ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τίτλος Διπλωματικής Εργασίας:

ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ

Δρούτσα Χάιδω

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Α. Πολυράκης

Αθήνα
(2011)

Στους γονείς μου,

που στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια.

....
ΔΡΟΥΤΣΑ ΧΑΪΔΩ

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία είχε ως σκοπό την μελέτη των χρηματοοικονομικών παραγώγων και των αγορών που δημιουργούνται με την εισαγωγή αυτών των νέων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Για την μελέτη αυτών των εννοιών η διάταξη των χώρων στους οποίους αναφερόμαστε είναι πολύ σημαντική. Έτσι τα κεφάλαια 1 έως 6 της παρούσας εργασίας αναφέρονται στη μελέτη διατεταγμένων χώρων και στις βασικές ιδιότητες με τις οποίες αυτοί είναι εφοδιασμένοι. Στο κεφάλαιο 7 γίνεται η σύνδεση των διατεταγμένων χώρων με τους χώρους των αγαθών, των τιμών και με το σύνολο κατανάλωσης. Στα κεφάλαια 8 και 9 παρουσιάζεται αρχικά μια ιστορική αναδρομή και στη συνέχεια αναλύονται τα σημαντικότερα είδη χρηματοοικονομικών παραγώγων καθώς επίσης επεξηγείται η στρατηγική που ακολουθεί ο τυχαίος επενδυτής ανάλογα με το συμφέρον του την δεδομένη χρονική στιγμή. Τέλος στο κεφάλαιο 10 περιγράφεται η πλήρωση των χρηματοοικονομικών αγορών με δικαιώματα. Για την μελέτη αυτού του προβλήματος χρησιμοποιείται η θεωρία των συνδέσμων-υποχώρων των θετικών βάσεων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Σχέσεις διάταξης και διατεταγμένοι χώροι

Ορισμός 1.1:

Έστω U ένα μη κενό σύνολο και μια διμελής σχέση $\geq$ στο U. Η σχέση αυτή $\geq$ είναι ***σχέση μερικής διάταξης*** στο U αν και μόνο αν για κάθε x,y,z $\in$ U ισχύουν τα εξής:

i. $x \geq x$ (*ανακλαστική ιδιότητα*)
ii. $x \geq y$ & $y \geq x \Rightarrow x = y$ (*αντισυμμετρική ιδιότητα*)
iii. $x \geq y$ & $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (*μεταβατική ιδιότητα*)

Ακόμη όταν το x είναι μεγαλύτερο του y γράφουμε $x > y$ αν-ν $x \geq y$ και $x \neq y$.

Αν έχουμε λοιπόν μια σχέση μερικής διάταξης, $\geq$, στο U θα λέμε ότι το ζεύγος **(U, $\geq$)** είναι ένας ***μερικά διατεταγμένος χώρος***. Για λόγους ευκολίας συχνά χρησιμοποιούμε τον όρο ***διατεταγμένος χώρος***.

- Τα στοιχεία x και y λέγονται ***συγκρίσιμα*** εάν $x \geq y$ ή $y \geq x$.

Ορισμοί 1.2:

Μια διάταξη $\geq$ στο U λέγεται

i. ***ολική*** αν και μόνο αν $\forall\, x, y \in U$ θα έχουμε ή $x \geq y$ ή $y \geq x$, δηλαδή εάν κάθε δύο στοιχεία του U είναι συγκρίσιμα.
ii. ***καλή*** αν και μόνο αν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq U$ υπάρχει $\alpha \in A$ με $b \geq \alpha \;\; \forall\, b \in A$).

Λήμμα 1.1: Μια καλή διάταξη είναι και ολική.

Απόδειξη:
Υποθέτουμε ότι έχουμε $x, y \in U$. Θα δείξουμε πως ή $x \geq y$ ή $y \geq x$. Παίρνουμε για $A=\{x,y\}$. Αφού η διάταξη είναι καλή έπεται ότι το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Αν $x = \min A$ τότε $y \geq x$ και αν $y = \min A$ τότε $x \geq y$.

Πρόταση 1.1:
Μια ολική διάταξη ≥ στο U είναι καλή αν και μόνο αν δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του U με την ιδιότητα $x_{n+1} < x_n$ ∀ n ∈ ℕ.

Πρόταση 1.2:
Αν έχουμε μια διάταξη ≥ στο U και V είναι ένα μη κενό υποσύνολο του U τότε μπορούμε να περιορίσουμε τη ≥ στο V. Δηλαδή αυτό σημαίνει πως εάν ο (U, ≥) είναι καλά διατεταγμένος χώρος (κ.δ.χ.) τότε και ο (V, ≥) είναι κ.δ.χ. .

Ιστορική Αναδρομή

Μπορεί κάθε σύνολο U εφοδιασμένο με μία σχέση μερικής διάταξης ≥ να είναι καλά διατεταγμένο?

Η απάντηση δόθηκε από τον Ernst Zermelo ο οποίος το 1904 διατύπωσε το ***Αξίωμα της Επιλογής*** (***Axiom of Choice***) το οποίο έπαιξε σημαντικό ρόλο στην απόδειξη. Παρότι αρχικά υπήρξε αμφιλεγόμενο στην πορεία σημείωσε μεγάλη στροφή στην μαθηματική λογική και χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα χωρίς δισταγμό από τους περισσότερους μαθηματικούς.
Χρόνια αργότερα μία εναλλακτική τεχνική, πολύ συχνά απλούστερη στη χρήση, καθιερώθηκε με την ονομασία ***λήμμα του Zorn*** (***Zorn's lemma***). Πριν περάσουμε στο λήμμα του Zorn θα δώσουμε δύο απλούς ορισμούς.

Ορισμός 1.3:
Ένα υποσύνολο A του μερικά διατεταγμένου χώρου L καλείται ***αλυσίδα*** του L αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του A είναι συγκρίσιμα ως προς την (≥) σχέση διάταξης, δηλαδή για όλα τα x,y ∈ A είτε x ≥ y είτε y ≥ x.

Ορισμός 1.4:
Ένα στοιχείο m του μερικά διατεταγμένου χώρου L καλείται ***μεγιστικό*** αν κανένα στοιχείο του L δεν είναι γνήσια μεγαλύτερό του, δηλαδή αν x ∈ L και x ≥ m τότε m=x.

ZORN'S LEMMA:
Έστω L ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Αν κάθε αλυσίδα του L έχει άνω φράγμα τότε ο L περιέχει ένα τουλάχιστον μεγιστικό στοιχείο.

Ορισμοί 1.5:

Σε αυτό το σημείο θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά στοιχεία ενός κ.δ.χ. Έστω ότι έχουμε τους φυσικούς αριθμούς ℕ. Τότε θεωρούμε U έναν κ.δ.χ. Παίρνουμε ένα x ∈ U το οποίο δεν είναι μέγιστο στοιχείο του U. Θέτουμε A_x={y ∈ U / y > x}. Τότε το A_x είναι μη κενό και επομένως έχει ελάχιστο στοιχείο. Θέτουμε S(x) = min A_x, το οποίο ονομάζουμε ***ο επόμενος του x***.

Ο S(x) χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

i. S(x) > x
ii. Αν y > x τότε y ≥ S(x)

Παραδείγματος χάριν εξ' ορισμού (της πρόσθεσης στο ℕ) ο επόμενος του n ∈ ℕ είναι ο n+1.
Ας συμβολίσουμε με 0 το ελάχιστο στοιχείο του U. Το 0 δεν μπορεί να είναι ο επόμενος κανενός στοιχείου x ∈ U γιατί αλλιώς θα είχαμε ότι 0 = S(x) > x, το οποίο είναι άτοπο αφού το μηδέν είναι το ελάχιστο στοιχείο. Βγάζουμε λοιπόν το συμπέρασμα ότι δεν είναι όλα τα στοιχεία του U επόμενοι.

Ένας y ∈ U καλείται ***οριακός*** αν και μόνο αν y ≠ 0 και ο y δεν είναι επόμενος. Έτσι τα στοιχεία του U χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

i. Στο ελάχιστο στοιχείο
ii. Στους επόμενους και
iii. Στους οριακούς

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μια πολύ σημαντική ιδιότητα:

Έστω P υποσύνολο του ℕ όπου $\forall n \in \mathbb{N}$*, αν το* $0 \in P$, $1 \in$, $n \in P$ *τότε και το* $n+1 \in P$ *επομένως* $P = \mathbb{N}$.

Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως ***η αρχή της επαγωγής*** και είναι ισοδύναμη με την ***αρχή της καλής διάταξης*** , δηλαδή με το ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών ℕ είναι ένας κ.δ.χ.
Μπορούμε να αναρωτηθούμε κατά πόσον μπορούμε να έχουμε ένα είδος ''επαγωγής'' σε ένα τυχαίο κ.δ.χ. την οποία θα καλέσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή. Το πρόβλημα όμως που προκύπτει είναι ότι δεν είναι όλα τα στοιχεία ενός τυχαίου κ.δ.χ επόμενοι, έτσι θα αναδιατυπώσουμε την αρχή της επαγωγής ως εξής:

αν $P \subseteq \mathbb{N}$ *όπου* $\forall n \in \mathbb{N}$ *ισχύει : αν* $(\forall i < n)\ [i \in P]$ *τότε* $n \in P$, *επομένως* $\Rightarrow P = \mathbb{N}$.

Με αυτήν την ιδέα περνάμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Επαγωγής(transfinite induction)

Αν U είναι ένας κ.δ.χ. και $P \subseteq U$ με την ιδιότητα για κάθε $y \in U$ ισχύει:

$$\text{αν } [\text{για } x \in U\,,\, x < y \Rightarrow x \in P] \;\Rightarrow\; y \in P$$

Επομένως $P = U$.

<u>Απόδειξη:</u>

Υποθέτουμε πως ισχύει η παραπάνω ιδιότητα για $y \in U$. Αν $P \subset U$ τότε το σύνολο $U \backslash P$ είναι μη κενό και επομένως έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το y^*. Αφού το ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου ανήκει πάντα σε αυτό έπεται ότι $y^* \notin P$.
Από την επιλογή όμως του y^* έχουμε ότι $\forall\, x < y^*$ ισχύει ότι $x \in P$. Έτσι από την υπόθεση θα έχουμε και ότι $y^* \in P$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα το σύνολο $U \backslash P$ είναι κενό $\Rightarrow P = U$.

Κεφάλαιο 2

Κώνοι σε διανυσματικούς (γραμμικούς) χώρους

2.1. Κώνοι και Διάταξη

Ορισμός 2.1.1:

Ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος L εφοδιασμένος με μια σχέση διάταξης ($\geq$) ονομάζεται μερικά διατεταγμένος αν $\forall$ x,y,z $\in$ L ισχύουν οι ιδιότητες:

i. $x \geq x$ (ανακλαστική ιδιότητα)
ii. $x \geq y$ & $y \geq x \Rightarrow x = y$ (αντισυμμετρική ιδιότητα)
iii. $x \geq y$ & $y \geq z \Rightarrow x \geq z$ (μεταβατική ιδιότητα)
iv. $x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$ & $\lambda x \geq \lambda y$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ (συμβατότητα με τη γραμ. δομή)

Ορισμός 2.1.2:

Ένα μη κενό υποσύνολο K ενός διανυσματικού χώρου L ονομάζεται κώνος εάν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

i. $K + K \subseteq K$
ii. $\lambda K \subseteq K$ για κάθε $\lambda \geq 0$ (ή αλλιώς $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$)

αν επιπλέον $K \cap (-K) = \{0\}$ τότε το K είναι ***οξύς κώνος*** του L. Προφανώς από τον ορισμό έχουμε ότι κάθε κώνος του L περιέχει το μηδέν αφού το $0 \in \mathbb{R}_+$.

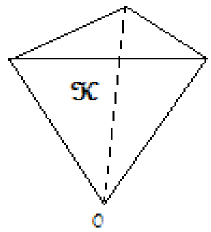
Συγκεκριμένα σε έναν διατεταγμένο διανυσματικό χώρο (L, $\geq$) κάθε διάνυσμα x όπου $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ονομάζεται ***θετικό διάνυσμα*** και μάλιστα το σύνολο όλων των θετικών διανυσμάτων συμβολίζεται ως:

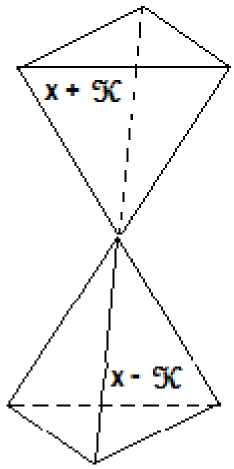
$$L_+ = \{ x \in L : x \geq 0 \}$$

που είναι οξύς κώνος και ορίζεται ως ***θετικός κώνος*** του L.

Αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι $K \subseteq L$ είναι ένας οξύς κώνος του διανυσματικού χώρου L τότε ορίζεται μια σχέση μερικής διάταξης $\geq$ στο L όπου:

$$x \geq y \quad \text{αν-ν} \quad x - y \in K.$$





Ισοδύναμα:

$$x \geq y \quad \text{αν-ν} \quad x \in y + K \quad \text{ή} \quad y \in x - K.$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι πράγματι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (i) - (iv) και η σχέση ($\geq$) είναι σχέση μερικής διάταξης και ο θετικός κώνος του L συμπίπτει με το K, δηλαδή $L_+ = K = \{ x \in L : x \geq 0 \}$.
Συνεπώς κάθε κώνος K ενός διανυσματικού χώρου L επάγει μια σχέση μερικής διάταξης $\geq$ στο L, όπου το σύνολο των θετικών διανυσμάτων συμπίπτει με τα διανύσματα στο K. Σε αυτήν την περίπτωση λοιπόν λέμε ότι ο L είναι ένας ***<u>διανυσματικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο K.</u>*** Εάν μάλιστα θέλουμε να δώσουμε έμφαση στο ότι ο διανυσματικός χώρος είναι διατεταγμένος από τον κώνο K τότε το συμβολίζουμε ως εξής $\geq_K$.

2.2. Βασικές Αρχές Θεωρώ μερικά διατετ. διαν. χώρο (L, $\leq$)

Έστω x και y δύο διανύσματα του διατεταγμένου διανυσματικού χώρου L τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $x \leq y$. Τότε το σύνολο

$$[\, x,y \,] = \{ z \in L \,/\, x \leq z \leq y \}$$

ορίζεται ως το ***<u>διατεταγμένο διάστημα</u>*** με άκρα x,y. Εάν $x \nleq y$ τότε το διατεταγμένο διάστημα είναι της μορφής $[\, x,y \,] = \emptyset$. Ουσιαστικά για κάθε x, y έχουμε

$$[\, x,y \,] = (x + L_+) \cap (y - L_+) = x + [\, 0, y - x \,].$$

Μάλιστα κάθε διατεταγμένο διάστημα αποτελεί κυρτό σύνολο.

Έστω υποσύνολο U του L είναι ***<u>άνω φραγμένο</u>*** εάν υπάρχει διάνυσμα $x \in L$: $x \geq a$ για κάθε $a \in U$. Τότε το x ονομάζεται ***<u>άνω φράγμα</u>*** του U.

Αντίστοιχα εάν το U είναι ***κάτω φραγμένο*** τότε $\exists\, x \in L : x \leq a$ για κάθε $a \in U$. Σε αυτήν την περίπτωση το x ονομάζεται ***κάτω φράγμα.***

Έστω $K \subseteq L$ και $z \in L$. Τότε το z ονομάζεται ***ελάχιστο άνω φράγμα (supremum)*** εάν για κάθε άνω φράγμα $a \in L$ ισχύει : $z \leq a$. Στην περίπτωση που έχουμε x,y $\in$ L και θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο άνω φράγμα τους γράφουμε ***$sup\{x,y\}=x \vee y$.***

Αντίστοιχα έστω $K \subseteq L$ και $v \in L$. Τότε το v ονομάζεται ***μέγιστο κάτω φράγμα (infimum)*** εάν για κάθε κάτω φράγμα $b \in L$ ισχύει: $v \geq b$. Στην περίπτωση που έχουμε x, y $\in$ L και θέλουμε να βρούμε το μέγιστο κάτω φράγμα τους γράφουμε ***$inf\{x,y\} = x \wedge y$.***

Έστω $x,y \in L$. Ο L είναι ***άνω κατευθυνόμενος*** εάν κάθε ζευγάρι $\{x,y\} \in L$ έχει άνω φράγμα στο L. Ομοίως $x,y \in L$. Ο L είναι ***κάτω κατευθυνόμενος*** εάν κάθε ζευγάρι $\{x,y\} \in L$ έχει κάτω φράγμα στο L.

Το υποσύνολο U του L είναι ***διατακτικά φραγμένο*** εάν είναι άνω και κάτω φραγμένο ή αλλιώς εμπεριέχεται σε ένα διατεταγμένο διάστημα, δηλαδή $U\subseteq[x,y]$ όπου $x,y \in L$.

Έστω ένα στοιχείο $e \in L$, ονομάζεται ***διατακτική μονάδα*** του L αν για κάθε $x \in L$ $\exists\, n > 0$: $-ne < x < ne$.

Έστω $U \subseteq L$ και $a \in U$. Το σημείο a ονομάζεται ***εσωτερικό σημείο*** του U εάν για κάθε $x \in L$, $\exists\, \lambda_o > 0 : a + \lambda x \in U$ για κάθε $\lambda \in [0, \lambda_o]$.

Το σύνολο ***$\{ x \} + L_+ = \{ y \in L / y \geq x \}$*** είναι το σύνολο των διανυσμάτων του L που είναι μεγαλύτερα ή ίσα του x.

Αντίστοιχα ***$\{ x \} - L_+ = \{ y \in L / y \leq x \}$*** είναι το σύνολο των διανυσμάτων του L που είναι μικρότερα ή ίσα του x.

Πρόταση 2.2.1:

Έστω διατεταγμένος διαν. χώρος L. O L_+ παράγει τον L αν και μόνο αν ο L είναι άνω κατευθυνόμενος.

Απόδειξη

Έστω ότι ο L_+ παράγει τον L. Τότε $\forall\, x,y \in L$ $\exists\, x_1,x_2,y_1,y_2 \in L_+ : x = x_1 - x_2$ και $y = y_1 - y_2$. Άρα $x \leq x_1$ και $y \leq y_1 \Rightarrow x + y \leq x_1 + y_1$ όπου $x_1, y_1 \in L$. Άρα ο L είναι άνω κατευθυνόμενος. Αντίστροφα έστω ότι ο L είναι άνω κατευθυνόμενος, δηλαδή $\forall\, x \in L$ τότε $\exists\, z \in L : x \leq z$ και $z \geq 0$.

Τότε $x = z - z + x = z - (z - x) \in L_+ - L_+$. Άρα ο L παράγεται από τον L_+.

Ορισμός 2.2.1:

Μια συνάρτηση T: X → Y μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων ονομάζεται:

- ✓ ***Προσθετική*** εάν $\forall$ x,y $\in$ X ισχύει $T(x+y) = T(x) + T(y)$
- ✓ ***Ομογενής*** εάν $\forall$ x $\in$ X και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε : $T(\lambda x) = \lambda\, T(x)$
- ✓ ***Γραμμική*** εάν ισχύουν και τα δύο.

Μία γραμμική συνάρτηση T: X → Y μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων χαρακτηρίζεται ως ***τελεστής (operator)***.

Ορισμός 2.2.2:

Μια γραμμική απεικόνιση f : X → $\mathbb{R}$, όπου X διανυσματικός χώρος ονομάζεται ***γραμμικό συναρτησιακό (linear functional)*** και είναι :

- ✓ ***Θετικό*** , δηλαδή $f \geq 0$ εάν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X_+$
- ✓ ***Αυστηρά θετικό*** , δηλαδή $f > 0$ εάν $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$
- ✓ ***Διατακτικά φραγμένο (order bounded)*** εάν το f μεταφέρει διατεταγμένα διαστήματα [x,y] του X σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

2.3. Riesz Space – Lattice Cones

Ορισμός 2.3.1:

Ένας διατεταγμένος (γραμμικός) διανυσματικός χώρος L καλείται ***χώρος Riesz (Riesz Space)*** ή αλλιώς ***vector lattice*** (***διανυσματικός σύνδεσμος)*** εάν κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του L έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) και μέγιστο κάτω φράγμα (infimum).

Διαφορετική διατύπωση:

Ένας μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος L ονομάζεται vector lattice ή χώρος Riesz εάν για κάθε x,y $\in L$ το sup{x,y} και inf{x,y} υπάρχει στο L.

Σημείωση 2.3.1:

- Κάθε κώνος που ανήκει σε χώρο Riesz ονομάζεται ***lattice cone (δικτυωτός κώνος)***
- Ακόμη μπορούμε να πούμε πως ένας κώνος K του διανυσματικού χώρου L είναι lattice κώνος εάν ο μερικά διατεταγμένος διαν. χώρος L από τον κώνο K, είναι χώρος Riesz.
- Έστω ο θετικός κώνος L_+ λέμε ότι είναι lattice κώνος αν και μόνο αν ο L είναι χώρος Riesz.

Ιδιότητες:

Εάν ο L είναι διανυσματικός σύνδεσμος (vector lattice) τότε μπορούμε να ορίσουμε στο L την ένωση ∨ και την τομή ∧. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ταυτοτική)
2. $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ (αντιμεταθετική)
3. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ (προσεταιριστική)
4. $(x \vee y) \wedge x = x$ $(x \wedge y) \vee x = x$

Επιπλέον η σχέση $x \leq y$ είναι ισοδύναμη με κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y \quad \text{και} \quad x \wedge y = x$$

Το μέγιστο στοιχείο ενός διανυσματικού δικτύου (vector lattice) L, εάν υπάρχει, ονομάζεται ***μονάδα*** και συμβολίζεται με 1. Αντίθετα το ελάχιστο στοιχείο, εάν υπάρχει, ονομάζεται ***μηδενικό στοιχείο*** και συμβολίζεται με 0. Επομένως:

$$0 \wedge x = 0 \quad \text{και} \quad 0 \vee x = x \quad \text{για κάθε } x \in L$$

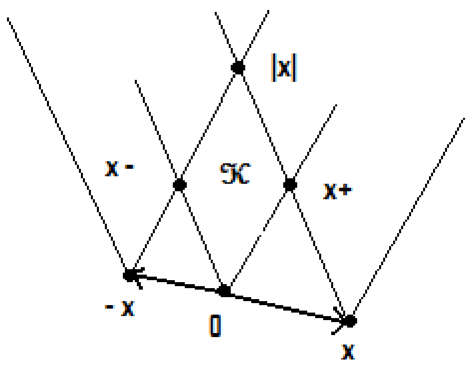
$$x \wedge 1 = x \quad \text{και} \quad x \vee 1 = 1 \quad \text{για κάθε } x \in L.$$

Γεωμετρική περιγραφή:

Σε κάθε χώρο Riesz κάθε διάνυσμα x περιγράφεται από τρία σημαντικά διανύσματα. Το ***θετικό μέρος*** x^+ του x, το ***αρνητικό μέρος*** x^- του x και την ***απόλυτη τιμή*** $|x|$ του x. Συγκεκριμένα:

$$x^+ = x \vee 0 \quad \text{ή αλλιώς} \quad x^+ = z \Leftrightarrow z = \begin{cases} x_i \mid x_i \geq 0 \\ 0 \mid x_i < 0 \end{cases}$$

$$x^- = (-x) \vee 0 \quad \text{και} \quad |x| = x \vee (-x) = x^+ \vee x^-$$



Θεώρημα 2.3.1:

Ένας κώνος K στο διανυσματικό χώρο L είναι lattice κώνος αν και μόνο αν για κάθε $x,y \in L$ υπάρχει $z \in L$ και ικανοποιεί το εξής:

$$(x + K) \cap (y + K) = z + K$$

όπου δηλαδή το $z = x \vee y$.

Ή αντίστοιχα για κάθε $x,y \in L$ υπάρχει $v \in L$:

$$(x - K) \cap (y - K) = v - K$$

όπου $v = x \wedge y$.

Λήμμα 2.3.1:

Για να είναι ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος L χώρος Riesz (ή αλλιώς vector lattice) υπάρχει ικανή και αναγκαία συνθήκη, όπου για κάθε ζεύγος $x,y \in L$ υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf\{ x, y \} = x \wedge y$ στο L. Επιπλέον εάν τα x,y είναι στοιχεία στον χώρο Riesz τότε ισχύουν:

$$x \wedge y = - [(-x) \vee (-y)] \qquad \text{και} \qquad x \vee y = - [(-x) \wedge (-y)]$$

<u>Απόδειξη:</u>
Αρχικά υποθέτουμε ότι για κάθε ζεύγος x,y του L, όπου L διατετ. διαν. χώρος, το $\inf \{x,y\}$ υπάρχει στο L. Θέτουμε $z = (-x) \wedge (-y)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $x \vee y = - [(-x) \wedge (-y)]$ ή αλλιώς ότι $x \vee y = - z$. Εφόσον το $z = (-x) \wedge (-y)$ έχουμε ότι : $z \leq - x$ και $z \leq - y$ ή καλύτερα $x \leq - z$ και $y \leq - z$. Δηλαδή το (-z) είναι ελάχιστο άνω φράγμα του $\{x,y\}$. Υποθέτουμε ότι $\exists\ t \in L : x \leq t$ και $y \leq t \Rightarrow$ $-t \leq - x$ και $-t \leq - y$.
Επομένως $-t \leq (-x) \wedge (-y) = z \Rightarrow -t \leq z \Rightarrow - z \leq t$. Άρα δείξαμε ότι το (-z) είναι το ελάχιστο άνω άκρο $\Rightarrow x \vee y = -z \Rightarrow x \vee y = -z = - [(-x) \wedge (-y)]$. Δηλαδή ο χώρος L είναι χώρος Riesz.

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε τέσσερις σημαντικές ταυτότητες που θα τις χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Ταυτότητες:

Για κάθε x,y,z που ανήκουν σε έναν χώρο Riesz έχουμε:

1 $\quad x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$ *ομοίως* $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$

2 $\quad x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$

3 $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *ομοίως* $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

4 $x + y = x \vee y + x \wedge y$

Απόδειξη του 1.
Αυτή η ταυτότητα μπορεί να ερμηνευτεί διαφορετικά:

- *εάν δύο στοιχεία y,z ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου έχουν ελάχιστο άνω φράγμα $y \vee z$, τότε για κάθε στοιχείο x το σύνολο {x+y, x+z} έχει επίσης supremum και μάλιστα ισχύει $(x+y) \vee (x+z) = x + (y \vee z)$.*

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: ορίζουμε $t = y \vee z$. Προφανώς $(x+y) \leq x + (y \vee z)$ $\Rightarrow (x+y) \leq x + t$ (i) αλλά και $(x + z) \leq x + t$ (ii). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $(x + y) \leq s$ και $(x + z) \leq s$ $\Rightarrow y \leq s - x$ και $z \leq s - x$.
Επομένως $t = y \vee z \leq s - x$ $\Rightarrow$ $t + x \leq s$. Από τις σχέσεις (i) & (ii) βλέπουμε ότι το $\boldsymbol{t + x}$ είναι το ελάχιστο άνω όριο του συνόλου {x + y, x+z}. Που ισχύει.

Απόδειξη του 2.
$(x - y)^+ + y = (x - y) \vee 0 + y = [(x - y) + y] \vee (0 + y) = x \vee y$.

Απόδειξη του 3.
$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}[x + y + (x - y) \vee (-x + y)] =$
$= \frac{1}{2}[\{(x + y) + (x - y)\} \vee \{(x + y) + (-x + y)\}] = \frac{1}{2}[2x \vee 2y] =$
$= x \vee y$.

Απόδειξη του 4.
Εφόσον από την ταυτότητα δύο ισχύουν τα $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ και $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$. Τότε αθροίζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$(x \vee y) + (x \wedge y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$
$= x + y$.

Σημείωση 2.3.2:

Από την ταυτότητα 2 επάγεται ότι:

Ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος L είναι χώρος Riesz αν και μόνο αν υπάρχει το x^+ για κάθε $x \in L$.

Λήμμα 2.3.2:

Εάν ένα μη κενό υποσύνολο A ενός χώρου Riesz L έχει supremum (ή αντίστοιχα infimum) , τότε για κάθε $x \in L$ το σύνολο $x + A$ έχει supremum (αντιστ. Infimum) και ισχύει:

$$x + \sup A = \sup(x + A) \quad \text{και} \quad x + \inf A = \inf(x + A) \quad \text{ομοίως}$$

$$x - \sup A = \sup(x - A) \quad \text{και} \quad x - \inf A = \inf(x - A)$$

$$\lambda \sup A = \sup(\lambda A) \quad \text{και} \quad \lambda \inf A = \inf(\lambda A)$$

Λήμμα 2.3.3: <u>**The Infinite Distributive Law**</u>

Εάν για κάθε μη κενό υποσύνολο A ενός χώρου Riesz L υπάρχει το sup A, τότε το $\sup\{x \wedge a : a \in A\}$ υπάρχει για κάθε $x \in L$ και μάλιστα ισχύει:

$$x \wedge \sup A = \sup\{x \wedge a : a \in A\} \qquad (1)$$

Αντίστοιχα εάν υπάρχει το inf A,τότε υπάρχει και το $\inf\{x \vee a : a \in A\}$ για κάθε $x \in L$ και ισχύει:

$$x \vee \inf A = \inf\{x \vee a : a \in A\} \qquad (2)$$

<u>Απόδειξη της (1):</u>

Έστω $s = \sup A$. Προφανώς $a \le s \Rightarrow x \wedge a \le x \wedge s$ για κάθε $a \in A$. Υποθέτουμε ότι κάποιο $t \in L$ είναι ελάχιστο φράγμα του συνόλου : $\{x \wedge a : a \in A\}$. Ουσιαστικά $\sup\{x \wedge a : a \in A\} = t$ ή $x \wedge a \le t$ για κάθε $a \in A$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα 4. ($u + v = u \vee v + u \wedge v$) βλέπουμε ότι $x + a = x \vee a + x \wedge a \Rightarrow x + a - x \vee a = x \wedge a$. Αφού $x \wedge a \le t$ τότε $x + a - x \vee a \le t \Rightarrow a \le t + x \vee a - x \le t + x \vee s - x$ για κάθε $a \in A$. Επομένως $s \le t + x \vee s - x \Rightarrow x + s - x \vee s \le t$.

Άρα η ταυτότητα γίνεται $x \wedge s = x + s - x \vee s \le t$, δηλαδή δείξαμε ότι $x \wedge s = \sup\{x \wedge a : a \in A\} = t$ ή αλλιώς $x \wedge \sup A = \sup\{x \wedge a : a \in A\} = t$.

Πρόταση 2.3.1:

Ένας τελεστής $T: L \to M$ μεταξύ δύο διανυσματικών συνδέσμων (δηλαδή μεταξύ δύο χώρων Riesz) ονομάζεται <u>***ομομορφισμός του διαν. συνδέσμου (lattice homomorphism)***</u> ή αλλιώς ως <u>***ομομορφισμός του Riesz (Riesz homomorphism)***</u> εάν για κάθε $x,y \in L$ έχουμε :

$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y) \quad , \quad T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$$

Εάν ο ομομορφισμός είναι ***ένα προς ένα "1-1"*** τότε χαρακτηρίζεται ως ***ισομορφισμός του διαν. συνδέσμου (lattice isomorphism)*** ή αλλιώς ***ισομορφισμός Riesz (Riesz isomorphism).***

Ορισμός 2.3.2:

Ένας χώρος Riesz L ονομάζεται ***order complete*** ή ***Dedekind complete*** εάν κάθε μη κενό υποσύνολο του L που είναι άνω φραγμένο έχει supremum.

2.4. Αρχιμήδειος Διαν. Χώρος, Αρχιμήδειος Κώνος

Ορισμός 2.4.1:

Ένας διανυσματικός χώρος L ονομάζεται ***Αρχιμήδειος (ή αλλιώς ότι έχει την Αρχιμήδεια Ιδιότητα)*** εάν ισχύει η συνεπαγωγή για κάθε $y \in L$, $x \in L_+$:

$$n\,y \leq x \quad \forall \ n=1,2,\ldots \ \Rightarrow \ y \leq 0$$

Ορισμός 2.4.2:

Ένας κώνος K ενός διανυσματικού χώρου L ονομάζεται ***Αρχιμήδειος Κώνος (Archimedean cone)*** εάν η διάταξη που επάγεται από τον κώνο K στον L κάνει τον χώρο L έναν Αρχιμήδειο διανυσματικό χώρο.

Παράδειγμα:

Μη – Αρχιμήδειος είναι ο διανυσματικός χώρος L= $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με την ***λεξικογραφική διάταξη (lexicographic ordering)***:

όπου $(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2)$ εάν $x_1 > x_2$ ή $x_1 = x_2$ και $y_1 \geq y_2$ και ο κώνος :

$$L_+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ \text{ ή } \ x = 0 \ \text{ και } y \geq 0\}$$

ή

$$L_+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \} \ \cup \ \{ (0,y) : y \geq 0\}$$

Πρόταση 2.4.1:

Εάν L είναι χώρος Riesz ο οποίος είναι order complete τότε είναι Αρχιμήδειος.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι για κάποια x,y ∈ L έχουμε $n x \leq y$ για κάθε n. Εφόσον ο L είναι order complete τότε το u= sup{ nx : n=1,2,…} υπάρχει στο L, επομένως ισχύει η σχέση $nx \leq u$ για κάθε n= 1,2,… . Το $nx = (n + 1)\, x - x \leq u - x \Rightarrow nx \leq u - x$. Όμως το u= sup{ nx : n=1,2,…}, δηλαδή είναι το ελάχιστο άνω φράγμα ⇒

$$\Rightarrow \text{Άρα} \quad u \leq u - x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \leq 0$$

Επομένως δείξαμε ότι είναι Αρχιμήδειος.

Ορισμός 2.4.3:

Έστω E διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $A \subseteq L$.
Θεωρούμε x,y ∈ L και την ευθεία:

$$E: \quad r(t) = x + t\, y \qquad , \text{όπου } t \in \mathbb{R}$$

Το A ονομάζεται ***ευθειακά κλειστό*** αν για κάθε ευθεία E του L το σύνολο $E \cap A$ είναι κλειστό υποσύνολο της E. Δηλαδή για κάθε ακολουθία $r(t_n) \in E \cap A$ έχουμε :

$$\text{για} \qquad t_n \to t_o \qquad \Rightarrow \qquad \text{το } r(t_o) \in A.$$

Δηλαδή το $E \cap A$ είναι κλειστό υποσύνολο της E.

Θεώρημα 2.4.1:

Ο γραμμικός χώρος L διατεταγμένος από τον κώνο P είναι Αρχιμήδειος αν και μόνο αν ο P είναι ευθειακά κλειστός.

2.5. Ιδιότητα Διάσπασης του Riesz (Riesz Decomposition Property)

Έστω L ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος. Αν για κάθε x, y_1, y_2, …, y_n ∈ L ισχύει η συνεπαγωγή :

$$|x| \leq |\, y_1 + y_2 + \ldots + y_n \,|$$

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$: $|x_i| \le |y_i|$ για κάθε i=1,2,…,n και $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.
Εάν τα διανύσματα είναι θετικά (εάν ανήκουν στον L_+) δεν χρειάζονται οι απόλυτες τιμές.

Θεώρημα 2.5.1:

Κάθε χώρος Riesz (διανυσματικός σύνδεσμος) έχει την R.D.P

Απόδειξη:
Έστω L χώρος Riesz και έστω $\mathbf{x,y,z} \in \mathbf{L_+}$: $0 \le x \le y + z$ (1) .
Θέτω $x_1 = x \wedge y$ και $x_2 = x - x_1 = x - x \wedge y$. Όμως από τον ορισμό του $x \wedge y$ ισχύει ότι $0 \le x \wedge y \le x$.
Άρα προκύπτει ότι $0 \le x_1 \le y$ αλλά και ότι $x_1 + x_2 = x$ και $x_2 \ge 0$.
Τότε : $0 \le x_2 = x - x \wedge y = x + (-x) \vee (-y) = 0 \vee (x - y)$. Από την (1) έχουμε $x - y \le z$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le x_2 = 0 \vee (x - y) \le 0 \vee z = z$$
$$\Rightarrow 0 \le x_2 \le z.$$

Λήμμα 2.5.1:

Ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος L έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz αν και μόνο αν :

$$[0, x] + [0, y] = [0, x + y]$$

για κάθε $x, y \in L_+$

Κεφάλαιο 3

Βάσεις Κώνων

Ορισμός 3.1:

Έστω K ένας κώνος του διανυσματικού χώρου L. Ένα μη κενό και κυρτό υποσύνολο B του K\{ 0 } ονομάζεται ***<u>βάση του κώνου</u>*** K εάν :

$$\text{για κάθε } x \in K \setminus \{0\} \text{ υπάρχει } \lambda > 0 \text{ και } b \in B : x = \lambda b.$$

Ορισμός 3.2:

Έστω K κώνος του διανυσματικού χώρου L. Το μη μηδενικό διάνυσμα $e \in K$ ονομάζεται ***<u>ακραίο διάνυσμα (extremal vector)</u>*** του κώνου K εάν :

$$\text{για } 0 \leq x \leq e \quad \Rightarrow \quad x = \lambda e \qquad \text{όπου } \lambda \geq 0.$$

Ορισμός: 3.3:

Έστω $e \in A$ όπου A κυρτό σύνολο. Το e ονομάζεται ***<u>ακραίο σημείο</u>*** του C εάν:

$$\text{για } e = ax + (1 - a)\,y \quad \text{με} \quad x,y \in A \quad \text{και} \quad a \in (0,1)$$
$$\Rightarrow \; x = y = e$$

Λήμμα 3.1:

Έστω K κώνος ενός διανυσματικού χώρου L και ένα $0 \neq e \in K$. Τ.Ε.Ε.Ι :

1) *Το διάνυσμα e είναι ακραίο διάνυσμα του κώνου K*
2) *Εάν δύο διανύσματα $x, y \in K$ ικανοποιούν τη σχέση $e = x + y$ τότε τα x,y είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

<u>Απόδειξη:</u>

(1) → (2). Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $x_1, x_2 \in K$ ικανοποιούν τη σχέση $e = x_1 + x_2$, $0 < x_1 < e$ και $0 < x_2 < e$ $\Rightarrow$ υπάρχει $\lambda > 0$ και $\mu > 0$:

$$x_1 = \lambda e \;\Rightarrow\; e = \frac{x1}{\lambda} \qquad \text{και} \qquad x_2 = \mu e \;\Rightarrow\; e = \frac{x_2}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{x1}{\lambda} = \frac{x_2}{\mu} \;\Rightarrow\; \mu\, x_1 - \lambda\, x_2 = 0$$

Άρα τα x_1, x_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ορισμός 3.4:
Έστω P κώνος του X. Το γραμμικό συναρτησιακό f του X είναι ***<u>ομοιόμορφα μονότονο (uniformly monotone)</u>*** στον P αν υπάρχει πραγματικός αριθμός α>0:

$$f(x) \geq \alpha\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in P$$

Πρόταση 3.1:
Έστω L διατεταγμένος χώρος από τον κώνο P. Η βάση του P έχει τη μορφή

$$B = \{ x \in P \,/\, f(x) = \lambda \quad \text{για κάθε } \lambda>0 \}$$

όπου f αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του L.

Ορισμός 3.5:
Έστω L διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|.\| : L \to \mathbb{R}$ λέγεται ***<u>νόρμα (norm)</u>*** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in L$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $x \in L$ και $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x,y \in L$ (τριγωνική ανισότητα)

Ένας διανυσματικός χώρος L εφοδιασμένος με νόρμα (norm) συμβολίζεται ***(L,*** $\|.\|$ ***)***

Θεώρημα 3.1:
Έστω διατεταγμένος χώρος L με κώνο P και γραμμικό συναρτησιακό f αυστηρά θετικό στο P. Υποθέτουμε ότι B είναι η βάση του P που ορίζει το f. Τότε η βάση B είναι norm-φραγμένη αν και μόνο αν το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω η βάση B norm-φραγμένη επομένως έχουμε: $\|x\| \leq M$ για κάθε $x \in B$. Τότε για κάθε $x \in P$ έχουμε: $\left\|\frac{x}{f(x)}\right\| \leq M \Rightarrow \|f(x)\| \leq \frac{1}{M}\|x\| \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{M}\|x\|$. Άρα το f είναι ομοιόμορφα μονότονο.
Αντίστροφα έστω $f(x) \geq \alpha\|x\|$ για κάθε $x \in P$ όπου α >0. Τότε εφόσον το f είναι αυστηρά θετικό για κάθε $x \in B$,άρα για λ>0 έχουμε: $f(x) = \lambda \Rightarrow$ Άρα $\lambda \geq \alpha\|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \frac{\lambda}{\alpha}$. Άρα η βάση B είναι norm- φραγμένη για κάθε x.

Θεώρημα 3.2:

Έστω B βάση του κώνου K. Τότε το διάνυσμα b ∈ B είναι ακραίο διάνυσμα αν και μόνο αν το b είναι ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου B.

Θεώρημα 3.3:

Έστω L χώρος με νόρμα και P κλειστός κώνος πεπερασμένης διάστασης που ανήκει σε αυτόν. Τότε κάθε βάση του P είναι φραγμένη.

<u>Απόδειξη:</u>

Υποθέτουμε ότι η B είναι βάση του κώνου P και f αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του L. Έστω ότι η B δεν είναι φραγμένη άρα υπάρχει ακολουθία x_n ∈ B : $\|x_n\|$ --> ∞. Ορίζουμε την ακολουθία $\frac{x_n}{\|x_n\|} = y_n$ όπου f$\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ → 0 Εφόσον η μοναδιαία σφαίρα του L είναι συμπαγής (προφανές) τότε υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία y_{k_n} της y_n. Έστω ότι η y_{k_n} → x_o, x_o ∈ P. Τότε έχουμε ότι $\|x_o\|$ = 1 και f(x_o) = lim f(y_{k_n}) = 0 άτοπο αφού το f είναι αυστηρά θετικό στο P.

Κεφάλαιο 4

Διατεταγμένοι Υπόχωροι

Ορισμός 4.1:

Έστω ένας χώρος L εφοδιασμένος με μια σχέση μερικής διάταξης (≤). Κάθε $X \subseteq L$ γραμμικός υπόχωρος του L με την επαγόμενη διάταξη $\leq_X$ ονομάζεται ***μερικά διατεταγμένος υπόχωρος (partially ordered subspace)*** του L και μάλιστα ισχύει:

$$\forall\, x,y \in X \quad x \leq_X y \Leftrightarrow x \leq y$$

Ορισμός 4.2:

Έστω E ένας διανυσματικός σύνδεσμος(vector lattice). Ένας υπόχωρος F του E ονομάζεται ***διανυσματικός υποσύνδεσμος (vector sublattice)*** ή ***υπόχωρος Riesz (Riesz subspace)*** αν και μόνο αν για κάθε $x,y \in F$ υπάρχουν τα $x \vee y$ και $x \wedge y$ στο F.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι εάν ο F είναι υπόχωρος του E τότε ο F είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος. Άρα εάν $x,y \in F$ τότε το supremum του $\{x,y\}$ στο E γράφεται $x \vee y$ ενώ το supremum του $\{x,y\}$ στο F γράφεται $x \vee_F y$ και είναι δύο διαφορετικά πράγματα. Εάν το $x \vee_F y$ υπάρχει τότε ισχύει ότι:

$$x \vee y \leq x \vee_F y$$

Όμως εάν ο F είναι ένας διανυσματικός υποσύνδεσμος του E τότε

$$x \vee y = x \vee_F y$$

Πρόταση 4.1:

Έστω K ένας κώνος στο διανυσματικό χώρο L. Ο K είναι κώνος lattice του διανυσματικού υπόχωρου $K - K$ που παράγεται από τον K στο L αν και μόνο αν για κάθε $x,y \in K$ το supremum $x \vee y$ υπάρχει στο K.
Επιπλέον εάν $x,y,z,u \in K$ τότε:

$$(x - y) \vee (z - u) = (x + u) \vee (z + y) - (y + u) \in K - K$$

Ορισμός 4.3:
Ένας υπόχωρος M ενός μερικά διατεταγμένου χώρου L ονομάζεται ***σύνδεσμος υπόχωρος (lattice subspace)*** εάν ο M με την επαγόμενη διάταξη από το L είναι ο ίδιος ένας διανυσματικός σύνδεσμος.
Δηλαδή ο M είναι σύνδεσμος υπόχωρος εάν για κάθε $x,y \in M$ το $\sup\{x,y\}$ και το $\inf\{x,y\}$ υπάρχουν στο M, όπου το M είναι διατεταγμένο από τον κώνο $M_+ = M \cap L_+$

Σημείωση:
Κάθε διανυσματικός υποσύνδεσμος ενός διανυσματικού συνδέσμου είναι ένας σύνδεσμος υπόχωρος. Όμως ένας σύνδεσμος υπόχωρος δεν είναι απαραίτητα διανυσματικός υποσύνδεσμος.

Λήμμα του F. Riesz:
Έστω L ένας κλειστός υπόχωρος ενός E γραμμικού χώρου εφοδιασμένου με νόρμα. Εάν $L \neq E$ τότε για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχει στο E ένα διάνυσμα x ($\|x\|=1$) :

$$d(x, L) \equiv \inf \|x - y\| \geq \delta \quad \text{όπου } y \in L$$

Ορισμός 4.4:
Έστω B ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού συνδέσμου (vector lattice) E. Η τομή όλων των υποσυνδέσμων του E που περιέχει τον B συμβολίζεται ως S(B) και ονομάζεται ως ***ο υποσύνδεσμος του E που παράγεται από το B.***

Κεφάλαιο 5

Δυϊκότητα

Όπως έχουμε ορίσει και πιο πάνω το $f : E \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό συναρτησιακό του E όταν για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in E$ ισχύει :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Ορισμός 5.1:

Έστω E μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Ο χώρος $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ των ***γραμμικών συναρτησιακών*** του E συμβολίζεται με $\mathbf{E^{\#}}$ και ονομάζεται ***αλγεβρικός δυϊκός (algebraic dual).*** Μάλιστα το σύνολο:

$$E^{\#}_{+} = \{ f \in E^{\#} \ / \ f(x) \geq 0, \ \forall \, x \in E_{+} \}$$

είναι ο θετικός κώνος του $E^{\#}$.

Υποθέτουμε ότι ο $E^{\#}$ είναι διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη. Άρα $\forall \ f,g \in E^{\#}$ έχουμε:

$$f \geq g \iff f(x) \geq g(x) \quad \forall \, x,y \in E_{+}$$

Εάν υποθέσουμε ότι ο χώρος $E^{\#}$ είναι διατεταγμένος από τον κώνο $E^{\#}_{+}$ τότε $\forall \ f,g \in E^{\#}$ ισχύει ότι:

$$f \geq g \iff f - g \in E^{\#}_{+}$$

Ορισμός 5.2:

Έστω E διατεταγμένος γραμμικός χώρος με νόρμα. Ο ***τοπολογικός δυϊκός (ή συζυγής)*** του E συμβολίζεται με $\boldsymbol{E^*}$ και είναι ο χώρος $\mathcal{L}c(E, \mathbb{R})$ ***των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών*** του E. Ο χώρος E^* είναι γραμμικός υπόχωρος του $E^{\#}$ και ο θετικός κώνος του E^* είναι το σύνολο:

$$E^{*}_{+} = \{ f \in E^* \ / \ f(x) \geq 0, \ \forall \, x \in E_{+} \} = E^* \cap E^{\#}_{+}$$

Εάν υποθέσουμε ότι ο χώρος E^* είναι διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη τότε $\forall \ f,g \in E^*$ έχουμε:

$$f \geq g \iff f(x) \geq g(x) \quad \forall \, x,y \in E_{+}$$

Μάλιστα εάν ο χώρος E^* είναι διατεταγμένος από τον κώνο E_+^* τότε $\forall$ $f,g \in E^\#$ ισχύει ότι:

$$f \geq g \iff f - g \in E_+^*$$

Ορισμός 5.3:

Ο χώρος $\mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$ των ***<u>διατακτικά φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών</u>*** του E ονομάζεται ***<u>διατακτικός δυϊκός (order dual)</u>*** και συμβολίζεται με $\mathbf{E^\sim}$. Ο χώρος $E^\sim$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $E^\#$. Εάν υποθέσουμε ότι ο χώρος $E^\sim$ είναι διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη τότε $\forall$ $f,g \in E^\sim$ έχουμε:

$$f \geq g \iff f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x,y \in E_+$$

Κεφάλαιο 6

Μετρικοί χώροι

6.1. Βασικές έννοιες

Έστω X μη κενό σύνολο και έστω απεικόνιση d: X x X →ℝ έτσι ώστε για κάθε x, y,z ∈ X να ισχύουν:

i. d(x, y) ≥ 0 και d(x, y)=0 αν και μόνο αν x=y
ii. d(x, y) = d(y, x)
iii. d(x, y) ≤ d(x, z) + d(z, y) *(τριγωνική ανισότητα).*

Τότε η d είναι μια ***μετρική*** στο X και το ζευγάρι (X, d) ονομάζεται ***μετρικός χώρος***. Συχνά για λόγους απλότητας αναφέρουμε απλώς ο μετρικός χώρος X. Παραθέτουμε κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων.

i. ***Η συνήθης μετρική*** στο σύνολο ℝ των πραγματικών αριθμών ορίζεται ως

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

ii. ***Η ευκλείδεια μετρική d_2*** στο σύνολο $\mathbb{R}^k$ των διατεταγμένων k-άδων πραγματικών αριθμών ορίζεται ως εξής: για $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ του $\mathbb{R}^k$ είναι

$$d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

iii. ***Η διακριτή μετρική*** σε οποιοδήποτε μη κενό σύνολο X ορίζεται ως εξής:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \neq y \\ 0 \text{ αν } x = y \end{cases}$$

Ορισμός 6.5.5:

Έστω (X, +, ·) ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ***νόρμα*** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i. $\|x\| \geq 0 \ \forall \, x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν –ν x=0.

ii. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall \, x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall \, x, y \in X$.

Το ζεύγος $(X, \| \ \|)$ ονομάζεται ***χώρος με νόρμα***. Για κάθε χώρο με νόρμα η απεικόνιση $\rho=\rho_{\| \ \|}: X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x, y)= \|x - y\|$ είναι μετρική στον X. Πράγματι:

- $\rho(x, y)= \|x - y\| \geq 0 \ \forall \, x, y \in X$ ενώ $\rho(x, y)=0$, δηλαδή $\|x - y\| = 0$ αν-ν $x - y = 0 \ \Rightarrow$ δηλαδή αν-ν $x = y$.

- $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-)y - x\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$ $\forall \, x, y \in X$

- Για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Η μετρική αυτή ονομάζεται ***μετρική που επάγει η νόρμα*** στον διαν. χώρο X.

Ορισμός 6.1.1:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Για κάθε $x_o \in X$ και $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ θα συμβολίζουμε με $B(x_o,\rho)$ την ***ανοικτή σφαίρα*** του X με κέντρο x_o και ακτίνα ρ, δηλαδή

$$B(x, \rho) = \{y \in X \mid d(x, y) < \rho\}.$$

Ορισμός 6.1.2:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον (X, d) και $x_o \in X$. Τότε το x_o καλείται ***όριο της ακολουθίας*** (x_n) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o = n_o(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall \, n \geq n_o$ να ισχύει ότι $d(x_n , x_o) < \varepsilon$.

Μια <u>γεωμετρική ερμηνεία</u> για την έννοια της <u>σύγκλισης</u> μιας <u>ακολουθίας</u> (x_n) στο x_o είναι η εξής: $x_n \to x_o$ αν και μόνο αν $\forall \, \varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$: $x_n \in B(x_o, \varepsilon)$ $\forall \, n \geq n_o$, όπου $B(x_o, \varepsilon) = \{ x \in X : d(x_n, x_o) < \varepsilon \}$.

Πρόταση 6.1.1:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X και $x_o \in X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i. $x_n \to x_o$
ii. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών ($d(x_n, x_o)$) συγκλίνει στο μηδέν.

Πρόταση 6.1.2: (*μοναδικότητα ορίου*)

Έστω (x_n) ακολουθία σε μετρικό χώρο (X, d). Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας τότε αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχουν δύο στοιχεία $x_o, x_o' \in X$ με $x_o \neq x_o'$ ώστε $x_n \to x_o$ και $x_n \to x_o'$. Αφού $x_o \neq x_o'$ έχουμε ότι $d(x_o, x_o')=\delta>0$. Επειδή $x_n \to x_o$ για $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ έχουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_o \to d(x_n, x_o) < \frac{\delta}{2}$. Ομοίως, αφού $x_n \to x_o'$ υπάρχει $n_o' \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_o' \to d(x_n, x_o') < \frac{\delta}{2}$. Αν τότε ορίσουμε $n_o''=\max\{n_o, n_o'\}$ έχουμε ότι

$$\delta = d(x_o, x_o') \leq d(x_o, x_{n_o''}) + d(x_{n_o''}, x_o') = d(x_{n_o''}, x_o) + d(x_{n_o''}, x_o') < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

δηλαδή $\delta < \delta$ άτοπο.

Πρόταση 6.1.3:

Κάθε υπακολουθία συγκλίνουσας ακολουθίας σε ένα μετρικό χώρο συγκλίνει στο ίδιο όριο που συγκλίνει και ολόκληρη η ακολουθία.

Θεώρημα 6.1.1: (Bolzano – Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ορισμός 6.1.3:

Έστω $A \subset X$ όπου (X, d) μετρικός χώρος. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***οριακό σημείο*** του συνόλου A αν $\forall\, \varepsilon > 0$ ισχύει:

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Είναι προφανές ότι κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A. Το γεγονός όμως που καθιστά ενδιαφέρον τον παραπάνω ορισμό είναι η ύπαρξη συνόλων A και σημείων $x \in X$ που ενώ $x \notin A$ εντούτοις το x είναι οριακό σημείο του A.

Παραδείγματος χάριν για το ανοικτό υποσύνολο (5,10) των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, οι αριθμοί 5 και 10 παρόλο που δεν ανήκουν στο υποσύνολο αυτό είναι οριακά σημεία του.

Ορισμός 6.1.4:

<u>Η κλειστότητα</u> ενός συνόλου A, υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου (X, d) συμβολίζεται με $\overline{A}$ και ορίζεται ως εξής:

$$\overline{A} = \{ x \in X : x \text{ οριακό σημείο του } A \}.$$

Όπως εξηγήσαμε πιο πάνω κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A και κατά συνέπεια $A \subset \overline{A}$.

<u>Η κλειστότητα των συνόλων ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:</u>

i. Αν $A \subset B$ τότε και $\overline{A} \subset \overline{B}$
ii. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, δηλαδή η κλειστότητα της κλειστότητας ενός συνόλου A δεν συνεισφέρει επιπλέον στοιχεία πέραν αυτών του A.

Ορισμός 6.1.5:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα σημείο $x \in X$ λέγεται ***<u>σημείο συσσώρευσης</u>*** ενός υποσυνόλου A του X αν $\forall\ \varepsilon > 0$

$$A \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Το $(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\})$ συμβολίζει την ανοιχτή σφαίρα $B(x, \varepsilon)$ χωρίς το κέντρο της x.

Ορισμός 6.1.6:

Ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται ***<u>ανοικτό</u>*** εάν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε ανοιχτή σφαίρα $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Πρόταση 6.1.4

Κάθε ανοιχτή σφαίρα είναι ανοικτό σύνολο.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $B(x_o, \varepsilon)$ ανοιχτή σφαίρα του (X, d) και $x \in B(x_o, \varepsilon)$. Θέτουμε $0 < \varepsilon_1 = \varepsilon - d(x_o, x)$. Έστω μια άλλη ανοικτή σφαίρα $B(x, \varepsilon_1)$ και έστω $y \in B(x, \varepsilon_1)$. Τότε $d(x,y) < \varepsilon_1$ και λόγω τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι:

$$d(x_o, y) \leq d(x_o, x) + d(x, y) < d(x_o, x) + \varepsilon_1 = d(x_o, x) + \varepsilon - d(x_o, x) = \varepsilon$$

δηλαδή $d(x_o, y) < ε \Rightarrow$ Άρα $y \in B(x_o, ε) \Rightarrow B(x, \varepsilon_1) \subset B(x_o, ε) \Rightarrow B(x_o, ε)$ ανοικτό σύνολο.

Θεώρημα 6.1.2: (θεμελιώδεις ιδιότητες ανοικτών συνόλων)
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

1. Τα σύνολα $\emptyset$ και X είναι ανοικτά.

2. Αν $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών συνόλων τότε η $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο.

3. Αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια ανοικτών συνόλων, τότε $\bigcup_{i\in I} U_i$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη:

1) Το ότι το X είναι ανοικτό είναι άμεσο διότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $ε > 0$ προφανώς υπάρχει μία ανοικτή σφαίρα τέτοια ώστε $B(x, ε) \subset X$. Όσον αφορά το $\emptyset$ σύνολο ικανοποιεί τις απαιτήσεις του ανοικτού συνόλου. Πράγματι, αν κάποιο σύνολο A δεν είναι ανοικτό τότε θα υπάρχει κάποιο $x_o \in A$: για κάθε $ε > 0$ να ισχύει $B(x_o, ε) \not\subset A$. Όμως για το κενό σύνολο δεν μπορούμε να βρούμε ένα τέτοιο $x_o \in \emptyset$.

2) Έστω $U_1, U_2, \dots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X. Αν $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset$ τότε από την 1) είναι ανοικτό σύνολο. Έστω όμως ότι υπάρχει $x_o \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Θα βρούμε $ε_o > 0$ ώστε $B(x_o,ε_o) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ ή ισοδύναμα $B(x_o, ε_o) \subset U_i$, $\forall$ i = 1, 2, .. , n. Πράγματι αν $x_o \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ έπεται ότι $x_o \in U_i$, $\forall$ i = 1, 2, .. , n. Άρα για κάθε i υπάρχει $ε_i > 0 : B(x_o, ε_i) \subset U_i$. Θέτουμε $ε_o = \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n} > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$B(x_o, ε_o) \subset B(x_o, ε_i) \subset U_i \qquad \forall\, i = 1, 2, .., n$$

άρα $B(x_o, ε_o) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ συνεπώς το σύνολο $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ είναι ανοικτό.

3) Θεωρούμε οικογένεια $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X και έστω $x_o \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $i_o \in I$ ώστε $x_o \in U_{i_o}$. Επειδή το U_{i_o} είναι ανοικτό υπάρχει $ε_o > 0$: $B(x_o, ε_o) \subset U_{i_o}$. Όμως $U_{i_o} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \implies$

$$B(x_o, ε_o) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

επομένως είναι ανοικτό σύνολο.

□

Ορισμός 6.1.7:
Ένα υποσύνολο K του μετρικού χώρου (X, d) λέγεται ***κλειστό*** αν το συμπλήρωμα του X\K (ή αλλιώς K^c) είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

Θεώρημα 6.1.3: (θεμελιώδεις ιδιότητες κλειστών συνόλων)
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

1. Τα σύνολα ∅ και X είναι κλειστά

2. Αν $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια κλειστών συνόλων τότε η $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι επίσης κλειστό.

3. Αν $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ είναι οποιαδήποτε οικογένεια κλειστών συνόλων, τότε $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ είναι επίσης κλειστό σύνολο.

Απόδειξη:

1) Από το αντίστοιχο θεώρημα για ανοικτά σύνολα έχουμε δείξει ότι τα σύνολα ∅ και X είναι ανοικτά. Αφού το ∅ είναι ανοικτό σύνολο το συμπλήρωμά του X\∅ = X είναι κλειστό. Ομοίως για X\X= ∅ είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού.

2) Επειδή $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ είναι κλειστά έπεται ότι $\{X\setminus F_i\}_{i=1}^{n}$ είναι ανοικτά άρα η $\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Ξέρουμε ότι $\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$ = X\$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ⟹ άρα το $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού.

3) Η $\{X\setminus F_i\}_{i=1}^{n}$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων άρα η $\bigcup_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$ είναι ανοικτό. Συνεπώς το X\$\bigcup_{i=1}^{n}(X\setminus F_i)$= $\bigcap_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό ως συμπλήρωμα ανοικτού συνόλου.

□

Πρόταση 6.1.5
Έστω F υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα (T.E.E.I):

1. Το σύνολο F είναι κλειστό
2. F = $\overline{\text{F}}$.

Απόδειξη:

1) ⟹ 2) έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Άρα συνεπάγεται ότι το σύνολο X\F είναι ανοικτό. Άρα αν x ∉ F υπάρχει ε > 0 ώστε B(x, ε) ⊂ X\F ισοδύναμα B(x, ε) ∩ F = ∅. Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Άρα X\F ⊂ X\$\overline{\text{F}}$ ⟹ F ⊂ $\overline{\text{F}}$. Ισχύει πάντα όμως ότι $\overline{\text{F}}$ ⊂ F άρα F = $\overline{\text{F}}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Πράγματι αν $x \in X \setminus F$ τότε $x \notin F$ και αφού $F = \bar{F}$ τότε $x \notin \bar{F}$ δηλαδή το x δεν είναι οριακό σημείο του F. Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$ οπότε είναι ισοδύναμο με το ότι $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus F$. Άρα $X \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο και συνεπώς το F είναι κλειστό.

Θεώρημα 6.1.4

Έστω (x_n), x στοιχεία του μετρικού χώρου (X, d). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x.
2. Για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $x \in U$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n > n_o$ τότε $x_n \in U$.

Απόδειξη:

1) $\Rightarrow$ 2). Έστω U ανοικτό σύνολο και $x \in U$. Τότε από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset U$. Τότε λόγω σύγκλισης της ακολουθίας στο x (από ορισμό 6.1.2 γεωμετρική ερμηνεία) θα υπάρχει $n_o(\varepsilon)$ ώστε για κάθε $n > n_o$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Άρα υπάρχει n_o ώστε για κάθε $n > n_o$ η $x_n \in U$.

2) $\Rightarrow$ 1). Έστω $\varepsilon > 0$. Η σφαίρα $U = B(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, άρα υπάρχει n_o ώστε για $n > n_o$ η $x_n \in U$. Το οποίο είναι ισοδύναμο με την σύγκλιση της $(x_n) \rightarrow x$. □

Ορισμός 6.1.8:

Έστω X σύνολο εφοδιασμένο με δύο μετρικές d_1 και d_2. Οι μετρικές d_1, d_2 λέγονται ισοδύναμες, αν η ταυτοτική συνάρτηση $I: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ είναι αμφισυνεχής.
Δηλαδή η $I: (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ και η $I: (X, d_2) \rightarrow (X, d_1)$ είναι συνεχείς.

Ορισμός 6.1.9:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$ μη κενό. Η ***<u>διάμετρος του Α</u>*** συμβολίζεται με ***<u>diam(A)</u>*** και ισούται με:

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{ d(x, y) : x, y \in A).$$

Ιδιότητες:

1. Ορίζουμε ότι $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.
2. Ένα $A \subset X$ λέγεται ***<u>φραγμένο</u>*** αν $\mathrm{diam}(A) < \infty$.
3. Η μετρική d λέγεται ***<u>φραγμένη</u>*** αν $\mathrm{diam}(X) < \infty$.

6.2. Πυκνά σύνολα και Διαχωρίσιμοι Μετρικοί Χώροι

Ορισμός 6.2.1:
Ένα σύνολο A καλείται ***<u>αριθμήσιμο</u>*** αν είναι πεπερασμένο ή αν υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to A$ ένα προς ένα και επί.
Ένα σύνολο θα καλείται ***<u>υπεραριθμήσιμο</u>*** αν δεν είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα 6.2.1:
Κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα 6.2.2:
Αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Ορισμός 6.2.2:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Το D λέγεται ***<u>πυκνό</u>*** υποσύνολο του X αν $\overline{D} = X$.

Πρόταση 6.2.1:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $D \subset X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i. Το D είναι πυκνό στον X.
ii. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $d(x, y) < \varepsilon$.
iii. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία (y_n) στο D ώστε $y_n \to x$.
iv. Για κάθε ανοικτή σφαίρα $B(x, \varepsilon)$ του X, $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.
v. Για κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο U του X, $U \cap D \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u>

(i) ⟹ (ii). Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό υποσύνολο του X έχουμε ότι $X = \overline{D}$. Άρα το $x \in \overline{D}$, δηλαδή το x είναι οριακό σημείο του D. Συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in D$ ώστε $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x, y) < \varepsilon$.

(ii) ⟹ (iii). Έστω $x \in X$. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε ότι υπάρχει $y_n \in D$ ώστε $d(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Άρα $d(x, y_n) \to 0 \Rightarrow y_n \to x$.

(iii) ⟹ (iv). Έστω $\varepsilon > 0$, $x \in X$ και (y_n) ακολουθία στο D ώστε $y_n \to x$. Τότε υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$, $d(x, y_n) < \varepsilon$ οπότε $y_n \in B(x, \varepsilon)$. Επομένως $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

(iv) $\Longrightarrow$(v). Έστω U ανοικτό μη κενό σύνολο. Τότε υπάρχει $x \in U$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset U$. Αφού $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, έπεται ότι και $D \cap U \neq \emptyset$.

(v) $\Longrightarrow$ (i). Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η σφαίρα $B(x, \varepsilon)$ είναι ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X και άρα $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του D. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $X \subset \overline{D}$. Όμως ισχύει ότι $\overline{D} \subset X$, έπεται ότι $X = \overline{D}$. Άρα το σύνολο D είναι πυκνό.

Ορισμός 6.2.3:
Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται ***διαχωρίσιμος*** εάν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ορισμός 6.2.4:
Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $\varepsilon > 0$. Ένα υποσύνολο A του X καλείται ***ε-διαχωρισμένο*** αν για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ η $d(x, y) \geq \varepsilon$.

Ορισμός 6.2.5:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος και B μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X. Η B καλείται ***βάση περιοχών*** του X αν κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X γράφεται ως ένωση στοιχείων της B.

Πρόταση 6.2.2:
Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν έχει μια αριθμήσιμη βάση περιοχών.

6.3. Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Ορισμός 6.3.1:
Μια ακολουθία (x_n) στοιχείων ενός μετρικού χώρου (X, d) λέγεται ***βασική ή ακολουθία Cauchy*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq n_o$ ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Πρόταση 6.3.1:
Έστω (x_n) βασική ακολουθία. Τότε το σύνολο $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ είναι φραγμένο.

Απόδειξη:
Ένα σύνολο A ονομάζεται φραγμένο αν $diam(A)<\infty$.

Όπου diam(A)=sup{d(x,y) : x, y ∈ A}. Επομένως στην προκειμένη περίπτωση αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sup\{ d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Για ε=1 υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_o$, να ισχύει $d(x_n, x_m) < 1$. Επίσης υπάρχει $M \geq 1$ ώστε

$$\max \{ d(x_n, x_{no}) : n = 1,2,\ldots, n_o \} < M.$$

Άρα για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{no}) + d(x_{no}, x_m) < 2M.$$

Επομένως diam $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \} < 2M$, δηλαδή το σύνολο $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ είναι φραγμένο.

Πρόταση 6.3.2: *(κριτήριο ύπαρξης ορίου βασικής ακολουθίας)*

Έστω (x_n) βασική ακολουθία και υποθέτουμε ότι υπάρχει (x_{k_n}) υπακολουθία της που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$. Τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω ε > 0. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. Για το δοθέν ε > 0 υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_1$, $d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ (λόγω σύγκλισης της υπακολουθίας στο x). Επίσης υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_2$, $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $n_o = \max\{ n_1, n_2 \}$ και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \geq n_o$, $d(x_n, x) < \varepsilon$.
Πράγματι επειδή $\kappa_{n_o} \geq n_o$, για $n \geq n_o$ θα ισχύει:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\kappa_{n_o}}) + d(x_{\kappa_{n_o}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Πόρισμα 6.3.1:

Κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u>
Επειδή (x_n) είναι βασική ακολουθία, από την πρόταση 6.3.1 είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) που συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Άρα από την προηγούμενη πρόταση και η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x.

Ορισμός 6.3.2:

Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται ***πλήρης*** αν κάθε βασική ακολουθία του (X, d) είναι συγκλίνουσα.

Ορισμός 6.3.3:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to X$ καλείται ***συνάρτηση συστολής*** αν υπάρχει $0 < C < 1$ ώστε $d(f(x), f(y)) \leq C\, d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Θεώρημα 6.3.1: (*θ. σταθερού σημείου του Banach*)

Έστω (X, d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Τότε κάθε συνάρτηση συστολής $f : X \to X$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x_o \in X$ ώστε $f(x_o) = x_o$.

6.4. Συμπαγείς Μετρικοί Χώροι

Ορισμός 6.4.1:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Μια οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$υποσυνόλων του X λέγεται ***κάλυμμα*** του A αν $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Αν επιπλέον για κάθε $i \in I$ το Gi είναι ανοικτό, τότε το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***ανοικτό κάλυμμα*** ενώ στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο το $\{G_i\}_{i\in I}$ λέγεται ***πεπερασμένο κάλυμμα***. Αν τώρα $J \subset I$ ώστε $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ τότε το $\{G_i\}_{i\in J}$ λέγεται ***υποκάλυμμα*** του $\{G_i\}_{i\in I}$ για το A.

Ορισμός 6.4.2:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το K θα καλείται ***συμπαγές*** αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή αν για κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $K \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$. Ειδικότερα αν K = X τότε ο X θα καλείται ***συμπαγής μετρικός χώρος.***

Πρόταση 6.4.1: (ιδιότητες συμπαγών χώρων)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος:

i. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X.

ii. Κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

iii. Κάθε μετρικός χώρος είναι πλήρης.

iv. Έστω K συμπαγές υποσύνολου του X. Τότε κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του K.

Ορισμός 6.4.3:

Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X έχει την ***<u>ιδιότητα της πεπερασμένης τομής</u>*** αν για n = 1, 2,… και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$, κάθε πεπερασμένη <u>υποοικογένεια</u> έχει μη κενή τομή ($\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{F}_{i_k} \neq \emptyset$) .

Πρόταση 6.4.2:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής αν –ν για κάθε οικογένεια $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i \in I} \mathrm{F}_\mathrm{i} \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i \in I} \mathrm{F}_\mathrm{i} = \emptyset$.. Τότε $\bigcup_{i \in I}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{F}_\mathrm{i}) = \mathrm{X}$. Συνεπώς η οικογένεια $\{\mathrm{X} \setminus \mathrm{F}_\mathrm{i}\}_{i \in I}$ αποτελεί ένα ανοικτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν n = 1, 2,… και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε X= $\bigcup_{k=1}^{n}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{F}_{\mathrm{i}_\mathrm{k}})$. Αλλά τότε $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{F}_{i\,k} = \emptyset$ που είναι άτοπο διότι η οικογένεια $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Επομένως $\bigcap_{i \in I} \mathrm{F}_\mathrm{i} \neq \emptyset$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε οικογένεια $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει $\bigcap_{i \in I} \mathrm{F}_\mathrm{i} \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι τότε ο X είναι συμπαγής. Πράγματι, διαφορετικά υπάρχει $\{\mathrm{G}_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα του X χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Συνεπώς για κάθε n = 1, 2,… και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ έχουμε $\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{G}_{i_k} \neq \mathrm{X}$ ή $\bigcap_{k=1}^{n}\left(\mathrm{X} \setminus G_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}\right) \neq \emptyset$. Τώρα θέτουμε $\mathrm{F}_\mathrm{i} = \mathrm{X} \setminus G_\mathrm{i}$ για κάθε $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Τότε η $(\mathrm{F}_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Άρα από υπόθεση θα πρέπει $\bigcap_{i \in I} \mathrm{F}_\mathrm{i} \neq \emptyset$. Αλλά τότε $\bigcup_{i \in I}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{F}_\mathrm{i}) \neq \mathrm{X}$ ή $\bigcup_{i \in I} \mathrm{G}_\mathrm{i} \neq \mathrm{X}$ άτοπο. Άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα της $\{\mathrm{G}_i\}_{i \in I}$ και επομένως ο X είναι συμπαγής.

Θεώρημα 6.4.1: (Heine-Borel)

Κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα [a, b] του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.

<u>Απόδειξη:</u>
Από το θεώρημα Bolzano – Weierstrass κάθε ακολουθία (x_n) του [a , b] έχει

υπακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του [a, b]. Τότε από το θεώρημα (ότι το κάθε υπακολουθία του συνόλου K έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο K αν και μόνο αν το K είναι συμπαγές) προκύπτει ότι το [a, b] είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

6.5. Συνέχεια Συναρτήσεων

Ορισμός 6.5.1:

Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι, συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ και $x_o \in X$. Η f είναι ***συνεχής στο x_o*** αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0$: για κάθε $x \in X$ με $d(x, x_o) < \delta$ να ισχύει ότι $\rho(f(x),f(x_o)) < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_o \in X$ τότε η f θα λέγεται ***συνεχής συνάρτηση***.

Πρόταση 6.5.1: (*γεωμετρική ερμηνεία συνέχειας*)

Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι, συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ και $x_o \in X$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_o αν και μόνο αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0$:

$$f\big(B_d(x_o, \delta)\big) \ \subset\ B_\rho(f(x_o), \varepsilon)\ .$$

Μια σημαντική κλάση συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη ***συνθήκη Lipschitz.*** Μια συνάρτηση $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y \in X$ να ισχύει:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq C{\cdot}d(x, y).$$

Πρόταση 6.5.2:

Αν η $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz τότε είναι συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά C. Θεωρούμε $x_o \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θέτοντας $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ τότε για κάθε $x \in X$ με $d(x, x_o) < \delta$ έχουμε ότι

$$\rho(f(x), f(x_o)) \leq C{\cdot}d(x, x_o) < C{\cdot}\ \delta = C{\cdot}\ \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Επομένως η f είναι συνεχής.

Ορισμός 6.5.2:

Μια συνάρτηση f: (X, ρ) ⟶ (X, d) είναι συνεχής αν και μόνο αν $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του Y, ή $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X για κάθε K κλειστό υποσύνολο του Y.

Πρόταση 6.5.3:

Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, d) μετρικός χώρος και f:(X, ρ) → (Y, d) συνεχής συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

i. Η εικόνα f(x) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y και άρα αν η f είναι επί τότε και ο Y είναι συμπαγής.

ii. Για κάθε F ⊂ X κλειστό, η εικόνα f(F) είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

<u>Απόδειξη:</u>
(i). Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του f (X) στον μετρικό χώρο (Y, d). Τότε $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ και άρα $X \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. Αφού η f είναι συνεχής για κάθε $i \in I$ το σύνολο $f^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό στο X και άρα το $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X. Εφόσον ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ ώστε $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})$, οπότε $f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. Επομένως το f (X) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Αν η f είναι επί τότε f(X) = Y και άρα ο Y είναι συμπαγής.

(ii). Έστω F ⊂ X κλειστό. Αφού ο X είναι συμπαγής, το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X (πρόταση 6.4.1 το (ii)). Ομοίως με το (i) δείχνουμε ότι το f(F) είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Τότε από (πρόταση 6.4.1 το (i)) το f(F) είναι κλειστό υποσύνολο του Y.

Πρόταση 6.5.4:

Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y,d) μετρικός χώρος και f:(X, ρ)→(Y,d) συνεχής, 1-1 και επί. Τότε η f^{-1} : (Y, d) → (X, ρ) είναι επίσης συνεχής και άρα ο f είναι <u>***ομομορφισμός***</u>.

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω F ⊂ X κλειστό. Αρκεί να δειχθεί ότι $(f^{-1})^{-1}$ (F) είναι κλειστό υποσύνολο του Y. Όμως $(f^{-1})^{-1} = f$ και άρα $(f^{-1})^{-1}$ (F) = f (F). Τότε από την πρόταση 6.5.4 (ii) προκύπτει αυτό που ψάχνουμε.

Ορισμός 6.5.3:

Αν (x_n) είναι μια ακολουθία, τότε ονομάζουμε ***ανώτερο όριο της ακολουθίας*** και το συμβολίζουμε με:

$$\overline{\lim} f(x_n) \qquad \text{το} \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

Αντίστοιχα ονομάζουμε ***κατώτερο όριο της ακολουθίας*** και το συμβολίζουμε με:

$$\underline{\lim} f(x_n) \qquad \text{το} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k$$

Πρόταση 6.5.5:

Η (x_n) συγκλίνει στο x αν και μόνο αν

$$\overline{\lim}(x_n) = \underline{\lim}(x_n) = x$$

Πρόταση 6.5.6:

Έστω X μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $x \in X$ αν για κάθε ακολουθία (x_n) του X ισχύει:

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x).$$

Τότε από την πρόταση 6.5.5 η συνέχεια της συνάρτησης διασπάται στις δύο παρακάτω συνθήκες:

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \overline{\lim} f(x_n) \leq f(x)$$

και

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \underline{\lim} f(x_n) \geq f(x)$$

που όταν ισχύουν ταυτόχρονα εξασφαλίζουν τη συνέχεια της f.

Ορισμός 6.5.4:

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $x \in X$. Αν για κάθε ακολουθία (x_n) του X ισχύει:

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \overline{\lim} f(x_n) \leq f(x),$$

θα λέμε ότι η f είναι ***άνω ημισυνεχής*** στο x.

Ενώ αν για κάθε ακολουθία (x_n) του X ισχύει:

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \underline{\lim} f(x_n) \geq f(x)$$

θα λέμε ότι η f είναι ***<u>κάτω ημισυνεχής</u>*** στο x.

Θεώρημα 6.5.1:

Αν X μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ έχουμε:

i. Η f είναι άνω ημισυνεχής στο X αν και μόνο αν $f^{-1}([a, +\infty))$ είναι κλειστό για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

ii. Η f είναι κάτω ημισυνεχής στο X αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty, a])$ είναι κλειστό για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 6.5.6

Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με νόρμα (X, || ||) καλείται ***<u>Χώρος Banach</u>*** αν ο X με τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Κεφάλαιο 7

Στοχαστικές Οικονομίες

Τα οικονομικά μοντέλα που συνήθως μελετώνται θεμελιώνονται σε πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης χώρους Banach ή σε γενικότερες κατηγορίες χώρων επομένως η μελέτη διαφόρων οικονομικών εννοιών ανάγεται στην γνώση των μαθηματικών ιδιοτήτων των αντίστοιχων χώρων. Η διάσταση των χώρων απόδοσης στα χρηματοοικονομικά μοντέλα εξαρτάται από το πλήθος των δυνατών καταστάσεων.

7.1. Ροή πληροφορίας - Δένδρο Πληροφόρησης

Θεωρούμε στοχαστική οικονομία πεπερασμένου πλήθους αγαθών (m). Όταν στην οικονομία υπεισέρχονται οι παράγοντες της αβεβαιότητας και του χρόνου (οι οποίοι είναι άμεσα συνδεόμενοι) οι επενδυτές της οικονομίας δεν είναι ενήμεροι για τις καταστάσεις που διαμορφώνονται στην αγορά, αλλά αποκτούν πληροφορία για αυτές μόνο με την πάροδο του χρόνου. Επομένως ενώ σε μια συμβατική αρχή του χρονικού ορίζοντα δεν γνωρίζουν τίποτε για τις ακριβείς συνθήκες στην αγορά, στο τέλος του χρονικού ορίζοντα είναι πλήρως ενήμεροι για το ποια κατάσταση, μέσα από ένα πλήθος δυνατών καταστάσεων, αντιμετωπίζουν. Έχουμε λοιπόν μια βαθμιαία αποκάλυψη της πληροφορίας που διοχετεύεται στην αγορά σε βάθος χρόνου.

Θεωρούμε ένα ***<u>πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων</u>*** $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \dots, S\}$, οι οποίες αποτελούν ένα σύνολο δυνατών τυχαίων ενδεχομένων. Ακόμη θεωρούμε και ένα ***<u>πεπερασμένο σύνολο χρονικών περιόδων</u>*** $\mathbf{T} = \{0, 1, \dots, T\}$, κατά την διάρκεια των οποίων πραγματοποιούνται οι όποιες συναλλαγές των επενδυτών. Τα μεγέθη της οικονομίας λοιπόν είναι γενικά συναρτήσεις του καρτεσιανού γινομένου $\mathbf{T} \times \boldsymbol{S}$, δηλαδή παραδείγματος χάριν δεν μπορεί να γίνει αναφορά στην τιμή ενός αγαθού αν δεν αναφερθεί η χρονική περίοδος στην οποία βρίσκεται η οικονομία αλλά και η κατάσταση η οποία επικρατεί τη δεδομένη χρονική στιγμή.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να ορίσουμε τον όρο διαμέριση ενός συνόλου A.

<u>Διαμέριση Συνόλου</u>: είναι μια συλλογή από υποσύνολα του συνόλου A τα οποία είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους είναι το ίδιο το A.

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι η βαθμιαία αποκάλυψη της πληροφορίας περιγράφεται μέσω μιας οικογένειας διαμερίσεων του ***S***. Το σύνολο των διαμερίσεων είναι της μορφής $\delta=\{\Delta_o, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_T\}$ όπου $\Delta_o=\{\boldsymbol{S}\}$ και $\Delta_T=\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{S\}\}$.

Παράδειγμα 7.1.1:

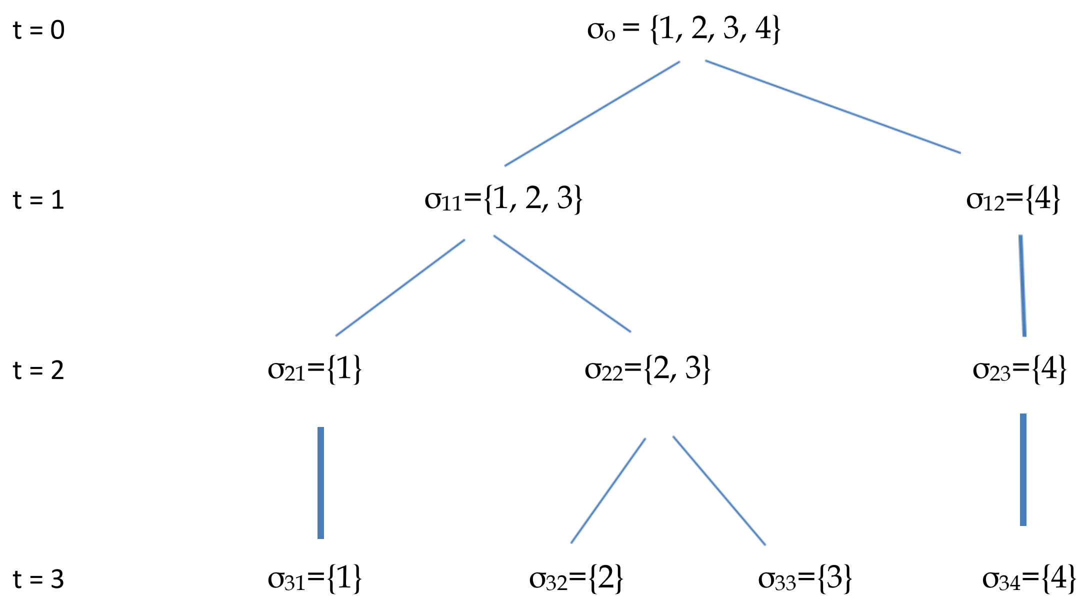
Έστω το σύνολο των χρονικών περιόδων **T**={0, 1, 2, 3} και το σύνολο των καταστάσεων ***S***={1, 2, 3, 4}. Τότε έστω ότι η χρονική ακολουθία των διαμερίσεων είναι η εξής:

$$\boldsymbol{\Delta_o=\{}\ \sigma_o = \{1, 2, 3, 4\}=\boldsymbol{S}\ \},\quad \boldsymbol{\Delta_1}=\{\ \sigma_{11}=\{1, 2, 3\}, \sigma_{12}=\{4\}\ \boldsymbol{\}}\ ,$$

$$\boldsymbol{\Delta_2=\{}\ \sigma_{21}=\{1\}, \sigma_{22}=\{2, 3\}, \sigma_{23}=\{4\}\ \boldsymbol{\}}\ \text{και}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{T=3}=\{}\ \sigma_{31}=\{1\}, \sigma_{32}=\{2\}, \sigma_{33}=\{3\}, \sigma_{34}=\{4\}\ \boldsymbol{\}}$$

και σχηματικά έχουμε:



Για κάθε t και για κάθε σ ∈ Δ_t το ζεύγος (t, σ) =ξ ονομάζεται ***κόμβος***. Το σύνολο των κόμβων ονομάζεται ***Δένδρο Πληροφόρησης*** και είναι το εξής:

$$\mathbb{D} = \{(\mathrm{t}, \sigma) = \xi \mid \mathrm{t} \in \mathbf{T}, \sigma \in \Delta_t \}.$$

7.2. Η Δυϊκότητα Αγαθών – Τιμών

Έχουμε υποθέσει οικονομία πεπερασμένου πλήθους αγαθών n το οποίο μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο. Παραδείγματος χάριν η οικονομία που μελετάμε μπορεί να περιλαμβάνει τα αγαθά ενός μεγάλου super market, ή τα αγαθά που παράγει μια χώρα ή ακόμη το σύνολο των αγαθών της παγκόσμιας οικονομίας.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα αγαθά αριθμούνται με τους αριθμούς i=1,2,..,m και ότι στην οικονομία έχουμε καταναλωτές (επενδυτές) και μελετούμε την συμπεριφορά τους σε σχέση με τις προτιμήσεις τους, τις τιμές και το συνολικό διαθέσιμο αγαθό. Κάθε καταναλωτής διαθέτει ένα αρχικό αγαθό ω (ή αλλιώς αρχικό πλούτο w>0) που επιθυμεί να ανταλλάξει με διάνυσμα αγαθών x που να μεγιστοποιεί τις προτιμήσεις του.

Διαθέσιμο Αγαθό ή διάνυσμα Αγαθών ή Δέσμη Αγαθών :

i. Όταν σε μια οικονομία ανταλλαγής δεν υπεισέρχεται ο παράγοντας της αβεβαιότητας τότε το διαθέσιμο αγαθό κατά μήκος του χρονικού ορίζοντα είναι ένα διάνυσμα **α**= (α (t)), t ∈ **T**.

ii. Ενώ όταν στην οικονομία υπεισέρχεται η αβεβαιότητα τότε η ποσότητα του διαθέσιμου αγαθού μεταβάλλεται κατά χρονική περίοδο ανάλογα με την κατάσταση που έχει διαμορφωθεί στην αγορά. Τότε το διαθέσιμο αγαθό κατά μήκος του χρονικού ορίζοντα είναι ένα διάνυσμα της μορφής **α** =(α (t, s)), (t, s) ∈ **T** × **S**.

Τότε θα συμβολίζουμε για κάθε κόμβο ξ=(t, s) του δένδρου πληροφόρησης $\mathbb{D}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \big(\alpha(\xi)\big),\ \xi \in \mathbb{D}$$

Τα διανύσματα αγαθών είναι στοιχεία του χώρου $\mathbb{R}^m$ όπου **m** είναι το πλήθος των διαθέσιμων στην αγορά αγαθών.

Έτσι λοιπόν ο ***χώρος αγαθών*** σε μία στοχαστική οικονομία, στην οποία η ροή της πληροφορίας παρέχεται από τη διαμέριση δ, είναι ο μερικά διατεταγμένος διανυσματικός χώρος $E=\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$.

$$\mathbb{R}^m = \{\boldsymbol{\alpha} = (\alpha(\xi)) \mid \xi \in \mathbb{D}, \alpha(\xi) \in \mathbb{R}\}$$

Πριν ορίσουμε το σύνολο κατανάλωσης παραθέτουμε κάποιους βασικούς ορισμούς.

➢ ***Χρηματοοικονομικό Συμβόλαιο (financial contract):*** είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών (αγοραστής-πωλητής) και ο αγοραστής εισπράττει ένα προσυμφωνημένο ποσό (μέρισμα) που αντιστοιχεί στους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης. Ένα συμβόλαιο θεωρείται ως ένα αγαθό.

- Τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια μπορούν να εκδοθούν σε όλους τους κόμβους του δένδρου πληροφόρησης εκτός των τερματικών ($\mathbb{D}_{\boldsymbol{T}}$).

- Τα μερίσματα διανέμονται σε κόμβους που έπονται των κόμβων έκδοσης.

- Ένα συμβόλαιο μπορεί να πωληθεί ή να αγορασθεί ξανά σε όλους τους κόμβους που προηγούνται ενός κόμβου λήξης.

➢ ***Διάνυσμα μερίσματος*** του χρηματοοικονομικού συμβολαίου είναι το διάνυσμα

$$V = (V(\xi)),\ \xi \in \mathbb{D}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι στην οικονομία έχουμε n χρηματοοικονομικά συμβόλαια (n αγαθά) τότε το διάνυσμα μερίσματος είναι το:

$$\vec{\mathbf{V}} = (V_1(\xi), V_2(\xi), \ldots, V_n(\xi)),\ \ \xi \in \mathbb{D}.$$

- Μετά τον κόμβο λήξης ενός χρηματοοικ. συμβολαίου έχουμε μηδενικά μερίσματα. (δηλ. ξ′′ κόμβος λήξης του συμβολαίου αν $V(\xi'') \neq 0$ και $V(\xi')=0$ για κάθε κόμβο $\xi' > \xi''$).

➢ ***<u>Διάνυσμα τιμών</u>*** του συμβολαίου είναι το διάνυσμα q = (q(ξ)), $\xi \in \mathbb{D}$. Εάν υποθέσουμε ότι στην οικονομία έχουμε n χρηματοοικονομικά συμβόλαια τότε το διάνυσμα τιμών είναι το:

$$\vec{\boldsymbol{q}} = (\mathrm{q}_1(\xi), \mathrm{q}_2(\xi), \ldots., \mathrm{q}_n(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{D}$$

- Στους τερματικούς κόμβους όπου οι συναλλαγές έχουν ολοκληρωθεί, η τιμή πώλησης του συμβολαίου είναι ίση με μηδέν q $(\xi_T) = 0$ με $\xi_T \in \mathbb{D}_{\boldsymbol{T}}$.

- Ακόμη q (ξ) = 0 σε όλους τους κόμβους ξ που δεν έπονται του κόμβου έκδοσης του συμβολαίου.

➢ ***<u>Χαρτοφυλάκιο (portfolio)</u>***: είναι το πλήθος των μονάδων καθενός από τα m χρηματοοικονομικά συμβόλαια που επενδύει ο επενδυτής σε κόμβο ξ. Συμβολίζουμε ως εξής:

$$\vec{\boldsymbol{z}}(\xi) = (\mathrm{z}_1(\xi), \mathrm{z}_2(\xi), \ldots, \mathrm{z}_n(\xi)), \quad \xi \in \mathbb{D}$$

- Αν z_i (ξ) > 0 τότε υποθέτουμε ότι στον κόμβο ξ οι μονάδες του i χαρτοφυλακίου αγοράζονται.

- Ενώ αν z_i (ξ) < 0 τότε υποθέτουμε ότι πωλούνται.

- Είναι προφανές ότι στους τερματικούς κόμβους z_i $(\xi_T) = 0$. Η αγορά ενός συμβολαίου σε έναν τερματικό κόμβο είναι ανούσια αφού δεν υπάρχει επόμενη περίοδος στην οποία ο επενδυτής να μπορεί να αποκτήσει κάποιο μέρισμα.

Η κατοχή ενός χαρτοφυλακίου z δίνει στον επενδυτή τη δυνατότητα κατανάλωσης. Ορίζουμε λοιπόν το ***<u>διάνυσμα κατανάλωσης (consumption bundle)</u>*** ως εξής:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = (\mathrm{x}\ (\xi))\ ,\ \xi \in \mathbb{D},\ \mathrm{x}(\xi) \in \mathbb{R}.$$

Συγκεκριμένα:

✓ Στον αρχικό κόμβο ξ_o το διαθέσιμο του επενδυτή είναι ίσο με το αρχικό αγαθό στον κόμβο αυτό μειωμένο κατά το κόστος της επένδυσης στο χαρτοφυλάκιο $z(\xi_o)$. Δηλαδή:

$$\mathrm{x}(\xi_o) = \omega(\xi_o) - \mathrm{q}(\xi_o) \cdot z(\xi_o)$$

- ✓ Ενώ σε κάθε μη τερματικό κόμβο ξ του δένδρου πληροφόρησης με $\xi \neq \xi_o$ το διαθέσιμο του επενδυτή είναι ίσο με:

$$x(\xi) = \omega(\xi) + (\, V(\xi) + q(\xi)\,) \cdot z(\xi^-) - q(\xi) \cdot z(\xi)$$

όπου ω(ξ) είναι το αρχικό αγαθό στον κόμβο αυτό και το $V(\xi) \cdot z(\xi^-)$ είναι το συνολικό μέρισμα που εισπράττει ο επενδυτής στον κόμβο ξ για την επένδυση στο χαρτοφυλάκιο $z(\xi^-)$ στον αμέσως προηγούμενο κόμβο ξ^-. Ακόμη στον κόμβο ξ ο επενδυτής πουλάει το χαρτοφυλάκιο $z(\xi^-)$ του προηγούμενου κόμβου στην τρέχουσα τιμή q(ξ) του κόμβου ξ και εισπράττει $q(\xi) \cdot z(\xi^-)$. Έπειτα επενδύει στο χαρτοφυλάκιο z(ξ) στον κόμβο ξ με κόστος $q(\xi) \cdot z(\xi)$.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο όλων των διαθέσιμων αγαθών που μπορεί να εμφανιστούν στην οικονομία είναι ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο X του $E = \mathbb{R}^m$ που ονομάζεται ***<u>σύνολο κατανάλωσης</u>***.

Μάλιστα η κυρτότητα του συνόλου κατανάλωσης είναι μια από τις πιο βασικές υποθέσεις της οικονομίας. Πρακτικά σημαίνει ότι αν τα διανύσματα αγαθών $\vec{\boldsymbol{a}}$ και $\vec{\boldsymbol{b}}$ είναι διαθέσιμα (ανήκουν στο X) τότε κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι διαθέσιμος, δηλαδή:

$$\lambda \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + (1 - \lambda) \cdot \vec{\mathbf{b}} \quad \in \text{X}.$$

Εφόσον τα διανύσματα αγαθών είναι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός τότε το σύνολο κατανάλωσης X είναι κυρτό υποσύνολο του θετικού κώνου $E_+ = \mathbb{R}^m_+$, όπου:

$$\mathbb{R}^m_+ = \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m \mid x_i \geq 0 \quad \forall\, i \;\}$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι ο $X = \mathbb{R}^m_+$. <u>Επομένως το σύνολο κατανάλωσης X με την επαγόμενη τοπολογία είναι ένας μετρικός χώρος.</u>

Πιο πάνω έχουμε ορίσει το διάνυσμα τιμών $\vec{\boldsymbol{q}}$, τότε η αξία ενός διανύσματος αγαθών $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}$. Γενικεύοντας παρατηρούμε ότι το διάνυσμα τιμών **q** ορίζει τη γραμμική και συνεχή συνάρτηση :

$$\vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \;,\; \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$$

του χώρου αγαθών. Επομένως τα διανύσματα τιμών είναι αυτόματα, στοιχεία του δυϊκού χώρου του E(του χώρου αγαθών).

Συνεπώς ***<u>ο χώρος τιμών</u>*** είναι ο $\mathbf{E}^*$**.** Τότε λέμε ότι το δυϊκό ζεύγος

$$\langle \mathrm{E}, \mathrm{E}^* \rangle$$

εκφράζει τη ***<u>δυϊκότητα αγαθών-τιμών.</u>***

Στην περίπτωση που μελετάμε ο χώρος αγαθών θεωρείται ότι είναι Ε=$\mathbb{R}^m$ επομένως ο χώρος τιμών είναι ο $\mathbf{E}^*$=$(\mathbb{R}^m)^* = \mathbb{R}^m$. Άρα το δυϊκό σύστημα

$$\langle \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \rangle$$

εκφράζει τη δυϊκότητα αγαθών-τιμών.

Κεφάλαιο 8

Χρηματοοικονομικά Παράγωγα(Εισαγωγή) (Financial Derivatives/Intro)

8.1. Τι είναι τα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

Τα ***παράγωγα*** χρηματοοικονομικά προϊόντα μπορούν να οριστούν ως συμβόλαια ή συμφωνίες μεταξύ δύο πλευρών, η αξία των οποίων παράγεται από την αξία άλλων βασικών χρηματοοικονομικών προϊόντων που απαρτίζουν την αγορά. Τα βασικά αυτά χρηματοοικονομικά προϊόντα ονομάζονται ***υποκείμενοι ή πρωταρχικοί τίτλοι (primary securities).*** Τα παράγωγα μέσα είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία δημιουργούνται από τους συμμετέχοντες στην αγορά έτσι ώστε να μπορούν να διαπραγματευτούν και να διαχειριστούν πιο αποτελεσματικά το περιουσιακό στοιχείο (υποκείμενο τίτλο) επάνω στο οποίο είναι βασισμένα (εγγεγραμμένα). Η αξία λοιπόν ενός παραγώγου είναι συνεπώς συνδεδεμένη και διακυμαίνεται ανάλογα με την τιμή του υποκείμενου τίτλου στο οποίο είναι εγγεγραμμένο.

Οι υποκείμενοι τίτλοι μπορεί να είναι ένα εμπόρευμα ή αγαθό όπως είναι το σιτάρι ή ένα χρηματοοικονομικό προϊόν όπως μία μετοχή.

8.1.1. Είδη υποκείμενων τίτλων (primary securities)

1.Εμπορεύματα:

Τα συμβόλαια εμπορευμάτων χρησιμοποιούνται από εμπορικές εταιρίες, παραγωγούς, χονδρεμπόρους και επεξεργαστές εμπορευμάτων για να προστατευτούν από αλλαγές των τιμών στην άμεση αγορά. Μερικά από τα εμπορεύματα χρησιμοποιούνται κυρίως για καταναλωτικούς σκοπούς ενώ άλλα χρησιμοποιούνται κυρίως για επενδυτικούς σκοπούς. Τα ακόλουθα είναι τύποι εμπορευμάτων που εμφανίζονται ως υποκείμενα μέσα παραγώγων κυρίως στην Βόρεια Αμερική.

- ✓ *Αγροτικά Προϊόντα:*

Περιλαμβάνονται προϊόντα όπως το σιτάρι, το καλαμπόκι, το βαμβάκι και τη σόγια.

Είναι η παλαιότερη κατηγορία προθεσμιακών συμβολαίων. Διαπραγματεύονται στις ΗΠΑ στο Chicago Board of Trade (CBOT), το οποίο είναι το μεγαλύτερο χρηματιστήριο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διαπραγμάτευση προθεσμιακών συμβολαίων.

- ✓ *Κτηνοτροφικά Προϊόντα:*

Οι τιμές τους επηρεάζονται από την εγχώρια και την παγκόσμια ζήτηση. Μάλιστα επηρεάζονται και από άλλους έμμεσους παράγοντες όπως τις τιμές των σιτηρών, την πολιτική της κυβέρνησης και το διεθνές εμπόριο. Τα συμβόλαια αυτής της κατηγορίας διαπραγματεύονται στο Chicago Mercantile Exchange (CME).

- ✓ *Ξυλεία, νήματα και συμβόλαια τροφών:*

Περιλαμβάνονται προϊόντα όπως ξυλεία, ζάχαρη και καφέ. Οι τιμές επηρεάζονται από την προσφορά και τη ζήτηση. Καθώς τα περισσότερα από αυτά τα αγαθά είναι εισαγόμενα ή εξαγόμενα, οι διεθνείς οικονομίες και πολιτικές συγκυρίες είναι επίσης κρίσιμοι παράγοντες.

- ✓ *Πολύτιμα και Βιομηχανικά Μέταλλα:*

Περιλαμβάνονται κυρίως μέταλλα που χρησιμοποιούνται στην αργυροχρυσοχοΐα και σε βιομηχανικά προϊόντα. Καθένα από αυτά τα εμπορεύσιμα θεωρείται ως μη ανανεώσιμο φυσικό αγαθό. Στη Βόρεια Αμερική η διαπραγμάτευση αυτών των προϊόντων λαμβάνει χώρα στο New York Mercantile Exchange (NYMEX). Εκτός Αμερικής το σημαντικότερο χρηματιστήριο μεταλλευμάτων είναι το London Metal Exchange.

- ✓ *Ενεργειακά Προϊόντα:*

Περιλαμβάνονται προϊόντα όπως το αργό πετρέλαιο, πετρέλαιο θέρμανσης, βενζίνη, φυσικό αέριο και προπάνιο. Οι τιμές αυτών των εμπορευμάτων βασίζονται στην παγκόσμια παραγωγή και ζήτηση η οποία με τη σειρά της ασκεί τεράστια επιρροή στο διεθνές οικονομικό και πολιτικό περιβάλλον. Στην Νέα Υόρκη τα ενεργειακά συμβόλαια διαπραγματεύονται στο New York Mercantile Exchange (NYMEX). Ενώ στο Λονδίνο η διαπραγμάτευσή τους γίνεται στο International Petroleum Exchange.

2.Χρηματοπιστωτικά Μέσα:

- *Μετοχές:*

Οι μετοχές αποτελούν τον υποκείμενο τίτλο μια μεγάλης κατηγορίας χρηματοπιστωτικών παραγώγων. Οι πιο ανεπτυγμένες χώρες έχουν θεσμοθετήσει την διαπραγμάτευση μετοχικών παραγώγων. Μάλιστα κάθε χρηματιστήριο επιλέγει μια ομάδα μετοχών πάνω στις οποίες θα εκδοθούν δικαιώματα. Αυτές οι μετοχές έχουν συνήθως μεγάλο κύκλο διαπραγμάτευσης και είναι υψηλής κεφαλαιοποίησης.

- *Επιτόκια:*

Με την αυξημένη μεταβλητότητα των επιτοκίων η ανάγκη για παράγωγα επιτοκίων είναι προφανής. Τα χρηματιστηριακά παράγωγα επιτοκίων βασίζονται γενικότερα σε χρεόγραφα ευαίσθητα στις κινήσεις των επιτοκίων παρά στα ίδια τα επιτόκια. Στις εξωχρηματιστηριακές αγορές, τα παράγωγα επιτοκίων βασίζονται σε απόλυτα καθορισμένα κυμαινόμενα επιτόκια που δεν μπορούν εύκολα να επηρεαστούν από κάποιους συμμετέχοντες της αγοράς. Παράδειγμα τέτοιων επιτοκίων είναι τα επιτόκια Ευρωδολαρίου (London Interbank Offer Rate (LIBOR)).

- *Ξένο Συνάλλαγμα:*

Τα πιο συνηθισμένα νομίσματα που χρησιμοποιούνται ως υποκείμενος τίτλος σε παράγωγα ξένου συναλλάγματος είναι το δολάριο των ΗΠΑ ($), η Βρετανική Λίρα (£), το Ιαπωνικό Γιεν (¥) και το Ελβετικό Φράγκο (CHF). Τα προθεσμιακά συμβόλαια ξένου συναλλάγματος άρχισαν να διαπραγματεύονται το 1972 από το Chicago Mercantile Exchange (CME). Η Διεθνής Νομισματική Αγορά ιδρύθηκε ειδικά για τη διαπραγμάτευση των προθεσμιακών συμβολαίων σε ξένο συνάλλαγμα.

- *Δείκτες:*

Τα παράγωγα που βασίζονται σε δείκτη είναι μια από τις πιο θαυμαστές περιπτώσεις επιτυχημένης αγοράς στην πρόσφατη ιστορία. Αυτά τα συμβόλαια βασίζονται σε δείκτες μετοχών ευρείας βάσης όπως ο δείκτης S&P 500 στις ΗΠΑ. Τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα δικαιώματα προαίρεσης και τα δικαιώματα σε προθεσμιακά συμβόλαια είναι τα τρία πιο διαπραγματεύσιμα παράγωγα βασισμένα σε δείκτες. Το LIBOR όπως έχουμε προαναφέρει είναι το προσφερόμενο επιτόκιο της διατραπεζικής αγοράς του Λονδίνου.

Είναι το επιτόκιο με το οποίο αλληλοδανείζονται τα Τραπεζικά Ιδρύματα Υψηλής κατάταξης. Το LIBOR διαφόρων λήξεων όπως 1 μηνός, 3 μηνών, 6 μηνών και 1 έτους, χρησιμοποιείται ευρέως ως επιτόκιο – δείκτης. Τα υπόλοιπα επιτόκια καταγράφονται συχνά ως αποκλίσεις του LIBOR. (πχ LIBOR +2%). Ο διακανονισμός του συμβολαίου δεν βασίζεται στην αγορά ή στην πώληση του υποκείμενου δείκτη. Ένας μεγάλος αριθμός επενδυτών χρησιμοποιούν αυτά τα συμβόλαια για να αντισταθμίσουν θέσεις σε μετοχές, να κερδοσκοπήσουν με βάση την πρόβλεψη τους για την πορεία της αγοράς, να προσαρμόσουν τα χαρτοφυλάκιά τους και να προβούν σε κερδοσκοπική αντιστάθμιση (arbitrage) των συμβολαίων ενάντια σε συγκρίσιμους συνδυασμούς μετοχών.

✓ *Ομόλογα:*

Τα ομόλογα (bonds) είναι μακροπρόθεσμα χρεόγραφα που εκδίδονται είτε από το Δημόσιο είτε από ιδιωτικούς οργανισμούς (πχ. Τράπεζες, επιχειρήσεις κλπ) και χρησιμοποιούνται για το δανεισμό κεφαλαίων από το επενδυτικό κοινό. Μέχρι πρόσφατα τα ομόλογα ήταν χρηματοοικονομικά προϊόντα με σχετικά εύκολη αποτίμηση και θεωρούνταν επενδύσεις χαμηλού κινδύνου και απόδοσης, επειδή η διάρκεια ζωής τους ήταν δεδομένη και επειδή συνήθως ήταν σταθερού επιτοκίου. Όμως τα τελευταία χρόνια με τη δημιουργία επενδυτικών προϊόντων βασισμένων στα ομόλογα κι επειδή τα επιτόκια είναι πολύ πιο μεταβλητά από ότι παλαιότερα, η αποτίμηση των ομολόγων είναι πλέον μια δύσκολη υπόθεση .

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά τα είδη των υποκείμενων τίτλων.

Πίνακας

ΕΙΔΗ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩΝ ΤΙΤΛΩΝ	
ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ	**ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΑ ΜΕΣΑ**
Αγροτικά Προϊόντα	*Μετοχές*
Κτηνοτροφικά Προϊόντα	*Επιτόκια*
Ξυλεία, νήματα και συμβόλαια τροφών	*Ξένο Συνάλλαγμα*
Πολύτιμα και Βιομηχανικά Μέταλλα	*Δείκτες*
Ενεργειακά Προϊόντα	*Ομόλογα*

8.1.2. Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Στην Αρχαία Ελλάδα η πρώτη μορφή παραγώγου εμφανίστηκε το 330 π. Χ. όταν ο Φιλόσοφος Θαλής ο Μιλήσιος, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις του στην Μετεωρολογία, προέβλεψε ότι την επόμενη Άνοιξη οι ελαιώνες θα είχαν πολύ καλή σοδειά. Έτσι έδωσε ένα ποσό και αγόρασε το δικαίωμα να χρησιμοποιεί τα ελαιοτριβεία της Μιλήτου και της Χίου την περίοδο συγκομιδής. Όταν ήρθε λοιπόν η Άνοιξη και η σοδειά ήταν άφθονη ο Θαλής νοίκιασε το δικαίωμα χρήσης των ελαιοτριβείων σε πολύ μεγαλύτερες τιμές από αυτές που ο ίδιος τα είχε κλείσει και έβγαλε μια περιουσία.
Οι ελαιοτρίβες «κλειδώνοντας» την απόδοσή τους ανεξάρτητα από το πόσο καλή ή κακή θα ήταν η σοδειά αντιστάθμισαν τον κίνδυνο ότι η επερχόμενη σοδειά μπορεί να μην ήταν πλούσια. Ο Θαλής από την μεριά του, πιστεύοντας ότι η σοδειά του επόμενου χρόνου θα είναι εξαιρετικά καλή πλήρωσε εκ των προτέρων ένα τίμημα εν αναμονή του γεγονότος αυτού και εντέλει κερδοσκόπησε.

Τον 17ο αιώνα (1636) τα παράγωγα εμφανίζονται στην Ολλανδία με την λεγόμενη «τρέλα της τουλίπας». Οι αγοραστές κλείνανε συμφωνίες με τους παραγωγούς δίνοντάς τους προκαταβολές με σκοπό να αγοράσουν σε μελλοντική ημερομηνία και σε συγκεκριμένη τιμή συγκεκριμένα είδη τουλίπας.
Δηλαδή οι αγοραστές αγοράζανε δικαιώματα αγοράς ώστε να εξασφαλίσουν την θέση τους σε περίπτωση που οι τιμές της τουλίπας αυξάνονταν σημαντικά. Ενώ οι παραγωγοί αγοράζανε δικαιώματα πώλησης, το δικαίωμα δηλαδή να πουλήσουν τη συγκομιδή τους σε μια συγκεκριμένη τιμή και σε προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία ώστε να είναι εξασφαλισμένοι στην περίπτωση που η τιμή της τουλίπας μειωνόταν σημαντικά.
Η τρέλα της τουλίπας όμως δεν περιορίστηκε στις συμφωνίες μεταξύ αγοραστών και παραγωγών αλλά δημιουργήθηκε και μια δευτερογενής αγορά όπου κερδοσκόποι βρήκαν ευκαιρία να κάνουν συναλλαγές βασιζόμενοι στις διακυμάνσεις των τιμών των συμβολαίων της τουλίπας. Οι τιμές των τουλιπών εκτινάχθηκαν στα ύψη με αποτέλεσμα το κοινό να μετακινηθεί σε μια αγορά κερδοσκοπίας. Συνέπειες όλου αυτού ήταν οι Ολλανδική οικονομία να καταρρεύσει διότι πολλά αντισυμβαλλόμενα μέρη αθέτησαν τις συμφωνίες τους μιας και αδυνατούσαν να εκπληρώσουν τις χρηματικές τους υποχρεώσεις.

Το 17ο αιώνα ξεκίνησε στην Ιαπωνία η ανταλλαγή σε αγαθά (trading on commodities) μεταξύ ρυζιού και μεταξιού. Ενώ περίπου το 1650 περίπου αναφέρονται τα πρώτα συμβόλαια παραγώγων στην αγορά ρυζιού. Αυτά τα συμβόλαια έμοιαζαν με τις σημερινές προθεσμιακές συναλλαγές.

Η ανταλλαγή στις Η.Π.Α. ξεκίνησε στα μέσα του 19ου αιώνα με την ίδρυση αγορών σιταριού. Οι αγρότες είχαν τη δυνατότητα να συγκεντρώνουν και να διακινούν από εκεί τα προϊόντα τους είτε για άμεση πώληση (που καλείται στιγμιαία αγορά ή αγορά μετρητών) είτε για μελλοντική παράδοση. Οι μελλοντικές αυτές αγορές ήταν ιδιωτικές συμφωνίες μεταξύ αγοραστών και πωλητών και αποτέλεσαν τους πρόδρομους των σημερινών ανταλλαγών προθεσμιακών συναλλαγών.

Παρότι οι ανταλλαγές συμβολαίων ξεκίνησαν με παραδοσιακά προϊόντα όπως σιτάρι και κρέας στη συνέχεια επεκτάθηκαν και σε άλλα είδη όπως μέταλλα, ενέργεια, συνάλλαγμα και δείκτες συναλλάγματος, κρατικά ή ιδιωτικά επιτόκια κ.α. Οι επενδυτές είχαν την ανάγκη της ύπαρξης ενός οργανωμένου Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Οι χρηματιστηριακές εταιρίες της Wall Street προκειμένου να αποφύγουν τις δυσάρεστες εκπλήξεις που δημιουργήθηκαν παλιότερα στην Ευρώπη, δημοσίευσαν προτάσεις πάνω στις συναλλαγές παραγώγων για το ευρύ επενδυτικό κοινό. Στις αρχές του 1900 τα παράγωγα συναλλασσόταν μεταξύ των ενδιαφερομένων αντισυμβαλλομένων over the counter δηλαδή όχι στο “πάτωμα” συγκεκριμένου χρηματιστηρίου, αλλά σε ένα οργανωμένο δίκτυο μεγάλων επενδυτών.

Η γενική αποδοχή των παραγώγων οδήγησε στην εισαγωγή πολλών καινούριων Χρηματιστηρίων μελλοντικών συμβολαίων παγκοσμίων. Έτσι δημιουργήθηκαν πάνω από 75 Χρηματιστήρια μελλοντικών συμβολαίων παγκοσμίως στα οποία συγκαταλέγονται:

- Το *New York Board of Trade (NYBOT):* όπου ανταλλάσσονται κακάο, καφές, βαμβάκι χυμός πορτοκάλι και ζάχαρη

- Το *New York Mercantile Exchange (NYMEX)* όπου ανταλλάσσονται ενεργειακά προϊόντα και μέταλλα : αργό πετρέλαιο, βενζίνη, πετρέλαιο θέρμανσης, φυσικό αέριο, άνθρακας, προπάνιο, χρυσός, ασήμι, πλατίνα, χαλκός, αλουμίνιο και παλλάδιο.

- Το *Chicago Board of Trade (CBOT):* όπου ανταλλάσσονται οικονομικά και παραδοσιακά εμπορεύματα : σιτηρά, ρύζι, φασόλια σόγιας, κρέας σόγιας, λάδι σόγιας και σιτηρά για αλεύρι.

- Το *Chicago Mercantile Exchange (CME):* όπου ανταλλάσσονται οικονομικές προθεσμιακές συναλλαγές και παραδοσιακά προϊόντα lumber, μοσχάρι, χοιρινό, γάλα, βούτυρο κ.α.

- Το *International Petroleum Exchange*: όπου ανταλλάσσονται κυρίως ενεργειακά προϊόντα όπως αργό πετρέλαιο, πετρέλαιο θέρμανσης, φυσικό αέριο και αμόλυβδο πετρέλαιο και συγχωνεύτηκε με το Intercontinental Exchange (ICE) ώστε να δημιουργήσει το *ICE Futures* (προθεσμιακές συναλλαγές).

- Το <u>*London Commodity Exchange:*</u> όπου ανταλλάσσονται σιτηρά και κρέατα.

- Το <u>*Baltic Exchange:*</u> όπου διαπραγματεύεται ναυτιλιακά προϊόντα.

- Το <u>*Tokyo Commodity Exchange (TOCOM):*</u> όπου ανταλλάσσονται μέταλλα, πετρέλαιο κ.α.

- Το <u>*London Metal Exchange*</u> όπου ανταλλάσσονται μέταλλα: χαλκός, αλουμίνιο, ψευδάργυρος κ.α.

Στην <u>Ελληνική αγορά</u> τα παράγωγα γίνανε γνωστά μετά το 1997 όταν τέθηκε το αναγκαίο θεσμικό πλαίσιο για τη δημιουργία επίσημης και οργανωμένης αγοράς παράγωγων προϊόντων (Νόμος 2533/97). Για την οργάνωση, τη λειτουργία και την ανάπτυξη της αγοράς, ιδρύθηκαν το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών Α.Ε. - Χ.Π.Α. (Athens Derivatives Exchange S.A. - ADEX) και η Εταιρία Εκκαθάρισης Συναλλαγών επί Παραγώγων Α.Ε. - ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π. Σκοπός του Χ.Π.Α. ήταν η οργάνωση και η υποστήριξη των συναλλαγών στη χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων, η οργάνωση της λειτουργίας του συστήματος συναλλαγών αυτών, καθώς και κάθε συναφής δραστηριότητα. Σκοπός της Εταιρίας Εκκαθάρισης Συναλλαγών επί Παραγώγων (ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π.) ήταν και συνεχίζεται να είναι η συμμετοχή στις συμβάσεις που συνάπτονται στο Χ.Π.Α. επί παραγώγων, η εκκαθάριση των συναλλαγών που διενεργούνται σε άλλες αγορές, η διασφάλιση της προσήκουσας εκπλήρωσης εκ μέρους των συμβαλλομένων με αυτή μερών, των υποχρεώσεων που απορρέουν από τις συναλλαγές αυτές και κάθε συναφής δραστηριότητα. Τον έλεγχο και την εποπτεία επί της λειτουργίας του Χ.Π.Α. και της ΕΤ.Ε.Σ.Ε.Π., ως προς την τήρηση των σχετικών διατάξεων και νομοθεσίας περί κεφαλαιαγοράς, ασκεί η Επιτροπή Κεφαλαιαγοράς. Έτσι, στις 31 Αυγούστου 2002 το Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών και το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών συγχωνεύτηκαν με την νέα επωνυμία Χρηματιστήριο Αθηνών Α.Ε.

Το πρώτο παράγωγο που δημιουργήθηκε ήταν το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στον FTSE/20 που άρχισε να διαπραγματεύεται στις 27 Αυγούστου 1999. Στις 14 Ιανουαρίου 2000 έκανε την πρεμιέρα του το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στο δεκαετές ομόλογο. Μετά την επιτυχία και των δύο παραπάνω ακολούθησε και το Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης στον δείκτη FTSE/40 στις 28 Ιανουαρίου του 2000. Το Σεπτέμβριο του 2000 το πρώτο Δικαίωμα Προαίρεσης (Option) έκανε την εμφάνισή του στο δείκτη FTSE/20 ενώ τον Ιούνιο του 2001 ακολούθησε το Δικαίωμα Προαίρεσης στο Mid 40.

8.1.3. Οι χρήστες των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων

Σήμερα τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα χρησιμοποιούνται σε μία ευρεία σειρά συναλλαγών με κυριότερους συμμετάσχοντες:

- Τράπεζες
- Επενδυτικές Εταιρίες
- Ασφαλιστικές Εταιρίες
- Ασφαλιστικά Ταμεία
- Παραγωγικές Επιχειρήσεις
- Δημόσιο
- Επενδυτές
- Dealers αξιών
- Market makers (μεσάζοντες)

Κεφάλαιο 9

Ανάλυση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων (financial derivatives)

9.1. Είδη Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

1. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ), (future contracts)
2. Προθεσμιακές Πράξεις (ΠΠ), (forward contracts)
3. Συμφωνίες Ανταλλαγής (swaps)
4. Δικαιώματα Προαίρεσης (options)
5. Εξωτικά Δικαιώματα (exotic options)
6. Λοιπά παράγωγα όπως FRA's, Caps, Floors, Collars, Warrants. (Hybrids)

9.2. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Σ.Μ.Ε., future contracts)

Τα ***συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ, future contracts***) είναι συμφωνίες με τις οποίες η αγορά ή πώληση ενός αγαθού είναι καθορισμένη (fixed) τη στιγμή που συμφωνείται το συμβόλαιο, ενώ η παράδοση και η πληρωμή πραγματοποιούνται σε μία καθορισμένη μελλοντική ημερομηνία.

Ο πωλητής ενός ΣΜΕ συμφωνεί να παραδώσει τον υποκείμενο τίτλο (underlying asset) σε μία προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία, εισπράττοντας ως αντίτιμο μια συγκεκριμένη τιμή, ενώ ο αγοραστής αναλαμβάνει την υποχρέωση να παραλάβει το αγαθό πληρώνοντας αυτή τη συγκεκριμένη τιμή.

- Εγγράφονται κυρίως σε μετοχές, χρηματιστηριακούς δείκτες, ξένο συνάλλαγμα, επιτόκια αλλά και σε κάθε άλλο υποκείμενο τίτλο που εγγράφονται οι προθεσμιακές πράξεις.

- Διαπραγματεύονται σε χρηματιστήρια, κατά συνέπεια είναι τυποποιημένα συμβόλαια ως προς την ποσότητα (μέγεθος συμβολαίου), την ποιότητα, την ημερομηνία και τον τόπο παράδοσης. Μόνο η τιμή τους είναι διαπραγματεύσιμη.

- Είναι εγγυημένα από το συγκεκριμένο χρηματιστήριο στο οποίο διαπραγματεύονται.

- Με την υπογραφή του συμβολαίου κατατίθεται ένα ποσοστό από την μεριά του επενδυτή (αγοραστή του ΣΜΕ) ως εγγύηση ότι το συμβόλαιο θα τηρηθεί. Το ποσό αυτό λέγεται ***<u>αρχικό περιθώριο ασφάλισης (initial margin)</u>***.

- Σε πολλά χρηματιστήρια ζητείται η κατάθεση ενός μεγαλύτερου ποσοστού του συνολικού ποσού της επένδυσης, που ονομάζεται ***<u>περιθώριο συντήρησης (maintenance margin).</u>***

- Ο επενδυτής είναι υποχρεωμένος να καταθέσει και να συντηρεί το ποσό αυτό μέσα σε ένα ***<u>λογαριασμό περιθωρίου (margin account).</u>***

- Ακόμη ο επενδυτής με την υπογραφή του συμβολαίου καλείται να καταβάλει ως ***<u>έξοδα (transaction fees)</u>*** του χρηματιστηρίου ένα ποσό που προσδιορίζεται από κάποιο κλιμακούμενο επιτόκιο επί της συνολικής αξίας του συμβολαίου.

- Αρχικά η απόδοση ενός ΣΜΕ είναι μηδενική και προσδιορίζεται καθημερινά ανάλογα με την πορεία του υποκείμενου μέσου.

- Στο τέλος κάθε ημέρας συναλλαγών ο λογαριασμός περιθωρίου του επενδυτή προσαρμόζεται ανάλογα με τα κέρδη ή τις ζημίες της ημέρας.

Αν ο λογαριασμός περιθωρίου του επενδυτή πέσει κάτω από το αρχικό περιθώριο ασφάλισης, τότε ο χρηματιστής καλεί τον επενδυτή να καταβάλλει το υπολειπόμενο ποσό άμεσα.

Ενώ σε περίπτωση που μια μέρα υπάρξουν κέρδη τότε ο επενδυτής έχει τη δυνατότητα εάν το επιθυμεί να τα αποσύρει από το λογαριασμό οποιαδήποτε ημέρα των συναλλαγών, αρκεί ο λογαριασμός περιθωρίου να μην πέσει κάτω από το αρχικό περιθώριο ασφάλισης.

Τα κέρδη και οι ζημιές του επενδυτή εξαρτώνται από την θέση που υιοθετεί (*αγορά ή πώληση ΣΜΕ*) κατά την υπογραφή της συμφωνίας για την πορεία της αγοράς.

- ***<u>Long Position- Αισιόδοξη Θέση</u>*** *<u>(θέση αγοράς ΣΜΕ)</u>*:

  Στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου μέσου κάποια μέρα συναλλαγών ανέβει, τότε ο επενδυτής(αγοραστής) έχει κέρδος το οποίο προστίθεται στον λογαριασμό περιθωρίου του. Ενώ εάν η τιμή του υποκείμενου μέσου πέσει τότε ο επενδυτής έχει ζημία η οποία αφαιρείται από τον λογαριασμό του.

- ***<u>Short Position-Απαισιόδοξη Θέση</u>*** *<u>(θέση πώλησης ΣΜΕ)</u>**<u>:</u>**

  Στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου τίτλου ανέβει τότε ο επενδυτής (πωλητής) έχει ζημία και αφαιρείται από τον λογαριασμό περιθωρίου του. Ενώ αντίθετα ο επενδυτής έχει κέρδος όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου μειωθεί, τότε λοιπόν τα κέρδη προστίθενται στον λογαριασμό περιθωρίου.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αναφέρονται σε ΣΜΕ επί του δείκτη FTSE/ASE-20 (ο οποίος έχει πολλαπλασιαστή 5). Τα διαγράμματα απεικονίζουν το κέρδος ή την ζημία του επενδυτή ανάλογα με την θέση που έχει υιοθετήσει συναρτήσει της τιμής του υποκείμενου τίτλου στη <u>λήξη</u> του ΣΜΕ.

Το νεκρό σημείο είναι το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των χ. Επίσης η επίπτωση του κόστους συναλλαγής δεν θα ληφθεί υπ' όψιν. Θεωρούμε ότι η τιμή συναλλαγής του ΣΜΕ και στις δύο περιπτώσεις είναι 1.200 μονάδες του δείκτη.

<u>Παράδειγμα 1: Επενδυτής σε Long Position</u>

Ο αγοραστής ενός ΣΜΕ αγοράς έχει την υποχρέωση να δεχθεί την παράδοση της υποκείμενης αξίας στην προσυμφωνημένη τιμή συμβολαίου στην ημερομηνία λήξης-παράδοσης του συμβολαίου.

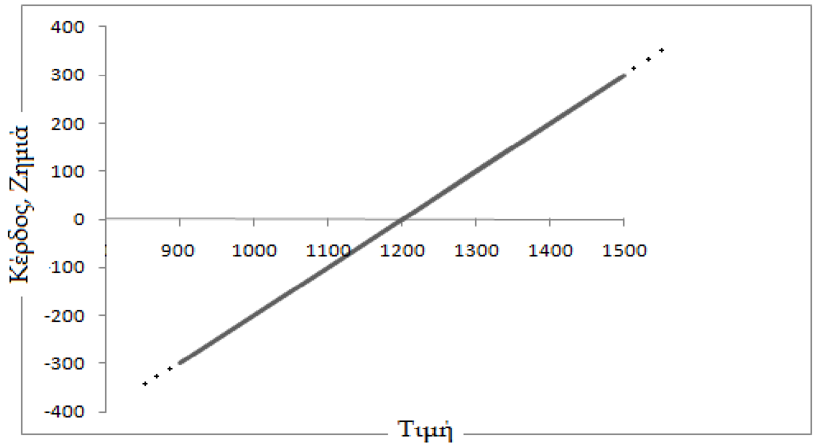
<u>Προσδοκία:</u> Ο επενδυτής που έχει υιοθετήσει την αισιόδοξη θέση (long position) εκτιμά ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας θα ανέβει. Σε αυτήν την περίπτωση το κέρδος είναι ίσο με το ποσό της διαφοράς μεταξύ της τρέχουσας τιμής και της τιμής του συμβολαίου.

<u>Μέγιστο Κέρδος:</u> Το μέγιστο κέρδος αυτής της θεσης είναι απεριόσριστο καθώς δεν υπάρχει κανένα όριο στις ανοδικές μεταβολές της τιμής της υποκείμενης αξίας.

<u>Μέγιστη Ζημία:</u> Η μέγιστη ζημία πραγματοποιείται όταν θα έχει μηδενική τιμή ο υποκείμενος τίτλος. Δηλαδή η ζημία αυτή είναι ίση με την τιμή αγοράς του ΣΜΕ επί τον πολλαπλασιαστή του (εδώ 5).

<u>Νεκρό Σημείο:</u> Είναι ίσο με την τιμή αγοράς του συμβολαίου. Στο γράφημα είναι το σημείο στο οποίο η διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής και της τιμής του συμβολαίου είναι μηδέν.

Έστω λοιπόν το συμβόλαιο αγοράστηκε στις 1200 μονάδες (1200*5=6000 €). Τότε έχουμε:



Αν η τιμή λοιπόν του υποκειμένου τίτλου είναι στις 1300 μονάδες τότε η επένδυση θα αποφέρει κέρδη 1300 - 1200 = 100 μονάδων ή αλλιώς 500 € (100*5) ανα ΣΜΕ. Αν αντίθετα η τρέχουσα τιμή του FTSE/ASE-20 είναι στις 900 μονάδες τότε έχουμε ζημία 1200 - 900= 300 μονάδων ή 1500 €. Το μέγιστο κέρδος είναι απεριόριστο και η μέγιστη ζημία είναι ίση με 1200 μονάδες ή αλλιώς 6000 €.

<u>Παράδειγμα 2: Επενδυτής σε Short Position</u>

Ο αγοραστής ενός ΣΜΕ πώλησης έχει την υποχρέωση να παραδώσει την υποκείμενη αξία στην προσυμφωνημένη τιμή συμβολαίου στην ημερομηνία λήξης - παράδοσης του συμβολαίου.

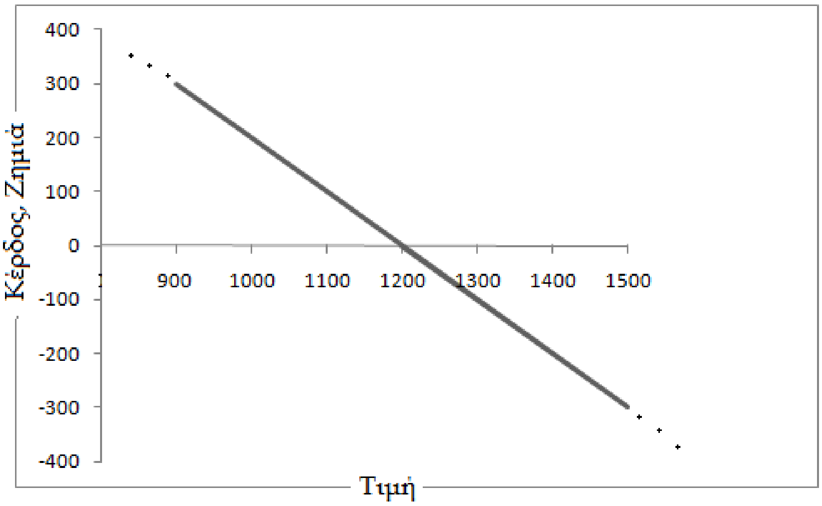
<u>Προσδοκία:</u> Ο επενδυτής που έχει υιοθετήσει την απαισιόδοξη θέση (short position) εκτιμά ότι η τιμή της υποκείμενης αξίας θα μειωθεί. Σε αυτήν την περίπτωση το κέρδος είναι ίσο με το ποσό της διαφοράς μεταξύ της τιμής πώλησης του συμβολαίου και της τρέχουσας τιμής.

<u>Μέγιστο Κέρδος:</u> Το μέγιστο κέρδος αυτής της θέσης είναι περιορισμένο, πραγματοποιείται όταν μηδενιστεί η τιμή της υποκείμενης αξίας και ισούται με την τιμή πώλησης του συμβολαίου επί τον πολλαπλασιαστή.

<u>Μέγιστη Ζημία:</u> Η μέγιστη ζημία είναι απεριόριστη καθώς δεν υπάρχει όριο στις ανοδικές τιμές της υποκείμενης αξίας.

<u>Νεκρό Σημείο</u>: Είναι ίσο με την τιμή πώλησης του συμβολαίου. Στο γράφημα είναι το σημείο στο οποίο η διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής και της τιμής του συμβολαίου είναι μηδέν.

Έστω λοιπόν το συμβόλαιο πωλήθηκε στις 1200 μονάδων (1200*5=6000 €). Τότε έχουμε:



Αν η τιμή λοιπόν του υποκειμένου τίτλου είναι στις 1300 μονάδες τότε η επένδυση θα αποφέρει ζημία 1300 - 1200 = 100 μονάδων ή αλλιώς 500 € (100*5) ανα ΣΜΕ. Αν αντίθετα η τρέχουσα τιμή του FTSE/ASE-20 είναι στις 900 μονάδες τότε έχουμε κέρδος 1200 - 900= 300 μονάδων ή 1500 €. Το μέγιστο κέρδος είναι ίσο με 1200 μονάδες ή αλλιώς 6000 € ενώ η μέγιστη ζημιά είναι απεριόριστη.

9.3. Δικαιώματα Προαίρεσης (options)

Η πιο συνηθισμένη κατηγορία παραγώγων είναι τα ***δικαιώματα προαίρεσης (options).*** Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο το οποίο δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει ή να πωλήσει ένα περιουσιακό στοιχείο (υποκείμενο τίτλο) σε μια προκαθορισμένη τιμή σε κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον.

Τα βασικά στοιχεία των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι τα εξής:

- *Μέγεθος συμβολαίου*: Τα δικαιώματα αφορούν ένα καθορισμένο μέγεθος συμβολαίου. Συγκεκριμένα το μέγεθος του συμβολαίου των δικαιωμάτων επί μετοχών δείχνει των αριθμό των μετοχών που καλύπτει το κάθε δικαίωμα. Στο Χ.Α. ένα συμβόλαιο μετοχικών δικαιωμάτων αποτελείται από 100 μετοχές το καθένα.

- *Τιμή εξάσκησης του δικαιώματος (Strike price/Exercise price):* Είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς μπορεί να αγοράσει τον τίτλο και ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης μπορεί να πουλήσει τον τίτλο. Η τιμή αυτή δεν μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της "ζωής" ενός δικαιώματος.

- *Τιμή δικαιώματος (premium):* Είναι το χρηματικό ποσό που πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή του δικαιώματος σαν αντάλλαγμα για την παραχώρησή του. Το ποσό της τιμής του δικαιώματος καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση και συνεπώς υπόκειται σε διαρκείς διακυμάνσεις. Η τιμή του δικαιώματος συγκριτικά με την αξία του υποκείμενου τίτλου που πραγματεύεται, συνήθως δεν είναι υψηλή. Επίσης το ποσό αυτό (premium) καταβάλλεται στον πωλητή ανεξάρτητα από το εάν ο αγοραστής θα εκτελέσει το δικαίωμα ή όχι.

Ο πίνακας που ακολουθεί παραθέτει βασικούς συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Σύμβολο	Επεξήγηση
k	Τιμή εξάσκησης δικαιώματος
x	Τιμή/Απόδοση Τίτλου/Υποκείμενης Αξίας/Χρημ. συμβολαίου
$\mathbf{x_t}$	Τιμή/Απόδοση Τίτλου κατά τη χρονική στιγμή t
T	Χρόνος λήξης του δικαιώματος (option)
$\mathbf{x_\tau}$	Τιμή/Απόδοση Τίτλου κατά την λήξη (τ)
C	Αξία Δικαιώματος Αγοράς (call premium)
P	Αξία Δικαιώματος Πώλησης (put premium)

9.3.1. Δικαιώματα Προαίρεσης Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού Τύπου

Ένα δικαίωμα προαίρεσης *Ευρωπαϊκού Τύπου (European Option)* επιτρέπει την εξάσκηση του δικαιώματος μόνο στην ημερομηνία λήξης του.

Αντιθέτως ένα δικαίωμα προαίρεσης *Αμερικάνικου Τύπου (American Option)* επιτρέπει στον κάτοχό του να το εξασκήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από την ημερομηνία λήξης του.

Τα Δικαιώματα Προαίρεσης είτε είναι Ευρωπαϊκού είτε Αμερικάνικου Τύπου διακρίνονται σε:

- *δικαιώματα αγοράς (call options)* και
- *δικαιώματα πώλησης (put options)* τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω.

Επομένως σχηματικά έχουμε τα εξής:

Δικαιώματα Προαίρεσης

Ευρωπαϊκού Τύπου (t=T)

- Δικ. Αγοράς (call option)
- Δικ. Πώλησης (put option)

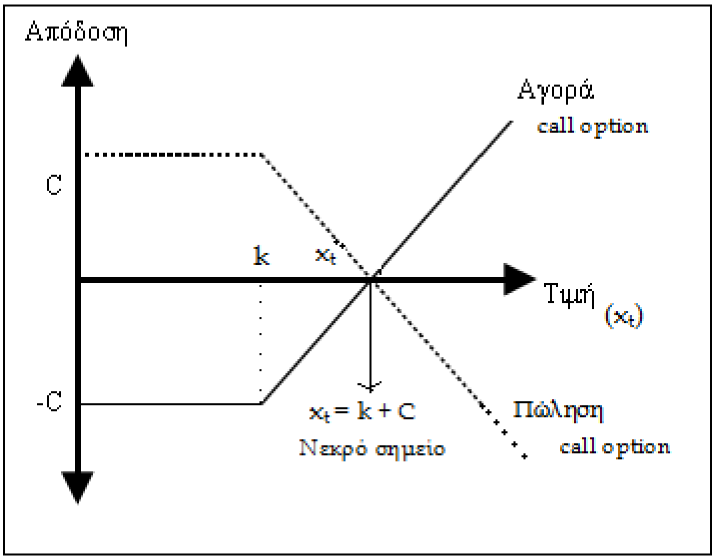
Αμερικάνικου Τύπου ($t \leq T$)

- Δικ. Αγοράς (call option)
- Δικ. Πώλησης (put option)

9.3.2. Call option (δικαίωμα αγοράς)

Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) δίνει το δικαίωμα, και όχι την υποχρέωση, στον κάτοχό του να αγοράσει την υποκείμενη αξία σε μελλοντική χρονική στιγμή και σε συγκεκριμένη τιμή (strike price), πληρώνοντας την αξία του δικαιώματος (premium). Το κόστος του δικαιώματος ισούται με το γινόμενο του μεγέθους του συμβολαίου (contract size) επί την αξία του (premium).

Συμβολίζουμε με C το premium που καταβάλει ο αγοραστής του call option στον πωλητή και με (k) την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Έπειτα ακολουθεί ένα γράφημα στο οποίο απεικονίζεται η απόδοση του δικαιώματος συναρτήσει της τιμής του τίτλου (x_t) κατά την ημερομηνία λήξης του, εάν πρόκειται για δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, ή κατά την ημερομηνία εκτέλεσής του, εάν πρόκειται για δικαίωμα Αμερικανικού τύπου.



Υπό τις παραπάνω συνθήκες εάν η τρέχουσα τιμή του τίτλου x_t είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης k, ($x_t > k$), τότε ο αγοραστής του call option εξασκεί το δικαίωμά του και αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο πληρώνοντας k ευρώ (strike price) και τον πουλάει απευθείας για x_t ευρώ αποκομίζοντας ένα άμεσο κέρδος x_t – k. Το καθαρό κέρδος όμως προκύπτει αν λάβουμε υπόψη μας και το premium που έχει ήδη καταβάλλει κατά την αγορά, δηλαδή x_t – k – C.

Αν όμως η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, ($x_t < k$), τότε ο αγοραστής του call option δεν προβαίνει σε καμία ενέργεια, αφήνει αναξιοποίητο το δικαίωμά του και χάνει το premium που είχε καταβάλλει για την αγορά του δικαιώματος.

Συνεπώς ο αγοραστής του call option μπορεί να έχει απεριόριστο κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος, ενώ η μέγιστη ζημιά του περιορίζεται στο ποσό του premium. Το σημείο στο οποίο το call option έχει μηδενική απόδοση χαρακτηρίζεται ως <u>νεκρό σημείο</u> και ισχύει όταν η τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με την τιμή εξάσκησης συν το premium ($x_t = k + C$).

Με ανάλογο τρόπο ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς στην περίπτωση που η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος μπορεί να έχει απεριόριστη ζημία. Ενώ όταν ισχύει το αντίστροφο έχει μέγιστο κέρδος ίσο με το premium.

Επομένως σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε διάνυσμα απόδοσης ενός δικαιώματος αγοράς που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x.

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες. Στο μοντέλο της στοχαστικής οικονομίας που μελετάμε, $\boldsymbol{S} = \{1, 2, \dots, S\}$ είναι το σύνολο των καταστάσεων, οι οποίες αποτελούν ένα σύνολο δυνατών τυχαίων ενδεχομένων και $\mathbf{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ είναι το σύνολο των χρονικών περιόδων κατά την διάρκεια τον οποίων πραγματοποιούνται οι όποιες συναλλαγές των επενδυτών. Τέλος υπενθυμίζουμε ότι η βαθμιαία αποκάλυψη της πληροφορίας περιγράφεται μέσω μιας οικογένειας διαμερίσεων του $\boldsymbol{S}$. Το σύνολο των διαμερίσεων είναι της μορφής δ=$\{\Delta_o, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_T\}$ όπου $\Delta o=\{ \boldsymbol{S} \}$ και $\Delta_T=\{ \{1\}, \{2\}, \dots ,\{ S \} \}$.

Ορισμός 9.3.2.1:

Έστω σύνολο Ω. Με 2^{Ω} θα θεωρούμε το σύνολο των υποσυνόλων του Ω και έστω $F \subseteq 2^{\Omega}$, δηλαδή το F είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω.
Αν:

i. $\Omega \in F$ και
ii. $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cup B,\ \Omega \setminus A \ \in\ F$

τότε το F ονομάζεται ***<u>άλγεβρα</u>*** του συνόλου Ω.

Ορισμός 9.3.2.2:

Η ακολουθία $F = (F_t)_{t\in T}$ των υποαλγεβρών της 2^S που παράγονται από τις παραπάνω διαμερίσεις Δ_t του **S**, είναι μια ***<u>εκλέπτυνση</u>*** ή αλλιώς ***<u>φιλτράρισμα (filtration)</u>*** του **S**.

Ορισμός 9.3.2.3:

Ένα ***<u>χρηματοοικονομικό συμβόλαιο</u>*** αναπαριστάται από μια ***<u>στοχαστική ανέλιξη</u>*** της μορφής:

$$x\colon \mathbf{T} \times \mathbf{S} \to \mathbb{R},$$

προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathbf{F} = \{F_o, F_1, \dots, F_T\}$.
Δηλαδή αναπαριστάται από τη διανυσματική συνάρτηση $x = (x_o, x_1, \dots, x_T) \in \mathbb{R}^m$ όπου $x_t : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$ ώστε $x_t(s) = x(t, s)$.

Απόδοση Δικαιώματος Αγοράς:

- Το ***Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου*** που εγγράφεται σε χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης την τ ,όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k είναι ένα νέο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο με ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{C_\tau = (x_\tau - k \cdot \mathbf{1})^+ \quad \kappa\alpha\iota \quad C_t = 0 \quad \forall\ t \neq \tau}$$

- Το ***Δικαίωμα Αγοράς Αμερικάνικου Τύπου*** που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης την τ, όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k είναι ένα νέο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο με ***διάνυσμα απόδοσης***:

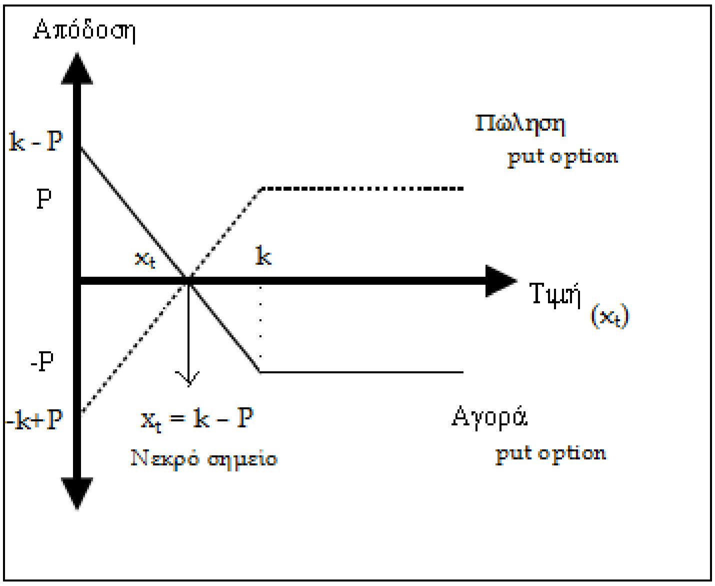
$$\boxed{C_t = (x_t - k \cdot \mathbf{1})^+ \quad \forall\ t \leq \tau}$$

Σημείωση: Οι αποδόσεις των δικαιωμάτων προαίρεσης λαμβάνονται με βάση το σταθερό διάνυσμα **1=**(1,1,1,…,1) ∈ $\mathbb{R}^m$, το οποίο δεν εμπεριέχει κίνδυνο (***riskless vector***) και ονομάζεται ***διάνυσμα εξάσκησης.***

9.3.3. Put Option (δικαίωμα πώλησης)

Ένα δικαίωμα πώλησης (put option) δίνει το δικαίωμα, και όχι την υποχρέωση, στον κάτοχό του να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο σε μελλοντική χρονική στιγμή, σε μια καθορισμένη τιμή εξάσκησης καταβάλλοντας σήμερα το premium.

Συμβολίζουμε με P το premium που καταβάλλει ο αγοραστής του put option στον πωλητή και με (k) την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Στη συνέχεια ακολουθεί ένα γράφημα στο οποίο απεικονίζεται η απόδοση του δικαιώματος συναρτήσει της τιμής του τίτλου (x_t) κατά την ημερομηνία λήξης του, εάν πρόκειται για δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου, ή κατά την ημερομηνία εκτέλεσής του, εάν πρόκειται για δικαίωμα Αμερικάνικου τύπου.



Υπό τις παραπάνω συνθήκες εάν η τρέχουσα τιμή (x_t) του υποκείμενου τίτλου είναι μικρότερη της τιμής εξάσκησης (k), ($x_t < k$), τότε ο αγοραστής του put option εξασκεί το δικαίωμά του. Δηλαδή πουλάει τον υποκείμενο τίτλο ως προς k ευρώ (strike price). Στην περίπτωση αυτή το άμεσο κέρδος είναι $k - x_t$, ενώ λαμβάνοντας υπόψη το premium τότε το καθαρό κέρδος είναι $k – x_t – P$.

Αν όμως η τιμή της υποκείμενης αξίας είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, ($x_t > k$), τότε ο αγοραστής του put option δεν προβαίνει σε καμία ενέργεια, αφήνει αναξιοποίητο το δικαίωμά του και υφίσταται κόστος ίσο με το premium που έχει καταβάλλει.

Συνεπώς ο αγοραστής του put option μπορεί να έχει απεριόριστο κέρδος από την εξάσκηση του δικαιώματος, ενώ η μέγιστη ζημιά του είναι το καταβληθέν premium. Το σημείο στο οποίο το put option έχει μηδενική απόδοση χαρακτηρίζεται ως νεκρό σημείο και ισχύει όταν η τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου είναι ίση με την τιμή εξάσκησης μείον το premium ($x_t= k – P$).

Με ανάλογο τρόπο ο πωλητής ενός put option στην περίπτωση που η τρέχουσα τιμή του τίτλου είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος μπορεί να καταγράψει απεριόριστη ζημία. Ενώ όταν ισχύει το αντίστροφο έχει μέγιστο κέρδος το οποίο περιορίζεται στο premium που εισέπραξε από την πώληση του δικαιώματος.

Από τα παραπάνω μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε διάνυσμα απόδοσης ενός δικαιώματος πώλησης που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x.

Απόδοση Δικαιώματος Πώλησης:

- Το ***Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού Τύπου*** που εγγράφεται στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης την τ, όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k είναι ένα νέο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο με ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_{\tau} = (k \cdot \mathbf{1} - x_{\tau})^{+} \quad \text{και} \quad \mathrm{P}_{\mathrm{t}} = 0 \ \ \forall\ \mathrm{t} \neq \tau}$$

- Το ***Δικαίωμα Πώλησης Αμερικάνικου Τύπου*** που εγγράφεται στο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης την τ, όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k είναι ένα νέο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο με ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_{t} = (k \cdot \mathbf{1} - x_{t})^{+} \quad \forall\ \mathrm{t} \leq \tau}$$

9.3.4. Βασικά Στοιχεία της Αγοράς

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές θέσεις αγοράς που υιοθετούν οι επενδυτές στην οικονομία τις οποίες και θα μελετήσουμε παρακάτω:

Θέση Επενδυτή	**Προσδοκία**
1. Long Position σε call option	$x_t > k$
2. Short Position σε call option	$x_t < k$
3. Short Position σε put option	$x_t < k$
4. Long Position σε put option	$x_t > k$

1. Η ***αγορά ενός δικαιώματος αγοράς*** εκφράζει την αισιοδοξία του επενδυτή ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα αυξηθεί, οπότε λέμε ότι υιοθετεί την ***long position*** και προσπαθεί να διασφαλίσει μια ευνοϊκή τιμή αγοράς.

2. Αντιθέτως η ***πώληση ενός δικαιώματος αγοράς*** εκφράζει την απαισιοδοξία του επενδυτή, ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα εμφανίσει πτώση οπότε δεν τον συμφέρει η κατοχή του δικαιώματος με το οποίο

αγοράζεις ακριβότερα τον υποκείμενο τίτλο. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι ο επενδυτής υιοθετεί την ***short position.***

3. Η ***αγορά ενός δικαιώματος πώλησης*** εκφράζει την απαισιοδοξία του επενδυτή, ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα εμφανίσει πτώση, οπότε προσπαθεί να διασφαλίσει μία ικανοποιητική τιμή πώλησης. Τότε λέμε ότι ο επενδυτής υιοθετεί την ***short position.***

4. Αντιθέτως η ***πώληση ενός δικαιώματος πώλησης*** εκφράζει την αισιοδοξία του επενδυτή ότι η τιμή του υποκείμενου τίτλου θα ανέβει οπότε δεν τον συμφέρει η κατοχή ενός δικαιώματος με το οποίο πουλάς φθηνότερα τον υποκείμενο τίτλο. Σε αυτήν την περίπτωση ο επενδυτής λέμε ότι υιοθετεί την ***long position.***

Η θεωρητική αξία ενός δικαιώματος επηρεάζεται από τους εξής παράγοντες:

i. Τιμή του υποκείμενου προϊόντος (x_t)

ii. Τιμή εξάσκησης (k)

iii. Χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (T-t)

iv. Μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης αξίας (σ)

v. Επιτόκια (r)

vi. Μερίσματα (αν πρόκειται για δικαιώματα επί μετοχών) (μ)

Στον πίνακα που ακολουθεί απεικονίζεται η εξάρτηση της αξίας του δικαιώματος όταν σημειώνονται αυξητικές μεταβολές στους παραπάνω παράγοντες.

Παράγοντας	**European Call**	**European Put**	**American Call**	**American Put**
x_t	+	-	+	-
k	-	+	-	+
T-t	+	+	?	?
σ	+	+	+	+
r	+	-	+	-
μ	-	+	-	+

Όπου το + υποδηλώνει ότι μια αύξηση στην τιμή της μεταβλητής οδηγεί σε αύξηση στην αξίας του δικαιώματος. Αντίθετα το – υποδηλώνει ότι μια αύξηση της τιμής της μεταβλητής οδηγεί σε μείωση της αξίας του δικαιώματος, ενώ το ? δηλώνει αβέβαιη σχέση.

Η αύξηση του επιτοκίου επηρεάζει θετικά το δικαίωμα αγοράς (call option) διότι ο κάτοχός του μπορεί να επενδύσει τα χρήματά του σε μια επένδυση χαμηλού ή μηδενικού κινδύνου για όσο διάστημα μεσολαβεί μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.

Τα μερίσματα μετοχών επηρεάζουν αρνητικά την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς διότι ο κάτοχός του δεν έχει το δικαίωμα να εισπράξει το μέρισμα. Αντιθέτως ο κάτοχος ενός δικαιώματος πώλησης έχει κέρδος.

Χαρακτηρισμός Δικαιωμάτων προαίρεσης ανάλογα με την τιμή εξάσκησης:

Ένα Δικαίωμα Αγοράς (call option) λέμε ότι είναι ***in-the-money (εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας)*** όταν η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα έχει εσωτερική αξία και μπορεί να εξασκηθεί. Ενώ ένα δικαίωμα αγοράς βρίσκεται ***at-the-money (στην ισοδύναμη χρηματική αξία)***, όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ισούται με την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας. Τέλος, θα λέμε ότι βρίσκεται ***out-of-the-money (εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας)***, όταν η τιμή εξάσκησης είναι υψηλότερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας.

Ένα Δικαίωμα Πώλησης (put option) είναι ***in-the-money (εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας)***, όταν η τιμή εξάσκησης είναι υψηλότερη από την τρέχουσα αξία του υποκείμενου τίτλου. Στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα έχει εσωτερική αξία και μπορεί να εξασκηθεί. Ενώ θα λέμε ότι ένα δικαίωμα πώλησης βρίσκεται ***at-the-money (στην ισοδύναμη χρηματική αξία)***, όταν η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ισούται με την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας. Τέλος, θα λέμε ότι βρίσκεται ***out-of-the-money (εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας)***, όταν η τιμή εξάσκησης είναι χαμηλότερη από την τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας.

9.4. Εξωτικά Δικαιώματα (exotic options)

Χρηματοοικονομικά παράγωγα όπως τα δικαιώματα προαίρεσης (call and put options) είναι ευρύτερα γνωστά στη διεθνή κοινότητα ως plain vanilla derivatives, χαρακτηρίζοντάς τα ως συνηθισμένα παράγωγα. Όμως από τις αρχές τις δεκαετίας του 1980, οι συνεχώς αυξανόμενες ανάγκες των πελατών οδήγησαν τόσο τις διεθνείς τράπεζες όσο και άλλα χρηματοοικονομικά ιδρύματα στη σχεδίαση και την επινόηση νέων και συχνά πολύπλοκων παραγώγων. Τα νέα αυτά συμβόλαια ονομάζονται ***εξωτικά δικαιώματα (exotic options)*** και διαπραγματεύονται εξωχρηματιστηριακά (OTC market).

Σημαντική διαφορά τους με τα δικαιώματα προαίρεσης είναι ότι το ***διάνυσμα εξάσκησης*** δεν είναι το σταθερό (riskless vector) αλλά είναι ένα διάνυσμα το οποίο εμπεριέχει κίνδυνο (***risky vector u***). Ακόμη το διάνυσμα εξάσκησης εξαρτάται από τις αποδόσεις του χρηματοοικονομικού συμβολαίου σε κάποια ή σε κάποιες από τις ενδιάμεσες χρονικές περιόδους μεταξύ της ημερομηνίας εγγραφής και της ημερομηνίας εξάσκησης.

Οι κυριότεροι τύποι εξωτικών δικαιωμάτων είναι οι εξής:

- Forward-Start Options
- Lookback Options
- Barrier Options
- Compound Options
- Asian Options, κλπ..

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε αποκλειστικά στα Forward-Start και Lookback Options.

9.4.1. Forward-Start Options

Τα Forward – Start Options είναι συμβόλαια δικαιωμάτων τα οποία θα είναι ενεργά σε κάποια στιγμή στο μέλλον. Επίσης τα forward-start options διακρίνονται σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης αλλά και σε Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου. Έστω x ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο, που όπως έχουμε ορίσει και πιο πριν είναι της μορφής $x=(x_o, x_1, .., x_T)$, όπου $x_o, x_1, .., x_T$ οι αποδόσεις του στις διάφορες χρονικές περιόδους.

Απόδοση Δικαιώματος Αγοράς:

- Το ***Forward-Start Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου*** εγγράφεται σε χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης την τ ,όπου $\tau \in \{1,2, .. , T\}$ και με τιμή εξάσκησης k. Ως διάνυσμα εξάσκησης u λαμβάνεται η απόδοση του συμβολαίου σε κάποια προκαθορισμένη χρονική στιγμή t, με $0 \leq t \leq \tau$. Τότε το δικαίωμα έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{C_\tau = (x_\tau - k \cdot x_t)^+ \quad \kappa\alpha\iota \quad C_i = 0 \quad \forall\ i \neq \tau}$$

- Αντίστοιχα το ***Forward-Start Δικαίωμα Αγοράς Αμερικάνικου Τύπου*** έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{C_i = (x_i - k \cdot x_t)^+ \quad \forall\ t \leq i \leq \tau}$$

Απόδοση Δικαιώματος Πώλησης:

- Αντίστοιχα το ***Forward-Start Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού Τύπου*** έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_\tau = (k \cdot x_t - x_\tau)^+ \quad \text{και} \quad \mathrm{P_i} = 0 \quad \forall\ \mathrm{i} \neq \tau}$$

- Τέλος το ***Forward-Start Δικαίωμα Πώλησης Αμερικάνικου Τύπου*** αντίστοιχα έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_i = (k \cdot x_t - x_i)^+ \quad \text{και} \quad \forall\ \mathrm{t} \leq i \leq \tau}$$

9.4.2. Lookback Options

Στα Lookback Options η απόδοσή τους εξαρτάται είτε από την μέγιστη είτε από την ελάχιστη τιμή που θα φθάσει το υποκείμενο προϊόν στην διάρκεια ισχύς του δικαιώματος. Με λίγα λόγια το δικαίωμα αυτό επιτρέπει στον κάτοχό του να "κοιτάξει πίσω (to look back)" σε όλο το χρονικό ορίζοντα ώστε να καθοριστεί η απόδοσή του.

Απόδοση Δικαιώματος Αγοράς:

- Το ***Lookback Δικαίωμα Αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου*** εγγράφεται σε χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή t με ημερομηνία λήξης την τ , όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k. Ως διάνυσμα εξάσκησης λαμβάνεται το u = inf {x_j / $t \leq j \leq \tau$}. Τότε το δικαίωμα έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{C_\tau = (x_\tau - k \cdot u)^+ \;\; \kappa\alpha\iota \;\; C_i = 0 \quad \forall\ i \neq \tau}$$

- Το ***Lookback Δικαίωμα Αγοράς Αμερικάνικου Τύπου*** έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{C_i = (x_i - k \cdot u)^+ \;\; \forall\ t \leq i \leq \tau}$$

Απόδοση Δικαιώματος Πώλησης:

- Το ***Lookback Δικαίωμα Πώλησης Ευρωπαϊκού Τύπου*** εγγράφεται σε χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x τη χρονική στιγμή t με ημερομηνία λήξης την τ, όπου τ ∈ {1,2, .. , T} και με τιμή εξάσκησης k. Ως διάνυσμα εξάσκησης λαμβάνεται το u = max {x_j / $t \leq j \leq \tau$}. Τότε το δικαίωμα έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_\tau = (k \cdot u - x_\tau)^+ \quad \text{και} \quad \mathrm{P_i} = 0 \;\; \forall\ \mathrm{i} \neq \tau}$$

- Τέλος το ***Lookback Δικαίωμα Πώλησης Αμερικάνικου Τύπου*** αντίστοιχα έχει ***διάνυσμα απόδοσης***:

$$\boxed{\mathrm{P}_i = (k \cdot u - x_i)^+ \quad \text{και} \quad \forall\ \mathrm{t} \leq i \leq \tau}$$

Κεφάλαιο 10

Η Πλήρωση σε Αγορές Χρεογράφων

10.1. Εισαγωγικά Στοιχεία

Έστω m πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος *χρεογράφων*, τα οποία συμβολίζονται με τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, .., n και των οποίων οι *αποδόσεις* είναι $x_1, x_2, .., x_n \in \mathbb{R}^m$, όπου ο χώρος $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ ονομάζεται ***χώρος των αποδόσεων (payoff space)*** και να σημειώσουμε ότι είναι εν γένει ένας ***διανυσματικός σύνδεσμος (vector lattice) E***=$\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$. Θεωρούμε τα διανύσματα $x_1, x_2, .., x_n$ ως ***πρωταρχικά χρεόγραφα (primitive securities)*** διότι υποθέτουμε ότι δεν είναι παράγωγα άλλων χρεογράφων. Ακόμη υποθέτουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε ένα *χαρτοφυλάκιο (portfolio) θ* το όποιο είναι ένα διάνυσμα της μορφής $\theta=(\theta_1, \theta_2, .., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, όπου θ_i είναι το πλήθος των μονάδων από το i χρεόγραφο τις οποίες αγοράζει ή πωλεί κάποιος επενδυτής. Ο χώρος $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ ονομάζεται ***χώρος των χαρτοφυλακίων (portfolio space)***. Έτσι λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε την ***απόδοση ενός χαρτοφυλακίου θ*** ως το διάνυσμα:

$$\boxed{\mathrm{T}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$$

Ο τελεστής Τ είναι 1-1 και ονομάζεται τελεστής απόδοσης. Ο υπόχωρος **X**=$[x_1, x_2, .., x_n]$ του $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ που παράγεται από τα διανύσματα x_i χαρακτηρίζεται ως ***υπόχωρος των διαθέσιμων στην αγορά χρεογράφων (subspace of marketed securities)*** ή ***υπόχωρος αποδόσεων*** των $x_1, x_2, .., x_n$. Αφού ο τελεστής Τ είναι 1-1, μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο των χαρτοφυλακίων με τον χώρο των αποδόσεών τους. Κάθε διάνυσμα του X είναι η εικόνα ενός μοναδικού χαρτοφυλακίου μέσω του τελεστή απόδοσης Τ και αντιστρόφως η εικόνα κάθε χαρτοφυλακίου μέσω του τελεστή Τ ανήκει στον υπόχωρο X.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει (κεφ. 9.3.2) οι αποδόσεις των δικαιωμάτων προαίρεσης λαμβάνονται με βάση το σταθερό διάνυσμα **1**=(1,1,1,…,1) $\in \mathbb{R}^m$, το οποίο δεν εμπεριέχει κίνδυνο (riskless vector) και ονομάζεται διάνυσμα εξάσκησης. Αντιθέτως σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε περιπτώσεις (όπως τα Lookback και Forward-Start options) όπου οι αποδόσεις των δικαιωμάτων λαμβάνονται με βάση το διάνυσμα u το οποίο εμπεριέχει κίνδυνο (risky vector) και μάλιστα $u \in U$, όπου $U \subseteq E=\mathbb{R}^m$. Ο υπόχωρος U ονομάζεται ***υπόχωρος εξάσκησης (strike subspace)*** και τα διανύσματα του U όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω ονομάζονται διανύσματα εξάσκησης (strike vectors).

10.2. Εφαρμογή στα Forward-Start Options

Θεωρούμε το σύνηθες χρηματοοικονομικό μοντέλο αγορών (βλ. 7.1). Υποθέτουμε ότι σύνολο καταστάσεων είναι το Ω={1,2,3,…,10} και ο χρονικός ορίζοντας T={0,1,2,3} . Η διαμέριση πληροφορίας είναι η εξής:

$$\Delta_o = \Omega,\ \Delta_1 = \big\{\{1,2,4,6,8\},\{3,5,7,9,10\}\big\},\ \Delta_2 = \big\{\{1,2,4\},\{6,8\},\{3,5\},\{7,9,10\}\big\} \text{ και}$$
$$\Delta_3 = \big\{\{1\},\ldots,\{10\}\big\}.$$

Να υπενθυμίσουμε ότι ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο αναπαριστάται από μια στοχαστική ανέλιξη της μορφής:

$$\mathrm{x}: \mathbf{T} \times \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R},$$

προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathbf{F} = \{F_o, F_1, \ldots, F_T\}$.
Δηλαδή αναπαριστάται από τη διανυσματική συνάρτηση $x = (x_o, x_1,..,x_T) \in \mathbb{R}^m$ όπου x_t είναι η απόδοσή του σε κάθε χρονική στιγμή t.
Θεωρούμε ότι στην αγορά έχουμε τρία χρηματοοικονομικά συμβόλαια (χρεόγραφα) $\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3$.

Οι αποδόσεις του x^1:

$$\mathrm{x}_o^1 = \frac{13}{10}\,(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), \qquad \mathrm{x}_1^1 = \frac{1}{5}\,(7,7,6,7,6,7,6,7,6,6),$$
$$\mathrm{x}_2^1 = \frac{1}{3}\,(7,7,6,7,6,0,2,0,2,2) \quad \text{και} \quad \mathrm{x}_3^1 = (2,2,4,3,0,0,0,0,1,1)$$

Οι αποδόσεις του x^2:

$$\mathrm{x}_o^2 = \frac{19}{10}\,(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), \qquad \mathrm{x}_1^2 = \frac{1}{5}\,(7,7,12,7,12,7,12,7,12,12),$$
$$\mathrm{x}_2^2 = \frac{1}{6}\,(2,2,9,2,9,18,18,18,18,18) \quad \text{και} \quad \mathrm{x}_3^2 = (0,0,1,1,2,3,1,3,4,4)$$

Οι αποδόσεις του x^3:

$$\mathrm{x}_o^3 = \frac{19}{10}\,(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1), \qquad \mathrm{x}_1^3 = \frac{1}{5}\,(6,6,4,6,4,6,4,6,4,4),$$
$$\mathrm{x}_2^3 = \left(2,2,0,2,0,0,\frac{4}{3},0,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{x}_3^3 = (3,3,0,0,0,0,4,0,0,0)$$

Θεωρούμε Forward-Start call option Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία λήξης T=3 και με ημερομηνία εξάρτησης την t=1. Τότε τα διανύσματα x_3^1, x_3^2, x_3^3 είναι οι αποδόσεις των χρεογράφων και ο υπόχωρος X=$[x_3^1, x_3^2, x_3^3]$ του $\mathbb{R}^{10}$ είναι ο υπόχωρος των αποδόσεων. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι η τιμή εξάσκησης k=1. Επομένως στην περίπτωση που το European Forward-Start call option εγγράφεται:

1. Στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x^1 με διάνυσμα εξάσκησης το $u = x_1^1 = \frac{7}{5}\,u_1 + \frac{6}{5}\,u_2$, όπου u_1=(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0) και u_2=(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1) τα χαρακτηριστικά διανύσματα της διαμέρισης Δ_1. Η απόδοση του δικαιώματος λοιπόν είναι η $c_u(x_T, k) = c_u(x_3^1, 1) = (x_3^1 - u1)^+ = (x_3^1 - x_1^1)^+ = \frac{1}{5}(3,3,14,8,0,0,0,0,0,0)$. Αφού το x_1^1 είναι σταθερό στα στοιχεία της διαμέρισης Δ_1, τότε το διάνυσμα εξάσκησης x_1^1 ανήκει στον υπόχωρο U^1 του $\mathbb{R}^{10}$, όπου ο U^1 παράγεται από τα χαρακτηριστικά διανύσματα u_1, u_2.

2. Στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x^2 με διάνυσμα εξάσκησης το $u = x_1^2 = \frac{7}{5}\,u_1 + \frac{12}{5}\,u_2$. Η απόδοση του δικαιώματος είναι το διάνυσμα $c_u(x_T, k) = c_u(x_3^2, 1) = (x_3^2 - u1)^+ = (x_3^2 - x_1^2)^+ = \frac{1}{5}(0,0,0,0,0,8,0,8,8,8)$. Ομοίως με προηγουμένως το διάνυσμα εξάσκησης x_1^2 ανήκει στον υπόχωρο U^1 του $\mathbb{R}^{10}$.

3. Στο χρηματοοικονομικό συμβόλαιο x^3 με διάνυσμα εξάσκησης το $u = x_1^3 = \frac{6}{5}\,u_1 + \frac{4}{5}\,u_2$. Η απόδοση του δικαιώματος είναι το διάνυσμα $c_u(x_T, k) = c_u(x_3^3, 1) = (x_3^3 - u1)^+ = (x_3^3 - x_1^3)^+ = \frac{1}{5}(9,9,0,0,0,0,16,0,0,0)$.
Το διάνυσμα εξάσκησης x_1^3 ανήκει στον υπόχωρο U^1 του $\mathbb{R}^{10}$.

Επομένως κάθε χαρτοφυλάκιο της μορφής x=θ_1 x^1+ θ_2 x^2+ θ_3 x^3 στην ημερομηνία λήξης T=3 του δικαιώματος έχει διάνυσμα απόδοσης $x_3 = \theta_1\, x_3^1 + \theta_2\, x_3^2 + \theta_3\, x_3^3$ ενώ για την προκαθορισμένη χρονική στιγμή t=1 έχει διάνυσμα εξάσκησης το $x_1 = \theta_1\, x_1^1 + \theta_2\, x_1^2 + \theta_3\, x_1^3$ το οποίο ανήκει στον υπόχωρο U^1. Επίσης παρατηρούμε ότι ο U^1 είναι υποσύνδεσμος (sublattice) του $\mathbb{R}^{10}$, αφού οι φορείς των διανυσμάτων u_1, u_2 είναι ξένοι μεταξύ τους.

Πριν ολοκληρώσουμε την εφαρμογή πρέπει να ορίσουμε κάποιες βασικές σχέσεις.

Με O_1 συμβολίζουμε το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που εγγράφονται στα στοιχεία του X.

$$O_1 = \{c_u(x,k) \mid x \in X, u \in U, k \in \mathbb{R}\}$$

Ακόμη με X_1 συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $E = \mathbb{R}^m$ που παράγει το σύνολο του O_1. Ομοίως για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ συμβολίζουμε με O_n το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που εγγράφονται στα στοιχεία του X_{n-1} και με X_n συμβολίζουμε τον υπόχωρο που παράγει το σύνολο O_n, δηλαδή

$$O_n = \{c_u(x,k) \mid x \in X_{n-1}, u \in U, k \in \mathbb{R}\}$$

Τέλος συμβολίζουμε με $F_U(X)$ την ένωση των υποχώρων X_n του E, $\boxed{F_U(X) = \cup_{n=1}^{\infty} X_n}$. Ακόμη προφανώς $X_n \subseteq X_{n+1}$.

Ορισμός 10.2.1: Ο $\mathbf{F_U(X)}$ ονομάζεται ***<u>πλήρωση του X μέσω δικαιωμάτων ως προς τα στοιχεία του υπόχωρου εξάσκησης U.</u>***

Έστω Y ο υπόχωρος του E που παράγεται από το σύνολο $X \cup U$, δηλαδή

$$Y = \{\lambda x + ku \mid x \in X, u \in U, \lambda, k \in \mathbb{R}\}.$$

Θέτουμε $S_2 = \{x \vee y \mid x, y \in Y\} \subseteq E$ και για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 3$ συμβολίζουμε το σύνολο $S_n = \{x \vee y \mid x \in S_{n-1}, y \in Y\} \subseteq E$. Αφού ο υποσύνδεσμος S(Y) (βλ. ορισμός 4.4) του E που παράγεται από το Y είναι το σύνολο των πεπερασμένων suprema των στοιχείων του Y ισχύει ότι $\boxed{S(Y) = \cup_{n=2}^{\infty} S_n}$.

Θεώρημα 10.2.1: ([9] theorem 3) Τα ακόλουθα ισχύουν:

i. $Y \subseteq X_1$

ii. Ο υπόχωρος $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος S(Y) του E που παράγεται από τον Y, δηλαδή $F_U(X) = S(Y)$.

iii. Εάν $U \subseteq X$, τότε $F_U(X) = S(X)$, δηλαδή ο $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος του E που παράγεται από τον X.

Ορισμός 10.2.2:
Κάθε σύνολο $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ γραμμικώς ανεξάρτητων θετικών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$, τέτοιο ώστε η πλήρωση του X μέσω δικαιωμάτων $F_U(X)$ να είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από το σύνολο αυτό $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$, ονομάζεται ***<u>βασικό σύνολο (basic set) της αγοράς X.</u>***

Μάλιστα συμβολίζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ ως εξής:

$$A = \{\, \mathrm{x}_1^+, \mathrm{x}_1^-, \mathrm{x}_2^+, \mathrm{x}_2^-, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}^+, \mathrm{x}_\mathrm{n}^- \,\} \text{ εάν } \mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$$

και

$$A = \{\, \mathrm{x}_1^+, \mathrm{x}_1^-, \mathrm{x}_2^+, \mathrm{x}_2^-, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}^+, \mathrm{x}_\mathrm{n}^-, \mathrm{u}_1^+, \mathrm{u}_1^-, \mathrm{u}_2^+, \mathrm{u}_2^-, \ldots, \mathrm{u}_d^+, \mathrm{u}_\mathrm{d}^- \} \text{ εάν } \mathrm{U} \nsubseteq \mathrm{X}$$

όπου $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_d\}$ είναι η βάση του U.

Θεώρημα 10.2.2: ([9] theorem 3)
Κάθε μεγιστικό υποσύνολο $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του A είναι ένα βασικό σύνολο (basic set) της αγοράς.

Ορισμός 10.2.3:
Εάν $\{\, y_1, y_2, \ldots, y_r \,\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς, τότε η συνάρτηση

$$\beta(i) = \left(\frac{\mathrm{y}_1(i)}{\mathrm{y}(i)}, \frac{\mathrm{y}_2(i)}{\mathrm{y}(i)}, \ldots, \frac{\mathrm{y}_r(i)}{\mathrm{y}(i)}\right), \qquad \forall\, i = 1,2,\ldots,\mathrm{m}$$

με $\mathrm{y}(i\,) > 0$, όπου $\mathrm{y} = y_1 + \mathrm{y}_2 + \ldots + \mathrm{y}_r$, είναι η ***<u>βασική συνάρτηση (basic function)</u>*** των $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Το σύνολο $\mathrm{R}(\beta) = \{\beta(i) \mid i = 1,2,\ldots,m \text{ με } y(i) > 0\}$ είναι το σύνολο τιμών της β. Ακόμη ως cardR(β) συμβολίζουμε τον πληθικό αριθμό του R(β), δηλαδή το πλήθος των (διαφορετικών) στοιχείων του R(β).

Θεώρημα 10.2.2: ([9], theorem 9)
<u>Η διάσταση ενός υποσυνδέσμου W του $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ που παράγεται από το βασικό σύνολο $\{\, y_1, y_2, \ldots, y_r \,\}$ είναι ίση με το cardR(β) του R(β).</u>

Έστω $\mathrm{R}(\beta) = \{\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_\mu\}$ και W ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, ο οποίος παράγεται από το σύνολο $\{\, y_1, y_2, \ldots, y_r\}$. Στη συνέχεια ακολουθεί μια μέθοδος προσδιορισμού του υποσυνδέσμου W.

i. Ταξινομώ το R(β) έτσι ώστε τα πρώτα r διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ii. Σύμφωνα με τη νέα αρίθμηση για τα διανύσματα P_i , i=1,2,..,μ, προσδιορίζουμε τα $\mathrm{I}_{r+k} = \{\, \mathrm{i} \in (1,2,\ldots,m) \mid \beta(\mathrm{i}) = \mathrm{P}_{r+k}\}$ για κάθε k=1,2,..,μ-r.

iii. Ορίζουμε τα διανύσματα y_{r+k} , και $\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + \ldots + \mathrm{y}_\mathrm{r}$ ως ακολούθως: $\mathrm{y}_{\mathrm{r+k}}(\mathrm{i}) = \mathrm{y}(\mathrm{i})$ εάν $\mathrm{i} \in \mathrm{I}_{\mathrm{r+k}}$ και $\mathrm{y}_{\mathrm{r+k}}(\mathrm{i}) = 0$ διαφορετικά.

iv. Ισχύει ότι W=[y_1, y_2,.., y_r , y_{r+1},.., y_μ]

v. Η θετική βάση $\{b_1, b_2, .., b_\mu\}$ του W προσδιορίζεται ως εξής: υποθέτουμε ότι γ είναι η βασική συνάρτηση των y_1, y_2,.., y_r , y_{r+1},.., y_μ και υποθέτουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι $\{P_1', P_2', .., P_\mu'\}$=R(γ). Μάλιστα card R(γ)=μ ίσο με τη διάσταση του W. Τότε:

$$(b_1, b_2, .., b_\mu)^T = D^{-1}(y_1, y_2, .., y_\mu)^T$$

όπου ο D είναι ένας πίνακας $\mu \times \mu$ με στήλες τα διανύσματα $P_1', P_2', .., P_\mu'$.

Στη συνέχεια λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο για να προσδιορίσουμε την πλήρωση του X μέσω δικαιωμάτων, δηλαδή το $F_U(X)$.

Ορισμός 10.2.4:
Ο χώρος των διαθέσιμων στην αγορά χρεογράφων, X, λέμε ότι είναι ***πλήρης μέσω δικαιωμάτων*** ως προς τον υπόχωρο εξάσκησης U εάν X = $F_U(X)$.

Θεώρημα 10.2.3: ([9], theorem 13)
Ο X είναι πλήρης μέσω δικαιωμάτων αν-ν $U \subseteq X$ και cardR(β)=n

Θεώρημα 10.2.4: ([9], theorem 14)
Η διάσταση του $F_U(X)$ είναι ίση με το cardR(β). Επομένως $F_U(X)=\mathbb{R}^m$ αν-ν cardR(β)=m.

Εφαρμογή (συνέχεια):

Έχουμε από πριν βρει ότι ο υπόχωρος X=[x_3^1, x_3^2, x_3^3]$\subseteq \mathbb{R}^{10}$, όπου:

$$x_3^1 = (2,2,4,3,0,0,0,0,1,1)\ ,\ \ x_3^2 = (0,0,1,1,2,3,1,3,4,4) \text{ και}$$
$$x_3^3 = (3,3,0,0,0,0,4,0,0,0).$$

Και ο υπόχωρος εξάσκησης U παράγεται από τα διανύσματα u_1=(1,1,0,1,0,1,0,1,0,0) και u_2=(0,0,1,0,1,0,1,0,1,1). Σύμφωνα με την μεθοδολογία $\{y_1 = x_3^1,\ y_2 = x_3^2,\ y_3 = x_3^3,\ y_4 = u_1, y_5 = u_2\}$ είναι το βασικό σύνολο της αγοράς. Σύμφωνα με τη βασική συνάρτηση β=$\frac{1}{y}$ (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) και το y = (6,6,6,5,3,4,6,4,6,6), (το άθροισμα όλων).

β(1) = $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0\right)$ = β(2) = P_1 , β(3) = $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}\right)$ = P_2

β(4) = $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0\right)$ = P_3, β(5) = $\left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$= P_4

$\beta(6) = \left(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0\right) = \beta(8) = P_5$, $\beta(7) = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6}\right) = P_6$

$\beta(9) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{6}\right) = \beta(10) = P_7$.

Ελέγχουμε ότι τα r=5 πρώτα διανύσματα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 του R(β) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα επομένως διατηρούμε την υπάρχουσα αρίθμηση. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία έχουμε ότι $I_{r+k} = \{ i \in (1,2,..,m) \mid \beta(i)=P_{r+k}\}$ για κάθε k=1,2,..,μ-r . Τότε $I_6 = \beta^{-1}(P_6) = \{7\}$ και $I_7 = \beta^{-1}(P_7)=\{9,10\}$.

Έπειτα ορίζουμε τα νέα διανύσματα y_6=(0,0,0,0,0,0,6,0,0,0) και y_7=(0,0,0,0,0,0,0,0,6,6). Τώρα ορίζουμε βασική συνάρτηση γ με τα νέα διανύσματα $\gamma = \frac{1}{y'}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ και y'=(6,6,6,5,3,4,12,4,12,12).
Έχουμε :

$\gamma(1) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0,0,0\right) = \gamma(2) = P_1'$, $\gamma(3) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{6}, 0,0\right) = P_2'$

$\gamma(4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0,0,0\right) = P_3'$, $\gamma(5) = \left(0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0,0\right) = P_4'$

$\gamma(6) = \left(0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0,0,0\right) = \gamma(8) = P_5'$, $\gamma(7) = \left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 0\right) = P_6'$

$\gamma(9) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{12}, 0, \frac{1}{2}\right) = \gamma(10) = P_7'$.

Επομένως cardR(γ)=7 άρα ο $F_U(X)$ είναι ένας 7 διαστάσεων υπόχωρος του $\mathbb{R}^{10}$. Τέλος μια θετική βάση του $F_U(X)$ δίνεται από τον τύπο

$$(b_1, b_2, .., b_7)^T = D^{-1}(y_1, y_2, .., y_7)^T$$

όπου ο D είναι πίνακας 7 x 7 με στήλες τα διανύσματα P_1' , P_2' , P_3' ,P_4' ,P_5' ,P_6' ,P_7'. Με τη βοήθεια του matlab προκύπτουν τα εξής διανύσματα:

$$b_1 = (1,1,0,0,0,0,0,0,0,0), \quad b_2 = (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0),$$

$$b_3 = (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0), \quad b_4 = (0,0,0,0,1,0,0,0,0,0)$$

$$b_5 = (0,0,0,0,0,1,0,1,0,0), \quad b_6 = (0,0,0,0,0,0,1,0,0,0)$$

$$b_7 = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1).$$

Επομένως τα διανύσματα $\{b_1, b_2, .., b_7\}$ αποτελούν την θετική βάση του $F_U(X)$. Δηλαδή προσδιορίσαμε την πλήρωση του X μέσω δικαιωμάτων ως προς τα στοιχεία του υπόχωρου εξάσκησης U.

Βιβλιογραφία

[1] Ι. Α. Πολυράκης "Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία" , Αθήνα (2009)

[2] C. D. Aliprantis, R. Tourky "Cones and Duality" AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (2007)

[3] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw "Locally solid Riesz spaces with applications to economics" AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY (2003)

[4] N. K. Nikol'skij "Functional Analysis I" SPRINGER (1992)

[5] V. M. Kopytov, N. Ya. Medvedev "The theory of lattice-ordered groups" KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS (1994)

[6] V. M. Kopytov, N. Ya. Medvedev "Right-ordered groups" PLENUM PUBLISHING CORPORATION (1996)

[7] C. D. Aliprantis, K. C. Border "Infinite dimensional analysis" SPRINGER (2006)

[8] Σ. Αργυρός, " Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης (δεύτερη έκδοση)" Αθήνα (2003)

[9] Christos Kountzakis, Ioannis A. Polyrakis (2006): The completion of security markets. Decisions in Economics and Finance 29, 1-21

[10] Derivatives (άγνωστη ημερομηνία) Investment Research & Analysis Journal [WWW document] www.iraj.gr/IRAJ/Derivatives.pdf

[11] http://www.euretirio.com

[12] Χρηματιστήριο Αθηνών Α.Ε. Αγορά Παραγώγων (1999) [WWW document] http://www.adex.ase.gr

[13] A financial and economy web page (2011) arbitrage.gr [WWW document] http://www.arbitrage.gr/