



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

ΒΙΟΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ

ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ ΜΗ
ΑΝΑΜΕΙΓΝΥΟΜΕΝΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ
ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ
ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΧΡΙΣΤΑΦΑΚΗ Ν. ΑΣΤΕΡΙΟΥ
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ Ε.Μ.Π.**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ ΣΩΚΡΑΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.**

ΑΘΗΝΑ 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΒΙΟΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΚΕΙΜΕΝΟ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ
ΑΘΗΝΑ 2011

ΥΠΟΨΗΦΙΟΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΑΣ	Χρισταφάκης Ν. Αστέριος
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	Μηχανολόγος Μηχανικός
ΘΕΜΑ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	Αριθμητική προσομοίωση διφασικής ροής μη αναμειγνυομένων ρευστών σε κλειστούς αγωγούς με εφαρμογή στη μικροκυκλοφορία του αίματος.
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ	Τσαγγάρης Σ. (Καθηγητής)
ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ	Τσαγγάρης Σ. , Μπεργελές Γ., Παπαντώνης Δ. (Καθηγητές), Βουτσινάς Σπ., Μαθιουλάκης Δ. (Αναπληρωτές Καθηγητές), Αναγνωστόπουλος Ι. (Επίκουρος Καθηγητής) , Ριζιώτης Β. (Λέκτορας)

*Στους γονείς μου
Νικόλαο και Ασημίνα*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	i.1
ABSTRACT.....	ii.1

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ.....	1.3
1.1. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ.....	1.3
1.2. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΥΓΡΟΥ – ΥΓΡΟΥ.....	1.4
1.3. ΡΟΕΣ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ (Dispersed Flow)	1.6
1.4. ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΜΕΣΑ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΥΓΡΗ ΦΑΣΗ.....	1.7
1.5. Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ (CFD)	1.11
1.6. Η ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ.....	1.13
1.7. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (SOLVERS).....	1.14
1.8. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	1.18
1.9. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ.....	1.21
1.10. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΡΟΩΝ	1.22
1.11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΡΟΩΝ.....	1.24
1.12. ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ.....	1.32
1.12.1. Στοιχεία Φυσιολογίας.....	1.32
1.12.2. Η σύσταση και ο ρόλος του αίματος.....	1.34
1.12.3. Μακροσκοπικές ρεολογικές ιδιότητες του αίματος.....	1.35
1.12.4. Παραμορφωσιμότητα του RBC.	1.36
1.13. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ.....	1.39
1.14. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ.....	1.41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	1.44

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

2.1 ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ	2.3
2.2. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ.....	2.6
2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΙΣΟΨΩΝ . ϕ	2.9
2.4. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ : $\rho(\phi)$, $\mu(\phi)$, $\kappa(\phi)$, $\mathbf{n}(\phi)$, $H(\phi)$, $\delta(\phi)$	2.10
2.5. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ	2.12
2.6. ΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΤΕΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ)	2.14
2.7. ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	2.14
2.8. ΟΙ ΟΡΟΙ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	2.16
2.9. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΨΩΝ - LEVEL SET METHOD.....	2.17
2.9.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοψών ϕ^*	2.17
2.9.2. Η εξίσωση επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοψών.....	2.19
2.9.3. Εισαγωγή «υβριδικής» μεθόδου επαναπροσδιορισμού της συνάρτησης των ισοψών για διατήρηση της μάζας των σταγόνων.....	2.20
2.9.4. Ορισμός της τοπικής συνάρτησης των ισοψών (Local Level-Set) ή <i>LLSM</i>	2.21
ΒΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	2.24
2.Τ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 2 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ	2.25

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ.....	3.4
3.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ...3.4	
3.2. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ (STAGGERED GRID).....3.5	
3.3. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ (PROJECTION)	3.7
3.4. ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	3.12
3.4.1. Αρχικές συνθήκες του μονοφασικού και του διφασικού πεδίου ροής.....	3.12
3.4.2. Αρχικός ορισμός της ϕ	3.12
3.4.3. Οριακές συνθήκες.....	3.13
3.4.4. Δομές Δεδομένων για την διαχείριση Εμποδίων και ελεύθερων επιφανειών	3.16
3.5. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ϕ_x , ϕ_y ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ϕ	3.18
3.6. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ..3.20	

3.7. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ $H(\phi)$, $\delta(\phi)$	3.21
3.7.1. Συμβατική διακριτοποίηση των $H(\phi)$, $\delta(\phi)$	3.21
3.7.2. Διακριτοποίηση της $\delta(\phi)$ με την μέθοδο του <i>Smereka</i>	3.22
3.7.2.1. Διακριτοποίηση πρώτης τάξεως	3.25
3.7.2.2. Διακριτοποίηση δεύτερης τάξεως ακριβείας.....	3.26
3.8. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ $\kappa(\phi)$	3.27
3.9. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES.....	3.29
3.9.1. Γενικά	3.29
3.9.2. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων.....	3.30
3.9.3. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους ή συνεκτικών όρων.....	3.33
3.9.4. διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης	3.36
3.10. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES.....	3.38
3.11. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ LSM	3.39
3.11.1. Υπολογισμός ταχυτήτων στα κέντρα των κυψελών με πολυώνυμα <i>Lagrange</i>	3.39
3.11.2. Υπολογισμός της νέας ενδιάμεσης συνάρτηση ισοϋψών, ϕ	3.40
3.11.3. Διακριτοποίηση της εξίσωσης επαναρχικοποίησης των ισοϋψών	3.42
3.11.4. Διακριτοποίηση της εξίσωσης του υβριδικού αλγορίθμου της ϕ	3.44
3.11.5. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής <i>LSM</i>	3.44
3.11.6. Χρονική διακριτοποίηση της <i>LSM</i>	3.46
BIBLIOΓΡΑΦΙΑ.....	3.46

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ - ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

4.1. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ	4.5
Πίνακας 4.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.	4.7
4.2. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΩΛΗΝΕΣ.....	4.8
4.2.1. Διατάξεις δύο άνισων σταγόνων	4.8
4.2.1.1. Δύο σταγόνες: $We=1$, $Ca=0.05$	4.9
4.2.1.2. Δύο σταγόνες: $We=1.43$, $Ca=0.07$	4.9
4.2.1.3. Δύο σταγόνες: $We=3.33$, $Ca=0.17$	4.10
4.2.2. Διάταξη τεσσάρων ισομεγέθων σταγόνων	4.10

4.2.3. Παρατηρήσεις σχετικές με την μετανάστευση των σταγόνων (droplet migration)..	4.11
4.3. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ (2-D) ΚΑΝΑΛΙΑ.....	4.12
4.3.1. Διάταξη δυο άνισων σταγόνων.	4.12
4.3.2. Συμμετρικές διατάξεις τεσσάρων η πέντε ισομεγεθών σταγόνων (στην μέση γραμμή του αγωγού)	4.13
4.3.3. Διάταξη δυο σειρών σταγόνων η κάθε μια εισαγόμενη σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή του καναλιού	4.14
4.3.3.1. Δύο έκκεντρα τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων	4.14
4.3.3.2. Δύο συμμετρικά τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων	4.15
4.3.3.3. Παρατηρήσεις για τη ροή στα Σχ.4.9 και Σχ.4.10	4.17
4.3.4. Διάταξη τριών μικρών σταγόνων κατά πλάτος του 2-D αγωγού.....	4.18
4.3.5. Διάταξη πέντε μικρών σταγόνων κατά πλάτος και στη μέση γραμμή του 2-D αγωγού.	4.19
4.3.6. ΣΥΣΤΟΙΧΙΑ ΔΥΟ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΕΥΘΕΙΑ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ ..	4.22
4.3.6.1. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη αρνητική εκκεντρότητα.....	4.22
4.3.6.2. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη θετική εκκεντρότητα.....	4.22
4.4. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ.....	4.24
4.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.....	4.26
4.5 1. Αριθμητική σύγκριση.....	4.26
4.5 1.1. Μία σταγόνα για συνθήκες $Re=2, Ca=1.0, \lambda=10, k=0.25$	4.26
4.5.1.2. Διασπορά δύο μεγάλων σταγόνων σε Ροή Couette	4.27
4.5.1.3. 2D ροή Poiseuille 7 σταγόνων με περιοδικές οριακές συνθήκες δεξιά και αριστερά.	4.30
4.5 2. Σύγκριση του μοντέλου με πειραματικά δεδομένα του εργαστηρίου.....	4.32
4.6. ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ (u, v, p).....	4.33
4.6.1. Ισοταχείς στο πεδίο ροής.....	4.33
4.6.2. Η κατανομή της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού.....	4.34
4.6.3. Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u σε επιλεγμένες θέσεις κατά μήκος του αγωγού.	4.36
4.6.4. Η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού	4.37
4.6.5. Απεικόνιση του διανυσματικού πεδίου (u, v)	4.39
4.7. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟΤΟΜΗΣ ΖΩΝΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΦΙΛ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ	4.40
Πίνακας 4.2. Χαρακτηριστικά ζώνης βύσματος στο προφίλ της u/U	4.42
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	4.43

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ	5.3
Πίνακας 5.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε στενώσεις ή/και διευρύνσεις που μελετήθηκαν στο 5 ^ο κεφάλαιο.....	5.4
5.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ	5.5
5.2. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.....	5.7
5.2.1. Λ.Σ.=0.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=5.7143$, $Ca=0.2857$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.4$	5.7
5.2.2. Λ.Σ.=0.5. Τρείς σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$	5.8
5.2.3. Λ.Σ.=0.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4.0$, $\delta=-0.60$, $k=0.24$	5.8
5.2.4. Λ.Σ.=0.5. Τρείς σταγόνες: $Re=0$, $We=20$, $Ca=1.0$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$, $k=0.8$	5.9
5.2.5. Λ.Σ.=0.7. Τρείς σταγόνες: $Re=20$, $We=1.0$, $Ca=0.05$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$	5.9
5.2.6. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων	5.10
5.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.....	5.11
5.4. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ	5.16
5.5. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ	5.21
5.5.1. Ορισμός των και σε αξονοσυμμετρικό αγωγό με διεύρυνση	5.21
5.5.2. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με μία σταγόνα	5.21
5.5.3. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με δύο σταγόνες	5.26
5.6. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΞΩΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ	5.35
5.7. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.....	5.42
5.8. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ- ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ	5.47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	5.51

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ

6.1. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ	6.3
Πίνακας 6.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε αγωγούς με διακλάδωση ταφ η διπλή γωνία που μελετήθηκαν στο 6 ^ο Κεφάλαιο	6.4
6.2. ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ	6.4
6.2.1. Τρείς σταγόνες: $Re=15$, $We=2.8571$, $Ca=0.14286$, $\lambda=4$, $\delta=-0.0667$, $k=0.667$	6.4

6.2.2. Τέσσερες σταγόνες: $Re=15, We=4, Ca=0.2, \lambda=4, \delta=0, k=0.48$	6.5
6.2.3. Δύο σταγόνες: $Re=15, We=1, Ca=0.05, \lambda=4.0, \delta=0, k=0.75$	6.5
6.2.4. Παρατηρήσεις σχετικές με την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων	6.6
6.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ 90°	6.6
6.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	6.18
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	6.19

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΗΝ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

7.1. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΩΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ.....	7.3
7.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ.....	7.5
7.2.1. Αξονοσυμμετρικός Συνημιτονοειδής αγωγός.....	7.5
7.2.2. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των αιμοσφαιρίων	7.8
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	7.11

8^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ (ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ)

8.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	8.3
8.1.1. Μοντελοποίηση της μικροκυκλοφορίας ως διφασικής ροής	8.3
8.1.2. Μεθοδολογία αριθμητικής προσομοίωσης της διεπιφάνειας σε διφασικές ροές σταγόνων	8.4
8.1.3. Ανάπτυξη λογισμικού αριθμητικής επίλυσης διφασικών ροών	8.6
8.1.4. Μελέτη χαρακτηριστικών περιπτώσεων διφασικής ροής.....	8.8
8.1.5. Εμβάθυνση στη φυσική των φαινομένων και των μηχανισμών προσομοίωσης ...	8.9
8.2. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ ΚΑΙ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ	8.10
8.3. ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ	8.13
8.4. ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΤΡΙΒΗ	8.16

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1.....	Π.3
Π.1.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών της § 2.9.1.....	Π.3
Π.1.2. Διακριτοποίηση της της § 3.11.2.	Π.3
Π.1.3. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής LSM §3.11.5.....	Π.4
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2.....	Π.6
Πίνακας Σημαία (Flag matrix)- Εμπόδια (Obstacles).....	Π.6
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3.....	Π.7
Πίνακας-σημαία (Flag matrix)-Ελεύθερες ροές.....	Π.7
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π4.....	Π.8
Συναρτήσεις $H(x)$ και $\delta(x)$	Π.8
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π5.....	Π.10
Λεπτομέρειες μετατοπισμένου πλέγματος του διφασικού αλγορίθμου.....	Π.10
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π6.....	Π.12
Σχήματα πεπερασμένων διαφορών κλπ κεφ.3.....	Π.12
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π7.....	Π.13
Διακριτοποίηση των όρων των εξισώσεων Navier-Stokes της §3.9.....	Π.13
Π.7.1. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων της §3.9.2.....	Π.13
Π.7.2. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους της § 3.9.3.....	Π.14
Π.7.3. Εναλλακτική διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης της § 3.9.4.....	Π.17
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π8.....	Π.22
Η μεθοδολογία προβολής (projection) της §3.3.....	Π.22
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	Π.25

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη διδακτορική διατριβή, διαπραγματεύεται την αριθμητική προσομοίωση διφασικών ροών σταγόνων σε κλειστούς αγωγούς διαφόρων γεωμετριών και την μελέτη της κίνησης και παραμόρφωσης των αιμοσφαιρίων στην μικροκυκλοφορία του αίματος ως εφαρμογή. Είναι διεπιστημονικού χαρακτήρα στο χώρο της Βιορευστομηχανικής και υλοποιήθηκε με εφαρμογή μεθόδων της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής. Στο κείμενο γίνεται εκτενής εισαγωγή στις επιστημονικές προκλήσεις του θέματος, περιγράφονται οι ερευνητικές μεθοδολογίες που χρησιμοποιήσαμε ή αναπτύξαμε και παρουσιάζονται διεξοδικά αποτελέσματα της έρευνας μας και τα συμπεράσματα της.

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε κατά το διάστημα 2002-2011 στον τομέα Ρευστών, της σχολής Μηχανολόγων του Ε.Μ.Π. με δημιουργική διάθεση και επιστημονικό πνεύμα. Αποτέλεσε μια μικρή Οδύσσεια σε νέους κόσμους για τον συγγραφέα.

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Σωκράτη Τσαγγάρη που υπέδειξε το θέμα, με καθοδήγησε και με συμπαράσταθη πολύπλευρα και διαρκώς με υπομονή και σταθερότητα, ώστε να καταστεί εφικτό να ολοκληρωθεί αυτή η προσπάθεια. Ευχαριστίες επίσης οφείλω στους καθηγητές Ε.Μ.Π. κ. Δημήτριο Παπαντώνη και Δημήτριο Μαθιουλάκη, της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής της διατριβής, για το κλίμα συνεργασίας, στον καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Γεώργιο Μπεργελέ για την ενθάρρυνση του σε αποφασιστικές στιγμές, όπως και στα άλλα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής για την διάθεση τους να συμβάλλουν στην βελτιστοποίηση και τις προοπτικές αυτού του πονήματος. Ευχαριστώ επίσης όλους εκείνους που με ενέπνευσαν ή έγιναν μέτοχοι και αρωγοί σε διάφορες φάσεις αυτής της προσπάθειας. Μνημονεύω την βοήθεια στα πρώιμα στάδια της διατριβής του Δρος Χρήστου Καλιακάτσου, του Μηχανολόγου Μηχανικού Ε.Μ.Π. κ. Ιωάννη Αλεξόπουλου και του καθηγητή Πληροφορικής του Τ.Ε.Ι. Λάρισας κ. Νικολάου Λιόλιου. Ιδιαίτερα ευχαριστώ την οικογένεια μου που ανέχθηκε όλη αυτή την παρατεταμένη έρευνα.

Μέρος της διατριβής (τριάμισι έτη) εκπόνησα σε ειδική άδεια υπηρεσιακής εκπαίδευσης και ευχαριστώ την Ελληνική πολιτεία και ιδιαίτερα τους τότε Περιφερειακούς Διευθυντές Εκπαίδευσης Θεσσαλίας κ. Αθανάσιο Ραούλη και κ. Αργύριο Χαδούλη, όπως και τα μέλη των υπηρεσιακών συμβούλιων του ΑΠΥΣΔΕ Θεσσαλίας για την έγκριση της αδείας χωρίς την οποία η ανάληψη αυτής της προσπάθειας θα ήταν αδιανόητη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η αριθμητική προσομοίωση και η εμβάθυνση στην κατανόηση μηχανισμών της μικροκυκλοφορίας του αίματος ως διφασικής ροής αποτελεί πρόσφορο και ευρύ διεπιστημονικό πεδίο έρευνας και ζητούμενο παρά τις κατά καιρούς δημοσιεύσεις. Αξιοποιώντας μαθηματικές μεθοδολογίες και σύγχρονες προτάσεις της βιβλιογραφίας, υλοποιήθηκε εκ μέρους μας ένα σύγχρονο αριθμητικό μοντέλο διφασικής ροής υγρού-υγρού ως πρόσφορο, παραστατικό, ακριβές εργαλείο προσομοίωσης διφασικής ροής σταγόνων με εφαρμογή στην μικροκυκλοφορία του αίματος που επιδέχεται εύκολα την ενσωμάτωση νέων παραμέτρων μοντελοποίησης.

Η αριθμητική μεθοδολογία προσομοίωσης διφασικών ροών σταγόνων που υλοποιήσαμε αποτελείται από δύο ξεχωριστές μεθοδολογίες που συμπλέκονται σε ένα πεπλεγμένο αλγόριθμο. Η πρώτη μεθοδολογία υπολογίζει αριθμητικά το συνολικό πεδίο της διφασικής ροής με επίλυση των πλήρων διδιάστατων ή αξονομετρικών εξισώσεων *Navier-Stokes* για Νευτώνεια, ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά με επιφανειακή τάση μεταξύ των δύο φάσεων.

Η δεύτερη μεθοδολογία ανιχνεύει την διεπιφάνεια, δηλαδή την καμπύλη (επιφάνεια) που χωρίζει τις δύο φάσεις υγρού-υγρού (σταγόνων και συνεχούς φάσης) που είναι απότομη ασυνέχεια στο πεδίο ροής. Επίσης υπολογίζει τις συντεταγμένες των περιγραμμάτων των σταγόνων κατά την εξέλιξη του φαινομένου με αλγόριθμους της *Level-Set Method*, ή «μεθόδου των ισοϋψών» των *Osher & Sethian*, βελτιστοποιημένη για διατήρηση της μάζας (επιφανείας) των σταγόνων και του πάχους της διεπιφάνειας των δύο φάσεων. Τα σημεία της διεπιφάνειας προσδιορίζονται από την εκάστοτε μηδενική συνάρτηση *level-set* ή «συνάρτηση των ισοϋψών», ή $\phi=0$.

Η *LSM* προσδιορίζει τη θέση, περιγράφει την κίνηση των σημείων της διεπιφάνειας των δύο ρευστών σε κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας υποχρεωτικά τις ταχύτητες του πεδίου ροής, όπως έχουν υπολογιστεί από την πρώτη μεθοδολογία, ενώ παρέχει έμμεσα τις συνθήκες για την διατύπωση και επίλυση των αναθεωρημένων διφασικών εξισώσεων ορμής για χρονικά εξαρτώμενα ασυμπίεστα πεδία, γιατί οι όροι ιξώδους και επιφανειακής τάσης είναι εξαρτημένες συναρτήσεις της ϕ .

Οι διαφορικές εξισώσεις του συνολικού πεδίου ροής διακριτοποιούνται επάνω σε ομοιόμορφα καρτεσιανά μετατοπισμένα πλέγματα τύπου *MAC* με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιώντας μία σχεδόν δεύτερης τάξης ακριβείας μεθοδολογία προβολών κατά *Chorin* για το πεδίο ταχυτήτων και τον αλγόριθμο *SOR* της εξίσωσης *Poisson* για τον υπολογισμό του πεδίου πιέσεων.

Η μεθοδολογία επιτρέπει οι σταγόνες να έχουν γενικά διαφορετικό ιξώδες και πυκνότητα από το περιβάλλον ρευστό και στην διεπιφάνεια των σταγόνων με το περιβάλλον ρευστό να ασκούνται δυνάμεις επιφανειακής τάσης. Τόσο το ιξώδες όσο και η πυκνότητα του ρευστού ορίζονται ως συναρτήσεις της θέσης στο πεδίο ροής και της συνάρτησης ϕ .

Η βελτιστοποίηση πτυχών της μοντελοποίησης απαίτησε την ενσωμάτωση προσθέτων κριτηρίων εξασφάλισης της σύγκλισης του διφασικού αλγορίθμου και αριθμητικών σχημάτων στον αλγόριθμο της βασικής μεθοδολογίας. Οι χωρικές παράγωγοι της συνάρτησης των ισοϋψών ϕ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας πέμπτης τάξεως σχήματα *WENO*, ενώ η χρονική ολοκλήρωση των ημιδιακριτών εξισώσεων γίνεται με σχήματα (*TVD*) *Runge-Kutta*. Η μελέτη αξονοσυμμετρικών περιπτώσεων απαίτησε τροποποίηση στους αλγορίθμους των εξισώσεων *N-S* και της *LSM*.

Η προσομοίωση στηρίζεται στην παραμετροποίηση και την αδιαστατοποίηση χαρακτηριστικών γεωμετρικών και ρευστοδυναμικών μεγεθών. Χρησιμοποιούνται οι αδιάστατοι αριθμοί: *Re*, *Ca*, *We*, λ , όπου λ είναι ο λόγος της δυναμικής συνεκτικότητας των σταγόνων προς το περιβάλλον ρευστό, ο αριθμός και η γεωμετρική διάταξη των σταγόνων στην αρχική κατάσταση και τα αδιάστατα μεγέθη: μέγεθος σταγόνων, κ και εκκεντρότητα, δ της τοποθέτησης του κέντρου της σταγόνας ως προς τον άξονα ή το επίπεδο συμμετρίας του αγωγού.

Για την υλοποίηση του αριθμητικού διφασικού αλγορίθμου και την παραγωγή των αποτελεσμάτων της διατριβής, αναπτύχθηκε και χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό *NaSt-LSM* σε *Visual Fortran95* με αρχικό πυρήνα (βασικές τάξεις) τις δομές του λογισμικού ανοικτού κώδικα *CFD* μονοφασικής ροής *nast2d*, το οποίο συμπλέχτηκε κατάλληλα με δομές αλγορίθμων της *LSM* από το λογισμικό διφασικής ροής, *drop1*, του τομέα ρευστών του *EMΠ*

και από το λογισμικό ανοικτού κώδικα *LSMLIB 1.0.1*. Αναπτύχθηκαν τρεις εκδόσεις του *NaSt-LSM* για διφασικές ροές με πολλές σταγόνες σε υπολογιστικά χωρία σύνθετης γεωμετρίας και με καμπύλα όρια με χρήση της συμβατικής *LSM* για α) διδιάστατα πεδία ροής β) αξονομετρικές ροές και γ) τις παραπάνω ροές με την μέθοδο της τοπικής μεθόδου των ισοϋψών, *LLSM*.

Με το λογισμικό *NaSt-LSM* μελετήθηκαν για ασυμπίεστα μη αναμειγνυόμενα νευτώνεια ρευστά χαρακτηριστικές μεταβατικές διφασικές διδιάστατες και αξονομετρικές ροές σταγόνων μέσα σε κλειστούς ευθύγραμμους αγωγούς και αγωγούς σύνθετης γεωμετρίας με σταθερά, άκαμπτα ευθύγραμμο ή καμπύλο τοιχώματα όπως μέσα σε: στένωση ή/και διαστολή με ή χωρίς καμπύλη εξομάλυνσης, διακλάδωση ταφ, διπλή γωνία, τοξωτή στένωση-διεύρυνση και κυματοειδή συνημιτονοειδή ευθύγραμμο αγωγό. Οι παραπάνω διφασικές ροές προσομοιώνουν αντίστοιχες ροές στην μικροκυκλοφορία του αίματος.

Πιο συγκεκριμένα μοντελοποιείται και μελετάται σε επαρκή βαθμό η λεπτομερής κίνηση όχι αναγκαστικά ισομεγθών διατάξεων σταγόνων που διασπείρονται και μεταναστεύουν μέσα στην πρωτεύουσα συνεχή φάση κάτω από επιλεγμένες κάθε φορά συνθήκες ροής σε πεδίο ροής *Hagen-Poiseuille* της συνεχούς φάσης ή ροή *Couette* έως ότου η παραμόρφωση και η αλληλεπίδραση των σταγόνων κατά περίπτωση καταλήξει, αν είναι εφικτό, σε ουσιαστικά αμετάβλητα περιγράμματα σταγόνων, διάσπαση ή συνένωση αυτών και παραγωγή μικροσταγονιδίων.

Με τον αριθμητικό αλγόριθμο υπολογίζονται ρευστοδυναμικά μεγέθη στην περιοχή ενδιαφέροντος ή σε ολόκληρο το χωρίο υπολογισμού για επιλεγμένα στιγμιότυπα της ροής χωρίς να εξαντλείται η μελέτη. Απεικονίζονται αδιάστατα μεγέθη όπως: ισοταχείς του πεδίου της ταχύτητας u' , το διανυσματικό ροϊκό πεδίο (u', v') , διαμήκεις ή/και εγκάρσιες κατανομές (προφίλ) της οριζόντιας ή αξονικής ταχύτητας u' σε επιλεγμένες θέσεις x κατά μήκος του αγωγού ή της εγκάρσιας ταχύτητας v' σε επιλεγμένες θέσεις y κατά πλάτος του αγωγού, όπως στην περίπτωση διακλάδωσης ταφ, διαμήκεις κατανομές ή ισοταχείς της πίεσης p' .

Η ακρίβεια και η ευκρίνεια των διεπιφανειών (περιγραμμάτων σταγόνων ή αιμοσφαιρίων) που επιτεύχθηκε με το παραπάνω μοντέλο κρίνεται επαρκής για την μελέτη των φαινομένων. Καταγράφονται επίσης οι παράμετροι παραμόρφωσης κατά *Taylor* κλπ. Οι παράμετροι που προσομοιώνονται στους αλγόριθμους και τα παραγόμενα ρευστοδυναμικά μεγέθη τεκμηριώνουν και ομαδοποιούν τις παρατηρήσεις. Επιμέρους αποτελέσματα συγκρίνονται και επαληθεύονται με αριθμητικά η/και πειραματικά αποτελέσματα μελετών της βιβλιογραφίας για την τεκμηρίωση. Η σύγκριση θεωρείται ικανοποιητική, αν και πολλές

φορές μόνο ποιοτική λόγω ελλείψεως λεπτομερών ή επαρκών στοιχείων ή άλλων τεχνικών περιορισμών.

Επιδιώχθηκε η βαθύτερη κατανόηση των επιμέρους φαινομένων και μηχανισμών που παρατηρούνται γενικά αλλά και της επίδρασης της συγκεκριμένης γεωμετρίας στη διφασική ροή. Μελετήθηκε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις σταγόνες που σε κάποιες μεταβατικές ροές οδηγεί σε συγχωνεύσεις ή διασπάσεις. Επίσης διατυπώνονται και συζητούνται συγκεκριμένες διαπιστώσεις για την φυσική των φαινομένων, όπως η μετανάστευση των σταγόνων προς τον άξονα συμμετρίας ή αλλαγή του σχήματος και ο περιορισμός της παραμόρφωσης με την αύξηση της επιφανειακής τάσης. Προσδιορίζονται τα ειδικά σχήματα και οι θέσεις μετανάστευσης μέσα στον αγωγό του περιγράμματος των σταγόνων. Πολλά επιμέρους συμπεράσματα για την μετανάστευση και παραμόρφωση διατάξεων ομάδων σταγόνων ή μίας μόνο σταγόνας και κατά αντιστοιχία των έμμορφων συστατικών του αίματος στις διάφορες γεωμετρίες αγωγών που μελετήθηκαν, παρουσιάζονται αναλυτικά στα αντίστοιχα κεφάλαια της διατριβής. Τα συμπεράσματα εμπλουτίζουν τη γνώση μας για την συμπεριφορά των ερυθρών αιμοσφαιρίων και των λευκών αιμοσφαιρίων στο σύστημα των τριχοειδών αγγείων της μικροκυκλοφορίας.

Στο διφασικό μοντέλο τα ερυθρά και τα λευκά αιμοσφαίρια και το πλάσμα θεωρούνται ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά διαφορετικού ιξώδους. Η επιφανειακή τάση που επιβάλλεται στην διεπιφάνεια των δύο υγρών φάσεων προσομοιώνει σε ικανοποιητικό βαθμό τις ελαστικές ιδιότητες της μεμβράνης που διαχωρίζει τα ερυθρά αιμοσφαίρια από το πλάσμα. Τα τριχοειδή αγγεία θεωρούνται απλουστευτικά συνήθως σαν άκαμπτοι διδιάστατοι ή κυλινδρικοί ευθύγραμμοι ή συνημιτονοειδείς αγωγοί. Τα αιμοσφαίρια διασπείρονται και παραμορφώνονται μέσα στο πλάσμα, όπως σταγόνες σε περιβάλλον ρευστό χωρίς να αναμειγνύονται.

ABSTRACT

The better understanding of mechanisms of microcirculation of blood as a two-phase flow is an appropriate and broad scientific field of research and challenge despite occasional publications. A modern numerical model of liquid-liquid two-phase flow was implemented as appropriate, document, accurate tool simulating biphasic flow of droplets with application in the microcirculation.

The numerical simulation methodology for two-phase flow of droplets we implemented consists of two separate methodologies engaged together in an algorithm. The first method calculates the total number of two-phase flow field by solving the complete two-dimensional or axis-symmetric *Navier-Stokes* equations for *Newtonian*, incompressible viscous fluids with surface tension between the two phases. The second method detects the interface, i.e. the curve (surface) that separates the two phases of liquid-liquid (droplets and continuous phase) that is sharp discontinuity in the flow field and calculates the coordinates of the shapes of droplets during the evolution of the phenomenon with Level-Set Method algorithms, or "method of contour" of *Osher & Sethian*, optimized for conservation of mass (surface) of the droplets. The points on the interface are specified by the current zero level-set function $\phi=0$.

The *LSM* determines the motion of the interface at any time using the velocities of the flow field, as calculated by the first method. In addition the *LSM* implicitly provides the conditions for the revised, nearly second-order, two-phase, time-dependent, 2-D or axisymmetric Navier-Stokes momentum equations' solver, incorporating viscous and surface tension terms depending on the level-set function ϕ .

The differential equations of the total flow field are discretized on *MAC* type Cartesian uniform staggered meshes with suitable finite difference schemes using an almost second order accurate *Chorin* projection method to calculate the velocity field and the *SOR* algorithm to solve the *Poisson* equation for the pressure. The methodology allows the droplets to have generally different viscosity and density than the surrounding fluid, defined as a function of ϕ and in the interface be exercised surface tension forces.

The optimization aspects of modeling required the inclusion of additional criteria to ensure the convergence of the two-phase algorithm. The derivatives of the level-set function are computed by using fifth-order *WENO* and second-order *TVD Runge-Kutta* discretization schemes in order to improve the accuracy and the stability of the algorithm. The study of axisymmetric cases required modifications to the algorithms of *N-S* and *LSM* equations.

The deformation and the migration of various arrangements (arrays) of droplets, as they are carried by the primary phase into the low *Reynolds number* (*Re*), developing *Hagen-Poiseuille* laminar flow, is computed and discussed on the basis of the non-dimensional numbers and parameters: *Capillary number* (*Ca*), *Re*, *Weber number* (*We*), *viscosity ratio* , λ , *relative droplet size*, κ and the relative eccentricity of the initial center of the droplet, δ .

To implement the numerical two-phase algorithm and to produce results of this thesis, the *NaSt-LSM* software was developed in Visual Fortran95 with original kernel (core classes) structures of open source CFD single phase flow *nast2d*, coupled with appropriate structures to *LSM* algorithms of the two-phase flow software , *drop1*, of the fluid domain of *NTUA* and open source code *LSMLIB 1.0.1*. Three versions of *NaSt-LSM* were developed using conventional *LSM* for a) two-dimensional flow fields b) axisymmetric flow and c) a third version for the above cases using the local level-set method, *LLSM*.

With the software *NaSt-LSM*, transient, incompressible 2-D and axisymmetric two-phase flows of droplets of immiscible Newtonian fluids into closed straight and complex geometry ducts with fixed, rigid straight or curved walls such as contraction and/or expansion with or without smoothing curve; branch tees, double angle, arched contraction-expansion, cosine waving straight duct, were studied. These two-phase flows simulate corresponding flow in blood microcirculation. Specifically, the motion, dispersion, migration and deformation of various arrangements of droplets (or blood cells) into the primary continuous phase in *Hagen-Poiseuille* flow of continuous phase or *Couette* flow, are modeled and studied under selected conditions.

Various fluid sizes locally in the area of interest or in the whole domain are calculated. There are several illustrations of dimensionless variables as: the isocontours of velocity field, u' ,

the vector flow fields (u', v') , the longitudinal and transverse distributions (profiles) of the horizontal velocity u' at selected locations x along the duct or transverse velocity v' at selected locations at y width of the duct, i.e. in branch tees, the longitudinal distributions or isocontours of pressure.

The accuracy and sharpness of interfaces (shapes of droplets or blood cells) obtained with this model is sufficient for the study of phenomena. The deformation parameters by *Taylor*, are recorded. The parameters are simulated in the algorithms and the resulting fluid sizes document and group the observations. Partial results are compared and verified with numerical and/or experimental results of the literature.

The comparison is satisfactory, although often only qualitative due to lack of detailed or sufficient evidence or other technical limitations. A deeper understanding of various phenomena and mechanisms observed in general and the effect of a specific geometry in the two-phase flow was attempted. The interaction of the droplets that some transient flow leads to mergers or splits were studied. Also specific findings for the migration of droplets to the axis of symmetry or change of the shape and the limitation of the deformation with increasing the surface tension are discussed.

The specific shapes and the positions of migration of droplets within the duct are identified. Many sub conclusions for the migration and deformation of various arrangements of droplets or a single droplet and respectively of blood cells in the different geometries of ducts studied, are presented in detail in this thesis. The findings enrich our knowledge about the behavior of red and white blood cells in the system of capillary microcirculation.

In the two-phase model, the red and white blood cells and plasma consider incompressible, viscous fluids of different viscosity. The surface tension imposed on the interface of two liquid phases simulates satisfactorily the elastic properties of the membrane that separates the red blood cells from plasma. The capillaries are usually simplistic as a rigid two-dimensional cylindrical or cosine ducts. The cells are dispersed and deformed in plasma as liquid droplets in an ambient fluid without being mixed.

1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ	3
1.1. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ.....	3
1.2. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΥΓΡΟΥ – ΥΓΡΟΥ	4
1.3. ΡΟΕΣ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ (Dispersed Flow)	6
1.4. ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΜΕΣΑ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΥΓΡΗ ΦΑΣΗ.....	7
1.5. Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ (CFD).....	11
1.6. Η ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ	13
1.7. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (SOLVERS)	14
1.8. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	18
1.9. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ	21
1.10. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΡΟΩΝ	22
1.11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΡΟΩΝ.....	24
1.12. ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	32
1.12.1. Στοιχεία Φυσιολογίας.....	32
1.12.2. Η σύσταση και ο ρόλος του αίματος.....	34
1.12.3. Μακροσκοπικές ρεολογικές ιδιότητες του αίματος	35
1.12.4. Παραμορφωσιμότητα του RBC.....	36
1.13. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ	39
1.14. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ.	41
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	44

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ

1.1. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ

Διφασική ροή υπό στενή έννοια είναι ένα σύστημα που περιέχει αέρια και υγρή φάση του ίδιου ρευστού με μια επιφάνεια να διαχωρίζει τις δύο φάσεις, όπως η ροή ατμού και νερού στις σωληνώσεις και τους εναλλάκτες των ατμοπαραγωγών σταθμών και στους ατμοστροβίλους, η ανάπτυξη φυσαλίδων στα δίκτυα σωληνώσεων που προκαλεί την σπηλαιώση (cavitation) στα περύγια αντλιών, στροβίλων και στις προπέλες των πλοίων. Σήμερα ο όρος «διφασική ροή»¹ (two-phase flow) έχει διευρυνθεί και αναφέρεται στη ροή μειγμάτων δύο διαφορετικών ρευστών, όπου οι δύο φάσεις δεν αντιδρούν χημικά και κάθε φάση μπορεί να είναι στερεά, υγρή ή αέρια όπως αέρας με νερό, πετρέλαιο με φυσικό αέριο, λάδι με νερό, τα συστατικά του αίματος, αέρια με σκόνη, λάσπη σε αγωγούς πετρελαίου.

Οι διφασικές ροές είναι δυναμικές μεταβατικές ροές χωρίς να υπάρχει πάντα ισορροπία των φάσεων.² Θεωρούνται υποσύνολο των πολυφασικών ροών (multiphase flows³), όπου συνυπάρχουν πάνω από δύο φάσεις. Για κάθε φάση χωριστά μπορούν να διατυπωθούν οι εξισώσεις της συνεχείας και της ορμής με κατάλληλες καταστατικές εξισώσεις για τις αλληλοεπιδράσεις μεταξύ των φάσεων και οι οριακές συνθήκες που πεδίου ροής. Τα σπουδαία χαρακτηριστικά τους έχουν καταστήσει τις διφασικές ροές ένα ραγδαίως αναπτυσσόμενο και πολλά υποσχόμενο κλάδο της ρευστομηχανικής, *Croce et.al., 2009* με πάμπολλες περιοχές ερευνητικού ενδιαφέροντος και συνεχώς αυξανόμενες εφαρμογές που

¹ Levy, 1999.

² Σε ορισμένες περιπτώσεις η απότομη αλλαγή της ταχύτητας του ήχου μεταξύ των φάσεων εισάγει επίσης και τον παράγοντα της συμπιεστότητας.

³ Crowe et.al.,1998. Wang, 2005, Crowe, 2005, Brennen, 2005.

ανάμεσα τους περιλαμβάνονται: τα κλιματικά συστήματα π.χ. τα σύννεφα, η ροή των υπόγειων υδάτων, οι φυσαλίδες, η βροχή, ο κυματισμός, ο αφρός, οι πηγές, τα κρεμώδη, οι πετρελαιοκηλίδες, ο ψεκασμός και η διάσπαση σε άτομα στην υγρή προώθηση, *Lefebvre, 1989*.

Για την συστηματική τους μελέτη διακρίνονται στις κατηγορίες Διφασικής ροής: Υγρού-Αερίου (Liquid-Gas), Υγρού-Στερεού (Liquid-Solid), Υγρού-Υγρού (Liquid-Liquid), Αερίου-Αερίου (Gas-Gas), Στερεού-Αερίου (Solid-Gas), Στερεού-Στερεού, (Solid-Solid). Στη διατριβή αυτή εντοπίζουμε την μελέτη μας στην κατηγορία διφασικής ροής: Υγρού-Υγρού (Liquid-Liquid) δύο μη αναμειγνυόμενων, ασυμπίεστων, συνεκτικών ρευστών μέσα σε κλειστούς αγωγούς που συνδέονται με τεχνολογικές, γεωφυσικές, βιοϊατρικές και άλλες εφαρμογές όπως είναι η εξαγωγή πετρελαίου από το υπέδαφος, η επεξεργασία των πολυμερών, συσκευές του κυκλοφορικού συστήματος, ή μικροκυκλοφορία του αίματος δηλαδή η κίνηση των κυττάρων του αίματος στα τριχοειδή αγγεία.

1.2. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΥΓΡΟΥ – ΥΓΡΟΥ

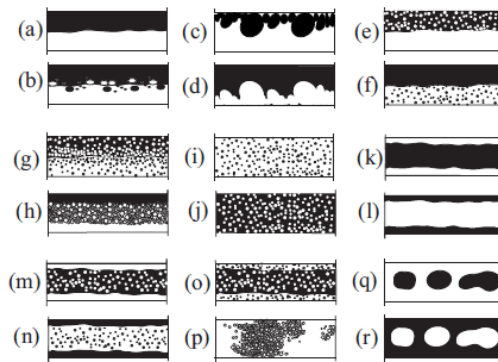
Στις διφασικές ροές, *Angeli & Hewitt, 2000*, η παραμορφώσιμη διεπιφάνεια των δύο ρευστών εμφανίζει ποικιλία χαρακτηριστικών διανομών που ονομάζονται καθεστώτα ροής ή πρότυπα ροής τα οποία συμβάλλουν στην ανάπτυξη πιο έγκυρης προσομοίωσης. Τα διαθέσιμα πρότυπα διφασικής ροής υγρού-υγρού είναι ακόμη λίγα σε αντίθεση με τις διφασικές ροές αερίου-υγρού, όπου έχουν συσχετιστεί οι ιδιότητες ρευστών και προτύπων και σε ορισμένες περιπτώσεις έχουν προταθεί μοντέλα μετάβασης από το ένα πρότυπο ροής στο άλλο. Τα πρότυπα ροής στις διφασικές ροές υγρού-υγρού σε αγωγούς⁴ έχουν συγκεκριμένα υδροδυναμικά χαρακτηριστικά και προδιαγράφονται (για σωλήνα συγκεκριμένης διαμέτρου και προσανατολισμού) από τις ταχύτητες, το ποσοστό όγκου και τις φυσικές ιδιότητες (πυκνότητα και ιξώδες) των αντιστοιχών φάσεων. Η προσροφητική ικανότητα (wetting) του τοιχώματος του σωλήνα είναι επίσης μια σημαντική πειραματική παράμετρος⁵.

Brauner, (2), 1998 και *Angeli & Hewitt, 2000* προτείνουν τέσσερα βασικά πρότυπα ροής (flow patterns) διφασικής ροής υγρού-υγρού: 1. Στρωματοποιημένη ροή (Stratified flow) : όπου τα δύο ρευστά ρέουν κατά στρώματα ανάλογα με την πυκνότητα τους και διαχωρίζονται με

⁴ *Angeli & Hewitt, 2000*.

⁵ Τα περισσότερα εργαστηριακά πειράματα σχετικά με τη ροή υγρού-υγρού, έχουν πραγματοποιηθεί με σωλήνες από ακρυλική ρητίνη, ενώ στις περισσότερες εφαρμογές (πετρέλαιο-αγωγούς ύδρευσης, κ.λπ.) οι αγωγοί είναι κατασκευασμένοι από χάλυβα. Τα πειράματα δείχνουν ότι οι διαφορές που οφείλονται στο τοίχωμα είναι δυνητικά πολύ σημαντικές.

ομαλή ή κυματιστή διεπιφάνεια. 2. Μεγάλες επιμήκεις ή σφαιρικές συσσωρεύσεις (slugs) του ενός υγρού στο άλλο. 3. Διασπορές⁶ (Dispersed flow) μη αναμειγνυόμενων υγρών (immiscible liquids), όπου σταγόνες του ενός υγρού διαχέονται στη συνεχή φάση του δεύτερου υγρού. 4. Δακτυλιοειδής ροή (Annular flow), όταν το ένα από τα υγρά κινείται διαμορφώνοντας ένα πυρήνα πέριξ του άξονα του αγωγού και το άλλο υγρό κινείται σε μία δακτυλιοειδή ζώνη κοντά στο τοίχωμα του σωλήνα. Το μοντέλο αυτό παρατηρείται όταν τα δύο ρευστά έχουν την ίδια πυκνότητα ή όταν το ένα ρευστό έχει πολύ μεγάλο ιξώδες. Σε πολλές περιπτώσεις, ωστόσο, το μοντέλο ροής αποτελείται από ένα συνδυασμό αυτών των βασικών πρωτοτύπων και σχετικοί χάρτες έχουν δημοσιευτεί *Angeli & Hewitt, 2000* σε αρκετές ωστόσο παραλλαγές. Στο Σχ.1.1 (Fig.1, *Brauner, 2002*) δίνονται σκίτσα διαφόρων πιθανών προτύπων ροής που παρατηρούνται στα οριζόντια συστήματα πετρελαίου σε νερό (o/w) ή νερού σε πετρέλαιο.



Σχ. 1.1. Βασικά πρότυπα ροής διφασικής ροής υγρού-υγρού, Fig.1, *Brauner, 2002*.

a/b) Stratified flow of two separated layers (*S*, possibly with mixing at the interface, *SM*).
 c/d) Stratified layers of a free-liquid and a dispersion of the other liquid (e.g. *Do/w&w*), e/f) Stratified layers of a free liquid and a dispersion in the other liquid (e.g. *Do/w&o*; *Dw/o&w*),
 g/h) Layers of dispersions (e.g. *Dw/o&o/w*), i/j) Fully dispersion or emulsion of one liquid in the other liquid (e.g. *Dw/o* or *Do/w*), k/l) Core-Annular flow - a core of one liquid within the other liquid (e.g. , *ANw*, *ANo*), m/n) Annular flow of a liquid with a dispersion in the core (*DANw*, *DANo*), o) Core-annular flow of two dispersions (*CADw* or *CADo*), p) Intermittent flow (one liquid alternately occupying the pipe as a free liquid or as a dispersion, *Io* or *Iw*), q/r) Large elongated or spherical bubbles of one liquid in the other (*SLo*, *Bo* or *SLw*, *Bw*).

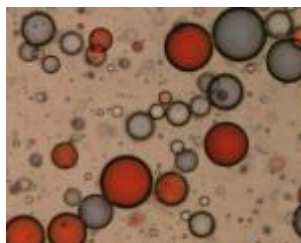
Κάθε πρότυπο ροής διαφέρει στην πτώση πίεσης, στην τοπική καθυστέρηση (in situ holdup), το συντελεστή μεταφοράς θερμότητας, την διάβρωση (corrosion) και την έμφραξη (fouling)

⁶ Αναμειγνύματα είναι όρος της χημείας που αναφέρεται κυρίως στην ιδιότητα των υγρών να αναμειγνύονται σε κάθε αναλογία, σχηματίζοντας ένα ομογενές διάλυμα. Ο όρος επίσης εφαρμόζεται και για τις άλλες φάσεις (στερεά και αέρια).

του σωλήνα. Επομένως, γενικευμένα μοντέλα τα οποία επιχειρούν να καλύψουν ολόκληρο το φάσμα των διαφόρων υγρών ιδιοτήτων και διαφορετικά πρότυπα ροής⁷ θεωρούνται προσεγγιστικά. Η αποδεκτή προσέγγιση σήμερα κατά την *Brauner, 1998* συνίσταται στην πρόβλεψη του προτύπου ροής κάτω από συγκεκριμένες λειτουργικές συνθήκες⁸ και την εφαρμογή ενός κατάλληλου μοντέλου⁹.

1.3. ΡΟΕΣ ΔΙΑΣΠΟΡΩΝ (Dispersed Flow)

Έχουν γίνει πολλές προσπάθειες για καλύτερη κατανόηση της ρεολογικής συμπεριφοράς των διφασικών συστημάτων υγρού-υγρού της κατηγορίας των διασπορών. Επεκτείνοντας την εργασία του *Einstein, 1906 (1911)*, ο οποίος μελέτησε ένα αραιό ετερογενές μείγμα (dilute suspension)¹⁰ από στερεές σφαίρες σε ένα ιξώδες υγρό, ο *Taylor, 1932* ανέπτυξε μια θεωρία χοντρικού υπολογισμού του ιξώδους ενός αραιού γαλακτώματος Νευτώνειων υγρών.



Σχ.1.2. Γαλάκτωμα

Το γαλάκτωμα¹¹ (emulsion) είναι σταθερή διασπορά, που συνήθως συνεπάγεται την παρουσία επιφανειοδραστικών ουσιών (surfactants)¹² που αναστέλλουν τη συνένωση

⁷ Charles *et.al.*, 1961, Charles & Lilleleht, 1966 και Theissing, 1980.

⁸ Brauner, 1998 (2), βλέπε Ενότητα 5.

⁹ Brauner, 1998 (2), βλέπε Ενότητες 2,3,4.

¹⁰ Διασπορά είναι ένα ετερογενές ρευστό που περιέχει στερεά σωματίδια τα οποία είναι αρκετά μεγάλα, συνήθως μεγαλύτερα από 1 μm π.χ. άμμος στο νερό. Τα σωματίδια της διασποράς είναι ορατά στο μικροσκόπιο και τελικά καθιζάνουν αν παραμείνουν αδιατάρακτα. Σε αντίθεση στα κολλοειδή τα σωματίδια είναι μικρότερα και δεν καθιζάνουν. Στο διάλυμα, η διαλυμένη ουσία δεν είναι ως στερεά φάση και οι δύο φάσεις αναμειγνύονται ομογενώς.

¹¹ Γαλάκτωμα είναι μείγμα δύο ουσιών που δεν αναμειγνύονται. Η μία φάση διασκορπίζεται μέσα στην συνεχή φάση π.χ. το βούτυρο και η μαργαρίνη, όπου η συνεχής υγρή φάση περιβάλλει σταγονίδια νερού (γαλάκτωμα νερού σε λάδι), το εσπρέσο, η μαγιονέζα, η φωτοευαίσθητη πλευρά του φωτογραφικού φιλμ, το λιπαντικό και συγχρόνως ψυκτικό υγρό στην κατεργασία των μετάλλων. Γαλακτωματοποίηση είναι η διαδικασία με την οποία σχηματίζονται τα γαλακτώματα.

¹² Σαπουνοειδείς ουσίες που μειώνουν την επιφανειακή τάση των υγρών, ώστε το υγρό να απλώνεται και να βελτιωθεί η προσροφητικότητα.

(coalescence) των διάσπαρτων σταγονιδίων. Διάφορες ερευνητικές ομάδες¹³ έχουν δείξει με θεωρητικές μελέτες, ότι ρεολογικά τα γαλακτώματα που αποτελούνται από δύο Νευτώνεια υγρά μπορούν να επιδείξουν μη Νευτώνεια, ιξωδοελαστική συμπεριφορά, όπως ιξώδες που εξαρτάται από την διάτμηση και παραμορφώσεις από ορθή τάση.

Οι φαινομενικά ασυνήθιστες ιδιότητες ροής αυτών των γαλακτωμάτων έχουν προκύψει από την παραμορφωσιμότητα των διασπαρμένων σταγονιδίων στην συνεχή φάση. Γαλακτώματα υψηλού ιξώδους, που περιέχουν έλαιο, παρέχουν το λεγόμενο λιπαντικό (lubricated) πρότυπο ροής, γιατί επιτυγχάνεται δραματική μείωση στο ιξώδες της διασποράς και πτώση της πίεσης με γαλακτωματοποιητή το λάδι σε συνεχή φάση νερού, π.χ. *McAuliffe, 1973, Pilehvari et.al., 1988*. Παρατηρούνται πολλαπλά γαλακτώματα (π.χ. ο/w/o, σταγόνες πετρελαίου διάσπαρτες με σταγονίδια ύδατος που με τη σειρά τους διασπείρονται σε μια συνεχή φάση πετρελαίου).

Πάντα επίσης σχηματίζονται διασπορές, όταν αναπτύσσονται αρκετά έντονες κινήσεις δύο μη αναμειγνυόμενων υγρών. Ωστόσο, σχετικά αραιές διασπορές μπορούν να σχηματίζονται και σε χαμηλές ταχύτητες, λόγω της συσκευής που χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των δύο υγρών στη ροή του σωλήνα. Στην πραγματικότητα, οι διασπορές είναι το βασικό πρότυπο ροής σε ανοδικές κατακόρυφες και κεκλιμένες ροές, *Brauner, 1998*.

1.4. ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΜΕΣΑ ΣΕ ΣΥΝΕΧΗ ΥΓΡΗ ΦΑΣΗ.

Διαχρονικά πολλοί ερευνητές¹⁴ μελέτησαν τους μηχανισμούς σχηματισμού και τα χαρακτηριστικά μεγέθη της παραμόρφωσης των σταγόνων, γιατί σχετίζονται με τη ρεολογική συμπεριφορά¹⁵ των διφασικών συστημάτων διασπορών υγρού-υγρού με τις πολλές εφαρμογές στην επιστήμη, την υγεία και την τεχνολογία. Τέτοια συστήματα ροής προκύπτουν σε πολλές διαδικασίες επεξεργασίας πολυμερών, καθώς επίσης και στη διφασική ροή μέσω πορωδών μέσων. Μελέτες έχουν δείξει ότι τα γαλακτώματα που αποτελούνται από δύο Νευτώνεια υγρά μπορούν να παρουσιάσουν μη Νευτώνεια, ιξωδοελαστική συμπεριφορά. Η κίνηση παραμορφωσιμων σταγόνων χαμηλού αριθμού *Reynolds* είναι ένα βασικό πρόβλημα, *Zinchenko et.al., 1997*, που σχετίζεται με την ρεολογία και την καθίζηση γαλακτωμάτων και την συνένωση και την διάσπαση σταγόνων. Για

¹³ *Frohlick & Sack, 1946, Oldroyd, 1953, Goddard & Miller, 1967, Roscoe, 1967, Schowalter et.al., 1968, Frankel & Acrivos, 1970, Choi & Schowalter, 1975, Barthes-Biesel & Acrivos, 1973 (2).*

¹⁴ *Ha & Leal, 2001, Angeli & Hewitt, 2000, Pal, 1993, Pozrikidis, 2005, Martinez & Udell, 1990, Borhan & Mao, 1992, Tsai & Miksis, 1994, Manga, 1996, Olbricht & Kung, 1992, Olbricht, 1996.*

¹⁵ Ως προς την υδροδυναμική συμπεριφορά και τα φαινόμενα μεταφοράς, *Brauner, 1998*.

τριχοειδείς αριθμούς $0 < Ca < 1$ η παραμόρφωση μπορεί να θεωρηθεί ως ομαλή¹⁶ ή ανώμαλη¹⁷ διαταραχή¹⁸ (regular or singular perturbation). Η μέθοδος της ανώμαλης διαταραχής¹⁹ εφαρμόστηκε στο 3-D πρόβλημα της συνένωσης σταγόνων λόγω πεδίου βαρύτητας, *Rother et.al., 1997*. Στις διασπορές υγρού-υγρού, στο ομογενές μοντέλο *Angeli & Hewitt, 1998* η ανάμειξη των δύο υγρών αντιμετωπίζεται ως ένα «ψευδορευστό» που ακολουθεί τις συνήθεις εξισώσεις της μονοφασικής ροής με ιδιότητες εκτιμημένες κατά μέσο όρο και προβλέπεται η κλίση της πίεσης στον αγωγό. Το κύριο πρόβλημα κατά την εφαρμογή αυτής της προσέγγισης είναι ο υπολογισμός του φαινομένου (effective) ιξώδους του μείγματος, ιδιαίτερα γιατί το ιξώδες μπορεί να έχει μη ομαλή συμπεριφορά κατά τη διάρκεια της ροής υγρού-υγρού.

Για να εξηγήσουν τη μετανάστευση σταγόνων σε αγωγούς οι *Taylor, 1934* και *Leal, 1980* μελέτησαν την συμπεριφορά μεμονωμένων σταγόνων σε γραμμικές και παραβολικές ροές με ένα ή δύο παράλληλα επίπεδα. Ο *Taylor, 1932* ανέπτυξε μια θεωρία για την πρόβλεψη του φαινομένου ιξώδους ενός αραιού γαλακτώματος Νευτώνειων ρευστών και πρώτος μελέτησε πειραματικά και θεωρητικά την παραμόρφωση σταγόνας σε 2-D παραβολική ροή και σε απλή διατμητική ροή. Οι *Taylor, 1934, Pal, 1993*, παρουσίασαν δεδομένα για διασπορές ελαίου σε νερό (Do/w) σε στρωτή και τυρβώδη οριζόντια ροή. Οι *Angeli & Hewitt, 1998*, παρατηρούν ότι οι διασπορές δημιουργούνται πάντα, όταν η κίνηση δύο μη αναμειγνυομένων υγρών είναι αρκετά έντονη.

Θεωρητικές μελέτες. Η πρώτη θεωρητική ανάλυση της παραμόρφωσης σταγόνας έγινε από τον *Taylor, 1934* ενώ μια σειρά από θεωρητικές²⁰ μελέτες αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Όταν μία σταγόνα αρχικού σφαιρικού σχήματος, χωρίς άνωση²¹, διακινείται μέσα σε ένα

¹⁶ *Cox, 1969, Frankel & Acrivos, 1970, Barthes-Biesel & Acrivos, 1973 (1), Barthes-Biesel, Acrivos, 1973(2).*

¹⁷ *Yiantsios & Davis, 1990, Yiantsios & Davis, 1991.*

¹⁸ Στην περίπτωση της ανώμαλης διαταραχής μια μικρή παράμετρος δεν είναι εφικτό να προσεγγιστεί από τον καθορισμό της τιμής της παραμέτρου στο μηδέν, σε αντίθεση με την ομαλή διαταραχή, όπου η προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί με απλή ρύθμιση της μικρής παραμέτρου στο μηδέν.

¹⁹ Η θεωρία διαταραχών είναι μαθηματική μέθοδος προσεγγιστικού υπολογισμού, όταν το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά και είναι γνωστή η ακριβής λύση σε ένα ανάλογο πρόβλημα. Εφαρμόζεται, αν είναι εφικτή η προσθήκη ενός «μικρού» όρου στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που έχει γνωστή αναλυτική λύση.

²⁰ *Choi & Schowalter, 1975, Chaffey & Brenner, 1967, Cox, 1969, Barth-Biesel & Acrivos, 1973, Turner & Chaffey, 1969.*

²¹ Άνωση (buoyancy) είναι η ανοδική δύναμη που ασκείται επάνω σε ένα πλήρως ή μερικώς βυθισμένο αντικείμενο από το περιβάλλον ρευστό (υγρό ή αέριο) λόγω της διαφοράς πίεσης του ρευστού ανάμεσα στο επάνω και το κάτω μέρος του αντικειμένου. Η άνωση είναι ίση με το βάρος του εκτοπιζομένου ρευστού και επιτρέπει στο αντικείμενο να επιπλέει ή τουλάχιστον να φαίνεται πιο ελαφρύ.

άλλο υγρό σε διατμητική ή παραβολική ροή, παραμορφώνεται και συχνά διασπάται σε μικρότερα σταγονίδια για υψηλές τιμές παραμόρφωσης. Οι θεωρητικές μελέτες συμφωνούν ότι η σταγόνα σε διατμητική ροή, παραμορφώνεται σε σφαιροειδές, και η παραμόρφωση εξαρτάται από το λόγο των ιξωδών της σταγόνας και της συνεχούς φάσης στην οποία διασπείρεται η σταγόνα, καθώς και από το λόγο των τοπικών διατμητικών τάσεων προς την επιφανειακή τάση που ασκείται στην επιφάνεια μεταξύ των δύο φάσεων. Οι *Bentley & Leal, 1986*, μελέτησαν και συνέκριναν με θεωρητικές προβλέψεις το σχήμα και τον προσανατολισμό Νευτώνειων σταγόνων σε μόνιμη κατάσταση για διάφορους τύπους ροής που κυμαίνονται από πλήρως παραβολική ροή σε "σχεδόν διατμητική" ροή με ρυθμό παραμόρφωσης που υπερβαίνει ελαφρώς τη στροβιλότητα²². Επίσης καθόρισαν τις κρίσιμες συνθήκες π.χ. τον κρίσιμο Ca πάνω από τον οποίο δεν μπορούν να επιτευχθούν μόνιμα σχήματα σταγόνων σε μόνιμη ροή. Η θεωρητική επεξεργασία της παραμόρφωσης των σταγόνων είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και η πλειοψηφία των μελετών ασχολούνται με Νευτώνεια συστήματα σταγόνων και συνεχούς μέσου.

Πειραματικές μελέτες. Τα πειράματα του *Taylor, 1934*, για παραμόρφωση σταγόνας συμφωνούν με τη θεωρία τόσο για την ομοιόμορφη διατμητική ροή όσο και για την παραβολική ροή σε χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης. Οι *Bartok & Mason, 1958, 1959*, μελέτησαν πειραματικά σε ομοιόμορφη διατμητική ροή (ροή *Couette*) την παραμόρφωση σε σφαιροειδή και την εσωτερική κυκλοφορία σε μεγάλες σταγόνες, και συμφωνούν με τον *Taylor*. Οι *Rumscheidt & Mason, 1961*, παρατηρούν ότι σε παραβολική ροή εμφανίζεται εσωτερική κυκλοφορία μέσα στις σταγόνες που διασπείρονται στο συνεχές μέσο. Οι *Stone et al., 1986* μελέτησαν πειραματικά τη συνεχή επιμήκυνση μεμονωμένων σταγόνων σε μόνιμη 2-D ροή για Ca ελαφρώς πάνω από την κρίσιμη τιμή του Ca καθώς και την δυναμική της επιφανειακής τάσης της τανυσμένης σταγόνας, όταν η ροή διακόπτεται απότομα.

Για μέτριες παραμορφώσεις²³, καθώς και σε ροές κυριαρχούμενες από τάσεις (δηλαδή, επίπεδες ροές με ρυθμό παραμόρφωσης μεγαλύτερο της στροβιλότητας), το μήκος της σταγόνας αυξάνει εκθετικά με τον χρόνο και αυτό σταθεροποιεί την κατάσταση της και εμποδίζει την ανάπτυξη των τριχοειδών κυμάτων που θα οδηγούσαν σε διάσπαση της σταγόνας στη συνέχεια της ροής. Ωστόσο, η διάσπαση θα προκύψει μετά τη διακοπή της ροής, υπό την προϋπόθεση ότι η σταγόνα φορτίζεται πάνω από ένα κρίσιμο φορτίο που

²² Η στροβιλότητα στη δυναμική των ρευστών εκφράζει την κυκλοφορία ή περιστροφή ή πιο αυστηρά, την τοπική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ρευστού. Συνήθως ορίζεται ως το *curl* της ταχύτητας: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

²³ Η παραμόρφωση προκαλείται από τη δράση των τάσεων και εκφράζει την αλλαγή στο μέγεθος ή/και το σχήμα.

εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από το λόγο ιξωδών των δύο φάσεων. Οι *Stone & Leal, (1)&(2), 1989* μελέτησαν πειραματικά και αριθμητικά την παραμόρφωση και την διάσπαση σταγόνας μετά από σημαντική μεταβολή, τόσο στον ρυθμό διάτμησης όσο και στον τύπο ροής, από κρίσιμες σε υποκρίσιμες συνθήκες ροής. Επιπλέον η πειραματική μελέτη των *Ha & Leal, 2001*, διασαφηνίζει τις μεταβατικές ασταθείς συνθήκες ροής, την παραμόρφωση και τους μηχανισμούς διάσπασης της σταγόνας λόγω αναπτυσσόμενων τάσεων που προκαλείται σε ροή με χαμηλό Re , αλλά για αρκετά μεγάλο Ca .

Αριθμητική προσομοίωση. Τα πολυφασικά προβλήματα ροής είναι πολύ δύσκολο να μοντελοποιηθούν αριθμητικά. Στις πολυφασικές ροές, υπάρχουν αιχμηρές πολύπλοκες διεπιφάνειες μεταξύ των φάσεων πάνω στις οποίες συντελείται μεγάλο άλμα στην πυκνότητα, στο ιξώδες, ή/και στην εφαπτόμενη ταχύτητα. Η αριθμητική μοντελοποίηση έχει αποδειχθεί χρήσιμο εργαλείο²⁴ για τη μελέτη των διασπορών στερεών και παραμορφώσιμων σωματιδίων και σταγόνων. Οι *Haberman et.al., 1958* μελέτησαν την περίπτωση σφαιρικής σταγόνας σε άπειρο σωλήνα. Οι *Wang & Skalak, 1969* μελέτησαν την περίπτωση μιας άπειρης γραμμής από άκαμπτες σφαίρες σε κυλινδρικό σωλήνα.

Οι *Hyman, & Skalak, 1970, 1972*, μελέτησαν την περίπτωση σταγόνων υγρού που παραμένουν σφαιρικές λόγω υψηλής επιφανειακή τάσης και επίσης υπολόγισαν το σχήμα ελαφρώς παραμορφωμένων Νευτώνειων²⁵ σταγόνων, διασπαρμένων σε άλλο Νευτώνειο υγρό, παρομοιάζοντας την μετανάστευση τους με την κίνηση τρένου που κινείται κατά μήκος του άξονα κυλινδρικού σωλήνα. Οι *Rallison & Acrivos, 1978* εισήγαγαν και ο *Pozrikidis, 1992*, περιέγραψε την αριθμητική μέθοδο ορίου-ολοκληρώματος (boundary-integral method) για την μελέτη παραμορφώσιμων σταγόνων όταν η παραμόρφωση δεν είναι μια μικρή διαταραχή δηλ. για $Ca = O(1)$.

Οι *Zhou & Pozrikidis 1993, 1994* μελέτησαν αριθμητικά, 2-D διασπορές υγρών σταγόνων μέσα σε συνεχή φάση με σταθερή επιφανειακή τάση λόγω διαφοράς πίεσης. Οι περιορισμοί στους υπολογιστικούς πόρους δεν τους επιτρέπει να εξετάσουν πυκνά αιωρήματα με μεγάλο αριθμό των σωματιδίων, στα οποία το προφίλ της κάθετης ταχύτητας στη διατομή ταιριάζει με ροή *plug zone*. Οι *Loewenberg & Hinch, 1996*, ανέπτυξαν το λογισμικό δυναμικής προσομοίωσης ορίου-ολοκληρώματος (boundary-integral)²⁶ και μελέτησαν τις

²⁴ *Hyman & Skalak 1972, Brady & Bossis, (1988), Zhou & Pozrikidis, (1993) & (1994), Kaliakatsos & Tsangaris, 2000, Pozrikidis, 2005.*

²⁵ Νευτώνειο ρευστό, όπως το ύδωρ, είναι το ρευστό στο οποίο η διατμητική τάση είναι ευθέως ανάλογη με την κλίση της ταχύτητας στην κάθετη διεύθυνση ως προς το επίπεδο της διάτμησης. Στο μη Νευτώνειο ρευστό, το ιξώδες μεταβάλλεται με την ασκούμενη διατμητική δύναμη.

²⁶ Καινοτομία της τεχνικής τους είναι μία αφαίρεση της "near-singularity", για τη βελτίωση της σύγκλισης της διακριτοποίησης ορίου-ολοκληρώματος για σταγόνες σε στενή επαφή και με την

ρεολογικές ιδιότητες τυχαίων γαλακτωμάτων μέτριας συγκέντρωσης σε διατμητική ροή (μέχρι 12 ισομεγέθεις σταγόνες ανά περιοδικό κύτταρο) με παραμέτρους το κλάσμα όγκου σταγόνας φ και τον λόγο ιξωδών λ : για μέτριο λ , ώστε το αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων στην «μέση» τάση να είναι μικρότερο από την συνεισφορά των σταγόνων και σε περιπτώσεις χωρίς ισχυρές υδροδυναμικές αλληλεπιδράσεις. Ο Καλιακάτσος, 2000 μελέτησε την κίνηση μίας σταγόνας μέσα σε 2-D ροή μεταξύ παραλλήλων ημιάπειρων επιπέδων και σε διακλάδωση Ταφ και αξονοσυμμετρικούς αγωγούς χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ισοϋψών (level-set). Συνέκρινε με αποτελέσματα των Audet, 1987, Martinez & Udell, 1990 και επιβεβαίωσε την επίδραση των αδιάστατων παραμέτρων της προσομοίωσης στην παραμόρφωση και την ταχύτητα της σταγόνας και στην επιπλέον πτώση πίεσης εξαιτίας της παρουσίας της σταγόνας. Ο Olsson, 2006 παρουσίασε μια νέα αριθμητική μέθοδο προσομοίωσης ασυμπιέστης, μη αναμίξιμης διφασικής ροής με επιφανειακή τάση.

1.5. Η ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ (CFD)²⁷

Στην ρευστομηχανική ισχύουν οι θεμελιώδεις νόμοι της μηχανικής που αφορούν τη διατήρηση της μάζας, της ορμής και της ενέργειας²⁸. Οι αρχές αυτές διατυπώνονται σε σύστημα συζευγμένων, μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις Navier-Stokes ή (N-S), καθορίζουν οποιαδήποτε μονοφασική ροή²⁹, επίσης περιγράφουν εκρηκτικά φαινόμενα (σοκ) και διεπιφάνειες. Σήμερα είναι εφικτή μόνο προσεγγιστική αλγοριθμική επίλυση των εξισώσεων N-S, αφού η αναλυτική επίλυση τους δεν είναι δυνατή για τα περισσότερα ρεαλιστικά ρευστομηχανικά προβλήματα. Αυτό είναι το αντικείμενο της Υπολογιστικής Μηχανικής Ρευστών (CFD) που έχει ένα ευρύτατο φάσμα τεχνολογικών εφαρμογών. Στην βιομηχανία και την έρευνα συμβάλλει με την λεπτομερή αναπαράσταση του ροϊκού πεδίου σε αποτελεσματικότερο σχεδιασμό χωρίς την ανάγκη για επιτόπια πειράματα και δοκιμές. Στην βιοϊατρική έρευνα και τεχνολογία χρησιμοποιείται για τη μελέτη του κυκλοφορικού και αναπνευστικού συστήματος και των ιατρικών συσκευών.

προσθήκη "ελατηρίων" μεταξύ των σημείων του πλέγματος για να σταθεροποιήσει το πλέγμα και να διευκολύνει τους μακρόχρονους υπολογισμούς.

²⁷ Bhaskaran & Collins, 2002, Μπεργελές, 1999, Τσαγγάρης, 1995.

²⁸ Η εξίσωση της ενεργείας προκύπτει με μονοδιάστατο πολλαπλασιασμό της εξίσωσης της ορμής με το διάνυσμα της ταχύτητας. Άρα, η διατήρηση της ορμής θεωρητικά συνεπάγεται διατήρηση της ενέργειας. Παρ'όλα αυτά επειδή η διακριτοποίηση διαστρεβλώνει το συνεχές μοντέλο η διατήρηση της δεν είναι πάντοτε εγγυημένη σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Μέθοδοι διακριτοποίησης που διατηρούν την ενέργεια, όπως πεπερασμένων στοιχείων βοηθούν να ξεπεραστεί αυτή η πηγή αστάθειας.

²⁹ Οι εξισώσεις Euler είναι οι εξισώσεις N-S χωρίς τους όρους ιξώδους. Περαιτέρω απλοποίηση, διαμορφώνει τις πλήρεις εξισώσεις δυναμικού (full potential equations) με την αφαίρεση των όρων στροβιλότητας (vorticity) που έτσι γραμμικοποιούνται ευκολότερα.

Πολλές φορές πρέπει να επιλύονται συγχρόνως με τις εξισώσεις Navier-Stokes και άλλες εξισώσεις που περιγράφουν μεταφορά μάζας, χημικές αντιδράσεις, μεταφορά θερμότητας, κλπ. Σύγχρονα λογισμικά³⁰ επιτρέπουν την προσομοίωση πολύπλοκων περιπτώσεων όπως πολυφασικές ροές, μη Νευτώνεια υγρά (π.χ. αίμα), ροές με χημική αντίδραση (όπως η καύση). Οι προσομοιώσεις σύνθετης ροής αποτελούν πρόκληση, είναι επιρρεπείς σε σφάλματα και απαιτούν επαλήθευση από την εμπειρία. Ακόμη υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να μελετηθούν ούτε με τα σημερινά υπολογιστικά συστήματα.

Βασική αρχή στις μεθόδους *CFD* είναι η αντικατάσταση του υπολογιστικού χωρίου του συνεχούς προβλήματος από ένα διακριτό υπολογιστικό πλέγμα (δίκτυο). Οι μεταβλητές της ροής δεν ορίζονται, σε κάθε σημείο του συνεχούς υπολογιστικού χωρίου, αλλά μόνο στα N σημεία (κόμβους) του αριθμητικού πλέγματος, όπου εκτελούνται και οι αριθμητικοί υπολογισμοί. Οι τιμές των μεταβλητών σε άλλες θέσεις καθορίζονται με παρεμβολή των τιμών τους από τα σημεία του πλέγματος. Οι όροι των μερικών διαφορικών εξισώσεων και οι οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα προσεγγίζονται δηλ. διακριτοποιούνται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης στο διακριτό χωρίο ορισμού με σκοπό να σχηματιστεί ένα μεγάλο διακριτό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων από διακριτές μεταβλητές. Η επίλυση του διακριτού συστήματος στον υπολογιστή γίνεται με την επιλογή κατάλληλης αριθμητικής επαναληπτικής μεθόδου αντιστροφής μητρώου.

Άμεση αριθμητική προσομοίωση είναι δυνατή για τις εξισώσεις *Navier-Stokes* για στρωτή και τυρβώδη ροή, όταν οι σχετιζόμενες κλίμακες μήκους μπορούν να επιλυθούν στο αριθμητικό πλέγμα³¹. Η βασική διαδικασία προσομοίωσης περιλαμβάνει γενικά τα παρακάτω στάδια. 1. Καθορίζεται η γεωμετρία (φυσικά όρια) του προβλήματος. 2. Κατασκευάζεται και προσαρμόζεται στο χωρίο ορισμού το αριθμητικό πλέγμα. 3. Καθορίζεται το φυσικό θεωρητικό μοντέλο και οι αντίστοιχες εξισώσεις. 4. Καθορίζονται με ακρίβεια οι οριακές συνθήκες δηλ. οι τιμές των χαρακτηριστικών μεταβλητών στα όρια του

³⁰ Ιστορικά, αρχικά αναπτύχθηκαν μέθοδοι για να λύσουν τις γραμμικές εξισώσεις δυναμικού. Στην δεκαετία του '30 αναπτύχθηκαν διδιάστατες μέθοδοι. Η ανάπτυξη των υπολογιστικών συστημάτων οδήγησε σε 3-D μεθόδους και την επίλυση των εξισώσεων *Navier-Stokes*. Αξιομνημόνευτη είναι η συμβολή της *NASA* με τα λογισμικά *Ames'*, *ARC2D*, *OVERFLOW*, *CFL3D* και του εργαστηρίου *Los Alamos* που οδήγησαν σε πολυάριθμα εμπορικά και ερευνητικά λογισμικά. Οι δυνατότητες και οι εφαρμογές αυξάνονται εκθετικά με τον χρόνο.

³¹ Αξίζει να αναφερθούν εναλλακτικές μέθοδοι που δεν βασίζονται σε πλέγμα: Υδροδυναμική ομαλών σωματιδίων (*Smoothed particle hydrodynamics*) ή *SPH* : *Lagrangian* μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων ρευστών. Φασματικές (*Spectral*) μέθοδοι: τεχνικές με τις οποίες οι εξισώσεις προβάλλονται σε συναρτήσεις βάσης, όπως οι σφαιρικές, αρμονικές και τα πολυώνυμα *Chebyshev*. Μέθοδοι *Lattice Boltzmann (LBM)* που προσομοιώνουν ένα ισοδύναμο μεσοσκοπικό σύστημα σε ένα καρτεσιανό πλέγμα, αντί να επιλύουν το μακροσκοπικό σύστημα (ή την πραγματική μικροσκοπική φυσική).

πεδίου ροής, ώστε να καθοριστεί σαφώς το πρόβλημα. Μια μόνο λανθασμένη οριακή συνθήκη μπορεί να δώσει τελείως λάθος αποτέλεσμα. 5. Για μεταβατικά προβλήματα, καθορίζονται επίσης αρχικές συνθήκες. 6. Εφαρμόζονται οι διακριτές εξισώσεις στα σημεία του πλέγματος στο εσωτερικό του χωρίου ορισμού. Για τα σημεία του πλέγματος (ή κύτταρα) πάνω ή κοντά στο όριο, γίνεται συνδυασμός των διακριτών εξισώσεων με τις οριακές συνθήκες. Η σταθερότητα της επιλεγμένης διακριτοποίησης επιτυγχάνεται γενικά αριθμητικά και όχι αναλυτικά όπως στα απλά γραμμικά προβλήματα. Πρέπει επίσης να εξασφαλίσει ότι η διακριτοποίηση χειρίζεται σωστά τις ασυνεχείς λύσεις. 7. Σχηματίζεται ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, με αριθμό εξισώσεων ίσο με τον αριθμό των διακριτών ανεξάρτητων μεταβλητών. 8. Το σύστημα των εξισώσεων λύνεται επαναληπτικά σε σταθερή κατάσταση ή μεταβατικά. 9. Τελικά ένα λογισμικό μετεπεξεργασίας χρησιμοποιείται για την ανάλυση και την απεικόνιση της προκύπτουσας λύσης.

1.6. Η ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΛΕΓΜΑΤΩΝ

Ο επιλογή του κατάλληλου χωρικού αριθμητικού πλέγματος (grid ή mesh) στο οποίο θα γίνει η διακριτοποίηση του συνεχούς ρευστού είναι θεμελιώδες και πολύπλοκο θέμα. Είναι η κρίσιμη γέφυρα όπως χαρακτηρίζεται, γιατί συνδέεται με τη φύση του προβλήματος, την σωστή περιγραφή πολύπλοκων γεωμετριών, με την αριθμητική μέθοδο διακριτοποίησης αλλά και με την εκτέλεση ειδικών αλγορίθμων που δίνουν δυναμικότητα και προσαρμοστικότητα στο πλέγμα. Ένα τετράπλευρο είναι γνωστό ως "κύτταρο" και ένα σημείο του πλέγματος ως "κόμβος". Τα μικρά κύτταρα που συνθέτουν το πλέγμα μπορεί να έχουν κανονικό σχήμα (π.χ. τετράγωνο ή ορθογώνιο στο 2-D, κύβος ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο σε 3-D), είτε ακανόνιστο (π.χ. τρίγωνο στο 2-D, ή πυραμιδικό στερεό σε 3-D), οπότε επιβάλλεται κάθε κύτταρο να αποθηκευτεί χωριστά στη μνήμη. Το πλέγμα μπορεί να είναι ομοιόμορφο ή ανομοιόμορφο. Επίσης μπορούν οι βασικές μεταβλητές να ορίζονται σε παρόμοια αλλά μετατοπισμένα μεταξύ τους (*staggered*) πλέγματα για αριθμητικούς λόγους. Μία εναλλακτική λύση στα μετατοπισμένα πλέγματα είναι η χρήση των λεγόμενων *ομόθετων (collocated) πλεγμάτων*, *Peric et.al., 1988*, στο οποίο τα u , v και p , υπολογίζονται στα κέντρα των κυττάρων και η διακριτοποίηση της μεθόδου των πεπερασμένων όγκων με παρεμβολή ειδικών σχημάτων παρεμβολής προσδιορίζει την ροή στις πλευρές των κυττάρων. Έχουν επίσης αναπτυχθεί τεχνικές με κινούμενα πλέγματα και δυνατότητα Προσαρμοστικής Πύκνωσης Πλέγματος (*Adaptive Mesh Refinement*) (*AMR*) για να επικεντρωθεί η υπολογιστική προσπάθεια εκεί που χρειάζεται. Οι αριθμητικές λύσεις που λαμβάνονται σε διαφορετικά πλέγματα, πρέπει να ικανοποιούν κριτήρια σύγκλισης

πλέγματος για να είναι αποδεκτές. Γενικά με την αύξηση του αριθμού των σημείων του πλέγματος το λάθος στην αριθμητική λύση μειώνεται, βελτιώνεται η συμφωνία μεταξύ της αριθμητικής και αναλυτικής λύσης, αλλά αυξάνει πολύ το υπολογιστικό κόστος.

1.7. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ (SOLVERS)

Η διακριτοποίηση στο χώρο παράγει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων για ασταθή (unsteady) προβλήματα και αλγεβρικές εξισώσεις για μόνιμα προβλήματα. Γενικά χρησιμοποιούνται πεπλεγμένες ή ημι-πεπλεγμένες (implicit ή semi-implicit) μέθοδοι για την ολοκλήρωση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, σε ένα σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η μέθοδος προβολής για τα ασυμπίεστα ρευστά αναπτύχθηκε αρχικά από τον *Chorin, 1968*. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι να υπολογιστεί η ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή από τα στοιχεία του προηγούμενου χρονικού βήματος και να αγνοηθεί αρχικά η εξίσωση της συνεχείας. Κατόπιν η τιμή της ταχύτητας προβάλλεται στο πεδίο των ασυμπίεστων ροών, για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί της εξίσωσης της συνεχείας.

Μη γραμμικότητα, (Nonlinearity). Η άκρως μη γραμμική φύση των εξισώσεων που διέπουν την κίνηση των ρευστών δυσκολεύει τον ακριβή υπολογισμό αριθμητικών λύσεων για πολύπλοκες ροές με πρακτικό ενδιαφέρον. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής για ένα ρευστό είναι μη γραμμική λόγω του συναγωγικού όρου $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Η τύρβη, χημικές αντιδράσεις, φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας και μάζας, κίνηση διεπιφανειών εισαγάγουν πρόσθετες μη γραμμικότητες. Συνήθως οι εξισώσεις διατήρησης γραμμικοποιούνται γύρω από την πιθανή τιμή της λύσης και εκτελείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος μέχρι η υπολογιζόμενη λύση να συγκλίνει μέσω διαδοχικών προσεγγίσεων σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ανοχής σφάλματος.

Άμεσοι και Επαναληπτικοί Solvers, (Direct and Iterative Solvers). Σφάλμα στη λύση μιας μεθόδου διακριτοποίησης ορίζεται η διαφορά μεταξύ της προσεγγιστικής και της ακριβούς αναλυτικής λύσης. Δύο είναι οι πηγές των σφαλμάτων: τα σφάλματα στρογγυλοποίησης των δεκαδικών ψηφίων στον υπολογιστή, και το σφάλμα αποκοπής ή διακριτοποίησης, δηλ. η διαφορά $f(x_i) - f_i$, της διακριτής λύσης f_i από την ακριβή αναλυτική λύση $f(x_i)$. Ένας άλλος παράγοντας που καθιστά απαραίτητους τους επαναληπτικούς αλγορίθμους είναι το υψηλό υπολογιστικό κόστος της αντιστροφής του πίνακα σε σχέση με ένα επαναληπτικό αλγόριθμο που σταδιακά προσεγγίζει την λύση. Συχνά τα συστήματα αυτά, ιδίως σε 3D, είναι πολύ

μεγάλα για άμεσους³² αλγόριθμους επίλυσης. Ο επαναληπτικός αλγόριθμος χειρίζεται σε ενιαία διαδικασία τους μη γραμμικούς όρους και την αντιστροφή (inversion) του πίνακα. Καθώς ο αλγόριθμος συγκλίνει στην κατά προσέγγιση λύση, το σφάλμα ακριβείας τείνει στο μηδέν. Σε κάθε χρονικό βήμα, επιλύονται οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και επαναλαμβάνεται η διαδικασία. Η πιθανολογούμενη τιμή της λύσης σε μια χρονική στάθμη προκύπτει από την λύση στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

Οι συμβατικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σε *CFD*, όπως οι αλγόριθμοι *SIMPLE* και *Uzawa*, η μέθοδος προοδευτικής υπερχαλάρωσης (Successive Over Relaxation) ή *SOR* παρουσιάζουν εξαρτώμενους από το πλέγμα ρυθμούς σύγκλισης, αλλά μέθοδοι βασισμένες στην παραγοντοποίηση των φραγμών (block) *LU* που συνδυάζονται με πολλαπλό πλέγμα, έχουν οδηγήσει σε προπαρασκευαστές που παραδίδουν ανεξάρτητους από το πλέγμα ρυθμούς σύγκλισης, *Elman et.al., 2008*. Οι μέθοδοι *Krylov* π.χ. *GMRES*, χρησιμοποιούνται κατά κανόνα με αλγορίθμους προπαρασκευαστές, που λειτουργούν ελαχιστοποιώντας το υπόλοιπο πάνω στους διαδοχικούς υποχώρους που δημιουργούνται από τον προπαρασκευαστή (preconditioned operator). Αν είναι γνωστή η αναλυτική λύση του προβλήματος συγκρίνεται με την διακριτή και προκύπτει ένα σφάλμα ακριβείας. Το πολλαπλό πλέγμα (Multigrid), *Dendy, 1982, Zeeuw, 1990*, και οι μέθοδοι Αλγεβρικού πολλαπλού πλέγματος (*AMG*), *Trottenberg et.al., 1982*, είναι ιδιαίτερα δημοφιλείς και ως αλγόριθμοι επίλυσης και ως προπαρασκευαστές (preconditioners), λόγω της ασυμπτωτικά βέλτιστης απόδοσης σε πολλά προβλήματα.³³

Συμβατικοί αλγόριθμοι επίλυσης και προπαρασκευαστές μειώνουν αποτελεσματικά τις συνιστώσες υψηλής συχνότητας του υπολοίπου, αλλά οι συνιστώσες χαμηλής συχνότητας απαιτούν συνήθως πολλές επαναλήψεις για να μειωθούν. Με τη λειτουργία πολλαπλών πλεγμάτων μειώνονται οι συνιστώσες του υπολοίπου οδηγώντας σε αριθμό επαναλήψεων ανεξάρτητο από το πλέγμα. Για τα αόριστα συστήματα *Benzi et.al., 2005*,

³² Στις εφαρμογές *CFD* αντιστοιχούν χιλιάδες ή εκατομμύρια άγνωστοι στο διακριτό σύστημα και η αντιστροφή του πίνακα με τον αλγόριθμο απαλοιφής *Gauss* δεν προσφέρεται γιατί είναι απελπιστικά χρονοβόρος. Έτσι, η βελτιστοποίηση της διαδικασίας αντιστροφής του μητρώου ελαχιστοποιεί τον χρόνο της *CPU* και της μνήμης που απαιτείται. Το μητρώο που θα αναστραφεί είναι αραιό δηλαδή οι περισσότερες από τις καταχωρήσεις σε αυτό είναι μηδενικά, αφού η διακριτή εξίσωση σε σημείο του πλέγματος ή του κυττάρου περιλαμβάνει μόνο τις ποσότητες σε γειτονικά σημεία ή κύτταρα. Το λογισμικό *CFD* αποθηκεύει μόνο τις μη μηδενικές τιμές για την ελαχιστοποίηση της χρήσης μνήμης και χρησιμοποιεί επαναληπτική διαδικασία αντιστροφής του πίνακα.

³³ Η παράλληλη επεξεργασία της *AMG*, ωστόσο, δεν είναι απλή. Σε προβλήματα με μεγάλες διακυμάνσεις της πυκνότητας πλέγματος και περίπλοκη γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας, αυτός ο επιλυτής έχει σαφώς καλύτερες επιδόσεις από την μέθοδο *Jacobi-preconditioned BiCGSTAB*, ωστόσο οι επιτυτές *AMG* απαιτούν τη συναρμολόγηση του μητρώου του συστήματος.

προπαρασκευαστές, όπως η ελλειψής παραγοντοποίηση LU , το πρόσθετο *Schwarz*, και το πολλαπλό πλέγμα, έχουν κακή απόδοση ή αποτυγχάνουν εξ ολοκλήρου. Συνεπώς ανάλογα με την δομή του προβλήματος επιλέγεται ο αποτελεσματικός προπαρασκευαστής.

Επαναληπτική Σύγκλιση (Iterative Convergence). Καθώς οι επαναλήψεις συγκλίνουν στην προσεγγιστική λύση τα λάθη γραμμικοποίησης και αναστροφής του μητρώου της προσεγγιστικής λύσης u_g αντί της ακριβούς u τείνουν στο 0. Γι' αυτό και συνεχίζεται η επανάληψη της διαδικασίας, μέχρι κάποιο επιλεγμένο μέτρο της διαφοράς μεταξύ u_g και u , ή υπόλοιπο, να γίνει «αρκετά μικρό». Ως κριτήριο τερματισμού των επαναλήψεων μπορεί να καθοριστεί π.χ. το υπόλοιπο R , ως η *RMS* τιμή της διαφοράς μεταξύ των u και u_g πάνω στο πλέγμα:

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - u_{g_i})^2}{N}} \quad (1.1),$$

η με κλιμάκωση να οριστεί το σχετικό υπόλοιπο και όχι το απόλυτο μέτρο, διαιρώντας το απόλυτο μέγεθος με το μέσο όρο των τιμών της u στο χωρίο ορισμού

$$R = \left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - u_{g_i})^2}}{N} \right) \left(\frac{N}{\sum_{i=1}^N u_i} \right) = \left(\frac{\sqrt{N \cdot \sum_{i=1}^N (u_i - u_{g_i})^2}}{\sum_{i=1}^N u_i} \right) \quad (1.2.).$$

Το επαναληπτικό σφάλμα σύγκλισης, πρέπει να είναι της ίδιας τάξης με το λάθος αποκοπής (truncation error) της *FDM*, για να μην γίνεται σπατάλη υπολογιστικών πόρων. Αμφότερα τα σφάλματα πρέπει να είναι συγκρίσιμα στο επίπεδο ανοχής που έχει επιλέξει ο χρήστης. Η συμφωνία μεταξύ της αριθμητικής και ακριβούς λύσης βελτιώνεται με πύκνωση του πλέγματος. Η επιλογή του κριτηρίου σύγκλισης για κάθε εξίσωση διατήρησης εξαρτάται από το πρόβλημα και το λογισμικό.

Αριθμητική Σταθερότητα (Numerical Stability). Σε σύνθετα προβλήματα, οι επαναλήψεις συγκλίνουν αργά και σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί ακόμη και να αποκλίνουν. Οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες ένας συγκεκριμένος αριθμητικός αλγόριθμος συγκλίνει καθορίζονται με την ανάλυση σταθερότητας (stability analysis) του αριθμητικού σχήματος.

Μια αριθμητική μέθοδος αναφέρεται ως σταθερή, όταν κατά την επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει και ως ασταθής, όταν αποκλίνει.³⁴

Ανάλυση σταθερότητας σε λογισμικά *CFD*, για την επίλυση σταθερών προβλημάτων (steady problems), είναι η επίλυση των ασταθών (unsteady) εξισώσεων και η προώθηση κατά βήματα (march) της λύσης στο χρόνο μέχρι η λύση να συγκλίνει ασυμπτωτικά στην σταθερή κατάσταση (steady state). Υπάρχει συνήθως ένα μέγιστο δυνατό χρονικό βήμα dt που επιτρέπει λύση σε σταθερή κατάσταση. Για μεγαλύτερο dt η λύση γίνεται ασταθής, λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, που αυξάνονται εκθετικά στο χρόνο, με αποτέλεσμα η λύση να παρεκκλίνει από το αποτέλεσμα σε σταθερή κατάσταση. Η τιμή του μέγιστου dt , dt_{\max} , εξαρτάται από το αριθμητικό σχήμα διακριτοποίησης.

Υπάρχουν δύο κατηγορίες αριθμητικών σχημάτων διακριτοποίησης τα ρητά (explicit) και τα πεπλεγμένα (implicit), με πολύ διαφορετικά χαρακτηριστικά ευστάθειας. Στο ρητό σχήμα η τιμή μεταβλητής στα σημεία του πλέγματος υπολογίζεται άμεσα από αυτή την έκφραση, χωρίς την ανάγκη για μητρώο αναστροφής. Οι τιμές σε κάθε σημείο του πλέγματος μπορούν να ενημερώνονται ανεξάρτητα και τα σχήματα αυτά προγραμματίζονται εύκολα. Το ρητό σχήμα είναι σταθερό μόνο όταν ικανοποιείται η συνθήκη *Courant-Friedrichs-Lewy* ή *CFL*

$$C \equiv \frac{u \cdot dt}{dx} \leq 1 \quad (1.3.),$$

όπου C είναι ο αριθμός *Courant* και u είναι οι ταχύτητες του πεδίου ροής. Η συνθήκη *CFL* είναι ένας σοβαρός περιορισμός για την τιμή του dt_{\max} .

Στο πεπλεγμένο σχήμα, οι τιμές μίας μεταβλητής στα σημεία του πλέγματος δεν υπολογίζονται άμεσα αλλά απαιτείται η επίλυση ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων, προκειμένου να υπολογιστούν οι τιμές σε όλα τα σημεία του πλέγματος ταυτόχρονα. Επίσης τα πεπλεγμένα σχήματα για τις εξισώσεις *Euler* ή *Navier-Stokes* δεν είναι χωρίς προϋποθέσεις σταθερά. Οι μη γραμμικότητες που διέπουν τις εξισώσεις συχνά περιορίζουν την ευστάθεια, και απαιτούν πολύ μεγαλύτερο αριθμό *Courant* από ότι τα ρητά σχήματα, ανάλογα και με το πρόβλημα.

Για σταθερά προβλήματα μεγαλύτερα dt οδηγούν σε ταχύτερη σύγκλιση στην σταθερή κατάσταση, ώστε αξίζει να καθοριστεί αριθμός *Courant* ο μεγαλύτερος δυνατόν, εντός των ορίων της σταθερότητας. Μπορεί να διαπιστωθεί ότι απαιτείται κατά την εκκίνηση χαμηλότερος αριθμός *Courant*, όταν οι αλλαγές στη λύση είναι ιδιαίτερα μη γραμμικές, ο οποίος μπορεί να αυξηθεί στην διάρκεια της επίλυσης.

³⁴ Μια ακριβής ανάλυση της σταθερότητας των εξισώσεων *Euler* ή *Navier-Stokes* παρέχει χρήσιμες γνώσεις και κατά προσέγγιση προϋποθέσεις για την σταθερότητα.

1.8. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μερικές από τις συνηθέστερες μεθόδους διακριτοποίησης³⁵ μερικών διαφορικών εξισώσεων σε αλγεβρικές εξισώσεις είναι οι παρακάτω.

Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method) ή *FDM*. Βασίζεται στην διακριτοποίηση των μεταβλητών, στο ομοιόμορφο πλέγμα στο οποίο έχει διαιρεθεί το πεδίο ορισμού. Η *FDM* είναι η μέθοδος³⁶ παραγωγής διακριτών εξισώσεων χρησιμοποιώντας αναπτύγματα της σειράς Taylor, δηλαδή, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των παραγώγων με τα περίπου ισοδύναμα πηλικά πεπερασμένων διαφορών (difference quotients). Οι παράγωγοι της συνάρτησης $f(x)$, προσεγγίζονται με όρους της σειράς (πολυώνυμου) Taylor με το ομώνυμο θεώρημα,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n + R_n(x) \quad (1.4.),$$

όπου $n!$ είναι το παραγοντικό του νιοστού όρου n , και $R_n(x)$ είναι ο όρος υπολοίπου, που δηλώνει την διαφορά ανάμεσα στο πολυώνυμο Taylor, βαθμού n και της αρχικής συνάρτησης $f(x)$, π.χ. η πρώτη παράγωγος $f'(x_0)$ γράφεται για $R_1(x)$, αρκετά μικρό

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + R_1(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.5.).$$

Το σφάλμα στον υπολογισμό των παραγώγων των μεταβλητών συναρτήσεων της εξίσωσης διακριτοποίησης λόγω των αποκομμένων όρων της σειράς Taylor ονομάζεται σφάλμα αποκοπής (truncation error). Το τοπικό σφάλμα αποκοπής της *FDM* συμβολίζεται σαν μεγάλο O με όρισμα το χωρικό βήμα h , π.χ. σφάλμα $O(h)$, αποκαλείται πρώτης τάξεως ακριβείας, $O(h^2)$, δεύτερης τάξεως ακριβείας κλπ. Το υπόλοιπο της σειράς Taylor είναι κατάλληλο για την ανάλυση του τοπικού σφάλματος αποκοπής. Η κατά *Lagrange* μορφή του υπολοίπου του πολυωνύμου Taylor για $f(x_0 + h)$,

$$R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (h)^{n+1} \quad (1.6.),$$

για $x_0 < \xi < x_0 + h$, αποκαλύπτει τον κυρίαρχο ρόλο του τοπικού λάθους αποκοπής. Η μέθοδος έχει ιστορική σημασία και είναι απλή στον προγραμματισμό. Τα σύγχρονα λογισμικά

³⁵ Τα περισσότερα εμπορικά *CFD* λογισμικά κάνουν χρήση πεπερασμένων όγκων (π.χ. το FLUENT) ή μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων (π.χ. το ANSYS) που προσφέρονται καλύτερα για μοντελοποίηση πεδίων ροής με σύνθετες γεωμετρίες.

³⁶ Morton & Mayers, 2005, Rübenkönig, 2006.

πεπερασμένων διαφορών κάνουν χρήση ενσωματωμένων δομών για το χειρισμό των πολύπλοκων γεωμετριών που τα καθιστά εξαιρετικά αποτελεσματικά και ακριβή.

Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων, (Finite Volume Method) ή (FVM)³⁷. Στη *FVM*, *LeVeque, 2002, Toro, 1999*, οι τιμές των μεταβλητών υπολογίζονται στους κόμβους του αριθμητικού πλέγματος, όπως στην μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. «Πεπερασμένος όγκος» είναι ο μικρός όγκος που περιβάλλει κάθε κόμβο στο πλέγμα. Στην μέθοδο, τα χωρικά ολοκληρώματα σε μια μερική διαφορική εξίσωση που περιέχει έναν όρο απόκλισης, μετατρέπονται σε επιφανειακά ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης (divergence theorem). Αυτοί οι όροι υπολογίζονται ως παροχές ροής (fluxes) στις επιφάνειες κάθε πεπερασμένου όγκου. Επειδή η παροχή που εισρέει σε ένα δεδομένο όγκο ταυτίζεται με την παροχή που εκρέει από τον διπλανό (adjacent) όγκο, αυτές οι μέθοδοι παρότι είναι συντηρητικές δεν διασφαλίζουν ότι καταλήγουν στην πραγματική λύση.

Οι εξισώσεις *N-S* διατυπώνονται, διακριτοποιούνται και επιλύονται ώστε να διασφαλίζεται η διατήρηση των ροών μέσα στο διακριτό όγκο ελέγχου του κυττάρου. Ένα άλλο πλεονέκτημα της μεθόδου πεπερασμένων όγκων είναι ότι μπορεί να διατυπωθεί εύκολα και για μη δομημένα πλέγματα. Σε 2-D, ορίζεται σε τριγωνικά ή τετράπλευρα κύτταρα. Σε 3-D, τα κύτταρα είναι συνήθως εξαέδρα, τετράεδρα ή πρίσματα. Η *FVM* ενδεχομένως παρουσιάζει πρόβλημα σύγκλισης από τυχόν στρεβλωμένα στοιχεία σε κρίσιμες περιοχές ροής³⁸.

Η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων, (Finite Element Method) ή *FEM*, είναι αριθμητική τεχνική προσεγγιστικής επίλυσης μερικών διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων (*PDE*). Την αυστηρή μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου³⁹ δημοσίευσαν οι *Strang & Fix, 1973*. Η *FEM*, *Ciarlet, 1978*, αναπτύχθηκε αρχικά για να επιλύσει σύνθετα προβλήματα ελαστικότητας και δομικής ανάλυσης στις κατασκευές και την αεροναυπηγική. Σήμερα αποτελεί κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών για την αριθμητική προσομοίωση φυσικών συστημάτων ανάμεσα τους και *CFD*. Η προσεγγιστική λύση είτε απαλείφει την διαφορική εξίσωση πλήρως (προβλήματα σταθερής κατάστασης), είτε μετατρέπει την *PDE* σε ένα προσεγγιστικό σύστημα συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων (ordinary differential equations) (*ODE*), το οποίο έπειτα ολοκληρώνεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας

³⁷ *LeVeque, 2002, Toro, 1999*.

³⁸ Βιβλιογραφικές πηγές: *Hirsch (1990), Laney, 1998, LeVeque, 1990, Patankar, 1980, Tannehill et.al., 1997, Wesseling, 2001*.

³⁹ Την έννοια των 'elements' παρουσίασαν αρχικά οι *Hrennikoff, 1941, Courant, 1942-3*. Την *FEM* ανέπτυξαν ο *J.Argyris* (δεκαετία του '50) και ο *Clough* (δεκαετία του '60). Η NASA άρχισε την ανάπτυξη του λογισμικού *NASTRAN* από το 1965.

τυποποιημένες τεχνικές, όπως μεθόδους *Euler*, *Runge-Kutta*, κ.λπ. Γενικά η σταθερότητα (stability) και η ευρωστία (robustness) της λύσης, *Huebner et.al., 1995* είναι καλύτερες στη *FEM*, αν και για μερικές περιπτώσεις απαιτεί περισσότερη μνήμη από τις μεθόδους *FVM*.

Γενικά, η διαδικασία στη *FEM* είναι η ακόλουθη. Επιλέγεται ένα πλέγμα για το χωρίο ορισμού από τρίγωνα, τετράγωνα ή καμπυλόγραμμα πολύγωνα. Επιλέγονται οι συναρτήσεις βάσης π.χ. τμηματικά γραμμικές ή τμηματικά πολυωνυμικές, ανάλογα με την ανάγκη της λύσης για ομαλές συναρτήσεις βάσης. Για τα δεύτερης τάξης προβλήματα ελλειπτικής οριακής τιμής (elliptic boundary value), αρκεί απλώς η συνέχεια της τμηματικά πολυωνυμικής συνάρτησης βάσης (δηλ., οι παράγωγοι να είναι ασυνεχείς.) Για υψηλότερης τάξης μερικές διαφορικές εξισώσεις, απαιτούνται ομαλότερες συναρτήσεις βάσης. π.χ. τμηματικά τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης. Ακόμη σε μια σωστά σχεδιασμένη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων το χωρίο ορισμού πρέπει να είναι υποσύνολο του χωρίου ορισμού για το συνεχές πρόβλημα. Ο τρόπος πύκνωσης του πλέγματος καθορίζει παραλλαγές⁴⁰ της *FEM* με μεταβλητές την διάμετρο του μεγαλύτερου στοιχείου h (*h-FEM*), *p-FEM* και τον πολυωνυμικό βαθμό p των συναρτήσεων βάσης (*p-FEM*).

Μέθοδος Οριακού Στοιχείου, (Boundary Element Method) ή *BEM*. Η *BEM* είναι μια αριθμητική υπολογιστική μέθοδος για την επίλυση γραμμικών *PDE* που έχουν διατυπωθεί στη μορφή οριακού ολοκληρώματος. Παρουσιάζει ραγδαία αύξηση εφαρμογών είτε σαν αυτόνομη ή επικουρική μέθοδος στη ρευστομηχανική, ακουστική, ηλεκτρομαγνητισμό, μηχανική των ρωγμών κλπ. Η *BEM* είναι συχνά αποδοτικότερη από τις άλλες μεθόδους, σε υπολογιστικούς πόρους για προβλήματα, όπου υπάρχει μικρός λόγος επιφάνειας προς όγκο, χωρίς αυτό να ισχύει γενικά. Η ολοκληρωματική εξίσωση θεωρείται η ακριβής λύση του εξεταζόμενου προβλήματος. Η ιδέα υλοποιείται με την κατασκευή «πλέγματος» πάνω από τη μοντελοποιούμενη επιφάνεια-όριο που καταλαμβάνεται από το ρευστό. Η *BEM* χρησιμοποιεί τις οριακές συνθήκες για να αρμόσει τις τιμές του ορίου στην ολοκληρωματική εξίσωση, και όχι σε ολόκληρο το χωρίο ορισμού της *PDE*. Στο στάδιο της μετεπεξεργασίας, η ολοκληρωτική εξίσωση υπολογίζει άμεσα την αριθμητική λύση σε οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό της περιοχής λύσης. Οι διατυπώσεις *BEM* καταλήγουν σε πολύ δημοφιλή μητρώα σε σύγκριση με άλλες μεθόδους, όπου οι απαιτήσεις αποθήκευσης και υπολογιστικού χρόνου τείνουν να αυξηθούν ανάλογα με το τετράγωνο του μεγέθους του προβλήματος. Αντίθετα, τα μητρώα στην *BEM* ενώνονται συνήθως κατά ζώνες γιατί τα στοιχεία συνδέονται

⁴⁰ *h-FEM*, *p-FEM*, *hp-FEM*, *SFEM* ή *Spectral FEM*, *GFEM* ή *Generalized FEM*, *XFEM* ή *Extended FEM*, *Meshfree FEM*.

μόνο τοπικά και οι απαιτήσεις αποθήκευσης για τα μητρώα των συστημάτων αυξάνονται συνήθως αρκετά γραμμικά με το μέγεθος προβλήματος. Βελτίωση επιτυγχάνεται με τεχνικές συμπίεσης π.χ. πολυπολικές επεκτάσεις ή προσαρμοστική διαγώνια (cross) προσέγγιση, ιεραρχικές μήτρες αλλά με κόστος προστιθέμενη πολυπλοκότητα. Το ποσοστό επιτυχίας εξαρτάται πρωτίστως από τη φύση και την γεωμετρία του επιλυόμενου προβλήματος.

Όταν απαιτούνται συναρτήσεις *Green* μέσα σε γραμμικά ομογενή μέσα, περιορίζεται το εύρος και η γενικότητα των προβλημάτων στα οποία χρησιμοποιούνται οι *BEM*. Τα στοιχεία της συνάρτησης *Green* που συνδέουν ζεύγη πηγών και τομέων πεδίου που ορίζονται στο πλέγμα διαμορφώνουν ένα μητρώο, το οποίο επιλύεται αριθμητικά.⁴¹ Μη γραμμικότητες μπορούν να περιληφθούν στη διατύπωση, αν και γενικά προϋποθέτουν χωρικά ολοκληρώματα που απαιτούν εκ προοιμίου διακριτοποίηση του όγκου για την λύση, εξαλείφοντας ένα από τα συχνότερα αναφερόμενα πλεονεκτήματα των *BEM*. Μια χρήσιμη τεχνική για το χωρικό ολοκλήρωμα χωρίς να διακριτοποιηθεί ο όγκος είναι η μέθοδος της διπλής-αμοιβαιότητας (dual-reciprocity). Η τεχνική προσεγγίζει μέρος του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας τοπικές συναρτήσεις παρεμβολής και τις παραθέτει σε επιλεγμένα σημεία που διανέμονται σε όλη την περιοχή όγκου (και του ορίου) και έτσι μετατρέπει το χωρικό ολοκλήρωμα σε οριακό ολοκλήρωμα.

1.9. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Όταν στην αριθμητική επίλυση μίας *PDE* απαιτείται υψηλή ακρίβεια, στην περιοχή απότομων διακυμάνσεων (shocks) ή ασυνεχειών χρησιμοποιούνται υψηλής τάξεως ακριβείας αριθμητικά σχήματα, ώστε να εξασφαλίζεται δεύτερης ή υψηλότερης χωρικής τάξης ακρίβεια και οι λύσεις να είναι χωρίς πλαστές ταλαντώσεις ή διαταραχές. Ο αριθμός των σημείων του πλέγματος που περιέχουν την ταλάντωση είναι μικρός σε σχέση με ένα πρώτης τάξεως σχήμα. Τα υψηλής τάξεως ακριβείας σχήματα χρησιμοποιούν συχνά τους περιοριστές ροής/κλίσεων (flux/slop limiters) για να περιορίσουν την κλίση γύρω από τις ασυνέχειες ή τις απότομες διακυμάνσεις ώστε να εξασφαλιστεί Φθίνουσα Συνολική Διακύμανση (Total Variation Diminishing).

Όλα τα λογισμικά *CFD* εξαρτώνται από το είδος των αριθμητικών σχημάτων που χρησιμοποιούν για να μετατρέψουν τις συνεχείς παραγώγους των εξισώσεων *Navier-Stokes*

⁴¹ Οι συναρτήσεις *Green*, είναι συχνά προβληματικές στην ολοκλήρωση γιατί βασίζονται σε λύση συστημάτων εξισώσεων λόγω ιδιόμορφου φορτίου (singularity) (π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει από ένα σημειακό φορτίο). Η αναλυτική ολοκλήρωση αρκεί συνήθως για ιδιόμορφα πεδία με στοιχεία απλής γεωμετρίας (π.χ. επίπεδα τρίγωνα). Για γενικότερα στοιχεία, προτιμώνται καθαρώς αριθμητικά σχήματα που προσαρμόζονται στην ιδιομορφία, αλλά με μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

σε διακριτή μορφή κατάλληλη για υπολογιστικά πλέγματα. Μεγάλη ποικιλία μεθόδων έχουν αναπτυχθεί, για να συνδυαστούν οι αντικρουόμενοι στόχοι της ακρίβειας, της σταθερότητας και της υπολογιστικής ταχύτητας. Τα συστήματα υψηλής τάξης ακρίβειας είναι πολυπλοκότερα, απαιτούν περισσότερα σημεία χωρικών ή χρονικών δεδομένων και είναι πιο χρονοβόρα σε σχέση με τα χαμηλής τάξης. Συνυπολογίζονται ακόμη η επιλογή ρητής (explicit) ή πεπλεγμένης (implicit) χρονικής ολοκλήρωσης και η ποσότητα της τεχνητής ή αριθμητικής διάχυσης. Αυτό κάνει τον αλγόριθμο πιο προσαρμόσιμο στην περιγραφή πραγματικών προβλημάτων, γιατί τα σχήματα παρουσιάζουν ελάχιστη αριθμητική διάχυση καθώς οι μικρής κλίμακας κινήσεις δεν ενισχύονται τεχνητά από τις αριθμητικές αστάθειες. Τα περισσότερα λογισμικά Άμεσης Αριθμητικής Προσομοίωσης (Direct Numerical Simulation/Large Eddy Simulation) (*DNS/LES*) βασίζονται σε χαμηλής τάξης, ρητά αριθμητικά σχήματα που απαιτούν τακτικές διορθώσεις για να αποφευχθεί η υπολογιστική αστοχία από τις επιπτώσεις της αριθμητικής διάχυσης και θυσιάζουν την ακρίβεια και την αποτελεσματική ολοκλήρωση στο χρόνο.

Ιδιαίτερα επιτυχή σχήματα υψηλής ακριβείας είναι τα σχήματα *VONOS*, π.χ. *Varonos & Bergeles, 1998*, *WENO*, των *Jiang et.al., 1996, 2000*, *ENO-Pade* των *Wang & Huang, 2000*, *MUSCL* που χρησιμοποιούν προεκβολές και περιοριστές για να επιτύχουν επαρκή ακρίβεια π.χ. το αριθμητικό σχήμα *ENO-Pade* συνδυάζει την ελάχιστη διάχυση των κεντρικών μεθόδων και τις χωρίς ταλαντώσεις ασυνέχειες των ανάντη μεθόδων (upwind).

Τα σχήματα *Pade* είναι μια οικογένεια υψηλής τάξεως, συμπαγών, πεπλεγμένων σχημάτων κεντρικών-διαφορών που είναι μη-διαχεόμενα και έχουν αποδειχθεί αποδοτικά και ακριβή στις πολυάριθμες ροές, που περιέχουν κάποιες ασυνέχειες. Τα σχήματα *ENO* διατηρούν μια υψηλή τάξη ακρίβειας και μη-ταλαντωτική συμπεριφορά μέσα στις ασυνέχειες, αλλά έχουν μεγάλη αριθμητική διάχυση στις περιοχές με απότομες κλίσεις. Ο συνδυασμός αυτών των δύο προσεγγίσεων αποβάλλει τη μη φυσική συμπεριφορά ταλαντώσεων του σχήματος *Pade* στις ασυνέχειες, όπως είναι οι απότομες διακυμάνσεις (shocks), βελτιώνοντας την απόδοση της τεχνικής *ENO* με λιγότερο απότομες περιοχές κλίσεων. Το σχήμα *ENO-Pade* έχει συγκριθεί με άλλα σχήματα υψηλής τάξεως σε διάφορες βασικές περιπτώσεις ροής με άριστα αποτελέσματα και ελάχιστη αριθμητική διάχυση. Επίσης ελέγχθηκε στο *LESTool*.

1.10. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΡΟΩΝ

Ελεύθερη επιφάνεια και Διεπιφάνεια. Το πρόβλημα που μελετάται στην παρούσα έρευνα ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων της μηχανικής των ρευστών, των διφασικών ροών, για ρευστά που δεν αναμειγνύονται ή και γενικότερα στην κατηγορία προβλημάτων με

διεπιφάνεια. Διεπιφάνεια ονομάζεται στη μηχανή ρευστών η επιφάνεια που διαχωρίζει δύο ρευστά με διαφορετικές ιδιότητες. Συχνά ως ελεύθερη επιφάνεια αναφέρεται μια διεπιφάνεια μεταξύ αερίου και υγρού, γιατί η χαμηλή πυκνότητα αερίου (π.χ. νερό προς αέρας είναι 1000:1) επιτρέπει να αγνοηθεί η αδράνεια του αερίου και η μόνη επίδραση που ασκεί το αέριο πάνω στην επιφάνεια της υγρής φάσης είναι η πίεση δηλαδή πρακτικά η επιφάνεια αερίου-υγρού δεν περιορίζεται, αλλά είναι «ελεύθερη». Ο κυματισμός, φαινόμενα με φυσαλίδες και σταγόνες, φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας με αλλαγή φάσης είναι ροές με ελεύθερες επιφάνειες.

Η παρουσία ενός ελεύθερου ή διακινούμενου ορίου ή διεπιφάνειας εισάγει σοβαρές επιπλοκές για κάθε τύπο αριθμητικής ανάλυσης. Ακόμη και για τα απλούστερα των προβλημάτων, απαιτείται εισαγωγή ειδικών αριθμητικών μεθόδων α) για την διακριτή αναπαράσταση της διεπιφάνειας και την περιγραφή των σχετικών υλικών ιδιοτήτων τους όπως η πυκνότητα και το ιξώδες, β) την παρακολούθηση της μεταβολής του σχήματος και της θέσης της διεπιφάνειας με το χρόνο και γ) την εφαρμογή οριακών συνθηκών στην διεπιφάνεια π.χ. *Nikolopoulos, Nikas, Bergeles, 2009, Nikolopoulos, Theodorakakos, Bergeles, 2009, 2007, Strotos, Gavaises, Theodorakakos, Bergeles, 2008, Theodorakakos & Bergeles, 2004*. Η εφαρμογή των οριακών συνθηκών στη διεπιφάνεια είναι βασικά ανεξάρτητη από τον καθορισμό της.

Μοντελοποίηση της επιφανειακής τάσης στη διεπιφάνεια. Πολλά φυσικά φαινόμενα μπορούν να προσομοιωθούν ως ασυμπίεστη, μη αναμίξιμη διφασική ροή με επιφανειακή τάση π.χ. η πτώση σταγονιδίων νερού στον αέρα, τα μείγματα πετρελαίου και νερού μέσα σε πορώδη μέσα, το λιωμένο γυαλί στον αέρα, οι ροές υγρού-υγρού, η μικροκυκλοφορία κλπ. Πρόβλημα αναφοράς στην επιστήμη των διασπορών, τη γαλακτωματοποίηση και την ανάμιξη είναι η παραμόρφωση ενός υγρού σταγονιδίου λόγω μιας περιβάλλουσας διατμητικής ροής. Επειδή τα ρευστά είναι μη αναμίξιμα δημιουργείται μια κινούμενη διεπιφάνεια μεταξύ των ρευστών.

Σε τέτοια προβλήματα πολυφασικής ροής μεσοκλίμακας, τα αποτελέσματα της επιφανειακής τάσης δεν μπορούν να μην συνυπολογιστούν, όπως κατά κανόνα γίνεται στις μακροσκοπικές ροές. Οι δυνάμεις λόγω της επιφανειακής τάσης διαδραματίζουν έναν ουσιαστικό ρόλο για τη γενική δυναμική και καθορίζουν τη συμπεριφορά παραμόρφωσης της διεπιφάνειας. Όταν ένα υγρό έχει υψηλή επιφανειακή τάση (ισχυρούς εσωτερικούς δεσμούς), σχηματίζει σταγόνα, ενώ ένα υγρό με χαμηλή επιφανειακή τάση θα κατανεμηθεί σε μεγαλύτερη έκταση. Η μοντελοποίηση της επιφανειακής τάσης πάνω σε τέτοιες

διεπιφάνειες αποτελεί πρόκληση για τις αριθμητικές μεθόδους, γιατί επηρεάζει πολύ την ευστάθεια του συνολικού διαφασικού αλγορίθμου και τα αποτελέσματα.

Μια προσέγγιση είναι από τις τεχνικές διακύμανσης που βασίζονται στον τελεστή *Laplace–Beltrami* στην ελεύθερη επιφάνεια⁴². Μια άλλη ευρέως χρησιμοποιημένη προσέγγιση είναι το σχήμα Συνεχούς Δύναμης Επιφάνειας (Continuum Surface Force) (CSF)⁴³. Εδώ, η επιφανειακή τάση, δηλ., η αντίστοιχη συνθήκη στην διεπιφάνεια, περιγράφεται ως δύναμη που ενεργεί στα κύτταρα του πλέγματος που περιέχουν τη διεπιφάνεια.

Αυτή η προσέγγιση εισήχθη στα πλαίσια των μεθόδων *VOF* και *MAC* αλλά ισχύει άμεσα επίσης στην *LSM*, *Sussman et.al., 1994*. Ακόμη και αν, η προσέγγιση *CSF* φέρεται να είναι αρκετά ισχυρή, η συμπεριφορά της σύγκλισης του όρου της επιφανειακής τάσης με την μέθοδο *CSF* σε συνδυασμό με την *LSM* μέσα σε ένα επιλυτή πλήρους διαφασικής ροής δεν είναι πλήρως κατανοητή, *Croce et.al., 2009*. Η Επιφανειακή τάση κάνει όλα τα δυναμικά προβλήματα μη γραμμικά.

1.11. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΡΟΩΝ.⁴⁴

Παρακάτω γίνεται επισκόπηση βασικών αριθμητικών μεθόδων προσομοίωσης ελεύθερων επιφανειών ή διεπιφανειών και σχολιασμός πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της κάθε μεθόδου.

Μέθοδοι Πλέγματος τύπου Lagrange. (Lagrangian Grid Methods). Θεωρητικά, ο πιο απλός τρόπος καθορισμού και ανίχνευσης (tracking) μιας ελεύθερης επιφάνειας είναι η κατασκευή ενός πλέγματος τύπου *Lagrange* που είναι ενσωματωμένο και κινείται με το ρευστό. Πολλές *FEM* χρησιμοποιούν αυτή την προσέγγιση. Επειδή το πλέγμα και το ρευστό προχωρούν μαζί, το πλέγμα αυτόματα ανιχνεύει ελεύθερες επιφάνειες ή διεπιφάνειες, όπου είναι απαραίτητο να τροποποιηθούν οι αλγόριθμοι των εξισώσεων για να συμπεριληφθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες. Εάν δεν γίνει αυτό, αναπτύσσονται ασυμμετρίες που τελικά καταστρέφουν την ακρίβεια της προσομοίωσης.

Ο κύριος περιορισμός των μεθόδων *Lagrange* είναι ότι δεν μπορούν να ανιχνεύουν επιφάνειες που διασπώνται ή διασταυρώνονται. Απαιτείται η εισαγωγή τεχνικών ανακατασκευής του πλέγματος, όπως είναι η Arbitrary Lagrangian-Eulerian (*ALE*) μέθοδος για να περιγραφούν οι επιφανειακές κινήσεις μεγάλου πλάτους ταλάντωσης, *Hirt et.al.,*

⁴² *Bansch, 1999, Dziuk, 1988, Dziuk, 1991, Ho & Patera, 1990, Ho & Rønquist, 1994.*

⁴³ *Brackbill, et.al., 1992, Unverdi & Tryggvason, 1992.*

⁴⁴ *Flow Science Inc.*

1970, 1974. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ελεύθερης επιφάνειας που παρουσιάζονται χρησιμοποιούν ως βάση για υπολογισμούς σταθερό, πλέγμα *Euler*, που περιγράφει επαρκώς περίπλοκες κινήσεις της διεπιφάνειας.

Μέθοδος Δείκτη και Κυττάρου, (Marker and Cell), (MAC). Η πρώτη αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της κίνησης σύνθετων ελεύθερων επιφανειών σε σταθερό, πλέγμα *Euler* από όγκους ελέγχου είναι η μέθοδος *MAC* των *Harlow & Welch, 1965*. Βελτιώσεις⁴⁵ όπως η παρεμβολή των πιέσεων του αερίου της ελεύθερης επιφάνειας μέσα στα κύτταρα βελτιώνει την ακρίβεια σε προβλήματα που κυριαρχούνται από υδροστατικές δυνάμεις, ενώ η ένταξη των δυνάμεων της επιφανειακής τάσης επεκτείνει τη μέθοδο σε διφασικές ροές κλπ, *Daly, 1969, Nichols & Hirt, 1975*. Εφαρμόζονται οριακές συνθήκες ελεύθερης επιφάνειας δηλ. η πίεση του αερίου σε όλα τα επιφανειακά κύτταρα και οι συνιστώσες της ταχύτητας σε όλες τις θέσεις πάνω ή αμέσως έξω από την επιφάνεια για να τηρηθούν οι προϋποθέσεις της ασυμπίεστοτητας και μηδενική διατμητική επιφανειακή τάση.

Η θέση του ρευστού εντός του πλέγματος καθορίζεται από ένα σύνολο σωματιδίων σήμανσης (δεικτών) που κινούνται με το ρευστό. Σωματίδια αναφοράς χωρίς όγκο, βάρος ή άλλες ιδιότητες κατανέμονται στο πεδίο ροής και κάθε δείκτης κινείται με την τοπική ταχύτητα του πεδίου ροής. Τα κύτταρα του πλέγματος που περιέχουν δείκτες θεωρούνται ότι περιέχουν ρευστό, ενώ εκείνα που δεν έχουν δείκτες είναι άδεια (ή κενά). Μια αριθμητική κυψέλη που περιέχει σωματίδια αλλά έχει μια γειτονική κυψέλη που δεν περιέχει, καθορίζει την θέση της ελεύθερης επιφάνειας. Η θέση και ο προσανατολισμός της επιφάνειας εντός των κυττάρων δεν ήταν μέρος της αρχικής μεθόδου *MAC*. Η διεπιφάνεια πρέπει να αναδημιουργηθεί από τη διανομή των δεικτών. Η εξέλιξη των επιφανειών υπολογίζεται με αλγόριθμους που μετακινούν τους δείκτες με παρεμβολή των τοπικών ταχυτήτων του ρευστού. Ειδικοί χειρισμοί προστέθηκαν για τον ορισμό των ιδιοτήτων του ρευστού σε κυψελίδες που πρόσφατα συμπληρώθηκαν και να ακυρώσει τις τιμές σε κύτταρα που έχουν αδειάσει. Οι δείκτες δεν ανιχνεύουν τις επιφάνειες ρητά, αλλά, αντίθετα, ανιχνεύουν τα κεντροειδή όγκων ρευστού. Οι διεπιφάνειες είναι απλώς τα όρια των όγκων, εμφανίζονται, συγχωνεύονται ή εξαφανίζονται, όπως διασπώνται ή ενώνονται οι όγκοι. Ωστόσο, όταν τα εν λόγω στοιχεία ρευστού παρασύρονται σε περιοχές με περίπλοκες πτυχές

⁴⁵ *Amsden & Harlow, 1970, Daly, 1967, Daly, 1969, Griebel, Dornseifer, Neunhoeffler, 1998, Griebel, Neunhoeffler, Regler, 1998, Harlow & Welch, 1965, Neunhoeffler, 1997, Tryggvason et.al., 2001, Unverdi & Tryggvason, 1992.*

σε συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες ροές ή σε σημεία στασιμότητας της ροής, τα σωματίδια-δείκτες διαμορφώνουν αφύσικα κενά στη ροή. Η *MAC* χρησιμοποιείται και σε 3-D προσομοιώσεις αλλά απαιτεί μεγάλη μνήμη και χρόνο της *CPU* για να φιλοξενήσει τον αναγκαίο αριθμό σωματιδίων σήμανσης⁴⁶.

Μέθοδος Δείκτη Επιφάνειας, (Surface Marker Method),(*SMAC*). Στην *SMAC* για να περιοριστεί η μνήμη και η κατανάλωση του χρόνου υπολογισμού λόγω των δεικτών της μεθόδου *MAC*, τοποθετούνται δείκτες μόνο πάνω στις διεπιφάνειες και όχι στο εσωτερικό των περιοχών με ρευστό. Βεβαίως, αυτό καταργεί την ιδιότητα εντοπισμού του όγκου της μεθόδου *MAC* και απαιτεί επιπλέον λογική για να καθορίζει πότε και πώς επιφάνειες διασπώνται ή ενώνονται. Οι δείκτες επιφανείας παρέχουν ένα εύχρηστο τρόπο εντοπισμού της επιφάνειας μέσα σε μια κυψελίδα για την εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Για 2-D προσομοιώσεις, οι δείκτες τοποθετούνται σε ομοιόμορφη απόσταση κατά μήκος της επιφάνειας, ώστε να απλοποιείται ο υπολογισμός των τομών μεταξύ των διαφόρων επιφανειών. Όμως, σε 3-D, δεν υπάρχει απλός τρόπος να τακτοποιηθούν δείκτες σε επιφάνειες, και αυτό είναι ένα μείζον μειονέκτημα της (*SMAC*). Εμφανίζονται περιοχές, όπου επεκτείνονται επιφάνειες, ενώ οι δείκτες δεν συμπληρώνουν το χώρο. Χωρίς δείκτες η διαμόρφωση της επιφάνειας είναι άγνωστη, και δεν υπάρχει τρόπος να προστεθούν δείκτες, *Nichols, & Hirt, 1975*.

Μέθοδος Ύψους Επιφανείας, (Surface Height Method). Χαμηλού ύψους κυματισμός σε ρηχά νερά (sloshing waves), καθώς και άλλες κινήσεις της ελεύθερης επιφάνειας κατά την οποία η επιφάνεια δεν αποκλίνει πολύ από την οριζόντια διεύθυνση, περιγράφεται από το ύψος H της επιφάνειας σε σχέση με κάποιο υψόμετρο αναφοράς. Η μεταβολή του ύψους περιγράφεται από την εξίσωση, της κίνησης της επιφάνειας με την κίνηση του ρευστού

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = w \quad (1.7),$$

όπου (u, v, w) είναι οι ταχύτητες του ρευστού στις κατευθύνσεις (x, y, z). Η διακριτοποίηση της εξ.(1.7) γίνεται με την *FDM*. Καταγράφονται μόνο οι τιμές του ύψους σε ένα σύνολο οριζόντιων θέσεων, και έτσι οι απαιτήσεις μνήμης για το 3-D πρόβλημα είναι εξαιρετικά

⁴⁶ Συνήθως είναι απαραίτητοι κατά μέσο όρο περίπου 16 δείκτες σε κάθε κυψελίδα για να διασφαλισθεί ένας ακριβής εντοπισμός των επιφανειών που υποβάλλονται σε μεγάλες παραμορφώσεις.

μικρές. Η εφαρμογή των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια απλοποιούνται από την παραδοχή ότι η επιφάνεια παραμένει σχεδόν οριζόντια, *Nichols & Hirt, 1971, 1975*.

Μέθοδος Όγκου Ρευστού (Volume of Fluid Method), (VOF)⁴⁷. Η μέθοδος εισήχθη από τους *Nichols & Hirt, 1975, 1981*, ώστε οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των δύο ρευστών περιοχών να προσεγγίζονται άμεσα στο πλέγμα από μια τμηματικά σταθερή συνάρτηση F που περιγράφει το κλάσμα του όγκου του ρευστού και που ορίζεται ίση με 1 για σημεία του πεδίου ροής τα οποία περιέχουν ρευστό και ίση με 0 στα υπόλοιπα σημεία του χωρίου. Έτσι η μέση τιμή της F σε μια υπολογιστική κυψέλη αντιπροσωπεύει το ποσοστό της κυψέλης που περιέχει ρευστό. Για $F=1$, όλη η κυψέλη περιέχει ρευστό, για $F=0$ η κυψέλη δεν περιέχει καθόλου ρευστό και για $0 < F < 1$, οι κυψέλες περιέχουν την ελεύθερη επιφάνεια. Η συνάρτηση F , εκτός από την πληροφορία για το ποιες κυψέλες περιέχουν την ελεύθερη επιφάνεια, μας δίνει επίσης την διεύθυνση της καθέτου στην ελεύθερη επιφάνεια, σαν την διεύθυνση εκείνη στην οποία η κλίση της F έχει τη μέγιστη τιμή. Κάθε κυψελίδα (όγκος ελέγχου) κρατεί μόνο μία τιμή για κάθε ποσότητα ροής (π.χ. την πίεση, την ταχύτητα, την θερμοκρασία, κλπ.). Η χρήση του κλάσματος όγκου ρευστού σε κάθε κυψελίδα, είναι επαρκής για τον καθορισμό των άλλων ποσοτήτων της ροής.

Από το ποσοστό του ρευστού σε κάθε κύτταρο είναι δυνατόν να εντοπιστούν επιφάνειες, κλίσεις και καμπυλότητες της επιφάνειας, διότι βρίσκονται σε κελιά μερικώς γεμάτα με ρευστό ή μεταξύ κυττάρων πλήρως γεμάτων με ρευστό και κυττάρων που δεν έχουν ρευστό. Το κλάσμα του όγκου πρέπει να είναι μία συνάρτηση τύπου βήματος (step function), δηλαδή με τιμή ένα ή μηδέν. Σε ένα συγκεκριμένο κύτταρο εντοπίζεται η θέση του ρευστού, η κλίση και η καμπυλότητα της επιφάνειας από τα κλάσματα του όγκου σε γειτονικά κύτταρα. Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απλή αριθμητική μέθοδος, για να μοντελοποιήσει αυτή την εξίσωση, επειδή αριθμητικά λάθη διάχυσης και διασποράς καταστρέφουν την απότομη φύση της συνάρτησης βήματος⁴⁸ της κατανομής. Ωστόσο, η τεχνική αυτή λειτουργεί σωστά και αυτό αποδεικνύεται από τον αριθμό των επιτυχών εφαρμογών της *VOF*.

Η εξέλιξη στον χρόνο των επιφανειών περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση μεταφοράς των κλασμάτων όγκου ή βελτιώσεις της μέσω του πλέγματος δηλ. της F δηλ.

⁴⁷ *Theodorakakos & Bergeles, 2004, Beliveau et.al. 1998, DeBar, 1974, Gueyffier et.al., 1999, Hirt & Nichols, 1981, Lafaurie et.al. 1994, Li & Renardy, 2000, Li, Renardy Y., Renardy M., 2000, Noh & Woodward, 1976.*

⁴⁸ Είναι εύκολο με ακρίβεια να μοντελοποιηθεί η εξίσωση σε 1-D πρόβλημα, ώστε η κατανομή F να διατηρεί τις τιμές μηδέν ή ένα. Για πρόβλημα 2-D ή 3-D δεν μπορεί να γίνει ακριβής καθορισμός του σχήματος και της θέσης της επιφάνειας.

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (1.8),$$

ώστε να διατηρείται η φύση της κατανομής της συνάρτησης βήματος (step function) .

Οι οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας εφαρμόζονται όπως στην μέθοδο *MAC*. Καθορίζεται η κατάλληλη πίεση αερίου (και ισοδύναμη πίεση σε περίπτωση επιφανειακής τάσης) και προσδιορίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας εξωτερικά της επιφάνειας ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη μηδενικής διατμητικής τάσης πάνω στην επιφάνεια. Στην πράξη, δηλώνονται πάνω σε επιφάνειες κλίσεις ταχύτητας αντί συνιστώσες ταχύτητας. Η αναδημιουργία μιας ομαλής διεπιφάνειας δηλ., ο ακριβής υπολογισμός της καμπυλότητας που είναι απαραίτητος για τις προσομοιώσεις με επιφανειακής τάση, δεν είναι αυτόματη στη *VOF* και απαιτεί περίπλοκα σχήματα παρεμβολής *Ginzburg & Wittum, 2001, Ginzburg et.al., 2002*.

Η *VOF* εφαρμόστηκε και σε πλέγματα συνδεδεμένα με σώματα και με περισσότερες από μία συναρτήσεις κλάσματος ρευστού, για να μοντελοποιηθούν περισσότερες ρευστές φάσεις. Διατηρεί τα ισχυρά χαρακτηριστικά της μεθόδου *MAC* για τον εντοπισμό όγκου, χωρίς την ανάγκη για μεγάλη μνήμη και ταχύτητα *CPU*, γιατί για κάθε κυψέλη μια θέση μνήμης απαιτεί μία τιμή της *F*. Η χρήση εντοπισμού όγκου σε αντίθεση με την συνάρτηση εντοπισμού επιφάνειας είναι αρκετά ισχυρή για να χειριστεί την διάσπαση και την συνένωση μαζών ρευστού. Επιπλέον, επειδή η *F* είναι συνεχής συνάρτηση, δεν υποφέρει από την έλλειψη διαιρετότητας που εμφανίζουν τα διακριτά σωματίδια.

Μέθοδος *VOF* με Μεταβλητή Πυκνότητα, (*Variable-Density VOF*). Μερικές φορές αναφέρεται ως μέθοδος *VOF*, επειδή χρησιμοποιεί μια συνάρτηση κλάσματος του ρευστού, ο ορισμός αυτός δεν είναι ακριβής. Υπολογίζεται η ροή του ρευστού και στις δύο περιοχές υγρού και αερίου με την αντιμετώπιση της ροής ως ενιαίου ρευστού με μεταβλητή πυκνότητα. Η συνάρτηση *F* χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της πυκνότητας. Οι εξισώσεις της ροής λύνονται στη συνολική περιοχή υγρού και αερίου χωρίς να υπάρχει ανάγκη καθορισμού οριακών συνθηκών στην διεπιφάνεια. Στο μοντέλο μεταβλητής πυκνότητας οι διεπιφάνειες μεταφέρονται με μία μέση ταχύτητα⁴⁹, αλλά αυτό συχνά οδηγεί σε μη ρεαλιστική κίνηση των διεπιφανειών. Η σύγκλιση του πεπλεγμένου αλγορίθμου πίεσης-ταχύτητας είναι δύσκολη και χρονοβόρα. Για τον ακριβή εντοπισμό απότομων διεπιφανειών

⁴⁹ Η ευαισθησία του αερίου στις αλλαγές της πίεσης είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερη από του υγρού και συνεπώς οι ταχύτητες της αέριας και υγρής φάσης στην διεπιφάνεια είναι συνήθως πολύ διαφορετικές (ασυνέχεια στην εφαπτομενική ταχύτητα).

υγρού-αερίου είναι πραγματική ανάγκη να αντιμετωπίζεται η διεπιφάνεια ως ασυνέχεια. Αυτό απαιτεί μια τεχνική καθορισμού μιας ασυνέχειας στη διεπιφάνεια, καθώς και ένα τρόπο να επιβληθούν οι κατάλληλες οριακές συνθήκες πάνω στη διεπιφάνεια. Είναι επίσης απαραίτητη η χρήση μίας ειδικής αριθμητικής μεθόδου για την ανίχνευση των κινήσεων της διεπιφάνειας μέσα στο πλέγμα, χωρίς να καταστραφεί ο χαρακτήρας του ως ασυνέχεια.

Μέθοδοι Οριακού Ολοκληρώματος, (Boundary Integral Methods), (BIM). Χρησιμοποιούνται για να μελετήσουν την κίνηση σταγόνων μέσα σε αγωγούς με έρπουσα ροή. Στις *BIM* οι εξισώσεις *Stokes*, μετασχηματίζονται σε ολοκληρωματική μορφή, για τις άγνωστες μεταβλητές πάνω στα όρια του πεδίου ροής. Έτσι η διάσταση του προβλήματος μειώνεται κατά μία τάξη και η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό εκείνων των αγνώστων μεταβλητών, στα όρια του πεδίου ροής που δεν δίνονται από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Έτσι αξονοσυμμετρικά προβλήματα ανάγονται σε εξισώσεις με επικαμπύλια ολοκληρώματα. Αφού υπολογιστούν οι τιμές των μεταβλητών στα όρια του πεδίου ροής, με κατάλληλες σχέσεις υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές αυτών των μεγεθών σε όλα τα σημεία του πεδίου ροής. Η διεπιφάνεια, για την περίπτωση δύο μη αναμειγνυόμενων ρευστών, προσεγγίζεται ως υλική επιφάνεια που αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, με γνωστές ταχύτητες από τη λύση των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η θέση της διεπιφάνειας την επόμενη χρονική στιγμή προσδιορίζεται από τις γνωστές ταχύτητες των στοιχείων της με την υπόθεση ότι η διεπιφάνεια κινείται κάθετα στον εαυτό της, με βάση την κινηματική εξίσωση

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (1.9),$$

όπου $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου της διεπιφάνειας που την χρονική στιγμή $t=0$ έχει διάνυσμα θέσης \mathbf{x} , t είναι ο χρόνος, \mathbf{u} είναι η ταχύτητα του πεδίου ροής στο συγκεκριμένο σημείο της διεπιφάνειας, \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια στο συγκεκριμένο σημείο.

Μέθοδοι Ιχνηλάτησης Μετώπου, (Front Tracking Methods), (FTM). Η *FTM* εισήχθη από τους *Univerdi & Trygvason, 1992*, για 2-D και 3-D προβλήματα, ώστε να μελετηθεί η κίνηση φυσαλίδων αέρα σε απεριόριστο πεδίο ροής νερού. Η διεπιφάνεια αναπαριστάνεται από ένα ξεχωριστό μη δομημένο πλέγμα, το οποίο κινείται σε σχέση με το στατικό ορθογώνιο πλέγμα, στο οποίο επιλύονται οι εξισώσεις της ροής με μια συνήθη *FDM*. Επειδή η διεπιφάνεια γενικά αλλάζει σχήμα το πλέγμα της ανακατασκευάζεται κάθε χρονική στιγμή.

Στην διεπιφάνεια δίνεται ένα ορισμένο πάχος, λίγο μεγαλύτερο του χωρικού βήματος, μέσα στο οποίο μεταβάλλονται ομαλά οι ιδιότητες των ρευστών από την τιμή που έχουν για ρευστό της σταγόνας, μέχρι την τιμή που έχουν στο περιβάλλον ρευστό. Οι τιμές της ταχύτητας της διεπιφάνειας λαμβάνονται με παρεμβολή από τα σημεία του ορθογώνιου στατικού πλέγματος και χρησιμοποιούνται στην συνέχεια για να προσδιοριστεί η θέση της διεπιφάνειας την επόμενη χρονική στιγμή.

Μεθοδολογία των Ισοσταθμικών Επιφανειών, (Level-Set Method), LSM. Οι LSM αναπτύχθηκαν από τους *Osher & Sethian, 1988*, για την μελέτη της κίνησης επιφανειών που κινούνται με ταχύτητα εξαρτώμενη από την καμπυλότητά τους. Επιπλέον η επιφάνεια μπορεί να έχει μία πρόσθετη ταχύτητα από την μεταφορά της από ένα γνωστό πεδίο ταχυτήτων. Οι LSM χρησιμοποιήθηκαν σε μία σειρά προβλημάτων με κινούμενες επιφάνειες, όπως στη ροή συμπιεστών αερίων, στην δημιουργία και ανάπτυξη κρυστάλλων, στην μοντελοποίηση των εκρήξεων, *Aslan et.al., 1996*, στην στερεοποίηση δενδριτών, *Zhao et.al., 1996*, στη μελέτη των μηχανισμών απόθεσης και επίστρωσης υλικών, *Adasteinsson & Sethian, (2), 1995*, στην κίνηση σταγόνων διαφορετικού ιξώδους και πυκνότητας από το περιβάλλον ρευστό με επιφανειακή τάση, *Hou et.al., 1997*. Πλεονέκτημα της LSM είναι ότι δεν επηρεάζεται από την μορφή διακριτοποίησης της διεπιφάνειας και είναι εφικτό χωρίς προσαρμογή του αλγορίθμου να καθορίζεται ο διαχωρισμός η συνένωση και κάθε αλλαγή της τοπολογίας και πολύπλοκης διεπιφάνειας, *Enright et.al., 2002*. Εντούτοις, αυτές οι μέθοδοι παρουσιάζουν σχετικό βαθμό επιτυχίας στο να προσομοιώσουν σωστά ροές με μεγάλους στροβιλισμούς. Επιπλέον, η LSM μπορεί να χαρακτηριστεί πολύ εύκαμπτη, γιατί είναι ανεξάρτητη από την ανάλυση του αλγορίθμου του πεδίου που καθορίζει τις δυναμικές συνθήκες του προβλήματος.

Τα μειονεκτήματα της VOF έχουν ξεπεραστεί στην LSM⁵⁰, όπου οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των δύο ρευστών φάσεων διακρίνονται από το πρόσημο μιας ομαλής βαθμωτής συναρτήσεως απόστασης ϕ από την διεπιφάνεια. Η διεπιφάνεια δίνεται από την μηδενική ισοϋψή αυτής της ομαλής συναρτήσεως $\phi=0$. Με την μέθοδο εξασφαλίζεται και ο σωστός υπολογισμός της καμπυλότητας πάνω στην διεπιφάνεια. Η μετακίνηση της διεπιφάνειας με μια εξίσωση μεταφοράς, μπορεί να οδηγήσει σε μια ουσιαστική στρέβλωση με την πάροδο του χρόνου της συναρτήσεως των ισοϋψών δηλ. η κλίση της μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή κοντά στην διεπιφάνεια και σε λανθασμένο υπολογισμό της

⁵⁰ *Osher & Fedkiw, 2003, Osher & Sethian, 1988, Sethian, 1999.*

καμπυλότητας, αφού χάνεται η ιδιότητα της συναρτήσεως ϕ να εκφράζει συνάρτηση απόστασης. Αυτό επιδρά δυσμενώς στην σύγκλιση του αλγορίθμου των εξισώσεων $N-S$, όταν υπάρχει επιφανειακή τάση. Για να υπερνικηθεί αυτό το ζήτημα πρέπει να εκτελεσθεί το λεγόμενο βήμα της επαναρχικοποίησης, όπου η τρέχουσα συνάρτηση των ισοϋψών αντικαθίσταται από μια πιο ομαλή λιγότερο παραμορφωμένη συνάρτηση που έχει την ίδια μηδενική ισοϋψή και είναι συγχρόνως συνάρτηση απόστασης.

Εφαρμογές της LSM στις ασυμπίεστες ροές. Οι LSM μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση της κίνησης σύνθετων κινούμενων διεπιφανειών στις 2-D και 3-D. Οι Losasso *et.al.*, 2005 στην επισκόπηση για τις LSM εστίασαν στη βελτίωση που έχει συντελεστεί στην υπολογιστική ακρίβεια της μεθόδου και σε εφαρμογές της σε ασυμπίεστη ροή λόγω της δημοτικότητάς τους και των αυστηρών απαιτήσεων ακρίβειας. Οι Sussman *et.al.*, 1994, χρησιμοποίησαν την LSM σε μια πεπλεγμένη μέθοδο με διφασικές ασυμπίεστες 2-D Navier-Stokes εξισώσεις που διακριτοποιούνται σε ορθογώνιο μετατοπισμένο πλέγμα με μια δεύτερης τάξης ακριβείας μέθοδο προβολών στο χώρο και το χρόνο, και μελέτησαν την κίνηση αεροφουσαλίδων καθώς ανέρχονται στο νερό και σταγόνες νερού να πέφτουν στον αέρα για την περίπτωση περιβαλλοντικής ροής. Ο Καλιακάτσος, 2000 χρησιμοποίησε την παραπάνω μέθοδο για την μελέτη της κίνησης σταγόνας διαφορετικού ιξώδους από το περιβάλλον ρευστό με επιφανειακή τάση μέσα σε απεριόριστο ρευστό.

Οι Losasso *et al.*, 2006 και Zhao *et al.*, 1996 συμφωνούν ότι η διακριτοποίηση της εξίσωσης των ισοϋψών μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική αριθμητική διάχυση που φανερώνεται συνήθως ως απώλεια μάζας (ή όγκου) ή χαρακτηριστική απώλεια πληροφοριών σε περιοχές υψηλής καμπυλότητας ή άλλες μη σωστά επιλυόμενες περιοχές.

Η επαναρχικοποίηση⁵¹, εισάγει αριθμητική διάχυση στη λύση και επιδεινώνει την διατήρηση του όγκου, π.χ. διατήρηση της μάζας στην ασυμπίεστη ροή. Για τον λόγο αυτό, διάφορες τροποποιημένες μέθοδοι επαναρχικοποίησης έχουν αναπτυχθεί για να βελτιώσουν τη διατήρηση της μάζας⁵². Ωστόσο, η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των τεχνικών, καθώς και συμπεριφορά σύγκλισης των όρων της επιφανειακής τάσης μέσα στον επιλυτή πλήρους διφασικής ροής δεν είναι πλήρως κατανοητή, Croce *et.al.*, 2009. Οι Rider & Kothe, 1995 (1) & (2) διαπίστωσαν ότι, όταν οι ίνες ρευστού γίνονται πάρα πολύ λεπτές, για να επιλυθούν

⁵¹ Adalsteinsson & Sethian, 1995, Chen *et.al.*, 1997, Chopp, 1993, Merriman *et.al.*, 1994, Sussman *et.al.* 1994.

⁵² Enright *et.al.*, 2002, Peng *et.al.*, 1999, Russo & Smereka, 2003, Sussman & Fatemi, 1999.

επαρκώς στο πλέγμα, οι *LSM* χάνουν (ή κερδίζουν) μάζα. Αυτό το λάθος μειώνει την ακρίβεια της υπολογισθείσας θέσης της διεπιφάνειας.

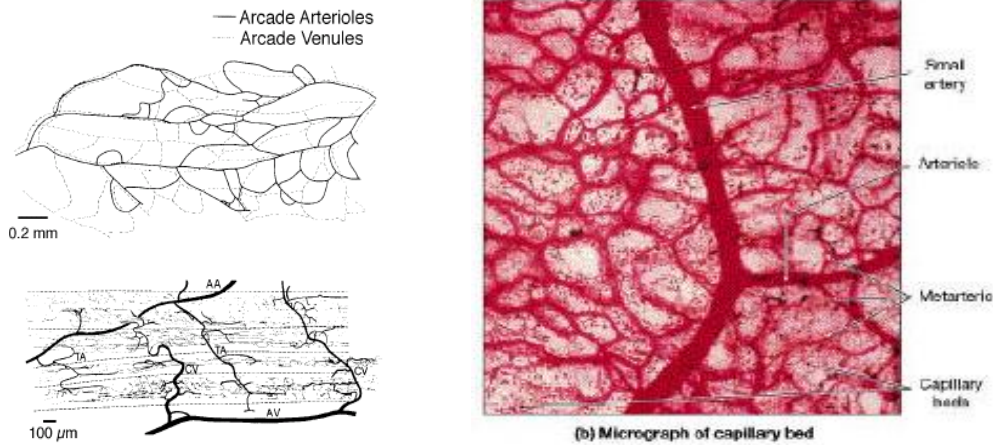
Οι *LSM*, *Osher & Sethian, 1988*, σχεδιάστηκαν να συγχωνεύουν και να χωρίζουν τα χαρακτηριστικά αυτόματα. Ωστόσο στη μηχανική ρευστών δεν υπάρχει ασυνέχεια στο πεδίο ταχύτητας του ρευστού και για αυτό χαρακτηριστικές πληροφορίες του πεδίου δεν επιτρέπεται ποτέ να διαγραφούν γιατί εισάγουν σφάλμα. Αυτή η απροσδιοριστία μπορεί να αναγκάσει την *LSM* να υπολογίσει την αδύνατη λύση στο πρόβλημα και να πάσχει από υπερβολική απώλεια μάζας, όταν υπάρχει έλλειψη πληροφοριών για τη χαρακτηριστική δομή στις κακώς επιλυμένες περιοχές της ροής. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι η σημαντικότερη κριτική που επιβάλλεται ενάντια στις *LSM* για την ασυμπίεστη ροή.

1.12. ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ⁵³

1.12.1. Στοιχεία Φυσιολογίας

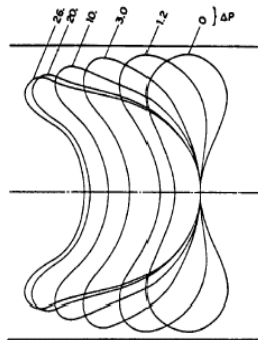
Η *μικροκυκλοφορία* (microcirculation) είναι η ροή μέσα στα τριχοειδή αιμοφόρα αγγεία του κυκλοφορικού συστήματος. Υποστηρίζει το μεταβολισμό των ιστών και συμβάλλει στην ομοίωση του οργανισμού διατηρώντας την πρόπυσα ισορροπία μεταξύ υδροστατικής και ωσμωτικής πίεσης για τη μεταφορά θρεπτικών ουσιών, ενέργειας και συστατικών που μεταφέρουν πληροφορία. Η «κλίμακα» της μικροκυκλοφορίας θεωρείται μεγαλύτερη από τα κύτταρα και τα επιμέρους στοιχεία (π.χ. κύλινδρος ιστού *Krogh*) και μικρότερη από τα όργανα. Η ενδοαγγειακή διάχυση είναι ασήμαντη στο επίπεδο των τριχοειδών και οι μεταφορικές κινήσεις στηρίζονται στην υπόθεση *Starling-Landis* για συνολική ισορροπία μεταξύ ωσμωτικής και υδροστατικής πίεσης. Η υπέρσχυση της υδροστατικής πίεσης πάνω στην ωσμωτική πίεση στο τέλος των αρτηριολίων προκαλεί εκροή.

⁵³ Περιέχονται γενικές έννοιες και περιγραφή που συνοψίζουν διάφορες βιβλιογραφικές πηγές, π.χ. *Τσαγγάρης, 1996*.



Σχ.1.3. *Human Anatomy, 3rd. ed., Martini et.al., Fig. 22-4, p.567.*

Η υπέρσχυση της ωσμωτικής πίεσης πάνω στην υδροστατική πίεση στο τέλος των φλεβών προκαλεί εισροή (επιστροφή). Η ροή έξω από το τριχοειδές (Extra-capillary) εκπλύνει τον ιστό και βελτιώνει τη μεταφορά τύπου διάχυσης.⁵⁴



Σχ.1.4. Παραμόρφωση του RBC μέσα στα τριχοειδή αγγεία (Υπολογισμοί του R.Skalak).

Η μικροκυκλοφορία είναι μία στοχαστική δομή⁵⁵ από άποψη ανατομίας και χωρο-χρονοεξαρτώμενης μεταβλητότητας (π.χ. στη ρύθμιση της λειτουργίας της μεταφοράς ή την ανώμαλη λειτουργία των WBC). Στις περισσότερες των περιπτώσεων παραμετροποιείται ως κατανομή και σε λίγους μόνο ιστούς είναι επαρκές ένα προκαθορισμένο μοντέλο.

⁵⁴ Τα αγγειακά τοιχώματα διαφοροποιούνται ανάλογα με το σύστημα και τον συγκεκριμένο ιστό (π.χ. φραγμός αίματος εγκεφάλου). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διακυτταρική κυκλοφορία, η κυκλοφορία σε "σφιχτούς κόμβους" και ο καθορισμός μοντέλων για την περιγραφή και την λειτουργία του χώρου έξω από τα αγγεία (extravascular), των "οργανωμένων" ιστών, όπως ο κύλινδρος *Krogh* που εφαρμόζεται στους μύες. Ο προσδιορισμός των ανοικτών τριχοειδών και η ταχύτητα ροής μέσα σ' αυτά. Η μελέτη αποδιοργανωμένων δομών.

⁵⁵ Διαδικασία η οποία εμπλέκει τυχαία επιλεγμένη ακολουθία παρατηρήσεων κάθε μία από τις οποίες θεωρείται μια εκδοχή ενός στοιχείου.

Χρησιμοποιούνται ακόμη μοντέλα τύπου *Fractal* και μοντέλα διακλάδωσης. Υπάρχουν επίσης οι δρόμοι της κλασσικής και της γονιδιωματικής φυσιολογίας⁵⁶.

1.12.2. Η σύσταση και ο ρόλος του αίματος.

Από λειτουργικής απόψεως το αίμα *Bitsch, 2002* είναι το υγρό της ζωής που μεταφέρει οξυγόνο, διοξείδιο του άνθρακα, θρεπτικά συστατικά, άλατα, ορμόνες, προϊόντα του μεταβολισμού και πολλά άλλα συστατικά. Από φυσικής απόψεως στην υγρή του κατάσταση είναι εναιώρημα κυτταρικών στοιχείων. Περιέχει ερυθρά αιμοσφαίρια (*RBC*), λευκά αιμοσφαίρια (*WBC*), αιμοπετάλια και το πλάσμα. Το ανθρώπινο αίμα, *Κουτσούρης et.al., 2003*, Σελ.79, §2.4.) έχει ειδικό βάρος περίπου 1.06 gr/cm^3 και συνεκτικότητα ή ιξώδες ή εσωτερική τριβή ή γλοιότητα $3.5-5 \text{ cpoise}$. Το πλάσμα⁵⁷ είναι υδατικό διάλυμα ηλεκτρολυτών και ουδέτερων μορίων με ειδικό βάρος 1.026 gr/cm^3 που περιέχει 90% (w/w) ύδωρ⁵⁸, 7% (w/w) πρωτεΐνες⁵⁹ και⁶⁰ Αλβουμίνες (*Albumins*) $4.5-5.7 \times 10^{-5} \text{ g } \mu\text{L}^{-1}$, Σφαιρίνες (*Globulins*) $1.3-2.5 \times 10^{-5} \text{ g } \mu\text{L}^{-1}$, Ινωδογόνο (*Fibrinogen*) $1.3-2.5 \times 10^{-5} \text{ g } \mu\text{L}^{-1}$. Επίσης *Solomon et.al., 1996*, άλατα, διαλυμένα αέρια, ορμόνες, γλυκόζη, μεταβολίτες (*metabolites*), θρεπτικά συστατικά Συμπεριφέρεται⁶¹ ως Νευτώνειο ρευστό με σταθερή συνεκτικότητα 1.8 cp ($1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$). Το πλάσμα ενώ είναι επίσης εναιώρημα, δεν παρουσιάζει την ίδια μη Νευτώνεια συμπεριφορά με το πλήρες αίμα.

Τα κυτταρικά συστατικά: Τα λευκά αιμοσφαίρια (*WBC*) $6 \times 10^3 \text{ κύτταρα}^{62} / \text{mm}^3$ ή ($5-10 \times 10^3 \mu\text{L}$ ⁶³ χαρακτηρίζονται⁶⁴ από υψηλό εσωτερικό ιξώδες και είναι σχεδόν σφαιρικά διαμέτρου⁶⁵ $8-20 \mu\text{m}$. Τα αιμοπετάλια (*Platelets*) με μέγεθος $1-2 \mu\text{m}$, $1.5-4.0 \times 10^5 \mu\text{L}^{-1}$ κατά⁶⁶ ($3 \times 10^3 \text{ κύτταρα} / \text{mm}^3$)⁶⁷.

Τα ερυθροκύτταρα⁶⁸ (*RBC*), $5 \times 10^6 \text{ κύτταρα} / \text{mm}^3$ είναι απύρνηνοι κυτταρικοί σάκοι⁶⁹ με σχήμα δισκοειδών αμφίκυκλων παραμορφώσιμων δίσκων διαμέτρου⁷⁰ $7.8 \mu\text{m} \pm 0.62 \mu\text{m}$ που

⁵⁶ Η κλασσική φυσιολογία εξάγει συμπεράσματα με επαγωγή: χωρίς να δεσμεύεται από τις υποδομές που χρησιμοποιεί. Η γονιδιωματική φυσιολογία προχωρά σε συμπεράσματα με αφαίρεση λαμβάνοντας υπόψη μόνο συμπεράσματα από τις υποδομές που χρησιμοποιεί.

⁵⁷ *Κουτσούρης et.al. 2003.*

⁵⁸ *Fung, 1984.*

⁵⁹ *Fung, 1984.*

⁶⁰ *West & Todd, 1961.*

⁶¹ *Hyman & Skalak, 1972.*

⁶² *Κουτσούρης et.al. 2003.*

⁶³ *Solomon et.al. 1996.*

⁶⁴ *Hyman & Skalak, 1972.*

⁶⁵ *Solomon et.al. 1996.*

⁶⁶ *Solomon et.al. 1996.*

⁶⁷ *Κουτσούρης et.al. 2003.*

⁶⁸ $3.6-5.4 \times 10^6 \mu\text{L}^{-1}$ *Solomon et.al., 1996.*

περιέχουν συγκεντρωμένο διάλυμα με 25% κατ' όγκο αιμοσφαιρίνη και 70% H₂O. Το πάχος της κυτταρικής μεμβράνης είναι $0.81 \mu\text{m} \pm 0.35 \mu\text{m}$ ($2.5 \mu\text{m}$)⁷¹. Το ειδικό βάρος των RBC είναι 1.090 gr/cm^3 . Η κυτταρική μεμβράνη⁷² (σελίδα 87) είναι ανάλογη ενός «μωσαϊκού ρευστού» από λιπίδια, υδατάνθρακες και πρωτεΐνες. Οι υδατάνθρακες είναι υπεύθυνοι για το αρνητικό φορτίο της επιφάνειας της μεμβράνης.

1.12.3. Μακροσκοπικές ρεολογικές ιδιότητες του αίματος⁷³

Η διέλευση των ερυθρών αιμοσφαιρίων στην μικροκυκλοφορία θεωρείται θεμελιώδες πρόβλημα στην φυσιολογία και την βιορευστομηχανική, *Skalak, et.al., 1989*, γιατί συσχετίζεται με τις ρεολογικές ιδιότητες και τη μεταφορά του αίματος στα τριχοειδή αγγεία, σε διελεύσεις ιστών και οστών αλλά και με την υδροδυναμική της αιματικής ροής στο όλο κυκλοφορικό σύστημα. Ενδιαφέρει άμεσα ένα ευρύ φάσμα βιολογικών και μηχανολογικών εφαρμογών *Lissant, 1974, Skalak et.al., 1989*, όπως δίκτυα και συσκευές αιμοκάθαρσης, υποστήριξης της κυκλοφορίας του αίματος και της καρδιακής λειτουργίας. Συσχετίζεται επίσης με ροές γαλακτωμάτων και αφρών σε αγωγούς και πορώδη μέσα.

Ο όρος πλήρες αίμα (*HWB*) χρησιμοποιείται για το αίμα που δεν έχει τροποποιηθεί με οποιαδήποτε φυσική έννοια, π.χ. έχουν απομακρυνθεί οι ίνες με ανάδευση. Αιματοκρίτης (*hematocrit*), *Hct* ορίζεται ως η επί τοις εκατό κατ' όγκο (στα 100 mL) περιεκτικότητα του αίματος σε έμμορφα στοιχεία που κυρίως είναι τα RBC. Η μέση τιμή του είναι 40–52% για τους άνδρες, και 35–47% για τις γυναίκες. Ο αιματοκρίτης χρησιμοποιείται ως παράμετρος για την μοντελοποίηση της ροής του αίματος.

Η διάμετρος στα μικρά τριχοειδή, *Hyman & Skalak, 1972*, είναι της ίδιας τάξεως με την διάμετρο των ερυθρών αιμοσφαιρίων, και είναι σχετικά ανελαστική στις φυσιολογικές πιέσεις. Τα μήκη των τριχοειδών είναι της τάξεως των 100 με 1.000 μm και η μέση ταχύτητα ροής σε τριχοειδές είναι της τάξης του 1 mm/sec . Ο αριθμός *Reynolds* μίας τυπικής ροής μέσα στο τριχοειδές είναι μικρότερος από το 10⁻². Η μεγάλη παραμορφωσιμότητα της μεμβράνης επιτρέπει την διόδο του RBC μέσα από τριχοειδή αγγεία διαμέτρου 5 μm . Το RBC εισχωρεί και 0.5 μm μέσα στο ενδοθηλιακό τοίχωμα ακόμη και σε τριχοειδή διαμέτρου 2.8 μm δηλ. μικρότερης από την διάμετρο του RBC.

⁶⁹ Κουτσούρης *et.al.*, 2003, σελ.84.

⁷⁰ Στην βιβλιογραφία υπάρχει κάποια διακύμανση της μέσης διαμέτρου των ερυθρών κυττάρων του αίματος μεταξύ 7-8 μm , π.χ. 7 μm , *Solomon et.al.*, 1996, 8 μm , *Hyman & Skalak, 1972*.

⁷¹ *Hyman & Skalak, 1972*.

⁷² *Κουτσούρης et.al. 2003*.

⁷³ *Bitsch, 2002*.

Για μικρότερη διάμετρο έχει παρατηρηθεί *αιμόλυση* δηλ διασπάται η κυτταρική μεμβράνη και έχουμε απώλεια της αιμοσφαιρίνης, το λεγόμενο μηχανικό τραύμα. Επειδή το αίμα έχει μακροσκοπικά πυκνότητα 1.06 gr/cm^3 , το RBC 1.10 gr/cm^3 και το πλάσμα 1.03 gr/cm^3 κατά συνέπεια τα κύτταρα τείνουν να καθιζάνουν με αργό ρυθμό μέσα στο πλάσμα, γιατί η ανωστική δύναμη στα ερυθροκύτταρα είναι μικρή στην τυπική τριχοειδή ροή. Ο ρυθμός αυτός εξαρτάται από το μέγεθος των κυττάρων. Όταν το αίμα μένει αδιατάραχτο, ενεργοποιείται η διαδικασία που ονομάζεται πήξη του αίματος από την πρωτεΐνη ινωδογόνο του πλάσματος⁷⁴.

1.12.4. Παραμορφωσιμότητα του RBC.

Κατά τον *Bitsch, 2002*, επειδή το πλάσμα παρουσιάζει Νευτώνεια⁷⁵ συμπεριφορά είναι προφανές ότι τα ερυθρά αιμοσφαίρια είναι υπεύθυνα για την μη Νευτώνεια⁷⁶ συμπεριφορά του αίματος. Τα ερυθρά αιμοσφαίρια είναι σχετικά μεγάλα και η κίνηση τους τύπου *Brown* έχει μικρή επίδραση στη ροή. Το ιξώδες του αίματος μειώνεται με την αύξηση του ρυθμού διάτμησης. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί από την ικανότητα των κυττάρων του αίματος να ευθυγραμμίζονται και να παραμορφώνονται στη ροή. Τα ερυθρά αιμοσφαίρια, συντάσσονται κατά τρόπο ώστε η μεγαλύτερη διάσταση να είναι παράλληλη με την κατεύθυνση της ροής. Το κλάσμα των κυττάρων που ευθυγραμμίζονται αυξάνει με τον ρυθμό διάτμησης. Η ροή σταγόνων ελαίου σε νερό, και το αίμα διατηρούνται σε πολύ υψηλό κλάσμα όγκου. Συνεπώς σταγονίδια και RBC έχουν παρόμοια ελαστική συμπεριφορά. Έχει παρατηρηθεί ότι, όταν η περιεκτικότητα της διαχεόμενης φάσης υπερβαίνει το 50%, τα

⁷⁴ Σε πειράματα απομακρύνεται ινωδογόνο για την πρόληψη της πήξης του αίματος (blood clotting). Σε πολλά ρεολογικά πειράματα στο πλήρες αίμα χορηγείται ως αντιπηκτικό (anticoagulant) ηπαρίνη, EDTA ή κιτρικό οξύ που έχουν επίδραση και στο ιξώδες του αίματος. Υπάρχουν 13 γνωστοί παράγοντες που συμβάλλουν στην πήξη του αίματος και η διαδικασία της θρόμβωσης (clotting process) μπορεί να σταματήσει σε οποιοδήποτε από αυτά τα στάδια, *Bitsch, 2002*.

⁷⁵ Όταν ένα ρευστό είναι Νευτώνειο π.χ. το νερό, η καμπύλη τάσεων-ρυθμού παραμόρφωσης είναι γραμμική και διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων με σταθερά αναλογίας το ιξώδες. Η εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά ενός Νευτώνειου ρευστού είναι $\tau = \mu \cdot \frac{du}{dx}$, όπου τ είναι η διατμητική τάση που ασκείται από το ρευστό "drag", σε Pa, μ είναι το ιξώδες του ρευστού σε Pa·s και $\frac{du}{dx}$ είναι η κλίση της ταχύτητας κάθετα προς την κατεύθυνση της διάτμησης σε s^{-1} .

⁷⁶ Όταν ένα ρευστό είναι μη Νευτώνειο, το ιξώδες αλλάζει με τον ρυθμό παραμόρφωσης και απαιτείται κατάλληλος προσδιορισμός του για να περιγράψει τη μηχανική συμπεριφορά του ρευστού. Μελετάται μαζί με άλλες ρεολογικές ιδιότητες που αφορούν τις σχέσεις τάσεων και ταυσιών παραμόρφωσης κάτω από διάφορες συνθήκες ροής, όπως διάτμηση λόγω ταλάντωσης, ή εκτατική ροή και μπορεί να μετρηθεί πειραματικά. Οι ιδιότητες μελετώνται καλύτερα χρησιμοποιώντας καταστατικές εξισώσεις για τις τιμές των τάσεων, όπως συνηθίζεται στην συνεχή μηχανική.

περισσότερα υγρά σταματούν να ρέουν ενώ το αίμα, μπορεί να διατηρεί τη ροή μέχρι αιματοκρίτη 98%. Ωστόσο, ένα εναιώρημα σταγονιδίων πετρελαίου είναι πιο παχύρρευστο από ένα εναιώρημα ερυθρών αιμοσφαιρίων και συνεπώς, πιστεύεται ότι το *RBC* είναι περισσότερο παραμορφώσιμο από μία σταγόνα.

Rouleaux (μικροί κύλινδροι), είναι στίβες ερυθρών αιμοσφαιρίων που σχηματίζονται λόγω του χαρακτηριστικού δισκοειδούς σχήματος των κυττάρων αυτών μέσα στο αγγείο. Η επίπεδη επιφάνεια του δισκοειδούς *RBC* προσφέρεται για να έρθουν σε επαφή τα ερυθροκύτταρα και να κολλήσουν μεταξύ τους σχηματίζοντας *rouleux*. Το φαινόμενο παρουσιάζεται⁷⁷, όταν η συγκέντρωση στο πλάσμα είναι υψηλή σε πρωτεΐνες με αποτέλεσμα το *ESR* (ποσοστό καθίζησης ερυθροκυττάρων) να είναι αυξημένο. Η αναιμία αλλοιώνοντας το κλάσμα των *RBC* στο πλάσμα αυξάνει το σχηματισμό *rouleaux* και επιταχύνει την καθίζηση. Ο σχηματισμός *rouleaux* καθυστερεί με τις πρωτεΐνες λευκωματίνες (albumin). Τα *rouleaux* μπορούν να διασπαστούν σε απλά κύτταρα σε κατάσταση μεγάλων διατμητικών παραμορφώσεων. Το μεγάλο ιξώδες σε χαμηλούς ρυθμούς διάτμησης είναι συνέπεια ταλαντωτικών μικροκινήσεων. Όταν τα *rouleaux* σπάζουν, το ιξώδες μειώνεται. Τα μικρότερα τμήματα δεν διαταράσσουν τη ροή στον ίδιο βαθμό σε σχέση με την μεγαλύτερη στιβάδα. Ο σχηματισμός *rouleaux* δεν πρέπει να συγχέεται με την πήξη του αίματος, η τελευταία αυτή διαδικασία είναι εντελώς αμετάκλητη, *Tsubota, Wada, 2010*.

Ακόμη και αν το αίμα φαίνεται να έχει την ίδια λειτουργία σε όλα τα θηλαστικά προφανώς υπάρχουν κάποιες διαφορές. Για παράδειγμα, στο αίμα των βοοειδών τα ερυθρά αιμοσφαίρια δεν σχηματίζουν *rouleaux* και η συμπεριφορά τους αποκλίνει λιγότερο από του Νευτώνειου ρευστού σε σχέση με το *HWB*. Για να αναλυθεί το αίμα άλλων ειδών σε μικροσυστήματα, είναι απαραίτητο να εξεταστεί η φύση των εν λόγω τύπων αίματος πιο λεπτομερώς.

Το φαινόμενο ιξώδες (apparent viscosity)⁷⁸ του αίματος στη φυσιολογία⁷⁹ συνδέεται με την ικανότητα παραμόρφωσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων και την απρόσκοπτη διέλευση τους

⁷⁷ Στις συνθήκες που το δημιουργούν περιλαμβάνονται λοιμώξεις, φλεγμονές, κακώσεις του συνδετικού ιστού και καρκίνοι. Επίσης παρουσιάζεται σε διαβητικούς και αποτελεί έναν από τους αιτιώδεις παράγοντες για μικροαγγειακή σύγκλιση (occlusion) στην διαβητική αμφιβληστροειδοπάθεια. Οι πρωτεΐνες οξείας φάσης ιδιαίτερα το ινωδογόνο αλληλεπιδρούν με το σιαλικό οξύ στην επιφάνεια του *RBC* και επιτρέπουν τη διαμόρφωση των *rouleaux*.

⁷⁸ Το ιξώδες ενός υγρού μετρείται σε συγκεκριμένο όργανο για καθορισμένο ρυθμό διάτμησης ως συνάρτηση του πλαστικού ιξώδους και του σημείου διαρροής του συγκεκριμένου ρευστού. Το φαινόμενο ιξώδες σε *centipoise (cP)*, όπως καθορίζεται από το ιξωδόμετρο άμεσης ένδειξης ισούται με το 1/2 της ένδειξης στις 600 rpm.

⁷⁹ *Chien et.al., 1967, Fitz-Gerald, 1969.*

μέσα από τα τριχοειδή από τα οποία προέρχεται ένα σημαντικό μέρος της συνολικής αντίστασης της ροής του αίματος. Στην δρεπανοκυτταρική αναιμία που χαρακτηρίζεται από αυξημένη ακαμψία των ερυθροκυττάρων, παρατηρείται πολύ μεγάλη αντίσταση στην μικροκυκλοφορία. Το ερυθρό αιμοσφαίριο είναι κανονικά αρκετά παραμορφώσιμο και η τάση της μεμβράνης ενός RBC είναι μικρή, *Fung, 1966*, ωστόσο οι ελαστικές δυνάμεις που τείνουν να διατηρήσουν το σχήμα του ερυθροκυττάρου θεωρείται ότι παίζουν στο μοντέλο αυτό τον ρόλο της επιφανειακής τάσης. Για την μοντελοποίηση των παραμορφώσεων του ρευστού, χρησιμοποιούνται καταστατικές εξισώσεις, *Bitsch*, που περιγράφουν τις ειδικές ιδιότητες του ρευστού που υπεισέρχονται στις δυναμικές εξισώσεις. Χαρακτηριστικές εξισώσεις περιέχονται στον πίνακα 3.2., *Bitsch*. Πολλές από αυτές τις εξισώσεις προσφέρονται για κλινικές χρήσεις και διάγνωση ασθενειών, γιατί περιέχουν πληροφορίες για την ακαμψία των κυττάρων του αίματος π.χ., η Bi-εκθετική εξίσωση περιέχει τους δείκτες *A* και *D* που σχετίζονται με την στιβαδοποίηση και την παραμορφωσιμότητα των ερυθροκυττάρων. Η ρεολογία του αίματος μακροσκοπικά έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς για το σκοπό αυτό, *Lowe & Barbenel, 1988*. Επειδή η διατμητική ροή μέχρι σήμερα, δεν μπορεί να περιγραφεί από μία μόνο καταστατική εξίσωση, είναι απαραίτητες πληροφορίες σχετικές με το μέγεθος του ρυθμού παραμόρφωσης στα αγγεία.

Αποτέλεσμα Lindquist και Fahraeus (*Fahraeus-Lindquist effect*). Από το 1931 βρέθηκε ότι το ιξώδες μειώνεται, όταν το αίμα ρέει σε ένα σωλήνα με διάμετρο μικρότερη από 500 μm , δηλαδή, το ιξώδες ήταν χαμηλότερο στον ιξωδομετρικό σωλήνα παρά στην τροφοδοτική δεξαμενή. Η επίδραση αυτή είναι γνωστή ως το αποτέλεσμα *Fahraeus-Lindquist*. Ο *Fâhraeus* απέδωσε το φαινόμενο, σε μείωση του αιματοκρίτη. Σύμφωνα με τον *Fung, 1984*, οι *Barbee & Cokelet, 1971*, για ρυθμούς ροής, όπου αναμένεται Νευτώνεια συμπεριφορά, έδειξαν ότι το αποτέλεσμα *Fahraeus* μπορούσε να μετρηθεί για σωλήνες με ακτίνα μεταξύ 29 και 221 μm . Το φαινόμενο αυτό συνδέεται με τη θεωρία της ελεύθερης ζώνης από κύτταρα κοντά στο τοίχωμα που θεωρείται όλο και μεγαλύτερης σημασίας στις μικρές διαστάσεις. Διαπιστώθηκε επίσης ότι ο αιματοκρίτης στον ιξωδομετρικό σωλήνα αυξάνεται γραμμικά με τον αιματοκρίτη στην τροφοδοτική δεξαμενή, *Barbee & Cokelet*.

Ο *Fâhraeus* παρατήρησε ότι ο ρυθμός της ογκομετρικής ροής (volumetric flow rate) της διασπειρόμενης φάσης, δηλαδή των κυττάρων είναι μεγαλύτερη από τον αντίστοιχο ρυθμό της συνολικής διασποράς. Η διαφορά είναι πιο αισθητή σε αγγεία των οποίων η διάμετρος είναι μικρότερη από 300 μm , *Gaehtgens, 1984*. Έτσι, αν η διασπορά συλλεχθεί στο άκρο ενός σωλήνα, το κλάσμα του όγκου των εξαγομένων κυττάρων, που ονομάζεται αιματοκρίτης εκκένωσης (discharge), θα είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα του όγκου στο

εσωτερικό του σωλήνα, που ονομάζεται αιματοκρίτης σωλήνα. Μια σημαντική επίπτωση του αποτελέσματος *Fåhræus* είναι ότι ο ονομαστικός αιματοκρίτης, που ταυτίζεται με τον αιματοκρίτη σωλήνα στην μικροκυκλοφορία κατανέμεται άνισα στο καρδιαγγειακό σύστημα.

Η κλίση της πίεσης, *Secomb, 1991*, που είναι η αιτία της ροής του αίματος μέσα στα τριχοειδή μπορεί να εκφράζεται με τον όρο αποτελεσματικό ή φαινόμενο ιξώδες. Καθώς η διάμετρος του αγγείου μειώνεται, το φαινομενικό ιξώδες μειώνεται λόγω της προαναφερθείσας ανάπτυξης της δακτυλιοειδούς ζώνης χωρίς κύτταρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα *Fåhræus-Lindqvist*. Όταν η ακτίνα του τριχοειδούς γίνεται συγκρίσιμη με τη μέγιστη διάμετρο του απαραμόρφωτου ερυθροκυττάρου, το φαινόμενο ιξώδες φθάνει σε ένα ελάχιστο και στη συνέχεια αρχίζει να αυξάνεται, λόγω μηχανικού αποκλεισμού (occlusion). Φυσικά, τα ερυθροκύτταρα συνωθούνται, *Halpern & Secomb, 1989*, μέσα στα μικροτριχοειδή. Όταν η ακτίνα του τριχοειδούς φθάσει ένα κατώτατο όριο που είναι περίπου ίσο με 1.42 μm , τα κύτταρα δεν παραμένουν ανέπαφα κατά την μετακίνησή τους μέσω του τριχοειδούς, και το φαινόμενο ιξώδες της διασποράς γίνεται άπειρο.

Αιμόλυση. Όταν το κύτταρο διασπείρεται σε ένα μέσο με χαμηλότερη ωσμωτική συγκέντρωση από το εσωτερικό του κυττάρου, διογκώνεται και διαλύεται σαν αποτέλεσμα της ωσμωτικής πίεσης, *Bitsch, 2002*. Λύση μπορεί να προκύψει, εάν το κύτταρο εκτεθεί σε μεγάλες διατμητικές τάσεις. Μεγάλες διατμητικές τάσεις αντιστοιχούν, *Chang et.al., 2000*, σε ένα εύρος ρυθμού παραμόρφωσης $30-90 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$, αλλά η ζημία εξαρτάται επίσης από το χρόνο έκθεσης. Διάφορες επιφάνειες μπορούν επίσης να επηρεάσουν την αιμόλυση. Η αιμόλυση μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά μετρώντας την συγκέντρωση της αιμοσφαιρίνης που ελευθερώνεται στο εξωκυττάριο μέσο.

1.13. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ

Οι θεωρητικές βιορευστοδυναμικές μελέτες του *Secomb, 1991, 1995, 2003*, αφορούν την αξονοσυμμετρική κίνηση των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε κυλινδρικά τριχοειδή με δύο κύριους στόχους: να προβλέψουν τη σχέση της ταχύτητας ροής των σωματιδίων προς τη συνολική ροή και να εκτιμήσουν το φαινόμενο ιξώδες των διασπορών.



Σχ.1.5. Παραμόρφωση ερυθρών σε τριχοειδή. *Skalak, Branemark, 1969*.

Στους μικροσωλήνες η ροή είναι πάντα στρωτή, και η εκτίμηση του προφίλ της ταχύτητας του αίματος γίνεται από την εξίσωση της κίνησης του και την καταστατική εξίσωση του Νεύτωνα, *Bitsch*. Τα συστήματα συγκρίνονται με μελέτη του προφίλ της ταχύτητας σε μικροσωλήνα, καθώς παρέχουν πληροφορίες για την καταστατική εξίσωση. π.χ. ο *Fung, 1984*, πραγματοποίησε μετρήσεις του προφίλ της ταχύτητας ροής του αίματος σε σωλήνα με διάμετρο περίπου 70 μm . Ορισμένα από τα χαρακτηριστικά των *RBCs* που παρατήρησε είναι ότι σε χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης αυτά σχηματίζουν στιβάδες και αναπτύσσουν μη παραβολικά προφίλ ταχύτητας μέσα στον σωλήνα. Παραμορφώνονται εύκολα σε υψηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης, και είναι πιο ευέλικτα από τις σταγόνες υγρού. Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι η τάση των κυττάρων να μεταναστεύουν μακριά από στερεές επιφάνειες. Το φαινόμενο αυτό, που αναφέρεται ως τοιχωματική δράση (*wall-effect*), εξηγείται με την παραμορφωσιμότητα των κυττάρων. Η τοιχωματική δράση παρατηρείται τόσο για σφαίρες υγρού όσο και για άκαμπτες σφαίρες σε υψηλά ποσοστά διάτμησης. Η συγκέντρωση των κυττάρων είναι αυξημένη προς την κατεύθυνση της κεντρικής γραμμής του αγωγού και πιο έντονη με την αύξηση του ιξώδους του διασπειρομένου υγρού.

Ο *Bitsch, 2002* μοντελοποίησε την ροή του αίματος στην μικρομετρική κλίμακα χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων Νευτώνειων ρευστών, όπου το φαινόμενο ιξώδες περιγράφεται ως συνάρτηση των βαθμωτών σταθερών του τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης. Ο μη γραμμικός χαρακτήρας της καταστατικής εξίσωσης μετρήθηκε με περιστρεφόμενο ροόμετρο και με τις μετρήσεις κατασκευάστηκε μια καταστατική εξίσωση με το εκθετικό μοντέλο, που χρησιμοποιήθηκε σε *CFD* προσομοιώσεις μέσα σε απλούς μικροσωλήνες. Μελέτησε την συσχέτιση ανάμεσα στο ιξώδες και την απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων πλακών σε διάτμηση.

Στη ροή *RBC* στην μικροκυκλοφορία οι παρατηρήσεις *in vivo* και *in vitro*, *Skalak & Branemark, 1969*, έχουν δείξει ότι η διασπορά των κυττάρων κατά μήκος τριχοειδούς με διάμετρο συγκρίσιμη ή μικρότερη από τη μέγιστη διάμετρο των κυττάρων, σχηματίζουν μια ελάχιστα μη αξονοσυμμετρική διάταξη μία σειράς, όπως φαίνεται στο Σχ.1.5. Κατά τη διάρκεια της κίνησης υπό την επίδραση της ροής λόγω διαφοράς πίεσης, η μεμβράνη περιστρέφεται αργά γύρω από το εσωτερικό των κυττάρων. Οι ρεολογικές ιδιότητες του αίματος σε διατμητική ροή, *Fung, 1984*, χαρακτηρίζεται από τον ρυθμό παραμόρφωσης του ρευστού

$$\dot{\gamma} = 0.5 \cdot \dot{\gamma}_{old} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) \quad (1.10.),$$

όπου v_i είναι η ταχύτητα στην κατεύθυνση x_i . Ο ρυθμός διάτμησης ορίζεται $\dot{\gamma} = 0.5 \cdot \dot{\gamma}_{old}$, όπου $\dot{\gamma}_{old}$ είναι ο ρυθμός διάτμησης σύμφωνα με παλιά σύμβαση που ακόμη χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία. Το φαινόμενο ιξώδες δηλ. η σχέση μεταξύ διατμητικής τάσης και ρυθμού παραμόρφωσης, αυξάνει με τον αιματοκρίτη, *Fung, 1984*. Για μηδέν αιματοκρίτη όλα τα ρευστά συμπεριφέρονται Νευτώνεια. Για μικρό ρυθμό παραμόρφωσης η συνάθροιση (ομαδοποίηση) των κυττάρων έχει μεγάλη επιρροή στο ιξώδες. Η επίδραση της συνάθροισης των κυττάρων είναι μέγιστη σε μέτριους αιματοκρίτες και αυτό φανερώνει τη σημασία της συνάθροισης και παραμόρφωσης των RBC για αιματοκρίτη 45%. Σε υψηλούς ρυθμούς διάτμησης η παραμορφωσιμότητα είναι σημαντική για το αποτέλεσμα διατμητικής αραίωσης (shear thinning effect).

1.14. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΤΟΥ ΑΙΜΑΤΟΣ.

Η αριθμητική μοντελοποίηση της μικροκυκλοφορίας του αίματος δηλ. η σχέση μεταξύ της κίνησης των σταγόνων και της κίνησης των κυττάρων του αίματος σε τριχοειδείς σωλήνες αποτέλεσε κίνητρο για την εκτέλεση αυτής της έρευνας και αντικείμενο εφαρμογής των μεθόδων που αναπτύξαμε για τις διφασικές ροές. Σε αρχικές μελέτες τα κύτταρα μοντελοποιήθηκαν ως *συσφαιρώματα (pellets)* από ελαστικό στερεό. Οι *Hyman & Skalak, 1972*, μοντελοποίησαν πρώτοι από τη σκοπιά της διφασικής ροής, τη ροή του αίματος στα τριχοειδή ως αξονοσυμμετρική ροή, μέσα σε άκαμπτο σωλήνα. Παραμορφώσιμες σταγόνες (ερυθρά και λευκά αιμοσφαίρια) ενός ασυμπίεστου Νευτώνειου υγρού διασπείρονται σε άλλο Νευτώνειο υγρό (πλάσμα) σε ροή χωρίς αδράνεια (αριθμός Reynolds $\ll 1$), θεωρώντας ότι επενεργεί επιφανειακή τάση στην διεπιφάνεια των δύο ρευστών. Στο μοντέλο αρχικά οι σταγόνες είναι σφαιρικές, σε κατάσταση ηρεμίας και ουδέτερα επιπλέουσες. Η διεπιφάνεια υγρού-υγρού με επιφανειακή τάση εκπροσωπεί το όριο ρευστό-μεμβράνη-ρευστό που απαιτεί ταίριασμα των ταχυτήτων του ρευστού στο όριο δημιουργώντας μια σταθερή κυκλοφορία στο εσωτερικό των σταγόνων⁸⁰.

Τα μη Νευτώνεια χαρακτηριστικά της διασποράς επαληθεύτηκαν ότι είναι ποιοτικά παρόμοια με τα χαρακτηριστικά της ροής του αίματος στα τριχοειδή. Η παραμόρφωση των σταγόνων-αιμοσφαιρίων, που εξαρτάται από την ταχύτητα ροής μειώνει σημαντικά τη πτώση πίεσης σε σχέση με μια διασπορά άκαμπτων σφαιρών ή σφαιρικών (μη

⁸⁰ Στην περίπτωση μεμβράνης μπορεί να μην υπάρχει αντίστοιχη κυκλοφορία.

παραμορφώσιμων) υγρών σταγόνων. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα μηχανισμό μη Νευτώνειας συμπεριφοράς της διασποράς ως σύνολο, και αποδίδεται στην ευελιξία των στοιχείων της διασποράς. Τα σχήματα των υγρών σταγόνων που προκύπτουν είναι παρόμοια με τα σχήματα των ερυθρών αιμοσφαιρίων που έχουν παρατηρηθεί σε στενό γυάλινο τριχοειδή σωλήνα καθώς και στα αιμοφόρα αγγεία. Το σχήμα των σταγόνων σε μόνιμη κατάσταση διαπιστώνεται ότι εξαρτάται πρωτίστως από τις κάθετες τάσεις στη διεπιφάνεια όπως και είναι ποιοτικά παρόμοια με την παραμόρφωση του *RBC*.

Οι *Zarda et.al., 1977* χρησιμοποιούν τη θεωρία λεπτού περιβλήματος (*thin-shell theory*) για να λάβουν υπόψη την εικονική μη συμπίεστικότητα και τις ελαστικές ιδιότητες της κυτταρικής μεμβράνης. Οι *Skalak & Tâzeren, 1980, Skalak et.al., 1989, Ôzkaya, 1986*, χρησιμοποίησαν τις *FEM* για την επίλυση των υδροδυναμικών εξισώσεων για χαμηλό αριθμό *Reynolds* γύρω από σταθερά μεταφερόμενο κύτταρο. Οι *Secomb⁸¹ et.al.* ανέπτυξαν ένα πιο εύχρηστο μοντέλο για πολύ πυκνά τοποθετημένα κύτταρα με την μέθοδο της λιπαντικής ροής και διατύπωσαν ένα πρόβλημα οριακών τιμών με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Οι *Hsu & Secomb, 1989*, επεξέτειναν το μοντέλο λιπαντικής ροής στις τρεις διαστάσεις και μελέτησαν την μη αξονοσυμμετρική κίνηση, για πολύ πυκνά τοποθετημένα κύτταρα, σε κυλινδρικό τριχοειδές, συνεκτιμώντας την τρεμουλιαστή κίνηση της μεμβράνης. Τα αποτελέσματα τους έδειξαν ότι η ταχύτητα της μεμβράνης είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα των κυττάρων, και ότι η κίνηση της μεμβράνης δρα για να μειωθεί η αντίσταση της ροής, κατά ένα μικρό ποσοστό σε σχέση με εκείνη ενός άκαμπτου κυττάρου με το ίδιο σχήμα. Τα συμπεράσματα αυτά υποστηρίζουν τη φυσική καταλληλότητα και την προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου αξονοσυμμετρικής ροής που έχει αναπτυχθεί στις προηγούμενες μελέτες. Η *FEM* των *Zarda et.al., 1977* και μετέπειτα συγγραφέων παραβλέπουν τις αλληλεπιδράσεις των ερυθροκυττάρων και περιγράφουν την κίνηση των επιμέρους κυττάρων σαν να βρίσκονται σε απομόνωση. Αντίθετα το μοντέλο λιπαντικής ροής επικεντρώνεται στην μικρή περιοχή μεταξύ της πλευρικής επιφάνειας κυττάρων και τοιχωμάτων του τριχοειδούς και θεωρεί ότι η κίνηση μεταξύ των γειτονικών κυττάρων προσομοιώνεται καλά από την αδιατάραχτη παραβολική ροή *Poiseuille* του πραγματικού *RBC*. Το μοντέλο λιπαντικής ροής αδιαφορεί για το απαραμόρφωτο σχήμα του κυττάρου, θεωρώντας ότι, αν η ροή διακοπεί, τα κύτταρα θα επανέλθουν στο χωρίς τάσεις σχήμα της σφαίρας. Σε προσομοιώσεις των *Secomb et.al., 1986*, η επιφάνεια της ισοδύναμης σφαίρας είναι ίση με την επιφάνεια των πραγματικών ερυθροκυττάρων. Ο περιορισμός αυτός καταργήθηκε, *Secomb et.al., 2001*, που γενίκευσαν επίσης το μοντέλο της λιπαντικής ροής για να μοντελοποιήσουν το επιφανειακό στρώμα του

⁸¹ *Secomb, 1987, Secomb & Hsu, 1996, Secomb & Gross, 1983, Secomb et.al., 1986.*

ενδοθηλίου. Οι *Barthes-Biesel*⁸²*et.al.* μελέτησαν την αξονοσυμμετρική διέλευση με απαραμόρφωτες σφαιρικές και σφαιροειδείς κάψουλες (capsules) μέσα από πόρους με σωλήνες και στενώσεις.

Ο Καλιακάτσος, 2000, μελέτησε διδιάστατες και αξονομετρικές ροές με ένα ερυθροκύτταρο στην μικροκυκλοφορία και συστηματικά συνέκρινε με στοιχεία από διάφορα μοντέλα προσομοίωσης ροών ερυθρών αιμοσφαιρίων, *Poulou, 1995, Queguiner & Barthes-Biesel, 1997.*

Ο *Pozrikidis, 2005* μελέτησε την αξονοσυμμετρική κίνηση των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε κυλινδρικό τριχοειδές λόγω διαφοράς πίεσης. Η μαθηματική διατύπωση λαμβάνει υπόψη τις σχεδόν ασυμπίεστες και ελαστικές ιδιότητες της κυτταρικής μεμβράνης για παραμόρφωση σε διάτμηση και κάμψη από το αρχικό άφορτο σχήμα του αμφίκυκλου δίσκου. Προσομοιώνονται τυχαίες διατάξεις κυττάρων που είναι τοποθετημένα σε μία περιοδική σειρά ομοαξονικά με τριχοειδή διαφόρων διαμέτρων. Η μεταβολή του σχήματος του RBC στον χρόνο από την ισορροπία μέχρι ένα πολύ παραμορφωμένο μόνιμο σχήμα υπολογίζεται για διάφορες συνθήκες περιοδικής αξονοσυμμετρικής ροής με την μέθοδο *boundary-integral* σε ροή *Stokes*⁸³ και την συνάρτηση *Green* χωρίς τις παραδοχές του λιπαντικού μοντέλου. Η σχεδόν ασυμπίεστη και ελαστική συμπεριφορά της κυτταρικής μεμβράνης συνυπολογίζεται με την εφαρμογή κατάλληλης καταστατικής εξίσωσης. Τα αποτελέσματα του δείχνουν την εξάρτηση του αιματοκρίτη του αίματος και του φαινομένου ιξώδους από την απόσταση μεταξύ των κυττάρων, την διάμετρο του σωλήνα και την μέση ταχύτητα ροής. Επικυρώνονται επίσης οι προβλέψεις του μοντέλου της λιπαντικής θεωρίας για πολύ κοντά τοποθετημένα κύτταρα.

Από τις χαρακτηριστικές παρατηρήσεις, *Pozrikidis, 2005*, είναι ότι σε αυτές τις διατάξεις, από τη δράση της διαφοράς πίεσης, το οπίσθιο άκρο των κυττάρων πλατύνεται (flattened), ενώ το εμπρόσθιο άκρο προεξέχει (bulges). Καθώς η διάμετρος του σωλήνα γίνεται μεγαλύτερη, αναπτύσσονται διπλές και πολλαπλές σειρές κυττάρων και στη συνέχεια πραγματοποιείται μετάβαση σε ροή διασποράς. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της ροής τύπου διασποράς είναι η ανάπτυξη ενός στρώματος χωρίς κύτταρα γύρω από την περιφέρεια του αγγείου λόγω της αυθόρμητης μετανάστευσης των κυττάρων μακριά από τα τοιχώματα, προς τις περιοχές χαμηλού ρυθμού παραμόρφωσης κοντά στην αξονική γραμμή.

⁸² *Leyrat-Maurin & Barthes-Biesel, 1994, Queguiner & Barthes-Biesel, 1997, Diaz & Barthes-Biesel, 2002.*

⁸³ Ροή *Stokes* είναι ένας ο τύπος ροής, όπου οι δυνάμεις αδράνειας είναι μικρές σε σύγκριση με τις συνεκτικές δυνάμεις. Ο αριθμός *Reynolds* είναι χαμηλός, π.χ. $Re \ll 1$, η ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ μικρή, το ιξώδες είναι πολύ μεγάλο, ή το μήκος κλίμακας της ροής είναι πολύ μικρό π.χ., σε συσκευές *MEMS*, στη ροή ιξωδών πολυμερών και στην μικροκυκλοφορία του αίματος.

Επειδή τα κύτταρα τείνουν να συγκεντρωθούν σε αυτήν την περιοχή υψηλής ταχύτητας, το ογκομετρικό ποσοστό ροής τους υπερβαίνει αυτού του γενικού ρευστού. Επίσης υπολόγισε τον αιματοκρίτη εκκένωσης με βάση τον αιματοκρίτη σωλήνα και επαλήθευσε το *Fåhræus effect*.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Καλιακάτσος Χ.**, (2000), Επίδραση Μηχανικών Ιδιοτήτων Εμμόρφων Κυττάρων του Αίματος στην Αιματική Ροή, διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π.
- Κουτσούρης Δ., Μπαρμπουνάκη Σ., Χαρίτου Μ.**, (2003), Ηλεκτρομηχανική των Βιολογικών ρευστών, Εκδόσεις Τζιόλα.
- Μπεργελές Γ.**, (1999), Υπολογιστική Ρευστομηχανική εκδ. ΣΥΜΕΩΝ.
- Τσαγγάρης Σ.**, (1996), Βιορευστομηχανική, εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Τσαγγάρης Σ.**, (1995), Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.
- Adalsteinsson D. and Sethian J.A.**, (1), (1995), A fast level-set method for propagating interfaces, *Journal of Computational Physics*, 118:269–277.
- Adalsteinsson D., Sethian J.A.**, (2), (1995), Level Set Approach to a Unified Model for Etching, Deposition, and Lithography II: Three-Dimensional Simulations, *Journal of Computational Physics*, 122: 348-366.
- Amsden A. and Harlow F.**, (1970), A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comput. Phys.*, 6:322-325.
- Angeli P., Hewitt G.F.**, (1998), Pressure gradient in horizontal liquid-liquid flows. *Intern. Journal of Multiphase Flow*, 24:1183-1203.
- Angeli P., Hewitt G.F.**, (2000), Flow structure in horizontal oil-water flow, *Intern. Journal of Multiphase Flow*, 26:1117-1140.
- Aslan T.D., Bdzil J.B., Stewart D.S.**, (1996), Level Set Methods Applied to Modeling Detonation Shock Dynamics, *Journal of Computational Physics*, 126:39-49.
- Audet D.M.**, (1987), The numerical and experimental modeling of particle dynamics in branching tubes at low Reynolds numbers with an application to blood cell motion in capillary junctions, Ph.D. thesis, Cornell University.
- Bansch E.**, (1999), Finite element discretization of the Navier–Stokes equations with a free capillary surface, Technical. Report, Universität Bremen.
- Barbee J. H. and Cokelet G. R.**, (1971), Prediction of blood flow in tubes with diameters as small as 29 μ , *Microvascular Research*, 3.1:17-21.
- Barthes-Biesel D. and Acrivos A.**, (1), (1973), Deformation and burst of a liquid droplet freely suspended in a linear flow field, *Journal of Fluid Mechanics*, 61.1.:1-21.
- Barthes-Biesel D. and Acrivos A.**, (2), (1973), The rheology of suspensions and its relation to phenomenological theories for non-Newtonian fluids, *Inter. Journal of Multiphase Flow*, 1:1–24.

- Bartok W. and Mason S. G.**, (1958), particle motions in sheared suspensions vii. internal circulation in fluid droplets (theoretical), *Journal of Colloid Science*, 13, 293-307.
- Bartok W. and Mason S. G.**, (1959), Particle motions in sheared suspensions: VIII. Singlets and doublets of fluid spheres, *Journal of Colloid Science*, 14.1.:13-26
- Beliveau A., Forin A. and Demay Y.**, (1998), A two-dimensional numerical method for the deformation of drops with surface tension, *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 10:225–240.
- Bentley B. J. and Leal L. G.**, (1986), An experimental investigation of drop deformation and breakup in steady, two-dimensional linear flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 167:241-283.
- Benzi M., Golub G.H., Liesen J.**, (2005), Numerical solution of saddle-point problems, *Acta Numerica*,14:1-137.
- Bhaskaran R. and Collins L.**, (2002), *Introduction to CFD basics*, Cornell University - Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering.
- Bitsch L.**, (2002), Blood Flow in Microchannels Master Thesis, (1) Mikroelektronik Centret – MIC (2) Dansk Polymercenter/Institut for Kemiteknik Technical University of Denmark 3rd September.
- Borhan A, Mao C.F.**, (1992), Effects of surfactants on the motion of drops through circular tubes, *Physics and Fluids A*, 4:2628-2640.
- Brackbill J., Kothe D. , and Zemach C.**, (1992), A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Phys.*, 100:335–354.
- Brady J. F. and Bossis G.**, (1988), Stokesian dynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 20, 111-157.
- Brauner N.**, (2002), Liquid-Liquid Two-Phase Flow Systems in Modeling and Control of Two-Phase Flow Phenomena, Ed. V Bertola, CISM Center, Udine, Italy .
- Brauner N.,(1)**, (1998), Modelling and Control of Two-Phase Phenomena: Liquid-Liquid Two-Phase Flow Systems, School of Engineering, Tel-Aviv University, Israel.
- Brauner N., (2)**, (1998), Liquid-Liquid Two-Phase Flow Systems, in HEDU of Heat Exchanger Design Handbook, Hewitt GF (eds) ; Begell House: New York, 5(1) Chap. 2.3.5:1-40.
- Brennen C.**, (2005), *Fundamentals of Multiphase Flow*, Cambridge University Press.
- Chaffey E. and Brenner H.**, (1967), A Second-Order Theory for Shear Deformation of Drops, *J. Colloid Interface Science.*, 24:258-269.
- Chang W., Trebotich D., Lee L. P. and Liepmann D.**, (2000), Blood Flow in Simple Microchannels. First Annual International IEEEEMBS Special Topic Conference on Microtechnologies in Medicine and Biology October 12-14, Lyon, France.
- Charles, M.E., and Lilleleht, L.U.** (1966). Correlation of Pressure Gradients for the Stratified Laminar-Turbulent Pipeline Flow of Two Immiscible Liquids. *Canadian Journal Chemical Engineering* 44:47-49.
- Charles, M.E., Govier, G.W., and Hodgson, G.W.** (1961). The horizontal flow of equal density oil-water mixtures, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 39:287-36.
- Chen S., Merriman B., Osher S., and Smereka P.**,(1997), A simple level set method for solving Stefan problems, *J. Comput. Phys.*, 135: 8–29.
- Chien, S., Usami S. , Dellenbach R. J. and Gergersen M. I.**, (1967), Blood viscosity: Influence of erythrocyte deformation, *Science*, 157:827–829.
- Choi S. J. and Schowalter W. R.**, (1975), Rheological properties of non dilute suspensions of deformable particles, *Phys. Fluids*, 18.4:420-427.

- Chopp D. L.**, (1993), Computing minimal surfaces via level set curvature flow, *J. Comput. Phys.*, 106:77–91.
- Chorin A.**, (1968), Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation.*, 22:745-762.
- Ciarlet P. G.**, (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Amsterdam: North-Holland.
- Cox R. G.**, (1969), The deformation of a drop in general time dependent flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 37:601-623.
- Croce R., Griebel M., Schweitzer M. A.**, (2009). Numerical Simulation of Bubble and Droplet-Deformation by a Level Set Approach with Surface Tension in Three Dimensions, *Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 62(9):963-993. Also available as SFB 611 Preprint no 431.
- Croce R., Griebel M. and Schweitzer M. A.**, (2004), A Parallel Level-Set Approach for Two-Phase Flow Problems with Surface Tension in Three Space Dimensions, Technical Report 157, Sonderforschungsbereich 611, Universit at Bonn.
- Crowe C.**, (2005). *Multiphase Flow Handbook*, CRC Press.
- Crowe C., Sommerfield M., Tsuji Y.**, (1998), *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC Press.
- Daly, B.J.**, (1969), Numerical Study of the Effect of Surface Tension on Interface Instability, *The Physics of Fluids*, 12.7: 1340-1354.
- Daly B.J.**, (1967), Numerical study of two fluid Rayleigh–Taylor instability, *The Physics of Fluids*, 10.2: 297-307.
- DeBar R.**, (1974), Fundamentals of the KRAKEN code, report UCIR-760, Lawrence Livermore National Laboratory.
- Dendy J. E.**, (1982), Black box multigrid, *J. Comput. Phys.*, 48:366-386.
- Diaz A. and Barthes-Biesel D.**,(2002), Entrance of a bioartificial capsule in a pore, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 3.3:321-338.
- Dziuk G.**,(1991), An algorithm for evolutionary surfaces, *Numerische Mathematik*, 58:603–611.
- Dziuk G.**, (1988), Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces, *Partial Differential Equations and Calculus of Variations*, Lecture Notes in Mathematics 1357:142–155, Springer.
- Einstein A.**,(1906), A New Determination of Molecular Dimensions, *Ann. Physik*, 4,19:289-306, Corrections, *ibid*, 34:591-592 (1911).
- Elman H., Howle V., Shadid J., Shuttleworth R. and Tuminaro R.**, (2008), A taxonomy and comparison of parallel block multi-level preconditioners for the incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.* , 227:3,1790-1808.
- Enright D., Fedkiw R., Ferziger J. and Mitchell I.**, (2002), A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing . *J. Comput. Phys*, 183: 83-116.
- Fitz-Gerald, J.M.**, (1969), Implications of a theory of erythrocyte motion in narrow capillaries, *J. Appl. Physiol.*, 27: 912–918.
- Frankel N. A. and Acrivos A.**, (1970), The constitutive equation for a dilute emulsion, *Journal of Fluid Mechanics*, 44:65-78.
- Frohlick H. and Sack R.**, (1946), Theory of the Rheological Properties of Dispersions, *Proceedings of Royal Society of London*, A 185:415-430.

- Fung Y. C.**, (1966), Theoretical considerations of the elasticity of red cells and small blood vessels, *Federation Proc.*, 25:1761–1772.
- Fung Y. C.**, (1984), *Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer Verlag, Second Printing.
- Gaehtgens P.**, (1984), Regulation of capillary hematocrit, " *Int. J. Microcirc: Clin. Exp.*, 3:147-160.
- Ginzburg I. and G. Wittum**, (2001), Two-phase flows on interface refined grids modeled with VOF, staggered finite volumes, and spline interpolants, *J. Comput. Phys.* 166.2:302-335.
- Ginzburg I., Wittum G. and Zaleski S.**, (2002), Adaptive multigrid computations of multiphase flows, in Numerical Flow Simulation III, E. Hirschel, ed., of Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, Springer, 82 :77–96.
- Goddard J. D. and Miller C.**, (1967), Nonlinear effects in the rheology of dilute suspensions, *Journal of Fluid Mechanics*, 28:657-673.
- Griebel M., Dornseifer T. and Neunhoeffler T.** , Numerical Simulation in Fluid Dynamics, A Practical Introduction, SIAM, Philadelphia, (1998).
- Griebel M., Neunhoeffler T. and Regler H.** , (1998), Algebraic multigrid methods for the solution of the Navier–Stokes equations in complicated domains, *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow*, 26:281–301.
- Gueyffier D., Li J., Nadim A., Scardovelli R. and Zaleski S.**, (1999), Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows, *J. Comput. Phys.*, 152:423–456.
- Ha J.W. and Leal L.G.**, (2001), An experimental study of drop deformation and breakup in extensional flow at high capillary number, *Physics of fluids*, 13(6):1568-1576.
- Haberman, W.L. and Sayre, R.M.**, (1958), *Motion of Rigid and Fluid Spheres in Stationary and Moving Liquids Inside Cylindrical Tubes*, David Taylor Model Basin Report No. 1143, U.S. Navy Dept., Washington D.C.
- Halpern D. and Secomb T. W.** ,(1989), The squeezing of red blood cells through capillaries with near-minimal diameters, *J. Fluid Mech.* 203:381-400.
- Harlow F. and Welch J.**, (1965), Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *The Physics of Fluids*, 8:2182-2189.
- Hirsch, C.**, (1990), Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, Wiley.
- Hirt C.W., Amsden A.A. and Cook J.L.**, (1974), "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speeds, *J. Comp. Phys.*, 14:227-253.
- Hirt, C.W., Cook, J.L. and Butler, T.D.**, (1970), "A Lagrangian Method for Calculating the Dynamics of an Incompressible Fluid with Free Surface, *J. Comp. Phys.*, 5:103-124.
- Hirt C.W., Nichols B.D.**, (1981), Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, 39.1:201–225.
- Ho, L.-W. and Patera, A. T.**, (1990), A Legendre spectral element method for simulation of unsteady incompressible viscous free-surface flows, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 80:355-366.
- Ho L.-W. and Ronquist E. M.**, (1994), Spectral element solution of steady incompressible viscous free-surface flows, *Finite Elements in Analysis and Design*, 16.3-4:207-227, Special Issue Selection of Papers Presented at ICOSAHOM'92.
- Hou T.Y., Li. Z., Osher. S., Zhao H.**, (1997), A Hybrid Method for Moving Interface Problems

- with Application to the Hele-Shaw Flow, *Journal of Computational Physics*, 134:236-252.
- Hsu R. and Secomb T. W.**, (1989), Motion of nonaxisymmetric red blood cells in cylindrical capillaries, *J. Biomech. Eng.*, 111(2), 147–151.
- Huebner K. H., Thornton E. A. and Byron T. D.**, (1995), *The Finite Element Method for Engineers*, 3rd ed., Wiley Interscience.
- Hyman W. A. and Skalak R.**, (1972), *Non-Newtonian Behavior of a Suspension of Liquid Drops in Tube Flow*, *AIChE Journal*, 18.1:149-154.
- Hyman, W. A., and Skalak R.**, (1970), Viscous flow of a suspension of deformable liquid drops in a cylindrical tube, Tech. Rep. no.5, Project NR 062-393, Dept of Civil Engng and Engng Mech., Columbia University.
- Jiang G. and Peng D.**, (2000), Weighted ENO schemes for Hamilton{Jacobi equations, *SIAM J. Sci.Comput.*, 21:2126-2143.
- Jiang G. and Shu C.**, (1996), Efficient implementation of weighted ENO schemes, *J. Comput. Phys.*, 126:202-228.
- Kaliakatsos C., Tsangaris S.**, (2000), Motion of deformable drops in pipes and channels using Navier-Stokes equations. *Int. J. Numerical Methods of Fluids*, 34:609-626.
- Lafaurie B., Nardone C., Scardovelli R., Zaleski S. and Zanetti G.**, (1994), Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER, *J. Comput. Phys.*, 113.1:134-147.
- Laney C.**, (1998), *Computational Gas Dynamics*, Cambridge University Press.
- Leal, L. G.**, (1980), Particle Motions in a Viscous Fluid, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 12:435-476.
- Lefebvre A.**, (1989), *Atomization and Sprays*, Taylor & Francis.
- LeVeque, R.J.**, (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press.
- LeVeque, R.J.**, (1990), *Numerical Methods for Conservation Laws*, ETH Lectures in Mathematics Series, Birkhauser-Verlag.
- Levy S.**, (1999), *Two-Phase Flow in Complex Systems*, Wiley.
- Leyrat-Maurin A. and Barthes-Biesel D.**, (1994), Motion of a deformable capsule through a hyperbolic constriction, *Journal of Fluid Mechanics*, 279:135-163.
- Li J. and Renardy Y. Y.**, (2000), Numerical study of flows of two immiscible liquids at low Reynolds number, *SIAM Review*, 42: 417–439.
- Li J., Renardy Y. Y. and Renardy M.**, (2000), Numerical simulation of breakup of a viscous drop in simple shear flow through a volume-of-fluid method, *Phys. Fluids*, 12:269–282.
- Lissant K. J.**, (1974), *Emulsions and Emulsion Technology*, Marcel Dekker, New York.
- Loewenberg M. and E. J. Hinch**, (1996), Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 321:395-419.
- Losasso F, Fedkiw R, Osher S.**, (2006), Spatially Adaptive Techniques for Level Set Methods and Incompressible Flow, *Computers & Fluids*, 35.10:95-1010.
- Lowe G.D.O. and Barbenel J.C.**, (1988), Plasma and Blood Viscosity. *Clinical Blood Rheology*, vol.1, ed. by G.D.O. Lowe, Boca Ration, Florida, 11-44.
- Manga M.**, (1996), Dynamics of drops in branched tubes, *Journal of Fluid Mechanics*, 315:105-117.

- Martinez M.J., Udell K.S.** (1990), Axisymmetric creeping motion of drops through circular tubes, *Journal of Fluid Mechanics*, 210:565-591.
- McAuliffe, C.D.** (1973), Oil-in-Water Emulsions and Their Flow Properties in Porous Media, *Journal Petroleum Technology*, 25.6:727-733.
- Martini F. H. , Tallitsch R. B. , Timmons M. J.**, (2008) , Human Anatomy, Publisher: Benjamin-Cummings Pub Co.
- Merriman B., Bence J., and Osher S.**, (1994), Motion of multiple junctions: A level set approach, *J. Comput. Phys.*, 122 :334–363.
- Morton K.W. and Mayers D.F.**, (2005), Numerical Solution of Partial Differential Equations, An Introduction, Cambridge University Press.
- Neunhoeffler T.**, (1997), Numerische Simulation von Erstarrungsprozessen unterkühlter Flüssigkeiten unter Berücksichtigung von Dichteunterschieden, Dissertation, T.U. München.
- Nichols B.D. and Hirt C.W.**, (1971), Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible-Flow Calculations, *J. Comp. Phys.* 8:434-448.
- Nichols B.D. and Hirt C.W.**, (1975), Methods for Calculating Multidimensional, Transient Free Surface Flows Past Bodies, Proc. of the First International Conf. On Num. Ship Hydrodynamics, Gaithersburg, ML, Oct. 20-23.
- Noh W. and Woodward P.**, (1976), SLIC–Simple line interface calculation, in Fifth International Conference on Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, A. V. Vooren and P. Zandbergen, eds., Springer, 59:330.
- Nikolopoulos N., Nikas K.-S., Bergeles G.**, (2009), A numerical investigation of central binary collision of droplets, *Computers & Fluids*, 38.6:1191-1202.
- Nikolopoulos N., Theodorakakos A., Bergeles G.**, (2009), Off-centre binary collision of droplets: A numerical investigation, *Inter. J. of Heat and Mass Transfer*, 52:4160–4174.
- Nikolopoulos N., Theodorakakos A., Bergeles G., (1)**, (2007), A numerical investigation of the evaporation process of a liquid droplet impinging onto a hot substrate, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 50:303-319.
- Nikolopoulos N., Theodorakakos A., Bergeles G., (2)**, (2007), Three–dimensional numerical investigation of a droplet impinging normally onto a wall film, *J. Comput. Physics*, 225:322–341.
- Olbricht W. L.**, (1996), Pore-Scale Prototypes of Multiphase Flow in Porous Media, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28:187-213.
- Olbricht W. L., Kung D. M.**, (1992), The deformation and break-up of liquid drops in low Reynolds number flow through a capillary, *Physics and Fluids A*, 4:1347-1354.
- Oldroyd J.**, (1953), The Elastic and Viscous Properties of Emulsions and Suspensions, Proceedings of Royal Society of London, A, 218: 122-132.
- Olsson E.**, (2006), Mass Conserving Simulations of Two Phase Flow, Licentiate Thesis Stockholm, Sweden.
- Osher S. and Fedkiw R.**, (2003), Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces, no. 153 in Applied Mathematical Sciences, Springer, New York/Berlin/Heidelberg.
- Osher S. and Sethian J.**, (1988), Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 79:12-49.

- Ôzkaya N.**, (1986), *Viscous Flow of Particles in Tubes: Lubrication Theory and Finite Element Models*, Columbia University Press, New York.
- Pal R.**, (1993), Pipeline flow of unstable and surfactant-stabilized emulsions, *AIChE J.*, 39:1754-1764.
- Patankar S. V.**, (1980), *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (Hemisphere Series on Computational Methods in Mechanics and Thermal Science).
- Peng D., Merriman B. , Osher S. , Zhao H. and Kang M. ,** (1999), A PDE-based fast local level set method, *J. Comput. Phys.*, 155: 410–438.
- Peric M., Kessler R. and Scheuerer G.**, (1988), *Comparison of finite- volume numerical methods with staggered and collocated grids*, *Computers and Fluids*, 16:389-403.
- Pilehvari A., Saadevandi B., Halvaci M. and Clark P.E.**, (1988), Oil/Water Emulsions for Pipeline Transport of Viscous Crude Oil, Annual Technology Conference & Exhibition Houston.SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2-5 October 1988, Houston, Texas, Paper Number 18218-MS.
- Poulou S.**, (1995), A numerical model of the partitioning of particles at divergent bifurcations, PhD dissertation, Cornell University.
- Pozrikidis C.** (2005), Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Physics of fluids*, 17:1-14.
- Pozrikidis C.**, (1992), *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow* (Cambridge University Press, Cambridge, MA).
- Queguiner C., Barthes-Biesel D.**, (1997), Axisymmetric motion of capsules through cylindrical channels, *Journal of Fluid Mechanics*, 348:349-376.
- Rallison J. M. and Acrivos A.**, (1978), *A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow*, *Journal of Fluid Mechanics*, 89:191-200.
- Rider W., Kothe D., (1)**, (1995), A marker particle method for interface tracking, In *Proceedings of the Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, edited by, H. Dwyer, 976.
- Rider W, Kothe D., (2)** , (1995), Stretching and tearing interface tracking methods. In *12th AIAA CFD Conference*. AIAA, 95-1717. (LANL Report LA-UR-95-1145).
- Roscoe R.**, (1967), On the rheology of a suspension of viscoelastic spheres in a viscous liquid, *Journal of Fluid Mechanics*, 28:2:273-293.
- Rother, M. A., Zinchenko, A. Z., and Davis, R. H.** (1997), Buoyancy-driven coalescence of slightly deformable drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 346:117-148.
- Rübenkönig O.**, (2006), *The Finite Difference Method (FDM) - An introduction*, Albert Ludwigs University of Freiburg.
- Rumscheidt F. D. and Mason S. G.** ,(1961), Particle motions in sheared suspensions. **XI**. Internal circulation in fluid droplets (experimental). *Journal of Colloid Science*, 16, 210-237.
- Russo G. and Smereka P.**, (2003). A remark on computing distance functions, *J. Comput. Phys.*, 163:51–67.
- Schmid-Schonbein, H., Wells R. and Goldstone J.** ,(1969), *Circulation Res.*, 25:131 .
- Schowalter W. R., Chaffey C. E. and Brenner H.**, (1968), Rheological Behavior of a Dilute Emulsion, *Journal of Colloid and Interface Science*, 26:152-160 .

- Secomb T. W.**, (2003), Mechanics of red blood cells and blood flow in narrow tubes, in Modeling and Simulation of Capsules and Biological Cells, edited by C. Pozrikidis, Chapman & Hall, London.
- Secomb T. W.**, (1995), Mechanics of blood flow in the microcirculation, in Biological Fluid Dynamics, edited by C. P. Ellington and T. J. Pedley (Cambridge University Press, Cambridge, 305-321.
- Secomb T. W.**, (1991), Red blood cell mechanics and capillary blood rheology, *Cell Biophys.*, 18:231-251.
- Secomb T. W.**, (1987), Flow-dependent rheological properties of blood in capillaries, *Microvasc. Res.*, 34.1:46-58.
- Secomb T. W. and Hsu R.**, (1996), "Analysis of red blood cell motion through cylindrical micropores: Effects of cell properties," *Biophys. J.*, 71(2):1095-1101.
- Secomb T. W., Hsu R. and Pries A. R.**, (2001), Motion of red blood cells in a capillary with an endothelial surface layer: Effect of flow velocity, *Am. J. Physiol.-Heart Circ. Physiol.*, 281(2): 629–636.
- Secomb T. W. and Gross J. F.**, (1983), Flow of red blood cells in narrow capillaries; role of membrane tension, *Int J Microcirc Clin Exp.*, 2(3):229-240.
- Secomb T. W., Skalak R., Ôzkaya N., and Gross J. F.**, (1986), Flow of axisymmetric red blood cells in narrow capillaries, *J. Fluid Mech.*, 163:405-423.
- Sethian J. A.**, (1999), Level Set Methods and Fast Marching Methods, Cambridge University Press.
- Skalak R. and Branemark P. I.**, (1969), Deformation of red blood cells in capillaries, *Science*, 164:717-719.
- Skalak R. and Tozeren H.**, (1980), Flow mechanics in the microcirculation, in Mathematics of Microcirculation Phenomena, edited by J. F. Gross and A. Popel, Raven, New York, 17-40.
- Skalak R., Ôzkaya N. and Skalak T. C.**, (1989), Biofluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 21, 167-200.
- Solomon, E.P., Berg L.R., Martin D.W. and Vilee C.** (1996), Biology, fourth edition Saunders College Publishing.
- Stone H. A. and Leal L. G., (1)**, (1989), The influence of initial deformation on drop breakup in subcritical time-dependent flows at low Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, 206:223-263.
- Stone H. A. and Leal L. G., (2)**, (1989), Relaxation and breakup of an initially extended drop in an otherwise quiescent fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 198:399-427.
- Stone H. A., Bentley B. J. and Leal L. G.**, (1986), An experimental study of transient effects in the breakup of viscous drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 173:131-158.
- Strang, G. and Fix G.**, (1973), An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Strotos G., Gavaises M., Theodorakakos A., Bergeles G., (1)**, (2008), Numerical investigation, on the evaporation of droplets depositing on heated surfaces at low Weber numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51.(7–8):1516–1529.
- Strotos G., Gavaises M., Theodorakakos A., Bergeles G., (2)**, (2008), Numerical investigation of the cooling effectiveness of a droplet impinging on a heated surface, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51.(19-20):4728–4742.

- Sussman M., Smereka P., Osher S.**, (1994), A level-set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Journal of Computational Physics*, 114:146-159.
- Sussman M. and Fatemi E.**, (1999), An efficient, interface preserving level set re-distancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow, *SIAM J.Sci. Comput.*, 20.4:1165-1191.
- Tannehill, J. C., Anderson D. A., Pletcher R. H.**, (1997), Computational Fluid mechanics and Heat Transfer, 2nd Ed., Taylor and Francis.
- Taylor G. I.**, (1934), The formation of emulsion in definable fields of flow, Proceedings of Royal Society of London, Ser. A 146:501-523.
- Taylor G.I.**, (1932), The viscosity of fluid containing small drops of another fluid, Proceedings of Royal Society of London, A138:41-48.
- Theissing P.A.**, (1980), A Generally Valid Method for Calculating Frictional Pressure Drop in Multiphase Flow, *Chemical Ing. Technik.*, 52:344-355. (In German).
- Theodorakakos A., Bergeles G.**, (2004), Simulation of sharp gas-liquid interface using VOF method and adaptive grid local refinement around the interface, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 45:421-439.
- Toro E. F.** (1999), Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag.
- Trottenberg U., Osterlee C. W. and Schuller A.**,(2001), Multigrid, Appendix A: An Introduction to Algebraic Multigrid by K. Stuben, 413-532, Academic Press, San Diego.
- Tryggvason G., Bunner B. , Esmaeli A., Juric D., Al-Rawahi N. , Tauber W. , Han J. , Nas S., and Jan Y.**, (2001), A front tracking method for the computations of multiphase flow, *Journal of Computational Physics*, 169:708-759.
- Tsai T.M., Miksis M.J.** (1994), Dynamics of a drop in a constricted capillary tube, *Journal of Fluid Mechanics*, 274:197-217.
- Tsubota K, Wada S., (2010)**, Effect of the natural state of an elastic cellular membrane on tank-treading and tumbling motions of a single red blood cell, *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft. Matter. Phys.*,81:011910.1-10.
- Turner B. M. and Chaffey C. E.**, (1969), Drop Shapes in Shear from a Second-Order Theory, *Journal of Rheology, Transactions of the Society of Rheology*, 13:4, 411-427.
- Unverdi S. and Tryggvason G.**, (1992), A front-tracking method for viscous, incompressible multifluids flow, *J. Comput. Phys.*, 100:25-37.
- Varonos A. and Bergeles G.**, (1998), Development and assessment of a variable-order non oscillatory scheme for convection term discretization, *Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26:1-16.
- Wang, H. and Skalak R.**, (1969), Viscous flow in a cylindrical tube containing a line of spherical particles, *Journal of Fluid Mechanics*, 38:75-96.
- Wang M.** (2005), Impedance mapping of particulate multiphase flows, *Flow Measurement and Instrumentation*, 16.2-3:.183-189.
- Wang Z. and Huang P. G.**, (2000), An Essentially Non-Oscillatory High-Resolution Pade-Type (ENO-Pade) Scheme, AIAA-2000-0918, Jan.10-13, , Reno, NV.
- Wesseling P.**, (2001), Principles of Computational Fluid Dynamics, Series: Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 29.
- West E.S. and Todd W.R.**, (1961),Textbook of biochemistry. (3rd ed.), Macmillan, New York.

- Yiantsios S. G. and R. H. Davis**, (1991), Close approach and deformation of two viscous drops due to gravity and van der Waals forces, *Journal of Colloid and Interface Science*, 144:412-433.
- Yiantsios S. G. and Davis R. H.**, (1990), On the buoyancy-driven motion of a drop towards a rigid surface or a deformable interface, *Journal of Fluid Mechanics*, 217:547-573.
- Zarda P. R., Chien S., and Skalak R.**, (1977), Interaction of viscous incompressible fluid with an elastic body, in *Computational Methods for Fluid-Solid Interaction Problems*, edited by T. Belytschko & T.L. Geers, American Society of Mechanical Engineers, New York, 65-82.
- Zeeuw P. M.**, (1990), Matrix-dependent prolongations and restrictions in a black-box multigrid solver, *J. Comput. Appl. Math.*, 33:1-27.
- Zhao H., Chan T., Merriman B., and Osher S.**, (1996), A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comput. Phys.*, 127:179-195.
- Zhou H., Pozrikidis C.**, (1994), Pressure-driven flow of suspensions of liquid drops, *Phys. Fluids*, 6:80-94.
- Zhou H. and Pozrikidis C., (1)**, (1993), The flow of ordered and random suspensions of two-dimensional liquid drops in a channel, *J. Fluid Mech.*, 255:103-127.
- Zhou H. and Pozrikidis C., (2)**, (1993), The flow of suspensions in channels: Single files of drops, *Phys. Fluids A* 5, 311-324.
- Zinchenko A. Z., Rother M. A. and Davis R. H.**, (1997), A novel boundary-integral algorithm for viscous interaction of deformable drops, *Phys. Fluids*, 9(6):1493-1511.

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

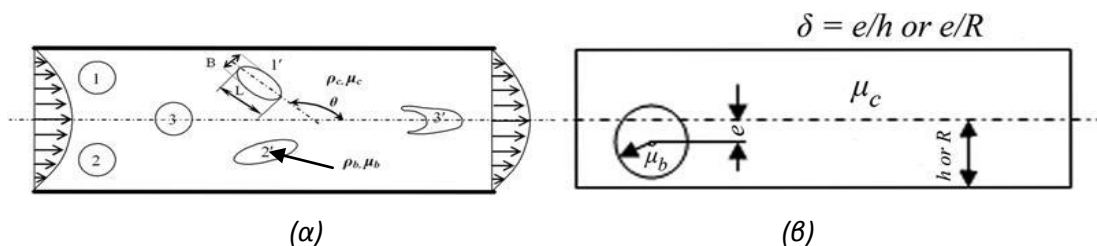
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2.1. ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ	3
2.2. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ	6
2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΙΣΟΥΨΩΝ ϕ	9
2.4. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ : $\rho(\phi)$, $\mu(\phi)$, $\kappa(\phi)$, $\eta(\phi)$, $H(\phi)$, $\delta(\phi)$	10
2.5. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ.....	12
2.6. ΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΤΕΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ).....	14
2.7. ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	14
2.8. ΟΙ ΟΡΟΙ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ	16
2.9. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΨΩΝ - LEVEL SET METHOD	17
2.9.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοΨών ϕ^*	17
2.9.2. Η εξίσωση επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοΨών.	19
2.9.3. Εισαγωγή «υβριδικής» μεθόδου επαναπροσδιορισμού της συνάρτησης των ισοΨών για διατήρηση της μάζας των σταγόνων.....	20
2.9.4. Ορισμός της τοπικής συνάρτησης των ισοΨών, (Local Level-Set) ή <i>LLSM</i> . 21	
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	24
2.Τ. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 2 ^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.....	25

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΛΕΤΗΣ

2.1. ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η γενική μαθηματική μεθοδολογία με βάση την οποία υλοποιήθηκαν οι στόχοι της διατριβής δηλαδή η αριθμητική προσομοίωση και ο υπολογισμός της μεταβατικής διφασικής ροής συνεκτικών ασυμπίεστων μη αναμειγνυόμενων νευτώνειων ρευστών μέσα σε κλειστούς διδιάστατους ή αξονοσυμμετρικούς ευθύγραμμους αγωγούς ή αγωγούς συνθετότερης γεωμετρίας με σταθερά, άκαμπτα τοιχώματα π.χ. αγωγούς με στένωση ή/και διεύρυνση, διπλή γωνία, ταφ, αγωγούς με καμπύλες.



Σχ.2.1.(α) Σχηματική αναπαράσταση τριών παραμορφώσιμων σταγόνων διασπαρμένων σε διφασικό πεδίο ροής λόγω διαφοράς πίεσης μέσα σε κλειστό ευθύγραμμο αγωγό. Η αρχική κατανομή ταχύτητας είναι της στρωτής ροής Poiseuille της συνεχούς φάσης. Η ροή απεικονίζεται στο αρχικό και σε επόμενο χρονικό στιγμιότυπο, t' . (β) Η εκκεντρότητα τοποθέτησης της σταγόνας $\delta=e/h$ ή $\delta=e/R$. (Christafakis et al., 2006).

Συγκεκριμένα μοντελοποιείται η κίνηση ποικιλίας διατάξεων σταγόνων διαφόρων μεγεθών που διασπείρονται και μεταναστεύουν μέσα στην πρωτεύουσα συνεχή φάση κάτω από επιλεγμένες κάθε φορά συνθήκες ροής σε πεδίο ροής Hagen-Poiseuille της συνεχούς φάσης

(κεφ.4,5,6,7) όπως ενδεικτικά παρουσιάζεται στο Σχ.2.1. Με τον αριθμητικό αλγόριθμο (κεφ.3), που υλοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN καθίσταται εφικτός ο υπολογισμός πρωτογενών και δευτερογενών ρευστοδυναμικών μεγεθών και η μελέτη πεδίων χρονικά μεταβαλλόμενης (μεταβατικής) διφασικής ροής υγρού σε υγρό, έως ότου η παραμόρφωση των σταγόνων κατά περίπτωση καταλήξει, αν είναι εφικτό, σε ουσιαστικά αμετάβλητα περιγράμματα σταγόνων.

Στο Σχ.2.1. τα σύμβολα δηλώνουν: ρ_b, μ_b , την πυκνότητα και το ιξώδες των σταγόνων και ρ_c, μ_c τα αντίστοιχα μεγέθη της συνεχούς φάσης, e , την απόσταση του κέντρου της εισαχθείσας σταγόνας από τον άξονα της συμμετρίας του αγωγού, h , το ημι-πλάτος του καναλιού στην είσοδο, R , την ακτίνα του αντίστοιχου αξονομετρικού αγωγού, r , την αρχική ακτίνα της εισαγόμενης κυκλικής σταγόνας¹ στην είσοδο του αγωγού. Η εκκεντρότητα τοποθέτησης της σταγόνας ορίζεται $\delta = e/h$ ή $\delta = e/R$.

Επίσης, για να περιγράψουν ποσοτικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά και το μέγεθος της παραμόρφωσης της σταγόνας, χρησιμοποιούνται τα δύο βαθμωτά μέτρα που εισήγαγε ο *Taylor, 1934*, αφενός η «παράμετρος παραμόρφωσης», D

$$D = \frac{L - B}{L + B} \quad (2.1.1.),$$

όπου L , είναι το στιγμιαίο μήκος, B το στιγμιαίο πλάτος της σταγόνας και αφετέρου η «γωνία κλίσης» ϑ , δηλαδή η γωνία προσανατολισμού της σταγόνας ως προς τον άξονα του αγωγού, Σχ.2.1.(α).

Η μέθοδος που υλοποιήσαμε στην διατριβή αποτελείται στην ουσία από δύο ξεχωριστές μεθοδολογίες που συμπλέκονται κατάλληλα σε ένα πεπλεγμένο αλγόριθμο. Η πρώτη μεθοδολογία υπολογίζει αριθμητικά το πεδίο ροής της διφασικής ροής με επίλυση των πλήρων διδιάστατων ή αξονοσυμμετρικών εξισώσεων *Navier-Stokes* για νευτώνεια, ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά με επιφανειακή τάση μεταξύ των δύο φάσεων. Η δεύτερη μεθοδολογία είναι απαραίτητη για την ανίχνευση και παρακολούθηση στον χρόνο της επιφανείας (καμπύλης) που χωρίζει τις φάσεις των δύο ρευστών (σταγόνων και συνεχούς φάσης) της λεγόμενης διεπιφάνειας. Ο υπολογισμός της παρέχει τις συντεταγμένες των περιγραμμάτων των σταγόνων κατά την εξέλιξη του φαινομένου.

Η διεπιφάνεια είναι από μαθηματική και φυσική άποψη μια απότομη και περίπλοκη ασυνέχεια στην οποία συντελείται ένα μεγάλο άλμα στην πυκνότητα, το ιξώδες, την πίεση και την εφαπτομενική ταχύτητα. Η διεπιφάνεια των περιγραμμάτων των σταγόνων

¹ κυλινδρικής στο διδιάστατο πρόβλημα και σφαιρικής στο αξονοσυμμετρικό.

υλοποιείται με τους αλγορίθμους της “Level-Set Method”, ή «μεθόδου των ισοϋψών» των *Osher & Sethian, 1988* η οποία εισάγει την «συνάρτηση level-set» ή «συνάρτηση των ισοϋψών», ή απλά ϕ . Η *LSM* περιγράφει έμμεσα τοπολογικά σύνθετες κινούμενες διεπιφάνειες δηλ. 2D καμπύλες και 3D επιφάνειες με ακρίβεια. Από κατασκευής έχει την ικανότητα να περιγράφει την διάσπαση μιας σταγόνας καθώς και την συνένωση σταγόνων με ακρίβεια, όταν εξασφαλιστεί η επαρκής πυκνότητα του αριθμητικού πλέγματος.

Η σύμπλεξη των δύο μεθοδολογιών είναι απαραίτητη από την φύση του προβλήματος και γίνεται ως εξής. Η *LSM* προσδιορίζει τη θέση, περιγράφει την κίνηση των σημείων της διεπιφάνειας των δύο ρευστών σε κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας υποχρεωτικά τις ταχύτητες του πεδίου ροής, όπως έχουν υπολογιστεί από την πρώτη μεθοδολογία, ενώ παρέχει έμμεσα τις επιπρόσθετες αναγκαίες συνθήκες για την διατύπωση και επίλυση των αναθεωρημένων διφασικών εξισώσεων της ορμής για χρονικά εξαρτώμενα ασυμπίεστα πεδία, γιατί οι όροι ιξώδους και επιφανειακής τάσης είναι εξαρτημένες συναρτήσεις της ϕ . Πιο αναλυτικά η διεπιφάνεια των δύο ρευστών περιγράφεται σαν το σύνολο των σημείων του πεδίου ροής, όπου μία ομαλή συνάρτηση ϕ έχει μηδενική τιμή.

Η συνάρτηση ϕ ορίζεται αρχικά σε κάθε σημείο του πεδίου ροής ως η απόσταση του σημείου αυτού από το αρχικό σχήμα της διεπιφάνειας, που περιγράφεται από την εξίσωση κύκλου, $\phi = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} - r_o = 0$, όπου (x_o, y_o) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου της σταγόνας και r_o είναι η αρχική ακτίνα της σταγόνας. Για σημεία του πεδίου ροής στο εσωτερικό της διεπιφάνειας η ϕ έχει αρνητική τιμή, $\phi < 0$ και για σημεία του πεδίου έξω από την διεπιφάνεια έχει θετική τιμή, $\phi > 0$.

Η μεθοδολογία επιτρέπει οι σταγόνες να έχουν διαφορετικό ιξώδες και πυκνότητα² από το περιβάλλον ρευστό και στην διεπιφάνεια των σταγόνων με το περιβάλλον ρευστό να ασκούνται δυνάμεις επιφανειακής τάσης, εξασφαλίζοντας ότι οι δύο υγρές φάσεις δεν αναμειγνύονται. Τόσο το ιξώδες όσο και η πυκνότητα του ρευστού ορίζονται ως συναρτήσεις της θέσης στο πεδίο ροής και της συνάρτησης ϕ και παραμένουν σταθερά για το ίδιο στοιχείο ρευστού καθώς αυτό κινείται στο πεδίο σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\rho_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (2.1.2.)$$

$$\mu_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mu = 0 \quad (2.1.3.)$$

² Στην υλοποίηση του αλγορίθμου γίνεται η παραδοχή ότι η σταγόνα και το περιβάλλον ρευστό έχουν την ίδια πυκνότητα χωρίς αυτό να αποτελεί περιορισμό της μεθόδου. Με μικρή τροποποίηση στις διακριτοποιήσεις είναι άμεσα εφικτή και η μελέτη διφασικών ροών με διαφορετική πυκνότητα, όπως η μελέτη της καθίζησης των ερυθρών αιμοσφαιρίων.

Η συνάρτηση ϕ , αφού η διεπιφάνεια αποτελείται πάντοτε από τα ίδια στοιχεία των δύο ρευστών, μεταβάλλεται στο χρόνο με βάση την εξίσωση

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \quad (2.1.4.),$$

ενώ είναι ανάγκη να ανακατασκευάζεται με κατάλληλο αλγόριθμο, ώστε να παραμένει συνάρτηση απόστασης από την διεπιφάνεια, όπως έχει αρχικά ορισθεί.

2.2. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

Ο αριθμητικός αλγόριθμος προσομοίωσης της μεθοδολογίας (κεφ.3) έχει θεωρητικό υπόστρωμα την μηχανική των διφασικών ροών υγρού σε υγρό που διατυπώνεται μαθηματικά ως σύστημα γενικών καταστατικών εξισώσεων, *Croce, 2002, Landau & Lifshitz, 1959*. Συγκεκριμένα η κάθε μια από τις δύο υγρές φάσεις ρευστού παραμένουν διακριτές στην εξέλιξη του φαινομένου. Ω_b και Ω_c ορίζονται τα υποπεδία για τις ρευστές φάσεις b (σταγόνες) και c (συνεχής φάση), αντίστοιχα. Η διεπιφάνεια μεταξύ των δύο ρευστών που αντιστοιχεί στα περιγράμματα των σταγόνων ορίζεται $\Gamma_b = \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_c$. Το συνολικό διφασικό πεδίο ορισμού είναι το ανοικτό χωρίο $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_c \cup \Gamma_b \subset \mathbb{R}^3$ με συνεχές κατά *Lipschitz*³ όριο $\Gamma_0 = \partial\Omega$. Η διφασική ροή στους δύο τομείς Ω_b, Ω_c και την διεπιφάνεια Γ_b είναι χρονικά μεταβαλλόμενη και περιγράφεται για κάθε φάση $i \in \{b, c\}$ την χρονική στιγμή t από τις ασυμπίεστες εξισώσεις *Navier-Stokes* στο αντίστοιχο υποπεδίο Ω_i για $t \in \mathbb{R}^+$.

Τότε ισχύει

$$\rho_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = (-\nabla p_i + \nabla \cdot (\mu_i \mathbf{D}_i) + \rho_i \mathbf{g}) \quad (2.2.1.),$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = 0 \text{ στο } \Omega_i, \quad i \in \{b, c\} \quad (2.2.2.),$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \text{ στο όριο } \Gamma_0 = \partial\Omega \text{ για } t \in [0, T] \quad (2.2.3.),$$

³ Στην πραγματική ανάλυση η συνέχεια *Lipschitz* αποτελεί ισχυρότερη προϋπόθεση για την ομαλότητα συνάρτησης από την συνηθισμένη συνέχεια. Ο ρυθμός μεταβολής συνεχούς *Lipschitz* συνάρτησης έχει όριο, δηλαδή η κλίση δύο διαδοχικών σημείων στο γράφημα της συνάρτησης επιβάλλεται να είναι λιγότερο απότομη από ένα συγκεκριμένο αριθμό, την λεγόμενη σταθερά *Lipschitz* της συνάρτησης. Στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, η συνέχεια *Lipschitz* είναι η κεντρική προϋπόθεση του θεωρήματος *Picard-Lindelöf* το οποίο εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 \text{ για } t = 0 \text{ στο } \Omega_i, \quad i \in \{b, c\} \quad (2.2.4.),$$

ως αρχική συνθήκη, όπου \mathbf{u}_i είναι η ταχύτητα του ρευστού, p_i η πίεση, μ_i το δυναμικό ιξώδες, ρ_i η πυκνότητα, \mathbf{D}_i ο τανυστής τάσεων λόγω του ιξώδους που δίνεται από τον τύπο $\mathbf{D}_i = \nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T$ και \mathbf{g} είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Οι τιμές των μ_i και ρ_i μέσα στην κάθε φάση θεωρούνται σταθερές.

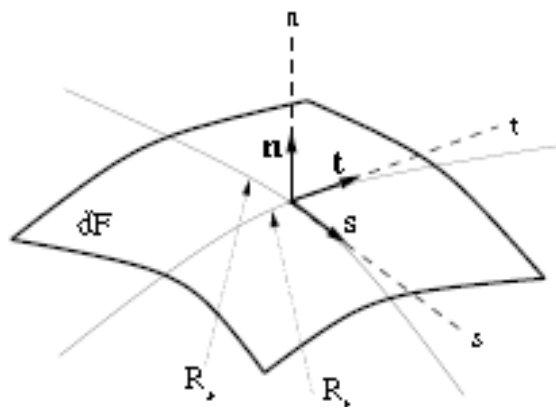
Ωστόσο, το σύστημα των εξισώσεων (2.2.1.-2.2.4.) σύμφωνα με την μηχανική του συνεχούς μέσου δεν είναι ολοκληρωμένο αν δεν επιβληθούν συμπληρωματικές οριακές συνθήκες στην απότομη διεπιφάνεια Γ_b που διαχωρίζει τις δύο φάσεις της ροής. Για μη αναμειγνυόμενα ρευστά αυτό δικαιολογείται από την διαστατική ανάλυση. Ως εκ τούτου, το διφασικό μοντέλο περιλαμβάνει μια μετάβαση σε πυκνότητα και ιξώδες με μεταβολή σε όλη την διεπιφάνεια, η οποία δεν διαθέτει μάζα και επομένως δεν ασκούνται ορθές τάσεις κατά μήκος της. Επιπλέον, η ταχύτητα πρέπει να είναι συνεχής σε όλη την διεπιφάνεια, δηλαδή επιβάλλεται η συνθήκη,

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_c \text{ στην } \Gamma_b \quad (2.2.5.).$$

Έστω $\mathbf{n} = \mathbf{n}_b = -\mathbf{n}_c$ δηλώνει το κάθετο διάνυσμα στην διεπιφάνεια Γ_b , κατευθυνόμενο εξωτερικά στο $\partial\Omega_b$. Η τοπική καμπυλότητα, κ δίνεται:

$$\kappa = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_s} \quad (2.2.6.),$$

με τις ακτίνες καμπυλότητας R_t, R_s κατά μήκος των συντεταγμένων \mathbf{t}, \mathbf{s} , όπως φαίνονται στο Σχ.2.2.



Σχ.2.2. Στοιχειώδες τμήμα και γεωμετρικά στοιχεία για την περιγραφή της διεπιφάνειας που είναι απαραίτητα στους υπολογισμούς, Croce, 2002.

Οι οριακές συνθήκες για την επιφανειακή τάση στη διεπιφάνεια Γ_b μεταξύ των δύο υγρών φάσεων δίνονται από τις σχέσεις

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \quad (2.2.7.),$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{t}} \quad (2.2.8.),$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{s}} \quad (2.2.9.),$$

όπου $\mathbf{T}_i = -p_i \mathbf{I} + \mu_i \mathbf{D}_i$ είναι ο τανυστής των τάσεων, σ είναι ο συντελεστής επιφανειακής τάσης που καθορίζεται από τις φυσικές ιδιότητες των δύο φάσεων. Επειδή θεωρείται ότι οι ιδιότητες του υλικού, όπως ρ_i και μ_i είναι σταθερές σε κάθε Ω_i , ο συντελεστής επιφανειακής τάσης σ είναι σταθερός σε όλο το πεδίο. Επομένως ο όρος της επιφανειακής τάσης \mathbf{F} , όπως έχει οριστεί παραπάνω είναι η κάθετη συνιστώσα της συνολικής ασκούμενης δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας λόγω της επιφανειακής τάσης. Όμως για σταθερό μέτρο επιφανειακής τάσης σ , οι εφαπτομενικές συνιστώσες της επιφανειακής τάσης μηδενίζονται δηλαδή

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (2.2.10.),$$

και άρα οι σχέσεις (2.2.7.) και (2.2.8.) γράφονται

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.2.11.),$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (2.2.12.).$$

Συνεπώς η κάθετη συνιστώσα \mathbf{F} της επιφανειακής τάσης αντιπροσωπεύει την συνολική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στην διεπιφάνεια και επομένως επιβάλλονται δυνάμεις της επιφανειακής τάσης μόνο κατά την κάθετη κατεύθυνση.

Συνοψίζοντας, επιλύονται οι εξισώσεις Navier-Stokes (2.2.1.) σε κάθε μία από τις υποπεριοχές Ω_i μόνο με τις συνθήκες (2.2.5.) και (2.2.7.), για την διεπιφάνεια Γ_b ενώ οι εφαπτομενικές συνθήκες (2.2.11.) και (2.2.12.) δεν εφαρμόζονται ρητά. Τελικά, το πλήρες μοντέλο για προβλήματα διφασικής ροής συμπεριλαμβανομένης της επιφανειακής τάσης περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα που περιέχει τις εξισώσεις

$$\rho_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = (-\nabla p_i + \nabla \cdot (\mu_i \mathbf{D}_i) + \rho_i \mathbf{g}) \quad (2.2.1.)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = 0 \text{ στο } \Omega_i \quad (2.2.2.),$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \text{ στο όριο } \Gamma_0 = \partial\Omega \text{ για } t \in [0, T] \quad (2.2.3.),$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{0i} \text{ για } t=0 \text{ στο } \Omega_i \quad (2.2.4.),$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_c \text{ στο } \Gamma_b \quad (2.2.5.),$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \text{ στο } \Gamma_b \text{ για } i \in \{b, c\} \quad (2.2.7.).$$

2.3. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΤΩΝ ΙΣΟΥΨΩΝ ϕ .

Βασικό υπόβαθρο της *LSM*, όπως προτάθηκε από τους *Osher and Sethian* είναι ότι στο \mathbb{R}^n μια κλειστή κινούμενη διεπιφάνεια $\Gamma_b(t)$ με $\text{codimension}^4 = 1$, που περικλείει την περιοχή (ή σύνολο υποπεριοχών) $\Omega_b(t)$, μπορεί να περιγραφεί έμμεσα ως η μηδενική ισοΨής της συνάρτησης ϕ ή το σύνολο των σημείων στο χώρο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου μηδενίζεται η ϕ : $\{\mathbf{x}: \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$. Η διεπιφάνεια δηλαδή δίνεται από την σχέση

$$\Gamma_b(t) = \{\mathbf{x}: \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3.1.).$$

Στη μεθοδολογία μας η συνάρτηση των ισοΨών (level-set), $\phi(\mathbf{x}, t)$ ή ϕ ή *phi* η οποία είναι συνεχής συνάρτηση κατά *Lipschitz* ορίζεται με τον συμβατικό τρόπο⁵:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} < 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Omega_b \\ 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Gamma_b \\ > 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Omega_c \end{cases} \quad (2.3.2.).$$

Συγχρόνως η $\phi(\mathbf{x}, t)$ καθορίζεται ως προσημασμένη συνάρτηση απόστασης (signed distance function), είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και η κλίση της $\nabla\phi$ πληροί την εικονική εξίσωση⁶

$$|\nabla\phi| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} = 1 \quad (2.3.3.),$$

και υπολογίζει την απόσταση κάθε σημείου $\mathbf{x}(t)$ από την διεπιφάνεια $\Gamma_b(t)$ και την σχετική θέση του σημείου (εντός ή εκτός) από αυτή.

Η ταχύτητα \mathbf{u} ή η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας \mathbf{u}_n με την οποία μετακινούνται γενικώς τα σημεία της διεπιφάνειας $\Gamma_b(t)$ επιτρέπεται να είναι συναρτήσεις του χώρου \mathbf{x} , του χρόνου t , του καθέτου διανύσματος \mathbf{n} , της τοπικής μέσης καμπυλότητας κ ή άλλων χαρακτηριστικών ποσοτήτων, όπως το μέτρο *Hausdorff* της διεπιφάνειας, $|\Gamma_b(t)|$, το μέτρο

⁴ Όταν ένα μαθηματικό αντικείμενο βρίσκεται εντός ή είναι συνδεδεμένο με ένα άλλο αντικείμενο διάστασης n , τότε λέγεται ότι έχει κ codimension, αν έχει διάσταση $n - \kappa$.

⁵ Αναφέρονται στην βιβλιογραφία και διαφορετικές συμβάσεις ορισμού της συνάρτησης των ισοΨών.

⁶ Γενικά, εικονική (eikonal) εξίσωση είναι μια μη-γραμμική διαφορική εξίσωση που συναντάται σε εξισώσεις *Hamilton-Jacobi*. Περιγράφει π.χ. την διάδοση μετώπων κύματος μέσα σε υλικά, όπου η τοπική ταχύτητα είναι συνάρτηση της θέσης.

Lesbegue του $\Omega_b(t), |\Omega_b(t)|$ ή να επιβάλλεται από εξωτερικό πεδίο με το οποίο συμπλέκεται η κίνηση της $\Gamma_b(t)$, *Peng et.al., 1999*.

Ειδικότερα στην μεθοδολογία της διατριβής, η συνάρτηση $\phi(t)$ ορίζεται σε ολόκληρο το πεδίο ροής για κάθε χρονική στιγμή t και η θέση της αλλάζει στο χρόνο με την τοπική ταχύτητα του πεδίου ροής $\mathbf{u}(t)$ σημείο προς σημείο. Σε ένα σημείο $P(x, y)$ του χωρίου ορισμού, η απόλυτη τιμή της ϕ είναι ίση με την απόσταση του σημείου αυτού από τη διεπιφάνεια των δύο φάσεων. Αν το σημείο $P(x, y)$ είναι εκτός της σταγόνας, θα εκχωρηθεί στη ϕ θετική τιμή (πρόσημο +), ενώ σε σημείο εντός της σταγόνας θα εκχωρηθεί στη ϕ αρνητική τιμή (πρόσημο -). Η διεπιφάνεια (δηλ. το περίγραμμα της σταγόνας) αντιστοιχεί σε σημεία του πεδίου ροής, όπου ισχύει $\phi = 0$.

Επομένως η αρχική συνάρτηση $\phi(\mathbf{x}, 0)$ ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \text{προσημασμένη απόσταση του } \mathbf{x} \text{ από την } \Gamma_b(0) \quad (2.3.4.).$$

Με τον ορισμό της ϕ γίνεται εφικτό να διατυπωθούν βασικά μεγέθη του ρευστοδυναμικού διφασικού πεδίου ως συναρτήσεις της ϕ και έτσι να οριστούν με μία ενιαία συνεχή συνάρτηση σε ολόκληρο το χωρίο ορισμού Ω . Έτσι ξεπερνιέται η ανάγκη και συγχρόνως αδυναμία για ανεξάρτητους ορισμούς σε κάθε φάση Ω_b, Ω_c και κοινή οριακή συνθήκη στην διεπιφάνεια Γ_b .

2.4. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ : $\rho(\phi), \mu(\phi), \kappa(\phi), \mathbf{n}(\phi), H(\phi), \delta(\phi)$.

Σύμφωνα με την §2.3 διάφορες μεταβλητές όπως οι πυκνότητες ρ_i και τα ιξώδη μ_i μπορούν να ορισθούν σε ολόκληρο το Ω συμπεριλαμβανόμενης της διεπιφάνειας Γ_b ως συναρτήσεις της ϕ , δηλαδή $\rho(\phi)$ και $\mu(\phi)$. Για να περιγραφούν και οι ασυνέχειες στην διεπιφάνεια Γ_b , χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη 1D συνάρτηση *Heaviside*, $H(x)$ για $x = \phi$ (Παράρτημα 4) και την σχέση (Π.4.1.) ορίζεται στο Ω η συνάρτηση $H(\phi)$:

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{για } \phi < 0 \\ 0.5 & \text{για } \phi = 0 \\ 1 & \text{για } \phi > 0 \end{cases} \quad (2.4.1.).$$

Με την $H(\phi)$ η συνεχής πυκνότητα και το ιξώδες στο συνολικό πεδίο Ω της διφασικής ροής εκφράζεται σαν συνάρτηση της ϕ ,

$$\rho(\phi) = \rho_b + (\rho_c - \rho_b) \cdot H(\phi) \quad (2.4.2.)$$

και

$$\mu(\phi) = \mu_b + (\mu_c - \mu_b) \cdot H(\phi) \quad (2.4.3).$$

Επίσης ορίζεται η 1D συνάρτηση $\delta(\phi)$ στο Ω η οποία προκύπτει από την γενικευμένη συνάρτηση Dirac $\delta(x)$ για $x = \phi$ (Παράρτημα 4) και την σχέση (Π.4.2.)

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{για } \phi \neq 0 \\ +\infty & \text{για } \phi = 0 \end{cases}$$

με τον περιορισμό της ισοδύναμης συνθήκης, σχέση (Π.4.3.), $\int_{\mathbb{R}} \delta(\phi) \cdot d\phi = 1$.

Η $\delta(\phi)$ δίνει την δυνατότητα να διατυπωθεί σαν χωρικό ολοκλήρωμα ο όρος πηγής της επιφανειακής τάσης (§2.5.) με εφαρμογή της σχέσης (Π.4.5.), ώστε να ισχύει για $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \delta(\phi(\mathbf{x})) \cdot dx \cdot dF = \int_{\Gamma_b} f(x) \cdot dF \quad (2.4.4.)$$

Οι $H(\phi), \delta(\phi)$ συμβάλουν στον ορισμό και καθιστούν εφικτό τον υπολογισμό των παρακάτω γεωμετρικών ποσοτήτων. Έτσι το μήκος του τόξου της καμπύλης Γ_b δίνεται γενικά από την σχέση

$$L = \int_{\Omega} \delta(d(x, y)) dx dy \quad (2.4.5.)$$

και ως συνάρτηση της ϕ , Peng et.al.

$$|\Gamma_b(t)| = \int \delta(\phi) |\nabla \phi| dx \quad (2.4.6.),$$

$$|\Omega_b(t)| = \int H(-\phi) dx \quad (2.4.7.).$$

Στις 2-D, το $|\Gamma_b(t)|$ περιγράφει την περίμετρο της διεπιφάνειας $\Gamma_b(t)$ και το $|\Omega_b(t)|$ το εμβαδό $\Omega_b(t)$ που περικλείεται εσωτερικά της διεπιφάνειας. Αντίστοιχα στις 3-D, $|\Gamma_b(t)|$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του $\Gamma_b(t)$ και $|\Omega_b(t)|$ ο όγκος του $\Omega_b(t)$.

Ακόμη επειδή η ϕ ορίζεται σαν συνάρτηση απόστασης από την διεπιφάνεια, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην διεπιφάνεια Γ_b με κατεύθυνση εξωτερικά $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ γράφεται

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.4.8.)$$

και η τοπική καμπυλότητα της διεπιφάνειας, $\kappa = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_s}$ (2.2.6.) εκφράζεται ως

$$\kappa = \kappa(\phi) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.4.9.).$$

Το κ επιλέγεται ώστε μια σφαίρα να έχει θετική μέση καμπυλότητα ίση με το αντίστροφο της ακτίνας της. Επίσης ορίζεται το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα \mathbf{s} στην Γ_b ως $\mathbf{s} = (s_x, s_y) = (-n_y, n_x)$.

2.5. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗΣ ΤΑΣΗΣ ΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ.

Για να ενσωματωθεί ή επιφανειακή τάση που ασκείται στην διεπιφάνεια μέσα στις διφασικές εξισώσεις της ορμής διατυπώνεται η ολοκληρωτική έκφραση της (2.2.1.) για $i \in \{b, c\}$

$$\int_{\Omega_i} \rho_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \int_{\Omega_i} \rho_i \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.1.)$$

Αθροίζοντας τις δύο εξισώσεις της ορμής (2.2.1.) προκύπτει ,

$$\rho_b \int_{\Omega_b} \frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \frac{D\mathbf{u}_c}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \cdot dF - \int_{\Gamma_b} [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \rho_b \int_{\Omega_b} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.2.),$$

όπου $\mathbf{T} = \mathbf{T}_{i \in \Omega_b} + \mathbf{T}_{i \in \Omega_c}$ και $\mathbf{T} = \mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c$ συμβολίζει το άλμα των τιμών του τανυστή των τάσεων \mathbf{T} μέσα στη διεπιφάνεια Γ_b . Άρα η (2.2.7.) γράφεται

$$[\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \quad (2.5.3.),$$

Επίσης με εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss⁷, ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \cdot dF = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.4.).$$

Επειδή το \mathbf{T} είναι ασυνεχές στην διεπιφάνεια εξ αιτίας του άλματος στο ιξώδες, επομένως και η σχέση (2.5.4.) πρέπει να κατανοείται υπό την έννοια των κατανομών (distributions).

Λόγω της (2.2.5.) το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{i \in \Omega_b} + \mathbf{u}_{i \in \Omega_c}$ για ιξώδη ρευστά είναι συνεχές και επίσης η $\rho = \rho(\phi)$ συνεχής συνάρτηση άρα μπορεί να προκύψει η σχέση

$$\rho_b \int_{\Omega_b} \frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \frac{D\mathbf{u}_c}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.5.),$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.4.) και (2.5.5.) στην (2.5.2.), διατυπώνεται η

$$\int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_b} \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.6.).$$

⁷ Στο διανυσματικό λογισμό, το θεώρημα του Gauss, $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, όπου \mathbf{E} είναι το διανυσματικό πεδίο, S είναι η κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο V , εκφράζει ότι η εξερχόμενη ροή ενός διανυσματικού πεδίου από μια κλειστή επιφάνεια ισούται με το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης του πεδίου εντός της περιοχής που περικλείει η επιφάνεια.

Η (2.5.6.) είναι η ολοκληρωτική έκφραση των εξισώσεων της ορμής για ασυμπίεστη διφασική ροή που περιλαμβάνει την επιφανειακή τάση στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης ως όρο πηγής για ολόκληρο το πεδίο Ω .

Η αντίστοιχη διαφορική έκφραση των διφασικών εξισώσεων *Navier-Stokes* απαιτεί μια μέθοδο μοντελοποίησης της δύναμης της επιφανειακής τάσης που κατανέμεται σε όγκο μικρού πλάτους που ορίζεται από την διεπιφάνεια πεπερασμένου πλάτους. Χρησιμοποιείται μια διατύπωση της μεθοδολογία *CSF*, *Brackbill et.al., 1992, Osher & Fedkiw, 2003, κεφ.1* σε συνδυασμό με την *LSM* που δεν απαιτεί ρητή ανασυγκρότηση της διεπιφάνειας⁸. Οι *Chang et.al., (1996)* απέδειξαν ότι στο πλαίσιο των *LSM* το επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε χωρικό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τα μεγέθη $\kappa(\phi)$, $\mathbf{n}(\phi)$, $\delta(\phi)$ ως συναρτήσεις της ϕ και την σχέση (2.4.8.). Επομένως ο όρος \mathbf{F} της επιφανειακής τάσης γράφεται

$$\int_{\Gamma_b} \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \cdot dF = \int_{\Omega} \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.7.)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.7.) στην (2.5.6.) προκύπτει η σχέση

$$\int_{\Omega} (\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi - \rho(\phi) \cdot \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (2.5.8.).$$

Η ολοκληρωματική έκφραση (2.5.8.) περιλαμβάνει μόνο χωρικά ολοκληρώματα. Δεδομένου ότι αυτή η σχέση ισχύει και για οποιονδήποτε τυχαίο όγκο, με το πέρασμα στο όριο των απειροστών όγκων, διατυπώνεται η ισοδύναμη διαφορική έκφραση

$$\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi - \rho(\phi) \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (2.5.9.)$$

Από τον ορισμό του τανυστή των τάσεων

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{D} \quad (2.5.10.),$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \rho(\phi) \cdot \mathbf{g} \quad (2.5.11.).$$

⁸ Το μοντέλο *CSF* (*Continuum Surface Force*) προτάθηκε για πρώτη φορά από τους *Brackbill et.al., 1992* για τις μεθόδους *VOF* και από τους *Unverdi et.al.* για τις μεθόδους *MAC*. Μια διατύπωση βασισμένη στην *LSM* δεν απαιτεί ρητή ανασυγκρότηση της ελεύθερης επιφάνειας σε αντίθεση με τις μεθόδους *VOF*, όπου απαιτείται ανακατασκευή της Γ_b ακόμα και με την διατύπωση *CSF*.

2.6. ΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ (ΤΕΛΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ)

Αν $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ είναι η υλική παράγωγος της ταχύτητας τότε

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (2.6.1.)$$

και η σχέση (2.5.11.) γράφεται

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho(\phi)} + \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \mathbf{g} \quad (2.6.2.),$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους προκύπτει η σχέση

$$\mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho(\phi)} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \mathbf{g} \quad (2.6.3.).$$

Οι εξισώσεις (2.6.3.) είναι η τελική διαφορική έκφραση των διφασικών εξισώσεων της ορμής ή *Navier-Stokes* που διέπουν την κίνηση δύο νευτώνειων, ασυμπίεστων, συνεκτικών ρευστών, μεταβαλλόμενου ιξώδους και πυκνότητας που διαχωρίζονται από διεπιφάνεια επάνω στην οποία ασκείται επιφανειακή τάση. Σε αντίστοιχη διατύπωση οδηγεί και η ανάλυση που περιγράφεται στην *Chang et.al., 1996, Di et.al., 2007*. Στο αριστερό μέλος ο όρος \mathbf{u}_t εκφράζει τις μη μόνιμες αδρανειακές δυνάμεις και ο όρος ∇p εκφράζει τις δυνάμεις λόγω της πίεσης.

2.7. ΑΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Στους υπολογισμούς διευκολύνουν αδιάστατες εξισώσεις. Παρακάτω με την τυπική διαδικασία αδιαστατοποίησης, οι εξισώσεις (2.6.3.) αδιαστατοποιούνται για $\Omega \in \mathbb{R}^2$ στις δύο διαστάσεις x, y ή την αξονομετρική περίπτωση με απλές αλγεβρικές πράξεις. Η ομοιότητα των ροών στηρίζεται στους αδιάστατους αριθμούς $Re, \lambda, Ca, We, Fr, \kappa, \delta$ που ορίζονται με την παρακάτω ανάλυση, η οποία μπορεί άμεσα να επεκταθεί για $\Omega \in \mathbb{R}^3$ και στην τρίτη διάσταση z χωρίς πρόσθετους περιορισμούς. Συγκεκριμένα ορίζονται.

Αριθμός Reynolds, Re : ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις συνεκτικές δυνάμεις ιξώδους,

$$Re = \rho_c \cdot U \cdot D_h / \mu_c \quad (2.7.1.),$$

Λόγος ιξωδών, λ : ο λόγος ιξωδών των φάσεων

$$\lambda = \mu_b / \mu_c \quad (2.7.2.),$$

Τριχοειδής Αριθμός, Ca : ο λόγος των ιξωδών δυνάμεων προς τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης,

$$Ca = \mu_c \cdot U / \sigma \quad (2.7.3.),$$

Αριθμός Weber, We : ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις επιφανειακής τάσης,

$$We = \rho_c \cdot U^2 \cdot D_h / \sigma \quad (2.7.4.),$$

Αριθμός Froude, Fr : ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις βαρύτητας, *White, 1999*.

$$Fr = U^2 / \|g\| \cdot D_h \quad (2.7.5.),$$

Μέγεθος σταγόνων, κ : ο λόγος της ακτίνας της σταγόνας προς το ημιπλάτος του διδιάστατου ή αντίστοιχα την ακτίνα του αξονοσυμμετρικού αγωγού στην είσοδο του πεδίου ροής

$$\kappa = r/h \text{ ή } \kappa = r/R \quad (2.7.6.),$$

και Εκκεντρότητα δ : ο λόγος της απόστασης του κέντρου της σταγόνας από την μέση γραμμή (άξονα συμμετρίας) προς το ημιπλάτος του διδιάστατου ή αντίστοιχα την ακτίνα του αξονοσυμμετρικού αγωγού στην είσοδο του πεδίου ροής.

$$\delta = \varepsilon/h \text{ ή } \delta = \varepsilon/R \quad (2.7.7.),$$

όπου U είναι η μέση ταχύτητα της ροής και το D_h είναι η υδραυλική διάμετρος του αγωγού.

Ισχύει $D_h = 2 \cdot h$ για 2-D ή $D_h = 2R$ για αξονοσυμμετρικούς αγωγούς (Σχ.2.1.).

Οι χωρικές συντεταγμένες αδιαστατοποιούνται διά h ή R :

$$x' = x/h, \quad x' = x/R, \quad y' = y/h, \text{ ή } y' = y/R \quad (2.7.8.),$$

ο χρόνος διά h/U ή R/U :

$$t' = t \cdot U/h \text{ ή } t' = t \cdot U/R \quad (2.7.9.),$$

οι ταχύτητες διά U :

$$u' = u/U, \quad v' = v/U \quad (2.7.10.),$$

η πίεση διά $\rho_c U^2$:

$$p' = p / (\rho_c U^2) \quad (2.7.11.),$$

η πυκνότητα διά ρ_c :

$$\rho' = \rho / \rho_c \quad (2.7.12.),$$

και το ιξώδες διά μ_c :

$$\mu' = \mu / \mu_c \quad (2.7.13.),$$

και το πεδίο βαρύτητας \mathbf{g} δια $\|\mathbf{g}\|$:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} / \|\mathbf{g}\| \quad (2.7.14.),$$

όπου $\mathbf{u}=(u,v)$ και u είναι η x συνιστώσα και v η y συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων αντίστοιχα και οι τόνοι δηλώνουν τα αδιάστατα μεγέθη. Στη συνέχεια του κειμένου για εποπτικούς λόγους απαλείφονται οι τόνοι για τα αδιάστατα μεγέθη.

Με την παραπάνω διαδικασία αδιαστατοποίησης οι εξισώσεις (2.6.3.) διαμορφώνονται στην σχέση

$$\mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho(\phi)} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi) \mathbf{D}) \right) - \frac{1}{We} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla \phi \right) + \frac{1}{Fr} \cdot \mathbf{g} \quad (2.7.15.).$$

Οι εξισώσεις (2.7.15.) αποτελούν την τελική αδιάστατη διαφορική έκφραση των διφασικών εξισώσεων της ορμής ή *Navier-Stokes* που διέπουν την κίνηση δύο νευτώνειων, ασυμπίεστων, συνεκτικών ρευστών, μεταβαλλόμενου ιξώδους και πυκνότητας και διαχωρίζονται από διεπιφάνεια, όπου ασκείται επιφανειακή τάση. Αντίστοιχη διατύπωση προτείνεται στην *Di et. al., 2007*.

Επίσης η εξίσωση της συνεχείας (2.2.2) γράφεται

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.7.16.),$$

εξασφαλίζοντας ότι τα δύο ρευστά είναι ασυμπίεστα.

Η εξίσωση για τις οριακές συνθήκες (2.2.3.) διατυπώνεται

$$\mathbf{u} = 0 \text{ στο όριο } \Gamma_0 = \partial\Omega \text{ για } t \in [0, T] \quad (2.7.17.),$$

και η εξίσωση για τις αρχικές συνθήκες (2.2.4.) διατυπώνεται

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ για } t = 0 \text{ στο } \Omega \quad (2.7.18.),$$

Η επίλυση του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων (2.7.15-16-17-18) υπολογίζει απευθείας το πεδίο ταχυτήτων της διφασικής ροής, *Croce et.al., 2004*. Η διακριτοποίηση των παραπάνω εξισώσεων περιγράφεται στο κεφ.3.

2.8. ΟΙ ΟΡΟΙ ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΩΝ ΑΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΦΑΣΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Οι όροι του δεξιού μέλους της σχέσης (2.7.15.) χαρακτηρίζονται και περιγράφονται διακριτά στο $\Omega \in \mathbb{R}^2$ στις δύο διαστάσεις x , y ή την αξονομετρική περίπτωση ως κάτωθι.

Ο όρος $-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ εκφράζει τους συναγωγικούς όρους που είναι ταυτόσημοι με τους αντίστοιχους συναγωγικούς όρους στη μονοφασική ροή και θα συμβολίζεται ως $\mathbf{CONV}=(CONV_x, CONV_y)$. Ορίζεται

$$\mathbf{CONV} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.8.1.).$$

Ο όρος $\frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi) \mathbf{D}) \right)$ εκφράζει τους όρους ιξώδους ή συνεκτικούς όρους και θα συμβολίζεται ως $\mathbf{VISC}=(VISC_x, VISC_y)$. Ορίζεται

$$\mathbf{VISC} = \frac{1}{\rho(\phi)} (\nabla \cdot (\mu(\phi) \mathbf{D})) \quad (2.8.2.).$$

Ο όρος $-\frac{1}{We} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla \phi \right)$ λόγω της μεθόδου *CSF*, εκφράζει την ασκούμενη επιφανειακή τάση στις διεπιφάνειες ως όρο πηγής, προκειμένου να περιγράψει τα άλματα στην πίεση και τις φυσικές ιδιότητες των δύο ρευστών και θα συμβολίζεται ως $\mathbf{ST}=(ST_x, ST_y)$. Ορίζεται

$$\mathbf{ST} = -\frac{1}{\rho(\phi)} (\kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla \phi) \quad (2.8.3.).$$

Τέλος ο όρος $\frac{1}{Fr} \mathbf{g}$ εκφράζει τους όρους της βαρύτητας και μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y) \quad (2.8.4.).$$

Με βάση τις σχέσεις (2.8.1.-2.-3-4.) ορίζεται η παρακάτω διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{U}=(U_x, U_y)$

$$\mathbf{U} = \mathbf{CONV} + \frac{1}{Re} \mathbf{VISC} + \frac{1}{We} \mathbf{ST} + \frac{1}{Fr} \mathbf{g} \quad (2.8.5.),$$

ώστε να αποτελεί το δεξιό μέλος της (2.7.15.).

Η (2.8.5.) αναλύεται στις συνιστώσες της \mathbf{U} , δηλ. τις $\mathbf{U} = U_x, U_y$ για τις κατευθύνσεις x, y του καρτεσιανού πλέγματος με την χρήση των αντιστοίχων συνιστωσών των \mathbf{CONV} , \mathbf{VISC} , \mathbf{ST} και \mathbf{g} όπως διατυπώνονται στις παρακάτω αλγεβρικές εξισώσεις:

$$U_x = CONV_x + \frac{1}{Re} VISC_x + \frac{1}{We} ST_x + \frac{1}{Fr} \mathbf{g}_x \quad (2.8.5.x)$$

$$U_y = CONV_y + \frac{1}{Re} VISC_y + \frac{1}{We} ST_y + \frac{1}{Fr} \mathbf{g}_y \quad (2.8.5.y).$$

2.9. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΙΣΟΨΩΝ - LEVEL SET METHOD .

2.9.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοψών ϕ^*

Η διεπιφάνεια μεταφέρεται με το πεδίο ροής, επομένως πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η κίνηση της διεπιφάνειας Γ_b στη διάρκεια του φαινομένου. Ως εκ τούτου, η χρονική εξέλιξη της Γ_b μοντελοποιείται σαν απλή μεταφορά της ϕ , λόγω του υποκείμενου ρευστοδυναμικού πεδίου ταχυτήτων \mathbf{u} . Για τον υπολογισμό της θέσης της διεπιφάνειας σε επόμενες χρονικές στιγμές, χρησιμοποιείται η διατύπωση μεταφοράς της ϕ κατά *Euler* της αυθεντικής εξίσωσης των ισοψών των *Osher & Sethian, 1988*,

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{ή} \quad \phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (2.9.1.1.),$$

με αρχική τιμή $\phi_0(\mathbf{x})$

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) \quad (2.9.1.2.),$$

όπου $\phi(\mathbf{x}, 0)$ είναι η αρχική συνάρτηση των ισοϋψών όπως καθορίζεται για $t = 0$.

Για να καθοριστεί η θέση σημείου $\mathbf{x}(t)$ της διεπιφάνειας την χρονική στιγμή t επιλύεται η (2.9.1.1), υπολογίζεται η χρονοεξαρτώμενη συνάρτηση των ισοϋψών $\phi(\mathbf{x}(t), t)$ από το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας μεταφοράς⁹ της και επιλέγονται τα σημεία όπου $\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$.

Συμπερασματικά σε κάθε χρονικό βήμα του αλγορίθμου, υπολογίζεται αρχικά το πεδίο ταχυτήτων της ροής και επιλύοντας την εξίσωση (2.9.1.1) υπολογίζεται μια νέα συνάρτηση ϕ^* η λεγόμενη ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών και επομένως μια νέα θέση της διεπιφάνειας, από τα σημεία του πεδίου ροής που πληρούν την συνθήκη $\phi^* = 0$. Δηλαδή εξασφαλίζεται ότι τα σημεία της διεπιφάνειας μετακινούνται σύμφωνα με το πεδίο ταχυτήτων της ροής. Σε πολλές περιπτώσεις έχει παρατηρηθεί, ότι η μεταφορά της συναρτήσεως των ισοϋψών με την εξίσωση (2.9.1.1) δεν εξασφαλίζει ότι η νέα συνάρτηση $\phi^* = 0$ ικανοποιεί την συνθήκη $|\nabla \phi| = 1$ (2.3.3.) και επομένως η ϕ^* δεν παραμένει προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από την διεπιφάνεια, όπως έχει αρχικά καθοριστεί, γιατί συχνά οι κλίσεις της ϕ^* που προκύπτουν από την επίλυση της εξ. (2.9.1.1.) γίνονται πολύ μικρές ή απότομες στο μέτωπο της Γ_b .

Όμως στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, η διατήρηση της ϕ σαν συνάρτηση απόστασης είναι ουσιαστική, γιατί η διεπιφάνεια δεν ορίζεται απολύτως αιχμηρή αλλά έχει ένα πεπερασμένο πάχος, 2ε , της τάξεως μεγέθους του χωρικού βήματος του πλέγματος, dx ή dy . Παρατηρείται επομένως αριθμητική διάχυση στην εξέλιξη του φαινομένου, *Sussman et.al, 1994*, ιδιαίτερα στην μοντελοποίηση της επιφανειακής τάσης, της καμπυλότητας και στην διατήρηση της μάζας του ρευστού που περικλείεται από την διεπιφάνεια. Συνοψίζοντας, η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών ϕ^* που υπολογίζεται

⁹ Στην γενικότερη περίπτωση η διεπιφάνεια έχει και δική της κίνηση, ανεξάρτητη από την κίνηση που της δημιουργεί το πεδίο ροής του ρευστού, (πράγμα που δεν συμβαίνει στα προβλήματα που μελετώνται στην παρούσα εργασία) με ταχύτητα \mathbf{F} κάθετη στην διεπιφάνεια, τότε η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της διεπιφάνειας είναι η: $\phi_t - \mathbf{F}|\nabla \phi| + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$.

από την εξίσωση μεταφοράς (2.9.1.1) δεν είναι επαρκής να εκφράσει την ϕ την χρονική στιγμή $n+1$ δηλαδή την ϕ^{n+1} .

2.9.2. Η εξίσωση επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοϋψών.

Για να υπολογιστεί έγκυρη προσημασμένη συνάρτηση απόστασης ϕ^{n+1} κρίνεται αναγκαία διαδικασία μετεπεξεργασίας της ϕ^* , ώστε να περιγραφούν οι κλίσεις της ϕ^* στην περιοχή του μετώπου με ακρίβεια. Η διαδικασία είναι γνωστή ως επαναρχικοποίηση της συναρτήσεως των ισοϋψών ή απλά επαναρχικοποίηση και υλοποιείται στην **LSM** σε αρκετές παραλλαγές. Εδώ εφαρμόζεται η διαδικασία των *Sussman et al., 1994* ως εξής.

Έστω η συνάρτηση $\phi^*(\mathbf{x}(t), t)$ ή απλά $\phi^*(\mathbf{x})$ που προκύπτει από την επίλυση της (2.9.1.1) της οποίας η μηδενική ισοϋψής, $\phi^*(\mathbf{x}(t), t) = 0$ υποδηλώνει τα προσωρινά σημεία $\mathbf{x}(t)$ της διεπιφάνειας των δύο ρευστών την χρονική στιγμή t .

Επίσης έστω η συνάρτηση $d(\mathbf{x}(t), t)$ ή απλά $d(\mathbf{x})$ με αρχική τιμή

$$d(\mathbf{x}, 0) = \phi^*(\mathbf{x}) \quad (2.9.2.1.)$$

που πληροί την συνθήκη

$$d(\mathbf{x}) = \phi^*(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.9.2.2.)$$

και προκύπτει από την επίλυση με επαναληπτική διαδικασία στον ψευδοχρόνο τ σε σταθερή κατάσταση της ψευδο-μεταβατικής εξίσωσης τύπου *Hamilton-Jacobi*

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1) = 0 \quad (2.9.2.3.)$$

μέχρι μόνιμης λύση της, με βάση βέβαια κάποιο κριτήριο σύγκλισης. Η $d(\mathbf{x})$ έχει την ίδια μηδενική ισοϋψή με την ενδιάμεση συνάρτηση ισοϋψών $\phi^*(\mathbf{x})$ στα σημεία του χωρίου υπολογισμού που αντιστοιχούν στην διεπιφάνεια. Επιπλέον η $d(\mathbf{x})$ είναι προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από την διεπιφάνεια, γιατί ισχύει $|\nabla d| = 1$ στα σημεία του πεδίου ροής εκτός της διεπιφάνειας. Άρα η $d(\mathbf{x})$ είναι η ζητούμενη νέα τιμή της ϕ την χρονική στιγμή $n+1$, δηλαδή είναι $d(\mathbf{x}) = \phi^{n+1}(\mathbf{x})$.

Επομένως η μηδενική ισοϋψής, $d(\mathbf{x}(t), t) = 0$ της $d(\mathbf{x}(t), t)$ δηλώνει τα πραγματικά νέα σημεία $\mathbf{x}(t)$ της διεπιφάνειας των δύο ρευστών την χρονική στιγμή t και περιγράφει με ακρίβεια την νέα θέση της διεπιφάνειας. Ο όρος $\text{sign}(\phi^*)|\nabla d|$ μπορεί να εκληφθεί μακριά από τη μηδενική ισοϋψή ως κίνηση κατά την κάθετη κατεύθυνση. Η $\text{sign}(\phi^*)$, η οποία

αναφέρεται στην βιβλιογραφία και $S(\phi_0)$ είναι η συνάρτηση πρόσημου και $S(\phi_0)=1$ στο Ω^+ (εκτός της διεπιφάνειας), $S(\phi_0)=-1$ στο Ω^- (εντός της διεπιφάνειας) και $S(\phi_0)=0$ επάνω στην διεπιφάνεια, ώστε να παραμένει $\phi=0$. Κοντά στην διεπιφάνεια δεν απαιτούνται επιπλέον οριακές συνθήκες, διότι αυτό εξασφαλίζεται για τα σημεία στο Ω^+ από τα σημεία στο Ω^- και αντίστροφα.

Αντίθετα με άλλες μεθόδους, όπου η ανάγκη για επανακαθορισμό της διεπιφάνειας σε κάθε χρονική στιγμή εισάγει μεγάλη αριθμητική διάχυση, ο παραπάνω αλγόριθμος δεν απαιτεί την εύρεση της διεπιφάνειας σε κάθε χρονική στιγμή για να γίνει η ανακατασκευή της ϕ σαν συνάρτηση απόστασης, είναι εύκολα εφαρμόσιμος, απαιτεί λιγότερους αριθμητικούς υπολογισμούς και δίνει καλύτερα αριθμητικά αποτελέσματα.

2.9.3. Εισαγωγή «υβριδικής» μεθόδου επαναπροσδιορισμού της συνάρτησης των ισοϋψών για διατήρηση της μάζας των σταγόνων.

Στις εφαρμογές της *LSM* σε ρευστοδυναμικά προβλήματα και ειδικότερα σε διφασικές ροές δεν επαρκεί η διαδικασία επαναρχικοποίησης της §2.9.2. για να εξασφαλιστεί η διατήρηση της μάζας της κάθε φάσεως. Για να βελτιωθεί η διατήρηση της μάζας έχουν προταθεί μέθοδοι επαναρχικοποίησης εναλλακτικοί της §2.9.2., *Sussman et.al., 1999, Jiang & Peng, 2000, Chang et.al., 1996*. Εδώ υλοποιήθηκε αρχικά η μέθοδος της παραλλαγμένης εξίσωσης *Hamilton–Jacobi* των *Chang et.al.*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (A_0 - A(t)) \cdot (-P + \kappa(\phi)) \cdot |\nabla \phi| = 0 \quad (2.9.3.1.),$$

όπου $P = -5$ είναι συντελεστής για την σύγκλιση της μεθόδου, A_0 και $A(t)$ είναι το εμβαδόν¹⁰ της επιφάνειας της σταγόνας κατά την είσοδο της στο πεδίο ροής και στην εκάστοτε χρονική στιγμή t τα οποία υπολογίζονται με την σχέση $|\Omega_b(t)| = \int H(-\phi) dx$ (2.4.7.). Κριτήριο σύγκλισης ορίζεται η ικανοποίηση μίας μέγιστης αποδεκτής προκαθορισμένης διαφοράς $A(t) - A_0$ που εξασφαλίζει την αποδεκτή διατήρηση της μάζας των σταγόνων $(A(t) - A_0) / A_0 \leq 1 - 1.5\%$. Η σχέση (2.9.3.1) βελτιώνει πάρα πολύ την διατήρηση μάζας σε σύγκριση με την διαδικασία επαναρχικοποίησης της §2.9.2., *Sussman et.al., 1998*, στις οποίες παρατηρήθηκε απώλεια μάζας $(A(t) - A_0) / A_0 \leq 10\%$ σε περιπτώσεις με μεγάλες παραμορφώσεις του σχήματος της διεπιφάνειας. Όμως η

¹⁰ Στις 2-D και αξονοσυμμετρικές διφασικές ροές το εμβαδόν της επιφάνειας της σταγόνας περιγράφει για πυκνότητα $\rho(\phi) = 1$ την μάζα της σταγόνας.

ανακατασκευασμένη διεπιφάνεια δεν προκύπτει ομαλή (παρουσιάζει αριθμητική διάχυση) και δεν έχει σταθερό πάχος, μειώνοντας έτσι την ακρίβεια των γεωμετρικών πληροφοριών. Για τον σκοπό αυτό στη μεθοδολογία επαναρχικοποίησης εισάγεται ένας νέος «υβριδικός» αλγόριθμος επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοϋψών, Σχ.2.3., αποτελούμενος από συνδυασμούς των εξισώσεων (2.9.2.3.) και (2.9.3.1).



Σχ. 2.3. Διάγραμμα ροής του «υβριδικού» αλγορίθμου επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοϋψών.

Ο «υβριδικός» αλγόριθμος δίνει προτεραιότητα στη μέθοδο επαναπροσδιορισμού της ϕ ως συνάρτησης απόστασης από τη διεπιφάνεια, εξίσωση (2.9.2.3.), ενώ ταυτόχρονα αξιολογεί τη διακύμανση των τιμών της μάζας των σταγόνων, και επεμβαίνει όταν χρειάζεται με την εφαρμογή της εξίσωσης (2.9.3.1) μειώνοντας κατά συνέπεια το ποσοστό της απώλειας μάζας της σταγόνας σε προκαθορισμένο επίπεδο, Σχ. 2.3.

Συμπερασματικά, ο νέος «υβριδικός» αλγόριθμος επαναρχικοποίησης διατηρεί συγχρόνως το πάχος της διεπιφάνειας σταθερό και σε ανεκτό ποσοστό τη μάζα (επιφάνεια) των σταγόνων ακόμη και για πολύ μεγάλες παραμορφώσεις της διεπιφάνειας δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα από την εφαρμογή των εξισώσεων (2.9.2.3.) και (2.9.3.1) χωριστά. Ο «υβριδικός» αλγόριθμος είναι απαιτητικός από την άποψη υπολογιστικού χρόνου και ρυθμού σύγκλισης, ωστόσο αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά την συνολική διάρκεια των υπολογισμών.

2.9.4. Ορισμός της τοπικής συνάρτησης των ισοϋψών, (Local Level-Set) ή *LLSM*.

Συμπληρωματικά και εναλλακτικά στην δομή της μεθόδου *LSM* που αναπτύχθηκε όπως περιγράφεται στις §2.9.1-2-3 και με διπλό στόχο : να μειωθεί το υπολογιστικό φορτίο, *Rider et al., 1995*, που στην περίπτωση ρευστοδυναμικών πεδίων είναι επιπρόσθετα αυξημένο

χωρίς συγχρόνως να μειωθεί η ακρίβεια των υπολογισμών, εισάγονται στον αλγόριθμο οι τροποποιημένες εξισώσεις και τα κριτήρια της λεγόμενης τοπικής *LSM* (*LISM*) των Peng et.al., 1999. Η *LISM*, όπως τεκμηριώνεται και από άλλες μελέτες, παρέχει την δυνατότητα επαναπροσδιορισμού της διεπιφάνειας $\Gamma_b(t)$ χρησιμοποιώντας μόνο τοπικές τιμές της $\phi(\mathbf{x}(t))$ και την ταχύτητα \mathbf{u} σε μια μικρή ζώνη πέριξ της διεπιφάνειας $\Gamma_b(t)$, Σχ.2.4. Ο παρακάτω 2-D επαναληπτικός αλγόριθμος μπορεί να επεκταθεί πανομοιότυπα και σε 3-D.

Έστω λοιπόν η συνθήκη

$$0 < c \leq |\nabla\phi| \leq C \quad (2.9.4.1.),$$

οπου c και C σταθερές και $0 < \beta < \gamma$ δύο σταθερές συγκρίσιμες με το χωρικό βήμα dx των οποίων οι τιμές θα οριστούν παρακάτω. Πέριξ της $\Gamma_b(0) = \Gamma_b^0$ ορίζεται σωλήνας T^0 πάχους γ :

$$T^0 = \left\{ \mathbf{x} : |\phi^0(\mathbf{x})| < \gamma \right\} \quad (2.9.4.2.),$$

Στην πράξη αρκεί μόνο η $\phi^0(\mathbf{x})$ να είναι συνάρτηση απόστασης $d^0(\mathbf{x})$ στο T^0 . Στην συνέχεια, η c ορίζεται ως *συνάρτηση αποκοπής* (*cut-off*) για να αποφευχθούν αριθμητικές ταλαντώσεις στο όριο του δακτυλίου:

$$c(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |\phi| < \beta \\ (\phi)^2 (2|\phi| + \gamma - 3\beta / (\gamma\gamma - \beta)^3) & \text{αν } \beta < |\phi| < \gamma \\ 0 & \text{αν } |\phi| > \gamma \end{cases} \quad (2.9.4.3.),$$

Υπολογίζεται αρχικά η *ενδιάμεση συνάρτηση* $\phi^{*1}(\mathbf{x})$ λύνοντας την τροποποιημένη εξίσωση μεταφοράς

$$\phi_t + c(\phi)\mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0 \quad (2.9.4.4.),$$

ή ισοδύναμα

$$\phi_t + c(\phi)u_n \cdot |\nabla\phi| = 0 \quad (2.9.4.5.),$$

στο T^0 με δεδομένο την αρχική $\phi^0(\mathbf{x})$. Έτσι η ακριβής εξίσωση μεταφοράς επιλύεται μόνο στον σωλήνα ακτίνας β . Στην περιοχή $\left\{ \mathbf{x} : \beta < |\phi^0(\mathbf{x})| < \gamma \right\}$ η μετακίνηση της $\phi^0(\mathbf{x})$ τροποποιήθηκε από την συνάρτηση αποκοπής (*cut-off*). Επειδή η ταχύτητα \mathbf{u} ή u_n ορίζεται και πέραν του Γ_b^0 , δεν απαιτείται επέκταση του \mathbf{u} ή u_n στο T^0 . Η νέα θέση της διεπιφάνειας δίνεται από την $\Gamma_b^{*1} = \left\{ \mathbf{x} : \phi^{*1}(\mathbf{x}) = 0 \right\}$.

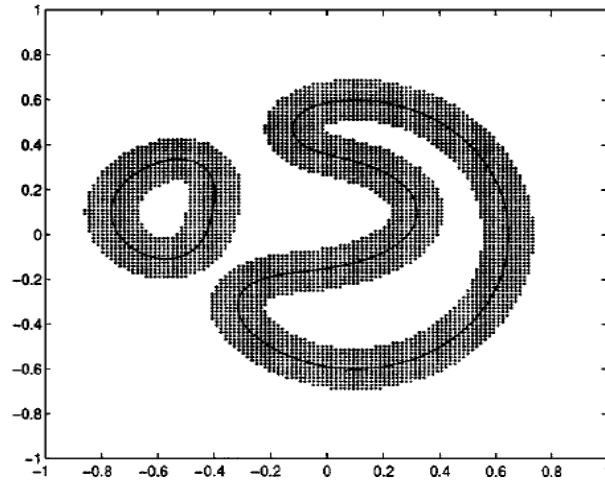
Ακολουθεί η επαναρχικοποίηση για να προκύψει η νέα τοπική συνάρτηση *level-set* $\phi^1(\mathbf{x})$ από την $\phi^{*1}(\mathbf{x})$ με την ιδιότητα της προσημασμένης συνάρτησης απόστασης στη γειτονιά

της διεπιφάνειας Γ_b^1 πλάτους γ . Έστω $d^1(\mathbf{x})$ η ζητούμενη προσημασμένη συνάρτηση απόστασης. Η $d^1(\mathbf{x})$ ορίζεται στον διευρυμένο¹¹ μετατοπισμένο σωλήνα T^1

$$T^1 = \{ \mathbf{x} : |d^1(\mathbf{x})| < \gamma \} \quad (2.9.4.6).$$

Τότε

$$\phi^1(\mathbf{x}) = d^1(\mathbf{x}) \text{ για } |d^1(\mathbf{x})| < \gamma \quad (2.9.4.7).$$



Σχ.2.4. Στην **LLSM** οι υπολογισμοί της ϕ εκτελούνται μόνο στην σημειωμένη περιοχή πέριξ της Γ_b , (Peng et.al.,1999, Fig.2).

Επειδή η διεπιφάνεια μετακινείται λιγότερο από ένα σημείο του πλέγματος, το βήμα της επαναρχικοποίησης εκτελείται στο σωλήνα N^0

$$N^0 = \{ \mathbf{x} : |\phi^0(\mathbf{x} + \mathbf{y})| < \gamma \text{ και } |\mathbf{y}| < dx \} \quad (2.9.4.8),$$

υπολογίζεται η νέα τοπική συνάρτηση *level-set* $\phi^1(\mathbf{x})$, όπου

$$\phi^1(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\gamma & \alpha\nu \quad d^1(\mathbf{x}) < -\gamma \\ d^1(\mathbf{x}) & \alpha\nu \quad |d^1(\mathbf{x})| < \gamma \\ \gamma & \alpha\nu \quad d^1(\mathbf{x}) > \gamma \end{cases} \quad (2.9.4.9),$$

Στο επόμενο χρονικό βήμα ο υπολογισμός της ενδιάμεσης συνάρτησης $\phi^{*2}(\mathbf{x})$ γίνεται στην περιοχή του σωλήνα T^1 ,

¹¹ Η ϕ^{*1} δεν επαναρχικοποιείται εξωτερικά του σωλήνα T^0 , λόγω της απότομης κλίσης (steep gradient) που αναπτύσσεται στην περιοχή κοντά στο όριο του σωλήνα T^0 στην κατεύθυνση κίνησης της διεπιφάνειας.

$$T^1 = \{x : |d^1(x)| < \gamma\} \quad (2.9.4.10.),$$

ενώ η επαναρχικοποίηση γίνεται στην περιοχή του σωλήνα N^1 ,

$$N^1 = \{\mathbf{x} : |\phi^1(\mathbf{x} + \mathbf{y})| < \gamma \quad \text{και} \quad |\mathbf{y}| < dx\} \quad (2.9.4.11.).$$

Με την διαδικασία αυτή προκύπτει σε κάθε χρονικό βήμα η θέση της διεπιφάνειας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.,** (1992), A continuum method for modeling surface tension. *J. Comp. Phys.*, 100:335-354.
- Chang, Y.C. Hou, T.Y., Merriman B. and Osher S.,**(1996), A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 124:449-464.
- Christafakis A.N., Alexopoulos J.D., Tsangaris S.G.,** (2006), An Improved Implementation of Level-Set Method to the Computation of Two-Phase Incompressible Flows in Ducts., in Proc. Second Int.Conf. From Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, Greece.
- Croce R. , Griebel M., and Schweitzer M. A.,** (2004), A Parallel Level-Set Approach for Two-Phase Flow Problems with Surface Tension in Three Space Dimensions. *Preprint 157*, Sonderforschungsbereich 611, Universität Bonn.
- Croce R.,** (2002), Ein paralleler, dreidimensionaler Navier-Stokes-Löser für inkompressible Zweiphasenströmungen mit Oberflächenspannung, Hindernissen und dynamischen Kontaktflächen. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik, Bonn, Germany, Universität Bonn.
- Di Y., Li. R., Tang T., Zhang P.,** (2007), Level Set Calculations for Incompressible Two-Phase Flows on a Dynamically Adaptive Grid. *J. Sci. Comput.*, 31(1-2):75-98.
- Griebel M., Dornseifer T. and Neunhoeffler T.,** (1998), Numerical Simulation in Fluid Dynamics, a Practical Introduction, SIAM, Philadelphia.
- Jiang, G.S. and Peng, D.,**2000, Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 21:2126-2143.
- Landau L. and Lifshitz E.,** (1959), Fluid Mechanics, Pergamon Press.
- Osher S. and Fedkiw R.** (2003), Level Sets Methods and Dynamic Implicit Surfaces. *Springer-Verlag*, New York.
- Osher S. and Sethian J.,** (1988), Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* 79:12-49.
- Peng D., Merriman B., Osher S., Zhao H., and Kang M.,** (1999), A PDE-based fast local level set method. *J. Comput. Phys.*, 155:410-438.
- Rider W., Kothe D.,** (1995), Stretching and tearing interface tracking methods, in: 12th AIAA CFD Conference, AIAA, 95-1717 (LANL Report LA-UR-95-1145).
- Sussman M., Smereka P and Osher S** (1994), A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114:146–159.

- Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. and Osher, S.,** (1998), An improved level set method for incompressible two phase flows. *Computer and Fluids*, 27:663-680.
- Sussman M. and Fatemi E.,** (1999), An efficient, interface-preserving level set re-distancing algorithm and its application to interfacial incompressible fluid flow, *SIAM J. Sci. Comput.*, 20:1165-1191.
- Sussman, M., Fatemi, E., Smereka, P. and Osher, S.,** (1998), An improved level set method for incompressible two phase flows. *Computer and Fluids*, 27:663-680.
- Taylor G.I.,** (1934), The formation of emulsions in definable fields of flow, *Proceedings of Royal Society of London, Ser A*, 146:501-523.
- Unverdi S. and Tryggvason G.,**(1992), A front-tracking method for viscous, incompressible multi-fluids flow, *J. Comput. Phys.*, 100:25-37.
- White F. M.,** (1999), *Fluid Mechanics*, 4th edition, McGraw-Hill.

2.Τ. ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

$$D = \frac{L-B}{L+B} \quad (2.1.1.)$$

$$\rho_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (2.1.2.)$$

$$\mu_i + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mu = 0 \quad (2.1.3.)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \quad (2.1.4.)$$

$$\rho_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} = (-\nabla p_i + \nabla \cdot (\mu_i \mathbf{D}_i) + \rho_i \mathbf{g}) \quad (2.2.1.)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = 0 \text{ στο } \Omega_i, \quad i \in \{b, c\} \quad (2.2.2.)$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \text{ στο } \text{όριο } \Gamma_0 = \partial\Omega \text{ για } t \in [0, T] \quad (2.2.3.)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0 \text{ για } t=0 \text{ στο } \Omega_i \quad i \in \{b, c\} \quad (2.2.4.)$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_c \text{ στην } \Gamma_b \quad (2.2.5.)$$

$$\kappa = \frac{1}{R_t} + \frac{1}{R_s} \quad (2.2.6.)$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \quad (2.2.7.)$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{t}} \quad (2.2.8.)$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{s}} \quad (2.2.9.)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{s}} = 0 \quad (2.2.10.)$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.2.11.)$$

$$(\mathbf{T}_b - \mathbf{T}_c) \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (2.2.12.)$$

$$\Gamma_b(t) = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.3.1.)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} < 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Omega_b \\ 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Gamma_b \\ > 0 & \text{για } \mathbf{x} \in \Omega_c \end{cases} \quad (2.3.2.)$$

$$|\nabla \phi| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} = 1 \quad (2.3.3.)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \text{προσημασμένη απόσταση του } \mathbf{x} \text{ από την } \Gamma_b(0) \quad (2.3.4.)$$

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{για } \phi < 0 \\ 0.5 & \text{για } \phi = 0 \\ 1 & \text{για } \phi > 0 \end{cases} \quad (2.4.1.)$$

$$\rho(\phi) = \rho_b + (\rho_c - \rho_b) \cdot H(\phi) \quad (2.4.2.)$$

$$\mu(\phi) = \mu_b + (\mu_c - \mu_b) \cdot H(\phi) \quad (2.4.3.)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \cdot \delta(\phi(\mathbf{x})) \cdot dx \cdot dF = \int_{\Gamma_f} f(x) \cdot dF \quad (2.4.4.)$$

$$L = \int_{\Omega} \delta(d(x, y)) dx dy \quad (2.4.5.)$$

$$|\Gamma_b(t)| = \int \delta(\phi) |\nabla \phi| dx \quad (2.4.6.)$$

$$|\Omega_b(t)| = \int H(-\phi) dx \quad (2.4.7.)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.4.8.)$$

$$\kappa = \kappa(\phi) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (2.4.9.)$$

$$\int_{\Omega_i} \rho_i \frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \int_{\Omega_i} \rho_i \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.1.)$$

$$\rho_b \int_{\Omega_b} \frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \frac{D\mathbf{u}_c}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \cdot dF - \int_{\Gamma_b} [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \rho_b \int_{\Omega_b} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.2.)$$

$$[\mathbf{T}] \cdot \mathbf{n} = \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \quad (2.5.3.)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \cdot dF = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.4.)$$

$$\rho_b \int_{\Omega_b} \frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \rho_c \int_{\Omega_c} \frac{D\mathbf{u}_c}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.5.)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_b} \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \cdot dF + \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.6.)$$

$$\int_{\Gamma_f} \sigma \cdot \kappa \cdot \mathbf{n} \cdot dF = \int_{\Omega} \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (2.5.7.)$$

$$\int_{\Omega} (\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi - \rho(\phi) \cdot \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad (2.5.8.)$$

$$\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{T} + \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi - \rho(\phi) \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (2.5.9.)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{D} \quad (2.5.10.)$$

$$\rho(\phi) \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \rho(\phi) \cdot \mathbf{g} \quad (2.5.11.)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (2.6.1.)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho(\phi)} + \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \mathbf{g} \quad (2.6.2.)$$

$$\mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho(\phi)} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) - \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi + \mathbf{g} \quad (2.6.3.)$$

$$Re = \rho_c \cdot U \cdot D_h / \mu_c \quad (2.7.1.)$$

$$\lambda = \mu_b / \mu_c \quad (2.7.2.)$$

$$Ca = \mu_c \cdot U / \sigma \quad (2.7.3.)$$

$$We = \rho_c \cdot U^2 \cdot D_h / \sigma \quad (2.7.4.)$$

$$Fr = U^2 / \|\mathbf{g}\| \cdot D_h \quad (2.7.5.)$$

$$\kappa = r/h \quad \text{ή} \quad \kappa = r/R \quad (2.7.6.)$$

$$\delta = \varepsilon/h \quad \text{ή} \quad \delta = \varepsilon/R \quad (2.7.7.)$$

$$x' = x/h, \quad x' = x/R, \quad y' = y/h, \quad \text{ή} \quad y' = y/R \quad (2.7.8.)$$

$$t' = t \cdot U / h \quad \text{ή} \quad t' = t \cdot U / R \quad (2.7.9.)$$

$$u' = u/U, \quad v' = v/U \quad (2.7.10.)$$

$$p' = p / (\rho_c U^2) \quad (2.7.11.)$$

$$\rho' = \rho / \rho_c \quad (2.7.12.)$$

$$\mu' = \mu / \mu_c \quad (2.7.13.)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} / \|\mathbf{g}\| \quad (2.7.14.)$$

$$\mathbf{u}_t + \frac{\nabla p}{\rho(\phi)} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D}) \right) - \frac{1}{We} \cdot \left(\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi \right) + \frac{1}{Fr} \cdot \mathbf{g} \quad (2.7.15.)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega \quad (2.7.16.)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{στο} \quad \text{όριο} \quad \Gamma_0 = \partial\Omega \quad \text{για} \quad t \in [0, T] \quad (2.7.17.)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{για} \quad t = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega \quad (2.7.18.)$$

$$\mathbf{CONV} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.8.1.)$$

$$\mathbf{VISC} = \frac{1}{\rho(\phi)} (\nabla \cdot (\mu(\phi)\mathbf{D})) \quad (2.8.2.)$$

$$\mathbf{ST} = -\frac{1}{\rho(\phi)} (\sigma \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi) \quad (2.8.3.)$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y) \quad (2.8.4.)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{CONV} + \frac{1}{Re} \mathbf{VISC} + \frac{1}{We} \mathbf{ST} + \frac{1}{Fr} \mathbf{g} \quad (2.8.5.)$$

$$U_{-x} = CONV_{-x} + \frac{1}{Re} VISC_{-x} + \frac{1}{We} ST_{-x} + \frac{1}{Fr} \mathbf{g}_{-x} \quad (2.8.5.x)$$

$$U_{-y} = CONV_{-y} + \frac{1}{Re} VISC_{-y} + \frac{1}{We} ST_{-y} + \frac{1}{Fr} \mathbf{g}_{-y} \quad (2.8.5.y)$$

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad \eta \quad \phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (2.9.1.1.)$$

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) \quad (2.9.1.2.)$$

$$d_{\mathbf{x}, 0} = \phi^*_{\mathbf{x}} \quad (2.9.2.1.)$$

$$d_{\mathbf{x}} = \phi^*_{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.9.2.2.)$$

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1) = 0 \quad (2.9.2.3.)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (A_0 - A(t)) \cdot -P + \kappa(\phi) \cdot |\nabla \phi| = 0 \quad (2.9.3.1)$$

$$0 < c \leq |\nabla \phi| \leq C \quad (2.9.4.1)$$

$$T^0 = \left\{ x : |\phi^0(x)| < \gamma \right\} \quad (2.9.4.2)$$

$$c(\phi) = \begin{cases} 1 & \alpha \nu \quad |\phi| < \beta \\ (\phi)^2 (2|\phi| + \gamma - 3\beta) / (\gamma\gamma - \beta)^3 & \alpha \nu \quad \beta < |\phi| < \gamma \\ 0 & \alpha \nu \quad |\phi| > \gamma \end{cases} \quad (2.9.4.3.)$$

$$\phi_t + c(\phi) \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.9.4.4.)$$

$$\phi_t + c(\phi) u_n \cdot |\nabla \phi| = 0 \quad (2.9.4.5.)$$

$$T^1 = \left\{ x : |d^1(x)| < \gamma \right\} \quad (2.9.4.6.)$$

$$\phi^1(x) = d^1(x) \quad \forall \alpha \quad |d^1(x)| < \gamma \quad (2.9.4.7.)$$

$$N^0 = \left\{ x : |\phi^0(x+y)| < \gamma \quad \text{και} \quad |y| < dx \right\} \quad (2.9.4.8.)$$

$$\phi^1(x) = \begin{cases} -\gamma & \alpha \nu \quad d^1(x) < -\gamma \\ d^1(x) & \alpha \nu \quad |d^1(x)| < \gamma \\ \gamma & \alpha \nu \quad d^1(x) > \gamma \end{cases} \quad (2.9.4.9.)$$

$$N^1 = \left\{ x : |\phi^1(x+y)| < \gamma \quad \text{και} \quad |y| < dx \right\} \quad (2.9.4.10.)$$

$$T^1 = \left\{ x : |d^1(x)| < \gamma \right\} \quad (2.9.4.11.)$$

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	4
3.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ...	4
3.2. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ (STAGGERED GRID)....	5
3.3. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ (PROJECTION).....	7
3.4. ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.	12
3.4.1. Αρχικές συνθήκες του μονοφασικού και του διφασικού πεδίου ροής.....	12
3.4.2. Αρχικός ορισμός της ϕ	12
3.4.3. Οριακές συνθήκες.....	13
3.4.4. Δομές Δεδομένων για την διαχείριση Εμποδίων και ελεύθερων επιφανειών.....	16
3.5. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ϕ_x, ϕ_y ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ϕ	18
3.6. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ..	20
3.7. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ $H(\phi), \delta(\phi)$	21
3.7.1. Συμβατική διακριτοποίηση των $H(\phi), \delta(\phi)$	21
3.7.2. Διακριτοποίηση της $\delta(\phi)$ με την μέθοδο του Smereka.....	22
3.7.2.1. Διακριτοποίηση πρώτης τάξεως.....	25
3.7.2.2. Διακριτοποίηση δεύτερης τάξεως ακριβείας.....	26
3.8. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ $\kappa(\phi)$	27
3.9. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES	29
3.9.1. Γενικά.....	29
3.9.2. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων.....	30

3.9.3. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους ή συνεκτικών όρων.....	33
3.9.4. Διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης.....	36
3.10. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES.....	38
3.11. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ <i>LSM</i>	39
3.11.1. Υπολογισμός ταχυτήτων στα κέντρα των κυψελών με πολυώνυμο <i>Lagrange</i>	39
3.11.2. Υπολογισμός της νέας ενδιάμεσης συνάρτηση ισοϋψών, ϕ^*	40
3.11.3. Διακριτοποίηση της εξίσωσης επαναρχικοποίησης των ισοϋψών.....	42
3.11.4. Διακριτοποίηση της εξίσωσης του υβριδικού αλγορίθμου της ϕ	44
3.11.5. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής <i>LSM</i>	44
3.11.6. Χρονική διακριτοποίηση της <i>LSM</i>	46
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	46

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΔΙΦΑΣΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

3.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Στο 2^ο κεφάλαιο παρουσιάστηκε διεξοδικά η γενική μαθηματική μεθοδολογία σχηματισμού του συστήματος των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που απαιτούνται για να περιγραφούν οι διφασικές ροές που αποτελούν αντικείμενο της διατριβής. Στο 3^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά ο αριθμητικός επαναληπτικός διφασικός αλγόριθμος του λογισμικού επίλυσης των εξισώσεων του κεφ.2 που αναπτύχθηκε ως υπολογιστικό εργαλείο για την παραγωγή των ερευνητικών αποτελεσμάτων της διατριβής. Σε γενικές γραμμές, διατυπώνονται οι διακριτές μορφές των επιμέρους όρων του διφασικού αλγορίθμου στους κόμβους και τα κέντρα ομοιόμορφων μετατοπισμένων (*staggered*) καρτεσιανών πλεγμάτων τύπου *MAC* χρησιμοποιώντας την δόκιμη μέθοδο των *πεπερασμένων διαφορών* (*Finite Difference Method*) και περιγράφονται διεξοδικά οι επιμέρους αναγκαίες διατυπώσεις, προδιαγραφές, παράμετροι, συνθήκες και τεχνικές της αριθμητικής μεθοδολογίας της διατριβής.

Το γραμμικό σύστημα υπολογισμού των διφασικών εξισώσεων *N-S* και της εξίσωσης της *συνεχείας* από την επίλυση του οποίου προκύπτει το πεδίο ταχυτήτων και πιέσεων σχηματίζεται με μία σχεδόν δεύτερης τάξης ακριβείας μέθοδο προβολών κατά *Chorin* για το πεδίο ταχυτήτων και την μέθοδο *SOR* για τον υπολογισμό του πεδίου πιέσεων. Οι αλγόριθμοι της μεθόδου των *ισοϋψών* (*LSM*), από τους οποίους προκύπτουν οι εκάστοτε

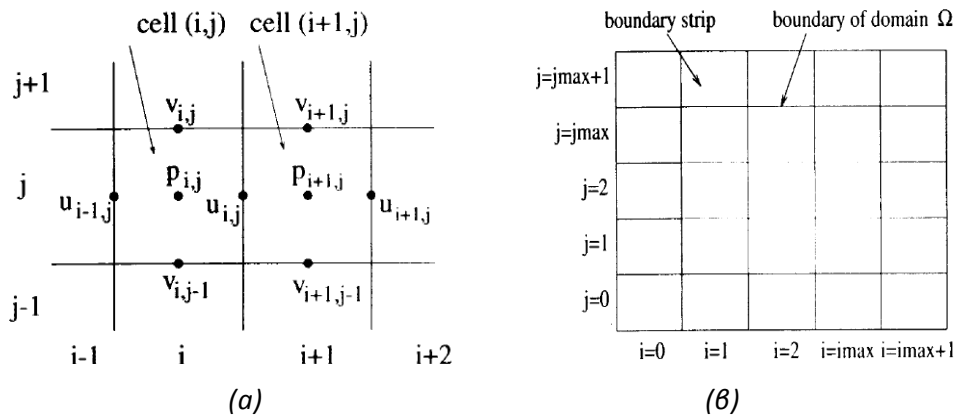
τιμές της συνάρτησης των ισοϋψών ϕ που καθορίζουν την διεπιφάνεια σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αντιμετωπίζονται όπως οι αριθμητικοί αλγόριθμοι για τις εξισώσεις *Hamilton-Jacobi*. Οι χωρικές παράγωγοι της συνάρτησης των ισοϋψών ϕ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας πέμπτης τάξεως σχήματα διακριτοποίησης τύπου *WENO*, ενώ η χρονική ολοκλήρωση των ημιδιακριτών εξισώσεων γίνεται με σχήματα διακριτοποίησης (*TVD*) *Runge-Kutta*.

3.2. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟΥ ΧΩΡΙΚΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ (STAGGERED GRID).

Με x συμβολίζεται η οριζόντια διεύθυνση κατά μήκος του αγωγού στο διδιάστατο (2-D) πρόβλημα ή αντίστοιχα η αξονική διεύθυνση στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα. Με y συμβολίζεται η κάθετη στην οριζόντια διεύθυνση κατά πλάτος του αγωγού στο διδιάστατο πρόβλημα και η ακτινική διεύθυνση στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα. Για την διακριτοποίηση και επίλυση του συστήματος των εξισώσεων του αλγορίθμου στην περιοχή $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_c \cup \Gamma_b \subset \mathbb{R}^2$ χρησιμοποιείται ένα σύνθετο αριθμητικό μετατοπισμένο¹ καρτεσιανό πλέγμα τύπου *MAC* με τετμημένες x τα σημεία $(1, \dots, i, \dots, i_{\max})$ και τεταγμένες y τα σημεία $(1, \dots, j, \dots, j_{\max})$, Σχ.3.1. το οποίο συναρμολογείται από τρία επιμέρους ομοιόμορφα καρτεσιανά πλέγματα για τις ταχύτητες u και v , τις πιέσεις p και τα μεγέθη ρ , μ και ϕ .

Τα πλέγματα είναι μετατοπισμένα μεταξύ τους κατά απόσταση μισό χωρικό βήμα $dx/2$ ή $dy/2$, αντίστοιχα, όπου dx , dy είναι το χωρικό βήμα του κάθε ανεξάρτητου ορθογωνίου πλέγματος κατά τις κατευθύνσεις x και y αντίστοιχα. Επομένως τα μητρώα των τιμών των ταχυτήτων u και v , των πιέσεων p και των μεγεθών ρ , μ και ϕ του πεδίου ροής ορίζονται σε τρία ανεξάρτητα, μετατοπισμένα (*staggered*) πλέγματα και το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων (2.7.15-16-17-18) επιλύεται σε κάθε χρονικό βήμα με κατάλληλα σχήματα πεπερασμένων διαφορών (βλέπε και παράρτημα Π6) για τούς αγνώστους u, v, p με τις εκάστοτε τιμές των μεταβλητών ρ, μ και ϕ στο πεδίο ορισμού Ω .

¹ Είναι γενικά αποδεκτό π.χ. *Griebel et.al., 1998, Oishi et.al., 2008*, ότι ο υπολογισμός των u, v, p στα ίδια σημεία του πλέγματος καταλήγει σε αστάθειες του αλγορίθμου, ενώ η μετατοπισμένη διάταξη ορισμού των ταχυτήτων u, v και των πιέσεων p σε δομημένα πλέγματα διασφαλίζει την αποσύνδεση των μεγεθών στον αριθμητικό αλγόριθμο ή την εμφάνιση ταλαντώσεων ιδιαίτερα των τιμών της πίεσης. Οι *Harlow and Welch, 1965* εισήγαγαν την μορφή αυτού του πλέγματος στην κατασκευή της μεθόδου τους *marker-and-cell (MAC)* παρουσιάζοντας για πρώτη φορά διάταξη με την οποία οι εξισώσεις *N-S* επιλύονται αξιόπιστα χρησιμοποιώντας πρωτογενείς μεταβλητές, *McDonough, 2007*.



Σχ.3.1. (α) Ομοιόμορφο καρτεσιανό μετατοπισμένο πλέγμα τύπου MAC
(β) Πεδίο με οριακές κυψέλες. (Griebel et al., 1998).

Στην περιγραφή της δομής του πλέγματος ακολουθείται η ορολογία των Griebel et al., 1998, για μονοφασικές ροές σε πλέγματα τύπου MAC. Κυψελίδα (i, j) ορίζεται το ορθογώνιο χωρίο $[(i-1) \cdot dx, i \cdot dx] \times [(j-1) \cdot dy, j \cdot dy]$. Στο σύνθετο μετατοπισμένο πλέγμα ορίζονται και διακριτοποιούνται: οι οριζόντιες ταχύτητες u στα μέσα των δεξιών καθέτων πλευρών των κυψελίδων, οι κάθετες ταχύτητες v στα μέσα των οριζόντιων πλευρών των κυψελίδων, ενώ, τα p, ρ, μ και ϕ στα κέντρα των κυψελίδων. Ο δείκτης (i, j) αποδίδεται και περιγράφει την τιμή της πίεσης $p_{i,j}$, της πυκνότητας $\rho_{i,j}$, του ιξώδους $\mu_{i,j}$ και της συνάρτησης των ισοϋψών $\phi_{i,j}$ στο κέντρο της κυψελίδας (i, j) που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες $((i-0.5) \cdot dx, (j-0.5) \cdot dy)$, την τιμή της οριζόντιας ταχύτητας $u_{i,j}$ στις συντεταγμένες $(i \cdot dx, (j-0.5) \cdot dy)$ επάνω στην δεξιά πλευρά της κυψελίδας (i, j) και την τιμή της κάθετης ταχύτητας $v_{i,j}$ στις συντεταγμένες $((i-0.5) \cdot dx, j \cdot dy)$, που αντιστοιχεί στην επάνω πλευρά της κυψελίδας (i, j) , Σχ.3.1.(α).

Με την παραπάνω δομή μετατοπισμένου πλέγματος όλα τα εξωτερικά σημεία του πλέγματος δεν συμπίπτουν με το όριο του πεδίου ροής. Τα κάθετα όρια για παράδειγμα δεν μεταφέρουν τιμές της v , όπως επίσης τα οριζόντια όρια δεν μεταφέρουν τιμές της u . Εισάγεται γι' αυτό το λόγο μια επί πλέον ζώνη² κυψελίδων πλέγματος, Σχ.3.1.(β), περιμετρικά του πεδίου ορισμού σε απόσταση μισό χωρικό βήμα $dx/2$ ή $dy/2$, αντίστοιχα, ώστε να είναι εφικτή η εφαρμογή των οριακών συνθηκών με κατάλληλες γραμμικές παρεμβολές π.χ. παίρνοντας το μέσο όρο τιμών των πλησιέστερων σημείων

² Εισάγεται όμως συγχρόνως η αδυναμία να καθορισθούν επακριβώς μάζα και οι ροές της ορμής, Mc Donough, 2007.

του πλέγματος επί της άλλης πλευράς, *Griebel et.al.,1998* (βλέπε παράρτημα Π5 για λεπτομέρειες).

3.3. Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ (PROJECTION)

Προκειμένου να σχηματιστεί και επιλυθεί ο μονοφασικός και ο αντίστοιχος διφασικός αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων (2.7.15-16-17-18) υλοποιείται μία σχεδόν δεύτερης τάξης ακριβείας μέθοδος προβολών κατά *Chorin*³, (βλέπε § 1.7.) επάνω στο ομοιόμορφο, ορθογώνιο και μετατοπισμένο πλέγμα τύπου *MAC* της §3.2. Η μεθοδολογία αυτή προβολής προτείνεται για 2D μονοφασικό πεδίο στην *Griebel et.al., 1998* και εφαρμόζεται τροποποιημένη κατάλληλα για να αποσυνδέσει τις συνιστώσες της ταχύτητας από την πίεση στην μονοφασική και διφασική μεθοδολογία της έρευνας μας.

A. Διδιάστατη περίπτωση :

Αν (n) είναι η τρέχουσα χρονική στιγμή και $(n+1)$ η αμέσως επόμενη, τότε από τον ορισμό της χρονικής παραγώγου

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}^{(n)}}{dt} \quad (3.3.1).$$

Οι εξισώσεις *N-S*, (2.7.15) βάσει της (3.3.1.) και της σχέσης (2.8.5) που αντικαθιστά τους όρους του δεξιού μέλους της (2.7.15) με την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{U}=(U_x, U_y)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n)} + (\mathbf{U}^{(n)} - \frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}}) \cdot dt^{(n)} \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{U}^{(n)} \cdot dt^{(n)} - \frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}} \cdot dt^{(n)} \end{aligned} \quad (3.3.2.)$$

Ορίζεται ακόμη, η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{FG}=(F,G)$ ως το άθροισμα του όρου $\mathbf{U} \cdot dt$ και της ταχύτητας $\mathbf{u}^{(n)}$ στο τρέχον χρονικό βήμα (n)

$$\mathbf{FG}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{U}^{(n)} \cdot dt \quad (3.3.3.)$$

και επομένως οι προβολές F,G της \mathbf{FG} στις κατευθύνσεις x και y διατυπώνονται

$$F^{(n)} = u^{(n)} + U_x^{(n)} \cdot dt \quad (3.3.4.)$$

$$G^{(n)} = v^{(n)} + U_y^{(n)} \cdot dt \quad (3.3.5.)$$

Η (3.3.2.) βάσει της (3.3.3.) μετατρέπεται στη σχέση

³ *Chorin, 1968, Tenam, 1969.*

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}\mathbf{G}^{(n)} - \frac{\nabla p^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}} \cdot dt^{(n)} \quad (3.3.6.)$$

και επομένως ο αριθμητικός υπολογισμός των νέων ταχυτήτων κατά την χρονική στιγμή $(n+1)$ προϋποθέτει να έχουν υπολογιστεί οι νέες τιμές της πίεσης την ίδια χρονική στιγμή $(n+1)$. Η σχέση (3.3.6.) αναλύεται στις συνιστώσες

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \frac{P_x^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}} \cdot dt^{(n)} \quad (3.3.7.)$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \frac{P_y^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}} \cdot dt^{(n)} \quad (3.3.8.).$$

Επειδή όμως δεν υπάρχει άμεση εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης, κατασκευάζεται έμμεσα η κατάλληλη κατά περίπτωση εξίσωση τύπου *Poisson* με την πίεση ως μόνη άγνωστη κατά την χρονική στιγμή $(n+1)$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.3.7.) και (3.3.8.) σε συνδυασμό με την εξίσωση της συνέχειας $(\nabla \cdot \mathbf{u})^{(n+1)} = 0$, (2.7.16.) κατά την χρονική στιγμή $(n+1)$. Από την επίλυση της εξίσωσης *Poisson* υπολογίζεται η πίεση $p^{(n+1)}$ και στην συνέχεια από τις εξισώσεις *Navier-Stokes* (3.3.7.) και (3.3.8.) υπολογίζονται οι πραγματικές $u^{(n+1)}$ και $v^{(n+1)}$. Η παραπάνω διαδικασία εξασφαλίζει ότι το πεδίο ταχυτήτων την στιγμή $(n+1)$ είναι ελεύθερο απόκλισης (divergence free).

Οι μερικές παραγωγοί για την πίεση προκύπτουν χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές σύμφωνα με τις σχέσεις $p_x = \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{dx}$ (Π.6.7.) και $p_y = \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{dy}$

(Π.6.8.). Επομένως η εξίσωση (3.3.7.) για την διεύθυνση x γράφεται:

$$u_{i,j}^{(n+1)} = F_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt^{(n)}}{dx} \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \text{ με } i = 1 : i_{\max} - 1, j = 1 : j_{\max} \quad (3.3.9.).$$

και η εξίσωση (3.3.8.) για την διεύθυνση y γράφεται:

$$v_{i,j}^{(n+1)} = G_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt^{(n)}}{dy} \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \text{ με } i = 1 : i_{\max}, j = 1 : j_{\max} - 1 \quad (3.3.10.).$$

Επίσης η εξίσωση της συνέχειας (2.7.16.) για ασυμπιεστο ρευστό, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ γράφεται

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3.11.),$$

η οποία διακριτοποιείται στο κέντρο κάθε κυψέλης (i, j) , όπου $i = (1, \dots, i_{\max})$ και $j = (1, \dots, j_{\max})$. Οι μερικές παράγωγοι u_x και v_y υπολογίζονται με σχήματα κεντρικών

διαφορών από τις σχέσεις $u_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx}$ (Π.6.1.) και $v_y = \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{dy}$

(Π.6.2.), επειδή το πεδίο ταχυτήτων είναι συνεχές και ομαλό και επάνω στην διεπιφάνεια. Αντικαθιστώντας στην διακριτοποιημένη εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial u_{i,j}^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{i,j}^{(n+1)}}{\partial y} = 0 \quad (3.3.12.),$$

τις παραπάνω εκφράσεις (3.3.9.) και (3.3.10.) για τις ταχύτητες σχηματίζεται η εξίσωση τύπου *Poisson* για την πίεση για $i = 1 : i_{\max}, j = 1 : j_{\max}$, η οποία για $\rho(\phi)_{i,j}^{(n)} = const$ γράφεται

$$\frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{dx^2} + \frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}}{dy^2} = \frac{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}}{dt} \left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{dx} + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i,j-1}^{(n)}}{dy} \right) = rhs \quad (3.3.13.).$$

Το πεδίο πιέσεων της διδιάστατης περίπτωσης προκύπτει από την επίλυση του γραμμικού συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων για την εξίσωση *Poisson* επάνω στο αριθμητικό πλέγμα στα σημεία $p_{i,j}, i = (1, \dots, i_{\max})$ και $j = (1, \dots, j_{\max})$ με αρχικές και οριακές συνθήκες (βλέπε §3.4.), χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο *SOR*⁴ που προτείνεται στην *Griebel et al., 1998*. Ορίζοντας

$$rdx2 = \frac{1}{(dx)^2}, \quad rdy2 = \frac{1}{(dy)^2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{-\omega}{2 \cdot (rdx2 + rdy2)} \quad (3.3.14.),$$

η σχέση (3.3.13.) αναδιατάσσεται (βλέπε παράρτημα 8)

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} \cdot (rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) + rdy2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}) - rhs) \quad (3.3.15.).$$

Τότε με την μέθοδο *SOR*

$$p_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega) p_{i,j}^{(n+1)} - \beta \cdot (rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) + rdy2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}) - rhs) \quad (3.3.16.).$$

Η παράμετρος ω επηρεάζει⁵ πολύ την σύγκλιση της *SOR*, παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 2 με συνηθέστερες τιμές στα αποτελέσματα $\omega \approx 1.60 - 1.85$. Η επαναληπτική διαδικασία

⁴ *Successive Over Relaxation (Προοδευτικής Υπέρ Χαλάρωσης)*. Ο επιλυτής της μεθόδου *SOR* δεν είναι ο βέλτιστος, γιατί ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνει πολύ καθώς πυκνώνει το αριθμητικό πλέγμα αλλά στον διφασικό αλγόριθμο υπεισέρχονται και πολλές άλλες χρονοβόρες επαναληπτικές διαδικασίες. Η μεθοδολογία μας επιτρέπει εύκολα να δοκιμαστούν και άλλοι επιλυτές για βελτιστοποίηση. Στην βιβλιογραφία αναφέρονται και συγκρίνονται πολλοί επαναληπτικοί αλγόριθμοι για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που αφορούν τα πρωτογενή μεγέθη πεδίων ροής π.χ. μέθοδοι multigrids που είναι ανεξάρτητοι από την πυκνότητα του αριθμητικού πλέγματος ή Jacobi-preconditioned BiCGSTAB, conjugate gradient που αντιλαμβάνονται γρήγορα την πορεία προς την λύση και επίσης αξιοποιούν την ιδιαιτερότητα των πολλών μηδενικών των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος αποφεύγοντας τις σχετικές πράξεις και μειώνοντας σημαντικά τις συνολικές αριθμητικές πράξεις.

⁵ Στην βιβλιογραφία προτείνεται ανάλυση ιδιοτιμών για να επιλεγεί η βέλτιστη τιμή ω .

διακόπτεται μόλις εκτελεστεί ο προκαθορισμένος αριθμός βημάτων it_{\max} ή όταν η διακριτή L^2 νόρμα του υπολοίπου

$$\|r\|_2 = \left(\frac{1}{i_{\max} j_{\max}} \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} (r_{i,j}^{it})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < eps \quad (3.3.17.),$$

όπου $eps \leq 0.001$ και

$$r_{i,j}^{it} = (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) rdx2 + (p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}) rdy2 - rhs \quad (3.3.18.).$$

Η διακριτοποίηση της αριστερής πλευράς της εξίσωσης *Poisson* χωρίς σταθερούς συντελεστές, όπως στην περίπτωση που εξετάζονται φαινόμενα άνωσης, δίνεται από την σχέση, βλέπε *Croce et.al., 2002*.

$$\frac{1}{(dx)^2} \cdot \left(\frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}}{\rho(\phi)_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{p_{i,j}^{(n+1)} - p_{i-1,j}^{(n+1)}}{\rho(\phi)_{i-\frac{1}{2},j}} \right) + \frac{1}{(dy)^2} \cdot \left(\frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}}{\rho(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}}} - \frac{p_{i,j}^{(n+1)} - p_{i,j-1}^{(n+1)}}{\rho(\phi)_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) = \quad (3.3.19.),$$

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{dx} + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i-1,j}^{(n)}}{dy} \right)$$

Οι απαιτούμενες τιμές των $\rho(\phi)_{i+\frac{1}{2},j}$, $\rho(\phi)_{i-\frac{1}{2},j}$, $\rho(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}}$, $\rho(\phi)_{i,j-\frac{1}{2}}$ υπολογίζονται με απλή γραμμική παρεμβολή των κατάλληλων τιμών των ϕ , $\rho(\phi)$ στα κέντρα των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών π.χ. $\rho(\phi)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{(\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j})}{2}$ ή με πολυώνυμα παρεμβολής τύπου *Lagrange* τρίτης τάξεως, *Croce et. al., 2004* αντίστοιχα με της §3.11.1.

B. Αξονοσυμμετρική περίπτωση.

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση, ισχύει γενικά η ανάλυση για το διδιάστατο πεδίο ροής και αναφέρονται μόνο οι αλλαγές που προκύπτουν από την διακριτοποίηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Στην κατεύθυνση x οι όροι παραμένουν ίδιοι ενώ οι αλλαγές στην κατεύθυνση y καταγράφονται παρακάτω ως εξής. Η συνιστώσα $v^{(n+1)}$ της σχέσης (3.3.8.) τροποποιείται στην

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \frac{1}{y} \frac{(yp)_y^{(n+1)}}{\rho(\phi)^{(n)}} \cdot dt^{(n)} \quad (3.3.20.)$$

και διακριτοποιείται για $i = 1 : i_{\max}$, $j = 1 : j_{\max} - 1$ στην

$$v_{i,j}^{(n+1)} = G_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{y_{i,j}} \cdot \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dy} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \quad (3.3.21.),$$

όπου $y_{i,j}^{(n)} = (i, j - \frac{1}{2}) dy$.

Η εξίσωση της συνέχειας (3.3.13.) τροποποιείται στην

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial (yv)}{\partial y} = 0 \quad (3.3.22.)$$

και διακριτοποιείται για $i = 1: i_{\max}, j = 1: j_{\max}$ στην

$$\frac{\partial u_{i,j}^{(n+1)}}{\partial x} + \frac{1}{y_{i,j}^{(n+1)}} \cdot \frac{\partial y_{i,j}^{(n+1)} \cdot v_{i,j}^{(n+1)}}{\partial y} = 0 \quad (3.3.23.)$$

Τελικά για $\rho(\phi)_{i,j}^{(n)} = const$ σχηματίζεται η αξονοσυμμετρική εξίσωση τύπου *Poisson* για την πίεση για $i = 1: i_{\max}, j = 1: j_{\max}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{dy} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \right) = \\ & \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_{i,j}^{(n)}) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y_{i,j}^{(n)} \cdot G_{i,j}^{(n)}) \right) \end{aligned} \quad (3.3.24.)$$

Βάσει της (3.3.14.) η σχέση (3.3.24.) αναδιατάσσεται (βλέπε παράρτημα 8)

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \left(\frac{dx^2 \cdot dy^2}{2y_{i,j}^{(n)} \cdot (dx^2 + dy^2)} \right) \cdot \left(y_{i,j}^{(n)} \cdot rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) + rdy2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)}) - y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \right) \quad (3.3.25.)$$

Τότε με την μέθοδο *SOR*

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n+1)} &= \frac{(1-\omega)}{y_{i,j}^{(n)}} p_{i,j}^{(n+1)} - \beta \cdot \left(rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) \right) + \\ & \left(rdy2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)}) \right) - y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \end{aligned} \quad (3.3.26.)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} r_{i,j}^{it} &= \left(p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)} \right) rdx2 + \\ & \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \left(y_{i,j+1}^{(n+1)} p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2y_{i,j}^{(n)} p_{i,j}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} p_{i,j-1}^{(n+1)} \right) rdy2 - rhs \end{aligned} \quad (3.3.27.)$$

Στο παράρτημα Π8 περιέχονται συμπληρωματικά στοιχεία για τις διακριτοποιήσεις.

3.4. ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

Η μέθοδος απαιτεί κατάλληλη επιλογή αρχικών και οριακών συνθηκών για τα ρευστοδυναμικά χαρακτηριστικά u, v και p τόσο στο μονοφασικό όσο και στο διφασικό πρόβλημα αλλά και την συνάρτηση των ισοϋψών ϕ στο διφασικό πρόβλημα.

3.4.1. Αρχικές συνθήκες του μονοφασικού και του διφασικού πεδίου ροής.

Για το μονοφασικό πεδίο ροής της κυρίας φάσης το σύστημα των διακριτών αδιάστατων εξισώσεων προκύπτει από τις εξισώσεις $N-S$, (2.2.1.) και την εξίσωση της *συνεχειάς* $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (2.2.2) ορισμένων σε ολόκληρο το πεδίο ροής Ω . Για κάθε διαμόρφωση του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού αγωγού επιβάλλονται αρχικές συνθήκες $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ στο Ω (2.2.4) στην χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή

$$u_0 = u(0) = u_{i,j}(0) \text{ και } v_0 = v(0) = v_{i,j}(0) \text{ στο } \Omega \quad (3.4.1.),$$

με σχετική ακρίβεια πρόβλεψης του πεδίου ροής ανάλογα με το χωρίο υπολογισμού, ώστε να πληρούται εξαρχής η εξίσωση της *συνεχειάς* $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (2.2.2.) και συνεπώς να επιταχυνθεί η σύγκλιση του αλγορίθμου επίλυσης. Επιπλέον λόγω της μεθόδου προβολής §3.3. απαιτείται και μια αυθαίρετη τιμή πίεσης για το πεδίο πιέσεων

$$p_{i,j} = \text{constant} \text{ στο } \Omega \quad (3.4.2.),$$

π.χ. για πεδίο ροής σε ευθύγραμμο οριζόντιο αγωγό τίθενται αρχικές συνθήκες $u_{i,j} = 1$, $v_{i,j} = 0$, $p_{i,j} = 0$. Πριν επιλυθεί το διφασικό πεδίο ροής απαιτείται η σύγκλιση του μονοφασικού πεδίου ροής της κυρίας φάσεως για να υπολογιστούν οι τιμές των $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ και $p_{i,j}$ σε ολόκληρο το πεδίο ροής χωρίς την παρουσία της διασπειρόμενης φάσης. Οι τιμές που προκύπτουν από την επίλυση του μονοφασικού αλγορίθμου καταγράφονται σε αρχεία δεδομένων και αποτελούν στην συνέχεια τις αρχικές τιμές για την επίλυση του συστήματος των διακριτών εξισώσεων του διφασικού αλγορίθμου που προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.7.15) και (2.7.16).

3.4.2. Αρχικός ορισμός της ϕ .

Μετά την σύγκλιση του μονοφασικού αλγορίθμου για την κυρία φάση, την χρονική στιγμή $t = 0$, που εισάγεται η δεύτερη φάση στο χωρίο υπολογισμών, ορίζεται η αρχική συνάρτηση $\phi_0 = \phi(0) = \phi_{i,j}(0)$ της μεθόδου των ισοϋψών **LSM** σε όλα τα σημεία (i, j) του διφασικού πεδίου ροής, στο κέντρο των υπολογιστικών κυψελών. Όπως έχει προαναφερθεί τα σημεία (i, j) του πεδίου ροής για τα οποία η συνάρτηση ϕ_0 μηδενίζεται καθορίζουν την

διεπιφάνεια. Η διεπιφάνεια ορίζεται ως $\phi_0 = \phi(0) = \phi_{i,j}(0) = 0$ με την υλοποίηση μιας καμπύλης (όχι απαραίτητα κλειστής) π.χ. της αδιαστατοποιημένης εξίσωσης κύκλου

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \phi(0) = \phi_{i,j}(0) = 0 \quad \text{για } t=0 \quad (3.4.3.),$$

όπου (a,b) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου της αρχικής διεπιφάνειας και $(x-a, y-b)$ είναι σημεία του χωρίου ορισμού εντός του πεδίου ροής $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_c \cup \Gamma_b \subset \mathbb{R}^2$. Τα σημεία $\phi_{i,j} > 0$ περιγράφουν την κύρια ρέουσα φάση, ενώ τα σημεία $\phi_{i,j} < 0$ περιγράφουν τις εισαγόμενες σταγόνες ή γενικώς την δευτερεύουσα φάση. Επιβάλλεται για όλα τα σημεία εκτός της διεπιφάνειας η συνάρτηση των ισοϋψών να πληροί τον περιορισμό της συνάρτησης απόστασης από αυτή, άρα

$$|\nabla \phi_{i,j}|(0) = \sqrt{(\phi_x^2 + \phi_y^2)_{i,j}} = 0 \quad \text{για } t=0 \quad (3.4.4.).$$

3.4.3. Οριακές συνθήκες

Η μέθοδος απαιτεί κατάλληλη επιλογή των οριακών⁶ συνθηκών, ώστε να καθοριστούν πλήρως οι γεωμετρικές και φυσικές ιδιότητες στα όρια του μονοφασικού, εξίσωση (2.2.3.) ή του διφασικού πεδίου ροής, εξίσωση (2.7.17.), δηλαδή $\mathbf{u} = 0$ στο όριο $\Gamma_0 = \partial\Omega$ για $t \in [0, T]$. Οι συνθήκες αυτές όσο αφορά τα κινηματικά χαρακτηριστικά της ροής δηλαδή τα μεγέθη u , v και p είναι ίδιες για το μονοφασικό και το αντίστοιχο διφασικό πρόβλημα⁷ στο οποίο επιπρόσθετα απαιτείται και συνθήκη για την συνάρτηση των ισοϋψών $\phi_{i,j}$. Ο ακριβέστερος τρόπος είναι να καθορίζεται επάνω στο όριο η εφαπτομενική u_{BT} και η κάθετος (προς την εξωτερική κατεύθυνση) u_{BN} συνιστώσα της ταχύτητας \mathbf{u}_B , *Griebel et.al., 1998, McKee et.al., 2008*.

Για χωρία που τα όρια τους δεν είναι προσανατολισμένα παράλληλα με τους άξονες συντεταγμένων ο υπολογισμός των u_{BT}, u_{BN} απαιτεί κατάλληλες παρεμβολές των u και v , π.χ. §5.1. Μπεργελές, 1993 που δεν ενσωματώθηκαν⁸ προς το παρόν στον διφασικό αλγόριθμο. Λήφθηκε πρόνοια στα χωρία υπολογισμού τα όρια τους να είναι πάντα προσανατολισμένα παράλληλα με τους άξονες συντεταγμένων για σημαντική απλοποίηση των υπολογισμών και όταν εισάγονται ως όρια καμπύλες ή πλάγια ευθύγραμμα τμήματα να

⁶ Boundary Conditions.

⁷ Δεν μελετήθηκαν φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας δηλαδή τα όρια λαμβάνονται ως ισοθερμοκρασιακά.

⁸ Στην πυκνότητα πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε δεν παρατηρήθηκε διάχυση στα περιγράμματα των σταγόνων ούτε ιδιαίτερη παραμόρφωση του ροϊκού πεδίου εκτός από την άμεση γειτονιά του τοιχώματος.

περιγράφονται κλιμακωτά (με σκαλοπάτια). Η ακρίβεια αυξάνεται με την μεγαλύτερη πυκνότητα πλέγματος.

Στα κάθετα όρια ισχύει

$$u_{BN} = u, \quad u_{BT} = v, \quad \frac{\partial u_{BN}}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{BT}}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4.5.),$$

ενώ στα οριζόντια όρια ισχύει

$$u_{BN} = v, \quad u_{BT} = u, \quad \frac{\partial u_{BN}}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{BT}}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4.6).$$

Στα στερεά τοιχώματα του αγωγού, όπου αναπτύσσεται μεγάλη τριβή και η ροή απαγορεύεται να εισχωρήσει στο όριο επιβάλλεται η «συνθήκη μη ολίσθησης⁹». Η εφαπτομενική u_{BT} και η κάθετος στο όριο συνιστώσα της ταχύτητας, u_{BN} μηδενίζονται, όταν το τοίχωμα είναι ακίνητο ή ταυτίζονται με τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας του τοιχώματος όταν το τοίχωμα έχει ίδια ταχύτητα. $\mathbf{u}^{WALL} = (u_T^{WALL}, u_N^{WALL})$. Άρα

$$u_{BT} = 0, \quad u_{BN} = 0 \quad \text{ή} \quad u_{BT} = u_T^{WALL}, \quad u_{BN} = u_N^{WALL} \quad (3.4.7.).$$

Στον άξονα αξονομετρικού αγωγού ή την γραμμή συμμετρίας 2-D συμμετρικού αγωγού γίνεται η παραδοχή ότι δεν υπάρχει τριβή και υλοποιείται η «συνθήκη Ελευθερίας¹⁰ ολίσθησης». Δηλαδή η παράλληλη προς τον άξονα συνιστώσα της ταχύτητας u_{BT} δεν μεταβάλλεται στην εγκάρσια διεύθυνση (κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} ως προς τον άξονα), ενώ η κάθετος συνιστώσα της ταχύτητας, $u_{BN} = 0$.

$$\frac{\partial u_{BT}}{\partial n} = 0, \quad u_{BN} = 0 \quad (3.4.8.).$$

Όταν το ρευστό εισέρχεται στο πεδίο ροής με δεδομένη αρχική ταχύτητα $\mathbf{u}^{IN} = (u_T^{IN}, u_N^{IN})$ επιβάλλεται η «συνθήκη εισροής¹¹», οπότε η κάθετη και η εφαπτομενική ταχύτητα στην είσοδο ορίζονται αντίστοιχα

$$u_{BT} = u_T^{IN}, \quad u_{BN} = u_N^{IN} \quad (3.4.9.).$$

«Συνθήκη εκροής¹²» επιβάλλεται στην έξοδο του αγωγού, όπου η κλίση της εφαπτομενικής ταχύτητας μηδενίζεται, ενώ η κάθετη ταχύτητα u_{BN} υπολογίζεται για να εξασφαλιστεί η διατήρηση της μάζας ή εναλλακτικά η κλίση της μηδενίζεται αν το ρευστό επιτρέπεται να εξέρχεται ελεύθερα από το όριο. Επομένως στις οριακές κυψέλες οι ταχύτητες καθορίζονται

⁹ No-Slip Condition

¹⁰ Free – slip condition

¹¹ Inflow Condition

¹² Outflow Condition

να έχουν την ίδια τιμή με τις ταχύτητες στις προηγούμενες κυψέλες κατά την κάθετη διεύθυνση στην έξοδο οπότε ισχύει

$$\frac{\partial u_{BT}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial u_{BN}}{\partial n} = 0 \quad (3.4.10.).$$

«Περιοδική¹³ Συνθήκη εισροής - εκροής» επιβάλλεται όταν ταυτίζονται οι οριακές συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο μιας περιόδου μήκους L του πεδίου ροής ευθυγράμμου ή κυματοειδούς αγωγού που παρουσιάζει περιοδικότητα π.χ. στην x διεύθυνση ενώ η πτώση πίεσης Δp μέσα στην περίοδο L θεωρείται σταθερή και ανεξάρτητη του χρόνου, *Zhou and Pozrikidis, 1993 (1), (2), 1994.*

$$u_{BT}(0) = u_{BT}(L), \quad u_{BN}(0) = u_{BN}(L), \quad p(0) = p(L) \quad (3.4.11.).$$

Στις § 4.5.1.2. και 4.5.1.3 για διφασική ροή σταγόνων σε ευθύγραμμο αγωγό υλοποιήθηκαν περιοδικές οριακές συνθήκες και για την συνάρτηση ϕ δηλαδή

$$u_{0,j} = u_{i_{\max}-1,j}, \quad v_{1,j} = v_{i_{\max},j}, \quad P_{1,j} = P_{i_{\max},j}, \quad \phi_{0,j} = \phi_{i_{\max}-1,j} \quad (3.4.12.).$$

Η εξίσωση *Poisson* για την πίεση $\Delta p = f$ στο Ω , απαιτεί οριακή συνθήκη *Neumann*,

$\frac{\partial p}{\partial n} = g$ στο Γ , στην κατεύθυνση του εξωτερικού καθέτου διανύσματος \mathbf{n} και όχι

συνθήκη *Dirichlet* που δηλώνει άμεσα την τιμή της πίεσης στο όριο και είναι επιλύσιμη μόνο

αν ισχύει η συνθήκη συμβατότητας $\int_{\Gamma} g \cdot ds = \int_{\Omega} f \cdot dx$ με μοναδική λύση μέχρι μια πρόσθετη

σταθερά¹⁴. Επειδή ορίζεται $\frac{\partial p}{\partial n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (p(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}) - p(\mathbf{x})) / \varepsilon = \nabla p \cdot \mathbf{n}$, πολλαπλασιάζοντας τις

εξισώσεις *Navier-Stokes* (3.3.7.) και (3.3.8.) με το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα

$\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ στο όριο Γ προκύπτει

$$\begin{aligned} \nabla p^{(n+1)} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x} \cdot n_1 + \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y} \cdot n_2 \Rightarrow \\ \nabla p^{(n+1)} \cdot \mathbf{n} &= -\frac{\rho(\phi)^{(n)}}{dt} \left((u^{(n+1)} - F^{(n)}) \cdot n_1 + (v^{(n+1)} - G^{(n)}) \cdot n_2 \right) \end{aligned} \quad (3.4.13.),$$

που παρέχει και τις αναγκαίες συνθήκες F, G στα όρια

$$F_{0,j} = u_{0,j}, \quad F_{i_{\max},j} = u_{i_{\max},j}, \quad \text{για } j = 1, \dots, j_{\max} \quad (3.4.14.),$$

¹³ Periodic Condition

¹⁴ Η παραπάνω οριακή συνθήκη είναι ισοδύναμη με της μεθόδου *SMAC*, *Amsden & Harlow, (1), (2), 1970, Tome & McKee, 1994* στην οποία υπολογίζεται η $dp^{(n)}$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας οπότε η $p^{(n+1)} = p^{(n)} + dp^{(n)}$ και εναλλακτικά με ταυτόχρονο υπολογισμό της πίεσης και της ταχύτητας με επαναληπτική διαδικασία, *Hirt & Cook, 1972, Hirt et.al. 1975.*

$$G_{i,0} = v_{i,0}, \quad G_{i,j_{\max}} = v_{i,j_{\max}}, \quad \text{για } i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.4.15.)$$

και τις διακριτοποιημένες οριακές συνθήκες της πίεσης p για την εξίσωση Poisson

$$P_{0,j} = P_{1,j}, \quad P_{i_{\max}+1,j} = P_{i_{\max},j}, \quad j = 1, \dots, j_{\max} \quad (3.4.16.)$$

$$P_{i,0} = P_{i,1}, \quad P_{i,j_{\max}+1} = P_{i,j_{\max}}, \quad i = 1, \dots, i_{\max} \quad (3.4.17.)$$

Οι εξισώσεις *Navier-Stokes* έχουν μοναδική λύση και με οριακές συνθήκες *Dirichlet* δίνονται οι ταχύτητες αντί των παραγώγων τους (στην κάθετη διεύθυνση του ορίου) αν συνδυαστούν με μια σταθερά ως οριακή συνθήκη για την πίεση, *Ladyshenskaja, 1969*. Περιμετρικά του ορίου η συνολική ροή των ταχυτήτων της διακριτοποίησης πρέπει να μηδενίζεται σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης και το γεγονός ότι η ροή είναι χωρίς απόκλιση¹⁵.

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot ds = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (3.4.18.).$$

Για την πίεση είναι αναγκαία και η συνθήκη

$$\int_{\Omega} p^{n+1} \cdot dx \cdot dy = 0 \quad (3.4.19.),$$

ώστε να εξασφαλιστεί η συγκρισιμότητα των αποτελεσμάτων πίεσης σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, *Croce, 2002*.

Επίσης για την συνάρτηση των ισοϋψών η συνθήκη $|\nabla \phi| = 1$ πρέπει να επιβάλλεται μακριά από την διεπιφάνεια. Στο όριο η συνθήκη αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία στις αξονοσυμμετρικές ροές επί του άξονα, όπου τίθεται ομογενής οριακή συνθήκη τύπου *Neumann*. Η διακριτοποίηση με πρώτης τάξης ακρίβειας παράγωγο της κάθετης παραγώγου της ϕ στο όριο μετατρέπει την συνθήκη *Neumann* σε απλή αντιγραφή των τιμών της ϕ από τις γειτονικές εσωτερικές κυψελίδες, πρακτικά πάνω στο όριο, όταν χρησιμοποιούνται πρώτης ή δεύτερης τάξης σχήματα διακριτοποίησης ή στην ψευδό-ζώνη των κυψελίδων στις διακριτοποιήσεις με σχήματα *ENO* και *WENO*. Επίσης μακριά από την διεπιφάνεια συνήθως αρκούν απλές ή προσημασμένες γραμμικές προεκβολές¹⁶ στις κατευθύνσεις x και y στα ίδια σημεία του πλέγματος.

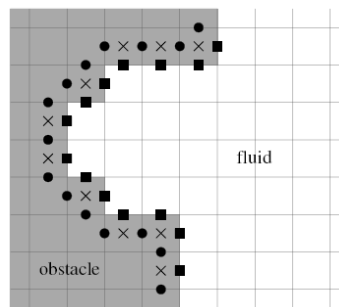
3.4.4. Δομές Δεδομένων για την διαχείριση Εμποδίων και ελεύθερων επιφανειών.

Η ενσωμάτωση στον αλγόριθμο διφασικών ροών σύγχρονων Δομών Δεδομένων που υποστηρίζουν οι γλώσσες προγραμματισμού καθιστούν εφικτή την προσομοίωση εμποδίων (*Obstacles*) ή γενικά σύνθετων (*irregular*) γεωμετρικών πεδίων, που συναντώνται στην

¹⁵ divergence free.

¹⁶ Extrapolation.

μελέτη μας, όπου το πεδίο ροής $\Omega = \Omega_b \cup \Omega_c \cup \Gamma_b \subset \mathbb{R}^2$ είναι υποσύνολο του ορθογώνιου καρτεσιανού πλέγματος I, \dots, i_{max} , I, \dots, j_{max} του αριθμητικού συνολικού ορθογωνίου χωρίου ορισμού $\Omega_{NUMERICAL}$, δηλαδή $\Omega \subset \Omega_{NUMERICAL} \subset \mathbb{R}^2$. Σε κάθε κυψέλη (i, j) του $\Omega_{NUMERICAL}$ αποδίδεται μια λογική τιμή ενός μητρώου-πίνακα σημαία (Flag matrix) που χαρακτηρίζει την κυψέλη ως κυψέλη ρευστού, C_F : Fluid Cell ή κυψέλη εμπόδιο C_B: Obstacle Cell (βλέπε παράρτημα Π2). Απαιτούνται οριακές συνθήκες σε κάθε κυψέλη η οποία ορίζεται ως εμπόδιο, Σχ.3.2 που εξαρτώνται από τον προσανατολισμό της οριακής κυψέλης και τον αριθμό γειτονικών κυψελών με ρευστό. Κάθε κυψέλη-εμπόδιο ταξινομείται με βάση τον προσανατολισμό και τον χαρακτηρισμό των γειτονικών κυψελών¹⁷.



Σχ.3.2. κυψέλη με ρευστό \blacksquare , C_F : Fluid Cell • C_B: Obstacle Cell ή εμπόδιο.

Επιπρόσθετα η πολύπλοκη διαχείριση ροών με ελεύθερη επιφάνεια (Free Surface Flows) είναι εφικτή με την μέθοδο Marker and Cell (MAC) και την κατάλληλη υλοποίηση δομής δεδομένων¹⁸ για τις κυψέλες του αριθμητικού πλέγματος $\Omega_{NUMERICAL}$ που δεν περιέχουν ρευστό ή εμπόδιο και σημαδεύονται ως «άδειες κυψέλες» C_E : Empty Cell (βλέπε

¹⁷ Αρχικά εκτελείται ένας βρόγχος σε όλες τις κυψέλες είτε αντιστοιχούν σε ρευστό είτε σε εμπόδιο. Έπειτα εκτελείται ένας δεύτερος βρόγχος σε όλες τις κυψέλες που αντιστοιχούν σε εμπόδιο και τις σηματοδοτεί ανάλογα με τον προσανατολισμό των γειτονικών κυψελών ρευστού. Οι σημαίες μορφοποιούνται σαν δυαδικοί αριθμοί και κάθε ψηφίο αποθηκεύει στη μνήμη την κατάσταση της γειτονικής κυψέλης (center | east | west | south | north |) και ορίζονται σε γλώσσα προγραμματισμού C. Για παράδειγμα η σημαία B_NW (Boundary Cell with Fluid on the North and West) θα μεταφραστεί ως 00101. (Δες παράρτημα 2).

¹⁸ Με την εισαγωγή των άδειων κυψελίδων είναι απαραίτητο να αλλάξει η δομή του πίνακα-σημαία (Flag matrix). Νέες σημαίες, υλοποιούνται στον πίνακα σημαία (Flag matrix) για να καθοριστούν με ακρίβεια οι επιφανειακές κυψέλες και οι γειτονικές αυτών π.χ. F_E : Fluid Cell with Empty Cell on the East. Τα υλικά σημεία-particles υλοποιούνται σαν δομές δεδομένων που περιέχουν την x και y συντεταγμένη και έναν δείκτη (pointer) προς το επόμενο υλικό σημείο-particle. Με αυτό τον τρόπο τα υλικά σημεία οργανώνονται σε δομή δεδομένων τύπου μονόδρομου διασυνδεδεμένου κατάλογου (one-way linked list). (Δες παράρτημα 3). Τα κάθετα \mathbf{n} και τα εφαπτομενικά \mathbf{s} διανύσματα στην επιφάνεια υπολογίζονται αριθμητικά σύμφωνα με τον τύπο οριακής κυψέλης που έχει οριστεί στον πίνακα-σημαία π.χ. η κυψέλη τύπου F_E θα έχει $\mathbf{n} = (1, 0), \mathbf{s} = (0, 0)$, ενώ η κυψέλη τύπου F_NE θα έχει $\mathbf{n} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \mathbf{m} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

παράρτημα Π3). Η παρουσία ρευστού-ελεύθερης επιφάνειας ή διεπιφάνειας απαιτεί τον καθορισμό οριακών συνθηκών στην επιφάνεια του ρευστού (Free Boundary Conditions). Η επιφανειακή τάση θεωρείται αμελητέα και επομένως οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στον αριθμητικό υπολογισμό των οριακών συνθηκών στην ελεύθερη επιφάνεια μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές. Επίσης η ταχύτητα και η πίεση θεωρούνται μηδενικές. Ανάλογα με την κίνηση του ρευστού σε κάθε χρονικό βήμα, τροποποιείται το όριο του ρευστού. Η περιοχή η οποία αντιπροσωπεύει το ρευστό καλύπτεται από ένα σύνολο “particles-υλικών σημείων”, τα οποία μετακινούνται με τις ταχύτητες του ρευστού μέσα στις κυψέλες και χρησιμοποιούνται να σημαδεύσουν τις κυψέλες σε ρευστό ή άδειο. Αυτή η τεχνική μετακίνησης της ελεύθερης επιφάνειας με επιπλέον προσαρμογές οριακών συνθηκών πιστεύουμε ότι μπορεί να συνδυαστεί στην παρούσα μεθοδολογία της *LSM* για την ανίχνευση του μετώπου της διεπιφάνειας ώστε να προκύπτει άμεση σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων.

3.5. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΧΩΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ϕ_x, ϕ_y ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ϕ .

Ανάλογα με τις ειδικές ανάγκες για την επίτευξη της ακρίβειας, της σταθερότητας και σύγκλισης του αλγορίθμου της διφασικής ροής, οι χωρικές παράγωγοι ϕ_x, ϕ_y που περιλαμβάνονται στον υπολογισμό της καμπυλότητας, στον όρο της επιφανειακής τάσης, στους αλγορίθμους μεταφοράς και επαναρχικοποίησης της ϕ , υπολογίζονται με τη χρήση κατάλληλων βιβλιοθηκών (υπορουτινών) που χρησιμοποιούν υψηλής τάξεως ακριβείας αριθμητικά σχήματα *WENO*. Υπολογίζονται οι προς τα εμπρός (στην κατεύθυνση +) και πίσω (στην κατεύθυνση -) προσεγγίσεις πέμπτης τάξεως *Hamilton-Jacobi WENO* των συνιστωσών $\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-$, της κλίσης της ϕ στις χωρικές κατευθύνσεις x και y και ο μέσος όρος των κατάντη (+) και ανάντη (-) παραγώγων:

$$\phi_x = 0.5 \cdot (\phi_x^+ + \phi_x^-) \quad (3.5.1.)$$

και

$$\phi_y = 0.5 \cdot (\phi_y^+ + \phi_y^-) \quad (3.5.2.)$$

Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του δυνητικά ομαλότερου πολυωνύμου παρεμβολής της ϕ οι πρώτες, οι δεύτερες και οι τρίτες *διαιρετές (divided) διαφορές* της ϕ , όπως ορίζονται σε κάθε τοπική κυψελίδα. Σε κάθε κυψελίδα, τα πολυώνυμα παρεμβολής διαφοροποιούνται, ώστε να προκύψουν τα τρία υποψήφια σχήματα *ENO* για τον καθορισμό των προς τα εμπρός ή πίσω προσεγγίσεων των χωρικών παραγώγων $\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-$ σε κάθε κατεύθυνση συντεταγμένων. Το σχήμα *WENO* επιλέγει

(δημιουργεί) ένα κυρτό (*convex*) συνδυασμό¹⁹ των τριών υποψηφίων σχημάτων *ENO* για τις $\phi_x^+, \phi_x^-, \phi_y^+, \phi_y^-$.

Εάν οποιαδήποτε από αυτές τις προσεγγίσεις παρεμβληθεί κατά πλάτος μίας ασυνέχειας, συμμετέχει στον κυρτό (*convex*) συνδυασμό με ελάχιστη βαρύτητα, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί η συμβολή και των σφαλμάτων που προκύπτουν. Ένα σχήμα *WENO* κάνει χρήση όλων των τιμών της ϕ από το σύνολο των σημείων του πλέγματος που δυνητικά χρησιμοποιείται από ένα κατώτερης τάξης *ENO* σχήμα. Το αποτέλεσμα είναι ότι σε περιοχές, όπου η ϕ είναι ομαλή, το σχήμα *WENO* είναι ανώτερης τάξης από τα συνδεδεμένα με αυτό σχήματα *ENO*. Οι διακριτοποιήσεις *WENO* χρησιμοποιούν μόνο ένα πίνακα πεπερασμένης διαφοράς ανεξάρτητα από την τάξη του σχήματος. Παρακάτω, παρουσιάζεται αναλυτικά ο υπολογισμός του όρου ϕ_x^n ή $[\phi_x^-]_{i,j}$ στην χρονική στιγμή n του σχήματος *WENO* πέμπτης τάξεως που ενσωματώνεται στον αλγόριθμο διφασικής ροής που στην συνέχεια αναφέρεται ϕ_x ή $[\phi_x]_{i,j}$ και υπολογίζεται με την ανάντη διαδικασία, *Osher & Fedkiw, 2003*.

$$[\phi_x]_{i,j} = \begin{cases} [\phi_x^-]_{i,j} & \text{άν } u_{i,j} > 0 \\ [\phi_x^+]_{i,j} & \text{άν } u_{i,j} < 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.5.3.),$$

όπου $[\phi_x^-]$ δηλώνει το ανάντη σχήμα και $[\phi_x^+]$ αναφέρεται το κατόντη σχήμα. Αυτά τα σχήματα ορίζονται ως

$$[\phi_x^\pm]_{i,j} = \omega_1^\pm \cdot \left(\frac{q_1^\pm}{3} - \frac{7q_2^\pm}{6} + \frac{11q_3^\pm}{6} \right) + \omega_2^\pm \cdot \left(\frac{-q_2^\pm}{6} - \frac{5q_3^\pm}{6} + \frac{q_4^\pm}{3} \right) + \omega_3^\pm \cdot \left(\frac{q_3^\pm}{3} - \frac{5q_4^\pm}{6} - \frac{q_5^\pm}{6} \right) \quad (3.5.4.),$$

όπου οι q^\pm όροι δίνονται από τα παρακάτω σχήματα πεπερασμένων διαφορών

$$\begin{aligned} [q_1^-]_{i,j} &= \frac{\phi_{i-2,j} - \phi_{i-3,j}}{dx}, & [q_2^-]_{i,j} &= \frac{\phi_{i-1,j} - \phi_{i-2,j}}{dx}, & [q_3^-]_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{dx}, \\ [q_4^-]_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{dx}, & [q_5^-]_{i,j} &= \frac{\phi_{i+2,j} - \phi_{i+1,j}}{dx} \end{aligned} \quad (3.5.5.)$$

και

$$[q_1^+]_{i,j} = \frac{\phi_{i+3,j} - \phi_{i+2,j}}{dx}, \quad [q_2^+]_{i,j} = \frac{\phi_{i+2,j} - \phi_{i+1,j}}{dx}, \quad [q_3^+]_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{dx},$$

¹⁹ Ο γραμμικός συνδυασμός των σχημάτων *ENO* δεν περιέχει αρνητικούς συντελεστές $a_1, a_2, a_3 \geq 0$ και $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

$$\left[q_4^+ \right]_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{dx}, \quad \left[q_5^+ \right]_{i,j} = \frac{\phi_{i-1,j} - \phi_{i-2,j}}{dx} \quad (3.5.6).$$

Τα αντίστοιχα βάρη ω^\pm καθορίζονται ως

$$\omega_1^\pm = \frac{\alpha_1^\pm}{\alpha_1^\pm + \alpha_2^\pm + \alpha_3^\pm}, \quad \omega_2^\pm = \frac{\alpha_2^\pm}{\alpha_1^\pm + \alpha_2^\pm + \alpha_3^\pm}, \quad \omega_3^\pm = \frac{\alpha_3^\pm}{\alpha_1^\pm + \alpha_2^\pm + \alpha_3^\pm} \quad (3.5.7)$$

με

$$\alpha_1^\pm = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(\ddot{\varepsilon} + IS_1^\pm)^2}, \quad \alpha_2^\pm = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{(\ddot{\varepsilon} + IS_2^\pm)^2}, \quad \alpha_3^\pm = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{(\ddot{\varepsilon} + IS_3^\pm)^2} \quad (3.5.8).$$

Εδώ, $\ddot{\varepsilon} > 0$ είναι μια ρυθμιστική παράμετρος (χρησιμοποιείται $\ddot{\varepsilon} = 10^{-6}$). Επίσης IS^\pm δηλώνει τους δείκτες εξομάλυνσης WENO (smoothness indicators)

$$IS_1^\pm = \frac{13}{12} \cdot (q_1 - 2q_2 + q_3)^2 + \frac{1}{4} \cdot (q_1 - 4q_2 + 3q_3)^2 \quad (3.5.9),$$

$$IS_2^\pm = \frac{13}{12} \cdot (q_2 - 2q_3 + q_4)^2 + \frac{1}{4} \cdot (q_2 - 4q_4)^2 \quad (3.5.10),$$

$$IS_3^\pm = \frac{13}{12} \cdot (q_3 - 2q_4 + q_5)^2 + \frac{1}{4} \cdot (3q_3 - 4q_4 + q_5)^2 \quad (3.5.11).$$

Οι άλλες παράγωγοι της ϕ προσεγγίζονται αριθμητικά με παρόμοιο τρόπο. Κοντά στα όρια, όπου δεν υπάρχουν αρκετά γειτονικά σημεία της κυψελίδας (i, j) για τον υπολογισμό των επιμέρους σχημάτων των όρων q^\pm , χρησιμοποιούνται αυτόματα τρίτης τάξεως σχήματα ENO.

3.6. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η αντικατάσταση της διεπιφάνειας στην LSM από έναν πεπερασμένο όγκο μικρού πλάτους, εκτός από την διευκόλυνση της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος έχει και φυσικό νόημα, *Davis & Scriven, 1982*. Όπως αναλύθηκε στις § 2.2 και 2.3 η διεπιφάνεια Γ_b ανάμεσα στις δύο διακριτές φάσεις ρευστών π.χ. της σταγόνας και του περιβάλλοντος ρευστού οριοθετεί στη τριδιάστατη περίπτωση μια επιφάνεια με στοιχειώδες πάχος η οποία εκφυλίζεται σε καμπύλη με στοιχειώδες πάχος στην διδιάστατη ή αξονοσυμμετρική προσομοίωση. Για να πληροί τις οριακές συνθήκες της LSM, η διεπιφάνεια δεν κατασκευάζεται τελείως απότομη αλλά έχει ένα πεπερασμένο πάχος 2ε , όπου το ε είναι μια μεταβλητή παράμετρος που καθορίζει το πλάτος των ομαλοποιημένων συναρτήσεων κατανομών του ιξώδους, της πυκνότητας (σχέσεις 3.6.1 και 3.6.2) και της επιφανειακής

τάσης²⁰ πάνω στην διεπιφάνεια και παραμένει σταθερό διαχρονικά, αλλά μειώνεται για πυκνότερο χωρικό πλέγμα. Συνήθως το ε καθορίζεται τουλάχιστον μία - δύο φορές το χωρικό βήμα του αριθμητικού πλέγματος για να παρέχει αποδεκτή ακρίβεια στην περιγραφή της διεπιφάνειας, ομαλότητα στην μεταβολή του ιξώδους, της πυκνότητας πάνω στην διεπιφάνεια και τελικά την επιθυμητή σταθερότητα του συνολικού αλγορίθμου. Στον αλγόριθμο ορίζονται αριθμητικά ομαλοποιημένες κατανομές συνεχών συναρτήσεων για την αδιάστατη πυκνότητα $\rho(\phi)$ και το ιξώδες $\mu(\phi)$, σε ολόκληρο το πεδίο ροής

$$\rho(\phi) = \frac{\rho_b}{\rho_c} + \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_c}\right) \cdot H(\phi) \quad (3.6.1.),$$

$$\mu(\phi) = \frac{\mu_b}{\mu_c} + \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_c}\right) \cdot H(\phi) \quad (3.6.2.),$$

όπου μ_b είναι το ιξώδες της σταγόνας και μ_c είναι το ιξώδες του περιβάλλοντος ρευστού (βλέπε §2.1.) και $H(\phi)$, $\delta(\phi)$ (βλέπε §3.7.) είναι οι εξομαλυμένες (smoothed) προσεγγίσεις των συναρτήσεων Heaviside και Dirac, Di et.al., 2007, Osher & Fedkiw, 2003. Οι τιμές του ιξώδους και της πυκνότητας μεταβάλλονται κατά πλάτος της διεπιφάνειας ομαλά από το ιξώδες και την πυκνότητα του ρευστού της σταγόνας στο αντίστοιχο ιξώδες και την πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού και αποφεύγονται ασυνέχειες κατά πλάτος της διεπιφάνειας. Για πληρότητα της ανάλυσης ορίζεται ακόμη

$$\bar{\mu} = (\mu_b + \mu_c) / 2 \quad (3.6.3.),$$

$$\Delta\mu = (\mu_b - \mu_c) / 2 \quad (3.6.4.).$$

3.7. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ $H(\phi)$, $\delta(\phi)$.

3.7.1. Συμβατική διακριτοποίηση των $H(\phi)$, $\delta(\phi)$.

Στις εφαρμογές της **LSM** στις διφασικές ροές, όπως και γενικότερα στις μεθοδολογίες εντοπισμού μετώπου (front tracking), Tryggvason et.al., 2001, η περιγραφή και ο υπολογισμός των φυσικών ιδιοτήτων των ρευστών στην διεπιφάνεια βασίζονται σε διακριτές συναρτήσεις των $H(\phi)$ ή $\delta(\phi)$, Liu et.al, 2000, Osher & Fedkiw, 2003, Peng et.al., 1999, Sussman et.al, 1994 κλπ. Το ιξώδες, η πυκνότητα, οι ασκούμενες δυνάμεις, η επιφανειακή τάση ως κατανομές και τα γεωμετρικά μεγέθη, όπως το εμβαδό (όγκος) που

²⁰ Η θεωρητικά συγκεντρωμένη δύναμη της επιφανειακής τάσης στην διεπιφάνεια, αντικαθίσταται από μία ισοδύναμη κατανομημένη δύναμη σε όλο τον όγκο που ορίζεται από το πλάτος της διεπιφάνειας.

περικλείει η διεπιφάνεια ή το μήκος του περιγράμματος (εμβαδό της επιφανείας) της κλπ είναι τέτοιες μεταβλητές (βλέπε §2.4). Στις περισσότερες εφαρμογές της **LSM** στην βιβλιογραφία οι συναρτήσεις $H(\phi)$ ή $\delta(\phi)$ διακριτοποιούνται ως μονοδιάστατες συναρτήσεις ομαλοποιημένες πάνω στην διεπιφάνεια, τρόπος που χρησιμοποιήθηκε ευρέως και στα αποτελέσματα των κεφ.4,5,6,7.

Η συνάρτηση $H(\phi)$ ορίζεται και περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & \text{αν } -\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon \\ 1 & \text{αν } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (3.7.1.),$$

ενώ η συνάρτηση δέλτα ή συνάρτηση *Dirac* δ ως συνάρτηση της ϕ ή $\delta(\phi)$ ορίζεται και περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & \text{αν } -\varepsilon \leq \phi \leq \varepsilon \\ 0 & \text{αν } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (3.7.2.).$$

Οι *Engquist et.al.*, 2005 και *Calhoun & Smereka*, 2004 ανέπτυξαν πρώτης τάξης ακρίβειας εκφράσεις διακριτών συναρτήσεων δέλτα που επιλύει το πρόβλημα ότι οι συναρτήσεις δέλτα που εκφράζονται ως μονοδιάστατη συνάρτηση στην διεπιφάνεια μπορεί να αστοχήσουν να υπολογίσουν σωστά το μήκος τόξου και οδηγούν σε κακή σύγκλιση κατά την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων, *Tornberg & Engquist*, 2004. Για την ακριβέστερη περιγραφή της συνάρτησης δέλτα σε διεπιφάνειες οι *Engquist et.al.*, 2005, ανέπτυξαν μια διδιάστατη δεύτερης τάξης ακριβείας συνάρτηση δέλτα που βασίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων δέλτα που είναι πιο σύνθετο και εφαρμόζεται μόνο σε δύο διαστάσεις.

3.7.2. Διακριτοποίηση της $\delta(\phi)$ με την μέθοδο του Smereka.

Για την βελτίωση της προσομοίωσης της επιφανειακής τάσης στον αλγόριθμο των διαφασικών ροών και την μελέτη πεδίων με έντονη διάτμηση ενσωματώσαμε εναλλακτικά για βελτιστοποίηση των αποτελεσμάτων την διακριτή συνάρτηση δέλτα, που εισηγείται ο *Smereka*, 2006 ο οποίος παρουσίασε για 2-D και 3-D διεπιφάνειες, πρώτης και δεύτερης τάξης ακρίβειας εκφράσεις της συνάρτησης δέλτα που είναι διατυπωμένες ως εκφράσεις της *συνάρτησης των ισοϋψών* και έλεγξε την ακρίβεια της μεθοδολογίας του σε αριθμητικά παραδείγματα, ενώ επιπλέον ο *Beale* (2008) την απόδειξε και θεωρητικά. Η μέθοδος *Smereka* εισηγείται την διακριτή συνάρτηση δέλτα ως σφάλμα αποκοπής, υλοποιώντας διακριτές Λαπλασιανές σε "συνάρτηση *Green*" κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων σε

ομοιόμορφο πλέγμα με διεπιφανειακές συνθήκες, στις οποίες οι συνθήκες άλματος ενσωματώνονται στους διαφορικούς τελεστές με την τεχνική της *Mayo, 1984, 1992*.

Στους υπολογισμούς του διφασικού αλγορίθμου χρησιμοποιούνται έννοιες και όροι από την ανάλυση του *Smereka* που ως εκ τούτου είναι απαραίτητο να παρουσιαστούν και εδώ. Έστω χωρίο Ω , υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , Γ κλειστή καμπύλη (διεπιφάνεια) που περιέχεται σε αυτή την περιοχή, δηλ. $\Gamma \in \Omega$, $\delta(d)$ η συνήθης μονοδιάστατη συνάρτηση δέλτα *Dirac* και $d(x, y)$ η προσημασμένη απόσταση από ένα σημείο (x, y) στην καμπύλη Γ και $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ η Λαπλασιανή. Στις δύο διαστάσεις ορίζονται (x_i, y_j) η θέση των σημείων του πλέγματος, h το βήμα του πλέγματος και $\alpha = (a_x, a_y)$ τα σημεία της διεπιφάνειας.

Δύο διαδοχικά σημεία του πλέγματος χαρακτηρίζονται ως ανώμαλα, όταν η διεπιφάνεια διέρχεται ανάμεσα τους. Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος θεωρούνται ως ομαλά σημεία. Έστω $[q]$ είναι το άλμα κατά πλάτος της Γ , ο δείκτης $[]_x$ δηλώνει το άλμα στην κατεύθυνση x και ο $[]_y$ το άλμα στην κατεύθυνση y , ενώ $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ και $\mathbf{s} = (s_x, s_y) = (-n_y, n_x)$ είναι τα μοναδιαία κάθετα και εφαπτομενικά διανύσματα στην Γ (βλέπε §2.4) τότε

$$[q] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} q(\alpha + \varepsilon \mathbf{n}) - q(\alpha - \varepsilon \mathbf{n}) \quad (3.7.3.), (*21)^{21},$$

$$[q]_x = q(a_x^+, a_y) - q(a_x^-, a_y) \quad \text{και} \quad [q]_y = q(a_x, a_y^+) - q(a_x, a_y^-) \quad (3.7.4.), (*22).$$

από τις οποίες προκύπτει η

$$[q]_x = [q] \operatorname{sgn}[n_x] \quad \text{και} \quad [q]_y = [q] \operatorname{sgn}[n_y] \quad (3.7.5.), (*23).$$

Η διακριτή συνάρτηση Δέλτα $\tilde{\delta}_{i,j}$ προκύπτει με την μελέτη του ελλειπτικού προβλήματος

$$\Delta g(x, y) = \delta(d(x, y)) \quad (3.7.6.), (*24).$$

Η (3.7.6.) γράφεται βάσει της (3.7.3.)

$$\Delta g(x, y) = 0 \quad (3.7.7.), (*25)$$

με συνθήκη άλματος

$$[\partial_n g] = 1 \quad \text{και} \quad [g] = 0 \quad \text{στο} \quad x = \Gamma \quad (3.7.8.), (*26),$$

όπου ∂_n είναι η διανυσματική (directional) παράγωγος στην κάθετη κατεύθυνση.

Η $[g] = 0$ συνεπάγεται $[g]_x = [g]_y = 0$.

²¹ Στην §3.7. με * είναι η αντίστοιχη σχέση στην *Smereka, 2006*.

Στα ομαλά σημεία η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται με το τυπικό σχήμα κεντρικών διαφορών

$$\Delta g(x_i, y_j) = \Delta_h g_{i,j} + O(h^2) \quad (3.7.9.), (*27),$$

όπου (x_i, y_j) , είναι οι θέσεις του πλέγματος και Δ_h είναι η διακριτή Λαπλασιανή πέντε σημείων, δηλαδή

$$\Delta_h g_{i,j} = \frac{g_{i+1,j} - 2g_{i,j} + g_{i-1,j}}{h^2} + \frac{g_{i,j+1} - 2g_{i,j} + g_{i,j-1}}{h^2} \quad (3.7.10.), (*28)$$

Για τα ανώμαλα σημεία, εισάγεται η

$$\Delta g(x_i, y_j) = \Delta_h g_{i,j} - \tilde{\delta}_{i,j} + O(h) \quad (3.7.11.), (*29).$$

Οι όροι $[g]_x, [g]_y$ και η Δ_h υπολογίζονται στα σημεία της διεπιφάνειας με κατάλληλα αναπτύγματα σειράς *Taylor*, γύρω από το σημείο (a_x, y_j) στην κατεύθυνση x και γύρω από το σημείο (x_i, a_y) στην κατεύθυνση y και συνυπολογίζοντας ότι η g έχει ασυνεχείς πρώτη και δεύτερη παράγωγο κατά πλάτος της διεπιφάνειας. Ορίζεται επίσης

$$h_x^+ = x_{i+1} - a_x \text{ και } h_x^- = a_x - x_{i-1} \text{ και } h_y^+ = y_{j+1} - a_y, h_y^- = a_y - y_{j-1} \quad (3.7.12.).$$

Με την παραπάνω διαδικασία προκύπτει η

$$\tilde{\delta}_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j}^{+x} + \tilde{\delta}_{i,j}^{-x} + \tilde{\delta}_{i,j}^{+y} + \tilde{\delta}_{i,j}^{-y} \quad (3.7.13.), (*30)$$

ως γενική έκφραση για την διακριτή συνάρτηση Δέλτα $\tilde{\delta}_{i,j}$ όπου

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{+x} = \begin{cases} h_x^+ [\partial_x g]_x + \frac{3}{2} (h_x^+)^2 [\partial_{xx}^2 g]_x & \text{αν } x_i \leq a_x < x_{i+1} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.13.1.)$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{-x} = \begin{cases} h_x^- [\partial_x g]_x - \frac{3}{2} (h_x^-)^2 [\partial_{xx}^2 g]_x & \text{αν } x_{i-1} < a_x < x_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.13.2.)$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{+y} = \begin{cases} h_y^+ [\partial_y g]_y + \frac{3}{2} (h_y^+)^2 [\partial_{yy}^2 g]_y & \text{αν } y_j \leq a_y < y_{j+1} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.13.3.)$$

$$h^2 \tilde{\delta}_{i,j}^{-y} = \begin{cases} h_y^- [\partial_y g]_y - \frac{3}{2} (h_y^-)^2 [\partial_{yy}^2 g]_y & \text{αν } y_{j-1} \leq a_y < y_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.13.4.)$$

Δεδομένου ότι $\Delta g(x_i, y_j) = 0$, προκύπτει από τις (3.7.9.) και (3.7.11.) ότι

$$\Delta_h g_{i,j} = \tilde{\delta}_{i,j} + O_I(h) + O(h^2) \quad (3.7.14.) (*31)$$

για όλα τα σημεία του πλέγματος. Υπενθυμίζεται ότι $O_I(\cdot)$ δείχνει έναν όρο που είναι διαφορετικός από το μηδέν μόνο σε ανώμαλα σημεία. Η (3.7.14.) είναι η διακριτή μορφή

της (3.7.6.) και η δεξιά πλευρά της αντιπροσωπεύει την διακριτή συνάρτηση δέλτα $\tilde{\delta}_{i,j}$ συν τους όρους σφαλμάτων. Η $\tilde{\delta}_{i,j}$ (3.7.13.) έχει ακρίβεια p , ($p > 0$) καθώς $h \rightarrow 0$ σύμφωνα με την

$$L = \sum_{i,j} h^2 \tilde{\delta}_{i,j} + O(h^p) \quad (3.7.15.) (*1)$$

ανάλογα με την ακρίβεια διακριτοποίησης των επιμέρους όρων της που διατυπώνονται παρακάτω ως συνάρτηση της $\phi(x, y) = 0$ της LSM που περιγράφει την διεπιφάνεια.

Ορίζονται οι παράγωγοι πάνω στα σημεία (x_i, y_j) του αριθμητικού πλέγματος :

$$\begin{aligned} D_x^+ \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h}, & D_x^- \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{h}, & D_x^0 \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h}, \\ D_y^+ \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h}, & D_y^- \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{h}, & D_y^0 \phi_{i,j} &= \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h} \end{aligned} \quad (3.7.16.) \quad \text{και}$$

$$|\nabla_0^\varepsilon \phi_{i,j}| = \sqrt{(D_x^0 \phi_{i,j})^2 + (D_y^0 \phi_{i,j})^2} + \varepsilon \quad (3.7.17.),$$

όπου ε είναι ένας μικρός αριθμός ($\varepsilon \approx 10^{-10}$) ο οποίος αποτρέπει διαίρεση με το μηδέν. Οι παράγωγοι κατεύθυνσης περιγράφονται από τις σχέσεις

$$\partial_n = n_x \partial_x + n_y \partial_y \quad (3.7.18.) (*39)$$

$$\partial_s = s_x \partial_x + s_y \partial_y \quad (3.7.19.) (*40)$$

$$D = (s_x n_y + s_y n_x) \cdot \mathbf{n} \cdot \partial_s \quad (3.7.20.) (*46).$$

Τα άλματα στην πρώτη παράγωγο περιγράφονται από τις σχέσεις

$$[g_x] = n_x, \quad [g_y] = n_y \quad (3.7.21.) (*41)$$

$$[g_x]_x = |n_x|, \quad [g_y]_y = |n_y| \quad (3.7.22.) (*42)$$

και τα άλματα στη δεύτερη παράγωγο από την σχέση

$$[\partial_{xx}^2 g]_x = -D \cdot \text{sgn}(n_x) \quad \text{και} \quad [\partial_{yy}^2 g]_y = D \cdot \text{sgn}(n_y) \quad (3.7.23.) (*47).$$

3.7.2.1. Διακριτοποίηση πρώτης τάξεως.

Στην σχέση (3.7.11.) απαλείφονται τα άλματα στις δεύτερες παραγώγους με την παραδοχή

$$[\partial_{xx}^2 g]_x = [\partial_{yy}^2 g]_y = 0. \quad \text{Χρησιμοποιούνται η ανάλυση της §3.7.2. και επιπλέον οι παρακάτω}$$

σχέσεις που στηρίζονται στην $\phi_{i,j}$

$$h_x^\pm = \left| \frac{\phi_{i\pm 1,j}}{D_x^\pm \phi_{i,j}} \right| + O(h^2), \quad h_y^\pm = \left| \frac{\phi_{i,j\pm 1}}{D_y^\pm \phi_{i,j}} \right| + O(h^2) \quad (3.7.24.) (*43)$$

και

$$n_x = \frac{\partial_x \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{D_x^0 \phi_{i,j}}{|\nabla_0^e \phi_{i,j}|} + O(h) \quad \text{και} \quad n_y = \frac{\partial_y \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{D_y^0 \phi_{i,j}}{|\nabla_0^e \phi_{i,j}|} + O(h) \quad (3.7.25.) (*44)$$

που είναι δεύτερης τάξης ακριβείας στα σημεία του πλέγματος, αλλά πρώτης τάξης ακριβείας στα σημεία της διεπιφάνειας. Τότε η σχέση (3.7.13.) διαμορφώνεται στην σχέση

$$\tilde{\delta}(\phi_{i,j}) = \tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} + \tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} \quad (3.7.26.) (*45)$$

που είναι μιας πρώτης τάξεως ακρίβειας διακριτή μορφή $\tilde{\delta}_{i,j}$ της δ με

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+x)} = \begin{cases} \frac{|\phi_{i+1,j} \cdot D_x^0 \phi_{i,j}|}{h^2 |D_x^+ \phi_{i,j}| |\nabla_0^e \phi_{i,j}|} & \text{αν } \phi_{i,j} \cdot \phi_{i+1,j} \leq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.26.1.),$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-x)} = \begin{cases} \frac{|\phi_{i-1,j} \cdot D_x^0 \phi_{i,j}|}{h^2 |D_x^- \phi_{i,j}| |\nabla_0^e \phi_{i,j}|} & \text{αν } \phi_{i,j} \cdot \phi_{i-1,j} < 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.26.2.),$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(+y)} = \begin{cases} \frac{|\phi_{i,j+1} \cdot D_y^0 \phi_{i,j}|}{h^2 |D_y^+ \phi_{i,j}| |\nabla_0^e \phi_{i,j}|} & \text{αν } \phi_{i,j} \cdot \phi_{i,j+1} \leq 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.26.3.),$$

$$\tilde{\delta}_{i,j}^{(-y)} = \begin{cases} \frac{|\phi_{i,j-1} \cdot D_y^0 \phi_{i,j}|}{h^2 |D_y^- \phi_{i,j}| |\nabla_0^e \phi_{i,j}|} & \text{αν } \phi_{i,j} \cdot \phi_{i,j-1} < 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.26.4.).$$

3.7.2.2. Διακριτοποίηση δεύτερης τάξεως ακριβείας.

Για να διατυπωθεί η σχέση (3.7.13.) σε μία δεύτερης τάξεως ακρίβειας διακριτή μορφή $\tilde{\delta}_{i,j}$, τα άλματα στις δεύτερες παραγώγους υπολογίζονται με πρώτης τάξεως ακρίβειας διακριτοποίηση στη διεπιφάνεια για $\mathbf{s} = (-n_y, n_x)$ χρησιμοποιώντας τις (3.7.20.) και (3.7.23.), γιατί όλες οι παράγωγοι υπολογίζονται με χρήση σχημάτων κεντρικών διαφορών. Τα άλματα στις πρώτες παραγώγους $[\partial_x g]_x$ και $[\partial_y g]_y$ υπολογίζονται όπως στην σχέση (3.7.26.) χρησιμοποιώντας την (3.7.22.) και την (3.7.25.) που δεν επηρεάζει την ακρίβεια γιατί στους υπολογισμούς απαλείφονται οι όροι $O(h)$. Ομοίως και τα υποθετικά κριτήρια της (3.7.13.) υπολογίζονται όπως στην σχέση (3.7.26.). Τα h_x^\pm και h_y^\pm υπολογίζονται μονοδιάστατα ανά κατεύθυνση με τρίτης τάξεως ακρίβειας σχήματα διακριτοποίησης με εκφράσεις όπως της σχέσης (3.7.27.) για το h_x^+ μεταξύ x_i and x_{i+1} .

$$h_x^+ = \begin{cases} \frac{h}{2} - u_l & \text{αν } |u_l| \leq \frac{h}{2} \\ \frac{|\phi_{i+1}|}{|D_x^+ \phi_i|} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7.27.) \quad (*49).$$

Η $\frac{|\phi_{i+1}|}{|D_x^+ \phi_i|}$ στην (3.7.27.) είναι η πρώτης τάξης ακριβείας έκφραση (3.7.24.) που εξασφαλίζει την ευστάθεια του αλγορίθμου, όταν η διεπιφάνεια δεν επιλυθεί σωστά στο αριθμητικό πλέγμα. Το u_l προκύπτει από την επίλυση αναπτύγματος της σειράς *Taylor*

$$\phi(u) = \phi_c + \phi_c' u + \frac{1}{2} \phi_c'' u^2 + O(h^3) \quad (3.7.28.) \quad (*48),$$

γύρω από το κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης που βελτιώνει την ακρίβεια και εξασφαλίζει $h_x^+ + h_x = h$. Είναι $u = x - \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$ και ο δείκτης δείχνει την τιμή στο κέντρο της κυψέλης. Η διεπιφάνεια προσδιορίζεται από την $\phi(u_l) = 0$ που επιλύεται για να καθορισθεί η u_l . Παίρνουμε

$$u_l = -\frac{\phi_c}{\phi_c'} - \frac{\phi_c'' \phi_c^2}{2\phi_c'^3} + O(h^3) \quad (3.7.29.).$$

Δεδομένου ότι το u_l μετρείται σε σχέση με το κέντρο της κυψελίδας συνεπάγεται ότι

$$h_x^+ = \frac{h}{2} - u_l \quad (3.7.30.).$$

Για την αριθμητική υλοποίηση του παραπάνω τύπου, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω προσεγγίσεις

$$\phi_c = \frac{1}{16} (-\phi_{i-1} + 9\phi_i + 9\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) + O(h^4) \quad (3.7.31.)$$

$$\phi_c' = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + O(h^2) \quad (3.7.32.)$$

$$\phi_c'' = \frac{\phi_{i-1} - (\phi_i + \phi_{i+1}) + \phi_{i+2}}{2h^2} + O(h^2) \quad (3.7.33.).$$

3.8. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ $\kappa(\phi)$.

Ο ακριβέστερος υπολογισμός της καμπυλότητας επίπεδης καμπύλης ή αξονοσυμμετρικής επιφάνειας $\kappa(\phi)$, $\kappa(\phi) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ σχέση (2.4.5.), συμβάλλει σημαντικά στην ευστάθεια του διφασικού αλγορίθμου, γιατί μειώνει κατά πολύ την αριθμητική διάχυση των σημείων της διεπιφάνειας που αποτελεί την κύρια αιτία αστοχίας του αλγορίθμου όταν ασκείται επιφανειακή τάση μεταξύ των δύο φάσεων. Ο τελικός τύπος διακριτοποίησης της $\kappa(\phi)$ εξαρτάται από το σημείο του μετατοπισμένου αριθμητικού πλέγματος (κέντρο ή πλευρά της αριθμητικής κυψέλης) στο οποίο επιλύεται το βασικό μέγεθος της εξίσωσης στην οποία υπεισέρχεται η $\kappa(\phi)$ και αλλάζει τις τιμές της ϕ .

Συγκεκριμένα η σχέση (2.4.5.) μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{(\phi_x, \phi_y)^T}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \quad \text{ή} \quad \mathbf{n}_{i,j} = \frac{([\phi_x]_{i,j}, [\phi_y]_{i,j})^T}{\sqrt{[\phi_x]_{i,j}^2 + [\phi_y]_{i,j}^2}} \quad (3.8.1.),$$

και βάσει της σχέσης (3.7.25.)

$$n_x = \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} = \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}, \quad n_y = \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} = \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \quad (3.8.2.).$$

A. Διδιάστατη περίπτωση :

Για $\mathbf{U} = (f, g)$ τότε κατά την (Π.6.10.) $\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ και άρα στην Διδιάστατη περίπτωση,

ο όρος της καμπυλότητας διατυπώνεται ως εξής

$$\begin{aligned} \kappa(\phi)^{2-D} &= \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \nabla \cdot \left(\frac{\phi_x}{|\nabla \phi|}, \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right) = \left(\frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_x + \left(\frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_y \Rightarrow \\ \kappa(\phi)^{2-D} &= \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\phi_x^2 \phi_{yy} + \phi_y^2 \phi_{xx} - 2\phi_{xy} \phi_y \phi_x}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.8.3.), \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των συστατικών στοιχείων $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}$ της $\kappa(\phi)$ χρησιμοποιούνται συνήθως τυπικά κεντρικά αριθμητικά σχήματα δεύτερης τάξης ακριβείας. Η διακριτοποίηση των πεπερασμένων διαφορών είναι συνήθως επαρκής παρότι στις ασυνέχειες είναι μόνο πρώτης τάξεως ακριβείας και οδηγεί σε $O(1/dx)$ σφάλματα που αυξάνουν με την πύκνωση του αριθμητικού πλέγματος. Για την σωστή περιγραφή της καμπυλότητας προστίθεται στον διφασικό αλγόριθμο η αναγκαία αριθμητική συνθήκη λόγω του περιορισμού του χωρικού βήματος, *Osher & Fedkiw, 2003*

$$-\frac{1}{dx} \leq \kappa(\phi) \leq \frac{1}{dx} \quad \text{και} \quad -\frac{1}{dy} \leq \kappa(\phi) \leq \frac{1}{dy} \quad (3.8.4.).$$

B. Αξονοσυμμετρική περίπτωση :

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση, αν $\mathbf{U} = (f, g)$ τότε κατά την (Π.6.11.) $\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{g}{y}$

και άρα ο όρος της καμπυλότητας $\kappa(\phi)^{\text{AXIS}}$ προκύπτει από την διακριτοποίηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned}\kappa(\phi)^{AXIS} &= \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \nabla \cdot \left(\frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \cdot \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right) = \left(\frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_x + \left(\frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_y + \frac{n_y}{y} \Rightarrow \\ \kappa(\phi)^{AXIS} &= \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\phi_x^2 \phi_{yy} + \phi_y^2 \phi_{xx} - 2\phi_{xy} \phi_x \phi_y}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}\end{aligned}\quad (3.8.5.),$$

επειδή

$$\frac{n_y}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \quad (3.8.6.).$$

Άρα μπορεί να διατυπωθεί η σχέση

$$\kappa(\phi)^{AXIS} = \kappa(\phi)^{2-D} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \quad (3.8.7.).$$

Ισχύει και εδώ η αριθμητική συνθήκη (3.8.4.) λόγω του περιορισμού του χωρικού βήματος.

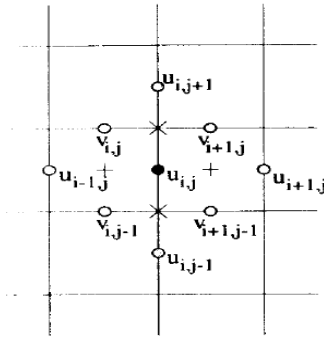
Σημειώστε ότι η γενικότερη πρακτική είναι να διακριτοποιείται το $\nabla \cdot \mathbf{n}$ αντί του $\nabla \phi$ και το $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ αντί του $|\nabla \phi|$, αν και $|\nabla \phi| = 1$ στην γειτονιά ϵ της διεπιφάνειας. γιατί υλοποιείται η ϕ είναι προσημασμένη συνάρτηση απόστασης. (Βλέπε *Croce, 2002*). Αυτή η διαδικασία καταλήγει σε πιο σταθερή διακριτοποίηση των καθέτων διανυσμάτων στην διεπιφάνεια καθώς επίσης της καμπυλότητας σε προεξοχές (cusps) και τις ακμές (edges). Οι προσεγγίσεις των μοναδιαίων καθέτων διανυσμάτων υπολογίζονται αριθμητικά χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές. Το $\nabla \cdot \mathbf{n}$ διακριτοποιείται επίσης με κεντρικές διαφορές τόσο για τις παραγώγους πρώτης τάξεως όσο και για τις παραγώγους δεύτερης τάξεως.

3.9. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES

3.9.1. Γενικά

Την χρονική στιγμή n οι εξισώσεις *Navier-Stokes* (2.7.15.) διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας σχήματα περασμένων διαφορών πάνω στους κατάλληλους κόμβους του μετατοπισμένου πλέγματος που περιγράφηκε στην §3.2. Συγκεκριμένα, η εξίσωση της ορμής διακριτοποιείται στα μέσα των κάθετων πλευρών της κυψέλης πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$ για την κατεύθυνση x και στα μέσα των οριζόντιων πλευρών της κυψέλης πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$ για την κατεύθυνση y . Από τον υπολογισμό προκύπτει η ενδιάμεση ταχύτητα $\mathbf{FG} = (F, G)$ σχηματίζονται οι αντίστοιχοι όροι της εξίσωσης *Poisson* §3.3. Όπου είναι εφικτό στους τύπους απαλείφεται ο εκθέτης n χωρίς να μειώνεται η

σαφήνεια. Από άποψη θέσης και συμβόλων το αριθμητικό πλέγμα Σχ. 3.3. είναι το ίδιο τόσο για την διδιάστατη περίπτωση, (2-D) όσο και για την αξονοσυμμετρική περίπτωση.



Σχ. 3.3. Βασικές τιμές στο αριθμητικό πλέγμα για την διακριτοποίηση των (u, v) στην εξίσωση της ορμής. (Griebel et.al., 1998).

Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά η διακριτοποίηση των όρων του δεξιού μέλους της εξίσωσης (2.8.1.) δηλαδή των όρων **CONV**, **VISC**, **ST** στην κατεύθυνση x και y που συνθέτουν την U_x , εξίσωση (2.8.5.x) και την U_y , εξίσωση (2.8.5.y) της διανυσματικής συνάρτησης \mathbf{U} , εξίσωση (2.8.5.). Στο παράρτημα Π7 περιέχονται συμπληρωματικά στοιχεία για τις διακριτοποιήσεις.

3.9.2. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων

Οι συναγωγικοί όροι $\mathbf{CONV} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ της σχέσης (2.8.1.), όπου $\mathbf{CONV} = (\mathbf{CONV}_x, \mathbf{CONV}_y)$ διακριτοποιούνται τόσο για την μονοφασική όσο και για την διφασική περίπτωση με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω:

A. Διδιάστατη περίπτωση :

Στην Διδιάστατη περίπτωση, οι συναγωγικοί όροι διατυπώνονται ως εξής.

$$\mathbf{CONV} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\left(u, v \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) u, v = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{CONV}^{2-D} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.9.1).$$

Άρα στην κατεύθυνση x

$$(\mathbf{CONV}_x)^{2-D} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \quad (3.9.2)$$

και στην κατεύθυνση y

$$(CONV_y)^{2-D} = \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \quad (3.9.3).$$

Οι όροι των αλγεβρικών εξισώσεων (3.9.2) και (3.9.3) διακριτοποιούνται με ένα σχεδόν δεύτερης τάξης αριθμητικό σχήμα²² *Griebel et al., 1998* που αποτελεί συνδυασμό σχήματος κεντρικών διαφορών με βαρύτητα $(1-\gamma)$ και ενός ανάντη²³ σχήματος δότη-κυψέλης με βαρύτητα γ , όπου η ανάντη παράμετρος $\gamma \in \mathbb{R}$ επιλέγεται²⁴ μεταξύ 0 και 1 και ικανοποιείται η συνθήκη

$$\gamma \geq \max_{i,j} \left(\left| \frac{u_{i,j} dt}{dx} \right|, \left| \frac{v_{i,j} dt}{dy} \right| \right) \quad (3.9.4),$$

Hirt et al., 1975. Αναλυτικά

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4dx} \left((u_{i,j} + u_{i+1,j})^2 - (u_{i-1,j} + u_{i,j})^2 \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{4dx} \left(|u_{i,j} + u_{i+1,j}| (u_{i,j} + u_{i+1,j}) - |u_{i-1,j} + u_{i,j}| (u_{i-1,j} + u_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (3.9.5),$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4dy} \left((v_{i,j} + v_{i+1,j})(u_{i,j} + u_{i,j+1}) - (v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})(u_{i,j-1} + u_{i,j}) \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{4dy} \left(|v_{i,j} + v_{i+1,j}| (u_{i,j} - u_{i,j+1}) - |v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}| (u_{i,j-1} + u_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (3.9.6),$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4dy} \left((v_{i,j} + v_{i+1,j})^2 - (v_{i-1,j} + v_{i,j})^2 \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{4dy} \left(|v_{i,j} + v_{i+1,j}| (v_{i,j} + v_{i+1,j}) - |v_{i-1,j} + v_{i,j}| (v_{i-1,j} + v_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (3.9.7),$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4dx} \left((v_{i,j} + v_{i+1,j})(u_{i,j} + u_{i,j+1}) - (v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})(u_{i,j-1} + u_{i,j}) \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{4dx} \left(|v_{i,j} + v_{i+1,j}| (u_{i,j} - u_{i,j+1}) - |v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}| (u_{i,j-1} + u_{i,j}) \right) \end{aligned} \quad (3.9.8),$$

²² Η διακριτοποίηση γίνεται σταθερή αλλά η τάξη ακριβείας της πέφτει από $O(x^2)$ σε $O(x)$, *Hackbusch, 1992*.

²³ upwind

²⁴ Για $\gamma = 0$ λειτουργεί μόνο το σχήμα των κεντρικών διαφορών και για $\gamma = 1$ μόνο το ανάντη σχήμα. Στα αποτελέσματα συχνότερα χρησιμοποιήθηκαν τιμές του γ μεταξύ 0.65 και 0.85.

Β. Αξονοσυμμετρική περίπτωση :

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση, οι συναγωγικοί όροι $CONV^{AXIS}$ προκύπτουν από την διακριτοποίηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$CONV^{AXIS} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\left(\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \left(\frac{u \cdot v}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \right).$$

Άρα στην κατεύθυνση x (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$)

$$CONV_{-x}^{AXIS} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \left(\frac{u \cdot v}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow$$

$$CONV_{-x}^{AXIS} = CONV_{-x}^{2-D} + \left(\frac{u \cdot v}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.9.9.)$$

και στην κατεύθυνση y (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$)

$$CONV_{-y}^{AXIS} = \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \Rightarrow$$

$$CONV_{-y}^{AXIS} = CONV_{-y}^{2-D} + \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \quad (3.9.10.)$$

Οι επιπλέον όροι διακριτοποιούνται: στην κατεύθυνση x (πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$)

$$\left[uv / y \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} \cdot (v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})}{2 \cdot \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \quad (3.9.11.),$$

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2 \cdot \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy^2} \quad (3.9.12.),$$

και στην κατεύθυνση y (πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$)

$$\left[\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right]_{i,j} = \frac{1}{j \cdot dy^2} \cdot \left((v_{i,j} - v_{i-1,j}) - \frac{v_{i,j}}{j} \right) \quad (3.9.13.).$$

3.9.3. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους ή συνεκτικών όρων.

Οι όροι ιξώδους ή συνεκτικοί όροι ή όροι διάχυσης (*diffusive terms*) της σχέσης (2.8.2.)

$$\mathbf{VISC} = \frac{1}{\rho(\phi)} (\nabla \cdot (\mu(\phi) \mathbf{D})) \quad \text{όπου} \quad \mathbf{VISC} = (VISC_x, VISC_y)$$

διακριτοποιούνται για την μονοφασική και για την διφασική περίπτωση με τον τρόπο που περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω:

A. Διδιάστατη περίπτωση.

Στην Διδιάστατη περίπτωση, οι όροι ιξώδους διατυπώνονται ως εξής. Για το μονοφασικό πεδίο της κύριας φάσης στην κατεύθυνση x (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$) ισχύει η σχέση:

$$VISC_x^{2-D} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.9.14.)$$

και στην κατεύθυνση y (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$) η σχέση:

$$VISC_y^{2-D} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.9.15.)$$

Στο διφασικό πεδίο στην κατεύθυνση x ισχύει

$$(VISC_x)^{2-D} = \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot (2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x + (\mu(\phi)(u_y + v_x))_y) \quad (3.9.16.),$$

η οποία διακριτοποιείται επάνω στους κόμβους $u_{i,j}$ στα μέσα των καθέτων πλευρών των κυψελών (ονομαστικά κόμβος με δείκτη $VISC_x$), *Croce, 2002*.

Στην κατεύθυνση y ισχύει η σχέση

$$(VISC_y)^{2-D} = \frac{1}{\rho(\phi)} \cdot (\mu(\phi)(u_y + v_x))_x + 2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y \quad (3.9.17.),$$

η οποία διακριτοποιείται επάνω στους κόμβους $v_{i,j}$ στα μέσα των οριζόντιων πλευρών των κυψελών (ονομαστικά κόμβος με δείκτη $VISC_y$), *Croce, 2002*.

Οι απαιτούμενες τιμές των ϕ^{VISC_x} , $\mu(\phi)^{VISC_x}$, $\rho(\phi)^{VISC_x}$, ϕ^{VISC_y} , $\mu(\phi)^{VISC_y}$, $\rho(\phi)^{VISC_y}$ υπολογίζονται με απλή γραμμική παρεμβολή των κατάλληλων τιμών των ϕ , $\mu(\phi)$, $\rho(\phi)$ στα κέντρα των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών ως εξής

$$\phi_{i,j}^{VISC_x} = \frac{(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j})}{2}, \quad \phi_{i,j}^{VISC_y} = \frac{(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j})}{2} \quad (3.9.18.),$$

$$\rho_{i,j}^{VISC_x} = \frac{(\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j})}{2}, \quad \rho_{i,j}^{VISC_y} = \frac{(\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j})}{2} \quad (3.9.19.),$$

$$\mu_{i,j}^{VISC-x} = \frac{(\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j})}{2}, \quad \mu_{i,j}^{VISC-y} = \frac{(\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j})}{2} \quad (3.9.20).$$

Ειδικά στις οριακές κυψελίδες χρησιμοποιούνται κατάλληλες προσεγγίσεις. Για την διακριτοποίηση των όρων ιξώδους του τανυστή των τάσεων χρησιμοποιήθηκαν σχήματα δεύτερης τάξης κεντρικών διαφορών.

Αναλυτικά

$$2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x = (dx)^{-2} \cdot [(\mu_{i+2,j} + \mu_{i+1,j}) \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - (\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j}) \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j})] \quad (3.9.21.)$$

ή εναλλακτικά²⁵

$$[2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x]_{i,j} = 2 \cdot (dx)^{-2} \cdot \left(\mu(\phi_{i+1,j}) \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - \mu(\phi_{i,j}) \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) \quad (3.9.22.),$$

$$\begin{aligned} (\mu(\phi)(u_y + v_x))_y &= [([\mu(\phi)]^{VISC-x} \cdot (u_y + v_x^{VISC-x}))_y]_{i,j} = \\ &= \left(\left(\frac{(\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j})}{2 \cdot dy} \cdot \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy} + \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1})}{4 \cdot dx} \right] \right) \right) \\ &= \left(- \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j})}{2 \cdot dy} \cdot \left[\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy} + \frac{(v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-2} - v_{i-1,j-2})}{4 \cdot dx} \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (3.9.23.)$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{aligned} &[(\mu(\phi) \cdot (u_y + v_x))_y]_{i,j} = \\ &= (dy)^{-1} \cdot \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{4} \cdot \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{dx} \right] \right) \\ &- (dy)^{-1} \cdot \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1})}{4} \cdot \left[\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy} + \frac{v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}}{dx} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.9.24.)$$

Για τον υπολογισμό του ιξώδους $\mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ και $\mu_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$ στις κορυφές των κυψελών στην (3.9.24.) χρησιμοποιούνται οι τιμές του ιξώδους στα κέντρα των κυψελών απο τις σχέσεις:

$$\mu_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25 \cdot (\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1}) \quad (3.9.25.)$$

$$, \mu_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.25 \cdot (\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j-1} + \mu_{i+1,j-1}) \quad (3.9.26.)$$

²⁵ Η εναλλακτική διακριτοποίηση χρησιμοποιήθηκε εξίσου ικανοποιητικά στον διφασικό αλγόριθμο αν και η πρώτη εκδοχή φαίνεται λίγο πιο ακριβής ειδικά για την διακριτοποίηση του ιξώδους μ .

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y = \\
& \left[2 \cdot ([\mu(\phi)]^{VISC-y} \cdot v_y)_y \right]_{i,j} = \quad (3.9.27.) \\
& \frac{1}{(dy)^2} \cdot \left((\mu_{i,j+2} + \mu_{i,j+1}) \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - (\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j}) \cdot (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \right)
\end{aligned}$$

ή εναλλακτικά

$$\begin{aligned}
& \left[2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y \right]_{i,j} = \\
& \frac{2}{(dy)^2} \cdot \left(\mu(\phi)_{i,j+\frac{3}{2}} \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - \mu(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \right) \quad (3.9.28.)
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
& (\mu(\phi)(u_y + v_x))_x = \\
& \left[([\mu(\phi)]^{VISC-y} \cdot (u_y^{VISC-y} + v_x))_x \right]_{i,j} = \quad (3.9.29.) \\
& = \left(\left(\frac{(\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j})}{2 \cdot dx} \cdot \left[\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{dx} + \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{4 \cdot dy} \right] \right) \right) \\
& - \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1})}{2 \cdot dx} \cdot \left[\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dx} + \frac{(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i-2,j+1} - u_{i-2,j-1})}{4 \cdot dy} \right] \right)
\end{aligned}$$

ή εναλλακτικά βάσει της (3.9.25.) και της

$$\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25 \cdot (\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i-1,j+1}) \quad (3.9.30.)$$

$$\begin{aligned}
& [(\mu(\phi) \cdot (u_y + v_x))_x]_{i,j} = \\
& = (dx)^{-1} \cdot \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i+1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j+1})}{4} \cdot \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{dx} \right] \right) \quad (3.9.31.) \\
& - (dx)^{-1} \cdot \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i-1,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i-1,j+1})}{4} \cdot \left[\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}}{dy} + \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dx} \right] \right)
\end{aligned}$$

B. Αξονοσυμμετρική περίπτωση

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση, τόσο για την μονοφασική ροή όσο και για την διφασική ροή οι όροι ιξώδους, $\mathbf{VISC}^{AXIS} = (VISC_x^{AXIS}, VISC_y^{AXIS})$ προκύπτουν από τους όρους ιξώδους του διδιάστατου πεδίου $\mathbf{VISC}^{2-D} = (VISC_x^{2-D}, VISC_y^{2-D})$ αν προστεθεί και ένας κατάλληλος όρος σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Έχουμε συγκεκριμένα

$$\mathbf{VISC}^{AXIS} = (VISC_x^{2-D} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{u \cdot v}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right), VISC_y^{2-D} + \frac{1}{\rho \cdot y} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{v}{y} \right))$$

Άρα στην κατεύθυνση x (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$)

$$VISC_x^{AXIS} = VISC_x^{2-D} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{u \cdot v}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.9.32.)$$

και στην κατεύθυνση y (διακριτοποίηση πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$)

$$VISC_y^{AXIS} = VISC_y^{2-D} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right) \quad (3.9.33.)$$

Η διακριτοποίηση των όρων έχει περιγραφεί στις σχέσεις (3.9.11-12-13.).

3.9.4. Διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης.

Οι όροι της επιφανειακής τάσης της σχέσης $-\frac{1}{\rho(\phi)} \kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla \phi$ (2.8.3.), όπου

$\mathbf{ST}=(ST_x, ST_y)$, διακριτοποιούνται για την διφασική περίπτωση με τον τρόπο που περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

A. Διδιάστατη περίπτωση :

Επειδή $\mathbf{ST} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla \phi$ σημαντικότερη είναι η αριθμητική διακριτοποίηση του

$\rho(\phi)$ και του $\delta(\phi)$ της $\kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \nabla \phi$ στην γειτονία ϵ της διεπιφάνειας. Στην παρουσία ασυνεχειών, οι πεπερασμένες διαφορές οδηγούν σε σφάλματα $O(1/dx)$, τα οποία αυξάνονται με την πύκνωση του πλέγματος. Αν και αυτές οι προσεγγίσεις δίνουν μόνο πρώτης τάξης ακρίβεια, είναι επαρκείς για πολλούς σκοπούς, *Osher & Fedkiw, 2003*. Υπολογίζονται οι απαιτούμενες τιμές των $\phi, \kappa(\phi), \delta(\phi), \rho(\phi)$ στα μέσα των καθέτων πλευρών των υπολογιστικών κυψελίδων πάνω στους κόμβους $u_{i,j}$ (ονομαστικά κόμβος με δείκτη ST_x) και στα μέσα των οριζοντίων πλευρών επάνω στους κόμβους $v_{i,j}$ (ονομαστικά κόμβος με δείκτη ST_y). Αρκεί απλή γραμμική παρεμβολή των κατάλληλων τιμών των $\phi, \kappa(\phi), \delta(\phi), \rho(\phi)$ στα κέντρα των γειτονικών υπολογιστικών κυψελών ως εξής:

$$\phi_{i,j}^{ST_x} = \frac{(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j})}{2} \quad \phi_{i,j}^{ST_y} = \frac{(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j})}{2} \quad (3.9.34.),$$

$$\rho_{i,j}^{ST_x} = \frac{(\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j})}{2} \quad \rho_{i,j}^{ST_y} = \frac{(\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j})}{2} \quad (3.9.35.),$$

$$\delta_{i,j}^{ST_x} = \frac{(\delta_{i+1,j} + \delta_{i,j})}{2} \quad \delta_{i,j}^{ST_y} = \frac{(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j})}{2} \quad (3.9.36.),$$

$$\kappa(\phi)_{i,j}^{ST_x} = \frac{(\kappa(\phi)_{i+1,j} + \kappa(\phi)_{i,j})}{2} \quad \kappa(\phi)_{i,j}^{ST_y} = \frac{(\kappa(\phi)_{i,j+1} + \kappa(\phi)_{i,j})}{2} \quad (3.9.37.).$$

Ειδικά στις οριακές κυψελίδες χρησιμοποιούνται κατάλληλες προσεγγίσεις. Οι χωρικές παράγωγοι ϕ_x, ϕ_y της συνάρτησης ϕ που περιλαμβάνονται στον υπολογισμό της καμπυλότητας (δείτε παρ. 3.8.) και στο $\nabla\phi$ του όρου της επιφανειακής τάσης της σχέσης (2.2.8.5.) υπολογίζονται με τη χρήση κατάλληλων υπορουτινών με σχήματα *WENO* της §3.5. Με βάση την παραπάνω ανάλυση η διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης προκύπτει με απλή αντικατάσταση γνωστών αλγεβρικών σχέσεων στην

$$\mathbf{ST} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \kappa(\phi) \delta(\phi) \nabla\phi \quad (2.8.3.) \text{ ως εξής.}$$

Η x συνιστώσα των όρων της επιφανειακής τάσης

$$ST(\phi)_{-x} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \phi_x \quad (3.9.38.),$$

που διακριτοποιείται επάνω στους κόμβους $u_{i,j}$ στα μέσα των καθέτων πλευρών των κυψελών μετασχηματίζεται στην

$$ST(\phi)_{-x} = -\frac{1}{\rho_{i,j}^{ST-x}} \cdot \kappa(\phi)_{i,j}^{ST-x} \cdot \delta(\phi)_{i,j}^{ST-x} \cdot (\phi_x)_{i,j}^{ST-x-WENO} \quad (3.9.39.),$$

και η y συνιστώσα των όρων της επιφανειακής τάσης

$$ST(\phi)_{-y} = -\frac{1}{\rho(\phi)} \cdot \kappa(\phi) \cdot \delta(\phi) \cdot \phi_y \quad (3.9.40.),$$

που διακριτοποιείται πάνω στους κόμβους $v_{i,j}$ στα μέσα των οριζόντιων πλευρών των κυψελών μετασχηματίζεται στην

$$ST(\phi)_{-y} = -\frac{1}{\rho_{i,j}^{ST-y}} \cdot \kappa(\phi)_{i,j}^{ST-y} \cdot \delta(\phi)_{i,j}^{ST-y} \cdot (\phi_y)_{i,j}^{ST-y-WENO} \quad (3.9.41.).$$

Για την πληρότητα της ανάλυσης μία εναλλακτική διακριτοποίηση των σχέσεων (3.9.38.) και (3.9.39.) για τους όρους της επιφανειακής τάσης και της καμπυλότητας αξίζει να αναφερθεί (βλέπε παράρτημα **Π.7.3.**), γιατί είναι κατά κάποιο τρόπο ή απλούστερη δυνατότητα χωρίς σχήματα υψηλής τάξης *WENO* κλπ να διακριτοποιηθεί η επιφανειακή τάση με κάποια αξιοπιστία χωρίς δηλαδή αριθμητική διάχυση²⁶. Τυπικά σχήματα δεύτερης τάξης *κεντρικών πεπερασμένων διαφορών* χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συνθετικών των ϕ_x, ϕ_y και των όρων $\phi_{xx}, \phi_{xy}, \phi_{yy}, \phi_x^2, \phi_y^2$ των $\kappa(\phi)_{i+\frac{1}{2},j}$ και $\kappa(\phi)_{i,j+\frac{1}{2}}$ των σχέσεων (3.8.3.) και (3.8.7.).

²⁶ Στα αποτελέσματα διφασικών ροών σταγόνων με επιφανειακή τάση η διάχυση περιορίστηκε αποφασιστικά όταν επιβλήθηκαν σχήματα *WENO* κλπ στον υπολογισμό της *LSM* χωρίς να αλλαχθεί αρχικά η εναλλακτική διακριτοποίηση για τους όρους της επιφανειακής τάσης.

B. Αξονοσυμμετρική περίπτωση

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση, οι όροι επιφανειακής τάσης, ST^{AXIS} προκύπτουν από τους αντίστοιχους όρους του διδιάστατου πεδίου ST^{2-D} αν τροποποιηθεί κατάλληλα ο όρος της καμπυλότητας που προκύπτει από την διακριτοποίηση του αλγορίθμου σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

3.10. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ NAVIER-STOKES.

Η ταχύτητα του πεδίου ροής $\mathbf{u}^{(n+1)}$ υπολογίζεται²⁷ ρητώς με την σχεδόν δεύτερης τάξης ακριβείας μέθοδος προβολών κατά *Chorin* της §3.3. Την χρονική στιγμή ($n=1$) η ταχύτητα δίνεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Στο μονοφασικό πεδίο ροής οι εξισώσεις του ροϊκού πεδίου επιλύονται με τους αδρανειακούς όρους ενεργούς και πρέπει να επιβάλλεται τουλάχιστον ο περιορισμός της συνθήκης CFL ²⁸

$$dt_{CFL} = \min_{\Omega} \left(\frac{dx}{\max\{|\mathbf{u}|\}} \right) \quad (3.10.1.),$$

ώστε να επιβάλλεται σε κάθε χρονικό βήμα το στοιχείο του ρευστού να μεταφέρεται λιγότερο από μια κυψέλη του πλέγματος²⁹ δηλαδή από το χωρικό βήμα $dt \cdot |u^{(n)}| < dx$, $dt \cdot |v^{(n)}| < dy$. Τελικά προκειμένου να εξασφαλισθεί η αριθμητική ευστάθεια του μονοφασικού αλγορίθμου ακολουθώντας την ανάλυση των *Tome & Mc Kee*, (1994) προσαρμόζεται συνεχώς το χρονικό βήμα dt ώστε να πληρούνται οι περιορισμοί της σχέσης

$$dt \leq \xi \cdot \min_{\Omega} \left(\frac{Re \left(\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} \right)^{-1}}{2}, \frac{dx}{|u_{\max}|}, \frac{dy}{|v_{\max}|} \right) \quad (3.10.2.),$$

όπου $\xi \in [0,1]$, $u_{\max} = \max_{i,j} |u_{i,j}|$, $v_{\max} = \max_{i,j} |v_{i,j}|$ στο πεδίο ροής.

Στον διφασικό αλγόριθμο η ύπαρξη όρων επιφανειακής τάσης και ιξώδους των εξισώσεων *Navier-Stokes* η/και βαρύτητας απαιτούν επιπλέον μεγαλύτερους περιορισμούς στο χρονικό βήμα της μεθόδου, *Peng et.al.,1999*. Αύξηση των δυνάμεων της επιφανειακής τάσης (Ca

²⁷ Η εισαγωγή σχημάτων πολλαπλών βημάτων όπως δεύτερης τάξης *Adams-Bashforth* ή *TVD Runge-Kutta* (βλέπε §3.11.6), αν και εύκολα υλοποιήσιμες δεν κρίθηκε απαραίτητη γιατί οι διφασικές ροές που εξετάζονται είναι στρωτές ροές με πολύ χαμηλό αριθμό Re .

²⁸ *Courant Friedrichs Levy*

²⁹ Είναι ευρύτερα αποδεκτό ότι επειδή οι διακριτοποιημένες διαφορικές εξισώσεις έχουν δομηθεί να επιλύουν ροές μόνο μεταξύ γειτονικών αριθμητικών κυψελίδων πρέπει να εξασφαλίζεται με κριτήρια ότι η διακριτή πληροφορία δεν μπορεί να μετακινηθεί περισσότερο από μία κυψελίδα πλέγματος.

και We) και αύξηση τού ιξώδους (λόγος ιξώδους λ) απαιτούν μείωση του χρονικού βήματος για να μην αποκλίνει η μέθοδος. Προκειμένου να προσδιοριστεί με ακρίβεια το επαρκές dt , έχουν ενσωματωθεί τα κριτήρια³⁰, *Croce et.al.,2004,2009* που συνυπολογίζουν τους παραπάνω παράγοντες. Οι περιορισμοί του χρονικού βήματος για τις ταχύτητες u, v γράφονται $dt^u \leq 2C_u$, $dt^v \leq 2C_v$ και τελικά ορίζεται

$$dt \leq 2\xi \cdot \min_{\Omega}(C_u, C_v) \quad (3.10.3.),$$

$$\text{όπου } \xi \in [0,1], V = \max \left\{ \frac{\mu_c}{\rho_c}, \frac{\mu_b}{\rho_c} \right\} \left\{ \frac{2}{(dx)^2} + \frac{2}{(dy)^2} \right\}, u_{\max} = \max_{i,j} |u_{i,j}|,$$

$$v_{\max} = \max_{i,j} |v_{i,j}|, \kappa_{\max} = \max_{i,j} |\kappa_{i,j}|, \varepsilon \text{ το ημιπάχος της διεπιφάνειας της σχέσης (3.7.1.),}$$

$a = \varepsilon / dx$ και

$$C_u = \left(\left(\frac{u_{\max}}{dx} + V \right) + \sqrt{\left(\frac{u_{\max}}{dx} + V \right)^2 + \frac{4|g_x|}{dx} + \frac{8\kappa_{\max}\sigma}{a(\rho_b + \rho_c)(dx)^2}} \right)^{-1} \quad (3.10.4.),$$

$$C_v = \left(\left(\frac{v_{\max}}{dy} + V \right) + \sqrt{\left(\frac{v_{\max}}{dy} + V \right)^2 + \frac{4|g_y|}{dy} + \frac{8\kappa_{\max}\sigma}{a(\rho_b + \rho_c)(dy)^2}} \right)^{-1} \quad (3.10.5.)$$

και επομένως προσαρμόζεται συνεχώς το χρονικό βήμα dt .

Στα αποτελέσματα, όπου τα εξεταζόμενα προβλήματα είναι μη μόνιμα και αναζητείται η επίλυση τους σαν συνάρτηση του χρόνου, κάποιες φορές η παραπάνω διαδικασία καταλήγει σε πολύ μικρό χωρικό βήμα που καθυστερεί υπερβολικά την εκτέλεση του διφασικού αλγορίθμου χωρίς προφανές νόημα. Για αυτό προσδιορίζεται με δοκιμές ένα επαρκές χρονικό βήμα $dt = a \cdot dx$ που εξασφαλίζει ανεξαρτησία αποτελεσμάτων από το χρονικό βήμα. Εδώ a είναι ένας αρκετά μικρός θετικός πραγματικός αριθμός, ανεξάρτητος από το χωρικό βήμα που επιλέγεται κατά περίπτωση ως συντελεστής κλίμακας (*Osher & Fedkiw, 2003*). Συχνά $dt = 0.5 \cdot dt_{CFL}$ είναι επαρκές.

3.11. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΗΣ LSM.

3.11.1. Υπολογισμός ταχυτήτων στα κέντρα των κυψελών με πολυώνυμο *Lagrange*.

Η επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς $\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$ (2.9.1.1.) προϋποθέτει τον υπολογισμό των συνιστωσών του πεδίου ταχύτητας \mathbf{u} στα κέντρα των κυψελών (i, j) (ονομαστικά κόμβος με δείκτη lsm). Αυτό είναι εφικτό με απλή γραμμική παρεμβολή των

³⁰ Τα κριτήρια της §3.5.1. *Sussman et al., 1994*, είναι επίσης συμβατά και μπορούν να δοκιμαστούν εναλλακτικά στον διφασικό αλγόριθμο.

αντίστοιχων τιμών των u και v από τα μέσα των καθέτων πλευρών των υπολογιστικών κυψελίδων (κόμβοι $u_{i,j}$) και από τα μέσα των οριζοντίων πλευρών (κόμβοι $v_{i,j}$) ως εξής.

$$u_{i,j}^{lsm} = \frac{(u_{i,j} + u_{i,j-1})}{2} \quad v_{i,j}^{lsm} = \frac{(v_{i,j} + v_{i,j-1})}{2} \quad (3.11.1.)$$

Όμως εμπειρικά αποδεικνύεται ότι αυξάνει η ακρίβεια των αποτελεσμάτων και η ευστάθεια του αλγορίθμου, αν εφαρμοστούν πολυώνυμα παρεμβολής τύπου *Lagrange* τρίτης τάξεως (Croce *et. al.*, 2002). Έτσι ορίζεται :

$$u_{i,j}^{lsm} = \frac{1}{16} \left(-u_{i-2,j} + 9u_{i-1,j} + 9u_{i,j} - u_{i+1,j} \right) \quad (3.11.2.)$$

Στα όρια του υπολογιστικού χωρίου χρησιμοποιούνται τροποποιημένα πολυώνυμα παρεμβολής τύπου *Lagrange*, αριστεροβαρή (left-weighted):

$$u_{i,j}^{lsm-L} = \frac{1}{16} \left(5u_{i-1,j} + 15u_{i,j} - 5u_{i+1,j} + u_{i+2,j} \right) \quad (3.11.3.)$$

και δεξιοβαρή (right-weighted)

$$u_{i,j}^{lsm-R} = \frac{1}{16} \left(u_{i-3,j} - 5u_{i-2,j} + 15u_{i-1,j} + 5u_{i,j} \right) \quad (3.11.4.)$$

Με αντίστοιχα σχήματα ορίζονται τα $v_{i,j}^{lsm}$, $v_{i,j}^{lsm-L}$, $v_{i,j}^{lsm-R}$.

3.11.2. Υπολογισμός της νέας ενδιάμεσης συνάρτηση ισοϋψών, ϕ^* .

Σύμφωνα με την §2.9.1. από την επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς $\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$ (2.9.1.1.) υπολογίζεται η νέα ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών, ϕ^* ,

$$\phi_t = -\mathbf{u} \cdot \nabla \phi \quad (3.11.5.)$$

Χρησιμοποιώντας το ορισμό της χρονικής παραγώγου,

$$\phi_t = \frac{\phi^{(*)} - \phi^{(n)}}{dt} \quad (3.11.6.),$$

όπου ο δείκτης (n) δηλώνει την τρέχουσα χρονική στιγμή και ο δείκτης $(*)$ την νέα ενδιάμεση χρονική στιγμή και όχι την επόμενη $(n+1)$. Η σχέση (3.11.6.) αποτελεί το αριστερό σκέλος (L.H.S.) της (3.11.5.). Ο όρος $-\mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{(n)}$ που αποτελεί το δεξιό σκέλος (R.H.S.) της (3.11.5.) διακριτοποιείται με τιμές της ϕ και της \mathbf{u} (δες §3.11.1.) επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$ στα κέντρα των υπολογιστικών κυψελών και για τις δύο συνιστώσες του όρου στις κατευθύνσεις x και y . Τελικά ή (3.11.5.) μπορεί να διατυπωθεί

$$\phi_t_{i,j} = \left(\frac{\phi^{(*)} - \phi^{(n)}}{dt} \right)_{i,j} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{(n)}_{i,j} \quad (3.11.7.)$$

A. Διδιάστατη περίπτωση :

$$\mathbf{RHS}^{(n) \ 2-D} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{(n)} = -u, v^{(n)} \cdot \begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{pmatrix}^{(n)} \Rightarrow$$

$$\mathbf{RHS}^{(n) \ 2-D} = -u \cdot \phi_x^{(n)}, v \cdot \phi_y^{(n)} \quad (3.11.8.).$$

Άρα στην κατεύθυνση x

$$RHS_{-x}^{(n) \ 2-D} = -u \cdot \phi_x^{(n)} \quad \text{ή} \quad RHS_{-x}^{(n) \ 2-D}_{i,j} = -u \cdot \phi_x^{(n)}_{i,j} \quad (3.11.9.)$$

και στην κατεύθυνση y

$$RHS_{-y}^{(n) \ 2-D} = -v \cdot \phi_y^{(n)} \quad \text{ή} \quad RHS_{-y}^{(n) \ 2-D}_{i,j} = -v \cdot \phi_y^{(n)}_{i,j} \quad (3.11.10.).$$

οι τιμές $u_{i,j}, v_{i,j}$ υπολογίζονται στα κέντρα των κυψελών με τα πολυώνυμα *Lagrange* των σχέσεων (3.11.2.), (3.11.3.) και (3.11.4.), ενώ οι τιμές $\phi_{x,i,j}$ με τα σχήματα *WENO* της §3.5.

B. Αξονοσυμμετρική περίπτωση:

Στην αξονοσυμμετρική περίπτωση οι όροι $\mathbf{RHS}^{(n) \ \text{AXIS}}$,

$$\mathbf{RHS}^{(n) \ \text{AXIS}} = RHS_{-x}^{(n) \ \text{AXIS}}, RHS_{-y}^{(n) \ \text{AXIS}}$$

προκύπτουν από τους όρους $\mathbf{RHS}^{(n) \ 2-D}$ του διδιάστατου πεδίου

$$\mathbf{RHS}^{(n) \ 2-D} = RHS_{-x}^{(n) \ 2-D}, RHS_{-y}^{(n) \ 2-D}$$

αν προστεθεί και ένας κατάλληλος όρος σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα

$$\mathbf{RHS}^{(n) \ \text{AXIS}} = \left(RHS_{-x}^{(n) \ 2-D} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{u \cdot \phi}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right), RHS_{-y}^{(n) \ 2-D} + \frac{1}{\rho \cdot y} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{y} \right) \right)$$

Άρα στην κατεύθυνση x (επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$)

$$RHS_{-x}^{(n) \ \text{AXIS}} = RHS_{-x}^{(n) \ 2-D} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{u \cdot \phi}{y} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (3.11.11.)$$

και στην κατεύθυνση y (επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$)

$$RHS_{-y}^{(n) \ \text{AXIS}} = RHS_{-y}^{(n) \ 2-D} + \frac{1}{\rho \cdot y} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{y} \right) \quad (3.11.12.).$$

Οι επιπλέον όροι διακριτοποιούνται: στην κατεύθυνση x (επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$)

$$\left[\frac{u \cdot \phi}{y} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j}^{Langr} \cdot \phi_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \quad (3.11.13.)$$

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{[\phi_y]_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \quad (3.11.14.)$$

και στην κατεύθυνση y (επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$)

$$\left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \cdot \left([\phi_y]_{i,j} - \frac{v_{i,j}^{Langr}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \right) \quad (3.11.15.)$$

Στο παράρτημα Π.1.2. περιέχονται επιπλέον στοιχεία για τις διακριτοποιήσεις της ϕ^* .

3.11.3. Διακριτοποίηση της εξίσωσης επαναρχικοποίησης των ισούψων.

Σύμφωνα με την §2.9.2. η $\frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1) = 0$ (2.9.2.3.) επιλύεται με επαναληπτική διαδικασία στον ψευδοχρόνο τ σε σταθερή κατάσταση. Η εξίσωση (2.9.2.3.) γράφεται

$$d_\tau = -\text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1) \quad (3.11.16.)$$

Η σχέση

$$d_\tau = \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{d\tau} \quad (3.11.17.),$$

αποτελεί το αριστερό σκέλος (*L.H.S.*) της (3.11.16.), η στιγμή (*) ορίζεται όπως στην §3.11.2. στην τρέχουσα ενδιάμεση χρονική στιγμή ενώ $(n+1)$ είναι η αμέσως επόμενη χρονική στιγμή της μεθόδου *LSM*. Τότε ο όρος $-\text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1)$ που αποτελεί το δεξιό σκέλος (*R.H.S.*) της (3.11.16.) διακριτοποιείται με τιμές της ϕ^* επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$ στα κέντρα των υπολογιστικών κυψελών και για τις δύο συνιστώσες του όρου στις κατευθύνσεις x και y . Τελικά ή (3.11.16.) μπορεί να διατυπωθεί

$$\phi_{\tau, i,j} = \left(\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{d\tau} \right)_{i,j} = -\text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1)_{i,j}^{(*)} \quad (3.11.18.)$$

Στην υλοποίηση του αλγορίθμου διφασικής ροής το $\text{sign}(\phi^*)$ της (3.11.18.) μπορεί να υπολογιστεί από μια ομαλοποιημένη συνάρτηση, καθώς αυτό οδηγεί σε καλύτερες ιδιότητες διατήρησης, και είναι πιο σταθερή αριθμητικά. Οι σχέσεις (3.11.19.), *Sussman et.al., 1994* και (3.11.20.), *Fedkiw et.al. 1999* (3.11.21.), *Peng et.al., 1999* είναι κατάλληλες

$$S(\phi_0) = \text{sign}(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{(\phi_0)^2 + dx^2}} \quad (3.11.19.),$$

$$S(\phi_0) = \text{sign}(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{(\phi_0)^2 + \varepsilon^2}} \quad (3.11.20.),$$

$$S(\phi^*) = \text{sign}(\phi^*) = \frac{\phi^*}{\sqrt{(\phi^*)^2 + |\nabla \phi^*|^2 dx^2}} \quad (3.11.21.),$$

όπου ε ένας πολύ μικρός αριθμός και $dx = \max\{dx, dy\}$. Τελικά χρησιμοποιείται η (3.11.21.) γιατί εξασφαλίζει από τυχόν ελλειπή αρχικό ορισμό της ϕ_0 ως συνάρτησης απόστασης από την διεπιφάνεια. Επίσης διασφαλίζεται

$$\text{sign}(\phi^{n+1}) = \text{sign}(\phi^*) \quad (3.11.22.).$$

Το δεξιό σκέλος (R.H.S.) της (3.11.16.) επιλύεται επαναληπτικά στο πεδίο ορισμού της, *Osher & Fedkiw, 2003* με ένα σχήμα *Godunov, Godunov, 1959*, το οποίο επιλέγει την αριθμητική διακριτοποίηση του όρου $\text{sign}(\phi^*) (|\nabla d| - 1)$. Οι εμπρός (+) και πίσω (-) μερικές παράγωγοι της ϕ , δηλαδή $a = D_x^- \phi_{i,j}$, $b = D_x^+ \phi_{i,j}$, $c = D_y^- \phi_{i,j}$, $d = D_y^+ \phi_{i,j}$ (3.7.15.) που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος του *Godunov* και οι τιμές $\phi_{x_{i,j}}$ και $\phi_{y_{i,j}}$ διακριτοποιούνται με τα σχήματα *WENO* της §3.5. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις ο όρος $(|\nabla d| - 1)$ αντικαθίσταται, *Sussman et al., 1994* από την συνάρτηση $G(\phi^*)$,

$$G(\phi_{i,j}^*) = \begin{cases} \sqrt{\max((a^+)^2, (b^-)^2) + \max((c^+)^2, (d^-)^2)} - 1 & \text{αν } \phi_{i,j}^* > 0 \\ \sqrt{\max((a^-)^2, (b^+)^2) + \max((c^-)^2, (d^+)^2)} - 1 & \text{αν } \phi_{i,j}^* < 0 \\ 0 & \text{Διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.11.23.),$$

ώστε $G(\phi^*) = (|\nabla d| - 1)$, όπου $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$. Όμοια ορίζονται τα $b^+, b^-, c^+, c^-, d^+, d^-$. Οι διακριτοποιήσεις είναι ίδιες για το διδιάστατο και το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα. Το κριτήριο διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας στο βήμα N ορίζεται, *Sussman et al., 1994*

$$E = \frac{\sum |\phi_{i,j}^N| < a |\phi_{i,j}^{N+1} - \phi_{i,j}^N|}{M} < d\tau \cdot h^2 \quad (3.11.24.),$$

όπου a είναι μία χαρακτηριστική απόσταση π.χ. το μήκος του πεδίου, M είναι ο αριθμός των σημείων του πλέγματος όπου $|\phi_{i,j}^N| < a$, $d\tau$ είναι το ψευδοχρονικό βήμα και h είναι το χωρικό βήμα. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν κριτήριο διακοπής το $|\phi_{i,j}^N| > \varepsilon$, όπου ε πολύ μικρός αριθμός π.χ. $\varepsilon \approx 10^{-10}$.

3.11.4. Διακριτοποίηση της εξίσωσης του υβριδικού αλγορίθμου της ϕ .

Σύμφωνα με την §2.9.2. η $\frac{\partial \phi}{\partial t} + (A_0 - A(t)) \cdot (-P + \kappa(\phi)) \cdot |\nabla \phi| = 0$ (2.9.3.1), γράφεται

$$\phi_t = (A(t) - A_0) \cdot -P + \kappa(\phi^*) \cdot |\nabla \phi^*| \quad (3.11.25.)$$

ή ισοδύναμα

$$\phi_t \Big|_{i,j} = \left(\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{dt} \right) \Big|_{i,j} = (A(t) - A_0) \cdot -P + \kappa(\phi^*) \cdot |\nabla \phi^*| \Big|_{i,j} \quad (3.11.26.),$$

όπου A_0 και $A(t)$ είναι η επιφάνεια της σταγόνας στην αφετηρία και στην χρονική στιγμή t και $P = -5$, συντελεστής για την σύγκλιση της μεθόδου. Η σχέση

$$\phi_t = \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{dt} \quad (3.11.27.),$$

αποτελεί το αριστερό σκέλος (*L.H.S.*) της (3.11.26.), όπου η στιγμή (*) ορίζεται όπως στην §3.11.2. στην τρέχουσα ενδιάμεση χρονική στιγμή, ενώ $(n+1)$ είναι η αμέσως επόμενη χρονική στιγμή της μεθόδου *LSM*. Ο όρος $(A(t) - A_0) \cdot -P + \kappa(\phi^*) \cdot |\nabla \phi^*|$ που αποτελεί το δεξιό σκέλος (*R.H.S.*) της (3.11.25.) διακριτοποιείται με τιμές της ϕ^* επάνω στους κόμβους $p_{i,j}$ στα κέντρα των υπολογιστικών κυψελών και για τις δύο συνιστώσες του όρου στις κατευθύνσεις x και y , ενώ οι τιμές $\kappa(\phi^*)$, $\phi_x^* \Big|_{i,j}$, $\phi_y^* \Big|_{i,j}$ διακριτοποιούνται με τα σχήματα *WENO* της §3.5. Τα $A(t)$ και A_0 υπολογίζονται σύμφωνα με την σχέση (2.4.7.)

$$A(t) = |\Omega_b(t)| = \int H(-\phi(t)) dx \quad (3.11.28.),$$

που εκφράζει το εμβαδό που περικλείεται εσωτερικά της διεπιφάνειας $\phi(t) < 0$ και το $H(-\phi(t))$ διακριτοποιείται σύμφωνα με την σχέση (3.7.1.). Οι διακριτοποιήσεις είναι ίδιες για το διδιάστατο και το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα στο οποίο απαιτείται ιδιαίτερη φροντίδα στην διακριτοποίηση των οριακών συνθηκών επί του άξονα του αγωγού.

3.11.5. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής *LSM*.

Τροποποιήθηκαν κατάλληλα οι βιβλιοθήκες του αλγορίθμου της διφασικής μεθοδολογίας, ώστε τα μεγέθη που είναι συνάρτηση της ϕ να πληρούν τις συνθήκες που περιγράφονται στην §2.9.4. και ενσωματώνονται μέθοδοι που περιγράφονται αναλυτικά στην *Peng et.al., 1999* και στοιχεία τους επιγραμματικά παρουσιάζονται και εδώ για κατανόηση του θέματος. Δεν προκύπτουν ανάγκες επιπλέον διακριτοποιήσεων. Οι τιμές της συνάρτησης των ισοϋψών ϕ και των άλλων σχετικών ποσοτήτων στα σημεία του πλέγματος

αποθηκεύονται σε 2D πίνακες που σαρώνονται, ώστε ο υπολογισμός της νέας ϕ στη διαδικασία μετάθεσης της διεπιφάνειας να γίνεται μόνο στα σημεία του πλέγματος που ανήκουν μέσα στους σωλήνες της μεθοδολογίας **LFSM**. Στο παράρτημα Π.1.3. περιέχονται διευκρινιστικά στοιχεία για τις διακριτοποιήσεις. Σε κάθε χρονικό σημείο κατασκευάζονται οι νέοι, μετατοπισμένοι σωλήνες. Εάν το μέτωπο κινείται αργά σε μία χρονική στιγμή, δίνεται η δυνατότητα ώστε η ϕ να μην επαναρχικοποιείται σε κάθε χρονικό βήμα υλοποιώντας ένα επιπλέον σωλήνα, όπου καταγράφεται η συμπεριφορά της ϕ , η κίνηση του μετώπου και κριτήρια επαναρχικοποίησης.

Οι πράξεις επαρκεί να γίνονται μόνο στα σημεία του πλέγματος μέσα στον σωλήνα T στη φάση μεταφοράς και εντός του σωλήνα N στη φάση της Επαναρχικοποίησης της νέας ϕ που αποτελούν συνήθως μόνο ένα μικρό κλάσμα του συνόλου των σημείων του πλέγματος. Εισάγεται λοιπόν ένα επιπλέον 2D μητρώο μάσκα, ιδίου μεγέθους με το μητρώο της ϕ το οποίο διακρίνει τα σημεία του πλέγματος σε μέσα και έξω από τους σωλήνες και επίσης δύο ισομεγέθη 1D μητρώα $index1$ και $index2$ που αποθηκεύουν τον δείκτη των σημείων πλέγματος στο σωλήνα N της τάξης μεγέθους του $O(N)$. Έτσι, ο σωλήνας T αντιστοιχεί σε σημεία του πλέγματος, όπου $mask(i,j)=2$ και ο σωλήνας N αντιστοιχεί σε σημεία με $mask(i,j)=1$ ή 2 και k είναι ο αριθμός των σημείων του πλέγματος που βρίσκονται εντός του σωλήνα³¹ N . Αν η κίνηση της διεπιφάνειας περιλαμβάνει ευαίσθητες ποσότητες όπως παραγώγους της καμπυλότητας, πρέπει να επιλεγούν μεγαλύτερα β και γ και να υπολογίζονται οι ποσότητες αυτές σε ένα ακόμη μικρότερο σωλήνα πλάτους a , όπου $0 < a < \beta < \gamma$. Επιλέγεται $a = 2 \cdot dx$, $\beta = 4 \cdot dx$, $\gamma = 6 \cdot dx$ για δεύτερης τάξης σχήματα **ENO**, ή τρίτης τάξης σχήματα **WENO** και $a = 3 \cdot dx$, $\beta = 6 \cdot dx$, $\gamma = 9 \cdot dx$ για τρίτης τάξης σχήματα **ENO** ή πέμπτης τάξης σχήματα **WENO**.

³¹ Η κατασκευή σωλήνος απαιτεί $O(N^2)$ πράξεις και γίνεται μόλις μία φορά σε κάθε κύριο βήμα. Για όλα τα υπόλοιπα βήματα, χρειαζόμαστε μόνο $O(N)$ πράξεις δεδομένου ότι ο υπολογισμός γίνεται σε ένα 1D βρόχο. Για παράδειγμα, υλοποιείται ένας αλγόριθμος υπολογισμού της ϕ_x στα σημεία του πλέγματος μέσα στον σωλήνα T , όπως στο παράρτημα Π.1.3.Β. Αφού η ϕ ενημερωθεί στο σωλήνα T , η ϕ επαναρχικοποιείται στο σωλήνα N με ένα αλγόριθμο όπως στο παράρτημα Π.1.3.Γ. Ανάλογες καταστάσεις ισχύουν και σε 3D. Ο αλγόριθμος αυτός έχει πολυπλοκότητα περίπου $O(N)$ σε 2D και $O(N^2)$ σε 3D.

3.11.6. Χρονική διακριτοποίηση της LSM

Τα αριστερά μέλη των εξισώσεων $\phi_t = \frac{\phi^{(*)} - \phi^{(n)}}{dt}$ (3.11.6.), $d_\tau = \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{d\tau}$ (3.11.17.) και

$\phi_t = \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(*)}}{dt}$ (3.11.27.) της LSM διακριτοποιούνται με κατάντη πεπερασμένες διαφορές.

Για την χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιούνται βιβλιοθήκες πρώτης και δεύτερης τάξης TVD Runge-Kutta³², Shu et.al (1988).

Έστω το σύστημα των Σ.Δ.Ε. (ODE),

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = L(\phi) \\ \phi(0) = \phi_0 \end{cases} \quad (3.11.29.),$$

όπου L είναι χωρικός τελεστής τότε η δεύτερης τάξης μέθοδος απαιτεί δύο ενδιάμεσα βήματα Euler για να υπολογίσει τελικά την ϕ^{n+1} με την σχέση (3.11.29.)

$$\phi^{(1)} = \phi^n + dt \cdot L(\phi^n) \quad (3.11.30.)$$

$$\phi^{(2)} = \phi^n + dt \cdot [L(\phi^n) + L(\phi^{(1)})] \quad (3.11.31.)$$

$$\phi^{n+1} = \frac{1}{2} \phi^n + \phi^{(2)} \quad (3.11.32.)$$

Η τροποποιημένη συνάρτηση $sign(\phi^*)$ στην σχέση (3.11.21.) πρέπει να ενημερώνεται πριν από κάθε ενδιάμεσο βήμα Euler μέσα στο σχήμα TVD Runge-Kutta.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μπεργελές Γ., (1993), Υπολογιστική Ρευστομηχανική εκδ. ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Τσαγγάρης Σ., (1995), Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Amsden A. and Harlow F., (1), (1970), A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *J. Comput. Phys.*, 6:322-325.

³² Η βασική ιδέα πίσω από τα σχήματα TVD-RK είναι ότι αυξημένη ακρίβεια στο χρόνο μπορεί να επιτευχθεί με γραμμικούς συνδυασμούς των αποτελεσμάτων πολλαπλών πρώτης τάξης προς τα εμπρός βημάτων, τύπου Euler, όταν τα αρχικά δεδομένα είναι διαθέσιμα στην εκκίνηση του χρονικού βήματος. Η ιδιότητα TVD διατηρείται μόνο λαμβάνοντας κυρτούς συνδυασμούς των προς τα εμπρός βημάτων Euler και των αρχικών δεδομένων (Osher & Fedkiw, 2003).

- Amsden A. and Harlow F., (2), (1970)**, The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows. Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA 4370.
- Beale J. T., (2008)**, A proof that a discrete delta function is second-order accurate, *J. Comput. Phys.*, 227:2195-97.
- Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. (1992)**. A continuum method for modeling surface tension, *J. Comp. Phys.* 100:335-354.
- Calhoun D., Smereka P. , (2004)**, The numerical approximation of a delta function, preprint . Available from: <<http://www.math.lsa.umich.edu/~psmerek/notes.html>>.
- Chang Y.C., Hou T. Y., Merriman B., and Osher S., (1996)**, A level set formulation of Eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows, *J. Comput. Phys.* 124, 449-464.
- Chorin A., (1968)**, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Math. Comput.*, 22:745.
- Christafakis A.N., Alexopoulos J.D., Tsangaris S.G, (2006)**, An Improved Implementation of Level-Set Method to the Computation of Two-Phase Incompressible Flows in Ducts, in Proc. Second Int.Conf. From Scientific Computing to Computational Engineering Athens, Greece, July 2006.
- Croce R. , Griebel M., and Schweitzer M. A., (2009)**, Numerical Simulation of Bubble and Droplet Deformation by a Level Set Approach with Surface Tension in Three Dimensions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 62(9):963-993.
- Croce R. , Griebel M., and Schweitzer M. A. (2004)**, A Parallel Level-Set Approach for Two-Phase Flow Problems with Surface Tension in Three Space Dimensions. Preprint 157, Sonderforschungsbereich 611, Universität Bonn.
- Croce R., (2002)**. Ein paralleler, dreidimensionaler Navier-Stokes-Löser für inkompressible Zweiphasenströmungen mit Oberflächenspannung, Hindernissen und dynamischen Kontaktflächen. Diplomarbeit, Institut für Angewandte Mathematik. Bonn, Germany: Universität Bonn.
- Davis H. T., Scriven L. E., (1982)**, Stress and structure in fluid interfaces, *Adv. Chem. Phys.* 49:357-454.
- Di Y., Li. R., Tang T., Zhang P. ,(2007)**, Level Set Calculations for Incompressible Two-Phase Flows on a Dynamically Adaptive Grid, *J. Sci. Comput.* 31(1-2):75-98.
- Engquist B. , Tornberg A. K. and Tsai R., (2005)**, Discretization of Dirac delta functions in level set methods, *J. Comput. Phys.* 207:28-51.
- Fedkiw R., Aslam T., Merriman B., and Osher S.,(1999)**, A Non-Oscillatory Eulerian Approach to Interfaes in Multimaterial Flows (The Ghost Fluid Method), *J. Computational Physics*, 152(2):457-492 .
- Godunov, S. K., (1959)**, A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Math. Sbornik*, 47:357-393.
- Griebel M, Dornseifer T. and Neunhoefffer T., (1998)**, Numerical Simulation in Fluid Dynamics, a Practical Introduction. SIAM, Philadelphia.
- Harlow F.H. and Welch J.E., (1965)**, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, 8:2182–2189.
- Hackbusch W., (1992)**, Elliptic Differential Equations. Theory and Numerical Treatment Springer-Verlag, Berlin.
- Hirt, C.W. and Cook J.L., (1972)**, Calculating three-dimensional flow around structure and over rough terrain, *J. Comp. Phys.*, 10:324-340.
- Hirt, C.W. , Nichols B.D. and Romero N.C. , (1975)**, SOLA - A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows LA-5852, UC-34 and UC-79d.
- Jiang, G.S. and Peng D., (2000)**, Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 21:2126-2143.

- Jiang, G.S. and Peng D.**, (1997), *WENO Schemes for Hamilton-Jacobi Equations*, UCLA CAM report 97-29.
- Ladysenskaya O.A.**, (1969). *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. New York: Gordon & Breach
- Liu X.D., Fedkiw R. and Kang M.**, (2000). A boundary condition capturing method for Poisson's equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.* 160:151-178.
- Mayo A.**, (1984), The fast solution of Poisson's and the biharmonic equations on irregular regions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21:285–299.
- Mayo A.**, (1992), The rapid evaluation of volume integrals of potential theory on general regions, *J. Comput. Phys.*, 100, 236–245.
- McDonough J. M.**, (2007), *Lectures in computational fluid dynamics of incompressible flow mathematics, algorithms and implementations*. Departments of mechanical engineering and mathematics, University of Kentucky.
- McKee S., Tome M.F., Ferreira V.G., Cuminato J.A., Castelo A., Sousa F.S. and Mangiavacchi N.**, (2008), The MAC method, *Computers & Fluids*, 37:907-930.
- Oishi C.M., Cuminato J.A., Yuan J.Y. and McKee S.**, (2008), Stability of numerical schemes on staggered grids, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 5(10): 945-967.
- Osher S. and Fedkiw R.**, (2003), *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, no. 153 in *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg.
- Osher S. and Shu C. W.**, (1991), High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations, *J. Numer. Anal.* 28, 907.
- Peng D., Merriman B., Osher S., Zhao H., and Kang M.**, (1999), A PDE-based fast local level set method, *J. Comput. Phys.*, 155:410-438.
- Smereka P.**, (2006), The numerical approximation of a delta function with application to level set methods. *J. Comput. Phys.* 211 :77-90.
- Shu C-W.**, (1988), Total-variation-diminishing time discretization, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 9:1073-1084.
- Sussman M., Smereka P. and Osher S.**, (1994), A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 114:146–159.
- Shu C. and Osher S.**, (1988), Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, *J. Comput. Phys.*, 77:439-471.
- Tenam R.**, (1969) Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la method des pas fractionnaires (I), *Arch. Rational Mech. Anal*, 32(2):135-153.
- Tenam R.**, (1969), Sur l'approximation des equations de Navier-Stokes par la methode des pas fractionnaires (II). *Arch. Rational Mech. Anal*, 33(5):377-385.
- Tome, M. F. and McKee, S.**, (1994), "GENSMAC: A Computational Marker-and-Cell Method for Free Surface Flows in General Domains, *Journal of Computational Physics*, 110:171-186.
- Tornberg A. K. and Engquist B.**, (2004), Numerical approximations of singular source terms in differential equations, *J. Comput. Phys.*, 200:462-488.
- Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi N., Tauber W., Han J., Nas S., and Jan Y.J.**, (2001), A Front Tracking Method for the Computations of Multiphase Flows. *J. Comput. Phys.*, 169:708-759.
- Zhou H, Pozrikidis C.**, (1994), Pressure-driven flow of suspensions of liquid drops, *Phys. Fluids*, 6:80-94.
- Zhou H. and Pozrikidis C. (1)**, (1993), The flow of ordered and random suspensions of two-dimensional liquid drops in a channel, *J. Fluid Mech.*, 255:103-127.
- Zhou H. and Pozrikidis C. (2)**, (1993), The flow of suspensions in channels: Single files of drops. *Phys. Fluids*, A 5:311.

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΓΕΝΙΚΑ.....	4
4.1. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ.	5
Πίνακας 4.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.....	7
4.2. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΩΛΗΝΕΣ.	8
4.2.1. Διατάξεις δύο άνισων σταγόνων.....	8
4.2.1.1. Δύο σταγόνες: $We=1, Ca=0.05$	9
4.2.1.2. Δύο σταγόνες: $We=1.43, Ca=0.07$	9
4.2.1.3. Δύο σταγόνες : $We=3.33, Ca=0.17$	9
4.2.2. Διάταξη τεσσάρων ισομεγεθών σταγόνων.	10
4.2.3. Παρατηρήσεις σχετικές με την μετανάστευση των σταγόνων (droplet migration).....	11
4.3. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ (2-D) ΚΑΝΑΛΙΑ	12
4.3.1. Διάταξη δύο άνισων σταγόνων.	12
4.3.2. Συμμετρικές διατάξεις τεσσάρων ή πέντε ισομεγεθών σταγόνων (στην μέση γραμμή του αγωγού).	13
4.3.3. Διάταξη δύο σειρών σταγόνων η κάθε μια εισαγόμενη σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή του καναλιού.....	14
4.3.3.1. Δύο έκκεντρα τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων.	14
4.3.3.2. Δύο συμμετρικά τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων.	15
4.3.3.3. Παρατηρήσεις για τη ροή στα Σχ.4.9 και Σχ.4.10.....	17
4.3.4. Διάταξη τριών μικρών σταγόνων κατά πλάτος του 2-D αγωγού.....	18
4.3.5. Διάταξη πέντε μικρών σταγόνων κατά πλάτος και στη μέση γραμμή του 2-D αγωγού.....	19
4.3.6. Συστοιχία δύο σταγόνων σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή. ..	22
4.3.6.1. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη αρνητική εκκεντρότητα.....	22
4.3.6.2. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη θετική εκκεντρότητα.....	22

4.4. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ.	24
4.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.....	26
4.5.1. Αριθμητική σύγκριση	26
4.5.1.1. Μία σταγόνα για συνθήκες $Re=2$, $Ca=1.0$, $\lambda=10$, $k=0.25$	26
4.5.1.2. Διασπορά δύο μεγάλων σταγόνων σε Ροή Couette.	27
4.5.1.3. 2D ροή Poiseuille 7 σταγόνων με περιοδικές οριακές συνθήκες δεξιά και αριστερά.....	30
4.5.2. Σύγκριση του μοντέλου με πειραματικά δεδομένα του εργαστηρίου.....	32
4.6. ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ (u, v, p).	33
4.6.1. Ισοταχείς στο πεδίο ροής.	33
4.6.2. Η κατανομή της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού.....	34
4.6.3. Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u σε επιλεγμένες θέσεις κατά μήκος του αγωγού.	36
4.6.4. Η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού.....	37
4.6.5. Απεικόνιση του διανυσματικού πεδίου (u, v).	39
4.7. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟΤΟΜΗΣ ΖΩΝΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΦΙΛ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ.....	40
Πίνακας 4.2. Χαρακτηριστικά ζώνης βύσματος στο προφίλ της u/U	42
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	43

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

ΓΕΝΙΚΑ

Στο κεφάλαιο αυτό προσομοιώνονται αριθμητικά και μελετώνται διφασικές ροές υγρού σε υγρό μέσα σε κλειστούς διδιάστατους αγωγούς ή σωλήνες στη βάση των αδιαστάτων αριθμών, των παραμέτρων και της μεθοδολογίας του κεφ.2. Διάφορες διατάξεις άνισων μεταξύ τους ή ισομεγεθών σταγόνων διασπείρονται απότομα στην συνεχή φάση διαφορετικού ρευστού σε πεδίο αναπτυσσόμενης στρωτής ροής χαμηλού αριθμού Re λόγω διαφοράς πιέσεως (ροή *Hagen-Poiseuille*) ή διατμητικής ροής τύπου *Couette*.

Υπολογίζεται και μελετάται η χρονικά μεταβαλλόμενη διφασική ροή καθώς και η παραμόρφωση των περιγραμμάτων, έως ότου η παραμόρφωση των σταγόνων κατά περίπτωση καταλήξει, αν είναι εφικτό, σε ουσιαστικά αμετάβλητα περιγράμματα σταγόνων. Παρατίθεται για αξιολόγηση του μοντέλου μια σύγκριση αποτελεσμάτων της μελέτης μας με αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Ενδεικτικά για την εμβάθυνση στο θέμα παρουσιάζονται για κάποιες από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές στοιχεία και διαγράμματα που περιγράφουν και εξηγούν το ρευστοδυναμικό πεδίο τα οποία προκύπτουν από την μετα-ανάλυση των αρχείων αποτελεσμάτων του λογισμικού μας για τα πεδία u , v , p . Επίσης διερευνάται η αναπτυσσόμενη ζώνη τύπου βύσματος (plug zone) στο προφίλ της διαμήκουσ ταχύτητας u του πεδίου ταχυτήτων από την παρουσία των σταγόνων. Για να προσομοιωθεί και να μελετηθεί μία συγκεκριμένη περίπτωση διφασικής ροής σταγόνων στον κλειστό αγωγό απαιτούνται ως δεδομένα ο αριθμός σταγόνων, οι αρχικές συντεταγμένες των κέντρων τους

και οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων k , λ , Ca , We , Re , δ , όπως έχουν ορισθεί στη παράγραφο 2.7.

4.1. ΕΠΙΛΟΓΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗΣ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ.

Προηγούμενες πειραματικές, θεωρητικές και αριθμητικές μελέτες υποστηρίζουν ότι η παραμόρφωση και η διάσπαση των υγρών σταγόνων σε χαμηλούς αριθμούς *Reynolds* εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις συνθήκες της επιβαλλόμενης ροής. Η επιφανειακή δύναμη που αντιστέκεται στην παραμόρφωση και την διάσπαση οφείλεται κυρίως στην επιφανειακή τάση. Κατά τον *Taylor, 1934*, η διάσπαση θα προκύψει, όταν οι επιφανειακές δυνάμεις, που επιδιώκουν να διατηρήσουν την ακεραιότητα της σταγόνας, δεν είναι επαρκείς να ισορροπήσουν τις ιξώδεις δυνάμεις που επιδιώκουν να διασπάσουν τις σταγόνες.

Όλες οι διαθέσιμες θεωρίες μετανάστευσης εξετάζουν μικρές αποκλίσεις από το σφαιρικό ή κυκλικό σχήμα που αντιστοιχεί σε μικρούς τριχοειδείς αριθμούς ή μεγάλα ιξώδη σταγόνες. Πιο συγκεκριμένα τα αποτελέσματα των *Ha and Leal, 2001*, *Stone et.al., 1986*, *Grace, 1982*, υποστηρίζουν την άποψη ότι είναι δύσκολο να διασπαστούν σταγόνες είτε με υψηλό είτε με χαμηλό λόγο ιξωδών λ (viscosity ratio) ($\lambda > 1$ ή $\lambda < 0.1$), υπό την έννοια ότι απαιτείται πολύ υψηλό βαθμού επιμήκυνση σταγόνας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα των *Kaliakatsos & Tsangaris, 2000*, έδειξαν ότι για $\lambda = 0.2$ και $\lambda = 5$ δεν μπορεί να ληφθεί σταθερό περίγραμμα σταγόνας. Ευρύτερα οι *Zhou and Pozrikidis* παρατηρούν ότι η συμπεριφορά διασπορών από σταγόνες υψηλού ιξώδους μπορεί να διαφέρει σημαντικά από την συμπεριφορά διασπορών από σταγόνες χαμηλού ή μετρίου ιξώδους.

Στηριγμένοι στα παραπάνω στην μελέτη μας οι τιμές των παραμέτρων προσομοίωσης έχουν επιλεγεί για περιορισμένη παραμόρφωση των σταγόνων, ώστε να αποφευχθεί η ακραία παραμόρφωση των περιγραμμάτων τους και να εξασφαλιστεί η ανεξαρτησία από τον κρίσιμο Ca , επάνω από το οποίο οι σταγόνες συνεχίζουν να παραμορφώνονται χωρίς επίτευξη ενός σταθερού περιγράμματος και παρατηρούνται διασπάσεις ή συγχωνεύσεις σταγόνων ειδικά για μεγάλους χρόνους προσομοίωσης σε περιοχές μακριά από την αρχική τοποθέτηση τους μέσα στον αγωγό. Οι μεταβολές του σχήματος της σταγόνας με το μέγεθος του λόγου ιξώδους δεν μελετήθηκαν συστηματικά.

Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε, το ιξώδες των σταγόνων μ_b καθορίζεται στις περισσότερες περιπτώσεις μεγαλύτερο από αυτό του περιβάλλοντος ρευστού, μ_c . Η μεθοδολογία όμως λειτουργεί και για $\lambda < 1$ με την ίδια ακρίβεια, όπως επιβεβαιώνεται

στις περιπτώσεις που παρατίθενται για σύγκριση με βιβλιογραφικά δεδομένα. Οι πυκνότητα ρ_b σταγόνων και ρ_c συνεχούς φάσης θεωρούνται ίσες ($\rho_b = \rho_c$), οπότε οι υπολογισμοί απλοποιούνται. Για τις εξεταζόμενες περιπτώσεις του κεφαλαίου οι τιμές των παραμέτρων συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1. Ως οριακές συνθήκες του ρευστοδυναμικού πεδίου τίθενται οι συνθήκες μη ολίσθησης για τα τοιχώματα του αγωγού και εισροής – εκροής ή περιοδικές ανά συγκεκριμένο μήκος αγωγού, όπως ορίστηκαν στην παράγραφο 3.4.3. Οι σταγόνες κατά κανόνα εισάγονται στην αριστερή είσοδο του αγωγού. Στις απεικονίσεις των σταγόνων οι μονάδες των αξόνων είναι ισομεγέθεις και η κατεύθυνση ροής δηλώνεται πάντα από αριστερά προς τα δεξιά του αγωγού. Στιγμιότυπα μεταβατικών ή μονίμων περιγραμμάτων σταγόνων, στην διάρκεια του χρόνου, παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

Για να περιγραφεί ποσοτικά η γεωμετρία και το μέγεθος παραμόρφωσης των σταγόνων υπολογίζονται σε κάθε περίπτωση τα δύο βαθμωτά μέτρα που εισήγαγε ο *Taylor, 1934*, δεξ κεφ.2, Σχ.2.1.(α). Συγκεκριμένα: η «παράμετρος παραμόρφωσης»¹ $D = (L - B) / (L + B)$, όπου L και B είναι το μήκος και το πλάτος του σταγόνας αντίστοιχα και η «γωνία κλίσης»², θ του προσανατολισμού του σταγόνας ως προς τον άξονα του αγωγού. Επίσης υπολογίζεται ο λεγόμενος, «λόγος επιμήκυνσης»³, $E.R.$, που ορίζεται ως ο λόγος του εκάστοτε μήκους της παραμορφωμένης σταγόνας προς το μήκος της αρχικά εισαγόμενης απαραμόρφωτης σταγόνας. Οι παραπάνω παράμετροι που χρησιμοποιούνται ευρύτατα στη βιβλιογραφία π.χ. *Zhou and Pozrikidis, 1994*, *Stone et. al., 1986*. Ο *Taylor, 1934* προβλέπει ότι η διάσπαση της σταγόνας θα συντελεστεί, όταν η φαινόμενη «παράμετρος παραμόρφωσης» D αποκτήσει την κρίσιμη τιμή $D=0.5$. Κατά τους *Stone et al., 1986* για $\lambda=0.2$, ο $E.R. \approx 4.2$, είναι ο κρίσιμος «λόγος επιμήκυνσης», ο οποίος εγγυάται διάσπαση μίας σταγόνας σαν επακόλουθο διακοπής της ροής (cessation), όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης υπερβεί μια κρίσιμη τιμή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εφελκυσμού (stretching). Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων που εξετάστηκαν αναγράφονται στον πίνακα 4.1. Οι τιμές αυτές εκλέχτηκαν έτσι ώστε να μελετηθεί ξεχωριστά η επίδραση της κάθε αδιάστατης παραμέτρου στη διφασική ροή και για να είναι δυνατή η σύγκριση με αποτελέσματα στην βιβλιογραφία.

¹ deformation parameter

² inclination angle.

³ elongation ratio.

Πίνακας 4.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό.

<u>A/A</u>	<u>Σχή- μα</u>	<u>Re</u>	<u>We</u>	<u>Ca</u>	<u>λ</u>	<u>δ</u>	<u>κ</u>	<u>Στα- γόνες</u>	<u>Γεωμετρία</u>
01	4.1	40	1.0	0.05	4	0	0.6&0.8	2	Αξονοσυμμετρικό
02	4.2	40	1.43	0.07	4	0	0.6&0.8	2	Αξονοσυμμετρικό
03	4.3	40	3.33	0.17	4	0	0.6&0.8	2	Αξονοσυμμετρικό
04	4.4	20	5	0.25	4	0	0.5	4	Αξονοσυμμετρικό
05	4.5	20	10	0.5	4	0	0.5	4	Αξονοσυμμετρικό
06	4.6	20	2.5	0.125	4	-0,125&0	0.6&0.8	2	Διδιάστατο
07	4.7	40	20	0.5	4	0	0.5	5	Διδιάστατο
08	4.8	40	12,5	0.3125	4	0	0.375	4	Διδιάστατο
09	4.9	40	44.44	1.11	3	-0.43&0.47	0.27	8	Διδιάστατο
10	4.10	40	26.67	0,67	4	± 0.45	0.25	8	Διδιάστατο
11	4.11	40	20	0.5	4	$\pm 0.5&0$	0.2	3	Διδιάστατο
12	4.12	40	10	0.25	4	$\pm 0.5&0$	0.2	3	Διδιάστατο
13	4.13	40	40	1	4	$\pm 0.65&0$	0.25	5	Διδιάστατο
14	4.14	40	20	0.5	4	$\pm 0.65&0$	0.25	5	Διδιάστατο
15	4.15	40	5	0.125	4	-0.5	0.375	2	Διδιάστατο
16	4.16	40	2,5	0.0625	4	-0.5	0.375	2	Διδιάστατο
17	4.17	40	5	0.125	4	0.5	0.375	2	Διδιάστατο
18	4.18	40	6,67	0.167	4	0.5	0.375	2	Διδιάστατο
19	4.19	2	2	1.0	10	0.05	0.25	1	Διδιάστατο
20	4.20	2	2	1.0	10	0.35	0.25	1	Διδιάστατο
21	4.22	2	0.4	0.2	1	0.05	0.75	2	Διδιάστατο- Couette
22	4.23	2	0.67	0.33	1	0.05	0.75	2	Διδιάστατο- Couette
23	4.24	2	2	1	1	-	0.25	7	Διδιάστατο
24	4.25	2	2	1	1	-	0.25	7	Διδιάστατο
25	4.26	0.5	0.5	1	0.51	0	0.8	1	Διδιάστατο
26	4.27	0.5	0.33	0.67	0.51	0&0.02	0.69&0.76	1	Διδιάστατο

Μελετώνται αναλυτικά χαρακτηριστικές περιπτώσεις αξονοσυμμετρικών στην §4.2 και διδιάστατων διφασικών ροών⁴ με σταγόνες στην §4.3. Επίσης παρουσιάζονται σχήματα από στιγμιότυπα μεταβατικών ή μονίμων περιγραμμάτων σταγόνων στην διάρκεια του χρόνου. Καταγράφεται δηλαδή η ιστορία κίνησης των σταγόνων κατά την κίνησή τους μέσα στον κλειστό αγωγό σε μια πυκνότητα στιγμιότυπων που να περιγράφει επαρκώς το φαινόμενο που μελετάται.

Η αριθμητική αξιοπιστία του μοντέλου ελέγχεται αυτόματα από τα ενσωματωμένα στην μεθοδολογία κριτήρια και πρακτικά από την ποιότητα των περιγραμμάτων των σταγόνων και την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών του ρευστοδυναμικού πεδίου. Η ανεξαρτησία των αριθμητικών υπολογισμών διασφαλίζεται από την αυτόματη επιλογή του χρονικού βήματος ανάλογα με το χωρικό βήμα το οποίο δίνεται στα δεδομένα του προβλήματος και περιορίζεται μόνο από τους πόρους του επεξεργαστή. Κατέστη εφικτό να μελετήσουμε οριακά και υπολογιστικά χωρία της τάξεως $600 \times 200 = 120.000$ σημείων του υπολογιστικού πλέγματος που επιτρέπουν στην LSM να περιγράψει πολύπλοκες πτυχώσεις της διεπιφάνειας επίσης συγχωνεύσεις και διασπάσεις σταγόνων με δημιουργία μικροσταγονιδίων. Ενδεικτικά έχουν αναλυθεί περισσότερο, συζητούνται και σχολιάζονται οι ακόλουθες περιπτώσεις διφασικής ροής.

4.2. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΩΛΗΝΕΣ.

Οι αξονοσυμμετρικές (axis-symmetric) διφασικές ροές σταγόνων σε ευθύγραμμους σωλήνες μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα γιατί αποτελούν και τον πρώτο εφικτό αριθμητικά τρόπο προσομοίωσης διφασικής ροής που απαντάται σε κλειστούς αγωγούς, όπως σε σωλήνες και στην μικροκυκλοφορία χωρίς την χρήση τρισδιάστατου αριθμητικού αλγορίθμου και φυσικά πολυπύρηνων υπολογιστικών συστημάτων ικανών να ανταπεξέλθουν στο υπολογιστικό φορτίο. Καθίστανται συνεπώς πολύτιμα εργαλεία γρήγορης αξιολόγησης και εξαγωγής συμπερασμάτων.

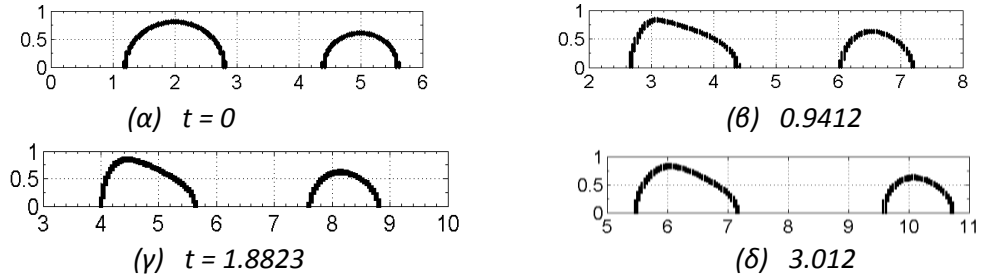
4.2.1. Διατάξεις δύο άνισων σταγόνων.

Εδώ εξετάζονται περιπτώσεις διατάξεων που συγκροτούνται από δύο άνισες σφαιρικές (κυκλικές) σταγόνες όπου η επικεφαλής είναι μεσαίου μεγέθους, $k1=0.6$, και η δεύτερη μεγάλου μεγέθους $k2=0.8$, οι οποίες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση), η

⁴ Ανά εξεταζόμενη περίπτωση καταγράφονται, όπως κρίθηκε απαραίτητο, για μετανάλυση σε αρχεία αποτελεσμάτων τύπου (.dat) και ανα τακτά χρονικά διαστήματα τα μεγέθη του ροϊκού πεδίου u, v, p, ψ και ω και οι τάσεις T_{xy}, T_{xx} .

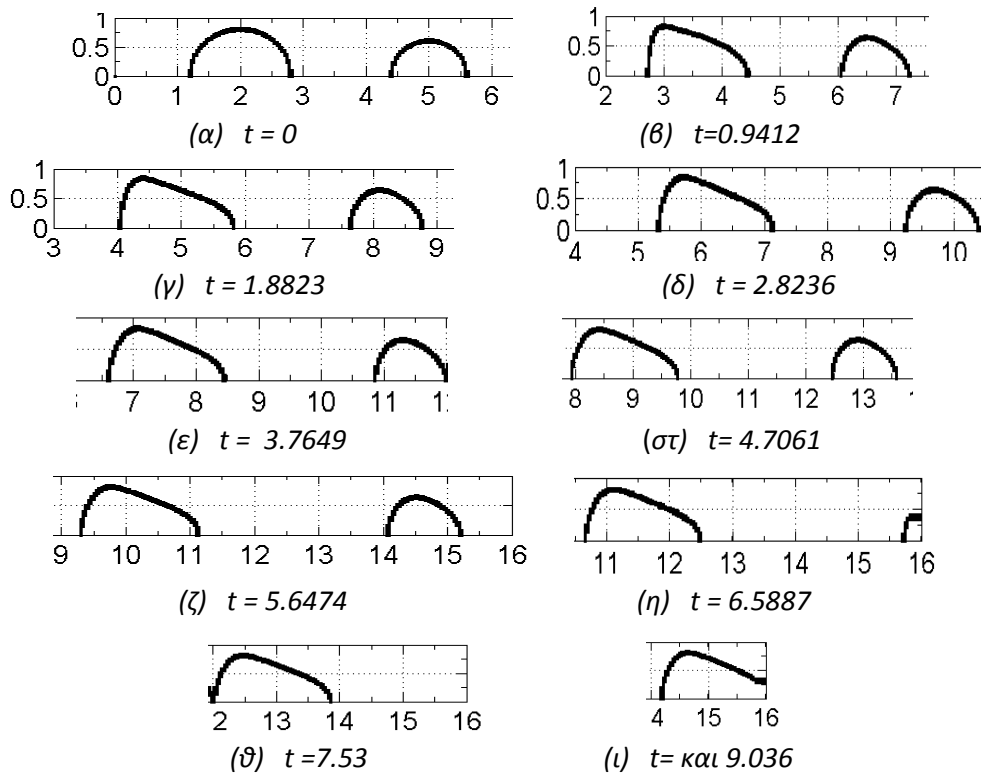
μα πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο αξονοσυμμετρικού ευθύγραμμου αγωγού μήκους $L=16$ και ακτίνας $R=1$, ομοαξονικά κατά μήκος του σωλήνα σε συνθήκες $Re = 40$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$ και με διαφορετική κατά περίπτωση μόνο την επιφανειακή τάση. Στα Σχ.4.1.-4.3. παρουσιάζονται στιγμιότυπα από αυτές τις περιπτώσεις προσομοίωσης. Φαίνονται οι χαρακτηριστικές παραμορφώσεις του σχήματος των σταγόνων που συναντώνται σε τέτοιες ροές και σχολιάζονται ευρύτατα παρακάτω.

4.2.1.1. Δύο σταγόνες: $We=1, Ca=0.05$.



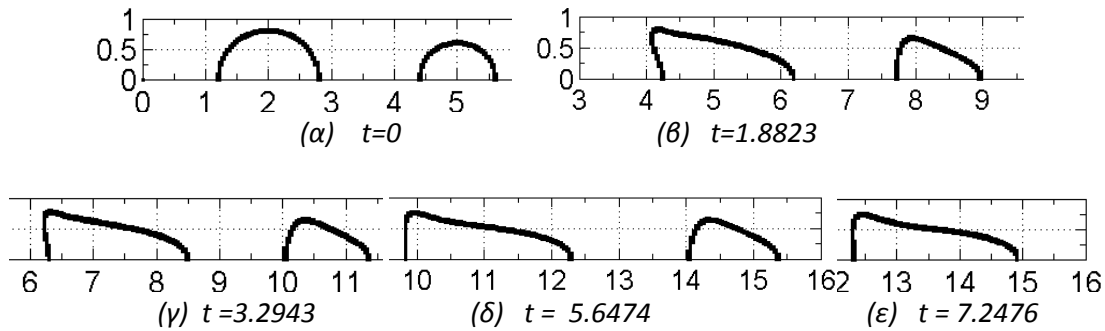
Σχ.4.1. (α,β,γ,δ). Δύο σταγόνες: $Re=40, We=1, Ca =0.05, \lambda = 4, \delta=0, k1=0.6, k2=0.8$.

4.2.1.2. Δύο σταγόνες: $We=1.43, Ca=0.07$.



Σχ.4.2.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Δύο σταγόνες: $Re=40, We=1.43, Ca=0.07, \lambda=4, k1=0.6$ & $k2=0.8$.

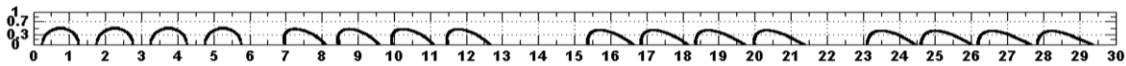
4.2.1.3. Δύο σταγόνες : $We=3.33, Ca=0.17$.



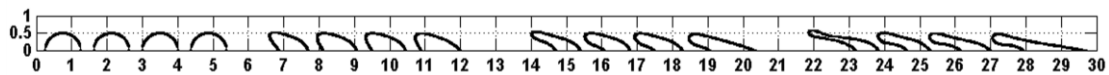
Σχ.4.3.(α,β,γ,δ,ε). Δύο σταγόνες: $Re=40$, $We=3.33$, $Ca=0.17$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k_1=0.6$, $k_2=0.8$.

4.2.2. Διάταξη τεσσάρων ισομεγεθών σταγόνων.

Εδώ εξετάζονται περιπτώσεις διατάξεων που συγκροτούνται από τέσσερες ισομεγέθεις σφαιρικές (κυκλικές) σταγόνες μεσαίου μεγέθους ($k = 0.5$) με επιφανειακή τάση, οι οποίες εισάγονται στο περιβάλλον υγρό η μια πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο αξονοσυμμετρικού ευθύγραμμου αγωγού $L=30$ και $R=1$ ομοαξονικά κατά μήκος του σωλήνος. Στα παρακάτω Σχ.4.4. και Σχ.4.5. παρουσιάζονται στιγμιότυπα από περιπτώσεις προσομοίωσης για $Re = 20$, $\lambda = 4.0$, $\delta = 0$, $k = 0.5$ και $We=5$, $Ca = 0.25$ στο Σχ.4.4 και $Ca=0.5$, $We = 10$, στο Σχ.4.5 αντίστοιχα.



Σχ.4.4. Τέσσερες σταγόνες : $Re = 20$, $Ca=0.25$, $We=5$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$, $k=0.5$, $t = 0, 3.6, 8$ και 12 .



Σχ.4.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re = 20$, $Ca = 0.5$, $We = 10$, $\lambda = 4$, $\delta=0$, $k=0.5$, $t = 0, 3.6, 8$ και 12.8 .

Στην περίπτωση του Σχ.4.4. η μεταβολή της παραμέτρου παραμόρφωσης D κυμαίνεται⁵ μεταξύ 0.03 και 0.23. Επίσης η μεταβολή του λόγου επιμήκυνσης, $E.R.$, κυμαίνεται⁶ μεταξύ

⁵ Συγκεκριμένα για $t' = (3.6, 8, 12)$ αντίστοιχα για κάθε σταγόνα της διάταξης : $D_{HEAD}=(0.06, 0.19, 0.23)$, $D_{SECOND}=(0.03, 0.19, 0.19)$, $D_{THIRD}=(0.03, 0.11, 0.9)$, $D_{LAST}=(0.06, 0.11, 0.14)$.

⁶ Συγκεκριμένα για $t' = (3.6, 8, 12)$ αντίστοιχα : $E.R._{HEAD}=(1.13, 1.38, 1.5)$, $E.R._{SECOND}=(1.06, 1.38, 1.38)$, $E.R._{THIRD}=(1.06, 1.25, 1.38)$, $E.R._{LAST}=(1.13, 1.25, 1.25)$.

1.06 και 1.5. Ομοίως στην περίπτωση του Σχ.4.5, η μεταβολή της D κυμαίνεται⁷ μεταξύ 0.00 και 0.48 ενώ η μεταβολή του $E.R.$ κυμαίνεται⁸ μεταξύ 1.00 και 2.75.

4.2.3. Παρατηρήσεις σχετικές με την μετανάστευση των σταγόνων (droplet migration)

Τα αποτελέσματα και τα σχήματα δείχνουν ότι η παραμόρφωση των σχημάτων των σταγόνων αυξάνει όλο και περισσότερο κατά την παρέλευση του χρόνου ενώ το πεδίο ροής παραμένει σε ασταθή μεταβατική κατάσταση. Το πίσω άκρο της σταγόνας πλατύνεται σαν πτερύγιο, ενώ το μπροστινό μοιάζει με ρύγχος. Επίσης οι μικρότερες σταγόνες παραμορφώνονται λιγότερο από τις μεγάλες γιατί κινούνται με πιο μεγάλες ταχύτητες. Τα παραπάνω σχήματα δείχνουν σημαντικά υψηλότερη καμπυλότητα στη μύτη της σταγόνας από ότι στα καταληκτικά άκρα. Η μεγαλύτερη μύτη (μικρή οξεία γωνία) αντιστοιχεί στο κεφάλι της σταγόνας για μεγάλες ιδίου μεγέθους σταγόνες. Στην πραγματικότητα, η καμπυλότητα στη μύτη είναι θετική, ενώ στα καταληκτικά άκρα γίνεται σταδιακά αρνητικά, με μεγαλύτερη καμπυλότητα γύρω από την σχεδόν κυκλική πίσω επιφάνεια.

Με το πέρασμα του χρόνου στα στιγμιότυπα καθίσταται προφανής, η αύξηση του συνολικού μήκους της διάταξης των σταγόνων και της απόστασης μεταξύ των σταγόνων ενώ το πλάτος της διάταξης παραμένει σχεδόν σταθερό. Η παραμόρφωση και η επιμήκυνση είναι πιο εμφανείς στην επικεφαλής σταγόνα της διάταξης, Σχ.4.4 και 4.5. Στο Σχ.4.5 η τελευταία σταγόνα στα τελικά στάδια παρουσιάζει μικρή υπερύψωση και μεγάλη τοπική καμπυλότητα.

Γενικά, η ροή στην περιοχή των τοιχωμάτων του σωλήνα επιβραδύνεται και παρατηρείται αύξηση των παραμορφώσεων στις σταγόνες, ως αποτέλεσμα της δράσης των διατμητικών τάσεων και του αντίστοιχου ρυθμού παραμόρφωσης. Σε αντίθεση οι περιοχές που γειτνιάζουν με τον άξονα έχουν υψηλότερη αξονική ταχύτητα με αποτέλεσμα να μεταφέρονται ταχύτερα κατάντη.

Επίσης επαληθεύεται η επίδραση της επιφανειακής τάσης, και του Ca στην μείωση της παραμόρφωσης των περιγραμμάτων των σταγόνων. Σύμφωνα με τη γενική εικόνα και τις αυξημένες τιμές των παραμέτρων παραμόρφωσης και του λόγου επιμήκυνσης παρατηρείται ότι όσο αυξάνει ο Ca τόσο αυξάνουν: η μεταβατική ασταθής κατάσταση της διφασικής ροής, η σημαντικά μεγάλη παραμόρφωση των περιγραμμάτων και οι υψηλές

⁷ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 8.0, 12.8)$ αντίστοιχα για κάθε σταγόνα της διάταξης: $D_{HEAD}=(0.11, 0.32, 0.48)$, $D_{SECOND}=(0.06, 0.17, 0.28)$, $D_{THIRD}=(0.03, 0.11, 0.16)$, $D_{LAST}=(0.00, 0.13, 0.28)$.

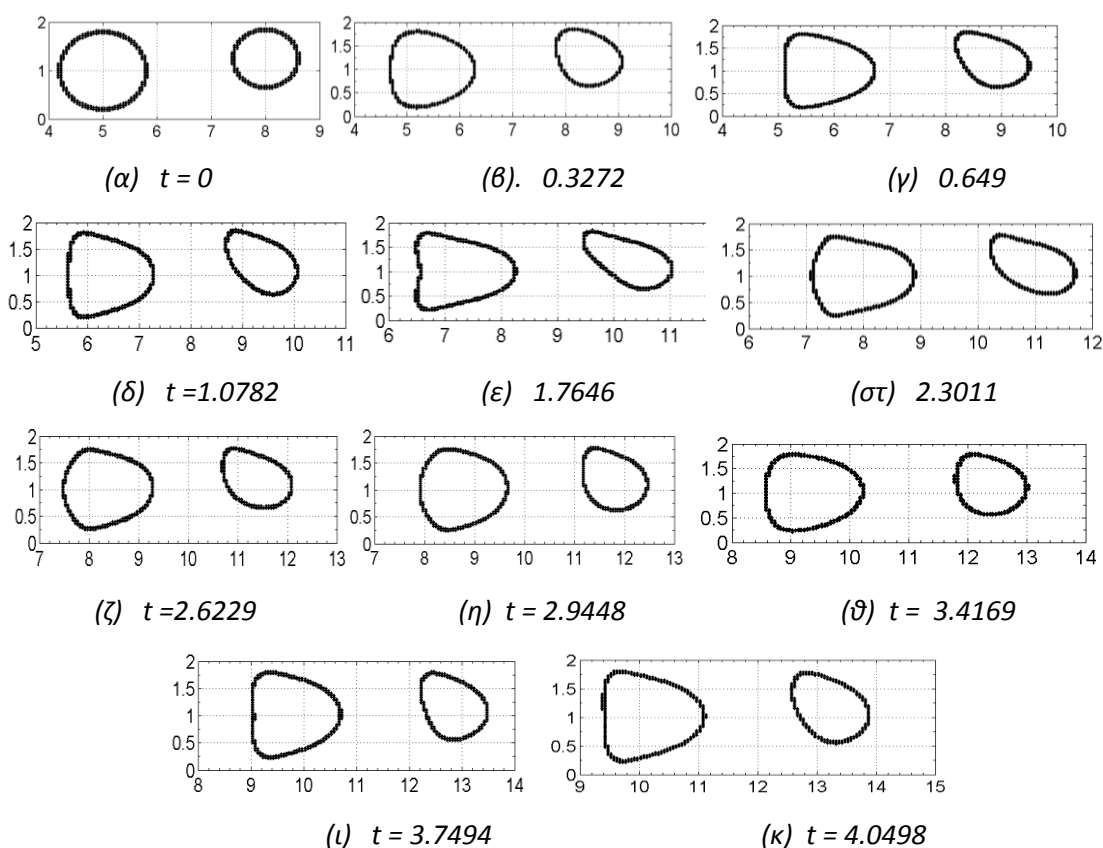
⁸ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 8.0, 12.8)$ αντίστοιχα: $E.R._{HEAD}=(1.25, 1.88, 2.75)$, $E.R._{SECOND}=(1.13, 1.38, 1.75)$, $E.R._{THIRD}=(1.06, 1.25, 1.38)$, $E.R._{LAST}=(1.00, 1.38, 1.94)$.

καμπυλότητες στο μπροστινό και πίσω (αρνητικό) προφίλ είναι πιο εμφανείς. Στην περίπτωση αυτή, τέλος, οι ουρές των σταγόνων τείνουν να αποσπαστούν.

Η γενική εικόνα και η παραμόρφωση των παραπάνω περιγραμμάτων των σταγόνων, αν συγκριθεί ποιοτικά, φαίνεται να είναι αρκετά παρόμοιες και σε συμφωνία με προηγούμενες πειραματικές παρατηρήσεις και τα αριθμητικά αποτελέσματα των *Hyman and Skalak, 1972*, *Kaliakatsos and Tsangaris, 2000* και *Pozrikidis, 2005* που μελέτησαν διασπορές παραμορφώσιμων σταγόνων σε αξονοσυμμετρική διφασική ροή υγρού σε υγρό εξ αιτίας διαφοράς πίεσης διαμέσου κυλινδρικού σωλήνα με σκοπό την διερεύνηση της μετανάστευσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων του αίματος μέσα στα τριχοειδή αγγεία.

4.3. ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΑ (2-D) ΚΑΝΑΛΙΑ

4.3.1. Διάταξη δύο άνισων σταγόνων.



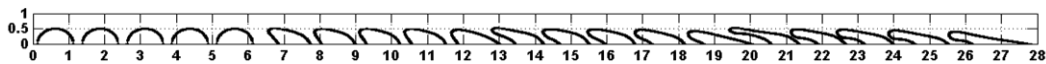
Σχ.4.6. (α, β, γ, δ, ε, στ, ζ, η, θ, ι, κ) Δύο σταγόνες: $Re = 20$, $We = 2.5$, $Ca = 0.125$, $\lambda = 4.0$, $\delta_1 = -0.125$, $\delta_2 = 0$, $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.8$.

Εδώ εξετάζεται η περίπτωση διάταξης που συγκροτείται από δύο άνισες κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες, η επικεφαλής των οποίων είναι μεσαίου μεγέθους, $k_1 = 0.6$ και η

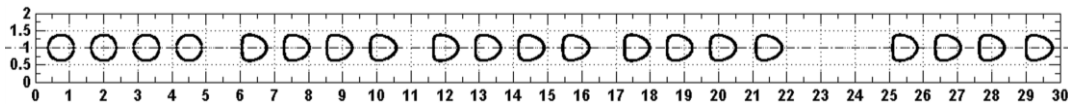
δεύτερη μεγάλη μεγέθους, $k_2=0.8$. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) έκκεντρα, η μια πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο 2-D ευθύγραμμου αγωγού. Στο Σχ.4.6. παρουσιάζονται στιγμιότυπα από αυτή την περίπτωση προσομοίωσης, σε συνθήκες $Re=20$, $We=2.5$, $Ca=0.125$, $\lambda=4.0$, $\delta_1=-0,125$, $\delta_2=0$ για μήκος αγωγού $L=20$ ($x/h=0-20$), πλάτος $H=2$ ($y/h=0-2$), $h=1$ και καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα 400×100 .

4.3.2. Συμμετρικές διατάξεις τεσσάρων ή πέντε ισομεγεθών σταγόνων (στην μέση γραμμή του αγωγού).

Εδώ εξετάζονται περιπτώσεις διατάξεων που συγκροτούνται από τέσσαρες ή πέντε ισομεγέθεις κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες μεσαίου μεγέθους με επιφανειακή τάση, οι οποίες εισάγονται στο περιβάλλον υγρό η μια πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο διαστάσεων καναλιού και $H=2$ πάνω στο επίπεδο συμμετρίας κατά μήκος του αγωγού. Στα παρακάτω Σχ.4.7 και Σχ.4.8 παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιπτώσεων προσομοίωσης για $Re = 40$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$ και πέντε σταγόνες, $k=0.5$, $We=0$, $Ca=0.5$, $L=28$, $H=2$ στο Σχ.4.7. και τέσσερες σταγόνες $k = 0.375$, $We = 12.5$, $Ca = 0.3125$, $L=30$, $H=2$ στο Σχ.4.8. αντίστοιχα.



Σχ.4.7. Πέντε μεσαίου μεγέθους σταγόνες: $Re=40$, $We=20$, $Ca=0.5$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.5$, $t=0, 4.8, 9.6$ και 14.8 .



Σχ.4.8. Τέσσερες μεσαίου μεγέθους σταγόνες: $Re = 40$, $We = 12.5$, $Ca = 0.3125$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$, $k=0.375$, $t = 0, 4, 8, 12, 17.6$.

Στο Σχ.4.7. η μεταβολή της D κυμαίνεται⁹ μεταξύ 0.09 και 0.50. Επιπρόσθετα η διακύμανση του $E.R.$ κυμαίνεται¹⁰ μεταξύ 1.19 και 2.63. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν μια αυξανόμενη παραμόρφωση και επιμήκυνση του περιγράμματος κάθε σταγόνας. Η μέγιστη παραμόρφωση έχει καταγραφεί για την εμπρός σταγόνα. Επίσης, η παραμόρφωση της τελευταίας σταγόνας της κεντρικά τοποθετημένης σειράς σταγόνων είναι αξιοσημείωτη. Εν

⁹ Συγκεκριμένα για $t' = (4.8, 9.6, 14.8)$ για κάθε σταγόνα της διάταξης αντίστοιχως: $D_{HEAD}=(0.18, 0.32, 0.50)$, $D_{SECOND}=(0.09, 0.20, 0.30)$, $D_{THIRD}=(0.11, 0.16, 0.20)$, $D_{FORTH}=(0.11, 0.16, 0.20)$, $D_{LAST}=(0.09, 0.17, 0.31)$.

¹⁰ Συγκεκριμένα για $t' = (3.6, 8, 12)$ για κάθε σταγόνα της διάταξης αντίστοιχως: $E.R._{HEAD}=(1.44, 1.81, 2.63)$, $E.R._{SECOND}=(1.19, 1.50, 1.75)$, $E.R._{THIRD}=(1.25, 1.38, 1.50)$, $E.R._{FORTH}=(1.25, 1.38, 1.50)$, $E.R._{LAST}=(1.19, 1.50, 2.00)$.

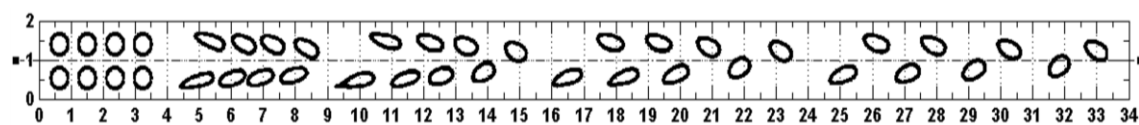
κατακλείδι είναι εμφανείς η ασταθής μεταβατική κατάσταση του πεδίου ροής, οι υψηλές τιμές της καμπυλότητας στο μετωπικό και στο ουραίο προφίλ (αρνητική), η τάση διάσπασης των σταγόνων.

Στο Σχ.4.8. η διακύμανση του D κυμαίνεται ¹¹ μεταξύ 0.04 και 0.08. Επιπρόσθετα το $E.R. \approx 1$ και παραμένει περίπου αμετάβλητο από την αρχική του τιμή κατά την είσοδο στον αγωγό της απαραμόρφωτης σταγόνας. Αυτό ισχύει για όλες τις σταγόνες της διάταξης. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν μια μικρή μείωση του πλάτους των σταγόνων ειδικά στην πρώτη σταγόνα της διάταξης. Εικονίζονται η ψευδοσταθερή (quasi-steady) κατάσταση του πεδίου ροής, οι ελάχιστες τιμές της καμπυλότητας στο μετωπικό και στο ουραίο προφίλ (αρνητική), η διατήρηση των σχημάτων των σταγόνων. Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι οι παρατηρήσεις για τις αξονοσυμμετρικές περιπτώσεις Σχ.4.1-4.5. ισχύουν σε μεγάλο βαθμό και για τις αντίστοιχες συμμετρικές διδιάστατες περιπτώσεις των Σχ.4.7 και Σχ.4.8.

4.3.3. Διάταξη δύο σειρών σταγόνων η κάθε μια εισαγόμενη σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή του καναλιού.

Εδώ εξετάζονται δύο εναλλακτικές περιπτώσεις διατάξεων που συγκροτούνται από δύο σειρές από τέσσαρες ισομεγέθεις κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες μεσαίου μεγέθους με επιφανειακή τάση, οι οποίες εισάγονται στο περιβάλλον υγρό η μια πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο διδιάστατου καναλιού, $H=2$. Τα κέντρα των σταγόνων κάθε σειράς βρίσκονται επάνω σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή (διάμηκες επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού (αγωγού).

4.3.3.1. Δύο έκκεντρα τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων.



Σχ.4.9. Οκτώ σταγόνες: $Re = 40$, $We = 44.44$, $Ca = 1.11$, $\lambda = 3$, $\delta = -0.43$ & 0.47 , $k = 0.27$, $t = 0, 4, 8.8, 14.8, 22$.

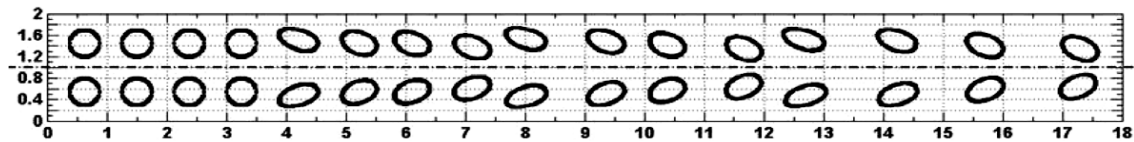
Στο Σχ.4.9. παρουσιάζονται στιγμιότυπα για την περίπτωση προσομοίωσης με $Re = 40$, $We = 44.44$, $Ca = 1.11$, $\lambda = 3.0$, $\delta = -0.43$ & 0.47 , $k = 0.27$ και $L = 34$. Σε σχέση με την στάθμη του επιπέδου συμμετρίας του καναλιού, υπάρχει μικρή κάθετη μετάθεση του οριζόντιου επιπέδου συμμετρίας της αρχικής διάταξης των δύο συστοιχιών σταγόνων.

¹¹ Συγκεκριμένα για $t' = (4, 8, 12, 17.6)$ για κάθε σταγόνα της διάταξης αντιστοίχως: $D_{HEAD} = (0.04, 0.08, 0.08, 0.08)$, $D_{SECOND} = 0.04$, $D_{THIRD} = 0.04$, $D_{LAST} = 0.04$.

Η διακύμανση της D κυμαίνεται¹² μεταξύ 0.24 and 0.50 για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο πάνω τοίχωμα του αγωγού (top-wall array) and μεταξύ 0.2 και 0.6 για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο κάτω τοίχωμα (bottom-wall array). Ομοίως η διακύμανση του $E.R.$ κυμαίνεται¹³ μεταξύ 1.25 and 2.38 για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο πάνω τοίχωμα και μεταξύ 1.13 και 2.63 για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο κάτω τοίχωμα. Συνεπώς καταδεικνύεται μια σταδιακή μείωση στην παραμόρφωση του περιγράμματος των σταγόνων και για τις δύο διατάξεις της περιπτώσεως του Σχ.4.9.

Επίσης η μεταβολή της «γωνίας κλίσης», θ κυμαίνεται¹⁴ μεταξύ 163° και 144° για την πρώτη δυάδα σταγόνων, μεταξύ 159° και 150° για την δεύτερη δυάδα, μεταξύ 163° και 157° για την τρίτη δυάδα και μεταξύ 166° και 161° για την τέταρτη ή τελευταία δυάδα (last group) σταγόνων. Παρομοίως η γωνία κλίσης κυμαίνεται μεταξύ 166° και 150° για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο πάνω τοίχωμα και αντιστοίχως μεταξύ 165° και 144° για την συστοιχία σταγόνων κοντά στο κάτω τοίχωμα. Συνεπώς είναι εμφανής μια βαθμιαία αύξηση της γωνίας κλίσης από την επικεφαλής προς την τελευταία σταγόνα κάθε διάταξης και για τις δύο συστοιχίες.

4.3.3.2. Δύο συμμετρικά τοποθετημένες σειρές ισομεγεθών σταγόνων.



Σχ.4.10. 2-D συμμετρική διάταξη οκτώ ισομεγεθών σταγόνων¹⁵ σε δύο συστοιχίες από τέσσερες σταγόνες για $Re=40$, $We=26.67$, $Ca = 0.67$, $\lambda = 4$, $\delta = \pm 0.45$, $k=0.25$, $t=0, 3.2, 6.8, 11.2$.

Στο Σχ.4.10. παρουσιάζονται στιγμιότυπα για την περίπτωση προσομοίωσης κατά την οποία

¹² Συγκεκριμένα για $t'=(4, 8.8, 14.8, 22)$ αντιστοίχως: $D_{TOP_HEAD} = (0.33, 0.24, 0.25, 0.25)$, $D_{BOTTOM_HEAD} = (0.45, 0.27, 0.2, 0.23)$, $D_{TOP_SECOND} = (0.33, 0.24, 0.25, 0.33)$, $D_{BOTTOM_SECOND} = (0.39, 0.33, 0.38, 0.25)$, $D_{TOP_THIRD} = (0.33, 0.39, 0.38, 0.33)$, $D_{BOTTOM_THIRD} = (0.39, 0.48, 0.45, 0.35)$, $D_{TOP_LAST} = (0.5, 0.52, 0.38, 0.38)$, $D_{BOTTOM_LAST} = (0.6, 0.55, 0.44, 0.41)$.

¹³ Συγκεκριμένα για $t' = (4, 8.8, 14.8, 22)$ αντιστοίχως: $E.R._{TOP_HEAD} = (1.75, 1.63, 1.25, 1.25)$, $E.R._{BOTTOM_HEAD} = (2, 1.75, 1.13, 1.19)$, $E.R._{TOP_SECOND} = (1.75, 1.63, 1.25, 1.38)$, $E.R._{BOTTOM_SECOND} = (2, 1.75, 1.38, 1.25)$, $E.R._{TOP_THIRD} = (1.75, 2, 1.38, 1.25)$, $E.R._{BOTTOM_THIRD} = (2, 2.13, 1.63, 1.31)$, $E.R._{TOP_LAST} = (2.3, 2.38, 1.38, 1.38)$, $E.R._{BOTTOM_LAST} = (2.5, 2.63, 1.63, 1.5)$.

¹⁴ Συγκεκριμένα για $t' = (4, 8.8, 14.8, 22)$ αντιστοίχως: $\theta_{TOP_HEAD} = (154^\circ, 150^\circ, 154^\circ, 153^\circ)$, $\theta_{BOTTOM_HEAD} = (163^\circ, 150^\circ, 151^\circ, 144^\circ)$, $\theta_{TOP_SECOND} = (159^\circ, 156^\circ, 152.5^\circ, 157^\circ)$, $\theta_{BOTTOM_SECOND} = (163^\circ, 162^\circ, 159.5^\circ, 150^\circ)$, $\theta_{TOP_THIRD} = (159^\circ, 160^\circ, 162.5^\circ, 159^\circ)$, $\theta_{BOTTOM_THIRD} = (163^\circ, 162^\circ, 160^\circ, 157^\circ)$, $\theta_{TOP_LAST} = (163^\circ, 166^\circ, 163^\circ, 162^\circ)$, $\theta_{BOTTOM_LAST} = (163^\circ, 165^\circ, 162^\circ, 161^\circ)$.

¹⁵ Christafakis et al., 2009, Fig.7.

το οριζόντιο επίπεδο συμμετρίας των δύο συστοιχιών των σταγόνων ταυτίζεται με το επίπεδο συμμετρίας του καναλιού. Επίσης $Re=40$, $We=6.67$, $Ca=0.67$, $\lambda=4$, $\delta=-0.45$, $k=0.25$ και $L=18$. Η διακύμανση της D κυμαίνεται¹⁶ μεταξύ 0.23 και 0.33 και η διακύμανση του $E.R.$ κυμαίνεται¹⁷ μεταξύ 1.23 και 1.39 τόσο για την επάνω όσο και για την κάτω συστοιχία. D και $E.R.$ υποδηλώνουν σταδιακή μείωση της παραμόρφωσης των σχημάτων των σταγόνων του Σχ.4.10.

Η διακύμανση της γωνίας κλίσης κυμαίνεται¹⁸ μεταξύ 155° και 150° για την δυάδα των επικεφαλής σταγόνων, μεταξύ 153° και 151° για την δεύτερη δυάδα, μεταξύ 157° και 154° για την τρίτη δυάδα και μεταξύ 161° και 156° για την τέταρτη ή τελευταία δυάδα σταγόνων. Ομοίως η γωνία κλίσης κυμαίνεται μεταξύ 161° και 150° και για τις δύο συστοιχίες σταγόνων. Συνεπώς καταγράφεται μια βαθμιαία αύξηση της γωνίας κλίσης από την μπροστινή προς την τελευταία σταγόνα κάθε διάταξης και για τις δύο συστοιχίες. Στο Σχ.4.10. επαληθεύεται η συμμετρία του πεδίου ροής, η ισότητα μεταξύ των γωνιών κλίσης και των παραμορφώσεων των περιγραμμάτων των αντίστοιχων σταγόνων και για τις δύο συστοιχίες σταγόνων. Ομοίως, στην περίπτωση Σχ.4.9. λόγω της αρχικά μικρής ασυμμετρίας στην εισαγωγή των συστοιχιών επαληθεύεται η ανισότητα των σχετικών μεγεθών.

Επαληθεύεται επίσης η αναμενόμενη επίδραση του Ca στην παραμόρφωση των περιγραμμάτων των σταγόνων. Σύμφωνα με τη γενική άποψη και τις αυξημένες τιμές των D και $E.R.$ στο Σχ.4.9., του αυξημένου Ca , μπορεί να παρατηρηθούν εύκολα η σημαντικά μεγαλύτερη παραμόρφωση σχημάτων (επιμήκη σχήματα όμοια με ψάρια) και οι υψηλότερες καμπυλότητες στα οδηγητικά και στα ουραία άκρα. Ειδικά στα αρχικά στάδια της εξέλιξης του φαινομένου, οι πολύ υψηλές καμπυλότητες στα ουραία άκρα της τελευταίας δυάδας σταγόνων των δύο συστοιχιών δημιουργεί τις προϋποθέσεις για την ανάπτυξη διαδικασιών διάσπασης των σταγόνων. Επιπλέον, στο Σχ.4.9. του υψηλότερου Ca , παρατηρείται ταχύτερη μετακίνηση και σύγκλιση των κεντροειδών των σταγόνων και των δύο συστοιχιών στην κεντρική γραμμή (επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού.

Μπορεί επίσης να παρατηρηθεί, στις αρχικές στιγμές της προσομοίωσης για το Σχ.4.10., μια προσωρινή κίνηση, σαν μικρή ταλάντωση, προς τα τοιχώματα των δύο (άνω και κάτω) τελευταίων σταγόνων. Ως εκ τούτου τα δύο «πτερύγια» της διάταξης των σταγόνων

¹⁶ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 11.2)$ αντιστοίχως: $D_{HEAD} = (0.23, 0.23, 0.26)$, $D_{SECOND} = (0.23, 0.23, 0.23)$, $D_{THIRD} = (0.23, 0.26, 0.23)$, $D_{LAST} = (0.33, 0.33, 0.33)$.

¹⁷ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 11.2)$ αντιστοίχως: $E.R._{HEAD} = (1.23, 1.23, 1.31)$, $E.R._{SECOND} = (1.23, 1.23, 1.23)$, $E.R._{THIRD} = (1.23, 1.31, 1.23)$, $E.R._{LAST} = (1.385, 1.385, 1.385)$.

¹⁸ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 11.2)$ αντιστοίχως: $\theta_{HEAD} = (150^\circ, 155^\circ, 154^\circ)$, $\theta_{SECOND} = (152^\circ, 151^\circ, 153^\circ)$, $\theta_{THIRD} = (154^\circ, 157^\circ, 156^\circ)$, $\theta_{LAST} = (156^\circ, 161^\circ, 161^\circ)$.

εκτελούν μια κίνηση τύπου μοχλού με κέντρο περιστροφής το ενδιαμέσο σημείο τους. Αυτή είναι πιθανώς επίσης μια μεταβατική κατάσταση. Η παραπάνω κίνηση είναι μικρότερη στην περίπτωση Σχ.4.9.

4.3.3.3. Παρατηρήσεις για τη ροή στα Σχ.4.9 και Σχ.4.10.

Με την χρονική εξέλιξη του φαινομένου μειώνεται η παραμόρφωση στα σχήματα των σταγόνων δηλαδή παρατηρείται χαλάρωση των περιγραμμάτων των σταγόνων και τείνει να εγκατασταθεί μια ψευδο-σταθερή μεταβατική κατάσταση. Συγκεκριμένα η αιχμή και η ουρά των σχημάτων των σταγόνων φαίνεται να χάνουν την θετική τους καμπυλότητα και να χαλαρώνουν σε ένα μόνιμο σχήμα.

Οι διαφοροποιήσεις στην κίνηση μεταξύ των σταγόνων δείχνουν την πολυπλοκότητα του μεταβατικού πεδίου που αναπτύσσεται. Η παραμόρφωση, η επιμήκυνση και η γωνίες κλίσης των σταγόνων αυξάνονται στις δύο ανάντη σταγόνες της κάθε σειράς. Το πιθανότερο είναι ότι έχουν αναπτυχθεί αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σταγόνων και κάθε σταγόνα δημιουργεί προσήνεμα συν-ρεύματα (co-currents) τα οποία διαταράσσουν τη ροή των επόμενων σταγόνων, αυξάνοντας τοπικά τις κλίσεις των ταχυτήτων και τις διατμητικές τάσεις, ιδίως όσον αφορά την τελευταία σταγόνα της κάθε σειράς.

Κάθε σταγόνα παίρνει το χαρακτηριστικό επίμηκες ελλειψοειδές σχήμα. Ο μεγάλος άξονας του ψευδο-ελλειψοειδούς είναι προσανατολισμένος προς την κατεύθυνση της στιγμιαίας γωνία κλίσης. Επίσης, η όλη διάταξη και των δύο σειρών του σε ένα συγκεκριμένο στάδιο, δίνει την εντύπωση ενός τραπεζοειδούς σχήματος που ο κύριος του άξονας είναι προσανατολισμένος προς την κατεύθυνση του επιπέδου συμμετρίας και οι δύο κεκλιμένες του πλευρές συγκλίνουν προς την κατεύθυνση της ροής.

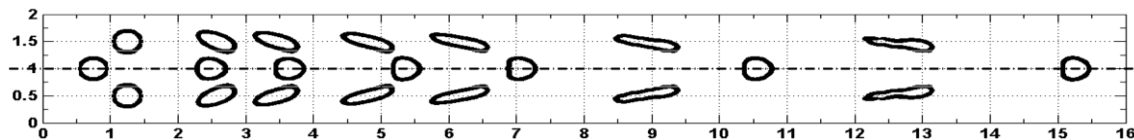
Μπορεί να παρατηρηθεί η μετακίνηση και η σύγκλιση των κεντροειδών των σταγόνων και των δύο συστοιχιών προς την κεντρική γραμμή (επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού. Οι σταγόνες μετακινούνται μονότονα (όχι όμως γραμμικά) προς τον άξονα συμμετρίας του καναλιού ή προς ένα σημείο ισοροπίας στην περιοχή της κεντρικής γραμμής. Οι επικεφαλής σταγόνες κινούνται προς τον άξονα πιο έντονα από τις ακολουθούσες σταγόνες. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί λόγω της μικρότερης γωνίας κλίσης των επικεφαλής σταγόνων. Η παραπάνω παρατήρηση ουσιαστικά συμφωνεί με άλλα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας.

Η ανάπτυξη δακτυλιοειδούς στρώματος στην περιοχή των τοιχωμάτων του αγωγού χωρίς σταγόνες είναι επίσης εμφανής. Επιπλέον, έχει καταγραφεί η σταδιακή αύξηση της γωνίας κλίσης από τις επικεφαλής σταγόνες προς τις ακολουθούσες, και για τις δύο συστοιχίες σταγόνων στο πάνω και κάτω τοίχωμα. Αυτό δημιουργεί την υποψία ότι ο άξονας των

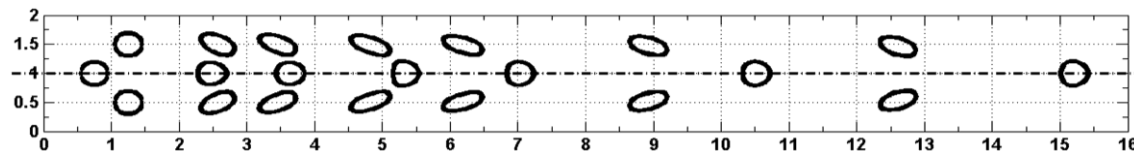
τελευταίων σταγόνων περιστρέφεται αρχικά ταχύτερα και πιο απότομα από τον άξονα των επικεφαλής σταγόνων που απαιτεί περισσότερο χρόνο για να ισορροπήσει.

Με την πάροδο του χρόνου, η αύξηση του συνολικού μήκους των δύο συστοιχιών σταγόνων και της απόστασης μεταξύ των σταγόνων σε κάθε χρονικό στάδιο είναι εμφανής. Πιθανότατα τα ανάντη συν-ρεύματα διαταράσσουν τη ροή των επόμενων σταγόνων, επιβραδύνοντας τις επόμενες σταγόνες της κάθε συστοιχίας. Γενικά, επιβραδύνεται η ροή στην περιοχή των τοιχωμάτων του αγωγού και οι σταγόνες παρουσιάζουν αυξημένες παραμορφώσεις, ως αποτέλεσμα της δράσης των διατμητικών τάσεων και του αντίστοιχου ρυθμού παραμόρφωσης. Σε αντίθεση οι περιοχές που γειτνιάζουν με τον άξονα έχουν υψηλότερη αξονική ταχύτητα, έτσι ώστε να μεταφέρονται ταχύτερα κατάντη.

4.3.4. Διάταξη τριών μικρών σταγόνων κατά πλάτος του 2-D αγωγού.



Σχ.4.11. Τρεις σταγόνες: $Re = 40$, $We = 20$, $Ca = 0.5$, $\lambda = 4.0$, $\delta = \pm 0.5, 0$, $k = 0.2$, $t = 0, 1.2, 2, 3.2, 4.4, 6.8, 10$.

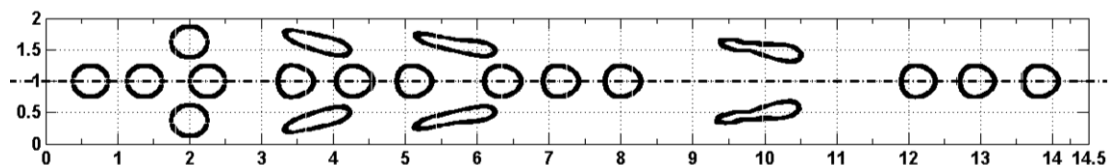


Σχ.4.12. Τρεις σταγόνες: $Re = 40$, $We = 10$, $Ca = 0.25$, $\lambda = 4.0$, $\delta = \pm 0.5, 0$, $k = 0.2$, $t = 0, 1.2, 2, 3.2, 4.4, 6.8, 10$.

Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις των Σχ.4.11 και Σχ.4.12 προσομοιώνονται δύο 2-D περιπτώσεις διατάξεων τριών σταγόνων με τις ίδιες αδιάστατες παραμέτρους $Re=40$, $\lambda=4.0$, $k=0.2$ και $We=20$, $Ca=0.5$ στο Σχ.4.11 και $We=0$, $Ca=0.25$ στο Σχ.4.12 αντίστοιχα. Οι σταγόνες διασπείρονται στο περιβάλλον ρευστό στην αριστερή είσοδο του αγωγού. Δύο από αυτές εισάγονται κάθετα και συμμετρικά της μέσης γραμμής (επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού $\delta = \pm 0.5$, ενώ συγχρόνως η τρίτη σταγόνα εισάγεται πάνω στην μέση γραμμή $\delta = 0$ πίσω από τις προηγούμενες.

Το εύρος μεταβολής της D για την σταγόνα πάνω στην μέση γραμμή (center droplet) δείχνει μόνο μικρές αποκλίσεις μεταξύ 0.075 και -0.04 στο Σχ.4.11. και μεταξύ 0.13 και 0.04 στο Σχ.4.12. Αντίστοιχα, ο $E.R.$ δείχνει μόνο μικρές αποκλίσεις γύρω από την τιμή 1.07 στο Σχ.4.11 και 1.01 στο του Σχ.4.12. Επιπλέον, με την εξέλιξη του φαινομένου σημειώνεται μια μικρή τάση για χαλάρωση του σχήματος της κεντρικής σταγόνας, γιατί καταγράφεται $D=0.04$ στο Σχ.4.12 και $D=-0.04$ στο Σχ.4.11, όπου εμφανίζεται μια μικρή συρρίκνωση κατά μήκος της σταγόνας. Σε αντιδιαστολή, για αμφότερες τις πάνω και κάτω έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες, η διακύμανση της D κυμαίνεται¹⁹ μεταξύ 0.36 και 0.67 και δείχνει αυξανόμενη παραμόρφωση του περιγράμματος της σταγόνας στο Σχ.4.11. και μεταξύ 0.33 και 0.47 και επίσης δείχνει μια αρχικά αυξανόμενη και στη συνέχεια μειούμενη παραμόρφωση του περιγράμματος της σταγόνας στο Σχ.4.12. Η επίδραση του Ca είναι φανερή. Αντίστοιχη μεταβολή παρουσιάζει και ο $E.R.$ που κυμαίνεται²⁰ μεταξύ 1.29 και 2.14 στο Σχ.4.11 και μεταξύ 1.33 και 1.5 στο Σχ.4.12. Η μεταβολή της «γωνίας κλίσης» κυμαίνεται μεταξύ 144° και 172° και δείχνει μια αυξητική πορεία και σύγκλιση των ταλαντώσεων της γωνίας στις 161.5° για αμφότερες τις έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες του Σχ.4.11. Στο Σχ.4.12 η γωνία κυμαίνεται²¹ μεταξύ 154° και 162.5° . Παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις μέχρι οι ταλαντώσεις της γωνίας να συγκλίνουν στην τιμή 159° .

4.3.5. Διάταξη πέντε μικρών σταγόνων κατά πλάτος και στη μέση γραμμή του 2-D αγωγού.



Σχ.4.13. Πέντε σταγόνες²²: $Re=40$, $We=40$, $Ca=1$, $\lambda=4$, $\delta=\pm 0.65$, 0 , $k=0.25$, $t=0, 2, 4$ και 8 .

Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις των Σχ.4.13 και Σχ.4.14 προσομοιώνονται δύο 2-D περιπτώσεις διατάξεων πέντε σταγόνων με τις ίδιες αδιάστατες παραμέτρους $Re=40$,

¹⁹ Συγκεκριμένα για $t' = (1.2, 2.0, 3.2, 4.4, 6.8$ και $10.0)$ αντιστοίχως: $D = (0.36, 0.44, 0.59, 0.63, 0.66, 0.67)$ Στο Σχ.4.11 και $D = (0.33, 0.37, 0.47, 0.41, 0.38, 0.33)$ αντιστοίχως στο Σχ.4.12.

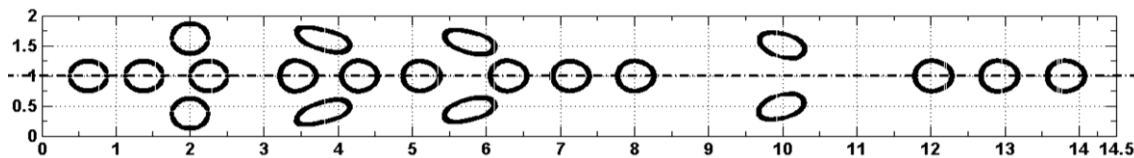
²⁰ Συγκεκριμένα για $t' = (1.2, 2.0, 3.2, 4.4, 6.8$ και $10.0)$ αντιστοίχως: $E.R. = (1.29, 1.46, 1.64, 1.86, 1.96, 2.14)$ στο Σχ.4.11 και $E.R. = (1.33, 1.46, 1.5, 1.5, 1.5, 1.33)$ στο Σχ.4.12. αντιστοίχως.

²¹ Συγκεκριμένα at $t' = (1.2, 2.0, 3.2, 4.4, 6.8$ και $10.0)$ αντιστοίχως: $\vartheta = (144^\circ, 157^\circ, 158.5^\circ, 164^\circ, 167.5^\circ, 161.5^\circ)$ στο Σχ.4.11 και $\vartheta = (154^\circ, 159^\circ, 159^\circ, 162.5^\circ, 159^\circ, 159^\circ)$ στο Σχ.4.12. αντιστοίχως.

²² A. Christafakis et al. / Applied Mathematical Modelling 33 (2009) 1201–1212, p1208, Fig.5.

$\lambda=4.0$, $\delta=\pm 0.65$, $\theta=0$, $k=0.25$ και $We=40$, $Ca=1$, στο Σχ.4.13 και $We=20$, $Ca=0.5$ στο Σχ.4.14 αντίστοιχα. Οι σταγόνες διασπείρονται στο περιβάλλον ρευστό στην αριστερή είσοδο του αγωγού. Δύο από αυτές εισάγονται κάθετα και συμμετρικά της μέσης γραμμής (επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού $\delta=\pm 0.65$, ενώ συγχρόνως μια ομάδα τριών άλλων σταγόνων εισάγονται σε παράταξη πάνω στην μέση γραμμή, $\delta=0$.

Το εύρος μεταβολής της παραμέτρου παραμόρφωσης D για τις σταγόνες πάνω στην μέση γραμμή (center droplets) δείχνουν μόνο μικρές αποκλίσεις από τη μέση τιμή 0.07 και για τις δύο περιπτώσεις (αντίστοιχα $ER=1.07$ στο Σχ.4.13 και 1.01 στο Σχ.4.14). Επιπλέον στο Σχ.4.14. είναι φανερό με την εξέλιξη του χρόνου μια μικρή τάση για επαναφορά του περιγράμματος της ανάντη στη ροή σταγόνας, $D=0.05$.



Σχ.4.14. Πέντε σταγόνες²³: $Re=40$, $We=20$, $Ca=0.5$, $\lambda=4$, $\delta=\pm 0.65$, $\theta=0$, $k=0.25$, $t'=0, 2, 4$ και 8 .

Αντίθετα για αμφότερες τις πάνω και κάτω έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες (top και bottom wall-droplets), στο Σχ.4.13, η μεταβολή του D κυμαίνεται μεταξύ 0.62 και 0.74 και δείχνει αυξανόμενη παραμόρφωση του περιγράμματος της σταγόνας (αντίστοιχα ο ER κυμαίνεται μεταξύ 2.0 και 2.6). Αντίθετα στο Σχ.4.14, η D κυμαίνεται μεταξύ 0.27 και 0.5 (αντίστοιχα ο ER κυμαίνεται μεταξύ 1.19 και 1.36) και δείχνει μειούμενη παραμόρφωση²⁴. Η επίδραση του Ca είναι φανερή. Η μεταβολή της θ κυμαίνεται²⁵ μεταξύ 164° και 170° και δείχνει μια σύγκλιση των ταλαντώσεων στις 170° για αμφότερες τις έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες του Σχ.4.13. Στο Σχ.4.14 παρατηρούνται μικρές αποκλίσεις γύρω από τη μέση τιμή 159° . Μπορούν να επιδειχθούν τα παρακάτω συμπεράσματα σύμφωνα με τα παραπάνω περιγραφόμενα αποτελέσματα και την γενική εικόνα, των Σχ.4.11 έως Σχ.4.14.

Επιβεβαιώνεται ότι η παραμόρφωση και η περιστροφή των σταγόνων είναι ανάλογη του Ca . Για χαμηλό Ca η παραμόρφωση των επιμηκυμένων σταγόνων διαμορφώνει ωσειδείς

²³ 1208 Christafakis et al. / Applied Mathematical Modelling 33 (2009) 1201–1212, Fig. 6.

²⁴ Συγκεκριμένα για $t'=(2, 4, 8)$ αντιστοιχεί $D=(0.62, 0.71, 0.74)$ και $ER=(2.0, 2.5, 2.6)$ στο Σχ.4.13 και $D=(0.5, 0.47, 0.27)$ και $ER=(1.36, 1.33, 1.19)$ αντιστοίχως στο Σχ.4.14.

²⁵ Συγκεκριμένα για $t'=(2, 4, 8)$ αντιστοίχως: $\theta=(164^\circ, 169^\circ, 170^\circ)$ για το Σχ.4.13 και $\theta=(159^\circ, 160^\circ, 159^\circ)$ στο Σχ.4.14 αντιστοίχως.

μορφές έως ότου τελικά οι σταγόνες επανέλθουν σε πιο σταθερές, ανακουφισμένες μορφές. Αντίθετα για υψηλό Ca η παραμόρφωση των επιμηκυμένων σταγόνων διαμορφώνει περίγραμμα αλτήρα, Σχ.4.13 και οι πλευρές της σταγόνας επιπεδώνονται βαθμιαία έως ότου τελικά η σταγόνα αναπτύξει μια λεπτή «μέση». Έκτοτε ο ρυθμός επιμήκυνσης αυξάνει και το πλάτος των κεντρικών και πίσω τμημάτων της σταγόνας μειώνεται πολύ γρήγορα, ενώ, το μπροστινό σκέλος, κατάντη της ροής, διατηρεί το σχεδόν κυκλικό περίγραμμα του και παραμορφώνεται ελάχιστα.

Ο κύριος άξονας κάθε ψευδο-ελλειψοειδούς είναι προσανατολισμένος στην κατεύθυνση της στιγμιαίας «γωνίας κλίσης» που αυξάνεται με την εξέλιξη του χρόνου και τελικά σταθεροποιείται σε χαμηλότερες τιμές. Η «γωνία κλίσης» αυξάνεται ελαφρώς με τον Ca . Παρατηρούνται η σημαντική παραμόρφωση των σχημάτων (επίμηκη σχήματα σαν ψάρια), οι υψηλές καμπυλότητες στο μπροστινό άκρο και στην ουρά των σταγόνων που γειτνιάζουν με το πάνω και κάτω τοίχωμα του αγωγού.

Αυτή η μεταβατική εξέλιξη περιλαμβάνει την ανάπτυξη ενός κυματοειδούς περιγράμματος σαν λεπτή μέση και τελικά σε σημαντική επιμήκυνση των σταγόνων στο έντονο σχήμα αλτήρα που φαίνεται στα Σχ.4.11 και Σχ.4.13. Επίσης στα Σχ.4.13 και Σχ.4.14 το σχεδόν κυκλικό σχήμα, των μεσαίου ή μικρού μεγέθους, κεντρικά τοποθετημένων σταγόνων δημιουργεί εικόνα που μοιάζει με το πρότυπο τραίνου ή στοιβάδας νομισμάτων, στο οποίο ένας πυρήνας που αποτελείται από τις σταγόνες, συμπεριφέρεται ως άκαμπτο σώμα με ταχύτητα U σε ροή με το προφίλ της ταχύτητας u να γίνεται τύπου βύσματος (plug-flow mode) που οπτικά μοιάζει με το αντίστοιχο προφίλ της τυρβώδους ροής.

Το εύρος διακύμανσης των D και $E.R.$ δείχνουν μόνο μικρές αποκλίσεις από τις αρχικές τιμές. Ο παραπάνω κυλινδρικός πυρήνας περιβάλλεται από ένα αργοκίνητο δακτυλιοειδές στρώμα ροής που σχηματίζουν οι έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες κοντά στο πάνω και κάτω τοίχωμα, οι οποίες και παραμορφώνονται πολύ έντονα σχεδόν σε ελλειψοειδές σχήμα που μετατρέπεται σε ένα επιμήκες σχήμα όμοιο με αλτήρα, με την αύξηση του αντίστοιχου Ca . Ο μεγάλος άξονας του κάθε ψευδο-ελλειψοειδούς προσανατολίζεται προς την κατεύθυνση της στιγμιαίας γωνίας κλίσης που σχεδόν αυξάνει με την εξέλιξη του χρόνου και η οποία σταθεροποιείται τελικά σε χαμηλότερες τιμές. Η γωνία κλίσης αυξάνει ελαφρώς με τον Ca .

Στην διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου, οι έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες τείνουν ελαφρώς να μεταναστεύσουν και να συγκλίνουν προς την κεντρική γραμμή του καναλιού ή του άξονα του σωλήνα και αναπτύσσεται ένα κενό από σταγόνες δακτυλιοειδές στρώμα

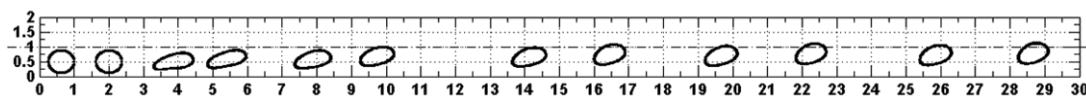
κοντά στα στερεά όρια. Γενικότερα οι σταγόνες κοντά στα στερεά όρια παραμορφώνονται πολύ εντονότερα σε σχέση με τις κεντρικές σταγόνες.

Επιπλέον, παρατηρείται καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται στον χρόνο, αύξηση της συνολικής έκτασης, που καταλαμβάνει η διάταξη των σταγόνων μέσα στον αγωγό. Η γενική άποψη και η παραμόρφωση των σχημάτων των σταγόνων, αν συγκριθούν ποιοτικά, φαίνονται να είναι αρκετά παρόμοια και συσχετίζονται με προηγούμενες πειραματικές παρατηρήσεις και τα αριθμητικά αποτελέσματα, των *Zhou and Pozrikidis* που κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι σταγόνες κοντά στα τοιχώματα (όρια του αγωγού) παραμορφώνονται πιο έντονα από τις ενδιάμεσες σταγόνες, ενώ η παραμόρφωση των ενδιάμεσων σταγόνων δείχνει πιο σημαντικές χρονικές διαφορές.

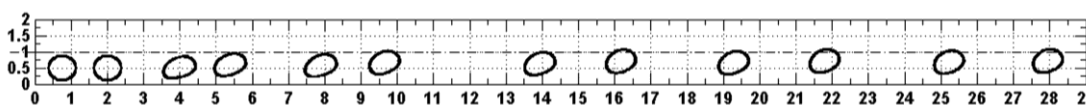
4.3.6. Συστοιχία δύο σταγόνων σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή.

Εδώ εξετάζονται περιπτώσεις διατάξεων που συγκροτούν συστοιχία από δύο ισομεγέθεις κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες μεσαίου μεγέθους με επιφανειακή τάση, οι οποίες εισάγονται στο περιβάλλον υγρό ή μια πίσω από την άλλη στην αριστερή είσοδο διδιάστατου καναλιού $H=2$. Τα κέντρα των σταγόνων της σειράς βρίσκονται πάνω σε παράλληλη ευθεία προς την μέση γραμμή (διάμηκες επίπεδο συμμετρίας) του καναλιού (αγωγού) με μεγάλη εκκεντρότητα, $\delta = -0.5$.

4.3.6.1. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη αρνητική εκκεντρότητα



Σχ.4.15. Δύο σταγόνες: $Re=40$, $We=5$, $Ca=0.125$, $\lambda=4$, $\delta=-0.5$, $k=0.375$, $t=0, 3.2, 6.8, 12, 16.4, 21.2$.

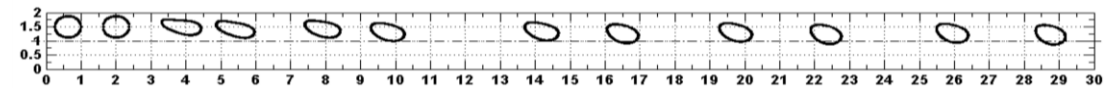


Σχ.4.16. Δύο σταγόνες: $Re=40$, $We=2.5$, $Ca=0.0625$, $\lambda=4$, $\delta=-0.5$, $k=0.375$, $t=0, 3.2, 6.8, 12, 16.4, 21.2$.

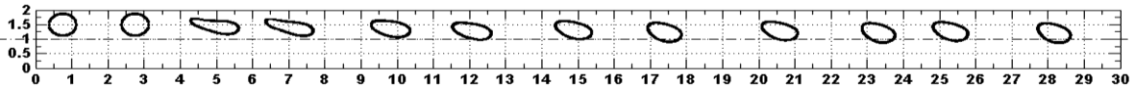
Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις των Σχ.4.15 και Σχ.4.16 προσομοιώνονται δύο περιπτώσεις 2-D (διδιάστατοι αγωγοί), διατάξεων δύο μεσαίου μεγέθους σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη αρνητική εκκεντρότητα με τις ίδιες αδιάστατες παραμέτρους $Re=40$, $\lambda=4.0$, $\delta=-0.5$, $k=0.375$ και $We=5$, $Ca=0.125$ στο Σχ.4.15. και $We=2.5$, $Ca=0.0625$ στο Σχ.4.16 αντίστοιχα.

4.3.6.2. Συστοιχία δύο σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη θετική εκκεντρότητα.

Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις των Σχ.4.17 και Σχ.4.18 προσομοιώνονται δύο 2-D περιπτώσεις διατάξεων δύο μεσαίου μεγέθους σταγόνων τοποθετημένων με μεγάλη θετική εκκεντρότητα με τις ίδιες αδιάστατες παραμέτρους $Re=40$, $\lambda=4$, $\delta=0.5$, $k=0.375$ και $We=5$, $Ca=0.125$ στο Σχ.4.17 και $We=6,67$, $Ca=0.167$ στο Σχ.4.18 αντίστοιχα. Η γενική άποψη των Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και οι τιμές των παραμέτρων που εξετάστηκαν επαληθεύουν επακριβώς την αναμενόμενη συμμετρική άποψη των σχημάτων και των πεδίων ροής για παρόμοιους αδιάστατους παραμέτρους προσομοίωσης.



Σχ.4.17. Δύο σταγόνες: $Re=40$, $We=5$, $Ca=0.125$, $\lambda=4$, $\delta=0.5$, $k=0.375$, $t=0, 3.2, 6.8, 12.0, 16.4, 21.2$.



Σχ.4.18. Δύο σταγόνες: $Re=40$, $We=6,67$, $Ca=0.167$, $\lambda=4$, $\delta=0.5$, $k=0.375$, $t=0, 4, 8, 12, 16.4$ και 20 .

Η διακύμανση της D και για τις δύο σταγόνες είναι μεταξύ 0.23 και 0.43 για τις περιπτώσεις Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και μεταξύ 0.17 και 0.33 στο Σχ.4.16. Αντίστοιχα στο Σχ.4.18, η διακύμανση της D είναι μεταξύ 0.23 και 0.52 για την επικεφαλής σταγόνα και μεταξύ 0.30 και 0.52 για την δεύτερη σταγόνα κοντά στο πάνω τοίχωμα. Αντίστοιχη είναι η διακύμανση του $E.R.$ και μεταβάλλεται μεταξύ 1.31 και 1.67 για τις περιπτώσεις των Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και μεταξύ 1.17 και 1.33 στο Σχ.4.16. Αντίστοιχα η διακύμανση της $E.R.$ κυμαίνεται μεταξύ 1.33 και 1.83 για την επικεφαλής σταγόνα και μεταξύ 1.42 και 1.83 για την δεύτερη σταγόνα στο Σχ.4.18. Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις οι τιμές των παραμέτρων παραμόρφωσης D και $E.R.$ δείχνουν πτωτική πορεία με την πάροδο του χρόνου.

Η γωνία θ κυμαίνεται²⁶ μεταξύ 160° και 145° για την επικεφαλής σταγόνα των περιπτώσεων Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και μεταξύ 156° και 146° στο Σχ.4.16. Αντιστοίχως η θ κυμαίνεται²⁷ μεταξύ 165° και 148° για την δεύτερη σταγόνα των περιπτώσεων Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και μεταξύ 158° και 148° στο Σχ.4.16. Παρατηρείται μια αυξητική τάση με μέγιστο και στην

²⁶ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 12, 16.4, 21.2)$ αντιστοίχως: $\theta_{head} = (160^\circ, 158^\circ, 148^\circ, 145^\circ, 150^\circ)$ και $\theta_{following} = (165^\circ, 161^\circ, 158^\circ, 150^\circ, 148^\circ)$ στο Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και $\theta_{head} = (156^\circ, 152^\circ, 151^\circ, 146^\circ, 154^\circ)$ και $\theta_{following} = (158^\circ, 154^\circ, 152^\circ, 151^\circ, 148^\circ)$ στο Σχ.4.16 αντιστοίχως.

²⁷ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 12, 16.4, 21.2)$ αντιστοίχως: $\theta_{head} = (160^\circ, 158^\circ, 148^\circ, 145^\circ, 150^\circ)$ και $\theta_{following} = (165^\circ, 161^\circ, 158^\circ, 150^\circ, 148^\circ)$ στο Σχ.4.15 και Σχ.4.17 και $\theta_{head} = (156^\circ, 152^\circ, 151^\circ, 146^\circ, 154^\circ)$ και $\theta_{following} = (158^\circ, 154^\circ, 152^\circ, 151^\circ, 148^\circ)$ στο Σχ.4.16 αντιστοίχως.

συνέχεια πτωτική τάση των γωνιών κλίσης για αμφότερες τις έκκεντρα τοποθετημένες σταγόνες με καθυστέρηση φάσης στην δεύτερη σταγόνα. Αντιστοίχως στο Σχ.4.18 η θ ²⁸ κυμαίνεται μεταξύ 164⁰ και 153⁰ για την επικεφαλής σταγόνα και μεταξύ 164⁰ και 154⁰ για την δεύτερη σταγόνα. Είναι εμφανής μια αυξητική τάση με μέγιστο.

Συμπερασματικά, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που περιγράφονται ανωτέρω και απο τη γενική εικόνα των Σχ.4.15 έως Σχ.4.18 οι ακόλουθες παρατηρήσεις μπορούν να υποστηριχθούν. Επαληθεύεται η αναμενόμενη αναλογική επίδραση του τριχοειδούς αριθμού στην παραμόρφωση των περιγραμμάτων των σταγόνων. Μπορούν να παρατηρηθούν εύκολα στην περιοχή των τοιχωμάτων η μεγαλύτερη παραμόρφωση των σχημάτων (επίμηκη σχήματα που μοιάζουν με ψάρια) και οι υψηλότερες καμπυλότητες στις ουρές των σταγόνων. Με την αύξηση του *Ca* διαμορφώνεται στις σταγόνες ένα κυματοειδές περίγραμμα ή μια μέση (σχήμα αλτήρα) κατά τα αρχικά στάδια της προσομοίωσης, όπως απεικονίζεται στα Σχ.4.15, Σχ.4.17 και Σχ.4.18.

Ο μεγάλος άξονας του κάθε ψευδο-ελλειψοειδούς προσανατολίζεται προς την κατεύθυνση της στιγμιαίας γωνίας κλίσης που παρουσιάζει μικροδιαφορές με την εξέλιξη του χρόνου και η οποία σταθεροποιείται τελικά. Η γωνία κλίσης αυξάνει ελαφρώς με τον *Ca*.

Τα κεντροειδή των δύο σταγόνων της συστοιχίας τείνουν έντονα να μεταναστεύσουν και να συγκλίνουν προς την κεντρική γραμμή του καναλιού (επίπεδο συμμετρίας) και αναπτύσσεται ένα κενό από σταγόνες δακτυλιοειδές στρώμα κοντά στα στερεά όρια. Επιπλέον, καθώς το φαινόμενο εξελίσσεται στον χρόνο, παρατηρείται, αύξηση της συνολικής έκτασης, που καταλαμβάνει η διάταξη των σταγόνων μέσα στον αγωγό. Τέλος παρατηρείται ότι τα περιγράμματα των σταγόνων τείνουν να ανακουφιστούν και να συγκλίνουν σε μια σταθερή κατάσταση με μικροδιακυμάνσεις.

4.4. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΤΑΝΑΣΤΕΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΑΓΟΝΩΝ.

Τα προβλεπόμενα από την προσομοίωση περιγράμματα των σταγόνων και η μετανάστευση των σταγόνων (droplet migration) για επιλεγμένες συνθήκες ροής, που εμφανίζονται στα παραπάνω σχήματα, είναι σε καλή ποιοτική και οπτική συμφωνία με τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Συνοπτικά οι ακόλουθες παρατηρήσεις μπορούν να υποστηριχθούν.

1. Η ύπαρξη σταθερών και ασταθών επιμέρους λύσεων (κλάδων) για σταθερά περιγράμματα σταγόνων, που προκύπτει από τη μη γραμμική εξάρτηση πεδίου ροής και

²⁸ Συγκεκριμένα για $t' = (3.2, 6.8, 12, 16.4, 20)$ αντιστοίχως: $\theta_{head}=(164^0, 164^0, 161^0, 156^0, 154^0)$ και $\theta_{following}=(164^0, 164^0, 161^0, 156^0, 154^0)$.

σχήματος σταγόνας. Ένα πρώτο σκέλος αντιστοιχεί σε σχεδόν απαραμόρφωτες σταγόνες, όπου η παραμόρφωση της σταγόνας είναι μικρή, και οι σταγόνες ευθυγραμμίζονται στην κατεύθυνση του άξονα. Ένα δεύτερο σκέλος από επιμήκεις σταγόνες, σταθεροποιημένες κατά κύριο λόγο από τριχοειδείς δυνάμεις χαλάρωσης, όπου η παραμόρφωση των σταγόνων είναι μεγαλύτερη, και οι σταγόνες είναι ευθυγραμμισμένες περίπου με τον άξονα παραμόρφωσης, *Blawdziewicz et.al.*, 2002, 2003.

2. Κατά τη διάρκεια της ροής οι σταγόνες τείνουν να μεταναστεύουν προς την κεντρική γραμμή του καναλιού ή τον άξονα του σωλήνα, καθώς και προς το τοίχωμα του σωλήνα, *Zhou and Pozrikidis, Goldsmith and Mason, 1962*.

3. Επίσης, απεικονίζεται η ανάπτυξη του δακτυλιοειδούς στρώματος χωρίς σταγόνες στην γειτονιά των τοιχωμάτων που έχει ως αποτέλεσμα τον προσανατολισμό και τη σταδιακή σύγκλιση των επιμηκυμένων σταγόνων στην κεντρική γραμμή.

4. Η τεράστια επίδραση του Ca στην παραμόρφωση των σταγόνων επαληθεύεται. Είναι εμφανές ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο Ca , τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση και περιστροφή της σταγόνας. Οι σταγόνες κοντά στα τοιχώματα παραμορφώνεται πολύ εντονότερα από τις κεντρικές σταγόνες.

Σε χαμηλούς Ca η συνολική παραμόρφωση των επιμηκυνόμενων σταγόνων σχηματίζουν μορφές περιγραμμάτων σταγόνων που μοιάζουν με οβάλ μέχρι τελικά οι σταγόνες να χαλαρώσουν σε μόνιμα σχήματα, ενώ σε υψηλούς Ca σχηματίζουν μορφές περιγραμμάτων που μοιάζουν με αλτήρα. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση, οι πλευρές της σταγόνας ισοπεδώνονται σταδιακά μέχρι η σταγόνα να αναπτύξει τελικά μια μέση και από τότε ο ρυθμός επιμήκυνσης της σταγόνας αυξάνει και το εύρος του κεντρικού και πίσω τμήματος της σταγόνας μειώνεται δραστικά, ενώ το μπροστινό της μέρος διατηρεί το σχεδόν σφαιρικό σχήμα και παραμορφώνεται μόνο ελαφρώς. Στην *Ha & Leal, 2001* περιγράφονται και εξηγούνται οι μηχανισμοί παρόμοιων οπτικών παρατηρήσεων.

5. Επιπρόσθετα η μελέτη ελέγχει την αναλογική επίδραση του μεγέθους της σταγόνας στην παραμόρφωση της σταγόνας που υποστηρίζεται στην *Kaliakatsos & Tsangaris, 2000*. Οι μικρότερες σταγόνες παραμορφώνονται λιγότερο από το αρχικό κυκλικό σχήμα σε σύγκριση με τις μεγαλύτερες σταγόνες. Οι μικρές σταγόνες κινούνται σχεδόν με την ταχύτητα του περιβάλλοντος ρευστού στην κεντρική γραμμή του αγωγού.

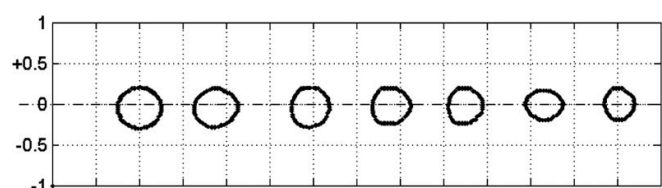
4.5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Η παραμόρφωση και η μετανάστευση των σταγόνων για τις επιλεγμένες συνθήκες ροής, που παρουσιάζονται στα Σχ.4.1-4.18, συμφωνούν αρκετά καλά ποιοτικά και οπτικά με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας π.χ. *Zhou and Pozrikidis (1994)*, *Ha and Leal (2001)*, *Btawdziewicz et al.(2002)* και *(2003)*, *Kaliakatsos and Tsangaris (2000)*. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά του απότομου (blunting) προφίλ ταχύτητας και ο σχηματισμός δύο περιοχών ροής (πυρήνα και δακτυλίου) είναι επίσης σε γενική συμφωνία με προηγούμενες πειραματικές παρατηρήσεις και θεωρητικά μοντέλα διφασικής ροής που αναπτύσσονται με αιτία την διαφορά πίεσης στα άκρα του αγωγού για διασπορές (suspensions) που αποτελούνται από άκαμπτα ή παραμορφώσιμα σωματίδια *Skalak et al.(1989)*, *Nott and Brady (1991)*, *Zhou and Pozrikidis (1994)*, ή γαλακτώματα (emulsions), *Kraynik (1988)*.

4.5 1. Αριθμητική σύγκριση

4.5 1.1. Μία σταγόνα για συνθήκες $Re=2$, $Ca=1.0$, $\lambda=10$, $k=0.25$.

Στα Σχ.4.19. και Σχ.4.20. παρουσιάζονται χρονικές ακολουθίες περιγραμμάτων σταγόνας σε διδιάστατη διφασική ροή για συνθήκες $Re=2$, $Ca=1.0$, $\lambda=10$, $k=0.25$. Οι σταγόνες τοποθετούνται αρχικά στην είσοδο του καναλιού σε δύο διαφορετικές έκκεντρες θέσεις αντίστοιχα (α) $\delta = 0.05$ (β) $\delta = 0.35$ για να καταστεί εφικτή η οπτική και ποσοτική σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα των Fig. 14b - 14c στην *Zhou and Pozrikidis, 1994*.



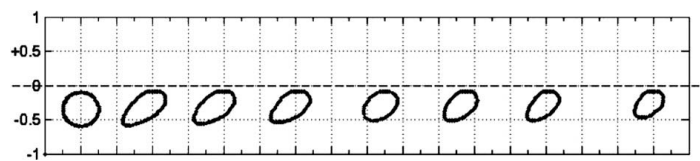
Σχ.4.19.²⁹ Περιγράμματα σταγόνας: $Re=2$, $Ca=1$, $\lambda=10$, $\delta=0.05$, $k=0.25$, $t=0,5,10,15,20,25,32$.

Για $\delta=0.05$, οι τιμές των παραμέτρων D , (ER) κυμαίνονται μεταξύ 0.01 και 0.1 (0.88 και 1.06) στο Σχ.4.19., ενώ αντίστοιχα κυμαίνονται μεταξύ 0.0 και 0.04 (0.99 και 1.06) στο Fig.14b των *Zhu and Pozrikidis*. Για $\delta=0.35$, οι τιμές των D , (ER) κυμαίνονται μεταξύ 0.20 και 0.33 (1.06 και 1.41) στο Σχ.4.20 ενώ αντίστοιχα κυμαίνονται μεταξύ 0.21 και 0.29 (1.18 και 1.27) στο

²⁹ Δες και σελ. 1208 *Christafakis et al., 2009*, Fig. 8.

Fig.14c των *Zhu and Pozrikidis*. Οι διακυμάνσεις της γωνίας κλίσης κυμαίνεται μεταξύ 135° και 141° στο Σχ.4.20 και 138° και 147° στο Fig.14c των *Zhu and Pozrikidis*.

Η σύγκριση των στιγμιαίων περιγραμμάτων των σταγόνων στην χρονική εξέλιξη της προσομοίωσης, η παραμόρφωση και η μετανάστευση τους σε συνδυασμό με τις τιμές των παραμέτρων παραμόρφωσης δείχνουν αρκετή ομοιότητα. Για τις σταγόνες πολύ κοντά στον άξονα συμμετρίας, ($\delta=0.05$) παρατηρούνται μόνο μικρές διακυμάνσεις. Η μη μηδενική τιμή του αριθμού Re στα αποτελέσματα μας οδηγεί σε μεγαλύτερη παραμόρφωση των σταγόνων κοντά στα τοιχώματα από την παραμόρφωση στη *Zhu and Pozrikidis*, στην οποία το ρευστό θεωρείται χωρίς αδράνεια ($Re=0$) και δικαιολογεί τις μικροαποκλίσεις.



Σχ.4.20.³⁰ Περιγράμματα σταγόνας: $Re=2$, $Ca=1$, $\lambda=10$, $\delta=0.35$, $k=0.25$, $t=0, 3, 6, 10, 15, 19, 23, 28.8$.

4.5.1.2. Διασπορά δύο μεγάλων σταγόνων σε Ροή Couette.

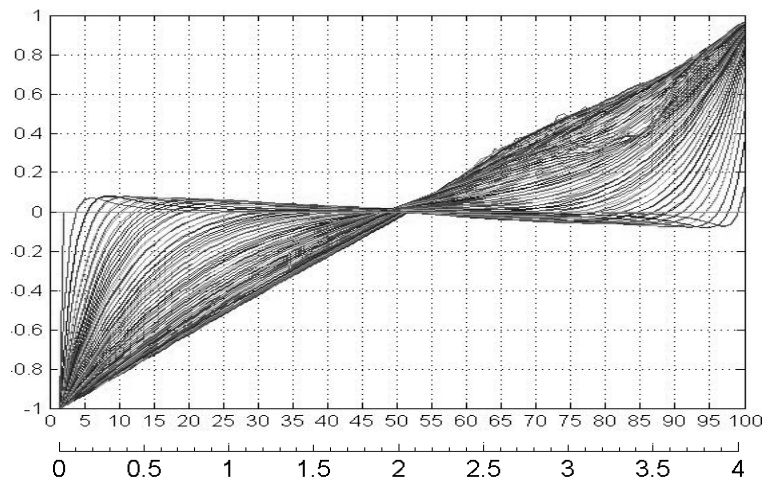
Μελετήθηκε η περίπτωση διφασικής ροής τύπου *Couette* με διασπορά δύο σταγόνων, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις για ταχύτητες³¹ $u=1$, $v=0$ στο πάνω τοίχωμα και $u=-1$, $v=0$ στο κάτω τοίχωμα και με περιοδικές συνθήκες δεξιά – αριστερά, όπως στις περιπτώσεις των *Zhu and Pozrikidis, 1993*. Τα τοιχώματα του διδιάστατου αγωγού δηλαδή μετακινούνται παράλληλα με ίσες και αντίθετες κατεύθυνσης οριζόντιες ταχύτητες u . Στο Σχ.4.21 το πεδίο ταχυτήτων στην περίπτωση ροής *Couette* επαληθεύει τιμές ταχυτήτων $+1$ στο επάνω τοίχωμα και -1 στο κάτω τοίχωμα. Μέσα στο πεδίο οι κατανομές u/U είναι ομαλές καμπύλες που συγκλίνουν στην τιμή $u=0$ στο σημείο τομής των διαγωνίων του 2-D αγωγού.

Εφαρμόζονται περιοδικές οριακές συνθήκες στο δεξιό και αριστερό άκρο μιας περιόδου ευθυγράμμου αγωγού μήκους $L=4$ και πλάτους $H=2$, δηλαδή θεωρούμε ότι οι οριακές συνθήκες ταυτίζονται (overlapping) στην είσοδο και την έξοδο του πεδίου ροής, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις: $u_{0,j} = u_{imax-1,j}$, $v_{0,j} = v_{imax,j}$, $p_{1,j} = p_{imax,j}$, $\phi_{0,j} = \phi_{imax-1,j}$.

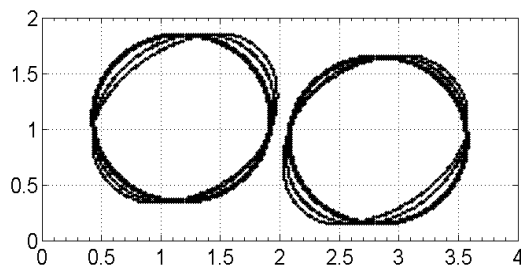
³⁰ Δες και σελ. 1209 *Christafakis et al., 2009, Fig.9*.

³¹ Αλγόριθμος οριακής συνθήκης πάνω στις πλάκες:

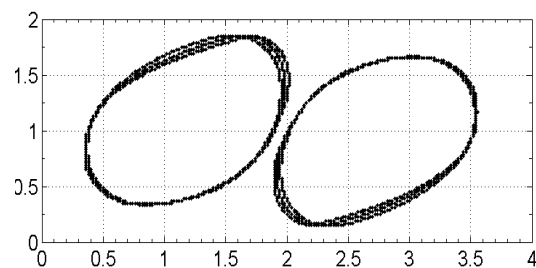
```
do i = 0,imax+1
  U(i,jmax+1) = 2.0 - U(i,jmax) ! στο επάνω τοίχωμα (όπως στο πρόβλημα driven cavity)
  U(i,0) = -2.0 - U(i,1) ! στο κάτω τοίχωμα
end do
```



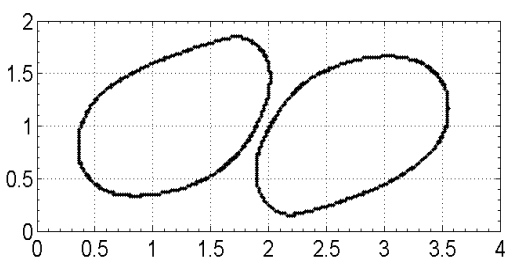
Σχ.4.21. Η κατανομή των τιμών της αδιάστατης ταχύτητας u/U (από -1 έως 1) στο μονοφασικό πεδίο Ροής Couette. 1-100 είναι τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος στην οριζόντια διεύθυνση x .



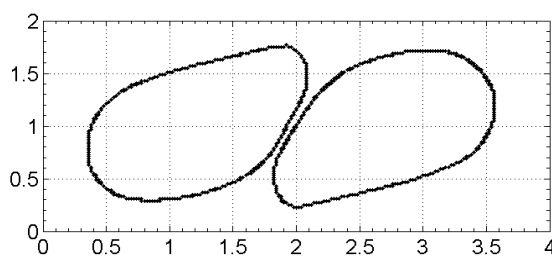
(α) $t = 0, 0.2, 0.4$



(β) $t = 0.6, 0.8, 1.2$



(γ) $t = 1.0$



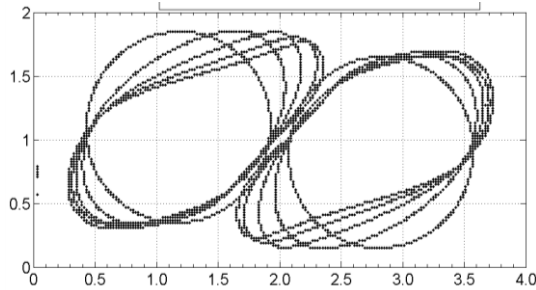
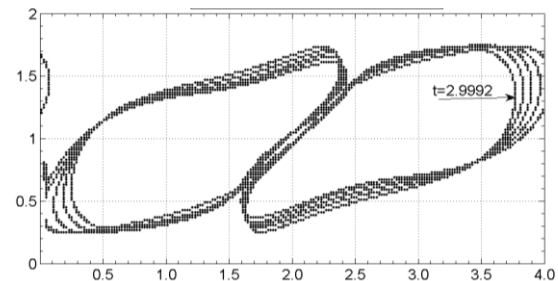
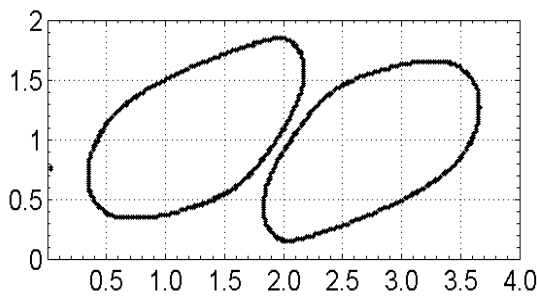
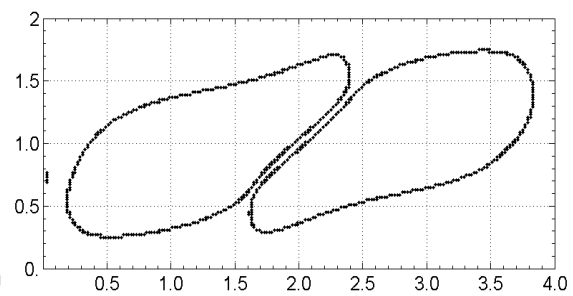
(δ) $t = 2.2$

Σχ.4.22. (α,β,γ,δ). Δύο Σταγόνες σε ροή Couette: $Re=2$, $Ca=0.2$, $We=0.4$, $\lambda=1$, $\delta=0.05$, $k=0.75$.

Με δοκιμές³² προσαρμόζεται στον αλγόριθμο μια ψευδολωρίδα κυψελίδων της τάξεως των 10 κυψελίδων δεξιά και αριστερά της περιόδου L που ενσωματώνεται φαινομενικά στο

³² Η ανάγκη αυτή προκύπτει, επειδή χρησιμοποιούμε τις διακριτοποιήσεις *WENO* για τον υπολογισμό της ϕ στα άκρα του πεδίου και για μια ζώνη 6 κυψελίδων από κάθε όριο η τιμή της ϕ είναι προσεγγιστική και εισάγει ανακρίβειες όσο και να βελτιώσουμε την παρεμβολή των τιμών της ϕ . Έτσι

πεδίο, ώστε να υλοποιείται η παραπάνω σχέση με ακρίβεια, χωρίς όμως οι τιμές των u, v, p, ϕ μέσα στην ψευδολωρίδα να λαμβάνονται υπόψη στους υπολοίπους υπολογισμούς του ρευστοδυναμικού πεδίου.

(α) $t = 0.02, 0.6, 1.2, 1.8, 2.4$ (β) $t = 3.0, 3.6, 4.8, 5.52$ (γ) $t = 1.2$ (δ) $t = 3.6$

Σχ.4.23. (α,β,γ,δ). Δύο Σταγόνες σε ροή Couette: $Re=2$, $Ca = 0.33$, $We = 0.67$, $\lambda=1$, $\delta=0.05$, $k=0.75$.

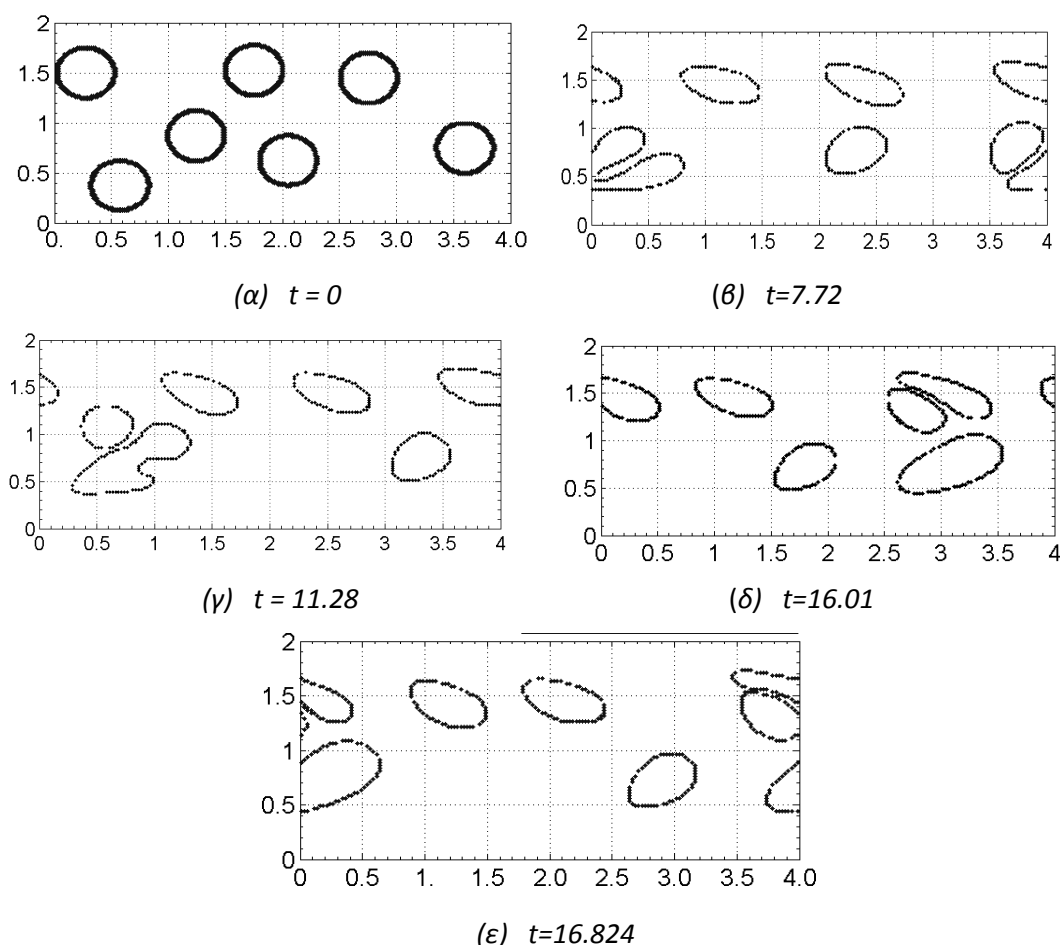
Η κατάλληλη υλοποίηση των οριακών συνθηκών με την τεχνική αυτή, επιτρέπει στη μεθοδολογία μας την μελέτη περιπτώσεων της βιβλιογραφίας με περιοδικές συνθήκες, όπως την υλοποίηση των παραδοχών των *Zhu and Pozrikidis*. Συγχρόνως παρουσιάζει πρόσθετο ενδιαφέρον γιατί απελευθερώνει υπολογιστικούς πόρους που καθιστούν εφικτή την μελέτη μεγάλων πεδίων ροής χρησιμοποιώντας πολύ μικρότερα υπολογιστικά χωρία χωρίς απώλεια της ακρίβειας.

Στο Σχ.4.22 για $Ca=0.2$, $We=0.4$ και στο Σχ.4.23, $Ca=0.33$, $We=0.67$ παρουσιάζονται χρονικές ακολουθίες περιγραμμάτων δύο σταγόνων για συνθήκες: $Re=2$, $\lambda=1.0$, $k=0.75$ σε 2-D ροή *Couette*. Οι σταγόνες τοποθετούνται αρχικά σε δύο διαφορετικές έκκεντρες θέσεις αντίστοιχα (α) $\delta=0.05$ και σε απόσταση περίπου $\alpha=0.2k$ για να καταστεί εφικτή η οπτική και

τα σημεία μίας σταγόνας που τείνουν να εξέλθουν του πεδίου δεν περιγράφονται με ακρίβεια και από εκεί αρχίζουν λάθη.

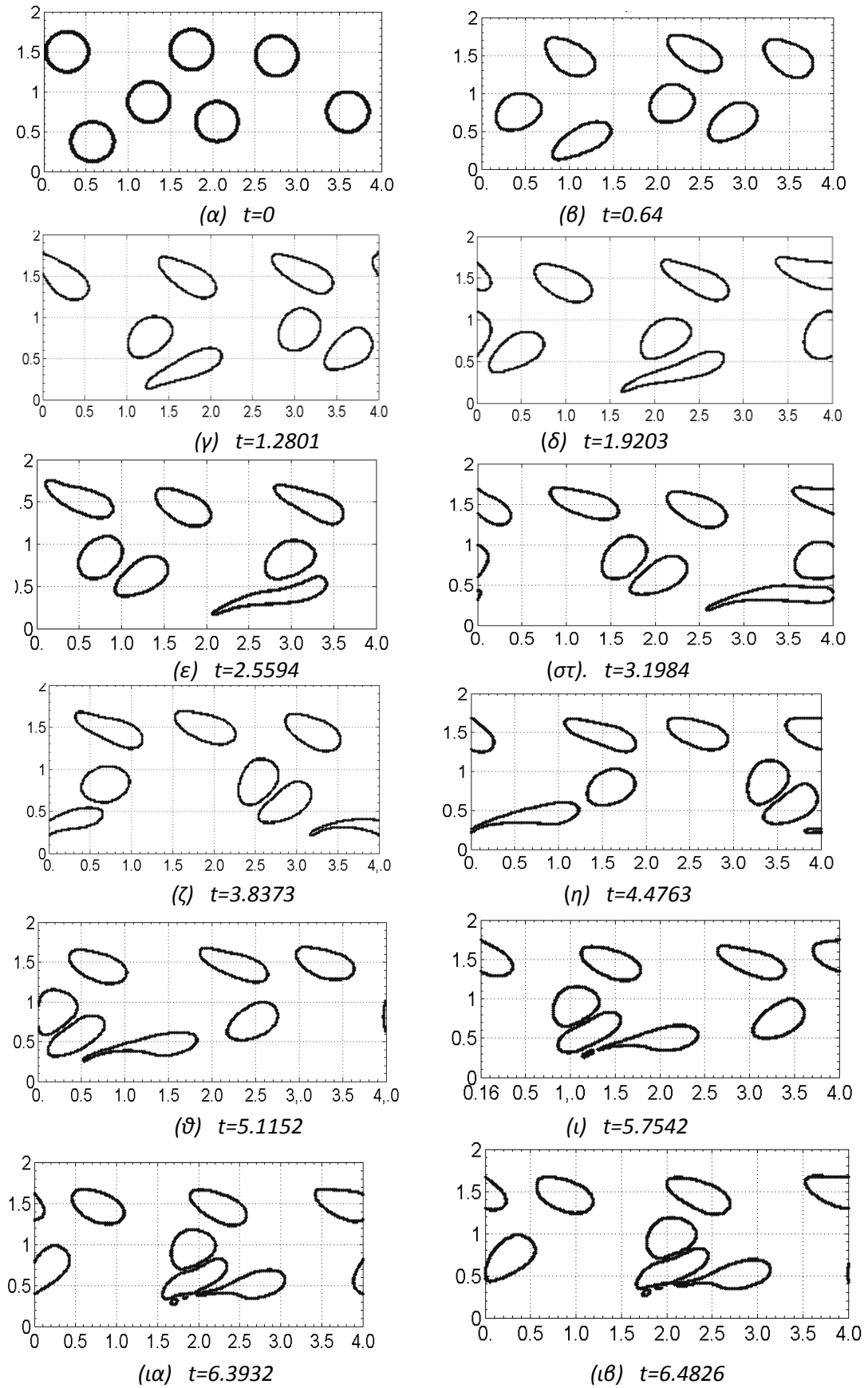
ποσοτική σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα των Fig.12.a,b στην Zhou and Pozrikidis,1993.

4.5.1.3. 2D ροή Poiseuille 7 σταγόνων με περιοδικές οριακές συνθήκες δεξιά και αριστερά.



Σχ.4.24.(α,β,γ,δ) Διασπορά επτά σταγόνων σε ροή poiseuille: $Re=2$, $Ca=1$, $We=2$, $\lambda=1$, $k=0.25$. Τα περιγράμματα είναι αντίστοιχα με τα Fig.9 (a),(b),(c),(d) στην Zhou and Pozrikidis (1994), (ε) $t=16.824$

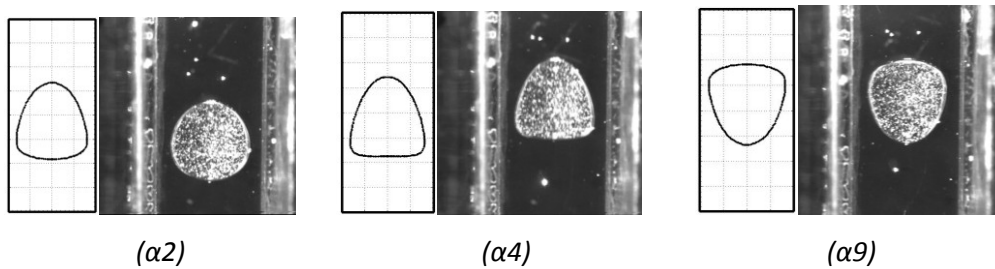
Στο Σχ.4.24. παρουσιάζονται χρονικές ακολουθίες περιγραμμάτων ($t=0$, $t=7.72$, $t=11.28$, $t=16$) της χαρακτηριστικής διάταξης του Fig.9 σελ.88 στην Zhou and Pozrikidis (1994) σε συνθήκες ροής Poiseuille με $Re=2$, $Ca=1.0$, $\lambda=1.0$, $k=0.125$. Η διάταξη αποτελείται από επτά ισομεγέθεις σταγόνες αρχικά τοποθετημένες σε τυχαίες ακανόνιστες θέσεις στο κανάλι. Επιλέχθηκαν περιοδικές οριακές συνθήκες δεξιά και αριστερά σε μήκος αγωγού $L=4$ (περίοδος) και πλάτους, $H=2$ δηλ υπολογιστικό χωρίο (4×2) και αριθμητικό πλέγμα 160×80 για να καταστεί εφικτή η οπτική και ποσοτική σύγκριση των παρόντων αποτελεσμάτων με τα αποτελέσματα του Fig.9 σελ 88 στην Zhou and Pozrikidis,1994.



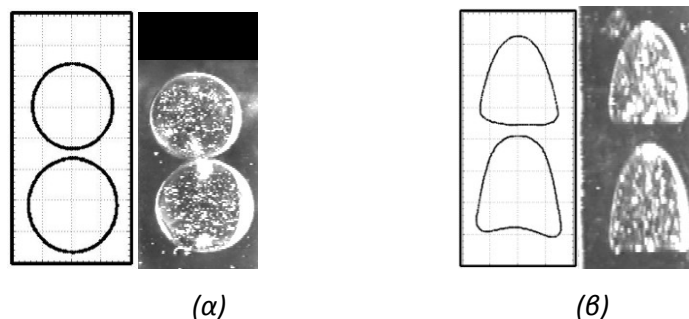
Σχ.4.25. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ) Διασπορά επτά σταγόνων σε ροή Poiseuille $Re=2$, $Ca=1$, $We=2$, $\lambda=1$, $k=0.25$.

Βελτιώνοντας την ανάλυση του αριθμητικού πλέγματος σε 250×125 λαμβάνομε τα περιγράμματα του Σχ.4.25. με καλύτερη λεπτομέρεια και ακρίβεια και μπορούμε να παρατηρήσουμε την διάσπαση των ουρών των σταγόνων και την ταυτόχρονη ανάπτυξη μικροσκοπικών σταγονιδίων σε περιοχές υψηλής διάτμησης κοντά στα τοιχώματα.

4.5.2. Σύγκριση του μοντέλου με πειραματικά δεδομένα του εργαστηρίου.



Σχ.4.26. (α2, α4, α9)³³ Περιγράμματα σταγόνας σε διφασική ροή μέσα σε ευθύγραμμο αγωγό τετραγωνικής διατομής: $Re=0.5$, $We=0.5$, $Ca=1.0$, $\lambda=0.51$, $k=0.8$, $\delta=0$ και τα αντίστοιχα στιγμιότυπα του Fig. 9 a2, a4, a9 στην Mathioulakis.



Σχ.4.27. (α, β)³⁴ Περιγράμματα δύο σταγόνων σε διφασική ροή μέσα σε ευθύγραμμο αγωγό τετραγωνικής διατομής: $Re = 0.5$, $We = 0.33$, $Ca = 0.67$, $\lambda = 0.51$, $k = 0.69$ & 0.76 , $\delta = 0.02$ και τα αντίστοιχα στιγμιότυπα του Fig.12 (a),(b) στην Mathioulakis.

Στα Σχ.4.26. και Σχ.4.27. συγκρίνουμε οπτικά και ποσοτικά τα παρόντα αριθμητικά αποτελέσματα με τα πειραματικά αποτελεσμάτα των Fig.9 (a2, a4, a9) και Fig. 12 (a) and (b) της Mathioulakis, 2005, στην οποία εξετάζεται η παραμόρφωση σταγόνων ελαίου σιλικόνης με κινηματικό ιξώδες 356 cSt που διεσπάρησαν στην κύρια φάση από καστορέλαιο με κινηματικό ιξώδες 696 cSt μέσα σε σωλήνα τετραγωνικής διατομής.

³³ Christafakis & Tsangaris, 2008, Fig.8.

Στο Σχ.4.26 παρουσιάζονται ενδεικτικά προφίλ σταγόνων για $Re=0.5$, $We=0.5$, $Ca=1$, $\lambda=0.51$, $k = 0.8$ και $\delta=0$ και στο Σχ.4.26 για $Re=0.5$, $We=0.33$, $Ca=0.67$, $\lambda=0.51$, $k=0.69$ & 0.76 και $\delta=0.02$. Στα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθοδολογίας μας, η D κυμαίνεται μεταξύ 0.02 και 0.07 και ο $E.R.$ κυμαίνεται μεταξύ 1.04 και 1.18, ενώ στα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα η D κυμαίνεται μεταξύ 0.03 και 0.11 και ο $E.R.$ μεταξύ 1.02 και 1.11. Τα στιγμιαία σχήματα των σταγόνων, η παραμόρφωση και μετανάστευση τους, καθώς και οι παράμετροι παραμόρφωσης που μετρήθηκαν δείχνουν αρκετή ομοιότητα και παρατηρούνται μόνο μικρές διαφοροποιήσεις.

Οι μη μηδενικές τιμές των αριθμών Re και We στα αποτελέσματα μας λόγω αριθμητικών περιορισμών σε σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα σχεδόν μη αδρανειακών ρευστών ($Re \approx 0.003$ and $We \approx 0.0002$) σε μικρο-σωλήνα $5 \times 5 \text{ mm}^2$, δεν φαίνεται να επηρεάζουν τις παρατηρήσεις. Η σύγκριση αυτή δεικνύει σαφώς ότι η παραπάνω αριθμητική μέθοδος είναι τουλάχιστον εξίσου καλή στην πρόβλεψη της παραμόρφωσης σταγόνων, με αντίστοιχες δημοσιεύσεις.

4.6. ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΡΟΗΣ (u, v, p).

Για τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στο κεφάλαιο αυτό, το λογισμικό NaSt-LSM καταγράφει τα αποτελέσματα σε αρχεία δεδομένων τύπου .dat και προσφέρει πολυπληθές υλικό για περαιτέρω ανάλυση και επεξεργασία των ρευστοδυναμικών χαρακτηριστικών του διφασικού πεδίου ροής.

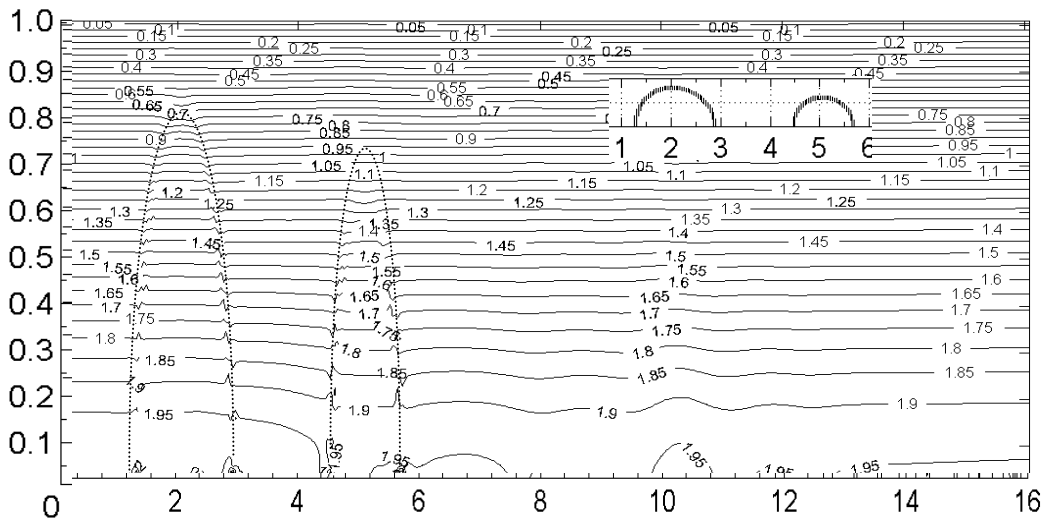
Ενδεικτικά για την εμβάθυνση στο θέμα παρουσιάζονται για κάποιες από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές στοιχεία και διαγράμματα τα οποία προκύπτουν από την μετανάλυση των αρχείων αποτελεσμάτων του λογισμικού μας για τα πεδία u, v, p .³⁵

4.6.1. Ισοταχείς στο πεδίο ροής.

Στο Σχ.4.28. σχεδιάζονται οι ισοταχείς (u/U) του διφασικού πεδίου ροής του Σχ.4.1. Είναι εμφανής η μικρή τοπική παραμόρφωση στα περιγράμματα των σταγόνων.

³⁴ Christafakis & Tsangaris, 2008, Fig.9.

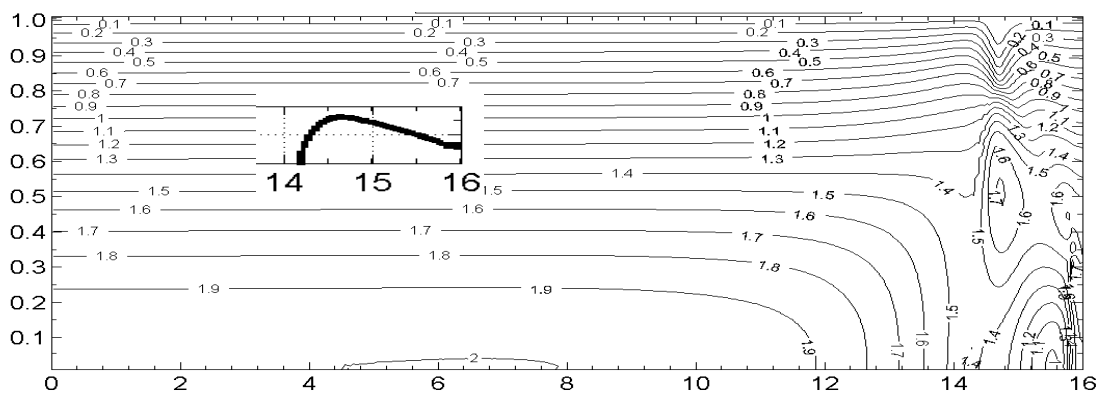
³⁵ Επίσης καταγράφονται τα παράγωγα μεγέθη ψ και ω και οι τάσεις T_{xy} , T_{xx} .



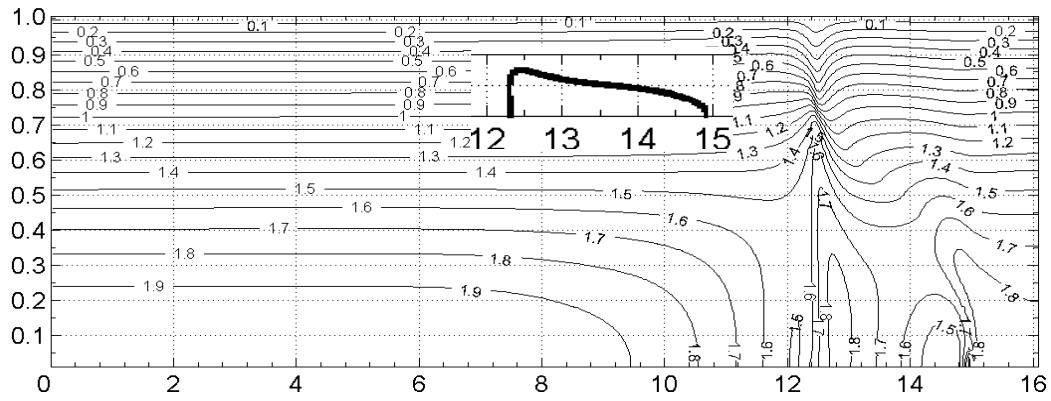
Σχ.4.28. Ισοταχείς (u/U) του διασφυκτικού πεδίου του Σχ.4.1. για $t=0.0376$ (η μικρή διαταραχή σκιαγραφεί το σχήμα των σταγόνων).

4.6.2. Η κατανομή της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού.

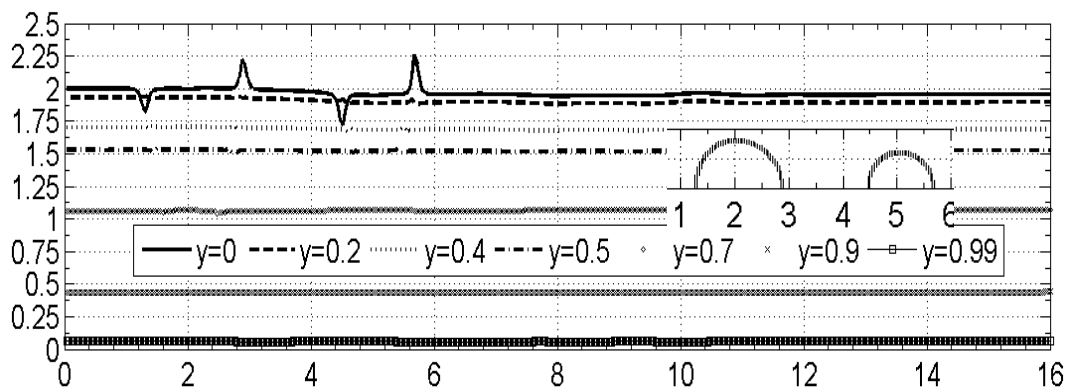
Παρουσιάζεται η κατανομή της αξονικής ταχύτητας κατά μήκος του αγωγού, τόσο στον άξονα συμμετρίας του αγωγού, όσο και σε άλλες εγκάρσιες θέσεις του αγωγού για μια συγκεκριμένη θέση των σταγόνων στον αγωγό. Παρατηρούνται οι παραμορφώσεις της u κοντά στον άξονα και οι διαφοροποιήσεις στην κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας σε διάφορες θέσεις του αγωγού, μέσα και πλησίον της σταγόνας.



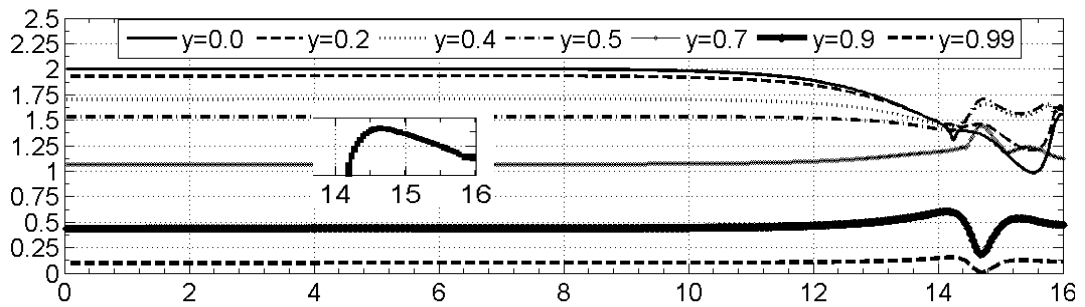
Σχ.4.29. Ισοταχείς του διασφυκτικού πεδίου του Σχ.4.2 για $t=9.036$.



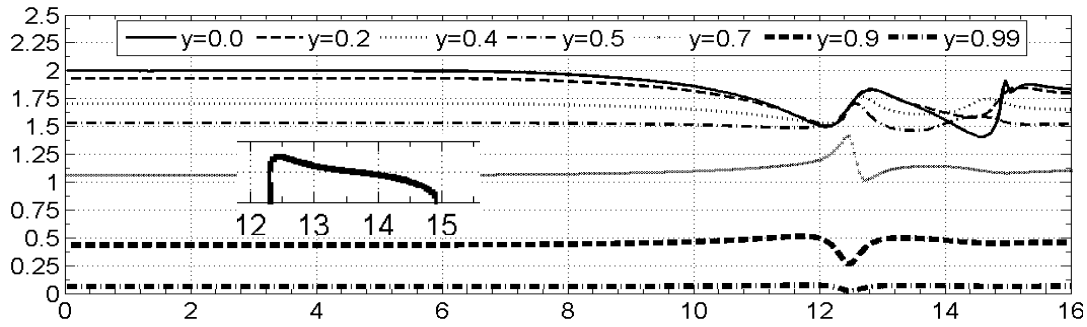
Σχ.4.30. Ισοταχείς του διφασικού πεδίου του Σχ.4.3 για $t=7.2476$.



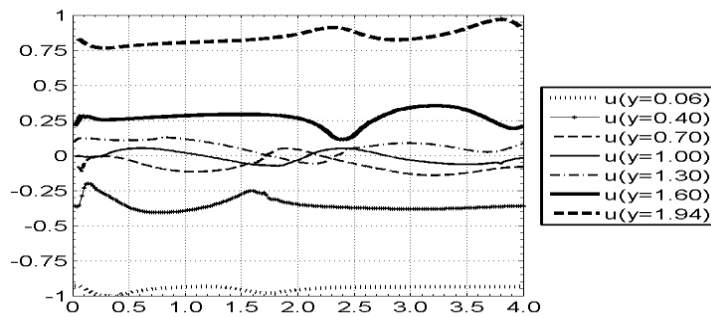
Σχ.4.31. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U στις εγκάρσιες θέσεις γ/R (0 - 0.2-0.4-0.5-0.7-0.9-0.99) για το πεδίο του Σχ.4.1 για $t=0.0376$.



Σχ.4.32. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U στις εγκάρσιες θέσεις γ/R (0 - 0.2-0.4-0.5-0.7-0.9-0.99) για το πεδίο του Σχ.4.2 για $t=9.036$.

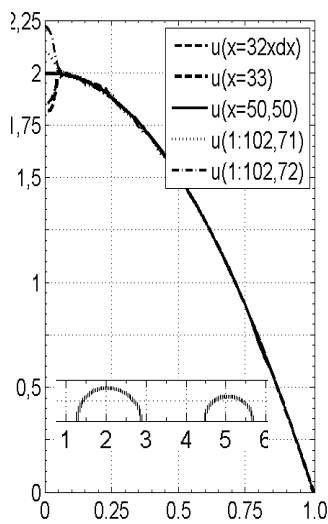


Σχ.4.33. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U στις εγκάρσιες θέσεις y/R (0 - 0.2-0.4-0.5-0.7-0.9-0.99) για το πεδίο του Σχ.4.3 για $t=7.2476$.

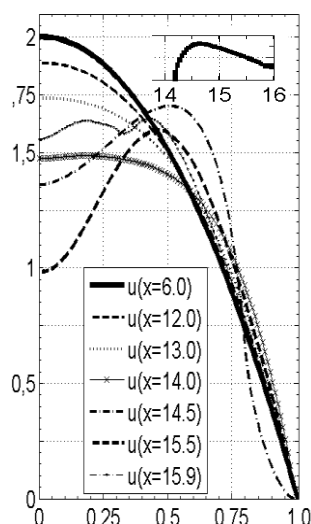


Σχ.4.34. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης ταχύτητας u/U στις εγκάρσιες θέσεις y/h (0.06- 0.4-0.7-1.0 -1.30-1.60-1.94) του Σχ.4.23: Ροή Couette για $t= 5.52$.

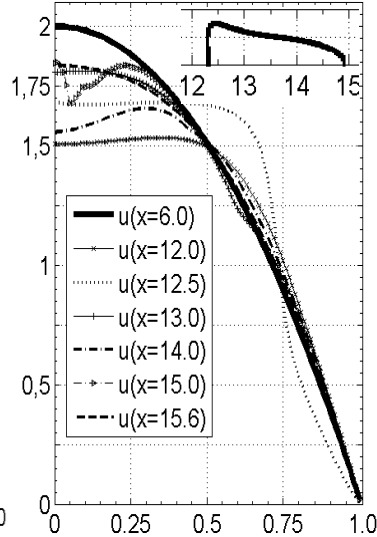
4.6.3. Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u σε επιλεγμένες θέσεις κατά μήκος του αγωγού.



α. Σχ.4.1.

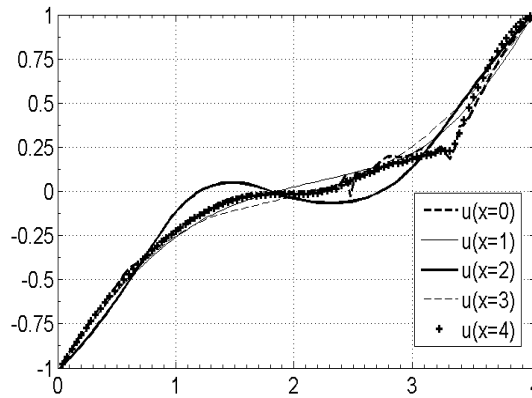


β. Σχ.4.2.

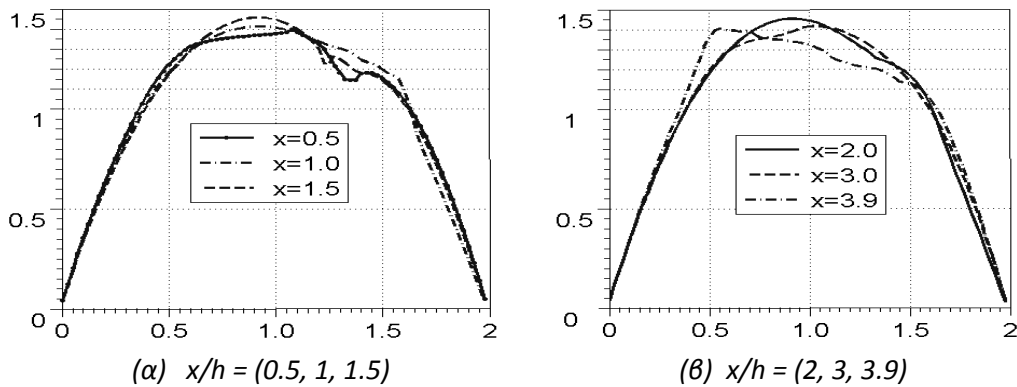


γ. Σχ.4.3.

Σχ.4.35.(α,β,γ) . Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/R για τα διφασικά πεδία α) του Σχ.4.1 για $t=0.0376$ β) του Σχ.4.2 για $t=9.036$ γ) του Σχ.4.3 για $t=7.2476$.

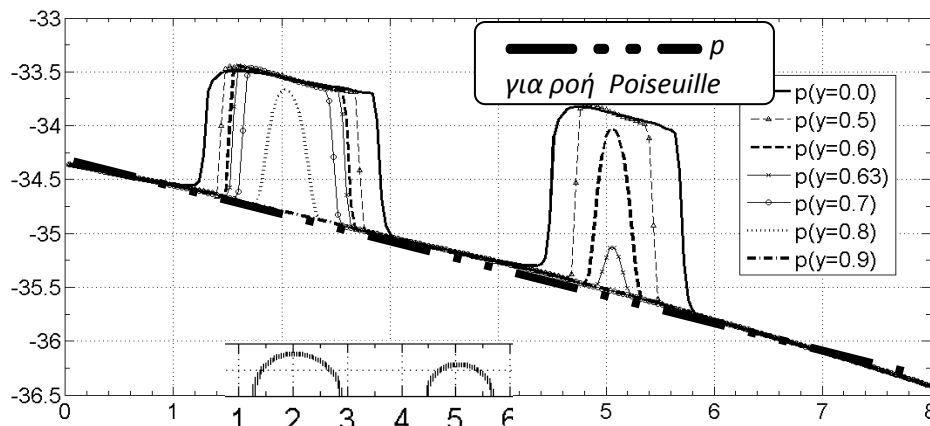


Σχ.4.36. Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/h (0-1-2-3-4) για το διφασικό πεδίο σε Ροή Couette του Σχ.4.23 για $t = 5.52$.



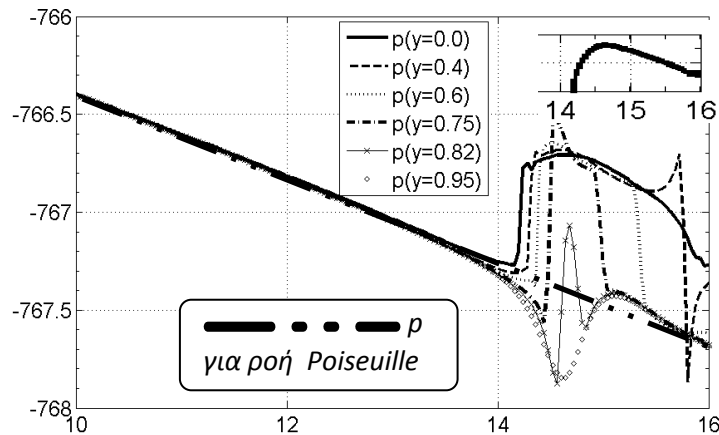
Σχ.4.37(α,β). Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/h για το διφασικά πεδίο της διασποράς επτά σταγόνων σε ροή poiseuille του Σχ.4.24 για $t=16.824$.

4.6.4. Η κατανομή της πίεσης κατά μήκος του αγωγού.

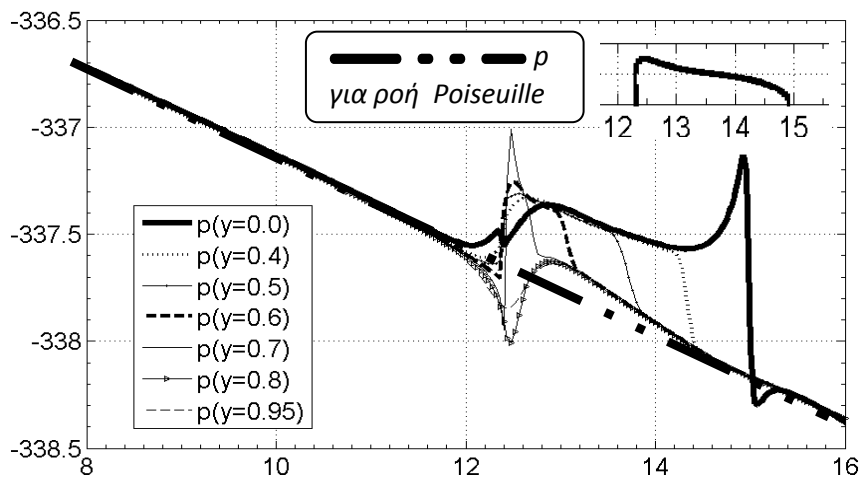


Σχ.4.38. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p στις εγκάρσιες θέσεις y/R (0 - 0.5-0.6-0.63-0.7- 0.8 -0.9) για το πεδίο του Σχ.4.1 για $t=0.0376$ και η αντίστοιχη για μονοφασική ροή Poiseuille.

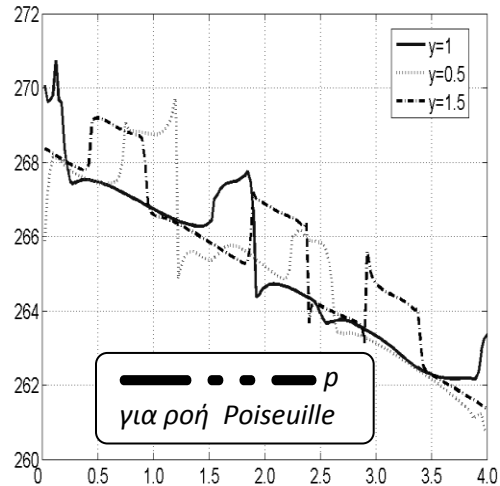
Παρουσιάζεται η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p σε διάφορες εγκάρσιες θέσεις y/h κατά μήκος του αγωγού, τόσο στον άξονα συμμετρίας του αγωγού, όσο και σε άλλες εγκάρσιες θέσεις του αγωγού για ένα στιγμιότυπο των σταγόνων στον αγωγό. Επίσης παρουσιάζεται η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p για την αντίστοιχη μονοφασική ροή.



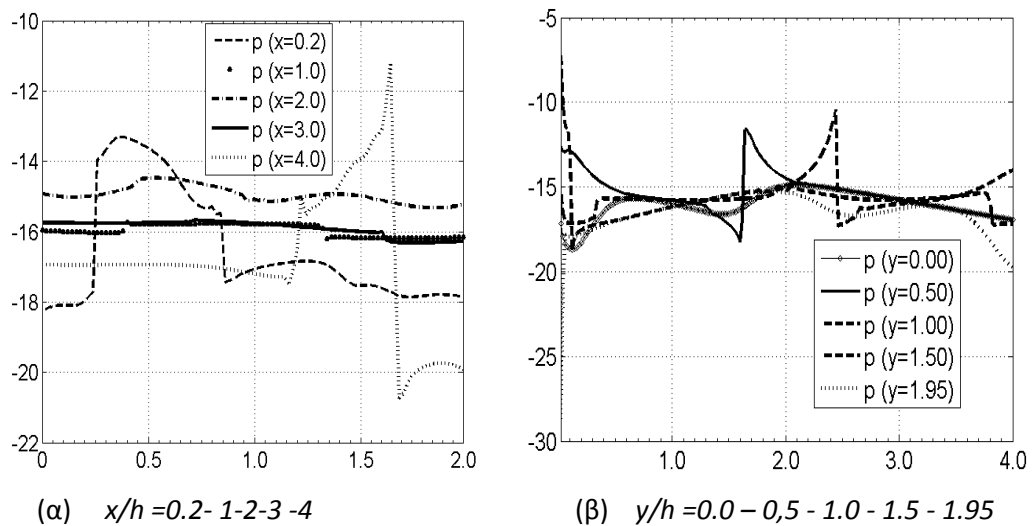
Σχ.4.39. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p στις εγκάρσιες θέσεις y/R (0 - 0.4 - 0.6 - 0.75 - 0.82 - 0.95) για το πεδίο του Σχ.4.2 για $t=9.036$ και η αντίστοιχη για μονοφασική ροή Poiseuille.



Σχ.4.40. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p στις εγκάρσιες θέσεις y/R (0 - 0.4 - 0.5 - 0.6 - 0.7 - 0.8 - 0.95) για το πεδίο του Σχ.4.3 για $t=7.2476$ και η αντίστοιχη για μονοφασική ροή Poiseuille.



Σχ.4.41. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p στις εγκάρσιες θέσεις y/h (0.5 - 1.0- 1.5) για το διφασικά πεδίο της διασποράς επτά σταγόνων σε ροή poiseuille του Σχ.4.24 για $t=16.824$.

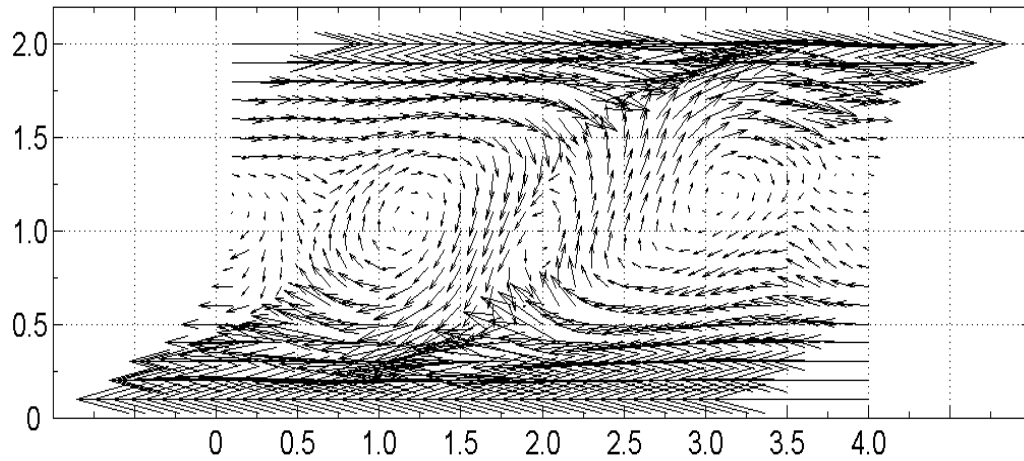


Σχ.4.42. (α,β). Κατανομή της αδιάστατης πίεσης p για το διφασικό πεδίο σε Ροή Couette του Σχ.4.23 για $t= 5.52$. α) Η εγκάρσια σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις. β) Η διαμήκης κατανομή στις εγκάρσιες θέσεις.

4.6.5. Απεικόνιση του διανυσματικού πεδίου (u,v) .

Με τις τεχνικές των προγραμμάτων γραφικών οι γραμμές ροής και η αναπαράσταση με βελάκια του μέτρου της ταχύτητας σε κάθε θέση του διφασικού πεδίου ροής Couette μπορούν να προσθέσουν στην κατανόηση των λεπτομερειών της ροής. Σε αντίθεση η αναπαράσταση με βελάκια του διανυσματικού πεδίου (u,v) στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές δεν προσφέρει απεικονιστικά κάτι ιδιαίτερο στην κατανόηση του διφασικού πεδίου

μέσα στον ευθύγραμμο αγωγό, γιατί δεν έχουμε τόσο απότομες μεταβολές ταχύτητας και στροβιλότητες που να δημιουργούν μεγάλη οπτική αντίθεση.



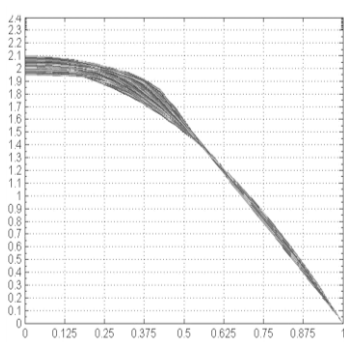
Σχ.4.43. Απεικόνιση του διανυσματικού πεδίου (u, v) για το διφασικό πεδίο σε Ροή Couette του Σχ.4.23 την στιγμή $t=5.52$.

4.7. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΠΟΤΟΜΗΣ ΖΩΝΗΣ ΣΤΟ ΠΡΟΦΙΛ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

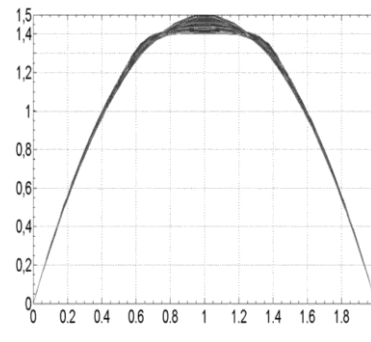
Για να μελετηθούν τα γενικά χαρακτηριστικά της ροής με παρουσία σταγόνων συγκρίνεται το προφίλ της οριζόντιας ή αξονικής ταχύτητας της διφασικής ροής κατά μήκος του αγωγού με το αντίστοιχο προφίλ ταχύτητας της αντίστοιχης μονοφασικής ροής *Hagen-Poiseuille* του περιβάλλοντος ρευστού. Παρατηρείται στο προφίλ της ταχύτητας της διφασικής ροής, η δημιουργία χαρακτηριστικής απότομης ζώνης τύπου βύσματος (plug zone) κατά το πλάτος (ή την διάμετρο) του αγωγού και μετρούνται το εύρος της διακύμανσης των διφασικών U_{max} και η αντίστοιχη αμβλύνση ή/και αύξηση ως ποσοστό της αντίστοιχης U_{max} της ροής *Hagen-Poiseuille*. Για περαιτέρω εμβάθυνση στη δομή της ανεπτυγμένης ροής απεικονίζονται προφίλ της αξονικής ταχύτητας, Σχ.4.44.

Επιπλέον, μελετώντας στη διάρκεια του χρόνου τα καταγραφέντα προφίλ της ταχύτητας της διφασικής ροής στην περιοχή των σταγόνων, μπορεί να παρατηρηθεί μία αύξηση της αξονικής ταχύτητας σε ένα εύρος διακυμάνσεων με άνω και κάτω κορυφές (peaks). Κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης κατά μήκος του αγωγού, για τις περιπτώσεις των: Σχ.4.4.-4.18., υπολογίζονται το εύρος της διακύμανσης της αναπτυγμένης οριζόντιας ή αξονικής ταχύτητας στην απόσταση $y=0.5$ από τον άξονα συμμετρίας, $u_{\text{droplet}}(y=0.5) = (1.56-1.74, 1.55-$

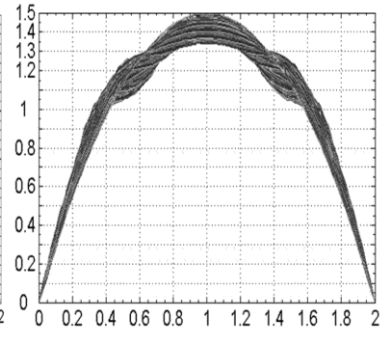
1.69, 1.19-1.28) και η σχετική αύξηση % =(1.3-13, 0.6-9.7, 2.6-10.3) % σε σύγκριση με τις συγκεκριμένες τιμές της αξονικής ταχύτητας (1.54,1.54,1.16) της αντίστοιχης ροής *Poiseuille*. Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται λεπτομερώς για χαρακτηριστικές περιπτώσεις που μελετήθηκαν προηγουμένως: α) το εύρος ζώνης άμβλυνσης ή βύσματος (plug) ως ποσοστό του πλάτους ή της διαμέτρου του αγωγού, β) το εύρος των τιμών της U_{max} στην αναπτυγμένη ζώνη (plug zone) της διφασικής ροής κατά μήκος του αγωγού, καθώς και γ) η αντίστοιχη άμβλυνση της U_{max} ως ποσοστό της αντίστοιχης U_{max} της ροής *Hagen-Poiseuille*.



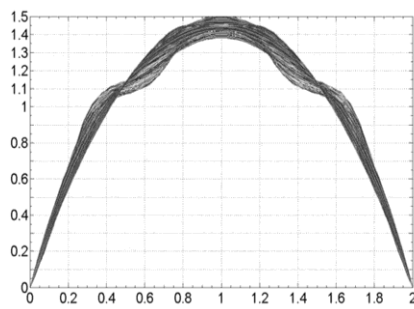
(α) Σχ.4.4



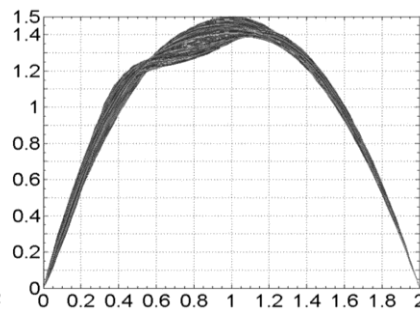
(β) Σχ.4.8



(γ) Σχ.4.10



(δ) . Σχ.4.14.



(ε) Σχ.4.16.

Σχ.4.44.(α,β,γ,δ,ε) Καταγραφέντα προφίλ της αξονικής ταχύτητας της διφασικής ροής στην περιοχή των σταγόνων για τις περιπτώσεις :α) Σχ.4.4, $t=12.7$ β) Σχ.4.8, $t=17.6$, γ) Σχ.4.10, $t=11.2$, δ) Σχ.4.14, $t=8.0$ και ε) Σχ.4.16, $t=21.2$ (ασυμμετρία).

Η μετρούμενη αύξηση της οριζόντιας ή αξονικής ταχύτητας του διφασικού πεδίου ροής, ως αποτέλεσμα της παρουσίας των σταγόνων, είναι μια άλλη επικύρωση της ανάπτυξης της ροής βύσματος (plug zone). Το προφίλ της ταχύτητας εξηγεί την εικόνα που παρατηρείται στην κίνηση των στοιχείων του διφασικού ρευστού ως ολότητα. Στην εξέλιξη του φαινομένου όσο περισσότερο ένα σημείο απέχει από τον άξονα ή την μέση γραμμή τόσο μεγαλύτερη είναι η καθυστέρηση στην κίνηση του σε σχέση με τα κεντρικά σημεία της

ζώνης βύσματος που κινούνται με την U_{max} . Δημιουργούνται επομένως επιταχυνόμενες και επιβραδυνόμενες περιοχές στο πεδίο της διφασικής ροής.

Πίνακας 4.2. Χαρακτηριστικά ζώνης βύσματος στο προφίλ της u/U ³⁶

Περίπτωση Σχήματος	<u>4.4.</u>	<u>4.5.</u>	<u>4.7.</u>	<u>4.8.</u>	<u>4.9.</u>	<u>4.10</u>	<u>4.11</u>	<u>4.12</u>	<u>4.13</u>	<u>4.14</u>	<u>4.15</u>	<u>4.16</u>	<u>4.17</u>	<u>4.18</u>
Πλάτος % ζώνης βύσματος	42.5	50	45	30	35	35	25	25	30	30	32.5	32.5	32.5	35
U_{max} ροής Poiseuille	2	2	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
Τμές U_{max} της plug zone	1.95 -2.1	1.6- 2.0	1.4- 1.5	1.39- 1.44	1.38- 1.45	1.32 1.5	1.42- 1.52	1.42- 1.52	1.37- 1.53	1.38- 1.52	1.34- 1.49	1.33- 1.49	1.37- 1.52	1.38- 1.52
Άμβλυση % της U_{max} στην ζώνη βύσματος	- 5 - 2.5	0 - 20	0 - 6.7	4 - 7.3	3.3 - 8	0 - 12	-1.3 - 5.3	-1.3 - 5.3	-2 - 8.7	-1.3 - 8	0.67 -10.7	0.67- 11.3	-1.3 - 8.7	-1.3 - 8

Αυτή η συμπεριφορά της άμβλυσης στο προφίλ της ταχύτητας και η εμφάνιση διφασικής ροής, της μορφής πυρήνα-δακτυλίου, είναι επίσης σε γενική συμφωνία με τις προηγούμενες πειραματικές παρατηρήσεις και τα θεωρητικά μοντέλα για την διφασική ροή διασπορών από άκαμπτα και παραμορφώσιμα σωματίδια εξ αιτίας διαφοράς πίεσης. *Skalak et.al.(1989), Nott and Brady (1991), Zhou and Pozrikidis.*

Επίσης αντίστοιχα προφίλ ταχύτητας παρατηρούνται σε διφασικές ροές με πολυπληθή σταγονίδια που η αριθμητική μελέτη τους απαιτεί τεράστια επεξεργαστική ισχύ αλλά καλό είναι έστω να επισημανθεί. Έτσι κατά τον *Kraynik, 1988*, η ανάπτυξη ροής βύσματος στο συνολικό πεδίο ή μια ζώνη ροής βύσματος στο κέντρο του καναλιού, καθώς και μια ζώνη διατμητικής ροής κοντά στα τοιχώματα παρατηρούνται σε υψηλής συγκέντρωσης γαλακτώματα που μοιάζουν με αφρό. Ωστόσο, τα πειράματα του *Kowalewski, 1980* σε πολύ μικρούς και μέτριους αριθμούς Reynolds, δίνουν ενδείξεις, ότι η άμβλυση του προφίλ ταχύτητας ενός γαλακτώματος από σταγόνες υψηλού ιξώδους μειώνεται καθώς αυξάνεται το ιξώδες της σταγόνας.

³⁶ Δες και *Christafakis et al., 2009.*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Btawzdziejwicz, J., Cristini, V. and Loewenberg, M.**,(2003),Multiple stationary states for deformable drops in linear Stokes flows, *Physics of Fluids* , 15(5):L37-L40, .
- Btawzdziejwicz J, Cristini V, Loewenberg M.**, (2002), Critical behavior of drops in linear flows. I. Phenomenological theory for drop dynamics near critical stationary states, *Phys. Fluids* , 14: 2709-2718.
- Christafakis A. Alexopoulos J., Tsangaris S.**,(2009), Modelling of two-phase incompressible flows in ducts, *Applied Mathematical Modelling*, 33:1201–1212.
- Christafakis AN, Alexopoulos JD, Tsangaris SG** (2006). An Improved Implementation of Level-Set Method to the Computation of Two-Phase Incompressible Flows in Ducts. Proceedings of 2nd IC-SCCE Intern. Conference. From Scientific Computing to Computational Engineering., 2ndIC-SCCE. 5-7 July 2006 Athens, Greece.
- Christafakis A.N. and Tsangaris S.** (2008), Two-Phase Flows of Droplets in Contractions and Double Bends, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2.3:299-308.
- Ha, J.W.and Leal, L.G.**, (2001), An experimental study of drop deformation and breakup in extensional flow at high capillary number, *Physics of fluids*, 13.6:1568-1576.
- Hyman, WA, Skalak R.**, (1972), Non-Newtonian behavior of a suspension of liquid drops in tube flow. *AIChEJ.* 18: 149-154.
- Goldsmith H.L., Mason G.**, (1962) The flow of suspensions through tubes. I. Single spheres, rods, and discs. *J. Colloid Sci.* , 17: 448-476.
- Grace H.P.**, (1982), Dispersion phenomena in high viscosity immiscible fluid systems and application of static mixers as dispersion devices in such systems. *Chem. Eng. Commun.* ; 14: 225-277.
- Kaliakatsos C and Tsangaris S**, (2000), Motion of deformable drops in pipes and channels using Navier-Stokes equations. *Int. J. Numerical Methods of Fluids*, 34:609-626.
- Kowalewski TA.** (1980), Velocity profiles of suspension flowing through a tube, *Arch. Mech.* 32:857-865.
- Kraynik A.M.** , (1988), Foam flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 20:325-357.
- Mathioulakis D.S.**, (2005). Droplet deformation in an unsteady flow field: an experimental study. Proceedings of 1st IC-EpsMsO. International Conference on Experiments / process / System Modeling / Simulation Optimization, 1st IC-EpsMsO 6-9 July 2005, Athens, Greece.
- Nott P.R., Brady J.F.**, (1991), Dynamic simulation of pressure driven suspension flow. In Proceedings of the DOE/NSF Workshop on Particulate Flows, Worcester, MA .
- Pozrikidis C.**,(2005), Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Physics of fluids*, 17:1-14.
- Skalak R., Gzkaya N., Skalak T.C.**, (1989), Biofluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 21:167-204.

- Stone H.A., Bentley B.J. , Leal L.G.**, (1986), *An experimental study of transient effects in the breakup of viscous drops*, *J. Fluid Mech*, 173:131-158.
- Taylor, G.I.** , (1934) , The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proceedings of Royal Society of London, Ser A* 146: 501-523.
- Zhou, H. and Pozrikidis, C.**, (1994), Pressure-driven flow of suspensions of liquid drops, *Phys. Fluids*; 6: 80-94.
- Zhou, H. and Pozrikidis, C.**, (1993), The flow of suspensions in channels: Single files of drops. *Phys. Fluids A* 5.2.,311-324.

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

**ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ
ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ**

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.....	3
Πίνακας 5.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε στενώσεις ή/και διευρύνσεις που μελετήθηκαν στο 5 ^ο κεφάλαιο.	4
5.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ.	5
5.2. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.	7
5.2.1. Λ.Σ.=0.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=5.7143$, $Ca=0.2857$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.4$	7
5.2.2. Λ.Σ.=0.5. Τρείς σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$	8
5.2.3. Λ.Σ.=0.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=-0.60$, $k=0.24$.8	
5.2.4. Λ.Σ.=0.5. Τρείς σταγόνες: $Re=20$, $We=20$, $Ca=1.0$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$, $k=0.8$	9
5.2.5. Λ.Σ.=0.7. Τρείς σταγόνες: $Re=20$, $We=1.0$, $Ca=0.05$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$	9
5.2.6. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων.	10
5.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.	11
5.4. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ.	16
5.5. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.	21
5.5.1. Ορισμός των Re_d και Re_D σε αξονοσυμμετρικό αγωγό με διεύρυνση.	21
5.5.2. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με μία σταγόνα.	21
5.5.3. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με δύο σταγόνες.....	26
5.6. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΞΩΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.	35
5.7. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.....	42
5.8. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ- ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ.	47
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	51

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΣΤΕΝΩΣΗ Η/ΚΑΙ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ

Στο 5^ο κεφάλαιο, η μελέτη διφασικών ροών, υγρού σε υγρό με σταγόνες του 4^{ου} κεφαλαίου, επεκτείνεται σε κλειστούς αγωγούς συνθετότερης γεωμετρίας, τόσο διδιάστατους, όσο κυρίως αξονοσυμμετρικούς με στενώσεις, διευρύνσεις ή συνδυασμό αυτών. Περιγράφονται οι κατάλληλες οριακές συνθήκες για την περιοχή των στενώσεων και των διευρύνσεων και επίσης σε κάποιες περιπτώσεις εισάγονται στο ορθογώνιο καρτεσιανό πλέγμα τοιχώματα με καμπύλα όρια. Μελετάται το μονοφασικό πεδίο του Νευτώνειου ρευστού της πρωτεύουσας φάσης χωρίς την παρουσία σταγόνων σε πεδίο αναπτυσσόμενης στρωτής ροής χαμηλού αριθμού Re λόγω διαφοράς πιέσεως στα άκρα του αγωγού. Στη συνέχεια διάφορες διατάξεις άνισων μεταξύ τους ή ισομεγεθών σταγόνων, Νευτώνειου ρευστού με διαφορετική συνεκτικότητα, διασπείρονται απότομα στην είσοδο του αγωγού στην συνεχή (πρωτεύουσα) φάση. Με την μεθοδολογία του 2^{ου} κεφαλαίου μελετάται η χρονικά μεταβαλλόμενη διφασική ροή, οι μορφές των περιγραμμάτων και τα αντίστοιχα μεγέθη παραμόρφωσης των σταγόνων κατά *Taylor*, έως ότου η παραμόρφωση των σταγόνων κατά περίπτωση καταλήξει, αν είναι εφικτό, σε ουσιαστικά αμετάβλητα περιγράμματα σταγόνων ή οριακά¹ στην έναρξη φαινομένων διασπάσεων ή συγχωνεύσεων με δημιουργία μικροσταγονιδίων.

¹ Δεν αποτελεί στόχο της μελέτης μας απλώς παράπλευρο εύρημα σε τέτοιες συνθήκες διφασικής ροής. Το φαινόμενο κρίνεται ενδιαφέρον να αναφερθεί, χρήζει όμως περαιτέρω συστηματικής διερεύνησης σε μεγαλύτερη υπολογιστική ανάλυση και βιβλιογραφική επιβεβαίωση.

Πίνακας 5.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε στενώσεις ή/και διευρύνσεις που μελετήθηκαν στο 5^ο κεφάλαιο.

<u>A/A</u>	<u>Σχήμα</u>	<u>Re</u>	<u>We</u>	<u>Ca</u>	<u>λ</u>	<u>δ</u>	<u>κ</u>	<u>Σταγό νες</u>	<u>Γεωμετρία</u>
01	5.1	20	5.71	0.29	4	0	0.4	1	Διδιάστατη Στένωση με Λ.Σ.=0.5
02	5.2	20	2	0.1	4	0	0.7	3	Διδιάστατη Στένωση με Λ.Σ.=0.5
03	5.3	20	2	0.1	4	- 0.6	0.24	4	Διδιάστατη Στένωση με Λ.Σ.=0.5
04	5.4	20	20	1	4	0	0.8	3	Διδιάστατη Στένωση με Λ.Σ.=0.5
05	5.5	20	1	0.05	4	0	0.7	3	Διδιάστατη Στένωση με Λ.Σ.=0.7
06	5.6	20	2	0.1	4	0	0.8 & 0.6	2	Αξονοσυμμετρική απότομη Στένωση με Λ.Σ.=0.5
07	5.13	20	2	0.1	4	0	0.8 & 0.6	2	Αξονοσυμμετρική Στένωση & καμπύλη εξομάλυνσης με Λ.Σ.=0.5
08	5.20	20	4	0.2	4	0	0.8	1	Αξονοσυμμετρική απότομη Διεύρυνση με Λ.Δ.=1:0.5
09	5.25	20	4	0.2	4	0	0.8 & 0.5	2	Αξονοσυμμετρική απότομη Διεύρυνση με Λ.Δ.=1:0.5
10	5.37	20	2	0.1	2	0	0.6	1	Αξονοσυμμετρική τοξωτή Στένωση - Διεύρυνση με Λ.Σ.=0.4
11	5.41	20	2	0.1	4	0	0.6 & 0.6	2	Αξονοσυμμετρική Στένωση - Διεύρυνση με Λ.Σ.=0.25 & Λ.Δ.=1:0.75
12	5.47	20	2	0.1	4	0	0.8	1	Αξονοσυμμετρική Στένωση - Διεύρυνση με καμπύλη εξομάλυνσης με Λ.Σ=0.5 & Λ.Δ=1:0.5

Για εμβάθυνση στο θέμα, σε πολλές από τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν, αναπαρίστανται λεπτομερώς το συνολικό διφασικό ροϊκό πεδίο ή τοπικά αποσπάσματα του σε αρκετά χρονικά στιγμιότυπα του μεταβατικού φαινομένου. Επίσης παρατίθενται διαγράμματα τα οποία προκύπτουν από την μετά-ανάλυση των αρχείων αποτελεσμάτων του λογισμικού μας για τα πεδία u, v, p που επεξηγούν ρευστοδυναμικά τους μηχανισμούς παραμόρφωσης και μετανάστευσης των σταγόνων στη διφασική ροή. Ενδεικτικά για πληρότητα γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων της μελέτης μας με αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα της

βιβλιογραφίας, όπως *Chalji & Ghiaasiaan, 2008, Doerpinghaus & Baird, 2003, Durst & Loy, 1985, Fossa & Guglielmini, 2002, Harvie et.al., 2006, Khayata et.al., 2000, Kojasoy et.al., 1997, Muradoglu & Gokaltun, 2004, Oliveira, et.al. 2007, Rosengarten et.al., 2005, Shannak et.al., 1999, Spencer et.al., 1995, Tang et.al., 2001_(1), (2).*

5.1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΔΙΦΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ.

Η μετανάλυση και επεξεργασία των τιμών της συνάρτησης των ισοϋψών, των αδιάστατων ταχυτήτων και της πίεσης² που καταγράφονται συστηματικά προσφέρει ανά εξεταζόμενη περίπτωση τα ρευστοδυναμικά χαρακτηριστικά του μονοφασικού και του αντίστοιχου διφασικού πεδίου ροής με σταγόνες.

Στα σχήματα παρουσιάζονται:

1. Η στιγμιαία μορφή, η παραμόρφωση και η μετανάστευση των σταγόνων στα διάφορα στιγμιότυπα που προκύπτουν από αναπαράσταση των ισοϋψών της $\phi=0$, Σχ.5.0. Η κατεύθυνση ροής δηλώνεται πάντα από αριστερά προς τα δεξιά του αγωγού.
2. Η κατανομή της οριζόντιας ταχύτητας u/U κατά μήκος του αγωγού, τόσο στον άξονα συμμετρίας του αγωγού, όσο και σε άλλες εγκάρσιες θέσεις του αγωγού και η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/h ή x/R για συγκεκριμένα στιγμιότυπα των σταγόνων στον αγωγό. Παρατηρούνται οι τοπικές παραμορφώσεις της u κοντά στον άξονα και οι διαφοροποιήσεις στην κατανομή της σε διάφορες θέσεις του αγωγού μέσα και πλησίον της κάθε σταγόνας σε σχέση με το αντίστοιχο μονοφασικό πεδίο.
3. Η κατανομή της οριζόντιας πίεσης κατά μήκος του αγωγού, τόσο στον άξονα συμμετρίας του αγωγού, όσο και σε άλλες εγκάρσιες θέσεις του αγωγού για συγκεκριμένα στιγμιότυπα των σταγόνων στον αγωγό. Παρατηρούνται οι τοπικές παραμορφώσεις της p πλησίον της κάθε σταγόνας σε σχέση με το αντίστοιχο μονοφασικό πεδίο.
4. Οι ισοταχείς $X=[(u^2+v^2)^{1/2}/U]$ ή u/U ή v/U ολόκληρου ή μέρους του μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες και στιγμιότυπα των αντιστοιχών διφασικών πεδίων για να φανούν παραστατικά λεπτομέρειες και διαταραχές του μεταβατικού ροϊκού πεδίου.

² Καταγράφονται, ανά τακτά χρονικά διαστήματα σε αρχεία αποτελεσμάτων τύπου (.dat) για μετανάλυση, οι τιμές των αδιάστατων μεγεθών του ροϊκού πεδίου u, v, p, ψ, ω , η συνάρτηση των ισοϋψών ϕ και οι τιμές των αδιάστατων τάσεων T_{xy}, T_{xx} που μας παρέχουν δεδομένα περαιτέρω ανάλυσης στο μέλλον.

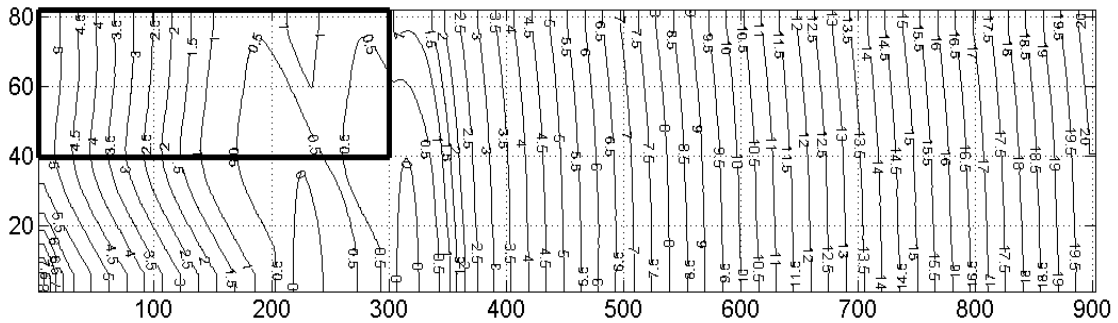
5. Η αναπαράσταση των γραμμών ροής με βελάκια που δηλώνουν το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του διανυσματικού πεδίου ($u/U, v/U$) ολόκληρου ή μέρους του μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες και στιγμιότυπα των αντιστοίχων διφασικών πεδίων.³

Η μάζα των σταγόνων, όπως έχει καταγραφεί για τις διαστάσεις και για τις αξονοσυμμετρικές περιπτώσεις διατηρείται στις περισσότερες των περιπτώσεων στην μέγιστη διαφορά μέχρι 1.5% από την αρχική της τιμή. Γίνεται ενεργοποίηση και μικρή χρήση του υβριδικού αλγορίθμου διατήρησης της μάζας (επιφανείας) των σταγόνων στις περιπτώσεις που η διαφορά ξεπερνά το κριτήριο του 1.5% και τα σχήματα δείχνουν σχεδόν άριστη διατήρηση του πάχους της διεπιφάνειας. Παραμένει προς διερεύνηση τι επακριβώς συμβαίνει με τη διατήρηση, όταν αρχίζουν οι αστάθειες – διασπάσεις, μικροσταγονίδια ή μερική ολική έξοδος σταγόνας, όπου για αρκετές επαναλήψεις έχουμε καλή διατήρηση της μάζας, ενώ η εικόνα γίνεται περίπλοκη⁴.

³ Με τις τεχνικές των προγραμμάτων γραφικών οι γραμμές ροής και η αναπαράσταση με βελάκια του μέτρου της ταχύτητας σε κάθε θέση του διφασικού πεδίου ροής μπορούν να προσθέσουν στην κατανόηση των λεπτομερειών της ροής για να τονιστούν απότομες μεταβολές ταχύτητας και κάποιες στροβιλότητες (ανακυκλοφορίες). Χρησιμοποιούνται εναλλακτικά πρότυπα (διαφορετικό φορμάτ) απεικόνισης των γραμμών ροής του ροϊκού πεδίου που παράγονται απευθείας από το διανυσματικό πεδίο ($u/U, v/U$) και όχι από τον μαθηματικό τύπο του ορισμού.

⁴ Τίθεται το ερώτημα, αν υπάρχει περίπτωση και κάτω από ποιές συνθήκες ο υβριδικός αλγόριθμος διατήρησης της μάζας να δημιουργεί εικονικές μάζες (φανταστικά σημεία) στην περιοχή της διεπιφάνειας της σταγόνας για να πετύχει την διατήρηση, όταν εμφανίζονται π.χ. (πολύ σπάνια βέβαια) σημεία με $\phi = 0$ σε απίθανα σημεία. Το πιο πιθανό όμως είναι τέτοια σημεία να προκύπτουν από κάποια ανεπιτυχή οριακή συνθήκη της ϕ ή κατά την επαναρχικοποίηση της ϕ , όπου απαιτούνται και οι αντίστοιχες τιμές ταχυτήτων (μηδενίζουμε με τις οριακές συνθήκες τις ταχύτητες σε ολόκληρες περιοχές με σύνθετη γεωμετρία αλλά υπάρχει τιμή της ϕ).

Αυτές τις τιμές της ϕ χρειαζόμαστε στον τύπο της καμπυλότητας, οι τιμές της οποίας επηρεάζουν και τον υβριδικό αλγόριθμο διατήρησης της μάζας. Καθορίζοντας π.χ. $\phi = 100$ σε αυτές τις περιοχές γίνεται απροσδιόριστη η τιμή στην τοπική καμπυλότητα κ και τον όρο της επιφανειακής τάσης. Τέτοια ψευδοσημεία παρατηρούνται και με την μέθοδο της τοπικής *level-set*, σαν είδωλα περιοχών του περιγράμματος της σταγόνας και απαιτούν, όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία, εξειδικευμένες αλγοριθμικές μεθόδους διαχείρισης των οριακών συνθηκών της ϕ (*masking*).

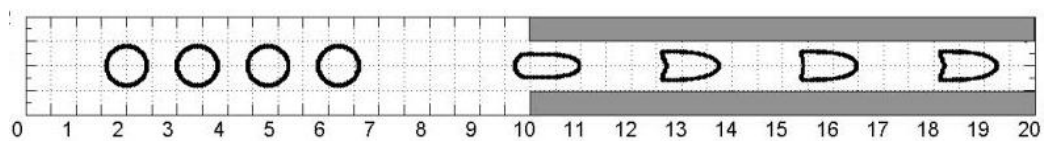


Σχ.5.0. Η κατανομή της συνάρτησης απόστασης ϕ (level-set) στο χωρίο υπολογισμού καρτεσιανού πλέγματος 900X 80 σε στιγμιότυπο διφασικής ροής σε Διεύρυνση. Οι isoψείς καμπύλες με τιμές $\phi=0$ αποτυπώνουν τα περιγράμματα των σταγόνων και το έντονο ορθογώνιο με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες δεν ανήκει στο πεδίο ροής έχει όμως τιμές της ϕ .

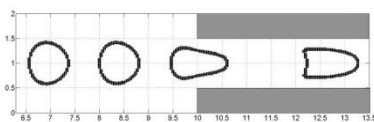
5.2. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.

Στα Σχ.5.1. έως Σχ.5.5. παρουσιάζονται στιγμιότυπα μεταβατικών ή αμετάβλητων περιγραμμάτων ομάδων τριών ή τεσσάρων σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή μέσα σε διδιάστατους αγωγούς με απότομες στενώσεις. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του αγωγού και συγκεκριμένα πάνω στον άξονα συμμετρίας στα Σχ.5.1, Σχ.5.2, Σχ.5.4 και Σχ.5.5 ή πάνω σε παράλληλη γραμμή προς τον άξονα συμμετρίας στο Σχ.5.3.

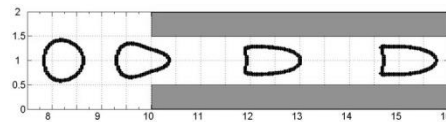
5.2.1. Λ.Σ.=0.5. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20, We=5.7143, Ca=0.2857, \lambda=4, \delta=0, k=0.4$.



(α) $t = 0$ και 5.4792



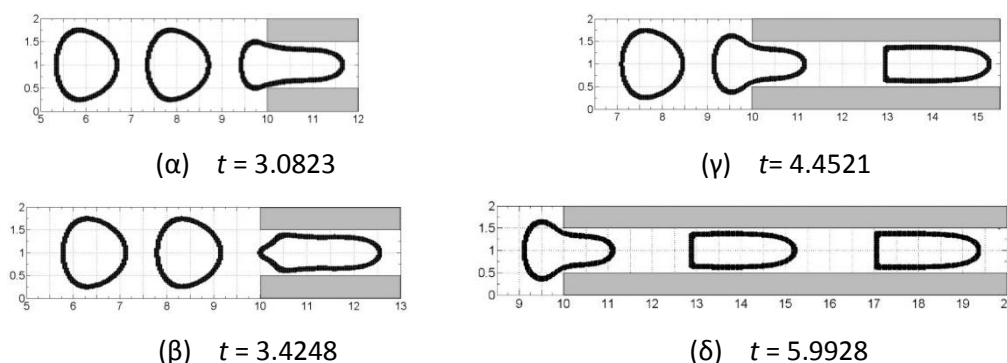
(β) $t = 3.596$



(γ) $t = 4.2809$

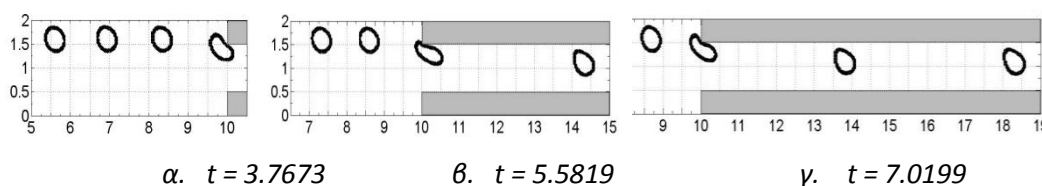
Σχ.5.1.(α, β, γ).⁵ Τέσσερες σταγόνες: $Re=20, We=5.7143, Ca=0.2857, \lambda=4, \delta=0, k=0.4$.

⁵ Christafakis & Tsangaris, 2008.

5.2.2. $\Lambda.Σ.=0.5$. Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$.


Σχ.5.2.(α,β,γ,δ).⁶ Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.7$.

Η κατεύθυνση ροής δηλώνεται πάντα από αριστερά προς τα δεξιά του αγωγού. Οι διατάξεις συγκροτούνται από ισομεγέθεις κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες διαφόρων μεγεθών. Το μήκος του αγωγού είναι $L=20$ ($x/h=0-20$), το πλάτος $H=2$ ($y/h=0-2$), $h=1$ και το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα επιλέγεται 600×160 . Στα Σχ.5.1. έως Σχ.5.4. η απότομη στένωση, έχει λόγο συστολής ($\Lambda.Σ.$) ίσο με 0.5 και στο Σχ.5.5. ο $\Lambda.Σ.=0.7$. Στα Σχ.5.1. και Σχ.5.2. στη συστολή, από την διακύμανση της D μεταξύ 0.31 και 0.53 και του $E.R.$ μεταξύ 1.42 και 1.66 υποδηλώνεται μια μεγάλη παραμόρφωση και μια μικρή τάση στο τέλος για χαλάρωση των σχημάτων των σταγόνων.

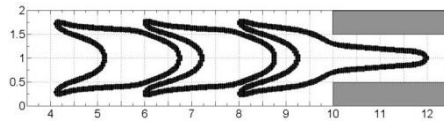
5.2.3. $\Lambda.Σ.=0.5$. Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=-0.60$, $k=0.24$.


Σχ.5.3. (α, β, γ)⁷ Τέσσερες σταγόνες: $Re=20$, $We=2.0$, $Ca=0.1$, $\lambda=4.0$, $\delta=-0.60$, $k=0.24$.

Στα Σχ.5.3.(α, β, γ). Στην περιοχή της στένωσης, η διακύμανση της D κυμαίνεται μεταξύ 0.18 και 0.4. Ο $E.R.$ κυμαίνεται μεταξύ 1.11 και 1.55 και η γωνία κλίσης κυμαίνεται μεταξύ 135° και 140° και υποδηλώνει μια σύγκλιση των ταλαντώσεων της γωνίας στις 135° . Οι μετρήσεις αυτές δείχνουν μείωση της παραμόρφωσης και μια μικρή τάση για χαλάρωση των σχημάτων των σταγόνων.

⁶ Christafakis & Tsangaris, 2008.

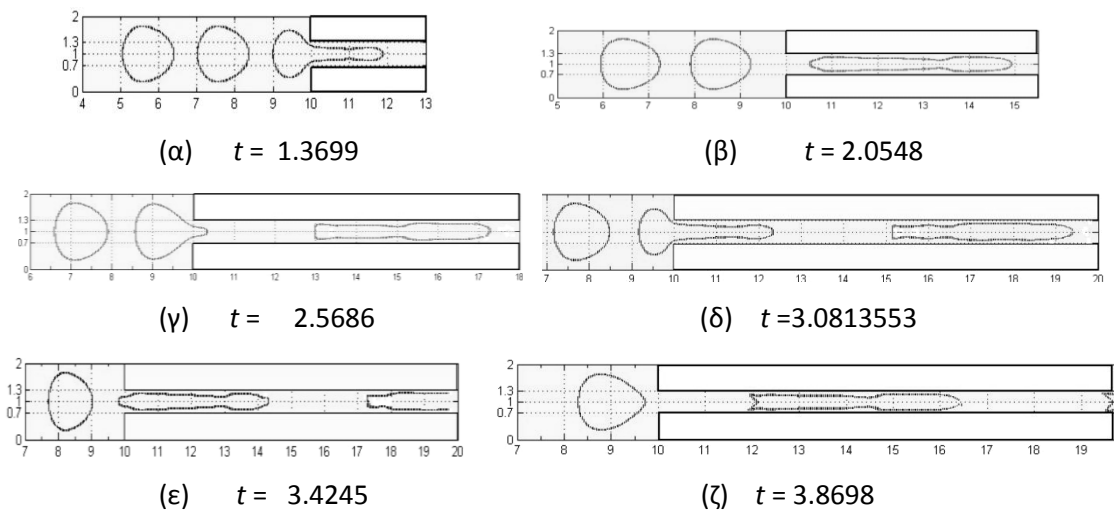
⁷ Christafakis & Tsangaris, 2008.

5.2.4. $\Lambda.Σ.=0.5$. Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=20$, $Ca=1.0$, $\lambda=4.0$, $\delta=0$, $k=0.8$.

$t = 2.738$

Σχ.5.4.⁸ Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=20$, $Ca = 1.0$, $\lambda = 4.0$, $\delta=0$, $k=0.8$.

Στην είσοδο της στένωσης του Σχ.5.4., οι αυξημένοι δείκτες $D=0.42$ και ο $E.R.=2.48$ συνηγορούν στην εικόνα της αυξανόμενης παραμόρφωσης των περιγραμμάτων των πολύ μεγαλύτερων από την στένωση σταγόνων και της «συμφόρησης» που είναι εμφανής στην κίνηση των σταγόνων στην είσοδο της συστολής.

5.2.5. $\Lambda.Σ.=0.7$. Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=1.0$, $Ca=0.05$, $\lambda = 4$, $\delta=0$, $k=0.7$.

Σχ.5.5. Απότομη Στένωση με $\Lambda.Σ.=0.5$.⁹ Τρεις σταγόνες: $Re=20$, $We=1.0$, $Ca = 0.05$, $\lambda = 4.0$, $\delta=0$, $k=0.7$.

Αντίστοιχα στο $\Lambda.Σ.=0.5$, όπου η D κυμαίνεται μεταξύ 0.31 και 0.85 και ο $E.R.$ μεταξύ 1.37 και 3.43, υποδηλώνεται ακόμη εντονότερη παραμόρφωση και μια μικρή τάση για σταθεροποίηση των σχημάτων των σταγόνων.

⁸ Christafakis & Tsangaris, 2008.

⁹ Christafakis & Tsangaris, 2008.

5.2.6. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων.

Στα Σχ.5.1. ως Σχ.5.4. περιγράφεται η ροή σε ένα κανάλι με απότομη στένωση, με λόγο συστολής 0.5. Οι σταγόνες μεταφέρονται από το ρεύμα της πρωτογενούς φάσης και τελικά στριμώχνονται στην στένωση. Καθώς η σταγόνα μεταφέρεται προς την περιοχή της στένωσης, το ρευστό αναγκάζεται να κινηθεί προς την κεντρική γραμμή, όπου η ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα κοντά στα όρια και αναμένονται μεγάλες παραμορφώσεις της σταγόνας. Η επιπλέον πτώση της πίεσης στη στένωση ωθεί τις σταγόνες κατάντη της ροής και διαμορφώνει ένα οξύ άκρο στο μέτωπο της σταγόνας. Η ταχύτητα στο πίσω μέρος της σταγόνας είναι μεγαλύτερη από ότι στην αιχμή. Η «ουρά» εμφανίζεται συρρικνωμένη καθώς πιέζεται από το κύριο ρεύμα. Κοντά στην κεντρική γραμμή της συστολής, η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα κοντά στα όρια. Έτσι, η μύτη γίνεται μακρύτερη και αιχμηρότερη.

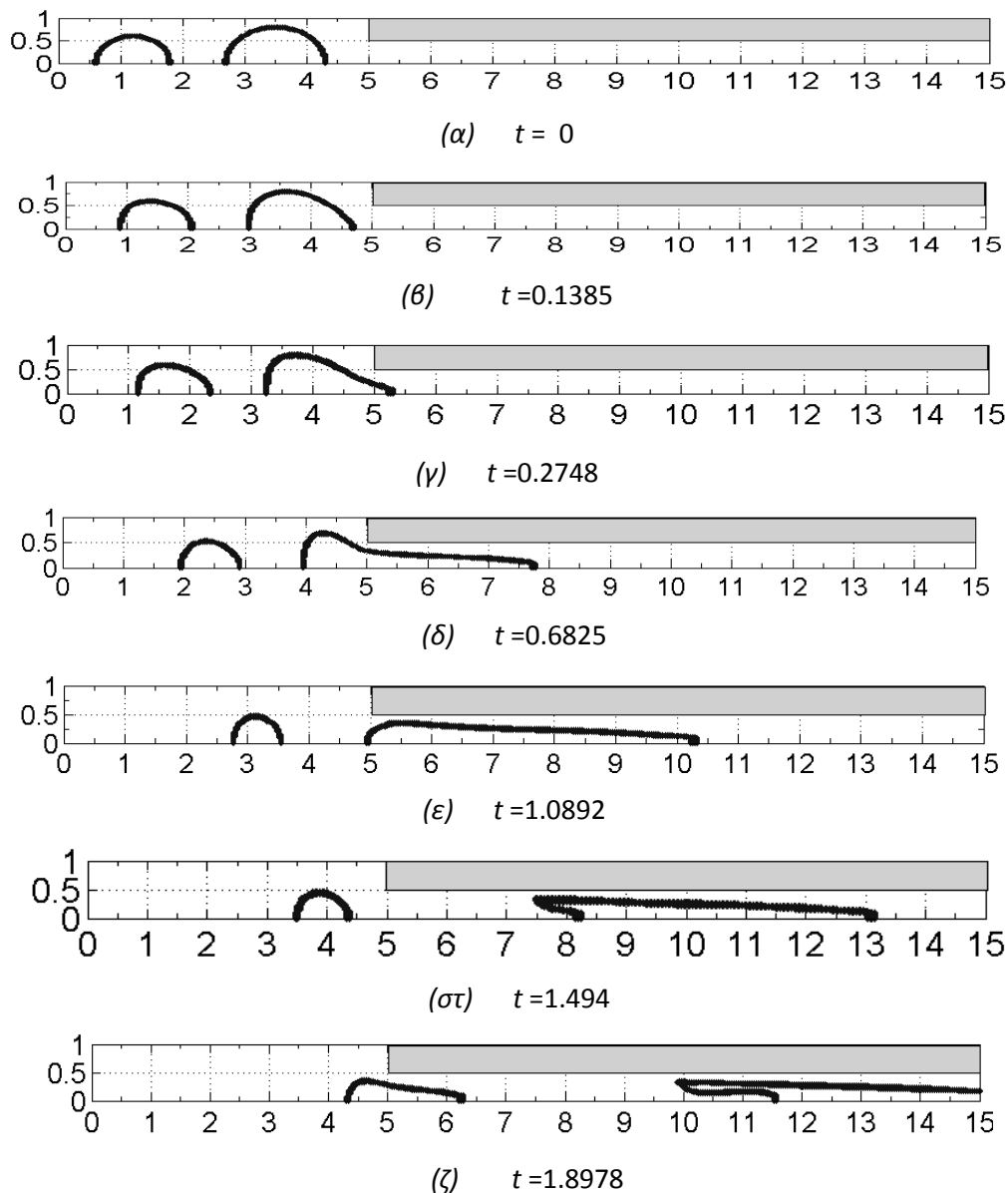
Στα στιγμιότυπα του Σχ.5.5. επιπλέον, όπου ο λόγος συστολής είναι 0.7, δηλαδή η στένωση είναι πολύ πιο απότομη, τα περιγράμματα των σταγόνων μέσα στην στένωση φαίνονται να επιμηκύνονται πολύ πιο έντονα και με την τάση να δημιουργούν μορφές αμφίκυκλες τύπου αλτήρα με λαιμό που σταδιακά μετακινείται προς την ουρά της σταγόνας. Επίσης εδώ, αν συγκρίνομε τους αδιάστατους χρόνους, η ροή φαίνεται αισθητά ταχύτερη όπως και η απομάκρυνση των σταγόνων είναι αισθητά μεγαλύτερη από τα στιγμιότυπα των Σχ.5.1. ως Σχ.5.3.

Στα στιγμιότυπα του Σχ.5.3., όπου οι σταγόνες είναι τοποθετημένες έκκεντρα ως προς τον άξονα του αγωγού είναι εμφανές ότι οι μικρού μεγέθους σταγόνες κοντά στα στερεά όρια παραμορφώνονται πολύ έντονα μέσα στην στένωση. Δημιουργούνται αρχικά επιμήκη-ωοειδή σχήματα σταγόνων που καταλήγουν σε χαλαρότερα σταθερά και λιγότερο παραμορφωμένα σχήματα. Ο μεγάλος άξονας του κάθε ψευτοελλειψοειδούς προσανατολίζεται προς την κατεύθυνση της προσωρινής γωνίας κλίσης που σχεδόν αυξάνει με την πάροδο του χρόνου και τελικά σταθεροποιείται σε χαμηλότερες τιμές. Κατά τη διάρκεια της ροής οι σταγόνες έχουν ελαφρώς την τάση να μετακινούνται προς την κεντρική γραμμή του καναλιού. Έτσι αναπτύσσεται μια ελεύθερη από σταγόνες δακτυλιοειδής ζώνη στην περιοχή που γειτνιάζει με τα στερεά όρια.

Τέλος και για τις δύο μορφές αγωγών επαληθεύεται ότι όσο μεγαλύτεροι είναι οι We και Ca , τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση και η περιστροφή των σταγόνων και μικρότερη είναι η επίδραση της επιφανειακής τάσης. Στην περίπτωση της μικρής επιφανειακής τάσης, Σχ.5.4. τόσο η αιχμή στο μπροστινό τμήμα όσο και οι «ουρές» των σταγόνων έχουν μεγάλη καμπυλότητα. Όταν η επιφανειακή τάση είναι αυξημένη, η αιχμή περιορίζεται και οι

«ουρές» γίνονται κοντότερες και παχύτερες σε σύγκριση με τις περιπτώσεις με μικρότερη επιφανειακή τάση.

5.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ.¹⁰



Σχ.5.6.(α, β, γ,δ,ε,σ,ζ). Απότομη αξονοσυμμετρική Στένωση. $\Lambda.Σ.=0.5$. Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda = 4$, $\delta=0$, $k_1=0.8$, $k_2=0.6$.

Στο Σχ.5.6. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων ομάδας δύο άνισων κυκλικών (σφαιρικών) σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με απότομη στένωση. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον

¹⁰ Η Διδιάστατη Στένωση με καμπύλες εξομάλυνσης παραλείπεται.

ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του αγωγού πάνω στον άξονα συμμετρίας. Η απότομη στένωση σε κυλινδρικό αγωγό, έχει λόγο συστολής $\Lambda.Σ.=0.5$. Η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μεγάλη αδιάστατη διάμετρο $D=2$, ($R=1$) του αγωγού ώστε $y/R=0-1$. Το μήκος του αγωγού είναι $L=15$ ($x/R=0-15$). Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 400×60 . Η στένωση αρχίζει στην τετμημένη θέση 5, (5+ έως 15) και αντιστοιχεί στην μικρή αδιάστατη διάμετρο $d=1$, ($r=0.5$) του αγωγού ώστε $y/R=0-0.5$. $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k1=0.8$, $k2=0.6$.

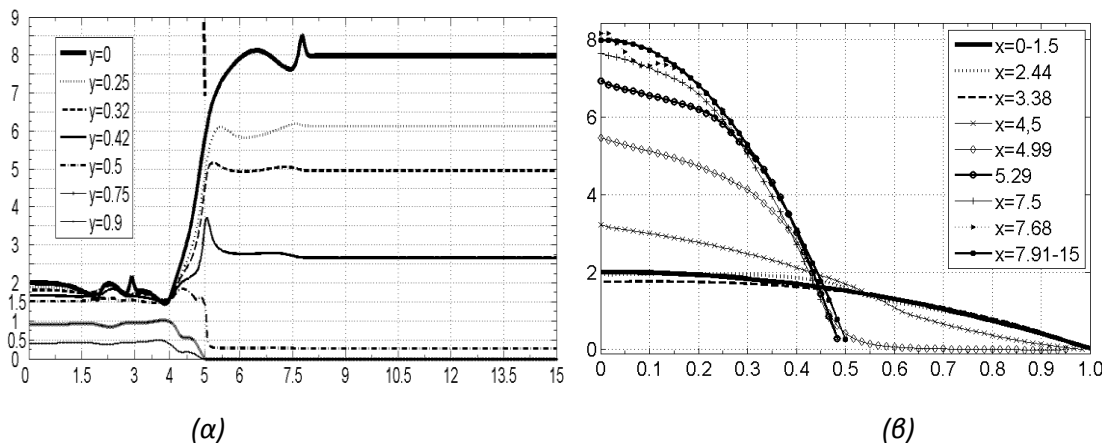
Στις αξονοσυμμετρικές στενώσεις των §5.3 και §5.4 και γενικότερα στις περιπτώσεις, όπου η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μεγάλη διάμετρο D η αδιαστατοποίηση γίνεται με την μεγάλη διάμετρο D (αδιάστατη τιμή της ακτίνας ($R=1$)). Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε παραβολικό προφίλ ως οριακή συνθήκη εισόδου

$$u'_{inlet} = \frac{u_{inlet}}{\bar{u}_D} = 2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2 (1 - r'^2) \quad (5.1.)$$

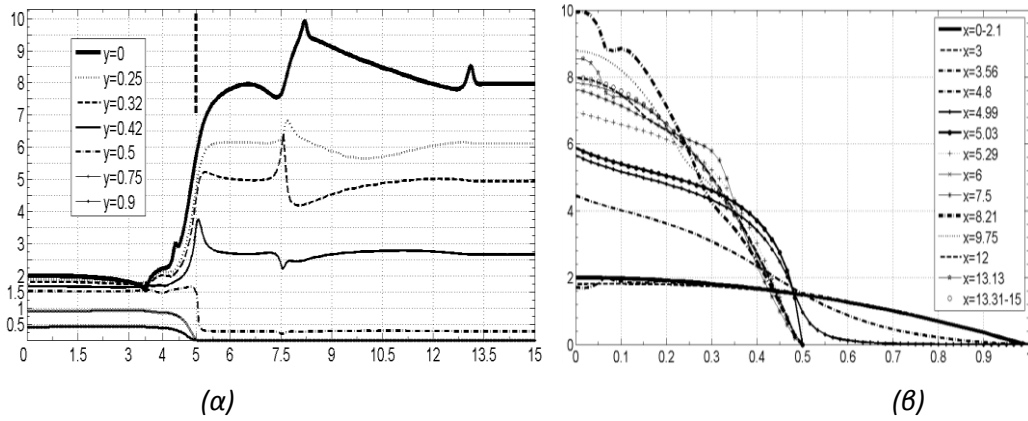
και ως αρχικές συνθήκες μέσα στο πεδίο ροής οι σχέσεις

$$u'(i, j) = 1, \quad v'(i, j) = 0 \quad (5.2.)$$

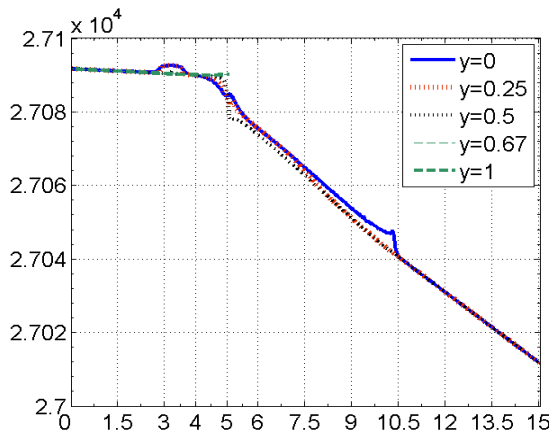
Η παραμόρφωση στο πρώτο κύτταρο αυξάνει σταδιακά μέχρι της τιμής της παραμόρφωσης $D=0.75$ στην στένωση και στο δεύτερο μέχρι $D=0.33$ στην είσοδο της στένωσης, ενώ προηγουμένως η παραμόρφωση του είναι πολύ μικρή $D= -0.14 - 0$.



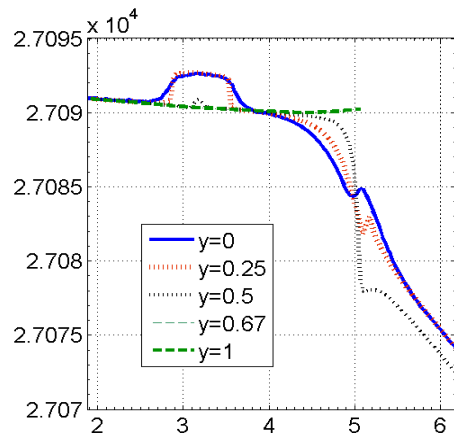
Σχ.5.7.(α, β). (α) Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R για το πεδίο του Σχ.5.6.(δ). (β) Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/R για το πεδίο του Σχ.5.6.(δ).



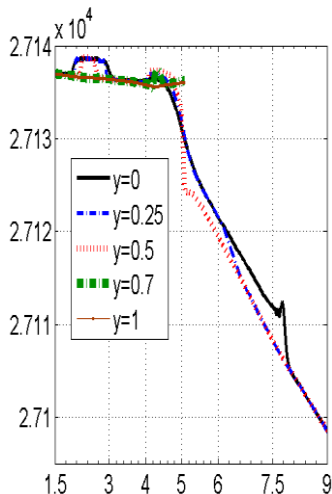
Σχ.5.8.(α, β). (α) Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R για το πεδίο του Σχ.5.6.(στ). (β) Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/R για το πεδίο του Σχ.5.6.(στ).



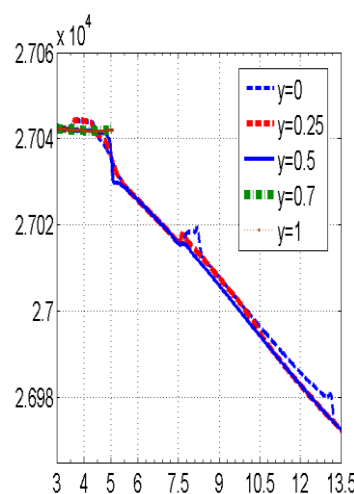
(α) Σχ.5.6(ε)



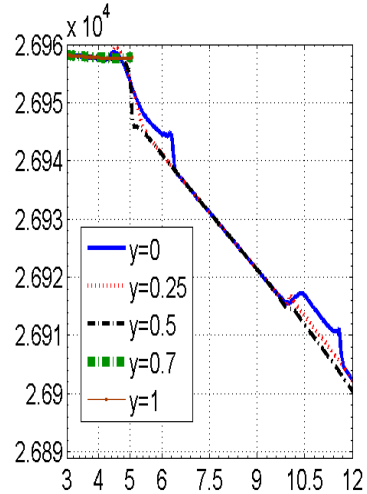
(β) Σχ.5.6(ε)



(γ) Σχ.5.6(δ)

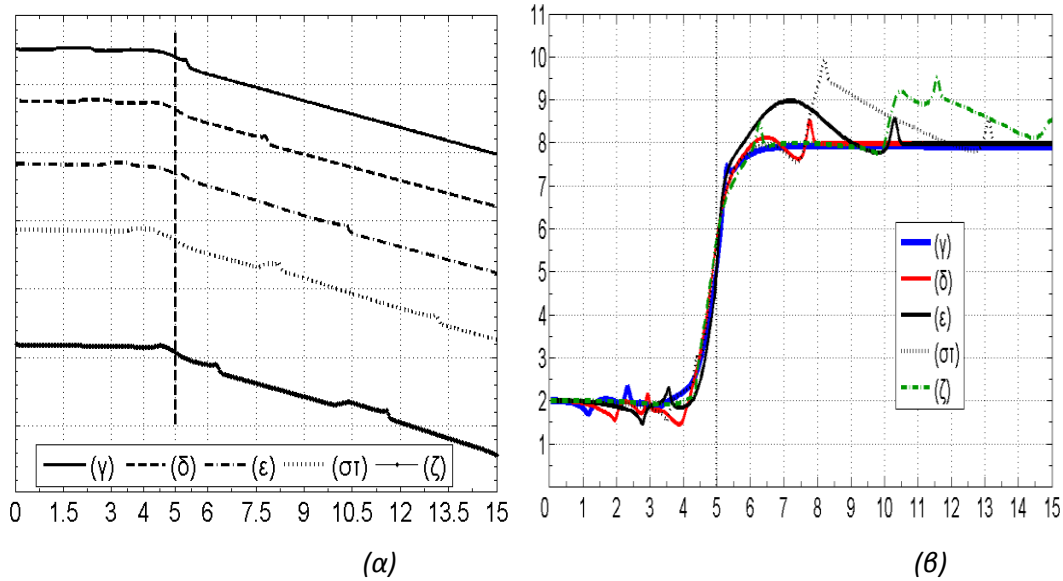


(δ) Σχ.5.6(στ)

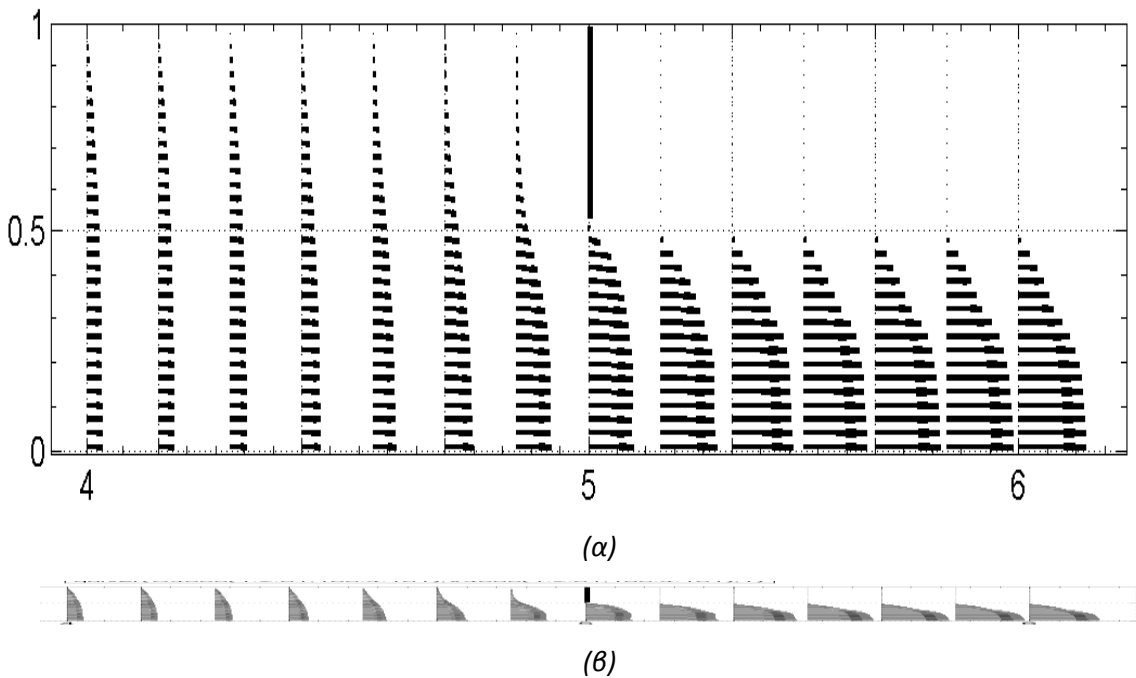


(ε) Σχ.5.6(ζ)

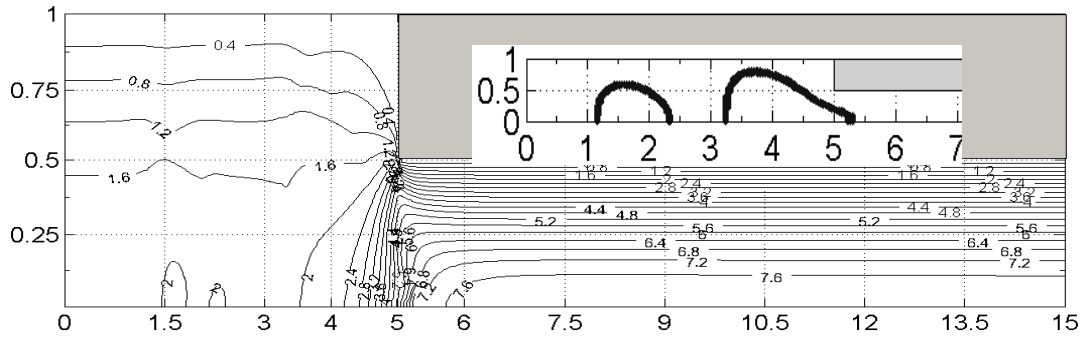
Σχ.5.9.(α,β,γ,δ,ε). Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R για το διφασικό πεδίο του Σχ.5.6.(α) αδιάστατη p σε ολόκληρο το πεδίο, (β,γ,δ,ε) p μόνο στην περιοχή της σταγόνας.



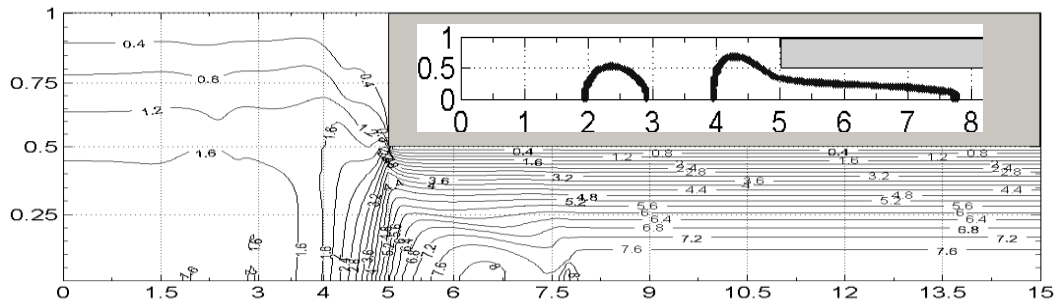
Σχ.5.10.(α,β). (α) Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για τα διαφασικά πεδία του Σχ.5.6.(γ,δ,ε,στ,ζ), (β) Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για τα πεδία του Σχ.5.6.(γ,δ,ε,στ,ζ).



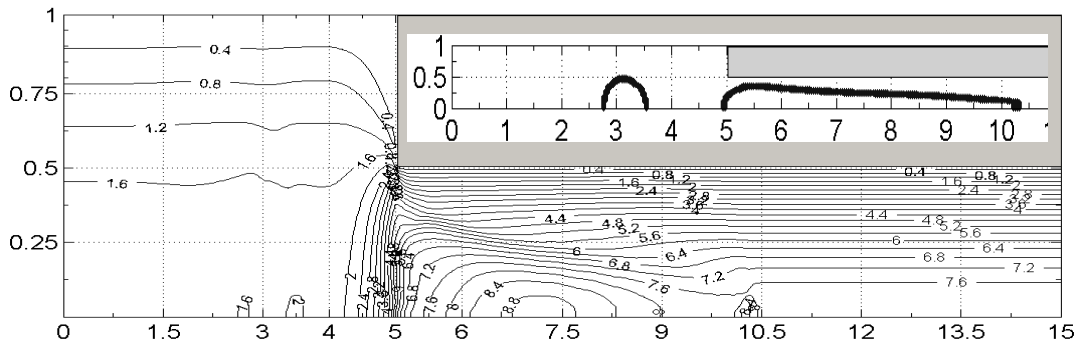
Σχ.5.11.(α, β). Απεικόνιση του αδιάστατου διανυσματικού ροϊκού διαφασικού πεδίου (u/U , v/U) του Σχ.5.6. (ε) στην περιοχή της στένωσης(α) με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού, (β) σε κλίμακα μήκος:πλάτος αγωγού 1:1.



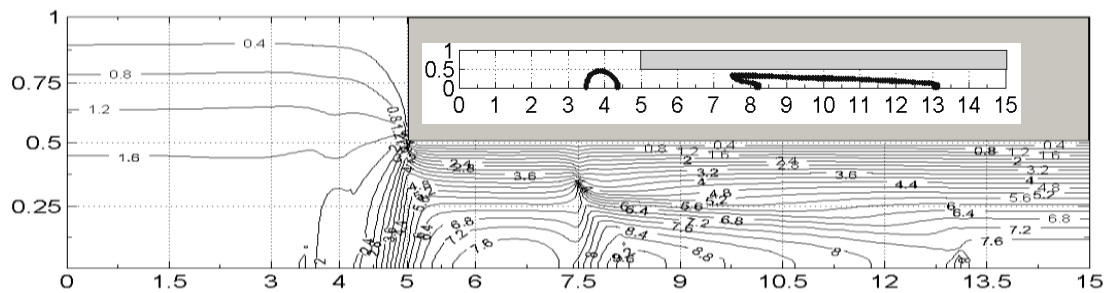
(α) Σχ.5.6 (γ)



(β) Σχ.5.6 (δ)



(γ) Σχ.5.6 (ε)

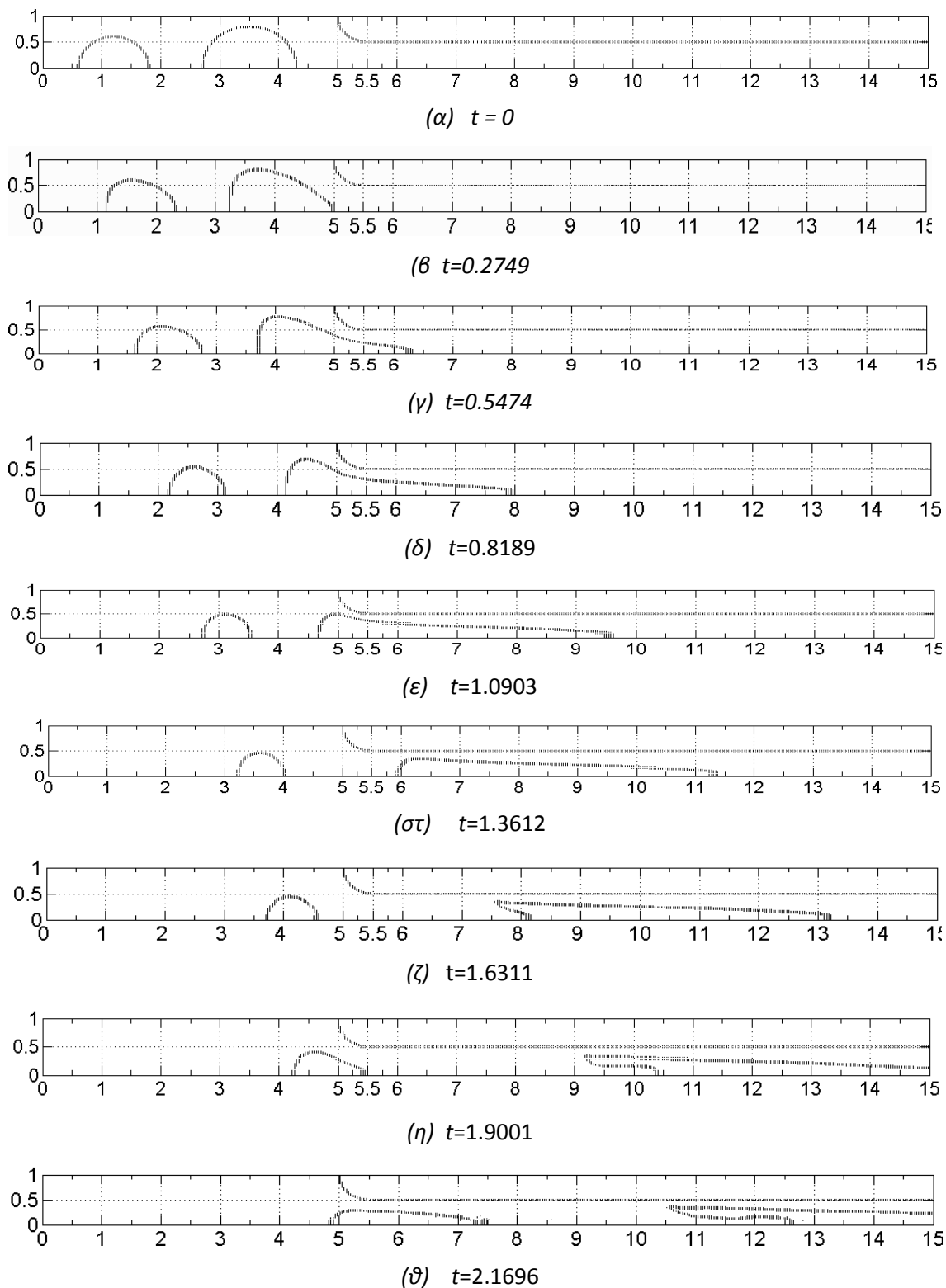


(δ) Σχ.5.6 (στ)

Σχ.5.12.(α,β,γ,δ). Ισοταχείς $X=[(u^2+v^2)^{1/2}/U]$ των διφασικών πεδίων με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού του Σχ.5.6.

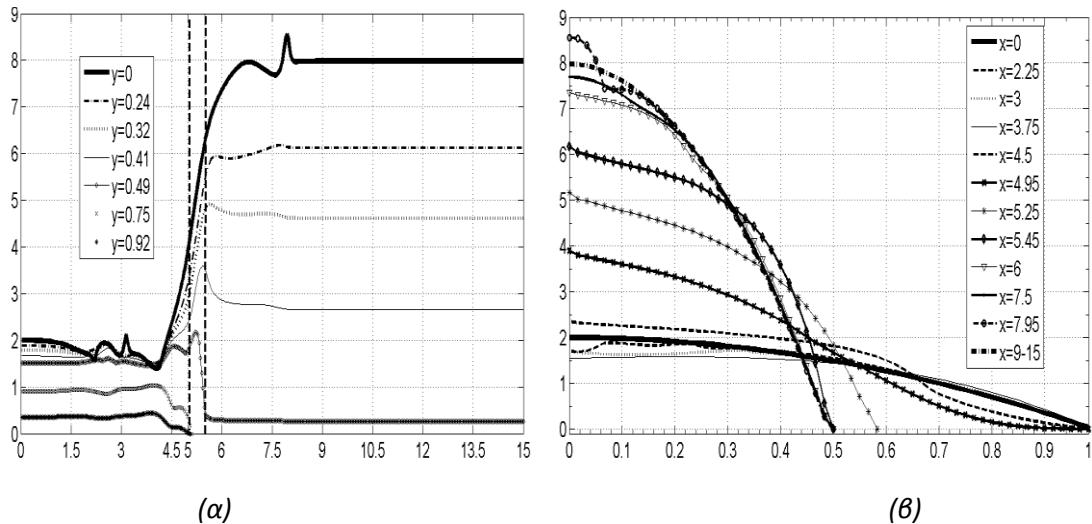
Στο Σχ.5.9. παρατηρείται μεγάλη κλίση της πίεσης στην περιοχή της στένωσης. Παρατηρείται τοπική διαταραχή και αύξηση της πίεσης στην περιοχή της σταγόνας.

5.4. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ.

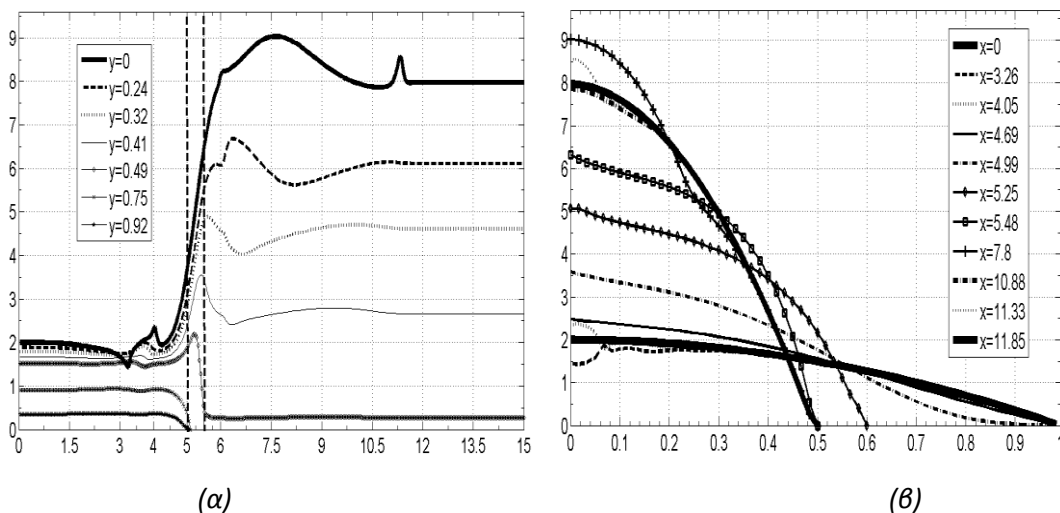


Σχ.5.13.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ). Αξονοσυμμετρική Στένωση με καμπύλες εξομάλυνσης και $\Lambda.S.=0.5$. Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k_1=0.8$, $k_2=0.6$.

Στο Σχ.5.13. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων ομάδας δύο άνισων κυκλικών (σφαιρικών) σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με στένωση που έχει καμπύλη εξομάλυνσης εκεί που αλλάζει η διάμετρος του αγωγού.



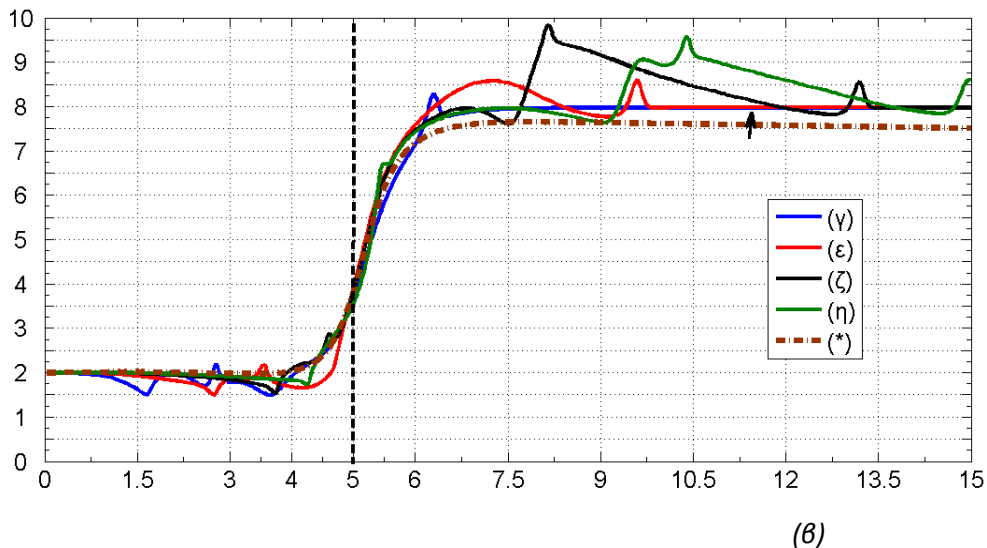
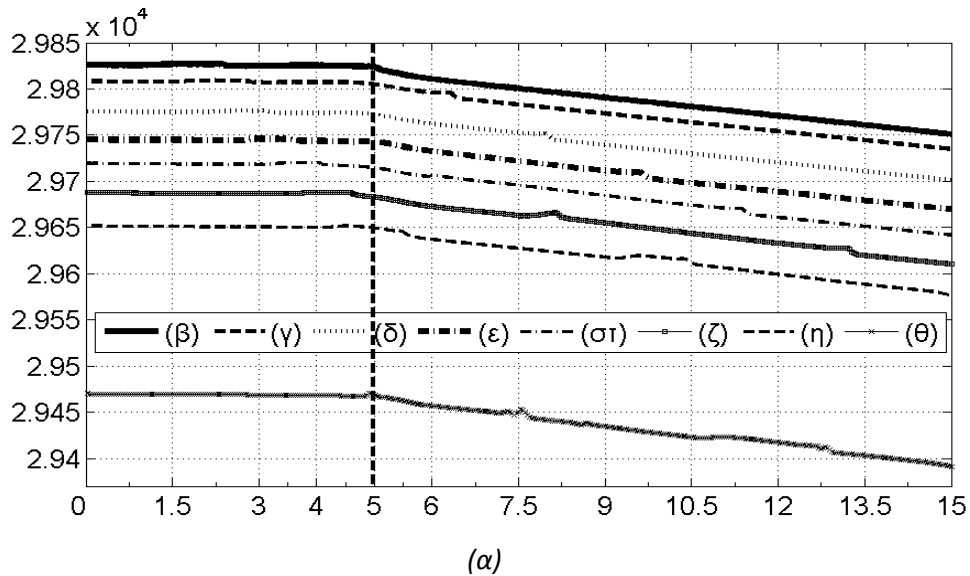
Σχ.5.14.(α,β). (α) Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R για το πεδίο του Σχ.5.13.(δ), (β) Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/R για το πεδίο του Σχ.5.13.(δ).



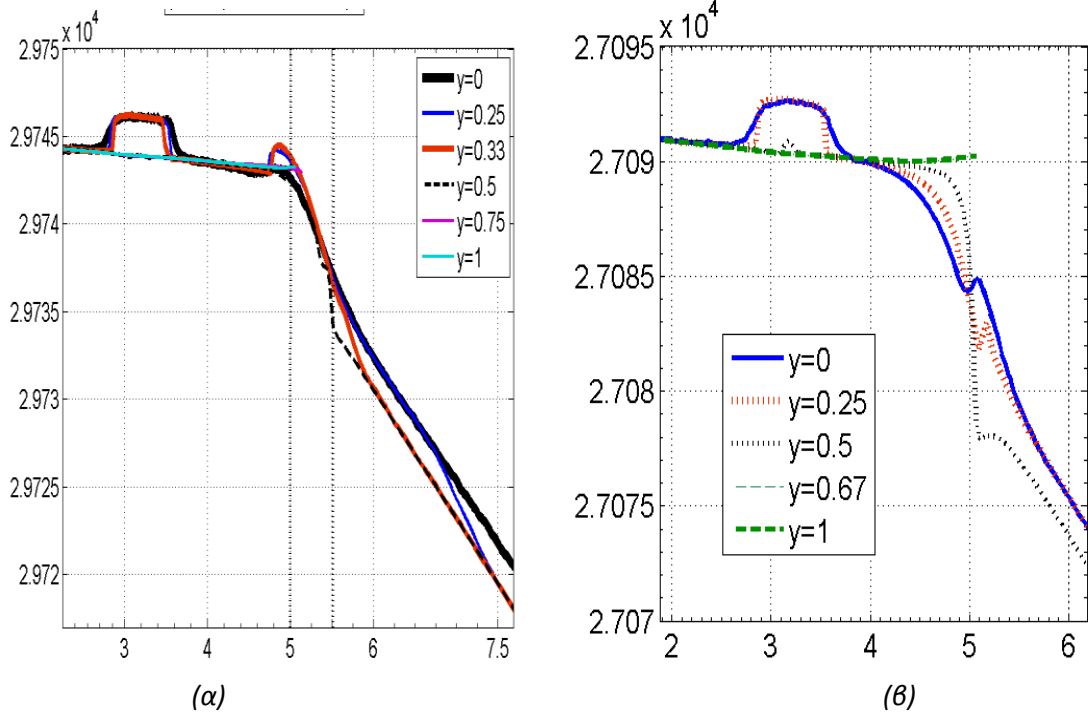
Σχ.5.15.(α,β). (α) Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R για το πεδίο του Σχ.5.13.(στ), (β) Η εγκάρσια κατανομή (προφίλ) της ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες κατά μήκος θέσεις x/R για το πεδίο του Σχ.5.13.(στ).

Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο

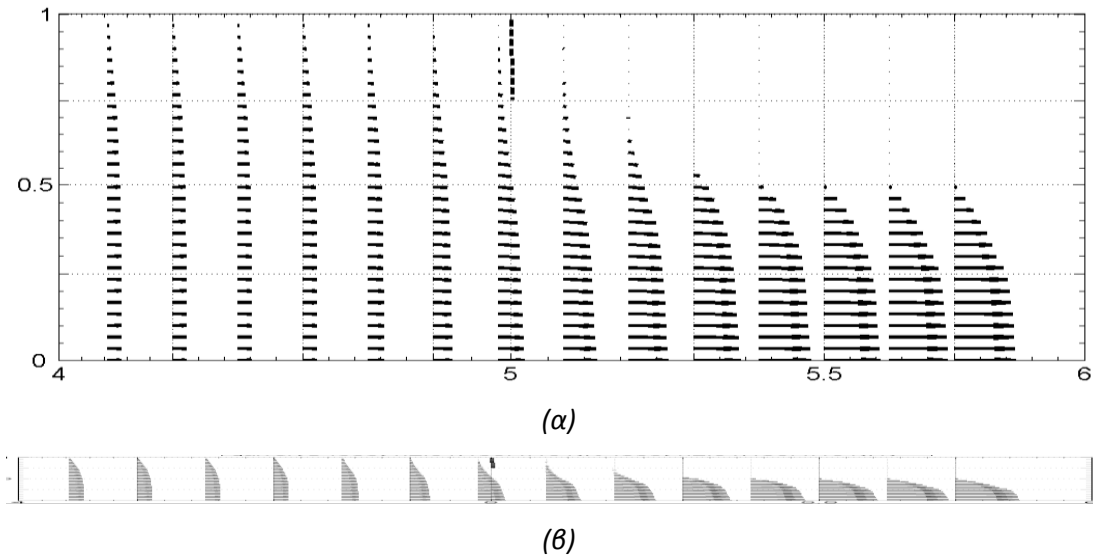
αριστερό άκρο του αγωγού πάνω στον άξονα συμμετρίας. Οι συνθήκες είναι οι ίδιες με του Σχ.5.6. της απότομης στένωσης $Re = 20$, $We = 2$, $Ca = 0.1$, $\lambda = 4$, $\delta = 0$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.6$, $\Lambda.S. = 0.5$. Η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μεγάλη αδιάστατη διάμετρο $D = 2$, ($R = 1$) του αγωγού ώστε $y/R = 0.1$. Το μήκος του αγωγού είναι $L = 15$, ($x/R = 0-15$). Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 400×60 . Η στένωση αρχίζει στην τετμημένη θέση 5, ($5+$ έως 15) και αντιστοιχεί στην μικρή αδιάστατη διάμετρο $d = 1$, ($r = 0.5$) του αγωγού ώστε $y/R = 0-0.5$.



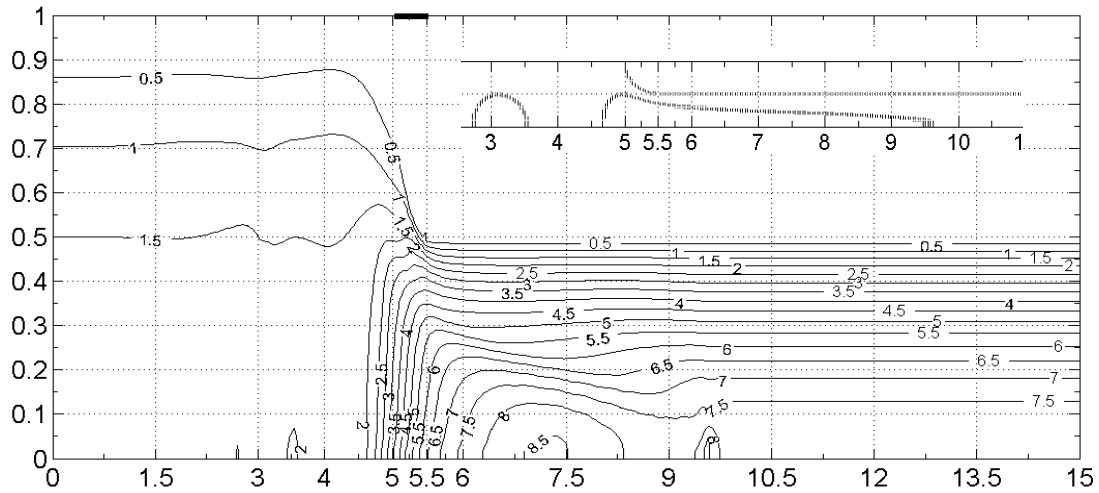
Σχ.5.16.(α,β). (α) Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για τα διφασικά πεδία του Σχ.5.13.(β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ), (β) Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για τα πεδία του Σχ.5.13.(γ,ε,ζ,η) και του αντίστοιχου μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες (*) λίγο πριν την αριθμητική σύγκλιση του αλγορίθμου μέσα στην στένωση.



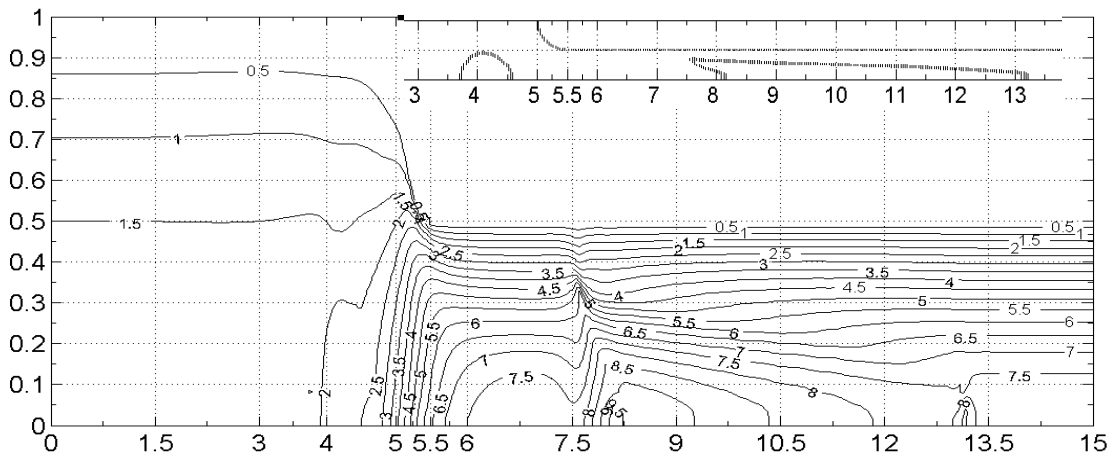
Σχ.5.17.(α,β). Σύγκριση απότομης και εξομαλυμένης αξονοσυμμετρικής στένωσης. Η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης πίεσης p' σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις γ/R για το διαφασικό πεδίο στην περιοχή της σταγόνας (α) του Σχ.5.13 (ε) για $t=1.0903$ και (β) του Σχ.5.6.(ε) για $t=1.0892$.



Σχ.5.18.(α,β). Απεικόνιση του αδιάστατου διανυσματικού ροϊκού διαφασικού πεδίου ($u/U, v/U$) του Σχ.5.13.(ε) στην περιοχή της ομαλής στένωσης(α) με μεγεθυμένο το πλάτος του αγωγού, (β) σε κλίμακα αξόνων σχεδίασης 1:1.



(α) Σχ.5.13.(ε)



(β) Σχ.5.13.(ζ)

Σχ.5.19.(α,β). Ισοταχείς $X=[(u^2+v^2)^{1/2}/U]$ των διφασικών πεδίων του Σχ.5.13. με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού.

Το καμπύλο όριο δεν φαίνεται να δημιουργεί αστάθειες στη ροή για την συγκεκριμένη ανάλυση πλέγματος. Ομαλοποιεί λίγο τις κατανομές ταχυτήτων τοπικά στην περιοχή της στένωσης. Για τις αξονοσυμμετρικές περιπτώσεις που εξετάζονται η στένωση με λόγο συστολής 0.5 σε συνδυασμό με το μεγάλο μέγεθος της σταγόνας είναι μια δύσκολη αριθμητικά περίπτωση¹¹. Το μήκος της στένωσης είναι ενδεχομένως πολύ μεγάλο.

¹¹ Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντίστοιχη μελέτη σε στένωση με μικρότερο λόγο συστολής.

5.5. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.¹²

5.5.1. Ορισμός των Re_d και Re_D σε αξονοσυμμετρικό αγωγό με διεύρυνση.

Σε πεδίο ροής αξονομετρικού αγωγού με απότομη διεύρυνση, η παροχή όγκου Q διατηρείται, άρα ισχύει:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \bar{u}_d = \frac{\pi D^2}{4} \bar{u}_D \quad (5.3.),$$

όπου είναι: d η μικρή διάμετρος (διάμετρος πριν την διεύρυνση), \bar{u}_d η μέση ταχύτητα στην μικρή διάμετρο, D η διάμετρος στην διεύρυνση, \bar{u}_D η μέση ταχύτητα στην διεύρυνση. Επομένως μπορούν να οριστούν δύο διαφορετικοί αριθμοί Re (σχέση 2.7.1.) για τα δύο τμήματα του αγωγού με διαμέτρους d και D αντίστοιχα

$$Re_d = \frac{\bar{u}_d d \rho_c}{\mu_c}, \quad Re_D = \frac{\bar{u}_D D \rho_c}{\mu_c} \quad (5.4.).$$

Από την σχέση (5.3) προκύπτει η σχέση μεταξύ των Re_d και Re_D

$$Re_d = Re_D \frac{D}{d} \quad (5.5.),$$

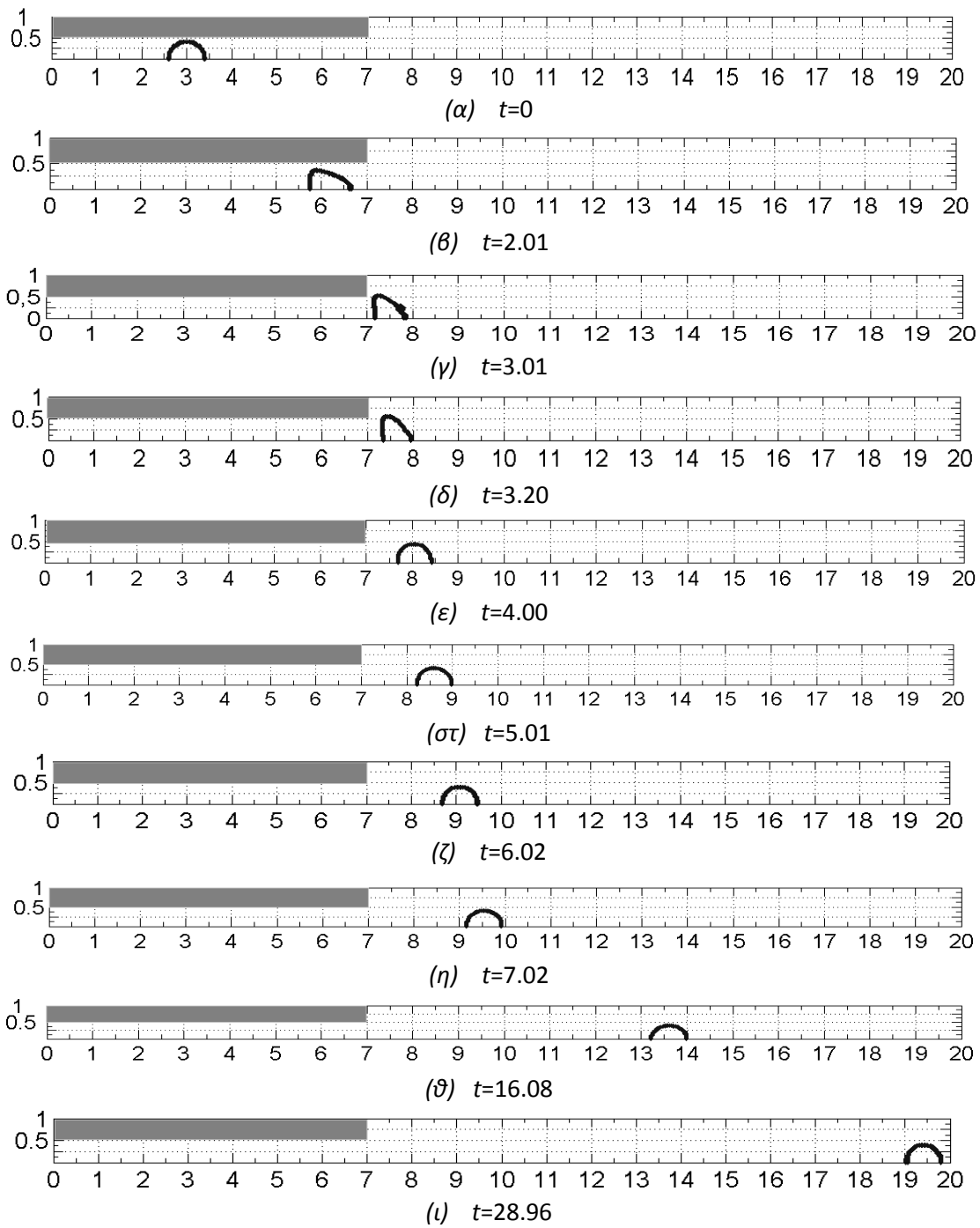
που διευκολύνει τις βιβλιογραφικές συγκρίσεις¹³. Στα αποτελέσματα των §5.5.2. και 5.5.3 χρησιμοποιείται ο αριθμός $Re = Re_d$ στην είσοδο του αγωγού.

5.5.2. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με μία σταγόνα.

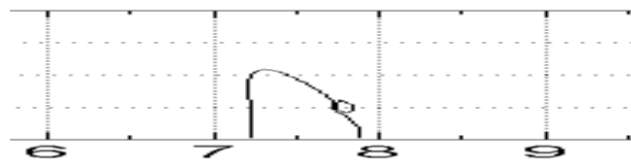
Στο Σχ.5.20 παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων μίας κυκλικής (σφαιρικής) σταγόνας που διασπείρεται σε διφασική ροή σε συνθήκες $Re = 20$, $We = 4$, $Ca = 0.2$, $\lambda = 4$, $\delta = 0$, $k = 0.8$, μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με απότομη διεύρυνση με λόγο διαστολής, $\Lambda.D. = 2:1$. Η σταγόνα εισάγεται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) στο αριστερό άκρο του αγωγού επάνω στον άξονα συμμετρίας. Η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μικρή αδιάστατη διάμετρο $d=1, (r=0.5)$ του αγωγού ώστε $(y/R) = 0-0.5$. Η διεύρυνση αρχίζει στην τετμημένη θέση 7, ($7+$ έως 20) και αντιστοιχεί στην μεγάλη αδιάστατη διάμετρο $D=2, (R=1)$ του αγωγού ώστε $y/R = 0-1$. Το μήκος του αγωγού είναι $L=20$ ($x/R = 0-20$). Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 600X60.

¹² Η Διδιάστατη Διεύρυνση με ή χωρίς καμπύλες εξομάλυνσης παραλείπεται.

¹³ Kadja, Touzopoulos & Bergeles, 2002, Macagno & Hung, 1967, Nag & Datta, 2007, Scott et.al., 1986, Rosche & Back. 1976, Pollard, 1981, Feuerstein et.al., 1975.



Σχ.5.20.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Στιγμιότυπα διφασικής ροής σε απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση $\Lambda.Δ.=2$. Μία σταγόνα : $Re=20$, $We=4$, $Ca = 0.2$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.8$.

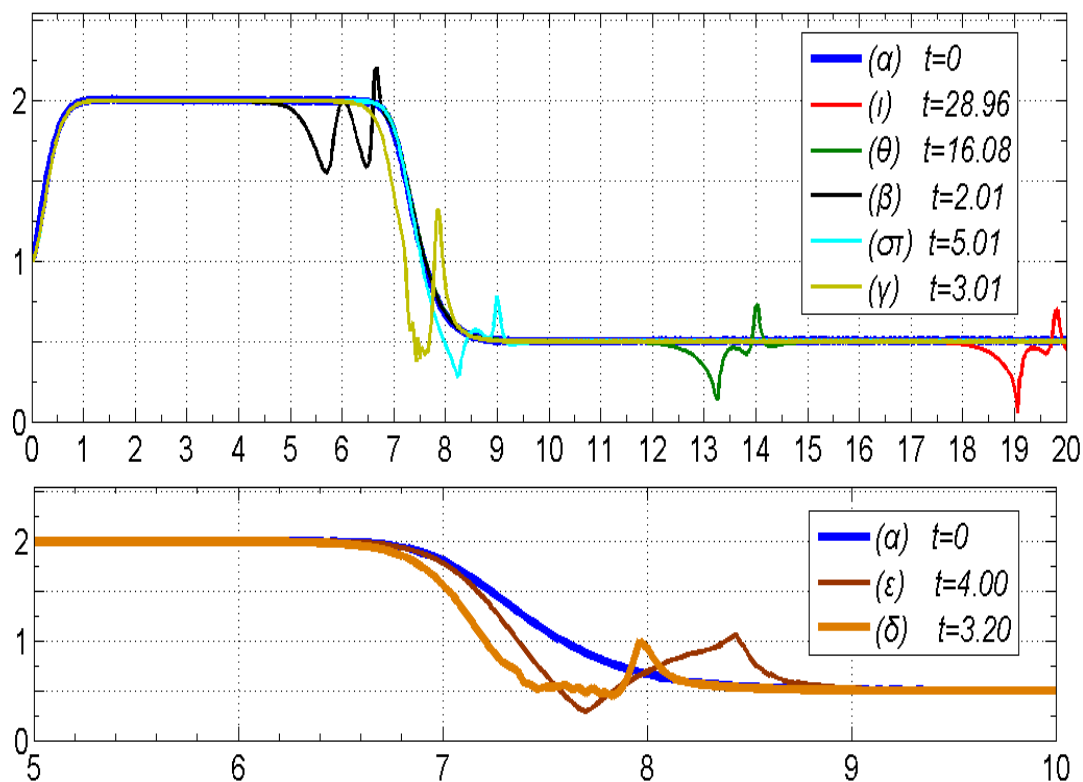


Σχ.5.21. Λεπτομέρεια στο στιγμιότυπο της σταγόνας του Σχ.5.20. (γ), $t=3.01$.

Ως Re της προσομοίωσης χρησιμοποιείται ο Re_d στην είσοδο του αγωγού, $Re = Re_d = 20$. Ο αξονοσυμμετρικός μονοφασικός αλγόριθμος συγκλίνει σε παραβολικά προφίλ λίγο μετά την είσοδο με μέση ταχύτητα $\bar{u}_d = U = 1$ και μέγιστη ταχύτητα $\bar{u}_{d-max} = 2$ και στην έξοδο της διεύρυνσης με μέση ταχύτητα $\bar{u}_D = 0.25$ και μέγιστη ταχύτητα $\bar{u}_{D-max} = 0.5$. Ως οριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται¹⁴ οι σχέσεις

$$u'_{inlet} = \frac{u_{inlet}}{\bar{u}_d} = u'(0, j) = 1 \quad \text{και} \quad v'_{inlet} = \frac{v_{inlet}}{\bar{u}_d} = v'(0, j) = 0 \quad (5.7.)$$

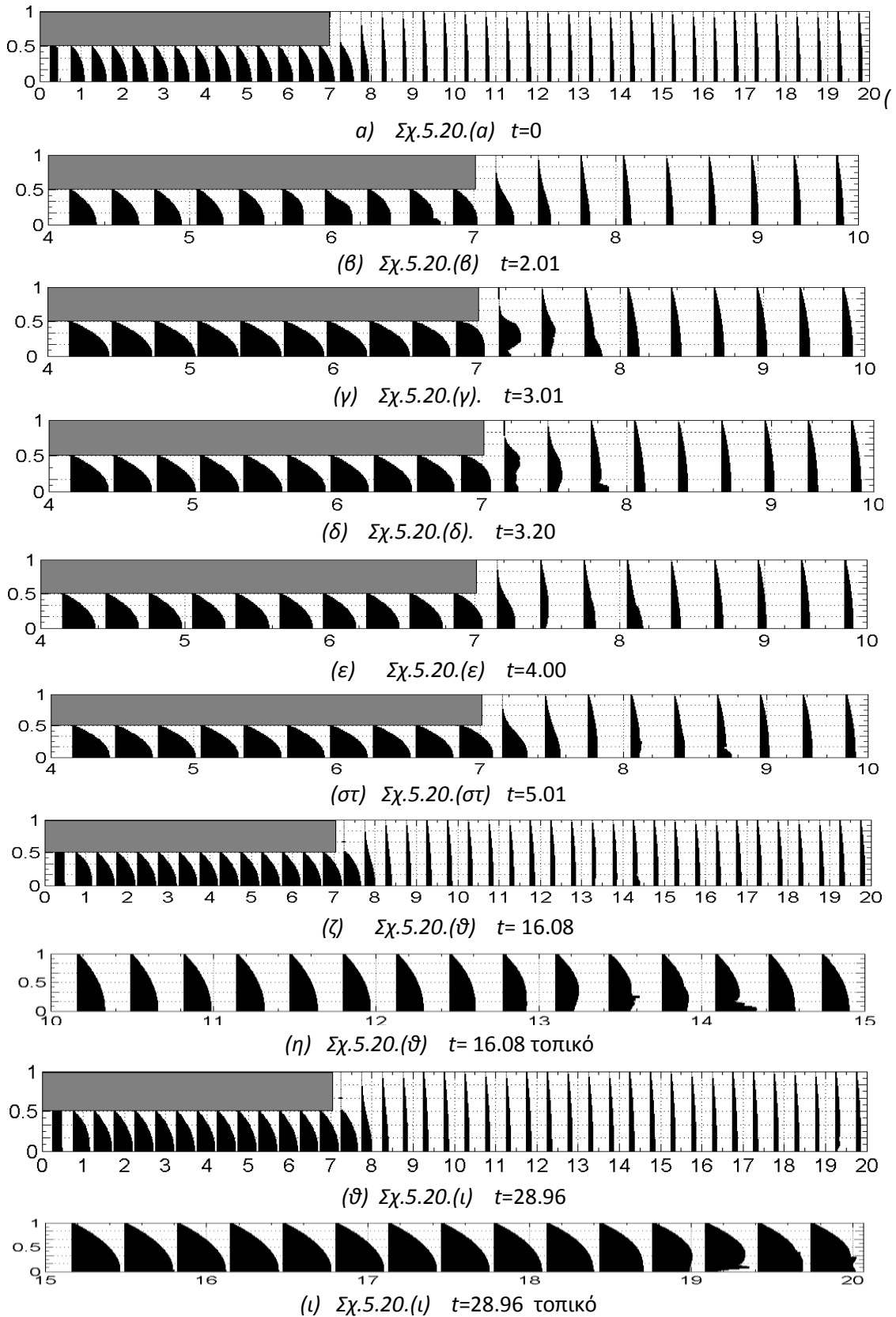
και ως αρχικές συνθήκες οι συνήθεις σχέσεις $u'(i, j) = 1, v'(i, j) = 0$, (5.2) εντός του πεδίου ροής.



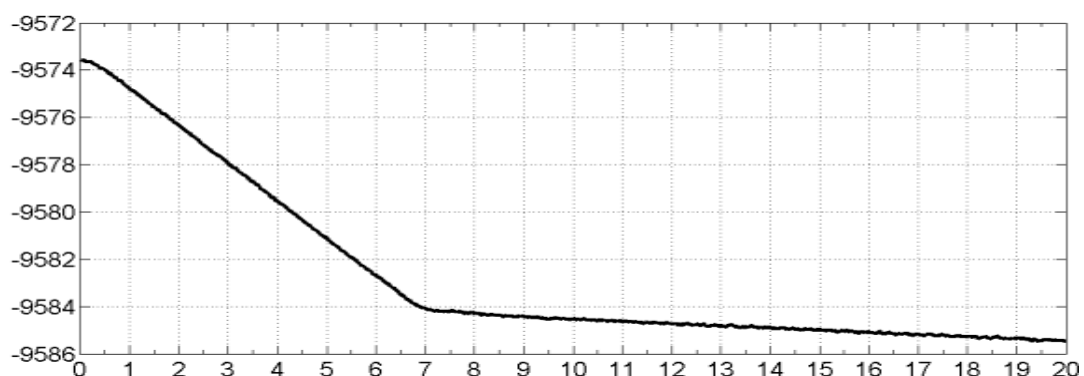
Σχ.5.22. Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($\gamma=0$) για το μονοφασικό πεδίο χωρίς τις σταγόνες και τα διφασικά πεδία του Σχ.5.20. (α,β,γ,δ,ε,σ,θ,ι).

¹⁴ Ως οριακή συνθήκη εισόδου (στην μικρή διάμετρο d) μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά η σχέση (5.1.) δηλαδή αδιάστατη ταχύτητα με παραβολικό προφίλ

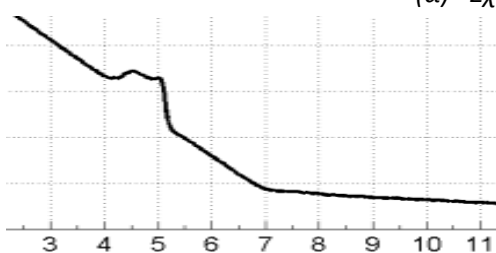
$$u'_{inlet} = \frac{u_{inlet}}{\bar{u}_d} = 2 \left(1 - 4 \frac{r'^2}{d^2} \right) = 2 - 4r'^2, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq r' \leq 0.5, \quad (5.8.)$$



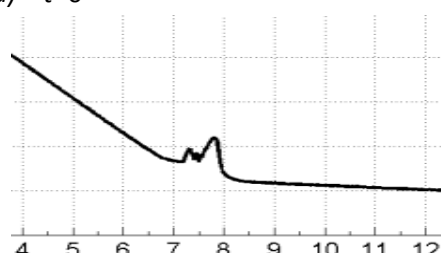
Σχ.5.23 (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Απεικόνιση, με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού, των αδιάστατων διανυσματικών ροϊκών διασφικτικών πεδίων (u/U , v/U) κατά μήκος της αξονοσυμμετρικής διεύρυνσης του Σχ.5.20. σε ολόκληρο ή τμήμα του αγωγού που περιλαμβάνει τις σταγόνες.



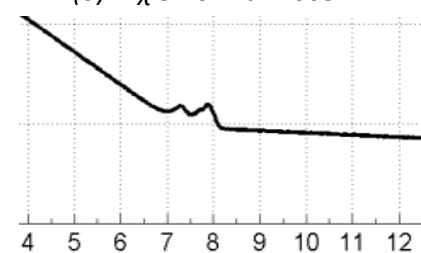
(α) Σχ.5.20.(α) $t=0$



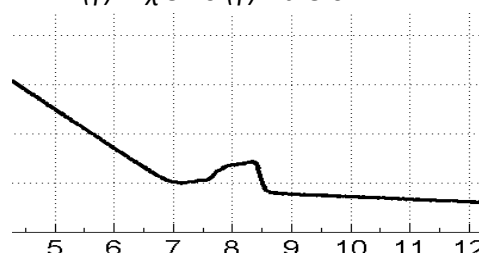
(β) Σχ.5.20. $t=1.0034$



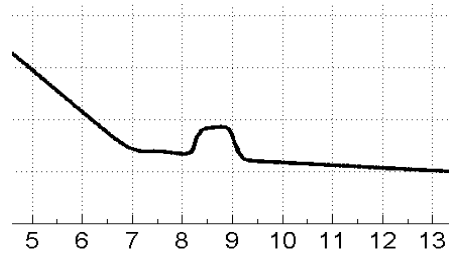
(γ) Σχ.5.20.(γ) $t=3.01$



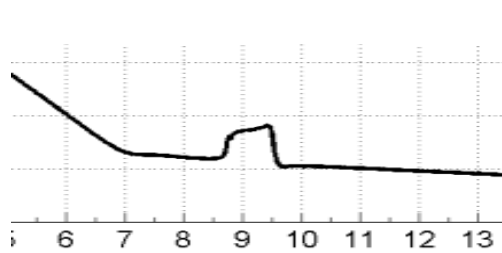
(δ) Σχ.5.20.(δ) $t=3.20$



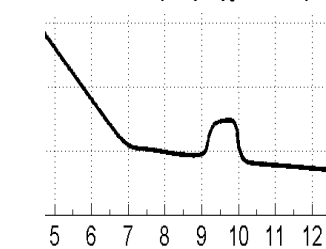
(ε) Σχ.5.20.(ε) $t=4.00$



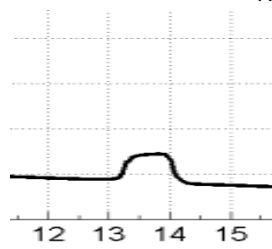
(στ) Σχ.5.20.(στ) $t=5.01$



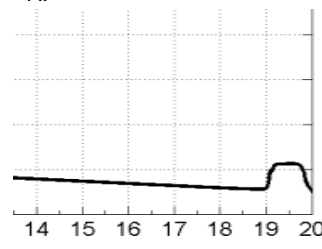
(ζ) Σχ.5.20.(ζ) $t=6.02$



(η) Σχ.5.20.(η) $t=7.02$



(θ) Σχ.5.20.(θ) $t=16.08$

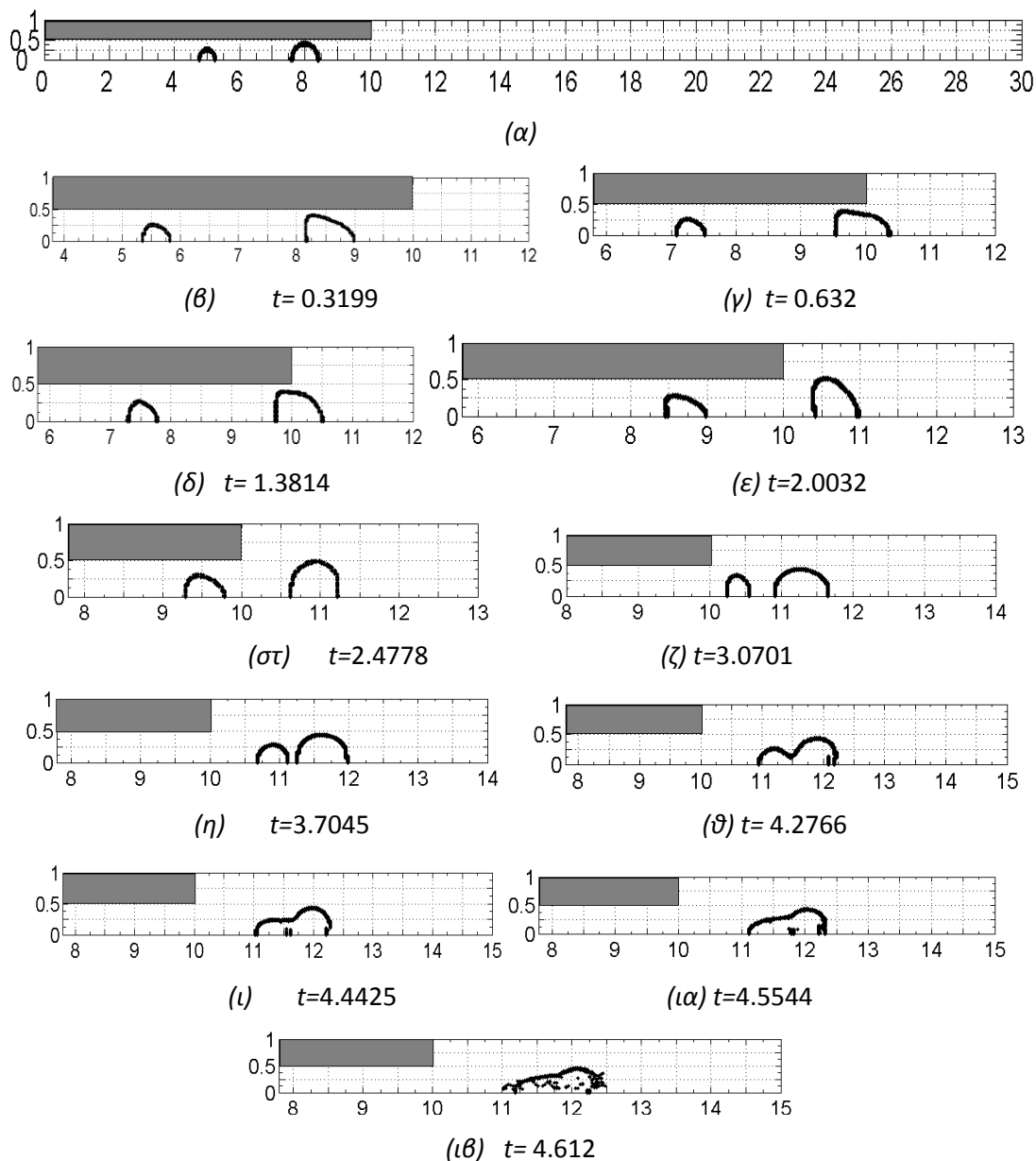


(ι) Σχ.5.20.(ι) $t=28.96$

Σχ.5.24(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$): (α) του μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες του Σχ.5.20.(α) και (β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι) των διφασικών πεδίων του Σχ.5.20. τοπικά στην περιοχή των σταγόνων.

5.5.3. Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση με δύο σταγόνες.

Αντίστοιχη περίπτωση με της §5.5.2., Σχ.5.20 παρουσιάζεται στο Σχ.5.25., όπου στιγμιότυπα περιγραμμάτων ομάδας δύο άνισων κυκλικών (σφαιρικών) σταγόνων διασπείρονται σε διαφασική ροή σε συνθήκες $Re = Re_d = 20$, $We=4$, $Ca=0.2$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k1=0.8$, $k2=0.5$ μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με απότομη διεύρυνση. Η απότομη διεύρυνση έχει λόγο διαστολής, $\Lambda.Δ.=2:1$. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του αγωγού επάνω στον άξονα συμμετρίας.

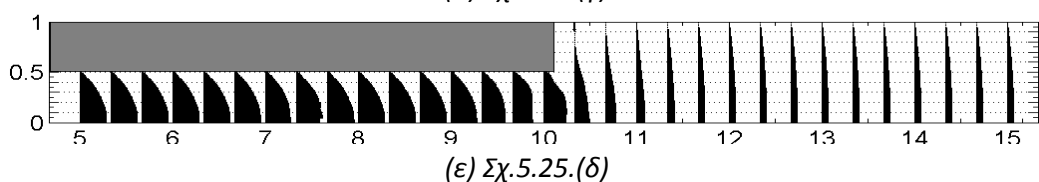
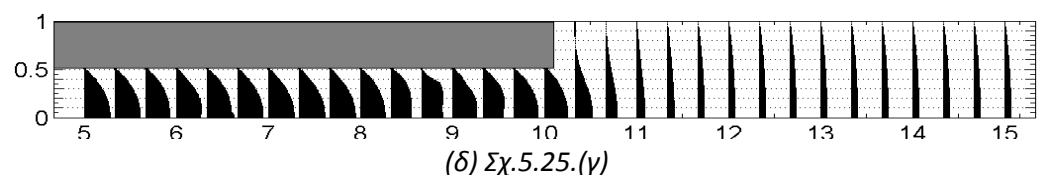
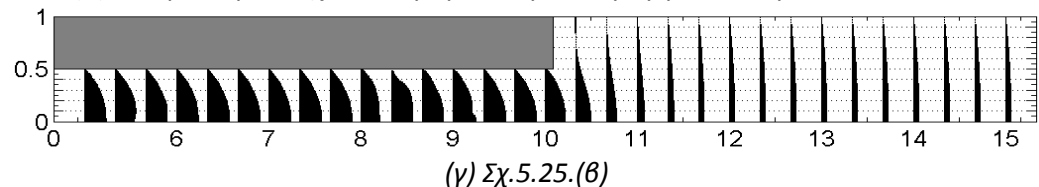
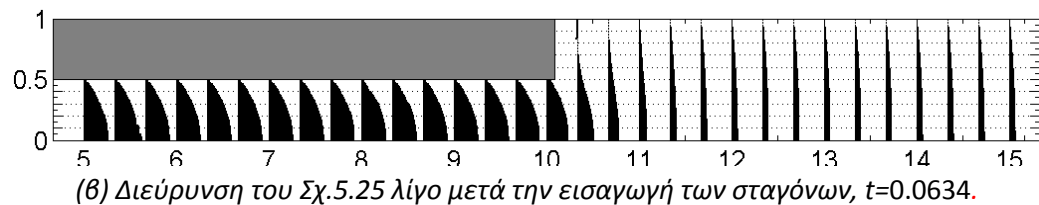
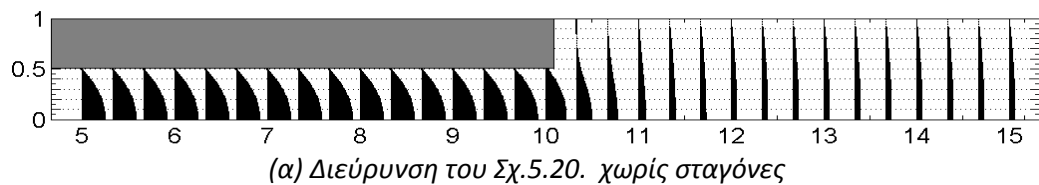


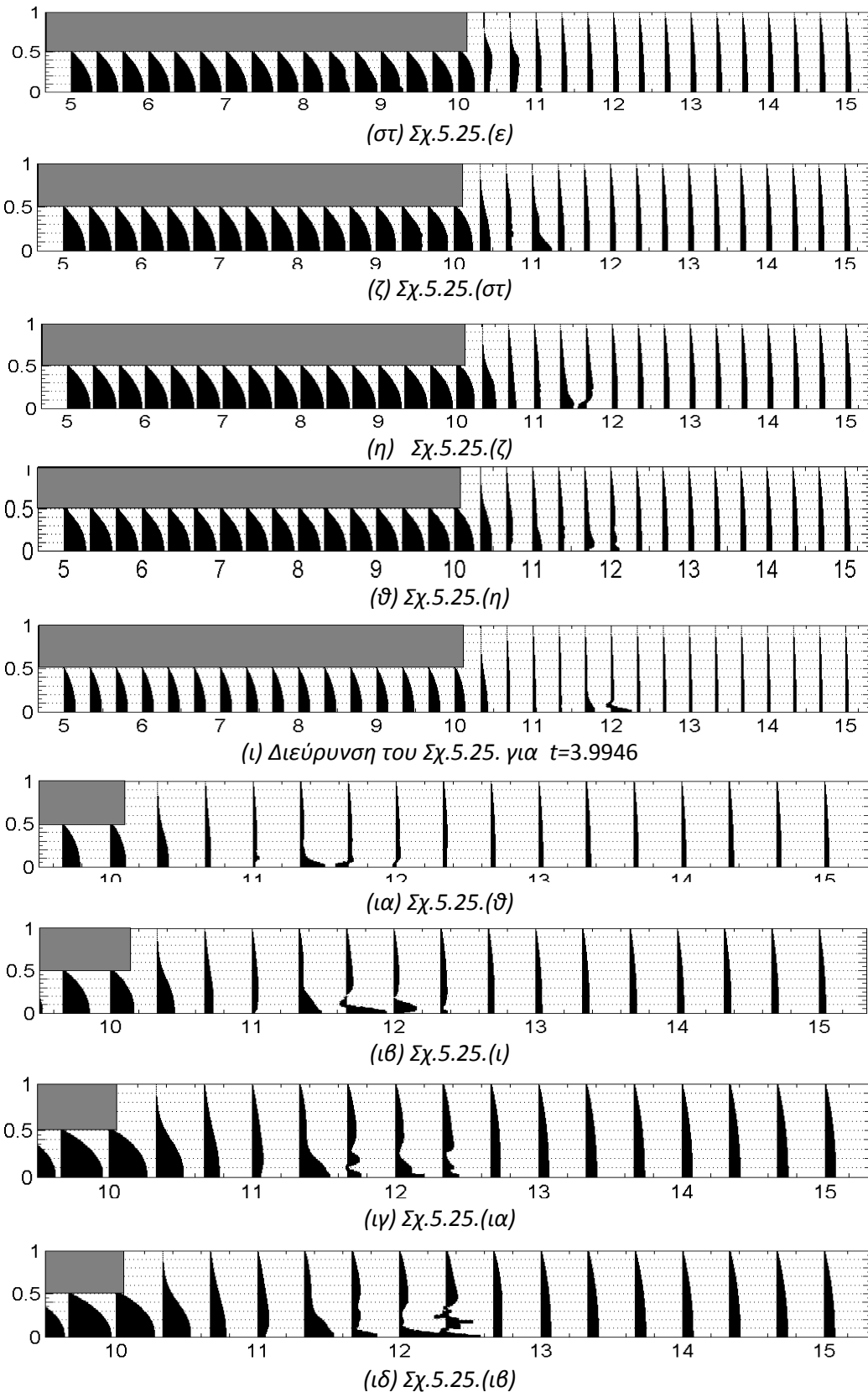
Σχ.5.25.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ). Απότομη αξονοσυμμετρική Διεύρυνση. $\Lambda.Δ.=2:1$. Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=4$, $Ca = 0.2$, $\lambda = 4$, $\delta=0$, $k1=0.8$, $k2=0.5$.

Η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μικρή αδιάστατη διάμετρο $d=1$, ($r=0.5$) του αγωγού ώστε $(\gamma/R)=0-0.5$. Η διεύρυνση αρχίζει στην τετμημένη θέση 10, (10+ έως 30) και αντιστοιχεί στην μεγάλη αδιάστατη διάμετρο $D=2$, ($R=1$) του αγωγού ώστε $\gamma/R=0-1$. Το μήκος του αγωγού είναι $L=30$, ($x/R=0-30$). Το μήκος στην Στένωση είναι $\Sigma=10$ και στην Διεύρυνση $\Delta=20$. Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 900×80 .

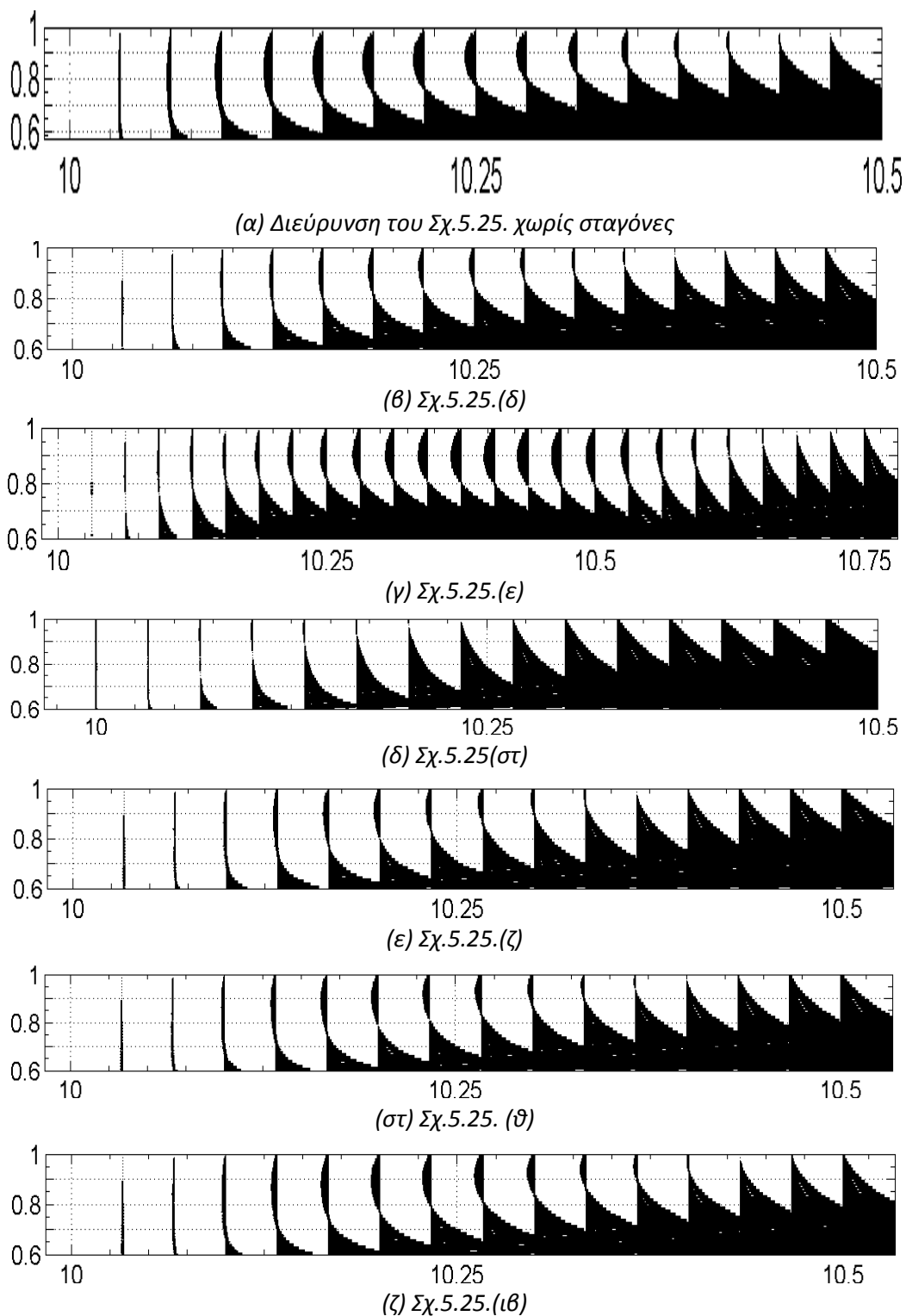
Ο αξονοσυμμετρικός μονοφασικός αλγόριθμος συγκλίνει σε παραβολικά προφίλ λίγο μετά την είσοδο με μέση ταχύτητα $\bar{u}_d = U = 1$ και μέγιστη ταχύτητα $\bar{u}_d -_{max} = 2$ και στην έξοδο της διεύρυνσης με μέση ταχύτητα $\bar{u}_D = 0.25$ και μέγιστη ταχύτητα $\bar{u}_D -_{max} = 0.5$. Ως οριακές συνθήκες χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $u'_{inlet} = u'(0, j) = 1$, (5.7.) και $v'_{inlet} = v'(0, j) = 0$ (5.8.) και ως αρχικές συνθήκες οι συνήθεις σχέσεις $u'(i, j) = 1$, $v'(i, j) = 0$, (5.2) εντός του πεδίου ροής.

Στην πρώτη σταγόνα στην διεύρυνση η ανακούφιση του σχήματος της σταγόνας δίνει D αρνητική με ελάχιστη τιμή $D=-0.22$ στο Σχ. 5.25 (στ) που στην συνέχεια τείνει να μηδενιστεί. Στην δεύτερη σταγόνα η παραμόρφωση είναι πολύ μικρή, $D=0.06$ στην στένωση και $D=-0.03$ στην διεύρυνση.



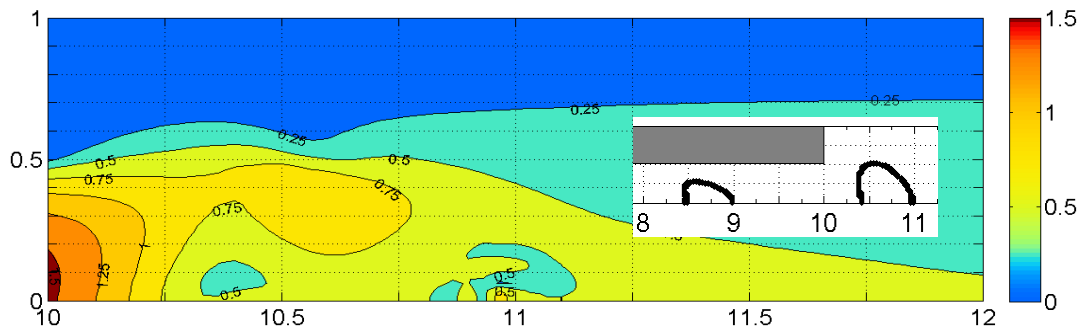


Σχ.5.26.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ,ιδ). Απεικόνιση, με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού, των αδιάστατων διανυσματικών ροϊκών διφασικών πεδίων (u/U , v/U) κατά μήκος της αξονοσυμμετρικής διεύρυνσης του Σχ.5.25. σε τμήμα του αγωγού που περικλείει τις σταγόνες.

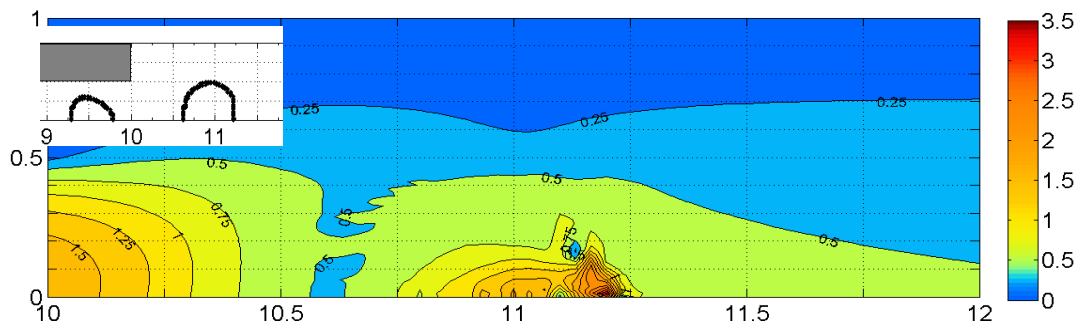


Σχ.5.27(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ). Τοπική απεικόνιση του αδιάστατου διανυσματικού ροϊκού διφασικού πεδίου (u/U , v/U) του Σχ.5.25. στην περιοχή της διεύρυνσης όπου εμφανίζεται η ανακυκλοφορία.

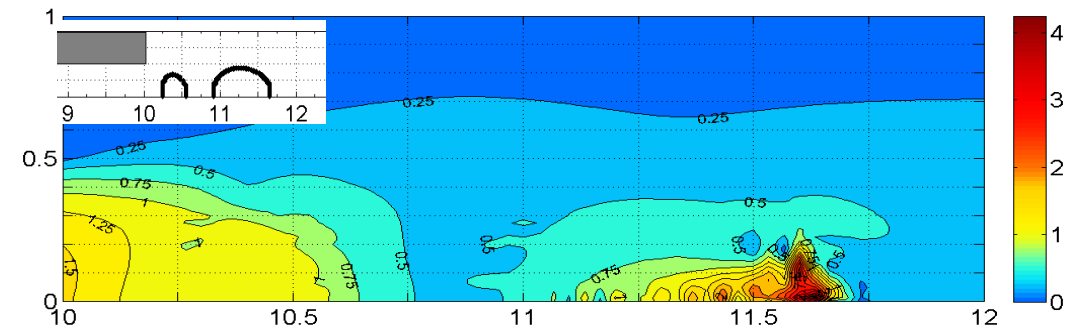
Το μέγεθος της περιοχής ανακυκλοφορίας για την διεύρυνση 1:2 έχει υπολογιστικά προσδιοριστεί, *Macagno & Hung, 1967*.



(α) Σχ.5.25.(ε)

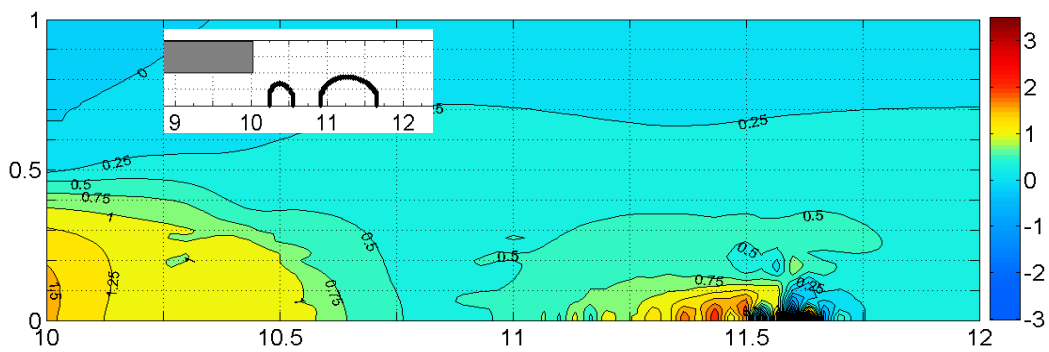


(β) Σχ.5.25.(στ)



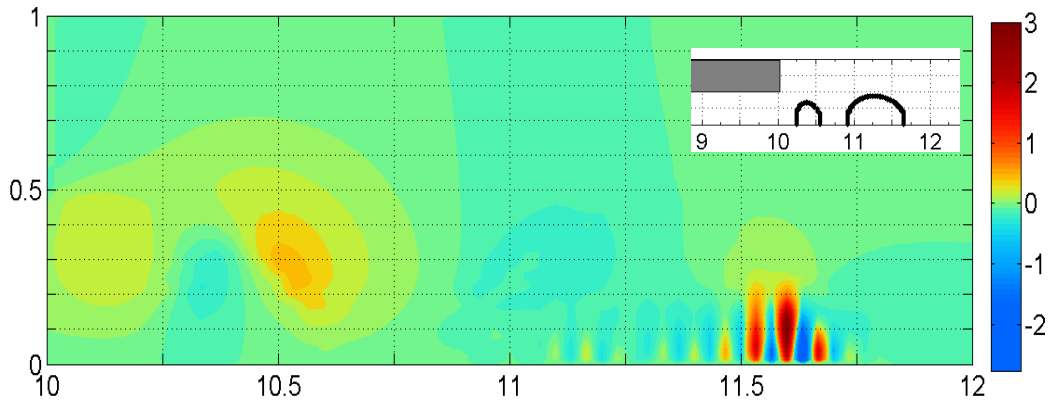
(γ) Σχ.5.25.(ζ)

Σχ.5.28.(α,β,γ). Ισοταχείς $\chi=[(u^2+v^2)^{1/2}/U]$ των διαφασικών πεδίων με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού (α) του Σχ.5.25.(ε), (β) του Σχ.5.25.(στ) και (γ) του Σχ.5.25.(ζ)).

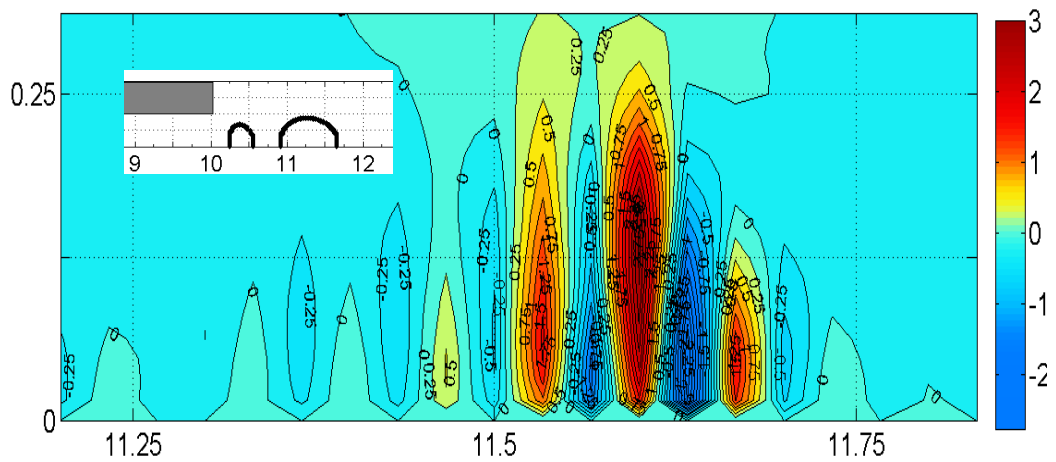


Σχ.5.25(ζ)

Σχ.5.29. Ισοταχείς u/U του διαφασικού πεδίου με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού του Σχ.5.25.(ζ).

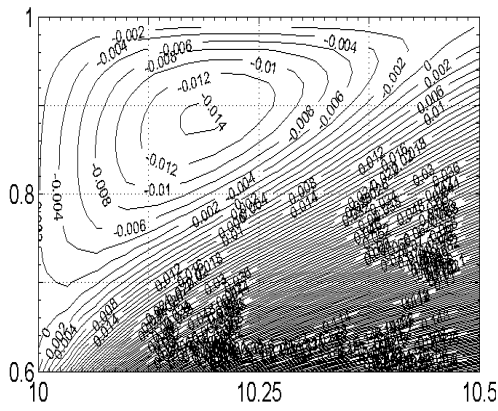


(α) Σχ.5.25.(ζ)

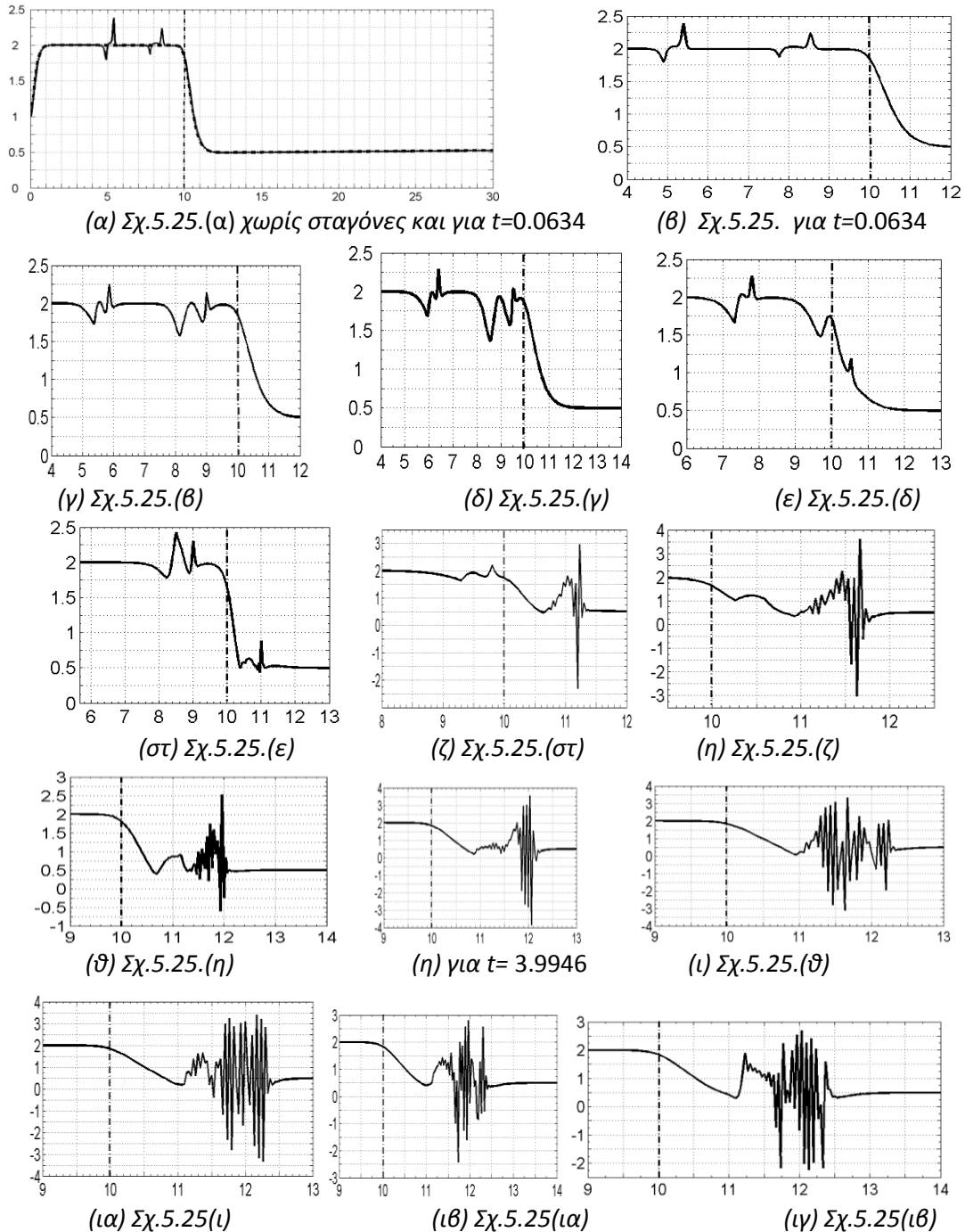


(β) Σχ.5.25.(ζ)

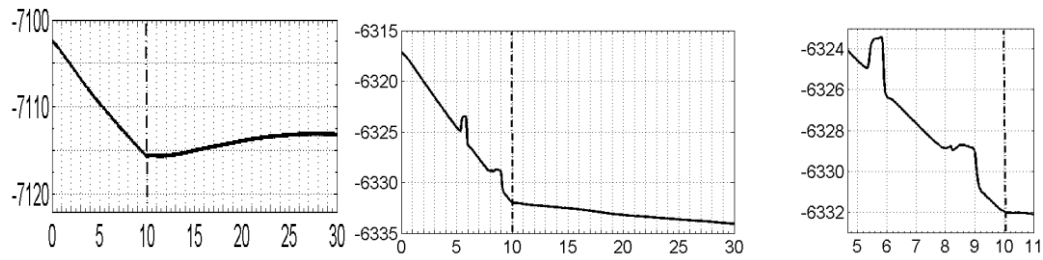
Σχ.5.30(α,β). Ισοταχείς v/U του διφασικού πεδίου με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού του Σχ.5.25.(ζ) (α) στην περιοχή της διευρύνσης 10-12, (β) απόσπασμα κοντά στον άξονα του αγωγού στο μπροστινό μέρος της μεγάλης σταγόνας.



Από τις ισοταχείς της u συνιστώσας της ταχύτητας φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές u στην περιοχή της διεύρυνσης που είναι ένδειξη για παρουσία ανακυκλοφορίας.



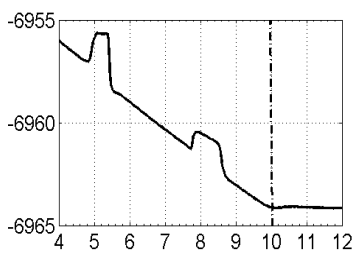
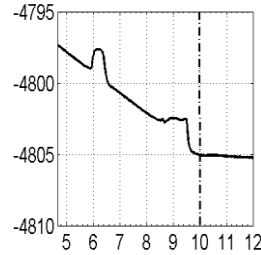
Σχ.5.32.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ). Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για τα διφασικά πεδία του Σχ.5.20. κοντά στην περιοχή της σταγόνας και του αντίστοιχου μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες.



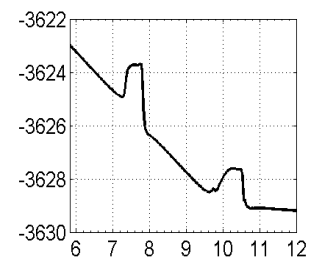
(α) Σχ.5.25.(α) χωρίς σταγόνες

(β) Σχ.5.25.(β) σύνολο

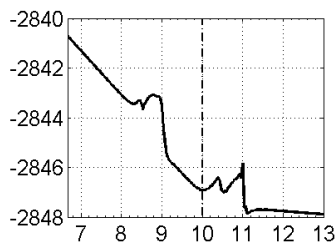
(γ) Σχ.5.25.(β)

(δ) Σχ.5.25. για $t=0.0634$ 

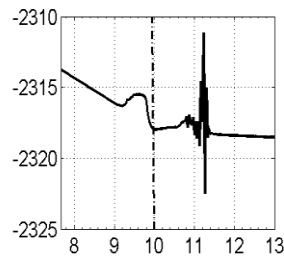
(ε) Σχ.5.25.(γ)



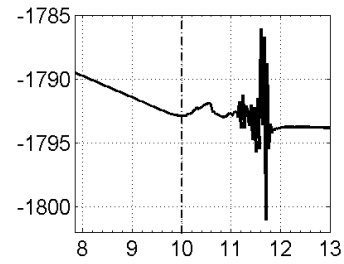
(στ) Σχ.5.25.(δ)



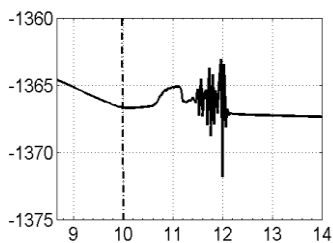
(ζ) Σχ.5.25.(ε)



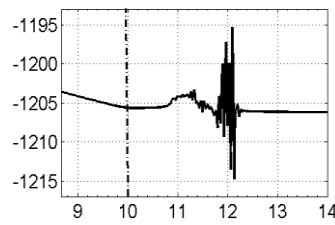
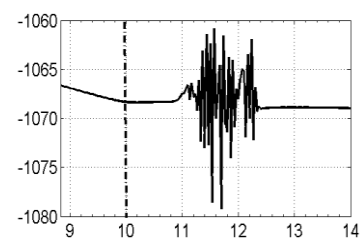
(η) Σχ.5.25.(στ)



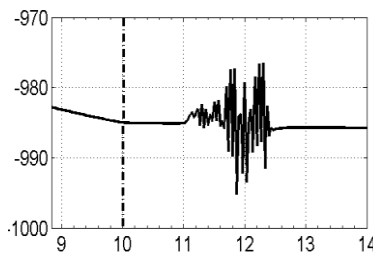
(θ) Σχ.5.25.(ζ)



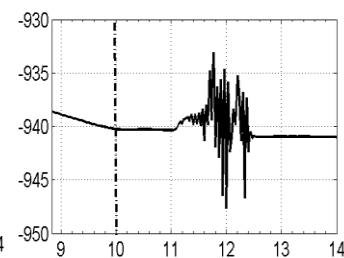
(ι) Σχ.5.25.(η)

(ια) Σχ.5.25. για $t=3.9946$ 

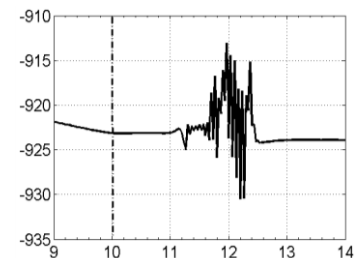
(ιβ) Σχ.5.25.(θ)



(ιγ) Σχ.5.25.(ι)



(ιδ) Σχ.5.25.(ια)



(ιε) Σχ.5.25.(ιβ)

Σχ.5.33. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ,ιδ,ιε). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$): (α) του μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες του Σχ.5.25.(α) λίγο πριν ολοκληρωθεί η αριθμητική σύγκλιση, (β) του συνολικού διαφασικού πεδίου του Σχ.5.25.(β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ,ιδ,ιε) των διαφασικών πεδίων του Σχ.5.25. τοπικά στην περιοχή των σταγόνων.

Στα παραπάνω αποτελέσματα, η ανάπτυξη του διφασικού πεδίου είναι αρκετά καλή και ομαλή που αλλάζει σε εικόνα διαταραχής και αποσύνθεσης μετά την συνένωση των σταγόνων σε μία σταγόνα. Αρχικά οι σταγόνες εισήλθαν και παραμορφώθηκαν ομαλά στη διευρυμένη περιοχή του αγωγού.

5.6. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΞΩΤΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.

Στο Σχ.5.37. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων κυκλικής (σφαιρικής) σταγόνας που διασπείρεται σε διφασική ροή με συνθήκες $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k=0.6$ μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό που φέρει τοξωτή¹⁵ στένωση-διεύρυνση. Η σταγόνα μεγέθους¹⁶ $k=0.6$ εισάγεται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) στο αριστερό άκρο του αγωγού επάνω στον άξονα συμμετρίας στην τετμημένη $x/R=3.5$.

Η εξίσωση $x-x_k^2 + y-y_k^2 = R_T^2$, όπου $x_k, y_k = 10,59.4$ και $R_T = 60$, περιγράφει την καμπύλη του τοξωτού αγωγού. Τμήμα μήκους $L1=L2=3.1$ στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού είναι κυλινδρικό για να ελέγχεται η σύγκλιση. Η είσοδος και η έξοδος του αγωγού αντιστοιχεί στην μεγάλη αδιάστατη διάμετρο $D=2$, ($R=1$) του αγωγού, ώστε $y/R=0-1$. Το μήκος του αγωγού είναι $L=20$ ($x/R=0-20$). Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα¹⁷ είναι 600×60 . Στο μέσο του τοξωτού αγωγού αντιστοιχεί η μέγιστη στένωση (60% της αρχικής ακτίνας, $R=1$) και εκεί ο λόγος συστολής είναι, $\Lambda.S.=0.4$.

Στην είσοδο η μέση ταχύτητα $U=1$ και οι οριακές συνθήκες $u'(0, j)=1$, $v'(0, j)=0$, (5.7).

Στην έξοδο οι παράγωγοι των u , v μηδενίζονται. Στο χωρίο υπολογισμών έχουν τεθεί ως αρχικές συνθήκες $u'(i, j)=v'(i, j)=0$ από το τόξο και επάνω και $u'(i, j)=1$, $v'(i, j)=0$ (5.2) μέσα στο πεδίο ροής. Κρίνεται αναγκαία η λεπτομερής και συνεχής καταγραφή της παροχής¹⁸ με την σχέση

¹⁵ arch channel.

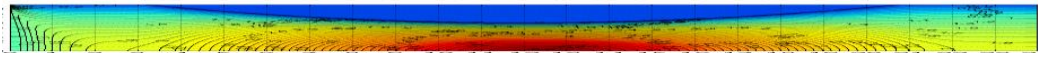
¹⁶ Το μέγεθος της σταγόνας επιλέγεται επαρκώς μεγάλο για τις παρατηρήσεις, αλλά όχι τόσο μεγάλο ώστε να δημιουργεί τυχόν αριθμητικά προβλήματα στο διάκενο μεταξύ σταγόνας και αγωγού.

¹⁷ Ο χρόνος σύγκλισης μονοφασικού πεδίου είναι περίπου 30 ώρες. Το υπόλοιπο στο κριτήριο σύγκλισης της μεθόδου *SOR*. είναι περίπου 0.0014. Σε δοκιμή μονοφασικού πεδίου σε τοξωτό αξονοσυμμετρικό αγωγό $L=24$, $R=1$ σε καρτεσιανό πλέγμα 900×120 για $Re=20$ η σύγκλιση του μονοφασικού αλγορίθμου είναι άριστη ως προς την διατήρηση της παροχής, όμως ο διφασικός αλγόριθμος έγινε υπερβολικά αργός.

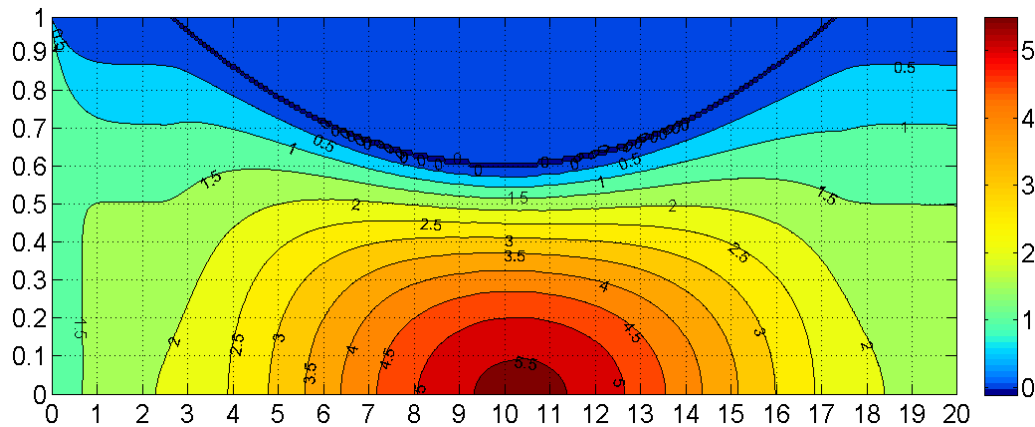
¹⁸ Εκείνο που ουσιαστικά άλλαξε από το αρχικό set-up (Πλέγμα 550×90 , στένωση 50%), όπου ήταν προβληματική η διατήρηση της παροχής είναι η σχέση dx/dy στα χωρικά πλέγματα. Μένει η εντύπωση ότι ή ανάγκη για πυκνό πλέγμα κατά y σε κάποιες περιπτώσεις επηρεάζει πολύ αρνητικά την σύγκλιση, ιδίως του διφασικού αλγορίθμου σε περιοχές απότομων μεταβολών των $u(\phi)$, $v(\phi)$.

$$Q_i = 2\pi \sum_j u(i, j) y_j dy \quad (5.9.)$$

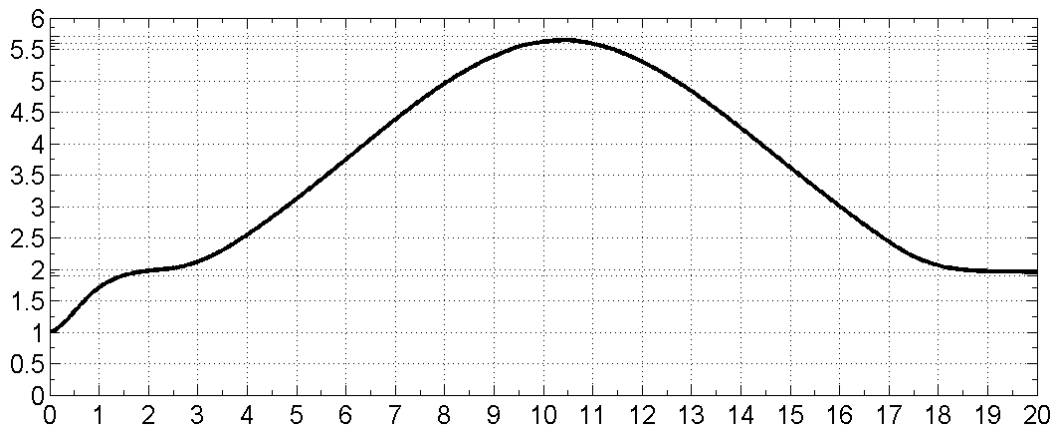
για αξονοσυμμετρική ροή και όχι από τη μέγιστη τιμή διότι μπορεί να μην έχει αποκατασταθεί το παραβολικό προφίλ. Η παροχή διατηρείται με απόκλιση 1.0 %.



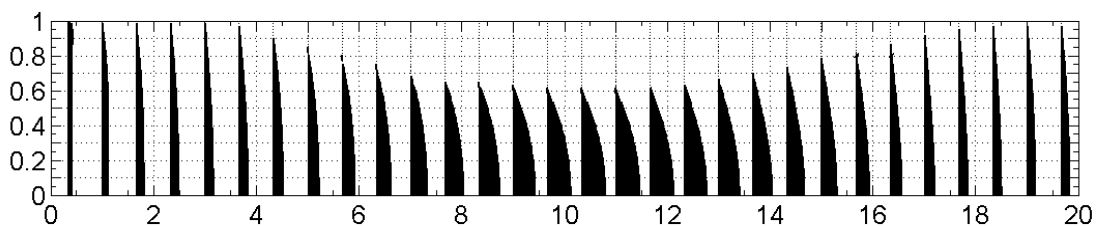
(α) Μορφή του τοξωτού αγωγού



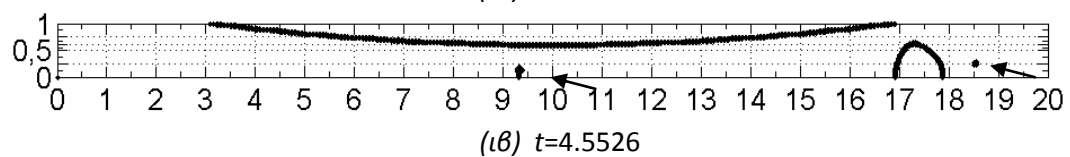
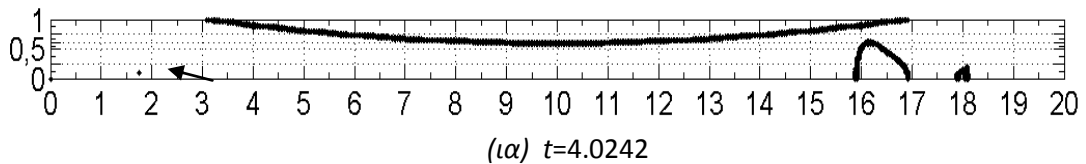
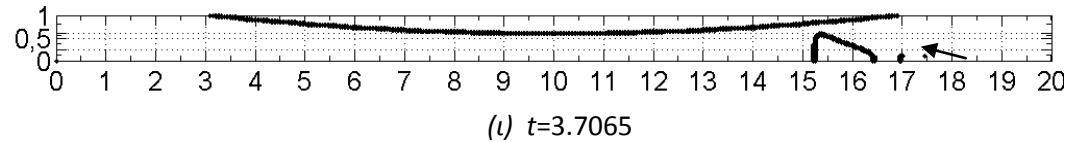
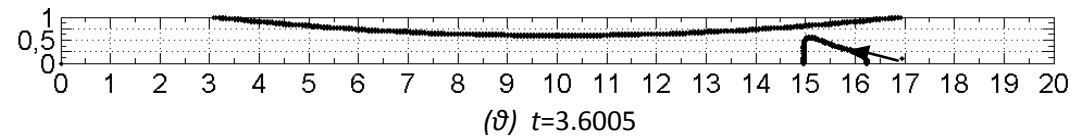
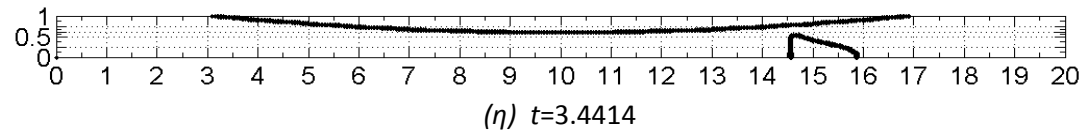
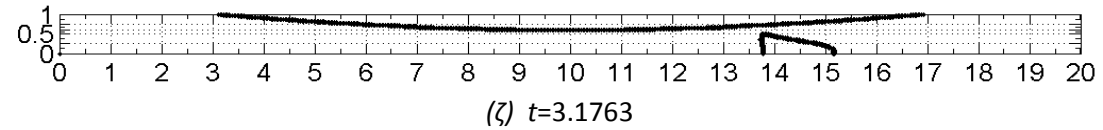
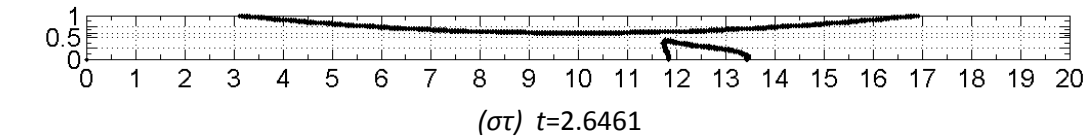
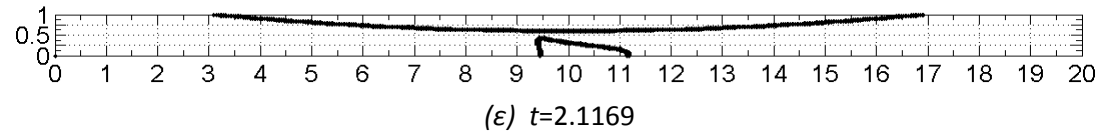
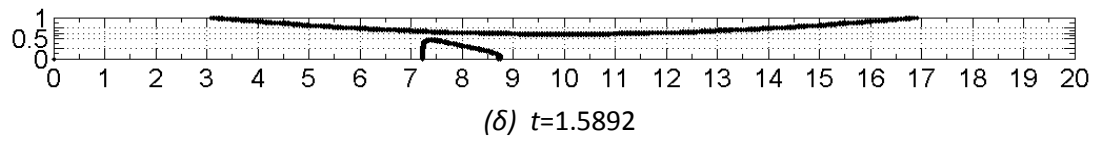
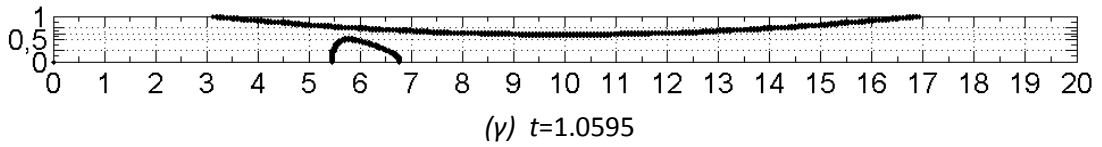
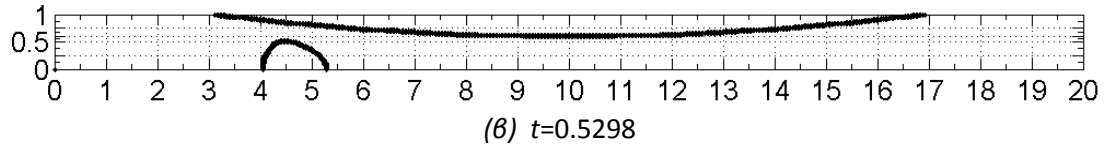
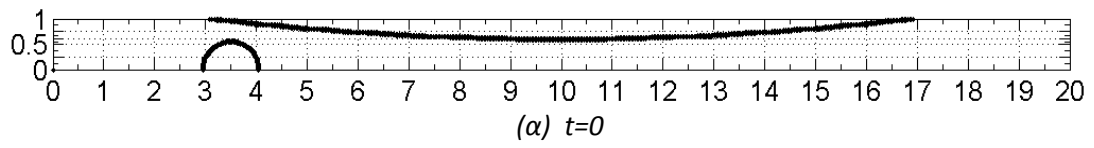
Σχ.5.34. (α,β). (α) Μορφή του τοξωτού αγωγού, (β) Ισοταχείς $u' = u/U$ ολόκληρου του μονοφασικού πεδίου ροής με μεγεθυμένο το πλάτος του τοξωτού αγωγού

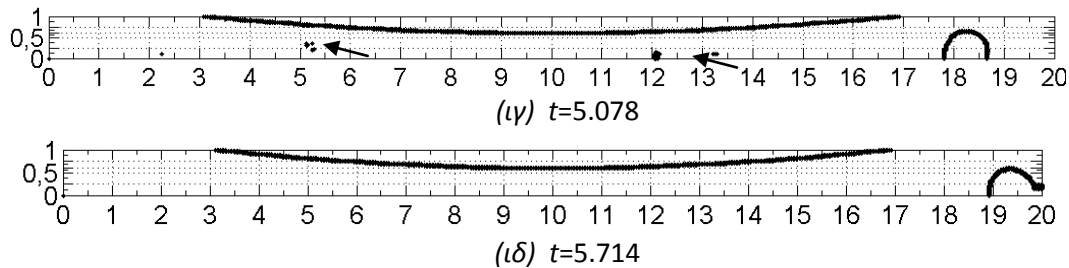


Σχ.5.35. Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αξονομετρικού τοξωτού αγωγού ($y=0$) για το μονοφασικό πεδίο χωρίς τις σταγόνες.



Σχ.5.36. Απεικόνιση, με μεγεθυμένο το πλάτος του αγωγού, του αδιάστατου διανυσματικού ροϊκού πεδίου ($u/U, v/U$) κατά μήκος της αξονοσυμμετρικού τοξωτού αγωγού του Σχ.5.34.





Σχ.5.37.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ,ιδ). $\Lambda.S.=0.4$. Διφασική ροή σταγόνας σε αξονοσυμμετρική τοξωτή στένωση – διεύρυνση: Μία σταγόνα: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.6$.

Οι γραμμές ροής (u',v') δημιουργούν εικόνα παραβολικού προφίλ σε ολόκληρο το μονοφασικό πεδίο ροής.

Γενικά τα σχήματα είναι αναμενόμενα. Καθώς η μεσαίου μεγέθους σταγόνα μεταφέρεται προς την περιοχή της στένωσης, το ρευστό αναγκάζεται να κινηθεί προς την αξονική γραμμή, όπου η ταχύτητα είναι πολύ μεγαλύτερη από το τμήμα εισόδου και από την ταχύτητα κοντά στα τοιχώματα. Η επιπλέον πτώση της πίεσης στη στένωση ωθεί τις σταγόνες κατάντη της ροής και παρατηρούνται μεγάλες παραμορφώσεις, αναγκαστικά μεγάλη επιμήκυνση της σταγόνας και διαμόρφωση με θετική καμπυλότητα στο μέτωπο του κυττάρου που μοιάζει με ρύγχος.

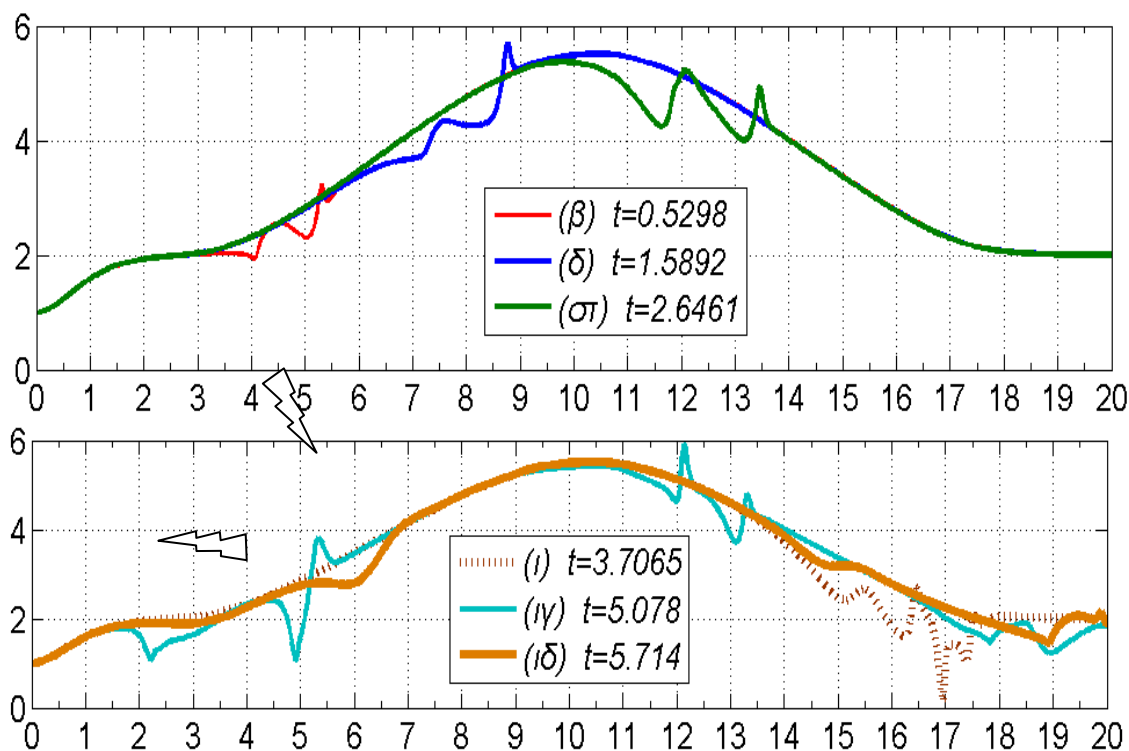
Τα φαινόμενα υποχωρούν και αναστρέφονται καθώς ο αγωγός διευρύνεται δηλαδή το μήκος της σταγόνας μικραίνει μέχρι να αποκτήσει πάλι σχεδόν κυκλικό σχήμα, ενώ η ταχύτητα της διφασικής ροής μικραίνει. Επίσης το ροϊκό πεδίο έχει μεγάλη ιδιομορφία και δημιουργεί εικόνα έντονης διάτμησης κοντά στην σταγόνα.

Τα ελάχιστα «μικροσταγονίδια¹⁹», (σχεδόν σημεία), που εμφανίζονται και εξαφανίζονται σε απίθανα σημεία στο διφασικό πεδίο νομίζω ότι είναι εικονικά (αριθμητικά), δεν έχουν φυσική υπόσταση και άρα πρέπει να απαλειφτούν. Το καμπύλο όριο δεν φαίνεται να δημιουργεί αστάθειες στη ροή για την συγκεκριμένη ανάλυση πλέγματος. Το μήκος της στένωσης είναι ενδεχομένως πολύ μεγάλο.

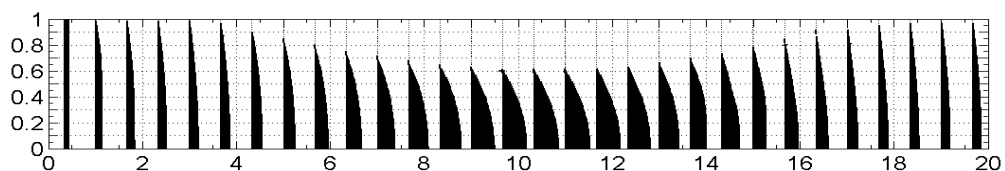
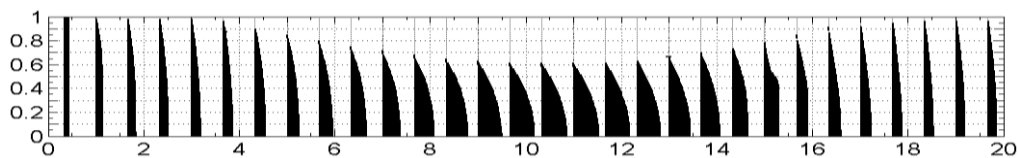
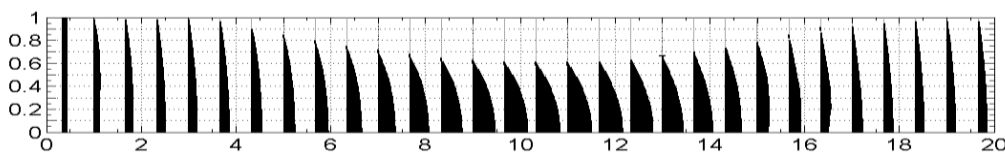
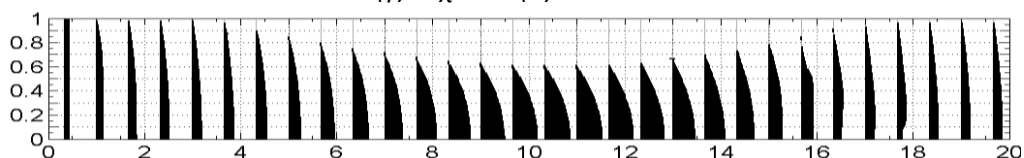
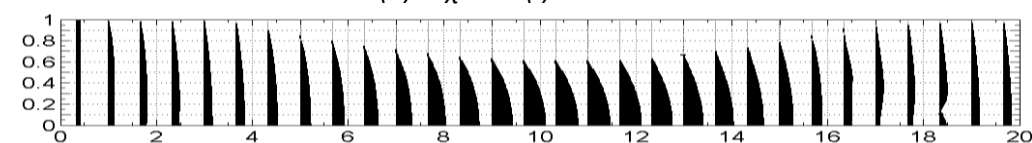
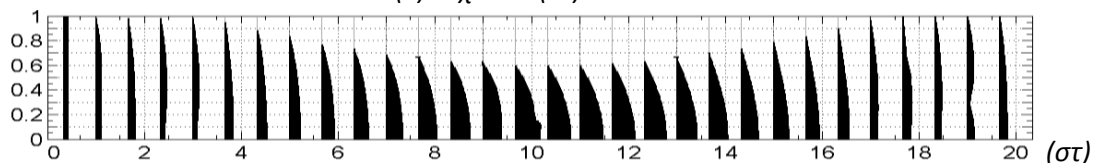
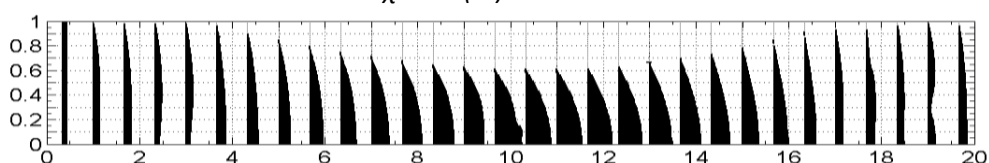
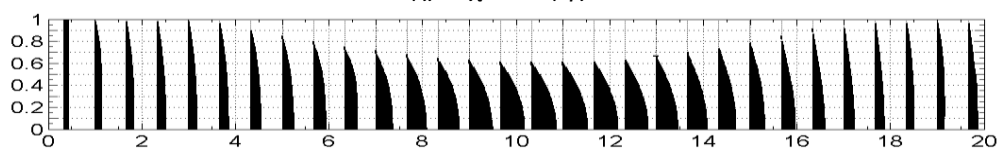
Γενικά οι ταχύτητες είναι αναμενόμενου μεγέθους μέχρι την έξοδο της σταγόνας και η παροχή διατηρείται σχεδόν άψογα. Στην στιγμή ($\iota\gamma$) $t=5.078$ ενώ η σταγόνα είναι στην διεύρυνση εμφανίζεται τοπική ψευδοδιαταραχή στην $u'=u/U$ επί του άξονα σε σημεία

¹⁹ Πρωτοεμφανίζεται στο Σχ.5.37(θ), $t=3.6005$ (στο βέλος στη θέση $x=17$ περίπου). Στο Σχ.5.37 ($\iota\gamma$), $t=5.078$ υπάρχουν λίγες διάσπαρτες σημειακές μικροσταγόνες ανάντη της ροής. Τέλος στο Σχ.5.37 ($\iota\delta$), $t=5.714$ οι όποιες μικροσταγόνες εξαφανίζονται.

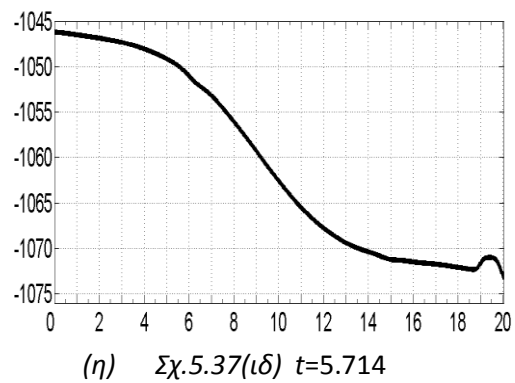
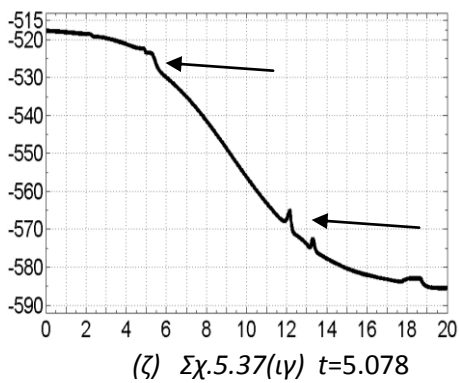
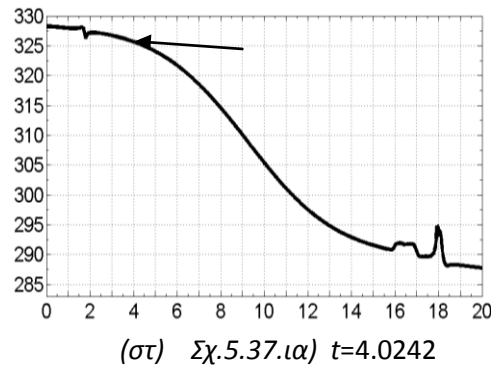
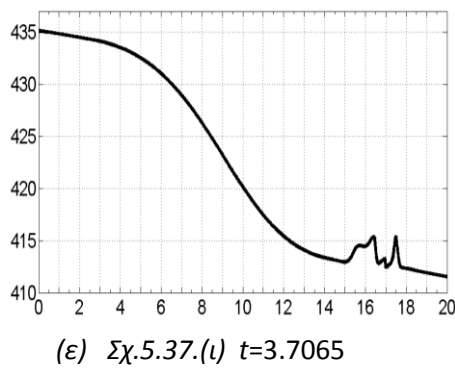
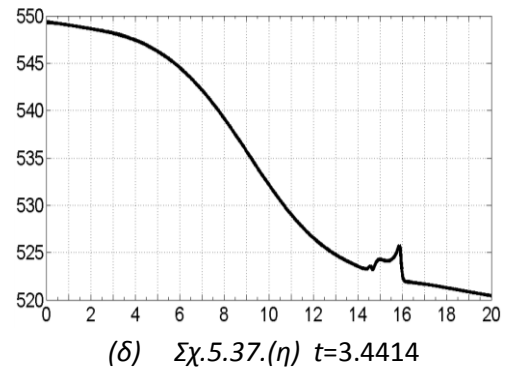
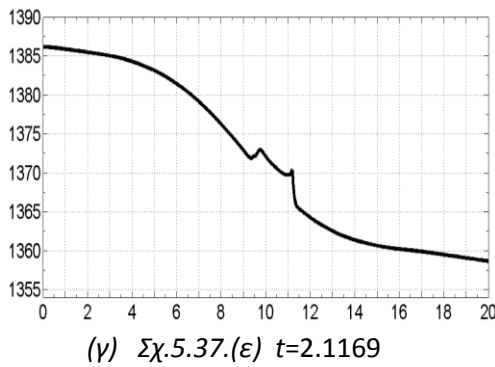
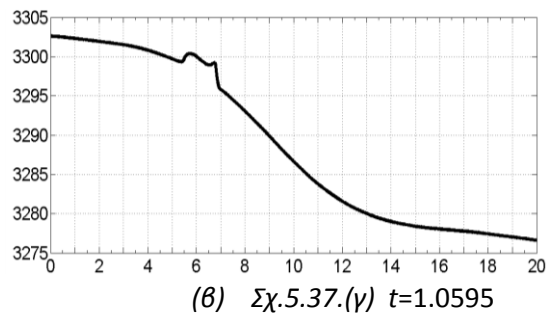
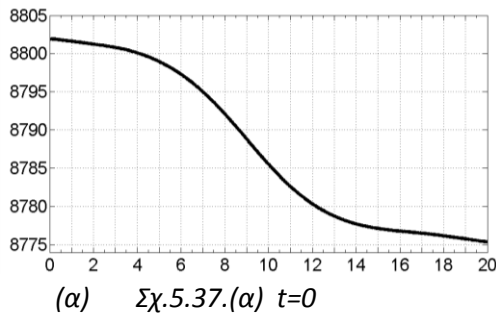
ανάτη της ροής πριν την στένωση. Κοντά στην έξοδο της σταγόνας, στην στιγμή (ιδ) $t=5.714$ η ψευδοδιαταραχή περιορίζεται πάρα πολύ.



Σχ.5.38. Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας $u'=u/U$ κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($\gamma=0$) για τα διφασικά πεδία του Σχ.5.37.(β,δ,στ,ι,ιγ,ιδ).

(α) Σχ.5.37.(ζ) $t=3.1763$ (β) Σχ.5.37.(η) $t=3.4414$ (γ) Σχ.5.37.(θ) $t=3.6005$ (δ) Σχ.5.37.(ι) $t=3.7065$ (ε) Σχ.5.37.(ια) $t=4.0242$ Σχ.5.37.(ιβ) $t=4.5526$ (ζ) Σχ.5.37.(ιγ) $t=5.078$ (η) Σχ.5.37.(ιδ) $t=5.714$

Σχ.5.39.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η). Απεικόνιση, με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού, των αδιάστατων διανυσματικών συνολικών ροϊκών διαφασικών πεδίων (u/U , v/U) κατά μήκος της αξονοσυμμετρικού τοξωτού αγωγού του Σχ.5.37.

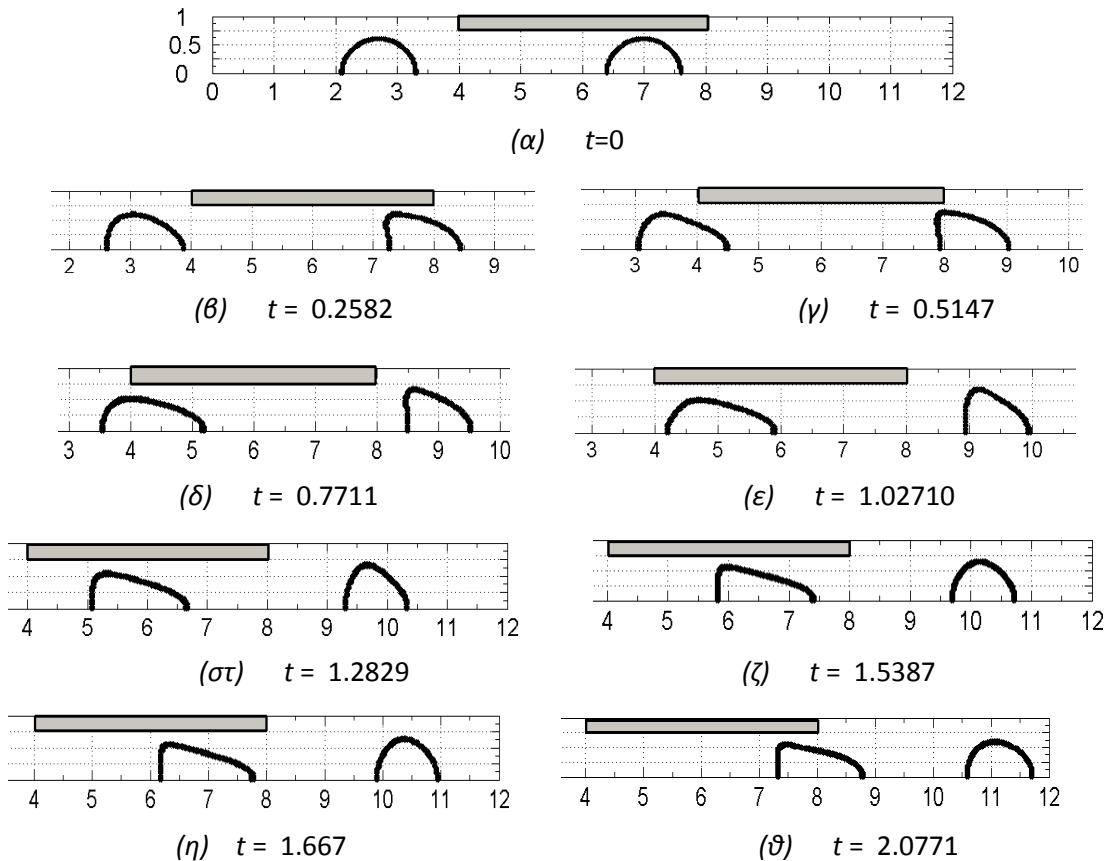


Σχ.5.40.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p' κατά μήκος του άξονα του αξονοσυμμετρικού τοξωτού αγωγού ($\gamma=0$): (α) του μονοφασικού πεδίου χωρίς σταγόνες του Σχ.5.37(β) του συνολικού διφασικού πεδίου του Σχ.5.37.(γ,ε,η,ι,ια,ιγ,ιδ).

Οι γραμμές ροής (u',v') δημιουργούν εικόνα παραβολικού προφίλ σε ολόκληρο το διφασικό πεδίο ροής. Γενικά έχουμε προφίλ ταχυτήτων αναμενόμενου μεγέθους μέχρι την έξοδο της

σταγόνας και η παροχή διατηρείται σχεδόν άψογα (1% διαφορά). Κατά την διέλευση της σταγόνας δεν παρατηρείται ούτε τάση για δημιουργία ανακυκλοφορίας στην περιοχή της στένωσης. Στις κατανομές της ρ' κατά μήκος του άξονα εμφανίζονται (εστιάζονται με τα βέλη) κάποιες στιγμιαίες μικροδιαταραχές ανάντη της ροής που δεν έχουν φυσική έννοια.

5.7. ΑΠΟΤΟΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ-ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ.



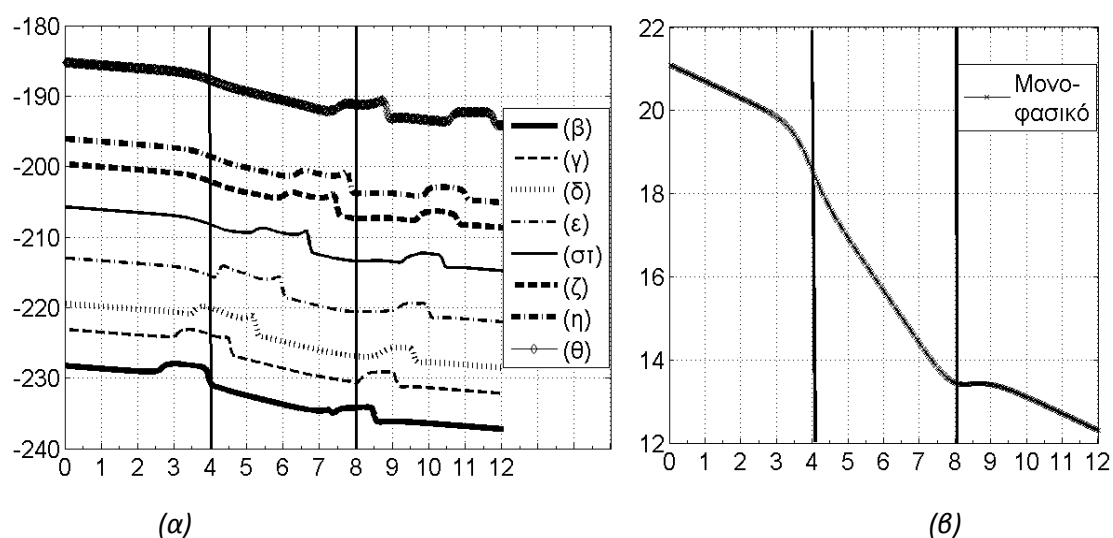
Σχ.5.41.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ). Αξονοσυμμετρική Απότομη Στένωση-Διεύρυνση με $\Lambda.Σ.=0.25$ και $\Lambda.Δ.=1:0.75$. Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k1=0.6$, $k2=0.6$.

Στο Σχ.5.41. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων ομάδας δύο ίσων κυκλικών (σφαιρικών) σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή με συνθήκες $Re = 20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k1=0.6$, $k2=0.6$ μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με απότομη στένωση με $\Lambda.Σ.=0.25$ που ακολουθείται από απότομη διεύρυνση με $\Lambda.Δ.=1:0.75$. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του αγωγού πάνω στον άξονα συμμετρίας.²⁰

²⁰ Η απότομη διδιάστατη Στένωση-Διεύρυνση και η Διδιάστατη Στένωση-Διεύρυνση με καμπύλες εξομάλυνσης παραλείπονται.

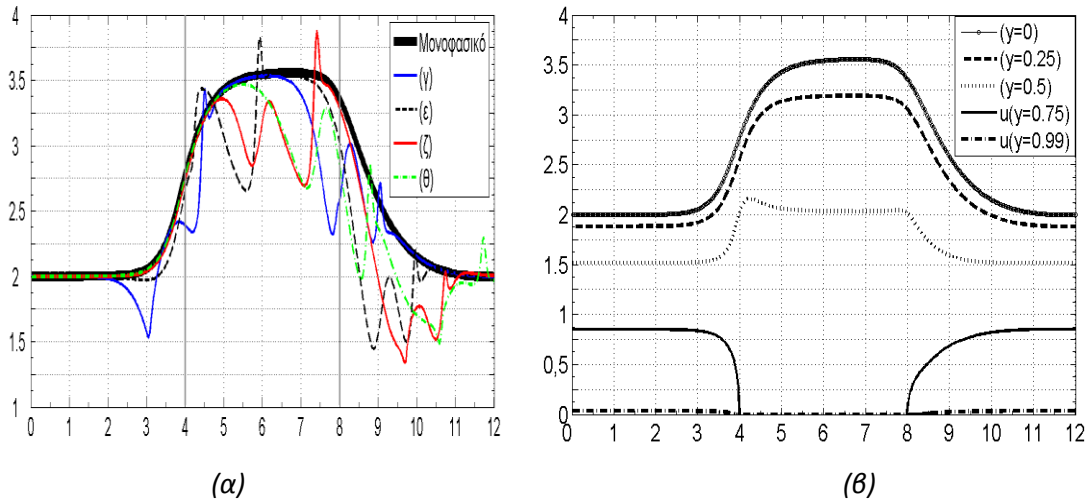
Το μήκος του αγωγού είναι $L=12$ ($x/R=0-12$) και το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 400×60 . Η στένωση αρχίζει στην τετμημένη 4 (4+ έως 8). Η διεύρυνση αρχίζει στην τετμημένη 8 (8+ έως 12). Στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού αντιστοιχεί η μέγιστη αδιάστατη διάμετρος $D=2R=2$ του αγωγού και άρα $y/R=0-1$. Αντίστοιχα στην περιοχή της στένωσης η μικρή αδιάστατη διάμετρος του αγωγού είναι $d=1$ και άρα $y/R=0-0.5$.

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήθηκε παραβολικό προφίλ ως οριακή συνθήκη εισόδου $u'_{inlet} = 2(1-r'^2)$ (5.1) και ως αρχικές συνθήκες μέσα στο πεδίο ροής οι σχέσεις $u'(i,j)=1$, $v'(i,j)=0$, (5.2). Στην έξοδο οι παράγωγοι των u, v μηδενίζονται.

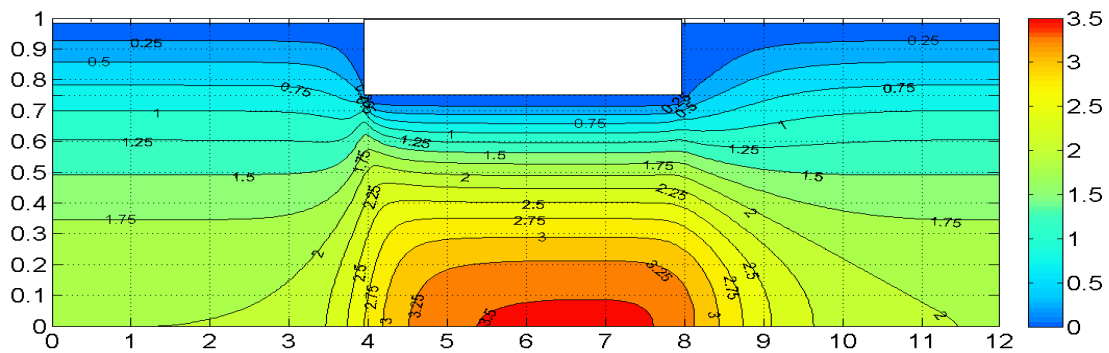


Σχ.5.42.(α,β). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p' κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$): (α) στα διφασικά πεδία του Σχ.5.41.(β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ), (β) στο μονοφασικό πεδίο του Σχ.5.41. χωρίς την σταγόνα.

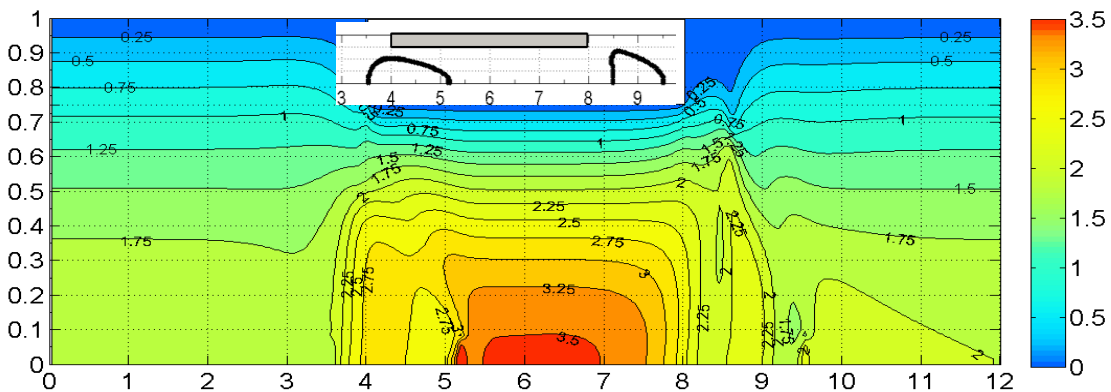
Στην πρώτη σταγόνα που εισέρχεται στην διεύρυνση, η $D=0.12$ παραμένει σχετικά αμετάβλητη και στην δεύτερη που παραμορφώνεται στην στένωση, η D αυξάνει μέχρι $D=0.18$. Στην περίπτωση αυτή δεν παρατηρείται τάση διαταραχής ή διάσπασης του μεσαίου μεγέθους σταγόνων.



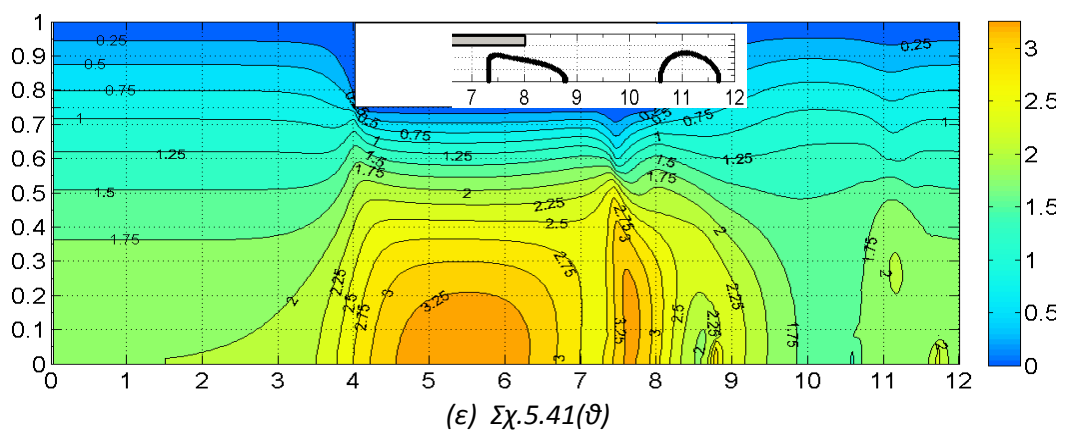
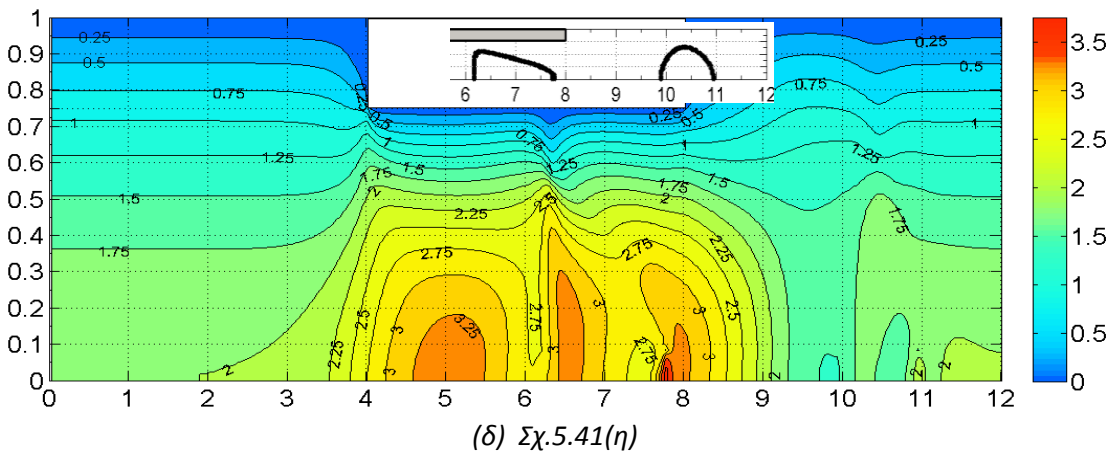
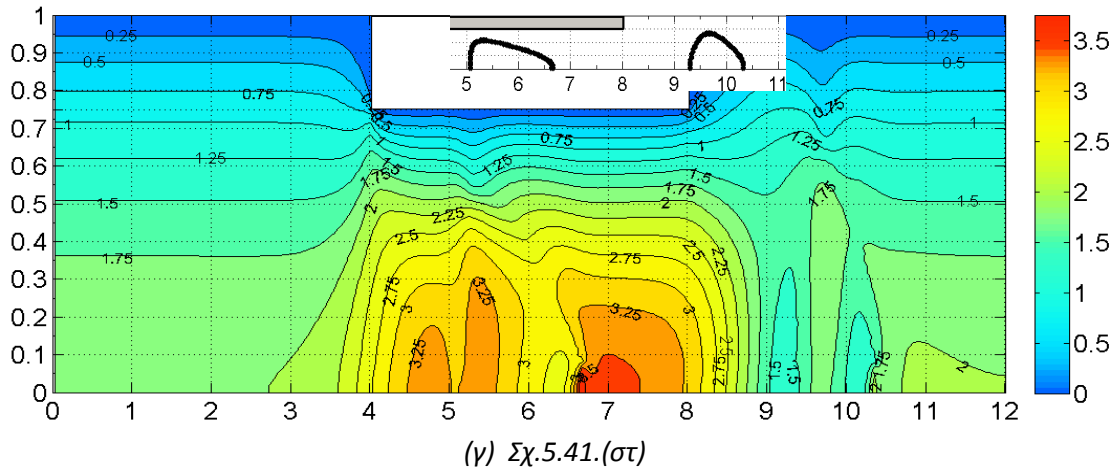
Σχ.5.43.(α,β). (α) Η κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($y=0$) για το μονοφασικό πεδίο χωρίς τις σταγόνες και τα διαφασικά πεδία του Σχ.5.41($\gamma, \epsilon, \zeta, \theta$) και (β) η διαμήκης κατανομή της αδιάστατης αξονικής ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες εγκάρσιες θέσεις y/R του μονοφασικού πεδίου του Σχ.5.41.



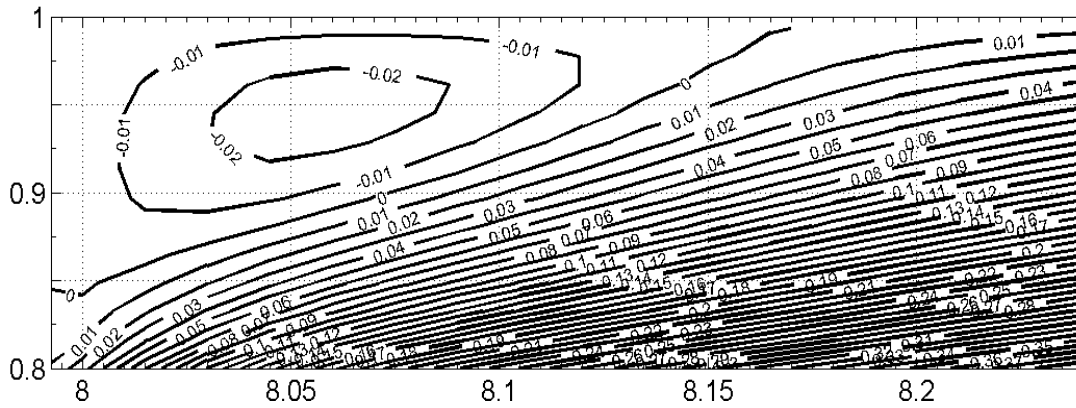
(α) Μονοφασικό πεδίο του Σχ.5.41. χωρίς την σταγόνα



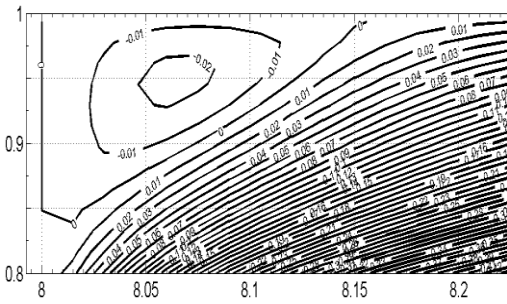
(β) Σχ.5.41.(δ)



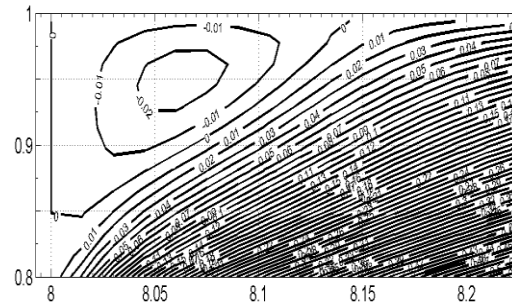
Σχ.5.44 (α,β,γ,δ,ε). Ισοταχείς $\chi = [(u^2 + v^2)^{1/2} / U]$ με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού (α) του μονοφασικού πεδίου του Σχ.5.41 χωρίς την σταγόνα και (β,γ,δ,ε) των διφασικών πεδίων του Σχ.5.41.



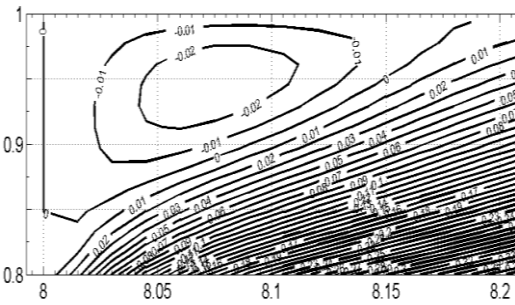
(α) Μονοφασικό πεδίο του Σχ.5.41. χωρίς τις σταγόνες



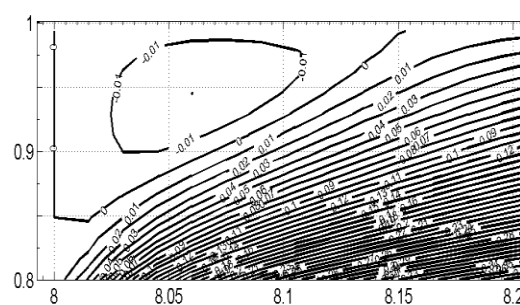
(β) Σχ.5.41(γ)



(γ) Σχ.5.41.(ε)



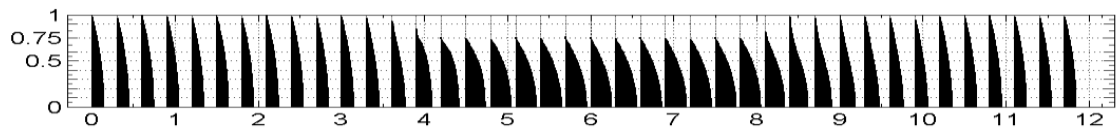
(δ) Σχ.5.41.(ζ)



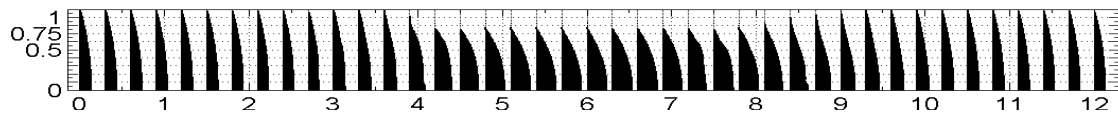
(ε) Σχ.5.41.(θ)

Σχ.5.45.(α,β,γ,δ,ε). Ισοταχείς u/U (α) του μονοφασικού πεδίου χωρίς τις σταγόνες του Σχ.5.41 και (β,γ,δ,ε) των εκάστοτε διφασικών πεδίων του Σχ.5.41. στην περιοχή ανακυκλοφορίας της διεύρυνσης.

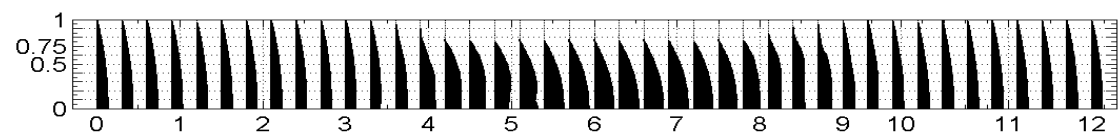
Από τις ισοταχείς της u συνιστώσας της ταχύτητας φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές u -ταχύτητες στην περιοχή της διεύρυνσης που είναι ένδειξη για παρουσία ανακυκλοφορίας.



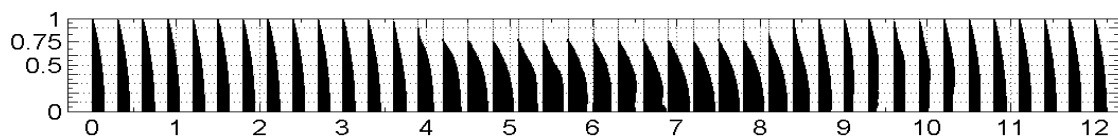
(α) Μονοφασικό πεδίο του Σχ.5.41. χωρίς τις σταγόνες



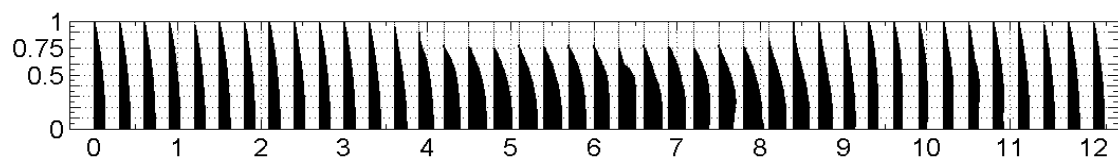
(β) Σχ.5.41.(β)



(γ) Σχ.5.41.(δ)



(δ) Σχ.5.41.(στ)



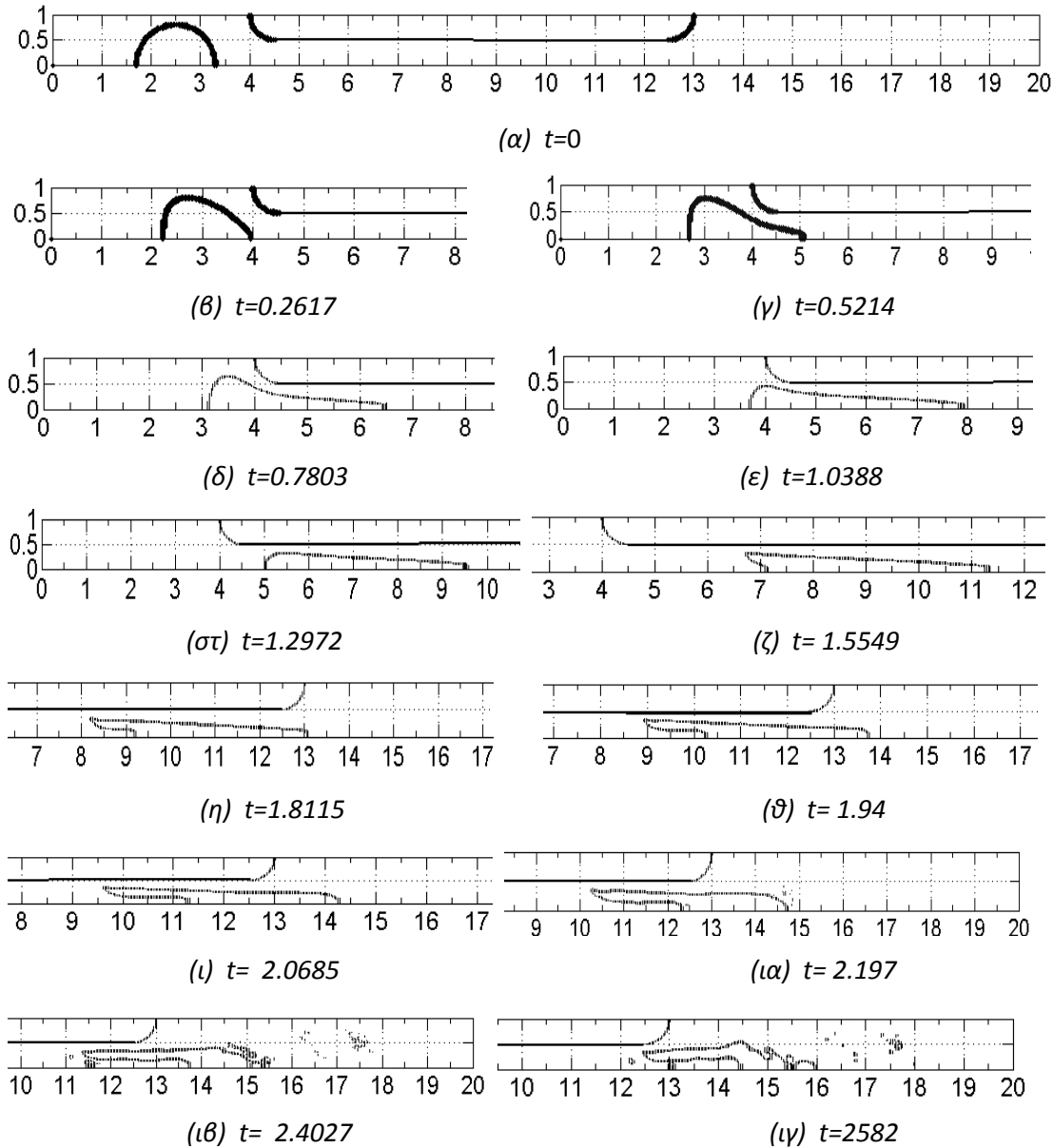
(ε) Σχ.5.41.(η)

Σχ.5.46.(α,β,γ,δ,ε). Απεικόνιση των αδιάστατων διανυσματικών ροϊκών πεδίων (u/U , v/U) του Σχ.5.41 με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού (α) του μονοφασικού πεδίου του Σχ.5.41 χωρίς την σταγόνα και (β,γ,δ,ε) των διφασικών πεδίων του Σχ.5.41.

5.8. ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΤΕΝΩΣΗ- ΔΙΕΥΡΥΝΣΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ.

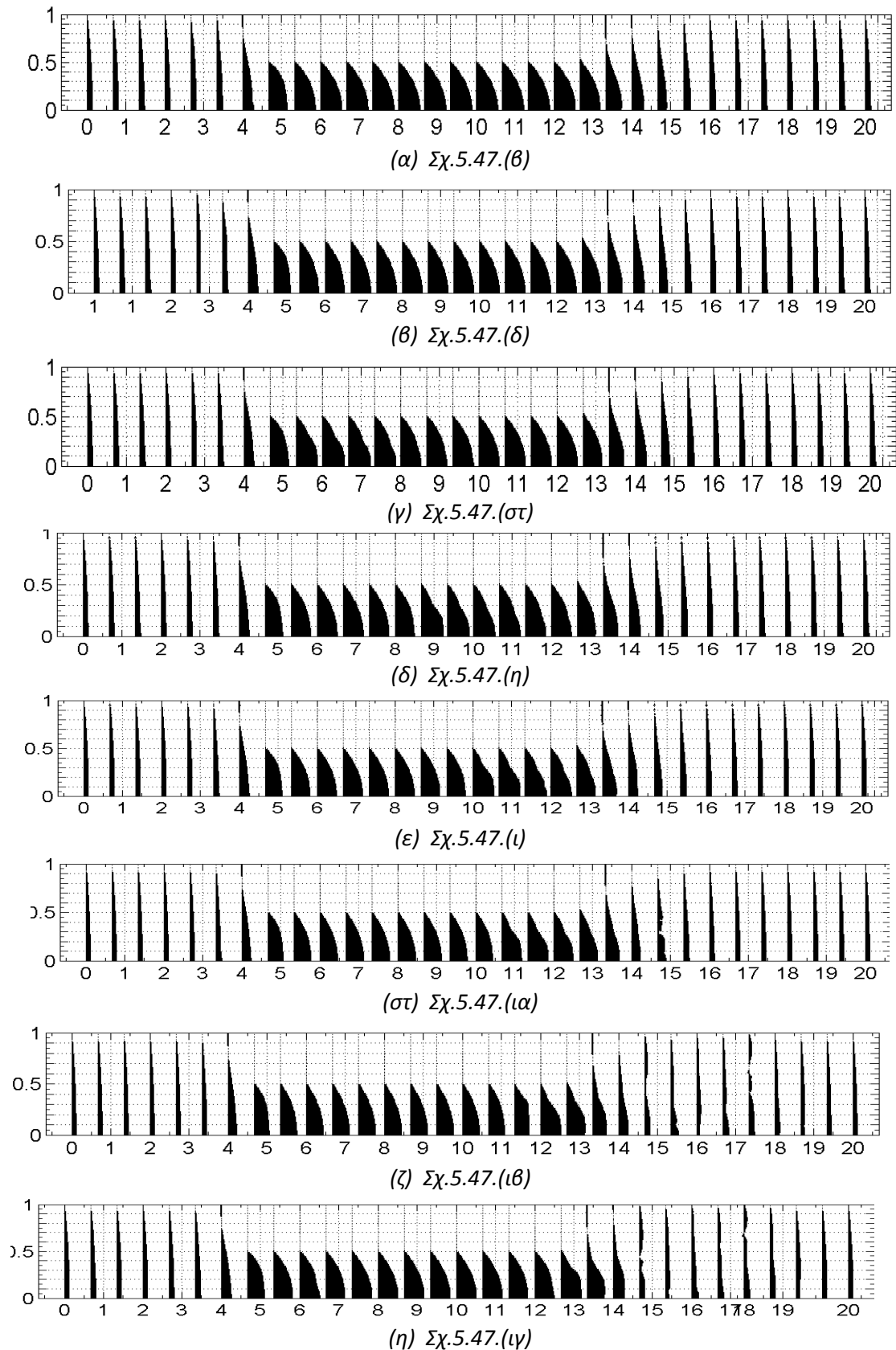
Στο Σχ.5.47. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων κυκλικής (σφαιρικής) σταγόνας που διασπείρονται σε διφασική ροή με συνθήκες $Re = 20$, $We = 2$, $Ca = 0.1$, $\lambda = 4$, $\delta = 0$, $k = 0.8$ μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με στένωση με $\Lambda.Σ. = 0.5$ που ακολουθείται από απότομη διεύρυνση με $\Lambda.Δ. = 1:0.5$. Επιπλέον ο αγωγός έχει καμπύλες εξομάλυνσης εκεί που αλλάζει η διάμετρος του. Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) στο αριστερό άκρο του αγωγού πάνω στον άξονα συμμετρίας. Το μήκος του αγωγού είναι $L = 20$ ($x/R = 0-20$) και το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 600×60 . Η στένωση αρχίζει στην τετμημένη 4, (4+ έως 13). Η διεύρυνση αρχίζει στην τετμημένη 13 (13+ έως 20). Στην είσοδο και την έξοδο του αγωγού αντιστοιχεί το μέγιστο πλάτος (μέγιστη διάμετρος D) του αγωγού

άρα $D=2R=2$ ($y/R=0-1$). Η αδιάστατη τιμή της ακτίνας r είναι $r=R/D/2=1$. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε παραβολικό προφίλ ως οριακή συνθήκη εισόδου $u'_{inlet} = 2(1-r'^2)$ (5.1) και ως αρχικές συνθήκες μέσα στο πεδίο ροής οι σχέσεις $u'(i,j) = 1, v'(i,j) = 0$, (5.2).

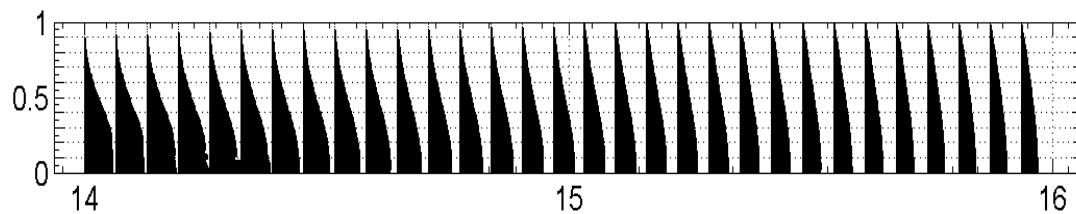


Σχ.5.47.(α,β,γ,δ,ε,σ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ). Αξονοσυμμετρική Στένωση-Διεύρυνση με $\Lambda.S.=0.25$ και $\Lambda.\Delta.=1:0.75$ και καμπύλες εξομάλυνσης. Μία σταγόνα: $Re=20, We=2, Ca=0.1, \lambda=4, \delta=0, k=0.8$.

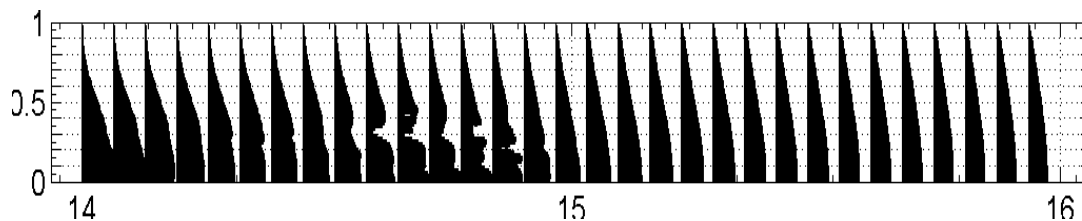
Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται τάση διαταραχής ή διάσπασης της μεγάλης σταγόνας λίγο μετά την είσοδο της στην διεύρυνση.



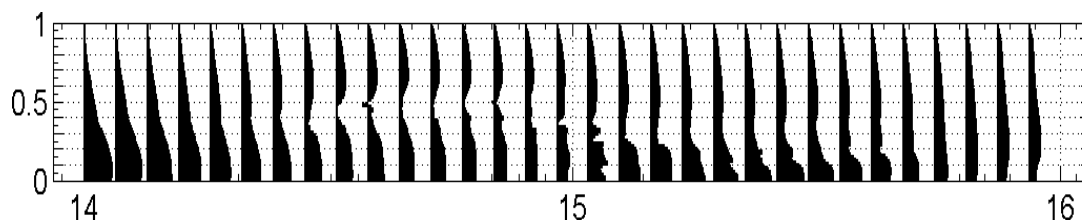
Σχ.5.48.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η). Απεικόνιση ολόκληρων των αδιάστατων διανυσματικών διφασικών ροϊκών πεδίων (u/U , v/U) του Σχ.5.47. με μεγεθυμένη την ακτινική διάσταση του αγωγού.



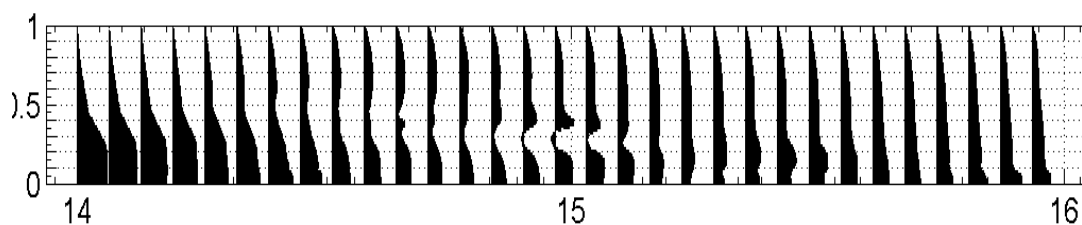
(α) Σχ.5.47.(ι)



(β) Σχ.5.47.(ια)



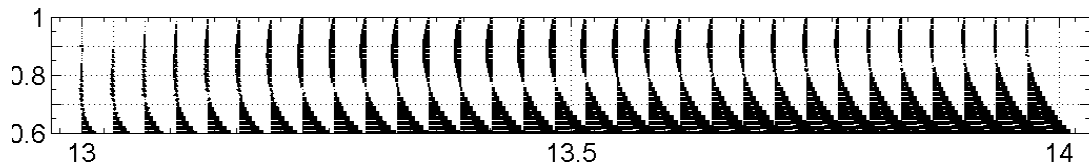
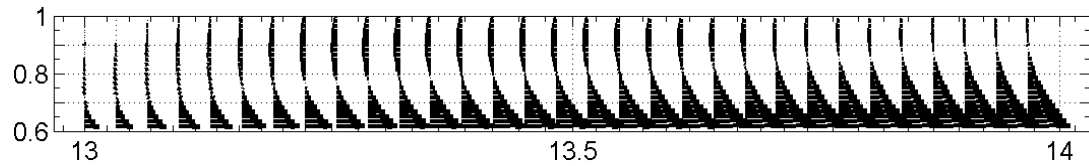
(γ) Σχ.5.47.(ιβ)



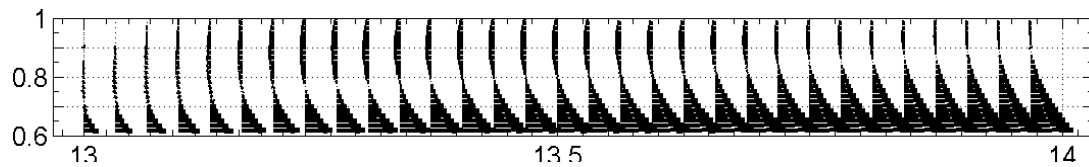
(δ) Σχ.5.47.(ιγ)

Σχ.5.49.(α,β,γ,δ). Απεικόνιση των αδιάστατων διανυσματικών διφασικών ροϊκών πεδίων (u/U , v/U) στην περιοχή της διεύρυνσης του Σχ.5.47 με μεγεθυμένο το πλάτος του αγωγού.

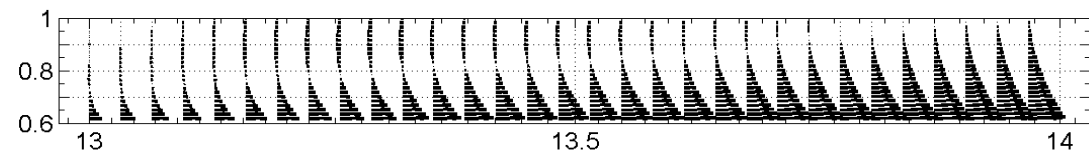
Ίσως το μέγεθος της σταγόνας στην είσοδο είναι πολύ μεγάλο με αποτέλεσμα η διάτμηση κοντά στο τοίχωμα να είναι ιδιαίτερα ισχυρή. Από τις ισοταχείς της u συνιστώσας της ταχύτητας φαίνεται να υπάρχουν αρνητικές u στην περιοχή της διεύρυνσης που είναι ένδειξη για παρουσία ανακυκλοφορίας.

(α) Σχ.5.47., $t = 0.0279$ λίγο μετά την είσοδο της σταγόνας

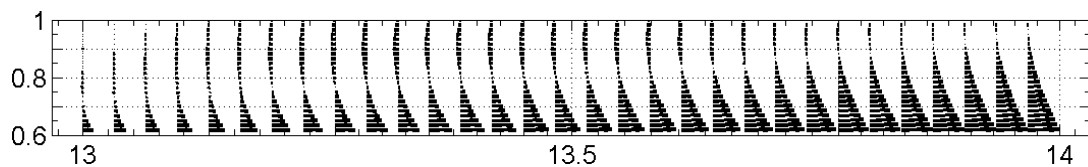
(β) Σχ.5.47.(στ)



(γ) Σχ.5.47.(η)



(δ) Σχ.5.47.(ιβ)



(ε) Σχ.5.47.(ιγ)

Σχ.5.50.(α,β,γ,δ,ε). Τοπική απεικόνιση του αδιάστατου διανυσματικού ροϊκού διαφασικού πεδίου (u/U , v/U) του Σχ.5.47., στην περιοχή της διεύρυνσης, όπου εμφανίζεται η ανακυκλοφορία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τσαγγάρης Σ., (1995), Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Chalfi T.Y., Ghiaasiaan S.M., (2008), Pressure drop caused by flow area changes in capillaries under low flow conditions, *Internat. Journal of Multiphase Flow*, 34:2–12.

Christafakis A.N. and Tsangaris S., (2008), Two-Phase Flows of Droplets in Contractions and Double Bends, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2.3:299–308.

- Doerpinghaus P.J., Baird D.G.**, (2003), Pressure profiles along an abrupt 4:1 planar contraction, *AIChE Journal*, 49(10):2487–2498.
- Durst F. and Loy T.**, (1985), investigations of laminar flow in a pipe with sudden contraction of cross sectional area, *Computers & Fluids*, 13(1):15-36.
- Feuerstein I.A., Pike G.K. and Round G.F.**, (1975), Flow in an Abrupt Expansion as a Model for Biological Mass Transfer Experiments. *J. Biomechanics*, 8(1):41-51.
- Fossa M., Guglielmini G.**, (2002), Pressure drop and void fraction profiles during horizontal flow through thin and thick orifices. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26:513-523.
- Griebel M., Dornseifer T. and Neunhoffer, T.** (1998), Numerical Simulation in Fluid Dynamics, a Practical Introduction. SIAM, Philadelphia.
- Harvie D.J.E., Davidson M.R., Cooper-White J.J. and Rudman M.**, (2006), A parametric study of droplet deformation through a microfluidic contraction: Low viscosity Newtonian droplets, *Chemical Engineering Science* Volume, 61, 15:5149-5158.
- Kadja M., Touzopoulos D. and Bergeles G.**, (2002), Numerical investigation of bifurcation phenomena occurring in flows through planar sudden expansions, *Acta Mechanica*, 153:47-61.
- Khayata R. E., Luciani A., Utracki L.A., Godbille F., Picot J.**, (2000), Influence of shear and elongation on drop deformation in convergent divergent flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 26:17-44.
- Kojasoy G., Landis F., Kwame-Mensah P., Chang C. T.**, (1997), Two-Phase Pressure Drop in Multiple Thick and Thin-Orifice Plates, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 15: 347-358.
- Macagno E.O., Hung T. K.**, (1967), Computational and experimental study of a captive annular eddy, *J. Fluid Mech.*, 28(1):43-64.
- Muradoglu M., Gokaltun S.**, (2004), Implicit Multigrid Computations of Buoyant Drops through Sinusoidal Constrictions, *J. Appl. Mech.*, 71(6):857-865.
- Nag D. and Datta A.**, (2007), On the eddy characteristics of laminar axisymmetric flows through confined annular geometries with inward expansion, *Proc. IMechE.*, 221 Part C: J. Mechanical Engineering Science.
- Oliveira M.S.N., Alves M.A., Pinho F. T. and McKinley G. H.**, (2007), Viscous flow through microfabricated hyperbolic contractions, *Experiments in fluids*, 43.2-3:437-451.
- Pollard A.**, (1981), A contribution on the effects of inlet conditions when modelling stenoses using sudden expansions, *Journal of Biomechanics*, 14:349-355
- Rosche, E.J., Back, L.H.**, (1976), The influence of upstream conditions on flow reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion, *Journal of Biomechanics*, 9:481-483.
- Rosengarten G., Harvie D., Cooper-White J., Rosengarten G.**, (2005), Using computational fluid dynamics to study the effect of contact angle on microdroplet deformation, *ANZIAM J*, 46(E):304-319.
- Scott P.S., Mirza F.A. and Vlachopoulos J.**, (1986), A Finite Element Analysis of Laminar Flows Through Planar and Axisymmetric Abrupt Expansions, *Computers and Fluids*, 14:423-432.
- Shannak B. B., Friedel L. and Alhusein M.**, (1999), Prediction of Single- and Two-Phase Flow

Contraction through a Sharp-Edged Short Orifice, *Chem. Eng. Technol.*, 22.10, 865-870.

Spencer E.A., Heitor M.V. and Castro I. P., (1995), Intercomparison of measurements and computations of flow through a contraction and a diffuser, *Flow Meas. Instrum.*, 6(1):3-14.

Tang D., Yang C., Kobayashi S., Ku D.N.,(1), (2001), Experiment-based numerical simulation of unsteady viscous flow in stenotic collapsible tubes, *Applied Numerical Mathematics*, 36, 299–320.

Tang D., Yang C., Kobayashi S., Ku D.N., (2), (2001), Generalized finite difference method for 3-D viscous flow in stenotic tubes with large wall deformation and collapse, *Applied Numerical Mathematics*, 38: 49–68.

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

**ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ
ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ**

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ.....	3
Πίνακας 6.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε αγωγούς με διακλάδωση ταφ ή διπλή γωνία που μελετήθηκαν στο 6ο κεφάλαιο.....	4
6.2. ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ	4
6.2.1. Τρεις σταγόνες: $Re=15$, $We=2.8571$, $Ca=0.14286$, $\lambda=4$, $\delta=-0.0667$, $k=0.667$.	4
6.2.2. Τέσσερες σταγόνες: $Re=15$, $We=4$, $Ca=0.2$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.48$.	5
6.2.3. Δύο σταγόνες: $Re=15$, $We=1$, $Ca=0.05$, $\lambda=4$, $\delta=0$, $k=0.75$	5
6.2.4. Παρατηρήσεις σχετικές με την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων.	6
6.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ 90 ^ο	6
6.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	18
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	19

ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΑΓΟΝΩΝ ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ Ή ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ

Στο 6^ο κεφάλαιο, με εφαρμογή της μεθοδολογίας και των παραμέτρων προσομοίωσης του 2^{ου} κεφαλαίου, μελετώνται διφασικές ροές με σταγόνες σε διδιάστατους κλειστούς αγωγούς με διακλάδωση ταφ ή διπλή γωνία σε πεδίο αναπτυσσόμενης στρωτής ροής, χαμηλού αριθμού Re λόγω διαφοράς πιέσεως στα άκρα του αγωγού. Η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι πολύ καλή και το μετρούμενο υπόλοιπο του κριτηρίου σύγκλισης της μεθόδου *SOR* καταγράφεται ακόμη και μια τάξη χαμηλότερο από περιπτώσεις σε επιμήκεις αγωγούς. Αυτό ενδεχομένως παρατηρείται λόγω του μεγαλύτερου πλάτους του χωρίου υπολογισμού που επιτρέπει παρόμοια χωρικά βήματα στις κατευθύνσεις x και y . Η διαφορά μάζας (επιφάνειας) των σταγόνων διατηρείται στις περισσότερες των περιπτώσεων χαμηλότερη από την μέγιστη διαφορά 1.5% του κριτηρίου, ενώ σε λίγες μόνο στιγμές ενεργοποιείται ο υβριδικός αλγόριθμος διατήρησης της μάζας (επιφάνειας) των σταγόνων. Τα σχήματα δείχνουν σχεδόν άριστη διατήρηση του πάχους της διεπιφάνειας. Ειδικότερα στην περίπτωση της διακλάδωσης ταφ με στόχο να διαφανεί σαφέστερα το ρευστομηχανικό υπόβαθρο των μηχανισμών παραμόρφωσης, μετανάστευσης και διάσπασης των σταγόνων, παρουσιάζονται αναλυτικά αποτελέσματα στην δομή και μορφή του 5^{ου} κεφαλαίου και αναπαρίσταται λεπτομερώς το ροϊκό πεδίο και η κατανομή του πεδίου πιέσεων σε πολλά στιγμιότυπα του μεταβατικού φαινομένου. Ενδεικτικά για πληρότητα γίνεται σύγκριση αποτελεσμάτων της μελέτης μας με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας.

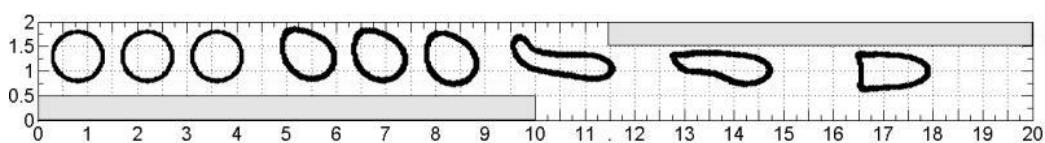
Πίνακας 6.1. Οι τιμές των αδιάστατων παραμέτρων της σταγόνας για τις περιπτώσεις διφασικών ροών σε αγωγούς με διακλάδωση ταφ ή διπλή γωνία που μελετήθηκαν στο 6^ο κεφάλαιο.

A/A	Σχήμα	Re	We	Ca	λ	δ	κ	Στα- γόνες	Γεωμετρία
01	6. 1	15	2.8571	0.14286	4	-0.0667	0.667	3	Διδιάστατη διπλή γωνία
02	6. 2	15	4.0	0.2	4	0	0.48	4	Διδιάστατη διπλή γωνία
03	6. 3	15	1.0	0.05	4	0	0.75	2	Διδιάστατη διπλή γωνία
04	6. 4	20	2	0.1	4	-0.14	0.744	2	Διδιάστατη διακλάδωση ταφ 90 ^ο

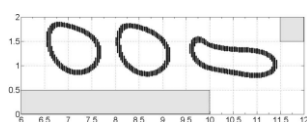
6.2. ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΠΛΗ ΓΩΝΙΑ

Στα Σχ.6.1. έως Σχ.6.3. φαίνονται στιγμιότυπα διφασικής ροής μέσα σε διδιάστατους αγωγούς με διπλές γωνίες συγκεκριμένης γεωμετρίας. Απεικονίζεται η παραμόρφωση των περιγραμμάτων ομάδων τριών ή τεσσάρων σταγόνων και η αντίστοιχη μετανάστευση τους μέσα στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση). Η κατεύθυνση ροής δηλώνεται πάντα από αριστερά προς τα δεξιά του αγωγού.

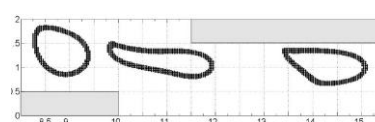
6.2.1. Τρεις σταγόνες: $Re=15$, $We=2.8571$, $Ca=0.14286$, $\lambda=4$, $\delta=-0.0667$, $\kappa=0.667$.



(α) $t = 0, 1.7124$ και 6.5063



(β) $t = 4.1097$

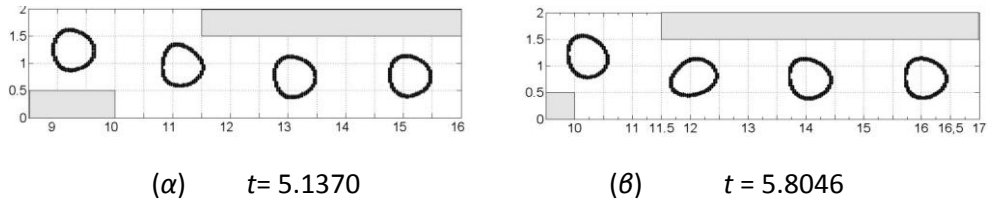


(γ) $t = 5.4792$

Σχ.6.1.(α, β, γ).¹ Τρεις σταγόνες: $Re=15$, $We=2.8571$, $Ca=0.14286$, $\lambda = 4$, $\delta=-0.0667$, $\kappa=0.667$.

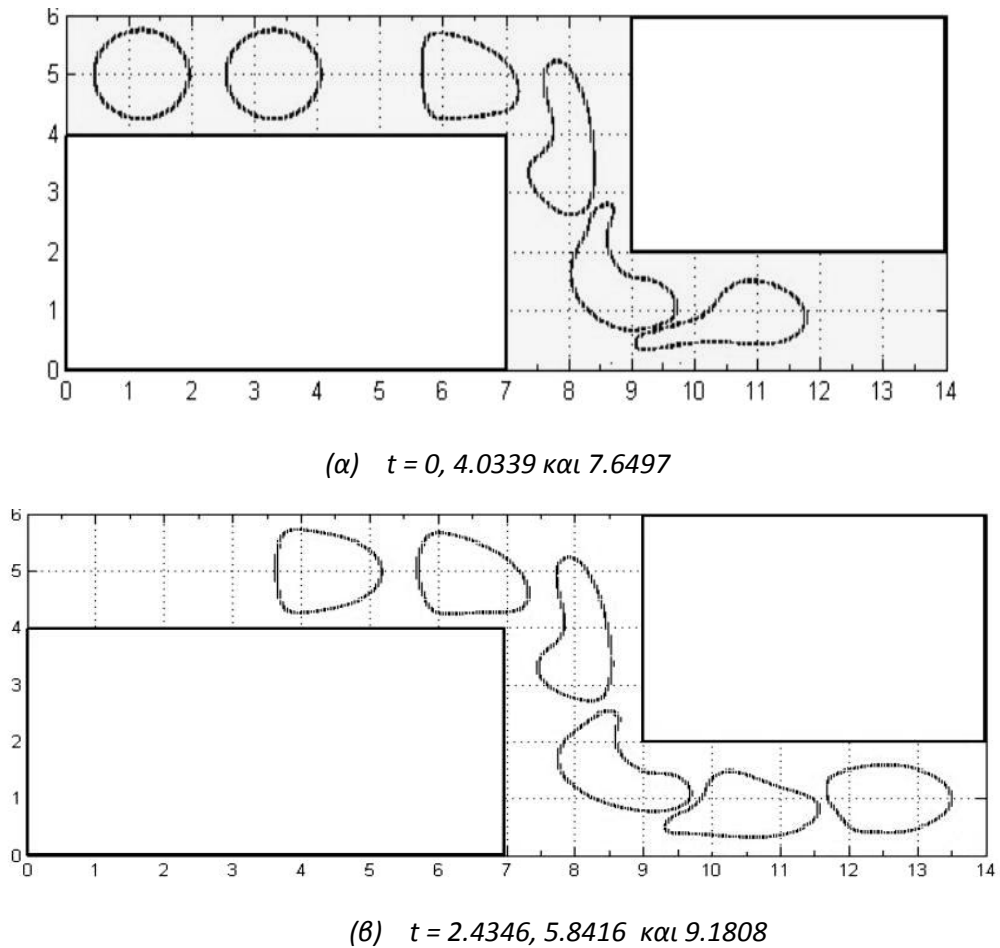
¹ Χρισταφάκης,, Τσαγγάρης, 2008. Σχ.6.

6.2.2. Τέσσερες σταγόνες: $Re=15, We=4, Ca=0.2, \lambda=4, \delta=0, k=0.48$.



Σχ.6.2.(α, β). Τέσσερες σταγόνες: $Re=15, We=4, Ca=0.2, \lambda=4, \delta=0, k=0.48$.

6.2.3. Δύο σταγόνες: $Re=15, We=1, Ca=0.05, \lambda=4, \delta=0, k=0.75$.



Σχ.6.3(α, β).² Δύο σταγόνες: $Re=15, We=1, Ca=0.05, \lambda=4, \delta=0, k=0.75$.

² Χρισταφάκης,, Τσαγγάρης, 2008. Σχ.7.

Οι σταγόνες εισάγονται στην κυρία φάση η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του αγωγού στο Σχ.6.3. πάνω στον άξονα συμμετρίας, ενώ στα Σχ.6.1 και Σχ.6.2 έκκεντρα πάνω σε παράλληλη γραμμή προς τον άξονα συμμετρίας. Οι διατάξεις συγκροτούνται από ισομεγέθεις κυλινδρικές (κυκλικές) σταγόνες διαφόρων μεγεθών.

6.2.4. Παρατηρήσεις σχετικές με την παραμόρφωση και την μετανάστευση των σταγόνων.

Στα Σχ.6.1. και 6.2. αναμένεται μεγάλη παραμόρφωση της σταγόνας καθώς οι σταγόνες πλησιάζουν την διπλή γωνία. Το πίσω τμήμα της σταγόνας κοντά στην πάνω γωνία καθυστερεί σταδιακά. Αυτό δημιουργεί μια μεγάλη και λεπτή ουρά. Οι πλευρές της σταγόνας συμπιέζονται και το κεντρικό και πίσω μέρος της σταγόνας λεπταίνει, ενώ το μπροστινό τμήμα διατηρεί το σχεδόν κυκλικό σχήμα και παραμορφώνεται ελαφρώς.

Στο Σχ.6.3. επιπλέον η μεγάλη εγκάρσια διαδρομή επιβραδύνει την οριζόντια μεταφορά των σταγόνων και περιορίζει την περιστροφή και την επιμήκυνση τους δημιουργώντας μεγαλύτερη τάση για τελική χαλάρωση των σχημάτων των σταγόνων. Στο Σχ.6.1. η D κυμαίνεται από 0.33 έως 0.61, ο $E.R.$ από 1.46 έως 2.00 και η γωνία κλίσης κυμαίνεται πάνω από 160° και τείνει στις 180° . Αντίστοιχα στο Σχ.6.3, η D κυμαίνεται από -0.06 έως 0.43, ο $E.R.$ από 1.13 έως 1.73 και η πορεία της έντονης ταλάντωσης της γωνίας κλίσης μπορεί να εκφραστεί χονδρικά από το σχήμα $140^\circ \rightarrow 90^\circ \rightarrow 120^\circ \rightarrow 180^\circ$.

Αντιθέτως στο Σχ.6.2., το σχεδόν κυκλικό σχήμα, των μεσαίου μεγέθους, κεντρικά τοποθετημένων σταγόνων δημιουργεί εικόνα που μοιάζει με το πρότυπο του τραίνου, στο οποίο ένας πυρήνας που αποτελείται από τις σταγόνες, συμπεριφέρεται ως άκαμπτο σώμα με ταχύτητα U , σε ροή με προφίλ ταχύτητας τύπου plug zone. Οι διακυμάνσεις των D και $E.R.$ δείχνουν μόνο μικρές αποκλίσεις από τις αρχικές τιμές. Τέλος και για τις δύο μορφές αγωγών επαληθεύεται ότι όσο μεγαλύτεροι είναι οι We και Ca , τόσο μεγαλύτερη είναι η παραμόρφωση και περιστροφή των σταγόνων και μικρότερη είναι η επίδραση της επιφανειακής τάσης.

6.3. ΑΠΟΤΟΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ ΤΑΦ 90°

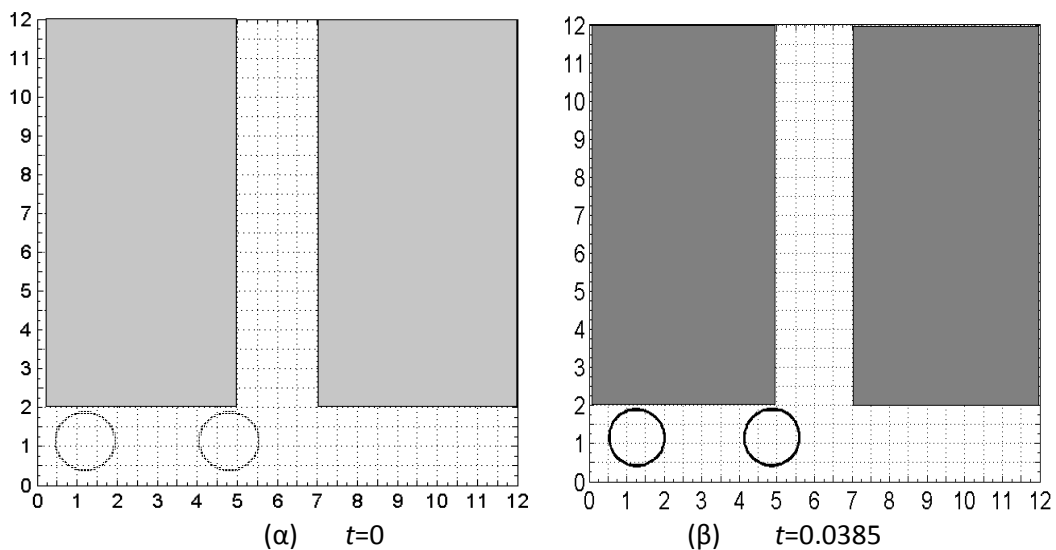
Στο Σχ.6.4. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων μιας αρχικής ομάδας δύο ίσων κυκλικών (κυλινδρικών) σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή μέσα σε διδιάστατο αγωγό με απότομη διακλάδωση ταφ 90° . Οι σταγόνες εισάγονται στο περιβάλλον ρευστό (κύρια φάση) η μία πίσω από την άλλη στο αριστερό άκρο του οριζώντιου τμήματος του αγωγού έκκεντρα στην θέση $y/h=1.14$ σε ευθεία παράλληλη στον άξονα συμμετρίας του οριζοντίου σκέλους του ταφ, $y/h = 1.0$. Ισχύει $h=1$. Το μήκος και το ύψος του ταφ είναι $L=12$

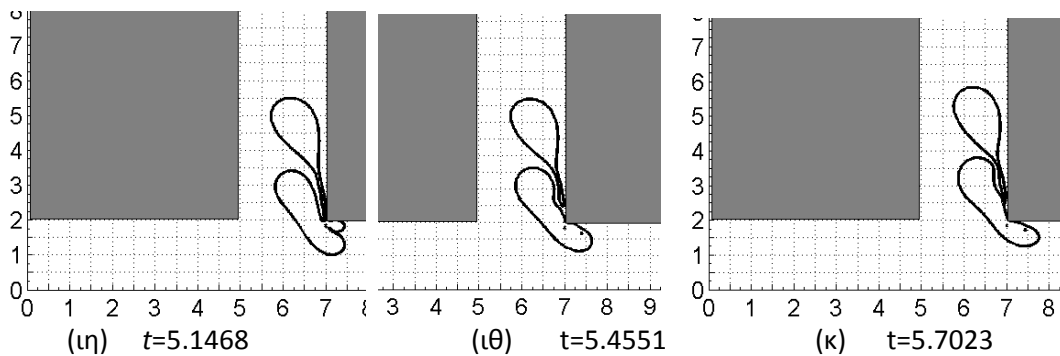
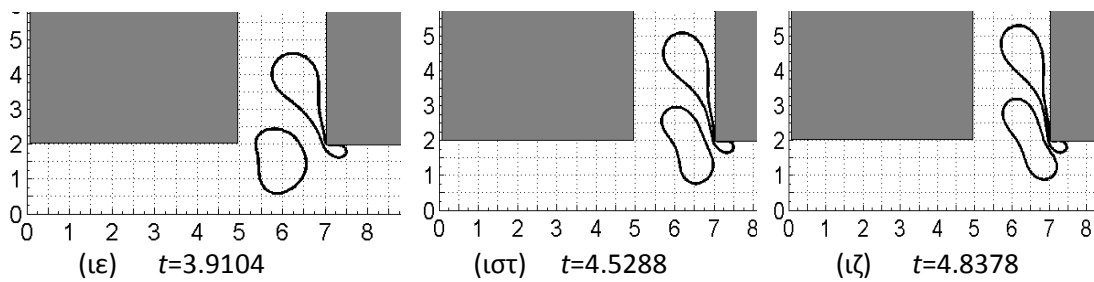
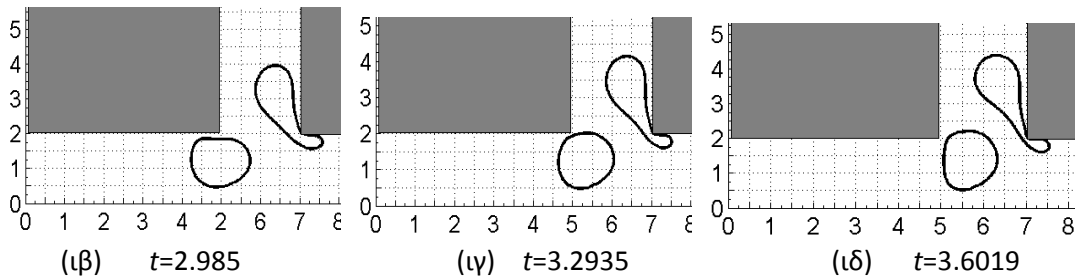
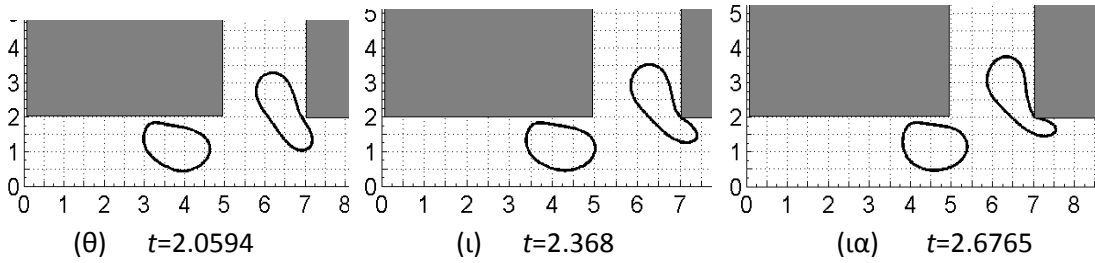
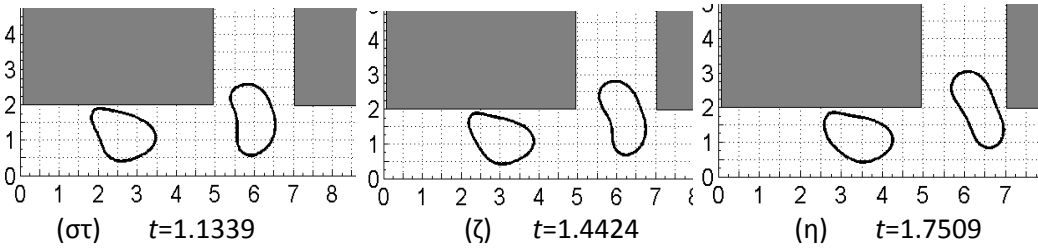
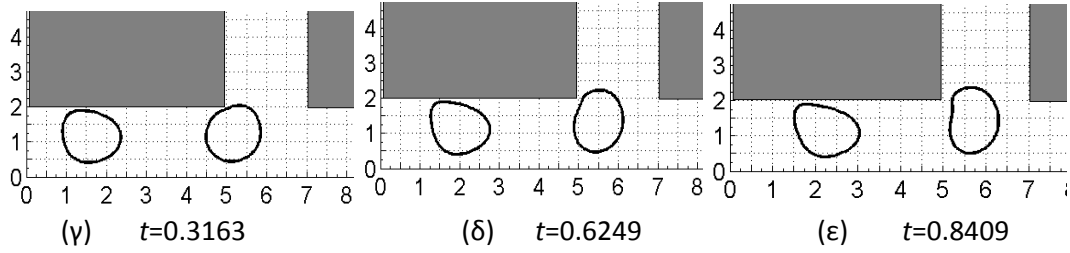
($x/h=y/h=0-12$). Το πλάτος του αγωγού είναι τόσο στο οριζόντιο σκέλος όσο και στην διακλάδωση $H=2h=2$. Το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα του χωρίου υπολογισμού είναι 300×300 . Επιλέχθηκαν συνθήκες προσομοίωσης $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=-0.14$, $k=0.744$. Η διακλάδωση αντιστοιχεί στην θέση $x/h=5$ έως 7.

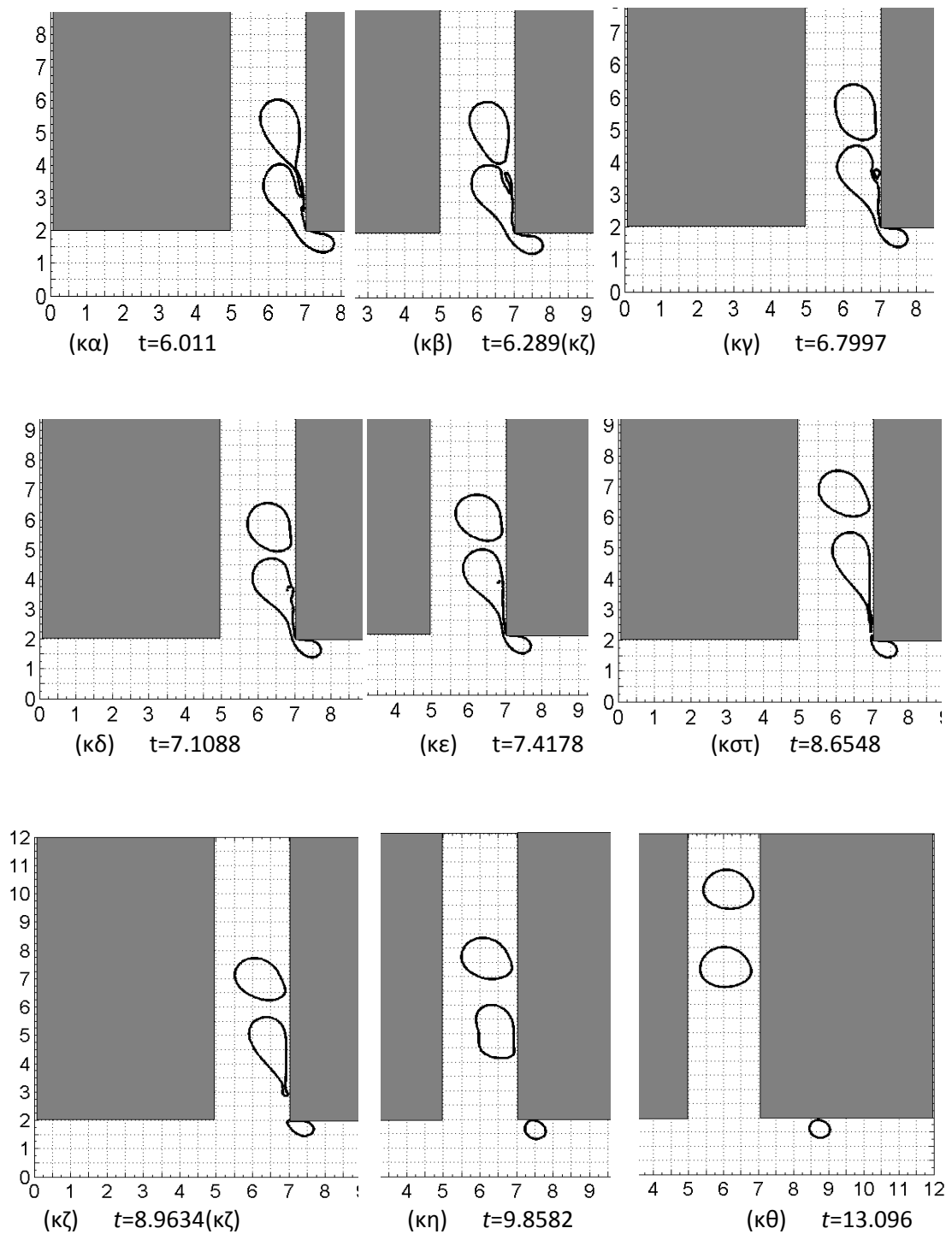
Σαν οριακή συνθήκη εισόδου χρησιμοποιήθηκε παραβολικό προφίλ για την ταχύτητα u/U με μέση ταχύτητα $U=1$ ενώ σαν οριακή συνθήκη εξόδου χρησιμοποιήθηκε παραβολικό προφίλ ταχύτητας u/U με μέση ταχύτητα $U=0.4$ στον οριζόντιο κλάδο και παραβολικό προφίλ ταχύτητας v/U με μέση ταχύτητα $U=0.6$ στην διακλάδωση, ώστε να εξασφαλίζεται παροχή 60% της αρχικής στην διακλάδωση και 40% στο οριζόντιο σκέλος του ταφ μετά την διακλάδωση.

Η στιγμιαία μορφή, η παραμόρφωση και η μετανάστευση των σταγόνων στα διάφορα στιγμιότυπα προκύπτουν από αναπαράσταση των ισοϋψών της $\phi=0$ με ελάχιστο πάχος διεπιφάνειας που επιλέγεται από το λογισμικό του προγράμματος γραφικών χωρίς χρήση του προεπιλεγμένου πάχους του αλγορίθμου της μεθοδολογίας που χρησιμοποιείται στα Σχ.6.1. έως Σχ.6.4.(α). Αποφεύγεται με αυτό τον τρόπο η απεικόνιση και ψευδοσημείων της $\phi=0$ πολύ κοντά στην τιμή $\phi=0$, όπως σε σημεία του περιγράμματος της σταγόνας με μεγάλες παραμορφώσεις, πτυχώσεις και περιοχές εμφάνισης σταγονιδίων που απαιτούν ιδιαίτερη ευκρίνεια και εμφανίζονται στην περίπτωση αυτή κοντά στην διακλάδωση.

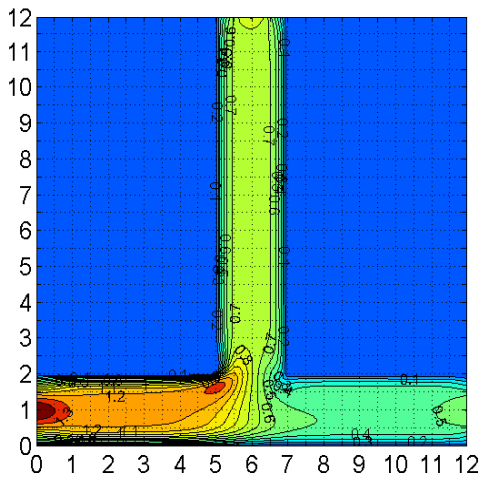
Σχετικά με τη διακλάδωση τα αποτελέσματα φαίνονται καλά, αν και η διάσπαση της σταγόνας στην ακμή δημιουργεί μικρότερες σταγόνες που θα ήθελαν ενδεχομένως και ακόμη πυκνότερα πλέγματα.



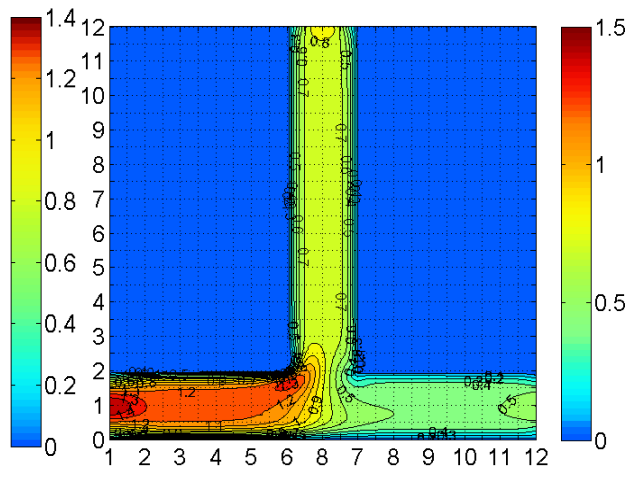




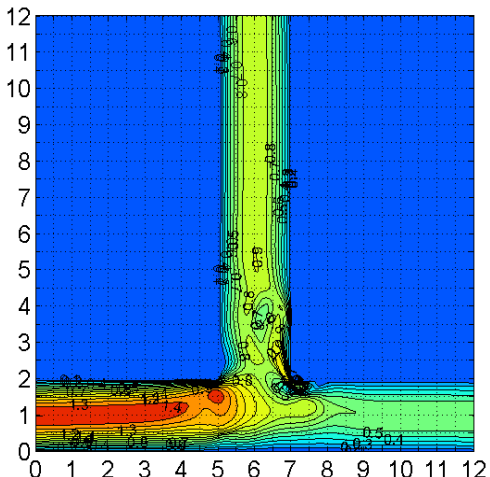
Σχ.6.4. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια,ιβ,ιγ,ιδ,ιε,ιστ,ιζ,ιη,ιθ,κ, κα, κβ, κγ, κδ, κε, κστ, κζ, κη, κθ). Διφασική ροή σε απότομη διδιάστατη διακλάδωση ταφ 90° . Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $\delta=-0.14$, $k=0.744$.



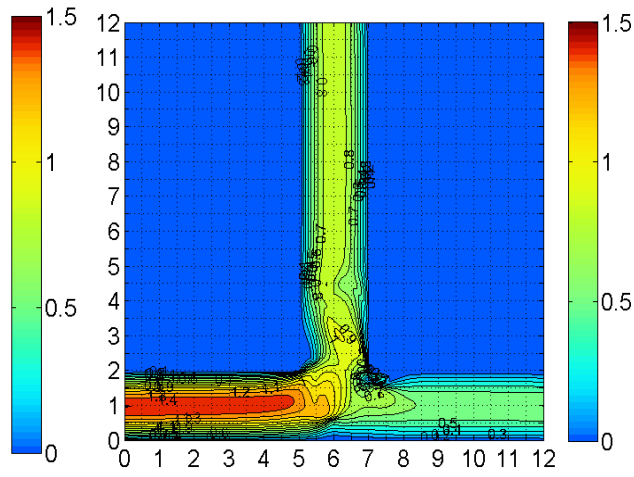
(α) Σχ.6.4. χωρίς σταγόνες



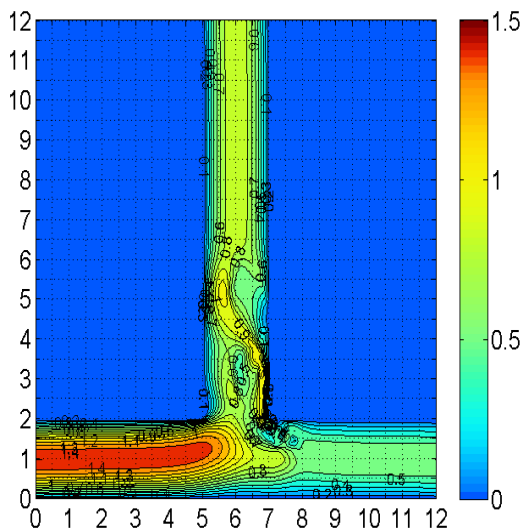
(β) Σχ.6.4.(β)



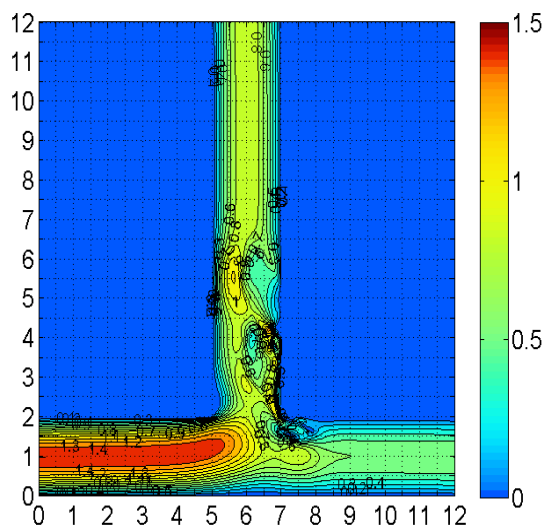
(γ) Σχ.6.4. (ιγ)



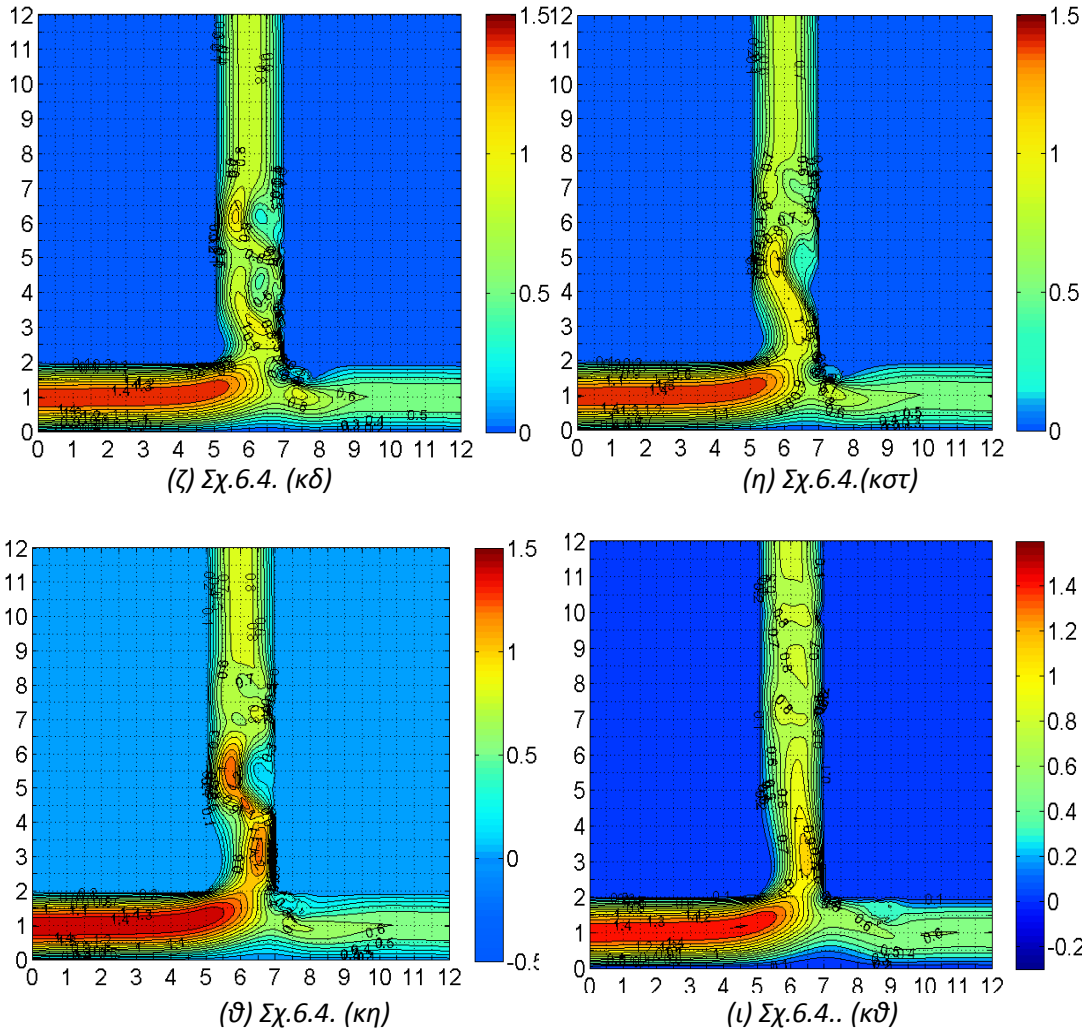
(δ) Σχ.6.4.(ιδ)



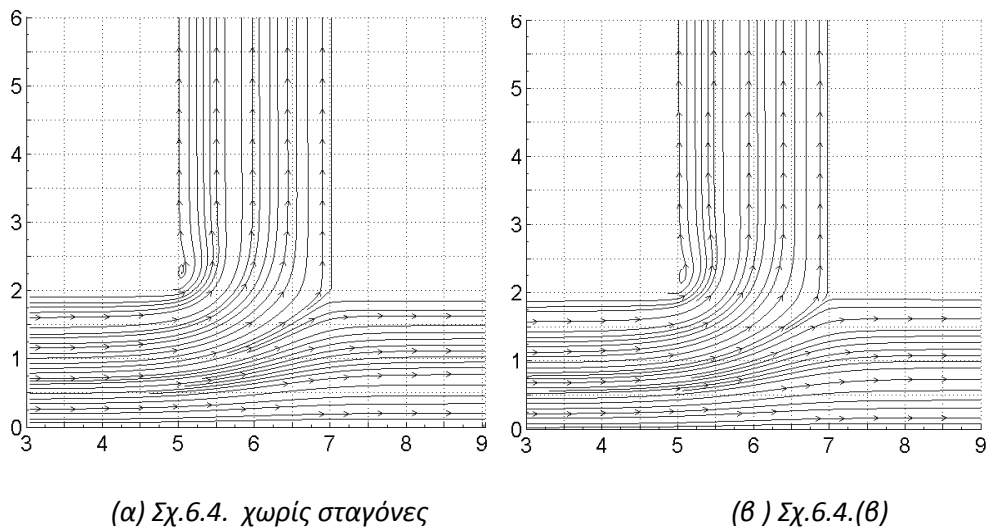
(ε) Σχ.6.4. (κε)

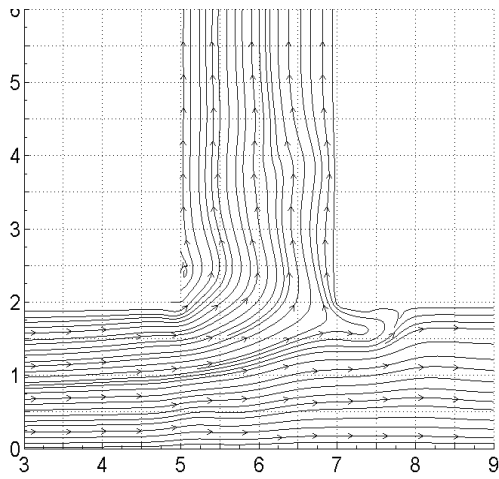


(στ) Σχ.6.4.(κβ)

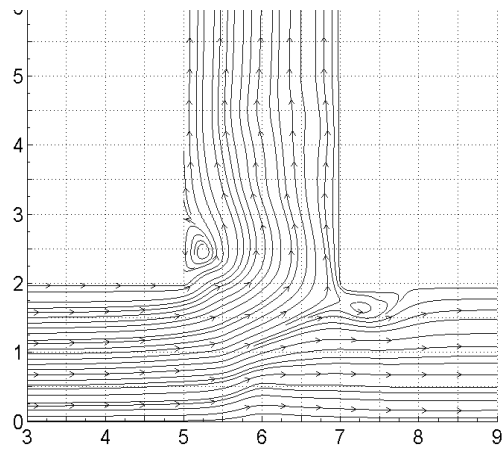


Σχ.6.5. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Ισοταχείς] Απεικόνιση των κατανομών (ισοταχών) του πεδίου της αδιάστατης ταχύτητας $X=[(u^2+v^2)^{1/2}]/U$ σε ολόκληρο το χωρίο υπολογισμού της διακλάδωσης (ταφ 90°) για επιλεγμένα στιγμιότυπα του Σχ.6.4.

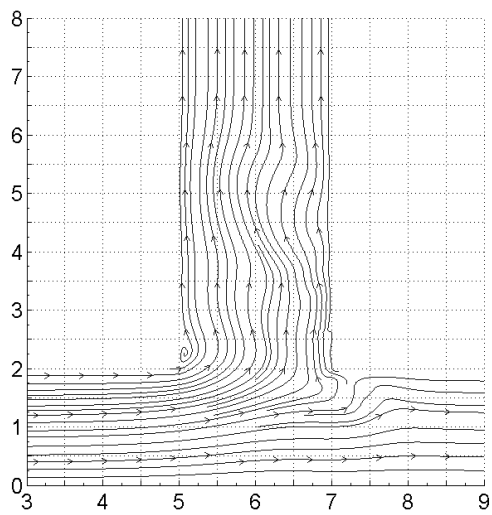




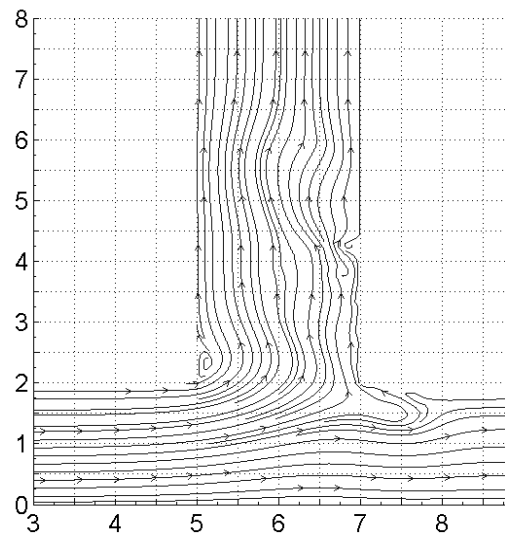
(γ) Σχ.6.4. (ιγ)



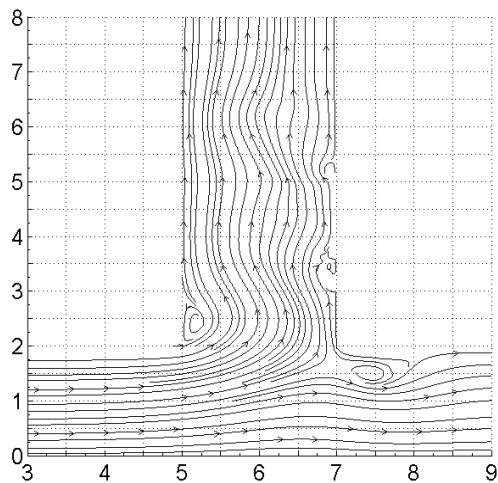
(δ) Σχ.6.4. (ιε)



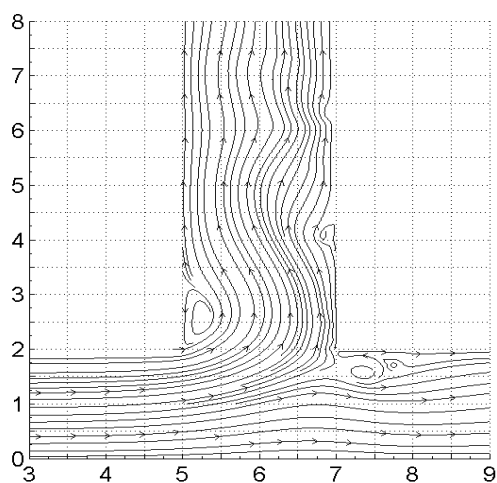
(ε) Σχ.6.4. (κ)



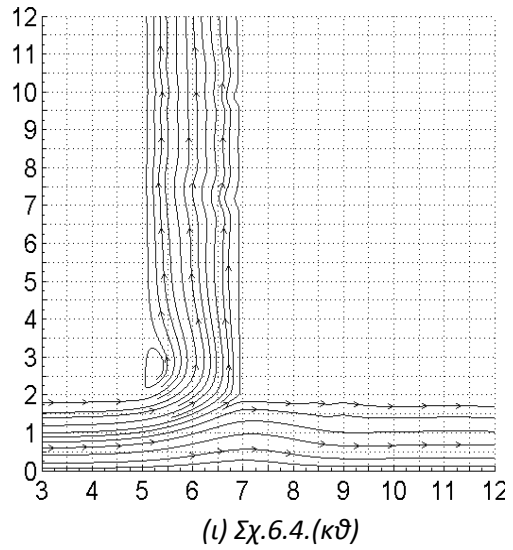
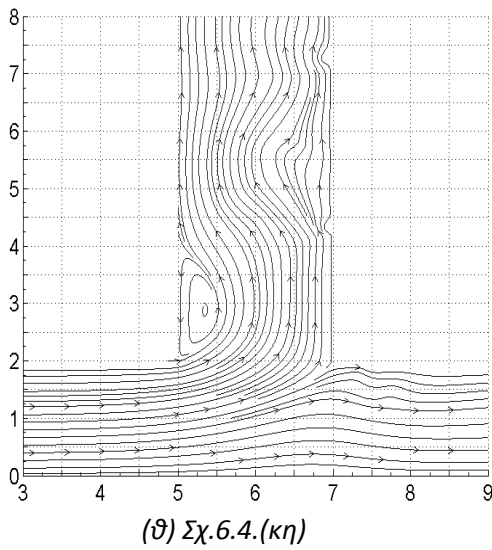
(στ) Σχ.6.4. (κβ)



(ζ) Σχ.6.4. (κδ)

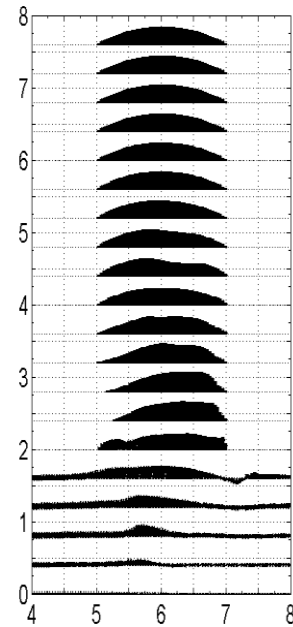
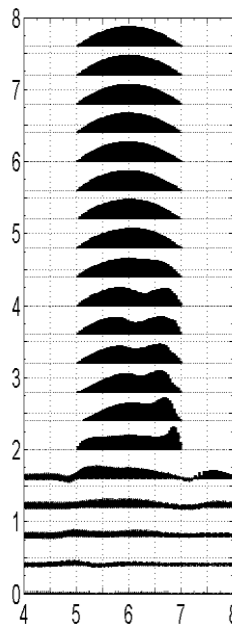
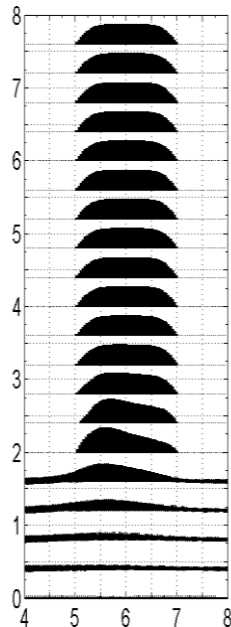
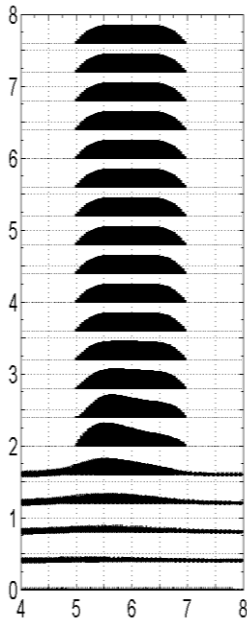


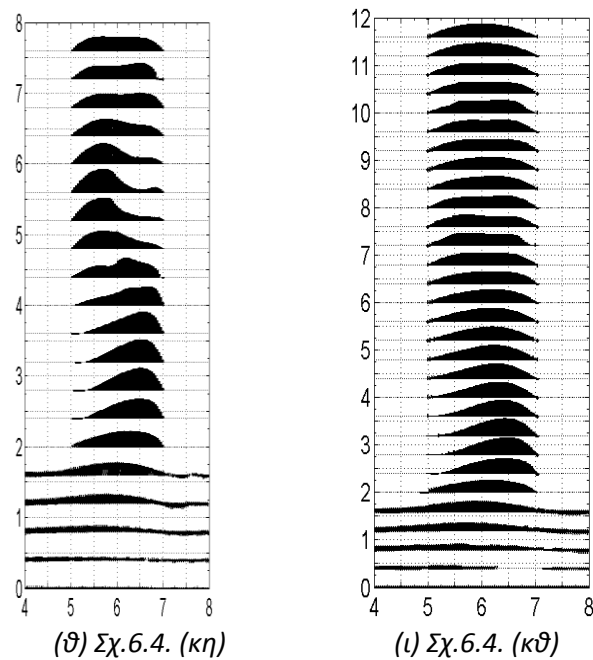
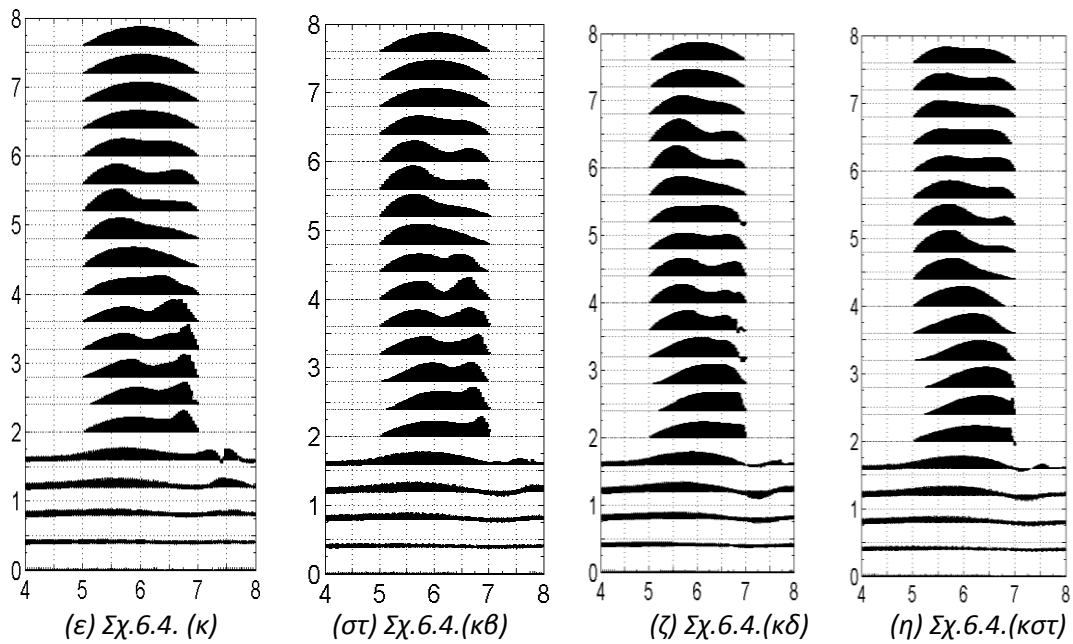
(η) Σχ.6.4. (κστ)



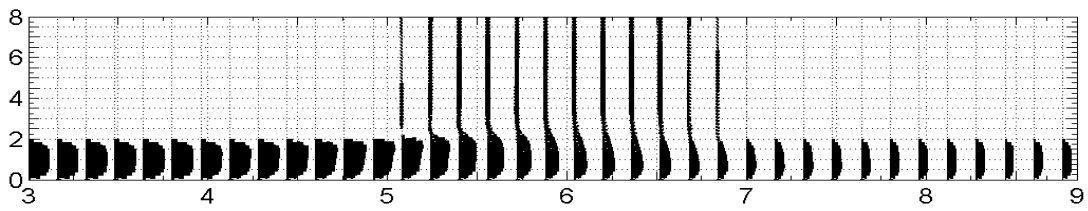
Σχ.6.6. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Απεικόνιση των γραμμών ροής που σχηματίζονται στην περιοχή της διακλάδωσης (ταφ 90°) από το αδιάστατο διανυσματικό ροϊκό πεδίο ($u/U, v/U$) για επιλεγμένα στιγμιότυπα του Σχ.6.4.

Από στιγμιότυπο σε στιγμιότυπο παρατηρείται έντονη αλλαγή του πεδίου ροής, μετανάστευση και μεγάλη αυξομείωση των ανακυκλοφοριών άμεσα συνυφασμένη με την εκάστοτε θέση των σταγόνων στον αγωγό φαινόμενο που έχουμε παρατηρήσει και σε άλλες γεωμετρικές αγωγών.

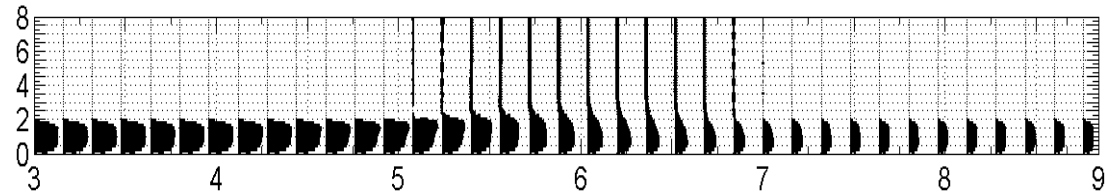




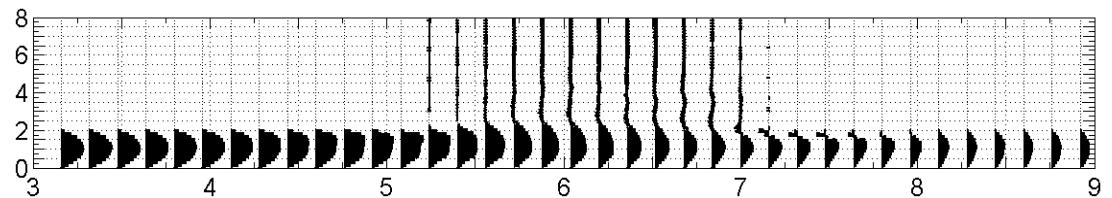
Σχ.6.7. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Απεικόνιση των κατανομών (προφίλ) της αδιάστατης εγκάρσιας ταχύτητας v/U σε επιλεγμένες θέσεις y κατά πλάτος του αγωγού που σχηματίζονται στην περιοχή της διακλάδωσης (ταφ 90°) από το αδιάστατο διανυσματικό ροϊκό πεδίο ($u/U, v/U$) για επιλεγμένα στιγμιότυπα του Σχ.6.4.



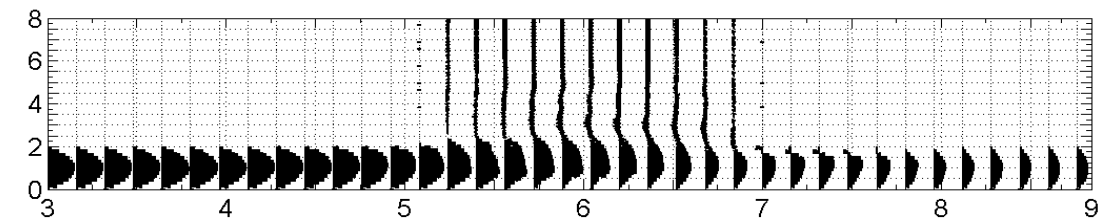
(α) Σχ.6.4. χωρίς σταγόνες



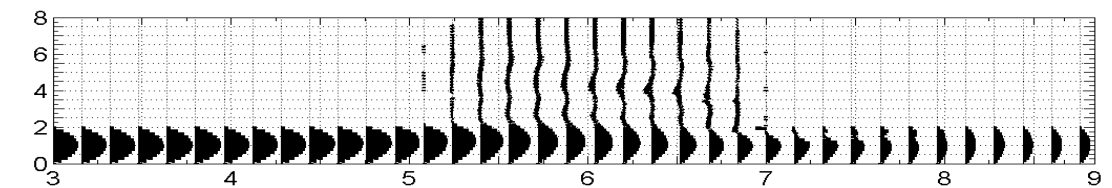
(β) Σχ.6.4.(β)



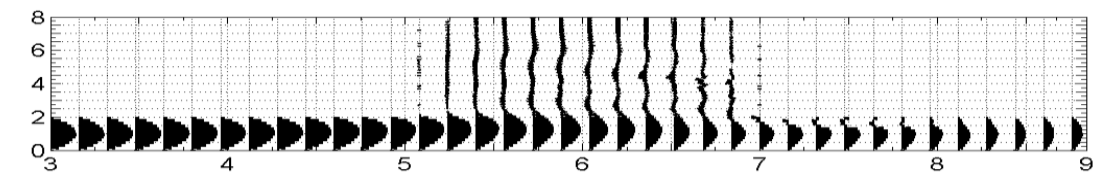
(γ) Σχ. 6.4.(ιγ)



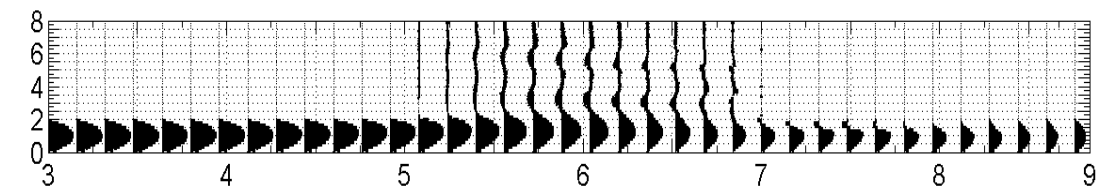
(δ) Σχ. 6.4.(ιδ)



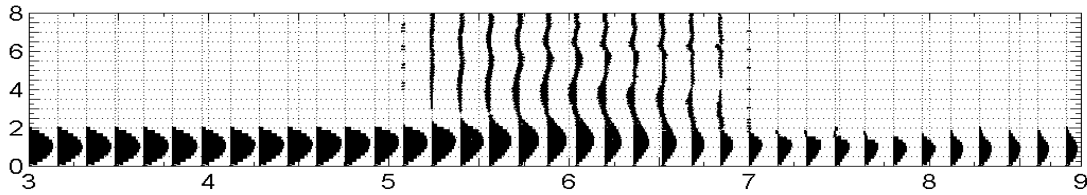
(ε) Σχ.6.4. (κ)



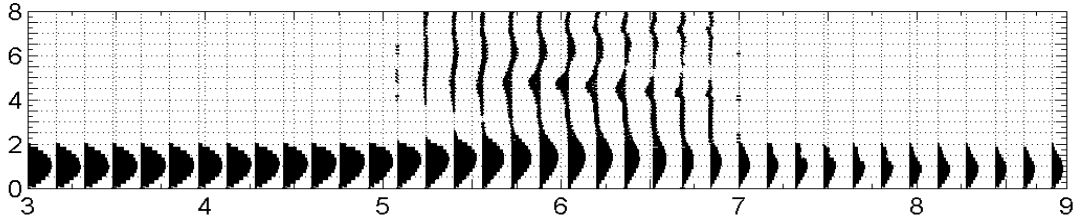
(στ) Σχ.6.4.(κβ)



(ζ) Σχ.6.4.(κδ)



(η) Σχ.6.4.(κστ)

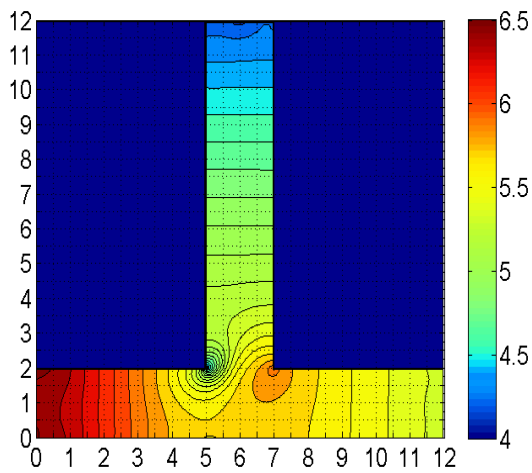


(θ) Σχ.6.4.(κη)

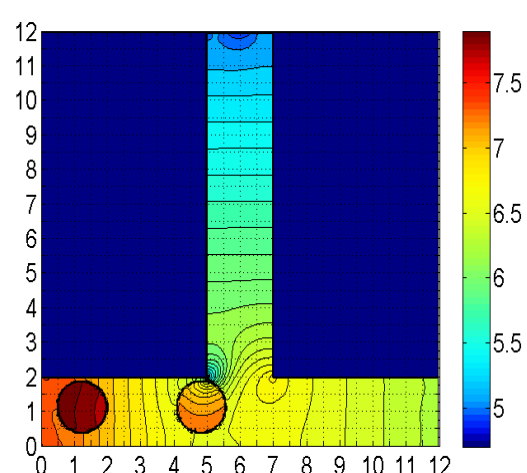


(ι) Σχ.6.4.(κθ)

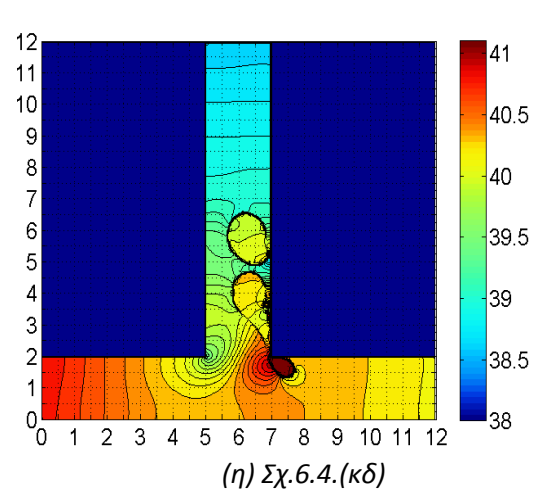
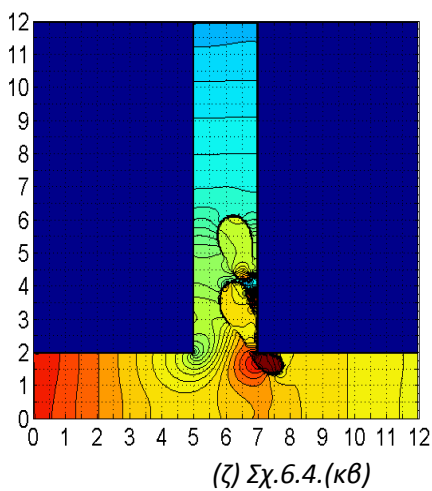
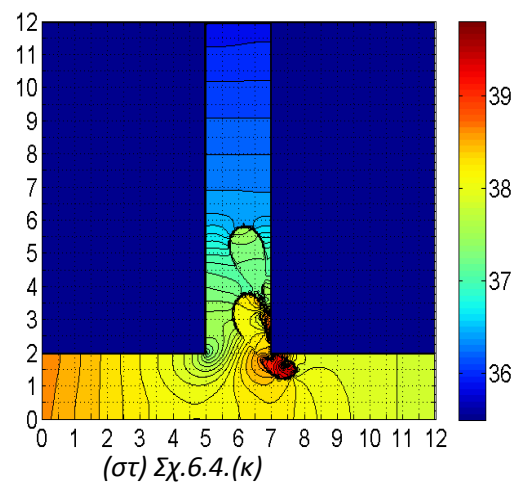
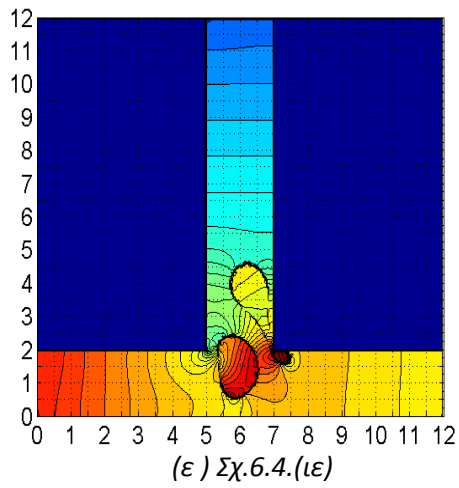
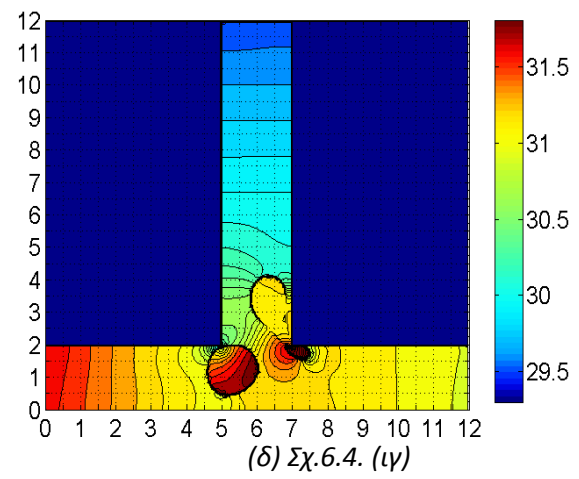
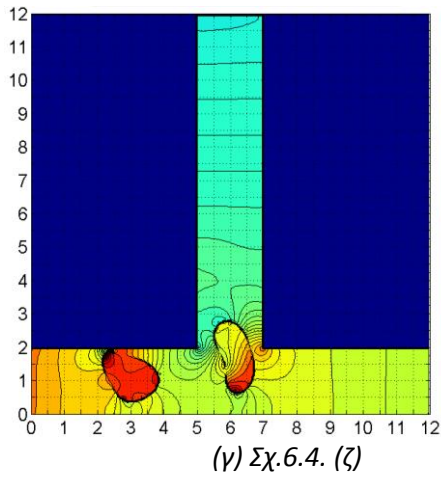
Σχ.6.8.(α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι). Απεικόνιση των κατανομών (προφίλ) της αδιάστατης οριζόντιας ταχύτητας u/U σε επιλεγμένες θέσεις x κατά μήκος του αγωγού που σχηματίζονται στην περιοχή της διακλάδωσης (ταφ 90°) από το αδιάστατο διανυσματικό ροϊκό πεδίο (u/U , v/U) για επιλεγμένα στιγμιότυπα του Σχ.6.4.

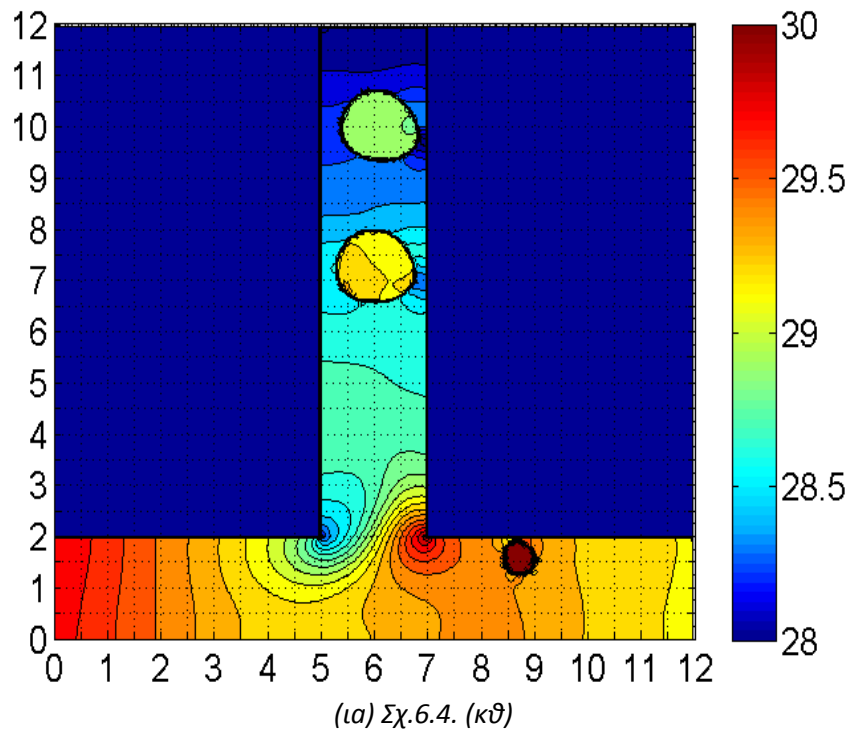
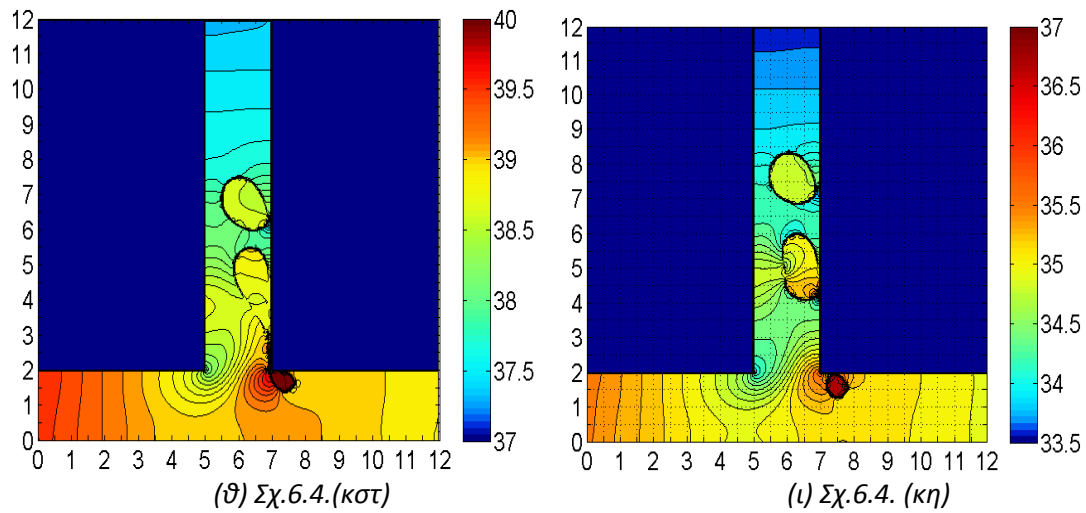


(α) Σχ.6.4. χωρίς σταγόνες



(β) Σχ.6.4.(β)



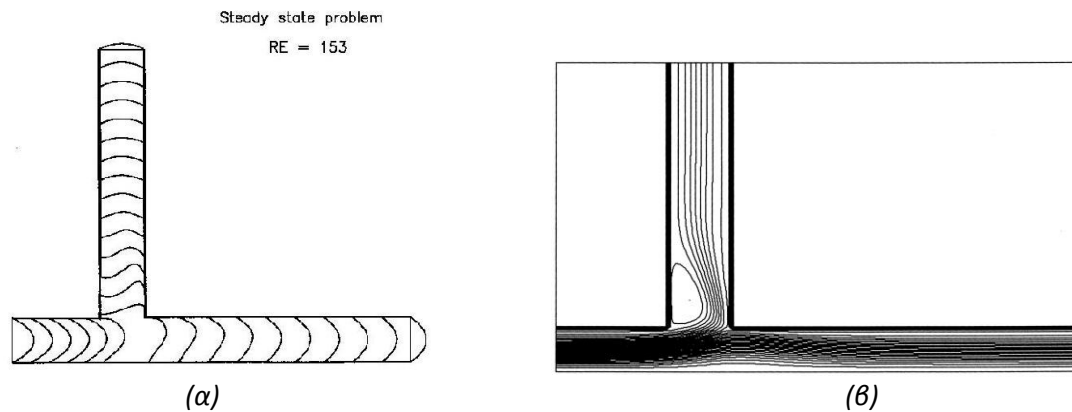


Σχ.6.9. (α,β,γ,δ,ε,στ,ζ,η,θ,ι,ια). Απεικόνιση των κατανομών (ισοταχών) του πεδίου της αδιάστατης πίεσης $p' = p/(\rho_c U^2)$ σε ολόκληρο το χωρίο υπολογισμού της διακλάδωσης (ταφ 90°) για επιλεγμένα στιγμιότυπα του Σχ.6.4.

Παρατηρείται τοπική διαταραχή και αύξηση της πίεσης στην περιοχή των σταγόνων.

6.4. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Ποιοτική σύγκριση του μονοφασικού πεδίου σε διακλάδωση (ταφ) του Σχ.6.5.(α) γίνεται ενδεικτικά με το Σχ.6.10, όπου παρουσιάζονται (α) τα προφίλ ταχυτήτων για $Re=153$ και στο (β) οι γραμμές ροής και φαίνεται η ανακυκλοφορία, Θ. Πάππου³.



Σχ.6.10.(α,β) Διακλάδωση ταφ για $Re=153$. (α) προφίλ ταχυτήτων και (β) γραμμές ροής. (Πάππου)

Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγκεκριμένη περίπτωση ήταν. Παραβολικό προφίλ ταχύτητας u στην είσοδο και $v=0$. Στις εξόδους παράγωγοι των ταχυτήτων κατά μήκος μηδέν και ίσες πιέσεις στις εξόδους. Με τις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες είχαν αποκατασταθεί παραβολικά προφίλ στις δύο εξόδους και παροχές με σχέση 71% και 29% περίπου στις δύο εξόδους (οριζόντια και κατακόρυφη). Επίσης η ομοιότητα των παρατηρήσεων όπως και η μεγάλη ποικιλία στα χαρακτηριστικά των ροών σε διακλάδωση (ταφ) τόσο για το μονοφασικό όσο και για το διφασικό πεδίο αναφέρονται εκτενώς και στην παρακάτω βιβλιογραφία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Καλιακάτσος Χ., (2000), Επίδραση Μηχανικών Ιδιοτήτων Εμμόρφων Κυττάρων του Αίματος στην Αιματική Ροή, διδακτορική διατριβή.

Baroud C.N. and Willaime H., (2004), Multiphase flows in microfluidics, *Comptes Rendus Physique*, 5:547–555.

³ Ανακοίνωση σε συνέδριο, χωρίς πρακτικά. Αριθμητική προσομοίωση με χρήση λογισμικού αντίστοιχου του Na-St, παραλλαγή του SOLA (Los Alamos).

- Bramley J. S. and Dennis S. C. R.**, (1984), The numerical solution of two-dimensional flow in a branching channel, *Computers & Fluids*, 12(4):339-355.
- Castro I. P. and J. M. Jones J. M.**, (1987), *Studies in numerical computations of recirculating flows*, International Journal for Numerical Methods In Fluids, 7:793-823 .
- Christafakis A.N. and Tsangaris S.** (2008), Two-Phase Flows of Droplets in Contractions and Double Bends, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2.3:299-308.
- Graf E., Neti S.**, (2000), Two-phase flow pressure drop in right angle bends, *Journal of Fluids Engineering*, 122.4:761-768.
- Miranda A. I. P., Oliveira P. J. and Pinho F. T.**, (2007), Steady and unsteady laminar flows of Newtonian and generalized Newtonian fluids in a planar T-junction, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 57.3:295-328.
- Oliveira P. J. and Issa R. I.**, (2003), Numerical aspects of an algorithm for the Eulerian simulation of two-phase flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* , 43:1177–1198.
- Parker S.J., Balachandar S.**, (1999), Viscous and Inviscid Instabilities of Flow along a Streamwise Corner, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 13:231–270.
- Riverin J.L. , Langre E., Pettigrew M.J.**, (2006), Fluctuating forces caused by internal two-phase flow on bends and tees, *Journal of sound and vibration*, 298:1088-1098.
- Rong F. W. and Carr R. T.**, (1990), *Dye Studies on Flow through Branching Tubes*, *Microvascular Research*, 39:186-202.
- Tice J.D., Lyon A.D. and Ismagilov R.F.**,(2004), Effects of viscosity on droplet formation and mixing in microfluidic channels, *Analytica Chimica Acta*, 507 :73–77.
- Tsui Y.-Y. and Lu C.-Y.**,(2006), A study of the recirculating flow in planar, symmetrical branching channels, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 50, 235–253.
- Yang L., Azzopardi B. J., and Belghazi A., Nakanishi S.**, (2006), *Phase Separation of Liquid-Liquid Two-Phase Flow at a T-Junction*, *AIChE Journal* , 52(1):141-149.
- Zhao C-X, Middelberg A.P.J.**, (2011), Two-phase microfluidic flows, *Chemical Engineering Science*, 66.7: 1394-1411.
- Zhao Y., Chen G. and Yuan Q.**, (2007), Liquid–Liquid Two-Phase Mass Transfer in the T-Junction Microchannels, *AIChE Journal* , 53.12, 3042-3053.
- Zhao Y., Chen G. and Yuan Q.**, (2006), Liquid-Liquid Two-Phase Flow Patterns in a Rectangular Microchannel, *AIChE Journal* (2006), 52(12):4052-4060.

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΗΝ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΗ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7.1. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΩΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ.....	3
7.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ	5
7.2.1. Αξονοσυμμετρικός Συνημιτονοειδής αγωγός	5
7.2.2. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των αιμοσφαιρίων.	8
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	11

ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΦΑΣΙΚΕΣ ΡΟΕΣ ΣΤΗ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

7.1. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΙΚΡΟΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΣ ΩΣ ΔΙΦΑΣΙΚΗΣ ΡΟΗΣ.

Στο 7^ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αριθμητική μοντελοποίηση της μικροκυκλοφορίας του αίματος ως διφασικής ροής σταγόνων με αλγορίθμους της αριθμητικής μεθοδολογίας αξονομετρικής διφασικής ροής υγρού σε υγρό που αναπτύξαμε με την σύμπλεξη των εξισώσεων *Navier-Stokes* και των αλγορίθμων της μεθόδου *Level-Set*. Προσομοιώνονται ο αριθμός των σταγόνων (αιμοσφαιρίων), διάφορα αδιάστατα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ροής και οι αδιάστατοι χαρακτηριστικοί αριθμοί: *Reynolds (Re)*, *τριχοειδής (Ca)*, *Weber (We)*, *λόγος ιξωδών των φάσεων (λ)*.

Η μελέτη της κίνησης και παραμόρφωσης των κυττάρων του αίματος στα τριχοειδή αγγεία αποτέλεσε κίνητρο για την εκτέλεση αυτής της διατριβής και αντικείμενο εφαρμογής των μεθόδων που αναπτύξαμε για τις διφασικές ροές. Η διέλευση των ερυθρών αιμοσφαιρίων στην μικροκυκλοφορία θεωρείται θεμελιώδες πρόβλημα στην φυσιολογία και την βιορευστομηχανική, γιατί συσχετίζεται με τις ρεολογικές ιδιότητες και τη μεταφορά του αίματος στα τριχοειδή αγγεία, σε διελεύσεις ιστών αλλά και με την ρευστοδυναμική της αιματικής ροής στο όλο κυκλοφορικό σύστημα.

Το πλαίσιο αναφοράς για την κατανόηση των εννοιών έχει περιγραφεί στο 1^ο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, στην §1.12. παρουσιάζονται εκτενώς στοιχεία φυσιολογίας της μικροκυκλοφορίας, η σύσταση και ο ρόλος του αίματος με τις μακροσκοπικές ρεολογικές ιδιότητες του και θεμελιώνεται η παραμορφωσιμότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων. Επίσης στην §1.13 παρουσιάζονται στοιχεία θεωρητικών και πειραματικών μελετών μοντελοποίησης της μικροκυκλοφορίας του αίματος και στην §1.14 αντίστοιχες αριθμητικές προσομοιώσεις.

Επιγραμματικά σύμφωνα με την φυσιολογία, το αίμα είναι εναιώρημα κυτταρικών στοιχείων αποτελούμενο από το πλάσμα που παρουσιάζει Νευτώνεια συμπεριφορά, τα λευκά αιμοσφαίρια (*WBC*), τα αιμοπετάλια και τα ερυθρά αιμοσφαίρια (*RBC*) που είναι υπεύθυνα για την μη Νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος. Το αίμα, *Κουτσούρης et.al., 2003*, έχει πυκνότητα 1.06 gr/cm^3 και ιξώδες $3.5-5 \text{ cpoise}$, το *RBC*, 1.10 gr/cm^3 με σχήμα δισκοειδών αμφίκυλων παραμορφώσιμων δίσκων διαμέτρου περίπου $7.8 \mu\text{m}$ και το πλάσμα 1.03 gr/cm^3 με σταθερή συνεκτικότητα 1.8 cp . Η μέση ταχύτητα ροής σε τριχοειδή είναι της τάξης του 1 mm/sec . Ο αριθμός *Reynolds* μίας τυπικής ροής μέσα σε τριχοειδή είναι μικρότερος από το 10^{-2} . Η μεγάλη παραμορφωσιμότητα της μεμβράνης επιτρέπει την διόδο του *RBC* μέσα από τριχοειδή αγγεία ακόμη και σε τριχοειδή ίδιας ή μικρότερης διάστασης από το *RBC*. Η κυτταρική μεμβράνη είναι ανάλογη ενός «μωσαϊκού ρευστού» με αρνητικό φορτίο στην επιφάνειάς της. Το πάχος της κυτταρικής μεμβράνης είναι περίπου $0.81 \mu\text{m}$. Αιματοκρίτης (*hematocrit*) (*Hct*) ορίζεται ως η επί τοις εκατό κατ' όγκο περιεκτικότητα του αίματος σε έμμορφα στοιχεία. Τα *WBC* χαρακτηρίζονται από υψηλό εσωτερικό ιξώδες και είναι σχεδόν σφαιρικά διαμέτρου $8-20 \mu\text{m}$.

Στο διφασικό μοντέλο της μικροκυκλοφορίας, τα ερυθρά και τα λευκά αιμοσφαίρια όπως και το πλάσμα θεωρούνται ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά διαφορετικού ιξώδους που διαχωρίζονται με παραμορφώσιμη ελαστική μεμβράνη που προσομοιώνεται σε ικανοποιητικό βαθμό με την επιφανειακή τάση που επιβάλλεται στην διεπιφάνεια των δύο υγρών φάσεων. Τα αιμοσφαίρια διασπείρονται και παραμορφώνονται μέσα στο πλάσμα, όπως σταγόνες σε περιβάλλον ρευστό, χωρίς να αναμειγνύονται μεταξύ τους σε συνθήκες αναπτυσσόμενης στρωτής ροής, χαμηλού αριθμού *Reynolds* της συνεχούς φάσης, λόγω διαφοράς πίεσεως στα άκρα του αγωγού-αγγείου. Τα τριχοειδή αγγεία που έχουν πολύπλοκη δομή και ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες, θεωρούνται απλουστευτικά σαν άκαμπτοι κυλινδρικοί ευθύγραμμοι αγωγοί ή αγωγοί με στένωση ή/και διεύρυνση ή συνημιτονοειδείς ευθύγραμμοι αγωγοί.

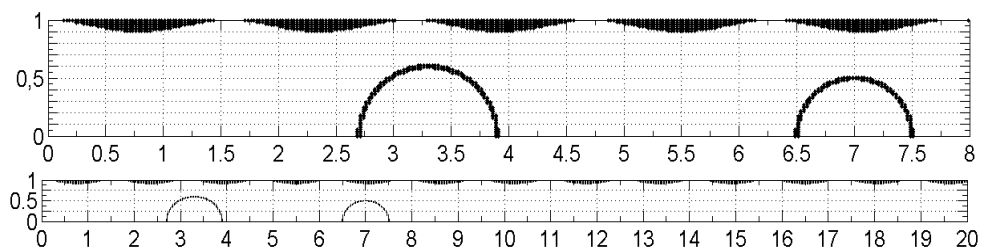
Εδώ ρ_b, μ_b είναι η πυκνότητα και το ιξώδες των κυττάρων του αίματος και ρ_c, μ_c τα αντίστοιχα μεγέθη του πλάσματος που αποτελεί την συνεχή φάση. R είναι η ακτίνα του αγγείου στην είσοδο, r η ακτίνα της αρχικού κυκλικού κυττάρου στην είσοδο του τριχοειδούς. Υποτίθεται $\rho_b = \rho_c$. Επίσης τα κριτήρια μέτρησης της παραμόρφωσης κατά *Taylor* περιγράφουν ποσοτικά το μέγεθος της παραμόρφωσης του κυττάρου του αίματος.

7.2. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

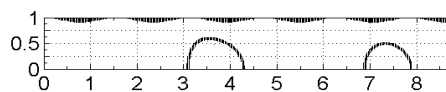
7.2.1. Αξονοσυμμετρικός Συνημιτονοειδής αγωγός¹

Στο Σχ.7.1. παρουσιάζονται στιγμιότυπα περιγραμμάτων ομάδας δύο άνισων κυκλικών (σφαιρικών) αιμοσφαιρίων-σταγόνων που διασπείρονται σε διφασική ροή με συνθήκες $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k1=0.5$, $k2=0.6$ μέσα σε κυλινδρικό αξονοσυμμετρικό αγωγό με τοίχωμα που περιγράφεται από συνημιτονοειδή καμπύλη με εξίσωση $y = 0.05 \times \cos(4x) + 0.95$ για να προσομοιώσει την γεωμετρία του αγγείου. Τα αιμοσφαίρια όπως σταγόνες εισάγονται στο πλάσμα (κύρια φάση) το ένα πίσω από το άλλο στο αριστερό άκρο του αγγείου πάνω στον άξονα συμμετρίας. Υλοποιούνται σε όλο το πεδίο ροής οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες και υπολογίζεται το μονοφασικό πεδίο της κυρίας φάσης μέσα στον κλειστό κυματοειδή συνημιτονοειδή αγωγό με οριακές συνθήκες: μη ολίσθησης στα τοιχώματα του αγωγού, ελεύθερης ολίσθησης στον άξονα του αξονομετρικού αγωγού, εισροής στην αριστερή είσοδο και εκροής στην έξοδο του αγωγού.

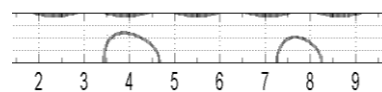
Τα u, v, p του μονοφασικού πεδίου αποτελούν τις αρχικές συνθήκες για την μελέτη του όποιου διφασικού πεδίου στην συγκεκριμένη γεωμετρία. Η αδιάστατη τιμή της ακτίνας $R=D/2=1$. Η είσοδος του αγωγού αντιστοιχεί στη μέγιστη διάμετρος D του αγωγού, άρα $(y/R=0-1)$. Το μήκος του αγωγού είναι $L=20$, $(x/R=0-20)$ και το καρτεσιανό αριθμητικό πλέγμα είναι 800X80.



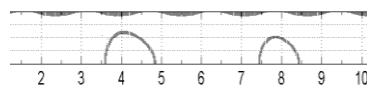
(α) $t = 0$ σε διάφορες αναλύσεις



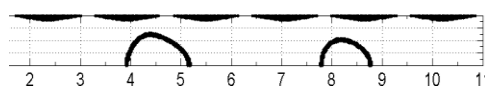
(β) $t=0.185$



(γ) $t=0.3694$



(δ) $t=0.4616$

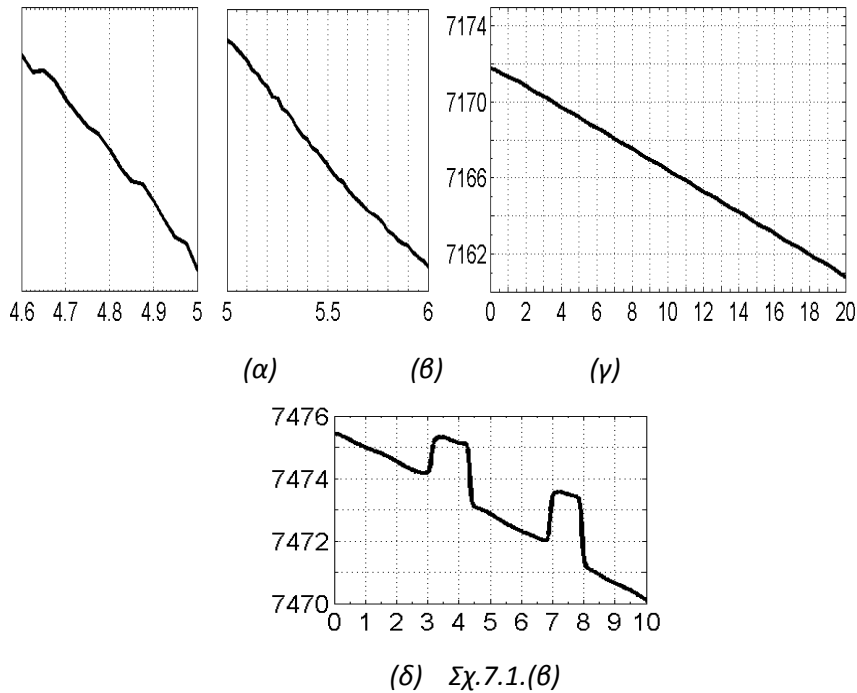


(ε) $t=0.6369$

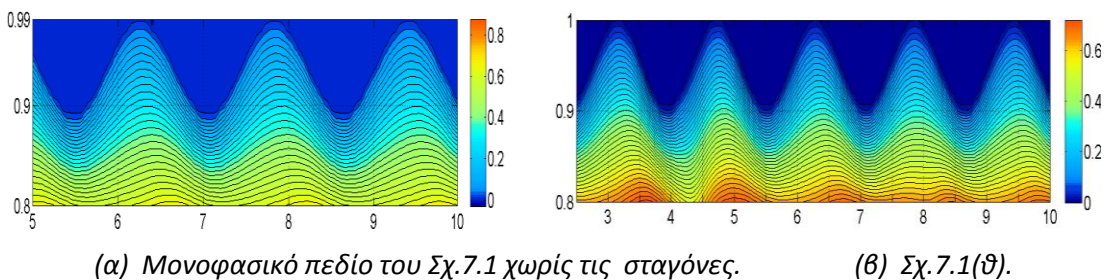
Σχ.7.1.(α,β,γ,δ,ε). Αξονοσυμμετρικός Συνημιτονοειδής αγωγός. Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k1=0.5$, $k2=0.6$.

¹ Χρισταφάκης & Τσαγγάρης, 2010.

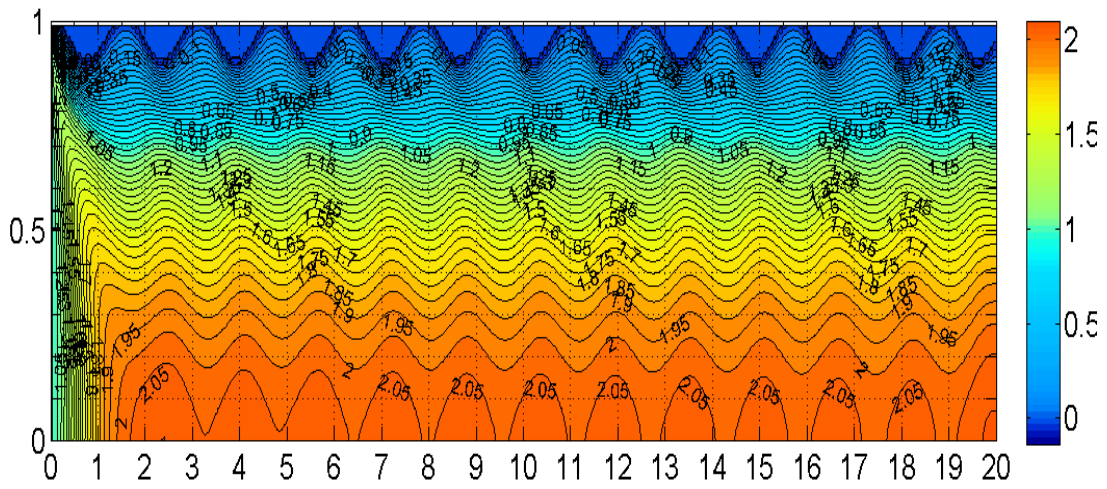
Οι τιμές της παραμόρφωσης D είναι πολύ μικρές και για τα δύο μεσαίου μεγέθους κύτταρα. Στην περίπτωση αυτή δεν παρατηρείται τάση διαταραχής ή διάσπασης του μεσαίου μεγέθους σταγόνων από την εισαγωγή του κυματοειδούς ορίου στο τοίχωμα. Η ακρίβεια και η ευκρίνεια των περιγραμμάτων των διεπιφανειών που επιτεύχθηκε κρίνεται επαρκής.



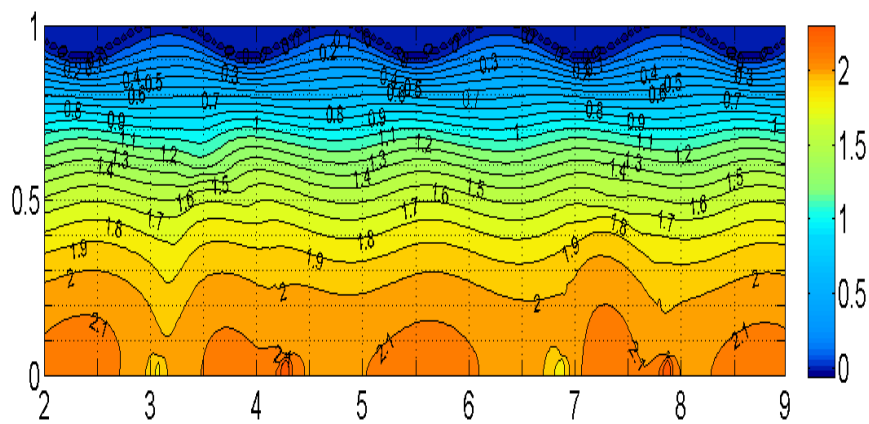
Σχ.7.2.(α,β,γ). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p' κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($\gamma=0$) στο μονοφασικό πεδίο του Σχ.7.1. χωρίς την σταγόνα: (α) τοπική λεπτομέρεια με μεγάλη ανάλυση, (β) τοπική λεπτομέρεια σε μικρότερη ανάλυση, (γ) σε ολόκληρο το μήκος του αγωγού. (δ). Η κατανομή της αδιάστατης πίεσης p' κατά μήκος του άξονα του αγωγού ($\gamma=0$) στο διαφασικό πεδίο του Σχ.7.1.(β).



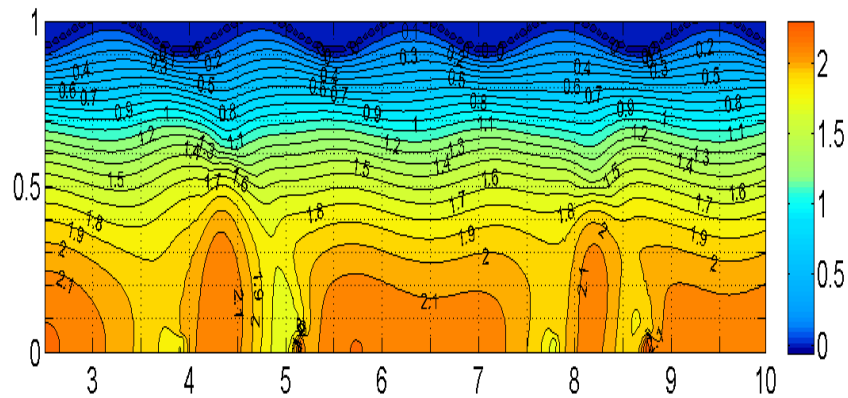
Σχ.7.3.(α, β). Ισοταχείς u/U (α) του μονοφασικού πεδίου του Σχ.7.1. χωρίς τις σταγόνες. Απόσταση ισοψών 0.025 και (β) του διαφασικού πεδίου του Σχ.7.1.(ε) στην περιοχή του συνημιτονοειδούς τοιχώματος. Απόσταση ισοψών 0.02.



(α) Μονοφασικό πεδίο του Σχ.7.1. χωρίς την σταγόνα



(β) Σχ.7.1.(β)

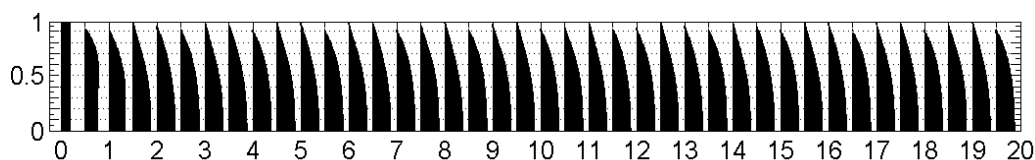


(γ) Σχ.7.1.(ε)

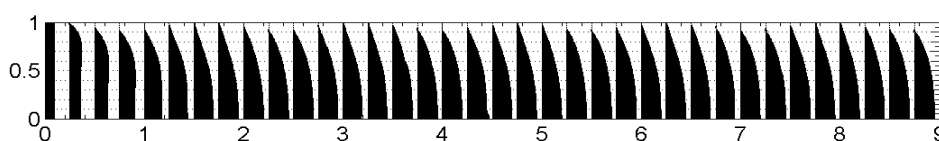
Σχ.7.4.(α,β,γ). Ισοταχείς u/U (α) του μονοφασικού πεδίου του Σχ.7.1. χωρίς την σταγόνα και (β,γ) των διαφασικών πεδίων του Σχ.7.1.

Επίσης με τον αριθμητικό διαφασικό αλγόριθμο καθίσταται εφικτός ο υπολογισμός ρευστοδυναμικών μεγεθών στην περιοχή ενδιαφέροντος ή σε ολόκληρο το χωρίο υπολογισμού για επιλεγμένα στιγμιότυπα της ροής. Τα στοιχεία καταγράφονται και προκύπτουν διάφορες απεικονίσεις όπως:

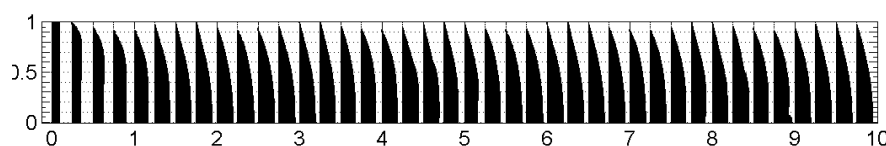
- α) των ισοταχών του πεδίου της αδιάστατης ταχύτητας $u'=u/U$ στα Σχ.7.3 & 7.4
 β) το αδιάστατο διανυσματικό ροϊκό πεδίο ($u'=u/U$, $v'=v/U$) σε μορφή εγκάρσιων κατανομών (προφίλ) σε επιλεγμένες θέσεις x κατά μήκος του αγωγού στο Σχ.7.5 και γ) οι διαμήκεις κατανομές της αδιάστατης πίεσης p' στο Σχ.7.2.



(α) Μονοφασικό πεδίο του Σχ.7.1. χωρίς τις σταγόνες



(β) Σχ.7.1.(β)



(γ) Σχ.7.1.(ε)

Σχ.7.5.(α,β,γ). Απεικόνιση των αδιάστατων διανυσματικών ροϊκών πεδίων (u/U , v/U) του Σχ.7.1.(α) του μονοφασικού πεδίου χωρίς την σταγόνα και (β,γ) των διαφασικών πεδίων Σχ.7.1.(β) και 7.1.(ε)).

7.2.2. Παρατηρήσεις για την παραμόρφωση και την μετανάστευση των αιμοσφαιρίων.

Τα περισσότερα αναλυτικά αποτελέσματα του 4^ο, 5^ο και 6^ο κεφαλαίου, αφορούν σε ευθύγραμμους αγωγούς ή αγωγούς με σύνθετη γεωμετρία με σταθερά, άκαμπτα ευθύγραμμα τοιχώματα, όπως στενώσεις, διαστολές, στενώσεις και διαστολές, διακλαδώσεις ταφ και διπλές γωνίες και προσφέρονται για αξιοποίηση στην προσομοίωση και μελέτης της μικροκυκλοφορίας.

Πράγματι, ενώ ο διαφασικός αλγόριθμος από την δομή του είναι επαρκής να προσομοιώνει μεγάλο εύρος συνθηκών διαφασικής ροής, επικεντρωθήκαμε σε συνθήκες ανάλογες με αυτές που παρατηρούνται στην μικροκυκλοφορία. Χρησιμοποιείται συνήθως ο λόγος ιξώδους $\lambda-4$ και κατάλληλοι αριθμοί We , Ca που εξασφαλίζουν επαρκή επιφανειακή τάση στην διεπιφάνεια, ώστε να μην διασπάται εύκολα όπως συμβαίνει και στην λεπτή μεμβράνη του ερυθροκυττάρου που παραμορφώνεται χωρίς να διασπάται συνήθως μέχρι διάμετρο τριχοειδούς αγγείου το 1/3 της διαμέτρου του κυττάρου. Επίσης χρησιμοποιείται συνήθως ο αριθμός $Re=10$ ή 20 που είναι αρκετά μικρός και ο αλγόριθμος έχει δοκιμαστεί επιτυχώς

για $Re=2$ (κεφ.4). Πολλές λοιπόν από τις παρατηρήσεις των κεφ.4,5,6 μπορεί κάλλιστα να υποστηριχθεί ότι ισχύουν αυτούσιες και στην μελέτη της μικροκυκλοφορίας. Γενικά μπορεί να υποστηριχθεί ότι το διφασικό πεδίο ροής στην μικροκυκλοφορία παραμένει σε ασταθή μεταβατική κατάσταση.

Στο Σχ.5.6 της απότομης αξονοσυμμετρικής στένωσης με $\Lambda.S.=0.5$, δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k1=0.8$, $k2=0.6$ και στο Σχ.5.41 της απότομης αξονοσυμμετρικής Στένωσης-Διεύρυνσης με $\Lambda.S.=0.25$ και $\Lambda.D.=1:0.75$, δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=2$, $Ca=0.1$, $\lambda=4$, $k1=0.6$, $k2=0.6$ τα κύτταρα μεταφέρονται από το ρεύμα της πρωτογενούς φάσης και τελικά στριμώνονται στην στένωση. Καθώς το κύτταρο μεταφέρεται προς την περιοχή της στένωσης, το ρευστό αναγκάζεται να κινηθεί προς την αξονική γραμμή, όπου η ταχύτητα είναι πολύ μεγαλύτερη από το τμήμα εισόδου και από την ταχύτητα κοντά στα τοιχώματα, Σχ.5.7(α,β) και Σχ.5.46(ε), Σχ.5.44(δ)). Η επιπλέον πτώση της πίεσης, Σχ.5.9(β) ωθεί τα κύτταρα κατάντη της ροής και παρατηρούνται μεγάλες παραμορφώσεις, αναγκαστικά μεγάλη επιμήκυνση του κυττάρου και διαμόρφωση με θετική καμπυλότητα στο μέτωπο του κυττάρου που μοιάζει με ρύγχος. Στα στιγμιότυπα του Σχ.5.6, όπου ο λόγος συστολής, $\Lambda.S.=0.5$, τα περιγράμματα των κυττάρων μέσα στην στένωση φαίνονται να επιμηκύνονται πολύ πιο έντονα σε σχέση με τα στιγμιότυπα του Σχ.5.41, όπου $\Lambda.S.=0.25$ και να αναπτύσσεται στο πίσω μέρος του κυττάρου εμφανής "ουρά-πτερύγιο" με μεγάλη αρνητική καμπυλότητα και ενδείξεις έντονης διάτμησης και διαχωρισμού της ροής. Στο Σχ.5.6 η ροή φαίνεται αισθητά ταχύτερη και η απομάκρυνση των κυττάρων είναι αισθητά μεγαλύτερη.

Στην περιοχή των διευρύνσεων η απότομη επιβράδυνση της ροής, π.χ. Σχ.5.46(ε), Σχ.5.44(δ), Σχ.5.26) οδηγεί σε ανακούφιση των σχημάτων των κυττάρων, Σχ.5.41 και Σχ.5.25 της απότομης αξονοσυμμετρικής διεύρυνσης, $\Lambda.D.=2:1$, Δύο σταγόνες: $Re=20$, $We=4$, $Ca=0.2$, $\lambda=4$, $k1=0.8$, $k2=0.5$ και τελικά σε σχεδόν κυκλικά περιγράμματα. Παρατηρείται πλησίασμα και συσώρευση των αιμοσφαιρίων και έντονη τοπική αλλαγή του διφασικού πεδίου ροής, Σχ.5.46(ε) και Σχ.5.26 σε σχέση με το αντίστοιχο μονοφασικό, Σχ.5.26(α) που δημιουργεί προϋποθέσεις έντονων διατμήσεων στην διεπιφάνεια-μεμβράνη.

Στο Σχ.7.1. όπου επιχειρείται να προσομοιωθεί ακριβέστερα το τριχοειδές αγγείο με συνημιτονοειδή ευθύγραμμο αγωγό δεν παρατηρείται τάση διαταραχής ή διάσπασης των μεσαίου μεγέθους κυττάρων από την εισαγωγή του κυματοειδούς ορίου στο τοίχωμα, που αποτυπώνεται στη μορφή των πεδίων ταχυτήτων, Σχ.7.3. και Σχ.7.4. και πιέσεων, Σχ.7.2.

Στο Σχ.7.5. του κυματοειδούς αγγείου με τα μεσαίου μεγέθους κύτταρα που παραμορφώνονται λίγο, και στο ευθύγραμμο τμήμα των αγγείων-αγωγών, Σχ.5.46(ε) και

Σχ.5.26, με τα μεγάλοι μεγέθους κύτταρα που παραμορφώνονται έντονα αναπτύσσονται προφίλ ταχύτητας στην περιοχή των κυττάρων που μοιάζουν με το αντίστοιχο αμβλυμένο προφίλ τύπου plug zone και όχι με το παραβολικό της στρωτής ροής.

Οι παρατηρήσεις αυτές σχολιάζονται αναλυτικά στο κεφ.4 και φαίνεται ότι επαληθεύουν το γνωστό *Fåhræus effect* (§1.12.4), δηλαδή το φαινόμενο να δημιουργείται ένα κενό από σταγόνες-κύτταρα δακτυλιοειδές στρώμα κοντά στα τοιχώματα λόγω της μετανάστευσης των κυττάρων προς τις περιοχές χαμηλού ρυθμού παραμόρφωσης στην περιοχή υψηλής ταχύτητας κοντά στον άξονα του τριχοειδούς. Η εικόνα αυτή δικαιολογεί την αυξημένη ογκομετρικά συγκέντρωση ερυθροκυττάρων στην μικροκυκλοφορία δηλαδή τον αυξημένο αιματοκρίτη, H_D σε σχέση με τον αιματοκρίτη H_T στα μεγάλα αγγεία του κυκλοφορικού, $H_D/H_T = U_{RBC}/U_{pl}$, όπου U_{pl} είναι η μέση ταχύτητα του πλάσματος και U_{RBC} είναι η μέση ταχύτητα του κυττάρου.

Για να καθοριστεί το *Fåhræus effect* απαιτείται ο εκάστοτε λόγος $X = U_{pl}/U_{RBC}$ όπου $0.5 < X < 1$, σχέση (11), *Pozrikidis, 2005* και *Gaehtgens et.al., 1979*. Στα αποτελέσματά μας το φαινόμενο γενικά ισχύει, γιατί το κύτταρο κινείται με την ταχύτητα της γειτονιάς του άξονα. Ειδικά μέσα στην στένωση αυτό γίνεται πολύ πιο φανερό. Στην διεύρυνση και τον ευθύγραμμο αγωγό επειδή δεν είναι τόσο μεγάλο το κύτταρο στα σχήματα μας δεν γίνεται οπτικά τόσο σαφές. Ο αλγόριθμος μας δεν υπολογίζει την εκάστοτε μέση ταχύτητα του *RBC* και του πλάσματος και έτσι δεν καταγράφονται μετρήσεις.

Οι παρατηρήσεις της διασποράς και παραμόρφωσης των αιμοσφαιρίων μέσα στο πλάσμα, χωρίς να αναμειγνύονται μεταξύ τους σε συνθήκες αναπτυσσόμενης στρωτής ροής, χαμηλού *Re* λόγω διαφοράς πίεσεως στα άκρα του αγωγού-αγγείου και η λεπτομερής παρουσίαση των κατανομών ταχυτήτων και πιέσεων του διφασικού πεδίου ροής προσφέρουν στην περιγραφή και κατανόηση των φαινομένων. Η γενική εικόνα και η παραμόρφωση των παραπάνω περιγραμμάτων των αιμοσφαιρίων μέσα στο πλάσμα, αν συγκριθούν ποιοτικά, φαίνεται να είναι αρκετά παρόμοιες και σε συμφωνία με προηγούμενες πειραματικές παρατηρήσεις και αριθμητικά αποτελέσματα π.χ. *Καλιακάτσος, 2000, Kaliakatsos & Tsangaris, 2000, Pozrikidis, 2005, Secomb, 2003, Secomb et.al., 1986, 2002*. Τα αποτελέσματα επίσης προσφέρουν νέο υλικό σε ευθύγραμμο κυματοειδές τριχοειδές αγγείο και σε αγγεία συνθετότερης γεωμετρίας όπως με: στένωση ή/και διεύρυνση, διακλάδωση ταφ ή διπλή γωνία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Καλιακάτσος Χ.** (2000), Επίδραση Μηχανικών Ιδιοτήτων Εμμόρφων Κυττάρων του Αίματος στην Αιματική Ροή. Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π.
- Κουτσούρης Δ., Μπαρμπουνάκη Σ., Χαρίτου Μ.,** Ηλεκτρομηχανική των Βιολογικών ρευστών, Εκδόσεις Τζιόλα, 2003.
- Χρισταφάκης Α. και Τσαγγάρης Σ.,** Αξονοσυμμετρικές διφασικές ροές στην μικροκυκλοφορία, Πρακτικά 7ου Πανελληνίου Συνεδρίου «Φαινόμενα Ροής Ρευστών», ΡΟΗ 2010, Θεσσαλονίκη 12 & 13 Νοεμβρίου 2010.
- Christafakis A.N. and Tsangaris S.** (2008), Two-Phase Flows of Droplets in Contractions and Double Bends, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2.3:299-308.
- Gaehtgens P., Pries A. and Heuser M.,** 1979, The Fahraeus effect in narrow capillaries (i.d. 3.3 to 11.0 μm), *Microvascular Research*, 18(1):33-47.
- Griebel M., Dornseifer T. and Neunhoeffler, T.,** (1998), Numerical Simulation in Fluid Dynamics, a Practical Introduction, SIAM, Philadelphia.
- Kaliakatsos C. and Tsangaris S. ,** (2000), Motion of deformable drops in pipes and channels using Navier-Stokes equations. *Int. J. Numerical Methods of Fluids*, 34:609-626.
- Pozrikidis C.,** (2005), Axisymmetric motion of a file of red blood cells through capillaries. *Physics of fluids* 17:1-14.
- Secomb T.W.,** (2003), Mechanics of red blood cells and blood flow in narrow tubes. *Hydrodynamics of Capsules and Cells*, C. Pozrikidis, ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 163-196.
- Secomb T.W., Hsu R., Pries A.R.,** (2002), Blood Flow and Red Blood Cell Deformation in Nonuniform Capillaries: Effects of the Endothelial Surface Layer. *Microcirculation*, 9(3):189–196.
- Secomb T.W., Skalak R., Ôzkaya N., and Gross J. F.,** (1986), Flow of axisymmetric red blood cells in narrow capillaries, *J. Fluid Mech*, 163:405-423.
- Taylor G.I.,** (1934), The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proceedings of Royal Society of London, Ser A* 146:501.

8^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

(ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ (ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

8.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	3
8.1.1. Μοντελοποίηση της μικροκυκλοφορίας ως διφασικής ροής.....	3
8.1.2. Μεθοδολογία αριθμητικής προσομοίωσης της διεπιφάνειας σε διφασικές ροές σταγόνων.....	4
8.1.3. Ανάπτυξη λογισμικού αριθμητικής επίλυσης διφασικών ροών.....	6
8.1.4. Μελέτη χαρακτηριστικών περιπτώσεων διφασικής ροής.....	8
8.1.5. Εμβάθυνση στη φυσική των φαινομένων και των μηχανισμών προσομοίωσης.....	9
8.2. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ ΚΑΙ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ.....	10
8.3. ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ.....	13
8.4. ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΤΡΙΒΗ.....	16

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ (ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ)

8.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Α. Αναπτύχθηκε λογισμικό υπολογισμού διφασικής ροής υγρού σε υγρό, ως σύγχρονο, αξιόπιστο εργαλείο προσομοίωσης ικανοποιητικής αριθμητικής ακριβείας, στη βάση σύγχρονης μαθηματικής μεθοδολογίας.

Β. Με το λογισμικό αυτό μελετήθηκαν χαρακτηριστικές διφασικές ροές σταγόνων σε κλειστούς ευθύγραμμους αγωγούς και αγωγούς σύνθετης γεωμετρίας και εφαρμογές στην μικροκυκλοφορία του αίματος.

Γ. Επιδιώχθηκε η βαθύτερη μελέτη επιμέρους παραμέτρων διφασικών ροών σταγόνων σε κλειστούς αγωγούς σύνθετης γεωμετρίας και η βελτιστοποίηση της μοντελοποίησης με κατάλληλα κριτήρια και αριθμητικά σχήματα και εισαγωγή καινοτομιών

Δ. Πραγματοποιήθηκε η συγγραφή και δημοσίευση επιστημονικών άρθρων με αποτελέσματα και συμπεράσματα της έρευνας της διατριβής και παρήχθη επιπλέον υλικό προς δημοσίευση. Αναλυτικότερα μπορούν να αναφερθούν τα παρακάτω συμπεράσματα.

8.1.1. Μοντελοποίηση της μικροκυκλοφορίας ως διφασικής ροής.

Η αριθμητική προσομοίωση πτυχών της μικροκυκλοφορίας ως διφασικής ροής, που κατά καιρούς έχει επιχειρηθεί από διάφορους ερευνητές, αλλά η επαρκής κατανόηση και

περιγραφή της αποτελεί ακόμη ζητούμενο, στάθηκε το κίνητρο και απώτερος σκοπός της διατριβής. Στο διφασικό μοντέλο της μικροκυκλοφορίας τόσο τα ερυθρά και τα λευκά αιμοσφαίρια όσο και το πλάσμα θεωρούνται ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά διαφορετικού ιξώδους που διαχωρίζονται με παραμορφώσιμη μεμβράνη. Τα αιμοσφαίρια διασπείρονται και παραμορφώνονται μέσα στο πλάσμα όπως σταγόνες σε περιβάλλον ρευστό χωρίς να αναμειγνύεται π.χ. η αιμοσφαιρίνη και το πλάσμα.

Η επιφανειακή τάση που επιβάλλεται στην διεπιφάνεια των δύο υγρών φάσεων προσομοιώνει σε ικανοποιητικό βαθμό τις ελαστικές ιδιότητες της μεμβράνης. Τα τριχοειδή αγγεία θεωρούνται απλουστευτικά συνήθως σαν άκαμπτοι διδιάστατοι ή κυλινδρικοί ευθύγραμμοι ή συνημιτονοειδείς αγωγοί. Με το παραπάνω σκεπτικό ανάμεσα σε σύγχρονες προτάσεις της βιβλιογραφίας επιλέχθηκε εκ μέρους μας η μαθηματική μεθοδολογία και οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υλοποίησης της οι οποίοι προσαρμόστηκαν, εμπλουτίστηκαν και ελέγχθηκαν κατάλληλα ώστε να επιτευχθούν οι επιμέρους στόχοι αυτής της διατριβής.

8.1.2. Μεθοδολογία αριθμητικής προσομοίωσης της διεπιφάνειας σε διφασικές ροές σταγόνων.

Η μέθοδος που υλοποιήσαμε αποτελείται στην ουσία από δύο ξεχωριστές μεθοδολογίες που συμπλέκονται κατάλληλα σε ένα πεπλεγμένο αλγόριθμο. Η πρώτη μεθοδολογία υπολογίζει αριθμητικά το συνολικό πεδίο ροής της διφασικής ροής με επίλυση των πλήρων διδιάστατων ή αξονομετρικών εξισώσεων *Navier-Stokes* για Νευτώνεια, ασυμπίεστα, συνεκτικά ρευστά με επιφανειακή τάση μεταξύ των δύο φάσεων για την περιγραφή των ιδιοτήτων της καμπύλης (επιφανείας) που χωρίζει τις φάσεις των δύο ρευστών (σταγόνων και συνεχούς φάσης) της λεγόμενης διεπιφάνειας που περιγράφεται ως απότομη και περίπλοκη ασυνέχεια στο πεδίο ροής του χωρίου υπολογισμού.

Η δεύτερη μεθοδολογία ανιχνεύει την διεπιφάνεια και υπολογίζει τις συντεταγμένες των περιγραμμάτων των σταγόνων κατά την εξέλιξη του φαινομένου. Υλοποιείται με τους αλγορίθμους της *Level-Set Method*, ή «μεθόδου των ισοϋψών» των *Osher & Sethian*, η οποία εισάγει την συνάρτηση *level-set* ή «συνάρτηση των ισοϋψών», ή απλά ϕ ο μηδενισμός της οποίας, $\phi=0$ περιγράφει έμμεσα τυπολογικά σύνθετες κινούμενες διεπιφάνειες με ακρίβεια. Η *LSM* υλοποιείται βελτιστοποιημένη για διατήρηση της μάζας (επιφανείας) των σταγόνων ενώ εξακολουθεί να συντηρεί το πάχος της διεπιφάνειας των δύο φάσεων.

Η σύμπλεξη των δύο μεθοδολογιών γίνεται ως εξής. Η *LSM* προσδιορίζει τη θέση,

περιγράφει την κίνηση των σημείων της διεπιφάνειας των δύο ρευστών σε κάθε χρονική στιγμή χρησιμοποιώντας υποχρεωτικά τις ταχύτητες του πεδίου ροής, όπως έχουν υπολογιστεί από την πρώτη μεθοδολογία, ενώ παρέχει έμμεσα τις συνθήκες για την διατύπωση και επίλυση των αναθεωρημένων διφασικών εξισώσεων ορμής για χρονικά εξαρτώμενα ασυμπιεστα πεδία, γιατί οι όροι ιξώδους και επιφανειακής τάσης είναι εξαρτημένες συναρτήσεις της ϕ . Οι διαφορικές εξισώσεις του συνολικού πεδίου ροής διακριτοποιούνται με μία σχεδόν δεύτερης τάξης ακριβείας μεθοδολογία προβολών κατά *Chorin* για το πεδίο ταχυτήτων και τον αλγόριθμο *SOR* για τον υπολογισμό των πιέσεων.

Η διακριτοποίηση του συνολικού διφασικού αλγορίθμου της μεθοδολογίας μας υλοποιείται σε ομοιόμορφα καρτεσιανά μετατοπισμένα πλέγματα τύπου *MAC* με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η *LSM* από κατασκευής μπορεί να περιγράψει την διάσπαση μιας σταγόνας σε περισσότερες, καθώς και την συνένωση σταγόνων αρκεί να είναι επαρκής η ανάλυση του αριθμητικού πλέγματος. Επίσης μπορεί άμεσα να γενικευθεί στις τρεις διαστάσεις.

Η μεθοδολογία επιτρέπει γενικά να έχουν οι σταγόνες διαφορετικό ιξώδες και πυκνότητα από το περιβάλλον ρευστό και στην διεπιφάνεια των σταγόνων με το περιβάλλον ρευστό να ασκούνται δυνάμεις επιφανειακής τάσης. Στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας γίνεται η παραδοχή ότι η σταγόνα και το περιβάλλον ρευστό έχουν την ίδια πυκνότητα χωρίς αυτό να αποτελεί περιορισμό της μεθόδου. Τόσο το ιξώδες όσο και η πυκνότητα του ρευστού ορίζονται ως συναρτήσεις της θέσης στο πεδίο ροής και της συνάρτησης ϕ .

Το εξεταζόμενο πρόβλημα είναι ιδιαίτερα απαιτητικό υπολογιστικά και βελτιστοποίηση πτυχών της μοντελοποίησης απαιτήσε την ενσωμάτωση προσθέτων κριτηρίων εξασφάλισης της σύγκλισης του διφασικού αλγορίθμου και αριθμητικών σχημάτων στον αλγόριθμο της βασικής μεθοδολογίας, όπως εναλλακτική μεθοδολογία χειρισμού της διεπιφάνειας για να βελτιωθεί, όταν προκύπτει ανάγκη: α) η διατήρηση μάζας που δεν εξασφαλίζει ως δεδομένο η *LSM*, β) η περιγραφή του μεγέθους της καμπυλότητας και του όρου της επιφανειακής τάσης στις εξισώσεις *N-S* και συνολικά γ) η απεικόνιση του περιγράμματος της σταγόνας σε σημεία με απότομες μεταβολές καμπυλότητας.

Οι αλγόριθμοι της μεθόδου των ισοϋψών (*LSM*) αντιμετωπίζονται όπως οι αριθμητικοί αλγόριθμοι για τις εξισώσεις *Hamilton-Jacobi*. Οι χωρικές παράγωγοι της συνάρτησης των ισοϋψών ϕ υπολογίζονται χρησιμοποιώντας πέμπτης τάξεως σχήματα διακριτοποίησης τύπου *WENO*, ενώ η χρονική ολοκλήρωση των ημιδιακριτών εξισώσεων γίνεται με σχήματα διακριτοποίησης (*TVD*) *Runge-Kutta*. Η μελέτη αξονοσυμμετρικών περιπτώσεων απαιτήσε τροποποίηση στους αλγορίθμους των εξισώσεων *N-S* και της *LSM*.

8.1.3. Ανάπτυξη λογισμικού αριθμητικής επίλυσης διφασικών ροών.

Για την υλοποίηση του αλγορίθμου της αριθμητικής μεθοδολογίας του 3^{ου} κεφαλαίου, αναπτύχθηκε το λογισμικό *NaSt-LSM* με ενσωματωμένες σύγχρονες δομές προγραμματισμού μεγάλης κλίμακας¹ σε γλώσσα προγραμματισμού *Visual Fortran95* το οποίο δοκιμάστηκε σε χαρακτηριστικές περιπτώσεις² και χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο για την αριθμητική προσομοίωση και μελέτη μονοφασικής και διφασικής ροής υγρού σε υγρό της διατριβής.

Το λογισμικό αυτό αποδείχθηκε αξιόπιστο και αποτελεσματικό εργαλείο ικανοποιητικής αριθμητικής ακριβείας καθώς είναι εύχρηστο, ευέλικτο, ευσταθές, προσαρμόσιμο, τροποποιήσιμο και επεκτάσιμο σε νέες περιοχές ερευνητικού ενδιαφέροντος. Το *NaSt-LSM* είναι προϊόν προσαρμογής, σύνθεσης και ανάπτυξης με αρχικό πυρήνα (βασικές τάξεις) τις δομές του εξειδικευμένου λογισμικού ανοικτού κώδικα *CFD μονοφασικής ροής nast2d*³ σε

¹ Ο προγραμματισμός έργων, αυτού του μεγέθους και της πολυπλοκότητας, απαιτεί την χρήση πολύπλοκων και εξειδικευμένων εργαλείων πληροφορικής και ειδικές τεχνικές υλοποίησης δομών δεδομένων που εξασφαλίζουν την λειτουργικότητα, επιτρέπουν με ασφάλεια στοχευόμενες αλλαγές και δοκιμές σε περιπτώσεις τροποποιήσεων και επεκτάσεων αυξάνοντας την ευστάθεια και περιορίζοντας στο ελάχιστο τα σφάλματα (bugs). Εξειδικευμένες επιστημονικές βιβλιοθήκες ανοικτού λογισμικού που περιέχουν αρχεία γενικών τάξεων (classes) με κώδικα γραμμένο κυρίως σε *Fortran*, *C++* και τελευταία και σε *Matlab* όπως τα *Diffpack*, *Nast++*, *Blitz++*, *GrAI*, κλπ, κρίνονται κατάλληλα να χρησιμοποιηθούν ως πλαίσιο και περιβάλλον προγραμματισμού για την προσομοίωση και επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με ποικιλία μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης.

Η αυτούσια χρήση των βιβλιοθηκών αυτών προσκρούει όμως σε διάφορες τεχνικές δυσκολίες, όπως είναι οι ασυμβατότητες των compilers ή / και το ότι έχουν στηθεί σε περιβάλλον *Unix* ή *Linux* κλπ. που σημαίνει πρόσθετα προγραμματιστικά εργαλεία, σχετική εμπειρία και συμβουλές ειδικών της πληροφορικής.

Επιμέρους χρήση κώδικα των βιβλιοθηκών είναι εφικτή, αλλά απαιτεί σοβαρές και χρονοβόρες επεμβάσεις προσαρμογής του κώδικα και πλούσια εμπειρία για να επιλεγούν μόνο τα ουσιώδη και συμβατά στοιχεία χωρίς να αχρηστευτεί η εκτέλεση του προγράμματος από τυχόν παράπλευρες μη προβλέψιμες επιδράσεις. Οι παρενέργειες αυτές είναι πολύ πιθανόν να προκύψουν, αφενός από την δαιδαλώδη πολυπλοκότητα διασύνδεσης των πολυπληθών στοιχείων τους (εκατοντάδες τάξεις) και αφετέρου από την διαφορετική προγραμματιστική φιλοσοφία των κατασκευαστών τους. Η πτυχή αυτή παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και υλικό από τέτοιες βιβλιοθήκες αξιοποιήθηκε έμμεσα στην διατριβή.

² Με την εισαγωγή της μεθοδολογίας χειρισμού της διεπιφάνειας έγιναν οι αναγκαίες επεμβάσεις, προσαρμογές, επεκτάσεις και έλεγχοι αξιοπιστίας του νέου λογισμικού διφασικών ροών *NaSt-LSM* στην επίλυση βασικών περιπτώσεων πεδίων διφασικών ροών.

³ Το *nast2d* είναι λογισμικό για την επίλυση των 2D εξισώσεων *Navier-Stokes* και συνεχείας για ασυμπιεστα ρευστά που στηρίζεται στην μέθοδο προβολής *Chorin* για την χωρική διακριτοποίηση σε μετατοπισμένο καρτεσιανό πλέγμα και σε ρητό αριθμητικό σχήμα *Euler* για την χρονική διακριτοποίηση. Συνδυάζει 1ης τάξης ανάντη σχήμα και 2ης τάξης κεντρικό σχήμα για τους συναγωγικούς όρους. Ο επαναληπτικός επιλυτής *SOR* μπορεί να χειριστεί πολύ πολύπλοκες γεωμετρίες με απλή τεχνική αποσύνθεσης / καταμέτρησης υπολογιστικών κυψελών, *Griebel et.al. 1998*. Οι συγγραφείς προσφέρουν από την ιστοσελίδα τους ελεύθερο το αυθεντικό λογισμικό σε C και σε Fortran 90 την έκδοση: *nast2df90* του *David Pruett* χωρίς υποστήριξη και εγγύηση.

Fortran 90, <http://www.math.jmu.edu/~dpruett/software/>, το οποίο⁴ συμπλέχτηκε κατάλληλα με δομές αλγορίθμων της *LSM* του δόκιμου λογισμικού διφασικής ροής *drop1*⁵ και εμπλουτίστηκε περαιτέρω με τεκμηριωμένους αλγορίθμους και κριτήρια για τους υπολογισμούς της *LSM* όπως π.χ. από το λογισμικό⁶ ανοικτού κώδικα *LSMLIB 1.0.1* των : *Kevin T. Chu* (Serendipity Research) and *Masa Prodanovic* (Univ. of Texas at Austin), <http://ktchu.serendipityresearch.org/software/lsm/lib/> . Ενσωματώσαμε π.χ. αριθμητικά σχήματα τύπου *WENO*, *TVD Runge-Kutta* που δεν επιβαρύνουν όμως υπερβολικά τον χρόνο εκτέλεσης του συνολικού αλγορίθμου και αλγορίθμους με διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακρίβειας για την συνάρτηση δ με την μέθοδο του *Smereka*, 2006, όπως και αλγορίθμους της τοπικής μεθόδου των *ισοϋψών Peng et.al.*, 1999.

Αναπτύχθηκαν τρεις εκδόσεις του *NaSt-LSM* για διφασικές ροές με πολλές σταγόνες σε υπολογιστικά χωρία σύνθετης γεωμετρίας και με καμπύλα όρια με χρήση της συμβατικής *LSM* για α) διδιάστατα πεδία ροής β) αξονοσυμμετρικές ροές και γ) τις παραπάνω ροές με την μέθοδο της τοπικής μεθόδου των *ισοϋψών LLSM*. Το λογισμικό είναι επεκτάσιμο και για την επίλυση τρισδιάστατων πεδίων ροής. Επίσης επιδέχεται τροποποιήσεις για την εισαγωγή στο λογισμικό νέων παραμέτρων μοντελοποίησης.

Το λογισμικό δέχεται σε αρχεία δεδομένων, αδιάστατους αριθμούς και παραμέτρους και καταγράφει ως αποτελέσματα κατά τακτά χρονικά διαστήματα, τις συντεταγμένες του περιγράμματος των σταγόνων και τα αδιάστατα μεγέθη $u', v', p', T'_{xy}, T'_{xx}, \omega', \phi', \theta$ κλπ σε αρχεία τύπου “.dat “. Το λογισμικό *NaSt-LSM* παρήγαγε τα ερευνητικά αποτελέσματα⁷ της διατριβής μας και τις παρακάτω δημοσιεύσεις και άλλο υλικό που μπορεί να αξιολογηθεί

⁴ Απαιτήθηκε η εκμάθηση της ορολογίας, της λειτουργίας, της μεθοδολογίας και των ειδικών προγραμματιστικών τεχνικών του παραπάνω λογισμικού. Έγιναν οι αναγκαίες διορθώσεις, προσαρμογές για να γίνει το πρόγραμμα και τα αρχεία του συμβατά και εκτελέσιμα και σε περιβάλλον *Windows* εκτός από περιβάλλοντα *Unix* και *Linux* για τα οποία προσφερόταν. Αξιολογήθηκαν και συγκρίθηκαν στην πράξη τα αποτελέσματα του παραπάνω λογισμικού σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ροής π.χ. *Driven Cavity*, *Backward facing Step* με πρότυπα δεδομένα άλλων μελετών της βιβλιογραφίας. Δοκιμάσαμε το παραπάνω λογισμικό επαληθεύσαμε προγενέστερα ερευνητικά αποτελέσματα και μελετήσαμε νέες χαρακτηριστικές περιπτώσεις με πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα.

⁵ το οποίο έχει αναπτυχθεί προγενέστερα στον Τομέα Ρευστών από την ερευνητική ομάδα του Καθ. Σ. Τσαγγάρη του Ε.Μ.Π και είναι γραμμένο σε *Visual Fortran*. Το λογισμικό *drop1* χρησιμοποιήσαμε για συγκρίσεις και επαληθεύσεις και για τα αποτελέσματα των δημοσιεύσεων, *A. Christafakis et.al.*, 2006, 2009.

⁶ Πρόκειται για σύγχρονο λογισμικό γραμμένο με πολύγλωσσο προγραμματισμό (mixed-language programming) π.χ. *C++/Fortran77*, *C/Fortran77*, *MATLAB/C/Fortran77*. Υλοποιεί τους βασικούς αλγορίθμους και τα αριθμητικά σχήματα της *LSM* των *Osher και Fedkiw, 2002* και *Sethian, 1999* αλλά και υψηλής ακριβείας τεχνικές της *LSM* της διεθνούς βιβλιογραφίας, όπως των *Peng et.al. 1999* και *Smereka, 2006*. Η βιβλιοθήκη αποτελείται από υπορουτίνες *Fortran*, συναρτήσεις *C* και τάξεις *C++* .

⁷ Για την επεξεργασία των αρχείων αποτελεσμάτων και την παραγωγή των γραφικών απεικονίσεων χρησιμοποιήθηκαν σύγχρονα προγράμματα, όπως *Matlab*, *Photoshop*, *MS Excel* κλπ.

προς δημοσίευση.

8.1.4. Μελέτη χαρακτηριστικών περιπτώσεων διφασικής ροής.

Όπως περιγράφηκε αναλυτικά στο 4^ο, 5^ο, 6^ο και 7^ο κεφάλαιο, με το λογισμικό *NaSt-LSM* μελετήθηκαν, αφού προηγουμένως εξασφαλίστηκε η σύγκλιση του αντίστοιχου μονοφασικού πεδίου της κύριας φάσης, χαρακτηριστικές μεταβατικές διφασικές διδιάστατες και αξονομετρικές ροές συνεκτικών ασυμπιέστων μη αναμειγνυόμενων Νευτώνειων ρευστών που σχετίζονται με ρεαλιστικές γεωμετρίες και φυσικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκαν διφασικές ροές σταγόνων μέσα σε κλειστούς ευθύγραμμους αγωγούς και αγωγούς σύνθετης γεωμετρίας με σταθερά, άκαμπτα ευθύγραμμο ή καμπύλο τοιχώματα όπως στενώσεις, διαστολές, στενώσεις και διαστολές με ή χωρίς καμπύλες εξομάλυνσης (καμπυλόγραμμα όρια), διακλαδώσεις ταφ και διπλές γωνίες, τοξωτή στένωση-διεύρυνση και μέσα σε κυματοειδή (συνημιτονοειδή) ευθύγραμμο αγωγό. Οι παραπάνω διφασικές ροές προσομοιώνουν αντίστοιχες ροές στην μικροκυκλοφορία του αίματος.

Πιο συγκεκριμένα μοντελοποιείται και μελετάται σε επαρκή βαθμό η λεπτομερής κίνηση όχι αναγκαστικά ισομεγθών διατάξεων σταγόνων που διασπείρονται και μεταναστεύουν μέσα στην πρωτεύουσα συνεχή φάση κάτω από επιλεγμένες κάθε φορά συνθήκες ροής σε πεδίο ροής *Hagen-Poiseuille* της συνεχούς φάσης ή ροή *Couette* έως ότου η παραμόρφωση και η αλληλεπίδραση των σταγόνων κατά περίπτωση καταλήξει, αν είναι εφικτό, σε ουσιαστικά αμετάβλητα περιγράμματα σταγόνων, διάσπαση ή συνένωση αυτών και παραγωγή μικροσταγονιδίων.

Επιμέρους χαρακτηριστικές περιπτώσεις συγκρίνονται και επαληθεύονται με πρότυπα δεδομένα άλλων μελετών της βιβλιογραφίας η/και με πειραματικά δεδομένα για την τεκμηρίωση. Η σύγκριση θεωρείται ικανοποιητική αν και πολλές φορές μόνο ποιοτική λόγω ελλείψεως λεπτομερών ή επαρκών στοιχείων ή άλλων τεχνικών περιορισμών. Τα συμπεράσματα εμπλουτίζουν τη γνώση μας για την συμπεριφορά των ερυθρών αιμοσφαιρίων και των λευκών αιμοσφαιρίων στο σύστημα των τριχοειδών αγγείων της μικροκυκλοφορίας που στάθηκε η αφορμή και το βαθύτερο κίνητρο της ανάθεσης.

Η προσομοίωση στηρίζεται στην παραμετροποίηση και την αδιαστατοποίηση χαρακτηριστικών γεωμετρικών και ρευστοδυναμικών μεγεθών όπως : Ο αριθμός και η γεωμετρική διάταξη των σταγόνων στην είσοδο του αγωγού. Το σχετικό μέγεθος σταγόνας, k , προς την διάμετρο του σωλήνα ή την απόσταση των παραλλήλων επιπέδων αντίστοιχα. Η εκκεντρότητα, δ , τοποθέτησης του κέντρου της σταγόνας ως προς το επίπεδο ή τον άξονα

συμμετρίας του πεδίου ροής. Ο λόγος λ της δυναμικής συνεκτικότητας των σταγόνων και του περιβάλλοντος ρευστού αντίστοιχα. Οι αδιάστατοι χαρακτηριστικοί αριθμοί Re , Ca , We . Ιδιαίτερη μέριμνα λαμβάνεται για την υλοποίηση των κατάλληλων αρχικών και οριακών συνθηκών χωρίς ή με την παρουσία σταγόνων. Με τον αριθμητικό αλγόριθμο καθίσταται εφικτός ο υπολογισμός πρωτογενών και δευτερογενών ρευστοδυναμικών μεγεθών στην περιοχή ενδιαφέροντος ή σε ολόκληρο το χωρίο υπολογισμού για επιλεγμένα στιγμιότυπα της ροής χωρίς να εξαντλείται η μελέτη. Έτσι προκύπτουν διάφορες απεικονίσεις όπως : α) των ισοταχών του πεδίου της αδιάστατης ταχύτητας $X=[(u^2+v^2)^{1/2}/U$ ή u' , β) το αδιάστατο διανυσματικό ροϊκό πεδίο (u', v') και οι διαμήκεις και εγκάρσιες κατανομές (προφίλ) της αδιάστατης οριζόντιας (ή αξονικής) ταχύτητας u' σε επιλεγμένες θέσεις x κατά μήκος του αγωγού ή της εγκάρσιας ταχύτητας v' σε επιλεγμένες θέσεις y κατά το πλάτος του αγωγού, όπως στην περίπτωση διακλάδωσης ταφ, γ) οι διαμήκεις κατανομές ή ισοταχείς του πεδίου της αδιάστατης πίεσης p' .

8.1.5. Εμβάθυνση στη φυσική των φαινομένων και των μηχανισμών προσομοίωσης.

Όπως προαναφέραμε κίνητρο και απώτερος σκοπός της διατριβής είναι η ακριβέστερη περιγραφή και η εμβάθυνση στην κατανόηση μηχανισμών της μικροκυκλοφορίας που αποτελεί πρόσφορο και ευρύ διεπιστημονικό πεδίο έρευνας και ζητούμενο παρά τις κατά καιρούς δημοσιεύσεις. Αξιοποιώντας μαθηματικές μεθοδολογίες και σύγχρονες προτάσεις της βιβλιογραφίας για την αριθμητική προσομοίωση και την μελέτη πτυχών της αιματικής ροής στην μικροκυκλοφορία υλοποιήθηκε εκ μέρους μας ένα σύγχρονο διφασικό αριθμητικό μοντέλο ως πρόσφορο, παραστατικό, ακριβές εργαλείο προσομοίωσης που επιδέχεται εύκολα την ενσωμάτωση νέων παραμέτρων μοντελοποίησης.

Η ακρίβεια και η ευκρίνεια των διεπιφανειών (περιγραμμάτων σταγόνων ή αιμοσφαιρίων) που επιτεύχθηκε με το παραπάνω μοντέλο κρίνεται επαρκής για την μελέτη των φαινομένων. Καταγράφονται οι παράμετροι παραμόρφωσης κατά *Taylor* κλπ. Οι παράμετροι που προσομοιώνονται στους αλγορίθμους και τα παραγόμενα ρευστοδυναμικά μεγέθη τεκμηριώνουν και ομαδοποιούν τις παρατηρήσεις. Πολλά επιμέρους συμπεράσματα για την μετανάστευση και παραμόρφωση διατάξεων ομάδων σταγόνων ή μίας μόνο σταγόνας και κατά αντιστοιχία των έμμορφων συστατικών του αίματος στις διάφορες γεωμετρικές αγωγών που μελετήθηκαν, παρουσιάζονται αναλυτικά στα αντίστοιχα κεφάλαια της διατριβής.

Επιδιώχθηκε η βαθύτερη κατανόηση των επιμέρους φαινομένων και μηχανισμών που παρατηρούνται γενικά αλλά και της επίδρασης της συγκεκριμένης γεωμετρίας στη διφασική

ροή. Μελετήθηκε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις σταγόνες που σε κάποιες μεταβατικές ροές οδηγεί σε συγχωνεύσεις ή διασπάσεις. Επίσης διατυπώνονται και συζητούνται συγκεκριμένες διαπιστώσεις για την φυσική των φαινομένων, όπως η μετανάστευση των σταγόνων προς τον άξονα συμμετρίας ή αλλαγή του σχήματος και ο περιορισμός της παραμόρφωσης με την αύξηση της επιφανειακής τάσης.

Προσδιορίζονται τα ειδικά σχήματα και οι θέσεις μετανάστευσης μέσα στον αγωγό του περιγράμματος των σταγόνων. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις συγκρίνονται με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας. Οι παρατηρήσεις συμφωνούν ποιοτικά και οπτικά με αριθμητικά και πειραματικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας και επαληθεύουν τις υπάρχουσες ενδείξεις για συσχέτιση ανάμεσα στην κίνηση μεμονωμένων σταγόνων και την κίνηση διασπορών, αιωρημάτων και γαλακτωμάτων σε διφασικές ροές υγρού σε υγρό.

8.2. ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑ ΚΑΙ ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Στην διατριβή δόκιμες αριθμητικές μεθοδολογίες υψηλής στάθμης συνδυάστηκαν αρμοδίως, προσαρμόστηκαν λειτουργικά στις ανάγκες του θέματος και βελτιστοποιήθηκαν κάποιες πτυχές τους με πρωτότυπο τρόπο. Με το μοντέλο που αναπτύχθηκε μελετήθηκαν διφασικές ροές σε περιοχές της έρευνας που τα διεθνή βιβλιογραφικά δεδομένα είναι εξαιρετικά λίγα, χρήζουν επαλήθευσης, συμπλήρωσης και μεγαλύτερης ακρίβειας. Πιο συγκεκριμένα.

1. Το διφασικό μοντέλο της διατριβής είναι ένα σύγχρονο εργαλείο που προσφέρεται για ακριβή συστηματική μελέτη, περιγραφή και εμβάθυνση στην κατανόηση μηχανισμών διφασικών ροών υγρού-υγρού με σταγόνες και της μικροκυκλοφορίας που αποτελεί ακόμη ζητούμενο παρά τις κατά καιρούς δημοσιεύσεις. Προσόν της μεθοδολογίας είναι το ακριβές μαθηματικό υπόστρωμα που επιτρέπει λεπτομερή και ακριβή αναπαραγωγή των φαινομένων και είναι προσαρμόσιμο ώστε να επιδέχεται εύκολα την ενσωμάτωση επιπλέον μεθοδολογιών και νέων παραμέτρων μοντελοποίησης.
2. Η σύμπλεξη των πλήρων εξισώσεων *Navier-Stokes* με αλγορίθμους της μεθόδου των ισοϋψών (*LSM*) για την περιγραφή της διεπιφάνειας σε αριθμητικά καρτεσιανά μετατοπισμένα πλέγματα, όπως περιγράφεται αναλυτικά στο 2^ο και 3^ο κεφάλαιο, είναι δόκιμη και τεκμηριωμένη βιβλιογραφικά. Το διφασικό μοντέλο που υλοποιήθηκε στηρίχθηκε σε υλικό επιμέρους τεκμηριωμένων και δοκιμασμένων βιβλιοθηκών αλγορίθμων και δομών δεδομένων που αξιολογήθηκαν, τροποποιήθηκαν, προσαρμόστηκαν και εμπλουτίστηκαν με επιπλέον κριτήρια,

συνθήκες και αλγορίθμους, ώστε να αποκτήσει την επιθυμητή δομή, λειτουργικότητα και αξιοπιστία. Ειδικά έγιναν εκτενείς αλλαγές στον διδιάστατο διφασικό αλγόριθμο και οι αναγκαίες διακριτοποιήσεις για να καταστεί κατάλληλος για την προσομοίωση αξονομετρικών διφασικών ροών, όπως στον αλγόριθμο της εξίσωσης *Poisson*, στους όρους της επιφανειακής τάσης, στην περιγραφή της καμπυλότητας κλπ.

3. Αναπτύχθηκε σε *Visual Fortran95* το λογισμικό *NaSt-LSM* μοντελοποίησης διφασικής ροής με ικανοποιητική αριθμητική ακρίβεια και σύγχρονες δομές προγραμματισμού το οποίο αποδείχθηκε αξιόπιστο, εύχρηστο, ευέλικτο, ευσταθές, προσαρμόσιμο, τροποποιήσιμο και επεκτάσιμο σε νέες περιοχές ερευνητικού ενδιαφέροντος. Πλεονέκτημα της μεθόδου *MAC* είναι η άμεση δυνατότητα γενίκευσης της μεθοδολογίας προβολής (*projection*) επίλυσης των εξισώσεων *Navier-Stokes* και ο συνδυασμός της με την *LSM* στις τρεις διαστάσεις. Η δομή της διφασικής μεθοδολογίας όπως έχει σχεδιαστεί επιτρέπει την άμεση επέκταση του αλγορίθμου για των υπολογισμό χρονικά μεταβαλλόμενων τριδιάστατων διφασικών πεδίων ροής σε καρτεσιανά πλέγματα.
4. Με την ενσωμάτωση κατάλληλων αλγορίθμων-κριτηρίων στον πυρήνα του λογισμικού και σύγχρονων αλγορίθμων διακριτοποίησης χωρικής και χρονικής διακριτοποίησης υψηλής τάξης ακριβείας αυξήθηκε η ευστάθεια, η ποιότητα και η ακρίβεια της αριθμητικής μεθοδολογίας και βελτιστοποιήθηκαν ή ακρίβεια στα περιγράμματα των σταγόνων και η διατήρηση της μάζας των σταγόνων. Στο πλαίσιο αυτό οι παράγωγοι της συνάρτησης των ισοϋψών, όπου αυτοί υπεισέρχονται στην μεθοδολογία, υπολογίζονται με τη χρήση σχημάτων διακριτοποίησης πέμπτης τάξεως ακριβείας *WENO* και δεύτερης τάξης *TVD Runge-Kutta*.
5. Στη μεθοδολογία έχει εισαχθεί ο λεγόμενος «υβριδικός» αλγόριθμος επαναπροσδιορισμού της συνάρτησης των ισοϋψών που βελτιώνει την διατήρηση της μάζας (επιφανείας) των σταγόνων στο επιθυμητό ποσοστό σε σχέση με την ακρίβεια της αυθεντικής *LSM* και για πολύ μεγάλη παραμόρφωση των σταγόνων ακόμη και σε περιοχές της ροής που η ακτίνα καμπυλότητας της διεπιφάνειας τείνει στο μέγεθος του χωρικού βήματος και δεν μπορεί να περιγραφεί επαρκώς. Συγχρόνως ο «υβριδικός» αλγόριθμος κρατά αρκετά σταθερό το πάχος της διεπιφάνειας που εξασφαλίζει η αυθεντική *LSM*.
6. Η συνάρτηση $\delta(\phi)$ υπολογίζεται και με διακριτοποίηση δεύτερης τάξης ακριβείας που βελτιώνει την ακρίβεια υπολογισμού του όρου της επιφανειακής τάσης και τα

τοπικά ρευστοδυναμικά χαρακτηριστικά του πεδίου στο περίγραμμα της σταγόνας, αφού μειώνει την διαταραχή στην ροή από την εισαγωγή του όρου της επιφανειακής τάσης.

7. Υλοποιήθηκε ένας εναλλακτικός αλγόριθμος «στενής τοπικής ζώνης» της μεθόδου των ισοϋψών που παράγεται αυτόματα περικλείοντας τις σταγόνες, κινείται μαζί τους και χρησιμοποιεί τιμές της συνάρτησης των ισοϋψών μόνο σε μια μικρή ζώνη πέριξ της διεπιφάνειας με ικανοποιητική επιτάχυνση των υπολογισμών γιατί χρησιμοποιεί ανάλογα με την ρύθμιση και το 5-10 % των σημείων του υπολογιστικού πλέγματος παρέχοντας τη δυνατότητα μελέτης μεγαλύτερων πεδίων ροής. Η απεικόνιση των περιγραμμάτων των σταγόνων κρίνεται ικανοποιητική αν και επιδέχεται περαιτέρω βελτίωση. Όμως δεν εξασφαλίσαμε ακόμη την ευστάθεια του πολύπλοκου αλγορίθμου και φάση υλοποίησης χρειάζεται επιπλέον ελέγχους και δοκιμές.
8. Η ανίχνευση της διεπιφάνειας της διφασικής ροής κάθε χρονική στιγμή με την $\phi=0$, που εξελίσσεται στον χρόνο σε συνάρτηση με το πεδίο ταχυτήτων επιτρέπει μεγάλους λόγους πυκνότητας και ιξώδους μεταξύ των δύο φάσεων και μεγάλη επιφανειακή τάση στην διεπιφάνεια επομένως καθιστά δυνατή τη μελέτη μεγάλης ποικιλίας διφασικών ροών.
9. Το καμπυλόγραμμο περίγραμμα της σταγόνας περιγράφεται με την εισαγωγή της εξίσωση της καμπύλης άριστα στο καρτεσιανό πλέγμα. Την χρονική στιγμή $t'=0$ στο υπολογιστικό χωρίο η μέθοδος επιτρέπει την εισαγωγή των συντεταγμένων και των διαμέτρων θεωρητικά απεριόριστου αριθμού σταγόνων που το συνολικό περίγραμμα τους αποτελεί την αρχική συνάρτηση $\phi=0$. Αριθμητικοί περιορισμοί κοντά στα όρια του χωρίου και η επεξεργαστική ισχύς του υπολογιστικού συστήματος μειώνουν τον αριθμό αυτό πρακτικά σε μερικές σταγόνες.
10. Μελετήθηκε η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις σταγόνες. Η μεθοδολογία *LSM* ανιχνεύει και παρακολουθεί αυτόματα συγχωνεύσεις και διασπάσεις της διεπιφάνειας. Μόνο η πυκνότητα του αριθμητικού πλέγματος επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
11. Ο διφασικός αλγόριθμος εμπλουτίστηκε με τις αναγκαίες αρχικές και οριακές συνθήκες ώστε να περιγραφούν τα χωρία υπολογισμού για τη μελέτη διφασικών ροών σε πεδία ροής με σύνθετη ευθύγραμμη αλλά και καμπυλόγραμμη γεωμετρία τοιχώματος.
12. Οι συγκεκριμένες συνθήκες και οι παραδοχές της προσομοίωσης, τα αποτελέσματα

και τα συμπεράσματα της μελέτης χαρακτηριστικών περιπτώσεων διφασικής ροής, όπως περιγράφεται στα οικεία κεφάλαια και συνοψίζεται στην §8.1.4. είναι σε περιοχή όπου υπάρχουν λίγα βιβλιογραφικά δεδομένα, ορισμένα των οποίων είναι ελλιπή για σύγκριση ή στηρίζονται σε μεθοδολογίες πιο προσεγγιστικές από της διατριβής. Επομένως προσθέτουν δεδομένα για την περιγραφή και την κατανόηση των φαινομένων γενικά διφασικών ροών σε σύνθετες γεωμετρίες αλλά και αντιστοίχων ροών στην μικροκυκλοφορία του αίματος. Η επιφανειακή τάση που επιβάλλεται στην διεπιφάνεια των δύο υγρών φάσεων προσομοιώνει ρεαλιστικά σε ικανοποιητικό βαθμό τις ελαστικές ιδιότητες της μεμβράνης του ερυθρού αιμοσφαιρίου. Τα τριχοειδή αγγεία θεωρούνται απλουστευτικά συνήθως σαν άκαμπτοι διδιάστατοι ή κυλινδρικοί ευθύγραμμοι ή συνημιτονοειδείς κυματοειδείς αγωγοί που είναι πιο ακριβές.

8.3. ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Με την ολοκλήρωση των εργασιών της διατριβής πιστεύομε ότι δεν έχουν εξαντληθεί και οι ερευνητικές της προοπτικές. Εισηγούμαστε, τους παρακάτω μελλοντικούς ερευνητικούς στόχους την υλοποίηση των οποίων θεωρούμε εφικτή από μεμονωμένο ερευνητή ή ομάδα εργασίας με την διάθεση και του κατάλληλου εξοπλισμού.

1. Με άμεση χρήση του λογισμικού διφασικής ροής της διατριβής μπορούν να παραχθούν ερευνητικά αποτελέσματα για μεγάλο εύρος διακύμανσης των τιμών των παραμέτρων και αριθμών προσομοίωσης που δίνει την δυνατότητα μελέτης διφασικής ροής και εξαγωγής συμπερασμάτων για μεγάλη ποικιλία Νευτώνειων ρευστών σε διάφορες διατάξεις διασπορών και όχι κατά ανάγκη μόνο σε διφασική ροή σταγόνων. Με αυτό τον τρόπο θα καταστεί εφικτή η εξαγωγή λεπτομερών συμπερασμάτων για τις κρίσιμες συνθήκες που επηρεάζουν τα φαινόμενα διάσπασης και επανασυγκόλλησης των σταγόνων σε εκτατικές ροές και αντίστοιχες μελέτες στην μικροκυκλοφορία περιοχές έρευνας για τις οποίες τα βιβλιογραφικά δεδομένα είναι λίγα. Η δυνατότητα αυτή μπορεί να συνδυαστεί με την συγγραφή άρθρων για δημοσίευση.
2. Το λογισμικό διφασικής ροής της διατριβής με τις κατά περίπτωση αναγκαίες επεμβάσεις στις οριακές συνθήκες επιτρέπει την μελέτη διφασικών ροών σε ποικιλία γεωμετριών και παραλλαγές διαστάσεων κλειστών διδιάστατων και αξονομετρικών αγωγών με ευθύγραμμο και καμπύλα όρια και αντίστοιχες μελέτες

στην μικροκυκλοφορία. Η δυνατότητα αυτή μπορεί να συνδυαστεί με την συγγραφή άρθρων για δημοσίευση.

3. Εισαγωγή στον αλγόριθμο της διφασικής ροής παραμετρικών και καταστατικών εξισώσεων για την μελέτη περιπτώσεων διφασικής ροής με μεταβλητό ιξώδες σε κάθε φάση, μεταξύ μη Νευτώνειων ρευστών.
4. Εισαγωγή στον αλγόριθμο της διφασικής ροής παραμετρικών και καταστατικών εξισώσεων για την μελέτη περιπτώσεων διφασικής ροής με άνωση ή μεταβολή της θερμοκρασίας, επίδραση της βαρύτητας κλπ. και αντίστοιχες μελέτες στην μικροκυκλοφορία.
5. Εισαγωγή και συνδυασμός με τη *VOF* (Volume of fluid) ή άλλη μεθοδολογία όπως συναντάται στην βιβλιογραφία για σύγκριση αποτελεσμάτων ή βελτίωση της μεθοδολογίας.
6. Διερεύνηση εναλλακτικής δυνατότητας επέκτασης μελέτης διφασικών ροών και σε τριδιάστατα ρευστοδυναμικών πεδία. Ως επικρατέστερο σενάριο θεωρούμε την σύζευξη της μεθόδου των ισοϋψών (*LSM*) με την μέθοδο *MAC* στις τρεις διαστάσεις για την μελέτη τρισδιάστατων πεδίων διφασικής ροής με επέκταση της μεθοδολογίας της διατριβής. Απαιτείται η διατύπωση των αναγκαίων διακριτοποιήσεις του τρισδιάστατου αλγορίθμου πάνω στα μετατοπισμένα καρτεσιανά πλέγματα τύπου *MAC* και προσαρμογή του διδιάστατου και αξονομετρικού λογισμικού της διατριβής.
7. Επιλογή και εισαγωγή μεθοδολογίας προσομοίωσης μεμβράνης στην διεπιφάνεια των δύο φάσεων συμβατών με την *LSM* για την μελέτη κελυφών (*capsules*), ερυθρών αιμοσφαιρίων κλπ. Με την υλοποίηση αυτή το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα αλληλεπίδρασης ρευστού - στερεού – ρευστού. Υπάρχει προεργασία στο θέμα για τη διατύπωση της μεμβράνης ως συνάρτηση της συναρτήσεως *level-set* και την χρήση μόνο του καρτεσιανού χωρικού πλέγματος της μεθόδου *MAC-LSM*. Μελέτη αριθμητικών εφαρμογών. Εφαρμογή στην μικροκυκλοφορία με προσθήκη μεμβράνης στην επιφάνεια των αιμοσφαιρίων.
8. Βελτιστοποίηση σε επιμέρους σημεία του διφασικού αλγορίθμου: α) με διακριτοποίηση με σχήματα *WENO* των συναγωγικών όρων των Navier –Stokes ώστε να γίνει ο αλγόριθμος πλήρως δεύτερης τάξης ακριβείας, β) βελτίωση της μεθοδολογίας περιγραφής και της διακριτοποίησης της καμπυλότητας του όρου της επιφανειακής τάσης της διεπιφάνειας στα όρια του πεδίου ροής και στον υβριδικό αλγόριθμο επαναρχικοποίησης της συνάρτησης των ισοϋψών για την

διατήρηση της επιφανείας (μάζας) των σταγόνων, γ) προσθήκη αριθμητικών σχημάτων για την βελτίωση των οριακών συνθηκών στα καμπύλα όρια των τοιχωμάτων.

9. Μελέτη της φυσιολογίας και παθολογίας της μικροκυκλοφορίας του αίματος, για την κατανόηση γενικών και ειδικών φυσικοχημικών και βιοϊατρικών μεγεθών ώστε να επεκταθεί και εμπλουτιστεί η μοντελοποίηση με νέα αντικείμενα (ηλεκτρικά φορτία μεμβράνης κυττάρου και τοιχώματος αγγείου, πληρέστερη μοντελοποίηση της μεμβράνης, εισαγωγή φαινομένων μεταφοράς μάζας και θερμότητας κλπ.).
10. Μοντελοποίηση του γλυκοκάλυκα που υπάρχει στα τοιχώματα των τριχοειδών αγγείων, ίσως με μια επιπλέον συνάρτηση level-set που χωρίζει το πλάσμα από τον γλυκοκάλυκα με μεγάλο ιξώδες και επιφανειακή τάση.
11. Εισαγωγή ηλεκτρικού φορτίου με εξισώσεις *Maxwell* στον αλγόριθμο στην διεπιφάνεια της διφασικής ροής ή/και στα τοιχώματα των κλειστών αγωγών για την μελέτη της επίδρασης του ηλεκτρικού πεδίου στην μετανάστευση και παραμόρφωση των ερυθρών αιμοσφαιρίων που στην μεμβράνη τους φέρουν ηλεκτρικό φορτίο. Επίσης ηλεκτρικό φορτίο έχει και ο γλυκοκάλυκας των τριχοειδών αγγείων.
12. Μέτρηση και βελτιστοποίηση της διατήρησης της μάζας σε κάθε επιμέρους φάση της διφασικής ροής.
13. Επιλογή βέλτιστης μεθοδολογίας επίλυσης του αλγεβρικού συστήματος της εξίσωσης *Poisson* του διφασικού πεδίου ροής για επιτάχυνση των υπολογισμών.
14. Για την βελτίωση της ποιότητας και της ακριβείας των περιγραμμάτων των σταγόνων μπορεί να προταθεί η υλοποίηση αυτόματα στην περιοχή των σταγόνων προσαρμοστικού πυκνωτικού κινούμενου αριθμητικού πλέγματος (*AMR*), το οποίο χρησιμοποιεί τιμές της συνάρτησης level-set στην γειτονιά της διεπιφάνειας. Στην *Christafakis et.al., 2009*, περιγράφεται ένας αλγόριθμος (*AMR*) που μπορεί να προσαρμοστεί εύκολα με την μεθοδολογία μας. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος παράγει αυτόματα ένα πυκνό πλέγμα περικλείοντας τις σταγόνες, κινείται μαζί τους και χρησιμοποιεί τιμές της συνάρτησης των ισοϋψών μόνο σε μια μικρή ζώνη πέριξ της διεπιφάνειας με ικανοποιητική επιτάχυνση των υπολογισμών και δυνατότητα μελέτης μεγαλύτερων πεδίων ροής. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν και βιβλιοθήκες ελεύθερου λογισμικού που είναι πολύπλοκες αλλά πολύ αποτελεσματικές και ευρύτατα αποδεκτές από την διεθνή ερευνητική κοινότητα.
15. Για την βελτίωση της ποιότητας και της ακριβείας των περιγραμμάτων των

σταγόνων εναλλακτικά μπορεί να ολοκληρωθεί η διαδικασία ανάπτυξης του πολύπλοκου αλγορίθμου «στενής τοπικής ζώνης» της μεθόδου των ισοϋψών που υλοποιήθηκε στην διατριβή με τροποποίηση της βασικής μεθοδολογίας και ήδη παράγει αρχικά αποτελέσματα αλλά απαιτεί επιπλέον ελέγχους και κριτήρια ευσταθείας.

16. Τροποποίηση του αλγορίθμου διφασικής ροής ή ενσωμάτωση ειδικών προγραμματιστικών τεχνικών ώστε να καταστεί εφικτή η παράλληλη επεξεργασία του λογισμικού σε πολυπύρηνους Η/Υ ή clusters. Είναι ένα βήμα απαραίτητο για να παρακολουθήσουμε το σημερινό επίπεδο της διεθνούς έρευνας.⁸
17. Μερική η ολική διασύνδεση του λογισμικού προσομοίωσης επιστημονικών και τεχνολογικών προβλημάτων με τα προγράμματα των γραφικών και της δυνατότητας αλληλεπίδρασης τους στην διάρκεια των υπολογισμών. Ένα πολύ ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι ο πυρήνας του σύγχρονου λογισμικού γραφικών και τρισδιάστατων μοντέλων είναι γραμμένο σε *OpenGL* ή *DirectX* στην ουσία εφαρμογές με τάξεις κώδικα γραμμένου σε *C* και *C++*. Αυτή η δυνατότητα δημιουργεί σκέψεις για διασύνδεση του λογισμικού μας με τα εργαλεία αυτά, ειδικά στην φάση του τριδιάστατου σχεδιασμού, όπου τα εργαλεία αυτά περιγράφουν άριστα την τοπολογία του πεδίου και των οριακών συνθηκών.

8.4. ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΕΚΥΨΑΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πραγματοποιήθηκε η συγγραφή και δημοσίευση επιστημονικών άρθρων με αποτελέσματα και συμπεράσματα της έρευνας της διατριβής και παρήχθη επιπλέον υλικό προς δημοσίευση. Από την μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων εξήχθησαν, συμπεράσματα και συνοδευτικές γραφικές απεικονίσεις που επιδέχονται δημοσίευσης. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με την διερεύνηση και εμβάθυνση των πτυχών του θέματος με ενημέρωση και μελέτη βασικών και ειδικών άρθρων, μονογραφιών και βιβλίων της σύγχρονης Ελληνικής και διεθνούς βιβλιογραφίας και η παρακολούθηση ειδικών συνεδρίων και ημερίδων είχαν ως κατάληξη την συγγραφή επιστημονικών άρθρων και δημοσίευση συμπερασμάτων της διεξαγόμενης έρευνας. Στα άρθρα αναπτύσσονται και τεκμηριώνονται αφενός το υπόβαθρο και οι μεθοδολογίες που εφαρμόστηκαν και αφετέρου παρουσιάζονται και σχολιάζονται τα

⁸ Η *LSM* δεν απαιτεί ρητή ανασυγκρότηση της διεπιφάνειας και άρα έχει το πλεονέκτημα, ο υπολογισμός της επιφανειακής τάσης να υλοποιείται εύκολα με παράλληλο προγραμματισμό.

αριθμητικά αποτελέσματα και συμπεράσματα της έρευνας και τονίζονται τα καινοτομικά στοιχεία.

A) Διεθνή περιοδικά

1. **Asterios N. Christafakis** and Sokrates Tsangaris , " Two-phase incompressible flows of droplets in contractions and double bends". Άρθρο που δημοσιεύτηκε στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό "Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics",Vol.2,No.3,pp.299–308, 2008, CSE Dept., the H.K. PolyU (The Hong Kong Polytechnic University), ISSN 1997-003X, (Online) <http://jeacfm.cse.polyu.edu.hk>.
2. **A. Christafakis**, J. Alexopoulos and S. Tsangaris, "Modelling of two-phase incompressible flows in ducts". Άρθρο που δημοσιεύθηκε στο διεθνές επιστημονικό περιοδικό "Applied Mathematical Modelling" Vol.33, Issue 3, March 2009, Pages 1201-1212, <http://www.sciencedirect.com/science>, (ELSEVIER).

B) Πρακτικά Διεθνών Συνεδρίων (Proceedings)

3. **Christafakis A.N.**, Tsangaris S., "Modeling of two-phase incompressible flows of droplets in contractions and double bends". Πρακτικά του διεθνούς επιστημονικού συνεδρίου 2nd IC-EpsMsO, Αθήνα 4-7.7.2007, τόμος II, σ. 629-636 LFME-2nd ICEpsMsO, Proceedings SET No.: 960-530090-7 ISBN (VOL.II): 960530-092-3 2007.
Πρόγραμμα: http://www.epmsso.gr/2007/Program/day1.htm#Fluid_Mechanics_I.
4. **A.N. Christafakis**, J.D.Alexopoulos and S.G.Tsangaris, "An Improved Implementation of Level-Set Method to the Computation of Two-Phase Incompressible Flows in Ducts". Πρακτικά του διεθνούς επιστημονικού συνεδρίου 2nd IC-SCCE : From Scientific Computing to Computational Engineering , Αθήνα 6-8.7.2006, τόμος I, σ. 238-245 ,LFME 2nd IC-SCCE Conference Proceedings SET No.: 960530-080-X ISBN (Vol. I): 960-530081-8 2006. <http://air.unimi.it/bitstream/2434/64610/2/toc.pdf>. Πρόγραμμα: http://www.scce.gr/2006/Program/Day2.htm#CFD-Session_III.

Γ) Πρακτικά Εθνικών Συνεδρίων

5. **A. Χρισταφάκης** και Σ. Τσαγγάρης, "Αξονοσυμμετρικές διφασικές ροές στην μικροκυκλοφορία", Πρακτικά του εθνικού συνεδρίου ΡΟΗ 2010, 7ο Πανελλήνιο Συνέδριο «Φαινόμενα Ροής Ρευστών», Θεσσαλονίκη 12 & 13 Νοεμβρίου 2010, Πρόγραμμα: http://tetraktys.meng.auth.gr/flow2010/tmp/program_flow2010.pdf, Πρακτικά: http://tetraktys.meng.auth.gr/flow2010/tmp/program_flow2010.pdf.
6. **A. Χρισταφάκης** και Σ. Τσαγγάρης, "Ροή σταγόνων σε στενώσεις και διπλές γωνίες". Πρακτικά της 6ης Επιστημονικής Συνάντησης για τις Ερευνητικές Δραστηριότητες στη Μηχανική Ρευστών στην Ελλάδα, ΡΟΗ 2008, Κοζάνη 28.11.2008 Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Πρακτικά σε CD. Πρόγραμμα : <http://www.mech.uowm.gr/flow2008/ProgramROH2008.pdf>.
7. **Αστέριος Χρισταφάκης**, Γιάννης Αλεξόπουλος και Σωκράτης Τσαγγάρης, "Μοντελοποίηση διφασικών ασυμπίεστων ροών σε κλειστούς αγωγούς". Πρακτικά της 5ης Επιστημονικής Συνάντησης για τις Ερευνητικές Δραστηριότητες στη Μηχανική Ρευστών στην Ελλάδα, ΡΟΗ

2006, Πάτρα 6.11.2006. Άρθρο στον κατάλογο συγγραφέων on line Εργαστήριο Τεχνικής Θερμοδυναμικής Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών Πανεπιστήμιο Πατρών 2006. Πρακτικά σε CD. <http://www.mead.upatras.gr/conferences/flow2006>.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1	3
Π.1.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών ϕ^* της § 2.9.1.....	3
Π.1.2. Διακριτοποίηση της ϕ^* της § 3.11.2.	3
Π.1.3. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής LSM της § 3.11.5.	4
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2	6
Πίνακας Σημαία (Flag matrix)- Εμπόδια (Obstacles)	6
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3	7
Πίνακας-σημαία (Flag matrix)-Ελεύθερες ροές.	7
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π4	8
Συνάρτησεις $H(x)$ και $\delta(x)$	8
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π5	10
Λεπτομέρειες μετατοπισμένου πλέγματος του διφασικού αλγορίθμου.	10
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π6	12
Σχήματα πεπερασμένων διαφορών κλπ κεφ.3.	12
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π7	13
Διακριτοποίηση των όρων των εξισώσεων Navier-Stokes της §3.9.....	13
Π.7.1. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων της § 3.9.2.	13
Π.7.2. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους της § 3.9.3.....	14
Π.7.3. Εναλλακτική διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης της § 3.9.4.	17
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π8	22
Η μεθοδολογία προβολής (projection) της § 3.3.	22
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	25

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π1

Π.1.1. Η ενδιάμεση συνάρτηση των ισοϋψών ϕ^* της § 2.9.1.

Σχέση (2.9.1.1.).

Έστω $\mathbf{x}(t)$ η θέση τυχαίου σημείου της διεπιφάνειας την χρονική στιγμή t τότε $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ είναι η ταχύτητα και άρα ισχύει: $\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0$. Επομένως διαφορίζοντας με τον κανόνα της αλυσίδας και με βάση τις ιδιότητες των τελεστών των διανυσμάτων λαμβάνεται η σχέση:

$$\begin{aligned} \phi_t \partial t + \nabla \phi \cdot \partial \mathbf{x} &= 0 \Rightarrow \\ \phi_t + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla \phi &= 0 \Rightarrow & (2.9.1.1.) \\ \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= 0 \quad \text{ή} \quad \phi_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0 \end{aligned}$$

Π.1.2. Διακριτοποίηση της ϕ^* της § 3.11.2.

Σχέση (3.11.13.).

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \phi}{y} \right]_{i,j} &= \frac{u_{i,j}^{Langr} \cdot \phi_{i,j}}{y_{i,j}^{RHS-x}} = \frac{u_{i,j}^{Langr} \cdot \phi_{i,j}}{y_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}} = \frac{u_{i,j}^{Langr} \cdot \phi_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \Rightarrow \\ \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \phi}{y} \right]_{i,j} &= \frac{u_{i,j}^{Langr} \cdot \phi_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} & (3.11.13.) \end{aligned}$$

Σχέση (3.11.14.).

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j}^{RHS-x}} \cdot [\phi_y]_{i,j} = \frac{[\phi_y]_{i,j}}{y_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}} = \frac{[\phi_y]_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{[\phi_y]_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \quad (3.11.14.)$$

Σχέση (3.11.15.).

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{y_{i,j}^{RHS-y}} \cdot \left([\phi_y]_{i,j} - \frac{v_{i,j}^{Langr}}{y_{i,j}^{RHS-y}} \right) = \\ &= \frac{1}{y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \cdot \left([\phi_y]_{i,j} - \frac{v_{i,j}^{Langr}}{y_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \cdot \left([\phi_y]_{i,j} - \frac{v_{i,j}^{Langr}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \right) \Rightarrow \\ \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \cdot \left([\phi_y]_{i,j} - \frac{v_{i,j}^{Langr}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \right) \end{aligned} \quad (3.11.15.)$$

Π.1.3. Διακριτοποιήσεις του αλγορίθμου της τοπικής LSM της § 3.11.5.

A. Αλγόριθμος αρχικοποίησης μητρώων index1 και index2

```

k=1;
for i=1 to Nx, for j=1 to Ny mask(i,j)=0;
if |phi(i,j)| < gamma
mask(i,j)=2; index1(k)=i; index2(k)=j; k=k+1;
else if |phi(p,q)| < gamma and mask(p,q)=0
for p=1-1,i+1, q=j-1,j+1 mask(p,q)=1;
index1(k)=p; index2(k)=q; k=k+1;

```

Β. Αλγόριθμος υπολογισμού του ϕ_x στα σημεία του πλέγματος μέσα στον σωλήνα T,

```

k=1; for i=1 to Nx, for j=1 to Ny mask(i,j)=0;
  if |phi(i,j)|<gamma
    mask(i,j)=2; index1(k)=i; index2(k)=j; k=k+1;
  else if |phi(p,q)|<gamma and mask(p,q)==0 for p=1-1,i+1,
    q=j-1,j+1.
    mask(p,q)=1; index1(k)=p; index2(k)=q; k=k+1;
for k =1 to K
  if (mask (index1(k), index2(k))==2)
    phi_x (index1(k), index2(k))=( phi(index1(k)+1, index2(k))
- phi(index1(k)-1,index2(k)))/ (2*dx) .

```

Γ. Αλγόριθμος επαναρχικοποίησης της ϕ μέσα στον σωλήνα N

```

for k =1 to K
  phi_new (index1(k), index2(k))= phi(index1(k), index2(k)) +...

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π2

Πίνακας Σημεία (Flag matrix)- Εμπόδια (Obstacles)

B_N Boundary Cell with Fluid on the North

B_S Boundary Cell with Fluid on the South

B_W Boundary Cell with Fluid on the West

B_E Boundary Cell with Fluid on the East

B_NW Boundary Cell with Fluid on the North and West

B_NE Boundary Cell with Fluid on the North and East

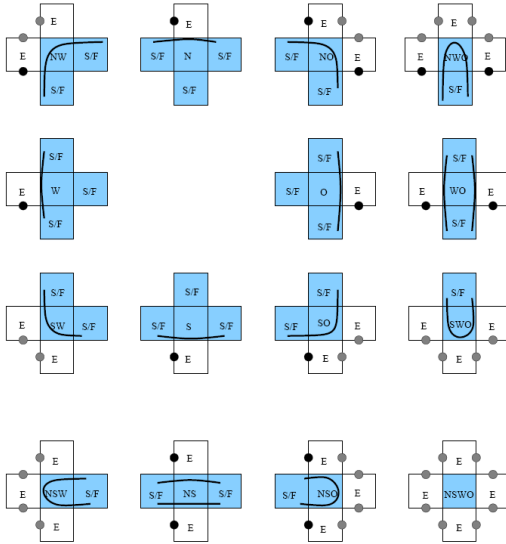
B_SW Boundary Cell with Fluid on the South and West

B_SE Boundary Cell with Fluid on the South and East

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π3

Πίνακας-σημαία (Flag matrix)-Ελεύθερες ροές.

Οι τύποι οριακών συνθηκών που υλοποιούνται.



C_F	Inner Fluid Cell (not on fluid surface)
F_N	Fluid Cell with Empty Cell on the North
F_S	Fluid Cell with Empty Cell on the South
F_W	Fluid Cell with Empty Cell on the West
F_E	Fluid Cell with Empty Cell on the East
F_NW	Fluid Cell with Empty Cell on the North and West
F_NE	Fluid Cell with Empty Cell on the North and East
F_SN	Fluid Cell with Empty Cell on the South and North
F_SW	Fluid Cell with Empty Cell on the South and West
F_SE	Fluid Cell with Empty Cell on the South and East
F_WE	Fluid Cell with Empty Cell on the West and East
F_ESN	Fluid Cell with Empty Cell on the East South and North
F_WSN	Fluid Cell with Empty Cell on the West South and North
F_EWN	Fluid Cell with Empty Cell on the East West and North
F_EWS	Fluid Cell with Empty Cell on the East West and South
F_EWSN	Fluid Cell with Empty Cell on all four directions (isolated)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π4

Συνάρτησεις $H(x)$ και $\delta(x)$.

Η βηματική συνάρτηση *Heaviside*, ή μοναδιαία συνάρτηση βήματος που συμβολίζεται $H(x)$ περιγράφει μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση ή ευρύτερα μια γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή. Αν είναι μια κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση αντιστοιχεί μια ευθεία γραμμή με το σύνολο $\{0, a, 1\}$, δηλ η $H(x)$ ορίζεται :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ a & \text{για } x = 0 \\ 1 & \text{για } x > 0 \end{cases} \quad (\text{Π.4.1.}),$$

όπου a συνήθως προτιμάται 0 ή $\frac{1}{2}$, ή 1. , *Abramowitz and Stegun, p.1020, Bracewell, p. 61.*

Η συνάρτηση $\delta(x)$ ή Dirac ή μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (*Bracewell, 1999*), είναι γενικευμένη συνάρτηση ή κατανομή που περιγράφει μια απείρως απότομη αιχμή που δεσμεύει μοναδιαίο εμβαδόν. Η συνάρτηση $\delta(x)$ έχει τιμή μηδέν οπουδήποτε και για $x = 0$ η τιμή της απειρίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα σε όλο το πεδίο ορισμού της να ισούται με την μονάδα. Γεωμετρικά εκφράζει μια ευθεία γραμμή που είναι μηδέν παντού εκτός από την αφετηρία, όπου είναι άπειρη. Είναι το συνεχές ανάλογο της διακριτής συνάρτησης *Kronecker delta*. Άρα εξ ορισμού ισχύει, *McMahon, Li, & Wong*,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq 0 \\ +\infty & \text{για } x = 0 \end{cases} \quad (\text{Π.4.2.})$$

με τον περιορισμό της ισοδύναμης συνθήκης

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx = 1 \quad (\text{Π.4.3.})$$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ έχει την βασική ιδιότητα να ορίζεται αυστηρά ως μέτρο

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0 & 0 \notin A \end{cases} \quad (\text{Π.4.4.})$$

Τότε για κάθε συνάρτηση f ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x) \cdot dx = f(0) \quad (\text{Π.4.5.})$$

και ευρύτερα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x-a) \cdot dx = f(a) \quad (\text{Π.4.6.})$$

και στην πράξη

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \cdot \delta(x-a) \cdot dx = f(a) \quad \text{για } \varepsilon > 0 \quad (\text{Π.4.7.})$$

Ισχύει ακόμη

$$\frac{d}{dx}[H(x)] = \delta(x) \quad (\text{Π.4.8.})$$

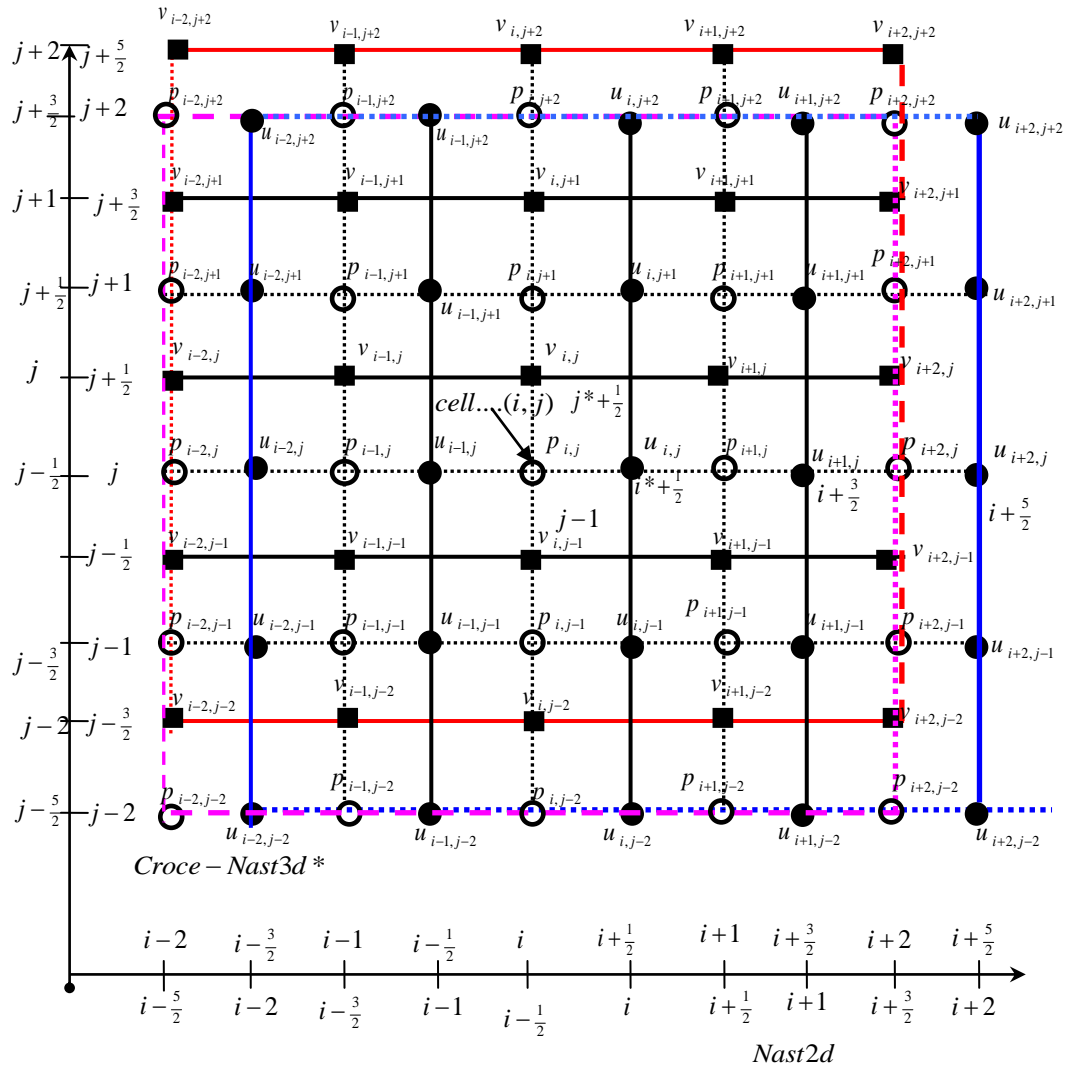
(Bracewell 2000, p. 97), οπότε αντίστοιχα η $H(x)$ είναι το ολοκλήρωμα της $\delta(x)$ που μπορεί να διατυπωθεί και

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) \cdot dt \quad (\text{Π.4.9.}),$$

αν και αυτή η ανάπτυξη δεν έχει νόημα για $x = 0$, σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\delta(x)$, *Weisstein*.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π5

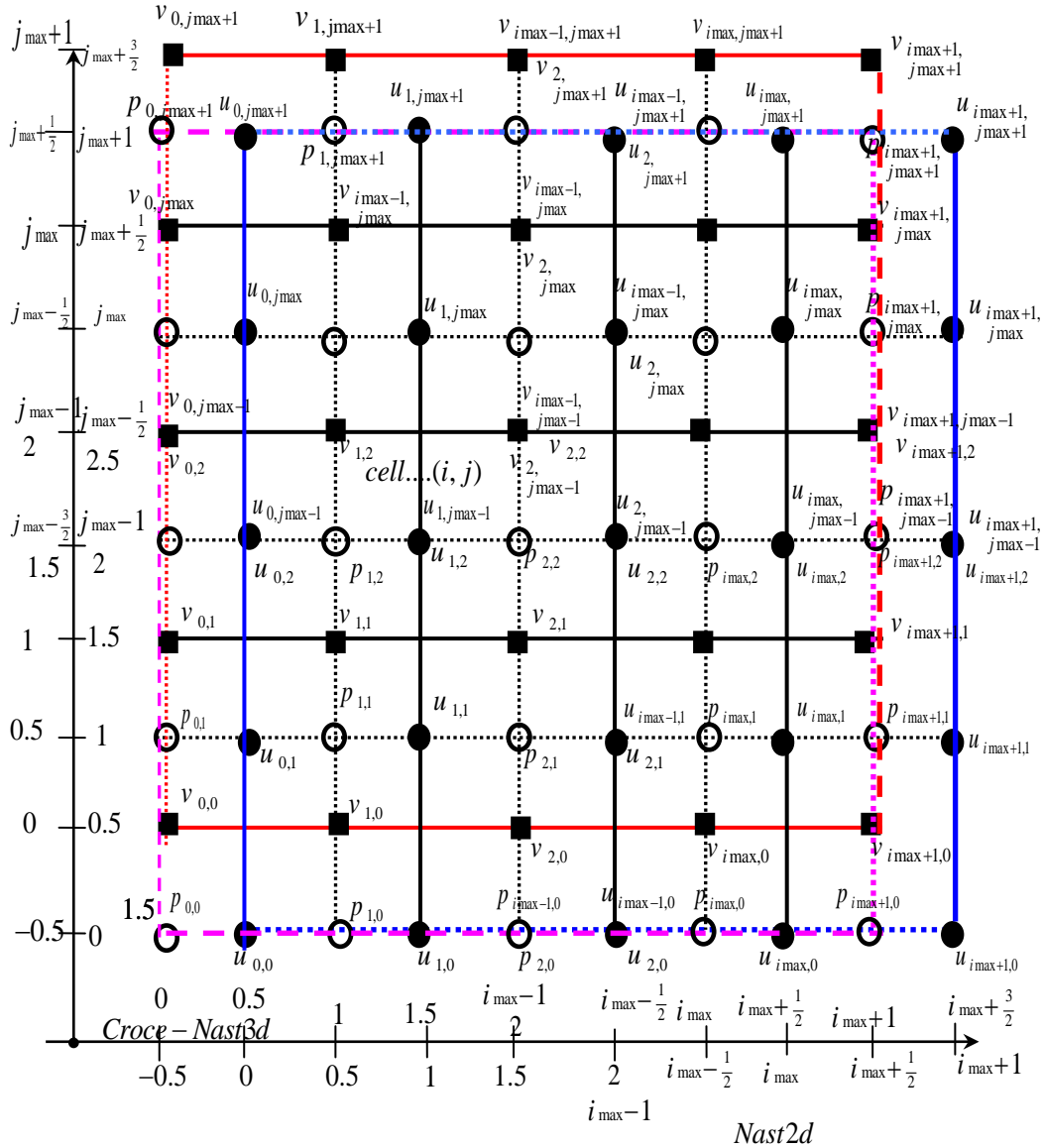
Λεπτομέρειες μετατοπισμένου πλέγματος του διφασικού αλγορίθμου.



Σχ.Π.5.1. Ενδιάμεσες κυψέλες του μετατοπισμένου πλέγματος

Τα Σχ. Π.5.1. (κόμβοι εσωτερικοί) και Σχ. Π.5.2. (κόμβοι στα όρια) δείχνουν την αλληλουχία των μεγεθών στα τρία μετατοπισμένα πλέγματα του λογισμικού *NaSt2d*, *Griebel et al., 1998*, που υλοποιήθηκαν για τις ανάγκες του μονοφασικού και διφασικού αλγορίθμου της μεθοδολογίας της διατριβής. Διευκολύνουν στον έλεγχο των διακριτοποιήσεων και στην αίσθηση πολύπλοκων σχημάτων π.χ. σχήματα *WENO*, πολυωνύμων *Lagrange* γιατί περιέχουν αρκετά γειτονικά κελιά. Η σύγκριση με τα πλέγματα του λογισμικού *NaSt3d*, *Croce*

et.al., 2004, προσφέρεται ως εποπτικό μέσο σύγκρισης αριθμητικών σχημάτων σε δύο αριθμητικά πλέγματα ίδιας δομής που διαφέρουν μόνο στην ονοματολογία των κόμβων.



Σχ. Π.5.2. Οριακές κυψέλες του μετατοπισμένου πλέγματος

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π6

Σχήματα πεπερασμένων διαφορών κλπ κεφ.3.

$$u_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx} \quad (\text{Π.6.1.}),$$

$$v_y = \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{dy} \quad (\text{Π.6.2.}),$$

$$(u_x)_x = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{dx^2} \quad (\text{Π.6.3.}),$$

$$(u_y)_y = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{dy^2} \quad (\text{Π.6.4.}),$$

$$(v_x)_x = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{dx^2} \quad (\text{Π.6.5.}),$$

$$(v_y)_y = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{dy^2} \quad (\text{Π.6.6.}),$$

$$p_x = \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{dx} \quad (\text{Π.6.7.}),$$

$$p_y = \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{dy} \quad (\text{Π.6.8.}).$$

Έστω μία διανυσματική συνάρτηση Αν $\mathbf{U} = (f, g)$ τότε ισχύει :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + A \frac{g}{y} \quad (\text{Π.6.9.}),$$

όπου $A=0$ για την διδιάστατη περίπτωση δηλ

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{Π.6.10.}),$$

και $A=1$ για το αξονο-συμμετρικό πρόβλημα

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{g}{y} \quad (\text{Π.6.11.}).$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π7

Διακριτοποίηση των όρων των εξισώσεων Navier-Stokes της §3.9.

Αναλυτικές διατυπώσεις από τις οποίες προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις της παραγράφου.

Π.7.1. Διακριτοποίηση των συναγωγικών όρων της § 3.9.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{CONV} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\left(u, v \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) u, v = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Rightarrow \\ \mathbf{CONV}^{2-D} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.9.1.)$$

$$\begin{aligned} [uv/y]_{i,j} &= \frac{\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{v}_{i,j}^{CONV-x}}{y^{CONV-x}} = \frac{\mathbf{u}_{i,j} \cdot \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{y_{i,j-\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \cdot \left(\left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right) + \left(\frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2} \right) \right) \Rightarrow \\ [uv/y]_{i,j} &= \frac{\mathbf{u}_{i,j} \cdot (v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})}{2 \cdot \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \end{aligned} \quad (3.9.11.),$$

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j}^{CONV-x}} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{\left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2dy} \right) \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2 \cdot \left(j - \frac{1}{2} \right) \cdot dy^2} \quad (3.9.12.)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right)_{i,j} &= \frac{1}{y_{i,j}^{CONV-y}} \cdot \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i,j} - \frac{v_{i,j}}{y_{i,j}^{CONV-y}} \right) = \frac{1}{y_{i-\frac{1}{2},j}} \cdot \left(\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{i,j} - \frac{v_{i,j}}{y_{i-\frac{1}{2},j}} \right) \\ &= \frac{1}{y_{i-\frac{1}{2},j}} \cdot \left(\left(\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dy} \right) - \frac{v_{i,j}}{y_{i-\frac{1}{2},j}} \right) = \frac{1}{j \cdot dy} \cdot \left(\left(\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dy} \right) - \frac{v_{i,j}}{j \cdot dy} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{y^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{j \cdot dy^2} \cdot \left((v_{i,j} - v_{i-1,j}) - \frac{v_{i,j}}{j} \right) \quad (3.9.13.)$$

Π.7.2. Διακριτοποίηση των όρων ιξώδους της § 3.9.3.

Σχέση (3.9.21). Διακριτοποίηση του όρου $2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x$

Χρησιμοποιώντας την $\mu_{i,j}^{VISC-x} = \frac{(\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j})}{2}$ (3.9.19.) και τις σχέσεις

$$u_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx} \quad (\text{Π.6.1.}), \quad v_y = \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dy} \quad (\text{Π.6.2.}),$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x &= \left[2 \cdot ([\mu(\phi)]^{VISC-x} \cdot u_x)_x \right]_{i,j} = \\ &= 2(dx)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i+1,j}^{VISC-x} \cdot [u_x]_{i+1,j} - [\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-x} \cdot [u_x]_{i,j} \right) = \\ &= 2(dx)^{-2} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i+1,j}^{VISC-x} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - [\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-x} \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right) \Rightarrow \\ &\left[2 \cdot [\mu(\phi)]^{VISC-x} \cdot u_x \right]_{i,j} = \frac{2}{(dx)^2} \cdot \left(\frac{(\mu_{i+2,j} + \mu_{i+1,j})}{2} \cdot [u_{i+1,j} - u_{i,j}] - \left[\frac{(\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j})}{2} \cdot [u_{i,j} - u_{i-1,j}] \right] \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \cdot (\mu(\phi) \cdot u_x)_x = (dx)^{-2} \cdot \left[(\mu_{i+2,j} + \mu_{i+1,j}) \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) - (\mu_{i+1,j} + \mu_{i,j}) \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right] \quad (3.9.21.)$$

Σχέση (3.9.23). Διακριτοποίηση του όρου $\mu(\phi)(u_y + v_x)_y$

$$\begin{aligned} &\left[([\mu(\phi)]^{VISC-x} \cdot (u_y + v_x^{VISC-x}))_y \right]_{i,j} = \\ &\left[([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-x} \cdot (u_y + v_x^{VISC-x})_{i,j})_y \right]_{i,j} \\ &= (dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-x} \cdot [u_y + v_x^{VISC-x}]_{i,j} \right) \\ &- (dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j-1}^{VISC-x} \cdot [u_y + v_x^{VISC-x}]_{i,j-1} \right) = \\ &(dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-x} \cdot ([u_y]_{i,j} + [v_x^{VISC-x}]_{i,j}) \right) \\ &- (dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j-1}^{VISC-x} \cdot ([u_y]_{i,j-1} + [v_x^{VISC-x}]_{i,j-1}) \right) \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} [v_x]_{i,j}^{VISC-x} &= [v_x]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left([v_x]_{i+\frac{1}{2},j} + [v_x]_{i+\frac{1}{2},j-1} \right) = \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ([v_x]_{i+1,j} + [v_x]_{i,j}) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ([v_x]_{i+1,j-1} + [v_x]_{i,j-1}) \right) \\ &= \frac{1}{4} ([v_x]_{i+1,j} + [v_x]_{i,j} + [v_x]_{i+1,j-1} + [v_x]_{i,j-1}) = \\ &\frac{1}{(4 \cdot dx)} \cdot \left([v_{i+1,j} - v_{i,j}] + [v_{i,j} - v_{i-1,j}] + [v_{i+1,j-1} - v_{i,j-1}] + [v_{i,j-1} - v_{i-1,j-1}] \right) \Rightarrow \\ [v_x]_{i,j}^{VISC-x} &= \frac{1}{(4 \cdot dx)} \cdot (v_{i+1,j} - v_{i-1,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1}) \end{aligned}$$

$$[v_x]_{i,j-1}^{VISC-x} = \frac{1}{(4 \cdot dx)} \cdot (v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-2} - v_{i-1,j-2})$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned} (\mu(\phi)(u_y + v_x))_y &= \left[([\mu(\phi)]^{VISC-x} \cdot (u_y + v_x^{VISC-x}))_y \right]_{i,j} = \\ &= \left(\left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1})}{2 \cdot dy} \cdot \left[\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{dy} + \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} + v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1})}{4 \cdot dx} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1})}{2 \cdot dy} \cdot \left[\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{dy} + \frac{(v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-2} - v_{i-1,j-2})}{4 \cdot dx} \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (3.9.23.)$$

Σχέση (3.9.27.). Διακριτοποίηση του όρου $2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y$

Χρησιμοποιώντας την $\mu_{i,j}^{VISC-y} = \frac{(\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j})}{2}$ (3.9.19.) και τις σχέσεις

$$u_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{dx} \quad (\text{Π.6.1.}), \quad v_y = \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dy} \quad (\text{Π.6.2.}),$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y &= \left[2 \cdot ([\mu(\phi)]^{VISC-y} \cdot v_y)_y \right]_{i,j} = \\ &= 2(dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j+1}^{VISC-y} \cdot [v_y]_{i,j+1} - [\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-y} \cdot [v_y]_{i,j} \right) = \\ &= 2(dy)^{-1} \cdot \left([\mu(\phi)]_{i,j+1}^{VISC-y} \cdot \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{dy} \right) - [\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-y} \cdot \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{dy} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{(dy)^2} \cdot \left(\frac{(\mu_{i,j+2} + \mu_{i,j+1})}{2} \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - \frac{(\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j})}{2} \cdot (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{(dy)^2} \cdot \left((\mu_{i,j+2} + \mu_{i,j+1}) \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - (\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j}) \cdot (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \right) \end{aligned}$$

Σχέση (3.9.28.). Εναλλακτική διακριτοποίηση του όρου $[2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y]_{i,j}$

$$\begin{aligned} [2 \cdot (\mu(\phi) \cdot v_y)_y]_{i,j} &= 2(dy)^{-1} \cdot \left(\mu(\phi_{i,j+\frac{3}{2}}) \cdot [v_y]_{i,j+1} - \mu(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}) \cdot [v_y]_{i,j} \right) = \\ &= 2(dy)^{-1} \cdot \left(\mu(\phi_{i,j+\frac{3}{2}}) \cdot \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{dy} \right) - \mu(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}) \cdot \left(\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{dy} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{(dy)^2} \cdot \left(\mu(\phi_{i,j+\frac{3}{2}}) \cdot (v_{i,j+1} - v_{i,j}) - \mu(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}) \cdot (v_{i,j} - v_{i,j-1}) \right) \end{aligned}$$

Σχέση (3.9.29). Διακριτοποίηση του όρου $\mu(\phi)(u_y + v_x)_x$

$$\begin{aligned} \mu(\phi)(u_y + v_x)_x &= [(\mu(\phi) \cdot (u_y + v_x))_x]_{i,j} = [([\mu(\phi)]^{VISC-y} \cdot (u_y^{VISC-y} + v_x))_x]_{i,j} = \\ &= [([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-y} \cdot (u_y^{VISC-y} + v_x)_{i,j})_x]_{i,j} \\ &= (dx)^{-1} \cdot ([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-y} \cdot [u_y^{VISC-y} + v_x]_{i,j}) - (dx)^{-1} \cdot ([\mu(\phi)]_{i-1,j}^{VISC-y} \cdot [u_y^{VISC-y} + v_x]_{i-1,j}) = \\ &= (dx)^{-1} \cdot ([\mu(\phi)]_{i,j}^{VISC-y} \cdot ([u_y^{VISC-y}]_{i,j} + [v_x]_{i,j})) - (dx)^{-1} \cdot ([\mu(\phi)]_{i-1,j}^{VISC-y} \cdot ([u_y^{VISC-y}]_{i-1,j} + [v_x]_{i-1,j})) \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} [u_y]_{i,j}^{VISC-y} &= [u_y]_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left([u_y]_{i-\frac{1}{2},j} + [u_y]_{i-\frac{1}{2},j+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ([u_y]_{i-1,j} + [u_y]_{i,j}) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} ([u_y]_{i-1,j+1} + [u_y]_{i,j+1}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left([u_y]_{i-1,j} + [u_y]_{i,j} + [u_y]_{i-1,j+1} + [u_y]_{i,j+1} \right) = \\ &= \frac{1}{(4 \cdot dy)} \cdot \left((u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1}) + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right) \\ &\Rightarrow [u_y]_{i,j}^{VISC-y} = \frac{1}{(4 \cdot dy)} \cdot (u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) \\ & [u_y]_{i-1,j}^{VISC-y} = \frac{1}{(4 \cdot dy)} \cdot (u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i-2,j+1} - u_{i-2,j-1}) \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\begin{aligned} (\mu(\phi)(u_y + v_x))_x &= \\ &= [([\mu(\phi)]^{VISC-y} \cdot (u_y^{VISC-y} + v_x))_x]_{i,j} = \tag{3.9.29.} \\ &= \left[\left(\frac{(\mu_{i,j+1} + \mu_{i,j})}{2 \cdot dx} \cdot \left[\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{dx} + \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})}{4 \cdot dy} \right] \right) \right. \\ &= \left. \left[\left(\frac{(\mu_{i,j} + \mu_{i,j-1})}{2 \cdot dx} \cdot \left[\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{dx} + \frac{(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i-2,j+1} - u_{i-2,j-1})}{4 \cdot dy} \right] \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Π.7.3. Εναλλακτική διακριτοποίηση των όρων της επιφανειακής τάσης της § 3.9.4.

Α. Διακριτοποιήσεις στους κόμβους $u_{i,j}$

$$(\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{0.5}{dy^2} ((\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1}))$$

$$(\phi_x)_x (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{0.5}{dx^2} ((\phi_{i+2,j} + \phi_{i+1,j}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}))$$

$$(\phi_x)^2 (i + \frac{1}{2}, j) = \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{dx} \right)^2$$

$$(\phi_y)^2 (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) - (\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1}))^2$$

$$(\phi_x)_y (i + \frac{1}{2}, j) = \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j})}{dxdy}$$

$$\underline{(\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j)}$$

$$\phi_{i + \frac{1}{2}, j+1} = 0.5(\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1})$$

$$\phi_{i + \frac{1}{2}, j} = 0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})$$

$$\phi_{i + \frac{1}{2}, j-1} = 0.5(\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1})$$

$$\begin{aligned} (\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j) &= \left(\frac{\phi_{i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}}{dy} \right)_y = \frac{1}{dy} (\phi_{i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}})_y = \\ &= \frac{1}{dy} (\phi_{i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}})_y - (\phi_{i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}})_y = \frac{1}{dy} \left(\left(\frac{\phi_{i + \frac{1}{2}, j + 1} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j}}{dy} \right) - \left(\frac{\phi_{i + \frac{1}{2}, j} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j - 1}}{dy} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{1}{dy^2} ((\phi_{i + \frac{1}{2}, j + 1} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j}) - (\phi_{i + \frac{1}{2}, j} - \phi_{i + \frac{1}{2}, j - 1})) \Rightarrow$$

$$(\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{1}{dy^2} (\phi_{i + \frac{1}{2}, j + 1} - 2\phi_{i + \frac{1}{2}, j} + \phi_{i + \frac{1}{2}, j - 1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\phi_y)_y (i + \frac{1}{2}, j) = \frac{0.5}{dy^2} ((\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1}))$$

$$\underline{(\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)}}$$

$$\begin{aligned} (\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)} &= \left(\frac{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})}{dx} \right)_x = \frac{1}{dx} (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})_x = \\ &= \frac{1}{dx} \left(\left(\frac{\phi_{i+\frac{3}{2},j} - \phi_{i+\frac{1}{2},j}}{dx} \right) - \left(\frac{\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j}}{dx} \right) \right) \Rightarrow \\ (\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)} &= \frac{1}{dx^2} ((\phi_{i+\frac{3}{2},j} - \phi_{i+\frac{1}{2},j}) - (\phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j})) \Rightarrow \\ (\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)} &= \frac{1}{dx^2} (\phi_{i+\frac{3}{2},j} - 2\phi_{i+\frac{1}{2},j} + \phi_{i-\frac{1}{2},j}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\phi_{i+\frac{3}{2},j} = 0.5(\phi_{i+2,j} + \phi_{i+1,j})$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j} = 0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j} = 0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j})$$

$$(\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{1}{dx^2} (\phi_{i+\frac{3}{2},j} - 2\phi_{i+\frac{1}{2},j} + \phi_{i-\frac{1}{2},j}) \Rightarrow$$

$$(\phi_x)_{x(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{0.5}{dx^2} ((\phi_{i+2,j} + \phi_{i+1,j}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}))$$

$$\underline{(\phi_y)^2_{(i+\frac{1}{2},j)}}$$

$$(\phi_y)^2_{(i+\frac{1}{2},j)} = \left(\frac{\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{dy} \right)^2$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.5(\phi_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,j+\frac{1}{2}}) = 0.5(\phi_{i,j+\frac{1}{2}}) + 0.5(\phi_{i+1,j+\frac{1}{2}}) =$$

$$0.25(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}) + 0.25(\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j}) \Rightarrow$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0.25(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j})$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.5(\phi_{i,j-\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,j-\frac{1}{2}}) = 0.5(\phi_{i,j-\frac{1}{2}}) + 0.5(\phi_{i+1,j-\frac{1}{2}}) =$$

$$0.25(\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j}) + 0.25(\phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j}) \Rightarrow$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0.25(\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j})$$

$$(\phi_y)^2_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j}) - (\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j}))^2 \Rightarrow$$

$$(\phi_y)^2_{(i+\frac{1}{2},j)} = \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) - (\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1}))^2$$

$$\underline{(\phi_x)^2_{(i+\frac{1}{2}, j)}}$$

$$(\phi_x)^2_{(i+\frac{1}{2}, j)} = \left(\frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{dx} \right)^2$$

$$\begin{aligned} (\phi_x)_y_{(i+\frac{1}{2}, j)} &= \left(\frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j})_{y \dots (i+\frac{1}{2}, j)}}{dx dy} = \\ &= \frac{(\phi_{i+1, j})_{y \dots at \dots (i+\frac{1}{2}, j)} - (\phi_{i, j})_{y \dots at \dots (i+\frac{1}{2}, j)}}{dx dy} = \frac{((\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j}) - (\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}))}{dx dy} \end{aligned}$$

$$\underline{(\phi_x)_y_{(i+\frac{1}{2}, j)}}$$

$$(\phi_x)_y_{(i+\frac{1}{2}, j)} = \left(\frac{\phi_{i+1, j} - \phi_{i, j}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j} - \phi_{i, j+1} + \phi_{i, j})}{dx dy}$$

Β. Διακριτοποιήσεις στους κόμβους $v_{i,j}$

$$(\phi_x)_x_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{0.5}{dx^2} ((\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j}) - 2(\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) + (\phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}))$$

$$(\phi_y)_y_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{0.5}{dy^2} (\phi_{i, j+2} - \phi_{i, j} - \phi_{i, j+1} + \phi_{i, j-1})$$

$$(\phi_x)^2_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) - (\phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}))^2$$

$$(\phi_y)^2_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{dy^2} (\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j})^2$$

$$(\phi_x)_y_{(i, j+\frac{1}{2})} = \left(\frac{\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j} - \phi_{i, j+1} + \phi_{i, j})}{dx dy}$$

$$\underline{(\phi_y)_y_{(i, j+\frac{1}{2})}}$$

$$(\phi_y)_y_{(i, j+\frac{1}{2})} = \left(\frac{\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}}{dy} \right)_y = \frac{1}{dy} (\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j})_y =$$

$$\frac{1}{dy} ((\phi_{i, j+1})_y - (\phi_{i, j})_y) = \frac{1}{dy} \left(\left(\frac{\phi_{i, j+\frac{3}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}}}{dy} \right) - \left(\frac{\phi_{i, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j-\frac{1}{2}}}{dy} \right) \right) \Rightarrow$$

$$(\phi_y)_y_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{dy^2} ((\phi_{i, j+\frac{3}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}}) - (\phi_{i, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j-\frac{1}{2}})) \Rightarrow$$

$$(\phi_y)_y_{(i, j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{dy^2} (\phi_{i, j+\frac{3}{2}} - 2\phi_{i, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j-\frac{1}{2}}) \Rightarrow$$

$$\phi_{i,j+\frac{3}{2}} = 0.5(\phi_{i,j+2} + \phi_{i,j+1})$$

$$\phi_{i,j+\frac{1}{2}} = 0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1})$$

$$\phi_{i,j-\frac{1}{2}} = 0.5(\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\phi_y)_y(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{1}{dy^2}(\phi_{i,j+\frac{3}{2}} - 2\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j-\frac{1}{2}}) \Rightarrow \\ (\phi_y)_y(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{0.5}{dy^2}((\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1})) \\ \Rightarrow (\phi_y)_y(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{0.5}{dy^2}((\phi_{i,j+2} + \phi_{i,j+1}) - 2(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}) + (\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1})) \\ (\phi_y)_y(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{0.5}{dy^2}(\phi_{i,j+2} - \phi_{i,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}) \end{aligned}$$

$$\underline{(\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned} (\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) &= \left(\frac{\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{dx}\right)_x = \frac{1}{dx}(\phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}})_x = \\ \frac{1}{dx} \left(\left(\frac{\phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j+\frac{1}{2}}}{dx}\right) - \left(\frac{\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{dx}\right) \right) &\Rightarrow \\ (\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{1}{dx^2}((\phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j+\frac{1}{2}}) - (\phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}})) \Rightarrow \\ (\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{1}{dx^2}(\phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2\phi_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}}) \Rightarrow \\ \phi_{i,j+\frac{1}{2}} &= 0.5(\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}) \\ \phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} &= 0.5(\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j}) \\ \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}} &= 0.5(\phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j}) \\ (\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{1}{dx^2}((\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) = \frac{1}{dx^2}(\phi_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2\phi_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i-1,j+\frac{1}{2}})) \Rightarrow \\ (\phi_x)_x(i,j+\frac{1}{2}) &= \frac{0.5}{dx^2}((\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j}) - 2(\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j}) + (\phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j})) \end{aligned}$$

$$\underline{(\phi_y)^2(i,j+\frac{1}{2})}$$

$$(\phi_y)^2(i,j+\frac{1}{2}) = \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{dy}\right)^2 \Rightarrow (\phi_y)^2(i,j+\frac{1}{2}) = \frac{1}{dy^2}(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j})^2$$

$$\underline{(\phi_x)^2}_{(i, j + \frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned} (\phi_x)^2_{(i, j + \frac{1}{2})} &= \left(\frac{\phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}{dx} \right)^2 \Rightarrow \\ \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= 0.5(\phi_{i, j+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1, j+\frac{1}{2}}) = 0.5(\phi_{i, j+\frac{1}{2}}) + 0.5(\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}}) = \\ &0.25(\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j}) + 0.25(\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) \Rightarrow \\ \phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= 0.25(\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j} + \phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) \\ \phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= 0.5(\phi_{i, j+\frac{1}{2}} + \phi_{i-1, j+\frac{1}{2}}) = 0.5(\phi_{i, j+\frac{1}{2}}) + 0.5(\phi_{i-1, j+\frac{1}{2}}) = \\ &0.25(\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j}) + 0.25(\phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}) \Rightarrow \\ \phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= 0.25(\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j} + \phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}) \\ (\phi_x)^2_{(i, j + \frac{1}{2})} &= \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j} + \phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) - (\phi_{i, j+1} + \phi_{i, j} + \phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}))^2 \Rightarrow \\ (\phi_x)^2_{(i, j + \frac{1}{2})} &= \frac{0.25}{dy^2} ((\phi_{i+1, j+1} + \phi_{i+1, j}) - (\phi_{i-1, j+1} + \phi_{i-1, j}))^2 \end{aligned}$$

$$\underline{(\phi_x)_y}_{(i, j + \frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned} (\phi_x)_y_{(i, j + \frac{1}{2})} &= \left(\frac{\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}})_{y \dots (i, j+\frac{1}{2})}}{dx dy} = \\ &\frac{(\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}})_{y \dots at \dots (i, j+\frac{1}{2})} - (\phi_{i, j+\frac{1}{2}})_{y \dots at \dots (i, j+\frac{1}{2})}}{dx dy} = \frac{((\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j}) - (\phi_{i, j+1} - \phi_{i, j}))}{dx dy} \Rightarrow \\ (\phi_x)_y_{(i, j + \frac{1}{2})} &= \left(\frac{\phi_{i+1, j+\frac{1}{2}} - \phi_{i, j+\frac{1}{2}}}{dx} \right)_y = \frac{(\phi_{i+1, j+1} - \phi_{i+1, j} - \phi_{i, j+1} + \phi_{i, j})}{dx dy} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Π8

Η μεθοδολογία προβολής (projection) της § 3.3.

Αναλυτικές διατυπώσεις από τις οποίες προκύπτουν οι αντίστοιχες σχέσεις της παραγράφου.

Σχέση (3.3.13.).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(F_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dy} (p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) = 0 \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dy} (p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (F_{i,j}^{(n)}) + \frac{\partial}{\partial y} (G_{i,j}^{(n)}) \Rightarrow \\ & \frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}}{dy^2} = \frac{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}}{dt} \left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{dx} + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i,j-1}^{(n)}}{dy} \right) = rhs \quad (3.3.13.). \end{aligned}$$

Σχέση (3.3.14.).

$$\begin{aligned} & \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 \cdot dy^2}} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2 \cdot dy^2} \right)} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{dx^2}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dy^2}{dx^2 \cdot dy^2} \right)} \Rightarrow \\ & \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dx^2} \right)} \Rightarrow \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} = \frac{1}{2 \cdot (rdx2 + rdy2)} = \frac{\beta}{-\omega} \Rightarrow \\ & \beta = \frac{-\omega}{2 \cdot (rdx2 + rdy2)} \quad (3.3.14.). \end{aligned}$$

Σχέση (3.3.15.).

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{\delta x^2} + \frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{dy^2} = \frac{1}{dt} \left(\frac{F_{i,j}^{(n)} - F_{i-1,j}^{(n)}}{dx} + \frac{G_{i,j}^{(n)} - G_{i,j-1}^{(n)}}{dy} \right) = rhs \Rightarrow \\ & \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = \\ & \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = \\ & \frac{dy^2 \cdot (-2p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (-2p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{(dx^2 + dy^2) \cdot (p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = rhs \Rightarrow \\
& +2 \frac{(dx^2 + dy^2) \cdot (p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} - rhs \Rightarrow \\
& p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} \cdot \left(\frac{(p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2} + \frac{(p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dy^2} - rhs \right) \Rightarrow \\
& p_{i,j}^{(n+1)} = \frac{dx^2 \cdot dy^2}{2 \cdot (dx^2 + dy^2)} \cdot (rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) + rdy2 \cdot (p_{i,j+1}^{(n+1)} + p_{i,j-1}^{(n+1)}) - rhs) \quad (3.3.15.).
\end{aligned}$$

Σχέση (3.3.24.).

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(F_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \\
& \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(y_{i,j}^{(n)} \cdot \left(G_{i,j}^{(n)} - \frac{1}{y_{i,j}} \cdot \frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dy} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \right) \right) \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho(\phi)_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dt}{dy} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \right) = \\
& \frac{\partial}{\partial x} (F_{i,j}^{(n)}) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y_{i,j}^{(n)} \cdot G_{i,j}^{(n)}) \Rightarrow \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{dx} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \right) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{dy} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \right) = \\
& \frac{1}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_{i,j}^{(n)}) + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y_{i,j}^{(n)} \cdot G_{i,j}^{(n)}) \right) \quad (3.3.24.).
\end{aligned}$$

Σχέση (3.3.25.).

$$\begin{aligned}
& \frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{dx^2} + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{1}{dy^2} ((y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} - y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)}) \\
& - (y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} - y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})) \Rightarrow \\
& \frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}}{dx^2} + \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{1}{dy^2} (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} - 2 \cdot y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)}) = rhs \Rightarrow \\
& \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \\
& \frac{1}{y_{i,j}^{(n)}} \cdot \frac{dx^2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} - 2 \cdot y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = rhs \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} - 2p_{i,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \\
& \frac{dx^2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} - 2 \cdot y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \Rightarrow \\
& y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{dy^2 \cdot (-2p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \frac{dx^2 \cdot (-2 \cdot y_{i,j}^{(n+1)} \cdot p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \\
& \frac{dx^2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \Rightarrow \\
& -2y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{(dx^2 + dy^2) \cdot (p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \\
& \frac{dx^2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \Rightarrow \\
& 2y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{(dx^2 + dy^2) \cdot (p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{dy^2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} + \\
& \frac{dx^2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} - y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \Rightarrow \\
& 2y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{(dx^2 + dy^2) \cdot (p_{i,j}^{(n+1)})}{dx^2 \cdot dy^2} = y_{i,j}^{(n)} \cdot \frac{(p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)})}{dx^2} + \\
& \frac{(y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)})}{dy^2} - y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \Rightarrow \\
& p_{i,j}^{(n+1)} = \left(\frac{dx^2 \cdot dy^2}{2y_{i,j}^{(n)} \cdot (dx^2 + dy^2)} \right) \cdot \left(y_{i,j}^{(n)} \cdot rdx2 \cdot (p_{i+1,j}^{(n+1)} + p_{i-1,j}^{(n+1)}) + \right. \\
& \left. rdy2 \cdot (y_{i,j+1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j+1}^{(n+1)} + y_{i,j-1}^{(n+1)} \cdot p_{i,j-1}^{(n+1)}) - y_{i,j}^{(n)} \cdot rhs \right) \quad (3.3.25).
\end{aligned}$$

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A.** , (1972), (Eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover.
- Bracewell, R.**, (1999), The Impulse Symbol., Ch.5 in The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, p.69-97.
- Bracewell, R.**, (2000), Heaviside's Unit Step Function, $H(x)$. The Fourier Transform and Its Applications, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, p.61-65.
- Croce R., Griebel M. and Schweitzer M. A.**, (2004), A Parallel Level-Set Approach for Two-Phase Flow Problems with Surface Tension in Three Space Dimensions, Technical Report 157, Sonderforschungsbereich 611, Universit at Bonn.
- Griebel M., Neunhoeffler T. and Regler H.**, (1998), Algebraic multigrid methods for the solution of the Navier–Stokes equations in complicated domains, *Int. J. Numer. Methods for Heat and Fluid Flow*, 26:281–301.
- Li. Y. T. & Wong. R.**, (2008), Integral and series representations of the Dirac delta function., *Commun. Pure Appl. Anal.* 7, 2:229—247.
- McMahon, D.** (2005), An Introduction to State Space, Quantum Mechanics Demystified, A Self-Teaching Guide. Demystified Series. New York: McGraw-Hill. p.108.
- Weisstein E.W.**, Heaviside Step Function at *MathWorld* ([http:// mathworld.wolfram.com / StepFunction.html](http://mathworld.wolfram.com/StepFunction.html)).