετροι των αριστερών και δεξιών σερβίς είναι οι ίδιες.

Για να κάνουμε αυτόν τον έλεχο χρησημοποιούμε τον έλεγχο x^2 του Karl Pearson για τον έλεγχο ομοιότητας δύο κατανομών (Karl Pearson’s chi-square goodness-of-fit test of equality of two distributions). Σε αυτόν τον έλεγχο η μηδενική υπόθεση είναι:

$$p_A^k = p_\Delta^k \text{ , με } k = 1, \dots, 40 \text{ το κάθε παίγνιο πόντου}$$

Αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής ο στατιστικός έλεγχος κατανέμεται ασυμπτωτικά ως x^2 με δύο βαθμούς ελευθερίας αν το p^k είναι γνωστό ή με έναν βαθμό ελευθερίας αν το p^k εκτιμάται από το δείγμα, όπως σε αυτήν την περίπτωση. Στον πίνακα αναγράφονται τα αποτελέσματα του ελέγχου Pearson στην στήλη “Pearson statistic” και “p-value”. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται μόνο σε δύο από τις 40 περιπτώσεις, την μία φορά σε επίπεδο 5% και την άλλη σε 10%, ενώ σύμφωνα με την θεωρία, για 40 παίγνια, αναμέναμε δύο απορρίψεις σε επίπεδο 5% και τέσσερις σε επίπεδο 10%. Επομένως, τα αποτελέσματα φαίνονται να είναι συμβατά με την θεωρία.

Στο παρακάτω γράφημα παρατηρούμε την διαφορά ανάμεσα στην παρατηρούμενη από το δείγμα κατανομή και αυτήν που προκύπτει από την θεωρία και είναι εντυπωσιακό πόσο κοντά φαίνονται η μία στην άλλη. Δηλαδή, τα δεδομένα μας φαίνονται να είναι στοιχεία που προέκυψαν από στρατηγικές σύμφωνες με το minimax.

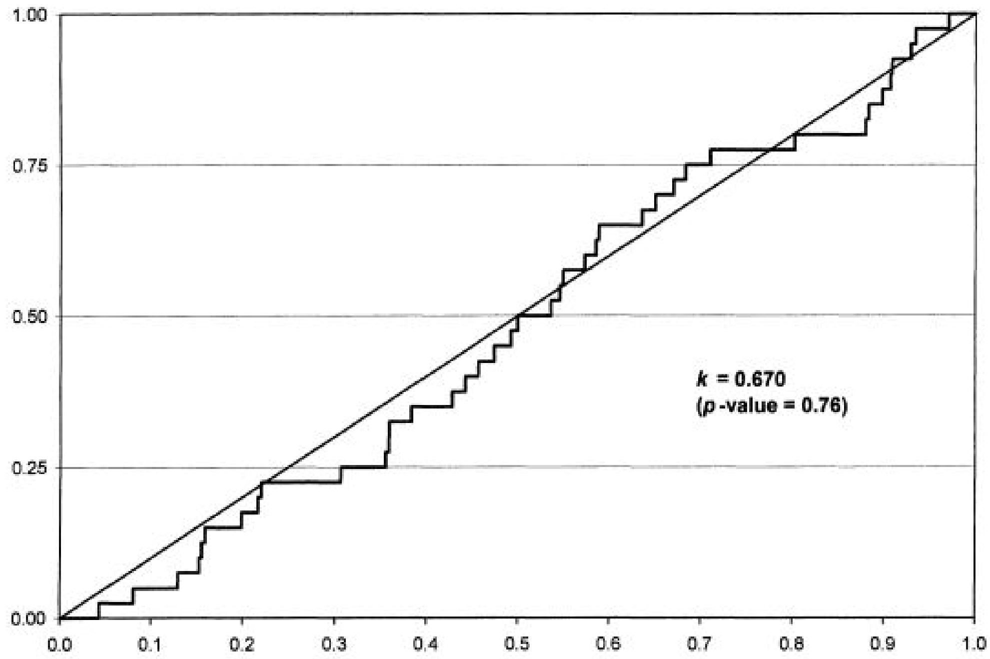


FIGURE 2. WIN RATES IN TENNIS: KOLMOGOROV TEST

Το επόμενο βήμα, είναι ο έλεγχος της ανεξαρτησίας κάθε παιγνίου πόντου από τα άλλα. Για καθεμιά από τις 40 περιπτώσεις ελέγχουμε την υπόθεση ότι οι επιλογές των παικτών είναι ανεξάρτητες από το παρελθόν του παιχνιδιού.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα της ανεξαρτησίας που ζητούμε. Για καθένα από τα 40 παίγνια πόντου οι στήλες "L", "R" και "Total" αποτυπώνουν τον αριθμό των σερβίς που εκτελέστηκαν προς καθε κατεύθυνση και το σύνολο αυτών. Η στήλη με τίτλο "Runs" δείχνει την μέγιστη ακολουθία από ίδιες κατευθύνσεις του σερβίς (π.χ. αν s=(L,L,R,L) run=3). Οι υπόλοιπες στήλες είναι τα αποτελέσματα του ελέγχου c.d.f. (cumulative distribution function).

Όπως φαίνεται και στην συνέχεια, από το Kolmogorov-Smirnov αποκλίνουμε πολύ από τις θεωρητικές υποθέσεις.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ακόμα και οι κορυφαίοι τενίστες αλλάζουν τις επιλογές τους πολύ πιο τυχαία από ό,τι θα υπαγόρευε η θεωρία με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι ακολουθούν μοτίβο. Αυτό συμβαίνει διότι, όταν οι άνθρωποι προσπαθούν να συμπεριφερθούν απρόβλεπτα καταλήγουν να συμπεριφέρονται επηρεασμένοι από το παρελθόν και να μην ακολουθούν ανεξάρτητες στρατηγικές.

TABLE 3—RUNS TESTS ON TENNIS DATA

Match	Server	Court	Serves L	Serves R	Serves Total	Runs r^i	$F(r^i - 1)$	$F(r^i)$	$U[F(r^i - 1), F(r^i)]$
74Wimbldn	**Rosewall**	Ad	37	37	74	43	0.854	0.901	0.866
74Wimbldn	**Rosewall**	Deuce	70	5	75	11	0.349	1.000	0.804
74Wimbldn	Smith	Ad	66	10	76	21	0.812	1.000	0.823
74Wimbldn	Smith	Deuce	53	29	82	43	0.832	0.892	0.852
80Wimbldn	**Borg**	Ad	19	73	92	33	0.633	0.788	0.757
80Wimbldn	**Borg**	Deuce	37	62	99	52	0.817	0.866	0.855
80Wimbldn	McEnroe	Ad	45	40	85	44	0.512	0.599	0.553
80Wimbldn	McEnroe	Deuce	44	44	88	49	0.774	0.832	0.818
80USOpen	**McEnroe**	Ad	39	40	79	38	0.249	0.326	0.298
80USOpen	**McEnroe**	Deuce	51	32	83	36	0.131	0.185	0.142
80USOpen	Borg	Ad	29	47	76	42	0.873	0.916	0.912
80USOpen	Borg	Deuce	30	50	80	43	0.829	0.887	0.844
82Wimbldn	**Connors**	Ad	32	46	78	49	0.990*	0.995	0.994
82Wimbldn	**Connors**	Deuce	76	15	91	31	0.958**	1.000	0.999
82Wimbldn	McEnroe	Ad	32	39	71	36	0.437	0.533	0.520
82Wimbldn	McEnroe	Deuce	35	44	79	36	0.152	0.212	0.183
84French	**Lendl**	Ad	33	34	67	41	0.931	0.958	0.938
84French	**Lendl**	Deuce	26	45	71	41	0.955**	0.976	0.963
84French	McEnroe	Ad	38	29	67	40	0.921	0.952	0.947
84French	McEnroe	Deuce	42	30	72	45	0.982*	0.991	0.984
87Australn	**Edberg**	Ad	47	22	69	40	0.994*	0.997	0.997
87Australn	**Edberg**	Deuce	19	56	75	29	0.374	0.519	0.505
87Australn	Cash	Ad	38	27	65	40	0.964**	0.980	0.968
87Australn	Cash	Deuce	39	29	68	37	0.711	0.791	0.725
88Australn	**Wilander**	Ad	32	36	68	38	0.739	0.813	0.795
88Australn	**Wilander**	Deuce	20	56	76	29	0.265	0.389	0.275
88Australn	Cash	Ad	40	23	63	29	0.316	0.424	0.364
88Australn	Cash	Deuce	37	37	74	28	0.007	0.013*	0.010
88Masters	**Becker**	Ad	50	26	76	38	0.724	0.796	0.783
88Masters	**Becker**	Deuce	53	31	84	45	0.847	0.900	0.890
88Masters	Lendl	Ad	55	21	76	32	0.515	0.607	0.539
88Masters	Lendl	Deuce	46	38	84	43	0.489	0.577	0.506
95USOpen	**Sampras**	Ad	20	37	57	25	0.231	0.335	0.245
95USOpen	**Sampras**	Deuce	33	26	59	22	0.011	0.021*	0.019
95USOpen	Agassi	Ad	39	16	55	29	0.943	0.980	0.968
95USOpen	Agassi	Deuce	30	29	59	24	0.032	0.058	0.052
97USOpen	**Korda**	Ad	55	19	74	28	0.301	0.389	0.323
97USOpen	**Korda**	Deuce	52	30	82	43	0.793	0.859	0.842
97USOpen	Sampras	Ad	33	51	84	35	0.065	0.101	0.079
97USOpen	Sampras	Deuce	50	43	93	41	0.079	0.114	0.087

* Indicates rejection at the 5-percent level.
** Indicates rejection at the 10-percent level.

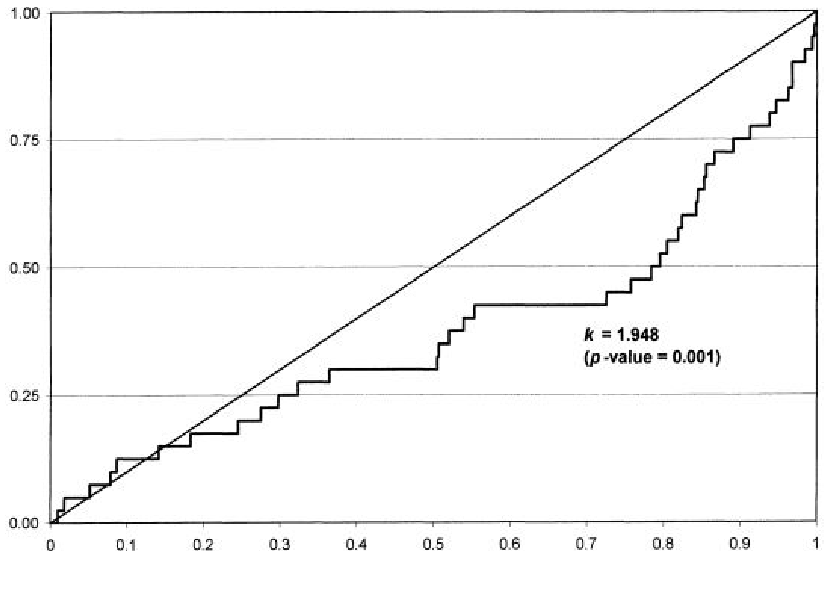


FIGURE 5. RUNS IN TENNIS DATA: KOLMOGOROV TEST

Συμπέρασμα

Τα πειραματικά αποτελέσματα μέχρι τότε είχαν αποτύχει στο να μας υποδείξουν ότι η θεωρία ισορροπίας μεικτών στρατηγικών εφαρμόζεται στην πράξη. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η θεωρία εξηγεί με μεγάλη επιτυχία τον τρόπο που παίζουν οι επαγγελματίες αθλητές, σύμφωνα με τα δεδομένα μας. Τα πειράματα έχουν δείξει με σαφήνεια ότι όταν χρειάζεται οι παίκτες να είναι απρόβλεπτοι, οι άπειροι παίκτες δεν φαίνονται να ακολουθούν στρατηγικές που συμφωνούν με την θεωρία ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει ότι η θεωρία εφαρμόζεται μόνο σε καταστάσεις όπου οι παίκτες έχουν αναπτύξει χρόνια εμπειρίας σε μία συγκεκριμένη κατάσταση· η θεωρία εφαρμόζεται καλά, αν και όχι τέλεια, όταν πρόκειται για επαγγελματίες, αλλά υστερεί όταν πρόκειται για αρχάριους.

Κριτική του μοντέλου των Walker και Wooders

Θεωρητικά μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το σερβίς στο τένις, αφού, πράγματι, κάθε σερβίς έχει μόνο δύο πιθανά αποτελέσματα: ο παίκτης που εκτελεί το σερβίς είτε κερδίζει τον πόντο είτε τον κερδίζει ο αντίπαλός του. Επομένως, πρόκειται για παίγνιο σταθερού αθροίσματος. Οι ενέργειες που έχουν στην διάθεσή τους οι παίκτες είναι παρατηρήσιμες: το σερβίς θα εκτελεστεί είτε προς το ντράηβ είτε προς το ρεβέρ του αντιπάλου. Επιπροσθέτως, μπορούμε να έχουμε πληθώρα παρατηρήσεων αφού σε κάθε αγώνα τένις εκτελούνται εκατοντάδες σερβίς.

Μπορούμε να αντιληφθούμε ότι οι παίκτες αποσκοπούν στο να κερδίζουν τους πόντους μόνο ως μέσο για να οδηγηθούν στην τελική νίκη. Το γεγονός ότι τα παιχνίδια πόντων είναι απλώς τα μικρά κομμάτια ενός μεγαλύτερου παιγνίου απείρου ορίζοντα στην εκτεταμένη μορφή του δημιουργεί το ερώτημα αν μπορούμε όντως να θεωρήσουμε τις αποδόσεις των παικτών ως τις αποδόσεις για την νίκη κάθε πόντου. Έχει αποδειχθεί ότι αυτό που συνδέει όλο τον αγώνα, ως παίγνιο, με τους πόντους, ως παίγνια, είναι ότι οι πόντοι αποτελούν **δυαδικά Μαρκοβιανά παίγνια**. Σε αυτού του είδους τα παίγνια η ισορροπία επιτυγχάνεται αν οι παίκτες αντιμετωπίζουν τον κάθε πόντο σαν να ήταν ο μόνος πόντος, και όχι σαν μέρος του συνόλου. Δηλαδή, οι παίκτες καλούνται κάθε φορά να προσπαθούν να αγνοούν το σκορ σε εκείνη την στιγμή και να δρουν ανεξάρτητα από το όποιο παρελθόν τους. Επαγγελματίες παίκτες φαίνονται να δρουν, όντως, βάσει αυτής της τεχνικής. Χαρακτηριστικά, η Martina Navratilova είχε αναφέρει στον τελικό του 1990 στο Wimbledon ότι η στρατηγική της ήταν να μην σκέφτεται την νίκη, αλλά κάθε φορά να σκέφτεται τον πόντο που παιζόταν και μόνο αυτόν.[8]

Παρόλα τα πλεονεκτήματα του να ελέγχουμε τις υποθέσεις με πραγματικά στοιχεία από πεπειραμένους επαγγελματίες παίκτες, αντί για πειραματικά αποτελέσματα, είναι πολύ δύσκολο να μοντελοποιήσουμε αυτές τις καταστάσεις, χωρίς να παραλείψουμε να συμπεριλάβουμε στο μοντέλο μας καταλυτικούς παράγοντες, με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε, πιθανώς, σε ελλιπώς ενημερωμένους στατιστικούς ελέγχους και συμπεράσματα. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει το μοντέλο των Walker και Wooders υπεραπλούστευση, αφού παρότι το σερβίς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, δεν είναι και ο μόνος παράγοντας που καθορίζει τον νικητή του πόντου.

[8] "I had to keep my mind off winning: . . . Think about that point and that point only." Martina Navratilova (John Feinstein, 1991.)

Το Θεώρημα Minimax στα Επαγγελματικά Πέναλτι

Οι επαγγελματίες αθλητές ειδικεύονται στα παίγνιά τους. Αυτό, προφανώς, είναι ένα προτέρημα συγκριτικά με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, αφού οι παίκτες είναι ήδη οι πιο εξειδικευμένοι φορείς των καταστάσεων που μελετούμε. Ωστόσο, παρόλο που στα αθλήματα είναι πολύ συνηθισμένο να προσπαθούν οι παίκτες να είναι απρόβλεπτοι, και πάλι, δεν είναι εύκολο να ελέγξουμε με ακρίβεια την υπόθεση του minimax. Αυτό συμβαίνει, διότι οι επαγγελματίες παίκτες έχουν στην διάθεσή τους διάφορες στρατηγικές άρα και διαφορετικά αποτελέσματα. Παράλληλα, τα αποτελέσματα, νομοτελειακά, δεν καθορίζονται ακριβώς αφού οι παίκτες επιλέξουν τις κινήσεις τους. Επομένως, είναι τεχνικά αδύνατον να συγκεντρώσουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία, για να κάνουμε μία πλήρως ενημερωμένη στατιστική ανάλυση.

Μέσα από αυτό που θα μελετήσουμε, ξεπερνάμε όλες αυτές τις δυσκολίες. Εφιστούμε την προσοχή μας σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος δύο παικτών σε επαγγελματικό άθλημα, που χρειάζεται και οι δύο παίκτες να είναι απρόβλεπτοι, ενώ ταυτόχρονα να προσπαθούν να μαντέψουν τις κινήσεις του αντιπάλου. Όπως και σε πειραματικό επίπεδο, το παίγνιο έχει ξεκάθαρους κανόνες, υπάρχει περιορισμένο εύρος στρατηγικών, τα αποτελέσματα κρίνονται αμέσως μόλις οι παίκτες επιλέξουν τις κινήσεις τους και όλη η διαθέσιμη πληροφορία είναι παρατηρήσιμη. Σε αντίθεση με τα περισσότερα πειράματα, οι παίκτες σε αυτήν την περίπτωση έχουν πολύ μεγαλύτερο κίνητρο να νικήσουν και είναι οι ειδικοί αυτού που μελετάται. Θα μελετήσουμε, λοιπόν, ένα από τα πιο δημοφιλή θέματα του αθλητισμού, τα πέναλτι στο ποδόσφαιρο.

Ο Ignacio Palacios-Huerta αποδεικνύει για τα πέναλτι ότι, όπως και στην θεωρία των μεικτών στρατηγικών:

Α) οι πιθανότητες νίκης είναι στατιστικά παρόμοιες ανάμεσα στις διαφορετικές στρατηγικές, δηλαδή οι παίκτες επιλέγουν την μεικτή στρατηγική, επειδή δεν μπορούν να καταλλήξουν σε συμπέρασμα μέσω καθαρής στρατηγικής ή συνδυασμού καθαρών στρατηγικών

Β) οι επιλογές των παικτών είναι ανεξάρτητες πιθανότητες, σαν από κληρωτίδα

Το (Α) είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αποκομισθεί από την βιβλιογραφία. Σχετικά με το (Β), σύμφωνα με πειραματικές μελέτες με θέμα την τυχαιότητα στα οικονομικά και στην ψυχολογία, έχει βρεθεί ότι οι παίκτες αλλάζουν στρατηγικές πολύ συχνά για να θεωρηθεί η συμπεριφορά τους συναφής με την θεωρία μεικτών στρατηγικών. Στην μελέτη αυτή δείχνουμε ότι οι επαγγελματίες παίκτες καταφέρνουν να δρουν εντελώς τυχαία. Οι ενέργειές τους δεν εξαρτώνται από το παρελθόν τους, το παρελθόν του αντιπάλου τους ή από προηγούμενα αποτελέσματα.

Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να δείξουμε ότι οι βασικές αρχές της ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές υποστηρίζεται από πραγματικά δεδομένα.

Οι μεικτές στρατηγικές στα πέναλτι

Οι κανόνες των πέναλτι, όπως τους ορίζει η FIFA (Federation Internationale de Football Association) είναι οι εξής:

- Η μπάλα τοποθετείται στην γραμμή του πέναλτι.
- Ορίζεται ο παίκτης που θα εκτελέσει το πέναλτι.
- Ο τερματοφύλακας παραμένει στην γραμμή που συνδέει τα δύο μπροστινά δοκάρια του τέρματος έως να φύγει η μπάλα από το πόδι του παίκτη.
- Όλοι οι άλλοι παίκτες, εκτός του τερματοφύλακα πρέπει να βρίσκονται εντός του αγωνιστικού χώρου, έξω από την περιοχή του πέναλτι, πίσω από την γραμμή του πέναλτι και τουλάχιστον 9,15 μέτρα μακριά από την γραμμή του πέναλτι.

Έπειτα, η διαδικασία είναι η εξής:

- Ο παίκτης που έχει οριστεί εκτελεί το πέναλτι, δηλαδή κλωτσάει την μπάλα.
- Δεν μπορεί να την ξαναγγίξει μέχρις ότου η μπάλα να έχει ακουμπήσει κάποιον άλλο παίκτη.
- Το γκολ μπορεί να επιτευχθεί απευθείας από εκτέλεση πέναλτι.

Κάθε εκτέλεση πέναλτι συμπεριλαμβάνει δύο παίκτες, τον «εκτελεστή» και τον τερματοφύλακα. Ο μέσος χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει η μπάλα την απόσταση μεταξύ της γραμμής του πέναλτι και της γραμμής του τέρματος είναι 0,3 δευτερόλεπτα, που είναι μικρότερος από τον χρόνο αντίδρασης συν τον χρόνο που χρειάζεται ο τερματοφύλακας για να κινηθεί προς καθεμιά από τις πιθανές κατευθύνσεις της μπάλας. Αυτό εξασφαλίζει ότι ο παίκτης και ο τερματοφύλακας κινούνται ταυτόχρονα. Η εκτέλεση του πέναλτι έχει δύο πιθανά αποτελέσματα, γκολ ή όχι γκολ. Οι παίκτες έχουν περιορισμένο χώρο στρατηγικών και οι ενέργειές τους είναι παρατηρήσιμες. Δεν υπάρχουν δεύτερες ευκαιρίες σε περίπτωση που δεν μπει γκολ. Οι αρχικές συνθήκες του παιγνίου είναι πάντα οι ίδιες, δηλαδή οι θέσεις του παίκτη και του τερματοφύλακα είναι πάντα οι ίδιες, η γραμμή του πέναλτι και η γραμμή του τέρματος, αντίστοιχα. Ο τερματοφύλακας, άλλωστε, δεν έχει άλλη επιλογή από το να βρίσκεται στην μέση της γραμμής του τέρματος, διότι αν στέκεται οπουδήποτε αλλού μεγιστοποιεί κατά πολύ την πιθανότητα ενός επαγγελματία παίκτη να επιτύχει γκολ. Τέλος, το αποτέλεσμα του παιγνίου ορίζεται αμέσως μόλις οι παίκτες επιλέξουν την στρατηγική τους.

Η σαφήνεια των κανόνων και η ακριβής δομή του παιγνίου αυτού αντικατοπτρίζει αυτήν που ορίζεται από την θεωρία και από τα περισσότερα πειράματα. Αυτό καθιστά το παίγνιο αυτό πολύ πιο ξεκάθαρο και πιο εύκολα μελετήσιμο από αντίστοιχες καταστάσεις σε άλλα επαγγελματικά αθλήματα, όπου οι αρχικές θέσεις των παικτών δεν είναι πλήρως καθορισμένες, επομένως επηρεάζεται κατ' αυτόν τον τρόπο και το φάσμα στρατηγικών, καθιστώντας την μελέτη τους ιδιαίτερα πολύπλοκη (π.χ. τένις, κρίκετ, μπάσκετ). Άλλο πλεονέκτημα έναντι των άλλων επαγγελματικών αθλημάτων είναι ότι το αποτέλεσμα κρίνεται απευθείας, κάτι που δεν συμβαίνει, για παράδειγμα, με τα σερβίς στο τένις. Οι

Walker και Wooders[9], ωστόσο, στην δημοσίευσή τους σχετικά με την εφαρμογή του θεωρήματος minimax στο τένις, μελετούν κατά πόσο η διεύθυνση του αρχικού σερβίς των επαγγελματιών παικτών τένις επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Παρόλο που δεν λαμβάνουν υπόψη τους τα δεύτερα σερβίς ή άλλες παραμέτρους και το αποτέλεσμα δεν κρίνεται κατευθείαν μετά από αυτήν την απόφασή τους, αποδεικνύουν ότι το μοντέλο τους είναι συναφές με την ισορροπία Nash. Οι παίκτες όμως αλλάζουν στρατηγικές σερβίς πολύ συχνά για να θεωρηθούν συμβατές με την τυχαιότητα και κατ' επέκταση με το θεώρημα minimax.

Στην περίπτωση των πέναλτι με επαγγελματίες παίκτες έχουμε την ευκαιρία να ελέγξουμε το θεώρημα Minimax με πραγματικά δεδομένα, χωρίς να έχουμε τα συνήθη προβλήματα που αντιμετωπίζουμε σε άλλες πραγματικές ή πειραματικές καταστάσεις. Δεν μπορούμε καν να θεωρήσουμε ότι υπάρχει η περίπτωση του «learning», αφού δεν μπορούν να υπάρχουν πιο καταρτισμένοι εκτελεστές των ρόλων τους οποίους μελετάμε. Αποτελούν, λοιπόν, την ιδανική περίπτωση για να ελέγξουμε το θεώρημα minimax με πραγματικά δεδομένα.

Κατασκευάζουμε, αρχικά, το μοντέλο. Έστω ότι οι αποδόσεις του παίκτη είναι η πιθανότητα να μπει γκολ και του τερματοφύλακα η πιθανότητα να μην μπει, κατά την εκτέλεση του πέναλτι. Ο παίκτης θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να μπει γκολ, ενώ ο τερματοφύλακας να την ελαχιστοποιήσει. Αξίζει να σημειωθεί ότι, προφανώς, ό,τι χάνει ο ένας κερδίζει ο άλλος, επομένως πρόκειται για παίγνιο **μηδενικού αθροίσματος**. Θεωρούμε αρχικά ένα απλό παιγνιοθεωρητικό 2×2 μοντέλο των κινήσεων των παικτών με π_{ij} την πιθανότητα να βάλει γκολ ο παίκτης, όπου $i = \{A, \Delta\}$ οι επιλογές του παίκτη και $j = \{A, \Delta\}$ οι επιλογές του τερματοφύλακα, με Α = αριστερά, Δ=δεξιά, θεωρούμε το ίδιο αριστερά και δεξιά και για τους δύο.

$i\,/\,j$	Α	Δ
Α	π_{AA}	$\pi_{A\Delta}$
Δ	$\pi_{\Delta A}$	$\pi_{\Delta\Delta}$

Το παίγνιο αυτό έχει μοναδική ισορροπία Nash όταν:

$$\pi_{A\Delta} > \pi_{AA} < \pi_{\Delta A}$$

$$\pi_{A\Delta} > \pi_{\Delta\Delta} < \pi_{\Delta A}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο για να αναπαραστήσουμε το συγκεκριμένο παίγνιο, κάθε παίκτης χρειάζεται να χρησιμοποιήσει μεικτή στρατηγική. Είναι αναγκαίο να ελέγξουμε τις δύο βασικές προϋποθέσεις. Αρχικά, πρέπει η πιθανότητα επιτυχίας να είναι στατιστικά η ίδια ανάμεσα σε όλες τις πιθανές στρατηγικές των παικτών, δηλαδή η επιτυχία γκολ (ή αντίστοιχα η αποτυχία) για τον παίκτη (ή αντίστοιχα για τον τερματοφύλακα). Έστω, τ_A η πιθανότητα να διαλέξει ο τερματοφύλακας να πέσει αριστερά. Η πιθανότητα αυτή

[9] Walker, Mark, and John Wooders. 2001. "Minimax Play at Wimbledon." *American Economic Review*, 91(5): 1521-1538.

επιλέγεται ώστε να είναι οι πιθανότητες επιτυχίας του παίκτη (ε) να είναι οι ίδιες ανάμεσα σε όλες τις στρατηγικές. Αν:

$$p_A^{\varepsilon} = \tau_A \pi_{AA} + (1 - \tau_A)\pi_{A\Delta}$$

$$p_\Delta^{\varepsilon} = \tau_A \pi_{\Delta A} + (1 - \tau_A)\pi_{\Delta\Delta}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει η τ_A να ικανοποιεί την σχέση: $p_A^{\varepsilon} = p_\Delta^{\varepsilon}$.

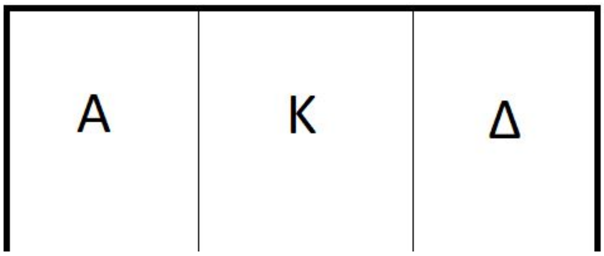
Θέλουμε, επίσης, οι επιλογές κάθε παίκτη να είναι ανεξάρτητες για κάθε φορά που επαναλαμβάνεται το παίγνιο, με σταθερές αποδόσεις σε κάθε παιχνίδι. Δηλαδή, οι επιλογές των παικτών να είναι ανεξάρτητες από οποιοδήποτε παρελθόν δικό τους, του αντιπάλου τους, της σχέσης τους με τον αντίπαλο ή από οποιοδήποτε άλλο παράγοντα.

Προφανώς, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι κάποιοι παίκτες είναι αριστεροπόδαροι και κάποιοι δεξιοπόδαροι. Αυτό όμως δεν μας επηρεάζει κάπως αφού υπάρχει απόλυτη συμμετρία μεταξύ αυτών των δύο περιπτώσεων. Θεωρούμε προφανές ότι οι δεξιοπόδαροι σκοράρουν με μεγαλύτερη επιτυχία προς τα αριστερά του τέρματος. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι προς το τέλος του παιχνιδιού μειώνεται η πιθανότητα επιτυχίας γκολ.

Τα διάφορα μοντέλα

Το ετερογενές μοντέλο των Chiappori, Levitt και Groseclose

Με αυτό το αντικείμενο έχουν ασχοληθεί οι Chiappori, Levitt και Groseclose οι οποίοι έλεγξαν την μηδενική υπόθεση ότι η πιθανότητα επιτυχίας γκολ είναι η ίδια αν ο επιθετικός στοχεύσει αριστερά, στην μέση ή δεξιά στο τέρμα βάσει στοιχείων που συνέλεξαν από 459 πέναλτι από το γαλλικό και ιταλικό πρωτάθλημα. Ήξεραν για κάθε πέναλτι τον επιθετικό, τον τερματοφύλακα, την κατεύθυνση της μπάλας, αριστερά, κέντρο και δεξιά, το σκορ εκείνη την στιγμή, το λεπτό του παιχνιδιού και σε ποιανού την έδρα διεξαγόταν ο αγώνας. Στα στοιχεία αυτά εμπλέκονταν 162 επιθετικοί και 88 τερματοφύλακες.



Το μοντέλο που χρησιμοποίησαν είναι το εξής: Θεωρούμε έναν μεγάλο πληθυσμό από τερματοφύλακες και επιθετικούς. Για την εκτέλεση κάθε πέναλτι διαλέγουμε τυχαία έναν τερματοφύλακα και έναν επιθετικό. Ο επιθετικός (αντίστοιχα ο τερματοφύλακας) προσπαθεί να μεγιστοποιήσει (αντίστοιχα ελαχιστοποιήσει) την πιθανότητα επιτυχίας γκολ. Οι επιλογές που έχει ο επιθετικός για να στοχεύσει είναι αριστερά, κέντρο και δεξιά του τέρματος. Αντίστοιχα, οι επιλογές του τερματοφύλακα είναι να πηδήξει δεξιά ή αριστερά ή να παραμείνει στο κέντρο. Θεωρούμε το ίδιο αριστερά και δεξιά και για τους δύο, αυτό του επιθετικού. Όταν ο επιθετικός και ο τερματοφύλακας διαλέγουν την ίδια πλευρά S ($S = \Delta, A$) θεωρούν ότι επιτυγχάνεται γκολ με πιθανότητα P_S. Όταν ο επιθετικός διαλέγει S ($S = \Delta, A$) αλλά ο τερματοφύλακας διαλέγει είτε την αντίθετη πλευρά είτε να μείνει στο κέντρο, επιτυγχάνεται γκολ με πιθανότητα $\pi_S > P_S$, όπου, $1 - \pi_S$ είναι η πιθανότητα να βγει η μπάλα εκτός αγωνιστικού χώρου ή να χτυπήσει δοκάρι, ενώ είναι $\pi_S > P_S$ επειδή εκτός του ότι μπορεί η μπάλα να βγει άουτ ή να χτυπήσει δοκάρι, μπορεί ακόμα να την πιάσει ο τερματοφύλακας. Θεωρούν, επίσης, ότι αν ο επιθετικός επιλέξει να στοχεύσει στο κέντρο, επιτυγχάνεται γκολ με πιθανότητα μ όταν ο τερματοφύλακας επιλέξει S και 0 αν σταθεί στο κέντρο. Ουσιαστικά, πρόκειται για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με ***χώρο στρατηγικών*** {Α, Κ, Δ} και ***πίνακα αποδόσεων***:

		Τερματοφύλακας		
		Α	**Κ**	**Δ**
Επιθετικός	**Α**	P_A	π_A	π_A
	Κ	μ	0	μ
	Δ	π_Δ	π_Δ	P_Δ

Υποθέτουν ότι ο πίνακας αυτός είναι γνωστός και στους δύο παίκτες πριν από την βολή, υπόθεση την οποία και ελέγχουν στην συνέχεια και επαληθεύεται. Τέλος, υποθέτουν ότι και οι δύο παίκτες κινούνται ταυτόχρονα, το οποίο, όπως έχουμε εξηγήσει, είναι αληθές.

Με βάση αυτό το μοντέλο ελέγχουν τρεις υποθέσεις τις οποίες ασπάζονται οι επαγγελματίες τερματοφύλακες. Η πρώτη υπόθεση είναι ότι αν ο επιθετικός ήξερε πού θα πέσει ο τερματοφύλακας, θα διάλεγε την άλλη πλευρά και ότι αν, για παράδειγμα, ο τερματοφύλακας πέσει αριστερά, είναι πιο πιθανό να μπει γκολ αν ο επιθετικός στοχεύσει δεξιά παρά στο κέντρο. Η δεύτερη υπόθεση είναι ότι ο επιθετικός πάντα σουτάρει καλύτερα προς την «φυσική» του πλευρά, δηλαδή αν το καλό του πόδι είναι το δεξί αριστερά και αν είναι το αριστερό δεξιά, άσχετα με το πού θα πέσει ο τερματοφύλακας. Η τρίτη υπόθεση είναι ότι όχι μόνο είναι πιο πιθανό να μην βγουν άουτ ή δοκάρι τα σουτ προς την «φυσική» πλευρά του επιθετικού, αλλά είναι και πολύ δυσκολότερο να τα πιάσει ο τερματοφύλακας.

Με τα στοιχεία που συνέλεξαν καταλήγουν ότι και οι τρεις αυτές υποθέσεις επαληθεύονται και τα αποτελέσματά τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

TABLE 1—OBSERVED SCORING PROBABILITIES, BY FOOT AND SIDE

	Goalie	
Kicker	Correct side	Middle or wrong side
Natural side ("left")	63.6 percent	94.4 percent
Opposite side ("right")	43.7 percent	89.3 percent

Δηλαδή, η πιθανότητα να μπει γκολ όταν ο τερματοφύλακας διαλέγει λανθασμένη κατεύθυνση είναι ανάμεσα στο 89 και το 94 τοις εκατό, ενώ κυμαίνεται μεταξύ 44 και 64 τοις εκατό όταν επιλέγει την σωστή πλευρά και έτσι επαληθεύεται η πρώτη υπόθεση. Επιπροσθέτως, όπως φαίνεται η πιθανότητα επιτυχίας γκολ είναι μεγαλύτερη προς την «φυσική» πλευρά του επιθετικού, επαληθεύοντας την δεύτερη υπόθεση και η διαφορά είναι ακόμα μεγαλύτερη όταν ο τερματοφύλακας κάνει λανθασμένη επιλογή.

Το παίγνιο αυτό δεν έχει λύση με καθαρή στρατηγική, επομένως βρίσκουμε την ισορροπία με χρήση μεικτής στρατηγικής.

Το μοντέλο του Ignacio Palacios-Huerta

Ακόμα, με αυτό το αντικείμενο ασχολήθηκε και ο Ignacio Palacios-Huerta ο οποίος συνέλεξε στοιχεία από 1417 πέναλτι από τον Σεπτέμβριο του 1995 έως τον Ιούνιο του 2000 από επαγγελματικά παιχνίδια κυρίως στην Ισπανία, Ιταλία, Αγγλία, έχοντας λάβει υπόψη του και την δημοσίευση των Chiappori, Levitt και Groseclose. Εκτός από την επιλογή του πού θα στοχεύσει ο επιθετικός στο τέρμα, λαμβάνει υπόψη του και σε ποια στιγμή του παιχνιδιού εκτελείται το κάθε πέναλτι και ποιο είναι το σκορ εκείνη την στιγμή. Τα αποτελέσματα που συνέλεξε παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

TABLE 1

Distribution of strategies and scoring rates

Score difference	#Obs.	LL	LC	LR	CL	CC	CR	RL	RC	RR	Scoring rate
0	580	16·9	1·3	21·0	4·3	0·8	5·6	19·4	0·6	27·9	81·9
1	235	19·1	0	19·1	4·2	0	2·5	28·0	0	26·8	77·8
−1	314	19·7	0·9	25·8	1·9	0	6·4	20·0	0·6	30·2	80·2
2	97	23·7	2·0	17·5	5·2	0	0	20·6	1·0	29·9	75·2
−2	114	26·3	0	25·4	3·5	0	3·5	16·6	0	24·5	78·0
3	27	14·8	0	18·5	3·7	0	11·1	22·2	0	29·6	77·7
−3	23	30·4	0	30·4	0	0	0	21·7	0	17·4	82·6
4	7	42·8	0	28·5	0	0	0	14·2	0	14·2	100
−4	12	25·0	0	25·0	0	0	16·6	16·6	0	16·6	83·3
Others	8	50·0	0	0	0	0	12·5	37·5	0	0	87·5
Penalties shot in:											
First half	558	21·1	0·8	19·8	3·9	0·3	3·5	20·0	0·3	29·7	82·9
Second half	859	18·7	0·9	23·2	3·3	0·3	3·6	22·8	0·5	26·3	78·3
Last 10 min	266	21·8	0	21·0	0·3	0	0·7	25·1	0	30·8	73·3
All penalties	1417	19·6	0·9	21·9	3·6	0·3	3·6	21·7	0·5	27·6	80·1
Scoring rate	80·1	55·2	100·0	94·2	94·1	50·0	82·3	96·4	100·0	71·1	

Note: The first letter of the strategy denotes the kicker's choice and the second the goalkeeper's choice. "R" denotes the R.H.S. of the goalkeeper, "L" denotes the L.H.S. of the goalkeeper, and "C" denotes centre.

Αναλύει και τις διαφορές ανάμεσα σε παίκτες που το καλό τους πόδι είναι το αριστερό και το δεξί. Τα αποτελέσματα αυτού φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

TABLE 2

Distribution of strategies and scoring rates by kicker type

Score difference	#Obs.	LL	LC	LR	CL	CC	CR	RL	RC	RR	Scoring rate
		Left-footed kickers									
0	174	17·8	1·7	20·1	6·3	0	8·6	22·9	0·5	21·8	82·7
1	73	28·7	0	30·1	4·1	0	2·7	19·1	0	15·0	78·0
−1	92	29·3	1·0	26·0	1·0	0	2·0	21·7	1·0	18·4	82·6
2	29	51·7	0	13·7	3·0	0	0	10·3	0	20·6	72·4
−2	30	40·0	0	13·3	3·0	0	3·0	20·0	0	20·0	76·6
All penalties	406	29·3	1·4	20·4	4·4	0	3·9	23·8	0	16·5	
Scoring rate	81·0	62·1	100	95·1	94·4	0	81·2	93·8	0	61·2	
		Right-footed kickers									
0	406	16·4	1·2	21·4	3·4	1·2	4·4	20·4	0·7	30·5	83·2
1	162	14·8	0	14·2	4·3	0	2·4	32·1	0	32·1	77·7
−1	222	15·7	1·0	25·6	2·2	0	0	19·3	1·0	35·1	80·6
2	68	11·7	2·9	19·1	5·8	0	0	25·0	1·4	33·8	76·4
−2	84	21·4	0	29·7	3·5	0	3·5	15·4	0	26·2	78·5
All penalties	1011	15·8	0·6	22·5	3·2	0·5	3·4	20·8	0·6	32·1	
Scoring rate	79·8	50·0	100	93·8	93·9	60·0	82·8	97·6	100	73·2	

Note: The first letter of the strategy denotes the kicker's choice and the second the goalkeeper's choice. "R" denotes the R.H.S. of the goalkeeper, "L" denotes the L.H.S. of the goalkeeper, and "C" denotes centre.

Εργάζεται ως εξής: αρχικά ασχολείται μόνο με τους παίκτες που συμμετέχουν σε σχετικά μεγάλο αριθμό πέναλτι. Ξεχωρίζει, δηλαδή, τους 22 επιθετικούς και 20 τερματοφύλακες που έχουν συμμετάσχει σε τουλάχιστον 30 πέναλτι ο καθένας. Για καθέναν από αυτούς τους παίκτες προσμετρούνται όλα τα πέναλτι στα οποία έχουν λάβει μέρος την περίοδο αυτή (Σεπτέμβριος 1995 – Ιούνιος 2000).

Θεωρεί ότι δεδομένου ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη επιθετικών, αριστεροπόδαροι και δεξιοπόδαροι, δεν είναι σωστό να θεωρηθούν ισοδύναμα τα δύο αυτά είδη παιχνιδιών. Και αντί για αριστερή και δεξιά πλευρά, εισάγει κι αυτός τον όρο «φυσική» πλευρά, κατά τον ίδιο τρόπο που τον είχαν ορίσει και οι Chiappori, Levitt και Groseclose. Καταλήγει ότι εν τέλει ισχύουν τα ίδια, απλά αντίστροφα, και για τα δύο είδη παικτών και συνεχίζει την μελέτη θεωρώντας όλους τους παίκτες δεξιοπόδαρους αφού έχει αντιστρέψει τα αποτελέσματα των αριστεροπόδαρων.

Στο δείγμα του οι επιθετικοί διαλέγουν να στοχεύσουν δεξιά ή αριστερά κατά 93.8% και οι τερματοφύλακες επιλέγουν να πέσουν δεξιά ή αριστερά κατά 98.9%, επομένως θεωρεί ότι δεν χρειάζεται να λάβει υπόψη του το κέντρο ως επιλογή, παρόλο που παραδέχεται ότι είναι όντως μια επιλογή που λαμβάνουν υπόψη τους οι παίκτες.

Μοντελοποιεί την διαδικασία των πέναλτι με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω για να εξηγήσουμε γιατί χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μεικτή στρατηγική. Σε αυτό το μοντέλο τα πέναλτι έχουν μοναδική ισορροπία κατά Nash. Ελέγχει αν όντως οι πιθανότητες νίκης είναι οι ίδιες ανάμεσα σε όλες τις στρατηγικές και αν κάθε επιλογή είναι ανεξάρτητη από προηγούμενες κλπ.

Ο πίνακας αποδόσεων που προκύπτει από το δείγμα είναι ο παρακάτω.

	τ_A	$1-\tau_A$
ε_A	58.30	94.97
$1-\varepsilon_A$	92.91	69.92

Όπου τ_A και ε_A οι όχι «φυσικές» πλευρές του τερματοφύλακα και του επιθετικού αντίστοιχα.

Συγκρίνει τις συχνότητες που προκύπτουν από την ισορροπία Nash και αυτές που προκύπτουν από το δείγμα.

	$\tau_A(\%)$	$1-\tau_A(\%)$	$\varepsilon_A(\%)$	$1-\varepsilon_A(\%)$
Συχνότητες Nash	41.99	58.01	38.54	61.46
Πραγματικές συχνότητες	42.31	57.69	39.98	60.02

Παρατηρούμε ότι τα παρατηρούμενα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά στις θεωρητικές υποθέσεις.

Στην συνέχεια, τρέχει τον στατιστικό έλεγχο x^2 του Pearson (goodness-of-fit test of equality of two distributions) για να ελέγξει την μηδενική υπόθεση ότι οι πιθανότητες και για τον τερματοφύλακα και για τον επιθετικό είναι οι ίδιες ανάμεσα σε όλες τις στρατηγικές από το οποίο προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

TABLE 3

Tests for equality of scoring probabilities

Player	#Obs.	Mixture		Scoring rates		Pearson	
		L	R	L	R	statistic	*p*-value
Kicker 1	34	0·32	0·68	0·91	0·91	0·000	0·970
Kicker 2	31	0·35	0·65	0·82	0·80	0·020	0·902
Kicker 3	40	0·48	0·52	0·74	0·76	0·030	0·855
Kicker 4	38	0·42	0·58	0·88	0·91	0·114	0·735
Kicker 5	38	0·50	0·50	0·79	0·84	0·175	0·676
Kicker 6	36	0·28	0·72	0·70	0·77	0·185	0·667
Kicker 7	41	0·20	0·80	0·75	0·82	0·191	0·662
Kicker 8	35	0·31	0·69	0·82	0·75	0·199	0·656
Kicker 9	31	0·19	0·81	0·83	0·92	0·416	0·519
Kicker 10	35	0·37	0·63	0·86	0·77	0·476	0·490
Kicker 11	32	0·48	0·52	0·87	0·94	0·521	0·471
Kicker 12	32	0·48	0·52	0·87	0·94	0·521	0·471
Kicker 13	38	0·55	0·45	0·76	0·88	0·907	0·341
Kicker 14	30	0·33	0·67	0·90	0·75	0·938	0·333
Kicker 15	30	0·50	0·50	0·80	0·93	1·154	0·283
Kicker 16	42	0·43	0·57	0·89	0·75	1·287	0·257
Kicker 17	40	0·42	0·58	0·58	0·85	1·637	0·201
Kicker 18	46	0·44	0·56	0·90	0·77	1·665	0·197
Kicker 19	39	0·48	0·52	0·74	0·90	1·761	0·184
Kicker 20	40	0·35	0·65	0·93	0·69	2·913	0·088*
Kicker 21	40	0·42	0·58	0·65	0·91	4·322	0·038**
Kicker 22	40	0·40	0·60	1·00	0·75	4·706	0·030**
All kickers	808	0·3998	0·6002	0·8111	0·8268		
Goalkeeper 1	37	0·38	0·62	0·21	0·22	0·000	0·982
Goalkeeper 2	38	0·39	0·61	0·20	0·22	0·017	0·898
Goalkeeper 3	30	0·60	0·40	0·28	0·25	0·028	0·866
Goalkeeper 4	50	0·46	0·54	0·17	0·15	0·061	0·804
Goalkeeper 5	36	0·33	0·67	0·25	0·21	0·080	0·777
Goalkeeper 6	34	0·44	0·56	0·27	0·21	0·147	0·702
Goalkeeper 7	37	0·19	0·81	0·14	0·10	0·221	0·638
Goalkeeper 8	37	0·54	0·46	0·25	0·18	0·293	0·588
Goalkeeper 9	32	0·56	0·44	0·22	0·14	0·326	0·568
Goalkeeper 10	40	0·45	0·55	0·11	0·18	0·388	0·533
Goalkeeper 11	33	0·18	0·82	0·17	0·30	0·416	0·519
Goalkeeper 12	30	0·27	0·73	0·25	0·14	0·545	0·460
Goalkeeper 13	34	0·41	0·59	0·14	0·25	0·578	0·447
Goalkeeper 14	40	0·50	0·50	0·15	0·25	0·625	0·429
Goalkeeper 15	44	0·45	0·55	0·10	0·21	0·957	0·328
Goalkeeper 16	36	0·31	0·69	0·09	0·24	1·804	0·298
Goalkeeper 17	42	0·55	0·45	0·30	0·11	2·449	0·118
Goalkeeper 18	42	0·38	0·62	0·13	0·35	2·506	0·113
Goalkeeper 19	42	0·40	0·60	0·35	0·12	3·261	0·071*
Goalkeeper 20	40	0·60	0·40	0·08	0·37	5·104	0·024**
All goalkeepers	754	0·4231	0·5769	0·1943	0·2068		

Note: *Indicates rejected at 10% level, and **indicates rejected at 5% level.

Επιπρόσθετα, ελέγχει αν όλο το δείγμα υπακούει στην θεωρία ισορροπίας πάλι με τεστ x^2 με 42 βαθμούς ελευθερίας και πρυκύπτει ο παρακάτω πίνακας, ο οποίος επαληθεύει τις υποθέσεις.

TABLE 4

Tests for equality of scoring probabilities for aggregate distributions

Panel A: Pearson tests

Tests of the joint hypothesis that the data for all experiments were generated by equilibrium play: $p^i_L = p^i_R$ for each player i.

	Pearson statistic	Degrees of freedom	p-value
All players	43·944	42	0·389
All kickers	24·138	22	0·340
All goalkeepers	19·806	20	0·470

Panel B: KS tests

Tests the null hypothesis that the empirical distribution of p-values in individual Pearson tests was generated by random draws from the uniform distribution $U[0,1]$.

	KS statistic	p-value
All players	0·527	0·883
All kickers	0·396	0·891
All goalkeepers	0·373	0·832

Η επαλήθευση φαίνεται, ίσως, πιο ξεκάθαρα και από το KS τεστ (Kolmogorov-Smirnov statistic) που δείχνει ότι τα αποτελέσματα του δείγματος φαίνονται, όντως, να είναι τυχαίες επιλογές από ομοιόμορφη κατανομή. Καταλήγουμε, δηλαδή, ότι τα στοιχεία του δείγματος είναι κατασκευασμένα από παίγνιο που υπάκουε στους κανόνες του minimax. Αυτό δεν είναι παράξενο, παρόλο που πρόκειται για διαφορετικούς παίκτες κάθε φορά, αφού μελετάται η συμπεριφορά επαγγελματιών οι οποίοι φέρονται σαν να είναι τέλεια προγραμματισμένοι, ώστε να ακολουθούν τους κανόνες του minimax. Εξηγεί γιατί συμβαίνει αυτό, παρόλο που οι αντίπαλοι κάθε φορά αλλάζουν, αναφέροντας ότι οι παίκτες ενημερώνονται συνεχώς από τα μέσα μαζικής ενημέρωσης ή δικτύωσης και ότι οι περισσότεροι κρατάνε αρχείο για τους αντιπάλους τους. Ωστόσο, ενώ έχουν υπόψη τους το παρελθόν και τα στοιχεία του αντιπάλου τους, όπως αποδεικνύει στην συνέχεια, οι παίκτες τελικά δρουν σε κάθε πέναλτι ανεξάρτητα.

Ελέγχει ακόμα αν η μεικτή στρατηγική κάθε παίκτη είναι η ίδια σε κάθε εκτέλεση πέναλτι. Αυτό υπονοεί ότι κάθε βολή πέναλτι είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε άλλη. Το αποδεικνύει και αυτό κάνοντας Φ τεστ για κάθε παίκτη ξεχωριστά και στην συνέχεια πάλι KS statistic.

TABLE 5

Tests of serial independence of choices

Player	Observations L	Observations R	Observations Total	Runs R	$\Phi[f(r-1;s)]$	$\Phi[f(r;s)]$
Kicker 1	11	23	34	16	0·439	0·597
Kicker 2	11	20	31	21	0·983**	0·994
Kicker 3	19	21	40	22	0·570	0·691
Kicker 4	16	22	38	19	0·365	0·496
Kicker 5	19	19	38	22	0·689	0·795
Kicker 6	10	26	36	15	0·344	0·509
Kicker 7	8	33	41	14	0·423	0·625
Kicker 8	11	24	35	15	0·263	0·407
Kicker 9	6	25	31	9	0·097	0·241
Kicker 10	13	22	35	19	0·599	0·729
Kicker 11	15	17	32	19	0·714	0·822
Kicker 12	15	17	32	20	0·822	0·901
Kicker 13	21	17	38	23	0·816	0·891
Kicker 14	10	20	30	12	0·117	0·221
Kicker 15	15	15	30	18	0·711	0·824
Kicker 16	18	24	42	19	0·164	0·254
Kicker 17	19	21	40	20	0·321	0·443
Kicker 18	20	26	46	19	0·693	0·789
Kicker 19	19	20	39	19	0·259	0·374
Kicker 20	14	26	40	14	0·022	0·049*
Kicker 21	17	23	40	18	0·159	0·251
Kicker 22	16	24	40	22	0·668	0·779
Goalkeeper 1	14	23	37	17	0·249	0·374
Goalkeeper 2	15	23	38	21	0·678	0·790
Goalkeeper 3	18	12	30	12	0·065	0·130
Goalkeeper 4	23	27	50	24	0·250	0·350
Goalkeeper 5	12	24	36	17	0·424	0·576
Goalkeeper 6	15	19	34	15	0·124	0·212
Goalkeeper 7	7	30	37	13	0·533	0·738
Goalkeeper 8	20	17	37	20	0·516	0·647
Goalkeeper 9	18	14	32	19	0·739	0·842
Goalkeeper 10	18	22	40	14	0·009	0·021**
Goalkeeper 11	6	27	33	11	0·423	0·661
Goalkeeper 12	8	22	30	15	0·802	0·908
Goalkeeper 13	14	20	34	19	0·644	0·767
Goalkeeper 14	20	20	40	22	0·564	0·685
Goalkeeper 15	20	24	44	27	0·871	0·925
Goalkeeper 16	11	25	36	16	0·378	0·535
Goalkeeper 17	23	19	42	28	0·964*	0·983
Goalkeeper 18	16	26	42	23	0·713	0·814
Goalkeeper 19	17	25	42	18	0·113	0·187
Goalkeeper 20	24	16	40	19	0·285	0·408

Note: *Indicates rejected at 10% level, and **indicates rejected at 5% level.

TABLE 6

Results of significance tests from logit equations for the choice of the natural side

Estimating equation:

$$R = G[a_0 + a_1 \mathrm{lag}(R) + a_2 \mathrm{lag2}(R) + b_0 R^* + b_1 \mathrm{lag}(R^*) + b_2 \mathrm{lag2}(R^*) + c_1 \mathrm{lag}(R)\mathrm{lag}(R^*) + c_2 \mathrm{lag2}(R)\mathrm{lag2}(R^*)]$$

		Players whose behaviour allows rejection of the null hypothesis at the:		
Null hypothesis:		0·05 level	0·10 level	0·20 level
1. $a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$	Kicker	—	2	2, 18
	Goalkeeper	—	7	7, 15
2. $a_1 = a_2 = 0$	Kicker	—	2	2, 14
	Goalkeeper	—	8	8, 17
3. $b_1 = b_2 = 0$	Kicker	—	—	5
	Goalkeeper	—	7	7
4. $c_1 = c_2 = 0$	Kicker	—	—	6
	Goalkeeper	—	—	14
5. $b_0 = 0$	Kicker	—	11, 17	5, 11, 17, 21
	Goalkeeper	—	3, 16	3, 9, 10, 16

Notes: R and R^* denote the choice of "natural" strategy by a kicker and a goalkeeper, respectively (right for a right-footed kicker and for a goalkeeper facing a right-footed kicker, and left for a left-footed kicker and for a goalkeeper facing a left-footed kicker). The terms "lag" and "lag2" refer to the strategies previously followed in the ordered sequence of penalty kicks. $G[x]$ denotes the function $\exp(x)/[1 + \exp(x)]$. Rejections are based on likelihood-ratio tests.

Η διαφορά στις δύο μεθόδους

Η πρώτη μέθοδος λαμβάνει αποτελέσματα από μικρότερο δείγμα και τα αποτελέσματα που έχουν εξάγει σχετικά με το θεώρημα minimax, ή σχετικά με την ανεξαρτησία δεν μπορούν να επεκταθούν για κάθε παίκτη ξεχωριστά. Έχουν, όμως, καταλήξει σε σημαντικά αποτελέσματα αν συναθροίσουμε παρατηρήσεις από διαφορετικούς παίκτες, τα οποία επιβεβαιώνει και η μέθοδος του Palacios-Huerta.

Η δεύτερη μέθοδος λαμβάνει στοιχεία από πολύ μεγαλύτερο δείγμα και καταλήγει σε συμπεράσματα και ξεχωριστά για κάθε παίκτη ότι όντως δρουν συμφωνα με το minimax. Παρόλο που αυτό μπορεί να φαίνεται προφανές, ήταν η πρώτη φορά που επαληθεύτηκε κάτι τέτοιο σε φυσικό ή πειραματικό περιβάλλον.

Συμπέρασμα

Επαληθεύονται για πρώτη φορά με πραγματικά στοιχεία οι δύο υποθέσεις του θεωρήματος minimax του von Neumann. Πρώτον, οι πιθανότητες επιτυχίας είναι στατιστικά παρόμοιες ανάμεσα στις στρατηγικές και των δύο παικτών και, δεύτερον, οι παίκτες δρουν τελείως ανεξάρτητα, σαν να υπάρχει κάποια κληρωτίδα, κάθε φορά, αγνοώντας οποιοδήποτε παρελθόν του παιχνιδιού. Διαχωρίζεται, έτσι, η λήψη αποφάσεων που συμφωνεί με την θεωρία ισορροπίας με μεικτή στρατηγική από οποιονδήποτε άλλον τρόπο που δεν λαμβάνει υπόψη του την ισορροπία.

Έλεγχος του Θεωρήματος Minimax στο Εργαστήριο από Επαγγελματίες Ποδοσφαιριστές

Εκτός από το πρόβλημα αν οι παίκτες δρουν σύμφωνα με το minimax, ένα σημαντικό θέμα είναι κατα πόσο τα πορίσματα από τα πειράματα στο εργαστήριο αντικατοπτρίζουν την συμπεριφορά σε φυσικό περιβάλλον. Ο λόγος που είναι σημαντικό να μάθουμε κάτι τέτοιο είναι διότι τα φαινόμενα εκτός εργαστηρίου παραείναι πολύπλοκα για να μπορέσουμε να τα μοντελοποιήσουμε σωστά. Εν αντιθέσει, στο εργαστήριο μπορούμε να έχουμε προκαθορισμένους πίνακες αποδόσεων και να γνωρίζουμε ακριβώς πόση πληροφορία παρέχεται στους παίκτες. Αυτό όμως μπορεί να είναι και αρνητικό ως προς το κατά πόσον το αποστειρωμένο πείραμα στο εργαστήριο ανταποκρίνεται έστω και λίγο στην πραγματικότητα. Κάποιοι πειραματικοί οικονομολόγοι έχουν στραφεί σε εξωτερικά πειράματα, όχι σε εργαστήρια, με πιο απλά διατυπωμένους κανόνες, όπως περιγράφουν ο Harrison κ.α.[10] .

Οι Ignacio Palacios-Huerta και Oscar Volij μελέτησαν πώς αλληλεπιδρούν επαγγελματίες ποδοσφαιριστες και φοιτητές σε παίγνια δύο ατόμων μηδενικού αθροίσματος μεικτής στρατηγικής με μοναδικό σημείο ισορροπίας. Αρχικά έβαλαν τους επαγγελματίες να παίξουν ένα 2×2 παίγνιο παρόμοιο με αυτό που αντιμετωπίζουν και στο επαγγελματικό τους περιβάλλον, πέναλτι. Παρατηρήθηκε ότι δεν αποκλίνουν από την συμπεριφορά τους στον χώρο όπου ειδικεύονται και παίζουν πολύ κοντά στην ισορροπία. Συγκεκριμένα, εξισώνουν τα κέρδη τους με αυτά που προβλέπονται από την ισορροπία και φαίνονται να παράγουν τυχαία επιλογές που είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σε αντίθεση με αυτούς, οι φοιτητές φαίνονται να δρουν απομακρυνόμενοι πολύ από την ισορροπία. Στην συνέχεια, βάζουν και τις δύο ομάδες να παίξουν το 4×4 παίγνιο μηδενικού αθροίσματος του O'Neill, το οποίο κανείς από τους παίκτες δεν είχε ξανασυναντήσει. Βρίσκουν τις ίδιες διαφορές στα αποτελέσματα των δύο ειδών παικτών. Κρίνουν ότι το γεγονός ότι οι επαγγελματίες παίκτες μεταφέρουν τις δεξιότητες και τις εμπειρίες από το αντικείμενό τους στο ξένο περιβάλλον του εργαστηρίου είναι δείγμα ότι η συμπεριφορά στο εργαστήριο είναι αξιόπιστη για την εξαγωγή συμπερασμάτων για φυσικές καταστάσεις. Παραθέτουν, μάλιστα και ένα απόσπασμα του Hume όπου αναφέρει ότι μεταφέρουμε τις εμπειρίες από το παρελθόν σε αντικείμενα που είναι παρόμοια αλλά όχι ακριβώς τα ίδια με εκείνα με τα οποία έχουμε εμπειρία, παρόλο που αυτή η συνήθεια χάνει λίγη από την ισχή της με κάθε διαφορά, πολύ σπάνια καταστρέφεται τελείως, σε καταστάσεις όπου οι βασικές παράμετροι παραμένουν ίδιες.

Το πείραμα για τα πέναλτι έγινε για να εξακριβωθεί κατά πόσον η εμπειρία από τον αγωνιστικό χώρο μπορεί να μεταφερθεί στο εργαστήριο και να συγκριθεί με τις πραγματικές αποδόσεις, για να βρεθούν τυχόν διαφορές που θα βοηθήσουν στο να προσδιοριστεί η αξιοπιστία των πειραμάτων στο εργαστήριο. Για να ελέγξουν την υπόθεση της μεθοδολογίας τους, το ίδιο παίγνιο πραγματοποιείται και από φοιτητές χωρίς εμπειρία στο ποδόσφαιρο.

[10] Harrison, Glenn, W., and John A. List. 2004. "Field Experiments." *Journal of Economic Literature*, 42(4): 1009-1055.

Στην συνέχεια, οι επαγγελματίες και οι φοιτητές αντιμετωπίζουν ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος που δεν έχουν ξανασυναντήσει, το 4×4 παίγνιο του O'Neill. Εδώ χρησιμοποιούν μεγαλύτερα ποσά σε σχέση με παλαιότερες παραλλαγές του παιγνίου του O'Neill. Οι διαφορές τους στο παίγνιο των πέναλτι ήταν αναμενόμενες, ακολοθείται όμως και σε αυτό το παίγνιο το ίδιο μοτίβο· πάλι οι φοιτητες αποκλίνουν πολύ από την ισορροπία, ενώ οι επαγγελματίες που φαίνεται να παίζουν σύμφωνα με την ισορροπία στον αγωνιστικό χώρο συνεχίζουν να το κάνουν και στο εργαστήριο.

Το πείραμα αυτό στηρίζει τα πειράματα στο εργαστήριο για τα ανταγωνιστικά παίγνια. Δεν είναι όλα τα παίγνια ανταγωνιστικά ούτε μηδενικού αθροίσματος. Συμπέραναν, ωστόσο, ότι οι γνωσιακές ικανότητες ίσως υπάρχουν και πέρα από τα όρια που έχει συνειδητοποιήσει κάποιος, στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, και μπορούν να μεταφερθούν ακόμα και στο ξένο περιβάλλον του εργαστηρίου.

Πρόοδος στην Συμπεριφορική Θεωρία Παιγνίων

Η ιδέα ότι οι ψυχολογικοί παράγοντες είναι σχετικοί με το πώς επηρεάζεται η λήψη αποφάσεων των ατόμων δεν είναι κάτι καινούριο, αντιθέτως το είχε τονίσει και ο Hume από το 1739[11]. Ο Camerer θέτει το ερώτημα αν η θεωρία παιγνίων προορίζεται για να περιγράφει τις πραγματικές επιλογές ανθρώπων και οργανισμών ή όχι. Τονίζει ότι όλη η πρόοδος στην θεωρία παιγνίων έχει γίνει αγνοώντας αυτό το ερώτημα. Όλη η θεωρία έχει βασιστεί στην αλληλεπίδραση μεταξύ ορθολογικών παικτών, με την επίγνωση ότι και ο αντίπαλος είναι ορθολογικός παίκτης. Στις πιο πρόσφατες μελέτες δεν είνα πάντα σαφές τι επιδιώκουν οι μελετητές να περιγράψουν ή να προτείνουν. Από την μία πλευρά, οι αυστηρά μαθηματικές μελέτες θέτουν λογικές προϋποθέσεις οι οποίες είναι αδύνατον να καλυφθούν στην καθημερινότητα, αφού τα άτομα ή οι εταιρίες ενδεχομένως δεν είναι τόσο έξυπνοι. Από την άλλη, προσαρμοσμένες και εξελικτικές προσεγγίσεις χρησιμοποιούν υπεραπλουστευμένα μοντέλα τα οποία οριακά δεν περιγράφουν καν ανθρώπινη συμπεριφορά.

Η δουλειά του Camerer επικεντρώνεται στο να περιγράψει την πραγματική συμπεριφορά των παικτών με γνώμονα την εμπειρική παρατήρηση, κυρίως σε πειράματα, και να γεφυρώσει το κενό μεταξύ της υπερμαθηματικοποιημένης ανάλυσης και της υπεραπλούστευσης.

Αυτό το κάνει σε τρία βήματα: ξεκινάει με ένα παίγνιο ή μια φυσικά προκαλούμενη κατάσταση για την οποία η θεωρία παιγνίων κάνει κάποια δυνατή πρόβλεψη βασισμένη σε μία ή δύο βασικές αρχές· αν η παρατηρούμενη συμπεριφορά διαφέρει από την πρόβλεψη, σκέφτεται πιθανές εξηγήσεις για τον λόγο που συμβαίνει αυτό και επεκτείνει την θεωρία, ώστε να συμπεριλαμβάνει τους παράγοντες αυτούς. Στην δημοσίευσή του ο Camerer θεωρεί τρεις κατηγορίες αρχών μοντελοποίησης και καταγράφει τις παραβάσεις των τριών αυτών αρχών.

Η πρώτη παράβαση που παρατηρεί σε παίγνια είναι ότι συχνά οι παίκτες αντί να επικεντρώνονται αποκλειστικά στην μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς τους, φαίνονται να επηρεάζονται από την κοινωνική χρησιμότητα, δηλαδή εκφράζουν ανησυχία σχετικά με την δικαιοσύνη των κανόνων και τις προθέσεις των υπόλοιπων παικτών.

Η δεύτερη παράβαση σχετίζεται με προβλήματα στην κρίση των παικτών και την συνήθειά τους να υπερεκτιμούν τις δυνατότητές τους.

Η τρίτη παράβαση είναι ότι οι παίκτες συχνά εισάγουν στην διαμόρφωση της στρατηγικής τους επιπρόσθετα στοιχεία τα οποία συνήθως δεν λαμβάνει υπόψιν της η θεωρία παιγνίων. Για παράδειγμα, οι παίκτες τείνουν να πιστεύουν ότι διαδραματίζει πλεονεκτικό ρόλο ο χρόνος που χρειάζεται κάποιος παίκτης για να λάβει κάποια απόφαση ή

[11]Hume, D., 1739. *A Treatise of Human Nature.* London: s.n.

μία φυσική τάση των παικτών να εμβαθύνουν μόνο σε ένα ή δύο επίπεδα ενός πολυεπίπεδου παιγνίου, μη λαμβάνοντας υπόψιν τα άλλα.

Με αυτον τον τρόπο αποσκοπεί στο να αποσυναρμολογήσει ολόκληρη την βιβλιογραφία των πειραμάτων και να βρει πού συγκεκριμένα έγκειται το πρόβλημα, έτσι ώστε να επιτευχθεί η σύνταξη κάποιας θεωρίας η οποία να είναι συνεπής με την πραγματικότητα έτσι, ώστε η θεωρία παιγνίων να γίνει ένα ακόμα πιο χρήσιμο εργαλείο για το μέλλον. Ο τελικός στόχος της συμπεριφορικής θεωρίας παιγνίων είναι με την περιγραφή μιας στρατηγικής κατάστασης να καταφέρνει να προβλέπει αντικειμενικά την πραγματική συμπεριφορά των παικτών τουλάχιστον τόσο καλά όσο και η ήδη υπάρχουσα θεωρία.

Υποστηρίζει ότι απλά παίγνια μπορούν επίσης να βοηθήσουν να μοντελοποιηθούν οικονομικά φαινόμενα, πέρα από την θεωρία παιγνίων. Στα πειράματα οι παίκτες απορρίπτουν κατά κόρον συμφέρουσες προτάσεις και ευκαιρίες επειδή τις κρίνουν άδικες, προσπαθούν να συμβιβαστούν με το κοινό καλό και τείνουν να μην εκμεταλλεύονται τους αντιπάλους τους στο έπακρο, που καταδεικνύει ότι το ηθικό κενό που υπάρχει στην θεωρία παιγνίων θα πρέπει να γεφυρωθεί για να ταιριάζει καλύτερα σε πραγματικές καταστάσεις.

Συμπέρασμα

Η συμπεριφορική θεωρία παιγνίων στοχεύει στο να αντικαταστήσει ανακριβείς αρχές μοντελοποίησης εισάγοντας άλλες πιο λογικές, όσο αφορά στην ψυχολογία, όσο πιο σωστά γίνεται.

Με αυτόν τον τρόπο ανακύπτει το ερώτημα αν η παραδοσιακή θεωρία παιγνίων μπορεί όντως να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για να συμβουλέψει άτομα σχετικά με την στρατηγική τους. Η απάντηση σε αυτό εξαρτάται από το παίγνιο και από το κατά πόσον οι αποκλίσεις από την θεωρία είναι λανθασμένες ή όχι. Πολλά μοτίβα που παρατηρούνται σε πειράματα μπορούν να θεωρηθούν λάθη που θα μπορούσαν να αποφευχθούν, αν οι παίκτες έπαιζαν όπως υπαγορεύει η θεωρία. Για παράδειγμα, οι παίκτες που εισέρχονται σε ένα παίγνιο (π.χ. σε μια εταιρία) και είναι βέβαιοι ότι οι ικανότητές τους στις συγκεκριμένες συνθήκες κατατάσσονται πάνω από τον μέσο όρο, θα πρέπει να έχουν στο πίσω μέρος του μυαλού τους ότι όλοι οι παίκτες σκέφτονται έτσι, άλλα μόνο κάποιοι από αυτούς έχουν δίκιο.

Σε άλλες περιπτώσεις η θεωρία παιγνίων μπορεί να δώσει κακές συμβουλές, αφού κάποιες υποθέσεις μπορεί να μην περιγράφουν τους παίκτες. Γνωρίζοντας με ποιον ακριβώς τρόπο οι άλλοι παίκτες έχουν σκοπό να αποκλίνουν από την θεωρία μπορεί κάποιος να διαμορφώσει την καταλληλότερη στρατηγική για την κάθε περίπτωση.

Τα πειράματα έχουν βοηθήσει να βρούμε απαντήσεις σε πολλά ερωτήματα. Μπορεί, για παράδειγμα, να υπάρχει ένας αντικειμενικός τρόπος να ενσωματώσουμε στις συναρτήσεις χρησιμότητας αφηρημένες κοινωνικές έννοιες, όπως η δικαιοσύνη, ο αλτρουισμός, η εκδίκηση; Η απάντηση είναι πως ναι, με την ισορροπία δικαιοσύνης κατά Rabin[12] (1993). Ή έχουν σημασία φαινόμενα κριτικής ανικανότητας, όπως, για παράδειγμα,

[12] Rabin, Matthew. 1993. "Incorporating Fairness Into Game Theory and Economics." *The American Economic Review.*83, 1281-1302.

το ότι οι παίκτες τείνουν να υπερεκτιμούν τις ικανότητές τους σε σχέση με τις ικανότητες των αντιπάλων τους; Η απάντηση είναι πως ναι, ωστόσο, δεν έχουμε βρει ακόμα τον τρόπο να ενσωματώσουμε κάτι τέτοιο στις συναρτήσεις. Άλλο ερώτημα που μπορούμε πλέον να απαντήσουμε είναι πόσα στάδια iterated dominance χρησιμοποιεί ένας μέσος παίκτης, ένα με τρία. Και τέλος, επηρεάζει το «learning» και η δομή των μοντέλων τα unstructured παίγνια; Ναι, αλλά χρειαζόμαστε πολλή ακόμα μελέτη σε αυτόν τον τομέα.

Το μέλλον της έρευνας στην θεωρία παιγνίων θα πρέπει να επικεντρώνεται από εδώ και πέρα στο πώς να ενσωματωθούν τέτοιου τύπου παρατηρήσεις σε έναν νέο τρόπο μοντελοποίησης. Αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι η γνήσια θεωρία παιγνίων είναι πάντα λανθασμένη. Αντιθέτως, σε κάθε παίγνιο η ισορροπία δεν επιτυγχάνεται στα αρχικά στάδια, αλλά πάντα επιτυγχάνεται κάποτε. Η νέα γραμμή έρευνας θα βοηθήσει να εξηγηθεί και να μοντελοποιηθεί η συμπεριφορά ακόμα και στα αρχικά στάδια.

Επίλογος

Το θεώρημα minimax είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την θεωρία παιγνίων. Είναι γεγονός, ωστόσο, ότι είναι ιδιαίτερα σύνθετη και πολύπλοκη η αυτόματη εφαρμογή του σε καθημερινές καταστάσεις. Αλλά, ακόμα και σε καλά μελετημένες καταστάσεις όπου κρίνουμε την εφαρμογή του απαραίτητη για να λάβουμε την βέλτιστη απόφαση, είναι αναγκαίο να είμαστε βέβαιοι ότι δεν αγνοούμε κάποιον σημαντικό παράγοντα. Αρχικός στόχος αυτής της εργασίας ήταν η κατασκευή ενός μοντέλου minimax από το μηδέν και η περαιτέρω μελέτη του. Κάτι τέτοιο στάθηκε πρακτικά αδύνατον λόγω της πολύ μεγάλης δυσκολίας που παρουσιάζει η κατασκευή μοντέλων. Έπρεπε να μελετηθούν πρώτα πολλές άλλες τέτοιες διαδικασίες και ευελπιστούμε ότι στο μέλλον ίσως κάτι τέτοιο σταθεί εφικτό.

Στις εργασίες που αναλύσαμε, τα πειράματα σχετικά με την συμπεριφορά των παικτών δείχνουν ότι το θεώρημα minimax δεν φαίνεται να εφαρμόζεται ιδιαίτερα στην πράξη. Αυτό μπορεί να συμβαίνει για διάφορους λόγους, με βασικό το γεγονός ότι πολύ συχνά οι παίκτες θεωρούν τις ικανότητές τους πολύ ανώτερες από αυτές των υπολοίπων παικτών με αποτέλεσμα να απομακρύνονται κατά πολύ από την ισορροπία. Άλλος λόγος είναι ότι η θεωρία προϋποθέτει οι παίκτες να είναι ορθολογικοί και να έχουν στην διάθεσή τους όλη την διαθέσιμη πληροφορία. Το δεύτερο είναι και ο λόγος που επιλέγουμε τα πειράματα για να ελέγξουμε την εφαρμογή του minimax, όμως δεν μπορούμε να εγγυηθούμε για τις λογικές ικανότητες των παικτών για να εξακριβώσουμε το πρώτο και παρόλο που η συμμετοχή στα πειράματα συνοδεύεται από χρηματική αμοιβή ανάλογη της απόδοσης, αυτό φαίνεται να μην είναι αρκετό κίνητρο. Επιπροσθέτως, συχνά οι παίκτες αντιδρούν όταν κρίνουν κάποιο κανόνα άδικο ή φαίνονται να μην θέλουν να εκμεταλλευτούν τον αντίπαλό τους, όταν αυτός κάνει πολλά λάθη, το οποίο οδηγεί στο να χρειάζονται επιπλέον παράμετροι στην συνάρτηση χρησιμότητας και στην ανάπτυξη της συμπεριφορικής θεωρίας παιγνίων, που έχει μελετήσει ο Camerer.

Σχετικά με την λύση του προβλήματος των ορθολογικών παικτών και του κινήτρου καθώς και της εμπειρίας οι Walker και Wooders, οι Chiappori, Levitt και Groseclose και ο Ignacio Palacios-Huerta ασχολήθηκαν με την μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, αντί για πειραματικών. Οι Walker και Wooders μοντελοποίησαν τα σερβίς στους τελικούς αγώνες τένις, για να ελέγξουν κατά πόσον ακολουθείται στην πραγματικότητα οποιουδήποτε είδους στρατηγική σαν αυτήν που υπαγορεύει η θεωρία του minimax και συμπεραίνουν ότι η θεωρία εφαρμόζεται καλά αλλά όχι τέλεια. Ο Ignacio Palacios-Huerta, μελετώντας τις εκτελέσεις πέναλτι από επαγγελματίες ποδοσφαιριστές σε αληθινούς αγώνες βρίσκει ότι η θεωρία του minimax εφαρμόζεται πλήρως. Στην συνέχεια, σε συνεργασία με τον Oscar Volij δοκιμάζοντας πειραματικά το minimax με την συμμετοχή επαγγελματιών ποδοσφαιριστών αλλά και άπειρων φοιτητών και σε πέναλτι και στο παίγνιο του O'Neill διαπιστώνουν ότι οι επαγγελματίες μεταφέρουν την εμπειρία τους και στο εργαστήριο και εφαρμόζουν την στρατηγική minimax, ενώ οι φοιτητές απέκλιναν κατά πολύ συμπεραίνοντας ότι το εργαστήριο είναι όντως αντικειμενικός κριτής της συμπεριφοράς στην λήψη αποφάσεων.

Τα συμπεράσματα αυτά δεν σημαίνουν σε καμμία περίπτωση ότι δεν ισχύει το minimax, αλλά ότι δεν είναι εύκολο να το εφαρμόσει κάποιος ο οποίος δεν είναι εξοικειωμένος με το παίγνιο με το οποίο καλείται να ασχοληθεί. Βλέπουμε ότι στην πράξη οι επιτυχημένοι ποδοσφαιριστές το εφαρμόζουν και αν μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε και άλλες πιο πολύπλοκες καταστάσεις θα βλέπαμε ότι και πάλι ισχύει για ανταγωνιστικά παίγνια μηδενικού ή σταθερού αθροίσματος. Η κατασκευή του μοντέλου και η επιλογή των παραμέτρων είναι υψίστης σημασίας για την εξαγωγή ορθών συμπερασμάτων.

Βιβλιογραφία

Brown, J., & Rosenthal, R., 1990. Testing the Minimax Hypothesis: A Re-Examination of O'Neill's Game Experiment. *Econometrica, 58*(5), 1065-1081.

Amnon Rapoport, R. B. B., 1992. Mixed strategies in strictly competitive games: A further test of the minimax hypothesis. *Elsevier,* 4(2), pp. 261-283.

Camerer, C., 2003. *Behavioral Game Theory: Experiments in Strategic Interaction.* Princeton: Princeton University Press.

Chiappori, P.-A., Levitt, S. & Groseclose, T., 2002. Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer. *American Economic Review,* 92(4), pp. 1138-1151.

Constantinos Daskalakis, P. W. G. a. C. H. P., 2009. The Complexity of Computing a Nash Equilibrium. *SIAM Journal on Computing,* 39(1), p. 195–259.

FIFA, 2005. *Fédération Internationale de Football Association-Official Laws of the Game.* Chicago, IL: Triumph Books.

Harrison, Glenn, W., and John A. List. 2004. "Field Experiments." *Journal of Economic Literature*, 42(4): 1009-1055.

Hume, D., 1739. *A Treatise of Human Nature.* London: s.n.

Kakutani, S., 1941. A Generalization of Bouwer's Fixed Point Theorem. *Duke Mathematical Journal,* Volume 8, pp. 457-459.

Nash, J. F., 1950. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences,* 36(1), pp. 48-49.

Nash, J. F., 1951. Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics,* 54(2), pp. 286-295.

Neumann, J., v., O. M., 1944. Theory of Games and Economic Behavior. *Princeton University Press.*

Neumann, J. v., 1928. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen,* Volume 100, pp. 295-300.

O'Neill, B., 1987. Nonmetric test of the minimax theory of two-person zerosum games. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Volume 84, pp. 2106-2109.

O'Neill, B., 1991. Comments on Brown and Rosenthal's Reexamination. *Econometrica,* Volume 59, pp. 503-507.

Ordeshook, P. C., 1989. *Game Theory and Political Theory: An Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press.

Palacios-Huerta, I., 2003. Professionals Play Minimax. *The Review of Economic Studies,* 70(2), p. 395–415.

Palacios-Huerta, I., & Volij, O. 2008. Experientia Docet: Professionals Play Minimax in Laboratory Experiments. *Econometrica, 76*(1), 71-115.

Rabin, Matthew. 1993. "Incorporating Fairness Into Game Theory and Economics." *The American Economic Review.*83, 1281-1302.

Spyros Kontogiannis, E. K. P. S., 2010. *Algorithmic Game Theory: Third International Symposium, SAGT 2010, Athens, Greece, October 18-20, 2010, Proceedings.* Athens: Springer.

Πολυράκης, Ι., 2016. *Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία.* Αθήνα: s.n.