



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΩΝ
ΜΕ ΕΓΚΛΩΒΙΣΜΑΤΑ ΙΔΙΟΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ
ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΛΛΗΣ Δ. ΓΚΟΥΤΗ

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός ΕΜΠ, MSc

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

Μαρίνος Καττής

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάιος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΩΝ
ΜΕ ΕΓΚΛΩΒΙΣΜΑΤΑ ΙΔΙΟΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ
ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΕΛΛΗΣ Δ. ΓΚΟΥΤΗ

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός ΕΜΠ, MSc

**ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Καττής Μ., Αν. Καθ. ΕΜΠ
(Επιβλέπων)
2. Παπανίκος Π., Αν. Καθ. Παν.
Αιγαίου
3. Ευταξίopoulos Δ., Επ. Καθ. ΕΜΠ

**ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

1. Καττής Μ., Αν. Καθ. ΕΜΠ
(Επιβλέπων)
2. Παπανίκος Π., Αν. Καθ. Παν.
Αιγαίου
3. Ευταξίopoulos Δ., Επ. Καθ. ΕΜΠ
4. Θεοτόκογλου Ε.Ε., Καθ. ΕΜΠ
5. Κοντού-Δρούγκα Ε., Καθ. ΕΜΠ
6. Τσερπές Κ., Επ. Καθ. Παν. Πατρών
7. Τσιχριντζής Β., Καθ. ΕΜΠ

Αθήνα, Μάιος 2018

«η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από την Ανώτατη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)»

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο εργαστήριο Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων Τεχνικών Έργων της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, υπό την επίβλεψη του κ. Μαρίνου Καττή, Αναπληρωτή Καθηγητή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μαρίνο Καττή, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με την έρευνα και για την αδιάκοπη και γεμάτη υπομονή καθοδήγησή του σε όλη την διάρκεια της διατριβής.

Επίσης, ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω και στα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, κ. Παπανίκο Παρασκευά και κ. Ευταξιοπούλο Δημήτριο, για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχαν.

Στον Κώστα, που έφυγε ναρίς

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract.....	iii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγικές έννοιες.....	1
1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	3
1.3 Αντικείμενο της έρευνας.....	9
1.4 Δομή της διατριβής	11
2 Συντηρητικά Ολοκληρώματα και Δυνάμεις Eshelby	14
2.1 Εισαγωγή.....	14
2.2 Περιγραφή του διαφασικού ελαστικού υλικού	15
2.3 Η ελαστική ενέργεια στο σύστημα	17
2.4 Τα συντηρητικά ολοκληρώματα σε ελαστικά μέσα με ιδιοπαραμορφώσεις.....	19
2.4.1 Τα J_k -ολοκληρώματα	19
2.4.2 Τα \mathcal{L}_k -ολοκληρώματα	23
2.4.3 Τα \mathcal{M} -ολοκληρώματα	26
2.5 Η κινούσα δύναμη μίας διεπιφάνειας.....	28

2.5.1	Η σχέση της κινούσας δύναμης	28
2.5.2	Κινούσα δύναμη και ολική δυναμική ενέργεια	31
2.5.3	Η σχέση της κινούσας δύναμης του Gavazza.....	34
2.6	Μιγαδικές σχέσεις των συντηρητικών ολοκληρωμάτων και της κινούσας δύναμης.....	35
2.6.1	J_k -ολοκληρώματα	36
2.6.2	\mathcal{L}_3 - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα	42
2.6.3	Η κινούσα δύναμη σε μία διεπιφάνεια.....	45
3	Κυκλικά Εγκλωβίσματα και Κυκλικές Ανομοιογένειες.....	50
3.1	Εισαγωγή.....	50
3.2	Περιγραφή του ελαστικού συστήματος	52
3.3	Αλληλεπίδραση εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας στην συνεπίπεδη παραμόρφωση	54
3.3.1	Προσδιορισμός ελαστικών πεδίων	54
3.3.2	Η ολική ελαστική ενέργεια στο σύστημα	59
3.3.3	Ελαστική ενέργεια στις φάσεις του συστήματος.....	63
3.3.4	J_k -ολοκληρώματα.....	67
3.3.5	\mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα.....	72

3.4	Ελαστική αλληλεπίδραση εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας στην αντισυμμετρική παραμόρφωση.....	74
3.4.1	Προσδιορισμός ελαστικών πεδίων	74
3.4.2	Η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος.....	77
3.4.3	Ελαστική ενέργεια στις φάσεις του συστήματος.....	79
3.4.4	J_k -ολοκληρώματα	81
3.4.5	\mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα	83
3.4.6	Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες.....	84
3.5	Επίδραση διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος.....	87
3.5.1	Ελαστικά πεδία	88
3.5.2	Συντηρητικά ολοκληρώματα	92
3.6	Επίδραση διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος.....	94
3.6.1	Ελαστικά πεδία	95
3.6.2	Συντηρητικά ολοκληρώματα	97
3.7	Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση.....	99
3.7.1	Συγκέντρωση τάσεων γύρω από ανομοιογένεια και εγκλωβισμό	100
3.7.2	Ελαστική ενέργεια και κατανομή της στο ελαστικό σύστημα	102

3.7.3	J_1 - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα.....	108
3.7.4	Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες.....	111
4	Ιδιοπαραμορφώσεις σε Δακτυλιοειδείς Ανομοιογένειες με Πυρήνα	113
4.1	Εισαγωγή.....	113
4.2	Το μοντέλο της κυκλικής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και σχέσεις των διαστικών δυναμικών.....	115
4.3	Συνεπίπεδη παραμόρφωση.....	118
4.3.1	Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια.....	118
4.3.2	Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα.....	123
4.3.3	Τα ελαστικά πεδία και η ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος.....	127
4.4	Αντιεπίπεδη παραμόρφωση.....	131
4.4.1	Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια.....	131
4.4.2	Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα.....	134
4.4.3	Ελαστικές ενέργειες στις φάσεις του συστήματος.....	136
4.4.4	Συντηρητικά ολοκληρώματα.....	138
4.4.5	Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες.....	140
4.5	Λεπτή δακτυλιοειδής ανομοιογένεια.....	143
4.6	Το ελλειπτικό δακτυλιοειδές εγκλώβισμα.....	149

4.6.1	Ελαστικά πεδία συνεπίπεδης παραμόρφωσης	154
4.6.2	Ελαστικές ενέργειες συνεπίπεδης παραμόρφωσης.....	162
4.6.3	Ελαστικά πεδία αντεπίπεδης παραμόρφωσης.....	166
4.6.4	Ελαστικές ενέργειες αντεπίπεδης παραμόρφωσης	171
4.7	Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση.....	175
4.7.1	Μεταβολή τάσεων στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια	176
4.7.2	Συγκέντρωση τάσεων	178
4.7.3	Ενεργειακή κατάσταση.....	181
4.7.4	Ενεργειακές δυνάμεις και ροπές.....	187
5	Συμπεράσματα και Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	189
5.1	Συμπεράσματα διατριβής.....	189
5.2	Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	194
6	Βιβλιογραφία	196
A	Μιγαδικά δυναμικά διδιάστατης ελαστικότητας	203
A.1	Ελαστικά πεδία και μιγαδικά δυναμικά	203
A.2	Διφασικά δυναμικά για καμπυλόγραμμες διεπιφάνειες.....	203
A.3	Διφασικά δυναμικά για κυκλικές διεπιφάνειες	206
A.4	Διφασικά δυναμικά της αντεπίπεδης παραμόρφωσης για μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου διεπιφάνειες	207

B	Ελαστικά πεδία και ενεργειακές σταθερές για κυκλικές ανομοιογένειες και εγκλωβίσματα.....	211
B.1	Τάσεις-μετατοπίσεις.....	211
B.2	Ενεργειακές σταθερές \mathcal{L}	213
C	Ελαστικά πεδία και ενέργειες σε δακτυλιοειδείς κυκλικές ανομοιογένειες	215
C.1	Συνεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στην κυκλική δακτυλιοειδή ανομοιογένεια	215
C.2	Συνεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στον κυκλικό πυρήνα.....	217
C.3	Αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στην κυκλική δακτυλιοειδή ανομοιογένεια	219
C.4	Αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στον κυκλικό πυρήνα	220
D	Διαγράμματα Κεφαλαίου 3	222
D.1	Συγκέντρωση τάσεων γύρω από ανομοιογένεια και εγκλωβίσμα.....	223
D.2	Ελαστική ενέργεια και κατανομή της στο ελαστικό σύστημα	225
D.3	J_1 - και \mathcal{M} -ολοκλήρωμα γύρω από ανομοιογένεια και εγκλωβίσμα.....	233
D.4	Κινούσα δύναμη των διεπιφανειών ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος-μήτρας.....	239
E	Διαγράμματα Κεφαλαίου 4	241
E.1	Μεταβολή τάσεων μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια	242
E.2	Εφαπτομενικές τάσεις στις διεπιφάνειες	244
E.3	Κατανομή της ελαστικής ενέργειας σε μήτρα-δακτυλιοειδή ανομοιογένεια-πυρήνα.....	247

E.4	Κινούσες δυνάμεις στις διεπιφάνειες	253
E.5	\mathcal{M} -ολοκλήρωμα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια.....	255

Περίληψη

Το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής είναι η ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης ανομοιογενειών με εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων σύνθετων υλικών στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Η ανάλυση που γίνεται χρησιμοποιείται για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς μεταλλικών υλικών που έχουν ενισχυθεί με διεσπαρμένα μικρο- ή νανο-σωματίδια διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων. Στην ανάλυση, τα σωματίδια και οι περιοχές των μετασχηματισμών φάσης προσομοιώνονται με σχήματα απλής μορφής και οι μετασχηματισμοί φάσης, με ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις. Για τους μετασχηματισμούς φάσης, εξετάζονται δύο διακριτές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, οι μετασχηματισμοί φάσης λαμβάνουν χώρα σε πεπερασμένες περιοχές του μεταλλικού υλικού, που βρίσκονται στην γειτονιά των σωματιδίων, και στην δεύτερη, σε ένα εξωτερικό στρώμα των σωματιδίων που έχει τοποθετηθεί ως επικάλυψη. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, η ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των εσωτερικών τάσεων και της ενέργειας παραμόρφωσης που αναπτύσσονται στο σύνθετο μεταλλικό υλικό, λόγω των μετασχηματισμών φάσης, τοποθετώντας και επιλύοντας τα σχετικά ελαστικά προβλήματα. Επίσης, προσδιορίζεται η ελαστική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματιδίων και μετασχηματισμών φάσης και τα συντηρητικά ολοκληρώματα που συνδέονται με την ποσότητα αυτή (J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα). Τέλος,

διερευνήθηκε η επίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων του σύνθετου μεταλλικού υλικού πάνω στην ελαστική ενέργεια αλληλεπίδρασης και στα συντηρητικά ολοκληρώματα που αποτελούν μέτρα της ελαστικής αλληλεπίδρασης.

Για τις ανάγκες της ανάλυσης, οι έννοιες των συντηρητικών ολοκληρωμάτων επεκτείνονται σε ελαστικά μέσα με συνεχή κατανομή ιδιοπαραμορφώσεων και διερευνάται η φύση των ποσοτήτων αυτών αναφορικά με ιδιομορφίες όγκου ελαστικών μέσων. Όταν οι μετασχηματισμοί φάσης περιβάλλουν τα σωματίδια, χρησιμοποιώντας τα ελαστικά πεδία που εξάγονται για την περίπτωση αυτή, διερευνάται ο μηχανισμός που διέπει την εμφάνιση της επιφανειακής έντασης (surface tension) σε διεπιφάνειες υλικών στην νανο-κλίμακα, καθώς και ένα νέο φαινόμενο μανδύα (cloaking) που εμφανίζεται σε ελλειπτικά σωματίδια με επικάλυψη. Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σε μια δακτυλιοειδή ελλειπτική ανομοιογένεια με πυρήνα, όταν υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, τα σύνορά της είναι ομο-εστιακές ελλείψεις και οι ελαστικές της ιδιότητες είναι αυτές της μήτρας. Τέλος, για τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων στο σύνθετο μεταλλικό υλικό, αναπτύσσονται ορισμένες νέες τεχνικές επίλυσης διφασικών ελαστικών προβλημάτων με μη τέλει διεπιφάνειες.

Abstract

The subject of the present doctoral thesis is the analysis of the elastic interaction between inhomogeneities and eigenstrain inclusions of composite materials in the context of linear elasticity. The analysis made is used to study the mechanical behaviors of composite metallic materials reinforced with micro- or nano-particles of different elastic properties. In the analysis, the regions of particles and phase transformations are simulated with shapes of simple geometrical forms and the phase transformations, with distributions of uniform eigenstrains. For the phase transformations, two distinct cases are examined. In the first case, the phase transformations take place in finite regions of the metallic material located in the vicinity of the particles, and in the second case, in an outer layer of the particles, which constitutes the coating. For both cases, the study of the elastic interaction includes the determination of the internal stresses and deformation energy arising in the composite metallic material due to the phase transformation, by solving the associated elastic problems. In addition, the elastic interaction energy between particles and phase transformations is determined and the J -, \mathcal{L} - and \mathcal{M} -integrals related with the above quantities are calculated. Then, the effect of the elastic properties of the composite material on the elastic interaction energy and J -, \mathcal{L} - and \mathcal{M} -integrals is numerically investigated. To this end, the J -, \mathcal{L} - and \mathcal{M} -integrals are expanded to elastic media with a continuous distribution of eigenstrains and their physical meaning with respect to volume singularities is discussed. When the phase transformations surround the particles, using the elastic field obtained, the mechanism governing the

appearance of the surface tension of a solid interface, in nanoscale, along with a new cloaking phenomenon are investigated. This cloaking phenomenon appears in a ring elliptical inhomogeneity surrounding a core, when it undergoes a uniform phase transformation, its boundaries are confocal ellipses and its elastic properties are those of the matrix. Finally, for the determination of the elastic field in the composite metallic material, some new techniques of solving two-phase elastic problems involving non-perfect interfaces are developed.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Η δραστική μεταβολή στις μηχανικές ιδιότητες και την αντοχή ενός μεταλλικού υλικού, που προξενείται από μια διασπορά ετερογενών μικρο-σωματιδίων σε αυτό, αντανακλά το γεγονός της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων αυτών με πηγές εσωτερικών τάσεων στα υλικά αυτά. Τέτοιες πηγές εσωτερικών τάσεων είναι, κυρίως, οι γεωμετρικές ατέλειες που ενυπάρχουν στην δομή των υλικών αυτών και οι μετασχηματισμοί φάσης που λαμβάνουν χώρα σε αυτά. Η γενική θεωρία των εξαρμώσεων (dislocations), που ανεπτύχθηκε από τον Volterra (Volterra, 1905), επιτρέπει την περιγραφή των γεωμετρικών ατελειών των μεταλλικών υλικών με την θεωρία ελαστικότητας χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό παραμέτρων γεωμετρίας και ιδιοτήτων του υλικού. Σύμφωνα με τον Somigliana (Somigliana, 1914), που ανέπτυξε παραπέρα την θεωρία του Volterra, μια εξάρμωση περιγράφει μία ευρεία κλάση γεωμετρικών ατελειών στα μεταλλικά υλικά και ορίζεται ως μία δεδομένη ασυνέχεια μετατοπίσεων πάνω σε μία

κλειστή ή ανοικτή επιφάνεια ενός ελαστικού μέσου, που αντιπροσωπεύει το μεταλλικό υλικό. Από την άλλη πλευρά, ένας μετασχηματισμός φάσης αντιπροσωπεύει μία πηγή εσωτερικών τάσεων ενός μεταλλικού υλικού, με διαφορετική φύση από αυτήν της εξάρμωσης. Σε ένα μεταλλικό υλικό, ένας μετασχηματισμός φάσης προέρχεται από χημικές διεργασίες που συμβαίνουν σε μία πεπερασμένη περιοχή του υλικού και προξενούν μία μεταβολή της γεωμετρικής δομής του στην περιοχή αυτή. Η μεταβολή αυτή μπορεί να συνοδεύεται και με μετασχηματισμό των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού στην περιοχή αυτή. Στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας, ένας μετασχηματισμός φάσης περιγράφεται με ιδιοπαραμορφώσεις που είναι ελεύθερες τάσεων (stress free eigenstrains) και συνεχώς διανεμημένες σε μία συγκεκριμένη περιοχή ενός ελαστικού μέσου. (Ο όρος ιδιοπαραμόρφωση (eigenstrain) εισήχθη στην εφαρμοσμένη μηχανική για πρώτη φορά από τον Dundurs (Dundurs, 1967)). Σύμφωνα με την ορολογία του Eshelby, όταν μία τέτοια περιοχή έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με το μέσον καλείται εγκλωβισμα ιδιο-παραμορφώσεων, ενώ όταν έχει διαφορετικές, καλείται ανομοιογένεια (Eshelby, 1957). Ενδεχομένως, η περιοχή της ανομοιογένειας να μην καταπονείται από ιδιοπαραμορφώσεις. Για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων μεταλλικών υλικών με διεσπαρμένα ετερογενή σωματίδια, το σύνθετο μεταλλικό υλικό προσομοιώνεται με ένα ελαστικό μέσο που περιέχει ανομοιογένειες και εξαρμώσεις ή εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων. Σε τέτοια υλικά, η ελαστική αλληλεπίδραση των ετερογενών σωματιδίων με πηγές εσωτερικών τάσεων των υλικών έχει αποτελέσει ένα ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας, για περισσότερο από έναν αιώνα. Σε ένα ελαστικό υλικό που βρίσκεται υπό ένταση από κάποια πηγή εσωτερικών τάσεων, ως ελαστική αλληλεπίδραση της πηγής με μία ανομοιογένεια θεωρείται η μεταβολή που συμβαίνει στην εντατική και ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού μέσου, όταν σε αυτό εμφανισθεί η ανομοιογένεια.

Μέχρι πριν δύο δεκαετίες, η θεωρητική έρευνα πάνω στην μηχανική συμπεριφορά και αντοχή των μεταλλικών υλικών ενισχυμένων με ετερογενή σωματίδια είχε, κυρίως, αναπτυχθεί στην κλίμακα της μικρομηχανικής. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η ραγδαία ανάπτυξη των νανο-υλικών αναζωογόνησε το ενδιαφέρον στην περιοχή αυτή θέτοντας νέα θέματα προς έρευνα. Για παράδειγμα, η διασαφήνιση του μηχανισμού μεταβολής της σκληρότητας των σύνθετων μεταλλικών υλικών, λόγω διασποράς νανο-σωματιδίων σε

αυτά, απαιτεί αναλύσεις ελαστικών αλληλεπιδράσεων νανο-αμομοιογενειών με εγκλωβίσματα ιδιο-παραμορφώσεων στην κλίμακα του νανομέτρου. Επίσης, η ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων νανο-υλικών με επικαλυμένα νανοσωματίδια (νανο-σωματίδια ζirkόνιας, για παράδειγμα), ή με νανο-σωματίδια πολλαπλών επικαλύψεων (nano-onions) εισάγει νέου τύπου ανομοιογένειες, τις δακτυλιοειδείς ανομοιογένειες με πυρήνα. Στην περίπτωση αυτή, οι ιδιοπαραμορφώσεις αναπτύσσονται στον πυρήνα ή στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια που την περιβάλλει. Η διδακτορική διατριβή ασχολείται με την μελέτη ελαστικών αλληλεπιδράσεων ανομοιογενειών με εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων και το συγκεκριμένο αντικείμενό της αναλύεται ξεχωριστά παρακάτω.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Η θεωρητική έρευνα πάνω στην μηχανική συμπεριφορά και αντοχή των μεταλλικών υλικών ενισχυμένων με ετερογενή σωματίδια αφορά, κυρίως, στην διασαφήνιση των μηχανισμών, με τους οποίους πηγές εσωτερικών τάσεων επιδρούν πάνω στη μακροσκοπική μηχανική συμπεριφορά και αντοχή τους. Οι σχετικές ελαστικές αναλύσεις χρησιμοποιούν απλοποιημένα μοντέλα της μικρομηχανικής, όπου τα διεσπαρμένα σωματίδια προσομοιώνονται με ανομοιογένειες απλής γεωμετρικής μορφής που βρίσκονται σε μία ελαστική μήτρα και διαταράσσουν ένα πεδίο εσωτερικών τάσεων της μήτρας. Στην κλίμακα της μικρομηχανικής, οι εσωτερικές τάσεις θεωρούνται ότι προέρχονται από σημειακές πηγές, όπως είναι τα κέντρα διαστολής (dilatation centres), οι συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες εξαρμώσεις (edge and screw dislocation), κλπ. Ένα κέντρο διαστολής μπορεί να προσομοιώσει ένα ξένο άτομο που βρίσκεται στο πλέγμα ενός κρυστάλλου, ένα μετασχηματισμό φάσης που αναπτύσσεται σε μία περιοχή του υλικού με μικρές διαστάσεις, κλπ. Η ελαστική αλληλεπίδραση ενός κέντρου διαστολής με μία συνεπίπεδη εξάρμωση μελετήθηκε από τον Bilby (Bilby, 1950) χρησιμοποιώντας την ιδέα της δύναμης αλληλεπίδρασης. Η δύναμη αλληλεπίδρασης, που είναι μία πλασματική ενεργειακή δύναμη πάνω σε μία ιδιομορφία, είχε εισαχθεί αρκετά νωρίτερα στην ελαστικότητα και είχε χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές στην μελέτη της

ελαστικής αλληλεπίδρασης ιδιομορφιών σε ένα ελαστικό υλικό (Koehler, 1941; Leibfried, 1949; Bilby, 1950). Στην συνέχεια, το έργο του Bilby επεκτάθηκε από άλλους ερευνητές στην ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης σημειακών πηγών τάσεων με μικροσωματίδια ή μικρο-κοιλότητες κρυσταλλικών υλικών (Nabarro, 1996; Dundurs and Mura, 1964; Smith, 1968; Jaswon and Bhargava, 1961; Hutchinson, 1974, μεταξύ άλλων). Ο Eshelby (Eshelby, 1970) έδωσε μία τεράστια ώθηση στην έρευνα στην περιοχή εισάγοντας την έννοια του τανυστή ενεργειακής τάσης (energy momentum tensor). Η ενεργειακή δύναμη που επενεργεί πάνω σε μία σημειακή πηγή εσωτερικών τάσεων διαχέεται στο ελαστικό μέσο με την ενεργειακή τάση, όπως μία μηχανική (νευτώνια) δύναμη διαχέεται στο ελαστικό μέσο με την μηχανική τάση. Με την εισαγωγή της ενεργειακής τάσης, η ελαστική αλληλεπίδραση μεταξύ ανομοιογενειών και πηγών τάσεων ενός ελαστικού πεδίου μπορεί να περιγραφεί με μεταβλητές πεδίου (field variables), που είναι αντίστοιχες άλλων πεδίων, όπως, για παράδειγμα, του βαρυτικού ή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Cherepanov, 1979; Cherepanov and Borzykh, 1993; Cherepanov, 2012; Cherepanov, 2017). Με μία τέτοια οπτική γωνία, οι ενεργειακές δυνάμεις (material forces) μπορεί να ιδωθούν ως ‘μέτρο’ της αλληλεπίδρασης μεταξύ ιδιομορφιών που βρίσκονται στον χώρο του υλικού (material space). Οι ιδιομορφίες (singularities) περιγράφουν μαθηματικά τα μικροσωματίδια ή τις πηγές στο χώρο του υλικού, ο οποίος αντιπροσωπεύει το ελαστικό μέσο (Maugin, 1993; Kienzler, 2002). Οι ενεργειακές δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη και είναι ίσες και αντίθετες. Ο Eshelby (Eshelby, 1951; Eshelby, 1970) συνέδεσε την ενεργειακή δύναμη που επενεργεί σε μία ιδιομορφία με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του ελκυστή ενεργειακής τάσης που επενεργεί πάνω σε μία κλειστή επιφάνεια που εγκλωβίζει την ιδιομορφία. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ένα συντηρητικό ολοκλήρωμα και οι συνιστώσες του είναι γνωστές στην βιβλιογραφία ως J_k -ολοκληρώματα. Στις θεωρίες πεδίων, τα συντηρητικά ολοκληρώματα είναι ολοκληρώματα που είναι αμετάβλητα σε σχέση με μία κλειστή επιφάνεια, ή μία καμπύλη ολοκλήρωσης, και αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης των φυσικών νόμων διατήρησης της ενέργειας, της μάζας, της ορμής, κλπ. (Cherepanov, 1967; Landau and Lifshitz, 1971; Cherepanov, 1979; Cherepanov and Borzykh, 1993; Cherepanov, 2012; Cherepanov, 2017).

Αρκετά χρόνια αργότερα, ο Rice (Rice, 1968), μελετώντας την επέκταση μίας ρωγμής σε έναν επίπεδο δίσκο, όρισε ένα ανεξάρτητο του δρόμου διδιάστατο ολοκλήρωμα γύρω από την άκρη της ρωγμής, που εμπλέκει τον τανυστή ενεργειακής τάσης του Eshelby. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι γνωστό στην μηχανική των θραύσεων ως J -ολοκλήρωμα και αποτελεί την διδιάστατη εκδοχή του ολοκληρώματος του Eshelby για την ιδιομορφία του άκρου της ρωγμής. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην τότε Σοβιετική Ένωση, την ίδια εποχή, δημοσιεύεται από τον Cherepanov (Cherepanov, 1967) το ίδιο ολοκλήρωμα που έδωσε τεράστια ώθηση στην μηχανική των θραύσεων.

Με βάση τον τανυστή ενεργειακής τάσης του Eshelby, το συντηρητικό ολοκλήρωμα του Eshelby επανεξάγεται από τους Knowles και Sternberg (Knowles and Sternberg, 1972) με την βοήθεια του γνωστού θεωρήματος της Noether (Noether, 1918). Μαζί με το ολοκλήρωμα αυτό, οι Knowles και Sternberg εξήγαγαν δύο άλλα συντηρητικά ολοκληρώματα, που είναι γνωστά στην βιβλιογραφία ως \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα. Τα ολοκληρώματα αυτά συνδέθηκαν με την μεταβολή που υφίσταται η ολική δυναμική ενέργεια του ελαστικού μέσου, όταν η ιδιομορφία που περικλείει η διεπιφάνεια υποστεί μία απειροστή μεταφορά, περιστροφή και ομοιόθετη επέκταση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα είχε εξαχθεί νωρίτερα από τον Gunther (Gunther, 1962) με εφαρμογή και από αυτόν, του θεωρήματος της Noether. Στη συνέχεια, ένα μεγάλος αριθμός ερευνητών ασχολήθηκε με την περαιτέρα ανάπτυξη των συντηρητικών ολοκληρωμάτων και με εφαρμογές τους σε διάφορες περιοχές της εφαρμοσμένης μηχανικής. Οι Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973), χρησιμοποιώντας το θεώρημα μεταφοράς, συσχέτισαν τα τρία συντηρητικά ολοκληρώματα με τον ρυθμό απελευθέρωσης δυναμικής ενέργειας, που είναι συνδεδεμένος με την επέκταση και στροφή ρωγμών ή οπών, και παρουσίασαν μιγαδικές εκφράσεις των ολοκληρωμάτων αυτών για την περίπτωση της γραμμικής, ισότροπης επίπεδης ελαστικότητας. Οι Herrmann και Herrmann (Herrmann and Herrmann, 1981) διερεύνησαν την εφαρμογή των συντηρητικών ολοκληρωμάτων σε επίπεδες ρωγμές ομογενών υλικών και έδειξαν ότι τα \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα παρέχουν μία, περισσότερο φυσική, περιγραφή του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας από ότι τα J_1 - και J_2 -ολοκληρώματα. Ο Freund (Freund, 1978) εφάρμοσε το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα σε μία κλάση επίπεδων προβλημάτων

ρωγμών για να υπολογίσει τους συντελεστές έντασης των τάσεων χωρίς την επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων. Τα συντηρητικά ολοκληρώματα έχουν εφαρμοσθεί, επίσης, σε διεπιφανειακές ρωγμές, σε επιφανειακές ρωγμές, σε εγκοπές κλπ. (Ouchterlony, 1978; Kubo, 1982; Atkinson and Eftaxiopoulos, 1992; Radi et. al., 2016, κ.α.). Ο ορισμός των συντηρητικών ολοκληρωμάτων και οι σχετικές εφαρμογές έχουν επεκταθεί στην ελαστοδυναμική, την θερμοελαστικότητα, την πιεζοηλεκτρικότητα, κλπ. (Atkinson and Eshelby, 1968; Freund, 1972; Fletcher, 1976; Pak and Herrmann, 1986; Eisher and Herrmann, 1987; Markenscoff, 2006; Ni and Markenscoff, 2016, μεταξύ άλλων). Εκτός από τα συντηρητικά ολοκληρώματα, μία άλλη ενεργειακή ποσότητα που περιγράφει την ελαστική αλληλεπίδραση μικρο-σωματιδίων με πηγές εσωτερικών τάσεων είναι η κινούσα δύναμη (driving force) σε μία διεπιφάνεια. Η έννοια της κινούσας δύναμης σε μία διεπιφάνεια εισήχθη από τον Eshelby (Eshelby, 1970) χρησιμοποιώντας τον ενεργειακό ταυστή των τάσεων. Για την κινούσα δύναμη που επενεργεί στη διεπιφάνεια μίας ανομοιογένειας, ο Eshelby εξήγαγε μία γενική σχέση σε όρους των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται στις δύο πλευρές της διεπιφάνειας.

Αργότερα, σε μία διαφορετική βάση, ο Gavazza (Gavazza, 1977) ανέπτυξε μία σχέση για την κινούσα δύναμη που επενεργεί στην διεπιφάνεια ενός εγκλωβίσματος ιδιοπαραμορφώσεων ενός ελαστικού μέσου. (Σε πρόσφατες δημοσιεύσεις, από παρανόηση μίας παραπομπής του Eshelby (Eshelby, 1977) σε χειρόγραφες σημειώσεις διαλέξεών του, η σχέση του Gavazza έχει θεωρηθεί ισοδύναμη με την σχέση του Eshelby και έχει εφαρμοστεί σε διεπιφάνειες ανομοιογενειών παράγοντας λανθασμένα αποτελέσματα). Η κινούσα δύναμη σε μία διεπιφάνεια είναι μία επιφανειακή δύναμη διανεμημένη στην διεπιφάνεια. Η δύναμη αυτή δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθεί η διεπιφάνεια ώστε να αποκτήσει το σχήμα που ελαχιστοποιεί την ολική δυναμική ενέργεια του σώματος. Όταν η διεπιφάνεια αποκτήσει το σχήμα που αντιστοιχεί στην ελάχιστη ολική δυναμική ενέργεια του σώματος, τότε η κινούσα δύναμη γίνεται μηδέν σε κάθε σημείο της διεπιφάνειας. Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως ‘αρχή του Eshelby’ (Markenscoff, 2010).

Στα πλαίσια της μικρομηχανικής, οι αναλύσεις ελαστικής αλληλεπίδρασης διεσπαρμένων σωματιδίων με πηγές εσωτερικών τάσεων σε σύνθετα υλικά εμπλέκουν

πηγές εσωτερικών τάσεων, κυρίως, σημειακής μορφής. Στην κλίμακα της μικρομηχανικής, το μέγεθος των διαστάσεων των μικροσωματιδίων σε σχέση με τις διαστάσεις των περιοχών, όπου λαμβάνουν χώρα μετασχηματισμοί φάσης, καθιστά αποδεκτή μία τέτοια θεώρηση, δηλαδή την προσομοίωση του μετασχηματισμού φάσης ως ένα πυρήνα ιδιοπαραμορφώσεων που δρά σημειακά (Hutchinson, 1974). Όμως, είναι προφανές ότι μία τέτοια θεώρηση δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την αλληλεπίδραση μετασχηματισμών φάσης με διεσπαρμένα σωματίδια μεγέθους νανοκλίμακας. Έτσι, στην κλίμακα της νανομηχανικής, οι αναλύσεις αλληλεπίδρασης νανοςωματιδίων με γειτονικούς μετασχηματισμούς φάσης θα πρέπει να στηρίζονται σε μοντέλα όπου οι διαστάσεις των διεσπαρμένων σωματιδίων και των περιοχών των μετασχηματισμών φάσης θα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Πρόσφατα, με ένα τέτοιο μοντέλο, ο Lubarda (2015a, 2015b) μελέτησε την αλληλεπίδραση ενός μετασχηματισμού φάσης, που λαμβάνει χώρα σε μία κυλινδρική κυκλική περιοχή του υλικού, με μία γειτονική κυλινδρική κοιλότητα. Η ελαστική ανάλυση του Lubarda έγινε για συν-επίπεδη και αντι-επίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, και η ενεργειακή αλληλεπίδραση μελετήθηκε χρησιμοποιώντας τα J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στο έργο του Lubarda, η μελέτη της ενεργειακής αλληλεπίδρασης περιορίζεται στον προσδιορισμό των J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρωμάτων και στον υπολογισμό της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε αυτό. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι, σε ένα σύνθετο υλικό που βρίσκεται σε ένταση από μετασχηματισμούς φάσης και περιέχει διεσπαρμένα σωματίδια ίδιου μεγέθους, η γνώση της ολικής ελαστικής ενέργειας από μόνη της δεν παρέχει την πλήρη και σαφή εικόνα της ενεργειακής κατάστασής του. Μία τέτοια εικόνα αποκτάται μόνο από τον προσδιορισμό της κατανομής της ολικής ελαστικής ενέργειας στα επιμέρους συστατικά του υλικού. Το γεγονός αυτό αναγνωρίστηκε από τον Eshelby (Eshelby, 1957) ορίζοντας τον δείκτη υποδοχής μίας ανομοιογένειας σε μία ελαστική μήτρα, ως το πηλίκο της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια προς την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα μήτρας-ανομοιογένειας. Μικρές τιμές του δείκτη αυτού δηλώνουν ‘καλή υποδοχή’ που σημαίνει ότι η περισσότερη ενέργεια παραμένει στην μήτρα. Είναι φανερό, ότι η κατανομή της ελαστικής ενέργειας στα επιμέρους συστατικά του σύνθετου υλικού συνδέεται άμεσα με τις μακροσκοπικές

ιδιότητες του υλικού και, επομένως, η γνώση της είναι καθοριστική στον σχεδιασμό υλικών με συγκεκριμένη επιθυμητή μηχανική συμπεριφορά.

Ένα άλλο θέμα, που έχει πρόσφατα τεθεί από την νανοτεχνολογία, είναι η διερεύνηση της επίδρασης των μετασχηματισμών φάσης, που λαμβάνουν χώρα σε νανοσωματίδια με επικάλυψη που είναι διεσπαρμένα σε μεταλλικά υλικά, πάνω στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Τέτοια νανοσωματίδια χρησιμοποιούνται ως ενισχυτές/σκληρυντές σε νανο-υλικά, ή ως καινοτόμα λειτουργικά υλικά στη σύγχρονη τεχνολογία. Τα σωματίδια αυτά αποτελούνται από ένα πυρήνα που περιβάλλεται από ένα ή περισσότερα εξωτερικά κελύφη και είναι γνωστά ως μικροκρεμμύδια (micro-onions), όταν έχουν μέγεθος μικρομέτρων, ή νανοκρεμμύδια (nano-onions) όταν έχουν μέγεθος νανομέτρων. Στα σωματίδια αυτά η διαφορά των συντελεστών θερμικής διαστολής ή η διαφορά των σταθερών πλέγματος μεταξύ πυρήνα και κελύφους, εισάγει εσωτερικές τάσεις στα υλικά, οι οποίες επηρεάζουν τις φυσικές και μηχανικές ιδιότητες τόσο του ίδιου του σωματιδίου όσο και των σύνθετων υλικών που τα περιέχουν. Η σύνθεση και ο χαρακτηρισμός των νανο-σωματιδίων αυτών έχει αποτελέσει ένα ιδιαίτερο αντικείμενο στην τρέχουσα έρευνα της επιστήμης των υλικών και της τεχνολογίας (Zhou et al., 1996; Rockenberger et al., 1998; Pérez-Conde and Bhattacharjee, 2002; Choi et al., 2004; Kim et al., 2005). Σύνθετα υλικά με τέτοια δομή έχουν πρόσφατα παραχθεί στην τεχνολογία που ικανοποιούν συγκεκριμένες επιθυμητές φυσικές και μηχανικές ιδιότητες. Εκτός από το να αποτελούν συστατικά μέρη ενός σύνθετου μέσου, τα νανο-σωματίδια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε κλίμακα νανομέτρου και ως “έξυπνες συσκευές” (Rockenberger, et al., 1998). Σε τέτοιες συσκευές, οι διανομές των ιδιοπαραμορφώσεων και των τάσεων επηρεάζουν την λειτουργία αυτών των συσκευών. Γίνεται φανερό ότι η γνώση των παραμορφωσιακών πεδίων στα κελυφωτά νανοσωματίδια είναι σημαντική για την βελτίωση της συμπεριφοράς τους και για την διασαφήνιση, ή ακόμα και την πρόβλεψη άλλων φυσικών και μηχανικών ιδιοτήτων. Οι Rockenberger et al. (1998) μελέτησαν νανοσωματίδια με πυρήνα από CdTe και κέλυφος από CdS και διαπίστωσαν ότι οι διαφορές μεταξύ των ενδοατομικών σταθερών των πλεγμάτων των δύο υλικών προκαλεί μια διευθέτηση των διαστάσεων των πλεγμάτων τους σε ένα διεπιφανειακό στρώμα που έχει ως αποτέλεσμα μία ένταση. Οι ερευνητές αυτοί χρησιμοποιούν μία απλοποιημένη προσέγγιση της κλασσικής ελαστικότητας για να προσδιορίσουν την

ένταση που προκαλείται προσομοιώνοντας την ένταση του στρώματος με μία ιδιοπαραμόρφωση στον πυρήνα.

Για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των σύνθετων αυτών νανο-υλικών με την θεωρία ελαστικότητας, έχει εισαχθεί το μοντέλο της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με πυρήνα που βρίσκεται σε ελαστική μήτρα. Στο μοντέλο αυτό, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια προσομοιώνει την επικάλυψη και ο πυρήνας το σωματίδιο. Οι μετασχηματισμοί φάσεων προσομοιώνονται με σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις που αναπτύσσονται είτε στην επικάλυψη είτε στον πυρήνα. Με ένα τέτοιο μοντέλο, οι Markenscoff και Dundurs (Markenscoff and Dundurs, 2014) μελέτησαν πρόσφατα ορισμένα θέματα που αφορούν την μηχανική συμπεριφορά μεταλλικών υλικών που περιέχουν μικροσωματίδια με επικάλυψη. Με το μοντέλο αυτό, οι Markenscoff και Dundurs (Markenscoff and Dundurs, 2014) μελέτησαν την ειδική περίπτωση που το σωματίδιο έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με την μεταλλική μήτρα και ο μετασχηματισμός φάσης αναπτύσσεται μόνο στην επικάλυψή του. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το μοντέλο της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με πυρήνα έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στο παρελθόν για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων υλικών για μηχανικές, θερμικές και πιεζοηλεκτρικές φορτίσεις (Christensen and Lo, 1979; Chen and Chao, 2008; Jin and Fang, 2008; Pak, et. al., 2012, μεταξύ άλλων).

1.3 Αντικείμενο της έρευνας

Το αντικείμενο της διδακτορικής διατριβής είναι η ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης ανομοιογενειών με εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων σύνθετων υλικών στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Η ανάλυση που γίνεται χρησιμοποιείται για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς μεταλλικών υλικών που έχουν ενισχυθεί με διεσπαρμένα μικρο- ή νανο-σωματίδια διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων. Στην ανάλυση, τα σωματίδια και οι περιοχές των μετασχηματισμών φάσης προσομοιώνονται με σχήματα απλής μορφής και οι μετασχηματισμοί φάσης, με ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις. Για τους μετασχηματισμούς φάσης, εξετάζονται δύο

διακριτές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, οι μετασχηματισμοί φάσης λαμβάνουν χώρα σε πεπερασμένες περιοχές του μεταλλικού υλικού που βρίσκονται στην γειτονιά των σωματιδίων, και στην δεύτερη, σε ένα εξωτερικό στρώμα των σωματιδίων που έχει τοποθετηθεί ως επικάλυψη. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, η ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης περιλαμβάνει:

- τον προσδιορισμό των εσωτερικών τάσεων και της ενέργειας παραμόρφωσης που αναπτύσσονται στο σύνθετο μεταλλικό υλικό, λόγω των μετασχηματισμών φάσης, τοποθετώντας και επιλύοντας τα σχετικά ελαστικά προβλήματα.
- Τον προσδιορισμό της ελαστικής ενέργειας αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματιδίων και μετασχηματισμών φάσης και τον υπολογισμό των συντηρητικών ολοκληρωμάτων που συνδέονται με την ποσότητα αυτή (J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} - ολοκληρώματα).
- Την διερεύνηση της επίδρασης των ελαστικών ιδιοτήτων του σύνθετου μεταλλικού υλικού πάνω στην ελαστική ενέργεια αλληλεπίδρασης και στα συντηρητικά ολοκληρώματα που αποτελούν μέτρα της ελαστικής αλληλεπίδρασης.

Για τις ανάγκες της ανάλυσης, οι έννοιες των συντηρητικών ολοκληρωμάτων επεκτείνονται σε ελαστικά μέσα με συνεχή κατανομή ιδιοπαραμορφώσεων και διερευνάται η φύση των ποσοτήτων αυτών αναφορικά με ιδιομορφίες όγκου ελαστικών μέσων. Για την περίπτωση που οι μετασχηματισμοί φάσης περιβάλλουν τα σωματίδια, με βάση τα ελαστικά πεδία που εξάγονται, διερευνάται ο μηχανισμός που διέπει την εμφάνιση της επιφανειακής έντασης (surface tension) σε διεπιφάνειες υλικών στην νανοκλίμακα, καθώς και ένα νέο φαινόμενο μανδύα (cloaking) που εμφανίζεται στην περίπτωση αυτή. Για τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων στο σύνθετο μεταλλικό υλικό, αναπτύσσονται ορισμένες νέες τεχνικές επίλυσης διαφασικών ελαστικών προβλημάτων με μη τέλει διεπιφάνειες.

1.4 Δομή της διατριβής

Στο κεφάλαιο 1, που είναι η εισαγωγή της διατριβής, παρουσιάζεται το αντικείμενο της έρευνας και αναδεικνύεται η αναγκαιότητα και η επικαιρότητά του. Γίνεται μια εκτενής παρουσίαση της επιστημονικής γνώσης που έχει αποκτηθεί τα τελευταία χρόνια στην περιοχή του αντικειμένου, με αναφορές σε άρθρα επιστημονικών περιοδικών και πρακτικών συνεδρίων, καθώς και σε τεχνικές εκθέσεις και βιβλία. Στο τέλος της εισαγωγής περιγράφεται η δομή της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 2, εξάγονται οι γενικές σχέσεις που παρέχουν την ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης που αποθηκεύεται σε ένα διφασικό ελαστικό σύστημα και στις επιμέρους φάσεις του, όταν η ελαστική του παραμόρφωση προέρχεται από ένα εγκλώβισμα ιδιοπαραμορφώσεων. Στην συνέχεια, τα συντηρητικά ολοκληρώματα (conservative integrals) της ελαστικότητας, που είναι γνωστά ως J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα, επεκτείνονται σε περιοχές ελαστικών μεσων με συνεχώς διανεμημένες ιδιοπαραμορφώσεις. Με βάση το θεώρημα μεταφοράς της ρευστομηχανικής, αναπτύσσεται μία σχέση που συνδέει τον ρυθμό μεταβολής της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός διφασικού συστήματος με την κινούσα δύναμη (driving force) που επενεργεί σε μία κλειστή διεπιφάνεια, που διαχωρίζει ελαστικά μέσα διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων με ιδιοπαραμορφώσεις. Με βάση την σχέση αυτή, αποδεικνύεται μία γενική ενεργειακή πρόταση που συνδέει την μεταβολή που υφίσταται η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος με το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα. Οι γενικές εκφράσεις των συντηρητικών ολοκληρωμάτων και της κινούσας δύναμης μίας διεπιφάνειας εξειδικεύονται στην συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του διφασικού συστήματος και, στην συνέχεια, διατυπώνονται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της διδιάστατης ελαστικότητας. Στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύσσεται το σχετικό υπόβαθρο που απαιτείται στις ελαστικές αναλύσεις που γίνονται στα επόμενα κεφάλαια της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 3, μελετάται η ελαστική αλληλεπίδραση μίας ανομοιογένειας ενός κρυσταλλικού υλικού με ένα γειτονικό ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης χρησιμοποιώντας ένα απλοποιημένο διφασικό ελαστικό σύστημα. Το ελαστικό σύστημα

αποτελείται από μία άπειρη ελαστική μήτρα, που περιέχει μία κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια απείρου μήκους και παραμορφώνεται από ένα κυλινδρικό κυκλικό εγκλώβισμα σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων. Το κυλινδρικό εγκλώβισμα ιδιοπαραμορφώσεων βρίσκεται στην γειτονιά της κυλινδρικής ανομοιογένειας, έχει άπειρο μήκος και είναι παράλληλο σε αυτήν. Η ελαστική ανάλυση του διαφασικού συστήματος γίνεται για συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες σταθερές ιδιο-παραμορφώσεις του εγκλωβίσματος, που οδηγούν σε συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση του διαφασικού συστήματος. Ανάγοντας τα σχετικά ελαστικά προβλήματα σε προβλήματα εξαρμώσεων τύπου Somigliana, η επίλυση τους επιτυγχάνεται σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας την μέθοδο των μιγαδικών διαφασικών δυναμικών. Με βάση τις σχέσεις που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 2 και τις αναλυτικές εκφράσεις των ελαστικών πεδίων που αποκτήθηκαν, υπολογίζονται σε κλειστή μορφή: (α) η ολική ελαστική ενέργεια και η διανομή της στις περιοχές της μήτρας, της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος, (β) τα συντηρητικά ολοκληρώματα γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα ιδιοπαραμορφώσεων και (γ) οι κινούσες δυνάμεις των διεπιφανειών ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος ιδιοπαραμορφώσεων-μήτρας. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, διερευνάται η επίδραση των διεπιφανειών μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου, μεταξύ ανομοιογένειας-μήτρας, πάνω στην ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος. Η διερεύνηση αυτή γίνεται για αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις του εγκλωβίσματος χρησιμοποιώντας τα ελαστικά πεδία που αποκτήθηκαν από την επίλυση των σχετικών προβλημάτων. Τέλος, με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις που αποκτήθηκαν για τα ελαστικά πεδία και τις ενεργειακές ποσότητες του ελαστικού συστήματος, έγινε εκτεταμένη αριθμητική διερεύνηση της επίδρασης των διαφόρων γεωμετρικών και ελαστικών παραμέτρων του πάνω στην συγκέντρωση τάσεων, στις ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα και στις επιμέρους φάσεις του, και στις κινούσες δυνάμεις των δύο διεπιφανειών του συστήματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων που καταχωρούνται στο Παράρτημα D.

Στο κεφάλαιο 4, μελετάται η ελαστική αλληλεπίδραση ενός μικροσωματιδίου κρυσταλλικού υλικού, με επικάλυψη, με ένα μετασχηματισμό φάσης που αναπτύσσεται είτε στην επικάλυψη είτε στο σωματίδιο. Για την μελέτη της αλληλεπίδρασης χρησιμοποιείται το μοντέλο της κυλινδρικής κυκλικής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με

πυρήνα που βρίσκεται σε μία άπειρη ελαστική μήτρα και υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται με σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις. Η ελαστική ανάλυση γίνεται στα πλαίσια της ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας για συνεπίπεδη και αντεπίπεδη σταθερή ιδιοπαραμόρφωση της ανομοιογένεια. Στην ανάλυση αυτή προσδιορίζονται τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο ελαστικό σύστημα δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας-πυρήνα, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα καθώς και η διανομή της στις τρεις επιμέρους φάσεις του. Στην συνέχεια, διερευνάται η ενεργειακή αλληλεπίδραση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με την μήτρα και τον πυρήνα με τον προσδιορισμό των κινουσών δυνάμεων και των ροπών επέκτασης (\mathcal{M} -ολοκλήρωμα) των διεπιφανειών δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα. Με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις που αποκτήθηκαν, γίνεται εκτεταμένη αριθμητική διερεύνηση της εντατικής και ενεργειακής κατάστασης του ελαστικού συστήματος και τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων σε παράρτημα της διατριβής. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό, διερευνάται διεξοδικά ένα φαινόμενο μανδύα (cloak) που εμφανίζεται σε δακτυλιοειδείς ελλειπτικές ανομοιογένειες με πυρήνα, όταν αυτές υφίστανται ομοιόμορφους μετασχηματισμούς.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται και συζητούνται τα συμπεράσματα της διατριβής και γίνονται προτάσεις για παραπέρα έρευνα.

Τέλος, στα παραρτήματα της διατριβής, παρουσιάζονται ορισμένες σχέσεις της θεωρίας ελαστικότητας που χρησιμοποιούνται στην διατριβή, οι αναλυτικές αλγεβρικές εκφράσεις των ελαστικών πεδίων και των ελαστικών ενεργειών που προέκυψαν στα πλαίσια διατριβής, και τα διαγράμματα των σχετικών αριθμητικών διερευνήσεων.

Κεφάλαιο 2

Συντηρητικά Ολοκληρώματα και Δυνάμεις Eshelby

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, τα συντηρητικά ολοκληρώματα της ελαστικότητας, που είναι γνωστά ως J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα, επεκτείνονται σε περιοχές ελαστικών μέσων υπό ένταση, στις οποίες είναι συνεχώς διανεμημένες ιδιοπαραμορφώσεις. Τέτοιες περιοχές προσομοιώνουν μετασχηματισμούς φάσεων που αναπτύσσονται σε κρυσταλλικά υλικά, υλικά σωματίδια διεσπαρμένα σε υλική μήτρα διαφορετικών θερμικών ιδιοτήτων, κλπ. Δείχνεται ότι, σε τέτοιες περιοχές, τα J - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα μπορούν να επεκταθούν ως συντηρητικά επιφανειακά ολοκληρώματα για οποιαδήποτε συνεχή διανομή ιδιοπαραμορφώσεων. Αντίθετα, το \mathcal{L} -ολοκλήρωμα μπορεί να επεκταθεί ως συντηρητικό ολοκλήρωμα, μόνο για ειδικές μορφές της διανομής ιδιοπαραμορφώσεων. Τέτοιες μορφές είναι, για παράδειγμα, σταθερές

ιδιοπαραμορφώσεις, ιδιοπαραμορφώσεις αρμονικού τύπου, κλπ. Στην συνέχεια, οι γενικές εκφράσεις των τριών γενικευμένων συντηρητικών ολοκληρωμάτων που εξάγονται, εξειδικεύονται στην συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του ελαστικού μέσου. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, τα συντηρητικά ολοκληρώματα εκφράζονται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών, που είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις που παρέχουν τα ελαστικά πεδία του μέσου. Οι εκφράσεις που εξάγονται αποτελούν την γενίκευση των σχέσεων Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973), που έχουν διατυπωθεί για ελαστικά μέσα χωρίς παρουσία ιδιοπαραμορφώσεων. Η σχέση που παρέχει την κινούσα δύναμη πάνω σε μία κλειστή διεπιφάνεια ενός διαφασικού υλικού υπό ένταση, γνωστή και ως δύναμη Eshelby, ορίζεται για την γενική περίπτωση στην οποία, οι ελαστικές παραμορφώσεις εντός της διεπιφάνειας συνυπάρχουν με συνεχείς ιδιοπαραμορφώσεις. Ο ορισμός της σχέσης αυτής βασίζεται σε μία νέα σχέση που εξάγεται με το θεώρημα μεταφοράς της ρευστομηχανικής (Gurtin, 1981) και συνδέει την χρονική μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του διαφασικού υλικού, όταν η διεπιφάνεια κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από την χρονική ολοκλήρωση της σχέσης αυτής προκύπτει, ότι η συνολική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του διαφασικού συστήματος, λόγω εμφάνισης της ανομοιογένειας στο υπό ένταση σύστημα, είναι ίση με το διπλάσιο της τιμής του \mathcal{M} -ολοκληρώματος γύρω από την ανομοιογένεια.

2.2 Περιγραφή του διαφασικού ελαστικού υλικού

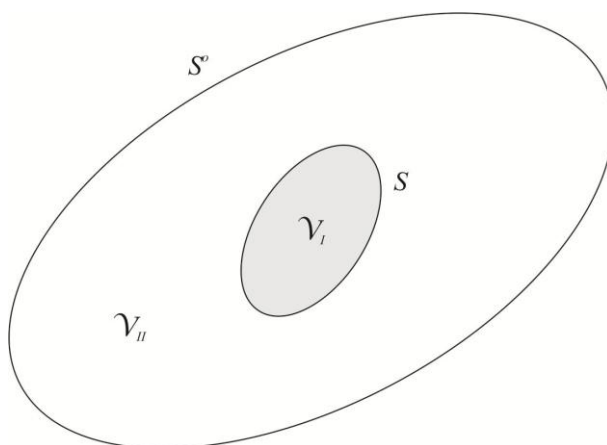
Το διαφασικό σύστημα του Σχήματος 2.1 αποτελείται από δύο συνδεδεμένα γραμμικώς ελαστικά και ομογενή υλικά, που καταλαμβάνουν τα πεδία \mathcal{V}_I και \mathcal{V}_{II} του χώρου. Το εξωτερικό σύνορο του διαφασικού υλικού και η διεπιφάνεια μεταξύ των δύο επιμέρους υλικών είναι κλειστές και λείες επιφάνειες, που δηλώνονται με S και S^o , αντίστοιχα. Τα δύο υλικά είναι τέλεια συνδεδεμένα στην διεπιφάνεια S , κατά τέτοιο τρόπο, ώστε, κατά την αφόρτιστη κατάσταση του υλικού, να είναι χωρίς τάσεις. Το διαφασικό υλικό βρίσκεται σε ελαστική παραμόρφωση, που προέρχεται από μετασχηματισμό φάσης του υλικού του πεδίου \mathcal{V}_I , που περιγράφεται από μία συνεχή διανομή ιδιοπαραμορφώσεων

ε_{ij}^T . Στην παρούσα εργασία, οι λατινικοί δείκτες, όπου αυτοί εμφανίζονται, θα παίρνουν τις τιμές 1, 2 και 3, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά. Αν η ελαστική παραμόρφωση του υλικού περιγράφεται αναφορικά με ένα σταθερό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων x_i , οι ολικές ελαστικές μετατοπίσεις u_i και οι ολικές ελαστικές παραμορφώσεις ε_{ij} παρέχονται από τις σχέσεις

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T, & \text{στο } \mathcal{V}_I, \\ \varepsilon_{ij}^E, & \text{στο } \mathcal{V}_{II}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u_i = \begin{cases} u_i^E + u_i^T, & \text{στο } \mathcal{V}_I, \\ u_i^E, & \text{στο } \mathcal{V}_{II}, \end{cases} \quad (2.2)$$

όπου u_i^E και ε_{ij}^E είναι οι ελαστικές μετατοπίσεις και ελαστικές παραμορφώσεις, αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: Η γεωμετρία του διφασικού υλικού.

Οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις μετατοπίσεις μέσω των παρακάτω κινηματικών εξισώσεων

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2, \quad \varepsilon_{ij}^E = (u_{i,j}^E + u_{j,i}^E) / 2, \quad \varepsilon_{ij}^T = (u_{i,j}^T + u_{j,i}^T) / 2. \quad (2.3)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή τάσης σ_{ij} σχετίζονται με τις ελαστικές παραμορφώσεις με τις καταστατικές σχέσεις των δύο υλικών

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2\mu'(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) + \lambda'(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^T)\delta_{ij}, & \text{στο } \mathcal{V}_I, \\ 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, & \text{στο } \mathcal{V}_{II}, \end{cases} \quad (2.4)$$

όπου μ' , λ' και μ , λ είναι τα ζεύγη των ελαστικών σταθερών του Lamé των υλικών των πεδίων \mathcal{V}_I και \mathcal{V}_{II} , αντίστοιχα. Επειδή τα δύο υλικά είναι τέλεια συνδεδεμένα μεταξύ τους, ο ελκυστής και η ολική μετατόπιση είναι συνεχείς ποσότητες δια μέσου της διεπιφάνειας S . Η συνέχεια αυτή περιγράφεται με τις ακόλουθες συνθήκες

$$t_i = \sigma_{ij}^{(in)} n_j = \sigma_{ij}^{(out)} n_j, \quad u_i^{(in)} = u_i^{(out)}, \quad \text{πάνω στην } S. \quad (2.5)$$

Στην σχέση (2.5), n_j είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στην κλειστή διεπιφάνεια S και εξέρχεται από αυτήν. Οι άνω δείκτες (*in*) και (*out*) στην σχέση αυτή, και όπου αλλού εμφανίζονται, δηλώνουν τις διεπιφανειακές τιμές των σχετικών ποσοτήτων, όταν το διεπιφανειακό σημείο προσεγγίζεται από το εσωτερικό και το εξωτερικό της κλειστής διεπιφάνειας S , αντίστοιχα. Επειδή στο σύνορο S° του υλικού δεν επενεργούν εξωτερικές τάσεις, ισχύει

$$n_j \sigma_{ji} = 0, \quad \text{πάνω στην } S^\circ, \quad (2.6)$$

όπου, n_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο σύνορο S° και εξέρχεται από αυτό.

2.3 Η ελαστική ενέργεια στο σύστημα

Η ελαστική ενέργεια E που αποθηκεύεται στο διφασικό υλικό, λόγω των ιδιοπαραμορφώσεων που επενεργούν στο πεδίο \mathcal{V}_I , παρέχεται από την σχέση

$$E = E_I + E_{II}, \quad (2.7)$$

όπου E_I, E_{II} είναι οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στα υλικά που καταλαμβάνουν τα πεδία $\mathcal{V}_I, \mathcal{V}_{II}$, αντίστοιχα. Οι ενέργειες αυτές παρέχονται από τις σχέσεις

$$E_I = \int_{V_I} W dV, \quad E_{II} = \int_{V_{II}} W dV, \quad (2.8)$$

όπου V_I, V_{II} είναι οι όγκοι των πεδίων \mathcal{V}_I και \mathcal{V}_{II} , αντίστοιχα, και

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^E, \quad (2.9)$$

είναι η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας σε κάθε σημείο του υλικού. Παίρνοντας υπόψη τις καταστατικές σχέσεις (2.4) και (2.9), η (2.8) παρέχει

$$E_I = \frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T) dV, \quad E_{II} = \frac{1}{2} \int_{V_{II}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (2.10)$$

Επειδή στο υλικό δεν επενεργούν μαζικές δυνάμεις, οι εξισώσεις ισορροπίας έχουν την μορφή

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (2.11)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή, εύκολα δείχνεται ότι

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2 = (\sigma_{ij} u_i)_{,j}, \quad (2.12)$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^T = \sigma_{ij} (u_{i,j}^T + u_{j,i}^T) / 2 = (\sigma_{ij} u_i^T)_{,j}. \quad (2.13)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και το θεώρημα του Gauss (Arfken, 1985), οι σχέσεις (2.10) παρέχουν

$$E_I = \frac{1}{2} \int_S (u_i^{(in)} - u_i^T) t_i dS, \quad (2.14)$$

$$E_{II} = -\frac{1}{2} \int_S u_i^{(out)} t_i dS, \quad (2.15)$$

όπου t_i είναι ο διεπιφανειακός ελκυστής που παρέχεται από την (2.5). Από τις σχέσεις (2.7), (2.14) και (2.15), προκύπτει ότι

$$E = -\frac{1}{2} \int_S u_i^T t_i dS. \quad (2.16)$$

Η σχέση αυτή παρέχει την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο διφασικό ελαστικό υλικό σε όρους των διεπιφανειακών ποσοτήτων t_i και u_i^T . Η σχέση αυτή έχει εξαχθεί από τον Eshelby (Eshelby, 1957) για την περίπτωση μίας ελλειψοειδούς ανομοιογένειας που υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης.

2.4 Τα συντηρητικά ολοκληρώματα σε ελαστικά μέσα με ιδιοπαραμορφώσεις

Στη θεωρία ελαστικότητας, τα συντηρητικά ολοκληρώματα ορίστηκαν, αρχικά, σε ελαστικά μέσα, στα οποία οι ελαστικές παραμορφώσεις προέρχονται από μηχανικά φορτία. Αργότερα, τα ολοκληρώματα αυτά επεκτάθηκαν σε ελαστικά μέσα, στα οποία οι ελαστικές παραμορφώσεις προέρχονται από θερμικές και πιεζοηλεκτρικές δράσεις (Francfort and Herrmann, 1982; Pak and Herrmann, 1986; Eischen and Herrmann, 1987; Pak, 1990; Yang and Batra, 1995). Στην ενότητα αυτή, τα συντηρητικά ολοκληρώματα επεκτείνονται σε περιοχές ελαστικών μέσων, όπου οι ελαστικές παραμορφώσεις συνυπάρχουν με ιδιοπαραμορφώσεις.

2.4.1 Τα J_k -ολοκληρώματα

Στην περιοχή \mathcal{V}_I του διφασικού υλικού του Σχήματος 2.1, η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης της σχέσης (2.9), με βάση την σχέση (2.4), μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$W = \mu'(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^T)^2 + \frac{\lambda'}{2}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^T)^2, \text{ στο } \mathcal{V}_I. \quad (2.17)$$

Από την σχέση αυτή συνάγεται ότι

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (2.18)$$

Επειδή οι παραμορφώσεις ε_{ij} είναι συναρτήσεις των καρτεσιανών μεταβλητών x_k , ισχύει

$$W_{,k} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij,k}. \quad (2.19)$$

Με βάση την (2.12) και (2.18), η παραπάνω σχέση παρέχει

$$W_{,k} = (\sigma_{ij} u_{i,k})_{,j}. \quad (2.20)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$b_{jk,j} = 0, \quad (2.21)$$

όπου έχει εισαχθεί η ποσότητα b_{jk} με την σχέση

$$b_{jk} = W \delta_{jk} - \sigma_{ij} u_{i,k}. \quad (2.22)$$

Η ποσότητα αυτή αποτελεί τον γενικευμένο τανυστή του Eshelby (energy momentum tensor) για πεδίο ιδιοπαραμορφώσεων (Eshelby, 1970). Διευκρινίζεται ότι, στην σχέση (2.22), u_i είναι η ολική μετατόπιση, δηλαδή $u_i = u_i^E + u_i^T$.

Έστω τώρα μία κλειστή επιφάνεια Σ που περικλείει ένα τμήμα Ω του όγκου V_I του πεδίου \mathcal{V}_I . Λόγω της (2.22), για τον όγκο Ω , ισχύει

$$\int_{\Omega} b_{jk,j} dV = 0, \quad (2.23)$$

όπου οι συναρτήσεις $b_{jk,j}$ θεωρούνται ότι ορίζονται σε κάθε σημείο του πεδίου Ω . Με βάση το θεώρημα του Gauss (Arfken, 1985), το ολοκλήρωμα όγκου της (2.23) μπορεί να μετασχηματισθεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην Ω . Βρίσκεται ότι

$$\int_{\Sigma} b_{jk} n_j dS = 0, \quad (2.24)$$

όπου, n_j είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην κλειστή επιφάνεια Σ και διευθύνεται στο εξωτερικό της. Τώρα, αν εισαχθεί η ποσότητα J_k με την σχέση

$$J_k = \int_{\Sigma} b_{jk} n_j dS, \quad (2.25)$$

τότε, σύμφωνα με την (2.24), για οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη Σ που βρίσκεται στο πεδίο \mathcal{V}_I και δεν περικλείει κάποιο ιδιόμορφο σημείο, η ποσότητα αυτή είναι πάντα μηδέν. Με βάση την (2.22), η (2.25) παίρνει την μορφή

$$J_k = \int_{\Sigma} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) dS. \quad (2.26)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την επέκταση του ορισμού του J_k -ολοκληρώματος σε γραμμικώς ελαστικά, ισότροπα και ομογενή μέσα, όπου οι ελαστικές παραμορφώσεις συνυπάρχουν με ιδιοπαραμορφώσεις.

Στην συνέχεια, η σχέση (2.26) εξειδικεύεται στην περίπτωση της αντιεπίπεδης και συνεπίπεδης παραμόρφωσης του συστήματος του Σχήματος 2.1. Στις δύο αυτές περιπτώσεις, η περιοχή \mathcal{V}_I αντιπροσωπεύει ένα κυλινδρικό πεδίο του χώρου και οι επιφάνειες S^o και S , δύο κυλινδρικές επιφάνειες με άπειρο μήκος και παράλληλες γεννέτιρες. Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) επιλέγεται να βρίσκεται στο πεδίο \mathcal{V}_I , με τον άξονα x_3 να είναι παράλληλος στις γενέτιρες των δύο αυτών επιφανειών. Αν η αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T , τότε, οι μη μηδενικές συνιστώσες των ελαστικών πεδίων είναι οι τάσεις σ_{13} , σ_{23} , οι ελαστικές παραμορφώσεις ε_{13}^E , ε_{23}^E , και η ελαστική

μετατόπιση u_3^E , που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 και x_2 . Έτσι, για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση του διφασικού υλικού, η (2.26) ανάγεται στην μορφή

$$J_1 = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_3 u_{3,1}) dl, \quad (2.27)$$

$$J_2 = \int_{\Gamma} (Wn_2 - t_3 u_{3,2}) dl, \quad (2.28)$$

$$J_3 = 0, \quad (2.29)$$

όπου

$$W = \sigma_{13} \varepsilon_{13}^T + \sigma_{23} \varepsilon_{23}^T, \quad (2.30)$$

$$u_3 = u_3^E + u_3^T, \quad (2.31)$$

$$t_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2. \quad (2.32)$$

Στα παραπάνω ολοκληρώματα, Γ είναι μία κλειστή καμπύλη πάνω στο επίπεδο αναφοράς της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, που θεωρείται το επίπεδο $x_3 = 0$. Τα n_1, n_2 είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος, που είναι κάθετο στην καμπύλη Γ και εξέρχεται από αυτήν, και παρέχονται από τις σχέσεις

$$n_1 = \frac{dx_2}{dl}, \quad n_2 = -\frac{dx_1}{dl}, \quad (2.33)$$

όπου $x_1 = x_1(l)$ και $x_2 = x_2(l)$ είναι οι παραμετρικές καμπύλες της Γ , με το s να είναι ένα μήκος τόξου μετρημένο από ένα αυθαίρετο σημείο της. Αν η συνεπίπεδη παραμόρφωση του διφασικού υλικού του Σχήματος 2.1 προέρχεται από ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T$ και ε_{12}^T , από την (2.26) προκύπτουν οι σχέσεις

$$J_1 = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) dl, \quad (2.34)$$

$$J_2 = \int_{\Gamma} (Wn_2 - t_i u_{i,2}) dl, \quad (2.35)$$

$$J_3 = 0, \quad (2.36)$$

όπου

$$t_i = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2, \quad (2.37)$$

$$u_i = u_i^E + u_i^T, \quad (2.38)$$

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_{11}\varepsilon_{11}^E + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^E + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12}^E). \quad (2.39)$$

Στις σχέσεις (2.34)-(2.37) και (2.38), ο δείκτης i παίρνει τις τιμές 1 και 2, u_1 και u_2 είναι οι ολικές ελαστικές μετατοπίσεις, και σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} είναι οι τάσεις της συνεπίπεδης παραμόρφωσης. Όλες αυτές οι ποσότητες είναι συναρτήσεις των μεταβλητών x_1 , x_2 .

2.4.2 Τα \mathcal{L}_k -ολοκληρώματα

Για το ελαστικό πεδίο που αναπτύσσεται στην περιοχή \mathcal{V}_l του διφασικού υλικού του Σχήματος 2.1, ισχύει η παρακάτω ταυτότητα

$$c_k = e_{kij}(\sigma_{il}\varepsilon_{jl}^E + \sigma_{li}\varepsilon_{lj}^E) = e_{kij}(\sigma_{il}u_{l,j}^E + \sigma_{li}u_{j,l}^E) = 0, \quad (2.40)$$

επειδή η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι συμμετρική ως προς i και j . Χρησιμοποιώντας την (2.22) σε συνδυασμό με τις (2.12) και (2.13), η παραπάνω σχέση γράφεται

$$c_k = e_{kij}b_{ji} + e_{kij}\sigma_{li}u_{j,l}^E - e_{kij}\sigma_{li}u_{l,j}^T = 0. \quad (2.41)$$

Έστω τώρα η ποσότητα

$$d_{kl} = e_{kij}(b_{li}x_j + \sigma_{li}u_j^E). \quad (2.42)$$

Από την παραγωγή της ποσότητας αυτής προκύπτει

$$d_{kl,l} = e_{kij}(b_{ji} + \sigma_{li}u_{j,l}^E). \quad (2.43)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, η (2.41) γράφεται

$$c_k = d_{kl,l} - e_{kij}\sigma_{li}u_{l,j}^T = 0. \quad (2.44)$$

Σε σχέση με ένα αυθαίρετο όγκο Ω της περιοχής \mathcal{V}_I , τα \mathcal{L}_k -ολοκληρώματα ορίζονται με την σχέση

$$\mathcal{L}_k = \int_{\Omega} (d_{kl,l} - e_{kij} \sigma_{il} u_{l,j}^T) dV. \quad (2.45)$$

Προφανώς, τα ολοκληρώματα αυτά, λόγω της (2.44), είναι μηδενικά για κάθε αυθαίρετο όγκο Ω της περιοχής \mathcal{V}_I . Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss, το ολοκλήρωμα που προκύπτει από τον πρώτο όρο της προς ολοκλήρωση ποσότητας στην (2.45), μετασχηματίζεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, και τα \mathcal{L}_k -ολοκληρώματα παίρνουν την μορφή

$$\mathcal{L}_k = \int_{\Sigma} d_{kl} n_l dS - \int_{\Omega} e_{kij} \sigma_{il} u_{l,j}^T dV. \quad (2.46)$$

Με βάση την (2.42), τα παραπάνω ολοκληρώματα γράφονται

$$\mathcal{L}_k = \int_{\Sigma} e_{kij} (b_{il} n_l x_j + \sigma_{il} n_l u_j^E) dS + \mathcal{L}_k^T, \quad (2.47)$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathcal{L}_k^T = - \int_{\Omega} e_{kij} \sigma_{il} u_{l,j}^T dV. \quad (2.48)$$

Η σχέση (2.47) αποτελεί την επέκταση του ορισμού των \mathcal{L}_k -ολοκληρωμάτων σε περιοχές ελαστικών μέσων, όπου οι ελαστικές παραμορφώσεις συνυπάρχουν με ιδιοπαραμορφώσεις. Το ολοκλήρωμα \mathcal{L}_k^T , σε αντίθεση με το πρώτο ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς της (2.47), είναι ένα ολοκλήρωμα όγκου. Δείχνεται παρακάτω, ότι το ολοκλήρωμα \mathcal{L}_k^T μπορεί να μετασχηματισθεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα μόνο σε ειδικές περιπτώσεις ιδιοπαραμορφώσεων.

Στην συνέχεια, η σχέση (2.47) εξειδικεύεται για την περίπτωση της διδιάστατης ελαστικής παραμόρφωσης του διαφασικού υλικού του Σχήματος 2.1, με βάση τις υποθέσεις που έγιναν προηγούμενα για την γεωμετρία του. Για την διδιάστατη ελαστική παραμόρφωση του υλικού, εύκολα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = 0, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{L}_3 = \int_{\Gamma} e_{3ij} (Wx_j n_i + t_i u_j^E - t_l u_{l,i} x_j) dl + \mathcal{L}_3^T, \quad (2.50)$$

όπου

$$t_i = \sigma_{il} n_l, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{L}_3^T = - \int_{\Omega} e_{3ij} \sigma_{il} u_{l,j}^T dV, \quad (2.52)$$

με τους λατινικούς δείκτες των παραπάνω σχέσεων να παίρνουν τις τιμές 1 και 2. Στην αντιεπίπεδη κατάσταση, το ολοκλήρωμα (2.50) παίρνει την μορφή

$$\mathcal{L}_3 = \oint_{\Gamma} [(Wn_1 - t_3 u_{3,1})x_2 - (Wn_2 - t_3 u_{3,2})x_1] dl + \mathcal{L}_3^T, \quad (2.53)$$

όπου

$$t_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2, \quad (2.54)$$

$$\mathcal{L}_3^T = - \int_A (\sigma_{31} u_{3,2}^T - \sigma_{32} u_{3,1}^T) dA. \quad (2.55)$$

Στην σχέση (2.55), το A δηλώνει το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη Γ . Στην συνεπίπεδη κατάσταση, το ολοκλήρωμα της (2.53) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & \oint_{\Sigma} \{ [Wn_1 - (t_1 u_{1,1} + t_2 u_{2,1})]x_2 - [Wn_2 - (t_1 u_{1,2} + t_2 u_{2,2})]x_1 \} dl \\ & + \oint_{\Sigma} (t_1 u_2^E - t_2 u_1^E) dl + \mathcal{L}_3^T, \end{aligned} \quad (2.56)$$

όπου

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad t_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{L}_3^T = - \int_{\Omega} [(\sigma_{11} u_{1,2}^T + \sigma_{21} u_{2,2}^T) - (\sigma_{12} u_{1,1}^T + \sigma_{22} u_{2,1}^T)] dV. \quad (2.58)$$

2.4.3 Τα \mathcal{M} -ολοκληρώματα

Σε ένα σημείο του πεδίου \mathcal{V}_I με συντεταγμένες x_k , ισχύει

$$(Wx_k)_{,k} = W_{,k}x_k + Wx_{k,k}, \quad (2.59)$$

όπου W είναι η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης. Θέτοντας

$$m = x_{k,k} = \delta_{kk}, \quad (2.60)$$

είναι προφανές, ότι $m=3$, για την περίπτωση της τρισδιάστατης παραμόρφωσης και $m=2$, για την περίπτωση της διδιάστατης παραμόρφωσης. Έτσι, με βάση τις (2.20) και (2.60), η (2.59) γράφεται

$$(Wx_k)_{,k} = \sigma_{ij}u_{i,jk}x_k + mW, \quad (2.61)$$

η οποία, λόγω της (2.9), γράφεται

$$(Wx_k)_{,k} = \sigma_{ij}u_{i,jk}x_k + \frac{m}{2}\sigma_{ij}u_{ij}^E. \quad (2.62)$$

Λόγω της συνθήκης ισορροπίας $\sigma_{ij,j} = 0$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύει

$$\sigma_{ij}u_{i,jk}x_k = (\sigma_{ij}u_{i,k}x_k)_{,j} - \sigma_{ij}u_{i,k}\delta_{kj}. \quad (2.63)$$

Αντικαθιστώντας την (2.63) στην (2.62), προκύπτει

$$(Wx_j)_{,j} - (\sigma_{ij}u_{i,k}x_k)_{,j} + \sigma_{ij}u_{i,k}\delta_{kj} - \frac{m}{2}\sigma_{ij}u_{ij}^E = 0. \quad (2.64)$$

Με βάση τις σχέσεις (2.11) και (2.12), η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$B_{j,j} = 0, \quad (2.65)$$

όπου έχει τεθεί

$$B_j = Wx_j - \sigma_{ij}u_{i,k}x_k - \frac{m-2}{2}\sigma_{ij}u_i + \frac{m}{2}\sigma_{ij}u_i^T. \quad (2.66)$$

Έστω, τώρα, η κλειστή καμπύλη Σ του πεδίου \mathcal{V}_I , που θεωρήθηκε παραπάνω για τα J_k - και \mathcal{L}_k -ολοκληρώματα. Για τον όγκο Ω που περικλείεται από την καμπύλη Σ , λόγω της (2.65), ισχύει

$$\int_{\Omega} B_{j,j} d\Omega = 0, \quad (2.67)$$

από όπου, με βάση το θεώρημα του Gauss, προκύπτει

$$\oint_{\Sigma} B_j n_j d\Sigma = 0. \quad (2.68)$$

Τώρα, το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα ορίζεται με την σχέση

$$\mathcal{M} = \oint_{\Sigma} B_j n_j d\Sigma, \quad (2.69)$$

το οποίο, με βάση την (2.68), είναι μηδέν για κάθε κλειστή καμπύλη Σ που βρίσκεται στο πεδίο \mathcal{V}_I . Με βάση την σχέση (2.66), το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται

$$\mathcal{M} = \oint_{\Sigma} (Wx_j n_j - \sigma_{ij} n_j u_{i,k} x_k - \frac{m-2}{2} \sigma_{ij} n_j u_i + \frac{m}{2} \sigma_{ij} n_j u_i^T) d\Sigma. \quad (2.70)$$

Για την τρισδιάστατη παραμόρφωση ($m=3$), το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει την μορφή

$$\mathcal{M} = \oint_{\Sigma} (Wx_j n_j - \sigma_{ij} n_j u_{i,k} x_k - \frac{1}{2} \sigma_{ij} n_j u_i + \frac{3}{2} \sigma_{ij} n_j u_i^T) d\Sigma, \quad (2.71)$$

ενώ, για την διδιάστατη παραμόρφωση ($m=2$), την μορφή

$$\mathcal{M} = \oint_{\Sigma} (Wx_j n_j - \sigma_{ij} n_j u_{i,k} x_k + \sigma_{ij} n_j u_i^T) dl. \quad (2.72)$$

Για συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση, το παραπάνω ολοκλήρωμα, παίρνει, αντίστοιχα, τις παρακάτω μορφές

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \oint_{\Gamma} \left\{ W(x_1 n_1 + x_2 n_2) - [t_1(u_{1,1}x_1 + u_{1,2}x_2) + t_2(u_{2,1}x_1 + u_{2,2}x_2)] dl \right\} \\ & + \oint_{\Gamma} (t_1 u_1^T + t_2 u_2^T) dl, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\mathcal{M} = \oint_{\Gamma} [(Wn_1 - t_3 u_{3,1})x_1 + (Wn_2 - t_3 u_{3,2})x_2 + t_3 u_3^T] dl. \quad (2.74)$$

2.5 Η κινούσα δύναμη μίας διεπιφάνειας

Στην ενότητα αυτή, εξείχθει η γενική έκφραση της κινούσας δύναμης που επενεργεί πάνω σε μία κλειστή διεπιφάνεια ενός διφασικού υλικού, που διαχωρίζει δύο διαφορετικά γραμμικά, ομογενή και ισότροπα ελαστικά υλικά, όταν το υλικό που περικλείεται από την διεπιφάνεια (ανομοιογένεια) υφίσταται έναν μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται με μία συνεχή διανομή ιδιοπαραμορφώσεων. Η έκφραση της κινούσας δύναμης που διαχωρίζει δύο ελαστικά μέσα, διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων, έχει δοθεί από τον Eshelby (Eshelby, 1970), ενώ για διεπιφάνειες που διαχωρίζουν δύο ελαστικά μέσα με ίδιες ελαστικές ιδιότητες, από τον Gavazza (Gavazza, 1977).

2.5.1 Η σχέση της κινούσας δύναμης

Αν το ελαστικό διφασικό σύστημα του Σχήματος 2.1 βρίσκεται σε ελαστική παραμόρφωση λόγω ιδιοπαραμορφώσεων ε_{ij}^T , που επενεργούν στην περιοχή \mathcal{V}_I , τότε, η ολική δυναμική ενέργεια Π του διφασικού υλικού συμπίπτει με την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα. Συνεπώς, με βάση τις (2.7) και (2.8), μπορεί να γραφτεί ότι

$$\Pi = E = \int_{V_{II}} W dV + \int_{V_I} W dV, \quad (2.75)$$

όπου, η πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης W παρέχεται από την σχέση (2.9).

Έστω τώρα ότι η διεπιφάνεια S αρχίζει να κινείται με μία σταθερή ταχύτητα v_i , ή διαφορετικά, έστω, ότι ο όγκος του υλικού που βρίσκεται εσωτερικά της S αρχίζει να αυξάνεται έχοντας, μετά το χρονικό διάστημα dt , ως νέο σύνορο το S' . Αν x_i είναι ένα σημείο του συνόρου S κατά την έναρξη της κίνησης, τότε, τα σημεία $x'_i = x_i + v_i dt$ σχηματίζουν την επιφάνεια του συνόρου S' . Στο σημείο αυτό θα υποθεθεί ότι το υλικό εντός της S' έχει τις ελαστικές σταθερές λ' και μ' και καταπονείται με τις ιδιοπαραμορφώσεις ε_{ij}^T , που παρέχονται με τις ίδιες εκφράσεις σε όλη την εσωτερική περιοχή της S' . Αυτό που θα προσδιορισθεί παρακάτω είναι η μεταβολή που συμβαίνει στην δυναμική ενέργεια στο χρονικό διάστημα dt , που παρέχεται με την σχέση $d\Pi/dt$. Με βάση το θεώρημα μεταφοράς (Gurtin, 1981), η σχέση (2.75) παρέχει

$$\frac{d\Pi}{dt} = \int_{V_{II}(t)} \dot{W} dV - \int_{S(t)} W^{(out)} v_i n_i dS + \int_{V_I(t)} \dot{W} dV + \int_{S(t)} W^{(in)} v_i n_i dS, \quad (2.76)$$

όπου η τελεία σημαίνει μερική παράγωγο ως προς t , δηλαδή $\dot{W} = \partial W / \partial t$. Ισχύει

$$\dot{W} = \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{u}_{i,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{u}_i \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} \dot{u}_i, \text{ στο } \mathcal{V}_{II}, \\ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{u}_{i,j} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{u}_i \right)_{,j} - \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right)_{,j} \dot{u}_i, \text{ στο } \mathcal{V}_I. \end{cases} \quad (2.77)$$

Συνεπώς, λόγω των παραπάνω σχέσεων, η (2.76) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} = & - \int_{V_{II}(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} \dot{u}_i dV - \int_{V_I(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right)_{,j} \dot{u}_i dV \\ & + \int_{V_{II}(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{u}_i \right)_{,j} dV + \int_{V_I(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{u}_i \right)_{,j} dV \\ & - \int_{S(t)} \|W\| n_i v_i dS, \end{aligned} \quad (2.78)$$

όπου το σύμβολο $\|W\|$ δηλώνει την ασυνέχεια της ποσότητας W , δια μέσου της διεπιφάνειας, δηλαδή

$$\|W\| = W^{(out)} - W^{(in)}. \quad (2.79)$$

Από το θεώρημα του Gauss, προκύπτει

$$\int_{V_{II}(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{u}_i \right)_{,j} dV = \int_{S^o} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \dot{u}_i dS - \int_S \frac{\partial W^{out}}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \dot{u}_i dS, \quad (2.80)$$

$$\int_{V_I(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \dot{u}_i \right)_{,j} dV = \int_S \frac{\partial W^{(in)}}{\partial \varepsilon_{ij}^E} n_j \dot{u}_i dS. \quad (2.81)$$

Συνεπώς, λόγω των (2.80), (2.81), η (2.78) γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} = & - \int_{V_{II}(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{,j} \dot{u}_i dV - \int_{V_I(t)} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right)_{,j} \dot{u}_i dV - \int_{S(t)} \left(\frac{\partial W^{(out)}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\partial W^{(in)}}{\partial \varepsilon_{ij}^E} \right) n_j \dot{u}_i dS \\ & + \int_{S^o} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \dot{u}_i dS - \int_{S(t)} \|W\| n_i v_i dS. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Επειδή

$$\dot{u}_i = \begin{cases} \frac{du_i}{dt} - u_{i,k}^{(in)} v_k, & \text{στο } \mathcal{V}_I, \\ \frac{du_i}{dt} - u_{i,k}^{(out)} v_k, & \text{στο } \mathcal{V}_{II}, \end{cases} \quad (2.83)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial W_I}{\partial \varepsilon_{ij}^E}, & \text{στο } \mathcal{V}_I, \\ \frac{\partial W_{II}}{\partial \varepsilon_{ij}}, & \text{στο } \mathcal{V}_{II}, \end{cases} \quad (2.84)$$

η (2.82) παρέχει

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} = & - \int_{V_H(t)} \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV - \int_{V_I(t)} \sigma_{ij,j} \dot{u}_i dV - \int_S (\sigma_{ij}^{(out)} n_j - \sigma_{ij}^{(in)} n_j) \frac{du_i}{dt} dS \\ & - \int_S \left[\|W\| n_i v_i - \sigma_{ij} n_j \left\| u_{i,k} \right\| v_k \right] dS + \int_{S^o} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i dS. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη ισορροπίας $\sigma_{ij,j} = 0$, την σχέση συνέχειας των ελκυστών $\sigma_{ij}^{(out)} n_j = \sigma_{ij}^{(in)} n_j$ στην διεπιφάνεια S , και την συνοριακή συνθήκη $\sigma_{ij} n_j = 0$ στο εξωτερικό σύνορο S^o , η (2.85) ανάγεται στην μορφή

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \int_S \left[\|W\| - \sigma_{ij} n_j \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\| \right] n_k v_k dS. \quad (2.86)$$

Ορίζοντας

$$f_{(n)} = \|W\| - t_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\|, \quad (2.87)$$

η (2.86) γράφεται

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \int_S f_{(n)} v_{(n)} dS, \quad (2.88)$$

όπου $v_{(n)} = v_k n_k$ είναι η συνιστώσα της ταχύτητας v_i στην διεύθυνση του κάθετου, στην διεπιφάνεια, διανύσματος n_i . Η ποσότητα $f_{(n)}$ είναι η συνιστώσα στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος n_i ενός διανύσματος f_i που επενεργεί στην διεπιφάνεια S και ορίζεται ως η κινούσα δύναμη της διεπιφάνειας.

2.5.2 Κινούσα δύναμη και ολική δυναμική ενέργεια

Όταν το ελαστικό σύστημα του Σχήματος 2.1 βρίσκεται σε συνεπίπεδη παραμόρφωση, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \int_{\gamma} \left(\|W\| - \sigma_{ij} n_j \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\| \right) n_k v_k ds, \quad (2.89)$$

που είναι η εξειδίκευση της (2.86) για διδιάστατη ελαστική παραμόρφωση του συστήματος. Στην σχέση αυτή το γ είναι το ίχνος της διεπιφάνειας S πάνω στο επίπεδο αναφοράς, που ταυτίζεται με το επίπεδο $x_3 = 0$ του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Θα υποθεθεί ότι στο πεδίο \mathcal{V}_i δεν υπάρχουν ιδιοπαραμορφώσεις ούτε εφαρμόζεται κάποια σημειακή ιδιομορφία. Στην σχέση (2.89), η ταχύτητα v_i με την οποία κινείται η διεπιφάνεια, θεωρείται ότι έχει την μορφή

$$v_i = x_i. \quad (2.90)$$

Επειδή $v_i = dx_i / dt$, από την σχέση (2.90) προκύπτει ότι, οι συντεταγμένες x_i ενός σημείου της κινούμενης διεπιφάνειας ικανοποιούν την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i. \quad (2.91)$$

Η ολοκλήρωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης παρέχει

$$x_i(t) = x_{0,i} e^t, \quad (2.92)$$

όπου $x_{0,i} = x_i(0)$. Αν θεωρηθεί ότι η παρούσα στιγμή αντιπροσωπεύει την χρονική στιγμή $t = 0$, η μορφή της εξίσωσης (2.92) υπαγορεύει ότι σε μία χρονική στιγμή t , η καμπύλη γ έχει μετακινηθεί ομοιόθετα με συντελεστή ομοιοθεσίας e^t . Με βάση τον συλλογισμό αυτό, ο αρνητικός χρόνος δηλώνει το παρελθόν με τον χρόνο $t = -\infty$ να αντιστοιχεί στην εμφάνιση της ανομοιογένειας στο σύστημα, καθόσον $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

Λόγω της σχέσης (2.92), προκύπτει ότι οι παραμορφώσεις ε_{ij} δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, που σημαίνει, ότι οι ποσότητες W , σ_{ij} και $\partial u_i / \partial n$ είναι και αυτές ανεξάρτητες του χρόνου. Αντικαθιστώντας την (2.92) στην (2.89) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\partial u_i / \partial n = u_{i,s} n_s$ προκύπτει

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \int_{\gamma} e^{2t} \left[\|W\| n_k x_{0,k} - \|t_i u_{i,l}\| \right] ds_0, \quad (2.93)$$

όπου

$$ds_0 = \sqrt{dx_{0,1}^2 + dx_{0,2}^2}. \quad (2.94)$$

Επειδή οι ποσότητες W και $u_{i,l}$ δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, η σχέση (2.93) ξαναγράφεται στην μορφή

$$\frac{d\Pi}{dt} = -e^{2t} [\mathcal{M}_O^{(out)} - \mathcal{M}_O^{(in)}], \quad (2.95)$$

όπου

$$\mathcal{M}_O^{(out)} = \int_{\gamma} [W^{out} n_k x_{0,k} - (t_i u_{i,l})^{out}] ds_0, \quad (2.96)$$

$$\mathcal{M}_O^{(in)} = \int_{\gamma} [W^{in} n_k x_{0,k} - (t_i u_{i,l})^{in}] ds_0. \quad (2.97)$$

Από την σχέση (2.95), με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\int_{-\infty}^0 d\Pi = -(\mathcal{M}_O^{(out)} - \mathcal{M}_O^{(in)}) \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt, \quad (2.98)$$

όπου

$$\Delta\Pi = \Pi(0) - \Pi(\infty) = -\frac{1}{2} (\mathcal{M}_O^{(out)} - \mathcal{M}_O^{(in)}). \quad (2.99)$$

Αν στο πεδίο \mathcal{V}_i δεν υπάρχουν ιδιοπαρομορφώσεις, τότε $\mathcal{M}_O^{(in)} = 0$, και η (2.99) μπορεί να γραφτεί

$$\Delta\Pi = -\frac{1}{2} \mathcal{M}, \quad (2.100)$$

όπου έχει τεθεί $\mathcal{M} = \mathcal{M}_O^{(out)}$, που είναι το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα γύρω από την ανομοιογένεια αναφορικά με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O .

2.5.3 Η σχέση της κινούσας δύναμης του Gavazza

Στην συνέχεια, θα δειχθεί ότι, όταν τα δύο μέσα \mathcal{V}_I και \mathcal{V}_{II} του Σχήματος 2.1 έχουν τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες, όταν δηλαδή ισχύει $\mu' = \mu$ και $\lambda' = \lambda$, η σχέση (2.87) ανάγεται στην

$$f_{(n)} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(in)} + \sigma_{ij}^{(out)})\varepsilon_{ij}^T, \quad (2.101)$$

που είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως σχέση Gavazza. Η σχέση αυτή έχει εξαχθεί από τον Gavazza (Gavazza, 1977) και αφορά την κινούσα δύναμη που επενεργεί σε μία διεπιφάνεια που βρίσκεται σε ένα ισότροπο, ομογενές ελαστικό μέσο, λόγω ιδιοπαραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε όλη την έκταση του πεδίου \mathcal{V} . Η εξαγωγή της σχέσης (2.101) από τον Gavazza στηρίχθηκε σε μία διαφορετική προσέγγιση από αυτή του Eshelby (Eshelby, 1970), που εμπλέκει το θεώρημα μεταφοράς.

Για την περίπτωση που οι ελαστικές ιδιότητες των δύο μέσων είναι ίσες, τότε, για τον πρώτο όρο της (2.87), ισχύει

$$\begin{aligned} \|W\| &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^E)^{(out)} - \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^E)^{(in)} \\ &= \frac{1}{2}[\sigma_{ij}^{(in)} + \sigma_{ij}^{(out)}][(\varepsilon_{ij}^E)^{(out)} - (\varepsilon_{ij}^E)^{(in)}] + \frac{1}{2}[\sigma_{ij}^{(out)}(\varepsilon_{ij}^E)^{(in)} - \sigma_{ij}^{(in)}(\varepsilon_{ij}^E)^{(out)}]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Καθόσον τα δύο υλικά που διαχωρίζει η διεπιφάνεια S είναι γραμμικώς ελαστικά και ισότροπα, από τον νόμο του Hooke, ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma_{ij}^{(in)} = C_{ijkl}^{(in)}(\varepsilon_{ij}^E)^{(in)}, \quad \sigma_{ij}^{(out)} = C_{ijkl}^{(out)}(\varepsilon_{ij}^E)^{(out)}, \quad (2.103)$$

όπου

$$C_{ijkl}^{(in)} = C_{ijkl}^{(out)} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.104)$$

Με βάση την σχέση (2.103), εύκολα δείχνεται ότι ισχύει

$$\sigma_{ij}^{out} (\varepsilon_{ij}^E)^{(in)} = \sigma_{ij}^{in} (\varepsilon_{ij}^E)^{(out)}, \quad (2.105)$$

που σημαίνει ότι ο τελευταίος όρος της (2.102) εξαφανίζεται. Συνεπώς, από την σχέση (2.102) συνάγεται ότι

$$\|W\| = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^{(in)} + \sigma_{ij}^{(out)}] [(\varepsilon_{ij}^E)^{(out)} - (\varepsilon_{ij}^E)^{(in)}]. \quad (2.106)$$

Λόγω της συνέχειας των ελκυστών πάνω στη διεπιφάνεια, ισχύει $t_i = \sigma_{ij}^{(out)} n_j = \sigma_{ij}^{(in)} n_j$.

Συνεπώς, ο δεύτερος όρος της (2.87) γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} t_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\| &= \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} n_j \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\| = \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} \|u_{i,k} n_k n_j\| = \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} \|u_{i,j}\| \\ &= \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} \left[(u_{i,j})^{(out)} - (u_{i,j})^{(in)} \right] \\ &= \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} [(\varepsilon_{ij}^E)^{(out)} - (\varepsilon_{ij}^E)^{(in)} - \varepsilon_{ij}^T], \end{aligned} \quad (2.107)$$

όπου, στην εξαγωγή της παραπάνω σχέσης, έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις $\partial u_i / \partial x_n = u_{i,k} n_k$, $u_i^{(in)} = u_i^E + u_i^T$, $u_i^{(out)} = u_i^E$ και $n_k n_j = \delta_{kj}$. Συνεπώς, από τις (2.106) και (2.107), η (2.87) παρέχει

$$f_{(n)} = \|W\| - t_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\| = \frac{\sigma_{ij}^{(out)} + \sigma_{ij}^{(in)}}{2} \varepsilon_{ij}^T, \quad (2.108)$$

που είναι η σχέση του Gavazza.

2.6 Μιγαδικές σχέσεις των συντηρητικών ολοκληρωμάτων και της κινούσας δύναμης

Προκειμένου να αξιοποιηθούν οι ιδιότητες των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων της διδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας στον υπολογισμό των συντηρητικών ολοκληρωμάτων, οι Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973) διατύπωσαν τα ολοκληρώματα αυτά, σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της διδιάστατης

ελαστικότητας. Τα μιγαδικά αυτά δυναμικά είναι δύο ολόμορφες συναρτήσεις, για την συνεπίπεδη παραμόρφωση, και μία μιγαδική συνάρτηση, για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση (Muskhelishvili, 1953). Στην ενότητα αυτή, οι σχέσεις των Budiansky και Rice επεκτείνονται στην διδιάστατη παραμόρφωση του ελαστικού μέσου, όταν οι ελαστικές παραμορφώσεις συνυπάρχουν με ιδιοπαραμορφώσεις. Επιπρόσθετα, η έκφραση της κινούσας δύναμης, που προέκυψε προηγούμενα για την διδιάστατη παραμόρφωση του ελαστικού μέσου, διατυπώνεται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της διδιάστατης ελαστικότητας.

2.6.1 J_k -ολοκλήρωμα

Τα ολοκληρώματα J_1 και J_2 της συνεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης του υλικού, που παρέχονται από τις σχέσεις (2.34) και (2.35), γράφονται στην παρακάτω μιγαδική μορφή

$$J_1 + iJ_2 = (J_1 + iJ_2)^E + (J_1 + iJ_2)^T, \quad (2.109)$$

όπου

$$(J_1 + iJ_2)^E = \oint_{\Gamma} [W(n_1 + in_2) - t_i(u_{i,1} + iu_{i,2})^E] dl, \quad (2.110)$$

$$(J_1 + iJ_2)^T = -\oint_{\Gamma} t_i(u_{i,1} + iu_{i,2})^T dl, \quad (2.111)$$

με τον δείκτη i να παίρνει τις τιμές 1 και 2. Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης W , που υπεισέρχεται στην σχέση (2.110), παρέχεται από την σχέση (2.39). Η σχέση αυτή, με βάση τις καταστατικές εξισώσεις

$$\varepsilon_{11}^E = \frac{1}{2\mu'} \sigma_{11} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (2.112)$$

$$\varepsilon_{22}^E = \frac{1}{2\mu'} \sigma_{22} - \frac{\lambda'}{4\mu'(\lambda' + \mu')} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (2.113)$$

$$\varepsilon_{12}^E = \frac{1}{2\mu'} \sigma_{12}, \quad (2.114)$$

μπορεί να τεθεί στην μορφή

$$W = \frac{P^2}{8(\lambda' + \mu')} + \frac{|S|^2}{8\mu'}, \quad (2.115)$$

όπου P και S είναι οι τασικοί συνδυασμοί

$$P = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad (2.116)$$

$$S = \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}. \quad (2.117)$$

Έτσι, με την σχέση (2.115), η πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης εκφράζεται σε όρους των τασικών συνδυασμών P και S . Στην συνέχεια, και οι υπόλοιπες ποσότητες που υπεισέρχονται στα ολοκληρώματα των σχέσεων (2.47), (2.110) θα εκφραστούν σε όρους των τασικών συνδυασμών P , S και της μιγαδικής ελαστικής μετατόπισης $D^E = (u_1 + iu_2)^E$. Για τον σκοπό αυτό, έχουν εξαχθεί οι παρακάτω σχέσεις

$$t_1 dl = \frac{P - \bar{S}}{4} id\bar{z} - \frac{P - S}{4} idz, \quad (2.118)$$

$$t_2 dl = -\frac{P + \bar{S}}{4} d\bar{z} - \frac{P + S}{4} dz, \quad (2.119)$$

και

$$(u_{1,1} + iu_{1,2})^E = 2 \frac{\partial u_1^E}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2.120)$$

$$(u_{2,1} + iu_{2,2})^E = 2 \frac{\partial u_2^E}{\partial \bar{z}} = -i \left(\frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} \right). \quad (2.121)$$

Για την εξαγωγή των δύο πρώτων σχέσεων χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (2.33), (2.37), (2.116) και (2.117). Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, ο όρος $t_i (u_{i,1} + iu_{i,2})^E$ που υπεισέρχεται στην (2.110) γράφεται

$$t_i (u_{i,1} + iu_{i,2})^E dl = -\frac{i}{2} \left(P \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} - S \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} \right) dz + \frac{i}{2} \left(P \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z}. \quad (2.122)$$

Με βάση τις (2.115), (2.33) και (2.122), το ολοκλήρωμα $(J_1 + iJ_2)^E$ της (2.110) μπορεί να εκφρασθεί σε όρους των ποσοτήτων P , S και D^E στην παρακάτω μορφή

$$(J_1 + iJ_2)^E = -\frac{i}{8} \oint_{\Gamma} \left(\frac{P^2}{\mu' + \lambda'} + \frac{|S|^2}{\mu'} \right) dz + \frac{i}{2} \oint_{\Gamma} \left(P \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} - S \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} \right) dz - \frac{i}{2} \oint_{\Gamma} \left(P \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z}. \quad (2.123)$$

Οι ποσότητες P , S και D^E μπορούν να εκφραστούν σε όρους των μιγαδικών δυναμικών $\varphi(z)$ και $\psi(z)$ της συνεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης με τις σχέσεις (Muskhelishvili, 1953)

$$P = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (2.124)$$

$$S = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (2.125)$$

$$D^E = \frac{1}{2\mu'}[\kappa'\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}], \quad (2.126)$$

όπου $\kappa' = 3 - 4\nu'$, με το ν' να είναι ο λόγος του Poisson. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (2.123), μετά από εκτεταμένη άλγεβρα, προκύπτει

$$(J_1 + iJ_2)^E = -\frac{i}{2M'} \oint_{\Gamma} [\varphi'(z)]^2 dz + \frac{i}{M'} \int_{\Gamma} \overline{\varphi'(z)} \overline{\psi'(z)} d\bar{z}, \quad (2.127)$$

όπου

$$M' = 2\mu' / (1 + \kappa'). \quad (2.128)$$

Στην συνέχεια, η ποσότητα $(J_1 + iJ_2)^T$, που παρέχεται από την (2.111), γράφεται σε όρους των διφασικών δυναμικών, όταν οι ιδιομετατοπίσεις u_1^T και u_2^T είναι αρμονικές συναρτήσεις. Στην περίπτωση αυτή, η μιγαδική ιδιομετατόπιση $D^T = u_1^T + iu_2^T$ ικανοποιεί την σχέση

$$4 \frac{\partial^2 D^T}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (2.129)$$

Η ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης παρέχει

$$D^T(z, \bar{z}) = f_T(z) + \overline{g_T(z)}, \quad (2.130)$$

όπου $f_T(z)$ και $g_T(z)$ είναι δύο ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις. Σε αντιστοιχία με την (2.122), για την μιγαδική ιδιομετατόπιση ισχύει

$$t_i(u_{i,1} + iu_{i,2})^T dl = -\frac{i}{2} \left(P \frac{\partial \bar{D}^T}{\partial \bar{z}} - S \frac{\partial D^T}{\partial \bar{z}} \right) dz + \frac{i}{2} \left(P \frac{\partial D^T}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \frac{\partial \bar{D}^T}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z}. \quad (2.131)$$

Εισάγοντας την σχέση αυτή στην (2.111) και λαμβάνοντας υπόψη την (2.130) προκύπτει

$$(J_1 + iJ_2)^T = -i \oint_{\Gamma} [\overline{\varphi'(z)g_T'(z)} - \overline{z\varphi''(z)f_T'(z)} - \overline{\psi'(z)f_T'(z)}] d\bar{z}. \quad (2.132)$$

Συνεπώς, το ολοκλήρωμα $J_1 + iJ_2$ της σχέσης (2.109), με τις σχέσεις (2.127) και (2.132), μπορεί να εκφρασθεί σε όρους των μιγαδικών δυναμικών $\varphi(z)$ και $\psi(z)$ της συνεπίπεδης κατάστασης στην μορφή

$$J_1 + iJ_2 = -\frac{i}{2M'} \oint_{\Gamma} [\varphi'(z)]^2 dz + \frac{i}{M'} \oint_{\Gamma} \overline{\varphi'(z)\psi'(z)} d\bar{z} - i \oint_{\Gamma} [\overline{\varphi'(z)g_T'(z)} - \overline{z\varphi''(z)f_T'(z)} - \overline{\psi'(z)f_T'(z)}] d\bar{z}. \quad (2.133)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την γενίκευση της σχέσης των Budiansky και Rice, που έχει εξαχθεί για μηχανικές δράσεις (Budiansky and Rice, 1973). Αν οι ιδιοπαραμορφώσεις είναι απύσες, τότε $f_T(z) = g_T(z) = 0$. Στην ειδική αυτή περίπτωση, το παραπάνω ολοκλήρωμα ανάγεται στην έκφραση που έχει αποκτηθεί από τους Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973).

Για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T$ στο πεδίο \mathcal{V}_I , η ιδιομετατόπιση έχει την μορφή

$$D^T(z, \bar{z}) = (u_1 + iu_2)^T = \frac{1}{2} Fz + \frac{1}{2} \bar{G}\bar{z}, \quad (2.134)$$

όπου $F = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T$ και $G = \varepsilon_{22}^T - \varepsilon_{11}^T + 2i\varepsilon_{12}^T$. Στην περίπτωση αυτή, οι συναρτήσεις $f_T(z)$ και $g_T(z)$ της (2.130) έχουν τη μορφή

$$f_T(z) = \frac{1}{2}Fz, \quad g_T(z) = \frac{1}{2}Gz. \quad (2.135)$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\oint_{\Gamma} \varphi'(z) f_T'(z) dz = \frac{1}{2} F \oint_{\Gamma} \varphi'(z) dz = \frac{1}{2} F \oint_{\Gamma} d\varphi = 0, \quad (2.136)$$

$$\oint_{\Gamma} \psi'(z) g_T'(z) dz = \frac{1}{2} G \oint_{\Gamma} \psi'(z) dz = \frac{1}{2} G \oint_{\Gamma} d\psi = 0, \quad (2.137)$$

$$\oint_{\Gamma} \bar{z} \varphi''(z) f_T'(z) dz = \frac{1}{2} F \bar{z} \oint_{\Gamma} \varphi''(z) dz = \frac{1}{2} G \oint_{\Gamma} d(\varphi') = 0. \quad (2.138)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις αυτές, η (2.133) γράφεται

$$J_1 + iJ_2 = -\frac{i}{2M'} \oint_{\Gamma} [\varphi'(z)]^2 dz + \frac{i}{M'} \int_{\Gamma} \overline{\varphi'(z) \psi'(z)} d\bar{z}, \quad (2.139)$$

που συμπίπτει με την αντίστοιχη σχέση των Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973).

Στη συνέχεια, εξάγονται οι αντίστοιχες σχέσεις για την αντεπίπεδη παραμόρφωση του διαστικού υλικού του Σχήματος 2.1. Οι σχέσεις (2.27) και (2.28), μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μιγαδική μορφή

$$J_1 + iJ_2 = \oint_{\Gamma} [W(n_1 + in_2) - t_3(u_{3,1} + iu_{3,2})] dl. \quad (2.140)$$

Αν $f(z)$ είναι το μιγαδικό δυναμικό που παρέχει τα αντεπίπεδα ελαστικά πεδία της περιοχής \mathcal{V}_I , όπου επενεργούν οι ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T , τότε, οι τάσεις και η ελαστική μετατόπιση στην περιοχή αυτή παρέχονται με τις σχέσεις

$$\sigma_{13} + i\sigma_{23} = 2\mu' f'(z), \quad (2.141)$$

$$u_3^E = f(z) + \overline{f(z)}. \quad (2.142)$$

Αν υποθεθεί ότι οι ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T προκύπτουν από μία αρμονική ιδιομετατόπιση u_3^T , τότε, εύκολα δείχνεται ότι

$$u_3^T = f_T(z) + \overline{f_T(z)}, \quad (2.143)$$

όπου $f_T(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση. Με βάση τις σχέσεις (2.141), (2.142) και τις καταστατικές σχέσεις $\sigma_{13} = 2\mu'\varepsilon_{13}^E$, $\sigma_{23} = 2\mu'\varepsilon_{23}^E$, οι σχέσεις (2.30) και (2.31) γράφονται

$$W = 2\mu'|f'(z)|^2, \quad (2.144)$$

$$u_3 = f(z) + \overline{f(z)} + f_T(z) + \overline{f_T(z)}. \quad (2.145)$$

Από τις σχέσεις (2.32) και (2.33), δείχνεται ότι

$$(n_1 + in_2)dl = -idz, \quad (2.146)$$

$$t_3 dl = -\frac{i}{2}(\sigma_{31} - i\sigma_{32})dz + \frac{i}{2}(\sigma_{31} + i\sigma_{32})d\bar{z}. \quad (2.147)$$

Επίσης, ισχύει

$$u_{3,1} + iu_{3,2} = 2\frac{\partial u_3}{\partial \bar{z}}. \quad (2.148)$$

Από την αντικατάσταση των (2.141), (2.142) στις (2.147), (2.148) προκύπτει

$$t_3 dl = -i\mu'[f'(z)dz - \overline{f'(z)d\bar{z}}], \quad (2.149)$$

$$u_{3,1} + iu_{3,2} = 2[\overline{f'(z)} + f_T'(z)]. \quad (2.150)$$

Έτσι, με βάση τις (2.144), (2.146), (2.149) και (2.150), η ποσότητα $J_1 + iJ_2$, που παρέχεται από την σχέση (2.140), εκφράζεται σε όρους του μιγαδικού δυναμικού $f(z)$ με την σχέση

$$J_1 + iJ_2 = -2i\mu' \oint_{\Gamma} [\overline{f'(z)}]^2 d\bar{z} - 2i\mu' \oint_{\Gamma} [\overline{f'(z)} \overline{f_T'(z)}] d\bar{z}. \quad (2.151)$$

Η παραπάνω σχέση παρέχει την ποσότητα $J_1 + iJ_2$ της αντεπίπεδης ελαστικότητας σε όρους του μιγαδικού δυναμικού $f(z)$, όταν στην περιοχή \mathcal{V}_I , μαζί με τις ελαστικές

τάσεις, συνυπάρχουν και ιδιοπαραμορφώσεις που προέρχονται από μία αρμονική ιδιομετατόπιση u_3^T . Όταν, $f_T(z) = 0$, η (2.151) ανάγεται στην σχέση των Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973).

2.6.2 \mathcal{L}_3 -και \mathcal{M} -ολοκληρώματα

Στην συνεπίπεδη παραμόρφωση, οι σχέσεις (2.56) και (2.73) μπορούν να τεθούν στην παρακάτω μιγαδική μορφή

$$\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M} = (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^E + (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^T, \quad (2.152)$$

όπου

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^E &= i \oint_{\Gamma} W \bar{z} (n_1 + in_2) dl - i \oint_{\Gamma} \bar{z} [t_1(u_{1,1}^E + iu_{1,2}^E) + t_2(u_{2,1}^E + iu_{2,2}^E)] dl \\ &\quad + \oint_{\Gamma} (t_1 u_2^E - t_2 u_1^E) dl, \end{aligned} \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^T &= -i \oint_{\Gamma} \bar{z} [t_1(u_{1,1}^T + iu_{1,2}^T) + t_2(u_{2,1}^T + iu_{2,2}^T)] dl \\ &\quad + i \oint_{\Gamma} (t_1 u_1^T + t_2 u_2^T) dl + \mathcal{L}_3^T. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Το ολοκλήρωμα \mathcal{L}_3^T της (2.154) παρέχεται από την σχέση (2.58). Με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε για τις ποσότητες $(J_1 + iJ_2)^E$ και $(J_1 + iJ_2)^T$, βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^E &= \frac{1}{8} \oint_{\Gamma} \bar{z} \left(\frac{P^2}{\mu' + \lambda'} + \frac{|S|^2}{\mu'} \right) dz \\ &\quad - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{z} \left(P \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} - S \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} \right) dz + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{z} \left(P \frac{\partial D^E}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \frac{\partial \bar{D}^E}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z} \\ &\quad + \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} (P \bar{D}^E + S D^E) dz + \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} (P D^E + \bar{S} \bar{D}^E) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^T &= -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{z} \left(P \frac{\partial \bar{D}^T}{\partial \bar{z}} - S \frac{\partial D^T}{\partial \bar{z}} \right) dz + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{z} \left(P \frac{\partial D^T}{\partial \bar{z}} - \bar{S} \frac{\partial \bar{D}^T}{\partial \bar{z}} \right) d\bar{z} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} (P \bar{D}^T - S D^T) dz - \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} (P D^T - \bar{S} \bar{D}^T) d\bar{z} + \mathcal{L}_3^T.
 \end{aligned} \tag{2.156}$$

Με αντικατάσταση των (2.124)-(2.126) στις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^E &= -\frac{1}{2M'} \oint_{\Gamma} z [\varphi''(z)\psi(z) + \varphi'(z)\psi'(z)] dz \\
 &\quad - \frac{1}{2M'} \oint_{\Gamma} \bar{z} [\overline{\varphi''(z)\psi(z)} - \overline{\varphi'(z)\psi'(z)}] d\bar{z},
 \end{aligned} \tag{2.157}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^T &= -\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{z} \varphi'(z) f_T'(z) dz \\
 &\quad + \oint_{\Gamma} \bar{z} [\overline{\varphi'(z)g_T(z)} - \overline{z\varphi''(z)f_T'(z)} - \overline{\psi'(z)f_T'(z)}] d\bar{z}.
 \end{aligned} \tag{2.158}$$

Στην περίπτωση σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων, με βάση τις (2.136)-(2.138), βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_3 + i\mathcal{M} &= -\frac{1}{2M'} \oint_{\Gamma} z [\varphi''(z)\psi(z) + \varphi'(z)\psi'(z)] dz \\
 &\quad - \frac{1}{2M'} \oint_{\Gamma} \bar{z} [\overline{\varphi''(z)\psi(z)} - \overline{\varphi'(z)\psi'(z)}] d\bar{z}.
 \end{aligned} \tag{2.159}$$

Για την αντεπίπεδη παραμόρφωση, από τις σχέσεις (2.53) και (2.73), προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_3 + i\mathcal{M} &= \oint_{\Gamma} W[(x_2 n_1 - x_1 n_2) + i(x_1 n_1 + x_2 n_2)] dl \\
 &\quad - \oint_{\Gamma} t_3 [(u_{3,1} x_2 - u_{3,2} x_1) + i(u_{3,1} x_1 + u_{3,2} x_2)] dl + i \oint_{\Gamma} t_3 u_3^T dl + \mathcal{L}_3^T.
 \end{aligned} \tag{2.160}$$

Αν $f(z)$ είναι το μιγαδικό δυναμικό της περιοχής \mathcal{V}_l και η ιδιομετατόπιση u_3^T , στην περιοχή αυτή, είναι αρμονική συνάρτηση, τότε τα ολοκληρώματα της δεξιάς πλευράς της (2.160), υπολογίζονται στις παρακάτω μορφές

$$\oint_{\Gamma} W[(x_2 n_1 - x_1 n_2) + i(x_1 n_1 + x_2 n_2)] dl = 2\mu' \oint_{\Gamma} \bar{z} |f'(z)|^2 dz, \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} t_3 [(u_{3,1}x_2 - u_{3,2}x_1) + i(u_{3,1}x_1 + u_{3,2}x_2)] dl &= \\ &= 2\mu' \oint_{\Gamma} \bar{z} |f'(z)|^2 dz - 2\mu' \oint_{\Gamma} \bar{z} f'(z) [\overline{f'(z)} + \overline{f_T'(z)}] d\bar{z}, \end{aligned} \quad (2.162)$$

$$i \oint_{\Gamma} t_3 u_3^T dl = -i\mu' \left[\oint_{\Gamma} f'(z) f_T(z) dz - \oint_{\Gamma} \overline{f'(z)} \overline{f_T(z)} d\bar{z} \right]. \quad (2.163)$$

Στην συνέχεια, θα δειχθεί ότι, αν οι ιδιομετατοπίσεις u_3^T είναι αρμονικές συναρτήσεις, τότε, $\mathcal{L}_3^T = 0$. Προς το σκοπό αυτό, η προς ολοκλήρωση ποσότητα του επιφανειακού ολοκληρώματος \mathcal{L}_3^T , που παρέχεται από την (2.55), γράφεται στην μορφή

$$\sigma_{31} u_{3,2}^T - \sigma_{32} u_{3,1}^T = -2i\mu' [f'(z) \overline{f_T'(z)} - \overline{f'(z)} f_T'(z)], \quad (2.164)$$

όπου, για την εξαγωγή της σχέσης αυτής, χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις (2.141) και (2.143). Συνεπώς, λόγω της (2.164), η σχέση (2.53) γράφεται

$$\mathcal{L}_3^T = 2i\mu' \oint_A f'(z) \overline{f_T'(z)} dA - 2i\mu' \oint_A \overline{f'(z)} f_T'(z) dA. \quad (2.165)$$

Για τον υπολογισμό των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της (2.165), θα χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$2i \oint_A \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA = \oint_{\Gamma} F(z, \bar{z}) dz, \quad (2.166)$$

που εκφράζει το θεώρημα του Stokes σε μιγαδική μορφή (Milne-Thomson, 1968). Στην σχέση αυτή, η $F(z, \bar{z})$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση που είναι ορισμένη και μία φορά διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου A που περικλείεται από την κλειστή καμπύλη Γ . Θεωρώντας την συνάρτηση

$$F(z, \bar{z}) = \mu' f'(z) \overline{f_T'(z)}, \quad (2.167)$$

από την σχέση (2.166) προκύπτει

$$2i\mu' \int_A f'(z) \overline{f_T'(z)} dA = \mu' \oint_{\Gamma} f'(z) \overline{f_T'(z)} dz. \quad (2.168)$$

Συνεπώς, η σχέση (2.53) γράφεται

$$\mathcal{L}_3^T = \mu' \oint_{\Gamma} f'(z) \overline{f_T(z)} dz - \mu' \oint_{\Gamma} \overline{f'(z)} f_T(z) d\bar{z}, \quad (2.169)$$

από όπου

$$\mathcal{L}_3^T = \mu' \overline{f_T(z)} \oint_{\Gamma} f'(z) dz - \mu' f_T(z) \oint_{\Gamma} \overline{f'(z)} d\bar{z}. \quad (2.170)$$

Επειδή

$$\oint_{\Gamma} f'(z) dz = \oint_{\Gamma} df = 0, \quad \oint_{\Gamma} \overline{f'(z)} d\bar{z} = \oint_{\Gamma} d\bar{f} = 0, \quad (2.171)$$

από την σχέση (2.170), συνάγεται άμεσα, ότι $\mathcal{L}_3^T = 0$. Συνεπώς, με βάση τις (2.161)-(2.163), και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathcal{L}_3^T = 0$, η (2.160) γράφεται

$$\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M} = 2\mu' \oint_{\Gamma} \bar{z} \overline{f'(z)} [f'(z) + \overline{f_T'(z)}] d\bar{z} + 2i\mu' \text{Im}[\oint_{\Gamma} f'(z) f_T(z) dz]. \quad (2.172)$$

Αν $f_T(z) = 0$, η παραπάνω σχέση ανάγεται στην αντίστοιχη σχέση των Budiansky και Rice (Budiansky and Rice, 1973), που έχει εξαχθεί για ελαστικά πεδία που προέρχονται από μηχανικές δράσεις.

2.6.3 Η κινούσα δύναμη σε μία διεπιφάνεια

Παρακάτω, η γενική έκφραση της κινούσας δύναμης (2.87) εξειδικεύεται στην περίπτωση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης του ελαστικού συστήματος του Σχήματος 2.1, όταν η περιοχή \mathcal{V}_I είναι μία κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια ακτίνας R_I και απείρου μήκους και η περιοχή \mathcal{V}_{II} εκτείνεται στο άπειρο σε όλες τις διευθύνσεις. Οι αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$, που επενεργούν στην κυκλική ανομοιογένεια, αναφέρονται ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , του οποίου ο άξονας x_3 συμπίπτει με τον άξονά της. Στην συνέχεια, για αντιστοιχία με τους

συμβολισμούς που έχουν υιοθετηθεί στην παρούσα εργασία, η περιοχή \mathcal{V}_I θα δηλώνεται με I , ενώ η περιοχή \mathcal{V}_M με M . Αναφορικά με ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, x_3) , η εξειδικευμένη μορφή της (2.87) για αντεπίπεδη παραμόρφωση, είναι

$$f_r = \|W\| - t_3 \left\| \frac{\partial u_3}{\partial r} \right\|, \quad (2.173)$$

όπου

$$\|W\| = \frac{(\sigma_{r3}^M)^2 + (\sigma_{\theta 3}^M)^2}{2\mu_M} - \frac{(\sigma_{r3}^I)^2 + (\sigma_{\theta 3}^I)^2}{2\mu_I}, \quad (2.174)$$

$$t_3 = \sigma_{r3}^M = \sigma_{r3}^I, \quad (2.175)$$

$$\left\| \frac{\partial u_3}{\partial r} \right\| = \frac{\partial u_3^M}{\partial r} - \frac{\partial u_3^I}{\partial r}. \quad (2.176)$$

Στην σχέση (2.87), έχει τεθεί $\partial / \partial n = \partial / \partial r$, επειδή η παράγωγος κατά την διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος n , που είναι κάθετο στην κυκλική κυλινδρική διεπιφάνεια, συμπίπτει με την παράγωγο κατά την ακτινική διεύθυνση r του κυλινδρικού συστήματος (r, θ, x_3) . Αν $f_M(z)$ και $f_I(z)$ είναι τα μιγαδικά δυναμικά που παρέχουν τις τάσεις στα πεδία M και I , όπου $z = r \exp(i\theta)$, λαμβάνοντας υπόψη την (2.141), η σχέση (2.174) γράφεται

$$\|W\| = 2\mu_M |f'_M(t)|^2 - 2\mu_I |f'_I(t)|^2, \quad (2.177)$$

όπου $t (= R_I e^{i\theta})$ είναι ένα σημείο της κυλινδρικής διεπιφάνειας των πεδίων I και M . Από τις σχέσεις των μιγαδικών δυναμικών (A.16) και (A.18), θέτοντας $\mathcal{U} = E^T z + \bar{E}^T \bar{z}$, εύκολα προκύπτει ότι, για τα σημεία $t (= R_I e^{i\theta})$ της διεπιφάνειας, ισχύει

$$2\mu_M f'_M(t) = (\mu_M + \mu_I) f'_I(t) - (\mu_M - \mu_I) \overline{f'_I(t)} \frac{\bar{t}}{t} + \mu_M \left(E^T - \bar{E}^T \frac{\bar{t}}{t} \right). \quad (2.178)$$

Αντικαθιστώντας την (2.178) στην (2.177) προκύπτει

$$\begin{aligned} \|W\| = & \frac{(\mu_M - \mu_I)^2}{\mu_M} |f'_I(t)|^2 - \frac{\mu_M^2 - \mu_I^2}{2\mu_M} \left[\frac{t}{\bar{t}} (f'_I(t))^2 + \frac{\bar{t}}{t} (\overline{f'_I(t)})^2 \right] \\ & - \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{E^T} \right] - \frac{\mu_M}{2} \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{E^T} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση, ισχύουν οι παρακάτω κατασταστικές σχέσεις

$$\frac{\partial u_3^M}{\partial r} = 2(\varepsilon_{r3}^E)^M = \frac{\sigma_{r3}^M}{\mu_M}, \quad (2.180)$$

$$\frac{\partial u_3^I}{\partial r} = 2(\varepsilon_{r3}^E)^I + 2\varepsilon_{r3}^T = \frac{\sigma_{r3}^I}{\mu_I} + 2\varepsilon_{r3}^T, \quad (2.181)$$

όπου $(\varepsilon_{r3}^E)^M$, $(\varepsilon_{r3}^E)^I$ είναι οι ελαστικές παραμορφώσεις στα πεδία M και I , αντίστοιχα.

Λόγω των (2.180) και (2.181), η (2.176) γράφεται

$$\left\| \frac{\partial u_3}{\partial r} \right\| = \frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_I \mu_M} \sigma_{r3}^I - 2\varepsilon_{r3}^T. \quad (2.182)$$

Η ακτινική συνιστώσα των τάσεων σ_{r3}^I της παραπάνω σχέσης, μέσω της σχέσης

$$\sigma_{r3}^I - i\sigma_{\theta 3}^I = 2\mu_I f'_I(t) e^{i\theta}, \quad (2.183)$$

μπορεί να εκφρασθεί σε όρους του μιγαδικού δυναμικού $f_I(t)$ της ανομοιογένειας I ως ακολούθως

$$\sigma_{r3}^I = \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right]. \quad (2.184)$$

Επίσης, από την ιδιοπαραμόρφωση $u_3^T = E^T z + \overline{E^T} \bar{z}$, όπου $z = r e^{i\theta}$, ο δεύτερος όρος της (2.182) προκύπτει στην μορφή

$$2\varepsilon_{r3}^T = e^{i\theta} E^T + e^{-i\theta} \overline{E^T}. \quad (2.185)$$

Ο όρος αυτός, για τα σημεία $t = R_I e^{i\theta}$ της διεπιφάνειας, γράφεται

$$2\varepsilon_{r3}^T = \sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \bar{E}^T. \quad (2.186)$$

Από τις σχέσεις (2.175), (2.182), (2.186) και (2.184), προκύπτει

$$t_3 \left\| \frac{\partial u_3}{\partial r} \right\| = -\frac{\mu_I(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M} \left[2|f'_I(t)|^2 + \frac{t}{\bar{t}} (f'_I(t))^2 + \frac{\bar{t}}{t} (\overline{f'_I(t)})^2 \right] - \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \bar{E}^T \right]. \quad (2.187)$$

Η αντικατάσταση των (2.179) και (2.187) στην (2.173) οδηγεί στην

$$f_r = -\frac{\mu_M - \mu_I}{2\mu_M} \left\{ \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right]^2 - \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right]^2 \right\} - \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \bar{E}^T \right] + \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \bar{E}^T \right] - \frac{\mu_M}{2} \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \bar{E}^T \right]^2. \quad (2.188)$$

Με την σχέση (2.188), η κινούσα δύναμη f_r που επενεργεί πάνω στην διεπιφάνεια που διαχωρίζει τα πεδία I και M είναι εκφρασμένη σε όρους του μιγαδικού δυναμικού του πεδίου I . Η σχέση αυτή είναι γενική με την έννοια ότι μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε φόρτιση που παράγει αντιεπίπεδη παραμόρφωση στο σύστημα, συμπεριλαμβανομένων και των ιδιοπαραμορφώσεων.

Όταν η αντιεπίπεδη παραμόρφωση δεν παράγεται από ιδιοπαραμορφώσεις, τότε $E^T = 0$, και η σχέση (2.188) παίρνει την απλή μορφή

$$f_r = -\frac{\mu_M - \mu_I}{2\mu_M} \left\{ \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right]^2 - \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right]^2 \right\}. \quad (2.189)$$

Όταν τα δύο πεδία που διαχωρίζει η διεπιφάνεια έχουν το ίδιο μέτρο διάτμησης, όταν δηλαδή $\mu_M = \mu_I$, η (2.188) παρέχει

$$\begin{aligned}
 f_r = & -\mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{E^T} \right] \\
 & + \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_I(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_I(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{E^T} \right] - \frac{\mu_M}{2} \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} E^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{E^T} \right]^2.
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

Κεφάλαιο 3

Κυκλικά Εγκλωβίσματα και Κυκλικές Ανομοιογένειες

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η ελαστική αλληλεπίδραση μικροσωματιδίων, που είναι διεσπαρμένα ως δεύτερη φάση σε κρυσταλλικά υλικά, με μετασχηματισμούς φάσης που λαμβάνουν χώρα στα υλικά αυτά, χρησιμοποιώντας ένα απλοποιημένο διδιάστατο μοντέλο της μηχανικής του συνεχούς ελαστικού μέσου. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από μία κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια που είναι ένθετη σε μία άπειρη ελαστική μήτρα διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων και βρίσκεται δίπλα από ένα κυκλικό εγκλώβισμα σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων. Η μήτρα προσομοιώνει το κρυσταλλικό υλικό, η κυκλική ανομοιογένεια τα μικροσωματίδια του κρυσταλλικού υλικού και το εγκλώβισμα ιδιοπαραμορφώσεων, έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που εμφανίζεται σε αυτό. Η παραμορφωσιακή και η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται

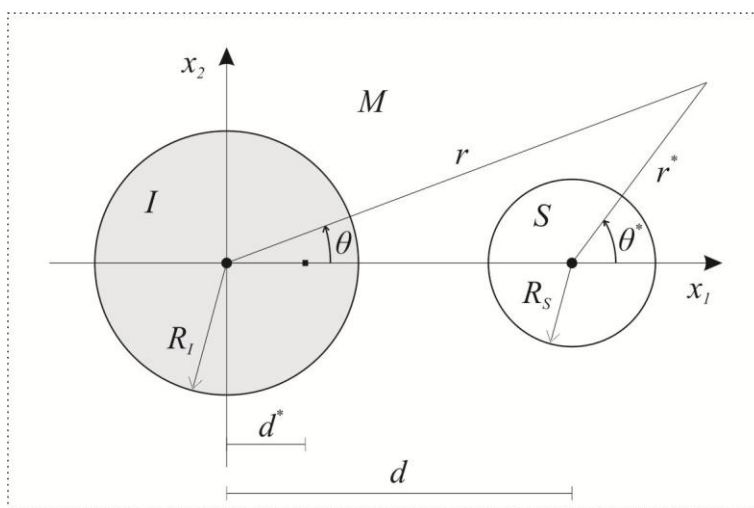
στο κρυσταλλικό υλικό, λόγω του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης, προσδιορίζεται στα πλαίσια της γραμμικής και ισότροπης ελαστικότητας, χρησιμοποιώντας το παραπάνω μοντέλο. Από την επίλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος αποκτώνται, σε κλειστή μορφή, τα πλήρη ελαστικά πεδία στις περιοχές που καταλαμβάνουν η μήτρα, η ανομοιογένεια και το εγκλωβίσμα. Με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτώνται, προσδιορίζεται η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, καθώς και η επιμέρους κατανομή της στις περιοχές της μήτρας, της ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος.

Στη συνέχεια, μελετάται η θερμοδυναμική ισορροπία του ελαστικού συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος προσδιορίζοντας τις συντηρητικές δυνάμεις και ροπές, που αναπτύσσονται μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος στο χώρο του υλικού, καθώς και τις κινούσες δυνάμεις, που αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος-μήτρας. Οι συντηρητικές δυνάμεις μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, γνωστές ως J_k -ολοκληρώματα, που είναι δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις, προσδιορίζονται σε κλειστή μορφή. Από την αριθμητική διερεύνηση που γίνεται προκύπτει ότι οι δυνάμεις αυτές, ανεξάρτητα από το είδος των ιδιοπαραμορφώσεων που αναπτύσσονται στο εγκλωβίσμα, είναι πάντα ελκτικές, για μια μαλακή ανομοιογένεια, και πάντα απωστικές, για μια σκληρή ανομοιογένεια. Η ελκτικότητα (ή η απωστικότητα) των δυνάμεων αυτών εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες της μήτρας και της ανομοιογένειας και καθορίζεται από το αν μία δυναμική σχετική μετακίνηση μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας, στο 'χώρο' του υλικού, επιφέρει μείωση (ή αύξηση) της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Οι ροπές επέκτασης της ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, γνωστές ως \mathcal{M} -ολοκληρώματα, καθώς και οι κινούσες δυνάμεις στις σχετικές διεπιφάνειες, γνωστές ως δυνάμεις Eshelby, προσδιορίζονται και αυτές σε κλειστή μορφή και διερευνώνται αριθμητικά για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Επίσης, με την ανάλυση αυτή, διερευνάται η 'τάση' μεταβολής του όγκου και του σχήματος της ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος, δηλαδή της μορφολογικής τους εξέλιξης, σε σχέση με τις ελαστικές ιδιότητες του συστήματος. Η επίδραση του τύπου της διεπιφανειακής σύνδεσης μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας, πάνω στην ενεργειακή αλληλεπίδραση ανομοιογένειας-

εγκλωβίσματος, διερευνάται με βάση την ανάλυση της αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης του συστήματος. Στην ανάλυση αυτή προσδιορίζονται, σε κλειστή μορφή, οι ενεργειακές δυνάμεις και ροπές που αναπτύσσονται μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας για διεπιφάνειες μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου.

3.2 Περιγραφή του ελαστικού συστήματος

Στο κεφάλαιο αυτό, αναλύεται το διφασικό ελαστικό σύστημα που δείχνεται στο Σχήμα 3.1. Το σύστημα αυτό αποτελείται από μία άπειρη ελαστική μήτρα που περιέχει μία κυλινδρική ανομοιογένεια απείρου μήκους και κυκλικής διατομής. Η σύνδεση των δύο υλικών είναι τέτοια, ώστε κατά την αφόρτιστη κατάσταση του συστήματος τα δύο υλικά



Σχήμα 3.1: Το ελαστικό σύστημα εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας.

να είναι χωρίς τάσεις. Η ελαστική παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που αναπτύσσεται σε ένα κυλινδρικό τμήμα της μήτρας. Το κυλινδρικό αυτό τμήμα έχει κυκλική διατομή, άπειρο μήκος και είναι παράλληλο στην κυλινδρική ανομοιογένεια. Υιοθετώντας την ορολογία του Eshelby, το

κυλινδρικό αυτό τμήμα της μήτρας ονομάζεται *εγκλωβίσμα*. Η ανάλυση της ελαστικής παραμόρφωσης του συστήματος γίνεται αναφορικά με ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , υποθέτοντας ότι οι αναπτυσσόμενες ελαστικές μετατοπίσεις στο σύστημα είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής x_3 . Στην περίπτωση αυτή, για γραμμικώς ελαστικά και ισότροπα υλικά, η ελαστική κατάσταση που αναπτύσσεται στο σύστημα διασπάται σε δύο ανεξάρτητες ελαστικές καταστάσεις, γνωστές ως συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη παραμόρφωση.

Στο κεφάλαιο αυτό, οι δύο αυτές καταστάσεις διαπραγματεύονται ξεχωριστά. Η ελαστική ανάλυση των δύο αυτών καταστάσεων του συστήματος γίνεται αναφορικά με ένα μιγαδικό z -επίπεδο, που συνδέεται με τους άξονες x_1, x_2 του σταθερού συστήματος συντεταγμένων ($z = x_1 + ix_2$). Στο επίπεδο αυτό, τα πεδία της ανομοιογένειας, της μήτρας και του εγκλωβίσματος δηλώνονται με I, M και S , αντίστοιχα, ενώ τα ίχνη των κυλινδρικών διεπιφανειών, με τις κυκλικές περιφέρειες A_I και A_S (Σχήμα 3.1). Ο άξονας του κυλινδρικού εγκλωβίσματος βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $x_2 = 0$, είναι παράλληλος με τον άξονα x_1 και τέμνει το μιγαδικό επίπεδο στο σημείο $z = d$. Η ακτίνα της κυκλικής διατομής της ανομοιογένειας δηλώνεται με R_I , η δε ακτίνα της κυκλικής διατομής του εγκλωβίσματος, με R_S . Ο ομοιόμορφος μετασχηματισμός του εγκλωβίσματος περιγράφεται με τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{ij}^T , όπου, οι λατινικοί δείκτες, αν δεν διευκρινίζεται διαφορετικά, παίρνουν τις τιμές 1, 2, και 3.

3.3 Αλληλεπίδραση εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας στην συνεπίπεδη παραμόρφωση

3.3.1 Προσδιορισμός ελαστικών πεδίων

Η συνεπίπεδη κατάσταση του συστήματος, που δείχνεται στο Σχήμα 3.1, αναλύεται για τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση μεταξύ μήτρας και ανομοιογένειας, που περιγράφεται με την συνέχεια τόσο των τάσεων όσο και των μετατοπίσεων. Η συνεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του συστήματος παράγεται από σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{11}^T , ε_{22}^T και ε_{12}^T του εγκλωβίσματος. Σε κάθε σημείο του εγκλωβίσματος, οι ιδιοπαραμορφώσεις αυτές εισάγουν την ιδιο-μετατόπιση

$$u_1^T + iu_2^T = \frac{1}{2}(Fz - \bar{G}\bar{z}), \quad (3.1)$$

όπου

$$F = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T, \quad G = \varepsilon_{22}^T - \varepsilon_{11}^T + 2i\varepsilon_{12}^T. \quad (3.2)$$

Η (3.1) έχει προκύψει από την ολοκλήρωση των σχέσεων

$$\varepsilon_{11}^T = \frac{\partial u_1^T}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22}^T = \frac{\partial u_2^T}{\partial x_2}, \quad 2\varepsilon_{12}^T = \frac{\partial u_1^T}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^T}{\partial x_1}, \quad (3.3)$$

έχοντας παραλείψει τις σταθερές ολοκλήρωσης, καθότι αυτές αντιπροσωπεύουν μετατοπίσεις απολύτως στερεού σώματος, που δεν συνεισφέρουν στην ένταση του συστήματος. Στη συνέχεια, η λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος αναπτύσσεται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών των τριών φάσεων του συστήματος, δηλαδή της ανομοιογένειας, της μήτρας και του εγκλωβίσματος. Τα ζεύγη των μιγαδικών δυναμικών κάθε φάσης $\varphi_k(z)$, $\psi_k(z)$, όπου $k = I, M$ και S , εκφράζονται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος του συστήματος. Το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του συστήματος ορίζεται ως η ειδική περίπτωση του ελαστικού προβλήματος που εξετάζεται, όταν οι ελαστικές ιδιότητες της ανομοιογένειας

συμπίπτουν με αυτές της μήτρας. Για το ομογενές πρόβλημα του συστήματος, τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος και της μήτρας δηλώνονται με τα ζεύγη των ολόμορφων συναρτήσεων $\varphi_{in}(z)$, $\psi_{in}(z)$ και $\varphi_{out}(z)$, $\psi_{out}(z)$, αντιστοίχως. Τα ζεύγη αυτά των μιγαδικών δυναμικών έχουν εξαχθεί στη βιβλιογραφία (Kattis,1994; Kattis and Meguid, 1995; Kattis and Providas, 1998) στην παρακάτω μορφή

$$\varphi_{in}(z) = -\frac{M_M}{2} F(z-d), \quad (3.4)$$

$$\psi_{in}(z) = -\frac{M_M}{2} G(z-d), \quad (3.5)$$

όταν $|z-d| < R_S$, και

$$\varphi_{out}(z) = -\frac{M_M}{2} \bar{G} \frac{R_S^2}{z-d}, \quad (3.6)$$

$$\psi_{out}(z) = -M_M \left[F \frac{R_S^2}{z-d} + \frac{1}{2} \bar{G} \frac{dR_S^2}{(z-d)^2} + \frac{1}{2} \bar{G} \frac{R_S^4}{(z-d)^3} \right], \quad (3.7)$$

όταν $|z-d| > R_S$, όπου

$$M_M = \frac{2\mu_M}{1+\kappa_M}. \quad (3.8)$$

Στην (3.8), μ_M είναι το μέτρο διάτμησης της μήτρας και $\kappa_M = 3-4\nu_M$, όπου ν_M είναι ο λόγος του Poisson. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των διαφοσικών δυναμικών (A.8)-(A.11), για $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = 0$, η λύση του συνεπίπεδου προβλήματος που μελετάται εκφράζεται σε όρους της παραπάνω λύσης του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Τα διαφοσικά δυναμικά $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ του ελαστικού συστήματος αναζητώνται στην μορφή

$$\varphi_0(z) = \varphi_{out}(z) + Az, \quad (3.9)$$

$$\psi_0(z) = \psi_{out}(z) + B \frac{\varphi'_{out}(z) - \varphi'_{out}(0)}{z}, \quad (3.10)$$

όπου A και B είναι μιγαδικές σταθερές που προσδιορίζονται παρακάτω. Για να αποτελούν οι συναρτήσεις $\varphi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ διαφοσικά δυναμικά του ζεύγους

ανομοιογένειας-μήτρας, θα πρέπει να παράγουν πεπερασμένες τάσεις σε κάθε σημείο της ανομοιογένειας και της μήτρας και μηδενικές τάσεις στο άπειρο. Η ικανοποίηση των απαιτήσεων αυτών εξασφαλίζεται όταν

$$A = \frac{\Omega}{1-\Omega^2} \overline{\varphi'_{out}}(0) + \frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \varphi'_{out}(0), \quad B = -R_I^2(\Lambda + \Omega), \quad (3.11)$$

όπου Λ , Ω και Π είναι οι διαφοσικές σταθερές που παρέχονται από τις σχέσεις (A.12). Οι σχέσεις αυτές προέκυψαν εισάγοντας τις (3.9) και (3.10) στις (A.10) και (A.11), και απαιτώντας τα μιγαδικά της μήτρας $\varphi_M(z)$, $\psi_M(z)$ να συγκλίνουν στο άπειρο. Έχοντας προσδιορίσει τις σταθερές A και B , τα μιγαδικά δυναμικά γράφονται

$$\varphi_I(z) = (1 + \Lambda)\varphi_{out}(z) + \frac{(1 + \Lambda)\Omega}{1 - \Omega^2} [\overline{\varphi'_{out}}(0) + \Omega\varphi'_{out}(0)]z, \quad (3.12)$$

$$\psi_I(z) = (1 + \Pi)\psi_{out}(z) - (\Lambda - \Pi) \frac{R_I^2}{z} [\varphi'_{out}(z) - \varphi'_{out}(0)]z, \quad (3.13)$$

και

$$\varphi_M(z) = \varphi_{out}(z) + \Pi \left[z \overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \overline{\psi_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - z \overline{\varphi'_{out}}(0) \right], \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_{out}(z) + \Lambda \overline{\varphi_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \\ & + \frac{R_I^2}{z} \left\{ \frac{\Lambda + \Omega}{1 - \Omega} \varphi'_{out}(0) + \left[\Pi + (1 + \Lambda) \frac{\Omega}{1 - \Omega} \right] \overline{\varphi'_{out}}(0) \right\} \\ & - \Pi \frac{R_I^2}{z} \left[\overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z} \overline{\varphi''_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z^2} \overline{\psi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Οι σχέσεις (3.12)-(3.15) παρέχουν τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας και της μήτρας σε όρους των μιγαδικών δυναμικών $\varphi_{out}(z)$, $\psi_{out}(z)$ του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος του συστήματος. Αυτό που απομένει, τώρα, είναι ο προσδιορισμός του διαφοσικού δυναμικού του εγκλωβίσματος. Αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας την παρακάτω ερμηνεία των όρων που υπεισέρχονται στα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας $\varphi_M(z)$ και $\psi_M(z)$. Οι πρώτοι όροι του δεύτερου μέλους των σχέσεων (3.14) και (3.15) αποτελούν

τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας, όταν η ανομοιογένεια είναι απύσα από το σύστημα, δηλαδή τα μιγαδικά δυναμικά του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Οι υπόλοιποι όροι των σχέσεων αυτών, που δηλώνονται με

$$\tilde{\varphi}(z) = \Pi \left[z \overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \overline{\psi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - z \overline{\varphi'_{out}}(0) \right], \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(z) = & \Lambda \overline{\varphi_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \\ & + \frac{R_I^2}{z} \left\{ \frac{\Lambda + \Omega}{1 - \Omega} \varphi'_{out}(0) + \left[\Pi + (1 + \Lambda) \frac{\Omega}{1 - \Omega} \right] \overline{\varphi'_{out}}(0) \right\} \\ & - \Pi \frac{R_I^2}{z} \left[\overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z} \overline{\varphi''_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z^2} \overline{\psi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

αποτελούν την διατάραξη των μιγαδικών δυναμικών του ομογενούς προβλήματος, λόγω της εμφάνισης της ανομοιογένειας στο σύστημα. Όμως, η διατάραξη αυτή έχει την ίδια μορφή και στο πεδίο S του εγκλωβίσματος, καθότι το πεδίο αυτό έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με την μήτρα. Συνεπώς, τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος, μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\varphi_S(z) = \varphi_{in}(z) + \tilde{\varphi}(z), \quad (3.18)$$

$$\psi_S(z) = \psi_{in}(z) + \tilde{\psi}(z), \quad (3.19)$$

τα οποία, λόγω των (3.16) και (3.17), γράφονται

$$\varphi_S(z) = \varphi_{in}(z) + \Pi \left[z \overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \overline{\psi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - z \overline{\varphi'_{out}}(0) \right], \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \psi_S(z) = & \psi_{in}(z) + \Lambda \overline{\varphi_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \\ & + \frac{R_I^2}{z} \left\{ \frac{\Lambda + \Omega}{1 - \Omega} \varphi'_{out}(0) + \left[\Pi + (1 + \Lambda) \frac{\Omega}{1 - \Omega} \right] \overline{\varphi'_{out}}(0) \right\} \\ & - \Pi \frac{R_I^2}{z} \left[\overline{\varphi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z} \overline{\varphi''_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{R_I^2}{z^2} \overline{\psi'_{out}} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Με τον προσδιορισμό των μιγαδικών δυναμικών του εγκλωβίσματος ολοκληρώνεται η λύση του συνεπίπεδου ελαστικού προβλήματος. Έχοντας τα ζεύγη των μιγαδικών

δυναμικών για κάθε φάση του συστήματος, τα ελαστικά πεδία προσδιορίζονται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (A.1)-(A.3) του Παραρτήματος Α.

Για την περίπτωση της ομοιόμορφης ογκομετρικής ιδιο-παραμόρφωσης του εγκλωβίσματος που εξετάζεται παρακάτω ($F \neq 0$, $G = 0$ ή $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$), τα παραπάνω μιγαδικά δυναμικά ανάγονται στην μορφή

$$\varphi_I(z) = 0, \quad (3.22)$$

$$\psi_I(z) = -(1 + \Pi)M_M F \frac{R_S^2}{z - d}, \quad (3.23)$$

για την ανομοιογένεια,

$$\varphi_M(z) = \Pi M_M F \frac{R_S^2}{d} \frac{z}{z - d^*}, \quad (3.24)$$

$$\psi_M(z) = -M_M F \frac{R_S^2}{z - d} + \Pi M_M F \frac{R_S^2 d^{*2}}{z(z - d^*)^2}, \quad (3.25)$$

για την μήτρα, και

$$\varphi_S(z) = -\frac{M_M F}{2}(z - d) + \frac{\Pi M_M F R_S^2}{d} \frac{z}{z - d^*}, \quad (3.26)$$

$$\psi_S(z) = \Pi M_M F R_S^2 d^{*2} \frac{1}{z(z - d^*)^2}, \quad (3.27)$$

για το εγκλωβισμό. Στις παραπάνω σχέσεις, $d^* = R_I^2 / d$ δείχνει την θέση του σημείου αντανάκλασης του κέντρου του εγκλωβίσματος ως προς την περιφέρεια A_I της ανομοιογένειας (Σχήμα 3.1).

Όταν η ανομοιογένεια εκφυλίζεται σε οπή ($\mu_I = 0$, $\Lambda = \Pi = -1$), τα διφασικά δυναμικά της μήτρας (3.24), (3.25) και του εγκλωβίσματος (3.26), (3.27), παίρνουν τη μορφή

$$\varphi_M(z) = \varphi_{out}(z) - z \overline{\varphi'_{out}\left(\frac{R_I^2}{z}\right)} - \overline{\psi_{out}\left(\frac{R_I^2}{z}\right)} - z \overline{\varphi'_{out}(0)}, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_{out}(z) - \overline{\varphi_{out}}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) - \frac{R_I^2}{z} [\varphi'_{out}(0) + \overline{\varphi'_{out}}(0)] + \\ & + \Pi \frac{R_I^2}{z} \left[\overline{\varphi'_{out}}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) - \frac{R_I^2}{z} \overline{\varphi''_{out}}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) - \frac{R_I^2}{z^2} \overline{\psi'_{out}}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Λόγω των (3.6) και (3.7), οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\begin{aligned} \varphi_M(z) = & -\frac{M_M}{2} \overline{G} \frac{R_S^2}{z-d} - M_M F \frac{R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*} + \\ & + \frac{M_M}{2} \overline{G} \frac{R_S^2}{d^2} \left[\frac{(d-2d^*)z^2 + d^{*2}z}{(z-d^*)^2} - \frac{R_S^2}{d} \frac{z^3}{(z-d^*)^3} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & -M_M \left[F \frac{R_S^2}{z-d} + \frac{1}{2} \overline{G} \frac{dR_S^2}{(z-d)^2} + \frac{1}{2} \overline{G} \frac{R_S^4}{(z-d)^3} \right] \\ & - M_M F \frac{R_S^2 d^*}{d} \frac{1}{(z-d^*)^2} - \frac{M_M}{2} \overline{G} \frac{R_S^2 d^*}{d} \frac{1}{z} \\ & - \frac{M_M}{2} \overline{G} \frac{R_S^2 d^*}{d} \left[\frac{1}{d^*} \frac{z^2 - 2d^*z}{(z-d^*)^2} - \frac{2(d^*z^2 - z)}{(z-d^*)^3} - \frac{1}{z} - \frac{3R_S^2}{d^2} \frac{z^2}{(z-d^*)^4} \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Οι σχέσεις (3.30) και (3.31) συμπίπτουν με αυτές που έχουν εξαχθεί πρόσφατα από τον Lubarda (2015a).

3.3.2 Η ολική ελαστική ενέργεια στο σύστημα

Η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα προσδιορίζεται από την σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{r^*r^*}^S u_{r^*}^T + \sigma_{r^*\theta^*}^S u_{\theta^*}^T) R_S d\theta^*, \quad (3.32)$$

που αποτελεί την εξειδίκευση της (2.16) για την περίπτωση συνεπίπεδης παραμόρφωσης και κυκλικής διεπιφάνειας. Στην σχέση αυτή, $\sigma_{r^*r^*}^S (= \sigma_{r^*r^*}^M)$, $\sigma_{r^*\theta^*}^S (= \sigma_{r^*\theta^*}^M)$ είναι οι συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή αναφορικά με το κυλινδρικό σύστημα (r^*, θ^*, x_3^*) , ενώ $u_{r^*}^T$, $u_{\theta^*}^T$ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος των διεπιφανειακών

ιδιομετατοπίσεων ως προς το ίδιο σύστημα. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί στην παρακάτω μιγαδική μορφή

$$E = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} (\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S)(u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T) R_S d\theta^* \right], \quad (3.33)$$

όπου $\operatorname{Re}[\dots]$ δηλώνει το πραγματικό μέρος της ποσότητας που περιέχεται στην αγκύλη. Οι ποσότητες $\sigma_{r^*r^*}^S + i\sigma_{r^*\theta^*}^S$ και $u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T$ αποτελούν τον μιγαδικό διεπιφανειακό ελκυστή και την μιγαδική διεπιφανειακή ιδιομετατόπιση αναφορικά με το κυλινδρικό σύστημα (r^*, θ^*, x_3^*) . Το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r^*, θ^*, x_3^*) είναι συνδεδεμένο με το καρτεσιανό σύστημα (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , που είναι τοποθετημένο στο σημείο d , με τον άξονα x_3^* να συμπίπτει με τον άξονα του κυλινδρικού εγκλωβίσματος και άξονες x_1^* , x_2^* να είναι παράλληλοι στους άξονες x_1 , x_2 , αντίστοιχα. Αναφορικά με τους άξονες x_1^* και x_2^* του συστήματος (x_1^*, x_2^*, x_3^*) ορίζεται το μιγαδικό ζ -επίπεδο ($\zeta = x_1^* + ix_2^*$), το οποίο, όπως είναι φανερό, συμπίπτει με το z -μιγαδικό επίπεδο. Αν ένα σημείο M του ελαστικού συστήματος αντιπροσωπεύεται με την μιγαδική μεταβλητή $z (= re^{i\theta})$ του z -επιπέδου και με την μεταβλητή $\zeta (= r^* e^{i\theta^*})$ του ζ -επιπέδου, τότε, για τις δύο αυτές μεταβλητές θα ισχύει η σχέση

$$z - d = \zeta. \quad (3.34)$$

Με βάση τα παραπάνω, σε ένα τυχαίο σημείο του εγκλωβίσματος, που αντιπροσωπεύεται με τον μιγαδικό αριθμό $\zeta = r^* e^{i\theta^*}$, η μιγαδική ποσότητα $\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S$ γράφεται στην μορφή

$$\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S = [\varphi_S^0(\zeta)]' + [\overline{\varphi_S^0(\zeta)}] - \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \left[\bar{\zeta} [\varphi_S^0(\zeta)]' + [\psi_S^0(\zeta)]' \right], \quad (3.35)$$

όπου έχει τεθεί

$$\varphi_S^0(\zeta) = \varphi_S(z) = \varphi_S(d + \zeta), \quad (3.36)$$

$$\psi_S^0(\zeta) = \psi_S(z) + d\varphi_S'(z) = \psi_S(d + \zeta) + d\varphi_S'(d + \zeta), \quad (3.37)$$

με $\varphi_s(z)$ και $\psi_s(z)$ να είναι τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος που παρέχονται από τις σχέσεις (3.20) και (3.21). Οι σχέσεις (3.36) και (3.37) συνδέουν τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος $\varphi_s^0(\zeta)$ και $\psi_s^0(\zeta)$, που αναφέρονται σε ένα σημείο ζ του μιγαδικού ζ -επιπέδου, με τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_s(z)$ και $\psi_s(z)$, να αναφέρονται στο αντίστοιχο σημείο z του z -επιπέδου.

Στη συνέχεια, υπολογίζεται η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, όταν το εγκλωβίσμα υφίσταται μία ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση με $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T = F/2$. Για την περίπτωση αυτή, τα μιγαδικά δυναμικά παρέχονται από τις σχέσεις (3.22)-(3.27). Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.36) και (3.37), τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος, που παρέχονται από τις (3.26) και (3.27), σε όρους της μεταβλητής ζ του ζ -επιπέδου γράφονται στην μορφή

$$\varphi_s^0(\zeta) = -\frac{M_M F}{2} \zeta + \frac{\Pi M_M F R_S^2}{d} \frac{\zeta + d}{\zeta + d - d^*}, \quad (3.38)$$

$$\psi_s^0(\zeta) = -\Pi M_M F R_S^2 d^* \frac{1}{(\zeta + d)(\zeta + d - d^*)}. \quad (3.39)$$

Στην εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων, οι σταθεροί όροι που εμφανίζονται έχουν παραληφθεί, καθότι δεν συνεισφέρουν στα ελαστικά πεδία. Η μιγαδική ιδιομετατόπιση $u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T$, που αναφέρεται στο κυλινδρικό σύστημα (r^*, θ^*, x_3^*) συνδέεται με την μιγαδική μετατόπιση $u_1^T + iu_2^T$, που αναφέρεται στο παράλληλο καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3) , με την σχέση

$$u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T = e^{-i\theta^*} (u_1^T + iu_2^T), \quad (3.40)$$

Η (3.40), λόγω της (3.1), για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος ($F \neq 0$, $G = 0$), γράφεται

$$u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T = \frac{1}{2} F e^{-i\theta^*} z. \quad (3.41)$$

Από την σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την σχέση $z = \zeta + d$, προκύπτει

$$u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T = \frac{1}{2} F e^{-i\theta^*} \frac{\bar{\zeta}}{r^*} (\zeta + d). \quad (3.42)$$

Ο υπολογισμός της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο σύστημα θα γίνει μέσω της (3.33) αναπτύσσοντας τον μιγαδικό ελκυστή $\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S$, που παρέχεται από την (3.35), σε απειροσειρά. Αυτό θα γίνει θεωρώντας τις παρακάτω δύο απειροσειρές

$$\frac{1}{\zeta + d} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{d^{n+1}} \zeta^n, \quad (3.43)$$

$$\frac{1}{\zeta + d - d^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(d - R_I^2/d)^{n+1}} \zeta^n, \quad (3.44)$$

οι οποίες συγκλίνουν για $|\zeta| \leq d$. Με βάση τα αναπτύγματα αυτά, τα μιγαδικά δυναμικά του εγκλωβίσματος (3.38) και (3.39) γράφονται

$$\varphi_S^0(\zeta) = -\frac{M_M F}{2} \zeta + \frac{\Pi M_M F R_S^2}{d} \left[\frac{d}{d-d^*} - \frac{d^*}{(d-d^*)^2} \zeta + \frac{d^*}{(d-d^*)^3} \zeta^2 + \dots \right], \quad (3.45)$$

$$\psi_S^0(z) = -\Pi M_M F R_S^2 d^* \left[\frac{1}{d(d-d^*)} - \frac{2d-d^*}{d^2(d-d^*)^2} \zeta + \frac{3d^2-3dd^*+d^2}{d^3(d-d^*)^3} \zeta^2 \right]. \quad (3.46)$$

Συνεπώς, μέσω της σχέσης (3.35), το ανάπτυγμα του μιγαδικού ελκυστή προκύπτει στην μορφή

$$\begin{aligned} \sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S = & -M_M F \left[1 + \frac{2\Pi R_I^2 R_S^2}{d^2(d-d^*)^2} \right] + \frac{2\Pi M_M F R_I^2 R_S^2}{d^2(d-d^*)^2} \bar{\zeta} \\ & - \zeta [a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots] - \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \left[\frac{\Pi M_M F R_S^2 (2d-d^*)}{d^2(d-d^*)^2} + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

όπου a_1, a_2, a_3, \dots και $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ είναι σταθερές. Πάνω στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας, όταν δηλαδή $\zeta = R_S e^{i\theta^*}$, οι σχέσεις (3.47) και (3.42) γράφονται

$$\begin{aligned} \sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S = & -M_M F \left[1 + \frac{2\Pi R_I^2 R_S^2}{d^2(d-d^*)^2} \right] + \frac{2\Pi M_M F R_I^2 R_S^3}{d^2(d-d^*)^2} e^{-i\theta^*} \\ & + \gamma_1 e^{i\theta^*} + \gamma_2 e^{2i\theta^*} + \dots, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$u_{r^*}^T + iu_{\theta^*}^T = \frac{F}{2}(R_S + de^{-i\theta^*}), \quad (3.49)$$

όπου $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ είναι σταθερές. Αντικαθιστώντας τις (3.48) και (3.49) στην (3.33) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta^*} d\theta^* = \begin{cases} 2\pi, & \text{αν } k = 0, \\ 0, & \text{αν } k \neq 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

προκύπτει η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα στην παρακάτω απλή μορφή

$$E = \frac{\pi R_S^2}{2} M_M F^2 \left[1 + \frac{2\Pi R_I^2 R_S^2}{d^2(d-d^*)^2} \right], \quad (3.51)$$

η οποία, επειδή $d^* = R_I^2 / d$, γράφεται

$$E = \frac{\pi R_S^2}{2} M_M F^2 \left[1 + \frac{2\Pi R_I^2 R_S^2}{(d^2 - R_I^2)^2} \right]. \quad (3.52)$$

Η παραπάνω σχέση παρέχει την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα του Σχήματος 3.1, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος ($F \neq 0$ και $G = 0$ ή $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$ και $\varepsilon_{12}^T = 0$). Για κυκλική οπή ($\mu_I = 0$ ή $\Pi = -1$), η σχέση (3.52) παρέχει

$$E = \frac{\pi R_S^2}{2} M_M F^2 \left[1 - \frac{2R_I^2 R_S^2}{(d^2 - R_I^2)^2} \right], \quad (3.53)$$

που συμπίπτει με αυτή που έχει πρόσφατα αποκτηθεί από τον Lubarda (Lubarda, 2015a).

3.3.3 Ελαστική ενέργεια στις φάσεις του συστήματος

Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ελαστικές ενέργειες παραμόρφωσης που αποθηκεύονται στις τρεις φάσεις του συστήματος, που δείχνεται στο Σχήμα 3.1, όταν το εγκλωβίσμα υφίσταται μία ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση με $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$ ($F \neq 0$,

$G=0$). Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια υπολογίζεται από την σχέση

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^I u_r^I + \sigma_{r\theta}^I u_\theta^I) R_I d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}[(\sigma_{rr}^I - i\sigma_{r\theta}^I)(u_r^I + iu_\theta^I)] R_I d\theta. \quad (3.54)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εξειδίκευση της (2.14) για συνεπίπεδη παραμόρφωση και κυκλικά σύνορα, όταν στο εσωτερικό της A_I δεν αναπτύσσονται ιδιοπαραμορφώσεις. Στην (3.54), $\sigma_{rr}^I + i\sigma_{r\theta}^I$ και $u_r^I + iu_\theta^I$ είναι ο διεπιφανειακός ελκυστής και η διεπιφανειακή μετατόπιση, όταν η διεπιφάνεια προσεγγίζεται από την ανομοιογένεια, όταν δηλαδή $z \rightarrow Re^{i\theta}$. Οι ποσότητες αυτές, σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της ανομοιογένειας, παρέχονται από τις σχέσεις

$$\sigma_{rr}^I - i\sigma_{r\theta}^I = \varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} - \frac{z}{\bar{z}} [\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)], \quad (3.55)$$

$$2\mu_I(u_r^I + iu_\theta^I) = \left[\kappa_I \varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \right] e^{-i\theta}, \quad (3.56)$$

όπου $\varphi_1(z)$ και $\psi_1(z)$ παρέχονται από τις (3.22) και (3.23). Αντικαθιστώντας τις (3.22), (3.23) στις (3.55) και (3.56), προκύπτει

$$\sigma_{rr}^I - i\sigma_{r\theta}^I = -(1+\Pi)M_M FR_S^2 \frac{e^{2i\theta}}{(z-d)^2}, \quad (3.57)$$

$$u_r^I + iu_\theta^I = \frac{(1+\Pi)M_M FR_S^2}{2\mu_I} \frac{e^{-i\theta}}{\bar{z}-d}. \quad (3.58)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, η προς ολοκλήρωση ποσότητα του ολοκληρώματος της (3.54) υπολογίζεται στην μορφή

$$(\sigma_{rr}^I - i\sigma_{r\theta}^I)(u_r^I + iu_\theta^I) = -\frac{(1+\Pi)^2 M_M^2 F^2 R_S^4}{4\mu_I} \frac{[2R_I \sigma - d(\sigma^2 + 1)]\sigma}{R_I^2 d^2 \left(\sigma - \frac{d}{R_I}\right)^2 \left(\sigma - \frac{R_I}{d}\right)^2}, \quad (3.59)$$

όπου $\sigma = e^{i\theta}$. Χρησιμοποιώντας την (3.59) και την σχέση $d\theta = d\sigma / (i\sigma)$, η (3.54) γράφεται

$$E^I = -\frac{(1+\Pi)^2 M_M^2 F^2 R_S^4}{4i\mu_l R_l^2 d^2} \oint_{|\sigma|=1} \frac{2R_l \sigma - d(\sigma^2 + 1)}{(\sigma - d/R_l)^2 (\sigma - R_l/d)^2} d\sigma, \quad (3.60)$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της σχέσης αυτής θεωρείται πάνω στην περιφέρεια $|\sigma|=1$ του ζ -επιπέδου. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων, από την (3.60) προκύπτει η σχέση

$$E^I = \frac{\pi}{2\mu_l} (1+\Pi)^2 M_M^2 F^2 \frac{R_S^4 R_l^2}{(R_l^2 - d^2)^2}. \quad (3.61)$$

Η σχέση αυτή παρέχει την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1 για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος ($F \neq 0$ και $G = 0$ ή $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$ και $\varepsilon_{12}^T = 0$).

Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο εγκλωβίσμα παρέχεται από την σχέση

$$E^S = \frac{1}{2} \int_{A_S} (\sigma_{r^*}^S u_{r^*}^S + \sigma_{r^*\theta^*}^S u_{\theta^*}^S) R_S d\theta^* = \frac{1}{2} \int_{A_S} \text{Re}[(\sigma_{r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S)(u_{r^*}^S + iu_{\theta^*}^S)] R_S d\theta^*, \quad (3.62)$$

όπου ο διεπιφανειακός ελκυστής $\sigma_{r^*}^S + i\sigma_{r^*\theta^*}^S$ παρέχεται από την σχέση (3.48) και η διεπιφανειακή μετατόπιση $u_{r^*}^S + iu_{\theta^*}^S$ από την σχέση

$$2\mu_M (u_{r^*}^S + iu_{\theta^*}^S) = \left\{ \kappa_M \varphi_S^0(\zeta) - \zeta [\overline{\varphi_S^0(\zeta)}]' - [\overline{\psi_S^0(\zeta)}]' \right\} e^{-i\theta^*}. \quad (3.63)$$

Η σχέση (3.62) αποτελεί την εξειδίκευση της (2.14) για συνεπίεδη παραμόρφωση και κυκλικά σύνορα, όταν στο εσωτερικό της A_S αναπτύσσονται ιδιοπαραμορφώσεις. Με βάση τις (3.45), (3.46), τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_S^0(\zeta)$ και $\psi_S^0(\zeta)$ αναπτύσσονται στις παρακάτω σειρές

$$\varphi_S^0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \zeta^n, \quad |\zeta| \leq R_S, \quad (3.64)$$

$$\psi_S^0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \zeta^n, \quad |\zeta| \leq R_S, \quad (3.65)$$

όπου

$$f_0 = \Pi M_M F R_S^2 \frac{1}{d-d^*}, \quad (3.66)$$

$$f_1 = -\frac{M_M F}{2} - \Pi M_M F \frac{R_S^2 d^*}{d(d-d^*)^2}, \quad (3.67)$$

$$f_n = \Pi M_M F \frac{R_S^2 d^*}{d} \frac{(-1)^n}{(d-d^*)^{n+1}}, \quad (3.68)$$

για $n \geq 2$, και

$$\psi_n = \Pi M_M F R_S^2 d^* (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{d^k (d-d^*)^{n+2-k}}, \quad (3.69)$$

για $n \geq 0$. Με βάση τις σχέσεις (3.64), (3.65), (3.35) και (3.63), ο διεπιφανειακός ελκυστής και η διεπιφανειακή μετατόπιση, γράφονται

$$\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n f_n R_S^{n-1} \left(\sigma^{n-1} + \frac{1}{\sigma^{n-1}} \right) - (n+1) n f_{n+1} R_S^n \sigma^n - n \psi_n R_S^{n-1} \sigma^{n+1} \right], \quad (3.70)$$

$$2\mu_M (u_{r^*}^S + iu_{\theta^*}^S) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\kappa_M f_{n-1} R_S^{n-1} \sigma^{n-2} - \frac{n f_n R_S^n}{\sigma^{n-1}} - \psi_{n-1} \frac{R_S^{n-1}}{\sigma^n} \right], \quad (3.71)$$

όπου $\sigma = e^{i\theta^*}$. Η προς ολοκλήρωση ποσότητα του ολοκληρώματος της (3.60), παίρνει την μορφή

$$(\sigma_{r^*r^*}^S - i\sigma_{r^*\theta^*}^S)(u_{r^*}^S + iu_{\theta^*}^S) R_S = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l e^{il\theta^*}, \quad (3.72)$$

όπου

$$C_0 = \frac{\kappa_M - 1}{\mu_M} f_1^2 R_S^2 + \frac{1}{2\mu_M} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \kappa_M (n+1) f_{n+1}^2 R_S^{2(n+1)} + (n-1) R_S^{2(n-1)} [(n+1) f_{n+1} R_S^2 + \psi_{n-1}]^2 \right\}, \quad (3.73)$$

και C_l ($l = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας την (3.72) στην (3.62) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta^*} d\theta^* = \begin{cases} 2\pi, & \text{αν } k = 0, \\ 0, & \text{αν } k \neq 0, \end{cases} \quad (3.74)$$

η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο εγκλώβισμα βρίσκεται στη μορφή

$$E^S = \pi C_0. \quad (3.75)$$

Έχοντας υπολογίσει την ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος με την σχέση (3.52), την ελαστική ενέργεια στην ανομοιογένεια και στο εγκλώβισμα με τις σχέσεις (3.61) και (3.75), αντίστοιχα, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην περιοχή της μήτρας, υπολογίζεται από την σχέση

$$E^M = E - E^I - E^S. \quad (3.76)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (3.52), (3.61) και (3.75), η παραπάνω σχέση παρέχει

$$E^M = \frac{\pi}{2} \left\{ R_S^2 M_M F^2 \left[1 + \frac{2\Pi R_S^2 R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^2} \right] - \frac{(1 + \Pi)^2 M_M^2 F^2}{\mu_I} \frac{R_S^4 R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^2} - 2C_0 \right\}. \quad (3.77)$$

Αριθμητικά αποτελέσματα για την ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα και για τις επιμέρους ποσότητες της που αποθηκεύονται στις τρεις φάσεις του συστήματος, παρουσιάζονται παρακάτω.

3.3.4 J_k -ολοκληρώματα

Τα J_1 -, J_2 -ολοκληρώματα, που εκφράζουν την αλληλεπίδραση της ανομοιογένειας με το εγκλώβισμα στο σύστημα που δείχνεται στο Σχήμα 3.1, υπολογίζονται ξεχωριστά για την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, εφαρμόζοντας τις παρακάτω σχέσεις

$$(J_1 + iJ_2)^S = -\frac{i}{2M_M} \oint_{A_S} [\varphi'_M(z)]^2 dz + \frac{i}{M_M} \oint_{A_S} \overline{[\varphi'_M(z)]} [\overline{\psi'_M(z)}] d\bar{z}, \quad (3.78)$$

$$(J_1 + iJ_2)^I = -\frac{i}{2M_M} \oint_{A_I} [\varphi'_M(z)]^2 dz + \frac{i}{M_M} \oint_{A_I} \overline{[\varphi'_M(z)]} [\overline{\psi'_M(z)}] d\bar{z}. \quad (3.79)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν εφαρμογή της (2.127) στο πεδίο της μήτρας, όταν η κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης συμπίπτει με τις καμπύλες A_S και A_I . Για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας παρέχονται από τις σχέσεις (3.24) και (3.25), που ξαναγράφονται εδώ στην παρακάτω μορφή

$$\varphi_M(z) = \varphi_M^{(1)}(z) + \varphi_M^{(2)}(z) + \varphi_M^{(3)}(z), \quad (3.80)$$

$$\psi_M(z) = \psi_M^{(1)}(z) + \psi_M^{(2)}(z) + \psi_M^{(3)}(z), \quad (3.81)$$

όπου

$$\varphi_M^{(1)}(z) = 0, \quad \psi_M^{(1)}(z) = \frac{\Pi M_M F R_S^2}{z}, \quad (3.82)$$

$$\varphi_M^{(2)}(z) = \frac{\Pi M_M F R_S^2 d^*}{d(z-d^*)}, \quad \psi_M^{(2)}(z) = -\frac{\Pi M_M F R_S^2}{z-d^*} + \frac{\Pi M_M F R_S^2 d^*}{(z-d^*)^2}, \quad (3.83)$$

$$\varphi_M^{(3)}(z) = 0, \quad \psi_M^{(3)}(z) = -\frac{M_M F R_S^2}{z-d}. \quad (3.84)$$

Οι σχέσεις (3.80), (3.81) υπαγορεύουν ότι τα ελαστικά πεδία της μήτρας μπορούν να παραχθούν από την επαλληλία τριών σημειακών ιδιομορφιών, που εφαρμόζονται στα σημεία $z_0^{(1)} = 0$, $z_0^{(2)} = d^*$ ($= R^2/d < R$), και $z_0^{(3)} = d$. Οι δύο πρώτες ιδιομορφίες βρίσκονται στο εσωτερικό της A_I και η τρίτη, στο εσωτερικό της A_S . Από τις σχέσεις (3.84) και (3.6), (3.7) προκύπτει ότι

$$\varphi_M^{(3)}(z) = \varphi_{out}(z), \quad \psi_M^{(3)}(z) = \psi_{out}(z), \quad (3.85)$$

που σημαίνει ότι τα μιγαδικά δυναμικά της τρίτης ιδιομορφίας αντιστοιχούν στα ελαστικά πεδία της μήτρας, όταν η ανομοιογένεια είναι απύσα από το σύστημα. Η παραπάνω επαλληλία μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: αν το σύστημα περιλαμβάνει μόνο την μήτρα και το εγκλώβισμα και το εγκλώβισμα υφίσταται μια ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση με $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, τότε, για τα ελαστικά πεδία της μήτρας, η εμφάνιση της ανομοιογένειας ισοδυναμεί με την δράση δύο πλασματικών σημειακών ιδιομορφιών στα σημεία $z_0^{(1)} = 0$ και $z_0^{(2)} = d^*$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μία τέτοια θεώρηση αφορά αποκλειστικά και μόνο τα ελαστικά πεδία της μήτρας, δηλαδή το άπειρο

πεδίο του z -επιπέδου, που βρίσκεται εκτός των συνόρων A_r και A_s , δηλαδή το πεδίο M του Σχήματος 3.1.

Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της σχέσης (3.78) χρησιμοποιούνται τα παρακάτω επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\oint_{A_s} \frac{1}{(z-d^*)^2(z-d)^2} dz = -\frac{4\pi i}{(d-d^*)^3}, \quad (3.86)$$

$$\oint_{A_s} \frac{1}{(z-d^*)^2 z^2} dz = \oint_{A_s} \frac{1}{(z-d^*)^4} dz = \oint_{A_s} \frac{1}{(z-d^*)^5} dz = 0, \quad (3.87)$$

που έχουν υπολογισθεί με βάση τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Με βάση τα παραπάνω ολοκληρώματα, από την (3.78) προκύπτει

$$(J_1 + iJ_2)^S = 4\pi \Gamma M_M F^2 \frac{dR_s^4 R_l^2}{(d^2 - R_l^2)^3}, \quad (3.88)$$

από όπου

$$J_1^S = 4\pi \Gamma M_M F^2 \frac{dR_s^4 R_l^2}{(d^2 - R_l^2)^3}, \quad J_2^S = 0. \quad (3.89)$$

Η ποσότητα $(J_1 + iJ_2)^I$ υπολογίζεται από την σχέση (3.79) με τον ίδιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα

$$\oint_{l_1} \frac{1}{(z-d^*)^2 z^2} dz = \frac{4\pi i}{(d^*)^3}, \quad (3.90)$$

$$\oint_{l_2} \frac{1}{(z-d^*)^2(z-d)^2} dz = \frac{4\pi i}{(d-d^*)^3}, \quad (3.91)$$

$$\oint_{l_2} \frac{1}{(z-d^*)^2 z^2} dz = -\frac{4\pi i}{(d^*)^3}, \quad (3.92)$$

των οποίων ο υπολογισμός, όπως προηγουμένα, βασίστηκε στην θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Βρίσκεται ότι

$$(J_1 + iJ_2)^I = -4\pi\Gamma M_M F^2 \frac{dR_S^4 R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^3}, \quad (3.93)$$

που ικανοποιεί την σχέση $(J_1 + iJ_2)^I = -(J_1 + iJ_2)^S$. Στην συνέχεια, δείχνεται ότι η δύναμη $(J_1 + iJ_2)^I$ που επενεργεί πάνω στην ανομοιογένεια αποτελεί την συνισταμένη των δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στις δύο ιδιομορφίες που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης A_I . Οι δυνάμεις αυτές παρέχονται από τις σχέσεις

$$(J_1 + iJ_2)^{(1)} = -\frac{i}{2M_M} \oint_{l_1} [\varphi_M^{(1)}(z)]^2 dz + \frac{i}{M_M} \oint_{l_1} \overline{[\varphi_M^{(1)}(z)]} \overline{[\psi_M^{(1)}(z)]} d\bar{z}, \quad (3.94)$$

$$(J_1 + iJ_2)^{(2)} = -\frac{i}{2M_M} \oint_{l_2} [\varphi_M^{(2)}(z)]^2 dz + \frac{i}{M_M} \oint_{l_2} \overline{[\varphi_M^{(2)}(z)]} \overline{[\psi_M^{(2)}(z)]} d\bar{z}, \quad (3.95)$$

όπου l_1 και l_2 είναι κλειστές καμπύλες που περικλείουν τις ιδιομορφίες που επενεργούν στα σημεία $z_0^{(1)} = 0$ και $z_0^{(2)} = d^*$. Χρησιμοποιώντας στις παραπάνω σχέσεις τα ολοκληρώματα (3.91) και (3.92), βρίσκεται ότι

$$(J_1 + iJ_2)^{(1)} = 4\pi\Gamma^2 M_M F^2 \left(\frac{R_S}{R_I}\right)^4 d, \quad (3.96)$$

$$(J_1 + iJ_2)^{(2)} = -4\pi\Gamma^2 M_M F^2 \left(\frac{R_S}{R_I}\right)^4 d - 4\pi\Gamma M_M F^2 d \frac{R_S^4 R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^3}. \quad (3.97)$$

Από τις σχέσεις αυτές και την (3.93) συνάγεται

$$(J_1 + iJ_2)^I = (J_1 + iJ_2)^{(1)} + (J_1 + iJ_2)^{(2)}, \quad (3.98)$$

από όπου

$$J_1^I = J_1^{(1)} + J_1^{(2)}, \quad (3.99)$$

καθότι $J_2^I = J_2^{(1)} = J_2^{(2)} = 0$. Η σχέση αυτή δείχνει ότι η δύναμη που εξασκείται πάνω στην ανομοιογένεια είναι η συνισταμένη δύναμη των δύο δυνάμεων που εξασκούνται πάνω στις δύο σημειακές (πλασματικές) ιδιομορφίες, που αντιπροσωπεύουν την ανομοιογένεια.

Έχοντας υπολογίσει την ολική δυναμική ενέργεια \mathcal{P} του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1 για ομοιόμορφη ογκομετρική παραμόρφωση, οι συνιστώσες της δύναμης αλληλεπίδρασης $J_1^{(S)}$ και $J_2^{(S)}$ μπορούν να υπολογισθούν εναλλακτικά θεωρώντας τις σχέσεις

$$J_1^S = -\frac{d\mathcal{P}}{dx_1^0}, \quad J_2^S = -\frac{d\mathcal{P}}{dx_2^0}, \quad (3.100)$$

όπου η ολική δυναμική ενέργεια \mathcal{P} θεωρείται ως μία συνάρτηση της θέσης (x_1^0, x_2^0) της ιδιομορφίας που αντιπροσωπεύει το εγκλώβισμα, δηλαδή $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x_1^0, x_2^0)$. Για την περίπτωση που μελετάται, η ολική δυναμική ενέργεια \mathcal{P} του συστήματος συμπίπτει με την ολική ελαστική ενέργεια που παρέχεται από την σχέση (3.52). Θέτοντας στην σχέση αυτή, $x_1^0 = d$ και $x_2^0 = 0$, η δυναμική ενέργεια \mathcal{P} γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = \frac{\pi R_S^2}{2} \left[1 + \frac{2\Pi R_I^2 R_S^2}{((x_1^0)^2 - R_I^2)^2} \right] M_M F^2. \quad (3.101)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.100) και την παραπάνω σχέση, προκύπτει

$$J_1^S = -\left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_1} \right|_{x_1=d} = \pi R_S^2 \frac{4R_I^2 R_S^2 d}{(d^2 - R_I^2)^3} \Pi M_M F^2, \quad (3.102)$$

$$J_2^S = -\left. \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_2} \right|_{x_1=d} = 0. \quad (3.103)$$

Οι σχέσεις αυτές, συμπίπτουν με αυτές που έχουν εξαχθεί εφαρμόζοντας τις σχετικές μιγαδικές εκφράσεις. Για την περίπτωση της κυκλικής οπής ($\Pi = -1$), η σχέση (3.102) ανάγεται σε αυτή που πρόσφατα έχει αποκτηθεί από τον Lubarda (Lubarda, 2015a) για μία κυκλική οπή που αλληλεπιδρά με ένα κυκλικό εγκλώβισμα με ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση.

3.3.5 \mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα

Παρακάτω, υπολογίζονται τα \mathcal{L}_3 - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα για το εγκλώβισμα εφαρμόζοντας την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^{A_S} &= \frac{1}{2M_M} \oint_{A_S} z[\varphi_M''(z)\psi_M(z) + \varphi_M'(z)\psi_M'(z)]dz \\ &+ \frac{1}{2M_M} \oint_{A_S} \bar{z} \{ [\overline{\varphi_M''(z)}][\overline{\psi_M(z)}] - [\overline{\varphi_M'(z)}][\overline{\psi_M'(z)}] \} d\bar{z}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

όπου ο δείκτης O σημαίνει ότι η ποσότητα αυτή αναφέρεται στην αρχή του καρτεσιανού συστήματος (x_1, x_2, x_3) . Η σχέση αυτή αποτελεί την εφαρμογή της (2.147) στο πεδίο της μήτρας, όταν η κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης συμπίπτει με την καμπύλη A_S . Για την ισόογη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας παρέχονται με τις σχέσεις (3.24) και (3.25). Για τον υπολογισμό της ποσότητας $(\mathcal{L} + i\mathcal{M})_O^{A_S}$ με την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιούνται τα ολοκληρώματα

$$\oint_{A_S} \frac{z}{(z-d)(z-d^*)^3} dz = \frac{2\pi id}{(d-d^*)^3}, \quad (3.105)$$

$$\oint_{A_S} \frac{1}{(z-d^*)^5} dz = 0, \quad (3.106)$$

$$\oint_{A_S} \frac{z}{(z-d)^2(z-d^*)^2} dz = -\frac{2\pi i(d+d^*)}{(d-d^*)^3}, \quad (3.107)$$

$$\oint_{A_S} \frac{3z-d^*}{z(z-d^*)^5} dz = 0, \quad (3.108)$$

που προσδιορίστηκαν χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Με βάση τα παραπάνω ολοκληρώματα, η (3.104) παρέχει

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^S = \pi i \frac{2R_S^4 R_I^2 (d^2 + R_I^2)}{(d^2 - R_I^2)^3} \Pi M_M F^2, \quad (3.109)$$

από όπου

$$\mathcal{L}_{3,0}^S = 0, \quad (3.110)$$

$$\mathcal{M}_O^S = \pi \frac{2R_S^4 R_I^2 (d^2 + R_I^2)}{(d^2 - R_I^2)^3} \Pi M_M F^2. \quad (3.111)$$

Η αντίστοιχη ποσότητα αναφορικά με την κλειστή καμπύλη A_I , θα προκύψει από την σχέση

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^I + (\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^S = 0, \quad (3.112)$$

από όπου

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^I = -(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})_O^S = -\pi i \frac{2R_S^4 R_I^2 (d^2 + R_I^2)}{(d^2 - R_I^2)^3} \Pi M_M F^2. \quad (3.113)$$

Απο την σχέση αυτή προκύπτει

$$\mathcal{L}_{3,0}^I = 0, \quad (3.114)$$

$$\mathcal{M}_O^I = -\pi \frac{2R_S^4 R_I^2 (d^2 + R_I^2)}{(d^2 - R_I^2)^3} \Pi M_M F^2. \quad (3.115)$$

Το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα του εγκλωβίσματος ως προς το κέντρο του O^* , θα βρεθεί από την σχέση

$$\mathcal{M}_{O^*}^S = -\mathcal{M}_O^I - dJ_1^S. \quad (3.116)$$

Από την σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.115) και (3.102), προκύπτει

$$\mathcal{M}_{O^*}^S = -2\pi \frac{R_S^4 R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^2} \Pi M_M F^2. \quad (3.117)$$

Για την περίπτωση της κυκλική οπής ($\Pi = -1$), η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathcal{M}_{O^*}^S = \pi R_I^2 \frac{4\mu_M}{1-\nu_I} \frac{R_S^4 / R_I^4}{(d^2 / R_I^2 - 1)^2} (\varepsilon^T)^2, \quad (3.118)$$

που συμπίπτει με την σχέση που έχει εξαχθεί πρόσφατα από τον Lubarda (Lubarda, 2015a).

Η φυσική σημασία του ολοκληρώματος \mathcal{M}'_o συνδέει την μεταβολή που υφίσταται η δυναμική ενέργεια του συστήματος, αν θεωρηθεί ότι, ενώ το σύστημα είναι υπό ένταση, η ανομοιογένεια υποστεί μία *ομοιόθετη μεταβολή* στο (κυκλικό) σχήμα της, που εκδηλώνεται με μία απειροστή αύξηση δR_l της ακτίνας R_l . Επειδή η δυναμική ενέργεια του συστήματος συμπίπτει με την ολική ελαστική του ενέργεια, η οποία δίνεται από την σχέση (3.52), μπορεί να γραφτεί

$$\mathcal{P} = \frac{\pi R_s^2}{2} M_M F^2 \left[1 + \frac{2\pi R_l^2 R_s^2}{(d^2 - R_l^2)^2} \right]. \quad (3.119)$$

Αν η παραπάνω δυναμική ενέργεια θεωρηθεί ως συνάρτηση της ακτίνας R_l , τότε

$$\mathcal{M}' = -R_l \frac{\delta \mathcal{P}}{\delta R_l}. \quad (3.120)$$

Έτσι, από την παραπάνω σχέση και από την (3.119) προκύπτει

$$\mathcal{M}'_o = -\pi \frac{2R_s^4 R_l^2 (d^2 + R_l^2)}{(d^2 - R_l^2)^3} \pi M_M F^2, \quad (3.121)$$

που συμπίπτει με την (3.115).

3.4 Ελαστική αλληλεπίδραση εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας στην αντιεπίπεδη παραμόρφωση

3.4.1 Προσδιορισμός ελαστικών πεδίων

Στην συνέχεια, αναλύεται η αντιεπίπεδη ελαστική κατάσταση του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1 για τέλεια διεπιφανειακή σύνδεση μήτρας και ανομοιογένειας, όταν το κυλινδρικό εγκλωβίσμα S υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που προέρχεται από σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T . Όπως στο συνεπίπεδο πρόβλημα, η λύση του σχετικού αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος θα αναπτυχθεί σε

όρους της λύσης του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος του συστήματος. Στο αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα, το σύστημα αποτελείται από μία άπειρη ελαστική μήτρα με μέτρο διάτμησης μ_M , που φορτίζεται με ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T , ε_{23}^T , στην περιοχή $|z-d| \leq R_S$.

Η λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος, σε όρους των μιγαδικών δυναμικών εντός και εκτός της ανομοιογένειας, παρέχεται από τις σχέσεις

$$f_{in}(z) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T (z-d), \quad (3.122)$$

όταν $|z-d| < R_S$, και

$$f_{out}(z) = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}^T R_S^2 \frac{1}{z-d}, \quad (3.123)$$

όταν $|z-d| \geq R_S$, όπου $\mathcal{F}^T = \varepsilon_{13}^T - i\varepsilon_{23}^T$.

Οι σχέσεις (A.16), (A.17), χωρίς τους \mathcal{U} -όρους, παρέχουν τα μιγαδικά δυναμικά ανομοιογένειας-μήτρας για την περίπτωση της τέλει διεπιφάνειας. Αν στις σχέσεις αυτές τεθεί $\mathcal{U}(z, \bar{z}) = 0$ και $f_0(z) = f_{out}(z)$, τότε

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_{out}(z), \quad (3.124)$$

$$f_M(z) = f_{out}(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_{out} \left(\frac{R_I^2}{z} \right). \quad (3.125)$$

Οι σχέσεις αυτές, λόγω της (3.123), γίνονται

$$f_I(z) = \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \bar{\mathcal{F}}^T R_S^2 \frac{1}{z-d}, \quad (3.126)$$

$$f_M(z) = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}^T R_S^2 \frac{1}{z-d} - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mathcal{F}^T \frac{R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*}, \quad (3.127)$$

όπου $d^* = R_I^2 / d$. Από τις (3.126) και (3.127) γίνεται φανερό ότι οι $f_I(z)$ και $f_M(z)$ είναι παντού ορισμένες στα πεδία I και M , καθόσον το σημείο απειρισμού $z = d$ της $f_I(z)$ είναι σημείο του πεδίου M , και το σημείο απειρισμού $z = d^* (= R_I^2 / d)$ της $f_M(z)$, είναι σημείο του I . Συνεπώς, οι ολόμορφες συναρτήσεις $f_I(z)$ και $f_M(z)$, που παρέχονται από τις σχέσεις (3.124), (3.125) ή (3.126), (3.127) αποτελούν τα δυναμικά της ανομοιογένειας και της μήτρας. Απομένει τώρα ο προσδιορισμός του μιγαδικού δυναμικού $f_S(z)$ του εγκλωβίσματος. Προς τον σκοπό αυτό, οι όροι της δεξιάς πλευράς της σχέσης (3.125) θα ερμηνευτεί ως εξής. Ο πρώτος όρος της σχέσης αυτής παρέχει τα ελαστικά πεδία στο M , χωρίς την παρουσία της ανομοιογένειας στο σύστημα. Ο δεύτερος όρος εκφράζει τη διατάραξη των πεδίων αυτών λόγω της παρουσίας της ανομοιογένειας σε αυτό. Η διατάραξη αυτή, προφανώς, εκφράζεται με τον ίδιο όρο και στο πεδίο S του εγκλωβίσματος, καθότι το πεδίο αυτό έχει το ίδιο μέτρο διάτμησης με το πεδίο της μήτρας M και ο όρος αυτός είναι παντού ορισμένος στο πεδίο αυτό. Συνεπώς, για το πεδίο S , του οποίου το αδιατάρακτο πεδίο είναι $f_{in}(z)$, μπορούμε να γράψουμε

$$f_S(z) = f_{in}(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_{out} \left(\frac{R_I^2}{z} \right). \quad (3.128)$$

Σε όρους των ιδιοπαραμορφώσεων, η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή

$$f_S(z) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T(z-d) - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mathcal{F}^T \frac{R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*}. \quad (3.129)$$

Έτσι, με τις σχέσεις (3.126), (3.127) και (3.129) παρέχονται τα τρία δυναμικά του συστήματος, που αποτελούν την λύση του σχετικού ελαστικού αντιεπίπεδου προβλήματος. Από τα τρία αυτά μιγαδικά δυναμικά υπολογίζονται τα ελαστικά πεδία στις τρεις φάσεις του συστήματος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (A.5) και (A.6) του Παραρτήματος Α. Τα πεδία αυτά έχουν προσδιορισθεί εισάγοντας τις πολικές συντεταγμένες r , θ και r^* , θ^* , όπως αυτές ορίζονται στο Σχήμα 3.1. Στον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις

$$(\sigma_{r_3} - i\sigma_{\theta_3})^K = e^{i\theta} (\sigma_{13} - i\sigma_{23})^K, \quad (3.130)$$

$$(\sigma_{r^*_3} - i\sigma_{\theta^*_3})^K = e^{i\theta^*} (\sigma_{13} - i\sigma_{23})^K, \quad (3.131)$$

όπου $K = M, I, S$. Οι παραπάνω σχέσεις συνδέουν τις πολικές συνιστώσες των τάσεων με τις καρτεσιανές. Τα πλήρη ελαστικά πεδία παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β.

3.4.2 Η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα ελαστικά πεδία που προσδιορίστηκαν και παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β, υπολογίζεται η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελαστικό σύστημα χρησιμοποιώντας την σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^T \sigma_{r^*_3}^M R_S d\theta^*. \quad (3.132)$$

Στην παραπάνω σχέση, u_3^T και $\sigma_{r^*_3}^M (= \sigma_{r^*_3}^S)$ είναι οι ιδιο-παραμορφώσεις και οι ακτινικές τάσεις, αντίστοιχα, που αναφέρονται στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r^*, θ^*, x_3^*) και βρίσκονται πάνω στη διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας. Η ιδιοπαραμόρφωση u_3^T υπολογίζεται από τις ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$ ολοκληρώνοντας τις σχέσεις $\varepsilon_{13}^T = 1/2 \partial u_3^T / \partial x_1$, $\varepsilon_{23}^T = 1/2 \partial u_3^T / \partial x_2$ παραλείποντας την σταθερά ολοκλήρωσης ως μετατόπιση στερεού σώματος. Από την ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών προκύπτει η ιδιοπαραμόρφωση

$$u_3^T = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (3.133)$$

όπου

$$\mathcal{F}^T = \varepsilon_{13}^T - i\varepsilon_{23}^T. \quad (3.134)$$

Η ιδιοπαραμόρφωση u_3^T πάνω στην διεπιφάνεια A_S εγκλωβίσματος-μήτρας σε όρους του πολικού συστήματος συντεταγμένων υπολογίζεται από την (3.133) θέτοντας $z = re^{i\theta^*} + d$. Βρίσκεται ότι

$$u_3^T = 2\varepsilon_{13}^T d + 2(\varepsilon_{13}^T \cos \theta^* + \varepsilon_{23}^T \sin \theta^*) r^*. \quad (3.135)$$

Η ακτινική τάση $\sigma_{r^*3}^M$ παρέχεται από την (B.7) θέτοντας $r^* = R_S$. Αντικαθιστώντας την (3.135) και (B.7) στην (3.132) βρίσκεται

$$E = \pi \mu_M R_S^2 \left[(\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2 \right] - \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^4 R_I^2}{d^2} \mathcal{L}_1, \quad (3.136)$$

όπου η ποσότητα \mathcal{L}_1 δίνεται από την σχέση (B.16). Η ποσότητα \mathcal{L}_1 , υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των ολοκληρωμάτων $I_1 - I_5$ που προσδιορίζονται στο Παράρτημα Β με τις σχέσεις (B.21)-(B.25). Αντικαθιστώντας την ποσότητα αυτή στην (3.136), μετά από εκτεταμένη άλγεβρα, προκύπτει ότι

$$E = \pi R_S^2 \left[1 - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left(\frac{R_S R_I}{d^2 - R_I^2} \right)^2 \right] \mu_M |\mathcal{F}^T|^2, \quad (3.137)$$

όπου έχει τεθεί

$$|\mathcal{F}^T| = \sqrt{(\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2}. \quad (3.138)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε πως η ελαστική ενέργεια που δίνεται από την (3.137) είναι μία θετικά ορισμένη ποσότητα. Στην ειδική περίπτωση μίας κυκλικής οπής ($\mu_I = 0$), η σχέση (3.137) ανάγεται σε αυτή που πρόσφατα έχει εξαχθεί από τον Lubarda (Lubarda, 2015b). Όταν $\mu_M = \mu_I$, η ελαστική ενέργεια του συστήματος αντιστοιχεί στον πρώτο όρο του δεξιού τμήματος της (3.137) που δίνεται από την σχέση

$$E_0 = \pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{F}^T|^2. \quad (3.139)$$

Η σχέση (3.139) παρέχει την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, όταν η ανομοιογένεια έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με τη μήτρα ($\mu_M = \mu_I$). Ο δεύτερος όρος του δεξιού τμήματος της (3.137) μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή που υφίσταται η ελαστική ενέργεια, του υπό ένταση ομογενούς συστήματος, αν το υλικό

στην περιοχή I μεταβάλλει τις ελαστικές του ιδιότητες σε εκείνες της ανομοιογένειας. Έτσι, η μεταβολή αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\Delta \mathcal{P} = \Delta E = E - E_0 = \pi R_S^2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left(\frac{R_S R_I}{d^2 - R_I^2} \right)^2 \mu_M |\mathcal{E}^T|^2. \quad (3.140)$$

Η σχέση (3.140) δείχνει ότι η εμφάνιση μίας μαλακής ανομοιογένειας στο ομογενές σύστημα που βρίσκεται υπό ένταση λόγω του εγκλωβίσματος, μειώνει πάντα την ελαστική ενέργεια του συστήματος. Το αντίθετο συμβαίνει, όταν στο σύστημα εμφανίζεται μία σκληρή ανομοιογένεια ($\mu_I > \mu_M$).

3.4.3 Ελαστική ενέργεια στις φάσεις του συστήματος

Η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος που υπολογίστηκε παραπάνω είναι διανεμημένη στις τρεις φάσεις του συστήματος, δηλαδή στην ανομοιογένεια, στη μήτρα και στο εγκλώβισμα. Οι επιμέρους αυτές ποσότητες της ελαστικής ενέργειας θα υπολογισθούν από τις σχέσεις

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^I \sigma_{r3}^I R_I d\theta, \quad (3.141)$$

$$E^M = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^M \sigma_{r3}^M R_I d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^M \sigma_{r*3}^M R_S d\theta^*, \quad (3.142)$$

$$E^S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u_3^M \sigma_{r*3}^S R_S d\theta^*, \quad (3.143)$$

όπου, οι παραμορφώσεις και τάσεις που εμπλέκονται στα παραπάνω ολοκληρώματα δίνονται στο Παράρτημα Β. Αντικαθιστώντας τα ελαστικά πεδία που εμπλέκονται στα παραπάνω ολοκληρώματα, προκύπτουν οι σχέσεις

$$E^I = -2 \frac{\mu_M^2 \mu_I}{(\mu_M + \mu_I)^2} R_S^4 R_I \mathcal{L}_2, \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned}
 E^M &= \frac{\pi}{2} \mu_M R_S^2 \left[(\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2 \right] + \frac{2\mu_M^2 \mu_I}{(\mu_M + \mu_I)^2} R_S^4 R \mathcal{L}_2 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^4 d^*}{d} \mathcal{L}_3 - \frac{1}{2} \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^3}{d} \mathcal{L}_4 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mu_M \frac{(\mu_M - \mu_I)^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \frac{R_S^5 d^*}{d^2} \mathcal{L}_5,
 \end{aligned} \tag{3.145}$$

$$\begin{aligned}
 E^S &= -\frac{\pi}{2} \mu_M R_S^2 |E^T|^2 + \frac{1}{2} \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^4 d^*}{d} \mathcal{L}_3 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^3}{d} \mathcal{L}_4 - \mu_M \frac{1}{2} \frac{(\mu_M - \mu_I)^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \frac{R_S^5 d^*}{d^2} \mathcal{L}_5,
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

όπου οι ποσότητες $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_5$ δίνονται από τις σχέσεις (B.17)-(B.20), και τα υπεισερχόμενα σε αυτή ολοκληρώματα προσδιορίζονται στο Παράρτημα Β. Αντικαθιστώντας τις τιμές των ποσοτήτων αυτών στις παραπάνω σχέσεις, βρίσκεται ότι

$$E^I = \frac{2\mu_M^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \frac{\pi R_S^4 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} \mu_I |\mathcal{Z}^T|^2, \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned}
 E^M &= -\frac{2\mu_M^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \frac{\pi R_S^4 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} \mu_I |\mathcal{Z}^T|^2 \\
 &\quad + \frac{\pi R_S^2}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^4 R_I^4}{[R_S^2 d^2 - (R_I^2 - d^2)^2]^2} \right\} \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2,
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

$$\begin{aligned}
 E^S &= \frac{\pi R_S^2}{2} \left[1 - 2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} \right] \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2 \\
 &\quad + \frac{\pi R_S^2}{2} \left[\left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^4 R_I^4}{[R_S^2 d^2 - (R_I^2 - d^2)^2]^2} \right] \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2.
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Οι σχέσεις αυτές παρέχουν τις ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στις τρεις φάσεις του συστήματος, δηλαδή, στην ανομοιογένεια, στην μήτρα και στο εγκλωβίσμα. Μπορεί να δειχθεί αλγεβρικά ότι οι παραπάνω ελαστικές ενέργειες είναι πάντα θετικές ποσότητες. Όταν $\mu_I = \mu_M$, οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τις ελαστικές ενέργειες στις περιοχές I , M , S , και δηλώνονται με E_0^I , E_0^M , E_0^S , αντίστοιχα, Έτσι, οι μεταβολές της ελαστικής ενέργειας που εμφανίζονται στις τρεις περιοχές του εντατικού συστήματος,

λόγω εμφάνισης της ανομοιογένειας, και κατά συνέπεια στην ολική δυναμική ενέργεια, υπολογίζονται στην παρακάτω μορφή

$$\Delta E^I = E^I - E_0^I = -\frac{\pi R_S^2}{2} \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^2 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} \mu_M |\mathcal{F}^T|^2, \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} \Delta E^M &= E^M - E_0^M \\ &= \frac{\pi R_S^2}{2} \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \left[\frac{R_S^2 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} - \frac{R_S^4 R_I^4}{[R_S^2 d^2 - (R_I^2 - d^2)^2]^2} \right] \mu_M |\mathcal{F}^T|^2, \end{aligned} \quad (3.151)$$

$$\Delta E^S = E^S - E_0^S = \frac{\pi R_S^2}{2} \left[\begin{aligned} &-2 \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right) \frac{R_S^2 R_I^2}{(R_I^2 - d^2)^2} \\ &+ \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^4 R_I^4}{[R_S^2 d^2 - (R_I^2 - d^2)^2]^2} \end{aligned} \right] \mu_M |\mathcal{F}^T|^2. \quad (3.152)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι η συνεισφορά της ανομοιογένειας και της μήτρας στην μεταβολή της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος είναι πάντα αρνητική και θετική, αντίστοιχα, ενώ η συνεισφορά του εγκλωβίσματος εξαρτάται από το μέτρο διάτμησης και τα γεωμετρικά στοιχεία του συστήματος.

3.4.4 J_k -ολοκληρώματα

Τα J_1 -, J_2 -ολοκληρώματα, υπολογίζονται ξεχωριστά για την ανομοιογένεια και το εγκλωβίσμα εφαρμόζοντας τις παρακάτω σχέσεις

$$(J_1 - iJ_2)^I = 2\mu_M i \int_{A_I} [f_M'(z)]^2 dz, \quad (3.153)$$

$$(J_1 - iJ_2)^S = 2\mu_M i \int_{A_S} [f_M'(z)]^2 dz, \quad (3.154)$$

που είναι η εφαρμογή της σχέσης (2.139) πάνω στις διεπιφάνειες A_I και A_S , για $f_T(z) = 0$. Στις σχέσεις (3.153) και (3.154), η υπό ολοκλήρωση ποσότητα υπολογίζεται από την (3.127) στην μορφή

$$[f'_M(z)]^2 = \frac{1}{4} (\bar{\mathcal{Z}}^T)^2 R_S^4 \frac{1}{(z-d)^4} + \frac{1}{4} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} (\mathcal{Z}^T)^2 \left(R_S \frac{R_I}{d} \right)^4 \frac{1}{(z-d^*)^4} - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{Z}^T|^2 R_S^4 \left(\frac{R_I}{d} \right)^2 \frac{1}{(z-d)^2 (z-d^*)^2}. \quad (3.155)$$

Αντικαθιστώντας την (3.155) στις (3.153), (3.154) και χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα

$$\oint_{A_S} \frac{1}{(z-d)^4} dz = \oint_{A_I} \frac{1}{(z-d^*)^4} dz = 0, \quad (3.156)$$

$$\oint_{A_k} \frac{1}{(z-d)^2 (z-d^*)^2} dz = \begin{cases} \frac{4\pi i}{(d-d^*)^3} & \text{όταν } k = I, \\ -\frac{4\pi i}{(d-d^*)^3} & \text{όταν } k = S, \end{cases} \quad (3.157)$$

βρίσκεται ότι

$$(J_1 - iJ_2)^I = -(J_1 - iJ_2)^S = \frac{4\pi}{(d-d^*)^3} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mu_M \left(|\mathcal{Z}^T| \right)^2 R_S^4 \left(\frac{R_I}{d} \right)^2. \quad (3.158)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$J_2^I = J_2^S = 0, \quad (3.159)$$

$$J_1^I = -J_1^S = \frac{4\pi}{(d-d^*)^3} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2 R_S^4 \left(\frac{R_I}{d} \right)^2. \quad (3.160)$$

Καθότι, στην περίπτωση που εξετάζεται, η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος ταυτίζεται με την δυναμική του ενέργεια \mathcal{P} , μπορεί να γραφτεί

$$\mathcal{P} = \pi R_S^2 \left[1 - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left(\frac{R_S R_I}{d^2 - R_I^2} \right)^2 \right] \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2. \quad (3.161)$$

Θεωρώντας, τώρα, την δυναμική ενέργεια \mathcal{P} ως συνάρτηση της θέσης της ιδιομορφίας $x_1^0 = d$, $x_2^0 = 0$, που αντιπροσωπεύει το εγκλωβίσμα, η παραπάνω δυναμική ενέργεια γράφεται

$$\mathcal{P}(x_1^0, x_2^0) = \pi R_S^2 \left[1 - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left(\frac{R_S R_I}{(x_1^0)^2 - R_I^2} \right)^2 \right] \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2. \quad (3.162)$$

Έτσι, με βάση την (3.100) προκύπτουν

$$J_1^S = -\frac{4\pi}{((x_1^0)^2 - R_I^2)^3} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2 R_S^4 R_I^2 x_1^0, \quad J_2^S = 0, \quad (3.163)$$

από όπου, για $x_1^0 = d$,

$$J_1^S = -\frac{4\pi}{(d^2 - R_I^2)^3} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2 R_S^4 R_I^2 d, \quad J_2^S = 0, \quad (3.164)$$

που συμπίπτουν με τις (3.159) και (3.160).

3.4.5 \mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα

Τα \mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα για το εγκλωβίσμα, υπολογίζονται από την σχέση

$$(\mathcal{L}_k - i\mathcal{M})_O^S = 2\mu_M \int_{A_S} z [f'_M(z)]^2 dz, \quad (3.165)$$

όπου O είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Από την παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)^3} dz = \int_{A_I} \frac{1}{(z-d^*)^3} dz = 0, \quad (3.166)$$

$$\int_{A_S} \frac{z-d}{(z-d^*)^4} dz = \int_{A_I} \frac{z-d^*}{(z-d)^4} dz = 0, \quad (3.167)$$

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)(z-d^*)^2} dz = \int_{A_I} \frac{1}{(z-d)^2(z-d^*)} dz = \frac{2\pi i}{(d-d^*)^2}, \quad (3.168)$$

βρίσκεται ότι

$$(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_o^S = 2\pi i \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} R_S^4 \left(\frac{R_I}{d} \right)^2 |\mathcal{F}^T|^2 \frac{d + d^*}{(d - d^*)^3}. \quad (3.169)$$

Απο την παραπάνω σχέση συνάγεται

$$\mathcal{L}_{3,o}^S = 0, \quad \mathcal{M}_o^S = -2\pi \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} R_S^4 R_I^2 |\mathcal{F}^T|^2 \frac{d^2 + R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^3}. \quad (3.170)$$

Από την σχέση $\mathcal{M}_o^I = -\mathcal{M}_o^S$ συνάγεται

$$\mathcal{M}_o^I = 2\pi \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} R_S^4 R_I^2 |\mathcal{F}^T|^2 \frac{d^2 + R_I^2}{(d^2 - R_I^2)^3}. \quad (3.171)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (3.116) προκύπτει

$$\mathcal{M}_{o^*}^S = 2\pi \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} R_S^4 R_I^2 |\mathcal{F}^T|^2 \frac{1}{(d^2 - R_I^2)^2}. \quad (3.172)$$

Για την περίπτωση της κυκλικής οπής ($\mu_I = 0$), οι σχέσεις (3.171) και (3.172) συμπίπτουν με αυτές που έχουν εξαχθεί πρόσφατα από τον Lubarda (Lubarda, 2015b).

3.4.6 Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες

Παρακάτω, υπολογίζονται οι κινούσες δυνάμεις f_{r^*} και f_r που επενεργούν στις διεπιφάνειες εγκλωβίσματος-μήτρας και ανομοιογένειας-μήτρας, για αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος, του Σχήματος 3.1 που προέρχεται από τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$ στο εγκλωβίσμα. Η κινούσα δύναμη f_{r^*} υπολογίζεται από την σχέση

$$f_{r^*} = 2\mu_M [f'_s(t)\bar{\mathcal{F}}^T + \overline{f'_s(t)\mathcal{F}^T}] - \frac{\mu_M}{2} (e^{i\theta^*} \mathcal{F}^T - e^{-i\theta^*} \bar{\mathcal{F}}^T)^2, \quad (3.173)$$

που αποτελεί την εφαρμογή της γενικής σχέσης (2.176), για την περίπτωση του πεδίου \mathcal{S} του εγκλωβίσματος και για το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (r^*, θ^*, x_3^*) που

δείχνεται στο Σχήμα 3.1. Στην παραπάνω σχέση, η συνάρτηση $f_S(z)$ είναι το μιγαδικό δυναμικό του εγκλωβίσματος S που έχει την μορφή

$$f_S(z) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T (z-d) - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_l}{\mu_M + \mu_l} \mathcal{F}^T \frac{R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*}, \quad (3.174)$$

και έχει εξαχθεί προηγούμενα (σχέση (3.129)). Από την σχέση αυτή, για ένα σημείο t της διεπιφάνειας, προκύπτει

$$f'_S(t) = -\frac{1}{2} E_{\rho^*}^T + \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_l}{\mu_M + \mu_l} E_{\rho^*}^T \frac{R_S^2 d^*}{d} \frac{1}{(t-d^*)^2}, \quad (3.175)$$

όπου $\mathcal{F}_{\rho^*}^T = \varepsilon_{r^*3}^T - i\varepsilon_{\theta^*3}^T = \mathcal{F}^T e^{i\theta^*}$. Θέτοντας $t = d + R_S e^{i\theta^*}$ στην (3.175) και στην συνέχεια αντικαθιστώντας την σχέση αυτή στην (3.173), προκύπτει

$$f_{r^*} = -2\mu_M (\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + 2\mu_M \frac{\mu_M - \mu_l}{\mu_M + \mu_l} [(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2] \frac{R_S^2 d^*}{d} \left[\frac{1}{(\rho^*)^2} - 2R_S^2 \frac{\sin^2 \theta^*}{(\rho^*)^4} \right], \quad (3.176)$$

που είναι η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας. Για $\mu_l = 0$, η παραπάνω σχέση παρέχει

$$f_{r^*} = -2\mu_M (\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + 2\mu_M [(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2] \frac{R_S^2 d^*}{d} \left[\frac{1}{(\rho^*)^2} - 2R_S^2 \frac{\sin^2 \theta^*}{(\rho^*)^4} \right], \quad (3.177)$$

που είναι η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας, όταν η ανομοιογένεια εκφυλιστεί σε μια κυλινδρική οπή. Επειδή

$$(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2 = (\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2, \quad (3.178)$$

$$(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 = (\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2 + [(\varepsilon_{13}^T)^2 - (\varepsilon_{23}^T)^2] \cos 2\theta^* + 2\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T \sin 2\theta^*, \quad (3.179)$$

η σχέση (3.177) παίρνει την μορφή

$$f_{r^*} = -\mu_M [(\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2] - \mu_M [(\varepsilon_{13}^T)^2 - (\varepsilon_{23}^T)^2] \cos 2\theta^* - 2\mu_M \varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T \sin 2\theta^* + 2\mu_M [(\varepsilon_{13}^T)^2 + (\varepsilon_{23}^T)^2] \frac{R_S^2 d^*}{d} \left[\frac{1}{(\rho^*)^2} - 2R_S^2 \frac{\sin^2 \theta^*}{(\rho^*)^4} \right]. \quad (3.180)$$

Η παραπάνω σχέση συμπίπτει με αυτή που έχει εξαχθεί από τον Lubarda (Lubarda, 2015b) για την περίπτωση της κυκλικής οπής. Όταν $\mu_l = \mu_M$, η σχέση (3.176) παρέχει

$$f_{r^*} = -2\mu_M (\varepsilon_{r^*3}^T)^2, \quad (3.181)$$

που είναι η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος μήτρας, όταν η ανομοιογένεια είναι απύσα.

Η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας θα υπολογισθεί από την σχέση

$$f_r = -\frac{\mu_M - \mu_l}{2\mu_M} \left\{ \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_l(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_l(t)} \right]^2 - \mu_l \left[\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} f'_l(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_l(t)} \right]^2 \right\}, \quad (3.182)$$

που έχει αποκτηθεί προηγούμενα (σχέση (2.177)). Στην σχέση αυτή, το μιγαδικό δυναμικό $f_l(z)$ έχει την μορφή

$$f_l(z) = \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_l} \bar{\mathcal{F}}^T R_s^2 \frac{1}{z-d}, \quad (3.183)$$

και έχει εξαχθεί σε προηγούμενη ενότητα. Με βάση την σχέση αυτή, για τα σημεία της διεπιφάνειας $t = R_l e^{i\theta}$, βρίσκεται ότι

$$|f'_l(t)|^2 = \frac{\mu_M^2}{(\mu_M + \mu_l)^2} [(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2] \frac{R_s^4}{\rho^4}, \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} & \frac{t}{\bar{t}} [f'_l(t)]^2 + \frac{\bar{t}}{t} [\overline{f'_l(t)}]^2 \\ &= \frac{2\mu_M^2}{(\mu_M + \mu_l)^2} \frac{R_s^4}{\rho^8} \{ [(\varepsilon_{r^*3}^T)^2 - (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2] (\rho^4 + 8d^4 \sin^4 \theta - 6\rho^2 d^2 \sin^2 \theta) \\ & \quad + 4d \varepsilon_{r^*3}^T \varepsilon_{\theta^*3}^T (2R_l \sin \theta - d \sin 2\theta) (\rho^2 - 2d^2 \sin^2 \theta) \}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.184) και (3.185) στην (3.182), προκύπτει

$$\begin{aligned}
 f_r = & \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_l)}{\mu_M + \mu_l} \frac{R_S^4}{\rho^4} [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta3}^T)^2] \\
 & - \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_l)^2}{(\mu_M + \mu_l)^2} \frac{R_S^4 d^4}{\rho^8} \left\{ [(\varepsilon_{r3}^T)^2 - (\varepsilon_{\theta3}^T)^2] \left(\frac{\rho^4}{d^4} + 8 \sin^4 \theta - 6 \frac{\rho^2}{d^2} \sin^2 \theta \right) \right\} \\
 & - \frac{4\mu_M(\mu_M - \mu_l)^2}{(\mu_M + \mu_l)^2} \frac{R_S^4 d^4}{\rho^8} \varepsilon_{r3}^T \varepsilon_{\theta3}^T \left(2 \frac{R_l}{d} \sin \theta - \sin 2\theta \right) \left[\frac{\rho^2}{d^2} - 2 \sin^2 \theta \right],
 \end{aligned} \tag{3.186}$$

που είναι η δύναμη που επενεργεί πάνω στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας. Για την περίπτωση που η ανομοιογένεια εκφυλίζεται σε οπή ($\mu_l = 0$), η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
 f_r = & \mu_M \frac{R_S^4}{\rho^4} [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta3}^T)^2] \\
 & - \mu_M \frac{R_S^4 d^4}{\rho^8} \left\{ [(\varepsilon_{r3}^T)^2 - (\varepsilon_{\theta3}^T)^2] \left(\frac{\rho^4}{d^4} + 8 \sin^4 \theta - 6 \frac{\rho^2}{d^2} \sin^2 \theta \right) \right\} \\
 & - 4\mu_M \frac{R_S^4 d^4}{\rho^8} \varepsilon_{r3}^T \varepsilon_{\theta3}^T \left(2 \frac{R_l}{d} \sin \theta - \sin 2\theta \right) \left[\frac{\rho^2}{d^2} - 2 \sin^2 \theta \right].
 \end{aligned} \tag{3.187}$$

3.5 Επίδραση διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος

Στην ενότητα αυτή διερευνάται η επίδραση μίας διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας, πάνω στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1. Η διερεύνηση γίνεται για αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος που προέρχεται από σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T , ε_{23}^T στο εγκλωβίσμα.

3.5.1 Ελαστικά πεδία

Όταν η διεπιφάνεια μεταξύ της ανομοιογένειας και μήτρας του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1 είναι μεμβρανικού τύπου, τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας και της μήτρας μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(z), \quad (3.188)$$

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{R_I^2}{z}\right) + \frac{\mu_m / R_I}{\mu_M + \mu_I} \left[z f_0'(z) - \frac{R_I^2}{z} \bar{f}_0'\left(\frac{R_I^2}{z}\right) \right], \quad (3.189)$$

όπου $f_0(z)$ είναι το διφασικό δυναμικό μήτρας και ανομοιογένειας και μ_m είναι μια σταθερά που περιγράφει την συμπεριφορά της μεμβράνης. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για οποιοδήποτε τύπο φόρτισης του συστήματος και έχουν εξαχθεί στο Παράρτημα Α. Το διφασικό δυναμικό που παρέχει την λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος αναζητείται στη μορφή

$$f_0(z) = f_{out}(z) + h(z), \quad (3.190)$$

όπου $f_{out}(z)$ παρέχεται από την σχέση (3.123) και $h(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση που προσδιορίζεται παρακάτω. Αντικαθιστώντας την (3.190) στην (3.189), προκύπτει

$$\begin{aligned} f_M(z) = & \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{1}{z-d} + \left\{ h(z) + \frac{\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I)} \left[-\frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2} \frac{z}{(z-d)^2} + z h'(z) \right] \right\} \\ & + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left[-\frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} + \bar{h}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) \right] \\ & - \frac{\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I)} \frac{R_I^2}{z} \left[-\frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d^2} \frac{z^2}{(z-d^*)^2} + \bar{h}'\left(\frac{R_I^2}{z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Στην γειτονιά της διεπιφάνειας μήτρας-εγκλωβίσματος, η $f_M(z)$, που παρέχεται από την (3.191), θα πρέπει να προσεγγίζει την ιδιόμορφη συμπεριφορά του μιγαδικού δυναμικού $f_{out}(z)$, που αποτελεί τον πρώτο όρο της σχέσης αυτής. Η συμπεριφορά αυτή είναι η επιθυμητή ιδιόμορφη συμπεριφορά που πρέπει να έχει η $f_M(z)$ στο $z=d$. Όμως, από

την σχέση (3.191) γίνεται φανερό ότι μία δεύτερη ανεπιθύμητη ιδιομορφία εμφανίζεται να έχει η $f_M(z)$. Η ιδιομορφία αυτή, που εισάγεται απο τον δεύτερο όρο της (3.191), μπορεί να απαλειφθεί, αν τεθεί

$$h(z) + \frac{\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I)} \left[-\frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{z}{(z-d)^2} + zh'(z) \right] = 0. \quad (3.192)$$

Οι υπόλοιποι όροι της $f_M(z)$ της σχέσης (3.191) δεν εισάγουν καμία άλλη ιδιομορφία στα σημεία της μήτρας. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποτεθεί ότι η συνθήκη που περιγράφεται από την σχέση (3.192) ισχύει για κάθε σημείο του συστήματος, δηλαδή σε όλο το μιγαδικό επίπεδο z . Αν η (3.192) θεωρηθεί ότι ισχύει για κάθε σημείο z της μήτρας και αν τεθεί R_I^2/d αντί για z και παρθεί ο μιγαδικός συζυγής της σχέσης αυτής προκύπτει

$$\bar{h}\left(\frac{R_I^2}{z}\right) = -\frac{\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I)} \frac{R_I^2}{z} \left[-\frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2d^2} \frac{z^2}{(z-d^*)^2} + \bar{h}'\left(\frac{R_I^2}{z}\right) \right], \quad (3.193)$$

όπου $d^* = R_I^2/d$. Λόγω της (3.192) και (3.193), η (3.191) παίρνει την ακόλουθη απλή μορφή

$$f_M(z) = \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{1}{z-d} - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} + \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \bar{h}\left(\frac{R_I^2}{z}\right). \quad (3.194)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (3.190), το μιγαδικό δυναμικό της ανομοιογένειας, που παρέχεται με την σχέση (3.188), παίρνει την μορφή

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} [f_{out}(z) + h(z)]. \quad (3.195)$$

Οι τάσεις σε κάθε σημείο της ανομοιογένειας, δηλαδή σε κάθε σημείο του πεδίου I , θα πρέπει να έχουν πεπερασμένες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $h(z)$ θα πρέπει να ορίζεται παντού στο πεδίο I . Συνεπώς, η συνάρτηση $h(z)$ αναζητείται στην μορφή της απειροσειράς

$$h(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_s z^s + \dots, \quad (3.196)$$

όπου B_1, B_2, B_3, \dots είναι μιγαδικές σταθερές. Η (3.196) θα πρέπει να ικανοποιεί την (3.192), που είναι μία διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης, θεωρείται το ανάπτυγμα

$$\frac{z}{(z-d)^2} = -\frac{1}{d^2} z - \frac{2}{d^3} z^2 - \frac{3}{d^4} z^3 - \dots - \frac{s}{d^{s+1}} z^s - \dots, \quad (3.197)$$

που ισχύει για $|z| < |d|$. Αντικαθιστώντας τις (3.196) και (3.197), στην (3.192) και εξισώνοντας τους όρους της ίδιας τάξης, προκύπτει

$$B_s = -\frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_s^2}{2} \frac{s \mu_m}{R_I (\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{1}{d^{s+1}} \dots \quad (3.198)$$

Συνεπώς, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας (3.194) παίρνει τη μορφή

$$f_M(z) = f_{out}(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_{out} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_s^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \mu_m}{R_I (\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^s}, \quad (3.199)$$

ή, λόγω της (3.123), την μορφή

$$f_M(z) = \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_s^2}{2} \frac{1}{z-d} - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_s^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} - \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_s^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \mu_m}{R_I (\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \left(\frac{R_I^2}{zd} \right)^s. \quad (3.200)$$

Η (3.200) δείχνει ότι η $f_M(z)$ τείνει στο μηδέν, όταν $z \rightarrow \infty$, γεγονός που εξασφαλίζει τον μηδενισμό των τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Οι τάσεις στην ανομοιογένεια υπολογίζονται από το μιγαδικό δυναμικό $f_I(z)$, που παρέχεται από την σχέση (3.195). Η σχέση αυτή εμπλέκει την απειροσειρά $h(z)$, η οποία θα δειχθεί ότι συγκλίνει σε κάθε σημείο του πεδίου I . Για τον γενικό όρο αυτό της σειράς ισχύει

$$|B_s z^s| = \frac{|\mathcal{F}^T| R_S^2}{2} \frac{s \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{|z^s|}{|d|^{s+1}} \leq M_s, \quad (3.201)$$

όπου

$$M_s = \frac{|\mathcal{F}^T| R_S^2}{2} \frac{s \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{R_I^s}{|d|^{s+1}}. \quad (3.202)$$

Ισχύει

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{M_{s+1}}{M_s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1}{s} \frac{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + (s+1)\mu_m} \frac{R_I}{|d|} = \frac{R_I}{|d|} < 1, \quad (3.203)$$

καθότι $|d| > R_I$. Επομένως, σύμφωνα με το M -test του Weierstrass (Gurtin, 1981), η σειρά $h(z)$, που δίνεται με την σχέση (3.196), συγκλίνει σε κάθε σημείο του πεδίου I . Αυτό σημαίνει ότι και οι τάσεις στο πεδίο I , που προκύπτουν από την σχέση (A.5), συγκλίνουν.

Απομένει τώρα να υπολογιστούν τα μιγαδικά δυναμικά $f_s(z)$ του εγκλωβίσματος. Προς το σκοπό αυτό, οι δύο τελευταίοι όροι της (3.194) ή της (3.200), μπορούν να ερμηνευτούν ως η διατάραξη της ελαστικής κατάστασης στο πεδίο M λόγω της παρουσίας της ανομοιογένειας. Η διατάραξη αυτή ισχύει και για την περιοχή του εγκλωβίσματος S , καθότι η περιοχή αυτή έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με τη μήτρα. Επομένως, για το μιγαδικό δυναμικό του εγκλωβίσματος μπορεί να γραφτεί

$$f_S(z) = f_{in}(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_{out} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) - \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \frac{E^T R_S^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^s}, \quad (3.204)$$

ή, λόγω της (3.123), στη μορφή

$$f_S(z) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T (z-d) - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*} - \frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_m} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^s}. \quad (3.205)$$

3.5.2 Συντηρητικά ολοκληρώματα

Για τον υπολογισμό των J_k -, \mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρωμάτων στη διεπιφάνεια A_S εγκλωβίσματος-μήτρας, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$(J_1 - iJ_2)^S = 2i\mu_M \int_{A_S} [f'_M(z)]^2 dz, \quad (3.206)$$

$$(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S = 2\mu_M \int_{A_S} (z-d)[f'_M(z)]^2 dz, \quad (3.207)$$

όπου η ποσότητα $(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S$ υπολογίζεται ως προς το κέντρο O^* του εγκλωβίσματος που βρίσκεται στο σημείο $d+i0$. Στις παραπάνω σχέσεις, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας παρέχεται από την σχέση (3.200). Από την σχέση αυτή προκύπτει

$$f'_M(z) = -\frac{\mathcal{N}}{(z-d)^2} + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{\mathcal{N}} \frac{d^*}{d} \frac{1}{(z-d^*)^2} + \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \bar{\mathcal{N}} k(z), \quad (3.208)$$

όπου

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}^T R_S^2, \quad (3.209)$$

$$k(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 \mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \frac{R_I^{2s}}{(dz)^{s+1}}. \quad (3.210)$$

Από την σχέση (3.208) προκύπτει

$$[f'_M(z)]^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{(z-d)^4} + \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \bar{\mathcal{N}}^2 \left(\frac{d^*}{d} \right)^2 \frac{1}{(z-d^*)^4} + 4 \left(\frac{\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \bar{\mathcal{N}}^2 [k(z)]^2 - 2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{N}|^2 \frac{d^*}{d} \frac{1}{(z-d)^2 (z-d^*)^2} - \frac{4\mu_M}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{N}|^2 \frac{k(z)}{(z-d)^2} + \frac{4\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{(\mu_M + \mu_I)^2} \bar{\mathcal{N}}^2 \frac{d^*}{d} \frac{k(z)}{(z-d^*)^2}. \quad (3.211)$$

Για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων των σχέσεων (3.206) και (3.207) χρησιμοποιούνται τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)^2(z-d^*)^2} dz = -\frac{4\pi i}{(d-d^*)^3}, \quad (3.212)$$

$$\int_{A_S} \frac{k(z)}{(z-d)^2} dz = -2\pi i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+3}}, \quad (3.213)$$

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)(z-d^*)^2} dz = \frac{2\pi i}{(d-d^*)^2}, \quad (3.214)$$

$$\int_{A_S} \frac{k(z)}{z-d} dz = 2\pi i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+2}}, \quad (3.215)$$

όπου $k(z)$ παρέχεται από την σχέση (3.210). Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίσθηκαν κάνοντας χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης. Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών προκύπτουν μηδενικά. Βρίσκεται ότι

$$(J_1 - iJ_2)^S = -4\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^3} - 4\pi \frac{\mu_M^2}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4}{d^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \left(\frac{R_I}{d}\right)^{2s}, \quad (3.216)$$

και

$$(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S = -2\pi i \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^2} - 4\pi i \frac{\mu_M^2}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4}{d^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \left(\frac{R_I}{d}\right)^{2s}, \quad (3.217)$$

από όπου

$$J_1^S = -4\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^3} - 4\pi \frac{\mu_M^2}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4}{d^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_m}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_m} \left(\frac{R_I}{d}\right)^{2s}, \quad (3.218)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{O^*}^S &= 2\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_l)}{\mu_M + \mu_l} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^2} \\ &+ 4\pi \frac{\mu_M^2}{\mu_M + \mu_l} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4}{d^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 \mu_m}{R_l(\mu_M + \mu_l) + s\mu_m} \left(\frac{R_l}{d}\right)^{2s}, \end{aligned} \quad (3.219)$$

και

$$J_2^S = 0, L_{3,O^*}^S = 0. \quad (3.220)$$

Ισχύει ότι $J_1^S = -J_1^I$ και $\mathcal{M}_O^S = -\mathcal{M}_O^I$. Κάνοντας χρήση της σχέσης $\mathcal{M}_O^I = -\mathcal{M}_O^S - dJ_1^S$, προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_O^S &= -2\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_l)}{\mu_M + \mu_l} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 (d+d^*)d^*}{d(d-d^*)^3} \\ &- 4\pi \frac{\mu_M^2}{\mu_M + \mu_l} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4}{d^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^3 \mu_m}{R_l(\mu_M + \mu_l) + s\mu_m} \left(\frac{R_l}{d}\right)^{2s}. \end{aligned} \quad (3.221)$$

Όταν $\mu_m = 0$, οι παραπάνω σχέσεις ανάγονται σε αυτές που υπολογίστηκαν προηγούμενα για τέλεια διεπιφάνεια.

3.6 Επίδραση της διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος

Στην ενότητα αυτή διερευνάται η επίδραση μίας διεπιφάνειας ελατηριακού τύπου μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας, πάνω στην ενεργειακή κατάσταση του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 3.1. Όπως και προηγούμενα, η διερεύνηση γίνεται για αντιπίεδη παραμόρφωση του συστήματος που προέρχεται από σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$ στο εγκλώβισμα.

3.6.1 Ελαστικά πεδία

Όταν η διεπιφάνεια μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας, στο σύστημα που δείχνεται στο Σχήμα 3.1, είναι ελατηριακού τύπου, τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας και της μήτρας παρέχονται από τις παρακάτω σχέσεις, που έχουν εξαχθεί στο Παράρτημα Α:

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(z), \quad (3.222)$$

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0 \left(\frac{R_I^2}{z} \right) + \frac{\mu_M \mu_I k_3}{R_I (\mu_M + \mu_I)} \left[z f_0'(z) + \frac{R_I^2}{z} \bar{f}_0' \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right], \quad (3.223)$$

όπου $f_0(z)$ είναι το διφασικό δυναμικό μήτρας και ανομοιογένειας και k_3 είναι μία σταθερά, που περιγράφει την συμπεριφορά της διεπιφάνειας. Το διφασικό δυναμικό $f_0(z)$, που παρέχει την λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος, αναζητείται στη μορφή

$$f_0(z) = f_{out}(z) + g(z), \quad (3.224)$$

όπου το $f_{out}(z)$ δίνεται από τη σχέση (3.123), ενώ το $g(z)$ είναι μία ολόμορφη συνάρτηση που προσδιορίζεται παρακάτω. Αντικαθιστώντας τις (3.123), (3.224) στην (3.223) προκύπτει

$$\begin{aligned} f_M(z) = & \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{1}{z-d} + \left\{ g(z) + \frac{\mu_M \mu_I k_3}{R_I (\mu_M + \mu_I)} \left[-\frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{z}{(z-d)^2} + z g'(z) \right] \right\} \\ & + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left[-\frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} + \bar{g} \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right] \\ & + \frac{\mu_M \mu_I k_3}{R_I (\mu_M + \mu_I)} \frac{R_I^2}{z} \left[-\frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d^2} \frac{z^2}{(z-d^*)^2} + \bar{g}' \left(\frac{R_I^2}{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.225)$$

Όπως στην περίπτωση της μεμβρανικής διεπιφάνειας, η απαλοιφή της ανεπιθύμητης ιδιομορφίας, που εισάγεται στο τασικό πεδίο του συστήματος από τον δευτερο όρο της δεξιάς πλευράς της σχέσης (3.225), οδηγεί στην σχέση

$$g(z) + \frac{\mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I)} \left[-\frac{\bar{E}^T R_S^2}{2} \frac{z}{(z-d)^2} + z g'(z) \right] = 0. \quad (3.226)$$

που αποτελεί μία διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $g(z)$. Εισάγοντας την σχέση (3.226) στην (3.225), προκύπτει

$$f_M(z) = \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{1}{z-d} - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} - \frac{2\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{g} \left(\frac{R_I^2}{z} \right). \quad (3.227)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.226) αναζητείται στη μορφή της παρακάτω απειροσειράς

$$g(z) = C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_s z^s + \dots, \quad (3.228)$$

όπου C_1, C_2, C_3, \dots είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας την (3.228) στην διαφορική εξίσωση (3.226), από την ικανοποίηση της εξίσωσης αυτής προκύπτει

$$C_s = -\frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{s \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{1}{d^{s+1}}. \quad (3.229)$$

Έχοντας προσδιορίσει την συνάρτηση $g(z)$ στην μορφή της απειροσειρας (3.228), το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας (3.227) παίρνει τη μορφή

$$f_M(z) = \frac{\bar{\mathcal{F}}^T R_S^2}{2} \frac{1}{z-d} - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{2d} \frac{z}{z-d^*} + \frac{\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^s}. \quad (3.230)$$

Προφανώς, το παραπάνω μιγαδικό δυναμικό $f_M(z)$ τείνει στο μηδέν, όταν $z \rightarrow \infty$, γεγονός που δείχνει ότι ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη των τάσεων στο άπειρο σύνορο της μήτρας. Με βάση τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του μιγαδικού δυναμικού στο εγκλώβισμα στην περίπτωση της διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου, βρίσκεται ότι

$$f_S(z) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T (z-d) - \frac{1}{2} \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{d} \frac{z}{z-d^*} + \frac{\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\mathcal{F}^T R_S^2}{d} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sk_3 \mu_M \mu_I}{R_I (\mu_M + \mu_I) + sk_3 \mu_M \mu_I} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^s}. \quad (3.231)$$

3.6.2 Συντηρητικά ολοκληρώματα

Για τον υπολογισμό των J_k -, \mathcal{L}_k - και \mathcal{M} -ολοκληρωμάτων στην διεπιφάνεια A_S εγκλωβίσματος-μήτρας, χρησιμοποιούνται, όπως και προηγούμενα, οι σχέσεις

$$(J_1 - iJ_2)^S = 2i\mu_M \int_{A_S} [f'_M(z)]^2 dz, \quad (3.232)$$

$$(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S = 2\mu_M \int_{A_S} (z-d)[f'_M(z)]^2 dz, \quad (3.233)$$

όπου η ποσότητα $(\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S$ υπολογίζεται ως προς το κέντρο O^* του εγκλωβίσματος που βρίσκεται στο σημείο $d+i0$. Στις παραπάνω σχέσεις, το μιγαδικό δυναμικό της μήτρας παρέχεται από την σχέση (3.230). Από την σχέση αυτή, προκύπτει

$$f'_M(z) = -\frac{\mathcal{H}}{(z-d)^2} + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mathcal{H} \bar{d}^* \frac{1}{d (z-d^*)^2} - \frac{2\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \mathcal{H} \bar{l}(z), \quad (3.234)$$

και

$$[f'_M(z)]^2 = \frac{\mathcal{H}^2}{(z-d)^4} + \frac{(\mu_M - \mu_I)^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \mathcal{H} \bar{d}^{*2} \frac{1}{d^2 (z-d^*)^4} + \frac{4\mu_I^2}{(\mu_M + \mu_I)^2} \mathcal{H} \bar{d}^2 [l(z)]^2 - 2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left| \mathcal{H} \right|^2 \frac{d^*}{d} \frac{1}{(z-d)^2 (z-d^*)^2} + \frac{4\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \left| \mathcal{H} \right|^2 \frac{l(z)}{(z-d)^2} - \frac{4\mu_I(\mu_M - \mu_I)}{(\mu_M + \mu_I)^2} \mathcal{H} \bar{d}^* \frac{d^*}{d} \frac{l(z)}{(z-d^*)^2}, \quad (3.235)$$

όπου

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{F}}^T R_S^2, \quad (3.236)$$

$$l(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2 \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{(zd)^{s+1}}. \quad (3.237)$$

Για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων των σχέσεων (3.232) και (3.233) χρησιμοποιούνται τα παρακάτω ολοκλήρωματα

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)^2(z-d^*)^2} dz = -\frac{4\pi i}{(d-d^*)^3}, \quad (3.238)$$

$$\int_{A_S} \frac{l(z)}{(z-d)^2} dz = -2\pi i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+3}}, \quad (3.239)$$

$$\int_{A_S} \frac{1}{(z-d)(z-d^*)^2} dz = \frac{2\pi i}{(d-d^*)^2}, \quad (3.240)$$

$$\int_{A_S} \frac{l(z)}{z-d} dz = 2\pi i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2 \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+2}}, \quad (3.241)$$

όπου $l(z)$ παρέχεται από την σχέση (3.237). Τα ολοκληρώματα αυτά προέκυψαν κάνοντας χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης. Τα υπόλοιπα ολοκληρώματα που εμπλέκονται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών είναι μηδενικά. Βρίσκεται ότι

$$\begin{aligned} (J_1 - iJ_2)^S &= -16\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{H}|^2 \frac{d^*}{d(d-d^*)^3} \\ &+ 16\pi \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{H}|^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+3}}, \end{aligned} \quad (3.242)$$

και

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_3 - i\mathcal{M})_{O^*}^S &= -8\pi i \mu_M |\mathcal{H}|^2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{d^*}{d(d+d^*)^2} \\ &+ 16\pi i \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{H}|^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2 \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s \mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+2}}, \end{aligned} \quad (3.243)$$

από όπου

$$J_1^S = -4\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^3} + 4\pi \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 R_S^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+3}}, \quad (3.244)$$

$$\mathcal{M}_{O^*}^S = 2\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*}{d(d-d^*)^2} - 4\pi \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 R_S^4 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s^2 \mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+2}}, \quad (3.245)$$

και

$$J_2^S = 0, \quad L_{3,O^*}^S = 0. \quad (3.246)$$

Ισχύει ότι $J_1^S = -J_1^I$ και $\mathcal{M}_O^S = -\mathcal{M}_O^I$. Κάνοντας χρήση της σχέσης $\mathcal{M}_O^I = -\mathcal{M}_{O^*}^S - dJ_1^S$, προκύπτει

$$\mathcal{M}_O^S = -2\pi \frac{\mu_M(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_S^4 d^*(d+d^*)}{d(d-d^*)^3} + 4\pi \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I} |\mathcal{F}^T|^2 R_S^4 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2(s+1)\mu_M \mu_I k_3}{R_I(\mu_M + \mu_I) + s\mu_M \mu_I k_3} \frac{R_I^{2s}}{d^{2s+2}}. \quad (3.247)$$

Όταν $k_3 = 0$, οι παραπάνω σχέσεις ανάγονται σε αυτές που υπολογίστηκαν προηγουμένα για τέλεια διεπιφάνεια.

3.7 Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση

Στην ενότητα αυτή, με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις των ελαστικών πεδίων και ενεργειακών ποσοτήτων του ελαστικού συστήματος του Σχήματος 3.1, που προέκυψαν προηγουμένα, διερευνάται αριθμητικά η εντατική και ενεργειακή αλληλεπίδραση μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας, για όλες τις περιπτώσεις που θεωρήθηκαν. Συγκεκριμένα, διερευνάται η επίδραση των διαφόρων μηχανικών και γεωμετρικών παραμέτρων του ελαστικού συστήματος πάνω στην συγκέντρωση τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλωβισμό, στην κατανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις

φάσεις του συστήματος, και στις ενεργειακές ποσότητες που περιγράφουν την ενεργειακή αλληλεπίδραση εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας. Οι ενεργειακές αυτές ποσότητες είναι τα J_k - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα και η κινούσα δύναμη μίας διεπιφάνειας.

3.7.1 Συγκέντρωση τάσεων γύρω από ανομοιογένεια και εγκλώβισμα

Στα Σχήματα D.1 και D.2 παρουσιάζεται η μεταβολή των εφαπτομενικών τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση του διαφασικού υλικού του Σχήματος 3.1, όταν οι ακτίνες εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας είναι ίσες ($R_I = R_S$). Τα διαγράμματα αυτά έχουν υπολογισθεί από τις εκφράσεις των τάσεων που παρέχονται από τις σχέσεις (B.5) και (B.8) του Παραρτήματος Β. Οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta)$ και $\sigma_{\theta 3}^M(R_S, \theta^*)$, γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα, αντίστοιχα, αναφέρονται ως προς τα κυλινδρικά συστήματα συντεταγμένων (r, θ, x_3) και (r^*, θ^*, x_3) που δείχνονται στο Σχήμα 3.1. Τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών έχουν υπολογισθεί για $\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $\mu_I / \mu_M = 0, 1/2, 1, 3/2$ και 2 , και για μία απόσταση μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος ίση με R_I , που αντιστοιχεί σε $d = 3R_I$. Τα διαγράμματα του Σχήματος D.1(α) δείχνουν ότι η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta)$ γύρω από την ανομοιογένεια γίνεται μέγιστη στην θέση $\theta \cong 17^\circ$ της διεπιφάνειας, όταν $\mu_I / \mu_M = 0$ (κυλινδρική κοιλότητα). Η μέγιστη τιμή του λόγου $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta) / \mu_M |\varepsilon_{13}^T|$ ορίζει τον συντελεστή συγκέντρωσης της εφαπτομενικής τάσης, γύρω από την ανομοιογένεια, αναφορικά με την τάση αναφοράς $\mu_M |\varepsilon_{13}^T|$. Επίσης, από τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών προκύπτει ότι ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια μειώνεται με την αύξηση της σκληρότητας της ανομοιογένειας, δηλαδή, με την αύξηση του μέτρου διάτμησής της. Από τα διαγράμματα του Σχήματος D.1(β) προκύπτει ότι η εφαπτομενική διατμητική τάση $\sigma_{\theta 3}^M(R_S, \theta^*)$ γύρω από το εγκλώβισμα γίνεται μέγιστη στη θέση $\theta \cong -46^\circ$ της διεπιφάνειας, που αντιστοιχεί στην τιμή $\mu_I / \mu_M = 0$ (κυλινδρική κοιλότητα). Η μέγιστη τιμή του λόγου

$\sigma_{\theta^*3}^M(R_S, \theta^*) / \mu_M |\varepsilon_{13}^T|$ ορίζει τον συντελεστή συγκέντρωσης της εφαπτομενικής τάσης, γύρω από το εγκλώβισμα, αναφορικά με την τάση αναφοράς $\mu_M |\varepsilon_{13}^T|$. Τα διαγράμματα του Σχήματος D.1(β), δείχνουν ότι η παρουσία της ανομοιογένειας, ελάχιστα επηρεάζει τον συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων γύρω από το εγκλώβισμα.

Τα διαγράμματα του Σχήματος D.2 έχουν υπολογισθεί για $d = 2R_l$, που αντιστοιχεί στην επαφή ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος. Οι υπόλοιπες γεωμετρικές και ελαστικές παραμέτρους του διφασικού υλικού είναι αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό των διαγραμμάτων του Σχήματος D.1. Από το Σχήμα D.2(α), προκύπτει ότι, η μέγιστη εφαπτομενική τάση γύρω από την ανομοιογένεια εμφανίζεται στη θέση $\theta \cong 11^\circ$ και αντιστοιχεί στην τιμή $\mu_l / \mu_M = 0$ (κυλινδρική κοιλότητα). Όπως αναμενόταν, η μέγιστη αυτή τιμή είναι σημαντικά αυξημένη σε σχέση με την αντίστοιχη μέγιστη τιμή που εμφανίζεται στα αντίστοιχα διαγράμματα του Σχήματος D.1. Τα διαγράμματα του Σχήματος D.2(β) δείχνουν ότι το μέτρο διάτμησης της ανομοιογένειας, με εξαίρεση μία μικρή περιοχή εκατέρωθεν του σημείου επαφής ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος, ελάχιστα επηρεάζει τις εφαπτομενικές τάσεις γύρω από το εγκλώβισμα. Από την σύγκριση των εφαπτομενικών τάσεων των διαγραμμάτων των Σχημάτων D.2(α) και D.2(β) προκύπτει ότι ισχύει $\sigma_{\theta^*3}^M(\theta = 180^\circ) = \sigma_{\theta^*3}^M(\theta = -180^\circ) = -\sigma_{\theta^*3}^M(\theta = 0^\circ)$ για όλες τις καμπύλες. Το γεγονός αυτό αποτελεί έναν έλεγχο της ορθότητας της λύσης που έχει εξαχθεί στο σχετικό ελαστικό πρόβλημα.

Στα Σχήματα D.3 και D.4 εξετάζεται η επίδραση του μεγέθους του εγκλωβίσματος πάνω στην συγκέντρωση τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για ακτίνα εγκλωβίσματος τριπλάσια της ακτίνας της ανομοιογένειας ($R_S = 3R_l$). Τα διαγράμματα του Σχήματος D.3 αντιστοιχούν σε μία απόσταση εγκλωβίσματος-ανομοιογένειας ίση με R_l ($d = 5R_l$), ενώ τα διαγράμματα του Σχήματος D.4 αντιστοιχούν στην επαφή ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος ($d = 4R_l$). Για τον υπολογισμό των διαγραμμάτων αυτών, οι υπόλοιπες παράμετροι του διφασικού συστήματος είναι αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στον υπολογισμό των διαγραμμάτων των Σχημάτων D.1 και D.2. Από την σύγκριση των διαγραμμάτων των Σχημάτων D.3(α),

D.4(α) με τα αντίστοιχα διαγράμματα των Σχημάτων D.1(α) και D.2(α), συνάγεται ότι ο τριπλασιασμός της ακτίνας του εγκλωβίσματος, για την απόσταση εγκλωβίσματος-ανομοιογένειας, επιφέρει μία σημαντική αύξηση του συντελεστή συγκέντρωσης τάσεων γύρω από την ανομοιογένεια, που φτάνει στην περίπτωση της οπής το ποσοστό 100%. Όπως είναι αναμενόμενο, η επίδραση της αύξησης του μεγέθους του εγκλωβίσματος πάνω στην συγκέντρωση τάσεων γύρω του είναι ασήμαντη.

Σε όλα τα προηγούμενα διαγράμματα, παρουσιάζονται δύο διεπιφανειακά σημεία στην ανομοιογένεια και στο εγκλώβισμα, στα οποία οι διεπιφανειακές εφαιπτομενικές τάσεις είναι ανεξάρτητες του λόγου των μέτρων μ_I / μ_M . Όπως προκύπτει από τις εξισώσεις B.5 και B.8, η θέση των σημείων αυτών πάνω στις διεπιφάνειες ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, προκύπτει, αντίστοιχα, από την λύση των παρακάτω τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\varepsilon_{13}^T (R_I^2 - d^{*2}) \sin \theta + \varepsilon_{23}^T [(R_I^2 + d^{*2}) \cos \theta - 2R_I d^*] = 0,$$

$$\varepsilon_{13}^T (R_S^2 - D^2) \sin \theta + \varepsilon_{23}^T [(R_S^2 + D^2) \cos \theta - 2R_S D] = 0.$$

3.7.2 Ελαστική ενέργεια και κατανομή της στο ελαστικό σύστημα

Στα Σχήματα D.5, D.7 δείχνονται οι κανονικοποιημένες τιμές E/E_0 της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο σύστημα του Σχήματος 3.1, καθώς και των κατανομών της E^I/E_0 , E^M/E_0 , E^S/E_0 που αποθηκεύονται στην ανομοιογένεια, στην μήτρα, και στο εγκλώβισμα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης απόστασης x/R_I μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας. Οι τιμές αυτές έχουν υπολογισθεί για συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος και για ίδιο μέγεθος εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας ($R_S = R_I$). Η συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από μία ισόογκη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος ($F \neq 0, G = 0$ ή $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T = 0$). Τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών έχουν υπολογισθεί για $\kappa_I = \kappa_M = 2$. Τα αντίστοιχα διαγράμματα για την αντιεπίπεδη

κατάσταση του συστήματος δείχνονται στα Σχήματα D.13 και D.15. Για τα διαγράμματα αυτά, η αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος θεωρείται ότι προέρχεται από διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{31}^T, \varepsilon_{32}^T$ ίσου μεγέθους ($\varepsilon_{32}^T = \varepsilon_{31}^T$). Για την κανονικοποίηση των τιμών των ελαστικών ενεργειών της συνεπίπεδης κατάστασης έχει ληφθεί ως ενέργεια αναφοράς η τιμή $E_0 = \pi R_S^2 M_M F^2 / 2$, όπου $F = 2\varepsilon_{11}^T$ και $M_M = 2\mu_M / (1 + \kappa_M)$. Η τιμή αυτή αντιπροσωπεύει την τιμή της ολικής ενέργειας του συστήματος, όταν απουσιάζει η ανομοιογένεια ($\mu_I = \mu_M$). Για την αντιεπίπεδη κατάσταση, η αντίστοιχη τιμή της ενέργειας αναφοράς έχει ληφθεί ίση με $E_0 = \pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2$, όπου $|\mathcal{Z}^T|^2 = 2(\varepsilon_{31}^T)^2$. Τα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων έχουν υπολογισθεί για μία μαλακή και μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M / 3$ και $\mu_I = 3\mu_M$, αντίστοιχα, καθώς και για τις ειδικές περιπτώσεις μίας κυλινδρικής κοιλότητας ($\mu_I = 0$) και μίας απολύτως στερεής ανομοιογένειας ($\mu_I \cong \infty$). Στα Σχήματα D.9, D.11 και D17, D19 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα του συστήματος του Σχήματος 3.1, όταν $R_S = 3R_I$. Τα διαγράμματα αυτά έχουν προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τα δεδομένα φόρτισης και μηχανικών χαρακτηριστικών των αντίστοιχων διαγραμμάτων των παραπάνω σχημάτων που αντιστοιχούν σε $R_I = R_S$.

Όταν η ανομοιογένεια απουσιάζει από το σύστημα, όταν δηλαδή $\mu_I = \mu_M$, τότε η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα δηλώνεται με E_0 και οι κατανομές της στα πεδία που αντιστοιχούν στην ανομοιογένεια, μήτρα και εγκλωβίσμα, με E_0^I, E_0^M, E_0^S , αντίστοιχα. Όταν η ανομοιογένεια εμφανισθεί στο σύστημα, η ολική ελαστική ενέργεια και οι κατανομές της στα τρία πεδία του συστήματος υφίστανται μεταβολές $\Delta E (= E - E_0)$ και $\Delta E^I (= E^I - E_0^I)$, $\Delta E^M (= E^M - E_0^M)$, $\Delta E^S (= E^S - E_0^S)$, αντίστοιχα. Στα Σχήματα D.6, D.8 και D.10, D.12 δείχνονται οι κανονικοποιημένες τιμές των ενεργειακών μεταβολών $\Delta E / E_0$, $\Delta E^I / E_0$, $\Delta E^M / E_0$, $\Delta E^S / E_0$, σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης απόστασης x / R_I μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας. Τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών αντιστοιχούν στην ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του

εγκλωβίσματος και έχουν προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τα δεδομένα γεωμετρίας, φόρτισης και μηχανικών χαρακτηριστικών των αντίστοιχων διαγράμμάτων των Σχημάτων D.5, D.7 και D.9, D.11. Για την αντεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος, τα αντίστοιχα διαγράμματα των ενεργειακών μεταβολών δείχνονται στα Σχήματα D.14, D.16 και D.18, D.20.

Από τα διαγράμματα των Σχημάτων D.5-D.20 εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η ελαστική αλληλεπίδραση ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος σχεδόν εξαφανίζεται, όταν η μεταξύ τους απόσταση υπερβεί το διπλάσιο της διάστασης του εγκλωβίσματος. Στην αντεπίπεδη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος και για μεγάλη απόσταση ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος, η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος ισοδιανέμεται μεταξύ μήτρας και εγκλωβίσματος. Στην ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος και για μεγάλη απόσταση ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα είναι διπλάσια από αυτήν που αποθηκεύεται στο εγκλωβισμό.
- Όταν η ανομοιογένεια απουσιάζει από το σύστημα, τότε, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα είναι $E_0 = \pi R_S^2 M_M F^2 / 2$, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος και $E_0 = \pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2$, για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από τις (3.52) και (3.137), θέτοντας $\mu_I = \mu_M$. Η εμφάνιση μίας σκληρής ανομοιογένειας δίπλα από το εγκλωβισμό αυξάνει πάντα την ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος. Το αντίθετο συμβαίνει με την εμφάνιση μίας μαλακής ανομοιογένειας. Με άλλα λόγια, λόγω εμφάνισης της ανομοιογένειας, η μεταβολή της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος $\Delta E (= E - E_0)$ είναι πάντα αρνητική, όταν $\mu_I > \mu_M$, και θετική, όταν $\mu_I < \mu_M$. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, η απόλυτη τιμή $|\Delta E|$ της μεταβολής της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος αυξάνει με την αύξηση του μεγέθους της ανομοιογένειας προσεγγίζοντας ένα άνω φράγμα. Το φράγμα αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση που η ανομοιογένεια καθίσταται ένας ελαστικός ημιχώρος. Αυτό συμβαίνει, όταν η ακτίνα της ανομοιογένειας τείνει

στο άπειρο με την απόσταση των δύο διεπιφανειών να παραμένει σταθερή. Τότε η κυλινδρική ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται δύο ελαστικοί ημίχωροι που είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους διά μέσου μίας επίπεδης διεπιφάνειας κάθετης στον άξονα x_1 του συστήματος συντεταγμένων. Για την ισόογκη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος, το άνω φράγμα της $|\Delta E|$ είναι $0.5E_0$, ενώ για την αντεπίπεδη ιδιο-παραμόρφωση, $0.25E_0$. Τα δύο αυτά φράγματα αντιστοιχούν στην περίπτωση που το εγκλωβίσμα εφάπτεται με ένα επίπεδο σύνορο ενός ελαστικού ημιχώρου ($\mu_I = 0$, $\mu_M \neq 0$), ή με μία επίπεδη διεπιφάνεια που βρίσκεται μεταξύ ενός απολύτως στερεού και ενός ελαστικού ημιχώρου ($\mu_I = \infty$, $\mu_M \neq 0$).

- Όπως προαναφέρθηκε, λόγω εμφάνισης της ανομοιογένειας στο σύστημα, η μεταβολή ΔE της ολικής ελαστικής του ενέργειας είναι πάντα θετική, όταν $\mu_I > \mu_M$, και αρνητική όταν $\mu_I < \mu_M$.
- Η μεταβολή ΔE^I της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια είναι πάντα αρνητική, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικών και γεωμετρικών παραμέτρων του συστήματος και για οποιοδήποτε ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης της ανομοιογένειας. Η μεταβολή αυτή, κατά απόλυτη τιμή, έχει άνω φράγμα το $0.125E_0$ για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση και $0.25E_0$, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος. Τα δύο αυτά φράγματα αντιστοιχούν στην ειδική περίπτωση που η ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται ελαστικοί ημιχώροι, με την ανομοιογένεια να έχει συμπεριφορά κενού ($\mu_I = 0$) ή απολύτως στερεού σώματος ($\mu_I = \infty$).
- Στην αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, η μεταβολή ΔE^M της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην μήτρα είναι πάντα θετική, για οποιοδήποτε συνδυασμό ελαστικών και γεωμετρικών παραμέτρων του συστήματος. Η μεταβολή αυτή έχει ως άνω φράγμα την τιμή $0.069E_0$. Στην ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, η μεταβολή ΔE^M είναι πάντα

θετική για μία σκληρή ανομοιογένεια, και πάντα αρνητική για μία μαλακή ανομοιογένεια. Στην περίπτωση αυτή, η μεταβολή ΔE^M , κατά απόλυτη τιμή, έχει άνω φράγμα την τιμή $0.305E_0$, για μία μαλακή ανομοιογένεια και την τιμή $0.693E_0$, για μία σκληρή ανομοιογένεια. Τα φράγματα αυτά αντιστοιχούν στην ειδική περίπτωση που η ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται ελαστικοί ημιχώροι, με την ανομοιογένεια να έχει συμπεριφορά κενού ($\mu_l = 0$) ή απολύτως στερεού σώματος ($\mu_l = \infty$).

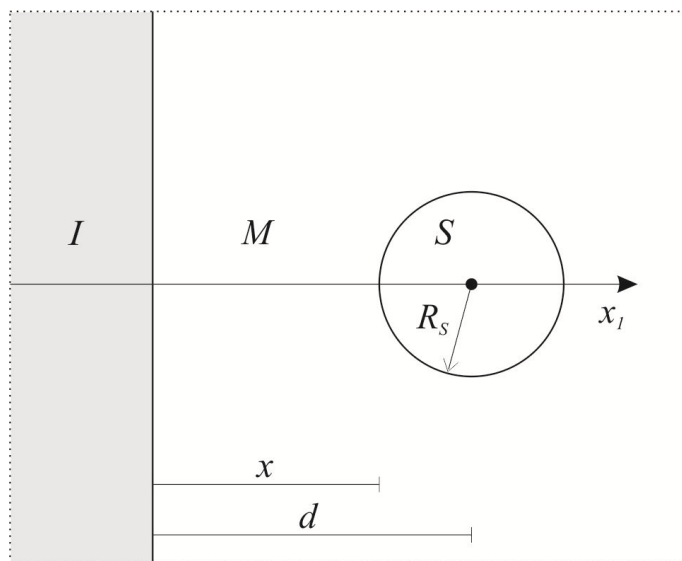
- Στην αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, η μεταβολή ΔE^S της ελαστικής ενέργειας στο εγκλώβισμα είναι πάντα αρνητική για μαλακή ανομοιογένεια και πάντα θετική για σκληρή ανομοιογένεια. Η μεταβολή ΔE^S , κατά απόλυτη τιμή, έχει άνω φράγμα την τιμή $0.194E_0$, για μία μαλακή ανομοιογένεια και την τιμή $0.305E_0$, για μία σκληρή ανομοιογένεια.

Τα άνω φράγματα των μεταβολών των ελαστικών ενεργειών που καταγράφηκαν παραπάνω αριθμητικά, επιβεβαιώνονται και αναλυτικά θεωρώντας την ειδική περίπτωση που η κυλινδρική ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται δυο ελαστικοί ημίχωροι. Όταν η ακτίνα R_l της ανομοιογένειας τείνει στο άπειρο με την απόσταση $x (= d - R_l - R_s)$ των δύο διεπιφανειών να παραμένει σταθερή, η κυλινδρική ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται δύο ελαστικοί ημίχωροι που είναι συνδεδεμένοι διά μέσου μίας επίπεδης διεπιφάνειας κάθετης στον άξονα x_1 του συστήματος συντεταγμένων. Στην περίπτωση αυτή, που οι ολικές ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα του Σχήματος 3.2, για αντεπίπεδη ιδιο-παραμόρφωση και για ισόογκη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος, αντίστοιχα, παρέχονται από τις σχέσεις

$$E = \pi R_s^2 \left[1 - \frac{\mu_M - \mu_l}{\mu_M + \mu_l} \frac{R_s^2}{4(x + R_s)^2} \right] \mu_M |E^T|^2,$$

$$E = \frac{\pi R_s^2}{2} \left[1 + 2\Pi \frac{R_s^2}{4(x + R_s)^2} \right] M_M F^2.$$

Οι σχέσεις αυτές εξάγονται από τις (3.137) και (3.52) θεωρώντας το όριο των ολικών



Σχήμα 3.2: Το ελαστικό σύστημα εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας στην ειδική περίπτωση του ημιχώρου.

ελαστικών ενεργειών E , όταν $R_I \rightarrow \infty$ με την απόσταση $x (= d - R_I - R_S)$ να παραμένει σταθερή. Στην ειδική αυτή περίπτωση, οι μεταβολές των ελαστικών ενεργειών στις τρεις φάσεις του συστήματος, για την αντιεπίπεδη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος, παρέχονται από τις σχέσεις

$$\Delta E^I = -\frac{\pi R_S^2}{8} \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^2}{(x + R_S)^2} \mu_M |E^T|^2,$$

$$\Delta E^M = \frac{\pi R_S^2}{2} \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \left[\frac{R_S^2}{4(x + R_S)^2} - \frac{R_S^4}{[R_S^2 - 4(x + R_S)^2]^2} \right] \mu_M |E^T|^2,$$

$$\Delta E^S = \frac{\pi R_S^2}{2} \left[-2 \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{4(x + R_S)^2} + \left(\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \right)^2 \frac{R_S^4}{[R_S^2 - 4(x + R_S)^2]^2} \right] \mu_M |E^T|^2.$$

Οι σχέσεις αυτές εξάγονται από τις (3.150)-(3.152) θεωρώντας το όριο των σχετικών μεταβολών, όταν $R_I \rightarrow \infty$ με το $x (= d - R_I - R_S)$ να παραμένει σταθερό. Τα όρια των παραπάνω σχέσεων, όταν $x = 0$ και $\mu_I \rightarrow \infty$ ή $\mu_I \rightarrow 0$, συμφωνούν με τα φράγματα των ενεργειακών ποσοτήτων που καταγράφηκαν αριθμητικά παραπάνω για την αντιεπίπεδη ιδιο-παραμόρφωση του εγκλωβίσματος.

3.7.3 J_I - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα

Τα Σχήματα D.21-D.24 δείχνουν την μεταβολή της κανονικοποιημένης τιμής $J_I^I / J_0 (= J_1^S / J_0)$ της ενεργειακής δύναμης που επενεργεί πάνω στην ανομοιογένεια (εγκλώβισμα), σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης d / R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για $R_I = R_S / 2$, R_S και $2R_S$. Για την κανονικοποίηση, έχει ληφθεί ως ενεργειακή δύναμη αναφοράς η ποσότητα $J_0 = 4\pi R_S M_M F^2$ για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, και η ποσότητα $J_0 = 4\pi R_S \mu_M |E^T|^2$ για την αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωσή του. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.89), (3.164) που έχουν εξαχθεί προηγουμένα. Τα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων έχουν υπολογισθεί για μία μαλακή και μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M / 3$ και $\mu_I = 3\mu_M$, αντιστοίχως, και για τις ειδικές περιπτώσεις της κυλινδρικής κοιλότητας ($\mu_I = 0$) και της απολύτως στερεής ανομοιογένειας ($\mu_I = \infty$). Στον υπολογισμό των διαγραμμάτων της ισόογκης ιδιοπαραμόρφωσης του εγκλωβίσματος έχει ληφθεί $\kappa_I = \kappa_M = 2$.

Από τα διαγράμματα των Σχημάτων D.21-D.24 αυτών εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι καμπύλες των διαγραμμάτων αυτών δείχνουν ότι η τιμή της ενεργειακής δύναμης εξασθενεί σε μία πολύ μικρή απόσταση μεταξύ της ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος. Όπως συμβαίνει και με την ελαστική ενέργεια

αλληλεπίδρασης, η απόσταση αυτή αντιστοιχεί στο διπλάσιο, περίπου, του μεγέθους του εγκλωβίσματος.

- Τα πρώτα σημεία των καμπυλών των διαγραμμάτων αντιστοιχούν στις, κατά απόλυτη τιμή, μέγιστες τιμές της ενεργειακής δύναμης. Οι μέγιστες αυτές τιμές αντιστοιχούν στην επαφή της ανομοιογένειας με το εγκλώβισμα.
- Η ενεργειακή δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος είναι πάντα ελκτική για μία μαλακή ανομοιογένεια, και πάντα απωστική για μία σκληρή ανομοιογένεια.
- Όταν η κυλινδρική ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται ελαστικοί ημίχωροι, οι ενεργειακές δυνάμεις που εξασκούνται στο εγκλώβισμα και στο σύνορο των δύο ημιχώρων παρέχονται με την σχέση

$$J_1^S = -J_1^I = \frac{\pi \Pi R_S^4}{2(R_S + x)^3} M_M F^2,$$

για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, και με την σχέση

$$J_1^S = -J_1^I = -\frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\pi R_S^4}{2(R_S + x)^3} \mu_M |\mathcal{E}^T|^2,$$

για την αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωσή του. Οι σχέσεις αυτές έχουν εξαχθεί από τις σχέσεις (3.89), (3.164), όταν η ακτίνα R_I της ανομοιογένειας τείνει στο άπειρο, με την απόσταση x μεταξύ των δύο διεπιφανειών να παραμένει σταθερή.

Τα Σχήματα D.25-D.32 δείχνουν τις μεταβολές των κανονικοποιημένων τιμών $\mathcal{M}_O^I / \mathcal{M}_O$, $\mathcal{M}_O^S / \mathcal{M}_O$ των \mathcal{M} -ολοκληρώματων γύρω από την ανομοιογένεια και το εγκλώβισμα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση της μεταξύ τους ανηγμένης απόστασης d / R_I , για $R_I = R_S / 2$, R_S και $2R_S$. Για την κανονικοποίηση, έχει ληφθεί ως ολοκλήρωμα αναφοράς, η ποσότητα $\mathcal{M}_O = 2\pi R_I^2 M_M F^2$ για την την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του

εγκλωβίσματος, και η ποσότητα $\mathcal{M}_0 = 2\pi R_I^2 \mu_M |E^T|^2$, για την αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωσή του. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.115), (3.172) που έχουν εξαχθεί προηγούμενα. Τα διαγράμματα των παραπάνω σχημάτων έχουν υπολογισθεί για μία μαλακή και μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M / 3$ και $\mu_I = 3\mu_M$, αντιστοίχως, και για τις ειδικές περιπτώσεις της κυλινδρικής κοιλότητας ($\mu_I = 0$) και της απολύτως στερεής ανομοιογένειας ($\mu_I = \infty$). Για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, τα διαγράμματα έχουν υπολογισθεί για $\kappa_M = \kappa_I = 2$. Από τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όπως και στην περίπτωση των διαγραμμάτων των ενεργειακών δυνάμεων, τα αρχικά σημεία των καμπυλών, αντιπροσωπεύουν τις, κατά απόλυτη τιμή, μέγιστες τιμές των ποσοτήτων \mathcal{M}_0^I και \mathcal{M}_0^S , που αντιστοιχούν στην επαφή ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος.
- Η ομοιόθετη αύξηση της ανομοιογένειας, ανεξάρτητα από τις τιμές των ιδιοπαραμορφώσεων, προκαλεί πάντα μείωση της ελαστικής ενέργειας του συστήματος για μία μαλακή ανομοιογένεια και πάντα αύξηση της ελαστικής ενέργειας για μία σκληρή ανομοιογένεια. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν για την περίπτωση μίας ομοιόθετης αύξησης του εγκλωβίσματος.
- Όταν η κυλινδρική ανομοιογένεια και η μήτρα καθίστανται ελαστικοί ημίχωροι, το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα του εγκλωβίσματος παρέχεται με την σχέση

$$\mathcal{M}_{0^*}^S = -\frac{\pi \Pi R_S^4}{2(R_S + x)^2} M_M F^2,$$

για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, και με την σχέση

$$\mathcal{M}_{0^*}^S = \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{\pi R_S^4}{2(R_S + x)^2} \mu_M |E^T|^2,$$

για την αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωσή του. Οι σχέσεις αυτές έχουν εξαχθεί κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.115), (3.172) θέτοντας την ακτίνα R_I στο άπειρο και διατηρώντας την απόσταση x , μεταξύ των διεπιφανειών, σταθερή.

3.7.4 Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες

Στο Σχήμα D.33, παρουσιάζονται οι κανονικοποιημένες τιμές $f_r^I / (\mu_M |E^T|^2)$, $f_{r^*}^S / (\mu_M |E^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων που επενεργούν πάνω στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και μήτρας-εγκλωβίσματος, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές προέκυψαν από τις σχέσεις (3.186) και (3.176), για $d = 2.5R_I, 3.5R_I, 4.5R_I$, όταν $\mu_M / \mu_I = 3$ (σκληρή ανομοιογένεια), $R_S / R_I = 1.5$, $\varepsilon_{r^*3}^T \neq 0$, $\varepsilon_{\theta^*3}^T = 0$ ($|E^T|^2 = (\varepsilon_{r^*3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta^*3}^T)^2$). Από τις καμπύλες των διαγραμμάτων αυτών γίνεται φανερό ότι οι κινούσες δυνάμεις παρουσιάζουν εντονότερες μεταβολές στις περιοχές των διεπιφανειών που βρίσκονται αντικρυστά. Η κινούσα δύναμη στο εγκλώβισμα κατευθύνεται πάντα στο εσωτερικό του, με μειωμένη ένταση στην περιοχή που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια. Στην ανομοιογένεια και στην περιοχή που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα, η κινούσα δύναμη κατευθύνεται στο εξωτερικό του. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση της σκληρής ανομοιογένειας, η ανομοιογένεια έχει την τάση να αυξήσει τον όγκο της, με το τμήμα της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα να έχει την τάση να εισχωρήσει στην μήτρα. Αντίθετα, το εγκλώβισμα τείνει να μειώσει τον όγκο του, με το τμήμα της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια να έχει μειωμένη τάση μετακίνησης προς το εσωτερικό του, συγκρινόμενη με το υπόλοιπο διεπιφανειακό τμήμα.

Στο Σχήμα D.34 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 1/3$, χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους φόρτισης και γεωμετρίας. Όπως στην περίπτωση της σκληρής ανομοιογένειας, η κινούσα δύναμη στο εγκλώβισμα κατευθύνεται στο εσωτερικό του σε όλο το μήκος της διεπιφάνειας, με αυξημένη όμως ένταση στην περιοχή που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια.

Στην ανομοιογένεια και στην περιοχή που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα, η κινούσα δύναμη κατευθύνεται στο εσωτερικό του. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας, η ανομοιογένεια έχει την τάση να μειώσει τον όγκο της, με το τμήμα της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα να έχει την τάση να εισχωρήσει στο εσωτερικό του. Αντίθετα, το εγκλώβισμα τείνει να μειώσει τον όγκο του, με το τμήμα της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια να έχει αυξημένη τάση μετακίνησης συγκρινόμενη με το υπόλοιπο διεπιφανειακό τμήμα.

Στα διαγράμματα του Σχήματος D.35 και D.36 παρουσιάζονται τα διαγράμματα των τιμών $f_r^I / (\mu_M |E^T|^2)$, $f_{r^*}^S / (\mu_M |E^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων, όταν $\varepsilon_{r^*3}^T = 0$ και $\varepsilon_{\theta^*3}^T \neq 0$, αντίστοιχα. Για την περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας με $\mu_M / \mu_I = 3$ (Σχήμα D.35), η κινούσα δύναμη στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας εξέρχεται από αυτήν και μεγιστοποιείται στην περιοχή της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα. Η κινούσα δύναμη στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας είναι εξερχόμενη από αυτήν και μεγιστοποιείται στην περιοχή που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές της κινούσας δύναμης στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με αυτές που αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας. Για σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 1/3$ (Σχήμα D.36), η κινούσα δύναμη στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας είναι εισερχόμενη στην ανομοιογένεια και μεγιστοποιείται στην περιοχή της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από το εγκλώβισμα. Στην διεπιφάνεια του εγκλωβίσματος-μήτρας, η κινούσα δύναμη εισέρχεται στο εγκλώβισμα και μεγιστοποιείται στην περιοχή της διεπιφάνειας που βρίσκεται απέναντι από την ανομοιογένεια. Όπως προηγούμενα, οι τιμές της κινούσας δύναμης στην διεπιφάνεια εγκλωβίσματος-μήτρας είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με αυτές που αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-μήτρας.

Κεφάλαιο 4

Ιδιοπαραμορφώσεις σε Δακτυλιοειδείς Ανομοιογένειες με Πυρήνα

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάται η διδιάστατη ελαστική παραμόρφωση ενός ελαστικού συστήματος που αποτελείται από μία άπειρη κυλινδρική δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με πυρήνα, όταν η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια ή ο πυρήνας καταπονούνται με σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις. Η ελαστική ανάλυση του συστήματος γίνεται στα πλαίσια της ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας και περιλαμβάνει: (i) τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται στο ελαστικό σύστημα, (ii) τον προσδιορισμό της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο σύστημα και στις επιμέρους φάσεις του, και (iii) την μελέτη της ενεργειακής αλληλεπίδρασης της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με τον πυρήνα και την μήτρα προσδιορίζοντας τις κινούσες δυνάμεις και τις ροπές επέκτασης (\mathcal{M} -ολοκληρώματα) των δύο διεπιφανειών του συστήματος.

Τα ελαστικά πεδία του συστήματος αποκτώνται σε κλειστή μορφή επιλύοντας τα σχετικά ελαστικά προβλήματα, ξεχωριστά, για συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις που αναπτύσσονται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια ή τον πυρήνα. Τα σχετικά ελαστικά προβλήματα ανάγονται σε ισοδύναμα προβλήματα εξάρμωσης Somigliana, των οποίων η λύση επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο των διαφασικών δυναμικών (Kattis, 1994; Kattis and Meguid, 1995; Kattis and Providas, 1998).

Η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελαστικό σύστημα προσδιορίζεται με βάση τις ισοδύναμες διεπιφανειακές εξαρμώσεις Somigliana, των ισοδύναμων προβλημάτων Somigliana. Με βάση τα ελαστικά πεδία, που αποκτήθηκαν, υπολογίζονται, σε κλειστή μορφή, οι ποσότητες της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύονται στις τρεις επιμέρους φάσεις του συστήματος.

Η ελαστική αλληλεπίδραση των τριών φάσεων του συστήματος μελετάται προσδιορίζοντας τις κινούσες δυνάμεις και τις ροπές επέκτασης (\mathcal{M} -ολοκληρώματα) που αναπτύσσονται στις δύο διεπιφάνειες του συστήματος. Για τον υπολογισμό των κινουσών δυνάμεων στις διεπιφάνειες του συστήματος εφαρμόζεται μία γενική σχέση που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας. Τα ελαστικά πεδία της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, που προσδιορίστηκαν, χρησιμοποιούνται για την ερμηνεία της επιφανειακής τάσης (surface tension) που αναπτύσσεται σε διεπιφάνειες μεταξύ ανόμοιων κρυσταλλικών υλικών.

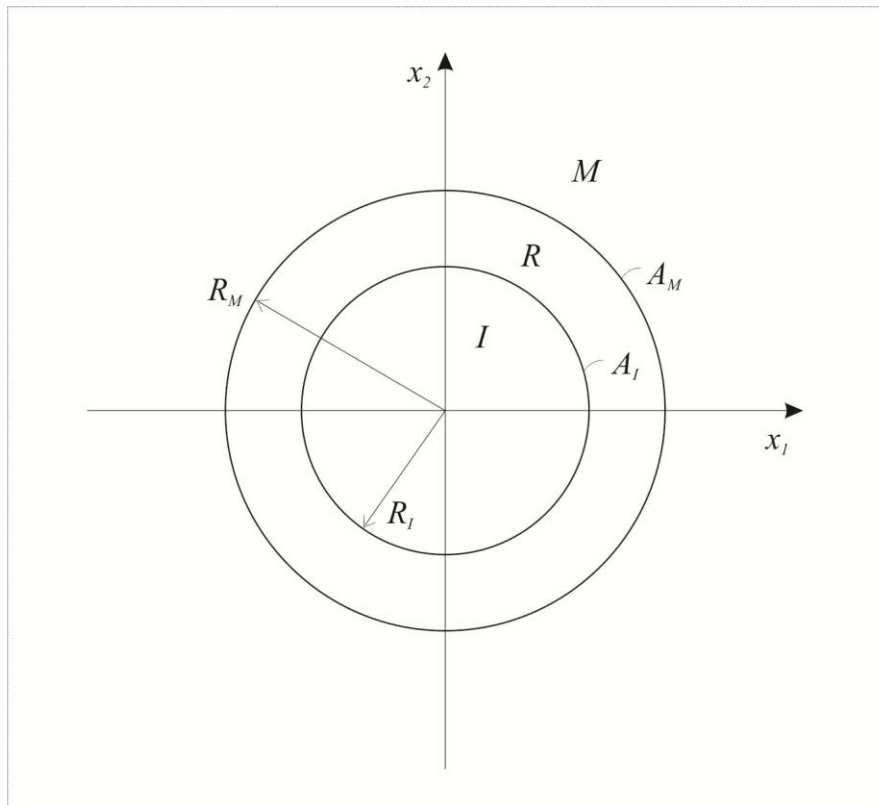
Στο κεφάλαιο αυτό, συζητάται εκτενώς, ένα αξιοσημείωτο νέο αποτέλεσμα που προέκυψε για μία κυλινδρική ελλειπτική δακτυλιοειδής ανομοιογένεια με πυρήνα, όταν υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης. Μία δακτυλιοειδής κυλινδρική ανομοιογένεια σε άπειρη μήτρα, της οποίας τα σύνορα είναι ομοεστιακές ελλείψεις, λειτουργεί ως μανδύας του πυρήνα, όταν καταπονείται με σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις και έχει τις ελαστικές ιδιότητες της μήτρας. Αυτό σημαίνει ότι ο πυρήνας δεν υφίσταται καμία ελαστική παραμόρφωση.

Τέλος, με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις που αποκτήθηκαν, γίνεται εκτεταμένη αριθμητική διερεύνηση της εντατικής και ενεργειακής κατάστασης του ελαστικού

συστήματος, για διάφορες τιμές των ελαστικών παραμέτρων και της γεωμετρίας του συστήματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων και συζητώνται εκτενώς.

4.2 Το μοντέλο της κυκλικής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και σχέσεις των διφασικών δυναμικών

Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθεί η συνεπίπεδη και η αντεπίπεδη παραμόρφωση του σύνθετου ελαστικού συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1 που προκαλείται από συγκεκριμένους τύπους μετασχηματισμού φάσεων που συμβαίνουν στα επιμέρους συστατικά του.



Σχήμα 4.1: Η μήτρα, η κυκλική δακτυλιοειδής ανομοιογένεια και ο πυρήνας.

Το ελαστικό σύστημα του Σχήματος 4.1 αποτελείται από ένα άπειρο ελαστικό μέσο, την μήτρα, που περιέχει μία κυλινδρική δακτυλιοειδή κυκλική ανομοιογένεια που περιβάλλει ένα κυλινδρικό ελαστικό μέσο. Το ελαστικό αυτό μέσο έχει άπειρο μήκος, κυκλική διατομή και αποτελεί τον πυρήνα της ανομοιογένειας. Οι ελαστικές αναλύσεις του συστήματος αυτού γίνονται αναφορικά με ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , του οποίου ο άξονας x_3 συμπίπτει με τον άξονα του πυρήνα. Στο Σχήμα 4.1, δείχνεται η τομή του ελαστικού συστήματος με ένα επίπεδο, που είναι κάθετο στον άξονα x_3 του συστήματος συντεταγμένων. Το επίπεδο αυτό θεωρείται ότι είναι ένα μιγαδικό z -επίπεδο, που συνδέεται με τους άξονες x_1 και x_2 του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $(z = x_1 + ix_2, i^2 = -1)$. Στο επίπεδο αυτό, με I , R και M , δηλώνονται οι ελαστικές περιοχές του πυρήνα, της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και της μήτρας, αντίστοιχα. Οι τρεις αυτές φάσεις του συστήματος θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν ελαστικά ισότροπα και ομογενή υλικά με διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Στο z -επίπεδο, τα ίχνη των κυλινδρικών διεπιφανειών πυρήνα-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας δηλώνονται με τις κυκλικές περιφέρειες A_I και A_M , των οποίων οι ακτίνες είναι R_I και R_M , αντίστοιχα. Επίσης, θεωρείται ότι, οι τρεις φάσεις του συστήματος είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε, στην αφόρτιστη κατάστασή τους, να είναι απαραμόρφωτες και χωρίς τάσεις. Η ελαστική ανάλυση του συστήματος γίνεται για δύο διαφορετικές φορτίσεις: (i) για σταθερές ιδιοπαμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια (περιοχή R), και (ii) για σταθερές ιδιοπαμορφώσεις στον πυρήνα (περιοχή I).

Για την ανάλυση της συνεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης του τριφασικού συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1, οι σχέσεις (A.8), (A.9) και (A.14), (A.15) του Παραρτήματος Α γράφονται στην παρακάτω εναλλακτική μορφή

$$\varphi_R(z) = \varphi_0(z), \quad \psi_R(z) = \psi_0(z), \quad (4.1)$$

$$\varphi_K(z) = L_{RK} \varphi_0(z) + (1 - P_{RK}) \left[z \bar{\varphi}'_0 \left(\frac{R_K^2}{z} \right) + \bar{\psi}'_0 \left(\frac{R_K^2}{z} \right) \right] + M_K \mathcal{U}_K \left(z, \frac{R_K^2}{z} \right), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_K(z) = & P_{RK}\psi_0(z) + (1-L_{RK})\bar{\varphi}_0\left(\frac{R_K^2}{z}\right) + (P_{RK} - L_{RK})\frac{R_K^2}{z}\varphi_0'(z) \\
 & - (1-P_{RK})\frac{R_K^2}{z}\frac{d}{dz}\left[z\bar{\varphi}_0'\left(\frac{R_K^2}{z}\right) + \bar{\psi}_0\left(\frac{R_K^2}{z}\right)\right] \\
 & - M_K\left[\bar{\mathcal{U}}_K\left(\frac{R_K^2}{z}, z\right) + \frac{R_K^2}{z}\frac{d}{dz}\mathcal{U}_K\left(z, \frac{R_K^2}{z}\right)\right],
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου $K = I$ ή M . Στις σχέσεις αυτές έχουν εισαχθεί οι παρακάτω διφασικές ελαστικές σταθερές

$$L_{RK} = \frac{\mu_R + \mu_K \kappa_R}{\mu_R + \mu_R \kappa_K}, \quad P_{RK} = \frac{\mu_K + \mu_R \kappa_K}{\mu_R + \mu_R \kappa_K}. \tag{4.4}$$

Οι σταθερές αυτές αποτελούν μία εναλλακτική μορφή των διφασικών σταθερών του Dundurs για τα μέσα R και K ($= I, M$) (Dundurs, 1970). Παρακάτω, το σύστημα αναλύεται ξεχωριστά για δύο περιπτώσεις: για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια (περίπτωση I), και για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα (περίπτωση II).

Για την ανάλυση του αντιπέδου προβλήματος του τριφασικού συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1, οι σχέσεις (A.16) και (A.17) του Παραρτήματος A χρησιμοποιούνται με την ακόλουθη εναλλακτική μορφή

$$f_R(z) = f_0(z), \tag{4.5}$$

$$f_K(z) = \Gamma_{KR}f_0(z) + \gamma_{KR}\bar{f}_0\left(\frac{R_K^2}{z}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{U}_K\left(z, \frac{R_K^2}{z}\right), \tag{4.6}$$

όπου

$$\Gamma_{KR} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu_R}{\mu_K}\right), \quad \gamma_{KR} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_R}{\mu_K}\right), \tag{4.7}$$

και $K = M, I$.

4.3 Συνεπίπεδη παραμόρφωση

4.3.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Η ανάλυση του ελαστικού συστήματος γίνεται πρώτα για την περίπτωση που η κυκλική δακτυλιοειδής ανομοιογένεια (περιοχή R) υφίσταται ένα ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται από τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{11}^T , ε_{22}^T , και ε_{12}^T . Η ιδιομετατόπιση, που παράγει τις ιδιοπαραμορφώσεις αυτές, έχει την παρακάτω μορφή

$$(u_1 + iu_2)^T = \frac{1}{2} Fz - \frac{1}{2} \bar{G}\bar{z}, \quad (4.8)$$

όπου

$$F = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T, \quad G = \varepsilon_{22}^T - \varepsilon_{11}^T + 2i\varepsilon_{12}^T. \quad (4.9)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την ολοκλήρωση των εξισώσεων της διδιάστατης ελαστικότητας

$$u_{1,1}^T = \varepsilon_{11}^T, \quad u_{2,2}^T = \varepsilon_{22}^T, \quad u_{1,2}^T + u_{2,1}^T = 2\varepsilon_{12}^T, \quad (4.10)$$

έχοντας παραλείψει τις σταθερές ολοκλήρωσης που αντιπροσωπεύουν μετατοπίσεις στερεού σώματος. Επειδή, στις διεπιφάνειες A_I και A_M , οι φάσεις του συστήματος είναι τέλεια συνδεδεμένες, ισχύει

$$(X_1 + iX_2)^R = (X_1 + iX_2)^M, \quad \text{στη διεπιφάνεια } A_M, \quad (4.11)$$

$$(u_1 + iu_2)^R + (u_1 + iu_2)^T = (u_1 + iu_2)^M, \quad \text{στη διεπιφάνεια } A_M, \quad (4.12)$$

και

$$(X_1 + iX_2)^R = (X_1 + iX_2)^I, \quad \text{στη διεπιφάνεια } A_I, \quad (4.13)$$

$$(u_1 + iu_2)^R + (u_1 + iu_2)^T = (u_1 + iu_2)^I, \quad \text{στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (4.8), οι σχέσεις (4.12) και (4.14) μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$(u_1 + iu_2)^M - (u_1 + iu_2)^R = \frac{1}{2}Fz - \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \quad (4.15)$$

$$(u_1 + iu_2)^I - (u_1 + iu_2)^R = \frac{1}{2}Fz - \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \text{ στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.16)$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις, σε συνδυασμό με τις (4.2) και (4.3), υπαγορεύουν ότι το συνεπίπεδο πρόβλημα που εξετάζεται έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα Somigliana με τις παρακάτω ασυνέχειες μετατοπίσεων

$$\mathcal{U}_M = (u_1 + iu_2)^M - (u_1 + iu_2)^R = \frac{1}{2}Fz - \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \quad (4.17)$$

$$\mathcal{U}_I = (u_1 + iu_2)^I - (u_1 + iu_2)^R = \frac{1}{2}Fz - \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \text{ στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.18)$$

Για την παραπάνω μορφή των συναρτήσεων \mathcal{U}_K ($K = M$ ή I), τα διαφορικά δυναμικά $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ του ελαστικού συστήματος, που υπεισέρχονται στις σχέσεις (4.1)-(4.3), αναζητούνται στη μορφή

$$\varphi_0(z) = a_3 z^3 + a_1 z + \frac{a_{-1}}{z}, \quad (4.19)$$

$$\psi_0(z) = b_1 z + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-3}}{z^3}, \quad (4.20)$$

όπου a_1, a_3, a_{-1} και b_1, b_{-1}, b_{-3} είναι μιγαδικές σταθερές που προσδιορίζονται παρακάτω. Αντικαθιστώντας τις (4.19), (4.20) και (4.17), (4.18) στις (4.2), (4.3) και απαιτώντας τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ να παρέχουν μηδενικές τάσεις στο άπειρο, προκύπτουν οι σχέσεις

$$R_M^6 L_{RM} a_3 - (1 - P_{RM}) R_M^2 \bar{a}_{-1} + (1 - P_{RM}) \bar{b}_{-3} = 0, \quad (4.21)$$

$$R_M^2 L_{RM} a_1 + (1 - P_{RM}) R_M^2 \bar{a}_1 + (1 - P_{RM}) \bar{b}_{-1} = -R_M^2 \frac{M_M}{2} F, \quad (4.22)$$

$$3R_M^6 (P_{RM} - L_{RM}) a_3 + R_M^2 (4 - L_{RM} - 3P_{RM}) \bar{a}_{-1} + R_M^4 P_{RM} b_1 - 3(1 - P_{RM}) \bar{b}_{-3} = -R_M^4 \frac{M_M}{2} G. \quad (4.23)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ένα σύστημα τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των άγνωστων μιγαδικών σταθερών που υπεισέρχονται στα διαφορικά δυναμικά (4.19) και (4.20). Οι υπόλοιπες τρεις εξισώσεις προκύπτουν απαιτώντας τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_I(z)$ και $\psi_I(z)$ να παρέχουν στον πυρήνα πεπερασμένες τάσεις. Η απαίτηση αυτή εξασφαλίζεται όταν

$$3R_I^4(1-P_{RI})\bar{a}_3 + L_{RI}a_{-1} + R_I^2(1-P_{RI})\bar{b}_1 = R_I^2 \frac{M_I}{2} \bar{G}, \quad (4.24)$$

$$R_I^2(P_{RI} - L_{RI})a_1 + R_I^2(P_{RI} - L_{RI})\bar{a}_1 + P_{RI}b_{-1} - (1-P_{RI})\bar{b}_{-1} = R_I^2 M_I F, \quad (4.25)$$

$$R_I^6(4-L_{RI}-3P_{RI})\bar{a}_3 - R_I^2(P_{RI} - L_{RI})a_{-1} + R_I^4(1-P_{RI})\bar{b}_1 + P_{RI}b_{-3} = R_I^4 \frac{M_I}{2} \bar{G}. \quad (4.26)$$

Από την επίλυση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος των έξι εξισώσεων (4.21)-(4.26) προκύπτουν οι παρακάτω τιμές των άγνωστων σταθερών των διαφορικών δυναμικών:

$$a_1 = -\frac{M_M(2P_{RI}-1) + 2a^2M_I(1-P_{RM})}{2[(2P_{RI}-1)(1+L_{RM}-P_{RM}) - 2a^2(1-P_{RM})(P_{RI}-L_{RI})]} F, \quad (4.27)$$

$$a_3 = \frac{a^2(1-a^2)T_M \left[T_I'(1-a^2) \left(\frac{M_M}{P_{RM}} + a^2 \frac{T_M' M_I}{L_{RI}} \right) + (1-a^2 T_I' T_M') \left(\frac{M_I}{L_{RI}} + a^2 \frac{T_I' M_M}{P_{RM}} \right) \right]}{2R_M^2(1-a^4 T_I' T_M') \left[(1-a^2 T_I' T_M')(1-a^6 T_I' T_M') - 3a^2(1-a^2)^2 T_I' T_M' \right]} G, \quad (4.28)$$

$$a_{-1} = \frac{R_I^2(1-a^6 T_I' T_M') \left[T_I'(1-a^2) \left(\frac{M_M}{P_{RM}} + a^2 \frac{T_M' M_I}{L_{RI}} \right) + (1-a^2 T_I' T_M') \left(\frac{M_I}{L_{RI}} + a^2 \frac{T_I' M_M}{P_{RM}} \right) \right]}{2(1-a^4 T_I' T_M') \left[(1-a^2 T_I' T_M')(1-a^6 T_I' T_M') - 3a^2(1-a^2)^2 T_I' T_M' \right]} \quad (4.29)$$

$$b_1 = -\frac{(1-a^6 T_I' T_M') \left[\frac{M_M}{P_{RM}} + a^2 \frac{T_M' M_I}{L_{RI}} \right] + 3a^2(1-a^2)T_M \left[\frac{M_I}{L_{RI}} + a^2 \frac{T_I' M_M}{P_{RM}} \right]}{2 \left[(1-a^2 T_I' T_M')(1-a^6 T_I' T_M') - 3a^2(1-a^2)^2 T_I' T_M' \right]} G, \quad (4.30)$$

$$b_{-1} = \frac{R_I^2 [M_I(1+L_{RM}-P_{RM}) + M_M(P_{RI}-L_{RI})]}{(2P_{RI}-1)(1+L_{RM}-P_{RM}) - 2a^2(1-P_{RM})(P_{RI}-L_{RI})} F, \quad (4.31)$$

$$b_{-3} = \frac{R_I^4(1-a^4 T_I' T_M') \left[T_I'(1-a^2) \left(\frac{M_M}{P_{RM}} + a^2 \frac{T_M' M_I}{L_{RI}} \right) + (1-a^2 T_I' T_M') \left(\frac{M_I}{L_{RI}} + a^2 \frac{T_I' M_M}{P_{RM}} \right) \right]}{2(1-a^4 T_I' T_M') \left[(1-a^2 T_I' T_M')(1-a^6 T_I' T_M') - 3a^2(1-a^2)^2 T_I' T_M' \right]} \quad (4.32)$$

όπου

$$T_I = \frac{1-L_{RI}}{P_{RI}}, T_M = \frac{1-P_{RM}}{L_{RM}}, T'_I = \frac{1-P_{RI}}{L_{RI}}, T'_M = \frac{1-L_{RM}}{P_{RM}}. \quad (4.33)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.27)-(4.32) και (4.17), (4.18) στις (4.2), (4.3), τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_K(z)$ και $\psi_K(z)$ των τριών φάσεων του συστήματος παίρνουν την μορφή

$$\varphi_M(z) = \left[L_{RM}a_{-1} + (1-P_{RM})(3\bar{a}_3R_M^2 + \bar{b}_1)R_M^2 - \frac{M_M}{2}\bar{G}R_M^2 \right] \frac{1}{z}, \quad (4.34)$$

$$\varphi_I(z) = \left[L_{RI}a_3 + (1-P_{RI}) \left(-\frac{\bar{a}_{-1}}{R_I^4} + \frac{\bar{b}_{-3}}{R_I^6} \right) \right] z^3 + \left[L_{RI}a_1 + (1-P_{RI}) \left(\bar{a}_1 + \frac{\bar{b}_{-1}}{R_I^2} \right) + \frac{M_I}{2}F \right] z. \quad (4.35)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις χρησιμοποιούνται παρακάτω για τον υπολογισμό των εφαπτομενικών διεπιφανειακών τάσεων στην μήτρα και στον πυρήνα.

Όταν $R_I = 0$, οι σχέσεις (4.27)-(4.32) παρέχουν $a_3 = a_{-1} = 0$, $b_{-1} = b_{-3} = 0$, και

$$a_1 = -\frac{M_M}{2} \frac{1}{1+L_{RM}-P_{RM}} F, \quad b_1 = -\frac{M_M}{2} \frac{1}{P_{RM}} G. \quad (4.36)$$

Επομένως τα δυναμικά της ανομοιογένειας και της μήτρας, με βάση τις σχέσεις (4.1), (4.2) και (4.3), αποκτούν τη μορφή

$$\varphi_M(z) = -\frac{M_M}{2P_{RM}} \bar{G} \frac{R_M^2}{z}, \quad (4.37)$$

$$\psi_M(z) = -\frac{M_M}{1+L_{RM}-P_{RM}} F \frac{R_M^2}{z} - \frac{M_M}{2P_{RM}} \bar{G} \frac{R_M^4}{z^3}, \quad (4.38)$$

και

$$\varphi_R(z) = -\frac{M_M}{2(1+L_{RM}-P_{RM})} Fz, \quad (4.39)$$

$$\psi_R(z) = -\frac{M_M}{2P_{RM}} Gz. \quad (4.40)$$

Στην ειδική περίπτωση που οι ελαστικές σταθερές του πυρήνα και της μήτρας είναι ίσες, η λύση του σχετικού ελαστικού προβλήματος έχει πρόσφατα εξαχθεί από τους Dundurs και Markenscoff (Dundurs and Markenscoff, 2014). Θέτοντας στις παραπάνω σχέσεις $\mu_I = \mu_M = \mu$ και $\kappa_I = \kappa_M = \kappa$, τα αριθμητικά αποτελέσματα των τάσεων που αποκτώνται ταυτίζονται με αυτά που υπολογίζονται από την λύση των Dundurs και Markenscoff.

Από την παραπάνω λύση, ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα προκύπτει στην περίπτωση που οι ελαστικές ιδιότητες της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας ταυτίζονται με αυτές της μήτρας, όταν, δηλαδή είναι $\mu_R = \mu_M$ και $\kappa_R = \kappa_M$ ($P_{RM} = L_{RM} = 1$). Στην περίπτωση αυτή, τα διφασικά δυναμικά του συστήματος παίρνουν τη μορφή

$$\varphi_0(z) = -\frac{M_M}{2} \left(Fz - \bar{G} \frac{R_I^2}{z} \right), \quad (4.41)$$

$$\psi_0(z) = -\frac{M_M}{2} \left[Gz - R_I^2 \left(\frac{2F}{z} + \bar{G} \frac{R_I^2}{z^3} \right) \right]. \quad (4.42)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών δηλώνουν ότι οι τάσεις, τόσο στην μήτρα όσο και στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, είναι ανεξάρτητες των ελαστικών σταθερών του πυρήνα. Για την περίπτωση αυτή, οι ελαστικές μετατοπίσεις πάνω στην διεπιφάνεια A_I έχουν την μορφή

$$(u_1 + iu_2)^R = -\frac{1}{2} FR_I e^{i\theta} + \bar{G} R_I e^{-i\theta}. \quad (4.43)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιομετατοπίσεις που παρέχονται με την σχέση (4.8) και τις ελαστικές μετατοπίσεις που παρέχονται με την σχέση 4.43, προκύπτει ότι οι ολικές μετατοπίσεις της διεπιφάνειας A_I είναι μηδενικές. Αυτό σημαίνει ότι ο πυρήνας I παραμένει απαραμόρφωτος, ή, διαφορετικά, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια παρέχει “προστασία” στον πυρήνα αφήνοντάς τον απαραμόρφωτο και αφόρτιστο.

4.3.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Στη συνέχεια, η ανάλυση του ελαστικού συστήματος του Σχήματος 4.1 γίνεται για την περίπτωση που ο πυρήνας (πεδίο I) υφίσταται ένα ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης, που περιγράφεται με τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{11}^T , ε_{22}^T , ε_{12}^T . Οι ιδιομετατοπίσεις στο πεδίο I , που παράγουν τις ιδιοπαραμορφώσεις αυτές, δίνονται από την σχέση (4.8). Επειδή στην διεπιφάνεια A_I , οι δύο φάσεις του συστήματος είναι τέλεια συνδεδεμένες ισχύει

$$(X_1 + iX_2)^R = (X_1 + iX_2)^I, \quad (4.44)$$

$$(u_1 + iu_2)^R = (u_1 + iu_2)^T + (u_1 + iu_2)^I, \text{ στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.45)$$

από όπου, παίρνοντας υπόψη την (4.8), προκύπτει

$$(u_1 + iu_2)^I - (u_1 + iu_2)^R = -\frac{1}{2}Fz + \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \text{ στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.46)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το συνεπίπεδο πρόβλημα που εξετάζεται ανάγεται σε ένα πρόβλημα Somigliana που έχει την παρακάτω ασυνέχεια των μετατοπίσεων στην διεπιφάνεια A_I

$$\mathcal{U}_I = (u_1 + iu_2)^I - (u_1 + iu_2)^R = -\frac{1}{2}Fz + \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \text{ στη διεπιφάνεια } A_I. \quad (4.47)$$

Στο σχετικό ελαστικό πρόβλημα, λόγω συνέχειας των μετατοπίσεων στη διεπιφάνεια A_M ισχύει $\mathcal{U}_M = 0$. Για την ασυνέχεια των μετατοπίσεων \mathcal{U}_I , που παρέχεται από την 4.42, και για $\mathcal{U}_M = 0$, τα διφασικά δυναμικά $\varphi_0(z)$ και $\psi_0(z)$, που υπεισέρχονται στις σχέσεις (4.1)-(4.3), αναζητούνται στη μορφή

$$\varphi_0(z) = c_3 z^3 + c_1 z + \frac{c_{-1}}{z}, \quad (4.48)$$

$$\psi_0(z) = d_1 z + \frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-3}}{z^3}, \quad (4.49)$$

όπου c_1, c_3, c_{-1} και d_1, d_{-1}, d_{-3} είναι μιγαδικές σταθερές που προσδιορίζονται παρακάτω. Αντικαθιστώντας τις (4.48), (4.49) στις (4.2), (4.3) και απαιτώντας μηδενικές τάσεις στο άπειρο, από τα δυναμικά της μήτρας $\varphi_M(z)$ και $\psi_M(z)$ προκύπτουν οι παρακάτω τρεις αλγεβρικές εξισώσεις

$$R_M^6 L_{RM} c_3 - (1 - P_{RM}) R_M^2 \bar{c}_{-1} + (1 - P_{RM}) \bar{d}_{-3} = 0, \quad (4.50)$$

$$R_M^2 L_{RM} c_1 + (1 - P_{RM}) R_M^2 \bar{c}_1 + (1 - P_{RM}) \bar{d}_{-1} = 0, \quad (4.51)$$

$$3R_M^6 (P_{RM} - L_{RM}) c_3 + R_M^2 (4 - L_{RM} - 3P_{RM}) \bar{c}_{-1} + R_M^4 P_{RM} d_1 - 3(1 - P_{RM}) \bar{d}_{-3} = 0. \quad (4.52)$$

Από την απαίτηση πεπερασμένων τιμών για τις τάσεις στον πυρήνα I , από τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας $\varphi_I(z)$ και $\psi_I(z)$ προκύπτουν οι παρακάτω τρεις γραμμικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των άγνωστων σταθερών των διαφοσικών δυναμικών:

$$3R_I^4 (1 - P_{RI}) \bar{c}_3 + L_{RI} c_{-1} + R_I^2 (1 - P_{RI}) \bar{d}_1 = -R_I^2 \frac{M_I}{2} \bar{G}, \quad (4.53)$$

$$R_I^2 (P_{RI} - L_{RI}) c_1 + R_I^2 (P_{RI} - L_{RI}) \bar{c}_1 + P_{RI} d_{-1} - (1 - P_{RI}) \bar{d}_{-1} = -R_I^2 M_I F, \quad (4.54)$$

$$R_I^6 (4 - L_{RI} - 3P_{RI}) \bar{c}_3 - R_I^2 (P_{RI} - L_{RI}) c_{-1} + R_I^4 (1 - P_{RI}) \bar{d}_1 + P_{RI} d_{-3} = -R_I^4 \frac{M_I}{2} \bar{G}. \quad (4.55)$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού προκύπτουν οι παρακάτω τιμές των σταθερών:

$$c_1 = \frac{a^2 M_I (1 - P_{RM})}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2 (1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F, \quad (4.56)$$

$$c_3 = -\frac{a^4 (1 - a^2) \frac{M_I}{L_{RI}} P_{RI} T_M [(1 - a^2 T_I' T_M') + T_I' T_M' a^2 (1 - a^2)]}{2R_I^2 P_{RM} (1 - a^4 T_I T_M) [(1 - a^2 T_I' T_M') (1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1 - a^2)^2 T_I' T_M]} \bar{G}, \quad (4.57)$$

$$c_{-1} = -\frac{R_I^2 \frac{M_I}{L_{RI}} (1 - a^6 T_I T_M) [(1 - a^2 T_I' T_M') + T_I' T_M' a^2 (1 - a^2)]}{2(1 - a^4 T_I T_M) [(1 - a^2 T_I' T_M') (1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1 - a^2)^2 T_I' T_M]} \bar{G}, \quad (4.58)$$

$$d_1 = \frac{a^2 \frac{M_I}{L_{RI}} [T_M' (1 - a^6 T_I T_M) + 3T_M (1 - a^2)]}{2 [(1 - a^2 T_I' T_M') (1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1 - a^2)^2 T_I' T_M]} \bar{G}, \quad (4.59)$$

$$d_{-1} = -\frac{R_I^2 M_I (1 + L_{RM} - P_{RM})}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2 (1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F, \quad (4.60)$$

$$d_{-3} = -\frac{R_I^4 \frac{M_I}{L_{RI}} [(1-a^2 T_I' T_M') - T_I' T_M' a^2 (1-a^2)]}{2 \left[(1-a^2 T_I' T_M') (1-a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1-a^2)^2 T_I' T_M \right]} \bar{G}. \quad (4.61)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.56)-(4.61) και (4.46)-(4.48) στις (4.2), (4.3), τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_K(z)$ και $\psi_K(z)$ των τριων φάσεων του συστήματος παίρνουν την μορφή

$$\varphi_M(z) = \left[L_{RM} c_{-1} + (1 - P_{RM}) (3\bar{c}_3 R_M^2 + \bar{d}_1) R_M^2 \right] \frac{1}{z}, \quad (4.62)$$

$$\varphi_I(z) = \left[L_{RI} c_3 + (1 - P_{RI}) \left(-\frac{\bar{c}_{-1}}{R_I^4} + \frac{\bar{d}_{-3}}{R_I^6} \right) \right] z^3 + \left[L_{RI} c_1 + (1 - P_{RI}) \left(\bar{c}_1 + \frac{\bar{d}_{-1}}{R_I^2} \right) - \frac{M_I}{2} F \right] z. \quad (4.63)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις των μιγαδικών δυναμικών χρησιμοποιούνται παρακάτω για τον υπολογισμό των εφαπτομενικών διεπιφανειακών τάσεων στην μήτρα και στον πυρήνα. Όταν $R_I = 0$ ($a = 0$), οι σχέσεις (4.56)-(4.61) παρέχουν μηδενικές τιμές των άγνωστων σταθερών, που σημαίνει ότι το σύστημα παραμένει αφόρτιστο καθώς, στην περίπτωση αυτή, ο πυρήνας εξαφανίζεται. Όταν $\mu_R = \mu_M$ και $\kappa_R = \kappa_M$, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια γίνεται τμήμα της μήτρας. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στο πρόβλημα μιας κυκλικής ανομοιογένειας ακτίνας R_I σε άπειρη ελαστική μήτρα που υφίσταται ομοιόμορφο μετασχηματισμό. Στην ειδική αυτή περίπτωση, οι σχέσεις (4.56)-(4.61) παρέχουν $c_3 = c_1 = d_1 = 0$ και

$$c_{-1} = -\frac{M_I}{2L_{RI}} R_I^2 \bar{G}, \quad d_{-1} = -\frac{M_I}{2P_{RI} - 1} R_I^2 F, \quad d_{-3} = -\frac{M_I}{2L_{RI}} R_I^4 \bar{G}. \quad (4.64)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές αυτές των άγνωστων σταθερών, από τις σχέσεις (4.47)-(4.49) και (4.1)-(4.3), εξάγονται τα παρακάτω δυναμικά των φάσεων του συστήματος

$$\varphi_M(z) = \varphi_R(z) = \varphi_0(z) = -\frac{M_I}{2L_{RI}} \bar{G} \frac{R_I^2}{z}, \quad (4.65)$$

$$\psi_M(z) = \psi_R(z) = \psi_0(z) = -\frac{M_I}{2P_{RI} - 1} F \frac{R_I^2}{z} - \frac{M_I}{2L_{RI}} \bar{G} \frac{R_I^4}{z^3}, \quad (4.66)$$

και

$$\varphi_I(z) = -\frac{M_I}{2(2P_{RI} - 1)} Fz, \quad (4.67)$$

$$\psi_I(z) = -\frac{M_I}{2L_{RI}} Gz. \quad (4.68)$$

Στην ειδική περίπτωση που $R_I = R_M$, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια εξαφανίζεται, και η παραπάνω λύση του συστήματος παρέχει $c_3 = 0$, και

$$c_1 = \frac{(1 - P_{RM})M_I}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F, \quad (4.69)$$

$$c_{-1} = -\frac{R_I^2 M_I}{2L_{RI}(1 - T_I' T_M')} \bar{G}, \quad (4.70)$$

$$d_1 = \frac{M_I T_M'}{2L_{RI}(1 - T_I' T_M')} G, \quad (4.71)$$

$$d_{-1} = -\frac{R_I^2(1 + L_{RM} - P_{RM})M_I}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F, \quad (4.72)$$

$$d_{-3} = -\frac{R_I^4 M_I}{2L_{RI}(1 - T_I' T_M')} \bar{G}. \quad (4.73)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στα διαφορικά δυναμικά (4.48) και (4.49), τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας και του πυρήνα, από τις σχέσεις (4.2) και (4.3), προκύπτουν στην μορφή

$$\varphi_M(z) = \frac{M_I}{2} \frac{1 - P_{RM} - L_{RM}}{L_{RI} P_{RM} - P_{RI} L_{RM} - (1 - L_{RM} - P_{RI})} \bar{G} \frac{R_I^2}{z}, \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & M_I \frac{1 - L_{RM} - P_{RM}}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F \frac{R_I^2}{z} \\ & + \frac{M_I}{2} \frac{1 - L_{RM} - P_{RM}}{L_{RI} P_{RM} - P_{RI} L_{RM} - (1 - L_{RM} - P_{RI})} \bar{G} \frac{R_I^4}{z^3}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

και

$$\varphi_I(z) = \frac{M_I}{2} \frac{(1 - L_{RM} - P_{RM})}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} Fz, \quad (4.76)$$

$$\psi_I(z) = \frac{M_I}{2} \frac{(1 - L_{RM} - P_{RM})}{L_{RI} P_{RM} - P_{RI} L_{RM} - (1 - L_{RM} - P_{RI})} Gz. \quad (4.77)$$

Ευκολα μπορεί να δειχθεί ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με τις (4.65)-(4.68). Σε όρους των ελαστικών παραμέτρων της μήτρας και ανομοιογένειας, οι σχέσεις αυτές γράφονται

$$\varphi_M(z) = -\frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} \bar{G} \frac{R^2}{z}, \quad (4.78)$$

$$\psi_M(z) = -\frac{2\mu_M \mu_I}{2\mu_I - \mu_M + \mu_M \kappa_I} F \frac{R^2}{z} - \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} \bar{G} \frac{R^4}{z^3}, \quad (4.79)$$

και

$$\varphi_I(z) = -\frac{\mu_M \mu_I}{2\mu_I - \mu_M + \mu_M \kappa_I} Fz, \quad (4.80)$$

$$\psi_I(z) = -\frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} Gz. \quad (4.81)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συμπίπτουν με αυτές που έχουν εξαχθεί από τους Kattis και Karalis (Kattis and Karalis, 2013) για το αντίστοιχο πρόβλημα.

4.3.3 Τα ελαστικά πεδία και η ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος

4.3.3.1 Σταθερές ιδιοπαμορφώσεις στην δακτυλοειδή ανομοιογένεια

Εισάγοντας τα διαφορικά δυναμικά (4.19) και (4.20) στις σχέσεις (4.1)-(4.3) προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά $\varphi_M(z)$, $\varphi_R(z)$ και $\varphi_I(z)$ του ελαστικού συστήματος. Από τα δυναμικά αυτά, με βάση τις σχέσεις των Kolosov-Muskelishvili, που παρέχονται από τις σχέσεις (A.1)-(A.3) του Παραρτήματος Α, υπολογίζονται τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στις τρεις φάσεις του συστήματος. Η αναλυτική μορφή των ελαστικών πεδίων στην δακτυλοειδή ανομοιογένεια και οι διεπιφανειακές εφαπτομενικές τάσεις στην μήτρα και στον πυρήνα παρέχονται με τις σχέσεις (C.1)-(C.28) του Παραρτήματος C. Η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα υπολογίζεται από την σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^T + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^T) R_M d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^T + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^T) R_I d\theta, \quad (4.82)$$

ενώ η κατανομή της στις τρεις φάσεις του συστήματος, από τις σχέσεις

$$E^M = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^M u_r^M + \sigma_{r\theta}^M u_\theta^M) R_M d\theta, \quad (4.83)$$

$$E^R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^R + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^R) R_M d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^R + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^R) R_I d\theta, \quad (4.84)$$

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^I u_r^I + \sigma_{r\theta}^I u_\theta^I) R_I d\theta. \quad (4.85)$$

Οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις υπολογίζονται από τις σχετικές εκφράσεις που παρέχονται στο Παράρτημα C, λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες συνέχειας των τάσεων και των μετατοπίσεων στις δύο διεπιφάνειες

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \sigma_{rr}^R + i\sigma_{r\theta}^R, \quad (4.86)$$

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \sigma_{rr}^R + i\sigma_{r\theta}^R, \quad (4.87)$$

και

$$u_r^M + iu_\theta^M = (u_r^R + u_r^T) + i(u_\theta^R + u_\theta^T), \quad (4.88)$$

$$u_r^I + iu_\theta^I = (u_r^R + u_r^T) + i(u_\theta^R + u_\theta^T). \quad (4.89)$$

Από την σχέση (4.82) εξάγεται η παρακάτω έκφραση για την ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύονται στο σύστημα

$$E = -\pi R_M^2 [S_r Y_r^T F^2 + 2(T_r U_r^T + S_{r\theta} U_\theta^T) |G|^2]_{r=R_M} - \pi R_I^2 [S_r Y_r^T F^2 + 2(T_r U_r^T + S_{r\theta} U_\theta^T) |G|^2]_{r=R_I}, \quad (4.90)$$

όπου οι ποσότητες S_r , T_r , $S_{r\theta}$ και Y_r^T , U_r^T , U_θ^T παρέχονται από τις σχέσεις (C.8)-(C.10) και (C.20), (C.21) του Παραρτήματος C. Η κατανομή της παραπάνω ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος υπολογίζεται από τις σχέσεις (4.83)-(4.85) και οι σχετικές εκφράσεις καταχωρούνται στο Παράρτημα C (σχέσεις (C.29)-(C.31)). Αντικαθιστώντας τις σχετικές ποσότητες που υπεισέρχονται στην (4.90) (σχέσεις (C.8)-(C.10),

(C.20),(C.21) του Παραρτήματος C), αποκτάται η ακόλουθη έκφραση της ολικής ελαστικής ενέργειας

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{\pi R_M^2}{2} M_M (1-a^2) \frac{(2P_{RI} - 1)}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F^2 \\
 & + \frac{\pi R_M^2}{2} M_M (1-a^2) \frac{(1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2(1 - a^2) T_M T'_I}{2P_{RM} [(1 - a^2 T'_I T'_M)(1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2(1 - a^2)^2 T_M T'_I]} |G|^2 \\
 & + \frac{\pi R_I^2}{2} M_I (1-a^2) \frac{2(1 - P_{RM})}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F^2 \\
 & + \frac{\pi R_I^2}{2} M_I (1-a^2) \frac{(1 - a^6 T_I T_M) T'_M - 3a^2(1 - a^2) T_M}{2L_{RI} [(1 - a^2 T'_I T'_M)(1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2(1 - a^2)^2 T_M T'_I]} |G|^2,
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

όπου οι ποσότητες T_M, T_I, T'_M, T'_I παρέχονται από τις σχέσεις (4.33). Στις παραπάνω σχέσεις, οι διαφασικές σταθερές P_{RM}, L_{RM} και P_{RI}, L_{RI} παρέχονται από τις σχέσεις (4.4).

Όταν $\mu_M = \mu_R \neq \mu_I$, η παραπάνω σχέση παρέχει

$$E = \frac{\pi R_M^2}{2} M_M (1-a^2) \left(F^2 + \frac{1}{2} |G|^2 \right). \tag{4.92}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι, όταν οι ελαστικές ιδιότητες της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας συμπίπτουν με αυτές της μήτρας, η ελαστική ενέργεια του συστήματος είναι ανεξάρτητη των ελαστικών ιδιοτήτων του πυρήνα.

4.3.3.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Εισάγοντας τα διαφασικά δυναμικά (4.48) και (4.49) στις σχέσεις (4.1)-(4.3) προκύπτουν τα τρία μιγαδικά δυναμικά $\varphi_M(z), \varphi_R(z), \varphi_I(z)$ του ελαστικού συστήματος. Από τα δυναμικά αυτά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των Kolosov-Muskelishvili (σχέσεις (A.1)-(A.3) του Παραρτήματος A), υπολογίζονται οι τάσεις και οι μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Οι αναλυτικές εκφράσεις των τάσεων αυτών παρέχονται με τις σχέσεις (C.32)-(C.59) του Παραρτήματος C. Η ολική ενέργεια

που αποθηκεύεται στο σύστημα και η κατανομή της στις τρεις επιμέρους φάσεις του, υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^T + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^T) R_I d\theta, \quad (4.93)$$

$$E^M = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^M u_r^M + \sigma_{r\theta}^M u_\theta^M) R_M d\theta, \quad (4.94)$$

$$E^R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^R + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^R) R_M d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^R u_r^R + \sigma_{r\theta}^R u_\theta^R) R_I d\theta, \quad (4.95)$$

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sigma_r^I u_r^I + \sigma_{r\theta}^I u_\theta^I) R_I d\theta. \quad (4.96)$$

Οι διεπιφανειακές τάσεις και μετατοπίσεις που υπεισέρχονται στις σχέσεις αυτές υπολογίζονται από τις σχέσεις (C.32)-(C.59) και από τις παρακάτω συνθήκες

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \sigma_{rr}^R + i\sigma_{r\theta}^R, \quad (4.97)$$

$$\sigma_{rr}^M + i\sigma_{r\theta}^M = \sigma_{rr}^R + i\sigma_{r\theta}^R, \quad (4.98)$$

και

$$u_r^M + iu_\theta^M = u_r^R + iu_\theta^R, \quad (4.99)$$

$$u_r^I + iu_\theta^I = (u_r^R + u_r^T) + i(u_\theta^R + u_\theta^T), \quad (4.100)$$

που εκφράζουν την συνέχεια των τάσεων και μετατοπίσεων δια μέσου των δύο διεπιφανειών του συστήματος. Από την σχέση (4.93) εξάγεται η παρακάτω έκφραση που παρέχει την ολική ελαστική ενέργεια στο σύστημα

$$E = \pi R_I^2 [S_r Y_r^T F^2 + 2(T_r U_r^T + S_{r\theta} U_\theta^T) |G|^2]_{r=R_I}, \quad (4.101)$$

όπου S_r , T_r , $S_{r\theta}$ και Y_r^T , U_r^T , U_θ^T παρέχονται από τις σχέσεις (C.37)-(C.39) και (C.58), (C.59) του Παραρτήματος C. Η κατανομή της παραπάνω ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος υπολογίζεται από τις σχέσεις (4.94)-(4.96) και οι σχετικές εκφράσεις έχουν καταχωρηθεί στο Παράρτημα C (σχέσεις (C.60)-(C.62)). Από την σχέση (4.101), με αντικατάσταση των υπεισερχόμενων ποσοτήτων, που παρέχονται από τις σχέσεις (C.37)-(C.39) και (C.58), (C.59) του Παραρτήματος C, η ολική ελαστική ενέργεια προκύπτει

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{\pi R_I^2 M_I}{2} \frac{(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2(1 - P_{RM})}{(2P_{RI} - 1)(1 + L_{RM} - P_{RM}) - 2a^2(1 - P_{RM})(P_{RI} - L_{RI})} F^2 \\
 & + \frac{\pi R_I^2 M_I}{2} \frac{(1 - a^6 T_I T_M) [(1 - a^4 T_I T'_M) - a^2 T'_M (1 - a^4 T_I T_M)]}{2L_{RI} (1 - a^4 T_I T_M) [(1 - a^2 T_I T'_M) (1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1 - a^2)^2 T_I T'_M]} |G|^2 \\
 & - \frac{\pi R_I^2 M_I}{2} \frac{3a^2 (1 - a^2) T_M [(1 - a^4 T_I T_M) - a^2 P_{RI} / P_{RM} (1 - a^4 T_I T'_M)]}{2L_{RI} (1 - a^4 T_I T_M) [(1 - a^2 T_I T'_M) (1 - a^6 T_I T_M) - 3a^2 (1 - a^2)^2 T_I T'_M]} |G|^2,
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

όπου οι ποσότητες T_M , T_I , T'_M , T'_I παρέχονται από τις σχέσεις (4.33). Στις παραπάνω σχέσεις, οι διαφασικές σταθερές P_{RM} , L_{RM} και P_{RI} , L_{RI} παρέχονται από τις σχέσεις (4.4).

Όταν $\mu_M = \mu_R$, η σχέση (4.102) παίρνει την μορφή

$$E = \frac{\pi R_I^2 M_I}{2} \left(\frac{F^2}{2P_{RI} - 1} + \frac{|G|^2}{2L_{RI}} \right). \tag{4.103}$$

Όταν $R_M = R_I = R$ (ή $a = 1$), όταν δηλαδή, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια εξαφανίζεται, η ολική ελαστική ενέργεια παρέχεται από την σχέση

$$E = \frac{\pi R^2}{2} \left[\frac{2\mu_M \mu_I}{2\mu_I - \mu_M + \mu_M \kappa_I} F^2 + \frac{\mu_M \mu_I}{\mu_M + \mu_I \kappa_M} |G|^2 \right]. \tag{4.104}$$

Η σχέση αυτή συμφωνεί με αυτή που έχει εξαχθεί από τους Bhargava και Radhakrishna (Bhargava and Radhakrishna, 1963).

4.4 Αντιεπίπεδη παραμόρφωση

4.4.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα διαφασικά δυναμικά του ελαστικού συστήματος, όταν η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια R υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό που

περιγράφεται με τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$. Έχει δειχθεί, προηγούμενα, ότι η ιδιομετατόπιση u_3^T παράγει τις σταθερές αυτές ιδιοπαραμορφώσεις, παρέχεται από τη σχέση

$$u_3^T = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}. \quad (4.105)$$

Η συνέχεια των τάσεων και μετατοπίσεων στις δύο διεπιφάνειες επιβάλλει τις παρακάτω σχέσεις για τα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στο σύστημα

$$X_3^I = X_3^R, \quad u_3^I = u_3^T + u_3^R, \quad (4.106)$$

πάνω στην A_I , και

$$X_3^R = X_3^M, \quad u_3^R = u_3^R + u_3^T, \quad (4.107)$$

πάνω στην A_M . Στις παραπάνω σχέσεις, X_3^R, X_3^I είναι οι δυνάμεις που επενεργούν σε ένα τόξο και u_3^R, u_3^I οι ελαστικές αντιεπίπεδες μετατοπίσεις. Οι σχέσεις (4.106) και (4.107) μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μορφή

$$u_3^I - u_3^R = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.108)$$

πάνω στην A_I , και

$$u_3^M - u_3^R = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.109)$$

πάνω στην A_M . Οι σχέσεις (4.108), (4.109) μαζί με τις (4.5) και (4.6) δείχνουν, ότι το ελαστικό πρόβλημα που μελετάται έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα τύπου Somigliana, με ασυνέχειες

$$\mathcal{U}_I(z, \bar{z}) = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.110)$$

πάνω στην A_I , και

$$\mathcal{U}_M(z, \bar{z}) = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.111)$$

πάνω στην A_M . Το διαφορικό δυναμικό $f_0(z)$ του συστήματος αναζητείται στην μορφή

$$f_0(z) = Az + \frac{B}{z}. \quad (4.112)$$

Εισάγοντας τις (4.110), (4.111) και (4.112) στις (4.5), (4.6) και απαιτώντας το μιγαδικό δυναμικό $f_M(z)$ να παρέχει μηδενικές τάσεις στο άπειρο και το μιγαδικό δυναμικό $f_I(z)$ πεπερασμένες τάσεις στον πυρήνα, εξάγεται το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\Gamma_{MR}A + \gamma_{MR} \frac{\bar{B}}{R_M^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T, \quad (4.113)$$

$$\gamma_{IR}R_I^2A + \Gamma_{IR}\bar{B} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}^T R_I^2. \quad (4.114)$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος παρέχει

$$A = -\frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}(R_I/R_M)^2}{2[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]} \mathcal{F}^T, \quad (4.115)$$

$$B = -\frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{2[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]} R_I^2 \bar{\mathcal{F}}^T. \quad (4.116)$$

Με βάση τις παραπάνω τιμές των σταθερών A και B , τα μιγαδικά δυναμικά του συστήματος (4.5), (4.6) παίρνουν τη μορφή

$$f_M(z) = \left(\gamma_{MR}R_M^2\bar{A} + \Gamma_{MR}B + \frac{1}{2}R_M^2\bar{E}^T \right) \frac{1}{z}, \quad (4.117)$$

$$f_R(z) = Az + \frac{B}{z}, \quad (4.118)$$

$$f_I(z) = \left(\Gamma_{IR}A + \gamma_{IR} \frac{\bar{B}}{R_I^2} + \frac{1}{2} \mathcal{F}^T \right) z. \quad (4.119)$$

Στην ειδική περίπτωση που $\mu_R = \mu_M$, τα παραπάνω μιγαδικά δυναμικά παίρνουν την ακόλουθη μορφή

$$f_M(z) = \frac{1}{2} (R_M^2 - R_I^2) \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{z}, \quad (4.120)$$

$$f_R(z) = -\frac{\mathcal{F}^T}{2} z - \frac{\bar{\mathcal{F}}^T}{2} \frac{R_I^2}{z}. \quad (4.121)$$

4.4.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Όταν η δακτυλοειδής ανομοιογένεια υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται από τις σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T , οι ιδιομετατοπίσεις της δακτυλοειδούς ανομοιογένειας έχουν την μορφή

$$u_3^T = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.122)$$

όπου

$$\mathcal{F}^T = \varepsilon_{13}^T - i\varepsilon_{23}^T. \quad (4.123)$$

Η συνέχεια των τάσεων και των μετατοπίσεων στις διεπιφάνειες A_M και A_I του συστήματος, που είναι τέλεια συνδεδεμένες μεταξύ τους, περιγράφεται με τις παρακάτω σχέσεις

$$X_3^I = X_3^R, \quad u_3^I + u_3^T = u_3^R, \quad \text{στην } A_I, \quad \text{και} \quad (4.124)$$

$$X_3^R = X_3^M, \quad u_3^R = u_3^M, \quad \text{στην } A_M. \quad (4.125)$$

Οι (4.124) και (4.125), λαμβάνοντας υπόψη την (4.122), μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$u_3^I - u_3^R = -u_3^T = -\mathcal{F}^T z - \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad (4.126)$$

$$u_3^M - u_3^R = 0. \quad (4.127)$$

Οι (4.126) και (4.127) υπαγορεύουν ότι το ελαστικό πρόβλημα που εξετάζεται έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα Somigliana, του οποίου οι ασυνέχειες πάνω στις διεπιφάνειες A_I και A_M , παρέχονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{U}_I = -\mathcal{F}^T z - \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad \mathcal{U}_M = 0. \quad (4.128)$$

Το διαφορικό δυναμικό $f_0(z)$ που υπεισέρχεται στις σχέσεις (4.5) και (4.6) αναζητείται στη μορφή

$$f_0(z) = Cz + \frac{D}{z}, \quad (4.129)$$

όπου C , D είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας την (4.129) στις (4.5) και (4.6) και απαιτώντας πεπερασμένες τιμές της συνάρτησης $f_I(z)$ στο πεδίο I και μηδενικές τιμές της συνάρτησης $f_M(z)$ στο άπειρο, προκύπτει το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα

$$\Gamma_{IR}D + \gamma_{IR}\bar{C}R_I^2 = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{F}}^T R_I^2, \quad (4.130)$$

$$\Gamma_{MR}C + \gamma_{MR}\frac{\bar{D}}{R_M^2} = 0. \quad (4.131)$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού παρέχει τις παρακάτω τιμές των άγνωστων σταθερών C και D

$$C = -\frac{\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2}{2[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]}\bar{\mathcal{F}}^T, \quad (4.132)$$

$$D = \frac{\Gamma_{MR}R_I^2}{2[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]}\bar{\mathcal{F}}^T. \quad (4.133)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.132), (4.133) στην (4.129) και στη συνέχεια την (4.129) στις (4.5) και (4.6), υπολογίζονται τα μιγαδικά δυναμικά του συστήματος στην παρακάτω μορφή

$$f_M(z) = (\gamma_{MR}\bar{C}R_M^2 + \Gamma_{MR}D)\frac{1}{z}, \quad (4.134)$$

$$f_R(z) = Cz + \frac{D}{z}, \quad (4.135)$$

$$f_I(z) = \left(\Gamma_{IR}C + \gamma_{IR}\frac{\bar{D}}{R_I^2} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{F}}^T \right) z. \quad (4.136)$$

Με βάση τα μιγαδικά αυτά δυναμικά υπολογίζονται τα ελαστικά πεδία του συστήματος που καταχωρούνται στο Παράρτημα C.

4.4.3 Ελαστικές ενέργειες στις φάσεις του συστήματος

4.4.3.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Οι ελαστικές ενέργειες στις τρεις φάσεις του συστήματος παρέχονται από τις σχέσεις

$$E^M = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^M u_3^M R_M d\theta, \quad (4.137)$$

$$E^R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^R u_3^R R_M d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^R u_3^R R_I d\theta, \quad (4.138)$$

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^I u_3^I R_I d\theta, \quad (4.139)$$

και η ολική ελαστική ενέργεια, από τη σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^M u_3^T R_M d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^I u_3^T R_I d\theta. \quad (4.140)$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις και μετατοπίσεις των παραπάνω σχέσεων με τις σχετικές εκφράσεις, που παρουσιάζονται στο Παράρτημα C, στις παραπάνω σχέσεις, μετά από ολοκλήρωση προκύπτει

$$E^M = \frac{\pi R_M^2}{2} \frac{(\Gamma_{MR} - \gamma_{MR}) \Gamma_{IR}^2}{(\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2)^2} \left(1 - \frac{R_I^2}{R_M^2}\right)^2 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.141)$$

$$E^R = \frac{\pi R_M^2}{2} \left(1 - \frac{R_I^2}{R_M^2}\right) \frac{(\Gamma_{IR} - \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2)^2 + (\Gamma_{MR} - \gamma_{IR})^2 R_I^2 / R_M^2}{[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2]^2} \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.142)$$

$$E^I = \frac{\pi R_I^2}{2} \frac{\gamma_{MR}^2 (\gamma_{IR} - \Gamma_{IR})^2 (1 - R_I^2 / R_M^2)^2}{[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2]^2} \mu_I |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.143)$$

και

$$E = \pi R_M^2 \frac{(\Gamma_{IR} - \gamma_{IR})(\Gamma_{IR} - \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2)(1 - R_I^2 / R_M^2)}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_I |\mathcal{F}^T|^2. \quad (4.144)$$

4.4.3.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Οι ελαστικές ενέργειες για τις τρεις φάσεις του συστήματος παρέχονται από τις σχέσεις

$$E^M = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^M u_3^M R_M d\theta, \quad (4.145)$$

$$E^R = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^R u_3^R R_M d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^R u_3^R R_I d\theta, \quad (4.146)$$

$$E^I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^I u_3^I R_I d\theta. \quad (4.147)$$

και η ολική ελαστική ενέργεια από τη σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sigma_{r_3}^I u_3^T R_I d\theta. \quad (4.148)$$

Αντικαθιστώντας τις τάσεις και μετατοπίσεις των παραπάνω σχέσεων με τις σχετικές εκφράσεις που παρουσιάζονται στο Παράρτημα C, μετά από ολοκλήρωση προκύπτουν

$$E^M = \frac{\pi R_M^2}{2} \frac{(\Gamma_{MR} - \gamma_{MR})}{[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2]^2} \left(\frac{R_I}{R_M}\right)^4 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.149)$$

$$E^R = \frac{\pi R_M^2}{2} \left(1 - \frac{R_I^2}{R_M^2}\right) \frac{(\Gamma_{MR}^2 + \gamma_{MR}^2 R_I^2/R_M^2)}{[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2]^2} \left(\frac{R_I}{R_M}\right)^2 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.150)$$

$$E^I = \frac{\pi R_I^2}{2} \frac{(\Gamma_{IR} - \gamma_{IR})(\Gamma_{MR} + \gamma_{MR}R_I^2/R_M^2)^2}{[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2]^2} \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.151)$$

και

$$E = \pi R_I^2 \frac{\Gamma_{MR} + \gamma_{MR}R_I^2/R_M^2}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \mu_R |\mathcal{F}^T|^2. \quad (4.152)$$

4.4.4 Συντηρητικά ολοκληρώματα

4.4.4.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Η δύναμη $(J_1 + iJ_2)^R$ που εξασκείται μεταξύ των δύο διεπιφανειών του συστήματος περέχονται από την σχέση

$$(J_1 + iJ_2)^R = -2i\mu_R \oint_{\Gamma} \overline{[f'_R(z)]^2} d\bar{z} - 2i\mu_R \oint_{\Gamma} \overline{[f'_R(z)f'_T(z)]} d\bar{z}, \quad (4.153)$$

όπου Γ είναι μία κλειστή καμπύλη στο πεδίο R που περιβάλλει τον πυρήνα. Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εφαρμογή της (2.139) για το πεδίο της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα έχει την μορφή

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^R = 2\mu_R \oint_{\Gamma} \bar{z} \overline{f'_R(z)} [\overline{f'_R(z)} + \overline{f'_T(z)}] d\bar{z} + 2i\mu_R \text{Im} \left[\oint_{\Gamma} f'_R(z) f'_T(z) dz \right], \quad (4.154)$$

που αποτελεί την εφαρμογή της (2.160) για το πεδίο της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Στις παραπάνω σχέσεις, τα μιγαδικά δυναμικά $f_R(z)$, $f_T(z)$ παρέχονται από τις σχέσεις

$$f_R(z) = \hat{A} \mathcal{Z}^T z + \frac{\hat{B} \bar{\mathcal{Z}}^T R_I^2}{z}, \quad f_T(z) = \mathcal{Z}^T z, \quad (4.155)$$

όπου

$$\hat{A} = -\frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR} (R_I / R_M)^2}{2[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} (R_I / R_M)^2]}, \quad (4.156)$$

$$\hat{B} = -\frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{2[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} (R_I / R_M)^2]}. \quad (4.157)$$

$$\mathcal{Z}^T = \varepsilon_{13}^T - i\varepsilon_{13}^T. \quad (4.158)$$

Οι ποσότητες $f'_R(z)$, $f'_T(z)$ και $[f'_R(z)]^2$ που υπεισέρχονται στην παραπάνω σχέση, υπολογίζονται από τις (4.155) και έχουν την μορφή

$$f'_R(z) = \hat{A} \mathcal{Z}^T - \frac{\hat{B} \bar{\mathcal{Z}}^T R_I^2}{z^2}, \quad f'_T(z) = \mathcal{Z}^T, \quad (4.159)$$

$$\left[f'_R(z) \right]^2 = (\hat{A}\mathcal{Z}^T)^2 - 2\hat{A}\hat{B}\left| \mathcal{Z}^T \right|^2 \frac{R_I^2}{z^2} + (\hat{B}\bar{\mathcal{Z}}^T)^2 \frac{R_I^4}{z^4}. \quad (4.160)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις (4.153) και (4.154), και στη συνέχεια, με ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών, προκύπτει

$$(J_1 + iJ_2)^R = 0, \quad (4.161)$$

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^R = 2\pi i R_I^2 \frac{(\Gamma_{MR} - \gamma_{IR})(\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}(R_I/R_M)^2)}{[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2]^2} \mu_R \left| \mathcal{Z}^T \right|^2, \quad (4.162)$$

από όπου

$$\mathcal{L}_3^R = 0, \quad (4.163)$$

$$\mathcal{M}^R = 2\pi R_I^2 \frac{(\Gamma_{MR} - \gamma_{IR})(\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}(R_I/R_M)^2)}{[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2]^2} \mu_R \left| \mathcal{Z}^T \right|^2. \quad (4.164)$$

4.4.4.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Για την περίπτωση αυτή, οι δυνάμεις $(J_1 + iJ_2)^I$, $(J_1 + iJ_2)^M$ και οι ποσότητες $(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^I$, $(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^M$, που εξασκούνται πάνω στις διεπιφάνειες δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας, αντίστοιχα, παρέχονται από τις σχέσεις (2.139) και (2.160), θέτοντας $f_T(z)=0$. Στις σχέσεις αυτές, το μιγαδικό δυναμικά $f_R(z)$ παρέχεται από την σχέση

$$f_R(z) = \hat{C}\mathcal{Z}^T z + \frac{\hat{D}\bar{\mathcal{Z}}^T R_I^2}{z}, \quad (4.165)$$

όπου

$$\hat{C} = -\frac{\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2}{2[\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]}, \quad (4.166)$$

$$\hat{D} = \frac{\Gamma_{MR}}{2[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}(R_I/R_M)^2]}. \quad (4.167)$$

Οι ποσότητες $f'_R(z)$ και $[f'_R(z)]^2$ που εισέρχονται στις σχέσεις των J -, \mathcal{L}_3 - και \mathcal{M} - ολοκληρωμάτων, υπολογίζονται από την (4.165) και έχουν την μορφή

$$f'_R(z) = \hat{C}\mathcal{F}^T - \frac{\hat{D}\bar{\mathcal{F}}^T R_I^2}{z^2}, \quad (4.168)$$

$$[f'_R(z)]^2 = (\hat{C}\mathcal{F}^T)^2 - 2\hat{C}\hat{D}|\mathcal{F}^T|^2 \frac{R_I^2}{z^2} + (\hat{D}\bar{\mathcal{F}}^T)^2 \frac{R_I^4}{z^4}. \quad (4.169)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (4.153) και (4.154), και στη συνέχεια, με ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών, προκύπτει

$$(J_1 + iJ_2)^R = 0, \quad (4.170)$$

$$(\mathcal{L}_3 + i\mathcal{M})^R = -\pi i R_I^2 \frac{\Gamma_{MR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2}{[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2]^2} \mu_R |\mathcal{F}^T|^2, \quad (4.171)$$

από όπου

$$\mathcal{L}_3^R = 0, \quad (4.172)$$

$$\mathcal{M}^R = -\pi R_I^2 \frac{\Gamma_{MR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2}{[\Gamma_{IR}\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}\gamma_{MR}(R_I/R_M)^2]^2} \mu_R |\mathcal{F}^T|^2. \quad (4.173)$$

4.4.5 Κινούσα δύναμη στις διεπιφάνειες

Παρακάτω, υπολογίζονται οι κινούσες δυνάμεις f_r^I και f_r^M που επενεργούν στις διεπιφάνειες δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας του συστήματος που δείχνεται στο Σχήμα 4.1. Η κινούσα δύναμη f_r^I υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
 f_r' = & -\frac{\mu_I - \mu_R}{2\mu_I} \left\{ \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f_R'(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f_R'(t)} \right]^2 - \mu_R \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f_R'(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f_R'(t)} \right]^2 \right\} \\
 & - \mu_I \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f_R'(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f_R'(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right] \\
 & + \mu_R \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f_R'(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f_R'(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right] \\
 & - \frac{\mu_I}{2} \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right]^2.
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εφαρμογή της (2.176) για την περίπτωση των πεδίων του πυρήνα και της δακτυλοειδούς ανομοιογένειας I και R , αντίστοιχα. Στην παραπάνω σχέση, $f_R(z)$ είναι το μιγαδικό δυναμικό της δακτυλοειδούς ανομοιογένειας που έχει την μορφή

$$f_R(z) = \hat{A} \mathcal{F}^T z + \hat{B} \frac{R_I^2 \overline{\mathcal{F}^T}}{z}, \tag{4.175}$$

όπου

$$\hat{A} = -\frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR} (R_I / R_M)^2}{2[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} (R_I / R_M)^2]}, \tag{4.176}$$

$$\hat{B} = -\frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{2[\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} (R_I / R_M)^2]}, \tag{4.177}$$

που είναι η σχέση (4.154), η οποία έχει εξαχθεί προηγουμένα. Για ένα σημείο $t = R_I e^{i\theta}$ της διεπιφάνειας, από την (4.175) προκύπτει

$$f_R'(t) = \hat{A} \mathcal{F}_p^T e^{-i\theta} - \hat{B} \overline{\mathcal{F}_p^T} e^{-i\theta}, \tag{4.178}$$

όπου $\mathcal{F}_p^T = \varepsilon_{r3}^T - i\varepsilon_{r3}^T = \mathcal{F}^T e^{i\theta}$. Αντικαθιστώντας την (4.178) στην (4.174) και θέτοντας

$\mathcal{F}^T = \mathcal{F}_p^T e^{-i\theta}$ και $t = R_I e^{i\theta}$, προκύπτει η σχέση

$$f_r' = 4\mu_I (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2 \left\{ (\hat{A} + \hat{B}) [1 + \gamma_{IR} (\hat{A} + \hat{B})] + \frac{1}{2} \right\} + 4\mu_R (\varepsilon_{r3}^T)^2 (\hat{A} - \hat{B}) [1 + \gamma_{IR} (\hat{A} - \hat{B})], \tag{4.179}$$

που παρέχει την κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα.

Η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας υπολογίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned}
 f_r^M = & -\frac{\mu_M - \mu_R}{2\mu_M} \left\{ \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f'_R(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_R(t)} \right]^2 - \mu_R \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f'_R(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_R(t)} \right]^2 \right\} \\
 & - \mu_M \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f'_R(t) - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_R(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right] \\
 & + \mu_R \left[\sqrt{\frac{t}{t}} f'_R(t) + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{f'_R(t)} \right] \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T + \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right] \\
 & - \frac{\mu_M}{2} \left[\sqrt{\frac{t}{t}} \mathcal{F}^T - \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}} \overline{\mathcal{F}^T} \right]^2.
 \end{aligned} \tag{4.180}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την εφαρμογή της (2.176) για την περίπτωση των πεδίων της μήτρας και της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας M και R , αντίστοιχα, που έχει εξαχθεί προηγούμενα. Σε ένα σημείο $t = R_M e^{i\theta}$ της διεπιφάνειας, από την σχέση (4.175) προκύπτει

$$f'_R(t) = \hat{A} \mathcal{F}_p^T e^{-i\theta} - a^2 \overline{B} \overline{\mathcal{F}_p^T} e^{-i\theta}, \tag{4.181}$$

όπου $\mathcal{F}_p^T = \varepsilon_{r3}^T - i\varepsilon_{\theta 3}^T = \mathcal{F}^T e^{i\theta}$. Αντικαθιστώντας την (4.181) στην (4.180) και θέτοντας $\mathcal{F}^T = \mathcal{F}_p^T e^{-i\theta}$ και $t = R_M e^{i\theta}$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
 f_r^M = & 4\mu_M (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2 \left\{ [1 + \gamma_{MR} (\hat{A} + a^2 \hat{B})] (\hat{A} + a^2 \hat{B}) + \frac{1}{2} \right\} \\
 & + 4\mu_R (\varepsilon_{r3}^T)^2 (\hat{A} - a^2 \hat{B}) [1 + \gamma_{MR} (\hat{A} - a^2 \hat{B})].
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

που είναι η κινούσα δύναμη πάνω στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας. Όταν $\mu_R = \mu_M$, οι σχέσεις (4.179) και (4.182) παρέχουν

$$f_r^I = -2\mu_I (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2, \tag{4.183}$$

$$f_r^M = -2\mu_M[(1-a^2)(\varepsilon_{r3}^T)^2 + a^2(\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]. \quad (4.184)$$

4.5 Λεπτή δακτυλιοειδής ανομοιογένεια

Στην ενότητα αυτή, εξάγεται η ασυμπτωτική μορφή των ελαστικών πεδίων και των ελαστικών ενεργειών του συστήματος, στην περίπτωση που το πάχος $h(=R_M - R_I)$ της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας είναι πολύ μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα R_I του πυρήνα, όταν δηλαδή $h/R_I \ll 1$. Στην περίπτωση αυτή, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια προσεγγίζει την συμπεριφορά μιας ελαστικής μεμβράνης που παρεμβάλλεται μεταξύ πυρήνα και μήτρας, ή διαφορετικά, την συμπεριφορά μιας διεπιφάνειας μεμβρανικού τύπου.

Για συνεπίεδη παραμορφωσιακή κατάσταση και για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, οι τάσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια παρέχονται από τις σχέσεις (C.1)-(C.3). Όταν το πάχος h είναι πολύ μικρότερο της ακτίνας R_I του πυρήνα ($h/R_I \ll 1$), η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta\theta}^R$, που παρέχεται από την σχέση (C.2), αναπτύσσεται ως προς $h(=R_M - R_I)$ σε μία σειρά της μορφής

$$\sigma_{\theta\theta}^R = -\frac{4\mu_R}{1+\kappa_R} F - \frac{2\mu_R}{1+\kappa_R} (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}) + \mathcal{O}(h), \quad (4.185)$$

όπου $\mathcal{O}(h)$ δηλώνει όρους του h μεγαλύτερης της πρώτης τάξης. Τα αναπτύγματα των υπολοίπων τάσεων περιέχουν όρους του h μεγαλύτερους της πρώτης τάξης, δηλαδή

$$\sigma_{rr}^R = \mathcal{O}(h), \quad (4.186)$$

$$\sigma_{r\theta}^R = \mathcal{O}(h). \quad (4.187)$$

Στην συνέχεια, το παραπάνω ανάπτυγμα της εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta\theta}^R$ εκφράζεται σε όρους των πολικών συνιστωσών $\varepsilon_{rr}^T, \varepsilon_{\theta\theta}^T, \varepsilon_{r\theta}^T$ των ιδιοπαραμορφώσεων της

ανομοιογένειας. Οι πολικές συνιστώσες $\varepsilon_{rr}^T, \varepsilon_{\theta\theta}^T, \varepsilon_{r\theta}^T$ συνδέονται με τις καρτεσιανές συνιστώσες $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T$ με τις σχέσεις

$$\varepsilon_{\theta\theta}^T - \varepsilon_{rr}^T + 2i\varepsilon_{r\theta}^T = e^{2i\theta} G = e^{2i\theta} (\varepsilon_{22}^T - \varepsilon_{11}^T + 2i\varepsilon_{12}^T), \quad (4.188)$$

$$\varepsilon_{rr}^T + \varepsilon_{\theta\theta}^T = F = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T, \quad (4.189)$$

από όπου

$$e^{2i\theta} G + e^{-2i\theta} \bar{G} = 2(\varepsilon_{\theta\theta}^T - \varepsilon_{rr}^T), \quad (4.190)$$

$$e^{2i\theta} G - e^{-2i\theta} \bar{G} = 4i\varepsilon_{r\theta}^T. \quad (4.191)$$

Με βάση τις (4.190) και (4.191), το ανάπτυγμα της $\sigma_{\theta\theta}^R$, που παρέχεται από την (4.185), γράφεται

$$\sigma_{\theta\theta}^R = -\frac{4\mu_R}{1+\kappa_R} (\varepsilon_{rr}^T + \varepsilon_{\theta\theta}^T) - \frac{4\mu_R}{1+\kappa_R} (\varepsilon_{\theta\theta}^T - \varepsilon_{rr}^T) + \mathcal{O}(h), \quad (4.192)$$

από όπου

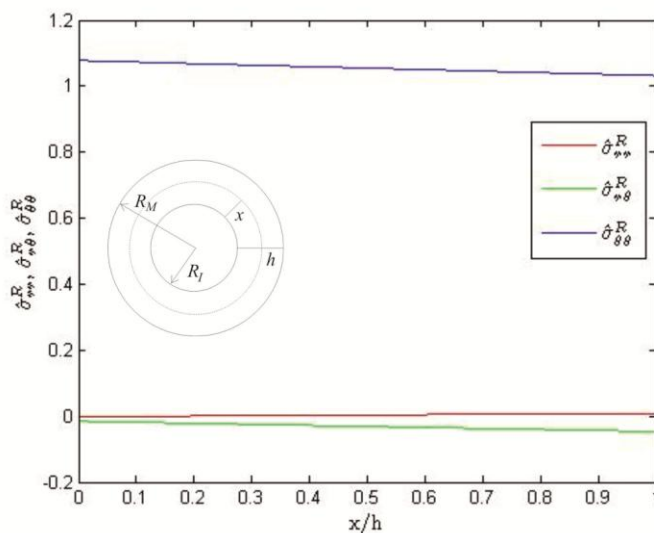
$$\sigma_{\theta\theta}^R = -\frac{8\mu_R}{1+\kappa_R} \varepsilon_{\theta\theta}^T + \mathcal{O}(h). \quad (4.193)$$

Απο την παραπάνω ανάλυση γίνεται φανερό ότι, στο λεπτό δακτύλιο με πάχος $h(\ll 1)$, η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta\theta}^R$ προσεγγίζει την τιμή $-8\mu_R \varepsilon_{\theta\theta}^T (1+\kappa_R)$ με τις άλλες να προσεγγίζουν το μηδέν. Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη των ελαστικών παραμέτρων των υλικών της μήτρας και του πυρήνα και συνδέεται μόνο με την εφαπτομενική ιδιοπαραμόρφωση $\varepsilon_{\theta\theta}^R$! Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται αριθμητικά με τα διαγράμματα του Σχήματος 4.2. Στο σχήμα αυτό δείχνονται οι κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, κατά μήκος του πάχους h μιας λεπτής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{rr}^T = 5 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 3 \times 10^{-3}$, όταν $h = 0,01R_I$, $\mu_R = 0,5\mu_M = \mu_I / 3$, $\kappa_R = \kappa_M = \kappa_I = 2$. Το διάγραμμα αυτό έχει υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των τάσεων (C.1)-(C.3) του παραρτήματος. Το διάγραμμα αυτό δείχνει ότι οι τάσεις $\sigma_{r\theta}^R$, σ_{rr}^R

μέσα στο δακτύλιο, σχεδόν μηδενίζονται, ενώ η εφαπτομενική τάση προσεγγίζει την τιμή $\sigma_{\theta\theta}^R = 1.06\mu_R |\varepsilon_{rr}^T| = 1.06\mu_R |5 \times 10^{-3}| = 5.3\mu_R \times 10^{-3}$. Η παραπάνω σχέση προβλέπει

$$\sigma_{\theta\theta}^R = -\frac{8\mu_R}{1+\kappa_R} \varepsilon_{\theta\theta}^T = -\frac{8\mu_R}{1+2} \times (-2 \times 10^{-3}) = \frac{16\mu_R}{3} 10^{-3} = 5.3\mu_R 10^{-3}$$

που ταυτίζεται με αυτή του διαγράμματος.



Σχήμα 4.2: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, κατά μήκος του πάχους h μιας λεπτής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, με ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{rr}^T = 5 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 3 \times 10^{-3}$, όταν $h = 0.01R_I$, $\mu_R = 0.5\mu_M = \mu_I / 3$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$.

Θεωρώντας ότι η τάση $\sigma_{\theta\theta}^R$ διανέμεται ομοιόμορφα στο πάχος h της λεπτής ανομοιογένειας, η “συνολική” δράση της τάσης αυτής στο πάχος h της ανομοιογένειας μπορεί να εκφραστεί με την ποσότητα

$$\sigma_0 = \sigma_{\theta\theta}^R h \cong -\frac{8\mu_R h}{1+\kappa_R} \varepsilon_{\theta\theta}^T. \quad (4.194)$$

Η παραπάνω ποσότητα μπορεί να ερμηνευθεί ως η επιφανειακή τάση (surface tension) που εμφανίζεται στην διεπιφάνεια κρυσταλλικών νανο-ανομοιογενειών που είναι διεσπαρμένες σε μία κρυσταλλική μήτρα. Θεωρώντας ότι η μήτρα και ο πυρήνας είναι από κρυσταλλικά υλικά και η διάσταση της ανομοιογένειας R_I είναι της τάξης νανομέτρου, τότε, λόγω της διαφοράς των ατομικών αποστάσεων των δύο κρυσταλλικών υλικών, η σύνδεση εισάγει στην διεπιφάνεια μια ιδιο-παραμόρφωση $\Delta a_m / a_m$, όπου $a_m = (a_0^M + a_0^I) / 2$ είναι η μέση τιμή των ενδοατομικών αποστάσεων a_0^M, a_0^I των δύο κρυσταλλικών υλικών και Δa_m είναι η μέση μεταβολή των ενδοατομικών αποστάσεων λόγω της σύνδεσής τους. Αν η ιδιοπαραμόρφωση αυτή τεθεί ίση με $\varepsilon_{\theta\theta}^T$, δηλαδή

$$\varepsilon_{\theta\theta}^T = \frac{\Delta a_m}{a_m}, \quad (4.195)$$

τότε η ποσότητα σ_0 που παρέχεται από την (4.194) μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την επιφανειακή τάση που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο κρυσταλλικών υλικών. Είναι προφανές ότι, η ποσότητα αυτή εξαρτάται, αποκλειστικά, από τις ενδοατομικές αποστάσεις των δύο υλικών και αποτελεί σταθερά του υλικού.

Για την περίπτωση που $h \ll R_I$, η ολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα και παρέχεται από την εξίσωση (4.90) έχει το παρακάτω ανάπτυγμα

$$E = \pi R_I \frac{8\mu_R}{1 + \kappa_R} (\varepsilon_{\theta\theta}^T)^2 h + \mathcal{O}(h). \quad (4.196)$$

Ο πρώτος όρος του αναπτύγματος αυτού αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αποθηκεύεται στο δακτυλιοειδές λεπτό εγκλώβισμα. Αυτό συνάγεται από το γεγονός ότι, η ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα και στην ανομοιογένεια είναι της τάξεως h^2 . Συνεπώς, μπορεί να γραφτεί

$$E_R \cong \pi R_I \frac{8\mu_R}{1 + \kappa_R} (\varepsilon_{\theta\theta}^T)^2 h, \quad (4.197)$$

ή

$$E_R = 2\pi R_I \gamma, \quad (4.198)$$

όπου η ποσότητα

$$\gamma = \frac{4\mu_R h}{1 + \kappa_R} (\varepsilon_{\theta\theta}^T)^2, \quad (4.199)$$

εκφράζει την επιφανειακή πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν και για την αντιεπίπεδη κατάσταση του συστήματος που προέρχεται από διατμητική αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Στην περίπτωση αυτή, οι ελαστικές τάσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια παρέχονται από τις σχέσεις (C.63), (C.69) και (C.67). Οι τάσεις αυτές, για πάχος ανομοιογένειας $h(= R_M - R_I) \ll R_I$, έχουν τα παρακάτω αναπτύγματα

$$\sigma_{r_3}^M = -2\mu_M \frac{\mu_R + \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{h}{R_I} \varepsilon_{r_3}^T + \mathcal{O}(h^2), \quad (4.200)$$

$$\sigma_{r_3}^I = -2\mu_I \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{h}{R_I} \varepsilon_{r_3}^T + \mathcal{O}(h^2), \quad (4.201)$$

$$\sigma_{\theta_3}^R = -2\mu_R \varepsilon_{\theta_3}^T + 4\mu_R \frac{\mu_R + \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{h}{R_I} \varepsilon_{\theta_3}^T + \mathcal{O}(h^2). \quad (4.202)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, $\varepsilon_{r_3}^T$ και $\varepsilon_{\theta_3}^T$ είναι η ακτινική και η εφαπτομενική παραμόρφωση, που συνδέονται με τις καρτεσιανές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T , ε_{23}^T με τις σχέσεις

$$\varepsilon_{r_3}^T = \varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta, \quad (4.203)$$

$$\varepsilon_{\theta_3}^T = \varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta. \quad (4.204)$$

Σε αντίθεση με τις τάσεις $\sigma_{r_3}^M$ και $\sigma_{r_3}^I$, που είναι πρώτης τάξης ως προς h , η τάση $\sigma_{\theta_3}^R$ είναι μηδενικής τάξης ως προς h . Σε αντιστοιχία με την συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος, η συνολική δράση της τάσης, κατά μήκος του πάχους της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, μπορεί να εκφρασθεί με την σχέση

$$\tau_o = \sigma_{\theta_3}^R h \cong -2\mu_R h \varepsilon_{\theta_3}^R. \quad (4.205)$$

Η ποσότητα τ_o είναι ανάλογη της σ_o που δίνεται από την σχέση (4.194) και εισήχθη για την συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος. Στην αντιεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα παρέχεται από την σχέση (4.144). Για $h \ll R_I$, το ανάπτυγμα της σχέσης αυτής βρίσκεται στην μορφή

$$E = 2\pi R_I h \mu_R \left(\varepsilon_{\theta 3}^T \right)^2 + \mathcal{O}(h^2). \quad (4.206)$$

Είναι προφανές ότι ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της (4.206) αντιπροσωπεύει την ενέργεια που αποθηκεύεται στην λεπτή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Συνεπώς, μπορεί να γραφθεί στην μορφή

$$E^R = 2\pi R_I \gamma, \quad (4.207)$$

όπου

$$\gamma = h \mu_R \left(\varepsilon_{\theta 3}^T \right)^2, \quad (4.208)$$

εκφράζει την πυκνότητα επιφανειακής ενέργειας παραμόρφωσης.

Στην συνέχεια διερευνάται η περίπτωση της λεπτής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας του συστήματος, όταν ο πυρήνας υφίσταται έναν αντιεπίπεδο μετασχηματισμό φάσης, που περιγράφεται με τις ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$. Οι ελαστικές τάσεις που αναπτύσσονται στις τρεις φάσεις του συστήματος παρέχονται από τις σχέσεις (C.71)-(C.79). Από τις σχέσεις (C.72), (C.78) και (C.76) προκύπτουν τα παρακάτω αναπτύγματα

$$\sigma_{r3}^M = -\frac{2\mu_I \mu_M}{\mu_I + \mu_M} \varepsilon_{r3}^T + \frac{2h}{R_I} \frac{\mu_I \mu_M (\mu_M + \mu_R)(\mu_I + \mu_R)}{\mu_R (\mu_M + \mu_I)^2} \varepsilon_{r3}^T + \mathcal{O}(h^2), \quad (4.209)$$

$$\sigma_{r3}^I = -\frac{2\mu_I \mu_M}{\mu_I + \mu_M} \varepsilon_{r3}^T + \frac{2h}{R_I} \frac{\mu_I^2 (\mu_M^2 - \mu_R^2)}{\mu_R (\mu_M + \mu_I)^2} \varepsilon_{r3}^T + \mathcal{O}(h^2), \quad (4.210)$$

$$\sigma_{\theta 3}^R = -\frac{2\mu_I \mu_R}{\mu_I + \mu_M} \varepsilon_{\theta 3}^T - \frac{h}{R_I} \frac{\mu_I (\mu_M^2 - \mu_R^2)}{\mu_M (\mu_M + \mu_I)^2} \varepsilon_{\theta 3}^T + \mathcal{O}(h^2), \quad (4.211)$$

όπου ε_{r3}^T και $\varepsilon_{\theta 3}^T$ παρέχονται από τις σχέσεις (4.203) και (4.204). Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι οι ακτινικές τάσεις $\sigma_{r3}^M, \sigma_{r3}^I$, που αναπτύσσονται στην μήτρα και στον

πυρήνα, και η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta 3}^R$, που αναπτύσσεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, είναι μηδενικής τάξης ως προς το πάχος h . Επίσης, σχέση (4.211) δείχνει ότι η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta 3}^R$ εξαρτάται και από τις ελαστικές ιδιότητες της μήτρας και του πυρήνα. Η δράση της τάσης $\sigma_{\theta 3}^R$ κατά μήκος του πάχους h της λεπτής ανομοιογένειας, δηλαδή η δύναμη $\sigma_{\theta 3}^R h$, πρέπει να ισορροπεί την δύναμη που προκύπτει από την διαφορά των ακτινικών διατμητικών τάσεων

$$\Delta \sigma_{r3} = \sigma_{r3}^M - \sigma_{r3}^I = \frac{2h}{R_I} \frac{\mu_I (\mu_M + \mu_R)}{\mu_M + \mu_I} \varepsilon_{r3}^T, \quad (4.212)$$

πάνω στο διεπιφανειακό τμήμα $dS = R_I d\theta$. Από την θεώρηση της ισορροπίας του διεπιφανειακού αυτού τμήματος προκύπτει η σχέση

$$\Delta \sigma_{r3} = -\frac{h}{R_I} \frac{\partial \sigma_{\theta 3}^R}{\partial \theta}. \quad (4.213)$$

Από την σχέση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τις (4.212) και (4.211), προκύπτει ότι

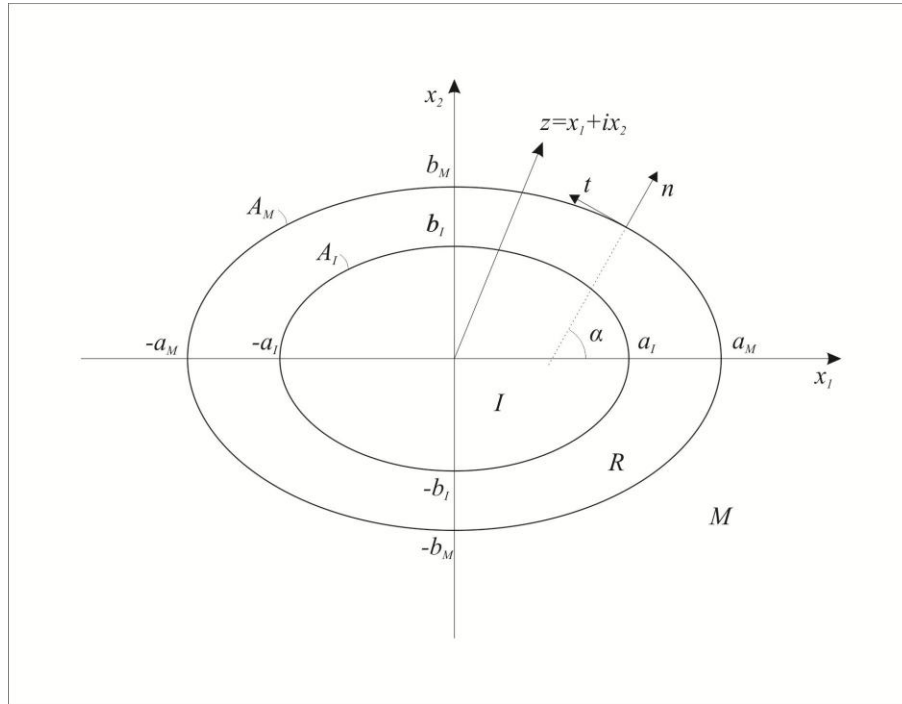
$$\frac{2h}{R_I} \frac{\mu_I (\mu_M + \mu_R)}{\mu_M + \mu_I} \varepsilon_{r3}^T = \frac{2h}{R_I} \frac{\mu_I \mu_R}{\mu_I + \mu_M} \varepsilon_{r3}^T, \quad (4.214)$$

Είναι προφανές ότι η συνθήκη (4.214) ικανοποιείται μόνο στην περίπτωση που η μήτρα είναι απύσσω, δηλαδή $\mu_M = 0$. Αυτό σημαίνει ότι λεπτή ανομοιογένεια γύρω από πυρήνα με διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις μπορεί να υπάρξει μόνο ως επικάλυψη του πυρήνα, χωρίς, δηλαδή, την παρουσία μήτρας.

4.6 Το ελλειπτικό δακτυλιοειδές εγκλώβισμα

Στο Σχήμα 5.3 δείχνεται ένα διφασικό σύστημα, που αποτελείται από μία κυλινδρική ανομοιογένεια ελλειπτικής διατομής και άπειρου μήκους που είναι ένθετη σε μία άπειρη μήτρα. Η ανομοιογένεια περιβάλλεται από ένα εγκλώβισμα σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων, που το εξωτερικό σύνορό του είναι ομοιόθετο της διεπιφάνειας

ανομοιογένειας-μήτρας. Στο ελαστικό σύστημα εισάγεται ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) , του οποίου ο άξονας x_3 συμπίπτει με τον άξονα της κυλινδρικής ανομοιογένειας και τα επίπεδα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$, συμπίπτουν με τα επίπεδα συμμετρίας της. Η ανάλυση της συνεπίπεδης και αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης



Σχήμα 4.3: Δακτυλιοειδές ελλειπτικό εγκλωβίσμα με πυρήνα σε ελαστική μήτρα.

του συστήματος γίνεται αναφορικά με ένα μιγαδικό z -επίπεδο που είναι συνδεδεμένο με τους άξονες x_1, x_2 του συστήματος συντεταγμένων $(z = x_1 + ix_2)$. Στο Σχήμα 4.3, η έλλειψη A_I αντιπροσωπεύει το ίχνος της κυλινδρικής διεπιφάνειας πάνω στο μιγαδικό z -επίπεδο, της οποίας τα μήκη του μεγάλου και μικρού ημιάξονα είναι a_I και b_I , αντίστοιχα. Η έλλειψη A_M του z -επιπέδου αντιπροσωπεύει το ίχνος του εξωτερικού κυλινδρικού συνόρου του εγκλωβίσματος, το οποίο, όπως έχει υποθεθεί προηγούμενα,

είναι ομοιόθετο της κυλινδρικής ελλειπτικής διεπιφάνειας. Αν x_1^I, x_2^I είναι σημεία της έλλειψης A_I , και x_1^M, x_2^M είναι σημεία της έλλειψης A_M , λόγω της ομοιοθεσίας ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$x_1^M = \lambda x_1^I, \quad x_2^M = \lambda x_2^I, \quad (4.215)$$

όπου λ είναι ένας πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει τον λόγο ομοιότητας. Από τις σχέσεις αυτές, άμεσα συνάγεται ότι

$$a_M = \lambda a_I, \quad b_M = \lambda b_I, \quad \frac{b_M}{a_M} = \frac{b_I}{a_I}. \quad (4.216)$$

Στην ανάλυση που γίνεται παρακάτω, χρησιμοποιούνται δύο σύμμορφοι μετασχηματισμοί για τις ελλείψεις A_M και A_I . Ο πρώτος σύμμορφος μετασχηματισμός (Σχήμα 4.4α) είναι της μορφής

$$z = m_M(\zeta) = R_M \left(\zeta + \frac{l_M}{\zeta} \right), \quad (4.217)$$

όπου

$$l_M = \frac{1 - b_M / a_M}{1 + b_M / a_M}, \quad a_M = R_M (1 + l_M). \quad (4.218)$$

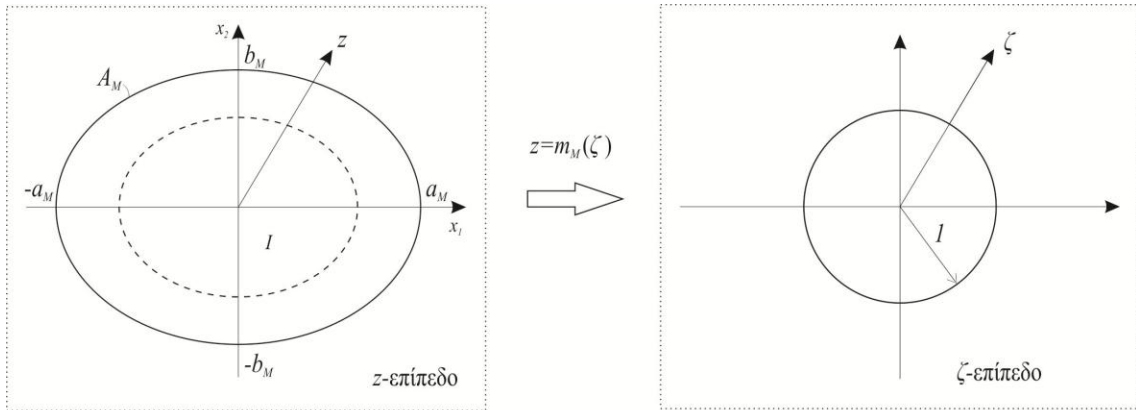
Ο μετασχηματισμός αυτός μετασχηματίζει την έλλειψη A_M του z -επιπέδου, στο μοναδιαίο κύκλο $|\zeta|=1$ ενός ζ -επιπέδου (Σχήμα 4.4α). Με το σχηματισμό αυτό, το εξωτερικό πεδίο της καμπύλης A_M μετασχηματίζεται σημείο προς σημείο στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του ζ -επιπέδου. Ο δεύτερος μετασχηματισμός είναι της μορφής

$$z = m_I(\xi) = R_I \left(\xi + \frac{l_I}{\xi} \right), \quad (4.219)$$

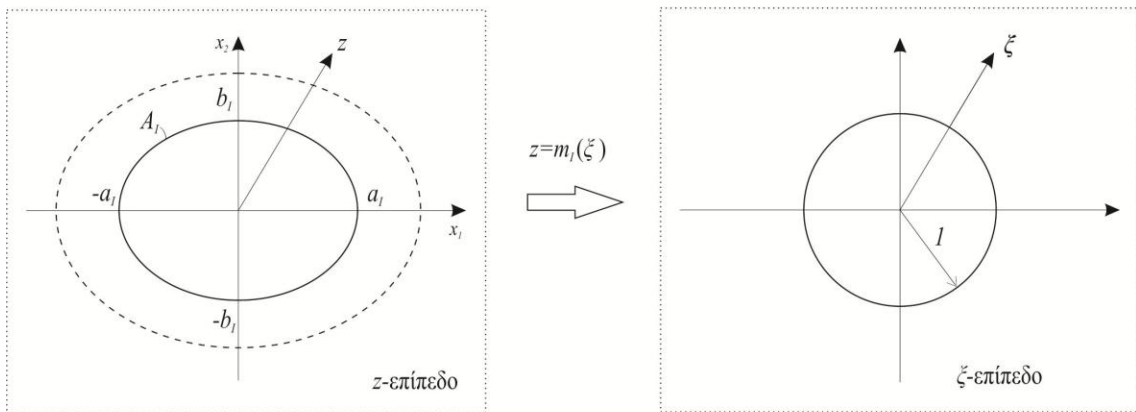
όπου

$$l_I = \frac{1-b_I/a_I}{1+b_I/a_I}, \quad a_I = R_I(1+l_I). \quad (4.220)$$

Ο μετασχηματισμός της (4.219) μετασχηματίζει την έλλειψη A_I του z -επιπέδου στον μοναδιαίο κύκλο $|\xi|=1$ ενός ξ -επιπέδου, με το εξωτερικό της έλλειψης A_I να



(α)



(β)

Σχήμα 4.4: Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί $z = m_M(\xi)$ και $z = m_I(\xi)$.

αντιστοιχεί στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (Σχήμα 4.4β).

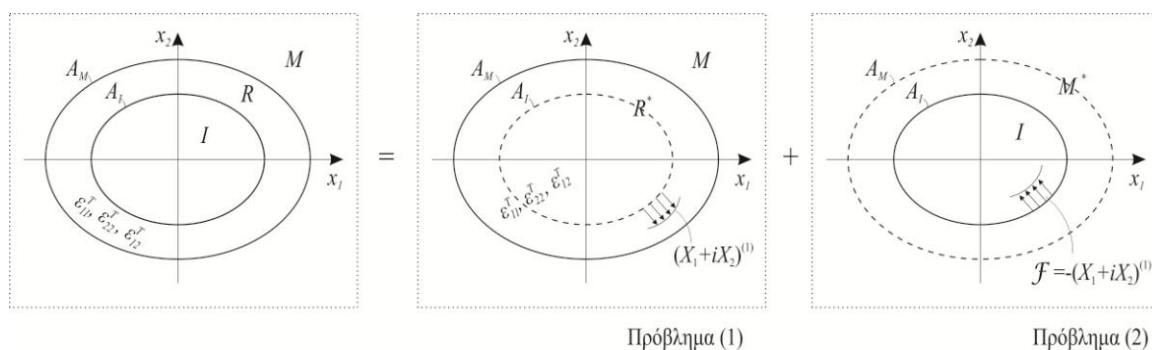
Λόγω της (4.215) συνάγεται ότι

$$l_I = l_M = l. \quad (4.221)$$

Στο z -επίπεδο (Σχήμα 4.4α), το πεδίο μεταξύ A_I και A_M θα δηλώνεται με R (δακτυλιοειδές εγκλωβίσμα), το πεδίο που βρίσκεται εξωτερικά της A_M θα δηλώνεται με M (μήτρα), και το πεδίο που βρίσκεται εσωτερικά της A_I θα δηλώνεται με I (πυρήνας). Το παραπάνω σύστημα αναλύεται παρακάτω για δύο περιπτώσεις ιδιοπαραμορφώσεων: για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T$ του εγκλωβίσματος που προκαλούν συνεπίπεδη παραμόρφωση του συστήματος, και για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{13}^T, \varepsilon_{23}^T$ του εγκλωβίσματος που του προκαλούν αντιεπίπεδη παραμόρφωση. Η λύση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων στηρίζεται σε ένα ιδιαίτερο αποτέλεσμα για την ελλειπτική ανομοιογένεια, που εξάγεται άμεσα παρακάτω. *Δείχνεται ότι, ελαστική παραμόρφωση του συστήματος, λόγω σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων του εγκλωβίσματος, αναπτύσσεται μόνο στο εξωτερικό της ανομοιογένειας, με την ανομοιογένεια να παραμένει απαραμόρφωτη!* Το αποτέλεσμα αυτό εξάγεται από την επίλυση του ελαστικού προβλήματος του συστήματος του Σχήματος 4.4 θεωρώντας ότι το πεδίο I αντιπροσωπεύει μία κυλινδρική κοιλότητα ελλειπτικής διατομής ($\mu_I = 0$). Από την επίλυση του προβλήματος αυτού προκύπτει ότι οι συνολικές μετατοπίσεις της διεπιφάνειας A_I , δηλαδή το άθροισμα των ελαστικών μετατοπίσεων και των ιδιομετατοπίσεων, είναι μηδενικό! Αυτό σημαίνει ότι, στην απαραμόρφωτη κατάσταση του συστήματος, αν η κυλινδρική ελλειπτική κοιλότητα, καταλαμβάνονταν από υλικό, σχηματίζοντας έτσι μία ανομοιογένεια, στην παραμορφωμένη κατάσταση του συστήματος, το υλικό αυτό, παραμένει απαραμόρφωτο!

4.6.1 Ελαστικά πεδία συνεπίπεδης παραμόρφωσης

Στη συνέχεια, επιλύεται το ελαστικό πρόβλημα του συστήματος του Σχήματος 4.5, όταν το πεδίο I αντιπροσωπεύει μία κυλινδρική ελλειπτική κοιλότητα ($\mu_I = 0$) και το πεδίο R , μία δακτυλιοειδής ανομοιογένεια, που υφίσταται ένα μετασχηματισμό φάσης που



Σχήμα 4.5: Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί $z = m_M(\zeta)$ και $z = m_I(\xi)$.

περιγράφεται με τις ιδιοπαμορφώσεις $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T$. Η λύση του προβλήματος αυτού προκύπτει από την επαλληλία των προβλημάτων (1) και (2) που δείχνονται στο Σχήμα 4.5. Το πρόβλημα (1) είναι ένα πρόβλημα ελλειπτικού εγκλωβισμού σε άπειρη ελαστική μήτρα με σταθερές ιδιοπαμορφώσεις $\varepsilon_{11}^T, \varepsilon_{22}^T, \varepsilon_{12}^T$ στο εγκλώβισμα. Οι ιδιοπαμορφώσεις αυτές αναπτύσσονται στο πεδίο R^* (εγκλώβισμα) που βρίσκεται εσωτερικά της έλλειψης A_M και καταλαμβάνεται από το υλικό της μήτρας ($\mu_{R^*} = \mu_M$). Το πρόβλημα (2) είναι ένα πρόβλημα ελλειπτικής κοιλότητας σε άπειρη ελαστική μήτρα. Η ελαστική μήτρα καταλαμβάνει το εξωτερικό πεδίο M^* της έλλειψης A_I που αντιπροσωπεύει το σύνορο της ελλειπτικής κοιλότητας. Το σύνορο A_I της ελλειπτικής κοιλότητας φορτίζεται με επιφανειακές δυνάμεις

$$f_n + if_t = -(\sigma_{nn} + i\sigma_{nt})^{(1),R^*}, \quad (4.222)$$

όπου $(\sigma_m + i\sigma_n)^{(1),R^*}$ είναι ο ελκυστής που επενεργεί πάνω στην κυλινδρική ελλειπτική επιφάνεια A_r στο πρόβλημα (1). Με (n, t, x_3) δηλώνεται ένα τοπικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, του οποίου ο άξονας t είναι εφαπτομενικός της έλλειψης και ο άξονας n κάθετος στον t . Στην επίλυση του προβλήματος (2), αντί της συνθήκης (4.219), θεωρείται η ολοκληρωμένη της μορφή, που είναι η δύναμη που επενεργεί πάνω σε ένα τόξο. Έτσι, έχοντας προσδιορίσει την ποσότητα $(X_1 + iX_2)^{(1)}$ από το πρόβλημα (1), η (4.222) μπορεί να αντικατασταθεί ισοδύναμα με την σχέση

$$\mathcal{F} = -(X_1 + iX_2)^{(1),R^*}. \quad (4.223)$$

Πρόβλημα (1)

Η λύση του ελαστικού προβλήματος (1) είναι γνωστή στην βιβλιογραφία (Eshelby, 1957; Bhargava and Radhakrishna, 1963). Όμως, για την πληρότητά της παρούσας ανάλυσης επανεξάγεται εδώ σε όρους των μιγαδικών δυναμικών κάνοντας χρήση των σχέσεων που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για το πρόβλημα αυτό, οι διεπιφανειακές συνθήκες που επικρατούν πάνω στην διεπιφάνεια A_M είναι

$$(u_1 + iu_2)^{(1),M} = (u_1 + iu_2)^{(1),R^*} + (u_1 + iu_2)^T, \quad (4.224)$$

$$(X_1 + iX_2)^{(1),M} = (X_1 + iX_2)^{(1),R^*}, \quad (4.225)$$

όπου

$$(u_1 + iu_2)^T = \frac{1}{2}Fz - \frac{1}{2}\bar{G}\bar{z}, \quad (4.226)$$

$$F = \varepsilon_{11}^T + \varepsilon_{22}^T, \quad G = \varepsilon_{22}^T - \varepsilon_{11}^T + 2i\varepsilon_{12}^T. \quad (4.227)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, με $(u_1 + iu_2)^{(1),k}$ και $(X_1 + iX_2)^{(1),k}$ δηλώνονται η ελαστική μετατόπιση και η δύναμη που επενεργεί πάνω σε ένα τόξο, αντίστοιχα ($k = M$ για το εξωτερικό πεδίο M της A και $k = R^*$ για το πεδίο R^*). Με $(u_1 + iu_2)^T$ δηλώνονται οι ιδιομετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο εγκλώβισμα, που αντιστοιχεί στο πεδίο R^* και έχουν προκύψει από την ολοκλήρωση των σχέσεων

$$\varepsilon_{11}^T = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22}^T = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad (4.228)$$

έχοντας παραλείψει τις σταθερές ολοκλήρωσης, καθότι αυτές αντιπροσωπεύουν μετατοπίσεις απόλυτου στερεού σώματος. Οι σχέσεις (4.224), (4.225) γράφονται ισοδύναμα

$$(u_1 + iu_2)^{(1),M} - (u_1 + iu_2)^{(1),R^*} = \mathcal{U}, \quad (4.229)$$

όπου

$$\mathcal{U} = (u_1 + iu_2)^T = \frac{1}{2} Fz - \frac{1}{2} \bar{G}\bar{z}. \quad (4.230)$$

Οι σχέσεις (4.229) και (4.230) δείχνουν ότι το πρόβλημα (1) έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα Somigliana, του οποίου η ασυνέχεια δίνεται από την (4.230). Συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος αυτού μπορεί να γίνει με τις σχέσεις (A.8)-(A.11). Οι σχέσεις αυτές, για ταυτόσημες ελαστικές σταθερές των φάσεων R^* και M ($\Lambda = \Pi = \Omega = 0$), γράφονται

$$\varphi_{R^*}^{(1)}(z) = \varphi_0(z), \quad (4.231)$$

$$\psi_{R^*}^{(1)}(z) = \psi_0(z), \quad (4.232)$$

όταν $z \in R^*$, και

$$\varphi_M^{(1)}(m_M(\zeta)) = \varphi_0(\zeta) + M \mathcal{U} \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (4.233)$$

$$\psi_M^{(1)}(m_M(\zeta)) = \psi_0(\zeta) - M \left[\bar{\mathcal{U}} \left(\frac{1}{\zeta}, \zeta \right) + \frac{\bar{m}_M(1/\zeta)}{m'_M(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \mathcal{U} \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right) \right], \quad (4.234)$$

όταν $|z| \geq 1$. Λόγω της (4.217) και της (4.219), ο όρος $\mathcal{U}(\zeta, 1/\zeta)$ που υπεισέρχεται στις παραπάνω σχέσεις προκύπτει στην μορφή

$$\mathcal{U} \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{R_M}{2} \left[(F - i\bar{G})\zeta + (iF - \bar{G}) \frac{1}{\zeta} \right]. \quad (4.235)$$

Τα διαφορικά μιγαδικά δυναμικά $\varphi_0(z)$ και $\psi_0(z)$ των παραπάνω σχέσεων αναζητούνται στη μορφή

$$\varphi_0(z) = Az, \quad \psi_0(z) = Bz, \quad (4.236)$$

όπου A και B είναι μιγαδικές σταθερές. Αντικαθιστώντας τις (4.231) και (4.232) στις (4.233) και (4.234) και απαιτώντας σύγκλιση των $\varphi_M^{(1)}(m_M(\zeta))$ και $\psi_M^{(1)}(m_M(\zeta))$ στο άπειρο, βρίσκεται ότι

$$A = -\frac{M}{2}(F - l\bar{G}), \quad B = \frac{M}{2}(2lF - G - l^2\bar{G}). \quad (4.237)$$

Λόγω των (4.231)-(4.234), τα παραπάνω μιγαδικά δυναμικά των πεδίων R^* και M προκύπτουν στη μορφή

$$\varphi_{R^*}^{(1)}(z) = -\frac{1}{2}M(F - l\bar{G})z, \quad (4.238)$$

$$\psi_{R^*}^{(1)}(z) = \frac{1}{2}M(2lF - G - l^2\bar{G})z, \quad (4.239)$$

και

$$\varphi_M^{(1)}(m_R(\zeta)) = -\frac{1}{2}R_M M(1-l^2)\bar{G}\frac{1}{\zeta}, \quad (4.240)$$

$$\begin{aligned} \psi_M^{(1)}(m_R(\zeta)) &= \frac{M}{2}R_M \frac{(3l^2-1)F - l(1+l^2)\bar{G}}{\zeta} \\ &\quad - \frac{M}{2}R_M \frac{(1+l^2)\zeta}{\zeta^2-1} \left(F - l\bar{G} - \frac{lF - \bar{G}}{\zeta^2} \right). \end{aligned} \quad (4.241)$$

Για μεταγενέστερη χρήση, υπολογίζονται η δύναμη πάνω σε ένα τόξο και η ελαστική μετατόπιση κάνοντας χρήση των παρακάτω σχέσεων των Kolosov-Muskhelishvili

$$i(X_1 + iX_2)^{(1),R^*} = \varphi_{R^*}^{(1)}(z) + z[\overline{\varphi_{R^*}^{(1)}(z)}]' + \overline{\psi_{R^*}^{(1)}(z)}, \quad (4.242)$$

$$2\mu_M(u_1 + iu_2)^{(1),R^*} = \kappa_M \varphi_{R^*}^{(1)}(z) - z[\overline{\varphi_{R^*}^{(1)}(z)}]' - \overline{\psi_{R^*}^{(1)}(z)}. \quad (4.243)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.238) και (4.239) στις παραπάνω σχέσεις, βρίσκεται ότι

$$(X_1 + iX_2)^{R^*} = i \frac{M}{2} [(2F - lG - l\bar{G})z - (2lF - \bar{G} - l^2G)\bar{z}], \quad (4.244)$$

$$(u_1 + iu_2)^{(1),R^*} = \frac{(1 - \kappa_M)F + l(\kappa_M \bar{G} - G)}{2(1 + \kappa_M)} z - \frac{2lF - \bar{G} - l^2G}{2(1 + \kappa_M)} \bar{z}. \quad (4.245)$$

Αν στις μετατοπίσεις αυτές προστεθούν οι ιδιομετατοπίσεις $(u_1 + iu_2)^T$ που δίνονται από την (4.226) προκύπτουν οι ολικές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο πεδίο R^*

$$(u_1 + iu_2)^{(1),R^*} + (u_1 + iu_2)^T = \frac{2F + l(\kappa_M \bar{G} - G)}{2(1 + \kappa_M)} z - \frac{2lF + \kappa_M \bar{G} - l^2G}{2(1 + \kappa_M)} \bar{z}. \quad (4.246)$$

Οι παραπάνω ολικές μετατοπίσεις είναι γραμμένες σε όρους της μεταβλητής z του φυσικού z -επιπέδου. Παρακάτω, είναι απαραίτητη η χρήση των ολικών μετατοπίσεων που αναπτύσσονται πάνω στην έλλειψη A_I . Οι ολικές αυτές μετατοπίσεις γράφονται σε όρους της μεταβλητής $\xi = \eta = e^{i\theta}$ του ξ -επιπέδου χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (4.217). Με το μετασχηματισμό αυτό, για τα διεπιφανειακά σημεία του μοναδιαίου κύκλου $|\xi| = 1$, ισχύει $\bar{\eta} = e^{-i\theta} = 1/\eta$, οπότε

$$z = R_I \left(\eta + \frac{l}{\eta} \right), \quad \bar{z} = R_I \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right). \quad (4.247)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την (4.247) στην (4.246) προκύπτουν οι ολικές μετατοπίσεις του συνόρου A_I σε όρους της μεταβλητής $\xi = \eta$ του ξ -επιπέδου

$$(u_1 + iu_2)^{(1),R^*} + (u_1 + iu_2)^T = \frac{R_I(1 - l^2)}{2(1 + \kappa_M)} \left[(2F - lG)\eta - \frac{\kappa_M \bar{G}}{\eta} \right]. \quad (4.248)$$

Πρόβλημα (2)

Για την επίλυση του προβλήματος (2), που είναι ένα πρόβλημα κυλινδρικής ελλειπτικής κοιλότητας σε άπειρη ελαστική μήτρα, γίνεται χρήση των σχέσεων

$$\varphi_{M^*}^{(2)}(\xi) = h_0(\xi) + \frac{i}{1 + \kappa_M} \mathcal{F} \left(\xi, \frac{1}{\xi} \right), \quad (4.249)$$

$$\begin{aligned} \psi_{M^*}^{(2)}(\xi) = & -\bar{h}_0 \left(\frac{1}{\xi} \right) - \frac{\bar{m}_l(1/\xi)}{m'_l(\xi)} h'_0(\xi) \\ & - \frac{i}{1+\kappa_M} \left[\kappa_M \bar{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\xi}, \xi \right) + \frac{\bar{m}_l(1/\xi)}{m'_l(\xi)} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F} \left(\xi, \frac{1}{\xi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.250)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι οι (A.10) και (A.11), γραμμένες σε όρους της μεταβλητής ξ του ξ -επιπέδου αντί της μεταβλητής ζ και έχοντας προσαρμόσει τον συμβολισμό για το πεδίο M^* που αναφέρονται. Το πεδίο αυτό βρίσκεται εξωτερικά της ελλειπτικής κοιλότητας A_l , και οι ελαστικές του σταθερές είναι αυτές του υλικού της μήτρας, δηλαδή κ_M και μ_M (Σχήμα 4.5). Στην σχέση αυτή η ποσότητα \mathcal{F} είναι

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = -(X_1 + iX_2)^{(1),R^*}, \quad (4.251)$$

όπου $(X_1 + iX_2)^{(1),R^*}$ παρέχεται από την (4.244). Αντικαθιστώντας την (4.244) στην (4.251) και παίρνοντας υπόψη την (4.219) προκύπτει ο \mathcal{F} - όρος που υπεισέρχεται στις παραπάνω σχέσεις

$$\mathcal{F} \left(\xi, \frac{1}{\xi} \right) = -i \frac{R_l \mu_M (1-l^2)}{1+\kappa_M} \left[(2F - lG)\xi + \bar{G} \frac{1}{\xi} \right]. \quad (4.252)$$

Η επίλυση του προβλήματος (2), ανάγεται στον προσδιορισμό της ολόμορφης συνάρτησης $h_0(\xi)$ που υπεισέρχεται στα μιγαδικά δυναμικά (4.249) και (4.250) του πεδίου M^* . Η συνάρτηση αυτή, αναζητείται στην μορφή

$$h_0(\xi) = C\xi + \frac{D}{\xi}, \quad (4.253)$$

όπου C και D είναι μιγαδικές σταθερές που προσδιορίζονται. Εισάγοντας τις (4.252) και (4.253) στις (4.249) και (4.250) και απαιτώντας την σύγκλιση των $\varphi_{M^*}^{(2)}(\xi)$ και $\psi_{M^*}^{(2)}(\xi)$ στο άπειρο, προκύπτει ότι

$$C = -\frac{\mu_M R_l (1-l^2)}{(1+\kappa_M)^2} (2F - lG), \quad (4.254)$$

$$D = \frac{\kappa_M \mu_M R_I (1-l^2)}{(1+\kappa_M)^2} \bar{G}. \quad (4.255)$$

Εισάγοντας τις (4.254), (4.255) στις (4.249), (4.250) και λαμβάνοντας υπόψη τις (4.252) και (4.253) βρίσκεται

$$\varphi_{M^*}^{(2)}(\xi) = \frac{\mu_M R_I (1-l^2)}{1+\kappa_M} \bar{G} \frac{1}{\xi}, \quad (4.256)$$

$$\psi_{M^*}^{(2)}(\xi) = \frac{\mu_M R_I (1-l^2)}{1+\kappa_M} \left[\frac{2F}{\xi} + \frac{(1+l^2)\bar{G}}{\xi(\xi^2-l)} \right]. \quad (4.257)$$

Στη συνέχεια, δείχνεται ότι η λύση ενός δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος ιδιοπαραμορφώσεων με ομοιόθετα σύνορα, που περιβάλλει ένα ελλειπτικό ελαστικό πυρήνα, ανάγεται στην περίπτωση του προηγούμενου προβλήματος, όταν δηλαδή ο ελλειπτικός πυρήνας αντικατασταθεί με μία ελλειπτική οπή. Αυτό γίνεται, δείχνοντας ότι οι μετατοπίσεις του συνόρου της ελλειπτικής κυλινδρικής οπής είναι μηδενικές. Η ολική μετατόπιση του συνόρου της ελλειπτικής οπής προκύπτει από την επαλληλία των μετατοπίσεων του προβλήματος (1) και του προβλήματος (2) που επιλύθηκαν προηγούμενα. Για το πρόβλημα (1) η μετατόπιση του ελλειπτικού συνόρου της οπής προκύπτει από το άθροισμα της ελαστικής μετατόπισης και της ιδιοπαραμόρφωσης και παρέχεται από την σχέση (4.248) που υπολογίστηκε προηγούμενα. Η σχέση αυτή παρέχει τις μετατοπίσεις του ελλειπτικού συνόρου σε όρους της μεταβλητής $\eta (= e^{i\theta})$ που αντιπροσωπεύει τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $|\xi|=1$ του ξ -επιπέδου. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις του ελλειπτικού συνόρου του προβλήματος (2) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.249) και (4.250) που παρέχουν την λύση του. Οι μετατοπίσεις αυτές υπολογίζονται, χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση των Kolosov-Muskhelishvili γραμμένη σε όρους της μεταβλητής ξ του ξ -επιπέδου

$$2\mu_M (u_1 + iu_2)^{(2),M^*} = \kappa_M \varphi_{M^*}^{(2)}(\xi) - \frac{m_I(\xi)}{m_I'(\xi)} \overline{[\varphi_{M^*}^{(2)}(\xi)]'} - \overline{\psi_{M^*}^{(2)}(\xi)}. \quad (4.258)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.256) και (4.257) στην (4.258), για τα σημεία του ελλειπτικού συνόρου που αντιστοιχούν στα σημεία $\eta (= e^{i\theta})$ του μοναδιαίου κύκλου $|\xi|=1$, βρίσκεται

$$(u_1 + iu_2)^{(2),M^*} = -\frac{R_I(1-l^2)}{2(1+\kappa_M)} \left[(2F - lG)\eta - \kappa_M \bar{G} \frac{1}{\eta} \right]. \quad (4.259)$$

Έτσι, προσθέτοντας τις σχέσεις (4.248) και (4.259), για την ολική μετατόπιση του ελλειπτικού συνόρου της οπής, προκύπτει

$$(u_1 + iu_2)^{(1)} + (u_1 + iu_2)^{(2)} + (u_1 + iu_2)^T = 0. \quad (4.260)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι το σύνορο της κυλινδρικής ελλειπτικής κοιλότητας παραμένει αμετακίνητο. Αυτό σημαίνει ότι, αν αντί της κυλινδρικής ελλειπτικής κοιλότητας, υπήρχε στο σύστημα μια κυλινδρική ανομοιογένεια με οποιεσδήποτε διεπιφανειακές συνθήκες, αυτή παραμένει απαραμόρφωτη! Αυτό συμβαίνει, επειδή η διεπιφάνεια πυρήνα-εγκλωβίσματος παραμένει αμετακίνητη κατά την ανάπτυξη των ιδιοπαραμορφώσεων του δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος.

Έτσι, τα ελαστικά πεδία και η ελαστική ενέργεια στις φάσεις του ελαστικού συστήματος υπολογίζονται από την επαλληλία των μιγαδικών δυναμικών των δύο προβλημάτων που αντιστοιχούν στις φάσεις αυτές. Προκειμένου να καταστεί δυνατή η επαλληλία αυτή, τα μιγαδικά δυναμικά των δύο προβλημάτων, γράφονται σε όρους της μεταβλητής z του φυσικού επιπέδου, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4IR_M^2}}{2R_M}, \quad \xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4IR_I^2}}{2R_I}. \quad (4.261)$$

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών ποσοτήτων που γίνεται παρακάτω, επαρκεί ο προσδιορισμός μόνο των μιγαδικών δυναμικών του δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος. Τα μιγαδικά δυναμικά του προβλήματος (1) σε όρους της μεταβλητής z του φυσικού επιπέδου, παρέχονται από τις σχέσεις (4.238) και (4.239). Τα μιγαδικά δυναμικά του προβλήματος (2) που παρέχονται από τις σχέσεις (4.256) και (4.257), με βάση την δεύτερη σχέση της (4.261), γράφονται

$$\varphi_{M^*}^{(2)}(\xi(z)) = \frac{MR_I^2(1-l^2)\bar{G}}{z + \sqrt{z^2 - 4IR_I^2}}, \quad (4.262)$$

$$\psi_{M^*}^{(2)}(\xi(z)) = \frac{2MR_l^2(1-l^2)}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_l^2}} \left[F + \frac{R_l^2(1+l^2)\bar{G}}{\sqrt{z^2 - 4lR_l^2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4lR_l^2} \right)} \right]. \quad (4.263)$$

Συνεπώς, στο φυσικό επίπεδο, τα μιγαδικά δυναμικά του δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος βρίσκονται από τις σχέσεις

$$\varphi_R(z) = \varphi_{R^*}^{(1)}(z) + \varphi_{M^*}^{(2)}(\xi(z)), \quad (4.264)$$

$$\psi_R(z) = \psi_{R^*}^{(1)}(\xi) + \varphi_{M^*}^{(2)}(\xi(z)). \quad (4.265)$$

Από τις σχέσεις αυτές, χρησιμοποιώντας τις (4.256), (4.257) και (4.262), (4.263), προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά του δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος στη μορφή

$$\varphi_R(z) = -\frac{M}{2}(F - l\bar{G})z + \frac{MR_l^2(1-l^2)\bar{G}}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_l^2}}, \quad (4.266)$$

$$\begin{aligned} \psi_R(z) = & \frac{M}{2}(2lF - G - l^2\bar{G})z \\ & + \frac{2MR_l^2(1-l^2)}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_l^2}} \left[F + \frac{R_l^2(1-l^2)\bar{G}}{\sqrt{z^2 - 4lR_l^2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4lR_l^2} \right)} \right]. \end{aligned} \quad (4.267)$$

Αντίστοιχα, μπορούν να προσδιορισθούν τα μιγαδικά δυναμικά της μήτρας.

4.6.2 Ελαστικές ενέργειες συνεπίπεδης παραμόρφωσης

Επειδή, πάνω στην διεπιφάνεια A_l , ο ελκυστής είναι μηδέν, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα παρέχεται από την σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \int_{A_M} (\sigma_{nn}^R u_n^T + \sigma_{nt}^R u_t^T) dA_M, \quad (4.268)$$

όπου σ_{nn}^R , σ_{nt}^R και u_n^T , u_t^T δηλώνουν τις συνιστώσες του διεπιφανειακού ελκυστή και τις συνιστώσες των διεπιφανειακών ιδιομετατοπίσεων αναφορικά με το τοπικό σύστημα

συντεταγμένων (n, t, x_3) που δείχνεται στο Σχήμα 4.3. Η παραπάνω σχέση, ισοδύναμα, γράφεται στην μορφή

$$E = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{A_M} (\sigma_{nn}^R - i\sigma_{nt}^R)(u_n^T + iu_t^T) dA_M \right\}, \quad (4.269)$$

όπου $\operatorname{Re}\{\dots\}$ δηλώνει το πραγματικό μέρος της ποσότητας που περιέχεται στα άγκιστρα. Στην παραπάνω σχέση, με $\sigma_{nn}^R + i\sigma_{nt}^R$ και $u_n^T + iu_t^T$ δηλώνονται ο μιγαδικός διεπιφανειακός ελκυστής και η διεπιφανειακή ιδιομετατόπιση, αντίστοιχα. Οι διεπιφανειακές αυτές ποσότητες μπορούν να εκφραστούν σε όρους των καρτεσιανών συνιστωσών των τάσεων και των μετατοπίσεων με τις σχέσεις

$$\sigma_{nn}^R - i\sigma_{nt}^R = \Sigma_1 - \Sigma_2 e^{2ia}, \quad (4.270)$$

$$u_n^T + iu_t^T = e^{-ia} (u_1^T + iu_2^T), \quad (4.271)$$

όπου

$$\Sigma_1 = \sigma_{11}^R + i\sigma_{22}^R = \varphi_R'(t) + \overline{\varphi_R'(t)}, \quad (4.272)$$

$$\Sigma_2 = \sigma_{22}^R - \sigma_{11}^R + 2i\sigma_{12}^R = \bar{t} \varphi_R''(t) + \psi_R'(t), \quad (4.273)$$

και

$$u_1^T + iu_2^T = \frac{1}{2} Ft - \frac{1}{2} \bar{G} \bar{t}. \quad (4.274)$$

Στις σχέσεις (4.270) και (4.271), το t δηλώνει ένα σημείο της A_M που συσχετίζεται με ένα σημείο σ της μοναδιαίας περιφέρειας $|\zeta| = |\sigma| = 1$ μέσω της $t = m_M(\sigma)$. Το a δηλώνει την γωνία που σχηματίζει ο άξονας t του τοπικού συστήματος με τον άξονα x_1 του καρτεσιανού συστήματος (Σχήμα 4.5). Τα $\varphi_R(t)$ και $\psi_R(t)$ αποτελούν τα μιγαδικά δυναμικά του πεδίου R που υπολογίσθηκαν προηγούμενα (σχέσεις (4.266) και (4.267)). Αντικαθιστώντας τις (4.270), (4.271) και (4.274) στην (4.269) προκύπτει

$$E = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_{A_M} (\Sigma_1 e^{-ia} - \Sigma_2 e^{ia})(Ft - \bar{G}\bar{t}) |dt| \right\}, \quad (4.275)$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι $dA_M = |dt|$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.266) και (4.267), οι ποσότητες Σ_1 , Σ_2 υπολογίζονται στην μορφή

$$\Sigma_1 = \Sigma_1(t, \bar{t}) = -\frac{M}{2} [2F - l(G + \bar{G})] - MR_l^2 (1-l^2) \left[\bar{G}\mathcal{H}(t) + G\overline{\mathcal{H}(t)} \right], \quad (4.276)$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_2(t, \bar{t}) = \frac{M}{2} (2lF - G - l^2\bar{G}) - MR_l^2 (1-l^2) \left[2\mathcal{H}(t) - \frac{\bar{G}t}{[g(t)]^3} + \frac{2(1+l^2)R_l^2\bar{G}\mathcal{H}(t)}{[g(t)]^2} + 2(1+l^2)R_l^2\bar{G}[\overline{\mathcal{H}(t)}]^2 \right], \quad (4.277)$$

όπου

$$g(t) = \sqrt{t^2 - 4lR_l^2}, \quad (4.278)$$

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{g(t)[t + g(t)]}. \quad (4.279)$$

Η σχέση (4.275) παρέχει την ελαστική ενέργεια εκφρασμένη σε όρους των μεταβλητών t και \bar{t} του φυσικού επιπέδου. Στην συνέχεια, η σχέση αυτή, μέσω του μετασχηματισμού (4.217), εκφράζεται σε όρους της μεταβλητής σ του μιγαδικού επιπέδου ζ , όπου σ είναι ένα σημείο της μοναδιαίας περιφέρειας $|\zeta| = |\sigma| = 1$, που αντιστοιχεί στο διεπιφανειακό σημείο t του φυσικού επιπέδου με την σχέση

$$t = m_M(\sigma). \quad (4.280)$$

Από την σχέση αυτή, καθότι $\sigma\bar{\sigma} = 1$, και τα R_M, l είναι πραγματικοί αριθμοί, προκύπτει

$$\bar{t} = \bar{m}_M(\bar{\sigma}) = m_M\left(\frac{1}{\sigma}\right). \quad (4.281)$$

Οι ποσότητες Σ_1 και Σ_2 που παρέχονται με τις σχέσεις (4.276) και (4.277), λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (4.280) και (4.281), μπορούν να εκφραστούν σε όρους της μεταβλητής σ του μοναδιαίου κύκλου με τις παρακάτω σχέσεις

$$\Sigma_1^0(\sigma) = \Sigma_1(t, \bar{t}) = \Sigma_1(m_M(\sigma), m_M(1/\sigma)), \quad (4.282)$$

$$\Sigma_2^0(\sigma) = \Sigma_2(t, \bar{t}) = \Sigma_2(m_M(\sigma), m_M(1/\sigma)). \quad (4.283)$$

Στην συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις

$$e^{ia} = \frac{\sigma m'_M(\sigma)}{|m'_M(\sigma)|}, \quad e^{-ia} = \frac{m'_M(1/\sigma)}{\sigma |m'_M(\sigma)|}, \quad dt = |m'_M(\sigma)| d\sigma, \quad (4.284)$$

το επικαμπύλιο ολοκληρώμα της (4.269) μπορεί να αναχθεί σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο $|\sigma| = 1$. Βρίσκεται ότι

$$E = 2\text{Re}\{E_1 + E_2\}, \quad (4.285)$$

όπου

$$E_1 = -\frac{F}{8i} \oint_{|\sigma|=1} \left[\Sigma_1^0 \frac{1}{\sigma^2} m_M \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \Sigma_2^0 m'_M(\sigma) \right] m_M(\sigma) d\sigma, \quad (4.286)$$

$$E_2 = \frac{G}{8i} \oint_{|\sigma|=1} \left[\Sigma_1^0 \frac{1}{\sigma^2} m'_M \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \Sigma_2^0 m'_M(\sigma) \right] m_M \left(\frac{1}{\sigma} \right) d\sigma. \quad (4.287)$$

Ο υπολογισμός των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που εμπλέκονται στις ποσότητες E_1 και E_2 γίνεται χρησιμοποιώντας τα παρακάτω αναπτύγματα των Σ_1^0 και Σ_2^0 .

$$\Sigma_1^0(\sigma) = -\frac{M}{2} [2F - l(G + \bar{G}) - \frac{MR_l^2(1-l^2)}{R_M^2} \left(\frac{\bar{G}}{\sigma^2} + G\sigma^2 + a_4\sigma^4 + a_{-4}\sigma^{-4} + a_6\sigma^6 + a_{-6}\sigma^{-6} + \dots \right)], \quad (4.288)$$

$$\Sigma_2^0(\sigma) = \frac{M}{2} [2lF - G - l^2\bar{G} - \frac{MR_l^2(1-l^2)}{R_M^2} \left(\frac{F - l\bar{G}}{\sigma^2} + a'_4\sigma^4 + a'_{-4}\sigma^{-4} + a'_6\sigma^6 + a'_{-6}\sigma^{-6} + \dots \right)], \quad (4.289)$$

όπου $a_4, a_{-4}, a_6, a_{-6} + \dots$ και $a'_4, a'_{-4}, a'_6, a'_{-6} + \dots$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα αυτά στις (4.286) και (4.287) και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα

$$\oint_{|\sigma|=1} \frac{1}{\sigma^n} d\sigma = \begin{cases} 2\pi i, & \text{όταν } n = 1, \\ 0, & \text{όταν } n \neq 1, \end{cases} \quad (4.290)$$

οι ποσότητες E_1 και E_2 υπολογίζονται στην παρακάτω μορφή

$$E_1 = \frac{S_M M}{8} (1 - a^2) [2F^2 - l(FG + F\bar{G})], \quad (4.291)$$

$$E_2 = \frac{S_M M}{8} (1 - a^2) (|G|^2 + l^2 G^2 - 2lFG), \quad (4.292)$$

όπου $a = R_l / R_M$ και $S_M = \pi R_M^2 (1 - l^2)$ ($= \pi a_M b_M$) αντιπροσωπεύει το εμβαδόν της ελλειπτικής περιοχής που περικλείεται από την A_M . Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω ποσότητες, η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος βρίσκεται στην παρακάτω απλή μορφή

$$E = \frac{1}{4} M S_M (1 - a^2) \left[2F^2 + |G|^2 - 2l(FG + F\bar{G}) + \frac{l^2}{2} (G^2 + \bar{G}^2) \right]. \quad (4.293)$$

4.6.3 Ελαστικά πεδία αντεπίπεδης παραμόρφωσης

Στη συνέχεια, μελετάται το αντίστοιχο αντεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα του συστήματος του Σχήματος 4.4α, όταν το πεδίο R υφίσταται ένα μετασχηματισμό φάσης που περιγράφεται με τις ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T . Στην περίπτωση αυτή, το πρόβλημα (1) είναι το αντεπίπεδο πρόβλημα ενός ελλειπτικού εγκλωβίσματος σε μία άπειρη μήτρα με σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις ε_{13}^T και ε_{23}^T . Όπως στην συνεπίπεδη παραμόρφωση, το πεδίο του εγκλωβίσματος στο z -επίπεδο δηλώνεται με R^* και το πεδίο της μήτρας με R . Στο πρόβλημα (1) το μέτρο διάτμησης του πεδίου R^* θεωρείται ότι είναι το ίδιο με αυτό της μήτρας μ_M ($\mu_{R^*} = \mu_M$). Το πρόβλημα (2) είναι ένα πρόβλημα μιας ελλειπτικής

κοιλότητας σε μία άπειρη ελαστική μήτρα, της οποίας το πεδίο, που βρίσκεται εξωτερικά της έλλειψης A_l , δηλώνεται με M^* . Στο πρόβλημα (2), η φόρτιση που θεωρείται είναι επιφανειακές δυνάμεις f_3 παράλληλες στον άξονα x_3 που εφαρμόζονται στο σύνορο της ελλειπτική κοιλότητας και είναι ίσες με

$$f_3 = -\sigma_{3n}^{(1),R^*}, \quad (4.294)$$

όπου $\sigma_{3n}^{(1)}$ είναι ο ελκυστής που επενεργεί πάνω στην κυλινδρική διεπιφάνεια A_l και έχει προσδιορισθεί στο πρόβλημα (1). Στην ανάλυση που γίνεται παρακάτω, η συνθήκη (4.294) χρησιμοποιείται στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή

$$\mathcal{F} = -X_3^{(1),R^*}, \quad (4.295)$$

όπου $X_3^{(1),R^*}$ είναι η δύναμη που επενεργεί πάνω σε τόξο.

Πρόβλημα (1)

Όπως στο συνεπίπεδο πρόβλημα, οι διεπιφανειακές συνθήκες του προβλήματος (1) ανάγουν το σχετικό ελαστικό πρόβλημα σε ένα αντιεπίπεδο πρόβλημα τύπου Somigliana με τις παρακάτω διεπιφανειακές συνθήκες

$$u_3^{(1),M} - u_3^{(1),R^*} = \mathcal{U}, \quad (4.296)$$

$$X_3^{(1),M} = X_3^{(1),R^*}, \quad (4.297)$$

όπου

$$\mathcal{U} = u_3^T = \mathcal{F}^T z + \bar{\mathcal{F}}^T \bar{z}, \quad \mathcal{F}^T = \varepsilon_{13}^T - i\varepsilon_{23}^T. \quad (4.298)$$

Η επίλυση του αντιεπίπεδου αυτού προβλήματος γίνεται χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις

$$f_{R^*}^{(1)}(z) = f_0(z), \quad (4.299)$$

$$f_M^{(1)}(\zeta) = f_0(\zeta) + \frac{1}{2} \mathcal{U} \left(\zeta, \frac{1}{\zeta} \right), \quad (4.300)$$

όπου $f_0(\zeta)$ είναι το διαφοσικό δυναμικό του συστήματος. Στην σχέση αυτή, η συνάρτηση \mathcal{U} προκύπτει από την (4.298) στην μορφή

$$\mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) = \mathcal{F}^T m_M(\zeta) + \bar{\mathcal{F}}^T m_M\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad (4.301)$$

από όπου

$$\mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) = \mathcal{F}^T m_M\left(\zeta + \frac{l}{\zeta}\right) + \bar{\mathcal{F}}^T m_M\left(\frac{1}{\zeta} + l\zeta\right). \quad (4.302)$$

Η σχέση (4.299) και (4.300) προκύπτουν από τις (A.16) και (A.18), θέτοντας $\mu_M = \mu_l$.

Το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$ αναζητείται στη μορφή

$$f_0(z) = A'z, \quad (4.303)$$

για το πεδίο R^* , και

$$f_0(\zeta) = A'f_0(m_M(\zeta)) = A'R_M\left(\zeta + \frac{l}{\zeta}\right), \quad (4.304)$$

για το πεδίο M . Το A' είναι μία μιγαδική σταθερά που υπολογίζεται παρακάτω. Αντικαθιστώντας τις (4.302) και (4.304) στην (4.300) και απαιτώντας σύγκλιση της $f_M^{(1)}(\zeta)$ στο άπειρο, προκύπτει

$$A' = -\frac{1}{2}(\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T). \quad (4.305)$$

Έτσι, έχοντας υπολογίσει το διαφοσικό δυναμικό $f_0(z)$, τα μιγαδικά δυναμικά από τις σχέσεις (4.299) και (4.300), παίρνουν την μορφή

$$f_{R^*}^{(1)}(z) = -\frac{1}{2}(\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T)z, \quad (4.306)$$

$$f_M^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{2}R_M(1-l^2)\bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\zeta}, \quad (4.307)$$

Στο σημείο αυτό, κάνοντας χρήση της σχέσης (4.306), υπολογίζεται η δύναμη πάνω σε ένα τόξο που αναπτύσσεται στο πεδίο R^* και η ελαστική μετατόπιση, κάνοντας χρήση των παρακάτω σχέσεων

$$X_3^{(1),R^*} = -i\mu_M [f_{R^*}^{(1)}(z) - \overline{f_{R^*}^{(1)}(z)}], \quad (4.308)$$

$$u_3^{(1),R^*} = f_{R^*}^{(1)}(z) + \overline{f_{R^*}^{(1)}(z)}, \quad (4.309)$$

από όπου, προκύπτουν

$$X_3^{(1),R^*} = i\frac{\mu_M}{2} [(\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T)z + (\bar{\mathcal{F}}^T + l\mathcal{F}^T)\bar{z}], \quad (4.310)$$

$$u_3^{(1),R^*} = -\frac{1}{2} [(\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T)z + (\bar{\mathcal{F}}^T + l\mathcal{F}^T)\bar{z}]. \quad (4.311)$$

Αν στις μετατοπίσεις της σχέσης (4.311) προστεθούν οι ιδιομετατοπίσεις u_3^T που δίνονται από την σχέση (4.298) προκύπτουν οι ολικές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο πεδίο R^*

$$u_3^{(1),R^*} + u_3^T = \frac{\mathcal{F}^T - l\bar{\mathcal{F}}^T}{2} z + \frac{\bar{\mathcal{F}}^T - l\mathcal{F}^T}{2} \bar{z}. \quad (4.312)$$

Οι παραπάνω ολικές μετατοπίσεις είναι γραμμένες σε όρους της μεταβλητής z του φυσικού z -επιπέδου. Ο υπολογισμός των ολικών μετατοπίσεων υπολογίζεται, στη συνέχεια, πάνω στο σύνορο της έλλειψης A_I και οι μετατοπίσεις αυτές βρίσκονται σε όρους της μεταβλητής ξ του ξ -επιπέδου, θέτοντας στην παραπάνω σχέση

$$z = R_I \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right), \text{ όπου } \eta = e^{i\theta}. \text{ Βρίσκεται ότι}$$

$$u_3^{(1),R^*} + u_3^T = \frac{R_I(1-l^2)}{2} \left(\bar{\mathcal{F}}^T \eta + \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\eta} \right). \quad (4.313)$$

Πρόβλημα (2)

Για την επίλυση του προβλήματος (2) χρησιμοποιείται η σχέση

$$f_{M^*}^{(2)}(\xi) = h_0(\xi) + \bar{h}_0\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{i}{2\mu_M} \mathcal{F}\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right), \quad (4.314)$$

που έχει εξαχθεί στο Παράρτημα Α (Α.25). Στην σχέση αυτή

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = -X_3^{(1),R^*}, \quad (4.315)$$

όπου $X_3^{(1),R^*}$ παρέχεται από την (4.310). Από την σχέση αυτή, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (4.219), προκύπτει

$$\mathcal{F}\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right) = -i \frac{\mu_M R_l (1-l^2)}{2} \left(\mathcal{F}^T \xi - \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\xi} \right). \quad (4.316)$$

Η $h_0(\xi)$ αναζητείται στη μορφή

$$h_0(\xi) = C' \xi. \quad (4.317)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.315) και (4.102) στην (4.313) και απαιτώντας σύγκλιση της $f_{M^*}^{(2)}(\xi)$ στο άπειρο, βρίσκεται

$$C' = -\frac{R_l}{4} (1-l^2) \mathcal{F}^T. \quad (4.318)$$

Αντικαθιστώντας την (4.315), (4.316) και (4.318) στην (4.313) βρίσκεται ότι

$$f_{M^*}^{(2)}(\xi) = -\frac{R_l (1-l^2)}{2} \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\xi}, \quad (4.319)$$

λύση του προβλήματος (2) παρέχεται από την σχέση (4.319). Κάνοντας χρήση της σχέσης αυτής, οι μετατοπίσεις πάνω στο ελλειπτικό σύνορο A_l , χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u_3^{(2)}(\xi, \bar{\xi}) = f_{M^*}^{(2)}(\xi) + \overline{f_{M^*}^{(2)}(\xi)}, \quad (4.320)$$

προκύπτει ότι

$$u_3^{(2)}(\eta) = -\frac{R_I(1-l^2)}{2} \left(\mathcal{F}^T \eta + \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\eta} \right), \quad (4.321)$$

όπου έχει τεθεί $\eta = \xi = e^{i\theta}$. Προσθέτοντας τις (4.313) και (4.321) προκύπτει

$$u_3^{(1)} + u_3^T + u_3^{(2)} = 0. \quad (4.322)$$

Μετά από επαλληλία του προβλήματος (1) και προβλήματος (2) προκύπτουν τα μιγαδικά δυναμικά στο “φυσικό” επίπεδο

$$f_M(z) = (1-l^2) \bar{\mathcal{F}}^T \left(\frac{R_M^2}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_M^2}} - \frac{R_I^2}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_I^2}} \right), \quad (4.323)$$

για τη μήτρα, και

$$f_R(z) = -\frac{1}{2} (\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T) z - (1-l^2) \bar{\mathcal{F}}^T \frac{R_I^2}{z + \sqrt{z^2 - 4lR_I^2}}, \quad (4.324)$$

για τον δακτύλιο. Για την ειδική περίπτωση του κύκλου, δηλαδή για $l = 0$, ισχύει

$$f_R(z) = -\frac{\mathcal{F}^T}{2} z - \bar{\mathcal{F}}^T \frac{R_I^2}{2z}, \quad (4.325)$$

όπως έχει υπολογιστεί από τη σχέση (4.121).

4.6.4 Ελαστικές ενέργειες αντιεπίπεδης παραμόρφωσης

Επειδή στην διεπιφάνεια A_I , που βρίσκεται μεταξύ της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και του πυρήνα, ο διεπιφανειακός ελκυστής είναι μηδέν ($\sigma_{n3} = 0$), η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος παρέχεται από την σχέση

$$E = -\frac{1}{2} \oint_{A_M} \sigma_{n3}^R u_3^T dA_M, \quad (4.326)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$E = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \oint_{A_M} (\sigma_{n3}^R - i\sigma_{t3}^R) u_3^T dA_M \right\}, \quad (4.327)$$

όπου $\sigma_{n3}^R, \sigma_{t3}^R$ είναι οι συνιστώσες των μη μηδενικών τάσεων ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων και u_3^T η αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση. Η μιγαδική διαμητική τάση $\sigma_{n3}^R - i\sigma_{t3}^R$ μπορεί να εκφραστεί σε όρους των καρτεσιανών διαμητικών τάσεων $\sigma_{13}^R, \sigma_{23}^R$ με την σχέση

$$\sigma_{n3}^R - i\sigma_{t3}^R = e^{ia} (\sigma_{13}^R - i\sigma_{23}^R), \quad (4.328)$$

όπου η γωνία a παρέχεται από την πρώτη σχέση της (4.284). Οι καρτεσιανές συνιστώσες των τάσεων συνδέονται με το μιγαδικό δυναμικό του δακτυλιοειδούς εγκλωβίσματος με την σχέση

$$\sigma_{13}^R - i\sigma_{23}^R = 2\mu_M f_R'(z). \quad (4.329)$$

όπου $f_R(z)$ δίνεται από την σχέση (4.324). Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.298), (4.328) και (4.329), η σχέση (4.327) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$E = -\mu_R \operatorname{Re} \left\{ \oint_{A_M} e^{ia} \Sigma_3 (\mathcal{F}^T t - \bar{\mathcal{F}}^T \bar{t}) dt \right\}, \quad (4.330)$$

όπου

$$\Sigma_3 = f_R'(t) = -\frac{\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T}{2} + \frac{(1-l^2)\bar{\mathcal{F}}^T R_l^2}{g(t)[t+g(t)]}. \quad (4.331)$$

Όπως στην συνεπίπεδη παραμόρφωση, η παραπάνω σχέση γράφεται σε όρους της μεταβλητής σ της μοναδιαίας περιφέρειας $|\zeta| = |\sigma| = 1$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.280) και (4.281). Ορίζοντας

$$\Sigma_3^0(\sigma) = \Sigma_3(t) = \Sigma_3(m_M(\sigma), m_M(1/\sigma)). \quad (4.332)$$

και παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.284), η (4.330) γράφεται

$$E = \text{Re}\{E_1 + E_2\}, \quad (4.333)$$

όπου

$$E_1 = -\frac{\mu_M \mathcal{F}^T}{i} \oint_{A_M} \Sigma_3^0(\sigma) m_M(\sigma) m'_M(\sigma) d\sigma, \quad (4.334)$$

$$E_2 = -\frac{\mu_M \bar{\mathcal{F}}^T}{i} \oint_{A_M} \Sigma_3^0(\sigma) m_M\left(\frac{1}{\sigma}\right) m'_M(\sigma) d\sigma. \quad (4.335)$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, η Σ_3^0 αναπτύσσεται στην παρακάτω απειροσειρά

$$\Sigma_3^0(\sigma) = -\frac{\mathcal{F}^T + l\bar{\mathcal{F}}^T}{2} + \frac{(1-l^2)\bar{\mathcal{F}}^T a^2}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{a_{-4}}{\sigma^4} + \dots \quad (4.336)$$

Με βάση το ανάπτυγμα αυτό και την σχέση (4.290), τα παραπάνω επικαμπύλια ολοκληρώματα βρίσκονται

$$E_1 = -\frac{\pi R_I^2 \mu_M (1-l^2)}{2} |\mathcal{F}^T|, \quad (4.337)$$

$$E_2 = \frac{\pi R_M^2 \mu_M (1-l^2)}{2} \left[|\mathcal{F}^T| + l(\bar{\mathcal{F}}^T)^2 \right] - \frac{\pi R_I^2 \mu_M (1-l^2)}{2} l(\bar{\mathcal{F}}^T)^2. \quad (4.338)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.337) και (4.338) στην (4.333), προκύπτει η ολική ελαστική ενέργεια του συστήματος

$$E = \pi R_M^2 \mu_M (1-l^2)(1-a^2) \left[|\mathcal{F}^T| + \frac{l}{2} \left[(\mathcal{F}^T)^2 + (\bar{\mathcal{F}}^T)^2 \right] \right], \quad (4.339)$$

ή

$$E = S_M \mu_M (1-a^2) \left[|\mathcal{F}^T| + \frac{l}{2} \left[(\mathcal{F}^T)^2 + (\bar{\mathcal{F}}^T)^2 \right] \right]. \quad (4.340)$$

Για την περίπτωση, όπου η ακτίνα $R_I = 0$, τότε

$$E = S_M \mu_M \left[|\mathcal{F}^T| + \frac{I}{2} [(\mathcal{F}^T)^2 + (\bar{\mathcal{F}}^T)^2] \right], \quad (4.341)$$

όπου ταυτίζεται με την λύση των Gong και Meguid (Gong and Meguid, 1994).

Επειδή ο πυρήνας παραμένει απαραμόρφωτος, η ελαστική ενέργεια αποθηκεύεται μόνο στην μήτρα και στο δακτυλιοειδές εγκλώβισμα. Οι ποσότητες της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύονται στις δύο αυτές φάσεις του συστήματος θα είναι

$$E^M = -\frac{1}{2} \oint_{A_R} \sigma_{n3}^M u_3^M dA_R, \quad (4.342)$$

$$E^R = -\frac{1}{2} \oint_{A_R} \sigma_{n3}^R u_3^R dA_R. \quad (4.343)$$

Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα υπολογίζεται από την σχέση (4.294).

Η διεπιφανειακή μετατόπιση u_3^M που υπεισέρχεται στην σχέση αυτή υπολογίζεται από την σχέση

$$u_3^M = f_M(\sigma) + \overline{f_M(\sigma)}, \quad (4.344)$$

όπου η $f_M(\sigma)$ παρέχεται από την σχέση (4.291). Αντικαθιστώντας τις (4.291), (4.315) στην (4.294), προκύπτει

$$E^M = E_1^M + E_2^M + E_3^M + E_4^M, \quad (4.345)$$

όπου

$$E_1^M = -\frac{\mu_M}{2i} \oint_{|\sigma|=1} f_M(\sigma) f_M'(\sigma) d\sigma, \quad (4.346)$$

$$E_2^M = -\frac{\mu_M}{2i} \oint_{|\sigma|=1} \bar{f}_M\left(\frac{1}{\sigma}\right) \bar{f}_M'\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\sigma, \quad (4.347)$$

$$E_3^M = -\frac{\mu_M}{2i} \oint_{|\sigma|=1} \bar{f}_M\left(\frac{1}{\sigma}\right) f_M'(\sigma) d\sigma, \quad (4.348)$$

$$E_4^M = -\frac{\mu_M}{2i} \oint_{|\sigma|=1} f_M(\sigma) \bar{f}_M'\left(\frac{1}{\sigma}\right) d\sigma. \quad (4.349)$$

Για τα ολοκληρώματα αυτά ισχύει $E_2^M = \bar{E}_1^M$ και $E_4^M = \bar{E}_3^M$. Από την αλγεβρική δομή των ολόμορφων συναρτήσεων που υπεισέρχονται στα παρακάτω ολοκληρώματα, συνάγεται ότι, η προς ολοκλήρωση ποσότητα των ολοκληρωμάτων αυτών, έχει ένα και μοναδικό πόλο εντός του μοναδιαίου κύκλου $|\sigma|=1$ στη θέση του μηδενός. Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων αυτών γίνεται χρήση του αναπτύγματος της $\bar{f}'_M(1/\sigma)$ στην θέση του μηδενός, που βρέθηκε παραπάνω και παρέχεται από την σχέση (4.309) και το ανάπτυγμα της f_M στην ίδια θέση, που βρίσκεται στην μορφή

$$f_M(\sigma) = \frac{1}{4l} R_M (1-l^2) \bar{\mathcal{F}}^T \frac{1}{\sigma} [2(l-a^2\sigma^2) + O(\sigma^3)]. \quad (4.350)$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα αυτά στις (4.317)-(4.320), βρίσκεται ότι

$$E_2^M = \bar{E}_1^M = 0, \quad (4.351)$$

$$E_4^M = \bar{E}_3^M = \frac{\pi}{4} \mu_M R_M^2 (1-l^2)(1-a^2) |\mathcal{F}^T|^2. \quad (4.352)$$

Έτσι, η ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα υπολογίζεται από τις σχέσεις (4.317)-(4.320) και (4.316) στην μορφή

$$E^M = \frac{\pi}{2} \mu_M R_M^2 (1-l^2)(1-a^2) |\mathcal{F}^T|^2. \quad (4.353)$$

Έτσι, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στον δακτύλιο είναι

$$E^R = E - E^M = \frac{\pi}{2} \mu_M R_M^2 (1-l^2)(1-a^2) [(1+l)^2 (\varepsilon_{13}^T)^2 + (1-l)^2 (\varepsilon_{23}^T)^2]. \quad (4.354)$$

4.7 Αριθμητικά αποτελέσματα και συζήτηση

Στην ενότητα αυτή, με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις των ελαστικών πεδίων και ενεργειών που προέκυψαν προηγουμένα, διερευνάται αριθμητικά η εντατική και η ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού συστήματος του Σχήματος 4.1 για όλες τις περιπτώσεις φορτίσεων που θεωρήθηκαν. Η μελέτη της εντατικής κατάστασης εστιάζει

στην διανομή του τασικού πεδίου μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και στην συγκέντρωση τάσεων γύρω από τον πυρήνα και την δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Η μελέτη της ενεργειακής κατάστασης περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της διανομής της ολικής ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, τον προσδιορισμό των ενεργειακών δυνάμεων και ροπών και το πως οι ελαστικές παράμετροι των φάσεων του συστήματος επηρεάζουν τις ποσότητες αυτές.

4.7.1 Μεταβολή τάσεων στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

4.7.1.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Η διανομή των τάσεων στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια μελετάται πρώτα για μία σκληρή και μαλακή ανομοιογένεια, όταν η παραμόρφωση του συστήματος προέρχεται από ιδιοπαραμορφώσεις που αναπτύσσονται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Για τον υπολογισμό των τάσεων, έχουν χρησιμοποιηθεί οι αναλυτικές σχέσεις των τάσεων (C.1)-(C.3) του Παραρτήματος C και οι σχέσεις (4.187), (4.188) και (4.202), (4.203) που συνδέουν τις καρτεσιανές συνιστώσες των ιδιοπαραμορφώσεων με τις πολικές.

Στα διαγράμματα του Σχήματος E.1 δείχνεται η διανομή των κανονικοποιημένων τάσεων $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, κατά μήκος του πάχους της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, όταν $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ (ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση) και $R_I = R_M / 2$. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.1(α) αντιστοιχούν σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και τα διαγράμματα του Σχήματος E.1(β), σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$. Και στις δύο περιπτώσεις, τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν εξαχθεί για $\kappa_R = \kappa_I = \kappa_M = 2$. Από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες των τάσεων $\sigma_{\theta\theta}^R$ είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση της μαλακής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Το ίδιο συμβαίνει και με τις ακτινικές τάσεις σ_{rr}^R .

Στο Σχήμα Ε.2 δείχνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{r3}^R = \sigma_{r3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta 3}^R = \sigma_{\theta 3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$ της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, που παρέχονται από τις σχέσεις (C.66) και (C.67). Τα διαγράμματα αυτά έχουν εξαχθεί για μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ και για μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$, όταν $R_I = R_M / 2$ και $\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta 3}^T = -2 \times 10^{-3}$. Όπως στην συνεπίπεδη κατάσταση του συστήματος, τα διαγράμματα αυτά δείχνουν ότι, τόσο η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta 3}^R$, όσο και η ακτινική τάση σ_{r3}^R είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας.

4.7.1.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Τα διαγράμματα για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα έχουν υπολογιστεί με βάση τις αναλυτικές σχέσεις (C.32)-(C.36) για την συνεπίπεδη κατάσταση, και με τις σχέσεις (C.66), (C.67) για την αντιεπίπεδη κατάσταση. Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζουν την μεταβολή των τάσεων στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια κατά μήκος του πάχους της, όταν οι τάσεις προέρχονται από ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα.

Στα διαγράμματα του Σχήματος Ε.3 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων τάσεων $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ και $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ κατά μήκος του πάχους $h (= R_M - R_I)$ μιας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, όταν $R_I = R_M / 2$ για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα με $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$. Τα διαγράμματα του Σχήματος Ε.3(α) αντιστοιχούν σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$, ενώ τα διαγράμματα του Σχήματος Ε.3(β) σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν εξαχθεί για $\kappa_R = \kappa_I = \kappa_M = 2$. Από τα διαγράμματα αυτά δείχνεται ότι οι ακτινικές συνιστώσες των τάσεων σ_{rr}^R είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση της μαλακής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Στο Σχήμα Ε.4 δείχνονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{r3}^R = \sigma_{r3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta 3}^R = \sigma_{\theta 3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$ της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης. Από τα

διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι η ακτινική διατμητική τάση $\sigma_{r_3}^R$ είναι μεγαλύτερη για την περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας.

4.7.2 Συγκέντρωση τάσεων

4.7.2.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Στα διαγράμματα του Σχήματος E.5 δείχνεται η μεταβολή των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών τάσεων $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^M = \sigma_{\theta\theta}^M / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ στην διεπιφάνεια μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, και των εφαπτομενικών τάσεων $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^I / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα, σαν συνάρτηση της ακτίνας R_I του πυρήνα. Οι τάσεις αυτές αντιστοιχούν σε ισόογκη παραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = 2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και για $R_I = R_M / 2$. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.5(α) αντιστοιχούν σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$, ενώ τα διαγράμματα του Σχήματος E.5(β) σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$. Και στις δύο περιπτώσεις τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν εξαχθεί για $\kappa_R = \kappa_I = \kappa_M = 2$.

Από τα διαγράμματα αυτά δείχνεται ότι οι τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^M(r = R_M, \theta)$ και $\sigma_{\theta\theta}^I(r = R_I, \theta)$ τείνουν στο μηδέν, όταν η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια εξαφανίζεται, δηλαδή, όταν $R_I \rightarrow R_M$. Αντίθετα, όταν η ανομοιογένεια εξαφανίζεται, οι εφαπτομενικές τάσεις της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας $\sigma_{\theta\theta}^R(\theta, r = R_M)$, $\sigma_{\theta\theta}^R(\theta, r = R_I)$ συγκλίνουν στην ίδια τιμή. Το αποτέλεσμα αυτό έχει προκύψει και θεωρητικά στην ενότητα 4.5.1, όπου διερευνάται η περίπτωση μιας λεπτής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με ιδιοπαραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή, δείχνεται ότι η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια συμπεριφέρεται ως διεπιφάνεια μεμβρανικού τύπου στην οποία επενεργούν οι ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{\theta\theta}^T$. Από τα διαγράμματα αυτά γίνεται φανερό ότι, για θετικές σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, ανεξάρτητα από την ακαμψία της ανομοιογένειας, οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^M(R_M, \theta)$ κοντά στην

δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και μέσα στην μήτρα είναι πάντα θετικές, ενώ οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$ μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και κοντά στη διεπιφάνεια μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας είναι πάντα αρνητικές. Κοντά στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-πυρήνα, οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^R(R_I, \theta)$, ανεξάρτητα από την ακαμψία της ανομοιογένειας είναι πάντα αρνητικές, ενώ οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^I(R_I, \theta)$ είναι αρνητικές στην περίπτωση της μαλακής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και θετικές στην περίπτωση της σκληρής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Τα ίδια ακριβώς συμπεράσματα εξάγονται από τα διαγράμματα του Σχήματος E.6 για καθαρή διάτμηση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$.

Τα διαγράμματα του Σχήματος E.7 δείχνουν την μεταβολή των κανονικοποιημένων εφαπτομενικών διατμητικών τάσεων στις διεπιφάνειες μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M , για αντιεπίπεδη διατμητική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν ότι, οι μέγιστες εφαπτομενικές διατμητικές τάσεις εμφανίζονται γύρω από την διεπιφάνεια μήτρας-ανομοιογένειας και μέσα στην μήτρα.

4.7.2.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Στα διαγράμματα του Σχήματος E.8 δείχνεται, η μεταβολή των ανηγμένων εφαπτομενικών τάσεων $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^M = \sigma_{\theta\theta}^M / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^I = \sigma_{\theta\theta}^I / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, που αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα, σαν συνάρτηση της παραμέτρου $a = R_I / R_M$, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα με $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και $R_I = R_M / 2$. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.8(α) αντιστοιχούν σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και τα διαγράμματα του Σχήματος E.8(β), σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έχουν εξαχθεί για $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R$. Από τα διαγράμματα

αυτά δείχνεται ότι, οι εφαπτομενικές συνιστώσες των τάσεων $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$ και $\sigma_{\theta\theta}^R(R_I, \theta)$ συγκλίνουν στην ίδια τιμή, όταν εξαφανίζεται η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια, όταν, δηλαδή, $R_I \rightarrow R_M$. Σύγκλιση στην ίδια τιμή παρατηρείται και στις εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$ και $\sigma_{\theta\theta}^R(R_I, \theta)$, όταν $R_I \rightarrow R_M$. Επιπλέον, ανεξάρτητα από την ακαμψία της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και της φόρτισης, όταν το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας τείνει στο μηδέν, οι εφαπτομενικές τάσεις συγκλίνουν στην ίδια τιμή. Από τα διαγράμματα αυτά γίνεται φανερό ότι, για θετικές σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, ανεξάρτητα από την ακαμψία της ανομοιογένειας, οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^M(R_M, \theta)$ κοντά στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και μέσα στην μήτρα είναι πάντα θετικές, ενώ οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$ μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και κοντά στη διεπιφάνεια μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας είναι πάντα θετικές. Οι εφαπτομενικές αυτές τάσεις είναι μεγαλύτερες για την περίπτωση της μαλακής δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Κοντά στην διεπιφάνεια ανομοιογένειας-πυρήνα, οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta\theta}^R(R_I, \theta)$, ανεξάρτητα από την ακαμψία της ανομοιογένειας είναι πάντα θετικές, ενώ οι εφαπτομενικές τάσεις $\sigma'_{\theta\theta}(R_I, \theta)$, ανεξάρτητα από την ακαμψία της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας είναι πάντα αρνητικές.

Τα διαγράμματα του Σχήματος Ε.9 δείχνουν τις μεταβολές των διεπιφανειακών εφαπτομενικών τάσεων συναρτήσει του λόγου R_I/R_M , για καθαρή διατμητική ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα με $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας τα γεωμετρικά δεδομένα και τις ελαστικές παραμέτρους των διαγραμμάτων του Σχήματος Ε.8. Από τα διαγράμματα αυτά, με εξαίρεση την εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$, εξάγονται τα ίδια συμπεράσματα με αυτά που προέκυψαν από τα διαγράμματα του Σχήματος Ε.8. Στο εύρος μεταβολής του λόγου R_I/R_M , η εφαπτομενική τάση $\sigma_{\theta\theta}^R(R_M, \theta)$ αλλάζει πρόσημο, που σημαίνει ότι, για ένα συγκεκριμένο λόγο R_I/R_M , μηδενίζεται.

4.7.3 Ενεργειακή κατάσταση

4.7.3.1 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Στην συνέχεια, διερευνάται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, όταν η ένταση προέρχεται από ομοιόμορφες ιδιοπαραμορφώσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Στα διαγράμματα των Σχημάτων E.10-E.12, παρουσιάζεται η διανομή της ολικής ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, όταν η ακτίνα R_M μεταβάλλεται από R_I μέχρι $2R_I$. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα E.10 παρουσιάζεται η διανομή των ελαστικών ενεργειών στις τρεις φάσεις του συστήματος για μία μαλακή και για μία σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση της ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$. Από τα διαγράμματα αυτά αποκαλύπτεται ότι το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια είναι ελάχιστο, περίπου το 1% της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στο σύστημα! Επίσης, παρατηρείται ότι, τα ποσοστά της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύονται στην μήτρα και στην ανομοιογένεια τείνουν στο μηδέν, όταν το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας τείνει στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση αυτή, η ελαστική ενέργεια του συστήματος αποθηκεύεται, στο σύνολό της, στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια! Για μικρό πάχος ανομοιογένειας, το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό που αποθηκεύεται στην μήτρα, ανεξάρτητα από την σκληρότητα της ανομοιογένειας. Όσο μεγαλώνει το πάχος της ανομοιογένειας, οι ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στις δύο αυτές φάσεις τείνουν να γίνουν ίσες. Για την σκληρή ανομοιογένεια που εξετάζεται στο Σχήμα E.10(β) προκύπτει ότι η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα γίνεται ίση με την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, όταν το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας είναι $h = 0.78R_I$. Για την μαλακή ανομοιογένεια που θεωρείται στα διαγράμματα του Σχήματος E.10(α), αυτό συμβαίνει για πολύ μεγαλύτερο πάχος ανομοιογένειας. Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν από τα διαγράμματα του Σχήματος E.11. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.11 αντιστοιχούν σε καθαρή διατμητική ιδιο-παραμόρφωση

της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$. Από το Σχήμα E.11(β) προκύπτει ότι, για την περίπτωση της σκληρής ανομοιογένειας, οι ελαστικές ενέργειες μήτρας και ανομοιογένειας γίνονται ίσες, όταν $h = 0.27R_I$.

Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν από διαγράμματα του Σχήματος E.12 που συντάχθηκαν για τις αντίστοιχες περιπτώσεις της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης του συστήματος. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα του Σχήματος E.12 έχουν εξαχθεί για μια μαλακή και μια σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$, αντίστοιχα, όταν $\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta3}^T$.

Προηγούμενα διερευνήθηκε η διανομή της ολικής ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος σαν συνάρτηση του πάχους της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, όταν η εσωτερική ακτίνα της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, δηλαδή η ακτίνα R_I του πυρήνα, παραμένει σταθερή. Στην συνέχεια, διερευνάται πάλι η διανομή της ολικής ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος σαν συνάρτηση του πάχους της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, όταν η εξωτερική ακτίνα της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας R_M παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή, ο όγκος της μήτρας παραμένει σταθερός.

Στο Σχήμα E.13 δείχνεται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος σαν συνάρτηση της ακτίνας R_I του πυρήνα, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$. Το Σχήμα E.13(α) αντιστοιχεί σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και το Σχήμα E.13(β), σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/3$. Από τα διαγράμματα των δύο αυτών Σχημάτων, συνάγεται ότι, στην περίπτωση της πολύ μαλακής ανομοιογένειας με $\mu_R < \mu_M/3$ και ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια είναι πάντα μεγαλύτερη από την ποσότητα της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην μήτρα. Το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα είναι υπερβολικά μικρό, λιγότερο από 1%. Από εκτεταμένη αριθμητική διερεύνηση που έγινε για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας,

προέκυψαν τα παρακάτω: (i) όταν $\mu_R = \mu_M$ και $\kappa_R = \kappa_M = 2$ ($\nu_R = \nu_M = 0.25$), η ολική ελαστική ενέργεια ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα για $R_I = 0.5R_M$, με την ενέργεια που αποθηκεύεται στην ανομοιογένεια να γίνεται μηδενική, ανεξάρτητα από τις ελαστικές ιδιότητες του πυρήνα! (ii) Όταν $\mu_R = \mu_M$ και $\kappa_R = \kappa_M \neq 2$ ($\nu_R = \nu_M \neq 0.25$), η ολική ελαστική ενέργεια ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα σε διαφορετικές τιμές της ακτίνας R_I , με την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυρήνα να είναι πάντα μηδενική. (iii) Όταν $\kappa_R = \kappa_M \rightarrow 1$ ($\nu_R = \nu_M \rightarrow 0.5$), η ολική ελαστική ενέργεια ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα για $R_I \rightarrow 0.71R_M$. (iv) Τέλος, όταν $\kappa_R = \kappa_M \rightarrow 3$ ($\nu_R = \nu_M \rightarrow 0$), η ολική ελαστική ενέργεια ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα για $R_I \rightarrow 0$.

Στο Σχήμα E.14 δείχνεται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος σαν συνάρτηση της ακτίνας R_I του πυρήνα, για καθαρή διατμητική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$. Το Σχήμα E.14(α) αντιστοιχεί σε μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και το Σχήμα E.14(β), σε μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/3$. Από τα διαγράμματα των δύο αυτών Σχημάτων, συνάγονται τα ίδια συμπεράσματα που προέκυψαν για την ισόογκη παραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Δηλαδή, στην περίπτωση μίας μαλακής ανομοιογένειας με $\mu_R < \mu_M/3$ και για καθαρή διατμητική ιδιοπαραμόρφωση, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια είναι πάντα μεγαλύτερη από την ποσότητα της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στην μήτρα, με το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας στον πυρήνα να είναι πάλι υπερβολικά μικρό. Στην περίπτωση της καθαρής διατμητικής ιδιοπαραμόρφωσης στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, από σχετική αριθμητική διερεύνηση που έγινε, προέκυψαν τα παρακάτω: (i) όταν $\mu_R = \mu_M$ και $\kappa_R = \kappa_M = 2$ ($\nu_R = \nu_M = 0.25$), η ολική ενέργεια ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα για $R_I = 0.61R_M$, με την ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυρήνα να γίνεται μηδενική, ανεξάρτητα από τις ελαστικές ιδιότητες του πυρήνα! (ii) Όταν $\kappa_R = \kappa_M \rightarrow 1$ ($\nu_R = \nu_M \rightarrow 0.5$), η ολική ελαστική ενέργεια

ισομοιράζεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και την μήτρα για $R_I \rightarrow 0$. (iii) Όταν $\kappa_R = \kappa_M \rightarrow 3$ ($\nu_R = \nu_M \rightarrow 0$), η ολική ενέργεια ισομοιράζεται στον δακτύλιο και την μήτρα για $R_I \rightarrow 0.667R_M$.

Στο Σχήμα E.15 δείχνεται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος σαν συνάρτηση της ακτίνας R_I του πυρήνα, για αντιεπίπεδη παραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με ίσες διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις ($\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta 3}^T$). Τα διαγράμματα του Σχήματος E.15(α) έχουν υπολογισθεί για μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και αυτά του Σχήματος E.15(β), για μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 3$. Από τα διαγράμματα αυτά και από την αριθμητική διερεύνηση που έγινε προέκυψε ότι, για μία μαλακή ανομοιογένεια ($\mu_R < \mu_M$), η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια είναι πάντα μεγαλύτερη από την ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα, με το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας στον πυρήνα να είναι πάλι υπερβολικά μικρό. Για μία σκληρή ανομοιογένεια ($\mu_R > \mu_M$), η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια είναι, για μικρές ακτίνες του πυρήνα, μικρότερη από την ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα, με το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας στον πυρήνα να είναι πάλι υπερβολικά μικρό. Όπως φαίνεται από το Σχήμα E.15(β), για μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 3$, ελαστική ενέργεια της ανομοιογένειας γίνεται ίση με την ελαστική ενέργεια της μήτρας, όταν $R_I = 0.56R_M$.

4.7.3.2 Σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα

Στα Σχήματα E.16-E.21 παρουσιάζονται τα διαγράμματα που έχουν εξαχθεί για την διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, για σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για μία μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και για μία σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$.

Στα διαγράμματα των Σχημάτων E.16-E.18 παρουσιάζεται η διανομή της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος σε μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, όταν η ακτίνα του εσωτερικού συνόρου της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας παραμένει σταθερή, ενώ η ακτίνα του εξωτερικού συνόρου της R_M μεταβάλλεται από R_I μέχρι $2R_I$. Στα διαγράμματα του Σχήματος E.16, παρουσιάζεται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, για μία μαλακή και μία σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, όταν ο πυρήνας υφίσταται ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και $\kappa_I = \kappa_R = \kappa_M = 2$. Από τα διαγράμματα αυτά αποκαλύπτεται ότι, καθώς αυξάνει το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα μειώνεται για μαλακή ανομοιογένεια, και αυξάνεται για σκληρή ανομοιογένεια. Και στις δύο περιπτώσεις, η συνολική μεταβολή που υφίσταται η ελαστική ενέργεια του πυρήνα, σε όλο το εύρος μεταβολής του πάχους της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, δηλαδή από μηδέν μέχρι R_I , φθάνει περίπου το 10%. Για μικρά πάχη δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στην μήτρα είναι πάντα μεγαλύτερη από την ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυρήνα και μειώνεται, καθώς αυξάνει το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.16(α) δείχνουν ότι, για την μαλακή ανομοιογένεια που εξετάζεται, το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στη δακτυλιοειδή ανομοιογένεια γίνεται ίσο με το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα, όταν $h = 0.3R_I$. Το ποσοστό αυτό φθάνει το 30%. Όταν $h = 0.45R_I$, το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στη δακτυλιοειδή ανομοιογένεια γίνεται ίσο με το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στην μήτρα και φθάνει περίπου το 40%. Το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στη μήτρα γίνεται ίσο με το ποσοστό της ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα για πάχος ανομοιογένειας $h = 0.85R_I$, με το ποσοστό να φθάνει περίπου το 25%. Από τα διαγράμματα του Σχήματος E.16(β) αποκαλύπτεται ότι, για μια σκληρή ανομοιογένεια, όσο μεγαλώνει το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, η ενέργεια τείνει να ισομοιρασθεί μεταξύ δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και πυρήνα! Σημειώνεται ότι τα παραπάνω ισχύουν για την ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα. Τα διαγράμματα του Σχήματος E.17 δείχνουν ότι τα αντίστοιχα συμπεράσματα εξάγονται και για την

περίπτωση της καθαρής διατμητικής ιδιοπαραμόρφωσης του πυρήνα. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και $\kappa_I = \kappa_R = \kappa_M = 2$.

Στα διαγράμματα του Σχήματος E.18, παρουσιάζεται η διανομή της ελαστικής ενέργειας για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα με $\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta 3}^T$, για μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και για σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$. Τα συμπεράσματα που εξάγονται από τα διαγράμματα αυτά είναι αντίστοιχα εκείνων της συνεπίπεδης κατάστασης.

Στα διαγράμματα των Σχημάτων E.19-E.21 παρουσιάζεται η διανομή της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος σε μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, όταν η ακτίνα του εξωτερικού συνόρου της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας παραμένει σταθερή, ενώ η ακτίνα του εσωτερικού συνόρου της R_I μεταβάλλεται από 0 μέχρι R_M .

Τα διαγράμματα των Σχημάτων E.19, E.20 αναφέρονται στην συνεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα, και αυτά του Σχήματος E.21 στην αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωσή του. Στα διαγράμματα του Σχήματος E.19 διερευνάται η διανομή της ελαστικής ενέργειας στις τρεις φάσεις του συστήματος, για μία μαλακή και μία σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, όταν ο πυρήνας υφίσταται ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για $\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και $\kappa_I = \kappa_R = \kappa_M = 2$. Στο Σχήμα E.20, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα, όταν ο πυρήνας υφίσταται καθαρή διατμητική ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί για $\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$ και $\kappa_I = \kappa_R = \kappa_M = 2$. Στο Σχήμα E.21, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα με $\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$. Από τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών παρατηρείται ότι, για όλο το εύρος μεταβολής της ακτίνας του πυρήνα και για τις συγκεκριμένες ακαμψίες των φάσεων του συστήματος που θεωρούνται, το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα υφίσταται μία διακύμανση της τάξης του 15%. Στην περίπτωση της μαλακής ανομοιογένειας, το ποσοστό της ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται στον πυρήνα είναι πάντα μικρότερο, από αυτό που αντιστοιχεί στην σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια. Το ποσοστό αυτό αυξάνει όσο μεγαλώνει η ακτίνα του πυρήνα.

4.7.4 Ενεργειακές δυνάμεις και ροπές

Στα διαγράμματα των Σχημάτων E.22-E.25 διερευνάται η επίδραση των διαφόρων ελαστικών παραμέτρων του συστήματος πάνω στις κινούσες δυνάμεις των διεπιφανειών της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, όταν αυτή υφίσταται μία αντιεπίπεδη διατμητική ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα των σχημάτων αυτών έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.178) και (4.181) που έχουν εξαχθεί προηγουμένα. Στα διαγράμματα των Σχημάτων E.22 και E.23 παρουσιάζονται οι κανονικοποιημένες τιμές των κινουσών δυνάμεων $\hat{f}_r^I = f_r^I / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, $\hat{f}_r^M = f_r^M / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, που αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα και δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-μήτρας, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , όταν $\mu_I / \mu_R = 0.1, 0.2, 1, 10$, και $R_M / R_I = 1.3$ ($|\mathcal{Z}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$). Τα διαγράμματα του Σχήματος E.22 έχουν παραχθεί για ιδιοπαραμορφώσεις $\varepsilon_{r3}^T \neq 0$ και $\varepsilon_{\theta 3}^T = 0$, ενώ αυτά του Σχήματος E.23 για $\varepsilon_{r3}^T = 0$ και $\varepsilon_{\theta 3}^T \neq 0$. Από τις καμπύλες των διαγραμμάτων αυτών, γίνεται φανερό ότι το μέτρο διάτμησης του πυρήνα δεν εξασκεί σημαντική επίδραση πάνω στο μέγεθος των δυνάμεων αυτών. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο μικρό ποσοστό της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος, που, όπως δείχθηκε προηγουμένα, αποθηκεύεται στον πυρήνα. Επίσης, από τα διαγράμματα αυτά προκύπτει ότι και οι δύο κινούσες δυνάμεις κατευθύνονται προς την κατεύθυνση που επιτυγχάνεται μείωση της ολικής ελαστικής ενέργειας του συστήματος. Επίσης, τα διαγράμματα αυτά δείχνουν ότι όλες οι καμπύλες διερχόνται από το ίδιο σημείο όταν $\mu_M / \mu_R = 1$. Αυτό σημαίνει ότι η κινούσα δύναμη που επενεργεί στις δύο διεπιφάνειες γίνεται ανεξάρτητη του μέτρου διάτμησης του πυρήνα, όταν το μέτρο διάτμησης της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας γίνει ίσο με το μέτρο διάτμησης της μήτρας!

Στα Σχήματα E.24 και E.25 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για μια λεπτή ανομοιογένεια, με πάχος $h = R_M - R_I = 10^{-4} R_I$, για τις ίδιες λοιπές παραμέτρους με τα διαγράμματα των Σχημάτων E.22 και E.23. Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν ότι, για μία λεπτή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, οι κινούσες δυνάμεις γίνονται ανεξάρτητες από τις

ελαστικές ιδιότητες της μήτρας και του πυρήνα και εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ελαστικές ιδιότητες της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας.

Στα διαγράμματα του Σχήματος E.26 διερευνάται η επίδραση των διαφόρων ελαστικών παραμέτρων του συστήματος πάνω στο \mathcal{M} -ολοκλήρωμα της διεπιφάνειας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας -πυρήνα, όταν η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια υφίσταται μία αντεπίπεδη διατμητική ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας την σχέση 4.163, που έχει εξαχθεί προηγούμενα, και οι τιμές των \mathcal{M} -ολοκληρωμάτων έχουν κανοκοποιηθεί με την ποσότητα $\mathcal{M}_0 = 2\pi R_I^2 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2$. Στο Σχήμα E.27 δείχνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα, όταν ο πυρήνας υφίσταται μία αντεπίπεδη διατμητική ιδιοπαραμόρφωση. Τα διαγράμματα αυτά έχουν συνταχθεί χρησιμοποιώντας την σχέση 4.172, που έχει εξαχθεί προηγούμενα.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα και Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

5.1 Συμπεράσματα διατριβής

Στην διδακτορική διατριβή, τα συντηρητικά ολοκληρώματα της ελαστικότητας, που είναι γνωστά ως J -, \mathcal{L} - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα, επεκτείνονται σε περιοχές ελαστικών μέσων υπό ένταση, στις οποίες είναι συνεχώς διανεμημένες ιδιοπαραμορφώσεις. Τέτοιες περιοχές προσομοιώνουν μετασχηματισμούς φάσεων που αναπτύσσονται σε κρυσταλλικά υλικά, σε υλικά σωματίδια που είναι διεσπαρμένα σε μήτρα με διαφορετικές θερμικές ιδιοτήτες, κλπ. Δείχνεται ότι, σε τέτοιες περιοχές, τα J - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα μπορούν να επεκταθούν ως συντηρητικά επιφανειακά ολοκληρώματα για οποιαδήποτε συνεχή διανομή ιδιοπαραμορφώσεων. Αντίθετα, το \mathcal{L} -ολοκλήρωμα μπορεί να επεκταθεί ως συντηρητικό ολοκλήρωμα μόνο για ειδικές μορφές της διανομής ιδιοπαραμορφώσεων. Τέτοιες μορφές είναι, για παράδειγμα, σταθερές

ιδιοπαραμορφώσεις, ιδιοπαραμορφώσεις αρμονικού τύπου, κλπ. Στην συνέχεια, οι γενικές εκφράσεις των τριών γενικευμένων συντηρητικών ολοκληρωμάτων που αποκτώνται, εξειδικεύονται στην συνεπίπεδη και αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση του ελαστικού μέσου. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις, τα συντηρητικά ολοκληρώματα εκφράζονται σε όρους των μιγαδικών δυναμικών της διαστατης ελαστικότητας, που είναι τρεις ολόμορφες μιγαδικές συναρτήσεις που παρέχουν τα ελαστικά πεδία του μέσου. Οι εκφράσεις που εξάγονται αποτελούν την γενίκευση των σχέσεων Budiansky και Rice, που έχουν διατυπωθεί για τα συντηρητικά ολοκληρώματα σε ελαστικά μέσα χωρίς παρουσία ιδιοπαραμορφώσεων. Η σχέση που παρέχει την κινούσα δύναμη πάνω σε μία κλειστή διεπιφάνεια ενός διφασικού ελαστικού μέσου υπό ένταση ορίζεται για την γενική περίπτωση στην οποία, οι ελαστικές παραμορφώσεις εντός της διεπιφάνειας συνυπάρχουν με συνεχείς ιδιοπαραμορφώσεις. Ο ορισμός της ποσότητας αυτής βασίζεται σε μία νέα ενεργειακή σχέση που εξάγεται με το θεώρημα μεταφοράς της ρευστομηχανικής και συνδέει την χρονική μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας του διφασικού υλικού, όταν η διεπιφάνεια κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από την χρονική ολοκλήρωση της σχέσης αυτής προκύπτει ότι η συνολική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του διφασικού συστήματος, λόγω εμφάνισης της ανομοιογένειας στο υπό ένταση σύστημα, είναι ίση με το μισό της αρνητικής τιμής του \mathcal{M} -ολοκληρώματος γύρω από την ανομοιογένεια.

Για την ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης μικροσωματιδίων, που είναι διεσπαρμένα ως δεύτερη φάση σε κρυσταλλικά υλικά, με μετασχηματισμούς φάσης που λαμβάνουν χώρα στα υλικά αυτά, προτείνεται ένα απλοποιημένο διδιάστατο μοντέλο της μηχανικής του συνεχούς ελαστικού μέσου. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από μία κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια που είναι ένθετη σε μία άπειρη ελαστική μήτρα διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων και βρίσκεται δίπλα από ένα κυκλικό εγκλώβισμα σταθερών ιδιοπαραμορφώσεων. Η μήτρα προσομοιώνει το κρυσταλλικό υλικό, η κυκλική ανομοιογένεια τα μικροσωματίδια του κρυσταλλικού υλικού και το εγκλώβισμα ιδιοπαραμορφώσεων, έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης που εμφανίζεται σε αυτό. Η παραμορφωσιακή και η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται στο κρυσταλλικό υλικό, λόγω του ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης, προσδιορίζεται στα πλαίσια της γραμμικής και ισότροπης ελαστικότητας, χρησιμοποιώντας το

παραπάνω μοντέλο. Από την επίλυση του σχετικού ελαστικού προβλήματος αποκτώνται, σε κλειστή μορφή, τα πλήρη ελαστικά πεδία στις περιοχές που καταλαμβάνουν η μήτρα, η ανομοιογένεια και το εγκλωβίσμα. Με βάση τα ελαστικά πεδία που αποκτώνται, προσδιορίζεται η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα, καθώς και η επιμέρους κατανομή της στις περιοχές της μήτρας, της ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος. Στη συνέχεια, μελετάται η θερμοδυναμική ισορροπία του ελαστικού συστήματος μήτρας-ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος προσδιορίζοντας τις συντηρητικές δυνάμεις και ροπές, που αναπτύσσονται μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος στο χώρο του υλικού, καθώς και τις κινούσες δυνάμεις, που αναπτύσσονται στις διεπιφάνειες ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος-μήτρας. Οι συντηρητικές δυνάμεις μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, γνωστές ως J_k -ολοκληρώματα, που είναι δύο ίσες και αντίθετες δυνάμεις, προσδιορίζονται σε κλειστή μορφή. Από την αριθμητική διερεύνηση που γίνεται προκύπτει ότι οι δυνάμεις αυτές, ανεξάρτητα από το είδος των ιδιοπαραμορφώσεων που αναπτύσσονται στο εγκλωβίσμα, είναι πάντα ελκτικές, για μία μαλακή ανομοιογένεια, και πάντα απωστικές, για μία σκληρή ανομοιογένεια. Η ελκτικότητα (ή η απωστικότητα) των δυνάμεων αυτών εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες της μήτρας και της ανομοιογένειας και καθορίζεται από το αν μία δυναμική σχετική μετακίνηση μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας, στο 'χώρο' του υλικού, επιφέρει μείωση (ή αύξηση) της ολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Οι ροπές επέκτασης της ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, γνωστές ως \mathcal{M} -ολοκληρώματα, καθώς και οι κινούσες δυνάμεις στις σχετικές διεπιφάνειες, προσδιορίζονται και αυτές σε κλειστή μορφή και διερευνώνται αριθμητικά για διάφορες τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Επίσης, με την ανάλυση αυτή, διερευνάται η 'τάση' μεταβολής του όγκου και του σχήματος της ανομοιογένειας και του εγκλωβίσματος, δηλαδή της μορφολογικής τους εξέλιξης, σε σχέση με τις ελαστικές ιδιότητες του συστήματος. Η επίδραση του τύπου της διεπιφανειακής σύνδεσης μεταξύ ανομοιογένειας και μήτρας, πάνω στην ενεργειακή αλληλεπίδραση ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος, διερευνάται με βάση την ανάλυση της αντιεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης του συστήματος. Στην ανάλυση αυτή προσδιορίζονται, σε κλειστή μορφή, οι ενεργειακές δυνάμεις και ροπές που αναπτύσσονται μεταξύ εγκλωβίσματος και ανομοιογένειας για διεπιφάνειες μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου.

Η ελαστική ανάλυση της αλληλεπίδρασης μεταξύ μιας ανομοιογένειας και ενός εγκλωβίσματος ιδιοπαραμορφώσεων, με την μέθοδο των μιγαδικών μεταβλητών, αποκάλυψε ότι η έννοια της ιδιομορφίας όγκου, που εισήγαγε ο Eshelby για τις ανομοιογένειες, ανάγεται σε επαλληλία ιδιομορφιών σημείου, που είναι συμβατές με την μαθηματική έννοια του όρου. Δείχθηκε ότι, η κυλινδρική κυκλική ανομοιογένεια που χρησιμοποιήθηκε ως απλοποιημένο μοντέλο ισοδυναμεί με δυο σημειακές πλασματικές ιδιομορφίες που βρίσκονται στο εσωτερικό της ανομοιογένειας. Συγκεκριμένα, η ελαστική μήτρα ‘αντιλαμβάνεται’ την παρουσία της ελαστικής ανομοιογένειας ως την επαλληλία δύο σημειακών ιδιομορφιών που επενεργούν σε συγκεκριμένα σημεία στο εσωτερικό της ανομοιογένειας και έχουν συγκεκριμένη ‘αντοχή’. Δείχεται ότι J -ολοκλήρωμα της ανομοιογένειας είναι ίσο με το άθροισμα των J -ολοκληρωμάτων των δύο αυτών πλασματικών ιδιομορφιών με το εγκλωβισμό ιδιοπαραμορφώσεων, όπως συμβαίνει και με τις μηχανικές δυνάμεις. Από την άλλη πλευρά, το εγκλωβισμό ιδιοπαραμορφώσεων, που αποτελεί μια πηγή εσωτερικών τάσεων όγκου ισοδυναμεί με μία σημειακή ιδιομορφία που επενεργεί στο κέντρο του εγκλωβίσματος ιδιοπαραμορφώσεων.

Για την ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης μεταξύ μικροσωματιδίων με επικάλυψη και μετασχηματισμών φάσης, οι οποίοι αναπτύσσονται είτε στην επικάλυψη είτε στο μικροσωματίδιο, προτείνεται το μοντέλο της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με πυρήνα που βρίσκεται σε ένα ελαστικό υλικό, την μήτρα. Η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια συνίσταται από ένα στρώμα ελαστικού υλικού σταθερού πάχους, που περιβάλλει ένα κυλινδρικό κυκλικό υλικό απείρου μήκους, τον πυρήνα. Η μήτρα, η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια και ο πυρήνας είναι τέλεια συνδεδεμένα μεταξύ τους και έχουν διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες. Με το μοντέλο αυτό, αναλύεται η εντατική κατάσταση που αναπτύσσεται στο σύνθετο κρυσταλλικό υλικό, λόγω ομοιόμορφου μετασχηματισμού φάσης της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και του πυρήνα. Η ανάλυση γίνεται στα πλαίσια της ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας για συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες σταθερές ιδιοπαραμορφώσεις στην ανομοιογένεια και στον πυρήνα, και περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται στο σύστημα μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα και τον υπολογισμό της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε αυτό και στις επιμέρους φάσεις του. Τα

ελαστικά πεδία του συστήματος αποκτώνται σε κλειστή μορφή με την επίλυση των σχετικών ελαστικών προβλημάτων για συνεπίπεδη και αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και του πυρήνα. Τα ελαστικά προβλήματα ανάγονται σε ισοδύναμα προβλήματα εξάρμωσης Somigliana, των οποίων η λύση επιτυγχάνεται με την μέθοδο των διαφασικών δυναμικών. Στην ειδική περίπτωση που οι ελαστικές ιδιότητες της μήτρας ταυτίζονται με αυτές του πυρήνα, η γενική λύση της συνεπίπεδης κατάστασης που αποκτήθηκε οδηγεί σε αυτή που προσφάτως αποκτήθηκε από τους Markenskoff και Dundurs. Η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελαστικό σύστημα και η κατανομή της στις επιμέρους φάσεις του, δηλαδή στον πυρήνα, στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και στην μήτρα, προσδιορίζονται με βάση τις εξαρμώσεις Somigliana, που επενεργούν στις διεπιφάνειες του συστήματος και αποτελούν τις ισοδύναμες ‘φορτίσεις’ των ελαστικών προβλημάτων. Η ελαστική αλληλεπίδραση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και του μετασχηματισμού φάσης μελετάται με τον προσδιορισμό της ενέργειας αλληλεπίδρασης, των κινουσών δυνάμεων που επενεργούν στις διεπιφάνειες του συστήματος, καθώς και των ροπών επέκτασης των διεπιφανειών που περιγράφονται με το \mathcal{M} -ολοκλήρωμα. Για τον υπολογισμό των κινουσών δυνάμεων πάνω στις δύο διεπιφάνειες του συστήματος, εφαρμόστηκαν οι σχετικές σχέσεις που αποκτήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Όταν το πάχος της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας γίνεται πολύ λεπτό σε σύγκριση με την ακτίνα του πυρήνα, η μόνη μη μηδενική τάση μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια είναι η εφαπτομενική τάση. Η τάση αυτή εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις ελαστικές ιδιότητες της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας και συνδέεται μόνο με την εφαπτομενική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένεια. Η ιδιοπαραμόρφωση αυτή μπορεί να περιγράψει την παραμόρφωση που προέρχεται από την μη συμβατότητα των κρυσταλλικών πλεγμάτων των δύο κρυσταλλικών υλικών, δηλαδή του πυρήνα και της ανομοιογένειας, η δε μη μηδενική εφαπτομενική τάση, την επιφανειακή τάση (surface tensor) της διεπιφάνειας. Τέλος, με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις που αποκτήθηκαν, γίνεται εκτεταμένη αριθμητική διερεύνηση της εντατικής και ενεργειακής κατάστασης του ελαστικού συστήματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται σε μορφή διαγραμμάτων σε σχετικά παραρτήματα και συζητώνται εκτενώς.

Ένα ιδιαίτερο φαινόμενο ανακαλύφθηκε για μια δακτυλιοειδή ελλειπτική ανομοιογένεια με πυρήνα, όταν υφίσταται έναν ομοιόμορφο μετασχηματισμό φάσης. Μια δακτυλιοειδής ανομοιογένεια με σταθερές ιδιο-παραμορφώσεις, της οποίας τα σύνορα είναι ομο-εστιακές ελλείψεις, λειτουργεί ως μανδύας του πυρήνα, όταν οι ελαστικές της ιδιότητες είναι ίδιες με αυτές της μήτρας. Αυτό σημαίνει ότι ο πυρήνας δεν υφίσταται καμία ελαστική παραμόρφωση και τάση από την ανομοιογένεια. Το αποτέλεσμα αυτό εικάζεται ότι ισχύει και για ελλειψοειδείς ανομοιογένειες.

5.2 Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Τα θεωρητικά αποτελέσματα που προέκυψαν στην παρούσα διατριβή ανοίγουν τον δρόμο για την ανάπτυξη νέων μεθοδολογιών για την πρόβλεψη των μακροσκοπικών ελαστικών ιδιοτήτων σύνθετων μεταλλικών υλικών με διεσπαρμένα μικρο- ή νανο-σωματίδια, που θα στηρίζονται στην κατανομή της ενέργειας παραμόρφωσης στα επιμέρους συστατικά των υλικών αυτών.

Οι ελαστικές αναλύσεις που έγιναν στα πλαίσια της παρούσας διατριβής μπορούν να επεκταθούν, με πεπερασμένα στοιχεία, στο τριδιάστατο χώρο για πιο σύνθετες μορφές σωματιδίων και μετασχηματισμών φάσης. Επεκτείνοντας τον ορισμό της κινούσας δύναμης σε μη τέλει διεπιφάνειες και χρησιμοποιώντας την αρχή του Eshelby θα μπορούσε να προβλεφθεί η μορφολογική εξέλιξη των ετερογενών σωματιδίων που σχηματίζονται σε μεταλλικά υλικά από φυσικές διαδικασίες, όπως είναι, για παράδειγμα, οι κατακρημνίσεις.

Η νέα ενεργειακή πρόταση που προέκυψε στα πλαίσια της διατριβής, που συνδέει την μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός υλικού που συμβαίνει από την εμφάνιση διάσπαρτων σωματιδίων, μπορεί να αποτελέσει την βάση ποσοτικοποίησης της ενίσχυσης του υλικού από τα σωματίδια αυτά. Η αντίστοιχη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός υλικού (energy release rate), λόγω εμφάνισης μικροκοιλοτήτων ή ρωγμών σε αυτό, έχει αποτελέσει την βάση ποσοτικοποίησης της υποβάθμισης που συμβαίνει στο υλικό. Πάνω στην μεταβολή αυτή έχει στηριχθεί η

μηχανική των θραύσεων (fracture mechanics) και η μηχανική των βλαβών (damage mechanics).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists*. 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, 301-303.

Atkinson, C., Eshelby, J.D. (1968). The flow of energy into the tip of a moving crack. *International Journal of Fracture Mechanics*, 4(1): 3-8.

Atkinson, C., Eftaxiopoulos, D.A. (1992). Crack tip stress intensities in viscoelastic anisotropic biomaterials and the use of the *M*-integral. *International Journal of Fracture*, 57: 61-83.

Bhargava, R.D., Radhakrishna, H.C. (1963). Elliptic inclusions in a stressed matrix. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 59: 821-832.

Bilby, B.A. (1950). On the interactions of dislocations and solute atoms. *Proceedings of the Physical Society*, 63(A): 191.

Budiansky, B., and Rice, J.R. (1973). Conservation laws and energy release rates. *Journal of Applied Mechanics*, 40: 201-203.

Chen, F.M., Chao, C.K. (2008). Stress analysis of an infinite plate with a coated elliptical hole under a remote uniform heat flow. *Journal of Thermal Stresses*, 31: 599-613.

Cherepanov, G.P. (1967). Crack propagation in continuous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3): 476-488.

Cherepanov, G.P. (1979). *Mechanics of brittle fracture*. New York: McGraw-Hill, 952.

Cherepanov, G.P., Borzykh A.A. (1993). Theory of the electron fracture mode in solids. *Journal of Applied Physics*, 74(12): 7134-53.

- Cherepanov, G.P. (2012). Some new application of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 76(5): 519-536.
- Cherepanov, G.P. (2017). Invariant integral: The earliest works and most recent application. *Physical Mesomechanics*, 20(2): 115-124.
- Choi, J., Yee, A.F., Laine, R.M. (2004). Toughening of cubic silsesquioxane epoxy nano composites using core-shell rubber particles: A three-component hybrid system. *Macromolecules*, 37(9): 3267-3276.
- Christensen, R.M., Lo, H. (1979). Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4): 315-330.
- Dundurs, J. (1967). On the interaction of a screw dislocation with inhomogeneities. In: Eringen, A.C. (Ed), *Recent Advances in Engineering Science*, Gordon & Breach, 2: 222–233.
- Dundurs, J. (1970). Some properties of elastic stresses in a composite. *Proceedings of the 6th Annual Meeting of the Society of Engineering Science*, 5: 203-216.
- Dundurs, J., Mura, T. (1964). Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 12: 177-189.
- Dundurs, J. Markenscoff, X. (2009). Stress fields and Eshelby forces on half-plane inhomogeneities and strip inclusions meeting a free surface. *International Journal of Solids and Structures*, 46: 2481-2485.
- Eishen, J.W., Herrmann, G. (1987). Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 54(2): 388-392.
- Eshelby, J.D. (1951). The force on an elastic singularity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 244(A): 87-112.

- Eshelby J.D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London*, 241(A): 376–396.
- Eshelby, J.D. (1970). Energy relation of the energy-momentum tensor in continuum mechanics. In: Kanninen, M.F. et al. (eds). *Inelastic behavior of solids*. McGraw-Hill, New York, 77-115.
- Eshelby, J.D. (1977). *Lecture on the elastic energy-momentum tensor*. In: Markenscoff, X., Gupta, A. (eds). *Collected works of J.D. Eshelby: the mechanics of the defects and inhomogeneities*. Springer, Netherlands, 907-931 (2006).
- Francfort, G., Herrmann A.G. (1982). Conservation laws and material momentum in thermoelasticity. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 49: 710-714.
- Fletcher, D.C. (1976). Conservation laws in linear elastodynamics. *Archieve for Rational Mechanics and Analysis*, 60: 329-353.
- Freund, L.B. (1972). Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *Journal of Elasticity*, 2: 341-349.
- Freund, L.B. (1978). Stress intensity factor calculations based on a conservation integral. *International Journal of Solids and Structures*, 14: 241-250.
- Gavazza, S.D. (1977). Forces on pure inclusions and Somigliana dislocations. *Scripta Metallurgica*, 11: 979-981.
- Gong, S.X., Meguid, S.A. (1994). A screw dislocation interacting with an elastic elliptical inhomogeneity. *International Journal of Engineering Science*, 8: 1221-1228.
- Gunther, W. (1962). Über einige Randintegrale der Elastomechanik. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band*, 14: 53-72.
- Gurtin, M.E. (1981). *An introduction to continuum Mechanics*, Academic Press Inc., New York.

- Herrmann A.G., Herrmann, G. (1981). On Energy-Release Rates for a Plane Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 48(3): 525-528.
- Hutchinson, J.W. (1974). *On steady quasi-static crack growth*. Harvard University Rep. Division of Applied Sciences, DEAP S-8.
- Jaswon, M.A., Bhargava, R.D. (1961). Two-dimensional elastic inclusion problems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 57: 669-680.
- Jin, B., Fang, Q.H. (2008). Piezoelectric screw dislocations interacting with a circular inclusion with imperfect interface. *Archive of Applied Mechanics*, 78: 105-116.
- Kattis, M.A. (1994). Two phase potentials for isotropic elastic bi-materials. *International Journal of Engineering Science*, 32(9): 1493-1499.
- Kattis, M.A., Meguid, S.A. (1995). Two-phase potentials for the treatment of an elastic inclusion in plane thermoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 62: 7-12.
- Kattis, M.A., Providas, E. (1998). Two-phase potentials in anisotropic elasticity: antiplane deformation. *International Journal of Engineering Science*, 36(7-8): 801-811.
- Kattis, M.A., Karalis, N.T. (2013). Elastic energies in circular inhomogeneities: imperfect versus perfect interfaces. *Journal of Elasticity*, 111: 131-151.
- Kim, H., Achermann, M., Balet, L.P. Hollingsworth, J.A., Klimov, V.I. (2005). Synthesis and characterization of Co/CdSe core-shell nanocomposites: Bifunctional magneto-optical nanocrystals. *Journal of the American Chemical Society*, 127: 544-546.
- Kienzler, R. (2002). On consistent plate theories. *Archive of Applied Mechanics*, 72(4-5): 229-247.
- Kienzler, R., Herrmann, G. (2002). Mechanics of material space: with applications to defect and fracture mechanics. *Applied Mechanics Review*, 55(b): 23-24.
- Knowles, J.K., and Sternberg, E. (1972). On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44: 187-211.

- Koehler, J.S. (1941). On the dislocation theory of plastic deformation. *Physical Review*, 60: 397.
- Kubo, S. (1982). An application of M -integral to cracks in dissimilar elastic materials. *International Journal of Fracture*, 20: R27-R30.
- Landau, L.D., Lifshitz E.M. (1971). *The classical theory of fields*. (transl. Russian) Oxford: Pergamon.
- Liebfried, G. (1949). Uber die auf eine Versetzung wirkenden Krafte. *Zeitschrift fur Physik A Hadrons and Nuclei*, 126: 781.
- Lubarda, V.A. (2015a). Interaction between a circular inclusion and a circular void under plain strain conditions. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(3): 317-330.
- Lubarda, V.A. (2015b). Circular inclusion near a circular void: determination of elastic antiplane shear fields and configurational forces. *Acta Mechanica*, 226: 643-664.
- Maugin, G.A. (1993). *Material Inhomogeneities in Elasticity*. London: Chapman and Hall.
- Markenscoff, X. (2006). Eshelby generalization for the dynamic J, L, M integrals. *Comptes Rendus Mecanique*, 334: 701-706.
- Markenscoff, X. (2010). Driving forces on phase boundaries: “The Eshelby principle for an interface”. *International Journal of Fractures*, 165: 223-227.
- Markenscoff, X., Dundurs, J. (2014). Annular inhomogeneity with eigenstrain and interphase modeling. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 64: 468-482.
- Milne-Thomson L.M. (1968). *Theoretical hydrodynamics*. London, Macmillan.
- Muskhelishvili, N.I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. (trans. JRM Radok) Noordhoff.

- Nabarro, F.R. (1996). Inclusion and inhomogeneities under stress. *Philosophical Magazine Letters*, 72(2): 45-49.
- Ni, L., Markenscoff, X. (2016). The dynamic generalization of the Eshelby inclusion problem and its static limit. *Proceedings of the Royal Society*, 472(A): 1-14.
- Noether, E. (1918). *Invariante Variations-Probleme*. *Nachr. Ges. Gottingen, Math.-Phys. Klasse*, 235. [Transl. Tavel, M. (1971). Milestones in mathematical physics: Noether's Theorem. *Transport Theory and Stat. Phys.*, 183-207].
- Ouchterlony, F. (1978). Some stress intensity factors for selfsimilar cracks derived from path-independent integrals. *Journal of Elasticity*, 259-271.
- Pak, Y.E., Herrmann, G. (1986). Conservation laws and the material momentum tensor for the elastic dielectric. *International Journal of Engineering Science*, 24(8): 1365-1374.
- Pak, Y.E. (1990). Crack extension force in a piezoelectric material. *Journal of Applied Mechanics*, 57(3): 647-653.
- Pak, Y.E., Mishra, D., Yoo, S.H. (2012). Closed-form solution for a coated circular inclusion under uniaxial tension. *Acta Mechanica*, 223(5): 937-951.
- Pérez-Conde, J., Bhattacharjee, A.K. (2002). CdS/HgS/CdS quantum dot quantum wells: A tight-binding study. *Physica Status Solidi*, 229(B): 485-488.
- Radi, E., Morini, L., Sevostionov, I. (2016). Conservation integrals for two circular holes kept at different temperatures in a thermoelastic solid. *International Journal of Solids and Structures*, 85-86: 1-14.
- Rice, J.R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 379-386.
- Rockenberger, J., Troger, L., Rogach, A.L., Tischer, M., Grundmann, M., Eychmüller, A., Weller, H. (1998). The contribution of particle core and surface to strain, disorder and

vibrations in thiolcapped CdTe nanocrystals. *Journal of Chemical Physics*, 108: 7807-7815.

Smith, E. (1968). The interaction between dislocations and inhomogeneity-I. *International Journal of Engineering. Science*, 6:129-143.

Somigliana, C. (1914). Atti accad.nazl. lincei rend. *Classe sci. fis. mat. e nat.*, 23(1): 463.

Volterra, V. (1905). Sull' equilibrio dei corpi elastici piu' volte connessi. *Il Nuovo Cimento* (1901-1910), 5(1): 361-385.

Yang, J.S., Batra, R.C. (1995). Conservation laws in linear piezoelectricity. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(6): 1041-1047.

Zhou, H.S., Honma, I., Haus, J.W., Sasabe, H., Komiyama, H. (1996). Synthesis and optical properties of coated nanoparticles composites. *Journal of Luminescence*, 70: 21-34.

Παράρτημα Α: Μιγαδικά δυναμικά διδιάστατης ελαστικότητας

A.1 Ελαστικά πεδία και μιγαδικά δυναμικά

Τα ελαστικά πεδία της συνεπίπεδης κατάστασης, σε όρους των μιγαδικών δυναμικών $\varphi(z)$ και $\psi(z)$ (σχέσεις Kolosov-Muskelishvilli):

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta})e^{-2i\theta} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (\text{A.2})$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = 2\mu(u_r + iu_\theta)e^{i\theta} = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad (\text{A.3})$$

$$i(X_1 + iX_2) = i(X_r + iX_\theta)e^{i\theta} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}. \quad (\text{A.4})$$

Τα ελαστικά πεδία της αντιεπίπεδης κατάστασης σε όρους του μιγαδικού δυναμικού $f(z)$:

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = (\sigma_{3r} - i\sigma_{3\theta})e^{-i\theta} = 2\mu f'(z), \quad (\text{A.5})$$

$$u_3 = f(z) + \overline{f(z)}, \quad (\text{A.6})$$

$$iX_3 = \mu[f(z) - \overline{f(z)}]. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Διφασικά δυναμικά για καμπυλόγραμμες διεπιφάνειες

Έστω μία κλειστή καμπύλη A του επιπέδου z , η οποία, μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού $z = m(\zeta)$, μετασχηματίζεται στο μοναδιαίο κύκλο $|\zeta|=1$ του ζ -επιπέδου, έτσι ώστε το εξωτερικό της πεδίο να μετασχηματίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου. Έστω ότι το εξωτερικό και εσωτερικό πεδίο της A

καταλαμβάνονται από ισότροπα και ομογενή υλικά διαφορετικών ελαστικών ιδιοτήτων και ότι στην καμπύλη (διεπιφάνεια) επενεργεί μία συνεπίπεδη εξάρμωση Somigliana με ασυνέχεια $\mathcal{U}(z, \bar{z})$. Τότε τα μιγαδικά δυναμικά των δύο πεδίων παρέχονται από τις σχέσεις

$$\varphi_I(z) = (1 + \Lambda)\varphi_0(z), \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_I(z) = (1 + \Pi)\psi_0(z), \quad (\text{A.9})$$

όταν z ανήκει στο εσωτερικό πεδίο της καμπύλης A (πεδίο I), και

$$\varphi_M(\zeta) = \varphi_0(\zeta) - \Omega \frac{m(\zeta)}{\bar{m}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + M \mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right), \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \psi_M(\zeta) = & \psi_0(\zeta) + \Lambda \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + (\Lambda + \Omega) \frac{\bar{m}(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \varphi'_0(\zeta) \\ & + \frac{\bar{m}(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left[\Omega \frac{m(\zeta)}{\bar{m}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] \\ & - M \left[\bar{\mathcal{U}}\left(\frac{1}{\zeta}, \zeta\right) + \frac{\bar{m}(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

όταν ζ ανήκει στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου που αντιστοιχεί στο εξωτερικό πεδίο της C (πεδίο M). Στις παραπάνω σχέσεις, τα Λ , Π , Ω είναι διφασικές σταθερές εναλλακτικές αυτών του Dundurs (Dundurs, 1970) και δίνονται από τις σχέσεις

$$\Lambda = \frac{\mu_I \kappa_M - \mu_M \kappa_I}{\mu_I + \mu_M \kappa_I}, \quad \Pi = \frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_M + \mu_I \kappa_M}, \quad \Omega = -\frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_I + \mu_M \kappa_I}. \quad (\text{A.12})$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ είναι δύο ολόμορφες συναρτήσεις, που αποτελούν τα διφασικά δυναμικά του προβλήματος. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις παραπάνω σχέσεις έχει χρησιμοποιηθεί (καταχρηστικά) ο συμβολισμός $\varphi_M(z) = \varphi_M(m(\zeta)) = \varphi_M(\zeta)$, $\psi_M(z) = \psi_M(m(\zeta)) = \psi_M(\zeta)$, κτλ. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, οι σχέσεις (A.8) και (A.9) ορίζονται στο πεδίο I του μιγαδικού επιπέδου z , ενώ οι άλλες δύο στο εξωτερικό πεδίο του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου ζ , που αντιστοιχεί στην μήτρα. Οι \mathcal{U} -όροι των σχέσεων (A.10), (A.11) προκύπτουν από την συνάρτηση ασυνέχειας της εξάρμωσης Somigliana $\mathcal{U}(z, \bar{z})$:

$$\mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) = \mathcal{U}\left(m(\zeta), m\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right). \quad (\text{A.13})$$

Αν στην διεπιφάνεια A , αντί της εξάρμωσης, επενεργεί μία συνεπίπεδη διανεμημένη δύναμη $\mathcal{F}(z, \bar{z})$, τότε τα μιγαδικά δυναμικά της ανομοιογένειας παρέχονται, πάλι, με τις σχέσεις (A.8), (A.9), ενώ τα μιγαδικά δυναμικά του πεδίου M , με τις σχέσεις

$$\varphi_M(\zeta) = \varphi_0(\zeta) - \Omega \frac{m(\zeta)}{\bar{m}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{i}{1+\kappa_M} \mathcal{F}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right), \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \psi_M(\zeta) = & \psi_0(\zeta) + \Lambda \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + (\Lambda + \Omega) \frac{\bar{m}(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \varphi'_0(\zeta) \\ & + \frac{\bar{m}'(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left[\Omega \frac{m(\zeta)}{\bar{m}'(1/\zeta)} \bar{\varphi}'_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] \\ & - \frac{i}{1+\kappa_M} \left[\kappa_M \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{\zeta}, \zeta\right) + \frac{\bar{m}(1/\zeta)}{m'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \mathcal{F}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

όπου

$$\mathcal{F}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right) = \mathcal{F}\left(m(\zeta), m\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right). \quad (\text{A.16})$$

Στην περίπτωση της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, που προέρχεται από μια μία συνεπίπεδη διεπιφανειακή εξάρμωση Somigliana με ασυνέχεια $\mathcal{U}(z, \bar{z})$, τα μιγαδικά δυναμικά που αντιστοιχούν στα πεδία I και M , που παρέχονται από τις σχέσεις

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(z), \quad (\text{A.17})$$

$$f_M(\zeta) = f_0(\zeta) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right). \quad (\text{A.18})$$

Όταν $\mu_I = 0$, το πεδίο I αντιστοιχεί σε μία κυλινδρική κοιλότητα, και η σχέση (A.18) γράφεται

$$f_M(\zeta) = f_0(\zeta) + \bar{f}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right). \quad (\text{A.19})$$

Όταν στην διεπιφάνεια A εφαρμόζεται μία αντιεπίπεδη δύναμη $\mathcal{F}(z, \bar{z})$, τότε το μιγαδικό δυναμικό στο πεδίο I παρέχεται από την σχέση (A.19), ενώ το μιγαδικό δυναμικό στο πεδίο M από την σχέση

$$f_M(\zeta) = f_0(\zeta) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{i}{2\mu_M} \mathcal{F}\left(\zeta, \frac{1}{\zeta}\right). \quad (\text{A.20})$$

A.3 Διφασικά δυναμικά για κυκλικές διεπιφάνειες

Αν η καμπύλη A είναι κύκλος ακτίνας R , πάνω στον οποίον επενεργεί μία συνεπίπεδη εξάρμωση Somigliana με ασυνέχεια $\mathcal{U}(z, \bar{z})$, τότε τα μιγαδικά δυναμικά στο πεδίο M μπορούν να γραφτούν σε όρους της μεταβλητής z ως εξής:

$$\varphi_M(z) = \varphi_0(z) - \Omega z \bar{\varphi}'_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + M \mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_0(z) + \Lambda \bar{\varphi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + (\Lambda + \Omega) \frac{R^2}{z} \varphi'_0(z) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \left[\Omega z \bar{\varphi}'_0\left(\frac{R^2}{z}\right) - \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) \right] \\ & - M \left[\bar{\mathcal{U}}\left(\frac{R^2}{z}, z\right) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Αν στον κύκλο A , αντί της εξάρμωσης, επενεργεί μία συνεπίπεδη διανεμημένη δύναμη $\mathcal{F}(z, \bar{z})$, τότε οι σχέσεις των μιγαδικών δυναμικών στο πεδίο M έχουν την μορφή:

$$\varphi_M(z) = \varphi_0(z) - \Omega z \bar{\varphi}'_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{i}{1 + \kappa_M} \mathcal{F}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \psi_M(z) = & \psi_0(z) + \Lambda \bar{\varphi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + (\Lambda + \Omega) \frac{R^2}{z} \varphi'_0(z) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \left[\Omega z \bar{\varphi}'_0\left(\frac{R^2}{z}\right) - \Pi \bar{\psi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) \right] \\ & - \frac{i}{1 + \kappa_M} \left[\kappa_M \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{R^2}{z}, z\right) + \frac{R^2}{z} \frac{d}{dz} \mathcal{F}\left(z, \frac{R^2}{z}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις στην αντιεπίπεδη παραμόρφωση έχουν την μορφή

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{A.25})$$

για την εξάρμωση Somigliana και

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{i}{2\mu_M} \mathcal{F}\left(z, \frac{R^2}{z}\right), \quad (\text{A.26})$$

για τη διανεμημένη δύναμη.

A.4 Διφασικά δυναμικά της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης για μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου διεπιφάνειες

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω I ότι είναι το εσωτερικό πεδίο μιας περιφέρειας $|z| = R$ ενός επιπέδου z και M , το εξωτερικό της πεδίο, που εκτείνεται στο άπειρο. Τα δύο αυτά πεδία καταλαμβάνονται από δύο ομογενή και γραμμικώς ισότροπα ελαστικά υλικά με διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες. Τα δύο υλικά υφίστανται μία αντιεπίπεδη ελαστική παραμόρφωση που προέρχεται είτε από μηχανικές δράσεις είτε από πηγές εσωτερικών τάσεων, που δεν επενεργούν στο σύνορο A .

(I) Αν τα αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στα δύο υλικά, ικανοποιούν την συνθήκη

$$\sigma_{\rho 3}^M - \sigma_{\rho 3}^I = -\frac{\mu_m}{R^2} \frac{\partial^2 u_3^I}{\partial \theta^2}, \quad u_3^M = u_3^I, \quad (\text{A.27})$$

πάνω στην περιφέρεια A , τότε τα μιγαδικά δυναμικά των πεδίων I και M , παρέχονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$f_I(z) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0(z), \quad (\text{A.28})$$

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{\mu_m / R}{\mu_M + \mu_I} \left[z f_0'(z) - \frac{R^2}{z} \bar{f}_0'\left(\frac{R^2}{z}\right) \right]. \quad (\text{A.29})$$

(II) Αν τα αντιεπίπεδα ελαστικά πεδία ικανοποιούν την συνθήκη

$$u_3^M - u_3^I = k_3 \sigma_{\rho 3}^I, \quad \sigma_{\rho 3}^M = \sigma_{\rho 3}^I, \quad (\text{A.30})$$

πάνω στην περιφέρεια A , τότε το μιγαδικό δυναμικό στο πεδίο I παρέχεται από την σχέση (A.28) και το μιγαδικό δυναμικό στο πεδίο M από την σχέση

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \bar{f}_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{k_3 \mu_M \mu_I}{R(\mu_M + \mu_I)} \left[z f_0'(z) + \frac{R^2}{z} \bar{f}_0'\left(\frac{R^2}{z}\right) \right]. \quad (\text{A.31})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ολοκληρώνοντας την (A.27) πάνω στην περιφέρεια A , από το (σταθερό) σημείο $t_0 = R e^{i\theta_0}$ μέχρι το μεταβλητό σημείο $t = R e^{i\theta}$, προκύπτει

$$X_3^M - X_3^I = \mathcal{F}, \quad (\text{A.32})$$

όπου

$$X_3^M = \int_{\theta_0}^{\theta} \sigma_{r3}^M R d\theta, \quad X_3^I = \int_{\theta_0}^{\theta} \sigma_{r3}^I R d\theta, \quad (\text{A.33})$$

και

$$\mathcal{F} = -\frac{\mu_m}{R} \left[\frac{\partial u_3^I(R, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_3^I(R, \theta_0)}{\partial \theta} \right]. \quad (\text{A.34})$$

Στο διεπιφανειακό σημείο $t (= R e^{i\theta})$ μιγαδική μετατόπιση u_3^I , σε όρους του διαφοσικού δυναμικού της ανομοιογένειας, έχει την μορφή

$$u_3^I(t, \bar{t}) = f_I(t) + \overline{f_I(t)}. \quad (\text{A.35})$$

Από την παραγωγή της σχέσης αυτής, προκύπτει

$$\frac{\partial u_3^I}{\partial \theta} = i[tf_I'(t) - \bar{t} \overline{f_I'(t)}]. \quad (\text{A.36})$$

Εισάγοντας την (A.36) στην (A.34), προκύπτει

$$\mathcal{F}(t, \bar{t}) = -\frac{\mu_m i}{R} [tf_I'(t) - \bar{t} \overline{f_I'(t)}] + C_0, \quad (\text{A.37})$$

όπου

$$C_0 = \frac{\mu_m i}{R} [t_0 f_I'(t_0) - \bar{t}_0 \overline{f_I'(t_0)}], \quad (\text{A.38})$$

είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Η σχέση (A.32) μαζί με την (A.27b) δείχνουν ότι το αντεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα που μελετάται έχει αναχθεί σε ένα \mathcal{F} -πρόβλημα, στο οποίο η συνάρτηση $\mathcal{F}(z, \bar{z})$ παρέχεται από την σχέση

$$\mathcal{F}(z, \bar{z}) = -\frac{\mu_m i}{R} [zf_I'(z) - \bar{z} \overline{f_I'(z)}] + C_0, \quad (\text{A.39})$$

η οποία εμπλέκει το μιγαδικό δυναμικό $f_I(z)$ του πεδίου I . Τα μιγαδικά δυναμικά του προβλήματος σε όρους του διφασικού δυναμικού $f_0(z)$ παρέχονται από τις σχέσεις (A.17) και (A.26). Λαμβάνοντας υπόψιν την (A.17), από την (A.39) προκύπτει ο \mathcal{F} -όρος της (A.26) στην μορφή

$$\mathcal{F}\left(z, \frac{R^2}{z}\right) = -\frac{\mu_m i}{R} \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \left[zf_0'(z) - \frac{R^2}{z} f_0'\left(\frac{R^2}{z}\right) \right] + iC_0. \quad (\text{A.40})$$

Συνεπώς, λόγω της (A.40), η (A.26) γράφεται

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} f_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{\mu_m / R}{\mu_M + \mu_I} \left[zf_0'(z) - \frac{R^2}{z} f_0'\left(\frac{R^2}{z}\right) \right]. \quad (\text{A.41})$$

(II) Παίρνοντας υπόψη την (A.5), η ακτινική τάση $\sigma_{\rho 3}^I$ σε ένα σημείο $t (= Re^{i\theta})$ της A , σε όρους του μιγαδικού δυναμικού της ανομοιογένειας, γράφεται

$$\sigma_{\rho_3}^I = \frac{\mu_I}{R} [t f'_I(t) + \bar{t} \overline{f'_I(t)}]. \quad (\text{A.42})$$

Συνεπώς, η (A.30), δυνάμει της (A.42) γράφεται

$$u_3^M - u_3^I = \mathcal{U}(t, \bar{t}), \quad (\text{A.43})$$

όπου

$$\mathcal{U}(t, \bar{t}) = \frac{\mu_I k_3}{R} [t f'_I(t) + \bar{t} \overline{f'_I(t)}]. \quad (\text{A.44})$$

Η σχέση (A.43) μαζί με την (A.30b) δείχνει ότι το αντιεπίπεδο πρόβλημα που εξετάζεται, έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα εξάρμωσης Somigliana, του οποίου η συνάρτηση $\mathcal{U}(z, \bar{z})$ έχει την μορφή

$$\mathcal{U}(z, \bar{z}) = \frac{\mu_I k_3}{R} [z f'_I(z) + \bar{z} \overline{f'_I(z)}]. \quad (\text{A.45})$$

Τα μιγαδικά δυναμικά του σχετικού ελαστικού προβλήματος παρέχονται από τις σχέσεις (A.17) και (A.25). Από την (A.17) και (A.45), ο \mathcal{U} -όρος της (A.18) προκύπτει στην μορφή

$$\mathcal{U}\left(z, \frac{R^2}{z}\right) = \frac{2\mu_I \mu_M k_3}{R(\mu_M + \mu_I)} [z f'_0(z) + \frac{R^2}{z} \overline{f'_0(z)}]. \quad (\text{A.46})$$

Αντικαθιστώντας την (A.46) στην (A.18) προκύπτει

$$f_M(z) = f_0(z) + \frac{\mu_I - \mu_M}{\mu_M + \mu_I} f_0\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{\mu_I \mu_M k_3}{R(\mu_M + \mu_I)} [z f'_0(z) + \frac{R^2}{z} \overline{f'_0(z)}], \quad (\text{A.47})$$

που συμπίπτει με την (3.115).

Παράρτημα Β: Ελαστικά πεδία και ενεργειακές σταθερές για κυκλικές ανομοιογένειες και εγκλωβίσματα

Β.1 Τάσεις-μετατοπίσεις

Τάσεις-μετατοπίσεις στην ανομοιογένεια και στην μήτρα ως προς το κυλινδρικό σύστημα (r, θ, x_3) του Σχήματος 3.1:

$$\sigma_{r3}^I(r, \theta) = -\frac{2\mu_M\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^4} \{ \varepsilon_{13}^T [(r^2 + d^2) \cos \theta - 2dr] + \varepsilon_{23}^T (r^2 - d^2) \sin \theta \}, \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma_{\theta 3}^I(r, \theta) = -\frac{2\mu_M\mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^4} \{ \varepsilon_{13}^T (r^2 - d^2) \sin \theta - \varepsilon_{23}^T [(r^2 + d^2) \cos \theta - 2dr] \}, \quad (\text{B.2})$$

$$u_3^I(r, \theta) = \frac{2\mu_M}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^2} [\varepsilon_{13}^T (r \cos \theta - d) + \varepsilon_{23}^T r \sin \theta], \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r3}^M(r, \theta) = & -\mu_M \frac{R_S^2}{\rho^4} \{ \varepsilon_{13}^T [(r^2 + d^2) \cos \theta - 2rd] + \varepsilon_{23}^T (r^2 - d^2) \sin \theta \} \\ & + \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^4} \frac{d^*}{d} \{ \varepsilon_{13}^T [(r^2 + d^{*2}) \cos \theta - 2rd^*] - \varepsilon_{23}^T (r^2 - d^{*2}) \sin \theta \}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 3}^M(r, \theta) = & -\mu_M \frac{R_S^2}{\rho^4} \{ \varepsilon_{13}^T (r^2 - d^2) \sin \theta - \varepsilon_{23}^T [(r^2 + d^2) \cos \theta - 2rd] \} \\ & + \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^4} \frac{d^*}{d} \{ \varepsilon_{13}^T (r^2 - d^{*2}) \sin \theta + \varepsilon_{23}^T [(r^2 + d^{*2}) \cos \theta - 2rd^*] \}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} u_3^M(r, \theta) = & \frac{R_S^2}{\rho^2} [\varepsilon_{13}^T (r \cos \theta - d) + \varepsilon_{23}^T r \sin \theta] \\ & - \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{\rho^2} \frac{r}{d} [\varepsilon_{13}^T (r - d^* \cos \theta) - \varepsilon_{23}^T d^* \sin \theta]. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην μήτρα και στο εγκλώβισμα ως προς το κυλινδρικό σύστημα (r^*, θ^*, x_3) του Σχήματος 3.1:

$$\begin{aligned} \sigma_{r^*3}^M(r^*, \theta^*) &= -\mu_M \frac{R_S^2}{r^{*2}} (\varepsilon_{13}^T \cos \theta^* + \varepsilon_{23}^T \sin \theta^*) \\ &+ \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2 R_I^2}{d^2 \rho^{*4}} \{ \varepsilon_{13}^T [(r^{*2} + D^2) \cos \theta^* - 2r^* D] - \varepsilon_{23}^T (r^{*2} - D^2) \sin \theta^* \}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta^*3}^M(r^*, \theta^*) &= -\mu_M \frac{R_S^2}{r^{*2}} (\varepsilon_{13}^T \sin \theta^* - \varepsilon_{23}^T \cos \theta^*) \\ &+ \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2 R_I^2}{d^2 \rho^{*4}} \{ \varepsilon_{13}^T (r^{*2} - D^2) \sin \theta^* + \varepsilon_{23}^T [(r^{*2} + D^2) \cos \theta^* - 2r^* D] \}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} u_3^M(r^*, \theta^*) &= \frac{R_S^2}{r^*} (\varepsilon_{13}^T \cos \theta^* + \varepsilon_{23}^T \sin \theta^*) \\ &- \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{d \rho^{*2}} \{ \varepsilon_{13}^T [r^{*2} - dD + r^* (2d - d^*) \cos \theta^*] - \varepsilon_{23}^T r^* d^* \sin \theta^* \}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r^*3}^S(r^*, \theta^*) &= -\mu_M (\varepsilon_{13}^T \cos \theta^* + \varepsilon_{23}^T \sin \theta^*) \\ &+ \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2 R_I^2}{d^2 \rho^{*4}} \{ \varepsilon_{13}^T [(r^{*2} + D^2) \cos \theta^* - 2r^* D] - \varepsilon_{23}^T (r^{*2} - D^2) \sin \theta^* \}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta^*3}^S(r^*, \theta^*) &= \mu_M (\varepsilon_{13}^T \sin \theta^* - \varepsilon_{23}^T \cos \theta^*) \\ &+ \mu_M \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2 R_I^2}{d^2 \rho^{*4}} \{ \varepsilon_{13}^T (r^{*2} - D^2) \sin \theta^* + \varepsilon_{23}^T [(r^{*2} + D^2) \cos \theta^* - 2r^* D] \}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} u_3^S(r^*, \theta^*) &= -r^* (\varepsilon_{13}^T \cos \theta^* + \varepsilon_{23}^T \sin \theta^*) \\ &- \frac{\mu_M - \mu_I}{\mu_M + \mu_I} \frac{R_S^2}{d \rho^{*2}} \{ \varepsilon_{13}^T [r^{*2} - dD + r^* (2d - d^*) \cos \theta^*] - \varepsilon_{23}^T r^* d^* \sin \theta^* \}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

όπου

$$\rho^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta, \quad (\text{B.13})$$

$$\rho^{*2} = r^2 + d^{*2} - 2rd^* \cos \theta, \quad (\text{B.14})$$

$$\rho^{*2} = r^{*2} + D^2 - 2r^* D \cos \theta^*, \quad d^* = R_I^2 / d, \quad D = d^* - d. \quad (\text{B.15})$$

Β.2 Ενεργειακές σταθερές \mathcal{L}_i

Σταθερές \mathcal{L}_i :

$$\mathcal{L}_1 = [(R_S^2 + D^2)I_1 - 2R_S DI_2](\varepsilon_{13}^T)^2 - (R_S^2 - D^2)I_3(\varepsilon_{23}^T)^2 + 2D(DI_4 - R_S I_5)\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T, \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & [(R_I^2 + d^2)R_I I_6 - d(3R_I^2 + d^2)I_7 + 2d^2 R_I (I_6 + I_8)](\varepsilon_{13}^T)^2 \\ & + (R_I^2 - d^2)R_I I_8 (\varepsilon_{23}^T)^2 + [2R_I^3 I_9 - d(3R_I^2 - d^2)I_{10}]\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathcal{L}_3 = [(R_S^2 + D^2)I_1 - 2R_S DI_2](\varepsilon_{13}^T)^2 - (R_S^2 - D^2)I_3(\varepsilon_{23}^T)^2 + (2D^2 I_4 - 2R_S DI_5)\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T, \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & [(R_S^2 - dD)I_{11} + R_S(2d - d^*)I_{12}](\varepsilon_{13}^T)^2 - R_S d^* I_{13}(\varepsilon_{23}^T)^2 \\ & + [(R_S^2 - dD)I_{14} + 2R_S DI_{15}]\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & [(R_S^2 + D^2)(R_S^2 - dD) - 2R_S^2 D(2d - d^*)]I_{16}(\varepsilon_{13}^T)^2 \\ & + [R_S(2d - d^*)(R_S^2 + D^2)I_{17} - 2R_S D(R_S^2 - dD)(I_{17} + I_{18})](\varepsilon_{13}^T)^2 \\ & + R_S d^*(R_S^2 - D^2)I_{18}(\varepsilon_{23}^T)^2 \\ & + R_S[d^*(R_S^2 + D^2) + (2d - d^*)(R_S^2 - D^2)]I_{19}\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T \\ & - [(R_S^2 - D^2)(R_S^2 - dD) - 2R_S^2 d^* D]I_{20}\varepsilon_{13}^T \varepsilon_{23}^T. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Τα ολοκληρώματα I_i που υπεισέρχονται στις παραπάνω σχέσεις, έχουν τη μορφή

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta^*}{\rho^{*4}} d\theta^* = -\frac{\pi}{R_S^2 D^2} \frac{R_S^6 - 4R_S^4 D^2 - R_S^2 D^4}{(R_S^2 - D^2)^3}, \quad (\text{B.21})$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta^*}{\rho^{*4}} d\theta^* = -4\pi \frac{R_S D}{(R_S^2 - D^2)^3}, \quad (\text{B.22})$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta^*}{\rho^{*4}} d\theta^* = -\frac{\pi}{D^2} \frac{1}{R_S^2 - D^2}, \quad (\text{B.23})$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^* \cos \theta^*}{\rho^{*4}} d\theta^* = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^*}{\rho^{*4}} d\theta^* = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^6} d\theta = -\frac{\pi}{R_I^3 D^3} \frac{R_I^2 / D^2 + D^2 / R_I^2 + 10}{(R_I / D - D / R_I)^5}, \quad (\text{B.26})$$

$$I_7 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\rho^6} d\theta = -\frac{6\pi}{R_I^3 D^3} \frac{R_I / D + D / R_I}{(R_I / D - D / R_I)^5}, \quad (\text{B.27})$$

$$I_8 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^6} d\theta = -\frac{\pi}{R_l^3 D^3} \frac{1}{(R_l / D - D / R_l)^3}, \quad (\text{B.28})$$

$$I_9 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^6} d\theta = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$I_{10} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\rho^6} d\theta = 0, \quad (\text{B.30})$$

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta^*}{\rho^{*2}} d\theta^* = \frac{2\pi}{D} \frac{R_s}{D^2 - R_s^2}, \quad (\text{B.31})$$

$$I_{12} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta^*}{\rho^{*2}} d\theta^* = -\frac{\pi}{D^2} \frac{R_s^2 + D^2}{R_s^2 - D^2}, \quad (\text{B.32})$$

$$I_{13} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta^*}{\rho^{*2}} d\theta^* = \frac{\pi}{D^2}, \quad (\text{B.33})$$

$$I_{14} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^*}{\rho^{*2}} d\theta^* = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$I_{15} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^* \cos \theta^*}{\rho^{*2}} d\theta^* = 0, \quad (\text{B.35})$$

$$I_{16} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta^*}{\rho^{*6}} d\theta^* = -\frac{6\pi}{R_s^3 D^3} \frac{R_s / D + D / R_s}{(R_s / D - D / R_s)^5}, \quad (\text{B.36})$$

$$I_{17} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta^*}{\rho^{*6}} d\theta^* = -\frac{\pi}{R_s^3 D^3} \frac{R_s^2 / D^2 + D^2 / R_s^2 + 10}{(R_s^2 / D^2 - D^2 / R_s^2)^5}, \quad (\text{B.37})$$

$$I_{18} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta^*}{\rho^{*6}} d\theta^* = -\frac{\pi}{R_s^3 D^3} \frac{1}{(R_s / D - D / R_s)^3}, \quad (\text{B.38})$$

$$I_{19} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^* \cos \theta^*}{\rho^{*6}} d\theta^* = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$I_{20} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta^*}{\rho^{*6}} d\theta^* = 0. \quad (\text{B.40})$$

Παράρτημα C: Ελαστικά πεδία και ενέργειες σε δακτυλιοειδείς κυκλικές ανομοιογένειες

C.1 Συνεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στην κυκλική δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Τάσεις-μετατοπίσεις και ιδιομετατοπίσεις μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια:

$$\sigma_{rr}^R(r, \theta) = S_r F + T_r (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^R(r, \theta) = S_\theta F + T_\theta (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.2)$$

$$\sigma_{r\theta}^R(r, \theta) = iS_{r\theta} (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.3)$$

$$u_r^R(r, \theta) = r[Y_r F + U_r (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (C.4)$$

$$u_\theta^R(r, \theta) = irU_\theta (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.5)$$

$$u_r^T(r, \theta) = \frac{r}{2} F - \frac{r}{4} (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.6)$$

$$u_\theta^T(r, \theta) = -\frac{ir}{4} (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.7)$$

όπου

$$S_r = 2\hat{a}_1 + \frac{\hat{b}_{-1}}{r^2}, \quad S_\theta = 2\hat{a}_1 - \frac{\hat{b}_{-1}}{r^2}, \quad (C.8)$$

$$T_r = -\frac{2\hat{a}_{-1}}{r^2} + \frac{3\hat{b}_{-3}}{2r^4} - \frac{\hat{b}_1}{2}, \quad T_\theta = 6\hat{a}_3 r^2 + \frac{\hat{b}_1}{2} - \frac{3\hat{b}_{-3}}{2r^4}, \quad (C.9)$$

$$S_{r\theta} = -\left(3\hat{a}_3 r^2 - \frac{\hat{a}_{-1}}{r^2} + \frac{\hat{b}_1}{2} + \frac{3\hat{b}_{-3}}{2r^4}\right), \quad (C.10)$$

$$Y_r = \frac{1}{2\mu_R} \left[(\kappa_R - 1)\hat{a}_1 - \frac{\hat{b}_{-1}}{r^2} \right], \quad U_r = \frac{1}{4\mu_R} \left[(\kappa_R - 3)\hat{a}_3 r^2 + \frac{\kappa_R + 1}{r^2} \hat{a}_{-1} - \hat{b}_{-1} - \frac{\hat{b}_{-3}}{r^4} \right], \quad (C.11)$$

$$U_\theta = -\frac{1}{4\mu_R} \left[(\kappa_R + 3)\hat{a}_3 r^2 + \frac{1-\kappa_R}{r^2} \hat{a}_{-1} + \hat{b}_1 - \frac{\hat{b}_{-3}}{r^4} \right], \quad (\text{C.12})$$

και

$$\hat{a}_1 = a_1 / F, \quad \hat{a}_3 = a_3 / G, \quad \hat{a}_{-1} = a_{-1} / \bar{G}, \quad \hat{b}_1 = b_1 / G, \quad \hat{b}_{-1} = b_{-1} / F, \quad \hat{b}_{-3} = b_{-3} / \bar{G}. \quad (\text{C.13})$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην διεπιφάνεια μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας:

$$\sigma_{rr}^M(R_M, \theta) = \sigma_{rr}^R(R_M, \theta), \quad (\text{C.14})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^M(R_M, \theta) = -S_r F - \left(T_r + \frac{2N_M}{R_M^2} \right) (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.15})$$

$$\sigma_{r\theta}^M(R_M, \theta) = \sigma_{r\theta}^R(R_M, \theta), \quad (\text{C.16})$$

$$u_r^M(R_M, \theta) = R_M [(Y_r + Y_r^T)F + (U_r + U_r^T)(Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (\text{C.17})$$

$$u_\theta^M(R_M, \theta) = iR_M (U_\theta + U_\theta^T)(Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.18})$$

όπου

$$N_M = L_{RM} \hat{a}_{-1} + (1 - P_{RM})(3\hat{a}_3 R_M^2 + \hat{b}_1) R_M^2 - \frac{M_M}{2} R_M^2, \quad (\text{C.19})$$

$$Y_r^T = \frac{1}{2}, \quad (\text{C.20})$$

$$U_r^T = -\frac{1}{4}, \quad U_\theta^T = -\frac{1}{4}. \quad (\text{C.21})$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα:

$$\sigma_{rr}^I(R_I, \theta) = \sigma_{rr}^R(R_I, \theta), \quad (\text{C.22})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I(R_I, \theta) = (4\Sigma_r - S_r)F + (6N_I R_I^2 - T_r)(Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.23})$$

$$\sigma_{r\theta}^I(R_I, \theta) = \sigma_{r\theta}^R(R_I, \theta), \quad (\text{C.24})$$

$$u_r^I(R_I, \theta) = R_I [(Y_r + Y_r^T)F + (U_r + U_r^T)(Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (\text{C.25})$$

$$u_\theta^I(R_I, \theta) = iR_I (U_\theta + U_\theta^T)(Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.26})$$

όπου

$$N_I = L_{RI} \hat{a}_3 + (1 - P_{RI}) \left(-\frac{\hat{a}_{-1}}{R_I^4} + \frac{\hat{b}_{-3}}{R_I^6} \right), \quad (\text{C.27})$$

$$\Sigma_r = (1 + L_{RI} - P_{RI})\hat{a}_1 + (1 - P_{RI})\frac{\hat{b}_{-1}}{R_I^2} + \frac{M_I}{2}. \quad (\text{C.28})$$

Ελαστικές ενέργειες στην δακτυλοειδή ανομοιογένεια, μήτρα και πυρήνα:

$$E^R = \pi R_M^2 [S_r Y_r F^2 + 2(T_r U_r + S_{r\theta} U_\theta) |G|^2]_{r=R_M} - \pi R_I^2 [S_r Y_r F^2 + 2(T_r U_r + S_{r\theta} U_\theta) |G|^2]_{r=R_I}, \quad (\text{C.29})$$

$$E^M = -\pi R_M^2 \{S_r (Y_r + Y_r^T) F^2 + 2[T_r (U_r + U_r^T) + S_{r\theta} (U_\theta + U_\theta^T)] |G|^2\}_{r=R_M}, \quad (\text{C.30})$$

$$E^I = \pi R_I^2 \{S_r (Y_r + Y_r^T) F^2 + 2[T_r (U_r + U_r^T) + S_{r\theta} (U_\theta + U_\theta^T)] |G|^2\}_{r=R_I}. \quad (\text{C.31})$$

C.2 Συνεπίπεδες ιδιοπαμορφώσεις στον κυκλικό πυρήνα

Τάσεις-μετατοπίσεις μέσα στην δακτυλοειδή ανομοιογένεια:

$$\sigma_{rr}^R(r, \theta) = S_r F + T_r (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.32})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^R(r, \theta) = S_\theta F + T_\theta (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.33})$$

$$\sigma_{r\theta}^R(r, \theta) = iS_{r\theta} (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.34})$$

$$u_r^R(r, \theta) = r[Y_r F + U_r (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (\text{C.35})$$

$$u_\theta^R(r, \theta) = irU_\theta (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (\text{C.36})$$

όπου

$$S_r = 2\hat{c}_1 + \frac{\hat{d}_{-1}}{r^2}, \quad S_\theta = 2\hat{c}_1 - \frac{\hat{d}_{-1}}{r^2}, \quad (\text{C.37})$$

$$T_r = -\frac{2\hat{c}_{-1}}{r^2} + \frac{3\hat{d}_{-3}}{2r^4} - \frac{\hat{d}_1}{2}, \quad T_\theta = 6\hat{c}_3 r^2 + \frac{\hat{d}_1}{2} - \frac{3\hat{d}_{-3}}{2r^4}, \quad (\text{C.38})$$

$$S_{r\theta} = -\left(3\hat{c}_3 r^2 - \frac{\hat{c}_{-1}}{r^2} + \frac{\hat{d}_1}{2} + \frac{3\hat{d}_{-3}}{2r^4}\right), \quad (\text{C.39})$$

$$Y_r = \frac{1}{2\mu_R} \left[(\kappa_R - 1)\hat{c}_1 - \frac{\hat{d}_{-1}}{r^2} \right], \quad U_r = \frac{1}{4\mu_R} \left[(\kappa_R - 3)\hat{c}_3 r^2 + \frac{\kappa_R + 1}{r^2} \hat{c}_{-1} - \hat{d}_1 - \frac{\hat{d}_{-3}}{r^4} \right], \quad (\text{C.40})$$

$$U_\theta = -\frac{1}{4\mu_R} \left[(\kappa_R + 3)\hat{c}_3 r^2 + \frac{1 - \kappa_R}{r^2} \hat{c}_{-1} + \hat{d}_1 - \frac{\hat{d}_{-3}}{r^4} \right], \quad (\text{C.41})$$

και

$$\hat{c}_1 = c_1 / F, \quad \hat{c}_3 = c_3 / G, \quad \hat{c}_{-1} = c_{-1} / \bar{G}, \quad \hat{d}_1 = d_1 / G, \quad \hat{d}_{-1} = d_{-1} / F, \quad \hat{d}_{-3} = d_{-3} / \bar{G}. \quad (C.42)$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην διεπιφάνεια μήτρας-δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας:

$$\sigma_{rr}^M(R_M, \theta) = \sigma_{rr}^R(R_M, \theta), \quad (C.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^M(R_M, \theta) = -S_r F - \left(T_r + \frac{2N_M}{R_M^2} \right) (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.44)$$

$$\sigma_{r\theta}^M(R_M, \theta) = \sigma_{r\theta}^R(R_M, \theta), \quad (C.45)$$

$$u_r^M(R_M, \theta) = u_r^R(R_M, \theta), \quad (C.46)$$

$$u_\theta^M(R_M, \theta) = u_\theta^R(R_M, \theta), \quad (C.47)$$

όπου

$$N_M = L_{RM} \hat{c}_{-1} + (1 - P_{RM})(3\hat{c}_3 R_M^2 + \hat{d}_1) R_M^2. \quad (C.48)$$

Τάσεις-μετατοπίσεις και ιδιομετατοπίσεις στην διεπιφάνεια δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας-πυρήνα:

$$\sigma_{rr}^I(R_I, \theta) = \sigma_{rr}^R(R_I, \theta), \quad (C.49)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I(R_I, \theta) = (4\Sigma_r - S_r)F + (6N_I R_I^2 - T_r)(Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.50)$$

$$\sigma_{r\theta}^I(R_I, \theta) = \sigma_{r\theta}^R(R_I, \theta), \quad (C.51)$$

$$u_r^I(R_I, \theta) = R_I[(Y_r + Y_r^T)F + (U_r + U_r^T)(Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (C.52)$$

$$u_\theta^I(R_I, \theta) = iR_I(U_\theta + U_\theta^T)(Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.53)$$

$$u_r^T(R_I, \theta) = R_I[Y_r^T F + U_r^T (Ge^{2i\theta} + \bar{G}e^{-2i\theta})], \quad (C.54)$$

$$u_\theta^T(R_I, \theta) = iR_I U_\theta^T (Ge^{2i\theta} - \bar{G}e^{-2i\theta}), \quad (C.55)$$

όπου

$$N_I = L_{RI} \hat{c}_3 + (1 - P_{RI}) \left(-\frac{\hat{c}_{-1}}{R_I^4} + \frac{\hat{d}_{-3}}{R_I^6} \right), \quad (C.56)$$

$$\Sigma_r = (1 + L_{RI} - P_{RI}) \hat{c}_1 + (1 - P_{RI}) \frac{\hat{d}_{-1}}{R_I^2} - \frac{M_I}{2}, \quad (C.57)$$

$$Y_r^T = -\frac{1}{2}, \quad (C.58)$$

$$U_r^T = \frac{1}{4}, \quad U_\theta^T = \frac{1}{4}. \quad (\text{C.59})$$

Ελαστικές ενέργειες στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια, στην μήτρα και στο πυρήνα:

$$E^R = \pi R_M^2 [S_r Y_r F^2 + 2(T_r U_r + S_{r\theta} U_\theta) |G|^2]_{r=R_M} - \pi R_I^2 [S_r Y_r F^2 + 2(T_r U_r + S_{r\theta} U_\theta) |G|^2]_{r=R_I}, \quad (\text{C.60})$$

$$E^M = -\pi R_M^2 [S_r Y_r F^2 + 2(T_r U_r + S_{r\theta} U_\theta) |G|^2]_{r=R_M}, \quad (\text{C.61})$$

$$E^I = \pi R_I^2 \{S_r (Y_r + Y_r^T) F^2 + 2[T_r (U_r + U_r^T) - S_{r\theta} (U_\theta + U_\theta^T)] |G|^2\}_{r=R_I}. \quad (\text{C.62})$$

C.3 Αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στην κυκλική δακτυλιοειδή ανομοιογένεια

Τάσεις-μετατοπίσεις στην μήτρα:

$$\sigma_{r3}^M(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{IR}}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta) \frac{R_M^2 - R_I^2}{r^2}, \quad (\text{C.63})$$

$$\sigma_{\theta 3}^M(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{IR}}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta) \frac{R_M^2 - R_I^2}{r^2}, \quad (\text{C.64})$$

$$u_3^M(r, \theta) = \frac{\Gamma_{IR}}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \frac{\mu_R}{\mu_M} (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta) \frac{R_M^2 - R_I^2}{r^2}. \quad (\text{C.65})$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια:

$$\sigma_{r3}^R(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}R_I^2/R_M^2}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta) + \frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \frac{R_I^2}{r^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta), \quad (\text{C.66})$$

$$\sigma_{\theta 3}^R(r, \theta) = \frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}R_I^2/R_M^2}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta) + \frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{\Gamma_{MR}\Gamma_{IR} - \gamma_{MR}\gamma_{IR}R_I^2/R_M^2} \frac{R_I^2}{r^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta), \quad (\text{C.67})$$

$$u_3^R(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{IR} - \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} r (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta) - \frac{\Gamma_{MR} - \gamma_{IR}}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \frac{R_I^2}{r} (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta). \quad (C.68)$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στον πυρήνα:

$$\sigma_{r3}^I(r, \theta) = \frac{\gamma_{MR} (\gamma_{IR} - \Gamma_{IR}) (1 - R_I^2 / R_M^2)}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_I (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta), \quad (C.69)$$

$$\sigma_{\theta 3}^I(r, \theta) = -\frac{\gamma_{MR} (\gamma_{IR} - \Gamma_{IR}) (1 - R_I^2 / R_M^2)}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_I (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta), \quad (C.70)$$

$$u_3^I(r, \theta) = \frac{\gamma_{MR} (\gamma_{IR} - \Gamma_{IR}) (1 - R_I^2 / R_M^2)}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta). \quad (C.71)$$

C.4 Αντιεπίπεδες ιδιοπαραμορφώσεις στον κυκλικό πυρήνα

Τάσεις-μετατοπίσεις στην μήτρα:

$$\sigma_{r3}^M(r, \theta) = -\frac{R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta), \quad (C.72)$$

$$\sigma_{\theta 3}^M(r, \theta) = -\frac{R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta), \quad (C.73)$$

$$u_3^M(r, \theta) = \frac{R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \frac{\mu_R}{\mu_M} r (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta). \quad (C.74)$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια:

$$\sigma_{r3}^R(r, \theta) = -\frac{\gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2 + \Gamma_{MR} R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta), \quad (C.75)$$

$$\sigma_{\theta 3}^R(r, \theta) = \frac{\gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2 - \Gamma_{MR} R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta), \quad (C.76)$$

$$u_3^R(r, \theta) = \frac{-\gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2 + \Gamma_{MR} R_I^2 / r^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} r (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta). \quad (C.77)$$

Τάσεις-μετατοπίσεις στον πυρήνα:

$$\sigma_{r_3}^I(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{MR} + \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta), \quad (\text{C.78})$$

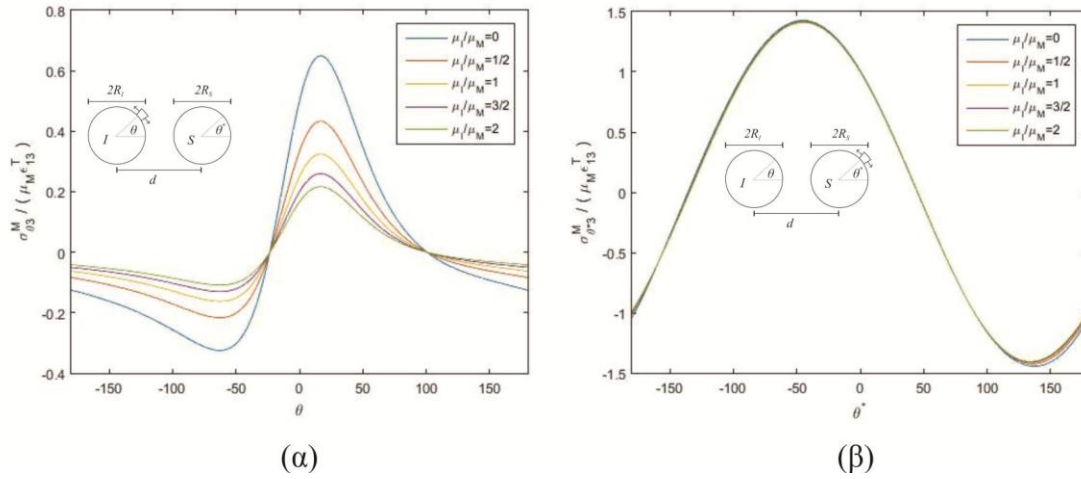
$$\sigma_{\theta_3}^I(r, \theta) = \frac{\Gamma_{MR} + \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \mu_R (\varepsilon_{13}^T \sin \theta - \varepsilon_{23}^T \cos \theta), \quad (\text{C.79})$$

$$u_3^I(r, \theta) = -\frac{\Gamma_{MR} + \gamma_{MR} R_I^2 / R_M^2}{\Gamma_{MR} \Gamma_{IR} - \gamma_{MR} \gamma_{IR} R_I^2 / R_M^2} \frac{\mu_R}{\mu_I} r (\varepsilon_{13}^T \cos \theta + \varepsilon_{23}^T \sin \theta). \quad (\text{C.80})$$

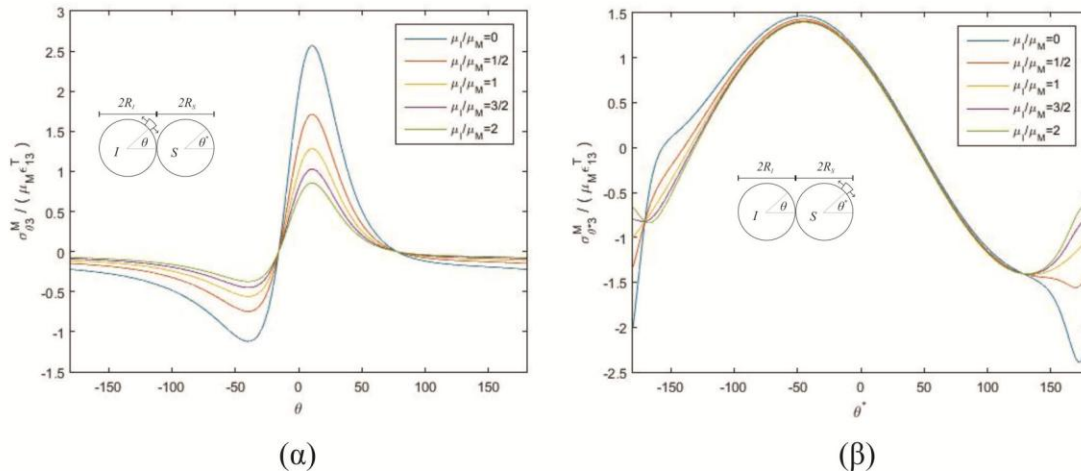
Παράρτημα D: Διαγράμματα Κεφαλαίου 3

- D.1 Συγκέντρωση τάσεων γύρω από ανομοιογένεια και εγκλώβισμα:
Σχήμα D.1-Σχήμα D.4
- D.2 Ελαστική ενέργεια και κατανομή της στο ελαστικό σύστημα:
Σχήμα D.5-Σχήμα D.20
- D.3 J_1 - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα γύρω από ανομοιογένεια και εγκλώβισμα:
Σχήμα D.21-Σχήμα D.32
- D.4 Κινούσα δύναμη των διεπιφανειών ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος-μήτρας:
Σχήμα D.33-Σχήμα D.36

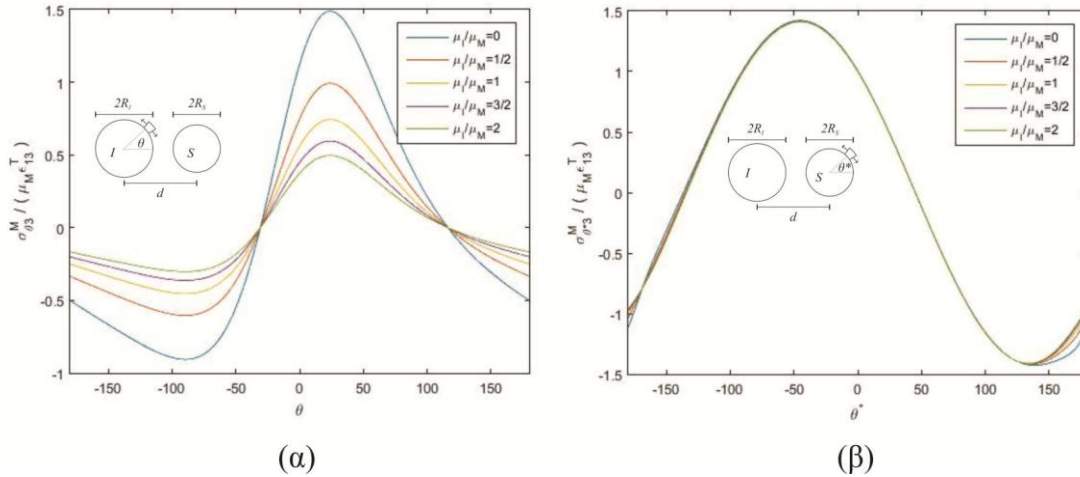
D.1 Συγκέντρωση τάσεων γύρω από ανομοιογένεια και εγκλώβισμα



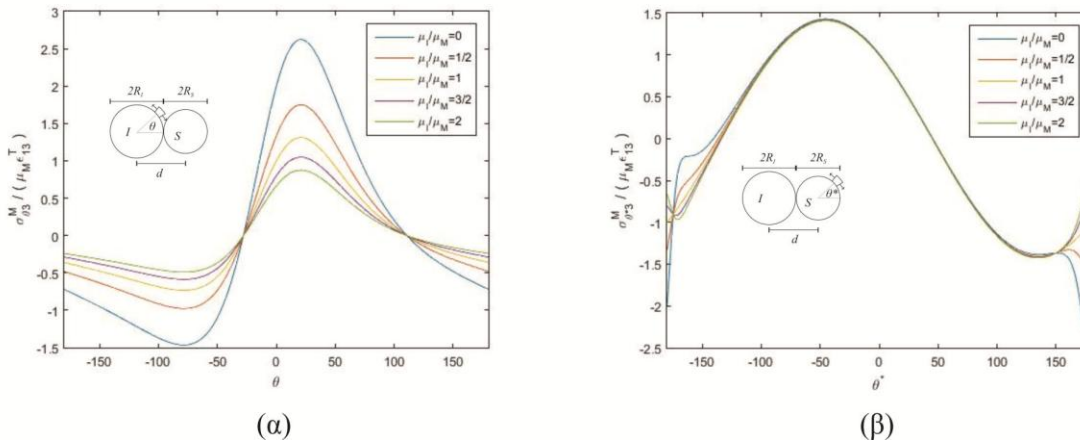
Σχήμα D.1: Η μεταβολή (α) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από την ανομοιογένεια και (β) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta^* 3}^M(R_S, \theta^*) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από το εγκλώβισμα για $\epsilon_{13}^T = \epsilon_{23}^T$, $R_I = R_S$, $d = 3R_I$, και $\mu_I / \mu_M = 0, 1/2, 1, 3/2$ και 2 .



Σχήμα D.2: Η μεταβολή (α) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από την ανομοιογένεια και (β) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta^* 3}^M(R_S, \theta^*) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από το εγκλώβισμα για $\epsilon_{13}^T = \epsilon_{23}^T$, $R_I = R_S$, $d = 2R_I$, και $\mu_I = 0, 1/2, 1, 3/2$ και 2 .

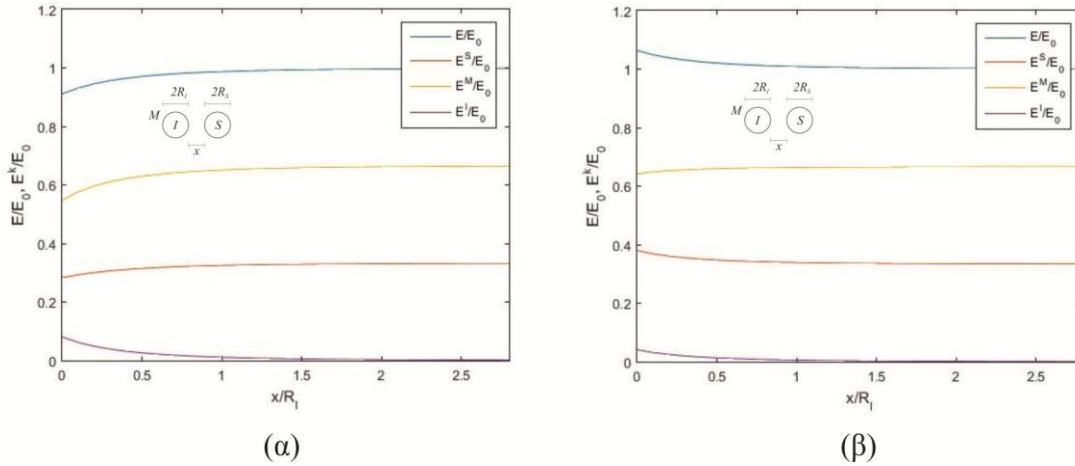


Σχήμα D.3: Η μεταβολή (α) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από την ανομοιογένεια και (β) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta^* 3}^M(R_S, \theta^*) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από το εγκλώβισμα για $\epsilon_{13}^T = \epsilon_{23}^T$, $R_I = R_S / 3$, $d = 5R_I$, και $\mu_I = 0, 1/2, 1, 3/2$ και 2 .

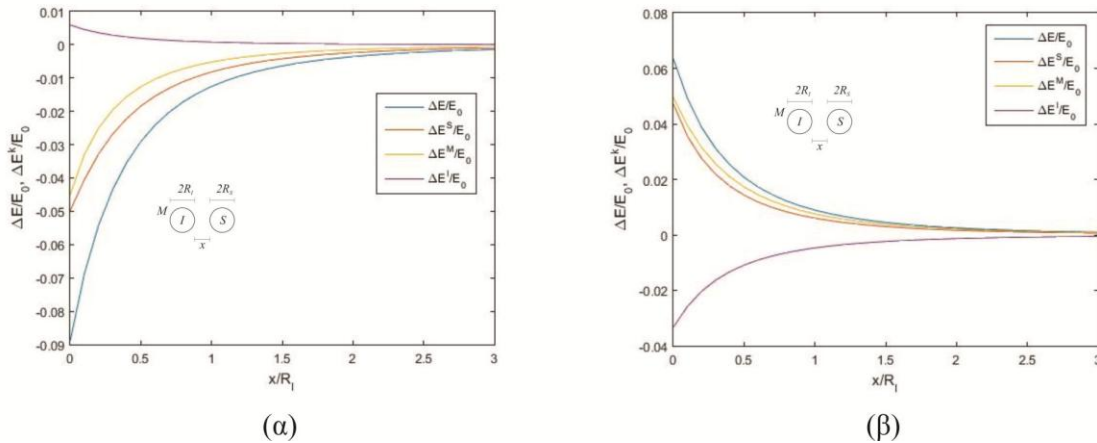


Σχήμα D.4: Η μεταβολή (α) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta 3}^M(R_I, \theta) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από την ανομοιογένεια και (β) της κανονικοποιημένης εφαπτομενικής τάσης $\sigma_{\theta^* 3}^M(R_S, \theta^*) / (\mu_M \epsilon_{13}^T)$ γύρω από το εγκλώβισμα για $\epsilon_{13}^T = \epsilon_{23}^T$, $R_I = R_S / 3$, $d = 4R_I$, και $\mu_I = 0, 1/2, 1, 3/2$ και 2 .

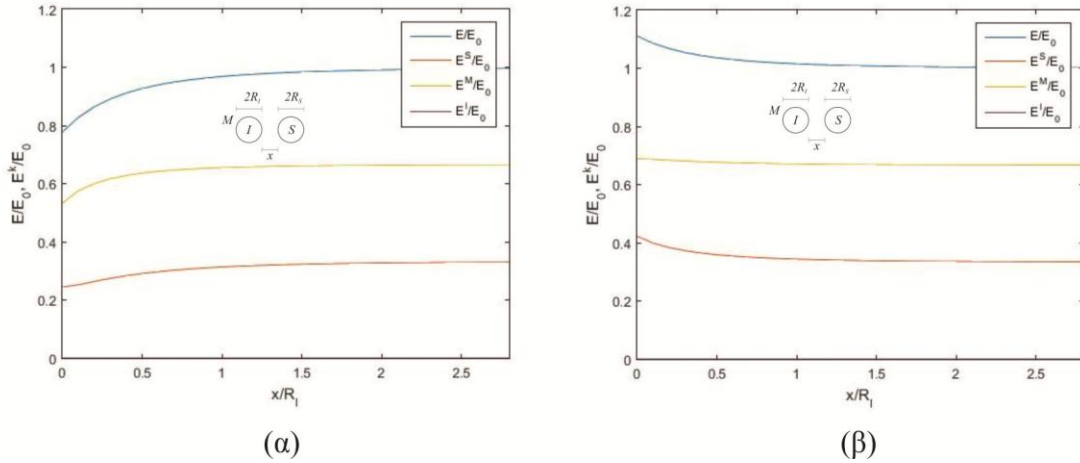
D.2 Ελαστική ενέργεια και κατανομή της στο ελαστικό σύστημα



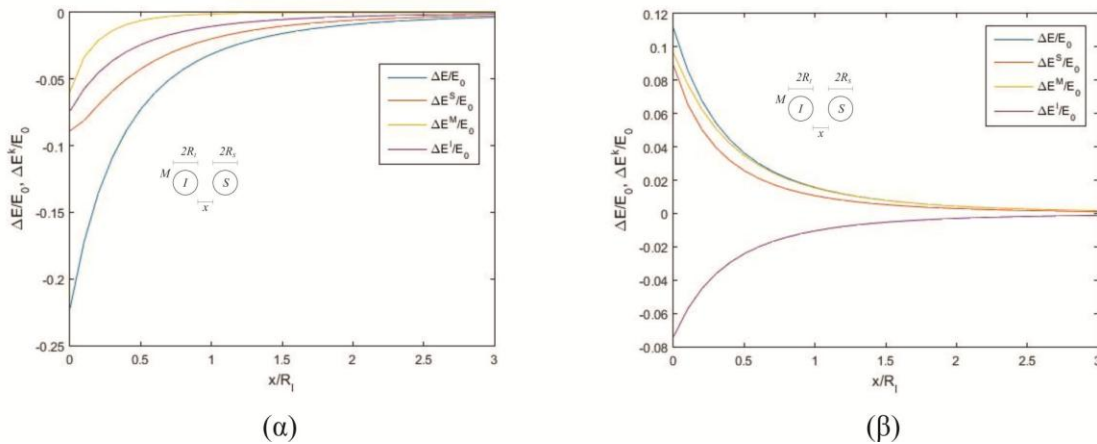
Σχήμα D.5: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για ισόοχη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $E_0 = 2\pi R_S^2 M_M (\varepsilon_{11}^T)^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$, $R_S = R_I$).



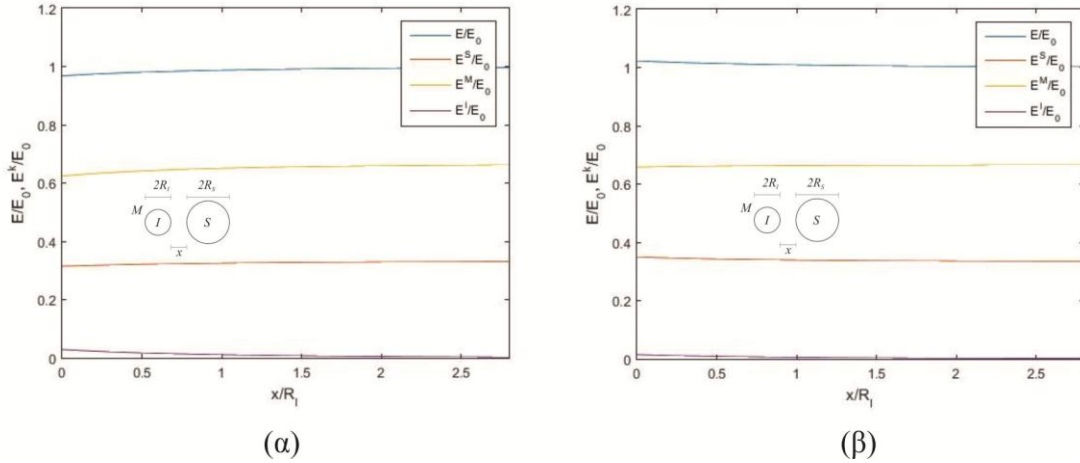
Σχήμα D.6: Οι ανηγμένες τιμές των μεταβολών της ελαστικής ενέργειας $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.5.



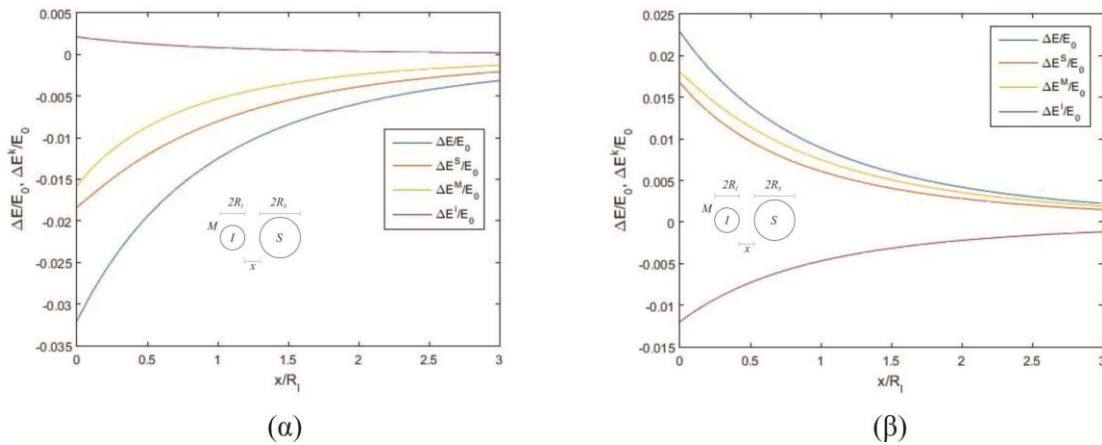
Σχήμα D.7: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_l μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_l = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_l = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $E_0 = 2\pi R_S^2 M_M (\varepsilon_{11}^T)^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$, $R_S = R_l$).



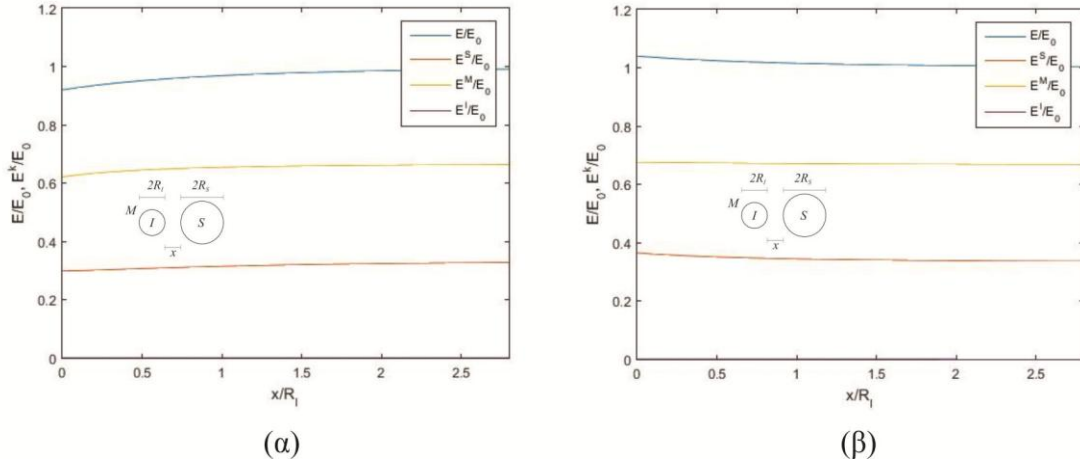
Σχήμα D.8: Οι ανηγμένες τιμές των μεταβολών της ελαστικής ενέργειες $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_l μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_l = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_l = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.7.



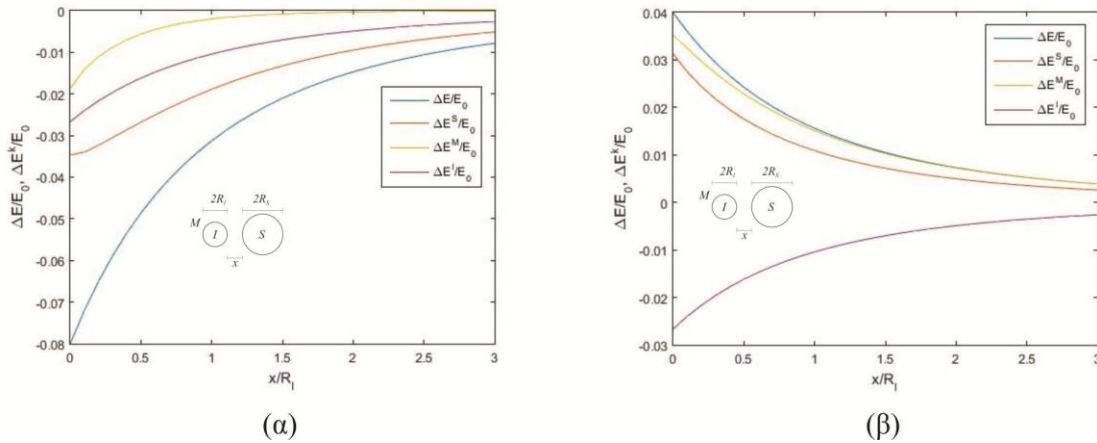
Σχήμα D.9: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για ισόοχη ιδιοπαράμορφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $E_0 = 2\pi R_S^2 M_M (\varepsilon_{11}^T)^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$, $R_S = 3R_I$).



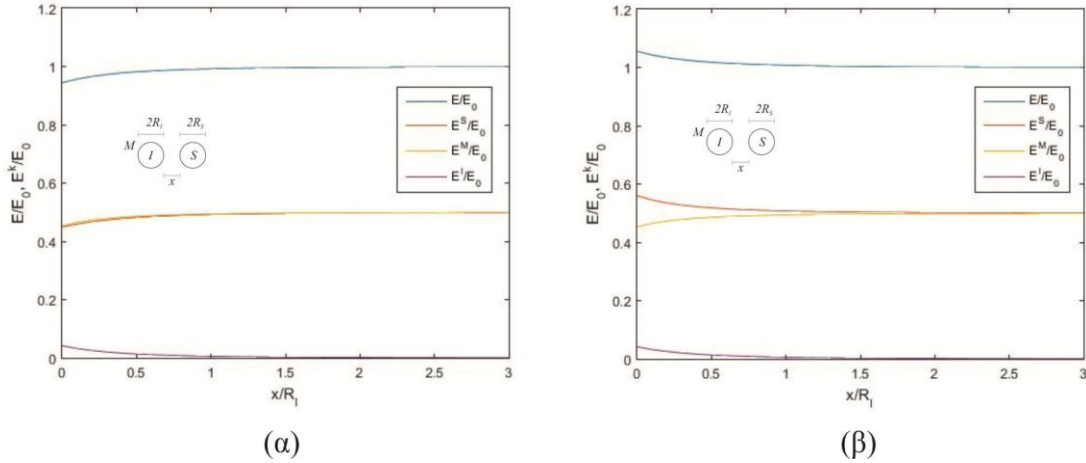
Σχήμα D.10: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.9.



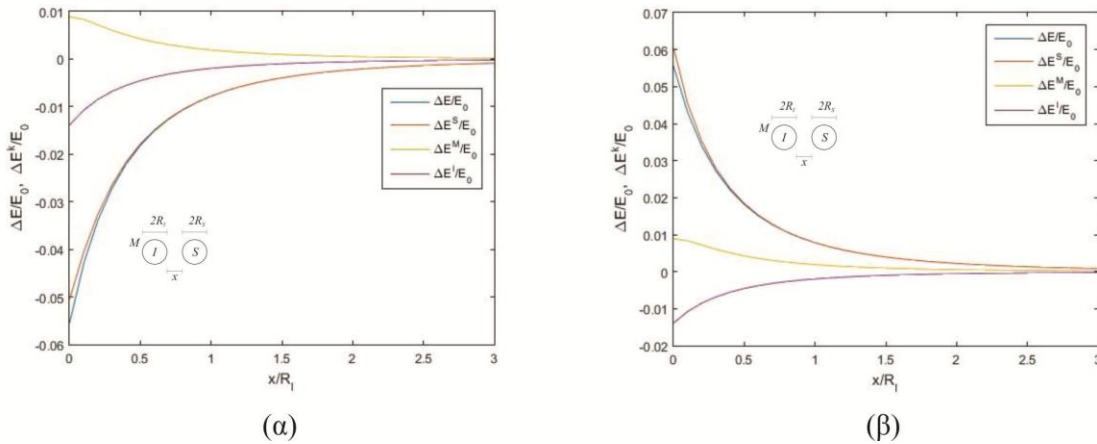
Σχήμα D.11: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $E_0 = \pi R_S^2 M_M (\varepsilon_{11}^T)^2$, $\kappa_S = \kappa_M = \kappa_I = 2$, $R_S = 3R_I$).



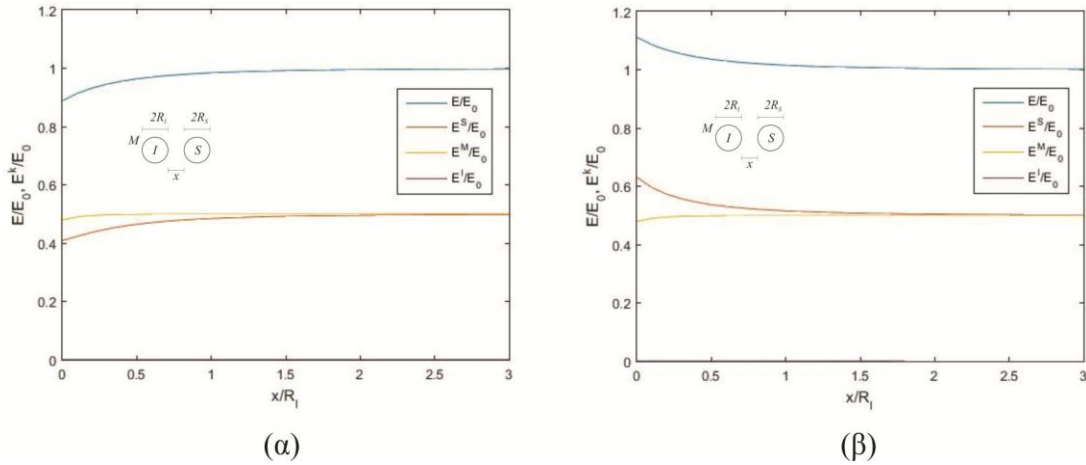
Σχήμα D.12: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.12.



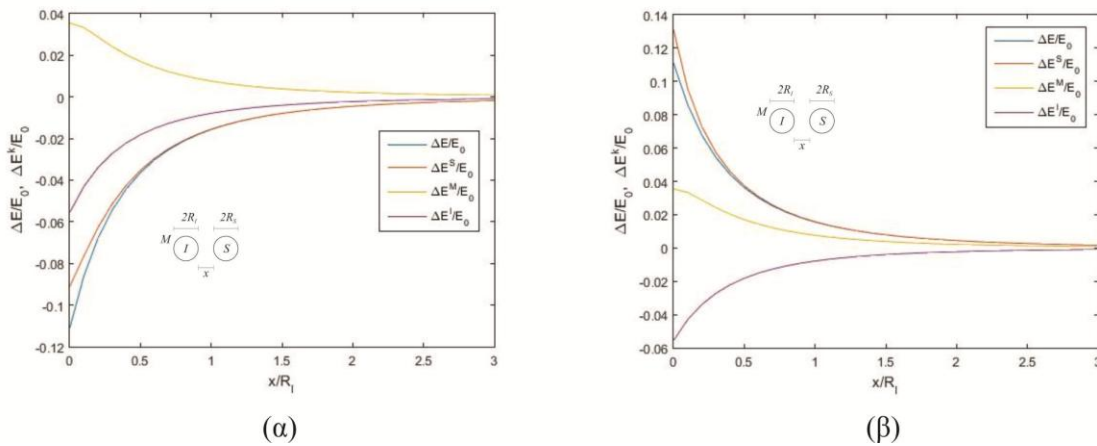
Σχήμα D.13: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για αντιεπίπεδη ιδιοπαράμορφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $E_0 = 2\pi R_S^2 \mu_M (\varepsilon_{13}^T)^2$, $R_S = R_I$).



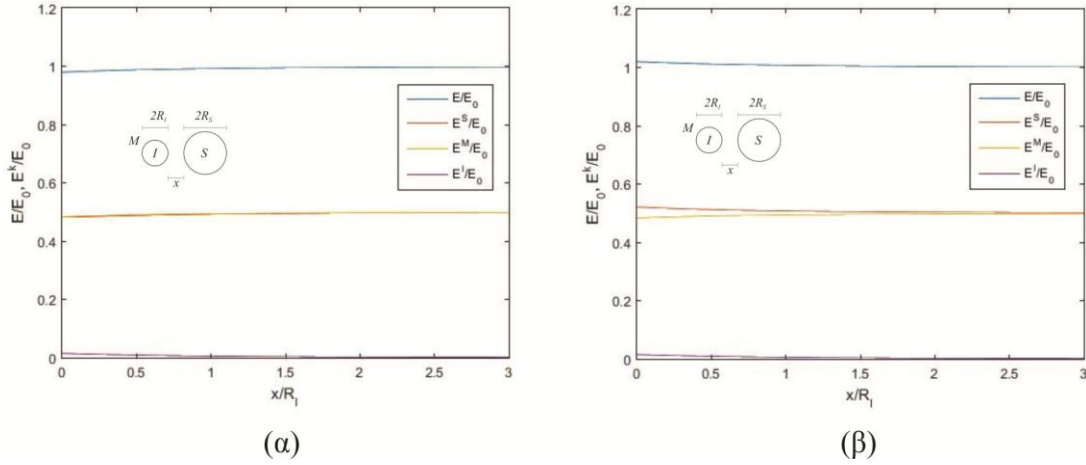
Σχήμα D.14: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.14.



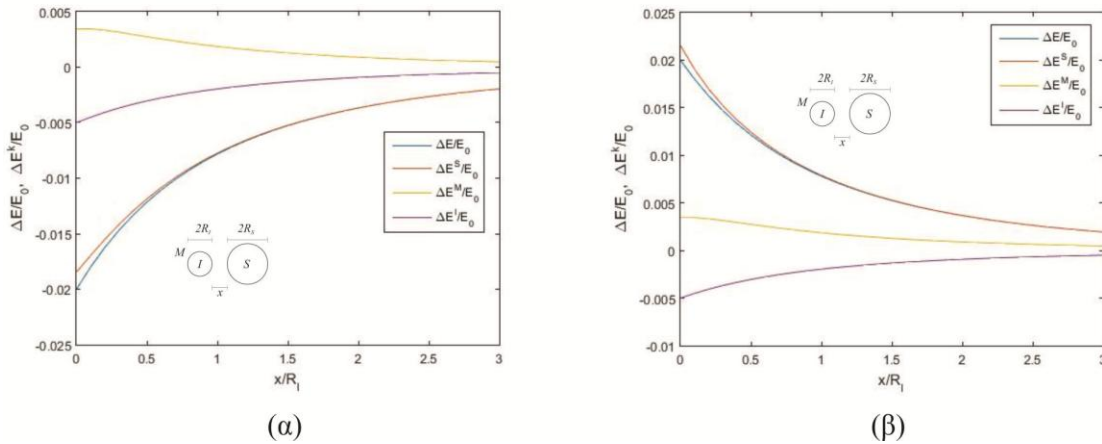
Σχήμα D.15: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_l μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_l = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_l = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $E_0 = 2\pi R_S^2 \mu_M (\varepsilon_{13}^T)^2$, $R_S = R_I$).



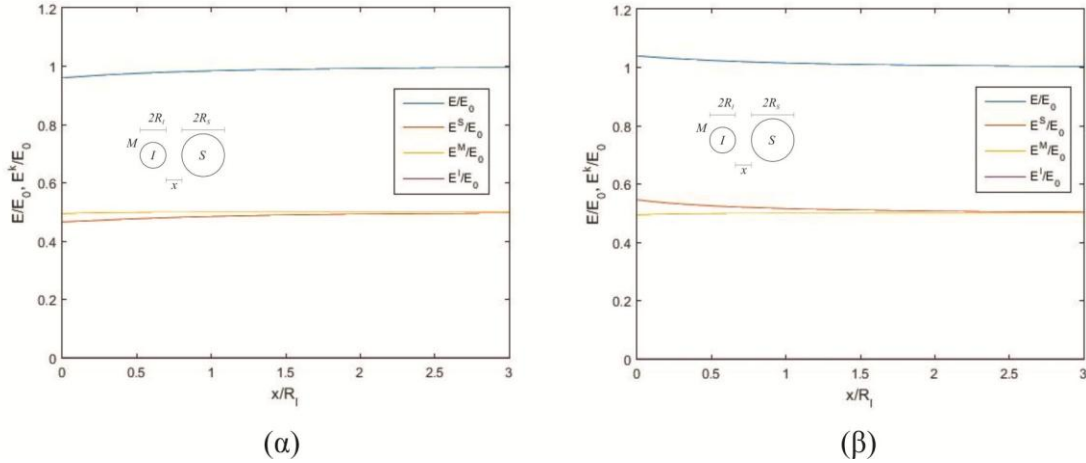
Σχήμα D.16: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_l μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_l = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_l = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.16.



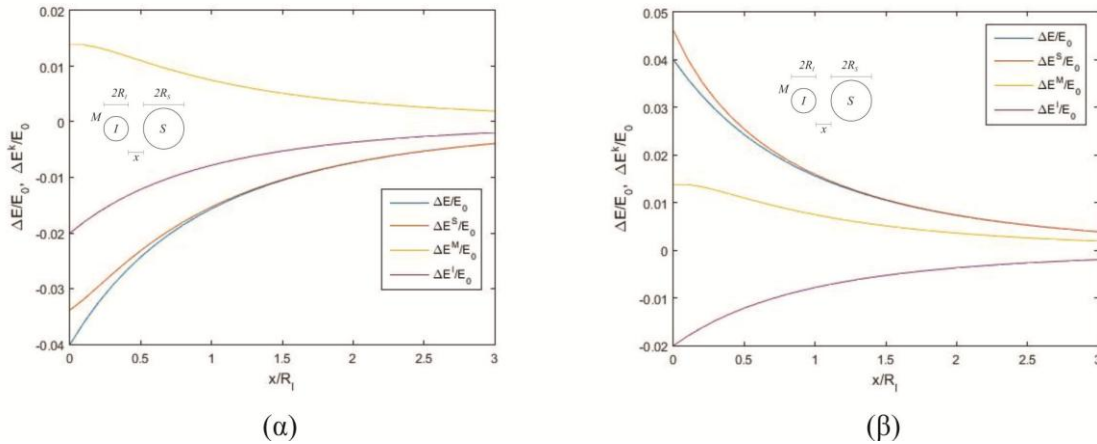
Σχήμα D.17: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για αντιεπίπεδη ιδιοπαράμορφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $E_0 = 2\pi R_S^2 \mu_M (\varepsilon_{13}^T)^2$, $R_S = 3R_I$).



Σχήμα D.18: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = \mu_M/3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.18.

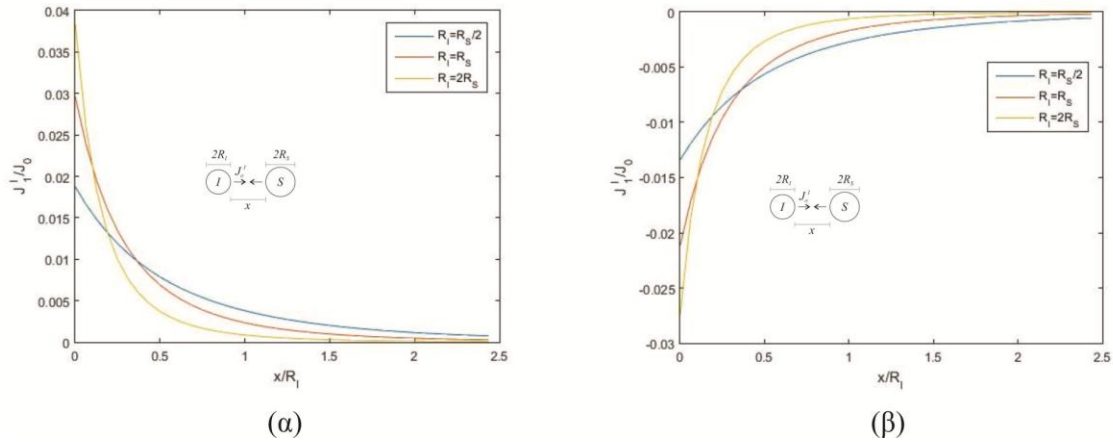


Σχήμα D.19: Οι ανηγμένες ελαστικές ενέργειες E/E_0 , E^k/E_0 ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, για αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $E_0 = \pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{Z}^T|^2$, $R_S = 3R_I$).

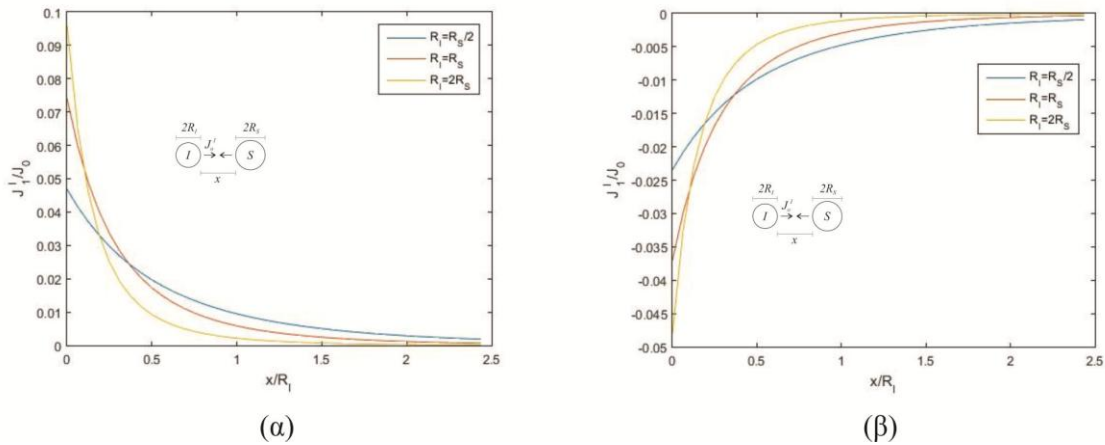


Σχήμα D.20: Οι ανηγμένες τιμές της μεταβολής των ελαστικών ενεργειών $\Delta E/E_0$, $\Delta E^k/E_0$ ($k = M, I, S$) σαν συνάρτηση της ανηγμένης απόστασης x/R_I μεταξύ ανομοιογένειας και εγκλωβίσματος, (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια), με τα δεδομένα των διαγραμμάτων του Σχήματος D.20.

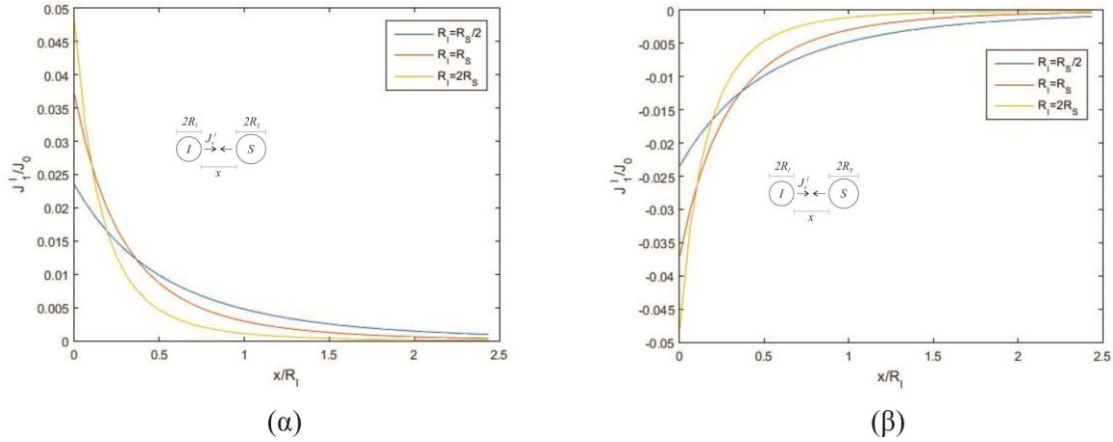
D.3 J_1 - και \mathcal{M} -ολοκληρώματα γύρω από ανομοιογένεια και εγκλωβισμό



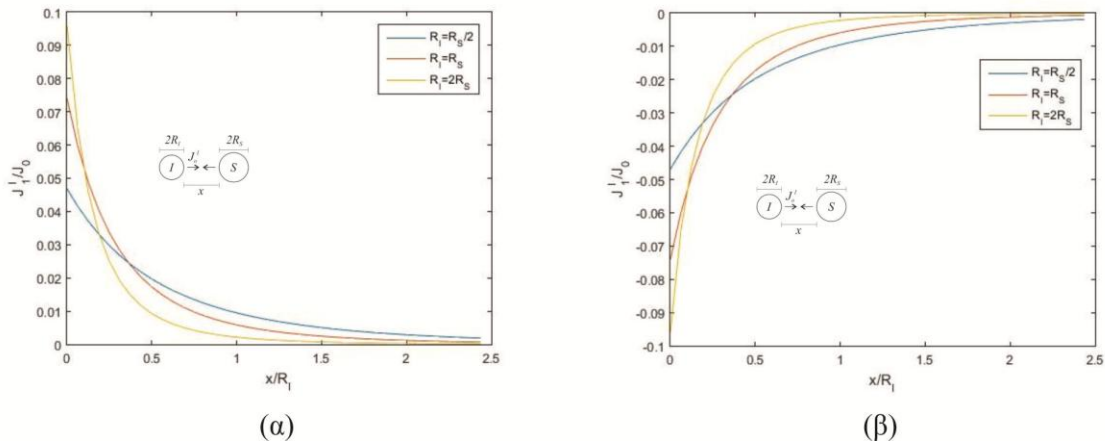
Σχήμα D.21: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_1 ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο J_1^I -ολοκλήρωμα, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $J_0 = 4\pi R_S^2 M_M F^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$).



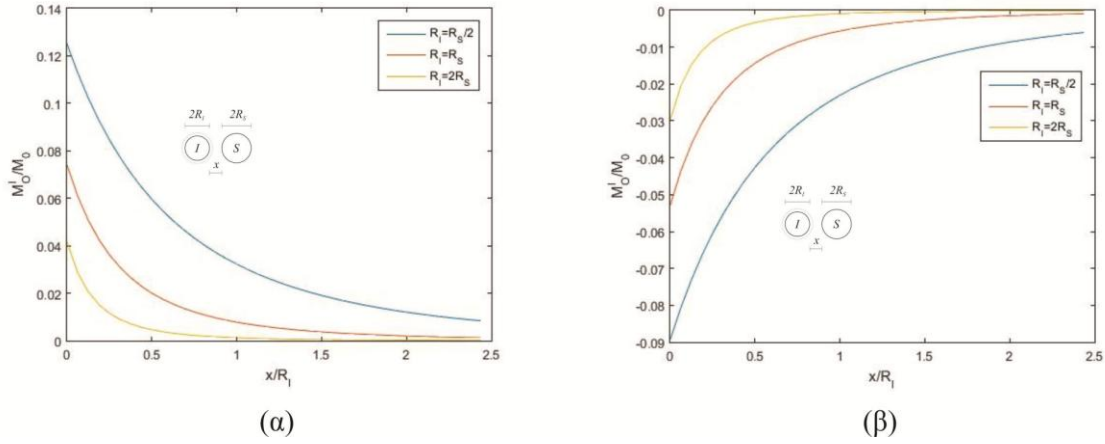
Σχήμα D.22: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_1 ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο J_1^I -ολοκλήρωμα, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $J_0 = 4\pi R_S^2 M_M F^2$, $\kappa_S = \kappa_M = \kappa_I = 2$).



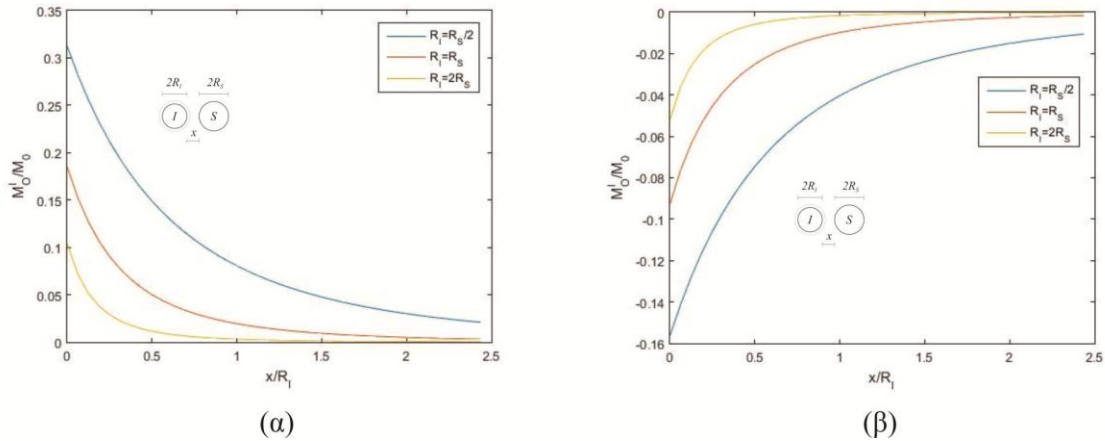
Σχήμα D.23: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο J_1^I -ολοκλήρωμα, για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $J_0 = 4\pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{E}^T|^2$).



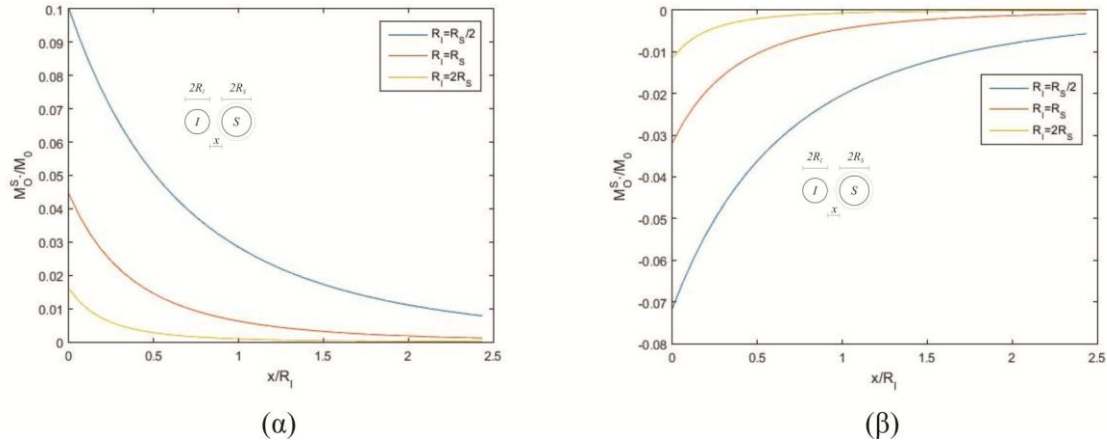
Σχήμα D.24: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο J_1^I -ολοκλήρωμα, για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (σπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $J_0 = 4\pi R_S^2 \mu_M |\mathcal{E}^T|^2$).



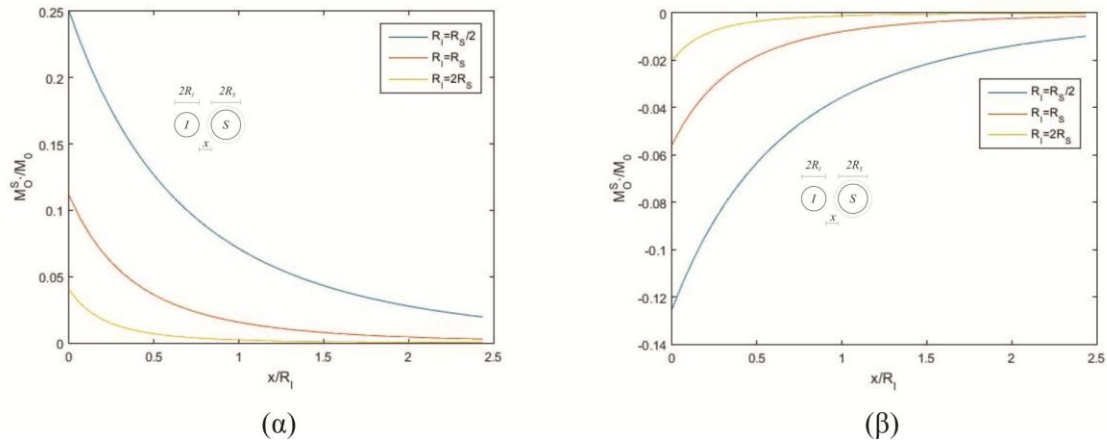
Σχήμα D.25: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_0^I -ολοκλήρωμα, για ισόγκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $M_0 = 2\pi R_I^2 M_M F^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$).



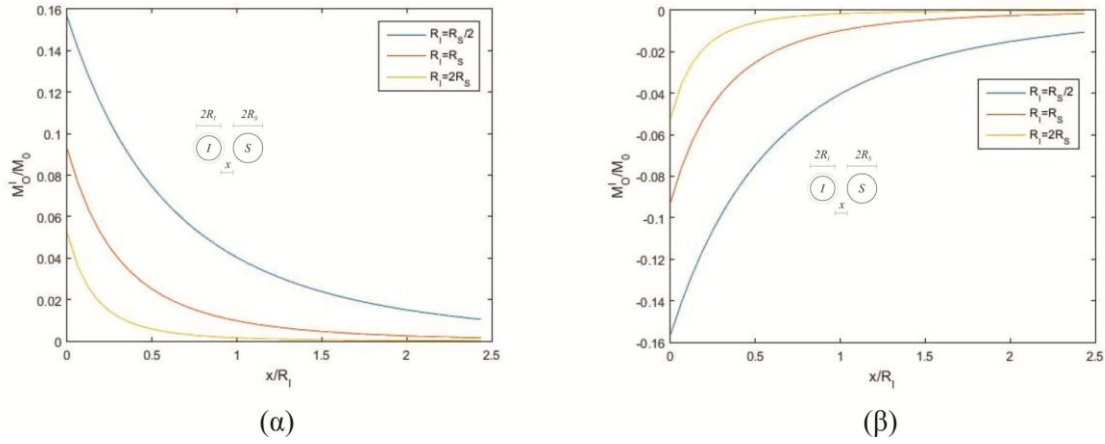
Σχήμα D.26: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_0^I -ολοκλήρωμα, για ισόγκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $M_0 = 2\pi R_I^2 M_M F^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$).



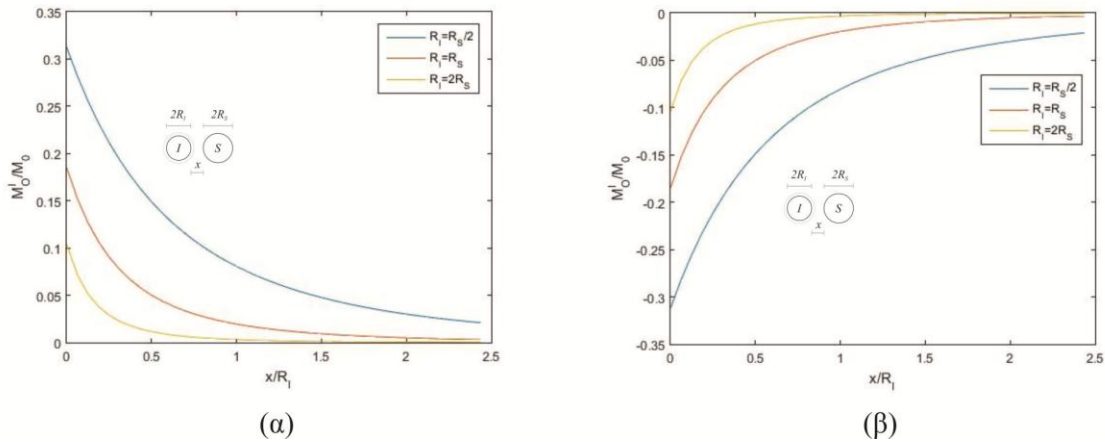
Σχήμα D.27: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_0^S -ολοκλήρωμα, για ισόγκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $M_0 = 2\pi R_I^2 M_M F^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$).



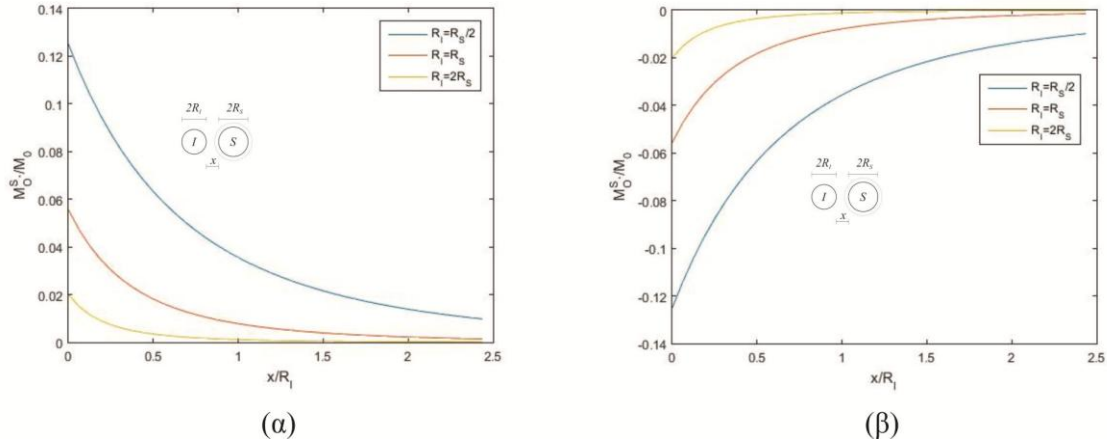
Σχήμα D.28: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_0^S -ολοκλήρωμα, για ισόγκη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$, $\varepsilon_{12}^T = 0$, $M_0 = 2\pi R_I^2 M_M F^2$, $\kappa_M = \kappa_I = 2$).



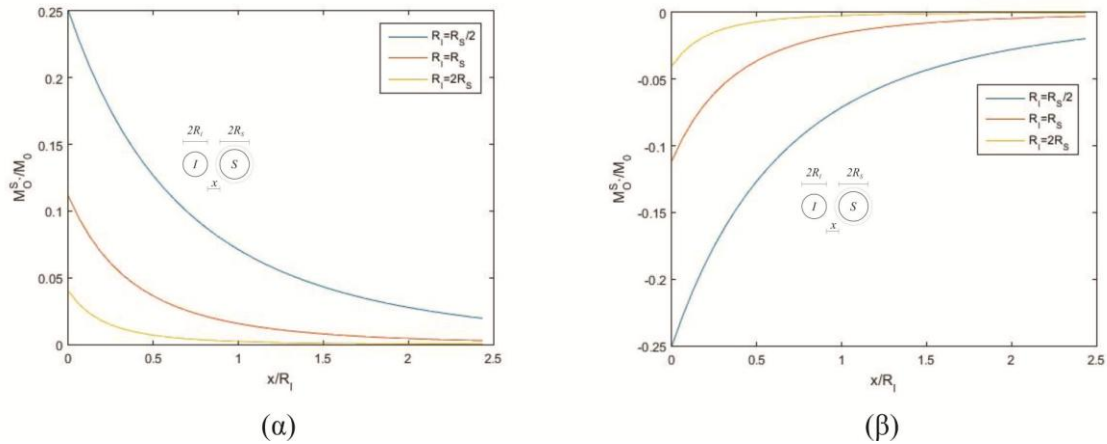
Σχήμα D.29: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_O^I -ολοκλήρωμα, για αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $M_0 = 2\pi R_I^2 \mu_M |\mathcal{F}^T|^2$).



Σχήμα D.30: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο M_O^I -ολοκλήρωμα, για αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $M_0 = 2\pi R_I^2 \mu_M |\mathcal{F}^T|^2$).

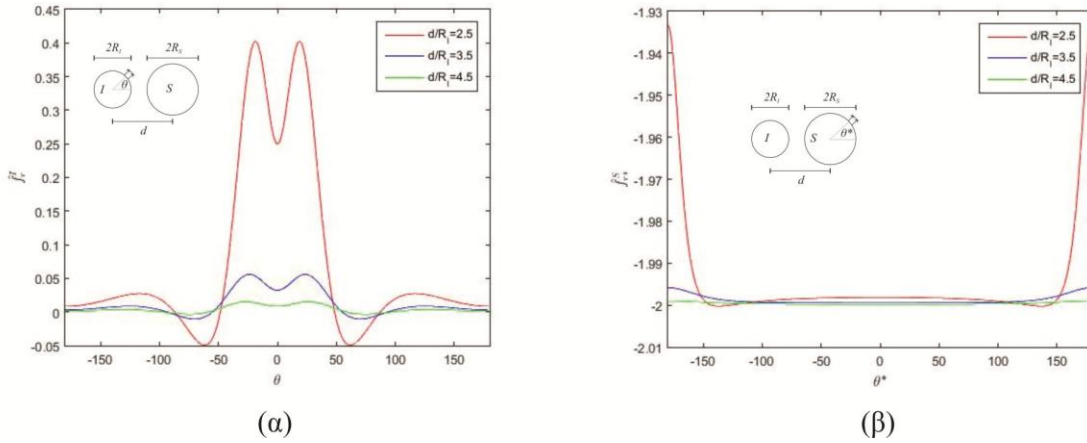


Σχήμα D.31: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο $M_{O^S}^S$ -ολοκλήρωμα, για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = \mu_M / 3$ (μαλακή ανομοιογένεια) και (β) για $\mu_I = 3\mu_M$ (σκληρή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $M_0 = 2\pi R_I^2 \mu_M |\mathcal{E}^T|^2$).

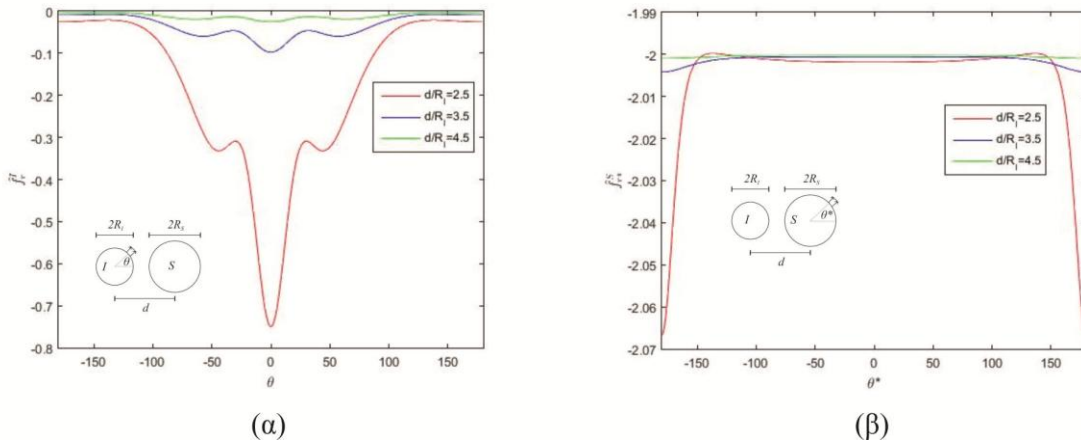


Σχήμα D.32: Η επίδραση της ανηγμένης απόστασης x / R_I ανομοιογένειας-εγκλωβίσματος στο $M_{O^S}^S$ -ολοκλήρωμα, για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος: (α) για $\mu_I = 0$ (οπή) και (β) για $\mu_I = \infty$ (απολύτως στερεή ανομοιογένεια) ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$, $M_0 = 2\pi R_I^2 \mu_M |\mathcal{E}^T|^2$).

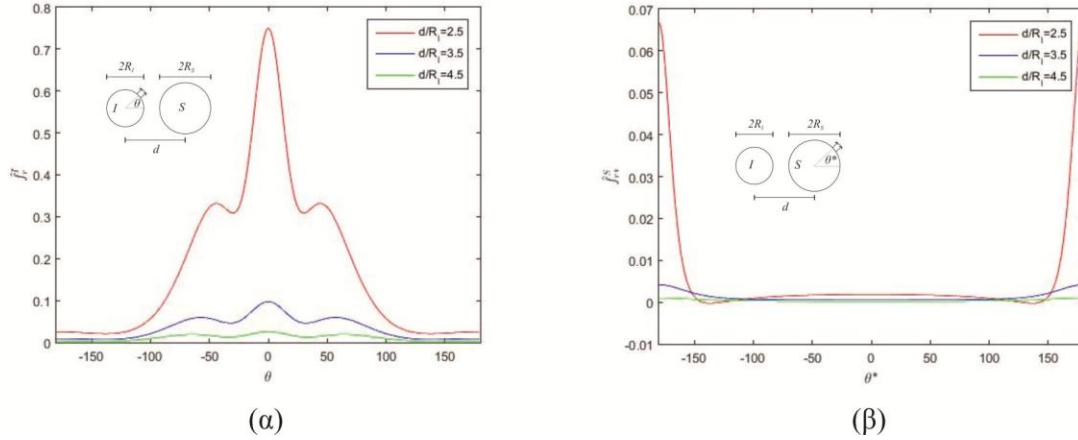
D.4 Κινούσα δύναμη των διεπιφανειών ανομοιογένειας-μήτρας και εγκλωβίσματος-μήτρας



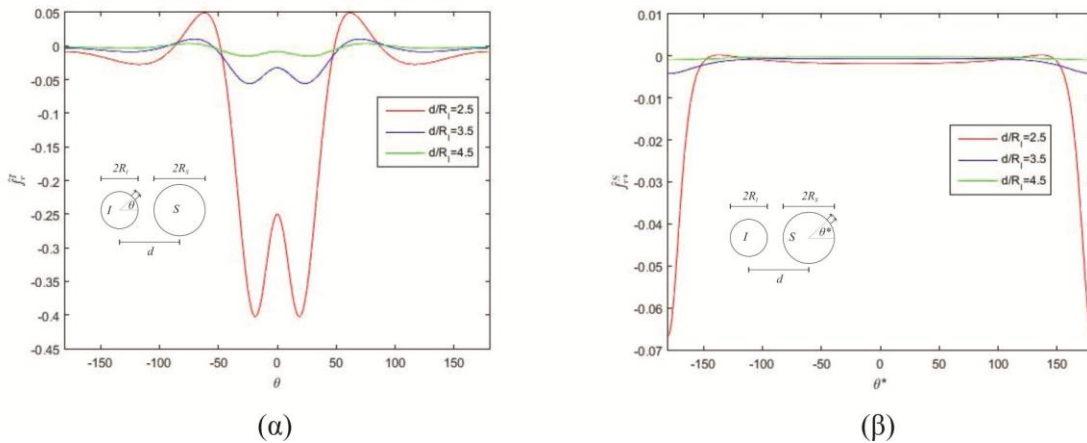
Σχήμα D.33: Οι κανονικοποιημένες τιμές $f_r^I / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$, $f_r^S / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων των διεπιφανειών (α) ανομοιογένειας-μήτρας και (β) εγκλωβίσματος-μήτρας, για μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 3$ και $\epsilon_{r*3}^T \neq 0$, $\epsilon_{\theta*3}^T = 0$, όταν $d = 2.5R_I, 3.5R_I, 4.5R_I$.



Σχήμα D.34: Οι κανονικοποιημένες τιμές $f_r^I / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$, $f_r^S / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων των διεπιφανειών (α) ανομοιογένειας-μήτρας και (β) εγκλωβίσματος-μήτρας, για μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 1/3$ και $\epsilon_{r*3}^T \neq 0$, $\epsilon_{\theta*3}^T = 0$, όταν $d = 2.5R_I, 3.5R_I, 4.5R_I$.



Σχήμα D.35: Οι κανονικοποιημένες τιμές $f_r^I / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$, $f_r^{*S} / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων των διεπιφανειών (α) ανομοιογένειας-μήτρας και (β) εγκλωβίσματος-μήτρας, για μία μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 3$ και $\epsilon_{r*3}^T \neq 0$, $\epsilon_{r*3}^T = 0$, όταν $d = 2.5R_I$, $3.5R_I$, $4.5R_I$.

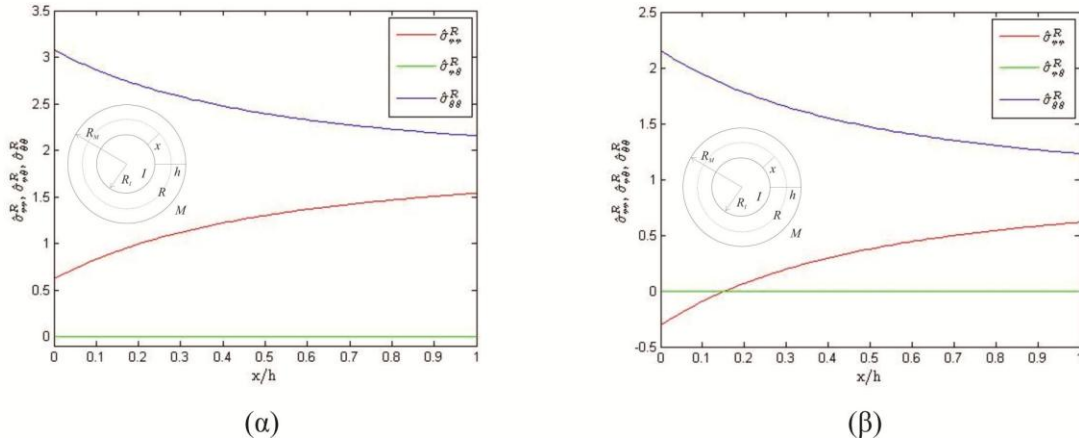


Σχήμα D.36: Οι κανονικοποιημένες τιμές $f_r^I / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$, $f_r^{*S} / (\mu_M |\epsilon_{r*3}^T|^2)$ των κινουσών δυνάμεων των διεπιφανειών (α) ανομοιογένειας-μήτρας και (β) εγκλωβίσματος-μήτρας, για μία σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_M / \mu_I = 1/3$ και $\epsilon_{r*3}^T \neq 0$, $\epsilon_{r*3}^T = 0$, όταν $d = 2.5R_I$, $3.5R_I$, $4.5R_I$.

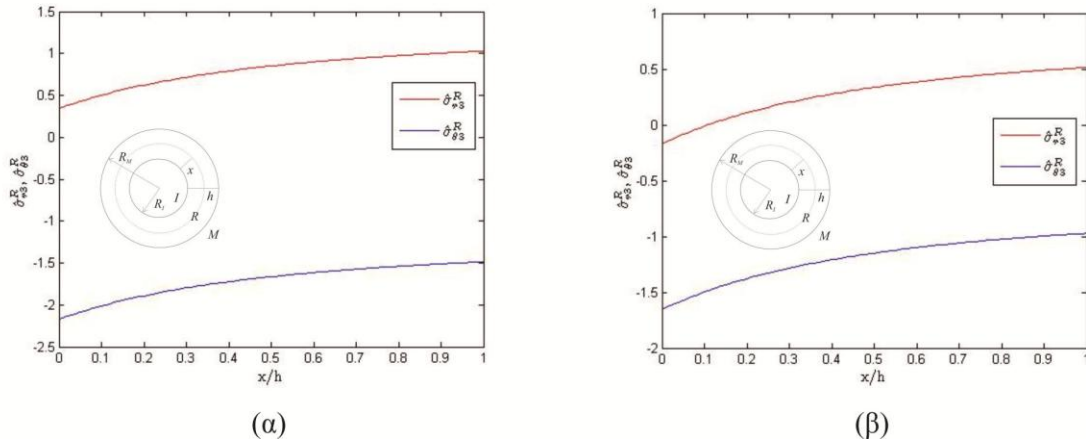
Παράρτημα Ε: Διαγράμματα Κεφαλαίου 4

- E.1 Μεταβολή τάσεων μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια
Σχήμα E.1-Σχήμα E.4
- E.2 Εφαπτομενικές τάσεις στις διεπιφάνειες
Σχήμα E.5-Σχήμα E.9
- E.3 Κατανομή της ελαστικής ενέργειας σε μήτρα-δακτυλιοειδής ανομοιογένεια-
πυρήνα
Σχήμα E.10-Σχήμα E.21
- E.4 Κινούσες δυνάμεις στις διεπιφάνειες
Σχήμα E.22-Σχήμα E.25
- E.5 \mathcal{M} -ολοκλήρωμα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια
Σχήμα E.26-Σχήμα E.27

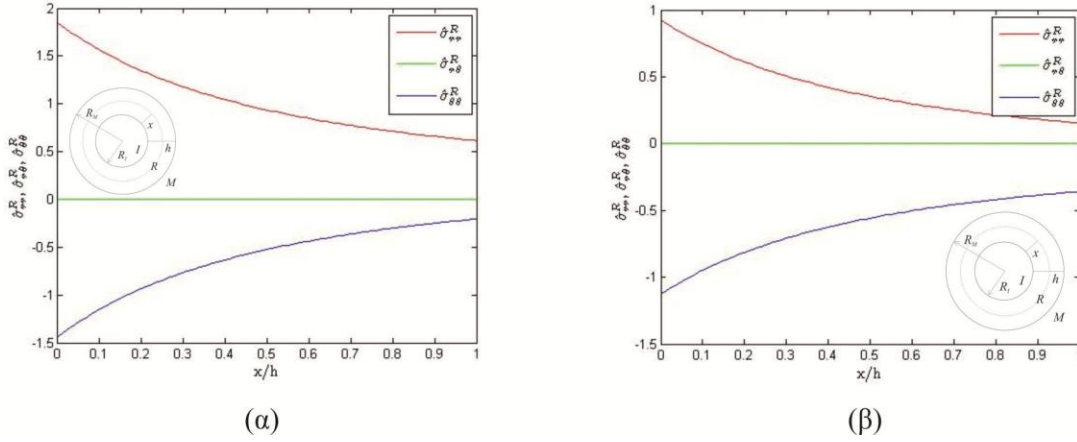
Ε.1 Μεταβολή των τάσεων μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια



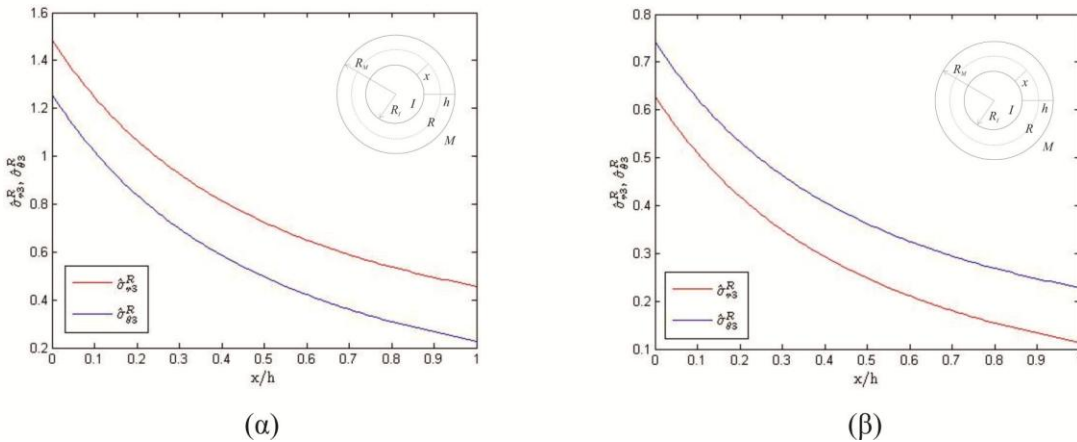
Σχήμα Ε.1: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r\theta}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{\theta\theta}^T|)$, κατά μήκος του πάχους $h (= R_M - R_I)$ μιας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, με ισόογη ιδιοπαραμόρφωση: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



Σχήμα Ε.2: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{r3}^R = \sigma_{r3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta3}^R = \sigma_{\theta3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{\theta3}^T|)$ κατά μήκος του πάχους $h (= R_M - R_I)$ μιας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας με ίσες διατημητικές ιδιοπαραμορφώσεις: (α) για μαλακή δακτυλιοειδής ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδής ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta3}^T = -2 \times 10^{-3}$, $R_I = R_M / 2$).

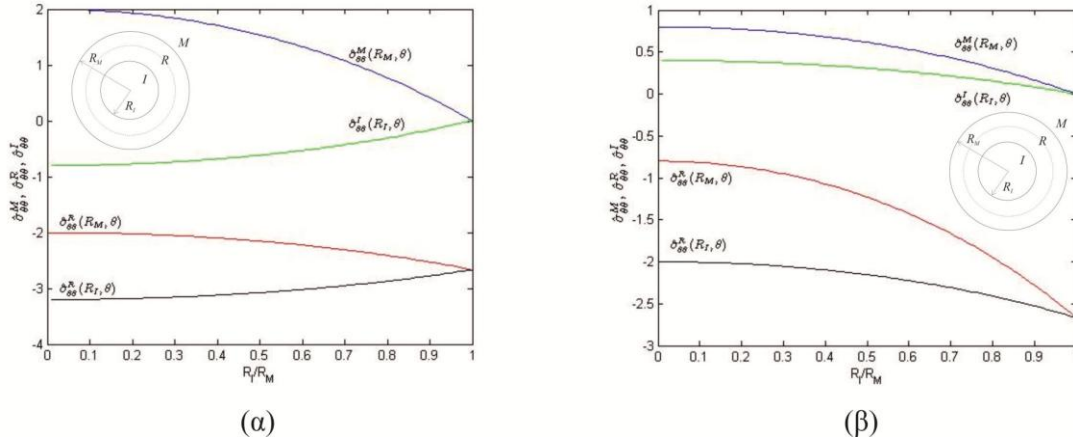


Σχήμα Ε.3: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{rr}^R = \sigma_{rr}^R / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^R = \sigma_{\theta\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{\theta\theta}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}^R = \sigma_{r\theta}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r\theta}^T|)$, κατά μήκος του πάχους h μιας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για ισόογη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα (α) για μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).

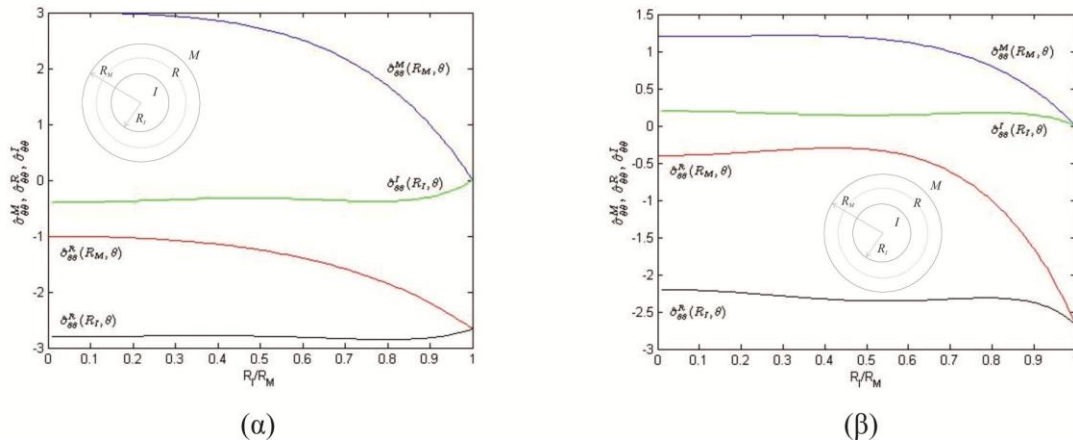


Σχήμα Ε.4: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{r3}^R = \sigma_{r3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$, $\tilde{\sigma}_{\theta3}^R = \sigma_{\theta3}^R / (\mu_R |\varepsilon_{\theta3}^T|)$, κατά μήκος του πάχους h ($= R_M - R_I$) μιας δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας για ίσες διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις στον πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$, ($\varepsilon_{r3}^T = \varepsilon_{\theta3}^T = -2 \times 10^{-3}$, $R_I = R_M / 2$).

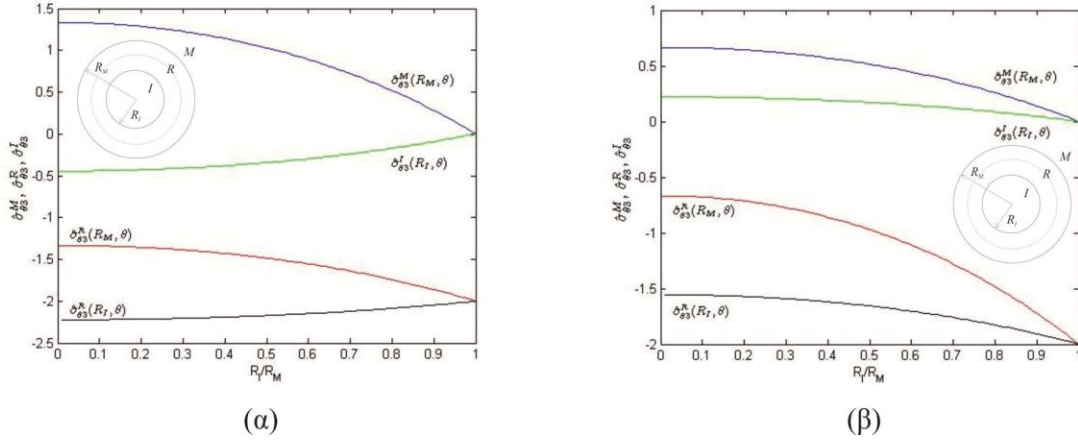
Ε.2 Εφαπτομενικές τάσεις στις διεπιφάνειες



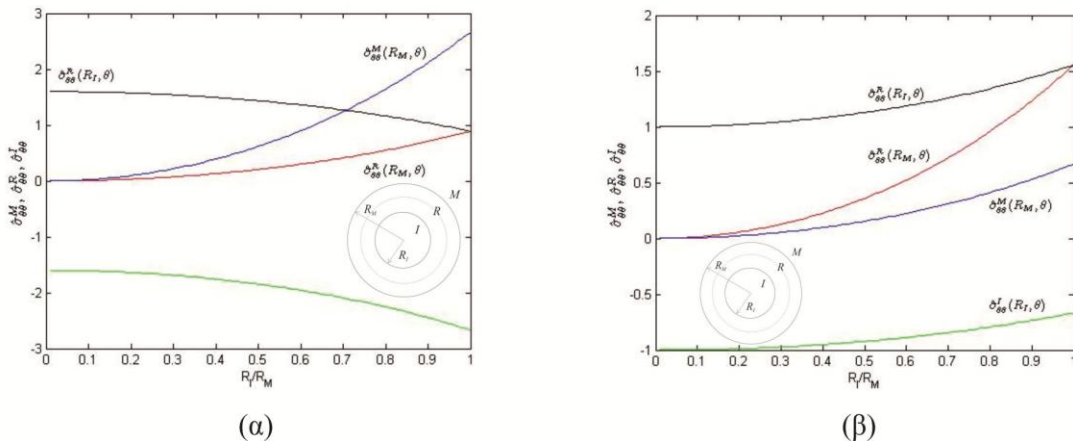
Σχήμα Ε.5: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^k = \sigma_{\theta\theta}^k / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ ($k = M, R, I$) στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M για ισόογη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή ανομοιογένεια $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = 2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



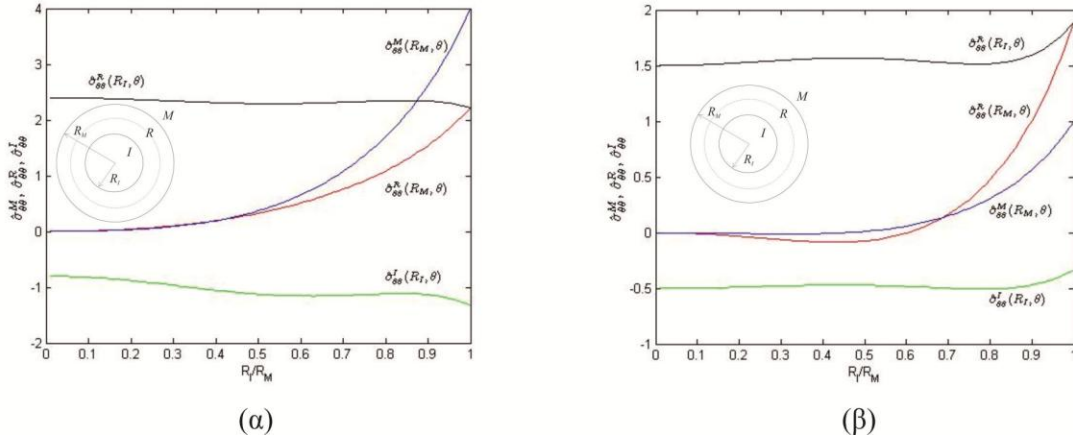
Σχήμα Ε.6: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^k = \sigma_{\theta\theta}^k / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ ($k = M, R, I$) στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M για διατμητική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή ανομοιογένεια $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



Σχήμα Ε.7: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{\theta 3}^k = \sigma_{\theta 3}^k / (\mu_R |\varepsilon_{r3}^T|)$ ($k = M, R, I$) στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M για διαμητική αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση της ανομοιογένειας: (α) για μαλακή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή ανομοιογένεια $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{13}^T = -\varepsilon_{23}^T = -2 \times 10^{-3}$, $R_I = R_M / 2$).

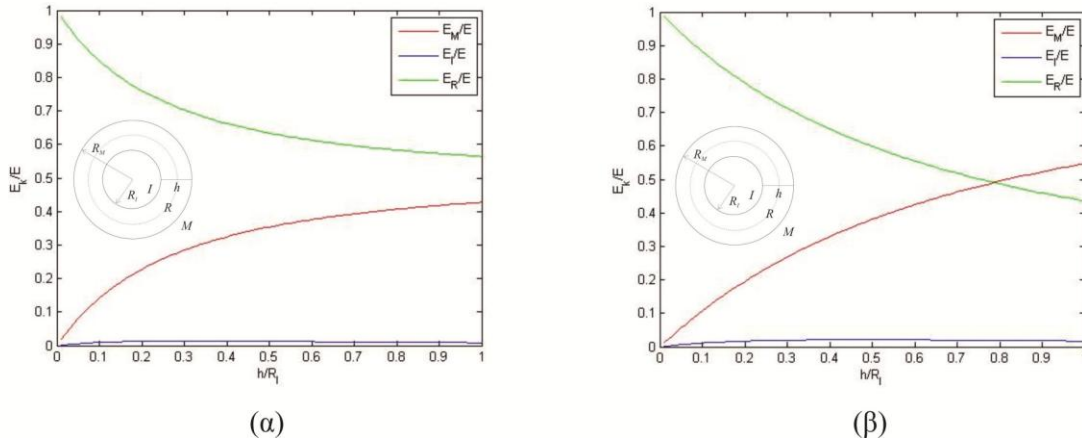


Σχήμα Ε.8: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^k = \sigma_{\theta\theta}^k / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ ($k = M, R, I$) στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M για ισόγυκη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλοειδή ανομοιογένεια $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T = 2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).

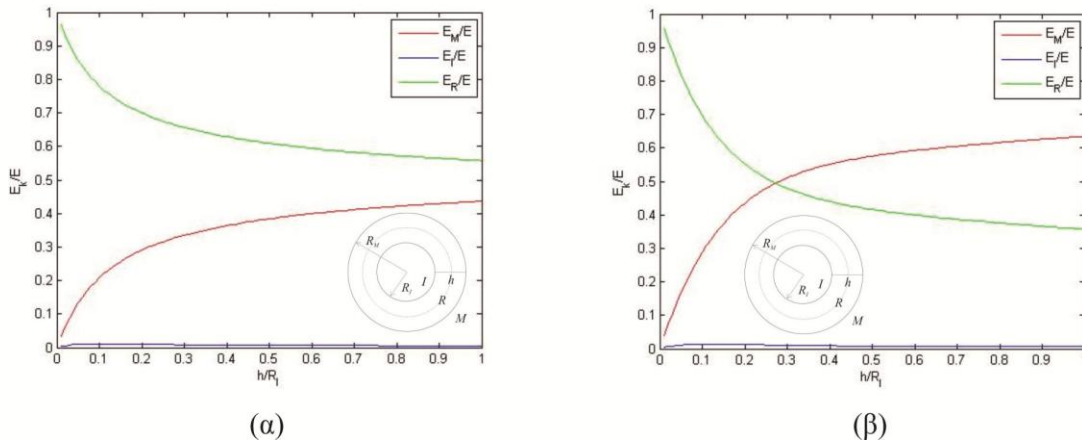


Σχήμα Ε.9: Κανονικοποιημένες τάσεις $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^k = \sigma_{\theta\theta}^k / (\mu_R |\varepsilon_{rr}^T|)$ ($k = M, R, I$) στις διεπιφάνειες μήτρας-ανομοιογένειας και ανομοιογένειας-πυρήνα σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M για καθαρή διατμητική ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 2$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T = -2 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $R_I = R_M / 2$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).

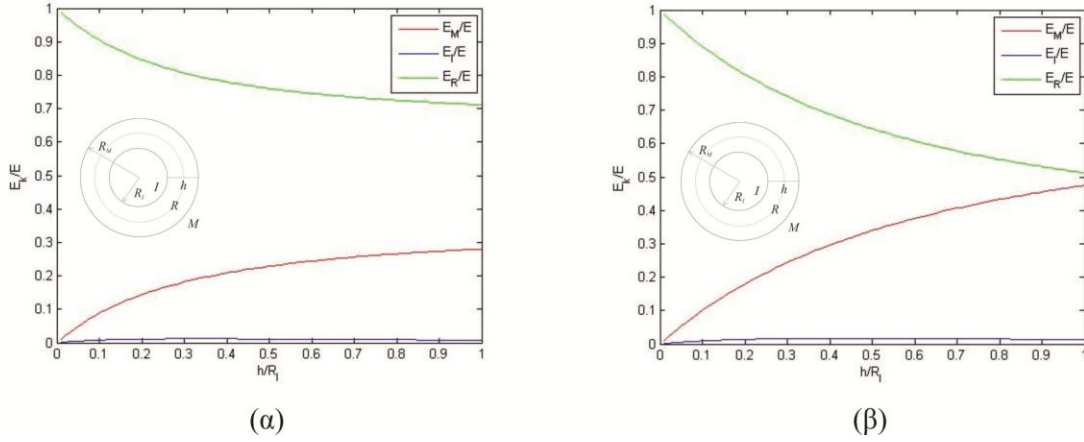
Ε.3 Κατανομή της ελαστικής ενέργειας σε μήτρα-δακτυλιοειδής ανομοιογένεια-πυρήνα



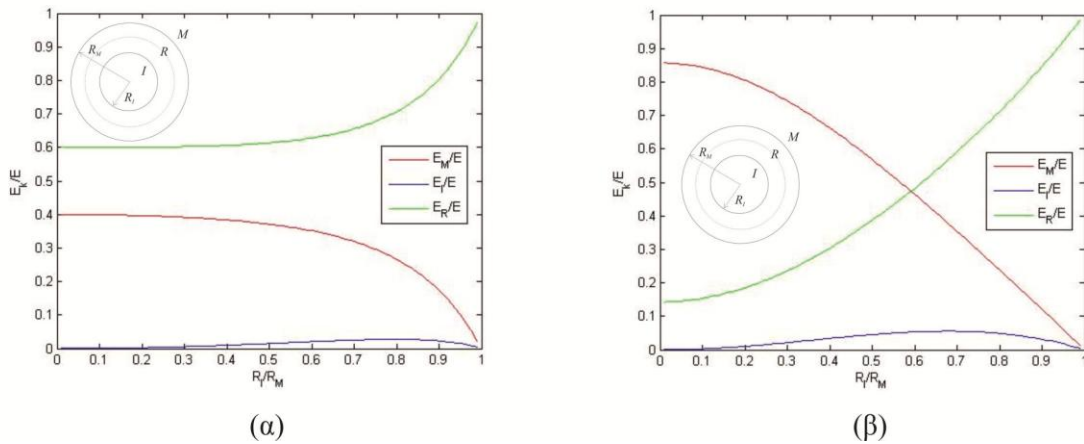
Σχήμα E.10: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



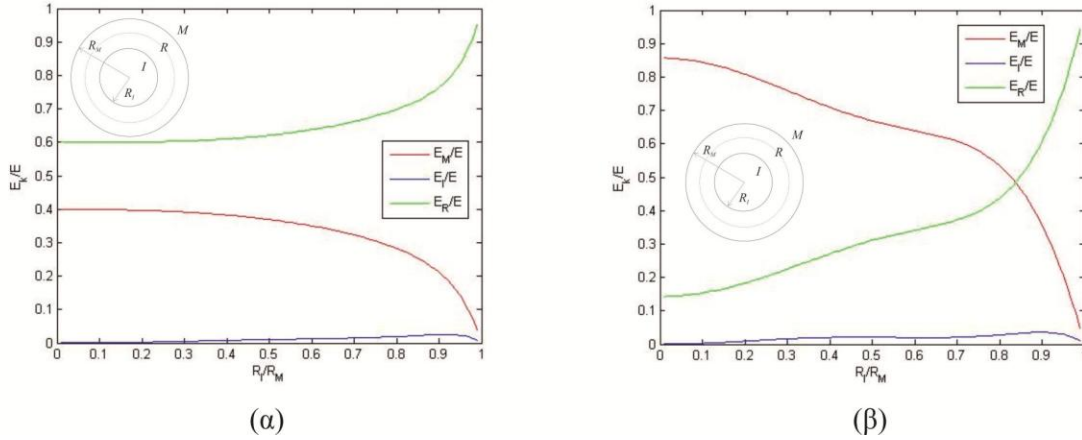
Σχήμα E.11: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για διατμητική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



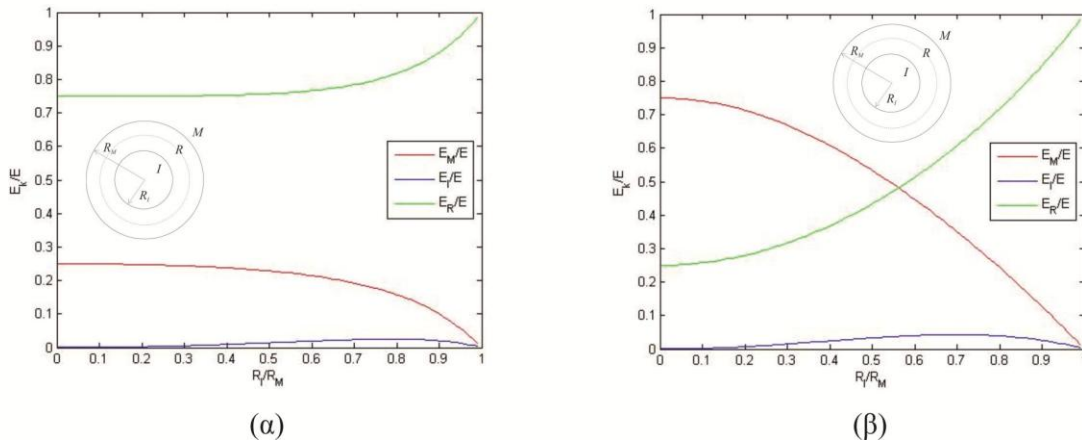
Σχήμα E.12: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για αντιπέπεδη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$).



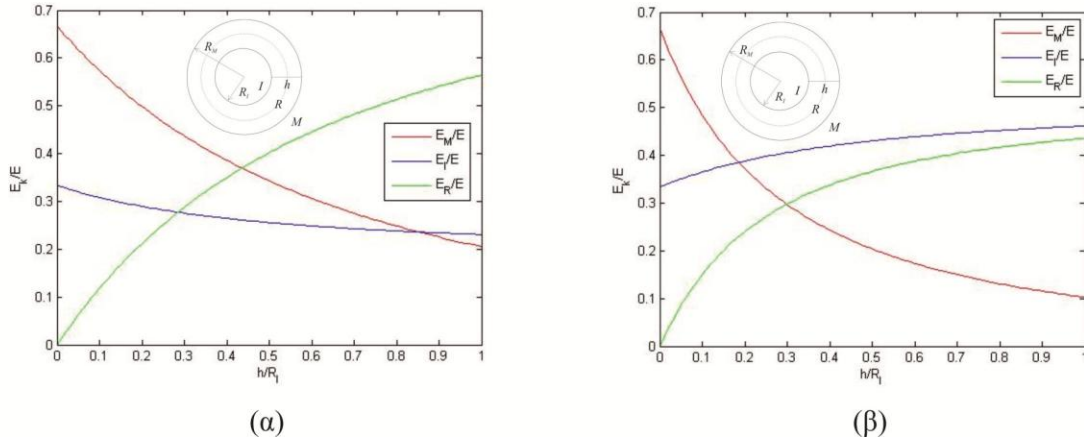
Σχήμα E.13: Οι λόγοι E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I/R_M , για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/3$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



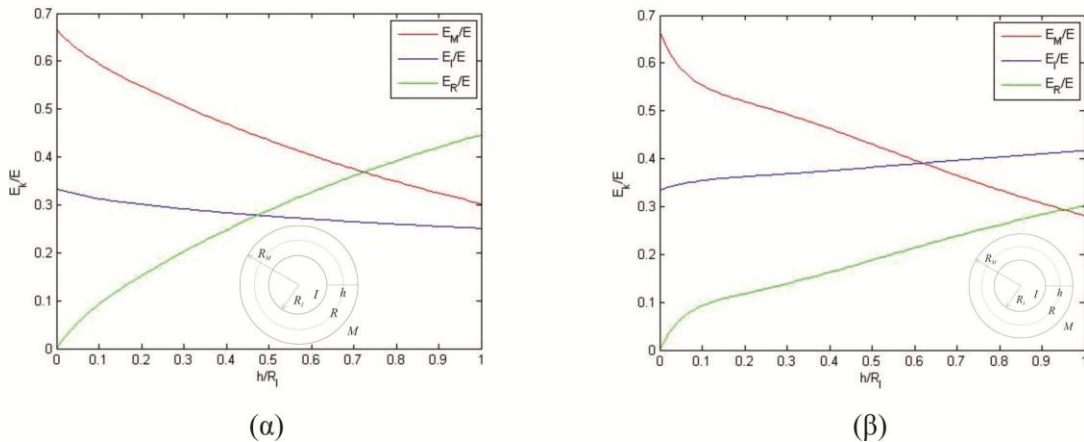
Σχήμα E.14: Οι λόγοι E^M / E , E^R / E , E^I / E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M , για διατμητική ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 3$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



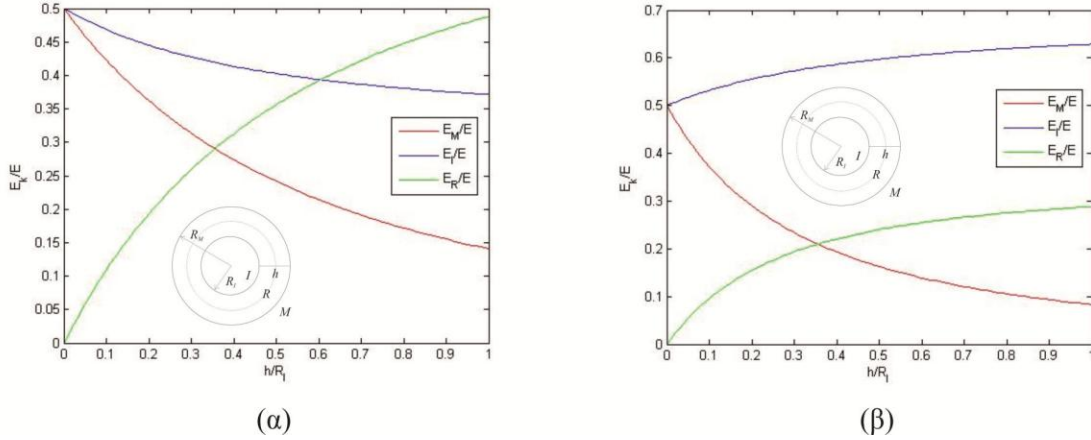
Σχήμα E.15: Οι λόγοι E^M / E , E^R / E , E^I / E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I / R_M , για αντεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 3\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R / 3$ ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$).



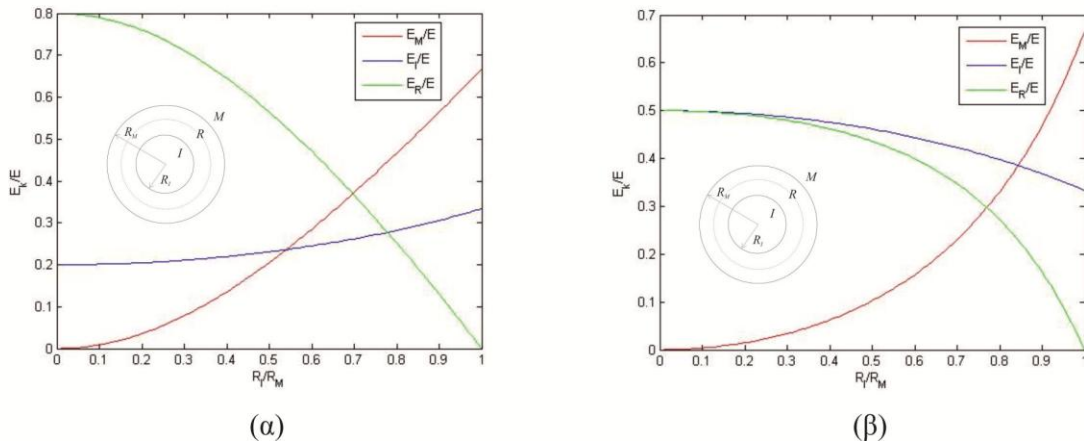
Σχήμα E.16: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για ισόογη ιδιοπαραμόρφωση στον πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



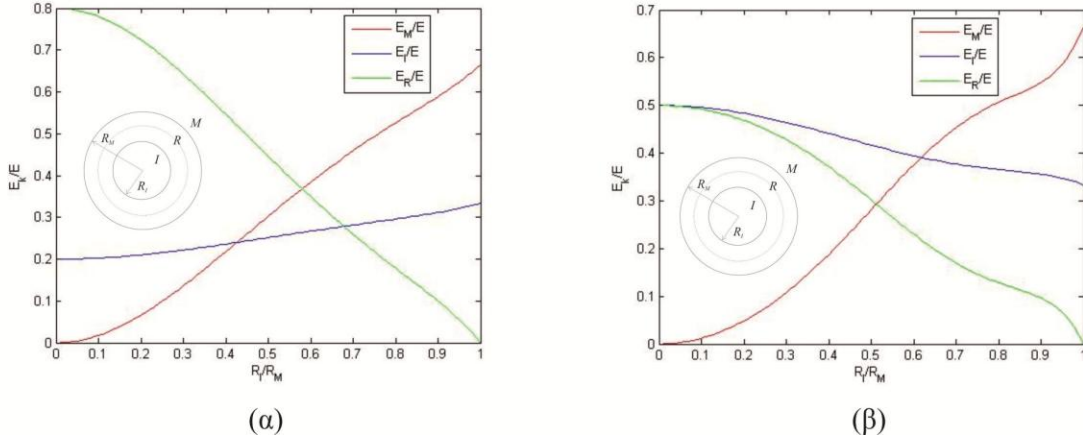
Σχήμα E.17: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για διατμητική ιδιοπαραμόρφωση στον πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).



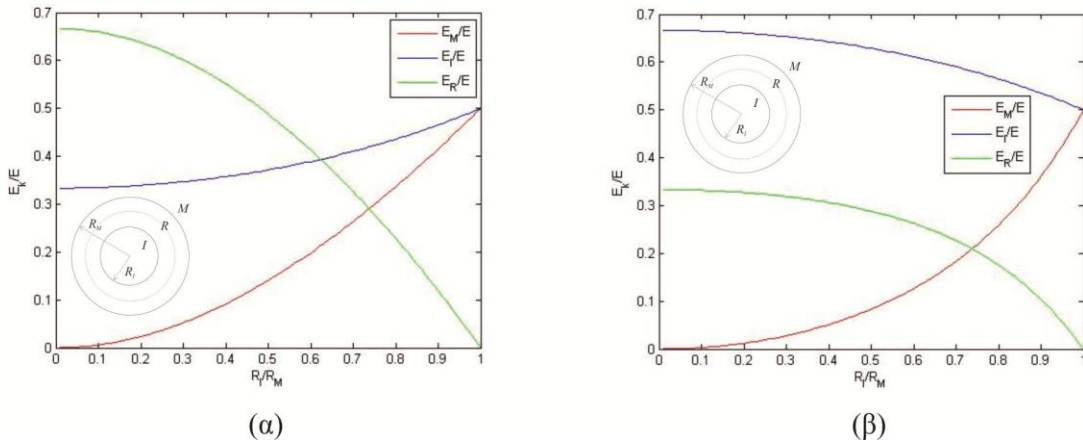
Σχήμα E.18: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου πάχους h/R_I της δακτυλιοειδούς ανομοιογένειας, για αντιπέπεδη ιδιοπαραμόρφωση στον πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$).



Σχήμα E.19: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I/R_M , για ισόογκη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = \varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).

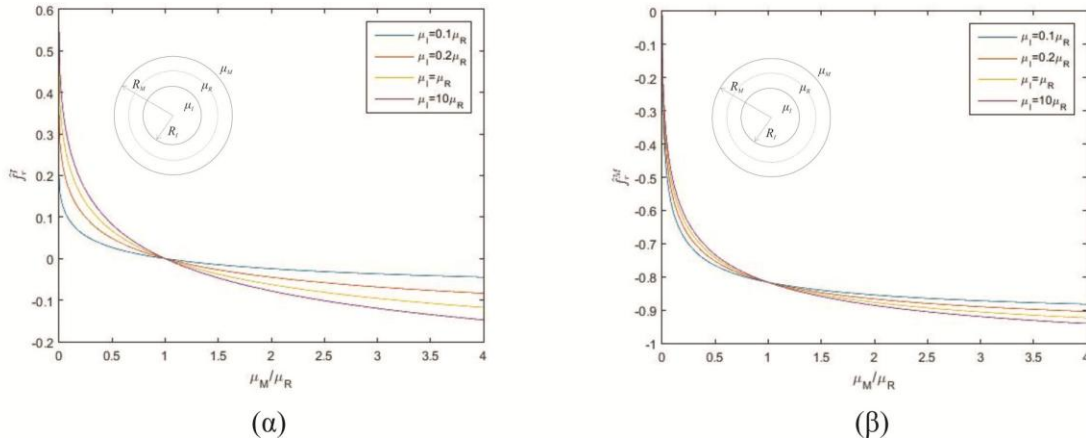


Σχήμα E.20: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I/R_M , για διατμητική ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{rr}^T = -\varepsilon_{\theta\theta}^T$, $\varepsilon_{r\theta}^T = 0$, $\kappa_I = \kappa_M = \kappa_R = 2$).

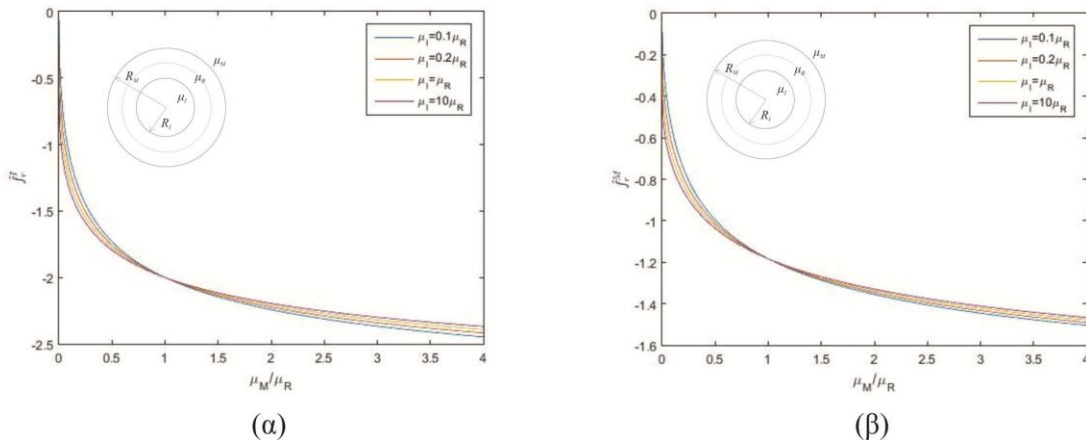


Σχήμα E.21: Οι λόγοι διανομής E^M/E , E^R/E , E^I/E , της ελαστικής ενέργειας παραμόρφωσης στην μήτρα, δακτυλιοειδή ανομοιογένεια και πυρήνα, αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του λόγου R_I/R_M , για αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του πυρήνα: (α) για μαλακή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = 2\mu_R$ και (β) για σκληρή δακτυλιοειδή ανομοιογένεια με $\mu_I = \mu_M = \mu_R/2$ ($\varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{23}^T$).

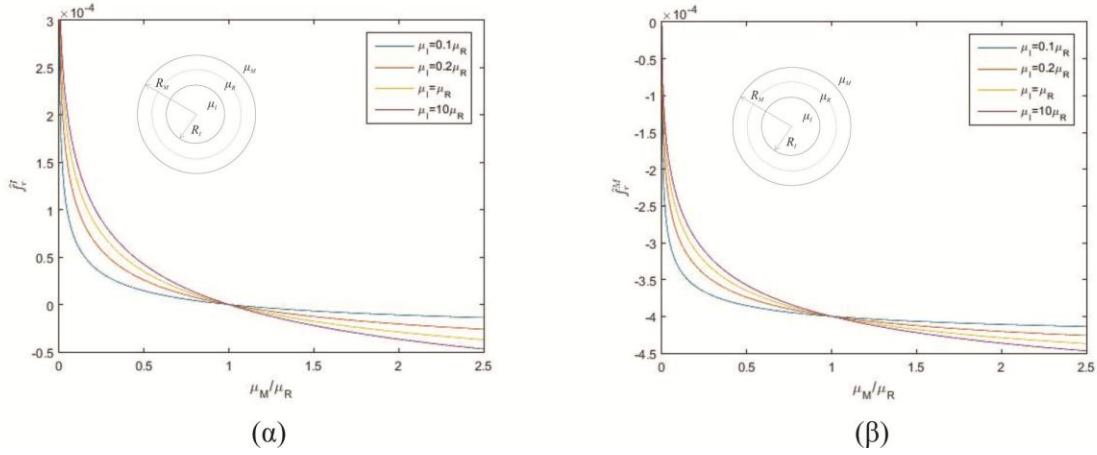
Ε.4 Κινούσες δυνάμεις στις διεπιφάνειες



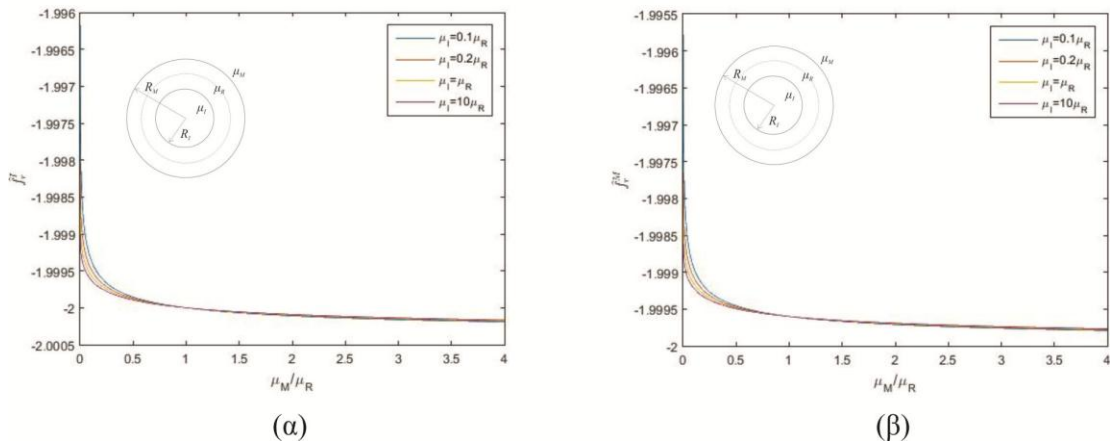
Σχήμα Ε.22: Οι κανονικοποιημένες τιμές των κινουσών δυνάμεων $\hat{f}_r^I = f_r^I / (\mu_R |\mathcal{F}^T|^2)$, $\hat{f}_r^M = f_r^M / (\mu_R |\mathcal{F}^T|^2)$, σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για διάφορες τιμές του λόγου μ_1 / μ_R , όταν $\varepsilon_{r3}^T \neq 0$, $\varepsilon_{\theta 3}^T = 0$ και $R_M / R_I = 1.3$ ($|\mathcal{F}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$).



Σχήμα Ε.23: Οι κανονικοποιημένες τιμές των κινουσών δυνάμεων $\hat{f}_r^I = f_r^I / (\mu_R |\mathcal{F}^T|^2)$, $\hat{f}_r^M = f_r^M / (\mu_R |\mathcal{F}^T|^2)$, σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για διάφορες τιμές του λόγου μ_1 / μ_R , όταν $\varepsilon_{r3}^T = 0$, $\varepsilon_{\theta 3}^T \neq 0$, και $R_M / R_I = 1.3$ ($|\mathcal{F}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$).

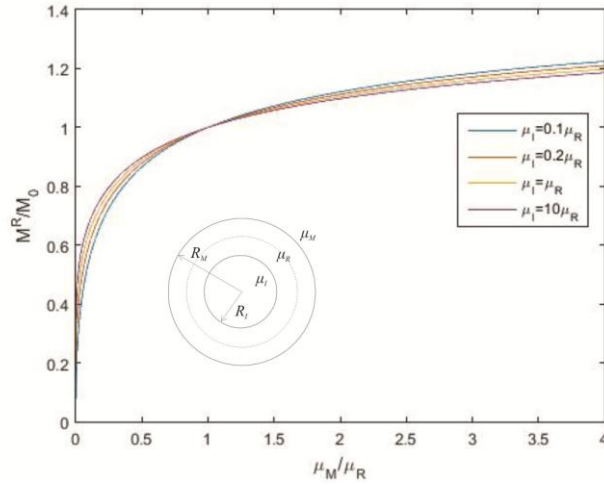


Σχήμα Ε.24: Οι κανονικοποιημένες τιμές των κινουσών δυνάμεων $\hat{f}_r^I = f_r^I / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, $\hat{f}_r^M = f_r^M / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για μία λεπτή δακτυλοειδή ανομοιογένεια με πάχος $h = R_M - R_I = 10^{-4} R_I$, όταν $\mu_I / \mu_R = 0.1, 0.2, 1, 10$, $\varepsilon_{r3}^T \neq 0$, $\varepsilon_{\theta 3}^T = 0$ και $|\mathcal{Z}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$.

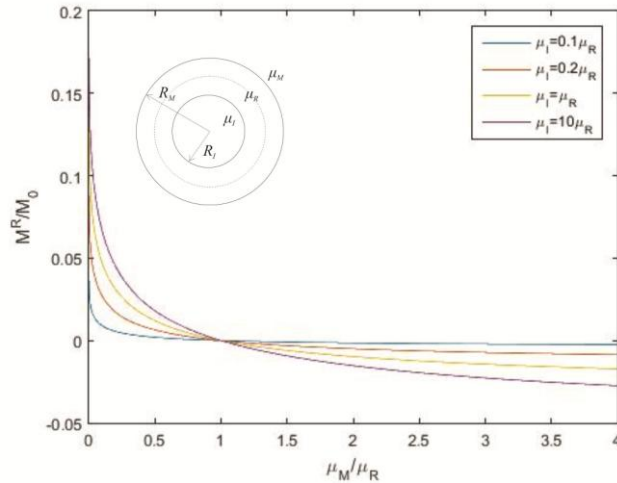


Σχήμα Ε.25: Οι κανονικοποιημένες τιμές των κινουσών δυνάμεων $\hat{f}_r^I = f_r^I / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, $\hat{f}_r^M = f_r^M / (\mu_R |\mathcal{Z}^T|^2)$, σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για μία λεπτή δακτυλοειδή ανομοιογένεια με πάχος $h = R_M - R_I = 10^{-4} R_I$, όταν $\mu_I / \mu_R = 0.1, 0.2, 1, 10$, $\varepsilon_{r3}^T = 0$, $\varepsilon_{\theta 3}^T \neq 0$, και $|\mathcal{Z}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$.

Ε.5 \mathcal{M} -ολοκλήρωμα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια



Σχήμα Ε.26: Η κανονικοποιημένη τιμή $\mathcal{M}^R / \mathcal{M}_0$ του \mathcal{M} -ολοκληρώματος γύρω από τον πυρήνα και μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για διάφορες τιμές του λόγου μ_l / μ_R , όταν η δακτυλιοειδής ανομοιογένεια υφίσταται αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση ($R_M / R_l = 1.3$, $\mathcal{M}_0 = 2\pi R_l^2 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2$, $|\mathcal{F}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$).



Σχήμα Ε.27: Η κανονικοποιημένη τιμή $\mathcal{M}^R / \mathcal{M}_0$ του \mathcal{M} -ολοκληρώματος γύρω από τον πυρήνα και μέσα στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια σαν συνάρτηση του λόγου μ_M / μ_R , για διάφορες τιμές του λόγου μ_l / μ_R , όταν ο πυρήνας υφίσταται αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση ($R_M / R_l = 1.3$, $\mathcal{M}_0 = 2\pi R_l^2 \mu_R |\mathcal{F}^T|^2$, $|\mathcal{F}^T| = [(\varepsilon_{r3}^T)^2 + (\varepsilon_{\theta 3}^T)^2]^{1/2}$).