

Ανώτερης Τάξης Σχήματα
ENO - WENO
για Συμπιεστές Ροές



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Αεροδυναμικής

Ανώτερης Τάξης Σχήματα ENO - WENO
για Συμπιεστές Ροές

Διπλωματική Εργασία
του Δημητρίου Ντούρα

Επιβλέπων: Σ. Βουτσινάς, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2018

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία πραγματεύεται μία εισαγωγική έρευνα στην ανάλυση και εφαρμογή των ανώτερης τάξης σχημάτων *Essentially Non-Oscillatory* και *Weighted Essentially Non-Oscillatory* σε συμπιεστές, μη μόνιμες ροές σε καρτεσιανά πλέγματα. Ειδικότερα, εξετάζεται ο τρόπος ανακατασκευής μονοδιάστατων και διδιάστατων πεδίων ροής κάνοντας χρήση τοπικών πολυωνύμων τα οποία, επιλέγονται αυτόματα βάσει μη γραμμικών κριτηρίων κλίσης (ομαλότητας) των ροϊκών μεγεθών. Στόχος είναι η αποφυγή της ανάπτυξης αριθμητικών ταλαντώσεων (*Spurious Oscillations*) κοντά στα χροστικά κύματα και στις ασυνέχειες, διατηρώντας παράλληλα την υψηλή τάξης ακρίβεια σε όλο το πεδίο, προκειμένου να αποτυπωθούν οι περίπλοκες δομές, που τυχόν αναπτύσσονται στην ροή. Επιχειρείται η ανάδειξη των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων της μεθόδου έχοντας ως σημείο αναφοράς την δεύτερη τάξη μέθοδο *Monotonic Upstream - Centered Scheme* με την χρήση περιοριστή. Επιπλέον, παρουσιάζονται δύο μέθοδοι για την επιβολή της μονοτονίας στην συνάρτηση παρεμβολής.

Αναφορικά με τις αριθμητικές προσομοιώσεις υλοποιήθηκαν, υπολογιστικοί κώδικες σε γλώσσα C++. Αρχικά, στην περίπτωση της μονοδιάστατης ροής, μελετήθηκαν κάποιες ιδιαίτερες περιπτώσεις ροής που περιλαμβάνουν τόσο ισχυρές ασυνέχειες, όσο και περίπλοκες δομές. Σκοπός είναι η κατάδειξη των ιδιοτήτων των μεθόδων ανακατασκευής και η εξέταση της στιβαρότητας των σχημάτων. Στο δεύτερο μέρος των αποτελεσμάτων, παρουσιάζονται δύο παραδείγματα διδιάστατης ροής που περιλαμβάνουν πολύπλοκα φαινόμενα αεροδυναμικής. Προκειμένου να εξακριβωθεί η ικανότητα των σχημάτων ENO στην αποτύπωση των ασυνεχειών, το πρώτο παράδειγμα αποτελείται από ένα κάθετο κύμα κρούσης, το οποίο προσπίπτει σε τοίχο που βρίσκεται υπό κλίση 30 μοιρών. Καθώς το κύμα κινείται πάνω στον τοίχο, εξελίσσεται μία διπλή ανάκλαση τύπου Mach. Στο δεύτερο παράδειγμα, μελετάται υπό το πρίσμα της αριθμητικής διάχυσης των σχημάτων WENO, η αλληλεπίδραση δύο στροβίλων τύπου Taylor που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση.

National Technical University of Athens
School of Mechanical Engineering
Section of Fluids
Laboratory of Aerodynamics

High Order Schemes ENO - WENO
for Compressible Flows

Diploma Thesis
by **Dimitrios Ntouras**

Supervisor: S. Voutsinas , Professor NTUA

Athens, February 2018

Abstract

This diploma thesis carries out an introductory research on the high order schemes *Essentially Non-Oscillatory* and *Weighted Essentially Non-Oscillatory* for unsteady, compressible flows on cartesian grids. Specifically, it investigates the method of reconstructing one and two dimensional flow fields using locally defined polynomials, which are selected based on a non linear adaptive procedure for automatically choosing the locally smoothest stencil. Using this key idea, it is avoided crossing discontinuities and hence creating spurious oscillations near shock waves and contact discontinuities, while the global high order of accuracy is maintained. It is attempted to determine the advantages and disadvantages of the method, using as a reference point the second order *Monotonic Upstream - Centered Scheme* applied with limiter. Furthermore, two methods are introduced in order to preserve the monotonicity of the interpolating function.

In regard to the numerical simulations, they were implemented computational codes in C++. Firstly, for the one dimensional cases, they were considered specific numerical experiments containing both shocks and complex smooth structures. The main purpose is to clarify the behavior of ENO and WENO schemes and draw conclusions about the robustness of the schemes. At the second part of the numerical results, two standard benchmark test for gas dynamics codes are studied. In order to investigate the shock capturing property of the ENO schemes, the first case consists of a Mach 10 normal shock that hits a ramp inclined by 30 degrees. When the shock passes the ramp, a double Mach configuration evolves. The second test case, analyses the interaction of two Taylor type vortices in close distance, by means of the numerical diffusion of the WENO schemes.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας κλείνει και ο κύκλος σπουδών μου στο τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου. Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε ορισμένους ανθρώπους ως ένδειξη αναγνώρισης της συμβολής που είχε ο καθένας του, με διαφορετικό τρόπο, στην προσπάθεια μου για την επίτευξη αυτού του στόχου.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής κ. Σπ. Βουτσινά για την εμπιστοσύνη και υποστήριξη που μου έδειξε, καθώς επίσης για τις ιδέες και παρατηρήσεις που είχε τόσο κατά την διάρκεια της διπλωματικής εργασίας, όσο και στα πλαίσια της συνεργασίας μας σε προπτυχιακά μαθήματα, εμπνέοντας μου την ενασχόληση με το αντικείμενο. Επιπλέον, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον Δρ. Γ. Παπαδάκη για την υπομονή και τον χρόνο που διέθεσε, αλλά και για τις καίριες παρατηρήσεις του που αποδείχτηκαν καταλυτικές για την επιτυχή ολοκλήρωση της διπλωματικής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου και συμφοιτητές μου για όλο τον δημιουργικό χρόνο που μοιραστήκαμε κατά την διάρκεια των σπουδών μας.

Κυρίως όλων, όμως, ευχαριστώ την οικογένεια μου, η οποία στάθηκε δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια και με υποστηρίζει σε κάθε μου βήμα και σε όλες τις επιλογές μου, αλλά προπαντός γιατί μου έμαθαν να μην απογοητεύομαι ποτέ και να συνεχίζω να προσπαθώ πάντα για το καλύτερο.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Η Ανάγκη για Ανώτερης Τάξης Σχήματα	1
1.2	Ανώτερης Τάξης Μέθοδοι	2
1.3	Τα σχήματα ENO - WENO	3
1.4	Στόχος και Διάρθρωση της Εργασίας	4
2	Διδιάστατη Συμπιεστή Ροή	7
2.1	Οι εξισώσεις Euler	7
2.2	Διατύπωση Πεπερασμένων Όγκων	11
2.3	Χρονική Διακριτοποίηση	15
2.4	Οριακές Συνθήκες	16
2.4.1	Άμεση Επιβολή Οριακών Συνθηκών	17
2.4.2	Έμμεση Επιβολή Οριακών Συνθηκών	19
3	Ανακατασκευή Πεδίου - Field Reconstruction	21
3.1	Monotonic Upstream - Centered Scheme	22
3.2	Essentially Non - Oscillatory	25
3.3	Weighted Essentially Non - Oscillatory	30
3.4	Διατήρηση Μονοτονίας	33
3.5	Ανακατασκευή Συστημάτων Εξισώσεων	37
3.6	Ανακατασκευή Διδιάστατου Πεδίου	39
4	Αποτελέσματα Μονοδιάστατης Συμπιεστής Ροής	41
4.1	Essentially Non - Oscillatory	41
4.2	Weighted Essentially Non - Oscillatory	51
4.3	Αριθμητική Διάχυση Σχημάτων ENO - WENO	54
4.4	Διατήρηση Μονοτονίας	54
5	Αποτελέσματα Διδιάστατης Συμπιεστής Ροής	59

5.1	Διπλή Ανάκλαση Τύπου Mach	59
5.2	Ζεύγος Συμπιεστών Στροβίλων	64
6	Αποτίμηση της Εργασίας	69
6.1	Σύνοψη - Συμπεράσματα	69
6.2	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη	70
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	73
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	76

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η Ανάγκη για Ανώτερης Τάξης Σχήματα

Στην σύγχρονη αεροδυναμική, αλλά και σε απλές βιομηχανικές εφαρμογές, οι επιλύτες της ροής που εφαρμόζονται, συνήθως, είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας. Μία τέτοια προσέγγιση είναι αρκετά αποτελεσματική, καθώς συνδυάζει την απλότητα του αλγορίθμου υλοποίησης, το μικρό υπολογιστικό κόστος, καθώς επίσης γενικεύεται εύκολα, σε διάφορες τοπολογίες πλέγματος και γενικά σε ροές που περιλαμβάνουν σύνθετες γεωμετρίες.

Παρόλα αυτά, σε πολλές πρακτικές εφαρμογές η πολυπλοκότητα της ροής, καθώς και η αργή χρονική τους εξέλιξη καθιστούν τους συμβατικούς αλγόριθμους με δεύτερης τάξης ακρίβειας μη ενδεικνυόμενη επιλογή, καθώς απαιτούν μικρή χωρική διακριτοποίηση με αποτέλεσμα το υπολογιστικό κόστος να καθίσταται ιδιαίτερα υψηλό. Τέτοιου είδους προβλήματα μπορεί να περιέχουν περιοχές, στις οποίες η ροή είναι, μεν, συνεχής, αλλά με αρκετά πολύπλοκη δομή, όπως στρόβιλοι που αλληλεπιδρούν ο ένας με τον άλλον ή με στρώματα διάτμησης, συμπιεστή τύρβη, περιοχές με κύματα κρούσης που περιλαμβάνουν ανακλάσεις, κύματα αποτόνωσης και γραμμές ολίσθησης. Τα σχήματα με δεύτερης τάξης χωρική διακριτοποίηση προκαλούν εκτεταμένη αριθμητική διάχυση και ο μόνος τρόπος για να περιοριστεί είναι είτε με καθολική πύκνωση του πλέγματος, είτε με χρήση αλγορίθμων τοπικής πύκνωσης. Σημειώνεται ότι με τον όρο αριθμητική διάχυση δηλώνεται η δεύτερης τάξης χωρική παράγωγος που προκύπτει από την διακριτοποίηση με βάσει το ανάπτυγμα Taylor. Πιο συγκεκριμένα, παίρνοντας ως παράδειγμα μία βαθμωτή εξίσωση μεταφοράς της μορφής $u_t + au_x = 0$, κάνοντας χρήση του αναπτύγματος Taylor μπορεί να εκφραστεί η τιμή της μεταβλητής στην θέση x_{i+1} ως

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} (\Delta x) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i} (\Delta x^2) + \dots \quad (1.1)$$

κάνοντας αντιμετάθεση όρων

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x) \quad (1.2)$$

Εισάγοντας την προηγούμενη σχέση στην εξίσωση μεταφοράς, προκύπτει

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \left(\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} \right) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

Ο όρος στο δεξί μέλος εκφράζει την αριθμητική διάχυση και ο συντελεστής D , ονομάζεται συντελεστής αριθμητικής διάχυσης.

Είναι αρκετά εύκολο να επισημανθεί η ισχύς των ανώτερης τάξης μεθόδων εξετάζοντας την αριθμητική προσέγγιση μιας συνεχούς συνάρτησης. Εφαρμόζοντας μία δεύτερης τάξης μέθοδο προσεγγίζεται η συνάρτηση με σφάλμα E , που είναι ανάλογο του h^2 , όπου h η διακριτοποίηση του πλέγματος. Προφανώς, εάν εφαρμοστεί μία n -τάξης μέθοδος η χωρική ακρίβεια της είναι $\mathcal{O}(h^n)$. Εάν μειωθεί η διακριτοποίηση κατά το ήμισυ, μία δεύτερης τάξης μέθοδος θα αυξήσει την ακρίβεια της κατά 4, ενώ μία τέταρτης τάξης μέθοδος θα αυξήσει την ακρίβεια με συντελεστή 16.

Η δυναμική των μεθόδων ανώτερης τάξης μπορεί να γίνει εμφανής από την τάξη μεγέθους του υπολογιστικού κόστους (operation count). Το σφάλμα της χωρικής λύσης είναι της τάξης $\mathcal{O}(h^p)$, όπου h το μέγεθος του πλέγματος και p η ακρίβεια της προσέγγισης. Ο αριθμός των διαστημάτων N_i του πλέγματος σχετίζεται με το μέγεθος του κελιού ως $N_i = \mathcal{O}(h^{-d})$, όπου d είναι η τάξη της χωρικής διακριτοποίησης του προβλήματος. Η υψηλή τάξης ακρίβεια εισάγει περισσότερους αγνώστους για κάθε κελί, $N_s = \mathcal{O}(p^d)$. Επομένως ο συνολικός αριθμός N των πράξεων είναι της τάξης $N = N_i N_s = \mathcal{O}\left((p/h)^d\right)$. Ο συνολικός αριθμός των λειτουργιών που πρέπει να γίνουν για να επιλυθεί το διακριτοποιημένο πρόβλημα είναι $W = \mathcal{O}(N^w)$, όπου με w συμβολίζεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Ο συνολικός χρόνος για την επίλυση ενός προβλήματος είναι $T = W/F$, όπου $1/F$ είναι ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για μια λειτουργία και F η ταχύτητα του επεξεργαστή. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για επίτευξη σφάλματος E είναι

$$T = \mathcal{O}\left(\frac{(p/E^{1/p})^{wd}}{F}\right) \quad (1.4)$$

ή παίρνοντας τον λογάριθμο της προηγούμενης έκφρασης

$$\log T \approx wd \left(-\frac{1}{p} \log E + \log p\right) - \log F \quad (1.5)$$

Από την σχέση (1.5) προκύπτει ότι για σταθερή τάξη μέγεθος σφάλματος E , ο χρόνος υπολογισμού εξαρτάται εκθετικά από τον λογάριθμο της τάξης ακρίβειας του σχήματος, p , την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, w , και από την τάξη διακριτοποίησης d . Δηλαδή, από την σχέση αυτή προκύπτει ότι είναι προτιμότερο να αυξηθεί η τάξη ακριβείας του σχήματος, από ότι να αυξηθεί η τάξη της χωρικής διακριτοποίησης d , δεδομένου όμως ότι δεν αυξάνεται η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

1.2 Ανώτερης Τάξης Μέθοδοι

Αρκετές μέθοδοι έχουν προταθεί προκειμένου να περιγράψουν πολύπλοκες ροές που περιέχουν ασυνέχειες, αλλά και έντονες μεταβολές της ροής. Μετά την αποτελεσματική εφαρμογή μεθόδων δεύτερης τάξης και την κυριαρχία τους στις υπολογιστικές προσομοιώσεις προβλημάτων ρευστομηχανικής οι επιστημονικές κοινότητες στους κλάδους των εφαρμοσμένων μαθηματικών και της υπολογιστικής μηχανικής ανέπτυξαν μεθόδους, οι οποίες θα μπορούσαν να μοντελοποιήσουν επιτυχώς ρευστομηχανικά προβλήματα που παρουσιάζουν ισχυρά κρουστικά κύματα, ασυνέχειες και έντονα περίπλοκη δομή, καθώς και για να περιγράψουν φαινόμενα αεροακουστικής.

Μια από τις πλέον διαδεδομένες μεθόδους που εισήχθησαν για την επίτευξη υψηλής τάξης ακρίβειας είναι η μέθοδος *Discontinious Galerkin* [1], η οποία κάνει χρήση πεπερασμένων

στοιχείων. Η λύση αναπαρίσταται μέσα σε κάθε στοιχείο ως μια πολυωνυμική προσέγγιση. Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε για άλλες εφαρμογές την δεκαετία του '70 και εισήχθη σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής, αρκετά αργότερα, την δεκαετία του '90. Στα θετικά αυτής της μεθόδου συγκαταλέγονται η επίτευξη αυθαίρετα υψηλής τάξης ακρίβειας, ο στιβαρός σχεδιασμός τους, καθώς και η ευελιξία που έχουν στην χρήση διάφορων ειδών πεπερασμένων στοιχείων και στην τοπολογία του πλέγματος. Από την άλλη μεριά, η μέθοδος αυτή υστερεί αρκετά σε υπολογιστικό κόστος, εξ' αιτίας της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υλοποίησής τους.

Μια άλλη κατηγορία μεθόδων που εισήχθησαν για την επίτευξη υψηλής τάξης ακρίβειας είναι οι λεγόμενες *Spectral Methods* [2]. Αυτές οι μέθοδοι διακρίνονται για τις υψηλές υπολογιστικές τους επιδόσεις, καθώς και για την λεγόμενη φασματική ή “άπειρη” ακρίβεια που παρέχουν, καθώς η ακρίβεια εξαρτάται από το πλήθος των αρμονικών που θα χρησιμοποιηθούν στην λύση. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, οι μέθοδοι αυτοί κάνουν χρήση συναρτήσεων βάσης (*basis functions*), με την διαφορά ότι οι συναρτήσεις αυτές δεν αφορούν μόνο ένα στοιχείο, αλλά ολόκληρο το πεδίο. Αυτές οι μέθοδοι έχουν εφαρμοστεί με επιτυχία σε παραβολικά και ελλειπτικά προβλήματα, που περιλαμβάνονται απλές γεωμετρίες. Ωστόσο, μειονεκτούν όταν το πρόβλημα περιλαμβάνει ισχυρές ασυνέχειες, εξ αιτίας του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις βάσης είναι καθολικές και αφορούν ολόκληρο το πεδίο. Εν γένει, οι Φασματικές Μέθοδοι είναι μια μεγάλη οικογένεια μεθόδων και περιλαμβάνουν πολλές κατηγορίες. Πιο σύγχρονες μέθοδοι όπως οι *Spectral Element Methods* και οι *Spectral Volume Methods*, έχουν καταφέρει να εισαγάγουν στην λύση του πεδίου τους, τόσο κύματα κρούσης και ασυνέχειες, όσο και πιο περίπλοκες γεωμετρίες.

Ενθαρρυντικά αποτελέσματα έχουν προκύψει από πρόσφατες έρευνες, που αφορούν την γενίκευση των αλγορίθμων δεύτερης τάξης *MUSCL*, εισάγοντας περιοριστές τρίτης τάξης (*Third Order Limiting*). Το μειονέκτημα σε αυτές τις μεθόδους είναι ότι, ενώ αυξάνει σημαντικά η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων, δεν μπορεί να υπάρξει αυθαίρετη αύξηση της ακρίβειας, όπως συμβαίνει με τις υπόλοιπες μεθόδους υψηλής τάξης, ενώ τα εγγενή προβλήματα των περιοριστών στις συνεχείς περιοχές εμμένουν.

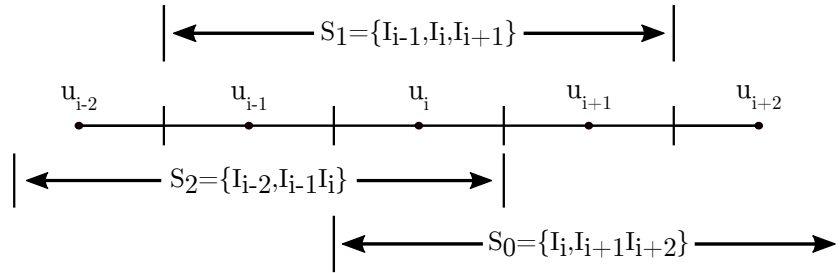
1.3 Τα σχήματα ENO - WENO

Στην διπλωματική εργασία, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και η ανάλυση των σχημάτων *Essentially Non-Oscillatory* και *Weighted Essentially Non-Oscillatory*, καθώς επίσης και η εφαρμογή τους σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Τα ENO σχήματα δημιουργήθηκαν από τους Harten, Engquist, Osher και Chakravarthy [3] και είναι από τις πρώτες επιτυχημένες μεθόδους ανώτερης τάξης που εξασφαλίζουν ομοιόμορφα υψηλής τάξης ακρίβεια σε όλο το πεδίο, χωρίς την εμφάνιση αριθμητικών ταλαντώσεων, ενώ ταυτόχρονα παραμένουν ανεξάρτητα του πλέγματος και του φυσικού προβλήματος. Τα σχήματα WENO αποτελούν μια παραλλαγή των ENO σχημάτων και εισήχθησαν για την διόρθωση κάποιων εγγενών προβλημάτων των σχημάτων ENO.

Τα σχήματα ENO - WENO είναι υψηλής ακρίβειας σχήματα που κάνουν χρήση είτε της διατύπωσης των πεπερασμένων όγκων είτε της διατύπωσης των πεπερασμένων διαφορών και είναι σχεδιασμένα για προβλήματα που περιέχουν ασυνέχειες. Η βασική ιδέα είναι ότι η προσέγγιση της συνεχούς συνάρτησης γίνεται βάσει μιας αυτόματης μη γραμμικής διαδικασίας, προκειμένου να επιλεγεί το βέλτιστο “stencil” για την τοπική ανακατασκευή του πεδίου. Με αυτό τον τρόπο, αποφεύγονται οι ασυνέχειες κατά την διαδικασία παρεμβολής του πεδίου. Σημειώνεται ότι, με τον όρο “stencil” περιγράφεται ένα σύνολο σημείων ή κελιών που χρησιμοποιούνται για

την παρεμβολή μιας συνάρτησης.

Τα σχήματα ENO χρησιμοποιούν μία τοπική πολυωνυμική παρεμβολή για την ανακατασκευή του πεδίου. Εάν επιδιώκεται τρίτης τάξης χωρική διακριτοποίηση, τότε απαιτείται η εύρεση τριών κελιών/σημείων για την παρεμβολή πολυωνύμου δεύτερης τάξης. Στο σχήμα 1.1, παρουσιάζεται ένα μονοδιάστατο πεδίο, με ισάπεχοντες κόμβους καθώς και τα τρία υποψήφια “stencil”. Τα σχήματα ENO προκρίνουν ένα από τα “stencil” $S_r(i)$, ενώ τα σχήματα WENO χρησιμοποιούν ένα κυρτό συνδυασμό όλων των υποψήφιων $\tilde{S}(i) = \{S_2, S_1, S_0\}$.



Σχήμα 1.1: Τα υποψήφια Stencil για τρίτης τάξης πολυωνυμική παρεμβολή του πεδίου

Εξ' αιτίας της χρήσης πολυωνυμικής παρεμβολής αυτά τα σχήματα μπορούν να γενικευθούν για οποιαδήποτε τάξη χωρικής ακρίβειας, με την προϋπόθεση ότι το ανακατασκευασμένο πεδίο έχει φραγμένη ολική διακύμανση (TVD) σε σχέση με τις σημειακές τιμές (βλ. κεφάλαιο 3).

Τα σχήματα τυγχάνουν ευρέως αναγνώρισης εξ' αιτίας της ικανότητάς τους να μπορούν να αποτυπώσουν φαινόμενα με περίπλοκες δομές. Εκτός του τομέα της υπολογιστικής ρευστομηχανικής στον οποίο εφαρμόστηκαν πρώτη φορά, τα σχήματα ENO - WENO έχουν επεκταθεί και σε άλλους τομείς της υπολογιστικής μηχανικής όπως στη μαγνητο-υδροδυναμική και στην αστροφυσική.

1.4 Στόχος και Διάρθρωση της Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή των σχημάτων ENO - WENO σε συμπιεστές ροές. Έχοντας ως σημείο αναφοράς την προσέγγιση δεύτερης τάξης προσέγγιση του Van Leer, θα αξιολογηθεί η συμπεριφορά των σχημάτων ENO και WENO σε μονοδιάστατες ροές. Θα παρουσιαστούν οι ιδιαιτερότητες των σχημάτων, καθώς και κάποιες μέθοδοι για την εξάλειψη των αρνητικών τους στοιχείων. Τέλος, θα παρουσιαστούν δύο ειδικά παραδείγματα διδιάστατης συμπιεστής ροής που ενδείκνυνται για την εφαρμογή των σχημάτων ENO - WENO.

Για τις ανάγκες της διπλωματικής εργασίας δημιουργήθηκαν, από την αρχή, δύο υπολογιστικοί κώδικες, για μονοδιάστατες και διδιάστατες ροές, σε γλώσσα C++, δίνοντας έμφαση στον αντικειμενοστραφή προγραμματισμό.

Η δομή της διπλωματικής έχει ως εξής

- Κεφάλαιο 2

Παρατίθενται οι εξισώσεις Euler που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων αεροδυναμικής και γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά και στις ιδιότητες τους. Παρουσιάζεται η χωρική και η χρονική διακριτοποίηση του προβλήματος. Ακόμα, παρουσιάζονται οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στις αριθμητικές προσομοιώσεις.

- **Κεφάλαιο 3**
Αναλύονται οι τρεις αλγόριθμοι ανακατασκευής του πεδίου, αρχικά για βαθμωτές εξισώσεις. Έπειτα, γενικεύονται οι αλγόριθμοι για την εφαρμογή τους σε συστήματα υπερβολικών εξισώσεων σε μία και σε δύο διαστάσεις. Παρουσιάζονται συνοπτικά δύο αλγόριθμοι, για την επιβολή της μονοτονίας στο ανακατασκευασμένο πεδίο.
- **Κεφάλαιο 4**
Επιλύονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα μονοδιάστατης ροής, με στόχο την σύγκριση των αλγορίθμων ανακατασκευής, αλλά και την κατάδειξη των ιδιαιτεροτήτων τους. Ακόμα, γίνεται μία προσπάθεια για την ποσοτικοποίηση της αριθμητικής διάχυσης των σχημάτων. Εξετάζεται η επιρροή, της διατήρησης της μονοτονίας στα τελικά αποτελέσματα.
- **Κεφάλαιο 5**
Επιλύονται δύο ροές σε καρτεσιάνο πλέγμα με χρήση τέταρτης τάξης σχημάτων ENO και WENO. Η πρώτη αριθμητική προσομοίωση περιλαμβάνει ένα κάθετο κύμα κρούσης που κινείται με ταχύτητα $M = 10$ προς έναν τοίχο που σχηματίζει γωνία 30° με την ροή, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία διπλή ανάκλαση τύπου *Mach*. Η ροή επιλύεται με χρήση των σχημάτων ENO. Στο δεύτερο παράδειγμα, εξετάζεται η αλληλεπίδραση δύο αντίθετων στροβίλων τύπου *Taylor*. Στόχος της προσομοίωσης είναι τα σχήματα WENO να καταφέρουν να διατηρήσουν την στροβιλότητα, ακόμα και για αραία πλέγματα.
- **Κεφάλαιο 6**
Ανασκόπηση της μεθόδου. Αναφέρονται, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης σχημάτων ENO - WENO, τόσο σε σχέση με τα αποτελέσματα και το υπολογιστικό τους κόστος, όσο και από πλευράς πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υλοποίησής τους. Τέλος, προτείνονται θέματα για περαιτέρω εμβάθυνση στα σχήματα αυτά, αλλά και για την εφαρμογή τους σε άλλα πεδία της υπολογιστικής μηχανικής.

Κεφάλαιο 2

Διδιάστατη Συμπιεστή Ροή

2.1 Οι εξισώσεις Euler

Η περιγραφή ενός φαινομένου της αεροδυναμικής γίνεται μέσω των υπερβολικών εξισώσεων Euler. Οι εξισώσεις Euler περιγράφουν ροές με κύριο χαρακτηριστικό την συμπιεστότητα του ρευστού αμελώντας δυνάμεις συνεκτικότητας ή βαρύτητας. Στην εξίσωση (2.1) παρουσιάζονται οι εξισώσεις Euler για διδιάστατο πεδίο ροής [4]. Η εξίσωση περιγράφει τους τέσσερις νόμους διατήρησης, μάζας, ορμής στις δύο διευθύνσεις και ενέργειας, υπό την μορφή μίας διανυσματικής για ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y .

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \vec{0} \quad (2.1)$$

Το διάνυσμα \vec{U} αναπαριστά το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, σχέση (2.2), ενώ τα διανύσματα \vec{f} και \vec{g} αναπαριστούν τα διανύσματα της ατρίβους ροής (inviscid fluxes) ως προς τις δύο κατευθύνσεις (2.3).

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Στις προηγούμενες εξισώσεις, με ρ συμβολίζεται η πυκνότητα, με u και v η ταχύτητα του ρευστού ως προς τις δύο διευθύνσεις, p η στατική πίεση του ρευστού και E η ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού.

Σε όλη την πορεία της μελέτης θεωρήθηκε ότι το αέριο που μελετάται διέπεται από τον νόμο των τελείων αερίων (2.4).

$$p = \rho R T \quad (2.4)$$

Όπου $R = 287 \text{ kJ/kg K}$, η παγκόσμια σταθερά των αερίων και T η στατική θερμοκρασία. Στις επόμενες εξισώσεις περιγράφονται κάποια χρήσιμα στοιχεία θερμοδυναμικής.

$$E = \rho e + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.5)$$

$$H = \frac{E + p}{\rho} \quad (2.6)$$

$$E = \frac{\rho c^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2.7)$$

$$H = \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (2.8)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)\left(E - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)\right) \quad (2.9)$$

Με H συμβολίζεται η ολική ενθαλπία του ρευστού, με $e = c_v T$ η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας του ρευστού, με $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ η ταχύτητα του ήχου, ενώ με γ συμβολίζεται ο συντελεστής ισεντροπικής ροής.

Στην συνέχεια της ανάλυσης, θα παρουσιαστούν κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των εξισώσεων Euler, που θα βοηθήσουν στην επίλυση και στην διακριτοποίηση τους. Αρχικά, η εξίσωση (2.1) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} &= \vec{0} \rightarrow \\ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Όπου, A_x και A_y , τα ιακωβιανά μητρώα ως προς τις δύο διευθύνσεις.

$$A_x = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}}, \quad A_y = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} \quad (2.11)$$

Έπειτα, ορίζεται το συνιστάμενο διάνυσμα ατριβούς ροής \vec{F} , καθώς και το συνιστάμενο ιακωβιανό μητρώο A , σχέση (2.12).

$$\vec{F} \equiv (\vec{f}, \vec{g}), \quad \vec{A} \equiv (A_x, A_y) \quad (2.12)$$

Στην σχέση (2.13) ορίζονται οι προβολές του διανύσματος \vec{F} και του μητρώου A αντίστοιχα, ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n} = (n_x, n_y)$.

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}} &\equiv \vec{F} \cdot \vec{n} = \vec{f}n_x + \vec{g}n_y, \\ \underline{A} &\equiv \vec{A} \cdot \vec{n} = A_x n_x + A_y n_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

Βάσει των ορισμών, προκύπτει από αλγεβρικές πράξεις η σχέση του μητρώου \underline{A} με το διάνυσμα $\vec{\mathcal{F}}$.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \vec{A} \cdot \vec{n} = A_x n_x + A_y n_y \rightarrow \\ \underline{A} &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} n_x + \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{U}} n_y \rightarrow \\ \underline{A} &= \frac{\partial (\vec{F} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{U}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial \vec{U}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Στην εξίσωση (2.14), αποδεικνύεται ότι το μητρώο \underline{A} αποτελεί τον τελεστή μετασχηματισμού των συντηρητικών μεταβλητών \vec{U} στο διάνυσμα $\vec{\mathcal{F}}$, σχέση (2.15), καθώς το διάνυσμα $\vec{\mathcal{F}}$ είναι ομογενής συνάρτηση πρώτου βαθμού (όπως και τα διανύσματα \vec{f} , \vec{g}).

$$\vec{\mathcal{F}} = \underline{A}\vec{U} \quad (2.15)$$

Στις επόμενες δύο σχέσεις, παρουσιάζονται πλήρως τα δύο προβαλλόμενα αντικείμενα της σχέσης (2.13).

$$\vec{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) \\ \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x \\ \rho v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_y \\ (E + p) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}(:, 1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -u (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) n_x \\ -v (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) n_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 2) &= \begin{bmatrix} n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma) u n_x \\ u n_x - (\gamma - 1) u n_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) \right) n_x - (\gamma - 1) u (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 3) &= \begin{bmatrix} n_y \\ u n_y - (\gamma - 1) u n_x \\ \vec{u} \cdot \vec{n} + (2 - \gamma) u n_y \\ \left(\frac{\gamma E}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2} (u^2 + v^2) \right) n_y - (\gamma - 1) v (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \\ \underline{A}(:, 4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\gamma - 1) n_x \\ (\gamma - 1) n_y \\ \gamma (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Οι εξισώσεις Euler αποτελούν ένα υπερβολικό σύστημα και ο πίνακας \underline{A} χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο m πραγματικών ιδιοτιμών ($\lambda_1, \dots, \lambda_m$) και ένα αντίστοιχο σύνολο m γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανύσμων ($\vec{r}^1, \dots, \vec{r}^m$). Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών γίνεται βάσει της εξίσωσης $\det|\underline{A} - \lambda I| = 0$, όπου I ο μοναδιαίος πίνακας και προκύπτει

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \vec{u} \cdot \vec{n} - c \\ \lambda_2 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_3 &= \vec{u} \cdot \vec{n} \\ \lambda_4 &= \vec{u} \cdot \vec{n} + c \end{aligned} \quad (2.18)$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του μητρώου \underline{A} , υπολογίζονται ως $(\underline{A} - \lambda_j I) \vec{r}^j = \vec{0}$. Αντίστοιχα, τα αριστερά ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται βάσει της σχέσης $\vec{l}^j (\underline{A} - \lambda_j I) = \vec{0}$. Τα ιδιοδιανύσματα

παρουσιάζονται στις δύο επόμενες σχέσεις.

$$\begin{aligned}
\vec{r}^1 &= [1 \quad u - cn_x \quad v - cn_y \quad H - (\vec{u} \cdot \vec{n})c]^T \\
\vec{r}^2 &= [1 \quad u \quad v \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2)]^T \\
\vec{r}^3 &= [0 \quad n_y \quad -n_x \quad n_y u - n_x v]^T \\
\vec{r}^4 &= [1 \quad u + cn_x \quad v + cn_y \quad H + (\vec{u} \cdot \vec{n})c]^T
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\vec{l}^1 &= \left[\frac{\gamma-1}{4} \frac{(u^2+v^2)}{c^2} + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})}{2c} \quad -\frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c^2} - \frac{n_x}{2c} \quad -\frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{c^2} - \frac{n_y}{2c} \quad \frac{\gamma-1}{2c^2} \right] \\
\vec{l}^2 &= \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{(u^2+v^2)}{c^2} \quad \frac{(\gamma-1)u}{c^2} \quad \frac{(\gamma-1)v}{c^2} \quad \frac{\gamma-1}{c^2} \right] \\
\vec{l}^3 &= [n_x v - n_y u \quad n_y \quad -n_x \quad 0] \\
\vec{l}^4 &= \left[\frac{\gamma-1}{4} \frac{(u^2+v^2)}{c^2} - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{n})}{2c} \quad -\frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{c^2} + \frac{n_x}{2c} \quad -\frac{\gamma-1}{2} \frac{v}{c^2} + \frac{n_y}{2c} \quad \frac{\gamma-1}{2c^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ισχύει δηλαδή ότι $\vec{l}^i \cdot \vec{r}^j = \delta_i^j$.

Στην συνέχεια, ορίζονται οι πίνακες R και R^{-1} , που αποτελούν την μητρική γραφή των ιδιοδιανυσμάτων.

$$R = \begin{bmatrix} \vec{r}^1 & \vec{r}^2 & \vec{r}^3 & \vec{r}^4 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{l}^1 \\ \vec{l}^2 \\ \vec{l}^3 \\ \vec{l}^4 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Ακόμα, ορίζεται ο πίνακας Λ , ο οποίος περιέχει τις ιδιοτιμές στην κύρια διαγώνιο, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Από τον ορισμό των ιδιοδιανυσμάτων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\underline{A}R &= R\Lambda \rightarrow \\
\underline{A} &= R\Lambda R^{-1} \quad \text{ή} \quad \Lambda = R^{-1}\underline{A}R
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Τέλος, ορίζονται οι πίνακες \underline{A}^+ , \underline{A}^- και $|\underline{A}|$

$$\begin{aligned}
\underline{A}^+ &= R\Lambda^+R^{-1}, \quad \underline{A}^- = R\Lambda^-R^{-1} \\
|\underline{A}| &= R|\Lambda|R^{-1}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

όπου με Λ^+ και Λ^- συμβολίζονται οι πίνακες που περιλαμβάνουν τις θετικές και τις αρνητικές ιδιοτιμές αντίστοιχα, του μητρώου \underline{A} . Ενώ, ως $|\Lambda|$ συμβολίζεται ο πίνακας που περιέχει τις ιδιοτιμές σε απόλυτο αριθμό.

Οι παραπάνω πίνακες συνδέονται μεταξύ τους σύμφωνα με την σχέση

$$|\underline{A}| = \underline{A}^+ - \underline{A}^- \tag{2.24}$$

Το τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου αφορά την αποσύζευξη των εξισώσεων Euler και θα αποτελέσει κομβικό σημείο για τα επόμενα κεφάλαια. Οι εξισώσεις Euler παρουσιάζουν ισχυρή σύζευξη (coupling), καθώς η μάζα, η ορμή και η ενέργεια συνδέονται μεταξύ τους. Για την αποσύζευξη τους, θα πρέπει να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας \underline{A} βάσει της εξίσωσης (2.22) [5].

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εξισώσεις Euler λαμβάνουν την μορφή

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{0} \quad (2.25)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.25) με το μητρώο των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων, προκύπτει η εξίσωση (2.26).

$$R^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + R^{-1} (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{0} \quad (2.26)$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των ιδιοδιανυσμάτων εκφρασμένη σε μητρική μορφή $RR^{-1} = I$ και εκτελώντας αλγεβρικές πράξεις, προκύπτει

$$\begin{aligned} R^{-1} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (R^{-1} \vec{A} R) R^{-1} \cdot \nabla \vec{U} = \vec{0} \rightarrow \\ \frac{\partial (R^{-1} \vec{U})}{\partial t} + (R^{-1} \vec{A} R) \cdot \nabla (R^{-1} \vec{U}) = \vec{0} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Όπου βάσει της εξίσωσης (2.27), εισάγεται ένα νέο σύνολο μεταβλητών, που ονομάζονται *Χαρακτηριστικές Μεταβλητές* και ορίζονται ως

$$\delta W = R^{-1} \delta U \quad (2.28)$$

ή ρητά

$$\delta w_k = \sum_i l_i^{(k)} \delta v_i \quad (2.29)$$

με αποτέλεσμα οι αποσυζευγμένες, πλέον, εξισώσεις Euler μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (R^{-1} \vec{A} R) \cdot \nabla \vec{W} = \vec{0} \quad (2.30)$$

Οι χαρακτηριστικές μεταβλητές, γνωστές και ως αμετάβλητες Riemann (Riemann Invariants), έχουν την ιδιότητα να παραμένουν σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών τροχιών και διαδίδονται στον χώρο με ταχύτητα ίση με την αντίστοιχη ιδιοτιμή. Στην εξίσωση (2.31) παρουσιάζονται οι αμετάβλητες Riemann.

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \\ \delta w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{n} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta p}{\rho c} \\ \delta \rho - \frac{\delta p}{c^2} \\ n_y \delta u - n_x \delta v \\ \vec{n} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\delta p}{\rho c} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Η πρώτη και η τελευταία χαρακτηριστική μεταβλητή εκφράζουν την διάδοση των ηχητικών κυμάτων και κινούνται με ταχύτητα $\vec{u} \cdot \vec{n} \pm c$. Η χαρακτηριστική μεταβλητή δw_2 εκφράζει την διατήρηση της εντροπίας κατά μήκος των χαρακτηριστικών τροχιών, ενώ η δw_3 εκφράζει την διάδοση των κυμάτων στροβιλότητας και δεν υπάρχει ανάλογο της στις μονοδιάστατες ροές [5].

2.2 Διατύπωση Πεπερασμένων Όγκων

Στα δύο επόμενα κεφάλαια της παρούσας ενότητας, θα παρουσιαστούν η χωρική και χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler.

Για την χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Euler, επιλέχθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων [4], λόγω της δυνατότητας που έχουν, έναντι των πεπερασμένων διαφορών, να γενικευθούν και σε μη δομημένα πλέγματα.

Το πρώτο βήμα είναι ολοκλήρωση των εξισώσεων Euler σε κεντροκυβελικούς όγκους ελέγχου Ω_p . Από την εξίσωση (2.1) προκύπτει

$$\int_{\Omega_p} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right] d\Omega = \bar{0} \quad (2.32)$$

Στην ολοκληρωματική έκφραση (2.32) διακρίνονται δύο όροι, ο χρονικός όρος (temporal) και ο χωρικός όρος της ατρίβους ροής (inviscid), σχέση (2.33).

$$\underbrace{\int_{\Omega_p} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} d\Omega}_{temporal} + \underbrace{\int_{\Omega_p} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right] d\Omega}_{inviscid} = \bar{0} \quad (2.33)$$

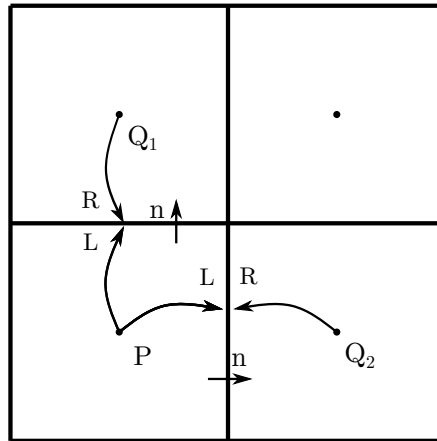
Σε πρώτο επίπεδο, θα αναλυθεί το ολοκλήρωμα του ατρίβους όρου. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green-Gauss, αλλά και τον ορισμό (2.13), προκύπτει

$$I_{inv} := \int_{\Omega_p} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega_p} (\bar{F} \cdot \bar{n}) d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega_p} \bar{\mathcal{F}} d(\partial\Omega) \quad (2.34)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης προσεγγίζεται πεπερασμένα ως

$$I_{inv} \simeq \sum_{i=1}^{neis\{P\}} \bar{\mathcal{F}}_{PQ_i} \Delta S_{PQ_i} \quad (2.35)$$

Όπου Q_i , ο γειτονικός όγκος ελέγχου. Προφανώς, για δομημένο πλέγμα ο αριθμός των γειτονικών κελιών είναι ίσος με 4. Με ΔS_{PQ_i} συμβολίζεται το μήκος της κοινής πλευράς δύο όγκων ελέγχου. Το διάνυσμα $\bar{\mathcal{F}}_{PQ_i}$, συμβολίζει το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής που διέρχεται διαμέσω του συνόρου ΔS_{PQ_i} .



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση της προεκβολής των κεντρικών τιμών στο όριο και του ορισμού της δεξιάς και αριστεράς κατάστασης βάσει της φοράς του κάθετου διανύσματος \bar{n}

Ο υπολογισμός του διανύσματος $\bar{\mathcal{F}}_{PQ_i}$ γίνεται μέσω της επίλυσης του τοπικού προβλήματος Riemann, ανάμεσα στην δεξιά και αριστερή πλευρά του συνόρου $\partial\Omega$ (Right, Left states). Οι

καταστάσεις R και L προκύπτουν από την προεκβολή των ροϊκών μεγεθών, που βρίσκονται στο κέντρο των δύο γειτονικών κελιών στο κοινό τους σύνορο και ορίζονται βάσει της φοράς του κάθετου διανύσματος \vec{n} , το οποίο βάσει σύμβασης δείχνει πάντα από το κελί P προς το κελί Q_i (σχήμα 2.1). Η προεκβολή βασίζεται στην ανακατασκευή (reconstruction) του υπάρχοντος πεδίου.

Αν ορισθεί ως $\mathcal{R}[\cdot]$ ο τελεστής ανακατασκευής του πεδίου, τότε οι συντηρητικές μεταβλητές, δεξιά και αριστερά, του ορίου προκύπτουν από την διανυσματική ανακατασκευή του τοπικού συντηρητικού πεδίου

$$\begin{aligned}\vec{U}_P^L &= \vec{\mathcal{R}}_P [\vec{x}; \vec{U}] \\ \vec{U}_Q^R &= \vec{\mathcal{R}}_Q [\vec{x}; \vec{U}]\end{aligned}\quad (2.36)$$

όπου $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, t)$, το πεδίο των συντηρητικών μεταβλητών. Σημειώνεται ότι η ακρίβεια βάσει της οποίας θα γίνει η ανακατασκευή του πεδίου, ορίζει και την τάξη της ακρίβειας του αριθμητικού σχήματος. Η παραπάνω παρατήρηση αποτελεί και το βασικό θέμα της παρούσας ανάλυσης.

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τα παραπάνω, το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{\mathcal{F}}_{PQ} = \vec{\mathcal{F}}^{Riem}(\vec{\mathcal{R}}_P[\vec{x}; \vec{U}], \vec{\mathcal{R}}_Q[\vec{x}; \vec{U}]) \quad (2.37)$$

Για την επίλυση του προβλήματος Riemann, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε επιλύτης Riemann ακριβής ή προσεγγιστικός (exact or approximate). Στην παρούσα ανάλυση χρησιμοποιήθηκε ο επιλύτης Riemann του Roe [6]. Με βάση αυτή την μέθοδο, το ιακωβιανό μητρώο \underline{A} αντικαθίσταται από ένα άλλο σταθερό ιακωβιανό μητρώο \tilde{A}

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\vec{U}^L, \vec{U}^R) \quad (2.38)$$

με αποτέλεσμα, η υπερβολική εξίσωση να αποκτά σταθερούς συντελεστές. Έπειτα, επιλύεται το γραμμικοποιημένο πρόβλημα ακριβώς (exact). Το μητρώο \tilde{A} θα πρέπει να ικανοποιεί την υπερβολικότητα του συστήματος. Δηλαδή, θα πρέπει να έχει m πραγματικές ιδιοτιμές, αλλά και m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Ακόμα, θα πρέπει να ικανοποιείται η συντηρητικότητα στις ασυνέχειες, σχέση (2.39).

$$\vec{\mathcal{F}}^R(\vec{U}^R) - \vec{\mathcal{F}}^L(\vec{U}^L) = \tilde{A}(\vec{U}^R - \vec{U}^L) \quad (2.39)$$

Η ιδέα που εισήχθη στο [6] είναι να παραμετροποιηθούν τα διανύσματα \vec{U} , \vec{f} , \vec{g} , με κάποιο διάνυσμα \vec{w} , ώστε τα διανύσματα αυτά να είναι τετραγωνικά (quadratic) ως προς το \vec{w} . Ο Roe πρότεινε για τις εξισώσεις Euler το διάνυσμα

$$\vec{w} = [\sqrt{\rho} \quad \sqrt{\rho}u \quad \sqrt{\rho}v \quad \sqrt{\rho}H]^T \quad (2.40)$$

Στα θετικά του επιλύτη Roe συγκαταλέγονται η ακρίβεια που δίνει στα κύματα κρούσης και στις ασυνέχειες επαφής, καθώς και η χαμηλή αριθμητική διάχυση. Αντίθετα, αρνητικό στοιχείο του επιλύτη είναι ότι, σε σπάνιες περιπτώσεις, είναι δυνατόν να δημιουργήσει μη φυσικά αποδεκτές λύσεις. Χρησιμοποιώντας έναν γραμμικοποιημένο επιλύτη, το κάθε κύμα της ροής αποσυντίθεται σε μια σειρά από ασυνέχειες, με αποτέλεσμα να τείνει να δημιουργήσει ασυνέχειες στις συνεχείς περιοχές της ροής. Οι μη φυσικές λύσεις συναντώνται σε περιοχές αποτόνωσης της ροής, παραβιάζοντας την συνθήκη εντροπίας (entropy condition). Για αυτό τον λόγο εισάγεται μία διόρθωση εντροπίας (entropy fix). Σε υπολογιστικές εφαρμογές, αυτό το πρόβλημα συναντάται κυρίως σε διηχητικές ή ηχητικές ροές [7].

Στην παρούσα ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί η διόρθωση εντροπίας που προτάθηκε από τους Harten και Hyman [8], η οποία μεταβάλλει την απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών, όταν αυτές τείνουν προς το μηδέν.

$$|\lambda_i| = \begin{cases} |\lambda_i| & , |\lambda_i| > \delta \\ \frac{\lambda_i^2 + \delta^2}{2\delta} & , |\lambda_i| \leq \delta \end{cases} \quad (2.41)$$

Όπου δ ελεύθερη παράμετρος. Ο υπολογιστικός κώδικας που αναπτύχθηκε χρησιμοποιεί $\delta = \frac{1}{10}c$, όπου c η ταχύτητα του ήχου.

Όσον αφορά τον υπολογισμό του αριθμητικού διανύσματος ροής της εξίσωσης (2.37), αυτό μπορεί να γραφεί, με βάση την θεωρία των χαρακτηριστικών [9], ως

$$\vec{\mathcal{F}}_{PQ} = \vec{\mathcal{F}}_P^L + \tilde{\underline{A}}_{PQ}^- (\bar{U}_P^R - \bar{U}_Q^L) \quad (2.42)$$

χρησιμοποιώντας ως αναφορά τον όγκο ελέγχου P ή

$$\vec{\mathcal{F}}_{PQ} = \vec{\mathcal{F}}_Q^R - \tilde{\underline{A}}_{PQ}^+ (\bar{U}_P^R - \bar{U}_Q^L) \quad (2.43)$$

θεωρώντας ως αναφορά τον όγκο ελέγχου Q . Λαμβάνοντας τον μέσο όρο των δύο προκύπτει το τελικό αριθμητικό σχήμα, σχέση (2.44), βάσει του οποίου υπολογίζεται το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής και κατ' επέκταση, σχέση (2.35), ο χωρικός όρος της ολοκληρωματικής εξίσωσης (2.32).

$$\vec{\mathcal{F}}_{PQ} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{F}}_P^L + \vec{\mathcal{F}}_Q^R) - \frac{1}{2} |\tilde{\underline{A}}_{PQ}| (\bar{U}_P^L - \bar{U}_Q^R) \quad (2.44)$$

με $\tilde{\underline{A}}_{PQ}$ συμβολίζεται η γραμμικοποιημένη ιακωβιανή, που περιλαμβάνει τις κατά Roe τιμές των συντηρητικών μεταβλητών,

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (2.45)$$

$$\tilde{u}^i = \frac{\sqrt{\rho_L} u_L^i + \sqrt{\rho_R} u_R^i}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \text{για } u^i = u, v \quad (2.46)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (2.47)$$

Για τον υπολογισμό του χρονικού όρου, θεωρώντας ότι ο ολοκληρωματικός όγκος Ω_p δεν μεταβάλλεται στον χρόνο, είναι δυνατόν να γραφεί ότι

$$I_{temp} := \int_{\Omega_p} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} d\Omega_p = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_p} \bar{U} d\Omega = \Omega_p \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \quad (2.48)$$

όπου με \bar{U} συμβολίζεται η μέση τιμή των συντηρητικών μεταβλητών στον όγκο Ω_p , σχέση (2.49).

$$\bar{U} = \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} \bar{U} d\Omega \quad (2.49)$$

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη, το τελικό σχήμα χωρικής διακριτοποίησης γράφεται ως

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_p} \sum_{Q=0}^{neis\{P\}} \vec{\mathcal{F}}_{PQ} \Delta S_{PQ} = \mathcal{L}(\bar{U}) \quad (2.50)$$

όπου με $\mathcal{L}(\cdot)$ συμβολίζεται ο τελεστής χωρικής επίλυσης. Στη συνέχεια της ανάλυσης, η παύλα στο διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών θα παραλείπεται.

2.3 Χρονική Διακριτοποίηση

Για την επίλυση της εξίσωσης (2.50) επιλέγεται ρητό σχήμα διακριτοποίησης (explicit time discretization) [4]. Για την εύρεση της επόμενης χρονικής κατάστασης του συστήματος ($n + 1$), τα ρητά σχήματα στηρίζονται μόνο στην τρέχουσα χρονική κατάσταση (n), επιλύοντας την εξίσωση $\bar{U}^{n+1} = F(\bar{U}^n)$. Εν αντιθέσει με τα άρρητα σχήματα, για τα οποία ισχύει $G(\bar{U}^{n+1}, \bar{U}^n) = 0$, τα ρητά σχήματα λύνουν την εξίσωση ακριβώς, αλλά μειονεκτούν ως προς το υπολογιστικό κόστος.

Για την διακριτοποίηση επιλέγεται μία οικογένεια μεθόδων Runge-Kutta, η οποία είναι *Total Variation Diminishing* (TVD) στον χρόνο, [10, 11]. Δοσμένης συνεχούς συνάρτησης $u = u(x)$, ως *Total Variation* ορίζεται

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right| dx \quad (2.51)$$

ή αν η $u^n = \{u_i^n\}$ είναι μία συνάρτηση σε διακριτά σημεία

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (2.52)$$

Άρα, ως *Total Variation Diminishing* ορίζονται τα σχήματα για τα οποία η συνολική μεταβολή (Total Variation) δεν αυξάνει στον χρόνο, δηλαδή

$$TV(u(t)) \geq TV(u(t + \Delta t)) \quad (2.53)$$

Εάν μία μέθοδος είναι TVD στον χρόνο, τότε αυτή είναι μία ικανή συνθήκη ώστε να εγγυηθεί την σύγκλιση της μεθόδου, αλλά και την αποφυγή μη φυσικών ταλαντώσεων (spurious oscillations) [9] στα ροϊκά μεγέθη.

Η οικογένεια των μεθόδων Runge-Kutta που χρησιμοποιείται [10, 11] έχει την ακόλουθη γενική μορφή

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} \bar{U}^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \mathcal{L}(\bar{U}^{(k)}) \right), \quad i = 1, \dots, m \\ \bar{U}^{(0)} &= \bar{U}^n, \quad \bar{U}^{(m)} = \bar{U}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Για $m = 1$ προκύπτει το πρώτης τάξης σχήμα Euler.

$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n + \Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^n) \quad (2.55)$$

Προκειμένου να επιτευχθεί μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια, χρησιμοποιείται ένας κυρτός συνδυασμός (convex combination) των όρων της εξίσωσης Euler, απαιτώντας όλοι οι συντελεστές να είναι μη αρνητικοί $\alpha_{ik} \geq 0, \beta_{ik} \geq 0$, αλλά και $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$.

Η μέθοδος Runge-Kutta για να είναι TVD, θα πρέπει να ισχύει $c \leq 1$ [10], όπου c ο λόγος

$$c = \min_{[i,k]} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}} \quad (2.56)$$

Οι βέλτιστοι συντελεστές για δεύτερης τάξης TVD Runge-Kutta, με $c = 1$, δίνουν

$$\begin{aligned}\bar{U}^{(1)} &= \bar{U}^n + \Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^n) \\ \bar{U}^{n+1} &= \frac{1}{2}\bar{U}^n + \frac{1}{2}\bar{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^{(1)})\end{aligned}\quad (2.57)$$

Ενώ, για τρίτης τάξης TVD Runge-Kutta, με $c = 1$, δίνουν

$$\begin{aligned}\bar{U}^{(1)} &= \bar{U}^n + \Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^n) \\ \bar{U}^{(2)} &= \frac{1}{2}\bar{U}^n + \frac{1}{2}\bar{U}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^{(1)}) \\ \bar{U}^{n+1} &= \frac{1}{3}\bar{U}^n + \frac{2}{3}\bar{U}^{(1)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{L}(\bar{U}^{(2)})\end{aligned}\quad (2.58)$$

Για μεγαλύτερης τάξης ακρίβεια δεν υπάρχει TVD Runge-Kutta με μη αρνητικούς συντελεστές α_{ik} , β_{ik} , στην περίπτωση του μη γραμμικού τελεστή $\mathcal{L}(\cdot)$ [10].

Τέλος, ορίζεται ο συντελεστής Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) [12]

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x_i} S_i \quad (2.59)$$

όπου ο διπλός δείκτης υποδηλώνει άθροιση. Στην προηγούμενη εξίσωση, ως S_i ορίζεται η προβολή μίας χαρακτηριστικής ταχύτητας του πεδίου στον άξονα x_i .

Ο συντελεστής CFL χρησιμοποιείται για τον χαρακτηρισμό της ευστάθειας ενός αριθμητικού σχήματος. Ουσιαστικά, ο συντελεστής αυτός είναι ο λόγος της ταχύτητας διάδοσης πληροφορίας της ροής ως προς την ταχύτητα που επιτρέπει η διακριτοποίηση $\frac{\Delta x_i}{\Delta t}$. Εν αντιθέσει με τα άρρητα σχήματα, όπου επιτυγχάνονται ψευδοχρονικά βήματα με συντελεστές CFL πολύ μεγαλύτερους από ένα, τα ρητά σχήματα για να είναι αριθμητικά ευσταθή θα πρέπει η ταχύτητα επίλυσης να είναι μικρότερη ή ίση της χαρακτηριστικής, δηλαδή

$$CFL \leq 1$$

Σε ένα υπερβολικό σύστημα οι ταχύτητες διάδοσης πληροφορίας είναι οι ιδιοτιμές του συστήματος.

2.4 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των εξισώσεων Euler χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, στις άμεσες και στις έμμεσες. Οι άμεσες οριακές ορίζουν επακριβώς το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής στο σύνορο, ενώ οι έμμεσες οριακές συνθήκες χρησιμοποιούν ένα πλήθος ψευδο-κόμβων (ghost-cells) και το αριθμητικό διάνυσμα της ατρίβους ροής προκύπτει από την επίλυση του τοπικού προβλήματος Riemann στο σύνορο.

Στις αριθμητικές προσομοιώσεις έγινε χρήση μόνο δύο οριακών συνθηκών, οι οριακές συνθήκες επ'άπειρου ροής και οι οριακές συνθήκες τοίχου. Θα παρουσιαστούν και οι δύο οριακές και για τους δύο τρόπους επιβολής.

2.4.1 Άμεση Επιβολή Οριακών Συνθηκών

Οριακές Συνθήκες Επ' άπειρου Ροής

Στα εξωτερικά όρια του χωρίου επίλυσης η άμεση επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται βάσει του υπερβολικού χαρακτήρα του προβλήματος. Η προσέγγιση που ακολουθείται [13] βασίζεται στις χαρακτηριστικές μεταβλητές του μονοδιάστατου προβλήματος, που ορίζεται από την προβολή της ταχύτητας στο κάθετο διάνυσμα στο όριο του υπολογιστικού χωρίου.

Η κάθε αμετάβλητη Riemann R^-, R, R^+ , που ορίζεται σύμφωνα με την σχέση (2.60), διαδίδεται με ταχύτητα $\vec{v} \cdot \vec{n} - c$, $\vec{v} \cdot \vec{n}$, $\vec{v} \cdot \vec{n} + c$, αντίστοιχα. Στην ανάλυση έχει θεωρηθεί ότι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα δείχνει πάντα από το υπολογιστικό χωρίο προς τα έξω.

$$\begin{aligned} R^+ : \quad \vec{n} \cdot \delta \vec{v} - \frac{1}{\rho c} \delta p &= 0 \\ R : \quad \delta \rho - \frac{1}{c^2} \delta p &= 0 \\ R^- : \quad \vec{n} \cdot \delta \vec{v} + \frac{1}{\rho c} \delta p &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Το πρόσημο των ιδιοτιμών καθορίζεται από την προβολή της ταχύτητας στο \vec{n} . Η αντίστοιχη ταχύτητα διάδοσης στην κατεύθυνση \vec{n} είναι $\lambda_j \vec{n}$. Επομένως, με το διάνυσμα \vec{n} να δείχνει από μέσα προς τα έξω, για θετική κατεύθυνση διάδοσης η πληροφορία που μεταφέρεται από τις χαρακτηριστικές διαδίδεται από εντός του υπολογιστικού χωρίου προς το όριο και απαιτείται η επιβολή των οριακών συνθηκών με βάση τις αριθμητικές τιμές του χωρίου.

Αντίθετα, για αρνητική κατεύθυνση διάδοσης, η πληροφορία μεταφέρεται από το όριο προς το υπολογιστικό χωρίο, οπότε οι οριακές συνθήκες καθορίζονται βάσει τις φυσικές τιμές της επ' άπειρου ροής.

Όταν η είσοδος της ροής στο υπολογιστικό χωρίο είναι *υπερηχητική* όλες οι κατευθύνσεις διάδοσης είναι αρνητικές, όπως φαίνεται από το σχήμα 2.2i. Επομένως, οι πρωτεύουσες μεταβλητές στο όριο προκύπτουν ως

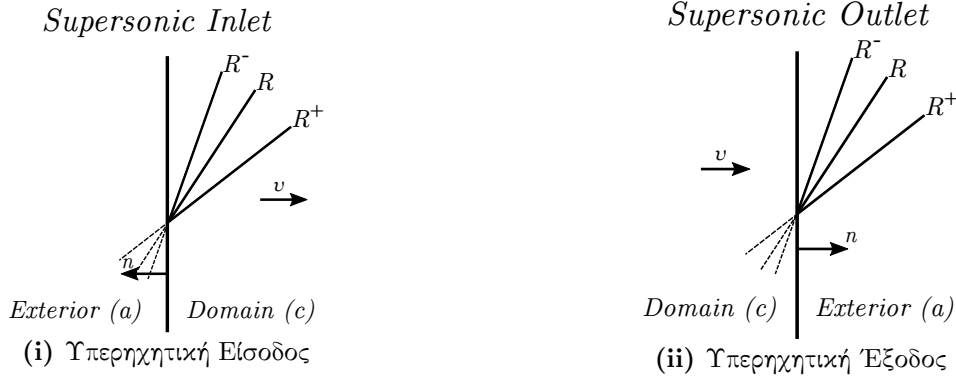
$$\vec{V}_{inlet} = \vec{V}_{\infty} \quad (2.61)$$

Όταν η έξοδος της ροής είναι *υπερηχητική*, όλες οι πληροφορίες διαδίδονται από το εσωτερικό του χωρίου προς τα έξω, καθώς οι κατευθύνσεις διάδοσης έχουν όλες θετικό πρόσημο. Άρα τα ροϊκά μεγέθη στην έξοδο προκύπτουν ως

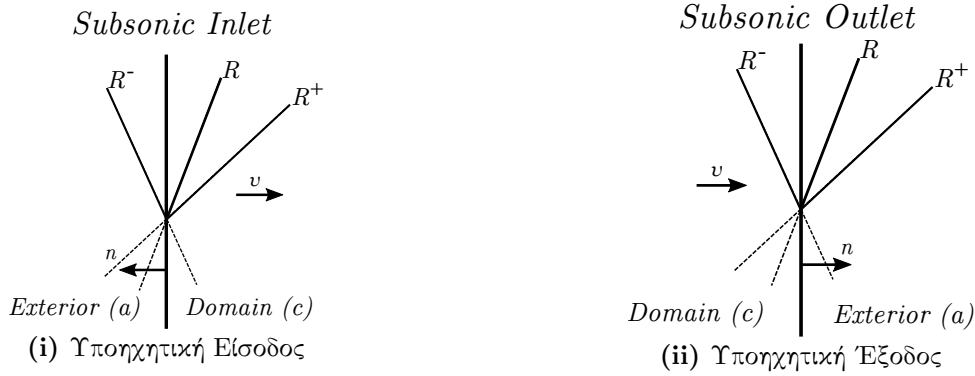
$$\vec{V}_{outlet} = \vec{V}_{domain} \quad (2.62)$$

Στην περίπτωση της *υποχητικής* εισόδου στο χωρίο επίλυσης οι αμετάβλητες Riemann R^+ και R διαδίδονται από το όριο προς το υπολογιστικό πεδίο, ενώ η R^- έχει θετική κατεύθυνση (σχ.2.3i). Για την εύρεση των μεταβλητών της ροής λύνεται το μονοδιάστατο σύστημα (2.60) με την κάθετη ταχύτητα στο σύνορο $V = \vec{v} \cdot \vec{n}$. Στην περίπτωση της εισόδου το διάνυσμα \vec{n} είναι αρνητικό, οπότε γράφεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_a c_a} (p_b - p_c) - (-1) (V_b - V_c) &= 0, \quad \text{για } \lambda_1 = V - c \\ \frac{p_b}{\rho_b^\gamma} &= \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \quad \text{για } \lambda_2 = V \\ \frac{1}{\rho_a c_a} (p_b - p_a) + (-1) (V_b - V_a) &= 0, \quad \text{για } \lambda_3 = V + c \end{aligned} \quad (2.63)$$



Σχήμα 2.2: Οι αμετάβλητες Riemann στην περίπτωση της υπερηχητικής ροής



Σχήμα 2.3: Οι αμετάβλητες Riemann στην περίπτωση της υποηχητικής ροής

Ο δείκτης b αντιστοιχεί στα μεγέθη στο όριο (boundary), ενώ οι υπόλοιποι δείκτες ορίζονται βάσει του σχήματος 2.3.

Συνδυάζοντας τις αμετάβλητες Riemann R^+ και R^- προκύπτει η πίεση και η ταχύτητα στο όριο. Ενώ, από την υπόθεση της ισεντροπικής ροής προκύπτει η πυκνότητα.

Κατά αντιστοιχία, στην υποηχητική έξοδο, οι δύο κατευθύνσεις διάδοσης είναι θετικές, ενώ αρνητική είναι η κατεύθυνση στην οποία η πληροφορία (R^-) διαδίδεται με ταχύτητα $V - c$ (σχ. 2.3ii).

Επομένως, με το κάθετο διάνυσμα στην έξοδο να είναι θετικό, το σύστημα (2.60), παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho_c c_c} (p_b - p_a) - (V_b - V_a) &= 0, & \text{για } \lambda_1 &= V - c \\
 \frac{p_b}{\rho_b^\gamma} &= \frac{p_c}{\rho_c^\gamma}, & \text{για } \lambda_2 &= V \\
 \frac{1}{\rho_c c_c} (p_b - p_c) + (V_b - V_c) &= 0, & \text{για } \lambda_3 &= V + c
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Ορίζοντας μια κατάσταση αναφοράς (o) βάσει την κατεύθυνση της R , παρατηρείται ότι είναι δυνατόν να ορισθούν μονοσήμαντα οι εξισώσεις (2.63) και (2.64). Δηλαδή, για αρνητική διεύθυνση διάδοσης της R , η κατάσταση αναφοράς είναι το εξωτερικό πεδίο (a) και αντίθετα, όταν είναι θετική η διεύθυνση, η κατάσταση αναφοράς είναι το υπολογιστικό πεδίο (c).

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει η λύση του συστήματος ως

$$\begin{aligned}
 \rho_b &= \rho_o \left(\frac{p_b}{p_o} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
 V_b &= \frac{1}{\rho_o c_o} \frac{p_c - p_a}{2} + \frac{V_a + V_c}{2} \\
 p_b &= \frac{p_c + p_a}{2} + \rho_o c_o \frac{V_c - V_a}{2} \\
 u_b &= u_o + (V_b - V_o) n_x \\
 v_b &= v_o + (V_b - V_o) n_y
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Υπενθυμίζεται ότι ισχύει $V_{(\cdot)} = u_{(\cdot)} \cdot n_x + v_{(\cdot)} \cdot n_y$.

Οριακές συνθήκες Τοίχου

Στην περίπτωση της ύπαρξης στερεού ορίου εντός του υπολογιστικού χωρίου, προφανώς ισχύει η επιβολή της συνθήκης μη εισχώρησης. Κατά συνέπεια το αριθμητικό διάλυμα της ροής ισούται με

$$\vec{\mathcal{F}}_{wall} = \begin{bmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

2.4.2 Έμμεση Επιβολή Οριακών Συνθηκών

Οριακές Συνθήκες Επ'άπειρου Ροής

Ο δεύτερος τρόπος για την επιβολή των οριακών συνθηκών επ' άπειρου ροής είναι δημιουργηθούν k ψευδο-κόμβοι, όπου k η τάξη ακρίβειας του σχήματος. Για αυτούς τους πρόσθετους κόμβους θα ισχύει

$$\vec{U}_{domain} = \vec{U}_j, \quad 1 \leq j \leq k \tag{2.67}$$

Στην προηγούμενη εξίσωση με \vec{U} συμβολίζεται το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, ο δείκτης $domain$ υποδηλώνει το τελευταίο κελί εντός του πεδίου και ο δείκτης j τον αύξοντα αριθμό των ψευδο-κόμβων.

Οριακές Συνθήκες Τοίχου

Η έμμεση επιβολή των οριακών συνθηκών για την περίπτωση των στερεών ορίων γίνεται χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες ανακλαστικές οριακές συνθήκες. Σύμφωνα με τις οποίες, ορίζονται k ψευδο-κόμβοι, για τους οποίους ισχύει

$$\begin{aligned}
 \rho_{-i+1} &= \rho_1 & , & & V_{-i+1} &= -V_1 & , & & p_{-i+1} &= p_1 & & 1 \leq i \leq k \\
 \rho_{N-i+1} &= \rho_N & , & & V_{N-i+1} &= -V_N & , & & p_{N-i+1} &= p_N & & 1 \leq i \leq k
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

όπου $V = \vec{v} \cdot \vec{n}$ και N το σύνολο των κελιών στην κάθετη κατεύθυνση. Επιβάλλοντας αυτές τις οριακές συνθήκες απαιτείται συνέχεια στις κατανομές της πυκνότητας και της πίεσης και αντίθετη κάθετη ταχύτητα.

Κεφάλαιο 3

Ανακατασκευή Πεδίου - Field Reconstruction

Σκοπός της διπλωματικής είναι να διερευνηθούν οι τρόποι ανακατασκευής του πεδίου ροής με βάση τα σχήματα ENO και WENO προκειμένου να γίνει με ακρίβεια η προεκβολή των κεντρικών τιμών στο σύνορο των όγκων ελέγχου. Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστεί το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάλυση και κατανόηση τριών διαφορετικών μεθοδολογιών.

Αρχικά, θα γίνει αναφορά στην κλασική πλέον μέθοδο δεύτερης τάξης MUSCL (Monotonic Upstream - Centered Scheme for Conservation Laws) [14], η οποία θα αποτελέσει και το σημείο αναφοράς για την σύγκριση με τα σχήματα ENO - WENO. Σε αυτήν την μέθοδο, επιλέγεται εκ των προτέρων ένα σταθερό σχήμα διακριτοποίησης (fixed stencil approximation), το οποίο μπορεί να είναι είτε *Upstream*, δηλαδή σχήμα που στηρίζεται σε ανάντι διαφοράριση, είτε κεντρικό *Centered*. Αυτή η μέθοδος είναι αρκετά διαδεδομένη σε βιομηχανικές εφαρμογές που περιλαμβάνουν αρκετά σύνθετες γεωμετρίες. Το μειονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου έγκειται στην μη-αυτόματη επιλογή των κελιών/σημείων που περιλαμβάνονται στην τοπική ανακατασκευή του πεδίου (stencil). Σε περιπτώσεις που υπάρχουν ασυνέχειες ή τοπικά ακρότατα, η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μη φυσικές ταλαντώσεις αριθμητικού τύπου (spurious oscillations), οι οποίες είναι όμοιες με τα φαινόμενα *Gibbs* των φασματικών μεθόδων.

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος, η μέθοδος αυτή κάνει χρήση είτε μεθόδων τεχνητής συνεκτικότητας (artificial viscosity) είτε περιοριστών (limiters). Η μέθοδος της τεχνητής συνεκτικότητας προσθέτει έναν επιπλέον όρο, ο οποίος στις ασυνέχειες έχει μεγάλη τιμή για να συμπίεσει τις ταλαντώσεις, αλλά είναι αρκετά μικρός οπουδήποτε αλλού, προκειμένου να διατηρηθεί η ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι υπάρχουν ελεύθερες παράμετροι, οι οποίες είναι εξαρτώμενες του φυσικού προβλήματος.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι η χρήση περιοριστών προκειμένου να αποσβεστούν οι ταλαντώσεις. Κατά το παρελθόν, σχεδιάστηκε μια πληθώρα περιοριστών που είναι *TVD* σε μονοδιάστατα και βαθμωτά προβλήματα, αλλά και *TVB* (Total Variation Bounded) σε πολυδιάστατα. Η ιδέα των περιοριστών είναι να μειώνουν τοπικά την τάξη του σχήματος, κοντά στις ασυνέχειες, προκειμένου να αποφευχθεί ο απειρισμός των παραγώγων. Σημαντικό μειονέκτημα τους είναι ότι, εκτός κοντά των ασυνεχειών, εκφυλίζονται σε πρώτης τάξης και στα τοπικά ακρότατα, με αποτέλεσμα να μην ενδείκνυνται σε προβλήματα με έντονες διακυμάνσεις της ροής.

Η κύρια ιδέα που αναπτύσσεται στην παρούσα διπλωματική είναι η διατύπωση μεθόδων, σύμφωνα με τις οποίες η επιλογή του stencil θα γίνεται αυτόματα βάσει μη γραμμικών κριτηρίων κλίσης που λαμβάνουν υπ' όψιν την συνέχεια της συνάρτησης που παρεμβάλλεται. Στο δεύ-

τερο και τρίτο κεφάλαιο της ενότητας παρουσιάζεται η μεθοδολογία, αλλά και οι αλγόριθμοι ανακατασκευής των σχημάτων *Essentially Non-Oscillatory* και *Weighted Essentially Non-Oscillatory*.

Χάριν απλότητας των αλγορίθμων ανακατασκευής, αρχικά παρουσιάζονται για μία βαθμωτή εξίσωση νόμου διατήρησης (scalar conservation law) (3.1) και σε δεύτερο επίπεδο γενικεύονται για την εφαρμογή τους σε συστήματα υπερβολικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned} v_t + f(v)_x &= 0 \rightarrow \\ v_t + \alpha v_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ως απαραίτητη προϋπόθεση και για τους τρεις αλγορίθμους ανακατασκευής του πεδίου λαμβάνεται η μείωση της ολικής διακύμανσης σε κάθε χρονικό βήμα. Δηλαδή, επιδιώκεται για τον τελεστή ανακατασκευής $\mathcal{R}[\cdot]$

$$TV(\mathcal{R}[\cdot; \bar{u}]) \leq TV(u) \quad (3.2)$$

Για τις ανάγκες της ανάλυσης θεωρείται μονοδιάστατο πλέγμα

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b \quad (3.3)$$

Ορίζονται τα κελιά, οι κεντρικοί κόμβοι και το μέγεθος του κελιού ως

$$\begin{aligned} I_i &\equiv [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}], & x_i &\equiv \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}) \\ \Delta x_i &\equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

με $i = 1, 2, \dots, N$. Στο κάθε κελί του πλέγματος είναι γνωστές οι μέσες τιμές \bar{v}_i

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(x) dx \quad (3.5)$$

Στόχος των αλγορίθμων είναι η εύρεση των τιμών δεξιά και αριστερά του ορίου του όγκου ελέγχου

$$\mathcal{R}_i [v_{i+\frac{1}{2}}^L], \mathcal{R}_{i+1} [v_{i+\frac{1}{2}}^R] \quad (3.6)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι τελεστής ανακατασκευής $\mathcal{R}[\cdot]$ μπορεί να διαφέρει από κελί σε κελί.

3.1 Monotonic Upstream - Centered Scheme

Πρώτο βήμα είναι να θεωρήσουμε μία γενική έκφραση αναπαράστασης του τοπικού πεδίου στο κελί i σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Επιλέγεται για την αναπαράσταση το ανάπτυγμα Taylor με δεύτερης τάξης σφάλμα αποκοπής.

$$v(x) = \bar{v}_i + \Delta \bar{x} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x_i} + O(\Delta x^2) \quad (3.7)$$

Για το x ισχύει

$$x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Η πρώτη παράγωγος μπορεί να εξαρτάται είτε από τα γειτονικά κελιά I_{i-1}, I_{i+1} (centered approximation) είτε από το κελί I_i και ένα από τα γειτονικά (one-sided approximation).

Για λόγους γενικότητας, επιλέγεται να γραφεί η διακριτοποιημένη μορφή του αναπτύγματος Taylor ως εξής

$$v(x) = \bar{v}_i + \Delta \bar{x} \delta_i v + \kappa \frac{\Delta x^2}{2} \delta_i^2 v \quad (3.9)$$

όπου ουσιαστικά η παράμετρος κ ρυθμίζει αν το σχήμα θα είναι ανάντι ή κεντρικό.[5]. Οι προσεγγίσεις των παράγωγων δ_i και δ_i^2 υπολογίζονται βάσει κεντρικών διαφορών.

$$\begin{aligned} \delta_i v &= \frac{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i-1}}{2\Delta x_i} \\ \delta_i^2 v &= \frac{\bar{v}_{i+1} - 2\bar{v}_i + \bar{v}_{i-1}}{\Delta x_i^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Θεωρώντας ότι το πλέγμα είναι ομοιόμορφο, οι διακριτοποιημένες εξισώσεις για $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ και για $x = x_{i+\frac{1}{2}}$, αντίστοιχα, παίρνουν την μορφή

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = \bar{v}_i + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}) + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i) \quad (3.11i)$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^R = \bar{v}_i - \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}) - \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i) \quad (3.11ii)$$

όπου οι υπερ-δείκτες R και L αναφέρονται στη δεξιά και αριστερή κατάσταση των συνόρων.

Στην εξίσωση (3.11), ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην πρώτη τάξη διακριτοποίηση και οι υπόλοιποι όροι αντιπροσωπεύουν την μεγαλύτερη τάξη ακρίβειας του σχήματος.

Υπενθυμίζεται ότι σκοπός της προεκβολής των μέσων τιμών στο σύνορο είναι η επίλυση του Riemann προβλήματος ανάμεσα στις δύο καταστάσεις R και L . Έστω ότι η προς επίλυση πλευρά είναι η $i + \frac{1}{2}$. Για $\kappa = 0$, οι παράγωγοι προσεγγίζονται από κεντρικές διαφορές.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = \bar{v}_i - \frac{1}{4}(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i-1}) \quad (3.12i)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}}^R = \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{4}(\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_i) \quad (3.12ii)$$

Για $\kappa = -1$, δημιουργείται σχήμα ανάντι παραγωγίσης που προσομοιώνει την *Upstream* εκδοχή της προσέγγισης.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = \bar{v}_i - \frac{1}{2}(\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}) \quad (3.13i)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}}^R = \bar{v}_{i+1} + \frac{1}{2}(\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1}) \quad (3.13ii)$$

Τέλος για $\kappa = 1$, δημιουργείται σχήμα που στηρίζεται σε κατάντι παραγωγή, δηλαδή στα κελιά αντίθετα από την μεριά υπολογισμού της φάτσας, το οποίο είναι αριθμητικά ασταθές.

Όπως έχει αναφερθεί και στην εισαγωγή της παρούσας ενότητας, για είναι η προσέγγιση MUSCL TVD, θα πρέπει να γίνει χρήση περιοριστή. Ο περιοριστής Ψ είναι ένας συντελεστής ο οποίος πολλαπλασιάζει τις κλίσεις των σχέσεων (3.11) προκειμένου να τις “ψαλιδίσει”, εφόσον χρειάζεται.

Ξαναγράφοντας τις σχέσεις (3.11) για την πλευρά $i + \frac{1}{2}$ και εισάγοντας τον περιοριστή προκύπτει

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = \bar{v}_i + \frac{1}{4} (1 - \kappa) (\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}) \Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{4} (1 + \kappa) (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i) \Psi_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (3.14i)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}}^R = \bar{v}_{i+1} - \frac{1}{4} (1 + \kappa) (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i) \Psi_{i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{4} (1 - \kappa) (\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1}) \Psi_{i+\frac{3}{2}}^- \quad (3.14ii)$$

όπου ισχύει $\Psi = \Psi(r)$, με τον υπόλοιπο συμβολισμό να αφορά στην έκφραση της μεταβλητής r

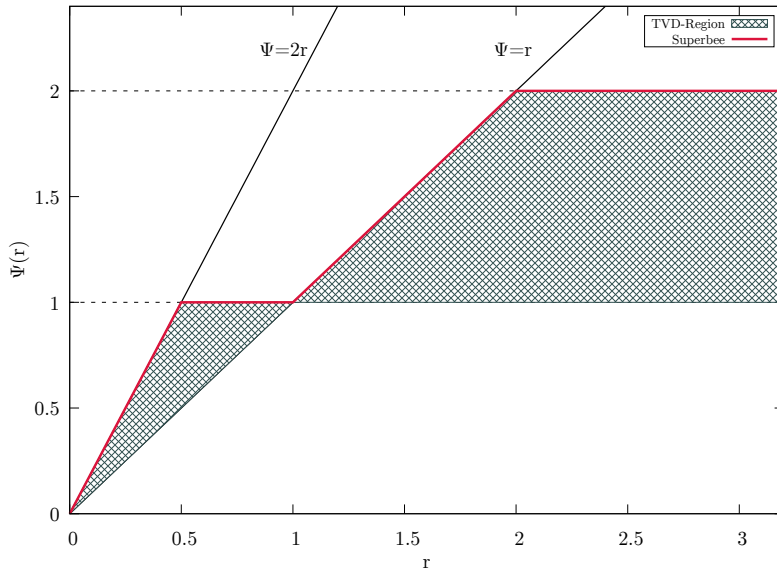
$$r_{i-\frac{1}{2}}^+ = \frac{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i}{\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1}}, \quad r_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1}}{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i} \quad (3.15i)$$

$$r_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1}}{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i}, \quad r_{i+\frac{3}{2}}^- = \frac{\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i}{\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1}} \quad (3.15ii)$$

Ο περιοριστής που χρησιμοποιείται είναι ο περιοριστής του Roe, *Superbee* [15] (βλ. σχήμα 3.1).

$$\Psi(r) = \max \{0, \min(2r - 1, 1), \min(r, 2)\} \quad (3.16)$$

Χαρακτηριστικό αυτού του περιοριστή είναι η εξαιρετική ακρίβεια που δίνει στις ασυνέχειες. Αυτό επιτυγχάνεται εξ' αιτίας της ενίσχυσης που δίνει σε κάποιες συνεισφορές των κυμάτων όταν $r > 1$, ενώ παραμένει στα όρια της TVD περιοχής.



Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση του περιοριστή *Superbee*. Με γραμμοσκόπηση αντιπροσωπεύεται η επιθυμητή περιοχή για TVD σχήματα

Για λόγους απλούστευσης, η χρονική ολοκλήρωση για το σχήμα αυτό δεν εφαρμόζεται κάποια μέθοδος Runge-Kutta (2.54), αλλά ένας πιο απλός αλγόριθμος πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector) που προτείνεται από τον Hirsch [5] και παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω.

Αλγόριθμος 1: Second-Order Space and Time Accurate Scheme

Δεδομένων των μέσων τιμών $\{\bar{v}_i\}$:

1. Υπολογίζονται οι ενδιάμεσες τιμές \bar{v}_i^* για χρόνο διάδοσης $\Delta t/2$

$$\bar{v}_i^* = \bar{v}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(\hat{f}_{i+1/2}^{(1)} - \hat{f}_{i+1/2}^{(1)} \right) \quad (3.17)$$

όπου $\hat{f}_{i+1/2}^{(1)} = \text{Riem}(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})$ το πρώτης τάξης αριθμητικό διάνυσμα ροής, που διέρχεται από το όριο $x = x_{i+1/2}$.

2. Ορίζονται οι οριακές τιμές στο $x = x_{i+1/2}$:

$$v_{i+1/2}^{L*} = \bar{v}_i^* + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1})\Psi_{i-1/2}^+ + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i)\Psi_{i+1/2}^- \quad (3.18i)$$

$$v_{i+1/2}^{R*} = \bar{v}_{i+1}^* - \frac{1}{4}(1 + \kappa)(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i)\Psi_{i+1/2}^+ - \frac{1}{4}(1 - \kappa)(\bar{v}_{i+2} - \bar{v}_{i+1})\Psi_{i+3/2}^- \quad (3.18ii)$$

ομοίως για $x = x_{i-1/2}$.

3. Υπολογίζονται τελικές τιμές

$$\bar{v}_i^{n+1} = \bar{v}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{i+1/2}^{(2)} - \hat{f}_{i-1/2}^{(2)} \right) \quad (3.19)$$

όπου $\hat{f}_{i+1/2}^{(2)} = \text{Riem}\left(\bar{v}_{i+1/2}^{L*}, \bar{v}_{i+1/2}^{R*}\right)$ το δεύτερης τάξης αριθμητικό διάνυσμα ροής, που διέρχεται από το όριο $x = x_{i+1/2}$.

3.2 Essentially Non - Oscillatory

Στο βασικό άρθρο [3] που παρουσιάζει τα ENO σχήματα προτείνονται δύο είδη προσέγγισης. Η προσέγγιση μέσω *Παράγουσας* και η προσέγγιση μέσω *Αποσυνέλιξη* (Deconvolution). Αμφότερες οι προσεγγίσεις μπορούν να εφαρμοστούν τόσο με την χρήση πεπερασμένων διαφορών, θεωρώντας τις σημειακές τιμές των αριθμητικών ροών (numerical fluxes), όσο και με τη χρήση πεπερασμένων όγκων, θεωρώντας την μέση τιμή των κελιών (cell averages).

Στη βιβλιογραφία, σπάνιες είναι οι αναφορές στην προσέγγιση Deconvolution, εξ'αιτίας της απλότητας της προσέγγισης μέσω παράγουσας. Στην παρούσα ανάλυση, θα μας απασχολήσει μόνο η προσέγγιση μέσω Παράγουσας με χρήση πεπερασμένων όγκων.

Η βασική ιδέα των σχημάτων ENO είναι να γίνει παρεμβολή των μέσων τιμών \bar{v}_i της συνάρτησης $v(x)$ μέσω ενός πολυωνύμου $p_i(x)$, με βαθμό το πολύ $k-1$, ούτως ώστε η προσέγγιση της $v(x)$ να είναι k τάξης εντός του I_i [1]. Δηλαδή να ισχύει

$$p_i(x) = v(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i \quad (3.20)$$

Προσπορίζοντας το πολυώνυμο $p_i(x)$, είναι δυνατόν να προσεγγιστούν οι τιμές στις πλευρές του κελιού I_i , ως

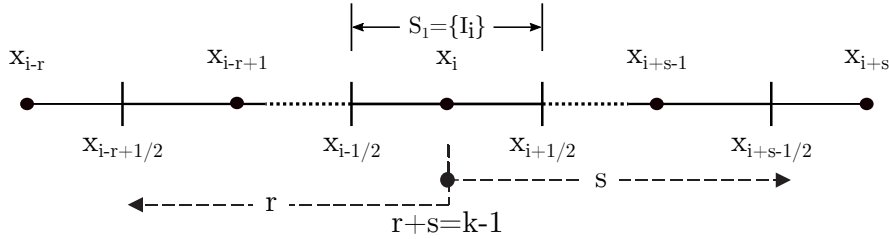
$$v_{i+1/2}^L = p_i\left(x_{i+1/2}\right), \quad v_{i-1/2}^R = p_i\left(x_{i-1/2}\right) \quad (3.21)$$

οι οποίες είναι k -τάξης ακρίβειας.

$$v_{i+1/2}^L = v\left(x_{i+1/2}\right) + O(\Delta x^k), \quad v_{i-1/2}^R = v\left(x_{i-1/2}\right) + O(\Delta x^k) \quad (3.22)$$

Σκοπός είναι να δημιουργηθεί ένας αλγόριθμος προκειμένου να περιγράψει την διαδικασία ανακατασκευής του πεδίου. Πιο συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος για ένα συγκεκριμένο κελί I_i , θα επιλεγεί ένα εύρος κελιών $S(i)$ (σχήμα 3.2), με r κελιά αριστερά, s κελιά δεξιά καθώς και το ίδιο το κελί I_i (οπότε $r + s + 1 = k$), ενώ παράλληλα θα ικανοποιείται η συνθήκη (3.20).

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\} \quad (3.23)$$



Σχήμα 3.2: Ορισμός σημείων βάσει της θέσης τους

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο, βαθμού το πολύ $k-1 = r+s$, όπου για κάθε μέση τιμή $\bar{v}_j \in S(i)$, ισχύει

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi = \bar{v}_j, \quad j = i-r, \dots, i+s \quad (3.24)$$

Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος επιλογής των κελιών που θα βρίσκονται μέσα στο stencil, αλλά και ο τρόπος που ικανοποιείται η συνθήκη ακρίβειας (3.20), αρχικά, ορίζεται η παράγουσα $V(x)$ της συνάρτησης $u(x)$

$$V(x) \equiv \int_{-\infty}^x v(\xi) d\xi \quad (3.25)$$

Σε διακριτή μορφή, η παράγουσα στο σημείο $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ εκφράζεται μέσω των μέσων τιμών της συνάρτησης $v(x)$ ως

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \bar{v}_j \Delta x_j \quad (3.26)$$

Και στους δύο παραπάνω ορισμούς το όριο $-\infty$ μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε σταθερό αριθμό i_0 . Άρα γνωρίζοντας τις μέσες τιμές των κελιών, είναι γνωστή και η τιμή της παράγουσας $V(x)$ στο όριο, ακριβώς (exact). Κατά συνέπεια, αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο, το πολύ k βαθμού, που παρεμβάλει την $V(x)$ στα $k+1$ σημεία

$$x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}}$$

τότε ισχύει

$$p(x) = P'(x) \quad (3.27)$$

Η ιδέα κλειδί στα σχήματα ENO είναι η αυτόματη επιλογή των σημείων που βρίσκονται μέσα στο stencil. Για να πραγματοποιηθεί, εισάγεται η έννοια των διαιρεμένων διαφορών Newton. Η μηδενικής τάξης διαφορά για την συνάρτηση $V(x)$ ορίζεται ως

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}] \equiv V(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (3.28)$$

ενώ, ο γενικός τύπος της j τάξης διαιρεμένης διαφοράς ορίζεται, αναδρομικά, ως

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] \equiv \frac{V \left[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] - V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{3}{2}} \right]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (3.29)$$

Ομοίως, ορίζονται και οι διαιρεμένες διαφορές για τις μέσες τιμές των κελιών.

$$\bar{v} \left[x_i, \dots, x_{i+j} \right] \equiv \frac{\bar{v} \left[x_{i+1}, \dots, x_{i+j} \right] - \bar{v} \left[x_i, \dots, x_{i+j-1} \right]}{x_{i+j} - x_i} \quad (3.30)$$

Από τον ορισμό της παράγουσας (3.26) προκύπτει η σχέση για την μηδενική τάξη διαιρεμένη διαφορά των μέσων τιμών \bar{v} με την πρώτη τάξη διαιρεμένη διαφορά της $V(x)$.

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \equiv \frac{V \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) - V \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right)}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \bar{v}_i \quad (3.31)$$

Μία σημαντική ιδιότητα των διαιρεμένων διαφορών είναι ότι

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = \frac{V^{(j)}(\xi)}{j!} \quad (3.32)$$

για κάποιο ξ μέσα στο stencil $x_{i-\frac{1}{2}} < \xi < x_{i+j-\frac{1}{2}}$, αρκεί η συνάρτηση $V(x)$ να είναι συνεχής μέσα στο stencil. Αν $V(x)$ είναι μη-συνεχής σε κάποιο σημείο μέσα στο εύρος τότε

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = O \left(\frac{1}{\Delta x^j} \right) \quad (3.33)$$

Για αυτόν τον λόγο, οι διαιρεμένες διαφορές είναι μία μέτρηση της “ομαλότητας” (smoothness) της συνάρτησης μέσα στο εύρος.

Ως συνάρτηση παρεμβολής λαμβάνεται η φόρμουλα Newton ή φόρμουλα Lagrange. Η σχέση Newton εκφρασμένη στις πλευρές των κελιών παίρνει την ακόλουθη γενική μορφή της εξίσωσης (3.34).

$$P(x) = \sum_{j=0}^k V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \prod_{m=0}^{j-1} \left(x - x_{i-r+m-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.34)$$

Αντίστοιχα, η σχέση παρεμβολής Lagrange εκφράζεται ως

$$P(x) = \sum_{j=0}^k V \left(x_{i-r+m-\frac{1}{2}} \right) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \quad (3.35)$$

Από τα προηγούμενα, γίνεται αντιληπτό ότι η προσέγγιση της συνάρτησης $v(x)$ είναι η παράγωγος των προηγούμενων σχέσεων, όπου η σχέση Newton γίνεται

$$p(x) = \sum_{j=1}^k V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{j-1} \left(x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.36)$$

και η σχέση του Lagrange παίρνει την μορφή [1]

$$p(x) = \sum_{j=0}^k \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k \left(x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}} \right)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \left(x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}} \right)} \quad (3.37)$$

Παρατηρείται ότι η συνάρτηση παρεμβολής Newton περιλαμβάνει τις διαιρεμένες διαφορές από πρώτης τάξη έως k . Επιλέγεται στα σχήματα ENO να χρησιμοποιηθεί η παρεμβολή Newton, καθώς οι διαιρεμένες διαφορές υπολογίζονται για να δημιουργηθεί το stencil.

Εν κατακλείδι, τα σχήματα ENO προσεγγίζουν την συνάρτηση $v(x)$ παρεμβάλλοντας, ουσιαστικά, την παράγουσα $V(x)$ στις φάτσες των κελιών. Η επιλογή των σημείων στο stencil γίνεται βάσει των διαιρεμένων διαφορών.

Αναλυτικά, ο αλγόριθμος ανακατασκευής του πεδίου με βάση την προσέγγιση *Essentially Non-Oscillatory* έχει ως εξής:

Αλγόριθμος 2: 1D - ENO Reconstruction

Δεδομένων των μέσων τιμών $\{\bar{v}_i\}$ μίας συνάρτησης $v(x)$, για να δημιουργηθεί ένα τμηματικά συνεχές πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k - 1$, πραγματοποιούνται τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογίζονται οι διαιρεμένες διαφορές της παράγουσας $V(x)$, από πρώτη έως k τάξη, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.29) και (3.31).
2. Ξεκινώντας με δύο σημεία για το εύρος του κελιού I_i και $r, s = 0$

$$\tilde{S}_2(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

για την παρεμβολή της παράγουσας $V(x)$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το εύρος

$$S_1(i) = \{I_i\}$$

για την παρεμβολή της $v(x)$. Συνεχίζουμε για $l = 2, \dots, k$, θεωρώντας ότι το εύρος

$$\tilde{S}_l(i) = \left\{ x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \right\}$$

είναι γνωστό, προστίθεται ένας εκ των γειτόνων $x_{i-r-\frac{3}{2}}$ ή $x_{i+s+\frac{3}{2}}$, συγκρίνοντας τις αντίστοιχες διαιρεμένες διαφορές.

- Αν:

$$\left| V \left[x_{i-r-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \right] \right| < \left| V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{3}{2}} \right] \right|, \quad (3.38)$$

προστίθεται στο εύρος $\tilde{S}_l(i)$ η πλευρά $x_{i-r-\frac{3}{2}}$ και προκύπτει:

$$\tilde{S}_{l+1}(i) = \left\{ x_{i-r-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \right\},$$

και αυξάνεται ο αντίστοιχος μετρητής: $r++$.

- Σε αντίθετη περίπτωση προστίθεται στο stencil $\tilde{S}_l(i)$ η πλευρά $x_{i+s+\frac{3}{2}}$ για να προκύψει το stencil:

$$\tilde{S}_{l+1}(i) = \left\{ x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{3}{2}} \right\},$$

και αυξάνεται ο αντίστοιχος μετρητής: $s++$.

3. Χρησιμοποιείται η σχέση παρεμβολής Newton (3.36) και υπολογίζονται οι προσεγγίσεις της συνάρτησης στα όρια των κελιών, με ακρίβεια $O(\Delta x^k)$:

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = p_i \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad v_{i-\frac{1}{2}}^R = p_i \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right)$$

όπου $p_i(x)$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $k-1$, το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη ακρίβειας (3.20).

Σε περιπτώσεις που το πλέγμα είναι ομοιόμορφο, αντί των διαιρεμένων διαφορών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για απλότητα, οι αδιαίρετες διαφορές (undivided differences).

$$V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \rangle = V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \Delta x = \bar{v}_i \Delta x \quad (3.39)$$

οπότε, κατά αναλογία ισχύει

$$V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} \rangle \equiv V \langle x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} \rangle - V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \rangle \quad (3.40)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση παρεμβολής αποκτά σταθερούς συντελεστές. Για την συνάρτηση Newton, σε αυτή την περίπτωση, ισχύει

$$p(x) = \sum_{j=1}^k V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \tilde{c}_{rj} \quad (3.41)$$

Όπου οι συντελεστές \tilde{c}_{rj} , για το σύνορο $x_{i+\frac{1}{2}}$, παίρνουν την μορφή

$$\tilde{c}_{rj} = \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{j-1} \Delta x (r-l+1) \quad (3.42)$$

Αντίστοιχα, στην σχέση Langrange οι συντελεστές \tilde{c}_{rj} εκράζονται ως

$$\tilde{c}_{rj} = \Delta x_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \quad (3.43)$$

Επιλέγοντας το καταλληλότερο stencil ανάμεσα σε k διαφορετικά stencil, τα σχήματα ENO καταφέρνουν να διατηρούν την ακρίβεια σε όλες τις περιπτώσεις, ακόμα και ως την ασυνέχεια, ενώ παραμένουν αριθμητικά ευσταθή. Παρ'όλα αυτά, ο αλγόριθμος 2 χρήζει βελτίωσης [1].

Αρχικά, σε περιπτώσεις όπου οι διαιρεμένες διαφορές είναι κοντά στο μηδέν, μικρό αριθμητικό σφάλμα μπορεί να αλλάξει το stencil. Σε περιοχές όπου η συνάρτηση είναι ομαλή, αυτό δεν είναι επιθυμητό και σε υπερβολικού τύπου προβλήματα αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια του αριθμητικού σχήματος. Ακόμα, το προκύπτον αριθμητικό διάνυσμα της ροής ενδέχεται να μην είναι συνεχές εξ'αίτιας του ότι μπορεί να αλλάξει το stencil ανάμεσα σε δύο γειτονικά κελιά. Τέλος, μια ουσιαστική παρατήρηση για την μεθοδολογία είναι ότι ενώ θεωρούνται k υποψήφια stencils καλύπτοντας συνολικά $2k-1$ κελιά, μόνο ένα stencil επιλέγεται εν τέλει με αποτέλεσμα να προκύπτει k -τάξης ακρίβεια. Σε περιοχές όπου η συνάρτηση παραμένει ομαλή (smooth), θα ήταν επιθυμητό να θεωρούνται όλα τα k stencils και τον προκύπτον αριθμητικό σχήμα να είχε $2k-1$ τάξη ακρίβειας.

Τα δύο τελευταία μειονεκτήματα φαίνονται να είναι εγγενή της μεθόδου. Παρ'όλα αυτά, το πρώτο μειονέκτημα μπορεί να διορθωθεί [16]. Προκειμένου να αποφευχθεί η ελεύθερη προσαρμογή του stencil, επιλέγεται εν γένει ένα stencil και προκρίνεται έναντι των υπολοίπων, εφαρμόζοντας μία παράμετρο $b > 1$ στις συγκρίσεις των διαιρεμένων διαφορών.

Η επιλογή του stencil μπορεί να είναι είτε κεντρική είτε να είναι λαμβάνει υπ' όψιν την ροή της πληροφορίας (Upwinding). Στην βιβλιογραφία γίνεται αναφορά σε ένα επιθυμητό stencil $\tilde{S}_{pref}(i)$:

$$\tilde{S}_{pref}(i) = \left\{ x_{i-r+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+k+\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.44)$$

με συγκεκριμένα αριστερά και δεξιά όρια. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η μέθοδος καθίσταται πιο ευσταθής εάν κάθε φορά προκρίνεται μόνο το ανάντι κελί (Upwind Cell) και όχι ένα συγκεκριμένο εύρος σημείων.

Πιο συγκεκριμένα, εάν η ροή της πληροφορίας είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά ($\alpha > 0$), τότε $r_{pref} = 1$, ενώ σε αντίθετη περίπτωση $s_{pref} = 1$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αλγόριθμος 2 τροποποιείται και η σχέση σύγκρισης (3.38) γίνεται, στην περίπτωση της θετικής ταχύτητας μεταφοράς ($r_{pref} = 1$):

$$\left| V \left[x_{i-r-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \right] \right| \leq b \left| V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{3}{2}} \right] \right|, \quad (3.45)$$

για όσο $r = 0$.

Αλλιώς:

$$\left| V \left[x_{i-r-\frac{3}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \right] \right| < \left| V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{3}{2}} \right] \right|, \quad (3.46)$$

Αντίστοιχη τροποποιείται ο αλγόριθμος όταν $\alpha < 0$.

3.3 Weighted Essentially Non - Oscillatory

Τα σχήματα WENO [17] σχεδιάστηκαν προκειμένου να διορθώσουν τα εγγενή προβλήματα των σχημάτων ENO και αποτελούν μία τροποποίηση της προσέγγισης μέσω της παράγουσας.

Όπως και προηγουμένως, ο αλγόριθμος βρίσκει εφαρμογή τόσο στην περίπτωση που θεωρούνται οι σημειακές τιμές των διανυσμάτων ροής (πεπερασμένες διαφορές), όσο και στην περίπτωση που θεωρούνται οι μέσες τιμές των τιμών $\{\bar{u}_i\}$ (πεπερασμένοι όγκοι).

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν όσο γίνεται περισσότερα από τα k υποψήφια stencil, προκειμένου να αυξηθεί η ακρίβεια σε σημεία όπου η συνάρτηση είναι συνεχής. Ενώ, όταν κάποιο από αυτά βρεθεί σε ασυνέχεια να απορρίπτεται προσομοιώνοντας τον αλγόριθμο ENO.

Θεωρώντας k υποψήφια stencil

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (3.47)$$

το κάθε ένα από αυτά προσεγγίζει την τιμή $v_{j+\frac{1}{2}}^{(r)}$ στο σύνορο $x_{i+\frac{1}{2}}$ βάσει των συντελεστών c_{rj} , οι οποίοι εξαρτώνται από το πιο αριστερά σημείο x_{i-r} που βρίσκεται εντός του stencil $S_r(i)$.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{v}_{i-r+j}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (3.48)$$

Το σχήμα WENO προσεγγίζει την τιμή στον σύνορο χρησιμοποιώντας έναν κυρτό συνδυασμό όλων των τιμών $v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ της σχέσης (3.48).

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_r \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (3.49)$$

Κεντρικής σημασίας στα σχήματα WENO είναι η σωστή επιλογή των συντελεστών βαρύτητας ω_r . Οι συντελεστές θα πρέπει να είναι θετικοί και το άθροισμα τους να είναι ίσο με το ένα.

$$\omega_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r = 1 \quad (3.50)$$

Αρχικά, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι συνεχής, επιλέγονται εκ των προτέρων επιθυμητοί συντελεστές βαρύτητας C_r^k (optimal weights), οι οποίοι ικανοποιούν με την σειρά τους τις συνθήκες (3.50), προκειμένου να ισχύει

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} C_r^k \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (3.51)$$

Οι συντελεστές δίνονται από την σχέση (3.52) για $1 \leq k \leq 3$.

$$\begin{aligned} C_0^1 &= 1, & k &= 1 \\ C_0^2 &= \frac{1}{3}, & C_1^2 &= \frac{2}{3}, & k &= 2 \\ C_0^3 &= \frac{1}{10}, & C_1^3 &= \frac{3}{5}, & C_2^3 &= \frac{3}{10}, & k &= 3 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Παρατηρείται ότι, οι συγκεκριμένοι συντελεστές δίνουν βαρύτητα στην φορά της πληροφορίας (Upwinding) και είναι κατάλληλοι για υπερβολικού τύπου προβλήματα με θετική ταχύτητα μεταφοράς. Για $a < 0$, πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες προσαρμογές των συντελεστών.

Υπενθυμίζεται ότι ο δείκτης r αναφέρεται στο πλήθος των κελιών που χρησιμοποιήθηκαν από τα αριστερά του I_i (σχ. 3.2).

Σκοπός είναι να βρεθεί μία συσχέτιση μεταξύ των ω_r και των C_r^k , ούτως ώστε σε περιπτώσεις που η συνάρτηση είναι “ομαλή” (smooth) να υπάρχει συσχέτιση $k-1$ τάξης

$$\omega_r = C_r^k + O(\Delta x^{k-1}), \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (3.53)$$

προκειμένου να πραγματοποιηθεί η κεντρική ιδέα των σχημάτων WENO και οι μη γραμμικοί συντελεστές ω_r να εκφυλιστούν στους συντελεστές C_r^k .

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_r \bar{v}_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (3.54)$$

Αντίθετα, όταν κάποια ασυνέχεια βρίσκεται μέσα στο stencil $S_r(i)$ θα πρέπει να μην υπάρχει συσχέτιση, δηλαδή να ισχύει

$$\omega_r = C_r^k + O(1) \quad (3.55)$$

Και πιο συγκεκριμένα, είναι επιθυμητό σε περιπτώσεις όπου εντοπίζεται ασυνέχεια μέσα στον stencil, ο αντίστοιχος συντελεστής βαρύτητας να είναι ίσος με το 0, όπως ακριβώς συμβαίνει στα σχήματα ENO.

Στο άρθρο [18] προτείνεται η ακολουθεί μορφή για τους συντελεστές βαρύτητας.

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (3.56)$$

όπου

$$\alpha_r = \frac{C_r^k}{(\varepsilon + IS_r)^p} \quad (3.57)$$

Στη παραπάνω σχέση υπάρχουν δύο παράμετροι: η παράμετρος ε και ο εκθέτης p . Η παράμετρος ε χρησιμοποιείται για να μην μηδενίσει ο παρανομαστής. Στο [18] προτείνεται να έχει εύρος από 10^{-5} έως 10^{-7} , ενώ για τον εκθέτη p , για $k = 2, 3$ θεωρείται αποδεκτό $p = 2$. Πιο πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι οι συντελεστές βαρύτητας είναι αρκετά ευαίσθητοι στην παράμετρο ε [19] και προτείνεται η παράμετρος να είναι της τάξης του τετραγώνου της χωρικής διακριτοποίησης $\varepsilon = \varepsilon (\Delta x^2)$. Εν γένει τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την συγκεκριμένη εξάρτηση, καθώς όμως στην παρούσα μελέτη δεν θα παρουσιαστούν αποτελέσματα για διακριτοποιήσεις μικρότερες από $O(\Delta x^3)$, η παράμετρος ε διατηρείται σταθερή και ίση με $\varepsilon = 10^{-6}$.

Στα σχήματα ENO, η μέτρηση της τοπικής “ομαλότητας” της συνάρτησης γίνεται με την χρήση διαιρεμένων ή αδιαίρετων διαφορών, καθώς αυτές οι διαφορές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μέτρηση της ομαλότητας, σχέσεις (3.32) και (3.33). Για την περίπτωση των σχημάτων WENO, στο άρθρο [18] εισάγεται, για την μέτρηση της “ομαλότητας” (Smoothness Indicator) η συνάρτηση

$$IS_r^k = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx \quad (3.58)$$

Η συνάρτηση αυτή αθροίζει τις νόρμες L_2 όλων των παραγώγων στο διάστημα $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$, ενώ ο παράγοντας Δx^{2l-1} εισάγεται ούτως ώστε η συνάρτηση να είναι ανεξάρτητη του Δx . Οι παράγωγοι αυτοί μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά.

Για $k = 2$, με προκύπτουσα ακρίβεια σχήματος στις ομαλές περιοχές $2k-1 = 3$, οι συντελεστές είναι ίσοι με

$$IS_0^2 = (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i)^2, \quad IS_1^2 = (\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1})^2 \quad (3.59)$$

Ενώ, για $k = 3$ και προκύπτουσα ακρίβεια σχήματος $2k-1 = 5$

$$\begin{aligned} IS_0^3 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_i - 2\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{v}_i - 4\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2 \\ IS_1^3 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{v}_{i-1} - 4\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2 \\ IS_2^3 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-2} - 2\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_i)^2 + \frac{1}{4} (3\bar{v}_{i-2} - 4\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_i)^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Στο Παράρτημα A παρουσιάζονται οι βέλτιστοι συντελεστές βαρύτητας C_r^k και οι συντελεστές ομαλότητας IS_r^k για $k = 4, 5$, σύμφωνα με το [20].

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά ο αλγόριθμος ανακατασκευής του πεδίου, με βάση την προσέγγιση *Weighted Essentially Non - Oscillatory*:

Δεδομένων των μέσων τιμών $\{\bar{v}_i\}$ μίας συνάρτησης $v(x)$, για να δημιουργηθεί μία τμηματικά συνεχή προσέγγιση, ακρίβειας $2k - 1$, λαμβάνοντας υπ' όψιν και την ροή της πληροφορίας (upwind-biased) πραγματοποιούνται τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογίζονται οι k προσεγγίσεις των τιμών $v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ με k τάξη ακρίβειας, χρησιμοποιώντας μία σχέση της μορφής (3.36) ή (3.37).
2. Υπολογίζονται οι συντελεστές C_r^k , βάσει των σχέσεων στην εξίσωση (3.52)
3. Υπολογίζονται οι συντελεστές IS_r^k , για όλα τα stencil $r = 1, \dots, k - 1$ από την σχέση (3.58), ανάλογα με το πρόσημο της ταχύτητα μεταφοράς α της ροής.
4. Υπολογίζονται οι συντελεστές ω_r και α_r από τις σχέσεις, (3.56) και (3.57), αντίστοιχα.
5. Σχηματίζεται η $2k - 1$ προσέγγιση των οριακών τιμών:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (3.61)$$

Για τις προσεγγίσεις των τιμών $v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$ θα χρησιμοποιείται η συνάρτηση παρεμβολής Lagrange, καθώς δεν υπολογίζονται διαιρεμένες διαφορές, όπως στην περίπτωση των σχημάτων ENO.

3.4 Διατήρηση Μονοτονίας

Όπως θα παρουσιαστεί και στα αποτελέσματα, τα ανώτερης τάξης σχήματα ($k > 3$) δημιουργούν σε ορισμένες περιπτώσεις μη-φυσικές ταλαντώσεις στα ροϊκά μεγέθη πίσω από τις ασυνέχειες. Αριθμητικά πειράματα που διεξήχθησαν και παρουσιάζονται σε επόμενη ενότητα έδειξαν ότι παρά τις “Upwind” τεχνικές που εφαρμόστηκαν, οι αριθμητικές ταλαντώσεις εμμένουν στα σχήματα τέταρτης και πέμπτης τάξης ακρίβειας. Για την απαλοιφή αυτών των ταλαντώσεων, μελετήθηκαν δύο μεθοδολογίες οι οποίες έχουν σαν στόχο να θέσουν άνω και κάτω όρια στην προεκβολή των ροϊκών μεγεθών, ούτως ώστε το ανακατασκευασμένο πεδίο να είναι αυστηρά μονότονο στην περιοχή μελέτης.

The Ultimate Strategy

Η πρώτη μέθοδος, που παρουσιάζεται, αναπτύχθηκε από τον Leonard [21] και ονομάζεται *the ULTIMATE Strategy*. Για την επισκόπηση της μεθόδου, θεωρείται ένα απλό μονοδιάστατο πρόβλημα μεταφοράς, με σταθερή ταχύτητα α .

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.62)$$

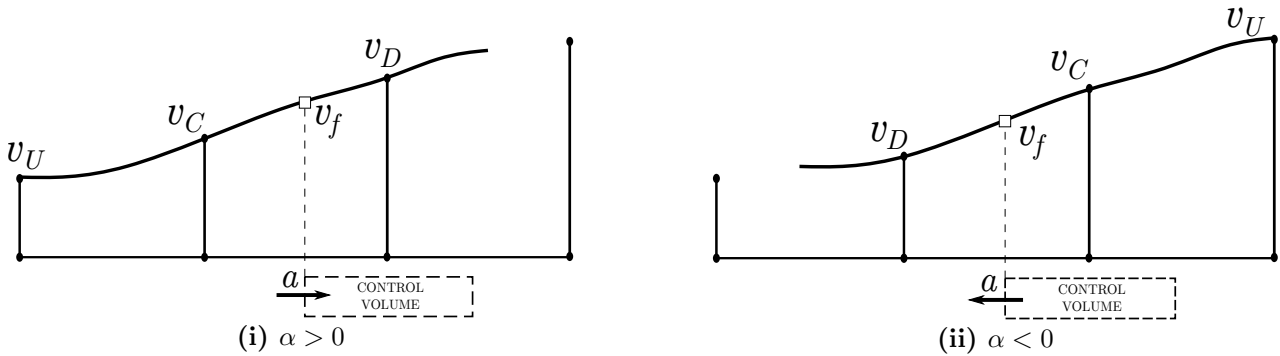
Ολοκληρώνοντας την εξίσωση χρονικά για χρόνο Δt και χωρικά για τον όγκο ελέγχου i με μήκος Δx , προκύπτει

$$\bar{v}_i^{n+1} = \bar{v}_i^n - c \left(\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}^L - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}^R \right) \quad (3.63)$$

όπου με \hat{v} υποδηλώνονται οι χρονικά μέσες τιμές, με \bar{v} οι χωρικά μέσες τιμές, ενώ με c συμβολίζεται ο αριθμός CFL. Σημειώνεται ότι η προηγούμενη εξίσωση για σταθερή ταχύτητα c μπορεί να γραφεί για τις κομβικές, χωρίς την χρήση των μέσων τιμών.

$$v_i^{n+1} = v_i^n - c \left(v_{i+\frac{1}{2}}^L - v_{i-\frac{1}{2}}^R \right) \quad (3.64)$$

Ο Leonard θεώρησε ότι οι κόμβοι που θα έχουν την μεγαλύτερη επιρροή στην τιμή του πεδίου στο όριο των όγκων ελέγχου, είναι αυτοί που βρίσκονται δεξιά και αριστερά από το όριο, καθώς και ο αμέσως επόμενος κόμβος που βρίσκεται στην κατεύθυνση της ταχύτητας a (ανάντι). Αυτοί οι τρεις κόμβοι μπορεί να ονομαστούν ως ανάντι (*Upstream*), κεντρικός (*Central*) και κατάντι (*Downstream*) κόμβος ανάλογα με το πρόσημο της ταχύτητας a . Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζεται ο ορισμός των κόμβων με βάση το πρόσημο της ταχύτητας. Σημειώνεται ότι, ο κόμβος στον οποίο γίνεται η ολοκλήρωση δεν ορίζεται πάντα ως ο κεντρικός κόμβος.



Σχήμα 3.3: Ορισμός του ανάντι (*Upstream*), κεντρικού (*Central*) και κατάντι (*Downstream*) κόμβου, με βάση το πρόσημο της ταχύτητας a

Με στόχο να ληφθεί υπ'όψιν η γενικότητα του αλγορίθμου, αλλά και η απλοποίηση του προβλήματος, θεωρείται θεμιτή η εισαγωγή κανονικοποιημένων μεταβλητών που ορίζονται ως

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{v(x, t) - v_U^n}{v_D^n - v_U^n} \quad (3.65)$$

Εισάγοντας αυτόν τον ορισμό προκύπτει $\tilde{v}_U = 0$ και $\tilde{v}_D = 1$, ενώ για να είναι μονότονη η συνάρτηση θα πρέπει να ισχύει $0 \leq \tilde{v}_C \leq 1$.

Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζεται για τις κανονικοποιημένες μεταβλητές η συνάρτηση \tilde{v} για $a > 0$. Συμβολίζοντας με \tilde{v}_f την πλευρά στην οποία αναζητείται η τιμή του πεδίου και με \tilde{v}_u η επόμενη "Upwind" πλευρά. Για να ικανοποιείται η συνθήκη μονοτονίας θα πρέπει να ισχύει

$$0 \leq \tilde{v}_u \leq \tilde{v}_C \quad \tilde{v}_C \leq \tilde{v}_f \leq 1 \quad (3.66)$$

Η εξίσωση (3.64), λαμβάνοντας υπ'όψιν τους παραπάνω ορισμούς, γράφεται ως

$$\tilde{v}_i^{n+1} = \tilde{v}_i^n - c (\tilde{v}_f - \tilde{v}_u) \quad (3.67)$$

Προκειμένου να διατηρείται η μονοτονία της συνάρτησης και στην επόμενη χρονική στιγμή, θα πρέπει να ισχύει

$$\tilde{v}_U^{n+1} \leq \tilde{v}_C^{n+1} \leq \tilde{v}_D^{n+1} \quad (3.68)$$

Σε προβλήματα καθαρής μεταφοράς η παραβίαση της μονοτονίας προκύπτει από την παραβίαση της αριστερής ανισότητας. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.66) και (3.68)

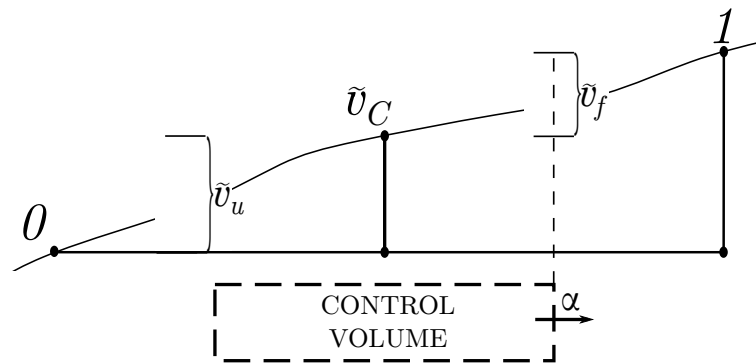
$$\tilde{v}_f \leq \tilde{v}_u + \frac{1}{c} (\tilde{v}_C^n - \tilde{v}_U^{n+1}) \quad (3.69)$$

Γίνεται φανερό, βάσει του σχήματος 3.4, ότι η τιμή \tilde{v}_u δεν είναι μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές, όπως και ότι η τιμή \tilde{v}_u^{n+1} δεν μπορεί να λάβει θετικές τιμές. Στις πιο ακραίες περιπτώσεις οι δύο αυτές τιμές γίνονται ίσες με το μηδέν και τα άνω και κάτω όρια για την τιμή \tilde{v}_f είναι

$$\tilde{v}_C^n \leq \tilde{v}_f \leq \frac{1}{c}\tilde{v}_C^n, \quad \text{για } 0 \leq \tilde{v}_C \leq 1 \quad (3.70)$$

Για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση δεν είναι μονότονη, χρησιμοποιείται πρώτης τάξης “Upwind” σχήμα, δηλαδή

$$\tilde{v}_f = \tilde{v}_C, \quad \text{όταν } \tilde{v}_C < 0 \text{ ή } \tilde{v}_C > 1 \quad (3.71)$$



Σχήμα 3.4: Οι κανονικοποιημένες μεταβλητές στην περίπτωση μονότονης συνάρτησης με θετική ταχύτητα μεταφοράς α . Οι περιοχές που σημειώνονται με αγκύλες υποδηλώνουν τα όρια για τις τιμές v_f και v_u

Σε προγραμματιστικό επίπεδο, η χρήση των κανονικοποιημένων μεταβλητών δεν καθίσταται βολική. Για αυτό τον λόγο στον αλγόριθμο 4 παρουσιάζεται η προσέγγιση του Leonard για τις μη κανονικοποιημένες μεταβλητές.

Αλγόριθμος 4: The Ultimate Strategy

1. Ορίζεται ο άνω (Upstream), ο κάτω (Downstream) και ο κεντρικός (Central) κόμβος με βάση το πρόσημο της ταχύτητας μεταφοράς α και υπολογίζονται οι τιμές $DEL = v_D - v_U$ και $ADEL = |DEL|$.
 2. Υπολογίζεται η απόλυτη τιμή της καμπυλότητας $ACURV = |v_D - 2v_C + v_U|$. εάν $ACURV \geq ADEL$, τότε η συνάρτηση δεν είναι μονότονη, τίθεται $v_f = v_c$ και τερματίζεται ο αλγόριθμος.
 3. Υπολογίζεται μία τιμή αναφοράς $v_{ref} = v_U + (v_C - v_U)/c$, όπου $c = \alpha\Delta x/\Delta t$.
 4. Υπολογίζεται μία επιθυμητή τιμή υψηλής τάξης v_f , χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους 2 ή 3.
 5. Εάν $DEL > 0$, τότε η τιμή v_f φράσσεται από κάτω με την τιμή v_C και από άνω από την μικρότερη τιμή των v_{ref} και v_D .
 6. Εάν $DEL < 0$, τότε η τιμή v_f φράσσεται από άνω με την τιμή v_C και από κάτω από την μεγαλύτερη τιμή των v_{ref} και v_D .
-

Monotonicity Preserving Algorithm

Η δεύτερη μεθοδολογία που εφαρμόστηκε και παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο, αναπτύχθηκε από τους *Suresh* και *Huyuh* [22] και εφαρμόστηκε σε σχήματα ΕΝΟ. Όπως και προηγουμένως, σκοπός είναι να βρεθούν τα άνω και κάτω όριο, προκειμένου να βρísκεται η προεκβολή της τιμής στο όριο του όγκου εντός των ορίων της μονοτονίας.

Η βασική ιδέα αυτής της μεθοδολογίας είναι ο τελικός αλγόριθμος που θα δημιουργηθεί να έχει την δυνατότητα να ξεχωρίζει τις ασυνέχειες από τα τοπικά μέγιστα, ούτως ώστε να μην υπάρχει πτώση τάξης σε σημεία που δεν χρειάζεται. Τα τοπικά μέγιστα διαχωρίζονται από τις ασυνέχειες αναλύοντας την τοπική καμπυλότητα του πεδίου.

Προτού παρουσιαστεί η μεθοδολογία είναι χρήσιμο να οριστούν οι συναρτήσεις minmod και median . Για την πρώτη ισχύει

$$\text{minmod}(x, y) = \frac{1}{2} (\text{sgn}(x) + \text{sgn}(y)) \min(|x|, |y|) \quad (3.72)$$

ενώ η συνάρτηση median μπορεί να οριστεί, κάνοντας χρήση της συνάρτησης minmod , ως

$$\text{median}(x, y, z) = x + \text{minmod}(y - x, z - x) \quad (3.73)$$

Η τοπική καμπυλότητα για έναν κόμβο ορίζεται ως

$$d_i = v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \quad (3.74)$$

Στην συνέχεια ορίζονται η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή στο όριο v_f^{\max} και v_f^{\min} , ως εξής: χρησιμοποιούνται οι κλίσεις, κάνοντας χρήση κεντρικών και μίας πλευράς διαφορών, καθώς και μία μέγιστη τιμή που προκύπτει από την καμπυλότητα στο όριο. Πιο συγκεκριμένα για την αριστερή πλευρά του όριο στο $x_{i+\frac{1}{2}}$ η μέγιστη τιμή από πίσω διαφοράση, προκύπτει

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{UL} = v_i + \alpha (v_i - v_{i-1}) \quad (3.75)$$

όπου ο εκθέτης UL συμβολίζει το άνω όριο (Upper Limit). Ο αριθμός α εξαρτάται από τον αριθμό CFL του σχήματος, ο οποίος θα πρέπει να είναι μικρότερος από $1/(1 + \alpha)$. Για πρακτικούς υπολογισμούς ο αριθμός α λαμβάνεται ίσος με 2, που επιτρέπει επίλυση της ροής με αριθμό CFL κοντά στο 0.6. Κάνοντας χρήση κεντρικών διαφορών για τους κόμβους i και $i + 1$, ορίζεται η μέση τιμή (median) v^{MD} στο σημείο $x_{i+\frac{1}{2}}$ ως

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{MD} = \frac{1}{2} (v_i + v_{i+1}) - \frac{1}{2} d_{i+\frac{1}{2}}^{MD} \quad (3.76)$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν την τοπική καμπυλότητα στο όριο, εκφράζεται η αριστερή τιμή στο όριο ως

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{LC} = v_i + \frac{1}{2} (v_i - v_{i-1}) + \frac{\beta}{3} d_{i-\frac{1}{2}}^{LC} \quad (3.77)$$

όπου ο αριθμός β εκφράζει το βαθμό ελευθερίας για χρήση τιμής μεγαλύτερης από την τοπική καμπυλότητα, για αυτό συμβολίζεται με LC (Large Curvature). Αμφότεροι οι συντελεστές α, β , εισήχθησαν για να αποφευχθεί η πτώση τάξης κοντά σε τοπικά ακρότατα.

Στις εξισώσεις (3.76) και (3.77) απαιτείται ο υπολογισμός της καμπυλότητας στην θέση $x_{i+\frac{1}{2}}$. Ο πιο άμεσος τρόπος είναι να οριστεί η καμπυλότητα στο όριο βάσει της συνάρτησης minmod (MM).

$$d_{i+\frac{1}{2}}^{MM} = \text{minmod}(d_j, d_{j+1}) \quad (3.78)$$

Το κριτήριο αυτό, για την μέτρηση της καμπυλότητας, είναι το λιγότερο περιοριστικό και δεν περιορίζει την ανάπτυξη των τοπικών ακρότατων. Στο [22] εισάγεται η μέτρηση της καμπυλότητας βάσει της σχέσης 3.79, κατά την οποία τα τοπικά ακρότατα συμπίεζονται όταν ο λόγος d_{j+1}/d_j είναι μεγαλύτερος του 4 ή μικρότερος του $1/4$.

$$d_{i+\frac{1}{2}}^{M4} = \min\text{mod} (4d_j - d_{j+1}, 4d_{j+1} - d_j, d_j, d_{j+1}) \quad (3.79)$$

Τέλος, σε μία μετέπειτα μελέτη για την διατήρηση της μονοτονίας στα σχήματα WENO [20], εισήχθη η μέτρηση της καμπυλότητας βάσει της σχέσης (3.80).

$$d_{i+\frac{1}{2}}^{M4X} = \min\text{mod} (4d_i - d_{i+1}, 4d_{i+1} - d_i, d_i, d_{i+1}, d_{i-1}, d_{i-2}) \quad (3.80)$$

Αριθμητικά πειράματα που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο, έδειξαν ότι η σχέση (3.80) είναι πολύ περιοριστική και οδηγεί σε πτώση ακρίβειας, ακόμα σε ομαλές περιοχές.

Εν τέλει, τα όρια $v_{i+\frac{1}{2}}^{L,max}$ και $v_{i+\frac{1}{2}}^{L,min}$ προκύπτουν ως

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{L,max} = \min \left[\max \left(v_i, v_{i+1}, v_{i+\frac{1}{2}}^{MD} \right), \max \left(v_i, v_{i+\frac{1}{2}}^{UL}, v_{i+\frac{1}{2}}^{LC} \right) \right] \quad (3.81i)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{L,min} = \max \left[\min \left(v_i, v_{i+1}, v_{i+\frac{1}{2}}^{MD} \right), \min \left(v_i, v_{i+\frac{1}{2}}^{UL}, v_{i+\frac{1}{2}}^{LC} \right) \right] \quad (3.81ii)$$

Η τελική τιμή στο όριο δίνεται από την σχέση (3.82), όπου εκφράζεται βάσει της συνάρτησης median.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^L = \text{median} \left(v_{i+\frac{1}{2}}^L, v_{i+\frac{1}{2}}^{L,min}, v_{i+\frac{1}{2}}^{L,max} \right) \quad (3.82)$$

Τέλος, σε αλγοριθμικό επίπεδο, η παρούσα μεθοδολογία αποτελεί ένα παραπάνω βήμα στους αλγόριθμους ανακατασκευής 2 και 3, αφού έχει υπολογιστεί η τιμή $v_{i+\frac{1}{2}}^L$.

3.5 Ανακατασκευή Συστημάτων Εξισώσεων

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν τρεις τρόποι ανακατασκευής του πεδίου, για μία απλή βαθμωτή εξίσωση μεταφοράς. Σκοπός των όσων αναφέρθηκαν είναι να εφαρμοστούν αυτοί οι αλγόριθμοι στο πλήρες σύστημα των υπερβολικών εξισώσεων Euler (2.1). Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούν οι απαραίτητοι χειρισμοί προκειμένου να γενικευτούν οι αλγόριθμοι για τις εξισώσεις Euler.

Ο πιο απλός τρόπος για την εφαρμογή των παραπάνω αλγορίθμων, σε ένα οποιοδήποτε σύστημα εξισώσεων, είναι να εφαρμοστεί ο βαθμωτός τελεστής ανακατασκευής του πεδίου $\mathcal{R}[\cdot]$ σε κάθε ένα από τα στοιχεία του συστήματος, δηλαδή

$$\vec{\mathcal{R}} [x; \vec{U}^n] = [\mathcal{R} [x; \vec{v}_1^n], \dots, \mathcal{R} [x; \vec{v}_m^n]]^T \quad (3.83)$$

όπου ο τελεστής $\vec{\mathcal{R}}[\cdot]$ συμβολίζει την διανυσματική ανακατασκευή. Ένας τέτοιος αλγόριθμος χρησιμοποιείται ευρύτατα στις σύγχρονες εφαρμογές που κάνουν χρήση TVD σχήματα μικρής τάξης, όπως η προσέγγιση MUSCL. Η υλοποίηση του είναι πολύ απλή, αρκεί να γενικευτεί ο αλγόριθμος 1, σύμφωνα με την σχέση (3.83) και οι σχέσεις (3.18) να αντικατασταθούν με τις σχέσεις (3.84).

$$\vec{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \vec{U}_i + \frac{1}{4} (1 - \kappa) (\vec{U}_i - \vec{U}_{i-1}) \Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ + \frac{1}{4} (1 + \kappa) (\vec{U}_{i+1} - \vec{U}_i) \Psi_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (3.84i)$$

$$\bar{U}_{i+\frac{1}{2}}^R = \bar{U}_{i+1} - \frac{1}{4}(1+\kappa)(\bar{U}_{i+2} - \bar{U}_{i+1})\Psi_{i-\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{4}(1-\kappa)(\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_i)\Psi_{i+\frac{3}{2}}^- \quad (3.84ii)$$

Όπου ο περιοριστής $\Psi(r)$ εκφράζεται ως

$$\Psi(r) = \min(\Psi^j(r)), \quad j = 1, \dots, m \quad (3.85)$$

Σε περιπτώσεις όπου επιδιώκεται μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας (≥ 3), η ανακατασκευή του πεδίου σύμφωνα με την σχέση (3.83) μπορεί να οδηγήσει σε μη αποδεκτά αποτελέσματα, καθώς ενδέχεται να δημιουργηθούν κοντά στις ασυνέχειες ταλαντωτικές συμπεριφορές. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που το σύστημα των υπερβολικών εξισώσεων είναι ισχυρά συζευγμένο (coupled), όπως συμβαίνει με τις εξισώσεις Euler.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιαστεί σύντομα ένας τρόπος προκειμένου να διατηρηθεί η μη ταλαντωτική συμπεριφορά του τελεστή ανακατασκευής. Αυτό επιτυγχάνεται αποσυνθέτοντας (decomposing) τα στοιχεία του συστήματος, ούτως ώστε να προκύψει ένα $m \times m$ σύστημα γραμμικώς ανεξάρτητων εξισώσεων [3].

Αρχικά, υπενθυμίζεται ότι κάθε σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} \bar{U}_t + \bar{f}(\bar{U})_x &= \vec{0} \rightarrow \\ \bar{U}_t + A\bar{U}_x &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.86)$$

για να είναι υπερβολικό θα πρέπει να υπάρχουν ένα σύνολο k χαρακτηριστικών ιδιοτιμών $\{\lambda_k\}$ και ένα σύνολο k χαρακτηριστικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\vec{r}_k\}$.

Με βάση την θεωρία που αναπτύχθηκε στην κεφάλαιο 2.1, γνωρίζουμε ότι οι χαρακτηριστικές μεταβλητές ορίζονται ως

$$w^k = \vec{l}_k \bar{U} \quad (3.87)$$

όπου $\{\vec{l}_k\}$ το σύνολο των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων, για τα οποία ισχύει $\vec{l}_i \vec{r}^j = \delta_i^j$. Οπότε μπορεί να γραφεί

$$\bar{U} = \sum_{k=0}^m w^k \vec{r}_k \quad (3.88)$$

Ως συνέπεια των παραπάνω, το υπερβολικό σύστημα (3.86) μπορεί να γραφεί ως ένα σύστημα m γραμμικώς ανεξάρτητων εξισώσεων

$$(w^k)_t + \lambda_k (w^k)_x = 0 \quad (3.89)$$

Οι τελεστές ανακατασκευής του πεδίου θα εφαρμοστούν σε κάθε ένα από τα στοιχεία του χαρακτηριστικού πεδίου \bar{W} . Δηλαδή, θα χρησιμοποιηθεί ο βαθμωτός τελεστής $\mathcal{R}[x; \bar{w}^k]$, όπου με πάλυλα συμβολίζονται οι χωρικές μέσες τιμές.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο πίνακας A είναι σταθερός και κατ' επέκταση και τα ιδιοδιανύσματα \vec{r}_k, \vec{l}_k . Τότε ο διανυσματικός μετασχηματισμός $\vec{\mathcal{R}}[x; \bar{U}]$ ορίζεται ως

$$\vec{\mathcal{R}}[x; \bar{U}] = \sum_{k=1}^m \mathcal{R}[x; \bar{w}^k] \vec{r}_k \quad (3.90)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι γνωρίζοντας ένα σύνολο τιμών \bar{U}_i είναι δυνατόν, μέσω ενός καθολικού μετασχηματισμού \vec{l}_k , να γίνει η ανακατασκευή του κάθε χαρακτηριστικού πεδίου και έπειτα μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού να γίνει η σύνθεση του ανακατασκευασμένου πλέον, πεδίου $\bar{U}(x, t)$.

Η παραπάνω παρατήρηση ισχύει μόνο σε περιπτώσεις που είναι δυνατόν να βρεθεί ένας καθολικός μετασχηματισμός. Σε περιπτώσεις που το σύστημα των υπερβολικών εξισώσεων δεν είναι γραμμικό, δηλαδή ισχύει $A(\vec{U})$, $\vec{l}_k(\vec{U})$, $\vec{r}_k(\vec{U})$, θα πρέπει υποχρεωτικά, να γραμμικοποιηθεί τοπικά το πεδίο, προκειμένου να προκύψει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Στην βιβλιογραφία, προτείνονται δύο τρόποι τοπικής γραμμικοποίησης. Ο πρώτος [3] θεωρεί ότι όλες οι μέσες τιμές \vec{U}_j που περιλαμβάνονται στο stencil $S(i)$ έχουν όλες την ίδια τοπική ιακωβιανή $A(\vec{U}_i)$, δηλαδή ο μετασχηματισμός είναι

$$\vec{W}_j(\vec{U}_i) = R^{-1}(\vec{U}_i) \vec{U}_j, \quad \forall i-r \leq j \leq i-r+k \quad (3.91)$$

με το διάνυσμα ανακατασκευής να περιγράφεται ως

$$\vec{\mathcal{R}}[x; \vec{U}] = \sum_{k=1}^m \mathcal{R}[x; \bar{w}^k(\vec{U}_i)] \vec{r}_k(\vec{U}_i) \quad (3.92)$$

Ο δεύτερος τρόπος [1], με όμοια λογική, θεωρεί μία τοπική γραμμικοποίηση της ιακωβιανής, αλλά αυτή την φορά την θέτει ως averaged μεταξύ των δύο \vec{U}_j που μοιράζονται το ίδιο σύνορο. Η averaged ιακωβιανή $A_{i+\frac{1}{2}}$ μπορεί να προκύψει είτε μέσω της αριθμητικής μέσης τιμής των δύο γειτόνων είτε θεωρώντας την Roe - Averaged ιακωβιανή, που προκύπτει σύμφωνα με τις σχέσεις (2.47).

Στα αριθμητικά αποτελέσματα θα γίνει αναλυτική αναφορά και για τα δύο είδη γραμμικοποίησης.

3.6 Ανακατασκευή Διδιάστατου Πεδίου

Η επίλυση διδιάστατων πεδίων ροής απαιτεί την εύρεση του αριθμητικού διανύσματος της ροής στις δύο κατευθύνσεις. Στις περισσότερες μεθόδους πεπερασμένων όγκων υπολογίζεται η μέση τιμή του ολοκληρώματος του αριθμητικού διανύσματος της ροής που διέρχεται από το όριο, κάνοντας χρήση του διανυσματικού αθροίσματος δύο ανεξάρτητων μονοδιάστατων ανακατασκευών κατά x και κατά y . Πιο συγκεκριμένα, δεδομένων των μέσων τιμών $\{\vec{U}_{ij}\}$ η διδιάστατη ανακατασκευή του πεδίου περιγράφεται ως

$$\vec{\mathcal{R}}^+ [x, y; \vec{U}_{ij}] = \vec{\mathcal{R}} [x; \vec{U}_{ij}] + \vec{\mathcal{R}} [y; \vec{U}_{ij}] \quad (3.93)$$

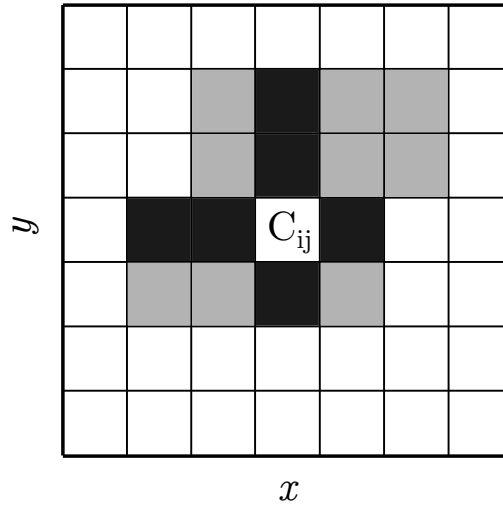
Στην περίπτωση των καρτεσιανών πλεγμάτων θεωρούμε ότι αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική.

Εν γένει όμως, όταν επιδιώκεται αυστηρά υψηλής τάξης ακρίβειας επιλέγεται η προσέγγιση του διανυσματικού γινομένου των δύο ανακατασκευών, η οποία περιγράφεται ως

$$\vec{\mathcal{R}}^2 [x, y; \vec{U}_{ij}] = \vec{\mathcal{R}} [y; \vec{\mathcal{R}} [x; \vec{U}_{ij}]] \quad (3.94)$$

Κάνοντας χρήση του τελεστή που περιγράφεται στην σχέση (3.94), μπορεί να ευρεθεί η τιμή αριθμητικού διανύσματος σε m Gauss κόμβους και το ολοκλήρωμα στις πλευρές, λ.χ στην $i + \frac{1}{2}, j$, προκύπτει από Gauss ολοκλήρωση ως

$$\vec{\mathcal{F}}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) = \sum_m \omega_m \vec{\mathcal{F}}^{riem}(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j + \beta_m \Delta y) \quad (3.95)$$



Σχήμα 3.5: Σύγκριση του τελεστή $\overline{\mathcal{R}}^+ [x, y; \overline{U}_{ij}]$ (μαύρο χρώμα) με τον τελεστή $\overline{\mathcal{R}}^2 [x, y; \overline{U}_{ij}]$ (γκρι χρώμα) για την ανακατασκευή του διδιάστατου πεδίου στο κελί C_{ij}

όπου οι κόμβοι Gauss που υπολογίστηκαν βάσει του συντελεστή ανακατασκευής $\overline{\mathcal{R}}^2$ και ω_m οι συντελεστές βαρύτητας της Gauss ολοκλήρωσης.

Η διαφορά των δύο ανακατασκευών φαίνεται στο σχήμα 3.5. Γίνεται εμφανές, ότι θεωρώντας το διανυσματικό γινόμενο των δύο συναρτήσεων λαμβανονται υπ' όψιν περισσότερα κελιά.

Όπως έχει αναφέρθηκε και πιο πριν στην παρούσα ανάλυση θα χρησιμοποιηθεί ο τελεστής $\overline{\mathcal{R}}^+ [x, y; \overline{U}_{ij}]$, καθώς η επίλυση θα περιλαμβάνει μόνο καρτεσιανά πλέγματα και το υπολογιστικό κόστος του τελεστή $\overline{\mathcal{R}}^2 [x, y; \overline{U}_{ij}]$ καθιστά την χρήση του ιδιαίτερα δύσκολη.

Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται συγκριτικά τα θετικά και τα αρνητικά της χρήσης πεπερασμένων όγκων έναντι της χρήσης πεπερασμένων διαφορών.

Πίνακας 3.1: Σύγκριση της μεθόδου πεπερασμένων όγκων με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τους αλγόριθμους ENO και WENO

	FV ENO/WENO	FD ENO/WENO
Arbitrary Meshes	Yes	No
Easy to Entend to nD	No	Yes
Operation Count (1D)	N	N
Operation Count (nD)	n·M·N	n· N

Κεφάλαιο 4

Αποτελέσματα Μονοδιάστατης Συμπιεστής Ροής

Στην παρούσα ενότητα, θα παρουσιαστούν κάποια κλασικά παραδείγματα μονοδιάστατης ροής, προκειμένου να καταδείξουμε τις ιδιαιτερότητες, τα πλεονεκτήματα, αλλά και τις αδυναμίες της ανακατασκευής του πεδίου με βάση τα σχήματα ENO και WENO έναντι της κλασικής δεύτερης τάξης προσέγγισης MUSCL του Van Leer. Οι μονοδιάστατες εξισώσεις Euler περιγράφονται από την σχέση (4.1).

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{0} \quad (4.1)$$

ενώ τα, αντίστοιχα, διανύσματα των συντηρητικών μεταβλητών και της ατρισβούς ροής εκφράζονται ως

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

4.1 Essentially Non - Oscillatory

Αρχικά, θα εξεταστούν τα σχήματα ENO και θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από το σχήμα MUSCL. Η γραμμικοποίηση που θα χρησιμοποιηθεί για τα σχήματα ENO, θα προκύπτει από την τοπική ιακωβιανή του κάθε κόμβου (Characteristicwise Reconstruction), όπως παρουσιάστηκε στο αρχικό άρθρο [3]. Η γραμμικοποίηση σύμφωνα με την Roe-σταθμισμένη ιακωβιανή θα παρουσιάζεται μόνο στις περιπτώσεις που υπάρχει κάποια απόκλιση μεταξύ των δύο.

Σε όλες τις προσομοιώσεις επιδιώκεται ο συντελεστής CFL να είναι μικρότερος από 0.6.

Το πρόβλημα του Sod

Το πρώτο παράδειγμα μονοδιάστατης ροής, που θα εξεταστεί, είναι η επίλυση ενός σωλήνα κυμάτων χρούσης με αρχικές συνθήκες

$$\vec{V}_0(x) = \begin{cases} \{\rho_L = 1, u_L = 0, p_L = 1\} & x < x_0 \\ \{\rho_R = 0.125, u_R = 0, p_R = 0.1\} & x > x_0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε από τον Sod [23] και θεωρείται από τα πλέον κλασικά παραδείγματα πιστοποίησης μονοδιάστατου επιλύτη.

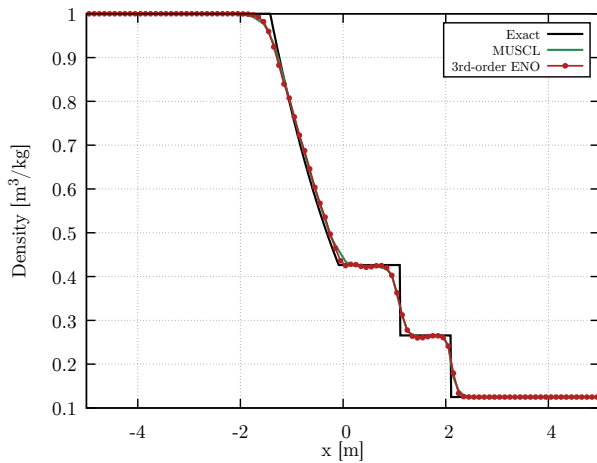
Οι οριακές συνθήκες τοίχου στα άκρα του πεδίου λήφθηκαν ως ανακλαστικές (reflective boundary conditions). Για την εφαρμογή τους, ορίστηκαν ψευδο-κόμβοι I_0, \dots, I_{k-1} για το αριστερό άκρο του πεδίου και αντίστοιχα $I_{N+1}, \dots, I_{N-k+1}$ στο δεξί.

$$\begin{aligned} \rho_{-j+1} &= \rho_1, & \rho u_{-j+1} &= -\rho u_1, & E_{-j+1} &= E_1, & j &= 1, \dots, k \\ \rho_{N+j} &= \rho_N, & \rho u_{N+j} &= -\rho u_N, & E_{N+j} &= E_N, & j &= 1, \dots, k \end{aligned} \quad (4.4)$$

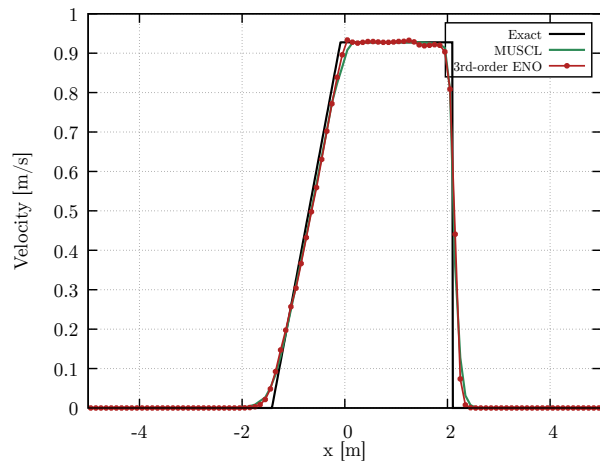
Για να είναι εφικτή η k τάξης ανακατασκευή του πεδίου, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον k διαθέσιμα σημεία, στα οποία δεν θα παρεμβάλλεται ασυνέχεια (κεφάλαιο 3.2). Επιλέγοντας αυτού του τύπου τις οριακές συνθήκες γίνεται εφικτή η πτώση τάξης στα άκρα του υπολογιστικού πεδίου, πετυχαίνοντας την αριθμητική ευστάθεια του σχήματος στην περίπτωση της ανάκλασης του κύματος κρούσης στο δεξί άκρο του πεδίου.

Για την επίλυση ορίστηκε μήκος υπολογιστικού πεδίου $L = 10$, αριθμός κόμβων $N = 100$ και θέση διαφράγματος στο $x_0 = 0$. Η ροή επιλύθηκε με $CFL = 0.22$.

Αρχικά, στο σχήμα 4.1 παρουσιάζεται το σχήμα ENO με τρίτης τάξης ακρίβεια, το σχήμα MUSCL καθώς και η ακριβής λύση του προβλήματος [24]. Η ανακατασκευή του πεδίου στο σχήμα ENO έγινε με βάση το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών (Componentwise Reconstruction). Με το σχήμα ENO παρατηρείται ότι υπάρχει βελτίωση, ώστε και μικρή, τόσο στα σημεία των ασυνεχειών, όσο και στο κύμα αποτόνωσης. Ακόμα, παρατηρείται η ταλαντωτική συμπεριφορά του πεδίου κοντά στην ασυνέχεια επαφής και το κύμα κρούσης. Όπως έχει επισημανθεί αυτό οφείλεται στην σύζευξη των εξισώσεων Euler. Παρόλα αυτά για πρακτικούς υπολογισμούς η λύση θεωρείται ικανοποιητική.



(i) Διάγραμμα Πυκνότητας

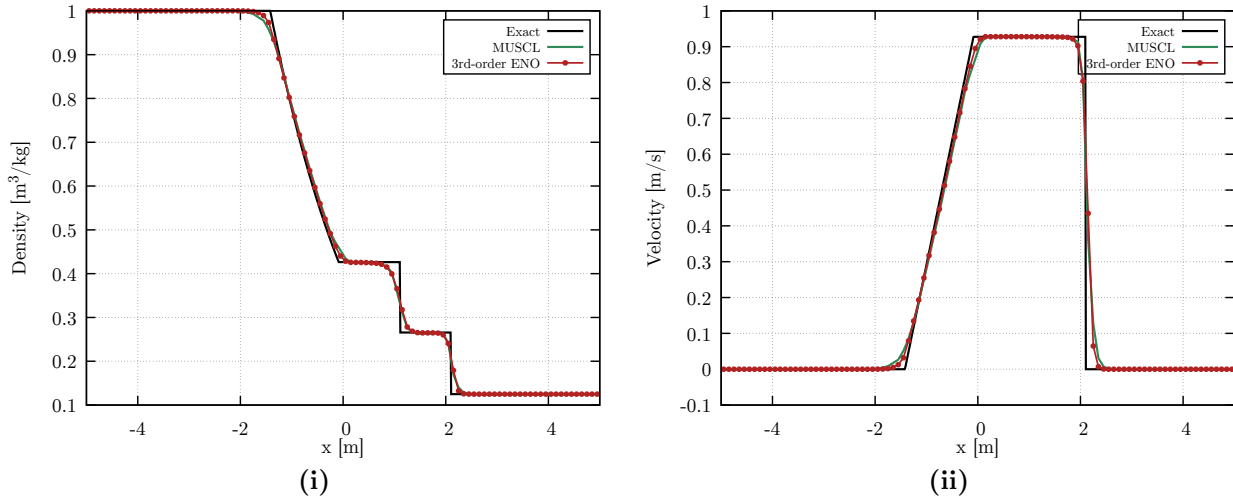


(ii) Διάγραμμα Ταχύτητας

Σχήμα 4.1: Sod's Shock Tube ($t=1.2s$): Συγκριτικά διαγράμματα ακριβούς λύσης με τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και 3ης τάξης ENO (Componentwise)

Προκειμένου να αντιμετωπισθεί ο αριθμητικός “θόρυβος” που προκύπτει από την συντηρητική ανακατασκευή του πεδίου, μετασχηματίζεται το πεδίο χρησιμοποιώντας την τοπική ιακωβιανή του κόμβου στον οποίο ανήκει η προς ανακατασκευή πλευρά (Characteristicwise). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.2. Παρατηρείται ότι ο “θόρυβος” έχει σβήσει.

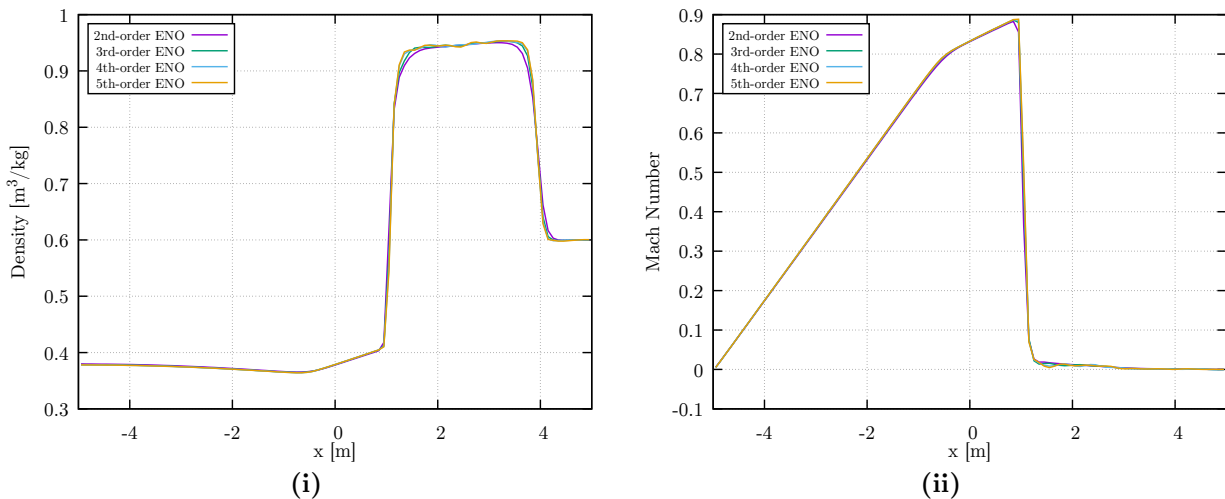
Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα των σχημάτων ENO είναι ότι γίνεται δυνατή η αυθαίρετη αύξηση της τάξης του αριθμητικού σχήματος χωρίς να απαιτείται περαιτέρω προγραμματιστική



Σχήμα 4.2: Sod's Shock Tube ($t=1.2s$): Συγκριτικά διαγράμματα ακριβούς λύσης με τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και 3ης τάξης ENO (Characteristicwise)

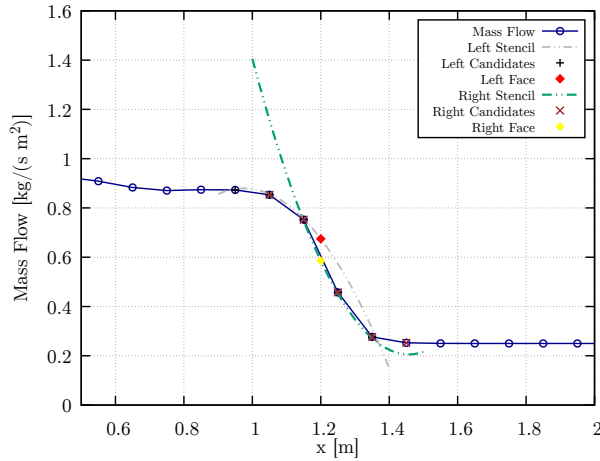
προσπάθεια. Στο σχήμα 4.3, παρουσιάζονται τα διαγράμματα της πυκνότητας και της πίεσης κοντά στο κύμα κρούσης και στην ασυνέχεια επαφής (πυκνότητα), μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης στο δεξί άκρο.

Ένα από τα κύρια προβλήματα που αντιμετωπίστηκαν είναι η ευστάθεια των σχημάτων ENO μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης στο δεξί άκρο του σωλήνα. Εκτός από την τοπική πτώση τάξης του σχήματος με την χρήση ανακλαστικών οριακών συνθηκών, χρειάστηκε να εφαρμοστεί η Upwind τεχνική που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.2. Η χρήση αυτής της μεθόδου καθιστά ευσταθή τα σχήματα δεύτερης και τρίτης τάξης, με τα σχήματα όμως τέταρτης και πέμπτης τάξης να παρουσιάζουν ταλαντωτική συμπεριφορά μετά την ανάκλαση.

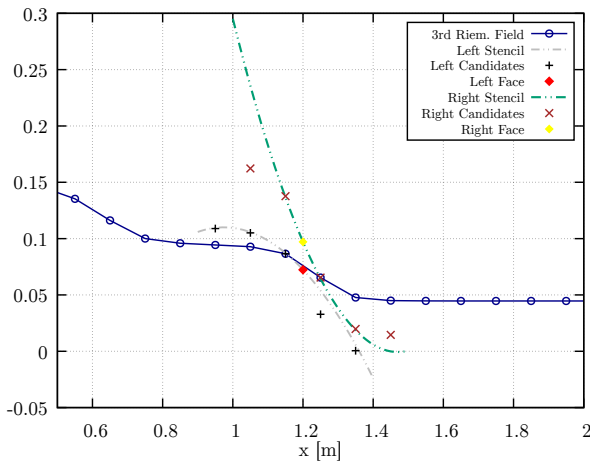


Σχήμα 4.3: Sod's Shock Tube ($t=8s$): Συγκριτικά διαγράμματα, μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης, για διάφορες τάξεις ακρίβειας ENO (Characteristicwise)

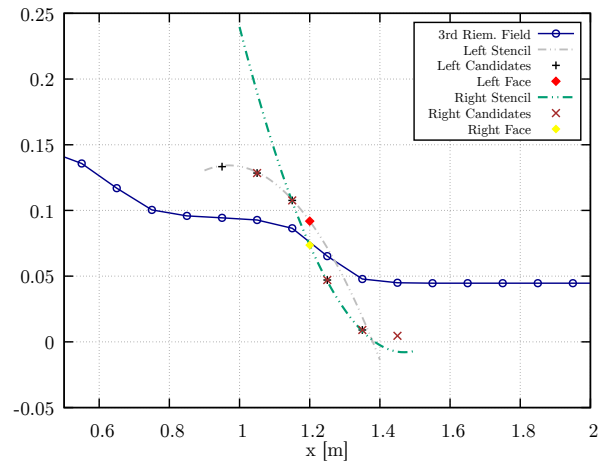
Θεωρείται χρήσιμο να εστιάσουμε περισσότερο στα ροϊκά μεγέθη που μπορεί να εφαρμοστεί ο τελεστής ανακατασκευής. Στο σχήμα 4.4 παρουσιάζονται, για την ίδια χρονική στιγμή τα πεδία ανακατασκευής: η ανακατασκευή απευθείας στο συντηρητικό πεδίο (Componentwise Reconstruction) και η ανακατασκευή του τοπικά γραμμικοποιημένου πεδίου χρησιμοποιώντας είτε την ιακωβιανή του εκάστοτε κόμβου (Characteristicwise Reconstruction) είτε την



(i) Componentwise



(ii) Characteristicwise



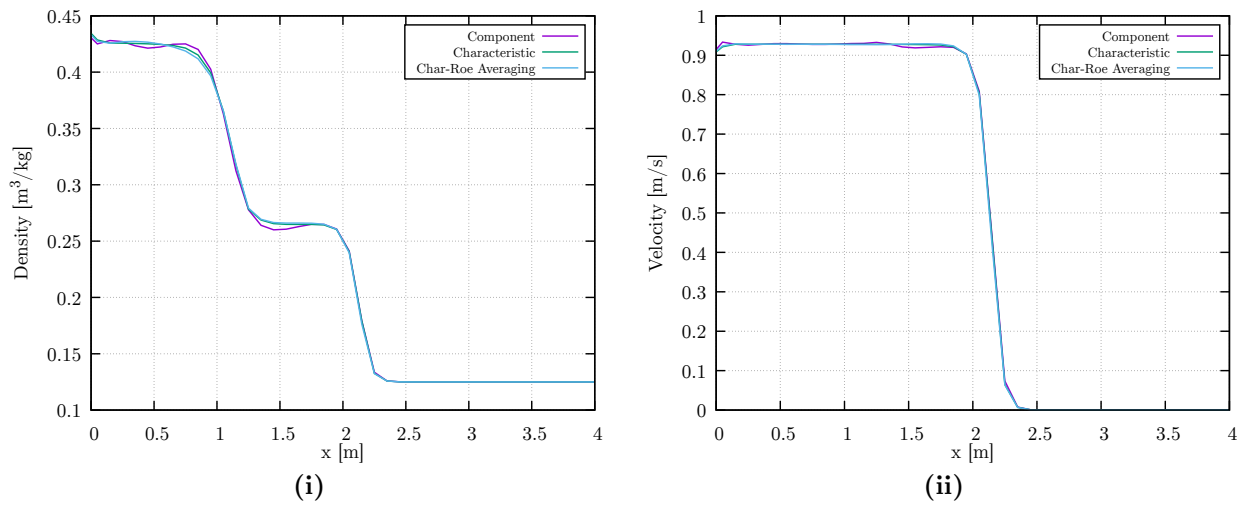
(iii) Roe-Averaged Characteristicwise

Σχήμα 4.4: Sod's Shock Tube ($t=0.6s$): Συγκριτικά διαγράμματα ανακατασκευής του τοπικού πεδίου, σύμφωνα με την 3ης τάξη προσέγγιση ENO

Roe σταθμισμένη ιακωβιανή ανάμεσα στους δύο κόμβους που μοιράζονται το σύνορο (Roe-Averaged Characteristicwise). Στο σχήμα φαίνονται τα πραγματικά πεδία, τα υποψήφια κελιά για την παρεμβολή του πολυωνύμου, καθώς και η προκύπτουσα τιμή στο όριο για τις δύο καταστάσεις.

Παρατηρείται, ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιείται η τοπική ιακωβιανή για την γραμμικοποίηση του πεδίου, προκύπτουν διαφορετικά πεδία για τον δεξιά και τον αριστερά κόμβο. Ακόμα, παρατηρείται η διαφορά του πραγματικού πεδίου των χαρακτηριστικών μεταβλητών από το γραμμικοποιημένο.

Η γραμμικοποίηση προφανώς επηρεάζει την ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος κοντά στις ασυνέχειες. Στο σχήμα 4.5 παρουσιάζονται τα διαγράμματα της πυκνότητας και της ταχύτητας όπως προέκυψαν από την εκάστοτε ανακατασκευή του πεδίου, εστιασμένα στο κύμα κρούσης και στην ασυνέχεια επαφής (πυκνότητα), για μία χρονική στιγμή. Είναι εμφανής η αριθμητική διάχυση λόγω γραμμικοποίησης, με αυτή της τοπικής ιακωβιανής να δίνει καλύτερα αποτελέσματα.



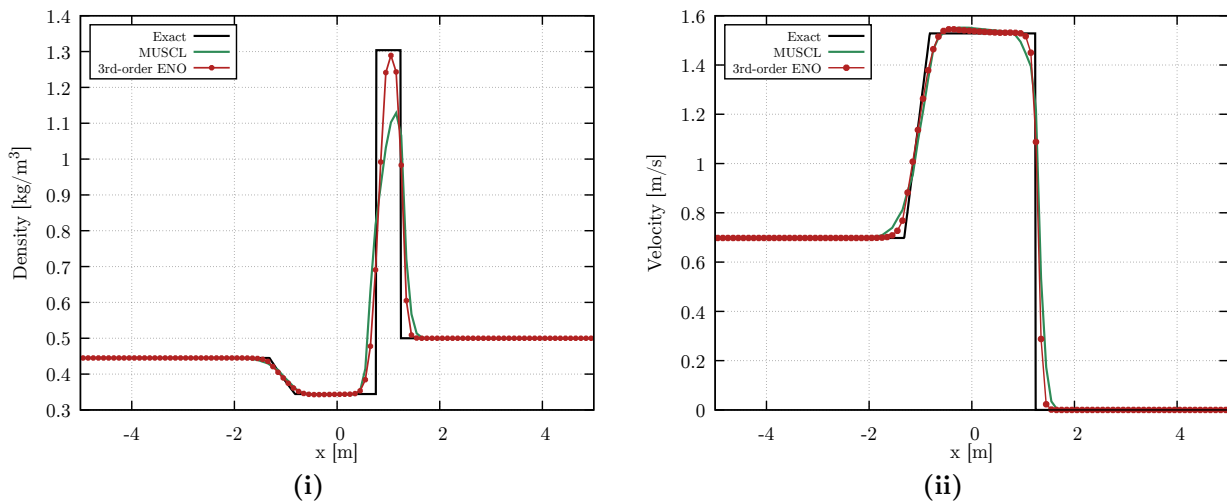
Σχήμα 4.5: Sod's Shock Tube ($t=1.2s$): Συγκριτικά διαγράμματα αποτελεσμάτων εφαρμογής του τελεστή ανακατασκευής στο πραγματικό πεδίο και στα γραμμικοποιημένα

Το Πρόβλημα του Lax

Το επόμενο παράδειγμα συμπιεστής ροής που θα εξεταστεί είναι το πρόβλημα Riemann που προτάθηκε από τον Lax [25]. Στο πρόβλημα αυτό ένα δεξιά οδεύον κύμα κρούσης συναντάει ρευστό που βρίσκεται σε ηρεμία. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος δίνονται από την σχέση 4.5, όπου η κατάσταση L συμβολίζει την κατάσταση πίσω από το κύμα κρούσης. Εφαρμόζονται οριακές συνθήκες επ'άπειρου ροής (farfield) στο αριστερό άκρο του πεδίου με την χρήση ψευδο-κόμβων, τεχνική παρόμοια με αυτήν της ανάκλασης (σχέση (4.4)), ενώ στο δεξί άκρο εφαρμόζονται ανακλαστικές οριακές συνθήκες.

$$\vec{V}_0(x) = \begin{cases} \{\rho_L = 0.445, u_L = 0.698, p_L = 3.528\}, & x < x_0 \\ \{\rho_R = 0.5, u_R = 0, p_R = 0.571\}, & x > x_0 \end{cases} \quad (4.5)$$

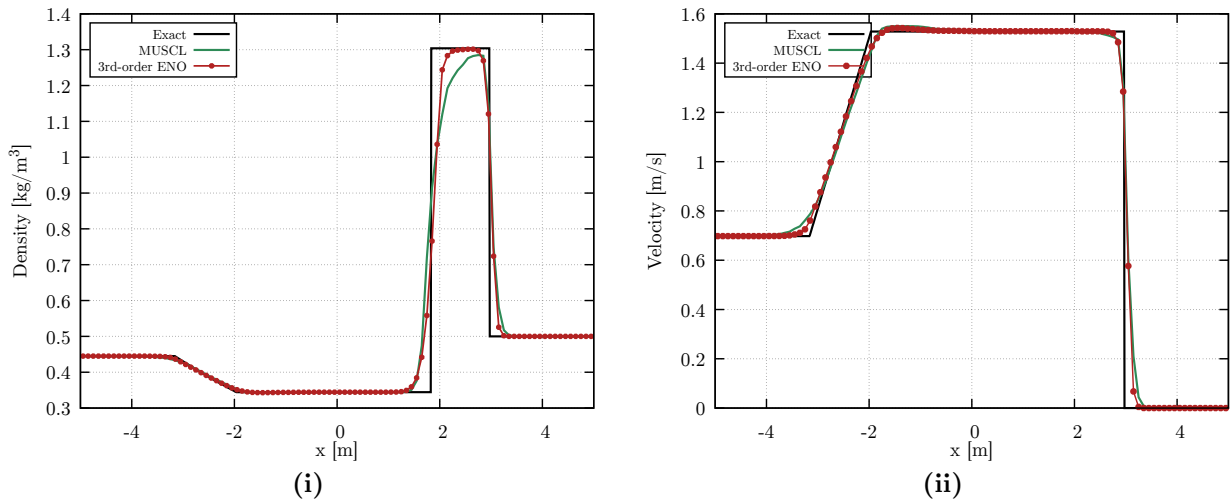
Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιήθηκε η ίδια δομή με το προηγούμενο πρόβλημα, το μήκος του πεδίου είναι $L = 10$, χρησιμοποιούνται $N = 100$ κόμβοι και η αρχική θέση του κύματος κρούσης είναι στο κέντρο του πεδίου $x_0 = 0$. Η επίλυση έγινε με συντελεστή $CFL = 0.46$. Στα δύο επόμενα σχήματα παρουσιάζονται οι δύο αριθμητικές λύσεις, καθώς και η ακριβής λύση του προβλήματος.



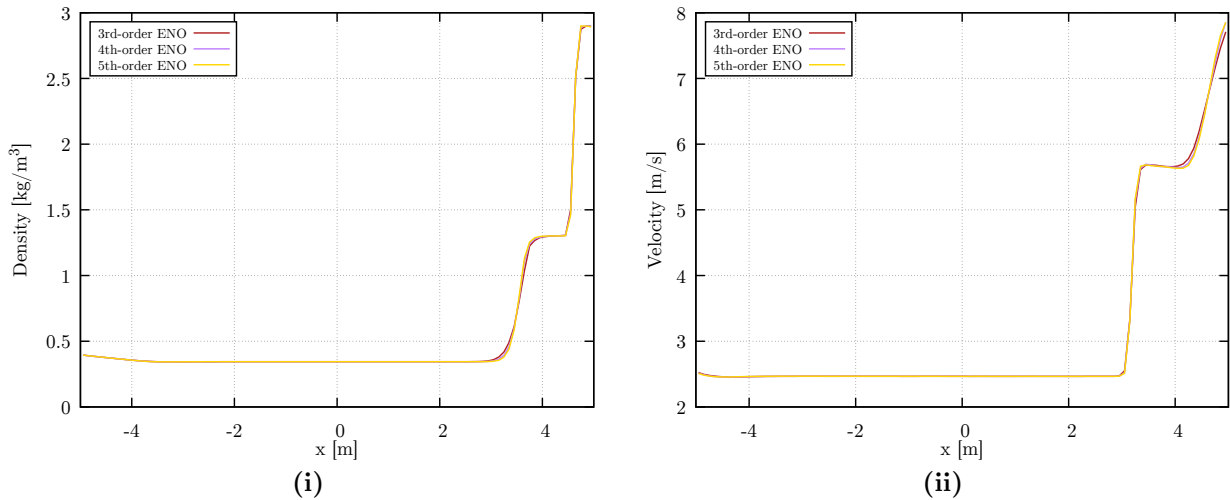
Σχήμα 4.6: Lax's Riemann Problem ($t=0.5s$): Συγκριτικά διαγράμματα ακριβούς λύσης με τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και 3ης τάξης ENO (Characteristicwise)

Η ιδιαιτερότητα αυτού του προβλήματος είναι οι δύο πολύ ισχυρές ασυνέχειες, ασυνέχεια επαφής και κύμα κρούσης, που εμφανίζονται στο πεδίο υπό με τετραγωνικού παλμού. Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6 το σχήμα ENO υπερτερεί έναντι του σχήματος MUSCL, την χρονική στιγμή όπου δεν υπάρχουν πολλοί κόμβοι εντός του παλμού. Σε επόμενη χρονική στιγμή (σχ. 4.7) όπου το κύμα κρούσης έχει απομακρυνθεί από την ασυνέχεια επαφής, το σχήμα MUSCL μπορεί να ανιχνεύσει το κύμα κρούσης με καλή ακρίβεια, σε αντίθεση με την ασυνέχεια επαφής όπου υπάρχει μεγάλη αριθμητική διάχυση.

Στο διάγραμμα 4.8 παρουσιάζονται οι καμπύλες για διάφορες τάξεις ακρίβειας του σχήματος ENO, μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης στον τοίχο για τα μεγέθη της πυκνότητας και της ταχύτητας (σχ. 4.8). Προφανώς, όσο αυξάνει η ακρίβεια τόσο καλύτερη ανίχνευση των μετώπων των ασυνεχειών γίνεται. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτήν την περίπτωση δεν εμφανίστηκαν σε κανένα σημείο της επίλυσης ταλαντωτική συμπεριφορά, ούτε στις μεγάλες τάξεις ακρίβειας μετά την ανάκλαση του κύματος, όπως συνέβη στο πρόβλημα του Sod. Αυτό



Σχήμα 4.7: Lax's Riemann Problem ($t=1.2s$): Συγκριτικά διαγράμματα ακριβούς λύσης με τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και 3ης τάξης ENO (Characteristicwise)



Σχήμα 4.8: Lax's Riemann Problem ($t=2.3s$): Συγκριτικά διαγράμματα για διάφορες τάξεις ακρίβειας ENO (Characteristicwise)

οφείλεται στο γεγονός ότι σε αυτήν την περίπτωση η πυκνότητα είναι μεγαλύτερη πίσω από το κύμα κρούσης από ότι πίσω από την ασυνέχεια επαφής, σχήμα 4.7, με αποτέλεσμα να μην δημιουργείται η οριακή κατάσταση όπου οι δύο ασυνέχειες τείνουν να συγκρουστούν, οπότε καθώς μειώνεται ο αριθμός σημείων ανάμεσα τους προκαλείται εν τέλει αστάθεια.

Αλληλεπίδραση Κυμάτων Κρούσης

Το τρίτο αριθμητικό πείραμα περιλαμβάνει στις αρχικές του συνθήκες τρεις διαφορετικές περιοχές. Τα αέρια βρίσκονται υπό διαφορετική πίεση, με το κεντρικό τμήμα να έχει την μικρότερη πίεση. Όλα τα αέρια βρίσκονται σε κατάσταση ηρεμίας και η πυκνότητα τους είναι ίση με 1. Μόλις αρχίσει η ανάμιξη των αερίων, δημιουργούνται δύο κύματα κρούσης, διαφορετικής έντασης, που κατευθύνονται και τα δύο προς το κέντρο και εν τέλει συγκρούονται.

Το πείραμα αυτό μελετήθηκε πλήρως από τους Woodward και Collela [26]. Οι αρχικές συν-

θήκες του προβλήματος είναι

$$\vec{V}_0(x) = \begin{cases} \{\rho_L = 1, u_L = 0, p_L = 10^3\}, & x < x_1 \\ \{\rho_M = 1, u_M = 0, p_M = 10^{-2}\}, & x_1 < x < x_2 \\ \{\rho_R = 1, u_R = 0, p_R = 10^2\}, & x > x_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Το υπολογιστικό πεδίο είναι $[0 : 1]$, ενώ τα αέρια διαχωρίζονται στα σημεία $x_1 = 0.1$ και $x_2 = 0.9$. Και στα δύο άκρα οι συνοριακές συνθήκες είναι ανακλαστικές (κλειστός σωλήνας).

Αρχικά, λύνεται το πρόβλημα για 400 κόμβους και $CFL = 0.54$. Στο σχήμα 4.9 παρουσιάζονται τέσσερις χρονικές στιγμές της εξέλιξης του φαινομένου, για τέταρτης τάξης ENO και MUSCL. Για $t = 0.010s$ τα κύματα κρούσης μόλις έχουν δημιουργηθεί. Η χρονική στιγμή $t = 0.026s$ περιγράφει το πεδίο λίγο πριν τη σύγκρουση των δύο κυμάτων, ενώ η $t = 0.028s$ αμέσως μετά τη σύγκρουση. Τέλος, η χρονική στιγμή $t = 0.038s$ παρουσιάζει το πεδίο όταν τα κύματα κρούσης έχουν απομακρυνθεί.

Το σχήμα ENO υπερτερεί πάλι σε σχέση με το MUSCL. Πριν την σύγκρουση, στο αριστερό οδύον κύμα κρούσης δεν υπάρχει επαρκής προσομοίωση των χαρακτηριστικών του, περίπτωση όμοια με το πρόβλημα Lax. Όπως, και στα δύο στιγμιότυπα μετά την σύγκρουση το σχήμα ENO, προσομοιώνει καλύτερα το φαινόμενο τόσο σε επίπεδο μορφής, όσο και σε επίπεδο ακροτάτων. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [26], για την ακριβή αναπαράσταση του πεδίου.

Ένα σημαντικό πρόβλημα που αντιμετωπίστηκε κατά την διάρκεια της προσομοίωσης αυτής είναι η επίλυση της περιοχής λίγο πριν τη σύγκρουση των δύο κυμάτων (σχήμα 4.9ii), την στιγμή που οι εναπομείναντες κόμβοι είναι λιγότεροι από αυτούς που απαιτούνται για παρεμβολή k τάξης. Σημειώνεται ότι, δεδομένων σημείων $P(x_{-1}) = 240, P(x_0 = 0.01), P(x_1) = 40$, η παρεμβολή τους έχει ως αποτέλεσμα η προκύπτουσα παραβολή να είναι αρνητική για κάποιο διάστημα. Το ίδιο συμβαίνει στην περίπτωση της σύγκρουσης των δύο κυμάτων, με αποτέλεσμα βασικά μεγέθη της ροής, όπως η πίεση και η πυκνότητα, να γίνονται αρνητικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις η πτώση τάξης καθίσταται επιτακτική.

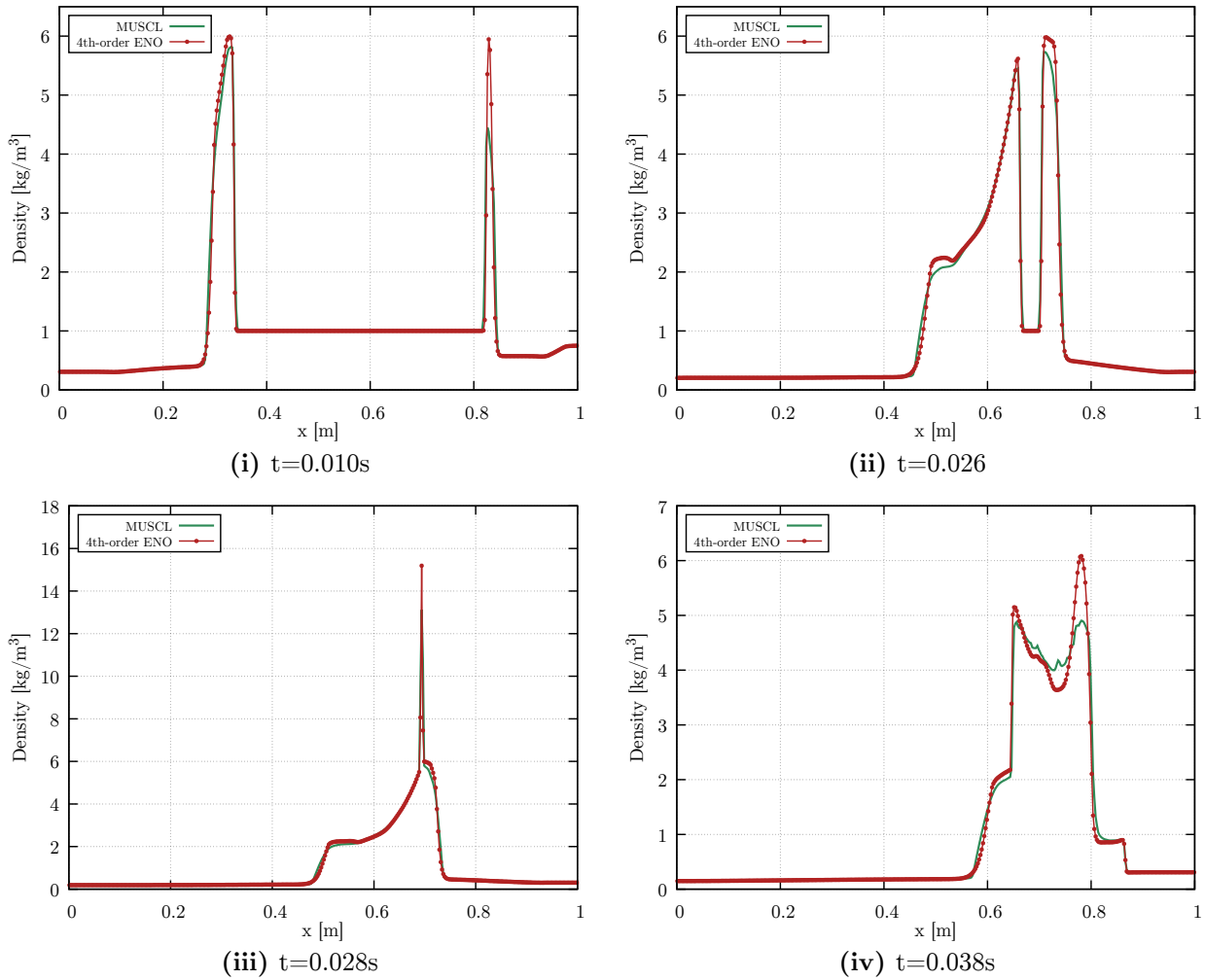
Σκοπός είναι να βρεθεί ένα κριτήριο πτώσης τάξης, ούτως ώστε η πτώση να γίνεται μόνο σε τέτοιες, ειδικές, περιπτώσεις και σε όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές η τάξη να είναι σταθερά υψηλή. Η ανακατασκευή του πεδίου για την πίεση και την πυκνότητα μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός αναπτύγματος Taylor. Επιθυμώντας η πίεση και η πυκνότητα να είναι θετικές

$$\begin{aligned} p_i + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial^r p}{\partial x^r} \Big|_{x_i} \frac{(x - x_i)^r}{r!} &> 0 \\ \rho_i + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial^r \rho}{\partial x^r} \Big|_{x_i} \frac{(x - x_i)^r}{r!} &> 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Στο [3] ορίζεται ως κριτήριο ένα άνω φράγμα στη συμβολή των παραγώγων στην προεκβολή των μεταβλητών στο όριο του κελιού, δηλαδή

$$\sum_{r=1}^{k-1} \left| \frac{\partial^r P}{\partial x^r} \right| \frac{(h/2)^r}{r!} < C v_i \quad (4.8)$$

όπου C , μία σταθερά μικρότερης της μονάδας. Η δυσκολία με αυτό το κριτήριο έγκειται στην επιλογή της παραμέτρου C , η οποία εξαρτάται τόσο από το πρόβλημα όσο και από τη χρονική διακριτοποίησή του. Για αυτό τον λόγο, στον κώδικα που αναπτύχθηκε προτιμήθηκε η άμεση επιβολή του κριτηρίου της θετικής τιμής. Δηλαδή μόνο όταν προκύψει αρνητική τιμή σε κάποια



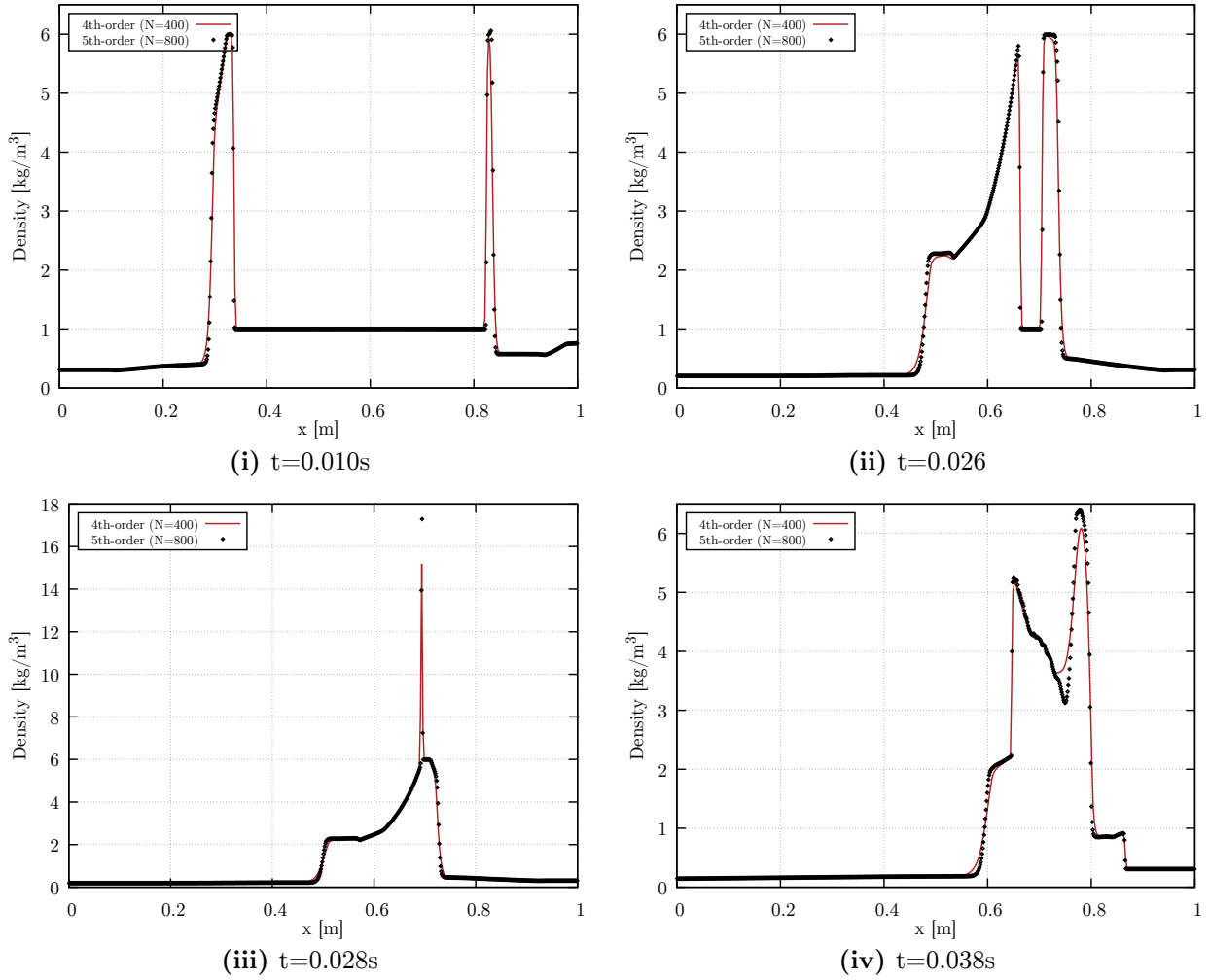
Σχήμα 4.9: Interaction of Blasts Waves: Συγκριτικά διαγράμματα για τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και 4ης τάξης ENO (Characteristicwise), για διάφορες χρονικές στιγμές

από τα δύο μεγέθη να μειώνεται η τάξη. Ο κώδικας καταγράφει την πτώση τάξης, όπου αυτή συμβαίνει.

Στην προσομοίωση με $N = 400$ και ανακατασκευή τύπου Characteristicwise υπήρξε πτώση δεύτερης και τρίτης τάξης λίγο πριν την σύγκρουση, ενώ πρώτης τάξης έγινε μόνο για ένα χρονικό βήμα ακριβώς πριν την σύγκρουση. Αξίζει να σημειωθεί ότι το ίδιο πρόβλημα με ανακατασκευή τύπου Roe-Averaged Characteristicwise δεν υπήρξε πτώση σε πρώτη τάξη, ενώ μειώθηκε και ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που υπήρξε πτώση τάξης.

Επιπρόσθετα παρατηρήθηκε ότι η γραμμικοποίηση με βάση την σταθμισμένη Roe ιακωβιανή αποδείχθηκε σε αυτό το πρόβλημα πιο σταθερή σε σχέση με την γραμμικοποίηση με βάση την αντίστοιχη τοπική. Η δεύτερη παρουσιάζει αστάθειες για πιο πυκνά πλέγματα και απαιτείται μεγάλη μείωση του CFL. Αντίθετα, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με την Roe ιακωβιανή, ακόμα και για πέμπτης τάξης ακρίβεια.

Στο σχήμα 4.10 παρουσιάζεται ως ακριβής λύση, το πέμπτης τάξης σχήμα ENO με ανακατασκευή τύπου Roe-Averaged Characteristicwise, για $N = 800$ και CFL επίλυσης της ροής 0.4, και συγκρίνεται με την ENO καμπύλη του προηγούμενου σχήματος. Παρατηρείται ότι οι δυο διαφέρουν ελάχιστα και θεωρείται ότι η λύση με τέταρτης τάξης ακρίβεια και $N = 400$ έχει “συγκλίνει”.



Σχήμα 4.10: Interaction of Blasts Waves: Συγκριτικά διαγράμματα 4ης τάξης ENO ($N=400$) (Characteristicwise) και 5ης τάξης ENO ($N=800$) (Roe-Characteristicwise), για διάφορες χρονικές στιγμές

Διακυμάνσεις Εντροπίας

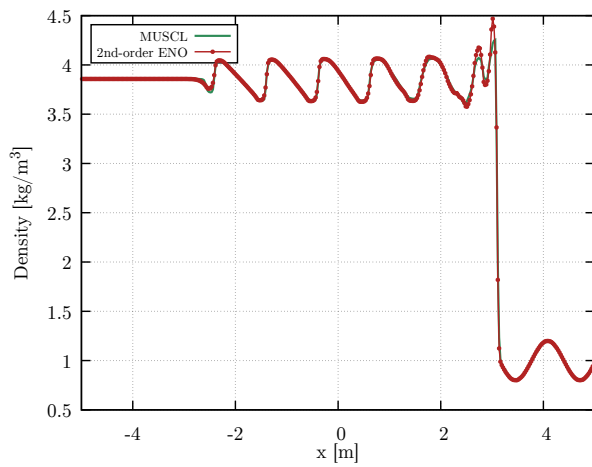
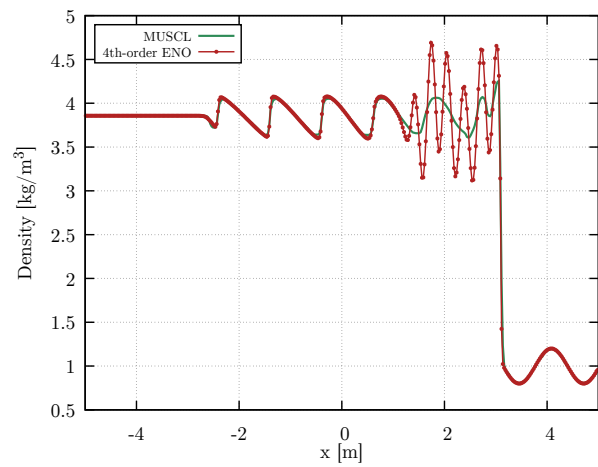
Στο τελευταίο αριθμητικό πείραμα εξετάζεται η αλληλεπίδραση κυμάτων εντροπίας με κύμα κρούσης που κινείται με ταχύτητα $Mach = 3$ [11]. Η εντροπία ορίζεται, στην παρούσα ανάλυση, ως p/ρ^γ . Στη σχέση 4.9 παρουσιάζονται τα αρχικά διανύσματα των μη συντηρητικών μεταβλητών. Οι οριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο είναι επ'απέιρου ροής, ενώ στο δεξί λαμβάνονται συνθήκες ανάκλασης.

Το ζητούμενο στο πρόβλημα αυτό, είναι ο επιλύτης να μπορέσει να αποτυπώσει τις διακυμάνσεις της εντροπίας πίσω από το κύμα κρούσης. Για την επίλυση χρησιμοποιείται υπολογιστικό χωρίο $[-5 : 5]$, με 400 κόμβους αρχικά, συντελεστή επίλυσης της ροής $CFL = 0.5$ και $x_0 = -4$.

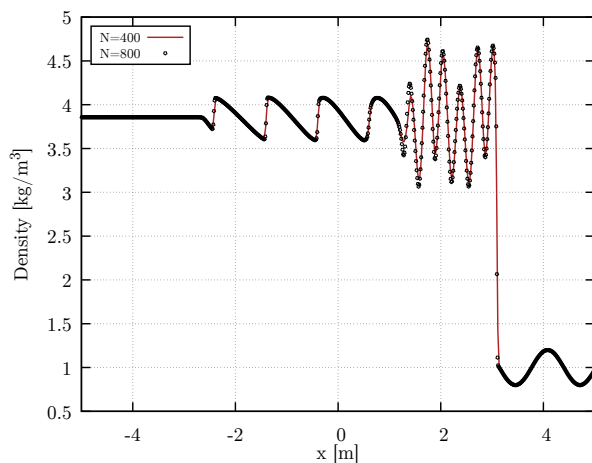
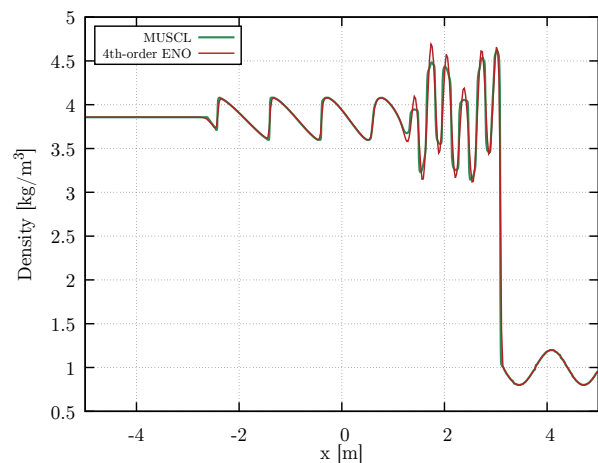
$$\vec{V}_0(x) = \begin{cases} \{\rho_L = 3.857143, u_L = 2.629369, p_L = 10.333333\}, & x < x_0 \\ \{\rho_R = 1, u_R = 0, p_R = 1 + 0.2 \sin(5x)\}, & x > x_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Στο σχήμα 4.11i παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για δεύτερης τάξης ENO και MUSCL. Παρατηρείται ότι και οι δύο προσεγγίσεις δεν μπορούν να αποτυπώσουν ακριβώς το φαινόμενο. Διατηρώντας τις ίδιες ρυθμίσεις για την διακριτοποίηση, αυξάνεται η παρεμβολή του σχήματος

ENO σε τέταρτης τάξης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 4.11ii. Παρατηρείται αισθητή διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων σε σχέση με πριν, με το σχήμα ENO να αποτυπώνει, πλέον, μία μεγαλύτερη σε εύρος μεταβατική περιοχή πίσω από το κύμα κρούσης.

(i) MUSCL και 2ης τάξης ENO: $N=400$ (ii) MUSCL και 4ης τάξης ENO: $N=400$

Σχήμα 4.11: Entropy Waves ($t=1.5s$): Συγκριτικά διαγράμματα για τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και τάξης ENO (Characteristicwise)

(i) 4ης τάξης ENO για $N=400$ και $N=800$ (ii) MUSCL: $N=1600$ και 4ης τάξης ENO: $N=400$

Σχήμα 4.12: Entropy Waves ($t=1.5s$): Συγκριτικά διαγράμματα για τις δύο αριθμητικές προσεγγίσεις, MUSCL και ENO (Characteristicwise)

Στο σχήμα 4.12i παρουσιάζονται το ENO σχήμα τέταρτης τάξης με 800 σημεία και συγκρίνεται με το αντίστοιχο σχήμα των 400 σημείων. Παρατηρείται ότι, δεν υπάρχει αισθητή διαφορά και για αυτό η λύση που προέκυψε με 400 σημεία θεωρείται ότι είναι και η “τελική”. Παράλληλα, προκειμένου να προκύψει παρόμοια ακρίβεια με το ENO σχήμα των 400 σημείων, χρειάστηκε το αυξηθεί κατά τέσσερις φορές η χωρική διακριτοποίηση για το MUSCL σχήμα (σχ. 4.12ii).

4.2 Weighted Essentially Non - Oscillatory

Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα προηγούμενα αριθμητικά πειράματα χρησιμοποιώντας τα σχήματα WENO και θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των σχημάτων ENO. Σκοπός του κεφαλαίου είναι να επισημανθούν τα πλεονεκτήματα της χρήσης ενός κυρτού

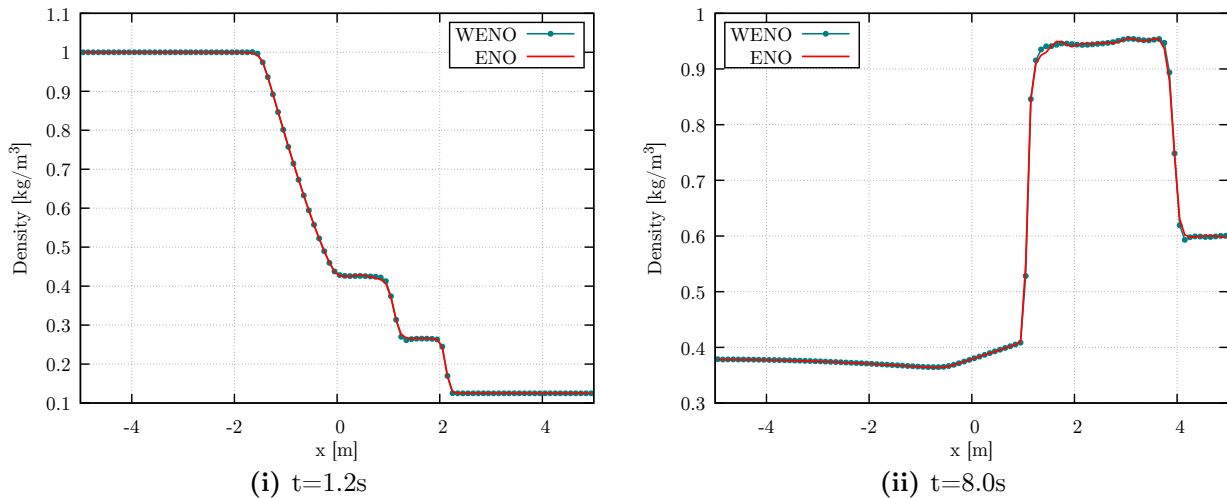
συνδυασμού όλων των υποψήφρων stencil στις συνεχείς περιοχές του πεδίου, καθώς και να αποτυπωθεί η συμπεριφορά των συντελεστών βαρύτητας κοντά στις ασυνέχειες.

Σε όλες τις περιπτώσεις η ανακατασκευή έγινε στα γραμμικοποιημένα χαρακτηριστικά πεδία, κάνοντας χρήση της τοπικής ιακωβιανής που περιέχει τις Roe-Averaged ποσότητες μεταξύ των δύο γειτονικών κελιών (Roe-Averaged Characteristicwise).

Το πρόβλημα του Sod

Όπως και προηγουμένως το πρώτο αριθμητικό πείραμα είναι ένας σωλήνας κυμάτων κρούσης, του οποίου οι αρχικές συνθήκες δίνονται από την σχέση (4.3). Οι υπολογιστικές παράμετροι διατηρούνται ίδιες με πριν, δηλαδή μήκος χωρίου $L = 10$, αριθμός κόμβων $N = 100$, χρονικό βήμα $dt = 0.01s$ και μέγιστος συντελεστής επίλυσης της ροής $CFL = 0.22$. Στο σχήμα 4.13 παρουσιάζεται η κατανομή της πυκνότητας για δύο χρονικές στιγμές, χρησιμοποιώντας σχήματα ENO και WENO πέμπτης τάξης ($k=5$).

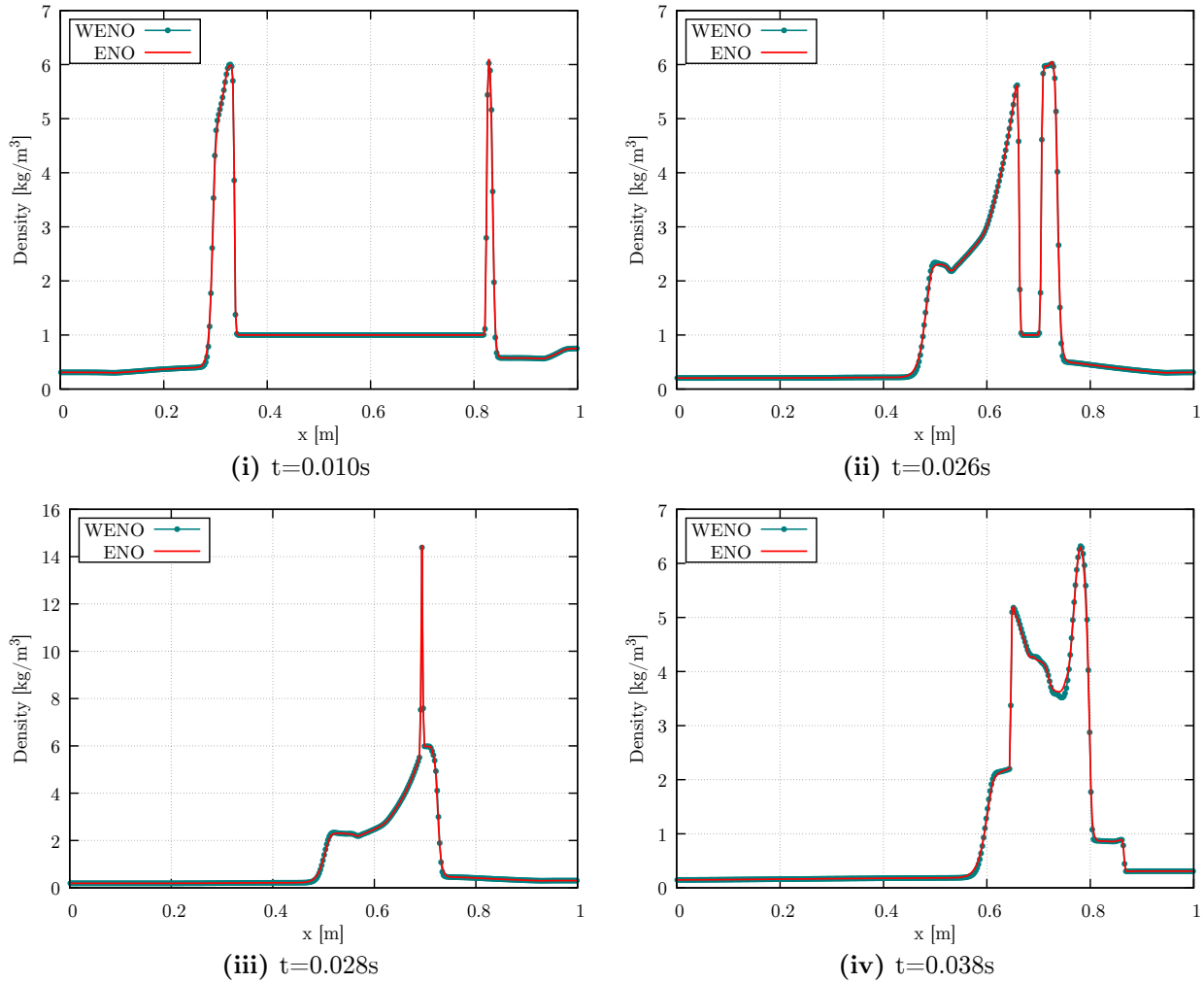
Παρατηρείται ότι, η χρήση του κυρτού συνδυασμού όλων των υποψήφρων stencil, κατέστησε το αριθμητικό σχήμα πιο ευσταθές σε σχέση με το ENO, μειώνοντας της αριθμητικές ταλαντώσεις ακόμα και μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης. Επιπλέον, εξ' αιτίας της σταθερότητας που εισήγαγαν τα σχήματα WENO, βελτιώθηκε η ανίχνευση των μετώπων των ασυνεχειών. Υπενθυμίζεται ότι κάνοντας χρήση των σχημάτων WENO χρησιμοποιούνται για την ανακατασκευή (στις συνεχείς περιοχές) $2k - 1$ κελιά, δηλαδή στην περίπτωση της 5ης τάξης, το ανακατασκευασμένο πεδίο γίνεται βάσει 9 υπολογιστικών κελιών.



Σχήμα 4.13: Sod's Shock Tube: Συγκριτικά διαγράμματα ENO 5ης τάξης και WENO 5ης τάξης (Roe-Averaged Characteristicwise)

Αλληλεπίδραση Κυμάτων Κρούσης

Η επόμενη αριθμητική προσομοίωση περιλαμβάνει κλειστό σωλήνα με αέρια που βρίσκονται, αρχικά, υπό τρεις διαφορετικές πιέσεις, δημιουργώντας δύο κύματα κρούσης που εν τέλει συγκρούονται. Στόχος είναι να καταστεί σαφές ότι, σε ροές που διέπονται από ασυνέχειες, οι συντελεστές βαρύτητας που χρησιμοποιήθηκαν στο σχήμα WENO λειτουργούν σωστά, προσομοιώνοντας την συμπεριφορά των σχημάτων ENO.



Σχήμα 4.14: Blasts Waves Interaction: Συγκριτικά διαγράμματα ENO 4ης τάξης και WENO 4ης τάξης (Roe-Averaged Characteristicwise)

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος δίνονται από την σχέση (4.6). Όπως και στην αντίστοιχη προσομοίωση στο κεφάλαιο 4.1, το μήκος του πεδίου είναι $L = 1m$, χρησιμοποιήθηκαν $N = 400$ υπολογιστικοί κόμβοι και ο μέγιστος αριθμός CFL είναι ίσος με 0.54.

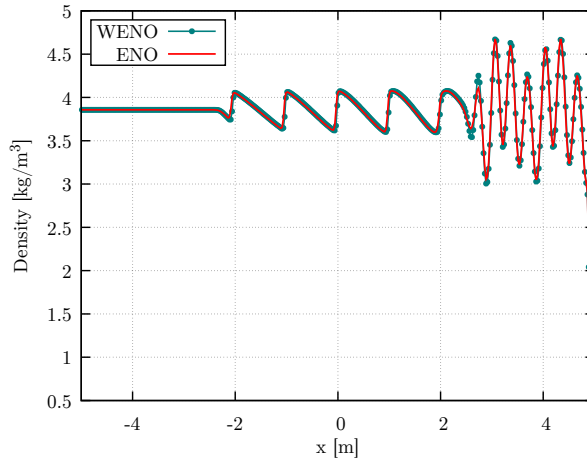
Στο σχήμα 4.14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για τέταρτης τάξης ENO και WENO, για τέσσερις διαφορετικές χρονικές στιγμές. Παρατηρείται ότι, δεν υπάρχει κάποια ουσιαστική διαφορά μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων.

Διακυμάνσεις Εντροπίας

Η τελευταία προσομοίωση που παρουσιάζεται αφορά την επίδραση ενός κινούμενου κύματος κρούσης, σε πεδίο όπου η εντροπία μεταβάλλεται ημιτονοειδώς. Όπως έχει αναφερθεί και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σκοπός της προσομοίωσης είναι να αποτυπωθεί πλήρως το πεδίο πίσω από το κύμα κρούσης, όπου υπάρχουν έντονες μεταβολές στην εντροπία.

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος δίνονται από την σχέση 4.9. Υπενθυμίζεται ότι η εντροπία υπολογίζεται ως p/ρ^γ . Οι παράμετροι της επίλυσης είναι: μήκος πεδίου $L = 10m$, αριθμός κόμβων $N = 400$ και μέγιστος συντελεστής $CFL=0.5$. Στο σχήμα 4.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τέταρτης ENO και τέταρτης τάξης WENO.

Στο σχήμα δεν διαπιστώνεται κάποια ουσιαστική διαφοροποίηση μεταξύ των δύο προσομοιώσεων.



Σχήμα 4.15: Entropy Waves ($t=2.5s$): Συγκριτικά διαγράμματα ENO 4ης τάξης και WENO 4ης τάξης (Roe-Averaged Characteristicwise)

4.3 Αριθμητική Διάχυση Σχημάτων ENO - WENO

Κύριο χαρακτηριστικό των σχημάτων ENO και WENO είναι ότι διατηρούν την k -τάξης ακρίβεια τους ακόμα και στην περίπτωση των ασυνεχειών, με αποτέλεσμα να μειώνουν την αριθμητική διάχυση του σχήματος.

Θέλοντας να ποσοτικοποιήσουμε την αριθμητική διάχυση, αναζητούμε το μήκος του πεδίου που επηρεάζεται από την ύπαρξη του κύματος κρούσης στο προφίλ της ταχύτητας στην περίπτωση του σωλήνα κυμάτων κρούσης του Sod. Για τον υπολογισμό του μήκους, αναζητούνται οι δύο κόμβοι, πριν και μετά το κύμα κρούσης, για τους οποίους ισχύει

$$|u_i - u_{i,exact}| \leq 1e^{-3} \quad (4.10)$$

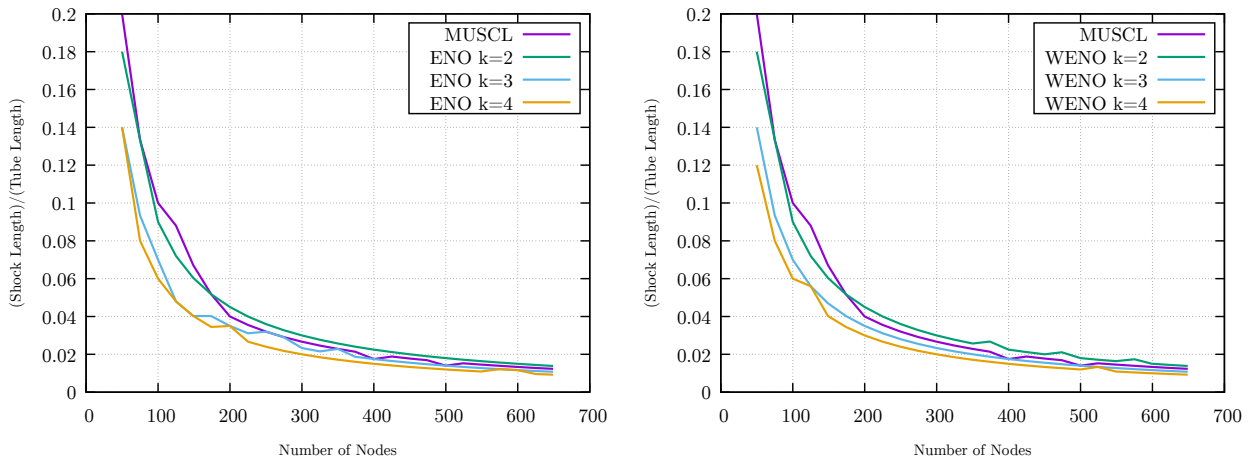
όπου u_i η τιμή που προέκυψε από την αριθμητική επίλυση του πεδίου και $u_{i,exact}$ η τιμή της αναλυτικής λύσης σε εκείνο το σημείο.

Στο σχήμα 4.16 παρουσιάζονται το επηρεαζόμενο μήκος ως προς το συνολικό μήκος του πεδίου για την χρονική στιγμή $t = 1.2s$, για το σχήμα MUSCL και τα σχήματα ENO - WENO από δεύτερης μέχρι τέταρτης τάξης, για διάφορες διακροτοποιήσεις.

Στα σχήματα παρατηρείται ότι για αριθμό κόμβων μεγαλύτερο από 400, η λύση έχει συγκλίνει για όλες τις περιπτώσεις. Για αριθμό κόμβων λιγότερο από 400, τα σχήματα τρίτης και τέταρτης τάξης ακρίβειας δίνουν καλύτερη προσέγγιση του μετώπου του κύματος κρούσης σε σχέση με την προσέγγιση MUSCL.

4.4 Διατήρηση Μονοτονίας

Στο τελευταίο μέρος του παρόντος κεφαλαίου θα παρουσιαστεί η επίδραση της επιβολής μονοτονίας στα σχήματα ENO. Στα προηγούμενα αριθμητικά παραδείγματα δόθηκαν μερικά παραδείγματα της αριθμητικής αστάθειας που προκαλείται για υψηλής τάξης σχήματα ($k \geq 4$). Η

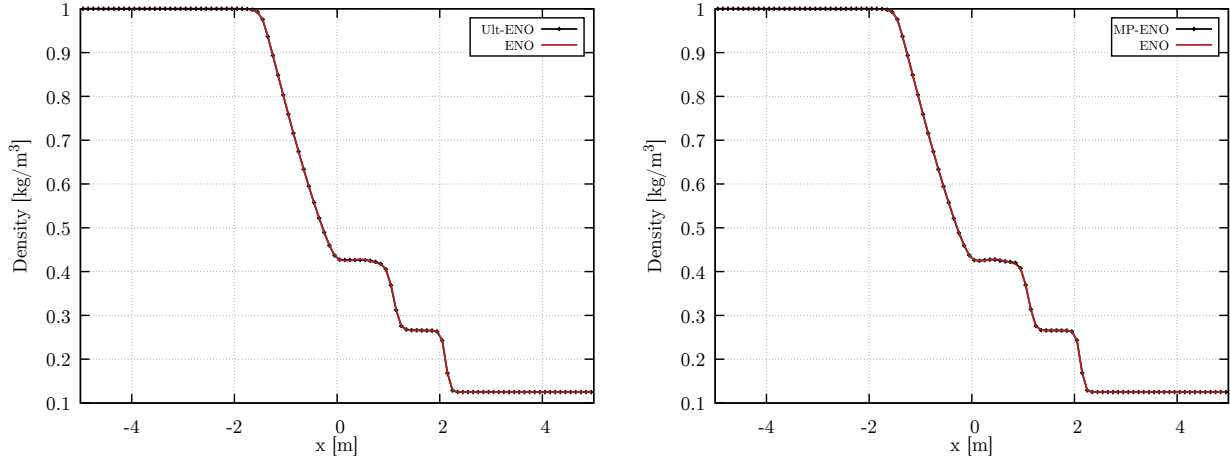


(i) ENO και MUSCL

(ii) WENO και MUSCL

Σχήμα 4.16: Sod’s Shock Tube ($t=1.2s$): ο λόγος μήκους πεδίου που επηρεάζεται από το κύμα κρούσης στην κατανομή ταχύτητας προς το συνολικό μήκος πεδίου συναρτήσει του αριθμού κόμβων

αστάθεια οφείλεται κυρίως στην με διατήρηση της μονοτονίας στο ανακατασκευασμένο πεδίο. Θα παρουσιαστούν εκ νέου κάποιες από αυτές τις προσομοιώσεις, διατηρώντας τις ίδια χρονική και χωρική διακριτοποίηση με πριν, αλλά κάνοντας χρήση των δύο αλγορίθμων διατήρησης της μονοτονίας, όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3.4, μόνο για την περίπτωση των σχημάτων ENO. Θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα τόσο από την άποψη της αριθμητικής τους ακρίβειας, όσο και από την πλευρά της αριθμητικής τους ευστάθειας .



(i) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “ULTIMATE”

(ii) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “Monotonicity Preserving”

Σχήμα 4.17: Sod’s Shock Tube ($t=1.2s$): Εφαρμογή των αλγορίθμων διατήρησης μονοτονίας για 5ης τάξης σχήμα ENO

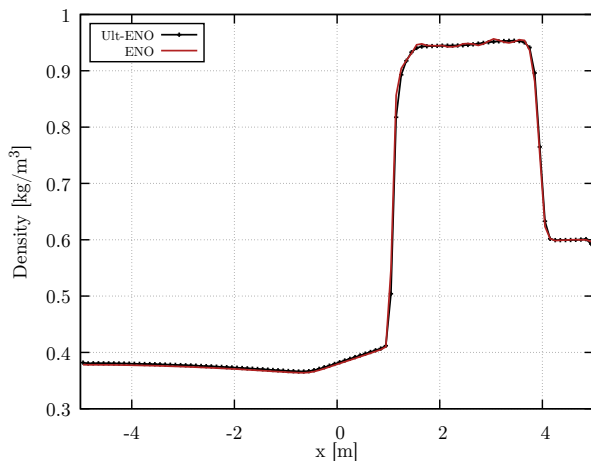
Αρχικά, παρουσιάζεται στα σχήματα 4.17 και 4.18 η κατανομή της πυκνότητας για το πρόβλημα του Sod. Επιλέγεται σχήμα ENO πέμπτης τάξης και συγκρίνονται οι αλγόριθμοι *ULTIMATE Strategy* και *Monotonicity Preserving*, για δύο χρονικές στιγμές πριν και μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης στο δεξί άκρο του σωλήνα.

Για την μέτρηση της καμπυλότητας στην μεθοδολογία *Monotonicity Preserving*, επιλέχθηκε το κριτήριο d^{M4} (σχέση 3.79), που περιλαμβάνει τις καμπυλότητες των τεσσάρων κόμβων εκατέρωθεν του ορίου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι το κριτήριο d^{MM} δεν επηρεάζει παρά ελάχιστα το συνολικό σχήμα, ιδίως για πολύ πυκνές διακριτοποιήσεις, ενώ το κριτήριο

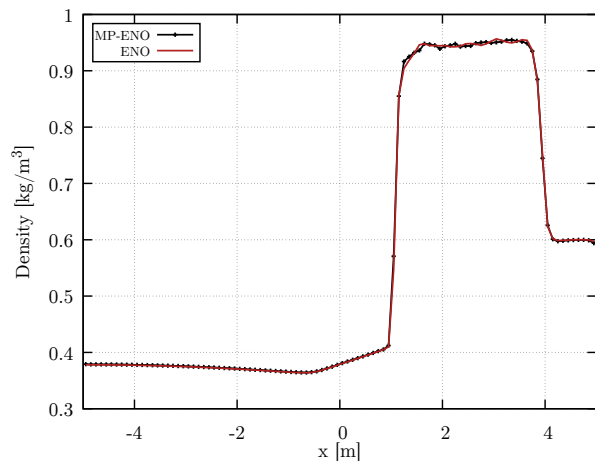
d^{M4X} είναι αρκετά περιοριστικό για αραιά πλέγματα με αποτέλεσμα να καταλήγει σε πτώση τάξης ακόμα στις συνεχής περιοχές.

Για την χρονική στιγμή $t = 1.2s$, παρατηρείται ότι αλγόριθμος “ULTIMATE” διατήρησε σταθερή την περιοχή πίσω από τις ασυνέχειες, ενώ ο αλγόριθμος “Monotonicity Preserving”, δεν καταφέρνει να τις αποσβέσει.

Η επίδραση των δύο αλγορίθμων φαίνεται πιο έντονα στις περιοχές μετά την ανάκλαση του κύματος κρούσης στο δεξί άκρο του πεδίου. Στο σχήμα 4.18, παρουσιάζεται το πεδίο για χρόνο $t = 8.0s$. Παρατηρείται αισθητή βελτίωση των αποτελεσμάτων, ιδίως με την χρήση του αλγορίθμου “ULTIMATE” ο οποίος έχει αποσβέσει πλήρως τις αριθμητικές διακυμάνσεις. Ο αλγόριθμος “Monotonicity Preserving” δεν κατάφερε να τις αποσβέσει πλήρως.



(i) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “ULTIMATE”

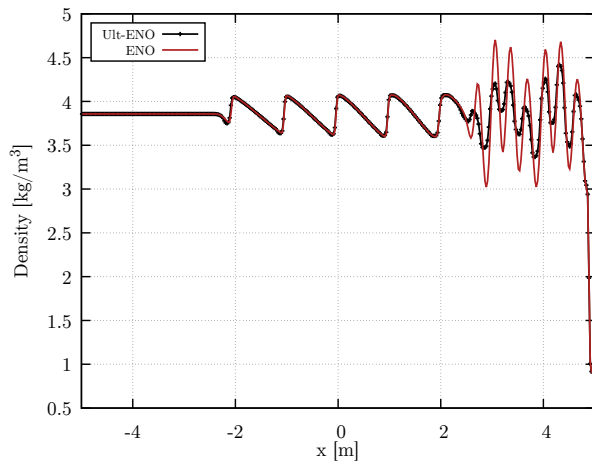


(ii) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “Monotonicity Preserving”

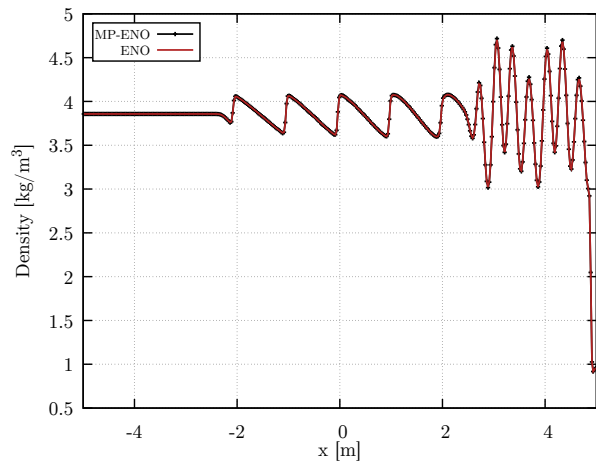
Σχήμα 4.18: Sod’s Shock Tube ($t=8.0s$): Εφαρμογή των αλγορίθμων διατήρησης μονοτονίας για 5ης τάξης σχήμα ENO (Roe-Averaged Characteristicwise)

Το δεύτερο αριθμητικό πείραμα που παρουσιάζεται είναι η αλληλεπίδραση πεδίου με ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενη εντροπία, με ένα δεξιά οδύον κύμα κρούσης. Επιλέχθηκε για την ανακατασκευή τέταρτης τάξης σχήμα ENO. Στο σχήμα 4.19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για χρόνο $t = 2.5s$. Ο αλγόριθμος “ULTIMATE” επέφερε μείωση των τοπικών ακρότατων, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγάλη απόκλιση από την πραγματική λύση. Αντιθέτως, ο αλγόριθμος “Monotonicity Preserving” δεν φαίνεται να έχει επηρεάσει καθόλου την ποιότητα της λύσης. Υπενθυμίζεται ότι η κύρια ιδέα αυτής της μεθοδολογίας, είναι ότι μπορεί να ξεχωρίζει τα τοπικά ακρότατα από τις ασυνέχειες κάνοντας χρήση του κριτηρίου της τοπικής καμπυλότητας.

Συμπερασματικά, παρατηρείται ότι ο στόχος για διατήρηση της μονοτονίας είναι αντικρουόμενος του στόχου για την καλύτερη αναπαράσταση των τοπικών ακροτάτων. Οι δύο αλγόριθμοι που παρουσιάστηκαν κατάφεραν να ικανοποιήσουν μόνο ένας από τους δύο στόχους κάθε φορά, με τον αλγόριθμο “ULTIMATE” να καταφέρνει να σβήσει τις αριθμητικές ταλαντώσεις, ενώ ο αλγόριθμος “Monotonicity Preserving” καταφέρνει να διατηρήσει την ακρίβεια στα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα.



(i) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “ULTIMATE”



(ii) ENO 5ης τάξης με και χωρίς τον αλγόριθμο “Monotonicity Preserving”

Σχήμα 4.19: Entropy Waves ($t=2.5s$): Εφαρμογή των αλγορίθμων διατήρησης μονοτονίας για 5ης τάξης σχήμα ENO (Roe-Averaged Characteristicwise)

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα Διδιάστατης Συμπιεστής Ροής

Στην παρούσα ενότητα γίνεται εφαρμογή των ανώτερης τάξης μεθόδων σε δύο παραδείγματα μη μόνιμης ροής σε καρτεσιανά πλέγματα. Στόχος είναι να παρουσιαστούν τα δύο κύρια πλεονεκτήματα των σχημάτων ENO και WENO, η ικανότητα τους στην αποτύπωση των ασυνεχειών και η χαμηλή αριθμητική τους διάχυση.

Ειδικότερα, με την χρήση των σχημάτων ENO επιλύεται η πρόσπτωση ενός κύματος κρούσης σε τοίχο υπό γωνία, δημιουργώντας καθώς διέρχεται από τον τοίχο μία διπλή ανάκλαση τύπου Mach. Περαιτέρω, με την χρήση των σχημάτων WENO, μελετάται η αλληλεπίδραση δύο στροβίλων Taylor, που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση.

Κάνοντας χρήση των συμπερασμάτων της προηγούμενης ενότητας, ο επιλύτης σε όλες τις περιπτώσεις, κάνει χρήση της σταθμισμένης κατά Roe ιακωβιανής για την προεκβολή των τιμών στο όριο, η οποία αποδείχθηκε πιο ευσταθής στις μονοδιάστατες περιπτώσεις, ενώ παράλληλα έχει την δυνατότητα να χρησιμοποιήσει σχήμα μικρότερης τάξης, όπου εντοπίσει αρνητική πυκνότητα ή πίεση. Τέλος σημειώνεται ότι, οι προσομοιώσεις αφορούν καθαρά τα σχήματα ENO - WENO, χωρίς να γίνεται χρήση των αλγορίθμων επιβολής μονοτονίας που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα (βλ. Ενότητα 4).

5.1 Διπλή Ανάκλαση Τύπου Mach

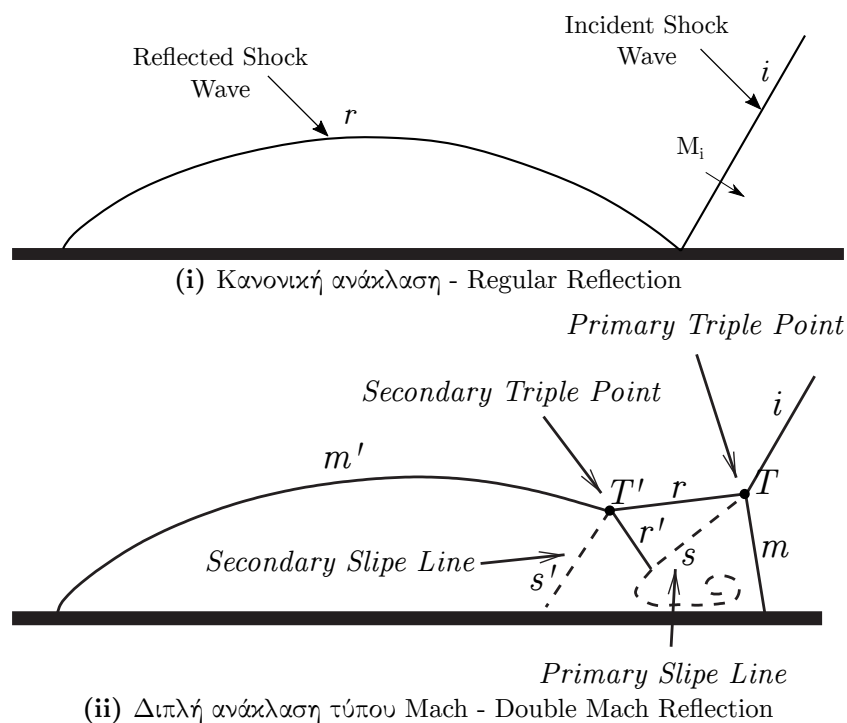
Όταν ένα κύμα κρούσης διαδίδεται σε ένα μέσο δεδομένης ηχητικής εμπέδησης και συναντάει υπό γωνία ένα άλλα μέσο, διαφορετικής ηχητικής εμπέδησης, δημιουργείται μία ανάκλαση, η οποία ονομάζεται ανάκλαση πλάγιου κύματος κρούσης (oblique shock wave reflection) [27].

Τα χαρακτηριστικά της ανάκλασης εξαρτώνται από την γωνία ανάκλασης θ και από τον αριθμό Mach της ροής [24]. Για κάθε αριθμό Mach ορίζεται μία μέγιστη γωνία ανάκλασης, $\theta_{max} = \theta(M)$. Για γωνίες μικρότερες από την μέγιστη γωνία ανάκλασης, $\theta < \theta_{max}$, η ανάκλαση του κύματος είναι κανονική (Regular Reflection), όπως φαίνεται στο σχήμα 5.1i και η ροή περιγράφεται από δύο κύματα κρούσης (two shock theory). Εάν, η γωνία είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη γωνία ανάκλασης για τον συγκεκριμένο αριθμό Mach, τότε προκύπτει μη-κανονική ανάκλαση (Irregular Reflection). Μια από τις κατηγορίες μη-κανονικών ανακλάσεων είναι οι ανακλάσεις τύπου Mach. Σε αυτό το είδος της ανάκλασης, ουσιαστικά το ανακλώμενο κύμα κρούσης ταξιδεύει πιο γρήγορα από το προσπίπτον με αποτέλεσμα τα δύο κύματα κρούσης να ενώνονται και να προκύπτει το λεγόμενο κύμα κρούσης Mach Stem. Το φαινόμενο

περιγράφεται αναλυτικά από την θεωρία των τριών κυμάτων κρούσης (three shock theory).

Περαιτέρω, σε μόνιμες ροές όπου το κύμα κρούσης δεν κινείται σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, μπορεί να προκύψει κανονική ανάκλαση ή απλή ανάκλαση τύπου Mach. Σε μη-μόνιμες ή ψευδο-μόνιμες ροές, επιπλέον συναντώνται και οι διατάξεις σύνθετης ανάκλασης Mach ή διπλής ανάκλασης Mach. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στον *G.Ben-Dor* [27], για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις ανακλάσεις κυμάτων κρούσης, αλλά και τα κριτήρια μετάβασης από την μία περίπτωση στην άλλη.

Στην παρούσα ανάλυση μελετάται μία διπλή ανάκλαση τύπου Mach, όπου η βασική της διάταξη παρουσιάζεται στο σχήμα 5.1ii. Στο τριπλό σημείο T συναντώνται τέσσερις ασυνέχειες, τρία κύματα κρούσης: το προσπίπτον i , το ανακλώμενο r και το Mach stem m , καθώς και η γραμμή ολίσθησης s . Το δεύτερο τριπλό σημείο σχηματίζεται από την διάσπαση του κύματος r δημιουργώντας την δεύτερη ανάκλαση *Mach*.



Σχήμα 5.1: Τύποι ανάκλασης κύματος κρούσης που προσπίπτει σε υπό γωνία τοίχο - Σύστημα συντεταγμένων ευθυγραμμισμένο με τον τοίχο

Εξ'αιτίας της πολυπλοκότητας της ροής, στην βάση της ανάκλασης του κύματος κρούσης, το συγκεκριμένο παράδειγμα αποτελεί μια κλασσική προσομοίωση για την πιστοποίηση ανώτερων τάξεων μεθόδων.

Η αριθμητική προσομοίωση περιλαμβάνει ένα κάθετο κύμα κρούσης, κινούμενο με ταχύτητα $M = 10$, το οποίο προσπίπτει σε τοίχο που σχηματίζει γωνία 30 μοιρών με το οριζόντιο επίπεδο. Ο υπολογισμός θα γίνει, θεωρώντας το σύστημα συντεταγμένων παράλληλο με τον υπό γωνία τοίχο και το κύμα κρούσης να σχηματίζει γωνία 60 μοιρών με τον άξονα αναφοράς.

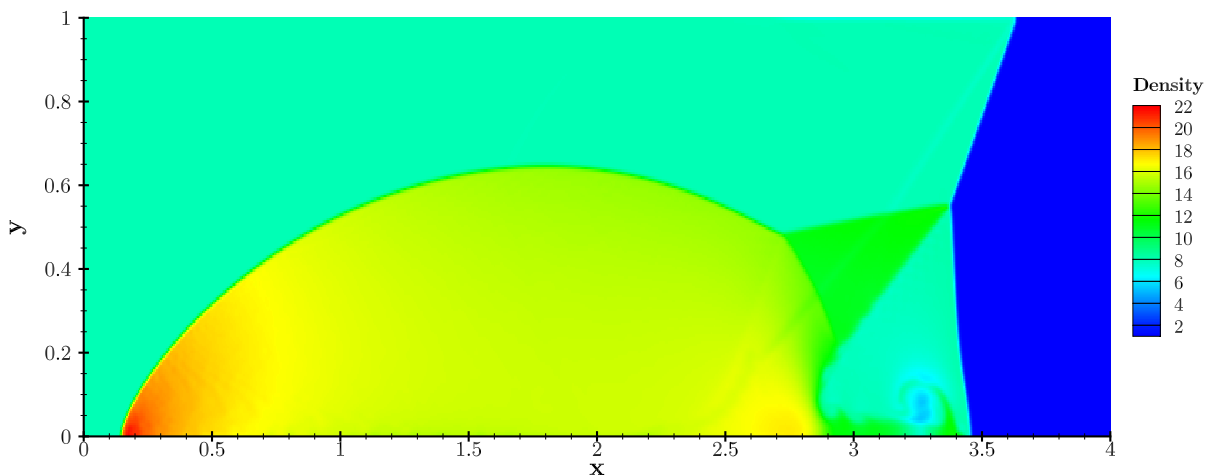
Στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος το κύμα κρούσης βρίσκεται στην θέση $x = 1/6$. Μπροστά από το κύμα η ροή είναι αδιατάρακτη, ενώ τα ροϊκά μεγέθη πίσω από το κύμα υπολογίζονται βάσει της αδιατάρακτης ροής και της ταχύτητας του κύματος κρούσης. Αναλυτικά, οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος παρουσιάζονται στην σχέση 5.1.

$$\vec{V}_{pre} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_{post} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7.14471 \\ -4.125 \\ 116.5 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Αναφορικά με τις οριακές συνθήκες, στο αριστερό και στο δεξιά μέρος του πεδίου λαμβάνονται συνθήκες εισόδου (inflow) και εξόδου (outflow), με βάση τις χαρακτηριστικές (άμεση επιβολή οριακών συνθηκών). Το τμήμα του οριζόντιου άξονα από 0 έως 1/6 ορίζεται ως έξοδος της ροής, προκειμένου το κύμα να είναι προσκολλημένο στο οριζόντιο επίπεδο και ο ορισμός της γίνεται, επίσης, βάσει των χαρακτηριστικών. Το υπόλοιπο τμήμα στο κάτω άκρο του πεδίου ορίζεται ως τοίχος, ενώ το πάνω όριο θα πρέπει να περιγράφει την κίνηση του κύματος κρούσης. Ο ορισμός γίνεται με την χρήση ψευδοκόμβων που παίρνουν τις τιμές της αδιατάρακτης ροής ή τις τιμές μετά το κύμα κρούσης, ανάλογα με την θέση του κύματος κρούσης την δεδομένη χρονική στιγμή. Έπειτα, λύνεται το τοπικό πρόβλημα Riemann για την εύρεση του αριθμητικού διανύσματος της ροής (έμμεση επιβολή οριακών συνθηκών). Σε όλες τις περιπτώσεις το υπολογιστικό πεδίο λαμβάνεται $x \in [0 : 4]$ και $y \in [0 : 1]$.

Στο σχήμα 5.2 παρουσιάζεται η κατανομή της πυκνότητας στο πεδίο για χρόνο $t = 0.25s$. Το πρόβλημα επιλύθηκε για χωρική διακριτοποίηση $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{180}$, ενώ για την χρονική επίλυση χρησιμοποιήθηκε TVD Runge - Kutta τρίτης τάξης, με χρονικό βήμα $\Delta t = 1e - 4$.

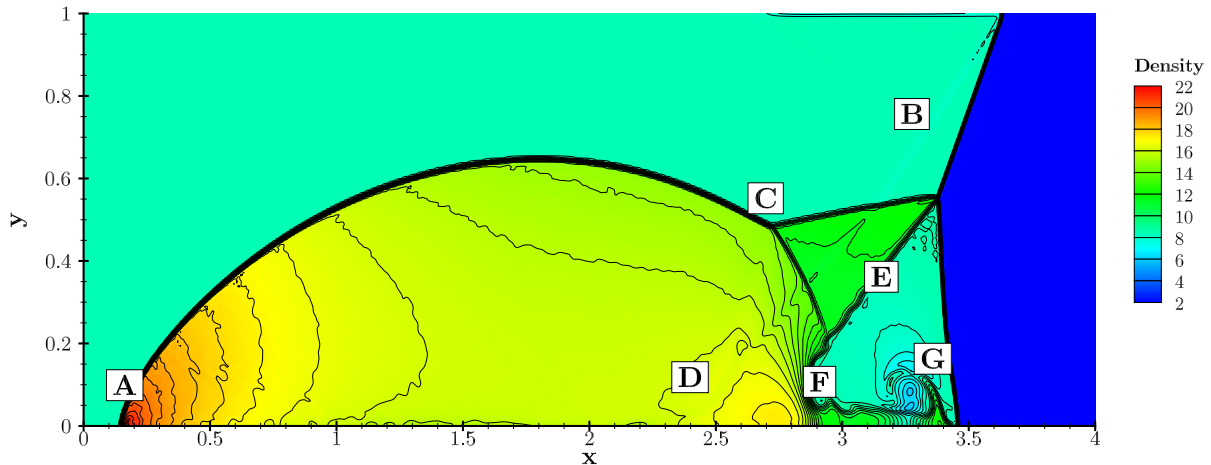
Στο σχήμα φαίνονται όλα τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής: τα δύο τριπλά σημεία με τα αντίστοιχα κύματα κρούσης. Παρατηρείται ότι, στην πρωτεύουσα γραμμή ολίσθησης s , όπου το ρευστό έχει διαφορετική πυκνότητα και η εφαπτομενική ταχύτητα εκατέρωθεν της, τείνει να σχηματιστεί μία αστάθεια τύπου Kelvin - Helmholtz. Προφανώς για την ακριβή αποτύπωση της απαιτείται χωρική διακριτοποίηση αρκετά μικρότερη του μήκους κύματος της. Εντούτοις, το σχήμα ENO καταφέρνει να αποτυπώσει μέρος τις αστάθειας σε πιο αραιό πλέγμα.



Σχήμα 5.2: Double Mach Reflection ($t=0.25s$): Αναπαράσταση του πεδίου της πυκνότητας. Επίλυση με σχήμα ENO 4ης τάξης, $\Delta x = \Delta y = 1/180$ και $\Delta t = 1e - 4$

Μια από τις κύριες δυσκολίες του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η αποτύπωση της δευτερεύουσας γραμμής ολίσθησης s' για δύο λόγους [26]. Αρχικά, οι μεταβολές των ροϊκών μεγεθών, δεξιά και αριστερά από την ασυνέχεια δεν είναι τόσο μεγάλες όσο στην περίπτωση της πρωτεύουσας και επιπλέον εξ' αιτίας της παρεμβολής ενός αριθμητικού φαινομένου (artifact)

το οποίο προέρχεται από την έμμεση επιβολή των οριακών συνθηκών στο πάνω μέρος του υπολογιστικού πεδίου. Για την καλύτερη επίβλεψη του φαινομένου παρουσιάζεται η ίδια χρονική στιγμή με ισογραμμές στο σχήμα 5.3. Για την συγκεκριμένη χωρική διακριτοποίηση, η δευτερεύουσα γραμμή ολίσθησης καμπυλώνει ελαφρά τις ισογραμμές (τμήμα-CD), χωρίς όμως να αποτυπώνεται αισθητά στο χρωματισμένο πεδίο. Στο [26] παρουσιάζονται αναλυτικά διάγραμμα για την επίλυση του πεδίου.



Σχήμα 5.3: Double Mach Reflection ($t=0.25s$): Αναπαράσταση του πεδίου της πυκνότητας με 40 ισογραμμές. Επίλυση με σχήμα ENO 4ης τάξης, $\Delta x = \Delta y = 1/180$ και $\Delta t = 1e - 4$

Αναλυτικότερα, στο σχήμα 5.3 παρουσιάζονται

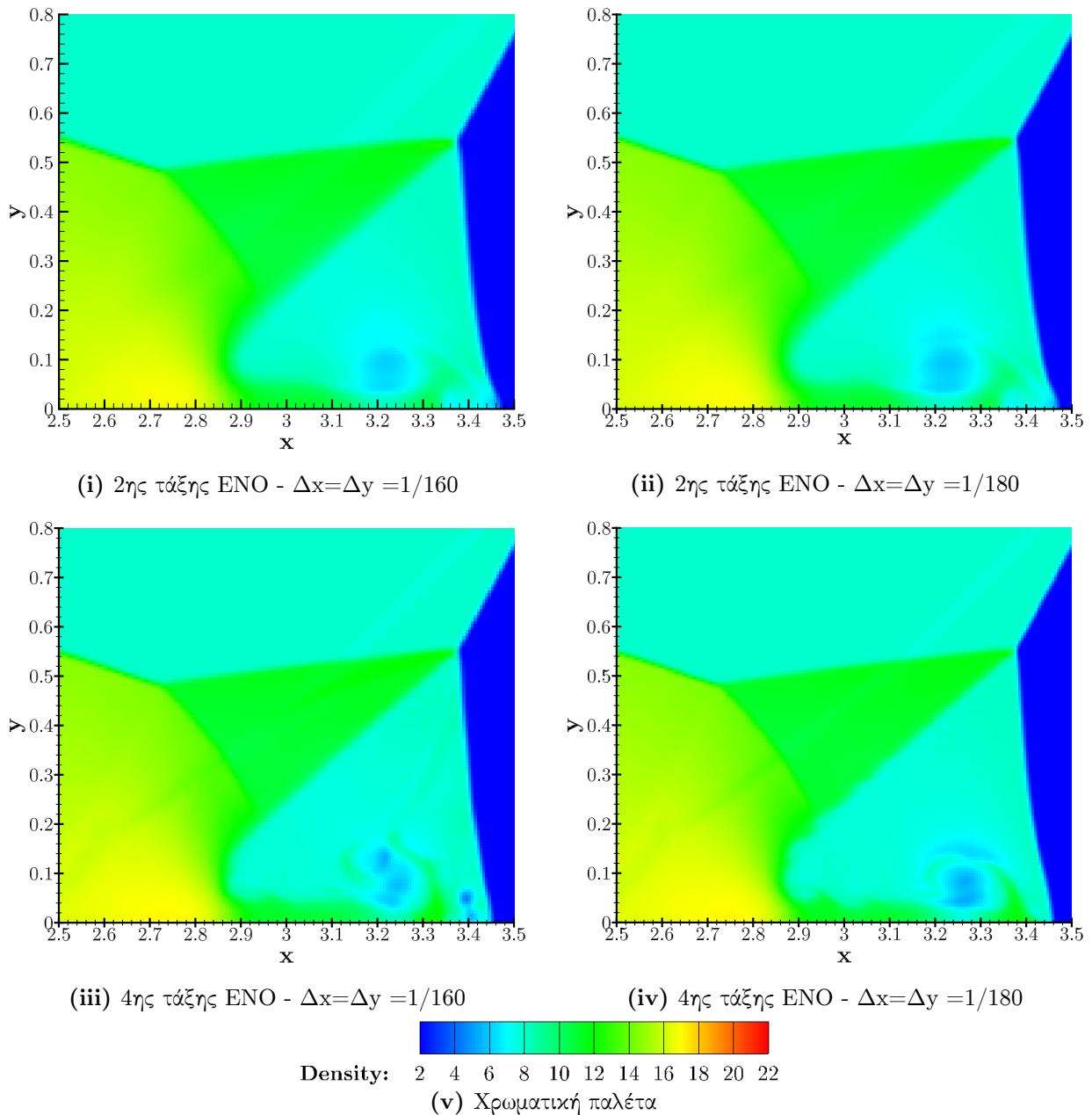
- **A**, το προσπίπτον σημείο του κύματος κρούσης στον πλάγια τοίχο
- **B-D**, το αριθμητικής φύσης φαινόμενο εξ' αίτιας των οριακών συνθηκών στο άνω μέρος του πεδίου
- **C-D**, η δευτερεύουσα γραμμή ολίσθησης
- **E-F-G**. Η πρωτεύουσα γραμμή ολίσθησης **E-F**, η οποία οδηγεί στην άκρη της στον σχηματισμό ενός στροβίλου **G**

Στο επόμενο σχήμα, 5.4, παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα για δεύτερης και τέταρτης τάξης σχήματα ENO, για δύο χωρικές διακριτοποίησης. Σε όλες τις περιπτώσεις η χρονική διακριτοποίηση είναι σταθερή και ίση με $\Delta t = 1e - 4$.

Διαπιστώνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις ο επιλύτης έχει αποτυπώσει επαρκώς όλα τα μέτωπα των κυμάτων κρούσης. Οι κύριες διαφορές εντοπίζονται στον προσδιορισμό της γραμμής ολίσθησης. Είναι εμφανές ότι για ίδιες διακριτοποιήσεις τα σχήματα ENO, προσεγγίζουν πολύ καλύτερα το φαινόμενο και αποτυπώνουν την δημιουργία του στροβίλου στην άκρη της. Στο τέταρτης τάξης κύμα για διακριτοποίηση $\Delta x = \Delta y = 1/160$, παρατηρήθηκε η δημιουργία κάποιων τεχνητών "φουσαλίδων" (σχ.5.4iii). Η συγκεκριμένη αστάθεια παρατηρήθηκε μόνο για το συγκεκριμένο πλέγμα και σε κανένα άλλο.

Αναφορικά με τον αριθμό των πτώσεων τάξης που σημειώθηκαν στο τέταρτης τάξης σχήμα, στο σύνολο της προσομοίωσης καταγράφηκαν λιγότερες από 10000 περιπτώσεις που αντιστοιχεί σε ποσοστό πολύ μικρότερο από 0.001% των συνολικών περιπτώσεων.

Το συγκεκριμένο φαινόμενο αποτελεί ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα για το πλεονέκτημα των μεθόδων υψηλής τάξης έναντι των μεθόδων δεύτερης τάξης που χρησιμοποιούν μεθόδους τοπικής πύκνωσης. Το κύμα κρούσης, αλλά και η πολύπλοκη δομή της ανάκλασης



Σχήμα 5.4: Double Mach Reflection ($t=0.25s$): Συγκριτικά διαγράμματα κοντά στην γραμμή ολίσθησης για δεύτερης και τέταρτης τάξης σχήματα ENO, για δύο διαφορετικές χωρικές διακριτοποιήσεις

διαδίδεται σε ολόκληρο το υπολογιστικό πεδίο, με αποτέλεσμα η τοπική πύκνωση να στερείται ουσίας.

5.2 Ζεύγος Συμπιεστών Στροβίλων

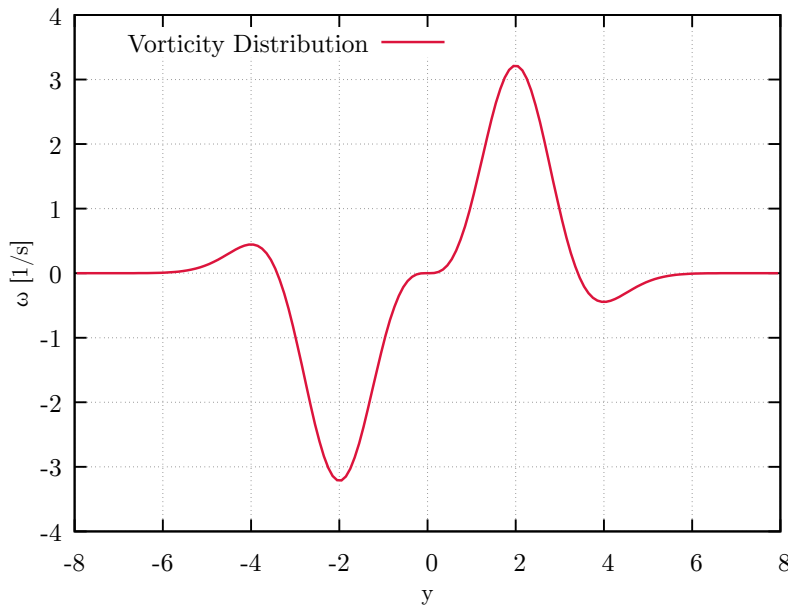
Τα πεδία ροής που περιέχουν έντονες μεταβολές της στροβιλότητας παραμένουν πάντα μια μεγάλη πρόκληση για τις χαμηλής τάξης μεθόδους. Η κύρια αιτία είναι ότι οι αλγόριθμοι αυτοί διαστρεβλώνουν και διαχέουν την στροβιλότητα, λόγω αριθμητικής διάχυσης, και ο μόνος τρόπος για να αποφευχθεί η αλλοίωση του φαινομένου είναι η πύκνωση του πλέγματος επίλυσης.

Η παρούσα ανάλυση περιλαμβάνει δύο αντίθετους στρόβιλους Taylor, οι οποίοι βρίσκονται σε κοντινή απόσταση. Οι αναλυτικές εκφράσεις της ροϊκής συνάρτησης και της στροβιλότητας για στρόβιλο Taylor παρουσιάζονται στην σχέση (5.2) σε αδιάστατη μορφή [28].

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_T &= e^{(1-\xi^2)/2} \\ \tilde{\omega}_T &= (2-\xi)e^{(1-\xi^2)/2}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Στην παραπάνω σχέση λαμβάνεται ως ξ η αδιάστατη ακτινική απόσταση, $\xi = r/r_u$, ως $\tilde{\psi} = \psi/r_u U_{max}$ και ως $\tilde{\omega} = \omega r_u / U_{max}$, όπου r_u η ακτίνα του στρόβιλου και U_{max} η μέγιστη περιφερειακή ταχύτητα στον στρόβιλο, η οποία εντοπίζεται για $\xi = 1$. Λόγω αδιαστοποίησης, η μέγιστη περιφερειακή ταχύτητα ισούται με 1.

Αρχικά, οι στρόβιλοι τοποθετούνται σε αδιατάρακτο πεδίο ροής, στην θέση $x = -4$ και $y = \pm 2r_u$, με ακτίνα $r_u = 1$. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται η αρχική κατανομή της στροβιλότητας, συναρτήσει του κατακόρυφου άξονα y . Η μέγιστη στροβιλότητα, στο κέντρο των στρόβιλων, είναι ίση με $\tilde{\omega}_{max} = 3.27$. Επιπλέον, παρατηρείται ότι οι στρόβιλοι αυτοί δημιουργούν ένα πεδίο αντίθετης στροβιλότητας, σε σχέση με τους πυρήνες τους, για ακτινικές θέσεις μεγαλύτερες από την ακτίνα του στρόβιλου, $r > r_u$.



Σχήμα 5.5: Ζεύγος Συμπιεστών Στροβίλων: Κατανομή Στροβιλότητας

Αναφορικά, με τον υπολογισμό της κατανομής της πίεσης και της πυκνότητας στους στρόβιλους, θεωρώντας στις αρχικές συνθήκες ισητροπικό στρόβιλο, δηλαδή $p/\rho^\gamma = \text{const.}$. Λαμβάνοντας τον τύπο της φυγόκεντρου δύναμης

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \rho v_\theta^2 / \xi \quad (5.3)$$

προκύπτει ότι η πυκνότητα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\rho}{\rho_{\infty}} = [1 - (\gamma - 1) M_u^2 \mathcal{G}_T(\xi)]^{1/(\gamma-1)} \quad (5.4)$$

όπου

$$\mathcal{G}_T = \frac{\exp(1 - \xi^2)}{2} \quad (5.5)$$

ενώ, ως M_u ορίζεται ο αριθμός αναφοράς Mach.

$$M_u = \frac{U_{max}}{\sqrt{\gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}}} \quad (5.6)$$

Ο δείκτης ∞ αναφέρεται στα μεγέθη στο επ'άπειρο χωρίο.

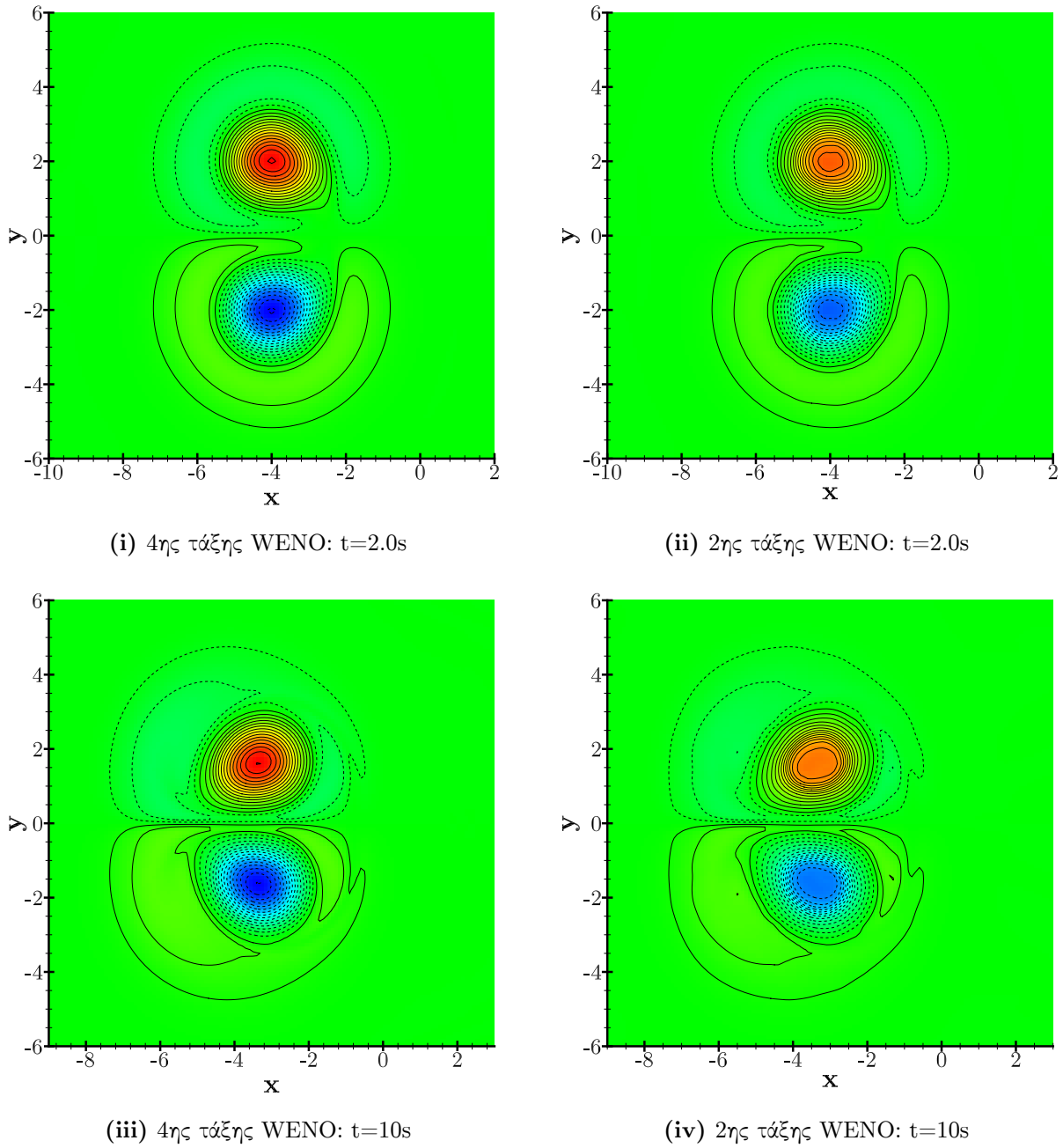
Στην αριθμητική προσομοίωση που παρουσιάζεται θεωρείται M_u . Η επίλυση έγινε σε χωρίο $x \in [-10 : 10]$ και $y \in [-15 : 20]$ με χωρικό βήμα $\Delta x = \Delta y = 0.1$. Για την χρονική διακριτοποίηση, χρησιμοποιήθηκε τρίτης τάξης TVD Runge-Kutta με βήμα $\Delta t = 0.01$, ενώ η χρονική επίλυση είχε διάρκεια $t = 60s$. Στα σχήματα 5.6 και 5.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίλυσης, συγκριτικά και για τα δύο σχήματα.

Οι δύο στρόβιλοι, αρχικά συγκλίνουν προς το άξονα x , παραμορφώνοντας το κυκλικό σχήμα τους σε σχεδόν ελλειπτικό, ενώ τα εξωτερικά στρώματα στροβιλότητας αρχίζουν να διαχωρίζονται από τον πυρήνα ($t=2.0s$). Ως αποτέλεσμα δημιουργείται μία έντονη αλληλεπίδραση μεταξύ των στρωμάτων αντίθετης στροβιλότητας και των πυρήνων, και οι στρόβιλοι αρχίζουν να συγκλίνουν προς τον άξονα x ($t=10s$). Σε δεύτερο στάδιο, αφού τα εξωτερικά στρώματα έχουν διαχωριστεί από τους αρχικούς στρόβιλους, απομακρύνονται προς τα αριστερά, ενώ οι στρόβιλοι δημιουργούν ένα δίπολο το οποίο αρχίζει να κινείται προς τα δεξιά ($t=20s$). Στην τελευταία χρονική στιγμή παρουσιάζονται οι στρόβιλοι με ξεκάθαρα πλέον ελλειπτική μορφή, οι οποίοι μεταφέρονται, με την μορφή διπόλου, προς τα δεξιά.

Είναι εμφανές ότι το δεύτερης τάξης σχήμα δεν δύναται να περιγράψει όλη την χρονική εξέλιξη του φαινομένου, καθώς ούτε να διατηρήσει την στροβιλότητα, καθώς οι δύο στρόβιλοι ταξιδεύουν υπό την μορφή διπόλου.

Ως προς τα συμπεράσματα της ανάλυσης αξίζει να προστεθεί ότι, όταν οι στρόβιλοι φθάσουν στην άκρη του υπολογιστικού χωρίου, οι οριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν δεν είναι δυνατές να βγάλουν τους στρόβιλους από το χωρίου, αλλά αντίθετα οι στρόβιλοι ανακλώνται προς τα μέσα. Για να είναι εφικτό οι στρόβιλοι να βγουν από τον υπολογιστικό χωρίο απαιτείται η εφαρμογή μη ανακλαστικών συνθηκών τύπου *LODI*. Περαιτέρω, στην επίλυση δεν απαιτήθηκε σε καμία περίπτωση πτώση της τάξης παρεμβολής.

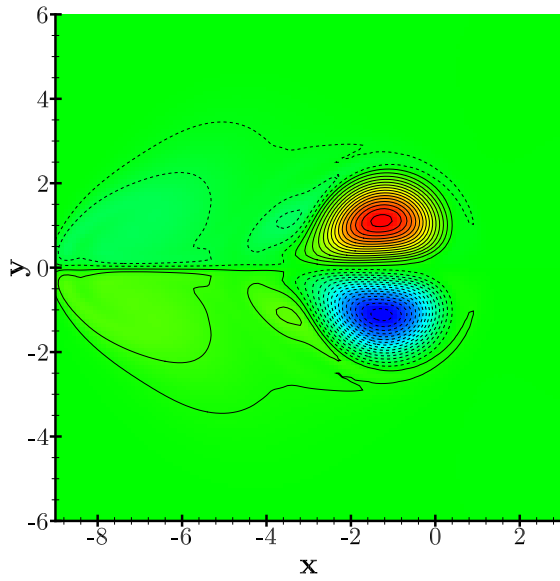
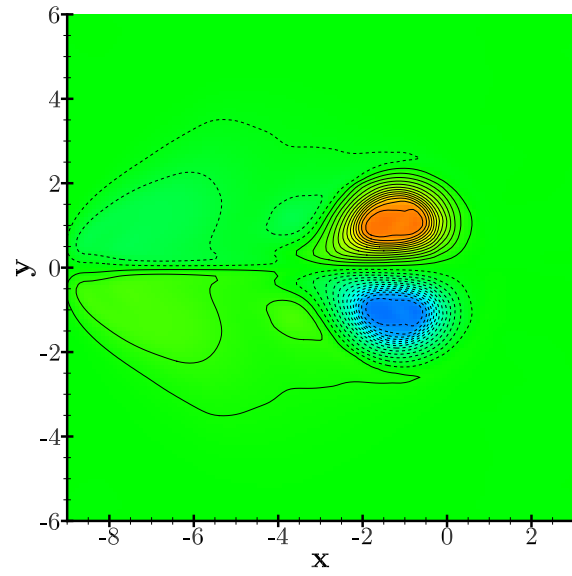
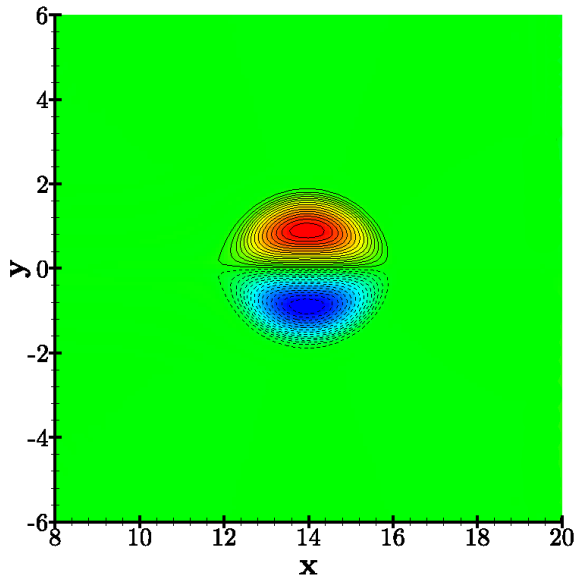
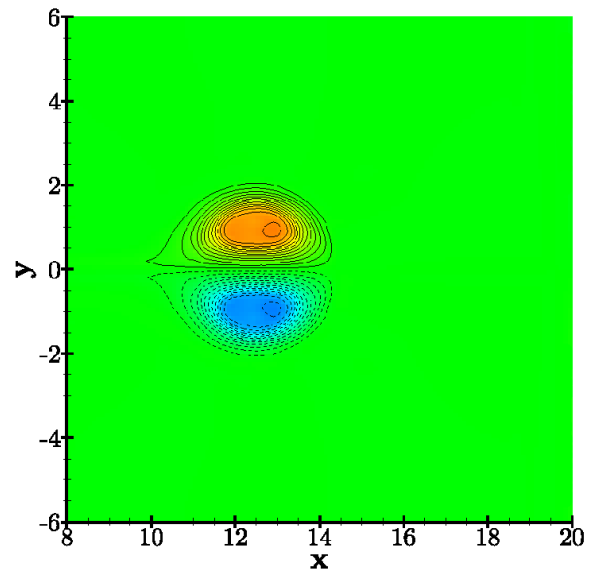
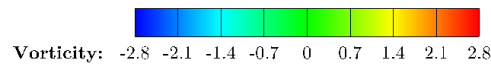
Στο τελευταίο διάγραμμα παρουσιάζονται οι καμπύλες μεταβολής της μέγιστης στροβιλότητας συναρτήσει του χρόνου, για τα δύο σχήματα WENO, δεύτερης και τέταρτης τάξης, καθώς και μία τρίτη καμπύλη που αντιστοιχεί σε τέταρτης τάξης WENO για πυκνότερο πλέγμα $Dx = Dy = 0.075$. Αρχικά, παρατηρείται έντονη πτώση της στροβιλότητας στο πρώτο χρονικό βήμα, αυτό οφείλεται στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Μέχρι την χρονική στιγμή $t = 0.25s$, εμφανίζεται η μεταβατική περίοδος της σύζευξης των δύο στρόβιλων, ενώ τις επόμενες χρονικές στιγμές η στροβιλότητα αποκτάει σταθερή τιμή. Παρατηρείται, ότι η απόκλιση του τέταρτης τάξης σχήματος είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την αντίστοιχη προσομοίωση με πυκνότερο πλέγμα.



Vorticity: -2.8 -2.1 -1.4 -0.7 0 0.7 1.4 2.1 2.8

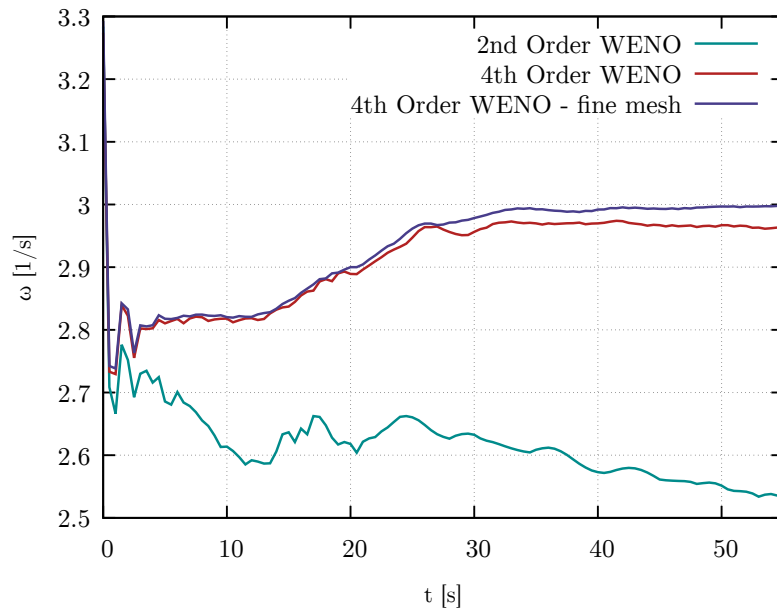
(v) Χρωματική παλέτα

Σχήμα 5.6: Σύζευξη στροβίλων (1/2): Συγκριτικά διαγράμματα της εξέλιξης της προσομοίωσης, για δεύτερης και τέταρτης τάξης σχήματα WENO $\Delta x = \Delta y = 0.1$ και $\Delta t = 0.01$

(i) 4ης τάξης WENO: $t=20s$ (ii) 2ης τάξης WENO: $t=20s$ (iii) 4ης τάξης WENO: $t=50s$ (iv) 2ης τάξης WENO: $t=50s$ 

(v) Χρωματική παλέτα

Σχήμα 5.7: Σύζευξη στροβίλων (2/2): Συγκριτικά διαγράμματα της εξέλιξης της προσομοίωσης, για δεύτερης και τέταρτης τάξης σχήματα WENO $\Delta x = \Delta y = 0.1$ και $\Delta t = 0.01$



Σχήμα 5.8: Ζεύγος Συμπιεστών Στροβίλων: Μεταβολή της μέγιστης στροβιλότητας συναρτήσει του χρόνου

Κεφάλαιο 6

Αποτίμηση της Εργασίας

6.1 Σύνοψη - Συμπεράσματα

Ανακεφαλαιώνοντας, στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε η ανάλυση των ανώτερης τάξης σχημάτων Essentially Non-Oscillatory και Weighted Essentially Non-Oscillatory, καθώς και η εφαρμογή τους σε περιπτώσεις μονοδιάστατης και διδιάστατης ροής. Ειδικότερα η μελέτη επικεντρώθηκε στην επίδραση των ανώτερης τάξης μεθόδων στην επίλυση ροής, χωρίς την χρήση περιοριστών, αλλά εφαρμόζοντας κριτήρια για την αυτόματη προσαρμογή του πολυωνύμου στην παρεμβολή των ροϊκών μεγεθών. Αναπτύχθηκαν υπολογιστικοί κώδικες σε γλώσσα προγραμματισμού C++, για την εφαρμογή των σχημάτων στις εξισώσεις Euler. Επιλύθηκαν τέσσερις περιπτώσεις μονοδιάστατης ροής και παρουσιάστηκαν τα δύο σχήματα σε σχέση με την δεύτερη τάξης προσέγγιση MUSCL με χρήση περιοριστή. Επιπλέον, στην μονοδιάστατη περίπτωση, παρουσιάστηκαν δύο μέθοδοι για την επιβολή της μονοτονίας στο ανακατασκευασμένο πεδίο. Τέλος, επιλύθηκαν δύο αριθμητικές προσομοιώσεις διδιάστατης συμπιεστής ροής που περιελάμβαναν αρκετά σύνθετες δομές.

Ειδικότερα, αναφορικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα, στις μονοδιάστατες περιπτώσεις παρουσιάστηκαν κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα στα οποία γίνονται εμφανή τα θετικά της μεθόδου, αλλά και οι ιδιαιτερότητες τους. Εξάγοντας συμπεράσματα από τις μονοδιάστατες περιπτώσεις, παρουσιάστηκαν δύο περιπτώσεις διδιάστατης ροής εφαρμόζοντας σχήματα τέταρτης και δεύτερης τάξης ENO και WENO.

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από την μελέτη είναι

- ++ Τα σχήματα ENO και WENO μπορούν να μοντελοποιήσουν επιτυχώς σύνθετες ροές που περιλαμβάνουν κύματα κρούσης και ασυνέχειες χωρίς να εμφανίζουν αριθμητική διάχυση.
- ++ Μοντελοποιήθηκαν ρευστομηχανικές ροές, κάνοντας χρήση ανώτερης τάξης προσέγγισης σε όλο το πεδίο, χωρίς την εισαγωγή παραμέτρων που εξαρτώνται από το φυσικό πρόβλημα ή από την διακριτοποίηση του
- ++ Με την χρήση αυτής της μεθόδου, καθίσταται αρκετά εύκολη η αυθαίρετη αύξηση της τάξης ακρίβειας, χωρίς ιδιαίτερη προγραμματιστική προσπάθεια, ειδικά στην περίπτωση των σχημάτων ENO, όπου δεν χρειάζεται ο υπολογισμός των δεικτών ομαλότητας.
- ++ Τα σχήματα WENO παρουσιάστηκαν αρκετά ευσταθή σε όλες τις προσομοιώσεις ανεξάρτητα την τάξη ανακατασκευής.

- ++ Σε περιπτώσεις που επιδιώκεται αυστηρά η μονοτονία του ανακατασκευασμένου πεδίου είναι αρκετά άμεση η διαδικασία επιβολής της, με χρήση ενός εκ των δύο αλγορίθμων που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3.4.
- ++ Στην περίπτωση των σχημάτων WENO η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι πολύ μικρή, οπότε δεν υπάρχει μεγάλη αύξηση του υπολογιστικού κόστους σε σχέση με την δεύτερη τάξης προσέγγισης.
- Για την πιο σταθερή εφαρμογή των σχημάτων απαιτείται τοπική γραμμικοποίηση, το οποίο συνεπάγει και αύξηση του υπολογιστικού κόστους.
- Το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου που παρουσιάστηκε είναι η αδυναμία άμεσης επιβολής συνθήκες τοίχου χωρίς την χρήση ψευδο-κόμβων, με αποτέλεσμα να προκύπτει πτώση τάξης κοντά στα στέρεα όρια, το οποίο δεν είναι αποδεκτό ειδικά στις περιπτώσεις που μελετώνται ανωστικές ροές.
- Τα σχήματα ENO στις μεγάλες τάξεις ακρίβειας (>4) παρουσίασαν αριθμητικές αστάθειες σε περιπτώσεις ανάκλασης ισχυρών κυμάτων κρούσης.
- Τα σχήματα ENO εξ' αίτιας των πολλών λογικών συναρτήσεων που απαιτούνται, καθιστούν τον προγραμματισμό αρκετά περίπλοκο με αποτέλεσμα να ενδέχεται να αυξηθεί η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αρκετά και κατά συνέπεια το υπολογιστικό κόστος

Εν γένει η χρήση των μεθόδων αυτών συνίσταται ιδιαίτερα είτε σε περιπτώσεις που αναπτύσσονται αρκετά περίπλοκες ροές σε όλο το υπολογιστικό πεδίο και η χρονική τους εξέλιξη είναι αρκετά αργή, με αποτέλεσμα η τοπική πύκνωση του πλέγματος να στερείται ουσίας, είτε σε περιπτώσεις που μελετώνται μεταβατικά φαινόμενα.

Ως προς το υπολογιστικό κόστος, στις διδιάστατες προσωμοιώσεις η αύξηση της τάξης ακρίβειας από δεύτερης σε τέταρτης οδήγησε σε αύξηση του χρόνου υπολογισμού κατά 30-40%.

6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη

Δεδομένου ότι η παρούσα διπλωματική ήταν μια εισαγωγική ανάλυση στα σχήματα ENO και WENO, υπάρχουν πολλές προτάσεις στις οποίες θα είχε ενδιαφέρον να επεκταθεί αυτή η μέθοδος. Ειδικότερα, με βάση την αποτίμηση της εργασίας και τις αρχικές κατευθύνσεις που τέθηκαν, τα σημεία που επιδέχονται περαιτέρω διερεύνησης, χωρίς κάποια παραλλαγή της μεθοδολογία είναι

- Εφαρμογή της μεθόδου σε μη ομοιόμορφα δομημένα πλέγματα. Η μόνη διαφορά με την παρούσα ανάλυση έγκειται στους συντελεστές των πολυωνύμων οι οποίοι παύουν να είναι σταθεροί, στην περίπτωση καρτεσιανών πλεγμάτων, και επιπλέον στον μετασχηματισμό των εξισώσεων στην περίπτωση που επιθυμείτε η εφαρμογή τους σε καμπυλόγραμμα πλέγματα. Τονίζεται ότι στις περιπτώσεις των δομημένων πλεγμάτων η εφαρμογή των σχημάτων μπορεί να γίνει με βάση διατύπωση των πεπερασμένων διαφορών, χωρίς να υπάρξει κάποια ουσιαστική διαφοροποίηση στην μεθοδολογία
- Δημιουργώντας καμπυλόγραμμα πλέγματα είναι δυνατόν να μελετηθούν ροές γύρω από ανωστικές διατάξεις με την χρήση των σχημάτων ENO και WENO. Μια τέτοια εφαρμογή είναι κρίνεται απαραίτητη για την ποσοτικοποίηση της επιρροής των ανώτερης τάξης μεθόδων στην επίλυση της ροής.

- Επιπρόσθετα, η γενίκευση του αλγορίθμου στις τρεις διαστάσεις δεν συνιστά ουσιαστική παραλλαγή της μεθόδου.

Επιπλέον, αναφορικά με την περαιτέρω διερεύνηση των σχημάτων ENO και WENO, κρίνεται σκόπιμο η εφαρμογή τους και σε άλλα πεδία της υπολογιστικής ρευστομηχανικής.

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή των μεθόδων σε μη δομημένα πλέγματα για την επίλυση προβλημάτων ρευστομηχανικής.
- Έχοντας την ικανότητα τα σχήματα αυτά να διατηρούν σε όλο το πεδίο την υψηλή τάξη ακρίβειας, τα καθιστούν κατάλληλα για μελέτη φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβατικά φαινόμενα, όπως την εξέλιξη ενός οριακού στρώματος και την μελέτη συμπιεστής τύρβης. Επιπλέον, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εφαρμογή τους σε προβλήματα αεροακουστικής.
- Εν γένει, στην βιβλιογραφία παρουσιάζονται αρκετές παραλλαγές των σχημάτων ENO και WENO, οι οποίες θα ήταν σκόπιμο να διερευνηθούν περαιτέρω για την εφαρμογή τους σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Μια παραλλαγή αποτελούν τα σχήματα Energy Stable WENO [29], τα οποία προσδίδουν επιπλέον σταθερότητα στην επίλυση του φυσικού προβλήματος κάνοντας χρήση ενός μη γραμμικού όρου τεχνητής συνεκτικότητας.
- Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή των σχημάτων σε μεθόδους στοιχείων στροβιλότητας. Τα ENO-WENO θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις προβολής των στοιχείων στροβιλότητας στο υπολογιστικό πλέγμα για την διατήρηση των ασυνεχειών [13].
- Τέλος, η συνεισφορά των σχημάτων ENO και WENO μπορεί να γίνει εμφανής και με την εφαρμογή τους σε ροές που μελετάται η αλληλεπίδραση συμπιεστής ροής με μία διασπαρμένη φάση (αλληλεπίδραση κυμάτων κρούσης με φυσαλίδες), όπου η ροή γίνεται ιδιαίτερος περίπλοκη.

Παράρτημα Α

WENO - Optimal Weights & Smoothness Indicators

$k=4$

Smoothness Indicators:

$$IS_0^4 = \bar{v}_i (2107\bar{v}_i - 9402\bar{v}_{i+1} + 7042\bar{v}_{i+2} - 1854\bar{v}_{i+3}) + \\ \bar{v}_{i+1} (11003\bar{v}_{i+1} - 17246\bar{v}_{i+2} + 4642\bar{v}_{i+3}) + \\ \bar{v}_{i+2} (7043\bar{v}_{i+2} - 3882\bar{v}_{i+3}) + 547\bar{v}_{i+3}^2$$

$$IS_1^4 = \bar{v}_{i-1} (547\bar{v}_{i-1} - 2522\bar{v}_i + 1922\bar{v}_{i+1} - 494\bar{v}_{i+2}) + \\ \bar{v}_i (3443\bar{v}_i - 5966\bar{v}_{i+1} + 1602\bar{v}_{i+2}) + \\ \bar{v}_{i+1} (2843\bar{v}_{i+1} - 1642\bar{v}_{i+2}) + 267\bar{v}_{i+2}^2$$

$$IS_2^4 = \bar{v}_{i-2} (267\bar{v}_{i-2} - 1642\bar{v}_{i-1} + 1602\bar{v}_i - 494\bar{v}_{i+1}) + \\ \bar{v}_{i-1} (2843\bar{v}_{i-1} - 5966\bar{v}_i + 1922\bar{v}_{i+1}) + \\ \bar{v}_i (3443\bar{v}_i - 2522\bar{v}_{i+1}) + 547\bar{v}_{i+1}^2$$

$$IS_3^4 = \bar{v}_{i-3} (547\bar{v}_{i-3} - 3882\bar{v}_{i-2} + 4642\bar{v}_{i-1} - 1854\bar{v}_i) + \\ \bar{v}_{i-2} (7043\bar{v}_{i-2} - 17246\bar{v}_{i-1} + 7042\bar{v}_i) + \\ \bar{v}_{i-1} (11003\bar{v}_{i-1} - 9402\bar{v}_i) + 21047\bar{v}_i^2$$

Optimal Weights:

$$C_0^4 = 4/35 \quad C_1^4 = 18/35 \quad C_2^4 = 12/35 \quad C_3^4 = 1/35$$

k=5

Smoothness Indicators:

$$IS_0^5 = \bar{v}_i (107918\bar{v}_i - 649501\bar{v}_{i+1} + 758823\bar{v}_{i+2} - 411487\bar{v}_{i+3} + 86329\bar{v}_{i+4}) + \\ \bar{v}_{i+1} (1020563\bar{v}_{i+1} - 2462076\bar{v}_{i+2} + 1358458\bar{v}_{i+3} - 288007\bar{v}_{i+4}) + \\ \bar{v}_{i+2} (1521393\bar{v}_{i+2} - 1704396\bar{v}_{i+3} + 364863\bar{v}_{i+4}) + \\ \bar{v}_{i+3} (482963\bar{v}_{i+3} - 208501\bar{v}_{i+4}) + 22658\bar{v}_{i+4}^2$$

$$IS_1^5 = \bar{v}_{i-1} (22658\bar{v}_{i-1} - 140251\bar{v}_i + 165153\bar{v}_{i+1} - 88297\bar{v}_{i+2} + 18079\bar{v}_{i+3}) + \\ \bar{v}_i (242723\bar{v}_i - 611976\bar{v}_{i+1} + 337018\bar{v}_{i+2} - 70237\bar{v}_{i+3}) + \\ \bar{v}_{i+1} (406293\bar{v}_{i+1} - 464976\bar{v}_{i+2} + 99213\bar{v}_{i+3}) + \\ \bar{v}_{i+2} (138563\bar{v}_{i+2} - 60871\bar{v}_{i+3}) + 6908\bar{v}_{i+3}^2$$

$$IS_2^5 = \bar{v}_{i-2} (6908\bar{v}_{i-2} - 51001\bar{v}_{i-1} + 67923\bar{v}_i - 38947\bar{v}_{i+1} + 8209\bar{v}_{i+2}) + \\ \bar{v}_{i-1} (104963\bar{v}_{i-1} - 299076\bar{v}_i + 179098\bar{v}_{i+1} - 38947\bar{v}_{i+2}) + \\ \bar{v}_i (231153\bar{v}_i - 299076\bar{v}_{i+1} + 67923\bar{v}_{i+2}) + \\ \bar{v}_{i+1} (104963\bar{v}_{i+1} - 51001\bar{v}_{i+2}) + 6908\bar{v}_{i+2}^2$$

$$IS_3^5 = \bar{v}_{i-3} (6908\bar{v}_{i-3} - 60871\bar{v}_{i-2} + 99213\bar{v}_{i-1} - 70237\bar{v}_i + 18079\bar{v}_{i+1}) + \\ \bar{v}_{i-2} (138563\bar{v}_{i-2} - 464976\bar{v}_{i-1} + 337018\bar{v}_i - 88297\bar{v}_{i+1}) + \\ \bar{v}_{i-1} (406293\bar{v}_{i-1} - 611976\bar{v}_i + 165153\bar{v}_{i+1}) + \\ \bar{v}_i (242723\bar{v}_i - 140251\bar{v}_{i+1}) + 22658\bar{v}_{i+1}^2$$

$$IS_4^5 = \bar{v}_{i-4} (22658\bar{v}_{i-4} - 208501\bar{v}_{i-3} + 364863\bar{v}_{i-2} - 288007\bar{v}_{i-1} + 86329\bar{v}_i) + \\ \bar{v}_{i-3} (482963\bar{v}_{i-3} - 1704396\bar{v}_{i-2} + 1358458\bar{v}_{i-1} - 411487\bar{v}_i) + \\ \bar{v}_{i-2} (1521393\bar{v}_{i-2} - 2462076\bar{v}_{i-1} + 758823\bar{v}_i) + \\ \bar{v}_{i-1} (1020563\bar{v}_{i-1} - 649501\bar{v}_i) + 107918\bar{v}_i^2$$

Optimal Weights:

$$C_0^5 = 5/126 \quad C_1^5 = 20/63 \quad C_2^5 = 10/21 \quad C_3^5 = 10/63 \quad C_4^5 = 1/126$$

Βιβλιογραφία

- [1] T. J. Barth *et al.*, *High-Order Methods for Computational Physics*. Springer, 1999.
- [2] C. Canuto *et al.*, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, 3rd ed. Springer, 1988.
- [3] A. Harten, B. Enquist, S. Chakravarthy, and S. Osher, “Uniformly high order non-oscillatory schemes III,” *Journal of Computational Physics*, vol. 131, 1997.
- [4] Γ. Μπεργελές, *Υπολογιστική Ρευστομηχανική*. Εκδόσεις Συμεών, 2012.
- [5] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, 4th ed. John Wiley & Sons, 1994.
- [6] P. L. Roe, “Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 43, Mar. 1981.
- [7] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a practical introduction*, 1st ed. Springer, 1997.
- [8] A. Harten and H. Hyman, “Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws,” *Journal of Computational Physics*, vol. 50, 1983.
- [9] R. J. Leveque, *Finite Volume Methods For Hyperbolic Problems*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2004.
- [10] S. Gottlieb and C. Shu, “Total variation diminishing runge-kutta schemes,” *Mathematics Of Computation*, vol. 67, Jan. 1998.
- [11] C. Shu and S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 77, May 1988.
- [12] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, “On the partial difference equations of mathematical physics,” *IBM Journal of Research and Development*, vol. 11, Apr. 1967.
- [13] G. Papadakis, “Development of a hybrid compressible vortex particle method and application to external problems including helicopter flows,” PhD Thesis, National Technical University of Athens, 2014.
- [14] B. Van Leer, “Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to godunov’s method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 32, Oct. 1979.
- [15] P. L. Roe, “Some contributions to the modelling of discontinuous flows,” *Lectures on Applied Mathematics*, vol. 22, 1985.
- [16] C. Shu and S. Osher, “Numerical experiments on the accuracy of eno and modified eno scheme,” *Journal of Scientific Computing*, vol. 5, 1990.
- [17] X. Liu, S. Osher, and T. Chan, “Weighted essentially non-oscillatory schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 114, 1994.

-
- [18] G. Jiang and C. Liu, “Efficient implementation of weighted eno schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 126, 1996.
- [19] F. Aràndiga *et al.*, “Analysis of weno schemes for full and global accuracy,” *Journal of Scientific Computing*, Springer, 2011.
- [20] D. Balsara and C. Shu, “Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy accurate,” *Journal of Computational Physics*, vol. 160, 2000.
- [21] B. Leonard, “The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection,” *Computer Methods in Applied Mathematics and Engineering*, vol. 88, 1991.
- [22] A. Suresh and H. Huynh, “Accurate monotonicity preserving scheme with runge–kutta time-stepping,” *Journal of Computational Physics*, vol. 83, 1997.
- [23] G. Sod, “A survey of several finite difference methods for systems of non-linear hyperbolic conservation laws,” *Journal of Computing Physics*, vol. 27, 1978.
- [24] J. D. Anderson, *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, 3rd ed. McGraw Hill, 2003.
- [25] P. Lax, “Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computations,” *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. 7, 1957.
- [26] P. Woodward and P. Colella, “The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks,” *Journal of Computational of Physics*, vol. 54, 1984.
- [27] G. Ben-Dor, *Shock Wave Reflection Phenomena*, 2nd ed. Springer, 2007.
- [28] F. Grasso and S. Pirozzoli, “Simulations and analysis of the coupling process of compressible vortex pairs: Free evolution and shock induced coupling,” *Physics of Fluids*, vol. 13, May 2001.
- [29] N. Yamaleev and M. Carpenter, “Third-order energy stable weno scheme,” *Journal of Computational Physics*, vol. 228, 2009.

Αθήνα 2018