ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

Διπλωματική Εργασία

Μη Αρνητικοί Πίνακες

ΧΑΣΑΠΗ Π. ΣΤΑΜΑΤΙΝΑ

ΑΘΗΝΑ, 2018

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

Διπλωματική Εργασία

Μη Αρνητικοί Πίνακες

ΧΑΣΑΠΗ Π. ΣΤΑΜΑΤΙΝΑ

Εξεταστική Επιτροπή: **Φελλούρης Ανάργυρος, Καθηγητής**

Στεφανέας Πέτρος, Επίκουρος Καθηγητής

Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής (Επιβλέπων)

ΑΘΗΝΑ, 2018

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν με οποιονδήποτε τρόπο στην επιτυχή εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα πρέπει να ευχαριστήσω θερμά τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Ψαρράκο για την επίβλεψη αυτής. Μου προσέφερε τις γνώσεις και την εμπειρία του για την βαθύτερη κατανόηση του χώρου των πινάκων γενικά και ειδικότερα, των μη αρνητικών. Ήταν πάντα διαθέσιμος να ασχοληθεί με κάθε απορία μου σχετική με ακαδημαϊκά ζητήματα, εντός και εκτός των πλαισίων της παρούσας εργασίας και με κάθε δισταγμό ή απογοήτευσή μου όταν κάποιες νέες μαθηματικές έννοιες ήταν αρκετά δυσνόητες σε μένα.Η στήριξη του ήταν ιδιαίτερα πολύτιμη όσο και οι ιδέες που μου προσέφερε.

Θέλω επίσης να αναφέρω ανθρώπους, εκτός του στενού ακαδημαϊκού περιβάλλοντος, που υπήρξαν σημαντικοί πόλοι στη ζωή μου, προσδίδοντας την απαιτούμενη ισορροπία Θα ήθελα λοιπόν, να ευχαριστήσω το Γιάννη, για την αμέριστη ψυχολογική στήριξη του, την κατανόηση, τη πολύτιμη βοήθεια του και τις συμβουλές του, όποτε τον χρειαζόμουν.

Τον αδερφό μου, Κωνσταντίνο για την υπομονή που έδειξε όχι μόνο στην διάρκεια του μεταπτυχιακού αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων, για την αμέριστη και αδιαμαρτύρητη βοήθεια και γενικότερη στήριξη που μου προσέφερε. Τον μπαμπά μου, την ήρεμη δύναμη, που πάντα ήταν εκεί να με στηρίζει και να με εμψυχώνει, στηρίζοντας όλα αυτά τα χρόνια κάθε μου επιλογή. Τέλος, πιστεύω ότι τη παρούσα διπλωματική, θα πρέπει να την αφιερώσω δικαιωματικά σε μια σπουδαία γυναίκα που αποτέλεσε την αιτία των όσων είμαι σήμερα.Στη γυναίκα που με έμαθε να γράφω, να διαβάζω και αδιαμαρτύρητα, πάντα με χαμόγελο και υπομονή με στηρίζει,πιστεύει σε μένα και αποτελεί την κινητήριο δύναμη για να ξεπεράσω τον εαυτό μου. Ελπίζω να συνεχίσει να είναι δίπλα μου και να με στηρίζει, καθώς ένας κύκλος πάντα κλείνει για να ανοίξει ένας άλλος, πιο όμορφος….

Για σένα μαμά.....

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το 1907,ο O. Perron μελέτησε πρώτος φασματικές ιδιότητες των τετραγωνικών πινάκων με θετικά στοιχεία. Αυτή η μελέτη ουσιαστικά γενικεύτηκε από τον F.G. Frobenius, ο οποίος επέκτεινε τα αποτελέσματα του Perron σε πίνακες με μη αρνητικά στοιχεία. Τις τελευταίες δεκαετίες, η θεωρία των μη αρνητικών πινάκων έχει γίνει μια από τις πιο ουσιαστικές, ενεργείς περιοχές της Γραμμικής Άλγεβρας. Έχει πολλές εφαρμογές όχι μόνο στα Μαθηματικά και γενικότερα στις φυσικές επιστήμες αλλά και στις κοινωνικές επιστήμες.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 4 κεφάλαια. Αρχικά, τα Κεφάλαια 1, 2 και 3 περιέχουν τη βασική θεωρία Perron-Frobenius. Οι περισσότερες αποδείξεις είναι σε αυτή την εργασία, απλούστερες σε σχέση με τις αρχικές αποδείξεις του Frobenius.Τα τρία λοιπόν πρώτα κεφάλαια, με την πιθανή εξαίρεση των Ενοτήτων 2.1 και 2.3 σχηματίζουν τον απαραίτητο και αναγκαίο πυρήνα της θεωρίας των μη-αρνητικών πινάκων.Πιο συγκεκριμένα, το Κεφάλαιο 1, μελετώνται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί μη αρνητικών πινάκων, οι maximal(μεγίστου) ιδιοτιμές τους και οι κύριοι υποπίνακες αυτών. Εισάγεται επίσης η έννοια των μη υποβιβάσιμων πινάκων. Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 2, επικεντρωνόμαστε στον εντοπισμό των maximal ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα,με την κατασκευή σχετικών φραγμάτων, αλλά και φραγμάτων για τα αντίστοιχα(μέγιστα) ιδιοδιανύσματα.

Στο Κεφάλαιο 3,παρουσιάζονται οι έννοιες των πρωταρχικών και μη πρωταρχικών πινάκων, η Frobenius μορφή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα, καθώς και τους πίνακες σε υπερδιαγώνια μορφή.Στο Κεφάλαιο 4, γνωρίζουμε τις δομικές ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων. Ορίζοντας την παραμείνουσα των (0,1) πινάκων, συνδέουμε τους μη αρνητικούς πίνακες με γραφήματα.Τέλος,ορίζουμε τους πλήρως αδιάσπαστους, σχεδόν διασπάσιμους και σχεδόν υποβιβάσιμους πίνακες.

Πίνακας περιεχομένων

Συμβολισμοί και Ορολογία

1. *ΓΕΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ*

Έστω $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{P}$ τα σύνολα των πραγματικών αριθμών, των μιγαδικών αριθμών και των μη αρνητικών αριθμών αντίστοιχα. Εάν S είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο, τότε με $M_{m,n}(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο των m×n πινάκων με στοιχεία από το σύνολο S. Εάν m=n, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $M_n(S)$.

Το *(i,j)* στοιχείο ενός πίνακα A συμβολίζεται ως α_{ij} και αναφέρεται στο στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται στην i-γραμμή και στην j-στήλη του πίνακα A. Επιπλέον, το *(i,j)* στοιχείο ενός πίνακα A, επίσης αναφέρεται και ως A_{ij},παρόλο που το περιεχόμενο των πινάκων A_{ij} που παίρνουν μέρος μπορεί να αντιπροσωπεύει το *(i,j)* block του πίνακα A. Η i-γραμμή και η j–στήλη του πίνακα A δηλώνονται ως A_i και A_j αντίστοιχα.

Ο $n\times n$ μοναδιαίος πίνακας γράφεται ως I_n ή απλά I. Ο m×n μηδενικός πίνακας συμβολίζεται ως $O_{m,n}$ ή απλά O. Ο διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $d_1, d_2, \ldots, d_n$ στην κύρια διαγώνιο του συμβολίζεται ως diag$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Αντίστοιχα, ο $n\times n$ πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι $1/n$ συμβολίζεται ως J_n. Ο πίνακας J χωρίς δείκτη, αντιπροσωπεύει ένα πίνακα του οποίου όλα τα στοιχεία ισούται με τη 1.

Ο πίνακας του οποίου το *(i,j)*-στοιχείο είναι 1 και όλα τα άλλα στοιχεία είναι 0 συμβολίζεται ως E_{ij}. Γενικά, ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 0 και 1 καλείται *(0,1)*-πίνακας. Εάν $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(S)$, τότε ο πίνακας A^T είναι ο ανάστροφος πίνακας του A. Τα σύμβολα $|\alpha_{ij}|$ και $\overline{\alpha_{ij}}$ δηλώνουν τα στοιχεία των m×n πινάκων $|A|$ *και* $\bar{A}$ αντίστοιχα, όπου ο $\bar{A}$ είναι ο συζυγής του πίνακα A. Ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα A συμβολίζεται ως A^*.

Το σύμβολο * ανάμεσα σε δύο πίνακες αντιπροσωπεύει το γινόμενο Hadamard. Εαν ο A=(α_{ij}) και ο B=(b_{ij}) είναι δύο m×n πίνακες, τότε ο $A*B$ είναι ένας m×n πίνακας του οποίου το *(i,j)* στοιχείο είναι το $\alpha_{ij}b_{ij}$ για όλα τα i,j.

2. *ΒΑΘΜΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ*

Η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A συμβολίζεται ως *det(A)*.Η παραμείνουσα ενός $m\times n$ πίνακα A όπου $m \leq n$ συμβολίζεται ως *Per(A)* και ορίζεται ως εξής:

$$Per(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)},$$

όπου η άθροιση επεκτείνεται για όλες τις 1-1 συναρτήσεις από το *{1,2,….m}* στο *{1,2,…,n}*.

3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΥΠΟΠΙΝΑΚΕΣ

Εαν k,n είναι ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $1 \leq k \leq n$ τότε τα σύνολα $Q_{k,n}$ και $G_{k,n}$ δηλώνουν τα σύνολα αυξουσών ακολουθιών ακεραίων,

$$\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \qquad 1 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k \leq n$$

και το σύνολο των μη φθίνουσων ακολουθιών ακεραίων,

$$\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n), \qquad 1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots < \omega_k \leq n,$$

αντίστοιχα. Εάν το $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in Q_{k,n}$ και p,q είναι ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $1 \leq p < q \leq k$ τότε $\alpha^{(p,q)}$ δηλώνει την υπακολουθία $(\alpha_p, a_{p+1}, \ldots, a_q)$.

Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(S)$ και έστω $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ και $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ ακολουθίες των $Q_{h,m}$ και $Q_{k,n}$, αντίστοιχα. Τότε ο συμβολισμός

$$A[\alpha|\beta] = A[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h | \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k]$$

δηλώνει τον $h \times k$ υποπίνακα του Α του οποίου το *(i,j)* είναι το $\alpha_{\alpha_i \beta_j}$, $i=1,2,\ldots,h$, $j=1,2,\ldots k$ και ο

$$A(\alpha|\beta) = A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h | \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k),$$

είναι ο $(m-h) \times (n-k)$ υποπίνακας του A που προκύπτει μέσω του A διαγράφοντας τις $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ γραμμές και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ στήλες. Συχνά χρησιμοποιούμε για τα παραπάνω συντομεύσεις όπως $A[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ και $A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$ αντίστοιχα. Με παρόμοιο τρόπο, οι πίνακες $A[\alpha|\alpha]$ και $A(\alpha|\alpha)$ γράφονται ως εξής: $A[\alpha]$ και $A(\alpha)$, αντίστοιχα.

Τέλος, ο συμπληρωματικός πίνακας ενός n×n πίνακα, συμβολίζεται ως *adjA* και είναι ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου το *(i,j)* στοιχείο είναι $(-1)^{i+j} det(A(j|i))$, όπου $i,j=1,2,\ldots,n$.

,

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι
Φασματικές ιδιότητες των μη-αρνητικών πινάκων

1.1.1 Γραμμικοί μετασχηματισμοί σε μη αρνητικούς πίνακες

Η συνήθης μέθοδος για να μελετήσουμε αναλλοίωτες ποσότητες που ορίζονται στους πίνακες είναι να απλοποιήσουμε τη δομή αυτών των πινάκων, με γραμμικούς μετασχηματισμούς, γεγονός το οποίο διατηρεί αυτές τις ποσότητες σταθερές. Σε αυτό το Κεφάλαιο, μας ενδιαφέρουν οι φασματικές ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων και έτσι ανακύπτει το εξής ερώτημα: Τι γραμμικοί μετασχηματισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στους μη αρνητικούς πίνακες ώστε να απλοποιηθεί η δομή τους; Ειδικότερα, ποιοι γραμμικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν μη αρνητικούς πίνακες σε μη αρνητικούς πίνακες διατηρώντας το φάσμα τους σταθερό;

Αρχικά, θα ορίσουμε ένα κλασικό αποτέλεσμα του Frobenius στους γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρεί την συνάρτηση της ορίζουσας σταθερή.

Θεώρημα 1.1.1 (Frobenius, [9])

Εάν ο T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο M_n (ℂ) που *διατηρεί την ορίζουσα κάθε πίνακα σταθερή, τότε υπάρχουν πίνακες U και V τέτοιοι ώστε det(UV)=1 και*

$$T(A)=UAV,$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$, ή

$$T(A)=UA^T V,$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε δύο αποτελέσματα [7] σχετικά με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς στους μιγαδικούς πίνακες.

Θεώρημα 1.1.2

Εάν ο T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο $M_n(\mathbb{C})$ *τέτοιος ώστε ο T να διατηρεί την ορίζουσα και το ίχνος κάθε πίνακα, με τέτοιο τρόπο, ώστε να ισχύει det((T(A))=det(A) και tr(T(A))=tr(A) για κάθε πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{C})$*,τότε υπάρχει ένας πίνακας V στους* $M_n(\mathbb{C})$ *τέτοιος ώστε:*

$$T(A)= V^{-1}AV,$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$, ή

$$T(A)= V^{-1}A^T V,$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Απόδειξη Θεωρήματος 1.1.2

Εφόσον ο T διατηρεί την ορίζουσα, υπάρχουν, από το Θεώρημα 1.1.1, πίνακες $U = (u_{ij})$ και $V= (v_{ij})$ τέτοιοι ώστε det(UV) = 1 και είτε

$$T(A)=UAV, \tag{1}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$, ή

$$T(A)= UA^T V, \tag{2}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$. Εάν ο T είναι της μορφής (1), τότε

$$T(E_{ij}) = U\, E_{ij} V = U^{(i)} V_{(j)}.$$

Στη συνέχεια, γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{tr}(E_{ij}) = \delta_{ij},$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T(E_{ij})) &= \mathrm{tr}\,(UE_{ij}V) \\ &= \textstyle\sum_{s=1}^{n} u_{si} v_{js} \\ &= (VU)_{ji}. \end{aligned}$$

Εφόσον $tr\,(T(E_{ij}))=tr(E_{ij})$, έχουμε ότι

$$(VU)_{ji} = \delta_{ij},$$

για όλα τα i,j, και συνεπώς, προκύπτει ότι

$$VU = I_n,$$

που σημαίνει ότι

$$T(A)= V^{-1} A V.$$

Εάν $T(A)= UA^T V$ για κάθε $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C})$,μπορούμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο ότι

$$\mathrm{tr}\,(T(E_{ij})) = (VU)_{ji},$$

για κάθε i,j και συνεπώς

$$VU = I_n.$$

Ως εκ τούτου, σε αυτή την περίπτωση,

$$T(A)= V^{-1} A^T V,$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$. ■

Πόρισμα 1.1.1

Ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο χώρο των μιγαδικών n×n (τετραγωνικών) πινάκων κρατά το φάσμα του κάθε πίνακα σταθερό αν και μόνο αν διατηρεί το ίχνος και την ορίζουσα του κάθε πίνακα.

Για την απόδειξη του κύριου θεωρήματος αυτής της ενότητας απαιτείται το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 1.1.1

Ο αντίστροφος ενός μη αρνητικού πίνακα A είναι μη αρνητικός αν και μόνο αν ο A είναι ένας γενικευμένος πίνακας μετάθεσης.

Απόδειξη

Η επάρκεια αυτής της συνθήκης είναι προφανής. Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n\ (P)$ και υποθέτουμε ότι ο $A^{-1} = (b_{ij})$ είναι μη αρνητικός. Έτσι,

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\ldots,n$$

Εάν η i-οστή γραμμή του πίνακα A έχει ακριβώς k θετικά στοιχεία στις θέσεις (i, j_s), $s=1,2,\ldots,k$, και $j \neq i$ τότε b_{tj} πρέπει να εξαφανιστεί για $t = j_s$, $s = 1,2,\ldots,k$. Με άλλα λόγια, ο A^{-1} θα πρέπει να περιέχει ένα $k \times (n-1)$ μηδενικό υποπίνακα. Ωστόσο αν το k ήταν μεγαλύτερο του 1, τότε προφανώς η ορίζουσα του A^{-1} θα ήταν μηδενική. Ως εκ τούτου, ο k δεν μπορεί να υπερβαίνει το 1. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο A έχει το πολύ ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και αφού είναι αντιστρέψιμος, θα πρέπει να είναι ένας γενικευμένος πίνακας μετάθεσης. ■

Θεώρημα 1.1.3 (Minc, [25])

Εάν ο T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο $M_n(\mathbb{C})$ που απεικονίζει μη αρνητικούς πίνακες σε μη αρνητικούς πίνακες και διατηρεί το φάσμα κάθε μη αρνητικού πίνακα, τότε υπάρχει ένας μη αρνητικός γενικευμένος πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε

$$T(A)=P^{-1}A\,P, \tag{3}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$, ή

$$T(A)=P^{-1}A^{T}P, \tag{4}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Απόδειξη

Εφόσον ο T διατηρεί τα φάσματα όλων των μη αρνητικών πινάκων, διατηρεί τα ίχνη και τις ορίζουσες τους. Σαφώς, οποιοσδήποτε γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί το ίχνος κάθε μη αρνητικού πίνακα $n \times n$ πίνακα και πιο συγκεκριμένα κάθε E_{ij}, θα διατηρεί τα ίχνη όλων των μιγαδικών τετραγωνικών πινάκων στο $M_n(\mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι ο T μετασχηματισμός επίσης διατηρεί την ορίζουσα κάθε μιγαδικού πίνακα σταθερή. Έστω ένας

$n\times n$ πίνακας $X= (X_{ij})$, όπου τα x_{ij} είναι ανεξάρτητα απροσδιόριστα στοιχεία, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$.Τα στοιχεία που εισάγονται στον $T(X)$ είναι καθορισμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του X. Ως εκ τούτου, η διαφορά $\det(T(X)) - \det(X)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς τα απροσδιόριστα στοιχεία x_{ij}. Αυτό το πολυώνυμο εξαφανίζεται ένα ο X αντικατασταθεί από οποιοδήποτε μη αρνητικό $n\times n$ πίνακα. Συνεπάγεται,ότι το πολυώνυμο $\det(T(X)) - \det(X)$ ισούται με το 0,που σημαίνει ότι

$$det(T(X)) = det(X)$$

και έτσι

$$det(T(A)) = det(A)$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Ως εκ τούτου, ο T διατηρεί τόσο το ίχνος όσο και την ορίζουσα κάθε μιγαδικού $n\times n$ πίνακα και συνεπώς, από το Θεώρημα 1.1.2, υπάρχει ένας πίνακας S τέτοιος ώστε

$$T(A) = S^{-1}AS, \qquad \textbf{(5)}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ή

$$T(A)= S^{-1}A^T S, \qquad \textbf{(6)}$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$. Εάν ο T είναι της μορφής (5), τότε

$$T(E_{ij}) = S^{-1}E_{ij}\, S = (S^{-1})^{\,i}\, S_j$$

είναι μη αρνητικό για κάθε i και j. Ως εκ τούτου,

$$S_{jk} \geq 0,$$

για κάθε h,i,j,k. Στη συνέχεια, όχι όλα τα $(S^{-1})_{hi}$ μπορούν να μηδενιστούν. Ως εκ τούτου υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός α τέτοιος ώστε

$$S_{jk} = \alpha|S_{jk}|,$$

για όλα τα j και k. Με άλλα λόγια, το S είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο ενός μη αρνητικού πίνακα P και συνεπώς

$$S^{-1}AS =P^{-1}AP,$$

για κάθε A. Έχουμε ότι

$$\mathrm{T}(E_{ij}) = P^{-1}E_{ij}\, P =(P^{-1})^{\,i}\, P_{(j)},$$

το οποίο θα πρέπει να είναι μη αρνητικό για κάθε i,j. Συνεπάγεται λοιπόν, όπως πριν ότι

$$(P^{-1})_{hi}\, P_{jk} \geq 0,$$

για κάθε h,i,j,k. Από τη στιγμή, λοιπόν που κάποιοι από τους P_{jk} πρέπει να είναι θετικοί, όλοι οι $(P^{-1})_{hi}$ πρέπει να είναι μη αρνητικοί., που σημαίνει, ότι ο P^{-1} είναι ένας μη αρνητικός πίνακας.Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Λήμμα 1.1.1. Εάν ο *T* είναι της μορφής (6), η απόδειξη είναι παρόμοια.

Τέλος, είναι προφανές από το πρώτο μέρος της απόδειξης και το Πόρισμα 1.1.1,ότι η προφανώς αδύναμη προϋπόθεση, ότι δηλαδή ο Τ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός στους μη αρνητικούς πίνακες απλώς κρατά την ορίζουσα και το ίχνος σταθερό, είναι επαρκής για να προκύψει το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.1.3.

1.2.1 Μη υποβιβάσιμοι πίνακες

Ένας πίνακας X καλείται μετάθεση σε ένα πίνακα Y, εάν υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε $X= P^T AP$.

<u>Ορισμός 1.2.1</u>

Ένας μη αρνητικός $n\times n$ (τετραγωνικός) πίνακας A, με $n \geq 2$, καλείται *υποβιβάσιμος (διασπάσιμος),* εάν είναι μετάθεση σε ένα πίνακα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

όπου οι *B και D* είναι τετραγωνικοί υποπίνακες. Σε αντίθετη περίπτωση, ο πίνακας Α είναι μη υποβιβάσιμος(μη διασπάσιμος). Προφανώς, ο A είναι υποβιβάσιμος εάν και μόνο αν υπάρχει μια διάταξη της μορφής $(i_1,i_2,\ldots\ldots,i_s,j_{s+1},j_{s+2},\ldots.j_n)$ *του* $(1,2,\ldots.n)$ τέτοια ώστε $A[i_1,i_2,\ldots\ldots,i_s\,|\,j_{s+1},j_{s+2},\ldots.j_n] = 0$. Ένας 1×1 πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος, εξ’ ορισμού. Στη συνέχεια, θα αποδειχτεί μια σημαντική ιδιότητα των μη υποβιβάσιμων πινάκων.

<u>Θεώρημα 1.2.1</u>

Εάν A είναι ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός $n\times n$ *πίνακας, με* $n \geq 2$, *και y είναι ένα μη αρνητικό ν-διάστατο διάνυσμα με ακριβώς k θετικές συντεταγμένες,* $1\leq k \leq n-1$, *τότε το διάνυσμα* $(I_n+A)\,y$ *έχει περισσότερες από k θετικές συντεταγμένες.*

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι k συντεταγμένες του y είναι θετικές και οι υπόλοιπες μηδενίζονται. Έστω P ότι είναι ένας πίνακας μετάθεσης τέτοιος ώστε οι k πρώτες συντεταγμένες του $x=Py$ είναι θετικές και οι άλλες μηδέν. Από τη στιγμή, που $A \geq 0$, ο αριθμός των μηδενικών συντεταγμένων στο $(I_n+A)\,y= y+Ay$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το n-k.Έστω ότι είναι n-k.Αυτό σημαίνει ότι $(Ay)_i = 0$ όποτε το $y_i = 0$, δηλαδή $(PAy)_i = 0$ όποτε $(Py)_i = 0$. Αλλά $Py = x$ και συνεπώς το συμπέρασμα ότι $(I_n+A)y$ έχει τόσα μηδενικά όσα το y, είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό ότι $(PAP^Tx)_\iota = 0$ για $i = k+1,k+2,\ldots..,n$. Έστω $B =(b_{ij})= PAP^T$. Τότε,

$$\begin{aligned}(Bx)_i &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\, x_j \\ &= 0,\end{aligned}$$

για *i= k+1,k+2,…,n*. Αλλά $x_j > 0$ για *1 ≤ j ≤ k* και συνεπώς $b_{ij} = 0$ για *i= k+1,k+2,….,n* και *j= 1,2,…,k*. Επιπλέον, εάν ο $(I_n + A)\, y$ είχε τον ίδιο αριθμό μηδενικών συντεταγμένων όπως το y, ο πίνακας *A* θα ήταν υποβιβάσιμος. ■

Πόρισμα 1.2.1

Εάν A είναι ένας μη υποβιβάσιμος n×n πίνακας και y είναι ένα μη-μηδενικό, μη αρνητικό ν-διάστατο διάνυσμα τότε $(I_n + A)^{n-1}\, y > 0$.

Πόρισμα 1.2.2

Ένας τετραγωνικός, μη αρνητικός n×n πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν $(I_n + A)^{n-1} y > 0$.

Απόδειξη

Εάν ο A είναι μη υποβιβάσιμος, τότε $(I_n + A)^{n-1}\, e_j > 0$, για κάθε *j=1,2,…,n*. Με άλλα λόγια, όλες οι στήλες του πίνακα $(I_n + A)^{n-1}$ είναι θετικές. ■

Θεώρημα 1.2.2

Ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα ενός μη αρνητικού, μη υποβιβάσιμου πίνακα πρέπει να είναι αυστηρά θετικό.

Απόδειξη

Θεωρούμε ότι

$$Ax = \lambda x,$$

όπου ο πίνακας $A \geq 0$ είναι μη υποβιβάσιμος, $x \geq 0$ και $x \neq 0$. Ξεκάθαρα, ο αριθμός λ πρέπει να είναι μη αρνητικός. Τώρα,

$$(I_n + A)\, x = (1+\lambda)x.$$

Εάν το *x* είχε *k* μηδενικές συντεταγμένες, $1 \leq k \leq n$, *τότε* το $(1+\lambda)x$ θα έχει *k* μηδενικά επίσης, ενώ από το Θεώρημα 1.2.1, το διάνυσμα $(I_n + A)\, x$ θα έχει λιγότερα από *k* μηδενικά. Ως εκ τούτου, το *x* θα πρέπει να είναι θετικό. ■

Έστω $\alpha_{ij}{}^{k}$ ότι δηλώνει το *(i,j)* στοιχείο του A^k, ο οποίος είναι η *k*-δύναμη του $A = (\alpha_{ij})$.

Θεώρημα 1.2.3

Ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})$ *είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν για κάθε (i,j) υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε* $(a_{ij})^k > 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Τότε από το Πόρισμα 1.2.2,

$$(I_n + A)^{n-1} > 0.$$

Έστω Β = (b_{ij}) =$((I_n + A)^{n-1}A)$. Ξεκάθαρα, ο Β > 0.’Εστω

$$B = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_2A^2 + c_1A.$$

Τότε,

$$b_{ij} = (a_{ij})^n + c_{n-1}(a_{ij})^{n-1} + \ldots\ldots + c_2(a_{ij})^2 + c_1(\alpha_{ij}) > 0$$

για κάθε *(i,j)*. Συνεπάγεται λοιπόν, ότι για κάθε *(i,j)* πρέπει να υπάρχει ένας ακέραιος k, $1 \leq k \leq n$, τέτοιος ώστε $(a_{ij})^k > 0$.

Για να αποδείξουμε, το αντίθετο πρέπει να δείξουμε ότι εάν ο *A* είναι υποβιβάσιμος, τότε ο $(a_{ij})^k = 0$ για κάποιο *(i,j)*, οποιοσδήποτε και να είναι ο ακέραιος *k*. Έστω, ότι ο *A* είναι ένας υποβιβάσιμος $n \times n$ πίνακας και ότι ο *P* είναι ένας πίνακας μετάθεσης τέτοιος ώστε:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

όπου ο *B* είναι $s \times s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο, για όλα τα i,j που ικανοποιούν τη σχέση $s+1 \leq i \leq n$ *και* $1 \leq j \leq s$ το (i,j) στοιχείο του P^TAP ισούται με 0 για κάθε *k*. ■

1.1.3 Η συνάρτηση Collatz - Wielandt

Έστω S ένα υποσύνολο του συνόλου των μιγαδικών αριθμών. Ένα αξιοσημείωτο πρόβλημα στη Γραμμική Άλγεβρα, είναι να ορίσουμε πως οι φασματικές ιδιότητες ενός πίνακα επηρεάζονται, περιορίζοντας τα στοιχεία στο S. Για παράδειγμα, εάν το S είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε τα φάσματα των πινάκων στο S είναι συμμετρικά αναφορικά με τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Παρόλα αυτά, τέτοια προβλήματα μοιάζουν συνήθως μη επιλύσιμα ή πολλές φορές χωρίς κάποια ουσιαστική λύση. Το 1907, ο Perron [8], ανακάλυψε κάποιες αξιοσημείωτες και μη αναμενόμενες φασματικές ιδιότητες των θετικών πινάκων.Ο Frobenius [3,4] επέκτεινε με τη σειρά του και ενίσχυσε τα αποτελέσματα του Perron,γενικεύοντας τα, στους μη υποβιβάσιμους, μη αρνητικούς πίνακες.

Έστω, λοιπόν E^n το υποσύνολο του P^n που ορίζεται ως εξής:

$$E^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \in P^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

<u>Ορισμός 1.3.1</u>

Έστω $A=(\alpha_{ij})$ ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός $n \times n$ πίνακας. Ορίζουμε τη συνάρτηση f_A από το σύνολο P^n στο σύνολο των μη αρνητικών αριθμών ως:

$$f_A(x) = min_{xi \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα της μορφής $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^n$. Η συνάρτηση f_A καλείται Collatz - Wielandt συνάρτηση, που οποία συνδέεται με τον πίνακα A [1,9].

Θεώρημα 1.3.1

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας και έστω f_A η συνάρτηση Collatz - Wielandt, που συνδέεται με τον πίνακα A. Τότε,

i) *Η συνάρτηση f_A είναι ομογενής βαθμού 0.*
ii) *Εάν το x είναι μη μηδενικό, μη αρνητικό και ρ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο*

$$Ax - \rho x \geq 0,$$

τότε $\rho = f_A(x)$.

iii) *Εάν ο $x \in P^n$, $x \neq 0$ και $y = (I_n + A)^{n-1} x$ τότε $f_A(y) \geq f_A(x)$.*

Απόδειξη

i) Για $t > 0$ και $x \in P^n$, $x \neq 0$, έχουμε :

$$\begin{aligned} f_A(tx) &= min_{txi \neq 0} \frac{(A(tx))_i}{tx_i} \\ &= min_{txi \neq 0} \frac{t(Ax)_i}{tx_i} \\ &= min_{xi \neq 0} \frac{(Ax)_i}{x_i} \\ &= f_A(x). \end{aligned}$$

ii) Ο ορισμός της f_A υποδηλώνει ότι

$$Ax - f_A(x)\, x \geq 0,$$

και ότι υπάρχει ένας ακέραιος k, $1 \leq k \leq n$, τέτοιος ώστε $x_k \neq 0$ και η k-οστή συνιστώσα του $Ax - f_A(x)\, x$ είναι 0. Έτσι, εάν $c > f_A(x)$, τότε η k-οστή συνιστώσα του $Ax - cx$ είναι αρνητική. Έτσι, καταλήγοντας σε άτοπο προκύπτει το συμπέρασμα.

iii) Έχουμε

$$Ax - f_A(x)\, x \geq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τις δυο πλευρές με τον όρο $(I_n + A)^{n-1}$ παίρνουμε

$$A(I_n + A)^{n-1}x - f_A(x)\ (I_n + A)^{n-1}x \geq 0,$$

Βάζοντας στη θέση του όρου $(I_n + A)^{n-1}x$ τη μεταβλητή y παίρνουμε:

$$Ay - f_A(x)\, y \geq 0.$$

Όμως από το ερώτημα ii), ο $f_A(y)$ είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$Ay - f_A(x)\ y \geq 0.$$

Ως εκ τούτου,

$$f_A(y) \geq f_A(x). \blacksquare$$

Παράδειγμα 1.3.1

Έστω $A=(a_{ij})$ ένας μη αρνητικός, μη υποβιβάσιμος $n\times n$ πίνακας. Δείξτε ότι η συνάρτηση f_A είναι φραγμένη.

Ξεκάθαρα η συνάρτηση f_A είναι κάτω φραγμένη από το 0.Θα δείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη από το μεγαλύτερο άθροισμα στήλης του πίνακα Α. Έστω,

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad \mu\varepsilon \qquad j=1,2,\ldots,n$$

Με βάση το *Θεώρημα 1.3.1(i),* επαρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f_A(x) \leq \max_j c_j,$$

για κάθε $x \in E^n$. Τώρα,

$$(Ax)_i \geq f_A(x)\, x_i,$$

που σημαίνει ότι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq f_A(x)\, x_i, \quad \gamma\iota\alpha \;\; i=1,2,\ldots,n$$

Συνεπώς αθροίζοντας, σε σχέση με το i,έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{i=1}^{n} f_A(x)x_i$$

$$= f_A(x),$$

καθώς $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\, c_j$$

$$\leq \max_j c_j,$$

και συνεπώς $$f_A(x) \leq \max_j c_j\,. \blacksquare$$

Θεώρημα 1.3.2

Έστω Α ένας μη υποβιβάσιμος,μη αρνητικός $n\times n$ πίνακας.Τότε η συνάρτηση f_A επιτυγχάνει το μέγιστο της στον E^n.

(Σημειώνουμε ότι ο E^n είναι κλειστός και φραγμένος, συνεπώς είναι συμπαγής. Εάν η συνάρτηση f_A ήταν συνεχής στον E^n, το αποτέλεσμα θα προέκυπτε απευθείας.)

Απόδειξη

Έστω,

$$G = (I_n + A)^{n-1}E^n = \{y | y = (I_n + A)^{n-1}x, x \in E^n\}.$$

Τότε ο G είναι ένα συμπαγές σύνολο. Επίσης από το Πόρισμα 1.2.1,όλα τα ν-διάστατα διανύσματα στον G είναι αυστηρά θετικά. Ως εκ τούτου η f_A είναι συνεχής στο G.Από τη στιγμή, που ο G είναι συμπαγής, η συνάρτηση f_A επιτυγχάνει το μέγιστο της σημείο στο G στο $y^0=(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in$ G. Έστω $x^0 = y^0 / \sum_{i=}^{n} y_i^0 \in E^n$ και x οποιοδήποτε διάνυσμα στον E^n. Τότε εάν $y = (I_n + A)^{n-1}x$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_A(x) &\leq f_A(y), && \textit{από το Θεώρημα 1.3.1 (iii)},\\ &\leq f_A(y^0), && \textit{από τη μεγιστοποίηση του } y^0 \textit{ στο } G,\\ &= f_A(x^0), && \textit{από το Θεώρημα 1.3.1 (i)}. \end{aligned}$$

Από τη στιγμή που το x είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στον E^n συνεπάγεται ότι η συνάρτηση f_A έχει μοναδικό μέγιστο στο E^n στο σημείο x^0. ■

1.1.4 Μέγιστη ιδιοτιμή ενός μη αρνητικού πίνακα

Το παρακάτω Θεώρημα είναι αρκετά γνωστό και πιθανόν το πιο γνωστό κομμάτι της θεωρίας Perron-Frobenius.

Θεώρημα 1.4.1

Ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας Α έχει μια πραγματική, θετική ιδιοτιμή r τέτοια ώστε

$$r \geq |\lambda_i|$$

για οποιαδήποτε ιδιοτιμή λ_i του Α. Επιπλέον, υπάρχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r.

(Η ιδιοτιμή *r* καλείται maximal θετική ιδιοτιμή του A και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r καλείται maximal ιδιοδιάνυσμα του A.)

Απόδειξη

Έστω *A* ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός $n\times n$ πίνακας. Από το Θεώρημα *1.3.2* υπάρχει ένα διάνυσμα x^0 στον E^n τέτοιο ώστε

$$f_A(x^0) \geq f_A(x),$$

για κάθε x στον E^n. Έστω

$$r = f_A(x^0),$$

που σημαίνει ότι

$$r = max\ \{ f_A\ (x) |\ x \in E^n \}.$$

Αρχικά,θα δείξουμε ότι η ιδιοτιμή *r* είναι θετική. Έστω *u=(1,1,……,1) / n.*Τότε,

$$\begin{aligned} r &\geq f_A\ (u) \\ &= min_i\ \frac{(Au)_i}{u_i} \\ &= min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, \end{aligned}$$

από τη στιγμή που ο *A* δεν μπορεί να έχει μια μηδενική γραμμή. Έπειτα, θα δείξουμε ότι η *r* είναι μια ιδιοτιμή του *A*. Έχουμε ότι:

$$Ax^0 - r\, x^0 \geq 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Έστω ότι $Ax^0 - r\, x^0 \neq 0$. Τότε, από το Πόρισμα 2.1:

$$(I_n + A)^{n-1}(\ Ax^0 - r\, x^0) > 0$$

που σημαίνει ότι

$$Ay^0 - r\, y^0 > 0, \qquad \textbf{(2)}$$

με $y^0 = (I_n + A)^{n-1}x^0$. Από τη στιγμή που η σχέση (2) είναι μια αυστηρή ανισότητα, υπάρχει ένας θετικός αριθμός ε τέτοιος ώστε

$$Ay^0 - (r+\varepsilon)\, y^0 \geq 0.$$

Όμως από το Θεώρημα 1.3.1 (ii),

$$(r+\varepsilon) \leq f_A\ (y^0),$$

και συνεπώς,

$$r < f_A\ (y^0),$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τη μεγιστοποίηση της *r*. Ως εκ τούτου η σχέση (1) είναι μια ισότητα, η *r* είναι μια ιδιοτιμή και το x^0 είναι ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα και

$$Ax - rx \geq 0,$$

τότε το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην r.Αξίζει να σημειωθεί, ότι έχουμε δείξει, στην πραγματικότητα, είναι ότι εάν το x είναι ένα μη αρνητικό, μη μηδενικό διάνυσμα και

$$Ax - rx \geq 0,$$

τότε το x είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του *A* που αντιστοιχεί στην *r*. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.2.2 συνεπάγεται ότι $x > 0$. Στη συνέχεια, έστω $Az = \lambda_i z$ όπου $z = (z_1, z_2 \ldots\ldots, z_n) \neq 0$. Τότε,

$$\lambda_i z_t = \sum_{j=1}^{n} a_{tj} z_j, \qquad t = 1,2,\ldots,n,$$

Και συνεπώς,

$$|\lambda_i||z_t| \le \sum_{j=1}^{n} a_{tj}|z_j|, \qquad t = 1,2,\ldots,n \qquad \textit{(3)}$$

Πάνω στο διανυσματικό φορέα, η (3) διαβάζεται ως

$$|\lambda_i||z| \le \mathrm{A}|z|.$$

Τελικά,από το Θεώρημα 1.3.1(ii) και τον ορισμό του r

$$|\lambda_i| \le f_A(|z|) \le r. \quad \blacksquare$$

Για πίνακες, μη αρνητικούς, οι οποίοι δεν είναι απαραίτητα μη υποβιβάσιμοι, μπορούμε να δημιουργήσουμε, με αφορμή ένα επιχείρημα συνέχειας, την ακόλουθη ασθενέστερη εκδοχή του Θεωρήματος 1.4.1.

Θεώρημα 1.4.2

Εάν ο A είναι ένας μη αρνητικός $n\times n$ πίνακας, τότε ο A έχει μια μη αρνητική ιδιοτιμή r, που είναι τουλάχιστον, τόσο μεγάλη όσο και η απόλυτη τιμή οποιασδήποτε ιδιοτιμής του A και ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r.

Απόδειξη

Έστω $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$, όπου το $\varepsilon > 0$ και ο B είναι οποιοσδήποτε $n\times n$ πίνακας. Τότε ο $A_\varepsilon > 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα 1.3.1, ο A_ε έχει μια μέγιστη ιδιοτιμή r,τέτοια ώστε

$$r_\varepsilon \ge \left|\lambda_i^{(\varepsilon)}\right|. \qquad \textit{(4)}$$

Για οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή $\lambda_i^{(\varepsilon)}$ του πίνακα A_ε.(Στην πραγματικότητα, όπως θα δούμε και αργότερα), $r_\varepsilon > \left|\lambda_i^{(\varepsilon)}\right|$ αφού $A_\varepsilon > 0$. Επίσης, υπάρχει και ένα θετικό διάνυσμα x^ε στον E^n τέτοιο ώστε

$$A_\varepsilon x^\varepsilon = r_\varepsilon x^\varepsilon. \qquad \textit{(5)}$$

Τώρα, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, είναι συνεχείς συναρτήσεις στοιχείων του πίνακας. Ως εκ τούτου, $A_\varepsilon \to A$ και $r_\varepsilon \to r$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Επιπλέον, $\lambda_i^{(\varepsilon)} \to \lambda_i$, όπου οι λ_i είναι ιδιοτιμές του A και από την (4),

$$r \ge |\lambda_i| \ge 0.$$

Επιπλέον, η (5) υποδηλώνει ότι $Ax = rx$, όπου το $x \in E^n$ και συνεπώς το $x \neq 0$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα. $\blacksquare$

Στην περίπτωση που ο A είναι μη υποβιβάσιμος, μπορούμε να βρούμε το αποτέλεσμα στο Θεώρημα 1.4.1.

Θεώρημα 1.4.3

Η maximal θετική ιδιοτιμή ενός μη υποβιβάσιμου, μη αρνητικού πίνακα είναι μια απλή ρίζα της χαρακτηριστικής του εξίσωσης.

Απόδειξη

Έστω r η maximal θετική ιδιοτιμή του A, ενός μη υποβιβάσιμου, μη αρνητικού $n\times n$ πίνακα, και έστω x ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r.Από το Θεώρημα 1.2.2, το $x > 0$. Αρχικά, δείχνουμε ότι ο ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην r,είναι μονοδιάστατος. Έστω ότι:

$$Ay=ry,$$

όπου $y \neq 0$. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα,

$$A|y| \geq r|y|, \tag{6}$$

όπου το $|y|$ είναι ένα μη αρνητικό, μη μηδενικό διάνυσμα. Έτσι, καταλήγουμε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1 ότι η (6) είναι μια ισότητα και το $|y|$ είναι θετικό ιδιοδιάνυσμα του A, που αντιστοιχεί στην r.Στην πραγματικότητα, έχουμε δείξει ότι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην r, δεν μπορεί να έχει μηδενικά στοιχεία.

Στη συνέχεια, έστω $x =(x_1,x_2,\dots,x_n)$ και $y = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ είναι μη-μηδενικά διανύσματα στον ιδιόχωρο του A που αντιστοιχούν στην r. Τότε $|x|, |y| > 0$.Άρα, το διάνυσμα y_1x-x_1y είναι στον ιδιόχωρο της r και από τη στιγμή, που η πρώτη συνιστώσα του είναι μηδενική, δεν μπορεί να είναι ένα ιδιοδιάνυσμα. Ως εκ τούτου,

$$y_1x - x_1y = 0,$$

και τα x,y είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς, προκύπτει ότι ο ιδιόχωρος της r είναι διάστασης 1.

Σε αυτό το σημείο, θα αποδείξουμε, ότι η r είναι μια απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A. Έστω $\Delta(\lambda) = det\,(\lambda I_n - A)$. Θα δείξουμε ότι $\Delta'(r) \neq 0$.

Καλό είναι, σε αυτό το σημείο να θυμηθούμε ότι εάν κάθε στοιχείο του $X=(x_{ij})$ είναι μια διαφορίσιμη εξίσωση του λ τότε:

$$\frac{d}{d\lambda}(\det(X)) = \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(X(i|j))\,\frac{d}{d\lambda}x_{ij}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\Delta'(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}(\det(\lambda I_n - A))\\ &= \sum_{i=1}^{n} det\,((\lambda I_n - A)(i|i))\\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)),\end{aligned}$$

από τη στιγμή που

$$\frac{d}{d\lambda}((\lambda I_n - A)_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\Delta'(r) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(rI_n - A)).$$

Έστω, $B(r) = adj(rI_n - A)$. Τότε,

$$(rI_n - A)\, B(r) = I_n \det(rI_n - A) = 0. \qquad (7)$$

Από τη στιγμή, που η ιδιοτιμή r έχει ένα μονοδιάστατο ιδιόχωρο, η τάξη του $r\, I_n - A$ είναι n-1 και συνεπώς $B(r) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η στήλη $B(r)^{(j)}$ είναι διαφορετική του 0. Τότε από τη σχέση (7),

$$(rI_n - A)\, B(r)^{(j)} = 0,$$

που σημαίνει ότι το $B(r)^{(j)}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r και συνεπώς το $B(r)^{(j)}$ είναι ένα πραγματικό πολλαπλάσιο ενός θετικού διανύσματος, και συγκεκριμένα είτε $B(r)^{(j)} > 0$ ή $B(r)^{(j)} < 0$.Με άλλα λόγια, κάθε στήλη του $B(r)$ είναι είτε όλη θετική, είτε όλη αρνητική ή 0 και τουλάχιστον μια από τις στήλες είναι μη μηδενικές. Τώρα, $(B(r))^T = adj(rI_n - A^T)$ και ο A^T είναι μη υποβιβάσιμος με μέγιστη ιδιοτιμή r.Ως εκ τούτου, ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα επίσης για τις στήλες του $(B(r))^T$, όπως και για τις γραμμές του $B(r)$. Συνεπώς, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του $B(r)$ είναι είτε θετική είτε αρνητική ή μηδέν και τουλάχιστον μια από τις γραμμές και μια από τις στήλες είναι μη μηδενική. Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι

$$B(r) > 0 \quad \text{ή} \quad B(r) < 0.$$

Επομένως,

$$\Delta'(r) = \mathrm{tr}(B(r)) \neq 0,$$

και η r είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A. ■

Πόρισμα 1.4.1

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος $n \times n$ πίνακας με maximal θετική ιδιοτιμή r και $Ax = rx$ και έστω $B(\lambda) = adj(\lambda I_n - A))$. Τότε

$$B(r) > 0.$$

Πόρισμα 1.4.2

Εάν ο A είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με maximal θετική ιδιοτιμή r και $Ax = r$, τότε το x είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο ενός θετικού διανύσματος.

Έχουμε δείξει ότι η maximal ιδιοτιμή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα είναι απλή. Παρ' όλα αυτά, ο πίνακας μπορεί επίσης να έχει και άλλες θετικές ιδιοτιμές. Είναι συνεπώς αξιοσημείωτο, ότι το maximal ιδιοδιάνυσμα ενός μη αρνητικού πίνακα είναι(εκτός από τα θετικά πολλαπλάσια), το μόνο μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που μπορεί να έχει.

Θεώρημα 1.4.4

Ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας έχει ακριβώς ένα ιδιοδιάνυσμα στον E^n.

Απόδειξη

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας,με maximal ιδιοτιμή r και έστω $y \in E^n$, το maximal ιδιοδιάνυσμα του A^T. Τότε $y>0$. Επίσης, έστω z $\in E^n$ ένα τυχαίο ιδιοδιάνυσμα του A, τέτοιο ώστε:

$$Az = \zeta z.$$

Εάν (,) δηλώνει το κλασικό εσωτερικό γινόμενο τότε:

$$\zeta(z,y) = (Az,y) = (z,A^T y) = r(z,y).$$

Τώρα, αφού $(z,y) >0$ καθώς z $\in E^n$ και y >0.Συνεπώς $\zeta = r$. Με άλλα λόγια, η μόνη ιδιοτιμή του A, με μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα είναι η r. Το αποτέλεσμα τελικά προκύπτει μέσω του Θεωρήματος 1.4.3. ■

Έχουμε δείξει ότι η :

$$r = max\,\{ f_A(x) |\, x \in E^n\}$$

$$= max\,\{ min_{xi\neq 0}\ \frac{(Ax)_i}{x_i} \,|\, x \in E^n\}$$

είναι η maximal θετική απλή ιδιοτιμή του A και έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα. Εναλλακτικά, μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα, ορίζοντας τη συνάρτηση g_A:

$$\boldsymbol{g_A(x)} = \boldsymbol{max_{xi\neq 0}}\ \frac{\boldsymbol{(Ax)_i}}{\boldsymbol{x_i}} \qquad \textbf{\textit{(8)}}$$

για $\forall\, x \in P^n$,με $x \neq 0$,όπου ορίζουμε την $\boldsymbol{g_A} = +\infty$, εάν για κάποια i, $x_i = 0$ και το $(Ax_i) \neq 0$ (ή ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η $\boldsymbol{g_A(x)}$ δεν ορίζεται για κάποια x).

Δείξαμε ότι,

$$s = min\{\boldsymbol{g_A(x)} |\, x \in E^n\}$$

$$= min\,\{\boldsymbol{max_{xi\neq 0}}\ \frac{(Ax)_i}{x_i} \,|\, x \in E^n\,\}$$

είναι η maximal θετική ιδιοτιμή του A.

<u>Θεώρημα 1.4.5</u>

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας και έστω g_A η συνάρτηση που ορίζεται στη σχέση (8). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) *Η g_A είναι ομογενής βαθμού 0.*
ii) *Εάν το x είναι ένα μη αρνητικό ν-διάστατο διάνυσμα τέτοιο ώστε $x_i > 0$ όταν $Ax_i > 0$, και σ είναι ο ελάχιστος αριθμός για τον οποίο ισχύει*

$$\sigma x\text{-}Ax \geq 0,$$

τότε σ= $g_A(x)$.
iii) *Εάν x είναι της μορφής του ερωτήματος (ii) και $y=(I_n + A)^{n-1}x$ τότε $g_A(y) \geq g_A(x)$*
iv) *Η g_A λαμβάνει το ελάχιστο της στον E^nσε ένα θετικό n-διάστατο διάνυσμα.*

<u>Θεώρημα 1.4.6</u>

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός n×n πίνακας με maximal θετική ιδιοτιμή r. Εάν

$$s= \min\{g_A(x) \mid x\in E^n\},$$

τότε s=r.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω x^0 ένα θετικό ν-διάστατο διάνυσμα στον E^n τέτοιο ώστε $g_A(x^0) \leq g_A(x)$ για κάθε $x \in E^n$ για τα οποία η g_A ορίζεται. Θα δείξουμε ότι η s είναι μια ιδιοτιμή και το x^0 ένα ιδιοδιάνυσμα του *A*. Από τη στιγμή που

$$sx^0 - Ax^0 \geq 0,$$

αρκεί να δείξουμε ότι η ποσότητα sx^0 - Ax^0 δεν μπορεί να μηδενιστεί. Έστω ότι δεν είναι 0. Τότε από το *Πόρισμα 1.2.1,*

$$(I_n + A)^{n-1} (sx^0 - Ax^0) > 0,$$

δηλαδή

$$sy^0 - Ay^0 > 0 ,$$

όπου $y^0=(I_n + A)^{n-1}x^0$.Έτσι, για επαρκώς μικρό θετικό ε,

$$(s-\varepsilon)y^0 - Ay^0 \geq 0,$$

και συνεπώς από το Θεώρημα 1.4.5 (ii),

$$g_A(y^0) \leq s\text{-}\varepsilon.$$

Αλλά αυτό μπορεί να συνεπάγεται ότι,

$$g_A(y^0) < s,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την ελαχιστοποίηση του s.Συνεπώς,

$$Ax^0 = sx^0,$$

και η s είναι μια ιδιοτιμή του A. Προκύπτει από το Θεώρημα 1.4.4 ότι $s = r$. ■

Τελειώνοντας παρουσιάζουμε ένα σημαντικό κριτήριο για τη μη υποβιβασιμότητα ενός μη αρνητικού πίνακα.

Θεώρημα 1.4.7

Ένας πίνακας $A \geq 0$ με μια απλή maximal ιδιοτιμή r είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν και ο A και ο A^T έχουν θετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην r.

Απόδειξη

Η αναγκαιότητα της συνθήκης προκύπτει από το Θεώρημα 1.4.1. Για να αποδειχθεί το αντίθετο, υποθέτουμε ότι ο $A \geq 0$ έχει μια απλή maximal ιδιοτιμή r,και ότι τόσο ο A όσο και ο A^T έχουν θετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην *r*. Εάν ο *A* ήταν υποβιβάσιμος, τότε θα υπήρχε ένας πίνακας μετάθεσης *P* τέτοιος ώστε:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

όπου ο *B* είναι ένας $k \times k$ υποπίνακας.Σημειώστε ότι ο $P^T A P$ έχει μια απλή maximal ιδιοτιμή *r* και ταυτόχρονα και ο $P^T A P$ και ο $P^T A^T P$ έχουν θετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην r. Τώρα, η *r* θα πρέπει να είναι maximal ιδιοτιμή τόσο για τον πίνακα *B*, όσο και για τον πίνακα *C*. Εάν $Bv = rv$, όπου το *v* είναι ένα μη αρνητικό,μη μηδενικό k-διάστατο διάνυσμα,τότε το ν-διάστατο διάνυσμα v $\dotplus$ 0, δεν είναι ένα πολλαπλάσιο ενός θετικού ιδιοδιανύσματος, θα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $P^T A P$ που αντιστοιχεί στην *r*. Αυτό, βέβαια θα ερχόταν σε αντίθεση με την απλότητα της ιδιοτιμής του *r*. Εάν η r ήταν η maximal ιδιοτιμή του *C*,τότε $C^T u = ru$, για κάποια μη μηδενικά, μη αρνητικά *(n-k)-διάστατα u* και το $0 \dotplus u$ θα είναι το ιδιοδιάνυσμα του $P^T A^T P$ γραμμικά ανεξάρτητο από το θετικό ιδιοδιάνυσμα. Αυτό βέβαια, πάλι θα έρθει σε αντίθεση με την απλότητα του *r*. ■

1.1.5 Κύριοι υποπίνακες μη αρνητικών πινάκων

Οι υποπίνακες μη αρνητικών πινάκων είναι,φυσικά,μη αρνητικοί.Τα παρακάτω αποτελέσματα, σύμφωνα με τον Frobennius[4] δίνουν μια δυνατή σχέση μεταξύ των maximal ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα και των κύριων υποπινάκων του.

Θεώρημα 1.5.1

Η maximal ιδιοτιμή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα είναι μεγαλύτερη από τη maximal ιδιοτιμή οποιουδήποτε από τους κύριους υποπίνακές του.

Απόδειξη (Marcus and Minc, [20])

Έστω A είναι ένας μη υποβιβάσιμος $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας. Μπορούμε να υποθέσουμε,χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι ο κύριος υποπίνακας βρίσκεται στις t πρώτες γραμμές και t πρώτες στήλες, το οποίο σημαίνει ότι,

$$A=\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

όπου ο B είναι ο κύριος $t\times t$ υποπίνακας. Έστω r και k, οι maximal ρίζες των A και B,αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε ως y, το μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην k και έστω $x=y\dotplus 0$ το ν-διάστατο διάνυσμα του οποίου οι πρώτες t συντεταγμένες είναι εκείνες του y, ενώ οι υπόλοιπες n-t συντεταγμένες είναι 0.Τότε,

$$Ax=\begin{bmatrix} By \\ Dy \end{bmatrix}= k\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ Dy \end{bmatrix}$$

και συνεπώς

$$Ax-kx=\begin{bmatrix} 0 \\ Dy \end{bmatrix}\geq 0.$$

Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα 1.3.1 (ii),

$$k\leq f_A\,(x)\leq r.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι αυστηρή, λόγω του γεγονότος ότι το x είναι ένα μη θετικό διάνυσμα. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.2, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα της συνέχειας, για να πάρουμε ένα παρόμοιο, πιο ασθενές από την άλλη,αποτέλεσμα για τους μη αρνητικούς πίνακες που δεν είναι απαραίτητα μη υποβιβάσιμοι.

Θεώρημα 1.5.2

Η maximal ιδιοτιμή ενός κύριου υποπίνακα ενός μη αρνητικού πίνακα Α δεν μπορεί να υπερβεί τη maximal ιδιοτιμή του Α.

Βέβαια, είναι αρκετά πιθανό για τη μέγιστη ιδιοτιμή ενός κύριου υποπίνακα, ενός μη αρνητικού πίνακα A να είναι ίση με τη μέγιστη ιδιοτιμή του A. Στη πραγματικότητα, έχουμε το ακόλουθο κριτήριο για την υποβιβασιμότητα.

Θεώρημα 1.5.3

Ένας μη αρνητικός πίνακας Α με maximal ιδιοτιμή r είναι υποβιβάσιμος αν και μόνο αν η r είναι η ιδιοτιμή ενός κύριου υποπίνακα του Α.

Απόδειξη

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει απευθείας από το Θεώρημα 1.5.1.Για να αποδείξουμε το αντίθετο, υποθέτουμε ότι ο *A* είναι υποβιβάσιμος, που σημαίνει ότι ο *A* είναι μετάθεση σε ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

όπου οι *B* και *D* πίνακες είναι τετραγωνικοί. Τότε το φάσμα του *A* αποτελείται από τις ιδιοτιμές του *B* παρέα με εκείνες του *D*. Ως εκ τούτου, η r είναι είτε μια ιδιοτιμή του κύριου υποπίνακα *B* ή του κύριου υποπίνακα *D*. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ
Εντοπισμός της maximal ιδιοτιμής

2.2.1 Φράγματα για τη maximal ιδιοτιμή ενός μη αρνητικού πίνακα

Το πρόβλημα του εντοπισμού της maximal ιδιοτιμής ενός μη αρνητικού πίνακα είναι πολύ σημαντικό τόσο στα θεωρητικά μαθηματικά, όσο και στους υπολογισμούς όπου επαναληπτικές διαδικασίες απαιτούν μια αρχική εκτίμηση της maximal ιδιοτιμής. Τα πιο γνωστά και πιο συχνά χρησιμοποιημένα όρια για τη maximal ιδιοτιμή ενός μη αρνητικού πίνακα δίνονται μέσω του Frobennius [11].Έστω r_i και c_j, ότι δηλώνουν την i-οστό άθροισμα γραμμής και το j-οστό άθροισμα στήλης αντίστοιχα, ενός πίνακα $A=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, αντίστοιχα, που σημαίνει ότι:

$$r_i = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \qquad \mu\varepsilon \quad i=1,2,\ldots,n$$

και

$$c_j = \sum_{t=1}^{n} a_{tj} \qquad \mu\varepsilon \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθούμε στο εξής:

Σε έναν μη αρνητικό πίνακα,η μεγαλύτερη πραγματική,θετική, ιδιοτιμή καλείται maximal θετική, ενώ οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου καλείται maximal.

Θεώρημα 2.1.1

Εάν ο A είναι ένας μη αρνητικός πίνακας με maximal ιδιοτιμή r και άθροισμα γραμμών $r_1, r_2, \ldots, r_n$, τότε

$$\rho \leq r \leq R, \tag{1}$$

όπου $\rho = \min_i r_i$ και $R=\max_i r_i$. Εάν ο A είναι μη υποβιβάσιμος,τότε η ισότητα ισχύει και για τις δυο πλευρές της (1) *αν και μόνο αν όλα τα αθροίσματα γραμμών του A είναι ίσα.*

(Ανάλογο συμπέρασμα, ισχύει και για τα αθροίσματα στηλών.)

Απόδειξη

Αρχικά, υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος.Έστω $(x_1,x_2,\ldots,x_n) > 0$ το maximal ιδιοδιάνυσμα του A.Τότε,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \mathrm{r}x_j, \qquad \gamma\iota\alpha\ i=1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Τώρα, εάν $x_m \geq x_j$ *για j=1, 2,…, n* τότε

$$r = \frac{1}{x_m}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = r_m \leq R.$$

Ομοίως, εάν x_μ είναι η ελάχιστη από τις συνιστώσες x_j, τότε:

$$r = \frac{1}{x_\mu}\sum_{j=1}^{n} a_{\mu j}\, x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} = r_\mu \geq \rho.$$

Εάν ο Α τυχαίνει να είναι υποβιβάσιμος,τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από το επιχείρημα της συνέχειας, με τον ίδιο τρόπο όπως στα Θεωρήματα 1.4.2,1.5.2 στο Κεφάλαιο Ι που προκύπτουν από τα Θεωρήματα 1.4.1,1.5.1 αντίστοιχα.

Μια εναλλακτική απόδειξη, που εύκολα αποφέρει συνθήκες ισότητας, είναι μια άμεση συνέπεια του παρακάτω βοηθητικού λήμματος.

Λήμμα 1.1

Έστω α μια ιδιοτιμή του Α και έστω ($x_1,x_2,\dots,x_n$) και ($y_1,y_2,\dots,y_n$) ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην α των πινάκων Α και A^T,αντίστοιχα.Τότε:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_t r_t \qquad \textbf{(2)}$$

και

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{n} y_t\, c_t. \qquad \textbf{(3)}$$

Απόδειξη

Έχουμε $\alpha x_i = \sum_{t=1}^{n} a_{ti} x_t$, *για i=1,2,…,n*. Αθροίζουμε, λοιπόν, και τις δύο πλευρές ως προς i,

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{ti}\; x_t \\ &= \sum_{t=1}^{n} x_t \sum_{i=1}^{n} a_{ti} \\ &= \sum_{t=1}^{n} x_t\, r_t \end{aligned}$$

Τώρα, έστω Α ένας μη αρνητικός πίνακας με maximal ιδιοτιμή r.Έστω, ($x_1,x_2,\dots,x_n$) ≥ 0 μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του A^T και έστω $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Τότε από τη (2),

$$r = \sum_{t=1}^{n} x_t\, r_t, \qquad \textbf{(4)}$$

και συνεπώς,

$$\min_t r_t \leq r \leq \max_t r_t \qquad \textbf{(5)}$$

Επιπλέον, εάν ο Α είναι μη υποβιβάσιμος, τότε ($x_1,x_2,\dots,x_n$) > 0.Σε αυτή την περίπτωση, η ισότητα σε οποιαδήποτε πλευρά της (5) ισχύει, αν και μόνο αν

$$r = r_t, \qquad \text{για } t = 1,2,\ldots,n$$

Με άλλα λόγια, εάν ο A είναι ο πίνακας που περιγράφεται στο Θεώρημα 2.1.1, ρ < R και ο A είναι μη υποβιβάσιμος, τότε

$$\rho < r < R. \quad \blacksquare \tag{6}$$

Το Θεώρημα 2.1.1 μπορεί επίσης να αποδειχθεί για ένα μη υποβιβάσιμο πίνακα A θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_A(u)$ και $g_A(u)$ για ένα κατάλληλο διάνυσμα u. Το αποτέλεσμα αυτό, μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους μη αρνητικούς πίνακες μέσω του Θεωρήματος της συνέχειας. Επιπλέον, η ισότητα (4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βελτιώσει τα όρια του Frobennius. Θα πρέπει να απαιτήσουμε, την ακόλουθη ανισότητα:

Εάν $q_1, q_2, \ldots, q_n$ είναι θετικοί αριθμοί, τότε

$$\min_i \frac{p_i}{q_i} \le \frac{p1+p2+\cdots+pn}{q1+q2+\cdots+qn} \le \max_i \frac{p_i}{q_i} \tag{7}$$

για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $p1, p2, \ldots, pn$. Η ισότητα ισχύει για οποιαδήποτε από τις πλευρές της σχέσης (7) αν και μόνο αν οι λόγοι ${p_i}/{q_i}$ είναι ίσοι.

<u>Θεώρημα 2.1.2</u>

Έστω $A=(\alpha_{ij})$ ένας μη αρνητικός πίνακας με μη μηδενικό άθροισμα γραμμών $r_1, r_2, \ldots, r_n$ και maximal ιδιοτιμή r. Τότε,

$$\min_i \left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it} r_t\right) \le r \le \max_i \left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it} r_t\right). \tag{8}$$

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι ο A είναι μη υποβιβάσιμος.Το αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί σε υποβιβάσιμους πίνακες μέσω του επιχειρήματος της συνέχειας. Έστω $r_i(A^2)$ το i-οστό άθροισμα γραμμής του πίνακα A^2. Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα (4) στους πίνακες A^2 και A έχουμε:

$$r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i(A^2)$$

και

$$r = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i,$$

όπου $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A^T [και έτσι και του $(A^2)^T$] με $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Συνεπώς,

$$r = \frac{r^2}{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(A^2)}{\sum_{i=1}^{n} x_i r_i},$$

και από την (7) προκύπτει

$$\min_i \frac{r_i(A^2)}{r_i} \leq \min_{xi\neq 0} \frac{r_i(A^2)}{r_i} \leq r \leq \max_{xi\neq 0} \frac{r_i(A^2)}{r_i} \leq \max_i \frac{r_i(A^2)}{r_i}.$$

Τώρα,

$$r_i(A^2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{it}a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\sum_{j=1}^{n} a_{tj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t$$

και προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι η (8) προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.1. Έστω

$$D=diag\,(r_1,r_2,\ldots,r_n).$$

Σημειώστε ότι το άθροισμα της i-οστής γραμμής του πίνακα $D^{-1}AD$ είναι:

$$\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t.$$

Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.1 στο πίνακα $D^{-1}AD$ (το οποίο είναι προφανώς όμοιο με τον πίνακα A):

$$\min_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t\right) \leq r \leq \max_i\left(\frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t\right),$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι τα όρια στην (8) είναι πιο ισχυρά από εκείνα της σχέσης (1). Από την (7) έχουμε:

$$\min_t r_t \leq \frac{\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t}{\sum_{t=1}^{n} a_{it}\cdot 1} \leq \max_t r_t,$$

που είναι:

$$\rho = \min_t r_t \leq \frac{1}{r_i}\sum_{t=1}^{n} a_{it}r_t \leq \max_t r_t = R, \quad \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,n.$$

Εάν ο A είναι ένας θετικός πίνακας με maximal ιδιοτιμή r,μέγιστο άθροισμα γραμμής R και ελάχιστο άθροισμα γραμμής ρ και εάν $\rho < R$ τότε όπως βλέπουμε και στη σχέση (6),

$$\rho < r < R.$$

O Ledermann πρότεινε τον ορισμό θετικών αριθμών p_1, p_2 τέτοιους ώστε:

$$\rho + p_1 \leq r \leq R - p_2.$$

Έτσι, προέκυψε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.1.3 (Ledermann, [35])

Έστω $A=(\alpha_{ij})$ ένας θετικός πίνακας με maximal ιδιοτιμή r και άθροισμα γραμμών $r_1,r_2,\ldots,r_n$. Εάν $R=\max_i r_i$, $\rho=\min_i r_i$, $\eta=\min_{i,j} a_{ij}$ και $R>\rho$ τότε:

$$\rho+\eta\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}-1\right) \leq r \leq R-\eta(1-\sqrt{\delta}), \qquad \textbf{(9)}$$

όπου $\delta = \max\limits_{r_i < r_j} ({}^{r_i}/_{r_j})$.

Έστω $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ένα θετικό, maximal ιδιοδιάνυσμα του A. Μπορούμε να υποθέσουμε,χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $1 = x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$. Τέτοια ταξινόμηση του x_j μπορεί να επιτευχθεί με τον εμπρός πολλαπλασιασμό του πίνακα A με ένα κατάλληλο πίνακα μετάθεσης P και τον πίσω πολλαπλασιασμό με τον πίνακα P^{-1}. Παρατηρούμε ότι $r_n < r < r_1$.Συνεπώς ${}^{r_n}/_{r_1} < 1$ και έπειτα ${}^{r_n}/_{r_1} \leq \delta$. Στη συνέχεια,

$$rx_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j < r_n,$$

και

$$r = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j < x_n r_1.$$

Συνεπάγεται ότι,

$$x_n < \frac{r_n}{x_n r_1}.$$

ως εκ τούτου,

$$x_n < \sqrt{\frac{r_n}{r_1}} \leq \sqrt{\delta}.$$

Έπειτα,

$$r = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j < \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} + a_{1n}\sqrt{\delta} = r_1 - a_{1n}(1-\sqrt{\delta}) \leq R - \eta(1-\sqrt{\delta}).$$

Όμοια, λοιπόν,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{x_n} \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \\ &> \frac{a_{n1}}{\sqrt{\delta}} + \sum_{j=2}^{n} a_{nj} \\ &= r_n + a_{n1}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1\right) \\ &\geq \rho + \eta\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1\right). \quad ■ \end{aligned}$$

<u>Θεώρημα 2.1.4 (Ostrowski, [30])</u>

Έστω $A = (\alpha_{ij})$ *ένας θετικός* $n \times n$ *πίνακας με maximal ιδιοτιμή* r *και άθροισμα γραμμών* $r_1, r_2, \ldots, r_n$. *Έστω* $\sigma = \sqrt{{}^{(\rho - \eta)}/_{(R - \eta)}}$, *όπου* $R = \max\limits_{i} r_i$, $\rho = \min\limits_{i} r_i$ *και* $\eta = \min\limits_{i,j} a_{ij}$. *Τότε*

$$\rho + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \leq r \leq R - \eta(1 - \sigma).$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ να είναι το maximal ιδιοδιάνυσμα. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι $1 = x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{r}x_i &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \\ &\geq a_{i1} + x_n \textstyle\sum_{j=2}^{n} a_{ij} \\ &= a_{i1}(1 - x_n) + r_i x_n, \qquad \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,n. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{r} \geq \big(x_n r_i + \eta(1 - x_n)\big) / x_i, \quad \text{για κάθε} \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad \textbf{\textit{(10)}}$$

Ομοίως,

$$\mathrm{r}x_i \leq \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} + a_{in}x_n = r_i - a_{in}(1 - x_n)$$

και συνεπώς,

$$r \leq \big(r_i - \eta(1 - x_n)\big) / x_i\,, \quad \text{για κάθε} \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad \textbf{\textit{(11)}}$$

Έστω $r_s = R$ και $r_t = \rho$. Θέτοντας ως $i=s$ στη σχέση (10), έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{r} &\geq \big(x_n R + \eta(1 - x_n)\big) / x_s \\ &\geq \big(x_n R + \eta(1 - x_n)\big) \\ &= x_n(R - n) + \eta. \qquad \textbf{\textit{(12)}} \end{aligned}$$

Ομοίως αντικαθιστώντας όπου t το i στη σχέση (11), παίρνουμε

$$r \leq \frac{\rho - \eta}{x_n} + \eta. \qquad \textbf{\textit{(13)}}$$

Ως εκ τούτου, από τις σχέσεις (12) και (13), έχουμε

$$x_n(R - n) \leq \mathrm{r} - \mathrm{n} \leq \frac{\rho - \eta}{x_n}\,,$$

και συνεπώς, $x_n \leq \sqrt{\frac{\rho - \eta}{R - n}} = \sigma$.

Τώρα, βάλτε στη θέση του $i = n$ στη σχέση (10) και στη θέση του $i=10$ στην (11), ώστε

$$r_n + \eta\left(\frac{1}{\mathrm{x_n}} - 1\right) \leq r \leq r_1 - \eta(1 - x_n).$$

Επομένως, κατά κύριο λόγο,

$$\rho + \eta\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \leq r \leq R - \eta(1 - \sigma). \quad \blacksquare$$

Αξίζει, φυσικά μα σημειωθεί ότι τα όρια του Ostrowski είναι πιο ισχυρά από εκείνα του Θεωρήματος 2.1.3:

$$\sigma^2 = \frac{\rho-\eta}{R-\eta} \leq \frac{\rho}{R} \leq \max_{r_i<r_j} \frac{r_i}{r_j} = \delta.$$

Ο Brauer [10] βελτίωσε αυτά τα όρια για τη maximal ιδιοτιμή ενός θετικού πίνακα και δείχνει ότι είναι το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα που περιλαμβάνει τα *η, R* και ρ, με την έννοια ότι για οποιαδήποτε από τις ποσότητες R,ρ και η που ικανοποιούν τη σχέση $R > \rho \geq n\eta > 0$, υπάρχει ένας $n \times n$ θετικός πίνακας με μέγιστο άθροισμα γραμμής R,ελάχιστο άθροισμα γραμμής *ρ* και ελάχιστο στοιχείο που εισάγουμε *η*, για το οποίο και τα όρια του Brauer επιτυγχάνονται.

<u>Θεώρημα 2.1.5 (Brauer, [2])</u>

Έστω A,r,R,ρ και η όπως ορίζονται στο Θεώρημα 2.1.4. Έστω,

$$g = \frac{R-2\eta+\sqrt{R^2-4\eta(R-\rho)}}{2(\rho-\eta)} \quad \text{και} \quad h = \frac{-\rho+2\eta+\sqrt{\rho^2+4\eta(R-\rho)}}{2\eta}.$$

Τότε,

$$\rho + \eta(h-1) \leq r \leq R - \eta(1 - {}^{1}/_{g}).$$

<u>Απόδειξη</u>

Η μέθοδος που ακολουθείται στην απόδειξη είναι να εφαρμόσουμε τα όρια στο Θεώρημα 2.1.1 σε 2 πίνακες που παίρνουμε από τον πίνακα *A* μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών ομοιότητας. Έστω $r_1, r_2, \ldots, r_n$ να δηλώνουν τα αθροίσματα των γραμμών του *A*. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $r_1 = R$ και $r_n = \rho$. Έστω *B* ένας πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα *A* πολλαπλασιάζοντας την τελευταία γραμμή του *A* με g και την τελευταία του στήλη με ${}^{1}/_{g}$. Προφανώς, ο *A* και ο *B* είναι όμοιοι και έχουν το ίδιο φάσμα. Το άθροισμα της i-οστής γραμμής του *B* για *i=1,2,….,n-1* είναι:

$$r_i - a_{in}(1 - {}^{1}/_{g}) \leq R - \eta\,(1 - {}^{1}/_{g}) = K_1$$

Το n-οστό άθροισμα γραμμής του *B* ισούται με

$$gp - a_{nn}(g-1) \leq gp - \eta(g-1) = K_2$$

Μια ευθεία απόδειξη, μας δείχνει ότι εάν η *g* ορίζεται όπως στην εκφώνηση του θεωρήματος, τότε $K_1 = K_2$. Ως εκ τούτου, όλα τα αθροίσματα γραμμών του *B* είναι άνω φραγμένα από την ποσότητα $R - \eta(1 - {}^{1}/_{g})$ και από το Θεώρημα 2.1.1,

$$r \leq R - \eta(1 - {}^{1}/_{g})$$

Για να πάρουμε το κάτω φράγμα, κατασκευάζουμε πίνακα *C* τον οποίο παίρνουμε από τον πίνακα *A* πολλαπλασιάζοντας την πρώτη του γραμμή με ${}^{1}/_{h}$, και την πρώτη του στήλη με h. Τότε οι *A* και *C* είναι όμοιοι. Η πρώτη γραμμή του *C* είναι:

$$R/h + a_{11}\,(1\text{-}1/h) \geq R/h + \eta(\,1\text{-}1/h) = K_3$$

και το i-οστό άθροισμα στήλης του *C*, για i=2,3,….,n, είναι

$$r_i + a_{i1}(\,h\text{-}1) \geq \rho + \eta(h\text{-}1) = K_4.$$

Ξανά λοιπόν, ένας ευθύς υπολογισμός δείχνει ότι εάν το h έχει ακριβή τιμή, τότε K_3=K_4. Έπειτα, όλα τα αθροίσματα γραμμών του *C* είναι κάτω φραγμένα από την ποσότητα $\rho + \eta(h\text{-}1)$ και από το Θεώρημα 2.1.1,

$$r \geq \rho + \eta(h\text{-}1). \quad \blacksquare$$

Τώρα θα κατασκευάσουμε δύο πίνακες Q και Q' με στοιχεία R, ρ και η, $R>\rho \geq n\eta>0$ οι οποίες μέγιστες ιδιοτιμές r επιτυγχάνουν το άνω και κάτω φράγμα του Θεωρήματος 2.1.5 αντίστοιχα.

$$Q=\begin{bmatrix} P_1 & \vdots & P_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_3 & \vdots & \eta \end{bmatrix},$$

όπου κάθε εισαγόμενη τιμή δεν είναι μικρότερη της η, όλα τα αθροίσματα των σειρών *(n-1)*(n-1)* του υποπίνακα P_1 είναι ίσα με R-η, κάθε εισαγόμενη τιμή στον υποπίνακα P_2 είναι ίσα με η και όλες εκείνες στον P_3 αθροίζουν στο ρ-η. Τώρα ο πίνακας *Q* θα είναι ίσος με:

$$\begin{bmatrix} P_1 & \vdots & \frac{P_3}{g} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ gP_3 & \vdots & \eta \end{bmatrix},$$

καθένα από τα οποία πρώτα *n-1* αθροίσματα σειρών είναι ίσα με $R\text{-}\eta+\frac{\eta}{g} = K_1$ και το τελευταίο άθροισμα σειράς είναι $(g\rho)\text{-}(g\eta)+\eta = K_2 = K_1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.1, η μέγιστη ιδιοτιμή του *Q* ισούται με το K_1. Ομοίως κατασκευάζουμε έναν πίνακα:

$$Q'=\begin{bmatrix} \eta & \vdots & P_2' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_3' & \vdots & P_4' \end{bmatrix},$$

όπου κάθε στοιχείο είναι μικρότερο του η, κάθε άθροισμα σειράς του *(n-1)*(n-1)* Υποπίνακα P_4' ισούται με ρ-η, κάθε στοιχείο του P_3' με η και κάθε στοιχεί του P_2' αθροίζει στο *R*-η. Τώρα, αν η πρώτη σειρά του Q' πολλαπλασιαστεί με $1/h$ και η πρώτη στήλη με *h* τότε ο πίνακας που προκύπτει είναι παρόμοιος με τον Q' και όλα τα αθροίσματα σειρών είναι K_3=K_4.

Παράδειγμα 2.1.1

Υπολογίζουμε τα φράγματα που δίνονται στα Θεωρήματα 2.1.1 (Frobenius), 2.1.2, 2.1.3 (Ledermann), 2.1.4 (Ostrowski) και 2.1.5 (Brauer) για την μέγιστη ιδιοτιμή *r* του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Frobenius: $4 < r < 8$ (σειρές) και $5 < r < 7$ (στήλες),

Θεώρημα 1.2: $5 < r < 6{,}25$ (σειρές) και $5{,}6 < r < 5{,}8572$ (στήλες),

Ledermann: $4{,}1547 < r < 7{,}8661$ (σειρές) και $5.080 < r < 6{,}9259$ (στήλες),

Ostrowski: $4{,}5275 < r < 7{,}6547$ (σειρές) και $5{,}2247 < r < 6{,}8165$ (στήλες),

Brauer: $4{,}8284 < r < 7{,}4642$ (σειρές) και $5{,}3722 < r < 6{,}7016$ (στήλες).

Η μέγιστη ιδιοτιμή του A ισούται με r =5.74165738… ■

Παράδειγμα 2.1.2

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα διαγώνια όμοιο με τον πίνακα A του παραδείγματος 2.1.1 για τον οποίον το Θεώρημα 2.1.1 παράγει αυστηρά όρια για τη μέγιστη ιδιοτιμή r του A σε σχέση με αυτά που περιέχονται στο Παράδειγμα 2.1.1.

Αρχικά, προσπαθούμε να βρούμε έναν πίνακα που διαγώνια όμοιο του A, του οποίου το μέγιστο άθροισμα στήλης να είναι μικρότερο του 7, που είναι το μέγιστο άθροισμα στηλών του A. Έστω $X=diag(x,1,1)$ όπου x ένας θετικός αριθμός. Τα αθροίσματα των στηλών του $X^{-1}AX$ είναι:

$$1+(2x)+(4x),\quad \frac{1}{x}+3+1,\quad \frac{2}{x}+3+1.$$

Αν $x<1$, τότε το $1+(2x)+(4x) < 7$. Όμως τα άλλα δύο αθροίσματα αυξάνονται όσο το x μειώνεται. Επίσης, η χαμηλότερη τιμή που το μέγιστο άθροισμα γραμμής του $X^{-1}AX$ μπορεί να πάρει είναι:

$$1+6x = \frac{2}{x} + 4, \quad \text{όπου } x = \frac{3+\sqrt{57}}{12}$$

που οδηγεί στο άνω φράγμα:

$$r < \frac{5+\sqrt{57}}{2} < 6.2750.$$

Παρομοίως, προκειμένου να βελτιώσουμε το κάτω φράγμα για το r, θέτουμε $Y=diag(1,y,1)$. Μετά τα αθροίσματα στηλών του $Y^{-1}AY$ είναι:

$$1+\frac{2}{y}+4,\quad y+3+y,\quad 2+\frac{3}{y}+1.$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε y>1 για το οποίο:

$$5 < 2y+3 \leq min(5+\frac{2}{y}, 3+\frac{3}{y}), \quad όπου\ y = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

το οποίο μας δίνει το κάτω φράγμα

$$r < \sqrt{6} + 3 < 5{,}4494.$$

Μία ανάλογη μέθοδος εφαρμόζεται στα αθροίσματα γραμμών του A δίνοντας τα παρακάτω όρια:

$$5 < r < 6{,}4495. \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα 2.1.3</u>

Υπολογίζουμε φράγματα για τη μέγιστη ιδιοτιμή r του πίνακα στο Παράδειγμα 2.1.1, τροποποιώντας τον πίνακα δύο φορές με τη διαγώνιο ομοιότητα, όπως η δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Αν $D_1 = diag(4, 8, 6)$, τότε:

$$D_1^{-1} A\, D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \frac{9}{4} \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Το άθροισμα των σειρών του πίνακα είναι 6, $\frac{25}{4}$, 5. Επιπλέον

$$D_2^{-1}\ D_1^{-1}\ AD_1D_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{25}{12} & \frac{5}{2} \\ \frac{24}{25} & 3 & \frac{9}{5} \\ \frac{16}{5} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix},$$

όπου D_2 =diag $(6, \frac{25}{4}, 5)$. Τώρα εφαρμόζοντας στο Θεώρημα 2.1.1 τις σειρές του παραπάνω πίνακα, ψάχνω τα φράγματα:

$$5{,}5833 < r < 5{,}8667.$$

Επίσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτή την μέθοδο στις στήλες. Αν G_1 = diag (7,5,6), τότε

$$G_1\ A\ G_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{10}{7} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{24}{7} & \frac{6}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

του οποίου τα αθροίσματα στηλών είναι $\frac{41}{7}, \frac{28}{5}, \frac{35}{6}$. Αν $G_2 = diag(\frac{41}{7}, \frac{28}{5}, \frac{35}{6})$, τότε

$$G_2\, G_1\, A\, G_1^{-1}\, G_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{41}{28} & \frac{82}{35} \\ \frac{56}{41} & 3 & \frac{12}{5} \\ \frac{140}{41} & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας στο *Θεώρημα 2.1.1* στις στήλες του πίνακα, παίρνουμε:

$$5.7142 < r < 5.7805.$$

Παράδειγμα 2.1.4

Κατασκευάζουμε 3×3 πίνακες Q και Q' με R =8, ρ = 4, n=1 και r= 7,464… και 4,828… προσεγγιστικά.

Έστω,

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1/g \\ 4 & 3 & 1/g \\ 2g & g & 1 \end{bmatrix},$$

όπου g= 2,15470053…, είναι παρόμοιος με τον Q και κάθε άθροισμα σειράς είναι ίσο με 7,46410161…, το οποίο είναι επίσης η μέγιστη ιδιοτιμή του. Επίσης, αν

$$Q' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/h & 3/h \\ h & 2 & 1 \\ h & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου h = 1,82842712… είναι παρόμοιο με τον Q' και όλα τα αθροίσματα σειρών είναι 4,82842712… το οποίο είναι και η μέγιστη ιδιοτιμή του Q. ■

2.2.2 Ο κυρίαρχος μη αρνητικός πίνακας

Αν C=(c_{ij}) είναι ένας n×n μιγαδικός πίνακας και A= (a_{ij}) είναι ένας n×n μη αρνητικός πίνακας όπως $|C| \leq A$ ($|c_{ij}| \leq a_{ij}$ για όλα τα i,j), τότε ο A λέγεται ότι κυριαρχεί του C.Το ακόλουθο αποτέλεσμα προκύπτει μέσω του Wielandt [9].

Θεώρημα 2.2.1

Αν ένας μιγαδικός πίνακας C κυριαρχείται από έναν μη υποβιβάσιμο πίνακα A με μέγιστη ιδιοτιμή r τότε για κάθε ιδιοτιμή s του C,

$$|s| \leq r. \qquad \textbf{(1)}$$

Η ισότητα ισχύει στην (1) αν και μόνο αν

$$C = e^{i\varphi} D A D^{-1}, \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $s = r\, e^{i\varphi}$ *και* $|D| = I_n$.

Απόδειξη

Έστω,

$$Cy = sy, \qquad \textbf{(3)}$$

όπου y ≠ 0. Τότε,

$$|C||y| \geq |s||y|,$$

από την τριγωνική ανισότητα. Αλλά $A \geq |C|$, και συνεπώς

$$A|y| \geq |C||y| \geq |s||y|.$$

Ως εκ τούτου, από το *Θεώρημα 2.3.1 (ii), Κεφ. I.,* ισχύει ότι:

$$|s| \leq f_A(|y|),$$

όπου η f_A είναι η Collatz-Wielandt συνάρτηση που συνδέεται με τον πίνακα A και συνεπώς,

$$|s| \leq f_A(|y|) \leq r. \qquad \textbf{(5)}$$

Υποθέστε ότι ο $C = e^{i\varphi} D A D^{-1}$, όπου $|D| = I_n$. Τότε οι πίνακες C και $e^{i\varphi} A$ είναι όμοιοι και εάν ο r είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του A, τότε ο όρος $re^{i\varphi}$ είναι μια ιδιοτιμή του C.

Τώρα, θα αποδειχθεί η αναγκαιότητα της συνθήκης (2) ώστε να επιτευχθεί ισότητα στην συνθήκη (1). Υποθέστε,ότι s= $re^{i\varphi}$, που σημαίνει $|s| = r$. Τότε η (5) συνεπάγεται ότι $f_A(|y|) = r$. Έτσι, το $|y|$ είναι το μέγιστο διάνυσμα και από τη σχέση (4) έχουμε:

$$A|y| = |C||y| = r|y|, \qquad \textbf{(6)}$$

που σημαίνει ότι

$$(A - |C|)|y| = 0.$$

Από τη στιγμή που το $|y|$ είναι το μέγιστο διάνυσμα,θα πρέπει να ισχύει ότι $|y| > 0$ (Πόρισμα 1.4.2, Κεφάλαιο I). Επιπλέον, $A - |C| \geq 0$, και συνεπώς

$$A = |C|. \qquad \textbf{(7)}$$

Ορίζουμε ως

$$D= diag\,(\frac{y_1}{|y_1|}, \frac{y_2}{|y_2|}, \dots\dots.., \frac{y_n}{|y_n|}),$$

και

$$G = (g_{ij}) = e^{-i\varphi} D^{-1}\, CD.$$

Τότε η σχέση (3) δίνει

$$CD|y|=s\, D|y|= re^{-i\varphi}\, D|y|.$$

Συνεπώς,

$$G|y|= r|y|,$$

και από την (6)

$$G|y|= A|y|. \qquad \textbf{(8)}$$

Και από τον ορισμό του G πίνακα, έχουμε ότι,

$$|G| = |C|$$

και από την (7), προκύπτει ότι

$$|G| = A.$$

Ως εκ τούτου, από την σχέση (8) προκύπτει ότι :

$$|G||y| = G|y|,$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n}(|g_{ij}| - g_{ij})\,|y_j| = 0, \qquad \text{για κάθε } i = 1,2,\dots,n,$$

που υποδηλώνει ότι

$$|g_{ij}| - g_{ij} =0,$$

για όλα τα *i, j, αφού* $|y_j| > 0$, για $\forall\, j = 1,2,\dots,n$. Συνεπάγεται ότι

$$G= |G| =A,$$

και συνεπώς από τον ορισμό του G,

$$C = e^{i\varphi} DAD^{-1}. \quad ■$$

<u>Πόρισμα 2.2.1</u>

Έστω A ένας μη αρνητικός πίνακας με maximal ιδιοτιμή r και έστω C ένας μιγαδικός πίνακας τέτοιος ώστε $|C| \leq A$. *Τότε για κάθε ιδιοτιμή s του C ισχύει:*

$$|s| \leq r.$$

Το Πόρισμα προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα μέσω της συνέχειας. Βέβαια, η συνθήκη ισότητας, δεν είναι προφανώς απαραίτητη, εάν ο A είναι υποβιβάσιμος.

Πόρισμα 2.2.2

Εάν ο A είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας και A ≥ C ≥ 0, με A ≠ C τότε r(A) >r(C).

Θεώρημα 2.2.2 (Marcus, Minc και Moyls [21])

Έστω A= $\left(\alpha_{ij}\right)$ *και B=* $\left(b_{ij}\right)$ *μη υποβιβάσιμοι πίνακες με maximal ιδιοτιμές α και β, αντίστοιχα, και έστω A ≤ B. Έστω S=*(s_{ij}) *ένας μη αρνητικός πίνακας που επικοινωνεί είτε με τον πίνακα A είτε με τον πίνακα B και έχει μη μηδενικό άθροισμα στηλών* $(c_1\,, c_2, \dots\dots, c_n)$. *Τότε,*

$$\frac{m}{\max\limits_{i,j}\left({}^{s_{ij}}/_{c_j}\right)} \leq \beta - \alpha \leq \frac{M}{\min\limits_{i,j}\left({}^{s_{ij}}/_{c_j}\right)},$$

όπου $m = \min\limits_{i,j}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)$ *και* $M = \max\limits_{i.j}\left(b_{ij} - a_{ij}\right)$.

Απόδειξη

Έστω *z* το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A*, z ∈ E^n, και έστω f_B να είναι μια Collatz - Wielandt συνάρτηση που συνδέεται με τον πίνακα *B*. Υποθέτουμε πως ο *t* είναι ο ακέραιος για τον οποίο ισχύει:

$$f_B\,(z) = \frac{(Bz)_t}{z_t}.$$

Από τη στιγμή που

$$(B - A)z + Az = Bz,$$

που σημαίνει ότι

$$(B - A)z + \alpha z = Bz.$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{tj} - a_{tj}\right) z_j + \alpha z_t = (Bz)_t,$$

και έπειτα

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{tj} - a_{tj}\right)\frac{z_j}{z_t} + \alpha = \frac{(Bz)_t}{z_t} = f_B\,(z) \leq \beta. \qquad \textbf{(9)}$$

Τώρα, z ∈ E^n και συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{tj} - a_{tj}\right) z_j \geq \min_j\left(b_{tj} - a_{tj}\right) \geq \min_j\left(b_{ij} - a_{ij}\right) = m. \qquad \textbf{(10)}$$

Από τις σχέσεις (9) και (10) προκύπτει ότι

$$\beta - \alpha \geq \frac{m}{z_t}.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι:

$$z_t \le \max_{i,j} \left({}^{s_{ij}}/_{c_j} \right). \qquad \textit{(11)}$$

Παρατηρείστε ότι το z είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S. Ισχύει ότι:

$$ASz = SAz = aSz,$$

και έτσι το Sz είναι το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του A και συνεπώς θα πρέπει να είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του z τέτοιο ώστε:

$$Sz = \lambda z, \qquad \textit{(12)}$$

για κάποια $\lambda > 0$. Αλλά από τον τύπο (3) στην Ενότητα 2.2.1,

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j.$$

Από την άλλη πλευρά, από τη σχέση (12) έχουμε ότι:

$$\lambda z_t = \sum_{j=1}^{n} s_{tj} z_j,$$

και συνεπώς,

$$z_t = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} s_{tj} z_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} s_{tj} z_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j z_j} \le \max_j \frac{s_{tj}}{c_j}$$

από τη σχέση (7) στην Ενότητα 2.2.1. Έτσι, η ανισότητα (11) προκύπτει αμέσως. ■

2.2.3 Όρια για τα maximal ιδιοδιανύσματα

Έστω *A* ένας θετικός $n \times n$ πίνακας, *r* η maximal ιδιοτιμή του και $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του A. Το πρόβλημα εντοπισμού του r, σχετίζεται με το πρόβλημα της εκτίμησης της ποσότητας $\max_{i,j} {}^{x_i}/_{x_j}$. Το κατώτερο φράγμα στο παρακάτω Θεώρημα προκύπτει λόγω του Ledermann [11]. Το ανώτερο φράγμα είναι μια βελτίωση του Minc [14] στο ήδη υπάρχον αποτέλεσμα του Ostrowski [16].

Θεώρημα 2.3.1

Έστω $A = (\alpha_{ij})$ *ένας θετικός πίνακας με maximal ιδιοδιάνυσμα* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *και έστω* $\gamma = \max_{i,j} {}^{x_i}/_{x_j}$. *Τότε*

$$\sqrt{\frac{R}{\rho}} \le \gamma \le \max_{j,s,t} \frac{a_{sj}}{a_{tj}}, \qquad \textit{(1)}$$

όπου R και ρ είναι το μεγαλύτερο και το μικρότερο άθροισμα γραμμών, αντίστοιχα, του πίνακα A. Η αριστερή ανισότητα της σχέσης (1)*, γίνεται ισότητα αν και μόνο αν R=ρ. Αντίστοιχα, στο δεξιό μέλος της* (1) *προκύπτει ισότητα αν και μόνο αν το p-οστή γραμμή* *του Α είναι ένα πολλαπλάσιο της q γραμμής για κάποια ζευγάρια δεικτών που ικανοποιούν τη σχέση* $a_{ph}/a_{qh} = \max_{j,s.t} (\alpha_{sj}/a_{tj})$.

Απόδειξη

Έστω $x_m = \max_i x_i$ και $x_\mu = \min_i x_i$ και έστω *r* είναι η maximal ιδιοτιμή του *A*. Έπειτα

$$\mathrm{r}x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_\mu = r_i x_\mu, \quad i=1,2,\ldots,n. \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς,

$$\frac{r}{r_i} \geq \frac{x_\mu}{x_i} \geq \frac{1}{\gamma},$$

για κάθε i. Πιο συγκεκριμένα,

$$\frac{r}{R} \geq \frac{1}{\gamma}. \qquad \textbf{(3)}$$

Όμοια,

$$\mathrm{r}\, x_i \leq r_i x_m,$$

και συνεπώς,

$$\frac{r}{r_i} \leq \frac{x_m}{x_i} \leq \gamma$$

και πιο συγκεκριμένα,

$$\frac{r}{\rho} \leq \gamma. \qquad \textbf{(4)}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\gamma \geq \sqrt{\frac{R}{\rho}}. \qquad \textbf{(5)}$$

Έστω $r_m = R$. Η ισότητα προκύπτει στη σχέση (5), μόνο αν ισχύει στη σχέση (2), που είναι:

$$rx_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j = R\, x_\mu.$$

Το παραπάνω υποδηλώνει ότι όλες οι συντεταγμένες του *x* είναι ίσες.Αλλά σε αυτή την περίπτωση, όλα τα αθροίσματα των γραμμών του A θα πρέπει να ισούται.Για να αποδειχθεί το άνω φράγμα τονίζουμε ξανά ότι:

$$rx_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\; x_j, \qquad \textbf{(6)}$$

και

$$rx_\mu = \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j}\, x_j, \qquad \textbf{(7)}$$

Στη συνέχεια, διαιρώντας τη σχέση (6) με την (7), παίρνουμε

$$\gamma = \frac{x_m}{x_\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\ x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{\mu j}\ x_j}\ .$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανισότητα (7) από την ενότητα 2.2.1, έχουμε:

$$\gamma \leq \max_j \frac{a_{mj}\ x_j}{a_{\mu j}\ x_j} \qquad \textbf{\textit{(8)}}$$

$$= \max_j \frac{a_{mj}}{a_{\mu j}}$$

$$\leq \max_{s,j,t} \frac{a_{sj}}{a_{tj}}. \qquad \textbf{\textit{(9)}}$$

Υποθέτουμε σε αυτό το σημείο ότι δεξιά πλευρά της (1) είναι μια ισότητα. Τότε η ισότητα ,πρέπει να ισχύει τόσο για τη σχέση (8) όσο και για τη σχέση (9). Τώρα η (8) στην Ενότητα 2.2.1 είναι ισότητα αν και μόνο αν

$$\frac{a_{mj}}{a_{\mu j}} = \gamma, \quad \text{για κάθε } j=1,2,\ldots,n.$$

Ως εκ τούτου, η m-οστή και η μ-οστή γραμμές του *A* είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επιπλέον, από τη στιγμή που ισχύει η ισότητα στην σχέση (9), για κάθε h, έχουμε:

$$\frac{a_{mh}}{a_{\mu h}} = \max_{s,j,t} \frac{a_{sj}}{a_{tj}}.$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\frac{a_{pj}}{a_{qj}} = \beta$, για κάθε $j=1,2,\ldots,n$, και $\frac{a_{pj}}{a_{qj}} \geq \frac{a_{sj}}{a_{tj}}$ για κάθε s,t,j. Τότε,

$$\frac{x_p}{x_q} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{pj}\ x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{qj}\ x_j} = \beta,$$

για οποιοδήποτε s και t ,

$$\frac{x_s}{x_t} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\ x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\ x_j} \leq \max_j \frac{a_{sj}}{a_{tj}} \leq \beta = \frac{x_p}{x_q}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\frac{x_p}{x_q} = \max_j \frac{x_\iota}{x_j}\ ,$$

και $\gamma = \beta = \max_{s,j,t} \frac{a_{sj}}{a_{tj}}$, δηλαδή η δεξιά πλευρά του (1) είναι ισότητα. ■

Παράδειγμα 2.3.1

Βρείτε φράγματα για την ποσότητα γ για τον πίνακα

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3.1 παίρνουμε τις ανισότητες

$$1.2649\ldots = \sqrt{\tfrac{8}{5}} < \gamma < 2. \qquad \textbf{\textit{(10)}}$$

Και τα δύο φράγματα της σχέσης (10) μπορούν να βελτιωθούν αφαιρώντας από τον A ένα κατάλληλο πολλαπλάσιο του I_3 και προσθέτοντας Θεώρημα 2.3.1 στο νέο πίνακα. Όπως σημειώθηκε παραπάνω το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του A είναι επίσης το μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του A-εI_3 . Εάν το ε τείνει στο 2 από την αριστερή πλευρά της ανισότητας τότε το κάτω φράγμα πλησιάζει την τιμή $\sqrt{6/3}$ =1.4142…

Για να βελτιώσουμε το άνω φράγμα στη σχέση (10), ξεκάθαρα πρέπει να έχουμε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Τότε προκύπτει ότι : $\gamma < max\left(\frac{3}{2-\varepsilon}, 2-\varepsilon\right)$. Ως εκ τούτου, το μικρότερο άνω φράγμα που παίρνουμε εάν ισχύει ότι

$$\frac{3}{2-\varepsilon} = 2-\varepsilon,$$

δηλαδή $\varepsilon=2$-$\sqrt{3}$. Τότε από το Θεώρημα 2.3.1, παράγεται το άνω φράγμα $\gamma < \sqrt{3}$ = *1.73205…* Η πραγματική, μάλιστα τιμή του γ που έχει υπολογιστεί είναι $\sqrt{7}$ -1 =1.64575. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ
Πρωταρχικοί και μη πρωταρχικοί πίνακες

3.1 Φάσματα μη υποβιβάσιμων πινάκων

Στο Κεφάλαιο 1, επεκτείναμε τα αποτελέσματα του Perron για θετικούς πίνακες στη μεγαλύτερη τάξη των μη αρνητικών πινάκων. Τα πρώτα τρία εδάφια του παρόντος κεφαλαίου περιέχουν αποτελέσματα του Frobenius [4] για τις ιδιότητες του φάσματος ενός μη αρνητικού πίνακα ο οποίος δεν έχει αντιστοιχία στη θεωρία των θετικών πινάκων.

Ορισμός 3.1.1 (index of imprimitivity)

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος n × n πίνακας με maximal ιδιοτιμή r και υποθέτουμε ότι έχει ακριβώς h ιδιοτιμές μέτρου r. Ο αριθμός h θα καλείται δείκτης μη πρωταρχικότητας του A (index of imprimitivity). Εάν το h=1,τότε ο πίνακας A καλείται πρωταρχικός (primitive). Σε αντίθετη περίπτωση, ο πίνακας είναι μη πρωταρχικός (ή κυκλικός).Για συντομία, στο εξής ο δείκτης μη πρωταρχικότητας του A, θα καλείται δείκτης.

Πριν ξεκινήσουμε την παράθεση των παρακάτω Θεωρημάτων θα πρέπει να διαχωρίσουμε:

Σε έναν μη αρνητικό πίνακα η μεγαλύτερη πραγματική,θετική, ιδιοτιμή ενός μη αρνητικού πίνακα καλείται maximal μέγιστη, ενώ οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου καλείται maximal.

Οι αποδείξεις των επόμενων δύο Θεωρημάτων είναι σύμφωνα με τον Wielandt [9].

Θεώρημα 3.1.1

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος n × n πίνακας με maximal θετική ιδιοτιμή r και δείκτη h. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ οι ιδιοτιμές του A μέτρου r. Τότε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ είναι οι h-οστές ρίζες του r^h.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_t = re^{i\varphi_t}, t = 1,2,\dots,h$. Απ' τη στιγμή που $|\lambda_t| = r$, συνθήκη ισότητας στο Θεώρημα 2.2.1, Κεφάλαιο ΙΙ, με $C = A$ και $s = \lambda_t$, υποδηλώνει ότι

$$A = e^{i\varphi_t} D_t A D_t^{-1}, \quad t = 1,2,\dots,h. \qquad \textbf{(1)}$$

Ως εκ τούτου, $A\ και\ e^{i\varphi_t}A$ είναι παρόμοια. Από τη στιγμή που r είναι μια απλή ιδιοτιμή A, σημαίνει ότι για κάθε t, $e^{i\varphi_t} = \lambda_t$ είναι μια απλή ιδιοτιμή του $e^{i\varphi_t}A$ και συνεπώς του A. Τώρα από την (1),

$$A = e^{i\varphi_t}D_t\left(e^{i\varphi_s}D_sAD_s^{-1}\right)D_t^{-1}$$

$$= e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}(D_tD_s)A(D_tD_s)^{-1},$$

και συνεπώς $A\ και\ e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}A$ είναι παρόμοια για κάθε s και t. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $re^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ είναι μια ιδιοτιμή του A, και συνεπώς $e^{i(\varphi_t+\varphi_s)}$ πρέπει να είναι ένας από τους αριθμούς $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_h}$. Ως εκ τούτου οι h διακριτοί αριθμοί $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_h}$ πολλαπλασιάζονται και συνεπώς είναι οι h-οστές συνιστώσες της μονάδας.

Θεώρημα 3.1.2

Το φάσμα ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα με δείκτη h ιδιοτιμές είναι αμετάβλητο κάνοντας μια περιστροφή $2\pi/h$, αλλά όχι για μια θετική γωνία μικρότερη από $2\pi/h$.

Απόδειξη

Έστω το φάσμα του A είναι $\sigma = (\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Τότε το φάσμα του $e^{i2\pi/h}A$ είναι $\tau = (\lambda_1 e^{i2\pi/h}, \lambda_2 e^{i2\pi/h}, \dots, \lambda_n e^{i2\pi/h})$,

Θεώρημα 3.1.3

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με δείκτη h, και έστω

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n_1} + \alpha_2\lambda^{n_2} + \cdots + \alpha_k\lambda^{n_k},$$

όπου $n > n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ και $a_t \neq 0, t - 1,2, \dots, k$, να είναι η χαρακτηριστική πολυώνυμη του A. Τότε

$$h = g.c.d.(n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{k-1} - n_k).$$

Απόδειξη

$$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n_1} + \alpha_2\lambda^{n_2} + \cdots + \alpha_k\lambda^{n_k}$$

$$= \lambda^n + \alpha_1\theta^{n-n_1}\lambda^{n_1} + \alpha_2\theta^{n-n_2}\lambda^{n_2} + \cdots + \alpha_k\theta^{n-n_k}\lambda^{n_k},$$

όπου $\theta = e^{i2\pi/m}$. Ακολουθεί ότι

$$a_t = a_t\theta^{n-n_1}$$

Αυτό μαζί με το προηγούμενο επιχείρημα υποδηλώνει ότι

$$h = g.c.d.(n - n_1, n - n_2, \dots, n - n_k)$$

και η (2) ακολουθεί άμεσα. ■

Πόρισμα 3.1.1 Ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με θετικός ίχνος είναι αρχικός.

$$g.c.d.(n-(n-1),\dots)=1.$$

3.2 Πρωταρχικοί πίνακες

Έχει ήδη δειχθεί στο Πόρισμα 3.1.1, ότι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με θετικό ίχνος είναι πρωταρχικός. Πιο συγκεκριμένα, αν A είναι μη υποβιβάσιμος τότε I_n+A είναι πρωταρχικός. Στην Παράγραφο 3.1.2, είδαμε ότι ο πίνακας I_n+A έχει τη σημαντική ιδιότητα ότι παραμένει θετικός αν τον υψώσεις σε επαρκώς υψηλότερη δύναμη (βλ. Πόρισμα 1.2.2, Κεφάλαιο 1). Τώρα δείχνουμε ότι είναι γενική ιδιότητα όλων των πρωταρχικών πινάκων. Μάλιστα, είναι ένας διαφορετικός ορισμός πινάκων.

Θεώρημα 3.2.1 (Frobenius, [7])

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για ένα μη αρνητικό πίνακα A ώστε να είναι πρωταρχικός είναι ότι A^m είναι θετικός για κάποιο θετικό ακέραιο m.

Απόδειξη (Marcus και Minc, [8])

Υποθέτουμε ότι $A^m > 0$. Τότε ο A πρέπει να είναι μη υποβιβάσιμος. Αν ο πίνακας A είναι υποβιβάσιμος τότε είναι μετάθεση σε ένα πίνακα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Τότε A^m θα είναι μετάθεση σε ένα πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} B^m & C' \\ 0 & D^m \end{bmatrix}$$

και επιπλέον δεν είναι θετικός. Θα δείξουμε ότι το h,o δείκτης του A είναι 1. Αν r είναι η maximal ιδιοτιμή του A και $re^{i2\pi t/h}$, $t= 0, 1,\dots, h-1$ είναι ιδιοτιμές ενός Α του μέτρου r (βλ. Θεώρημα 3.1.1). Τότε A^m έχει h ιδιοτιμές του μέτρου r^m. Τότε ο A^m είναι πρωταρχικός από το Πόρισμα 1.1 και επιπλέον το h πρέπει να ισούται με τη μονάδα.

Αντιστρόφως, αν A είναι πρωταρχικός πίνακας με μέγιστη ρίζα r. Τότε ο πίνακας A/r είναι επίσης πρωταρχικός με maximal ρίζα τη μονάδα.Έστω

$$S^{-1}\left(\frac{1}{r}A\right)S = 1+b$$

είναι η κανονική μορφή του Jordan του A/r. Από τη παραπάνω σχέση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

α) το μέτρο όλων των ριζών του B είναι μικρότερες της μονάδας και επιπλέον $\lim\limits_{t\to\infty} B^t = 0$

β) η πρώτη στήλη του S είναι ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα του A/r που αντιστοιχεί στη μέγιστη ρίζα τη μονάδα και επιπλέον δεν έχει μηδενικές συνιστώσες

γ) η πρώτη σειρά του S^{-1} είναι ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα της μετάθεσης του A/r που αντιστοιχεί στη μέγιστη ρίζα και δεν μπορεί να έχει μηδενικές συνιστώσες.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{r}A\right)^t &= \lim_{t\to\infty}(S(1+B)S^{-1})^t \\ &= S\left(1+\left(\lim_{t\to\infty}B^t\right)\right)S^{-1} \\ &= S(1+0)S^{-1}\end{aligned}$$

είναι ένας μη αρνητικός πίνακας. Αλλά τα (i,j) στοιχεία του $S(1+0)S^{-1}$ είναι μη μηδενικό γινόμενο $S_{i1}(S^{-1})_{1j}$ για όλα τα j. Ως εκ τούτου $S(1+0)S^{-1}$ είναι αυστηρά θετικός

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{r}A\right)^t > 0.$$

Συνεπώς, για ένα αρκετά μεγάλο ακέραιο m,

$$\left(\frac{1}{r}A\right)^m > 0.$$

και επίσης,

$$A^m > 0.$$

Πρέπει να τονισθεί ότι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.2.1 δεν είναι προφανές μιας και το γινόμενο των αρχικών πινάκων δεν χρειάζεται να είναι μη υποβιβάσιμο. Από την άλλη πλευρά, ένα γινόμενο υποβιβάσιμων πινάκων μπορεί να είναι θετικό. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

είναι αρχικοί, αλλά το γινόμενο

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

είναι υποβιβάσιμος πίνακας. Η δεύτερη απόδειξη είναι αρκετά προφανής.

3.3.3 Η Frobenious μορφή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα

Ο Frobenius [29] ανακάλυψε ότι μία αξιοσημείωτη σχέση μεταξύ των φασματικών ιδιοτήτων ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα και πώς παρουσιάζονται τα μηδενικά του στοιχεία.

<u>Θεώρημα 3.3.1</u>

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με δείκτη h ≥ 2. Τότε ο A είναι μετάθεση σε ένα πίνακα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου τα μηδενικά μπλοκ πάνω στη κύρια διαγώνιο είναι τετραγωνικοί πίνακες.

<u>Απόδειξη (Wielandt, [1])</u>

Αν *r* είναι η maximal ιδιοτιμή του *A*. Τότε όπως είδαμε στο *Θεώρημα 3.1.1*

$$\lambda_t = re^{i2\pi t/h}, \qquad t = 0,1,\dots,h-1$$

είναι οι ιδιοτιμές του *A* του μέτρου r και

$$A = e^{i2\pi t/h} D_t A D_t^{-1}, \qquad t = 0,1,\dots,h-1, \tag{2}$$

όπου $|D_t| = I_n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι χωρίς απώλεια της γενικότητας το (1,1) στοιχείο κάθε πίνακα D_t είναι η μονάδα. Αν *z* είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο του r. Ορίζουμε ότι

$$z^t = D_t z, \qquad t = 0,1,\dots,h-1. \tag{3}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε,

$$Az^t = e^{i2\pi t/h} D_t A D_t^{-1} D_t z = e^{i2\pi t/h} D_t r z = \lambda_t z^t,$$

και επιπλέον z^t είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο του λ_t. Αν ο ιδιόχωρος κάθε λ_t είναι μονοδιάστατος το z^t $t = 0,1,\dots,h-1$ ορίζονται μέσω μίας σταθεράς. Αλλά η πρώτη συντεταγμένη κάθε D_t είναι 1 και επιπλέον ο D_t είναι μοναδικά ορισμένος. Έτσι έχουμε

$$A = e^{i2\pi t/h} D_t \left(e^{i2\pi s/h} D_s A D_s^{-1}\right) D_t^{-1}$$

$$= e^{i2\pi(s+t)/h} (D_t D_s) A (D_t D_s)^{-1},$$

και τώρα μπορούμε να δείξουμε με λογική ανάλογη με εκείνη της προηγούμενης σχέσης ότι το D_tD_sz είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε $re^{i2\pi(s+t)/h}$. Συγκεκριμένα, $D_1^h z$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο με το $re^{i2\pi t/h}$ = r. Από τη μοναδικότητα του D_t μπορεί να περιέχει

$$D_1^h = I_n,$$

έτσι ώστε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του D_1 είναι οι *h-οστές ρίζες του 1.* Αν P είναι ένας πίνακας μετάθεσης, όπως

$$P^t D_1 P = \sum_{t=1}^{s} e^{\frac{im_t 2\pi}{h}} I_n,$$

όπου $0 = m_1 < m_2 < \ldots < m_s \leq h-1$. Χωρίζουμε τον P^TAP σε μπλοκ σύμφωνα με το χώρισμα P^TD_1P παραπάνω, το οποίο είναι

$$P^t AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{bmatrix},$$

όπου το μπλοκ A_{pq} είναι $n_p \times n_q$ $p,q = 1,2,\ldots s$. Εξισώνοντας τα (p,q) μπλοκ και από τις δύο πλευρές του $P^TAP = e^{i2\pi/h}(P^TD_1P)(P^TAP)(P^TD_1^{-1}P)$ εμείς παίρνουμε

$$A_{pq} = e^{i(1+m_p-m_q)2\pi/h} A_{pq}.$$

Επίσης για κάθε *(p,q)*

$$A_{pq} = 0, \qquad \textbf{(5)}$$

ή

$$m_q - m_p \equiv 1 \ (mod\ h). \qquad \textbf{(6)}$$

Ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος και επιπλέον για κανένα p μπορεί A_{pq} να είναι μηδέν για όλα τα q ούτε για κάποιο q, μπορεί ο A_{pq} να εξαφανιστεί για όλα τα p.

Αν $p=1$, τότε

$$m_q \equiv 1 \ (mod\ h), \qquad \textbf{(7)}$$

και αφού $1 \leq m_1 < m_2 \ldots < m_s \leq h-1$ η μόνη λύση της παραπάνω σχέσης είναι $m_2 = 1$. Επίσης $A_{1q}=0$ για όλα τα $q \neq 2$. Μετά για $p=2$, ισχύει

$$m_q - m_2 \equiv 1 \ (mod\ h),$$

που σημαίνει

$$m_q \equiv 2 \ \ (mod\ h),$$

Και όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι $m_3 \equiv 2$, και $A_{pq} = 0$ και όλα τα $q \neq 3$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $m_{p+1}=p$ και $A_{pq}=0$ *για όλα τα* $q \neq p+1$, $p=1,2,\ldots,s-1$.

Σε αυτό το σημείο, εξετάζουμε την υπόθεση p=s. Είδαμε ότι για κάθε q είτε $A_{sq}=0$ ή m_q-$m_s \equiv 1$ *τότε* $m_q \equiv s$. Τώρα το A_{s1} δεν μπορεί να είναι 0 μιας και όλα τα A_{p1} είναι 0. Ως εκ τούτου πρέπει να έχουμε:

$$m_1 \equiv s \ (mod\ h),$$

το οποίο σημαίνει ότι $s=h$ και επίσης $m_q \not\equiv s$ για όλα τα $q \neq 1$. Συνεπάγεται ότι $A_{sq}=0$ για όλα τα $q \neq 1$. ■

Πολλές φασματικές ιδιότητες των αρχέγονων πινάκων μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως, από τη μορφή πινάκων του Frobenius. Είναι ξεκάθαρο ότι το ίχνος ενός αρχέγονου πίνακα πρέπει να είναι μηδέν αν $h>2$. Επιπροσθέτως, κάποιες δομικές ιδιότητες των αρχέγονων πινάκων είναι αρκετά προφανείς: μερικές δυνάμεις του πίνακα πρέπει να είναι μετάθεση σε ένα άμεσο άθροισμα.

Παράδειγμα 3.3.1

Για τον πίνακα

$$D = \sum_{t=1}^{h} e^{i2\pi t/h} I_{n_t},$$

έχουμε

$$D^{-1}(P^T AP)D = e^{i2\pi t/h} P^T AP$$

Συνεπώς A *και* $e^{i2\pi/h}A$ είναι όμοιοι. ■

3.3.4 Πίνακες σε υπερδιαγώνια block μορφή

Ένας πίνακας A της μορφής

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

όπου το μπλοκ $A_{i,i+1}$ είναι $n_i \times n_{i+1}$ $i=1,2,...k-1$ και A_{k1} είναι $n_k \times n_1$ το οποίο λέγεται superdiagonal block form ή πιο συγκεκριμένα superdiagonal $(n_1,n_2,...,n_k)$ - *block* form. Αν A είναι μη υποβιβάσιμος με δείκτη k, τότε η παραπάνω σχέση είναι σίγουρα Frobenius μορφή του A.

Ένας τέτοιος πίνακας, δεν είναι απαραίτητα μη υποβιβάσιμος, ακόμη και αν όλα τα μπλοκ $A_{i,i+1}$ τυχαίνει να είναι τετράγωνα και αρχικά. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

είναι υποβιβάσιμος αν και τα (1,2) και (2,1) μπλοκ είναι αρχικά. Από την άλλη πλευρά, ένας πίνακας που έχει την παραπάνω μορφή όπου όλα τα μπλοκ είναι υποβιβάσιμα τότε είναι μη υποβιβάσιμος.

$$\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

είναι μη υποβιβάσιμος, αν και τα (1,2) και (2,1) μπλοκ είναι υποβιβάσιμα. Σε αυτή την περίπτωση, παίρνουμε τις αναγκαίες και επαρκείς συνθήκες, για έναν μη αρνητικό πίνακα της παραπάνω μορφής να είναι μη υποβιβάσιμος.

Λήμμα 3.4.1

Εάν A είναι μια υπερδιαγώνια block μορφή $(n_1, n_2, \dots, n_k)$

$$A^k = \sum_{j=1}^{k} B_j,$$

όπου $B_j = A_{j,j+1}A_{j+1,j+2}\dots A_{j-1}$ *είναι* n_j *τετράγωνα* $j=1.2\dots,k$.

Λήμμα 3.4.2

Όλοι οι πίνακες B_j *που ορίζονται στο παραπάνω Λήμμα έχουν ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Αν σ και τα είναι οι μεταθέσεις στο {1,2,...,n}, ορίζουμε τη σύνθετη μετάθεση στ από*

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)), \quad i = 1,2,\dots,n$$

Ο $n\times n$ πίνακας μετάθεσης Α(σ) καλείται *incidence matrix* of σ και τα *(i,j) στοιχεία* του είναι $\delta_{i,\sigma(j)}$. Τότε έχουμε:

$$A(\sigma\tau) = A(\sigma)A(\tau).$$

Θεώρημα 3.4.1 (Minc, [9])

Έστω A είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με αριθμό ιδιοτιμών μεγίστου μέτρου h. Τότε ο A είναι μετάθεση με έναν πίνακα που έχει k μη μηδενικά μπλοκ αν και μόνο αν το k διαιρεί το h.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι *A* είναι μια *μετάθεση* σε έναν πίνακα της παραπάνω μορφής. Τότε το A^k είναι *μετάθεση* με

$$\sum_{j=1}^{k} B_j,$$

όπου B_j είναι αυτά που ορίζονται στο Λήμμα 3.4.1. Έστω r η maximal ιδιοτιμή του A. Από το Λήμμα 3.4.2, η h ιδιοτιμή του μέγιστου μέτρου πρέπει να είναι ίσα διαιρεμένα μεταξύ των μπλοκ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ και επίσης καθένα από τα B_j πρέπει να έχει ακριβώς h/k ιδιοτιμές του μέτρου r^k. Συμπεραίνουμε ότι το k πρέπει να διαιρείται με το h.

Αντίθετα, έστω A είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας,με δείκτη h και έστω k οποιοσδήποτε διαιρέτης του h.

$$\sigma(sk+t) = s+1+(t-1)m, \quad s = 0,1,\ldots,m-1, t = 1,2,\ldots,k.$$

Το οποίο είναι

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & 2k & 2k+1 & \cdots & km \\ 1 & 1+m & \cdots & 1+(k-1)m & 2 & 2+m & \cdots & 2+(k-1)m & 3 & \cdots & km \end{pmatrix}.$$

Ακολουθεί ότι

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(i) = i-m, i = m+1, m+2, \ldots, h$$
$$\sigma\tau\sigma^{-1}(1) = h$$

και

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(i) = h-m+i-1, \qquad i = 2,3,\ldots,m.$$

Έπειτα,

$$A(\sigma)A(\tau)A(\sigma)^T = \begin{bmatrix} 0 & I_{h-m} \\ P_m & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

όπου P_m δηλώνει $m\times m$ πίνακας μετάθεσης με 1 στις θέσεις (1,2),(2,3),…,(m-1,m) και (m,1).

Ο $PQAQ^TP^T$ είναι ένας n×n πίνακας με superdiagonal μπλοκ όπως στον παραπάνω πίνακα, αντικαθιστώντας όπου 1 με τα κατάλληλα μπλοκ $A_{i,i+1}$. Έστω P είναι $n\times n$ πίνακας μετάθεσης χωρισμένος σε μπλοκ ώστε το $(i,\sigma^{-1}(i))$ μπλοκ είναι In_0-1. Τότε ο πίνακας $PQAQ^TP^T$ είναι σε superdiagonal ($g_1, g_2, .., g_k$)-μπλοκ όπου

$$g_t = \sum_{j=m(t-1)+1}^{mt} n_{\sigma^{-1}(j)}, \qquad t = 1,2,\ldots,k. \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα 3.4.1</u>

Αποδείξαμε το Θεώρημα 3.4.1,θεωρώντας τον πίνακα A τέτοιος ώστε ο πίνακας QAQ^T να είναι στη Frobenius μορφή με δείκτη h=12, όπου τα κύρια διαγώνια blocks, είναι σειράς $n_1, n_2, \ldots, n_{12}$.

Βρείτε τον πίνακα μετάθεσης P έτσι ώστε $PQAQ^TP^T$ είναι σε superdiagonal block form με $k=4$.

$$\tau = (12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1),$$

Και

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 5 & 8 & 11 & 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix},$$

Τότε

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 10 & 11 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A(\sigma)A(\tau)A(\sigma)^T = \left[\begin{array}{ccc:c} & 0 & & I_9 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}\right].$$

Και έτσι,

$$PQAQ^TP^T =$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:ccc} & & & A_{12} & 0 & 0 & & & & & & \\ & 0 & & 0 & A_{56} & 0 & & 0 & & & 0 & \\ & & & 0 & 0 & A_{9,10} & & & & & & \\ \hdashline & & & & & & A_{23} & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & & 0 & & 0 & A_{67} & 0 & & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & A_{10,11} & & & \\ \hdashline & & & & & & & & & A_{34} & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & & & 0 & & 0 & A_{78} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & A_{11,12} \\ \hdashline 0 & A_{45} & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & A_{89} & & 0 & & & 0 & & & 0 & \\ A_{12,1} & 0 & 0 & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

όπου

$$P = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_{10}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_{12}} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Σε αυτό το σημείο αποδεικνύουμε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.4.2

Αν A είναι ένας υποβιβάσιμος πίνακας χωρίς μηδενικές γραμμές ή μηδενικές στήλες, τότε υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^k,\beta^1,\beta^2,\ldots,\beta^k$ *ώστε*

$$\alpha^i \cup \beta^i = \{1,2,\ldots,n_i\}, \qquad \alpha^i \cap \beta^i = \emptyset, \qquad i = 1,2,\ldots,k,$$

και

$$A_{12}[\alpha^1|\beta^2] = 0, A_{23}[\alpha^2|\beta^3] = 0,\ldots,A_{k1}[\alpha^k|\beta^1] = 0.$$

Απόδειξη

Αν ο A είναι ένας n×n υποβιβάσιμος πίνακας τότε υπάρχουν ακολουθίες $\lambda=(j_1,j_2,\ldots,j_s) \in Q_{s,n}$ και $\mu=(j_{s+1},j_{s+2},\ldots,j_n) \in Q_{n-s,n}$ τέτοια ώστε $\lambda \cup \mu=\{1,2,\ldots,n\}$ και $A[\lambda|\mu]=0$.Έστω λ^i η υπακολουθία του λ, της οποίας όλα τα στοιχεία βρίσκονται στο διάστημα $(\sum_{r=1}^{i-1} n_r, \sum_{r=1}^{i} n_r]$, και έστω μ^i η υπακολουθία του μ, της οποίας όλα τα στοιχεία βρίσκονται στο ίδιο διάστημα, $i = 1,2,\ldots,k$, όπου $\sum_{r=1}^{0} n_r=0$. Τότε,

$$\lambda^i \cup \mu^i = \left\{\sum_{r=1}^{i-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^{i-1} n_r + 2,\ldots,\sum_{r=1}^{i} n_r\right\}$$

και

$$\lambda^i \cap \mu = \lambda \cap \mu^i = \emptyset\,, \qquad i = 1,2,\ldots,k, \qquad \bigcup_{i=1}^{k} \lambda^i = \lambda, \quad \bigcup_{i=1}^{k} \mu^i = \mu.$$

Επιπλέον, εφόσον κανένας από τους υποπίνακες $A_{i,i+1}$ μπορούν να έχουν μηδενική γραμμή ή στήλη, καμία από τις ακολουθίες $\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^\kappa,\mu,\mu^2,\ldots,\mu^\kappa$ μπορεί να είναι άδειες.

Έστω α^i είναι η ακολουθία που προέρχεται από λ^i αν αφαιρέσουμε το $\sum_{r=1}^{i-1} n_r$ από κάθε στοιχείο του, και έστω β^i είναι η ακολουθία που προέρχεται από μ^i με τον ίδιο τρόπο, $i=1,2,\ldots,k$

$$\alpha^i \cup \beta^i = \{1,2,\ldots,n_i\}, \qquad \alpha^i \cap \beta^i = \emptyset, \qquad i = 1,2,\ldots,k,$$

Επιπλέον, αν $p \in \alpha^i$ και $q \in \beta^{i+1}$ τότε $u= p+ \sum_{r=1}^{i-1} n_r \in \lambda$ και $\upsilon= q+\sum_{r=1}^{i} n_r \in \mu$ και το (u,υ) στοιχείο του A είναι μηδέν. Όμως το (u,υ) στοιχείο του A είναι το (p,q) στοιχείο του $A_{i,i+1}$

$$A_{i,i+1}\left[\alpha^i|\beta^{i+1}\right] = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,k-1, \qquad A_{k1}[\alpha^k|\beta^1] = 0. \ \blacksquare$$

Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να αποδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο δίνει τις αναγκαίες και επαρκείς συνθήκες για έναν πίνακα στη μορφή superdiagonal block να είναι μη υποβιβάσιμη.

<u>Θεώρημα 3.4.1 (Minc, [9])</u>

Έστω Α είναι ένας μη αρνητικός πίνακας της μορφής $PQAQ^TP^T$ που δείξαμε παραπάνω χωρίς μηδενικές γραμμές ή στήλες. Τότε ο Α είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν το γινόμενο $A_{12}A_{23}\ldots A_{\kappa 1}$ είναι μη υποβιβάσιμο.

<u>Απόδειξη</u>

Εμείς αποδείξαμε ότι η συνέπεια της συνθήκης δείχνοντας ότι αν ένας πίνακας A της παραπάνω μορφής είναι υποβιβάσιμος αλλά όχι μηδενικές γραμμές ή στήλες τότε $A_{12}A_{23}\ldots A_{\kappa 1}$ πρέπει να είναι υποβιβάσιμοι. Έχουμε $\alpha^i \cup \beta^i=\{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha^i \cap \beta^i=\emptyset$,

$$A_{12}[a^1|\beta^2] = 0,\ A_{23}[a^2|\beta^3] = 0, \ldots,\ A_{k1}[a^k|\beta^1] = 0. \qquad (4)$$

Θεωρούμε ότι

$$(A_{12}A_{23}\cdots A_{k1})[a^1|\beta^2] = 0,$$

Και συνεπώς ότι $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ είναι υποβιβάσιμος. Έστω $p \in \alpha^1$ *και* $q \in \beta^1$. Το (p,q) στοιχείο των $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ είναι:

$$\textstyle\sum_{t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}}(A_{12})_{pt_1}(A_{23})_{t_1t_2}\cdots\left(A_{k-1,k}\right)_{t_{k-2}t_{k-1}}(A_{k1})_{t_{k-1}q}. \qquad (5)$$

Εμείς θα δείξουμε κάθε όρος του παραπάνω αθροίσματος ότι είναι 0. Πράγματι,

α) είτε $(A_{12})_{pt1}=0$, $t_1 \notin \beta^2$ και επίσης $t_1 \in \alpha^2$

β) είτε $(A_{23})_{t1t2}=0$, $t_2 \notin \beta^3$ και επίσης $t_2 \in \alpha^3$

γ) είτε $(A_{34})_{t2t3}=0$, $t_3 \notin \beta^4$ και επίσης $t_3 \in \alpha^4$

δ) αν οι πρώτοι k-1 όροι του

$$(A_{12})_{pt_1}(A_{23})_{t_1t_2}\cdots\left(A_{k-1,k}\right)_{t_{k-2}t_{k-1}}(A_{k1})_{t_{k-1}q}. \qquad (6)$$

δεν είναι μηδέν, τότε $t_{\kappa-1} \notin \beta^k$ και επίσης $t_{k-1} \in a^k$. Αλλά τότε $(A_{k1})_{tk-1q}=0$ μιας και $q \in \beta$. Ως εκ τούτου ένας από τους παράγοντες του γινομένου πρέπει να είναι μηδέν για όποια επιλογή των $t_1,t_2,\ldots,t_{k-1}$. Έτσι,

$$(A_{12}A_{23}\cdots A_{k1})[a^1|\beta^2] = 0,$$

και συνεπώς ο $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ είναι υποβιβάσιμος.

Αποδεχόμαστε το αντίστροφο. Αν Α είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας και αν h είναι το ίχνος του Α τότε

$$\lambda_t = re^{i2\pi t/h},\ t = 0,1,\ldots,h-1,$$

με h ιδιοτιμές του Α του μέγιστου μέτρου r

$$A^k = \textstyle\sum_{j=1}^k B_j,$$

όπου $B_j = A_{j,j+1}A_{j+1,j+2}\ldots A_{j-1,j}$, j=1,2,…k και από Λήμμα 3.4.2 κάθε B_j έχει τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Αν $h=km$ τότε οι ιδιοτιμές του A^κ του μέγιστου μέτρου r^k είναι:

$$r^k e^{i2\pi t/m}, t = 0,1,\ldots,h-1$$

Καταλαβαίνουμε ότι $h/m=k$ είναι ίσα με r^k. Έπειτα κάθε B_j έχουν ένα απλή μέγιστη πραγματική ιδιοτιμή r^k. Τώρα χωρίζουμε το θετικό ιδιοδιάνυσμα x σε μπλοκ σύμφωνα με τη διαμέριση του A:

$$x = \sum_{j=1}^{k} x^j,$$

Όπου x^j είναι μια θετική n^j συνιστώσα, $j = 0,1,\ldots,k.$ Έχουμε

$$A^k x = \sum_{j=1}^{k} B_j\, x^j,$$

και

$$A^k x = r^k x = \sum_{j=1}^{k} r^k x^j.$$

Ακολουθεί ότι

$$B_j x^j = r^k x^j,\ j = 1,2,\ldots,k.$$

Ως εκ τούτου κάθε B_j έχει απλή μέγιστη ιδιοτιμή r^k και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα αναφερόμενο σε αυτό. Επίσης από το Θεώρημα 1.4.7 στο Κεφάλαιο 1, κάθε πίνακας $B_j = A_{j,j+1}A_{j+1,j+2}\ldots A_{j-1,j}$ είναι μη υποβιβάσιμος. ■

Πόρισμα 3.4.1 (Minc, [9])

Έστω A ένας μη αρνητικός πίνακας χωρίς μηδενική γραμμή ή στήλη. Τότε A είναι μη υποβιβάσιμος με δείκτη h αν και μόνο αν ο $A_{12}A_{23}\ldots A_{\kappa 1}$ είναι μη υποβιβάσιμος πίνακας με δείκτη h/k. Πιο συγκεκριμένα, ο A είναι μη υποβιβάσιμος με δείκτη k αν και μόνο αν ο $A_{12}A_{23}\ldots A_{\kappa 1}$ είναι ένας πρωταρχικός πίνακας.

Θεώρημα 3.4.4 (Minc, [10])

Έστω A ένας μη μηδενικός πίνακας. Ο αριθμός των μηδενικών ιδιοτιμών του A είναι τουλάχιστον

$$n - kn_\mu,$$

όπου $n_\mu = min(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Απόδειξη

Από το Λήμμα 3.4.1,

$$A^k = A_{12}A_{23}\ldots A_{k1} + A_{23}A_{34}\ldots A_{12} + A_{k1}A_{12}\ldots A_{k-1,k}.$$

Η τάξη των παραπάνω γινομένων δεν μπορεί να υπερβαίνει το n_μ το λιγότερο του n_i. Ως εκ τούτου $A_{i,i+1}A_{i+1,i+2}\ldots A_{i-1,I}$ τα οποία είναι n_i-τετράγωνο που έχει τουλάχιστον n_i-n_μ μηδενικές ιδιοτιμές. Έτσι ο A^k και κατά επέκταση ο A έχει τουλάχιστον

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - n_\mu) = n - kn_\mu$$

μηδενικές ιδιοτιμές. ■

Πόρισμα 3.4.2 (Minc, [10])

Αν Α ένας μη μηδενικός αντιστρέψιμος πίνακας τότε κάθε $A_{i,i+1}$ είναι n/k –τετράγωνο.

Θεώρημα 3.4.5 (Minc, [13])

Έστω $B_1, B_2, \ldots, B_s$ και $C_1, C_2, \ldots, C_t$ μη υποβιβάσιμοι μη αρνητικοί πίνακες. Τα ευθεία αθροίσματα

$$G = \textstyle\sum_{i=1}^{s} B_i \quad \textit{και} \quad H = \sum_{i=1}^{t} C_i$$

είναι μετάθεση αν και μόνο αν s=t κι υπάρχει μία μετάθεση $\sigma \in S_k$ έτσι ώστε B_i και $C_{\sigma(i)}$ είναι μετάθεση για i=1,2,..,k.

Απόδειξη

Για να αποδειχθεί η αναγκαιότητα των συνθηκών, έστω P ότι είναι ένας πίνακας μετάθεσης τέτοιος ώστε :

$$P^T G P = H,$$

και έστω τ μια μετάθεση που αντιστοιχεί στον P,τέτοια ώστε το (i,j) στοιχείο του πίνακα G να μετατίθεται στην *(τ(i),τ(j)) θέση του H=* $P^T GP$. Για συντομία ο συμβολισμός i,χρησιμοποιείται στην θέση του *τ(i).* Εάν ο *A*$[\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_\alpha | \nu_1, \nu_2, \ldots.., \nu_b]$ δηλώνει τον υποπίνακα του A που βρίσκεται στις γραμμές που αριθμούνται ως $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots, \mu_\alpha$ και στις στήλες που αριθμούνται ως $\nu_1, \nu_2, \ldots.., \nu_b$, τότε οι γραμμές του πίνακα A (και οι στήλες αντίστοιχα) λέγεται ότι διατέμνουν τον υποπίνακα.Τώρα υποθέστε ότι για κάποια υ, $1 \leq \upsilon \leq t$,

$$C_\upsilon = H[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p, \bar{\beta}_{p+1}, \bar{\beta}_{p+2}, \ldots, \bar{\beta}_q | \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p, \bar{a}_1, \bar{a}_1, \ldots \bar{\beta}_{p+1}, \bar{\beta}_{p+2}, \ldots, \overline{\beta}_q]$$

οι γραμμές και οι στήλες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ του G διατέμνουν το block πίνακα B_u,αλλά καμία από τις γραμμές ή τις στήλες $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q$ του G διατέμνουν το B_u. Τώρα, τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία στις γραμμές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, είναι στις στήλες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Έπειτα,

$$G[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p | \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots \beta_q] = 0,$$

και συνεπώς,

$$H[\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_p | \bar{\beta}_{p+1}, \bar{\beta}_{p+2}, \ldots \bar{\beta}_q] = 0.$$

Παρόλα αυτά, αυτό θα υποδήλωνε ότι ο C_υ είναι υποβιβάσιμος. Ως εκ τούτου, η υπόθεση είναι αδύνατη και καθένας από τους C_j μπορεί να διατέμνεται μόνο από στήλες και γραμμές που αντιστοιχούν στις στήλες και γραμμές που διατέμνουν κάθε μεμονωμένο πίνακα B_i. Από τη στιγμή που $\sum_{i=1}^{s} B_i$ και $\sum_{i=1}^{t} C_i$ είναι μετάθεση προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

Θεώρημα 3.4.6 (Minc, [25])

Εάν ο Α είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας και εάν ο A^{κ} είναι μετάθεση με το ευθύ γινόμενο των μη υποβιβάσιμων πινάκων $C_1, C_2, \dots, C_k$, τότε ο k διαιρεί τον δείκτη μη πρωταρχικότητας του Α, και όλα τα C_i, έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές.

Απόδειξη

Έστω P να είναι ένας πίνακας μετάθεσης τέτοιος ώστε $PA^kP^T = \sum_{t=1}^{k} C_t$. Έστω r να είναι η μέγιστη ιδιοτιμή και x ένα θετικό μέγιστο ιδιοδιάνυσμα του Α. Τότε

$$\left(\sum_{t=1}^{k} C_t\right)Px = PA^kP^TPx = PA^kx = r^kPx.$$

Προκύπτει ότι r^k είναι μια ιδιοτιμή (maximal ιδιοτιμή) καθενός από τους C_t.Από τη στιγμή που οι C_t είναι μη υποβιβάσιμοι,τότε η ιδιοτιμή r^k είναι απλή και συνεπώς ο πίνακας A^k έχει ακριβώς *k* ιδιοτιμές που ισοδυναμούν με r^k. Βέβαια, το Θεώρημα 3.1.1, υποδηλώνει ότι υπάρχουν *d=g.c.d(h,k)* τέτοιες ιδιοτιμές. Ως εκ τούτου *d=k* και συνεπώς *το k διαιρεί το h*. Προκύπτει τώρα από το Θεώρημα 3.4.1, σε συνδυασμό με τα Λήμματα 3.4.1, 3.4.2 και το Θεώρημα 3.4.3 ότι ο A^k είναι cogradient με ένα πίνακα της μορφής

$$\sum_{t=1}^{k} B_t,$$

όπου οι B_t είναι μη υποβιβάσιμοι και όλοι οι B_t έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές.

Αλλά τότε $\sum_{t=1}^{k} B_t$ και $\sum_{t=1}^{k} C_t$ είναι cogredient και όλοι οι B_t και όλοι οι C_t είναι μη υποβιβάσιμοι. Συνεπώς από το Θεώρημα 3.4.5, οι $B_1, B_2, \dots, B_k$, είναι cogredient με τους $C_1, C_2, \dots, C_k$, και έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

Θεώρημα 3.4.7

Έστω Α ένας μιγαδικός n×n πίνακας της μορφής (1), και έστω

$$\lambda^n + \sum_t b_t \lambda^{m_t},$$

όπου οι συντελεστές b_t είναι μη μηδενικοί, να είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Α. Τότε το k διαιρεί το n-m_t για όλα τα t.

Απόδειξη

Έστω *p(λ,M)* να δηλώνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Μ. Υποθέτουμε ότι ο Α είναι της μορφής (1) όπου το block $A_{S,S+1}$ είναι $n_s \times n_{s+1}$, *s=1,2,…,k-1* και A_{k1} είναι ένας $n_k \times n_1$ πίνακας και έστω

$$D = \sum_{s=1}^{k} \theta^s I_{n_s}$$

όπου $\theta = exp(2\pi i/k)$. Τότε

$$D^{-1}AD = \theta A$$

και συνεπώς,

$$D^{-1}(\theta\lambda I_n - A)D = \theta(\lambda I_n - A)$$

Έτσι ώστε

$$p(\theta\lambda, A) = \theta^n p(\lambda, A).$$

Ως εκ τούτου,

$$\theta^n\lambda^n + \sum_t b_t\theta^{m_t}\lambda^{m_t} = \theta^n\lambda^n + \sum_t b_t\theta^n\lambda^{m_t},$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\theta^{m_t} = \theta^n.$$

για κάθε t. Επομένως,

$$exp(2pi(n - m_t)/k) = 1$$

για κάθε t. ■

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος του Mirsky [20].

Θεώρημα 3.4.8 (Minc, [25])

Έστω Α ένας n×n μιγαδικός πίνακας στη μορφή (1),και υποθέτουμε ότι $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ είναι μη μηδενικές ιδιοτιμές του γινομένου $A_{12}A_{23}\dots A_{\kappa 1}$. Τότε το φάσμα του Α αποτελείται από n-km μηδενικά και τις km k-οστές ρίζες των αριθμών $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$.

Απόδειξη

Από το Λήμμα 3.4.2, το φάσμα του πίνακα A^κ αποτελείται από τους αριθμούς $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ μετρημένους *k* φορές, και *n-km* μηδενικά. Συνεπώς,

$$p(\lambda, A^k) = \lambda^{n-km} \prod_{j=1}^{m} \left(\lambda - \omega_j\right)^k, \qquad (7)$$

και

$$p(\lambda, A) = \lambda^{n-km}\varphi(\lambda),$$

όπου

$$\varphi(\lambda) = \sum_{t=0}^{km} c_t \lambda^t.$$

Από το Θεώρημα 3.4.7, ο συντελεστής c_t πρέπει να εξαφανιστεί, εκτός και αν ο k διαιρεί *το n-(n-km+ t) = km-t.*Προκύπτει ότι c_t = 0 όποτε k δεν διαιρεί το t. Με άλλα λόγια, το *φ(λ)* είναι πολυώνυμο του λ^{κ}:

$$\varphi(\lambda) = \prod_{t=1}^{m} (\lambda^k - \zeta_t),$$

Για κάποιους αριθμούς $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. Συνεπώς,

$$p(\lambda, A) = \lambda^{n-km} \prod_{t=1}^{n1} (\lambda^k - \zeta_t) = \lambda^{n-km} \prod_{\substack{1 \le t \le m \\ 1 \le j \le k}}^{n1} \left(\lambda^k - \zeta_t^{1/k} \theta^j\right), \qquad \textbf{(8)}$$

όπου θ=exp($2\pi i/k$) και $\zeta_t^{1/k}$ δηλώνει οποιαδήποτε φιξαρισμένη k-οστή ρίζα του ζ_t . Συνεπώς το χαρακτηριστικό του A^k είναι:

$$p(\lambda, A^k) = \lambda^{n-km} \prod_{t=1}^{m} (\lambda - \zeta_t)^k. \qquad \textbf{(9)}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (7) και (9) μπορούμε να καταλήξουμε ότι οι αριθμοί $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ είναι οι ίδιοι με τους αριθμούς $\omega_1, \omega_2, \dots., \omega_m$ στην ίδια σειρά. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (8) του *A* γράφεται

$$p(\lambda, A) = \lambda^{n-km} \prod_{\substack{1 \le t \le m \\ 1 \le j \le k}} \left(\lambda^k - \omega_\tau^{1/k} \theta^j\right),$$

και το Θεώρημα αποδεικνύεται. ■

<u>Θεώρημα 3.4.9 (Minc, [25])</u>

Έστω A ένας μη υποβιβάσιμος $n \times n$ πίνακας και υποθέτουμε ότι ο A^k είναι μετάθεση με το ευθύ άθροισμα μη υποβιβάσιμων πινάκων $C_1, C_2, \dots, C_k$. Εάν οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του C_1 είναι οι $\omega_1, \omega_2, \dots., \omega_m$, τότε το φάσμα του A αποτελείται από n-km μηδενικά και τις km k-οστές ρίζες των $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$.

<u>Απόδειξη</u>

Από το Θεώρημα 3.4.6, το k διαιρεί το περιεχόμενο του A, και συνεπώς από το Θεώρημα 3.4.1, ο πίνακας (4.1) είναι cogredient με ένα πίνακα της μορφής (1) με τα blocks πινάκων $A_{12} A_{23} \dots A_{\kappa 1}$ στην υπερδιαγώνιο. Τότε ο A^k *είναι μετάθεση* στον

$$\sum_{t=1}^{k} B_t,$$

όπου $B_t = A_{t,t+1}A_{t+1,t+2.....}A_{t-1,t}$ όπου $t=1,2,\ldots k$ και όλοι οι B_t έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Ως εκ τούτου από το Θεωρήματα 3.4.5, 3.4.6, οι πίνακες B_1 και C_1 έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές. Το αποτέλεσμα προκύπτει λόγω του Θεωρήματος 3.4.8.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV
Δομικές ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων

4.4.1 $(0, 1)$ – Πίνακες και παραμείνουσες

Αρχικά, στρέφουμε την προσοχή μας στις ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων, οι οποίες βασίζονται στον αριθμό των μηδενικών στοιχείων τους. Ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι είτε 0 ή 1,καλείται (0,1) πίνακας.

Έστω $S_1, S_2, \ldots, S_m$ υποσύνολα, όχι απαραίτητα διακριτά ενός n-διάστατου συνόλου S $=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.Έστω *A=*$(\alpha_{ij})$ ένας m × n (0,1) - πίνακας με α_{ij} *=1* εάν $x_j \in S_i$ και α_{ij}= 0 εάν $x_j \notin S_i$.Ο πίνακας A καλείται πίνακας πρόσπτωσης της διάταξης των υποσυνόλων $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_m$.Εάν τα $x_j's$ και τα S_i's είναι διατεταγμένα, ο πίνακας πρόσπτωσης ορίζεται μοναδικά από την διάταξη των υποσυνόλων και αντίστροφα.

<u>Ορισμός [SDR]</u>

Έστω $S_1, S_2, \ldots S_m$ υποσύνολα ενός n-διάστατου συνόλου S. Μια ακολουθία $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ διακριτών m-στοιχείων του S κατασκευάζει ένα σύστημα διακριτών αντιπροσώπων του S (σε συντομογραφία SDR) για τη διάταξη $S_1, S_2, \ldots, S_m$ εάν $s_i \in S_i$, για κάθε *i=1,2,….,m.*

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι μια διάταξη υποσυνόλων, μπορεί ή όχι να έχει SDR (η ύπαρξη και το πλήθος των SDR's μελετάται στη συνδυαστική).

<u>Παράδειγμα 4.1.1</u>

α)Η διάταξη των υποσυνόλων $X_1 = \{x_1, x_3\}$, $X_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$, $X_3 = \{x_2, x_3\}$, $X_4 = \{x_1, x_3, x_4\}$έχει 4 SDR's: (x_1, x_3, x_2, x_4),(x_1, x_4, x_2, x_3) ,(x_3, x_2, x_1, x_4),(x_3, x_4, x_2, x_1).

b)Η διάταξη των υποσυνόλων $S_1 = S_3 = S_4 = \{s_2, s_4\}$, $S_2 = S$ του 5-διάστατου συνόλου

S $=\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ δεν έχει SDR's.

Το πρόβλημα του να ορισθεί η ύπαρξη SDR's καθώς επίσης να εκτιμηθεί και ο αριθμός τους μπορεί να αναλυθεί διεξοδικά με τη βοήθεια πινάκων πρόσπτωσης.

Έστω *A=* (α_{ij}) ένας πίνακας πρόσπτωσης για τα υποσύνολα $S_1, S_2, \ldots S_m$ ενός n-διάστατου συνόλου $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Εάν η διάταξη έχει SDR τότε ξεκάθαρα $m \le n$ και υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $\sigma: \{1,2\ldots,m\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$ τέτοια ώστε

$$x_{\sigma(i)} \in S_i, \qquad \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,m.$$

Από τον ορισμό των πινάκων μετάπτωσης προκύπτει ότι:

$\alpha_{i\sigma(i)} = 1$ *για κάθε i=1,2,…m.*

Ως εκ τούτου η διάταξη έχει ένα SDR αν και μόνο αν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση σ τέτοια ώστε:

$$\prod_{i=1}^{m} \alpha_{i\sigma(i)} = 1, \qquad \textbf{(1)}$$

Ο αριθμός των SDR's ισούται με τον αριθμό των διακριτών 1-1 συναρτήσεων για τις οποίες η σχέση (1) ισχύει. Συνεπώς ισούται με:

$$\sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i\sigma(i)}, \qquad \textbf{(2)}$$

όπου η άθροιση είναι πάνω σε όλες τις 1-1 συναρτήσεις από το *{1,2….,m}* ⟶*{1,2,….,n}*.

<u>Ορισμός 4.1.2 (Permanent)</u>

Έστω *A*=(α_{ij}) ένας $m\times n$ πίνακας με μιγαδικά ή πραγματικά στοιχεία, $m \leq n$. Η παραμείνουσα του Α ορίζεται ως εξής:

$$Per(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} \alpha_{i\sigma(i)}, \qquad \textbf{(3)}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται πάνω σε όλες τις 1-1 συναρτήσεις σ όπως στη σχέση (2).Η ειδική περίπτωση όπου $m = n$ είναι ιδιαίτερης σημασίας. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε *per(A)* αντί για *Per(A).*Έτσι εάν ο πίνακας μας Α είναι n×n τετραγωνικός:

$$per(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} \alpha_{i\sigma(i)}, \qquad \textbf{(4)}$$

Τέλος, η ύπαρξη ενός SDR για μια διάταξη υποσυνόλων και ο αριθμός τους, μπορούν να επαναπροσδιοριστούν με βάση τον ορισμό της παραμείνουσας. Συνεπώς:

Μια διάταξη έχει ένα SDR αν και μόνο αν ο πίνακας πρόσπτωσης της έχει θετική παραμείνουσα. Μάλιστα,ο αριθμός των SDR's για μια διάταξη, ισοδυναμεί με την παραμείνουσα του πίνακα πρόσπτωσης της διάταξης.

<u>Θεώρημα 4.1.1</u>

Έστω A ένας $m\times n$ πίνακας, $m \leq n$.

a) *Η παραμείνουσα του Α είναι πολυγραμμική συνάρτηση των γραμμών του Α.*
b) *Εάν $m = n$ τότε $per(A^T) = per(A)$.*
c) *Εαν P και Q είναι $m\times m$ και $n\times n$ πίνακες μετάθεσης, αντίστοιχα, τότε*

$$per(PAQ) = per(A).$$

d) *Εάν D και G είναι $m\times m$ και $n\times n$ διαγώνιοι πίνακες, αντίστοιχα, τότε*

$$per(DAG) = per(D)\, per(A) per(G).$$

Όλες αυτές οι ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού της παραμείνουσας. Το παρακάτω θεώρημα είναι κάτι ανάλογο του θεωρήματος επέκτασης του Laplace για τις ορίζουσες.

Θεώρημα 4.1.2

Αν $A = (a_{ij})$ ένας $m\times n$ πίνακας, $m\leq n$ και αν το α είναι μία ακολουθία στο σύνολο $Q_{r,m}$. Τότε για $r<m$,

$$Per(A) = \sum_{\omega\in Q_{r,m}} per(A[a|\omega])Per(A(a|\omega)). \quad \textbf{(5)}$$

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε i, $1\leq i\leq m$,

$$Per(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{it}Per(A(i|t)). \quad \textbf{(6)}$$

Στην περίπτωση που $m = n$ τα αντίστοιχα ισχύουν για τις επεκτάσεις στηλών.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις τιμές του Α ως καθορισμένες. Για ένα συγκεκριμένο $\omega \in Q_{r,m}$ η παραμείνουσα του $A[\alpha|\omega]$ είναι το άθροισμα r! των διαγώνιων γινομένων και αυτό του Α(α |ω) είναι το άθροισμα των $\binom{n-r}{m-r}(m-r)!$ διαγώνιων γινομένων. Το προϊόν ενός διαγώνιου γινομένου του $A[\alpha|\omega]$ με ένα διαγώνιο γινόμενο του $A(\alpha|\omega)$ είναι ένα διαγώνιο γινόμενο του Α. Έπειτα για ένα σταθερό ω, $per(A[\alpha|\omega])Per(A(\alpha|\omega))$ είναι ένα άθροισμα του $r!\binom{n-r}{m-r}(m-r)!$ διακριτό διαγώνιο γινόμενο του Α. Επιπλέον, για διαφορετικές ακολουθίες ω λαμβάνονται διαφορετικά διαγώνια γινόμενα. Τώρα είναι $\binom{n}{r}$ ακολουθίες στο $Q_{r,m}$ και επιπλέον η δεξιά πλευρά της (5) είναι το άθροισμα

$$\binom{n}{r}r!\binom{n-r}{m-r}(m-r)! = \binom{n}{m}m!$$

τέτοιο διαγώνιο γινόμενο, το οποίο είναι το άθροισμα των διαγώνιων γινομένων του Α είναι και ίσο με το $Per(A)$. ■

4.4.2 Το Θεώρημα των Frobenius-Konig

Το θεμελιώδες αποτέλεσμα των μηδενικών προτύπων των πινάκων είναι το επονομαζόμενο Θεώρημα Frobenius - Konig. Πρώτα διατυπώθηκε από τον Frobenius [35]. Το 1915 ο Konig [42] έδωσε μια στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος, χρησιμοποιώντας γραφήματα. Το 1917 το Θεώρημα αποδείχθηκε εκ νέου από τον Frobenius [36] χρησιμοποιώντας μια στοιχειώδη μέθοδο. Το εν λόγω Θεώρημα δηλώνει ότι η απαραίτητη και επαρκής συνθήκη για κάθε όρο στην επέκταση της ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα στο 0, είναι ο πίνακας που περιέχει ως $s\times t$ μηδενικό υποπίνακα με $s+t = n+1$.

Θεώρημα 4.2.1

Η παραμείνουσα ενός μη αρνητικού $m\times n$ πίνακα, $m\leq n$ μηδενίζεται αν και μόνο αν ο πίνακας περιέχει έναν $s\times t$ μηδενικό υποπίνακα με $s+t = n+1$.

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει ένας $m\times n$ πίνακας, $m\leq n$ και υποθέτουμε ότι $A[\alpha|\beta] = 0$, $\alpha \in Q_{s,m} \in Q_{t,n}$ και $s+t = n+1$. Τότε ο υποπίνακας $A[\alpha|1,2,\ldots,n]$ περιέχει το πολύ $n-t = s-1$ μη μηδενικές στήλες και επίσης κάθε $s\times s$ υποπίνακας $A[\alpha|\omega]$ $\alpha \in Q_{s,n}$ έχει στήλη μηδέν. Με λίγα λόγια, $per(A[\alpha\ |\omega]) = 0$ για κάθε ω $\alpha \in Q_{s,n}$. Αν $s = m$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν s< m, τότε ακολουθεί το Θεώρημα 4.1.2 ότι

$$Per\ (A) = \sum_{\omega\in Q_{s,n}} per(A[a|\omega])Per\big(\ A(a|\omega)\big)=0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m\times m$ *πίνακας*, $m \leq n$ *και* $Per\ (A)=0$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m. Αν $m=1$ τότε ο A πρέπει να είναι μηδενικός πίνακας. Θεωρούμε ότι $m> 1$ και ότι το Θεώρημα ισχύει και όλους τους πίνακες με λιγότερες από m σειρές για τις οποίες η παραμείνουσα είναι γνωστή.

Θεώρημα 4.2.2 (Konig, [7])

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε κάθε διαγώνιος ενός $m\times n$ πίνακα, $m \leq n$ να περιέχει τουλάχιστον k μηδενικά διαγώνια στοιχεία είναι ο πίνακας μου να περιέχει έναν $s\times t$ μηδενικό υποπίνακα με $s + t = n + k$.

Απόδειξη (Aharoni, [15])

Αυξάνουμε τον A σε έναν $m\ \times(n+k-1)$ πίνακα $B=[A : J]$ έτσι ώστε οι πρώτες n στήλες του πίνακα B να σχηματίζουν τον πίνακα A και οι εναπομείνουσες στήλες να σχηματίζουν ένα $m\times(k-1)$ πίνακα J,όπου όλα τα στοιχεία του είναι μη μηδενικά. Έστω ότι κάθε διαγώνιος του A περιέχει το λιγότερο k μηδενικά. Τότε κάθε διαγώνιος του B περιέχει περιέχει ένα μηδενικό. Για τουλάχιστον, $m-(k-1)$ στοιχεία κάθε διαγωνίου του B, πρέπει να έγκειται στον πίνακα A και αυτές οι $m-(k-1)$ εγγραφές στον πίνακα μαζί με $k-1$ επιπρόσθετες εγγραφές του πίνακα, σχηματίζουν μια διαγώνιο του B που περιέχει το λιγότερο k μηδενικά. Ως εκ τούτου, από το Θεώρημα 4.2.1, ο πίνακας B περιέχει έναν $s\times t$ μηδενικό υποπίνακα με $s+t = (n+k-1)+1= n+k$. Έγκειται στον πίνακα A. Αντίθετα, εάν ο A περιέχει έναν $s\times t$ μηδενικό υποπίνακα με $s+t = (n+k-1)+1= n+k$, τότε από το Θεώρημα 4.2.1, κάθε διαγώνιος του B περιέχει το λιγότερο ένα μηδενικό. Διεκδικούμε ότι αυτό υποδηλώνει πως κάθε διαγώνιος του A περιέχει το λιγότερο k μηδενικά. Γι' αυτό το λόγο, αν μια διαγώνιος του A περιείχε t μηδενικά με $t \leq k-1$, τότε τα $m-t$ μη μηδενικά στοιχεία αυτής της διαγωνίου μαζί με τα κατάλληλα στοιχεία που θα εισαχθούν στον J (μη μηδενικά), θα σχηματίζουν τη διαγώνιο του B χωρίς μηδενικά. ■

Σ’ αυτό το σημείο θα ορίσουμε ένα πολύ σημαντικό σκεπτικό στη συνδυαστική. Συνήθως εμφανίζεται σε συνδυασμό με τους (0,1) πίνακες, αλλά εδώ είναι προτιμότερο να το ορίσουμε για τους μη αρνητικούς πίνακες.

Ορισμός 4.2.1 (*term rank*)

Έστω A ένας $m\times n$ μη αρνητικός πίνακας. Η τάξη στοιχείων του A(term rank) είναι ο μέγιστος αριθμός θετικών στοιχείων του A όταν δεν βρίσκονται δυο από αυτά στην ίδια γραμμή. Με άλλα λόγια, η τάξη στοιχείων (term rank) είναι η είναι η σειρά της μεγαλύτερης θετικής υποπαραμείνουσας του A.

Θεώρημα 4.2.3

Ο ελάχιστος αριθμός γραμμών σε έναν $m \times n$ μη αρνητικό πίνακα A που περιέχουν όλα τα θετικά στοιχεία του A είναι ίσος με την τάξη στοιχείων(term rank) του A.

Απόδειξη

Έστω ότι ο r δηλώνει τη κατάταξη όρων του A. Εάν οι w γραμμές περιέχουν όλα τα θετικά στοιχεία του A, τότε ξεκάθαρα $w \geq r$. Υποθέτουμε ότι u γραμμές και v στήλες περιέχουν όλα τα θετικά στοιχεία του A, έτσι ώστε $u+v=w$, όπου ο w είναι ο ελάχιστος δυνατός αριθμός. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι είναι οι u πρώτες γραμμές και οι v πρώτες στήλες του A, που σημαίνει ότι:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

όπου ο πίνακας B είναι $u\times v$. Ξεκάθαρα, $w \leq min(m,n)$ και έπειτα $u \leq n-v$. Τώρα η τάξη στοιχείων του πίνακα C είναι u. Αλλιώς, κάθε διαγώνιος του C θα περιέχει ένα μηδενικό και από το Θεώρημα 4.2.1 ο πίνακας C θα περιέχει έναν $p\times q$ μηδενικό υποπίνακα *με* $p+q=1+n-v$. Αλλά τότε, ο πίνακας A θα περιείχε ένα $(m-u+p)\times q$ μηδενικό υποπίνακα. Προκύπτει πως όλα τα θετικά στοιχεία του A θα περιέχονται στις $u-p$ γραμμές του και στις n-q στήλες του. Όμως,

$$(u-p)+(n-q) = u+n-1-n+v= u+v-1 = w-1,$$

όπου το w δεν μπορεί να είναι ελάχιστο. Για τους ίδιους λόγους η τάξη στοιχείων του πίνακα D είναι v.Τελικά η τάξη στοιχείων του A, θα πρέπει να είναι τουλάχιστον όσο μεγάλη όσο το άθροισμα εκείνων του C και D. Συνεπώς,

$$r \geq u + v= w.$$

Το παραπάνω σε συνδυασμό με τα προηγούμενα, μας δίνουν την ανισότητα $r \leq w$, που υποδηλώνει *ότι* $r = w$. ■

4.4.3 Μη-αρνητικοί Πίνακες και γραφήματα

Πολλές ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων όπως η μη υποβιβασιμότητα, οι αρχέγονοι πίνακες, η Frobennius μορφή ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα και ο αριθμός ιδιοτιμών, βασίζονται στο πως παρουσιάζονται τα μηδενικά στοιχεία ενός πίνακα. Οι ιδιότητες αυτές, μπορούν να μελετηθούν αναλυτικά αντικαθιστώντας τον πίνακα μας με ένα (0,1) πίνακα, με τον ίδιο ακριβώς αριθμό μηδενικών.Με καθέναν βέβαια από αυτούς τους (0,1) πίνακες μπορούμε να συνδέσουμε, βασικά, ένα μοναδικό κατευθυνόμενο γράφημα.

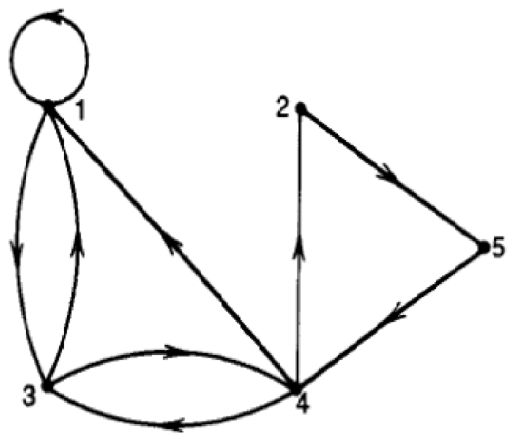
Ορισμός 4.3.1 (directed graph, subgraph, spanning subgraph)

Έστω V ένα μη κενό n-σύνολο, του οποίου τα στοιχεία μπορούν να ονομασθούν 1,2,…,n και έστω E μια δυαδική σχέση πάνω στο V,που είναι ένα σύνολο ταξινομημένων ζευγαριών του V. Το ζευγάρι D = (V,E) καλείται κατευθυνόμενο γράφημα(directed graph),όταν τα στοιχεία του V είναι οι κορυφές του και τα στοχεία του E είναι τα τόξα του. Το τόξο (i,j) ενώνει την κορυφή i με την κορυφή j.Ένα υπογράφημα(subgraph) του D,είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα του οποίου όλες οι κορυφές και τα τόξα ανήκουν στο D.Ένα εκτείνων υπογράφημα(spanning subgraph) του D, είναι ένα υπογράφημα που περιέχει όλες τις κορυφές του.

Πολλές φορές είναι πιο βολικό,να παριστάνεται το κατευθυνόμενο γράφημα του D, μέσω ενός διαγράμματος του οποίου οι κορυφές αναπαρίστανται με τελείες και τα τόξα του,με κατευθυνόμενες γραμμές που ενώνουν τα κατάλληλα σημεία.

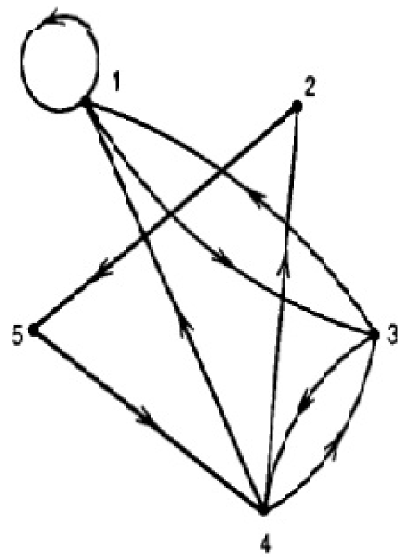
Παράδειγμα 4.3.1

Έστω V ={1,2,3,4,5} και E={(1,1),(1,3),(2,5),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(5,4)}.Τότε το γράφημα D = (V,E) μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάγραμμα.



Henryk Minc Nonnegative matrices John Wiley & Sons, 1988 p.76 ex.3.1,Chapter IV.

Φυσικά το ακόλουθο γράφημα αναπαριστά το ίδιο γράφημα:



Henryk Minc Nonnegative matrices John Wiley & Sons, 1988 p.76 ex.3.1, Chapter IV.

Τα δύο διαγράμματα είναι ίδια, μιας και κάθε κορυφή συνδέεται μέσω κατευθυνόμενων ευθειών με τις ίδιες κορυφές και στις δύο περιπτώσεις. Σημειώνουμε ότι στο δεύτερο γράφημα κάποιες γραμμές τέμνονται σε σημεία που δεν είναι κορυφές του γραφήματος. Αυτές οι τομές δεν είναι κομμάτι του γραφήματος. ■

Μία ακολουθία τόξων $(i, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3)\ldots(t_{m-2}, t_{m-1}), (t_{m-1}, j)$ σε γράφημα D καλείται '*μονοπάτι' που συνδέει το i με το j* (path connecting i to j). Το μήκος του μονοπατιού καθορίζεται από τον αριθμό m των τόξων στην ακολουθία. Ένα μονοπάτι μήκους m που ενώνει κορυφή i με τον εαυτό της καλείται *κύκλος μήκους m (cycle of length m).* Αν κάθε κορυφή σε ένα κύκλο εμφανίζεται μόνο μία φορά ο κύκλος καλείται *κύκλωμα (circuit).* Ένας κύκλος μήκους 1 λέγεται *βρόχος (loop).* Ένα κλειστό κύκλωμα λέγεται *Hamiltonian κύκλωμα (Hamiltonian circuit).*

Ορισμός 4.3.2

i) Ο πίνακας γειτνίασης A(D) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος D με n κορυφές είναι ο (0, 1) πίνακας του οποίου οι (i,j) τιμές είναι 1 αν και μόνο αν (i,j) είναι ένα τόξο του D.

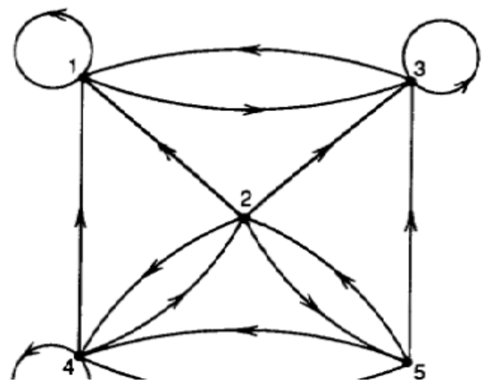
ii) Ένα κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται ότι συσχετίζεται με μη αρνητικό πίνακα X, εάν ο πίνακας γειτνίασης του D(X) να έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών στοιχείων όπως ο X.

Ορισμός 4.3.3

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα D λέγεται ισχυρά συνεκτικό (strongly connected) εάν για κάθε ζευγάρι διακριτών κορυφών i, j υπάρχει ένα μονοπάτι στο D που συνδέει το i με το j.

Παράδειγμα 4.3.2

Το κατευθυνόμενο γράφημα του Παραδείγματος 4.3.1 είναι *ισχυρά συνεκτικό (strongly connected)* ενώ το ακόλουθο γράφημα



Henryk Minc Nonnegative matrices John Wiley & Sons, 1988 p.77 ex.3.2, Chapter IV.

δεν είναι. Δεν περιέχει κάποιο κατευθυνόμενο μονοπάτι που να συνδέει την κορυφή 1 με τη 2. Ο πίνακας γειτνίασης του συγκεκριμένου γραφήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι υποβιβάσιμος. ■

Στα Παραδείγματα 4.3.1 και 4.3.2, το γράφημα που σχετίζεται με ένα μη υποβιβάσιμο πίνακα είναι ισχυρά συνεκτικό, ενώ το αντίστοιχο ενός υποβιβάσιμου πίνακα δεν είναι. Δείχνουμε ότι αυτή η αντιστοιχία ισχύει για όλους τους μη αρνητικούς πίνακες. Υπενθυμίζουμε ότι *αν* $A=(a_{ij})$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε $a_{ij}^{(k)}$ υποδηλώνει τα (i, j) στοιχεία του A^k.

Θεώρημα 4.3.1

Αν $A= (a_{ij})$ *είναι ένας (0, 1)-πίνακας και D(A) είναι το κατευθυνόμενο γράφημα, που σχετίζεται με τον πίνακα A με κορυφές 1,2,…,n τότε ο αριθμός των διακριτών μονοπατιών μήκους k που συνδέουν την κορυφή i με την κορυφή j είναι ίσος με* $a_{ij}^{(k)}$.

Απόδειξη

Από τη μία πλευρά έχουμε

$$a_{ij}^{(k)}= \sum_{t_1,t_2,\ldots\ldots,t_k} a_{it_1}a_{t_1t_2}a_{t_2t_3}\ \ldots\ldots\, a_{t_{k-2}t_{k-1}}a_{t_{k-1}j},$$

όπου $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ είναι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ 1 και n. Από την άλλη πλευρά, το μονοπάτι $(i, t_1),(t_1,t_2),(t_2,t_3),\ldots,(t_{k-2},t_{k-1}),(t_{k-1}, j)$ συνδέει το i με το j στο *D(A)* αν και μόνο αν $a_{it_1}a_{t_1t_2}a_{t_2t_3} \ldots a_{t_{k-2}t_{k-1}}a_{t_{k-1}j}=1$.Συνεπώς, προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

<u>Πόρισμα 4.3.1</u>

Εάν *A= (α* $A=(a_{ij})$ *είναι ένας μη αρνητικός πίνακας, τότε το συσχετισμένο κατευθυνόμενο γράφημα έχει μια διαδρομή μήκους k που συνδέει την κορυφή i με την κορυφή j αν και μόνο αν* $aij^k > 0$.

Με βάση το παραπάνω Πόρισμα, προκύπτει το ακόλουθο Θεώρημα:

<u>Θεώρημα 4.3.2</u>

Ένας μη αρνητικός πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν το συσχετιζόμενο κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό(strongly connected).

<u>Απόδειξη</u>

Από το Θεώρημα 4.2.3, Κεφάλαιο Ι, ένας μη αρνητικός $n\times n$ πίνακας $A=(a_{ij})$ είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν για κάθε *i* και j, $1\leq i,\ j\leq n$, υπάρχει ένας ακέραιος *k* τέτοιος ώστε ο $aij^k > 0$. Από το Πόρισμα 4.3.1,η συνθήκη αυτή ικανοποιείται αν και μόνο αν το συσχετιζόμενο κατευθυνόμενο γράφημα *D(A)* έχει μια διαδρομή(ένα μονοπάτι) που συνδέει τη κορυφή *i* με την κορυφή *j*. Προκύπτει ότι ο πίνακας Α είναι μη υποβιβάσιμος αν και μόνο αν για κάθε *i* και *j* υπάρχει μια διαδρομή στο *D(A)* που συνδέει την κορυφή *i* με την *j*. Με άλλα λόγια αν και μόνο αν το *D(A)* είναι ισχυρά συνδεδεμένο. Οι γραφικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν εάν ένας δοσμένος μη αρνητικός πίνακας είναι πρωταρχικός ή όχι και για την εύρεση του αριθμού ιδιοτιμών για ένα μη υποβιβάσιμο πίνακα.

<u>Ορισμός 4.3.4 (index of imprimitivity)</u>

Έστω D είναι ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα. Ο Μ.Κ.Δ. των μηκών όλων των κλειστών διαδρομών στο D καλείται δείκτης του πίνακα D.

<u>Λήμμα 4.3.1</u>

Έστω D ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα με τον αριθμό ιδιοτιμών του k και έστω k_i *να είναι ο Μ.Κ.Δ. των μηκών όλων των κλειστών διαδρομών του D μέσω της κορυφής i. Τότε* $k_i = k$.

<u>Απόδειξη</u>

Προφανώς, $k|k_i$. Θα δείξουμε ότι $k_i|k$. Έστω C_j οποιαδήποτε κυκλική διαδρομή στο *D*. Επίσης, έστω ότι το μήκος της είναι m_j και υποθέτουμε ότι διέρχεται από την κορυφή j.Από τη στιγμή, που το D είναι ισχυρά συνεκτικό, περιέχει ένα μονοπάτι P_{ij} που συνδέει την κορυφή i με την κορυφή j, και ένα μονοπάτι P_{ji} που συνδέει την κορυφή j με την κορυφή i. Έστω επίσης, ότι τα μήκη αυτών των διαδρομών είναι s_{ij} και s_{ji} αντίστοιχα. Σε αυτό το σημείο, βέβαια πρέπει να αναφέρουμε ότι η διαδρομή που αποτελείται από τα P_{ij} και P_{ji} και η διαδρομή που αποτελείται από τα P_{ij},P_{ji}, C_j είναι κλειστές διαδρομές γύρω από την κορυφή i.Τα μήκη αυτών των κλειστών διαδρομών είναι $s_{ij} + s_{ji}$ και $s_{ij} + s_{ji} + m_j$. Από τη στιγμή που το k_i διαιρεί ταυτόχρονα τα $s_{ij} + s_{ji}$ και $s_{ij} + s_{ji} + m_j$ θα διαιρεί και το m_j. Με άλλα λόγια, το k_i διαιρεί το μήκος κάθε κλειστής διαδρομής στο D. Συνεπώς, k_i διαιρεί το k, καταλήγοντας έτσι στο συμπέρασμα ότι $k_i = k$. ■

Θεώρημα 4.3.3

Ο δείκτης ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα ισούται με τον αριθμό ιδιοτιμών του συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος.

Απόδειξη

Έστω h τον αριθμό ιδιοτιμών ενός μη υποβιβάσιμου $n \times n$ πίνακα $A = (\alpha_{ij})$ και έστω k ο αριθμός ιδιοτιμών του ισχυρά *συνεκτικού* κατευθυνόμενου γραφήματος *D(A)*. Θεωρούμε τις κλειστές διαδρομές γύρω από την κορυφή i.Έστω M_i,να είναι το σύνολο των μηκών αυτών των διαδρομών. Τότε, από το Λήμμα 4.3.1,

$$k = \text{Μ.Κ.Δ} \ \{m_t | m_t \in M_i\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Θα δείξουμε ότι το M_i είναι κλειστό ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Έστω m_1 και m_2 δύο τυχαίοι ακέραιοι στο M_i. Τότε ${\alpha_{ii}}^{m_1} > 0$ και ${\alpha_{ii}}^{m_2} > 0$, και από το Πόρισμα 4.3.1 προκύπτει ότι :

$${\alpha_{ii}}^{m_1+m_2} = \sum_{t=1}^{m} {\alpha_{it}}^{m_1} {\alpha_{ti}}^{m_2} \geq {\alpha_{ii}}^{m_1} {\alpha_{ii}}^{m_2} > 0.$$

Ως εκ τούτου, από το Πόρισμα 4.3.1,υπάρχει μια κλειστή διαδρομή μήκους m_1 και m_2 μέσω της κορυφής i και συνεπώς $m_1 + m_2 \in M_i$. Έπειτα, το M_i είναι κλειστό, όπως αναφέρθηκε, ως προς την πράξη της πρόσθεσης και από ένα *πολύ γνωστό Θεώρημα του Schur,* θα περιέχει όλα τα πεπερασμένου αριθμού πολλαπλάσια του k. Συνεπώς το ${\alpha_{ii}}^{kt} > 0$ για όλους τους αρκετά μεγάλους ακεραίους t. Από την άλλη πλευρά, εάν το s δεν είναι ένα πολλαπλάσιο του k, τότε προκύπτει από την (1), ο ορισμός του M_i και από το Πόρισμα 4.3.1 ότι ${\alpha_{ii}}^{s} = 0$. Από τη στιγμή, που το i είναι μπορούσε να είναι οποιαδήποτε κορυφή του D(A), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ${\alpha_{ii}}^{s} > 0$ για όλα τα αρκετά μεγάλα s και *i=1,2,…,n* αν και μόνο αν το s είναι πολλαπλάσιο του k.Ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος με αριθμό ιδιοτιμών h. Ως εκ τούτου, εάν $h > 1$, τότε *από το Θεώρημα 4.3.1, Κεφάλαιο ΙΙΙ*, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης *P* τέτοιος ώστε ο $P^T AP$ να είναι στη Frobenius μορφή με h μη μηδενικά υπερδιαγώνια block. Εάν το h=1,τότε ο A είναι πρωταρχικός και για αρκετά μεγάλο t, ο πίνακας $A^t = A^{ht}$ είναι θετικός. Καταλήγοντας, σε οποιαδήποτε περίπτωση, για αρκετά μεγάλα s, ${\alpha_{ii}}^{s} > 0$ αν και μόνο αν το s είναι πολλαπλάσιο του h. Έτσι, προκύπτει ότι $h = k$. ■

Πόρισμα 4.3.2

Ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας με μη μηδενική κύρια διαγώνιο είναι πρωταρχικός.

Το Θεώρημα 4.3.3 μας παρέχει μια χρήσιμη μέθοδο για να βρούμε το δείκτη ενός μη υποβιβάσιμου πίνακα. Είναι, παρόλα αυτά, υπό αμφισβήτηση εάν αυτή η μέθοδος είναι πιο αποτελεσματική από εκείνη που μας παρέχεται από το *Θεώρημα 3.3.1,Κεφάλαιο 3.*

Θεώρημα 4.3.4

Εάν A=(α_{ij}) είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας και

$$\alpha_{ij}a_{ij}^2 > 0$$

για κάποια (i,j), τότε ο πίνακας A είναι πρωταρχικός.

Απόδειξη

Από το Πόρισμα 4.3.1,στο συσχετισμένο κατευθυνόμενο γράφημα *D(A)* η κορυφή i συνδέεται με την κορυφή j, με διαδρομές μήκους 1 και 2.Από τη στιγμή που ο A είναι ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας, και συνεπώς από το Θεώρημα 4.3.2, *το D(A)* είναι ισχυρά συνδεδεμένο, συνεπώς υπάρχει μια διαδρομή που ενώνει την κορυφή j με την κορυφή i, μήκους s.Τότε,το *D(A)* περιέχει κλειστές διαδρομές μήκους *s+1,s+2*.Από τη στιγμή που ο *Μ.Κ.Δ.(s+1,s+2)=*1,προκύπτει από το Θεώρημα 4.3.3,ότι ο πίνακας A είναι πρωταρχικός.

Θεώρημα 4.3.5

Ένας μη υποβιβάσιμος πίνακας A είναι πρωταρχικός, αν και μόνο αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος q, τέτοιος ώστε ο $A^q * A^{q+1}$ να είναι μη μηδενικός.

4.4.4 Πλήρως αδιάσπαστοι πίνακες

Στα προηγούμενα κεφάλαια, είδαμε ότι οι φασματικές ιδιότητες ενός μη αρνητικού πίνακα μπορεί να γίνουν πιο προφανείς με κατάλληλη μετάθεση των γραμμών του και την ίδια μετάθεση των στηλών του. Θα καλούμε δυο πίνακες A και B ισοδύναμους ως προς μια μετάθεση (permutation equivalent) ή *p-equivalent*, εάν υπάρχουν πίνακες μετάθεσης P και Q τέτοιοι ώστε *A=PBQ.*

Ορισμός 4.4.1 (partly decomposable matrix)

Ένας $n\times n$ μη αρνητικός πίνακας καλείται μερικώς διασπάσιμος εάν περιέχει έναν $s\times(n\text{-}s)$ μηδενικό υποπίνακα. Με άλλα λόγια, ένας πίνακας καλείται μερικώς μη διασπάσιμος, εάν είναι p-ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix},$$

όπου X και Z είναι τετραγωνικοί πίνακες. Εάν ένας n×n μη αρνητικός πίνακας δεν περιέχει κάποιο s × (n-s) μηδενικό υποπίνακα, καλείται πλήρως διασπάσιμος.

Συνεπώς, ένας μη αρνητικός πίνακας είναι πλήρως διασπάσιμος, αν δεν είναι μερικώς διασπάσιμος. Ο 1×1 *μηδενικός πίνακας είναι, εξ ορισμού, μερικώς διασπάσιμος, ενώ ένας μη μηδενικός* 1×1 *πίνακας είναι πλήρως διασπάσιμος.*

Θεώρημα 4.4.1

Ένας μη αρνητικός n×n πίνακας A, n≥2 είναι πλήρως μη διασπάσιμος αν και μόνο αν

$$per(A(i|j))>0$$

για όλα τα i και j.

Απόδειξη

Από το Θεώρημα Frobenius - König (Θεώρημα 4.2.1), $per(A(h|k))=0$ για κάποια h και k αν και μόνο αν ο υποπίνακας $A(h|k)$, και συνεπώς ο πίνακας A περιέχει ένα s×t μηδενικό υποπίνακα με s+t = (n-1) + 1= n. Ως εκ τούτου, $per(A(h|k))=0$ για κάποια h και k αν και μόνο αν ο A είναι μερικώς διασπάσιμος. ■

Πόρισμα 4.4.1

Κάθε θετικό στοιχείο ενός πλήρους μη διασπάσιμου πίνακα βρίσκεται επάνω στην θετική διαγώνιο.

Ας θυμηθούμε ότι E_{ij} υποδηλώνει τον n×n πίνακα με 1 στη θέση (i, j) και στις υπόλοιπες θέσεις είναι μηδενικά.

Πόρισμα 4.4.2

Αν A είναι ένας πλήρως μη διασπάσιμος μη αρνητικός πίνακας και c είναι ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός, τότε για κάθε i και j,

$$per\,(A + cE_{ij})>per(A) \quad ή \quad per\,(A + cE_{ij})< per(A),$$

με c>0 ή c<0.

Εάν $per\,(A + cE_{ij})=per(A) + c\, per(A(i|j))$ *τότε από Θεώρημα 4.,* $per(A(i|j))>0$

Στην περίπτωση ενός πλήρως μη διασπάσιμου (0, 1) πίνακα ισχύουν τα ακόλουθα:

Πόρισμα 4.4.3

Αν A ένας πλήρως μη διασπάσιμος (0, 1) πίνακας, τότε

$$per\,(A+ \textstyle\sum_{i=1}^{m} E_{i_t j_t}) \geq per\,(A) + m.$$

Απόδειξη

Αφού ο *A* είναι *(0,1)* πίνακας, το Θεώρημα 4.4.1 υποδηλώνει ότι

$$c\, per(A(i|j)) \geq 1,$$

για όλα τα i και j. Επιπλέον,

$$per\,(A+E_{i_1 j_1}) = per\,(A) + per(A(i_1|j_1)) \geq per\,(A) + 1$$

Έτσι, ο πίνακας $A+E_{i_1 j_1}$ είναι πλήρως μη διασπάσιμος αποτέλεσμα ακολουθεί τώρα με επαγωγή σε m. ■

Θεώρημα 4.4.2

Αν

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & & A_{r-1} & B_{r-1} \\ B_r & 0 & & \cdots & 0 & A_r \end{bmatrix} \qquad (1)$$

είναι ένας μη αρνητικός $n \times n$ *πίνακας, όπου* A_i *ένας πλήρως διασπάσιμος* $n_i \times n_i$ *πίνακας και* $B_i \neq 0$, $i=1,\ldots,r$. *Τότε ο A είναι πλήρως διασπάσιμος.*

Απόδειξη (Edgar, [34])

Υποθέτουμε ότι ο Α είναι μερικώς διασπάσιμος, ότι $A[\alpha|\beta]=0$ για κάποια $\alpha \in Q_{s,n}$ και $\beta \in Q_{t,n}$ όπου $s+t=n$. Αν s_j οι γραμμές του α και t_j οι στήλες του β διατέμνουν τον υποπίνακα A_j, $j=1,\ldots,r$. Τότε $s_1+s_2+\ldots+s_r=s\geq 1$, έτσι ώστε τουλάχιστον μία εκ των s_j πρέπει να είναι θετική. Παρομοίως, τουλάχιστον μία εκ των t_j να μην είναι μηδέν. Τώρα αφού κάθε A_j είναι πλήρως μη διασπάσιμοι και περιέχουν $s_j \times t_j$ μηδενικούς υποπίνακες(*εκτός εάν* $s_j=0$ *ή* $t_j=0$), εμείς πρέπει να έχουμε $s_j+t_j \leq n_j$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $s_j=0$ *ή* $t_j=0$. Αλλά

$$n = s+t = \sum_{j=1}^{r} s_j + \sum_{j=1}^{r} t_j = \sum_{j=1}^{r} s_j + \sum_{j=1}^{r} t_j = \sum_{j=1}^{r}(s_j+t_j) \leq \sum_{j=1}^{r} n_j = n$$

και επιπλέον $s_j+t_j=n_j$. Αυτό συμβαίνει $s_j=0$ *ή* $t_j=0$ *για* $j=1,\ldots,r$. Αλλά δεν μπορεί όλα τα $s_j=0$ ούτε όλα τα $t_j=0$. Έτσι σύμφωνα με την υπόθεση μας ο B_κ είναι υποπίνακας ενός μηδενικού υποπίνακα. ■

Ορισμός 4.4.2 (doubly stochastic matrix)

Ένας μη αρνητικός πίνακας καλείται διπλά στοχαστικός αν όλα τα αθροίσματα των γραμμών και των στηλών του είναι 1.

Ορισμός 4.4.3 (doubly stochastic pattern)

Ένας μη αρνητικός πίνακας λέγεται διπλά στοχαστικό πρότυπο αν έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών στοιχείων με τον διπλά στοχαστικό πίνακα.

Θεώρημα 4.4.3

Ένας πλήρως μη διασπάσιμος πίνακας έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών.

Απόδειξη

Αν $A= (a_{ij})$ είναι ένας $n\times n$ πλήρως μη διασπάσιμος πίνακας. Τότε από το Θεώρημα 4.4.1 $per(A(i|j))>0$ για όλα τα i,j. Αν $S= (s_{ij})$ ένας $n\times n$ πίνακας που ορίζεται

$$s_{ij} = a_{ij}\, per(A(i|j))/per(A), \quad i, j= 1,\dots,n.$$

Έτσι ο s είναι μη αρνητικός και έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών όπως ο A. Επίσης για $i = 1,\dots,n,$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = \frac{1}{per(A)}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} per(A(i|j)) = \frac{1}{per(A)}\, per\,(A) = 1.$$

και παρομοίως για $j=1,\dots,n$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = \frac{1}{per(A)}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} per(A(i|j)) =1.$$

Ως εκ τούτου ο S έχει τον ίδιο αριθμό μηδενικών το ίδιο και ο A. ■

Θεώρημα 4.4.4

Ένας μη αρνητικός πίνακας είναι πλήρως μη διασπάσιμος αν και μόνο αν είναι p-ισοδύναμος με έναν μη υποβιβάσιμο πίνακα που έχει θετική κύρια διαγώνιο.

Απόδειξη

Αν ο πίνακας A είναι μερικώς διασπάσιμος, τότε μπορεί να περιέχει ένα μηδενικό υποπίνακα $A[i_1,i_2, \dots, i_s | j_{s+1},j_{s+2},\dots,j_n]$, $i_1<i_2<\dots<i_s$, $j_{s+1}< j_{s+2}<\dots<j_n$ όπου $\{i_1,i_2,\dots,i_s\}$ και $\{j_{s+1},j_{s+2},\dots,j_n\}$ θα πρέπει να είναι διαχωρισμένο από τον A μιας και δεν έχει μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του. Αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Τελικά, ένας πλήρως μη διασπάσιμος πίνακας που περιέχει μια θετική διαγώνιο και επιπλέον είναι p-ισοδύναμος, με ένας πλήρως μη διασπάσιμο και συνεπώς υποβιβάσιμο πίνακα με θετική κύρια διαγώνιο. ■

4.4.5 Σχεδόν αναλύσιμοι και σχεδόν υποβιβάσιμοι πίνακες

Το *Πόρισμα 4.4.2*,υποδηλώνει ότι εάν ένα θετικό στοιχείο σε έναν πλήρως μη διασπάσιμο (0,1)-πίνακα αντικατασταθεί από το μηδέν, τότε ο πίνακας παραμένει πλήρως μη διασπάσιμος, οι σταθερές του μειώνονται το λιγότερο κατά ένα που είναι η σταθερά του αυθεντικού πίνακα υπερβαίνει τη σταθερά του αλλαγμένου πίνακα τουλάχιστον κατά ένα. Εάν είναι δύσκολο να δούμε τη σταθερά του πίνακα που δημιουργείται, συνεχίζουμε με τη διαδικασία της αντικατάστασης των 1 με 0 μέχρι να καταλήξουμε σε ένα πιο ήμερο πλήρως μη διασπάσιμο πίνακα και μετά εφαρμόζουμε το Πόρισμα 4.4.3,ώστε να βρούμε το κατώτερο όριο της σταθεράς του αυθεντικού πίνακα. Τώρα θα θεωρήσουμε την τάξη πινάκων, που προέρχεται από μία τέτοια διαδικασία στους πλήρως μη διασπάσιμους πίνακες.

Ορισμός 4.5.1

α) *Ένας πλήρως μη διασπάσιμος μη αρνητικός πίνακας* $A = (\alpha_{ij})$ *λέγεται σχεδόν διασπάσιμος αν για κάθε* $\alpha_{hk} > 0$ *ο πίνακας* $A - \alpha_{hk}E_{hk}$ *είναι σχεδόν διασπάσιμος.*

β) Ένας μη υποβιβάσιμος μη αρνητικός πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ *ονομάζεται σχεδόν υποβιβάσιμος αν για κάθε θετικό* α_{hk} *ο πίνακας* $A - \alpha_{hk}E_{hk}$ *είναι υποβιβάσιμος.*

γ) Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα καλείται ελάχιστα συνεκτικό αν παύσει να συνδέεται έντονα όταν διαγραφεί κάποιο από τα τόξα του.

δ) Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα χωρίς κλειστές ακμές ονομάζεται ροζέτα αν έχει στο μέγιστο μία κορυφή στην οποία συμπίπτουν περισσότερα από δύο τόξα.

ε) Αν ο W είναι υποσύνολο κορυφών σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα D, τότε η συρρίκνωση του W λαμβάνεται από το D αν διαγράψεις τα τόξα ενώνοντας τα με δύο κορυφές του W και αναγνωρίζοντας όλες τις κορυφές του W με μία απλή από αυτές.

Προσέξτε, ότι η συρρίκνωση του W, να μην είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα αφού μπορεί να έχει πολλά τόξα να καταλήγουν στο ίδιο ζευγάρι κορυφών. Ωστόσο,αν δεν υπάρχει ζευγάρι κορυφών που δεν ενώνεται με περισσότερα από ένα τόξα τότε η συρρίκνωση είναι κατευθυνόμενο γράφημα.

Λήμμα 4.5.1

α) *Ένα κατευθυνόμενο γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές είναι ελάχιστα συνεκτικό εάν και μόνο εάν ο πίνακας γειτνίασης του είναι σχεδόν υποβιβάσιμος.*

β) Η ροζέτα είναι ελάχιστα συνεκτικό γράφημα.

γ) Ο πίνακας γειτνίασης ενός κύκλου είναι ένας πλήρως –κυκλικός πίνακας μετάθεση

Λήμμα 4.5.3 (Berge, [8])

Αν W είναι το σύνολο κορυφών ενός ισχυρά συνεκτικού υποδιαγράμματος ενός ελάχιστα συνεκτικού κατευθυνόμενου γραφήματος D, τότε η συρρίκνωση του W είναι επίσης ένα ελάχιστα συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα.

Απόδειξη

Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι η συρρίκνωση του W είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα το οποίο δεν μπορεί να περιέχει πολλαπλά τόξα. Γιατί, αν δεν συνέβαινε, θα υπήρχαν σε ζεύγη D ζεύγη τόξων *(i,j) και (i,k) {ή (j, i) και (k, i) με* $i \notin W$ *και* $j, k \notin W$. Αλλά τότε το ισχυρά συνδεδεμένο γράφημα D δεν θα ήταν ελάχιστα συνεκτικό, μιας και το κατευθυνόμενο γράφημα που λαμβάνονται από το D διαγράφοντας ένα από τα δύο τόξα μπορούν πάλι να γίνουν ισχυρά συνεκτικό.

Στη συνέχεια, θα ισχυριστούμε ότι η συρρίκνωση του W είναι ελάχιστα συνεκτική. Έτσι είναι ισχυρά συνεκτική. Επίσης, η διαγραφή κάποιου από τα τόξα δε μπορεί να καταλήξει σε ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα. Αλλιώς η διαγραφή κάποιων από τα τόξα στο D μπορούσε να οδηγήσει επίσης σε ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα που έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι ο D είναι ελάχιστα συνδεδεμένος. ■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. P. Aharoni, On a theorem of Denes Konig, *Linear Multilinear Algebra,* (1976) 31-32.
2. A. Brauer, The theorems of Ledermann and Otsrowski on positive matrices, *Duke Math. J.,* 24 (1957), 265-274.
3. L.M. Bregman, Certain properties of nonnegative matrices and their permanents, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 211 (1973), 27-30 (in Russian). Translated in *Soviet Math. Dokl.,* 14 (1973), 945-949.
4. R. Brualdi, S. Parter, and H. Schneider, The diagonal equivalence of a nonnegative matrix to a stochastic matrix, *J. Math. Anal. Appl.,* 16 (1966), 31-50.
5. N.G. de Bruijn and P.Erdos, On a combinatorial problem, *Indag. Math.,*10 (1948), 421-423.
6. L. Collatz, Einschliessumgssatz fur die charakteristischen Zahlen von Matrizen, *Math.Z. 48 (1942), 221-226.*
7. A.L.Dulmage and N.S. Mendelsohn, Graphs and matrices, *Graph Theory and Theoretical Physics* (F. Harary, editor), Academic Press, London, 167-227, 1967.
8. G. Edgar, Proof (unpublished).
9. G. Frobenius, Uber zerlegbare Determinanten, *S.-B.K. Preuss. Akad. Wiss.,* Berlin (1917).
10. G. Frobenius, Uber Matrizen aus nicht negative Elementen, *S.-B.K. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin (1912), 456-477.
11. LG. Frobenius, Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, *S.-B.K. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin (1897), 471-476 (1909), 514-518.
12. G. Frobenius, Uber Matrizen aus nicht positive Elementen, *S.-B.K. Preuss. Akad. Wiss.* Berlin (1908), 471-476, (1909), 514-518.
13. P.M. Gibson, A lower bound for the permanent of a (0,1)-matrix, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 33 (1972), 245-246.
14. F. Hanary and H. Minc, Which nonnegative matrices are self-inverse? *Math. Mag.,* 49 (1976), 91-92.
15. F. Harary, Determinants, permanents and bipartite graph, *Math. Mag.,* 42 (1969), 146-148.
16. M. Hall, Jr., Distinct representatives of subsets, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 54 (1948), 922-926.
17. D.J. Hartfiel, A simplified form for nearly reducible and nearly decomposable matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 388-393.
18. J.E. Hopcroft and R.M. Karp., An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, *SIAM J. Comput.,* 2 (1973), 225-231.
19. M. Marcus and H. Minc, Two theorems of Frobenius, *Pacific J.Math.,* 60 (1975), 149-151.
20. M. Marcus and H. Minc, *Modern University Algebra*, Macmillan, New York,(1965).
21. M. Marcus, H. Minc and B. Moyls, Some results on nonegative matrices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B,* 65 (1961), 205-209.
22. H. Minc, The structure of irreducible matrices, *Proc. Edinburgh Math.Soc.,*19 (1975), 335-336.
23. Minc, Irreducible matrices, *Linear Multilinear Algebra,* 1 (1974), 337-342.
24. H.Minc, Linear transformations on nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl., 9(1974),149-153.*
25. H. Minc, Spectra of irreducible matrices, *Linear Multilinear Algebra,* 2 (1974), 85-90.
26. H. Minc, On the maximal eigenvector of a positive matrix, *Siam J. Numer. Anal.,* 7 (1970), 424-427.

27. L. Mirsky, An inequality for characteristic roots and singular values of complex matrices, *Monatsh Math.,* 70 (1966),357-359.
28. A.M. Ostrowski, On the eigenvector belonging to the maximal root of a non negative matrix, *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* 12 (1960/61), 107-112.
29. A. Ostrowski, Bounds for the greatest latent root of a positive matrix, *J. London Soc.,* 27 (1952), 253-256.
30. O. Perron, Zur Theorie der Matrizen, *Math.Ann.,* 64 (1907), 248-263.
31. N.J. Pullman, A note on a theorem of Minc on irreducible non negative matrices, *Linear Multilinear Algebra,* 4 (1975), 335-336.
32. J.J. Sylvester, On the equation to the secular inequalities in the planetary theory, *Philos. Mag.,* 16(5) (1883), 267-269.
33. H. Wielandt, Unzerlegbare nicht-negative Matrizen, *Math. Z.,* 52 (1950), 642-648.
34. W. Ledermann, Bounds for the greatest latent root of a positive matrix, *J. London Math. Soc.,* 25 (1950), 265-268.

.