Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
*Τομέας Φυσικής*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

---

# Η Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας
## και κάποιες Τροποποιήσεις αυτής

Διπλωματική Εργασία του:
**Κων/νος Παλληκάρης**

Επιβλέπων:
**Αναγνωστόπουλος Κων/νος (Αν. Καθηγητής)**

ΙΙ - 2018

**Abstract**

The main object of this thesis is to present a well-established strategy for the *gauging of gravity*, i.e the description of gravity as a gauge theory. It is well known that the usual geometric background of General Relativity (and thus, for most of its modifications) differs greatly from that of the fundamental non-gravitational interactions (Standard Model), mostly in the geometrical objects acting as dynamical variables of each theory. One can argue that gauge theories (for example, Yang-Mills theories) are built upon the foundations of *Ehresmann geometry*, i.e their geometric configuration roughly consists of a (smooth) principal fiber bundle with a Lie group acting (freely, properly and transitively) from the right on the total space (namely the structure group of the bundle) and an Ehresmann connection, which lies in the total space and is valued in the Lie algebra of the structure group. The latter, specifically the frame-dependent connection 1-form, plays the role of the *gauge potential* that in a way produces the degrees of freedom for each model. Since a gauge is just a choice of a local section of the bundle, gauge transformations are simply transformations between sections. Roughly speaking, gauge theories may be described in terms of connective geometry over spacetime with the gauge group, i.e the vertical automorphisms of the total space, being the symmetry group of each theory. Due to the fact that gauge transformations do not relate different fibers, but rather take place in a fiber at a point of the base manifold, this whole process may be viewed as an internal feature, if we consider spacetime as an external object.

On the other hand, General Relativity approaches gravitational interaction in a completely different manner, describing it in terms of the metric geometry of spacetime. Here, the symmetry group is simply the group of diffeomorphisms of spacetime and there is no dynamical connection gauging a local symmetry. One may argue that in the mainstream description of gravity, the geometry is in a way "external". Perhaps the first attempt to a unified geometrical description was the a la Palatini approach, where the *spin connection* was introduced, acting as the associated gauge field for the local Lorentz symmetry. However, ad hoc introduction of a new field, the *soldering form*, was necessary, in order to compensate for the difference in degrees of freedom between the two approaches. As there is no analog of this additional field in gauge theories, this early attempt (as it was) fails to be a complete and consistent mechanism for gauging gravity. We use the work of Cartan to show that the fundamental variables of the (first order) Palatini formulation, namely the spin connection and the soldering form, can be treated as parts of a single field, known as the *Cartan connection*. In this manner, we successfully establish a gauge-theoretical description of gravity. We do so in both ways, either by defining a Cartan geometry from scratch or by reducing the Ehresmann bundle. The physical intuition of the latter way is far better, since the reduction may be thought as a *"partial" symmetry-breaking process*, where the gauge associated to the local translational invariance is fixed, thus leaving only the local Lorentz symmetry unbroken. We then argue that the (external) diffeomorphism invariance of spacetime is the reason that the initially broken translational symmetry is after all preserved. In order to achieve all of the above, we thoroughly study the mathematical framework that will allow us to construct these neat geometries.

The most part of this thesis is mathematically rigorous, meaning that we give proofs for most of the theorems, claims, propositions etc. We give great emphasis at *differential forms* and *exterior algebra* in general, firstly because they are necessary for the geometrisation process and finally, because they form the, closest to the underlying geometry, language one can use in a practical way, i.e for doing chart-independent calculations. We try to cover a decent part of old and modern differential geometry (at least those subjects that are crucial to the understanding of the last chapters of this thesis), in order to give a consistent bottom to top (as from structurally poorest to richest notions) image of the geometries we present. Finally, we give some detailed examples of *torsion gravity*, specifically two theories of its teleparallel class, as a special case of Poincaré gauge gravity, while we also examine some well known examples of modified gravity, namely the $f(R)$ class and Horndeski's generalized scalar-tensor theory, where the latter covers a great

part of the scalar-tensor type spectrum. Our engagement with the above mentioned toy models remains at the level of eom (equations of motion) extraction in a detailed manner. Apart from the $f(R)$ case, the rest is chosen due to the technical challenge it presents, i.e the amount of not so straightforward calculus one must do to obtain results. In other words, they act as a nice playground for many of the identities we introduce in former chapters. In the case of the teleparallel theories, we try to handle the eom extraction process in a dense and short way (by avoiding, as much as possible, the *"debauchery of indices"*, as Cartan once said), thus proving that the use of exterior calculus is optimal for extended calculations, once appropriate familiarity with the latter formulation is achieved. The transition to the usual "tensorial" index notation is always a rather trivial task, that can be done afterwards (as we also do after the extraction of the eom). Finally, we propose smarter ways of dealing with index notation by using antisymmetry brackets, symmetry parentheses, generalised Kronecker deltas and generalised permanent symbols, thus avoiding unnecessary index gymnastics. The effectiveness of the above may be seen in the $f(R)$ cases.

*Στη μητέρα μου και την Ιωάννα με αγάπη.*

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Αναγνωστόπουλο για τις καλές συμβουλές που μου έδωσε και ιδιαίτερα τον κ. Σαριδάκη, για τη βοήθεια που μου παρείχε ως επιβλέπων αυτής της εργασίας, τις ευκαιρίες που μου έδωσε και μου δίνει και την υπομονή που έκανε με την αντιπαραγωγική μου εμμονή να διορθώνω διαρκώς αυτήν την εργασία. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κοντινούς μου ανθρώπους, χωρίς των οποίων τη στήριξη και την κατανόηση, το παρόν δεν θα ήταν εφικτό.

## Σημείωση

Αυτό που τώρα έχει πλέον τη μορφή μιας διπλωματικής εργασίας, ξεκίνησε ως σκόρπιες σημειώσεις διαφορικής γεωμετρίας από διάφορες πηγές στο διαδίκτυο (από διαλέξεις μέχρι σημειώσεις κλπ.). Έτσι, η παρούσα εργασία έχει διορθωθεί και εμπλουτιστεί πάρα πολλές φορές, καθώς με τον καιρό έβρισκα όλο και καλύτερα συγγράμματα, τα οποία εξηγούσαν το κάθε αντικείμενο με όλο και περισσότερη μαθηματική αυστηρότητα, δηλαδή με όλο και σωστότερη γλώσσα. Δυστυχώς, λόγω χρονικής πίεσης, ένα μέρος της εργασίας έμεινε από το σχετικά πρώιμο καθεστώς. Αν ήταν (χρονικά) στο χέρι μου, ειλικρινά θα ξαναέγραφα αυτά τα μέρη με ακόμα πιο αυστηρό τρόπο, όπως και θα κάλυπτα περισσότερη ύλη. Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, οπότε νιώθω ότι πρέπει να ζητήσω εκ των προτέρων συγγνώμη για την όποια "χαλαρότητα" (ελπίζω περιορισμένη σε λίγα σημεία) συναντήσει ο αναγνώστης. Προτάσεις, διορθώσεις, συμβουλές και γενικότερα κριτική στο περιεχόμενο και τον τρόπο, είναι παραπάνω από επιθυμητές.

# Περιεχόμενα

# Ακρωνύμια

**EC(SK)** Einstein-Cartan(-Sciama-Kibble).

**EH** Einstein-Hilbert.

**LC** Levi-Civita.

**YM** Yang-Mills.

**γσ** γενική σχετικότητα.

**δδ** διανυσματική δέσμη.

**δπ** διανυσματικό πεδίο.

**δχ** διανυσματικός χώρος.

**εσ** ειδική σχετικότητα.

**κδ** κύρια δέσμη.

**κσπ** καθολική συναλλοίωτη παράγωγος.

**μδ** μορφισμός δέσμης.

**μκδ** μορφισμός κύριας δέσμης.

**μσ** μετασχηματισμός.

**μσδ** μορφισμός συσχετισμένης δέσμης.

**πδ** πεπερασμένης διάστασης.

**πδα** πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση.

**πδδχ** πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος.

**σδ** συσχετισμένη δέσμη.

**τοπ** τοπικό ομογενές πρότυπο.

**χβτγ** χωρίς βλάβη της γενικότητας.

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

> "... όπου μια κραιπάλη δεικτών (débauches d'indices) κρύβει μια συχνά απλή γεωμετρική πραγματικότητα."
>
> —*Élie Cartan*

Ο κύριος σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η περιγραφή της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας με την λεπτομερή ανάπτυξη μιας κατάλληλης στρατηγικής. Είναι γενικά γνωστό ότι το γεωμετρικό υπόβαθρο της γενικής σχετικότητας διαφέρει κατά πολύ από αυτό των υπολοίπων θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων (του καθιερωμένου προτύπου). Η διαφορά έγκειται κυρίως σε εκείνα τα γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία αποτελούν τις δυναμικές μεταβλητές της κάθε θεωρίας. Το γενικότερο πλάνο γεωμετρικοποίησης των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων έφερε στο φως ένα κατάλληλο γεωμετρικό υπόβαθρο για τις θεωρίες βαθμίδας, γνωστό ως γεωμετρία Ehresmann. Αποδείχθηκε ότι για αβελιανές και μη θεωρίες βαθμίδας, η γεωμετρική περιγραφή τους είναι εφικτή στο περιβάλλον μιας (λείας) κύριας ινώδους $G$-δέσμης $P \to M$, εφοδιασμένης με συνοχή Ehresmann $\omega$, όπου η $G$ είναι ομάδα Lie, η οποία δρά από δεξιά στα στοιχεία του ολικού χώρου $P$ με ελεύθερο, λείο και μεταβατικό τρόπο. Οι κάθετοι αυτομορφισμοί του ολικού χώρου αποτελούν την ομάδα βαθμίδας της θεωρίας. Η 1-μορφή συνοχής Ehresmann παίρνει τιμές στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ της ομάδας Lie $G$ και παίζει τον πρωταγωνιστικό ρόλο του πεδίου βαθμίδας της θεωρίας, το οποίο καθορίζει τους βαθμούς ελευθερίας αυτής. Από μαθηματική σκοπία, η βαθμίδα είναι μια επιλογή (λείας) τοπικής τμήσης της δέσμης και καθώς αυτή υπάρχει, θα υπάρχουν και άλλες τέτοιες τμήσεις. Επομένως, μια τοπική τμήση, μακριά από το να είναι μοναδική, σχετίζεται με άλλες τμήσεις μέσω κάποιου κατάλληλου μετασχηματισμού, αυτό που στη φυσική συναντάμε ως μετασχηματισμό βαθμίδας. Παρότι η γεωμετρία της κύριας δέσμης προϋπήρχε του Charles Ehresmann, ήταν αυτός τελικά που έδωσε μια ολοκληρωμένη θεωρία τη δεκαετία του '50, επηρεασμένος από το έργο του Cartan. Η γεωμετρία αυτή αποτέλεσε στη συνέχεια την κυρίαρχη γεωμετρική περιγραφή των θεωριών βαθμίδας και έδωσε γεωμετρικό χαρακτήρα στην έννοια της αλληλεπίδρασης. Καθότι οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας αφορούν στην ίνα σε κάθε σημείο της βάσης της δέσμης, λέμε συχνά ότι πρόκειται περί "εσωτερικής" διαδικασίας, με την έννοια οτι δεν σχετίζουν ίνες σε διαφορετικά σημεία της βάσης, όπου υποθέτουμε ότι η βάση είναι ο "εξωτερικός" χώρος ή χωροχρόνος.

Από την άλλη, η γενική σχετικότητα, έχοντας από τη γέννα της ένα ρητό γεωμετρικό υπόβαθρο, προσεγγίζει την έννοια της (βαρυτικής) αλληλεπίδρασης εντελώς διαφορετικά, στα πλαίσια μιας μετρικής γεωμετρίας, σε αντίθεση με τη συνοχική γεωμετρία που περιγράφει τις θεωρίες τύπου Yang-Mills. Στην περίπτωση της κλασσικής βαρύτητας, η ομάδα συμμετρίας είναι η ομάδα αμφιδιαφορίσεων του χωροχρόνου, μιας λείας πολλαπλότητας, εφοδιασμένης με ημι-ρημάννεια μετρική, η οποία αποτελεί βάση μιας διανυσματικής δέσμης με ολικό χώρο τον εφαπτόμενο χώρο σε αυτήν. Μια αμφιδιαφόριση του χωροχρόνου είναι μια λεία αντιστρέψιμη (με εξίσου λείο αντίστροφο) απεικόνιση από ένα χωροχρονικό σημείο σε ένα άλλο, επομένως πρόκειται για μια εξωτερική διαδικασία. Εκ πρώτης όψεως, το χάσμα μεταξύ των υποκείμενων γεωμετριών της βαρύτητας και των θεωριών βαθμίδας μοιάζει αχανές και πράγματι είναι, αν κρατήσουμε τις περιγραφές ως έχουν. Θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε μια υπό κάποια χαλαρή έννοια "εξωτερική" περιγραφή των θεωριών βαθμίδας, αλλά κάτι τέτοιο δοκίμασε πρώτος ο Weyl το 1918 και τελικά απέτυχε (αργότερα προέκυψε η ανάγκη για έναν εσωτερικό "χώρο φορτίου" (charge space), όπως τον αποκάλεσε ο Ludvig Faddeev). Επομένως, το καλύτερο που θα μπορούσαμε να σκεφτούμε είναι να περιγράψουμε τη βαρύτητα με όρους θεωρίας βαθμίδας. Μια πρώτη αξιότιμη προσπάθεια ήταν η προσέγγιση ή καλύτερη διατύπωση Palatini. Σε αυτήν εισήχθη η έννοια της σπιν συνοχής $\omega$, ενός πεδίου βαθμίδας που συσχετίζεται με την τοπική αναλλοιότητα Lorentz. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια κύρια δέσμη με δομική ομάδα την ομάδα Lorentz, τότε η σπίν συνοχή είναι μια 1-μορφή συνοχής Ehresmann και η κατά Ehresmann περιγραφή της βαρύτητας φαίνεται εφικτό σενάριο. Όμως, η διαφορά στους βαθμούς ελευθερίας αυτής της διατύπωσης με τη γενική σχετικότητα, αυτοί οι αδικαιολόγητοι τέσσερεις βαθμοί ελευθερίας, οδήγησαν στην αναγκαστική ad hoc εισαγωγή ενός πρόσθετου πεδίου, γνωστού ως συγκολλητική μορφή. Για αυτό το πεδίο δεν υπάρχει ανάλογο στις θεωρίες βαθμίδας και επομέως, η προσέγγιση Palatini αποτυγχάνει να δώσει μια συνεπή και ολοκληρωμένη περιγραφή της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας.

Τελικά, ήταν οι επαναστατικές ιδέες αυτού του μεγάλου μαθηματικού που ακούει στο όνομα Élie Cartan, οι οποίες έδωσαν τη λύση σε αυτό το πρόβλημα του χάσματος των περιγραφών, οδηγώντας σε ένα κοινό γεωμετρικό υπόβαθρο για όλες τις αλληλεπιδράσεις. Ο Cartan, ως ένας από τους πατέρες της σύγχρονης διαφορικής γεωμετρίας, ολοκλήρωσε υπό μια έννοια και επέκτεινε το έργο του Felix Klein και του προγράμματος του Erlangen μεταξύ άλλων. Ο Klein είχε την λαμπρή ιδέα να προσπαθήσει να ταξινομήσει τις γεωμετρίες του 19ου αιώνα κάτω από μια κοινή σκεπή, αυτήν της έννοιας της Hauptgruppe ή αλλιώς, κύριας ομάδας. Απέδειξε ότι ο χαρακτήρας κάθε γεωμετρίας καθορίζεται από εκείνα τα γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα υπό τις μεταβατικές δράσεις της κύριας ομάδας (Lie). Έπεται ότι διαφορετικές κύριες ομάδες περιγράφουν διαφορετικές γεωμετρίες. Οι χώροι των γεωμετριών Klein είναι ομογενείς χώροι, όπου η γνώση της τιμής ενός γεωμετρικού αντικειμένου σε ένα σημείο του χώρου μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την τιμή αυτού σε κάποιο άλλο σημείο μέσω κατάλληλων απεικονίσεων μεταφοράς. Χονδρικά λοιπόν, η γεωμετρία Klein περιγράφεται από ένα ζεύγος $(G, H)$, όπου η $G$ παίζει το ρόλο της Hauptgruppe και η $H$ είναι η ομάδα ισοτροπίας ή αλλιώς, σταθεροποιητής κάθε σημείου του χώρου. Ισοδύναμα, η γεωμετρία Klein μπορεί να περιγραφεί και από ένα ζεύγος $(m, M_0)$ που συσχετίζεται με το $(G, H)$, όπου $M_0 = G/H$ ομογενής χώρος και $m \in M_0$. Ο Cartan γενίκευσε το έργο του Klein, όπως ο Riemann γενίκευσε την ευκλείδεια γεωμετρία. Χονδρικά, όπως ο ευκλείδειος χώρος είναι μια ειδική περίπτωση ρημάννειου χώρου με μηδενική καμπυλότητα, έτσι μια γεωμετρία Klein είναι μια ειδική περίπτωση γεωμετρίας Cartan, επίπεδης κατά Cartan. Αν η καμπυλότητα κατά Riemann μετρά την απόκλιση από την επιπεδότητα, τότε η καμπυλότητα κατά Cartan μετρά την απόκλιση από τη μεγιστική συμμετρία, δηλαδή τις συμμετρίες της κύριας ομάδας. Με άλλα λόγια, αποτελεί ένα μέτρο της παραμόρφωσης αυτής.

Η θεωρία Cartan έφερε στο προσκήνιο ένα νέο πεδίο βαθμίδας, τη συνοχή Cartan, όπου πλέον η σπιν συνοχή και η συγκολλητική μορφή, δηλαδή οι κατά τ' άλλα ασυσχέτιστες δυναμικές μεταβλητές της διατύπωσης Palatini, αποτελούν μέρη αυτής. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνουμε πράγματι μια συνεπή και ολοκληρωμένη περιγραφή της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας και το δείχνουμε αυτό με δύο τρόπους. Αρχικά στήνουμε μια γεωμετρία Cartan από την αρχή, ενώ μετέπειτα ξεκινάμε από μια γεωμετρία Ehresmann και κατασκευάζουμε τα αντικείμενα της γεωμετρίας Cartan με τον μηχανισμό της αναγωγής δέσμης. Κρίνουμε ότι ο δεύτερος τρόπος είναι διαισθητικά καλύτερος, σίγουρα όσον αφορά στη φυσική. Θα δείξουμε οτι η διαδικασία της αναγωγής μπορεί γίνει αντιληπτή ως ένα μερικό "σπάσιμο" συμμετρίας, δηλαδή μια επιλογή βαθμίδας μετατοπίσεων που σπάει την τοπική συμμετρία σε μετατοπίσεις, αλλά αφήνει αναλλοίωτη την τοπική συμμετρία Lorentz. Θα δούμε ότι η χαμένη συμμετρία ανακτάται τελικά από την αναλλοιότητα της θεωρίας σε (εξωτερικές) αμφιδιαφορίσεις και έτσι, οι βαθμοί ελευθερίας είναι οι σωστοί. Είναι λογικό επόμενο ο αναγνώστης να αναρωτηθεί περί της αιτίας όλου αυτού του ντόρου. Σίγουρα, αυτή η νέα περιγραφή δεν αποτελεί μια μαγική λύση στο πρόβλημα της κβάντωσης της βαρύτητας, αλλά καθώς οι περισσότερες θεωρίες βαθμίδας έχουν κβαντωθεί με επιτυχία, θεωρούμε θετικό, η βαρύτητα να μοιράζεται το ίδιο γεωμετρικό υπόβαθρο με αυτές. Η κβάντωση της (2+1)d βαρύτητας από τον Edward Witten **[39]** το 1988 είναι ένα καλό παράδειγμα της συνεισφοράς της περιγραφής της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας κατά Cartan. Επιπλέον, φαίνεται διαισθητικά σωστό, όλες οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις να έχουν υπό μια έννοια κοινό γεωμετρικό χαρακτήρα.

Για να πετύχουμε τον στόχο μας, θα χρειαστεί να μελετήσουμε όσο το δυνατόν αναλυτικότερα τα απαραίτητα μαθηματικά εργαλεία. Η παρούσα εργασία μπορεί να χαρακτηριστεί μαθηματικά αυστηρή, υπό την έννοια ότι αποδεικνύουμε μεγάλο μέρος των προτάσεων, θεωρημάτων, λημμάτων κλπ. Η εργασία έχει μια από τα κάτω προς τα πάνω δομή, δηλαδή καταπιάνεται αρχικά με μια "φτωχή" γεωμετρικά δομή και καταλήγει σε γεωμετρικά πλούσιες κατασκευές, έτσι ώστε ο αναγνώστης αυτής να μπορεί να την παρακολουθήσει μέχρι τέλους. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στις διαφορικές μορφές, αφενός διότι είναι απαραίτητες για τη γεωμετρία Ehresmann και Cartan, αλλά και επειδή είναι η εγγύτερη στη γεωμετρία γλώσσα με πρακτικά οφέλη, όπως είναι η συντόμευση των πράξεων και οι χαρτοανεξάρτητοι υπολογισμοί. Μετά την ολοκλήρωση του αρχικού στόχου, δίνουμε δύο παραδείγματα της τηλεπαράλληλης υποκλάσης της βαρύτητας με στρέψη, ως παραδείγματα βαρύτητας που περιγράφεται με όρους θεωριών βαθμίδας. Σε αυτά προσπαθούμε σε μεγάλο βαθμό έως και να αποφύγουμε τελείως τη χρήση δεικτών, δίνοντας μια όσο το δυνατόν καθαρότερη εικόνα, η οποία φυσικά δεν είναι εύκολα αναγνώσιμη εκ πρώτης όψεως, καθώς απαιτεί εξοικείωση με τον φορμαλισμό των διαφορικών μορφών και τις ιδιότητες αυτών. Γι' αυτόν τον λόγο προτείνουμε στον αναγνώστη να ανατρέξει καταρχίν στο μαθηματικό μέρος και έπειτα στους υπολογισμούς των εξισώσεων κίνησης της γενικής θεωρίας Horndeski, οι οποίοι γίνονται με έναν κάπως πιο ορθόδοξο τρόπο. Πέραν της $f(R)$ κλάσης θεωριών, επιλέγουμε τη γενική Horndeski, διότι έτσι καλύπτουμε ουσιαστικά ένα πολύ μεγάλο μέρος του φάσματος των θεωριών βαθμωτού-τανυστή, δεδομένου ότι πρόκειται για την πιο γενική θεωρία βαθμωτού-τανυστή με εξισώσεις κίνησης έως και δεύτερης τάξης σε παραγώγους, η οποία δίνει και βαρύτητα Einstein για κατάλληλες τιμές συντελεστών. Από την άλλη, η επιλογή της $f(R)$ έχει να κάνει περισσότερο με την εισαγωγή του συνοριακού όρου των Gibbons-York-Hawking, παρά με την ίδια τη θεωρία, η οποία δεν παρουσιάζει κατά τα άλλα τεχνικές δυσκολίες. Χρησιμοποιούμε παρόλα αυτά την ευκαιρία για να εισάγουμε μια ιδιότροπη σήμανση που εκμεταλλεύεται τις (αντι)συμμετρίες και συμπυκνώνει τις πράξεις. Επιπλέον δείχνουμε ότι υπάρχει "κρυμμένος" βαθμός ελευθερίας και ότι η $f(R)$ μπορεί να ιδωθεί τελικά ως Brans-Dicke θεωρία για κατάλληλη επιλογή παραμέτρου.

Κεφάλαιο 2

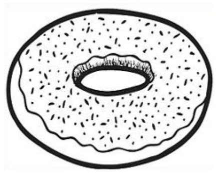
# Τοπολογικοί Χώροι, Πολλαπλότητες και Δέσμες

Η γενική τοπολογία ή τοπολογία σημειοσυνόλων (point-set topology), από τις λέξεις "τόπος" και "λόγος", είναι ο κλάδος των μαθηματικών που μελετά θεμελιώδεις έννοιες, όπως είναι η συνέχεια, η συμπάγεια και η συνεκτικότητα, μέσω των ανοιχτών συνόλων. Μια συλλογή ανοιχτών συνόλων καλείται τοπολογία και ένα σύνολο, εφοδιασμένο με τοπολογία, καλείται τοπολογικός χώρος. Κατά τον Simmons **[32]**, ένας τοπολογικός χώρος μπορεί να γίνει κατανοητός ως ένα σύνολο, από το οποίο έχει αφαιρεθεί οποιαδήποτε δομή δεν είνα σχετική με τη συνέχεια των συναρτήσεων που ορίζονται σε αυτό. Μια πιο διαισθητική περιγραφή για την τοπολογία είναι ότι είναι εκείνος ο κλάδος των μαθηματικών που μελετάει ιδιότητες σχημάτων (shapes), οι οποίες διατηρούνται υπό συνεχείς παραμορφώσεις των σχημάτων αυτών, δηλαδή "τέντωμα" (stretch), "λύγιση", "τσάκιση" (crumple) κλπ. Τέτοιες παραμορφώσεις δεν είναι φυσικά το "κόψιμο" (rip) και η "κόλληση".

Στα πλαίσια της τοπολογίας σημειοσυνόλων, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σχήμα ως ένα σύνολο σημείων, τα οποία είναι με κάποιον τρόπο συγκεντρωμένα. Όταν τεντώνουμε αυτό το σχήμα, βρίσκουμε επί της ουσίας έναν τρόπο να απεικονίσουμε σημεία του αρχικού σχήματος σε σημεία του τεντωμένου σχήματος, έτσι ώστε δύο σημεία που ήταν "κοντά" (το ένα στο άλλο) στο αρχικό σχήμα να παραμένουν "κοντά" και στο τεντωμένο σχήμα. Με άλλα λόγια, το "τέντωμα" είναι μια συνεχής απεικόνιση. Ο όρος "κοντά" αναφέρεται στην έννοια της γειτονιάς του σημείου. Έτσι, δύο σημεία είναι "κοντά", αν το ένα είναι στη γειτονιά του άλλου. Μπορούμε να τεντώσουμε αυτήν τη γειτονιά εκατομμύρια έτη φωτός μακριά, χωρίς αυτή να κοπεί. Επομένως, θα υπάρχει πάντα μια περιοχή της αρχικής γειτονιάς του σημείου, η οποία θα παραμένει και μετά το "τέντωμα" στη γειτονιά του σημείου και αυτό θα ισχύει για όλα τα σημεία. Καλούμε ανοιχτό σύνολο εκείνο το σχήμα, όπου όλα του τα σημεία είναι σε γειτονιά εντός του σχήματος και τα οποία παραμένουν εντός γειτονιών μετά το "τέντωμα".

Δηλαδή, κανένα σημείο δεν θα αποκοπεί, ούτε θα πάει στο σύνορο του σχήματος. Υπό αυτήν την έννοια, τα ανοιχτά σύνολα απεικονίζονται σε ανοιχτά σύνολα μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης, όπως είναι στο παράδειγμα μας το "τέντωμα". Μπορούμε έτσι να πούμε ότι η τοπολογία είναι χονδρικά ένα σύνολο σημείων μαζί με ένα σύνολο κανόνων, το οποίο υποδεικνύει ποια σύνολα είναι ανοιχτά. Με άλλα λόγια, η τοπολογία δεν ενδιαφέρεται για το ακριβές σχήμα του όποιου αντικειμένου (με τον τρόπο που ενδιαφέρεται η κλασσική γεωμετρία), αλλά το εξετάζει σε ένα κατά πολύ πιο αφηρημένο επίπεδο. Με αυτόν τον τρόπο, ένας κύκλος, ένα τρίγωνο και ένα τετράγωνο έχουν κάποια κοινά υπό τη σκοπιά της τοπολογίας, αφού όλα τους είναι μονοδιάστατα (πραγματική γραμμή), χωρίζουν το επίπεδο σε δύο μέρη (εντός και εκτός του σχήματος) κλπ. Εξού και το ανέκδοτο για τον δυστυχισμένο τοπολόγο που δεν μπορεί να ξεχωρίσει την κούπα του από το ντόνατ του:

(α′) Μια κούπα



(β′) Ένα ντόνατ

Για τον τοπολόγο είναι προφανές ότι πρόκειται για δύο τόρους.

Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν την ενότητα αποτελείται από τα [**32**], [**28**], [**21**], [**23**] και [**15**].

## 2.1. *Τοπολογία*

**Ορισμός 2.1.** Έστω $M$ ένα σύνολο. Τότε, μια επιλογή $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$ καλείται *τοπολογία* στο $M$, αν:

(i) $\varnothing \in \mathcal{O}$ και $M \in \mathcal{O}$

(ii) $U, V \in \mathcal{O} \implies \cap\{U, V\} \in \mathcal{O}$

(iii) $C \subseteq \mathcal{O} \implies \cup C \in \mathcal{O}$

Τα στοιχεία μιας τοπολογίας καλούνται *ανοιχτά σύνολα* και το ζεύγος $(M, \mathcal{O})$ καλείται *τοπολογικός χώρος*.

**Παρατήρηση 2.1.** *Εκτός αν ο πληθάριθμος του $M$ είναι η μονάδα, τότε υπάρχουν διαφορετικές τοπολογίες $\mathcal{O}$ που μπορούν να επιλεγούν στο ένα και το αυτό σύνολο $M$.*

**Παράδειγμα 2.1.** Έστω $M$ σύνολο. Τότε, $\mathcal{O} = \{\varnothing, M\}$ είναι τοπολογία στο $M$ και καλείται *τετριμμένη τοπολογία*.

**Παράδειγμα 2.2.** Έστω $M$ σύνολο. Τότε, $\mathcal{O} = \mathcal{P}(M)$ είναι τοπολογία στο $M$ και καλείται *διακριτή τοπολογία*. Οποιοδήποτε στοιχείο του δυναμοσυνόλου του $M$ είναι εξ ορισμού υποσύνολο του $M$ και άρα το πρώτο κριτήριο του ορισμού 2.1 ικανοποιείται, αφού το κενό σύνολο και το ένα και το αυτό σύνολο ανήκουν στην $\mathcal{O}$. Επίσης, αν δύο σύνολα $U, V$ ανήκουν στην $\mathcal{O}$, τότε είναι υποσύνολα του $M$. Η τομή υποσυνόλων είναι εξ ορισμού υποσύνολο και ειδικά στην περίπτωση μας, υποσύνολο του $M$. Επομένως, έπεται ότι η τομή τους ανήκει επίσης στην $\mathcal{O}$ ως στοιχείο του $\mathcal{P}(M)$. Τέλος, η ένωση αυθαίρετα πολλών υποσυνόλων του $M$ είναι επίσης υποσύνολο του $M$ και άρα ικανοποιείται και το τρίτο κριτήριο του ορισμού 2.1.

**Παράδειγμα 2.3.** Έστω $M = \{1, 2, 3\}$. Τότε, $\mathcal{O} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, M\}$ είναι τοπολογία στο $M$.

**Παράδειγμα 2.4.** Έστω $M$ σύνολο, όπου $M = \mathbb{R}^d$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε σε 3 βήματα τη *συνήθη τοπολογία* $\mathcal{O}_\sigma$ στο $\mathbb{R}^d$.

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, κάθε $r \in \mathbb{R}^+$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$B_r^{(2n)}(x) := \left\{ y = (y^1, \cdots, y^d) \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\|_{2n} := \sqrt[2n]{\sum_{i=1}^{d} (y^i - x^i)^{2n}} < r \right\}$$

ως μια *ανοιχτή "μπάλα"* ακτίνας $r$ γύρω από το $x$.

(ii) Έστω $U \in \mathcal{O}_\sigma$. Τότε:

$$U \in \mathcal{O}_\sigma :\Longleftrightarrow \forall\, p \in U : \exists\, r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U$$

(iii) Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\mathcal{O}_\sigma$ είναι τοπολογία:

- Ελέγχουμε αν $\varnothing \in \mathcal{O}_\sigma$, δηλαδή αν:

  $$\forall\, p \in \varnothing : \exists\, r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq \varnothing$$

  Προφανώς, το κενό σύνολο δεν περιέχει στοιχεία και άρα η παραπάνω πρόταση είναι πάντα ψευδής. Από τη λογική γνωρίζουμε ότι από μια ψευδή πρόταση συνεπάγεται πάντα μια αληθής πρόταση. Επομένως, ισχύει ότι $\varnothing \in \mathcal{O}_\sigma$. Επίσης, ισχύει και ότι $M \in \mathcal{O}_\sigma$, καθώς για κάθε $p \in M : B_r(p) \subseteq M$.

- Έστωσαν $U, V \in \mathcal{O}_\sigma$ και έστω $p \in U \cap V$.

  **Ορισμός 2.2.** Έστω σύνολο $X = \{\{a\}, \{b\}\}$. Τότε:

  $$\cap X := \{y \in X \mid y \in a \wedge y \in b\}$$

  όπου με $\wedge$ συμβολίζουμε το λογικό "και". Τα κοινά στοιχεία των στοιχείων του συνόλου $X$ είναι επίσης σύνολο.

  Από τον ορισμό 2.2 συνεπάγεται ότι $p \in U \wedge p \in V$. Βέβαια, αφού $U$ και $V$ είναι ανοιχτά σύνολα, θα ισχύει ότι:

  $$\exists\, r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U \qquad \exists\, s \in \mathbb{R}^+ : B_s(p) \subseteq V$$

  και άρα έπεται ότι $\min\{B_r(p), B_s(p)\}$ θα είναι σίγουρα υποσύνολο και του $U$ και του $V$. Από ορισμό 2.2 έπεται τελικά ότι $\min\{B_r(p), B_s(p)\} \subseteq U \cap V$.

- Έστω $C \subseteq \mathcal{O}_\sigma$ και έστω $U \in C$. Από αυτό συνεπάγεται ότι:

  $$\forall\, p \in U : \exists\, r \in \mathbb{R}^+ : B_r(p) \subseteq U$$

  Εφόσον η ανοιχτή μπάλα $B_r(p)$ είναι υποσύνολο του $U$, τότε σίγουρα θα είναι υποσύνολο του $\cup C$, γιατί $U \in C$. Άρα πράγματι ισχύει ότι $\cup C \in \mathcal{O}_\sigma$.

## 2.2. Κατασκευή νέων τοπολογιών από δοθείσες τοπολογίες

**Θεώρημα 2.1.** *Έστω $(M, \mathcal{O})$ τοπολογικός χώρος και $N \subset M$. Τότε:*

$$\mathcal{O}_N := \{U \cap N \mid U \in \mathcal{O}\} \subseteq \mathcal{P}(N)$$

*είναι μια τοπολογία στο $N$ και καλείται επαγόμενη ή σχετική τοπολογία.*

*Απόδειξη.* Πρέπει αρχικά να δείξουμε ότι $\varnothing \in \mathcal{O}_N$. Αφού $\varnothing = \varnothing \cap N$ και $\varnothing \in \mathcal{O}$, έπεται από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας ότι το κενό σύνολο ανήκει σε αυτήν. Έπειτα, αφού το $N$ είναι υποσύνολο του $M$, άρα $N = M \cap N$ και αφού $M \in \mathcal{O}$, τότε εξ ορισμού ισχύει ότι $N \in \mathcal{O}_N$. Έστω τώρα ότι $S, T \in \mathcal{O}_N$ και $U, V \in \mathcal{O}$, τέτοια ώστε από ορισμό να ισχύει:

$$\exists\, U \in \mathcal{O} : S = U \cap N \qquad \exists\, V \in \mathcal{O} : T = V \cap N$$

δηλαδή:

$$S \cap T = (U \cap N) \cap (V \cap N) = (U \cap V) \cap N$$

Αφού $U \cap V \in \mathcal{O}$, τότε εξ ορισμού $S \cap T \in \mathcal{O}_N$. Η απόδειξη για το τελευταίο κριτήριο του ορισμού 2.1 είναι τετριμμένη, καθώς η ένωση στοιχείων της $\mathcal{O}$ θα είναι πάντα στοιχείο της τοπολογίας αυτής, ακριβώς επειδή η $\mathcal{O}$ είναι τοπολογία. Επομένως, η ένωση αυθαίρετα πολλών συνόλων-στοιχείων του $C \subseteq \mathcal{O}_N$ θα είναι η ένωση της ένωσης αυθαίρετα πολλών στοιχείων της $\mathcal{O}$ με το $N$ και άρα θα είναι πάντοτε στοιχείο της $\mathcal{O}_N$. Έπεται ότι $\mathcal{O}_N$ είναι τοπολογία στο $N$. □

**Παράδειγμα 2.5.** Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$ τοπολογικός χώρος και:

$$N = [-1, 1] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

Έστω επίσης $(N, \mathcal{O}_N)$ σχετικός τοπολογικός χώρος. Ισχυριζόμαστε ότι $(0, 1] \in \mathcal{O}_N$. Είναι προφανές ότι το $(0, 1]$ δεν ανήκει στην $\mathcal{O}_\sigma$, αφού δεν είναι ανοιχτό σύνολο στο $\mathbb{R}$. Όμως:

$$(0, 1] = (0, 2) \cap [-1, 1] = (0, 2) \cap N$$

και εφόσον $(0, 2) \in \mathcal{O}_\sigma$, τότε από θεώρημα 2.1 θα ισχύει ότι $(0, 1] \in \mathcal{O}_N$. Το χρήσιμο συμπέρασμα αυτού του παραδείγματος είναι ότι ένα σύνολο που είναι μη ανοιχτό σε έναν τοπολογικό χώρο, μπορεί να είναι ανοιχτό σε έναν σχετικό τοπολογικό χώρο.

**Ορισμός 2.3.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $C \subseteq M$ καλείται *κλειστό*, αν $M \setminus C$ είναι ανοιχτό.

**Παράδειγμα 2.6.** Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$ τοπολογικός χώρος. Τότε, το σύνολο $[0, 1]$ είναι κλειστό σε αυτόν, γιατί:

$$\mathbb{R} \setminus [0, 1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \in \mathcal{O}_\sigma$$

**Παρατήρηση 2.2.** *Γενικά, ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου μπορεί να είναι:*

- *ανοιχτό*
- *κλειστό*
- *ανοιχτό και κλειστό*
- *ανοιχτό και μη κλειστό*
- *μη ανοιχτό και κλειστό*
- *μη ανοιχτό και μη κλειστό*

**Παρατήρηση 2.3.** *Για κάθε τοπολογικό χώρο $(M, \mathcal{O})$:*

*(i)* *Το κενό σύνολο είναι ανοιχτό, αφού $\varnothing \in \mathcal{O}$. Όμως, $M = M \setminus \varnothing$ και $M \in \mathcal{O}$. Επομένως, $\varnothing$ είναι επίσης και κλειστό.*

(ii) *Το ένα και το αυτό σύνολο $M$ είναι ανοιχτό, αφού $M \in \mathcal{O}$. Όμως, $\varnothing = M \setminus M$ και $\varnothing \in \mathcal{O}$. Επομένως, $M$ είναι επίσης και κλειστό.*

**Παράδειγμα 2.7.** Έστω το σύνολο του μοναδιαίου κύκλου:

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Ένας τρόπος να κατασκευάσουμε μια τοπολογία στο $S^1$ είναι να την επάγουμε από την τοπολογία $\mathcal{O}_\sigma$ στο $\mathbb{R}$. Ένας άλλος τρόπος είναι να ορίσουμε το $S^1$ ως το σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}/\sim$, όπου η σχέση ισοδυναμίας δίνεται από $x \sim y :\iff y = x + 2\pi$.

**Ορισμός 2.4.** Έστωσαν $(A, \mathcal{O}_A)$ και $(B, \mathcal{O}_B)$ τοπολογικοί χώροι και έστω το σύνολο $A \times B$, όπου $\times$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο. Μπορούμε να εφοδιάσουμε το $A \times B$ με την *τοπολογία γινόμενο*, $\mathcal{O}_{A\times B}$, η οποία ορίζεται έμμεσα από:

$$U \in \mathcal{O}_{A\times B} :\iff \forall\, p \in U : \exists\, S \in \mathcal{O}_A, T \in \mathcal{O}_B : S \times T \subseteq U$$

με $p = (a, b) \in A \times B$ και $a \in S, b \in T$.

**Παρατήρηση 2.4.** *Κάθε πεπερασμένο σύνολο $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$ μπορεί να εφοδιαστεί με την τοπολογία γινόμενο, ενώ η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{R}^d$ ταυτίζεται με τη συνήθη τοπολογία $\mathcal{O}_\sigma$, διότι μέσα σε κάθε ανοιχτή "μπάλα" μπορούμε να βρούμε έναν ανοιχτό "κύβο" με το ίδιο κέντρο και αντιστρόφως.*

## 2.3. Σύγκλιση και συνέχεια

**Ορισμός 2.5.** Μια ακολουθία $q : \mathbb{N} \to M$ σε έναν τοπολογικό χώρο $(M, \mathcal{O})$ καλείται *συγκλίνουσα σε σημείο $a \in M$*, αν:

$$\forall\, U \in \mathcal{O} : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N : q(n) \in U$$

όπου ο όρος ($\forall\, U \in \mathcal{O}$) σημαίνει την ανοιχτή γειτονιά του σημείου $a$, αν $a \in U$.

**Παράδειγμα 2.8.** Έστω τοπολογικός χώρος $(M, \{\varnothing, M\})$ και έστω $q : \mathbb{N} \to M$ μια ακολουθία. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε ακολουθία συγκλίνει σε κάθε σημείο, αν η τοπολογία του $M$ είναι η τετριμμένη. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα, καθώς το μόνο στοιχείο της τοπολογίας που μπορεί να περιέχει κάποιο σημείο είναι το $M$ και άρα προφανώς $\forall\, M \in \mathcal{O} : q(n) \in M$, αφού $q : \mathbb{N} \to M$.

**Παράδειγμα 2.9.** Έστω $(M, \mathcal{P}(M))$ τοπολογικός χώρος με διακριτή τοπολογία. Μόνο όλες οι τελικά σταθερές ακολουθίες συγκλίνουν, δηλαδή εκείνες οι ακολουθίες, για τις οποίες υπάρχει $x$ και $n_0$, τέτοια ώστε $\forall\, n \geq n_0 : q(n) = x$ ή ισοδύναμα, εκείνες οι ακολουθίες όπου $q(n)$ έχει την ίδια τιμή για όλα τα $n$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο αυτών. Αυτό ισχύει γιατί οποιαδήποτε ανοιχτή γειτονιά του σημείου είναι υποσύνολο του $M$.

**Παράδειγμα 2.10.** Έστω $M = \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma$.

**Θεώρημα 2.2** (Σύγκλιση στον $\mathbb{R}^d$). *Μια ακολουθία $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}^d$, αν:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n > N : \|q(n) - a\| < \epsilon$$

Για παράδειγμα, η ακολουθία $q(n) = 1 - 1/(n+1)$ δεν είναι είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, αλλά είναι συγκλίνουσα στον $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$.

**Ορισμός 2.6.** Έστωσαν $(M, \mathcal{O}_M)$ και $(N, \mathcal{O}_N)$ τοπολογικοί χώροι και έστω $\phi : M \to N$ μια απεικόνιση. Η $\phi$ καλείται *συνεχής*, αν:

$$\forall\, V \in \mathcal{O}_N : \mathrm{preim}_\phi(V) \in \mathcal{O}_M$$

όπου η *προεικόνα του συνόλου $V$ μέσω της $\phi$* ορίζεται ως:

$$\mathrm{preim}_\phi(V) := \{m \in M \mid \phi(m) \in V\}$$

Κοινώς, μια απεικόνιση καλείται συνεχής, αν οι προεικόνες ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτά σύνολα.

**Παράδειγμα 2.11.** Έστωσαν $(M, \mathcal{P}(M))$ και $(N, \mathcal{O}_N)$ τοπολογικοί χώροι. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε απεικόνιση $\phi : M \to N$ είναι συνεχής. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα, καθώς η προεικόνα ενός ανοιχτού ως προς την $\mathcal{O}_N$ συνόλου είναι σίγουρα υποσύνολο του $M$ και άρα ανήκει στο $\mathcal{P}(M)$. Γενικότερα, αν το σύνολο ορισμού μιας απεικόνισης είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία, τότε η απεικόνιση είναι συνεχής.

**Παράδειγμα 2.12.** Έστωσαν $(M, \mathcal{O}_M)$ και $(N, \{\varnothing, N\})$ τοπολογικοί χώροι. Τότε οποιαδήποτε απεικόνιση $\phi : M \to N$ είναι συνεχής, αφού η προεικόνα του κενού συνόλου είναι το κενό σύνολο, το οποίο από ορισμό ανήκει στην $\mathcal{O}_M$ και η προεικόνα του $N$ είναι το $M$, το οποίο και πάλι από ορισμό ανήκει στην $\mathcal{O}_M$.

**Παράδειγμα 2.13.** Έστωσαν $(\mathbb{R}^d, \mathcal{O}_\sigma)$ και $(\mathbb{R}^f, \mathcal{O}_\sigma)$ τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^f$ καλείται συνεχής, αν για κάθε $c \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $\varepsilon$ θετικό υπάρχει $\delta$ θετικό, έτσι ώστε αν $x \in \mathbb{R}^d$ και $\|x - c\| < \delta$, να ισχύει $\|\phi(x) - \phi(c)\| < \varepsilon$.

**Ορισμός 2.7.** Έστω $\phi : M \to N$ αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Εφοδιάζοντας το $M$ με τοπολογία $\mathcal{O}_M$ και το $N$ με τοπολογία $\mathcal{O}_N$, καλούμε την απεικόνιση $\phi$ *ομοιομορφισμό*, αν είναι συνεχής και η αντίστροφη της, $\phi^{-1} : N \to M$, είναι επίσης συνεχής.

**Παρατήρηση 2.5.** *Οι ομοιομορφισμοί είναι απεικονίσεις που διατηρούν την τοπολογική δομή.*

**Ορισμός 2.8.** Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi$, τότε αυτός παρέχει τη δυνατότητα 1-1 ζευγαρώματος ανοιχτών συνόλων των ανοιχτών συνόλων του $M$ με αυτά του $N$, καθως ισχύει ότι $\forall\, V \in \mathcal{O}_M : \mathrm{preim}_{\phi^{-1}}(V) \in O_N$ και:

$$\forall\ \mathrm{preim}_{\phi^{-1}}(V) \in O_N : \mathrm{preim}_\phi(\mathrm{preim}_{\phi^{-1}}(V)) \in \mathcal{O}_M$$

**Ορισμός 2.9.** Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi$ μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων, τότε λέμε ότι:

$$(M, \mathcal{O}_M) \overset{\text{top.}}{\cong} (N, \mathcal{O}_N)$$

δηλαδή ότι είναι ισομορφικοί ως τοπολογικοί χώροι ή απλά ότι είναι ομοιομορφικοί. Από το τελευταίο συνεπάγεται ότι τα σύνολα $M$ και $N$ είναι ισομορφικά.

**Ορισμός 2.10.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O}_M)$ καλείται $T_1$, αν για κάθε δύο σημεία $p, q \in M$ με $p \neq q$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U$ του σημείου $p$, τέτοια ώστε $q \notin U$, δηλαδή:

$$\forall\, p \neq q : \exists\, U \in \mathcal{O} : q \notin U$$

**Ορισμός 2.11.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O}_M)$ καλείται $T_2$ ή *Hausdorff*, αν για κάθε δύο σημεία $p, q \in M$ με $p \neq q$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $U$ του σημείου $p$ και ανοιχτή περιοχή $V$ του σημείου $q$, τέτοιες ώστε να είναι ξένες μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\forall\, p \neq q : \exists\, U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O} : U \cap V = \varnothing$$

**Παρατήρηση 2.6.**

(i) *Αν ένας τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff, τότε συνεπάγεται ότι είναι και* $T_1$. *Για παράδειγμα, ο συνήθης τοπολογικός χώρος* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{O}_\sigma)$ *είναι Hausdorff, άρα είναι και* $T_1$.

(ii) *Ένας τοπολογικός χώρος είναι* $T_{2(1/2)}$, *αν για δύο διαφορετικά σημεία υπάρχει κλειστή περιοχή του ενός, στην οποία δεν ανήκει το άλλο. Ένας τοπολογικός χώρος μπορεί να είναι και* $T_3, T_4, \cdots$ *κλπ., όπου κάθε επόμενος χαρακτηρισμός είναι ισχυρότερος από τον προηγούμενο.*

(iii) *Ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος δεν είναι ούτε* $T_1$, *γιατί η μόνη ανοιχτή περιοχή ενός σημείου είναι το ένα και το αυτό σύνολο, οπότε ένα άλλο σημείο θα ανήκει αναγκαστικά σε αυτήν. Προφανώς δεν είναι ούτε Hausdorff.*

## 2.4. Συμπάγεια και παρασυμπάγεια, συνεκτικότητα και δρομοσυνεκτικότητα

**Ορισμός 2.12.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ καλείται *συμπαγής*, αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα (open cover) $C$ έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\widetilde{C}$. Μια συλλογή συνόλων $C \subseteq \mathcal{O}$ καλείται *ανοιχτό κάλυμμα*, αν $\cup C = M$, δηλαδή αν με την ένωση των στοιχείων της ανακτούμε το ένα και το αυτό σύνολο $M$. Ένα *πεπερασμένο υποκάλυμμα* $\widetilde{C}$ είναι ένα κάλυμμα, τέτοιο ώστε $\widetilde{C} \subseteq C$, δηλαδή να είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός καλύμματος.

**Ορισμός 2.13.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο $N \subseteq M$ καλείται συμπαγές, αν $(N, \mathcal{O}_N)$ είναι συμπαγής ως τοπολογικός χώρος, όπου εδώ συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_N$ τη σχετική τοπολογία.

**Ορισμός 2.14.** Μια απεικόνιση $d : M \times M \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$, τέτοια ώστε:

(i) $d(m, n) = d(n, m)$

(ii) $d(m, n) \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $m = n$

(iii) $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$

καλείται *μετρική*. Ένα σύνολο $M$ εφοδιασμένο με μετρική $d$ καλείται *μετρικός χώρος* και συμβολίζεται με $(M, d)$.

**Ορισμός 2.15.** Ορίζουμε μια τοπολογία επαγόμενη από τη μετρική κατά τον ίδιο τρόπο με τη συνήθη τοπολογία. Η διαφορά είναι ότι:

$$B_r(p) \coloneqq \{q \in M \mid d(q, p) < r\}$$

όπου $r \in \mathbb{R}^+$ και $p \in M$.

**Θεώρημα 2.3** (Heine-Borel)**.** *Σε έναν μετρικό χώρο* $(M, d)$ *(εφοδιασμένο με τοπολογία που επάγεται από τη μετρική) κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* $M$ *είναι συμπαγές.*

**Παράδειγμα 2.14.** Το σύνολο $[0, 1]$ είναι συμπαγές με βάση το θεώρημα Heine-Borel, γιατί είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ο οποίος είναι τοπολογικός χώρος με συνήθη τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα. Είναι επίσης συμπαγές και από ορισμό 2.12.

**Παράδειγμα 2.15.** Ο $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$ δεν είναι συμπαγής, γιατί μπορούμε να κατασκευάσουμε ανοιχτό κάλυμμα $C$ με άπειρα στοιχεία, το οποίο να μην έχει πεπερασμένο υποσύνολο που να είναι κάλυμμα.

**Θεώρημα 2.4.** *Έστωσαν* $(M, \mathcal{O}_M)$ *και* $(N, \mathcal{O}_N)$ *συμπαγείς τοπολογικοί χώροι. Τότε, ο τοπολογικός χώρος* $(M \times N, \mathcal{O}_{M \times N})$ *είναι επίσης συμπαγής. Το θεώρημα αυτό μπορεί να γενικευτεί για πεπερασμένα πολλούς τοπολογικούς χώρους.*

**Ορισμός 2.16.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ καλείται *παρασυμπαγής*, αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα $C$ έχει μια ανοιχτή εκλέπτυνση (open refinement) $\widetilde{C}$, η οποία είναι τοπικά πεπερασμένη. Μια *ανοιχτή εκλέπτυνση* $\widetilde{C}$ είναι ένα κάλυμμα $\widetilde{C}$, τέτοιο ώστε:

$$\forall\, U \in C : \exists\, \tilde{U} \in \tilde{C} : \tilde{U} \subseteq U$$

*Τοπικά πεπερασμένη* σημαίνει ότι $\forall\, p \in M : \exists\, U \in \mathcal{O}$ με $p \in U$, τέτοιο ώστε $U \cap \tilde{U} \neq \varnothing$ μόνο για πεπερασμένα πολλά $\tilde{U} \in \tilde{C}$. Αν ένα ανοιχτό κάλυμμα έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, τότε σίγουρα έχει και ανοιχτή εκλέπτυνση τοπικά πεπερασμένη, δηλαδή το υποκάλυμμα είναι ισχυρότερη έννοια από την εκλέπτυνση.

**Πόρισμα 2.1.** *Από τη συμπάγεια συνεπάγεται η παρασυμπάγεια. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.*

**Θεώρημα 2.5** (Stone)**.** *Κάθε μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$, δηλαδή κάθε σύνολο που μπορεί να εφοδιαστεί με μετρική $d$ και τοπολογία $\mathcal{O}$ (που επάγεται από τη $d$), είναι παρασυμπαγής.*

**Θεώρημα 2.6.** *Έστω $(M, \mathcal{O}_M)$ παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος και $(N, \mathcal{O}_N)$ συμπαγής τοπολογικός χώρος. Τότε, ο τοπολογικός χώρος $(M \times N, \mathcal{O}_{M\times N})$ είναι παρασυμπαγής.*

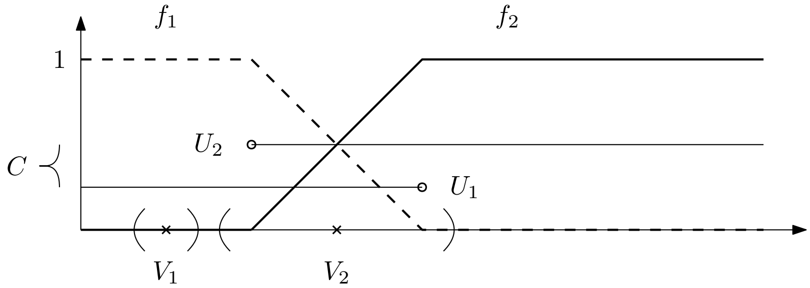
**Πόρισμα 2.2.** *Αν $M$ παρασυμπαγής χώρος και $N_1, \cdots, N_f$ πεπερασμένα πολλοί συμπαγείς χώροι, τότε $M \times N_1 \times \cdots \times N_f$ (με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο) είναι παρασυμπαγής χώρος.*

**Θεώρημα 2.7.** *Έστω $(M, \mathcal{O})$ ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε, είναι παρασυμπαγής, αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα $C$ εισάγει μια διαμέριση της μονάδας, υποκείμενη σε αυτό το κάλυμμα. Διαμέριση της μονάδας, υποκείμενη στο κάλυμμα $C$, είναι ένα σύνολο $\mathcal{F}$ συνεχών συναρτήσεων $f : M \to [0, 1]$, τέτοιο ώστε:*

*(1) για κάθε $f \in \mathcal{F}$ να υπάρχει κάποιο $U \in C$, τέτοιο ώστε από το $f(p) \neq 0$ να συνεπάγεται ότι $p \in U$.*

*(2) για όλα τα $p \in M$ να υπάρχει μια ανοιχτή γειτονιά $V$ του σημείου $p$, τέτοια ώστε μόνο πεπερασμένα πολλές $f_n \in \mathcal{F}$ να είναι μη μηδενικές στη $V$ και $\sum_{n=1}^{N} f_n = 1$ στη $V$.*

**Παράδειγμα 2.16.** Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$ είναι παρασυμπαγής:




Από το σχήμα φαίνεται ότι για $f_1(p) \neq 0$, το $p$ πρέπει να ανήκει στο $U_1$. Αντίστοιχα, για $f_2(p) \neq 0$, θα πρέπει $p \in U_2$. Επίσης, στην ανοιχτή γειτονιά $V_1$ η $f_1$ είναι μη μηδενική και το άθροισμα $f_1 + f_2$ ισούται με τη μονάδα, ενώ στην ανοιχτή γειτονιά $V_2$, το άθροισμα στο πρώτο κομμάτι (όπου $f_1 = 1$ και $f_2 = 0$) δίνει μονάδα, στο δεύτερο κομμάτι (όπου η $f_1$ μειώνεται και η $f_2$ αυξάνεται) δίνει πάλι μονάδα και στο τρίτο κομμάτι (όπου $f_1 = 0$ και $f_2 = 1$) ξανά μονάδα. Τότε, εφόσον εισάγεται μια διαμέριση της μονάδας, υποκείμενη στο κάλυμμα $C$, ο $\mathbb{R}$ (ως Hausdorff) είναι παρασυμπαγής.

**Ορισμός 2.17.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ καλείται *συνεκτικός*, εκτός και αν υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα $A, B$, τέτοια ώστε $M = A \cup B$.

**Παράδειγμα 2.17.** Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ είναι μη συνεκτικός, γιατί υπάρχει $A \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, τέτοιο ώστε $A := (-\infty, 0)$ και $B \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, τέτοιο ώστε $B := (0, \infty)$, τα οποία είναι μη κενά και ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A \cap B = \varnothing$ με $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

**Θεώρημα 2.8.** *Το διάστημα $[0, 1]$ με σχετική τοπολογία (επαγόμενη από τη συνήθη) είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.*

**Θεώρημα 2.9.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ είναι συνεκτικός, αν το κενό σύνολο και το $M$ είναι τα μόνα υποσύνολα, τα οποία είναι ανοιχτά και κλειστά.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε πρώτα ότι από το αριστερό μέλος της ισοδυναμίας συνεπάγεται το δεξί και θα το πράξουμε αυτό με εις άτοπον επαγωγή. Έστω ένα άλλο σύνολο $U \subseteq M$, το οποίο είναι ανοιχτό και κλειστό με $U \neq \varnothing, M$. Τότε, $M = U \cup M \setminus U$. Το $U$ είναι ανοιχτό και μη κενό. Όμως, το $U$ είναι και κλειστό. Άρα, $M \setminus U$ θα είναι ανοιχτό και μη κενό. Η ένωση αυτών των δύο ανοιχτών, μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων είναι το $M$. Επομένως, ο $(M, \mathcal{O})$ δεν είναι συνεκτικός (άτοπο). Άρα, $\varnothing$ και $M$ είναι τα μόνα υποσύνολα που είναι ανοιχτά και κλειστά.

Ύστερα θα αποδείξουμε ότι από το δεξί μέλος της ισοδυναμίας συνεπάγεται το αριστερό. Έστω $(M, \mathcal{O})$ μη συνεκτικός τχ. Τότε, υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα $A, B$, τέτοια ώστε $M = A \cup B = M \setminus B \cup M \setminus A$. Το $A$ είναι ανοιχτό, αλλά επειδή το $B$ είναι ανοιχτό, τότε το $A = M \setminus B$ θα είναι κλειστό. Άρα, $A$ είναι ανοιχτό και κλειστό. Το ίδιο ισχύει και για το $B$. Δηλαδή, τα $\varnothing, M$ δεν είναι τα μόνα υποσύνολα που είναι ανοιχτά και κλειστά. Επομένως, $(M, \mathcal{O})$ θα πρέπει να είναι συνεκτικός τχ.

□

**Ορισμός 2.18.** Ένας τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ καλείται *δρομοσυνεκτικός*, αν για κάθε ζεύγος σημείων $(p, q) \in M$ υπάρχει μια συνεχής καμπύλη $\gamma : [0, 1] \to M$, τέτοια ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = q$.

**Παράδειγμα 2.18.** Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}^d, \mathcal{O}_\sigma)$ είναι δρομοσυνεκτικός, γιατί για ένα ζεύγος σημείων $(p, q) \in \mathbb{R}^d$ μπορούμε να ορίσουμε μια συνεχή καμπύλη $\gamma(\lambda) := p + \lambda(q - p)$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(1) = q$.

**Παράδειγμα 2.19.** Ο τοπολογικός χώρος $(S, \mathcal{O}_S)$, όπου:

$$S := \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

είναι συνεκτικός, αλλά οχι δρομοσυνεκτικός.

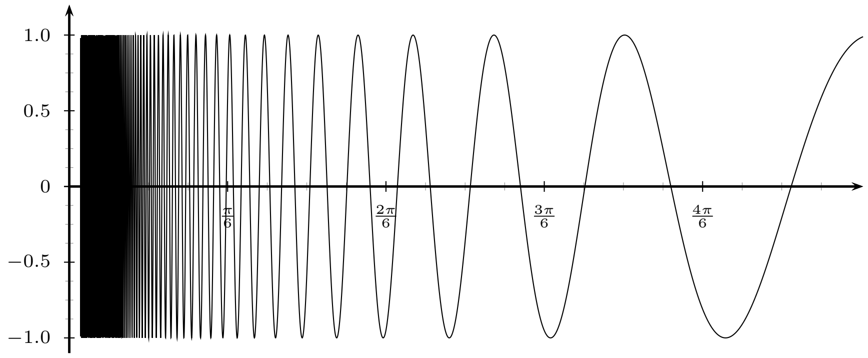
**Θεώρημα 2.10.** *Από τη δρομοσυνεκτικότητα συνεπάγεται η συνεκτικότητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.*

*Απόδειξη.* Έστω $(M, \mathcal{O})$ δρομοσυνεκτικός, αλλά όχι συνεκτικός. Τότε, υπάρχουν δύο μη κενά και ξένα σύνολα $A, B$, τέτοια ώστε $M = A \cup B$. Διαλέγουμε δύο σημεία, $a \in A$ και $b \in B$. Αφού $(M, \mathcal{O})$ δρομοσυνεκτικός υπάρχει συνεχής καμπύλη $\gamma : [0, 1] \to M$, τέτοια ώστε $\gamma(0) = a$ και $\gamma(1) = b$. Όμως:

$$[0, 1] = \mathrm{preim}_\gamma(M) = \mathrm{preim}_\gamma(A \cup B) = \mathrm{preim}_\gamma(A) \cup \mathrm{preim}_\gamma(B)$$

και λόγω συνέχειας της $\gamma$ οι προεικόνες των $A$ και $B$ είναι ανοιχτά σύνολα. Είναι προφανώς ξένα, αφού $A, B$ είναι ξένα μεταξύ τους και σίγουρα μη κενά, αφού τα σύνολα τιμών τους περιέχουν τουλάχιστον ένα σημείο το καθένα. Επομένως, $[0, 1]$ είναι εξ ορισμού μη συνεκτικός τοπολογικός χώρος, το οποίο είναι άτοπο από θεώρημα 2.8. Άρα, $(M, \mathcal{O})$ είναι και συνεκτικός.

□



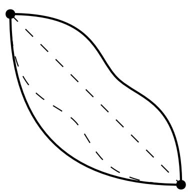

Ο τοπολογικός χώρος των ζευγών $(x, \sin(1/x))$ για $x \in (0, 1]$.

## 2.5. Ομότοπες καμπύλες και η θεμελιώδης ομάδα

**Ορισμός 2.19.** Έστω τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$. Δύο καμπύλες $\gamma : [0, 1] \to M$ και $\delta : [0, 1] \to M$ με κοινή αρχή και πέρας, δηλαδή $\gamma(0) = \delta(0)$ και $\gamma(1) = \delta(1)$, καλούνται *ομότοπες*, αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $h : [0, 1] \times [0, 1] \to M$, τέτοια ώστε για $\lambda \in [0, 1]$ να ισχύει ότι:

$$h(0, \lambda) \coloneqq \gamma(\lambda) \qquad h(1, \lambda) \coloneqq \delta(\lambda)$$

Ο λόγος που είμαστε σε θέση να μιλάμε για συνεχή απεικόνιση είναι το γεγονός ότι $(M, \mathcal{O})$ και $([0, 1], \mathcal{O}_{[0,1]})$ είναι τοπολογικοί χώροι (ο δεύτερος κληρονομεί την τοπολογία του από τη συνήθη), άρα και $([0, 1]\times[0, 1], \mathcal{O}_{[0,1]\times[0,1]})$ τοπολογικός χώρος με τοπολογία γινόμενο. Γενικά, όταν δεν δηλώνουμε ρητά τον τοπολογικό χώρο, τότε υπονοούμε τις συμβατικές τοπολογίες. Γραφικά, η ομοτοπία 2 καμπυλών εκφράζεται από τη δυνατότητα να παραμορφώσουμε με συνεχή τρόπο τη μια στην άλλη, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



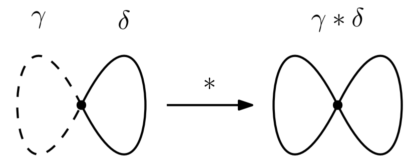
**Ορισμός 2.20.** Δύο καμπύλες $\gamma$ και $\delta$ είναι *ισοδύναμες* από ορισμό, αν είναι ομότοπες, δηλαδή $\gamma \sim \delta :\iff \gamma, \delta$ ομότοπες. Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, καθώς η κάθε καμπύλη είναι ομότοπη με τον εαυτό της (ανακλαστικότητα), η ομοτοπία είναι συμμετρική και φυσικά, αν $\gamma, \delta$ ομότοπες και $\delta, \epsilon$ ομότοπες, τότε και $\gamma, \epsilon$ ομότοπες (μεταβατικότητα).

**Ορισμός 2.21.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ τοπολογικός χώρος. Τότε, για κάθε $p \in M$ ορίζουμε το *χώρο των βρόχων στο* $p$:

$$\mathcal{L}_p \coloneqq \{\gamma : [0, 1] \to M \mid \text{ συνεχής με } \gamma(0) = \gamma(1)\}$$

**Ορισμός 2.22.** Ορίζουμε τον *τελεστή παράθεσης* $*_p : \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_p$, όπου για $\lambda \in [0,1]$ ισχύει ότι:

$$(\gamma * \delta)(\lambda) \coloneqq \begin{cases} \gamma(2\lambda) & 0 \le \lambda < \frac{1}{2} \\ \delta(2\lambda - 1) & \frac{1}{2} \le \lambda \le 1 \end{cases}$$




**Ορισμός 2.23.** Η θεμελιώδης ομάδα $(\pi_{1p}, \star)$ ενός τοπολογικού χώρου στο σημείο $p$ είναι το σύνολο:

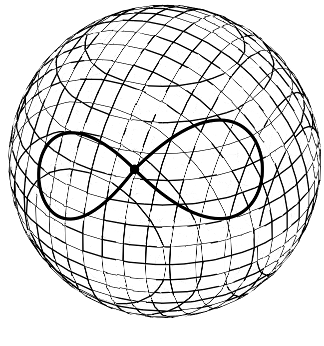
$$\pi_{1p} \coloneqq \mathcal{L}_p / \sim \equiv \{[\gamma] \mid \gamma \in \mathcal{L}_p\}$$

εφοδιασμένο με την κλειστή πράξη ομάδας $\star : \pi_{1p} \times \pi_{1p} \to \pi_{1p}$, όπου:

$$\star([\gamma], [\delta]) \equiv [\gamma] \star [\delta] \coloneqq [\gamma * \delta]$$

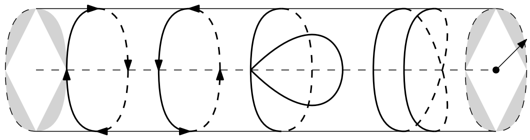
και η οποία είναι καλώς ορισμένη. Η σχέση ισοδυναμίας $\sim$ σημαίνει ομοτοπία και η πράξη $\star$ είναι προσεταιριστική, με ουδέτερο στοιχείο τον ταυτοτικό βρόχο $(\gamma_e)_p : [0,1] \to M$, όπου $\gamma(\lambda) = p$ και με αντίστροφο στοιχείο (διατρέχουμε ανάποδα τον βρόχο $\delta$).

**Παράδειγμα 2.20.** Έστω ο τοπολογικός χώρος της 2-σφαίρας $S^2$ και έστωσαν 2 βρόχοι με αρχή και πέρας το ίδιο σημείο $p \in S^2$:



Η ερώτηση είναι πως διαφέρει ο ένας βρόχος από τον άλλον, όσον αφορά στην ομοτοπία. Η απάντηση είναι ότι όλοι οι βρόχοι της 2-σφαίρας είναι ομότοποι μεταξύ τους και ομότοποι με τον ταυτοτικό βρόχο, δηλαδή $\pi_{1p} = \{[(\gamma_e)_p]\}$. Αυτό μπορεί να γίνει κατανοητό και με τον γραφικό τρόπο, καθώς αν αφαιρέσουμε ένα κομμάτι, περικλειόμενο από έναν εκ των 2 βρόχων, μπορούμε και πάλι παραμορφώνοντας με συνεχή τρόπο τον ένα βρόχο να φτάσουμε στον άλλο.

**Παράδειγμα 2.21.** Έστω ο τοπολογικός χώρος του άπειρου κυλίνδρου $C = \mathbb{R} \times S^1$. Παρατηρούμε ότι ο βρόχος που τυλίγει μια φορά τον κύλινδρο δεν είναι ομότοπος με τον ταυτοτικό βρόχο, διότι δεν μπορούμε με συνεχή τρόπο να παραμορφώσουμε τον έναν, ώστε να φτάσουμε στον άλλον. Το ίδιο ισχύει και για τον βρόχο που τυλίγει δύο φορές τον κύλινδρο, ο

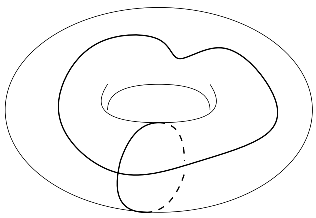


οποίος δεν είναι ομότοπος με κανέναν από τους προηγούμενους. Επίσης, ο βρόχος που τυλίγει τον κύλινδρο με συμβατική φορά δεν είναι ομότοπος με αυτόν που τυλίγει τον κύλινδρο με αντισυμβατική φορά. Επομένως:

$$(\pi_1, \star) \stackrel{\text{group}}{\cong} (\mathbb{Z}, +)$$

δηλαδή υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \pi_1 \to \mathbb{Z}$, η οποία σέβεται τις ιδιότητες της ομάδας, δηλαδή $f(a \star b) = f(a) + f(b)$. Το μηδέν αντιστοιχεί στον ταυτοτικό βρόχο. Ένας θετικός ακέραιος $n$ αντιστοιχεί στον βρόχο που τυλίγει $n$ φορές τον κύλινδρο με συμβατική φορά, ενώ ένας αρνητικός ακέραιος $m$ αντιστοιχεί στον βρόχο που τυλίγει τον κύλινδρο $m$ φορές με αντισυμβατική φορά.

**Παράδειγμα 2.22.** Έστω ο τοπολογικός χώρος του 2-τόρου $T^2 = S^1 \times S^1$.



Με τον ίδιο τρόπο με πριν παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο είδη βρόχων, αυτοί που (διαισθητικά μιλώντας) τυλίγονται γύρω από την εσωτερική οπή του 2-τόρου και αυτοί που τυλίγονται γύρω από τον ίδιο τον 2-τόρο. Επομένως:

$$(\pi_1, \star) \stackrel{\text{group}}{\cong} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$$

Από τα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι η θεμελιώδης ομάδα της 2-σφαίρας είναι διαφορετική από αυτήν του 2-τόρου και αυτήν του άπειρου κυλίνδρου. Κανένας από τους παραπάνω τοπολογικούς χώρος δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικός με τους υπόλοιπους, γιατί οι θεμελιώδεις ομάδες είναι εξαρχής τοπολογικές κατασκευές. Παρόλα αυτά, δεν υπάρχει καμία συλλογή από τοπολογικά αναλλοίωτα (Hausdorff, συμπάγεια, συνεκτικότητα κλπ.), με βάση την οποία να μπορούμε να κρίνουμε αν δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί. Μπορούμε μόνο να αποφανθούμε ότι δεν είναι.

Ας περάσουμε τώρα στις τοπολογικές πολλαπλότητες. Λέμε γενικά ότι μια (τοπολογική) πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που μοιάζει τοπικά, στη γειτονιά κάθε σημείου του, με τον ευκλείδειο χώρο. Έτσι, ένας κύκλος είναι μια μονοδιάστατη πολλαπλότητα, αφού μοιάζει τοπικά στον $\mathbb{R}$, όπως το ίδιο ισχύει και για μια γραμμή, σε αντίθεση με το οχτάρι, όπου το σημείο διασταύρωσης δεν είναι τοπικά ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}$. Η έννοια της πολλαπλότητας είναι κομβική στη γεωμετρία και τη σύγχρονη μαθηματική φυσική, καθώς παρέχει τη δυνατότητα μελέτης πολύπλοκων δομών με όρους πολύ πιο οικείους. Υπό μια έννοια, η πολλαπλότητα είναι ο θεμέλιος λίθος των γεωμετριών που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια, αποτελεί δηλαδή την πρώτη ύλη, την οποία θα εφοδιάζουμε διαρκώς με περισσότερη δομή.

Μια πρώτη δομή που μπορούμε να κατασκευάσουμε, με πρώτη ύλη την πολλαπλότητα, είναι η δέσμη (bundle), δηλαδή εκείνη η διάταξη δύο πολλαπλοτήτων, εφοδιασμένη με μια απεικόνιση που προβάλλει τη μια στην άλλη. Με τη σειρά της, θα δούμε ότι μια δέσμη, εφοδιασμένη και αυτή με περισσότερη δομή, αποτελεί το βασικό υπόβαθρο πολλών γεωμετριών και αντίστοιχα, πολλών θεωριών στη φυσική, όπως είναι οι θεωρίες Yang-Mills. Στις ακόλουθες ενότητες, θα δώσουμε περισσότερο βάρος στην έννοια του χάρτη και του άτλαντα, όπως και στην έννοια της συμβιβαστότητας ως προς τη συνέχεια, αφού θα επισκεφθούμε τις δέσμες σε μεταγενέστερη ενότητα, όταν θα έχουμε εισάγει τα απαραίτητα εργαλεία για να τις εφοδιάσουμε με περισσότερη δομή. Η έκταση της βιβλιογραφίας για αυτήν και την προηγούμενη ενότητα είναι πραγματικά αχανής. Εμείς θα επιλέξουμε να αντλήσουμε πληροφορία από τα **[36]**, **[23]**, **[12]**, **[14]** και **[19]**.

## 2.6. Τοπολογικές πολλαπλότητες, δέσμες και άτλαντες

**Ορισμός 2.24.** Ένας παρασυμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος $(M, \mathcal{O})$ με αριθμίσιμη βάση για την τοπολογία του $M$, θα καλείται $d$-διάστατη (τοπολογική) *πολλαπλότητα* (manifold), αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει ανοιχτή γειτονιά $U$ του σημείου $p$ και ένας ομοιομορφισμός $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$.

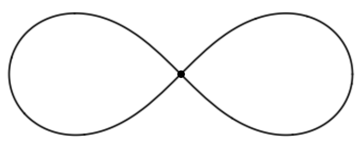
**Ορισμός 2.25.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ μια $d$-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα και έστω ένα υποσύνολο $N \subseteq M$. Τότε, αν εφοδιάσουμε το $N$ με τη σχετική τοπολογία, ο $(N, \mathcal{O}_N)$ καλείται *υποπολλαπλότητα*, αν είναι πολλαπλότητα με βάση τον ορισμό 2.24.

**Παράδειγμα 2.23.** Έστω $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_\sigma)$ μια τοπολογική πολλαπλότητα και:

$$N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Τότε, $(N, \mathcal{O}_N)$ είναι υποπολλαπλότητα, καθώς είναι πολλαπλότητα από ορισμό.

**Παράδειγμα 2.24.** Έστω $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_\sigma)$ μια τοπολογική πολλαπλότητα και έστω υποσύνολο που αναπαρίσταται γραφικά από δύο βρόχους που εφάπτονται τουλάχιστον σε ένα σημείο (οχτάρι):



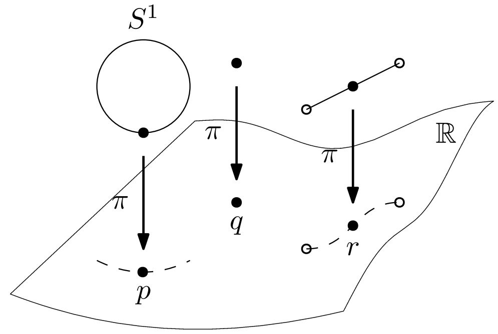
Τότε, ο $(N, \mathcal{O}_N)$ δεν είναι πολλαπλότητα, γιατί υπάρχει σημείο $p$ (στην τομή των βρόχων), στο οποίο ο εν λόγω τχ μοιάζει τοπικά σε δύο $\mathbb{R}$ με κοινό σημείο. Επομένως, σίγουρα δεν είναι και υποπολλαπλότητα.

**Ορισμός 2.26.** Έστωσαν $(M, \mathcal{O}_M)$ και $(N, \mathcal{O}_N)$ τοπολογικές πολλαπλότητες με αυθαίρετες τοπολογίες. Τότε, ο $(M \times N, \mathcal{O}_{M\times N})$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα με διάσταση ίση με $\dim M + \dim N$ και καλείται *πολλαπλότητα γινόμενο.*

**Ορισμός 2.27.** Μια *δέσμη* είναι μια τριάδα $(E, \pi, M)$, όπου $E$ είναι μια (τοπολογική) πολλαπλότητα που καλείται *ολικός χώρος* (total space), $M$ είναι μια πολλαπλότητα που καλείται *βάση* και $\pi : E \to M$ είναι μια συνεχής και επί απεικόνιση που καλείται *προβολή*. Αν $p \in M$, τότε $F_p := \mathrm{preim}_\pi(p)$ καλείται *ίνα* στο σημείο $p$. Συχνά, θα αναφερόμαστε καταχρηστικά στη δέσμη $(E, \pi, M)$, ως δέσμη $E$ ή δέσμη $E \to M$.

**Παράδειγμα 2.25.** Έστωσαν $M, F$ τοπολογικές πολλαπλότητες, όπου η $F$ είναι ίνα. Ορίζουμε τον ολικό χώρο $E = M \times F$ και την προβολή $\pi : M \times F \to M$, τέτοια ώστε $(p, f) \mapsto p$ με $p \in M$ και $f$ κάποιο στοιχείο της ίνας. Καθώς, η πολλαπλότητα $M \times F$ έχει την τοπολογία γινόμενο, η απεικόνιση $\pi$ είναι συνεχής. Κατασκευάσαμε έτσι μια δέσμη από το καρτεσιανό γινόμενο δύο πολλαπλοτήτων.

**Παράδειγμα 2.26.** Έστω η δέσμη της επόμενης σελίδας. Η προεικόνα του $p$ μέσω της $\pi$




είναι ο $S^1$ και είναι εξ ορισμού η ίνα στο $p$. Η προεικόνα του $q$ μέσω της $\pi$ είναι κάποιο σύνολο που περιέχει ένα σημείο και είναι εξ ορισμού η ίνα στο $q$ και τέλος, η προεικόνα του $r$ μέσω της $\pi$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα και είναι εξ ορισμού η ίνα στο $r$. Όμως, οι τρείς ίνες δεν είναι ομοιομορφικές. Παρόλα αυτά είναι ξεκάθαρη η ύπαρξη της δέσμης. Συμπεραίνουμε ότι δεν απαιτείται ομοιομορφία του ινώδους χώρου για να υπάρχει δέσμη.

**Παράδειγμα 2.27.** Έστω ότι ο ολικός χώρος $E$ είναι η λωρίδα του Möbius, ενώ ο χώρος-βάση είναι ο $M = S^1$. Οποιοδήποτε σημείο πάνω στη λωρίδα του Möbius προβάλλεται μέσω της συνεχούς $\pi$ σε κάποιο σημείο $p \in S^1$. Όμως, η πολλαπλότητα $E$ δεν είναι το καρτεσιανό γινόμενο της $M$ με το διάστημα $[-1, 1]$, αλλά παρόλα αυτά ισχύει ότι η ίνα στο $p$ είναι $\text{preim}_\pi(p) = [-1, 1]$. Επομένως, δεν πρόκειται για πολλαπλότητα γινόμενο, αλλά για δέσμη παρά ταύτα. Συμπεραίνουμε ότι η έννοια της δέσμης είναι γενικότερη από αυτήν της πολλαπλότητας γινόμενο.

**Ορισμός 2.28.** Έστω $(E, \pi, M)$ μια δέσμη, τέτοια ώστε:

$$\forall\, p \in M : \text{preim}_\pi(\{p\}) \cong F$$

για κάποια πολλαπλότητα $F$. Τότε, $(E, \pi, M)$ καλείται *ινώδης δέσμη με (χαρακτηριστική) ίνα* $F$.

**Ορισμός 2.29.** Έστω $(E, \pi, M)$ μια δέσμη. Μια απεικόνιση $\sigma : M \to E$ καλείται *τμήση* της δέσμης, αν $\pi \circ \sigma = \text{id}_M$. Γραφικά, σε μια ινώδη δέσμη αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο $p \in M$ απεικονίζεται μέσω της $\sigma$ σε ένα σημείο $p'$ της ίνας, το οποίο απεικονίζεται μέσω της $\pi$ ξανά στο $p$.

**Ορισμός 2.30.** Έστω $(E, \pi, M)$ μια δέσμη. Τότε, $(E', \pi', M')$ καλείται *υποδέσμη*, αν $E'$ και $M'$ είναι υποπολλαπλότητες των $E$ και $M$ αντίστοιχα και αν-ν ισχύει ότι $\pi|_{E'} = \pi'$, δηλαδή ότι ο περιορισμός της $\pi$ στην υποπολλαπλότητα $E'$ είναι η απεικόνιση $\pi'$.

**Ορισμός 2.31.** Έστω $(E, \pi, M)$ μια δέσμη και $N \subset M$ μια υποπολλαπλότητα. Τότε:

$$(\text{preim}_\pi(N), \pi|_{\text{preim}_\pi(N)}, N)$$

καλείται *περιορισμένη δέσμη*.

**Ορισμός 2.32.** Έστωσαν δύο δέσμες $(E, \pi, M)$ και $(E', \pi', M')$. Έστωσαν επίσης και δύο απεικονίσεις $u : E \to E'$ και $f : M \to M'$. Τότε, το ζεύγος $(u, f)$ καλείται *μορφισμός δέσμης*, αν το ακόλουθο διάγραμμα "μετατίθεται", δηλαδή $\pi' \circ u = f \circ \pi$. Συχνά, αν οι δέσμες έχουν

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

κοινή βάση, θα κάνουμε λόγο για μορφισμό δέσμης $u$, αφού $f$ θα είναι η id.

**Ορισμός 2.33.** Δύο δέσμες $(E, \pi, M)$ και $(E', \pi', M')$ καλούνται *ισομορφικές* (ως δέσμες), αν υπάρχει μορφισμός δέσμης $(u, f)$ με αντίστροφο $(u^{-1}, f^{-1})$, τέτοιος ώστε το αντίστοιχο διάγραμμα να μετατίθεται. Καλούμε το ζεύγος $(u, f)$ *ισομορφισμό δέσμης*, ο οποίος αποτελεί την απεικόνιση που διατηρεί τη δομή στις δέσμες. Αν δύο δέσμες είναι ισομορφικές, τότε έχουν την ίδια ινώδη δομή.

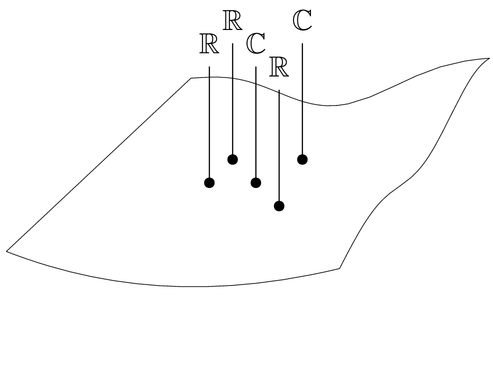
**Ορισμός 2.34.** Μια δέσμη $(E, \pi, M)$ καλείται *τοπικά ισομορφική* με μια άλλη αυθαίρετη δέσμη $(E', \pi', M')$, αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει ανοιχτή γειτονιά $U$ του $p$, τέτοια ώστε η περιορισμένη δέσμη $(\mathrm{preim}_\pi(U), \pi|_{\mathrm{preim}_\pi(U)}, U)$ να είναι ισομορφική με τη δέσμη $(E', \pi', M')$.

**Ορισμός 2.35.** Μια δέσμη $(E, \pi, M)$ καλείται *τετριμμένη*, αν είναι ισομορφική με κάποια δέσμη γινόμενο $(M \times F, \pi, M)$.

**Ορισμός 2.36.** Μια δέσμη $(E, \pi, M)$ καλείται *τοπικά τετριμμένη*, αν είναι τοπικά ισομορφική με κάποια δέσμη γινόμενο $(M \times F, \pi, M)$.

**Παράδειγμα 2.28.** Ο κύλινδρος είναι τετριμμένη δέσμη, άρα και τοπικά τετριμμένη. Η λωρίδα του Möbius δεν είναι τετριμμένη δέσμη, αλλά είναι τοπικά τετριμμένη.

**Παράδειγμα 2.29.** Το παρακάτω δεν είναι ούτε τετριμμένη δέσμη, ούτε τοπικά τετριμμένη:




Αυτό ισχύει, καθώς στην ίδια γειτονιά ενός σημείου θα έχουμε ίνες $\mathbb{R}$, αλλά και ίνες $\mathbb{C}$. Επομένως, η δέσμη αυτή δεν είναι τοπικά ισομορφική με μια δέσμη γινόμενο $M \times F$ (τοπικά τετριμμένη) και σίγουρα δεν είναι ισομορφική με μια τέτοια δέσμη (τετριμμένη). Είναι παρόλα αυτά ινώδης δέσμη.

**Παρατήρηση 2.7.** *Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε μόνο τοπικά τετριμμένες δέσμες με την εξής συνεπαγωγή: Τοπικά, οποιαδήποτε τμήση μιας δέσμης μπορεί να θεωρηθεί ως μια απεικόνιση από τη βάση στην ίνα.*

**Ορισμός 2.37.** Έστω $(E, \pi, M)$ μια δέσμη. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λεγόμενη *pullback δέσμη* $(E', \pi', M')$ (της $E$ μέσω της $f$) με:

$$E' := \{(m', e) \in M' \times E \mid \pi(e) = f(m')\}$$

όπου $m' \in M'$ και $e \in E$. Θα ισχύει ότι $\pi'(m', e) := m'$ και αν $u(m', e) := e$, τότε $(u, f)$ είναι μορφισμός δέσμης:

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
M' \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

**Παρατήρηση 2.8.** *Κάθε τμήση $\sigma$ μιας δέσμης επάγει μια τμήση $\sigma'$ της pullback δέσμης, για την οποία ισχύει ότι $\sigma' = \sigma \circ f$.*

**Ορισμός 2.38.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ πολλαπλότητα διάστασης $d$. Ένα ζεύγος $(U, x)$, όπου $U \in \mathcal{O}$ και $x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$, καλείται *χάρτης* της πολλαπλότητας. Οι συνιστώσες του $x$, δηλαδή οι $x^i : U \to \mathbb{R}$ με $p \mapsto \mathrm{proj}_i(x(p))$, καλούνται *συντεταγμένες* του σημείου $p \in U$ ως προς το χάρτη $(U, x)$.

**Ορισμός 2.39.** Υπάρχει ένα σύνολο χαρτών $\mathcal{A}$ με στοιχεία τα ζεύγη $(U, x)$, τέτοιο ώστε η ένωση όλων των $U$ να δίνει το $M$. Σε αυτό μπορεί να υπάρχουν και χάρτες που επικαλύπτονται. Το σύνολο $\mathcal{A}$ καλείται *άτλας*.

**Ορισμός 2.40.** Δύο χάρτες $(U, x)$ και $(V, y)$ καλούνται $\mathcal{C}^0$*-συμβιβαστοί*, αν δεν επικαλύπτονται ή αν επικαλύπτονται και ισχύει ότι η απεικόνιση $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ είναι συνεχής:

$$\begin{tikzcd}
 & U \cap V \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
x(U \cap V) \arrow[rr, "y \circ x^{-1}"'] & & y(U \cap V)
\end{tikzcd}$$

**Ορισμός 2.41.** Η απεικόνιση $y \circ x^{-1}$ καλείται *αλλαγή συντεταγμένης* και η συνέχεια της εξαρτάται από τις τοπολογίες των συνόλων τιμών των ομοιομορφισμών $x$ και $y$.

**Ορισμός 2.42.** Ένας $\mathcal{C}^0$*-άτλας* είναι ένας άτλας του οποίου οι χάρτες είναι κατά ζεύγη $\mathcal{C}^0$-συμβιβαστοί.

**Ορισμός 2.43.** Ένας $\mathcal{C}^0$-άτλας καλείται *μεγιστικός* (maximal), αν οποιοσδήποτε χάρτης $(U, x)$, ο οποίος είναι $\mathcal{C}^0$-συμβιβαστός με οποιονδήποτε χάρτη $(V, y) \in \mathcal{A}$, περιέχεται ήδη στον άτλα.

**Παρατήρηση 2.9.** *Ας θεωρήσουμε μια τοπολογική πολλαπλότητα* $(M, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$. *Τότε, ο* $\mathcal{A} := \{\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R}\}$ *είναι ένας άτλας της* $(M, \mathcal{O})$. *Όμως,* $\mathcal{A}' := \{(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R}), ((-\infty, 0), \mathrm{id}_\mathbb{R})\}$ *είναι επίσης ένας άτλας αυτής. Ο μεγιστικός χάρτης* $\mathcal{A}_{\max}$ *θα είναι ο άτλας που περιέχει όλους τους χάρτες που είναι κατά ζεύγη συμβιβαστοί.*

**Παράδειγμα 2.30.** Έστω τροχιά κλασσικού σωματιδίου $\gamma : \mathbb{R} \to M$, όπου $M$ πολλαπλότητα διάστασης $d$ με $U \subseteq M$. Πως μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η καμπύλη $\gamma$ είναι συνεχής, όπως θα όφειλε ως τροχιά κλασσικού σωματιδίου;

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "y"] \arrow[d, "x"'] & & y(U) & \\
x(U) \arrow[urr, "y \circ x^{-1}"] & & \mathrm{preim}_\gamma(U) \arrow[ll, "x \circ \gamma"] \arrow[u, "y \circ \gamma"'] \arrow[r, "\gamma"] & U
\end{tikzcd}$$

Ο πρώτος τρόπος είναι αρκετά απλός. Το $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία και το $M$ με μια ανεξάρτητη τοπολογία $\mathcal{O}_M$. Η καμπύλη $\gamma$ είναι συνεχής, αν η προεικόνα κάθε ανοικτού συνόλου στο σύνολο τιμών της είναι ανοικτό σύνολο στο σύνολο ορισμού της. Ο δεύτερος τρόπος είναι ελαφρώς πιο περίπλοκος. Ελέγχουμε αρχικά αν η $x \circ \gamma$ είναι συνεχής απεικόνιση και αν είναι, τότε η $\gamma$ είναι σίγουρα συνεχής, αφού $x$ συνεχής και η σύνθεση συνεχών είναι συνεχής. Με άλλα λόγια, αν οι συνιστώσες της καμπύλης είναι συνεχείς, τότε και η ίδια η καμπύλη είναι συνεχής. Το ίδιο θα ισχύει και για τις άλλες συντεταγμένες $(y \circ \gamma)^i$. Επίσης, η αλλαγή συντεταγμένης $y \circ x^{-1}$ είναι συνεχής, καθώς οι δύο χάρτες είναι $\mathcal{C}^0$-συμβιβαστοί και άρα εφόσον η $x \circ \gamma$ είναι συνεχής, τότε και η $y \circ \gamma$ θα είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι με τον δεύτερο τρόπο μπορούμε να αποφανθούμε για τη συνέχεια της $\gamma$ χωρίς να εργαστούμε στον "πραγματικό κόσμο" που ορίζει η πολλαπλότητα $M$.

# Κεφάλαιο 3

## Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Χονδρικά μιλώντας, μια διαφορίσιμη (differentiable) πολλαπλότητα είναι μια πολλαπλότητα, η οποία τοπικά μοιάζει με γραμμικό χώρο, αρκετά ώστε να επιτρέπεται ο συνήθης λογισμός (calculus) σε αυτόν. Πρόκειται για πολλαπλότητα, εφοδιασμένη με διαφορίσιμη δομή που ορίζεται ολικά. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη διαφορίσιμη δομή του γραμμικού χώρου, στον οποίον παίρνουν τιμές οι ομοιομορφισμοί των χαρτών του άτλα της πολλαπλότητας. Για να έχει ολικό χαρακτήρα η διαφορίσιμη δομή, θα πρέπει η σύνθεση των ομοιομορφισμών στην περιοχή επικάλυψης των χαρτών, δηλαδή η αλλαγή συντεταγμένης, να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση στον υποκείμενο γραμμικό χώρο.

Η διαφορισιμότητα μιας πολλαπλότητας είναι κομβική έννοια και αποτελεί με τη σειρά της βάση για το μεγαλύτερο μέρος της διαφορικής γεωμετρίας, αφού επιτρέπει την εισαγωγή της έννοιας του εφαπτόμενου χώρου σε μια πολλαπλότητα. Σε αυτήν την ενότητα, πέρα από τη διαφορίσιμη δομή, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στους διανυσματικούς χώρους, ώστε στη συνέχεια να μελετήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο, τον συνεφαπτόμενο χώρο, τους τανυστές και τελικά, τις διαφορικές μορφές. Προτείνουμε στον αναγνώστη αυτής της εργασίας να δώσει ιδιαίτερη βάση στην ενότητα των διαφορικών μορφών, καθώς αυτές ορίζουν τη γλώσσα, με την οποία θα δουλέψουμε για την κατασκευή των γεωμετριών Ehresmann και Cartan, όπως επίσης και αποτελούν τον φορμαλισμό που χρησιμοποιούμε για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης στο μέρος των εφαρμογών. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί και στις κομβικές έννοιες των push-forward και pull-back απεικονίσεων. Η βιβλιογραφία για αυτήν την ενότητα αποτελείται από τα **[37]**, **[17]**, **[28]**, **[21]** και **[24]**.

### *3.1. Διαφορίσιμη δομή*

**Ορισμός 3.1.** Έστω $(M, \mathcal{O})$ τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης $d$. Ένας άτλας $\mathcal{A}$ καλείται $\star$-*άτλας*, αν οποιοιδήποτε δύο χάρτες του, έστω $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}$, είναι $\star$-συμβιβαστοί. Με άλλα λόγια, αν ισχύει ότι $U \cap V = \varnothing$ ή άν $U \cap V \neq \varnothing$ και η αλλαγή συντεταγμένης $y \circ x^{-1}$ είναι $\star$ ως απεικόνιση. Το $\star$ μπορεί να είναι:

(i) $\mathcal{C}^0$: η αλλαγή συντεταγμένης είναι απλά συνεχής.

(ii) $\mathcal{C}^k$: η αλλαγή συντεταγμένης είναι $k$-φορές συνεχώς διαφορίσιμη.

(iii) $\mathcal{C}^\infty$: η αλλαγή συντεταγμένης είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμή ή ισοδύναμα, η πολλαπλότητα είναι *λεία*.

(iv) $\mathcal{C}^\omega$: η αλλαγή συντεταγμένης είναι πραγματική αναλυτική συνάρτηση (μπορεί να αναπτυχθεί κατά Taylor) ή ισοδύναμα, η πολλαπλότητα είναι *πραγματική αναλυτική*.

(v) *Μιγαδική πολλαπλότητα*: η αλλαγή συντεταγμένης (που είναι συνεχής) ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Για παράδειγμα, μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, η οποία ικανοποιεί τις:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

είναι ισοδύναμη με μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Αν έχουμε παραπάνω μεταβλητές, τότε οι εξισώσεις Cauchy-Riemann γράφονται με δείκτες:

$$\frac{\partial u^a}{\partial x^b} = \frac{\partial v^a}{\partial y^b} \qquad \frac{\partial u^a}{\partial y^b} = -\frac{\partial v^a}{\partial x^b}$$

όπου είναι φανερό ότι η διάσταση της πολλαπλότητας θα πρέπει να είναι άρτιος αριθμός, ώστε να είναι εφικτός ο διαχωρισμός σε ζεύγη.

**Θεώρημα 3.1** (Whitney). *Οποιοσδήποτε μεγιστικός $\mathcal{C}^k$-άτλας με $k \geq 1$ περιέχει έναν $\mathcal{C}^\infty$-άτλα. Δύο μεγιστικοί $\mathcal{C}^k$-άτλαντες που περιέχουν τον ίδιο $\mathcal{C}^\infty$-άτλα είναι ταυτόσημοι.*

**Πόρισμα 3.1.** *Με βάση το θεώρημα 3.1 δεν υπάρχει ανάγκη να διαχωρίσουμε έναν $\mathcal{C}^k$-άτλα (για $k \geq 1$) από έναν $\mathcal{C}^\infty$-άτλα.*

**Ορισμός 3.2.** Μια $\mathcal{C}^k$*-πολλαπλότητα* είναι μια τριάδα $(M, \mathcal{O}, \mathcal{A})$, όπου $(M, \mathcal{O})$ είναι τοπολογική πολλαπλότητα και $\mathcal{A}$ μεγιστικός $\mathcal{C}^k$-άτλας.

**Παρατήρηση 3.1.** *Μια δοσμένη τοπολογική πολλαπλότητα μπορεί να είναι εφοδιασμένη με διαφορετικούς ασυμβίβαστους άτλαντες, δηλαδή $\star$-άτλαντες που η ένωση τους δεν είναι $\star$-άτλας.*

**Παράδειγμα 3.1.** Έστω πολλαπλότητα $(M, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_\sigma)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε έναν άτλα $\mathcal{A}_1 = \{\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R}\}$, ο οποίος είναι $\mathcal{C}^\infty$-άτλας καθώς επικαλύπτει τον εαυτό του και η σύνθεση της ταυτοτικής απεικόνισης με την αντίστροφη της είναι η ταυτοτική απεικόνιση, η οποία είναι $\mathcal{C}^\infty$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε έναν άλλο άτλα $\mathcal{A}_2 = \{\mathbb{R}, x\}$, όπου $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιομορφισμός με $x(a) = a^{1/3}$ για κάποιο $a$ που ανήκει στο ανοιχτό σύνολο $U$ (γειτονιά). Ο $\mathcal{A}_2$ επικαλύπτει τον εαυτό του και η απεικόνιση $x \circ x^{-1}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, η οποία είναι $\mathcal{C}^\infty$. Επομένως, ο $\mathcal{A}_2$ είναι επίσης $\mathcal{C}^\infty$-άτλας. Όμως, $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ δεν είναι ούτε $\mathcal{C}^1$-συμβιβαστοί, καθώς $x(a) = a^{1/3}$ και η πρώτη παράγωγος δεν ορίζεται στο 0.

**Ορισμός 3.3.** Έστω $\phi : M \to N$ μια απεικόνιση, όπου $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ και $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ είναι $\mathcal{C}^k$-πολλαπλότητες. Τότε, η $\phi$ καλείται *διαφορίσιμη* στο $p \in M$, αν για κάποιο χάρτη $(U, x) \in \mathcal{A}_M$ με $p \in U$ και κάποιο χάρτη $(V, y)$ με $\phi(p) \in V$, η συντεταγμένη της $\phi$, $y \circ \phi \circ x^{-1} : \mathbb{R}^{\dim M} \to \mathbb{R}^{\dim N}$, είναι $\mathcal{C}^k$.

**Παρατήρηση 3.2.** *Προκειμένου να αποφανθούμε για τη διαφορισιμότητα της $\phi$, επιλέγουμε από τους διαθέσιμους άτλαντες δύο χάρτες, ώστε να μελετήσουμε τη δράση της $\phi$ μέσω της $y \circ \phi \circ x^{-1}$, η οποία λειτουργεί σε χώρους με γνωστή την έννοια της διαφορισιμότητας. Επειδή αυτό ισχύει για κάποιους δύο χάρτες, πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο η επιλογή χαρτών παίζει ρόλο στην έννοια της διαφορισιμότητας στο πλαίσιο του ορισμού 3.3. Θεωρούμε δύο άλλους χάρτες, έστωσαν $(U', \widetilde{x}) \in \mathcal{A}_M$ και $(V', \widetilde{y}) \in \mathcal{A}_N$ με $p \in U'$ και $\phi(p) \in V'$. Προφανώς, $U \cap U'$ είναι μη κενό και βαφτίζουμε αυτήν την τομή $\mathcal{U}$. Το ίδιο ισχύει και για το $\mathcal{V} \equiv V \cap V'$. Ο άτλας $\mathcal{A}_N$ είναι $\mathcal{C}^k$-άτλας και από ορισμό, η $\widetilde{y} \circ y^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$. Με την ίδια λογική και η $x \circ \widetilde{x}^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$.*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{x}(\mathcal{U}) \arrow[rrr, "\widetilde{y}\circ\phi\circ\widetilde{x}^{-1}"] \arrow[dd, "x\circ\widetilde{x}^{-1}"'] & & & \widetilde{y}(\mathcal{V}) \\
& \mathcal{U}\subseteq M \arrow[ul, "\widetilde{x}"'] \arrow[dl, "x"] \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{V}\subseteq N \arrow[ur, "\widetilde{y}"] \arrow[dr, "y"'] & \\
x(\mathcal{U}) \arrow[rrr, "y\circ\phi\circ x^{-1}"'] & & & y(\mathcal{V}) \arrow[uu, "\widetilde{y}\circ y^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

*Όμως, η $\widetilde{y}\circ\phi\circ\widetilde{x}^{-1}$ δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από την απεικόνιση $(\widetilde{y}\circ y^{-1})\circ(y\circ\phi\circ x^{-1})\circ(x\circ\widetilde{x}^{-1})$, οπότε αν $y\circ\phi\circ x^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$, τότε και η $\widetilde{y}\circ\phi\circ\widetilde{x}^{-1}$ θα είναι $\mathcal{C}^k$ ως σύνθεση $\mathcal{C}^k$ απεικονίσεων. Επομένως, η επιλογή χαρτών δεν παίζει ρόλο στη διαφορισιμότητα. Αρκεί να υπάρχει ένα ζεύγος χαρτών, για τους οποίους να ισχύει ότι η αλλαγή συντεταγμένης είναι $\mathcal{C}^k$.*

**Ορισμός 3.4.** Έστω $\phi : M \to N$ μια απεικόνιση. Αν $\phi$ είναι αμφιμονοσήμαντη και $\phi, \phi^{-1}$ είναι $\mathcal{C}^k$, τότε η $\phi$ καλείται *αμφιδιαφόριση* και είναι ισομορφισμός μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων.

**Ορισμός 3.5.** Δύο λείες πολλαπλότητες $(M, \mathcal{O}_M, \mathcal{A}_M)$ και $(N, \mathcal{O}_N, \mathcal{A}_N)$ καλούνται *αμφιδιαφορικές*, αν υπάρχει αμφιδιαφόριση μεταξύ τους. Τότε, γράφουμε για συντομία $M \cong_{\text{diff}} N$.

## 3.2. Διανυσματικοί χώροι

**Ορισμός 3.6.** Ένα *αλγεβρικό πεδίο* $(K, +, \cdot)$ είναι ένα σύνολο $K$ εφοδιασμένο με δύο απεικονίσεις $+ : K \times K \to K$ και $\cdot : K \times K \to K$, όπου η πράξη της πρόσθεσης είναι μεταθετική, προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο το 0 και αντίστροφο στοιχείο, τέτοιο ώστε η πρόσθεση ενός στοιχείου με το αντίστροφο του να δίνει το ουδέτερο στοιχείο. Η πράξη του πολλαπλασιασμού για $K \setminus \{0\}$ είναι μεταθετική, προσεταιριστική, έχει ουδέτερο στοιχείο το 1 και αντίστροφο στοιχείο, τέτοιο ώστε ο πολλαπλασιασμός ενός στοιχείου με το αντίστροφο του να δίνει το ουδέτερο στοιχείο. Για συντομία θα γράφουμε ότι οι απεικονίσεις $+, \cdot$ είναι ΜΠΟΑ$(+)$ και ΜΠΟΑ$(\cdot)$ αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 3.3.** *Μια ασθενέστερη έννοια που θα παίξει καταλυτικό ρόλο αργότερα, είναι ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$, όπου $+, \cdot$ είναι ΜΠΟΑ$(+)$ και γενικά (χωρίς επιπρόσθετες ιδιότητες) ΠΟ$(\cdot)$.*

**Ορισμός 3.7.** Ένας *$K$-διανυσματικός χώρος* $(V, \oplus, \odot)$, όπου $(K, +, \cdot)$ είναι το αλγεβρικό του πεδίο, είναι ένα σύνολο $V$ εφοδιασμένο με δύο απεικονίσεις $\oplus : V \times V \to V$ και $\odot : K \times V \to V$, για τις οποίες ισχύει ΜΠΟΑ$(\oplus)$ και ΠΕΟ$(\odot)$ (προσεταιριστική, επιμεριστική ως προς βαθμωτά και διανυματικά αθροίσματα, με ουδέτερο στοιχείο).

**Ορισμός 3.8.** Ένα υποσύνολο $U \subseteq V$ καλείται *διανυσματικός υπόχωρος*, αν:

$$\forall\, u_1, u_2 \in U : u_1 \oplus u_2 \in U \qquad \forall\, \lambda \in K : \lambda \odot u_i \in U$$

**Ορισμός 3.9.** Μια απεικόνιση $f : V \to W$, όπου $(V, \oplus_V, \odot_V)$ και $(W, \oplus_W, \odot_W)$ διανυσματικοί χώροι, καλείται *ομομορφισμός*, αν:

$$\forall\, v_1, v_2 \in V : f(v_1 \overset{V}{\oplus} v_2) = f(v_1) \overset{W}{\oplus} f(v_2)$$

και:

$$\forall\, \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \overset{V}{\odot} v) = \lambda \overset{W}{\odot} f(v)$$

Ένας αμφιμονοσήμαντος ομομορφισμός καλείται *ισομορφισμός διανυσματικών χώρων* και γράφουμε $V \cong_{\text{vec.}} W$, αν υπάρχει ισομορφισμός $f : V \to W$.

**Ορισμός 3.10.** Το σύνολο των ομομορφισμών $\mathrm{Hom}(V,W) := \{f : V \tilde{\to} W\}$ μπορεί να αναβαθμιστεί σε διανυσματικό χώρο, αν εφοδιαστεί με απεικονίσεις:

$$\begin{aligned}\overset{\mathrm{Hom}}{\oplus} &: \mathrm{Hom}(V,W) \times \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W)\\ &(f,g) \mapsto f \overset{\mathrm{Hom}}{\oplus} g : V \tilde{\to} W, v \mapsto f(v) \overset{W}{+} g(v) =: (f \overset{\mathrm{Hom}}{\oplus} g)(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{\mathrm{Hom}}{\odot} &: K \times \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(V,W)\\ &(\lambda,g) \mapsto \lambda \overset{\mathrm{Hom}}{\odot} g : V \tilde{\to} W, v \mapsto \lambda \overset{W}{\cdot} g(v) =: (\lambda \overset{\mathrm{Hom}}{\odot} g)(v)\end{aligned}$$

**Ορισμός 3.11.** Ορίζουμε το *σύνολο των ενδομορφισμών* $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$ ως το σύνολο όλων των ομομορφισμών από ένα διανυσματικό χώρο στον εαυτό του.

**Ορισμός 3.12.** Ορίζουμε το *σύνολο των αυτομορφισμών*:

$$\mathrm{Aut}(V) := \left\{f \in \mathrm{End}(V) \mid \exists\, f^{-1}\right\}$$

ως το σύνολο των ενδομορφισμών, των οποίων ορίζεται ο αντίστροφος. Προφανώς ισχύει ότι $\mathrm{Aut}(V) \subseteq \mathrm{End}(V)$.

**Ορισμός 3.13.** Ορίζουμε το σύνολο $V^* := \mathrm{Hom}(V,K)$, το οποίο εφοδιασμένο εξ ορισμού με τις απεικονίσεις $\oplus_{\mathrm{Hom}}, \odot_{\mathrm{Hom}}$ καλείται *δυϊκός διανυσματικός χώρος*.

**Ορισμός 3.14.** Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος. Τότε, ένα υποσύνολο, έστω $B \subseteq V$, καλείται *Hamel βάση*, αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{b_1,\cdots,b_N\} \subseteq B$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda^i b_i = 0 \implies \lambda^1 = \cdots = \lambda^N = 0$$

και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\forall\, v \in V : \exists\, v^1,\cdots,v^N \in K, b_1,\cdots,b_N \in B : v = \sum_{i=1}^{N} v^i b_i$$

όπου $K$ είναι το αλγεβρικό πεδίο του $V$.

**Ορισμός 3.15.** Η *διάσταση ενός διανυσματικού χώρου* $V$ είναι η πληθικότητα της Hamel βάσης του, δηλαδή $\dim V := |B|$.

**Παρατήρηση 3.4** (Αλλαγή βάσης). *Έστω διανυσματικός χώρος $V$ πεπερασμένης διάστασης $d$ και $\{e_i\}$ με $i = 1,...,d$ μια βάση αυτού. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια νέα βάση:*

$$\widetilde{e}_j = \sum_{i=1}^{d} A^i{}_j e_i$$

*με $j = 1,...,d$ και $A^i{}_j \in K$. Μια νέα βάση είναι ενας συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός της παλιάς βάσης, τέτοιος ώστε η παλιά βάση να μπορεί να ανακτηθεί από:*

$$e_j = \sum_{i=1}^{d} B^i{}_j \widetilde{e}_i$$

*Προφανώς, αν ισχύουν και οι δύο ισότητες, τότε ισχύει ότι $B = A^{-1}$.*

## 3.3. Εφαπτόμενοι χώροι

**Ορισμός 3.16.** Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον διανυσματικό χώρο $(\mathcal{C}^\infty M, +, \cdot)$ με αλγεβρικό πεδίο $\mathbb{R}$, όπου $\mathcal{C}^\infty M$ το σύνολο όλων των λείων απεικονίσεων $f : M \to \mathbb{R}$ με κατά σημείο άθροιση:

$$(f \underset{\mathcal{C}^\infty M}{+} g)(p) = f(p) \underset{\mathbb{R}}{+} g(p)$$

και βαθμωτό γινόμενο:

$$(\lambda \underset{\mathcal{C}^\infty M}{\cdot} f)(p) = \lambda \underset{\mathbb{R}}{\cdot} f(p)$$

**Ορισμός 3.17.** Μια γραμμική απεικόνιση $X : \mathcal{C}^\infty M \to \mathbb{R}$ καλείται *παραγώγιση* στο $p$, αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{C}^\infty M$. Το σύνολο όλων των παραγωγίσεων του $\mathcal{C}^\infty M$ είναι δχ και καλείται *εφαπτόμενος χώρος* στην $M$, στο σημείο $p$. Τον σημαίνουμε με $T_pM$ και τα στοιχεία του καλούνται *εφαπτόμενα διανύσματα* στο $p$.

**Λήμμα 3.1.** *Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα και έστωσαν $p \in M$ και $X \in T_pM$.*

*i) Αν $f \in \mathcal{C}^\infty M$ μια σταθερή συνάρτηση, τότε $Xf = 0$.*

*ii) Αν $f(p) = g(p) = 0$, τότε $X(fg) = 0$*

*Απόδειξη.*

i) Αρκεί να το δείξουμε για $f_1(p) = 1$, αφού για κάθε άλλη σταθερή $f$, θα ισχύει ότι $Xf = X(cf_1) = c(Xf_1) = 0$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Θα έχουμε λοιπόν ότι:

$$Xf_1 = X(f_1f_1) = f_1(p)Xf_1 + f_1(p)Xf_1 = 2Xf_1$$

δηλαδή $Xf_1 = 0$. Επομένως, $Xf = 0$.

ii) Προφανές, αφού ισχύει ότι $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf = 0$.

□

**Ορισμός 3.18.** Έστω $\gamma : \mathbb{R} \to M$ μια λεία καμπύλη που περνάει από το σημείο $p \in M$. Χβτγ μπορούμε να θεωρήσουμε $p = \gamma(0)$. Τότε, το εφαπτόμενο διάνυσμα (στην καμπύλη $\gamma$ στο σημείο $p$) είναι η γραμμική απεικόνιση:

$$X_{\gamma,p} : \mathcal{C}^\infty M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

με $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$, όπου $\mathcal{C}^\infty M$ και $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικοί χώροι με τον τόνο να σημαίνει παραγώγιση ως προς την παράμετρο της καμπύλης.

**Παρατήρηση 3.5.** *Χονδρικά μπορούμε να πούμε ότι ο $X_{\gamma,p}$ είναι η ταχύτητα της καμπύλης $\gamma$ στο σημείο $p$. Αυτό γίνεται κατανοητό, αν θεωρήσουμε μια καμπύλη $\delta(\lambda) := \gamma(2\lambda)$, όπου πρόκειται για την ίδια καμπύλη $\gamma$, την οποία απλά διατρέχουμε με διπλάσια ταχύτητα. Τότε, η δράση του $X_{\delta,p}$ σε μια λεία $f$ δίνεται από:*

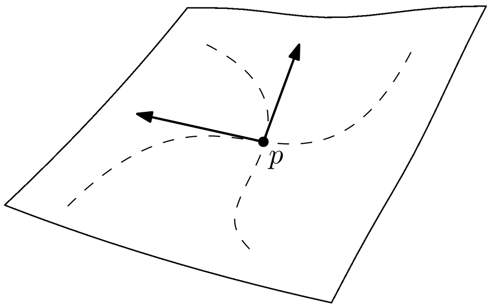
$$X_{\delta,p}f = (f \circ \delta)'(0) = 2(f \circ \gamma)'(0) = 2X_{\gamma,p}$$

**Ορισμός 3.19.** Εναλλακτικά λοιπόν, ο εφαπτόμενος διανυσματικός χώρος είναι το σύνολο:

$$T_pM := \{X_{\gamma,p} \mid \gamma \text{ λεία που περνάει από το } p\}$$

εφοδιασμένο με κατα σημείο άθροιση και βαθμωτό γινόμενο, τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}(X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p})(f) &:= X_{\gamma,p}(f) \overset{\mathbb{R}}{+} X_{\delta,p}(f) = X_{\sigma,p}(f)\\ (\lambda \odot X_{\gamma,p})(f) &:= \lambda \overset{\mathbb{R}}{\cdot} X_{\gamma,p}(f)\end{aligned}$$



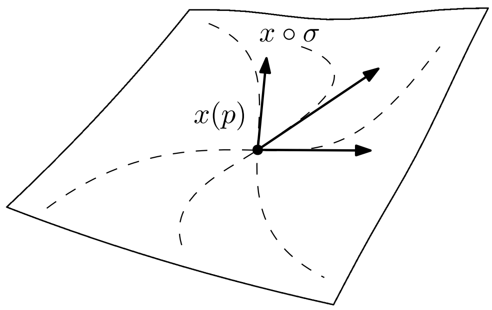

**Ισχυρισμός 3.1.** *Οι απεικονίσεις $\oplus$ και $\odot$ είναι κλειστές στο $T_pM$.*

*Απόδειξη.* Κατασκευάζουμε την καμπύλη $\sigma$ εισάγοντας έναν χάρτη $(U, x)$, όπου $p \in U$. Ορίζουμε για $I \subseteq \mathbb{R}$ την καμπύλη $\sigma : I \to M$ με:

$$\sigma(\lambda) := x^{-1} \circ (x \circ \gamma \overset{\mathbb{R}^d}{+} x \circ \delta \overset{\mathbb{R}^d}{-} x(p))$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{preim}_\gamma(U) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "x \circ \gamma"'] & U \arrow[d, "x"] & \mathrm{preim}_\delta(U) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[dl, "x \circ \delta"] \\
& x(U) &
\end{tikzcd}$$

όπου χονδρικά μιλώντας, το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\sigma$ στο σημείο $p$ θα πρέπει να είναι το διανυσματικό άθροισμα των εφαπτόμενων διανυσμάτων των καμπυλών $\gamma$ και $\delta$ στο $p$. Παρόλα αυτά, δεν μπορούμε να "αθροίσουμε" καμπύλες στη πολλαπλότητα λόγω ανεπαρκούς δομής. Για αυτόν τον λόγο διαλέγουμε ένα υποσύνολο $U$, το οποίο απεικονίζουμε στο $x(U)$: και σε αυτό αθροίζουμε τις δύο καμπύλες, αφαιρώντας το $x(p)$, ώστε να διασφαλίσουμε ότι η νέα καμπύλη θα περνάει από το σημείο $x(p)$. Έπειτα, μέσω της $x^{-1}$ απεικονίζουμε τη νέα καμπύλη ξανά στη πολλαπλότητα, κάτι που σίγουρα δεν είναι καλώς ορισμένο. Όμως, δεν ενδιαφερόμαστε για όλη την καμπύλη $x \circ \sigma$, αλλά για την κατά κατεύθυνση παράγωγο σε




κάποιο σημείο της, οπότε το άθροισμα των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε αυτό το σημείο θα είναι καλώς ορισμένο.

Υπολογίζουμε τη δράση του τελεστή $X_{\sigma,p}$ σε μια λεία $f$, αφού πρώτα θυμίσουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= x^{-1} \circ (x \circ \gamma(0) + x \circ \delta(0) - x(p)) \\ &= x^{-1} \circ (x(p) + x(p) - x(p)) \\ &= x^{-1}(x(p)) = p\end{aligned}$$

και επομένως:

$$\begin{aligned}X_{\sigma,p} f &= (f \circ \sigma)'(0) \\ &= \left[f \circ x^{-1} \circ (x \circ \gamma + x \circ \delta - x(p))\right]'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma)'(0) + (f \circ x^{-1} \circ x \circ \delta)'(0) \\ &= X_{\gamma,p} f + X_{\delta,p} f =: (X_{\gamma,p} \oplus X_{\delta,p}) f\end{aligned}$$

Πράγματι, ο τελεστής $X_{\sigma,p}$ είναι το άθροισμα των άλλων δύο τελεστών και ανήκει στον διανυσματικό χώρο που εφάπτεται στο σημείο $p \in M$. Εύκολα αποδεικνύεται το ίδιο και για το βαθμωτό γινόμενο. $\square$

**Θεώρημα 3.2.** *Η διάσταση του εφαπτόμενου διανυσματικού χώρου $T_pM$ ισούται με τη διάσταση της πολλαπλότητας $M$, δηλαδή:*

$$\dim T_pM = \dim M$$

*Απόδειξη.* Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου δεν έχει σχέση με τη διάσταση μιας πολλαπλότητας, οπότε η απόδειξη του θεωρήματος 3.2 δεν είναι τετριμμένη. Η ιδέα είναι να κατασκευάσουμε μια χαρτοεπαγόμενη βάση για τον διανυσματικό χώρο. Επιλέγουμε ένα χάρτη $(U, x)$ με $p \in U$ και θεωρούμε $d$-πολλές καμπύλες, όπου $d = \dim M$, τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $\gamma_a : \mathrm{preim}_{\gamma_a}(U) \to U$ με $(x^b \circ \gamma_a)(\lambda) = \delta^b_a \lambda$, όπου $a = 1, \cdots, d$.

Πρόκειται δηλαδή για μια πολύ συγκεκριμένη επιλογή συνόλου καμπυλών και χάρτη, στον οποίο ισχύει ότι $x(p) = 0_{\mathbb{R}^d}$ χβτγ. Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των εφαπτόμενων διανυσμάτων:

$$e_a := X_{\gamma_a,p}$$

για $a = 1, \cdots, d$, όπου για κάποια λεία $f$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} e_a(f) &:= (f \circ \gamma_a)'(0) \\ &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \gamma_a)'(0) \\ &= \partial_b(f \circ x^{-1})(x(\gamma_a(0)))(x^b \circ \gamma_a)'(0) \\ &= \partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))\delta_a^b \\ &= \partial_a(f \circ x^{-1})(x(p)) =: \frac{\partial f}{\partial x^a}(p) \end{aligned}$$

όπου $\partial_a|_{x(p)} : \mathcal{C}^\infty\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι η μερική παράγωγος ως προς την $a$ συνιστώσα μιας συνάρτησης $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, εκτιμώμενη στο $x(p)$ και $\frac{\partial}{\partial x^a}\big|_p : \mathcal{C}^\infty M \to \mathbb{R}$.

Για να ορίσουμε δηλαδή την έννοια της μερικής παραγώγου σε κάποιο σημείο της πολλαπλότητας, είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε το ενδιάμεσο βήμα της αναπαράστασης της γειτονιάς του σημείου ενδιαφέροντος μέσω χάρτη σε ένα σύνολο συντεταγμένων, όπου η μερική παράγωγος έχει πλέον νόημα ως παράγωγος κατά μεταβλητή. Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε τελικά ότι $e_a = \partial/\partial x^a|_p$ είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες $\gamma_a$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι κάθε διάνυσμα $X \in T_pM$ μπορεί να γραφεί σαν:

$$X = X^a \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_p$$

όπου $X^a \in \mathbb{R}$ ή με άλλα λόγια, ότι $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ με $i = 1, \cdots, d$ είναι γεννήτορες του $T_pM$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, θεωρούμε ότι υπάρχει λεία καμπύλη $\mu : \mathbb{R} \to M$ που περνάει από το σημείο $p = \mu(0)$ και $X \equiv X_{\mu,p}$. Τότε, για μια λεία $f : M \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X_{\mu,p}f &= (f \circ x^{-1} \circ x \circ \mu)'(0) \\ &= \partial_b(f \circ x^{-1})(x(p))(x^b \circ \mu)'(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^b}(p)(x^b \circ \mu)'(0) \\ &= \left[(x^b \circ \mu)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_p\right] f \end{aligned}$$

και άρα:

$$X_{\mu,p} = (x^b \circ \mu)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_p$$

οπότε $\{\partial/\partial x^i|_p\}$ με $i = 1, \cdots, d$ είναι πράγματι γεννήτορες του $T_pM$.

Μένει τώρα να αποδείξουμε ότι είναι και γραμμικώς ανεξάρτητοι, δηλαδή ότι η συνθήκη:

$$\lambda^a \frac{\partial f}{\partial x^a}(p) = 0$$

ισχύει μόνο για $\lambda^a = 0$. Προκειμένου να το δείξουμε αυτό, επιλέγουμε μια συγκεκριμένη $f$ και μάλιστα τη $x^b$, έτσι ώστε:

$$\lambda^a \frac{\partial x^b}{\partial x^a}(p) = 0$$

να είναι η αρχική μας συνθήκη. Αυτή η επιλογή είναι νόμιμη, καθώς η απεικόνιση

$$x : U \to x(U) \subseteq \mathbb{R}^d$$

είναι ομοιομορφισμός και άρα η $x^b : U \to \mathbb{R}$ είναι σίγουρα συνεχής. Αυτό δεν συνεπάγεται όμως ότι είναι και διαφορίσιμη. Παρόλα αυτά, $(x^b \circ x^{-1})(a^1, \cdots, a^d) = a^b$, δηλαδή

$$x^b \circ x^{-1} = \mathrm{proj}_b$$

και εφόσον $x^b \circ x^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι λεία, θα είναι και η $x^b$ λεία. Επομένως, έχουμε την ελευθερία αυτής της επιλογής και έτσι:

$$\begin{aligned} \lambda^a \frac{\partial x^b}{\partial x^a}(p) &= 0 \\ \iff \lambda^a \partial_a (x^b \circ x^{-1})(x(p)) &= 0 \\ \iff \lambda^a \delta_a^b &= 0 \\ \iff \lambda^b &= 0 \end{aligned}$$

αφού ο μόνος όρος που επιβιώνει από τη μερική παραγώγιση ως προς $a$ θα είναι για $x^a$ και δίνει μονάδα. Συνεπώς, $\{(\partial/\partial x^i)_p\}$ με $i = 1, \cdots, d$ είναι βάση του $T_pM$ και άρα το θεώρημα αποδείχτηκε. □

**Ορισμός 3.20.** Έστωσαν $M, N$ λείες πολλαπλότητες και $\phi : M \to N$ μια λεία απεικόνιση. Ορίζουμε την *push-forward* της $\phi$ ή το διαφορικό της $\phi$ στο $p \in M$ ως την απεικόνιση $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ με $(\phi_* X)(f) = X(f \circ \phi)$, όπου $f \in \mathcal{C}^\infty N$ και $X \in T_pM$.

**Παρατήρηση 3.6.** *Ο τελεστής $\phi_* X$ είναι προφανώς γραμμικός και είναι παραγώγιση στο $\phi(p)$, καθώς:*

$$\begin{aligned} (\phi_* X)(fg) &= X((fg) \circ \phi) = X((f \circ \phi)(g \circ \phi)) \\ &= f(\phi(p)) X(g \circ \phi) + g(\phi(p)) X(f \circ \phi) \\ &= f(\phi(p))(\phi_* X)(g) + g(\phi(p))(\phi_* X)(f) \end{aligned}$$

**Λήμμα 3.2.** *Έστωσαν λείες $\phi : M \to N$ και $\psi : N \to P$, όπως και $p \in M$.*

*i)* *Η απεικόνιση $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ είναι γραμμική.*

*ii)* $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$

*iii)* $(\mathrm{id}_M)_* = \mathrm{id}_{T_pM}$

*iv)* *Αν $\phi$ είναι αμφιδιαφόριση, τότε $\phi_*$ είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη.*

i) Προφανές, αφού:

$$\begin{aligned} (\phi_*(aX + a'X'))(f) &= (aX + a'X')(f \circ \phi) \\ &= a(X(f \circ \phi)) + a'(X'(f \circ \phi)) \\ &= a((\phi_* X))(f) + a'((\phi_* X'))(f) \end{aligned}$$

ii) Εξίσου φανερό, αφού:

$$\begin{aligned} ((\psi \circ \phi)_* X)(f) &= X(f \circ (\psi \circ \phi)) = X((f \circ \psi) \circ \phi) \\ &= (\phi_* X)(f \circ \psi) = (\psi_*(\phi_* X))(f) \end{aligned}$$

iii) Ισχύει καθώς $((\mathrm{id}_M)_* X)(f) = X(f \circ \mathrm{id}_M) = X(f) = (\mathrm{id}_{T_pM} \circ X)(f)$.

iv) Αφού $\phi$ αμφιδιαφόριση, υπάρχει λεία αντίστροφη $\phi^{-1}$. Ορίζουμε μια καινούργια απεικόνιση $G_* : T_qN \to T_{\phi^{-1}(q)}M$, όπου $q \in N$, με $(G_* Y)(g) = Y(g \circ \phi^{-1})$ για $g \in \mathcal{C}^\infty M$. Τότε:

$$((G_* \circ \phi_*)X)(f) = X(f \circ (\phi^{-1} \circ \phi)) = X(f)$$

αλλά και $((\phi_* \circ G_*)Y)(g) = Y(g \circ (\phi \circ \phi^{-1})) = Y(g)$, δηλαδή $G_*$ είναι η λεία αντίστροφη της $\phi_*$, οπότε $\phi_*$ ισομορφισμός.

□

Είδαμε προηγουμένως ότι κάθε $X \in T_pM$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του $T_pM$, δηλαδή:

$$X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \equiv X^i \partial_i|_p$$

όπου χρησιμοποιούμε κατά το σύνηθες τη σύμβαση άθροισης. Τώρα θέλουμε να δούμε πως εκφράζονται οι push-forward απεικονίσεις με τη βοήθεια συντεταγμένων. Για χάρτη $(U, \varphi)$, θα έχουμε γενικά ότι $\partial_i|_p = (\varphi^{-1})_* \partial_i|_{\varphi(p)}$, οπότε, αν $f \in \mathcal{C}^\infty U$, τότε:

$$\partial_i|_p f = \partial_i|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = \partial_i \widehat{f}(\widehat{p})$$

όπου $\widehat{f}$ είναι η αναπαράσταση συντεταγμένης της $f$ και $\widehat{p} = \varphi(p)$. Με άλλα λόγια, η $\partial_i|_p$ είναι η $i$-οστή μερική παράγωγος της αναπαράστασης συντεταγμένης της $f$ στην αναπαράσταση συντεταγμένης του $p$. Ας ξεκινήσουμε με την ειδική περίπτωση μιας λείας $\phi : U \to V$, όπου $U, V$ ανοιχτά υποσύνολα των ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα. Θα προσδιορίσουμε με όρους συντεταγμένων την $\phi_*$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$. Θα συμβολίζουμε με $x$ τη συντεταγμένη στον $U$ και με $y$ τη συντεταγμένη στον $V$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αλυσίδας για να υπολογίσουμε τη δράση της $\phi_*$ σε ένα σύνηθες διάνυσμα βάσης, όπου θα έχουμε:

$$\begin{aligned}(\phi_* \partial_i|_p)(f) &= \partial_i|_p(f \circ \phi) = \partial_i(f \circ F)(p) = ((\widetilde{\partial}_j f)(\phi(p)))(\partial_i \phi^j)(p) \\ &= \Big[((\partial_i \phi^j)(p))\widetilde{\partial}_j|_{\phi(p)}\Big](f) \equiv \left[\frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\phi(p)}\right](f)\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια πρόκειται για μια αλλαγή βάσης, όπου ο πίνακας της $\phi_*$, δηλαδή ο $((\partial_i \phi^j)(p))$, είναι η τζακομπιανή της $\phi$, η οποία με τη σειρά της είναι η αναπαράσταση πίνακα της ολικής παραγώγου $D\phi(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Επομένως, σε αυτήν την ειδική περίπτωση, η push-forward $\phi_* : T_p\mathbb{R}^n \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}^m$ αντιστοιχεί στην ολική παράγωγο $D\phi(p)$, υπό τη συνήθη ταυτοποίηση ενός ευκλείδειου χώρου με τον εφαπτόμενο του (ισομορφισμός, βλ. **[21]**).

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γενική λεία $\phi : M \to N$. Έστωσαν χάρτες $(U, \varphi)$ και $(V, x)$, όπου $U, V$ ανοιχτές γειτονιές των $p \in M$ και $\phi(p) \in N$ αντίστοιχα. Τότε, όπως είδαμε, η αναπαράσταση συντεταγμένης της $\phi$ θα είναι η $\widehat{\phi} = x \circ \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \phi^{-1}(V)) \to x(V)$. Καθώς $\varphi, x, \phi$ αμφιδιαφορίσεις, με βάση τους ως άνω υπολογισμούς, η $\phi_*$ αναπαρίσταται ως προς τη συγκεκριμένη χαρτοεπαγόμενη βάση από την τζακομπιανή της $\phi$. Συγκεκριμένα, η ίδια η έννοια της push-forward κατασκευάστηκε με αυτό το σκεπτικό, δηλαδή με σκοπό να δώσει ένα χαρτοανεξάρτητο νόημα στην ολική παράγωγο μιας λείας απεικόνισης. Γι' αυτόν τον λόγο, η $\phi_*$ καλείται συχνά και διαφορικό της $\phi$.

**Ορισμός 3.21** (Αλλαγή συντεταγμένης)**.** Έστωσαν $(U, \varphi)$ και $(V, \psi)$ δύο λείοι χάρτες της $M$ και $p \in U \cap V$. Θα σημαίνουμε τις συνιστώσες των $\varphi, \psi$ με $\{x^i\}, \{\widetilde{x}^i\}$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στο $p$ μπορεί να εκφραστεί και ως προς τις δύο χαρτοεπαγόμενες βάσεις. Μας ενδιαφέρει λοιπόν η σχέση αυτών των εκφράσεων. Η τιμή της αλλαγής συντεταγμένης θα δίνεται από $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = \{\widetilde{x}^i(x)\}$ για $i = 1, \cdots, n$, όπου κλασσικά $n = \dim M$. Τότε, όπως είδαμε, θα ισχύει ότι:

$$(\psi \circ \varphi^{-1})_* \partial_i|_{\varphi(p)} = (\partial_i \widetilde{x}^j)(\varphi(p))\widetilde{\partial}_j|_{\psi(p)}$$

Όμως, ισχύει επίσης ότι:

$$\begin{aligned}\partial_i|_p &= (\varphi^{-1})_* \partial_i|_{\varphi(p)} = (\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})_* \partial_i|_{\varphi(p)} = (\psi^{-1})_* \circ (\psi \circ \varphi^{-1})_* \partial_i|_{\varphi(p)} \\ &= (\psi^{-1})_*(\partial_i \widetilde{x}^j)(\varphi(p))\widetilde{\partial}_j|_{\psi(p)} = (\partial_i \widetilde{x}^j)(\varphi(p))(\psi^{-1})_* \widetilde{\partial}_j|_{\psi(p)} = (\partial_i \widetilde{x}^j)(\varphi(p))\widetilde{\partial}_j|_p\end{aligned}$$

Θέτοντας $\widehat{p} = \varphi(p)$ και εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα για ένα αυθαίρετο εφαπτόμενο διάνυσμα $X = X^i \partial_i|_p = \widetilde{X}^j \widetilde{\partial}_j|_p$, προκύπτει ότι:

$$X = X^i \partial_i|_p = X^i (\partial_i \widetilde{x}^j)(\widehat{p}) \widetilde{\partial}_j|_p = \widetilde{X}^j \widetilde{\partial}_j|_p$$

δηλαδή τελικά $\widetilde{X}^j = X^i(\partial_i \widetilde{x}^j)(\widehat{p})$, ο οποίος θα είναι και ο κανόνας μετασχηματισμού των συνιστωσών του $X$.

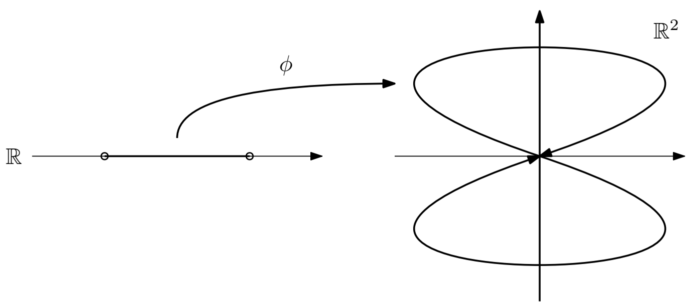
**Ορισμός 3.22.** Έστω $\phi : M \to N$ μια λεία απεικόνιση. Ορίζουμε την *τάξη* της $F$ στο $p \in M$ ως την τάξη της push-forward $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)N}$, δηλαδή την τάξη του πίνακα των μερικών παραγώγων της $\phi$ σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων ή ισοδύναμα τη διάσταση της $\operatorname{im} F_* \subseteq T_{\phi(p)}N$. Αν η $\phi$ έχει την ίδια τάξη $k$ σε κάθε $p \in M$, τότε λέμε ότι είναι *σταθερής τάξης* και γράφουμε $\operatorname{rank} \phi = k$.

**Ορισμός 3.23** (Ένθεση και υπένθεση)**.** Μια *ένθεση* (immersion) είναι μια λεία απεικόνιση $F : M \to N$, για την οποία πρέπει να ισχύει ότι $\phi_*$ είναι 1-1 σε κάθε σημείο ή ισοδύναμα, ότι $\operatorname{rank} \phi = \dim M$. Αντίστοιχα, μια *υπένθεση* (submersion) είναι μια λεία απεικόνιση $\phi$, ορισμένη όπως και πριν, τέτοια ώστε η $\phi_*$ να είναι επί σε κάθε σημείο ή ισοδύναμα, να ισχύει $\operatorname{rank} \phi = \dim N$.

**Λήμμα 3.3.** *Οι ενθέσεις και οι υπενθέσεις συμπεριφέρονται τοπικά ως 1-1 και επί γραμμικές απεικονίσεις αντίστοιχα.*

**Ορισμός 3.24** (Εμβάπτιση)**.** Μια (λεία) *εμβάπτιση* (embedding) είναι μια 1-1 ένθεση $\phi : M \to N$, η οποία πρέπει να είναι επίσης τοπολογική εμβάπτιση, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ των  και $\phi(M) \subseteq N$, όπου $\phi(M)$ έχει την επαγόμενη από τον $N$ τοπολογία.

**Παράδειγμα 3.2.** Πρόκειται για 1-1 ένθεση $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, η οποία δεν είναι εμβάπτιση, καθώς $\operatorname{im} \phi$ είναι συμπαγές στην επαγόμενη τοπολογία, ενώ το πεδίο ορισμού της είναι μη συμπαγές ως ανοιχτό διάστημα στον $\mathbb{R}$.




**Θεώρημα 3.3** (Θεώρημα ένθεσης του Whitney)**.** *Κάθε λεία πολλαπλότητα διάστασης $n$ μπορεί να εντεθεί σε μια $\mathbb{R}^{2n}$.*

**Θεώρημα 3.4** (Θεώρημα εμβάπτισης του Whitney)**.** *Κάθε λεία πολλαπλότητα διάστασης $n$ μπορεί να εμβαπτιστεί σε μια $\mathbb{R}^{2n+1}$ ως κλειστή υποπολλαπλότητα.*

## 3.4. Εφαπτόμενη δέσμη και διανυσματικά πεδία

**Ορισμός 3.25.** Ορίζουμε την *εφαπτόμενη δέσμη* στην $M$ ως τη δέσμη με ολικό χώρο:

$$TM = \dot{\bigcup_{p \in M}} T_pM$$

και στοιχεία αυτού τα διατεταγμένα ζεύγη $(p, X)$ ή ισοδύναμα, $X_p$. Αν δεν υπάρχει ενδεχόμενο σύγχυσης, συχνά θα γράφουμε απλά $X$. Ορίζουμε επίσης και τη συνήθη προβολή της δέσμης, $\pi : TM \to M$, με $\pi(p, X) = p$

**Λήμμα 3.4.** *Για κάθε λεία πολλαπλότητα $M$ διάστασης $n$, η εφαπτόμενη δέσμη $TM$ έχει μια φυσική τοπολογία και μια λεία δομή, χάριν των οποίων είναι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης $2n$, όπου $\pi : TM \to M$ είναι λεία.*

*Απόδειξη.* Θα ορίσουμε αρχικά τις απεικονίσεις που θα αποτελέσουν τις λείες συντεταγμένες. Δοθέντος αυθαίρετου χάρτη $(U, \varphi)$ στην $M$ με $\varphi(p) = \{x^i(p)\}$ για $i = 1, \cdots, n$, θέτουμε $\widetilde{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε μια απεικόνιση $\Phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ με:

$$\Phi(v^i \partial_i|_p) = (\{x^i(p)\}, \{v^i\})$$

Η τιμή της ανήκει στο $\widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{2n}$. Η $\Phi$ είναι αμφιμονοσήμαντη, καθώς η αντίστροφη της έχει τη ρητή έκφραση $(x, v) \mapsto v^i \partial_i|_{\varphi^{-1}(x)}$. Έστωσαν τώρα δύο χάρτες της $M$, $(U, \varphi)$ και $(V, \psi)$. Έστωσαν $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi^{-1}(V), \Psi)$ οι αντίστοιχοι χάρτες στον $TM$, όπου $\Psi$ αντίστοιχα ορισμένη. Τα σύνολα $\Phi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ και $\Psi(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτά στον $\mathbb{R}^{2n}$ και μπορούμε να γράψουμε την αλλαγή συντεταγμένης $\Psi \circ \Phi^{-1}$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό 3.21, ως:

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(\{x^i\}, \{v^i\}) = (\{\widetilde{x}^i(x)\}, \{(\partial_j \widetilde{x}^i)(x) v^j\})$$

όπου φαίνεται ότι πρόκειται για λεία απεικόνιση. Έχουμε δηλαδή δύο χάρτες, $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi^{-1}(V), \Psi)$, οι οποίοι είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί και εφόσον $\Psi \circ \Phi^{-1}$ λεία, τότε κάθε δύο τέτοιοι χάρτες θα είναι $\mathcal{C}^\infty$-συμβιβαστοί, οπότε υπάρχει $\mathcal{C}^\infty$-άτλας. Μένει να δείξουμε ότι $TM$ είναι Hausdorff. Κάθε δύο σημεία στην ίδια ίνα βρίσκονται στον ίδιο χάρτη, ενώ αν $X_p$ και $Y_q$ βρίσκονται σε διαφορετικές ίνες, τότε υπάρχουν ξένες γειτονιές συντεταγμένων $U_i, U_j$ της $M$, τέτοιες ώστε $p \in U_i$ και $q \in U_j$, με αποτέλεσμα τα σύνολα $\pi^{-1}(U_i)$ και $\pi^{-1}(U_j)$ να είναι ξένες γειτονιές συντεταγμένων που περιέχουν τα $X_p$ και $Y_q$ αντίστοιχα. Τέλος, η $\pi$ είναι λεία, καθώς για χάρτες $(U, \varphi)$ και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ ισχύει ότι $\pi(x, v) = x$. □

**Ορισμός 3.26.** Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα. Μια (λεία) *διανυσματική δέσμη* τάξης $k$ υπεράνω της $M$ (δηλαδή με βάση $M$) είναι μια λεία πολλαπλότητα $E$ μαζί με μια λεία επί απεικόνιση $\pi : E \to M$, για την οποία ισχύει ότι:

i) Για κάθε $p \in M$, το σύνολο $E_p = \pi^{-1}(p) \subseteq E$, το οποίο καλείται ίνα του  στο $p$, είναι εφοδιασμένο με δομή πραγματικού δχ.

ii) Για κάθε $p \in M$, υπάρχει γειτονιά $U$ του $p$ στην $M$ και μια κατάλληλη αμφιδιαφόριση $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, τέτοια ώστε αν $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ είναι η προβολή στον πρώτο παράγοντα, να ισχύει ότι $\pi = \pi_1 \circ \Phi$ και ότι ο περιορισμός της $\Phi$ στο $E_p$ είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των $E_p$ και $\{p\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Κατά τα γνωστά, $E$ θα καλείται ολικός χώρος, $M$ βάση και $\pi$ προβολή. Η $\Phi$ θα καλείται *τοπική τετριμμενοποίηση* (local trivialization) της δέσμης $E$ υπεράνω του $U$. Αν υπάρχει $\Phi$ υπεράνω της $M$, τότε η $\Phi$ είναι ολική (global) τετριμμενοποίηση και η $E$ καλείται τετριμμένη δέσμη.

**Παρατήρηση 3.7.** *Η συντεταγμένη $\Phi : \pi^{-1}(U) \to \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$ του λήμματος 3.4 αποτελεί τοπική τετριμμενοποίηση της $TM$, καθώς $\varphi : U \to \varphi(U) = \widetilde{U}$ είναι αμφιδιαφόριση. Επομένως, $TM \to M$ είναι διανυσματική δέσμη τάξης $n$.*

**Ορισμός 3.27.** Έστω $U \subset M$. Ένα *τοπικό πλαίσιο* (local frame) στον ολικό χώρο $E$ υπεράνω του $U$ είναι μια διατεταγμένη $k$-άδα $\{\sigma_i\}$ για $i = 1, \cdots, k$, όπου κάθε $\sigma_i$ είναι μια τμήση της $E \to M$, τέτοια ώστε $\{\sigma_i(p)\}$ να είναι μια βάση της ίνας $E_p$ για κάθε $p \in U$. Αν $U = M$, τότε θα καλείται ολικό πλαίσιο.

Ας περάσουμε τώρα στην έννοια των διανυσματικών πεδίων, τα οποία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζουμε τα διανυσματικά πεδία στον ευκλείδειο χώρο, δηλαδή ως βέλη, συναπτόμενα σε κάθε σημείο της $M$, εφαπτόμενα στη $M$, τα οποία μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο από σημείο σε σημείο.

**Ορισμός 3.28.** Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα. Ένα *διανυσματικό πεδίο* στην $M$ είναι μια τμήση της $TM \to M$, δηλαδή μια συνεχής απεικόνιση $Y : M \to TM$ με $p \mapsto Y_p$, τέτοια ώστε για κάθε $p \in M$, το $Y_p$ να είναι στοιχείο του $T_pM$. Αν $(U, x)$ χάρτης, τότε έχουμε ότι $Y_p = Y^i(p)\partial_i|_p$, όπου $Y^i(p) \in \mathbb{R}$. Οι $Y^i$ είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου $Y$ (ως προς τον χάρτη) και είναι συναρτήσεις $M \to \mathbb{R}$.

**Λήμμα 3.5.** *Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα και $Y : M \to TM$ αυθαίρετη απεικόνιση, η οποία δεν είναι απαραίτητα συνεχής, τέτοια ώστε $Y_p \in T_pM$ για κάθε $p \in M$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

*i) Η $Y$ είναι λεία.*

*ii) Οι συνιστώσες της $Y$ ως προς λείο χάρτη είναι λείες.*

*iii) Αν $f \in \mathcal{C}^\infty U$, όπου $U \subseteq M$, τότε η συνάρτηση $Yf : U \to \mathbb{R}$ με $Yf(p) = Y_pf$ είναι λεία.*

*Απόδειξη.* Έστω λείος χάρτης $(U, \varphi)$ και $(x^i, v^i)$ η συνήθης συντεταγμένη στο $\pi^{-1}(U) \subseteq TM$, όπως την ορίσαμε στο λήμμα 3.4. Η αναπαράσταση της $Y$ ως προς τη συνήθη συντεταγμένη, θα δίνεται από $\widehat{Y}(x) = (\{x^i\}, \{Y^i(x)\})$, όπου $Y^i$ θα είναι η $i$-οστή συνιστώσα της $Y$ ως προς τον συγκεκριμένο χάρτη. Επομένως, i και ii είναι ισοδύναμα. Έπειτα, αν $Y$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει το ii, τότε, αν $f \in \mathcal{C}^\infty U$ και $\varphi = \{x^i\}$ συντεταγμένη για μια γειτονιά $W \subseteq U$, θα έχουμε για την αναπαράσταση συντεταγμένης της $Yf$ ως προς τον $(W, \varphi)$ ότι:

$$\widehat{Yf}(x) = (Y^i(x)\partial_i|_x)(f) = Y^i(x)(\partial_i f)(x)$$

Αφού οι $Y^i$ είναι λείες ως προς τον λείο $(W, \varphi)$ από υπόθεση ii, τότε $Yf$ λεία, δηλαδή ii συνεπάγεται iii. Αντίστροφα, αν ισχύει το iii, τότε, αν $(U, \varphi)$ λείος χάρτης, κάθε $x^i$ είναι μια λεία συνάρτηση $U \to \mathbb{R}$ και άρα $Y^i = Yx^i$ λεία στο $U$ από iii. Επομένως, iii συνεπάγεται ii και άρα ii και iii ισοδύναμα. ☐

**Ορισμός 3.29.** Το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων συμβολίζεται με:

$$\Gamma(TM) \coloneqq \{\sigma : M \to TM \mid \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M\}$$

και μπορούμε να το εφοδιάσουμε με την πράξη της διανυσματικής άθροισης:

$$\oplus : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

όπου $\oplus : (\sigma, \tau) \mapsto \sigma \oplus \tau$ και για κάθε $p \in M$ ισχύει ότι $(\sigma \oplus \tau)(p) \coloneqq \sigma(p) \overset{T_pM}{+} \tau(p)$, όπως και αυτήν του βαθμωτού γινομένου:

$$\odot : \mathcal{C}^\infty M \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

όπου $\odot : (f, \sigma) \mapsto f \odot \sigma$ και $(f \odot \sigma)(p) \coloneqq f(p) \overset{T_pM}{\cdot} \sigma(p)$. Επομένως, $\Gamma(TM)$ είναι δχ.

**Ορισμός 3.30.** Έστω $\phi : M \to N$ λεία και $Y \in \Gamma(TM)$. Έστω ότι υπάρχει $Z \in \Gamma(TN)$, τέτοιο ώστε για κάθε $p \in M$, να ισχύει ότι $\phi_* Y_p = Z_{\phi(p)}$. Τότε, $Y$ και $Z$ καλούνται *$\phi$-συσχετισμένα*.

**Λήμμα 3.6.** *Έστω $\phi : M \to N$ λεία και $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$. Τότε, $X$ και $Y$ είναι $\phi$-συσχετισμένα, αν-ν για κάθε λεία συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $N$, ισχύει ότι $X(f \circ \phi) = (Yf) \circ \phi$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $p \in M$, ισχύει ότι $X(f \circ \phi)(p) = X_p(f \circ \phi) = (\phi_* X_p)(f)$, ενώ ισχύει επίσης ότι $(Yf)(\phi(p)) = Y_{\phi(p)} f$. Επομένως, η σχέση του λήμματος ισχύει για κάθε $f$, αν-ν $\phi_* X_p = Y_{\phi(p)}$ για κάθε $p$, δηλαδή $X, Y$ να είναι $\phi$-συσχετισμένα. □

## 3.5. Συνεφαπτόμενη δέσμη και συνδιανυσματικά πεδία

Ενώ τα εφαπτόμενα διανύσματα παρέχουν μια χαρτοανεξάρτητη ερμηνεία της παραγώγου μιας καμπύλης, οι παράγωγοι συναρτήσεων πραγματικής τιμής σε μια πολλαπλότητα δύναται να ερμηνευθούν ως εφαπτόμενα συνδιανύσματα. Έτσι, όπως κάναμε λόγο για διανυσματικά πεδία, τώρα θα μιλήσουμε για συνδιανυσματικά πεδία, δηλαδή λείες τμήσεις της συνεφαπτόμενης δέσμης, οι οποίες είναι υπό μια έννοια το χαρτοανεξάρτητο ανάλογο της συνήθους κλίσης (gradient).

**Ορισμός 3.31.** Έστω $V$ δχ πεπερασμένης διάστασης με πραγματικό σώμα. Ένα *συνδιάνυσμα* (covector) στον $V$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με πεδίο τιμών στο σώμα, δηλαδή μια γραμμική απεικόνιση $\omega : V \to \mathbb{R}$. Ο χώρος όλων των συνδιανυσμάτων στον $V$, είναι ο χώρος $V^*$ που ορίσαμε στην ενότητα των δχ.

**Πρόταση 3.1.** *Έστω $V$ πεπερασμένης διάστασης δχ με $\{e_i\}$ μια βάση του, όπου $i = 1, \cdots, n$ για $n = \dim V$. Τότε, η συλλογή συνδιανυσμάτων $\{\varepsilon^i\}$, για τα στοιχεία της οποίας ισχύει ότι $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$, αποτελεί μια βάση του $V^*$, η οποία καλείται δυϊκή βάση του $V^*$. Επομένως, $\dim V^* = \dim V$.*

*Απόδειξη.* Για να δείξουμε ότι αυτή η συλλογή αποτελεί βάση, πρέπει κατά τα γνωστά να δείξουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον $V^*$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον γραμμικό συνδυασμό $c_i \varepsilon^i$ (σύμβαση Einstein) και ας τον θέσουμε ίσο με μηδέν. Αν δράσουμε και με τα δύο μέλη σε ένα στοιχείο $e_j$ της βάσης του $V$, τότε θα έχουμε ότι $c_i \varepsilon^i(e_j) = 0$. Όμως, από ορισμό $c_i \varepsilon^i(e_j) = c_i \delta^i_j = c_j = 0$. Πράγματι λοιπόν, $\{\varepsilon^i\}$ γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω τώρα κάποιο $v \in V$, το οποίο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός (των στοιχείων) της βάσης του $V$ με τη μορφή $v = v^i e_i$. Έστω επιπλέον και κάποιο $\omega \in V^*$. Τότε:

$$\omega(v) = \omega(v^i e_i) = v^i \omega(e_i) = \varepsilon^i(v)\omega(e_i) = \omega(e_i)\varepsilon^i(v) = (\omega(e_i)\varepsilon^i)(v)$$

αφού $\varepsilon^i(v) = \varepsilon^i(v^j e_j) = v^j \delta^i_j = v^i$. Επομένως, $\omega = \omega(e_i)\varepsilon^i$ και άρα το σύνολο $\{\varepsilon^i\}$ παράγει τον $V^*$, δηλαδή τελικά ισχύει ότι $\{\varepsilon^i\}$ είναι βάση με $\omega(e_i) \equiv \omega_i \in \mathbb{R}$ να είναι οι συνιστώσες του $\omega$ ως προς αυτήν τη βάση. Καθώς η διάσταση ενος δχ είναι η πληθικότητα της (Hamel) βάσης του, έπεται ότι $\dim V^* = \dim V$. Προφανώς, αφού αυτός ο ισομορφισμός εξαρτάται από την επιλογή βάσης του $V^*$, δεν μπορεί να είναι κανονικός. □

**Ορισμός 3.32.** Έστωσαν $V, W$ δχ και $A : V \to W$ ομομορφισμός. Ο ομομορφισμός $A^* : W^* \to V^*$ καλείται *ανάστροφος* (transpose) της απεικόνισης $A$ και ορίζεται μέσω της σχέσης $(A^*\omega)(X) = \omega(AX)$ για $\omega \in W^*$ και $X \in V$.

**Παρατήρηση 3.8.** *Η $A^*\omega$ είναι γραμμική, καθώς η $\omega$ και η $A$ είναι γραμμικές απεικονίσεις. Το ίδιο ισχύει και για την $A^*$.*

**Πρόταση 3.2.** *Ο ανάστροφος ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

*i)* $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$ *για* $A : V \to W$ *και* $B : K \to V$.

*ii)* $\mathrm{id}^* : V^* \to V^*$ *είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον* $V^*$.

*Απόδειξη.*

i) Προφανές, αφού για $Y \in K$ και $\omega \in W^*$:

$$((A \circ B)^* \omega)(Y) = \omega(A(BY)) = (A^* \omega)(BY) = (B^*(A^* \omega))(Y) = ((B^* \circ A^*)\omega)(Y)$$

ii) Εξίσου προφανές, καθώς $\mathrm{id} : V \to V$ και άρα $(\mathrm{id}^* \alpha)(X) = \alpha(\mathrm{id}(X)) = \alpha(X)$, δηλαδή $\mathrm{id}^* \alpha = \alpha$ για $\alpha \in V^*$.

□

**Πρόταση 3.3.** *Έστω $V$ πεπερασμένης διάστασης δχ (πδδχ). Υπάρχει ένας κανονικός (δηλαδή ανεξάρτητος από την επιλογή βάσης) ισομορφισμός μεταξύ του $V$ και του διπλά δυϊκού του $V^{**} \equiv (V^*)^*$.*

*Απόδειξη.* Δοθέντος ενός $X \in V$, ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\widetilde{X} : V^* \to \mathbb{R}$, όπου $\widetilde{X}(\omega) = \omega(X)$ για $\omega \in V^*$. Η γραμμικότητα είναι προφανής, λόγω των πράξεων του $V^*$. Λόγω του ορισμού του, το $\widetilde{X}$ ανήκει στον $V^{**}$ και η απεικόνιση $\psi : V \to V^{**}$ με $X \mapsto \widetilde{X}$ θα είναι επίσης γραμμική, λόγω της γραμμικότητας του $\omega$ ως προς τα ορίσματα του. Έστω τώρα ότι $\ker \psi = \{X\}$, δηλαδή $\psi(X) = 0$. Τότε $\widetilde{X} = 0$ και άρα $\widetilde{X}(\omega) = 0$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\omega(X) = 0$ και άρα $X = 0$ για κάθε $\omega \in V^*$. Επομένως, $\ker \psi = \{0\}$ και άρα $\psi$ είναι 1-1. Τέλος, αν εφαρμόσουμε την πρόταση 3.1 για τους $V^*, V^{**}$, θα έχουμε ότι $\dim V^* = \dim V^{**}$, αλλά από την ίδια πρόταση ισχύει ότι $\dim V = \dim V^*$, συνεπώς $\dim V = \dim V^{**}$ και άρα $V, V^{**}$ ισομορφικοί. □

**Ορισμός 3.33.** Για $M$ λεία πολλαπλότητα, ορίζουμε για κάθε $p \in M$ τον συνεφαπτόμενο χώρο $T_p^*M \equiv (T_pM)^*$ στο $p$ ως τον δυϊκό του $T_pM$. Αν $\{x^i\}$ είναι οι συνιστώσες του $x$ για γειτονιά $U \subseteq M$ του $p$, τότε για κάθε $p \in M$, η χαρτοεπαγόμενη βάση $\{\partial_i|_p\}$ επάγει μια δυϊκή βάση $\{\varepsilon_p^i\}$, τέτοια ώστε κάθε $\xi \in T_p^*M$ να μπορεί να γραφεί ως $\xi = \xi_i \varepsilon_p^i$, όπου $\xi_i = \xi(\partial_i|_p)$.

Έστω τώρα $\{\widetilde{x}^j\}$ οι συνιστώσες της $\widetilde{x}$, όπου $(V, \widetilde{x})$ χάρτης της $M$ με $U \cap V \neq 0$. Έστω επίσης $\{\widetilde{\varepsilon}_p^j\}$ η δυϊκή βάση του $T_p^*M$ ως προς αυτήν τη συντεταγμένη, η οποία προφανώς είναι δυϊκή ως προς την $\{\widetilde{\partial}_j|_p\}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του συνδιανύσματος $\xi$ ως προς την $\widetilde{x}$. Έχουμε ήδη δεί ότι $\partial_i|_p = (\partial_i \widetilde{x}^j)(p) \widetilde{\partial}_j|_p$. Μπορούμε αρχικά να γράψουμε $\xi = \xi_i \varepsilon_p^i = \widetilde{\xi}_j \widetilde{\varepsilon}_p^j$. Επομένως, $\xi_i = \xi(\partial_i|_p) = \xi((\partial_i \widetilde{x}^j)(p) \widetilde{\partial}_j|_p) = (\partial_i \widetilde{x}^j)(p) \widetilde{\xi}_j$. Αυτός είναι ο κανόνας μετασχηματισμού των συνιστωσών του $\xi$.

**Ορισμός 3.34.** Η (ξένη) ένωση $T^*M = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p^*M$ καλείται συνεφαπτόμενη δέσμη της $M$.

**Πρόταση 3.4.** *Η συνεφαπτόμενη δέσμη μιας λείας πολλαπλότητας έχει φυσική δομή διανυσματικής δέσμης τάξης $\dim M$ υπεράνω της $M$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι ακριβώς ανάλογη με την απόδειξη του λήμματος 3.4 και έπειτα ισχύει πάλι ανάλογα η παρατήρηση 3.7. □

**Ορισμός 3.35.** Καλούμε μια τμήση της $T^*M \to M$ *συνδιανυσματικό πεδίο* στην $M$ και η τιμή ενός συνδιανυσματικού πεδίου $\sigma$ στο σημείο $p \in M$ θα σημαίνεται με $\sigma_p$ (ενίοτε και με $\sigma(p)$). Αν $\{\varepsilon_p^i\}$ είναι η δυϊκή χαρτοεπαγόμενη βάση του $T_pM$ σε κάθε $p \in U \subseteq M$, τότε κατά τα γνωστά $\sigma_p = \sigma_i(p) \varepsilon_p^i$, όπου $\sigma_i : U \to \mathbb{R}$ οι συνιστώσες του $\sigma$ (ως προς τη βάση αυτή). Ένα λείο συνδιανυσματικό πεδίο είναι μια λεία τμήση της $T^*M \to M$ και καλείται (διαφορική) 1-μορφή (θα δούμε αναλυτικά τις διαφορικές μορφές σε επόμενη ενότητα).

**Λήμμα 3.7.** *Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα και $\sigma : M \to T^*M$ μια απεικόνιση (οχι απαραίτητα συνεχής), τέτοια ώστε $\sigma_p \in T_p^*M$ για κάθε $p \in M$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*i)* *Η $\sigma$ είναι λεία.*

*ii)* *Για κάθε χάρτη, οι συνιστώσες $\sigma_i$ του $\sigma$ είναι λείες.*

*iii)* *Αν $X$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο $U \subseteq M$, τότε η συνάρτηση $\langle \sigma, X \rangle : U \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως $\langle \sigma, X \rangle (p) = \langle \sigma_p, X_p \rangle = \sigma_p(X_p)$, είναι λεία. Με $\langle\ ,\ \rangle : T^*M \times TM \to \mathcal{C}^\infty M$ σημαίνουμε το γινόμενο ζεύγους (pairing product).*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι και πάλι ακριβώς ανάλογη της απόδειξης του λήμματος 3.5. □

**Ορισμός 3.36.** Ακριβώς ανάλογα με τον ορισμό των πλαισίων, ορίζονται και τα συνπλαίσια (ολικά, τοπικά, συντεταγμένων), ενώ το σύνολο όλων των συνδιανυσματικών πεδίων στην $M$ θα το συμβολίζουμε με $\Gamma(T^*M)$ και θα είναι, εφοδιασμένο με τις συνήθεις κατάλληλες απεικονίσεις ένας δχ. Επιπλέον, ακριβώς όπως ισχύει και για τα διανυσματικά πεδία, τα συνδιανυσματικά πεδία μπορούν να πολλαπλασιαστούν με λείες συναρτήσεις. Αν $f \in \mathcal{C}^\infty M$ και $\sigma \in \Gamma(T^*M)$, ορίζουμε το συνδιανυσματικό πεδίο $f\sigma$ ως $(f\sigma)_p = f(p)\sigma_p$. Από το λήμμα 3.7-iii έπεται ότι $f\sigma$ είναι λεία.

Είπαμε όμως ότι η χρησιμότητα των συνδιανυσμάτων είναι ότι επιτρέπουν μια χαρτοανεξάρτητη ερμηνεία της κλίσης μιας συνάρτησης. Για να το δούμε αυτό, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του διαφορικού μιας λείας συνάρτησης (να μην συγχέεται με το διαφορικό μιας απεικόνισης, δηλαδή την push-forward αυτής).

**Ορισμός 3.37.** Έστω $f \in \mathcal{C}^\infty M$. Ορίζουμε ένα συνδιανυσματικό πεδίο $\mathrm{d}f$, το οποίο καλείται *διαφορικό της $f$*, ως $\mathrm{d}f_p(X_p) = X_p f$ για $X_p \in T_pM$.

**Λήμμα 3.8.** *Το διαφορικό μιας λείας συνάρτησης είναι ένα λείο συνδιανυσματικό πεδίο.*

*Απόδειξη.* Αρχικά, ισχύει ότι $\mathrm{d}f_p$ γραμμική ως προς το όρισμα της για κάθε $p \in M$, λόγω της κατά σημείο άθροισης και του βαθμωτού γινομένου στον $T_pM$. Κατά τα γνωστά, $(U, \widetilde{\xi})$ λείος χάρτης της $M$ και $\{\varepsilon_p^i\}$ η δυϊκή χαρτοεπαγόμενη βάση του $T_p^*M$. Γράφουμε λοιπόν $\mathrm{d}f_p = A_i(p)\varepsilon_p^i$, όπου $A_i : U \to \mathbb{R}$ συνιστώσες του $\mathrm{d}f$. Από ορισμό $\mathrm{d}f$, θα ισχύει ότι:

$$A_i(p) = \mathrm{d}f_p(\partial_i|_p) = \partial_i|_p f = (\partial_i f)(p)$$

Επομένως, $A_i$ θα είναι λείες και άρα, $\mathrm{d}f$ λεία. □

**Παρατήρηση 3.9.** *Στο προηγούμενο λήμμα, αντικαθιστώντας το $A_i(p)$ στην έκφραση του $\mathrm{d}f_p$ ως προς τη βάση $\{\varepsilon_p^i\}$, έχουμε μια έκφραση για την αναπαράσταση του $\mathrm{d}f_p$ με τη βοήθεια συντεταγμένων, η οποία έχει την τελική μορφή $\mathrm{d}f_p = (\partial_i f)(p)\varepsilon_p^i$. Έτσι, οι συνιστώσες του $\mathrm{d}f$ σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων είναι απλά οι μερικές παράγωγοι της $f$ ως προς τις συντεταγμένες αυτού του συστήματος, δηλαδή η $\mathrm{d}f$ είναι υπό μια έννοια ένα ανάλογο της συνήθους κλίσης, διατυπωμένης με χαρτοανεξάρτητο τρόπο, κατάλληλο για μια πολλαπλότητα. Αν τώρα πάρουμε την ειδική περίπτωση $f = x^i : U \to \mathbb{R}$, τότε $\mathrm{d}x_p^j = (\partial_i x^j)(p)\varepsilon_p^i = \delta_i^j \varepsilon_p^i = \varepsilon_p^j$. Με άλλα λόγια, το συνδιανυσματικό πεδίο συντεταγμένων (coordinate covector field) $\varepsilon^j$ δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από το $\mathrm{d}x^j$, οπότε με αντικατάσταση στην έκφραση της $\mathrm{d}f_p$, παίρνουμε την οικεία μορφή του διαφορικού μιας συνάρτησης $f$ σε συντεταγμένες. Μπορούμε πλέον να χρησιμοποιούμε το $\mathrm{d}x^j$ έναντι του $\varepsilon^j$.*

**Πρόταση 3.5.** *Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα και $f, g \in \mathcal{C}^\infty M$.*

*i)* *Για σταθερές $a, b$, ισχύει ότι $\mathrm{d}(af + bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$.*

*ii)* $\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$.

*iii)* $\mathrm{d}(f/g) = (g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g)/g^2$ *στο σύνολο όπου $g \neq 0$.*

*iv) Αν $f$ σταθερή, τότε $\mathrm{d}f = 0$.*

*Απόδειξη.*

i) Προφανές λόγω γραμμικότητας του $X$.

ii) Από ορισμό δράσης της παραγώγισης $X$ (κανόνας γινομένου), θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(fg)_p(X_p) &= X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)\\ &= f(p)\mathrm{d}g_p(X_p) + g(p)\mathrm{d}f_p(X_p) = (f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f)_p(X_p)\end{aligned}$$

iii) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα γινομένου, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f/g)_p(X_p) &= X_p(f/g) = f(p)X_p(1/g) + (1/g)(p)X_p(f)\\ &= f(p)\,\mathrm{d}(1/g)_p(X_p) + (1/g)(p)\mathrm{d}f_p(X_p)\end{aligned}$$

Όμως, για κάποιον λείο χάρτη $(U, x)$ θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}(1/g)_p = (\partial_i(1/g))(p)\varepsilon^i_p = -(1/g^2)(p)(\partial_i g)(p)\varepsilon^i_p = -(1/g^2)(p)\mathrm{d}g_p$$

και επομένως:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f/g)_p(X_p) &= \big[-(f/g^2)(p)\mathrm{d}g_p + (g/g^2)(p)\mathrm{d}f_p\big](X_p)\\ &= \left[\frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}\right]_p(X_p)\end{aligned}$$

iv) Για τον ίδιο χάρτη, $\mathrm{d}f_p = (\partial_i f)(p)\varepsilon^i_p$ και εφόσον $f$ σταθερή, τότε $\partial_i f = 0$ και άρα $\mathrm{d}f = 0$.

□

**Ορισμός 3.38.** Έστω $\phi : M \to N$ λεία απεικόνιση και $p \in M$ αυθαίρετο σημείο. Για την απεικόνιση push-forward $\phi_* : T_pM \to T_{\phi(p)}N$, ορίζουμε τον ανάστροφο της, δηλαδή $(\phi_*)^* : T^*_{\phi(p)}N \to T^*_pM$, όπου για ευκολία $(\phi_*)^* \equiv \phi^*$. Αυτή η απεικόνιση καλείται *pull-back* της $\phi$ και δίνεται από $(\phi^*\xi)(X) = \xi(\phi_* X)$ για $\xi \in T^*_{\phi(p)}N$ και $X \in T_pM$.

**Παρατήρηση 3.10.** *Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των pull-back απεικονίσεων είναι ότι πάντα προωθούν λεία συνδιανυσματικά πεδία σε λεία συνδιανυσματικά πεδία (ενώ το αντίστοιχο για τις push-forward δεν ισχύει γενικά). Δοθείσας μιας λείας απεικόνισης $\phi : M \to N$ και ενός λείου συνδιανυσματικού πεδίου $\sigma \in \Gamma(T^*N)$, ορίζουμε ένα συνδιανυσματικό πεδίο $\phi^*\sigma$ στην $M$ ως $(\phi^*\sigma)_p = \phi^*(\sigma_{\phi(p)})$. Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει αμφιβολία σχετικά με το σημείο, από το οποίο πρέπει να προωθήσουμε το συνδιανυσματικό πεδίο. Μένει δηλαδή να δείξουμε ότι $\phi^*\sigma$ είναι λείο, αλλά για κάτι τέτοιο θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.*

**Λήμμα 3.9.** *Έστω $\phi : M \to N$ λεία και έστωσαν $f \in \mathcal{C}^\infty N$, $\sigma \in \Gamma(T^*N)$. Τότε:*

$$\phi^*\mathrm{d}f = \mathrm{d}(f \circ \phi) \qquad \phi^*(f\sigma) = (f \circ \phi)\phi^*\sigma$$

*Απόδειξη.* Για την πρώτη σχέση θεωρούμε αρχικά ένα αυθαίρετο $X_p \in T_pM$. Θα έχουμε ότι:

$$(\phi^*\mathrm{d}f)_p(X_p) = (\phi^*\mathrm{d}f_{\phi(p)})(X_p) = \mathrm{d}f_{\phi(p)}(\phi_* X_p) = (\phi_* X_p)f = X_p(f \circ \phi) = \mathrm{d}(f \circ \phi)_p(X_p)$$

όπου απλά χρησιμοποιήσαμε τη σχέση της παρατήρησης 3.10 και τους ορισμούς της push-forward, της pull-back και του $\mathrm{d}f$. Αντίστοιχα, για τη δεύτερη σχέση θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}(\phi^*(f\sigma))_p &= \phi^*((f\sigma)_{\phi(p)}) = \phi^*(f(\phi(p))\sigma_{\phi(p)})\\ &= f(\phi(p))\phi^*(\sigma_{\phi(p)}) = f(\phi(p))(\phi^*\sigma)_p = ((f \circ \phi)\phi^*\sigma)_p\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση της παρατήρησης 3.10, τη σχέση του ορισμού 3.36 και τέλος, τη γραμμικότητα της $\phi^*$. □

**Πρόταση 3.6.** *Κατά τα γνωστά, έστωσαν $\phi : M \to N$ λεία και $\sigma \in \Gamma(T^*N)$. Τότε, $\phi^*\sigma$ είναι ένα λείο συνδιανυσματικό πεδίο στην $M$.*

*Απόδειξη.* Έστω $p \in M$ αυθαίρετο σημείο και έστωσαν συντεταγμένες $x = \{x^i\}$ και $y = \{y^j\}$ στις γειτονιές των σημείων $p \in M$ και $\phi(p) \in N$ αντίστοιχα. Με τη βοήθεια συντεταγμένων, το $\sigma$ μπορεί να γραφεί ως $\sigma = \sigma_j \mathrm{d}y^j$, όπου $\sigma_j$ λείες συναρτήσεις στη γειτονιά του $\phi(p)$. Εφαρμόζοντας τις σχέσεις του λήμματος 3.9, παίρνουμε:

$$\phi^*\sigma = \phi^*(\sigma_j \mathrm{d}y^j) = (\sigma_j \circ \phi)\phi^*\mathrm{d}y^j = (\sigma_j \circ \phi)\,\mathrm{d}\big(y^j \circ \phi\big)$$

Καθώς αυτό το αποτέλεσμα αποτελείται μόνο από λείες απεικονίσεις, έπεται ότι το $\phi^*\sigma$ είναι λείο συνδιανυσματικό πεδίο στην $M$, δηλαδή $\phi^*\sigma \in \Gamma(T^*M)$. □

**Ορισμός 3.39.** Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα και $\omega$ λείο συνδιανυσματικό πεδίο σε αυτήν. Τότε, το $\omega$ καλείται *ακριβές* (exact) στην $M$, αν υπάρχει $f \in \mathcal{C}^\infty M$, τέτοια ώστε $\omega = \mathrm{d}f$. Τότε, η $f$ καλείται *δυναμικό* για το $\omega$.

**Παρατήρηση 3.11.** *Θα θέλαμε να έχουμε έναν εύκολο τρόπο, προκειμένου να αποφαινόμαστε σχετικά με την ακρίβεια ενός διανυσματικού πεδίου. Ευτυχώς για εμάς, υπάρχει μια απλή αναγκαία συνθήκη, η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι λείων συναρτήσεων μπορούν να παρθούν με αυθαίρετη σειρά. Έστω λοιπόν ότι $\omega$ είναι ακριβές και έστω $f$ αυθαίρετη συνάρτηση δυναμικού για το $\omega$ και $(U, x)$ αυθαίρετος χάρτης της $M$. Καθώς η $f$ είναι λεία, θα ισχύει στη γειτονιά συντεταγμένων ότι:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

*το οποίο θα συμβολίζουμε για συντομία ως $\partial^2_{ij} f = \partial^2_{ji} f$. Εκφράζοντας $\omega = \omega_i \mathrm{d}x^i$, η σχέση $\omega = \mathrm{d}f$ θα σημαίνει ότι $\omega_i = \partial_i f$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην παραπάνω, θα έχουμε ότι $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$.*

**Ορισμός 3.40.** Ένα λείο συνδιανυσματικό πεδίο $\omega$ θα καλείται *κλειστό*, αν για κάθε χάρτη οι συνιστώσες αυτού ικανοποιούν τη σχέση $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$.

**Λήμμα 3.10.** *Ένα λείο συνδιανυσματικό πεδίο είναι κλειστό, αν-ν οι συνιστώσες του για κάποιον χάρτη γύρω από κάθε σημείο ικανοποιούν τη σχέση $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$.*

*Απόδειξη.* Αν $\omega$ είναι κλειστό, τότε οι συνιστώσες του ικανοποιούν τη σχέση αυτού του λήμματος για κάθε χάρτη από ορισμό. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει για κάποιον χάρτη γύρω από κάθε σημείο και έστω $(U, x)$ αυθαίρετος χάρτης. Για κάθε $p \in U$, η υπόθεση αυτή σημαίνει ότι υπάρχει συντεταγμένη $\widetilde{x}$ στη γειτονιά του $p$, τέτοια ώστε να ισχύει $\widetilde{\partial}_i \omega_j = \widetilde{\partial}_j \omega_i$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα μετασχηματισμού των συνιστωσών του $\omega$, $\omega_i = (\partial_i \widetilde{x}^j)\widetilde{\omega}_j$ (αφού $p$ αυθαίρετο), μαζί με τον κανόνα αλυσίδας, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j &= \partial_j((\partial_i \widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k) - \partial_i((\partial_j \widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k) \\
&= (\partial^2_{ji}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k + (\partial_i \widetilde{x}^k)\partial_j \widetilde{\omega}_k - (\partial^2_{ij}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k - (\partial_j \widetilde{x}^k)\partial_i \widetilde{\omega}_k \\
&= (\partial^2_{ji}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k + (\partial_i \widetilde{x}^k)(\partial_j \widetilde{x}^l)\widetilde{\partial}_l \widetilde{\omega}_k - (\partial^2_{ij}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k - (\partial_j \widetilde{x}^k)(\partial_i \widetilde{x}^l)\widetilde{\partial}_l \widetilde{\omega}_k \\
&= (\partial^2_{ji}\widetilde{x}^k - \partial^2_{ij}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k + (\partial_i \widetilde{x}^k)(\partial_j \widetilde{x}^l)\widetilde{\partial}_l \widetilde{\omega}_k - (\partial_j \widetilde{x}^l)(\partial_i \widetilde{x}^k)\widetilde{\partial}_k \widetilde{\omega}_l \\
&= (\partial^2_{ji}\widetilde{x}^k - \partial^2_{ij}\widetilde{x}^k)\widetilde{\omega}_k + (\partial_i \widetilde{x}^k)(\partial_j \widetilde{x}^l)(\widetilde{\partial}_l \widetilde{\omega}_k - \widetilde{\partial}_k \widetilde{\omega}_l) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε. □

**Παρατήρηση 3.12.** *Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι κάθε ακριβές συνδιανυσματικό πεδίο είναι κλειστό.*

## 3.6. Δακτύλιοι και πρότυπα

Θυμίζουμε εδώ τον ορισμό του δακτυλίου $(R, +, \cdot)$ με $+, \cdot : R \times R \to R$, όπου η πρόσθεση είναι ΜΠΟΑ, ο πολλαπλασιασμός (Μ)Π(Ο)(Α) και ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα $E$. Η παρένθεση γύρω από κάποιες ιδιότητες υποδεικνύει τη μη αναγκαιότητα αυτών για τον ορισμό του δακτυλίου. Για παράδειγμα, η μεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό ισχύει μόνο για μεταθετικούς δακτυλίους, η Ο$(\cdot)$ ισχύει μόνο για δακτυλίους με πολλαπλασιαστική μονάδα και η Α$(\cdot)$ για δακτύλιους διαιρετότητας. Έτσι, ο δακτύλιος $(\mathcal{C}^\infty M, +, \cdot)$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με πολλαπλασιαστική μονάδα, καθώς $f \cdot g = g \cdot f$ και $\mathrm{id}_{\mathcal{C}^\infty M} = 1_{\mathbb{R}}$, αλλά δεν είναι δακτύλιος διαιρετότητας, γιατί δεν υπάρχει στοιχείο που να πολλαπλασιάζεται με το μηδέν και να έχει γινόμενο το ουδέτερο στοιχείο.

**Ορισμός 3.41.** Ένα σύνολο $M$ εφοδιασμένο με $\oplus, \odot$ καλείται $R$-*πρότυπο* ($R$-module), όπου $R$ δακτύλιος, αν οι πράξεις:

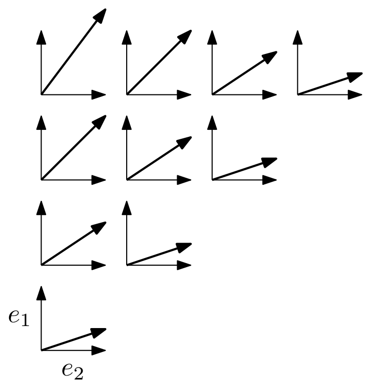
$$\oplus : M \times M \to M$$
$$\odot : R \times M \to M$$

πληρούν τα αξιώματα ενός δχ. Είναι με άλλα λόγια σαν ένας δχ πάνω σε δακτύλιο και όχι αλγεβρικό πεδίο.

**Παρατήρηση 3.13.** *Πολλές φορές θα γράφουμε π.χ ότι $M$ είναι πρότυπο ή ότι $R$ είναι δακτύλιος για λόγους συντομίας, όπου οι αντίστοιχες πράξεις με τις οποίες εφοδιάζονται τα δύο σύνολα υποννοούνται. Αν πρόκειται για μη τετριμμένα πρότυπα ή δακτύλιους, οι αντίστοιχες πράξεις θα σημαίνονται ρητά.*

**Παρατήρηση 3.14.** *Το γεγονός κλειδί που αναδεικνύει την καθοριστική σημασία των προτύπων, είναι ότι σε αντίθεση με έναν δχ, ένα πρότυπο δεν έχει πάντα βάση, εκτός και αν ο δακτύλιος είναι δακτύλιος διαιρετότητας.*

**Παράδειγμα 3.3.** Έστω $M = \mathbb{R}^2$ λεία πολλαπλότητα και $v \in \Gamma(TM)$ διανυσματικό πεδίο. Είδαμε ότι ο $\mathcal{C}^\infty M$ δεν είναι δακτύλιος διαιρετότητας και ότι το $\Gamma(TM)$ είναι $\mathcal{C}^\infty M$-πρότυπο, καθώς εύκολα αποδεικνύεται ότι $\oplus, \odot$ πληρούν τα αξιώματα των δχ.




Στη συγκεκριμένη περίπτωση "τυγχάνει" να υπάρχει βάση, δηλαδή:

$$\exists\, e_1, e_2 \in \Gamma(TM) : \forall\, v \in \Gamma(TM) : \exists!\, v^1, v^2 \in \mathcal{C}^\infty M : v = v^a e_a$$

όπου $v^a \in \mathcal{C}^\infty M$.

**Παράδειγμα 3.4.** Έστω $M = S^2$ πολλαπλότητα και $v \in \Gamma(TS^2)$ ένα διανυσματικό πεδίο. Το $\Gamma(TS^2)$ είναι $\mathcal{C}^\infty S^2$-πρότυπο και δεν έχει βάση, διότι δεν υπάρχει παντού ένα μη μηδενικό και λείο $v$.

**Θεώρημα 3.5.** *Αν $D$ ένας δακτύλιος διαιρετότητας, τότε ένα $D$-πρότυπο $V$ έχει βάση.*

**Πόρισμα 3.2.** *Κάθε δχ έχει βάση, καθώς κάθε αλγεβρικό πεδίο είναι σίγουρα δακτύλιος διαιρετότητας.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.5 απαιτεί το λήμμα του Zorn και αυτό με τη σειρά του, την εισαγωγή νέων εννοιών, ώστε να γίνει κατανοητό.

**Ορισμός 3.42.** Ένα σύνολο $P$ εφοδιασμένο με μια σχέση $\leq$ καλείται *μερικώς διατεταγμένο*, αν η σχέση είναι:

i) ανακλαστική: $\forall\, a \in P : a \leq a$

ii) αντισυμμετρική: $(a \leq b \wedge b \leq a) \implies a = b$

iii) μεταβατική: $(a \leq b \wedge b \leq c) \implies a \leq c$

όπου $\wedge$ είναι η λογική σύζευξη.

**Ορισμός 3.43.** Ένα σύνολο $T$ εφοδιασμένο με μια σχέση $\leq$ καλείται *ολικά διατεταγμένο*, αν η σχέση είναι:

i) αντισυμμετρική

ii) μεταβατική

iii) ολική: $\forall\, a, b \in T : a \leq b \vee b \leq a$

όπου με $\vee$ συμβολίζουμε τη λογική διάζευξη.

**Ορισμός 3.44.** Ένα στοιχείο $u \in P$ καλείται *άνω φράγμα* ενός ολικά διατεταγμένου υποσυνόλου $T \subseteq P$, αν $\forall\, t \in T : t \leq u$.

**Ορισμός 3.45.** Το $m \in P$ καλείται *μέγιστο στοιχείο* του $P$, αν $\nexists\, x \in P : m \leq x$.

**Λήμμα 3.11** (Zorn)**.** *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P$, του οποίου κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $T$ έχει άνω φράγμα στο $P$, περιέχει ένα μέγιστο στοιχείο.*

*Απόδειξη θεωρήματος 3.5.* Έστω $S$ ένα σύστημα γεννητόρων του $V$:

$$\forall\, v \in V : \exists\, e_1, \cdots, e_N \in S : \exists\, v^1, \cdots, v^N \in D : v = v^a e_a$$

Το παραπάνω δεν είναι αυθαίρετο, καθώς πάντα θα υπάρχει ένα σύστημα γεννητόρων, για παράδειγμα, $S = V$ στην χειρότερη περίπτωση. Ορίζουμε ένα σύνολο $P$:

$$P := \{U \in \mathcal{P}(S) \mid U \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}\}$$

όπου $U$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του ισχύει η σχέση γραμμικής ανεξαρτησίας. Το διατάσσουμε μερικώς εφοδιάζοντας το με τη σχέση εγκλίσεως $\subseteq$. Έστω $T$ ένα οποιοδήποτε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $P$. Συνεπάγεται ότι $\cup T$ θα είναι άνω φράγμα του $T$ και γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $S$, αφού είναι υποσύνολο του $U$. Από το λήμμα του Zorn έχουμε ότι το $P$ έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο στοιχείο, έστω $B$. Από κατασκευής, το $B$ είναι ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $S$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $S = \operatorname{span}_D B$, όπου $\operatorname{span}_D B$ το σύνολο όλων των $D$-γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του $B$. Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε αρχικά ένα $v \in S$. Τότε, αφού $B$ είναι μέγιστο, εισάγοντας το $v$ στα στοιχεία του $B$ το νέο σύνολο θα είναι γραμμικά εξαρτημένο (αφού το $B$ ως μέγιστο περιείχε ήδη μια φορά το $v$), δηλαδή:

$$\exists\, e_1, \cdots, e_N \in B : \exists\, a^1, \cdots, a^N \in D : \exists\, a \in D : a^i e_i + av = 0$$

και δεν μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές $a^1, \cdots, a^N, a$. Προφανώς, από αυτό συνεπάγεται ότι $a \neq 0$, αφού αν $a = 0$ θα έπρεπε $a^i e_i = 0$ και να μην μηδενίζονται όλα τα $a^1, \cdots, a^N$, κάτι που είναι άτοπο, αφού $B$ γραμμικά ανεξάρτητο. Αλλά τότε, αφού $a \in D$ και $D$ δακτύλιος διαιρετότητας (άρα και με πολλαπλασιαστική μονάδα), συνεπάγεται ότι $\exists\, a^{-1} \in D : a^{-1}a = 1_D$, οπότε $a^{-1}a^i e_i + v = 0$, δηλαδή $v = -(a^{-1}a^i)e_i$, όπου $e_1, \cdots, e_N$ πεπερασμένο υποσύνολο του $B$ ή ισοδύναμα, $S = \operatorname{span}_D B$. Όμως, $V = \operatorname{span}_D S = \operatorname{span}_D B$, αφού $S$ είναι σύστημα γεννητόρων του $V$ και $S = \operatorname{span}_D B$. Έπεται ότι $B$ είναι βάση του $V$, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύστημα γεννητόρων αυτού. □

**Ορισμός 3.46.** Ένα πρότυπο πάνω σε δακτύλιο καλείται *ελεύθερο*, αν έχει βάση. Για παράδειγμα, $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ είναι ελεύθερο, ενώ $\Gamma(TS^2)$ δεν είναι ελεύθερο.

**Παρατήρηση 3.15.** *Αν ένα $R$-πρότυπο $F$, παραγόμενο από πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων, είναι ελεύθερο, τότε $F \cong R \oplus \cdots \oplus R$.*

**Ορισμός 3.47.** Ένα πρότυπο $\Gamma$ πάνω σε έναν $R$-δακτύλιο καλείται *προβολικό*, αν είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου προτύπου $F$, δηλαδή $\Gamma \oplus Q = F$, όπου $Q$ ένα άλλο $R$-πρότυπο.

**Παρατήρηση 3.16.** *Κάθε ελέυθερο πρότυπο είναι και προβολικό.*

**Θεώρημα 3.6.** *Το σύνολο όλων των λείων τμήσεων μιας διανυσματικής ινώδους δέσμης $(E, \pi, M)$ όπου $M$ λεία πολλαπλότητα, είναι ένα, παραγόμενο από πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων, προβολικό $\mathcal{C}^\infty M$-πρότυπο $\Gamma(E)$, δηλαδή $\Gamma(E) \oplus Q = F$, όπου $Q$ ένα άλλο $\mathcal{C}^\infty M$-πρότυπο και $F$ ελεύθερο πρότυπο.*

**Πόρισμα 3.3.** *Το $Q$ ποσοτικοποιεί την αποτυχία του $\Gamma(E)$ να έχει βάση.*

**Θεώρημα 3.7.** *Έστωσαν $P, Q$ προβολκά πρότυπα, παραγόμενα από πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων, πάνω σε μεταθετικό δακτύλιο $R$. Τότε, το σύνολο:*

$$\operatorname{Hom}(P, Q) := \left\{ \phi : P \overset{\sim_R}{\to} Q \right\}$$

*εφοδιασμένο με $\oplus, \odot$ είναι επίσης ένα, παραγόμενο από πεπερασμένο πλήθος γεννητόρων, προβολικό πρότυπο.*

*Απόδειξη.* Έστω $a, r \in R$ και $v \in P$. Τότε:

$$\begin{aligned} a \odot \phi(r \overset{P}{\cdot} v) &= a \odot (r \odot \phi(v)) = (a \overset{R}{\cdot} r) \odot \phi(v) \\ &= (r \overset{R}{\cdot} a) \odot \phi(v) = r \odot (a \odot \phi(v)) = r \odot \phi(a \overset{P}{\cdot} v) \end{aligned}$$

Με αντίστοιχες πράξεις αποδεικνύονται εύκολα και τα υπόλοιπα αξιώματα ενός δχ. □

## 3.7. Η άλγεβρα των τανυστών και τα αφηρημένα τανυστικά γινόμενα δχ

**Ορισμός 3.48.** Έστωσαν $V_i, W$ διανυσματικοί χώροι με $i = 1, \cdots, k$. Θα καλούμε απεικόνιση $f : \bigtimes_{i=1}^k V_i \to W$ *πολυγραμμική*, αν είναι γραμμική ως συνάρτηση κάθε ορίσματος της ξεχωριστά, δηλαδή:

$$f(v_1, \cdots, av_i + a'v_i', \cdots, v_k) = af(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + a'f(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$$

**Ορισμός 3.49.** Έστω διανυσματικός χώρος $V$ με πραγματικό σώμα. Ένας *συναλλοίωτος $k$-τανυστής* ή *ομογενής τανυστής βαθμού* $(0,k)$ στον $V$ είναι μια πολυγραμμική συνάρτηση με όρισμα $k$ το πλήθος διανύσματα αυτού και τιμή στο σώμα αυτού, δηλαδή $T : V(\times^k) \to \mathbb{R}$, όπου $V(\times^k)$ είναι το $k$ φορές καρτεσιανό γινόμενο του $V$ με τον εαυτό του.

**Ορισμός 3.50.** Το σύνολο όλων των ομογενών τανυστών βαθμού $(0,k)$ καλείται *τανυστικός χώρος τύπου* $(0,k)$ και συμβολίζεται με $T^0{}_kV$. Ο $T^0{}_kV$ είναι δχ, αν εφοδιαστεί με τις συνήθεις πράξεις της κατά σημείο άθροισης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$(aT)(\bar{X}_k) = a(T(\bar{X}_k)) \qquad (T+T')(\bar{X}_k) = T(\bar{X}_k) + T'(\bar{X}_k)$$

όπου $a$ ανήκει στο σώμα του $V$ και $\bar{X}_k \in V(\times^k)$, δηλαδή $\bar{X}_k \equiv (X_1, \cdots, X_k)$.

**Ορισμός 3.51.** Έστω $V$ ένας πεπερασμένης διάστασης δχ με πραγματικό σώμα και έστω $S \in T^0{}_kV$, $T \in T^0{}_lV$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $S \otimes T : V(\times^{k+l}) \to \mathbb{R}$ με τιμή:

$$(S \otimes T)(\bar{X}_{k+l}) = S(\bar{X}_k)T(\bar{X}_{k:l})$$

όπου $\bar{X}_{k:l} \equiv (X_{k+1}, \cdots, X_{k+l})$ και το δεξιό μέλος είναι πολλαπλασιασμός στο σώμα. Από την πολυγραμμικότητα των $S$ και $T$ συνεπάγεται ότι $S \otimes T : V(\times^{k+l}) \to \mathbb{R}$ θα είναι πολυγραμμική απεικόνιση και άρα, (θα είναι) ομογενής τανυστής βαθμού $(0, k+l)$, τον οποίον θα καλούμε *τανυστικό γινόμενο* του $S$ με τον $T$.

**Παρατήρηση 3.17.** *Είναι μάλλον προφανές ότι η πράξη του τανυστικού γινομένου είναι διγραμμική και προσεταιριστική. Είναι διγραμμική, γιατί:*

$$\begin{aligned}(S \otimes (aT + a'T'))(\bar{X}_{k+l}) &= S(\bar{X}_k)(aT + a'T')(\bar{X}_{k:l}) \\ &= S(\bar{X}_k)(aT)(\bar{X}_{k:l}) + S(X_k)(a'T')(\bar{X}_{k:l}) \\ &= aS(\bar{X}_k)T(\bar{X}_{k:l}) + a'S(X_k)T'(\bar{X}_{k:l}) \\ &= a(S \otimes T)(\bar{X}_{k+l}) + a'(S \otimes T')(\bar{X}_{k+l})\end{aligned}$$

*και είναι προσεταιριστική, γιατί $(S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R)$, αφού για το αριστερό μέλος έχουμε ότι:*

$$((S \otimes T) \otimes R)(\bar{X}_{k+l+m}) = (S \otimes T)(\bar{X}_{k+l}R(\bar{X}_{k+l:m})) = S(\bar{X}_k)T(\bar{X}_{k:l})R(\bar{X}_{k+l:m})$$

*ενώ στο ίδιο καταλήγουμε και για το δεξιό μέλος.*

**Παρατήρηση 3.18.** *Λόγω της προσεταιριστικότητας του τανυστικού γινομένου, δεν απαιτούνται παρενθέσεις. Μπορούμε έτσι να γράφουμε έναν γενικό τύπο:*

$$\left[\bigotimes_{i=1}^{r} T_i\right](\bar{X}_{k_1+\cdots+k_r}) = \prod_{i=1}^{r} T_i(\bar{X}_{k_{i-1}:k_i})$$

*όπου $T_i \in T^0{}_{k_i}V$ και $k_0 : k_1 \equiv k_1$*

**Πρόταση 3.7.** *Έστω $V$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος (δχ με πραγματικό σώμα) διάστασης $n$ και έστω $\{e_i\}$ μια βάση αυτού. Έστω επίσης η δυϊκή βάση $\{\varepsilon^i\}$. Το σύνολο:*

$$\mathcal{B} := \left\{\bigotimes_{r=1}^{k} \varepsilon^{i_r} \mid i_r \in \{1, \cdots, n\}\right\}$$

*αποτελεί βάση του $T^0{}_kV$, ο οποίος συνεπώς έχει διάσταση $n^k$.*

*Απόδειξη.* Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητος γεννήτορας του $T^0{}_kV$. Έστω $T \in T^0{}_kV$. Ορίζουμε έναν αριθμό $T_{i_1\cdots i_k} = T(\bar{e}_{i_k})$, όπου σημαίνουμε $\bar{e}_{i_k} \equiv (e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$. Θα δείξουμε ότι $T = T_{i_1\cdots i_k} \otimes_{r=1}^k \varepsilon^{i_r}$, όπου ισχύει πάντα η σύμβαση άθροισης Einstein, από την οποία σχέση προκύπτει ότι ο $\mathcal{B}$ παράγει τον $T^0{}_kV$. Πράγματι:

$$T_{i_1\cdots i_k}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} \varepsilon^{i_r}\right](\bar{e}_{j_k}) = T_{i_1\cdots i_k}\prod_{r=1}^{k} \varepsilon^{i_r}(e_{j_r}) = T_{i_1\cdots i_k}\prod_{r=1}^{k} \delta^{i_r}_{j_r} = T_{j_1\cdots j_k} = T(\bar{e}_{j_k})$$

Από την πολυγραμμικότητα ισχύει ότι ένας τανυστής προσδιορίζεται πλήρως από τη δράση του σε μια ακολουθία διανυσμάτων βάσης και άρα, το ζητούμενο αποδείχτηκε, αφού κάθε στοιχείο του $T^0{}_kV$ παράγεται από κάποιο στοιχείο του $\mathcal{B}$. Επιπλέον, η συνθήκη:

$$T_{i_1\cdots i_k}\left[\bigotimes_{r=1}^{k} \varepsilon^{i_r}\right](\bar{e}_{j_k}) = 0$$

σημαίνει ότι $T_{j_1\cdots j_k} = 0$ και άρα ο μόνος γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\mathcal{B}$ που μηδενίζεται, θα είναι αυτός που οι συντελεστές των στοιχείων μηδενίζονται, δηλαδή $\mathcal{B}$ γραμμικά ανεξάρτητο. □

**Πόρισμα 3.4.**

- *Οι συνιστώσες $T_{i_1\cdots i_k}$ ενός ομογενούς τανυστή βαθμού $(0,k)$ ως προς τον τανυστή βάσης $\otimes_{r=1}^k \varepsilon^{i_r} \in \mathcal{B}$ δίνονται από τη σχέση $T_{i_1\cdots i_k} = T(\bar{e}_{i_k})$.*
- *Ο $T^0{}_0V$ είναι απλά ο $\mathbb{R}$ με διάσταση 1.*
- *Ο $T^0{}_1V$ είναι ο $V^*$ με διάσταση $n$.*
- *Ο $T^0{}_2V$ είναι ο χώρος των διγραμμικών μορφών στον $V$. Κάθε διγραμμική μορφή μπορεί να γραφεί ως $T = T_{ij}\varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$, όπου $(T_{ij})$ αυθαίρετος $n \times n$ πίνακας. Έτσι, $\dim T^0{}_2V = n^2$.*

**Ορισμός 3.52.** Έστω σύνολο $S$. Ο *ελεύθερος* δχ στο $S$ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων τυπικών (formal) γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του $S$ με πραγματικούς συντελεστές και συμβολίζεται με $\mathbb{R}\langle S\rangle$. Ένας πεπερασμένος τυπικός γραμμικός συνδυασμός είναι μια συνάρτηση $\mathcal{F} : S \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\mathcal{F}(s) = 0$ για όλα τα (πεπερασμένα πολλά) $s \in S$. Το $\mathbb{R}\langle S\rangle$, εφοδιασμένο με κατά σημείο άθροιση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, είναι πραγματικός δχ. Ταυτοποιώντας κάθε $x \in S$ με τη συνάρτηση που έχει τιμή 1 στο $x$ και 0 αλλού, κάθε $\mathcal{F} \in \mathbb{R}\langle S\rangle$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^m a_i x_i$, όπου $\{x_i\}$ για $i = 1, \cdots, m$ είναι τα στοιχεία του $S$, για τα οποία ισχύει $\mathcal{F}(x_i) \neq 0$ και $a_i = \mathcal{F}(x_i)$. Επομένως, το $S$ είναι βάση του $\mathbb{R}\langle S\rangle$, ο οποίος είναι πεπερασμένης διάστασης, αν-ν $S$ πεπερασμένο σύνολο.

**Ορισμός 3.53.** Έστωσαν $V, W$ πεπερασμένης διάστασης πραγματικοί δχ και έστω $\mathcal{R}$ ο υπόχωρος του ελεύθερου δχ $\mathbb{R}\langle V \times W\rangle$ που παράγεται από στοιχεία της μορφής:

$$\begin{aligned} &a(v,w) - (av,w) \qquad && (v,w) + (v',w) - (v+v',w) \\ &a(v,w) - (v,aw) && (v,w) + (v,w') - (v,w+w') \end{aligned}$$

με $a \in \mathbb{R}$, $v, v' \in V$ και $w, w' \in W$. Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$ ως τον χώρο-πηλίκο $\mathbb{R}\langle V \times W\rangle/\mathcal{R}$. Έτσι, η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $(v,w)$, $[(v,w)]_{\mathcal{R}}$, θα συμβολίζεται επίσης και ως $v \otimes w$ και θα καλείται τανυστικό γινόμενο του $v$ με το $w$. Από ορισμό:

$$\begin{aligned} a(v \otimes w) &= (av) \otimes w = v \otimes (aw) \\ v \otimes w + v' \otimes w &= (v + v') \otimes w \\ v \otimes w + v \otimes w' &= v \otimes (w + w') \end{aligned}$$

**Παρατήρηση 3.19.** *Παρότι ο ορισμός 3.53 υπαινίσσεται ότι κάθε στοιχείο του $V \otimes W$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $v \otimes w$ για $v \in V$ και $w \in W$, δεν ισχύει γενικά ότι κάθε στοιχείο του $V \otimes W$ είναι αυτής της μορφής, εκτός και αν ο $V \otimes W$ είναι αναλύσιμος (decomposable).*

**Πρόταση 3.8** (Χαρακτηριστική ιδιότητα των ελεύθερων δχ)**.** *Έστω σύνολο $S$ και δχ $W$. Κάθε απεικόνιση $F : S \to W$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια γραμμική απεικόνιση $\bar{F} : \mathbb{R}\langle S \rangle \to W$.*

**Πρόταση 3.9** (Χαρακτηριστική ιδιότητα των τανυστικών γινομένων)**.** *Έστωσαν $V, W$ πεπερασμένης διάστασης πραγματικοί δχ. Αν $A : V \times W \to Y$ είναι μια διγραμμική απεικόνιση με τιμή σε αυθαίρετο δχ $Y$, τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $\widetilde{A} : V \otimes W \to Y$, τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται: όπου $\pi(v, w) = v \otimes w$.*

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
V \otimes W \arrow[ur, "\widetilde{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Αρχικά, κάθε απεικόνιση $A : V \times W \to Y$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια γραμμική απεικόνιση $\bar{A} : \mathbb{R}\langle V \times W \rangle \to Y$ από πρόταση 3.8. Αυτή η απεικόνιση χαρακτηρίζεται από το γεγονός οτι $\bar{A}(v, w) = A(v, w)$, όταν $(v, w) \in V \times W \subset \mathbb{R}\langle V \times W \rangle$. Καθώς $A$ διγραμμική, ο υπόχωρος $\mathcal{R}$ περιέχεται στον πυρήνα της $\bar{A}$, γιατί:

$$\bar{A}(av, w) = A(av, w) = aA(v, w) = a\bar{A}(v, w) = \bar{A}(a(v, w))$$

όπου αντίστοιχα εργαζόμαστε και για τις εκφράσεις των υπόλοιπων στοιχείων που παράγουν τον $\mathcal{R}$. Επομένως, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\widetilde{A} : \mathbb{R}\langle V \times W \rangle / \mathcal{R} \to Y$, όπου από ορισμό 3.53 ισχύει $\mathbb{R}\langle V \times W \rangle / \mathcal{R} = V \otimes W$, η οποία επιτρέπει τη μεταθετικότητα του διαγράμματος, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $\widetilde{A} \circ \pi = A$. Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε στοιχείο του $V \otimes W$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $v \otimes w$ και η $\widetilde{A}$ προσδιορίζεται μοναδικά για τέτοια στοιχεία, καθώς $\widetilde{A}(v \otimes w) = \bar{A}(v, w) = (v, w)$. $\square$

**Πρόταση 3.10.** *Έστωσαν $V, W, X$ πεπερασμένης διάστασης πραγματικοί δχ.*

*i) Το τανυστικό γινόμενο $V^* \otimes W^*$ είναι κανονικά (canonically) ισομορφικό με τον χώρο $B(V, W)$ των διγραμμικών απεικονίσεων $V \times W \to \mathbb{R}$.*

*ii) Αν $\{e_i\}$ είναι μια βάση του $V$ και $\{f_j\}$ είναι μια βάση του $W$, τότε το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής $e_i \otimes f_j$ είναι μια βάση του $V \otimes W$, ο οποίος συνεπώς έχει διάσταση ίση με $\dim V \cdot \dim W$.*

*iii) Υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $V \otimes (W \otimes X) \to (V \otimes W) \otimes X$ με $v \otimes (w \otimes x) \mapsto (v \otimes w) \otimes x$.*

*Απόδειξη.*

i) Κατασκευάζουμε τον ισομορφισμό $V^* \otimes W^* \to B(V, W)$ με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $\phi : V^* \times W^* \to B(V, W)$ μια απεικόνιση με τιμή $\phi(\omega, \xi)$ και τιμή της τιμής που δίνεται από $\phi(\omega, \xi)(v, w) = \omega(v)\eta(w)$. Καθώς:

$$\phi(a\omega + a'\omega', \eta)(v, w) = (a\omega + a'\omega')(v)\eta(w) = a\omega(v)\eta(w) + a'\omega'(v)\eta(w)$$

δηλαδή $\phi(a\omega + a'\omega', \eta)(v, w) = (a\phi(\omega, \eta) + a'\phi(\omega', \eta))(v, w)$ και το ίδιο ισχύει και για το δεύτερο όρισμα, έπεται ότι $\phi$ διγραμμική. Από πρόταση 3.9 υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\widetilde{\phi} : V^* \otimes W^* \to B(V, W)$. Για να δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός, θα κατασκευάσουμε αρχικά την αντίστροφη της $\phi$. Έστω $\{e_i\}$ και $\{f_j\}$ βάσεις των $V$ και $W$ αντίστοιχα με $\{\varepsilon^i\}$ και $\{\varphi^j\}$ τις αντίστοιχες δυϊκές βάσεις. Από ορισμό 3.53 είδαμε ότι κάθε στοιχείο του $V^* \otimes W^*$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $\omega \otimes \xi$ για $\omega \in V^*$ και $\xi \in W^*$, έτσι ώστε κάθε $\tau \in V^* \otimes W^*$ να γράφεται ως $\tau = \tau_{ij}\varepsilon^i \otimes \varphi^j$.

Ορίζουμε μια απεικόνιση $\psi : B(V, W) \to V^* \otimes W^*$ με $\psi(b) = b(e_k, f_l)\varepsilon^k \otimes \varphi^l$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\psi \circ \widetilde{\phi} = \mathrm{id}$. Έτσι:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \widetilde{\phi})(\tau) &= \widetilde{\phi}(\tau)(e_k, f_l)\varepsilon^k \otimes \varphi^l = \tau_{ij}\widetilde{\phi}(\varepsilon^i \otimes \varphi^j)(e_k, f_l)\varepsilon^k \otimes \varphi^l \\ &= \tau_{ij}\phi(\varepsilon^i, \varphi^j)(e_k, f_l)\varepsilon^k \otimes \varphi^l = \tau_{ij}\varepsilon^i(e_k)\varphi^j(f_l)\varepsilon^k \otimes \varphi^l \\ &= \tau_{ij}\delta^i_k\delta^j_l\varepsilon^k \otimes \varphi^l = \tau_{ij}\varepsilon^i \otimes \varphi^j = \tau\end{aligned}$$

και το ζητούμενο αποδεικνύεται. Θέλουμε επίσης $\widetilde{\phi} \circ \psi = \mathrm{id}$. Θα έχουμε για $b \in B(V, W)$:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\phi} \circ \psi)(b)(v, w) &= b(e_k, f_l)\widetilde{\phi}(\varepsilon^k \otimes \varphi^l)(v, w) = b(e_k, f_l)\phi(\varepsilon^k, \varphi^l)(v, w) \\ &= b(e_k, f_l)\varepsilon^k(v)\varphi^l(w) = b(e_k, f_l)v^i\delta^k_i w^j\delta^l_j \\ &= b(e_k, f_l)v^k w^l = b(v, w)\end{aligned}$$

και άρα πράγματι $\psi = \widetilde{\phi}^{-1}$, δηλαδή $\widetilde{\phi}$ ισομορφισμός.

ii) Είδαμε ότι κάθε στοιχείο του $V^* \otimes W^*$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $\varepsilon^i \otimes \varphi^j$. Επίσης, καθώς είπαμε ότι κάθε πολυγραμμική μορφή καθορίζεται μοναδικά από τη δράση της σε στοιχεία της βάσης, εύκολα παρατηρούμε ότι $\dim B(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ και άρα για διαστατικούς λόγους, το σύνολο $\{\varepsilon^i \otimes \varphi^j\}$ είναι βάση του $V^* \otimes W^*$, από όπου έπεται ότι το αρχικό $\{e_i \otimes f_j\}$ θα είναι βάση του $V \otimes W$.

iii) Κατασκευάζουμε τον ισομορφισμό μεταξύ των $V \otimes (W \otimes X)$ και $(V \otimes W) \otimes X$ με τον ακόλουθο τρόπο. Ορίζουμε για κάθε $x \in X$ μια απεικόνιση $\alpha_x : V \times W \to V \otimes (W \otimes X)$ με $\alpha_x(v, w) = v \otimes (w \otimes x)$, η οποία είναι προφανώς διγραμμική. Έτσι, από πόρισμα 3.9 υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\widetilde{\alpha}_x : V \otimes W \to V \otimes (W \otimes X)$ με $\widetilde{\alpha}_x(v \otimes w) = v \otimes (w \otimes x)$. Αντίστοιχα, μια απεικόνιση $\beta : (V \otimes W) \times X \to V \otimes (W \otimes X)$ με $\beta(\tau, x)$ για $\tau \in V \otimes W$, είναι επίσης διγραμμική και κατά τα γνωστά υπάρχει μοναδική $\widetilde{\beta} : (V \otimes W) \otimes X \to V \otimes (W \otimes X)$ με $\widetilde{\beta}((v \otimes w) \otimes x) = v \otimes (w \otimes x)$. Καθώς $\dim((V \otimes W) \otimes X) = \dim(V \otimes (W \otimes X))$, η $\widetilde{\beta}$ είναι επί και εφόσον οι $V, W, X$ έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε είναι και 1-1, δηλαδή $\widetilde{\beta}$ ισομορφισμός.

□

**Πόρισμα 3.5.** *Αν $V$ είναι πραγματικός δχ πεπερασμένης διάστασης, τότε ο τανυστικός χώρος τύπου $(0, k)$ στον $V$ είναι κανονικά ισομορφικός με το $k$-φορές τανυστικό γινόμενο του $V^*$ με τον εαυτό του, δηλαδή ${T^0}_k V \cong V^*(\otimes^k)$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε μια απεικόνιση $\phi : V^*(\times^k) \to {T^0}_k V$, η οποία είναι πολυγραμμική και κατά τα γνωστά υπάρχει μοναδική $\widetilde{\phi} : V^*(\otimes^k) \to {T^0}_k V$, η οποία αποδεικνύεται με τη μέθοδο της απόδειξης της πρότασης 3.10-i ότι είναι ισομορφισμός. □

**Παρατήρηση 3.20.** *Το παραπάνω πόρισμα περιγράφει τη σχέση μεταξύ του αφηρημένου τανυστικού γινομένου δχ και των συγκεκριμένων ομογενών τανυστών βαθμού* $(0,k)$ *που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα.*

**Ορισμός 3.54.** Ορίζουμε για κάθε πεπερασμένης διάστασης πραγματικό δχ τον τανυστικό χώρο τύπου $(k,0)$ ή τον χώρο των *ανταλλοίωτων* $k$-τανυστών ως ${T^k}_0 V = V(\otimes^k)$. Λόγω της κανονικής ταυτοποίησης του $V$ με τον $V^{**}$ και του πορίσματος 3.5, κάθε στοιχείο του ${T^k}_0V$ μπορεί να ταυτοποιηθεί κανονικά με μια πολυγραμμική συνάρτηση $V^*(\times^k) \to \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, ${T^1}_0 \cong V^{**} \cong V$ καλείται και χώρος των ανταλλοίωτων διανυσμάτων (ορολογία περισσότερο δόκιμη στη φυσική).

**Ορισμός 3.55.** Ορίζουμε για $k.l \in \mathbb{N}$ τον τανυστικό χώρο τύπου $(l,k)$ ή τον χώρο των μικτών τανυστών βαθμού $(l,k)$ ως:

$$T^l{}_k V = V(\otimes^l) \otimes V^*(\otimes^k)$$

Ο $T^l{}_kV$ μπορεί να ταυτοποιηθεί κανονικά με το σύνολο όλων των πολυγραμμικών απεικονίσεων:

$$V^*(\times^l) \times V(\times^k) \to \mathbb{R}$$

## 3.8. *Συμμετρικοί Τανυστές, εναλλασσόμενοι τανυστές και διαφορικές μορφές*

Θα αναφερθούμε τώρα σε συναλλοίωτους (συμμετρικούς) τανυστές, αλλά αντίστοιχα ισχύουν και για ανταλλοίωτους και μικτούς.

**Ορισμός 3.56.** Ένας ομογενής τανυστής βαθμού $(0,k)$ καλείται *συμμετρικός*, αν η τιμή του είναι αναλλοίωτη υπό την ανταλλαγή των ορισμάτων αυτού, δηλαδή $T(\bar{X}_k) = T(\bar{X}'_k)$, όπου $\bar{X}_k \equiv (X_1, \cdots, X_k)$ και $\bar{X}'_k$ είναι το αναμειγμένο $\bar{X}_k$.

**Ορισμός 3.57.** Σημαίνουμε το σύνολο των συμμετρικών συναλλοίωτων $k$-τανυστών στον $V$ με $\Sigma^0{}_kV$. Πρόκειται για διανυσματικό υπόχωρο του $T^0{}_kV$. Ορίζουμε τη φυσική προβολή $\mathrm{Sym} : T^0{}_kV \to \Sigma^0{}_kV$, η οποία καλείται *συμμετρικοποίηση* και δίνεται ακολούθως. Αρχικά, σημαίνουμε με $S(k)$ τη συμμετρική ομάδα που είναι η ομάδα των μεταθέσεων του $\{1 \cdots k\}$. Αν $T \in T^0{}_kV$ και $\sigma \in S_k$, τότε ορίζουμε έναν νέο τανυστή $T_\sigma \in T^0{}_kV$ ως $T_\sigma(\bar{X}_k) = T(\bar{X}_{\sigma(k)})$, όπου $\bar{X}_{\sigma(k)} \equiv (X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)})$. Έτσι, ορίζουμε τελικά:

$$\mathrm{Sym}\, T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} T_\sigma$$

**Λήμμα 3.12.**

*i) Για κάθε* $T \in T^0{}_kV$, $\mathrm{Sym}\, T$ *είναι συμμετρικός.*

*ii) Ο* $T$ *είναι συμμετρικός, αν-ν* $\mathrm{Sym}\, T = T$.

*Απόδειξη.*

i) Έστω $T \in T^0{}_kV$ και $\pi \in S(k)$. Τότε:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Sym}\, T)(\bar{X}_{\pi(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} T_\sigma(\bar{X}_{\pi(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} T(\bar{X}_{\sigma(\pi(k))}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} T_{\sigma\pi}(\bar{X}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S(k)} T_\tau(\bar{X}_k) \\ &= (\mathrm{Sym}\, T)(\bar{X}_k)\end{aligned}$$

όπου $\tau = \sigma\pi$ και αφού $\tau$ δρα σε όλο το $\{1, \cdots, k\}$, όπως και το $\sigma$, αντικαταστήσαμε την άθροιση στα $\sigma$ με άθροιση στα $\tau$. Επομένως, $\mathrm{Sym}\, T$ συμμετρικός.

ii) Αν $T$ συμμετρικός, τότε $T = T_\sigma$ και άρα $\operatorname{Sym} T = T$. Αντίστροφα, αν $\operatorname{Sym} T = T$, τότε $T$ συμμετρικός, αφού αποδείξαμε ότι $\operatorname{Sym} T$ συμμετρικός.

□

**Ορισμός 3.58.** Αν $S \in \Sigma^0{}_k V$ και $T \in \Sigma^0{}_l V$, ορίζουμε το συμμετρικό γινόμενο ως τον $ST \in \Sigma^0{}_{k+l} V$. Γενικά, $ST = \operatorname{Sym}(S \otimes T)$ και η δράση του σε $k+l$ διανύσματα θα δίνεται από:

$$ST(\bar{X}_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} S(\bar{X}_{\sigma(k)}) T(\bar{X}_{\sigma(k:l)})$$

**Πρόταση 3.11** (Ιδιότητες του συμμετρικού γινομένου)**.**

*i) Το συμμετρικό γινόμενο είναι συμμετρικό και διγραμμικό, δηλαδή για κάθε $R, S, T$ συμμετρικό και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:*

$$ST = TS \qquad (aR + bS)T = aRT + bST = T(aR + bS)$$

*ii) Αν $\omega, \eta$ είναι συνδιανύσματα, τότε $\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$.*

*Απόδειξη.*

i) Ισχύει $ST = TS$, καθώς ο πολλαπλασιασμός $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στον $\mathbb{R}$ έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή $S(\bar{X}_{\sigma(k)}) T(\bar{X}_{\sigma(k:l)}) = T(\bar{X}_{\sigma(l)}) S(\bar{X}_{\sigma(l:k)})$. Προφανής και η άλλη σχέση από κατά σημείο άθροιση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

ii) Αν $\omega, \eta \in T^0{}_1 V$, τότε $\omega\eta = \operatorname{Sym}(\omega \otimes \eta)$ και:

$$(\omega\eta)(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(\omega(X_1)\eta(X_2) + \omega(X_2)\eta(X_1)) = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)(X_1, X_2)$$

δηλαδή για τους γνωστούς λόγους, $\omega\eta = \frac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$.

□

**Ορισμός 3.59.** Ένας τανυστής $T \in T^0{}_k V$, όπου $V$ δχ πεπερασμένης διάστασης, καλείται *εναλλασσόμενος*, αν ισχύει ότι $T(\bar{X}_k) = (\operatorname{sgn} \sigma) T(\bar{X}_{\sigma(k)})$, όπου $\operatorname{sgn} \sigma = \pm 1$ για άρτιο και περιττό πλήθος ανταλλαγών αντίστοιχα.

**Λήμμα 3.13.** *Έστω $\Omega \in T^0{}_k V$ με την ιδιότητα $\Omega(\bar{X}_k) = 0$, όταν $X_1, \cdots, X_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε, ο $\Omega$ είναι εναλλασσόμενος.*

*Απόδειξη.* Από υπόθεση, $\Omega$ μηδενίζεται όταν τουλάχιστον δύο εκ των ορισμάτων του είναι ίδια. Αν συμβολίσουμε $\bar{X}^l_k = \{X_1, \cdots, X_l, \cdots, X_l, \cdots, X_k\}$ και θέσουμε $X_l = X_i + X_j$, τότε:

$$\Omega(\bar{X}^l_k) = \Omega(\bar{X}^i_k) + \Omega(\bar{X}_k) + \Omega(\bar{X}_k\{i \leftrightarrow j\}) + \Omega(\bar{X}^j_k) = \Omega(\bar{X}_k) + \Omega(\bar{X}_k\{i \leftrightarrow j\}) = 0$$

δηλαδή $\Omega(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_j, \cdots, X_k) = -\Omega(X_1, \cdots, X_j, \cdots, X_i, \cdots, X_k)$ και άρα πράγματι, $\Omega$ είναι εναλλασσόμενος. □

**Παρατήρηση 3.21.** *Κάθε εναλλασσόμενος συναλλοίωτος $k$-τανυστής είναι μια πλήρως αντισυμμετρική διγραμμική μορφή στον $V$. Κάθε $T \in T^0{}_2 V$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός εναλλασσόμενου και ενός συμμετρικού τανυστή, καθώς:*

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)) + \frac{1}{2}(T(X, Y) + T(Y, X)) =: A(X, Y) + S(X, Y)$$

*όπου $S = \operatorname{Sym} T$. Αυτό δεν ισχύει για τανυστές μεγαλύτερου βαθμού.*

**Ορισμός 3.60.** Θα σημαίνουμε τον χώρο των εναλλασσομένων τανυστών τύπου $(0,k)$ στον $V$ με $A^0{}_kV$, όπου $V$ δχ πεπερασμένης διάστασης. Ο $A^0{}_kV$ θα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $T^0{}_kV$.

**Ορισμός 3.61.** Ορίζουμε την προβολή $\operatorname{Alt}: T^0{}_kV \to A^0{}_kV$, η οποία καλείται *εναλλασσόμενη προβολή*, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\operatorname{Alt} T = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S(k)} (\operatorname{sgn} \sigma) T_\sigma$$

**Λήμμα 3.14** (Ιδιότητες της εναλλασσόμενης προβολής)**.**

*i) Για κάθε τανυστή $T$, η $\operatorname{Alt} T$ είναι εναλλασσόμενος τανυστής.*

*ii) Ο $T$ είναι εναλλασσόμενος, αν-ν $\operatorname{Alt} T = T$.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με την απόδειξη του λήμματος 3.12. □

**Ορισμός 3.62.** Έστω $k$ θετικός ακέραιος. Μια διατεταγμένη $k$-άδα $I = (i_1, \cdots, i_k)$ θετικών ακεραίων καλείται *πολυδείκτης* μήκους $k$. Αν $I, J$ είναι πολυδείκτες, τέτοιοι ώστε ο $J$ να προκύπτει από τον $I$ μέσω της μετάθεσης αυτού με $\sigma \in S(k)$, δηλαδή υπό την έννοια ότι $j_r = i_{\sigma(r)}$ για $r = 1, \cdots, k$, τότε γράφουμε $J = \sigma I$. Έστωσαν $J, I$ πολυδείκτες μήκους $k$. Ορίζουμε:

$$\delta_I^J = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sigma & I, J \text{ δεν έχουν επαναλαμβανόμενο δείκτη και } J = \sigma I \text{ για } \sigma \in S(k) \\ 0 & I \text{ ή } J \text{ έχουν επαναλαμβανόμενο δείκτη ή ο } J \text{ δεν είναι μετάθεση του } I \end{cases}$$

το οποίο καλούμε *γενικευμένο δέλτα του Kronecker.*

**Ορισμός 3.63.** Έστω $V$ δχ διάστασης $n$ και $(\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n)$ η δυϊκή βάση του $V^*$. Θα ορίσουμε μια συλλογή από εναλλασσόμενους τανυστές στον $V$ που γενικεύουν την συνάρτηση της ορίζουσας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε πολυδείκτη $I = (i_1, \cdots, i_k)$, τέτοιον ώστε $i_r \in \{1, \cdots, n\}$, ορίζουμε έναν $\varepsilon^I \in T^0{}_kV$ ως:

$$\varepsilon^I(\bar{X}_k) = \det\bigl(\varepsilon^{i_r}(X_l)\bigr) = \det\bigl(X_l^{i_r}\bigr)$$

όπου $(X_l^{i_r})$ ο πίνακας που σχηματίζουν τα στοιχεία $X_l^{i_r} = \varepsilon^{i_r}(X_l)$ για $r, l = 1, \cdots, k$. Καθώς η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο σε κάθε εναλλαγή στήλης (ή γραμμής), είναι φανερό ότι $\varepsilon^I$ εναλλασσόμενος. Θα καλούμε τον $\varepsilon^I$ *στοιχειώδη εναλλασσόμενο τανυστή* βαθμού $(0,k)$.

**Λήμμα 3.15.** *Έστω $\{e_i\}$ μια βάση του $V$ και $\{\varepsilon^j\}$ η δυϊκή βάση του $V^*$. Έστω επίσης $\varepsilon^I$, ορισμένο όπως πριν.*

*i) Αν $I$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε $\varepsilon^I = 0$.*

*ii) Αν $J = \sigma I$ για κάποιο $\sigma \in S(k)$, τότε $\varepsilon^I = (\operatorname{sgn} \sigma)\varepsilon^J$.*

*iii) Η τιμή του $\varepsilon^I$ για όρισμα μια ακολουθία διανυσμάτων βάσης, δίνεται από $\varepsilon^I(\bar{e}_{j_k}) = \delta_J^I$, όπου $r = 1, \cdots, k$.*

*Απόδειξη.*

i) Αν $I$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε ο $(X_l^{i_r})$ έχει δύο ίδιες γραμμές, οπότε η ορίζουσα του θα μηδενίζεται.

ii) Αν ο $J$ προκύπτει από μετάθεση του $I$, τότε η ορίζουσαν του $(X_l^{i_r})$ θα έχει την ίδια απόλυτη τιμή με την ορίζουσα του $(X_l^{j_r})$, αφού τα στοιχεία των πινάκων θα είναι ίδια. Καθώς όμως $J = \sigma I$, ο $(X_l^{j_r})$ θα προκύπτει από εναλλαγή γραμμών του $(X_l^{i_r})$ και άρα οι ορίζουσες των δύο θα διαφέρουν κατά ένα πρόσημο, δηλαδή $\varepsilon^I = (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^J$, όπου $\operatorname{sgn}\sigma = \pm 1$ για άρτιες και περιττές εναλλαγές γραμμών αντίστοιχα.

iii) Θεωρούμε διαφορετικές περιπτώσεις. Αρχικά, αν $I$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε από i ισχύει ότι $\varepsilon^I = 0$. Από την άλλη, αν $\bar{e}_{j_r}$ έχει κοινά στοιχεία, δηλαδή $J$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε, καθώς $\varepsilon^I$ εναλλασσόμενος, είδαμε ότι θα ισχύει η σχέση $\varepsilon^I(\bar{e}^l_{j_k}) = 0$, όπου $\bar{e}^l_{j_k}$ είναι η συλλογή $\bar{e}_{j_k}$ με επαναλαμβανόμενο το $l$-οστό στοιχείο. Αν κανένας από τους $I, J$ δεν έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη και ο $J$ δεν είναι μετάθεση του $I$, τότε ο πίνακας $(\varepsilon^{i_r}(e_{j_l})) = (\delta^{i_r}_{j_l})$ για $r, l = 1, \cdots, k$, θα έχει τουλάχιστον μια μηδενική γραμμή και άρα, η ορίζουσα του θα μηδενίζεται. Έπειτα, αν $J = I$, τότε $\varepsilon^I(\bar{e}_{j_k}) = 1$, δηλαδή θα είναι η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα. Τέλος, αν $J = \sigma I$, τότε από ii θα ισχύει ότι $\varepsilon^I(\bar{e}_{j_k}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^J(\bar{e}_{j_k}) = \operatorname{sgn}\sigma$, αφού επιπλέον $\varepsilon^J(\bar{e}_{j_k})$ θα είναι, όπως είδαμε, η ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα.

□

**Ορισμός 3.64.** Ένας πολυδείκτης $I$ καλείται *αύξων*, αν $i_1 < \cdots < i_k$. Θα σημαίνουμε με τονούμενο άθροισμα, την άθροιση μόνο σε αύξοντες πολυδείκτες, δηλαδή π.χ:

$$\sum_I{}' T_I \varepsilon^I = \sum_{\{I : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}} T_I \varepsilon^I$$

**Λήμμα 3.16.** *Έστω $V$ δχ διάστασης $n$. Αν $\{\varepsilon^i\}$ βάση του $V^*$, τότε η συλλογή $\{\varepsilon^I \mid I$ αύξων$\}$ είναι μια βάση του ${A^0}_k V$. Επομένως:*

$$\dim {A^0}_k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\{e_i\}$ μια βάση του $V$, τέτοια ώστε $\{\varepsilon^j\}$ η δυϊκή της. Θα συμβολίζουμε για συντομία με $\mathcal{E} = \{\varepsilon^I \mid I \text{ αύξων}\}$ τη συλλογή των στοιχειωδών ομογενών τανυστών βαθμού $(0, k)$ με αύξοντα πολυδείκτη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathcal{E}$ παράγει τον ${A^0}_k V$ και ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω αυθαίρετος $T \in {A^0}_k V$. Για κάθε πολυδείκτη $I$, ορίζουμε έναν πραγματικό αριθμό $T_I$ ως $T_I = T(\bar{e}_{i_k})$. Το γεγονός ότι $T$ εναλλασσόμενος σημαίνει ότι $T_I = 0$, αν $I$ περιέχει επαναλαμβανόμενο δείκτη και ότι $T_J = (\operatorname{sgn}\sigma) T_I$, αν $J = \sigma I$ για κάποιο $\sigma \in S(k)$. Θα έχουμε από λήμμα 3.15 ότι:

$$\sum_I{}' T_I \varepsilon^I(\bar{e}_{j_k}) = \sum_I{}' T_I \delta^I_J = T_J = T(\bar{e}_{j_k})$$

δηλαδή $\sum_I' T_I \varepsilon^I = T$ και άρα $\mathcal{E}$ παράγει τον ${A^0}_k V$.

Έπειτα, για να δείξουμε ότι $\mathcal{E}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, θα υποθέσουμε ότι $\sum_I' T_I \varepsilon^I = 0$ για κάποιους συντελεστές $T_I$. Έστω $J$ αυθαίρετος αύξων πολυδείκτης. Δρώντας κάθε μέλος σε μια $k$-άδα $\bar{e}_{j_k}$, θα έχουμε ότι:

$$0 = \sum_I{}' T_I \varepsilon^I(\bar{e}_{j_k}) = T_J$$

δηλαδή η υπόθεση ισχύει όταν κάθε $T_J = 0$. □

**Παρατήρηση 3.22.** *Συγκεκριμένα, για έναν δχ $V$ διάστασης $n$, συνεπάγεται από το παραπάνω λήμμα ότι $\dim {A^0}_n V = 1$ και ότι ο $\varepsilon^{1\cdots n}$ παράγει τον εναλλασσόμενο τανυστικό χώρο τύπου $(0,n)$ με τη δράση του σε μια συλλογή $\bar{X}_n$ να δίνεται από την ορίζουσα του πίνακα $(X^i_j)$. Καθώς δεν υπάρχουν αύξοντες πολυδείκτες με μήκος μεγαλύτερο από $n$, ο ${A^0}_k V$ για $k > n$ είναι τετριμμένος, δηλαδή ${A^0}_k V = \{0\}$.*

Ας περάσουμε τώρα σε ένα βασικό μέγεθος. Ακριβώς όπως ορίσαμε το συμμετρικό γινόμενο για δύο συμμετρικούς τανυστές $S, T$, το οποίο δίνει τον συμμετρικό τανυστή $ST$, μπορούμε να ορίσουμε ένα αντίστοιχο γινόμενο για εναλλασσόμενους τανυστές. Ένας τρόπος θα ήταν να μιμηθούμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για τους συμμετρικούς τανυστές και να ορίσουμε το γινόμενο των εναλλασσομένων τανυστών $\omega$ και $\eta$ ως $\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$. Θα χρησιμοποιήσουμε έναν διαφορετικό ορισμό, ο οποίος θα δούμε ότι βολεύει καλύτερα στους υπολογισμούς.

**Ορισμός 3.65.** Έστω $\omega \in {A^0}_k V$ και $\eta \in {A^0}_l V$. Ορίζουμε το *εξωτερικό γινόμενο* (exterior product) ή *γινόμενο wedge* του $\omega$ με τον $\eta$ ως τον εναλλασσόμενο ομογενή τανυστή βαθμού $(0, k+l)$:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$$

Ο λόγος της εισαγωγής αυτού του περίεργου συντελεστή με τα παραγοντικά, φαίνεται στο ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 3.17.** *Για οποιουσδήποτε πολυδείκτες $I, J$ με $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ και $J = \{j_1, \cdots j_k\}$, ισχύει ότι $\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ}$, όπου $IJ = \{i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_l\}$*

*Απόδειξη.* Κατά τα γνωστά, λόγω της πολυγραμμικότητας, αρκεί νδο:

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J)(\bar{e}_{p_{k+l}}) = \varepsilon^{IJ}(\bar{e}_{p_{k+l}})$$

για οποιαδήποτε συλλογή διανυσμάτων βάσης $\bar{e}_{p_{k+l}}$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) Έστω ότι ο πολυδείκτης $P = (p_1, \cdots, p_{k+l})$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη. Εύκολα βλέπουμε ότι και τα δύο μέλη της ως άνω εξίσωσης είναι μηδέν.

ii) Έστω ότι ο $P$ περιέχει δείκτη που δεν υπάρχει στους $I, J$. Τότε, από απόδειξη του λήμματος 3.15-iii, έπεται ότι το δεξιό μέλος θα μηδενίζεται. Για το αριστερό μέλος ισχύει:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J)(\bar{e}_{p_{k+l}}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\varepsilon^I \otimes \varepsilon^J)(\bar{e}_{p_{k+l}}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \varepsilon^I(\bar{e}_{p_{\sigma(k)}}) \varepsilon^J(\bar{e}_{p_{\sigma(k:l)}})\end{aligned}$$

και άρα, είτε ο $\varepsilon^I$ θα δρά σε διανύσματα βάσης, των οποίων οι δείκτες δεν θα είναι μετάθεση του $I$, είτε το ίδιο θα ισχύει για τον $\varepsilon^J$. Συνεπώς, το αριστερό μέλος θα μηδενίζεται εξίσου.

iii) Έστω $P = IJ$ και $P$ δεν έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη. Τότε, $\varepsilon^{IJ}(\bar{e}_{p_{k+l}}) = 1$, αφού πρόκειται, όπως δείξαμε, για την ορίζουσα του ταυτοτικού πίνακα. Για το αριστερό μέλος, με βάση τον προηγούμενο υπολογισμό, παρατηρούμε ότι οι μόνοι όροι στην άθροιση που δίνουν μη μηδενικό αποτέλεσμα, είναι όταν το $\sigma$ μεταθέτει ξεχωριστά τους πρώτους $k$ δείκτες και τους τελευταίους $l$ δείκτες του $P$. Αυτό σημαίνει ότι $\sigma$ θα πρέπει να είναι της μορφής $\pi\tau$, όπου $\pi \in S(k)$ μεταθέτει το $\{1, \cdots, k\}$ και $\tau \in S(l)$ μεταθέτει το σύνολο $\{k+1, \cdots, k+l\}$. Καθώς λοιπόν $\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \pi)(\operatorname{sgn} \tau)$, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J)(\bar{e}_{p_{k+l}}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S(k), \tau \in S(l)} (\operatorname{sgn} \pi)(\operatorname{sgn} \tau) \varepsilon^I(\bar{e}_{p_{\pi(k)}}) \varepsilon^J(\bar{e}_{p_{\tau(k:l)}}) \\ &= ((\mathrm{Alt}\, \varepsilon^I)(\bar{e}_{p_k}))(\mathrm{Alt}\, \varepsilon^J)(\bar{e}_{p_{k:l}}) = 1\end{aligned}$$

iv) Έστω ότι ο $P$ είναι μετάθεση του $IJ$. Τότε, μια μετάθεση του $P$ μας επιστρέφει απλά στην περίπτωση iii, καθώς η μετάθεση απλά θα εισάγει το ίδιο πρόσημο και στα δύο μέλη, οπότε το αποτέλεσμα της iii ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.

□

**Πρόταση 3.12** (Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου)**.**

*i) Διγραμμικότητα:*

$$(a\omega + a'\omega') \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + a'(\omega' \wedge \eta)$$
$$\omega \wedge (b\eta + b'\eta') = b(\omega \wedge \eta) + b'(\omega \wedge \eta')$$

*ii) Προσεταιριστικότητα:* $\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$

*iii) Αντιμεταθετικότητα: Για* $\omega \in A^0{}_kV$ *και* $\eta \in A^0{}_lV$, *ισχύει ότι* $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$.

*iv) Αν* $\{\varepsilon^i\}$ *είναι μια βάση του* $V^*$ *και* $I$ *είναι αυθαίρετος πολυδείκτης μήκους* $k$, *τότε ισχύει ότι* $\varepsilon^I = \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$.

*v) Για οποιαδήποτε συνδιανύσματα* $\omega^1, \cdots, \omega^k$ *και διανύσματα* $\bar{X}_k$, *ισχύει:*

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(\bar{X}_k) = \det(\omega^i(X_j))$$

*Απόδειξη.*

i) Καθώς το τανυστικό γινόμενο είναι διγραμμική απεικόνιση και η Alt είναι γραμμική, η διγραμμικότητα είναι προφανής.

ii) Η προσεταιριστικότητα είναι εξίσου προφανής, καθώς από λήμμα 3.17:

$$(\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J) \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJ} \wedge \varepsilon^K = \varepsilon^{IJK} = \varepsilon^I \wedge \varepsilon^{JK} = \varepsilon^I \wedge (\varepsilon^J \wedge \varepsilon^K)$$

iii) Αν $\sigma$ είναι η μετάθεση $IJ \to JI$, τότε:

$$\varepsilon^I \wedge \varepsilon^J = \varepsilon^{IJ} = (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^{JI} = (\operatorname{sgn}\sigma)\varepsilon^J \wedge \varepsilon^I$$

όπου $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{kl}$, αφού το $\sigma$ μπορεί να αναλυθεί σε μια σύνθεση $kl$ μεταθέσεων, καθώς κάθε δείκτης του $I$ πρέπει να περάσει πάνω από τους $l$ δείκτες του $J$ και αυτό να γίνει για $k$ δείκτες του $I$. Η αντιμεταθετικότητα έπεται από τη διγραμμικότητα.

iv) Αποδεικνύεται με επαγωγή, χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.17.

v) Έστω ότι $\omega^r = \varepsilon^{i_r}$, όπου $\{\varepsilon^k\}$ είναι η δυϊκή βάση του $V^*$, τότε το δεξί μέλος είναι $\varepsilon^I$ και άρα, παίρνουμε τη σχέση iv. Καθώς κάθε συνδιάνυσμα μπορεί να γραφεί στη βάση του, η πρόταση v ισχύει.

□

**Παρατήρηση 3.23.** *Λόγω της πρότασης 3.12-iv, θα χρησιμοποιούμε κατά το δοκούν και τους δύο συμβολισμούς, δηλαδή είτε* $\varepsilon^I$, *είτε* $\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_k}$.

Πολλοί συγγραφείς αναφέρονται στον $A^0{}_kV$ και ως $\Lambda^k{}_0V^*$ και κάποιοι **[21]** ακόμη και ως $\Lambda^0{}_kV$, όπου $\Lambda^k{}_0V$ είναι ο δχ που καλείται $k$-οστή εξωτερική δύναμη του $V$. Αποδεικνύεται **[37]** ότι $A^0{}_kV \cong (\Lambda^k{}_0V)^*$ και ότι $(\Lambda^k{}_0V)^* \cong \Lambda^k{}_0V^*$ και άρα πράγματι η χρήση οποιουδήποτε συμβολισμού είναι δόκιμη, αφού οι συμβολισμοί είναι ισοδύναμοι. Για την πληρότητα της υπόθεσης, θα δώσουμε απλά έναν ορισμό της εξωτερικής άλγεβρας και της $k$-οστής δύναμης.

**Ορισμός 3.66.** Το ευθύ άθροισμα στα $k, l$ των τανυστικών χώρων τύπου $(k, l)$, αν εφοδιαστεί με κατά σημείο άθροιση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό, είναι δχ, ο οποίος εφοδιασμένος με τανυστικό γινόμενο, καλείται *τανυστική άλγεβρα* στον $V$ και συμβολίζεται με:

$$TV = \bigoplus_{k,l} {T^k}_l V$$

Τα στοιχεία της $TV$ είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων των διαφόρων ${T^k}_l V$ υπεράνω του σώματος και καλούνται προφανώς τανυστές, ενώ η $TV$ είναι βαθμωτή (graded) ως άλγεβρα.

**Ορισμός 3.67.** Σημαίνουμε με $CV$ την υποάλγεβρα $\oplus_k {T^k}_0 V$ της $TV$. Έστω $IV$ αμφίπλευρο ιδεώδες στην $CV$, το οποίο παράγεται από στοιχεία της μορφής $v \otimes v$ για $v \in V$. Θέτουμε ${I^k}_0 V = IV \cap {T^k}_0 V$ και άρα θα ισχύει ότι $IV = \oplus_k {I^k}_0 V$, δηλαδή $IV$ βαθμωτό ιδεώδες στην $CV$. Ο δχ-πηλίκο $\Lambda V = CV/IV$, όπου ${\Lambda^k}_0 V = {T^k}_0 / {I^k}_0 V$ για $k \geq 2$, ${\Lambda^0}_0 V$ είναι το σώμα και ${\Lambda^1}_0 V = V$ με:

$$\Lambda V = \bigoplus_k {\Lambda^k}_0 V = \mathbb{R} \oplus V \bigoplus_{k=2}^{\infty} {\Lambda^k}_0 V$$

εφοδιασμένος με πολλαπλασιασμό το εξωτερικό γινόμενο, θα καλείται (βαθμωτή) *εξωτερική άλγεβρα* του $V$. Ο ${\Lambda^k}_0 V$ θα καλείται *$k$-οστή εξωτερική δύναμη* του $V$.

Ας περάσουμε μετά από αυτήν τη σύντομη παράκαμψη στο πιο σημαντικό μέρος αυτού του κεφαλαίου, τις διαφορικές μορφές.

**Ορισμός 3.68.** Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα διάστασης $n$. Ο διανυσματικός υπόχωρος του $T^k M = \dot{\cup}_{p \in M} {T^0}_k(T_p M)$, ο οποίος αποτελείται από εναλλασσόμενους (ομογενείς) τανυστές βαθμού $(0, k)$, θα συμβολίζεται με:

$$A^k M = \dot{\bigcup_{p \in M}} {A^0}_k(T_p M)$$

και αποτελεί λεία υποδέσμη της $T^k M \to M$.

**Ορισμός 3.69.** Μια λεία τμήση της $A^k M \to M$ καλείται *διαφορική $k$-μορφή* ή απλά $k$-μορφή. Είναι απλά ένα λείο τανυστικό πεδίο, του οποίου η τιμή σε κάθε σημείο είναι ένας εναλλασσόμενος τανυστής. Θα σημαίνουμε το σύνολο των τμήσεων της:

$$A^k M \cong \Lambda^{k*} M = \dot{\bigcup_{p \in M}} {\Lambda^k}_0({T^*}_p M)$$

με $\mathcal{A}^k M$, το οποίο θα λέγεται και χώρος των $k$-μορφών. Κάθε $k$-μορφή $\omega$ μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια συντεταγμένων ως:

$$\omega = {\sum_I}' \omega_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = {\sum_I}' \omega_I \mathrm{d}x^I$$

όπου οι συντελεστές $\omega_I$ είναι λείες συναρτήσεις, δηλαδή στοιχεία του $\mathcal{C}^\infty M$ που ορίζονται στη γειτονιά της συντεταγμένης.

**Παρατήρηση 3.24.** *Για τις διαφορικές μορφές και πάντα με τη βοήθεια συντεταγμένων, το λήμμα 3.15-iii μεταφράζεται ως:*

$$\mathrm{d}x^I(\bar{\partial}_{j_k}) = \delta^I_J$$

*όπου $\bar{\partial}_{j_k} \equiv (\partial/\partial x^{j_1}, \cdots, \partial/\partial x^{j_k})$ για συντομία. Κατά τα γνωστά, το εξωτερικό γινόμενο μιας $k$-μορφής με μια $l$-μορφή, θα είναι μια $(k+l)$-μορφή, δηλαδή $\wedge : \mathcal{A}^k M \times \mathcal{A}^l M \to \mathcal{A}^{k+l} M$, ενώ μια 0-μορφή είναι απλά μια συνάρτηση με πεδίο τιμών στους πραγματικούς, δηλαδή $\mathcal{A}^0 M = \mathcal{C}^\infty M$. Όταν έχουμε εξωτερικό γινόμενο μιας 0-μορφής $f$ με μια $k$-μορφή $\omega$, θα γράφουμε απλά το σύνηθες βαθμωτό γινόμενο $f\omega$.*

**Ορισμός 3.70.** Έστω $\phi : M \to N$ μια λεία απεικόνιση και $\omega$ μια διαφορική μορφή στην $N$, όπου $M, N$ λείες πολλαπλότητες. Η pull-back $\phi^*\omega$ είναι μια διαφορική μορφή στην $M$, για την οποία ισχύει ότι ισχύει και για κάθε λείο τανυστικό πεδίο, δηλαδή $(\phi^*\omega)(\bar{X}_k) = \omega(\overline{\phi_* X_k})$, όπου $\overline{\phi_* X_k} \equiv (\phi_* X_1, \cdots, \phi_* X_k)$. Συγκεκριμένα, αν $\iota : N \hookrightarrow M$ είναι η απεικόνιση εγκλίσεως μιας εντιθέμενης (immersed) υποπολλαπλότητας, τότε $\omega|_N$ είναι συμβολιστικά ισοδύναμο με $\iota^*\omega$.

**Λήμμα 3.18.** *Έστω λεία $\phi : M \to N$. Τότε:*

*i)* $\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$

*ii) Για κάθε χάρτη ισχύει ότι:*

$$\phi^* \left[ \sum_I{}' \omega_I \mathrm{d}y^I \right] = \sum_I{}' (\omega_I \circ \phi) \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}\big(y^{i_r} \circ \phi\big)$$

*Απόδειξη.*

i) Έστω $\omega \in \mathcal{A}^k N$ και $\eta \in \mathcal{A}^l N$. Τότε:

$$\begin{aligned}
(\phi^*(\omega \wedge \eta))(\bar{X}_{k+l}) = (\omega \wedge \eta)(\overline{\phi_* X_{k+l}}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(\overline{\phi_* X_{\sigma(k)}})\eta(\overline{\phi_* X_{\sigma(k:l)}}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn}\sigma)((\phi^*\omega)(\bar{X}_{\sigma(k)}))(\phi^*\eta)(\bar{X}_{\sigma(k:l)}) \\
&= \frac{(k+l)!}{k!l!} \operatorname{Alt}(\phi^*\omega \otimes \phi^*\eta)(\bar{X}_{k+l}) = (\phi^*\omega \wedge \phi^*\eta)(\bar{X}_{k+l})
\end{aligned}$$

ii) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του λήμματος 3.9 και την i αυτού του λήμματος, εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\phi^* \left[ \sum_I{}' \omega_I \mathrm{d}y^I \right] &= \sum_I{}' (\omega_I \circ \phi) \phi^* \mathrm{d}y^I = \sum_I{}' (\omega_I \circ \phi) \phi^* \left[ \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}y^{i_r} \right] \\
&= \sum_I{}' (\omega_I \circ \phi) \bigwedge_{r=1}^{k} \phi^* \mathrm{d}y^{i_r} = \sum_I{}' (\omega_I \circ \phi) \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}\big(y^{i_r} \circ \phi\big)
\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 3.19.** *Έστω $\phi : M \to N$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $n$-διάστασης. Έστωσαν $x$, $y$ συντεταγμένες σε γειτονιές $U \subseteq M$ και $V \subseteq N$ αντίστοιχα. Έστω επίσης $u \in \mathcal{C}^\infty V$. Τότε, στο $U \cap \phi^{-1}(V)$ ισχύει η σχέση¨¨*

$$\phi^* \left[ u \bigwedge_{k=1}^{n} \mathrm{d}y^k \right] = (u \circ \phi) \det(\partial_i \phi^j) \bigwedge_{k=1}^{n} \mathrm{d}x^k$$

*Απόδειξη.* Καθώς η ίνα του $A^n M$ σε κάθε σημείο παράγεται από $\wedge_{k=1}^n \mathrm{d}x^k$, αρκεί να δείξουμε ότι η δράση και των δύο μελών σε μια συλλογή $\bar{\partial}_n$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.18, θα έχουμε για το αριστερό μέλος ότι:

$$\phi^*\left[u \bigwedge_{k=1}^n \mathrm{d}y^k\right] = (u \circ \phi) \bigwedge_{k=1}^n \mathrm{d}\phi^k$$

όπου $\phi^k \equiv x^k \circ \phi$, ενώ με εφαρμογή της πρότασης 3.12-v θα ισχύει ότι:

$$\left[\bigwedge_{k=1}^n \mathrm{d}\phi^k\right](\bar{\partial}_n) = \det(\mathrm{d}\phi^j(\partial_i)) = \det(\partial_i \phi^j)$$

Επομένως, το αριστερό μέλος θα δίνει $(u \circ \phi)\det(\partial_i \phi^j)$. Από την άλλη, για το δεξί μέλος θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα καθώς $(\wedge_{k=1}^n \mathrm{d}x^k)(\bar{\partial}_n) = \det(\delta_i^j) = 1$. □

Επιθυμούμε τώρα να εισάγουμε την έννοια της εξωτερικής παραγώγου. Είδαμε ότι δεν είναι όλα τα λεία συνδιανυσματικά πεδία διαφορικά συναρτήσεων. Δοθέντος ενός λείου συνδιανυσματικού πεδίου $\omega$, αν υπάρχει λεία συνάρτηση $f$, τέτοια ώστε $\omega = \mathrm{d}f$, τότε $\omega$ είναι σίγουρα κλειστό, δηλαδή $\partial_i \omega_j = \partial_j \omega_i$ για κάθε σύστημα συντεταγμένων. Καθώς από λήμμα 3.10 πρόκειται ουσιαστικά για μια χαρτοανεξάρτητη ιδιότητα, μπορούμε να βρούμε έναν πιο αναλλοίωτο τρόπο να την εκφράσουμε. Αν παρατηρήσουμε ότι $\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j$ είναι αντισυμμετρική ως έκφραση στους $i, j$, μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την $ij$-οστή συνιστώσα ενός εναλλασσόμενου τανυστικού πεδίου. Ορίζουμε έτσι μια 2-μορφή $\mathrm{d}\omega$ ως:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i<j} (\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

και άρα $\omega$ κλειστό, αν-ν $\mathrm{d}\omega = 0$. Καθώς όμως $\mathrm{d}\omega = (\partial_i \omega_j)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$, έπεται ότι:

$$\mathrm{d}\omega = (\partial_i \omega_j)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \sum_{i<j} (\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

**Θεώρημα 3.8** (Εξωτερική παράγωγος). *Σε κάθε λεία πολλαπλότητα $M$, υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $\mathrm{d} : \mathcal{A}^k M \to \mathcal{A}^{k+1} M$ για κάθε $k \geq 0$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

*i) Αν $f \in \mathcal{C}^\infty M$, δηλαδή 0-μορφή, τότε $\mathrm{d}f$ είναι το διαφορικό της $f$, το οποίο ορίζεται κατά τα γνωστά ως $\mathrm{d}f(X) = Xf$.*

*ii) Αν $\omega \in \mathcal{A}^k M$ και $\eta \in \mathcal{A}^l M$, τότε $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$.*

*iii) Ισχύει ότι $\mathrm{d}^2 = 0$. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $k$-μορφή $\omega$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.*

*Απόδειξη.* Θέλουμε να δείξουμε ότι η έκφραση της $\mathrm{d}$ με τη βοήθεια συντεταγμένων θα δίνεται από:

$$\mathrm{d}\left[\sum_I{}' \omega_I \mathrm{d}x^I\right] = \sum_I{}' \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I \tag{3.1}$$

όπου $\mathrm{d}\omega_I$ θα είναι το διαφορικό της συνάρτησης $\omega_I$, το οποίο δίνεται από τη σχέση $\mathrm{d}\omega_I = (\partial_i \omega_I)\mathrm{d}x^i$ (σύμβαση άθροισης στα $i$ εδώ). Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $\mathrm{d}$, η οποία είναι ο γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί τα i,ii,iii. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί την παραπάνω έκφραση για αυθαίρετο χάρτη, η οποία την προσδιορίζει μοναδικά. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι $\mathrm{d}$ είναι τοπική υπό την ακόλουθη έννοια: Αν $\omega$ και $\widetilde{\omega}$ είναι $k$-μορφές, οι οποίες ταυτίζονται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $U$ της $M$, τότε $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\widetilde{\omega}$ στο $U$. Σημαίνοντας τη διαφορά τους με $\eta = \widetilde{\omega} - \omega$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{d}\eta = 0$ στο $U$, αν $\eta$ μηδενίζεται σε αυτό. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρειαστεί να εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης εξογκώματος (bump function). Μια *συνάρτηση εξογκώματος* είναι μια λεία συνάρτηση $\phi \in \mathcal{C}^\infty M$, τέτοια ώστε $\phi = 1$ σε ένα συγκεκριμένο κλειστό υποσύνολο της $M$, έστω $A$ και της οποίας ο φορέας (support) $\operatorname{supp}\phi$ είναι υποσύνολο ενός ανοιχτού υποσυνόλου της $M$, έστω $U$, το οποίο περιέχει το $A$. Τότε λέμε ότι έχουμε μια συνάρτηση εξογκώματος για το $A$, η οποία φέρεται (supported) στο $U$. Ο *φορέας* της $\phi$, $\operatorname{supp}\phi$, είναι η κλειστότητα του συνόλου των σημείων, όπου η $\phi$ είναι μη μηδενική, δηλαδή:

$$\operatorname{supp}\phi = \overline{\{p \in M | \phi(p) \neq 0\}}$$

(η γραμμή της κλειστότητας να μην συγχέεται με τον ανεπίσημο δικό μας φορμαλισμό συντομίας στους προηγούμενους υπολογισμούς). Έστω λοιπόν αυθαίρετο $p \in U$ και $\phi \in \mathcal{C}^\infty M$ μια συνάρτηση εξογκώματος, η οποία είναι ίση με 1 στη γειτονιά του $p$ και φέρεται στο $U$. Τότε, $\phi\eta$ είναι ταυτοτικά μηδέν στην $M$, καθώς στη γειτονιά του $p$ ισχύει $\eta = 0$, ενώ εκτός της γειτονιάς του σημείου έχουμε ότι $\phi = 0$. Επομένως, με χρήση κανόνα γινομένου:

$$0 = \mathrm{d}(\phi\eta)_p = \mathrm{d}\phi_p \wedge \eta_p + \phi(p)\mathrm{d}\eta_p = \mathrm{d}\eta_p$$

αφού $\phi(p)\mathrm{d}\eta_p$ είναι ο μόνος όρος που επιβιώνει από ορισμό, με $\phi(p) = 1$. Εφόσον λοιπόν το $p$ ήταν αυθαίρετο σημείο στο $U$, θα ισχύει ότι $\mathrm{d}\eta = 0$ στο $U$ και πράγματι, το πρώτο βήμα αποδείχτηκε.

Έστω τώρα συντεταγμένη $x$ για γειτονιά $U \subseteq M$. Έστω επίσης $\omega \in \mathcal{A}^k M$, το οποίο γράφεται με τη βοήθεια της $x$ ως $\omega = \sum_I' \omega_I \mathrm{d}x^I$. Θα δείξουμε ότι η (3.1) ισχύει για κάθε $p \in U$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα της επέκτασης, το οποίο λέει ότι για κάθε λεία συνάρτηση $f$ που ορίζεται σε ένα αυθαίρετο κλειστό υποσύνολο $A$ της $M$ και κάθε ανοιχτό $U$ που περιέχει το $A$, υπάρχει λεία $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty M$, τέτοια ώστε $\widetilde{f}|_A = f|_A$ και ο φορέας της, $\operatorname{supp}\widetilde{f}$, να είναι υποσύνολο του $U$, δηλαδή η $\widetilde{f}$ να φέρεται στο $U$. Αυτο αποδεικνύεται, αν παρατηρήσουμε ότι ο λείος χαρακτήρας της $f$ στο $A$ σημαίνει ότι η $f$ είναι επεκτάσιμη σε μια λεία συνάρτηση (που συμβολίζεται ξανά με) $f$ σε κάποια γειτονιά $V$ του $A$. Αντικαθιστώντας το $V$ με το σύνολο $V \cap U$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $V \subseteq U$, οπότε αν $\phi$ είναι μια συνάρτηση εξογκώματος για το $A$ που φέρεται στο $V$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\widetilde{f}(p) = \begin{cases} \phi(p)f(p) & p \in V \\ 0 & p \in M \setminus \operatorname{supp}\phi \end{cases}$$

όπου $\widetilde{f}$ είναι λεία επέκταση της $f$ με φορέα που περιέχεται στο $V$ και άρα, στο $U$. Με βάση λοιπόν αυτό το λήμμα, μπορούμε να επεκτείνουμε στην περίπτωση μας τις συναρτήσεις συντεταγμένης $x^i$ σε λείες συναρτήσεις $\widetilde{x}^i$ σε όλο το $M$, οι οποίες απλά ταυτίζονται με τις $x^i$ σε κάποια γειτονιά του $p$. Αντίστοιχα, επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\omega_I$ σε συναρτήσεις $\widetilde{\omega}_I$ στην $M$, για τις οποίες ισχύουν τα γνωστά περί ταύτισης. Έχουμε έτσι μια $k$-μορφή $\widetilde{\omega} = \sum_I' \widetilde{\omega}_I \mathrm{d}\widetilde{x}^I$, η οποία ορίζεται παντού στην $M$ και ταυτίζεται με την $\omega$ στη γειτονιά του $p$. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της d μαζί με τα i και ii, βρίσκουμε ότι:

$$\mathrm{d}\widetilde{\omega} = \mathrm{d}\left[\sum_I{}' \widetilde{\omega}_I \mathrm{d}\widetilde{x}^I\right] = \sum_I{}' \mathrm{d}\widetilde{\omega}_I \wedge \mathrm{d}\widetilde{x}^I + (-1)^0 \sum_I{}' \widetilde{\omega}_I\, \mathrm{d}\big(\mathrm{d}\widetilde{x}^I\big)$$

αφού $\deg \widetilde{\omega_I} = 0$. Χρησιμοποιώντας ξανά το ii, ο δεύτερος όρος θα μηδενίζεται, καθώς $\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\widetilde{x}^I\big)$ αναπτύσσεται σε ένα άθροισμα, ο κάθε όρος του οποίου θα περιέχει έναν όρο της μορφής $\mathrm{d}\big(\mathrm{d}\widetilde{x}^{i_r}\big)$ και άρα από iii θα είναι μηδέν. Επομένως, εφόσον δείξαμε πιο πάνω ότι d τοπικό, θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}\omega_p = \mathrm{d}\widetilde{\omega}_p = \sum_I{}' \mathrm{d}\widetilde{\omega}_I|_p \wedge \mathrm{d}\widetilde{x}^I_p = \sum_I{}' \mathrm{d}\omega_I|_p \wedge \mathrm{d}x^I_p$$

Αλλά $p$ ήταν εξαρχής αυθαίρετο, οπότε η (3.1) ισχύει για όλο το $U$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\mathrm{d}\omega$ είναι μοναδικά καθορισμένη.

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι ένας τέτοιος τελεστής υπάρχει. Υποθέτουμε ότι η $M$ καλύπτεται από έναν και μόνο χάρτη και ορίζουμε την απεικόνιση $\mathrm{d}$ μέσω της (3.1). Από ορισμό λοιπόν η $\mathrm{d}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί το i. Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί το ii και το iii. Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι $\mathrm{d}\big(f\mathrm{d}x^I\big) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I$ για αυθαίρετο πολυδείκτη $I$, ο οποίος δεν είναι δηλαδή απαραίτητα αύξων. Προφανώς, αν ο $I$ έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε και τα δύο μέλη είναι μηδέν. Αν ο $I$ δεν έχει επαναλαμβανόμενο δείκτη, τότε έστω $\sigma \in S(k)$, τέτοιο ώστε $J = \sigma I$, όπου $J$ αύξων. Τότε:

$$\mathrm{d}\big(f\mathrm{d}x^I\big) = (\operatorname{sgn}\sigma)\,\mathrm{d}\big(f\mathrm{d}x^J\big) = (\operatorname{sgn}\sigma)\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^J = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I$$

οπότε η σχέση ισχύει και πάλι. Για να αποδείξουμε το ii, αρκεί να θεωρήσουμε όρους της μορφής $\omega = f\mathrm{d}x^I$ και $\eta = g\mathrm{d}x^J$, όπου $f, g \in \mathcal{C}^\infty M = \mathcal{A}^0 M$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}\big(f\mathrm{d}x^I \wedge (g\mathrm{d}x^J)\big) = \mathrm{d}\big(fg\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J\big) = \mathrm{d}(fg) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\
&= (f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = \mathrm{d}g \wedge (f\mathrm{d}x^I) \wedge \mathrm{d}x^J + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I \wedge (g\mathrm{d}x^J) \\
&= (-1)^k (f\mathrm{d}x^I) \wedge \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x^J + \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I \wedge (g\mathrm{d}x^J) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

καθώς $\mathrm{d}g, \mathrm{d}f \in \mathcal{A}^1 M$ και από ορισμό, $\mathrm{d}\big(f\mathrm{d}x^I\big) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I$, όπου το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για $\mathrm{d}\big(g\mathrm{d}x^J\big)$.

Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και το iii, αρχικά για την ειδική περίπτωση μιας 0-μορφής, δηλαδή μιας λείας συνάρτησης με πραγματικές τιμές, έστω $f$. Τότε, θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\big((\partial_j f)\mathrm{d}x^j\big) = (\partial^2_{ij} f)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = \sum_{i<j} (\partial^2_{ij} f - \partial^2_{ji} f)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0$$

και άρα, για μια αυθαίρετη $k$-μορφή $\omega$, θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left[{\sum_I}' \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I\right] = {\sum_I}' \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_I) \wedge \mathrm{d}x^I - {\sum_I}' \mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}\big(\mathrm{d}x^I\big) = 0$$

καθώς $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega_I) = 0 = \mathrm{d}\big(\mathrm{d}x^{i_r}\big)$ από τον προηγούμενο υπολογισμό, δεδομένου ότι ισχύει $\omega_I, x^{i_r} \in \mathcal{C}^\infty U$ για κάθε χάρτη $(U, x)$. Τέλος, ας θεωρήσουμε την περίπτωση μιας αυθαίρετης λείας πολλαπλότητας $M$. Σε κάθε γειτονιά συντεταγμένων $U \subseteq M$, υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός τελεστής $\mathrm{d}_U$, ο οποίος ορίζεται όπως παραπάνω και ικανοποιεί τα i, ii και iii. Σε κάθε σύνολο $U \cap U' \neq \varnothing$, οι $\mathrm{d}_U\omega$ και $\mathrm{d}_{U'}\omega$ θα πρέπει να ταυτίζονται λόγω μοναδικότητας. Επομένως, ορίζοντας την $\mathrm{d}\omega$ μέσω της σχέσης (3.1) για κάθε χάρτη, έχουμε έναν ολικά ορισμένο τελεστή $\mathrm{d}$ που ικανοποιεί τα i-iii, ο οποίος καλείται *εξωτερική παραγώγιση* με $\mathrm{d}\omega$ να είναι η *εξωτερική παράγωγος* (exterior derivative) της $\omega$. Η εξωτερική παράγωγος μιας λείας συνάρτησης είναι προφανώς και πάλι το διαφορικό της. □

**Λήμμα 3.20.** *Αν $\phi : M \to N$ είναι μια λεία απεικόνιση, τότε η pull-back $\phi^* : \mathcal{A}^k N \to \mathcal{A}^k M$ μετατίθεται με την $\mathrm{d}$, δηλαδή για κάθε $\omega \in \mathcal{A}^k N$, ισχύει ότι $\phi^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\phi^*\omega)$.*

*Απόδειξη.* Έστω αυθαίρετη $\omega \in \mathcal{A}^k N$. Καθώς η $d$ είναι τοπική, αν ισχύει η σχέση του λήμματος σε μια γειτονιά του κάθε σημείου, τότε θα ισχύει σε όλη την $M$. Σε μια γειτονιά συντεταγμένων, η $\omega$ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα όρων της μορφής $\omega_I \mathrm{d}x^I$, οπότε λόγω γραμμικότητας της $\mathrm{d}$, αρκεί να ελέγξουμε τη σχέση του λήμματος για έναν τέτοιον όρο. Έτσι, για το αριστερό μέλος θα έχουμε ότι:

$$\phi^*\,\mathrm{d}\big(\omega_I \mathrm{d}x^I\big) = \phi^*(\mathrm{d}\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I) = \mathrm{d}(\omega_I \circ \phi) \wedge \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}\big(x^{i_r} \circ \phi\big)$$

ενώ για το δεξιό μέλος θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}\big(\phi^*(\omega_I \wedge \mathrm{d}x^I)\big) = \mathrm{d}\left[(\omega_I \circ \phi) \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}\big(x^{i_r} \circ \phi\big)\right] = \mathrm{d}(\omega_I \circ \phi) \wedge \bigwedge_{r=1}^{k} \mathrm{d}\big(x^{i_r} \circ \phi\big)$$

□

**Ορισμός 3.71.** Κατ' αναλογία με τους ορισμούς στην ενότητα των συνδιανυσματικών πεδίων, θα λέμε ότι μια διαφορική μορφή $\omega \in \mathcal{A}^k M$ είναι κλειστή, αν $\mathrm{d}\omega = 0$ και ακριβής, αν υπάρχει $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}M$, τέτοια ώστε $\omega = \mathrm{d}\eta$. Το γεγονός ότι $\mathrm{d}^2 = 0$ σημαίνει ότι κάθε ακριβής μορφή είναι και κλειστή. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

**Πρόταση 3.13.** *Αν $\omega \in \mathcal{A}^k M$ και $\bar{X}_{k+1}$ μια συλλογή λείων διανυσματικών πεδίων της $M$, τότε:*

$$\mathrm{d}\omega(\bar{X}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(\bar{X}_{k+1} \setminus \{X_i\}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], \bar{X}_{k+1} \setminus \{X_i, X_j\})$$

*όπου $\bar{X}_{k+1} \setminus \{X_i\} = (X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1})$, δηλαδή είναι η συλλογή $\bar{X}_{k+1}$, από την οποία παραλείπεται το στοιχείο $X_i$. Επιπλέον, $[X_i, X_j]$ είναι ο μεταθέτης διανυσματικών πεδίων, ο οποίος δίνεται από $[X, Y] = XY - YX$ και είναι επίσης διανυσματικό πεδίο.*

**Παρατήρηση 3.25.** *Αν $\omega \in \mathcal{A}^1 M$, τότε με βάση την προηγούμενη πρόταση, παίρνουμε την πολύ χρήσιμη σχέση:*

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

# Κεφάλαιο 4

## Θεωρία Lie

Αυτό το κεφάλαιο έχει σκοπό τη μελέτη ομάδων Lie, αλγεβρών Lie και σχετικών εννοιών υπό το πρίσμα της διαφορικής γεωμετρίας, δηλαδή την εξέταση της γεωμετρικής υπόστασης της θεωρίας Lie και των εφαρμογών της. Ο λόγος πίσω από αυτήν την επιλογή, πέρα από το γεγονός ότι η θεωρία Lie (για τη σημερινή μορφή της οποίας είναι υπεύθυνος ο μεγάλος μαθηματικός Élie Cartan) αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα συστατικά της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης, είναι ότι αυτό το κεφάλαιο είναι απαραίτητο, προκειμένου να προχωρήσουμε στην έννοια της κύριας ινώδους δέσμης και τελικά, στην κατασκευή γεωμετριών. Σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να αποτελέσει αυτό το μέρος μια σοβαρή και ολοκληρωμένη προσέγγιση σε αυτό το αχανές πεδίο που λέγεται θεωρία Lie. Η προσέγγιση μας θα είναι εργαλειακής φύσεως, υπό την έννοια ότι θα εισάγουμε εκείνα τα μεγέθη, τα οποία κρίνονται απαραίτητα για την κατανόηση των επόμενων κεφαλαίων. Η βιβλιογραφία που θα χρησιμοποιήσουμε αποτελείται από τα [**37**], [**21**], [**10**], [**29**], [**13**] και [**11**]

### 4.1. *Ομάδες και άλγεβρες Lie*

**Ορισμός 4.1.** Μια *ομάδα Lie $G$* είναι μια λεία πολλαπλότητα $G$, η οποία είναι πίσης ομάδα με την αλγεβρική έννοια και για την οποία ισχύει ότι ο πολλαπλασιασμός $m : G \times G \to G$ με $m(g,h) = gh$ και η απεικόνιση αντιστροφής $i : G \to G$ με $i(g) = g^{-1}$, είναι λείες απεικονίσεις. Καθώς οι λείες απεικονίσεις είναι σίγουρα συνεχείς, η $G$ είναι και *τοπολογική ομάδα*, δηλαδή ένας τοπολογικός χώρος, όπου οι απεικονίσεις του πολλαπλασιασμού και της αντιστροφής είναι συνεχείς.

**Παρατήρηση 4.1.** *Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν μια ομάδα Lie ως τη λεία πολλαπλότητα με δομή ομάδας, τέτοια ώστε η απεικόνιση $G \times G \to G$ με $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ να είναι λεία. Οι δύο ορισμοί είναι απόλυτα ισοδύναμοι, καθώς αυτή η απεικόνιση είναι η σύνθετη απεικόνιση $m \circ (\mathrm{id}_G \times i)$, οπότε αν αυτή είναι λεία, έπεται ότι $m, i$ λείες.*

**Παράδειγμα 4.1.**

i) Ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι ομάδα Lie με πράξη την άθροιση και καλείται ομάδα μετατοπίσεων.

ii) Το γινόμενο $G \times H$, όπου $G, H$ ομάδες Lie, είναι επίσης ομάδα Lie με δομή πολλαπλότητας-γινόμενο και πράξη ομάδας το ευθύ γινόμενο, δηλαδή $(g,h)(g',h') = (gg',hh')$.

iii) Η πολλαπλότητα $GL(n,\mathbb{R})$ όλων των $n \times n$ πραγματικών αντιστρέψιμων πινάκων, είναι ομάδα Lie με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

iv) Έστω $\mathbb{R}^*$ το σύνολο των πραγματικών μη μηδενικών αριθμών και $K$ η πολλαπλότητα-γινόμενο $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Εφοδιασμένη με δομή ομάδας, της οποίας η πράξη δίνεται από τη σχέση $(g,h)(g',h') = (gg', gh'+h)$, η $K$ αποτελεί την ομάδα των αφινικών κινήσεων στο $\mathbb{R}$, καθώς αν ταυτοποιήσουμε το στοιχείο $(g,h)$ της $K$ με την αφινική κίνηση $x \mapsto gx+h$, τότε ο πολλαπλασιασμός στην $K$ είναι σύνθεση αφινικών κινήσεων. Αντίστοιχα, μπορούμε να συνδυάσουμε τον ευκλείδειο $n$-χώρο $\mathbb{R}^n$ και την $GL(n,\mathbb{R})$, σχηματίζοντας μια νέα ομάδα Lie, την αφινική ομάδα $Aff(n,\mathbb{R}) = GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ με πράξη πολλαπλασιασμού που δίνεται από $(A,u)(B,w) = (AB, Aw+u)$ για $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$ και $u, w \in \mathbb{R}^n$. Ο πολλαπλασιασμός αυτός προκύπτει φυσικά, αν ορίσουμε μια δράση της αφινικής ομάδας στον $\mathbb{R}^n$ ως $Aff(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $((A,u),x) \mapsto (A,u)x = Ax+u$ και δούμε ότι:

$$(A,u)((B,w)x) = (A,u)(Bx+w) = ABx + Aw + u = (AB, Aw+u)x$$

Με άλλα λόγια, η $Aff(n,\mathbb{R})$ αποτελείται απο αφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή απεικονίσεις ευθειών του $\mathbb{R}^n$ σε ευθείες του $\mathbb{R}^n$ και μπορούμε να την ορίσουμε ως:

$$Aff(n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in GL(n,\mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Από γνωστό θεώρημα και εφόσον αποδεικνύεται ότι $Aff(n,\mathbb{R})$ είναι κλειστή υποομάδα της $GL(n+1,\mathbb{R})$, η αφινική ομάδα είναι ομάδα Lie με επαγόμενη (από την $GL(n+1,\mathbb{R})$) τοπολογία.

v) Το σύνολο $O(n)$ είναι ομάδα Lie ως υποομάδα της $GL(n,\mathbb{R})$, κληρονομώντας την πράξη ομάδας από αυτήν. Τα στοιχεία της $O(n)$ ικανοποιούν τη σχέση $A^tA = I$, όπου $A \in O(n)$, $A^t$ ο ανάστροφος του $A$ και $I$ ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Ισοδύναμα, η $O(n)$ είναι η ομάδα των γραμμικών τελεστών, οι οποίοι διατηρούν το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$.

**Ορισμός 4.2.** Ένα υποσύνολο $H$ μιας ομάδας Lie $G$ καλείται *υποομάδα Lie* της $G$, αν:

i) Το $H$ είναι υποομάδα της $G$.

ii) Η υποομάδα $H$ έχει τη δομή ομάδας Lie και η απεικόνιση εγκλίσεως $\iota : H \to G$ είναι εμβάπτιση.

**Ορισμός 4.3.** Μια λεία απεικόνιση $\psi : G \to H$ καλείται *ομομορφισμός ομάδων Lie*, αν είναι ομομορφισμός με την αλγεβρική έννοια. Αν η $\psi$ είναι επιπλέον αμφιδιαφόριση, τότε θα καλείται *ισομορφισμός ομάδων Lie*. Τέλος, ο ισομορφισμός $G \to G$ καλείται *αυτομορφισμός* της $G$.

**Παράδειγμα 4.2.** Ένας από τους πιο γνωστούς αυτομορφισμούς ομάδων Lie, είναι ο εσωτερικός αυτομορφισμός $I_g : G \to G$ με $h \mapsto ghg^{-1}$. Για αυτόν ισχύει επιπλέον η σχέση $I_{gh} = I_g \circ I_h$, καθώς $I_{gh}(h') = (gh)h'(gh)^{-1} = g(hh'h^{-1})g^{-1} = g(I_h(h'))g^{-1} = I_g(I_h(h'))$.

**Ορισμός 4.4.** Έστω $G$ μια ομάδα Lie. Τότε, για κάθε στοιχείο $g \in G$, υπάρχει μια απεικόνιση $\mathcal{L}_g : G \to G$ με $h \mapsto gh$, η οποία καλείται *αριστερή μεταφορά* ως προς το $G$. Αντίστοιχα, υπάρχει και η *δεξιά μεταφορά* $\mathcal{R}_g$ με $\mathcal{R}_g(h) = hg$.

**Λήμμα 4.1.** *Οι μεταφορές είναι αμφιδιαφορίσεις.*

*Απόδειξη.* Θα το δείξουμε για την $\mathcal{L}_g$, αλλά τα ίδια θα ισχύουν ανάλογα και για την $\mathcal{R}_g$. Αρχικά, η αριστερή μεταφορά είναι ισομορφισμός, καθώς:

$$(\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_g)(h) = \mathcal{L}_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = eh = h$$

όπου $e$ το ταυτοτικό στοιχείο στην $G$, δηλαδή $\mathcal{L}_g$ είναι 1-1. Όμως, ισχύει επίσης με την ίδια λογική και ότι $(\mathcal{L}_g \circ \mathcal{L}_{g^{-1}})(h) = h$, δηλαδή $\mathcal{L}_g$ είναι επί και τελικά, $\mathcal{L}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g \circ \mathcal{L}_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$, δηλαδή $\mathcal{L}_{g^{-1}}$ είναι η αντίστροφη της $\mathcal{L}_g$. Επιπλέον, $\mathcal{L}_g$ και $\mathcal{L}_{g^{-1}}$ είναι λείες, καθώς υπάρχει $\iota_g : G \to G \times G$ με $h \mapsto (g, h)$ λεία και $\mathcal{L}_g = m \circ \iota_g$, όπου $m$ λεία από ορισμό. □

**Ορισμός 4.5.** Έστω $G$ μια ομάδα Lie και έστω $X$ ένα διανυσματικό πεδίο στην $G$. Τότε, το $X$ καλείται *αριστερά αναλλοίωτο* διανυσματικό πεδίο, αν για κάθε $g \in G$ ισχύει ότι $\mathcal{L}_{g*}X = X \circ \mathcal{L}_g$. Επομένως, αν $X_h \in T_hG$, τότε $\mathcal{L}_{g*} : T_hG \to T_{gh}G$ με $X_h \mapsto X_{gh}$. Με άλλα λόγια, είναι τέτοιο, αν είναι $\mathcal{L}_g$-συσχετισμένο με τον εαυτό του.

**Λήμμα 4.2.** *Κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην $G$ είναι λείο.*

*Απόδειξη.* Έστω $f \in \mathcal{C}^\infty U$, όπου $U$ γειτονιά του σημείου $g \in G$. Έστω επίσης $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ με $\gamma(0) = e$ και $\gamma'(0) = X_e$. Τότε:

$$X_g(f) = (\mathcal{L}_{g*}X_e)(f) = X_e(f \circ \mathcal{L}_g) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ (g\gamma(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ m(g, \gamma(t))$$

και άρα πρόκειται για λεία συνάρτηση του $g$ (ως σύνθεση λείων). □

**Ορισμός 4.6.** Σημαίνουμε το σύνολο όλων των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της $G$ με $\mathrm{Lie}(G)$. Το $\mathrm{Lie}(G)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\Gamma(TG)$, καθώς πρόκειται για διανυσματικά πεδία, δηλαδή τμήσεις της $TG \to G$, τα οποία ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη.

**Πρόταση 4.1.** *Το $\mathrm{Lie}(G)$ είναι γνήσιο υποπρότυπο του $\Gamma(TG)$, το οποίο έχουμε πει ότι είναι ένα $\mathcal{C}^\infty G$-πρότυπο.*

*Απόδειξη.* Αφού $\mathrm{Lie}(G) \subset \Gamma(TG)$, θα πρέπει απλά να δείξουμε ότι οι πράξεις της άθροισης και του γινομένου $\cdot : \mathcal{C}^\infty G \times \Gamma(TG) \to \Gamma(TG)$, με τις οποίες εφοδιάσαμε το $\Gamma(TG)$, είναι κλειστές στο $\mathrm{Lie}(G)$. Αφού η push-forward $\mathcal{L}_{g*}$ είναι γραμμική ως push-forward, θα έχουμε ότι:

$$(\mathcal{L}_{g*}(X + X'))(f) = (X + X')(f \circ \mathcal{L}_G) = (\mathcal{L}_{g*}X + \mathcal{L}_{g*}X')(f) = (X + X')(f)$$

Επιπλέον, για $f, g \in \mathcal{C}^\infty G$ θα ισχύει ότι:

$$(\mathcal{L}_{g*}(f \cdot X))(g) = (f \cdot X)(g \circ \mathcal{L}_g) = f \cdot X(g \circ \mathcal{L}_g) = f \cdot (\mathcal{L}_{g*}X)(g) = f \cdot X(g)$$

δηλαδή $\mathcal{L}_{g*}(f \cdot X) = f \cdot X$ για $X \in \mathrm{Lie}(G)$, οπότε οι πράξεις είναι πράγματι κλειστές στο $\mathrm{Lie}(G)$. Έτσι, το $\mathrm{Lie}(G)$ είναι $\mathcal{C}^\infty(G)$-πρότυπο και επομένως, γνήσιο υποπρότυπο του $\Gamma(TG)$. □

**Ορισμός 4.7.** Μια (αφηρημένη) *άλγεβρα Lie* $\mathfrak{l}$ είναι ένας δχ με σώμα $K$, εφοδιασμένος με μια διγραμμική απεικόνιση $[\![\,,\,]\!] : \mathfrak{l} \times \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$, η οποία καλείται (αφηρημένη) *αγκύλη Lie*. Η αγκύλη Lie είναι αντισυμμετρική, δηλαδή $[\![x, y]\!] = -[\![y, x]\!]$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{l}$, όπως και ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi:

$$[\![x, [\![y, z]\!]]\!] + [\![y, [\![z, x]\!]]\!] + [\![z, [\![x, y]\!]]\!] = 0$$

για κάθε $x, y, z \in \mathfrak{l}$.

**Παράδειγμα 4.3.** Έστω $\mathfrak{l} = \Gamma(TM)$, όπου $M$ λεία πολλαπλότητα. Είδαμε ότι $\Gamma(TM)$ είναι $\mathcal{C}^\infty M$-πρότυπο, δηλαδή πρότυπο πάνω σε $\mathcal{C}^\infty M$ δακτύλιο. Αλλά, αν θεωρήσουμε τον πραγματικό μεταθετικό δακτύλιο διαιρετότητας με πολλαπλασιαστική μονάδα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, τότε $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ένα αλγεβρικό πεδίο και άρα $\Gamma(TM)$ είναι δχ με πραγματικό σώμα. Εφοδιάζοντας αυτόν τον χώρο με $[\![\ ,\ ]\!] = [\ ,\ ]$, όπου $[\ ,\ ]$ είναι ο μεταθέτης διανυσματικών πεδίων, όπως τον ορίσαμε στην αντίστοιχη ενότητα, κατασκευάζουμε μια απειροδιάστατη (αφηρημένη) άλγεβρα Lie, καθώς ο μεταθέτης διανυσματικών πεδίων είναι πράξη διγραμμική, αντισυμμετρική και (με τετριμμένες πράξεις δείχνεται ότι) ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.

**Θεώρημα 4.1.** *Το* $\mathrm{Lie}(G)$, *εφοδιασμένο με* $[\ ,\ ]$, *είναι μια υποάλγεβρα της* $\Gamma(TG)$ *με* $\mathrm{Lie}(G)$ *και* $\Gamma(TG)$ *να είναι πραγματικοί δχ, όπου* $\mathrm{Lie}(G)$ *υπόχωρος του* $\Gamma(TG)$.

*Απόδειξη.* Πρέπει να δείξουμε ότι $[\ ,\ ]$ κλειστή στον $\mathrm{Lie}(G)$, δηλαδή ότι $[\ ,\ ] : \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$. Έστω $X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$ και έστω $f \in \mathcal{C}^\infty G$. Τότε:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{g*}([X,Y]_h))(f) &= [X,Y]_h(f \circ \mathcal{L}_g) \\ &= X_h(Y(f \circ \mathcal{L}_g)) - Y_h(X(f \circ \mathcal{L}_g)) \\ &= X_h((\mathcal{L}_{g*}Y)(f)) - Y_h((\mathcal{L}_{g*}X)(f)) \\ &= X_h(Y(f)) - Y_h(X(f)) = [X,Y]_h(f)\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 4.2.** *Οι διανυσματικοί χώροι* $\mathrm{Lie}(G)$ *και* $T_eG$ *είναι ισομορφικοί, όπου* $e$ *η ταυτότητα στην* $G$.

*Απόδειξη.* Ορίζουμε μια απεικόνιση $\epsilon : T_eG \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G)$, τέτοια ώστε $\epsilon(A)|_g := \mathcal{L}_{g*}A$ για κάθε $g \in G$, όπου $\epsilon(A)|_g \in T_gG$ και αντίστοιχα, $\mathcal{L}_{g*}A \in T_{ge}G = T_gG$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

i) Το διανυσματικό πεδίο $\epsilon(A)$ είναι αριστερά αναλλοίωτο. Πράγματι, από τις ιδιότητες της push-forward και από ορισμό της $\epsilon$, $\mathcal{L}_{h*}(\epsilon(A)|_g) = \mathcal{L}_{h*}(\mathcal{L}_{g*}A) = \mathcal{L}_{hg*}A = A_{hg}$, καθώς ισχύει ότι $\mathcal{L}_{h*} \circ \mathcal{L}_{g*} = (\mathcal{L}_h \circ \mathcal{L}_g)_*$ και $(\mathcal{L}_h \circ \mathcal{L}_g)(k) = hgk = \mathcal{L}_{hg}(k)$. Άρα, θα είναι και λείο.

ii) Η $\epsilon$ είναι γραμμική. Είναι προφανές, αφού $\mathcal{L}_{g*}$ είναι γραμμική.

iii) Η $\epsilon$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Έστω $\tau : \mathrm{Lie}(G) \to T_eG$, όπου $\tau(A_g) := \mathcal{L}_{g^{-1}*}(\mathcal{L}_{g*}A) = A$. Τότε, θα έχουμε ότι $(\tau \circ \epsilon|_g)(A) = \tau(\epsilon(A)|_g) = A$, δηλαδή $\tau \circ \epsilon|_g = \mathrm{id}_{T_eG}$ και $(\epsilon|_g \circ \tau)(A_g) = \epsilon(A)|_g = \mathcal{L}_{g*}A = A_g$, δηλαδή $\epsilon|_g \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(G)}$, οπότε $\epsilon$ ισομορφισμός.

Από τα ως άνω έπεται ότι $T_eG \cong \mathrm{Lie}(G)$. □

**Πόρισμα 4.1.** *Από το παραπάνω θεώρημα έπεται ότι* $\dim \mathrm{Lie}(G) = \dim T_eG = \dim G$, *όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από θεώρημα* **??**.

**Παρατήρηση 4.2.** *Είδαμε ότι η* $\mathrm{Lie}(G)$ *είναι υποάλγεβρα της* $\Gamma(TG)$. *Θα θέλαμε όμως να δείξουμε ότι* $T_eG$, *εφοδιασμένη με αγκύλη Lie* $[\,,]$, *είναι ισομορφική ως άλγεβρα Lie με την* $\mathrm{Lie}(G)$. *Έχουμε ήδη δείξει ότι* $T_eG \cong \mathrm{Lie}(G)$ *(ως δχ) και άρα μένει να ορίσουμε κατάλληλα την αγκύλη* $[\,,] : T_eG \times T_eG \to T_eG$, *έτσι ώστε για* $A, B \in T_eG$ *και* $\epsilon : T_eG \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(G)$:

$$\underbrace{[A,B]}_{\in T_eG} := \epsilon^{-1}(\underbrace{[\epsilon(A), \epsilon(B)]}_{\in \mathrm{Lie}(G)})$$

*Με βάση αυτόν τον ορισμό, ισχύει ότι* $\epsilon([A,B]) = [\epsilon(A), \epsilon(B)]$ *και άρα υπάρχει ο επιθυμητός ισομορφισμός.*

**Ορισμός 4.8.** Ο δχ $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ονομάζεται *άλγεβρα Lie* της ομάδας Lie $G$.

**Ορισμός 4.9.** Έστω $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ άλγεβρες Lie των $G, H$ αντίστοιχα. Μια γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ καλείται *ομομορφισμός αλγεβρών Lie*, αν ισχύει ότι:

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$. Αν επιπλέον $\phi$ αμφιμονοσήμαντη, τότε $\phi$ καλείται *ισομορφισμός αλγεβρών Lie*, ενώ ένας ισομορφισμός από την $\mathfrak{g}$ στον εαυτό της καλείται *αυτομορφισμός* της $\mathfrak{g}$.

**Ορισμός 4.10.** Έστω $\phi : G \to H$ ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε, καθώς $\phi : e \mapsto e'$, $\phi_*|_e : T_eG \to T_{\phi(e)}H$, όπου $\phi(e) = e'$ με $e, e'$ να είναι τα ταυτοτικά στοιχεία στις $G, H$ αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε την push-forward της $\phi$ στο $e$ απλά με $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

**Θεώρημα 4.3.** *Έστω $G, H$ ομάδες Lie με $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ άλγεβρες Lie αντίστοιχα. Αν $\phi : G \to H$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie, τότε για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ υπάρχει μοναδικό $Y \in \mathfrak{h}$, τέτοιο ώστε $Y_{\phi(g)} = \phi_* X_g$ για κάθε $g \in G$. Επιπλέον, η $\phi_*$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι $X, Y$ είναι $\phi$-συσχετισμένα, δηλαδή $X(f \circ \phi) = Yf \circ \phi$. Αφού $\phi$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie, τότε $\phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$ και άρα είναι προφανές ότι $\phi(\mathcal{L}_g(g')) = \mathcal{L}_{\phi(g)}(\phi(g'))$, δηλαδή ότι $\phi \circ \mathcal{L}_g = \mathcal{L}_{\phi(g)} \circ \phi$. Επομένως:

$$\begin{aligned} X(f \circ \phi)(g) &= X_g(f \circ \phi) = (\phi_* X_g)(f) = (\phi_*(\mathcal{L}_{g*} X_e))(f) = ((\phi \circ \mathcal{L}_g)_* X_e)(f) \\ &= ((\mathcal{L}_{\phi(g)} \circ \phi)_* X_e)(f) = (\mathcal{L}_{\phi(g)*}(\phi_* X_e))(f) = (\mathcal{L}_{\phi(g)*} Y_{e'})(f) \\ &= Y_{\phi(g)} f = (Yf \circ \phi)(g) \end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι αν $X_i$ είναι $\phi$-συσχετισμένα με τα $Y_i$, τότε και τα διανυσματικά πεδία $[X_1, X_2]$ και $[Y_1, Y_2]$ είναι $\phi$-συσχετισμένα. Πράγματι:

$$X_1 X_2(f \circ \phi) = X_1(X_2(f \circ \phi)) = X_1(Y_2 f \circ \phi) = Y_1(Y_2 f) \circ \phi = (Y_1 Y_2 f) \circ \phi$$

και το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για το $X_2 X_1$. Επομένως, $[X_1, X_2](f \circ \phi) = ([Y_1, Y_2] f) \circ \phi$. Αφού λοιπόν δείξαμε στην αρχή ότι $\phi_* X_i = Y_i$, θα ισχύει ότι $[Y_1, Y_2]_{\phi(e)} = \phi_*([X_1, X_2]_e)$, δηλαδή ότι:

$$[\phi_* X_1, \phi_* X_2]_{e'} = \phi_*([X_1, X_2]_e)$$

για κάθε $X_i \in \mathfrak{g}$. Συνεπώς, $\phi_*$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie μεταξύ των $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$. □

**Ορισμός 4.11.** Μια (διαφορική) μορφή $\omega \in \mathcal{A}^k G$ καλείται αριστερά αναλλοίωτη, αν για κάθε $h \in G$ ισχύει ότι $\mathcal{L}_h^* \omega = \omega$ ή αναλυτικότερα, $\mathcal{L}_h^* \omega_g = \omega_{h^{-1}g}$ για κάθε $h, g \in G$. Σε άμεση αναλογία, μια $k$-μορφή $\omega$ θα καλείται δεξιά αναλλοίωτη, αν ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις για τη δεξιά μεταφορά $\mathcal{R}_h$. Μια αριστερά και δεξιά αναλλοίωτη μορφή καλείται *αμφιαναλλοίωτη*.

**Παρατήρηση 4.3.** *Οι αριστερά αναλλοίωτες μορφές καθορίζονται μοναδικά από την τιμή τους στο $e \in G$. Πράγματι, για κάθε $g \in G$, $\omega_g = \mathcal{L}_{g^{-1}}^* \omega_e$, όπου $\omega_e$ η τιμή της $\omega$ στην ταυτότητα. Επιπλέον, αν $\omega$ είναι αριστερά αναλλοίωτη (αα), τότε από μετάθεση της pull-back με την εξωτερική παραγώγιση, θα ισχύει ότι $\mathcal{L}_g^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\big(\mathcal{L}_g^*\omega\big) = \mathrm{d}\omega$, δηλαδή και η εξωτερική παράγωγος της $\omega$ είναι αα.*

**Ορισμός 4.12.** Θα σημαίνουμε το σύνολο όλων των αριστερά αναλλοίωτων 1-μορφών στην $G$ με $\mathfrak{g}^*$. Θα ισχύουν κατά τα γνωστά όλες οι συνήθεις σχέσεις που ισχύουν για τα συνδιανυσματικά πεδία. Όπως και στην περίπτωση του ισομορφισμού $\mathfrak{g} \cong T_eG$, μπορούμε με την ίδια λογική να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό $\mathfrak{g}^* \to T_e^*G$ και άρα $\mathfrak{g}^*$ ο δυϊκός της $\mathfrak{g}$. Ο $\mathfrak{g}$ δεν έχει γενικά δομή άλγεβρας Lie.

**Παρατήρηση 4.4.** *Έστω $\{e_i\}$ μια βάση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ για $i = 1, \cdots, n$. Τότε, καθώς η αγκύλη Lie κάθε ζεύγους αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων θα είναι, όπως δείξαμε, αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο, έπεται ότι κάθε $[e_i, e_j]$ θα πρέπει να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης της $\mathfrak{g}$, δηλαδή $[e_i, e_j] = c^k{}_{ij} e_k$, όπου έχουμε υιοθετήσει σύμβαση άθροισης. Οι μοναδικές σταθερές $c^k{}_{ij}$ με $i, j, k = 1, \cdots, n$ ονομάζονται σταθερές δομής και λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας της αγκύλης Lie και της ταυτότητας Jacobi, την οποία ικανοποιεί, θα ισχύει για αυτές ότι $c^k{}_{(ij)} = 0$ και ότι:*

$$c^k{}_{il} c^l{}_{jm} - \{i \leftrightarrow j\} - \{i \leftrightarrow m\} = 0$$

**Θεώρημα 4.4.** *Έστωσαν οι σταθερές δομής $c^i{}_{jk}$ ως προς τη βάση $\{e_i\}$ μιας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Τότε, η εξωτερική παράγωγος ενός στοιχείου της δυϊκής βάσης $\{\varepsilon^i\}$ του $\mathfrak{g}^*$ θα δίνεται από τη σχέση:*

$$\mathrm{d}\varepsilon^i = -\frac{1}{2} \sum_{j<k} c^i{}_{jk} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k \tag{4.1}$$

*Απόδειξη.* Είδαμε ότι για την εξωτερική παράγωγο μιας 1-μορφής ισχύει η σχέση της παρατήρησης 3.25. Έτσι, θα ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}\varepsilon^i(e_j, e_k) = \frac{1}{2}(e_j \varepsilon^i(e_k) - e_k \varepsilon^i(e_j) - \varepsilon^i([e_j, e_k]))$$

Καθώς όμως $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ και γενικά, $Xf = 0$ για σταθερή συνάρτηση $f$, έπεται ότι:

$$\mathrm{d}\varepsilon^i(e_j, e_k) = -\frac{1}{2}\varepsilon^i([e_j, e_k]) = -\frac{1}{2}\varepsilon^i(c^l{}_{jk} e_l) = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk}$$

Από την άλλη, γνωρίζουμε ότι $\mathrm{d}\varepsilon^i = \sum_{j<k} a^i{}_{jk} \varepsilon^j \wedge \varepsilon^k$, όπου $a^i{}_{jk}$ αυθαίρετες συνιστώσες και επομένως:

$$a^i{}_{jk} = \mathrm{d}\varepsilon^i(e_j, e_k) = -\frac{1}{2} c^i{}_{jk}$$

□

**Ορισμός 4.13.** Η σχέση (4.1) καλείται *εξίσωση Maurer-Cartan* και περιέχει ουσιαστικά όλη την πληροφορία για την άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Μπορούμε να παρουσιάσουμε την εξίσωση Maurer-Cartan με μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή, αν χρησιμοποιήσουμε μια 1-μορφή $\omega$ στην $G$ με πεδίο τιμών σε κάποιον πδδχ $V$. Αν $\{e_i\}$ βάση του $V$, τότε η $\omega$ θα μπορεί να γραφεί ως $\omega = \omega^i \otimes e_i$ (σύμβαση άθροισης), όπου $\omega^i \in \mathcal{A}^1 G$. Θα σημαίνουμε τον χώρο τέτοιων 1-μορφών με $\mathcal{A}^1(G, V)$ ή $\mathcal{A}^1 G \otimes V$.

**Ορισμός 4.14.** Έστω $G$ ομάδα Lie. Θα καλούμε *μορφή Maurer-Cartan* στην $G$, εκείνη την 1-μορφή $\omega_G \in \Gamma(T^*G)$, όπου για συντομία $\omega_G|_g = \omega_g$ και $\omega_g : T_g G \to \mathfrak{g}$ με $X \mapsto \omega_g(X) = \mathcal{L}_{g^{-1}*} X$ για κάθε $g \in G$. Η δουλειά της $\omega_G$ είναι πρακτικά να μετακινεί στοιχεία των εφαπτόμενων χώρων της $G$ στον εφαπτόμενο χώρο στην ταυτότητα, δηλαδή στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$.

**Παρατήρηση 4.5.** *Η μορφή Maurer-Cartan $\omega_G$ είναι μια (λεία από ορισμό) αριστερά αναλλοίωτη 1-μορφή. Πράγματι, για $X \in T_g G$ έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_h^* \omega_G)_g(X) &= (\mathcal{L}_h^* \omega_{\mathcal{L}_h(g)})(X) = \omega_{hg}(\mathcal{L}_{h*} X) = \mathcal{L}_{(hg)^{-1}*}(\mathcal{L}_{h*} X) \\ &= (\mathcal{L}_{(hg)^{-1}} \circ \mathcal{L}_h)_* X = \mathcal{L}_{g^{-1}h^{-1}h*} X = \mathcal{L}_{g^{-1}*} X = \omega_g(X)\end{aligned}$$

*δηλαδή $\mathcal{L}_h^* \omega_G = \omega_G$. Επομένως, μπορούμε να την εκφράσουμε ως $\omega_G = \varepsilon^i \otimes e_i$, όπου $\{e_i\}$ μια βάση της $\mathfrak{g}$ και $\{\varepsilon^i\}$ η δυϊκή της, έτσι ώστε $\omega_G(e_j) = (\varepsilon^i \otimes e_i)(e_j) = \varepsilon^i(e_j) e_i = e_j \in \mathfrak{g}$. Η εξωτερική παράγωγος της $\omega_G$ θα δίνεται προφανώς από $\mathrm{d}\omega_G = \mathrm{d}\varepsilon^i \otimes e_i$ (σύμβαση άθροισης για όλα τα παραπάνω).*

**Πρόταση 4.2.** *Η εξίσωση Maurer-Cartan μπορεί πάντοτε να γραφεί με την πιο εκλεπτυσμένη έκφραση* $\mathrm{d}\omega_G = -(1/2)[\omega_G, \omega_G]$.

*Απόδειξη.* Έστωσαν $\omega_G, \omega'_G \in \mathcal{A}^1(G, \mathfrak{g})$ δύο 1-μορφές σε μια ομάδα Lie $G$ (το ίδιο ισχύει ανάλογα και για μια λεία πολλαπλότητα $M$) με τιμές στην $\mathfrak{g}$ (ή σε κάποιον πδδχ αντίστοιχα). Μπορούμε να ορίσουμε την πράξη $[\omega_G, \omega'_G]$ ως εξής. Έστωσαν $\omega \in \mathcal{A}^k(G, \mathfrak{g})$ και $\eta \in \mathcal{A}^l(G, \mathfrak{g})$. Τότε ορίζουμε την πράξη:

$$[\omega \wedge \eta](\bar{X}_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma)\big[\omega(\bar{X}_{\sigma(k)}), \eta(\bar{X}_{\sigma(k:l)})\big]$$

όπου $[\omega \wedge \eta] \in \mathcal{A}^{k+l}(G, \mathfrak{g})$. Πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον συμβολισμό $[\omega, \eta]$ έναντι του $[\omega \wedge \eta]$, ο οποίος θυμίζει μεταθέτη, κάτι το οποίο δικαιολογείται από το γεγονός ότι $[\omega \wedge \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$, δηλαδή $[\omega \wedge \eta]$ είναι ο βαθμωτός (graded) μεταθέτης των $\omega$ και $\eta$. Πράγματι, αυτό ισχύει, αν αναλογιστεί κανείς ότι:

$$(\omega \wedge \eta)(\bar{X}_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega(\bar{X}_{\sigma(k)}) \otimes \eta(\bar{X}_{\sigma(k:l)}) \tag{4.2}$$

Στην δική μας περίπτωση, ο ορισμός του $[\omega, \eta]$ επαληθεύεται εύκολα, καθώς:

$$\begin{aligned}
[\omega_G, \omega'_G](X, Y) &= (\omega_G \wedge \omega'_G)(X, Y) + (\omega'_G \wedge \omega_G)(X, Y) \\
&= \omega_G(X) \otimes \omega'_G(Y) - \omega_G(Y) \otimes \omega'_G(X) + \\
&\quad + \omega'_G(X) \otimes \omega_G(Y) - \omega'_G(Y) \otimes \omega_G(X) \\
&= [\omega_G(X), \omega'_G(Y)] + [\omega'_G(X), \omega_G(Y)]
\end{aligned}$$

οπότε αν $\omega_G = \omega'_G$, τότε $[\omega_G, \omega_G](X, Y) = 2[\omega_G(X), \omega_G(Y)]$. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι οι συνήθεις μορφές που χρησιμοποιούμε είναι απεικονίσεις με τιμή στον $\mathbb{R}$, δηλαδή ισχύει ότι $\mathcal{A}M \equiv \mathcal{A}(M, \mathbb{R})$ και ο ορισμός του εξωτερικού γινομένου που δώσαμε είναι μια ειδική περίπτωση της (4.2), όπου το τανυστικό γινόμενο είναι το σύνηθες γινόμενο στον $\mathbb{R}$. Μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε λοιπόν για δύο συνήθεις μορφές $\omega, \eta \in \mathcal{A}G$ και δύο $X, Y \in \mathfrak{g}$, τον βαθμωτό μεταθέτη $[\omega \otimes X, \eta \otimes Y] = (\omega \wedge \eta) \otimes [X, Y]$, όπου αν $\omega, \eta$ και $X, Y$ είναι οι $\varepsilon^i, \varepsilon^j$ και τα $e_i, e_j$ αντίστοιχα, τότε $[\omega_G, \omega_G] = \sum_{i<j} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j) \otimes [e_i, e_j] = \sum_{i<j} c^k_{ij} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j) \otimes e_k$. Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\mathrm{d}\omega_G = \mathrm{d}\varepsilon^k \otimes e_k = -\frac{1}{2} \sum_{i<j} c^k{}_{ij} (\varepsilon^i \wedge \varepsilon^j) \otimes e_k = -\frac{1}{2} [\omega_G, \omega_G]$$

και άρα, $\mathrm{d}\omega_G = -(1/2)[\omega_G, \omega_G]$. Μάλιστα, λόγω του ορισμού της, η $\omega_G$ είναι μοναδική για κάθε ομάδα Lie $G$. □

## 4.2. *Ολοκληρωτικές καμπύλες, ροές και η εκθετική*

Κρίνεται σκόπιμο, προτού εισάγουμε τη κομβική έννοια της εκθετικής απεικόνισης, να κάνουμε μια εισαγωγή στις ολοκληρωτικές καμπύλες ενός διανυσματικού πεδίου, οι οποίες είναι γνωστές και ως ροϊκές γραμμές αυτού, προκειμένου ο όρος "μονοπαραμετρική υποομάδα" να έχει κάποιο ουσιαστικό νόημα.

**Ορισμός 4.15.** Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα και $X$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο (δπ) σε αυτήν. Μια *ολοκληρωτική καμπύλη* του $X$ είναι μια λεία καμπύλη $\gamma : \mathcal{O} \to M$, για την οποία ισχύει ότι $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ για κάθε $t \in \mathcal{O}$ με $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$, όπου $\mathcal{O}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που περιέχει το μηδέν. Το σημείο $\gamma(0) = p$ καλείται αρχή της $\gamma$.

**Παρατήρηση 4.6.** *Για μια επιλογή χάρτη $(U,x)$, η $\gamma$ μπορεί να γραφεί για $\dim M = n$ και $i = 1, \cdots, n$ ως $x(\gamma(t)) = \{\gamma^i(t)\} \equiv \bar{\gamma}^n(t)$ και η συνθήκη $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$, ώστε η $\gamma$ να είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X$, μπορεί να γραφεί ως $(\gamma^i)'(t)\partial_i|_{\gamma(t)} = X^i(\bar{\gamma}^n(t)))\partial_i|_{\gamma(t)}$, με τη σχέση αυτή να οδηγεί στο σύστημα $n$ συνήθων διαφορικών εξισώσεων $(\gamma^i)'(t) = X^i(\bar{\gamma}^n(t))$, όπου $X^i \in \mathcal{C}^\infty U$ είναι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου (δπ) $X$ για τον συγκεκριμένο χάρτη. Για αυτά τα συστήματα, υπάρχει μοναδική λύση, σίγουρα για $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ με $\epsilon$ αρκετά μικρό, η οποία ικανοποιεί αρχικές συνθήκες της μορφής $\gamma^i(0) = a^i$, όπου $a^i \in U$. Μια απόδειξη αυτού μπορεί να βρει ο αναγνώστης στο [**21, p. 317**]. Πρόκειται για το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων για τις ΣΔΕ, το οποίο θα αναφέρουμε παρακάτω. Αυτό που κρατάμε εμείς, είναι ότι η τελευταία πρόταση σημαίνει την ύπαρξη μιας μοναδικής ολοκληρωτικής καμπύλης με αρχή σε κάθε σημείο της $M$, σίγουρα για κάποιο αρκετά μικρό διάστημα ορισμού. Θα δούμε ότι με τη διαδικασία της αναπαραμετροποίησης, υπάρχει μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από κάθε σημείο της πολλαπλότητας.*

**Λήμμα 4.3** (Λήμμα μετατόπισης)**.** *Έστω $X$ ένα λείο δπ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ και έστω $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το 0. Έστω επίσης $\gamma : \mathcal{O} \to M$ μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$. Για κάθε $s \in \mathcal{O}$, έστω $\widetilde{\mathcal{O}} = \{t \in \mathbb{R} \mid t + s \in \mathcal{O}\}$. Τότε, η καμπύλη $\widetilde{\gamma} : \widetilde{\mathcal{O}} \to M$ με $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t+s)$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ με αρχή το $\gamma(s)$.*

*Απόδειξη.* Ας εξετάσουμε τη δράση του $\widetilde{\gamma}'(t_0) \in T_{\widetilde{\gamma}(t_0)}M$ σε μια λεία $f$, η οποία ορίζεται σε μια γειτονιά του $\widetilde{\gamma}(t_0)$. Με χρήση του κανόνα αλυσίδας και του γεγονότος ότι $\gamma$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}'(t_0) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (f \circ \widetilde{\gamma})(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t+s) = (f \circ \gamma)'(t_0 + s) \\ &= \gamma'(t_0+s)f = X_{\gamma(t_0+s)}f = X_{\widetilde{\gamma}(t_0)}f\end{aligned}$$

Επομένως, πράγματι, $\widetilde{\gamma}$ θα είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$. □

**Ορισμός 4.16.** Μια λεία απεικόνιση $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ καλείται *ολική ροή* ή απλά ροή, αν για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ και $p \in M$, ισχύει ότι $\phi(t, \phi(s,p)) = \phi(t+s, p)$ και ότι $\phi(0,p) = p$. Δοθείσας μιας ολικής ροής ορίζεται μια οικογένεια λείων απεικονίσεων $\{\phi_t : M \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$ με $\phi_t(p) = \phi(t,p)$ και ιδιότητες $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ και $\phi_0 = \mathrm{id}_M$ με $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$, η οποία καλείται *οικογένεια μονοπαραμετρικών αμφιδιαφορίσεων* της $M$. Επιπλέον, δοθείσας μιας (ολικής) ροής, ορίζεται για κάθε $p \in M$ και μια λεία καμπύλη $\phi^p : \mathbb{R} \to M$ με $\phi^p(t) = \phi(t,p) = \phi_t(p)$.

**Πρόταση 4.3.** *Έστω $\phi$ μια (ολική) ροή. Για κάθε $p \in M$, ορίζουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_pM$ με:*

$$X_p = \phi^{p\prime}(0) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \phi(t,p)$$

*Η απεικόνιση $p \mapsto X_p$ είναι ένα λείο δπ στην $M$ και κάθε καμπύλη $\phi^p$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$.*

*Απόδειξη.* Για να δείξουμε ότι $X$ λείο, αρκεί να δείξουμε ότι $Xf$ λείο, όπου $f$ λεία συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο της $M$. Για κάθε τέτοια $f$, θα έχουμε ότι:

$$Xf(p) = X_pf = \phi^{p\prime}(0)f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0(f \circ \phi^p)(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi(t,p))$$

Καθώς $f, \phi$ λείες, τότε και $f \circ \phi$ λεία και το ίδιο θα ισχύει και για την παράγωγο αυτής. Επομένως, $Xf$ εξαρτάται με λείο τρόπο από το όρισμα του και άρα $X$ λείο. Τώρα, για να δείξουμε ότι $\phi^p$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X$, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi^{p\prime}(t) = X_{\phi^p(t)}$

για κάθε $p \in M$ και $t \in \mathbb{R}$. Έστω αυθαίρετο $t_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\phi^p(t_0) = \phi_{t_0}(p) = q$, ώστε να πρέπει να δείξουμε ότι $\phi^{p\prime}(t) = X_q$. Θα έχουμε ότι:

$$\phi^q(t) = \phi_t(q) = \phi_t(\phi_{t_0}(p)) = \phi_{t+t_0}(p) = \phi^p(t + t_0)$$

Συνεπώς, για κάθε λεία $f$ στη γειτονιά του $q$, θα ισχύει ότι:

$$X_q f = \phi^{q\prime}(0) f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi^q(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi^p(t_0 + t)) = \phi^{p\prime}(t_0) f$$

όπου, καθώς $q = \phi^p(t_0)$ και $t_0$ αυθαίρετο, το ζητούμενο αποδείχτηκε. Τα δπ, για τα οποία ισχύουν τα ως άνω, καλούνται *απειροστοί γεννήτορες* της $\phi$. □

**Πρόταση 4.4.** *Έστω $\phi$ μια ροή στην $M$ και $X$ ο απειροστός γεννήτορας αυτής. Τότε, $X$ είναι $\phi_t$-αναλλοίωτο για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\phi_{t*} X_p = X_{\phi_t(p)}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $p \in M$ και $t_0 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετα. Θέτουμε $q = \phi_{t_0}(p)$ και πρέπει να δείξουμε ότι $\phi_{t_0 *} X_p = X_q$. Δρώντας με το αριστερό μέλος σε μια λεία $f$, η οποία ορίζεται σε μια γειτονιά του $q$, θα έχουμε με βάση τον ορισμό του $X$:

$$\begin{aligned}
(\phi_{t_0 *} X_p)(f) = X_p(f \circ \phi_{t_0}) = \phi^{p\prime}(0)(f \circ \phi_{t_0}) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f \circ \phi_{t_0} \circ \phi^p(t) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi_{t_0}(\phi_t(p))) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi_{t_0+t}(p)) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\phi^p(t_0 + t)) = \phi^{p\prime}(t_0) f = X_q f
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει, καθώς $\phi^p$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X$. □

**Θεώρημα 4.5.** *Έστω $X$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο σε μια λεία πολλαπλότητα $M$. Τότε, υπάρχει μοναδική μεγιστική ροή, της οποίας ο απειροστός γεννήτορας είναι το $X$.*

**Θεώρημα 4.6** (Θεώρημα ύπαρξης, μοναδικότητας και διαφορισιμότητας λύσεων ΣΔΕ)**.** *Έστω $U$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $X : U \to \mathbb{R}^n$ μια λεία απεικόνιση. Για κάθε $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ και κάθε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο $U_0$ της $M$, το οποίο περιέχει το $x_0$ και υπάρχει επίσης λεία απεικόνιση $\phi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U_0 \to U$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in U_0$, η καμπύλη $\gamma(t) = \phi(t, x)$ να είναι η μοναδική λύση με πεδίο ορισμού το $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ στο πρόβλημα αρχικών τιμών:*

$$\gamma^{i\prime}(t) = X^i(\gamma(t)) \qquad \gamma^i(t_0) = x^i$$

**Ορισμός 4.17.** Καθώς είδαμε ότι δεν είναι απαραίτητο κάθε δπ να παράγει μια ολική ροή, θα λέμε ότι αυτά τα δπ που παράγουν μια τέτοια είναι πλήρη. Ισοδύναμα, κάθε δπ, του οποίου οι ολοκληρωτικές καμπύλες ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$, είναι πλήρες. Κάθε μη πλήρες δπ θα παράγει απλά μια τοπική ροή.

**Λήμμα 4.4.** *Έστω $M$ λεία πολλαπλότητα και $X$ δπ στην $M$. Αν $\gamma$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $X$, της οποίας το μεγιστικό πεδίο ορισμού δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$, τότε η εικόνα της $\gamma$ δεν μπορεί να περιέχεται σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο της $M$.*

*Απόδειξη.* Έστω $(a, b)$ το πεδίο ορισμού της $\gamma$ με $b < \infty$ (τα ίδια θα ισχύουν και για $a > -\infty$). Θα δείξουμε ότι αν $\gamma([0, b))$ έγκειται σε ένα συμπαγές σύνολο, τότε το πεδίο ορισμού της $\gamma$ μπορεί να επεκταθεί απο τα δεξιά πέραν του $b$, έτσι ώστε να οδηγηθούμε σε άτοπο. Έστω $p = \gamma(0)$ και $\phi$ η τοπική ροή του $X$, όπου $\gamma = \phi^p$ από μοναδικότητα ολοκληρωτικών καμπυλών. Αν $(t_i)$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία παραμέτρων που προσεγγίζει το $b$ από αριστερά, τότε η ακολουθία $(\gamma(t_i))$ περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο της $M$ και επομένως, θα έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο $q \in M$. Διαλέγουμε μια γειτονιά $U$ του $q$ και $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε το πεδίο ορισμού της $\phi$ να είναι το $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$. Για κάποιο $i$ αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε $\gamma(t_i) \in U$ και $t_i > b - \varepsilon$, ορίζουμε μια καμπύλη $\sigma : [0, t_i + \varepsilon) \to M$ με:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t < b \\ \phi_{t-t_i} \circ \phi_{t_i}(p) & t_i - \varepsilon < t < t_i + \varepsilon \end{cases}$$

Στο σημείο επικάλυψης, οι δύο κλάδοι θα ταυτίζονται, καθώς $\phi_{t-t_i} \circ \phi_{t_i}(p) = \phi_t(p) = \phi^p(t) = \gamma(t)$. Συνεπώς, η $\sigma$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη που επεκτείνει την $\gamma$, το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση μεγιστικότητας της $\gamma$. Επομένως, $\gamma([0, b))$ δεν μπορεί να έγκειται σε κάποιο συμπαγές σύνολο. $\square$

**Θεώρημα 4.7.** *Έστω $M$ συμπαγής πολλαπλότητα. Τότε κάθε διανυσματικό πεδίο στην $M$ είναι πλήρες.*

*Απόδειξη.* Αν $M$ συμπαγής, τότε από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι δεν μπορεί να υπάρχει ολοκληρωτική καμπύλη που το μεγιστικό πεδίο ορισμού της να μην είναι ολο το $\mathbb{R}$, καθώς η εικόνα κάθε ολοκληρωτικής καμπύλης θα ανήκει στο συμπαγές σύνολο $M$. Επομένως, κάθε $X \in \Gamma(TM)$ θα είναι πλήρες. $\square$

**Λήμμα 4.5.** *Έστω $F : M \to N$ μια λεία απεικόνιση και $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(TN)$. Έστωσαν επίσης $\phi, \psi$ οι ροές των $X, Y$ αντίστοιχα. Τότε, $X, Y$ είναι $F$-συσχετισμένα, αν-ν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\psi_t \circ F = F \circ \phi_t$ στο πεδίο ορισμού της $\phi_t$.*

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $X, Y$ είναι $F$-συσχετισμένα. Αν $\mathcal{D}_p \subset \mathbb{R}$ είναι το πεδίο ορισμού της $\phi^p$, τότε ορίζουμε μια καμπύλη $\gamma : \mathcal{D}_p \to N$ με $\gamma(t) = F \circ \phi^p(t)$ και έχουμε ότι:

$$\gamma'(t) = (F \circ \phi^p)'(t) = F_* \phi^{p\prime}(t) = F_* X_{\phi^p(t)} = Y_{F \circ \phi^p(t)} = Y_{\gamma(t)}$$

δηλαδή η $\gamma$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του $Y$ με αρχή στο $F \circ \phi^p(0) = F(p)$. Απο μοναδικότητα ολοκληρωτικών καμπυλών, η μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη $\psi^{F(p)}$ θα πρέπει να ορίζεται τουλάχιστον στο $\mathcal{D}_p$ και να ισχύει $\gamma(t) = \psi^{F(p)}(t)$ σε αυτό. Πράγματι λοιπόν, ισχύει ότι $\gamma(t) = F \circ \phi^p(t) = F \circ \phi_t(p) = \psi^{F(p)}(t) = \psi_t \circ F(p)$. Αντίστροφα, αν ισχύει $\gamma(t) = F \circ \phi^p(t)$, τότε για κάθε $p \in M$ θα έχουμε ότι:

$$F_* X_p = F_* \phi^{p\prime}(0) = (F \circ \theta^p)'(0) = \psi^{F(p)\prime}(0) = Y_{F(p)}$$

και άρα $X, Y$ είναι $F$-συσχετισμένα. $\square$

**Ορισμός 4.18.** Μια *μονοπαραμετρική υποομάδα* της ομάδας Lie $G$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων Lie $F : \mathbb{R} \to G$, όπου $(\mathbb{R}, +)$ η προσθετική ομάδα.

**Λήμμα 4.6.** *Κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο σε μια ομάδα Lie, είναι πλήρες.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathfrak{g}$ η άλγεβρα Lie της ομάδας Lie $G$ και $X \in \mathfrak{g}$ με $\phi$ τη ροή αυτού. Ας υποθέσουμε ότι η μεγιστική ολοκληρωτική καμπύλη $\phi^p$ του $X$ ορίζεται σε ανοιχτό διάστημα $(a, b)$ με $b < \infty$ (κατά τα γνωστά ισχύουν ανάλογα και για $a > -\infty$), το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και περιέχει το $0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αριστερή αναλλοιότητα για να ορίσουμε μια ολοκληρωτική καμπύλη σε μεγαλύτερο διάστημα. Από το τελευταίο λήμμα και καθώς $X$ είναι $\mathcal{L}_g$-συσχετισμένο με τον εαυτό του, έπεται ότι $\mathcal{L}_g \circ \phi_t = \phi_t \circ \mathcal{L}_g$. Η ολοκληρωτική καμπύλη $\phi^e$ με αρχή την ταυτότητα στην $G$ ορίζεται σίγουρα σε κάποιο ανοιχτό διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ για

$\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Διαλέγουμε λοιπόν κάποιο $s \in (b-\varepsilon, b)$ και ορίζουμε μια νέα καμπύλη $\gamma : (a, s+\varepsilon) \to G$ με:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \phi^g(t) & t \in (a,b) \\ \mathcal{L}_{\phi_s(g)}(\phi_{t-s}(e)) & t \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \end{cases}$$

Επομένως, στο διάστημα επικάλυψης, θα ισχύει για $s \in (a,b)$ ότι:

$$\mathcal{L}_{\phi_s(g)}(\phi_{t-s}(e)) = \phi_{t-s}(\mathcal{L}_{\phi_s(g)}(e)) = \phi_{t-s}(\phi_s(g)) = \phi_t(g) = \phi^g(t)$$

Συνεπώς, η $\gamma$ θα είναι σίγουρα ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ στο $(a,b)$, ενώ για $t_0 \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$, λόγω της αριστερής αναλλοιότητας του $X$, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \mathcal{L}_{\phi_s(g)}(\phi_{t-s}(e)) = \mathcal{L}_{\phi_s(g)*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \phi^e(t-s) \\ &= \mathcal{L}_{\phi_s(g)*} X_{\phi^e(t_0-s)} = X_{\mathcal{L}_{\phi_s(g)}(\phi_{t_0-s}(e))} = X_{\gamma(t_0)}\end{aligned}$$

δηλαδή η $\gamma$ είναι τελικά ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ που ορίζεται στο $(a, s+\varepsilon)$. Καθώς όμως $s+\varepsilon > b$, τότε το αποτέλεσμα είναι άτοπο και άρα η $\phi^p$ θα πρέπει να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $X$ πλήρες. □

**Πρόταση 4.5.** *Έστω $G$ μια ομάδα Lie και $X \in \mathfrak{g}$. Η ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ με αρχή το $e$ είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα της $G$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\phi$ η (ολική) ροή του $X$, έτσι ώστε $\phi^e : \mathbb{R} \to G$ να είναι η ολοκληρωτική του $X$. Η $\phi^e$ είναι λεία, άρα αρκεί να δείξουμε ότι είναι ομομορφισμός ομάδων, δηλαδή $\phi^e(t+s) = \phi^e(t)\phi^e(s)$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$. Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}\phi^e(t)\phi^e(s) &= \mathcal{L}_{\phi^e(t)}(\phi^e(s)) = \mathcal{L}_{\phi^e(t)}(\phi_s(e)) = \phi_s(\mathcal{L}_{\phi^e(t)}(e)) \\ &= \phi_s(\phi_t(e)) = \phi_{s+t}(e) = \phi^e(s+t) = \phi^e(t+s)\end{aligned}$$

□

**Θεώρημα 4.8.** *Κάθε μονοπαραμετρική υποομάδα μιας ομάδας Lie είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη ενός αριστερά αναλλοίωτου δπ. Επομένως, υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των μονοπαραμετρικών υποομάδων της $G$, των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της $G$ και του εφαπτόμενου χώρου στην ταυτότητα αυτής.*

*Απόδειξη.* Έστω $F : \mathbb{R} \to G$ μια μονοπαραμετρική υποομάδα της $G$ και έστω $X = F_*(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) \in \mathfrak{g}$, όπου $\mathfrak{g}$ η άλγεβρα Lie της $G$. Θεωρούμε το $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ ως ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $F$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$. Το $X$ είναι το μόνο αριστερά αναλλοίωτο δπ στην $G$, το οποίο είναι $F$-συσχετισμένο με το $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ και άρα $F'(t_0) = F_*(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)_{t_0} = X_{F(t_0)}$ για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή πράγματι $F$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $X$. Θα καλούμε την $F$ που προσδιορίζεται με αυτόν τον τρόπο, μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγεται από το $X$. □

**Παρατήρηση 4.7.** *Συνοψίζοντας, το πόρισμα του τελευταίου θεωρήματος σημαίνει με άλλα λόγια ότι μια άλγεβρα Lie επιδέχεται τελικά τρεις ισοδύναμες ερμηνείες:*

*i) Η $\mathfrak{g}$ αποτελείται από τα αριστερά αναλλοίωτα δπ της $G$.*

*ii) Η $\mathfrak{g}$ αποτελείται από τα εφαπτόμενα διανύσματα της $G$ στην ταυτότητα αυτής.*

*iii) Η $\mathfrak{g}$ αποτελείται από τις μονοπαραμετρικές υποομάδες της $G$.*

**Ορισμός 4.19.** Δοθείσας μιας ομάδας Lie $G$ με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, ορίζουμε μια απεικόνιση $\exp : \mathfrak{g} \to G$, η οποία καλείται *εκθετική* της $G$ και για την οποία ισχύει ότι $\exp X = F(1)$, όπου $F$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγει το $X$ ή ισοδύναμα, η ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ με αρχή την ταυτότητα στην $G$.

**Πρόταση 4.6** (Ιδιότητες της εκθετικής)**.** *Έστω $G$ ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$.*

*i)* *Η εκθετική είναι λεία.*

*ii)* *Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$, η $F(t) = \exp(tX)$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα της $G$ που παράγεται από το $X$.*

*iii)* *Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$, ισχύει ότι $\exp((s+t)X) = \exp(sX)\exp(tX)$.*

*iv)* *Η push-forward $\exp_* : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση με βάση τη κανονική ταυτοποίηση των $T_0\mathfrak{g}$ και $T_eG$ με την $\mathfrak{g}$.*

*v)* *Η εκθετική είναι μια αμφιδιαφόριση από κάποια γειτονιά του $0 \in \mathfrak{g}$ σε μια γειτονιά του $e \in G$.*

*vi)* *Για κάθε ομομορφισμό ομάδων Lie $\psi : G \to H$, το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\psi_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\psi"'] & H \end{tikzcd}$$

*vii)* *Η ροή $\phi$ ενός αριστερά αναλλοίωτου δπ $X$ δίνεται από $\phi_t = \mathcal{R}_{\exp(tX)}$, όπου με $\mathcal{R}$ σημαίνουμε τον πολλαπλασιασμό από δεξιά.*

*Απόδειξη.* Θα σημαίνουμε για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ με $\phi_X$, τη ροή που παράγεται από αυτό.

i) Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\phi_X^e(1)$ εξαρτάται με λείο τρόπο από το $X$, δηλαδή ότι η ροή μεταβάλλεται με λείο τρόπο, όταν μεταβάλλεται το δπ. Ορίζουμε ένα λείο δπ $Y$ στην πολλαπλότητα γινόμενο $G \times \mathfrak{g}$ με:

$$Y_{(g,X)} = (X_g, 0) \in T_gG \times T_X\mathfrak{g} \cong T_{(g,X)}(G \times \mathfrak{g})$$

και του οποίου η ροή θα δίνεται από $\lambda_t(g, X) = ((\phi_X)_t(g), X)$. Η $\lambda$ θα είναι λεία ως μεγιστική ροή. Καθώς ισχύει ότι:

$$\exp X = \phi_X^e(1) = \pi_1(\phi_X^e(1), X) = \pi_1((\phi_X)_1(e), X) = \pi_1(\lambda_1(e, X)) = \pi_1 \circ \lambda_1(e, X)$$

όπου $\pi_1 : G \times \mathfrak{g} \to G$ λεία προβολή στον πρώτο παράγοντα, η εκθετική θα είναι λεία ως σύνθεση λείων.

ii) Καθώς η μονοπαραμετρική ομάδα που παράγεται από το $X$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $X$ με αρχή το $e$, αρκεί να δείξουμε ότι $\exp(tX) = \phi_X^e(t)$, δηλαδή ότι $\phi_{tX}^e(1) = \phi_X^e(t)$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\phi_{tX}^e(s) = \phi_X^e(st)$. Επιλέγουμε ένα $t \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε μια λεία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to G$ με $\gamma(s) = \phi_X^e(st)$. Με βάση τον κανόνα αλυσίδας, θα έχουμε ότι:

$$\gamma'(s) = t{\phi_X^e}'(st) = tX_{\gamma(s)}$$

και επομένως, $\gamma$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του δπ $tX$. Αφού $\gamma(0) = \phi^e_X(0) = e$, τότε από μοναδικότητα ολοκληρωτικών καμπυλών θα πρέπει να ισχύει $\gamma(s) = \phi^e_{tX}(s)$ και άρα η σχέση αποδείχτηκε, όπου αν θέσουμε $s = 1$ αποδεικνύεται το ii.

iii) Αφού από ii η $F : t \mapsto \exp(tX)$ μονοπαραμετρική ομάδα της $G$, τότε θα είναι ομομορφισμός ομάδων Lie και άρα, το iii. είναι προφανές.

iv) Έστω αυθαίρετο $X \in \mathfrak{g}$ και $\sigma : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ με $\sigma(t) = tX$. Τότε $\sigma'(0) = X$ και ισχύει ότι:

$$\exp_* X = \exp_*(\sigma'(0)) = (\exp \circ \sigma)'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp \circ \sigma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(tX)$$

Όμως, από ii, $\exp(tX) = \phi^e_X(t)$ και άρα $\exp_* X = {\phi^e_X}'(0) = X$.

v) Η απόδειξη προκύπτει με χρήση του iv και γνωστού θεωρήματος που έχει ως εξής. Αν $M, N$ λείες πολλαπλότητες και $\phi : M \to N$ λεία με $\phi_*$ αντιστρέψιμη σε κάποιο $p \in M$, τότε υπάρχουν συνεκτικές γειτονιές $U_0$ του $p$ και $V_0$ του $\phi(p)$, τέτοιες ώστε $F : U_0 \to V_0$ να είναι αμφιδιαφόριση. Στην περίπτωση μας, $p = 0$ και $\phi(p) = \exp(0) = e$.

vi) Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\exp(\psi_* X) = \psi(\exp X)$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t\psi_* X) = \psi(\exp(tX))$. Το αριστερό μέλος είναι (από ii) η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγεται από το $\psi_* X$. Έτσι, αν θέσουμε $\sigma(t) = \psi(\exp(tX))$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων που ικανοποιεί τη σχέση $\sigma'(0) = \psi_* X$. Θα έχουμε ότι:

$$\sigma'(0) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t+0} \psi(\exp(tX)) = \psi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t+0} \exp(tX) = \psi_* X$$

όπως και ότι είναι ομομορφισμός, καθώς:

$$\begin{aligned}\sigma(s+t) &= \psi(\exp((s+t)X)) = \psi(\exp(sX)\exp(tX)) \\ &= \psi(\exp(sX))\psi(\exp(tX)) = \sigma(s)\sigma)(t)\end{aligned}$$

καθώς $\exp, \psi$ είναι ομομορφισμοί ομάδων Lie.

vii) Θα χρησιμοποιήσουμε το ii και τη σχέση $\mathcal{L}_g \circ \theta_t = \theta_t \circ \mathcal{L}_g$. Θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{R}_{\exp(tX)}(g) = g\exp(tX) = \mathcal{L}_g(\exp(tX)) = \mathcal{L}_g((\phi_X)_t(e)) = (\phi_X)_t(\mathcal{L}_g(e)) = (\phi_X)_t(g)$$

□

## 4.3. Αναπαραστάσεις ομάδων και αλγεβρών Lie

**Ορισμός 4.20.** Ένας ομομορφισμός ομάδων Lie $\rho : G \to \operatorname{Aut} V$ καλείται πεπερασμένης διάστασης *αναπαράσταση* μιας ομάδας Lie $G$. Ο δχ $V$ καλείται *χώρος αναπαράστασης*. Η εικόνα της $\rho$ είναι υποομάδα Lie των αυτομορφισμών του $V$, καθώς η εικόνα ενός ομομορφισμού ομάδων Lie είναι υποομάδα Lie.

**Ορισμός 4.21.** Αν ο ομομορφισμός ομάδων Lie $\rho$ είναι 1-1, τότε η αναπαράσταση καλείται *πιστή* (faithful) και οι $G, \rho(G) \subset \operatorname{Aut} V$ είναι ισομορφικές ως ομάδες Lie.

**Ορισμός 4.22.** Έστω άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Τότε, ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie $\psi : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ καλείται πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$.

**Παρατήρηση 4.8.** *Αφού $\psi$ ομομορφισμός αλγεβρών Lie, θα ισχύει για κάθε $X, X' \in \mathfrak{g}$ ότι:*

$$\psi([X, X']) = [\psi(X), \psi(X')] = \psi(X) \circ \psi(X') - \psi(X') \circ \psi(X)$$

*και κατά τα γνωστά, αν $\psi$ είναι 1-1, δηλαδή ο πυρήνας της είναι το $\{0\}$, τότε η αναπαράσταση καλείται πιστή. Αν είναι πιστή, τότε $\mathfrak{g} \cong \psi(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{End} V$, όπου $\psi(\mathfrak{g})$ υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$. Η διάσταση του $V$ είναι και η διάσταση της αναπαράστασης και συχνά θα αναφερόμαστε στην αναπαράσταση ως το ζεύγος $(\rho, V)$ ή $(\psi, V)$ αντίστοιχα. Επίσης, οι αναπαραστάσεις των ομάδων Lie σχετίζονται άμεσα με τις αναπαραστάσεις των αλγεβρών Lie, αφού αν $\rho : G \to \operatorname{Aut} V$ μια αναπαράσταση ομάδας Lie, τότε $\rho_* : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$ θα είναι μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$.*

**Ορισμός 4.23.** Η *τετριμμένη* (trivial) αναπαράσταση μιας ομάδας Lie $G$ δίνεται από $\rho(g) = \mathrm{id}_V$ για κάθε $g \in G$, όπου $\mathrm{id}_V$ η ταυτοτική απεικόνιση της $\operatorname{Aut} V$. Αντίστοιχα, η τετριμμένη αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ δίνεται από $\psi(X) = 0_V$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$, όπου $0_V$ η μηδενική απεικόνιση της $\operatorname{End} V$. Θα συμβολίζουμε αυτές τις αναπαραστάσεις με $(\mathrm{id}, V)$ και $(0, V)$ αντίστοιχα.

**Ορισμός 4.24.** Ένας διανυσματικός υπόχωρος του χώρου αναπαράστασης καλείται *$G$-αναλλοίωτος*, αν:

$$gU = \{gu : g \in G, u \in U\} \subseteq U$$

Έτσι, μια αναπαράσταση $(\rho, V)$ έχει τουλάχιστον δύο $G$-αναλλοίωτους υποχώρους, τον τετριμμένο, δηλαδή $\{0\}$ και τον ίδιο τον $V$. Αν αυτοί είναι οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι, τότε η αναπαράσταση καλείται *μη αναγώγιμη* (irreducible). Αποδεικνύεται οτι κάθε αναπαράσταση συμπαγούς ομάδας Lie, της οποίας η διάσταση είναι πεπερασμένη, δύναται να γραφεί ως το ευθύ άθροισμα μη αναγώγιμων αναπαραστάσεων. Αν υπάρχει αναλλοίωτος υπόχωρος πέραν των γνωστών, τότε η αναπαράσταση καλείται *αναγώγιμη* (reducible). Αντίστοιχα, ισχύουν οι ίδιες έννοιες και για τις άλγεβρες Lie, όπου μια αναπαράσταση $(\psi, V)$ είναι αναγώγιμη, αν υπάρχει $\mathfrak{g}$-αναλλοίωτος υπόχωρος $W$ με $\psi(X)(W) \subseteq W$, ο οποίος δεν είναι ο τετριμμένος ή ο $V$.

**Παράδειγμα 4.4.** Έστω η ομάδα Lie $SO(2)$, η οποία είναι ισομορφική ως λεία πολλαπλότητα με την ομάδα κύκλου $S^1$. Επιλέγουμε ένα χάρτη $(U, x) \in \mathcal{A}_{S^1}$, όπου $U$ ανοιχτό υποσύνολο και $x : u \mapsto \theta$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό ομάδων Lie $\rho : U \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$ με:

$$x^{-1}(\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

και η $(\rho, \mathbb{R}^2)$ είναι πράγματι αναπαράσταση, καθώς:

$$\begin{aligned} \rho(x^{-1}(\theta_1)) \circ \rho(x^{-1}(\theta_2)) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos_\theta 1\sin\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} = \rho(x^{-1}(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4.5.** Έστω η άλγεβρα Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ με διανύσματα βάσης $X_i$, $i = 1, 2, 3$, τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες αγκύλες Lie:

$$[X_1, X_2] = 2X_2 \qquad [X_1, X_3] = 2X_3 \qquad [X_2, X_3] = X_1$$

Μια αναπαράσταση $(\psi, \mathbb{C}^2)$ της $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie $\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \operatorname{End} \mathbb{C}^2$, όπου αφού $\psi$ γραμμική αρκεί να ορίσουμε τους ενδομορφισμούς $\psi(X_i)$ για να επιβεβαιώσουμε ότι είναι πράγματι αναπαράσταση. Ορίζουμε:

$$\psi(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \psi(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \psi(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου:

$$
\begin{aligned}
[\psi(X_1), \psi(X_2)] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\psi(X_2) = \rho(2X_2) = \psi([X_1, X_2])
\end{aligned}
$$

Με τετριμμένες πράξεις αποδεικνύονται και οι άλλες δύο σχέσεις και άρα, η $\psi$ είναι αναπαράσταση και εφόσον αυτό ισχύει για τα διανύσματα βάσης $X_i$ και αφού $\psi$ γραμμική, τότε θα ισχύει για όλα τα στοιχεία της $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Το σύνολο των ενδομορφισμών $\psi(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ ορίζεται ως:

$$
\psi(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha + \delta = 0 \right\} \subseteq \operatorname{End} \mathbb{C}^2
$$

δηλαδή ως το σύνολο όλων των $2 \times 2$ άιχνων πινάκων.

**Παράδειγμα 4.6.** Έστωσαν οι δύο αναπαραστάσεις της $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$:

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mathbb{R}^3} &: \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^3 \\
\psi_{\mathbb{C}^2} &: \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \to \operatorname{End} \mathbb{C}^2
\end{aligned}
$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση $\psi : \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{C}^2)$ με:

$$
a \mapsto \psi(a) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(a) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(a) \end{pmatrix}
$$

για $a \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, η οποία είναι πράγματι αναπαράσταση, καθώς για $X_i$ διανύσματα βάσης:

$$
\begin{aligned}
[\psi(X_i), \psi(X_j)] &= \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_i) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_j) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_j) \end{pmatrix} - \\
&- \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_i) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_j) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_j) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_i)\psi_{\mathbb{R}^3}(X_j) - \{i \leftrightarrow j\} & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_i)\psi_{\mathbb{C}^2}(X_j) - \{i \leftrightarrow j\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}([X_i, X_j]) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}([X_i, X_j]) \end{pmatrix} = \psi([X_i, X_j])
\end{aligned}
$$

Όμως, $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{C}^2$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{C}^2$ και για $v \in \mathbb{R}^3$:

$$
\psi(X_i)(v) = \begin{pmatrix} \psi_{\mathbb{R}^3}(X_i) & \\ & \psi_{\mathbb{C}^2}(X_i) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} v & \\ & \end{pmatrix} \right] = \psi_{\mathbb{R}^3}(X_i)(u) \in \mathbb{R}^3
$$

αφού $\psi_{\mathbb{R}^3}(X_1) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Το ίδιο ισχύει και για $a \in \mathbb{C}^2$.

**Ορισμός 4.25.** Έστω για κάθε $g \in G$ ο εσωτερικός αυτομορφισμός $I_g = \mathcal{L}_g \circ \mathcal{R}_{g^{-1}} : G \to G$ με $x \mapsto gxg^{-1}$. Η *συζυγής αναπαράσταση* της $G$ θα είναι ο ομομορφισμός $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ με $\operatorname{Ad}(g) = (I_{g*})_e$. Καθώς είδαμε ότι $I_{gh} = I_g \circ I_h$, τότε παίρνοντας το διαφορικό αυτής της σχέσης, θα έχουμε ότι $\operatorname{Ad}(gh) = \operatorname{Ad}(g) \circ \operatorname{Ad}(h)$.

**Ορισμός 4.26.** Η συζυγής αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ θα είναι ο ομομορφισμός $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} \mathfrak{g}$ με $\operatorname{ad}(X) = (\operatorname{Ad}_*)_e(X)$.

**Παρατήρηση 4.9.** *Από πρόταση 4.6-vi, καθώς* $\operatorname{Ad}, \operatorname{ad} = (\operatorname{Ad}_*)_e$ *είναι ομομορφισμοί ομάδων και αλγεβρών Lie αντίστοιχα, έπεται ότι το παραπάνω διάγραμμα μετατίθεται, δηλαδή ισχύει η σχέση* $\operatorname{Ad}(\exp X) = \exp(\operatorname{ad}(X))$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \operatorname{End}\mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

**Πρόταση 4.7.** *Για τη συζυγή αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ ισχύει ότι $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$ για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

*Απόδειξη.* Θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{Ad}(g)Y = I_{g*}Y = (\mathcal{L}_g \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})_*Y = (\mathcal{R}_{g^{-1}} \circ \mathcal{L}_g)_*Y = \mathcal{R}_{g^{-1}*}Y$$

για κάθε $g \in G$ και $Y \in \mathfrak{g}$, αφού $Y$ αριστερά αναλλοίωτο. Από πρόταση 4.6-vii γνωρίζουμε ότι $\phi_t = \mathcal{R}_{\exp(tX)}$ είναι η ροή του $X \in \mathfrak{g}$ και άρα $\phi_t(e) = \exp(tX)$. Επομένως:

$$\phi_t(g) = g\exp(tX) = g\phi_t(e) = \mathcal{R}_{\phi_t(e)}(g)$$

και άρα, $\phi_{t*} = \mathcal{R}_{\phi_t(e)*}$. Αποδεικνύεται επίσης [?] ότι για δύο λεία διανυσματικά πεδία $X, Y$ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ και $\phi_t$ (τοπική) ροή του $X$ στη γειτονιά ενός $p \in M$, ισχύει ότι:

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y_p - \phi_{t*}Y_{\phi_t(p)}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_{-t*}Y_{\phi_t(p)} - Y_p)$$

οπότε εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην περίπτωση μας για αυθαίρετο $p \in M$, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}[X,Y] &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi_{t*}Y - Y) = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathcal{R}_{\phi_t(e)*}Y - Y)\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(\phi_t^{-1}(e))Y - Y) = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(\phi_{-t}(e))Y - Y)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(\phi_t(e))Y - Y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Ad}(\phi_t(e))Y - \mathrm{Ad}(\phi_0(e))Y)\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(\phi_t(e))Y = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y = (\mathrm{Ad}_*X)(Y) = \mathrm{ad}(X)Y\end{aligned}$$

αφού για οποιονδήποτε ομομορφισμό (ομάδων Lie) $\rho : G \to \operatorname{Aut}V$, το διαφορικό $\rho_* : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}V$ ορίζεται ως:

$$(\rho_*(X))(Y) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho(\exp(tX))Y$$

Τελικά θα ισχύει ότι $\mathrm{ad}(X) : Y \mapsto [X,Y]$. □

**Πρόταση 4.8.** *Για κάθε ομάδα πινάκων $G$, θα ισχύει ότι $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$ για κάθε $g \in G$ και $X \in \mathfrak{g}$.*

*Απόδειξη.* Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g)X = I_{g*}X &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}I_g(\exp(tX)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g(\exp(tX))g^{-1}\\ &= g\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}e^{tX}\right]g^{-1} = gXg^{-1}\end{aligned}$$

καθώς για κάθε ομάδα πινάκων $\exp(tX) = e^{tX}$. □

**Παράδειγμα 4.7.** Έστω η ομάδα Lie $SU(2)$ και η άλγεβρα Lie $\mathfrak{su}(2)$ αυτής. Έχουμε ότι $SU(2) = \{A \in U(2) \mid \det A = 1\}$ και $\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = -A, \operatorname{tr} A = 0\}$. Χβτγ μπορούμε να επιλέξουμε διαγώνια στοιχεία της $SU(2)$ για να έχουμε πιο εύκολες και σύντομες πράξεις. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις συζυγείς αναπαραστάσεις της ομάδας και της άλγεβρας αυτής. Έστω λοιπόν $g = \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \in SU(2)$. Καθώς $\dim SU(n) = n^2 - 1$, έπεται ότι $\dim SU(2) = 3$, όπου πρόκειται προφανώς και για την πληθικότητα της βάσης. Επιλέγουμε την εξής βάση:

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

όπου $X_i = -i\sigma_i$ με $\sigma_i$ να είναι οι γνωστοί (στη φυσική) πίνακες Pauli. Είδαμε ότι για ομάδες πινάκων ισχύει ότι $\operatorname{Ad}(g)X_i = gX_ig^{-1}$, όπου η πράξη μεταξύ των στοιχείων είναι πολλαπλασιασμός πινάκων. Επομένως:

$$\operatorname{Ad}(g)X_1 = \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \operatorname{diag}(i, -i) \operatorname{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) = \operatorname{diag}(i, -i) = 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3$$

Αντίστοιχα, αν συμβολίσουμε με $J_2$ τον αντιδιαγώνιο μοναδιαίο $2 \times 2$ πίνακα, τότε ισχύει ότι $X_2 = \operatorname{diag}(1, -1)J_2$ και:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}(g)X_2 &= \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \operatorname{diag}(1, -1)J_2 \operatorname{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \\
&= \operatorname{diag}(e^{i\theta}, -e^{-i\theta})J_2 \operatorname{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}) \\
&= \operatorname{diag}(e^{i\theta}, -e^{-i\theta}) \operatorname{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})J_2 \\
&= \operatorname{diag}(e^{2i\theta}, -e^{-2i\theta})J_2 = \operatorname{diag}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta, -\cos 2\theta + i \sin 2\theta)J_2 \\
&= 0 \cdot X_1 + \cos 2\theta \cdot X_2 + \sin 2\theta \cdot X_3
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Euler. Τέλος, εύκολα βρίσκουμε και ότι:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}(g)X_3 &= i \operatorname{diag}(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta})J_2 \\
&= \operatorname{diag}(i \cos 2\theta - \sin 2\theta, i \cos 2\theta + \sin 2\theta)J_2 \\
&= 0 \cdot X_1 - \sin 2\theta \cdot X_2 + \cos 2\theta \cdot X_3
\end{aligned}$$

και συνεπώς, θα πρέπει να ισχύει ότι ο αυτομορφισμός $\operatorname{Ad}(g) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ θα δίνεται από:

$$\operatorname{Ad}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε για κάποιο στοιχείο $X = \sum_{i=1}^{3} c_i X_i$ της $\mathfrak{su}(2)$, με $c = (c_1, c_2, c_3)^t$ το διάνυσμα στήλη των συντελεστών, να ισχύει ότι $c'^t = \operatorname{Ad}(g)c^t$ θα είναι το διάνυσμα στήλη των συντελεστών (ως προς τη δοθείσα βάση) του $X$ στη συζυγή αναπαράσταση της $SU(2)$.

Για να υπολογίσουμε τώρα την $\operatorname{ad} : \mathfrak{su}(2) \to \operatorname{End} \mathfrak{su}(2)$, επιλέγουμε χβτγ ένα διαγώνιο στοιχείο, το οποίο ικανοποιεί τον ορισμό της άλγεβρας, έστω $X = \operatorname{diag}(i\theta, -i\theta)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\operatorname{ad}(X)(X_i) = [X, X_i] = XX_i - X_iX$. Εύκολα βρίσκουμε αρχικά ότι:

$$\operatorname{ad}(X)(X_1) = \operatorname{diag}(-\theta, -\theta) - \operatorname{diag}(-\theta, -\theta) = 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3$$

Αντίστοιχα, με τετριμμένες πράξεις, βρίσκουμε και τα:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(X)(X_2) &= 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 2\theta \cdot X_3 \\
\operatorname{ad}(X)(X_3) &= 0 \cdot X_1 - 2\theta \cdot X_2 + 0 \cdot X_3
\end{aligned}$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι ο ενδομορφισμός $\operatorname{ad}(X) : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ δίνεται από:

$$\operatorname{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\theta \\ 0 & -2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

**Ορισμός 4.27.** Για κάθε άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, η *μορφή Killing* $\mathcal{K}$ ορίζεται ως η διγραμμική απεικόνιση $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ με $\mathcal{K}(X, Y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y))$.

**Πρόταση 4.9.**

*i)* *Η $\mathcal{K}$ είναι συμμετρική.*

*ii)* *Η $\mathcal{K}$ είναι αναλλοίωτη υπό τους αυτομορφισμούς της $\mathfrak{g}$. Συγκεκριμένα, για την αναπαράσταση $(\operatorname{Ad}, \mathfrak{g})$ έχουμε ότι $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{K}(\operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y)$, δηλαδή η μορφή Killing είναι Ad-αναλλοίωτη.*

*Απόδειξη.*

i) Έπεται από την κυκλικότητα του ίχνους, καθώς $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

ii) Έστω κάποιο $\phi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\operatorname{ad}(\phi(X)) = \phi \circ \operatorname{ad}(X) \circ \phi^{-1}$. Πράγματι, για αυθαίρετο $Y \in \mathfrak{g}$ θα ισχύει ότι:

$$\operatorname{ad}(\phi X)Y = [\phi X, Y] = [\phi X, \phi\phi^{-1}Y] = \phi[X, \phi^{-1}Y] = \phi \circ \operatorname{ad}(X) \circ \phi^{-1}$$

Από την κυκλικότητα του ίχνους, θα έχουμε ότι $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(A^{-1}AB) = \operatorname{tr} B$ και με βάση την τελευταία σχέση, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\phi X, \phi Y) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\phi X) \circ \operatorname{ad}(\phi Y)) = \operatorname{tr}\big(\phi \circ \operatorname{ad}(X) \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \operatorname{ad}(Y) \circ \phi^{-1}\big) \\ &= \operatorname{tr}\big(\phi \circ \operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y) \circ \phi^{-1}\big) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)) = \mathcal{K}(X, Y)\end{aligned}$$

οπότε, θέτοντας $\phi = \operatorname{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, προκύτει ότι η $\mathcal{K}$ είναι Ad-αναλλοίωτη.

□

**Ορισμός 4.28.** Καλούμε *διαφόριση* σε μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, τον ενδομορφισμό $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, ο οποίος έχει την ιδιότητα για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$ να ισχύει $D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$. Το σύνολο όλων των διαφορίσεων στην $\mathfrak{g}$ το σημαίνουμε με $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ και αποτελεί υποάλγεβρα Lie της $\operatorname{End}\mathfrak{g}$.

**Παρατήρηση 4.10.** *Το* $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ *αποδεικνύεται ότι είναι άλγεβρα Lie της* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *και άρα* $\exp(tD) \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *για* $D \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ *και* $t \in \mathbb{R}$. *Έτσι, ένα γνώριμο παράδειγμα διαφόρισης στην* $\mathfrak{g}$ *είναι ο ενδομορφισμός* $\operatorname{ad}(X)$. *Αυτό επιβεβαιώνεται εύκολα, αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της* $\operatorname{ad}(X)$ *και την ταυτότητα Jacobi, καθώς:*

$$\operatorname{ad}(X)[Y, Z] = [X, [Y, Z]] = -[Y, [Z, X]] - [Z, [X, Y]] = [\operatorname{ad}(X)Y, Z] + [Y, \operatorname{ad}(X)Z]$$

*Επομένως,* $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}\mathfrak{g}$ *και ο αυτομορφισμός* $\exp(\operatorname{ad}(X))$ *καλείται εσωτερικός αυτομορφισμός. Αυτού του είδους οι αυτομορφισμοί παράγουν μια υποομάδα της* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *που καλείται συζυγής ομάδα και σημαίνεται με* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$.

**Πρόταση 4.10.** *Αν* $D = \operatorname{ad}(Z)$, *τότε για κάθε* $Z \in \mathfrak{g}$ *ο ενδομορφισμός* $\operatorname{ad}(Z)$ *είναι πλήρως αντισυμμετρικός ως προς τη μορφή Killing, δηλαδή* $\mathcal{K}(\operatorname{ad}(Z)X, Y) = -\mathcal{K}(X, \operatorname{ad}(Z)Y)$.

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε το ii της τελευταίας πρότασης. Θα θεωρήσουμε δηλαδή $g = \exp(tZ)$ και άρα, $\operatorname{Ad}(g) = \operatorname{Ad}(\exp(tZ))$, οπότε θα παραγωγίσουμε το $\mathcal{K}(\operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y)$ ως προς $t$ στο $t = 0$. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathcal{K}(\operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y) &= \mathcal{K}\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \operatorname{Ad}(\exp(tZ))X, \operatorname{Ad}(\exp(tZ)Y)|_{t=0}\right] + \\ &+ \mathcal{K}\left[\operatorname{Ad}(\exp(tZ))X|_{t=0}, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \operatorname{Ad}(\exp(tZ)Y)\right] \\ &= \mathcal{K}(\operatorname{ad}(Z)X, Y) + \mathcal{K}(X, \operatorname{ad}(Z)Y)\end{aligned}$$

Έπειτα, καθώς το δεξιό μέλος της σχέσης του ii είναι $\mathcal{K}(X,Y)$, δηλαδή δεν εξαρτάται από το $t$, τότε παραγωγίζοντας ως προς $t$, αυτό θα μηδενίζεται με αποτέλεσμα το ζητούμενο να αποδεικνύεται. Η σχέση αυτή θα είναι η σχέση της $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-*αναλλοιότητας* της μορφής Killing. □

**Παρατήρηση 4.11.** *Μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό της μορφής Killing για οποιαδήποτε αναπαράσταση $(\psi, V)$, έτσι ώστε $\mathcal{K}_\psi(X,Y) = \mathrm{tr}(\psi(X)\circ\psi(Y))$.*

**Ορισμός 4.29.** Καλούμε *τελεστή Casimir* τη γραμμική απεικόνιση $\Omega_\psi : V \xrightarrow{\sim} V$ για μια δοθείσα αναπαράσταση άλγεβρας Lie $(\psi, V)$ με:

$$\Omega_\psi = \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}} \psi(X_i)\circ\psi(\xi_i)$$

και $\{\xi_i\}$ εκείνη τη βάση της $\mathfrak{g}$, για την οποία ισχύει ότι αν $\{X_i\}$ μια βάση της $\mathfrak{g}$, τότε $\mathcal{K}_\psi(X_i,\xi_j) = \delta_{ij}$.

**Πρόταση 4.11.** *Ο τελεστής Casimir μετατίθεται με τις αναπαραστάσεις όλων των στοιχείων μιας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, δηλαδή $[\Omega_\psi, \psi(X)] = 0$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ με $\Omega_\psi, \psi(X) \in \mathrm{End}\, V$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ ότι:

$$\begin{aligned}
[\Omega_\psi, \psi(X)] &= \sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}} [\psi(X_i)\circ\psi(\xi_i), \psi(X)] \\
&= \sum_i \psi(X_i)\circ[\psi(\xi_i),\psi(X)] + \sum_i [\psi(X_i),\psi(X)]\circ\psi(\xi_i) \\
&= \sum_i \psi(X_i)\circ\psi([\xi_i, X]) + \sum_i \psi([X_i, X])\circ\psi(\xi_i)
\end{aligned}$$

καθώς $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$ και $\psi$ ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Όμως, γράφοντας το $X$ στις δύο βάσεις, θα έχουμε ότι:

$$[\xi_i, X] = \sum_{j=1}^{\dim\mathfrak{g}} r_j[\xi_i,\xi_j] = \sum_{j,k=1}^{\dim\mathfrak{g}} r_j \widetilde{c}_{kij}\xi_k \qquad [X_i, X] = \sum_{j,k=1}^{\dim\mathfrak{g}} t_j c_{kij} X_k$$

Όμως, με το παρακάτω τέχνασμα παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_j r_j\widetilde{c}_{kij} = \sum_{j,l} r_j\widetilde{c}_{lij}\delta_{kl} &= \sum_{j,l} r_j\widetilde{c}_{lij}\mathcal{K}_\psi(X_k,\xi_l) = \mathcal{K}_\psi(X_k,[\xi_i,X]) \\
&= -\mathcal{K}_\psi(X_k,[X,\xi_i]) = -\mathcal{K}_\psi(X_k,\mathrm{ad}(X)\xi_i) = \mathcal{K}_\psi(\mathrm{ad}(X)X_k,\xi_i) \\
&= -\mathcal{K}_\psi([X_k,X],\xi_i) = -\sum_{j,l} t_j c_{lkj}\mathcal{K}_\psi(X_l,\xi_i) = -\sum_j t_j c_{ikj}
\end{aligned}$$

και άρα:

$$\begin{aligned}
[\Omega_\psi, \psi(X)] &= \sum_{i,j,k} r_j\widetilde{c}_{kij}\psi(X_i)\circ\psi(\xi_k) + \sum_{i,j,k} t_j c_{kij}\psi(X_k)\circ\psi(\xi_i) \\
&= -\sum_{i,j,k} t_j c_{ikj}\psi(X_i)\circ\psi(\xi_k) + \sum_{i,j,k} t_j c_{kij}\psi(X_k)\circ\psi(\xi_i) \\
&= -\sum_{i,j,k} t_j c_{kij}\psi(X_k)\circ\psi(\xi_i) + \sum_{i,j,k} t_j c_{kij}\psi(X_k)\circ\psi(\xi_i) = 0
\end{aligned}$$

αφού όλοι οι δείκτες είναι βουβοί, οπότε και επιτρέπεται η αλλαγή $i \leftrightarrow k$. □

**Λήμμα 4.7** (Schur). *Αν μια αναπαράσταση $(\psi, V)$ είναι μη αναγώγιμη, τότε ο τελεστής Casimir είναι κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο του ταυτοτικού στοιχείου στο χώρο αναπαράστασης $V$, δηλαδή ισχύει ότι $\Omega_\psi = c_\psi \operatorname{id}_V$ με $c_\psi \in \mathbb{R}$.*

**Ισχυρισμός 4.1.** *Ισχυριζόμαστε ότι $c_\psi = \dim \mathfrak{g}/\dim V$ για μια μη αναγώγιμη αναπαράσταση $(\psi, V)$.*

*Απόδειξη.* Εφόσον $(\psi, V)$ μη αναγώγιμη, έπεται από το τελευταίο λήμμα ότι $\Omega_\psi = c_\psi \operatorname{id}_V$. Αλλά τότε $\operatorname{tr} \Omega_\psi = \operatorname{tr}(c_\psi \operatorname{id}_V) = c_\psi(\dim V)$. Παράλληλα, ισχύει όμως και ότι:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} \Omega_\psi = \operatorname{tr}\left[\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \psi(X_i) \circ \psi(\xi_i)\right] &= \sum_i \operatorname{tr}(\psi(X_i) \circ \psi(\xi_i)) \\ = \sum_i \mathcal{K}_\psi(X_i, \xi_i) = \dim \mathfrak{g} &\end{aligned}$$

οπότε πράγματι, ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

**Παράδειγμα 4.8.** Έστω η άλγεβρα Lie $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, η οποία ικανοποιεί τη μεταθετική σχέση $[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k$ με $\{X_i\}$ βάση αυτής για $i = 1, 2, 3$. Έστω τώρα και η μη αναγώγιμη αναπαράσταση της $(\psi, \mathbb{R}^3)$ με $\psi : \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \to \operatorname{End} \mathbb{R}^3$, όπου:

$$\psi(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \operatorname{diag}(-1,1)J_2 \end{pmatrix} \quad \psi(X_2) = \operatorname{diag}(1, 0, -1)J_3 \quad \psi(X_3) = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(-1,1)J_2 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Επιλέγουμε βάση $\{\xi_i\}$, τέτοια ώστε $\mathcal{K}_\psi(X_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. Με εύκολες πράξεις πινάκων βρίσκουμε οτι ισχύει $\operatorname{tr}(\psi(X_i) \circ \psi(X_j)) = 0$ για $i \neq j$ και $\operatorname{tr}(\psi(X_i) \circ \psi(X_i)) = -2$, οπότε επιλέγουμε $\xi_i = -(1/2)X_i$, έτσι ώστε πράγματι να έχουμε $\mathcal{K}_\psi(X_i, \xi_j) = \delta_{ij}$. Επομένως, ο τελεστής Casimir θα δίνεται από:

$$\Omega_\psi = -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} \psi(X_i) \circ \psi(X_i)$$

Βρίσκουμε ότι μπορούμε να δώσουμε μια γενική μορφή των $X_i$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\psi(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{i3} & \delta_{i2} \\ \delta_{i3} & 0 & -\delta_{i1} \\ -\delta_{i2} & \delta_{i1} & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε καθώς $\psi(X_i)$ είναι αντισυμμετρικός, θα ισχύει ότι $\psi(X_i)^t = -\psi(X_i)$, το οποίο σημαίνει ότι $\psi(X_i) \circ \psi(X_i) = -\psi(X_i) \circ \psi(X_i)^t$ θα είναι ένας συμμετρικός πίνακας, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε το ένα εκ των τριγώνων για να έχουμε τη μορφή του πίνακα. Τελικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\sum_i \psi(X_i) \circ \psi(X_i) &= \sum_i \begin{pmatrix} -(\delta_{i3} + \delta_{i2}) & \delta_{i2}\delta_{i1} & \delta_{i3}\delta_{i1} \\ * & -(\delta_{i3} + \delta_{i1}) & \delta_{i3}\delta_{i2} \\ * & * & -(\delta_{i2} + \delta_{i1}) \end{pmatrix} \\ &= -\sum_i \operatorname{diag}(\delta_{i3} + \delta_{i2}, \delta_{i3} + \delta_{i1}, \delta_{i2} + \delta_{i1}) = -\operatorname{diag}(2, 2, 2)\end{aligned}$$

οπότε $\Omega_\psi = I_3$. Έπεται ότι $c_\psi = 1$, το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού $\dim \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Αν θεωρήσουμε ότι $\psi(X_i)$ είναι ο γεννήτορας $\mathcal{J}_i$, τότε έχουμε για $\mathcal{J}^2 = \sum_i \mathcal{J}_i^2$ ότι:

$$\Omega_\psi = -\frac{1}{2}\mathcal{J}^2 = I_3 \iff \mathcal{J}^2 = -2I_3 = -1(1+1)I_{2\cdot 1+1}$$

το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από την ιδιοτιμή του $\mathcal{J}^2$ για $j = 1$, η οποία γενικά δίνεται από $\mathcal{J}^2 = -j(j+1)I_{2j+1}$. Πρόκειται για μια σχέση πολύ γνώριμη στη φυσική, όπου το $j$ είθισται να συμβολίζει είτε τον κβαντικό αριθμό του σπιν (συχνά και ως $s$), είτε αυτόν της στροφορμής και αυτή η αναπαράσταση $(\psi, \mathbb{R}^3)$, όπως την ορίσαμε, καλείται *triplet αναπαράσταση* (κατάλληλη για spin ή στροφορμή ίση με 1). Στην πράξη, λόγω του ότι οι $\mathcal{J}_i$ είναι αντιερμιτιανοί, κατασκευάζουμε μια άλλη αναπαράσταση, όπου σε αυτήν είναι ερμιτιανοί πίνακες και μπορούν να αντιστοιχηθούν σε φυσικά μεγέθη (observables), χωρίς αυτό να επηρεάζει την τιμή του $j$, αφού απλά αλλάζει το πρόσημο της ιδιοτιμής, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Υπάρχει και μια άλλη αναπαράσταση $(\psi', \mathbb{C}^2)$ με $\psi' : \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \to \operatorname{End}\mathbb{C}^2$, όπου $\psi'(X_i) = -(i/2)\sigma_i$ με $\sigma_i$ να είναι οι πίνακες Pauli, όπως τους ορίσαμε έμμεσα στο παράδειγμα 4.7. Μπορούμε να δώσουμε και εδώ μια γενική μορφή:

$$\psi'(X_i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\delta_{i1} & \delta_{i2} + i\delta_{i3} \\ -\delta_{i2} + i\delta_{i3} & -i\delta_{i1} \end{pmatrix}$$

Κατα τα γνωστά, $\operatorname{tr}(\psi'(X_i) \circ \psi'(X_j)) = 0$ για $i \neq j$ και:

$$\mathcal{K}_{\psi'}(X_i, X_i) = \operatorname{tr}(\psi'(X_i) \circ \psi'(X_i)) = -\frac{1}{4}(\delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3}) \operatorname{tr}(I_2) = -\frac{1}{2}$$

οπότε επιλέγουμε $\xi_i = -2X_i$, ώστε η $K_{\psi'}$ να είναι δέλτα του Kronnecker. Επομένως, ο τελεστής Casimir θα δίνεται από:

$$\Omega_{\psi'} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3})I_2 = \frac{3}{2}I_2$$

και άρα $c_{\psi'} = 3/2$. Με την ίδια λογική, όπως και πριν, έχουμε ότι:

$$-2\mathcal{J}^2 = \frac{3}{2}\, I_2 \iff \mathcal{J}^2 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)I_{2\cdot(1/2)+1}$$

οπότε $j = 1/2$ και η αναπαράσταση $(\psi', \mathbb{C}^2)$ καλείται *doublet αναπαράσταση* (κατάλληλη για spin ή στροφορμή ίση με 1/2).

Κεφάλαιο 5

# Κύριες Ινώδεις Δέσμες και Γεωμετρία Ehresmann

Κάνοντας μια πολύ χονδροειδή εισαγωγή χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες, μπορούμε να πούμε ότι μια κύρια ινώδης δέσμη είναι μια δέσμη, στην ίνα της οποίας δρα με χαρακτηριστικό τρόπο από δεξιά μια ομάδα Lie. Οι κύριες ινώδεις δέσμες είναι εξέχουσας σημασίας και κατέχουν ιδιαίτερη θέση στη φυσική και ειδικά στο Καθιερωμένο Πρότυπο, όπου αποτελούν το γεωμετρικό υπόβαθρο των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων (Yang-Mills θεωρίες). Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να αποδειχθεί μεταξύ άλλων ο τρόπος με τον οποίον μπορούν να αποτελέσουν υπόβαθρο και της γενικής σχετικότητας και γενικότερα, των θεωριών βαρύτητας, έτσι ώστε να περιγράφουν με ολοκληρωμένο τρόπο τα δυναμικά χαρακτηριστικά αυτών. Οι κύριες ινώδεις δέσμες είναι υπό μια έννοια η πύλη εισόδου στα εδάφη των γεωμετριών Cartan και Ehresmann. Γι' αυτόν τον λόγο, ο αναγνώστης καλείται να δώσει ιδιαίτερο βάρος σε αυτό το κεφάλαιο, καθότι λειτουργεί ως εισαγωγή για το επόμενο μέρος. Αρχικά θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίον δρα μια ομάδα Lie σε μια πολλαπλότητα, δηλαδή τον χαρακτήρα αυτών των δράσεων και τους ορισμούς που επάγουν. Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια εισαγωγή στις κύριες και συσχετισμένες δέσμες, προκειμένου μετά να περάσουμε στην έννοια της συνοχής Ehresmann και ως λογικό επακόλουθο, στις έννοιες της παράλληλης μεταφοράς, της καμπυλότητας και της στρέψης, τις οποίες θα μελετήσουμε εκτός των πλαισίων της ρημάννειας γεωμετρίας. Για αυτό το κεφάλαιο, θα αντλήσουμε πληροφορία από τα **[31]**, **[34]**, **[37]**, **[17]**, **[33]**, **[26]** και **[27]**.

## 5.1. Δράσεις μιας ομαδας Lie σε μια πολλαπλότητα

**Ορισμός 5.1.** Έστω ομάδα Lie $G$ και λεία πολλαπλότητα $M$. Μια *αριστερή δράση* της $G$ στην $M$ είναι μια απεικόνιση $G \times M \to M$ με $(g,p) \mapsto g \cdot p$, τέτοια ώστε $g \cdot (g' \cdot p) = (gg') \cdot p$ και $e \cdot p = p$. Αντίστοιχα ορίζουμε και τη *δεξιά δράση* ως την απεικόνιση $M \times G \to M$ με $(p \cdot g) \cdot g' = p \cdot (gg')$ και $p \cdot e = p$. Μια πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια συγκεκριμένη $G$-δράση καλείται (αριστερός η δεξιός) *$G$-χώρος*. Κρίνεται δόκιμο να δώσουμε κάποιες φορές ένα σύμβολο σε αυτές τις απεικονίσεις, οπότε θα σημαίνουμε με $\curvearrowright$ την αριστερή δράση και με $\curvearrowleft$ τη δεξιά, οπότε θα έχουμε ότι $\mathfrak{L}_g p = g \cdot p$ με $\mathfrak{L}_g \circ \mathfrak{L}_{g'} = \mathfrak{L}_{gg'}$ και $\mathfrak{R}_g p = p \cdot g$ με $\mathfrak{R}_g \circ \mathfrak{R}_{g'} = \mathfrak{R}_{g'g}$. Γενικά, οι συμβολισμοί $\curvearrowright_g p = g \curvearrowright p = \mathfrak{L}_g p = g \cdot p = gp$ θα θεωρούνται ισοδύναμοι, αφού δεν υπάρχει περιθώριο παρερμηνείας. Μπορούμε πάντα να μεταφράσουμε μια δεξιά δράση σε μια αριστερή μέσω της σχέσης $\mathfrak{R}_g = \mathfrak{L}_{g^{-1}}$.

**Ορισμός 5.2.** Έστω $\curvearrowright: G \times M \to M$ μια αριστερή δράση της ομάδας Lie $G$ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$.

i) Η $\curvearrowright$ είναι *λεία*, αν είναι λεία ως απεικόνιση, δηλαδή αν η τιμή της εξαρτάται με λείο τρόπο από το όρισμα. Αν είναι λεία, τότε για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση $\mathfrak{L}_g : M \to M$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη $\mathfrak{L}_{g^{-1}}$.

ii) Για κάθε $p \in M$, καλούμε *τροχιά* (orbit) του $p$ υπό τη δράση της $G$ το σύνολο των εικόνων του $p$ υπό τις δράσεις των στοιχείων της $G$. Συμβολίζουμε την τροχιά του $p$ με $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$.

iii) Η $\curvearrowright$ καλείται *μεταβατική* (transitive), αν για κάθε δύο σημείο $p, q \in M$ υπάρχει $g \in G$, τέτοιο ώστε $g \cdot p \doteq q$ ή ισοδύναμα, αν η τροχιά κάθε σημείου είναι όλη η $M$.

iv) Δοθέντος ενός $p \in M$, καλούμε *σταθεροποιητή* (stabilizer) ή ομάδα ισοτροπίας του $p$, το σύνολο των στοιχείων της $G$, των οποίων η δράση διατηρεί το $p$, το οποίο σημαίνουμε με $\mathcal{S}_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$.

v) Η $\curvearrowright$ καλείται *ελεύθερη*, αν το μόνο στοιχείο της $G$ που διατηρεί αυθαίρετο σημείο της $M$ είναι η ταυτότητα, δηλαδή αν από τη σχέση $g \cdot p = p$ για κάποιο $p \in M$ συνεπάγεται ότι $g = e$. Ισοδύναμα, για να είναι μια δράση ελεύθερη, πρέπει $\mathcal{S}_p = \{e\}$ για κάθε $p \in M$.

vi) Η $\curvearrowright$ καλείται *γνήσια* (proper), αν η απεικόνιση $G \times M \to M \times M$ με $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$ είναι γνήσια, δηλαδή η προεικόνα ενός συμπαγούς συνόλου μέσω αυτής να είναι συμπαγές σύνολο.

Οι παραπάνω έννοιες ορίζονται ανάλογα και για τη δεξιά δράση.

**Λήμμα 5.1.** *Έστω $G \curvearrowright M$ (η $G$ δρά στην $M$ από αριστερά) με λείο τρόπο, όπου $G$ ομάδα Lie και $M$ λεία πολλαπλότητα. Η δράση είναι γνήσια, αν-ν για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset M$, ισχύει ότι το σύνολο $G_K = \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \varnothing\}$ είναι συμπαγές.*

*Απόδειξη.* Έστω $F : G \times M \to M \times M$ με $F(g, p) = (g \cdot p, p)$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η $F$ είναι γνήσια. Τότε για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} G_K &= \{g \in G \mid \exists\, p \in K : g \cdot p \in K\} \\ &= \{g \in G \mid \exists\, p \in M : F(g, p) \in K \times K\} = \pi_G(F^{-1}(K \times K)) \end{aligned}$$

όπου $\pi_G : G \times M \to G$ η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Εφόσον $F$ γνήσια, είναι προφανές ότι $G_K$ θα είναι συμπαγές. Αντίστροφα, έστω $G_K$ συμπαγές για κάθε συμπαγές υποσύνολο της $M$, έστω $K$. Αν $N \subset M \times M$ είναι συμπαγές, τότε έστω $K = \pi_1(N) \cup \pi_2(N) \subset M$, όπου $\pi_i : M \times M \to M$ η προβολή στον $i$-οστό παράγοντα. Θα ισχύει ότι:

$$F^{-1}(N) \subset F^{-1}(K \times K) \subset \{(g, p) \mid g \cdot p \in K, p \in K\} \subset G_K \times K$$

και άρα, αφού $F^{-1}(N)$ κλειστό από συνέχεια και $G_K, K$ συμπαγή, το $F^{-1}(N)$ θα είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου, δηλαδή συμπαγές. □

**Πόρισμα 5.1.** *Κάθε λεία δράση συμπαγούς ομάδας Lie σε λεία πολλαπλότητα είναι γνήσια. Αν στο παραπάνω λήμμα υποθέσουμε ότι $G$ συμπαγής, τότε $G_K$ κλειστό στην $G$ από συνέχεια και άρα συμπαγές.*

**Ορισμός 5.3.** Έστωσαν $M, N$ ίδιας πλευράς $G$-χώροι. Μια λεία απεικόνιση $\phi : M \to N$ καλείται *ισοαναλλοίωτη* ως προς τη δοθείσα $G$-δράση, αν για κάθε $g \in G$ ισχύει για την αριστερή δράση ότι $\phi(g \cdot p) = g \cdot \phi(p)$ και για τη δεξιά δράση ότι $\phi(p \cdot g) = \phi(p) \cdot g$ αντίστοιχα.

**Παράδειγμα 5.1.** Έστωσαν $G, H$ ομάδες Lie και $\phi : G \to H$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Υπάρχει μια φυσική (αριστερή) δράση της κάθε ομάδας στον εαυτό της μέσω της αριστερής μεταφοράς. Ας ορίσουμε τώρα μια αριστερή δράση, έτσι ώστε $G \curvearrowright H$, όπου $\curvearrowright : G \times H \to H$ με $\mathfrak{L}_g(h) = \phi(g)h$. Για να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται για δράση, αρκεί να ελέγξουμε τις σχέσεις του ορισμού. Πράγματι, $\mathfrak{L}_e = \phi(e)h = h$, καθώς η $\phi$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie και άρα $e_G \mapsto e_H$. Επιπλέον:

$$\mathfrak{L}_g \circ \mathfrak{L}_{g'}(h) = \phi(g)(\phi(g')h) = (\phi(g)\phi(g'))h = \phi(gg')h = \mathfrak{L}_{gg'}(h)$$

ξανά λόγω του ότι $\phi$ ομομορφισμός. Συνεπώς, είναι αριστερή δράση. Τέλος, η $\phi$ είναι ισοαναλλοίωτη ως προς αυτήν την $G$-δράση, καθώς $\mathfrak{L}_g \circ \phi(g') = \phi(g)\phi(g') = \phi(gg') = \phi \circ \mathfrak{L}_g(g')$.

**Παρατήρηση 5.1.** *Μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι μια $\phi : M \to N$, όπου $G \curvearrowright M$ και $G \curvearrowright' M$, είναι ισοαναλλοίωτη, αν το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\curvearrowright_g"'] & N \arrow[d, "\curvearrowright'_g"] \\
M \arrow[r, "\phi"] & N
\end{tikzcd}$$

*δηλαδή αν $\mathfrak{L}'_g \circ \phi = \phi \circ \mathfrak{L}_g$.*

**Ορισμός 5.4.** Έστω $G \curvearrowright M$. Το σύνολο των τροχιών της $G$ στην $M$ θα συμβολίζεται με $M/G$. Αντίστοιχα, αν $G \curvearrowleft M$, τότε θα συμβολίζεται με $G \setminus M$. Εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο, θα καλείται *χώρος τροχιών* της δράσης. Ισοδύναμα, πρόκειται για τον χώρο-πηλίκο με στοιχεία τις κλάσεις ισοδυναμίας που πληρούν τη σχέση ισοδυναμίας $p \sim p' \iff \exists\, g \in G : g \cdot p = p'$.

**Πρόταση 5.1.** *Έστωσαν $P, M, N$ λείες πολλαπλότητες και $\pi : M \to N$ μια επί υπένθεση. Επιπλέον, έστω $\phi : N \to P$ αυθαίρετη απεικόνιση. Τότε, η $\phi$ είναι λεία, αν-ν η $\phi \circ \pi$ είναι λεία:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi \circ \pi"] & \\
N \arrow[r, "\phi"'] & P
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Αν η $\phi$ είναι λεία, τότε $\phi \circ \pi$ λεία ως σύνθεση λείων. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\phi \circ \pi$ είναι λεία. Έστω $\sigma : U \to M$ λεία τμήση, όπου $U$ γειτονιά του $q \in N$ για κάθε $q$. Τότε, καθώς $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$, θα έχουμε ότι $\phi|_U = \phi \circ \mathrm{id}_U = \phi \circ \pi \circ \sigma$, όπου πρόκειται για σύνθεση λείων απεικονίσεων, εφόσον από υπόθεση $\sigma, \phi \circ \pi$ λείες. Επομένως, η $\phi$ θα είναι λεία στη γειτονιά του $q$, αλλά καθώς αυτό ισχύει για κάθε $q$, έπεται ότι $\phi$ λεία. $\square$

**Θεώρημα 5.1** (Πολλαπλότητες-πηλίκο)**.** *Έστω ότι μια ομάδα Lie $G$ δρα λεία, ελεύθερα και γνήσια σε μια λεία πολλαπλότητα $M$. Τότε, ο χώρος των τροχιών $M/G$ είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα με* $\dim M/G = \dim M - \dim G$ *και έχει μοναδική διαφορίσιμη δομή, τέτοια ώστε η απεικόνιση-πηλίκο $\pi : M \to M/G$ να είναι λεία υπένθεση.*

## 5.2. *Κύριες ινώδεις δέσμες και συσχετισμένες δέσμες*

**Ορισμός 5.5.** Έστω ομάδα Lie $G$ και $M$ μια λεία πολλαπλότητα. Μια δέσμη $(P, \pi, M)$ θα καλείται *κύρια ινώδης δέσμη* (principal fibre bundle) ή *κύρια $G$-δέσμη*, αν:

i) Ο ολικός χώρος $P$ είναι δεξιός $G$-χώρος και η δράση της $G$ στον $P$ είναι γνήσια, λεία και ελεύθερη.

ii) Υπάρχει αμφιδιαφόριση μεταξύ της $M$ και του $G\backslash P$, δηλαδή μεταξύ της βάσης της δέσμης και του χώρου τροχιών της δεξιάς δράσης της $G$ στον $P$, όπου η σχέση ισοδυναμίας που ορίζει η $\curvearrowleft$ στον $P$ είναι της μορφής $u \sim u' \iff \exists\, g \in G : u' = u \cdot g$. Επιπλέον, η προβολή δέσμης $\pi : P \to M$ είναι λεία.

iii) Η δέσμη $P \to M$ είναι τοπικά τετριμμένη, δηλαδή υπάρχει αμφιδιαφόριση $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ με $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$, όπου $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ με $\phi(u \cdot g) = \phi(u)g$ για κάθε $u \in \pi^{-1}(U)$ και $g \in G$, δηλαδή $\phi$ είναι $G$-ισοαναλλοίωτη, όπου $U$ ανοιχτό υποσύνολο της $M$.

Η $G$ θα καλείται *δομική ομάδα* της δέσμης και για κάθε $x \in M$, το $\pi^{-1}(x)$ θα καλείται *ίνα* του $x$ (ή στο $x$).

**Παρατήρηση 5.2.** *Για κάθε $u \in P$, το σύνολο $\pi^{-1}(x) = \{u \cdot g \mid g \in G\} \subset P$ θα είναι η ίνα που διέρχεται από το $u$, δηλαδή $\pi^{-1}(x) \cong u \cdot G$, όπου $u \cdot G$ η τροχιά του $u$ υπό τη δράση της $G$. Καθώς η $\curvearrowleft$ είναι ελεύθερη, κάθε ίνα θα είναι αμφιδιαφορική με τη δομική ομάδα $G$, αφού $G \to \pi^{-1}(x)$ με $g \mapsto u \cdot g$ είναι μια αμφιδιαφόριση για κάθε $x \in M$ και $u \in \pi^{-1}(x)$. Επιπλέον, αφού $\pi^{-1}(x) \cong G$, η δράση της $G$ στην ίνα θα είναι μεταβατική, καθώς είδαμε οτι κάθε ομάδα Lie δρα με μεταβατικό τρόπο στον εαυτό της. Δηλαδή, για $u, u' \in \pi^{-1}(x)$, θα υπάρχει $g \in G$, έτσι ώστε $u = u' \cdot g$. Συχνά θα αναφερόμαστε σε μια $G$-δέσμη $G \to P \to M$ ως απλά $P$ και θα λέμε ότι η δράση της $G$ διατηρεί την ίνα στο κάθε $x$, δηλαδή $u, u \cdot g \in P_x$, όπου $\pi(u) = \pi(u \cdot g) = x$ και $P_x = \pi^{-1}(x)$.*

**Ορισμός 5.6.** Καλούμε ένα ζεύγος $(U, \psi)$, όπου $U, \psi$ ως άνω ορισμένα, χάρτη της κύριας δέσμης και κατά τα γνωστά, μια οικογένεια $\{(U_i, \psi_i)\}$, τέτοια ώστε $\{U_i\}$ να είναι κάλυμμα της $M$, καλείται *άτλας* κύριας δέσμης. Λόγω της τοπικής τετριμμενοποίηση της $P$, υπάρχει ανοιχτό κάλυμμα $\{U_i\}$, τέτοιο ώστε η $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ με $u \mapsto (\pi(u), \phi_i(u))$ και $\phi_i(u \cdot g) = \phi_i(u)g$, να είναι αμφιδιαφόριση. Έστω τώρα ότι $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$. Τότε:

$$\phi_j(u \cdot g)(\phi_i(u \cdot g))^{-1} = \phi_j(u)gg^{-1}(\phi_i(u))^{-1} = \phi_j(u)(\phi_i(u))^{-1}$$

και άρα, η απεικόνιση $\pi^{-1}(U_i \cap U_j) \to G$ με $u \mapsto \phi_j(u)(\phi_i(u))^{-1}$ θα είναι σταθερή σε κάθε ίνα. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $c_{ji} : U_i \cap U_j \to G$ με $c_{ji}(x) = \phi_j(u)(\phi_i(u))^{-1}$ για $x = \pi(u) \in U_i \cap U_j$, η οποία να είναι λεία. Αυτή θα καλείται *απεικόνιση μετάβασης* και θα ισχύει ότι:

$$c_{ki}(x) = \phi_k(u)(\phi_i(u))^{-1} = \phi_k(u)(\phi_j(u))^{-1}\phi_j(u)(\phi_i(u))^{-1} = c_{kj}(x)c_{ji}(x)$$

οπότε τελικά καταλήγουμε στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\ (U_i \cap U_j) \times G \arrow[rr, "\psi_j \circ \psi_i^{-1}"'] & & (U_i \cap U_j) \times G \end{tikzcd}$$

όπου $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : (x, \phi_i(u)) \mapsto (x, c_{ji}(x)\phi_i(u))$ για $x = \pi(u)$, καλείται *αλλαγή συντεταγμένης*.

**Ορισμός 5.7.** Κατά απευθείας αναλογία με τον μορφισμό δέσμης $(u, f)$ που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, ορίζουμε τώρα τον *μορφισμό κύριας δέσμης* $(u, f)$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[loop left, "G \curvearrowleft"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & P' \arrow[loop right, "G \curvearrowleft'"] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

όπου πέραν της σχέσης $f \circ \pi = \pi' \circ u$, πρέπει επιπλέον να ισχύει $u(\mathfrak{R}_g p) = \mathfrak{R}'_g u(p)$ για κάθε $p \in P$ και $g \in G$.

**Παρατήρηση 5.3.** *Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό για δύο κύριες δέσμες, όχι απλά με διαφορετική δράση, αλλά και με διαφορετική δομική ομάδα:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] & G' \\ P \arrow[loop left, "G \curvearrowleft"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & P' \arrow[loop right, "G' \curvearrowleft'"] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

*Θα χρειαστούμε απλά έναν ομομορφισμό ομάδων Lie $\phi : G \to G'$. Για να είναι $(u, f)$ μορφισμός κύριας δέσμης (μκδ), θα πρέπει να πληρείται η ισότητα $f \circ \pi = \pi' \circ u$ και επιπλέον, να ισχύει η σχέση $u(\mathfrak{R}_g p) = \mathfrak{R}_{\phi(g)} u(p)$.*

**Λήμμα 5.2.** *Ένας μκδ $(u, \mathrm{id}) = u$ μεταξύ δύο κύριων $G$-δεσμών $P$ και $P'$ με ίδια βάση, αλλά διαφορετική δράση, είναι μια αμφιδιαφόριση.*

*Απόδειξη.* Καθώς $u, \pi, \pi'$ λείες, αρκεί να αποδείξουμε ότι $u$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

i) Η $u$ είναι 1-1. Έστω $u(p_1) = u(p_2)$. Σκοπός είναι να δείξουμε ότι από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $p_1 = p_2$. Καθώς $u$ είναι μκδ, θα ισχύει ότι $\pi = \pi' \circ u$ και άρα:

$$\pi(p_1) = \pi'(u(p_1)) = \pi'(u(p_2)) = \pi(p_2)$$

δηλαδή $p_1, p_2$ βρίσκονται στην ίδια ίνα, αφού προβάλλονται στο ίδιο σημείο της πολλαπλότητας. Αφού λοιπόν $p_1, p_2 \in P_{\pi(p_1)}$ και η δράση είναι μεταβατική, τότε υπάρχει μοναδικό $g \in G$, τέτοιο ώστε $p_1 = p_2 \cdot g = \mathfrak{R}_g p_2$. Έτσι, $u(p_1) = u(\mathfrak{R}_g p_2) = \mathfrak{R}'_g u(p_2) = \mathfrak{R}'_g u(p_1)$, αφού η $u$ ως μκδ είναι $G$-ισοαναλλοίωτη. Προκύπτει (από ελευθερία της δράσης) ότι $g = e$ και άρα $p_1 = p_2 \cdot e = p_2$.

ii) Η $u$ είναι επί. Έστω $p' \in P'$. Ψάχνουμε κάποιο $\widetilde{p} \in P$, τέτοιο ώστε $u(\widetilde{p}) = p'$. Διαλέγουμε κάποιο $p \in P_{\pi'(p')}$. Χρησιμοποιώντας τη μεταθετικότητα του διαγράμματος:

$$\pi'(u(p)) = \pi(p) = \pi\big(\pi^{-1}(\pi'(p'))\big) = \pi'(p')$$

δηλαδή $u(p), p'$ ανήκουν στην ίδια ίνα και υπάρχει μοναδικό $g \in G$, ώστε:

$$\mathfrak{R}'_g u(p) = p' \iff u(\mathfrak{R}_g p) = p'$$

όπου τελικά $\widetilde{p} = \mathfrak{R}_g p$. Συνεπώς, $u$ είναι επί.

$\square$

**Ορισμός 5.8.** Μια κύρια $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ καλείται *τετριμμένη*, αν είναι αμφιδιαφορική με μια τετριμμένη κύρια $G$-δέσμη $(M \times G, \pi, M)$ ή ισοδύναμα, αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντος μκδ $u$, τέτοιος ώστε:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[loop left, "G \curvearrowleft"] & M \times G \arrow[dl, "\pi_M"] \arrow[loop right, "G \curvearrowleft'"] \\ M \end{tikzcd}$$

όπου $\pi_M : M \times G \to M$ η προβολή στον πρώτο παράγοντα και $\curvearrowleft' : (M \times G) \times G \to M \times G$ με $((x, g), g') \mapsto \mathfrak{R}'_{g'}(x, g) = (x, gg')$.

**Θεώρημα 5.2.** *Μια κύρια $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ καλείται τετριμμένη, αν-ν υπάρχει ολική (global) λεία τμήση $\sigma : M \to P$, όπου $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ ή με απλά λόγια, αν ορίζεται διανυσματικό πεδίο που δεν μηδενίζεται πουθενά.*

*Απόδειξη.* Ας ξεκινήσουμε πρώτα υποθέτοντας ότι η κύρια $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ είναι τετριμμένη. Έπεται ότι υπάρχει αμφιδιαφόριση $u$ με ανστίστροφη $u^{-1} : M \times G \to P$. Τότε, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια απεικόνιση $\sigma : M \to P$, τέτοια ώστε $\sigma = u^{-1} \circ \pi_M^{-1}$, δηλαδή $\sigma$ λεία ως σύνθεση λείων. Καθώς $u$ είναι μκδ, θα ισχύει ότι $\pi = \pi_M \circ u$, οπότε θα έχουμε τελικά ότι $\sigma = u^{-1} \circ \pi_M^{-1} = (\pi_M \circ u)^{-1} = \pi^{-1}$ και επομένως, $\sigma$ θα είναι λεία τμήση, αφού $\pi \circ \sigma = \pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}_M$. Συνεπώς, η προς τα δεξιά συνεπαγωγή ισχύει. Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει λεία τμήση $\sigma : M \to P$. Τότε από ελευθερία της δεξιάς δράσης έπεται ότι για κάθε $p \in P$:

$$\exists!\ \phi(p) \in G : \sigma(\pi(p)) \cdot \phi(p) = p$$

Τι σημαίνει αυτό; Έστω αυθαίρετο $p \in P$. Συγκεκριμένα, $p \in P_{\pi(p)}$. Έπειτα, εφόσον ορίζεται η λεία τμήση $\sigma$, αυτή από ορισμό θα απεικονίζει το $\pi(p)$ σε ένα σημείο $\sigma(\pi(p)) \in P_{\pi(p)}$. Επειδή η δράση είναι ελεύθερη και μεταβατική, θα υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο της $G$, έστω $\phi(p)$, τέτοιο ώστε η εκ δεξιών δράση του στο $\sigma(\pi(p))$ να μας μεταφέρει στο αρχικό σημείο $p$. Θεωρούμε τότε $\phi : P \to G$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $g \in G$ θα ισχύει $\sigma(\pi(p)) \cdot \phi(p) g = p \cdot g$. Αφού η δράση διατηρεί την ίνα, δηλαδή $\pi(p) = \pi(p \cdot g)$, η ίδια σχέση θα ισχύει και για ένα άλλο σημείο $p \cdot g \in P_{\pi(p)}$, οπότε $\sigma(\pi(p)) \cdot \phi(p \cdot g) = p \cdot g$, καθώς $\sigma(\pi(p)) = \sigma(\pi(p \cdot g))$. Έπεται λοιπόν ότι $\phi(p \cdot g) = \phi(p) g$, δηλαδή $\phi$ ισοαναλλοίωτη.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια απεικόνιση $\psi : P \to M \times G$ με $\psi(p) = (\pi(p), \phi(p))$. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι μκδ και ξεκινάμε δείχνοντας αρχικά ότι είναι μορφισμός δέσμης, δηλαδή ότι ικανοποιείται η ισότητα $\pi_M \circ \psi = \pi$. Πράγματι, $(\pi_M \circ \psi)(p) = \pi_M(\pi(p), \phi(p)) = \pi(p)$ και επομένως μας μένει να δείξουμε ότι $\psi$ είναι ισοαναλλοίωτη, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση $\psi(p \cdot g) = \mathfrak{R}'_g \psi(p)$:

$$\psi(p \cdot g) = (\pi(p \cdot g), \phi(p \cdot g)) = (\pi(p), \phi(p) g)$$

Έχουμε όμως ήδη ορίσει $\curvearrowleft'$: $((x,g),g') \mapsto \mathfrak{R}'_{g'}(x,g) = (x,gg')$ και άρα:

$$\psi(p\cdot g) = \mathfrak{R}'_g(\pi(p),\phi(p)) = \mathfrak{R}'_g\psi(p)$$

οπότε η $\psi$ είναι ΑΚΔ. Από το τελευταίο λήμμα έπεται ότι θα είναι και αμφιδιαφόριση, δηλαδή $(P,\pi,M)$ τετριμμένη με βάση το τελευταίο θεώρημα. □

**Ορισμός 5.9.** Δοθείσας μιας κύριας $G$-δέσμης $(P,\pi,M)$ και μιας λείας πολλαπλότητας $F$, για την οποία $G \curvearrowright F$, ορίζουμε τη *συσχετισμένη δέσμη* (associated bundle) $(P\times_G F, \pi_\sim, M)$ με τον εξής τρόπο:

i) Έστω $\sim$ μια σχέση στην πολλαπλότητα $P\times F$, τέτοια ώστε για $(p,f)\in P\times F$:

$$(p,f)\sim(p',f') :\iff \exists\, g\in G : p' = p\cdot g, f' = g^{-1}\cdot f$$

Η σχέση $\sim$ είναι προφανώς σχέση ισοδυναμίας (εφαρμογή ορισμού) και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον χώρο πηλίκο:

$$(P\times F)/\sim\,\equiv (P\times F)/G \equiv P\times_G F$$

Τα στοιχεία του $P\times_G F$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας $[(p,f)]_G$, όπου $p\in P$ και $f\in F$.

ii) Ορίζουμε την απεικόνιση $\pi_\sim : P\times_G F \to M$, η οποία παίρνει ως όρισμα ένα στοιχείο $[(p,f)]_G$ και το απεικονίζει στο $\pi(p)\in M$. Επειδή το όρισμα είναι ένας αντιπρόσωπος μιας κλάσης ισοδυναμίας, πρέπει να εξετάσουμε κατά πόσο αυτή η απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη. Το κάνουμε αυτό επιλέγοντας έναν άλλο αντιπρόσωπο $[p',g']_G = [p\cdot g, g^{-1}\cdot f]_G$. Θα έχουμε:

$$\pi_\sim([p\cdot g, g^{-1}\cdot f]_G) = \pi(p\cdot g) = \pi(p) = \pi_\sim([(p,f)]_G)$$

αφού $p\cdot g$ και $p$ στην ίδια ίνα $P_{\pi(p)}$. Επομένως, είναι καλώς ορισμένη.

**Πρόταση 5.2.** *Η δέσμη $(P\times_G F, \pi_\sim, M)$ είναι μια ινώδης δέσμη με χαρακτηριστική ίνα $F$, η οποία συσχετίζεται με την κύρια $G$-δέσμη $P$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\psi : \pi^{-1}(U)\to U\times G$ μια συντεταγμένη της κύριας δέσμης $P$. Ορίζουμε μια απεικόνιση $\vartheta : \pi_\sim^{-1}(U)\to F$ με $[(p,f)]_G \mapsto \phi(p)\cdot f$, όπου $\phi : \pi^{-1}(U)\to G$ ισοαναλλοίωτη, ακριβώς όπως την έχουμε ορίσει πιο πάνω. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\widetilde{\psi} : \pi_\sim^{-1}(U)\to U\times F$ με $[(p,f)]_G \mapsto (\pi_\sim([(p,f)]_G), \vartheta([(p,f)]_G)) = (\pi(p), \phi(p)\cdot f)$ είναι συντεταγμένη της δέσμης $P\times_G F$, δηλαδή αντιστρέψιμη. Ορίζουμε μια τοπική τμήση $s : U\to\pi^{-1}(U)$ με $s(x) = \psi^{-1}(x,e)$ και έστω $\varphi : U\times F\to\pi_\sim^{-1}(U)$ με $\varphi(x,f) = [(s(x),f)]_G$. Από τη μια θα έχουμε ότι:

$$\widetilde{\psi}\circ\varphi(x,f) = \widetilde{\psi}([(s(x),f)]_G) = (\pi(s(x)), \phi(s(x))\cdot f) = (x, e\cdot f) = (x,f)$$

ενώ από την άλλη:

$$\begin{aligned}\varphi\circ\widetilde{\psi}([(p,f)]_G) &= \varphi(\pi(p),\phi(p)\cdot f) = [s(\pi(p)),\phi(p)\cdot f]_G \\ &= [p\cdot(\phi(p))^{-1}, \phi(p)\cdot f] = [p,f]\end{aligned}$$

Επομένως, $\varphi = \widetilde{\psi}^{-1}$ και άρα $\widetilde{\psi}$ είναι αμφιδιαφόριση $\pi_\sim^{-1}(U)\cong U\times F$. Έστω τώρα $\psi,\psi'$ δύο συντεταγμένες στις γειτονιές $U,U'$ αντίστοιχα με $\phi,\phi'$. Ορίζουμε αντίστοιχα τις συντεταγμένες της $P\times_G F$, $\widetilde{\psi}$ και $\widetilde{\psi}'$, στις ίδιες γειτονιές με $\vartheta,\vartheta'$. Δοθέντος ενός $x\in U\cap U'$ με $\pi(p)=x$ για $p\in P_x$ και ενός $f\in F$, οι απεικονίσεις μετάβασης (οι ανάλογες των $c_{ij}$) θα δίνονται από:

$$\vartheta'([(p,f)]_G)(\vartheta'([(p,f)]_G))^{-1} = (\phi'(p)\cdot f)(\phi(p)\cdot f) = \phi'(p)(\phi(p))^{-1}$$

λόγω ισοαναλλοιότητας των $\vartheta, \vartheta'$ με βάση τον ορισμό αυτών που δώσαμε πιο πάνω. Επομένως, μια τέτοια συλλογή χαρτών $\{(U_i, \widetilde{\psi}_i)\}$ εφοδιάζει με μια διαφορίσιμη δομή τον $P \times_G F$ και ικανοποιεί τα κριτήρια ενός άτλαντα δέσμης. Καθώς οι απεικονίσεις μετάβασης για την $P \times_G F \to M$ συμπίπτουν με αυτές της $P \to M$, η τελευταία θα είναι η κύρια $G$-δέσμη, με την οποία συσχετίζεται η πρώτη. $\square$

**Παράδειγμα 5.2.** Έστω $E \to M$ μια διανυσματική δέσμη με προβολή $\pi$ και $\dim E = n$. Θα κατασκευάσουμε μια κύρια $GL(n,\mathbb{R})$-δέσμη $\mathcal{F}E \to M$ με προβολή $\pi_P$, η οποία καλείται *δέσμη πλαισίων* του δχ $E$ και θα έχει τις ίδιες απεικονίσεις μετάβασης, έτσι ώστε η $\mathcal{F}E$ να είναι η κύρια δέσμη, με την οποία συσχετίζεται η $E$, δηλαδή $E \to M$ και $\mathcal{F}E \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \to M$ ισοδύναμες. Θα σημαίνουμε με $E_x$ την ίνα $\pi^{-1}(x)$ στο $x \in M$ και $\mathcal{F}E_x$ θα είναι το σύνολο όλων των πλαισίων του δχ $E_x$, δηλαδή μια συλλογή διατεταγμένων βάσεων $p = \{v_i\}$ του $E_x$ για $i = 1, \cdots, n$. Κάθε τέτοιο πλαίσιο μπορεί να ιδωθεί σαν ένας ισομορφισμός $\mathbb{R}^n \to E_x$ με $e_i \mapsto v_i$, όπου $e_i$ στοιχείο της συνήθους (διατεταγμένης) βάσης του $\mathbb{R}^n$. Δοθέντων δύο πλαισίων $p_i : \mathbb{R}^n \to E_x$, υπάρχει μοναδικό $A \in GL(n,\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $p_1 = p_2 \cdot A$. Καθώς $\pi_P^{-1}(x) = p \cdot GL(n,\mathbb{R})$ και αφού η δράση είναι σίγουρα ελεύθερη, έπεται ότι $\pi_P^{-1}(x) = \mathcal{F}E_x \cong GL(n,\mathbb{R})$.

Έστω $\mathcal{F}E = \dot{\cup}_{x \in M} \mathcal{F}E_x$ και $\pi_P : \mathcal{F}E \to M$ με $\mathcal{F}E_x \mapsto x$. Αν $\psi_E : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ είναι χάρτης της διανυσματικής δέσμης $E$ με $v \mapsto (\pi(v), \phi_E(v))$, όπου $\phi_E : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε την απεικόνιση $\phi_{\mathcal{F}E} : \phi_P^{-1}(U) \to GL(n,\mathbb{R})$ με $p \mapsto (\phi_E|_{E_{\pi_P(p)}}(v_i))$, όπου $p = \{v_i\}$ πλαίσιο στην ίνα $\mathcal{F}E_{\pi_P(p)}$ και $(\phi_E|_{E_{\pi_P(p)}}(v_i)) \in GL(n,\mathbb{R})$ πίνακας. Η $\phi$ είναι $GL(n,\mathbb{R})$-ισοαναλλοίωτη και επομένως, $\psi_{\mathcal{F}E} : \pi_P^{-1}(U) \to U \times GL(n,\mathbb{R})$ αμφιδιαφόριση. Έστωσαν τώρα δύο χάρτες δέσμης με επικάλυψη το $U$ και συντεταγμένες $\psi_E, \psi'_E$ με $\phi_E, \phi'_E$ αντίστοιχα. Τότε, ορίζοντας την αντίστοιχη απεικόνιση $\phi'_{\mathcal{F}E}$, ώστε $\psi'_{\mathcal{F}E}$ αμφιδιαφόριση, θα έχουμε ότι:

$$\psi'_{\mathcal{F}E} \circ {\psi_{\mathcal{F}E}}^{-1}(x, A) = \psi'_{\mathcal{F}E}(\phi_E^{-1}|_{E_x} A) = (x, (\phi'_{\mathcal{F}E} \circ \phi_E^{-1}|_{E_x})A)$$

δηλαδή πρόκειται περί αλλαγής συντεταγμένης και άρα η συλλογή $\{(U_i, \psi_{\mathcal{F}E})\}$ είναι λείος άτλας της $\mathcal{F}E$, δηλαδή $\mathcal{F}E \to M$ είναι μια κύρια $GL(n,\mathbb{R})$-δέσμη. Επιπλέον, υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ των $\mathcal{F}E \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \to M$ και $E \to M$, όπου $\mathcal{F}E \times_{GL(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \ni [(p, \{\alpha_i\})]_{GL(n,\mathbb{R})} \mapsto \alpha^i v_i \in E_x$ (σύμβαση άθροισης).

**Ορισμός 5.10.** Ένας *μορφισμός συσχετισμένης δέσμης* (μσδ) $(\widetilde{u}, \widetilde{h})$ μεταξύ δύο συσχετισμένων δεσμών, οι οποίες μοιράζονται την ίδια ίνα, αλλά συσχετίζονται ως δέσμες με αυθαίρετα διαφορετικές κύριες $G$-δέσμες, έστωσαν $(P, \pi, M)$ και $(P', \pi', M')$ αντίστοιχα:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[loop left, "G \curvearrowleft"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & P' \arrow[loop right, "G \curvearrowleft'"] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "h"] & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \times_G F \arrow[r, "\widetilde{u}"] \arrow[d, "\pi_\sim"'] & P' \times_G F \arrow[d, "\pi'_\sim"] \\ M \arrow[r, "\widetilde{h}"] & M' \end{tikzcd}$$

είναι ένας μορφισμός δέσμης, ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί από έναν μκδ $(u, h)$ μεταξύ των υποκείμενων κύριων δεσμών με $\pi' \circ u = h \circ \pi$ και $u(p \cdot g) = \mathfrak{R}'_g u(p)$, ως:

$$\widetilde{u}([(p, f)]) = [(u(p), f)] \quad \widetilde{h}(m) = h(m)$$

έτσι ώστε $(\pi'_\sim \circ \widetilde{u})([(p,f)]) = \pi'_\sim([(u(p), f)]) = \pi'(u(p))$. Αφού $\pi'(u(p)) = (\pi' \circ u)(p) = (h \circ \pi)(p) = h(\pi(p))$, θα έχουμε ότι $(\pi'_\sim \circ \widetilde{u})([(p,f)]) = h(\pi(p))$ και αφού $(\widetilde{h} \circ \pi_\sim)([(p,f)]) = \widetilde{h}(\pi(p)) = h(\pi(p))$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\pi'_\sim \circ \widetilde{u} = \widetilde{h} \circ \pi_\sim$.

**Παρατήρηση 5.4.** *Δύο ινώδεις δέσμες με χαρακτηριστική ίνα $F$ μπορούν να είναι ισομορφικές ως ινώδεις δέσμες, αλλά ταυτόχρονα να μην είναι ισομορφικές ως συσχετισμένες δέσμες.*

**Ορισμός 5.11.** Μια συσχετισμένη δέσμη καλείται *τετριμμένη*, αν η κύρια δέσμη (με την οποία συσχετίζεται) είναι τετριμμένη, δηλαδή αν-ν έχει λεία ολική τμήση.

**Θεώρημα 5.3.** *Μια τετριμμένη συσχετισμένη δέσμη είναι μια τετριμμένη ινώδης δέσμη. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, καθώς μια συσχετισμένη δέσμη έχει περισσότερη δομή από μια απλά ινώδη, δηλαδή κάθε ινώδης δέσμη δεν συσχετίζεται απαραίτητα με κάποια κύρια δέσμη.*

**Πρόταση 5.3.** *Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία των τμησεων $\sigma : M \to P \times_G F$ μιας συσχετισμένης δέσμης με συναρτήσεις $\phi : P \to F$.*

**Ορισμός 5.12.** Έστωσαν $H$ μια κλειστή υποομάδα της $G$, $P$ μια κύρια $G$-δέσμη και $P'$ μια κύρια $H$-δέσμη:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[loop left, "G"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & P' \arrow[loop right, "H"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r, "f"] & M'
\end{tikzcd}$$

Αν υπάρχει μορφισμός δέσμης $(u, f)$, δηλαδή $\pi' \circ u = f \circ \pi$ και επιπλέον, $u(p \cdot h) = \mathfrak{R}'_h u(p)$ για κάθε $h \in H$ και $p \in P$, δηλαδή $u$ είναι $H$-ισοαναλλοίωτη, τότε $P$ καλείται *$G$-επέκταση* (extension) της $P'$, $(P', \pi', M)$, ενώ $P'$ καλείται *$H$-περιορισμός* (restriction)της $P$.

**Παρατήρηση 5.5.** *Δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για μκδ, καθώς δεν έχουμε ορίσει κάποιον ομομορφισμό ομάδων Lie μεταξύ των $G$ και $H$.*

**Πρόταση 5.4.** *Οποιαδήποτε $H$-κδ μπορεί να επεκταθεί σε μια $G$-κδ, αν $H$ είναι κλειστή υποομάδα της $G$.*

**Λήμμα 5.3.** *Μια $G$-κδ μπορεί να περιοριστεί σε μια $H$-κδ, αν-ν:*

*i)* *η $H$ είναι κλειστή υποομάδα της $G$.*

*ii)* *η δέσμη $(P/H, \pi', M)$ έχει λεία (ολική) τμήση.*

## 5.3. Συνοχές Ehresmann και τοπικές αναπαραστάσεις αυτών

Έστω $(P, \pi, M)$ μια κύρια $G$-δέσμη. Τότε, κάθε στοιχείο της άλγεβρας Lie της ομάδας Lie $G$, έστω $v \in \mathfrak{g}$, επάγει ένα διανυσματικό πεδίο στον $P$, τέτοιο ώστε για κάθε $p \in P$ και $f \in \mathcal{C}^\infty P$:

$$X_p^v f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p \cdot \exp(tv))$$

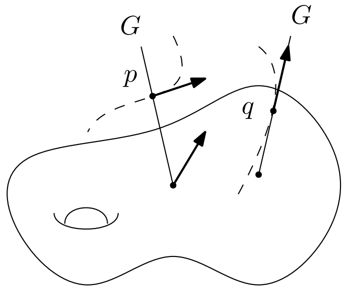
όπου $\exp(tX) = \phi_v^e(t) \in G$. Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μια απεικόνιση $i : \mathfrak{g} \to \Gamma(TP)$ με $v \mapsto X^v$, η οποία αποδεικνύεται με τετριμμένες πράξεις ότι είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie, δηλαδή $i([\![A, B]\!]) = [i(A), i(B)]$, όπου $[\![\ ,\ ]\!]$ η αγκύλη Lie της $\mathfrak{g}$ και $[\ ,\ ]$ η αγκύλη Lie της $\Gamma(TP)$, η οποία είναι κατά τα γνωστά ο μεταθέτης διανυσματικών πεδίων. Για ομοιομορφία, θα γράφουμε πλέον απλά $[\ ,\ ]$ και θα ξεχωρίζουμε από τα ορίσματα.

**Ορισμός 5.13.** Έστω $p \in P$. Τότε, ο διανυσματικός υπόχωρος $V_pP$ του $T_pP$:

$$V_pP := \ker \pi_* = \{X \in T_pP \mid \pi_*(X) = 0\}$$

καλείται *κάθετος υπόχωρος* στο $p$.

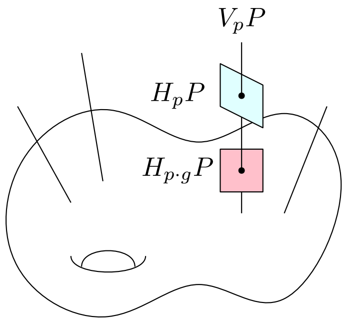
**Παρατήρηση 5.6.** *Για διευκόλυνση αξίζει να δούμε πως μοιάζει γραφικά αυτός ο υπόχωρος. Εξετάζουμε τη δέσμη πάντα τοπικά (έτσι ώστε ο ολικός χώρος να μοιάζει με το καρτεσιανό γινόμενο της βάσης με την ίνα):*




*Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια καμπύλη η οποία περνάει από το σημείο $p \in P_{\pi(p)}$ και της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p φαίνεται στο άνωθεν σχήμα. Μέσω της π προβάλλουμε την καμπύλη στη βάση, ενώ μέσω της push-forward της π απεικονίζουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα στο εφαπτόμενο διάνυσμα της προβληθείσας καμπύλης στο σημείο $\pi(p) \in M$. Αν υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κάποια άλλη καμπύλη, η οποία περνάει από το σημείο $q \in P_{\pi(q)}$, έτσι ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα της σε αυτό το σημείο να είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα, τότε αυτό βρίσκεται στον πυρήνα της $\pi_*$, καθώς το εφαπτόμενο διάνυσμα της προβληθείσας καμπύλης στο $\pi(q)$ είναι 0. Το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων είναι ο κάθετος υπόχωρος του εφαπτόμενου χώρου σε κάποιο σημείο του $P$.*

**Λήμμα 5.4.** *Για κάθε $p \in P$ και $v \in \mathfrak{g}$ ισχύει ότι $X_p^v \in V_pP$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι $\pi_* X_p^v = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\pi(p \cdot \exp(tv)) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}\pi(p) = 0$, καθώς είναι προφανές ότι $p \cdot \exp(tv) \in P_{\pi(p)}$ και άρα, $\pi(p \cdot \exp(tv)) = \pi(p)$. Επομένως, $X_p^v \in V_pP$. □



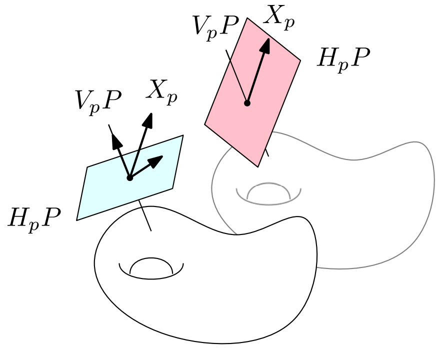

**Ορισμός 5.14.** Μια *συνοχή* σε μια κύρια $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ είναι μια λεία επιλογή ενός διανυσματικού υποχώρου $H_pP$ του $T_pP$ για κάθε $p \in P$, τέτοιου ώστε:

i) Ο $H_pP$ να είναι ο συμπληρωματικός του $V_pP$, δηλαδή $T_pP = H_pP \oplus V_pP$.

ii) Αν $q = p \cdot g$, τότε να ισχύει ότι $\mathfrak{R}_{g*} H_p P = H_{p \cdot g} P$.

iii) Ένα διάνυσμα $X_p \in T_p P$ να αναλύεται μοναδικά ως $X_p = \mathit{hor}\, X_p + \mathit{ver}\, X_p$, όπου $\mathit{hor}\, X_p \in H_p P$ και $\mathit{ver}\, X_p \in V_p P$, δηλαδή κάθε λείο διανυσματικό πεδίο $X \in \Gamma(TP)$ να αναλύεται σε δύο λεία διανυσματικά πεδία, $\mathit{hor}\, X$ και $\mathit{ver}\, X$ αντίστοιχα.

**Παρατήρηση 5.7.** *Τόσο το $\mathit{ver}\, X_p$ όσο και το $\mathit{hor}\, X_p$ εξαρτώνται από την επιλογή του οριζόντιου υπόχωρου $H_p P$ για αυθαίρετο $p \in P$:*




*Όπως παρατηρούμε και στην παραπάνω εικόνα, στα αριστερά έχουμε κανονικά μια οριζόντια και μια κάθετη συνιστώσα του $X_p$, ενώ στα δεξιά ισχύει ότι $\mathit{ver}\, X_p = 0$ και $\mathit{hor}\, X_p = X_p$ για αυτήν την επιλογή $H_p P$.*

Υπό μια έννοια, η επιλογή ενός οριζόντιου υπόχωρου $H_p P$ σε κάθε $p \in P$ μπορεί να κωδικοποιηθεί για ευκολία στην επαγόμενη 1-μορφή με σύνολο τιμών στην άλγεβρα Lie της δομικής ομάδας $G$, $\omega_p : T_p P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ με $X_p \mapsto \omega_p(X_p) := i_p^{-1}(\mathit{ver}\, X_p)$, όπου $i_p : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} V_p P$ με $v \mapsto X_p^v$ και με $X_p^v$ να ανήκει πάντα στον $V_p P$, όπως δείξαμε παραπάνω, έτσι ώστε η $i_p^{-1}$ να το απεικονίζει στο κατάλληλο στοιχείο της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Η παραπάνω 1-μορφή καλείται *1-μορφή συνοχής Ehresmann.*

**Παρατήρηση 5.8.** *Με τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να ανακτήσουμε τον $H_p P$ για κάθε $p \in P$ ως $H_p P = \ker \omega_p = \{X \in T_p P \mid \omega_p(X) = 0\}$, το οποίο δεν είναι δηλαδή τίποτε άλλο πέρα από όλα εκείνα τα $X \in T_p P$, για τα οποία ισχύει ότι $X = \mathit{hor}\, X$.*

**Θεώρημα 5.4.** *Μια 1-μορφή συνοχής (Ehresmann) $\omega$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

*i)* $\omega_p(X_p^v) = v \in \mathfrak{g}$

*ii)* $\left(\mathfrak{R}_g^* \omega\right)_p (X_p) = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \omega_p(X_p)$

*iii) η $\omega$ είναι λεία.*

*Απόδειξη.*

i) Ισχύει από ορισμό, αφού $X_p v \in V_p P$ για $v \in \mathfrak{g}$ και άρα:

$$\omega_p(X_p^v) = i_p^{-1}(\mathit{ver}\, X_p^A) = i_p^{-1}(X_p^v) = v$$

ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι γραμμικό ως προς το όρισμα και άρα αναλύοντας το διάνυσμα στις κάθετες και οριζόντιες συνιστώσες του, εξετάζουμε:

- Για την κάθετη συνιστώσα, δηλαδή κάποιο $X_p^v \in V_pP$ και από ορισμό της pull-back:

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{R}_g^*\omega\big)_p(X_p^v) &= \omega_{p\cdot g}\big(\mathfrak{R}_{g*}X_p^v\big) = \omega_{p\cdot g}(X_{p\cdot g}^{\mathrm{Ad}(g^{-1})v}) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})v = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(X_p^v)\end{aligned}$$

  Υπενθυμίζουμε εδω ότι ο λόγος που το παραπάνω ισχύει είναι ακριβώς διότι, καθώς $v \in \mathfrak{g}$ είναι ουσιαστικά ένα διάνυσμα στο ταυτοτικό στοιχείο, τότε:

$$\mathrm{Ad}(g^{-1})v = v_{I_{g^{-1}}(e)} = v_{g^{-1}eg} = v_e \equiv v$$

  Η τελευταία ισότητα στην αρχική εξίσωση έπεται προφανώς από ορισμό της $\omega$.

- Για $X_p^{hor} \in H_pP$, δηλαδή την οριζόντια συνιστώσα:

$$\big(\mathfrak{R}_g^*\omega\big)_p(X_p^{hor}) = \omega_{p\cdot g}\big(\mathfrak{R}_{g*}X_p^{hor}\big) = 0 = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(X_p^{hor})$$

  όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς είδαμε ότι $\mathfrak{R}_{g*}H_pP = H_{p\cdot g}P$ και άρα έπεται ότι $\mathfrak{R}_{g*}X_p^{hor} \in H_{p\cdot g}P$. Στοιχεία όμως του $H_{p\cdot g}P$ είναι εκείνα τα $X \in T_{p\cdot g}P$, τα οποία είναι στοιχεία του πυρήνα της $\omega_{p\cdot g}$. Η τελευταία ισότητα έπεται δηλαδή και από το παραπάνω γεγονός, αφού $\omega_p(X_p^{hor}) = 0$, αλλά και από το γεγονός ότι $\mathrm{Ad}(g^{-1})$ είναι γραμμική, δηλαδή θα απεικονίζει το 0 στο 0.

Τελικά θα ισχύει για $X_p \in T_pP$ ότι:

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{R}_g^*\omega\big)_p(X_p) &= \big(\mathfrak{R}_g^*\omega\big)_p(\mathit{ver}\,X_p) + \big(\mathfrak{R}_g^*(\omega)\big)_p(\mathit{hor}\,X_p) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(\mathit{ver}\,X_p) + \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(\mathit{hor}\,X_p) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})(\omega_p(\mathit{ver}\,X_p) + \omega_p(\mathit{hor}\,X_p)) \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(\mathit{ver}\,X_p + \mathit{hor}\,X_p) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_p(X_p)\end{aligned}$$

iii) Η $\omega$ είναι λεία, καθώς $\omega = i^{-1} \circ \mathit{ver}$, όπου $\mathit{ver}$ απαιτήσαμε να δίνει λείο διανυσματικό πεδίο αν εφαρμοστεί σε λείο διανυσματικό πεδίο (δηλαδή λεία) και $i^{-1}$ λεία, καθώς exp λεία. Η σύνθεση λείων απεικονίσεων θα είναι κατά τα γνωστά λεία απεικόνιση.

□

Πρακτικά, για υπολογιστικούς σκοπούς, οφείλουμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε κάποιο $U$ υποσύνολο της $M$. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $\sigma : U \to P$, τέτοια ώστε $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$, η οποία είναι μια *τοπική τμήση*. Μια τοπική τμήση επάγει ένα Yang-Mills πεδίο $\varpi : \Gamma(TU) \to \mathfrak{g}$ , όπου $\varpi = \sigma^*\omega \in \mathcal{A}^1(U,\mathfrak{g})$, ενώ $\omega \in \mathcal{A}^1(P,\mathfrak{g})$. Αφού υπάρχει αμφιδιαφόριση $P \cong U \times G$, ορίζεται μια $\psi^{-1} : U \times G \to P$ με $(u,g) \mapsto \sigma(u)\cdot g \in P_u$. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε την τοπική αναπαράσταση μιας 1-μορφής συνοχής $\omega$ ως:

$$(\psi^{-1*}\omega)_{(u,g)} : T_{(u,g)}(U \times G) \cong T_uU \times T_gG \cong T_uU \oplus T_gG \to \mathfrak{g}$$

δηλαδή $(\psi^{-1*}\omega) \in \mathcal{A}^1(U \times G, \mathfrak{g})$. Έπειτα, για $v \in T_uU$ και $w \in T_gG$ ισχύει ότι:

$$(\psi^{-1*}\omega)(v,w) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\varpi(v) + \omega_G(w)$$

όπου $\omega_G : \Gamma(TG) \to \mathfrak{g}$ είναι η μορφή Maurer-Cartan που αναφέραμε στην ενότητα των διαφορικών μορφών. Μια παραλλαγή της παραπάνω σχέσης θα αποδειχθεί στο κεφάλαιο των γεωμετριών Klein και σημειώνουμε ότι η απόδειξη είναι ανάλογη και για αυτήν τη σχέση.

**Παράδειγμα 5.3.** Ας δούμε μερικά χρήσιμα παραδείγματα, σχετικά με την ως άνω τοπική τμήση και τη μορφή Maurer-Cartan.

i) Έστωσαν $\dim M = d$ και $P = \mathcal{F}M$, όπου $\mathcal{F}M$ είναι η συλλογή πλαισίων των εφαπτόμενων χώρων της $M$, όπως και $G = GL(d, \mathbb{R})$ δομική ομάδα. Οποιαδήποτε επιλογή χάρτη $(U, x)$ στην $M$ επάγει μια συγκεκριμένη τοπική τμήση $\sigma$, τέτοια ώστε για $m \in U$, $\sigma(m) = \{\partial_i|_m\}$ για $i = 1, \cdots, d$. Τότε, το YM πεδίο $\varpi$ είναι μια 1-μορφή με συνιστώσες $(\varpi^i{}_j)_\mu = \Gamma^i{}_{j\mu}$, όπου $\mu, i, j = 1, \cdots, d$, η οποία εκτιμάται στην $\mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$. Ο δείκτης $\mu$ καλείται *κοσμικός* δείκτης και υποδηλώνει ότι $\varpi$ βρίσκεται στη βάση της δέσμης, ενώ οι δείκτες $i, j$ μπορούν να θεωρηθούν εσωτερικοί δείκτες και υποδηλώνουν αντίστοιχα ότι $\varpi$ είναι μια 1-μορφή με τιμές στην άλγεβρα Lie της $GL(d, \mathbb{R})$ και άρα, οι συνιστώσες της θα είναι στοιχεία ενός $d \times d$ αντιστρέψιμου πίνακα.

ii) Σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε πως μπορούμε να προσδιορίσουμε μια μορφή Maurer-Cartan $\omega_G$ για $G = GL(d, \mathbb{R})$. Επιλέγουμε συντεταγμένη $x^i{}_j : U \to \mathbb{R}$, όπου $U$ είναι ανοιχτό υποσύνολο της $GL(d, \mathbb{R})$, το οποίο περιέχει την ταυτότητα $e$. Η συντεταγμένη είναι τέτοια, ώστε $x^i{}_j(A) = A^i{}_j$ για $A \in GL(d, \mathbb{R})$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $X^v$, το οποίο δρα στη συντεταγμένη $x^i{}_j \in \mathcal{C}^\infty U$. Θα έχουμε για $A \in GL(d, \mathbb{R})$ και $B \in \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ ότι:

$$\begin{aligned} X^B x^i{}_j|_A &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} x^i{}_j(A \cdot \exp(tB)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} x^i{}_j(Ae^{tB}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (Ae^{tB})^i{}_j = A^i{}_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} (e^{tB})^k{}_j = A^i{}_k B^k{}_j \end{aligned}$$

όπου για την $GL(d, \mathbb{R})$ ισχύει ότι $\exp(B) = e^B$ και $Ae^B$ πολλαπλασιασμός πινάκων. Επομένως, αναλύοντας το $X^B_A$ στη χαρτοεπαγόμενη βάση $\partial/\partial x^i{}_j|_A$, θα ισχύει ότι:

$$X^B_A = A^i{}_k B^k{}_j \left.\frac{\partial}{\partial x^i{}_j}\right|_A$$

Καθώς η μορφή Maurer-Cartan είναι η απεικόνιση $(\omega_G)_A : T_A GL(d, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(d, \mathbb{R})$ με $X^B_A \mapsto B$, ισχυριζόμαστε εδώ ότι έχει τον ακόλουθο τύπο:

$$((\omega_G)_A)^i{}_j = (A^{-1})^i{}_k \mathrm{d}x^k{}_j|_A$$

όπου $\mathrm{d}x^k{}_j|_A$ είναι η δυϊκή βάση στο $A \in GL(d, \mathbb{R})$. Ελέγχοντας τον παραπάνω ισχυρισμό, πράγματι διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} ((\omega_G)_A)^i{}_j(X^B_A) &= (A^{-1})^i{}_k \mathrm{d}x^k{}_j (A^p{}_r B^r{}_q\ \partial/\partial x^p{}_q\ |_A) = (A^{-1})^i{}_k A^p{}_r B^r{}_q \delta^k_p \delta^q_j \\ &= (A^{-1})^i{}_p A^p{}_r B^r{}_j = \delta^i_r B^r{}_j = B^i{}_j \end{aligned}$$

και ο τύπος επιβεβαιώνεται.

Ας υποθέσουμε σε αυτό το σημείο ότι έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} U_a \arrow[r, bend right, "\sigma_a"'] & P \arrow[l] \arrow[r] & U_b \arrow[l, bend left, "\sigma_b"] \end{tikzcd}$$

όπου $U_a, U_b \subset U$ με $U$ υποσύνολο της $M$. Έπειτα, αν $\omega$ είναι η 1-μορφή συνοχής στον $P$, τότε $\sigma_a^*\omega$ και $\sigma_b^*\omega$ είναι τα Yang-Mills πεδία στα $U_a$ και $U_b$ αντίστοιχα. Επιθυμούμε να εξετάσουμε την περίπτωση, όπου $U_a, U_b$ επικαλύπτονται μερικώς, δηλαδή $U_a \cap U_b \neq \varnothing$.

**Ορισμός 5.15.** Ορίζουμε την *απεικόνιση βαθμίδας* (gauge map) $\mho : U_a \cap U_b \to G$ με τέτοιον τρόπο, ώστε να υπάρχει μοναδικό $\mho(u)$ για κάθε $u \in U_a \cap U_b$, για το οποίο να ισχύει ότι $\sigma_b(u) = \sigma_a(u) \cdot \mho(u)$.

**Πρόταση 5.5.** *Με βάση τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει ότι:*

$$\varpi_b(u) = \mathrm{Ad}((\mho(u))^{-1})\varpi_a(u) + \mho^*(\omega_G)_u \tag{5.1}$$

*για* $u \in U_a \cap U_b$ *και* $\varpi_i \equiv \sigma_i^* \omega$*, όπου ο παραπάνω τύπος αποτελεί τον κανόνα μετασχηματισμού των YM πεδίων.*

**Παράδειγμα 5.4.** Έστω η κύρια $G = GL(n, \mathbb{R})$-δέσμη $(\mathcal{F}M, \pi, M)$ και έστω κάποιο αυθαίρετο $u \in U_a \cap U_b \subset M$. Σκοπός μας είναι αρχικά να υπολογίσουμε τον όρο $(\mho^*(\omega_G)_u)^i{}_j$, όπου γενικά:

$$\mho : U_a \cap U_b \to G \quad (\omega_G)_u : T_u G \to \mathfrak{g} \quad \mho^*(\omega_G)_u : T_u(U_a \cap U_b) \to \mathfrak{g}$$

Ας δράσουμε με την $\mho^*(\omega_G)_u$ σε ένα στοιχείο της (χαρτοεπαγόμενης) βάσης του $T_u(U_a \cap U_b)$, έστω $\partial/\partial x^\nu \mid_u \equiv \partial_\nu|_u$ για $\nu = 1, \cdots, n$. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
(\mho^*(\omega_G)_u)^i{}_j(\partial_\nu|_u) &= ((\omega_G)_{\mho(u)})^i{}_j(\mho_*\partial_\nu|_u) = ((\mho(u))^{-1})^i{}_k \mathrm{d}x^k{}_j(\mho_*\partial_\nu|_u) \\
&= ((\mho(u))^{-1})^i{}_k(\mho_*\partial_\nu|_u)x^j{}_k = ((\mho(u))^{-1})^i{}_k\partial_\nu|_u(x^k{}_j \circ \mho)(u) \\
&= ((\mho(u))^{-1})^i{}_k\partial_\nu|_u(\mho(u))^k{}_j
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από ιδιότητα της pull-back, η δεύτερη από το προηγούμενο παράδειγμα, η τρίτη από ορισμό της κλίσης της $x^i{}_j \in \mathcal{C}^\infty(U_a \cap U_b)$ και η προτελευταία από ιδιότητα της push-forward (βλ. κατάλληλες ενότητες). Έπεται ότι:

$$(\mho^*(\omega_G)_u)^i{}_j = ((\mho(u))^{-1})^i{}_k\partial_\nu|_u(\mho(u))^k{}_j\mathrm{d}x^\nu = ((\mho(u))^{-1})^i{}_k\,\mathrm{d}(\mho(u))^k{}_j$$

όπου πιο κομψά, για $\mho(u) = A \in G$ θα ισχύει ότι $\mho^*(\omega_G)_u = A^{-1}\mathrm{d}A$. Μένει τώρα να υπολογίσουμε τον όρο $\mathrm{Ad}_{A^{-1}*}\varpi_a(u)$. Θυμίζουμε ότι $I_g : G \to G$ με $h \mapsto ghg^{-1}$ και ότι $\mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. Μπορούμε έτσι για κάποιο $X \in \mathfrak{g}$, δηλαδή έναν πίνακα $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, να κάνουμε την επιλογή $\mathrm{Ad}(B)X = BXB^{-1}$ όπου $X, B$ πίνακες, ώστε η πράξη να έχει νόημα. Επομένως:

$$\mathrm{Ad}(A^{-1})\varpi_a(u) = A^{-1}(\varpi_a(u))A$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα στην (5.1), παίρνουμε τον κανόνα:

$$\varpi_b(u) = A^{-1}(\varpi_a(u))A + A^{-1}\mathrm{d}A$$

ο οποίος υποδεικνύει τον τρόπο μετασχηματισμού μεταξύ δύο YM πεδίων στο $U_a \cap U_b$ για τη δέσμη πλαισίων $\mathcal{F}M$.

## 5.4. *Παράλληλη μεταφορά*

**Ορισμός 5.16.** Έστω καμπύλη $\gamma : [0, 1] \to M$ με $\gamma(0) = a$ και $\gamma(1) = b$ για $a, b \in M$. Τότε, η μοναδική καμπύλη $\gamma^\uparrow : [0, 1] \to P$ που διέρχεται από το $\gamma^\uparrow(0) = p \in P_a$ και ικανοποιεί τα εξής:

i) Η $\pi \circ \gamma^\uparrow$, δηλαδή η προβολή της $\gamma^\uparrow$ στη βάση της δέσμης να είναι η αρχική καμπύλη $\gamma$.

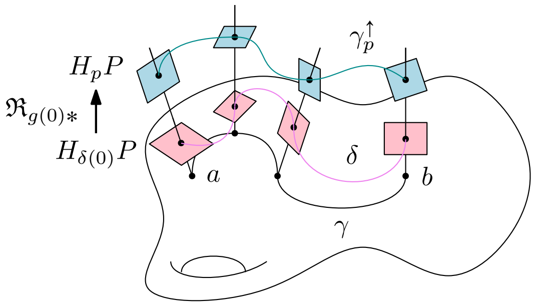
ii) Να ισχύει ότι *ver* $X_{\gamma^\uparrow, \gamma^\uparrow(t)} = 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$, δηλαδή τα εφαπτόμενα διανύσματα σε αυτήν την καμπύλη να κείτονται εξ ολοκλήρου στον οριζόντιο υπόχωρο σε κάθε $\gamma^\uparrow(t)$ ή ισοδύναμα, να μην έχουν κάθετες συνιστώσες.

iii) Να ισχύει ότι $\pi_* X_{\gamma^\uparrow, \gamma^\uparrow(t)} = X_{\gamma, \gamma(t)}$, δηλαδή η push-forward ενός διανύσματος, εφαπτόμενου στην καμπύλη $\gamma^\uparrow$, μέσω της προβολής $\pi$, να επιστρέφει το αρχικό διάνυσμα, το εφαπτόμενο στο αντίστοιχο σημείο της καμπύλης $\gamma$.

καλείται *οριζόντια ανύψωση* (horizontal lift) της $\gamma$ που διέρχεται από το σημείο $p$.

Η στρατηγική μας στην προσπάθεια να προσδιορίσουμε ρητά *την* (και όχι κάποια) οριζόντια ανύψωση (για σταθερό σημείο η καμπύλη αυτή είναι μοναδική) είναι να προχωρήσουμε με δύο τρόπους:

i) Μπορούμε να κατασκευάσουμε την οριζόντια ανύψωση της $\gamma$, εκκινώντας από κάποια αυθαίρετη καμπύλη $\delta : [0,1] \to P$, της οποίας η προβολή στη βάση είναι η καμπύλη $\gamma$, δηλαδή $\gamma = \pi \circ \delta$, έτσι ώστε όταν δράσουμε σε αυτήν από δεξιά με κατάλληλη καμπύλη $g : [0,1] \to G$ (όπου $G$ η δομική ομάδα), να ισχύει $\gamma^{\uparrow}(t) = \delta(t) \cdot g(t)$.




Αυτή η κατάλληλη καμπύλη $g$ θα είναι η λύση σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση με αρχική συνθήκη $\delta(0) \cdot g_0 = p \in P_a$, με $g_0 = g(0)$ και $p$ να είναι το σημείο της ίνας $P_a$, από το οποίο εκκινεί η ανυψωμένη καμπύλη $\gamma^{\uparrow}$.

ii) Μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά (και τοπικά) τη συνήθη διαφορική εξίσωση για την $g$ με χρήση δρομοδιατεταγμένης ολοκλήρωσης του Yang-Mills πεδίου.

Αν επιλέξουμε να εργαστούμε με τον πρώτο τρόπο, θα έχουμε να επιλύσουμε την ακόλουθη ΣΔΕ:

$$\mathrm{Ad}((g(t))^{-1})\omega_{\delta(t)}(X_{\delta,\delta(t)}) + (\omega_G)_{g(t)}(X_{g,g(t)}) = 0$$

με αρχική συνθήκη $g(0) = g_0$, δηλαδή το μοναδικό σημείο, για το οποίο $\delta(0) \cdot g_0 = p \in P_{\gamma(0)}$. Αν τώρα η $G$ είναι ομάδα πινάκων, δηλαδή κάποια υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$, τότε θέτοντας $A = g(t)$, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

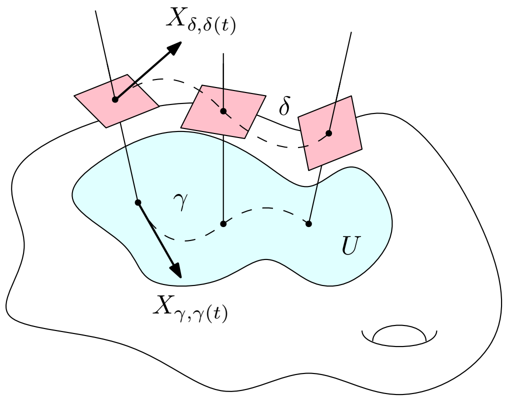
$$A^{-1}\omega_{\delta(t)}(X_{\delta,\delta(t)})A + A^{-1}\dot{A} = 0$$

όπου με $\dot{A}$ σημαίνουμε την παράγωγο του στοιχείου πίνακα $A$ ως προς την παράμετρο $t$. Η ως άνω διαφορική προκύπτει από τον τύπο της συζυγούς αναπαράστασης για ομάδες πινάκων, όπως τον συναντήσαμε πιο πάνω, αλλά και από τον τύπο της μορφής Maurer-Cartan. Επομένως, λύνοντας ως προς $\dot{A}$, θα έχουμε ότι:

$$\dot{A} = -\omega_{\delta(t)}(X_{\delta,\delta(t)})A$$

Προκειμένου να επεξεργαστούμε περαιτέρω αυτήν τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, επικεντρωνόμαστε σε έναν χάρτη $(U, x)$ της $M$. Επιλέγουμε μια τοπική τμήση $\sigma : U \to P$, όπου κατά τα γνωστά $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Αυτή επάγει αρχικά μια καμπύλη $\delta = \sigma \circ \gamma$ με $\sigma_* X_{\gamma,\gamma(t)} = X_{\delta,\delta(t)}$, δηλαδή μια δυνατότητα έκφρασης κάθε διανύσματος, εφαπτόμενου στην καμπύλη $\delta$ στο σημείο $\delta(t)$, ως τη δράση της push-forward της τμήσης $\sigma$ σε ένα διάνυσμα $X_{\gamma,\gamma(t)}$. Επομένως, στην παραπάνω διαφορική, όπου για συντομία $X_{\delta,\delta(t)} \equiv X_{\delta(t)}$, θα έχουμε τον όρο:

$$\omega_{\delta(t)}(X_{\delta(t)}) = \omega_{\sigma(\gamma(t))}(\sigma_* X_{\gamma(t)}) = (\sigma^*\omega)_{\gamma(t)} X_{\gamma(t)} = \varpi_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)})$$




Συνεπώς, η διαφορική θα γράφεται πλέον ως $\dot{A} = -\varpi_{\gamma(t)}\dot{\gamma}A$ με αρχική συνθήκη $g(0) = g_0$ και τα γνωστά επί αυτού. Προφανώς, $\dot{\gamma}$ είναι η παραγώγιση της καμπύλης ως προς την παράμετρο $t$.

Η ερώτηση είναι πλέον πως λύνεται αυτή η διαφορική. Το πρώτο βήμα είναι να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη ως προς την παράμετρο από 0 έως μια τιμή $\tau$. Θα έχουμε τότε:

$$g(\tau) = g_0 - \int_0^\tau \mathrm{d}t\, \underbrace{\varpi_{\gamma(t)}\dot{\gamma}}_{:=\mathcal{N}(t)} A$$

Θεωρώντας αρχικά $t \equiv t_1$ και $g(t_i) = A_i$, μπορούμε αναδρομικά να γράψουμε:

$$g(\tau) = g_0 - \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \mathcal{N}(t_1) g_0 + \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \mathcal{N}(t_1)\varpi(t_2)A_2$$

Συνεχίζοντας με την ίδια λογική θα έχουμε τελικά ότι:

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \Bigg[1_{\mathfrak{g}} - \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \mathcal{N}(t_1) + \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \mathcal{N}(t_1)\mathcal{N}(t_2) \\ &\quad - \cdots + (-1)^k \int_0^\tau \mathrm{d}t_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} \mathrm{d}t_k \mathcal{N}(t_1)\cdots\mathcal{N}(t_k) + \cdots \Bigg] g_0 \\ &=: \left[\mathcal{P}\exp\left[-\int_0^\tau \mathrm{d}t \mathcal{N}(t)\right]\right] g_0 \end{aligned}$$

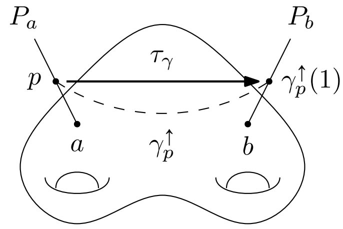
δηλαδή η λύση της διαφορικής είναι η ως άνω *δρομοδιατεταγμένη εκθετική* (path-ordered exponential).

Συνοψίζοντας λοιπόν, είδαμε ότι (τοπικά) η οριζόντια ανύψωση μιας καμπύλης $\gamma : [0,1] \to U$, έχοντας επιλέξει μια τοπική τμήση $\sigma : U \to P$, έχει τον ρητό τύπο:

$$\gamma^{\uparrow}(s) = \underbrace{(\sigma \circ \gamma)(s)}_{\text{αυθαίρετη καμπύλη}} \cdot \underbrace{\left[\mathcal{P}\exp\left[-\int_0^s \mathrm{d}t\, \varpi_{\gamma(t)}\dot{\gamma}\right]\right] g_0}_{g(s)}$$

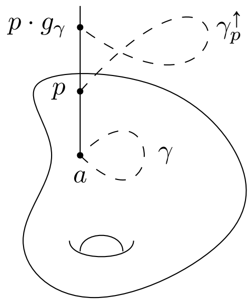
όπου $g(s)$ είναι ουσιαστικά το στοιχείο της ομάδας Lie $G$ για το παραμετρικό σημείο $s$, με το οποίο δρούμε από δεξιά στο κατάλληλο σημείο της αυθαίρετης καμπύλης, $(\sigma \circ \gamma)(s)$, ώστε να καταλήξουμε στο $\gamma^{\uparrow}(s)$. Με άλλα λόγια, ισχύει δηλαδή ότι $\mathfrak{R}_{g(s)*} H_{\sigma(\gamma(s))} P = H_p P$ με $p \in P_{\gamma(s)}$, για κάθε $s \in [0,1]$, $p$ κατάλληλο και $g(s)$ όπως παραπάνω.

**Ορισμός 5.17.** Έστω καμπύλη $\gamma : [0,1] \to M$ με $\gamma(0) = a$ και $\gamma(1) = b$. Έστω επίσης $\gamma_p^{\uparrow} : [0,1] \to P$ η οριζόντια ανύψωση αυτής που διέρχεται από το σημείο $p \in P_a$. Έστω ότι $P_b$ πεπερασμένα κοντά στην $P_a$ (οχι δηλαδή αυστηρά απειροστά). Τότε, η *παράλληλη μεταφορά* είναι μια απεικόνιση $\tau_\gamma : P_a \to P_b$ με $p \mapsto \gamma_p^{\uparrow}(1)$.




**Παρατήρηση 5.9.** *Η απεικόνιση $\tau_\gamma$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Αρχικά, $\mathfrak{R}_{g*}H_p = H_{p\cdot g}$ και άρα πυκνά γράφουμε ότι $p \cdot G \mapsto \gamma_{p\cdot G}^{\uparrow}(1)$, με την έννοια ότι τελικά κάθε $p \in P_a$ θα απεικονίζεται σε κάποιο στοιχείο της $P_b$. Αυτό το στοιχείο βέβαια θα είναι μοναδικό, καθώς η ανυψωμένη είναι μοναδική για κάθε $p \in P_a$, οπότε $\tau_\gamma$ είναι τελικά επί και 1-1.*

**Ορισμός 5.18.** Έστω $m \in M$ και $\gamma$ βρόχος με αρχικό σημείο το $a$, δηλαδή ισχύει ότι $\gamma(0) = \gamma(1) = a$. Τότε, η υποομάδα $Hol_m(\omega) = \{g_\gamma \mid \tau_\gamma(p) = p \cdot g_\gamma, \gamma \text{ βρόχος}\}$ της δομικής ομάδας $G$, καλείται *ομάδα ολονομίας* (holonomy group) στο $m \in M$ της συνοχής Ehresmann $\omega$.




**Ορισμός 5.19.** Έστω $(P, \pi, M)$ μια κύρια $G$-δέσμη και $\omega$ μια συνοχή Ehresmann στον ολικό χώρο $P$. Έστω επιπλέον $(P \times_G F, \pi_\sim, M)$ μια συσχετισμένη ινώδης δέσμη, όπου $G \curvearrowright F$. Θυμίζουμε ότι ο ολικός χώρος της συσχετισμένης δέσμης δίνεται από:

$$P \times_G F = \{[(p,f)] \mid p \in P, f \in F\}$$

όπου η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως:

$$(p,f) \sim (p', f') :\Longleftrightarrow \exists\, g \in G : p' = p \cdot g, f' = g^{-1} \cdot f$$

Επιπλέον, έστω μια καμπύλη $\gamma : [0,1] \to M$ και $\gamma_p^{\uparrow} : [0,1] \to P$ η οριζόντια ανύψωση της $\gamma$ που διέρχεται από το σημείο $p \in P_{\gamma(0)}$. Τότε, η οριζόντια ανύψωση της $\gamma$ στον ολικό χώρο της συσχετισμένης δέσμης, έτσι ώστε η ανυψωμένη να διέρχεται από το σημείο $[p, f]$, θα δίνεται από $\widetilde{\gamma}_{[p,f]}^{\uparrow} : [0,1] \to P \times_G F$ με $t \to [\gamma_p^{\uparrow}(t), f]$.

**Παρατήρηση 5.10.** *Η παράλληλη μεταφορά θα είναι σε αυτήν την περίπτωση η απεικόνιση $\widetilde{\tau}_\gamma : \pi_\sim^{-1}(\gamma(0)) \to \pi_\sim^{-1}(\gamma(1))$ με $[p,f] \mapsto \widetilde{\gamma}_{[p,f]}^{\uparrow}(1)$, όπου αν είναι λεία, αποτελεί μια αμφιδιαφόριση μεταξύ των ινών $F_{\gamma(0)}$ και $F_{\gamma(1)}$ της συσχετισμένης δέσμης (εφόσον δείξαμε ότι αποτελεί αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία).*

## 5.5. Καμπυλότητα, στρέψη και συναλλοίωτη παράγωγος

**Ορισμός 5.20.** Έστω $(P, \pi, M)$ κύρια $G$-δέσμη με συνοχή (Ehresmann) $\omega$ στον $P$. Έστω επίσης $\phi \in \mathcal{A}^k(P, \ )$ με πεδίο τιμών αυθαίρετο. Τότε, η μορφή $\mathrm{d}^\omega \phi \in \mathcal{A}^{k+1}(P, \ )$ με τύπο $\mathrm{d}^\omega \phi(\bar{X}_{k+1}) = \mathrm{d}\phi(\overline{hor\, X_{k+1}})$ καλείται *εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγος* της $\phi$, όπου κατά τα γνωστά σημαίνουμε πάλι $\bar{X}_{k+1} = (X_1, \cdots, X_{k+1})$.

**Ορισμός 5.21.** Έστω κύρια $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ με συνοχή Ehresmann $\omega$. Τότε η *καμπυλότητα* (της συνοχής) Ehresmann είναι μια 2-μορφή $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})$, όπου $\Omega = \dagger^\omega \omega$.

**Πρόταση 5.6.** *Μπορούμε πάντα να γράψουμε την καμπυλότητα Ehresmann μέσω της σχέσης $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega, \omega]$, όπου με ακριβώς τις ίδιες πράξεις, όπως και στην περίπτωση της μορφής Maurer-Cartan $\omega_G \in \mathcal{A}^1(G, \mathfrak{g})$, δείχνεται ότι για δύο διανυσματικά πεδία $X, Y \in \Gamma(TP)$ και $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$:*

$$[\omega, \omega](X, Y) \equiv [\omega \wedge \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε κατά βάση την ιδιότητα της διγραμμικότητας της $\Omega$, εξετάζοντας χωριστά τρεις περιπτώσεις:

i) Τα διανυσματικά πεδία $X, Y \in \Gamma(TP)$ είναι κάθετα, δηλαδή $X, Y \in \Gamma(VP)$. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν $v, w \in \mathfrak{g}$, τέτοια ώστε $X, Y$ να είναι τα $X^v, X^w$ αντίστοιχα. Επομένως, για το αριστερό μέλος της $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega, \omega]$ θα ισχύει ότι:

$$\Omega(X^v, X^w) = \mathrm{d}^\omega \omega(X^v, X^w) = \mathrm{d}\omega(hor\, X^v, hor\, X^w) = 0$$

καθώς $X, Y$ κάθετα από υπόθεση. Έπειτα, για το δεξί μέλος θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{d}\omega(X^v, X^w) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X^v, X^w)$$

όπου εδω θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση 3.25, έτσι ώστε:

$$\mathrm{d}\omega(X^v, X^w) = X^v \omega(X^w) - X^w \omega(X^v) - \omega([X^v, X^w])$$

Καθώς $\omega(X^v) = v$ είναι σταθερές συναρτήσεις με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$, έπεται ότι η παράγωγος τους θα είναι μηδέν, δηλαδή $X^w(v) = X^v(w) = 0$. Επιπλέον, $[X^v, X^w] = X^{[v,w]}$, καθώς $[X^v, X^w] = [i(v), i(w)] = i([v, w]) = X^{[v,w]}$, εφόσον $i$ ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Τελικά:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X^v, X^w) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X^v, X^w) &= -\omega(X^{[v,w]}) + [\omega(X^v), \omega(X^w)] \\ &= -[v, w] + [v, w] = 0 \end{aligned}$$

οπότε για αυτήν την επιλογή διανυσματικών πεδίων, ο τύπος ισχύει.

ii) Τα διανυσματικά πεδία $X, Y$ είναι οριζόντια. Έχουμε επομένως ότι:

$$\Omega(X, Y) = \mathrm{d}^\omega \omega(X, Y) = \mathrm{d}\omega(hor\, X, hor\, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y)$$

ενώ για το δεξί μέλος ισχύει ότι:

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega, \omega](X, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] = \mathrm{d}\omega(X, Y)$$

καθώς η δράση της $\omega$ σε οριζόντιο διανυσματικό πεδίο δίνει μηδέν.

iii) Υποθέτουμε χβτγ ότι $X \in \Gamma(HP)$ και $Y \in \Gamma(VP)$, δηλαδή υπάρχει $v \in \mathfrak{g}$, τέτοιο ώστε $Y = X^v$. Θα έχουμε για το αριστερό μέλος ότι:

$$\Omega(X, X^v) = \mathrm{d}\omega(\mathit{hor}\, X, 0) = 0$$

αφού $\mathrm{d}\omega$ είναι διγραμμική και άρα, αν έστω ένα εκ των ορισμάτων είναι μηδέν, τότε η τιμή της θα είναι μηδέν. Στη συνέχεια:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega\,(X, X^v) + \frac{1}{2}[\omega,\omega](X, X^v) &= X(v) - X^v(0) - \omega([X, X^v]) + [0, v]\\ &= -\omega([X, X^v]) = 0\end{aligned}$$

αφού ο μεταθέτης ενός κάθετου και ενός οριζόντιου διανυσματικού πεδίου είναι ένα νέο οριζόντιο διανυσματικό πεδίο, καθώς, όπως είδαμε:

$$[X^v, X] = \lim_{t\to 0} \frac{\mathfrak{R}_{\phi_{-t}*}X - X}{t}$$

και άρα από ορισμό συνοχής $\mathfrak{R}_{\phi_{-t}*}X$ επίσης οριζόντιο. Επομένως, η δράση της $\omega$ σε αυτό θα δίνει μηδέν κατά τα γνωστά.

Επομένως, η πρόταση 5.6 είναι αληθής. □

**Παρατήρηση 5.11.** *Αν $G$ είναι ομάδα πινάκων, τότε ο παραπάνω τύπος γράφεται ως:*

$$\Omega^i{}_j = \mathrm{d}\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j$$

*όπου έχουμε άθροιση στα $k$ και $\Omega = (\Omega^i{}_j)$ με τη συνήθη 2-μορφή $\Omega^i{}_j \in \mathcal{A}^2(P)$ να είναι συνιστώσα της $\Omega$. Για κάθε δπ $X, Y \in \Gamma(TP)$, ισχύει $\Omega^i{}_j(X, Y) \in \mathcal{C}^\infty(P)$. Φυσικά, ισχύουν ανάλογα και για τη συνοχή Ehresmann, δηλαδή $\omega = (\omega^i{}_j)$ με $\omega^i{}_j \in \mathcal{A}^1(P)$.*

Το θέμα είναι τώρα πως μπορούμε να συσχετίσουμε αυτούς τους ορισμούς με κάτι χρήσιμο στη βάση της δέσμης. Έστω $U$ υποσύνολο της $M$. Θεωρούμε μια τοπική τμήση $\sigma : U \to P$ (εννοούμε πάντοτε τιμή $\pi^{-1}(U) \subset P$), η οποία επάγει δύο αντικείμενα. Αρχικά επάγει ένα YM πεδίο $\sigma^*\omega = \varpi \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$, το οποίο πχ. στη γενική σχετικότητα εμφανίζεται ως $\Gamma$ και συνήθως ως $A$ στις θεωρίες βαθμίδας. Επάγεται επίσης από αυτήν την επιλογή και μια YM δύναμη πεδίου $\sigma^*\Omega = \widetilde{\Omega} \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g})$, η οποία πχ. εμφανίζεται ως ο τανυστής Riemann στη γσ και ως ο τανυστής $F$ στις θεωρίες βαθμίδας. Η pull-back της τμήσης είναι γραμμική και επιμεριστική απεικόνιση ως pull-back. Έτσι:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Omega} &= \sigma^*(\mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega,\omega]) = \sigma^*\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}\sigma^*([\omega,\omega])\\ &= \mathrm{d}\sigma^*\omega + \sigma^*(\omega\wedge\omega) = \mathrm{d}\varpi + \varpi\wedge\varpi = \mathrm{d}\varpi + \frac{1}{2}[\varpi,\varpi]\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta - (-1)^{(\deg(\omega))(\deg(\eta))}\eta \wedge \omega$, η οποία ισχύει για αυθαίρετες $\omega, \eta$ με κοινό πεδίο ορισμού και τιμών σε κάποιον δχ, όπως την εισαγάγαμε στην ενότητα των ομάδων και αλγεβρών Lie. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός της μετάθεσης της pull-back με την εξωτερική παράγωγο, όπως ακριβώς αποδείξαμε στην ενότητα των διαφορικών μορφών. Έτσι εξηγείται τελικά ο τύπος του τανυστή Riemann $\mathit{Riem} = \mathrm{d}\Gamma + \Gamma\wedge\Gamma$. Επομένως, αν η δομική ομάδα είναι ομάδα πινάκων, τότε $\mathit{Riem} = (\mathit{Riem}^i{}_j)$ και γράφουμε ως προς την χαρτοεπαγόμενη δυϊκή βάση $\{\mathrm{d}x^\nu\}$ ότι $\mathit{Riem}^i{}_j = (1/2)\mathit{Riem}^i{}_{j\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$, όπου όντας αναμενόμενο (αφού είναι εναλλασσόμενος τανυστής), οι συνιστώσες του θα είναι αντισυμμετρικές ως προς την ανταλλαγή $\mu \leftrightarrow \nu$. Επιπλέον, αν η δομική ομάδα είναι ορθογώνια ομάδα πινάκων, τότε θα έχουμε αντισυμμετρία και για $i \leftrightarrow j$ ανταλλαγές, ιδιότητες πράγματι πολύ γνωστές στους υπολογισμούς της γενικής σχετικότητας.

**Θεώρημα 5.5** (Ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα)**.** *Η ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα Ehresmann δίνεται από τη σχέση* $\mathrm{d}^{\omega}\Omega = 0$*. Δεν ισχύει γενικά* $(\mathrm{d}^{\omega})^2 = 0$.

*Απόδειξη.* Αρχικά, ας θεωρήσουμε δύο αυθαίρετες μορφές $\omega \in \mathcal{A}^k(P,\mathfrak{g})$ και $\eta \in \mathcal{A}^l(P,\mathfrak{g})$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[\omega,\eta] &= \mathrm{d}(\omega\wedge\eta) - (-1)^{kl}\,\mathrm{d}(\eta\wedge\omega)\\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta - (-1)^{kl}\mathrm{d}\eta\wedge\omega - (-1)^{kl}(-1)^l\eta\wedge\mathrm{d}\omega\\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta - (-1)^{k(l+1)}(-1)^{-k}\mathrm{d}\eta\wedge\omega - (-1)^{l(k+1)}\eta\wedge\mathrm{d}\omega\\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\eta - (-1)^{l(k+1)}\eta\wedge\mathrm{d}\omega + (-1)^k(\omega\wedge\mathrm{d}\eta - (-1)^{k(l+1)}\mathrm{d}\eta\wedge\omega)\\
&= [\mathrm{d}\omega,\eta] + (-1)^k[\omega,\mathrm{d}\eta]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

καθώς $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(-1)^{kl+1}[\eta,\omega] &= (-1)^{kl+1}\eta\wedge\omega + (-1)^{2kl}\omega\wedge\eta\\
&= \omega\wedge\eta - (-1)^{kl}\eta\wedge\omega = [\omega,\eta]
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Εφαρμόζοντας εξωτερική παραγώγιση και στα δύο μέλη της σχέσης $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega,\omega]$ και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και το γεγονός ότι $\mathrm{d}^2 = 0$, θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{d}[\omega,\omega] = \frac{1}{2}([\mathrm{d}\omega,\omega] - [\omega,\mathrm{d}\omega]) = -[\omega,\mathrm{d}\omega] = -[\omega,\Omega] + \frac{1}{2}[\omega,[\omega,\omega]] = [-\omega,\Omega]$$

όπου $[\omega,[\omega,\omega]] = 0$ από ταυτότητα Jacobi που ικανοποιεί η αγκύλη Lie. Επομένως, καταλήγουμε στην ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα:

$$\mathrm{d}^{\omega}\Omega = \mathrm{d}\Omega + [\omega,\Omega] = 0 \tag{5.4}$$

□

**Ορισμός 5.22.** Έστω κύρια $G$-δέσμη $(P,\pi,M)$ με $\omega$ στον $P$. Έστω τώρα μια 1-μορφή $\theta$ στο $P$. Η $\theta$ καλείται *συγκολλητική μορφή* (soldering form), αν:

i) Ισχύει ότι $\theta \in \mathcal{A}^1(P,V)$, όπου $V$ να μπορεί να είναι πδδχ αναπαράστασης της δομικής ομάδας με $\dim V = \dim M$.

ii) Η $\theta$ είναι κάθετη μορφή, δηλαδή $\theta(\mathit{ver}\,X) = 0$ για κάθε $X \in \Gamma(TP)$, σε αντιπαράθεση με την $\omega$, η οποία είναι οριζόντια μορφή.

iii) Η $\theta$ είναι δεξιά ισοαναλλοίωτη, δηλαδή $\mathfrak{R}_g^*\theta = \rho(g^{-1})\theta$, όπου $\rho : G \to \mathrm{Aut}\,V$.

iv) Υπάρχει ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών μεταξύ των $TM$ και $P\times_G V$, δηλαδή ισομορφισμός μεταξύ της εφαπτόμενης δέσμης στην $M$ και της συσχετισμένης (με την κύρια $G$-δέσμη) δέσμης $P\times_G V$ με ίνα $V$.

**Παράδειγμα 5.5.** Έστωσαν $P = \mathcal{F}M$, $\dim M = n$ και $V = \mathbb{R}^n$. Τότε, η συγκολλητική μορφή θα είναι η απεικόνιση $\theta : \Gamma(T\mathcal{F}M) \to \mathbb{R}^n$. Έστω τώρα $p = \{X_i\}$ για $i = 1,\cdots,n$ κάποιο πλαίσιο σε ένα σημείο του ολικού χώρου $\mathcal{F}M$ της δέσμης πλαισίου, όπου $\{X_i\}$ μια βάση του $T_{\pi(p)}M$ και έστω $u_p$ η γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to T_{\pi(p)}M$ με $e_i \mapsto X_i$, όπου $\{e_i\}$ η συνήθης βάση στον $\mathbb{R}^n$. Εφόσον υπάρχει ένα πλαίσιο $p$, θα υπάρχει και το δυϊκό του, το οποίο καλούμε συνπλαίσιο (coframe) $\widetilde{p}$, έτσι ώστε να ισχύει για την $u_p^{-1}$ ότι $u_p^{-1} : T_{\pi(p)}M \to \mathbb{R}^n$ με $Y \mapsto \widetilde{p}(Y)$, όπου $\widetilde{p}(Y)$ είναι η συλλογή συνιστωσών του $Y$. Έτσι, ορίζοντας την τιμή της $\theta$ για $X \in \Gamma(T\mathcal{F}M)$ ως $\theta_p(X) = (u_p^{-1}\circ\pi_*)(X)$, βλέπουμε ότι η $\theta$ για κάποιο πλαίσιο $p$ της $\mathcal{F}M$ θα πάρει αρχικά κάποιο $X_p \in T_p\mathcal{F}M$ και θα το προβάλει μέσω της $(\pi_*)_p : T_p\mathcal{F}M \to T_{\pi(p)}M$ στο $X_{\pi(p)}$, ενώ έπειτα, μέσω της $u_p^{-1}$, θα δώσει τη συλλογή συνιστωσών του στον $\mathbb{R}^n$.

**Παρατήρηση 5.12.** *Κάθε στοιχείο $\omega$ του $\mathcal{A}^k(P,V)$ μπορεί να αναλυθεί ως $\omega = \omega^a \otimes e_a$ (σύμβαση άθροισης), όπου $\omega^a \in \mathcal{A}^k(P)$, δηλαδή συνήθης $k$-μορφή με τιμές στον $\mathbb{R}$ και $\{e_a\}$ μια βάση του $V$. Γενικά $\mathcal{A}^k(P) \otimes_{\mathbb{R}} V \cong \mathcal{A}^k(P,V)$ για κάθε πδδχ $V$ με πραγματικό σώμα. Έτσι, όπως ήδη έχουμε δείξει, ισχύει $\mathrm{d}\omega = (\mathrm{d}\omega^a) \otimes e_a$. Έστω τώρα $\omega \in \mathcal{A}^k(P,V)$ και $\eta \in \mathcal{A}^l(P,W)$. Τότε, $\omega \wedge \eta \in \mathcal{A}^{k+l}(P, V \otimes W)$ με:*

$$(\omega \wedge \eta)(\bar{X}_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega(\bar{X}_{\sigma(k)}) \otimes \eta(\bar{X}_{\sigma(k:l)})$$

*Αν $\{v_a\}$ βάση του $V$ και $\{w_b\}$ βάση του $W$, τότε θέτοντας για συντομία $\omega^a \otimes v_a \equiv \omega^a v_a$, θα έχουμε ότι:*

$$\omega \wedge \eta = \omega^a v_a \wedge \eta^b w_b = (\omega^a \wedge \eta^b) v_a \otimes w_b$$

*Είναι προφανές λοιπόν ότι με βάση αυτόν τον ορισμό, ισχύει η γνωστή ιδιότητα της εξωτερικής παραγώγισης $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$ και για τις μορφές με τιμές σε δχ. Στην ειδική περίπτωση που $V = W = \mathfrak{g}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα είδος πολλαπλασιασμού $m : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ με $v \otimes w \mapsto [v,w]$, έτσι ώστε να ορίζεται απεικόνιση $m_* : \mathcal{A}^{p+q}(P, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \to \mathcal{A}^{p+q}(P, \mathfrak{g})$ με:*

$$\begin{aligned}(m_*(\omega \wedge \eta))(\bar{X}_{p+q}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S(p+q)} (\operatorname{sgn} \sigma) m(\omega(\bar{X}_{\sigma(p)}) \otimes \eta(\bar{X}_{\sigma(p:q)})) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S(p+q)} (\operatorname{sgn} \sigma) [\omega(\bar{X}_{\sigma(p)}), \eta(\bar{X}_{\sigma(p:q)})]\end{aligned}$$

*Ορίζουμε τότε $[\omega, \eta] \equiv [\omega \wedge \eta] = m_*(\omega \wedge \eta)$ και άρα:*

$$[\wedge] : \mathcal{A}^p(P, \mathfrak{g}) \times \mathcal{A}^q(P, \mathfrak{g}) \xrightarrow{\wedge} \mathcal{A}^{p+q}(P, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \xrightarrow{m_*} \mathcal{A}^{p+q}(P, \mathfrak{g})$$

*για αυθαίρετα $p, q$, δηλαδή με άλλα λόγια $[\ ,\ ] \equiv [\wedge] = m_* \circ (\wedge)$*

**Ορισμός 5.23.** Έστω $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ με $\omega$ και $\theta$ στον ολικό χώρο $P$. Τότε, η 2-μορφή $\Theta \in \mathcal{A}^2(P,V)$ με $\Theta = \mathrm{d}^\omega \theta$ καλείται *στρέψη* και θα δεχτούμε ότι ισχύει για αυτήν η σχέση $\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \mathbin{\wedge\!\!\!\!\bigcirc} \theta$.

**Ορισμός 5.24.** Η απεικόνιση $\mathbin{\wedge\!\!\!\!\bigcirc} : \mathcal{A}^k(P, \mathfrak{g}) \times \mathcal{A}^l(P,V) \to \mathcal{A}^{k+l}(P,V)$ μπορεί να κατασκευαστεί με τον εξής τρόπο. Έστω $(\psi, V)$ μια πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ με $\psi : \mathfrak{g} \to \operatorname{End} V$. Τότε, ορίζουμε μια σύνθετη απεικόνιση $\widetilde{m} : \mathfrak{g} \otimes V \to \mathfrak{g} \times V \to V$ (χάρη στη χαρακτηριστική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου), τέτοια ώστε $\widetilde{m}(a \otimes v) = \psi(a)(v)$ για κάθε $a \in \mathfrak{g}$ και $v \in V$. Αυτή επάγει μια $\widetilde{m}_* : \mathcal{A}^{k+l}(P, \mathfrak{g} \otimes V) \to \mathcal{A}^{k+l}(P,V)$, έτσι ώστε για $\omega \in \mathcal{A}^k(P, \mathfrak{g})$ και $\eta \in \mathcal{A}^l(P,V)$ να ισχύει:

$$\begin{aligned}(\widetilde{m}_*(\omega \wedge \eta))(\bar{X}_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \widetilde{m}(\omega(\bar{X}_{\sigma(k)}) \otimes \eta(\bar{X}_{\sigma(k:l)})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S(k+l)} (\operatorname{sgn} \sigma) \psi(\omega(\bar{X}_{\sigma(k)}))(\eta(\bar{X}_{\sigma(k:l)}))\end{aligned}$$

δηλαδή $(\mathbin{\wedge\!\!\!\!\bigcirc}) = \widetilde{m}_* \circ (\wedge)$.

**Θεώρημα 5.6** (Ταυτότητα Bianchi για τη στρέψη)**.** *Η ταυτότητα Bianchi για τη στρέψη δίνεται από $\mathrm{d}^\omega \Theta = \Omega \mathbin{\wedge\!\!\!\!\bigcirc} \theta$, όπου γενικά $\mathrm{d}^\omega \Theta \in \mathcal{A}^3(P,V)$.*

*Απόδειξη.* Παίρνοντας την εξωτερική παράγωγο και των δύο μελών της σχέσης $\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \owedge \theta$, θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{d}\Theta = \mathrm{d}\omega \owedge \theta - \omega \owedge \mathrm{d}\theta = \Omega \owedge \theta - \frac{1}{2}[\omega, \omega] \owedge \theta - \omega \owedge \mathrm{d}\theta$$

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$\psi([\omega,\omega])(X,Y) = \psi([\omega,\omega](X,Y)) = 2[\psi(\omega(X)), \psi(\omega(Y))]$$

καθώς $\psi$ ομομορφισμός αλγεβρών Lie. Με τετριμμένες πράξεις αποδεικνύεται τελικά ότι:

$$\begin{aligned}([\omega,\omega] \owedge \theta)(X,Y,Z) &= \frac{1}{2}(\psi([\omega,\omega](X,Y))(\theta(Z)) - YXZ + YZX - ZYX + ZXY - XZY) \\ &= 2([\psi(\omega(X)), \psi(\omega(Y))](\theta(Z)) + YZX + ZXY)\end{aligned}$$

όπου με $YXZ$ εννοούμε τα $Y, X, Z$ στις αντίστοιχες θέσεις κατά σειρά εμφάνισης. Όμως:

$$\begin{aligned}(\omega \owedge (\omega \owedge \theta))(X,Y,Z) &= \frac{1}{2}(\psi(\omega(X))(\psi(\omega(Y))(\theta(Z)) - \psi(\omega(Z))(\theta(Y))) + perm(X,Y,Z)) \\ &= \psi(\omega(X))(\psi(\omega(Y))(\theta(Z)) - Y \leftrightarrow X) + YZX + ZXY \\ &= [\psi(\omega(X)), \psi(\omega(Y))](\theta(Z)) + YZX + ZXY\end{aligned}$$

και επομένως, $(1/2)[\omega,\omega] \owedge \theta = \omega \owedge (\omega \owedge \theta)$. Συνεπώς:

$$\mathrm{d}\Theta = \Omega \owedge \theta - \omega \owedge (\omega \owedge \theta) - \omega \owedge \mathrm{d}\theta = \Omega \owedge \theta - \omega \owedge \Theta$$

και άρα, $\mathrm{d}^{\omega}\Theta = \mathrm{d}\Theta + \omega \owedge \Theta = \Omega \owedge \theta$. □

**Παρατήρηση 5.13.** *Αν η $G$ είναι ομάδα πινάκων, τότε $\Theta^i = \mathrm{d}\theta^i + \omega^i{}_j \wedge \theta^j$.*

**Παρατήρηση 5.14.** *Έστω $(P, \pi, M)$ μια $G$-δέσμη με $\omega$ και $\theta$ στον $P$. Σε αντιστοιχία με τη Yang-Mills δύναμη πεδίου για την καμπυλότητα, μπορούμε στην περίπτωση της στρέψης, κάνοντας μια επιλογή τοπικής τμήσης $\sigma$ στη δέσμη να επάγουμε τον τανυστή στρέψης $Tor$ στην $M$. Αυτό γίνεται προωθώντας τη 2-μορφή στρέψης $\Theta$ από τον $P$ στην $M$ μέσω της pull-back της $\sigma$, έτσι ώστε $Tor \in \Omega^2(U,V)$, όπου $U \subset M$ με $Tor = \sigma^*\Theta$. Ο τανυστής $Tor$ θα έχει συνιστώσες $Tor^i$ και αυτές θα αναλύονται ως $Tor^i = (1/2)Tor^i{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$, όπου $Tor^i{}_{(\mu\nu)} = 0$.*

Ας περάσουμε τώρα στην έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου. Είδαμε στην ενότητα της παράλληλης μεταφοράς ότι για μια επιλογή τοπικής τμήσης $\sigma$ στη συσχετισμένη δέσμη $P \times_G F$ δεν ισχύει απαραίτητα η σχέση $\tau_{\gamma}(\sigma(\gamma(0))) = \sigma(\gamma(1))$. Αν θεωρήσουμε ότι η χαρακτηριστική ίνα είναι δχ, δηλαδή ορίζονται οι συνήθεις πράξεις, τότε η διαφορά αυτής της αποτυχίας ταύτισης των δύο τιμών προς το διάστημα που έτρεξε η παράμετρος της καμπύλης, ορίζουν το διαφορικό πηλίκο που γνωρίζουμε ως συναλλοίωτη παράγωγο. Αυτός ο τρόπος κατασκευής της συναλλοίωτης παραγώγου είναι ιδιαίτερα απαιτητικός και γι'αυτόν τον λόγο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα βασικό θεώρημα-κλειδί, το οποίο θα μας επιτρέψει να αποφύγουμε την εργασία στη συσχετισμένη δέσμη και να κατασκευάσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο, εργαζόμενοι μόνο στην κύρια $G$-δέσμη, απλά ορίζοντας μια $G$-ισοαναλλοίωτη απεικόνιση με πεδίο τιμών στη χαρακτηριστική ίνα $F$. Γενικά, για συνοχές, καμπυλότητα και συναλλοίωτη παράγωγο σε δδ, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο παράρτημα A'.

**Θεώρημα 5.7.** *Έστω $G$-δέσμη $(P, \pi, M)$ και συσχετισμένη με αυτήν δέσμη $(P \times_G, \pi_{\sim}, M)$. Τότε, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των τμήσεων $\sigma : M \to P \times_G F$ και των $G$-ισοαναλλοίωτων συναρτήσεων $\phi : P \to F$, για τις οποίες ισχύει $\phi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \phi(p)$.*

*Απόδειξη.* Ξεκινάμε πρώτα θεωρώντας δοσμένη μια $G$-ισοαναλλοίωτη $\phi$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε από αυτήν μια απεικόνιση $\sigma_\phi : M \to P \times_G F$ με $\sigma_\phi(x) = [(p, \phi(p))]$, όπου $x \in M$ και $p \in P_x$. Για κάθε $p' \in P_x$ υπάρχει μοναδικό $g \in G$, τέτοιο ώστε $p' = p \cdot g$. Επομένως:

$$[(p', \phi(p'))] = [(p \cdot g, \phi(p \cdot g))] = [(p \cdot g, g^{-1}\phi(p))] = [(p, \phi(p))]$$

και άρα $\sigma_\phi$ καλώς ορισμένη. Επιπλέον, η $\sigma_\phi$ είναι πράγματι τμήση, καθώς:

$$\pi_\sim \circ \sigma_\phi(x) = \pi_\sim([(p, \phi(p))]) = \pi(p) = x$$

δηλαδή $\pi_\sim \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Μένει πλέον να δείξουμε και την αντίθετη κατεύθυνση. Δοθείσας μιας (τοπικής) τμήσης $\sigma$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την απεικόνιση $\phi_\sigma : P \to F$ με $\phi_\sigma(p) = i_p^{-1}(\sigma(\pi(p)))$ για κάποιο $p \in P_{\pi(p)}$. Η $i_p$ ορίζεται ως $i_p : F \to \pi_\sim^{-1}(\pi(p)) \subset P \times_G F$ με $i_p(f) = [(p, f)]$ για κάθε $f \in F$. Ισχύει ότι:

$$i_p(f) = [(p, f)] = [(p \cdot g, g^{-1} \cdot f)] = i_{p \cdot g}(g^{-1} \cdot f)$$

και πρέπει να δείξουμε την $G$-ισοαναλλοιότητα της $\phi_\sigma$:

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(p \cdot g) &= i_{p \cdot g}^{-1}(\sigma(\pi(p \cdot g))) = i_{p \cdot g}^{-1}(\sigma(\pi(p))) \\ &=: i_{p \cdot g}^{-1}(i_p(\phi_\sigma(p))) = i_{p \cdot g}^{-1}(i_{p \cdot g}(g^{-1} \cdot \phi_\sigma(p))) = g^{-1} \cdot \phi_\sigma(p)\end{aligned}$$

δηλαδή η $\phi_\sigma$ είναι πράγματι $G$-ισοαναλλοίωτη. □

Επίσης, θα πρέπει γενικά να δείξουμε ότι δεν χάνεται πληροφορία στις επαγόμενες κατασκευές, δηλαδή ότι $\sigma_{\phi_\sigma} = \sigma$ και $\phi_{\sigma_\phi} = \phi$. Θα έχουμε αρχικά ότι για κάθε $x \in M$ και $p \in P_x$ θα ισχύει:

$$\sigma_{\phi_\sigma}(x) = [(p, \phi_\sigma(p))] = [(p, i_p^{-1}(\sigma(\pi(p))))] = i_p(i_p^{-1}(\sigma(\pi(p)))) = \sigma(\pi(p)) = \sigma(x)$$

ενώ θα έχουμε και ότι:

$$\phi_{\sigma_\phi}(p) = i_p^{-1}(\sigma_\phi(\pi(p))) = i_p^{-1}([(p, \phi(p))]) = i_p^{-1}(i_p(\phi(p))) = \phi(p)$$

και άρα η πληροφορία διατηρείται. Έστω τώρα μια $G$-ισοαναλλοίωτη $\phi : P \to F$. Γνωρίζουμε ότι γενικά $g = \exp(tv) \in G$ για κάποιο $v \in \mathfrak{g}$, έτσι ώστε η συνθήκη $G$-ισοαναλλοιότητας να γράφεται ως:

$$\phi(p \cdot \exp(tv)) = \exp(-tv) \cdot \phi(p)$$

Έστω τώρα $G \curvearrowright F$ γραμμική, όπου $F$ πδδχ και άρα $G$ αναγκαστικά ομάδα πινάκων. Η παραγώγιση ως προς $t$ του αριστερού μέλους της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi(p \cdot \exp(tv)) = X^v \phi|_p = \mathrm{d}\phi_p(X_p^v)$$

ενώ για το δεξιό μέλος θα έχουμε ότι:

$$\left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(-tv)\right] \cdot \phi(p) = \left[\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} e^{-tv}\right] \cdot \phi(p) = -v \cdot \phi(p)$$

δηλαδή $\mathrm{d}\phi_p(X_p^v) + v \cdot \phi(p) = 0$ και αφού $p$ αυθαίρετο, τελικά $\mathrm{d}\phi(X^v) + \omega(X^v) \cdot \phi = 0$.

Ξεκινήσαμε όμως προσπαθώντας να κατασκευάσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο. Έστω ότι αυτή, για κάποιο $X \in \Gamma(TM)$ και $\sigma \in \Gamma(P \times_G F)$, συμβολίζεται με $\nabla_X \sigma$. Για ευκολία ας σημαίνουμε $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}M$ και $E = P \times_G F$. Θέλουμε να είναι $\nabla : \mathfrak{X}M \times \Gamma E \to \Gamma E$ και $\nabla_X : \Gamma E \to \Gamma E$. Επιπλέον, επιθυμούμε αυτή να πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες:

i) $\nabla_{fX+Y}\sigma = f\nabla_X\sigma + \nabla_Y\sigma$ για κάθε $f \in \mathcal{C}^\infty M$ και $T, S \in \mathfrak{X}M$.

ii) $\nabla_X(\sigma + \tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau$ για κάθε $\sigma, \tau \in \Gamma E$.

iii) $\nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma$.

Αρχικά θυμόμαστε ότι $\mathrm{d}^\omega = \mathrm{d} \circ hor$ και ισχυριζόμαστε ότι:

**Ισχυρισμός 5.1.** *Η δράση της εξωτερικής συναλλοίωτης παραγώγου μιας 0-μορφής $f \in \mathcal{A}^0(P, F)$ σε ένα διάνυσμα $X \in T_pP$ δίνεται από $\mathrm{d}^\omega f(X) = \mathrm{d}f(X) + \omega(X) \cdot f$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X$ κάθετο, δηλαδή $X = X^v$. Τότε $\mathrm{d}^\omega(X^v) = 0$, αφού $hor\, X^v = 0$. Για το δεξιό μέλος θα έχουμε ότι $\mathrm{d}f(X^v) + \omega(X^v) \cdot f = 0$, αφού έτσι δείξαμε πριν για μια $\phi \in \mathcal{A}^0(P, F)$. Αν τώρα $X$ οριζόντιο, τότε $\mathrm{d}^\omega f(X) = \mathrm{d}f(X)$ και $\mathrm{d}f(X) + \omega(X) \cdot f = \mathrm{d}f(X)$, καθώς $\omega(X) = 0$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει γενικά. □

Πρέπει τώρα να επιλέξουμε μια τοπική τμήση $\varphi : U \to P_U$ (εννοώντας $U \to \pi^{-1}(U)$). Με την pull-back αυτής μπορούμε να προωθήσουμε διάφορες μορφές. Για παράδειγμα, μέσω της $\varphi^*$, μια $f : P \to F$ προωθείται στην τοπική τμήση $\sigma = \varphi^* f = f \circ \varphi$ της δέσμης $P \times_G F$, ενώ η συνοχή Ehresmann $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$ προωθείται στο γνωστό Yang-Mills πεδίο $\varpi = \varphi^*\omega \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$. Τέλος, μπορούμε επίσης να προωθήσουμε και την $\mathrm{d}^\omega f \in \mathcal{A}^1(P, F)$ στην $\varphi^*\mathrm{d}^\omega f \in \mathcal{A}^1(U, F)$, όπου για κάποιο $X \in T_xM$ με $x \in U$ ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\mathrm{d}^\omega f)(X) &= (\varphi^*\mathrm{d}f)(X) + \varphi^*(\omega \cdot \phi)(X) = \mathrm{d}\sigma(X) + \varphi^*(\omega \otimes \phi)(X) \\
&= \mathrm{d}\sigma(X) + (\varpi \otimes \sigma)(X) = (\mathrm{d}\sigma + \varpi \otimes \sigma)(X) = \mathrm{d}^\varpi\sigma(X)
\end{aligned}
$$

Θα έχουμε ότι $\mathrm{d}^\varpi\sigma = \mathrm{d}\sigma + \varpi \cdot \sigma$, όπου η εναλλαγή μεταξύ των $\otimes, \cdot$ οφείλεται στο γεγονός ότι $f$ είναι 0-μορφή και η πράξη είναι απλά βαθμωτό γινόμενο. Θέτοντας $\nabla_X\sigma = (\mathrm{d}^\varpi\sigma)(X)$, αποδεικνύεται με τετριμμένες πράξεις (κυρίως εφαρμογή γραμμικότητας) ότι πληρούνται και οι τρείς παραπάνω ιδιότητες για την $\nabla$ και επομένως, έχουμε μια ρητή έκφραση για τη συναλλοίωτη παράγωγο.

# Κεφάλαιο 6

## Γεωμετρίες Klein και Cartan

Ο Felix Klein και το πρόγραμμα του Erlangen έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στη σύγχρονη μαθηματική επιστήμη και γεωμετρία. Η ιδέα του Klein ήταν να ταξινομήσει όλες τις γεωμετρίες που αναπτύχθηκαν τον 19ο αιώνα υπό τη στέγη μιας ενοποιητικής έννοιας, αυτήν της δράσης μιας ομάδας σε ένα σύνολο, έτσι ώστε κάθε γεωμετρία να χαρακτηρίζεται από εκείνα τα αντικείμενα της, τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα υπό τη δράση της ομάδας. Η Hauptgruppe, όπως αποκαλούσε ο Klein αυτήν την ομάδα, μεταφράστηκε στη συνέχεια ως κύρια ομάδα της γεωμετρίας, όπου πρόκειται για ομάδα Lie. Υπό αυτήν τη σκοπιά, είναι λογικό επόμενο, διαφορετικές κύριες ομάδες να περιγράφουν διαφορετικές γεωμετρίες. Το μοντέλο της γεωμετρίας Klein είναι οι ομογενείς χώροι, δηλαδή πολλαπλότητες, στις οποίες δρουν μεταβατικά οι ομάδες Lie. Η πιο βασική τους ιδιότητα είναι ότι η γνώση της τιμής ενός γεωμετρικού μεγέθους σε ένα σημείο του χώρου δίνει τη δυνατότητα να γνωρίζουμε την τιμή του σε οποιοδήποτε σημείο, χρησιμοποιώντας κατάλληλες απεικονίσεις μεταφοράς. Στο κεφάλαιο αυτό θα πραγματοποιήσουμε μια εισαγωγή στους ομογενείς χώρους και τη γεωμετρία Klein, τα ζεύγη Klein και την εφαπτόμενη δέσμη αυτής της γεωμετρίας. Σκοπός είναι η μελέτη της φύσης αυτών των γεωμετριών σε γενικά πλαίσια και όχι απαραίτητα η παρουσίαση συγκεκριμένων παραδειγμάτων τέτοιων γεωμετριών. Καθότι πολλές αποδείξεις αυτού του κεφαλαίου είναι μεγάλες και αρκετά απαιτητικές, οι ακόλουθες ενότητες δεν θα χαρακτηρίζονται από την όποια μαθηματική αυστηρότητα (με την έννοια των αποδείξεων κάθε ισχυρισμού) των προηγούμενων κεφαλαίων. Καθώς η μαθηματική βιβλιογραφία, κυρίως σχετικά με τη μοντέρνα εκδοχή των γεωμετριών Cartan, δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη (το αντίθετο, είναι αρκετά περιορισμένη), θα βασιστούμε κυρίως σε έναν από τους βασικούς γνώστες και εκσυγχρονιστές του έργου του Cartan, τον R. Sharpe και το βιβλίο του [?].

### 6.1. *Ομογενείς χώροι*

Οι ομογενείς χώροι είναι πολλαπλότητες της μορφής $G/H$, όπου $G$ ομάδα Lie και $H$ κλειστή υποομάδα Lie αυτής. Ένας γενικός τρόπος παραγωγής τέτοιων πολλαπλοτήτων έχει ως εξής: Έστω $G$ ομάδα Lie και $H$ υποομάδα Lie αυτής. Συμβολίζουμε το σύνολο των αριστερών συμπλόκων (left cosets) της $H$ στην $G$, $gH := \{gh : h \in H\}$, με $G/H$, το οποίο, εφοδιασμένο με την τοπολογία-πηλίκο που επάγει η κανονική προβολή $\pi : G \to G/H$

με $\pi(g) = gH$, καλείται χώρος-πηλίκο ή σύμπλοκος χώρος (coset space), όπου η σχέση ισοδυναμίας δίνεται από $x \sim y \iff xH = yH$.

**Θεώρημα 6.1.** *Έστω $G$ ομάδα Lie και $H$ κλειστή υποομάδα Lie αυτής. Τότε, υπάρχει μοναδική διαφορίσιμη δομή (differentiable structure) για την πολλαπλότητα $G/H$, έτσι ώστε η κανονική προβολή $\pi : G \to G/H$ να είναι υπένθεση (submersion), δηλαδή η push-forward αυτής, $(\pi_*)_g$, να είναι επί για κάθε $g \in G$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$.*

Πρόκειται για το θεώρημα 5.1. Η πολλαπλότητα $G/H$ που παράγεται με τον ως άνω τρόπο, καλείται ομογενής χώρος ή πολλαπλότητα-πηλίκο. Όμως, ένας τέτοιος χώρος χαρακτηρίζεται και από τη μεταβατική δράση της $G$. Θυμίζουμε ότι η δράση καλείται μεταβατική (transitive), όταν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in M$ υπάρχει κάποιο $g \in G$, τέτοιο ώστε $y = gx$. Αν $G/H$ ομογενής χώρος, τότε η απεικόνιση $\tau : G \times G/H \to G/H$ με $\tau(g', gH) := g'gH$ καλείται *φυσική* δράση της $G$ στον $G/H$, δηλαδή λεία μεταβατική δράση. Η $\tau$ είναι λεία, καθώς το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται **[29]**:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\tau"] & G/H \end{tikzcd}$$

όπου $u$ είναι η πράξη της ομάδας $G$. Για κάθε $g' \in G$ μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\tau_{g'} : G/H \to G/H$ με $\tau_{g'}(gH) = g'gH$, την οποία καλούμε αριστερή μεταφορά της $G/H$, έτσι ώστε $\pi \circ L_{g'} = \tau_{g'} \circ \pi$ και $\tau_{g'g''} = \tau_{g'} \circ \tau_{g''}$ για $g', g'' \in G$. Η πρώτη ισότητα δείχνει ότι η $\tau_{g'}$ είναι λεία ως σύνθεση λείων και η δεύτερη ισότητα μαζί με το συμπέρασμα της πρώτης δείχνει ότι η αριστερή μεταφορά της $G/H$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη απεικόνιση την $\tau_{g'^{-1}}$, η οποία είναι επίσης λεία. Εννοείται ότι η πρώτη ισότητα ισχύει, γιατί $\pi \circ L_{g'}$ λεία και άρα, αφού $\pi$ υπένθεση, $\tau_{g'} \circ \pi$ πρέπει να είναι λεία, δηλαδή $\tau_{g'}$ λεία.

**Θεώρημα 6.2.** *Έστω $\kappa : G \times M \to M$ μια μεταβατική, λεία δράση μιας ομάδας Lie $G$ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ και $S_p$ ο σταθεροποιητής του $p \in M$. Τότε, η απεικόνιση $\phi : G/S_p \to M$ με $\phi(gS_p) := gp$ είναι μια ισοαναλλοίωτη αμφιδιαφόριση.*

*Απόδειξη.* Έστω ο συμβολισμός $S_p \equiv H$. Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι $\phi$ είναι καλώς ορισμένη. Υποθέτουμε ότι $g, g'$ ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο, δηλαδή $gH = g'H$, έτσι ώστε $g^{-1}g' \in H$. Αν θέσουμε $g^{-1}g' = h$, τότε $\phi(g'H) = g'p = ghp = gp = \phi(gH)$. Η ισοαναλλοιότητα της $\phi$ αποδεικνύεται εύκολα, καθώς $\phi(gg'H) = (gg')p = g(g'p) = g\phi(g'H)$. Για να δείξουμε τώρα ότι $\phi$ λεία, αρκεί κατά τα γνωστά να δείξουμε ότι $\phi \circ \pi$ λεία. Από τη μεταθετικότητα του ακολούθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u_p"] \arrow[d, "\pi"'] & G \times M \arrow[d, "\kappa"] \\ G/H \arrow[r, "\phi"] & M \end{tikzcd}$$

ισχύει ότι $\phi \circ \pi = \kappa \circ u_p$, όπου $u_p$ η λεία απεικόνιση $G \to G \times M$ με $u_p(g) = (g, p)$. Καθώς και $\kappa$ λεία από ορισμό, έπεται ότι $\kappa \circ u_p$ λεία και άρα $\phi$ λεία. Επιπλέον, η $\phi$ είναι επί και

1-1, γιατί αν $\phi(gH) = \phi(g'H)$, τότε $gp = g'p$ και άρα, $p = g^{-1}g'p = hp$ με $h \in H$, δηλαδή $gH = g'H$, οπότε $\phi$ αμφιμονοσήμαντη, αφού ο επί χαρακτήρας της εξασφαλίζεται από τον μεταβατικό χαρακτήρα της δράσης $\kappa$, καθώς, δοθέντος $q \in M$, υπάρχει κάποιο $g \in G$, τέτοιο ώστε $\phi(gH) = gp = q$. Επομένως, αφού $\phi$ λεία και αμφιμονοσήμαντη, είναι αμφιδιαφόριση και εφόσον είναι και ισοαναλλοίωτη, η $\phi$ αποτελεί ισοαναλλοίωτη αμφιδιαφόριση. □

**Παρατήρηση 6.1.** *Το θεώρημα 6.2 δείχνει ότι αν η δράση της $G$ είναι μεταβατική, τότε η τροχιά $\mathcal{O}_p$ είναι αμφιδιαφορική με τον χώρο-πηλίκο $G/S_p$.*

**Ορισμός 6.1.** Καλούμε *ομογενή χώρο* μια λεία πολλαπλότητα $M$, στην οποία δρα λεία και μεταβατικά μια ομάδα Lie $G$. Ισοδύναμα, ένας ομογενής χώρος είναι μια λεία πολλαπλότητα της μορφής $G/H$, όπου $G$ ομάδα Lie και $H$ κλειστή υποομάδα αυτής.

**Παράδειγμα 6.1.** Έστω ο περιορισμός της φυσικής δράσης της $GL(n+1, \mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Από αυτόν μπορούμε να πάρουμε τη δράση της $O(n+1)$ στη μοναδιαία σφαίρα:

$$S^n = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (w, w) = 1\}$$

όπου $(\ ,\ )$ το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Αν $X$ πίνακας που ανήκει στην $GL(n+1, \mathbb{R})$, τότε αυτός ικανοποιεί τη σχέση $(Xu, v) = (u, X^\top v)$. Ας θεωρήσουμε τώρα έναν πίνακα $X \in O(n+1)$, δηλαδή ισχύει για αυτόν ότι $X^\top X = \mathbb{I}$. Επιπλέον, ισχύει ότι $(Xv, Xv) = (v, X^\top Xv) = (v, v)$, δηλαδή ο $X$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο και άρα αφήνει αναλλοίωτα τα μέτρα των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^{n+1}$. Επομένως, η φυσική δράση της $GL(n+1, \mathbb{R})$ μπορεί να περιοριστεί στη δράση της $O(n+1)$ επί της $S^n$, δηλαδή την απεικόνιση $O(n+1) \times S^n \to S^n$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αυτή η δράση είναι μεταβατική. Έστω $e_1 = (1\ 0\ \cdots\ 0)^\top \in S^n$ και $v \in S^n$ ένα άλλο μοναδιαίο διάνυσμα. Θέλουμε έναν πίνακα $X$ που να ικανοποιεί τη σχέση $Xe_1 = v$. Εύκολα διαλέγουμε τον $X = (v\ v_1\ \cdots\ v_n)$, όπου $\{v, v_1, \cdots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$, έτσι ώστε $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ με $i, j = 0, 1, \cdots, n$ και $v_0 = v$. Είναι προφανές ότι ο $X$ ανήκει στην $O(n+1)$, καθώς $X^\top X = \mathbb{I}$, λόγω της ορθοκανονικότητας των στοιχείων του. Επιπλέον, ο σταθεροποιητής του $e_1$ είναι όλοι οι πίνακες της μορφής $\operatorname{diag}(1, A)$, όπου $A \in O(n)$ με $O(n)$ να είναι κλειστή υποομάδα της $O(n+1)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 6.1, ο ομογενής χώρος $O(n+1)/O(n)$ είναι λεία πολλαπλότητα με διάσταση $\dim O(n+1)/O(n) = \dim O(n+1) - \dim O(n) = (1/2)(n+1)n - (1/2)n(n-1) = n$. Επίσης, από το θεώρημα 6.2 έχουμε ότι $\phi : O(n+1)/O(n) \to S^n$ με $\phi(XO(n)) = Xe_1$ είναι αμφιδιαφόριση, δηλαδή $O(n+1)/O(n) \cong S^n$. Τέλος, αν θεωρήσουμε ότι η ορθοκανονική βάση που επιλέξαμε, είναι προσανατολισμένη, δηλαδή ότι ο ορθογώνιος πίνακας $X$ ικανοποιεί τη σχέση $\det X = 1$, τότε ισχύει ότι $X \in SO(n)$ και άρα θεωρώντας τη δράση της $SO(n+1)$ στη μοναδιαία σφαίρα, παίρνουμε $SO(n+1)/SO(n) \cong S^n$.

**Παράδειγμα 6.2.** Έστω η Ευκλείδεια ομάδα $E(n)$, η οποία περιλαμβάνει όλες τις στερεές κινήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και τα στοιχεία της μπορούν να θεωρηθούν ως πίνακες της μορφής:

$$\begin{pmatrix} X & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $X \in O(n)$ και $a \in \mathbb{R}^n$. Πρόκειται για μια κλειστή υποομάδα της γενικής αφινικής ομάδας $Aff(n, \mathbb{R})$, η οποία με τη σειρά της είναι ομάδα Lie γιατί το αλγεβρικό πεδίο του αφινικού χώρου, έστω $A$, είναι ο $\mathbb{R}$. Δοθέντος ενός δχ $V$ με πραγματικό σώμα, αποκτούμε τον υποκείμενο αφινικό χώρο $A$, αν αμελήσουμε την αρχή των αξόνων. Σημειώνουμε ότι η $Aff(n, \mathbb{R})$ δρα με μεταβατικό τρόπο στα σημεία του $A$ και ότι μπορεί να γραφεί ως το ημιευθύ γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ με την $GL(n, \mathbb{R})$, δηλαδή $Aff(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes GL(n, \mathbb{R})$, όπου $GL(n, \mathbb{R})$ ισόμορφη με τον σταθεροποιητή ενός σημείου $p \in A$. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [7] για τον λεπτομερή ορισμό του ημιευθέους γινομένου. Καθότι στην περίπτωση της $E(n)$ είναι η $O(n)$ που διατηρεί την αρχή των αξόνων, έπεται ότι $E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$, όπου η φυσική δράση της $O(n)$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ο πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα. Επομένως, τα στοιχεία της $E(n)$ μπορούν να θεωρηθούν ως ζεύγη $(X, a)$ με $X \in O(n)$ και $a \in \mathbb{R}^n$, όπου η πράξη της ομάδας είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων $(X, a) \cdot (Y, b) = (XY, Xb + a)$ για $X, Y \in O(n)$ και $a, b \in \mathbb{R}^n$. Μπορούμε έτσι να αναπαραστήσουμε όλα τα στοιχεία της $E(n)$ ως $(n+1) \times (n+1)$ πίνακες, όπως αυτός που δώσαμε στην αρχή του παραδείγματος. Προκύπτει τελικά ότι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφορικός με τον ομογενή χώρο $E(n)/O(n)$. Ένα πολύ χρήσιμο παράδειγμα στη φυσική και συγκεκριμένα στη σχετικότητα, το οποίο σχετίζεται άμεσα με το παρόν παράδειγμα, είναι αυτό της ομάδας Poincare $Poinc(1, n)$, όπου κατά αντιστοιχία $Poinc(1, 3) = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes O(1, 3)$ με $\mathbb{R}^{1,3}$ να είναι ο χώρος Minkowski και $O(1, 3)$ η ομάδα Lorentz, η οποία αποτελεί σταθεροποιητή κάθε σημείου του αφινικού χώρου της $Poinc(1, 3)$. Έπεται ότι ο χώρος Minkowski είναι αμφιδιαφορικός με τον ομογενή χώρο $Poinc(1, 3)/O(1, 3)$.

Ας επιχειρήσουμε σε αυτό το σημείο μια σύνδεση των ομογενών χώρων με την έννοια της κύριας ινώδους δέσμης. Έστω $G$ ομάδα Lie και $H$ κλειστή υποομάδα αυτής. Θα δείξουμε ότι η $G$ είναι κύρια δέσμη με βάση τον ομογενή χώρο $G/H$ και ίνα την $H$. Ορίζουμε μια λεία δεξιά δράση της $H$ στην $G$, δηλαδή $G \times H \to G$ με $(g, h) \mapsto gh$. Είναι προφανές ότι η δράση είναι ελεύθερη, καθώς το μόνο στοιχείο της $H$ που διατηρεί τα στοιχεία της $G$ είναι το ταυτοτικό. Έπειτα, θεωρούμε την προβολή $\pi : G \to G/H$ με $\pi(g) = [g] = gH$ και την τοπική τμήση $\sigma : U_a \to G$, όπου $U_a \subseteq G/H$. Έστω επίσης $g \in \pi^{-1}(U_a) \subseteq G$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi_a : \pi^{-1}(U_a) \to H$ με $\phi_a(g) := \sigma([g])^{-1}g$. Αφού $\sigma([g])$ είναι η τιμή της τμήσης με όρισμα $[g]$, αυτή θα εκφράζεται ως $gh$ για κάποιο $h \in H$ και άρα, $s([g])^{-1}g = h^{-1}g^{-1}g = h \in H$, δηλαδή επιβεβαιώνεται ότι $\phi_a$ παίρνει τιμές στην $H$. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $\psi_a : \pi^{-1}(U_a) \to U_a \times H$ με $\psi_a(g) := ([g], \phi_a(g))$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(U_a, \psi_a)$ αποτελεί χάρτη κύριας δέσμης, δηλαδή ότι $\psi_a$ είναι αμφιδιαφόριση, έτσι ώστε η δέσμη $(G, \pi, G/H)$ να είναι τοπικά τετριμμένη, δηλαδή $\pi^{-1}(U_a)$ αμφιδιαφορικό με το καρτεσιανό γινόμενο $U_a \times G$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\phi_a(gh) = \phi_a(g)h$ για κάθε $g \in G$ και $h \in H$. Καθώς $g, gh \in G$, είναι προφανές ότι $\pi(g) = \pi(gh) = [g]$ και άρα, $\phi_a(gh) = \sigma([g])^{-1}gh = \phi_a(g)h$. Κατά τα γνωστά λοιπόν, η οικογένεια $\{U_a, \psi_a\}$ είναι άτλας κύριας δέσμης και η $(G, \pi, G/H)$ είναι μια κύρια $H$-δέσμη. Επομένως, οι ομογενείς χώροι των παραπάνω παραδειγμάτων μπορούν να περιγραφούν μέσω των κύριων δεσμών, δηλαδή για παράδειγμα, $(E(n), \pi, E(n)/O(n))$ είναι μια κύρια $O(n)$-δέσμη, ενώ $(Poinc(1, 3), \pi, Poinc(1, 3)/O(1, 3))$ είναι μια κύρια $O(1, 3)$-δέσμη.

## 6.2. Γεωμετρίες Klein

Σύμφωνα με τον Klein, μια γεωμετρία ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 6.2.** Μια γεωμετρία Klein είναι ένα ζεύγος $(G, H)$, όπου $G$ ομάδα Lie και $H$ κλειστή υποομάδα αυτής, έτσι ώστε ο χώρος $G/H$ να είναι συνεκτικός.

Η ομάδα Lie $G$ καλείται *κύρια ομάδα* της γεωμετρίας και όπως είπαμε και στην εισαγωγή της προηγούμενης ενότητας, αφήνει αναλλοίωτες τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων της συνεκτικής πολλαπλότητας $M$. Δοθείσας μιας τέτοιας $M$ και μιας μεταβατικής δράσης της $G$ στην $M$, κατασκευάζουμε μια γεωμετρία Klein, απλά επιλέγοντας ένα σημείο $p \in M$ και θέτοντας τον σταθεροποιητή $S_p$ ως την ομάδα $H$. Έτσι, γνωρίζουμε ότι $H$ κλειστή υποομάδα της $G$ και ότι η $M$ είναι αμφιδιαφορική με τον ομογενή χώρο $G/H$ από θεώρημα 6.2. Μας δίνεται δηλαδή η δυνατότητα, αντι να περιγράψουμε μια γεωμετρία με βάση ένα σημείο $p$ της $M$ ως το ζεύγος $(M, p)$, να την περιγράψουμε ως το ζεύγος $(G, H)$, όπου $H$ ο σταθεροποιητής του $p$. Με αυτόν τον τρόπο, προβλήματα που αφορούν στην $M$ ανάγονται σε όρους των $G$ και $H$ και κατά επέκταση, σε όρους των αλγεβρών τους, $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{h}$ αντίστοιχα, έτσι ώστε ακόμα και τα πιο δύσκολα μη γραμμικά προβλήματα να μπορούν να μελετηθούν με αλγεβρικό τρόπο. Επίσης, ένα βασικό πλεονέκτημα των γεωμετριών Klein βρίσκεται στην αδυναμία να ξεχωρίσουμε ένα σημείο από ένα άλλο ως προς τις γεωμετρικές τους ιδιότητες, αφού η μεταβατική δράση της $G$ τις διατηρεί αναλλοίωτες, δηλαδή αυτές οι γεωμετρίες χαρακτηρίζονται από πλήρη ομοιογένεια. Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, τα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας αποτελούν γεωμετρίες Klein.

**Ορισμός 6.3.** Καλούμε *πυρήνα* μιας γεωμετρίας Klein τη μεγαλύτερη κανονική (normal) υποομάδα της $H$ στην $G$ και τη συμβολίζουμε με $K$. Ο $K$ παράγεται από όλες τις κανονικές υποομάδες της $G$ που περιέχονται στην $H$. Ισοδύναμα, ο $K$ είναι ο πυρήνας της δράσης της $G$ στον $G/H$ και ορίζεται ως $K \coloneqq \{k \in G \mid g^{-1}kg \in H : \forall\, g \in G\}$. Θυμίζουμε ότι μια υποομάδα $H \subseteq G$ είναι κανονική στην $G$, αν-ν $gH = Hg$, δηλαδή τα σύνολα των αριστερών και δεξιών συμπλόκων ταυτίζονται. Μια γεωμετρία Klein καλείται *αποτελεσματική* (effective), αν $K = 1$, ενώ καλείται τοπικά αποτελεσματική, αν $K$ διακριτή υποομάδα, δηλαδή υπάρχει ανοικτό κάλυμα της $K$, στο οποίο κάθε ανοικτό υποσύνολο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο αυτής. Επιπλέον, μια γεωμετρία Klein θα καλείται *γεωμετρικά προσανατολισμένη* (geometrically oriented), αν η κύρια ομάδα είναι συνεκτική και θα καλούμε χώρο της γεωμετρίας τον συνεκτικό ομογενή χώρο $G/H$, ο οποίος καταχρηστικά μπορεί και να καλείται γεωμετρία Klein.

**Ορισμός 6.4.** Μια γεωμετρία Klein θα καλείται *πρωτογενής* (primitive), αν η ταυτοτική συνιστώσα $H_0 \subseteq H$ είναι μεγιστική (maximal) μεταξύ των γνήσιων, κλειστών και συνεκτικών υποομάδων της $G$, δηλαδή αν δεν υπάρχει υποομάδα με τέτοια χαρακτηριστικά που να περιέχει αυστηρά την $H_0$. Σημειώνουμε ότι τα μεγιστικά συνεκτικά υποσύνολα ενός μη κενού τοπολογικού χώρου, διατεταγμένα με σχέση εγκλίσεως, καλούνται συνεκτικές συνιστώσες (connected components) του χώρου. Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό υποσύνολο του αρχικού χώρου και κλειστή υποομάδα της αρχικής τοπολογικής ομάδας. Η ταυτοτική συνιστώσα της $H$ είναι η συνεκτική συνιστώσα $H_0$ που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο της $H$. Η $H_0$ είναι κλειστή ως συνεκτική συνιστώσα, αλλά είναι και ανοικτή, καθώς $H$ υποομάδα Lie (δηλαδή τοπικά δρομοσυνεκτικός χώρος) και άρα, η $H_0$ περιέχει μια δρομοσυνεκτική γειτονιά της ταυτότητας στην $H$.

**Ορισμός 6.5.** Δύο γεωμετρίες Klein, έστωσαν $(G, H)$ και $(G', H')$, καλούνται *γεωμετρικά ισόμορφες*, αν υπάρχει αμφιδιαφόριση ομάδων Lie $\phi : G \to G'$, τέτοια ώστε $\phi(H) = H'$.

Για παράδειγμα, οι γεωμετρίες $(G, H)$ και $(G, gHg^{-1})$ είναι γεωμετρικά ισόμορφές, γιατί υπάρχει πάντα η γνωστή αμφιδιαφόριση του εσωτερικού αυτομορφισμού $I_g : G \to G$ με $\mathrm{Ad}_g(H) \coloneqq gHg^{-1}$. Ο γεωμετρικός ισομορφισμός μπορεί να γενικευτεί στην έννοια της μεταλλαγής (mutation).

**Ορισμός 6.6.** Δύο γεωμετρίες Klein, έστωσαν $(G, H)$ και $(G', H')$, καλούνται *μεταλλάξιμες* (mutants), αν υπάρχει αμφιδιαφόριση ομάδων Lie $\phi : H \to H'$, τέτοια ώστε ο επαγόμενος ισομορφισμός αλγεβρών $\phi_{*e} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ να δύναται να επεκταθεί στον ισομορφισμό αλγεβρών $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, για τον οποίο ισχύει ότι $\lambda(\mathrm{Ad}(h)v) = \mathrm{Ad}(\phi(h))\lambda(v)$ με $v \in \mathfrak{g}$. Το ζεύγος $(\phi, \lambda)$ καλείται *μεταλλαγή* της $(G, H)$ στην $(G', H')$.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην περίπτωση των αναγωγικών γεωμετριών Klein. Γενικά, για έναν ομογενή χώρο $G/H$ υπάρχει στενή σχέση μεταξύ του εφαπτόμενου χώρου $T_H G/H$ και της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, όπως ακριβώς έχουμε και τον ισομορφισμό $T_e G \cong \mathfrak{g}$. Ισχύει δηλαδή ότι $T_H G/H \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, όπου $H = eH$ το ουδέτερο σύμπλοκο του $G/H$, καθώς $\pi : G \to G/H$ υπένθεση.

**Ορισμός 6.7.** Μια γεωμετρία Klein καλείται *αναγωγική* (reductive), αν ο ομογενής χώρος $G/H$ είναι αναγωγικός, δηλαδή υπάρχει $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτος υπόχωρος $\mathfrak{p}$ της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ που είναι συμπληρωματικός ως προς την άλγεβρα Lie $\mathfrak{h}$ στην $\mathfrak{g}$, δηλαδή $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$.

Αφού $\mathfrak{p}$ αναλλοίωτος υπό τη δράση της $\mathrm{Ad}(H) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, θα ισχύει ότι $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ για κάθε $h \in H$. Καθώς $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$, έπεται ότι η push-forward της στο ταυτοτικό στοιχείο της $G$ θα είναι η απεικόνιση $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, δηλαδή η συζυγής αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ με τιμή $\mathrm{ad}(v) := [v, \ ]$, όπου $v \in \mathfrak{g}$. Επομένως, $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})\mathfrak{p} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή ισχύει μόνο όταν $H$ συνεκτική. Σημειώνουμε ότι, αφού $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$, η $\mathfrak{p}$ είναι ιδεώδες στην $\mathfrak{h}$, αλλά δεν χρειάζεται να είναι υποάλγεβρα Lie αυτής, δηλαδή να είναι κλειστή ως προς την αγκύλη Lie. Επιπλέον, θα καλούμε έναν αναγωγικό ομογενή χώρο $G/H$ *συμμετρικό*, αν ισχύει $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h}$. Συνοψίζοντας, σύμφωνα με **[17]**, ο ομογενής χώρος $G/H$ είναι αναγωγικός, αν ικανοποιείται οποιαδήποτε από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Η $H$ είναι συμπαγής.
- Η $H$ είναι συνεκτική και ημιαπλή (έτσι ώστε η Killing μορφή να είναι μη εκφυλισμένη).
- Η $H$ είναι διακριτή υποομάδα της $G$ και άρα $\mathfrak{h} = 0$ και $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$.

Έστω τώρα η κανονική προβολή $\pi : G \to G/H$ με $\pi(g) = gH$, στην οποία αναφερθήκαμε στην ενότητα των ομογενών χώρων. Η push-forward της στο $e$, $\pi_{*e} : \mathfrak{g} \to T_H G/H$, επάγει έναν γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ του $\mathfrak{p}$ και του εφαπτόμενου χώρου $T_H G/H$. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι $\pi$ υπένθεση και άρα, η push-forward της σε κάθε σημείο της $G$ είναι επί. Επιπλέον, το ταυτοτικό σύμπλοκο $eH = H \in G/H$ θα είναι κανονική τιμή της $\pi$ με $\pi^{-1}(eH) = H$ να είναι η προεικόνα αυτής. Αφού λοιπόν $\pi$ σταθερή στην $H$, έπεται ότι η push-forward αυτής $\pi_{*e}$, ως το διαφορικό της, θα είναι 0 στον $T_e(H) = \mathfrak{h}$. Επιπλέον, αφού $\pi_{*e}$ επί, η διάσταση του πυρήνα της θα δίνεται από:

$$\dim \ker(\pi_{*e}) = \dim \mathfrak{g} - \dim T_H G/H = \dim G - \dim G/H = \dim H$$

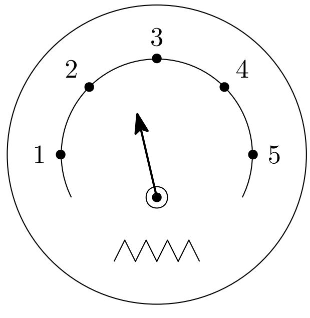
όπου χρησιμοποιήσαμε την αποδεδειγμένη ισότητα $\dim M = \dim T_p M$ για $p \in M$ με $M$ την αντίστοιχη ομάδα Lie και $T_p M$ τον εφαπτόμενο χώρο στο ταυτοτικό της στοιχείο, ο οποίος είναι κατά τα γνωστά ισόμορφος με την άλγεβρα Lie αυτής. Επομένως, $T_e H$ είναι υπόχωρος του πυρήνα και έχει την ίδια διάσταση με αυτόν, άρα $T_e H$ πρέπει να είναι ο πυρήνας, δηλαδή $\ker(\pi_{*e}) = T_e H = \mathfrak{h}$. Καθώς όμως ο ομογενής χώρος $G/H$ είναι αναγωγικός, θα ισχύει ότι $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{p}$. Συνεπώς:

$$\dim \ker(\pi_{*e}) = \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{p} - \dim T_H G/H$$

και άρα $\dim \mathfrak{p} = \dim T_H G/H$, δηλαδή $\mathfrak{p} \cong T_H G/H$, αφού $\pi_{*e}$ γραμμική και επί.

## 6.3. Γεωμετρίες Klein υπό τη σκοπιά των θεωριών βαθμίδας

Έστω ομογενής χώρος $G/H$ και έστω ότι κατοικούμε σε ένα μικρό ανοικτό υποσύνολο $U$ του $G/H$. Στον χώρο μας εισέρχεται ξαφνικά ένας μετεωρίτης, του οποίου την κίνηση θέλουμε να περιγράψουμε. Υποθέτουμε ότι ο μετεωρίτης είναι ένα σύνολο σημείων με τον θεσεογραφικό του χώρο τη χρονική στιγμή $t$ να συμβολίζεται με $X(t)$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει πάντα κάποιο $g \in G$, τέτοιο ώστε $X(t') = gX(t)$ και ότι ο σταθεροποιητής κάθε σημείου του μετεωρίτη είναι η ταυτότητα στην $G$, την οποία θεωρούμε ως την ομάδα των στερεών κινήσεων. Έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $g(t)$, τέτοιο ώστε $X(t) = g(t)X_0$ και άρα, ένας τρόπος να περιγράψουμε την κίνηση του μετεωρίτη, είναι να προσδιορίσουμε το $g(t)$. Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Αν $q \in X_0$, μπορούμε να θεωρήσουμε χβτγ αυτό το σημείο ως το ταυτοτικό σύμπλοκο $eH \in G/H$ και να περιγράψουμε την κίνηση του στο $U$ ως $q(t) = g(t)H$. Έπειτα, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση του υπολοίπου μέρους του μετεωρίτη ως στροφές γύρω από το $q(t)$, αλλά για να το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια της βαθμίδας. Έστω λοιπόν η μετρητική διάταξη της επόμενης σελίδας, όπου η βελόνα είναι το κινούμενο σώμα, την κίνηση του οποίου θέλουμε να περιγράψουμε




και οι αριθμημένες θέσεις κάτι σταθερό, αλλά αυθαίρετο, το οποίο αντιστοιχεί στην επιλογή βαθμίδας. Είναι προφανές ότι η περιγραφή της κίνησης της βελόνας θα γίνει σε σχέση με τις σταθερές θέσεις. Στο αρχικό μας παράδειγμα, ο μετεωρίτης είναι το κινούμενο σώμα και πρέπει να εντοπίσουμε τώρα, ποιο γεωμετρικό αντικείμενο αντιστοιχεί στις σταθερές θέσεις.

Ας υποθέσουμε ότι $U$ αρκετά μικρό, ώστε να υπάρχει λεία τμήση $\sigma : U \to G$. Αν υπάρχει $\sigma$, τότε υπάρχουν και άλλες τμήσεις, ώστε αν $\sigma$ και $\sigma'$ δύο τέτοιες τμήσεις, τότε $\sigma'(u) = \sigma(u)h(u)$ για $u \in U$ και $h : U \to H$. Έτσι, η επιλογή βαθμίδας είναι απλά μια επιλογή τέτοιων τμήσεων και η ως άνω σχέση των $\sigma, \sigma'$ καλείται *μετασχηματισμός βαθμίδας*. Η τιμή της βαθμίδας σε ένα σημείο της $U$ καλείται *πλαίσιο* σε αυτό το σημείο και η ίδια η βαθμίδα καλείται *κινούμενο πλαίσιο*. Υπό αυτήν τη σκοπιά, η κύρια δέσμη $(G, \pi, G/H)$ είναι μια δέσμη πλαισίων. Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη βαθμίδα $\sigma$ για να περιγράψουμε την κίνηση του μετεωρίτη. Ισχύει ότι $\sigma(q(t)), g(t) \in G$ και άρα θα πρέπει να σχετίζονται μέσω ενός στοιχείου $k(t) \in H$, έτσι ώστε η κίνηση του μετεωρίτη να μπορεί να περιγραφεί δοθέντος του $q(t)$ και του $k(t)$. Το $k(t)$ περιγράφει τις στροφές του μετεωρίτη γύρω από το $q(t)$, αλλά δεν έχει κάποια εγγενή γεωμετρική σημασία από μόνο του, όπως το ίδιο ισχύει και για την επιλογή βαθμίδας. Βλέπουμε όμως ότι ο συνδυασμός τους παρέχει μια ολοκληρωμένη εικόνα για την κίνηση του υπό μελέτη σώματος. Σημειώνουμε ότι η ενότητα αυτή είναι πολύ σημαντική, καθώς αποτελεί μια βάση για τη γενίκευση των γεωμετριών Klein κατά Cartan που θα δούμε σε επόμενη ενότητα.

Ας δούμε σε αυτό το σημείο έναν χάρτη δέσμης υπό τη σκοπιά των θεωριών βαθμίδας. Έστω χάρτης δέσμης $(U, \psi)$ για την κύρια $H$-δέσμη $(G, \pi, G/H)$, δηλαδή υπάρχει αμφιδιαφόριση $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times H$. Καθώς $\psi$ είναι $H$-ισοαναλλοίωτη από ορισμό, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ αυτής και μιας τμήσης $\sigma : U \to G$, έτσι ώστε αν θέσουμε $\sigma(u) = \psi^{-1}(u, e)$, να έχουμε $\psi^{-1}(u, h) = \sigma(u)h$. Έστωσαν τώρα δύο τμήσεις της ως άνω δέσμης, $\sigma$ και $\sigma'$, με πεδίο ορισμού το $U$. Θα υπάρχει μοναδική λεία απεικόνιση $k : U \to H$, τέτοια ώστε $\sigma'(u) = \sigma(u)k(u)$ για $u \in U$. Αν $\psi, \psi'$ είναι οι αντίστοιχες αμφιδιαφορίσεις που τετριμμενοποιούν το $\pi^{-1}(U)$, τότε, καθώς $\psi^{-1}(u, h) = \sigma(u)h$ και $\psi'^{-1}(u, h) = \sigma'(u)h$, έπεται ότι $\psi' \circ \psi^{-1}(u, h) = (u, \sigma'(u)^{-1}\sigma(u)h) = (u, k(u)^{-1}h)$, αφού $\sigma(u) = \sigma'(u)k(u)^{-1}$. Επομένως, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε τη δέσμη $(G, \pi, G/H)$, αν γνωρίζουμε μόνο τους μετασχηματισμούς βαθμίδας $k$.

Έστωσαν τώρα οι προβολικές απεικονίσεις $\pi_1, \pi_2 : G \times G \to G$ με $\pi_1(g, h) = g$ και $\pi_2(g, h) = h$. Έστωσαν επίσης $i_1, i_2 : G \to G \times G$ με $i_1(g) = (g, a)$ και $i_2(h) = (k, h)$ για $g, a, k, h \in G$. Τότε, τα διαφορικά των $\pi$ θα είναι οι απεικονίσεις $\pi_{1*}, \pi_{2*} : T(G \times G) \to TG$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $\Phi \equiv \pi_{1*} \times \pi_{2*} : T_{(p,q)}(G \times G) \to T_pG \times T_qG$, για τον οποίο ισχύει $\Phi(v) := (\pi_{1*(p,q)}(v), \pi_{2*(p,q)}(v))$. Πρόκειται για ομομορφισμό, καθώς τα διαφορικά είναι ομομορφισμοί και άρα οι πράξεις του χώρου διατηρούνται. Θέλουμε να δείξουμε ότι πρόκειται για ισομορφισμό. Η $\Phi$ είναι σίγουρα επί, γιατί οι $\pi_{1*}, \pi_{2*}$ είναι επί κατά τα γνωστά. Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι $\Phi$ είναι 1-1. Ορίζουμε έναν νέο ομομορφισμό $\Psi : T_pG \times T_qG \to T_{(p,q)}G$ με $\Psi(v, w) := i_{1q*p}(v) + i_{2p*q}(w)$, όπου ισχύει ότι $i_{1q*p} : T_pG \to T_{(p,q)}G$ και $i_{2p*q}$ αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$. Θα δράσουμε με τη σύνθεση σε μια $f \in C^\infty(G \times G)$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \Phi)(v)f &= \Psi(\pi_{1*(p,q)}(v), \pi_{2*(p,q)}(v))f = (i_{1q*p}(\pi_{1*(p,q)}(v)) + i_{2p*q}(\pi_{2*(p,q)}(v)))f \\ &= (i_1 \circ \pi_1)_*(v)f + (i_2 \circ \pi_2)_*(v)f = v(f)\end{aligned}$$

καθώς $i_j \circ \pi_j$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στην $G$ και άρα και το διαφορικό της θα είναι id. Επομένως, $\Psi \circ \Phi = e$, δηλαδή $\Psi = \Phi^{-1}$ και άρα $\Phi$ αμφιμονοσήμαντη, δηλαδή $T_{(p,q)}(G \times G)$ είναι ισόμορφος με τον $T_pG \times T_qG$, ο οποίος με τη σειρά του είναι φυσικά ισόμορφος με τον $T_pG \oplus T_qG$.

Κρίνεται δόκιμο για τη συνέχεια να επιστρέψουμε ελάχιστα στη μορφή Maurer-Cartan.

**Πρόταση 6.1.** *Έστω $\phi : G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων Lie, δηλαδή ισχύει η σχέση $\phi(g *_G h) = \phi(g) *_{G'} \phi(h)$ για κάθε $g, h \in G$ με $*$ τις αντίστοιχες πράξεις κάθε ομάδας και $\phi(e_G) = e_{G'} \equiv e'$. Τότε, ισχύει ότι $\phi^*\omega_{G'} = \phi_{*e}\omega_G$.*

*Απόδειξη.* Έστω $v \in T_gG$. Τότε:

$$(\phi^*\omega_{G'})v = \omega_{G'}(\phi_{*g}(v)) = \mathcal{L}_{\phi(g)^{-1}*}(\phi_{*g}(v)) = \phi_{*e}(\mathcal{L}_{g^{-1}*}(v)) = \phi_{*e}(\omega_G(v))$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από τη μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} T_gG \arrow[r, "\phi_{*g}"] \arrow[d, "\mathcal{L}_{g^{-1}*}"'] & T_{\phi(g)}G' \arrow[d, "\mathcal{L}_{\phi(g)^{-1}{}_*}"] \\ T_eG \arrow[r, "\phi_{*e}"] & T_{e'}G' \end{tikzcd}$$

καθώς $\mathcal{L}_{\phi(g)^{-1}{}_*} \circ \phi_{*g} = \phi_{*e}\mathcal{L}_{g^{-1}*}$. □

**Πόρισμα 6.1.** *Έστω $H$ υποομάδα Lie της $G$. Τότε, $\omega_H = \omega_G|H$. Επίσης, είναι προφανές ότι αν $X$ αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην $G$, τότε $\omega_G(X)$ είναι σταθερά (συνάρτηση στην $G$ με τιμές στην $\mathfrak{g}$).*

**Πρόταση 6.2** (Εναλλακτική απόδειξη της πρότασης 4.2)**.** *Η δομική εξίσωση $\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + [\![\omega_G(X), \omega_G(Y)]\!] = 0$ για τη μορφή Maurer-Cartan ισχύει πάντα για αυθαίρετα διανυσματικά πεδία $X, Y$.*

*Απόδειξη.* Έστω $X, Y$ αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία. Παίρνοντας την εξωτερική παράγωγο της $\omega_G$, θα έχουμε ότι:

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) = X(\omega_G(Y)) + Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X,Y]) = -\omega_G([X,Y])$$

καθώς $\omega_G(X), \omega_G(Y)$ σταθερές και άρα η παράγωγος τους θα μηδενίζεται. Έπειτα, $X$ και $Y$ είναι αριστερά αναλλοίωτα και άρα το ίδιο θα ισχύει και για τον μεταθέτη τους. Όμως, $\omega_G([X,Y]_) = \mathcal{L}_{g^{-1}*}([X,Y]_g) = [X,Y]_e = [X_e, Y_e]$ από ορισμό της $\omega_G$ και $[X_e, Y_e]$ δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από την αγκύλη Lie των $X, Y$, έτσι ώστε:

$$\mathrm{d}\omega_G(X,Y) + [\![\omega_G(X), \omega_G(Y)]\!] = 0$$

Θέλουμε όμως η παραπάνω σχέση να ισχύει για αυθαίρετα $X, Y \in T_gG$. Έστω ότι επιλέγουμε αυθαίρετα $X_g, Y_g \in T_gG$. Αυτά μπορούν πάντα να γραφούν ως $\mathcal{L}_{g*}(X_e), \mathcal{L}_{g*}(Y_e)$, όπου $X_e, Y_e \in \mathfrak{g}$ και άρα είναι αριστερά αναλλοίωτα. Επομένως, $\mathcal{L}_{a*}X_g = \mathcal{L}_{a*}\mathcal{L}_{g*}X_e = \mathcal{L}_{ag*}X_e = X_{ag}$, δηλαδή $X_g$ αριστερά αναλλοίωτο. Το ίδιο ισχύει αντίστοιχα και για τον άλλον όρο. Συνεπώς, η δομική εξίσωση ισχύει για αυθαίρετα διανυσματικά πεδία $X, Y$. □

$$
\begin{tikzcd}
T_hH \arrow[dr, bend left, "\phi|_{T_hH}"] & \\
T_{(u,h)}(U\times H) \arrow[u, "j_{u*}"] \arrow[r, "\psi^{-1*}\omega_G"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dd, bend right=60, "i_{h*}"'] & \mathfrak{g} \\
T_uU\times T_hH \arrow[ur, "\phi"] & \\
T_uU \arrow[uur, bend right, "\phi|_{T_uU}"'] &
\end{tikzcd}
$$

**Πρόταση 6.3.** *Το εσωτερικό διάγραμμα στο διάγραμμα της επόμενης σελίδας μετατίθεται και ισχύει ότι* $\phi(v,y) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\sigma^*\omega_G)(v) + \omega_H(y)$ *για* $v \in T_uU$ *και* $y \in T_hH$ *με* $\omega_G : T_gG \to \mathfrak{g}$ *και* $\omega_H : T_hH \to \mathfrak{h}$ *τις 1-μορφές Maurer-Cartan. Σε αυτήν την περίπτωση,* $\Phi \equiv \pi_{U*} \times \pi_{H*}$.

*Απόδειξη.* Αποδεικνύεται, ακριβώς με την ίδια μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι $T_{(p,q)(G\times G)} \cong T_pG \times T_qG$, ότι $T_{(u,h)}(U\times H) \cong T_uU \times T_hH$. Στην απόδειξη έχουμε ορίσει τις $i, j$ με $i_h : U \to U \times H$, $i_h(x) \coloneqq (x,h)$ και $j_u : H \to U\times H$, $j_u(k) \coloneqq (u,k)$. Επομένως, το διάγραμμα της πρότασης 6.3 σπάει σε δύο μέρη, τα οποία είναι τα ως άνω εξωτερικά διαγράμματα. Ο περιορισμός της $\phi$ στον $T_uU$ θα δίνεται από:

$$
\begin{aligned}
(\phi|_{T_uU})(v) &= (\psi^{-1*}\omega_G)(i_{h*}(v)) = ((\psi^{-1}i_h)^*\omega_G)(v) = ((\mathcal{R}_h\sigma)^*\omega_G)(v) \\
&= (\sigma^*\mathcal{R}_h{}^*\omega_G)(v) = (\mathcal{R}_h{}^*\omega_G)(\sigma_*(v)) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\omega_G(\sigma_*(v))) \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1})(\sigma^*\omega_G)(v)
\end{aligned}
$$

όπου $v \in T_uU$. Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε μεταξύ άλλων το γεγονός ότι:

$$\psi^{-1}i_h(x) = \psi^{-1}(x,h) = \sigma(u)h = ((\triangleleft h)\sigma)(u)$$

για $x \in U$. Θυμίζουμε ότι $I_g : G \to G$ με ${}_g(h) \coloneqq ghg^{-1} = (\mathcal{L}_g \circ \mathcal{R}_{g^{-1}})(h)$ και επιπλέον, ότι $\mathrm{Ad}(g) = (I_{g*})_e \in GL(\mathfrak{g})$, όπου $\mathrm{Ad}(g)v = (\mathcal{L}_{g*} \circ \mathcal{R}_{g^{-1}*})(v)$ για $v \in \mathfrak{g}$. Επομένως, για κάποιο $w \in T_{\sigma(u)}G$ θα ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{R}_h{}^*\omega_G)(w) &= \omega_G(\mathcal{R}_{h*}w) = (\mathcal{L}_{(\sigma(u)h)^{-1}*} \circ \mathcal{R}_{h*})(w) = (\mathcal{L}_{h^{-1}*} \circ \mathcal{L}_{\sigma(u)^{-1}*} \circ \mathcal{R}_{h*})(w) \\
&= (\mathcal{L}_{h^{-1}*} \circ \mathcal{R}_{h*} \circ \mathcal{L}_{\sigma(u)^{-1}*})(w) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\mathcal{L}_{\sigma(u)^{-1}}(w)) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\omega_G(w))
\end{aligned}
$$

δηλαδή $\mathcal{R}_h{}^*\omega_G = \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_G$, η οποία είναι μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα. Είναι προφανές ότι θέτοντας $w = \sigma_* v$ παίρνουμε το αποτέλεσμα του περιορισμού της $\phi$ στον $T_uU$. Έπειτα, ο περιορισμός της $\phi$ στον $T_hH$ θα δίνεται από:

$$(\phi|_{T_hH})(y) = (\psi^{-1*}\omega_G)(j_{u*}(y)) = ((\psi^{-1}j_u)^*\omega_G)(y) = (\mathcal{L}_{\sigma(u)}{}^*\omega_G)(y) = \omega_G(y)$$

καθώς $\psi^{-1}j_u(k) = \psi^{-1}(u,k) = \sigma(u)k = \mathcal{L}_{\sigma(u)}k$ για $k \in H$ και $\omega_G$ αριστερά αναλλοίωτη. Εφόσον το πεδίο ορισμού της $\omega_G$ περιορίζεται στον $T_hH$, ισχύει $\omega_G|_{T_hH} = \omega_H$ και άρα ο περιορισμός της $\phi$ στον $T_hH$ δίνει $\omega_H(y)$ για $y \in T_hH$. Πράγματι, το ζητούμενο αποδείχτηκε. $\square$

**Πρόταση 6.4.** *Έστω* $\mu : G \times G \to G$ *ο πολλαπλασιασμός στην* $G$. *Η απεικόνιση* $\theta$ *ορίζεται από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος της επόμενης σελίδας ως* $\theta(u,v) = \mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{g*}v$.

$$\begin{tikzcd}
T_{(g,h)}(G \times G) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mu_*"'] & T_g G \times T_h G \arrow[dl, "\theta"] \\
T_{gh}G &
\end{tikzcd}$$

*Απόδειξη.* Έχουμε δείξει ότι $\Phi$ ισομορφισμός με αντίστροφο $\Psi$, όπου $\Psi(u,v) = i_{h*}u + j_{g*}v$ με $i, j$ τις αντίστοιχες $i_1, i_2$ της σχετικής απόδειξης. Η μεταθετικότητα του διαγράμματος σημαίνει ότι $\theta = \mu_* \circ \Psi$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $(\mu \circ i_h)(g) = \mu(g,h) = gh = \mathcal{R}_h(g)$ και $(\mu \circ j_g)(h) = \mu(g,h) = gh = \mathcal{L}_g(h)$. Έτσι έχουμε:

$$(\mu_* \circ \Psi)(u,v) = \mu_*(i_{h*}u + j_{g*}v) = (\mu \circ i_h)_*(u) + (\mu \circ j_g)_*(v) = \mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{g*}v$$

δηλαδή $\theta(u,v) = \mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{g*}v \in T_{gh}G$. □

**Πρόταση 6.5.** *Έστωσαν $\mu : G \times G \to G$ και $i : G \to G$ με $i(g) = g^{-1}$. Τότε:*

*i)* $\mu^*\omega_G(w) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\omega_G(\pi_{1*}w)) + \omega_G(\pi_{2*}w)$ *για* $w \in T_{(g,h)}(G \times G)$.

*ii)* $i^*\omega_G(v) = -\mathrm{Ad}(g)\omega_G(v)$ *για* $v \in T_gG$.

*Απόδειξη.* Ας θεωρήσουμε το προηγούμενο διάγραμμα. Έχουμε ότι $\Phi = \pi_{1*} \times \pi_{2*}$, όπου κατά τα γνωστά $\pi_i$ η προβολή στον $i$-οστό παράγοντα. Αν $w \in T_{(g,h)}(G \times G)$, θεωρούμε ότι $\Phi(w) = (u,v)$. Επομένως, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
(\mu^*\omega_G)(w) &= \omega_G(\mu_* w) = \omega_G((\theta \circ \Phi)(w)) = \omega_G(\mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{g*}v) \\
&= \mathcal{L}_{(gh)^{-1}*}(\mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{g*}v) = \mathcal{L}_{h^{-1}*}\mathcal{L}_{g^{-1}*}\mathcal{R}_{h*}u + \mathcal{L}_{h^{-1}*}\mathcal{L}_{g^{-1}*}\mathcal{L}_{g*}v \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1})\mathcal{L}_{g^{-1}*}u + \mathcal{L}_{h^{-1}*}v = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\omega_G(u)) + \omega_G(v) \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1})(\omega_G(\pi_{1*}w)) + \omega_G(\pi_{2*}w) = ({\pi_1}^*(\mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_G) + {\pi_2}^*\omega_G)(w)
\end{aligned}$$

Έπειτα, η σύνθεση:

$$g \overset{\Delta}{\mapsto} (g,g) \overset{\mathrm{id} \times i}{\mapsto} (g, g^{-1}) \overset{\mu}{\mapsto} e$$

είναι σταθερή απεικόνιση και άρα η pull-back της μορφής Maurer-Cartan μηδενίζεται, δηλαδή $(\mu \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)^*\omega_G = 0$. Επομένως, καθώς το προηγούμενο $h$ είναι τώρα το $g^{-1}$ και από προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
0 &= ((\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)^*\mu^*\omega_G = ((\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)^*({\pi_1}^*(\mathrm{Ad}(g)\omega_G) + {\pi_2}^*\omega_G) \\
&= (\pi_1 \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)^* \mathrm{Ad}(g)\omega_G + (\pi_2 \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)^*\omega_G = \mathrm{Ad}(g)\omega_G + i^*\omega_G
\end{aligned}$$

καθώς $(\pi_1 \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)(g) = \pi(1)(g, g^{-1}) = g = \mathrm{id}(g)$ και $(\pi_2 \circ (\mathrm{id} \times i) \circ \Delta)(g) = g^{-1} = i(g)$. Αφού $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, ισχύει το ως άνω αποτέλεσμα και τελικά, τα 2 μέρη της πρότασης αποδεικνύονται. □

**Πόρισμα 6.2.** *Έστω $f, f' : M \to G$ και $h(x) = f(x)f'(x)^{-1}$. Τότε, ισχύει η σχέση $h^*\omega_G = \mathrm{Ad}(f'(x))(f^*\omega_G - f'^*\omega_G)$.*

*Απόδειξη.* Η $h$ μπορεί να δοθεί από την ακόλουθη σύνθεση για $x \in M$:

$$x \overset{\Delta}{\mapsto} (x,x) \overset{f \times f'}{\mapsto} (f(x), f'(x)) \overset{\mathrm{id} \times i}{\mapsto} (f(x), f'(x)^{-1}) \overset{\mu}{\mapsto} f(x)f'(x)^{-1}$$

Τότε, θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
h^*\omega_G &= ((\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta)^*\mu^*\omega_G = ((\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta)^*({\pi_1}^*(\mathrm{Ad}(f')\omega_G) + {\pi_2}^*\omega_G)\\
&= (\pi_1(\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta)^*\,\mathrm{Ad}(f')\omega_G + (\pi_2(\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta)^*\omega_G\\
&= f^*\,\mathrm{Ad}(f')\omega_G + f'^*i^*\omega_G = f^*\,\mathrm{Ad}(f')\omega_G - f'^*\,\mathrm{Ad}(f')\omega_G\\
&= \mathrm{Ad}(f')(f^*\omega_G - f'^*\omega_G)
\end{aligned}$$

καθώς $(\pi_1(\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta)(x) = \pi_1(f(x), f'(x)^{-1}) = f(x)$ και $(\pi_2(\mathrm{id}\times i)(f\times f')\Delta) = \pi_2(f(x), i(f'(x))) = (if')(x)$, δηλαδή $(if')^* = f'^*i^*$, όπου η σύνθεση αποσιωπείται για λόγους συντομίας. Χρησιμοποιήθηκε επιπλέον το δεύτερο αποτέλεσμα της τελευταίας πρότασης. □

Είδαμε στην αρχή της ενότητας ότι $\sigma'(u) = \sigma(u)h(u)$ για $u \in U$ με $\sigma : U \to G$ και $h : U \to H$. Ας εφαρμόσουμε το τελευταίο πόρισμα. Η $\sigma'$ μπορεί να δοθεί από τη σύνθεση:

$$u \overset{\Delta}{\mapsto} (u,u) \overset{\sigma\times h}{\mapsto} (\sigma(u), h(u)) \overset{\mu}{\mapsto} \sigma(u)h(u)$$

Κατά τα γνωστά θα έχουμε για $v \in T_uU$ ότι:

$$\begin{aligned}
(\sigma'^*\omega_G)(v) &= (((\sigma\times h)\circ\Delta)\mu^*\omega_G)(v)\\
&= ((\pi_1\circ(\sigma\times h)\circ\Delta)\,\mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_G)(v) + ((\pi_2\circ(\sigma\times h)\circ\Delta)\omega_G)(v)\\
&= (\sigma^*\,\mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_G)(v) + (h^*\omega_G)(v) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_G(\sigma_*v) + \omega_G(h_*v)\\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1})(\sigma^*\omega_G)(v) + (h^*\omega_H)(v) = (\mathrm{Ad}(h^{-1})\sigma^*\omega_G + h^*\omega_H)(v)
\end{aligned}$$

αφού είναι προφανές ότι το πεδίο ορισμού του δεύτερου όρου θα περιορίζεται σε στοιχεία του $T_{h(u)}H$ και άρα $\omega_G|_{T_{h(u)}H} = \omega_H$. Συμβολίζοντας την απειροστή βαθμίδα $\sigma^*\omega_G \equiv w$, καταλήξαμε τελικά στη σχέση:

$$w' = \mathrm{Ad}(h^{-1})w + h^*\omega_H$$

την οποία καλούμε *αλλαγή βαθμίδας* και λέμε ότι $w, w'$ είναι ισοδύναμες βαθμίδες, το οποίο συμβολίζουμε με $w \Rightarrow_h w'$. Πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ βαθμιδών με κοινό πεδίο ορισμού.

**Ορισμός 6.8.** Μια *συμμετρία βαθμίδας* μιας γεωμετρίας Klein $(G,H)$ είναι μια λεία απεικόνιση $b : G \to G$, τέτοια ώστε:

i) $b(gh) = b(g)h$ για κάθε $h \in H$.

ii) $b(g) \in gHg^{-1}$ για κάθε $g \in G$.

## 6.4. Βασικός ορισμός και ορισμός κύριας δέσμης γεωμετριών Cartan

Ας περάσουμε τώρα στη γεωμετρία Cartan. Αν οι γεωμετρίες Klein αντιπροσωπεύουν την τέλεια ομοιογένεια, τότε οι γεωμετρίες Cartan αντιπροσωπεύουν το τέλειο μίγμα ομοιογένειας και ανομοιογένειας. Οι γεωμετρίες Cartan προτυποποιούνται με βάση γεωμετρίες Klein και συχνά παίρνουν το ονομά τους από αυτές. Η γενίκευση των γεωμετριών Klein από τον Cartan είναι κατά μια έννοια ανάλογη της γενίκευσης του Ευκλείδειου χώρου από τον Riemann. Μπορεί να ιδωθεί ως η προσθήκη ατελειών σε έναν κατα τ' άλλα τέλειο ομογενή χώρο, όπως είναι ο χώρος μιας γεωμετρίας Klein. Υπάρχουν δύο μορφές γεωμετριών Cartan, η τοπική και η ολική μορφή, οι οποίες είναι ισοδύναμες, μόνο όταν η πρότυπη (model) γεωμετρία Klein είναι αποτελεσματική. Ο πρώτος ορισμός που θα δώσουμε έχει τοπικό χαρακτήρα και καλείται βασικός ορισμός. Προτιμάται από τους φυσικούς, λόγω του τοπικού και αναλυτικού χαρακτήρα του μέτρου, αλλά υστερεί σε γεωμετρικό πλούτο. Ο δεύτερος ορισμός είναι ολικός και καλείται ορισμός κύριας δέσμης. Σε αυτόν, η γεωμετρία Cartan αντιμετωπίζεται χονδρικά ως παραμόρφωση (deformation) μιας ομάδας Lie με επιλογή (fixing) των συμπλόκων μιας κλειστής υποομάδας.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως από μια γεωμετρία Klein προκύπτει μια κλάση ισοδυναμίας βαθμίδων σε κάθε μικρό και ανοικτό υποσύνολο του ομογενή της χώρου. Τώρα, θα γενικεύσουμε αυτήν την έννοια για μια γεωμετρία που προτυποποιείται βάσει μιας γεωμετρίας Klein. Έχουμε αρχικά τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 6.9.** Μια απειροστή γεωμετρία Klein ή για συντομία ένα *ζεύγος Klein*, είναι ένα ζεύγος αλγεβρών Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, όπου $\mathfrak{h}$ είναι υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$. Ο πυρήνας $\mathfrak{k}$ του ζεύγους είναι το μεγαλύτερο ιδεώδες της $\mathfrak{g}$ που περιέχεται στην $\mathfrak{h}$. Έτσι, αν $\mathfrak{k} = 0$, λέμε ότι το ζεύγος $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ είναι αποτελεσματικό.

**Ορισμός 6.10.** Μια πρότυπη γεωμετρία για μια γεωμετρία Cartan αποτελείται από:

i) ένα αποτελεσματικό ζεύγος Klein $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

ii) μια ομάδα Lie $H$ που πραγματώνει την $\mathfrak{h}$.

iii) μια αναπαράσταση $\mathrm{Ad} : H \to GL(\mathfrak{g})$ που επεκτείνει την $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}} : H \to GL(\mathfrak{h})$.

Για την πρότυπη γεωμετρία ισχύουν κανονικά οι ορισμοί της γεωμετρίας Klein (αποτελεσματική, πρωτογενής, αναγωγική κλπ.). Σημειώνουμε ότι πυρήνας της πρότυπης γεωμετρίας καλείται ο πυρήνας $K$ της $\mathrm{Ad} : H \to GL(\mathfrak{g})$.

**Ορισμός 6.11.** Έστω πρότυπη γεωμετρία $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ με ομάδα $H$. Ένα ζεύγος $(U, w)$ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ καλείται *βαθμίδα Cartan*, όπου $U$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της $M$ και $w \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$. Για την $w$ ισχύει ότι η σύνθεση της με την κανονική προβολή $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\rho \circ w : T_u U \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός για κάθε $u \in U$ **[31]**.

**Ορισμός 6.12.** Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα. Τότε, ένας *άτλας Cartan* είναι μια συλλογή $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, w_\alpha)\}$ από βαθμίδες Cartan μιας πρότυπης γεωμετρίας $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ με ομάδα $H$, τέτοια ώστε:

i) τα $U_\alpha$ να αποτελούν ανοιχτό κάλυμα της $M$.

ii) για $(U_\alpha, w_\alpha), (U_\beta, w_\beta) \in \mathcal{A}$ να υπάρχει λεία απεικόνιση $k : U_\alpha \cap U_\beta \to H$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $w_\beta = \mathrm{Ad}(k^{-1}) w_\alpha + k^* \omega_H$ για $u \in U_\alpha \cap U_\beta$.

**Ορισμός 6.13.** Μια *δομή Cartan* σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ αποτελείται από μια κλάση ισοδυναμίας απο άτλαντες Cartan στην $M$. Καλούμε γεωμετρία Cartan μια λεία πολλαπλότητα $M$ εφοδιασμένη με δομή Cartan. Μια γεωμετρία Cartan είναι αποτελεσματική, αν η πρότυπη γεωμετρία είναι αποτελεσματική.

**Ορισμός 6.14.** Έστωσαν $M$ και $M'$ γεωμετρίες Cartan με την ίδια πρότυπη γεωμετρία. Τότε, η αμφιδιαφόριση $\phi : M \to M'$ καλείται *γεωμετρικός ισομορφισμός*, αν για κάθε βαθμίδα Cartan $(U, w)$ στην $M'$, η βαθμίδα $(\phi^{-1}(U), \phi^* w)$ που επάγεται στην $M$ είναι συμβατή με τον $\mathcal{A}_M$.

**Ορισμός 6.15.** Η 2-μορφή $\mathcal{W} = \mathrm{d}w + (1/2)[w, w]$ με $\mathcal{W} \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g})$ που συσχετίζεται με μια βαθμίδα Cartan $(U, w)$ καλείται *καμπυλότητα* ως προς αυτήν τη βαθμίδα.

**Ορισμός 6.16.** Μια γεωμετρία Cartan με μηδενική καμπυλότητα σε κάθε σημείο καλείται *επίπεδη*.

**Ορισμός 6.17.** Έστω $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, w_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ ένας μεγιστικός άτλας Cartan με $A$ σύνολο αρίθμησης. Μια *συμμετρία βαθμίδας* μιας γεωμετρίας Cartan είναι μια μετάθεση $b : A \to A$, τέτοια ώστε:

i) $U_{b(\alpha)} = U_\alpha$.

ii) Αν $U_\alpha = U_\beta$ και $w_\alpha \Rightarrow_h w_\beta$, τότε $w_{b(\alpha)} \Rightarrow_h w_{b(\beta)}$.

Είναι φανερό ότι μια συμμετρία βαθμίδας δεν αλλάζει τη γεωμετρία.

Ας δούμε σε αυτό το σημείο πως μπορούμε να περάσουμε σε μια κύρια $H$-δέσμη συσχετισμένη με μια αποτελεσματική γεωμετρία Cartan. Έστω $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ανοιχτό κάλυμα της $M$ με $U$ αρκετά μικρά και συνεκτικά υποσύνολα αυτής, έτσι ώστε κάθε ένα εξ αυτών να περιέχεται στο πεδίο ορισμού μιας βαθμίδας Cartan και η τομή κάθε δύο εξ αυτών να είναι συνεκτική. Ο ολικός χώρος της κύριας δέσμης θα δίνεται από τη συγκόλληση των $U_\alpha \times H$ για όλα τα $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Έστω ότι για κάθε $U_\alpha \in \mathcal{U}$ επιλέγουμε μια αντιπροσωπευτική βαθμίδα Cartan $(U_\alpha, w_\alpha)$. Έτσι, για $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{U}$ θα υπάρχουν $w_\alpha, w_\beta$, τέτοιες ώστε στο $U_\alpha \cap U_\beta$ να είναι ισοδύναμες βαθμίδες, δηλαδή $w_\alpha \Rightarrow_k w_\beta$ για μοναδική λεία απεικόνιση $k : U_\alpha \cap U_\beta \to H$. Μπορούμε να συγκολλήσουμε το $U_\alpha \times H$ με το $U_\beta \times H$ σε ένα κοινό $(U_\alpha \cap U_\beta) \times H$, αρκεί να έχουμε ένα τρόπο συσχέτισης της συντεταγμένης ίνας $(u, h)$ στο $u$ στον $U_\alpha \times H$ με τη συντεταγμένη ίνας στο $u$ στον $U_\beta \times H$. Ορίζουμε έτσι την αλλαγή συντεταγμένης ίνας $f : U_\alpha \times H \to U_\beta \times H$ με $f(u, h) := (u, k(u)^{-1}h)$. Καθώς αυτή η διαδικασία μπορεί να γίνει για όλα τα $U_\alpha \in \mathcal{U}$, έχουμε ότι μια αποτελεσματική γεωμετρία Cartan συσχετίζεται μοναδικά με μια κύρια $H$-δέσμη $(P, \pi, M)$ και η αλλαγή συντεταγμένης ίνας είναι η $f : U_\alpha \times H \to U_\beta \times H$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε $v \in \mathfrak{h}$ προσδιορίζει μοναδικά ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $V \in \mathfrak{X}H$, του οποίου η τιμή στην ταυτότητα της $H$ είναι $v$. Ένα τέτοιο πεδίο δύναται να επεκταθεί στο $U \times H$ ως $v^\dagger = (0, V)$. Καθώς $V$ είναι αριστερά αναλλοίωτο και η αλλαγή συντεταγμένης ίνας στον $U \times H$ δρα με αριστερό πολλαπλασιασμό μόνο στον δεύτερο παράγοντα, τα διανυσματικά πεδία $v^\dagger$ δίνουν ένα καλά ορισμένο διανυσματικό πεδίο $v^\dagger$ στον ολικό χώρο $P$.

**Λήμμα 6.1.** *Έστω $\mathfrak{R}_k : P \to P$ η δεξιά δράση με $k \in H$. Τότε, θα ισχύει η γνωστή σχέση $(\mathfrak{R}_k)_* v^\dagger = (\mathrm{Ad}(k^{-1})v)^\dagger$.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να ελέγξουμε τη σχέση στην τετριμμενοποίηση του ολικού χώρου $P$, $U \times H$. Στον $U \times H$ ο δεξιός πολλαπλασιασμός έχει τη μορφή $\mathfrak{R}_k = \mathrm{id} \times \mathcal{R}_k$, όπου $\mathcal{R}_k$ η δεξιά μεταφορά στην $H$. Αν $\mathcal{L}_k : H \to H$ η αριστερή μεταφορά στην $H$, τότε:

$$(\mathfrak{R}_k)_* v^\dagger = (\mathrm{id} \times \mathcal{R}_k)_*(0, V) = (0, \mathcal{R}_{k*}V) = (0, \mathcal{R}_{k*}\mathcal{L}_{k^{-1}*}V) = (0, \mathrm{Ad}(k^{-1})V) = (\mathrm{Ad}(k^{-1})v)^\dagger$$

καθώς $V = \mathcal{L}_{k^{-1}*}V$, αφού $V$ αριστερά αναλλοίωτο. □

Μαζί με τη δέσμη $(P, \pi, M)$ παίρνουμε και μια 1-μορφή $\omega$ στον ολικό χώρο $P$ με τιμή στην $\mathfrak{g}$, η οποία καλείται *συνοχή Cartan*. Αν η αλλαγή συντεταγμένης ίνας είναι $f = (f_1, f_2) : (u, h) \mapsto (u, k(u)^{-1}h)$, τότε $f_* : T_{(u,h)}(U \times H) \to T_{(u,k(u)^{-1}h)}(U \times H)$. Έστω $(v, y_1) \in T_{(u,h)}(U \times H)$ και $(v, y_2) \in T_{(u,k(u)^{-1}h)}(U \times H)$. Τότε, $f_2(u, h) = k(u)^{-1}h$ και $f_{2*}(v, y_1) = y_2$. Έχουμε δείξει ότι $T_{(u,k(u)^{-1}h)}(U \times H) \cong T_uU \times T_{k(u)^{-1}h}H$ και επομένως, $y_2 \in T_{k(u)^{-1}h}H$. Έπεται ότι:

$$\omega_H(y_2) = \omega_H(f_{2*}(v, y_1)) = (f_2^*\omega_H)(v, y_1) = -\mathrm{Ad}(h^{-1}k)(k^*\omega_H)(v) + \omega_H(y_1) \tag{6.1}$$

όπου εφαρμόσαμε την πρόταση 6.5 και το πόρισμα 6.2. Επιπλέον, από πρόταση 6.3, $\omega(v, y_1) = \mathrm{Ad}(h^{-1})w_1(v) + \omega_H(y_1)$, όπως και $\omega(v, y_2) = \mathrm{Ad}(h^{-1}k)w_2(v) + \omega_H(y_2)$, όπου:

$$\omega : T_{(u,h)}(U \times H) \cong T_uU \times T_hH \to T_uU \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$$

με $(v, y) \mapsto (v, \omega_H(y)) \mapsto \mathrm{Ad}(h^{-1})w(v) + \omega_H(y)$. Αντικατάσταση της σχέσης μετασχηματισμού $w_2 = \mathrm{Ad}(k^{-1})w_1 + k^*\omega_H$ και της (6.1) στην τελευταία σχέση δίνει $\omega(v, y_2) = \omega(v, y_1)$. Πράγματι λοιπόν $\omega$ είναι ένας κανονικός γραμμικός ισομορφισμός που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή συντεταγμένης ίνας.

**Πρόταση 6.6.** *Μια συνοχή Cartan $\omega$ στον $P$ έχει τις εξής ιδιότητες:*

*i) Για κάθε $p \in P$, η γραμμική απεικόνιση $\omega_p : T_pP \to \mathfrak{g}$ είναι ισομορφισμός.*

*ii) Ισχύει ότι $(\mathfrak{R}_h)^*\omega = \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega$.*

*iii) Για κάθε $v \in \mathfrak{h}$, $\omega(v^\dagger) = v$.*

**Πρόταση 6.7.** *Έστω $\sigma : U \to P$ μια τμήση. Τότε:*

*i) $w = \sigma_*\omega$ είναι μια βαθμίδα Cartan στο $U$ συμβατή με τη γεωμετρία Cartan στο $M$.*

*ii) Έστω $\Omega$ η 2-μορφή καμπυλότητας Cartan στον ολικό χώρο $P$, για την οποία ισχύει ότι $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega,\omega]$. Τότε, $\sigma_*\Omega = \mathcal{W}$ είναι η καμπυλότητα της βαθμίδας $w$.*

*Απόδειξη.*

i) Είναι αληθές για όλες τις τμήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στον ορισμό του $P$ και κάθε άλλη τμήση προκύπτει από μετασχηματισμό βαθμίδας αυτών.

ii) $\mathcal{W} = \mathrm{d}w + (1/2)[w,w] = \sigma^*(\mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega,\omega]) = \sigma_*\Omega$.

□

Ας δούμε τώρα τον ορισμό κύριας δέσμης για μια γεωμετρία Cartan.

**Ορισμός 6.18.** Μια γεωμετρία Cartan $(P,\omega)$ στην $M$, προτυποποιημένη βάσει του ζεύγους Klein $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ με ομάδα $H$, αποτελείται από:

i) μια λεία πολλαπλότητα $M$.

ii) μια κύρια $H$-δέσμη με ολικό χώρο $P$ και βάση $M$.

iii) μια 1-μορφή συνοχής $\omega$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$ που έχει τις ιδιότητες της πρότασης 6.6.

Καταχράζοντας την ορολογία, συχνά κάνουμε λόγο για μια γεωμετρία Cartan $M$. Η 2-μορφή στον $P$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$, η οποία δίνεται από τη σχέση $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega,\omega]$ καλείται *καμπυλότητα Cartan*. Επιπλέον, αν $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ είναι η κανονική προβολή, τότε $\rho(\Omega)$ καλείται *στρέψη*. Αν η $\Omega$ παίρνει τιμές στην υποάλγεβρα Lie $\mathfrak{h}$, τότε λέμε ότι η γεωμετρία είναι γεωμετρία χωρίς στρέψη. Μια γεωμετρία Cartan καλείται πλήρης, αν η $\omega$ είναι πλήρης, δηλαδή αν $\omega$ μπορεί να γραφεί ως το διαφορικό μιας λείας συνάρτησης $\mathcal{C}^\infty(P,\mathfrak{g})$. Λέμε αντίστοιχα ότι μια τέτοια γεωμετρία είναι αποτελεσματική, πρωτογενής ή αναγωγική, αν η πρότυπη γεωμετρία είναι τέτοια.

Ο ορισμός 6.18 οδηγεί στην τοπική μορφή μιας γεωμετρίας Cartan, αλλά οι 2 μορφές είναι ισοδύναμες, μόνο όταν η πρότυπη γεωμετρία είναι αποτελεσματική. Από εδώ και έπειτα, θα θεωρούμε αυτόν τον ορισμό ως ορισμό μιας γεωμετρίας Cartan.

**Ορισμός 6.19.** 'Εστωσαν $(P,\omega)$ και $(P',\omega')$ γεωμετρίες Cartan στις $M$ και $M'$ αντίστοιχα, προτυποποιημένες βάσει του $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ με ομάδα $H$. Έστω απεικόνιση κύριας δέσμης $(\bar{f},f)$, όπου $\bar{f} : P \to P'$ και $f : M \to M'$ με $\bar{f}^*\omega' = \omega$. Τότε, η $f$ καλείται *τοπικός γεωμετρικός ισομορφισμός*, ενώ αν $f$ αμφιδιαφόριση, τότε καλείται *γεωμετρικός ισομορφισμός*.

**Θεώρημα 6.3.** *Έστω $(P,\omega)$ μια γεωμετρία Cartan στην $M$, προτυποποιημένη βάσει $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ με δομική ομάδα $H$. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός δέσμης $TM \cong (P \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H$. Επιπλέον, για κάθε $p \in P$ με $\pi(p) = x$ υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\phi_p : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, τέτοιος ώστε $\phi_{ph} = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p$.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\
T_p(pH) \arrow[u, "\omega_H", "\cong"'] \arrow[r] & T_pP \arrow[u, "\omega_p", "\cong"'] \arrow[r] & T_xM \arrow[u, dashed, "\phi_p", "\cong ?"']
\end{tikzcd}
$$

*Απόδειξη.* Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο διάγραμμα:
με $pH \in P/H$ και $\phi_p$ τον ισομορφισμό που επιτρέπει στο διάγραμμα να μετατίθεται. Επιπλέον, αν $v \in T_xM$, τότε $v = \pi_{*p}(u)$ για κάποιο $u \in T_pP$, αφού $\pi(p) = x$. Όμως, $\pi(p) = \pi(ph) = x$ και άρα $v = \pi_{*ph}((\mathfrak{R}_h)_* u)$. Επομένως, αφού από διάγραμμα ισχύει ότι $\phi_p \circ \pi_{*p} = \rho \circ \omega_p$, τότε:

$$
\begin{aligned}
\phi_{ph}(v) &= \phi_{ph}(\pi_{*ph}((\mathfrak{R}_h)_* u)) = \rho(\omega_{ph}((\mathfrak{R}_h)_* u)) = \rho(\mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_p(u)) \\
&= \mathrm{Ad}(h^{-1})\rho(\omega_p(u)) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p(\pi_{*p}u) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p(v)
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι μπορούμε να ορίσουμε μια λεία απεικόνιση $q : P \times \mathfrak{g} \to TM$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $q(p,w) := (\pi(p), \phi_p^{-1}(\rho(w)))$, όπου αυτός ο τρόπος γραφής σημαίνει

$$
q(p,w) := \phi_p^{-1}(\rho(w)) \in T_xM
$$

Όμως, είναι φανερό ότι:

$$
\begin{aligned}
q(ph, \mathrm{Ad}(h^{-1})w) &= (\pi(ph), \phi_{ph}^{-1}(\rho(\mathrm{Ad}(h^{-1})w))) = (\pi(p), \phi_{ph}^{-1}(\mathrm{Ad}(h)^{-1}(\rho(w)))) \\
&= (\pi(p), (\mathrm{Ad}(h)\phi_{ph})^{-1}(\rho(w))) = (\pi(p), \phi_p^{-1}(\rho(w))) = q(p,w)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\mathrm{Ad}(h^{-1}) = \mathrm{Ad}(h)^{-1}$ και το προηγούμενο αποτέλεσμα. Επομένως, έχουμε μια καλώς ορισμένη λεία απεικόνιση δέσμης $\bar{q} : (P \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H \to TM$, όπου $(P \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H$ είναι η συσχετισμένη (με τη δέσμη $P$) δέσμη με ίνα $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Συνεπώς, $(\bar{q}, \mathrm{id})$ είναι ισομορφισμός των διανυσματικών δεσμών με ολικούς χώρους $(P \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h})/H$,$TM$ και κοινή βάση $M$. ☐

**Πόρισμα 6.3.** *Έστω $(P,\omega)$ γεωμετρία Cartan στην $M$ με πρότυπο $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ και δομική ομάδα $H$. Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των $X \in \mathfrak{X}M$ και συναρτήσεων $f : P \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, οι οποίες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τη συζυγή αναπαράσταση, δηλαδή $f(ph) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h^{-1})f(p)$, όπου $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : H \to \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Η αντιστοιχία δίνεται από $X \mapsto f_X = \{p \mapsto \phi_p(X_{\pi(p)})\}$ για $p \in P$ και $\phi_p$ όπως άνω.*

*Απόδειξη.* Θα πρέπει να δείξουμε αρχικά ότι η $f_X$ μετασχηματίζεται κατάλληλα. Πράγματι:

$$
f_X(ph) = \phi_{ph}(X_{\pi(ph)}) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p(X_{\pi(p)}) = \mathrm{Ad}(h^{-1})f_X(p)
$$

από ορισμό $\phi_p$ και καθώς $\pi(p) = \pi(ph)$. Αντιστρόφως, μια συνάρτηση $f : P \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, η οποία μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη συζυγή, προκύπτει από εκείνο το $X \in \mathfrak{X}M$ με $T_xM \ni X_x = \phi_p^{-1}(f(p))$, όπου $p \in P_x$ για $x \in M$. Πρέπει απλά να δείξουμε ότι η επιλογή του $p$ κλασσικά δεν παίζει ρόλο, το οποίο ισχύει καθώς:

$$
\phi_{ph}^{-1}(f(ph)) = \phi_{ph}^{-1}(\mathrm{Ad}(h^{-1})f(p)) = (\mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p)^{-1}(\mathrm{Ad}(h^{-1})f(p)) = \phi_p^{-1}(f(p))
$$

☐

**Ορισμός 6.20.** Ξανά γεωμετρία Cartan όπως άνω. Μια διανυσματική δέσμη $E \to P$ καλείται *γεωμετρική* διανυσματική δέσμη, αν ισχύει ότι $E = P \times_H V$ για κάποια πδα $(\rho, V)$.

**Ορισμός 6.21.** Μια γεωμετρία Cartan (όπως άνω) είναι μια γεωμετρία *πρώτης τάξης*, αν $Ad : H \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ είναι 1-1. Αλλιώς καλείται υψηλότερης τάξης γεωμετρία.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να κατασκευάσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο. Έστω $V$ διανυσματικός χώρος και $f \in \mathcal{A}^0(P,V)$ μια συνάρτηση στον $P$ με τιμές στον $V$. Τότε, η απεικόνιση $\bar{\nabla}_X : \mathcal{A}^0(P,V) \to \mathcal{A}^0(P,V)$ με $\bar{\nabla}_X f = \omega^{-1}(X)f$, όπου $X \in \mathfrak{g}$, καλείται *καθολική συναλλοίωτη παράγωγος* (universal covariant derivative). Μπορούμε να θεωρήσουμε την $\bar{\nabla}$ ως τον συζυγή τελεστή $\bar{\nabla} : \mathcal{A}^0(P,V) \to \mathcal{A}^0(P, V \otimes \mathfrak{g}^*)$ με $\iota_{X*}(\bar{\nabla} f) := \bar{\nabla}_X f$, όπου $\mathfrak{g}^*$ είναι ο δυϊκός της $\mathfrak{g}$ και $\iota_X : V \otimes \mathfrak{g}^* \to V$ με $\iota_X(v \otimes \eta) := \eta(X)v$. Η $\iota_X$ επάγει την $\iota_{X*} : \mathcal{A}^p(P, V \otimes \mathfrak{g}^*) \to \mathcal{A}^p(P,V)$ με $(\iota_{X*}\beta)(X_1, \cdots, X_p) = \iota_{X*}(\beta(X_1, \cdots, X_p))$ για $\beta \in \mathcal{A}^p(P, V \otimes \mathfrak{g}^*)$. Πρόκειται δηλαδή για τη γνωστή εσωτερική παράγωγο (συνήθως καλείται interior product βέβαια). Η καθολική συναλλοίωτη παράγωγος (κσπ) είναι ο πρόγονος όλων των διαφορικών τελεστών με γεωμετρικό νόημα σε μια γεωμετρία Cartan. Όπως θα δούμε παρακάτω, η κσπ οδηγεί στη συνήθη συναλλοίωτη παράγωγο, όταν η γεωμετρία είναι αναγωγική.

**Ορισμός 6.22.** Έστω $(P,\omega)$ μια γεωμετρία Cartan με πρότυπο $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ και δομική ομάδα $H$. Έστω επίσης $V$ ένας δχ και $\rho : H \to \operatorname{Aut} V$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie, δηλαδή $(V,\rho)$ πδ αναπαράσταση της $H$. Ένας τανυστής τύπου $(V,\rho)$ είναι μια συνάρτηση $f : P \to V$, για την οποία ισχύει $(\mathfrak{R}_h)^* f = \rho(h^{-1})f$.

Έστω λοιπόν $f : P \to V$ ένας τανυστής τύπου $(V,\rho)$. Ας δούμε πως μετασχηματίζεται το $\bar{\nabla}\rho$ και αν μπορεί να ερμηνευθεί ως τανυστής κάποιου τύπου.

**Ορισμός 6.23.** Για κάθε $\rho : H \to GL(V)$ συμβολίζουμε με:

$$\mathcal{A}^q(P,(V,\rho)) \equiv \mathcal{A}^q(P,\rho) = \left\{\eta : \Lambda^q(TP) \to V \mid (\mathfrak{R}_h)^*\eta = \rho(h^{-1})\eta \; \forall \, h \in H\right\}$$

τον συσχετισμένο χώρο των μορφών βαθμού $q$. Ο $\mathcal{A}^q(P,\rho)$ καλείται χώρος των $q$-μορφών που μετασχηματίζονται σύμφωνα με την αναπαράσταση $(V,\rho)$.

**Λήμμα 6.2.** *Ισχύει ότι* $\bar{\nabla} : \mathcal{A}^0(P,\rho) \to \mathcal{A}^0(P, \rho \otimes \mathrm{Ad}^*)$.

*Απόδειξη.* Έστω $f$ μια 0-μορφή (συνάρτηση) που μετασχηματίζεται σύμφωνα με την $\rho$, δηλαδή $f \in \mathcal{A}^0(P,\rho)$. Τότε, για κάθε $p \in P$ και $X \in \mathfrak{g}$, θα ισχύει ότι:

$$\iota_{X*}((\mathfrak{R}_h)^*((\bar{\nabla} f)(p))) = \iota_{X*}(\bar{\nabla} f)(ph) = (\bar{\nabla}_X f)(ph) = \omega_{ph}^{-1}(X)f$$

Καθώς $(\mathfrak{R}_h)^*\omega_p = \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_p$ και $(\mathfrak{R}_h)^*\omega_p = \omega_{ph}(\mathfrak{R}_h)_*$, έπεται ότι $\omega_{ph}^{-1} = (\mathfrak{R}_h)_*\omega_p^{-1}\,\mathrm{Ad}(h)$. Επομένως:

$$\iota_{X*}((\mathfrak{R}_h)^*((\bar{\nabla} f)(p))) = (((\mathfrak{R}_h)_*\omega_p^{-1}\,\mathrm{Ad}(h))(X))f$$

όπου η σύνθεση παραλείπεται για λόγους συντομίας. Έπειτα, για κάθε διανυσματικό πεδίο $Y$ στον $P$ έχουμε (το δείξαμε όταν μελετήσαμε τις push-forward και τις pull-back) ότι:

$$((\mathfrak{R}_h)_*Y)f = f_*((\mathfrak{R}_h)_*Y) = (f(\mathfrak{R}_h))_*Y = \rho(h^{-1})f_*Y = \rho(h^{-1})Yf$$

Έστω τώρα $Y = \omega_p^{-1}(\mathrm{Ad}(h)X)$. Τότε:

$$\begin{aligned}\iota_{X*}((\mathfrak{R}_h)^*(\bar{\nabla} f))(p) &= ((\mathfrak{R}_h)_*Y)f = \rho(h^{-1})Yf \\ &= \rho(h^{-1})(\omega_p^{-1}(\mathrm{Ad}(h)X))f \\ &= \rho(h^{-1})\bar{\nabla}_{\mathrm{Ad}(h)X} f\end{aligned}$$

□

Ας περάσουμε τώρα στην έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου. Είπαμε πριν ότι για να υπάρχει συναλλοίωτη παράγωγος σε μια γεωμετρία Cartan, πρέπει αυτή να είναι αναγωγική. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια αναγωγική γεωμετρία με την αναγωγική ανάλυση της $\mathfrak{g}$ να είναι $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Κάθε μορφή με τιμές στην $\mathfrak{g}$ θα αναλύεται σε $\mathfrak{h}$ και $\mathfrak{p}$ συνιστώσες. Αυτό θα ισχύει επομένως και για τη συνοχή Cartan $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{p}}$, όπως και για κάθε βαθμίδα $w = w_{\mathfrak{h}} + w_{\mathfrak{p}}$. Επιπλέον, και η κσπ αναλύεται σε $\bar{\nabla}_X = \bar{\nabla}_{\mathfrak{h}X} + \bar{\nabla}_{\mathfrak{p}X}$.

**Λήμμα 6.3.** *Για $Y \in \mathfrak{h}$ και $f \in \mathcal{A}^0(P,\rho)$, ισχύει ότι $\iota_{Y*}(\bar{\nabla} f) = -\rho_*(Y)f$, όπου σημαίνουμε με $\rho_* : \mathfrak{h} \to \operatorname{End} V$ το διαφορικό της $\rho : H \to \operatorname{Aut} V$ στην ταυτότητα. Είναι προφανές ότι από τις άλγεβρες πάμε στις ομάδες με την $\exp$ και το αντίστοιχο διάγραμμα μετατίθεται.*

*Απόδειξη.* Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}(\iota_{Y*}\bar{\nabla} f)|_p = \bar{\nabla}_Y f|_p = \omega_p^{-1}(Y)f = X_p^Y f &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(p\exp(tY)) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \rho(\exp(-tY))f(p) = -\rho_*(Y)f|_p\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πέραν των γνωστών τον κανόνα μσ της $\rho$ και το γεγονός ότι $\omega^{-1}(v) = X^v$ για $v \in \mathfrak{h}$, δηλαδή οτι η αντίστροφη της $\omega$ δίνει κάθετο διανυσματικό πεδίο. □

Από το παραπάνω λήμμα συμπεραίνουμε ότι $\bar{\nabla}_{\mathfrak{h}} = -\rho_*$ για $X \in \mathfrak{h}$ και $f \in \mathcal{A}^0(P,\rho)$, δηλαδή μας δείχνει πως μετασχηματίζεται η $f$ υπό κάποια αναπαράσταση της $H$, το οποίο ήδη γνωρίζουμε. Επομένως, δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, σε αντίθεση με την προβολή $\bar{\nabla}_{\mathfrak{p}}$.

**Ορισμός 6.24.** Σε μια αναγωγική γεωμετρία ο τελεστής $\bar{\nabla}_{\mathfrak{p}}$ καλείται *συναλλοίωτη παράγωγος* (στα πλαίσια του ορισμού κύριας δέσμης της γεωμετρίας). Μια συνάρτηση $f : P \to V$ καλείται *συναλλοίωτα σταθερή* ή *παράλληλη* αν $\bar{\nabla}_{\mathfrak{p}} f = 0$.

**Ορισμός 6.25.** Η κατανομή στον $P$ που δίνεται από $\omega_{\mathfrak{h}} = 0$ καλείται *οριζόντια κατανομή* και τα στοιχεία της είναι *οριζόντια διανύσματα*.

**Ορισμός 6.26.** Έστω $(U, w)$ μια βαθμίδα μιας γεωμετρίας Cartan $(P, \omega)$ για μια τμήση $\sigma : U \to P$. Αν $f : P \to V$ είναι τανυστής τύπου $(V, \rho)$, τότε $\phi = f \circ \sigma : U \to V$ καλείται έκφραση του τανυστή στη βαθμίδα $(U, w)$.

**Ορισμός 6.27.** Έστω $(P, \omega)$ μια αναγωγική γεωμετρία Cartan στην $M$. Αν $X$ διανυσματικό πεδίο στην $M$, τότε υπάρχει η οριζόντια ανύψωση του, $\tilde{X}$, για την οποία ισχύει ότι είναι το μοναδικό διανυσματικό πεδίο στην $M$ με $\pi_{*p}(\tilde{X}) = X_{\pi(p)}$ και $\omega_{\mathfrak{h}}(\tilde{X}) = 0$ για κάθε $p \in P$.

**Ορισμός 6.28.** Έστω $(P, \omega)$ γεωμετρία Cartan στην $M$ και $E = P \times_H (V, \rho)$ ο ολικός χώρος της συσχετισμένης με αυτήν διανυσματικής δέσμης. Οι τανυστές τύπου $(V, \rho)$ μπορούν να ερμηνευθούν ως τμήσεις της διανυσματικής δέσμης με ολικό χώρο $E$, υπάρχει δηλαδή μια συνήθης αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση $\psi$ μεταξύ του $\Gamma(E)$ και του $\mathcal{A}^0(P,\rho)$ (όπως τη δείξαμε ανάλογα στην ενότητα της συναλλοίωτης παραγώγου στο πρώτο μέρος), η οποία είναι αντιστοίχιση μεταξύ τμήσεων της συσχετισμένης διανυσματικής δέσμης και συναρτήσεων στον $P$ με τιμές στον $V$. Η βασική εκδοχή (base version) της συναλλοίωτης παραγώγου $\nabla_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ για $X \in \mathfrak{X}M$ δίνεται από τη σχέση $\psi(\nabla_X f) = \tilde{X}(\psi(f))$. Η $\nabla_X$ ικανοποιεί τις συνήθεις ιδιότητες.

**Λήμμα 6.4.** *Έστω $\phi : U \to V$ η έκφραση ενός τανυστής τύπου $(V, \rho)$ στη βαθμίδα $(U, w)$. Έστω $w \Rightarrow_h w'$ με $h : U \to H$ μετασχηματισμό βαθμίδας. Τότε, $\rho(h^{-1})\phi : U \to V$ είναι η έκφραση του ίδιου τανυστή στη βαθμίδα $(U, w')$.*

**Πρόταση 6.8.** *Έστω $(U, w)$ μια βαθμίδα για μια αναγωγική γεωμετρία Cartan. Έστω επίσης $X$ ένα διανυσματικό πεδίο στο $U$ και $\phi$ η έκφραση ενός τανυστή τύπου $(V, \rho)$ στην $(U, w)$. Τότε, $\nabla_X \phi = X(\phi) - \rho_*(w_{\mathfrak{h}}(X))\phi$ είναι η έκφραση στην $(U, w)$ της συναλλοίωτης παραγώγου του τανυστή με έκφραση $\phi$ στην ίδια βαθμίδα.*

Είδαμε ότι η αναγωγική ανάλυση μιας συνοχής Cartan δίνεται από $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{p}}$, αλλά δεν σχολιάσαμε το πιο βασικό σημείο. Η $\omega_{\mathfrak{h}} : TP \to \mathfrak{h}$ είναι συνοχή Ehresmann, είναι δηλαδή η συνοχή που μελετήσαμε στο πρώτο μέρος με τιμές στην άλγεβρα Lie της δομικής ομάδας της κύριας $H$-δέσμης. Επιπλέον, η συναλλοίωτη παράγωγος που συσχετίζεται με μια αναγωγική γεωμετρία Cartan είναι η ίδια συναλλοίωτη παράγωγος που συσχετίζεται με τη συνοχή Ehresmann, δηλαδή η συναλλοίωτη παράγωγος που κατασκευάσαμε στο πρώτο μέρος [**31**]. Αντίστοιχα, η $\Omega_{\mathfrak{h}}$ είναι η καμπυλότητα Ehresmann και ισχύουν για αυτήν όλες οι ιδιότητες που μελετήσαμε στην αντίστοιχη ενότητα της καμπυλότητας και στρέψης. Γενικά, έχουμε πλέον μια γενική εικόνα σύνδεσης των διαφόρων γεωμετρικών αντικειμένων μιας αναγωγικής γεωμετρίας Cartan με αυτά μιας γεωμετρίας Ehresmann.

## 6.5. *Η Cartan άποψη των γεωμετριών Riemann*

Είναι γνωστό ότι η γεωμετρία Riemann αποτελείται από μια λεία πολλαπλότητα, εφοδιασμένη με μετρική Riemann $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ για κάθε $p \in M$, δηλαδή μια οικογένεια θετικά ορισμένων εσωτερικών γινομένων. Το πιο απλό παράδειγμα γεωμετρίας Riemann είναι η $n$-διάστατη ευκλείδεια γεωμετρία $E^n$, η οποία αποτελείται από το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ με $\langle\, , \rangle$ να είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, όπου $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $q(u, v) := \langle u, v\rangle$. Υπό αυτήν τη σκοπιά, η γεωμετρία Riemann είναι γενίκευση της ευκλείδειας. Μια βαθύτερη μελέτη της γεωμετρίας Riemann δείχνει ότι μπορούμε να συσχετίσουμε μια πιο πλούσια δομή με αυτήν, μια γεωμετρία κύριας δέσμης, εφοδιασμένη με Levi-Civita συνοχή. Αυτή η δομή καθορίζει μια δίχως στρέψη γεωμετρία Cartan στην $M$, προτυποποιημένη βάσει του ευκλείδειου χώρου. Αντίστροφα, κάθε γεωμετρία Cartan στην $M$ με πρότυπο χώρο τον ευκλείδειο, προσδιορίζει μια οικογένεια μετρικών Riemann στη βάση αυτής.

Υπάρχουν 2 εκδοχές της ευκλείδειας γεωμετρίας, η προσανατολισμένη και η μη προσανατολισμένη. Έστω $G = Euc(n, \mathbb{R})$ η ομάδα των στερεών κινήσεων στον $n$-διάστατο ευκλείδειο χώρο. Τότε, η προσανατολισμένη ευκλείδεια γεωμετρία χαρακτηρίζεται από σταθεροποιητή $SO(n, \mathbb{R})$, ενώ η μη προσανατολισμένη από $O(n, \mathbb{R})$. Εδω θα ασχοληθούμε με τη μη προσανατολισμένη περίπτωση, δηλαδή $H = O(n, \mathbb{R})$ είναι η υποομάδα που κρατάει σταθερή την αρχή των αξόνων. Αναλυτικότερα:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid A \in O(n, \mathbb{R}) \right\}$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid A \in O(n, \mathbb{R}) \right\}$$

όπου με $M(n+1, \mathbb{R})$ σημαίνουμε τους $(n+1) \times (n+1)$ πραγματικούς πίνακες. Οι αντίστοιχες άλγεβρες Lie είναι οι $\mathfrak{g} = \mathfrak{euc}(n, \mathbb{R})$ και $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$, όπου:

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid A = -A^t, v \in \mathbb{R}^n \right\}$$
$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid A = -A^t \right\}$$

**Ορισμός 6.29.** Η ομάδα $G = Euc(n, \mathbb{R})$ καλείται *ευκλείδεια ομάδα* διάστασης $n$ και το ζεύγος $(G, H = O(n, \mathbb{R}))$ καλείται *$n$-διάστατο ευκλείδειο πρότυπο.*

Η πρότυπη γεωμετρία είναι αναγωγική, καθώς η υποάλγεβρα $\mathfrak{h}$ έχει το $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτο συμπλήρωμα:

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \in M(n+1, \mathbb{R}) \mid v \in \mathbb{R}^n \right\}$$

και άρα υπάρχει η αναγωγική ανάλυση $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Η συζυγής δράση της $H$ στον $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ δίνεται από $\mathrm{ad}(A)v = Av$, όπου ο $A$ νοείται ως πίνακας, ώστε η σχέση να έχει νόημα. Έστω οτι η συλλογή των $e_i \in \mathfrak{p}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathfrak{p}$ και έστω επίσης ότι $e_{ij} \in \mathfrak{h}$ είναι εκείνα τα μοναδικά στοιχεία, για τα οποία ισχύει ότι $\mathrm{ad}(e_{ij})e_k = \delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j$, έτσι ώστε $\mathrm{ad}(e_{ij})$ να αντιστοιχεί σε $e_i \otimes e_j^* - e_j \otimes e_i^*$ υπό τον ισομορφισμό $\mathfrak{p} \otimes \mathfrak{p}^* \cong \mathrm{End}\,\mathfrak{p}$. Σημαίνουμε με $\{e_i^*\}$ τη δυϊκή βάση του $\mathfrak{p}^*$, για την οποία ισχύει $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Οι συμβολισμοί $e_i^*$ και $\varepsilon^i$ είναι απόλυτα ισοδύναμοι και θα χρησιμοποιούνται και οι 2 κατά το δοκούν. Επιπλέον, $(e_i \otimes e_j^*)e_k := e_j^*(e_k)e_i$ και $\{e_{ij} \mid i < j\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathfrak{h}$.

**Ορισμός 6.30.** Έστω $M$ μια λεία πολλαπλότητα. Μια *ευκλείδεια γεωμετρία* στην $M$ είναι μια γεωμετρία Cartan στην $M$, προτυποποιημένη βάσει του ευκλείδειου χώρου. Μια γεωμετρία Riemann στην $M$ είναι μια δίχως στρέψη ευκλείδεια γεωμετρία.

Ας υποθέσουμε ότι $(P, \omega)$ είναι μια ευκλείδεια γεωμετρία στην $M$ με πρότυπο $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ και δομική ομάδα $H$. Καθώς η $\mathfrak{g}$ αναλύεται αναγωγικά ως $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, η συνοχή Cartan $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ και η καμπυλότητα $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})$ θα αναλύονται αναγωγικά ως $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{p}}$ και $\Omega = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{p}}$ αντίστοιχα. Αναλύοντας στις προηγούμενες βάσεις των $\mathfrak{h}$ και $\mathfrak{p}$, $e_{ij}$ και $e_k$ αντίστοιχα, θα έχουμε ότι $\omega = \omega^i e_i + \omega^{ij} e_{ij}$ και $\Omega = \Omega^i e_i + \Omega^{ij} e_{ij}$ ή σε μορφή πινάκων:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{\mathfrak{p}} & \omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\omega^i) & (\omega^{ij}) \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega_{\mathfrak{p}} & \Omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\Omega^i) & (\Omega^{ij}) \end{pmatrix}$$

όπου $i, j = 1, \cdots, n$ με $i < j$.

**Ορισμός 6.31.** Στην περίπτωση της γεωμετρίας Riemann, η $\omega_{\mathfrak{h}}$ καλείται *Levi-Civita συνοχή*, ενώ η $\omega_{\mathfrak{p}}$ καλείται *συγκολλητική μορφή*.

Βλέπουμε δηλαδή ότι η Levi-Civita συνοχή είναι μια συγκεκριμένη συνοχή Ehresmann που πληρεί όλες εκείνες τις ιδιότητες που μελετήσαμε στο πρώτο μέρος. Το ίδιο ισχύει και για τη συγκολλητική μορφή, όπως την εισαγάγαμε στην αντίστοιχη ενότητα της καμπυλότητας και της στρέψης.

**Λήμμα 6.5.** *Η ταυτότητα Bianchi μπορεί να γραφεί ως* $\mathrm{d}\Omega = [\Omega, \omega]$.

*Απόδειξη.* Κατά τα γνωστά, $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega, \omega]$ θα είναι η δομική εξίσωση κατά Cartan. Αρκεί να πάρουμε την εξωτερική παράγωγο αυτής της σχέσης:

$$2\mathrm{d}\Omega = [\mathrm{d}\omega, \omega] - [\omega, \mathrm{d}\omega] = 2[\mathrm{d}\omega, \omega] = 2[\Omega, \omega] - 2[[\omega, \omega], \omega] = 2[\Omega, \omega]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Jacobi και τη γνωστή σχέση ανταλλαγής για το $[\ ,\ ] = [\ \wedge\ ]$. ☐

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι η ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα Cartan χωρίζεται τελικά στις 2 γνωστές ταυτότητες Bianchi, την ταυτότητα για την καμπυλότητα Ehresmann $\Omega_{\mathfrak{h}}$ και την ταυτότητα για τη στρέψη $\Omega_{\mathfrak{p}}$. Θα έχουμε αρχικά ότι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{p}} & \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega_{\mathfrak{p}} & \Omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{\mathfrak{p}} & \omega_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega_{\mathfrak{h}} \owedge \omega_{\mathfrak{p}} - \omega_{\mathfrak{h}} \owedge \Omega_{\mathfrak{p}} & [\Omega_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}] \end{pmatrix}$$

δηλαδή $\mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega_{\mathfrak{h}} \otimes \omega_{\mathfrak{p}} - \omega_{\mathfrak{h}} \otimes \Omega_{\mathfrak{p}}$ και $\mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} = [\Omega_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}]$. Η δεύτερη είναι προφανώς η ταυτότητα Bianchi για την $\Omega_{\mathfrak{h}}$ και η πρώτη είναι αντίστοιχα η ταυτότητα Bianchi για τη στρέψη $\Omega_{\mathfrak{p}}$, καθώς:

$$\mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{p}} + \omega_{\mathfrak{h}} \otimes \Omega_{\mathfrak{p}} = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Omega_{\mathfrak{p}} = \Omega_{\mathfrak{h}} \otimes \omega_{\mathfrak{p}}$$

Είμαστε σε θέση πλέον να περάσουμε σε όποιο είδος ευκλείδειας γεωμετρίας θέλουμε. Αν θέλουμε μια γεωμετρία Riemann, τότε αρκεί να μηδενίσουμε την $\Omega_p$ και θα έχουμε τις ταυτότητες $\Omega_{\mathfrak{h}} \otimes \omega_{\mathfrak{p}} = 0$ και $\mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} = [\Omega_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}]$. Αντίστοιχα μπορούμε να μηδενίσουμε την $\Omega_{\mathfrak{h}}$, αν επιθυμούμε μια ευκλείδεια γεωμετρία χωρίς καμπυλότητα Ehresmann, αλλά με στρέψη, όπου θα έχουμε ότι $D\Omega_{\mathfrak{p}} = 0$. Ας δούμε όμως σε αυτό το σημείο το ζήτημα της ισοδυναμίας των μετρικών.

Οι πολλαπλότητες Riemann είναι λείες πολλαπλότητες, εφοδιασμένες με μετρική Riemann, η οποία επιτρέπει τη μέτρηση γεωμετρικών ποσοτήτων και ορίζεται ακολούθως:

**Ορισμός 6.32.** Μια μετρική Riemann $g$ σε μια λεία πολλαπλότητα $M$ είναι μια απεικόνιση, η οποία σε κάθε $x \in M$ αντιστοιχεί ένα (θετικά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο $g_x = \langle\ ,\ \rangle_x$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_xM$, έτσι ώστε $g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ με $g_x(u,v) = \langle u, v\rangle_x$. Αυτή εξαρτάται με λείο τρόπο από το $x$, δηλαδή για δύο λεία διανυσματικά πεδία $X, Y$ στη γειτονιά του $x$, η $x \mapsto g_x(X_x, Y_x)$ είναι λεία.

Ένας άλλο τρόπος να εξετάσουμε τη συνθήκη διαφορισιμότητας, είναι να επιλέξουμε έναν χάρτη $(U, y)$, όπου $U$ γειτονιά του $x \in M$. Θεωρούμε δύο λεία διανυσματικά πεδία $X, Y$ στην $U$ και ότι τα αντίστοιχα διανύσματα $X_x, Y_x \in T_xM$ εκφράζονται στην κανονική βάση του $T_xM$ ως $X_x = u^i(x)\partial_i|_x$ και $Y_x = v^i(x)\partial_i|_x$. Τότε:

$$g_x(X_x, Y_x) = u^i(x)v^j(x)g_x(\partial_i|_x, \partial_j|_x) =: u^i(x)v^j(x)g_{ij}(x)$$

Έτσι, η απεικόνιση $g : x \to g_x$ είναι λεία, αν οι συναρτήσεις $g_{ij}$ είναι λείες. Αυτές σχηματίζουν έναν $n \times n$ πίνακα $(g_{ij})$ που αντιστοιχεί στη διγραμμική μορφή $g_x$ και καθορίζει τη μετρική $g$. Είναι προφανές ότι αφού $g_x$ εσωτερικό γινόμενο, τότε $(g_{ij})$ συμμετρικός πίνακας, δηλαδή $(g_{ij}) = (g_{ji})$ και επιπλέον, θετικά ορισμένος. Όμως, αν η $g_x$ είναι θετικά ορισμένη, τότε σίγουρα είναι μη εκφυλισμένη και άρα $(g_{ij})$ αντιστρέψιμος με $g^{ij}$ να είναι ο αντίστροφος.

Αν $g_x$ είναι απλά μη εκφυλισμένη, τότε η $M$ είναι μια *ημι-ρημάννεια* ή *ψευδο-ρημάννεια πολλαπλότητα*, δηλαδή στην τετραγωνική μορφή αντιστοιχούν τώρα και κάποιες αρνητικές ιδιοτιμές. Αν αυτές είναι $i$ το πλήθος και $j = n - i$ είναι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών, τότε $(i, j)$ καλείται *δείκτης της μετρικής*. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα είναι για $i = 1$, όπου η μετρική αυτή καλείται μετρική Lorentz και η (ημι-ρημάννεια) πολλαπλότητα που εφοδιάζεται με αυτήν, πολλαπλότητα Lorentz. Έτσι, στην ειδική σχετικότητα, το γεωμετρικό υπόβαθρο είναι μια πολλαπλότητα Lorentz με διάσταση $n = 4$, εφοδιασμένη με συγκεκριμένη μετρική Lorentz, γνωστή ως μετρική Minkowski. Γι' αυτόν τον λόγο, η πολλαπλότητα αυτή καλείται συχνά και πολλαπλότητα Minkowski.

**Ορισμός 6.33.** Μια *ισομετρία* μεταξύ 2 πολλαπλοτήτων Riemann, έστωσαν $(M, g)$ και $(N, h)$, είναι μια αμφιδιαφόριση $\phi : M \to N$, τέτοια ώστε $\phi^*h = g$, έτσι ώστε:

$$g_x(v, u) = h_{\phi(x)}(\phi_{*x}v, \phi_{*x}u)$$

για κάθε $u, v \in T_xM$ και $x \in M$. Καλούμε τις πολλαπλότητες $M$ και $N$ *ισομετρικές*. Η αμφιδιαφόριση $\phi : M \to M$, τέτοια ώστε $\phi^*g = g$, καλείται *ισομετρία* της $(M, g)$.

**Ορισμός 6.34.** Έστω τώρα $(N, h)$ μια πολλαπλότητα Riemann και $f : M \to N$ μια εμβάπτιση. Η $f$ θα επάγει μέσω της pull-back της, $f^*$, μια μετρική $g$ στην $M$, τέτοια ώστε $g = f^*h$ ή ισοδύναμα, $g_x(v, u) = h_{f(x)}(f_{*x}v, f_{*x}u)$ και η οποία καλείται *επαγόμενη μετρική*, ενώ η $f$ καλείται *ισομετρική εμβάπτιση*.

**Πρόταση 6.9.** *Μια γεωμετρία Riemann στην $M$ καθορίζει μια κλάση ισοδυναμίας μετρικών Riemann στην $M$.*

*Απόδειξη.* 'Οπως είδαμε, η συζυγής δράση της $H$ στην $\mathfrak{g}$ επάγει τη συνήθη δράση στον $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong \mathbb{R}^n$, η οποία δίνεται από $\mathrm{ad}(A)w = Aw$ για $w \in \mathfrak{p}$. Αυτή διατηρεί την ευκλείδεια μετρική $q$ στον $\mathfrak{p}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον (αποδεδειγμένο) ισομορφισμό $\phi_p : T_xM \to \mathfrak{p}$, με $p \in \pi^{-1}(x)$, για να επάγουμε μια τετραγωνική μορφή $q_p$ στον $T_xM$, η οποία δίνεται από $q_p(v,u) = q(\phi_p(v), \phi_p(u))$. Καθώς έχουμε δείξει ότι $\phi_{ph} = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} q_{ph}(v,u) &= q(\phi_{ph}(v), \phi_{ph}(u)) = q(\mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p(v), \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_p(u)) \\ &= q(\phi_p(v), \phi_p(u)) = q_p(v,u) \end{aligned}$$

αφού η $q$ διατηρείται από την $\mathrm{Ad}(h^{-1})$. Συνεπώς, η τετραγωνική μορφή $q_p$ στον $T_xM$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του $p$ και άρα θα έχουμε ότι $g_x = \{q_p \mid p \in P_x\}$ είναι μια κλάση ισοδύναμων (θετικά ορισμένων) εσωτερικών γινομένων στο $x \in M$ και $g_M = \{g_x \mid x \in M\}$ είναι μια μετρική Riemann στην $M$ ή ορθότερα, μια κλάση ισοδύναμων μετρικών Riemann. Είναι μετρική Riemann, καθότι είναι λεία από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} T_pP \times T_pP \arrow[rr, "\omega_p \times \omega_p"] \arrow[d, "\pi_{*p} \times \pi_{*p}"'] & & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \arrow[d, "\varrho \times \varrho"] \\ T_xM \times T_xM \arrow[rr, "\phi_p \times \phi_p"] \arrow[dr, "g_x"'] & & \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \arrow[dl, "q = \langle\, ,\, \rangle"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

αφού επιπλέον $\omega$ λεία για αυθαίρετο $p$ και $\pi_*$ υπένθεση. □

**Λήμμα 6.6** (Λήμμα Cartan)**.**

*i) Έστω $V$ ένας $n$-διάστατος διανυσματικός χώρος με $\theta^i \in V^*$ στοιχεία μιας βάσης του δυϊκού του, όπου $i = 1, \cdots, n$. Έστω επίσης αυθαίρετη μορφή $\mu^i \in \Lambda^2 V^*$. Τότε, υπάρχει μοναδική συλλογή στοιχείων $\theta^{ij} \in V^*$ με $i,j = 1, \cdots, n$, τα οποία ικανοποιούν:*

*α') $\theta^{ij} + \theta^{ji} = 0$*

*β') $\mu^i + {\theta^i}_j \wedge \theta^j = 0$*

*ii) Έστωσαν $\theta^i \in \mathcal{A}^1 U$ και $\mu^i \in \mathcal{A}^2 U$, όπου $U$ είναι κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε, οι μορφές $\theta^{ij}$ είναι λείες, δηλαδή $\theta^{ij} \in \mathcal{A}^1 U$.*

*Απόδειξη.*

i) Ας ξεκινήσουμε με τη μοναδικότητα. Η $\mu^i$ αναλύεται σε $\mu^i = {A^i}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$ (πάντα σύμβαση άθροισης) και κατά τα γνωστά, ${A^i}_{(jk)} = 0$, όπου $2{A^i}_{(jk)} = {A^i}_{jk} + {A^i}_{kj}$, έτσι ώστε οι $A$ να είναι μοναδικά προσδιορισμένες. Θέτουμε:

$$\theta^{ij} = -({A^{ji}}_k + {A^i}_k{}^j - {A_k}^{ji})\theta^k$$

Τότε, αρχικά θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \theta^{ij} + \theta^{ji} &= -({A^{ji}}_k + {A^i}_k{}^j - {A_k}^{ji} + {A^{ij}}_k + {A^j}_k{}^i - {A_k}^{ij})\theta^k \\ &= -({A^{ji}}_k + {A^i}_k{}^j - {A_k}^{ji} - {A^i}_k{}^j - {A^{ji}}_k + {A_k}^{ji})\theta^k = 0 \end{aligned}$$

ενώ έπειτα:

$$\begin{aligned}\theta^i{}_j\wedge\theta^j &= -({A_j}^i{}_k + A^i{}_{kj} - A^i_{kj})\theta^k\wedge\theta^j = -A^i{}_{kj}\theta^k\wedge\theta^j - ({A_j}^i{}_k - {A_{kj}}^i)\theta^k\wedge\theta^j\\ &= -\mu^i - \sum_{j<k}({A_j}^i{}_k - {A_k}^i{}_j - {A_{kj}}^i + {A_{jk}}^i)\theta^k\wedge\theta^j\\ &= -\mu^i - \sum_{j<k}({A_j}^i{}_k - {A_k}^i{}_j + {A_k}^i{}_j - {A_j}^i{}_k)\theta^k\wedge\theta^j = -\mu^i\end{aligned}$$

Η μοναδικότητα έχει ως εξής. Αν υπήρχαν δύο τέτοιες συλλογές 1-μορφών που να ικανοποιούν τις α' και β', τότε η διαφορά τους επίσης θα ικανοποιούσε τις α' και β' με $\mu^i = 0$. Έστω ότι η διαφορά τους είναι $\gamma^{ij}$ και $\gamma^{ij} = B^{ij}{}_k\theta^k$. Από την α' έχουμε ότι προφανώς $B^{(ij)}{}_k = 0$. Έπειτα, από β' θα έχουμε ότι:

$$0 = \gamma^i{}_j\wedge\theta^j = B^i{}_{jk}\theta^k\wedge\theta^j = \sum_{j<k}(B^i{}_{jk} - B^i{}_{kj})\theta^k\wedge\theta^j$$

δηλαδή τώρα $B^i{}_{[jk]} = 0$. Όμως τότε:

$$B_{ijk} = B_{ikj} = -B_{kij} = -B_{kji} = B_{jki} = B_{jik} = -B_{ijk}$$

και άρα τα $B$ μηδενίζονται γενικά, δηλαδή $\gamma^{ij} = 0$. Επομένως, $\theta^{ij}$ μοναδικά.

ii) Προφανές από τύπο της $\theta^{ij}$.

□

**Θεώρημα 6.4.** *Έστω $(M, g)$ λεία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μετρική Riemann $g$. Υπάρχει ακριβώς μια διχως στρέψη γεωμετρία Cartan στην $M$, της οποίας η συσχετισμένη μετρική ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την $g$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\{\sigma_i\}$ τοπικό ορθοκανονικό πλαίσιο για ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset M$ και $\{\theta^i\} \in \mathcal{A}^1U$ το δυϊκό του. Από το λήμμα του Cartan υπάρχουν μοναδικά $\theta^{ij} \in \mathcal{A}^1U$, τέτοια ώστε $\mathrm{d}\theta^i + \theta^i{}_j\wedge\theta^i = 0$ και άρα $\mathrm{d}(\theta^i) + (\theta^i{}_j)\wedge(\theta^i) = 0$, όπου $(\theta^i), (\theta^{ij}) \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$. Επομένως:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ \theta^i & \theta^{ij}\end{pmatrix} \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$$

Καθώς $\{\sigma_i\}$ πλαίσιο, η $\theta$ έχει την ιδιότητα η σύνθετη απεικόνιση $\varrho\circ\theta_x : T_xU \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ να είναι ισομορφισμός. Επομένως, $\theta$ είναι μια βαθμίδα Cartan και η μετρική Riemann που επάγεται στο $U$ από τη συνήθη ευκλείδεια μετρική στον $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ θα είναι η αρχική $g$ περιορισμένη στο $U$. Καθώς όλη η $M$ καλύπτεται από τέτοιες βαθμίδες Cartan, αρκεί πλέον να δείξουμε ότι μια διαφορετική επιλογή ορθοκανονικού πλαισίου οδηγεί σε μια ισοδύναμη βαθμίδα (τα πλαίσια είναι ορθοκανονικά γιατί η δομική ομάδα είναι η ορθογώνια). Έστω ένα άλλο πλαίσιο $\{f_i\}$ με $\{\psi_i\} \in \mathcal{A}^1U$. Τότε, τα δύο πλαίσια θα πρέπει να σχετίζονται μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού $h : U \to O(n)$, έτσι ώστε $f_j = h^i{}_j\sigma_i$ και $\psi^j = h^j{}_i\theta^i$ πάντα τοπικά. Αλλά, υπό την αλλαγή βαθμίδας:

$$\begin{aligned}\theta \Rightarrow_h \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}}(h^{-1})\theta + h^*\omega_H &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ \theta^i & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & h\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \star\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0\\ (h^{-1})(\theta^i) & \star\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ \psi^i & \star\end{pmatrix}\end{aligned}$$

καθώς $h^{-1} = (h^j{}_i)$ και $\mathrm{Ad}(h(\cdot)^{-1})\theta = h(\cdot)^{-1}\theta h(\cdot)$ για ομάδες πινάκων. Εφόσον η νέα βαθμίδα θα πρέπει επίσης να είναι ελεύθερη από στρέψη, έπεται από λήμμα Cartan ότι θα είναι η μοναδική δίχως στρέψη βαθμίδα που αντιστοιχεί στο συνπλαίσιο $\{\psi_i\}$. Επομένως, $\theta, \psi$ ισοδύναμες βαθμίδες. Κατασκευάσαμε λοιπόν μια γεωμετρία Riemann στην $M$, της οποίας η μετρική ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας $g_M$, όπου επιπλέον κάθε βαθμίδα Riemann με συσχετισμένη μετρική $[g] \in g_M$ θα είναι ισοδύναμη με τις ως άνω βαθμίδες. □

Καθώς στην παρούσα εργασία δεν επιθυμούμε να εμβαθύνουμε στη γεωμετρία Riemann, παρά μόνο να την χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα, παραπέμπουμε τον αναγώστη στα **[20]**, **[30]**, **[1]**, **[17]** και **[2]** ως ενδεικτικά συγγράμματα.

Κεφάλαιο 7

# Η Βαρύτητα ως Θεωρία Βαθμίδας

Η γεωμετρικοποίηση των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων έχει βασιστεί σε δύο είδη θεωριών. Από τη μια, η γενική σχετικότητα περιγράφει τη βαρυτική αλληλεπίδραση μέσω μιας μετρικής γεωμετρίας του χωροχρόνου $M$ με τέτοιον τρόπο, ώστε η ομάδα συμμετρίας της θεωρίας να δίνεται από την ομάδα αμφιδιαφορίσεων της $M$, $Diff(M)$. Από την άλλη, οι υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από θεωρίες βαθμίδας, όπως οι Yang-Mills θεωρίες, στα πλαίσια μιας συνοχικής γεωμετρίας κάποιων "εσωτερικών" χώρων πάνω στην $M$. Είδαμε ότι η δυναμική μεταβλητή μιας Yang-Mills θεωρίας είναι μια συνοχή Ehresmann σε μια κύρια $G$-δέσμη, έτσι ώστε η ομάδα συμμετρίας να δίνεται από τη λεγόμενη ομάδα βαθμίδας των κάθετων αυτομορφισμών του ολικού χώρου $P$ αυτής της δέσμης. Καθώς οι θεωρίες Yang-Mills έχουν κβαντωθεί με επιτυχία (δηλαδή είναι ανακανονικοποιήσιμες), κρίνεται δόκιμο να κατανοήσουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ θεωριών βαθμίδας και θεωριών βαρύτητας, αφού αυτή η κατανόηση ενδέχεται να προσφέρει χρήσιμες υποδείξεις για τον φιλόδοξο στόχο της κβάντωσης της τελευταίας. Η μελέτη αυτής της σχέσης έχει ακολουθήσει κατά κύριο λόγο δύο διαφορετικές ερευνητικές διαδρομές, την προσπάθεια αναδιατύπωσης της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας και τους δυϊσμούς θεωρίας βαθμίδας/βαρύτητας, όπως είναι η AdS/CFT θεωρία. Εμείς τελικά αναπτύξαμε ως "κρυφή ατζέντα" στα προηγούμενα κεφάλαια μια στρατηγική αναδιατύπωσης που βασίζεται στις συνοχές Cartan.

Η αναδιατύπωση της βαρύτητας ως θεωρίας βαθμίδας σημαίνει τη μετάβαση από τη μετρική Einstein-Hilbert διατύπωση της θεωρίας σε μια διατύπωση που περιγράφει μια δέσμη με βάση $M$, εφοδιασμένη με μια δυναμική συνοχή που εκφράζει την τοπική συμμετρία. Στα πλαίσια της γνωστής Palatini διατύπωσης της γενικής σχετικότητας, η προσέγγιση αποτελείται από μια συνοχή Ehresmann $\omega_{\mathfrak{h}}$, η οποία καλείται σπιν συνοχή και βρίσκεται στον ολικό χώρο μιας κύριας $H$-δέσμης με βάση $M$, όπου $H$ είναι η ομάδα Lorentz. Χονδρικά μιλώντας, η σπιν συνοχή είναι το πεδίο βαθμίδας που σχετίζεται με την τοπική αναλλοιότητα Lorentz. Παρόλα αυτά, απαιτείται και ένα άλλο πεδίο, για το οποίο δεν υπάρχει ανάλογο στις Yang-Mills θεωρίες και το οποίο είναι η συγκολλητική μορφή (soldering form) $\theta$. Από αυτήν μπορεί να παραχθεί απουσία στρέψης και η σπιν συνοχή. Στη δεκαετία του 70', η επιστημονική κοινότητα ξεκίνησε να αντιμετωπίζει τα $\omega_{\mathfrak{h}}$ και $\theta$ ως μέρη ενός μόνο πεδίου $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \theta$. Όπως δείξαμε, αυτό δεν είναι κάποιο αλγεβρικό τρικ, καθώς πρόκειται για τη συνοχή Cartan. Έτσι, η διαφορά μεταξύ των Yang-Mills θεωριών και της γενικής σχετικότητας μπορεί απλότερα να ιδωθεί (στο επίπεδο των υποκείμενων γεωμετρικών δομών) υπό το φως της διαφοράς μεταξύ συνοχών Ehresmann και Cartan.

Προκειμένου να κατανοήσουμε την παρουσία του $\theta$ στα εννοιολογικά πλαίσια των θεωριών βαθμίδας, μπορούμε να συλλογιστούμε με τον ακόλουθο τρόπο. Καθώς η σπιν συνοχή $\omega_{\mathfrak{h}}$ είναι το πεδίο βαθμίδας που συσχετίζεται με την τοπική αναλλοιότητα Lorentz, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η συγκολλητική μορφή $\theta$ είναι το πεδίο βαθμίδας που συσχετίζεται με την τοπική αναλλοιότητα σε μετατοπίσεις. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς, η $\theta$ θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως το πεδίο βαθμίδας που συσχετίζεται με τις μετατοπίσεις της ομάδας Poincaré. Πράγματι, αν $G = Poinc(1,3)$, τότε $H = O(1,3)$ και $G/H = Poinc(1,3)/O(1,3) \cong \mathbb{R}^{1,3}$ και εφόσον η γεωμετρία αυτή είναι πράγματι αναγωγική, τότε $\theta = \omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : TP \to \mathbb{R}^{1,3}$, όπου $P$ ο ολικός χώρος της κύριας $H$-δέσμης. Υπό αυτήν την έννοια, η συνοχή Cartan $\omega$ θα εκφράζει προφανώς το σύνολο όλων των συμμετριών του χωροχρόνου Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Βέβαια, η "εσωτερική" (internal) περιγραφή της "εξωτερικής" γεωμετρίας του χωροχρόνου απαιτεί μια μερική επιλογή βαθμίδας για τις "εσωτερικές" αφινικές συμμετρίες. Με αυτόν τον τρόπο όμως, οι αμφιδιαφορίσεις της $M$ αποκτούν μια νέα ερμηνεία στα πλαίσια των θεωριών βαθμίδας. Θεωρούμε λοιπόν ωφέλιμο να συνοψίσουμε πολλά από αυτά που έχουμε πει (αλλά και να τα εξετάσουμε και με εναλλακτικούς ορισμούς, όπως είναι πχ. η εισαγωγή των αλγεβροειδών Lie) σε μια προσπάθεια να καθοδηγήσουμε τον αναγνώστη στο συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου και τελικά, στον απώτερο στόχο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

## 7.1. Κάθετος παραλληλισμός και συνοχές Ehresmann

Προκειμένου να αναλύσουμε τις διαφορές και γενικότερα, τις σχέσεις μεταξύ συνοχών Ehresmann και Cartan, ας θυμηθούμε αρχικά τις συνοχές Ehresmann. Έστω μια κύρια $H$-δέσμη $(P, \pi, M)$, όπου $H$ ομάδα Lie με άλγεβρα Lie $\mathfrak{h}$. Η δεξιά δράση $\mathfrak{R}_h : P \to P$ της $H$ στον $P$ επάγει έναν ομομορφισμό αλγεβρών Lie μεταξύ της $\mathfrak{h}$ και των κάθετων διανυσματικών πεδίων στον $P$, δηλαδή $i : \mathfrak{h} \to VP \subseteq TP$ με $i(\alpha) \coloneqq X^\alpha$, όπου για $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$:

$$X^\alpha(f(p)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f(p\exp(\tau\alpha)))_{|\tau=0}$$

Θεωρούμε ότι $VP \to P$ είναι η (κανονική) κάθετη υποδέσμη της $TP$, όπου $VP = \ker(\pi_*)$, δηλαδή όλα εκείνα τα $X \in TP$, για τα οποία ισχύει ότι $\pi_* X = 0$. Τα κάθετα διανυσματικά πεδία είναι οι απειροστοί γεννήτορες της κάθετης $H$-δράσης στον $P$. Καθώς η $H$-δράση είναι μεταβατική σε κάθε ίνα, έπεται ότι κάθε κάθετο διάνυσμα του $V_pP$ μπορεί να γραφεί ως $X^\alpha(p)$ για $p \in P$ και κάποιο $\alpha \in \mathfrak{h}$. Τότε, η απεικόνιση $i$ ορίζει έναν κάθετο παραλληλισμό, δηλαδή μια τετριμμενοποίηση της κάθετης υποδέσμης $VP$, η οποία δίνεται από $P \times \mathfrak{h} \to VP$ με $(p, \alpha) \mapsto X^\alpha(p)$. Προφανώς, $X^\alpha(p)$ και $X^\alpha_p$ απόλυτα ισοδύναμοι συμβολισμοί.

Όμως, κάθε στοιχείο $\alpha \in \mathfrak{h}$ ορίζει μια σταθερή τμήση της τετριμμένης διανυσματικής δέσμης $P \times \mathfrak{h} \to P$. Αυτό, παρότι τετριμμένο, υποδεικνύει την ακόλουθη φυσική γενίκευση. Αντί να θεωρούμε μόνο τη δράση των σταθερών τμήσεων της δέσμης $P \times \mathfrak{h}$ στον $P$, μπορούμε να θεωρήσουμε την "τοπική δράση" αυθαίρετης τμήσης της $P \times \mathfrak{h} \to P$, με άλλα λόγια να τοπικοποιήσουμε την $\mathfrak{h}$-δράση στον $P$, μεταβαίνοντας από τις σταθερές τμήσεις της $P \times \mathfrak{h} \to P$ σε γενικές τμήσεις. Μια τμήση $\sigma \in \Gamma(P \times \mathfrak{h})$ ορίζει ένα τοπικό κάθετο διανυσματικό πεδίο $X_\sigma$ στον $P$, το οποίο δίνεται από $X_\sigma(p) \coloneqq X^{\phi_\sigma(p)}(p)$ με $\phi_\sigma : P \to \mathfrak{h}$, έτσι ώστε $\sigma(p) = (p, \phi_\sigma(p)) \in P \times \mathfrak{h}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό. Ένα *αλγεβροειδές Lie* είναι μια δδ $E \to M$ με προβολή $\tau$ μαζί με έναν μορφισμό δδ $\rho : E \to TM$ (υπεράνω της ταυτοτικής στη βάση), τον οποίον χαρακτηριστικά θα καλούμε *άγκυρα* (anchor) του αλγεβροειδούς και μια αγκύλη $[\ ,\ ]$ με ορίσματα τμήσεις της $E \to M$, κλειστή ως προς αυτά. Για τα ως άνω αντικείμενα θα ισχύει ότι:

- Η αγκύλη είναι πλήρως αντισυμμετρική και $\mathbb{R}$-διγραμμική.

- Η αγκύλη ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.
- Η αγκύλη σχετίζεται με την αγκύλη Lie των δπ της $M$ μέσω της άγκυρας, δηλαδή:

$$\rho \circ [\alpha, \eta] = [\rho \circ \alpha, \rho \circ \eta] \quad [\alpha, f\eta] = f[\alpha, \eta] + ((\rho \circ \alpha)f)\eta$$

  για $\alpha, \eta \in \Gamma E$ και $f \in \mathcal{C}^\infty M$.

Επομένως, ο δχ $\Gamma(E)$ είναι σίγουρα άλγεβρα Lie με αγκύλη Lie την αγκύλη του αλγεβροειδούς Lie. Μπορούμε λοιπόν να εφοδιάσουμε την $P \times \mathfrak{h} \to P$ με δομή αλγεβροειδούς Lie, όπου η άγκυρα να δίνεται από $P \times \mathfrak{h} \to VP \subseteq TP$ και η αγκύλη από:

$$[\sigma, \sigma'](p) = (X_\sigma \circ \sigma')(p) - (X_{\sigma'} \circ \sigma)(p) + (p, [\phi_\sigma(p), \phi_{\sigma'}(p)]_{\mathfrak{h}})$$

Καθώς η $P$ είναι μια κύρια $H$-δέσμη με βάση $M$ και $P \times \mathfrak{h} \to VP$ είναι $H$-ισοαναλλοίωτη υπό την έννοια ότι:

$$\mathfrak{R}_h(p, \alpha) = (ph, \mathrm{Ad}(h^{-1})\alpha) \mapsto \mathfrak{R}_{h*}X_p^\alpha$$

έπεται ότι το πηλίκο της άγκυρας $P \times \mathfrak{h} \to VP$ με την $H$ είναι ο ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών $(P \times \mathfrak{h})/H \to VP/H$ (υπεράνω της ταυτοτικής στην $M$), όπου $(P \times \mathfrak{h})/H \to M$ καλείται *συζυγής δέσμη* (adjoint bundle). Μπορούμε τώρα να πάρουμε το πηλίκο του αλγεβροειδούς Lie $P \times \mathfrak{h} \to P$ με τη δράση της $H$, έτσι ώστε να πάρουμε ένα αλγεβροειδές Lie $(P \times \mathfrak{h})/H \to M$, αφού $M \cong P/H$. Για να πάρουμε την άγκυρα $(P \times \mathfrak{h})/H \to TM$, αρκεί να πάρουμε το πηλίκο της $P \times \mathfrak{h} \to VP$ με την $H$. Καθώς η $H$-δράση στον $P$ είναι κάθετη, η $(P \times \mathfrak{h})/H \to TM$ είναι απλά η μηδενική απεικόνιση, δηλαδή $[(p, \alpha)]_H \mapsto 0$. Είδαμε στις ενότητες των δεσμών, ότι οι τμήσεις $\sigma \in \Gamma((P \times \mathfrak{h})/H)$ βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις $H$-ισοαναλλοίωτες συναρτήσεις στον $P$, οι οποίες έχουν πεδίο τιμών στην $\mathfrak{h}$, δηλαδή τις $\phi_\sigma \in \mathcal{C}^H(P, \mathfrak{h})$ (πάντα λείες), έτσι ώστε $\phi_\sigma(ph) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\phi_\sigma(p)$. Πράγματι, μια συνάρτηση $\phi_\sigma \in \mathcal{C}^H(P, \mathfrak{h})$ ορίζει μια τμήση της $P \times \mathfrak{h} \to P$, η οποία δίνεται από $p \mapsto (p, \phi_\sigma(p))$ και το αντίστοιχο πηλίκο της οποίας είναι τμήση της $(P \times \mathfrak{h})/H \to M$ που δίνεται από $m \mapsto [(p, \phi_\sigma(p))]_H$ για κάθε $p$, τέτοιο ώστε $p(\pi) = m$. Η αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση $\Gamma((P \times \mathfrak{h})/H) \cong \mathcal{C}^H(P, \mathfrak{h})$ μας επιτρέπει να ορίσουμε μια αγκύλη για τα διανυσματικά πεδία του $\Gamma((P \times \mathfrak{h})/H)$, χρησιμοποιώντας την αγκύλη στην $\mathfrak{h}$:

$$[\sigma, \sigma'](m) = [(p, [\phi_\sigma(p), \phi_{\sigma'}(p)]_{\mathfrak{h}})]_H$$

Χονδρικά μιλώντας, αυτή η σχέση δίνεται από το πηλίκο της αγκύλης της δομής αλγεβροειδούς Lie της δέσμης $P \times \mathfrak{h} \to P$ με τη δράση της $H$, εξαλείφοντας έτσι τα κάθετα διανυσματικά πεδία σε εκείνη τη σχέση. Τελικά, από το γεγονός ότι η $\mathfrak{h}$-δράση στον $P$ πηγάζει από την κύρια δράση της $H$ στην $(P, \pi, M)$ συνεπάγεται ότι το πηλίκο του αλγεβροειδούς $P \times \mathfrak{h}$ είναι το *συζυγές αλγεβροειδές* $(P \times \mathfrak{h})/H \to M$. Στα εννοιολογικά πλαίσια των θεωριών βαθμίδας, οι τμήσεις της $(P \times \mathfrak{h})/H \to M$ καλούνται *τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας* και ορίζουν την *ομάδα βαθμίδας* του $P$. Υπό μια χονδρική σκοπιά, ένας τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας $\sigma \in \Gamma((P \times \mathfrak{h})/H)$ παράγει μια απειροστή μετατόπιση των πλαισίων στην ίνα $P_m$, η οποία ορίζεται ως $\sigma(m)$ για κάθε $m \in M$. Το σημαντικότερο σημείο είναι ότι τα πλαίσια σε διαφορετικές ίνες μπορούν να μετασχηματιστούν με ανεξάρτητο τρόπο. Σύμφωνα με τη συνήθη προσέγγιση στις θεωρίες βαθμίδας, αυτοί οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας προκύπτουν από την τοπικοποίηση (localisation) των ολικών μετασχηματισμών βαθμίδας, δηλαδή εκείνων των μετασχηματισμών πλαισίων στον $P$ που δεν εξαρτώνται από το σημείο της $M$. Είδαμε λοιπόν ότι η τοπικοποίηση των ολικών μετασχηματισμών βαθμίδας μπορεί να γίνει αντιληπτή στα πλαίσια της μετάβασης από τη συνήθη (υπό μια έννοια ολική) $\mathfrak{h}$-δράση σε μια κύρια $H$-δέσμη $(P, \pi, M)$ στην τοπική δράση που ορίζεται από τις τμήσεις του συζυγούς αλγεβροειδούς. Το γεγονός ότι ο μορφισμός διανυσματικών δεσμών $(P \times \mathfrak{h})/H \to TM$ είναι ταυτοτικά 0 εμπεριέχει και υποδηλώνει το γεγονός ότι οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας είναι πλήρως εσωτερικά αντικείμενα με την έννοια ότι δεν σχετίζουν ίνες σε διαφορετικά σημεία της $M$.

Αναφέραμε όμως στην εισαγωγή ότι η ομάδα συμμετρίας μιας Yang-Mills θεωρίας δίνεται από την ομάδα βαθμίδας των κάθετων αυτομορφισμών του $P$. Ένας αυτομορφισμός $\Phi \in \operatorname{Aut} P$ μιας κύριας $H$-δέσμης $(P, \pi, M)$ είναι μια αμφιδιαφόριση $\Phi : P \to P$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $\Phi(ph) = \Phi(p)h$ για κάθε $p \in P$ και $h \in H$, δηλαδή $\Phi$ να είναι $H$-ισοαναλλοίωτη. Ο (αυτομορφισμός) $\Phi$ προβάλλει σε μια μοναδική αμφιδιαφόριση $\phi : M \to M$, τέτοια ώστε $\pi \circ \Phi = \phi \circ \pi$, δηλαδή το αντίστοιχο διάγραμμα να μετατίθεται. Οι αυτομορφισμοί $\Phi$ που προβάλλουν στην $\mathrm{id}_M$ καλούνται *κάθετοι αυτομορφισμοί* (ή τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας) του $P$. Οι κάθετοι αυτομορφισμοί ορίζουν μια κανονική υποομάδα $Aut_v(P)$, η οποία καλείται ομάδα βαθμίδας του $P$.

Ας περάσουμε τώρα στη συνοχή Ehresmann. Μια συνοχή Ehresmann στον $P$ είναι μια λεία οριζόντια $H$-ισοαναλλοίωτη κατανομή $\mathcal{H} \subset TP$, δηλαδή μια υποδέσμη της $TP$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

- Η $\mathcal{H}$ είναι οριζόντια, δηλαδή ορίζει συμπληρωματικούς υπόχωρους στους κανονικούς κάθετους υπόχωρους του εφαπτόμενου χώρου του $P$. Με άλλα λόγια, ισχύει η γνωστή σχέση $T_pP = V_pP \oplus \mathcal{H}_pP$.
- Η $\mathcal{H}$ είναι $H$-ισοαναλλοίωτη, δηλαδή $\mathfrak{R}_{h*}\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{ph}$.

Έπειτα, ένας εναλλακτικός ορισμός της καμπυλότητας της $\mathcal{H}$ δίνεται από:

$$R(X, Y) = -\Psi([\chi(X), \chi(Y)])$$

για $X, Y \in \mathfrak{X}P$, όπου $\Psi : TP \to VP$ είναι η κάθετη προβολή με πυρήνα $\mathcal{H}$ και $\chi = \mathrm{id}_{TP} - \Psi$ είναι η συμπληρωματική οριζόντια προβολή. Όπως είδαμε και στο πρώτο μέρος, η $R$ είναι οριζόντια (καθώς είναι 0 αν έστω ένα εκ των δύο δπ είναι κάθετο) με κάθετες τιμές. Αυτός ο ορισμός της καμπυλότητας έχει το πλεονέκτημα μιας διαισθητικά άμεσης σημασίας. Αν $X, Y$ είναι οριζόντια διανύσματα, τότε η καμπυλότητα $R(X, Y)$ είναι ουσιαστικά η κάθετη προβολή του μεταθέτη τους, δηλαδή η καμπυλότητα μετράει το πόσο αποτυγχάνει η οριζόντια κατανομή να είναι ενελίξιμη (involutive), δηλαδή ολοκληρώσιμη. Αν η καμπυλότητα είναι 0, τότε αυτό σημαίνει ότι ο μεταθέτης είναι οριζόντιος και άρα η κατανομή μπορεί να ολοκληρωθεί.

Δοθέντος ενός $X \in T_pP$, η τετριμμενοποίηση $P \times \mathfrak{h} \to VP$ εγγυάται ότι υπάρχει πάντα κάποιο $\alpha \in \mathfrak{h}$, τέτοιο ώστε $\Psi(X) = X_p^\alpha$ για κάθε $p \in P$. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε τη γνωστή 1-μορφή συνοχής $(\omega_\mathfrak{h})_p : T_pP \to \mathfrak{h}$ με $\omega_\mathfrak{h}(X^\alpha) = \alpha$ ή πιο συγκεκριμένα, $(\omega_\mathfrak{h})_p(X_p^\alpha) = \alpha$ για κάθε $p \in P$. Συμβολίζοντας την $\omega_\mathfrak{h}$ με $\varpi$, η συνθήκη της $H$-ισοαναλλοιότητας της $\mathcal{H}$ μεταφράζεται για την $\varpi$ στην:

$$(\mathfrak{R}_h{}^*\varpi)_p(X_p) = \varpi_{ph}(\mathfrak{R}_{h*}X_p) = \mathrm{Ad}(h^{-1})(\varpi_p(X_p))$$

δηλαδή $\mathfrak{R}_h{}^*\varpi = \mathrm{Ad}(h^{-1})\varpi$. Με άλλα λόγια, η $\varpi$ είναι μια $H$-ισοαναλλοίωτη απεικόνιση από τον $TP$ στην $\mathfrak{h}$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{tikzcd}
T_pP \arrow[r, "\varpi_p"] \arrow[d, "\mathfrak{R}_{h*}"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(h^{-1})"] \\
T_{ph}P \arrow[r, "\varpi_{ph}"] & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

Η οριζόντια κατανομή $\mathcal{H}$ δίνεται από τον πυρήνα της $\varpi$, έτσι ώστε στο $p \in P$ να ισχύει $\mathcal{H}_p = \ker \varpi_p \subset T_pP$. Είδαμε επίσης ότι υπάρχει μοναδική $H$-ισοαναλλοίωτη 2-μορφή $\Omega_\mathfrak{h}$ στον $P$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{h}$, τέτοια ώστε να ισχύει ότι $R(X, Y)(p) = X_p^{\Omega_\mathfrak{h}(X(p), Y(p))}$ και να καταλήγουμε στην εξίσου γνωστή δομική εξίσωση $\Omega_{\mathfrak{h}} = \mathrm{d}\varpi + (1/2)[\varpi, \varpi]$. Η ταυτότητα Bianchi για την $\Omega_{\mathfrak{h}}$ θα είναι $\mathrm{d}^{\varpi}\Omega_{\mathfrak{h}} = \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} + [\varpi, \Omega_{\mathfrak{h}}] = \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} - [\Omega_{\mathfrak{h}}, \varpi] = 0$. Η $\mathrm{d}^{\varpi}$ είναι η εξωτερική συναλλοίωτη παράγωγος (ως προς την $\varpi$).

$$\begin{tikzcd} TP \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

Ας μελετήσουμε τώρα την έννοια της συνοχής Ehresmann στη γλώσσα των αλγεβροειδών Lie. Έστω ο μδδ της παραπάνω εικόνας. Καθώς $\pi(pg) = \pi(p)$ και $\pi_{*ph} \circ (\mathfrak{R}_{h*})_p = \pi_{*p}$, εφόσον για $X \in T_pP$, $(\mathfrak{R}_{h*})_pX \in T_{ph}P$ και άρα έπεται ότι $(\pi_{*ph} \circ (\mathfrak{R}_{h*})_p)(X) \in T_{\pi(ph)}M = T_{\pi(p)}M$, μπορούμε να πάρουμε το πηλίκο της αριστερής δέσμης του διαγράμματος με την $H$, καταλήγοντας έτσι στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} TP/H \arrow[r] \arrow[d] & TM \arrow[d] \\ P/H \cong M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Έχουμε έτσι μια άγκυρα $q : TP/H \to TM$. Είναι φανερό ότι ο πυρήνας της $q$ θα είναι ο $VP/H \cong P \times_H \mathfrak{h}$, όπου $P \times_H \mathfrak{h} \equiv (P \times \mathfrak{h})/H$ για συντομία, καθώς είπαμε πριν ότι $P \times_H \mathfrak{h} \to TM$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Τελικά, έχουμε μια ακριβή ακολουθία (διανυσματικών δεσμών) *Atiyah* [**25**]:

$$0 \to P \times_H \mathfrak{h} \to TP/H \xrightarrow{q} TM \to 0$$

Η εφαπτόμενη δέσμη $TM$ είναι ένα τετριμμένο αλγεβροειδές Lie, όπου η άγκυρα είναι η ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή $\mathrm{id} : TM \to TM$ και η αγκύλη στο $\mathfrak{X}M$ είναι ο μεταθέτης δύο διανυσματικών πεδίων της $M$. Επομένως, $P \times_H \mathfrak{h}$ και $TM$ είναι αλγεβροειδή Lie με βάση $M$ και μπορούμε να ορίσουμε μια δομή αλγεβροειδούς Lie στη δέσμη $TP/H$. Αυτό το αλγεβροειδές Lie θα καλείται *αλγεβροειδές Atiyah*. Έχουμε ήδη αναφέρει την απαιτούμενη άγκυρα του αλγεβροειδούς με βάση $M$, $q : TP/H \to TM$. Μένει να ορίσουμε την αγκύλη για τις τμήσεις της $TP/H \to M$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισομορφισμό $\mathcal{C}^\infty M$-προτύπων $\Gamma(TP/H) \to \Gamma_H(TP)$ με $X \mapsto \widetilde{X}$, όπου $\Gamma_H(TP) \equiv \mathfrak{X}_H P$ είναι το σύνολο των $H$-αναλλοίωτων τμήσεων της $TP \to P$, δηλαδή το σύνολο εκείνων των διανυσματικών πεδίων $\widetilde{X}$, για τα οποία ισχύει ότι $\widetilde{X}_p = \mathfrak{R}_{h*}\widetilde{X}_p$. Με άλλα λόγια, οι τμήσεις της $TP/H \to M$ βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα $H$-αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στον $P$. Καθώς η μετάθεση στοιχείων του $\mathfrak{X}_H P$ είναι κλειστή, μπορούμε να ορίσουμε μια αγκύλη για τα στοιχεία του $\Gamma(TP/H)$ μέσω της έκφρασης $\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.

Μπορεί να δειχθεί ότι αυτή η αγκύλη ικανοποιεί τις ιδιότητες της αγκύλης ενός αλγεβροειδούς Lie [**22**] και άρα $(TP/H, q, [\ ,\ ])$ ορίζει ένα αλγεβροειδές Lie στην $M$. Η ακριβής ακολουθία Atiyah εμπεριέχει πληροφορία για τις σχέσεις μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αυτομορφισμών της κύριας $H$-δέσμης $(P, \pi, M)$. Αρχικά, οι τμήσεις του τετριμμένου αλγεβροειδούς $TM$ παράγουν τις αμφιδιαφορίσεις της $M$, δηλαδή εκείνους τους μετασχηματισμούς της κύριας δέσμης, οι οποίοι είναι αμιγώς εξωτερικοί, υπό την έννοια ότι απλά εναλλάσσουν τις θέσεις των διαφορετικών ινών. Έπειτα, οι τμήσεις του συζυγούς αλγεβροειδούς $P \times_H \mathfrak{h}$ παράγουν αμιγώς εσωτερικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή κάθετους αυτομορφισμούς του $P$, τους οποίους συναντάμε στην ορολογία της φυσικής ως τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τέλος, οι τμήσεις του αλγεβροειδούς Atiyah, δηλαδή τα $H$-αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στον $P$, παράγουν γενικούς αυτομορφισμούς του $P$, δηλαδή αυτομορφισμούς που έχουν τόσο εξωτερικές, όσο και εσωτερικές συνιστώσες. Υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών αυτομορφισμών της $P \to M$. Οι πρώτοι προκύπτουν από την τοπικοποίηση της ολικής δράσης της $\mathfrak{h}$ στον $P$, ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τις αμφιδιαφορίσεις της $M$. Παρακάτω, θα εξηγήσουμε πως μια συνοχή Cartan θα μας επιτρέψει να ερμηνεύσουμε αυτές τις αμφιδιαφορίσεις στα πλαίσια μιας τοπικής δράσης.

Ας αναλύσουμε σε αυτό το σημείο τις συμμετρίες της $\varpi$. Θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας την παράγωγο Lie $\pounds_X$ της $\varpi$, χρησιμοποιώντας τη σχέση Cartan $\pounds_X = i_X \mathrm{d} + \mathrm{d} i_X$, όπου $X \in \mathfrak{X}P$ και $i_X : \mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^{p-1}$ με $i_X(\varpi)(X_1, \cdots, X_p) := \varpi(X, X_1, \cdots, X_p)$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\pounds_X \varpi &= i_X \mathrm{d}\varpi + \mathrm{d}(\varpi(X)) = i_X \Omega_{\mathfrak{h}} - \frac{1}{2} i_X [\varpi, \varpi] + \mathrm{d}(\varpi(X)) \\
&= i_X \Omega_{\mathfrak{h}} - \frac{1}{2}([\varpi(X), \varpi] - [\varpi, \varpi(X)]) + \mathrm{d}(\varpi(X)) \\
&= i_X \Omega_{\mathfrak{h}} + [\varpi, \varpi(X)] + \mathrm{d}(\varpi(X))
\end{aligned}$$

καθώς $\varpi \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{h})$ και $\varpi(X) \in \mathcal{A}^0(P, \mathfrak{h}) = \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{h})$ με την εσωτερική παράγωγιση $i_X$ να ακολουθεί τους κανόνες της εξωτερικής παραγώγισης (ως αντιπαραγώγιση). Ας θεωρήσουμε συγκεκριμένα ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $X^\alpha$ που παράγει τους ολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας του $P$. Καθώς η καμπυλότητα είναι οριζόντια και $\varpi(X^\alpha) = \alpha$ μια σταθερή συνάρτηση στον $P$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{h}$, έπεται ότι:

$$\pounds_{X^\alpha} \varpi = [\varpi, \alpha] = -[\alpha, \varpi] = -\operatorname{ad}(\alpha)\varpi$$

αφού $\mathrm{d}(\alpha) = 0 = i_{X^\alpha} \Omega_{\mathfrak{h}}$.

Πρόκειται για την απειροστή εκδοχή της συνθήκης της $H$-ισοαναλλοιότητας $\mathfrak{R}_h{}^* \varpi = \operatorname{Ad}(h^{-1})\varpi$. Είδαμε ότι η ολική $\mathfrak{h}$-δράση στον $P$ μπορεί να τοπικοποιηθεί μεταβαίνοντας από τα κάθετα διανυσματικά πεδία $X^\alpha$ (που ορίζει το κάθε $\alpha \in \mathfrak{h}$) στους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας που ορίζουν οι τμήσεις $\sigma \in \Gamma(P \times_H \mathfrak{h})$ του συζυγούς αλγεβροειδούς Lie. Μια τμήση $\sigma : M \to P \times_H \mathfrak{h}$ μπορεί να ανυψωθεί με φυσικό τρόπο σε μια τμήση $\widetilde{\sigma} : P \to P \times \mathfrak{h}$, όπου $\widetilde{\sigma}(p) = (p, \tau(p, \sigma(\pi(p))))$ με $\tau : P \times (P \times_H \mathfrak{h}) \to \mathfrak{h}$ να είναι η κανονική (canonical) απεικόνιση. Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε ένα τοπικό κάθετο διάνυσμα $X_{\widetilde{\sigma}}$ στον $P$, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $X_{\widetilde{\sigma}}(p) = X^{\phi_{\widetilde{\sigma}}(p)}(p)$. Ας υπολογίσουμε λοιπόν την παράγωγο Lie της $\varpi$ ως προς το $X_{\widetilde{\sigma}}$. Πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι πλέον $\varpi(X_{\widetilde{\sigma}})$ δεν είναι απαραίτητα σταθερή, αλλά ισχύει ακόμη ότι $i_{X_{\widetilde{\sigma}}} \Omega_{\mathfrak{h}} = 0$. Θα έχουμε ότι:

$$\pounds_{X_{\widetilde{\sigma}}} \varpi = [\varpi, \varpi(X_{\widetilde{\sigma}})] + \mathrm{d}(\varpi(X_{\widetilde{\sigma}})) = [\varpi, \phi_{\widetilde{\sigma}}] + \mathrm{d}\phi_{\widetilde{\sigma}} =: \mathrm{d}^\varpi \phi_{\widetilde{\sigma}} \tag{7.1}$$

όπου $\phi_{\widetilde{\sigma}} \in \mathcal{C}^H(P, \mathfrak{h}) = \mathcal{A}^0_{hor}(P, \mathfrak{h})^H$ δίνεται από $\phi_{\widetilde{\sigma}}(p) = \omega_p(X_{\widetilde{\sigma}}(p))$. Ανακτήσαμε έτσι τη συνήθη έκφραση των τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας της 1-μορφής συνοχής $\varpi$. Θα συμβολίσουμε τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας που ορίζει η $\phi$ με $\delta_\phi$. Τέλος, ας εξετάσουμε πως μετασχηματίζεται η καμπυλότητα υπό έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \Omega_{\mathfrak{h}} := \pounds_{X_{\widetilde{\sigma}}} \Omega_{\mathfrak{h}} &= i_{X_{\widetilde{\sigma}}} \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} + \mathrm{d}(\Omega_{\mathfrak{h}}(X_{\widetilde{\sigma}})) = i_{X_{\widetilde{\sigma}}}(\mathrm{d}^\varpi \Omega_{\mathfrak{h}} - [\varpi, \Omega_{\mathfrak{h}}]) \\
&= -[\varpi(X_{\widetilde{\sigma}}), \Omega_{\mathfrak{h}}] + [\varpi, \Omega_{\mathfrak{h}}(X_{\widetilde{\sigma}})] = -[\phi_{\widetilde{\sigma}}, \Omega_{\mathfrak{h}}] = [\Omega_{\mathfrak{h}}, \phi_{\widetilde{\sigma}}]
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Bianchi $\mathrm{d}^\varpi \Omega_{\mathfrak{h}} = \mathrm{d}\Omega_{\mathfrak{h}} + [\varpi, \Omega_{\mathfrak{h}}] = 0$ και το γεγονός ότι $i_{X_{\widetilde{\sigma}}} \Omega_{\mathfrak{h}} = \Omega_{\mathfrak{h}}(X_{\widetilde{\sigma}}) = 0$.

## 7.2. Το πρόγραμμα του Cartan

Το πρόγραμμα του Cartan μπορεί να ιδωθεί ως μια διπλή γενίκευση, τοσο της γεωμετρίας Riemann, όσο και του προγράμματος του Erlangen (του Felix Klein). Ένας από τους ορισμούς της γεωμετρίας Cartan είναι ότι πρόκειται για μια πολλαπλότητα, απειροστά προτυποποιημένη βάσει μια γεωμετρίας Klein, αλλά τοπικά παραμορφωμένη (deformed) από τη λεγόμενη καμπυλότητα Cartan. Σε αντίθεση με τη γεωμετρία Riemann, ο εφαπτόμενος χώρος μιας γεωμετρίας Cartan δεν είναι απαραίτητα επίπεδος, αλλά είναι ένας μεγιστικά συμμετρικός (ομογενής) χώρος. Σε αντίθεση με τις γεωμετρίες Klein, οι γεωμετρίες Cartan δεν είναι απαραιτήτως μεγιστικά συμμετρικές. Θα μπορούσαμε υπό μια έννοια να πούμε ότι ενώ οι γεωμετρίες Riemann πηγάζουν από την "τοπικοποίηση" της ευκλείδειας ομάδας, οι γεωμετρίες Cartan πηγάζουν από την "τοπικοποίηση" της ομάδας συμμετρίας μιας γεωμετρίας Klein. Το πρόγραμμα του Cartan φέρνει στο προσκήνιο την έννοια της τοπικής συμμετρίας (που συναντάμε σε θεωρίες βαθμίδας) στη θέση της έννοιας της τοπικής επιπεδότητας του Riemann, δηλαδή ενώ μια πολλαπλότητα Riemann είναι απειροστά ένας επίπεδος χώρος, μια γεωμετρία Cartan είναι απειροστά ένας ομογενής χώρος. Επομένως, η τοπική παραμόρφωση που περιγράφει η καμπυλότητα Cartan δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως πραγματική καμπύλωση, αλλά ως απόκλιση από τις τοπικές συμμετρίες των πρότυπων γεωμετριών Klein.

Είδαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο της γεωμετρίας Cartan, πως να κατασκευάσουμε μια τέτοια γεωμετρία. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε απαιτεί ουσιαστικά (μεταξύ άλλων) την ύπαρξη ενός πρότυπου ζεύγους Klein $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ με ομάδα $H$ να πραγματώνει την $\mathfrak{h}$, δηλαδή δεν χρειαζόμαστε πραγματικά μια κύρια ομάδα Lie $G$. Ας δούμε σε αυτό το σημείο έναν εναλλακτικό τρόπο κατασκευής μιας γεωμετρίας Cartan με τη μέθοδο της αναγωγής δέσμης (bundle reduction), συνάπτοντας (attaching) και συγκολλώντας μια γεωμετρία Klein σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας $M$. Ας ξεκινήσουμε από τη γεωμετρία Klein. Έστω $M_0$ μια λεία συνεκτική πολλαπλότητα, εφοδιασμένη με μια μεταβατική δράση της κύριας ομάδας $G$. Έστωσαν επίσης $m$ κάποιο σημείο της $M_0$ και $H$ ο σταθεροποιητής του $m \in M_0$. Είπαμε ότι η $(G, H)$ είναι μια γεωμετρία Klein και καθώς $\pi_m : G \to M_0$ με $g \mapsto gm$ είναι επί, δείξαμε ότι υπάρχει αμφιδιαφόριση $G/H \to M$ με $[g] \mapsto gm$. Με αυτόν τον τρόπο, η επιλογή ενός σημείου $m$ σε μια $G$-ομογενή πολλαπλότητα $M_0$ επιτρέπει τον ορισμό μιας αμφιδιαφόρισης μεταξύ της $M_0$ και του σύμπλοκου χώρου. Μπορούμε λοιπόν ισοδύναμα να μιλάμε για μια γεωμετρία Klein $(M_0, m)$ που συσχετίζεται με το ζεύγος $(G, H)$. Παρακάτω, θα θεωρήσουμε ότι η $\mathfrak{g}$ ανάγεται σε $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, όπου $\mathfrak{p}$ ο $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτος υπόχωρος της $\mathfrak{g}$ (που είναι το συμπλήρωμα της $\mathfrak{h}$ σε αυτήν), έτσι ώστε $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, έτσι ώστε $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, όπως και θα υποθέσουμε ότι ο δχ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ είναι εφοδιασμένος με ένα $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτο βαθμωτό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε μια γεωμετρία Cartan σε μια πολλαπλότητα $M$, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα ζεύγος $(G, H)$, τέτοιο ώστε $\dim G/H = \dim M$. Έπειτα, θα προτυποποιήσουμε απειροστά τη γεωμετρία της $M$, συνάπτοντας σε κάθε $x \in M$ μια εφαπτόμενη γεωμετρία Klein $(G, H)$. Για να το κάνουμε αυτό, ας εισάγουμε αρχικά μια κύρια $G$-δέσμη $(P_G, \pi, M)$, εφοδιασμένη με μια συνοχή Ehresmann $\omega_{\mathfrak{g}}$. Κάθε ίνα αυτής της δέσμης θα είναι ισομορφική με το σύνολο των αφινικών πλαισίων $(m, e)$ σε μια γεωμετρία Klein $(G, H)$, όπου ένα αφινικό πλαίσιο αποτελείται από ένα σημείο $m \in M_0$ και ένα πλαίσιο $e$ του εφαπτόμενου χώρου της $M_0$ στο $m$. Προς το παρόν, αυτά τα "εσωτερικά" αφινικά πλαίσια δεν έχουν καμία σχέση με τους εφαπτόμενους χώρους της $M$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα πλαίσια μπορούν υπό μια έννοια να "εξωτερικευθούν", δηλαδή να συναφθούν και να συγκολληθούν στην $M$. Για να γίνει αυτό, χρειαζόμαστε παραπάνω γεωμετρική πληροφορία και συγκεκριμένα μια αναγωγή της $P_G \to M$ στην κύρια $H$-δέσμη $P_H \to M$ και μια κατάλληλη συγκολλητική μορφή.

Το πρώτο βήμα στην εξωτερίκευση των εσωτερικών πλαισίων του $P_G$ είναι να συνάψουμε ένα αντίγραφο της $G/H$ σε κάθε $x \in M$. Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας τη συσχετισμένη $G$-δέσμη $(P_G \times_G G/H, \varrho, M)$. Ένα σημείο του $P_G \times_G G/H$ είναι μια κλάση $G$-ισοδυναμίας της μορφής $[(p,[g]_H)]_G$, όπου $[g]_H \in G/H$ είναι μια κλάση $H$-ισοδυναμίας. Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε αυτήν τη συσχετισμένη δέσμη παίρνοντας το πηλίκο του $P_G$ με την $H$. Πράγματι, υπάρχει ο ισομορφισμός $P_G \times_G G/H \cong P_G/H$ με $[(p,[g]_H)]_G \mapsto [pg]_H$ και αντιστρόφως, $[p]_H \mapsto [(p,[e]_H)]_G$. Θα συμβολίζουμε την ίνα $\varrho^{-1}(x)$ με $M_0^x$. Πρέπει τώρα να επιλέξουμε με λείο τρόπο ένα σημείο σύναψης στην $M_0^x$ για κάθε $x \in M$ μέσω μιας ολικής τμήσης $\sigma : M \to P_G \times_G G/H \cong P_G/H$. Μέσω αυτής της επιλογής, κάθε ζεύγος $(M_0^x, \sigma(x))$ είναι μια γεωμετρία Klein, συσχετισμένη με το ζεύγος $(G,H)$. Θα καλούμε αυτές τις γεωμετρίες Klein *τοπικά ομογενή πρότυπα* (τοπ) της επακόλουθης γεωμετρίας Cartan. Επομένως, μπορούμε πλέον να συνάψουμε κάθε τοπ $M_0^x$ στο $x \in M$ στο σημείο $\sigma(x)$. Επιπλέον, η πληροφορία που μας δίνει η $\sigma$ είναι ισοδύναμη με αυτήν που παίρνουμε από μια $G$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση $\varphi_\sigma : P_G \to G/H$ με $\varphi_\sigma(pg) = g^{-1}\varphi_\sigma(p)$, δηλαδή με άλλα λόγια, $\varphi_\sigma \in \mathcal{C}^G(P_G, G/H)$.

Αυτή η σύναψη ορίζει μια αναγωγή της αρχικής δέσμης $P_G \to M$ σε μια κύρια $H$-δέσμη με ολικό χώρο $P_H$. Ο $P_H$ θα δίνεται από τη σχέση $P_H = \varphi_\sigma^{-1}([e]_H)$ και η διαδικασία αναγωγής συμπυκνώνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
P_H = \varphi_\sigma^{-1}([e]_H) \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d] & P_G \arrow[r, "\varphi_\sigma"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] & G/H \\
M \arrow[r, "\sigma"] & P_G/H &
\end{tikzcd}$$

όπου $\iota : P_H \hookrightarrow P_G$ η συνήθης απεικόνιση εγκλίσεως. Είπαμε ότι μια ίνα του $P_G$ στο $x$ είναι ισομορφική με το σύνολο των αφινικών πλαισίων $(m,e)$ που εφάπτονται στην $M_0^x$. Τώρα, μια ίνα του $P_H$ στο $x$ είναι ισομορφική με το σύνολο των γραμμικών πλαισίων $(\sigma(x),e)$ στον $T_{\sigma(x)}M_0^x$. Μπορούμε να πούμε ότι η αναγωγή της $P_G$ στην $P_H$ δέσμη εκφράζει το "σπάσιμο" (ή περιορισμό) της αφινικής $G$-συμμετρίας στην $H$-συμμετρία.

Θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε αυτήν τη διαδικασία με όρους αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας των συμμετριών βαθμίδας της δέσμης $P_G$. Παρόλα αυτά, θα επιλέξουμε μια διαφορετική ερμηνεία, αυτήν της μερικής επιλογής βαθμίδας (partial gauge fixing) της αρχικής $G$-συμμετρίας. Αντί να επιλέγουμε ένα αφινικό πλαίσιο $(m,e)$, εφαπτόμενο στην $M_0^x$ για κάθε $x \in M$, έχουμε την τμήση $\sigma$ να επιλέγει (για κάθε $x$) το σταθερό σημείο $m$. Με άλλα λόγια, η $\sigma$ απλά επιλέγει τη κλάση $H$-ισοδυναμίας $(\sigma(x),e)$ των γραμμικών πλαισίων στο $m = \sigma(x)$ της $M_0^x$. Με αυτόν τον τρόπο, η τμήση $\sigma$ μπορεί να ιδωθεί ως η επιλογή βαθμίδας που σπάει τη συμμετρία των μετατοπίσεων κάθε προτύπου Klein. Επομένως, η μερική επιλογή βαθμίδας δεν επηρεάζει τη συμμετρία βαθμίδας Lorentz (Lorentz gauge) που συσχετίζεται με το σύνολο των γραμμικών πλαισίων $(\sigma(x),e)$ για κάθε $x \in M$. Για να υπερασπιστούμε αυτήν την προσέγγιση, ας επανερμηνεύσουμε τη συνήθη επιλογή βαθμίδας ως μια αναγωγή της $P_G$ σε μια κύρια $\{e_G\}$-δέσμη. Με βάση τη μέθοδο που ακολουθήσαμε προηγουμένως, μια τέτοια αναγωγή θα δίνεται είτε από μια τμήση:

$$\sigma : M \to P_G \times_G G/\{e_G\} \cong P_G/\{e_G\} = P_G$$

είτε από μια $G$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση $\varphi_\sigma : P_G \to G/\{e_G\} = G$. Ο ολικός χώρος της ανηγμένης δέσμης θα δίνεται από $P_{\{e_G\}} = \varphi_\sigma^{-1}(e_G)$. Από όλα τα αφινικά πλαίσια στην ίνα του $P_G$, η $\{e_G\}$-αναγωγή επιλέγει ένα μοναδικό πλαίσιο, εκείνο που ταυτοποιείται μέσω της $\varphi_\sigma$ με την ταυτότητα στην $G$. Επομένως, η επιλογή βαθμίδας μπορεί πράγματι να ερμηνευθεί ως μια πλήρης αναγωγή της $P_G$ στην $P_{\{e_G\}}$ δέσμη. Αντίστοιχα με την πλήρη αναγωγή, μια μερική αναγωγή $P_G \hookleftarrow P_H$ , με $H$ να είναι μη τετριμμένη υποομάδα της $G$, δύναται να ερμηνευθεί ως μερική επιλογή βαθμίδας. Αντί δηλαδή να επιλέγουμε ένα μοναδικό πλαίσιο για κάθε $x$, επιλέγουμε μια μη τετριμμένη κλάση $H$-ισοδύναμων πλαισίων για κάθε $x$.

## 7.3. Απόλυτος παραλληλισμός και συνοχές Cartan

Έστω ότι η συνοχή Ehresmann $\omega_{\mathfrak{g}}$ στον $P_G$ ικανοποιεί τη συνθήκη $\ker \omega_{\mathfrak{g}} \cap \iota_* TP_H = 0$, όπου $\iota : P_H \hookrightarrow P_G$. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι για τον περιορισμό $\omega := \iota^* \omega_{\mathfrak{g}}$ της $\omega_{\mathfrak{g}}$ στον $P_H$ ισχύει ότι $\ker \omega = 0$. Αυτή η συνθήκη, μαζί με το γεγονός ότι $\dim G = \dim P_H$, υποδηλώνει ότι η 1-μορφή $\omega : TP_H \to \mathfrak{g}$ επάγει έναν γραμμικό ισομορφισμό $T_p P_H \cong \mathfrak{g}$ για κάθε $p \in P_H$. Η 1-μορφή $\omega$ είναι η συνοχή Cartan που μελετήσαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο και το ζεύγος $(P_H, \omega)$ είναι μια γεωμετρία Cartan στην $M$ με πρότυπη γεωμετρία $(G, H)$. Έχουμε δείξει επίσης ότι η $\omega$ είναι $H$-ισοαναλλοίωτη και ότι $\omega_p(X_p^\alpha) = \alpha$ για $\alpha \in \mathfrak{h}$. Είναι προφανές ότι η $\omega$ δεν μπορεί να είναι μια συνοχή Ehresmann στον $P_H$, καθώς το πεδίο τιμών της δεν είναι στην άλγεβρα Lie της δομικής ομάδας της $P_H \to M$, αλλά στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Η $\omega$ επεκτείνει τον φυσικό κάθετο παραλληλισμό $P_H \times \mathfrak{h} \to VP_H$ σε έναν απόλυτο παραλληλισμό $P_H \times \mathfrak{g} \to TP_H$ με $(p, \alpha) \mapsto X_p^\alpha = \omega_p^{-1}(\alpha)$. Έπειτα, τα διανυσματικά πεδία στον $P_H$ που δίνονται από την απεικόνιση $\mathfrak{g} \to TP_H$ με $\alpha \mapsto X^\alpha$, καλούνται *παράλληλα* διανυσματικά πεδία. Ενώ ο κάθετος παραλληλισμός $P_H \times \mathfrak{h} \to VP_H$ ορίζεται φυσικά από την κάθετη δράση της δομικής ομάδας $H$ στον $P_H$, ο απόλυτος παραλληλισμός εξαρτάται από τη συνοχή Cartan $\omega$.

Ας ξεχάσουμε τώρα τον ήδη υπάρχοντα συμβολισμό της καμπυλότητας Ehresmann. Χρησιμοποιώντας τις προβολές $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ και $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, παρατηρούμε ότι η αναγωγική ανάλυση της $\mathfrak{g}$ επάγει την ανάλυση της $\omega$ σε $\omega_{\mathfrak{h}} + \theta$, όπου $\omega_{\mathfrak{h}} := \pi_{\mathfrak{h}} \circ \omega$ και $\theta := \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \circ \omega$. Η $\omega_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{A}^1(P_H, \mathfrak{h})$ είναι μια συνοχή Ehresmann στον $P_H$, την οποία συναντάμε στη βιβλιογραφία της φυσικής ως *σπιν συνοχή* (spin connection), ενώ η $\theta$ είναι η συγκολλητική μορφή, δηλαδή μια οριζόντια και $H$-ισοαναλλοίωτη (δηλαδή $\mathfrak{R}_h{}^* \theta = \mathrm{Ad}(h^{-1})\theta$) 1-μορφή στον $P_H$ με πεδίο τιμών στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ύστερα, η καμπυλότητα Cartan $\Omega \in \mathcal{A}^2(P_H, \mathfrak{g})$ μια γεωμετρίας Cartan $(P_H, \omega)$ δίνεται από τη συνήθη δομική εξίσωση $\Omega = \mathrm{d}\omega + (1/2)[\omega, \omega] = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, όπου $\Omega_{\mathfrak{h}} := \pi_{\mathfrak{h}} \circ \Omega$ και $\Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} := \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \circ \Omega$. Η $\Omega$ είναι οριζόντια μορφή **[40]** και η καμπυλότητα $R \in \mathcal{A}^2(P_H, \mathfrak{h})$ και η στρέψη $T \in \mathcal{A}^2(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ μιας γεωμετρίας Cartan $(P_H, \omega)$ δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{d}\omega_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}] = \Omega_{\mathfrak{h}} - \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} \\ T &= \mathrm{d}\theta + [\omega_{\mathfrak{h}}, \theta] = \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} - \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] &= \underbrace{\mathrm{d}\omega_{\mathfrak{h}} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{h}}]}_{R} + \underbrace{\mathrm{d}\theta + [\omega_{\mathfrak{h}}, \theta]}_{T} + \frac{1}{2}[\theta, \theta] \\ &= R + T + \frac{1}{2}([\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} + [\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = \underbrace{R + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}}_{\Omega_{\mathfrak{h}}} + \underbrace{T + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}_{\Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}} \end{aligned}$$

εφόσον $[\omega_{\mathfrak{h}}, \theta] = [\theta, \omega_{\mathfrak{h}}]$. Έχουμε δείξει ότι για την καμπυλότητα Cartan ισχύει η ταυτότητα Bianchi $\mathrm{d}^\omega \Omega = 0$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^\omega \Omega = \mathrm{d}\Omega + [\omega, \Omega] &= \mathrm{d}(R + T + (1/2)[\theta, \theta]) + [\omega, R] + [\omega, \theta] + \frac{1}{2}[\omega, [\theta, \theta]] \\ &= \mathrm{d}R + \mathrm{d}T + [\mathrm{d}\theta, \theta] + [\omega_{\mathfrak{h}}, R] + [\theta, R] + [\omega_{\mathfrak{h}}, T] + [\theta, T] + [[\omega_{\mathfrak{h}}, \theta], \theta] \\ &= \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} R + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} T + [T, \theta] + [\theta, T] + [\theta, R] = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} R + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} T + [\theta, R] = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $[\theta, [\theta, \theta]] = 0$ και $[\omega_{\mathfrak{h}}, [\theta, \theta]] = 2[[\omega_{\mathfrak{h}}, \theta], \theta]$ από (βαθμωτή) ταυτότητα Jacobi. Τελικά, η ταυτότητα Bianchi οδηγεί στις επί μέρους ταυτότητες Bianchi, $\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} R = 0$ και $\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} T = [R, \theta]$, όπου τώρα $R$ είναι η καμπυλότητα Ehresmann και $T$ η στρέψη. Γενικά, η επιπεδότητα (flatness) κατά Cartan δεν σημαίνει ότι $R = 0$ και $T = 0$, αλλά ότι $\Omega_{\mathfrak{h}} = \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = 0$, δηλαδή $R_0 = -(1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}$ και $T_0 = -(1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Μιλήσαμε επίσης για συμμετρικά πρότυπα (symmetric models), δηλαδή πρότυπα για τα οποία ισχύει ότι $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ πέραν του απαραίτητου $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Τέτοια πρότυπα χρησιμοποιούνται κατά κόρον στη φυσική και κάποιοι γνωστοί πρότυποι χώροι είναι οι Minkowski ($\mathbb{R}^{1,n-1}$), de Sitter ($dS^n$) και Anti de Sitter ($AdS^n$) χωροχρόνοι, οι οποίοι μοιράζονται την ομάδα Lorentz $O(1, n-1)$ ως σταθεροποιητή κάθε σημείου τους, αλλά αντιστοιχούν σε διαφορετικές κύριες ομάδες, τις ομάδες Poincaré, de Sitter και Anti de Sitter αντίστοιχα, δηλαδή τις $Poinc(1, n-1)$, $O(1, n)$ και $O(2, n-1)$. Στα πλαίσια των βαρυτικών θεωριών, η επιλογή ενός συμμετρικού ομογενή χώρου εκ των άνω εξαρτάται από την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς $\Lambda$, δηλαδή για $\Lambda = 0$ έχουμε βαρύτητα Einstein με Minkowski πρότυπο χώρο, για $\Lambda > 0$ έχουμε de Sitter βαρύτητα και για $\Lambda < 0$ έχουμε AdS βαρύτητα με $dS^n$ και $AdS^n$ χωροχρόνους αντίστοιχα.

Για τα συμμετρικά πρότυπα ισχύει ότι $T = \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ και άρα $\Omega = (R + (1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}) + T$, το οποίο σημαίνει οτι η στρέψη $T$ εμφανίζεται φυσικά ως η συνιστώσα μετατοπίσεων της $\Omega$. Αν επιπλέον το πρότυπο ικανοποιεί τη σχέση $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] = 0$, τότε $\Omega = R + T$. Σε κάθε περίπτωση, η καμπυλότητα και η στρέψη μπορούν να ερμηνευθούν ως διαφορετικές συνιστώσες μιας μοναδικής συνοχής Cartan. Για παράδειγμα, στη γνωστή θεωρία βαρύτητας Einstein-Cartan, η στρέψη εξαρτάται από την πυκνότητα σπιν ρεύματος και επομένως, αυτή η θεωρία συμπίπτει με τη γενική σχετικότητα απουσία σπινοριακών πεδίων. Αν $T = 0$, τότε η σπιν συνοχή εξαρτάται πλήρως από την $\theta$, ενώ στη γενική περίπτωση, οι $\omega_{\mathfrak{h}}, \theta$ είναι πλήρως ανεξάρτητες γεωμετρικές δομές. Αυτό σημαίνει ότι γενικά ο παραλληλισμός που ορίζεται από την $\omega_{\mathfrak{h}}$ "αποσυζευγνύεται" από τις γεωμετρικές δομές που ορίζει η $\theta$, δηλαδή μια μετρική στην $M$ και την έννοια της κατά Cartan ανάπτυξης (development). Η μεγάλη αξία του φορμαλισμού Cartan είναι λοιπόν η ενοποίηση των γεωμετρικών δομών που ορίζουν η σπιν συνοχή και η συγκολλητική μορφή σε μια ενιαία γεωμετρική δομή που ορίζει η συνοχή Cartan $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \theta$.

Ένα τετριμμένο παράδειγμα συνοχής Cartan δίνεται από τη μορφή Maurer-Cartan $\omega_G$ μιας ομάδας Lie $G$. Είδαμε ότι η $\omega_G$ είναι μια 1-μορφή με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$ που βρίσκεται στον ολικό χώρο $G$ της δέσμης $G \to G/H$ με ίνα $H$. Είδαμε επίσης ότι για την καμπυλότητα της $\omega_G$ ισχύει ότι $\Omega = \mathrm{d}\omega_G + (1/2)[\omega_G, \omega_G] = 0$, δηλαδή η $\omega_G$ είναι επίπεδη κατά Cartan. Με άλλα λόγια η κατά Cartan επιπεδότητα $\Omega = 0$ δίνεται από τη γεωμετρία Klein $(G/H, [e_G])$ που συσχετίζεται κανονικά με το ζεύγος $(G, H)$. Προφανώς, για αυτήν τη γεωμετρία Klein δεν ισχύει απαραίτητα ότι $R = T = 0$, δηλαδή η καμπυλότητα Cartan δεν μετράει την απόκλιση από την επιπεδότητα και την απουσία στρέψης, αλλά την απόκλιση από τις συμμετρίες της κύριας ομάδας της πρότυπης γεωμετρίας. Υπό αυτήν την έννοια, μια γεωμετρία Cartan $(P_H, \omega)$ στην $M$ με αυθαίρετη πρότυπη γεωμετρία (συσχετισμένη με το ζεύγος) $(G, H)$ είναι η μη ομογενής γενίκευση της γεωμετρίας Cartan $(G, \omega_{\mathfrak{g}})$ με πρότυπη γεωμετρία Klein $(G/H, [e_G])$.

## 7.4. Η συγκολλητική μορφή

Όπως είδαμε, η ολική τμήση $\sigma$ συνάπτει ένα τοπ $M_0^x$ σε κάθε $x \in M$ στο *σημείο επαφής* $\sigma(x) \in M_0^x$. Θα δείξουμε τώρα ότι η συγκολλητική μορφή $\theta$ που ορίζεται από τη συνοχή Cartan $\omega$ εμπλουτίζει αυτού του είδους την ταυτοποίηση, ταυτοποιώντας τον κάθε $T_xM$ με τον $T_{\sigma(x)}M_0^x$. Με αυτόν τον τρόπο, το τοπ $M_0^x$ που συνάπτεται στο $x$ μέσω της $\sigma$, θα συγκολλάται επιπλέον στην $M$ στο σημείο επαφής $\sigma(x)$.

Δοθείσας μιας συγκολλητικής μορφής $\theta : TP_H \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ μπορούμε να ορίσουμε την ακόλουθη 1-μορφή στην $M$, $\widetilde{\theta} : TM \to E := P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, η οποία σχετίζεται με την $\theta$ μέσω του ισομορφισμού $\mathcal{A}^q_{hor}(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})^H \cong \mathcal{A}^q(M, E)$, όπου $\mathcal{A}^q_{hor}(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})^H$ συμβολίζει τις οριζόντιες και $H$-ισοαναλλοίωτες διαφορικές μορφές βαθμού $q$ στην $M$ με πεδίο τιμών στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Η δέσμη με ολικό χώρο $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ μπορεί να ταυτοποιηθεί με τη δέσμη των διανυσμάτων που εφάπτονται στις ίνες του $P_G \times_G G/H$, $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \cong V_\sigma(P_G \times_G G/H)$, όπου $\sigma : M \to P_G \times_G G/H$

η τμήση, μέσω της (pull-back της) οποίας η $P_G$ ανάγεται στην $P_H$ δέσμη. Πράγματι, η ίνα της δέσμης $P_H$ στο $x$ αποτελείται από πλαίσια, εφαπτόμενα στην $M_0^x \cong G/H$ στο $\sigma(x)$. Τα διανύσματα της συσχετισμένης διανυσματικής δέσμης $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ είναι διανύσματα που απεικονίζονται σε πλαίσια της $P_H$ και των οποίων οι συντεταγμένες ανήκουν στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, δηλαδή διανύσματα, εφαπτόμενα στις ίνες $M_0^x$ του $P_G \times_G G/H$ στο $\sigma(x)$.

Από τη μια πλευρά, η $\widetilde{\theta} : TM \to E$ ταυτοποιεί κάθε $\widetilde{w} \in TM$ με κάποιο διάνυσμα του $E$ με τρόπο ανεξάρτητο από τις συντεταγμένες αυτών. Επομένως, η $\widetilde{\theta}$ μπορεί να κληθεί *γεωμετρική συγκολλητική μορφή* και ισχύει ότι $\widetilde{\theta}(\widetilde{w}) = k(p, \theta_p(w))$, όπου $w$ είναι αυθαίρετη ανύψωση του $\widetilde{w}$ στο σημείο $p \in P_H$, έτσι ώστε $\widetilde{w} = \pi_* w$. Επιπλέον, $k : P_H \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to E$ είναι μια κατάλληλη απεικόνιση που δίνει το πηλίκο με την $H$. Από την άλλη, δοθείσας μιας γεωμετρικής συγκολλητικής μορφής $\widetilde{\theta} : TM \to E$ στην $M$, η $\theta : TP_H \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ δίνεται από τη σχέση $\theta_p(w) = \tau(p, \widetilde{\theta}(\pi_* w))$ για $w \in T_p P_H$, όπου $\tau : P_H \times E \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ με $\tau(p, \widehat{w}) \mapsto (\widehat{w}_1, \cdots, \widehat{w}_n)$ για $\widehat{w} \in E$. Θα λέμε ότι η $\sigma$ επάγει μια *μηδενικής τάξης* ταυτοποίηση μεταξύ της $M$ και του τοπ $M_0^x$, ταυτοποιώντας κάθε $x \in M$ με το σημείο επαφής $\sigma(x) \in M_0^x$. Έπειτα, η γεωμετρική συγκολλητική μορφή $\widetilde{\theta}$ ταυτοποιεί κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_x M$ με τον εφαπτόμενο χώρο του εσωτερικού τοπ $M_0^x$ στο $\sigma(x)$ (*πρώτης τάξης* ταυτοποίηση). Επομένως, η γεωμετρική πληροφορία που ορίζεται από τις $\sigma$ και $\widetilde{\theta}$ είναι η σύναψη και συγκόλληση σε κάθε $x \in M$ ενός εφαπτόμενου τοπ $M_0^x$. Έτσι, περιγράψαμε επιτυχώς το πρόγραμμα Cartan, δηλαδή αντικαταστήσαμε την τοπική επιπεδότητα της γεωμετρίας Riemann με την τοπική ομοιογένεια που δίνεται από την γεωμετρία Klein $(M_0^x, \sigma(x))$, όπου $M_0^x \cong G/H$.

Θα εξηγήσουμε σε αυτό το σημείο πως η συγκολλητική μορφή επάγει μια μετρική στην $M$, χρησιμοποιώντας την $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτη μετρική στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Η συγκολλητική μορφή ορίζει έναν 1-1 $H$-μορφισμό $f^\theta : P_H \to \mathcal{F}M$ μεταξύ κάθε $p \in P_H$ και ενός πλαισίου:

$$f^\theta(p) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_{\pi(p)} M$$

στη δέσμη πλαισίων $\mathcal{F}M$. Η δέσμη πλαισίων $\mathcal{F}M \to M$ μπορεί να οριστεί με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $n$-διάστατος διανυσματικός χώρος $V$ με βάση $e$. Μπορούμε να ορίσουμε ένα πλαίσιο στον $T_x M$ ως τον ισομορφισμό $f : V \to T_x M$. Δοθέντος ενός πλαισίου $f$, κάθε $w \in T_x M$ μπορεί να εκφραστεί ως $f(v)$ για κάποιο $v \in V$, δηλαδή ως ένα ζεύγος $(f, v)$. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια δεξιά δράση της $GL(V)$ στα πλαίσια, τέτοια ώστε $fg : V \to T_x M$ να δίνεται από $(fg)(v) := f(gv)$ με $g$ να θεωρείται πίνακας, ώστε η πράξη να έχει νόημα. Έτσι, η $GL(V)$ δρά στα ζεύγη $(f, v)$ μέσω της έκφρασης $(f, v)g = (fg, g^{-1}v)$. Αυτή η δράση εγγυάται ότι $(f, v)$ και $(f, v)g$ δίνουν το ίδιο διάνυσμα του $T_x M$, καθώς:

$$(fg)(g^{-1}v) = f(gg^{-1}v) = f(v) \in T_x M$$

Έτσι, κάθε διάνυσμα του $T_x M$ μπορεί να ταυτοποιηθεί με μια κλάση ισοδυναμίας $[(f, v)]_{GL(V)}$, δηλαδή $TM \cong (\mathcal{F}M \times V)/GL(V)$.

Ο $H$-μορφισμός $f^\theta$ δίνεται από $f^\theta(p)(\alpha) = \widetilde{\theta}_p^{-1}(x)(\alpha)$ για $\alpha \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ και $x = \pi(p)$, όπου:

$$\widetilde{\theta}_p(x) : T_x M \overset{\widetilde{\theta}(x)}{\to} E \overset{\tau(p,\cdot)}{\to} \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

και για να δείξουμε ότι $f^\theta$ είναι πράγματι $H$-μορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f^\theta(ph)(\alpha) = (f^\theta(p) \cdot \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h))(\alpha) = f^\theta(p)(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\alpha)$$

όπου $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν το πλαίσιο $f^\theta(ph) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_x M$ και ας υπολογίσουμε την τιμή του για κάποιο $\alpha \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, χρησιμοποιώνας την αντίστροφη της σύνθετης απεικόνισης $\widetilde{\theta}_p(x)$. Η δράση της αντίστροφης της $\tau(ph, \cdot)$ στο $\alpha$ θα δώσει μια κλάση ισοδυναμίας $[(ph, \alpha)] \in E$, αλλά ένας άλλος αντιπρόσωπος αυτής της κλάσης είναι επίσης το ζεύγος $((ph)h^{-1}, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\alpha) = (p, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\alpha)$, δηλαδή:

$$f^\theta(ph)(\alpha) = f^\theta(p)(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\alpha)$$

Όμως, από ορισμό δράσης της $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ στα πλαίσια, ισχύει ότι:

$$f^\theta(p)(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)\alpha) = (f^\theta(p) \cdot \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h))(\alpha)$$

και άρα $f^\theta(ph) = f^\theta(p) \cdot \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)$. Τελικά, η $f^\theta$ ταυτοποιεί ένα στοιχείο $p \in P_H$ με ένα πλαίσιο $f^\theta(p) \in \mathcal{F}M$ της ίνας στο $\pi(p) \in M$. Καθώς $f^\theta$ είναι 1-1 $H$-μορφισμός, η $f^\theta(P_H)$ είναι μια $H$-υποδέσμη της δέσμης πλαισίων $\mathcal{F}M$, στον ολικό χώρο της οποίας δρα από δεξιά η $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Έτσι, η αναγωγή της δέσμης $\mathcal{F}M$ σε μια $H$-δέσμη μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε ένα βαθμωτό γινόμενο (scalar product) στους εφαπτόμενους χώρους $T_xM$ μέσω του $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτου βαθμωτού γινομένου στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, δηλαδή η $f^\theta$ (που επάγεται από τη $\theta$) ορίζει μια μετρική $g^\theta$ στην $M$. Αυτή η μετρική μπορεί να οριστεί ρητά με τη βοήθεια του $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ ως:

$$g^\theta(v, w) = \left\langle \widetilde{\theta}_p(x)(v), \widetilde{\theta}_p(x)(w) \right\rangle_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$$

για $v, w \in T_xM$, όπου $\widetilde{\theta}_p(x) : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Από την $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοιότητα της μετρικής στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνεπάγεται ότι $g^\theta(v, w)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή πλαισίου στην ίνα του (ολικού χώρου) $\mathcal{F}M$ στο $x \in M$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα της συνοχής Cartan, επάγοντας έναν ισομορφισμό μεταξύ των $TM$ και $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, μας επιτρέπει να ορίσουμε μια μετρική $g^\theta$ στην $M$, χρησιμοποιώντας την $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτη μετρική στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, δηλαδή η $g^\theta$, η οποία αποτελεί τη δυναμική μεταβλητή του συνήθους μετρικού φορμαλισμού της γενικής σχετικότητας, εμπεριέχεται υπό μια έννοια στην $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα της συνοχής Cartan $\omega$.

Είναι σημαντικό να θυμίσουμε ότι η δέσμη $\mathcal{F}M$ είναι εφοδιασμένη από μόνη της με μια οριζόντια και $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$-ισοαναλλοίωτη *κανονική μορφή* (canonical form) $\theta_c$, όπου ισχύει ότι $\theta_c : T_{e(x)}(\mathcal{F}M) \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ με $\theta_c(v) := e(x)^{-1}(\pi_* v)$ και $e(x) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_xM$ πλαίσιο στον $T_xM$ [**17**]. Αυτός ο ορισμός εξαρτάται έντονα από το γεγονός ότι οι ίνες του $\mathcal{F}M$ αποτελούνται από πλαίσια στους εφαπτόμενους χώρους της $M$. Επιπλέον, επιβεβαιώνει ότι $TM \to M$ και $\mathcal{F}M \to M$ σχετίζονται φυσικά με τη γεωμετρία της ίδιας της $M$. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο σχετικό παραδείγματα του κεφαλαίου των κύριων ινωδών δεσμών για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την $\theta_c$. Εδω θέλουμε απλά να τονίσουμε το εξής. Σε αντίθεση με την κανονική 1-μορφή $\theta_c$, η συγκολλητική μορφή $\theta$ δεν είναι κανονικά (canonically) ορισμένη. Πράγματι, η $\theta$ είναι η $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα μιας συνοχής Cartan στον $P_H$, η οποία δεν είναι κανονικά ορισμένη. Αυτή η παρατήρηση είναι συνεπής με το γεγονός ότι στις θεωρίες βαρύτητας, η $\theta$ ορίζει βαθμό ελευθερίας, επάγοντας μια συγκεκριμένη μετρική στην $M$, ενώ οι γεωμετρικές δομές που είναι κανονικά ορισμένες (όπως η $\theta_c$) είναι σταθερές δομές που δεν δύναται να ορίζουν δυναμικούς βαθμούς ελευθερίας.

## 7.5. Εξωτερικές αμφιδιαφορίσεις και εσωτερικές μετατοπίσεις βαθμίδας

Η διαφορά μεταξύ της ομάδας των (εξωτερικών) αμφιδιαφορίσεων του χωροχρόνου και της ομάδας βαθμίδας των (εσωτερικών) τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας μιας Yang-Mills θεωρίας, είναι ένα κρίσιμο εμπόδιο στην προσπάθεια κατανόησης της βαρυτικής αλληλεπίδρασης στα πλαίσια μιας θεωρίας βαθμίδας. Ενώ μια ομάδα βαθμίδας δρα εσωτερικά στις ίνες σε κάθε $x \in M$, η ομάδα $Diff(M)$ δρα εξωτερικά, υπό την έννοια ότι μετασχηματίζει χωροχρονικά σημεία από το ένα στο άλλο. Πρέπει να εξηγήσουμε με ποιόν τρόπο η $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα της συνοχής Cartan, δηλαδή η συγκολλητική μορφή, μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τον συνδετικό κρίκο μεταξύ εξωτερικών αμφιδιαφορίσεων της $M$ και εσωτερικών μετατοπίσεων στα διάφορα τοπικά ομογενή πρότυπα (τοπ).

Η $\mathfrak{h}$ συνιστώσα της $\omega$, δηλαδή η συνοχή Ehresmann $\omega_\mathfrak{h}$ στον $P_H$ ορίζει παράλληλες μεταφορές στη συσχετισμένη δέσμη με ολικό χώρο $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Καθώς η γεωμετρική συγκολλητική μορφή $\widetilde{\theta}$ ορίζει έναν ισομορφισμό $TM \to P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, η $\omega_\mathfrak{h}$ μεταφέρει τα εφαπτόμενα διανύσματα της $M$ κατά τα γνωστά. Ενώ η $\omega_\mathfrak{h}$ ορίζει παράλληλες μεταφορές "εσωτερικών" στοιχείων (στοιχείων των εφαπτομένων χώρων της $M$ στην προκειμένη), ακριβώς όπως στις θεωρίες Yang-Mills, η $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα της συνοχής Cartan, $\theta$, "μεταφέρει" υπό μια έννοια τα ίδια τα χωροχρονικά σημεία. Για να το δείξουμε αυτό, θα εισάγουμε την έννοια της ανάπτυξης κατά Cartan.

Έστω καμπύλη $\gamma : [0,1] \to M$ με αρχή το $x_0 \in M$ και έστω $\gamma^\uparrow : [0,1] \to P_H$ αυθαίρετη ανύψωση της $\gamma$ στον $P_H$, δηλαδή $\pi(\gamma^\uparrow(t)) = \gamma(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$. Έστω επίσης $\widetilde{\gamma}^\uparrow$ : $[0,1] \to G$ η *ανάπτυξη* (development) της συνοχής Cartan $\omega$ με αρχή το $g = \widetilde{\gamma}^\uparrow(0)$, δηλαδή εκείνη η μοναδική διαδρομή, για την οποία ισχύει ότι $\widetilde{\gamma}^{\uparrow *}\omega_G = \gamma^{\uparrow *}\omega$. Θα καλούμε την $\widetilde{\gamma}^\uparrow$ και ως *ανάπτυξη της* $\gamma^\uparrow$ *μεσω της* $\omega$. Μας ενδιαφέρει η ανάπτυξη μιας καμπύλης στην $M$ ως διαδρομή στην $G/H$. Έστω λοιπόν $(P_H, \omega)$ γεωμετρία Cartan με τοπ συσχετισμένο με το ζεύγος $(G, H)$ και $h : [0,1] \to H$ μερικώς (piecewise) λεία απεικόνιση. Τότε, $(\gamma^\uparrow h)^\sim = \widetilde{\gamma}^\uparrow h$, όπου $(\gamma^\uparrow h)^\sim$ η ανάπτυξη της $\gamma^\uparrow h$ με αρχή το $h(0)$ και $\widetilde{\gamma}^\uparrow$ η ανάπτυξη της $\gamma^\uparrow$ με αρχή το $e \in G$ [**31, p. 208**]. Η πρώτη συνέπεια αυτής της παρατήρησης είναι η επέκταση της έννοιας της ανάπτυξης διαδρομών στον $P_H$ σε αυτήν της ανάπτυξης διαδρομών στην $M$. Ενώ μια διαδρομή στον $P_H$ αναπτύσσει μια διαδρομή στην $G$, μια διαδρομή στην $M$ αναπτύσσει μια διαδρομή στον πρότυπο χώρο $G/H$. Πράγματι, η $\widehat{\gamma} = \varrho\widetilde{\gamma}^\uparrow : [0,1] \to G/H$ είναι η ανάπτυξη της $\gamma$ με αρχή $e \in G/H$, όπου $\varrho : G \to G/H$ η κανονική προβολή. Η $\widehat{\gamma}$ είναι μια καμπύλη ανεξάρτητη από την επιλογή ανύψωσης $\gamma^\uparrow$. Αυτό ισχύει, καθώς αν $\gamma^\uparrow : [0,1] \to P_H$ είναι μια ανύψωση της $\gamma$ με ανάπτυξη $\widetilde{\gamma}^\uparrow : [0,1] \to G$, τότε οποιαδήποτε άλλη ανύψωση είναι της μορφής $\gamma^\uparrow h$ για κάποια $h : [0,1] \to H$. Είδαμε όμως ότι $\gamma^\uparrow h$ έχει ανάπτυξη $(\gamma^\uparrow h)^\sim = \widetilde{\gamma}^\uparrow h$ και καθώς $\rho\widetilde{\gamma}^\uparrow h = \rho\widetilde{\gamma}^\uparrow$ οι δύο αναπτύξεις στον (ομογενή χώρο) $G/H$ είναι ίδιες με αρχή $\rho(\widetilde{\gamma}^\uparrow(0)) = \rho(e_G) = [e_G]_H$. Με άλλα λόγια, η ανάπτυξη της $\gamma$ στον $G/H$ είναι η προβολή στον $G/H$ της ανάπτυξης στην $G$ μιας αυθαίρετης ανύψωσης της $\gamma$ στον $P_H$. Αυτός ο ορισμός προσφέρει μια νέα αντίληψη για διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα, ιδιαίτερα για την έννοια της γεωδαισιακής. Αν ο $G/H$ είναι αναγωγικός, τότε μια ευθεία γραμμή είναι η εικόνα μιας μονοπαραμετρικής υποομάδας, της οποίας ο γεννήτορας (με τη μεσολάβηση της εκθετικής) βρίσκεται στο συμπλήρωμα $\mathfrak{p}$ της $\mathfrak{h}$ στην $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Μπορούμε να καλούμε γεωδαισιακή μια καμπύλη στην $M$, αν η ανάπτυξη της στον $G/H$ είναι ευθεία γραμμή.

Επιστρέφοντας όμως στην ανάπτυξη μιας διαδρομής στην $M$ στον $G/H$, είναι προφανές ότι αυτή θα σχετίζεται μόνο με την $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ συνιστώσα της $\omega$, δηλαδή την $\theta$. Επιπλέον, αυτή η ανάπτυξη μπορεί να ιδωθεί και με έναν εναλλακτικό τρόπο. Αφού κάθε τοπ $M_0^x$ συνάπτεται στο $x \in M$ στο σημείο επαφής $\sigma(x)$ και $M_0^x \cong G/H$, θα έχουμε ότι $\widehat{\gamma}(0)$ θα είναι το σημείο επαφής του $M_0^{x_0}$ με την ίνα στο $x_0 = \gamma(0)$ και $\widehat{\gamma}(1)$, πάλι στο τοπ $M_0^{x_0}$, θα είναι εκείνο το σημείο στην ίδια ίνα, στο οποίο θα έφτανε το σημείο επαφής $\sigma(\gamma(1))$ του τοπ $M_0^{\gamma(1)}$, αν το τελευταίο κυλιόταν χωρίς ολίσθηση (slipping) και στρέψη (twisting) από το $\gamma(1)$ στο $x_0$ κατά μήκος της $\gamma$. Με αυτόν τον τρόπο, η $\theta$ ορίζει ουσιαστικά την $\gamma$-εξαρτώμενη εικόνα κάθε $x \in M$ στο τοπ στο $x_0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την έννοια της ανάπτυξης υπό το πρίσμα της απειροστής γεωμετρίας. Δοθέντος ενός πεδίου (εξωτερικών) μετατοπίσεων $\widetilde{v} \in TM$, η $\widetilde{\theta} : TM \to E$ ορίζει ένα πεδίο (εσωτερικών) μετατοπίσεων στα διάφορα τοπ $M_0^x$ στα σημεία επαφής $\sigma(x)$, όπου η μετατόπιση δίνεται από $\widetilde{\theta}(\widetilde{v}(x)) \in T_{\sigma(x)}M_0^x$. Έτσι, αν $x' = x + \widetilde{v}(x)$, τότε το σημείο επαφής του τοπ $M_0^{x'}$ θα αναπτύσσεται στο σημείο $\sigma(x) + \widetilde{\theta}(\widetilde{v}(x))$ του τοπ $M_0^x$, όταν το $M_0^{x'}$ κυλίσει (χωρίς ολίσθηση και στρέψη) από το $x'$ πίσω στο $x$ κατά μήκος της μετατόπισης $\widetilde{v}(x)$. Εναλλακτικά, το σημείο $\sigma(x) + \widetilde{\theta}(\widetilde{v}(x))$ "αντιπροσωπεύει" το σημείο σύναψης του τοπ $M_0^{x'}$ στο τοπ $M_0^x$. Για διαφορετικές $\widetilde{\theta}$, το σημείο $\sigma(x) + \widetilde{\theta}(\widetilde{v}(x))$ θα ταυτοποιείται με διαφορετικά σημεία στο $M_0^x$ και άρα η $\widetilde{\theta}$ ορίζει μια αντιστοιχία μεταξύ εξωτερικών χωροχρονικών αμφιδιαφορίσεων που παράγονται από τα διανυσματικά πεδία $\widetilde{v}$ στην $M$ και εσωτερικών μετατοπίσεων βαθμίδας στα τοπ που παράγονται από τα $\widetilde{\theta}(\widetilde{v}) \in \Gamma(E)$. Με άλλα λόγια, η $\widetilde{\theta}$ μας επιτρέπει να "εσωτερικεύσουμε" τις αμφιδιαφορίσεις της $M$ [**9**]. Αντιστρόφως, η $\widetilde{\theta}$ μας επιτρέπει επίσης να χρησιμοποιήσουμε ένα πεδίο εσωτερικών μετατοπίσεων βαθμίδας $v \in \Gamma(E)$, όπου $v(x) \in T_{\sigma(x)}M_0^x$, για να πάρουμε έναν γεννήτορα $\widetilde{\theta}^{-1}(v)$ μιας εξωτερικής απειροστής αμφιδιαφόρισης της $M$ (εξωτερίκευση των μετατοπίσεων βαθμίδας). Το πεδίο $v \in \Gamma(E)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας απειροστός μετασχηματισμός της τμήσης $\sigma$. Επομένως, το σημείο $\sigma(x) + v(x)$ στο τοπ $M_0^x$ γίνεται σημείο επαφής, όταν η γεωμετρία Klein $(M_0^x, \sigma(x))$ κυλίσει προς τα εμπρός από το $x$ στο $x + \widetilde{\theta}^{-1}(v(x))$ κατά μήκος της μετατόπισης $\widetilde{\theta}^{-1}(v(x))$. Γενικεύοντας λοιπόν, η $\widetilde{\theta}$ μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε τη μετασχηματισμένη τμήση $\sigma + v$ ως την τμήση που συνάπτει εκείνη τη γεωμετρία που παίρνουμε, αν κυλίσουμε όλα τα τοπ προς τα εμπρός και κατά μήκος της μετατόπισης $\widetilde{\theta}^{-1}(v)$. Αν ονομάσουμε την τμήση που συνάπτει μια γεωμετρία Klein σε κάθε $x \in M$ ως συνάπτουσα τμήση, τότε συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι η συνάπτουσα τμήση μετασχηματίζεται με την κύλιση του τοπ κατά μήκος αμφιδιαφορίσεων της $M$. Συνεπώς, η $Diff(M)$-αναλλοιότητα μιας θεωρίας εγγυάται την αναλλοιότητα αυτής υπό τους μετασχηματισμούς της συνάπτουσας τμήσης $\sigma$, δηλαδή υπό αλλαγές της μερικής επιλογής βαθμίδας, η οποία, όπως είδαμε, ορίζει τη σύναψη των τοπ στην $M$.

## 7.6. Η συζυγής δέσμη tractor

Στην τελευταία ενότητα πετύχαμε μια περιγραφή της $Diff(M)$ στην εννοιολογική αρένα των θεωριών βαθμίδας. Δείξαμε δηλαδή ότι μια απειροστή αμφιδιαφόριση της $M$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας εσωτερικός τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας που ορίζεται από μια τμήση της (συσχετισμένης) διανυσματικής δέσμης $E = P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to M$. Θα μελετήσουμε τώρα αυτό το συμπέρασμα στο πλαίσιο του αλγεβροειδούς Atiyah που συσχετίζεται με τη δέσμη $P_H \to M$. Όπως δείξαμε στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου, οι κάθετοι αυτομορφισμοί του $P_H$ (ή ισοδύναμα, οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας) παράγονται από τις τμήσεις της δέσμης $P_H \times_H \mathfrak{h}$, δηλαδή $aut_v(P_H) = \Gamma(P_H \times_H \mathfrak{h})$, όπου $aut_v(P_H)$ οι απειροστοί γεννήτορες των αυτομορφισμών αυτών. Έπειτα, οι γενικοί αυτομορφισμοί του $P_H$ παράγονται από τα $H$-αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία (τμήσεις) στον ολικό χώρο $P_H$, δηλαδή ισχύει ότι $aut(P_H) = \mathfrak{X}_H P_H$. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό μεταξύ των $\mathcal{C}^\infty M$-προτύπων $\mathfrak{X}_H P$ και $\Gamma(TP/H)$, μπορούμε να εκφράσουμε το $aut(P_H)$ ως τμήσεις του αλγεβροειδούς Atiyah $TP_H/H$. Παρότι το $aut_v(P_H)$ εκφράζεται φυσικά (naturally) μέσω των τμήσεων μιας συσχετισμένης δέσμης με ίνες, οι οποίες είναι ισομορφικές με την $\mathfrak{h}$, δεν ισχύει το ίδιο και για το $aut(P_H)$. Με άλλα λόγια το $aut(P_H)$ δεν μπορεί να εκφραστεί με φυσικό τρόπο στα εννοιολογικά πλαίσια μιας θεωρίας βαθμίδας, δηλαδή ως δράση που προκύπτει από την τοπικοποίηση της δράσης μιας ομάδας Lie. Μπορούμε όμως να δώσουμε μια τέτοια περιγραφή, αν ο $P_H$ είναι εφοδιασμένος με μια συνοχή Cartan.

Πράγματι, μια συνοχή Cartan $\omega$ ορίζει έναν ισομορφισμό διανυσματικών δεσμών μεταξύ του αλγεβροειδούς Atiyah $TP_H/H$ και της λεγόμενης *συζυγούς δέσμης tractor* (adjoint tractor bundle) με ολικό χώρο $\mathcal{A}M := P_H \times_H \mathfrak{g}$ και βάση $M$ [**4**], η οποία είναι μια δέσμη με δομή άλγεβρας Lie. Η δέσμη $TP_H/H$ έχει δομή αλγεβροειδούς Lie, ενώ η $\mathcal{A}M$ έχει δομή άλγεβρας Lie. Ο ισομορφισμός διανυσματικών δεσμών που ορίζει η $\omega$ μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τη δομή αλγεβροειδούς Lie του αλγεβροειδούς Atiyah στη συζυγή δέσμη tractor, όπως και το αντίθετο, δηλαδή να μεταφέρουμε τη δομή άλγεβρας Lie προς την άλλη κατεύθυνση. Θέλουμε να δείξουμε ότι η ύπαρξη ενός τέτοιου ισομορφισμού διανυσματικών δεσμών, βρίσκεται σε μια 1-1 αντιστοιχία με μια γεωμετρία Cartan στον $P_H$, προτυποποιημένη βάσει του $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ με ομάδα $H$, δηλαδή ότι η ύπαρξη του ισομορφισμού αυτού σημαίνει την ύπαρξη μιας συνοχής Cartan $\omega$. Έστω ο ισομορφισμός $\widehat{\omega} : TP_H/H \to \mathcal{A}M$. Μπορούμε, όπως έχουμε δει, να ταυτοποιήσουμε τις τμήσεις του αλγεβροειδούς Atiyah με τα $H$-αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στον $P_H$. Μπορούμε επίσης να ταυτοποιήσουμε τις τμήσεις της $\mathcal{A}M$ με τις $H$-ισοαναλλοίωτες συναρτήσεις στον $P_H$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$. Τότε, η $\widehat{\omega}$ συσχετίζει με κάθε $H$-αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $X$ στον $P_H$ μια $H$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση $\omega(X)(p)$, όπου $\omega(X) \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{g})$. Η $\omega(X)(p)$ εξαρτάται από την τιμή του $X$ στο $p$ και δη, με γραμμικό τρόπο, δηλαδή για κάθε $p$ καταλήγουμε να έχουμε μια γραμμική απεικόνιση

$\omega_p : T_pP_H \to \mathfrak{g}$, η οποία είναι ισομορφισμός. Με άλλα λόγια, η $\omega$ είναι μια 1-μορφή στον $P_H$ με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{g}$, δηλαδή μια συνοχή Cartan. Από την άλλη, δοθέντος του ισομορφισμού $\omega : TP_H \to \mathfrak{g}$, μπορούμε να επάγουμε μέσω αυτού έναν $H$-ισοαναλλοίωτο ισομορφισμό διανυσματικών δεσμών $\widetilde{\omega} : TP_H \to P_H \times \mathfrak{g}$ υπεράνω της ταυτότητας στον $P_H$, ο οποίος δίνεται από $X \mapsto (p, \omega_p(X))$ για $X \in T_pP_H$. Η $H$-ισοαναλλοιότητα της $\widetilde{\omega}$ προκύπτει από το γεγονός ότι:

$$\widetilde{\omega}(\mathfrak{R}_{h*}X) = (ph, \omega_{ph}(\mathfrak{R}_{h*}X)) = (ph, (\mathfrak{R}_h{}^*\omega)_p(X)) = (ph, \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_p(X))$$

όπου φυσικά, $(ph, \mathrm{Ad}(h^{-1})\omega_p(X)) = \mathfrak{R}_h(p, \omega_p(X)) = \widetilde{\omega}(X)\mathfrak{R}_h$. Μπορούμε έτσι να πάρουμε το πηλίκο της $\widetilde{\omega}$ με τη δράση της $H$, παίρνοντας τελικά τον επιθυμητό ισομορφισμό $TP_H/H \cong P_H \times_H \mathfrak{g} =: \mathcal{A}M$ υπεράνω της ταυτότητας στον $P_H/H \cong M$.

Χάριν αυτού του ισομορφισμού λοιπόν, η $\mathcal{A}M$ αποκτά τη δομή ενός (μεταβατικού) αλγεβροειδούς Lie. Αυτό ισχύει, καθώς πρώτον, η συνήθης αγκύλη διανυσματικών πεδίων στον $P_H$ επάγει μια αγκύλη $[\ ,\ ]$, κλειστή ως προς το $\Gamma(\mathcal{A}M)$, η οποία δίνεται από:

$$\left[\sigma_{\omega(X)}, \sigma_{\omega(Y)}\right] = \sigma_{\omega[X,Y]}$$

Δεύτερον, ορίζεται η άγκυρα $q : \mathcal{A}M \to TM$ μέσω της έκφρασης $q([(p,\alpha)]_H) = \pi_*(\omega_p^{-1}(\alpha))$, οπότε πράγματι η συζυγής δέσμη tractor μπορεί να περιγραφεί με όρους αλγεβροειδούς Lie. Από την άλλη, είπαμε επίσης και ότι το αλγεβροειδές Atiyah αποκτά δομή άλγεβρας Lie. Με αυτόν τον τρόπο, η συνοχή Cartan μας επιτρέπει να περιγράψουμε τους απειροστούς αυτομορφισμούς του $P_H$ (που δίνονται αρχικά από τις τμήσεις του αλγεβροειδούς Atiyah) μέσω των τμήσεων της $\mathcal{A}M \to M$ που έχει δομή άλγεβρας Lie.

Μπορούμε να πάρουμε μια τμήση της συζυγούς δέσμης tractor απευθείας από ένα $H$-αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στον $P_H$ με τον ακόλουθο τρόπο. Δοθέντος ενός $H$-αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου $X \in \mathfrak{X}_H P_H$ που παράγει έναν απειροστό αυτομορφισμό του $P_H$, η συνοχή Cartan $\omega$ ορίζει μια $H$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση $\omega(X) \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{g})$. Με τη σειρά τους, αυτές οι ισοαναλλοίωτες συναρτήσεις είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις τμήσεις της $\mathcal{A}M \to M$. Υπό αυτήν την έννοια, η $\omega$ επάγει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $aut(P_H) = \mathfrak{X}_H P_H \to \Gamma(\mathcal{A}M)$ με $X \mapsto \sigma_{\omega(X)}$. Επάγει δηλαδή, έναν ισομορφισμό μεταξύ των απειροστών γεννητόρων $aut(P_H)$ της (ομάδας των αυτομορφισμών του $P_H$) $Aut(P_H)$ και των τμήσεων της συζυγούς δέσμης tractor, η οποία είναι μια δέσμη με δομή άλγεβρας Lie. Γενικά, η σχέση μεταξύ των διαφόρων δεσμών που έχουμε μελετήσει μπορεί τελικά να συμπυκνωθεί υπό μια έννοια στον ισομορφισμό των παρακάτω ακριβών (exact) ακολουθιών που επάγει μια (αναγωγική) συνοχή Cartan $\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \theta$:

$$\begin{tikzcd}
 & & P_H \times_H \mathfrak{g} \arrow[rr] & & P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & P_H \times_H \mathfrak{h} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & & 0 \\
 & & TP_H/H \arrow[uu, "\widetilde{\omega}"'] \arrow[rr] & & TM \arrow[uu, "\widetilde{\theta}"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ανακεφαλαιώνοντας, δείξαμε τελικά ότι δοθείσας μιας συνοχής Cartan, μπορούμε πάντα να περιγράψουμε το $aut(P_H)$ και το $\mathfrak{X}M$ μέσω των τμήσεων μιας δέσμης με ολικό χώρο $\mathcal{A}M = P_H \times_H \mathfrak{g}$ (και δομή άλγεβρας Lie) και μιας διανυσματικής δέσμης $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ αντίστοιχα.

## 7.7. Οι μσ των πεδίων υπό τοπικούς μσ Lorentz και τοπικούς μσ βαθμίδας

Καθώς ο $P_H$ είναι εφοδιασμένος με μια συνοχή Ehresmann, μπορούμε να διαχωρίσουμε έναν απειροστό αυτομορφισμό του $P_H$ σε έναν κάθετο αυτομορφισμό και την οριζόντια ανύψωση (που ορίζει η $\omega_{\mathfrak{h}}$) μιας απειροστής αμφιδιαφόρισης της $M$. Με άλλα λόγια, τα $H$-αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία που παράγουν τους απειροστούς αυτομορφισμούς του $P_H$ μπορούν να αναλυθούν ως $v = v_{hor} + v_{ver}$, όπου $v_{hor}$ είναι η οριζόντια ανύψωση (ως προς την $\omega_{\mathfrak{h}}$) του $\widetilde{v} \in TM$ (δηλαδή, $\omega_{\mathfrak{h}}(v_{hor}) = 0$) και $v_{ver}$ είναι ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο, το οποίο δίνεται από ένα στοιχείο της $\mathfrak{h}$ μέσω της απεικόνισης $i : \mathfrak{h} \to VP_H$ που αναφέραμε στην πρώτη ενότητα. Η κάθετη συνιστώσα του $v$, $v_{ver}$, ορίζει τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας (ή ισοδύναμα, τους κάθετους αυτομορφισμούς του $P_H$), οι οποίοι δίνονται από την $H$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση $\Lambda(p) := \omega_{\mathfrak{h}}(v_{ver}(p)) \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{h})$ ή ισοδύναμα, από τις αντίστοιχες τμήσεις του $\Gamma(P_H \times_H \mathfrak{h})$. Όμως, ο $P_H$ είναι εφοδιασμένος και με μια (οριζόντια) συγκολλητική μορφή $\theta : TP_H \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Επομένως, μπορούμε να αντιληφθούμε την οριζόντια συνιστώσα $v_{hor}$, στην οποία κωδικοποιείται μια απειροστή αμφιδιαφόριση της $M$, με ανάλογο τρόπο. Πράγματι, το οριζόντιο διανυσματικό πεδίο $v_{hor}$ ορίζει μια $H$-ισοαναλλοίωτη συνάρτηση:

$$\alpha(p) := \theta_p(v_{hor}(p)) \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

ή ισοδύναμα, την αντίστοιχη τμήση του $\Gamma(P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Εδω να σημειωθεί ότι μέσω της γεωμετρικής συγκολλητικής μορφής $\widetilde{\theta}$ μπορούμε απευθείας να ορίσουμε μια τμήση του $\Gamma(P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Ενώ η $\Lambda$ παράγει απειροστούς τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή κάθετους αυτομορφισμούς του $P_H$, η συνάρτηση $\alpha$ υποδεικνύει την απειροστή αλλαγή της συνάπτουσας τμήσης $\sigma$, την οποία επάγει μια απειροστή αμφιδιαφόριση της $M$ που παράγεται από το $\widetilde{v} = \pi_* v_{hor} \in TM$, όπως ακριβώς δείξαμε στην ενότητα 5.

Θα υπολογίσουμε τώρα τους μετασχηματισμούς των σχετικών πεδίων $\omega_{\mathfrak{h}}$ και $\theta$, τόσο υπό απειροστούς τοπικούς μετασχηματισμούς Lorentz, όσο και υπό απειροστές αλλαγές της συνάπτουσας τμήσης, δηλαδή τοπικές μετατοπίσεις βαθμίδας. Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό της συνοχής Cartan $\omega$ υπό κάποιον απειροστό αυτομορφισμό του $P_H$ που παράγεται από το $v$, όπου με $i$ συμβολίζουμε τώρα την εσωτερική παράγωγο (inner derivative ή interior product), όπως την παρουσιάσαμε στο τέλος της ενότητας 1 (αναλυτικότερα βλ. παράρτημα Α'):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}_{(\Lambda,\alpha)}\omega := \pounds_v\omega &= i_v \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(\omega(v)) = i_v(\mathrm{d}^\omega\omega - (1/2)[\omega,\omega]) + \mathrm{d}(\omega_{\mathfrak{h}}(v) + \theta(v)) \\
&= i_v\Omega - \frac{1}{2}([\omega(v),\omega] - [\omega,\omega(v)]) + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha \\
&= i_v\Omega - [\omega(v),\omega] + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha = i_v\Omega + [\omega,\omega(v)] + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha \\
&= i_v\Omega + [\omega_{\mathfrak{h}} + \theta, \omega_{\mathfrak{h}}(v) + \theta(v)] + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha \\
&= i_v\Omega + [\omega_{\mathfrak{h}} + \theta, \Lambda + \alpha] + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha \\
&= i_v(R + T + (1/2)[\theta,\theta]) + [\omega_{\mathfrak{h}},\Lambda] + [\omega_{\mathfrak{h}},\alpha] + [\theta,\Lambda] + [\theta,\alpha] + \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha \\
&= i_vR + i_vT - [\theta,\theta(v)] + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta,\Lambda] + [\theta,\alpha] \\
&= i_vR + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda + i_vT + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta,\Lambda] - [\theta,\alpha] + [\theta,\alpha] \\
&= \underbrace{i_vR + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda}_{\in\mathcal{A}^1(P_H,\mathfrak{h})} + \underbrace{i_vT + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta,\Lambda]}_{\in\mathcal{A}^1(P_H,\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Χρησιμοποιήσαμε μεταξύ άλλων το γεγονός ότι $\omega_{\mathfrak{h}}(v) = \omega_{\mathfrak{h}}(v_{ver} + v_{hor}) = \omega_{\mathfrak{h}}(v_{ver}) =: \Lambda$, αφού $\omega_{\mathfrak{h}}(v_{hor}) = 0$ από ορισμό. Αντίστοιχα ισχύει $\theta(v) = \theta(v_{hor}) =: \alpha$, αφού από ορισμό $\theta(v_{ver}) = 0$, δεδομένου ότι $\theta$ είναι οριζόντια μορφή. Κατά τα άλλα, χρησιμοποιήθηκαν μόνο τετριμμένες ιδιότητες (πχ. $[\omega(v),\omega] = (-1)^{0\cdot 1+1}[\omega,\omega(v)]$) και ορισμοί. Καταλήγουμε επομένως στη διαπίστωση ότι:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_{(\Lambda,\alpha)}\omega_{\mathfrak{h}} &:= \pounds_v \omega_{\mathfrak{h}} = i_v R + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda \\ \widetilde{\delta}_{(\Lambda,\alpha)}\theta &:= \pounds_v \theta = i_v T + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta, \Lambda]\end{aligned} \tag{7.3}$$

Αν ο απειροστός αυτομορφισμός του $P_H$ είναι καθαρά κάθετος, δηλαδή ένας απειροστός τοπικός μετασχηματισμός Lorentz που παράγεται από ένα κάθετο διανυσματικό πεδίο $v = v_{ver}$, τότε έχουμε τις σχέσεις:

$$\widetilde{\delta}_{\Lambda}\omega_{\mathfrak{h}} = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda \qquad \widetilde{\delta}_{\Lambda}\theta = [\theta, \Lambda] \tag{7.4}$$

αφού $R(v) = T(v) = \theta(v) = 0$ (οριζόντιες μορφές). Επιπλέον, ο (απειροστός) τοπικός μετασχηματισμός Lorentz της καμπυλότητας $R$ θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_{\Lambda}R := \pounds_{v_{ver}}R &= i_{v_{ver}}\mathrm{d}R + \mathrm{d}(R(v_{ver})) = i_{v_{ver}}(\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}R - [\omega_{\mathfrak{h}}, R]) \\ &= -[\omega_{\mathfrak{h}}(v_{ver}), R] + [\omega_{\mathfrak{h}}, R(v_{ver})] = -[\Lambda, R] = [R, \Lambda]\end{aligned}$$

αφού $\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}R = \mathrm{d}R + [\omega_{\mathfrak{h}}, R] = 0$ (Bianchi) και $R(v_{ver}) = 0$ ($R$ οριζόντια), ενώ ο τοπικός μετασχηματισμός Lorentz της στρέψης θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_{\Lambda}T := \pounds_{v_{ver}}T &= i_{v_{ver}}\mathrm{d}T + \mathrm{d}(T(v_{ver})) = i_{v_{ver}}\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}T - [\omega_{\mathfrak{h}}(v_{ver}), T] \\ &= i_{v_{ver}}\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}T + [T, \Lambda] = i_{v_{ver}}[R, \theta] + [T, \Lambda] = [T, \Lambda]\end{aligned}$$

καθώς $\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}} = \mathrm{d}T + [\omega_{\mathfrak{h}}, T] = [R, \theta]$ (Bianchi) και $T(v_{ver}) = \theta(v_{ver}) = R(v_{ver}) = 0$.

Στην περίπτωση που ο αυτομορφισμός είναι καθαρά οριζόντιος, δηλαδή $v = v_{hor}$, τότε ισχύει ότι:

$$\widetilde{\delta}_{\alpha}\omega_{\mathfrak{h}} = i_{v_{hor}}R \qquad \widetilde{\delta}_{\alpha}\theta = i_{v_{hor}}T + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha \tag{7.5}$$

και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της καμπυλότητας δίνεται από:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_{\alpha}R &= i_{v_{hor}}\mathrm{d}R + \mathrm{d}(R(v_{hor})) = i_{v_{hor}}\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}R - i_{v_{hor}}([\omega_{\mathfrak{h}}, R]) + \mathrm{d}(R(v_{hor})) \\ &= [\omega_{\mathfrak{h}}, R(v_{hor})] + \mathrm{d}(R(v_{hor})) = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}(R(v_{hor}))\end{aligned}$$

καθώς $i_{v_{hor}}([\omega_{\mathfrak{h}}, R]) = -[\omega_{\mathfrak{h}}, R(v_{hor})]$, αφού $\omega_{\mathfrak{h}}(v_{hor}) = 0$, ενώ ο μετασχηματισμός της στρέψης θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_{\alpha}T &= i_{v_{hor}}\mathrm{d}T + \mathrm{d}(T(v_{hor})) = i_{v_{hor}}\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}T + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}(T(v_{hor})) \\ &= i_{v_{hor}}([R, \theta]) + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}(T(v_{hor})) = [R(v_{hor}), \theta] - [R, \alpha] + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}(T(v_{hor}))\end{aligned}$$

Θα συγκρίνουμε τώρα τους μετασχηματισμούς (7.3) των πεδίων βαθμίδας $\theta$ και $\omega_{\mathfrak{h}}$ με αυτούς που προκύπτουν από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της δέσμης $P_G \to M$. Πράγματι, μια εναλλακτική στρατηγική για τη μελέτη των μετασχηματισμών της σπιν συνοχής και της συγκολλητικής μορφής είναι ο περιορισμός των τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας της $\omega_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{A}^1(P_G, \mathfrak{g})$ στον $P_H$. Όπως είδαμε στο τέλος της πρώτης ενότητας από τη σχέση (7.1), ο μετασχηματισμός της συνοχής Ehresmann $\omega_{\mathfrak{g}}$ στον $P_G$ που προκύπτει από έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας $\lambda \in \mathcal{C}^G(P_G, \mathfrak{g})$, δίνεται από τη σχέση $\delta_\lambda\omega_{\mathfrak{g}} = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{g}}}\lambda = \mathrm{d}\lambda + [\omega_{\mathfrak{g}}, \lambda]$. Δρώντας με την pull-back της έγκλισης $\iota : P_H \hookrightarrow P_G$ στην τελευταία σχέση, βρίσκουμε ότι:

$$\iota^*(\delta_\lambda\omega_{\mathfrak{g}}) = \iota^*\mathrm{d}\lambda + \iota^*([\omega_{\mathfrak{g}}, \lambda]) = \mathrm{d}(\iota^*\lambda) + [\iota^*\omega_{\mathfrak{g}}, \iota^*\lambda] =: \mathrm{d}\widehat{\lambda} + [\omega, \widehat{\lambda}] = \delta_{\widehat{\lambda}}\omega \tag{7.6}$$

όπου $\omega := \iota^*\omega_{\mathfrak{g}} = \omega_{\mathfrak{g}}|_{P_H}$ και $\widehat{\lambda} \equiv \iota^*\lambda = \lambda|_{P_H} \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{g})$. Χρησιμοποιώντας την αναγωγική ανάλυση $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες $H$-ισοαναλλοίωτες συναρτήσεις στον $P_H$:

$$\Lambda := \pi_{\mathfrak{h}} \circ \widehat{\lambda} \qquad \alpha := \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \circ \widehat{\lambda}$$

όπου $\Lambda \in \mathcal{C}^H(P_H, \pi_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})) = \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{h})$ και $\alpha \in \mathcal{C}^H(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις $A = \omega_{\mathfrak{h}} + \theta$ και $\widehat{\lambda} = \Lambda + \alpha$ στην (7.6), θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta_{(\Lambda,\alpha)}\omega = \mathrm{d}\Lambda + \mathrm{d}\alpha + [\omega_{\mathfrak{h}} + \theta, \Lambda + \alpha] &= \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda + \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta, \Lambda] + [\theta, \alpha] \\ &= \underbrace{\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda + [\theta, \alpha]_{\mathfrak{h}}}_{\in \mathcal{A}^1(P_H, \mathfrak{h})} + \underbrace{\mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta, \Lambda] + [\theta, \alpha]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}_{\in \mathcal{A}^1(P_H, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})}\end{aligned}$$

δηλαδή παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\delta_{(\Lambda,\alpha)}\omega_{\mathfrak{h}} = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\Lambda + [\theta, \alpha]_{\mathfrak{h}} \qquad \delta_{(\Lambda,\alpha)}\theta = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + [\theta, \Lambda] + [\theta, \alpha]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $R_0 = -(1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}$ και $T_0 = -(1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, οι οποίες είναι προϊόν της επιπεδότητας κατά Cartan, δηλαδή την καμπυλότητα και τη στρέψη μιας επίπεδης γεωμετρίας Cartan, παρατηρούμε ότι, εφόσον $\theta(v) = \alpha$, τότε:

$$i_v T_0 = -(1/2)([\alpha, \theta]\mathfrak{g}/\mathfrak{h} - [\theta, \alpha]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = [\theta, \alpha]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$$

ενώ αντίστοιχα ισχύει ότι $i_v R_0 = [\theta, \alpha]_{\mathfrak{h}}$. Αν ο μετασχηματισμός είναι μια καθαρή στροφή Lorentz, δηλαδή $\alpha = 0$, τότε είναι προφανές ότι ανακτούμε τις σχέσεις (7.4), ενώ αν είναι καθαρή μετατόπιση, δηλαδή $\Lambda = 0$, τότε έχουμε τις σχέσεις:

$$\delta_\alpha \omega_{\mathfrak{h}} = i_v R_0 \qquad \delta_\alpha \theta = \mathrm{d}^{\omega_{\mathfrak{h}}}\alpha + i_v T_0 \tag{7.7}$$

Είναι φανερό ότι οι ως άνω σχέσεις διαφέρουν από τις σχέσεις (7.5). Καθώς οι μετασχηματισμοί (7.7) προέκυψαν από τον περιορισμό των κάθετων τοπικών μετασχηματισμών βαθμίδας της δέσμης $P_G$ στον $P_H$, είναι λογικό επόμενο να εξαρτώνται από την καμπυλότητα $R_0$ και $T_0$ του επίπεδου κατά Cartan τοπικού ομογενούς προτύπου. Αντιθέτως, οι μετασχηματισμοί (7.5) των πεδίων βαθμίδας $\omega_{\mathfrak{h}}, \theta$ υπό τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, εξαρτώνται από την καμπυλότητα $R$ και τη στρέψη $T$ της ίδιας της $M$, το οποίο έχει νόημα, καθώς αυτοί οι τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας ταυτοποιούνται, μέσω της συγκολλητικής διαδικασίας που περιγράψαμε, με τις αμφιδιαφορίσεις της $M$. Επιπλέον, αξίζει να συγκρίνουμε τον υπολογισμό του τοπικού μετασχηματισμού βαθμίδας μιας συνοχής Ehresmann (7.1) με αυτόν της (7.2). Στην (7.1), η εσωτερική παράγωγος της καμπυλότητας μηδενίζεται, γιατί ο μετασχηματισμός είναι καθαρά κάθετος. Αντίθετα, οι όροι $i_v R$ και $i_v T$ δεν μηδενίζονται στην (7.2), αφού το διανυσματικό πεδίο $v$ δεν είναι καθαρά κάθετο, αλλά έχει και μια οριζόντια συνιστώσα $v_{hor}$, η οποία σχετίζεται με μια αμφιδιαφόριση της $M$. Παρόλα αυτά, τα δύο είδη μετασχηματισμών που μελετήσαμε, ταυτίζονται όταν η γεωμετρία Cartan $(P_H, \omega)$ είναι επίπεδη κατά Cartan. Πράγματι, η διαφορά των σχέσεων (7.5) και (7.7) δίνεται από:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_\alpha \omega_{\mathfrak{h}} - \delta_\alpha \omega_{\mathfrak{h}} &= i_v(R - R_0) = i_v(R + (1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}) = i_v \Omega_{\mathfrak{h}} \\ \widetilde{\delta}_\alpha \theta - \delta_\alpha \theta &= i_v(T - T_0) = i_v(T + (1/2)[\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = i_v \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\end{aligned}$$

και η επιπεδότητα κατά Cartan σημαίνει $\Omega_{\mathfrak{h}} = \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = 0$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιούμε οποιοδήποτε είδος μετασχηματισμού θέλουμε, όταν η $(P_H, \omega)$ είναι Cartan-επίπεδη. Παρατα ταύτα, στη γενική περίπτωση, η αναλλοιότητα υπό τοπικές μετατοπίσεις βαθμίδας (που προκύπτει, όπως δείξαμε, από την $Diff(M)$-αναλλοιότητα της θεωρίας) κωδικοποιείται στις (7.5) και οχι στις (7.7).

## 7.8. Συμπεράσματα

Ξεκινήσαμε με μια κύρια $G$-δέσμη $P_G \to M$, εφοδιασμένη με μια συνοχή Ehresmann $\omega_{\mathfrak{g}}$. Κάθε ίνα αυτής της δέσμης είναι ισομορφική με το σύνολο των αφινικών πλαισίων $(m, e)$ στη γεωμετρία Klein που συσχετίζεται με το ζεύγος $(G, H)$ (ή ισοδύναμα, στη γεωμετρία Klein $(G, H)$), όπου ένα αφινικό πλαίσιο δίνεται από ένα σημείο $m$ στη γεωμετρία Klein και ένα γραμμικό πλαίσιο $e$ στον εφαπτόμενο χώρο στο $m$. Προκειμένου να προτυποποιήσουμε την $M$ βάσει εφαπτόμενων γεωμετριών Klein $(G, H)$, έπρεπε να συνάψουμε και να συγκολλήσουμε αντίγραφα του ομογενή χώρου $G/H$ στην $M$. Για να το κάνουμε αυτό, ορίσαμε πρώτα μια συσχετισμένη (με την $P_G$) δέσμη $P_G \times_G G/H \to M$ με ίνες $M_0^x \cong G/H$. Ορίσαμε έπειτα μια συνάπτουσα τμήση $\sigma : M \to P_G \times_G G/H$, η οποία επιλέγει ένα σημείο επαφής $\sigma(x)$ σε κάθε ίνα $M_0^x$. Πήραμε έτσι μια δέσμη γεωμετριών Klein $(M_0^x, \sigma(x))$ που συνάπτονται στην $M$ μέσω της $\sigma$. Είδαμε ότι αυτή η διαδικασία σύναψης επάγει μια αναγωγή της δέσμης $P_G \to M$ των αφινικών πλαισίων σε μια κύρια $H$-δέσμη $P_H \to M$ με ίνες, ισομορφικές με το σύνολο των γραμμικών πλαισίων. Συγκεκριμένα, η επιλογή ενός σημείου επαφής $\sigma(x)$ σε κάθε τοπ $M_0^x$ σπάει τις αρχικές αφινικές συμμετρίες του τοπ, αφήνοντας ανεπηρέαστη μόνο τη συμμετρία Lorentz των γραμμικών πλαισίων στο $\sigma(x)$. Έπειτα, ο περιορισμός της συνοχής Ehresmann $\omega_{\mathfrak{g}}$ στον $P_H$ ορίζει μια συνοχή Cartan $\omega := \omega_{\mathfrak{g}}|_{P_H} = \iota^* \omega_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{A}^1(P_H, \mathfrak{g})$ στον $P_H$, δεδομένου ότι ισχύει η σχέση $\ker(\omega_{\mathfrak{g}}) \cap \iota_* TP_H = 0$. Αν η πρότυπη γεωμετρία είναι αναγωγική, τότε η συνοχή Cartan αναλύεται σε μια συνοχή Ehresmann $\omega_{\mathfrak{h}}$ στον $P_H$ που αποτελεί το πεδίο βαθμίδας της τοπικής συμμετρίας Lorentz του $P_H$ (ως χώρου των γραμμικών πλαισίων) και σε μια συγκολλητική μορφή $\theta$. Η τελευταία ορίζει μια ταυτοποίηση μεταξύ κάθε $T_x M$ και του εφαπτόμενου χώρου του τοπ $M_0^x$ στο σημείο επαφής $\sigma(x)$ (συγκόλληση του $M_0^x$ στο $x \in M$). Αυτή η ταυτοποίηση χρησιμεύει στη μεταφορά στον $TM$ του $\mathrm{Ad}(H)$-αναλλοίωτου βαθμωτού γινομένου στον $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, ορίζοντας έτσι μια μετρική $g^\theta$ στην $M$ (ανάγοντας τη δέσμη πλαισίων $\mathcal{F}M$ σε μια $O(1, n)$-δέσμη, δηλαδή στη δέσμη πλαισίων, της οποίας στα στοιχεία σχετίζονται μέσω κάποιου στοιχείου της $O(1, n)$, η $g^\theta$ γίνεται η συνήθης ημι-ρημάννεια μετρική Lorentz). Η συγκόλληση που παράγει η $\theta$ μας επιτρέπει επίσης να αναπτύξουμε οποιαδήποτε "εξωτερική" διαδρομή $\gamma$ στην $M$ με αρχή το $x \in M$ στην "εσωτερική" γεωμετρία Klein $(M_0^x, \sigma(x))$ στο $x$. Σε απειροστό επίπεδο, κάθε διανυσματικό πεδίο στην $M$ μπορεί να ανυψωθεί υπό μια έννοια σε μια τμήση της διανυσματικής δέσμης με ολικό χώρο $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, η οποία περιέχει πληροφορία για τους διανυσματικούς χώρους που εφάπτονται σε κάθε τοπ $M_0^x$ στο $\sigma(x)$. Δείξαμε ότι μια τμήση της $P_H \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας απειροστός μετασχηματισμός της συνάπτουσας τμήσης $\sigma$. Με αυτόν τον τρόπο, μια απειροστή αμφιδιαφόριση της $M$ μπορεί να ερμηνευθεί ως απειροστός μετασχηματισμός της "μερικής επιλογής βαθμίδας" που ορίζει η $\sigma$. Η θεμελιώδης σημασία του τελευταίου συμπεράσματος έγκειται στο γεγονός ότι η τοπική συμμετρία σε μετατοπίσεις, την οποία σπάει ρητά η επιλογή μιας συνάπτουσας τμήσης $\sigma$, διατηρείται εμμέσως από την αναλλοιότητα υπό μετασχηματισμούς της μερικής επιλογής βαθμίδας που ορίζει η $\sigma$, η οποία με τη σειρά της ισχύει πάντα (μέσω της συγκολλητικής διαδικασίας), εφόσον ισχύει η $Diff(M)$-συμμετρία. Έτσι, καταλήγουμε στο κρίσιμο συμπέρασμα αυτής της εργασίας, οτι δηλαδή η βαρύτητα μπορεί να περιγραφεί ως θεωρία βαθμίδας με δυναμική μεταβλητή τη συνοχή Cartan.

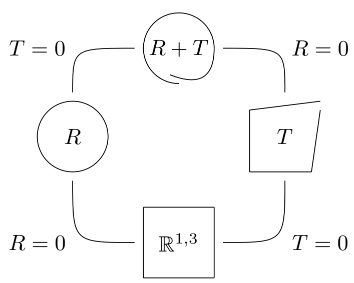
# Κεφάλαιο 8

## Βαρύτητα με Στρέψη

Ας πάρουμε το παράδειγμα της Dδ βαρύτητας Einstein με Minkowski πρότυπο χώρο και κύρια ομάδα (μεγιστικής) συμμετρίας την $Poinc(1, D-1)$, όπου ο σταθεροποιητής είναι η $O(1, D-1)$ (μπορούμε πάντα να περιοριστούμε στη γνήσια και ορθοχρονική). Σε αυτήν την περίπτωση, θα έχουμε ότι $\mathfrak{g} = \mathfrak{poinc}(1, D-1)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(1, D-1)$ και $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathbb{R}^{1,D-1}$. Εδώ ισχύει ότι $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] = 0$ (λόγω αβελιανότητας των μετατοπίσεων) και άρα η συνοχή Cartan $\Omega$ αυτής της γεωμετρίας ανάγεται σε $R + T$, δηλαδή στην καμπυλότητα Ehresmann και τη στρέψη. Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτήν την επιλογή ως μια κλάση θεωριών που ακούει στο όνομα *"βαρύτητα Poincaré"*. Μια βιώσιμη θεωρία αυτής της κλάσης είναι η γνωστή Einstein-Cartan(-Sciama-Kibble) θεωρία βαρύτητας (που αποκτάμε διαλέγοντας τη γνωστή βαρυτική δράση), η οποία απουσία σπινοριακών πεδίων, δηλαδή $T = 0$, οδηγεί στη συνήθη γενική σχετικότητα. Από την άλλη, μηδενίζοντας την καμπυλότητα Ehresmann, οδηγούμαστε σε μια νέα κλάση θεωριών βαρύτητας με (μόνο) στρέψη, από τις οποίες εξέχουσας σημασίας είναι πρακτικά τα γνωστά και ως *τηλεπαράλληλα ισοδύναμα*. Από αυτά, θα επιλέξουμε να μελετήσουμε το τηλεπαράλληλο ισοδύναμο της γενικής σχετικότητας και αυτό της βαρύτητας Gauss-Bonnet. Μπορούμε για ευκολία να συμπυκνώσουμε τις ως άνω σχέσεις μαζί με τους χώρους των θεωριών σε δύο διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{Poincaré βαρύτητα} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{βαρύτητα με στρέψη} \arrow[d] & & \text{EC(SK) βαρύτητα} \arrow[d] \\
\text{τηλεπαράλληλη γσ} & \sim & \text{γενική σχετικότητα (γσ)}
\end{tikzcd}$$

(α΄) Το δέντρο των θεωριών




(β΄) Χώροι θεωριών

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε τον τρόπο, με τον οποίον κατασκευάζουμε τηλεπαράλληλα ισοδύναμα. Θα εργαστούμε με διαφορικές μορφές, ώστε διαισθητικά να είμαστε όσο πιο κοντά γίνεται στη γεωμετρία που παρουσιάσαμε, αλλά και για να συμπυκνώσουμε τις πράξεις. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{R}$ τη 2-μορφή καμπυλότητας, με $\mathcal{T}$ τη 2-μορφή στρέψης και με $\omega$ τη σπιν συνοχή (όλα αυτά πάντα τοπικά). Με $e_a$ θα σημαίνουμε στοιχεία των γραμμικών πλαισίων και με $\theta^a \equiv e^a$ τα δυϊκά τους (βλ. συγκολλητική μορφή, αλλά και λήμμα Cartan). Οι ενότητες που θα ακολουθήσουν αποτελούν μια αναλυτική αναπαραγωγή των πράξεων του [**18**]. Προτείνουμε στον αναγνώστη να ξεκινήσει από την ενότητα της βαρύτητας Horndeski για μεγαλύτερη εξοικείωση με όσα ακολουθούν σε αυτό το κεφάλαιο.

Ας κατασκευάσουμε αρχικά μια κοινή γλώσσα. Ξέρουμε ότι ο όρος $(1/2)[\omega,\omega]$ καταλήγει σε $\omega^a{}_b \wedge \omega^{bc}$, αν η $H$ είναι ομάδα πινάκων. Ισχύει επίσης ότι $e_{ij} = -e_{ji} \in \mathfrak{h}$ και $e_i \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Επομένως:

$$\omega = \omega^{ab} \otimes e_{ab} = \omega^{ab}{}_c e^c \otimes e_{ab} \in \mathcal{A}^1(U) \otimes \mathfrak{h} \equiv A^1(U,\mathfrak{h}) \quad \theta = e^a \otimes e_a \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

όπου $\omega^{ab}, e^a$ συνήθεις μορφές και άρα:

$$\begin{aligned}[\omega,\omega] &= (\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_d) \otimes [e_a{}^b, e_c{}^d] = (\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_d) \otimes (\delta^b_c e_a{}^d - \delta^d_a e_c{}^b) \\ &= (\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d) \otimes e_a{}^d - (\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a) \otimes e_c{}^b \\ &= (\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_d) \otimes e_a{}^d + (\omega^c{}_f \wedge \omega^f{}_b) \otimes e_c{}^b = 2(\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \otimes e_a{}^b\end{aligned}$$

Επιπλέον, αφού $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\big(\omega^{ab} \otimes e_{ab}\big) = \mathrm{d}\omega^{ab} \otimes e_{ab}$, έπεται ότι $\mathcal{R} = (\mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \otimes e_a{}^b$, ενώ αντίστοιχα ξέρουμε ότι $[\omega,\theta]$ καταλήγει σε $\omega^a{}_b \wedge e^b$. Πράγματι:

$$[\omega,\theta] = (\omega^a{}_b \wedge e^c) \otimes [e_a{}^b, e_c] = (\omega^a{}_b \wedge e^c) \otimes \delta^b_c e_a = (\omega^a{}_b \wedge e^b) \otimes e_a$$

και επομένως, $\mathcal{T} = \mathcal{T}^a \otimes e_a = (\mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b) \otimes e_a$. Όταν λοιπόν γράφουμε $[\omega,\omega]^{ab}$ θα εννοούμε $2\omega^a{}_c \wedge \omega^{cb}$, ενώ με $[\omega,\theta]^a$ θα σημαίνουμε $\omega^a{}_b \wedge e^b$.

## 8.1. *Teleparallel (ισοδύναμο της) γσ*

Είδαμε στο κεφάλαιο της θεωρίας Lie ότι γενικά $[e_a, e_b] = f^c{}_{ab} e_c$, όπου $f^c{}_{ab}$ οι συντελεστές ανολονομίας του πλαισίου $\{e_a\}$ με "δυϊκή έκφραση" τη δομική εξίσωση:

$$\mathrm{d}e^a = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc} e^b \wedge e^c \tag{8.1}$$

Εισάγουμε τώρα την έννοια της συστροφής (contortion) $\mathcal{K}$, την οποία ορίζουμε ως την 1-μορφή $\mathcal{K}_{ab} = \omega_{ab} - \Gamma_{ab} = -\mathcal{K}_{ba}$, όπου $\Gamma_{ab}$ είναι η Levi-Civita συνοχή (θυμίζουμε ότι δουλεύουμε με ομάδες πινάκων). Η αντισυμμετρία στα $a, b$ οφείλεται στο γεγονός ότι $\omega, \Gamma$ (και άρα και $\mathcal{K}$) είναι 1-μορφές με πεδίο τιμών στην $\mathfrak{o}(1, D-1)$, δηλαδή με άλλα λόγια $\mathcal{K}^{ab} \otimes e_{ab} = \mathcal{K}^{ba} \otimes e_{ba} = -\mathcal{K}^{ba} \otimes e_{ab}$. Για συντομία, θα χρησιμοποιούμε αύξοντες πολυδείκτες, όπου αυτό είναι εφικτό, δηλαδή $e^I \equiv e^{i_1 \cdots i_D} = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_D}$. Ισχύει κατά τα γνωστά ότι:

$$\mathcal{T}^a = \mathrm{d}^\omega e^a = \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \frac{1}{2} T^a{}_{bc} e^b \wedge e^c = \mathcal{K}^a{}_b \wedge e^b$$

αφού $\mathcal{T}^a = \mathrm{d}e^a + \omega^a{}_b \wedge e^b = \mathrm{d}e^a + \Gamma^a{}_b \wedge e^b + \mathcal{K}^a{}_b \wedge e^b$, όπου $\widetilde{\mathcal{T}}^a = \mathrm{d}e^a + \Gamma^a{}_b \wedge e^b = 0$ είναι η (μηδενική) στρέψη της Levi-Civita συνοχής. Πιο πυκνά μπορούμε πάντα να γράψουμε απλά $\mathcal{T} = \mathrm{d}\theta + [\omega,\theta] = [\mathcal{K},\theta]$. Η συνταγή μας για να βρούμε τη Λαγκραντζιανή εκείνη, έτσι ώστε το τηλεπαράλληλο συναρτησοειδές της δράσης να είναι δυναμικά ισοδύναμο (έως και ολικές αποκλίσεις δηλαδή) με το Einstein-Hilbert συναρτησοειδές, θα είναι η ακόλουθη. Συμβολίζοντας τη 2-μορφή καμπυλότητας της Levi-Civita συνοχής με $\widetilde{\mathcal{R}}$, θα ισχύει από ορισμούς ότι:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}} &= \mathrm{d}\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma] = \mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\mathcal{K} + \frac{1}{2}([\omega,\omega] - [\omega,\mathcal{K}] - [\mathcal{K},\omega] + [\mathcal{K},\mathcal{K}]) \\ &= \mathcal{R} - \mathrm{d}\mathcal{K} - [\omega,\mathcal{K}] + \frac{1}{2}[\mathcal{K},\mathcal{K}] = \mathcal{R} - \mathrm{d}^\omega\mathcal{K} + \frac{1}{2}[\mathcal{K},\mathcal{K}]\end{aligned}$$

αφού $[\omega, \mathcal{K}] = (-1)^{1\cdot 1+1}[\mathcal{K}, \omega]$. Επομένως, έχουμε ότι $\widetilde{\mathcal{R}}^{ab} = \mathcal{R}^{ab} - \mathrm{d}^\omega \mathcal{K}^{ab} + \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb}$. Καθώς η συνθήκη της τηλεπαράλληλης δομής είναι ο μηδενισμός της καμπυλότητας Ehresmann $\mathcal{R}$ της $\omega$, έπεται ότι $\widetilde{\mathcal{R}}^{ab} = -\mathrm{d}^\omega \mathcal{K}^{ab} + \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb}$. Η Einstein-Hilbert δράση γράφεται στη γλώσσα των διαφορικών μορφών (και σε $D$ διαστάσεις) ως:

$$S_{EH} = \alpha_D \int \widetilde{\mathcal{R}}_{ab} \wedge *(e^a \wedge e^b) \equiv \alpha_D \int \widetilde{\mathcal{R}}_{ab} \wedge *\widehat{e}^{ab} = \alpha_D \int \widetilde{\mathcal{R}}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

όπου με $\widehat{e}_a \in T^*M$ σημαίνουμε το $\eta_{ab} e^b$, δηλαδή πρόκειται και πάλι για 1-μορφή. Η μετρική Minkowski ανεβοκατεβάζει τους δείκτες στα εσωτερικά αντικείμενα και για τον τελεστή Hodge $* : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{D-k}$ ισχύει ότι $\widehat{e}_{I_k} \mapsto (1/(D-k)!)\epsilon_{I_k, J_{D-k}} e^{J_{D-k}}$, όπου $\epsilon$ είναι ο (πλήρως αντισυμμετρικός) τανυστής Levi-Civita, $I_k$ αύξων πολυδείκτης μήκους $k$ και $J_{D-k}$ αύξων πολυδείκτης μήκους $D-k$, ο οποίος γενικά δεν έχει κοινούς δείκτες με τον $I_k$. Με βάση τα ως άνω, έπεται ότι:

$$\mathcal{L}_{EH} = (\mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} - \mathrm{d}^\omega \mathcal{K}^{ab}) \wedge *\widehat{e}_{ab} \tag{8.2}$$

Όμως, $\mathrm{d}^\omega \mathcal{K} = \mathrm{d}\mathcal{K} + [\Gamma + \mathcal{K}, \mathcal{K}] = \mathrm{d}^\Gamma \mathcal{K} + [\mathcal{K}, \mathcal{K}]$. Επομένως, αντικαθιστώντας στην (8.2), θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{L}_{EH} = -(\mathrm{d}^\Gamma \mathcal{K} + (1/2)[\mathcal{K}, \mathcal{K}])^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

όπου $(\mathrm{d}^\Gamma \mathcal{K} + (1/2)[\mathcal{K}, \mathcal{K}])^{ab} = \mathrm{d}^\Gamma \mathcal{K}^{ab} + \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb}$. Όμως, $\mathrm{d}^\Gamma \mathcal{K}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \mathrm{d}^\Gamma \big(\mathcal{K}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab}\big)$, καθώς $\mathrm{d}^\Gamma (*\widehat{e}_{ab}) = 0$, εφόσον εύκολα παρατηρούμε ότι:

$$\mathrm{d}^\Gamma * \widehat{e}_{ab} = \frac{1}{(D-2)!}\epsilon_{ab, J_{D-2}} \mathrm{d}^\Gamma e^{J_{D-2}} = \frac{1}{(D-3)!}\epsilon_{abc, J_{D-3}} \mathrm{d}^\Gamma e^c \wedge e^{J_{D-3}} = 0$$

καθώς $\epsilon_{ab, J_{D-2}} \mathrm{d}^\Gamma e^{J_{D-2}} = (D-2)\epsilon_{abc, J_{D-3}} \mathrm{d}^\Gamma e^c \wedge e^{J_{D-3}}$ και:

$$\frac{D-2}{(D-2)!} = \frac{D-2}{(D-2)(D-3)!} = \frac{1}{(D-3)!}$$

ενώ επιπλέον η $\Gamma$ είναι ελεύθερη από στρέψη και άρα $\mathrm{d}^\Gamma e^c = \widetilde{\mathcal{T}}^c = 0$. Για την παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η αντισυμμετρικότητα του $\epsilon$ και αυτή της ανταλλαγής δύο 1-μορφών. Επομένως:

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{2}[\mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} - \mathrm{d}^\Gamma \big(\mathcal{K}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab}\big)$$

δηλαδή $\mathcal{L}_{EH} = \mathcal{L}_{Tel} + B$, όπου $B$ η ολική απόκλιση, αποδεικνύοντας έτσι τη δυναμική ισοδυναμία που αναφέραμε στην αρχή. Συνεπώς, η τηλεπαράλληλη δράση μπορεί να γραφεί ως:

$$S_{Tel} = -\alpha_D \int \mathfrak{T} = -\alpha_D \int T * 1 \tag{8.3}$$

όπου ισχύει ότι:

$$\mathfrak{T} = \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge *\widehat{e}_{ab} = K^a{}_{cd} K^{cb}{}_e e^{de} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \frac{1}{(D-2)!} K^a{}_{cd} K^{cb}{}_e \epsilon_{ab, J_{D-2}} e^{de, J_{D-2}}$$
$$= \frac{1}{(D-2)!} K^a{}_{cd} K^{cb}{}_e \epsilon_{ab, J_{D-2}} \epsilon^{de, J_{D-2}} e^{1\cdots D} = K^a{}_{cd} K^{cb}{}_e \delta^{de}_{ab} * 1 = 2K^a{}_{c[a} K^{cb}{}_{b]} * 1 =: T * 1$$

Το ως άνω προκύπτει αφενός γιατί $\epsilon_{I_k, J_{p-k}} \epsilon^{L_k J_{p-k}} = ((D-k)!/(D-p)!)\delta^{L_k}_{I_k}$ και αφετέρου, καθώς $\delta^{J_k}_{I_k} A^{I_k}{}_{J_k} = k! A^{[I_k]}{}_{J_k} = k! A^{I_k}{}_{[J_k]}$. Για συντομία, από εδω και πέρα μπορεί να γράφουμε $[\mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab} = [\mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab}{}_{cd} e^{cd} \equiv 2K^a{}_{ic} K^{ib}{}_d e^{cd}$. Μεταβάλλοντας την (8.3) ως προς το vielbein (δηλαδή το συνπλαίσιο), θα έχουμε απλά να υπολογίσουμε τον όρο:

$$\begin{aligned} 2\delta_e \mathfrak{T} &= ([\delta_e \mathcal{K}, \mathcal{K}] + [\mathcal{K}, \delta_e \mathcal{K}])^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} + [\mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab} \wedge \delta_e (*\widehat{e}_{ab}) \\ &= 2[\delta_e \mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} + [\mathcal{K}, \mathcal{K}]^{ab} \wedge \delta_e (*\widehat{e}_{ab}) \end{aligned} \tag{8.4}$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι $i_{e_a}\mathcal{T}_b = i_{e_a}(\mathcal{K}_{bc} \wedge e^c) = K_{bca}e^c - \mathcal{K}_{ba}$, αφού:

$$i_{e_a}\mathcal{K}_{bc} = i_{e_a}(K_{bcd}e^d) = K_{bcd}e^d(e_a) = K_{bcd}\delta^d_a = K_{bca}$$

Επιπλέον, $i_{e_b}\mathcal{T}_a = K_{acb}e^c - \mathcal{K}_{ab}$, ενώ $(i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}_c)e^c = (i_{e_a}(K_{cdb}e^d - \mathcal{K}_{cb}))e^c = (K_{cab} - K_{cba})e^c$. Επομένως, θα ισχύει ότι $i_{e_a}\mathcal{T}_b - i_{e_b}\mathcal{T}_a - (i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}_c)e^c = 2\mathcal{K}_{ab}$, εφόσον $\mathcal{K}$ αντισυμμετρική στους δείκτες της άλγεβρας. Έτσι, η μεταβολή $\delta_e\mathcal{K}$ ανάγεται στον υπολογισμό των επί μέρους μεταβολών. Αρχικά, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}^b) &= i_{\delta e_a}\mathrm{d}e^b + i_{\delta e_a}\omega^b{}_c e^c - \omega^b{}_c \wedge i_{\delta e_a}e^c + i_{e_a}\mathrm{d}\delta e^b + i_{e_a}\omega^b{}_c\delta e^c - \omega^b{}_c i_{e_a}\delta e^c \\
&= \pounds_{\delta e_a}e^b + \pounds_{e_a}\delta e^b - \mathrm{d}\big(i_{\delta e_a}e^b + i_{e_a}\delta e^b\big) + \\
&+ i_{\delta e_a}\omega^b{}_c e^c + \omega^b{}_{ca}\delta e^c - \omega^b{}_c(i_{\delta e_a}e^c + i_{e_a}\delta e^c) \\
&= \pounds_{\delta e_a}e^b + \pounds_{e_a}\delta e^b + i_{\delta e_a}\omega^b{}_c e^c + \omega^b{}_{ca}\delta e^c
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\delta_e(i_{e_a}e^c) = i_{\delta e_a}e^c + i_{e_a}\delta e^c = 0$ και $\pounds_v = i_v\mathrm{d} + \mathrm{d}i_v$ με $\pounds$ την παράγωγο Lie (ως προς κάποιο δπ $v$). Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την πολύ χρήσιμη ταυτότητα:

$$v(\alpha(w)) = (\pounds_v\alpha)(w) + \alpha(\pounds_v w) \tag{8.5}$$

όπου $\alpha$ είναι 1-μορφή και $v, w$ διανυσματικά πεδία, έτσι ώστε να βρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
(\pounds_{\delta e_a}e^b)(e_c) &= \delta e_a(e^b(e_c)) - e^b(\pounds_{\delta e_a}e_c) \\
(\pounds_{e_c}e^b)(\delta e_a) &= e_c(e^b(\delta e_a)) - e^b(\pounds_{e_c}\delta e_a)
\end{aligned}$$

Όμως, παρατηρούμε ότι:

$$\delta e_a(e^b(e_c)) = \delta_e(e_a(i_{e_c}e^b)) = \delta_e(\pounds_{e_a}(i_{e_c}e^b)) = \delta_e(i_{e_a}\,\mathrm{d}\big(i_{e_c}e^b\big)) = 0$$

και άρα $(\pounds_{\delta e_a}e^b)(e_c) = -e^b(\pounds_{\delta e_a}e_c) = e^b(\pounds_{e_c}\delta e_a)$, καθώς $\pounds_v w = [v, w] = -[w, v] = -\pounds_w v$ για $v, w$ διανυσματικά πεδία. Χρησιμοποιήθηκε επίσης ότι για $f$ βαθμωτό, $\pounds_v f = v(f) = i_v\mathrm{d}f$, αφού $i_v f = 0$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη δεύτερη ως άνω εξίσωση, βρίσκουμε ότι:

$$(\pounds_{e_c}e^b)(\delta e_a) = e_c(e^b(\delta e_a)) - (\pounds_{\delta e_a}e^b)(e_c)$$

όπου χρησιμοποιώντας και πάλι την ταυτότητα (8.5), βλέπουμε ότι:

$$(\pounds_{\delta e_a}e^b)(e_c) = e^b(\pounds_{e_c}\delta e_a) = e^b([e_c, \delta e_a]) = i_{[e_c,\delta e_a]}e^b \tag{8.6}$$

Καθώς όμως $i_{[e_c,\delta e_a]}e^b = \pounds_{e_c}i_{\delta e_a}e^b - i_{\delta e_a}\pounds_{e_c}e^b$, δεδομένου ότι για 2 διανυσματικά πεδία $v, w$ ισχύει η ταυτότητα $[\pounds_v, i_w] = [i_v, \pounds_w] = i_{[v,w]}$ και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
i_{\delta e_a}\pounds_{e_c}e^b = i_{\delta e_a}i_{e_c}\mathrm{d}e^b &\overset{(8.1)}{=} -\frac{1}{2}f^b{}_{de}i_{\delta e_a}i_{e_c}(e^d \wedge e^e) = -\frac{1}{2}f^b{}_{de}i_{\delta e_a}(\delta^d_c e^e - \delta^e_c e^d) \\
&= \frac{1}{2}(f^b{}_{dc}i_{\delta e_a}e^d - f^b{}_{ce}i_{\delta e_a}e^e) \overset{f^a{}_{bc} = -f^a{}_{cb}}{=} f^b{}_{dc}i_{\delta e_a}e^d
\end{aligned}$$

θα έχουμε, εάν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην (8.6), ότι:

$$(\pounds_{\delta e_a}e^b)(e_c) = \pounds_{e_c}i_{\delta e_a}e^b + f^b{}_{cd}i_{\delta e_a}e^d$$

οπότε εύκολα προκύπτει ότι:

$$\pounds_{\delta e_a}e^b = \pounds_{e_c}(e^b(\delta e_a))e^c + f^b{}_{cd}e^d(\delta e_a)e^c \tag{8.7}$$

και τελικά, $\delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}^b) = \pounds_{e_c}(e^b(\delta e_a))e^c + f^b{}_{cd}e^d(\delta e_a)e^c + \pounds_{e_a}\delta e^b + \omega^b{}_{cd}e^d(\delta e_a)e^c + \omega^b{}_{ca}\delta e^c$, εφόσον και $\omega^b{}_c = \omega^b{}_{cd}e^d$. Μένει να υπολογιστεί η μεταβολή $\delta_e(i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}^c)$, δηλαδή 2 ξεχωριστοί όροι, όπου ξεκινώντας με τον πρώτο, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} i_{\delta e_a}i_{e_b}\mathcal{T}^c = i_{\delta e_a}(i_{e_b}\mathrm{d}e^c + \omega^c{}_{db}e^d - \omega^c{}_b) &\overset{(8.1)}{=} i_{\delta e_a}(f^c{}_{db}e^d + 2\omega^c{}_{[db]}e^d) \\ &= (f^c{}_{db} + 2\omega^c{}_{[db]})e^d(\delta e_a) \end{aligned}$$

ενώ εφόσον $\delta_e(i_{e_b}\mathcal{T}^c) = \pounds_{e_d}(e^c(\delta e_b))e^d + f^c{}_{ed}e^d(\delta e_b)e^e + \pounds_{e_b}\delta e^c + \omega^c{}_{ed}e^d(\delta e_b)e^e + \omega^c{}_{db}\delta e^d$, έπεται ότι:

$$i_{e_a}\delta_e(i_{e_b}\mathcal{T}^c) = \pounds_{e_a}(e^c(\delta e_b)) + f^c{}_{ad}e^d(\delta e_b) + i_{e_a}\pounds_{e_b}\delta e^c + \omega^c{}_{ad}e^d(\delta e_b) + \omega^c{}_{db}\delta e^d(e_a)$$

καθώς ισχύει πάντα ότι $i_v f = 0$ για $f$ 0-μορφή, όπως είναι οι όροι $\pounds_{e_d}(e^c(\delta e_b)), f^c{}_{ed}, e^d(\delta e_b)$ κλπ. Έχουμε όμως δει ότι $i_{e_a}\pounds_{e_b}\delta e^c = i_{[e_a,e_b]}\delta e^c + \pounds_{e_b}i_{e_a}\delta e^c = f^d{}_{ab}\delta e^c(e_d) + \pounds_{e_b}\delta e^c(e_a)$ και επομένως, αντικαθιστώντας το ως άνω στην τελευταία εξίσωση και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $i_{e_a}\delta e^b + i_{\delta e_a}e^b = \delta e^b(e_a) + e^b(\delta e_a) = 0$, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta_e(i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}^c) = i_{\delta e_a}i_{e_b}\mathcal{T}^c + i_{e_a}\delta_e(i_{e_b}\mathcal{T}^c) = &\pounds_{e_a}(e^c(\delta e_b)) - \pounds_{e_b}e^c(\delta e_a) + \\ &+ f^c{}_{db}e^d(\delta e_a) + f^c{}_{ad}e^d(\delta e_b) - f^d{}_{ab}e^c(\delta e_d) + \\ &+ \omega^c{}_{ad}e^d(\delta e_b) - \omega^c{}_{bd}e^d(\delta e_a) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Έχουμε έτσι όλους τους αναγκαίους όρους για τον υπολογισμό της μεταβολής της 1-μορφής συστροφής, αφού:

$$2\delta_e\mathcal{K}_{ab} = \delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}_b) - \delta_e(i_{e_b}\mathcal{T}_a) - \delta_e(i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}_c)e^c - T_{cba}\delta e^c \tag{8.9}$$

όπου $i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}_c = (1/2)T_{cde}i_{e_a}i_{e_b}(e^d \wedge e^e) = T_{cba}$ και $\delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}_b) = \eta_{bc}\delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}^c)$. Εύκολα βρίσκουμε λοιπόν (χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο πιο πάνω υπολογισμό και μετονομάζοντας dummy δείκτες) ότι:

$$\delta_e(i_{e_a}\mathcal{T}_b) = -\pounds_{e_c}(i_{e_a}\widehat{\delta e}_b)e^c - f_{bcd}(i_{e_a}\delta e^d)e^c + \pounds_{e_a}\widehat{\delta e}_b - \omega_{bcd}(i_{e_a}\delta e^d)e^c + \omega_{bca}\delta e^c$$

όπου χρησιμοποιήθηκε επίσης η γνωστή ταυτότητα $i_{\delta e_a}\widehat{e}_b = -i_{e_a}\widehat{\delta e}_b$. Έπειτα, είναι προφανές ότι με απλή ανταλλαγή των δεικτών $a$ και $b$ παίρνουμε τον δεύτερο όρο της (8.9), όπου:

$$\delta_e(i_{e_b}\mathcal{T}_a) = -\pounds_{e_c}(i_{e_b}\widehat{\delta e}_a)e^c - f_{acd}(i_{e_b}\delta e^d)e^c + \pounds_{e_b}\widehat{\delta e}_a - \omega_{acd}(i_{e_b}\delta e^d)e^c + \omega_{adc}\delta e^c$$

Τέλος, πολύ εύκολα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \delta_e(i_{e_a}i_{e_b}\mathcal{T}_c)e^c = &-\pounds_{e_a}(i_{e_b}\widehat{\delta e}_c)e^c + \pounds_{e_b}(i_{e_a}\widehat{\delta e}_c)e^c - f_{cdb}(i_{e_a}\delta e^d)e^c - \\ &- f_{cad}(i_{e_b}\delta e^d)e^c + f^d{}_{ab}(i_{e_d}\widehat{\delta e}_c)e^c - \omega_{cad}(i_{e_b}\delta e^d)e^c + \omega_{cbd}(i_{e_a}\delta e^d)e^c \end{aligned}$$

οπότε αντικαθιστώντας τα ως άνω στην (8.9) και χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρία της συνοχής, των σταθερών δομής και του τανυστή της στρέψης $T_{abc} = -T_{acb}$ (λογικό, αφού $\mathcal{T}^a$ είναι 2-μορφή), καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} 2\delta_e\mathcal{K}_{ab} = &\pounds_{e_a}\widehat{\delta e}_b - \pounds_{e_b}\widehat{\delta e}_a + [\pounds_{e_c}i_{e_b}\widehat{\delta e}_a - \pounds_{e_c}i_{e_a}\widehat{\delta e}_b + \pounds_{e_a}i_{e_b}\widehat{\delta e}_c - \pounds_{e_b}i_{e_a}\widehat{\delta e}_c]e^c + \\ &+ 2\omega_{c[ab]}\delta e^c + [2f_{(ac)d}i_{e_b}\delta e^d - 2f_{(bc)d}i_{e_a}\delta e^d - f^d{}_{ab}i_{e_d}\widehat{\delta e}_c]e^c + T_{cab}\delta e^c \end{aligned} \tag{8.10}$$

Ο πρώτος όρος της (8.4) μπορεί με μετονομασία dummy δεικτών να γραφεί ως:

$$2\delta\mathcal{K}^e{}_b \wedge \mathcal{K}^{bd} \wedge *\widehat{e}_{ed} = \eta^{ea}2\delta\mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{K}^{bd} \wedge *\widehat{e}_{ed} = 2\delta\mathcal{K}_{ab} \wedge \underbrace{\frac{1}{(D-2)!}\epsilon^a{}_{d,J_{D-2}}\mathcal{K}^{bd} \wedge e^{J_{D-2}}}_{\mathcal{H}^{ab}}$$

όπου $\eta^{ea}\epsilon_{ed,J_{D-2}} = \epsilon^{a}{}_{d,J_{D-2}}$ και $\mathcal{H}^{ab} \in \mathcal{A}^{D-1}(U, \mathfrak{o}(1, D-1))$. Συνεπώς, μπορούμε να ξεκινήσουμε να υπολογίζουμε τους επί μέρους όρους της τελευταίας εξίσωσης, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση (8.10). Θα έχουμε αρχικά, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\pounds_v = i_v \mathrm{d} + \mathrm{d} i_v$, ότι:

$$\begin{aligned}
\pounds_{e_a}\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab} &= \mathrm{d}((i_{e_a}\widehat{\delta e}_b)\mathcal{H}^{ab}) - \mathrm{d}\widehat{\delta e}_b \wedge i_{e_a}\mathcal{H}^{ab} - (i_{e_a}\widehat{\delta e}_b)\mathrm{d}\mathcal{H}^{ab} \\
&= \mathrm{d}i_{e_a}(\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab}) - \widehat{\delta e}_b \wedge (\mathrm{d}i_{e_a} + i_{e_a}\mathrm{d})\mathcal{H}^{ab} \\
&= \mathrm{d}i_{e_a}(\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab}) - \widehat{\delta e}_a \wedge \pounds_{e_b}\mathcal{H}^{ba}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι $\mathrm{d}\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab}$ και $\widehat{\delta e}_b \wedge \mathrm{d}\mathcal{H}^{ab}$ μηδενίζονται (καθώς είναι $(D+1)$-μορφές), όπως και έγινε εκτεταμένη χρήση παραγοντικής και μετονομασία dummy δεικτών. Επίσης, με χρήση θεωρήματος Stokes, $\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M}\omega$, θα έχουμε μηδενισμό της ολικής απόκλισης, διότι υποθέτουμε ότι η μεταβολή του vielbein μηδενίζεται στο σύνορο, έτσι ώστε τελικά $\pounds_{e_a}\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab} = -\widehat{\delta e}_a \wedge \pounds_{e_b}\mathcal{H}^{ba}$ και άρα προφανώς, $\pounds_{e_b}\widehat{\delta e}_a \wedge \mathcal{H}^{ab} = -\widehat{\delta e}_a \wedge \pounds_{e_b}\mathcal{H}^{ab}$, έτσι ώστε:

$$\pounds_{e_a}\widehat{\delta e}_b \wedge \mathcal{H}^{ab} - \pounds_{e_b}\widehat{\delta e}_a \wedge \mathcal{H}^{ab} = 2\widehat{\delta e}_a \wedge \pounds_{e_b}\mathcal{H}^{[ab]} \tag{8.11}$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\pounds_{e_c}(i_{e_b}\widehat{\delta e}_a)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} &= [f^d{}_{cb}i_{e_d}\widehat{\delta e}_a + i_{e_b}\pounds_{e_c}\widehat{\delta e}_a]e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} \\
&= f^d{}_{cb}\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_d}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ab}) - \widehat{\delta e}_a \wedge \pounds_{e_c}i_{e_b}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ab}) \\
&= -\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ab})
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε παραγοντική και τις πολύ χρήσιμες ταυτότητες $[\pounds_v, i_w] = i_{[v,w]}$ και $\pounds_v(\phi \wedge \psi) = \pounds_v\phi \wedge \psi + \phi \wedge \pounds_v\psi$ (για $\phi, \psi$ αυθαίρετες μορφές), όπως και μηδενίσαμε όλες τις $q$-μορφές με $q > D$. Εύκολα έπεται λοιπόν ότι και $\pounds_{e_c}(i_{e_a}\widehat{\delta e}_b)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} = -\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ba})$, άρα:

$$\pounds_{e_c}(i_{e_b}\widehat{\delta e}_a - i_{e_a}\widehat{\delta e}_b)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} = -2\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[ab]}) \tag{8.12}$$

Με βάση τα ως άνω, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε και τους αμέσως επόμενους όρους της (8.10), καθώς:

$$2\pounds_{e_{[a}}(i_{e_{b]}}\widehat{\delta e}_c)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} = -2\widehat{\delta e}_c \wedge i_{e_{[b}}\pounds_{e_{a]}}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ab}) = -2\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^a \wedge \mathcal{H}^{[cb]})$$

όπου έγινε η ανταλλαγή $c \leftrightarrow a$. Οι εναπομείναντες όροι μπορούν να βρεθούν ανώδυνα, καθώς με μετονομασία dummy δεικτών και χρήση της Minkowski μετρικής (πέραν των γνωστών τεχνασμάτων) προκύπτει ότι:

$$4f_{([a|c)d}(i_{e_{|b]}}\delta e^d)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} = 4f_{([a|c)d}\delta e^d \wedge i_{e_{|b]}}(e^c \wedge \mathcal{H}^{ab}) = 4f_{(dc)}{}^a\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_b}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[db]})$$

όπως και η προφανής ισότητα $f^d{}_{ab}(i_{e_d}\widehat{\delta e}_c)e^c \wedge \mathcal{H}^{ab} = f^d{}_{cb}\widehat{\delta e}_a \wedge i_{e_d}(e^a \wedge \mathcal{H}^{cb})$.

Έχουμε έτσι όλους τους αναγκαίους όρους. Κάνοντας τις κατάλληλες αλλαγές, ώστε να τους εκφράσουμε συναρτήσει του $\widehat{\delta e}_a$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
2\delta\mathcal{K}_{ab} \wedge \mathcal{H}^{ab} = \widehat{\delta e}_a \wedge \Big[&2\pounds_{e_b}\mathcal{H}^{[ab]} - 2i_{e_b}\pounds_{e_c}((e^c \wedge \mathcal{H}^{[ab]}) + (e^a \wedge \mathcal{H}^{[cb]})) + \\
&+ (2\omega^a{}_{[cb]} + T^a{}_{cb})\mathcal{H}^{cb} + 4f_{(dc)}{}^a i_{e_b}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[db]}) - f^d{}_{cb}i_{e_d}(e^a \wedge \mathcal{H}^{cb})\Big]
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Τέλος, ο άλλος όρος της (8.4) βρίσκεται εύκολα, καθώς:

$$\begin{aligned}
\delta_e * \widehat{e}_{I_k} &= \frac{1}{(D-k)!}\epsilon_{I_k,J_{D-k}}\delta_e(e^{J_{D-k}}) \\
&= \frac{D-k}{(D-k)!}\epsilon_{I_k,a,J_{D-(k+1)}}\delta_e e^a \wedge e^{J_{D-(k+1)}} = \delta_e e^a \wedge *\widehat{e}_{I_k,a}
\end{aligned}$$

οπότε:

$$\mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge \delta_e * \widehat{e}_{ab} = \mathcal{K}^a{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge \delta e^d \wedge *\widehat{e}_{abd} = \eta^{ea} \widehat{\delta e}_a \wedge \mathcal{K}^d{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge *\widehat{e}_{dbe}$$

Επομένως, μηδενίζοντας τη μεταβολή της $S_{Tel}$ από αρχή ελάχιστης δράσης, βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης του vielbein έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} &2\pounds_{e_b}\mathcal{H}^{[ab]} - 2i_{e_b}\pounds_{e_c}((e^c \wedge \mathcal{H}^{[ab]}) + (e^a \wedge \mathcal{H}^{[cb]})) + \eta^{ea}\mathcal{K}^d{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge *\widehat{e}_{dbe} + \\ &\quad +(2\omega^a{}_{[cb]} + T^a{}_{cb})\mathcal{H}^{cb} + 4f_{(dc)}{}^a i_{e_b}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[db]}) - f^d{}_{cb} i_{e_d}(e^a \wedge \mathcal{H}^{cb}) = 0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Όμως, αν δούμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} * \widehat{e}_{I_p} &= \frac{1}{(D-p)!}\epsilon_{I_p, J_{D-p}} \mathrm{d}e^{J_{D-p}} \\ &= \frac{D-p}{(D-p)!}\epsilon_{I_p,a,J_{D-(p+1)}} \mathrm{d}e^a \wedge e^{J_{D-(p+1)}} \\ &= -\frac{1}{2(D-(p+1))!}\epsilon_{I_p,a,J_{D-(p+1)}} f^a{}_{bc} e^{bc,J_{D-(p+1)}} \\ &= -\frac{1}{2(D-(p+1))!(p-1)!}\epsilon_{I_p,a,J_{D-(p+1)}} \epsilon^{L_{p-1},bc,J_{D-(p+1)}} f^a{}_{bc} * \widehat{e}_{L_{p-1}} \\ &= -\frac{1}{2(p-1)!}\delta^{L_{p-1},bc}_{I_{p-1},da} f^a{}_{bc} * \widehat{e}_{L_{p-1}} = -\frac{(p+1)!}{2(p-1)!} f^a{}_{[da} * \widehat{e}_{I_{p-1}]} \end{aligned} \tag{8.15}$$

και ότι $*\widehat{e}_{I_p}$ αποτελεί βάση του υπόχωρου των $(D-p)$-μορφών, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τις $(D-1)$-μορφές στη βάση $*\widehat{e}_a$, έτσι ώστε $\mathcal{H}^{ab} = H^{abc} * \widehat{e}_c$, όπου $H^{abc}$ οι συνιστώσες (προφανώς 0-μορφές). Επομένως, αναλύοντας έναν έναν τους όρους της (8.14), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \pounds_{e_b}\mathcal{H}^{[ab]} &= (i_{e_b}\mathrm{d}H^{[ab]c}) * \widehat{e}_c + H^{[ab]c}(i_{e_b}\mathrm{d} * \widehat{e}_c + \mathrm{d} * \widehat{e}_{cb}) \\ &= (i_{e_b}(H^{[ab]c}{}_{,d}e^d)) * \widehat{e}_c - H^{[ab]c}(i_{e_b}(f^d{}_{[cd]} * 1) + 3f^d{}_{[bd} * \widehat{e}_{c]}) \\ &= H^{[ab]c}{}_{,b} * \widehat{e}_c + H^{[ab]c}(f^d{}_{dc} * \widehat{e}_b - 3f^d{}_{[bd} * \widehat{e}_{c]}) \end{aligned}$$

όπου $3f^d{}_{[bd} * \widehat{e}_{c]} = f^d{}_{dc} * \widehat{e}_b - f^d{}_{db} * \widehat{e}_c + f^d{}_{cb} * \widehat{e}_d$, καθώς για έναν τανυστή $A_{abc}$ ισχύει ότι η αντισυμμετρία σε όλους τους δείκτες μπορεί να γραφεί ως $3A_{[abc]} = A_{a[bc]} + A_{c[ab]} + A_{b[ca]}$ και επίσης $f^a{}_{(bc)} = 0$. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι:

$$\begin{aligned} i_{e_a} * \widehat{e}_{I_p} &= \frac{1}{(D-p)!}\epsilon_{I_p,b,J_{D-(p+1)}} i_{e_a} e^{b,J_{D-(p+1)}} \\ &= \frac{1}{(D-(p+1))!}\epsilon_{I_p,b,J_{D-(p+1)}} (i_{e_a}e^b) e^{J_{D-(p+1)}} = \widehat{e}_{I_p,a} \end{aligned} \tag{8.16}$$

Έπεται ότι με αλλαγή dummy δεικτών καταλήγουμε στη σχέση:

$$\pounds_{e_b}\mathcal{H}^{[ab]} = (H^{[ac]b}{}_{,c} + H^{[ac]b} f^d{}_{dc} - H^{[ad]c} f^b{}_{cd}) * \widehat{e}_b \tag{8.17}$$

Συνεχίζοντας, βλέπουμε ότι $i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[ab]}) = i_{e_b}\pounds_{e_c}(H^{[ab]c} * 1)$, καθώς $e^c \wedge *\widehat{e}_d = \delta^c_d * 1$ (με παραγοντική ως προς την εσωτερική παραγώγιση) και επομένως:

$$\begin{aligned} i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[ab]}) &= i_{e_b}(\pounds_{e_c}H^{[ab]c} * 1 + H^{[ab]c}\mathrm{d} * \widehat{e}_c) \\ &\overset{i_{e_b}\pounds_{e_c}H^{[ab]c}=0,(8.15)}{=} (H^{[ab]c}{}_{,c} + H^{[ab]c} f^d{}_{dc}) * \widehat{e}_b \end{aligned} \tag{8.18}$$

οπότε είναι προφανές και ότι:

$$i_{e_b}\pounds_{e_a}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[cb]}) = (H^{[cb]a}{}_{,c} + H^{[cb]a} f^d{}_{dc}) * \widehat{e}_b \tag{8.19}$$

Κατόπιν, πολύ εύκολα βρίσκουμε ότι $(2\omega^a{}_{[cb]} + T^a{}_{cb})\mathcal{H}^{cb} = (2\omega^a{}_{[cd]} + T^a{}_{cd})H^{cdb} * \widehat{e}_b$, όπως και $4f_{(dc)}{}^a i_{e_b}(e^c \wedge \mathcal{H}^{[db]}) = 4f_{(dc)}{}^a H^{[db]c} * \widehat{e}_b$, καθώς ισχύει πάντα $e^a \wedge \mathcal{H}^{[bc]} = H^{[bc]a} * 1$. Τέλος, περισσεύουν οι όροι $f^d{}_{cb} i_{e_d}(e^a \wedge \mathcal{H}^{cb}) = f^b{}_{cd} H^{cda} * \widehat{e}_b$ και $\eta^{ea}\mathcal{K}^d{}_c \wedge \mathcal{K}^{cb} \wedge *\widehat{e}_{dbe}$, όπου για τον τελευταίο θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $*\widehat{e}_{dbe} = i_{e_e} i_{e_b} * \widehat{e}_d$ και άρα με εφαρμογή παραγοντικής (για συντομία γραφής θα αποσιωπήσουμε τα $\wedge$, καθώς ο αναγνώστης έχει αποκτήσει πλέον την κατάλληλη οικειότητα στην αναγνώριση των διάφορων όρων) θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^d{}_c \mathcal{K}^{cb} * \widehat{e}_{dbe} &= K^d{}_{ci} K^{cb}{}_j \delta^{ij}_{db} * \widehat{e}_e - i_{e_b}(i_{e_e}(\mathcal{K}^d{}_c \mathcal{K}^{cb}) * \widehat{e}_d) - (i_{e_b} i_{e_e}(\mathcal{K}^d{}_c \mathcal{K}^{cb})) * \widehat{e}_d \\
&= 2K^d{}_{c[d} K^{cb}{}_{b]} * \widehat{e}_e - 2(K^d{}_{c[e} K^{cb}{}_{d]} + K^b{}_{c[e} K^{cd}{}_{d]}) * \widehat{e}_b \\
&= 2K^d{}_{c[d} K^{cb}{}_{b]} * \widehat{e}_e + 4K^{(d}{}_{c[e} K^{b)c}{}_{d]} * \widehat{e}_b
\end{aligned}$$

οπότε και βρίσκουμε ότι $\eta^{ea}\mathcal{K}^d{}_c \mathcal{K}^{cb} * \widehat{e}_{dbe} = (2\eta^{ab} K^d{}_{c[d} K^{cb}{}_{b]} + 4\eta^{ea} K^{(d}{}_{c[e} K^{b)c}{}_{d]}) * \widehat{e}_b$. Συγκεντρώνοντας τους όρους και με dummy αλλαγές και αντισυμμετρικές ανταλλαγές, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση των εξισώσεων κίνησης του vielbein:

$$\begin{aligned}
&2(H^{[ac]b} + H^{[ba]c} - H^{[cb]a})_{,c} + 2(H^{[ac]b} + H^{[ba]c} - H^{[cb]a}) f^d{}_{dc} + \\
&+ (2H^{[ac]d} + H^{dca}) f^b{}_{cd} + 4f_{(dc)}{}^a H^{[db]c} + (2\omega^a{}_{[cd]} + T^a{}_{cd}) H^{cdb} + \\
&\qquad + 2\eta^{ab} K^d{}_{c[d} K^{cb}{}_{b]} + 4\eta^{ea} K^{(d}{}_{c[e} K^{b)c}{}_{d]} = 0
\end{aligned} \tag{8.20}$$

όπου έχουμε ότι:

$$\mathcal{H}^{ab} = \eta^{ca}\mathcal{K}^{bd} i_{e_d} * \widehat{e}_c = \eta^{ca} K^{bd}{}_d * \widehat{e}_c - \eta^{ca} i_{e_d}(\mathcal{K}^{bd} * \widehat{e}_c) = (\eta^{ca} K^{bd}{}_d - K^{bca}) * \widehat{e}_c$$

δηλαδή $H^{abc} = \eta^{ca} K^{bd}{}_d - K^{bca}$. Επιλέγοντας τη Weitzenböck συνοχή, $\omega = 0$, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης του τηλεπαράλληλου ισοδύναμου της EH βαρύτητας σε $D$ διαστάσεις.

## 8.2. Teleparallel (ισοδύναμο της βαρύτητας) Gauss-Bonnet

Γνωρίζουμε ότι η Λαγκραντζιανή της βαρύτητας Gauss-Bonnet (η οποία αποτελεί τον δεύτερο όρο της Λαγκραντζιανής της βαρύτητας Lovelock) μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L}_{GB} = \widetilde{\mathcal{R}}^{ab} \wedge \widetilde{\mathcal{R}}^{cd} \wedge *\widehat{e}_{abcd} \equiv \widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{\mathcal{R}} * (eeee)$$

όπου στην τελευταία έκφραση έχουμε αποσιωπήσει τα $\wedge$ και τους δείκτες, αφού δεν υπάρχει περιθώριο παρερμηνείας. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν από την καμπυλότητα της αυθαίρετης σπιν συνοχής $\omega$ και θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια σχέση $\mathcal{L}_{GB} = \mathcal{L}_{T_{GB}} + B$, όπου $B$ είναι οι ολικές αποκλίσεις και $\mathcal{L}_{T_{GB}}$ η τηλεπαράλληλη Λαγκραντζιανή, προκειμένου να δείξουμε τη δυναμική ισοδυναμία που αξιώνουμε. Είδαμε στην περίπτωση της τηλεπαράλληλης γσ ότι η καμπυλότητα της συνοχής Levi-Civita μπορεί να εκφραστεί ως $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K} - (1/2)[\mathcal{K},\mathcal{K}]$. Επομένως, θα ισχύει ότι $\mathcal{R}\mathcal{R} * (eeee)$ θα ισούται με:

$$(\widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{\mathcal{R}} + \underbrace{\widetilde{\mathcal{R}}[\mathcal{K},\mathcal{K}]}_{2\mathcal{O}_1} + 2\underbrace{(\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K})\widetilde{\mathcal{R}}}_{\mathcal{O}_2} + \underbrace{(\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K})[\mathcal{K},\mathcal{K}]}_{2\mathcal{O}_3} + \underbrace{(\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K})\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K}}_{\mathcal{O}_4} + \underbrace{\frac{1}{4}[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}]}_{\mathcal{O}_5}) * (eeee)$$

όπου εκμεταλλευτήκαμε τις αντισυμμετρίες στην ανταλλαγή κατά τα γνωστά. Παρατηρούμε ότι καθώς $\widetilde{\mathcal{R}} + \mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K} = \mathcal{R} - (1/2)[\mathcal{K},\mathcal{K}]$, θα ισχύει ότι $2\mathcal{O}_1 + 2\mathcal{O}_3 = (\mathcal{R} - (1/2)[\mathcal{K},\mathcal{K}])[\mathcal{K},\mathcal{K}]$, οπότε καταλήγουμε ότι $2\mathcal{O}_1 + 2\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_5 = \mathcal{R}[\mathcal{K},\mathcal{K}] - \mathcal{O}_5$. Έπειτα βλέπουμε ότι ο όρος $\mathcal{O}_2$ είναι μια ολική απόκλιση, καθώς $\mathcal{O}_2 * (eeee) = \mathrm{d}^\Gamma(\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{R}} * (eeee)) + \mathcal{K}(\mathrm{d}^\Gamma\widetilde{\mathcal{R}}) * (eeee) + \mathcal{K}\widetilde{\mathcal{R}}\mathrm{d}^\Gamma * (eeee)$

και $\mathrm{d}^\Gamma\widetilde{\mathcal{R}} = 0$ (ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα), όπως και $\mathrm{d}^\Gamma e = 0$, διότι η συνοχή Levi-Civita είναι συνοχή δίχως στρέψη. Συνεπώς:

$$\mathcal{O}_2 * (eeee) = \mathrm{d}^\Gamma(\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{R}} * (eeee)) = \mathrm{d}\,(\mathcal{K}\widetilde{\mathcal{R}} * (eeee)) = B_1 \tag{8.21}$$

καθώς όλοι οι δείκτες είναι βουβοί. Έπειτα, παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{O}_4$ συνεισφέρει μια δεύτερη απόκλιση, καθώς $\mathcal{O}_4 * (eeee) = \mathrm{d}\,(\mathcal{K}(\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K}) * (eeee)) + \mathcal{K}(\mathrm{d}^{\Gamma^2}\mathcal{K}) * (eeee)$, όπου σημαίνουμε $B_2 = \mathrm{d}\,(\mathcal{K}(\mathrm{d}^\Gamma\mathcal{K}) * (eeee))$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι για μια $p$-μορφή $\phi$ με τιμές στην $\mathfrak{o}(1, D-1)$ θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\Gamma^2}\phi &= \mathrm{d}^\Gamma(\mathrm{d}^\Gamma\phi) = \mathrm{d}^\Gamma(\mathrm{d}\phi + [\Gamma,\phi]) = [\Gamma, \mathrm{d}\phi] + \mathrm{d}[\Gamma,\phi] + [\Gamma,[\Gamma,\phi]]\\ &= [\mathrm{d}\Gamma,\phi] + [\Gamma,[\Gamma,\phi]] = [\mathrm{d}\Gamma,\phi] + \frac{1}{2}[[\Gamma,\Gamma],\phi] = [\widetilde{\mathcal{R}},\phi] = \widetilde{\mathcal{R}}\wedge\phi - (-1)^{2p}\phi\wedge\widetilde{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι συνήθεις ταυτότητες και το γεγονός ότι $[[\Gamma,\Gamma],\phi] = 2[\Gamma,[\Gamma,\phi]]$ (από ταυτότητα Jacobi). Άρα, $\mathcal{K}(\mathrm{d}^{\Gamma^2}\mathcal{K}) * (eeee) = \mathcal{K}[\widetilde{\mathcal{R}},\mathcal{K}] * (eeee)$. Εφόσον όμως έχουμε δει ότι $\widetilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathrm{d}^\omega\mathcal{K} + (1/2)[\mathcal{K},\mathcal{K}]$, έπεται ότι $\mathcal{K}[\widetilde{\mathcal{R}},\mathcal{K}] = \mathcal{K}[\mathcal{R},\mathcal{K}] - \mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}] + (1/2)\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]$, όπου $\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}] * (eeee) \neq 0$ και αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\mathcal{R}\mathcal{R}*(eeee) = (\widetilde{\mathcal{R}}\widetilde{\mathcal{R}} + \mathcal{R}[\mathcal{K},\mathcal{K}] - \frac{1}{4}[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}] + \mathcal{K}[\mathcal{R},\mathcal{K}] - \mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}] + \frac{1}{2}\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}])*(eeee)$$

συν την ολική απόκλιση $B = B_1 + B_2$. Εφαρμόζοντας σε αυτό το σημείο τη συνθήκη τηλεπαραλληλισμού $\mathcal{R} = 0$ και λύνοντας ως προς $\mathcal{L}_{GB}$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathcal{L}_{GB} = \underbrace{((1/4)[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}] + \mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}] - (1/2)\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]) * (eeee)}_{\mathcal{L}_{T_{GB}}} - B \tag{8.22}$$

όπου μέσα σε λίγες γραμμές καταφέραμε να κατασκευάσουμε το τηλεπαράλληλο (δυναμικό) ισοδύναμο της βαρύτητας GB, το οποίο είναι Lorentz αναλλοίωτο (κατασκευασμένο με τη συνοχή και το vielbein), αλλά και τοπολογικό αναλλοίωτο στις 4 διαστάσεις, καθότι το αριστερό μέλος είναι τέτοιο. Εμφανίζοντας ξανά τους δείκτες, η $\mathcal{L}_{T_{GB}} \equiv \mathcal{T}_{GB}$ παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_{T_{GB}} = (\mathcal{K}^{a_1}{}_i\mathcal{K}^{ia_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_j\mathcal{K}^{ja_4} + 2\mathcal{K}^{a_1a_2}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4} - 2\mathcal{K}^{a_1a_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4}) * \widehat{e}_{A_4} \tag{8.23}$$

όπου $\mathcal{T}_{GB} = T_{GB} * 1$ με $T_{GB}$ να είναι το αντίστοιχο βαθμωτό. Για να βρούμε την έκφραση αυτού του βαθμωτού ας πάρουμε έναν έναν τους όρους και ας τους αναλύσουμε. Έχουμε αρχικά ότι:

$$(1/4)[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}] * (eeee) = \mathcal{K}^{a_1}{}_{ij_1}\mathcal{K}^{ia_2}{}_{j_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_{jj_3}\mathcal{K}^{ja_4}{}_{j_4}\delta^{J_4}_{A_4} * 1$$

καθώς:

$$e^{J_4} \wedge *\widehat{e}_{A_4} = \frac{1}{(D-4)!}\epsilon_{A_4,I_{D-4}}e^{J_4,I_{D-4}} = \frac{1}{(D-4)!}\epsilon_{A_4,I_{D-4}}\epsilon^{J_4,I_{D-4}} * 1 = \delta^{J_4}_{A_4} * 1$$

Έπειτα, $\mathrm{d}^\omega(K^a{}_{bc}e^c) = \mathrm{d}^\omega K^a{}_{bc} \wedge e^c + K^a{}_{bc} \wedge \mathcal{T}^c$ (αφού $K$ 0-μορφή και $\mathrm{d}^\omega e^a = \mathcal{T}^a$), όπως και ισχύει (όπως δείξαμε στην κατασκευή της συναλλοίωτης παραγώγου) ότι $\mathrm{d}^\omega K^a{}_{bc} = K^a{}_{bc|d}e^d$ (όπου με $|d$ σημαίνουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο ως προς τη σπιν συνοχή). Συνεπώς, έπεται ότι $\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^a{}_b = K^a{}_{bc|d}e^d \wedge e^c + K^a{}_{bc}\mathcal{T}^c$. Έχουμε όμως ήδη δείξει στην προηγούμενη ενότητα ότι $\mathcal{T}^a = \mathcal{K}^a{}_be^b = K^a{}_{bc}e^c \wedge e^b$. Επομένως, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{a_1a_2}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4} &= \mathcal{K}^{a_1a_2}(K^{a_3}{}_{ic|d}e^de^c + K^{a_3}{}_{ic}K^c{}_{bf}e^fe^b)\mathcal{K}^{ia_4}\\ &\equiv K^{a_1a_2}{}_a(K^{a_3}{}_{ib|c}K^{ia_4}{}_d + K^{a_3}{}_{ij}K^j{}_{bc}K^{ia_4}{}_d)e^{acbd}\\ &= -K^{a_1a_2}{}_a(K^{a_4}{}_{ib}K^{ia_3}{}_{c|d} + K^{a_4}{}_{id}K^{ia_3}{}_jK^j{}_{bc})e^{abcd}\end{aligned}$$

και άρα $\mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee) = K^{a_1a_2}{}_{j_1}(K^{a_3}{}_{ij_2}K^{ia_4}{}_{j_3|j_4} + K^{a_3}{}_{ij_4}K^{ia_4}{}_jK^j{}_{j_2j_3})\delta^{J_4}_{A_4}*1$, αφού κατά τα γνωστά ισχύει ότι $*\widehat{e}_{a_1a_2a_4a_3} = -*\widehat{e}_{A_4}$. Τέλος, άμεσα βρίσκουμε ότι:

$$\mathcal{K}^{a_1a_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4} = K^{a_1a_2}{}_{j_1}K^{a_3}{}_{ij_2}K^i{}_{jj_3}K^{ja_4}{}_{j_4}\delta^{J_4}_{A_4}*1$$

Συγκεντρώνοντας όλους τους παραπάνω όρους, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για το $T_{GB}$:

$$\begin{aligned} T_{GB} = \Big[ & K^{a_1}{}_{ij_1}K^{ia_2}{}_{j_2}K^{a_3}{}_{jj_3}K^{ja_4}{}_{j_4} + 2K^{a_1a_2}{}_{j_1}(K^{a_3}{}_{ij_2}K^{ia_4}{}_{j_3|j_4} + K^{a_3}{}_{ij_4}K^{ia_4}{}_jK^j{}_{j_2j_3}) - \\ & -2K^{a_1a_2}{}_{j_1}K^{a_3}{}_{ij_2}K^i{}_{jj_3}K^{ja_4}{}_{j_4}\Big]\delta^{J_4}_{A_4} \end{aligned} \tag{8.24}$$

Μπορούμε πλέον να περάσουμε στη φάση της μεταβολής της $S_{T_{GB}} = \int_M \mathcal{L}_{T_{GB}}$ ως προς το vielbein. Λόγω της πληθώρας των πράξεων θα συνεχίσουμε στο μοτίβο των προηγούμενων βημάτων, προσδιορίζοντας κάθε όρο χωριστά. Αρχικά $\delta_e[\mathcal{K},\mathcal{K}] = 2[\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]$, καθώς $[\mathcal{K},\delta_e\mathcal{K}] = [\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]$. Επιπλέον, $\delta_e([\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}])*(eeee) = 2(\delta_e[\mathcal{K},\mathcal{K}])[\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee)$ λόγω αντισυμμετρίας. Έχουμε, εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών στον πρώτο όρο της $\mathcal{L}_{T_{GB}}$, ότι:

$$\begin{aligned} \delta_e([\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee)) &= 4[\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee) + \underbrace{[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}]\delta e^{a_5}*(eeee\widehat{e}_{a_5})}_{I_1} \\ &= 16(\delta_e\mathcal{K}_{ab})\eta^{a_1a}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_j\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4} + I_1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια περνάμε για ευκολία στον τρίτο όρο, όπου αφαιρετικά γράφουμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta_e(\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]*(eeee)) = \Big[ & \underbrace{\delta_e\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]}_{\mathcal{O}_1} + \underbrace{\mathcal{K}([[\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}] + [[\mathcal{K},\mathcal{K}],\delta_e\mathcal{K}])}_{\mathcal{O}_2} + \\ & + \underbrace{\mathcal{K}[[\mathcal{K},\delta_e\mathcal{K}],\mathcal{K}]}_{\mathcal{O}_3}\Big]*(eeee) + \underbrace{\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]\delta e^{a_5}*(eeeee_{a_5})}_{I_2} \end{aligned}$$

Ξεκινώντας από τον $\mathcal{O}_1$, εμφανίζουμε τους δείκτες και αυτός παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{O}_1*(eeee) = 4\delta_e\mathcal{K}_{ab}\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4}$$

Ύστερα, $\mathcal{O}_2*(eeee) = 0$, καθώς:

$$\mathcal{O}_2*(eeee) = 4\mathcal{K}^{a_1a_2}[(\delta_e\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4} + \mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\delta_e\mathcal{K}^{ja_4}]*\widehat{e}_{A_4}$$

με $\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\delta_e\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4} = (\delta_e\mathcal{K}^{a_3}{}_j)\mathcal{K}^j{}_i\mathcal{K}^{ia_4}*\widehat{e}_{a_1a_2a_4a_3} = -(\delta_e\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4}$, όπου εκμεταλλευτήκαμε την αντισυμμετρία της 1-μορφής συστροφής, την αντισυμμετρία στην ανταλλαγή μορφών περιττού βαθμού και τέλος την αντισυμμετρία του $\epsilon$. Επομένως, μένει μόνο ο όρος $\mathcal{O}_3$, για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3*(eeee) &= 4\mathcal{K}^{a_1a_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_i(\delta_e\mathcal{K}^i{}_j)\mathcal{K}^{ja_4}*\widehat{e}_{A_4} = -4(\delta_e\mathcal{K}_{ij})\mathcal{K}^{ia_3}\mathcal{K}^{ja_4}\mathcal{K}^{a_1a_2}*\widehat{e}_{A_4} \\ &= -4(\delta_e\mathcal{K}_{ab})\mathcal{K}^{aa_1}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{a_3a_4a_1a_2} = -4(\delta_e\mathcal{K}_{ab})\mathcal{K}^{aa_1}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{A_4} \end{aligned}$$

οπότε και καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\delta_e(\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]*(eeee)) = 4\delta_e\mathcal{K}_{ab}(\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4} - \mathcal{K}^{aa_1}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4})*\widehat{e}_{A_4} + I_2$$

Ο τελευταίος όρος της μεταβολής της $\mathcal{L}_{T_{GB}}$ είναι η μεταβολή του δεύτερου όρου, όπου αφαιρετικά θα έχουμε:

$$\delta_e(\mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee)) = \left[\underbrace{\delta_e\mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]}_{J_1} - \underbrace{[\mathrm{d}^\omega\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]\mathcal{K}}_{J_2} + \underbrace{[\delta_e\mathcal{K},\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}]\mathcal{K}}_{J_3}\right]*(eeee) + I_3$$

με $I_3 = \mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]\delta e^{a_5}*(eeeee_{a_5})$, όπου επισημαίνουμε ότι $[\mathrm{d}^\omega,\delta_e]=0$ και ότι $[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]$ είναι 3-μορφή (αφορά στις ανταλλαγές). Έτσι:

$$J_1*(eeee) = 2\delta_e\mathcal{K}_{ab}\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4}*\widehat{e}_{A_4}$$

ενώ για τον όρο $J_2$ τα πράγματα είναι πιο πολύπλοκα, καθώς με εφαρμογή παραγοντικής έχουμε ότι:

$$J_2*(eeee) = \mathrm{d}^\omega([\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]\mathcal{K}*(eeee)) + 2(\delta_e\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ia_4}\mathcal{K}^{a_1a_2}*\widehat{e}_{A_4})$$

όπου όμως $\mathrm{d}^\omega([\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]\mathcal{K}*(eeee)) = \mathrm{d}([\delta_e\mathcal{K},\mathcal{K}]\mathcal{K}*(eeee))$ (βουβοί δείκτες) και άρα με εφαρμογή Stokes μηδενίζεται, καθώς υποθέτουμε ότι στο σύνορο $\delta_e\mathcal{K}=0$. Συνεπώς:

$$J_2*(eeee) = 2(\delta_e\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ia_4}\mathcal{K}^{a_1a_2}*\widehat{e}_{A_4}) = 2(\delta_e\mathcal{K}_{ab})\eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{A_4})$$

Τέλος, για τον όρο $J_3$ ισχύει ότι:

$$J_3*(eeee) = 2(\delta_e\mathcal{K}_{ab})\eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{A_4}$$

έτσι ώστε:

$$\delta_e(\mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}]*(eeee)) = 2\delta_e\mathcal{K}_{ab}\Big[\big(\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4} + \eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}\big)*\widehat{e}_{A_4} - \\ -\eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{A_4})\Big] + I_3$$

Έπειτα από όλη αυτήν τη διαδικασία, είμαστε σε θέση να δώσουμε μια συνολική έκφραση, όπου αντικαθιστώντας όλα τα ως άνω θα έχουμε ότι:

$$\delta_e\mathcal{T}_{GB} = 2\delta_e\mathcal{K}_{ab}\Big[\big[2\eta^{a_1a}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_j\mathcal{K}^{ja_4} + \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4} + \eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} + \\ +\mathcal{K}^{aa_1}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} - \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4}\big]*\widehat{e}_{A_4} - \eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}*\widehat{e}_{A_4})\Big] + \\ +\widehat{\delta e}_a\eta^{ba}\left[\frac{1}{4}[\mathcal{K},\mathcal{K}][\mathcal{K},\mathcal{K}] + \mathcal{K}[\mathrm{d}^\omega\mathcal{K},\mathcal{K}] - \frac{1}{2}\mathcal{K}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]\right]*(eeeee_b) \tag{8.25}$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε ως $\delta_e\mathcal{T}_{GB} = 2\delta_e\mathcal{K}_{ab}\mathcal{H}^{ab} + \widehat{\delta e}_a\hbar^a$, όπου πέραν της $\mathcal{H}$ είναι και η $\hbar$ μια $(D-1)$-μορφή, η οποία μπορεί να γραφεί στη βάση των $(D-1)$ μορφών, $*\widehat{e}_a$, ως $\hbar^a = h^{ab}*\widehat{e}_b$. Εδω φαίνεται και ο λόγος που στην περίπτωση της τηλεπαράλληλης γσ επιλέξαμε να εργαστούμε όπως εργαστήκαμε, καθότι πλέον έχουμε ουσιαστικά εξάγει τις εξισώσεις κίνησης της θεωρίας, οι οποίες έχουν την ίδια ουσιαστικά μορφή με την (8.20), αν θεωρήσουμε ότι οι δύο τελευταίοι όροι της (8.20) δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από τον όρο $h^{ab}$ (σήμανση που δε χρειάστηκε λόγω απλότητας να εισάγουμε σε εκείνο το σημείο). Έχουμε δηλαδή ότι:

$$2(H^{[ac]b} + H^{[ba]c} - H^{[cb]a})_{,c} + 2(H^{[ac]b} + H^{[ba]c} - H^{[cb]a})f^d{}_{dc} + \\ +(2H^{[ac]d} + H^{dca})f^b{}_{cd} + 4f_{(dc)}{}^aH^{[db]c} + (2\omega^a{}_{[cd]} + T^a{}_{cd})H^{cdb} + h^{ab} = 0 \tag{8.26}$$

Η μόνη διαφορά έγκειται απλά στο περιεχόμενο των $\mathcal{H}^{ab}$ και $\hbar^a$, όπου για να βρούμε τα $H^{abc}$ και $h^{ab}$ εργαζόμαστε ακριβώς με τις ίδιες τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη ενότητα. Ισχύει ότι (βλ. Horndeski) γενικά $e^{A_p} * \widehat{e}_{J_{p+1}} = \delta^{aA_p}_{J_{p+1}} * e_a$, οπότε η εύρεση του $H^{abc}$ είναι τετριμμένη με εξαίρεση τους όρους που περιέχουν συναλλοίωτες. Θα δούμε τον έναν από τους δύο αναλυτικά ως παράδειγμα:

$$\begin{aligned}\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3}{}_i)\mathcal{K}^{ia_4} * \widehat{e}_{A_4} &= \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(\mathrm{d}^\omega K^{a_3}{}_{ic}e^c + K^{a_3}{}_{ic}\mathcal{T}^c)K^{ia_4}{}_{j_3}e^{j_3} * \widehat{e}_{A_4}\\ &= \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(K^{a_3}{}_{ij_2|j_1} + K^{a_3}{}_{ic}K^c{}_{j_2j_1})K^{ia_4}{}_{j_3}e^{J_3} * \widehat{e}_{A_4}\\ &= \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(K^{a_3}{}_{ij_2|j_1} + K^{a_3}{}_{id}K^d{}_{j_2j_1})K^{ia_4}{}_{j_3}\delta^{c,J_3}_{A_4} * \widehat{e}_c\end{aligned}$$

Επομένως, εύκολα βρίσκουμε και ότι:

$$\eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} * \widehat{e}_{A_4} = \eta^{a_1a}(K^{ba_2}{}_{j_2|j_1} + K^{ba_2}{}_dK^d{}_{j_2j_1})K^{a_3a_4}{}_{j_3}\delta^{c,J_3}_{A_4} * \widehat{e}_c$$

όπως και:

$$\begin{aligned}2\eta^{a_1a}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3}{}_j\mathcal{K}^{ja_4} * \widehat{e}_{A_4} &= \eta^{a_1a}\mathcal{K}^{ba_2}[\mathcal{K},\mathcal{K}]^{a_3a_4} * \widehat{e}_{A_4}\\ &= \eta^{a_1a}K^{ba_2}{}_{j_1}[\mathcal{K},\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{j_2j_3}\delta^{c,J_3}_{A_4} * \widehat{e}_c\end{aligned}$$

Επιπλέον:

$$\mathcal{K}^{aa_1}\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} * \widehat{e}_{A_4} = K^{aa_1}{}_{j_1}K^{ba_2}{}_{j_2}K^{a_3a_4}{}_{j_3}\delta^{c,J_3}_{A_4} * \widehat{e}_c$$

και:

$$\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\mathcal{K}^{a_3}{}_i\mathcal{K}^i{}_j\mathcal{K}^{ja_4} = \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\frac{1}{4}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{J_3}\delta^{c,J_3}_{A_4} * \widehat{e}_c$$

όπως και:

$$\begin{aligned}\eta^{a_1a}\mathrm{d}^\omega(\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} * \widehat{e}_{A_4}) =&\eta^{a_1a}\Big[(\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4} - \mathcal{K}^{ba_2}\mathrm{d}^\omega\mathcal{K}^{a_3a_4}) * \widehat{e}_{A_4} +\\ &+ \mathcal{K}^{ba_2}\mathcal{K}^{a_3a_4}\mathrm{d}^\omega * \widehat{e}_{A_4}\Big]\\ =&\eta^{a_1a}\Big[\big[(K^{ba_2}{}_{j_2|j_1} + K^{ba_2}{}_dK^d{}_{j_2j_1})K^{a_3a_4}{}_{j_3}) -\\ &- K^{ba_2}{}_{j_1}(K^{a_3a_4}{}_{j_3|j_2} + K^{a_3a_4}{}_dK^d{}_{j_3j_2})\big]\delta^{c,J_3}_{A_4} +\\ &+ K^{ba_2}{}_{j_1}K^{a_3a_4}{}_{j_2}K^d{}_{j_4j_3}\delta^{c,J_4}_{A_4,d}\Big] * \widehat{e}_c\end{aligned}$$

αφού:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^\omega * \widehat{e}_{A_4} &= \frac{1}{(D-4)!}\epsilon_{A_4,I_{D-4}}\mathrm{d}^\omega e^{I_{D-4}} = \frac{1}{(D-5)!}\epsilon_{A_4,d,I_{D-5}}\mathrm{d}^\omega e^d \wedge e^{I_{D-5}}\\ &= \mathcal{T}^d * \widehat{e}_{A_4,d} = K^d{}_{j_4j_3}e^{j_3j_4} * \widehat{e}_{A_4,d}\end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας λοιπόν τους όρους, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}H^{abc} = \Big[&\eta^{a_1a}K^{ba_2}{}_{j_1}[\mathcal{K},\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{j_2j_3} + \eta^{a_1a}\eta^{a_2b}(K^{a_3}{}_{ij_2|j_1} + K^{a_3}{}_{id}K^d{}_{j_2j_1})K^{ia_4}{}_{j_3} +\\ &+\eta^{a_1a}(K^{ba_2}{}_{j_2|j_1} + K^{ba_2}{}_dK^d{}_{j_2j_1})K^{a_3a_4}{}_{j_3} + K^{aa_1}{}_{j_1}K^{ba_2}{}_{j_2}K^{a_3a_4}{}_{j_3} +\\ &+\eta^{a_1a}\eta^{a_2b}\frac{1}{4}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{J_3}\Big]\delta^{c,J_3}_{A_4} - \eta^{a_1a}\Big[\big[(K^{ba_2}{}_{j_2|j_1} + K^{ba_2}{}_dK^d{}_{j_2j_1})K^{a_3a_4}{}_{j_3}) -\\ &-K^{ba_2}{}_{j_1}(K^{a_3a_4}{}_{j_3|j_2} + K^{a_3a_4}{}_dK^d{}_{j_3j_2})\big]\delta^{c,J_3}_{A_4} + K^{ba_2}{}_{j_1}K^{a_3a_4}{}_{j_2}K^d{}_{j_4j_3}\delta^{c,J_4}_{A_4,d}\Big]\end{aligned} \tag{8.27}$$

ενώ με ακριβώς αντίστοιχη διαδικασία βρίσκουμε σύντομα ότι:

$$h^{ab} = \eta^{ca}\Big[\frac{1}{4}[\mathcal{K},\mathcal{K}]^{a_1a_2}{}_{j_1j_2}[\mathcal{K},\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{j_3j_4} + 2\big[K^{a_1a_2}{}_{j_1}(K^{a_3}{}_{ij_3|j_2}+ \\ +K^{a_3}{}_{id}K^{d}{}_{j_3j_2})K^{ia_4}{}_{j_4}\big]- \\ -\frac{1}{2}K^{a_1a_2}{}_{j_1}[[\mathcal{K},\mathcal{K}],\mathcal{K}]^{a_3a_4}{}_{j_2j_3j_4}\Big]\delta^{b,J_4}_{A_4,c} \tag{8.28}$$

Για $D = 4$ και επιλέγοντας τη Weitzenböck συνοχή $\omega = 0$, οι εξισώσεις απλοπλοιούνται σε μεγάλο βαθμό, αφού ο όρος $\hbar^a$ μηδενίζεται (καθώς $*(eeeee_b)$ είναι $(D-5)$-μορφή) και η συναλλοίωτη εξωτερική παράγωγος υποβαθμίζεται σε εξωτερική παράγωγο, οδηγώντας έτσι και σε εμφάνιση συντελεστών ανολονομίας στις αναλυτικές εξισώσεις κίνησης, αφού επιστρέφουμε πίσω στον ορισμό του $\mathcal{H}^{ab}$ και παρατηρούμε ότι:

$$\mathrm{d}^{\omega}\mathcal{K}^{ab} = \mathrm{d}\mathcal{K}^{ab} = \mathrm{d}K^{ab}{}_{c}\wedge e^{c} + K^{ab}{}_{c}\mathrm{d}e^{c} = K^{ab}{}_{c,d}e^{dc} - \frac{1}{2}f^{c}{}_{de}K^{ab}{}_{c}e^{de}$$

# Κεφάλαιο 9

## Τροποποιημένη Βαρύτητα

Είναι γνωστό ότι η θεωρία της γενικής σχετικότητας αποτελεί ακόμη, μετά από πάνω από έναν αιώνα, μια εκπληκτικά επιτυχημένη θεωρία, η οποία, μαζί με τη κβαντική θεωρία πεδίου, στέκει ως πυλώνας της σύγχρονης φυσικής. Παρόλα αυτά, ήδη από τα πρώτα χρόνια της ύπαρξής της, άρχισαν να προτείνονται εναλλακτικές θεωρίες, είτε στα πλαίσια ισοδύναμων περιγραφών της βαρύτητας, είτε στα πλαίσια "επέκτασης" της γενικής σχετικότητας (προς την κατεύθυνση μιας ενοποιημένης θεωρίας), όπως η θεωρία των Kaluza-Klein. Με την εξέλιξη της τεχνολογίας και τη συλλογή νέων πειραματικών δεδομένων, η εμφάνιση εναλλακτικών θεωριών έγινε σταδιακά όλο και μεγαλύτερη, προκειμένου να δοθεί ένας θεωρητικός μηχανισμός που να προβλέπει με καλή ακρίβεια κάποιες από τις ανωμαλίες της νέας φαινομενολογίας. Η πλειοψηφία αυτών των θεωριών μπορεί με χαλαρά κριτήρια να ενταχθεί σε μια υπερκλάση θεωριών, η οποία έγινε γνωστή ως τροποποιημένη βαρύτητα (modified gravity). Φυσικά, αφού το πείραμα επιβεβαίωνε σε τεράστιο βαθμό τη γσ, η βιωσιμότητα των επιμέρους κλάσεων θεωριών στηριζόταν και στηρίζεται στην ύπαρξη της θεωρίας του Einstein ως ορίου των τροποποιημένων μοντέλων. Σήμερα, το βασικό κίνητρο για τροποποιημένη βαρύτητα είναι πιθανότατα κοσμολογικής φύσεως και συνοδεύεται συνήθως από την εισαγωγή νέων πεδίων, τα οποία επιχειρούν να απαντήσουν στα ερωτήματα του πληθωρισμού (inflation), της σκοτεινής ενέργειας κλπ.

Από αυτές τις θεωρίες, εξέχουσα θέση κατέχει η κλάση των θεωριών βαθμωτού-τανυστή (scalar-tensor), η οποία μεταξύ άλλων περιέχει τις θεωρίες Brans-Dicke, Dilaton, Chameleon, Quintessence κλπ. Επομένως, θα θέλαμε να ασχοληθούμε ιδανικά με μια γενική δράση που να μπορεί (με κατάλληλες παραμέτρους) να συμπεριλάβει ένα μεγάλο σύνολο μοντέλων αυτής της κλάσης. Μια τέτοια δράση πρότεινε ο Horndeski το 1974. Η βαρύτητα Horndeski αποτελεί την πιο γενική θεωρία βαθμωτού-τανυστή με έως και δεύτερης τάξης παραγώγους στις εξισώσεις κίνησης και όριο τη γσ. Πρόκειται δηλαδή για μια τεράστια υποκλάση της βαρύτητας βαθμωτού-τανυστή. Προτού περάσουμε στον αναλυτικό υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης της Horndeski, θα δούμε για σχετική πληρότητα και την κλάση θεωριών $f(R)$, όπου $R$ το βαθμωτό Ricci. Θα εισάγουμε μια ιδιότροπη συντομευτική σήμανση που θα χρησιμοποιήσουμε επί το πλείστον στις δύο πρώτες ενότητες. Θα γράφουμε $A_{\llbracket ab}B_{cd\rrbracket} \equiv A_{[a|b}B_{c|d]} = (1/2)(A_{ab}B_{cd} - A_{db}B_{ca})$, δηλαδή ο συμβολισμός αυτός σημαίνει την αντισυμμετρική ανταλλαγή των δεικτών $a$ και $d$, ενώ η ανάλογη σχέση $A_{\wr ab}B_{cd\S} = (1/2)(A_{ab}B_{cd} + A_{db}B_{ca})$ εκφράζει την συμμετρική ανταλλαγή των δεικτών $a$ και $d$. Επίσης όταν γράφουμε $A^{\wr\cdot}{}_{\wr}.B^{\cdot\S}{}_{\cdot\S}$, εννοούμε ότι η ανταλλαγή εκτελείται ταυτόχρονα και στα δύο ζεύγη δεικτών. Θα χρησιμοποιούμε επίσης, όπου αυτό είναι εφικτό, το , για να συμβολίσουμε τη μερική παράγωγο και το ; για να συμβολίσουμε τη συναλλοίωτη.

## 9.1. *Μετρική βαρύτητα* $f(R) + GYH$

Προτού αναφέρουμε τη Λαγκραντζιανή αυτής της θεωρίας, θα ξεκινήσουμε προσδιορίζοντας το στοιχείο όγκου. Έναντι ελληνικών (κοσμικών) δεικτών, θα χρησιμοποιήσουμε λατινικούς για ευκολία, χωρίς να υπονοείται κάτι άλλο (όπως στην περίπτωση των μεικτών δεικτών). Έστω τοπικά Minkowski σύστημα συντεταγμένων $\{x^{a'}\}$ με $a' = 0, \cdots, 3$ και Τζακομπιανή ${J^{a'}}_a := \partial x^{a'}/\partial x^a$, όπου $\{x^a\}$ γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων με επίσης $a = 0, \cdots, 3$. Τότε, το στοιχείο όγκου στις 4 διαστάσεις θα δίνεται από $\mathrm{d}V = \det {J^{a'}}_a \,\mathrm{d}^4x$. Από την απαίτηση της αναλλοιότητας του στοιχείου μήκους υπό την αλλαγή συντεταγμένης έπεται ότι:

$$\eta_{a'b'}\mathrm{d}x^{a'}\mathrm{d}x^{b'} = g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \iff g_{ab} = \eta_{a'b'}{J^{a'}}_a{J^{b'}}_b \tag{9.1}$$

όπου το παραπάνω γράφεται με μορφή πινάκων ως $g = J^\top \eta J$. Παίρνοντας την ορίζουσα της προηγούμενης ισότητας και εφαρμόζοντας τη γνωστή ιδιότητα αυτής, θα έχουμε ότι:

$$\det g \overset{\det J = \det J^\top}{=} (\det J)^2 \det\eta \overset{\det\eta=-1}{=} -(\det J)^2$$

και επομένως, $\det J = \sqrt{-\det g} =: \widetilde{g}$, δίνοντας το στοιχείο τετραόγκου $\mathrm{d}V = \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x$.

Όπως όλες οι δράσεις στις συνήθεις θεωρίες βαρύτητας, η δράση θα αποτελείται από δύο μέρη, ένα σχετικό με τη γεωμετρία και ένα σχετικό με την ύλη, δηλαδή $S = S_{GR} + S_m = \int \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_{GR} + \mathcal{L}_m)$. Σε αντιστοιχία με την Einstein-Hilbert, όπου κάνουμε την υπόθεση ότι η $\mathcal{L}_{GR}$ είναι γραμμική ως προς το βαθμωτό Ricci, $\mathcal{L}_{GR} = \alpha R + \beta$ (πρόκειται για την πιο ανώδυνη υπόθεση με δυναμικό ενδιαφέρον και κοσμολογική σταθερά), θεωρούμε τώρα μια $\mathcal{L}_{GR}$ γραμμική ως προς μια συνάρτηση του $R$, $f(R)$, έτσι ώστε $\mathcal{L}_{GR} = \alpha f(R)$. Η δράση της $f(R)$ βαρύτητας για $\alpha = 1/2\kappa$ θα έχει τη μορφή:

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x\, f(R) \tag{9.2}$$

και εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών σε αυτήν, θα έχουμε να υπολογίσουμε ουσιαστικά τους όρους $\delta\widetilde{g}$ και $\delta f(R)$.

Για τον πρώτο όρο, τον οποίο συναντάμε και στην ΕΗ, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\frac{\partial \det g}{\partial g} = (\mathrm{adj}\, g)^\top \overset{\mathrm{adj}\, g = g^{-1}\det g}{=} \det g (g^{-1})^\top \overset{g^{ab}=g^{ba}}{=} |g| g^{ab} \tag{9.3}$$

και επομένως θα ισχύει ότι:

$$\delta\widetilde{g} = \frac{\partial\widetilde{g}}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab} = -\frac{1}{2\widetilde{g}}\frac{\partial|g|}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab} \overset{(9.3)}{=} -\frac{\widetilde{g}}{2\widetilde{g}^2}|g|g^{ab}\delta g_{ab} \overset{\widetilde{g}^2=-|g|}{=} \frac{1}{2}\widetilde{g}g^{ab}\delta g_{ab} \tag{9.4}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα $\delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g g^{-1}$, έτσι ώστε $\delta g = -g\delta g^{-1} g$, θα έχουμε για την (9.4) ότι:

$$\widetilde{g}g^{ab}\delta g_{ab} = -\widetilde{g}\underbrace{g^{ab}g_{ac}}_{\delta^b_c}\delta g^{cd}g_{db} = -\widetilde{g}g_{bd}\delta g^{bd} \overset{\text{dummy}}{=} -\widetilde{g}g_{ab}\delta g^{ab}$$

και άρα έπεται ότι η μεταβολή του $\widetilde{g}$ θα ισούται με

$$\delta\widetilde{g} = -(1/2)\widetilde{g}g_{ab}\delta g^{ab} \tag{9.5}$$

Προχωρώντας στην εκτίμηση της μεταβολής του δεύτερου όρου, έχουμε αρχικά για τον συμβολισμό $f \equiv f(R)$ ότι:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial g}\delta g = f_R \frac{\partial R}{\partial g}\delta g = f_R \delta R \overset{R=R_{ab}g^{ab}}{=} f_R(\delta R_{ab} g^{ab} + R_{ab}\delta g^{ab}) \tag{9.6}$$

όπου $f_R \equiv \partial f/\partial R$. Ορίζουμε εδώ τον τανυστή Riemann ως:

$$R^c{}_{dab} := 2(\Gamma^c{}_{\llbracket bd,a\rrbracket} + \Gamma^c{}_{\llbracket ae}\Gamma^e{}_{b\rrbracket d}) \tag{9.7}$$

όπου εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών, έχουμε ότι:

$$\delta R^c{}_{dab} = 2(\delta\Gamma^c{}_{\llbracket bd,a\rrbracket} + \delta\Gamma^c{}_{\llbracket ae}\Gamma^e{}_{b\rrbracket d} + \Gamma^c{}_{\llbracket ae}\delta\Gamma^e{}_{b\rrbracket d}) \tag{9.8}$$

Η συμβατότητα της μετρικής υποδεικνύει ότι $g_{bc;a} = g_{bc,a} - \Gamma^d{}_{ab}g_{dc} - \Gamma^d{}_{ac}g_{bd} = 0$ ή για πιο συντομία:

$$g_{bc;a} = g_{bc,a} - 2\Gamma^d{}_{a\wr b}g_{dc\wr} = 0 \tag{9.9}$$

οπότε μεταβάλλοντας την (9.9) θα έχουμε ότι:

$$\delta g_{bc,a} - 2(\delta\Gamma^d{}_{a\wr b}g_{dc\wr} + \Gamma^d{}_{a\wr b}\delta g_{dc\wr}) = 0 \tag{9.10}$$

όπου χρησιμοποιώντας και πάλι την (9.9) με τη μορφή $(\delta g_{bc})_{;a} = (\delta g_{bc})_{,a} - 2\Gamma^d{}_{a\wr b}\delta g_{dc\wr}$ και καθώς $\delta g_{bc,a} = (\delta g_{bc})_{,a}$, η (9.10) θα γράφεται ως:

$$(\delta g_{bc})_{;a} = 2\delta\Gamma^d{}_{a\wr b}g_{dc\wr}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
(\delta g_{bc})_{;a} + (\delta g_{ca})_{;b} - (\delta g_{ab})_{;c} &= 2(\delta\Gamma^d{}_{a\wr b}g_{dc\wr} + \delta\Gamma^d{}_{b\wr c}g_{da\wr} - \delta\Gamma^d{}_{c\wr a}g_{db\wr}) \\
&= 2(\delta\Gamma^d{}_{a\wr c}g_{db\wr} + \delta\Gamma^d{}_{b\wr c}g_{da\wr} - \delta\Gamma^d{}_{c\wr a}g_{db\wr}) \\
&\overset{T^a{}_{bc}:=2\Gamma^a{}_{\llbracket bc\rrbracket}}{=} \delta T^d{}_{ac} + \delta T^d{}_{bc} + 2\delta\Gamma^d{}_{(ab)}g_{dc} \\
&\overset{T(\Gamma)=0}{=} 2\delta\Gamma^d{}_{ab}g_{dc}
\end{aligned}$$

αφού η συνοχή Levi-Civita είναι ελεύθερη από στρέψη και άρα τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά ως προς την ανταλλαγή των κάτω δεικτών. Έπεται ότι:

$$\delta\Gamma^d{}_{ab} = \frac{1}{2}((\delta g_{bc})_{;a} + (\delta g_{ca})_{;b} - (\delta g_{ab})_{;c})g^{dc} \tag{9.11}$$

όπου η διαφορά των Christoffel είναι πλέον τανυστής, καθώς μετασχηματίζεται ως τέτοιος. Εφόσον $\delta\Gamma$ τανυστής, τότε η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου σε αυτόν θα δίνει τις ακόλουθες ισότητες:

$$\begin{aligned}
(\delta\Gamma^c{}_{bd})_{;a} &= (\delta\Gamma^c{}_{bd})_{,a} + \Gamma^c{}_{ae}\delta\Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^e{}_{ab}\delta\Gamma^c{}_{ed} - \Gamma^e{}_{ad}\delta\Gamma^c{}_{be} \\
(\delta\Gamma^c{}_{ad})_{;b} &= (\delta\Gamma^c{}_{ad})_{,b} + \Gamma^c{}_{be}\delta\Gamma^e{}_{ad} - \Gamma^e{}_{ba}\delta\Gamma^c{}_{ed} - \Gamma^e{}_{bd}\delta\Gamma^c{}_{ae}
\end{aligned}$$

όπου αν τις αφαιρέσουμε κατά μέλη, χρησιμοποιήσουμε τη συμμετρικότητα των κάτω δεικτών των Christoffel και τη σχέση (9.8), εύκολα καταλήγουμε ότι $\delta R^c{}_{dab} = (\delta\Gamma^c{}_{bd})_{;a} - (\delta\Gamma^c{}_{ad})_{;b}$ και επομένως $\delta R_{ab} = \delta R^c{}_{acb} = 2(\delta\Gamma^c{}_{\llbracket ba})_{;c\rrbracket}$. Άρα, θα ισχύει ότι:

$$\delta R_{ab}g^{ab} = (\delta\Gamma^c{}_{ba}g^{ab})_{;c} - (\delta\Gamma^c{}_{ca}g^{ab})_{;b} = (2\delta\Gamma^{\llbracket d}{}_{ca}g^{ac\rrbracket})_{;d} \tag{9.12}$$

Από σχέση (9.11) και καθώς $\delta\Gamma^{a}{}_{bc} = \delta\Gamma^{a}{}_{cb}$ (από μηδενισμό στρέψης), βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma^{\llbracket d}{}_{ca} g^{ac\rrbracket} &= \frac{1}{2}((\delta g_{ae})_{;c} + (\delta g_{ec})_{;a} - (\delta g_{ca})_{;e}) g^{\llbracket de} g^{ac\rrbracket} \\
&= \frac{1}{2}((\delta g_{ae})_{;c} g^{\llbracket de} g^{ac\rrbracket} + g^{\llbracket de} (\delta g_{ec})_{;}{}^{c\rrbracket} - (\delta g_{ca})_{;}{}^{\llbracket d} g^{ac\rrbracket}) \\
&= \frac{1}{2}((\delta g_{ca})_{;}{}^{c} g^{ad} - (\delta g_{ac})_{;}{}^{d} g^{ca}) = g^{a\llbracket d} (\delta g_{ca})_{;}{}^{c\rrbracket} \\
&= -g^{a\llbracket d} (g_{ce} \delta g^{ef} g_{fa})_{;}{}^{c\rrbracket} = -g_{ce} (\delta g^{e\llbracket d})_{;}{}^{c\rrbracket}
\end{aligned} \tag{9.13}$$

και άρα η (9.12) θα γράφεται $\delta R_{ab} g^{ab} = -2 g_{ce} (\delta g^{e\llbracket d})_{;}{}^{c\rrbracket}{}_{d} = g_{ab} \Box \delta g^{ab} - (\delta g^{ab})_{;ab}$, με αποτέλεσμα η (9.6) να είναι:

$$\delta f = f_R (g_{ab} \Box \delta g^{ab} - (\delta g^{ab})_{;ab} + R_{ab} \delta g^{ab}) \tag{9.14}$$

και επομένως να ισχύει ότι:

$$\delta S_{GR} = \frac{1}{2\kappa} \int \widetilde{g}\, \mathrm{d}^4 x \, (f_R (g_{ab} \Box \delta g^{ab} - (\delta g^{ab})_{;ab} + R_{ab} \delta g^{ab}) - \frac{1}{2} f g_{ab} \delta g^{ab}) \tag{9.15}$$

Όμως, η μεταβολή δεν έχει ακόμη τη μορφή που θέλουμε, προκειμένου να εξάγουμε τις εξισώσεις πεδίου. Βλέπουμε ότι:

$$f_R g_{ab} \Box \delta g^{ab} = f_R g_{ab} (\delta g^{ab})_{;c}{}^{c} = g_{ab} ((f_R (\delta g^{ab})_{;c})_{;}{}^{c} - f_{R;}{}^{c} (\delta g^{ab})_{;c})$$

δηλαδή ότι:

$$f_R g_{ab} \Box \delta g^{ab} = g_{ab} ((f_R (\delta g^{ab})_{;c})_{;}{}^{c} - (f_{R;c} \delta g^{ab})_{;}{}^{c} + \Box f_R \delta g^{ab})$$

Ορίζουμε για ευκολία $I_c = g_{ab} (f_R (\delta g^{ab})_{;c} - f_{R;c} \delta g^{ab})$ και κρατάμε τελικά ότι:

$$f_R g_{ab} \Box \delta g^{ab} = I_{c;}{}^{c} + g_{ab} \Box f_R \delta g^{ab} \tag{9.16}$$

Έπειτα παρατηρούμε επίσης ότι:

$$f_R (\delta g^{ab})_{;ab} = (f_R (\delta g^{ab})_{;a})_{;b} - (f_{R;b} \delta g^{ab})_{;a} + f_{R;ba} \delta g^{ab}$$

όπου ορίζοντας $I'^{a} = f_R (\delta g^{ba})_{;b} - f_{R;b} \delta g^{ab}$, θα έχουμε ότι:

$$f_R (\delta g^{ab})_{;ab} = I'^{d}{}_{;d} + f_{R;ba} \delta g^{ab} \tag{9.17}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss-Stokes στις 4 διαστάσεις για τα ολοκληρώματα των $I_{c;}{}^{c}$ και $I'^{d}{}_{;d}$, προκύπτει ότι:

$$\int_V \widetilde{g}\, \mathrm{d}^4 x \, I_{c;}{}^{c} = \oint_{\partial V} \widetilde{h}\, \mathrm{d}^3 y \, \epsilon n^c I_c \qquad \int_V \widetilde{g}\, \mathrm{d}^4 x \, I'^{a}{}_{;a} = \oint_{\partial V} \widetilde{h}\, \mathrm{d}^3 y \, \epsilon n_d I'^{d}$$

όπου $n$ είναι το κάθετο στην επιφάνεια του συνόρου $\partial V$ διάνυσμα και $\epsilon = n^a n_a$ είναι μια παράμετρος, η οποία ισούται με $(-)1$ αν το σύνορο είναι χρονοειδές (χωροειδές). Υποθέτουμε πάντα ότι το σύνορο δεν είναι φωτοειδές και ότι η μεταβολή της μετρικής μηδενίζεται στο σύνορο, δηλαδή $(\delta g_{ab})_{\partial V} = 0 = (\delta g^{ab})_{\partial V}$. Επομένως, $(I_c)_{\partial V} = g_{ab} f_R (\delta g^{ab})_{,c}$, αφού επιπλέον ισχύει ότι $((\delta g^{ab})_{;c})_{\partial V} = (\delta g^{ab})_{,c}$, καθώς οι υπόλοιποι όροι της συναλλοίωτης παραγώγου της μετρικής περιέχουν μεταβολές αυτής, για τις οποίες υποθέσαμε το μηδενισμό τους στο σύνορο. Έπειτα, $I'^{a} = f_R (\delta g^{ba})_{,b}$ ακριβώς με το ίδιο σκεπτικό. Ορίζουμε σε αυτό το σημείο την εγκάρσια μετρική $h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$, η οποία μας δίνει τη δυνατότητα να προβάλλουμε οποιαδήποτε συνιστώσα ενός τετρανύσματος, παράλληλη στο κάθετο διάνυσμα $n^a$. θα χρησιμοποιήσουμε την εγκάρσια μετρική για να εκφράσουμε την επαγόμενη στο σύνορο μετρική (και αντιστρόφως):

$$h_{AB} = h_{ab} e_A{}^{a} e_B{}^{b} = (g_{ab} - \epsilon n_a n_b) e_A{}^{a} e_B{}^{b}$$

όπου οι κεφαλαίοι λατινικοί δείκτες είναι εσωτερικοί δείκτες που αφορούν στον εφαπτόμενο στο σύνορο χώρο και ${e_A}^a$ τα εφαπτόμενα στο σύνορο τριανύματα. Εύκολα αποδεικνύεται τελικά ότι $h_{AB} = g_{ab}{e_A}^a{e_B}^b$ (pull-back της μετρικής), καθώς κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $e_A$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $n^a$, αφού αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια του συνόρου, έτσι ώστε $n_a{e_A}^a = 0$. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} n^c(I_c)_{\partial V} &= n^c g_{ab} f_R(\delta g^{ab})_{,c} = -n^c g^{ab} f_R(\delta g_{ab})_{,c} \\ &= -f_R(n^c h^{ab}(\delta g_{ab})_{,c} + \epsilon n^c n^a n^b(\delta g_{ab})_{,c}) \end{aligned} \tag{9.18}$$

και επίσης ότι:

$$n_d I'^d = n_d f_R(\delta g^{bd})_{,b} = -n_d f_R g^{be} g^{fd}(\delta g_{ef})_{,b} \tag{9.19}$$

όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $n_d h^{fd} = h_{AB}{e_A}^f n_d {e_B}^d = 0$, όπως και ότι $\epsilon n_d n^f n^d = n^f$, προκειμένου να γράψουμε την (9.19) ως:

$$\begin{aligned} n_d I'^d &= -f_R(n^f h^{be}(\delta g_{ef})_{,b} - \epsilon n^f n^b n^e(\delta g_{ef})_{,b}) \\ &= -n^f h^{AB}{e_B}^e f_R \underbrace{{e_A}^b(\delta g_{ef})_{,b}}_{0} - \epsilon n^f n^b n^e f_R(\delta g_{ef})_{,b} = -\epsilon n^f n^b n^e f_R(\delta g_{ef})_{,b} \end{aligned} \tag{9.20}$$

εφόσον η εφαπτομενική παράγωγος της μεταβολής της μετρικής θα είναι 0 (αφού η μεταβολή στο σύνορο είναι 0). Από τις (9.16) και (9.17) έπεται ότι:

$$\begin{aligned} \int \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x\,(f_R g_{ab}\Box\delta g^{ab} - f_R(\delta g^{ab})_{;ab}) &= \oint_{\partial V} \widetilde{h}\,\mathrm{d}^3y\,\epsilon(n^c I_c - n_d I'^d) + \\ &+ \int \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x\,(g_{ab}\Box f_R \delta g^{ab} - f_{R;ba}\delta g^{ab}) \end{aligned} \tag{9.21}$$

όπου βλέπουμε ότι:

$$n^c I_c - n_d I'^d = -f_R n^c h^{ab}(\delta g_{ab})_{,c} - f_R \underbrace{(\epsilon n^c n^a n^b(\delta g_{ab})_{,c} - \epsilon n^f n^b n^e(\delta g_{ef})_{,b})}_{0}$$

με απλή αλλαγή dummy δεικτών και άρα η (9.15) θα γράφεται ως:

$$\begin{aligned} \delta S_{GR} = \frac{1}{2\kappa}\int \widetilde{g}\,\mathrm{d}^4x\,(g_{ab}\Box f_R - f_{R;ba} + f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab})\delta g^{ab} - \\ -\frac{1}{2\kappa}\oint_{\partial V} \widetilde{h}\,\mathrm{d}^3y\,\epsilon f_R n^c h^{ab}(\delta g_{ab})_{,c} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Προκειμένου να ακυρώσουμε τον συνοριακό όρο που παραμένει στη μεταβολή της δράσης, εισάγουμε στην αμετάβλητη δράση (9.2) τον συνοριακό όρο Gibbons-York-Hawking, ο οποίος σχετίζεται με την εξωτερική γεωμετρία (η υπόσταση της υπερεπιφάνειας του συνόρου προκύπτει από την εμβάπτιση της πολλαπλότητας, στην οποία εργαζόμαστε). Ο όρος αυτός θα έχει τη μορφή:

$$S_{GYH} = \frac{1}{\kappa}\oint_{\partial V} \widetilde{h}\,\mathrm{d}^3y\,\epsilon f_R K \tag{9.23}$$

όπου $K$ είναι το ίχνος της δεύτερης θεμελιωδούς μορφής, $II$, η οποία ορίζεται με τον παρακάτω τρόπο, $II(X,Y) := \langle n, \nabla_X Y\rangle\, n$, με $X, Y$ εφαπτόμενα στην υπερεπιφάνεια διανύσματα και $\nabla_X$ συναλλοίωτη παράγωγο στην πολλαπλότητα, στην οποία έχει εμβαπτιστεί η υπερεπιφάνεια του συνόρου. Το $K$ καλείται εξωτερική καμπυλότητα και ορίζεται ως:

$$K := {n^a}_{;a} = g^{ab} n_{a;b} = h^{ab} n_{a;b} + \epsilon n^b n^a n_{a;b}$$

Καθώς $(n^a n_a)_{;b} = 0$, αποδεικνύεται εύκολα με παραγοντική ότι $n^a{}_{;b} n_a = -n^a n_{a;b}$, αλλά ταυτόχρονα ισχύει και ότι:

$$(n^a n_a)_{;b} = n^a{}_{;b} n_a + n^a n_{a;b} \overset{g_{ab;c}=0}{=} 2n^a{}_{;b} n_a = 0$$

οπότε $K = h^{ab} n_{a;b} = h^{ab}(n_{a,b} - \Gamma^c{}_{ba} n_c)$. Εφαρμόζοντας τώρα θεωρία μεταβολών στην (9.23), θα έχουμε να υπολογίσουμε τους όρους $\delta\widetilde{h}$, $\delta f_R$ και $\delta K$. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$\delta\widetilde{h} = \frac{1}{2\widetilde{h}} \frac{\partial |h|}{\partial g} \delta g \overset{(\delta g)_{\partial V}=0}{=} 0$$

Έπειτα θα ισχύει επίσης ότι $\delta f_R = f_{RR} \delta R = 0$, αφού υποθέτουμε ότι και η μεταβολή του βαθμωτού Ricci θα μηδενίζεται στο σύνορο, δηλαδή $(\delta R)_{\partial V} = 0$. Τέλος, μένει να προσδιορίσουμε τη μεταβολή της εξωτερικής καμπυλότητας, όπου χρειάζεται να υπολογίσουμε τους όρους $\delta h^{ab}$, $\delta\Gamma^a{}_{bc}$, $\delta n_a$ και $\delta n_{a,b}$. Γνωρίζοντας ότι $\delta(n^a n_a) = 0$, θα έχουμε οτι:

$$\delta(n^a n_a) \overset{n_a = g_{ab} n^b\ ,\ (\delta g_{ab})_{\partial V}=0}{=} 2 n_a \delta n^a = 0 \overset{n_a \neq 0}{\Longleftrightarrow} \delta n^a = \delta n_a = 0$$

Ύστερα, χρησιμοποιώντας το ως άνω αποτέλεσμα και το γεγονός ότι $(n^a n_a)_{,b} = 0$, είναι φανερό ότι $\delta(n^a n_{a,b}) = n^a \delta n_{a,b} = 0$ και άρα $\delta n_{a,b} = 0$. Ισχύει επίσης η προφανής ταυτότητα ότι $\delta h^{ab} = \delta g^{ab} + \epsilon\, \delta\big(n^a n^b\big) = 0$, οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση του $\delta K$:

$$\begin{aligned}
\delta K &= -h^{ab} \delta\Gamma^c{}_{ba} n_c \overset{((\delta g_{ab})_{;c})_{\partial V} = (\delta g_{ab})_{,c}}{=} -\frac{1}{2} h^{ab} n^e ((\delta g_{ae})_{,b} + (\delta g_{eb})_{,a} - (\delta g_{ba})_{,e}) \\
&= -\frac{1}{2} h^{AB} e_A{}^a e_B{}^b n^e ((\delta g_{ae})_{,b} + (\delta g_{eb})_{,a} - (\delta g_{ba})_{,e}) \\
&\overset{e_A{}^d (\delta g_{ae})_{,d} = 0}{=} \frac{1}{2} h^{ab} n^e (\delta g_{ba})_{,e} \overset{\text{dummy}\ ,\ h^{ab} = h^{ba}}{=} \frac{1}{2} h^{ab} n^e (\delta g_{ab})_{,e}
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι:

$$\delta S_{GYH} = \frac{1}{2\kappa} \oint_{\partial V} \widetilde{h}\, \mathrm{d}^3 y\, \epsilon f_R h^{ab} n^e (\delta g_{ab})_{,e} \tag{9.24}$$

Επομένως, η μεταβολη της δράσης $S_{GR} \equiv S_{GR} + S_{GYH}$ θα γράφεται πλέον:

$$\delta S_{GR} = \frac{1}{2\kappa} \int \widetilde{g}\, \mathrm{d}^4 x \underbrace{\left(g_{ab} \Box f_R - f_{R;ba} + f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab}\right)}_{\Theta_{ab}} \delta g^{ab} \tag{9.25}$$

οπότε μένει να δούμε πως μεταβάλλεται η δράση της ύλης, $S_m$. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta(\widetilde{g} \mathcal{L}_m(g, \phi)) &= \widetilde{g} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{ab}} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_m \right) \delta g^{ab} \\
&= -\frac{1}{2} \widetilde{g} \underbrace{\left( g_{ab} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{ab}} \right)}_{T_{ab}} \delta g^{ab} = -\frac{1}{2} \widetilde{g} T_{ab} \delta g^{ab}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Τελικά, από αρχή ελάχιστης δράσης, $\delta S = 0$ και άρα $\delta S_{GR} = \delta S_m$, δηλαδή $\Theta_{ab} = \kappa T_{ab}$. Η αναλυτική μορφή των εξισώσεων πεδίου για την $f(R)$ βαρύτητα είναι η ακόλουθη:

$$g_{ab} \Box f_R - f_{R;ba} + f_R R_{ab} - \frac{1}{2} f g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{9.27}$$

Θα μπορούσαμε να έχουμε καταλήξει νωρίτερα στις εξισώσεις πεδίου, αγνοώντας τις ολικές παραγώγους $I_{c;}{}^c$ και $I'^d{}_{;d}$ (καθώς δεν συνεισφέρουν στις εξισώσεις πεδίου) και υποθέτοντας ότι η πολλαπλότητα, στην οποία εργαζόμαστε, είναι συμπαγής και χωρίς σύνορο, δηλαδή κλειστή. Παρόλα αυτά επιλέξαμε να θεωρήσουμε μια μη κλειστή πολλαπλότητα και να εισάγουμε στη δράση τον συνοριακό όρο $S_{GYH}$, ο οποίος κρίνεται απαραίτητος σε διάφορες περιπτώσεις (ADM ενέργεια σε χαμιλτονιανό φορμαλισμό, εντροπία μελανών οπών στην ευκλείδια κβαντική βαρύτητα κλπ.). Τέλος, είναι προφανές ότι για $f(R) = R$ καταλήγουμε στις γνωστές εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας Einstein.

Έχει ενδιαφέρον να δούμε ότι η metric $f(R)$ βαρύτητα είναι ισοδύναμη με μια υποπερίπτωση της βαρύτητας βαθμωτού-τανυστή και συγκεκριμένα τη βαρύτητα Brans-Dicke. Σε αυτήν, το συναρτησοειδές εξαρτάται και από ένα βαθμωτό πεδίο $\phi$ μέσω μιας μη τετριμμένης σύζευξης (απευθείας σύζευξη με το βαθμωτό Ricci). Μια γενική δράση της ST θεωρίας είναι η:

$$S_{ST} = \alpha \int \mathrm{d}^4x\, \widetilde{g}(f(\phi)R + h(\phi)(\nabla\phi)^2 - U(\phi)) + S_m(\psi, y(\phi)g_{ab})$$

όπου $f, h, V, y$ αυθαίρετες συναρτήσεις του $\phi$, $\alpha$ σταθερά και $\psi$ ένα μη βαρυτικό (non-gravitational) πεδίο, το οποίο μπορεί παρόλα αυτά να συζευχθεί με τη μετρική η το βαρυτικό βαθμωτό πεδίο $\phi$. Εφαρμόζοντας τον σύμμορφο (conformal) μετασχηματισμό $y(\phi)g_{ab} \to g_{ab}$, επιλέγουμε το εκείνο το (σύμμορφο) σύστημα αναφοράς, όπου η ύλη δεν αλληλεπιδρά με το βαθμωτό $\phi$ (πλαίσιο Jordan). Ορίζοντας τις αυθαίρετες συναρτήσεις ως $f = \phi/\kappa$, $h = -\omega_0/(\kappa\phi)$ και $U = V/\kappa$ καταλήγουμε στη Brans-Dicke δράση:

$$S_{BD} = \frac{\alpha}{\kappa} \int \mathrm{d}^4x\, \widetilde{g}(\phi R - \frac{\omega_0}{\phi}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)) + S_m(\psi, g_{ab}) \tag{9.28}$$

όπου $\omega_0$ μια κάτω φραγμένη (από τα πειραματικά δεδομένα) σταθερά.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια δράση, δυναμικά ισοδύναμη με αυτήν της metric $f(R)$ βαρύτητας, η οποία έχει τη μορφή:

$$S' = \int \mathrm{d}^4x\, \widetilde{g}(f(\chi) + f_\chi(R - \chi)) + S_m(\psi, g_{ab}) \tag{9.29}$$

όπου $\chi$ ένα βοηθητικό (auxiliary) πεδίο. Εφαρμόζοντας θεωρία μεταβολών ως προς αυτό στην παραπάνω δράση και θέτοντας $\delta_\chi S' = 0$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $f_{\chi\chi}(R - \chi) = 0$, η οποία ισότητα ικανοποιείται μόνο όταν $f_{\chi\chi} = 0$ (δηλαδή $f$ γραμμική), όπου αντικατάσταση στην (9.29) δίνει την EH δράση, ή όταν $R = \chi$, όπου παίρνουμε τη δράση της $f(R)$ βαρύτητας. Θεωρώντας $f_\chi = \phi$, όπου $\phi$ λεία και αντιστρέψιμη συνάρτηση του $\chi$ και ορίζοντας το δυναμικό $V(\phi) = \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi))$, η δράση(9.29) γράφεται ως:

$$S' = \int \mathrm{d}^4x\, \widetilde{g}(\phi R - V(\phi)) + S_m(\psi, g_{ab}) \tag{9.30}$$

αφού $f(\chi(\phi)) = \chi(\phi)\phi - V(\phi)$. Η δράση (9.30) δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από τη δράση της Brans-Dicke θεωρίας απουσία κινητικού όρου του $\phi$, δηλαδή για $\omega_0 = 0$.

## 9.2. *Βαρύτητα $f(\mathcal{R})$ κατά Palatini*

Ας θεωρήσουμε τη δράση $S_{pal} = (1/2\kappa) \int f(\mathcal{R})\widetilde{g}\mathrm{d}^4x$. Στην προσέγγιση Palatini θα υποθέσουμε ότι και η συνοχή είναι ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλαδή β.ε) και ελεύθερη από στρέψη για λόγους ευκολίας, με αποτέλεσμα $\mathcal{L}_{GR}(g, \Gamma)$, όπου η καμπυλότητα εξαρτάται πλέον μόνο από την αυθαίρετη συνοχή $\Gamma$, δηλαδή $\mathcal{R}(\Gamma)$, χωρίς όμως να ισχύει το ίδιο και για την $\mathcal{L}_m$. Υποθέτοντας τα ως άνω, η μετρική δεν είναι πλέον συμβατή με τη συνοχή $\Gamma$, δηλαδή $g_{ab;c} \neq 0$. Θα συμβολίζουμε την καμπυλότητας της συνοχής Levi-Civita με $R$, ενώ τα σύμβολα Christoffel θα γράφονται ως $\{^a{}_{bc}\}$. Θα πρέπει να μεταβάλλουμε την $S_{pal}$ ως προς $g$, αλλά και ως προς

Γ. Από τις μεταβολές ως προς τη μετρική προκύπτει ανώδυνα ότι:

$$\delta_g \mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa}(f\delta_g \widetilde{g} + \widetilde{g} f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{ab} \delta g^{ab} + 2\kappa \delta_g \mathcal{L}_m) \overset{(9.5),(9.26)}{=} \frac{1}{2\kappa}\widetilde{g}(f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f - \kappa T_{ab})\delta g^{ab}$$

από όπου έπεται ότι:

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f = \kappa T_{ab} \tag{9.31}$$

Έπειτα, μεταβάλλοντας τη δράση ως προς την αυθαίρετη συνοχή, παρατηρούμε ότι θα ισχύει $\delta_\Gamma \mathcal{L} = \widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab} \delta_\Gamma R_{ab}$. Αναζητώντας τη μεταβολή του τανυστή Ricci, δείξαμε σε προηγούμενο εδάφιο ότι $\delta R_{ab} = 2(\delta\Gamma^c{}_{\llbracket ba})_{;c\rrbracket}$ και άρα με παραγοντική θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab} \delta_\Gamma R_{ab} &= 2((\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab} \delta\Gamma^c{}_{\llbracket ba})_{;c\rrbracket} - \delta\Gamma^c{}_{\llbracket ba}(\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab})_{;c\rrbracket}) \\ &\overset{(\delta\Gamma)_{\partial V}=0}{=} -2\delta\Gamma^c{}_{\llbracket ba}(\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab})_{;c\rrbracket} = -2\delta\Gamma^c{}_{da}\delta^d_{\llbracket b}(\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab})_{;c\rrbracket} \end{aligned}$$

όπου και πάλι υποθέσαμε ότι η μεταβολή της συνοχής μηδενίζεται στο σύνορο. Επομένως, από απαίτηση $\delta_\Gamma S = 0$ προκύπτει ότι $\delta^d_{\llbracket b}\delta^e_{c\rrbracket}(\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab})_{;e} = 0$, δηλαδή $(\widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab})_{;e} = 0$. Η $\widetilde{g}$ είναι πυκνότητα βάρους $+1$ (βαθμωτή) και άρα ισχύει ότι $\widetilde{g}_{;e} = \widetilde{g}_{,e} - \Gamma^b{}_{be}\widetilde{g}$. Βέβαια, εύκολα δείχνεται ότι:

$$\widetilde{g}_{,e} = -\frac{1}{2\widetilde{g}}\frac{\partial |g|}{\partial g_{ab}} g_{ab,e} \overset{(9.3)}{=} \frac{1}{2}\widetilde{g} g^{ab} g_{ab,e} \tag{9.32}$$

και άρα έπεται ότι:

$$g^{ab}(f_{\mathcal{R}}(\widetilde{g}_{,e} - \Gamma^c{}_{ce}\widetilde{g}) + \widetilde{g} f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R}_{,e}) + \widetilde{g} f_{\mathcal{R}} g^{ab}{}_{;e} = 0 \tag{9.33}$$

με $\mathcal{R}_{;e} = \mathcal{R}_{,e}$, καθότι $\mathcal{R}$ βαθμωτό, όπου πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $g_{ab}$ από αριστερά και παρατηρώντας την (9.32) και το γεγονός ότι:

$$g_{ab} g^{ab}{}_{;e} = -g^{ab} g_{ab;e} = -g^{ab}(g_{ab,e} - 2\Gamma^c{}_{e\wr a} g_{cb\smallint})$$

καταλήγουμε, αφού $2\Gamma^c{}_{e\wr a} g_{cb\smallint} g^{ab} = 2\Gamma^c{}_{ec}$, να έχουμε ότι:

$$f_{\mathcal{R}}\widetilde{g}_{,e} + \widetilde{g}(2 f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R}_{,e} - \Gamma^c{}_{ec} f_{\mathcal{R}}) = 0$$

Λύνοντας την παραπάνω ως προς $f_{\mathcal{R}}\widetilde{g}_{,e}$ και αντικαθιστώντας στην (9.33), βρίσκουμε ότι:

$$\widetilde{g}(f_{\mathcal{R}} g^{ab}{}_{;e} - g^{ab} f_{\mathcal{R}\mathcal{R}} R_{,e}) = 0$$

όπου πολλαπλασιάζοντας με $g_{ab}$, εύκολα βρίσκουμε ότι $g^{ab} f_{\mathcal{R}} g_{ab;e} + 4 f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R}_{,e} = 0$. Τέλος, αν πολλαπλασιάσουμε άλλη μια φορά με $g_{ab}$, καταλήγουμε στη σχέση:

$$f_{\mathcal{R}} g_{ab;e} + g_{ab} f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R}_{,e} = (f_{\mathcal{R}} g_{ab})_{;e} = 0$$

όπου αν ορίσουμε τη νέα μετρική $\mathfrak{g}_{ab} := f_{\mathcal{R}} g_{ab}$, παρατηρούμε ότι η σχέση $\mathfrak{g}_{ab;e} = 0$ δεν είναι τίποτε άλλο πέρα από την απόδειξη ότι η μετρική $\mathfrak{g}$ είναι συμβατή με τη συνοχή $\Gamma$, δηλαδή η $\Gamma$ είναι η Levi-Civita συνοχή για αυτήν την επιλογή. Επομένως, έπεται ότι:

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ad}(\mathfrak{g}_{db,c} + \mathfrak{g}_{dc,b} - \mathfrak{g}_{bc,d}) = \frac{1}{2}\frac{g^{ad}}{f_{\mathcal{R}}}(2(f_{\mathcal{R}} g_{d\wr b})_{,c\smallint} - (f_{\mathcal{R}} g_{bc})_{,d})$$

όπου αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του Leibniz στις μερικές παραγώγους, βρίσκουμε με ελάχιστες πράξεις ότι:

$$\Gamma^a{}_{bc} = \{^a{}_{bc}\} + \underbrace{\frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left[\delta^a_{\wr b} f_{\mathcal{R},c\smallint} - \frac{1}{2} f_{\mathcal{R},}{}^a g_{bc}\right]}_{I^a{}_{bc}} \tag{9.34}$$

και καθώς $\mathcal{R}_{ab} := 2(\Gamma^c{}_{a[\![b,c]\!]} + \Gamma^c{}_{e[\![c}\Gamma^e{}_{ab]\!]})$, αρκεί να εκτιμήσουμε τους 2 αυτούς όρους προκειμένου να προσδιορίσουμε την καμπυλότητα $\mathcal{R}$ σε σχέση με την $R$.

Για να διευκολύνουμε την κατάσταση θα εισάγουμε το γενικευμένο δέλτα του Kronecker για $p = 2$, όπου θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε σε όλους τους όρους ζεύγη της μορφής $\delta^a_{[b}\delta^c_{d]}$, καθώς ισχύει γενικά ότι $\delta^{a_1}_{[b_1}\cdots\delta^{a_p}_{b_p]} = (1/p)!\delta^{A_p}_{b_1\cdots b_p}$ και επιπλέον ότι:

$$\delta^{A_p a_{p+1}\cdots a_q}_{b_1\cdots b_p a_{p+1}\cdots a_q} = \frac{(n-p)!}{(n-q)!}\delta^{A_p}_{b_1\cdots b_p} \quad 0 \le p \le q \le n \tag{9.35}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$R_{ab} = 2\delta^d_{[b}\delta^e_{c]}(\Gamma^c{}_{ad,e} + \Gamma^f{}_{ad}\Gamma^c{}_{fe}) = \delta^{de}_{bc}(\Gamma^c{}_{ad,e} + \Gamma^f{}_{ad}\Gamma^c{}_{fe})$$

Ξεκινάμε αναζητώντας τον όρο $\Gamma^c{}_{ad,e}$ με τη βοήθεια του ορισμού (9.34). Θα έχουμε:

$$\Gamma^c{}_{ad,e} = \{^c{}_{ad}\}_{,e} - \frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}\underbrace{I^c{}_{ad}f_{\mathcal{R},e}}_{\mathcal{O}_1} + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\underbrace{(\delta^c_{(a}\delta^f_{d)}f_{\mathcal{R},fe} - (1/2)f_{\mathcal{R},}{}^c{}_e g_{ad} - (1/2)f_{\mathcal{R},}{}^c g_{ad,e})}_{\mathcal{O}_2}$$

όπου $I^c{}_{ad}f_{\mathcal{R},e} = \delta^c_{(a}\delta^f_{d)}f_{\mathcal{R},f}f_{\mathcal{R},e} - (1/2)g_{ad}f_{\mathcal{R},}{}^c f_{\mathcal{R},e}$. Προφανώς, $\delta^{de}_{bc}\{^c{}_{ad}\}_{,e} = 2\left\{^c{}_{a[b}\right\}_{,c]}$ και επιπλέον:

$$\begin{aligned}\delta^{de}_{bc}\mathcal{O}_1 &= (\delta^c_a f_{\mathcal{R},[b}f_{\mathcal{R},c]} + \delta^c_{[b}f_{\mathcal{R},c]}f_{\mathcal{R},a} - g_{a[b}f_{\mathcal{R},c]}f_{\mathcal{R},}{}^c) \\ &= -\frac{1}{2}(2f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} + g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2)\end{aligned} \tag{9.36}$$

Έπειτα, για τον όρο $\mathcal{O}_2$ θα ισχύει ότι:

$$\delta^{de}_{bc}\mathcal{O}_2 = \delta^c_{[\![b}f_{\mathcal{R},ac]\!]} - g_{a[b}f_{\mathcal{R},}{}^c{}_{c]} = -(f_{\mathcal{R},ab} + (1/2)g_{ab}f_{\mathcal{R},}{}^c{}_c) \tag{9.37}$$

οπότε έπεται ότι:

$$\delta^{de}_{bc}\Gamma^c{}_{ad,e} = 2\left\{^c{}_{a[b}\right\}_{,c]} + \frac{1}{2(f_{\mathcal{R}})^2}(2f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} + g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2) - \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(2f_{\mathcal{R},ab} + g_{ab}f_{\mathcal{R},}{}^c{}_c)$$

Προχωράμε σε αυτό το σημείο αναζητώντας τους διάφορους όρους του $\Gamma^f{}_{ad}\Gamma^c{}_{fe}$ και ξεκινάμε από αυτούς που έχουν κοινό παρονομαστή το $f_{\mathcal{R}}$, δηλαδή την παράσταση:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_3 &\equiv f_{\mathcal{R}}(I^f{}_{ad}\{^c{}_{fe}\} + \{^f{}_{ad}\}I^c{}_{fe}) \\ &= \frac{1}{2}(2f_{\mathcal{R},\wr d}\{^c{}_{ae\wr}\} + f_{\mathcal{R},a}\{^c{}_{de}\} - f_{\mathcal{R},}{}^f g_{ad}\{^c{}_{fe}\} + \{^f{}_{ad}\}\delta^c_e f_{\mathcal{R},f} - \{^f{}_{ad}\}f_{\mathcal{R},}{}^c g_{fe})\end{aligned}$$

έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$\delta^{de}_{bc}\mathcal{O}_3 = \frac{1}{2}(2\{^f{}_{ab}\}f_{\mathcal{R},f} - f_{\mathcal{R},}{}^f g_{ab}\{^c{}_{fc}\})$$

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε την παράσταση $\mathcal{O}_4 \equiv (f_{\mathcal{R}})^2 I^f{}_{ad}I^c{}_{fe}$, για την οποία (για λόγους συντομίας) θα εισάγουμε την έννοια του γενικευμένου συμβόλου $\pi^{i_1\cdots i_p}_{j^1\cdots j_p} = p!\delta^{i_1}_{(j_1}\cdots\delta^{i_n}_{j_n)}$ (generalized permanent symbol). Θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{O}_4 = \frac{1}{4}(\underbrace{\pi^{fi}_{ad}\pi^{cj}_{fe}f_{\mathcal{R},i}f_{\mathcal{R},j}}_{I_1} - \underbrace{\pi^{fi}_{ad}f_{\mathcal{R},}{}^c g_{fe}f_{\mathcal{R},i}}_{I_2} - \underbrace{f_{\mathcal{R},}{}^f g_{ad}\pi^{ci}_{fe}f_{\mathcal{R},i}}_{I_3} + \underbrace{f_{\mathcal{R},}{}^f g_{ad}f_{\mathcal{R},}{}^c g_{fe}}_{I_4})$$

Έχουμε γενικότερα ότι:

$$\pi^{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_q}_{j_1\cdots j_p i_{p+1}\cdots i_q} = \frac{(n+q-1)!}{(n+p-1)!}\pi^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p} \quad 0\le p\le q\le n \tag{9.38}$$

και επιπλέον ισχύει η συνδυαστική ιδιότητα:

$$\pi^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\delta^{j_1 a_2\cdots a_q}_{b_1\cdots b_q} = \sum_{s=1}^{p}\pi^{i_1\cdots\widehat{i_s}\cdots i_p}_{j_2\cdots j_p}\delta^{i_s a_2\cdots a_q}_{b_1\cdots b_q} \tag{9.39}$$

όπως και οι σχέσεις $\delta^{[\![ab]\!]}_{[\![cd]\!]}, \pi^{[\![ab]\!]}_{[\![cd]\!]} = 0$, $\pi^{ab}_{[cd]} = 0$, $\pi^{ab}_{cd}\delta^{cd}_{ef} = 0$ και $\pi^a_b = \delta^a_b$. Με $\widehat{i_s}$ σημαίνουμε την απουσία του στοιχείου $i_s$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τα ως άνω, έπεται άμεσα το συμπέρασμα:

$$\pi^{fi}_{da}\delta^{de}_{bc}\pi^{cj}_{fe} = 2\delta^{(i}_a\delta^{f)e}_{bc}\pi^{cj}_{ef} = \delta^c_k\pi^{kj}_{ea}\delta^{ei}_{cb} = \delta^j_a\delta^{ci}_{cb} + \delta^{ji}_{ab} = 3\delta^j_a\delta^i_b + \delta^{ji}_{ab} = 4\delta^j_a\delta^i_b - \delta^j_b\delta^i_b$$

έτσι ώστε $\delta^{de}_{bc}I_1 = 3f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b}$. Συνεχίζοντας με τον υπολογισμό του $I_2$, έχουμε ότι:

$$\delta^{de}_{bc}I_2 \overset{(9.39)}{=} 2\delta^{(i}_a\delta^{f)e}_{bc}f_{\mathcal{R},}{}^c g_{fe}f_{\mathcal{R},i} \overset{g_{[ab]}=0}{=} \delta^{ie}_{bc}f_{\mathcal{R},}{}^c f_{\mathcal{R},i}g_{ae} = f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} - g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2$$

Χωρίς κανένα επιπρόσθετο τριχ, εφαρμόζοντας τις ως άνω ιδιότητες, καταλήγουμε και στις εκφράσεις για τα $I_3, I_4$, όπου $\delta^{de}_{bc}(I_4 - I_3) = -3g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2$, έτσι ώστε:

$$\delta^{de}_{bc}\mathcal{O}_4 = \frac{1}{2}(f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} - g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2)$$

με αποτέλεσμα να έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta^{de}_{bc}\Gamma^f{}_{ad}\Gamma^c{}_{fe} = 2\{^f{}_{a[\![b}\}\{^c{}_{fc]\!]}\} + \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(2\{^f{}_{ab}\}f_{\mathcal{R},f} - f_{\mathcal{R},}{}^f g_{ab}\{^c{}_{fc}\})+\\ +\frac{1}{2(f_{\mathcal{R}})^2}(f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} - g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2)\end{aligned}$$

και ο $\mathcal{R}_{ab}$ να αποκτά την ακόλουθη μορφή (αντικαθιστώντας τα $\mathcal{O}_i$):

$$\mathcal{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{3}{2}\frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} - \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(2\underbrace{(f_{\mathcal{R},ab} - \{^f{}_{ba}\}f_{\mathcal{R},f})}_{f_{\mathcal{R},a;b}\overset{f_{\mathcal{R},a}=f_{\mathcal{R};a}}{=}f_{\mathcal{R};ab}} + g_{ab}\underbrace{(f_{\mathcal{R},c}{}^c + \{^c{}_{cf}\}f_{\mathcal{R},}{}^f)}_{\Box f_{\mathcal{R}}})$$

όπου $R_{ab} = 2(\{^c{}_{a[b}\}_{,c]} + \{^c{}_{e[\![c}\}\{^e{}_{ab]\!]}\})$.

Προκύπτει τελικά ότι:

$$\mathcal{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{3}{2}\frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b} - \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(2f_{\mathcal{R};ab} + g_{ab}\Box f_{\mathcal{R}}) \tag{9.40}$$

όπου παίρνοντας τώρα το ίχνος της παραπάνω ισότητας (πολλαπλασιασμός με $g^{ab}$), βρίσκουμε ότι:

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2}\frac{(\partial f_{\mathcal{R}})^2}{(f_{\mathcal{R}})^2} - \frac{3}{f_{\mathcal{R}}}\Box f_{\mathcal{R}} \tag{9.41}$$

Αντικαθιστώντας την (9.40) στις εξισώσεις πεδίου (9.31) και λύνοντας ως προς $R_{ab}$, θα έχουμε ότι:

$$R_{ab} = \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(2\kappa T_{ab} + 2f_{\mathcal{R};ab} + g_{ab}\Box f_{\mathcal{R}} + g_{ab}f) - \frac{3}{2}\frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b}$$

και άρα (λύνοντας και την (9.41) ως προς $R$) ο τανυστής Einstein, $G_{ab} = R_{ab} - (1/2)g_{ab}R$, αποκτά την έκφραση:

$$G_{ab} = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}(\kappa T_{ab} + f_{\mathcal{R};ab} - g_{ab}\Box f_{\mathcal{R}} + (1/2)g_{ab}(f - \mathcal{R}f_{\mathcal{R}})) + \frac{3}{4}\frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}(g_{ab}(\partial f_{\mathcal{R}})^2 - 2f_{\mathcal{R},a}f_{\mathcal{R},b})$$

όπου $f_{\mathcal{R}}$ και $\mathcal{R}$ αλγεβρικές συναρτήσεις του ίχνους του τανυστή ενέργειας-ορμής (από ίχνος της (9.31)) και όπου για $f = \mathcal{R}$ καταλήγουμε στις γνωστές εξισώσεις πεδίου της EH βαρύτητας, $G_{ab} = \kappa T_{ab}$.

Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια διαδικασία, όπως και για τη metric $f(R)$ βαρύτητα, προκύπτει ότι $\mathcal{L}' = \phi\mathcal{R} - V$. Αντικαθιστώντας την (9.41) σε αυτήν, θα έχουμε:

$$\mathcal{L}' = \phi R + \frac{3}{2}\frac{1}{\phi}(\partial\phi)^2 - V \tag{9.42}$$

όπου ξεφορτωθήκαμε την ολική απόκλιση $3[\Phi]$ που προκύπτει από την παραπάνω αντικατάσταση, καθώς δε συνεισφέρει στις εξισώσεις πεδίου. Παρατηρούμε ότι η (9.42) είναι ουσιαστικά η Λαγκραντζιανή της BD θεωρίας για $\omega_0 = -3/2$, δηλαδή υπάρχει δυναμική ισοδυναμία μεταξύ της Palatini $f(\mathcal{R})$ και της BD θεωρίας (για την ως άνω τιμή της $\omega_0$).

## 9.3. Βαρύτητα Horndeski

Σε αυτήν την ενότητα θα εργαστούμε με τη σαφέστατα κομψότερη γλώσσα των διαφορικών μορφών (προφανώς σε φορμαλισμό πρώτης τάξης), την οποία μελετήσαμε εκτενώς σε αυτήν την εργασία. Υποθέτουμε ημι-ρημάννεια πολλαπλότητα $M$ με μετρική $g$, όπου $e_a$ (στοιχείο από) πλαίσιο και $e^a$ το δυϊκό του, γνωστό και ως vierbein στις 4δ (αλλιώς vielbein για $D > 4$). Θα υποθέσουμε μηδενική στρέψη και συμβατή μετρική (δηλαδή δομική ομάδα $O(1, D-1)$), έτσι ώστε $\mathcal{T}^a = 0$ και $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$. Η $g$ θα σχετίζεται με την επίπεδη Minkowski μετρική $\eta_{ab}$ μέσω της σχέσης $g = \eta_{ab}e^a \otimes e^b$. Όλα τα άλλα, κατά τα γνωστά με λατινικούς εσωτερικούς δείκτες και ελληνικούς εξωτερικούς. Οι δύο βάσεις (χαρτοεπαγόμενη και χαρτοανεξάρτητη) θα σχετίζονται μέσω της συνιστώσας του vielbein, ${e^a}_\mu$, καθώς $e^a = {e^a}_\mu \mathrm{d}x^\mu$. Θα αναπαράξομε (και θα προχωρήσουμε) αναλυτικά τις πράξεις του **[5]**.

Ας θεωρήσουμε τη γενική δράση Horndeski, η οποία έχει τη μορφή $S = \int_M \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i^H + S_m$, όπου $\sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i^H \equiv \mathcal{L}^H$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}^H = \underbrace{G_2\mathcal{L}_2}_{\mathcal{L}_2^H} + \underbrace{G_3\mathcal{L}_3}_{\mathcal{L}_3^H} + \underbrace{G_4\mathcal{L}_{4,1} + G_{4,X}\mathcal{L}_{4,2}}_{\mathcal{L}_4^H} + \underbrace{G_5\mathcal{L}_{5,1} + \frac{1}{3}G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2}}_{\mathcal{L}_5^H}$$

με $G_{i,X}$ να είναι η παράγωγος της $G_i(\phi, X)$ ως προς τον κινητικό όρο $X = -(1/2)(\partial\phi)^2$. Για $A_k$ αύξοντα πολυδείκτη μήκους $k$, $\phi$ βαθμωτό και $\widehat{e}_a = \eta_{ab}e^b$, οι επί μέρους Λαγκραντζιανές ορίζονται ως:

$$\mathcal{L}_2 = *1 = \frac{1}{D!}\epsilon_{A_D}e^{A_D} = \frac{1}{D!}\epsilon_{A_D}\epsilon^{A_D}e^{1\cdots D} = e^{1\cdots D} = vol_M$$

$$\mathcal{L}_3 = {\phi_{;}}^a{}_b e^b \wedge *\widehat{e}_a = \frac{1}{(D-1)!}{\phi_{;}}^a{}_b\epsilon_{a,A_{D-1}}e^{b,A_{D-1}} = \delta^b_a {\phi_{;}}^a{}_b vol_M = (\Box\phi)vol_M$$

$$\mathcal{L}_{4,1} = \mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{cd}e^c \wedge e^d \wedge \frac{1}{(D-2)!}\epsilon_{ab,A_{D-2}}e^{A_{D-2}} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{cd}\delta^{cd}_{ab} = Rvol_M$$

$$\mathcal{L}_{4,2} = \Phi^a \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab} = {\phi_{;}}^a{}_c{\phi_{;}}^b{}_d e^c \wedge e^d \wedge *\widehat{e}_{ab} = 2{\phi_{;}}^a{}_{[a}{\phi_{;}}^b{}_{b]}vol_M = ((\Box\phi)^2 - {\phi_{;}}^a{}_b{\phi_{;}}^b{}_a)vol_M$$

καθώς επίσης και:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{5,1} &= \mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^c \wedge *\widehat{e}_{abc} = \frac{1}{2(D-3)!} R^{ab}{}_{de}\phi_{;}{}^{c}{}_{f}\epsilon_{abc,A_{D-3}} e^{def,A_{D-3}} \\
&= \frac{1}{2} R^{ab}{}_{de}\phi_{;}{}^{c}{}_{f}\delta^{def}_{abc} vol_M = \frac{1}{2} R^{ab}{}_{de}\phi_{;}{}^{c}{}_{f}(\delta^d_c\delta^{ef}_{ab} - \delta^e_c\delta^{df}_{ab} + \delta^f_c\delta^{de}_{ab}) vol_M \\
&= (2 \underbrace{R^{ab}{}_{[c[\![a]}}_{R^{ab}{}_{[cd]}=R^{ab}{}_{cd}} \phi_{;}{}^{c}{}_{b]\!]} + R\Box\phi) vol_M = (2 \underbrace{R^{ab}{}_{c[a}}_{R^{a}{}_{c}=R^{ba}{}_{bc}=-R^{ab}{}_{bc}=-R^{ba}{}_{cb}} \phi_{;}{}^{c}{}_{b]} + R\Box\phi) vol_M \\
&= (R\eta^{ab}\phi_{;ab} - 2R^{a}{}_{c}\phi_{;}{}^{c}{}_{a}) vol_M = -2(R^{ab} - (1/2)R\eta^{ab})\phi_{;ab} vol_M = -2G^{ab}\phi_{;ab} vol_M \\
\mathcal{L}_{5,2} &= \Phi^a \wedge \Phi^b \wedge \Phi^c \wedge *\widehat{e}_{abc} = \phi_{;}{}^{a}{}_{d}\phi_{;}{}^{b}{}_{e}\phi_{;}{}^{c}{}_{f}\delta^{def}_{abc} vol_M \\
&= (2 \underbrace{\phi_{;}{}^{a}{}_{c}\phi_{;}{}^{c}{}_{b}\phi_{;}{}^{b}{}_{a}}_{\equiv[\Phi^3]} - 3[\Phi^2] \underbrace{[\Phi]}_{\equiv\Box\phi} + [\Phi]^3) vol_M
\end{aligned}
$$

Αρχικά χρησιμοποιήθηκε ο τελεστής Hodge $*$:

$$
*\widehat{e}_{A_p} := \frac{1}{D-p!}\epsilon_{A_p,J_{D-p}} e^{J_{D-p}} \quad p \leq D
$$

με $D = \dim M = \dim TM$ και $e^{A_D} = \epsilon^{A_D} e^{1\cdots D}$, όπου $e^{1\cdots D} = vol_M$ η μορφή όγκου στην $M$. Έπειτα βασιστήκαμε στην ιδιότητα του γινομένου πλήρως αντισυμμετρικών Levi-Civita συμβόλων με κάποιους κοινούς δείκτες, όπου:

$$
\epsilon_{A_p,J_{D-p}}\epsilon^{I_P,J_{D-p}} = (D-p)!\delta^{I_P}_{A_p}
$$

Ακολουθούμε σύμβαση $\epsilon_{1\ldots D} = 1$ και $\epsilon^{1\cdots D} = -1$. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι η καμπυλότητα $\mathcal{R}^{ab}$ είναι, ως 2-μορφή, αντισυμμετρική στους κάτω δείκτες, αλλά είναι και αντισυμμετρική στους πάνω δείκτες, καθώς παίρνει τιμές στην $\mathfrak{o}(1, D-1)$. Έγινε επίσης χρήση της ιδιότητας:

$$
\delta^{I_p}_{J_p} = \sum_{s=1}^{p}(-1)^{p+s}\delta^{i_s}_{j_p}\delta^{a_1\cdots\widehat{a_s}\cdots a_p}_{J_{p-1}} \tag{9.43}
$$

όπως και χρήση λοιπών γνωστών ιδιοτήτων του γενικευμένου δέλτα του Kronecker, οι οποίες έχουν αναφερθεί ρητά στην προηγούμενη ενότητα. Τέλος, ορίστηκαν οι ακόλουθες συντομεύσεις, όπου $\Phi^a = \phi_{;}{}^{a}{}_{b}e^b$, $[\Phi]^n = (\Box\phi)^n$ και $[\Phi^n] = \phi_{;}{}^{a_1}{}_{a_2}\phi_{;}{}^{a_2}{}_{a_3}\cdots\phi_{;}{}^{a_n}{}_{a_1}$. Συνοψίζοντας, θα έχουμε τελικά μια Λαγκραντζιανή της μορφής:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^H = \big(&G_2 + G_3[\Phi] + G_4R + G_{4,X}([\Phi]^2 - [\Phi^2]) - 2G_5G^{ab}\phi_{;ab} + \\
&+(1/3)G_{5,X}(2[\Phi^3] - 3[\Phi^2][\Phi] + [\Phi]^3)\big) vol_M
\end{aligned} \tag{9.44}
$$

Ας περάσουμε τώρα στην προσπάθεια εξαγωγής των εξισώσεων κίνησης του βαθμωτού για τη Horndeski δράση. Ισχύουν οι 2 ταυτότητες Bianchi, $\mathrm{d}^\omega\mathcal{R}^{a}{}_{b} = 0$ και $\mathrm{d}^\omega\mathcal{T}^a = \mathcal{R}^{a}{}_{b}\wedge e^b$, ενώ για μια $p$-μορφή $\Phi^a_b$ ισχύει ότι:

$$
\mathrm{d}^\omega\Phi^a_b = \mathrm{d}\Phi + [\omega, \Phi] = \mathrm{d}\Phi^a_b + \omega^{a}{}_{c}\wedge\Phi^c_b - (-1)^p\Phi^a_c\wedge\omega^{c}{}_{b} \tag{9.45}
$$

Ας ορίσουμε επίσης $\Psi^a = \phi_{;}{}^{a}\phi_{;b}e^b = \phi_{;}{}^{a}\mathrm{d}^\omega\phi$ και ας δούμε πως δρά η $\mathrm{d}^\omega$ σε αυτήν την 1-μορφή:

$$
\mathrm{d}^\omega\Psi^a = \mathrm{d}\Psi^a + \omega^{a}{}_{b}\wedge\Psi^b = \mathrm{d}(\phi_{;}{}^{a}\wedge\mathrm{d}\phi) + \omega^{a}{}_{b}\wedge\phi_{;}{}^{b}\wedge\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}^\omega(\phi_{;}{}^{a})\wedge\mathrm{d}^\omega\phi
$$

Το παραπάνω ισχύει καθώς $\mathrm{d}^2\phi = 0$, $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}^\omega\phi$ και $\mathrm{d}^\omega\phi_{;}{}^{a} = \mathrm{d}\phi_{;}{}^{a} + \omega^{a}{}_{b}\phi_{;}{}^{b}$. Όμως, ισχύει ότι $\Phi^a = \phi_{;}{}^{a}{}_{b}e^b = (\phi_{,}{}^{a}{}_{b} + \omega^{a}{}_{bc}\phi_{;}{}^{c})e^b = \mathrm{d}\phi_{;}{}^{a} + \omega^{a}{}_{c}\phi_{;}{}^{c} = \mathrm{d}^\omega\phi_{;}{}^{a}$ και άρα $\mathrm{d}^\omega\Psi^a = \Phi^a\wedge\mathrm{d}^\omega\phi$, καθώς η συνοχή είναι ελεύθερη στρέψης, δηλαδή $\omega^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb}$, όπως και ισχύει το προφανές $\phi_{;}{}^a = \phi_{,}{}^a$. Έπειτα:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^\omega \Phi^a &= \mathrm{d}\Phi^a + \omega^a{}_b \wedge \Phi^b \\
&\overset{\Phi^a = \mathrm{d}^\omega(\phi_{;}{}^a)}{=} \mathrm{d}^2\phi_{;}{}^a + \underbrace{\mathrm{d}\omega^a{}_b\phi_{;}{}^b - \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}\phi_{;}{}^b}_{\mathrm{d}(\omega^a{}_b\phi_{;}{}^b)} + \omega^a{}_b \wedge \mathrm{d}\phi_{;}{}^b + \omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c\phi_{;}{}^c \\
&\overset{\text{dummy}}{=} (\mathrm{d}\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b)\phi_{;}{}^b = \mathcal{R}^a{}_b\phi_{;}{}^b
\end{aligned} \tag{9.46}
$$

όπου και χρησιμοποιήθηκε ότι για μια $p$-μορφή $\phi$ και μια αυθαίρετη μορφή $\psi$ ισχύει η σχέση:

$$
\mathrm{d}(\phi \wedge \psi) = \mathrm{d}\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge \mathrm{d}\psi
$$

Σημειώνουμε εδω ότι όροι της μορφής $\mathcal{R}^a{}_b\phi_{;}{}^b$ δεν εμφανίζονται από αμέλεια να γράψουμε το $\wedge$, αλλά επειδή $\phi_{;}{}^b$ είναι 0-μορφή και άρα η πράξη του $\wedge$ είναι απλά το γνωστό βαθμωτό γινόμενο. Ύστερα, δρώντας με τη $\mathrm{d}^\omega$ σε μια συνάρτηση $G(\phi, X)$, θα έχουμε ότι:

$$
\mathrm{d}^\omega G = G_\phi \mathrm{d}^\omega \phi + G_X \mathrm{d}^\omega X
$$

αλλά καθώς $\mathrm{d}^\omega X = -(1/2)\mathrm{d}^\omega(\phi_{,}{}^a\phi_{,}{}^b\eta_{ab}) = -(1/2)\eta_{ab}(\mathrm{d}^\omega(\phi_{,}{}^a)\phi_{,}{}^b + \phi_{,}{}^a\mathrm{d}^\omega(\phi_{,}{}^b)) = -\Phi^a\phi_{,a}$, έπεται ότι $\mathrm{d}^\omega G = G_\phi \mathrm{d}^\omega\phi - G_X\Phi^a\phi_{,a}$. Ας ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό των επιμέρους Λαγκραντζιανών $\mathcal{L}_i^H$. Για τη $\mathcal{L}_2^H$ θα ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L}_2^H &= \delta_\phi G_2 * 1 = (G_{2,\phi}\delta\phi + G_{2,X}\delta_\phi X) * 1 \\
&\overset{[\nabla,\delta]=0}{=} (G_{2,\phi}\delta\phi - G_{2,X}(\delta\phi)_{;}{}^a\phi_{;a}) * 1 \\
&= \delta\phi(G_{2,\phi} + (G_{2,X})_{;}{}^a\phi_{;a} + G_{2,X}[\Phi]) * 1 - \underbrace{(\delta\phi G_{2,X}\phi_{;a} * 1)_{;}{}^a}_{\text{Stokes}} + \delta\phi G_{2,X}\phi_{;a}\underbrace{(*1)_{;}{}^a}_{e^a{}_{\nu;\mu}=0} \\
&= \delta\phi(G_{2,\phi} + (G_{2,X})_{;}{}^a\phi_{;a} + G_{2,X}[\Phi]) * 1
\end{aligned} \tag{9.47}
$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι το μεταβολικό δέλτα μετατίθεται με τη συναλλοίωτη παράγωγο, μια απλή παραγοντική και τέλος το θεώρημα Stokes για την ολική απόκλιση και το τετραδικό αξίωμα (tetrad postulate) για το μηδενισμό του τελευταίου όρου, καθώς:

$$
(e^{a_1\cdots a_D})_{;}{}^a = e^a{}_\nu(e^{a_1}{}_{\mu_1}\cdots e^{a_D}{}_{\mu_D}\mathrm{d}x^{\mu_1}\cdots\mathrm{d}x^{\mu_D})_{;\mu}g^{\mu\nu} = 0 \tag{9.48}
$$

Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς, για τη $\mathcal{L}_3^H$ θα ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{L}_3^H &= \delta_\phi G_3 \Phi^a \wedge *\widehat{e}_a + G_3\delta_\phi\Phi^a \wedge *\widehat{e}_a \\
&\overset{[\mathrm{d}^\omega,\delta]=0}{=} \big((G_{3,\phi}\delta\phi - G_{3,X}\phi_{;b}(\delta\phi)_{;}{}^b)\Phi^a + G_3\mathrm{d}^\omega((\delta\phi)_{;}{}^a)\big) \wedge *\widehat{e}_a \\
&= \delta\phi(G_{3,\phi} + (G_{3,X})_{;}{}^b\phi_{;b} + G_{3,X}[\Phi])\Phi^a \wedge *\widehat{e}_a + \delta\phi(\mathrm{d}^\omega G_3)_{;}{}^a \wedge *\widehat{e}_a + \\
&\quad + \delta\phi G_{3,X}\phi_{;z}\Phi^a{}_{;}{}^z \wedge *\widehat{e}_a + B
\end{aligned}
$$

όπου στο $B$ έχουμε απορροφήσει τις δύο ολικές αποκλίσεις που προκύπτουν και μηδενίζονται στο σύνορο με εφαρμογή Stokes, υποθέτοντας πάντα ότι οι μεταβολές του πεδίου μηδενίζονται εκεί. Αναλυτικά για τον προτελευταίο όρο:

$$
\begin{aligned}
G_3\mathrm{d}^\omega((\delta\phi)_{;}{}^a) \wedge *\widehat{e}_a &= \mathrm{d}^\omega(G_3(\delta\phi)_{;}{}^a * \widehat{e}_a) - (\delta\phi)_{;}{}^a\underbrace{\mathrm{d}^\omega(G_3 * \widehat{e}_a)}_{T^a=\mathrm{d}^\omega e^a=0} \\
&= -(\delta\phi\mathrm{d}^\omega G_3 \wedge *\widehat{e}_a)_{;}{}^a + \delta\phi\underbrace{(\mathrm{d}^\omega G_3 \wedge *\widehat{e}_a)_{;}{}^a}_{(9.48)} \\
&= \delta\phi(\mathrm{d}^\omega G_3)_{;}{}^a \wedge *\widehat{e}_a
\end{aligned}
$$

όπου τελικά $B = \mathrm{d}^\omega(G_3(\delta\phi)_{;}{}^{a} \ast\widehat{e}_a) - (\delta\phi\, \mathrm{d}^\omega G_3 \wedge \ast\widehat{e}_a)_{;}{}^{a} - (\delta\phi G_{3,X}\phi_{;b}\Phi^a\wedge\ast\widehat{e}_a)_{;}{}^{b}$. Το γεγονός ότι δεν έχουμε στρέψη, δηλαδή $\mathrm{d}^\omega e^a = 0$, οδηγεί προφανώς στο συμπέρασμα ότι $\mathrm{d}^\omega \ast \widehat{e}_{a_1\cdots a_q} = 0$. Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε την αποδεδειγμένη σχέση $\mathrm{d}^\omega(G) = G_\phi \mathrm{d}^\omega\phi - G_X\Phi^a\phi_{,a}$ και τη βασική ταυτότητα του μεταθέτη δύο συναλλοίωτων παραγώγων (που απορρέει άμεσα από την (9.46)), $\Phi^z{}_{;}{}^{a} = \Phi^a{}_{;}{}^{z} - i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{az}$, όπου $i_{\nabla\phi}$ η εσωτερική παράγωγος ως προς το $\nabla\phi$, όπως και ξεφορτωθούμε τις ολικές αποκλίσεις, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi\mathcal{L}_3 &= \delta\phi(G_{3,\phi} + (G_{3,X})_{;}{}^{b}\phi_{;b} + G_{3,X}[\Phi])\Phi^a \wedge \ast\widehat{e}_a + \\
&\quad + \delta\phi((G_{3,\phi}\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{a} - (G_{3,X}\phi_{;z})_{;}{}^{a}\Phi^z + G_{3,X}\phi_{;z}\underline{\Phi^a{}_{;}{}^{z}} - G_{3,X}\phi_{;z}\underline{\Phi^z{}_{;}{}^{a}}) \wedge \ast\widehat{e}_a \\
&= \delta\phi(G_{3,\phi} + (G_{3,X})_{;}{}^{b}\phi_{;b} + G_{3,X}[\Phi])\Phi^a \wedge \ast\widehat{e}_a + \\
&\quad + \delta\phi((G_{3,\phi}\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{a} - (G_{3,X}\phi_{;z})_{;}{}^{a}\Phi^z + G_{3,X}\phi_{;z} i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{az}) \wedge \ast\widehat{e}_a
\end{aligned} \tag{9.49}$$

όπου για κάποιο διάνυσμα $X$ και κάποια $q$-μορφή $\omega$, $i_X\omega = (1/(q-1)!)X^a\omega_{a,J_{q-1}}e^{J_{q-1}}$, δηλαδή $i_X : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^{q-1}$. Με αυτόν τον τρόπο οι ενοχλητικοί υπογραμμισμένοι όροι (τέταρτης τάξης παράγωγοι του $\phi$) αφαιρούνται.

Έπειτα, περνάμε στον υπολογισμό των μεταβολών της $\mathcal{L}_{4,1}$, όπου έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi(G_4\mathcal{L}_{4,1}) &= \delta_\phi G_4 \mathcal{R}^{ab} \wedge \ast\widehat{e}_{ab} \\
&= \delta\phi\big((G_{4,\phi} + (G_{4,X})_{;}{}^{c}\phi_{;c} + G_{4,X}[\Phi])\mathcal{R}^{ab} + G_{4,X}\phi_{;c}\underline{\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{c}}\big) \wedge \ast\widehat{e}_{ab}
\end{aligned} \tag{9.50}$$

Για το ως άνω χρησιμοποιήθηκε κατά τα γνωστά παραγοντική, το θεώρημα Stokes και το τετραδικό αξίωμα. Για τις μεταβολές της $\mathcal{L}_{4,2}$ θα ισχύει:

$$\delta_\phi(G_{4,X}\mathcal{L}_{4,2}) = (\delta_\phi G_{4,X}\Phi^a \wedge \Phi^b + 2G_{4,X}\delta_\phi\Phi^a \wedge \Phi^b) \wedge \ast\widehat{e}_{ab}$$

καθώς $\Phi^a \wedge \delta_\phi\Phi^b \wedge \ast\widehat{e}_{ab} = -\delta_\phi\Phi^b \wedge \Phi^a \wedge \ast\widehat{e}_{ab}$, εφόσον $\Phi^\cdot$ είναι 1-μορφές και επιπλέον καθώς:

$$-\frac{1}{(D-2)!}\delta_\phi\Phi^b \wedge \Phi^a\epsilon_{ab,J_{D-2}} \wedge e^{J_{D-2}} = \frac{1}{(D-2)!}\delta_\phi\Phi^a \wedge \Phi^b\epsilon_{abJ_{D-2}} \wedge e^{J_{D-2}} \tag{9.51}$$

με αλλαγή στα dummies $a, b$, αφού $\epsilon_{ba,J_{D-2}} = -\epsilon_{ab,J_{D-2}}$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi\mathcal{L}_{4,2} &= \delta\phi(G_{4,X\phi} + (G_{4,XX})_{;}{}^{c}\phi_{;c} + G_{4,XX}[\Phi])\Phi^a \wedge \Phi^b \wedge \ast\widehat{e}_{ab} + \\
&\quad \underbrace{+\, 2\delta\phi G_{4,XX}\phi_{;c}\underline{\Phi^a{}_{;}{}^{c}} \wedge \Phi^b \wedge \ast\widehat{e}_{ab}}_{(9.51)} - 2\underbrace{(\delta\phi)_{;}{}^{a}(\mathrm{d}^\omega(G_{4,X}) \wedge \Phi^b + G_{4,X}\mathrm{d}^\omega\Phi^b) \wedge \ast\widehat{e}_{ab}}_{I_1}
\end{aligned}$$

όπου ξανά χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές μεθόδους. Υπενθυμίζουμε εδω ότι για μια $q$-μορφή $\omega$ και κάποιο βαθμωτό $\psi$ ισχύει ότι $\mathrm{d}^\omega(\omega \wedge \psi) = \mathrm{d}^\omega\omega \wedge \psi + (-1)^q\omega \wedge \mathrm{d}^\omega\psi$. Ο τελευταίος όρος αναλύεται περαιτέρω ως:

$$-I_1 = \delta\phi\Big(\underbrace{(\mathrm{d}^\omega G_{4,X})_{;}{}^{a} \wedge \Phi^b}_{\mathcal{O}_1} + \underbrace{\mathrm{d}^\omega G_{4,X} \wedge \Phi^b{}_{;}{}^{a}}_{\mathcal{O}_2} + \underbrace{(G_{4,X})_{;}{}^{a}\mathrm{d}^\omega\Phi^b}_{\mathcal{O}_3} + \underbrace{G_{4,X}(\mathrm{d}^\omega\Phi^b)_{;}{}^{a}}_{\mathcal{O}_4}\Big) \wedge \ast\widehat{e}_{ab}$$

όπου θα αναπτύξουμε κάθε όρο χωριστά. Ξεκινώντας με τον όρο $\mathcal{O}_1$ θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{O}_1 = \big((G_{4,X\phi}\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{a} - (G_{4,XX}\phi_{;c})_{;}{}^{a}\Phi^c - G_{4,XX}\phi_{;c}\underline{\Phi^c{}_{;}{}^{a}}\big) \wedge \Phi^b$$

Συνεχίζοντας με τον $\mathcal{O}_2$:

$$\mathcal{O}_2 = (G_{4,X\phi}\mathrm{d}^\omega\phi - G_{4,XX}\phi_{;c}\Phi^c) \wedge \underline{\Phi^b{}_{;}{}^{a}}$$

ενώ για τους $\mathcal{O}_3$ και $\mathcal{O}_4$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.46), θα ισχύει ότι:

$$\mathcal{O}_3 = (G_{4,X})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bc}\phi_{;c} \quad \mathcal{O}_4 = G_{4,X}\underline{\mathcal{R}^{bc}{}_{;}{}^{a}}\phi_{;c} + G_{4,X}\mathcal{R}^{bc}\phi_{;c}{}^{a}$$

δηλαδή $\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_4 = (G_{4,X}\phi_{;c})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bc} + G_{4,X}\phi_{;c}\mathcal{R}^{bc}{}_{;}{}^{a}$. Όλα αυτά έγιναν για να δείξουμε ότι από τις παραγώγους υψηλότερης τάξης ως προς $\phi$ ή $e^a$ (που γενικά δημιουργούν πρόβλημα εκ των υστέρων) θα μείνουν μόνο οι δευτεροτάξιες στις εξισώσεις κίνησης του βαθμωτού, καθώς:

$$\delta\phi G_{4,XX}\phi_{;c}(\Phi^{a}{}_{;}{}^{c} - \Phi^{c}{}_{;}{}^{a}) \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab} = \delta\phi G_{4,XX}\phi_{;c} i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{ac} \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

όπως και αν πάρουμε τη διπλά contracted ταυτότητα Bianchi για την καμπυλότητα, δηλαδή $G^{ab}{}_{;a} = 0$, θα έχουμε:

$$G^{ab}{}_{;a} = R^{ab}{}_{;a} - \frac{1}{2}g^{ab}R_{;a} \overset{R^{ab}=R^{ba}}{=} R^{b}{}_{a;}{}^{a} - \frac{1}{2}R_{;}{}^{b} = R^{cb}{}_{ca;}{}^{a} - \frac{1}{2}R^{ac}{}_{ac;}{}^{b} = 0$$

η οποία σχέση, προσπαθώντας με περαιτέρω χειρισμούς να τη φέρουμε στη γλώσσα των διαφορικών μορφών και εφόσον $R^{ab}{}_{[cd]} = R^{ab}{}_{cd} = -R^{ab}{}_{dc}$, γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
-2R^{cb}{}_{[ac];}{}^{a} - R^{ac}{}_{[ac];}{}^{b} &= -(R^{cb}{}_{de;}{}^{a} + (1/2)R^{ac}{}_{de;}{}^{b})\delta^{de}_{ac} \\
&= -\frac{1}{(D-2)!}\epsilon_{acJ_{D-2}}(R^{cb}{}_{de;}{}^{a} + (1/2)R^{ac}{}_{de;}{}^{b})e^{de,J_{D-2}} \\
&= -(\mathcal{R}^{cb}{}_{;}{}^{a} + (1/2)\mathcal{R}^{ac}{}_{;}{}^{b}) \wedge *\widehat{e}_{ac} = 0
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $\mathcal{R}^{ac}{}_{;}{}^{b} \wedge *\widehat{e}_{ac} = -2\mathcal{R}^{cb}{}_{;}{}^{a} \wedge *\widehat{e}_{ac}$. Έπεται ότι ο όρος στην (9.50) θα παίρνει τη μορφή:

$$\delta\phi G_{4,X}\phi_{;c}\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{c} \wedge *\widehat{e}_{ab} = -2\delta\phi G_{4,X}\phi_{;c}\mathcal{R}^{bc}{}_{;}{}^{a} \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

ακυρώνοντας τον αντίστοιχο όρο της $\mathcal{O}_4$. Συνεπώς, οι εξισώσεις κίνησης του βαθμωτού θα είναι ελεύθερες από τους προβληματικούς όρους $\Phi^{a}{}_{;}{}^{c}$ και $\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{c}$, όπου $c$ δεν κλείνει με τη βάση Hodge. Όταν όλοι οι δείκτες (αυτών των όρων) κλείνουν με αυτήν, τότε λόγω της αντισυμμετρίας το ζήτημα δεν τίθεται καν, καθώς στην πρώτη περίπτωση θα προέκυπτε ο μεταθέτης των συναλλοίωτων παραγώγων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η παράσταση θα μηδενιζόταν λόγω της ταυτότητας Bianchi για την καμπυλότητα. Έτσι, ο όρος $\mathcal{O}_2$ δεν αποτελεί πρόβλημα και άρα η $\delta_\phi\mathcal{L}_4^H$ γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi\mathcal{L}_4^H &= \delta\phi(G_{4,\phi} + (G_{4,X})_{;}{}^{c}\phi_{;c} + G_{4,X}[\Phi])\mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} + \\
&+ \delta\phi(G_{4,X\phi} + (G_{4,XX})_{;}{}^{c}\phi_{;c} + G_{4,XX}[\Phi])\Phi^a \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab} + \\
&+ 2\delta\phi((G_{4,X\phi}\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{a} - (G_{4,XX}\phi_{;c})_{;}{}^{a}\Phi^c + G_{4,XX}\phi_{;c} i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{ac}) \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab} + \\
&+ 2\delta\phi\big((G_{4,X\phi}\mathrm{d}^\omega\phi - G_{4,XX}\phi_{;c}\Phi^c) \wedge \Phi^{b}{}_{;}{}^{a} + (G_{4,X}\phi_{;c})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bc}\big) \wedge *\widehat{e}_{ab} \qquad (9.52)
\end{aligned}$$

Μένει μόνο να υπολογιστεί η μεταβολή της $\mathcal{L}_5$, όπου ξεκινώντας από την $G_5\mathcal{L}_{5,1}$ και συντομεύοντας τις πράξεις, αφού δεν υπάρχει κάτι νέο σε όλο αυτό, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi(G_5\mathcal{L}_{5,1}) &= \delta\phi(G_{5,\phi} + (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^c \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\
&+ \delta\phi G_{5,X}\phi_{;d}(\underline{\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{d}} \wedge \Phi^c + \mathcal{R}^{ab} \wedge \underline{\Phi^{c}{}_{;}{}^{d}}) \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\
&+ \underbrace{\delta\phi(\mathrm{d}^\omega G_5)_{;}{}^{c} \wedge \mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{abc}}_{I_1} + \underbrace{\mathrm{d}^\omega G_5 \wedge \mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc}}_{0}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές μέθοδοι, η ταυτότητα $\mathrm{d}^\omega\mathcal{R}^{a}{}_{b} = 0$ και η αντισυμμετρία για τον ταυτοτικό μηδενισμό του τελευταίου όρου, καθώς είναι κλειστός με την $*\widehat{e}_{abc}$. Αναλύοντας περαιτέρω τον όρο $I_1$ θα ισχύει ότι:

$$I_1 = \delta\phi((G_{5,\phi}\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{c} - (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{c}\Phi^d - G_{5,X}\phi_{;d}\Phi^{d}{}_{;}{}^{c}) \wedge \mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{abc}$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\Phi^{z}{}_{;}{}^{a} = \Phi^{a}{}_{;}{}^{z} - i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{az}$ και ότι για μια $p$ μορφή $\phi$ και μια $q$ μορφή $\psi$ ισχύει η προφανής σχέση $\phi \wedge \psi = (-1)^{pq}\psi \wedge \phi$, καταλήγουμε στην:

$$\begin{aligned}\delta_\phi(G_5\mathcal{L}_{5,1}) = \delta\phi(G_{5,\phi} + (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + \delta\phi G_{5,X}\phi_{;d}(\underline{\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{d}} \wedge \Phi^{c} + \mathcal{R}^{ab} \wedge i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{cd}) \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + \delta\phi((G_{5,\phi}\mathrm{d}^{\omega}\phi)_{;}{}^{c} - (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{c}\Phi^{d}) \wedge \mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{abc}\end{aligned}$$

Τέλος, για την $G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2}$ θα ισχύει ότι:

$$\delta_\phi(G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2}) = \underbrace{\delta_\phi G_{5,X}\Phi^{a} \wedge \Phi^{b} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc}}_{\mathcal{O}_1} + \underbrace{3G_{5,X}\delta_\phi\Phi^{a} \wedge \Phi^{b} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc}}_{\mathcal{O}_2}$$

όπου δεν έχει χρησιμοποιηθεί κάτι νέο για την εξαγωγή της ως άνω σχέσης. θα υπολογίσουμε πρώτα τον όρο $\mathcal{O}_1$, όπου θα έχουμε κατά τα γνωστά ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 = \delta\phi(G_{5,X\phi} + (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\underbrace{\Phi^{a} \wedge \Phi^{b} \wedge \Phi^{c}}_{\Phi^{abc}} \wedge * \widehat{e}_{abc} +\\ + 3\delta\phi G_{5,XX}\phi_{;d}\underline{\Phi^{a}{}_{;}{}^{d}} \wedge \Phi^{bc} \wedge *\widehat{e}_{abc}\end{aligned}$$

ενώ για τον όρο $\mathcal{O}_2$, χρησιμοποιώντας τα γνωστά τρικ που έχουμε δείξει, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{O}_2 = 3\delta\phi(\mathrm{d}^{\omega}G_{5,X} \wedge \Phi^{bc} + 2G_{5,X}\mathrm{d}^{\omega}\Phi^{b} \wedge \Phi^{c})_{;}{}^{a} \wedge *\widehat{e}_{abc}$$

καθώς $-\Phi^{b} \wedge \mathrm{d}^{\omega}\Phi^{c}\epsilon_{abc,J_{D-3}} = -\mathrm{d}^{\omega}\Phi^{b} \wedge \Phi^{c}\epsilon_{acb,J_{D-3}} = \mathrm{d}^{\omega}\Phi^{b} \wedge \Phi^{c}\epsilon_{abc,J_{D-3}}$, οπότε αναλύοντας τους όρους περαιτέρω και αντικαθιστώντας την (9.46):

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_2 = 3\delta\phi(\underbrace{(\mathrm{d}^{\omega}G_{5,X})_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{bc}}_{J_1} + 2\mathrm{d}^{\omega}G_{5,X} \wedge \Phi^{b}{}_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{c}) \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 6\delta\phi((G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c} + G_{5,X}\phi_{;d}\underline{\mathcal{R}^{bd}{}_{;}{}^{a}} \wedge \Phi^{c}) \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 6\delta\phi(G_{5,X}\phi_{;d}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c}{}_{;}{}^{a}) \wedge *\widehat{e}_{abc}\end{aligned}$$

Απομονώνοντας τον όρο $J_1$, θα έχουμε ότι:

$$J_1 = (G_{5,X\phi}\mathrm{d}^{\omega}\phi)_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{bc} - (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\Phi^{dbc} - G_{5,XX}\phi_{;d}\underline{\Phi^{d}{}_{;}{}^{a}} \wedge \Phi^{bc}$$

οπότε τελικά, βλέποντας ότι ο υπογραμμισμένος όρος του $J_1$ μαζί με τον αντίστοιχο του $\mathcal{O}_1$ δίνουν τα γνωστά, έπεται ότι:

$$\begin{aligned}\delta_\phi(G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2}) = \delta\phi(G_{5,X\phi} + (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\Phi^{abc} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 3\delta\phi(G_{5,XX}\phi_{;d}i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{ad} + (G_{5,X\phi}\mathrm{d}^{\omega}\phi)_{;}{}^{a} - (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\Phi^{d}) \wedge \Phi^{bc} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 6\delta\phi((G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c} + G_{5,X}\phi_{;d}\underline{\mathcal{R}^{bd}{}_{;}{}^{a}} \wedge \Phi^{c}) \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 6\delta\phi(\mathrm{d}^{\omega}G_{5,X} \wedge \Phi^{b}{}_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{c} + G_{5,X}\phi_{;d}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c}{}_{;}{}^{a}) \wedge *\widehat{e}_{abc}\end{aligned}$$

Καθώς $\delta_\phi\mathcal{L}_5^{H} = \delta_\phi(G_5\mathcal{L}_{5,1}) + (1/3)\delta_\phi(G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2})$ και $\mathcal{R}^{ab}{}_{;}{}^{d} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc} = -2\mathcal{R}^{bd}{}_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc}$ (οπότε και οι δύο προβληματικές παράγωγοι της καμπυλότητας αλληλοαναιρούνται), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\delta_\phi\mathcal{L}_5^{H} = \delta\phi(G_{5,\phi} + (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + \delta\phi\big(G_{5,X}\phi_{;d}\mathcal{R}^{ab} \wedge i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{cd} + ((G_{5,\phi}\mathrm{d}^{\omega}\phi)_{;}{}^{c} - (G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{c}\Phi^{d}) \wedge \mathcal{R}^{ab}\big) \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + (1/3)\delta\phi(G_{5,X\phi} + (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{d})\Phi^{abc} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + \delta\phi(G_{5,XX}\phi_{;d}i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{ad} + (G_{5,X\phi}\mathrm{d}^{\omega}\phi)_{;}{}^{a} - (G_{5,XX}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\Phi^{d}) \wedge \Phi^{bc} \wedge *\widehat{e}_{abc} +\\ + 2\delta\phi((G_{5,X}\phi_{;d})_{;}{}^{a}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c} + \mathrm{d}^{\omega}G_{5,X} \wedge \Phi^{b}{}_{;}{}^{a} \wedge \Phi^{c} + G_{5,X}\phi_{;d}\mathcal{R}^{bd} \wedge \Phi^{c}{}_{;}{}^{a}) \wedge *\widehat{e}_{abc}\end{aligned} \tag{9.53}$$

Μετά από όλη αυτήν την επώδυνη διαδικασία, έχουμε πλέον εξάγει τις εξισώσεις κίνησης του βαθμωτού $\phi$, αν θέσουμε $\delta_\phi S_H = 0$ σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης. Μπορούμε να τραβήξουμε τις συνιστώσες των διαφόρων μεγεθών, εκφράζοντας κάθε $\delta_\phi \mathcal{L}_i^H$ ως προς το στοιχείο όγκου $vol_M = *1$. Θα γίνεται ταυτόχρονα και μετονομασία όλων των βουβών (dummy) δεικτών, έτσι ώστε να ακολουθείται η σειρά του αγγλικού αλφαβήτου. Θα έχουμε αρχικά ότι:

$$\delta\phi(G_{2,\phi} + (G_{2,X})_{;}{}^{a}\phi_{;a} + G_{2,X}[\Phi])vol_M \tag{9.54}$$

η οποία ήταν ήδη σε αυτήν τη μορφή. Έπειτα για την $\delta_\phi \mathcal{L}_3^H$, θα έχουμε ότι:

$$\Phi^a \wedge *\widehat{e}_a = \frac{1}{(D-1)!}\phi_{;}{}^{a}{}_{c}\epsilon_{a,J_{D-1}}e^c \wedge e^{J_{D-1}} = [\Phi]vol_M$$

όπως και $(\mathrm{d}^\omega\phi)_{;}{}^{a} \wedge *\widehat{e}_a = \phi_{,z;}{}^{a}e^z \wedge *\widehat{e}_a = \phi_{,z;}{}^{a}\delta^z_a * 1 = [\Phi]vol_M$, όπου $e^z$ περνάει εκτός συναλλοίωτης λόγω τετραδικού αξιώματος. Θα ισχύει επίσης ότι:

$$i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{az} \wedge *\widehat{e}_a = \phi_{;}{}^{c}R^{az}{}_{cd}e^d \wedge *\widehat{e}_a = \phi_{;}{}^{c}R^{az}{}_{ca}vol_M = -\phi_{;}{}^{c}R^{z}{}_{c}vol_M$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε πλέον:

$$\begin{aligned}\delta_\phi \mathcal{L}_3^H = \delta\phi\Big[&(G_{3,\phi} + (G_{3,X})_{;}{}^{a}\phi_{;a} + G_{3,X}[\Phi])[\Phi] + \\ &+(G_{3,\phi}\phi_{;a})_{;}{}^{a} - (G_{3,X}\phi_{;b})_{;}{}^{a}\phi_{;}{}^{b}{}_{a} - G_{3,X}\phi_{;a}\phi_{;}{}^{b}R^{a}{}_{b}\Big]vol_M\end{aligned} \tag{9.55}$$

Ύστερα, θα χρειαστούμε την ακόλουθη σχέση:

$$\mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{de}\delta^{de}_{ab}vol_M = R^{ab}{}_{[ab]}vol_M = R^{ab}{}_{ab}vol_M = Rvol_M$$

και το γεγονός ότι $\Phi^a \wedge \Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab} = \phi_{;}{}^{a}{}_{d}\phi_{;}{}^{b}{}_{e}\delta^{de}_{ab}vol_M = 2\phi_{;}{}^{a}{}_{[a}\phi_{;}{}^{b}{}_{b]}vol_M$. Γενικότερα, οι περισσότερες σχέσεις θα είναι πλέον συνδυασμοί των παραπάνω, οπότε βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta_\phi \mathcal{L}_4^H = \delta\phi\Big[&(G_{4,\phi} + (G_{4,X})_{;}{}^{a}\phi_{;a} + G_{4,X}[\Phi])R + \\ &+2(G_{4,X\phi} + (G_{4,XX})_{;}{}^{c}\phi_{;c} + G_{4,XX}[\Phi])\phi_{;}{}^{a}{}_{[a}\phi_{;}{}^{b}{}_{b]} + \\ &+4((G_{4,X\phi}\phi_{;[a})_{;}{}^{a}\phi_{;}{}^{b}{}_{b]} - (G_{4,XX}\phi_{;c})_{;}{}^{a}\phi_{;}{}^{c}{}_{[a}\phi_{;}{}^{b}{}_{b]} + G_{4,XX}\phi_{;c}\phi_{;}{}^{b}R^{ac}{}_{b[a}\phi_{;}{}^{b}{}_{b]}) + \\ &+2(G_{4,XX}\phi_{;a}\phi_{;}{}^{a}{}_{b}R^{cb}\phi_{;c} - G_{4,X\phi}\phi_{;a}R^{ba}\phi_{;b} - (G_{4,X}\phi_{;b})_{;}{}^{a}R^{b}{}_{a})\Big]vol_M\end{aligned} \tag{9.56}$$

όπου σημειώνουμε απλά ότι:

$$\begin{aligned}e^c \wedge \Phi^b{}_{;}{}^{a} \wedge *\widehat{e}_{ab} &= \phi_{;}{}^{ab}{}_{d}\delta^{cd}_{ab}vol_M = 2\phi_{;}{}^{[cd]}{}_{d}vol_M = [\nabla^c, \nabla^d]\nabla_d\phi vol_M \\ &= R_d{}^{fcd}\nabla_f\phi vol_M = -R^{fc}\phi_{;f}vol_M\end{aligned}$$

με $(\phi_{;}{}^{a}{}_{b})_{;}{}^{c} \equiv \phi_{;}{}^{ca}{}_{b} = \nabla^c\nabla^a\nabla_b\phi$ να είναι απόλυτα ισοδύναμοι συμβολισμοί. Η παραπάνω σχέση είναι πολύ εύκολα αποδείξιμη από την (9.46). Συνεχίζοντας και επισημαίνοντας τη διαφορά μεταξύ του $[abc]$ που υποδηλώνει αντισυμμετρία σε όλους τους περικλειόμενους δείκτες και του δικού μας ορισμένου $[\![abc]\!]$, θα έχουμε επίσης ότι:

$$\begin{aligned}\delta_\phi \mathcal{L}_5^H = \delta\phi \Big[ & 3\big((G_{5,\phi} + (G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^d)R^{ab}{}_{[ab}\phi_;{}^c{}_{c]} - G_{5,X}\phi_{;d}R^{ab}{}_{[ab}\phi_;{}^e R^{cd}{}_{c]e}\big)+ \\ & +3\big((G_{5,\phi}\phi_{[a})_;{}^c R^{ab}{}_{bc]} - (G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^c\phi_;{}^d{}_{[a}R^{ab}{}_{bc]}\big)+ \\ & +2(G_{5,X\phi} + (G_{5,XX}\phi_{;d})_;{}^d)\phi_;{}^a{}_{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]} + 3!G_{5,XX}\phi_{;d}\phi_;{}^e R^{ad}{}_{e[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]}+ \\ & +3!\big((G_{5,X\phi}\phi_{;a})_;{}^{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^{c]}{}_c - (G_{5,XX}\phi_{;d})_;{}^a\phi_;{}^d{}_{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]}\big)+ \\ & +2G_{5,X\phi}(\phi_{;c}R^{ab}\phi_{;a}\phi_;{}^c{}_b - \phi_;{}^d R^{ca}{}_{db}\phi_{;a}\phi_{;c}{}^b - \phi_{;a}R^{ba}\phi_{;b}[\Phi])- \\ & -2G_{5,XX}\phi_{;d}(\phi_;{}^d{}_c R^{ab}\phi_{;a}\phi_;{}^c{}_b - \phi_;{}^{de}R^{ca}{}_{eb}\phi_{;a}\phi_{;c}{}^b - \phi_;{}^d{}_a R^{ba}\phi_{;b}[\Phi])+ \\ & +2G_{5,X}\phi_{;d}(R^d{}_a R^{ba}\phi_{;b} - (1/2)R^{ad}{}_{bc}R_{ae}{}^{bc}\phi_;{}^e)+ \\ & +2(G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^a R^{bd}{}_{[ab}\phi_;{}^c{}_{c]}\Big] vol_M \end{aligned} \tag{9.57}$$

όπου απλά αναπτύξαμε το $\mathrm{d}^\omega G_{5,X}$ και χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα (9.43) για να αναλύσουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους του $\Phi^a$ και να αποδείξουμε ότι πράγματι η υψηλότερη τάξη παραγώγου στις εξισώσεις κίνησης θα είναι η δεύτερη και άρα είμαστε ελεύθεροι από μη περιορισμένες (unconstrained) παραγώγους με τάξη μεγαλύτερη του δύο (οι οποίες είναι μαθηματικά συνεπείς, αλλά οδηγούν σε μοντέλα με απουσία κάτω φράγματος για την ενέργεια ή εισάγουν νέους β.ε, όσο μικρός και να είναι ο συντελεστής του "προβληματικού" όρου). Αυτό είναι αρκετά σημαντικό, καθότι ακόμα και η επιβολή (διαταρακτικών, με την έννοια ότι τέτοιοι όροι εισάγονται συχνά ως όροι διαταρακτικού αναπτύγματος) περιορισμών. Συνοψίζοντας, καταλήξαμε στις εξής εξισώσεις κίνησης του βαθμωτού $\phi$:

$$\begin{aligned} & G_{2,\phi} + (G_{2,X})_;{}^a\phi_{;a} + G_{2,X}[\Phi] + (G_{3,\phi} + (G_{3,X})_;{}^a\phi_{;a} + G_{3,X}[\Phi])[\Phi]- \\ & -G_{3,X}\phi_{;a}\phi_;{}^b R^a{}_b + (G_{4,\phi} + (G_{4,X})_;{}^a\phi_{;a} + G_{4,X}[\Phi])R+ \\ & +(G_{3,\phi}\phi_{;a})_;{}^a - (G_{3,X}\phi_{;b})_;{}^a\phi_;{}^b{}_a + 2(G_{4,X\phi} + (G_{4,XX})_;{}^c\phi_{;c} + G_{4,XX}[\Phi])\phi_;{}^a{}_{[a}\phi_;{}^b{}_{b]}+ \\ & +4((G_{4,X\phi}\phi_{;[a})_;{}^a\phi_;{}^b{}_{b]} - (G_{4,XX}\phi_{;c})_;{}^a\phi_;{}^c{}_{[a}\phi_;{}^b{}_{b]} + G_{4,XX}\phi_{;c}\phi_;{}^b R^{ac}{}_{b[a}\phi_;{}^b{}_{b]})+ \\ & +2(G_{4,XX}\phi_{;a}\phi_;{}^a{}_b R^{cb}\phi_{;c} - G_{4,X\phi}\phi_{;a}R^{ba}\phi_{;b} - (G_{4,X}\phi_{;b})_;{}^a R^b{}_a)+ \\ & 3\big((G_{5,\phi} + (G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^d)R^{ab}{}_{[ab}\phi_;{}^c{}_{c]} - G_{5,X}\phi_{;d}R^{ab}{}_{[ab}\phi_;{}^e R^{cd}{}_{c]e}\big)+ \\ & +3\big((G_{5,\phi}\phi_{[a})_;{}^c R^{ab}{}_{bc]} - (G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^c\phi_;{}^d{}_{[a}R^{ab}{}_{bc]}\big)+ \\ & +2(G_{5,X\phi} + (G_{5,XX}\phi_{;d})_;{}^d)\phi_;{}^a{}_{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]} + 3!G_{5,XX}\phi_{;d}\phi_;{}^e R^{ad}{}_{e[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]}+ \\ & +3!\big((G_{5,X\phi}\phi_{;a})_;{}^{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^{c]}{}_c - (G_{5,XX}\phi_{;d})_;{}^a\phi_;{}^d{}_{[a}\phi_;{}^b{}_b\phi_;{}^c{}_{c]}\big)+ \\ & +2G_{5,X\phi}(\phi_{;c}R^{ab}\phi_{;a}\phi_;{}^c{}_b - \phi_;{}^d R^{ca}{}_{db}\phi_{;a}\phi_{;c}{}^b - \phi_{;a}R^{ba}\phi_{;b}[\Phi])- \\ & -2G_{5,XX}\phi_{;d}(\phi_;{}^d{}_c R^{ab}\phi_{;a}\phi_;{}^c{}_b - \phi_;{}^{de}R^{ca}{}_{eb}\phi_{;a}\phi_{;c}{}^b - \phi_;{}^d{}_a R^{ba}\phi_{;b}[\Phi])+ \\ & +2G_{5,X}\phi_{;d}(R^d{}_a R^{ba}\phi_{;b} - (1/2)R^{ad}{}_{bc}R_{ae}{}^{bc}\phi_;{}^e) + 2(G_{5,X}\phi_{;d})_;{}^a R^{bd}{}_{[ab}\phi_;{}^c{}_{c]} = 0 \end{aligned} \tag{9.58}$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης του vielbein, θεωρώντας ότι η συνοχή $\omega^{ab}$ εξαρτάται από το vielbein $e^a$ (απουσία στρέψης), όπου θα προσδιορίσουμε αυτή τη σχέση εξάρτησης υποθέτοντας μια νέα συνοχή $\varpi^{ab}$, η οποία εξαρτάται από ένα άλλο vielbein $\widetilde{e}^a$. Η νέα 1-μορφή είναι αντισυμμετρική και επιπλέον δίχως στρέψη, όπως δηλαδή και η $\omega^{ab}$. Εφόσον $\widetilde{\mathcal{T}}^a = 0$, έπεται ότι:

$$\mathrm{d}^\varpi\widetilde{e}^a = \mathrm{d}\widetilde{e}^a + \varpi^a{}_b \wedge \widetilde{e}^b = \mathrm{d}^\omega\widetilde{e}^a + \mathcal{C}^a{}_b \wedge \widetilde{e}^b = 0$$

όπου ως $\mathcal{C}^a{}_b$ ορίσαμε την 1-μορφή της διαφοράς των δύο συνοχών, δηλαδή $\mathcal{C} = \varpi - \omega$. Καθώς λοιπόν $-\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_a} = \mathcal{C}_{ac} \wedge \widetilde{e}^c$, όπου $\widehat{\widetilde{e}_a} \equiv \eta_{af}\widetilde{e}^f$, όπως και ισχύει για την εσωτερική παράγωγο ότι

$i_v(\phi \wedge \psi) = i_v\phi \wedge \psi + (-1)^p \phi \wedge i_v\psi$ και $(i_v\phi)(v_1, \cdots, v_{p-1}) = \phi(v, v_1, \cdots, v_{p-1})$, όπου $\phi$ είναι $p$-μορφή και $v$ κάποιο διανυσματικό πεδίο, θα έχουμε:

$$-i_{\widetilde{e}_a}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_b} = (i_{\widetilde{e}_a}\mathcal{C}_{bc})\widetilde{e}^c - \mathcal{C}_{bc}i_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}^c = \widetilde{C}_{bcd}(i_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}^d)\widetilde{e}^c - \mathcal{C}_{bc}\delta^c_a = \widetilde{C}_{bca}\widetilde{e}^c - \mathcal{C}_{ba} = (\widetilde{C}_{bca} - \widetilde{C}_{bac})\widetilde{e}^c$$

όπου $i_{\widetilde{e}_a}\widetilde{e}^c = \widetilde{e}^c(e_a) = \delta^c_a$ λόγω δυϊκότητας, $\mathcal{C}_{ab} = \widetilde{C}_{abc}\widetilde{e}^c = C_{abc}e^c$ και $i_v\phi = 0$ για μια 0-μορφή (βαθμωτό) $\phi$, όπως είναι η $\widetilde{C}_{abc}$. Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να βρούμε και ότι $-i_{\widetilde{e}_b}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_a} = (\widetilde{C}_{acb} - \widetilde{C}_{abc})\widetilde{e}^c$, όπως και:

$$-(i_{\widetilde{e}_a}i_{\widetilde{e}_b}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_c})\widetilde{e}^c = (i_{\widetilde{e}_a}(\widetilde{C}_{cdb} - \widetilde{C}_{cbd})\widetilde{e}^d)\widetilde{e}^c = (\widetilde{C}_{cab} - \widetilde{C}_{cba})\widetilde{e}^c$$

Εκμεταλλευόμενοι την παρατήρηση ότι $\mathcal{C}_{ab} = -\mathcal{C}_{ba}$, εφόσον και οι δύο συνοχές χαρακτηρίζονται από αυτήν ακριβώς την αντισυμμετρία, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι:

$$-i_{\widetilde{e}_a}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_b} + i_{\widetilde{e}_b}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_a} + (i_{\widetilde{e}_a}i_{\widetilde{e}_b}\mathrm{d}^\omega\widehat{\widetilde{e}_c})\widetilde{e}^c = 2\mathcal{C}_{ab}$$

Η παραπάνω σχέση θα μας δώσει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τη μεταβολή του $\omega$ συναρτήσει της μεταβολής του (στοιχείου του) συνπλαισίου $\widetilde{e}^a = e^a + \delta e^a$, όπου (για το πλαίσιο) $\widetilde{e}_a = e_a - \delta e_a$. Καθώς $\mathrm{d}^\omega\widehat{e_a} = 0$ ($\omega$ είναι συνοχή χωρίς στρέψη) και $i_{e_a}\delta e^b = -i_{\delta e_a}e^b$, σχέση που προκύπτει από το γεγονός ότι $\delta e^a = e_b{}^\mu \delta e^a{}_\mu e^b$, $\delta e_a = e^b{}_\mu \delta e_a{}^\mu e_b$, $i_{e_a}\delta e^b = e_a{}^\mu \delta e^b{}_\mu$ και $i_{\delta e_a}e^b = e^b{}_\mu \delta e_a{}^\mu$, θα έχουμε (εφόσον κρατάμε τη διαταραχή σε πρώτη τάξη) την ακόλουθη παρατήρηση: όροι της μορφής $i_{\delta e_a}\mathrm{d}^\omega(\delta\widehat{e_b})$ θα απορρίπτονται, με αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
2\mathcal{C}_{ab} &= -i_{e_a}\mathrm{d}^\omega\delta\widehat{e_b} + i_{e_b}\mathrm{d}^\omega\delta\widehat{e_a} + (i_{e_a}i_{e_b}\mathrm{d}^\omega\delta\widehat{e_c})e^c \\
&= -(\delta\widehat{e_b})_{;a} + (\delta\widehat{e_a})_{;b} + (i_{e_a}(\underbrace{i_{e_b}(\delta\widehat{e_c})_{;d}}_{0-\mathrm{form}}\wedge e^d - (\delta\widehat{e_c})_{;b}))e^c \\
&= -(\delta\widehat{e_b})_{;a} + (\delta\widehat{e_a})_{;b} + (i_{e_b}(\delta\widehat{e_c})_{;a} - i_{e_a}(\delta\widehat{e_c})_{;b})e^c \\
&= 2((\delta\widehat{e_a})_{;b} - (\delta\widehat{e_b})_{;a})
\end{aligned}$$

Εφόσον $\mathcal{C}_{ab} = \varpi_{ab} - \omega_{ab} = \delta\omega_{ab}$, καθώς $\varpi_{ab} = \omega_{ab} + \delta\omega_{ab}$, θα έχουμε τη τελική σχέση που συνδέει το $\delta\omega_{ab}$ με τη μεταβολή του vielbein:

$$\delta\omega^{ab} = (\delta e^a)_;{}^b - (\delta e^b)_;{}^a \tag{9.59}$$

Ας εξετάσουμε σε αυτό το σημείο, ποιές από τις επί μέρους Λαγκραντζιανές περιέχουν όρους που εξαρτώνται από την 1-μορφή συνοχής. Πρόκειται για αυτές που περιέχουν τους όρους $\Phi^a$, $\Psi^a$ και $\mathcal{R}^{ab}$. Σκοπός λοιπόν είναι να δούμε ποιό είναι το αποτέλεσμα της μεταβολής αυτών, όπου ξεκινάμε με την $\mathcal{L}_3^H$:

$$\delta_\omega\mathcal{L}_3^H = G_3(\delta_\omega\mathrm{d}^\omega(\phi_;{}^a)) \wedge *\widehat{e}_a = \delta\omega^{ab} \wedge G_3\phi_{;b} * \widehat{e}_a$$

Έπειτα, για το πρώτο μέρος της $\mathcal{L}_H^4$ θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_\omega(G_4\mathcal{L}_{4,1}) &= G_4(\mathrm{d}^\omega\,\delta\omega^{ab}) \wedge *\widehat{e}_{ab} \overset{\mathrm{Stokes}}{=} -\mathrm{d}^\omega G_4 \wedge \delta\omega^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} \\
&= \delta\omega^{ab} \wedge (G_{4,\phi}\mathrm{d}\phi - G_{4,X}\phi_{,c}\Phi^c) \wedge *\widehat{e}_{ab}
\end{aligned}$$

ενώ για το δεύτερο μέρος (με αντίστοιχη λογική):

$$\delta_\omega(G_{4,X}\mathcal{L}_{4,2}) = 2\delta\omega^{ac} \wedge G_{4,X}\phi_{,c}\Phi^b \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

έτσι ώστε:

$$\delta_\omega\mathcal{L}_4^H = \delta\omega^{ab} \wedge ((G_{4,\phi}\mathrm{d}\phi - G_{4,X}\phi_{,c}\Phi^c) \wedge *\widehat{e}_{ab} + 2G_{4,X}\phi_{,b}\Phi^c \wedge *\widehat{e}_{ac})$$

Τέλος, για λόγους συντομίας και εφόσον ότι ιδιότητα και μέθοδος χρησιμοποιείται, έχει δειχτεί αναλυτικά στις προηγούμενες παραγράφους, θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα της μεταβολής της $\mathcal{L}_5^H$, όπου αρχικά;

$$\delta_\omega(G_5\mathcal{L}_{5,1}) = \delta\omega^{ab} \wedge ((G_{5,\phi}\mathrm{d}\phi - G_{5,X}\Phi^d\phi_{,d}) \wedge \Phi^c + G_5\mathcal{R}^{cd}\phi_{,d}) \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\ + \delta\omega^{ab} \wedge G_5\mathcal{R}^{cd}\phi_{,b} \wedge *\widehat{e}_{cda}$$

και ύστερα:

$$\delta_\omega(G_{5,X}\mathcal{L}_{5,2}) = 3\delta\omega^{ab} \wedge G_{5,X}\phi_{,b}\Phi^d \wedge \Phi^c \wedge *\widehat{e}_{adc}$$

έτσι ώστε:

$$\delta_\omega\mathcal{L}_5^H = \delta\omega^{ab} \wedge ((G_{5,\phi}\mathrm{d}\phi - G_{5,X}\Phi^d\phi_{,d}) \wedge \Phi^c + G_5\mathcal{R}^{cd}\phi_{,d}) \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\ + \delta\omega^{ab} \wedge (G_{5,X}\phi_{,b}\Phi^d \wedge \Phi^c - G_5\mathcal{R}^{cd}\phi_{,b}) \wedge *\widehat{e}_{adc}$$

Επομένως, οι εξισώσεις κίνησης του vielbein θα δίνονται από το γενικό τύπο:

$$\delta\mathcal{L} = \delta e^a \wedge \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e^a} + \delta e^a \wedge \frac{\delta\omega^{bc}}{\delta e^a} \wedge \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega^{bc}}$$

ο οποίος με αντικατάσταση της (9.59) και παραγοντική ολοκλήρωση (αγνοώντας την ολική απόκλιση) θα γράφεται ως:

$$\delta\mathcal{L} = \delta e^a \wedge \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e^a} + 2\delta e^{[b} \wedge \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\omega^{ab}}\right]_;^{\ a]} \tag{9.60}$$

Προχωράμε λοιπόν, σε αυτό το σημείο, πάλι στους επιμέρους υπολογισμούς για τον δεύτερο όρο της (9.60), λαμβάνοντας υπόψιν ότι λόγω του τετραδικού αξιώματος $(*\widehat{e}_{A_p})_;{}^a = 0$. Αρχικά:

$$\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_3^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{\ a]} = \delta e^{[b} \wedge (G_3\phi_{;b})_;{}^{a]} * \widehat{e}_a \tag{9.61}$$

Έπειτα, βρίσκουμε ότι:

$$\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_4^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{\ a]} = \delta e^{[\![b} \wedge \Big[G_{4,\phi;}{}^{a]\!]}\mathrm{d}\phi + G_{4,\phi}(\mathrm{d}\phi)_;{}^{a]\!]} - (G_{4,X}\phi_{,c})_;{}^{a]\!]}\Phi^c - \\ - G_{4,X}\phi_{,c}\Phi^c{}_;{}^{a]\!]}\Big] \wedge *\widehat{e}_{ab} + \delta e^{[\![b} \wedge 2\Big[(G_{4,X}\phi_{,b})_;{}^{a]\!]}\Phi^c + G_{4,X}\phi_{,b}\Phi^c{}_;{}^{a]\!]}\Big] \wedge *\widehat{e}_{ac} \tag{9.62}$$

ενώ τέλος, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_5^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{\ a]} = \delta e^{[\![b} \wedge \Big[\big((G_{5,\phi}\mathrm{d}\phi)_;{}^{a]\!]} - (G_{5,X}\phi_{,d})_;{}^{a]\!]}\Phi^d - G_{5,X}\phi_{,d}\Phi^d{}_;{}^{a]\!]}\big) \wedge \Phi^c + \\ + G_{5,\phi}\mathrm{d}\phi \wedge \Phi^c{}_;{}^{a]\!]} - G_{5,X}\phi_{,d}\Phi^d \wedge \Phi^c{}_;{}^{a]\!]} + (G_5\phi_{,d})_;{}^{a]\!]}\mathcal{R}^{cd} + G_5\phi_{,d}\mathcal{R}^{cd}{}_;{}^{a]\!]}\Big] \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\ + \delta e^{[\![b} \wedge \Big[(G_{5,X}\phi_{,b})_;{}^{a]\!]}\Phi^d \wedge \Phi^c + 2G_{5,X}\phi_{,b}\Phi^d{}_;{}^{a]\!]} \wedge \Phi^c - \\ - (G_5\phi_{,b})_;{}^{a]\!]}\mathcal{R}^{cd} - G_5\phi_{,b}\mathcal{R}^{cd}{}_;{}^{a]\!]}\Big] \wedge *\widehat{e}_{adc} \tag{9.63}$$

Αναπτύσσοντας τις αντισυμμετρίες στους $a, b$ και χρησιμοποιώντας τη προφανή σχέση, όπου π.χ για 2 αυθαίρετες 1-μορφές $\phi^a$ και $\psi^a$ ισχύει ότι $\phi^{[a} \wedge \psi^{b]} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \phi^a \wedge \psi^b \wedge *\widehat{e}_{ab}$ (λόγω της αντισυμμετρίας του $\epsilon$), θα ασχοληθούμε και πάλι για αρχή με τους προβληματικούς όρους που περιέχουν παραγώγους τάξης μεγαλύτερης του 2. Επομένως, για την (9.62) εξετάζουμε τον όρο:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_4 &= -\delta e^{\llbracket b} \wedge G_{4,X}\phi_{,c}\Phi^{c}{}_{;}{}^{a\rrbracket} \wedge *\widehat{e}_{ab} + \delta e^{\llbracket b} \wedge 2G_{4,X}\phi_{,b}\Phi^{c}{}_{;}{}^{a\rrbracket} \wedge *\widehat{e}_{ac} \\ &\overset{\text{dummy},\epsilon}{=} \delta e^{a} \wedge G_{4,X}(2\phi_{,c}\Phi^{[c}{}_{;}{}^{b]} \wedge *\widehat{e}_{ab} + \phi_{,a}\Phi^{c}{}_{;}{}^{b} \wedge *\widehat{e}_{bc}) \\ &= \delta e^{a} \wedge G_{4,X}(\phi_{,a}\Phi^{c}{}_{;}{}^{b} \wedge *\widehat{e}_{bc} - \phi_{,c} i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{bc} \wedge *\widehat{e}_{ab})\end{aligned} \tag{9.64}$$

όπου προκύπτει τελικά ότι έχουμε μέχρι και δευτεροτάξιες παραγώγους, οπότε ο $\mathcal{O}_4$ δεν αποτελεί πρόβλημα. Στη συνέχεια, για την (9.63), οι μόνοι όροι που πιθανώς δημιουργούν πρόβλημα συγκεντρώνονται στον $\mathcal{O}_5$:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_5 = &-\delta e^{\llbracket b} \wedge \phi_{,d}(G_{5,X}\Phi^{d}{}_{;}{}^{a\rrbracket} \wedge \Phi^{c} - G_5\mathcal{R}^{cd}{}_{;}{}^{a\rrbracket}) \wedge *\widehat{e}_{abc} + \\ &+ \delta e^{\llbracket b} \wedge \phi_{,b}(2G_{5,X}\Phi^{d}{}_{;}{}^{a\rrbracket} \wedge \Phi^{c} - G_5\mathcal{R}^{cd}{}_{;}{}^{a\rrbracket}) \wedge *\widehat{e}_{adc} \\ \overset{\text{dummy},\epsilon}{=} &\ \delta e^{a} \wedge (2\phi_{,d}G_{5,X}\underbrace{\Phi^{[d}{}_{;}{}^{b]}}_{-i_{\nabla\phi}\mathcal{R}^{bd}} \wedge\Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{abc} + \phi_{,a}G_{5,X}\Phi^{d}{}_{;}{}^{b} \wedge \Phi^{c} \wedge *\widehat{e}_{bdc}) - \\ &- \delta e^{a} \wedge \frac{1}{2}(\phi_{,d}G_5\underbrace{(2\mathcal{R}^{cd}{}_{;}{}^{b} + \mathcal{R}^{bc}{}_{;}{}^{d}) \wedge *\widehat{e}_{abc}}_{0} - G_5\phi_{,a}\underbrace{\mathcal{R}^{cd}{}_{;}{}^{b} \wedge *\widehat{e}_{bdc}}_{0})\end{aligned} \tag{9.65}$$

οπότε και επαληθεύεται το αναμενόμενο, δηλαδή ότι η $\mathcal{L}_5^H$ δίνει έως και δεύτερης τάξης όρους. Πράγματι λοιπόν, το χαρακτηριστικό της Horndeski επιβεβαιώνεται. Μένει να υπολογιστούν και οι μεταβολές των Hodge βάσεων, αλλά αυτές έτσι και αλλιώς δεν συνεισφέρουν κάποια παράγωγο. Εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\delta_e * \widehat{e}_{A_p} &= \frac{1}{(D-p)!}\epsilon_{A_p,J_{D-p}}\delta e^{J_{D-p}} \\ &= \frac{1}{(D-(p+1))!}\epsilon_{A_p,a,J_{D-(p+1)}}\delta e^{a} \wedge e^{J_{D-(p+1)}} = \delta e^{a} \wedge *\widehat{e}_{A_p,a}\end{aligned}$$

το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε και με ισοδύναμο τρόπο. Γνωρίζουμε ότι αλλάζοντας dummy δείκτες και χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρία του $\epsilon$, ισχύει η ακόλουθη σχέση, $i_{e_a}e^{A_{D-p}} = (D-p)(i_{e_a}e^{b})e^{A_{D-(p+1)}} = (D-p)\delta_a^b e^{A_{D-(p+1)}}$. Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$i_{e_a} * \widehat{e}_{A_p} = \frac{1}{(D-p-1)!}\epsilon_{A_p,a,J_{D-(p+1)}}e^{J_{D-(p+1)}} = *\widehat{e}_{A_p,a} \tag{9.66}$$

και άρα $\delta_e * \widehat{e}_{A_p} = \delta e^a \wedge i_{e_a} * \widehat{e}_{A_p}$. Χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες μπορεί επίσης να δειχθεί ανώδυνα ότι:

$$e^{A_{D-p}} = (1/(-1)^{p(D-p)}p!)\epsilon^{A_{D-p},B_p} * \widehat{e}_{B_p} \tag{9.67}$$

καθώς $\epsilon^{A_{D-p},B_p}\epsilon_{B_p,J_{D-p}} = (-1)^{p(D-p)}(D-p)!\delta^{A_{D-p}}_{B_{D-p}}$, όπου ο παράγοντας $(-1)^{p(D-p)}$ προκύπτει λόγω της αντισυμμετρίας του Levi-Civita συμβόλου. Τέλος, είναι χρήσιμο να δούμε ότι:

$$\begin{aligned}*\widehat{e}_{A_p} &= \frac{1}{(D-p)!}\epsilon_{A_p,B_{q-p},J_{D-q}}e^{B_{q-p}} \wedge e^{J_{D-q}} \\ &= \frac{(D-q)!}{(D-p)!}e^{B_{q-p}} \wedge *\widehat{e}_{A_p,B_{q-p}}\end{aligned} \tag{9.68}$$

και μένει πλέον να προσδιορίσουμε τις μεταβολές του κινητικού όρου του $\phi$, $X$, ως προς το vielbein, ο οποίος όρος εισάγεται μέσω των $G_i$. Αποδεικνύεται ότι $\mathcal{X} = -(1/2)\phi_{,}{}^{a}\mathrm{d}\phi \wedge *\widehat{e}_a$, καθώς:

$$-\frac{1}{2}\phi_{,}{}^{a}\phi_{,b}e^{b} \wedge *\widehat{e}_a = -\frac{1}{2(D-1)!}\phi_{,}{}^{a}\phi_{,b}\epsilon_{a,J_{D-1}}e^{b,J_{D-1}} = X * 1 \equiv \mathcal{X}$$

και επομένως, εφόσον $i_v f = 0$ για $f$ βαθμωτό και άρα $i_{e_a}\mathrm{d}\phi = \phi_{,b} i_{e_a} e^b = \phi_{,a}$, όπως και $\delta_e \mathrm{d}\phi = 0$, θα ισχύει ότι:

$$2\delta_e \mathcal{X} = -\delta_e(\eta^{ab}(i_{e_b}\mathrm{d}\phi)\mathrm{d}\phi \wedge *\widehat{e}_a) = \underbrace{-\eta^{ab}(i_{\delta e_b}\mathrm{d}\phi)\mathrm{d}\phi \wedge *\widehat{e}_a}_{I_1} + \phi,^a \delta e^b \wedge \mathrm{d}\phi \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

Ο όρος $I_1$ αποκτά την ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\eta^{ab}\phi_{,c}(i_{\delta e_b} e^c)\mathrm{d}\phi \wedge *\widehat{e}_a = \eta^{ab}\phi_{,c}\phi_{,d}(i_{e_b}\delta e^c)e^d \wedge *\widehat{e}_a \\ &= \phi_{,c}\phi,^a \delta e^c \wedge *\widehat{e}_a - \eta^{ab}\phi_{,c}\phi_{,d}\delta e^c \wedge e^d \wedge *\widehat{e}_{ab} \end{aligned}$$

το οποίο προέκυψε από το γεγονός ότι:

$$0 = i_{e_b}(\underbrace{\delta e^c \wedge e^d \wedge *\widehat{e}_a}_{(D+1)-\mathrm{form}}) = (i_{e_b}\delta e^c)e^d \wedge *\widehat{e}_a - \delta e^c \wedge \delta^d_b * \widehat{e}_a + \delta e^c \wedge e^d \wedge *\widehat{e}_{ab}$$

Εύκολα έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} 2\delta_e \mathcal{X} &= \phi_{,c}\phi,^a \delta e^c \wedge *\widehat{e}_a + (\eta^{ac}\delta e^b - \eta^{ab}\delta e^c) \wedge \phi_{,c}\phi_{,d} e^d \wedge *\widehat{e}_{ab} \\ &= \phi_{,c}\phi,^a \delta e^c \wedge *\widehat{e}_a + (\eta^{ac}\delta e^b - \eta^{ab}\delta e^c) \wedge \phi_{,c}\phi_{,d}\delta^{ed}_{ab} * \widehat{e}_e \\ &\overset{\eta^{[ed]}=0}{=} \delta e^b \wedge 2\phi_{,b}\phi,^a * \widehat{e}_a - \delta e^e (\partial\phi)^2 \wedge *\widehat{e}_e \\ &= \delta\widehat{e_a} \wedge (2\phi,^a\phi,^b + 2X\eta^{ab}) * \widehat{e}_b \end{aligned} \tag{9.69}$$

Έχουμε πλέον όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να δώσουμε την τελική έκφραση των εξισώσεων κίνησης ως προς το vielbein. Αρχικά, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \delta_e \mathcal{L}_2^H &= G_{2,X}\delta_e X * 1 + G_2 \delta_e * 1 = G_{2,X}\delta_e \mathcal{X} + (G_2 - G_{2,X}X)\delta_e * 1 \\ &= \delta\widehat{e_a} \wedge (G_2\eta^{ab} + G_{2,X}\phi,^a\phi,^b) * \widehat{e}_b \end{aligned}$$

Υπάρχει βέβαια ένας πολύ πιο σύντομος τρόπος για να βρούμε απευθείας τη μεταβολή του $X$, χωρίς να χρειαστεί να εφαρμόζουμε αυτού του είδους την παραγοντική κάθε φορά. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$2\delta_e X = -\eta^{ab}\delta_e((i_{e_b}\mathrm{d}\phi)(i_{e_a}\mathrm{d}\phi)) = -\eta^{ab}\phi_{,c}((i_{\delta e_b}e^c)\phi_{,a} + \phi_{,b} i_{\delta e_a} e^c) = 2\phi_{,c}\phi,^b i_{e_b}\delta e^c \tag{9.70}$$

και άρα $\delta_e X * 1 = \phi_{,c}\phi,^b \delta e^c \wedge *\widehat{e}_b = \delta\widehat{e_a}\phi,^a\phi,^b \wedge *\widehat{e}_b$, οπότε η μεταβολή της $\mathcal{L}_2^H$ ως προς το vielbein καταλήγει στην ίδια έκφραση, το οποίο αναμενόταν, καθώς οι δύο τρόποι είναι απόλυτα ισοδύναμοι.

Προχωρώντας στη μεταβολή της $\mathcal{L}_3^H$, χρειαζόμαστε αρχικά μια έκφραση για τον πρώτο όρο, $G_{3,X}\delta_e X\Phi^a \wedge *\widehat{e}_a$, την οποία, εάν χρησιμοποιήσουμε την (9.70) και εφαρμόσουμε τις ως άνω τεχνικές υπολογισμού, βρίσκουμε:

$$G_{3,X}\delta_e X\Phi^a \wedge *\widehat{e}_a = \delta\widehat{e_a} \wedge G_{3,X}\phi,^a(\phi,^b[\Phi] - \phi,^c\phi;^b{}_c) * \widehat{e}_b$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την (9.61), αναπτύσσοντας την αντισυμμετρία και αλλάζοντας βουβούς δείκτες, καταλήγουμε ότι:

$$2\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_3^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{a]} = \delta\widehat{e_a} \wedge \left((G_3\phi,^a);^b - (G_3\phi_{,c});^c\eta^{ab}\right) * \widehat{e}_b$$

ενώ τέλος, για το $G_3\Phi^a \wedge \delta_e * \widehat{e}_a$ θα ισχύει ότι:

$$G_3\Phi^a \wedge \delta_e * \widehat{e}_a = \delta\widehat{e_a} \wedge G_3\eta^{da}\phi;^e{}_c\delta^{cb}_{ed} * \widehat{e}_b$$

οπότε συνολικά θα έχουμε ότι:

$$\delta_e \mathcal{L}_3^H = \delta\widehat{e_a} \wedge \Big[ G_{3,X}\phi,^a(\phi,^b[\Phi] - \phi,^c\phi;^b{}_c) + (G_3\phi,^a);^b - (G_3\phi,_c);^c\eta^{ab} + G_3\eta^{da}\phi;^e{}_c\delta^{cb}_{ed}\Big] * \widehat{e}_b \tag{9.71}$$

Είναι προφανές ότι, καθώς ο όγκος των εκφράσεων θα γίνεται όλο και μεγαλύτερος, θα ξεκινήσουμε από εδω και πέρα να τις γράφουμε όσο το δυνατόν πυκνότερα, συνήθως συναρτήσει του γενικευμένου δέλτα του Kronecker. Συνεχίζοντας λοιπόν αυτό το μακρύ ταξίδι, περνάμε στον υπολογισμό της μεταβολής της $\mathcal{L}_4^H$. Σημειώνουμε αρχικά ότι:

$$i_{e_d}\mathcal{R}^{ab} = \frac{1}{2}R^{ab}{}_{ef}i_{e_d}(e^e \wedge e^f) = R^{ab}{}_{de}e^e = \mathcal{R}^{ab}{}_d$$

όπου $\mathcal{R}^{ab}{}_d$ είναι 1-μορφή. Επίσης, από την (9.67) ισχύει ότι $\mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{abd} = R^{ab}{}_{ef}\delta^{ief}_{abd} \wedge *\widehat{e}_i$ και χρησιμοποιώντας τις ως άνω σχέσεις μαζί με τις γνωστές τεχνικές, καταλήγουμε αρχικά ότι:

$$G_{4,X}\delta_e X\mathcal{R}^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \delta\widehat{e_a} \wedge G_{4,X}\phi,^a\phi,^d(R^{cf}{}_{de}\delta^{be}_{cf} + R^{ci}{}_{ef}\delta^{bef}_{cid}) * \widehat{e}_b$$

Έπειτα, για την (9.62) θα παραθέσουμε ενδεικτικά (μόνο για τους πρώτους δύο όρους συγκεντρωμένους σε έναν) την αναλυτική μέθοδο εργασίας που θα χρησιμοποιήσουμε γενικά και στη συνέχεια θα παραθέσουμε την τελική έκφραση. Έτσι, κάνοντας χρήση μεταξύ άλλων και του τετραδικού αξιώματος, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
2\delta e^{[b} \wedge (G_{4,\phi}\mathrm{d}\phi);^{a]} \wedge *\widehat{e}_{ab} &= 2\delta e^d \wedge (G_{4,\phi}\mathrm{d}\phi);^e\delta^{[b}_d\delta^{a]}_e \wedge *\widehat{e}_{ab} = \delta e^d \wedge (G_{4,\phi}\phi,_f);^e\delta^{ba}_{de}e^f \wedge *\widehat{e}_{ab} \\
&= \delta e^d \wedge (G_{4,\phi}\phi,_f);^e\delta^{ba}_{de}\delta^{if}_{ab} * \widehat{e}_i = \delta e^d \wedge (G_{4,\phi}\phi,_f);^e\delta^{ab}_{de}\delta^{fi}_{ab} * \widehat{e}_i \\
&= \delta e^d \wedge 2(G_{4,\phi}\phi,_f);^e\delta^{fi}_{de} * \widehat{e}_i = \delta\widehat{e_a} \wedge 2\eta^{ad}(G_{4,\phi}\phi,_c);^e\delta^{cb}_{de} * \widehat{e}_b
\end{aligned}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την (9.64) στην (9.62) και έπειτα από αρκετές μεν, τετριμμένες δε (υπό την έννοια ότι δεν απαιτούν κάποια νέα γνώση) πράξεις, καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}
2\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_4^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{a]} = \delta\widehat{e_a} \wedge 2\Big[&\eta^{ad}\delta^{cb}_{de}\big((G_{4,\phi}\phi,_c);^e + (G_{4,X}\phi,_f);^e\phi;^f{}_c\big) - \\
&-G_{4,X}\phi,^aR^{cb}\phi,_c + \eta^{ia}\phi,_c\phi,^eR^{dc}{}_{ef}\delta^{fb}_{id} + \\
&+\eta^{ad}(\delta^{fi}_{de}\delta^b_c - \delta^{bi}_{de}\delta^f_c)(G_{4,X}\phi,_i);^e\phi;^c{}_f\Big] * \widehat{e}_b
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$G_4\mathcal{R}^{ab} \wedge \delta_e * \widehat{e}_{ab} = \delta\widehat{e_a} \wedge \eta^{ca}G_4R^{if}{}_{de}\delta^{bde}_{ifc} * \widehat{e}_b$$

και περισσεύουν ακόμη οι όροι:

$$G_{4,XX}\delta_e X\Phi^{ab} \wedge *\widehat{e}_{ab} = \delta\widehat{e_a} \wedge G_{4,XX}\phi,^a\phi,^d(2\phi;^c{}_{[d}\phi;^f{}_{e]}\delta^{be}_{cf} + \phi;^c{}_e\phi;^i{}_f\delta^{bef}_{cid}) * \widehat{e}_b$$

και:

$$G_{4,X}\Phi^{ab} \wedge \delta_e * \widehat{e}_{ab} = \delta\widehat{e_a} \wedge \eta^{ac}G_{4,X}\phi;^i{}_d\phi;^f{}_e\delta^{bde}_{ifc} * \widehat{e}_b$$

έτσι ώστε η συνολική μεταβολή της $\mathcal{L}_4^H$ να δίνεται από:

$$\delta_e \mathcal{L}_4^H = \delta\widehat{e_a} \wedge \Bigg[ G_{4,X}\phi,^a\phi,^d(R^{cf}{}_{de}\delta^{be}_{cf} + R^{ci}{}_{ef}\delta^{bef}_{cid}) + \eta^{ca}G_4 R^{if}{}_{de}\delta^{bde}_{ifc} + \\ +2\Bigg[\eta^{ad}\delta^{cb}_{de}\big((G_{4,\phi}\phi_{,c});^e + (G_{4,X}\phi_{,f});^e\phi;^f{}_c\big) + G_{4,X}\phi,^a R^{bc}\phi_{,c} + \\ +\eta^{ia}\phi_{,c}\phi,^e R^{dc}{}_{ef}\delta^{fb}_{id} + \eta^{ad}(\delta^{fi}_{de}\delta^b_c + \delta^{ib}_{de}\delta^f_c)(G_{4,X}\phi_{,i});^e\phi;^c{}_f\Bigg] + \\ +G_{4,XX}\phi,^a\phi,^d(2\phi;^c{}_{[d}\phi;^f{}_{e]}\delta^{be}_{cf} + \phi;^c{}_e\phi;^i{}_f\delta^{bef}_{cid}) + \\ +\eta^{ac}G_{4,X}\phi;^i{}_d\phi;^f{}_e\delta^{bde}_{ifc}\Bigg] * \widehat{e}_b \tag{9.72}$$

Τέλος, για την $\mathcal{L}_5^H$ θα ισχύει αρχικά ότι:

$$G_{5,X}\delta_e X\mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^c \wedge *\widehat{e}_{abc} = \delta\widehat{e_a} \wedge \frac{1}{2}G_{5,X}\phi;^a\phi;^d\Bigg[(2R^{ek}{}_{di}\phi;^c{}_j + R^{ek}{}_{ij}\phi;^c{}_d)\delta^{bij}_{ekc} + \\ +R^{ek}{}_{ij}\phi;^c{}_f\delta^{bijf}_{ekdc}\Bigg] * \widehat{e}_b$$

ενώ στη συνέχεια βρίσκουμε ότι:

$$2\delta e^{[b} \wedge \left(\frac{\delta\mathcal{L}_5^H}{\delta\omega^{ab}}\right)_;^{a]} = \delta\widehat{e_a} \wedge \Bigg[\eta^{da}\Bigg[(G_{5,\phi}\phi_{,f});^e\phi;^c{}_i + (G_{5,X}\phi_{,l});^e\phi;^l{}_i\phi;^c{}_f + \\ +G_{5,\phi}\phi_{,f}\phi;^{ec}{}_i + G_{5,X}\phi_{,j}\phi;^j{}_i\phi;^{ec}{}_f + \frac{1}{2}(G_5\phi_{,l});^e R^{cl}{}_{if}\Bigg]\delta^{bfi}_{kjc}\delta^{jk}_{de} + \\ +\eta^{af}(G_{5,X}\phi_{,k});^e\phi;^d{}_i\phi;^c{}_j\delta^{bij}_{ldc}\delta^{kl}_{fe} + 2\eta^{al}\phi_{,d}G_{5,X}\phi,^e R^{dk}{}_{ei}\phi;^c{}_j\delta^{bij}_{lkc} + \\ +2\phi,^a G_{5,X}\phi;^{id}{}_e\phi;^c{}_f\delta^{bef}_{idc} + \frac{1}{2}\eta^{af}(G_5\phi_{,k});^e R^{cd}{}_{ij}\delta^{lk}_{fe}\delta^{bij}_{ldc}\Bigg] * \widehat{e}_b$$

Τελικά οι μόνοι όροι που μένουν να υπολογιστούν είναι ο:

$$G_5\mathcal{R}^{ab} \wedge \Phi^c \wedge \delta_e * \widehat{e}_{abc} = \delta\widehat{e_a} \wedge \frac{1}{2}\eta^{da}G_5 R^{kj}{}_{ef}\phi;^c{}_i\delta^{befi}_{kjdc} * \widehat{e}_b$$

όπως και ο:

$$\frac{1}{3}G_{5,XX}\delta_e X\Phi^{abc} \wedge *\widehat{e}_{abc} = \delta\widehat{e_a} \wedge \frac{1}{3}G_{5,XX}\phi,^a\phi,^d(3\phi;^e{}_d\phi;^j{}_f\phi;^c{}_i\delta^{bfi}_{ejc} + \phi;^e{}_f\phi;^k{}_i\phi;^c{}_j\delta^{bfij}_{ekdc}) * \widehat{e}_b$$

αλλά και ο:

$$\frac{1}{3}G_{5,X}\Phi^{abc} \wedge \delta_e * \widehat{e}_{abc} = \delta\widehat{e_a} \wedge \frac{1}{3}\eta^{ia}G_{5,X}\phi;^k{}_d\phi;^j{}_e\phi;^c{}_f\delta^{bdef}_{kjic} * \widehat{e}_b$$

έτσι ώστε να έχουμε συνολικά ότι:

$$\begin{aligned}
\delta_e\mathcal{L}_5^H = \delta\widehat{e_a}\wedge\Bigg[&\frac{1}{2}G_{5,X}\phi_;{}^a\phi_;{}^d\Big[(2R^{ek}{}_{di}\phi_;{}^c{}_j+R^{ek}{}_{ij}\phi_;{}^c{}_d)\delta^{bij}_{ekc}+R^{ek}{}_{ij}\phi_;{}^c{}_f\delta^{bijf}_{ekdc}\Big]+\\
&+\eta^{da}\Big[(G_{5,\phi}\phi_{,f})_;{}^e\phi_;{}^c{}_i+(G_{5,X}\phi_{,l})_;{}^e\phi_;{}^l{}_i\phi_;{}^c{}_f\;+G_{5,\phi}\phi_{,f}\phi_;{}^{ec}{}_i+G_{5,X}\phi_{,j}\phi_;{}^j{}_i\phi_;{}^{ec}{}_f+\\
&+\frac{1}{2}(G_5\phi_{,l})_;{}^eR^{cl}{}_{if}\Big]\delta^{bfi}_{kjc}\delta^{jk}_{de}+\;\eta^{af}(G_{5,X}\phi_{,k})_;{}^e\phi_;{}^d{}_i\phi_;{}^c{}_j\delta^{bij}_{ldc}\delta^{kl}_{fe}+\\
&+2\eta^{al}\phi_{,d}G_{5,X}\phi_,{}^eR^{dk}{}_{ei}\phi_;{}^c{}_j\delta^{bij}_{lkc}\;+2\phi_,{}^aG_{5,X}\phi_;{}^{id}{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bef}_{idc}+\frac{1}{2}\eta^{af}(G_5\phi_{,k})_;{}^eR^{cd}{}_{ij}\delta^{lk}_{fe}\delta^{bij}_{ldc}+\\
&+\frac{1}{2}\eta^{da}G_5R^{kj}{}_{ef}\phi_;{}^c{}_i\delta^{befi}_{kjdc}+\frac{1}{3}G_{5,XX}\phi_,{}^a\phi_,{}^d(3\phi_;{}^e{}_d\phi_;{}^j{}_f\phi_;{}^c{}_i\delta^{bfi}_{ejc}+\phi_;{}^e{}_f\phi_;{}^k{}_i\phi_;{}^c{}_j\delta^{bfij}_{ekdc})+\\
&+\frac{1}{3}\eta^{ia}G_{5,X}\phi_;{}^k{}_d\phi_;{}^j{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bdef}_{kjic}\Bigg]*\widehat{e_b}
\end{aligned}$$

Δείχνουμε και πάλι σε αυτό το σημείο ότι οι παραμένουσες τριτάξιες παράγωγοι, των οποίων οι δείκτες είναι κλειστοί με αυτούς του γενικευμένου δέλτα, δεν αποτελούν πρόβλημα, αφού στην ουσία δίνουν τανυστές Riemann με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω πχ. ο όρος της μεταβολής της $\mathcal{L}_5^H$, $\phi_;{}^{id}{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bef}_{idc}$. Ισχύει:

$$\phi_;{}^{id}{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bef}_{idc}=2\phi_;{}^c{}_f(\phi_;{}^{[ef]}{}_e\delta^b_c-\phi_;{}^{[bf]}{}_e\delta^e_c+\phi_;{}^{[be]}{}_e\delta^f_c)$$

όπου $2\phi_;{}^{[ab]}{}_c=R_c{}^{dab}\phi_{,d}$. Συγκεντρώνοντας λοιπόν όλους τους όρους, μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης του vielbein, θέτοντας $\delta_eS_H=0$. Καταλήγουμε έτσι στη σχέση:

$$\begin{aligned}
&G_2\eta^{ab}+G_{2,X}\phi_,{}^a\phi_,{}^bG_{3,X}\phi_,{}^a(\phi_,{}^b[\Phi]-\phi_,{}^c\phi_;{}^b{}_c)+(G_3\phi_,{}^a)_;{}^b-(G_3\phi_{,c})_;{}^c\eta^{ab}+\\
&+G_3\eta^{da}\phi_;{}^e{}_c\delta^{cb}_{ed}+G_{4,X}\phi_,{}^a\phi_,{}^d(R^{cf}{}_{de}\delta^{be}_{cf}+R^{ci}{}_{ef}\delta^{bef}_{cid})+\eta^{ca}G_4R^{if}{}_{de}\delta^{bde}_{ifc}+\\
&+2\Big[\eta^{ad}\delta^{cb}_{de}\big((G_{4,\phi}\phi_{,c})_;{}^e+(G_{4,X}\phi_{,f})_;{}^e\phi_;{}^f{}_c\big)+G_{4,X}\phi_,{}^aR^{bc}\phi_{,c}\;+\eta^{ia}\phi_{,c}\phi_,{}^eR^{dc}{}_{ef}\delta^{fb}_{id}+\\
&+\eta^{ad}(\delta^{fi}_{de}\delta^b_c+\delta^{ib}_{de}\delta^f_c)(G_{4,X}\phi_{,i})_;{}^e\phi_;{}^c{}_f\Big]\;+G_{4,XX}\phi_,{}^a\phi_,{}^d(2\phi_;{}^c{}_{[d}\phi_;{}^f{}_{e]}\delta^{be}_{cf}+\phi_;{}^c{}_e\phi_;{}^i{}_f\delta^{bef}_{cid})+\\
&+\frac{1}{2}G_{5,X}\phi_;{}^a\phi_;{}^d\Big[(2R^{ek}{}_{di}\phi_;{}^c{}_j+R^{ek}{}_{ij}\phi_;{}^c{}_d)\delta^{bij}_{ekc}+R^{ek}{}_{ij}\phi_;{}^c{}_f\delta^{bijf}_{ekdc}\Big]+\\
&+\eta^{da}\Big[(G_{5,\phi}\phi_{,f})_;{}^e\phi_;{}^c{}_i+(G_{5,X}\phi_{,l})_;{}^e\phi_;{}^l{}_i\phi_;{}^c{}_f\;+G_{5,\phi}\phi_{,f}\phi_;{}^{ec}{}_i+G_{5,X}\phi_{,j}\phi_;{}^j{}_i\phi_;{}^{ec}{}_f+\\
&+\frac{1}{2}(G_5\phi_{,l})_;{}^eR^{cl}{}_{if}\Big]\delta^{bfi}_{kjc}\delta^{jk}_{de}\;+\;\eta^{af}(G_{5,X}\phi_{,k})_;{}^e\phi_;{}^d{}_i\phi_;{}^c{}_j\delta^{bij}_{ldc}\delta^{kl}_{fe}+\\
&+2\eta^{al}\phi_{,d}G_{5,X}\phi_,{}^eR^{dk}{}_{ei}\phi_;{}^c{}_j\delta^{bij}_{lkc}\;+2\phi_,{}^aG_{5,X}\phi_;{}^{id}{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bef}_{idc}+\frac{1}{2}\eta^{af}(G_5\phi_{,k})_;{}^eR^{cd}{}_{ij}\delta^{lk}_{fe}\delta^{bij}_{ldc}+\\
&+\frac{1}{2}\eta^{da}G_5R^{kj}{}_{ef}\phi_;{}^c{}_i\delta^{befi}_{kjdc}+\frac{1}{3}G_{5,XX}\phi_,{}^a\phi_,{}^d(3\phi_;{}^e{}_d\phi_;{}^j{}_f\phi_;{}^c{}_i\delta^{bfi}_{ejc}+\phi_;{}^e{}_f\phi_;{}^k{}_i\phi_;{}^c{}_j\delta^{bfij}_{ekdc})+\\
&+\eta^{ac}G_{4,X}\phi_;{}^i{}_d\phi_;{}^f{}_e\delta^{bde}_{ifc}+\;\frac{1}{3}\eta^{ia}G_{5,X}\phi_;{}^k{}_d\phi_;{}^j{}_e\phi_;{}^c{}_f\delta^{bdef}_{kjic}=0
\end{aligned}\tag{9.73}$$

Η νέα φαινομενολογία (η σχετική με τα βαρυτικά κύματα και την πλέον επιβεβαιωμένη ταχύτητα αυτών) περιορίζει σε τεράστιο βαθμό το "ωφέλιμο" μέγεθος της Horndeski, αφού το βιώσιμο μέρος της δίνεται πλέον για $G_{4,X}=0$ και $G_5=const.$ [**6**], με αποτέλεσμα οι περισσότεροι εκ των ως άνω όροι να μηδενίζονται.

Παράρτημα

# Α΄

## Γενικότητες

### 1.1. Συναλλοίωτη παράγωγος, συνοχή και καμπυλότητα σε δδ

**Ορισμός Α΄.1.** Η *συναλλοίωτη παράγωγιση* σε μια πολλαπλότητα $M$ είναι μια απεικόνιση $\nabla : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ με $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

i) $\nabla_{X+X'} Y = \nabla_X Y + \nabla_{X'} Y$

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

iii) $\nabla_X (Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$

iv) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf) Y$

όπου $f \in \mathcal{C}^k M$ και $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{X}M$.

**Ορισμός Α΄.2.** Μπορούμε να ορίσουμε μια πιο αφηρημένη έννοια της συναλλοίωτης παραγώγισης. Έστω $f : M \to N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων $M$ και $N$. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\widetilde{Y} : M \to TN$, τέτοια ώστε $\pi(\widetilde{Y}_p) = f(p)$ για $p \in M$, όπου $\pi : TN \to N$, καλείται *διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της* $f$ (along the map f). Θα σημαίνουμε το σύνολο όλων των δπ κατά μήκος της $f$ με $\mathfrak{X}_f$. Έστω ότι στη $N$, η συναλλοίωτη παραγώγιση είναι η $\widetilde{\nabla}$. Τότε μπορούμε να πάρουμε μια συναλλοίωτη παραγώγιση κατά μήκος της $f$, η οποία επάγει μια συναλλοίωτη παράγωγο του κάθε δπ $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}_f$ ως προς κάποιο $X \in \mathfrak{X}M$.

**Ορισμός Α΄.3.** Έστω διανυσματική δέσμη $(E, \pi, M)$ με $M$ λεία πολλαπλότητα. Καλούμε *συνοχή* τη διγραμμική απεικόνιση $\nabla : \mathfrak{X}M \times \Gamma E \to \Gamma E$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

i) $\nabla_{fX} \sigma = f \nabla_X \sigma$

ii) $\nabla_X (f\sigma) = f \nabla_X \sigma + (Xf)\sigma$

όπου $f \in \mathcal{C}^\infty M$, $X \in \mathfrak{X}M$ και $\sigma \in \Gamma E$. Καλούμε *συναλλοίωτη παράγωγο του* $\sigma$ *ως προς το* $X$ τον όρο $\nabla_X \sigma$.

**Παρατήρηση Α′.1.** *Θα δούμε ότι κάθε διανυσματική δέσμη επάγει μια συνοχή. Ας θεωρήσουμε αρχικά τη (τετριμμένη) δέσμη-γινόμενο* $M \times \mathbb{R}^n \to M$. *Έστωσαν* $\{x^i\}$ *για* $i = 1, \cdots, n$ *οι κανονικές συντεταγμένες στον* $\mathbb{R}^n$. *Διαλέγουμε ένα πλαίσιο* $\{\sigma_i\}$, *έτσι ώστε* $\sigma_i(p) = \partial/\partial x^i$, *ενώ θέτουμε* $\nabla_X \sigma_i = 0$ *για κάθε δπ* $X$. *Κάθε* $\sigma : M \to \mathbb{R}^n$ *μπορεί να αναλυθεί ως* $\sigma = a^i \sigma_i$ *(σύμβαση άθροισης), οπότε για κάθε δπ* $X$ *θέτουμε* $\nabla_X \sigma = (Xa^i)\sigma_i$. *Για αυτήν τη συνοχή, ο όρος* $\nabla_X \sigma$ *είναι απλά η μερική παράγωγος στην κατεύθυνση του* $X$, *εφόσον το* $\sigma$ *είναι συνάρτηση με πεδίο τιμών στον* $\mathbb{R}^n$. *Καλούμε αυτήν την* $\nabla$ *τετριμμένη συνοχή στη δέσμη-γινόμενο.*

*Ας θεωρήσουμε τώρα μια αυθαίρετη δδ* $\pi : E \to M$, *όπου παίρνουμε ένα τοπικά πεπερασμένο ανοιχτό κάλυμμα* $\{U_\alpha\}_{a\in A}$, *όπου* $A$ *σύνηθες μετρητικό σύνολο, για το οποίο (κάλυμμα) ισχύει ότι* $\pi^{-1}(U_\alpha) \cong M \times \mathbb{R}^n$, *δηλαδή* $E \to M$ *είναι τοπικά τετριμμενοποιήσιμη. Σημαίνουμε με* $\nabla^\alpha$ *την τετριμμένη συνοχή σε κάθε* $\pi^{-1}(U_\alpha)$ *και έστω* $\{f_\alpha\}$ *μια διαμέριση της μονάδας για το κάλυμμα* $\{U_\alpha\}_{a\in A}$. *Ορίζουμε* $\nabla_X \sigma = \sum_\alpha f_\alpha \nabla^\alpha_X \sigma$ *και εύκολα βρίσκουμε ότι η* $\nabla$, *ορισμένη κατά αυτόν τον τρόπο, πληρεί τα κριτήρια του ορισμού Α′.3, δηλαδή* $\nabla$ *συνοχή στον* $E$. *Είναι προφανές από την ως άνω μέθοδο εργασίας, ότι υπάρχουν άπειρες συνοχές για μια διανυσματική δέσμη.*

**Παρατήρηση Α′.2.** *Έστω μια δδ* $E \to M$ *με συνοχή* $\nabla$. *Τότε, για κάθε* $X \in \mathfrak{X}M$, *υπάρχει μια συναλλοίωτη παραγώγιση* $\nabla_X : \Gamma E \to \Gamma E$. *Έστω ότι* $E \to M$ *είναι η τετριμμένη δέσμη. Τότε υπάρχει μια τετριμμένη συνοχή, ορισμένη όπως πριν. Θα ισχύει ότι:*

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X,Y]}$$

*Πράγματι, θα έχουμε ότι:*

$$\begin{aligned}
[\nabla_X, \nabla_Y]\sigma &= \nabla_X(\nabla_Y(\sigma)) - X \leftrightarrow Y = \nabla_X((Ya^i)\sigma_i) - X \leftrightarrow Y \\
&= (Ya^i)\nabla_X\sigma_i + (XYa^i)\sigma_i - X \leftrightarrow Y = (XYa^i)\sigma_i - X \leftrightarrow Y \\
&= ([X,Y]a^i)\sigma_i = \nabla_{[X,Y]}\sigma
\end{aligned}$$

*όπου ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει φυσικά για μια αυθαίρετη δδ.*

**Ορισμός Α′.4.** Έστω $\nabla$ μια συνοχή σε μια αυθαίρετη δδ $E \to M$. Τότε, η απεικόνιση $R$ με:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

καλείται *καμπυλότητα* της συνοχής. Προφανώς, για μια τετριμμένη δέσμη, η καμπυλότητα θα είναι μηδέν.

**Λήμμα Α′.1.** *Για κάθε* $X, Y \in \mathfrak{X}M$, $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty M$ *και* $\sigma \in \Gamma E$, *θα ισχύει:*

*i)* $R(Y, X) = -R(X, Y)$

*ii)* $R(fX, gY)(h\sigma) = fghR(X, Y)(\sigma)$

*Απόδειξη.*

i) Προκύπτει από $[Y, X] = -[X, Y]$ και εφαρμογή ορισμού $R$.

ii) Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
[\nabla_X, \nabla_Y](h\sigma) &= \nabla_X(\nabla_Y(h\sigma)) - X \leftrightarrow Y \\
&= \nabla_X(h\nabla_Y\sigma + (Yh)\sigma) - X \leftrightarrow Y \\
&= h\nabla_X\nabla_Y\sigma + (Xh)\nabla_Y\sigma + (Yh)\nabla_X\sigma + (XYh)\sigma - X \leftrightarrow Y \\
&= h[\nabla_X, \nabla_Y]\sigma + ([X,Y]h)\sigma
\end{aligned}$$

Επιπλέον, $\nabla_{[X,Y]}(h\sigma) = h\nabla_{[X,Y]}\sigma + ([X,Y]h)\sigma$, οπότε:

$$\begin{aligned} R(X,Y)(h\sigma) &= [\nabla_X, \nabla_Y](h\sigma) - \nabla_{[X,Y]}(h\sigma) \\ &= h[\nabla_X, \nabla_Y]\sigma - h\nabla_{[X,Y]}\sigma = hR(X,Y)(\sigma) \end{aligned}$$

Έπειτα:

$$\begin{aligned} R(fX, gY) &= \nabla_{fX}\nabla_{gY} - X \leftrightarrow Y - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= f\nabla_X(g\nabla_Y) - X, f \leftrightarrow Y, g - \nabla_{[fX,gY]} \\ &= f(g\nabla_X\nabla_Y + (Xg)\nabla_Y) - X, f \leftrightarrow Y, g - \nabla_{[fX,gY]} \end{aligned}$$

Καθώς $[fX, gY] = f(gXY + (Xg)Y) - X, f \leftrightarrow Y, g = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$, έχουμε ότι $\nabla_{[fX,gY]} = fg\nabla_{[X,Y]} + f(Xg)\nabla_Y - g(Yf)\nabla_X$ και επομένως με αντικατάσταση, θα ισχύει ότι $R(fX, gY) = fgR(X,Y)$. Συγκεντρώνοντας λοιπόν τα αποτελέσματα, καταλήγουμε ότι $R(fX, gY)(h\sigma) = fghR(X,Y)(\sigma)$.

□

## 1.2. *Μορφές συνοχής και καμπυλότητας σε δδ*

**Ορισμός Α΄.5** (μορφή συνοχής)**.** Έστω δδ $E \to M$ με συνοχή $\nabla$. Έστω $\{\sigma_i\}$ τοπικό πλαίσιο με $\sigma_i \in \Gamma E_U$, όπου $U$ ανοιχτό υποσύνολο της $M$. Για κάθε $X \in \mathfrak{X}U$, μπορούμε να γράψουμε $\nabla_X \sigma_j = \omega^i{}_j(X)\sigma_i$ (σύμβαση άθροισης) με $\omega^i{}_j(X) \in \mathcal{C}^\infty U$. Καθώς λοιπόν $\omega^i{}_j : \mathfrak{X}U \to C^\infty U$ και $\omega^i{}_j(fX) = f\omega^i{}_j(X)$ από ορισμό συνοχής, πρόκειται για μια συνήθη 1-μορφή $\omega^i{}_j \in \mathcal{A}^1 U$. Θέτοντας $\omega = (\omega^i{}_j)$, καλούμε την $\omega$ *μορφή συνοχής* της $\nabla$ στο $U$ και μπορούμε να την θεωρήσουμε στοιχείο του $\mathcal{A}^1(U, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, αφού $\omega : X \mapsto (\omega^i{}_j(X))$ για $X \in \mathfrak{X}U$.

**Ορισμός Α΄.6** (μορφή καμπυλότητας)**.** Για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}U$, ορίζουμε τις $\Omega^i{}_j(X,Y) \in \mathcal{C}^\infty U$ από τη σχέση $R(X,Y)(\sigma_j) = \Omega^i{}_j(X,Y)\sigma_i$. Καθώς από το τελευταίο λήμμα έχουμε ότι $\Omega^i{}_j(Y,X) = -\Omega^i{}_j(X,Y)$ και $\Omega^i{}_j(fX, gY) = fg\Omega^i{}_j(X,Y)$, έπεται ότι $\Omega^i{}_j \in \mathcal{A}^2 U$. Κατά τα γνωστά, $\Omega = (\Omega^i{}_j) \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ και η $\Omega$ καλείται *μορφή καμπυλότητας*.

Έστω τώρα $\nabla$ συνοχή σε δδ $E \to M$ και $U_\alpha, U_\beta \subset M$ με απεικονίσεις τετριμμενοποίησης $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ και $\psi_\alpha\beta$ αντίστοιχα. Για μια τέτοια δδ, οι απεικονίσεις μετάβασης $c_{\alpha\beta}$ (όπως ανάλογα ορίστηκαν στην ενότητα των κύριων δεσμών) είναι απεικονίσεις $U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n,\mathbb{R})$. Θα σημαίνουμε με $\omega_\alpha, \Omega_\beta$ τις μορφές συνοχής και καμπυλότητας που επάγονται από την $\psi_\alpha$ στο $U_\alpha$. Αντίστοιχα για το $U_\beta$.

**Πρόταση Α΄.1.** *Οι κανόνες μετασχηματισμού είναι:*

*i)* $\omega_\beta = c^{-1}\omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}c$

*ii)* $\Omega_\beta = c^{-1}\Omega_\alpha c$

*όπου* $c = c_{\alpha\beta} = (c^i{}_j)$.

*Απόδειξη.* Έστωσαν $\{\sigma_i\}, \{t_i\}$ τα πλαίσια που επάγονται από τις $\psi_\alpha, \psi_\beta$ στα $U_\alpha, U_\beta$ αντίστοιχα. Στο $U_\alpha \cap U_\beta$ θα έχουμε ότι $t_j = c^i{}_j\sigma_i$, οπότε εφαρμόζοντας την $\nabla_X$ σε αυτήν τη σχέση, θα ισχύει ότι:

$$(\omega_\beta)^k{}_j(X)t_k = \nabla_X(c^i{}_j\sigma_i) = c^i{}_j\nabla_X\sigma_i + (Xc^i{}_j)\sigma_i = c^i{}_j(\omega_\alpha)^k{}_i(X)\sigma_k + \mathrm{d}c^i{}_j(X)\sigma_i$$

αφού $c^i{}_j \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$ και για μια λεία συνάρτηση $f$ έχουμε δείξει ότι $Xf = \mathrm{d}f(X)$. Καθώς $t_k = c^i{}_k \sigma_i$, το αριστερό μέλος θα ισούται με $(\omega_\beta)^k{}_j(X) c^i{}_k \sigma_i$ και καθώς στο δεξί μέλος οι $i, k$ είναι βουβοί, έπεται ότι:

$$(\omega_\beta)^k{}_j(X) c^i{}_k = c^k{}_j (\omega_\alpha)^i{}_k(X) + \mathrm{d}c^i{}_j(X)$$

Εφόσον αυτή η σχέση ισχύει για αυθαίρετα $i, j, X$, μπορούμε να γράψουμε $c\omega_\beta = \omega_\alpha c + \mathrm{d}c$, οπότε πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $c^{-1}$, παίρνουμε την επιθυμητή σχέση.

Τώρα, για την απόδειξη της ii θα εργαστούμε ακολούθως. Έχουμε δείξει ότι $\Omega_\beta = \mathrm{d}\omega_\beta + \omega_\beta \wedge \omega_\beta$. Θα πάρουμε την εξωτερική παράγωγο της i και θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $0 = \mathrm{d}(I) = \mathrm{d}(c^{-1}c) = (\mathrm{d}c^{-1})c + c^{-1}\mathrm{d}c$, δηλαδή $\mathrm{d}c^{-1} = -c^{-1}(\mathrm{d}c)c^{-1}$. Επομένως, θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_\beta &= \mathrm{d}(c^{-1}\omega_\alpha c) + \mathrm{d}(c^{-1}\mathrm{d}c) = \mathrm{d}c^{-1} \wedge \omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}\omega_\alpha c - c^{-1}\omega_\alpha \wedge \mathrm{d}c + \mathrm{d}c^{-1} \wedge \mathrm{d}c \\
&= -c^{-1}(\mathrm{d}c)c^{-1} \wedge \omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}\omega_\alpha c - c^{-1}\omega_\alpha \wedge \mathrm{d}c - c^{-1}(\mathrm{d}c)c^{-1} \wedge \mathrm{d}c
\end{aligned}$$

Έπειτα:

$$\begin{aligned}
\omega_\beta \wedge \omega_\beta &= (c^{-1}\omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}c) \wedge (c^{-1}\omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}c) \\
&= c^{-1}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha c + c^{-1}\omega_\alpha \wedge \mathrm{d}c + c^{-1}\mathrm{d}c \wedge c^{-1}\omega_\alpha c + c^{-1}\mathrm{d}c \wedge c^{-1}\mathrm{d}c \\
&= c^{-1}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha c + c^{-1}\omega_\alpha \wedge \mathrm{d}c + c^{-1}(\mathrm{d}c)c^{-1} \wedge \omega_\alpha c + c^{-1}(\mathrm{d}c)c^{-1} \wedge \mathrm{d}c
\end{aligned}$$

οπότε τελικά $\Omega_\beta = c^{-1}(\mathrm{d}\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)c = c^{-1}\Omega_\alpha c$. □

**Ορισμός Α′.7.** Έστω δδ $E$ με $M$ λεία πολλαπλότητα. Μια $k$-μορφή στην $M$ με τιμές στον $E$ θα είναι μια τμήση της δέσμης $\Lambda^{k*}M \otimes E \cong \mathcal{A}^k M \otimes E$, δηλαδή $\mathcal{A}^k(M, E) = \Gamma(\Lambda^{k*}M \otimes E)$ ή με άλλα λόγια, $\mathcal{A}^k(M, E) = \{\mathfrak{X}M(\times k) \to \Gamma E\}$, όπου η απεικόνιση είναι εναλλασσόμενη και $\mathcal{C}^\infty M$-πολυγραμμική. Ένα αυθαίρετο στοιχείο του $\mathcal{A}^k(M, E)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $\theta \otimes \sigma$, όπου $\theta \in \mathcal{A}^k M$ και $\sigma \in \Gamma E = \mathcal{A}^0(M, E)$. Έτσι, το σύνηθες εξωτερικό γινόμενο $\wedge$ επάγει μια φυσική απεικόνιση:

$$\mathcal{A}^k M \times \mathcal{A}^k(M, E) \to \mathcal{A}^{k+l}(M, \mathbb{R} \times E) = \mathcal{A}^{k+l}(M, E)$$

Ας δούμε τώρα τις συνοχές με βάση τους ως άνω ορισμούς. Αρχικά, για κάθε τμήση $\sigma \in \Gamma E$, η απεικόνιση $\mathfrak{X}M \to \Gamma E$ με $X \mapsto \nabla_X \sigma$ είναι $\mathcal{C}^\infty M$-γραμμική από ορισμό Α′.3-i. Σημαίνοντας την με $\nabla\sigma$, εύκολα καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται για στοιχείο του $\mathcal{A}^1(M, E)$. Επομένως, ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $\nabla : \Gamma E \to \mathcal{A}^1(M, E)$ και η σχέση του ορισμού Α′.3-ii θα γράφεται ως:

$$\nabla(f\sigma) = \mathrm{d}f \otimes \sigma + f\nabla\sigma$$

καθώς $Xf = \mathrm{d}f(X)$.

**Ορισμός Α′.8.** Ας μελετήσουμε την καμπυλότητα $R$ μιας συνοχής σε δδ όπως πριν. Για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}M$ και $\sigma \in \Gamma E$, $R(X, Y)(\sigma)$ είναι επίσης τμήση. Ας θεωρήσουμε μια δδ $\operatorname{End} E \to M$ με ίνα $\operatorname{End} E_p$ στο $p \in M$. Με άλλα λόγια η ίνα της είναι το σύνολο των $E_p \to E_p$. Επομένως, $R : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \Gamma(\operatorname{End} E)$. Από το τελευταίο λήμμα συμπεραίνουμε ότι $R$ είναι εναλλασσόμενη και $\mathcal{C}^\infty M$-πολυγραμμική, δηλαδή $R \in \mathcal{A}^2(M, \operatorname{End} E)$. Η παραγώγιση $\mathrm{d} : \mathcal{C}^\infty M \to \mathcal{A}^1 M$ μπορεί να θεωρηθεί τετριμμένη συνοχή στον ολικό χώρο της τετριμμένης δέσμης, $M \times \mathbb{R}$, καθώς $\nabla_X f = Xf = \mathrm{d}f(X)$ για κάθε $f \in C^\infty M$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξωτερική παράγωγος $\mathcal{A}^k M \to \mathcal{A}^{k+1} M$ ορίζεται για κάθε $k$. Για μια γενική συνοχή $\nabla : \Gamma E \to \mathcal{A}^1(M, E)$ μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $\mathrm{d}^\nabla : \mathcal{A}^k(M, E) \to \mathcal{A}^{k+1}(M, E)$ με:

$$\mathrm{d}^\nabla(\theta \otimes \sigma) = \mathrm{d}\theta \otimes \sigma + (-1)^k \theta \wedge \nabla\sigma$$

όπου $\theta \in \mathcal{A}^k M$ και $\sigma \in \Gamma E$. Για $k = 0$, θα έχουμε ότι $\theta \in \mathcal{C}^\infty M$ και άρα:

$$\mathrm{d}^\nabla(\theta\sigma) = \mathrm{d}\theta \otimes \sigma + \theta\nabla\sigma$$

δηλαδή $\mathrm{d}^\nabla = \nabla$. Ο διαφορικός τελεστής $\mathrm{d}^\nabla$ θα καλείται *συναλλοίωτη εξωτερική παράγωγιση.*

**Πρόταση Α′.2.** *Έστω $\nabla$ συνοχή σε μια δδ $E$ και $R \in \mathcal{A}^2(M, \operatorname{End} E)$ η καμπυλότητα αυτής. Τότε η γραμμική απεικόνιση $R : \Gamma E \to \mathcal{A}^2(M, E)$ συμπίπτει με τη σύνθετη απεικόνιση $\mathrm{d}^\nabla \circ \nabla$.*

*Απόδειξη.* Για $\omega \in \mathcal{A}^1 M$ και $\sigma \in \Gamma E$ έχουμε ότι $\mathrm{d}^\nabla(\omega \otimes \sigma) = \mathrm{d}\omega \otimes \sigma - \omega \wedge \nabla\sigma$. Επομένως, για $X, Y \in \mathfrak{X}M$ θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^\nabla(\omega \otimes \sigma)(X,Y) &= \mathrm{d}\omega(X,Y)\sigma - (\omega \otimes \nabla\sigma)(X,Y) + (\nabla\sigma \otimes \omega)(X,Y) \\ &= (X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]))\sigma - \omega(X)\nabla_Y\sigma + \omega(Y)\nabla_X\sigma \\ &= \nabla_X(\omega(Y)\sigma) - X \leftrightarrow Y - \omega([X,Y])\sigma\end{aligned}$$

Καθώς $\nabla\sigma \in \mathcal{A}^1(M,E)$ θα μπορεί εξίσου να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής $\omega \wedge \sigma$ και άρα:

$$\mathrm{d}^\nabla(\nabla\sigma) = [\nabla_X, \nabla_Y]\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$$

δηλαδή $\mathrm{d}^\nabla \circ \nabla = R$. □

## 1.3. Διευκρινίσεις σχετικά με διαφορικές μορφές

Το παρακάτω είναι μέρος από ένα review που σκοπεύω σύντομα να ανεβάσω στο academia και γι'αυτόν τον λόγο είναι στα Αγγλικά.

### 3.1 Basic Definitions

We start by defining vector–valued differential forms for arbitrary vector spaces. Some familiarity with differential forms is assumed. Let $V$ be an arbitrary vector space of finite dimension over $\mathbb{R}$ and $\omega$ be a $V$–valued (differential) $k$–form, i.e $\omega \in A^k(M,V)$, where the latter denotes the space of all differential $k$–forms on $M$ with values in $V$. Since the isomorphism:

$$A^k M \otimes_{\mathbb{R}} V \to A^k(M,V)$$

exists, it follows that $\omega = \widetilde{\omega} \otimes v$. Let $\{e_i\}$ be a basis for $T_xM$, where $x \in M$ is arbitrary and let $\{e^i\}$ denote its dual, i.e the dual basis for $T^*_xM$. Furthermore, let $\{\widehat{v}_i\}$ be a basis for $V$. Then, $A^kM \otimes V$ is spanned by elements of the form $e^{I_k} \otimes \widehat{v}_a$ and the following decomposition holds:

$$\widetilde{\omega} \otimes v = \widetilde{\omega}_{I_k} e^{I_k} \otimes v^a \widehat{v}_a = \widetilde{\omega}_{I_k} v^a e^{I_k} \otimes \widehat{v}_a \doteq \omega^a \otimes \widehat{v}_a \tag{A′.1}$$

where $\widetilde{\omega}_{I_k}, v^a$ are the components of the decomposition, $I_k$ is an increasing multi–index of length $k$, i.e

$$I_k = \{i_1, \ldots, i_k \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \dim M\} \tag{A′.2}$$

and $e^{I_k} = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$. We have omitted the sums over $I_k, a$ by adopting the usual summation convention.

Now let $W$ be an arbitrary vector space of finite dimension and $\eta$ be a $W$–valued $l$–form on $M$. Then, $\omega \wedge \eta$ belongs to $A^{k+l}(M, V \otimes W)$, since

$$\omega \wedge \eta = (\omega^a \otimes \widehat{v}_a) \wedge (\eta^b \otimes \widehat{w}_b) = (\omega^a \wedge \eta^b) \otimes (\widehat{v}_a \otimes \widehat{w}_b) \tag{A′.3}$$

where $\{\widehat{w}_i\}$ is a basis for $W$ and $\omega^a, \eta^b$ are usual forms with $\omega^a \wedge \eta^b \in A^{k+l}M$. It is always implied that $A^kM = A^k(M,\mathbb{R})$. Set $V = \mathfrak{g}$ with $\mathfrak{g}$ being the Lie algebra of the Lie group $G$ and let $\{X_i\}$ be a basis for $\mathfrak{g}$. Then, a map $[\,\wedge\,]$ may be defined as follows:

$$[\,\wedge\,] : A^k(M,\mathfrak{g}) \times A^l(M,\mathfrak{g}) \to A^{k+l}(M,\mathfrak{g})$$

where
$$[\alpha \wedge \beta] = [(\alpha^a \otimes X_a) \wedge (\beta^b \otimes X_b)] \doteq (\alpha^a \wedge \beta^b) \otimes [X_a, X_b] \tag{A′.4}$$

Since the Lie bracket is a closed operation, it follows that $[\alpha \wedge \beta] \in A^{k+l}(M, \mathfrak{g})$. In gravitational theories, we will usually encounter matrix algebras and thus, the notation $[\ ,\ ]$ will be used, since $[\alpha \wedge \beta]$ is simply the graded commutator of $\alpha, \beta$. This statement holds, because of the following: Let $\{e^i{}_j\}$ be the standard basis for the Lie algebra of the matrix group $G$, i.e the basis with elements satisfying

$$e^i{}_j e^k{}_l = \delta^k_j e^i{}_l \tag{A′.5}$$

Then, any element $A = (A^i{}_j) \in \mathfrak{g}$ decomposes as $A = \sum_{i,j} A_{ij} e_{ij}$ and therefore, it is rather obvious that

$$\begin{aligned}
[\alpha \wedge \beta] &= \sum_{i,j,k,l} (\alpha_{ij} \wedge \beta_{kl}) \otimes [e_{ij}, e_{kl}] \\
&= \sum_{i,j,k,l} (\alpha_{ij} \wedge \beta_{kl}) \otimes (\delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} (\alpha_{ik} \wedge \beta_{kl} - \alpha_{kl} \wedge \beta_{ik}) \otimes e_{il} \\
&= (a^i{}_k \wedge \beta^{kl} - (-1)^{ab} \beta^i{}_k \wedge \alpha^{kl}) \otimes e_{il} \\
&= \alpha \wedge \beta - (-1)^{ab} \beta \wedge \alpha
\end{aligned} \tag{A′.6}$$

where $a, b$ are the degrees of $\alpha, \beta$ respectively and we have adopted summation convention from the third line to the fourth one.

### 3.2 A bit of Cartan black magic

We assume some familiarity with the basic definitions of Cartan geometries. Now, following [?], let us consider a *reductive* Cartan geometry with $\mathfrak{g}$ and isotropy group $H$ realizing $\mathfrak{h}$, where the Lie algebra of the affine group decomposes as $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Here, $\mathfrak{p}$ is an $\mathrm{Ad}(H)$–invariant (and thus, also $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$–invariant) complement of $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ and Sharpe proves that even if $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \neq 0$, we can always find, up to isomorphism, a unique mutant $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h})$, i.e a unique mutation of the initial model geometry $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, where the reductive decomposition is defined as $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}'$ with $[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = 0$. This tells us that for different affine groups, with the respective isotropy groups associated to the same Lie algebra, there is always a unique choice to be made, one where the bracket of the complement with itself vanishes. Consider for example the Lie groups $Euc(n, \mathbb{R}), SO(n+1, \mathbb{R})$ and $O((1,n), \mathbb{R})$. They all share the same isotropy group, namely $SO(n, \mathbb{R})$. Furthermore, they are also mutants of each other and hence, we can always choose

$$Euc(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes SO(n, \mathbb{R}) \tag{A′.7}$$

with Lie algebra $\mathfrak{euc}(n, \mathbb{R})$ that decomposes as $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^n$. Indeed, in this case $\mathfrak{p} = \mathbb{R}^n$ and the respective bracket vanishes. Considering $\mathfrak{p} \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, the curvature of the *Cartan connection* 1–form $\omega \in A^1(P, \mathfrak{g})$ – where $P \to M$ is a principal $H$–bundle – is given by

$$\begin{aligned}
2\Omega = 2\mathrm{d}\omega + [\omega, \omega] &= 2(\mathrm{d}\overline{\omega} + \mathrm{d}\theta) + [\overline{\omega}, \overline{\omega}] + 2[\overline{\omega}, \theta] + [\theta, \theta]_{\mathfrak{g}} \\
&= 2\overline{\Omega} + [\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} + 2\Theta + [\theta, \theta]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \doteq 2(\Omega_{\mathfrak{h}} + \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}})
\end{aligned} \tag{A′.8}$$

where the objects with bar are the $\mathfrak{h}$–parts of the Cartan connection and curvature respectively, namely the *Ehresmann connection* and its curvature. Also, $\theta$ is the $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$–part of $\omega$ and

$\Theta = \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\Omega)$ is the torsion 2–form on $P$, where $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ is the canonical projection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. As a reminder, we note that

$$\overline{\Omega} = \mathrm{d}^{\overline{\omega}}\overline{\omega} = \mathrm{d}\overline{\omega} + \frac{1}{2}[\overline{\omega}, \overline{\omega}] \tag{A$'$.9}$$

$$\Theta = \mathrm{d}^{\overline{\omega}}\theta = \mathrm{d}\theta + [\overline{\omega}, \theta] \tag{A$'$.10}$$

are the usual definitions of curvature and torsion with $\mathrm{d}^{\overline{\omega}}$ being the *exterior covariant derivative.*

The cautious reader must already be annoyed by the presence of the bracket $[\overline{\omega}, \theta]$. What kind of form is this object? Surely, it cannot lie in the Lie algebra of the isotropy group, since $\theta \in A^1(P, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ and $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ is not a Lie subalgebra of $\mathfrak{h}$ in general. The answer lies actually in the formerly introduced $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$–invariance of $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, i.e the relation $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Strictly speaking, $[\overline{\omega}, \theta]$ means $\overline{\omega} \wedge_{\mathrm{ad}} \theta$, where

$$\overline{\omega} \wedge_{\mathrm{ad}} \theta = \sum_{i,j,b} (\overline{\omega}_{ij} \wedge \theta_k) \otimes \mathrm{ad}(e_{ij})(e_k) \tag{A$'$.11}$$

with $\{e_{ij}\}, \{e_i\}$ the respective standard bases. Therefore, $\mathrm{ad}(e_{ij})(e_k) = e_i \delta_{jk}$ and hence,

$$\overline{\omega} \wedge_{\mathrm{ad}} \theta = \overline{\omega}^i{}_k \wedge \theta^k \otimes e_i \tag{A$'$.12}$$

We see that $\mathrm{ad}(e_{ij}) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ is nothing more than an element $e_i \otimes e^j$, where such elements obviously span the product space $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}/\mathfrak{h}^* \approx \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. The notation $e_j^*$ instead of $e^j$ is also suitable. We firmly stand for the $\wedge_{\mathrm{ad}}$ notation, but we will end up using the bracket. The reason behind the use of the bracket in such cases is probably the definition of ad and – most importantly perhaps – the fact that $\omega \wedge_{\mathrm{ad}} \theta$ follows the same graded exchange rule, namely:

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{ab+1}[\beta, \alpha] \tag{A$'$.13}$$

which will be justified by upcoming clarifications. It is also trivial to see that $\overline{\Omega}, \Theta$ are indeed $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$–valued 2–forms as expected. By decomposing (A′.9) and (A′.10) according to the usual rules we showed, we conclude that

$$\overline{\Omega} = (\mathrm{d}\overline{\omega}^{ij} + \overline{\omega}^i{}_k \wedge \overline{\omega}^{kj}) \otimes e_{ij} \tag{A$'$.14}$$

$$\Theta = (\mathrm{d}\theta^i + \overline{\omega}^i{}_j \wedge e^j) \otimes e_i \tag{A$'$.15}$$

where the parentheses consist of ordinary forms in $P$.

Maybe the most interesting cases in gravitational physics are given by the well known homogeneous Minkowski, de Sitter and anti–de Sitter spacetimes, where the respective Cartan geometries are described as principal Lorentz–bundles with Cartan connections (in the total space) valued in the Lie algebra of the appropriate affine group, namely the Poincaré, de Sitter and anti–de Sitter group respectively (although the existence of a principal group $G$ of the corresponding Klein geometry is not mandatory, since we only need its algebra, except when building a Cartan geometry via the bundle reduction mechanism [**3**]). These are all Cartan geometries of constant curvature, namely zero, positive and negative one. Thus, locally, they must all be mutations of flat geometries [**?**]. We note here that for $H = SO(1,3)$, the affine groups may be written as semi–direct products $G = G/H \rtimes H$, where the resulting moduli spaces are the homogeneous $\mathbb{R}^{1,3}, dS_4, AdS_4$ spacetimes and the associated Klein geometries with principal groups $Poinc(1,3), SO(1,4), SO(2,3)$ respectively, are all symmetric models. Thus, $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, which in turn means that (A′.8) becomes

$$\Omega = \overline{\Omega} + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}} + \Theta = \Omega_{\mathfrak{h}} + \Theta \tag{A$'$.16}$$

We can always induce metrics from the corresponding Minkowski metrics, where for the de Sitter and anti–de Sitter cases the internal indices run from 0 to 4 and we will denote them with capital Latin letters, i.e

$$\eta_{AB} = \begin{bmatrix} \eta_{ab} & \\ & s \end{bmatrix} \tag{A′.17}$$

where $\eta_{44} = s = \pm 1$, depending of the choice of model spacetime.

Since in de Sitter and anti–de Sitter spacetimes the following element holds:

$$\eta_{AB} x^A x^B = \eta_{ab} x^a x^b + s(x^4)^2 = sl^2 \tag{A′.18}$$

where $x^A$ are the coordinates of a point in the respective base manifold of the "Cartan bundle" and $l$ is the de Sitter radius, we may as well define a dimensionless $x^4_{[1]}$ by absorbing the inverse radius, such that

$$\frac{\eta_{ab}}{l^2} x^a x^b + s({x_{[1]}}^4)^2 = s \tag{A′.19}$$

For $s = -1$ we get de Sitter spacetime, anti–de Sitter otherwise, which look locally like Euclidean $(1, 4)$ and $(2, 3)$ spaces respectively. These are solutions to the Einstein equations, when the source is absent and the cosmological constant is equal to $-(3s)/l^2$. Therefore, there must be a proper way to insert the de Sitter radius in the definition of the Cartan curvature $\Omega$ for symmetric models, i.e relation (A′.16). The only way that seems "not so ad hoc", is to try and introduce it in the definition of the Cartan connection. We could focus in the case of a local homogeneous de Sitter model, where the base manifold is a 4–dimensional de Sitter spacetime $dS_4$, being as it is a submanifold of the usual 5d Minkowski space $\mathbb{R}^{1,4}$ (the term "hypersurface" may be more appropriate in a sense). However, we will not fix the geometry explicitly. Generally though, in the de Sitter case $s = -1$. Suppose $\{e_i\}$ are the generators of the translations. Let us try and absorb the inverse length dimension in the decomposition of the soldering form, i.e the soldering form (that now defines degrees of freedom, since it is not the usual canonical *tautological form* $\theta_c$ of a frame bundle) decomposes as $\theta = (\sqrt{s}/l)e^i \otimes e_i$. Hence the $\mathfrak{h}$–part of $\Omega$ is now

$${\Omega_{\mathfrak{h}}}^{ij} = \overline{\Omega}^{ij} + \frac{s}{l^2} e^i \wedge e^j \tag{A′.20}$$

This whole procedure creates a lot of confusion regarding the bracket $[\theta, \theta]_{\mathfrak{h}}$. We believe it is best to follow **[38]** and consider an alternative expression for the splitting $\overline{\omega} + \theta$, namely that $\overline{\omega}$ is as usual and $\theta$ decomposes as $\omega^{i4} \otimes e_{i4}$, where $\{e_{i4}\}$ belong to the standard basis for $\mathfrak{g}$, i.e $\{e_{IJ}\}$. Since $e_{i4}$, for $i = 0, \dots, 3$, produces the translational basis $\{e_i \mid i = 0, \dots, 3\}$ as a column in the fundamental matrix rep of $\mathfrak{g}$ and there is always the canonical projection $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, the latter bracket makes sense after all. We may finally identify $\omega^{i4} \otimes e_{i4}$ with $(\sqrt{s}/l)e^i \otimes e_i$ via the identification $e_{i4} \to e_i$ thanks to the other projection map $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, hence concluding that:

$${\omega^i}_4 = \frac{\sqrt{s}}{l} e^i \quad [\theta, \theta] = 2{\omega^a}_4 \wedge \omega^{4b} = \frac{2s}{l^2} e^a \wedge e^b \tag{A′.21}$$

As a general remark for "confusing" brackets, one can, roughly speaking, always do the operations in $\mathfrak{g}$ and then project appropriately. We thus observe that the Cartan curvature decomposes as

$$\Omega = \overline{\Omega} + \frac{s}{l^2} e \wedge e + \frac{1}{l} \Theta \tag{A′.22}$$

where we have suppressed internal indices. So, if the Cartan geometry of symmetric models is *flat*, vanishing torsion is implied and the curvature is given by the vanishing $\mathfrak{h}$–part of $\Omega$, i.e

$$\overline{\Omega} = -\frac{s}{l^2} e \wedge e = \frac{\Lambda}{3} e \wedge e$$

By taking the limit $l \to \infty$, the Ehresmann curvature $\overline{\Omega}$ vanishes (in other words the bracket vanishes as expected) and we end up with Minkowski spacetime, reproducing the results acquired by choosing $G = Poinc(1,3)$ from the start (again for flat geometries, i.e $\Omega = 0$).

## 3.3 Time for action

Firstly, let us define the operations that follow. We will use the internal Hodge star operator $\star : A^k \to A^{n-k}$ and not the spacetime Hogde $*$. If we operate with $\star$ on a $k$–form $\omega$ in arbitrary dimensions $n$, then the result is

$$\star\,\omega = \star\left[\frac{1}{k!}\omega_{I_k} e^{I_k}\right] = \frac{1}{k!}\omega_{I_k} \star e^{I_k} = \frac{1}{(n-k)!k!}\omega_{I_k} \epsilon^{I_k}{}_{J_{n-k}} e^{J_{n-k}} \tag{A$'$.23}$$

We have already proposed some abbreviating changes in the above expression. To begin with, we drop the wedges, since there is no essential reason to write them down all the time. We just keep them in mind. Embracing the latter, we further denote the exhausting $e^{i_1} \dots e^{i_k}$ with a simple $e^{I_k}$ via the use of a $k$–long multi–index $I_k$. Let us now have a look at the simplest action example possible, the source–less Einstein–Cartan(–Sciama–Kibble) functional without cosmological constant, where we simply contract $\overline{\Omega}^{ab}$ with $\star\widehat{e}_{ab}$, i.e

$$S_{\text{EC}} = \alpha_4 \int_M \overline{\Omega} \star ee \tag{A$'$.24}$$

where we have temporarily suppressed the indices and abbreviated the usual fraction to $\alpha_4$. This is amazingly clean and geometric. By applying definition (A′.23), we conclude that $\overline{\Omega} \star ee$ is simply $R \star 1$, where $R$ is the usual Ricci scalar and $\star 1$ is the volume form that can be directly translated to the usual ugly volume element $\sqrt{-g}\mathrm{d}^4 x$. However both expressions (forms or tensors) are aesthetically neat in this case, so what do we gain by switching to differential forms? Well, we actually gain everything when it comes down to the variations. Introduction to general relativity comes usually via the Einstein–Hilbert action, where students start to get comfortable with basic index gymnastics as an entry step to far more tedious calculations and the "debauchery of indices" that is to come. Do we really need all these indices?

Let us show how quick the variation of (A′.24) is, keeping things clean and tidy. We do not assume zero torsion a priori, so we have to vary this action with respect to (wrt) the *co–frame*, also known as co–tetrad, and the *spin connection* $\overline{\omega}$. Let us begin with the extraction of the co–frame equations of motion (eom). Since $\overline{\Omega}(\overline{\omega})$, we simply have to find the variation of $\star ee$. We will work in $n$ dimensions for reasons of generality. Firstly, the star term is

$$\star\,\widehat{e}_{ab} = \frac{1}{(n-2)!}\epsilon_{ab,J_{n-2}} e^{J_{n-2}} \tag{A$'$.25}$$

where the hat implies that we are still dealing with a – lowered via the Minkowski metric – co–tetrad and not a tetrad. Thus, we just need to know the variation of $e^{J_{n-2}}$, which is:

$$\epsilon_{ab,J_{n-2}}\,\delta^e e^{J_{n-2}} = \epsilon_{ab,J_{n-2}}(\delta^e e^{j_1}\,e^{J_{n-3}} + \dots + e^{J_q}\,\delta^e e^{j_{q+1}}\,e^{J_{n-q-3}} + \dots)$$

We want to bring the $\delta^e e$ terms in front. Remember that there are wedges between the co–frames and wedges come with strict exchange rules. It is easy to inductively obtain a generic formula for our case: we can bring the desired terms in the front together with a factor $(-1)^q$, but still they do not sum. Hence, we will use the antisymmetry of the completely antisymmetric Levi-Civita tensor to restore the initial order of indices. Thus,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ab,J_{n-2}} e^{J_q} e^{J_{n-q-3}} &= (-1)^q \epsilon_{ab,J_q,j_{q+1},J_{n-q-3}}\,\delta^e e^{j_{q+1}}\,e^{J_q,J_{n-q-3}} \\
&= (-1)^{2q} \epsilon_{ab,j_{q+1},J_q,J_{n-q-3}}\,\delta^e e^{j_{q+1}}\,e^{J_q,J_{n-q-3}} \\
&= \epsilon_{ab,J_{n-2}}\,\delta^e e^{j_1}\,e^{J_{n-3}}
\end{aligned} \tag{A$'$.26}$$

where from the second line to the third we renamed dummy indices. Therefore, we suddenly have a sum of $(n-2)$–many identical terms, meaning that finally,

$$\epsilon_{ab,J_{n-2}}\,\delta^e e^{J_{n-2}} = (n-2)\epsilon_{ab,J_{n-2}}\,\delta^e e^{j_1}\,e^{J_{n-3}} \tag{Α′.27}$$

and thus,

$$\delta^e \star \widehat{e}_{ab} = \delta^e e^c \star \widehat{e}_{abc} \tag{Α′.28}$$

since $(n-2)! = (n-2)(n-3)!$ and $\star eee$ appears naturally. This is a truly elegant expression that induces the following formula:

$$\delta^e \widehat{e}_{J_k} = \delta^e e^i \star \widehat{e}_{J_k,i} \tag{Α′.29}$$

We then conclude that the eom wrt the co–frame are given by

$$\overline{\Omega} \star eee = 0 \tag{Α′.30}$$

where we will discuss the relation of the latter with the usual Einstein equations in the end.

We move on to the variations of (Α′.24) wrt the spin connection. Here, we will use the fact that the variation commutes with the exterior covariant derivative, but first we need to prove this. To begin with, let $\alpha$ be an arbitrary $\mathfrak{h}$–valued $k$–form. Then,

$$\mathrm{d}^{\overline{\omega}}\alpha = \mathrm{d}\alpha + [\overline{\omega}, \alpha] = \mathrm{d}\alpha + \overline{\omega} \wedge \alpha - (-1)^k \alpha \wedge \overline{\omega} \tag{Α′.31}$$

Since $\overline{\Omega} = \mathrm{d}^{\overline{\omega}}\overline{\omega}$, we have that

$$\begin{aligned} \delta^{\overline{\omega}}\mathrm{d}^{\overline{\omega}}\overline{\omega} &= \mathrm{d}\delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega} + \frac{1}{2}[\delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega}, \overline{\omega}] + \frac{1}{2}[\overline{\omega}, \delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega}] \\ &= \mathrm{d}\delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega} + [\overline{\omega}, \delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega}] = \mathrm{d}^{\overline{\omega}}\delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega} \end{aligned} \tag{Α′.32}$$

where we have used definitions (Α′.31) and (Α′.13). Consequently, it all comes down to the bread and butter of eom extraction, namely integration by parts. Here, $\mathrm{d}^{\overline{\omega}}\big(\delta^{\overline{\omega}}\overline{\omega} \star ee\big)$ is a total divergence, since all indices are contracted and the ext. covariant derivative reduces to the usual ext. derivative. Applying Stokes and assuming vanishing variations at the boundary, this term will not contribute. However, we still need to explicitly determine $\mathrm{d}^{\overline{\omega}} \star ee$. For that, the method we used for the variation of the same term comes in handy. Since $\mathrm{d}^{\overline{\omega}}e$ is a 2–form, we can generally move it freely. The only troubling issue is that the ext. derivative obeys the rule $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^a \beta \wedge \alpha$. It is straightforward to prove that the same rule holds for the ext. covariant derivative also. Inductively, we find that the $q$–th term in the expansion of $\mathrm{d}^{\overline{\omega}}e^{J_{n-2}}$ is

$$(-1)^{q-1}\mathrm{d}^{\overline{\omega}}e^{j_q}e^{J_{q-1},J_{n-q-2}} \tag{Α′.33}$$

and since $\epsilon_{ab,J_{q-1},j_q,J_{n-q-3}} = (-1)^{q-1}\epsilon_{ab,j_q,J_{q-1},J_{n-q-3}}$, we again have a sum of $(n-2)$–many same terms and hence, for the same reasons as before,

$$\mathrm{d}^{\overline{\omega}} \star \widehat{e}_{ab} = \Theta^c \star \widehat{e}_{abc}$$

with

$$\mathrm{d}^{\overline{\omega}} \star \widehat{e}_{J_k} = \mathrm{d}^{\overline{\omega}}e^i \star \widehat{e}_{J_k,i} \tag{Α′.34}$$

being the general formula (that also holds for the ext. derivative appropriately). We have obviously replaced $\mathrm{d}^{\overline{\omega}}e$ by the torsion 2–form due to definition (Α′.10). It follows that the spin connection eom are given by

$$\Theta \star eee = 0 \tag{Α′.35}$$

In a few lines of calculus we managed to extract the eom of the theory, namely (A′.30) and (A′.35), in a clean and geometrically familiar way, avoiding all the ugly indices of the Riemann tensors and the connection symbols. But how do these eom compare to their usual expressions? We will find out right away. We would like to know the final form of $ee \star eee$ (no contraction). Let us generalise this for $q \leq k$:

$$e^{I_q} \star \widehat{e}_{J_k} = \frac{1}{(n-k)!}\epsilon_{J_k, K_{n-k}} e^{I_q, K_{n-k}} \tag{A′.36}$$

where $e^{I_q, K_{n-k}}$ is a $(n-(k-q))$–form. Let us think of such an arbitrary form:

$$\begin{aligned} \star\widehat{e}_{L_{k-q}} &= \frac{1}{(n-(k-q))!}\epsilon_{L_{k-q}, M_{n-(k-q)}} e^{M_{n-(k-q)}} && \Downarrow \\ \epsilon^{L_{k-q}, I_q, K_{n-k}} \star \widehat{e}_{L_{k-q}} &= (k-q)! e^{[I_q, K_{n-k}]} && \Updownarrow \\ e^{I_q, K_{n-k}} &= \frac{1}{(k-q)!}\epsilon^{L_{k-q}, I_q, K_{n-k}} \star \widehat{e}_{L_{k-q}} \end{aligned} \tag{A′.37}$$

We have used the identities:

$$\epsilon_{I_n}\epsilon^{I_q, J_{n-q}} = q!\delta^{J_{n-q}}_{I_{n-q}} = q!(n-q)!\delta^{j_1}_{[i_{q+1}} \ldots \delta^{j_{n-q}}_{i_n]} = q!(n-q)!\delta^{[j_1}_{i_{q+1}} \ldots \delta^{j_{n-q}]}_{i_n} \tag{A′.38}$$

$$e^{[I_k]} = \frac{1}{k!}(k!\text{–many antisymmetric permutations}) = e^{I_k} \tag{A′.39}$$

where the latter holds due to the antisymmetry of the wedge product. Plugging (A′.37) into (A′.36), we deduce that

$$e^{I_q} \star \widehat{e}_{J_k} = \frac{1}{(k-q)!}\delta^{L_{k-q}, I_q}_{J_k} \star \widehat{e}_{L_{k-q}} \tag{A′.40}$$

so we are ready to put this formula back in the game.

Let us start with (A′.30). Since the curvature 2–form decomposes as $(1/2)\overline{\Omega}^{ab}{}_{I_2} e^{I_2}$, we have to calculate the term $ee \star eee$ (no contraction). To do so is now a trivial task, thanks to formula (A′.40). For $q = 2$ and $k = 3$ we find that

$$\overline{\Omega}^{J_2} \star \widehat{e}_{J_3} = \frac{1}{2}\overline{\Omega}^{J_2}{}_{I_2}\delta^{i, I_2}_{J_3} \star \widehat{e}_i \tag{A′.41}$$

We have to use another identity, namely a rule for the generalised Kronecker delta, i.e

$$\delta^{I_k}_{J_k} = \sum_{q=1}^{k}(-1)^{k+q}\delta^{i_k}_{j_q}\delta^{i_1 \ldots i_q \ldots \widehat{i}_k}_{j_1 \ldots \widehat{j}_q \ldots j_k} \tag{A′.42}$$

where the hat means that the respective term is omitted. Consequently, we immediately observe that

$$\delta^{i, I_2}_{J_3} = \delta^{i_2}_{j_1}\delta^{ii_1}_{j_2 j_3} - \delta^{i_2}_{j_2}\delta^{ii_1}_{j_1 j_3} + \delta^{i_2}_{j_3}\delta^{ii_1}_{j_1 j_2}$$

and plugging the latter relation into the former equation, we conclude that

$$\frac{1}{2}\overline{\Omega}^{J_2}{}_{I_2}\delta^{i, I_2}_{J_3} \star \widehat{e}_i = \Omega^{J_2}{}_{j_1[j_2} \star e_{j_3]} - \Omega^{J_2}{}_{j_2[j_1} \star e_{j_3]} + \Omega^{J_2}{}_{j_3[j_1} \star e_{j_2]}$$

where expansion of the antisymmetry brackets and appropriate tensor contractions yield eom:

$$-\left(R \star \widehat{e}_{j_3} - 2R^i{}_{j_3} \star \widehat{e}_i\right) = 0 \tag{A′.43}$$

where we contract second–fourth to get (the signs right and) the Ricci tensor and further contraction gives the Ricci scalar.

The latter equation seems strangely familiar to the Einstein field equations (efe), but one last step is needed, namely the appropriate raising of the 3–forms $\star e$ with the Minkowski metric. It is trivial to show that $\eta_{ij} \star e^j = \star \widehat{e}_i$ (application of definition) and thus we finally extract the co–frame eom of the theory in tensor notation, i.e

$$2R_{aj_3} - R\eta_{aj_3} \doteq G_{aj_3} = 0 \tag{Α′.44}$$

where all indices are internal and are lowered/raised with the Minkowski metric. The tensor $G_{ab}$ is the internal Einstein tensor and the latter eom are the "internal version" of the usual efe. We are now left with (Α′.35). By using (Α′.40), we right away obtain

$$\Theta^c{}_{[ac}\eta_{b]d} = 0 \tag{Α′.45}$$

as the usual *algebraic constraint* that naturally arises from the variation wrt the spin connection. As it is such, the theory implies that torsion does not propagate on its own, i.e in the absence of matter sources. This implication is merely a result of Einstein–Cartan gravity and does not hold in the general case, since torsion arises naturally in geometry. Now, introducing matter yields eom:

$$\overline{\Omega} \star eee = \alpha_4^{-1} \tau \tag{Α′.46}$$
$$\Theta \star eee = \alpha_4^{-1} \sigma \tag{Α′.47}$$

where $\tau = \delta \mathcal{L}_{\mathrm{m}} / \delta e$ is the canonical energy–momentum 3–form and $\sigma = \delta \mathcal{L}_{\mathrm{m}} / \delta \omega$ is the spin–angular momentum 3–form. The stress–energy form decomposes as $T_{ij} \star e^j$, where $T_{ij}$, i.e the stress–energy tensor, is not symmetric in general. Its usual symmetry is obtained by the vanishing of the spin form and thus also the torsion, which amounts to the independence of the matter–action functional from the spin connection. The vanishing of the spin form merely reduces the theory to general relativity (without cosmological constant). We may also put $\Lambda$ back in the game by adding a $-\Lambda \star 1$ term in the gravitational part of the action. This term obviously contributes $-\alpha_4 \Lambda \star e$ to the eom wrt the co–frame.

Some may argue that we created a lot of fuss for no reason, since the usual tensor approach would be equally short. Some truth may be found in such arguments, but we remark that we have proven in detail all the basic identities we will need for later calculations and observe that the lengthiest part in this approach was the one regarding the transition to the usual tensor expressions, since we have extracted the eom of the theory, i.e (Α′.30), (Α′.35), almost from the start. This kind of calculus may seem intimidating at first sight, but when appropriate familiarity is achieved, it becomes a powerful tool of increasing brevity and geometrical intuition. The superiority of the formalism is proven especially when far more tedious calculations are needed. Finally, we state that we studied this introductory theory in order to introduce our tools of work.

## 1.4. Teleparallel Lanczos–Lovelock Gravity and its Modifications

**Abstract**

Inspired by the teleparallel formulation of Lanczos–Lovelock gravity, we have extracted the field equations of the theory for arbitrary dimensions, without imposing the Weitzenböck connection from the beginning. However, since we are going to impose this in the end, we will use 1.5 order formalism from the start, i.e we assume that the teleparallel equivalent of the LL Lagrangian depends only on the co–frame or vielbein, thus we are going to handle the spin connection as a non-dynamical variable. For the extraction

process, we work with differential form language, since the latter reduces the necessary amount of calculations dramatically. We only pass over to the tensor expression of the extracted equations of motion in the end. Finally, we propose a novel class of teleparallel modified theories, based on terms of the LL polynomial, which contains $f(T, T_G)$ as a sub–class.

Soon to be uploaded to arxiv in collaboration with E. Saridakis (under progress)

## 4.1 Introduction

It is well known that the Lanczos–Lovelock (LL) action is the most general gravitational theory in $d$ dimensions, built solely with curvature, which leads to second order equations of motion for the metric and satisfies general covariance. It is a polynomial of degree $\lfloor d/2 \rfloor$ in the curvature, namely

$$S_{\mathrm{LL}} = \int \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \alpha_k \mathcal{L}_k \tag{A'.48}$$

where $\lfloor d/2 \rfloor$ means "floor $d/2$", i.e the integer part of $d/2$. The coefficients $\alpha_k$ that parametrise (A′.48), are not fixed by first principles. The $k$–th term of the LL Lagrangian is defined as

$$\mathcal{L}_k = \epsilon_{A_d} \bar{\Omega}^{a_1 a_2} \wedge \cdots \wedge \bar{\Omega}^{a_{2k-1} a_{2k}} \wedge e^{a_{2k+1} \cdots a_d} \tag{A'.49}$$

where $A_d = a_1 \dots a_d$ is a multi–index of length $d$ and $\bar{\Omega}$ is the $\mathfrak{so}(1, d-1)$–valued curvature 2–form with components $\bar{\Omega}^{ab}$ that are usual, i.e $\mathbb{R}$–valued, 2–forms. This makes sense, since by definition $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^{ab} \otimes e_{ab}$, where $\{e_{ab}\}$ is the standard basis for $\mathfrak{so}(1, d-1)$, the Lie algebra of the matrix group $SO(1, d-1)$, which by construction is the structure group in the principal bundle description of gravity. We also use the following abbreviating notation:

$$e^{A_d} = e^{a_1} \wedge \cdots \wedge e^{a_d} \tag{A'.50}$$

where $e = e^a \otimes \widetilde{e}_a$ is the soldering form, with $\{\widetilde{e}_a\}$ being the standard basis for the vector space $\mathbb{R}^{1,d-1}$. For a generalised approach, we may as well assume that $e$ is a $\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1, d-1)$–valued 1–form, where $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of an appropriate affine group $G$. We will refer to $e^a$ as co–frame or vielbein. At this point, we also need to note that from here on the wedge symbol will be often suppressed for brevity.

It is shown in **[35]** that the theory behaves differently for odd and even dimensions, with a specific choice of the otherwise arbitrary coefficients $\alpha_k$ maximising the degrees of freedom in each case. Specifically, in odd dimensions the LL theory can be reformulated as a Chern–Simons one, built with specific Cartan curvature forms. The Cartan curvature form $\Omega$ is a $\mathfrak{g}$–valued 2-form **[31]** with decomposition $\Omega = \Omega^{AB} \otimes e_{AB}$, where the capital indices run from 0 to 4 and $\{e_{AB}\}$ is the standard basis for $\mathfrak{g}$. We assume that the associated Klein geometry is reductive and therefore, $\Omega$ decomposes as

$$\Omega = \Omega_{\mathfrak{so}(1,d-1)} + \Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1)} \tag{A'.51}$$

since the Cartan connection decomposes as $\omega = \bar{\omega} + e$. The reductive character of this geometry is specifically given by $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, d-1) \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1, d-1)$. In general, $\Omega_{\mathfrak{so}(1,d-1)} \neq \bar{\Omega}$ and $\Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1)} \neq \Theta$, where

$$\Theta = \Theta^a \otimes \widetilde{e}_a = \mathrm{d}e + [\bar{\omega}, e] \tag{A'.52}$$

is the $\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1, d-1)$–valued torsion 2–form. Since we have already assumed that $\mathfrak{g}$ is also a matrix algebra, then it simultaneously holds that

$$\omega^{AB} = \bar{\omega}^{ab} + \omega^{a4} \tag{A'.53}$$

As we have explicitly chosen the isotropy group to be $SO(1,d-1)$, we are left with three possible choices (of interest in gravitational physics) for the affine group that all lead to symmetric homogeneous spaces. The symmetry of each model implies that

$$[\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1),\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1)]\subset\mathfrak{so}(1,d-1) \tag{A′.54}$$

and thus $\Omega_{\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1)}=\Theta$ **[3]**. This makes sense, since in the general case

$$\Omega=\bar{\Omega}+\frac{1}{2}[e,e]_{\mathfrak{so}(1,d-1)}+\Theta+\frac{1}{2}[e,e]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{so}(1,d-1)} \tag{A′.55}$$

The three choices depend on the sign of the cosmological constant (or the sign of the constant scalar curvature) and namely are

- de Sitter group $SO(1,d)$ for positive constant scalar curvature
- Poincaré group $Poinc(1,d-1)$ for zero constant scalar curvature
- anti–de Sitter group $SO(2,d-1)$ for negative constant scalar curvature

We may then recast (A′.55) as

$$\Omega=\bar{\Omega}+\frac{s}{2l^2}[e,e]_{\mathfrak{so}(1,d-1)}+\frac{1}{l}\Theta \tag{A′.56}$$

where $l$ is the de Sitter radius (length units) and the parameter $s=-1,0,1$ keeps track of the curvature sign (we take $s=-1$ for de Sitter space) **[38]**. This relation is obtained by initially recasting $\omega$ as $\omega=\bar{\omega}+(1/l)e$. Therefore, we conclude that the Lorentz part of the Cartan curvature $\bar{\Omega}$ is given by

$$\Omega^{ab}_{\mathfrak{so}(1,d-1)}=\bar{\Omega}^{ab}+\frac{s}{l^2}e^a\wedge e^b \tag{A′.57}$$

Then, LL gravity in odd dimensions and under the geometric gauge description, may be understood as a theory with (anti–)de Sitter covariant equations of motion:

$$\epsilon_{AB,\widetilde{A}_{d-1}}\Omega^{A_1A_2}\dots\Omega^{A_{d-2}A_{d-1}}=0 \tag{A′.58}$$

if we fix the coefficients according to

$$\alpha_k=\alpha_0(2\gamma)^k\frac{d}{q}\binom{n-1}{k} \tag{A′.59}$$

where $d=2n-1$, $q=d-2k$ and $\gamma$ is a parameter with dimensions of squared length. Furthermore, the parameters $\alpha_0$ and $\gamma$ are defined as

$$\alpha_0=\frac{\kappa}{l^{d-1}d}\qquad\qquad\gamma=\frac{sl^2}{2} \tag{A′.60}$$

where we take $s$ to be minus the sign of the cosmological constant, exactly as we mentioned above. Moreover, $\kappa$ and $l$ are related to the gravitational and cosmological constant, $G$ and $\Lambda$ respectively, via

$$\kappa^{-1}=2(d-2)!\Omega_{d-2}G\qquad\qquad\Lambda=-s\frac{(d-1)(d-2)}{2l^2} \tag{A′.61}$$

Conclusively, with this method we obtain a neat action, built solely with (anti–)de Sitter curvature and the vielbein, which (the action) is $(a)dS$–invariant.

On the other hand, in even dimensions $d = 2n$ and for parameter choice:

$$\alpha_k = \alpha_0 (2\gamma)^k \binom{n}{k} \tag{A'.62}$$

the authors in **[35]** show that the original LL action may be reformulated as a Lorentz–invariant action of Born–Infeld type, built solely with the Lorentz part of the $(a)dS$ curvature and the vielbein. In both cases, the specific choice of the initially arbitrary coefficients maximises the degrees of freedom, since no excessive algebraic constraints are imposed on the curvature and the torsion (as for example the algebraic constraint on the torsion that arises in the Einstein–Cartan theory for a matter Lagrangian independent from the spin connection). We again remark that in odd dimensions the theory has a complete gauge–theoretical description, which is one of the successes of the Cartan approach to gravity.

## 4.2 The teleparallel equivalent of Lanczos–Lovelock gravity

The usual method in constructing teleparallel equivalents is to replace the usual curvature $R$ (not to be confused with the Ricci scalar) by the curvature $\bar{\Omega}$ of an arbitrary spin connection $\bar{\omega}$, which also gives rise to torsion $\Theta$. Then, by introducing the contortion 1–form $K = \bar{\omega} - \Gamma$, where $\Gamma$ is the Levi–Civita connection, we find that

$$\bar{\Omega} = \mathrm{d}^\Gamma K + R + \frac{1}{2}[K, K] \tag{A'.63}$$

which is derived from the usual definitions:

$$\bar{\Omega} = \mathrm{d}\bar{\omega} + \frac{1}{2}[\bar{\omega}, \bar{\omega}] \qquad\qquad R = \mathrm{d}\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma] \tag{A'.64}$$

and from the definition of the external covariant derivative with respect to the connection, i.e

$$\mathrm{d}^\Gamma \alpha = \mathrm{d}\alpha + [\Gamma, \alpha] \doteq \mathrm{d}\alpha + \Gamma \wedge \alpha - (-1)^p \alpha \wedge \Gamma \tag{A'.65}$$

for an arbitrary $p$–form $\alpha$ with values in the same Lie algebra, where $\Gamma$ is also valued. From now on, we will stop using the graded commutator notation (the well known wedged bracket) so often. We simply note that this use is justified in our case, since by definition, $\bar{\omega}, \Gamma, K$ are all $\mathfrak{so}(1, d-1)$–valued 1–forms. As we are dealing with a matrix algebra, we conclude from the definition of the wedged bracket that

$$\bar{\Omega}^{ab} = \mathrm{d}^\Gamma K^{ab} + R^{ab} + K^a{}_c \wedge K^{cb} \tag{A'.66}$$

where we will denote $K^a{}_c \wedge K^{cb}$ with $\langle KK \rangle$ for brevity and will generally suppress the indices when possible, so that the latter equation reads

$$\bar{\Omega} = \mathrm{d}^\Gamma K + R + \langle KK \rangle \tag{A'.67}$$

The next step is to try and express the initial Lagrangian (built with $R$) as the teleparallel equivalent plus a total divergence, which is done by imposing the teleparallelism condition $\bar{\Omega} = 0$. Without further ado, let us focus in our case.

Following the procedure in **[8]** and since (A′.49) holds, we find that

$$\mathcal{L}_k = (\mathrm{d}^\Gamma K + R + \langle KK \rangle)^{\wedge k} e^{\wedge d - 2k} \tag{A'.68}$$

where full contraction with the Levi–Civita symbol is implied (so that this makes sense) and the subscript $\wedge k$ means "wedged $k$ times". The way to proceed is to use the binomial expansion:

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \tag{A'.69}$$

in order to get

$$\mathcal{L}_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (\mathrm{d}^\Gamma K)^{\wedge i} \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} R^{\wedge j} \langle KK \rangle^{\wedge k-i-j} e^{\wedge d-2k} \tag{Α΄.70}$$

Partially expanding the sums, i.e the terms for $i = 0, 1$ and $j = k, k-1$, we obtain the expression:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k = R^{\wedge k} e^{\wedge d-2k} + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} R^{\wedge j} \langle KK \rangle^{\wedge k-j} e^{\wedge d-2k} + \\ + k\mathrm{d}^\Gamma K R^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k} + k\mathrm{d}^\Gamma K \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} R^{\wedge j} \wedge \\ \wedge \langle KK \rangle^{\wedge k-1-j} e^{\wedge d-2k} + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} (\mathrm{d}^\Gamma K)^{\wedge i} \wedge \\ \wedge \sum_{j=0}^{k-i} \binom{k-i}{j} R^{\wedge j} \langle KK \rangle^{\wedge k-i-j} e^{\wedge d-2k}\end{aligned} \tag{Α΄.71}$$

Observing that the third term is a total derivative, since $\mathrm{d}^\Gamma e = T = 0$ (torsion–free connection) and $\mathrm{d}^\Gamma R = 0$ (Bianchi identity), we may deduce that

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k^R + \mathcal{L}_k - R^{\wedge k} e^{\wedge d-2k} - k\mathrm{d}^\Gamma K R^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k} + \\ + \mathrm{d}(kKR^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k})\end{aligned} \tag{Α΄.72}$$

where $\mathcal{L}_k^R$ is the $k$–th term of the LL Lagrangian, built with $R$ and the vielbein. We thus conclude that

$$\mathcal{L}_k^R = R^{\wedge k} e^{\wedge d-2k} + k\mathrm{d}^\Gamma K R^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k} - \mathrm{d}(kKR^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k}) \tag{Α΄.73}$$

Now, from the definitions:

$$\mathrm{d}^\Gamma K = \mathrm{d}K + [\Gamma, K] \qquad \mathrm{d}^{\bar\omega} K = \mathrm{d}K + [\bar\omega, K] \tag{Α΄.74}$$

and the definition of the contortion 1–form $K$, we end up with relations:

$$\mathrm{d}^\Gamma K = \mathrm{d}^{\bar\omega} K - [K, K] \equiv \mathrm{d}^{\bar\omega} K - 2\langle KK \rangle \tag{Α΄.75}$$

and

$$\bar\Omega = \mathrm{d}^{\bar\omega} K + R - \langle KK \rangle \tag{Α΄.76}$$

Substituting into (Α΄.73) and imposing the teleparallelism condition, we obtain the teleparallel equivalent:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathrm{LL}}^k = \big[(\langle KK \rangle - \mathrm{d}^\omega K)^{\wedge k} + k(\mathrm{d}^{\bar\omega} K - 2\langle KK \rangle) \wedge \\ \wedge (\langle KK \rangle - \mathrm{d}^\omega K)^{\wedge k-1}\big] e^{\wedge d-2k}\end{aligned} \tag{Α΄.77}$$

plus the total divergence we had before, hence proving the dynamical equivalence (i.e up to a total divergence) we referred to in the beginning. We may massage this further and obtain the expression

$$\mathcal{T}_{\mathrm{LL}}^k = ((k-1)\mathrm{d}^{\bar\omega} K + (1-2k)\langle KK \rangle)(\langle KK \rangle - \mathrm{d}^\omega K)^{\wedge k-1} e^{\wedge d-2k} \tag{Α΄.78}$$

This Lagrangian indeed leads to the teleparallel equivalent of general relativity for $k=1$ and Gauss-Bonnet gravity for $k=2$, as expressed in **[18]** (there will of course be a difference by an arithmetic constant due to the use and definition of the Hodge star operator by the authors of the aforementioned paper). For the $k=2$ case, a bit of manipulation is needed in order to show the actual equivalence, as in such cases, there usually exists a family of equivalents. This is shown in **[8]** in great detail. The teleparallel LL Lagrangian (built by summation of the latter Lagrangians) is Lorentz invariant, since the usual LL Lagrangian is definitely so for arbitrary dimension (odd and even).

## 4.3 Vielbein eom extraction

Moving on to the variations wrt the co–frame, we will use 1.5 order formalism, i.e $\bar{\omega} = \bar{\omega}(e)$, and work in differential form language as usual. First of all, let us use the binomial expansion once again. It holds that

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= (\langle KK\rangle - \mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-1}e^{\wedge d-2k}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\langle KK\rangle^{\wedge i}(\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-1-i}e^{\wedge d-2k}\end{aligned} \tag{A$'$.79}$$

Then, using the antisymmetry of the (suppressed) Levi–Civita symbol, we observe that

$$\delta\langle KK\rangle^{\wedge i} = i\,\delta\langle KK\rangle\langle KK\rangle^{\wedge i-1} = 2i\,\langle \delta KK\rangle\langle KK\rangle^{\wedge i-1} \tag{A$'$.80}$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}\delta\big(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K\big)^{\wedge k-1-i}e^{\wedge d-2k} &= (k-1-i)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}\delta K\wedge\\ &\qquad\wedge(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-2}e^{\wedge d-2k}\end{aligned} \tag{A$'$.81}$$

Integration by parts in $\mathcal{O}$ produces a boundary term that vanishes via Stokes theorem, due to the assumption of vanishing variations at the boundary. The remaining terms are:

$$-2i(k-i-1)\left\langle \mathrm{d}^{\bar{\omega}}KK\right\rangle\langle KK\rangle^{i-1}\delta K(\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2}e^{\wedge q} \tag{A$'$.82}$$

and

$$q(k-i-1)\langle KK\rangle^{\wedge i}\delta K(\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2}\langle Ke\rangle e^{\wedge q-1} \tag{A$'$.83}$$

where $q = d-2k$ and $\mathrm{d}^{\bar{\omega}}e^a = \Theta^a = K^a{}_b e^b$. The aforementioned relations hold because of the antisymmetry of $\epsilon$ and that of the contortion 1–form, plus the fact that

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\bar{\omega}}\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K &= \mathrm{d}\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K + [\omega,\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K]\\ &= \mathrm{d}(\mathrm{d}K + [\bar{\omega},K]) + [\bar{\omega},\mathrm{d}K + [\bar{\omega},K]] = [\bar{\Omega},K]\end{aligned} \tag{A$'$.84}$$

which in turn follows from a very well known identity $[\bar{\omega},[\bar{\omega},K]] = (1/2)[[\bar{\omega},\bar{\omega}],K]$ (a mere application of the graded Jacobi identity **[31]**) and the definition of curvature. Since we have imposed the teleparallelism condition, equation (A$'$.84) yields zero. Bringing the variation in front for each separate term and gathering all terms, we get the following expression:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{O} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\Big[&2i\,\langle\delta KK\rangle\langle KK\rangle^{\wedge i-1}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i}e+\\ &+(k-i-1)\delta K\Big[2i\left\langle\mathrm{d}^{\bar{\omega}}KK\right\rangle\langle KK\rangle^{i-1}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-2}e+\\ &\qquad+q\,\langle KK\rangle^{\wedge i}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-2}\langle Ke\rangle\Big]+\\ &+q\delta e\,\langle KK\rangle^{\wedge i}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i}\Big]e^{\wedge q-1}\end{aligned} \tag{A$'$.85}$$

where we would like to have the variation as a common "factor".

To do that, we will bring the indices back and study $\delta\mathcal{O}$ term by term. Starting with the first term inside the big bracket, this looks in detail as

$$2i\epsilon_{A_d}\,\delta K^{a_3}{}_b K^{ba_4}(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_5\ldots a_{2i+2}}\wedge \\ ((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k}}e^{a_{2k+1}} \tag{A′.86}$$

We may very well use the Minkowski metric to write

$$2i\epsilon^a{}_{A_{d-1}}\,\delta K_{ab}\,K^{ba_3}(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_4\ldots a_{2i+1}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+2}\ldots a_{2k-1}}e^{a_{2k}} \tag{A′.87}$$

Just to clarify things, by $(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_4\ldots a_{2i+1}}$ we mean

$$K^{a_4}{}_{l_1}K^{l_1a_5}\ldots K^{a_{2i}}{}_{l_{i-1}}K^{l_{i-1}a_{2i+1}} \tag{A′.88}$$

and by $((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+2}\ldots a_{2k-1}}$ we simply mean

$$\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_{2i+2}a_{2i+3}}\ldots\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_{2k-2}a_{2k-1}} \tag{A′.89}$$

Following the same procedure, the expression inside the smaller bracket may be written as

$$\delta K_{ab}\,\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}\Big[2i\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_3}{}_lK^{la_4}(\langle KK\rangle^{i-1})^{a_5\ldots a_{2i+2}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}e^{a_{2k-1}}+ \\ +q(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}\wedge \\ \wedge K^{a_{2k-1}}{}_le^l\Big] \tag{A′.90}$$

Finally, the last term is of course different from the others, since it is the variation of the basis:

$$q\widehat{\delta e}_a\epsilon^a{}_{A_{d-1}}(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k}} \tag{A′.91}$$

where we use the hat to stress the fact that this is a lowered form. Hence, the variation of $\mathcal{O}$ with respect to the vielbein may be explicitly written as

$$\delta\mathcal{O}=\delta K_{ab}\left[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\Big[2i\epsilon^a{}_{A_{d-1}}K^{ba_3}\wedge\right. \\ \wedge(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_4\ldots a_{2i+1}}((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+2}\ldots a_{2k-1}}\wedge \\ \wedge e^{a_{2k}\ldots a_{d-1}}+(k-i-1)\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}\Big[2i\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_3}{}_lK^{la_4}\wedge \\ \wedge(\langle KK\rangle^{i-1})^{a_5\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}e^{a_{2k-1}}+ \\ +q(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}\wedge \\ \left.\wedge K^{a_{2k-1}}{}_le^l\Big]e^{a_{2k}\ldots a_{d-2}}\Big]\right]+\widehat{\delta e}_a\left[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}q\epsilon^a{}_{A_{d-1}}\wedge\right. \\ \left.\wedge(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\omega}K)^{\wedge k-1-i})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k}}e^{a_{2k+1}\ldots a_{d-1}}\right] \tag{A′.92}$$

Now, we simply need to observe that

$$\mathcal{T}^{k}_{\mathrm{LL}} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\Big[(k-1)\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i}\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{\wedge k-i}+ \\ +(1-2k)\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i+1}\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{\wedge k-i-1}\Big]e^{\wedge q} \tag{A$'$.93}$$

Each term is similar to $\mathcal{O}$, so we merely have to change the factors and the number of times we wedge the various terms. Then, the variation of the $k$–th term of the teleparallel equivalent of LL gravity with respect to the vielbein, finally reads

$$\delta\mathcal{T}^{k}_{\mathrm{LL}} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\Bigg[\bigg[2\left\langle\delta KK\right\rangle\Big[i(k-1)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K+ \\ +(i+1)(1-2k)\left\langle KK\right\rangle\Big]\mathrm{d}^{\bar{\omega}}Ke+ \\ +2\delta K\Big[\big[i\lambda_1(k,i)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K+(i+1)\lambda_2(k,i)\left\langle KK\right\rangle\big]\left\langle\mathrm{d}^{\bar{\omega}}KK\right\rangle e+ \\ +\frac{q}{2}\big[\lambda_1(k,i)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K+\lambda_2(k,i)\left\langle KK\right\rangle\big]\left\langle KK\right\rangle\left\langle Ke\right\rangle\Big]\bigg]\wedge \\ \wedge\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i-1}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-2}+q\delta e\Big[(k-1)\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i}\wedge \\ \wedge\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{\wedge k-i}+(1-2k)\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i+1}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-1}\Big]\Bigg]e^{\wedge q-1} \tag{A$'$.94}$$

where we have factorised and introduced the constant functions:

$$\lambda_1(k,i)=(k-i)(k-1) \qquad \lambda_2(k,i)=(1-2k)(k-i-1) \tag{A$'$.95}$$

for brevity. Using the Minkowski metric to bring $\delta K$ in front as a common “factor” and showing the indices, we may re–express (A$'$.94) as follows:

$$\delta\mathcal{T}^{k}_{\mathrm{LL}} = 2\delta K_{ab}\Bigg[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\Big[\epsilon^{a}{}_{e,A_{d-2}}K^{be}\big[i(k-1)\wedge \\ \wedge\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_1a_2}+(i+1)(1-2k)K^{a_1}{}_{l}K^{la_2}\big]\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_3a_4}e^{a_5}+ \\ +\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}\Big[\big[i\lambda_1(k,i)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_1a_2}+(i+1)\lambda_2(k,i)K^{a_1}{}_{l_1}K^{l_1a_2}\big]\wedge \\ \wedge\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_3}{}_{l_2}K^{l_2a_4}e^{a_5}+\frac{q}{2}\big[\lambda_1(k,i)\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{a_1a_2}+\lambda_2(k,i)\wedge \\ \wedge K^{a_1}{}_{l_1}K^{l_1a_2}\big]K^{a_3}{}_{l_2}K^{l_2a_4}K^{a_5}{}_{l_3}e^{l_3}\Big]\Big](\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i-1})^{a_6\cdots a_{2i+3}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+4}\cdots a_{2k-1}}e^{a_{2k}\cdots a_{d-2}}\Bigg]+ \\ +\widehat{\delta}e_a\Bigg[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}q\epsilon^{a}{}_{A_{d-1}}\Big[(k-1)(\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i})^{a_1\cdots a_{2i}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i})^{a_{2i+1}\cdots a_{2k}}+(1-2k)(\left\langle KK\right\rangle^{\wedge i+1})^{a_1\cdots a_{2i+2}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+3}\cdots a_{2k}}\Big]e^{a_{2k+1}\cdots a_{d-1}} \tag{A$'$.96}$$

We may as well define 1–forms $H_{(k)}, h_{(k)}$, such that

$$\delta\mathcal{T}^{k}_{\mathrm{LL}} = 2\,\delta K_{ab}\,H^{ab}_{(k)} + \widehat{\delta}e_a h^a_{(k)} \tag{A′.97}$$

We then find it best to split $H^{ab}_{(k)}$ into three parts, so that we work more efficiently and avoid any ambiguity regarding the surviving terms for different values of $k$. Firstly, we have

$$\begin{aligned} H^{ab}_{(k)_1} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\epsilon^{a}{}_{A_{d-1}}K^{ba_1}\wedge \\ \wedge\Big[i(k-1)(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_2\ldots a_{2i-1}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i})^{a_{2i}\ldots a_{2k-1}} + (i+1)(1-2k)\wedge \\ \wedge(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_2\ldots a_{2i+1}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+2}\ldots a_{2k-1}}\Big]\wedge \\ \wedge e^{a_{2k}\ldots a_{d-1}} \end{aligned} \tag{A′.98}$$

Secondly, we define

$$\begin{aligned} H^{ab}_{(k)_2} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}\wedge \\ \wedge\Big[i\lambda_1(k,i)(\mathrm{d}^{\bar\omega}K^{a_1}{}_{l}K^{la_2})(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_3\ldots a_{2i}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+1}\ldots a_{2k-2}}+ \\ +(i+1)\lambda_2(k,i)(\mathrm{d}^{\bar\omega}K^{a_1}{}_{l}K^{la_2})(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}\Big]e^{a_{2k-1}\ldots a_{d-2}} \end{aligned} \tag{A′.99}$$

Lastly, we also define

$$\begin{aligned} H^{ab}_{(k)_3} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i-1}\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}\frac{q}{2}\wedge \\ \wedge\Big[\lambda_1(k,i)(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_1\ldots a_{2i}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+1}\ldots a_{2k-2}}+ \\ +\lambda_2(k,i)(\langle KK\rangle^{\wedge i+1})^{a_1\ldots a_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}\Big]\wedge \\ \wedge K^{a_{2k-1}}{}_{l}e^{la_{2k}\ldots a_{d-2}} \end{aligned} \tag{A′.100}$$

We firmly believe that the best practice here is to suppress the indices, choose $k$, spot the surviving terms and then re–introduce indices. Let us work some examples. For $k=1$, it is easy to observe that $\lambda_j(1,i)=0$ and thus $H^{ab}_{(1)_2} = H^{ab}_{(1)_3} = 0$. However, the second term of $H^{ab}_{(1)_1}$ survives, namely

$$H^{ab}_{(1)_1} = -\epsilon^{a}{}_{A_{d-1}}K^{ba_1}e^{a_2\ldots a_{d-1}} \tag{A′.101}$$

Apart from that, the second term of $h^a_{(1)}$ also survives, namely

$$h^a_{(1)} = -(d-2)\epsilon^{a}{}_{A_{d-1}}K^{a_1}{}_{l}K^{la_2}e^{a_3\ldots a_{d-1}} \tag{A′.102}$$

Therefore, $\delta\mathcal{T}^1_{\text{LL}}$ is indeed nothing more than the variation of the teleparallel Einstein–Hilbert Lagrangian in $d$ dimensions, i.e

$$\mathcal{L}^{\text{tel}}_{\text{EH}} = -\epsilon_{A_d} K^{a_1}{}_l K^{la_2} e^{a_3\ldots a_d} \tag{A′.103}$$

Now, let us check our results for $k = 2$. We find that

$$H^{ab}_{(2)_1} = 2\epsilon^a{}_{A_{d-1}} K^{ba_1}(2\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_2a_3} - 3K^{a_2}{}_l K^{la_3}) e^{a_4\ldots a_{d-1}} \tag{A′.104}$$

We also conclude that

$$H^{ab}_{(2)_2} = 4\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}} \mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_1}{}_l K^{la_2} e^{a_3\ldots a_{d-2}} \tag{A′.105}$$

and also that

$$\begin{aligned} H^{ab}_{(2)_3} = -(d-4)\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_1a_2} - 2K^{a_1}{}_l K^{la_2})\wedge \\ \wedge K^{a_3}{}_l e^{la_4\ldots a_{d-2}} \end{aligned} \tag{A′.106}$$

Gathering the terms, we obtain the expression:

$$\begin{aligned} H^{ab}_{(2)} = 2\epsilon^a{}_{A_{d-1}} K^{ba_1}(2\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_2a_3} - 3K^{a_2}{}_l K^{la_3}) e^{a_4\ldots a_{d-1}} + \\ +4\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}} \mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_1}{}_l K^{la_2} e^{a_3\ldots a_{d-2}} + \\ -(d-4)\epsilon^{ab}{}_{A_{d-2}}(\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_1a_2} - 2K^{a_1}{}_l K^{la_2}) K^{a_3}{}_l e^{la_4\ldots a_{d-2}} \end{aligned} \tag{A′.107}$$

which, together with the straightforward $h^a_{(2)}$, is again nothing more than the variation of the teleparallel Gauss–Bonnet Lagrangian in $d$ dimensions:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{tel}}_{\text{GB}} = \epsilon_{A_d}\Big[4\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K^{a_1a_2} K^{a_3}{}_l K^{la_4} - ((\mathrm{d}^{\bar{\omega}} K)^{\wedge 2})^{a_1\ldots a_4} - \\ -3(\langle KK\rangle^{\wedge 2})^{a_1\ldots a_4}\Big] e^{a_5\ldots a_d} \end{aligned} \tag{A′.108}$$

as expressed in **[8]**. Conclusively, we have verified that for sub–cases $k = 1, 2$, we will definitely recover the eom for teleparallel General Relativity and Gauss–Bonnet gravity in arbitrary dimensions respectively.

Now, we may use the work done in **[18]** to save ourselves from excessive calculations. As we have expressed $\delta\mathcal{T}^k_{\text{LL}}$ in the same manner, it is obvious that the eom will obey the same generic formula, namely

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor} \widetilde{\alpha}_k \Big[ 2\pounds_{e_b} H^{[ab]}_{(k)} - 2i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c H^{[ab]}_{(k)} + e^a H^{[cb]}_{(k)}) + \\ +(2\omega^a{}_{[cb]} + T^a{}_{cb}) H^{cb}_{(k)} + 4f_{(dc)}{}^a i_{e_b}(e^c H^{[db]}_{(k)}) - \\ - f^d{}_{cb} i_{e_d}(e^a H^{cb}_{(k)}) + h^a_{(k)} \Big] = 0 \end{aligned} \tag{A′.109}$$

where $H^{ab}_{(k)}$ is the sum of (A′.98), (A′.99) and (A′.100), $f^a{}_{bc}$ are the structure coefficients functions given by the dual structure equation

$$\mathrm{d}e^a = -\frac{1}{2} f^a{}_{bc} e^b \wedge e^c \tag{A′.110}$$

, $\pounds_X$ is the Lie derivative with respect to the vector field $X$ and $i_X$ is the interior product wrt the same vector field. To sum up, we have extracted the equations of motion for the teleparallel Lanczos–Lovelock gravity in differential form language.

Finally, we will also express (A′.109) in tensor language. They read

$$\sum_{k=0}^{\lfloor d/2\rfloor}\widetilde{\alpha}_k\Big[2(H_{(k)}^{[ac]b}+H_{(k)}^{[ba]c}-H_{(k)}^{[cb]a})_{,c}+ \\ +2(H_{(k)}^{[ac]b}+H_{(k)}^{[ba]c}-H_{(k)}^{[cb]a})f^d{}_{dc}+ \\ +(2H_{(k)}^{[ac]d}+H_{(k)}^{dca})f^b{}_{cd}+4f_{(dc)}{}^aH_{(k)}^{[db]c}+ \\ +(2\omega^a{}_{[cd]}+T^a{}_{cd})H_{(k)}^{cdb}+h_{(k)}^{ab}\Big]=0 \tag{A′.111}$$

where $H_{(k)}^{abc}, h_{(k)}^{ab}$ are the components of the respective forms, derived by expansion in the basis $\vartheta_a = i_{e_a}(e^{1\dots d})$ for $(d-1)$–forms. These components we are going to determine explicitly. We are mainly going to use the identity:

$$\epsilon^{A_d}\vartheta_{a_d}=(-1)^{d+1}e^{A_{d-1}} \tag{A′.112}$$

which may be also written as:

$$e^{A_{d-1}}=\epsilon^{a_d,A_{d-1}}\vartheta_{a_d} \tag{A′.113}$$

Furthermore, since we do not want to impose the Weitzenböck connection at the moment, we must find a suitable expression for the ext. covariant derivative, so that we can easily get the components for $\bar{\omega}=0$ at a later time. This expression is

$$\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^a{}_b=\mathrm{d}K^a{}_b+[\bar{\omega},K]^a{}_b=(K^a{}_{bd,c}-(1/2)K^a{}_{be}f^e{}_{cd}+ \\ +\bar{\omega}^a{}_{fc}K^f{}_{bd}+\bar{\omega}^f{}_{bd}K^a{}_{fc})e^{cd} \tag{A′.114}$$

and for brevity we will simply write the components as $\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{ab}_{cd}e^{cd}$. Let us start then with $H^{abc}_{(k)\,1}$. We find that

$$H^{ab}_{(k)\,1}=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\epsilon^a{}_{A_{d-1}}K^{ba_1}_{b_1}\wedge \\ \wedge\Big[i(k-1)(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_2\dots a_{2i-1}}_{b_2\dots b_{2i-1}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i})^{a_{2i}\dots a_{2k-1}}_{b_{2i}\dots b_{2k-1}}+(i+1)(1-2k)\wedge \\ \wedge(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_2\dots a_{2i+1}}_{b_2\dots b_{2i+1}}((\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+2}\dots a_{2k-1}}_{b_{2i+2}\dots b_{2k-1}}\Big]\wedge \\ \wedge e^{B_{2k-1},a_{2k}\dots a_{d-1}} \tag{A′.115}$$

But we claimed that

$$e^{B_{2k-1},a_{2k}\dots a_{d-1}}=\epsilon^{c,B_{2k-1},a_{2k}\dots a_{d-1}}\vartheta_c \tag{A′.116}$$

and we also know that

$$\epsilon^a{}_{A_{d-1}}\epsilon^{c,B_{2k-1},a_{2k}\dots a_{d-1}}=\eta^{al}q!\delta^{c,B_{2k-1}}_{l,A_{2k-1}} \tag{A′.117}$$

where $q = d - 2k$ and $\delta^{c,B_{2k-1}}_{l,A_{2k-1}}$ is the generalised Kronecker delta. Hence, we deduce that

$$\begin{aligned}H^{abc}_{(k)\ 1} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}K^{ba_1}_{b_1}\wedge \\ \wedge\Big[i(k-1)(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_2\ldots a_{2i-1}}_{b_2\ldots b_{2i-1}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i})^{a_{2i}\ldots a_{2k-1}}_{b_{2i}\ldots b_{2k-1}} + (i+1)(1-2k)\wedge \\ \wedge(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_2\ldots a_{2i+1}}_{b_2\ldots b_{2i+1}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+2}\ldots a_{2k-1}}_{b_{2i+2}\ldots b_{2k-1}}\Big]\wedge \\ \wedge\eta^{al}q!\delta^{c,B_{2k-1}}_{l,A_{2k-1}}\end{aligned} \tag{A$'$.118}$$

Using the same method, we also find

$$\begin{aligned}H^{abc}_{(k)\ 2} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\wedge \\ \wedge\Big[i\lambda_1(k,i)(\mathrm{d}^{\bar\omega}K^{a_1}{}_{lb_1b_2}K^{la_2}_{b_3})(\langle KK\rangle^{\wedge i-1})^{a_3\ldots a_{2i}}_{b_4\ldots b_{2i+1}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+1}\ldots a_{2k-2}}_{b_{2i+2}\ldots b_{2k-1}}+ \\ +(i+1)\lambda_2(k,i)(\mathrm{d}^{\bar\omega}K^{a_1}{}_{lb_1b_2}K^{la_2}_{b_3})(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_3\ldots a_{2i+2}}_{b_4\ldots b_{2i+3}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}_{b_{2i+4}\ldots b_{2k-1}}\Big]\eta^{al_1}\eta^{bl_2}q!\delta^{c,B_{2k-1}}_{l_1l_2,A_{2k-2}}\end{aligned} \tag{A$'$.119}$$

Finally, the last term reads

$$\begin{aligned}H^{abc}_{(k)\ 3} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i-1}\frac{q!}{2}\wedge \\ \wedge\Big[\lambda_1(k,i)(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_1\ldots a_{2i}}_{b_1\ldots b_{2i}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+1}\ldots a_{2k-2}}_{b_{2i+1}\ldots b_{2k-2}}+ \\ +\lambda_2(k,i)(\langle KK\rangle^{\wedge i+1})^{a_1\ldots a_{2i+2}}_{b_1\ldots b_{2i+2}}((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-2})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k-2}}_{b_{2i+3}\ldots b_{2k-2}}\Big]\wedge \\ \wedge K^{a_{2k-1}}{}_{lb_{2k-1}}\eta^{al_1}\eta^{bl_2}\delta^{c,B_{2k-1},l}_{l_1l_2,A_{2k-1}}\end{aligned} \tag{A$'$.120}$$

where we have used the fact that $q(q-1)! = q!$. Therefore, $H^{abc}_{(k)}$ is the mere sum of equations (A′.118), (A′.119) and (A′.120) and we may move on to determining $h^{ab}_{(k)}$. The method is the same, so we find that

$$\begin{aligned}h^{ab}_{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}q!\Big[(k-1)(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_1\ldots a_{2i}}_{b_1\ldots b_{2i}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i})^{a_{2i+1}\ldots a_{2k}}_{b_{2i+1}\ldots b_{2k}} + (1-2k)(\langle KK\rangle^{\wedge i+1})^{a_1\ldots a_{2i+2}}_{b_1\ldots b_{2i+2}}\wedge \\ \wedge((\mathrm{d}^{\bar\omega}K)^{\wedge k-i-1})^{a_{2i+3}\ldots a_{2k}}_{b_{2i+3}\ldots b_{2k}}\Big]\eta^{al}\delta^{b,B_{2k}}_{l,A_{2k}}\end{aligned} \tag{A$'$.121}$$

Hence, we now have the eom of the teleparallel Lanczos–Lovelock theory also in tensor expression. Obviously, the wedge may be replaced by usual scalar multiplication. Substituting (A′.114), we may obtain the absolutely explicit form and we can impose the Weitzenböck connection at will, instantly finding the new expressions.

## 4.4 $f(T_{\mathrm{LL}}^{(1)},\ldots,T_{\mathrm{LL}}^{(k)})$ gravity

In this section we present a proposition regarding a class of modified teleparallel gravitational theories, using terms from the teleparallel Lanczos–Lovelock polynomial. We only extract the eom for the proposed theory and reserve the cosmological study for a later paper. This theory can be viewed as a direct extension of [**18**], but is a novel class of theories, that contains the latter. Let us then consider the action

$$S=\bar{\alpha}(\kappa_d)\int \epsilon_{A_d} f(T_{\mathrm{LL}}^{(1)},\ldots,T_{\mathrm{LL}}^{(k)})e^{A_d} \tag{Α′.122}$$

where $\bar{\alpha}(\kappa_d)$ is the usual constant with proper dimensions. We must firstly determine the respective scalar. We will do so by using the previous expansion method. Therefore, it is straightforward to find that (Α′.93) leads to

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{LL}}^{j}=\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{j-1-i}\Bigg[&(j-1)(\langle KK\rangle^{\wedge i})^{a_1\ldots a_{2i}}_{b_1\ldots b_{2i}}\wedge\\ \wedge(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{\wedge j-i})^{a_{2i+1}\ldots a_{2j}}_{b_{2i+1}\ldots b_{2j}}&+(1-2j)(\langle KK\rangle^{\wedge i+1})^{a_1\ldots a_{2i+2}}_{b_1\ldots b_{2i+2}}\wedge\\ &\wedge(\mathrm{d}^{\bar{\omega}}K^{\wedge j-i-1})^{a_{2i+3}\ldots a_{2j}}_{b_{2i+3}\ldots b_{2j}}\Bigg]q(j)!\delta^{B_{2j}}_{A_{2j}}\end{aligned} \tag{Α′.123}$$

where $q(j)=d-2j$ for $1\leq j\leq k$. However, we won't really need to compute the variations of the scalar, since we may express the variation of the action as:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(\kappa_d)^{-1}\delta S=&\int(f_{T_{\mathrm{LL}}^{(1)}}\delta\mathcal{T}_{\mathrm{LL}}^{(1)}+\cdots+f_{T_{\mathrm{LL}}^{(k)}}\delta\mathcal{T}_{\mathrm{LL}}^{(k)})+\\ &+\int\epsilon_{a,A_{d-1}}(f-T_{\mathrm{LL}}^{(1)}f_{T_{\mathrm{LL}}^{(1)}}-\cdots-f_{T_{\mathrm{LL}}^{(k)}}T_{\mathrm{LL}}^{(k)})\delta e^a e^{A_{d-1}}\end{aligned} \tag{Α′.124}$$

We remark that the first two terms of the sum are the torsion and Gauss–Bonnet scalar respectively. We also note that by using (Α′.113), we may express the second integral as

$$d!\int\delta e^a(f-T_{\mathrm{LL}}^{(1)}f_{T_{\mathrm{LL}}^{(1)}}-\cdots-f_{T_{\mathrm{LL}}^{(k)}}T_{\mathrm{LL}}^{(k)})\vartheta_a \tag{Α′.125}$$

We already know the eom for this theory. Namely, they are

$$\begin{aligned}&2\pounds_{e_b}\widetilde{H}^{[ab]}_{(1:k)}-2i_{e_b}\pounds_{e_c}(e^c\widetilde{H}^{[ab]}_{(1:k)}+e^a\widetilde{H}^{[cb]}_{(1:k)})+\\ &+(2\omega^a{}_{[cb]}+T^a{}_{cb})\widetilde{H}^{cb}_{(1:k)}+4f_{(dc)}{}^a i_{e_b}(e^c\widetilde{H}^{[db]}_{(1:k)})-\\ &-f^d{}_{cb}i_{e_d}(e^a\widetilde{H}^{cb}_{(1:k)})+\widetilde{h}^a_{(1:k)}+\\ &d!(f-f_{T_{\mathrm{LL}}^{(1)}}T_{\mathrm{LL}}^{(1)}-\cdots-f_{T_{\mathrm{LL}}^{(k)}}T_{\mathrm{LL}}^{(k)})\vartheta^a=0\end{aligned} \tag{Α′.126}$$

where we denote

$$\widetilde{H}^{ab}_{(1:k)}=\sum_{j=1}^{k}f_{T_{\mathrm{LL}}^{(j)}}H^{ab}_{(j)} \tag{Α′.127}$$

We also remark that the parameters $\alpha_j$ are absorbed in $f_{T_{\mathrm{LL}}^{(j)}}\equiv\partial f\big/\partial T^{(j)}_{T_{\mathrm{LL}}}$. Respectively, we find that

$$\widetilde{h}^a_{(1:k)}=\sum_{j=1}^{k}f_{T_{\mathrm{LL}}^{(j)}}h^a_{(j)} \tag{Α′.128}$$

and a quick look at each basis tells us that there is a dimensional lower bound for $\widetilde{H}^{ab}_{(1:k)}$ and $\widetilde{h}^{a}_{(1:k)}$, which is given by considering the terms of highest order, namely $H^{ab}_{(k)}$ and $h^{a}_{(k)}$. The bound merely implies that for dimensions lower than the specific value, each term is trivial. For $H^{ab}_{(k)}$ we observe that the condition for the expression to be non-zero (due to dimensional reasons) is $d \geq 2k$, while for $h^{a}_{(k)}$ it is $d \geq 2k+1$. Lastly, we also give the equations of motion in tensor expression. They are

$$\begin{aligned} &2(\widetilde{H}^{[ac]b}_{(1:k)} + \widetilde{H}^{[ba]c}_{(1:k)} - \widetilde{H}^{[cb]a}_{(1:k)})_{,c} + \\ &+2(\widetilde{H}^{[ac]b}_{(1:k)} + \widetilde{H}^{[ba]c}_{(1:k)} - \widetilde{H}^{[cb]a}_{(1:k)}) f^{d}{}_{dc} + \\ &+(2\widetilde{H}^{[ac]d}_{(1:k)} + \widetilde{H}^{dca}_{(1:k)}) f^{b}{}_{cd} + 4 f_{(dc)}{}^{a} \widetilde{H}^{[db]c}_{(1:k)} + \\ &+(2\omega^{a}{}_{[cd]} + T^{a}{}_{cd}) \widetilde{H}^{cdb}_{(1:k)} + \widetilde{h}^{ab}_{(1:k)} + \\ &d!(f - f_{T^{(1)}_{\mathrm{LL}}} T^{(1)}_{\mathrm{LL}} - \cdots - f_{T^{(k)}_{\mathrm{LL}}} T^{(k)}_{\mathrm{LL}}) \eta^{ab} = 0 \end{aligned} \tag{A$'$.129}$$

There is no reason for doing any substitution at this moment. This can be done, when a choice of $k$ is made, using then equations (A′.118), (A′.119), (A′.120) and (A′.121).

# Βιβλιογραφία


**[1]** A. L. Besse. *Einstein Manifolds.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1 edition, 1987.

**[2]** W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, San Diego, 2 edition, 1986.

**[3]** G. Catren. Geometrical Foundations of Cartan Gauge Gravity. *arXiv:1407.7814*, 2014.

**[4]** M. Crampin. Cartan Connections and Lie Algebroids. *SIGMA 5, 061*, 2009.

**[5]** J. M. Ezquiaga, J. García-Bellido, and M. Zumalacárregui. Towards the most general scalar-tensor theories of gravity: a unified approach in the language of differential forms. *Phys. Rev. D 94, 024005, arXiv:1603.01269v2 [hep-th]*, 2016.

**[6]** J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui. Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett. 119, 251304, arXiv:1710.05901v2 [astro-ph.CO]*, 2017.

**[7]** J. B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra.* Pearson, London, 7 edition, 2002.

**[8]** P. A. Gonzalez and Y. Vasquez. Teleparallel Equivalent of Lovelock Gravity. *Phys. Rev. D 92, 124023 (2015).*

**[9]** F. Gronwald. Metric-Affine Gauge Theory of Gravity I. Fundamental Structure and Field Equations. *Int.J.Mod.Phys. D6 263-304*, 1997.

**[10]** B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction.* Springer International Publishing, Switzerland, 2 edition, 2015.

**[11]** S. Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, London, 1962.

**[12]** M. W. Hirsch. *Differential Topology.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1976.

**[13]** J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1972.

**[14]** D. Husemöller. *Fibre Bundles.* Springer-Verlag, New York, 3 edition, 1994.

**[15]** J. L. Kelley. *General Topology.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1975.

**[16]** S. Kobayashi. Theory of connections. *Annali di Matematica Pura ed Applicata 43*, 1957.

**[17]** S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, Vol. I.* Interscience (Wiley), New York, 1 edition, 1963.

**[18]** G. Kofinas and E. N. Saridakis. Teleparallel equivalent of Gauss-Bonnet gravity and its modifications. *Phys. Rev. D 90, 084044, arXiv:1404.2249v3 [gr-qc]*, 2014.

**[19]** J. Lee. *Introduction to Topological Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2011.

**[20]** J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1997.

**[21]** J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2012.

**[22]** K. C. Mackenzie. *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids, Lecture Note Series 213, London Mathematical Society.* Cambridge University Press, New York, 2005.

**[23]** B. Mendelson. *Introduction to Topology.* Dover Publications, USA, 3 edition, 1990.

**[24]** J. W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

**[25]** I. Moerdijk and J. Mrčun. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

**[26]** S. Morita. *Geometry of Differential Forms.* American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.

**[27]** G. L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2011.

**[28]** M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.* IOP Publishing, Bristol-Philadelphia, 2 edition, 2003.

**[29]** A. L. Onishchik and E. B. Vinberg. *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1 edition, 1990.

**[30]** P. Petersen. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2006.

**[31]** R. W. Sharpe. *Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1997.

**[32]** G. F. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* Krieger Publishing Company, Florida, 2 edition, 1983.

**[33]** S. B. Sontz. *Principal Bundles: The Classical Case.* Springer International Publishing, Switzerland, 1 edition, 2015.

**[34]** N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, New Jersey, 1 edition, 1951.

**[35]** R. Troncoso and J. Zanelli. Higher Dimensional Gravity, Propagating Torsion and AdS Gauge Invariance. *Class.Quant.Grav. 17 (2000) 4451-4466.*

**[36]** L. W. Tu. *An Introduction to Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 2011.

**[37]** F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, New York, 1983.

**[38]** D. Wise. MacDowell-Mansouri gravity and Cartan geometry. *Class.Quant.Grav.27:155010*, 2010.

**[39]** E. Witten. (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. *Nucl.Phys. B311 (1988) 46*, 1988.

**[40]** A. Čap and J. Slovák. *Parabolic Geometries I: Background and General Theory.* American Mathematical Society, USA, 2009.