



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ**

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΩΔΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΡΩΓΜΗΣ ΣΕ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΧΑΤΖΗΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΝΤΩΝΗ

Επιβλέπων Καθηγητής

Ε.Ε. ΘΕΟΤΟΚΟΓΛΟΥ

Αθήνα, 2018

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν καθ' όλη την παρακολούθηση αυτού του μεταπτυχιακού.

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω, την σύζυγό μου Νάνσυ, και τα παιδιά μου Χρύσα, Χάρη και Άγγελο (παρ' όλο που ο Άγγελος είναι μηνών), για την υποστήριξή τους όλο αυτό το διάστημα. Χωρίς την δική τους συμπαράσταση, δεν θα ήταν εφικτή η παρακολούθηση και αποπεράτωση του μεταπτυχιακού.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Ε.Ε. Θεοτόκογλου όπως επίσης και τον Καθηγητή μου κ. Γ. Τσαμασφύρο, για τις συζητήσεις, τις παρατηρήσεις και την βοήθεια που μου παρείχαν κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Η βοήθειά τους ήταν καταλυτική, και το εκτιμώ βαθύτατα. Τους ευχαριστώ πραγματικά.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς, δύο φίλους και συνάδελφους στον Γαλλικό Νηογνώμονα, τους Κυριάκο Πουλιμενάκο, και Ανδρέα Οργέτα. Οι συζητήσεις που είχαμε, σε θέματα θεωρίας που αφορούσαν όλα τα μαθήματα, αλλά και σε προβλήματα που αντιμετώπισα κατά την δημιουργία του κώδικα, με βοήθησαν να κατανοήσω πράγματα, τα οποία στον περιορισμένο χρόνο που διαθέτω, δεν θα ήταν εφικτό. Η βοήθειά τους ήταν ανεκτίμητη, και ένα απλό ευχαριστώ δεν είναι αρκετό.

Περίληψη

Είναι γνωστό, ότι πολλές λεπτότοιχες μεταλλικές κατασκευές, όπως για παράδειγμα στην ναυπηγική, κατά την διάρκεια της ζωής τους, εμφανίζουν σε διάφορα σημεία ρωγμές, οι οποίες αν δεν εντοπιστούν και αντιμετωπιστούν έγκαιρα, μπορεί να αποβούν μοιραίες για το πλοίο, με ολέθριες συνέπειες για τους επιβαίνοντες και το περιβάλλον. Συνεπώς, η πρόβλεψη, ο εντοπισμός, και γενικά η μελέτη των ρωγμών είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Για τον λόγο αυτό, σε πρώτο στάδιο, έχουν αναπτυχθεί μεθοδολογίες, κανονισμοί, αλλά και υπολογιστικά εργαλεία, που μπορούν να προβλέψουν την δημιουργία μιας ρωγμής, καθώς επίσης και τα χρόνια που μπορεί να αντέξει μια κατασκευαστική λεπτομέρεια, λόγω της εφαρμογής επαναλαμβανόμενων κυκλικών φορτίσεων.

Σε συνέχεια των παραπάνω, στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, δημιουργήθηκε κώδικας μέσα στο εμπορικό Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP 11.3.2 με επιλύτη τον NX NASTRAN, χρησιμοποιώντας το API(Application Program Interface) του προγράμματος. Στον κώδικα έχει εφαρμοστεί η θεωρία της γραμμικής ελαστικής θραυστομηχανικής (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM), και είναι σε θέση να προβλέψει, αν θα διαδοθεί η ρωγμή, η πορεία της, αλλά και πόσοι κύκλοι φόρτισης είναι απαραίτητοι, για την διάδοση της ρωγμής, με δεδομένες οριακές συνθήκες και φορτία.

Πρέπει να αναφερθεί, ότι το συγκεκριμένο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων είναι ένα γνωστό πρόγραμμα με ιδιαίτερες δυνατότητες, που όμως δεν έχει ενσωματωμένα εργαλεία για την μελέτη ρωγμών. Συνεπώς έχει ενσωματωθεί στον κώδικα η μέθοδος της μετατόπισης των κόμβων στην ακμή της ρωγμής(Crack Opening Displacement, COD), για τον υπολογισμό των Συντελεστών Έντασης της Τάσης (Stress Intensity Factors). Για τον υπολογισμό της γωνίας διάδοσης έχει χρησιμοποιηθεί το κριτήριο των Erdogan - Sih, και για τον υπολογισμό των κύκλων φόρτισης έχουν χρησιμοποιηθεί οι μέθοδοι των Paris, Forman και Forman-Mettu. Τέλος, για την επαλήθευση των συντελεστών έντασης της τάσης που εξήγαγε το πρόγραμμα, έγινε σύγκριση με τα αποτελέσματα από αναλυτική μέθοδο, ενώ η πορεία της διάδοσης, αλλά και οι κύκλοι φόρτισης, συγκρίθηκαν με αποτελέσματα από πειραματικές διαδικασίες.

Abstract

It is well known that numerous thin-wall metal structures, for instance in naval architecture, during their lifetime, they show cracks in various places, and if they don't detected and treated on time, can be fatal to the ship, with devastating consequences for the crew and the environment. Therefore, predicting, locating, and generally studying cracks is of primary importance. For these reasons, methodologies, regulations, and computational tools have been developed that can predict the creation of a crack, as well as the years that a structural detail can withstand due to fatigue cycle loads.

Following the above, in this master thesis, a code was created inside the Finite Element Program FEMAP 11.3.2 with solver the NX NASTRAN, using the Application Program Interface (API) of the program. The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) theory has been applied to the code, and can predict, if the crack will propagate, the trajectory of the crack, as well as the number of cycle loads are required for the propagation of the crack, for given boundary conditions and loads.

Must be mentioned that FEMAP is a well-known Finite Element Program, with special features and capabilities, but it has not built-in crack study tools. Therefore, in the API code has inserted the Crack Opening Displacement (COD) method, in order to be able the program to calculate the Stress Intensity Factors (SIF) at the tip of the crack. The criteria of Erdogan – s_{ih} for the angle of propagation, and crack growth models of Paris, Forman and Forman-Mettu has been taking into account. Finally, the SIF which produced by the program, was checked with results from analytical method, and experimental procedures have been used, for the verification of the results of the trajectory of the propagation, and the cycle loads.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	11
1.1	Σκοπός	11
1.2	Γενικά ιστορικά στοιχεία	12
2	Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων	14
2.1	Εισαγωγή	14
2.2	Συντελεστές Έντασης Τάσης.....	15
2.3	Ενεργειακό Ισοζύγιο κατά την διάδοση της ρωγμής.	19
2.4	Ευστάθεια της διάδοσης ρωγμής.....	21
2.5	Πλαστική παραμόρφωση στην αιχμή της ρωγμής.....	23
3	Μεικτός τύπος φόρτισης - Υπολογισμός SIF σε ΠΠΣ.....	25
3.1	Επιλογή κατάλληλων στοιχείων για το Crack Tip.....	25
3.2	Υπολογισμός SIF για μεικτό τρόπο φόρτισης.....	27
4	Κριτήρια Θραύσης για Μεικτό τύπο Φόρτισης.....	29
4.1	Υπολογισμός Γωνίας Διάδοσης Ρωγμής.....	29
4.2	Συντελεστής Έντασης Τάσης για Μεικτό Τύπο Φόρτισης.....	31
5	Εκτίμηση διάρκειας ζωής λόγω κόπωσης.	32
5.1	Κόπωση με φόρτιση με σταθερή διακύμανση.....	33
5.2	Επίδραση του κλεισίματος της ρωγμής (crack closure effect).....	35
5.3	Μεθοδολογίες υπολογισμού των κύκλων φόρτισης.	36
6	Προσομοίωση διάδοσης Ρωγμής - Σύγκριση με πειραματικές διαδικασίες.....	39
6.1	Υπολογισμός των Συντελεστών Έντασης των Τάσεων (SIF).	39
6.1.1	Υπολογισμός των SIF με αλλαγή του αριθμού των ομόκεντρων κύκλων.	43
6.1.2	Υπολογισμός των SIF με αλλαγή του μεγέθους των στοιχείων της κατασκευής.....	47
6.2	Διάδοση ρωγμής.....	49
6.2.1	Μελέτη διάδοσης ρωγμής 1 ^{ου} Μοντέλου.	50
6.2.2	Μελέτη διάδοσης ρωγμής 2 ^{ου} Μοντέλου.	54
6.2.3	Μελέτη διάδοσης ρωγμής 3 ^{ου} Μοντέλου.	56
7	Κόπωση – Εκτίμηση χρόνου ζωής και σύγκριση με πειραματική διαδικασία.....	59
7.1	Διάδοση ρωγμής και υπολογισμός των κύκλων φόρτισης.....	60
7.2	Εκτίμηση χρόνου ζωής σύμφωνα με τα CSR-H.	68
8	Συμπεράσματα-Μελλοντική εξέλιξη κώδικα.	73

8.1	Συμπεράσματα.....	73
8.2	Μελλοντική εξέλιξη του κώδικα.....	74
Παράρτημα Α - Περιγραφή του Κώδικα.....		75
A.1	Αρχικοποιήσεις και δηλώσεις συντελεστών.....	76
A.2	Διάδοση της ρωγμής.....	84
A.3	Διάγραμμα ροής του κώδικα.....	88
Βιβλιογραφία.....		92

1 Εισαγωγή

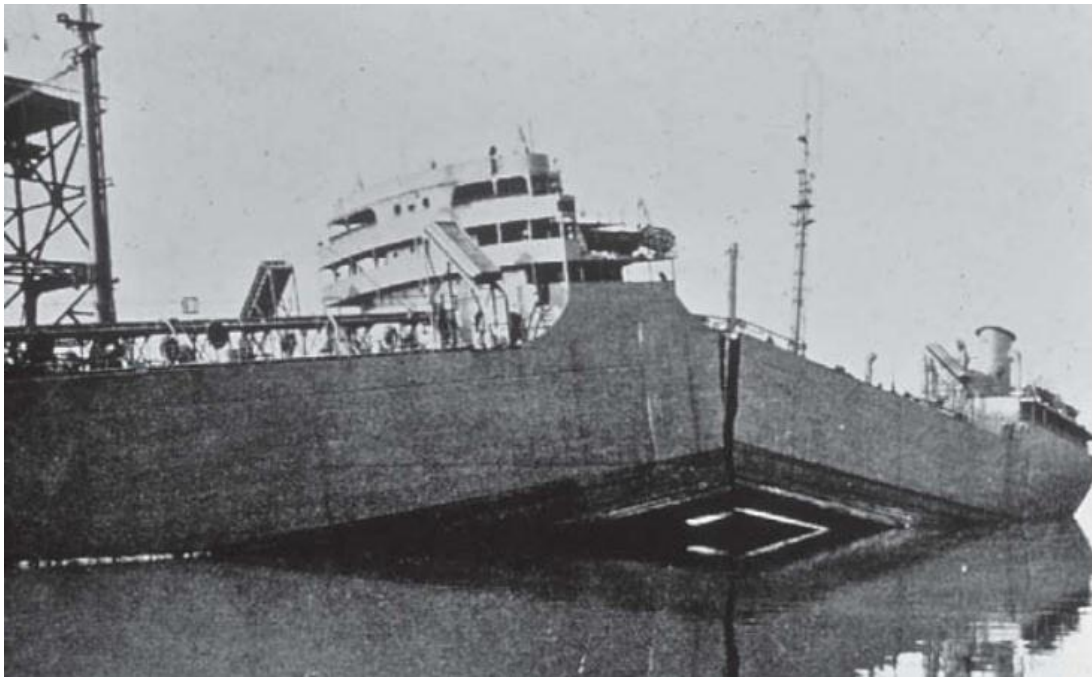
1.1 Σκοπός

Σκοπός της πτυχιακής, ήταν σε πρώτη φάση η κατανόηση του φαινομένου της θραύσης. Στην συνέχεια δημιουργήθηκε κώδικας μέσα στο Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP 11.3.2 , ώστε εφαρμόζοντας την γραμμική ελαστική μηχανική των θραύσεων (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM), να είναι εφικτό μέσα από το συγκεκριμένο πρόγραμμα, να γίνεται μελέτη διάδοσης ρωγμών, υπολογισμός της γωνίας διάδοσης, αλλά και των κύκλων φόρτισης που είναι απαραίτητοι για την διάδοση. Έχοντας υπολογίσει τους κύκλους για την διάδοση της ρωγμής, εφαρμόζοντας τους κανονισμούς του IACS CSR-H (Common Structural Rules Harmonized for Bulk Carriers and Oil Tankers), μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε, και τον χρόνο που θα γίνει η διάδοση.

Πρέπει να σημειωθεί τέλος, ότι γενικότερα η θραύση είναι πολυδιάστατη, με αρκετά θεωρήματα και κριτήρια. Η παρούσα μελέτη δεν στοχεύει στην παρουσίαση του συνόλου της θραυστομηχανικής. Στα κεφάλαια που ακολουθούν, θα γίνει σύντομη περιγραφή των θεωρημάτων και κριτηρίων που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα. Επίσης, θα παρουσιαστούν αποτελέσματα και συγκρίσεις με πειραματικά δεδομένα.

1.2 Γενικά ιστορικά στοιχεία

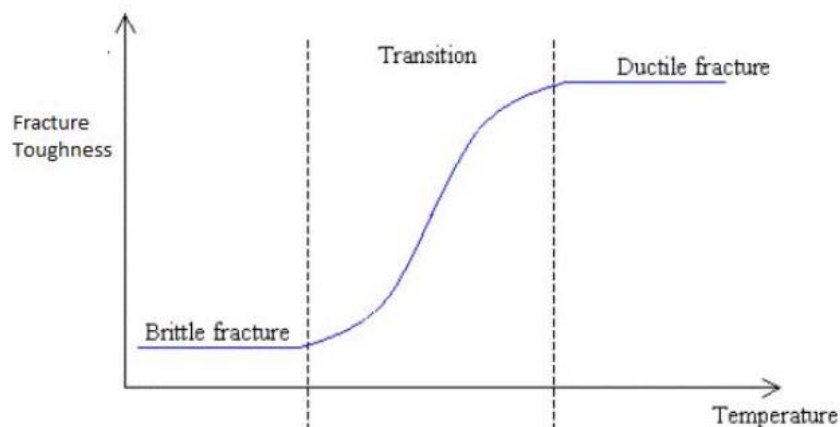
Η μεγάλη ανάπτυξη της μηχανικής των θραύσεων έγινε ουσιαστικά μετά από μια σειρά από αστοχίες κατά τον 2^ο Παγκόσμιο Πόλεμο. Το 1941 ο πρόεδρος των ΗΠΑ ανακοίνωσε την επένδυση 350 εκατομμυρίων δολαρίων για την κατασκευή νέων πλοίων. Ο χρόνος τους πίεζε διότι οι Γερμανοί είχαν πλήξει πολύ σοβαρά το ναυτικό της Αμερικής. Συνεπώς, η πρόκληση ήταν, τα νέα αυτά πλοία να φτιάχνονται γρηγορότερα από ότι οι Γερμανοί τα βύθιζαν. Για να καταφέρουν να επιτύχουν τον στόχο τους, αποφάσισαν να αντικαταστήσουν τις ηλωτές κατασκευές, με συγκολλητές. Αυτή η ομάδα των πλοίων ονομάστηκε “Liberty ships”. Κατασκευάστηκαν 2708 Liberty από τα οποία 1038 υπέστησαν σοβαρές ζημιές. Περισσότερα από 200 Liberty βυθίστηκαν ή έπαθαν ανεπανόρθωτη ζημιά. Τρία από αυτά στην κυριολεξία κόπηκαν στα δύο, έπειτα από ανάπτυξη ρωγμής στο κατάστρωμα και στην γάστρα, η οποία αναπτύχθηκε με ψαθυρό τρόπο. Το Liberty “Schenectably” (Σχήμα 1), ήταν ένα από αυτά [1].



Σχήμα 1 Το Liberty Schenectably όπου το 1943 αστόχησε με ψαθυρή θραύση, φεύγοντας από το ναυπηγείο.

Οι λόγοι που έγινε αυτή η αστοχία είναι:

- Ο χάλυβας που χρησιμοποιήθηκε είχε πολύ χαμηλή αντοχή στην θραύση. Αποδείχτηκε ότι υπάρχει μια κρίσιμη θερμοκρασία, κάτω από την οποία η θραύση στον χάλυβα, μεταβάλλεται από όλκιμη σε ψαθυρή (Σχήμα 2). Σε υψηλότερες θερμοκρασίες η θραύση είναι όλκιμη, και δημιουργείται μετά από πλαστικοποίηση την περιοχής, ενώ σε χαμηλότερες θερμοκρασίες η θραύση είναι ψαθυρή, δημιουργείται ξαφνικά και αναπτύσσεται ταχύτατα, συνεπώς είναι απρόβλεπτη και πολύ επικίνδυνη. Σχεδόν όλες οι αστοχίες των Liberty έγιναν στην περιοχή του Βόρειου Ατλαντικού, όπου οι θερμοκρασίες είναι εξαιρετικά χαμηλές.



Σχήμα 2 Μετάβαση από την όλκιμη στην ψαθυρή θραύση, με μεταβολή της θερμοκρασίας

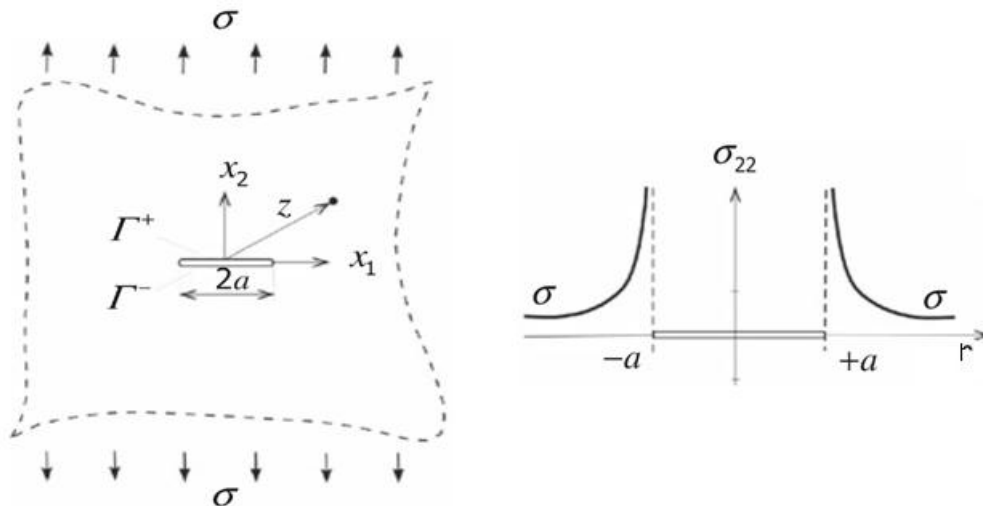
- Κακή ποιότητα των συγκολλήσεων. Πολλοί εργάτες είχαν ελάχιστη εμπειρία, και λόγω της κακής ποιότητας, δημιουργήθηκαν μικρορωγμές στις ίδιες τις συγκολλήσεις.
- Συγκέντρωση τάσεων στις γωνίες των ανοιγμάτων για τα αμπάρια (hatch openings).

2 Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων

2.1 Εισαγωγή

Ένα βασικό πρόβλημα για τους μηχανικούς ήταν το γεγονός ότι τα υλικά δεν ήταν τέλεια, αλλά είχαν δομικές-μακροσκοπικές ατέλειες. Στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, το 1919, ο Άγγλος ναυπηγός A.A. Griffith παρουσίασε την εξής ιδέα: Θεώρησε ότι σε ένα υλικό, με όλες τις δομικές του ατέλειες, υπάρχει μια τεχνητή ανωμαλία, η οποία ήταν μια έλλειψη, με τον μικρό της άξονα να τείνει προς το μηδέν. Με αυτόν τον τρόπο, ουσιαστικά οι προϋπάρχουσες ελαχίστου μεγέθους ατέλειες, αμελούνται. Έτσι λοιπόν, ένα πραγματικό υλικό χωρίς ατέλειες, μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με ένα υλικό, με μια ρωγμή γνωστής γεωμετρίας. Η ελλειπτική αυτή ρωγμή ονομάστηκε αργότερα **ρωγμή Griffith**. Ο Griffith θεώρησε, ότι για να αστοχήσει το υλικό, δηλαδή να επεκταθεί η ρωγμή, θα πρέπει η ελαστική ενέργεια από τα εξωτερικά φορτία, να υπερκαλύψει την μηχανική ενέργεια που χρειάζεται για το άνοιγμα της ρωγμής. Αυτή η ενεργειακή προσέγγιση του Griffith απετέλεσε την αφετηρία της **Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων**.

Το βασικό πρόβλημα στην ανάπτυξη της Γραμμικής Ελαστικής Μηχανικής των Θραύσεων, ήταν το τασικό και παραμορφωσιακό πεδίο στην αιχμή της ρωγμής, σε πολύπλοκες κατασκευές. Στην αιχμή της ρωγμής, υπάρχει ιδιομορφία των τάσεων (singularity), και είναι της τάξης $\frac{1}{\sqrt{r}}$, όπου r η απόσταση από την αιχμή της ρωγμής. Δηλαδή, ακριβώς σε αυτό το σημείο, οι τάσεις απειρίζονται (Σχήμα 3). Οι δυσκολίες που υπήρχαν για τον υπολογισμό του τασικού πεδίου, υποχρέωσαν τους ερευνητές να σταματήσουν προς το παρόν την ενασχόλησή τους με το πρόβλημα της διάδοσης.

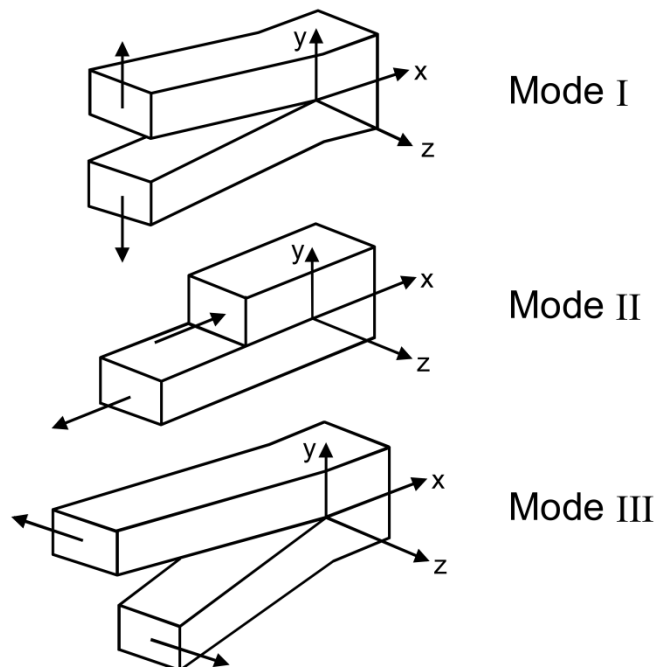


Σχήμα 3 Κατανομή τάσεων σε ρωγμή σε άπειρη πλάκα

Το 1955 ο **Irwin** ασχολήθηκε με το πρόβλημα της διάδοσης της ρωγμής, και εισήγαγε την έννοια του Συντελεστή Έντασης Τάσης K_I (Stress Intensity Factor, SIF). Για την ρωγμή Griffith, ο συντελεστής έντασης τάσης ορίζεται ως $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$, όπου σ_∞ είναι η τάση που εφαρμόζεται σε μια άπειρη πλάκα, και a το μισό μήκος της ρωγμής. Είναι προφανές, ότι η ρωγμή θα διαδοθεί, όταν ο Συντελεστής Έντασης Τάσης, υπερβεί μια κρίσιμη τιμή. Αυτή η τιμή ονομάστηκε ασφαλώς Κρίσιμος Συντελεστής Έντασης Τάσης K_{IC} . Χάριν του Συντελεστή Έντασης Τάσης, αναπτύχθηκε ταχύτερα η Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων, και θεσπίστηκαν κανόνες και διαδικασίες για τον πειραματικό προσδιορισμό του κρίσιμου συντελεστή K_{IC} [2].

2.2 Συντελεστές Έντασης Τάσης

Θεωρούμε ότι μια ρωγμή, οδηγεί σε καθαρό διαχωρισμό της επιφάνειας σε δύο μέρη. Δηλαδή δημιουργείται ένα καθαρό σχίσμο στην επιφάνεια. Στην πραγματικότητα, στην αιχμή των πραγματικών ρωγμών, πάντα υπάρχει μια καμπυλότητα. Όμως, συγκριτικά με τις διαστάσεις της ρωγμής και την ρηγματωμένη επιφάνεια, αυτή είναι απειροστά μικρή, άρα μπορεί να αμεληθεί. Συνεπώς η αιχμή της ρωγμής είναι σαφώς ορισμένη. Όσον αφορά τον τρόπο που παραμορφώνεται το σώμα στην ρωγμή, έχουμε τριών ειδών (Σχήμα 4) :



Σχήμα 4 Ορισμός των τριών ειδών ανοίγματος της ρωγμής

- Mode I: Εφελκυσμός στο επίπεδο xy ή συνεπίπεδος εφελκυσμός(*in – plane*).
- Mode II: Διάτμηση στο ίδιο επίπεδο ή συνεπίπεδος διατμητικός τρόπος(*in – plane*).
- Mode III: Διάτμηση στο επίπεδο κάθετο προς το επίπεδο της ρωγμής ή αντεπίπεδος διατμητικός τρόπος(*out of plane*).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο Irwin εισήγαγε τον Συντελεστή Έντασης Τάσης. Αναλυτικά, οι τρεις τρόποι (Mode I, II, III) εκφράζονται ως εξής [3]:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_y(0^\circ)] \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{xy}(0^\circ)] \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{yz}(0^\circ)] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Οι εξισώσεις (2.1) καταλήγουν στις παρακάτω εκφράσεις για τους τρεις Συντελεστές Έντασης Τάσης:

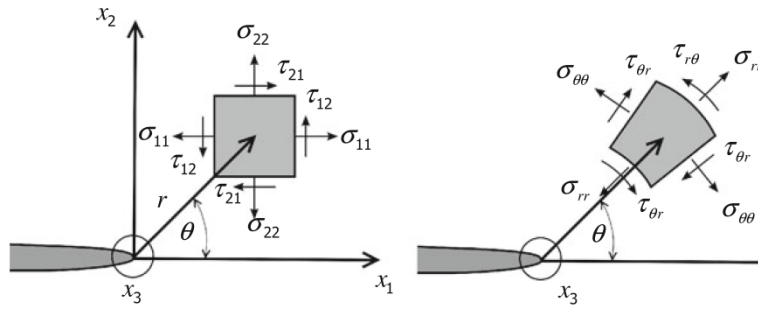
$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau_\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.2)$$

Συνεπώς για κάθε τύπο καταπόνησης, οι τάσεις γράφονται ως:

$$\sigma_{ij,L} = \frac{K_L}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij,L}(\theta) \quad (2.3)$$

Όπου $L = I, II, III$ και $i, j = x, y, z$. Η $f_{ij,L}(\theta)$ είναι μια τριγωνομετρική συνάρτηση που εξαρτάται από τον τρόπο φόρτισης, καθώς επίσης και από την γεωμετρία.

Έτσι λοιπόν, αναπτύσσοντας την (2.3), για κάθε τύπο φόρτισης έχουμε:



Σχήμα 5 Τάσεις στην αιχμή της ρωγμής σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες

- Mode I:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Οι τάσεις σ_{33} κατά το πάχος όταν υπάρχει επίπεδη ένταση (Plane stress), είναι μηδέν. Στην επίπεδη παραμόρφωση (plane strain) οι τάσεις σ_{33} είναι:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.5)$$

Όσον αφορά τις παραμορφώσεις, και χρησιμοποιώντας τον νόμο του Hooke έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{\kappa - 1}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{\kappa - 1}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Η παραμόρφωση ε_{33} κατά το πάχος είναι μηδέν για επίπεδη παραμόρφωση (plane strain) και για επίπεδη ένταση (plane stress) είναι [3]:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{K_I}{\mu\sqrt{2\pi r}} \frac{\nu}{1 + \nu} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.7)$$

- Mode II:

Όμοια με τον τρόπο φόρτισης Mode I, παρακάτω παρουσιάζεται ο Συντελεστής Έντασης Τάσης K_{II} για τον τρόπο φόρτισης Mode II:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Η μετατόπιση στην αιχμή της ρωγμής είναι:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} [\kappa + 2 + \cos\theta] \\ -\cos \frac{\theta}{2} [\kappa - 2 + \cos\theta] \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

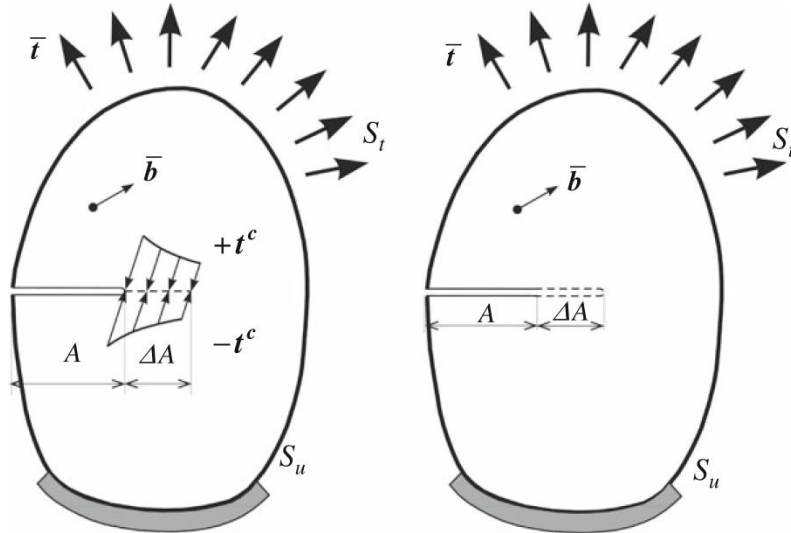
- Mode III:

$$u_3 = \tau \sqrt{\pi a} \frac{r}{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ +\cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

2.3 Ενεργειακό Ισοζύγιο κατά την διάδοση της ρωγμής.

Το ενεργειακό ισοζύγιο κατά την διάδοση ρωγμής, διερευνάται σε ένα ρηγματωμένο σώμα (Σχήμα 6)



Σχήμα 6 Ενεργειακό ισοζύγιο κατά διάδοση ρωγμής για ΔA

Εφαρμόζοντας τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής σε ένα παραμορφώσιμο σώμα η μεταβολή της ενέργειας στον χρόνο είναι [3]:

$$\dot{W}_{ext} + \dot{Q} = \dot{W}_{int} + \dot{k} + \dot{D} \quad (2.12)$$

Όπου:

\dot{W}_{ext} είναι η ενέργεια που εφαρμόζεται στο σώμα, ως αποτέλεσμα της εξωτερικής δύναμης.

$$\dot{W}_{ext} = \int_{S_t} \bar{t}_i \dot{u}_i dS + \int_V \bar{b}_i \dot{u}_i dV \quad (2.13)$$

\dot{Q} είναι η ενέργεια θερμότητας.

\dot{W}_{int} είναι η εσωτερική ενέργεια.

$$\dot{W}_{int} = \int_V U dV, \quad U(\varepsilon_{kl}) = \int_0^{\varepsilon_{kl}} \sigma_{ij}(\varepsilon_{mm}) d\varepsilon_{ij} \quad (2.14)$$

\dot{k} είναι η κινητική ενέργεια.

$$\dot{k} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (2.15)$$

Επιπλέον, υπάρχει και η ενέργεια D η οποία καταναλώνεται κατά την διάρκεια της διάδοσης. Συνδέεται με την σταθερά του υλικού γ . Ο συντελεστής 2 υπάρχει λόγω του γεγονότος, ότι κατά την διάρκεια της διάδοσης δημιουργούνται δύο επιφάνειες.

$$D = 2\gamma A \quad (2.16)$$

Στην περίπτωση μας, έχουμε στατικό πρόβλημα, άρα $k = 0$. Επίσης δεν υπάρχουν θερμικά φορτία, άρα $Q = 0$. Το ενεργειακό ισοζύγιο απλοποιείται:

$$\dot{W}_{ext} = \dot{W}_{int} + \dot{D}, \quad -\dot{\Pi}_{ext} = \dot{\Pi}_{int} + \dot{D} \quad (2.17)$$

Έπειτα από τις παραπάνω υποθέσεις, μπορεί να γίνει ανάλυση της ρωγμής. Η αρχική ρωγμή σε χρόνο $t^{(1)}$ είναι μήκους $A^{(1)}$. Στον χρόνο $t^{(2)} = t^{(1)} + \Delta t$ η ρωγμή θα γίνει $A^{(2)} = A^{(1)} + \Delta A$. Συνεπώς, υπάρχει η παρακάτω διαφορά ενέργειας σε σχέση με την διαφορά χρόνου, ή την διαφορά του μεγέθους της ρωγμής:

$$\begin{aligned} W_{ext}^{(2)} - W_{ext}^{(1)} &= W_{int}^{(2)} - W_{int}^{(1)} + 2\gamma\Delta A \\ \Delta W_{ext} = \Delta W_{int} + \Delta D &\Rightarrow \frac{\Delta W_{ext}}{\Delta A} = \frac{\Delta W_{int}}{\Delta A} + \frac{\Delta D}{\Delta A} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Παρουσιάζοντας τα εσωτερικά και εξωτερικά δυναμικά, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν αθροιστικά $\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext}$, έχουμε:

$$\frac{\Delta(W_{ext} - W_{int})}{\Delta A} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A} = \frac{\Delta D}{\Delta A} = 2\gamma \quad (2.19)$$

Τα παραπάνω ερμηνεύονται ως εξής: Το αριστερό μέρος περιγράφει το ποσό της ενέργειας που είναι διαθέσιμο $-\Delta\Pi$, η οποία τροφοδοτείται από το εξωτερικό φορτίο και από την εσωτερική ενέργεια κατά την διάδοση της ρωγμής κατά ΔA . Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την μείωση της ενδεχόμενης ενέργειας. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται “Ρυθμός Απελευθέρωσης Ενέργειας” και ορίζεται ως:

$$\bar{G} = -\frac{\Delta\Pi}{\Delta A}, \quad G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\Pi}{\Delta A} = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2.20)$$

Το δεξί μέρος της (2.19) είναι η ενέργεια θραύσης $2\Delta A$, που χρειάζεται το υλικό για να διαχωριστεί και να δημιουργηθούν καινούργιες επιφάνειες. Εξαρτάται από την συμπεριφορά του υλικού, και αντιπροσωπεύει την κρίσιμη παράμετρο του υλικού $G_C = 2\gamma$. Αυτό το ενεργειακό ισοζύγιο έχει δημιουργηθεί από τον Griffith και έχει πάρει το όνομά του.

Στην συνέχεια ο Griffith, για έλασμα που υπόκειται σε εφελκυσμό, και έχει ρωγμή μήκους $2a$, όρισε τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας:

$$G = \frac{2\pi\sigma^2 a}{E'} \quad (2.21)$$

Για δεδομένο μήκος ρωγμής, η κρίσιμη τάση θραύσης είναι:

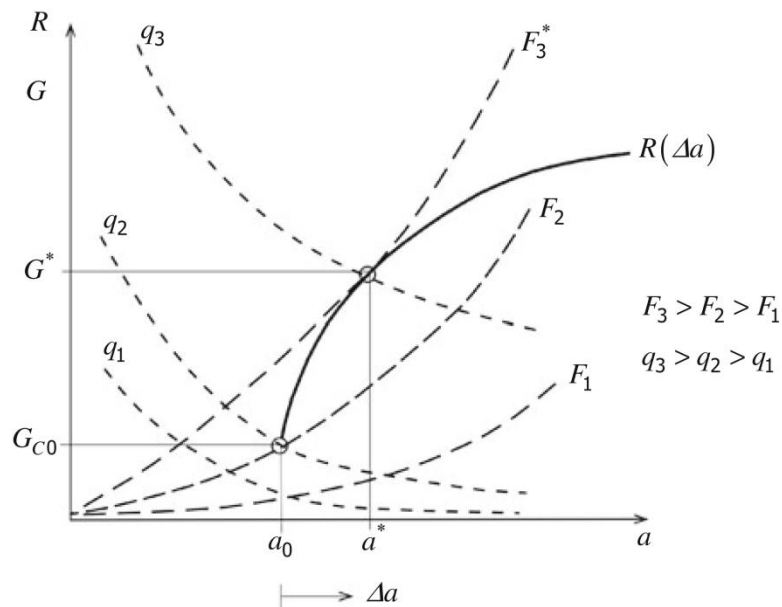
$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E'\gamma}{\pi\alpha}} = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi\alpha}} \quad (2.22)$$

$$E' = E \text{ (plane stress)}$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \text{ (plane strain)}$$

2.4 Ευστάθεια της διάδοσης ρωγμής.

Τα υλικά μεταβάλουν την συμπεριφορά τους κατά την διάδοση μιας ρωγμής. Αυτή η συμπεριφορά των υλικών, περιγράφονται από την Καμπύλη Αντίστασης στην Διάδοση Ρωγμής $R(\Delta\alpha)$ (crack growth resistance curve R) (Σχήμα 7)



Σχήμα 7 Ευστάθεια της διάδοσης ρωγμής

$$G_c = R(\Delta\alpha) \text{ (R - curve)}$$

Προκειμένου να εκτιμηθεί η ευστάθεια της θραύσης, πρέπει να συγκρίνουμε τις αλλαγές των δυνάμεων (F) και των μετατοπίσεων (q) σε συνάρτηση με το μήκος της ρωγμής [3].

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{F,q} < \frac{\partial R}{\partial \alpha} \text{ σταθερή (stable)}$$

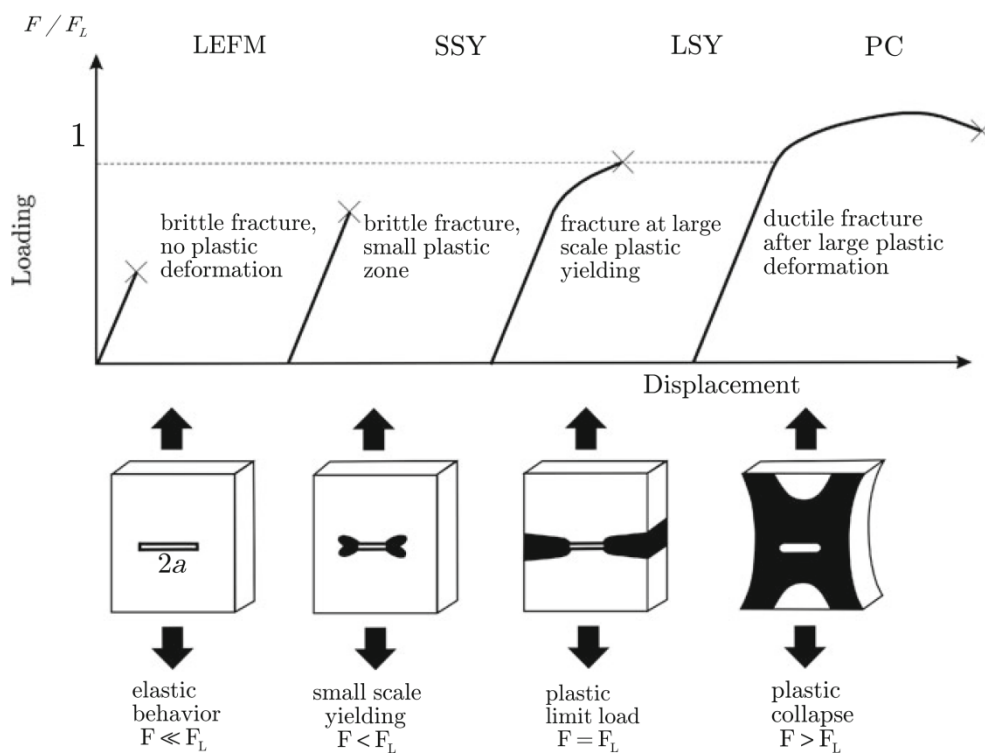
$$\left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{F,q} = \frac{\partial R}{\partial \alpha} \text{ αδιάφορη (indifferent)}$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{F,q} > \frac{\partial R}{\partial \alpha} \text{ ασταθής (unstable)}$$

Η ρωγμή συμπεριφέρεται με σταθερό τρόπο, όταν η καμπύλη αντίστασης R αυξάνει γρηγορότερα από τον ρυθμό απελευθέρωσης ενέργειας. Σε αυτή την περίπτωση, είναι απαραίτητο να ενισχυθεί το φορτίο για να συνεχίσει η ρωγμή να διαδίδεται. Στο Σχήμα 7 η καμπύλη αντίστασης στη ρωγμή R , καθώς επίσης και ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας G , παρουσιάζονται, συναρτήσει του μήκους ρωγμής, για μια σειρά από διαφορετικά εξωτερικά φορτία (F1-F3). Για δεδομένη δύναμη F , φαίνεται ότι υπάρχει μια αύξουσα τάση, συναρτήσει του μήκους της ρωγμής. Αντίθετα, παρατηρώντας τις καμπύλες των μετατοπίσεων, φαίνεται μια φθίνουσα τάση καθώς προχωράει η ρωγμή. Αυτό σημαίνει ότι η ρωγμή σταματάει. Η ρωγμή συμπεριφέρεται με ασταθές τρόπο, όταν η παροχή ενέργειας, αυξάνεται γρηγορότερα από την καμπύλη αντίστασης στην ρωγμή R (F3).

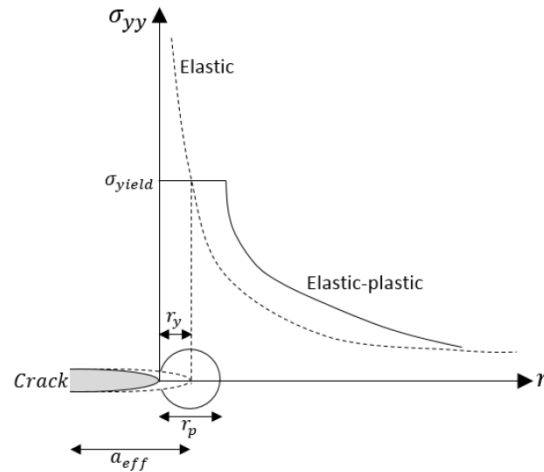
2.5 Πλαστική παραμόρφωση στην αιχμή της ρωγμής.

Λόγω της συγκέντρωσης των τάσεων στην αιχμή της ρωγμής, σε αυτό το σημείο, με ένα μικρό εξωτερικό φορτίο, οι τάσεις ξεπερνούν το όριο διαρροής, και έτσι δημιουργείται μια μικρής έκτασης πλαστική παραμόρφωση. Αν το φορτίο μεγαλώσει, τότε η πλαστική ζώνη μεγαλώνει. Από αυτό το σημείο, η Γραμμική Ελαστική Μηχανική των Θραύσεων (LEFM) δεν ισχύει, και ξεκινάει η Ελαστική-Πλαστική Μηχανική των Θραύσεων (Elastic-Plastic Fracture Mechanics, EPFM) (Σχήμα 8). Εμείς θα περιοριστούμε στην μικρής κλίμακας πλαστική ζώνη, η οποία παρουσιάζεται και με φορτία χαμηλότερα του ορίου διαρροής.



Σχήμα 8 Στάδια πλαστικής παραμόρφωσης σε ρηγματωμένο σώμα

Το μέγεθος της πλαστικής ζώνης είναι πολύ μικρό σε σχέση με το μήκος της ρωγμής, και τις άλλες διαστάσεις της κατασκευής, και ονομάζεται Μικρής Έκτασης Διαρροή (Small Scale Yielding, SSY). Για τον υπολογισμό της πλαστικής ζώνης θα χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του Irwin (Σχήμα 9). Ο Irwin έδειξε [11], ότι για να υπάρχει ισορροπία, χρειάζεται σε διπλάσια ζώνη να υπάρχουν οι τάσεις διαρροής. Βρήκε πως η ακτίνα r_p της πλαστικής ζώνης, εξαρτάται από το όριο διαρροής της κατασκευής:



Σχήμα 9 Προσέγγιση του Irwin για την πλαστική ζώνη και το διορθωμένο μήκος ρωγμής

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{yield}} \right)^2 \quad (\text{plane stress})$$

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{yield}} \right)^2 \quad (\text{plane strain}) \quad (2.23)$$

Συνεπώς το διορθωμένο μήκος (effective length) της ρωγμής είναι:

$$\alpha_{eff} = a + r_y \quad (2.24)$$

Ο διορθωμένος SIF δίνεται [3]:

$$K_{eff} = \frac{\sigma_{yy} \sqrt{\pi \alpha_{eff}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yield}} \right)^2}} \quad (2.25)$$

Η LEFM εξασφαλίζεται αν η πλαστική ζώνη είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις της κατασκευής. Οι περιορισμοί που υπάρχουν, ώστε να εξασφαλίζεται η LEFM είναι [4]:

- $r_y \leq \frac{a}{8}$ (Monotonic Loading) (2.26)

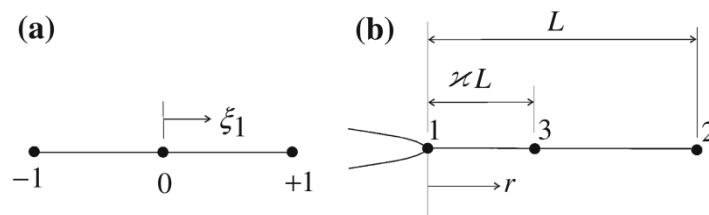
- $r_y \leq \frac{a}{4}$ (Cyclic Loading) (2.27)

- $\sigma_{max} \leq 0.8 * \sigma_y$ (Maximum stresses) (2.28)

3 Μεικτός τύπος φόρτισης - Υπολογισμός SIF σε ΠΠΣ

3.1 Επιλογή κατάλληλων στοιχείων για το Crack Tip.

Η ανάλυση και μελέτη ρωγμών σε κατασκευές, γίνεται με την βοήθεια Προγραμμάτων Πεπερασμένων Στοιχείων. Το ερώτημα είναι, τί είδος στοιχεία (elements) πρέπει να χρησιμοποιηθούν, ώστε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε να είναι αξιόπιστα. Αν χρησιμοποιηθούν μόνο τυπικά στοιχεία, τότε θα πρέπει να κάνουμε ιδιαίτερα πυκνό πλέγμα, στην κορυφή (tip) της ρωγμής. Όμως, όσο πυκνότερο γίνεται το πλέγμα, τόσο μεγαλύτερες τάσεις μας δίνει το πρόγραμμα. Πολύ σημαντική πρόοδος έγινε, με την ανακάλυψη των στοιχείων τετάρτου σημείου (quarter-point elements, QPE), η οποία έγινε, ανεξάρτητα, από τους Henshell και Shaw [5], καθώς επίσης και από τον Barsoum [6]. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν στοιχεία με τετραγωνικές συναρτήσεις σχήματος (quadratic shape functions elements). Σε αυτά τα στοιχεία, οι μεσαίοι κόμβοι, μετατοπίζονται, από το 1/2 στο 1/4 του μήκους τους, προς την κατεύθυνση της αιχμής της ρωγμής. Παρακάτω παρουσιάζονται οι αρχές των παραπάνω, σε ένα μονοδιάστατο στοιχείο [3].



Σχήμα 10 Μονοδιάστατο στοιχείο σε φυσικές (α) και καρτεσιανές συντεταγμένες (β)

Στο Σχήμα 10 φαίνεται ένα quarter-point element. Η απόσταση των κόμβων δίνονται από την συντεταγμένη r . Στον ενδιάμεσο κόμβο μεταβάλλονται οι συντεταγμένες του, αλλάζοντας την παράμετρο κ . Η συνάρτηση σχήματος για ένα μονοδιάστατο στοιχείο είναι [3]:

$$\begin{aligned}
 u(\xi) &= \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi)u^{\alpha} = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)u^{(1)} + (1-\xi^2)u^{(3)} + \frac{1}{2}\xi(\xi+1)u^{(2)} \\
 &= u^{(3)} + \frac{1}{2}(u^{(2)} - u^{(1)})\xi + \left[\frac{1}{2}(u^{(1)} + u^{(2)}) - u^{(3)}\right]\xi^2
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Η ίδια διαδικασία παρεμβολής ισχύει και για την ακτίνα r , με τις κομβικές τιμές

$$r^{(1)} = 0, \quad r^{(3)} = kL, \quad r^{(2)} = L :$$

$$r(\xi) = \sum_{\alpha=1}^3 N_{\alpha}(\xi)r^{\alpha} = +kL + \frac{1}{2}L\xi\left(\frac{1}{2} - k\right)L\xi^2$$

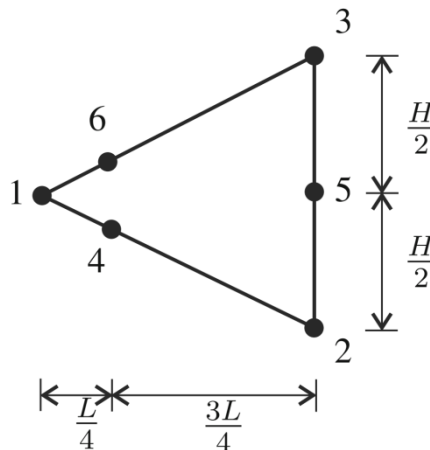
Αν ο ενδιάμεσος κόμβος μετατοπιστεί στο $k = 1/4$ της πλευράς, τότε τελικά:

$$u(r) = u^{(1)} + (-3u^{(1)} - u^{(2)} + 4u^{(3)})\sqrt{\frac{r}{L}} + 2(u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)})\frac{r}{L} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(r) = \frac{\partial u}{\partial r} = \left(-\frac{3}{2}u^{(1)} - \frac{1}{2}u^{(2)} + 2u^{(3)}\right)\frac{1}{\sqrt{Lr}} + 2(u^{(1)} + u^{(2)} - 2u^{(3)})\frac{1}{L} \quad (3.3)$$

Από την (3.2) παρατηρούμε ότι υπάρχει ο όρος \sqrt{r} που εκφράζει ακριβώς το πεδίο μετατόπισης στην αιχμή της ρωγμής. Επίσης στην (3.3) παρατηρούμε ότι υπάρχει η ιδιομορφία $1/\sqrt{r}$.

Για το πρόβλημα των δύο διαστάσεων στην μελέτη, έχουν χρησιμοποιηθεί για την αιχμή της ρωγμής τριγωνικά εξακομβικά στοιχεία, και μετατοπίστηκαν οι ενδιάμεσους κόμβους στο $1/4$ της πλευράς (Σχήμα 11). Μακριά από το tip της ρωγμής, χρησιμοποιήθηκαν τετράπλευρα οχτακομβικά στοιχεία.



Σχήμα 11 Τριγωνικό εξακομβικό στοιχείο με μετατοπισμένους τους δύο ενδιάμεσους κόμβους

Το μέγεθος των elements είναι συναρτήσει του μήκους της ρωγμής. Κατά βάση, αυτά τα στοιχεία πρέπει να είναι [3]: $L < \frac{\alpha}{100} \dots \frac{\alpha}{20}$ όπου $\alpha =$ μήκος ρωγμής

Επίσης, ο αριθμός των στοιχείων περιμετρικά του tip της ρωγμής, πρέπει να είναι:

$n > 12$ ή $\Delta\theta < 30^\circ$.

Έχει επιλεγεί, στην ανάλυση των ρωγμών που θα γίνει σε επόμενα κεφάλαια, να χρησιμοποιηθούν 16 στοιχεία (Σχήμα 12), περιμετρικά (fan-wise) της αιχμής την ρωγμής.

3.2 Υπολογισμός SIF για μεικτό τρόπο φόρτισης.

Με την χρήση των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων, ο ευκολότερος τρόπος για τον υπολογισμό των συντελεστών έντασης τάσης, είναι από τις μετατοπίσεις των κόμβων στα ειδικά στοιχεία, ή από τις τάσεις που αναπτύσσονται στα στοιχεία [3].

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} u_2^{FEM}(r, \theta = \pi) \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (3.4)$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22}^{FEM}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (3.5)$$

Για τους SIF K_{II} και K_{III} έχουμε:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} u_1^{FEM}(r, \theta = \pi) \frac{E'}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{21}^{FEM}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (3.6)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} u_3^{FEM}(r, \theta = \pi) \frac{E}{4(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}}, \quad K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{23}^{FEM}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r} \quad (3.7)$$

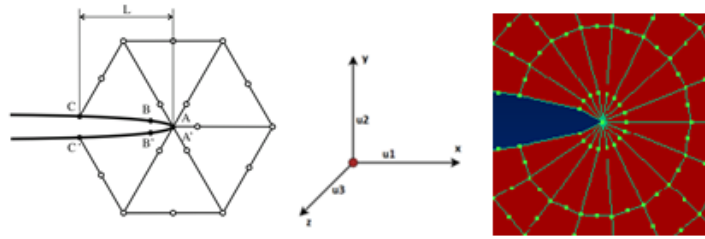
Όπου:

$$E' = E \quad (\text{plane stress}) \quad \text{και} \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{plane strain})$$

Για τον υπολογισμό των SIF, χρησιμοποιείται η σχετική μετατόπιση των αντίθετων κόμβων από δυο ειδικά στοιχεία, στο σημείο την ρωγμής (βλέπε Σχήμα 12. Κόμβοι Β με Β' και C με C'). Στην γενική περίπτωση του μεικτού τρόπου φόρτισης (mixed mode loading), έχουμε:

$$\Delta u_i(r) = u_i(r, \theta = +\pi) - u_i(r, \theta = -\pi)$$

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} \frac{E'}{8} \Delta u_2(r) \\ \frac{E'}{8} \Delta u_1(r) \\ \frac{E}{8(1+\nu)} \Delta u_3(r) \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$



Σχήμα 12 Αριστερά: Περιγραφή των Crack Tip Elements (CTE) Δεξιά: Τα στοιχεία που δημιουργήθηκαν στο ΠΠΣ FEMAP

- $A(r = 0)$
- $B(r = L/4, \theta = \pi)$
- $B'(r = L/4, \theta = -\pi)$
- $C(r = L, \theta = \pi)$
- $C'(r = L, \theta = -\pi)$

Εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις με την (3.2) και την (3.8), αλλά για στοιχεία δυο διαστάσεων, για μεικτό τρόπο φόρτιση έχουμε:

$$\begin{aligned}
 K_I &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ [4u_2(L/4, \pi) - u_2(L, \pi)] - [4u_2(L/4, -\pi) - u_2(L, -\pi)] \} \\
 &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ [4u_2^B - u_2^C] - [4u_2^{B'} - u_2^{C'}] \} = \\
 &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ [4u_2^B - 4u_2^{B'}] - [u_2^C - u_2^{C'}] \} \\
 K_I &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ 4\Delta u_2^B - \Delta u_2^C \} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{II} &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ [4u_1(L/4, \pi) - u_1(L, \pi)] - [4u_1(L/4, -\pi) - u_1(L, -\pi)] \} \\
 K_{II} &= \frac{E'}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ 4\Delta u_1^B - \Delta u_1^C \} \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{III} &= \frac{E'}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ [4u_3(L/4, \pi) - u_3(L, \pi)] - [4u_3(L/4, -\pi) - u_3(L, -\pi)] \} \\
 K_{III} &= \frac{E'}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \{ 4\Delta u_3^B - \Delta u_3^C \} \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

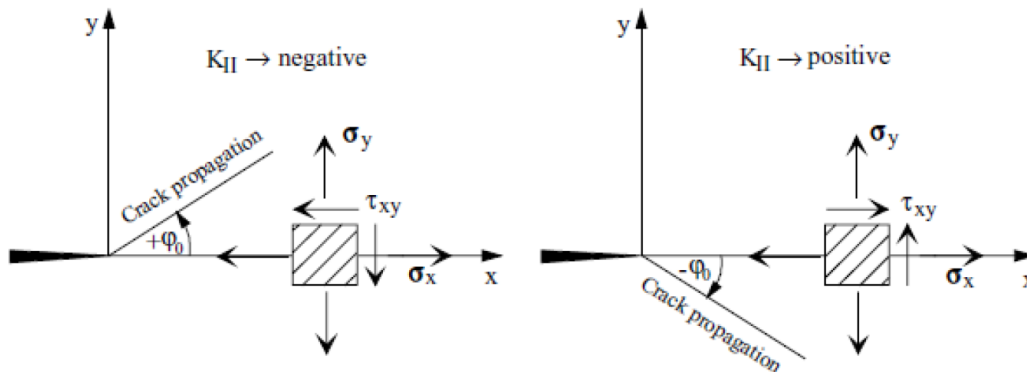
4 Κριτήρια Θραύσης για Μεικτό τύπο Φόρτισης

Στην βιβλιογραφία, υπάρχουν πολλά κριτήρια για την γωνία διάδοση της ρωγμής, αλλά και για τον Συντελεστή Έντασης Τάσης για μεικτό τύπο φόρτισης. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα κριτήρια που έχουν επιλεγεί και χρησιμοποιηθεί στον κώδικα.

4.1 Υπολογισμός Γωνίας Διάδοσης Ρωγμής.

Υπάρχουν διάφορα κριτήρια, με βάση τα οποία μπορεί να γίνει υπολογισμός της γωνίας διάδοσης ρωγμής. Ένα από τα πιο παλιά αλλά και πιο γνωστά κριτήρια είναι το κριτήριο της Μέγιστης Περιφερειακής Τάσης (Maximum Circumferential Stress), που έχει προταθεί από τους Erdogan και Sih [7]. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, η διάδοση βασίζεται στις εξής θεωρήσεις:

- Η ρωγμή διαδίδεται ακτινικά από το crack tip, με μια γωνία θ_c . Η κατεύθυνση στην οποία θα γίνει η διάδοση, είναι κάθετη προς την μέγιστη περιφερειακή τάση $\sigma_{\theta\theta max}$.
- Η ρωγμή θα διαδοθεί όταν η $\sigma_{\theta\theta max}$ φτάσει σε κάποια κρίσιμη τιμή σ_c .



Σχήμα 13 Γωνία διάδοσης για θετικό και αρνητικό KII

Σύμφωνα με το κριτήριο:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_c}} \left[K_I \left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \left(3\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \right) \right] \quad (4.1)$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες:

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right|_{\theta_c} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0$$

Από την (4.1) προκύπτει

$$K_I \sin\theta_c + K_{II}(3\cos\theta_c - 1) = 0 \quad (4.2)$$

Έτσι λοιπόν, η γωνία που γίνεται η διάδοση είναι:

$$\theta_c = 2 \arctan \left[\frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (4.3)$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 13, όταν το K_{II} είναι αρνητικό, τότε η στροφή της ρωγμής θα είναι προς τα θετικά γ του τοπικού συστήματος συντεταγμένων (δηλαδή αριστερόστροφη πορεία), ενώ όταν το K_{II} είναι θετικό, τότε η στροφή της διάδοσης της ρωγμής θα είναι προς τα αρνητικά γ του τοπικού συστήματος συντεταγμένων (δεξιόστροφη πορεία).

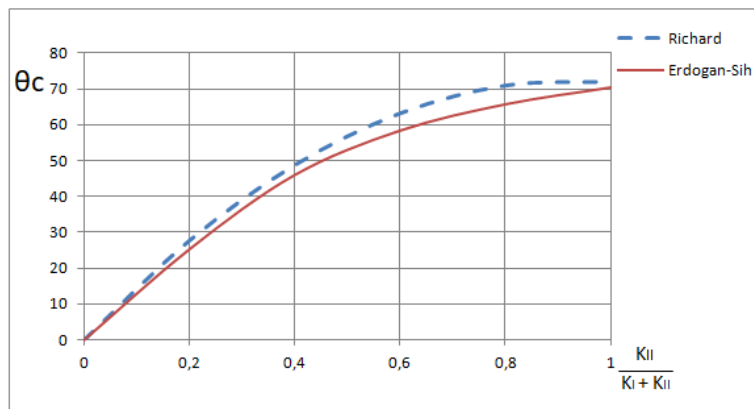
Στο παραπάνω κριτήριο, όταν υπάρχει καθαρή φόρτιση *mode II* (δηλαδή *mode I* = 0) τότε $\theta_c = -70,5^\circ$. Στην αντίθετη περίπτωση που έχουμε καθαρό *mode I*, τότε ασφαλώς $\theta_c = 0$.

Ένα άλλο κριτήριο για τον υπολογισμό της γωνίας της διάδοσης της ρωγμής, είναι το κριτήριο του Richard [12]. Το κριτήριο αυτό παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\theta_c = \pm \left[155,5^\circ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} - 83,4^\circ \left(\frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right)^2 \right] \quad (4.4)$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Richard, για καθαρό *mode I* $\Rightarrow \theta_c = 0$ ενώ για καθαρό *mode II* $\Rightarrow \theta_c = 72,1^\circ$

Στο Σχήμα 14, συγκρίνονται τα δύο κριτήρια. Γενικά έχουν μεταξύ τους, σχετικά μικρή απόκλιση. Φαίνεται πως το κριτήριο του Richard δίνει σταθερά ελαφρώς μεγαλύτερη γωνία από αυτό των Erdogan-Sih.



Σχήμα 14 Σύγκριση κριτηρίων για την γωνία διάδοσης: Richard - Erdogan-Sih

Στην παρούσα μελέτη έχει επιλεγεί για τον υπολογισμό της γωνίας διάδοσης της ρωγμής, το κριτήριο των Erdogan-Sih.

4.2 Συντελεστής Έντασης Τάσης για Μεικτό Τύπο Φόρτισης.

Σε περιπτώσεις που σε μια κατασκευή καταπονείται με μια σύνθετη φόρτιση, τότε για να αξιολογήσουμε αν θα διαδοθεί μια ρωγμή, πρέπει να συγκρίνουμε τους SIF που έχουμε υπολογίσει, με κάποιον κρίσιμο συντελεστή. Από τους υπολογισθέντες SIF, πρέπει να βρούμε έναν ισοδύναμο SIF, που να τους περιλαμβάνει όλους. Εδώ μας ενδιαφέρουν 2D κατασκευές. Οπότε, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο που να συμπεριλαμβάνει τους τύπους φόρτισης Mode I και Mode II.

- Ένα γνωστό κριτήριο, είναι αυτό του Tanaka [13]. Σύμφωνα με το κριτήριο:

$$K_{eq} = \sqrt[4]{K_I^4 + 8K_{II}^4} \quad (4.5)$$

Παρατηρούμε, ότι όταν μηδενίζεται ο K_{II} τότε $K_{eq} = K_I$

- Ένα άλλο κριτήριο, είναι αυτό του Richard [12]. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο:

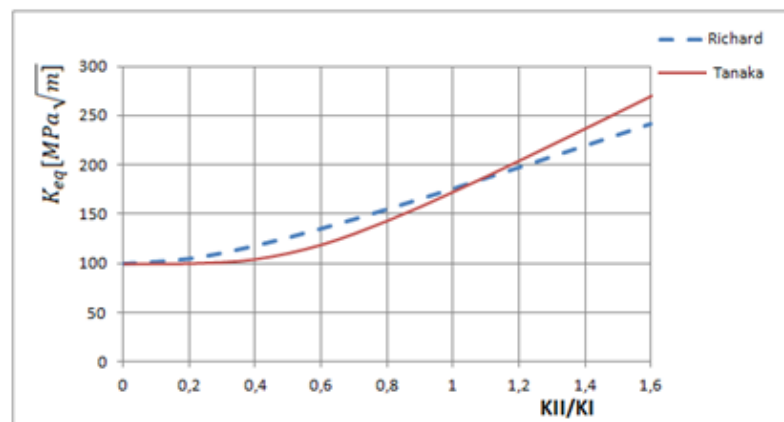
$$K_{eq} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha_1 K_{II})^2} \quad (4.6)$$

Όπου $\alpha_1 = 1,155$

Κι εδώ επίσης, ότι όταν μηδενίζεται ο K_{II} τότε $K_{eq} = K_I$

Στο Σχήμα 15, παρουσιάζεται η σύγκριση των δύο κριτηρίων, με σταθερό $K_I = 100 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ και μεταβαλλόμενο $K_{II} = 0$ έως $160 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Είναι φανερό, πως όταν $K_I > K_{II}$ τότε το κριτήριο του Richard είναι δυσμενέστερο από αυτό του Tanaka.

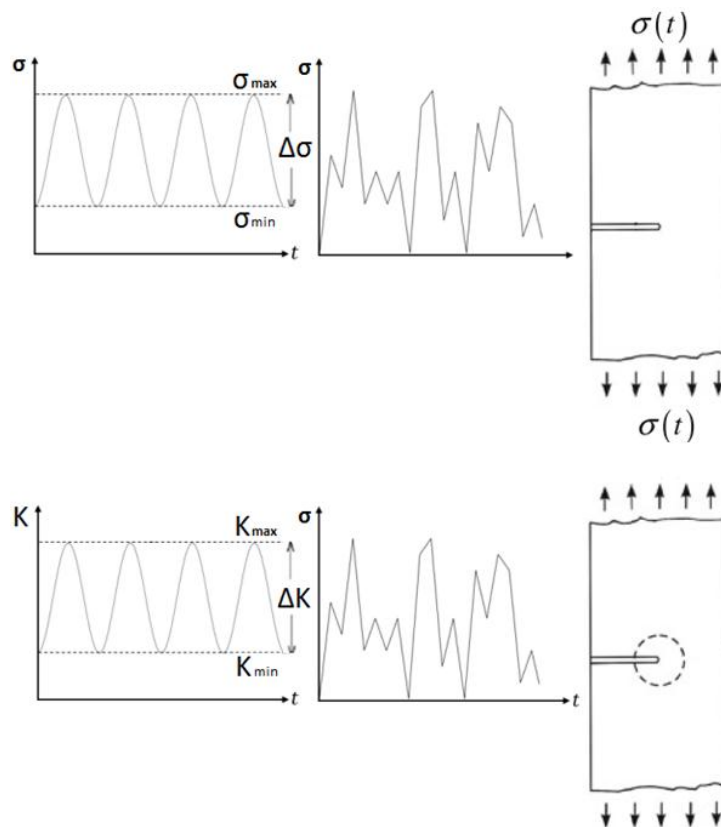
Για τον υπολογισμό του Ισοδύναμου SIF στον κώδικα, θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο του Richard.



Σχήμα 15 Σύγκριση κριτηρίων για τον υπολογισμό K_{eq} : Tanaka - Richard

5 Εκτίμηση διάρκειας ζωής λόγω κόπωσης.

Σε περιπτώσεις που οι φορτίσεις που εφαρμόζονται σε μια ρηγματωμένη κατασκευή δεν είναι σταθερές, αλλά εναλλάσσονται, τότε η ρωγμή μπορεί να διαδοθεί, ακόμα και αν οι Συντελεστές Έντασης Τάσης είναι χαμηλότεροι από το K_C . Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *Διάδοση Ρωγμής λόγω Κόπωσης* (Fatigue Crack Growth). Η εναλλασσόμενη φόρτιση, διακρίνεται σε φόρτιση με σταθερή, ή μεταβαλλόμενη διακύμανση (Σχήμα 16).



Σχήμα 16 Σταθερή (αριστερά) και μεταβαλλόμενη (δεξιά) φόρτιση

Στο Σχήμα 16 επάνω, φαίνεται η μεταβολή του φορτίου, ενώ στο ίδιο σχήμα κάτω, φαίνεται η μεταβολή του Συντελεστή Έντασης Τάσης.

Γενικά, η διάδοση ρωγμής λόγω κόπωσης με σταθερή διακύμανση, είναι σχετικά σπάνια σε πραγματικές μηχανολογικές κατασκευές. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις, όπως στην ναυπηγική, όπου τα πλοία υπόκεινται σε συνεχόμενη μεταβολή των φορτίσεων, λόγω της επίδρασης των κυματισμών, καθ' όλη την διάρκεια ζωής τους. Παρ' όλο που τα κύματα δεν έχουν ποτέ σταθερή συχνότητα, αλλά μεταβάλλονται διαρκώς, έχουν θεσπιστεί κανονισμοί οι οποίοι χρησιμοποιούν μιας συγκεκριμένης συχνότητας κύμα, και με βάση αυτό, γίνονται όλοι οι υπολογισμοί αντοχής [17]. Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, στην παρούσα εργασία, δεν έχει συμπεριληφθεί το μεταβαλλόμενο τύπο φόρτισης, αλλά θα περιοριστώ στην φόρτιση με σταθερή συχνότητα.

5.1 Κόπωση με φόρτιση με σταθερή διακύμανση.

Στο Σχήμα 16 επάνω-αριστερά, φαίνεται το εύρος τάσεων, που μεταβάλλονται μεταξύ μίας μέγιστης και μίας ελάχιστης τιμής ($\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$). Στο ίδιο σχήμα κάτω-αριστερά, φαίνεται το εύρος των Συντελεστών Έντασης Τάσης, το οποίο είναι ασφαλώς η μεταβολή μιας μέγιστης και μίας ελάχιστης τιμής ($\Delta K = K_{max} - K_{min}$). Η σχέση των προηγούμενων είναι:

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = \sigma_{max}\sqrt{\pi a} - \sigma_{min}\sqrt{\pi a} = \Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.1)$$

Όπου a το μήκος της ρωγμής.

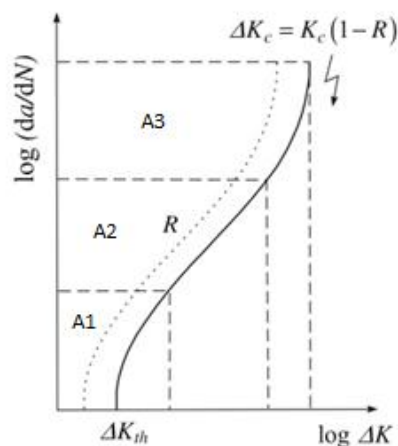
Επίσης, ορίζεται και ο συντελεστής της επίδρασης της μέσης τάσης ή R-ratio:

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (5.2)$$

Ο ρυθμός επέκτασης της ρωγμής λόγω κόπωσης, είναι η επέκταση κατά da μετά από έναν αριθμό κύκλων dN . Ο ρυθμός επέκτασης της ρωγμής συνδέεται με το εύρος των Συντελεστών Έντασης Τάσης και τον λόγο R, με την σχέση:

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, \alpha, R) \quad (5.3)$$

Στο Σχήμα 17 φαίνεται το διπλό λογαριθμικό διάγραμμα του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής, συναρτήσει της μεταβολής των Συντελεστών Έντασης Τάσης [3].



Σχήμα 17 Ρυθμός επέκτασης ρωγμής συναρτήσει των Συντελεστών Έντασης Τάσης.

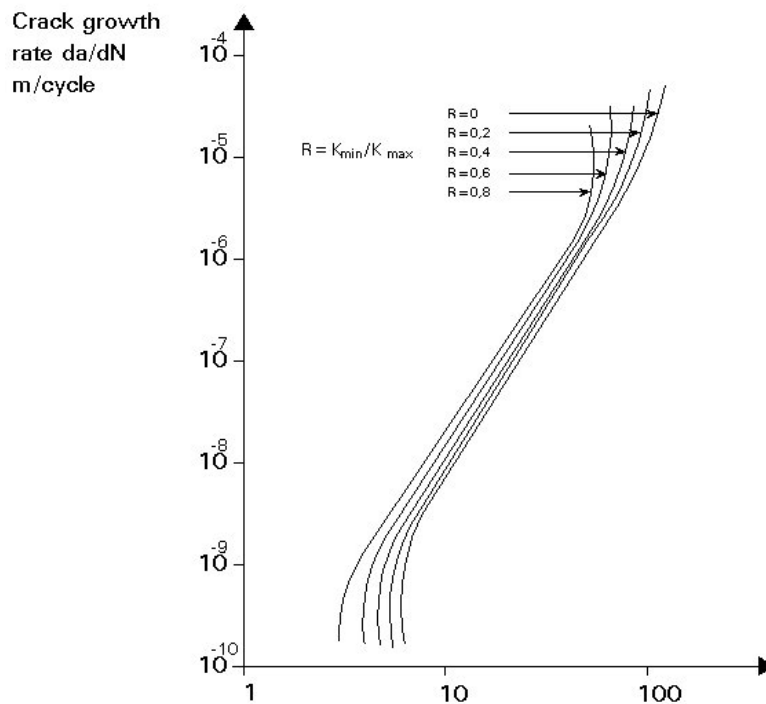
Παρατηρώντας το διάγραμμα του Σχήμα 17, φαίνεται πως χωρίζεται σε τρεις περιοχές.

Στην πρώτη περιοχή A_1 , εντοπίζεται Το κάτω όριο της καμπύλης. Αυτό το σημείο ονομάζεται ΔK_{th} , *threshold*, (κατώφλιο) . Σε περίπτωση που οι Συντελεστές Έντασης Τάσης ΔK έχουν χαμηλότερη τιμή από το ΔK_{th} , τότε η ρωγμή δεν θα διαδοθεί, ανεξάρτητα από τον αριθμό των κύκλων φόρτισης.

Στην δεύτερη περιοχή A_2 η διάδοση την ρωγμής είναι γραμμική. Η διάδοση σε αυτή την περιοχή είναι σταθερή, και είναι η πιο συνηθισμένη διάδοση κατά την διάρκεια ζωής μιας κατασκευής.

Η τελευταία περιοχή A_3 είναι ουσιαστικά η μετάβαση προς την ψαθυρή θραύση. Αν το ΔK υπερβεί το K_C , τότε η διάδοση είναι ασταθή.

Ένα άλλο κομμάτι που πρέπει αναφερθεί, είναι η σημαντική επίδραση της μέσης τάσης, στην συμπεριφορά του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής (Σχήμα 18) [3].

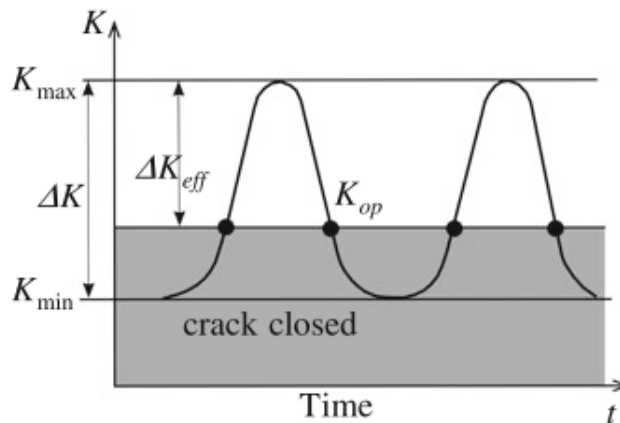


Σχήμα 18 Επίδραση του R-ratio στον ρυθμό επέκτασης της ρωγμής

Στο παραπάνω σχήμα, φαίνεται καθαρά, ότι μεταβάλλοντας το R, και για ίδιες τιμές ΔK , ο ρυθμός επέκτασης αλλάζει.

5.2 Επίδραση του κλεισίματος της ρωγμής (crack closure effect).

Το φαινόμενο του crack closure effect, ανακαλύφθηκε αρχικά από τον *Elber* [9]. Μελετούσε ρηγματωμένες επιφάνειες, στις οποίες ασκούσε κυκλικά εφελκυστικά φορτία με $R = 0$. Παρατήρησε, ότι στην φάση της απελευθέρωσης από το φορτίο, η ρωγμή έκλεινε τελείως, πριν καν ελαχιστοποιηθεί το φορτίο. Επίσης, παρατήρησε, ότι και κατά την φάση της επαναφόρτισης, η ρωγμή παρέμενε κλειστή, μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο. Αυτό το σημείο ονομάστηκε, Συντελεστής έντασης ανοίγματος ρωγμής (*Crack opening intensity*) K_{op} .



Σχήμα 19 Κυκλικό φορτίο, με Crack closure effect

Ο *Elber* συνειδητοποίησε ότι το τμήμα του φορτίου κάτω από το K_{op} δεν συνεισφέρει στην διάδοση της ρωγμής, και για τον λόγο αυτό, όρισε το εύρος του Ενεργού Συντελεστή Έντασης τάσης :

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \quad (5.4)$$

Ο συντελεστής του ενεργού συντελεστή έντασης τάσης ορίστηκε από τον *Elber* και είναι [9]:

$$K_{op} = \Delta K \left(\frac{1}{(1-R)} - 0,5 - 0,4R \right) \quad (5.5)$$

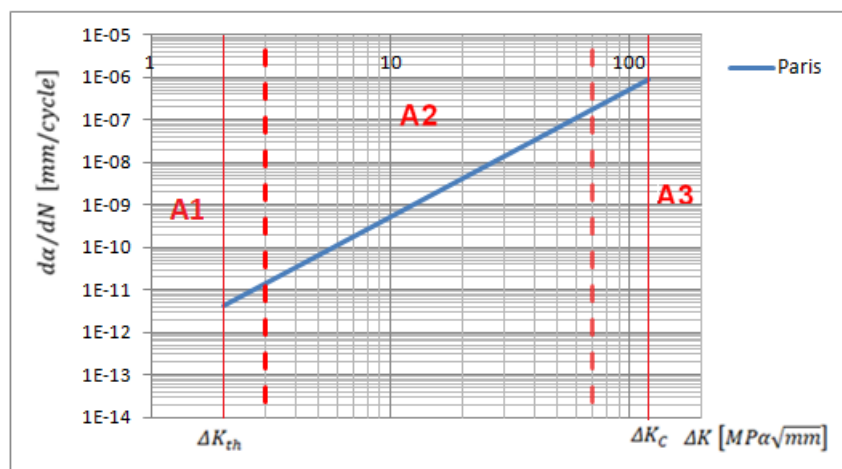
Ουσιαστικά δηλαδή, το πραγματικό ΔK , είναι μία τιμή μικρότερη από το αρχικά υπολογισθέν ΔK , κατά K_{op} .

5.3 Μεθοδολογίες υπολογισμού των κύκλων φόρτισης.

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες για τον υπολογισμό της διάδοσης της ρωγμής, οι οποίες είναι εμπειρικές καμπύλες παρεμβολής πειραματικών δεδομένων. Παρακάτω παρουσιάζονται τρεις από αυτές τις εξισώσεις:

- Εξίσωση του *Paris – Erdogan* [8]. Είναι ο πιο γνωστή εξίσωση και είναι γνωστή ως "*Νόμος του Paris (Paris law)*". Περιγράφει μόνο την περιοχή A_2 , και δεν περιλαμβάνει τα ΔK_{th} , και K_C .

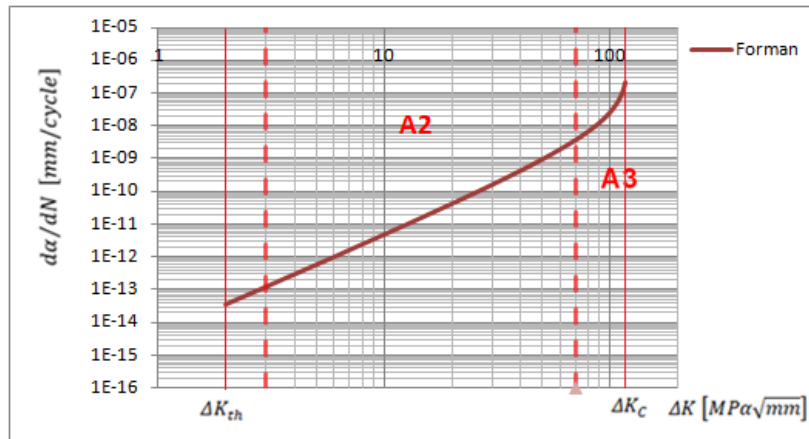
$$\frac{d\alpha}{dN} = C(\Delta K)^m$$



Σχήμα 20 Περιγραφή της καμπύλης του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής με τον νόμο του Paris

- Εξίσωση του *Forman* [3]. Περιλαμβάνει τις περιοχές A_2 και A_3 . Εδώ συνυπολογίζονται ο K_C και R

$$\frac{d\alpha}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1 - R)K_C - \Delta K} \quad (5.6)$$



Σχήμα 21 Περιγραφή της καμπύλης του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής με τον νόμο του Forman

Είναι φανερό, ότι όταν το ΔK γίνει ίσο με το $(1 - R)K_c$, τότε ο ρυθμός διάδοσης απειρίζεται. Συνεπώς η διάδοση είναι ασταθής και ψαθυρή.

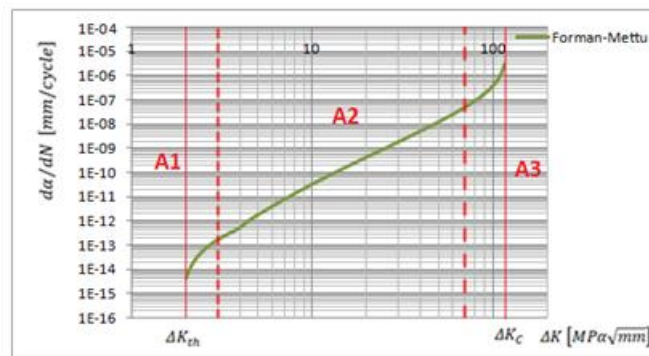
- Μία άλλη εξίσωση, έχει αναπτυχθεί στην NASA και δημοσιεύτηκε από τους *Forman – Mettu* [3].

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left(1 - \frac{K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_c} \right)^q} \quad (5.7)$$

Το f είναι ο λόγος:

$$f = \frac{K_{op}}{K_{max}} \quad (5.8)$$

Η εξίσωση αυτή, περιγράφει και τις τρεις περιοχές της καμπύλης του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής.



Σχήμα 22 Περιγραφή της καμπύλης του ρυθμού επέκτασης της ρωγμής Forman-Mettu

Σε όλα τα παραπάνω, ο εκθέτης m και ο συντελεστής C , καθώς επίσης και τα p και q , είναι χαρακτηριστικές τιμές του κάθε υλικού.

Για τον υπολογισμό των κύκλων φόρτισης που απαιτούνται για την διάδοση της ρωγμής με δεδομένο $d\alpha$, οι παραπάνω εξισώσεις τροποποιούνται και παρουσιάζονται παρακάτω:

- *Paris*

$$N = \frac{d\alpha}{C\Delta K^n} \quad (5.9)$$

- *Forman*

$$N = \frac{d\alpha[(1-R)K_C - \Delta K]}{C\Delta K^n} \quad (5.10)$$

- *Forman – Mettu*

$$N = \frac{d\alpha}{C \left[\Delta K \frac{(f-1)}{(R-1)} \right]^n} \frac{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_C} \right)^q}{\left(1 - \frac{K_{th}}{\Delta K} \right)^p} \quad (5.11)$$

Για τις ανάγκες της παρούσης μελέτης δεν θα ληφθεί υπόψη το Crack Closure Effect, ώστε να χρησιμοποιηθεί ολόκληρο το ΔK , χωρίς την μείωσή του από το φαινόμενο του κλεισίματος της ρωγμής. Συνεπώς, $K_{min} = 0$ και $K_{max} = K_{eq}$. Άρα, $\Delta K = K_{eq}$. Με αυτό τον τρόπο, μεγαλώνοντας ελαφρώς το ΔK , θα έχουμε ως αποτέλεσμα ότι θα διαδοθεί η ρωγμή σε ελαφρώς λιγότερους κύκλους φόρτισης, άρα είμαστε στην ασφαλή πλευρά. Άλλωστε, σε όλες τις μελέτες, πάντα χρησιμοποιείται και κάποιος συντελεστής ασφαλείας (Safety Factor, SF)

Ανακεφαλαιώνοντας, για τον μελέτη της διάδοσης της ρωγμής, τον υπολογισμό της γωνίας διάδοσης της ρωγμής, και τον υπολογισμό των κύκλων φόρτισης, θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω μέθοδοι και κριτήρια.

- Υπολογισμός των SIF με την μέθοδο COD
- Υπολογισμός της γωνίας διάδοσης της ρωγμής με το κριτήριο των Erdogan-Sih
- Υπολογισμός του ισοδύναμου SIF με το κριτήριο του Richard
- Υπολογισμός των κύκλων φόρτισης. Στον κώδικα έχουν εισαχθεί και οι τρεις μέθοδοι υπολογισμού των κύκλων φόρτισης που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όμως στα πλαίσια της μελέτης θα χρησιμοποιηθεί ο Νόμος του Paris.

6 Προσομοίωση διάδοσης Ρωγμής - Σύγκριση με πειραματικές διαδικασίες.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της μελέτης της διάδοσης της ρωγμής, η οποία έγινε, με την βοήθεια του ΠΠΣ FEMAP, χρησιμοποιώντας τον κώδικα που έχει δημιουργηθεί και αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια (η λειτουργία του οποίου θα παρουσιαστεί στο Παράρτημα Α). Αρχικά, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα του υπολογισμού των SIF, και θα συγκριθούν με Συντελεστές Έντασης της Τάσης που υπολογίστηκαν με αναλυτική μέθοδο. Εν συνεχεία, θα μελετηθεί η διάδοση ρωγμής σε διάφορα δοκίμια, και θα γίνει σύγκριση με αποτελέσματα από πειραματικές διαδικασίες, ώστε να ελεγχθεί η ακρίβεια των υπολογισμών και να αποτυπωθεί η ποσοστιαία απόκλιση των αριθμητικών με των πειραματικών αποτελεσμάτων.

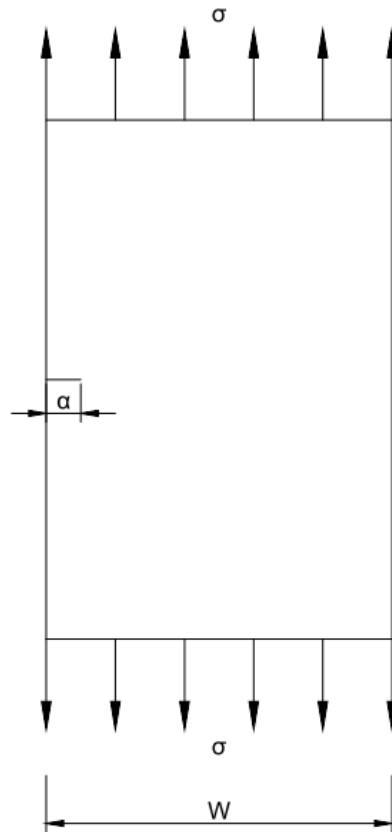
6.1 Υπολογισμός των Συντελεστών Έντασης των Τάσεων (SIF).

Ο πρώτος έλεγχος που πρέπει να γίνει, είναι να ελεγχθεί αν τα αποτελέσματα του υπολογισμού των SIF είναι ακριβή, και κατά πόσο απέχουν από την ακριβή λύση. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν διαφόρων ειδών αναλυτικές λύσεις για συγκεκριμένα προβλήματα. Οι αριθμητικές αυτές λύσεις εμπεριέχουν διορθωτικούς συντελεστές, οι οποίοι εκφράζονται ως δυναμοσειρές του λόγου $\lambda = \frac{\alpha}{w}$.

Όπου $\alpha =$ μήκος ρωγμής

$w =$ πλάτος ρηγματωμένης πλάκας

Ποιο συγκεκριμένα στο Σχήμα 23 φαίνεται μια πλάκα με μια ακραία ρωγμή, η οποία ρωγμή είναι πολύ μικρότερη από το πλάτος της πλάκας. Για να μπορούν να ισχύουν οι αναλυτικές εκφράσεις, θα πρέπει οι διαστάσεις της κατασκευής, να είναι “πολύ μεγάλες” σε σχέση με το μήκος της ρωγμής.



Σχήμα 23 Πλάκα με "μικρό" ρήγμα

Για τον υπολογισμό των K_I και K_{II} με αναλυτική μέθοδο, έχουμε τις εξισώσεις [10]:

$$K_I = C(\lambda)\sigma_\infty\sqrt{\pi a} \quad (6.1)$$

$$K_{II} = C(\lambda)\tau_\infty\sqrt{\pi a} \quad (6.2)$$

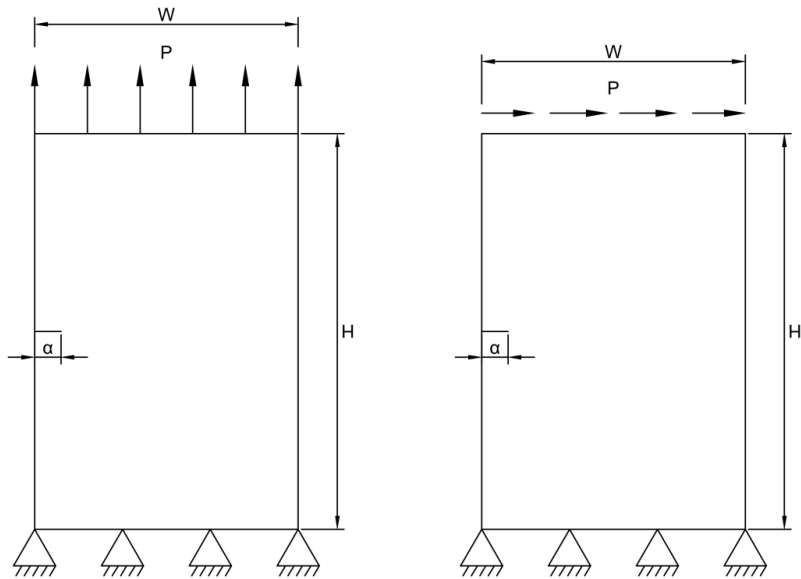
Όπου για K_I $C(\lambda)$:

$$C(\lambda) = 1.12 - 0.231\lambda + 10.55\lambda^2 - 21.72\lambda^3 + 30.39\lambda^4 \quad (6.3)$$

Και για K_{II} $C(\lambda)$:

$$C(\lambda) = 4.886\lambda - 11.383\lambda^2 + 28.198\lambda^3 - 38.563\lambda^4 + 20.555\lambda^5 \quad (6.4)$$

Συνεπώς, για να γίνει η σύγκριση των SIF που υπολογίστηκαν με την παραπάνω αναλυτική μέθοδο, και των SIF που υπολόγισε ο κώδικας στο πρώτο στάδιο των υπολογισμών του, χρησιμοποιήθηκε η παρακάτω ρηγματωμένη πλάκα:



Σχήμα 24 Φόρτιση ρηγματωμένης πλάκας για υπολογισμό του K_I (αριστερά) και του K_{II} (δεξιά)

P	800 N
W	50 mm
B (πάχος πλάκας)	0.5 mm
α	5 mm
H	75 mm
E (μέτρο ελαστικότητας)	206 000 MPa
ν	0.3

Πίνακας 1 Χαρακτηριστικά ρηγματωμένης πλάκας

Με βάση την παραπάνω γεωμετρία και χρησιμοποιώντας την (6.3):

$$\lambda = \frac{5}{50} = 0,1$$

$$C(\lambda) = 1.12 - 0.231 * 0,1 + 10.55 * 0,1^2 - 21.72 * 0,1^3 + 30.39 * 0,1^4$$

$$C(\lambda) = 1.183719$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την (6.1) για τον υπολογισμό του K_I πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά το σ_∞ . Ασφαλώς οι ορθές τάσεις δεν εφαρμόζονται στο άπειρο, αλλά στην άνω ίνα την πλάκας (Σχήμα 24 αριστερά).

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Όπου $A =$ το εμβαδόν της τομής της πλάκας

$$A = W * B$$

$$A = 25 \text{ mm}^2$$

Άρα:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{800}{25} = 32 \text{ N/mm}^2$$

$$K_I = C(\lambda)\sigma_{\infty}\sqrt{\pi a} \Rightarrow$$

$$K_I = 1.183719 * 32\sqrt{\pi * 5} \Rightarrow$$

$$K_I = 150.1269 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Ομοίως για τον K_{II} και σύμφωνα με την φόρτιση που φαίνεται στην Σχήμα 24 δεξιά,

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{800}{25} = 32 \text{ N/mm}^2$$

$$K_{II} = C(\lambda)\tau_{\infty}\sqrt{\pi a}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.4):

$$C(\lambda) = 4.886 * 0.1 - 11.383 * 0.1^2 + 28.198 * 0.1^3 - 38.563 * 0.1^4 + 20.555 * 0.1^5$$

$$C(\lambda) = 0.399317$$

Άρα

$$K_{II} = 0.399317 * 32\sqrt{\pi * 5} \Rightarrow$$

$$K_{II} = 50.644 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$$

Επομένως, συγκεντρωτικά φαίνονται στον Πίνακα 2, τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης, για την ρηγματωμένη πλάκα του Σχήμα 24 με τα χαρακτηριστικά που αναγράφονται στον Πίνακα 1:

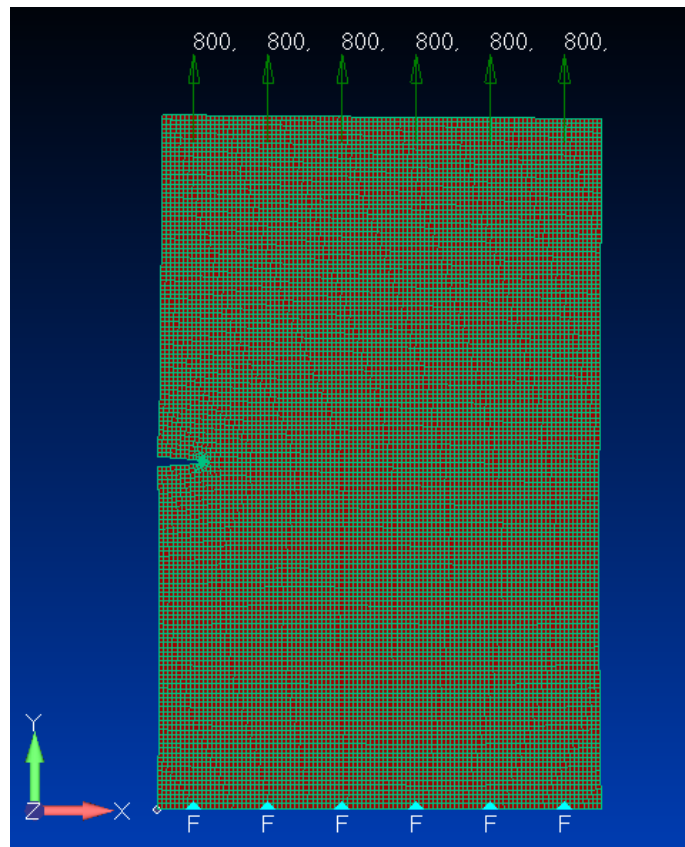
Πίνακας 2 Αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης για K_I και K_{II}

Mode	Αναλυτική λύση ($\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}$)
I	150.1269
II	50.644

Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τον υπολογισμό των Συντελεστών Έντασης της Τάσης με χρήση του Προγράμματος Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP.

6.1.1 Υπολογισμός των SIF με αλλαγή του αριθμού των ομόκεντρων κύκλων.

Δημιουργήθηκε μοντέλο στο ΠΠΣ FEMAP με τα χαρακτηριστικά του Πίνακα 1



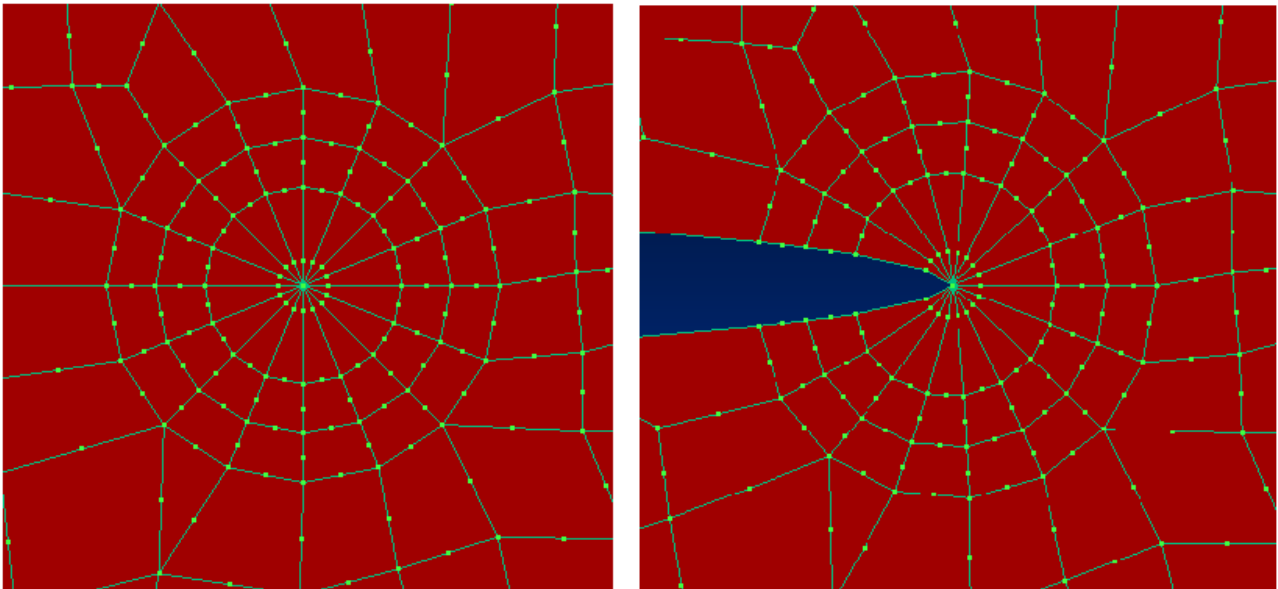
Σχήμα 25 Παράδειγμα μοντέλου με ρωγμή.

Δημιουργήθηκαν 5 μοντέλα. Γύρω από τα Crack Tip Elements (CTE), δημιουργήθηκαν ομόκεντροι κύκλοι ώστε τοπικά να είναι ομοιόμορφη η διακριτοποίηση. Το πρώτο μοντέλο έχει έναν μόνο ομόκεντρο κύκλο γύρω από τα CTE, και κάθε ένα από τα επόμενα μοντέλα, έχει και έναν κύκλο παραπάνω από το προηγούμενο. Ο λόγος που έγινε αυτό, ήταν για να ελεγχθεί κατά πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα αλλάζοντας τοπικά τον κλίμακα, ακριβώς στην αιχμή της ρωγμής. Η υπόλοιπη διακριτοποίηση την κατασκευής έγινε με το αυτόματο σύστημα του προγράμματος. Στο Σχήμα 26 φαίνεται ένα ρηγματωμένο μοντέλο, με δύο ομόκεντρους κύκλους.

Σε όλα τα μοντέλα, το μέγεθος των υπόλοιπων στοιχείων, μακριά από τα CTE και τους ομόκεντρους κύκλους, ήταν 0,5mm, και η κατασκευή αντιμετωπίζεται ως επίπεδη παραμόρφωση (plane strain). Επίσης, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, ο αριθμός των ιδιόμορφων στοιχείων είναι 16. Στον Πίνακα 3 φαίνεται σε κάθε μοντέλο, ο συνολικός αριθμός των στοιχείων και των κόμβων:

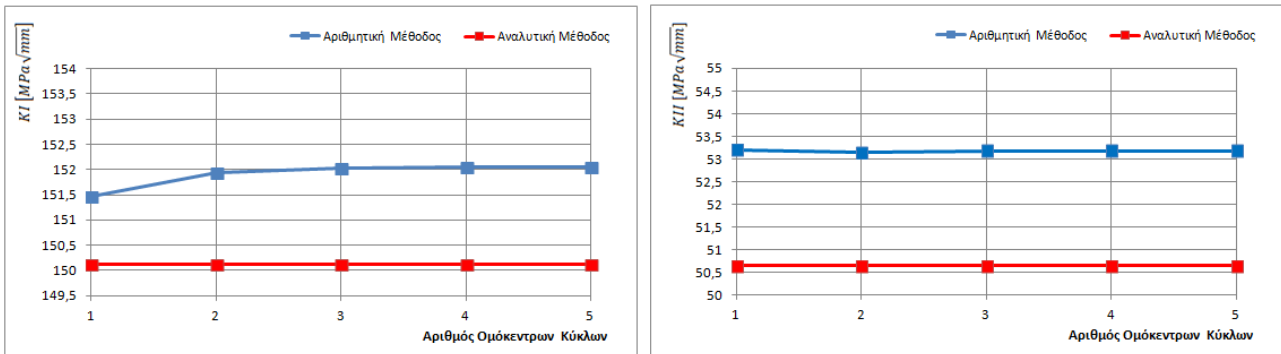
Πίνακας 3 Αριθμός στοιχείων και κόμβων για τα μοντέλα με μέγεθος στοιχείων 0.5 mm

Αριθμός ομόκεντρων κύκλων	Αριθμός Στοιχείων	Αριθμός κόμβων
1	15068	45705
2	15087	45764
3	15068	45715
4	15100	45813
5	15092	45789



Σχήμα 26 Παράδειγμα με δύο ομόκεντρους κύκλους. Αριστερά αφόρτιστο μοντέλο, δεξιά παραμορφωμένο

Στο Σχήμα 27 φαίνονται τα συγκριτικά αποτελέσματα της αναλυτικής και της αριθμητικής μεθόδου, για *mode I* και *mode II*.



Σχήμα 27 Σύγκριση Αναλυτικής και Αριθμητικής μεθόδου για διάφορους ομόκεντρους κύκλους

Γενικά φαίνεται ότι υπάρχει μια σταθερότητα στα αποτελέσματα. Στο *mode I* φαίνεται ότι τα αποτελέσματα συγκλίνουν περισσότερο, με έναν ομόκεντρο κύκλο, ενώ για *mode II* τα αποτελέσματα συγκλίνουν ελαφρώς περισσότερο με δύο ομόκεντρους κύκλους.

Τα αποτελέσματα για K_I και K_{II} , για όλους τους ομόκεντρους κύκλους, παρουσιάζονται σε πινακοποιημένη μορφή, στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4 Αποτελέσματα των K_I και K_{II} για 5 ομόκεντρους κύκλους

Ομόκεντροι Κύκλοι	K_I [MPa√mm]	K_{II} [MPa√mm]
1	151.479	53.192
2	151.9472	53.138
3	152.0338	53.182
4	152.0549	53.177
5	152.0454	53.185

Στον Πίνακα 5 και Πίνακα 6 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα, καθώς επίσης και η απόκλισή τους, από την αναλυτική μέθοδο.

Η μελέτη της διάδοσης της ρωγμής, θα γίνει, με έναν ομόκεντρο κύκλο, ο οποίος θα προχωράει μαζί με τα CTE καθ' όλη την ανάπτυξη της ρωγμής.

Πίνακας 5 Απόκλιση της αριθμητικής τιμής από την αναλυτική για KI

Ομόκεντροι Κύκλοι	Αναλυτική λύση (MPa \sqrt{mm})	Αριθμητική λύση (MPa \sqrt{mm})	Σφάλμα (%)
1	150.1269	151.479	0.900
2	150.1269	151.9472	1.213
3	150.1269	152.0338	1.270
4	150.1269	152.0549	1.284
5	150.1269	152.0454	1.278

Πίνακας 6 Απόκλιση της αριθμητικής τιμής από την αναλυτική για KII

Ομόκεντροι Κύκλοι	Αναλυτική λύση (MPa \sqrt{mm})	Αριθμητική λύση (MPa \sqrt{mm})	Σφάλμα (%)
1	50.644	53.192	5,031
2	50.644	53.138	4,924
3	50.644	53.182	5,011
4	50.644	53.177	5,001
5	50.644	53.185	5,017

Συνεπώς για *mode I* και *II* το σφάλμα είναι 0.900% και 4,924% αντίστοιχα.

6.1.2 Υπολογισμός των SIF με αλλαγή του μεγέθους των στοιχείων της κατασκευής.

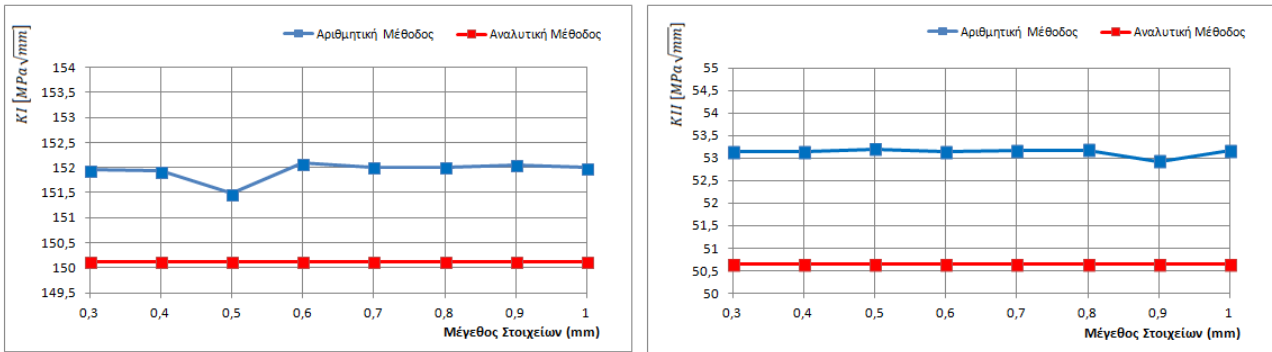
Έχοντας μελετήσει την επίδραση της μεταβολής του κανάβου πολύ κοντά στην αιχμή της ρωγμής, σε αυτή την παράγραφο, θα μελετηθεί πόσο μεταβάλλονται τα KI και KII με την αλλαγή του μεγέθους των στοιχείων στο σύνολο της κατασκευής, μακριά από τα ιδιόμορφα στοιχεία (Global mesh size).

Για να μελετηθεί η μεταβολή των SIF έχει χρησιμοποιηθεί το μοντέλου που περιγράφεται στον Πίνακα 1. Έχουν δημιουργηθεί 8 μοντέλα με έναν ομόκεντρο κύκλο. Το μέγεθος των στοιχείων μακριά από τα ιδιόμορφα στοιχεία, στο πρώτο μοντέλο είναι 0.3mm, και σε κάθε ένα επόμενο μοντέλο, το μέγεθος των στοιχείων αυξάνεται κατά 0.1mm. Συνεπώς το πρώτο μοντέλο έχει μέγεθος στοιχείων 0.3mm και το τελευταίο έχει 1.0mm. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για KI και KII, για κάθε περίπτωση μεγέθους στοιχείων.

Πίνακας 7 Συγκριτικά αποτελέσματα KI και KII με μεταβολή του μεγέθους των Πεπερασμένων Στοιχείων

Mesh Size (mm)	Αριθμός Στοιχείων	KI ($MPa\sqrt{mm}$)	% Απόκλιση	KII ($MPa\sqrt{mm}$)	% Απόκλιση
0.3	15068	151.960	1.221	53.137	4.922
0.4	10553	151.932	1.202	53.133	4.914
0.5	7750	151.479	0.900	53.192	5.031
0.6	5984	152.087	1.305	53.139	4.926
0.7	4763	152.011	1.255	53.159	4.966
0.8	3958	152.013	1.256	53.168	4.984
0.9	3037	152.054	1.283	52.928	4.509
1.0	2696	152.003	1.249	53.166	4.979

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 7 φαίνονται πιο καθαρά στα διαγράμματα του Σχήμα 28.



Σχήμα 28 Σύγκριση Αναλυτικής και Αριθμητικής μεθόδου για διάφορους μεγέθη στοιχείων

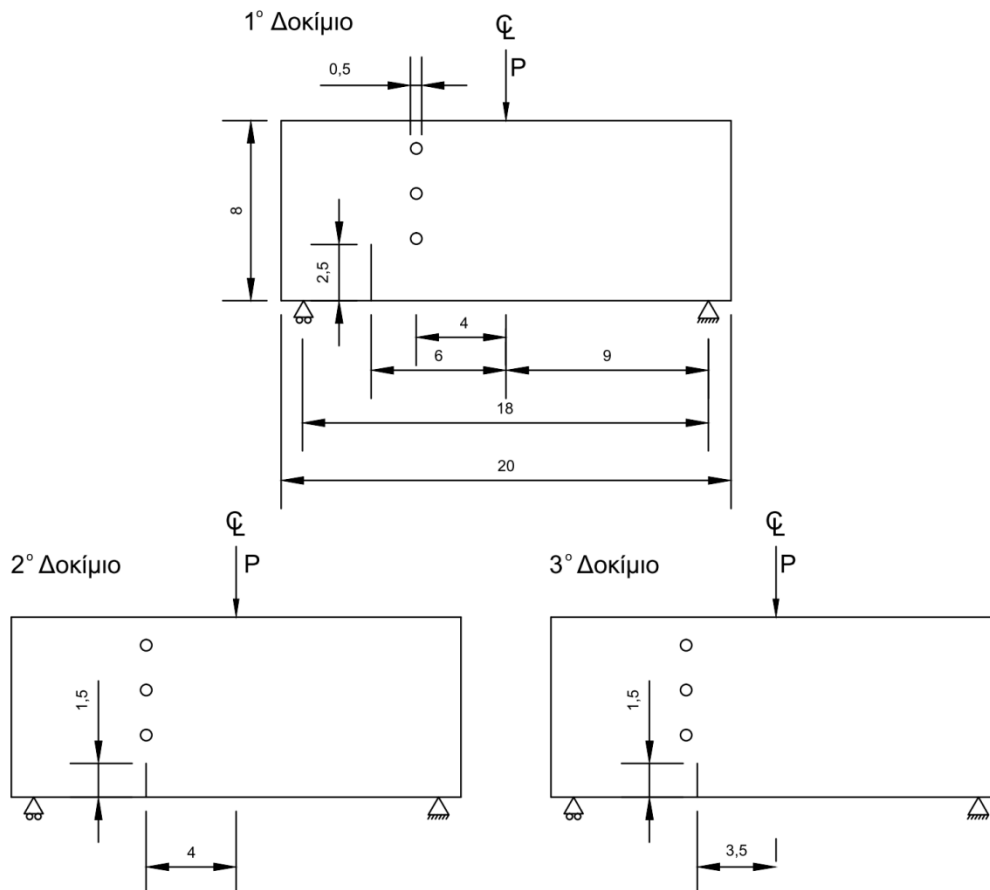
Παρατηρώντας τον Πίνακα 7 και το Σχήμα 28 συμπεραίνουμε ότι μεταβάλλοντας το μέγεθος των στοιχείων της κατασκευής μακριά από τα ιδιόμορφα στοιχεία, μεταβάλλονται τα KI και KII. Στο συγκεκριμένο μοντέλο η μεταβολή του μικρότερου από του μεγαλύτερου KI είναι της τάξης του 0.401%, και η αντίστοιχη μεταβολή στο KII είναι της τάξης του 0.499%.

Όσον αφορά το KI η ελάχιστη απόκλιση από την αναλυτική μέθοδο, είναι όταν το μέγεθος των στοιχείων μακριά από τα ιδιόμορφα στοιχεία είναι 0.5mm, ενώ για το KII, η μικρότερη απόκλιση, είναι όταν το μέγεθος των στοιχείων είναι 0.9mm.

6.2 Διάδοση ρωγμής.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η διάδοση ρωγμής σε πλάκα, όπως την δημιούργησε ο κώδικας σε συνεργασία με το Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP. Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, για την γωνία που διαδίδεται η ρωγμή, έχει χρησιμοποιηθεί το κριτήριο των Erdogan-Sih [7]. Επίσης για τον υπολογισμό του ισοδύναμου συντελεστή Ένταση Τάσεων έχει χρησιμοποιηθεί το κριτήριο του Richard [12].

Για την επαλήθευση της πορείας της ρωγμής, έχουν χρησιμοποιηθεί ρηγματωμένα δοκίμια. Τα αποτελέσματα έχουν εξαχθεί από μια σειρά από πειραματικές διαδικασίες από το Cornell University [14]. Θα γίνει σύγκριση τριών διαφορετικών περιπτώσεων. Και στις τρεις περιπτώσεις, το υλικό (το οποίο είναι Plexiglas), καθώς επίσης και οι βασικές διαστάσεις των δοκιμών είναι ίδιες, με την διαφορά ότι αλλάζει κάθε φορά το μήκος και η θέση της ρωγμής (Σχήμα 29). Επίσης πρέπει να αναφερθεί, ότι όλα τα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της διάδοσης της ρωγμής έχουν χρησιμοποιηθεί από Αμερικάνικο Πανεπιστήμιο, συνεπώς όλες οι μονάδες είναι σε Αγγλοσαξονικό σύστημα.



Σχήμα 29 Δοκίμια από πειραματική διαδικασία

Οι βασικές διαστάσεις (σε ίντσες) φαίνονται στο Σχήμα 29. Παρακάτω δίδονται οι υπόλοιπες απαραίτητες τιμές:

- $P = 1326 \text{ lb}$
- E (μέτρο ελαστικότητας) = 474000 psi
- $\nu = 0.3$

6.2.1 Μελέτη διάδοσης ρωγμής 1^{ου} Μοντέλου.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 29 σε όλα τα δοκίμια, στην δεξιά κάτω γωνία στις δοκούς υπάρχει μια στήριξη, ενώ στην κάτω αριστερή γωνία υπάρχει μία κύλιση. Ασφαλώς δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν στα πεπερασμένα στοιχεία ακριβώς οι ίδιες οριακές συνθήκες, διότι στο συγκεκριμένο μοντέλο, αν εφαρμοστούν οι στηρίξεις στους κάτω ακραίους κόμβους, αυτό σημαίνει ότι τοπικά θα αναπτυχθούν πολύ υψηλές τάσεις, θα διαταραχθεί σημαντικά το τασικό πεδίο, και αυτό θα επηρεάσει το μοντέλο σε σχετικά μεγάλη έκταση. Στο Σχήμα 30 βλέπουμε το τροποποιημένο μοντέλο, όσον αφορά τις οριακές συνθήκες, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα Πεπερασμένα Στοιχεία. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παρουσιάζονται δύο εναλλακτικοί τρόποι στήριξης. Θα παρουσιαστούν και θα συγκριθούν τα αποτελέσματα και από τις δύο εναλλακτικές στηρίξεις.

Ο πρώτος τρόπος στήριξης, όπως φαίνεται παρακάτω, επιτρέπει την μετακίνηση των πλευρικών ινών της δοκού κατά τον άξονα x . Επίσης η κάτω δεξιά γωνία είναι δεσμευμένη και κατά τον άξονα y . Με αυτόν το τρόπο γίνεται προσπάθεια να εξομοιωθεί η κύλιση και η στήριξη. Ασφαλώς αυτός ο τρόπος στήριξης εμπεριέχει κάποιο σφάλμα, διότι με αυτό τον τρόπο, κατά την κάμψη της δοκού, δεν επιτρέπονται στους κόμβους οι οποίοι βρίσκονται στις πλευρικές ίνες να μετακινηθούν κατά τον y άξονα.

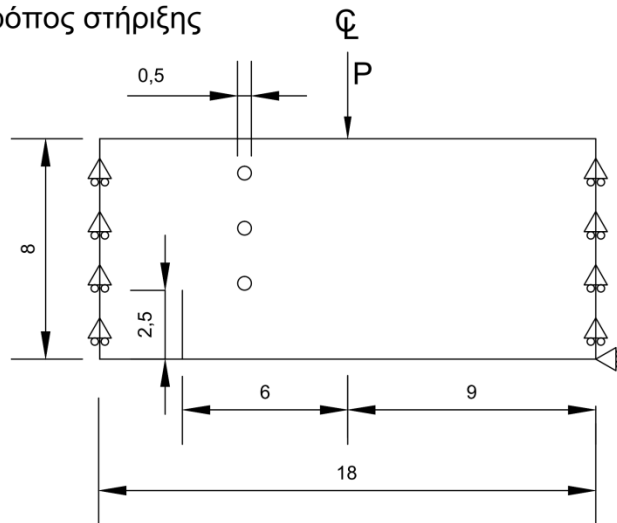
Στον δεύτερο τρόπο στήριξης, γίνεται καλύτερη εξομοίωση της συμπεριφοράς της δοκού κατά την κάμψη. Δεν είναι ακριβής, αλλά είναι σχετικά ακριβέστερη από τον πρώτο τρόπο στήριξης.

Ένα άλλο σφάλμα, το οποίο ισχύει και για τους δύο τρόπους στήριξης, είναι ο τρόπος εφαρμογής του φορτίου. Το φορτίο δεν μπορεί να εφαρμοστεί κανονικά σε έναν κόμβο, για τους ίδιους ακριβώς λόγους που περιγράφηκαν και για τις στηρίξεις. Όμως, για να εφαρμοστεί το φορτίο με άλλον τρόπο, ώστε να μην υπάρξει τοπικά εσφαλμένα υπερβολική συγκέντρωση τάσεων, θα έπρεπε να έχουμε πληροφορίες για το ίδιο το μηχάνημα που χρησιμοποιήθηκε στο πείραμα. Έτσι, θα μπορούσε να απλωθεί το φορτίο σε τόση έκταση, όση το μέγεθος του εξαρτήματος που ερχότανε σε επαφή με το δοκίμιο, που μέσω αυτού εφαρμοζότανε η πίεση. Ελλείψει πληροφοριών για το μηχάνημα έκανε αδύνατη αυτή την προσέγγιση. Ένας άλλος τρόπος εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου, είναι η μετατροπή του σε κατανεμημένο, ώστε να μοιραστεί η δύναμη σε πολλούς κόμβους. Αυτό μπορεί να γίνει, υπολογίζοντας την καμπτική

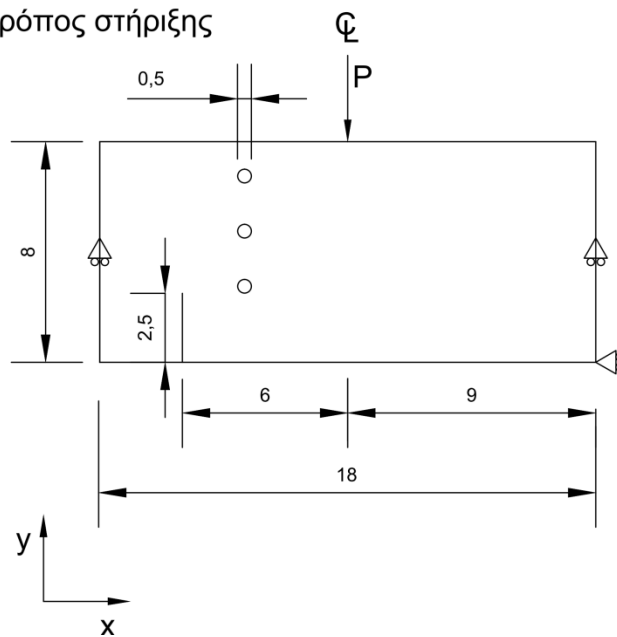
ροπή σε κάθε σημείο της δοκού, και εν συνεχεία την εύρεση των τάσεων στα αντίστοιχα σημεία της δοκού. Τελικά, η εφαρμογή της δύναμης έγινε σε ένα σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 30.

Όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω περί σφαλμάτων, θα εφαρμοστούν σε όλα τα δοκίμια που θα μελετηθούν.

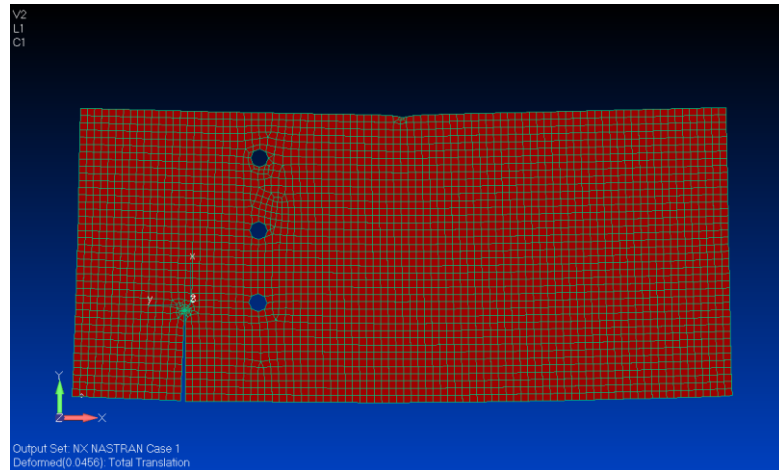
1^{ος} Τρόπος στήριξης



2^{ος} Τρόπος στήριξης

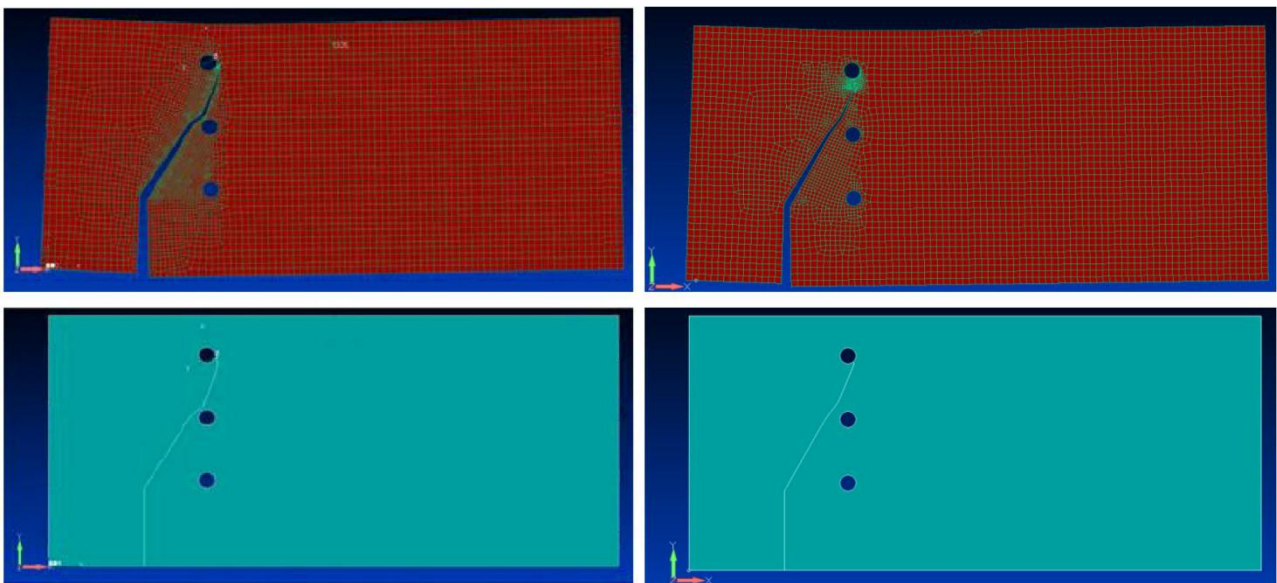


Σχήμα 30 Τροποποιημένες οριακές συνθήκες



Σχήμα 31 Το 1^ο δοκίμιο του Σχήματος 28, μοντελοποιημένο στο FEMAP.

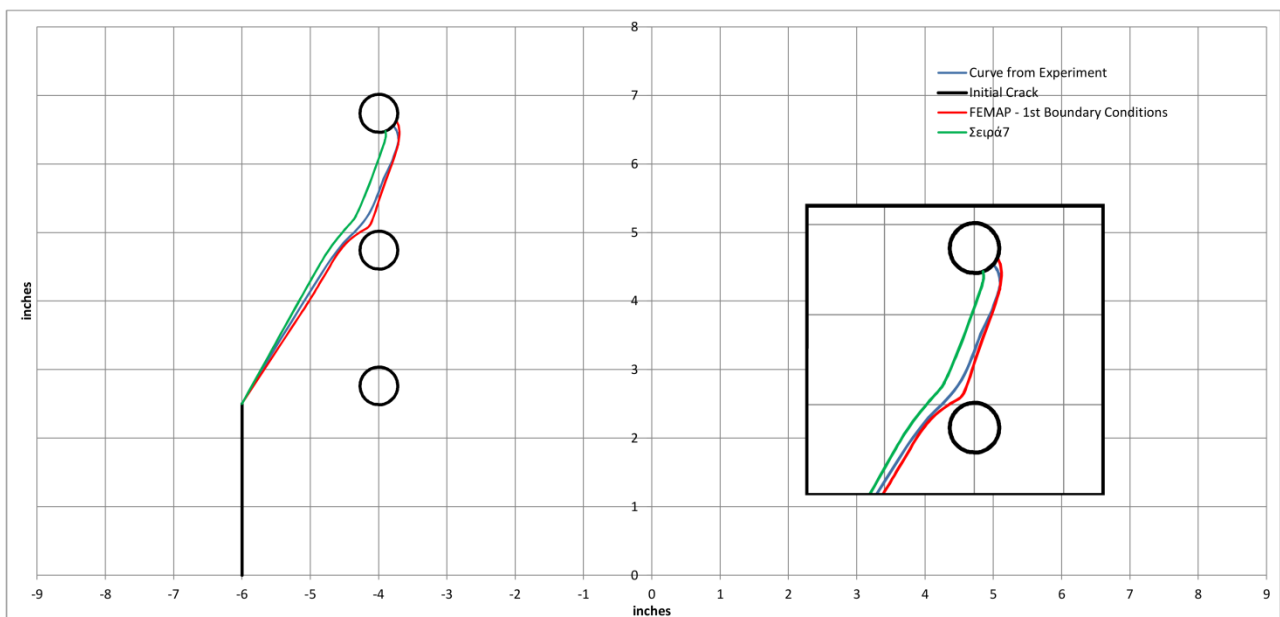
Στο Σχήμα 31 έχει μοντελοποιηθεί στο FEMAP η πλάκα του Σχήματος 30. Το μοντέλο αποτελείται από 3655 στοιχεία, από τα οποία τα 16 είναι ιδιόμορφα.



Σχήμα 32 Αποτελέσματα της διάδοσης στο FEMAP (1^ο Δοκίμιο). Αριστερά ο 1^{ος} τρόπος στήριξης-δεξιά ο 2^{ος} τρόπος στήριξης.

Στο Σχήμα 32 παρουσιάζεται η πορεία της διάδοσης της ρωγμής του 1^{ου} δοκιμίου.

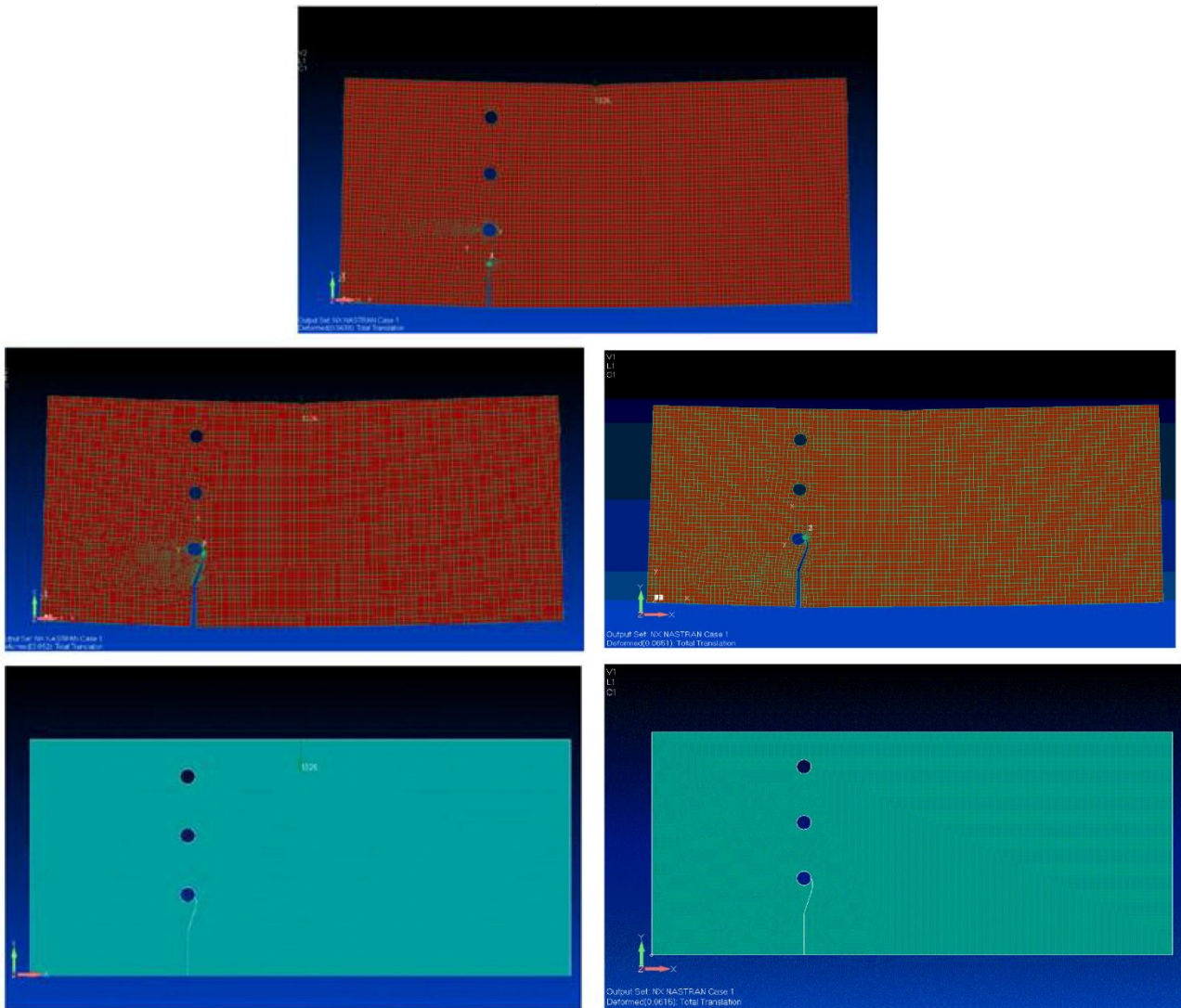
Παρακάτω, στο Σχήμα 33 μπορούμε να δούμε σε διάγραμμα, συγκριτικά, την πορεία της ρωγμής της πειραματικής διαδικασίας με την πορεία της ρωγμής από το FEMAP για τους δύο τρόπους στήριξης. Στο Σχήμα 33 η πορεία της ρωγμής με τον 1^ο τρόπο στήριξης, σε ένα μεγάλο μέρος της διάδοσης μπορούμε να πούμε πως είναι πανομοιότυπη με αυτή του πειράματος. Πλησίασε λίγο παραπάνω στην μεσαία οπή, αλλά σε γενικές γραμμές η πορεία αυτής της ρωγμής με αυτή του πειράματος, είναι πάρα πολύ κοντά. Στο ίδιο σχήμα, η ρωγμή που δημιουργήθηκε με τον 2^ο τρόπο στήριξης, μέχρι ένα σημείο φαίνεται πως είναι όμοια με αυτή του πειράματος. Περίπου στο ύψος της μεσαίας οπής, η ρωγμή από το FEMAP ξέφυγε λίγο, και δεν πλησίασε τόσο κοντά στην οπή, όσο η ρωγμή του πειράματος. Από αυτό το σημείο και μετά, απέκτησε μια μικρή απόκλιση. Σε γενικές γραμμές η διάδοση των δύο ρωγμών κι εδώ θεωρείται αρκετά κοντά. Στον 1^ο τρόπο στήριξης, τα αποτελέσματα της διάδοσης από το FEMAP έχουν μικρότερη απόκλιση από την πειραματική, σε σχέση με τον 2^ο τρόπο στήριξης.



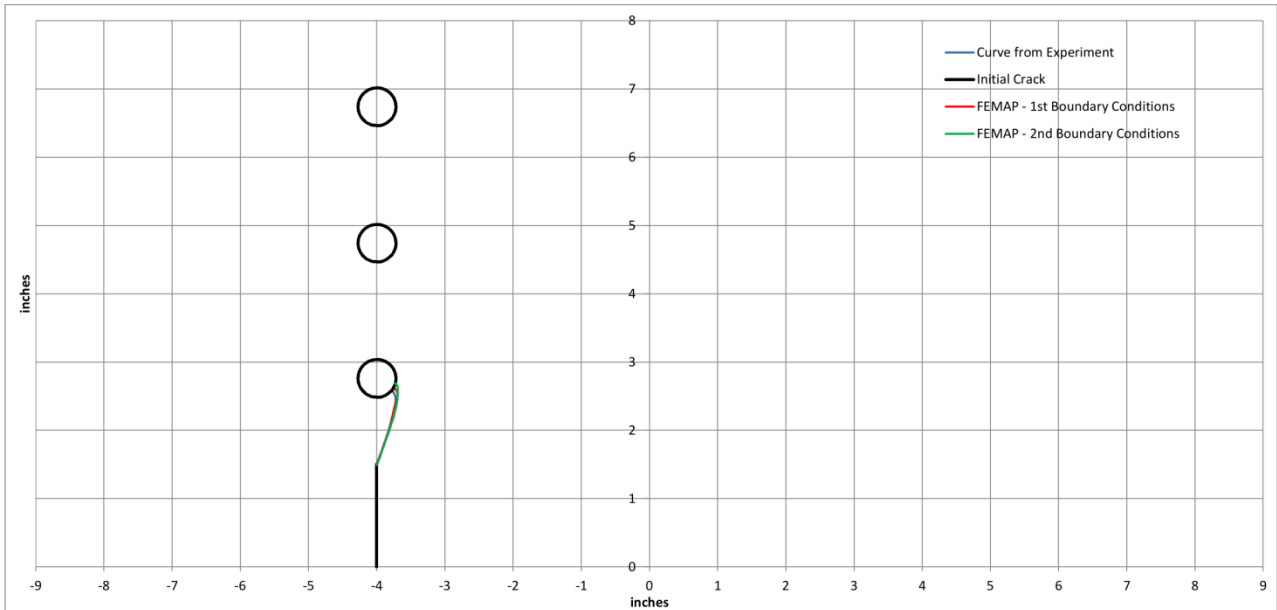
Σχήμα 33 Σύγκριση τελικής ρωγμής του 1^{ου} δοκιμίου του πειράματος με την ρωγμή από το FEMAP με τον 1^ο και 2^ο τρόπο στήριξης.

6.2.2 Μελέτη διάδοσης ρωγμής 2^{ου} Μοντέλου.

Στο Σχήμα 34 φαίνεται το 2^ο δοκίμιο μοντελοποιημένο στο FEMAP το οποίο πριν από την διάδοση αποτελούταν από 6425 στοιχεία. Από πάνω προς τα κάτω παρουσιάζεται το δοκίμιο στην αρχική ρηγματωμένη μορφή, και στο τέλος της διάδοσης της ρωγμής.

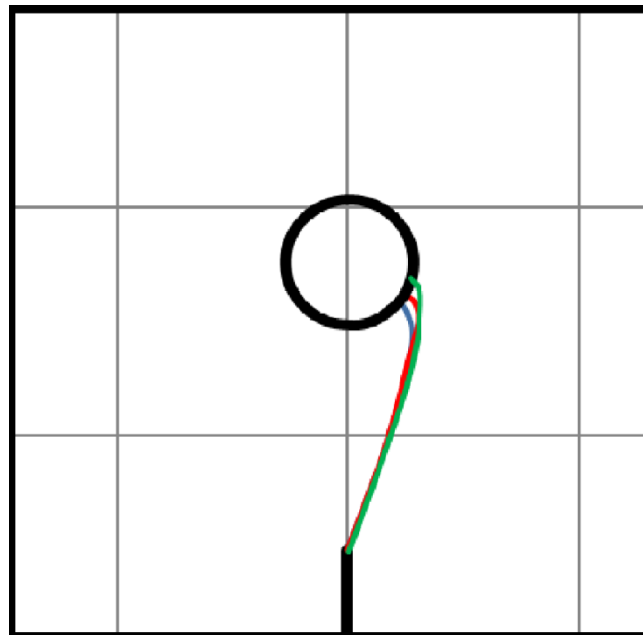


Σχήμα 34 Αποτέλεσμα της διάδοσης στο FEMAP (2^ο Δοκίμιο). Αριστερά ο 1^{ος} τρόπος στήριξης-δεξιά ο 2^{ος} τρόπος στήριξης.



Σχήμα 35 Σύγκριση τελικής ρωγμής του 2^{ου} δοκιμίου του πειράματος με την ρωγμή από το FEMAP

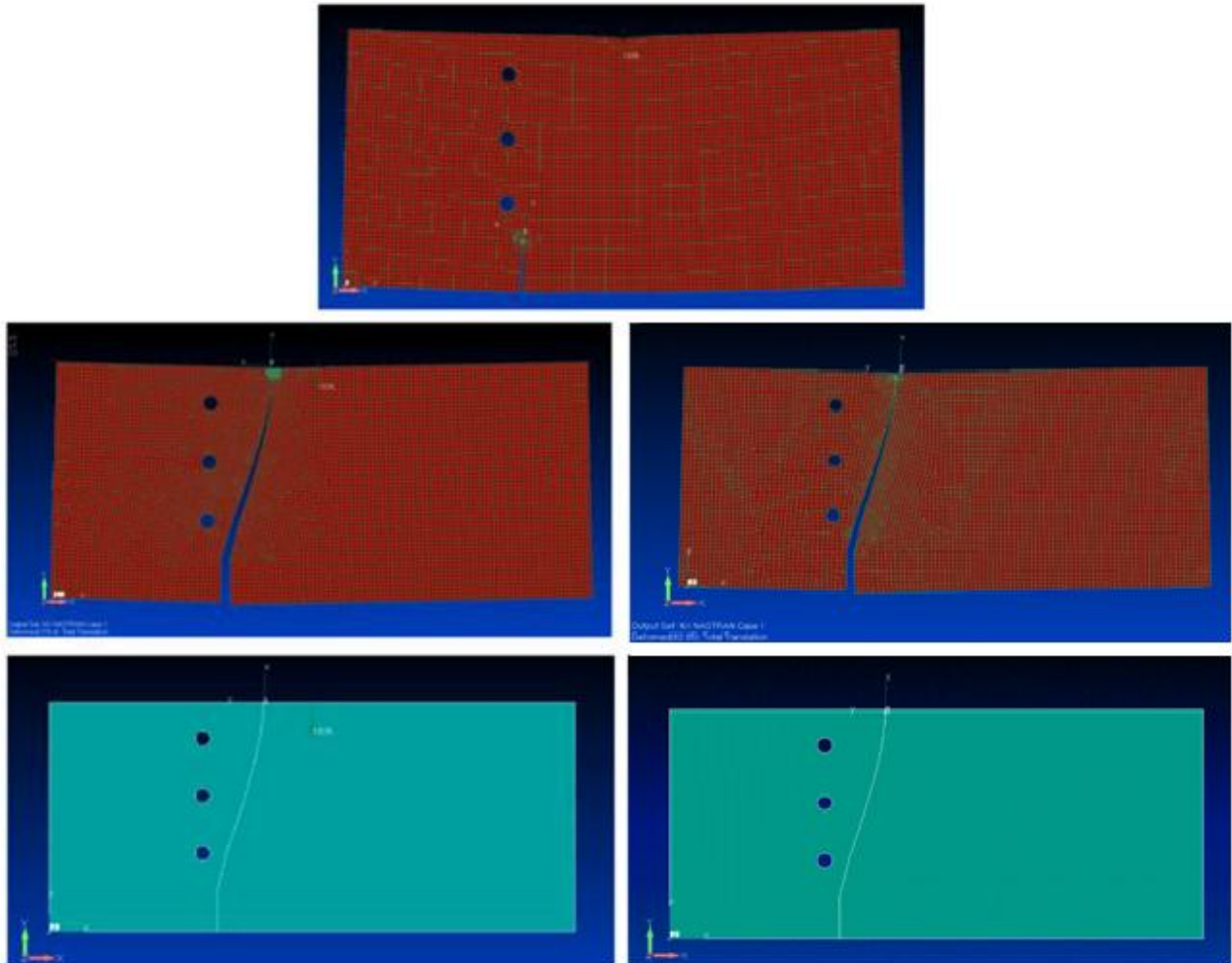
Στο Σχήμα 35 παρουσιάζεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων του 2^{ου} δοκιμίου. Και εδώ φαίνεται πως η διάδοση των ρωγμών είναι πανομοιότυπη, με μικρή απόκλιση στο τέλος της διάδοσης των ρωγμών από το FEMAP. Στο Σχήμα 36 φαίνεται η λεπτομέρεια της διάδοσης κάθε μιας περίπτωσης. Και σε αυτό το δοκίμιο, φαίνεται πως ο 1^{ος} τρόπος στήριξης, έχει ελάχιστα μικρότερο σφάλμα, σε σχέση με τον 2^ο τρόπο στήριξης.



Σχήμα 36 Λεπτομέρεια της διάδοσης της ρωγμής του 2^{ου} δοκιμίου

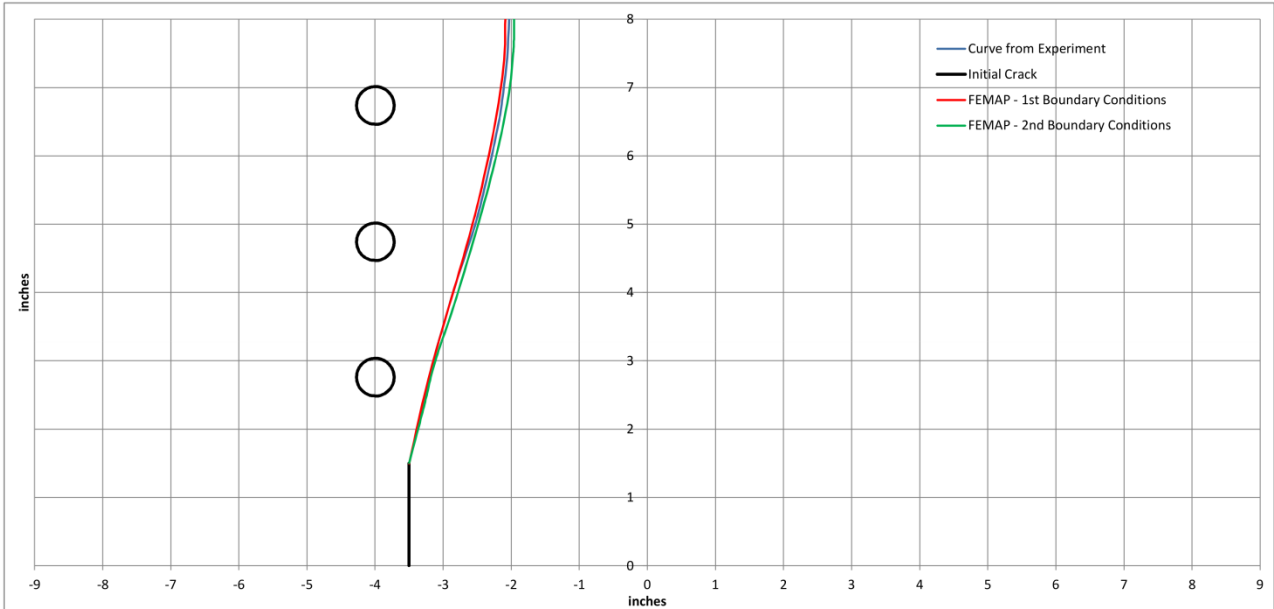
6.2.3 Μελέτη διάδοσης ρωγμής 3^{ου} Μοντέλου.

Στο Σχήμα 37 φαίνεται το 3^ο δοκίμιο μοντελοποιημένο στο FEMAP που πριν την διάδοση αποτελούταν από 6437 στοιχεία.

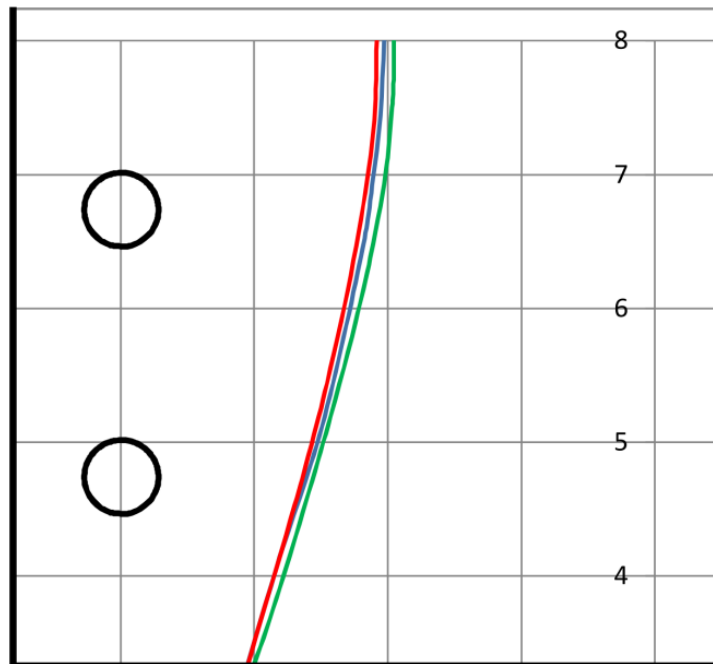


Σχήμα 37 Αποτέλεσμα της διάδοσης στο FEMAP (3^ο Δοκίμιο). Αριστερά ο 1^{ος} τρόπος στήριξης-δεξιά ο 2^{ος} τρόπος στήριξης.

Στο Σχήμα 38 παρουσιάζεται η σύγκριση της διάδοσης της ρωγμής του 3^{ου} πειραματικού δοκιμίου με την διάδοση που δημιούργησε το FEMAP. Παρατηρώντας τις τροχιές, οι ρωγμές των δυο τρόπων στήριξης, έχουν σχετικά μικρή απόκλιση από την πειραματική. Στο Σχήμα 39 φαίνεται καθαρότερα η απόκλιση της διάδοσης των ρωγμών. Όπως στα προηγούμενα δοκίμια, έτσι και σε αυτό, η διάδοση της ρωγμής με τον 1^{ος} τρόπο στήριξης, έχει μικρότερη απόκλιση από την αντίστοιχη του 2^{ου} τρόπου στήριξης.



Σχήμα 38 Σύγκριση τελικής ρωγμής του 3^{ου} δοκιμίου του πειράματος με την ρωγμή από το FEMAP



Σχήμα 39 Λεπτομέρεια της διάδοσης της ρωγμής του 3^{ου} δοκιμίου

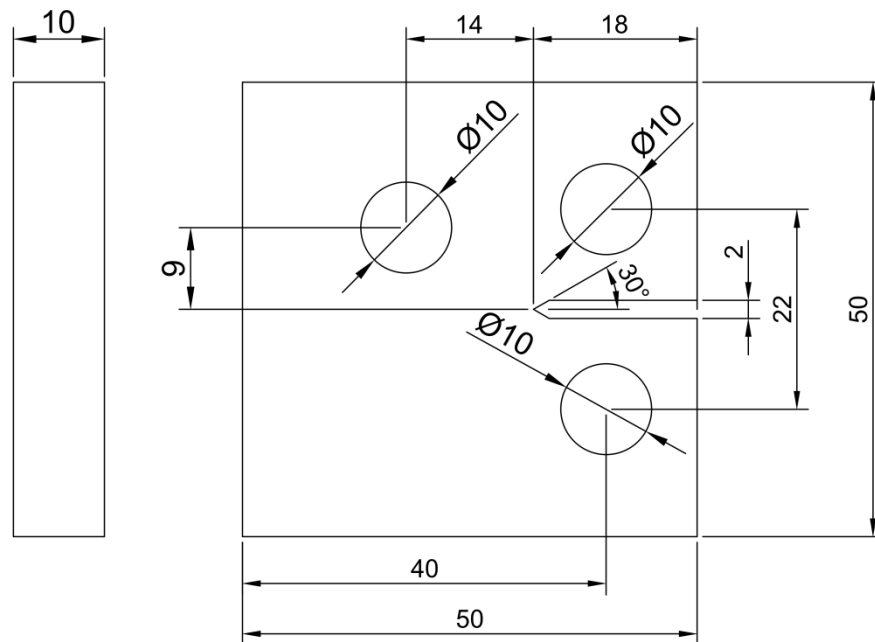
Σε αυτό το σημείο έχει ολοκληρωθεί η σύγκριση της διάδοσης των ρωγμών τριών δοκιμίων από ισάριθμες πειραματικές διαδικασίες, με τις αντίστοιχες ρωγμές που δημιούργησε ο κώδικας σε συνεργασία με το FEMAP. Κάθε δοκίμιο ελέγχθηκε με συγκεκριμένη φόρτιση, και με δύο διαφορετικούς τρόπους στήριξης, γνωρίζοντας εξ αρχής ότι υπήρχαν σφάλματα, τα οποία περιγράφηκαν.

Ο πρώτος τρόπος στήριξης, εμπεριέχει δύο σφάλματα. Ένα στην στήριξη και ένα στην φόρτιση. Φαίνεται πως, συνδυαστικά αυτά τα σφάλματα, επιβάλλουν στο μοντέλο να συμπεριφερθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε τα αποτελέσματα της διάδοσης σε όλα τα δοκίμια, να είναι πάρα πολύ κοντά με τα αντίστοιχα από τις πειραματικές διαδικασίες.

Ο δεύτερος τρόπος στήριξης έχει το ίδιο σφάλμα στην φόρτιση με τον πρώτο τρόπο, και ένα μικρότερο σφάλμα στην στήριξη. Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα στην φόρτιση, είναι αρκετό να δημιουργήσει απόκλιση των πειραματικών αποτελεσμάτων με αυτά του FEMAP. Η απόκλιση αυτή είναι μικρή, αλλά όχι τόσο μικρή όσο αυτή με τον πρώτο τρόπο στήριξης.

7 Κόπωση – Εκτίμηση χρόνου ζωής και σύγκριση με πειραματική διαδικασία.

Στο κεφάλαιο 5 έγινε μια σύντομη περιγραφή του φαινομένου της κόπωσης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει προσπάθεια να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα των κύκλων φόρτισης που μας δίνει ο κώδικας, χρησιμοποιώντας το μοντέλο και τα αποτελέσματα, από πειραματική διαδικασία [15]. Στο Σχήμα 40 παρουσιάζονται οι βασικές διαστάσεις του μοντέλου της πειραματικής διαδικασίας που χρησιμοποιήθηκε. Πρέπει να σημειωθεί, ότι στο πείραμα αναφέρεται, ότι το μήκος της αρχικής ρωγμής ήταν 10.5mm και σε όλη την διαδικασία μέχρι την τελική της μορφή, ακολουθήθηκε η διαδικασία που περιγράφεται στο ASTM E647-08.



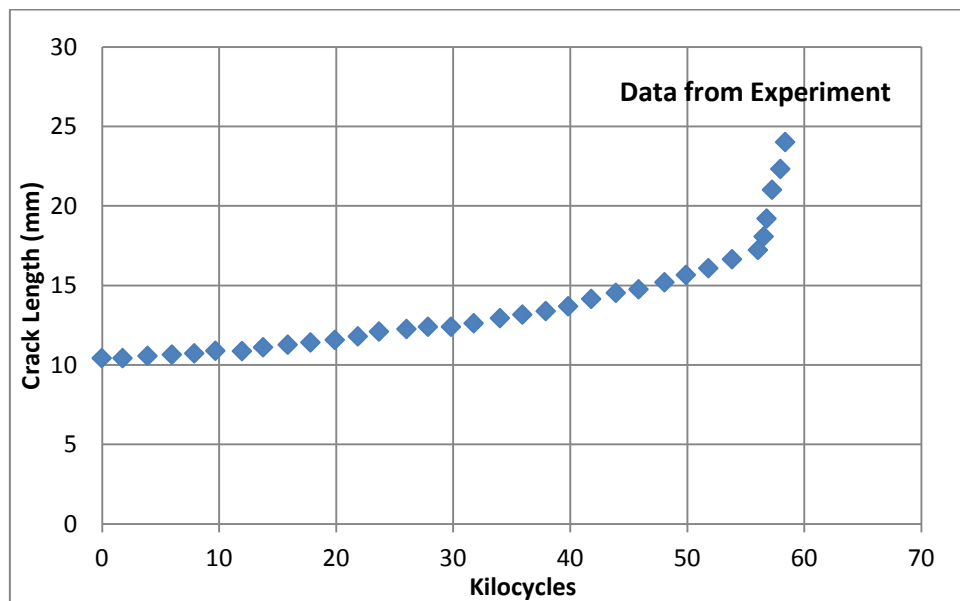
Σχήμα 40 Μοντέλο για την εκτίμηση του χρόνου ζωής από πειραματική διαδικασία

Εκτός από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που φαίνονται στο Σχήμα 40, τα χαρακτηριστικά του υλικού αλλά και τα υπόλοιπα απαραίτητα δεδομένα αναγράφονται παρακάτω:

- $E = 71,7 \text{ GPa}$
- $K_{th} = 0.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
- $K_{IC} = 96 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$
- $\sigma_{yield} = 470 \text{ MPa}$
- $P = 4000 \text{ N}$
- $R \text{ ratio} = 0.05$
- Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης (plane strain)

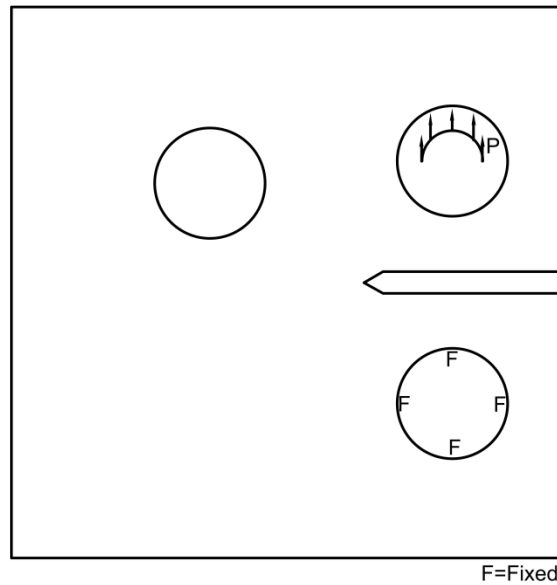
7.1 Διάδοση ρωγμής και υπολογισμός των κύκλων φόρτισης.

Πρέπει να σημειωθεί πως ο R ratio, είναι πολύ μικρός και δεν θα ληφθεί υπόψη. Θα αμεληθεί. Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 41) φαίνονται τα αποτελέσματα του πειράματος για το συγκεκριμένο δοκίμιο. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, το αρχικό μήκος ήταν περίπου 10.5mm. Το πείραμα έληξε τελικά, όταν η ρωγμή ήταν λίγο κάτω από τα 25 mm, αφού εφαρμόστηκαν λίγο πάνω από 58000 κύκλοι φόρτισης [15].



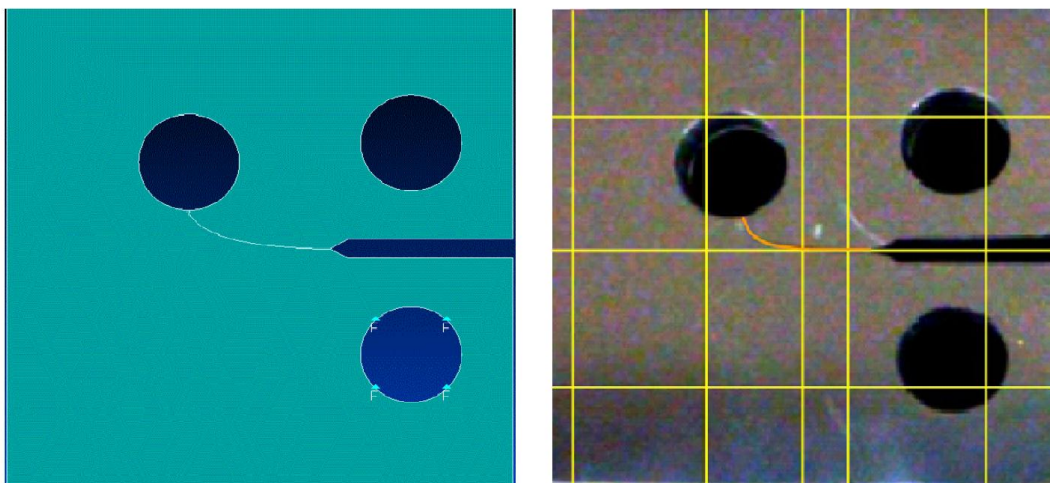
Σχήμα 41 Αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας.

Έχοντας όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να γίνει η μοντελοποίηση και η αρχική μελέτη για την πορεία της διάδοσης όπως έγινε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, δημιουργήθηκε μοντέλο στο FEMAP. Το μοντέλο αρχικά αποτελούταν από 3536 στοιχεία. Η στήριξη και φόρτιση του μοντέλου, φαίνεται στο Σχήμα 42:

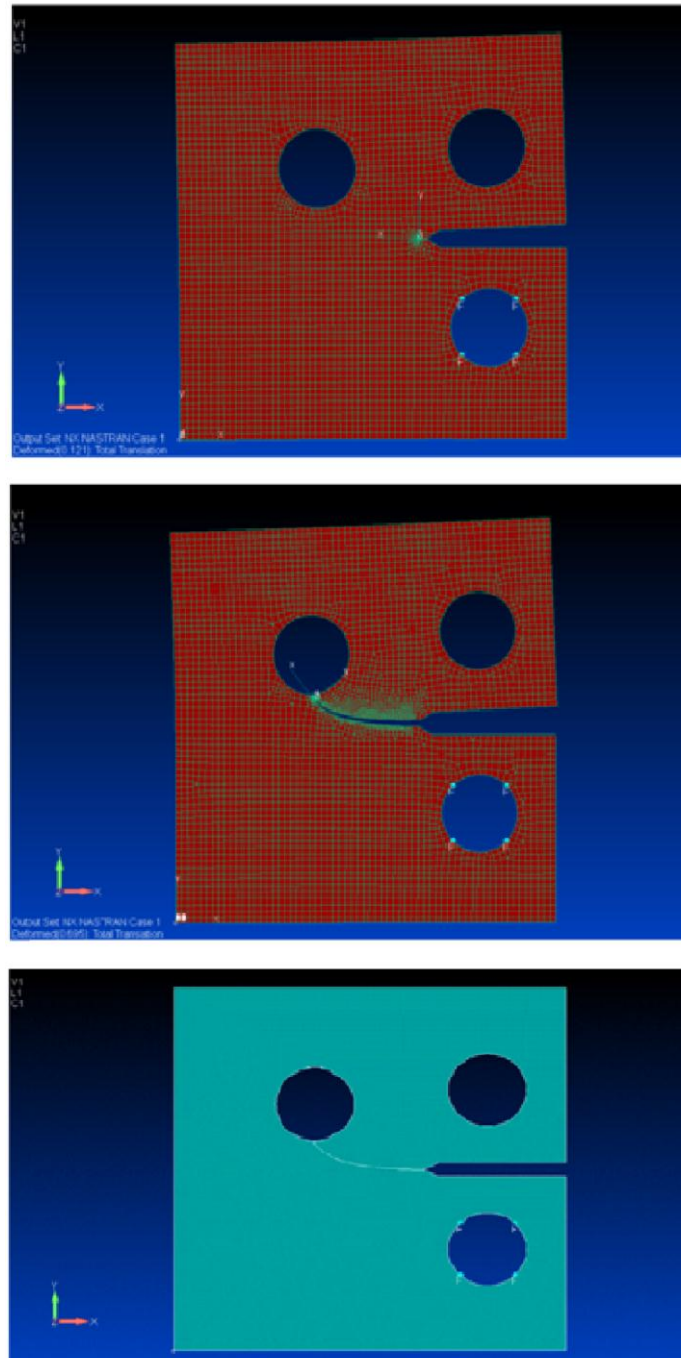


Σχήμα 42 Τρόπος στήριξης και φόρτισης του μοντέλου

Στο Σχήμα 43 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της διάδοσης που δημιουργήθηκε από το FEMAP (αριστερά) καθώς επίσης και το αποτέλεσμα του πειράματος (δεξιά). Παρατηρώντας τις δύο εικόνες, βλέπουμε ότι η τροχιά των δυο ρωγμών είναι παρόμοια. Η διαφορά είναι πως στο FEMAP η ρωγμή κατέληξε στην αριστερή οπή, λίγο πιο αριστερά από ότι στο πείραμα. Υπάρχει μια μικρή απόκλιση. Στο Σχήμα 44 φαίνεται η αρχή και το τέλος της διάδοσης όπως έγινε στο FEMAP.



Σχήμα 43 Συγκριτικά αποτελέσματα της διάδοσης από το FEMAP σε σχέση με το πείραμα



Σχήμα 44 Αρχή και τέλος της διάδοσης

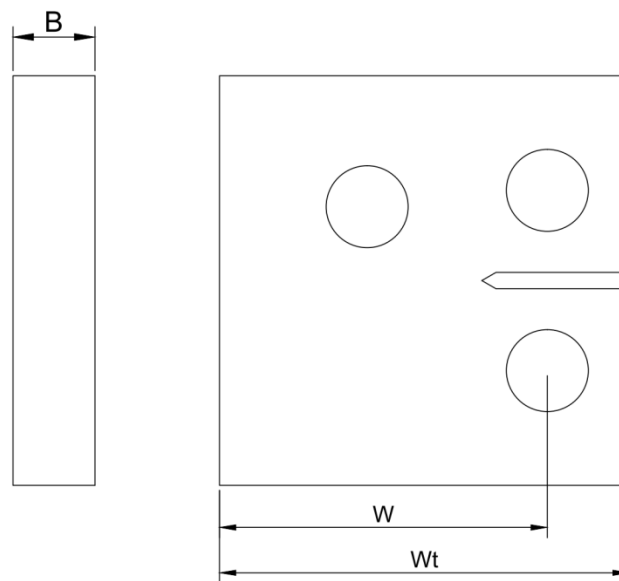
Στην συνέχεια έπρεπε να υπολογιστούν οι κύκλοι φόρτισης που εφαρμόστηκαν στην κατασκευή, μέχρι να καταλήξει η ρωγμή στην αριστερή οπή. Αυτό δεν ήταν εφικτό να γίνει κατευθείαν, διότι δεν ήταν γνωστοί οι συντελεστές C και n . Εφόσον είχαμε το διάγραμμα του Σχήμα 41, τότε έπρεπε να πάμε αντίστροφα (reverse engineering). Έπρεπε έχοντας αυτό το διάγραμμα να φτιάξουμε το γνωστό διάγραμμα, da/dN - ΔK .

Αυτό που μας έλειπε αρχικά ήταν ο υπολογισμός του ΔK σε κάθε σημείο της ρωγμής. Υπολογίστηκε με τον αναλυτικό τύπο(7.1) [10].

$$K_I = \frac{P}{b\sqrt{W}} C(\lambda) \quad (7.1)$$

Όπου $\lambda = \frac{a}{W}$ και

$$C(\lambda) = \frac{2 + \lambda}{(1 - \lambda)^{3/2}} (0,886 + 4,64\lambda - 13,32\lambda^2 + 14,72\lambda^3 - 5,6\lambda^4) \quad (7.2)$$



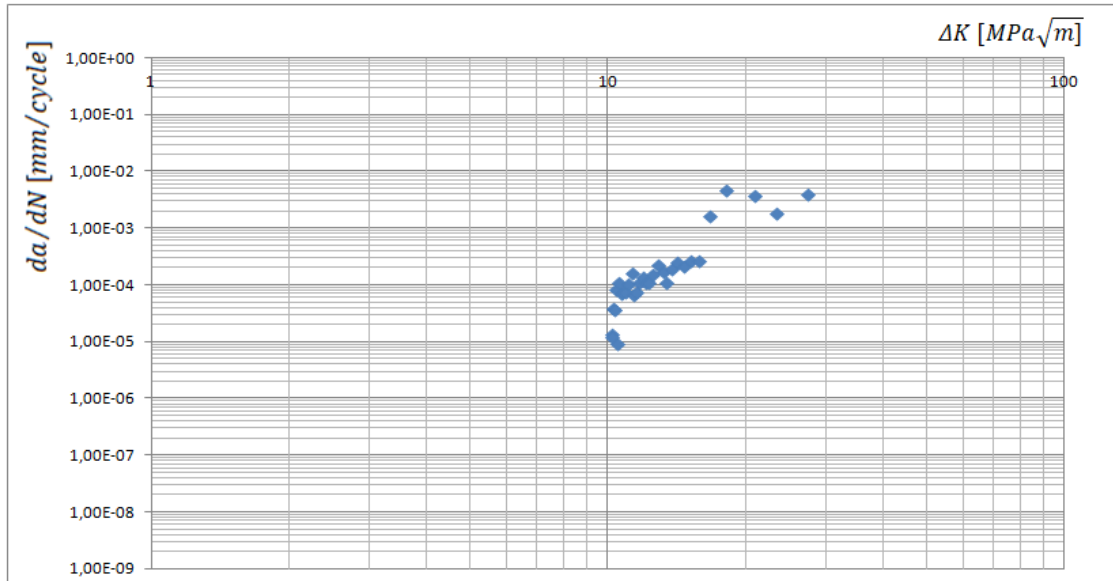
Σχήμα 45 Παρουσίαση των διαστάσεων W και B

Σύμφωνα με την σχέση (7.1), υπολογίστηκε ο Συντελεστής Έντασης Τάσης για κάθε διαφορετικό a , από την αρχή της ρωγμής, δηλαδή για $a = 10,5 \text{ mm}$ έως το τελικό μήκος της ρωγμής. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το R αμελήθηκε. Συνεπώς, ο κάθε SIF που υπολογίστηκε, ισούται με το ΔK (ασφαλώς διαφορετικό για κάθε μήκος ρωγμής). Πρέπει να αναφερθεί, πως όλες οι διαστάσεις της κατασκευής είναι σε χιλιοστά. Κανονικά θα έπρεπε δηλαδή, το ΔK να έχει μονάδες $MPa\sqrt{mm}$. Για τον λόγο του ότι το K_{Ih} και K_{IC} που δίδονται έχουν μονάδες $MPa\sqrt{m}$, υπολογίστηκε αρχικά το $MPa\sqrt{mm}$ και εν συνεχεία μετατράπηκε σε $MPa\sqrt{m}$. Αυτό αναφέρεται, ως επεξήγηση, για τις μονάδες που υπάρχουν στο διάγραμμα του Σχήμα 46. Έτσι λοιπόν δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας 8 Αποτελέσματα υπολογισμού K_I και da/dN

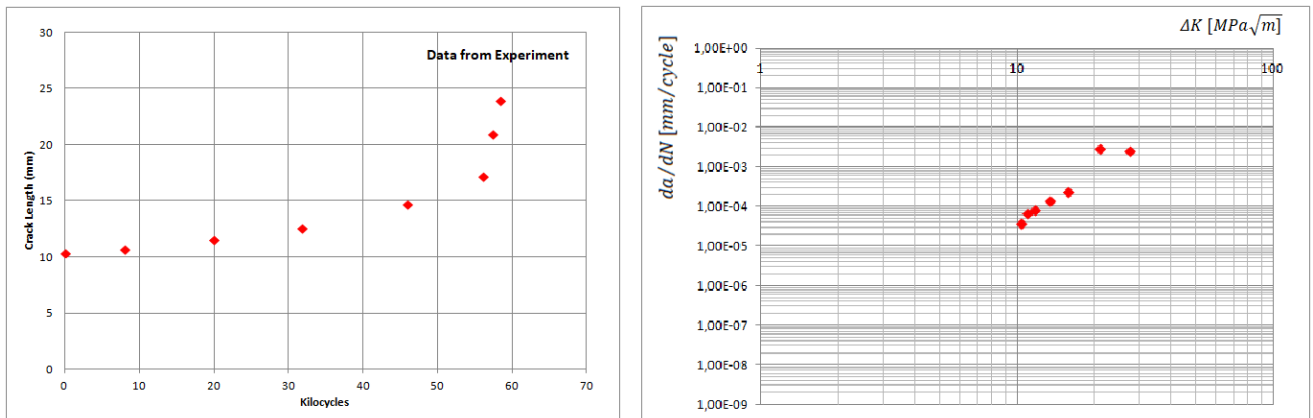
N	a	λ	C(λ)	K_I (MPA(mm) ^{1/2})	K_I (MPA(m) ^{1/2})	da	dN	da/dN
0.00E+00	10.5	0.2625	5.093476	322.1397373	10.18695295	10.5	0.00E+00	0
1.77E+03	10.52541	0.263135	5.102139	322.6875815	10.2042773	0.025412	1.77E+03	1.43E-05
3.89E+03	10.55189	0.263797	5.111174	323.259041	10.22234844	0.026482	2.12E+03	1.25E-05
5.98E+03	10.63676	0.265919	5.140192	325.0942657	10.28038334	0.084866	2.09E+03	4.07E-05
7.91E+03	10.70891	0.267723	5.164935	326.6591969	10.32987081	0.072148	1.93E+03	3.73E-05
9.71E+03	10.86607	0.271652	5.219079	330.0835455	10.43815822	0.157159	1.79E+03	8.77E-05
1.20E+04	10.88707	0.272177	5.22634	330.5427874	10.45268072	0.021001	2.27E+03	9.26E-06
1.38E+04	11.09343	0.277336	5.298025	335.0765202	10.59604994	0.206359	1.79E+03	0.000115
1.59E+04	11.24809	0.281202	5.352165	338.5006389	10.70433008	0.154664	2.11E+03	7.31E-05
1.78E+04	11.39684	0.284921	5.404583	341.8158721	10.80916696	0.148752	1.95E+03	7.62E-05
1.99E+04	11.55853	0.288963	5.461962	345.4448121	10.92392412	0.161687	2.08E+03	7.76E-05
2.19E+04	11.77196	0.294299	5.538371	350.2773072	11.07674104	0.213426	1.95E+03	0.000109
2.37E+04	12.07593	0.301898	5.648581	357.2476219	11.29716174	0.303971	1.81E+03	0.000168
2.60E+04	12.23508	0.305877	5.706971	360.9405132	11.41394121	0.159156	2.36E+03	6.74E-05
2.79E+04	12.37881	0.30947	5.760121	364.3020611	11.52024269	0.143721	1.84E+03	7.83E-05
2.98E+04	12.38679	0.30967	5.763086	364.4895768	11.52617246	0.007985	1.95E+03	4.1E-06
3.18E+04	12.61036	0.315259	5.846633	369.7735686	11.69326695	0.223567	1.95E+03	0.000115
3.40E+04	12.92175	0.323044	5.964781	377.2458592	11.92956153	0.311396	2.24E+03	0.000139
3.59E+04	13.14532	0.328633	6.050954	382.6959534	12.10190864	0.223567	1.93E+03	0.000116
3.79E+04	13.37687	0.334422	6.141463	388.4202277	12.28292609	0.231551	2.00E+03	0.000116
3.98E+04	13.67357	0.341839	6.259411	395.8798932	12.51882143	0.296698	1.90E+03	0.000156
4.18E+04	14.13602	0.3534	6.447995	407.806991	12.89598937	0.462448	1.97E+03	0.000235
4.39E+04	14.51328	0.362832	6.606476	417.8302504	13.21295267	0.37726	2.12E+03	0.000178
4.59E+04	14.73233	0.368308	6.700554	423.780273	13.4011089	0.219054	1.92E+03	0.000114
4.81E+04	15.18261	0.379565	6.899034	436.3332476	13.79806881	0.450278	2.24E+03	0.000201
4.99E+04	15.64506	0.391126	7.110588	449.7130576	14.22117556	0.462448	1.83E+03	0.000253
5.18E+04	16.071	0.401775	7.313	462.514718	14.6259996	0.425939	1.92E+03	0.000222
5.39E+04	16.6308	0.41577	7.591169	480.1077013	15.18233858	0.559805	2.02E+03	0.000277
5.61E+04	17.22712	0.430678	7.904327	499.9135483	15.80865446	0.596314	2.21E+03	0.000269
5.66E+04	18.06563	0.451641	8.378222	529.8852917	16.7564442	0.838513	4.88E+02	0.00172
5.68E+04	19.19245	0.479811	9.088242	574.7908662	18.17648315	1.126822	2.40E+02	0.004687
5.73E+04	21.01039	0.52526	10.46202	661.6764775	20.92404743	1.817939	4.81E+02	0.003781
5.80E+04	22.3175	0.557938	11.68224	738.8499143	23.36448578	1.307114	6.91E+02	0.001891
5.84E+04	24.0121	0.600303	13.67035	864.5891141	27.34070841	1.694597	4.22E+02	0.004012

Έχοντας πλέον τον παραπάνω πίνακα, δημιουργήθηκε το παρακάτω διπλό λογαριθμικό διάγραμμα του πειραματικού μοντέλου:



Σχήμα 46 Διπλό λογαριθμικό διάγραμμα του πειραματικού μοντέλου

Τώρα, από το Σχήμα 41 διαλέχθηκαν 8 σημεία, που περιγράφουν αρκετά καλά την καμπύλη Crack length/Kilocycles του πειράματος. Αυτά τα σημεία εντοπίστηκαν στο διάγραμμα του Σχήματος 46, και από αυτά, με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και την βοήθεια της βιβλιοθήκης του Matlab [16] και το Octave (δωρεάν εναλλακτική του Matlab), έγινε μια προσέγγιση των συντελεστών C και n. Συγκεκριμένα:



Σχήμα 47 Σημεία από τα πειραματικά δεδομένα

Ψάχνουμε την:

$$y = Cx^n \quad 7.3$$

Ή ακόμα καλύτερα

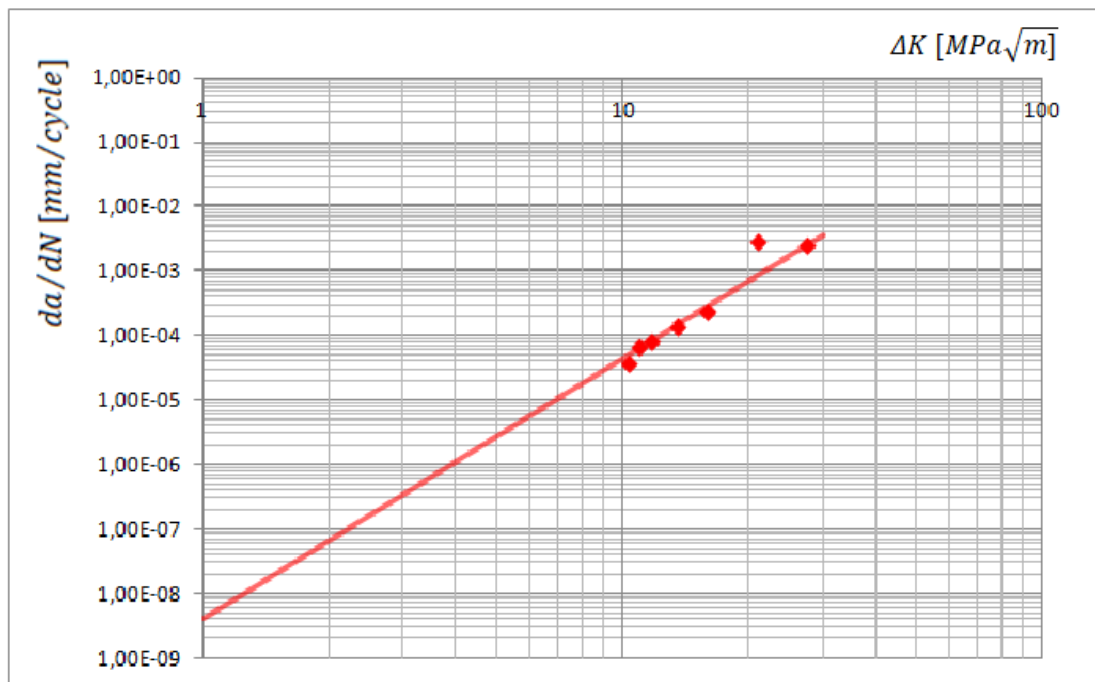
$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^n \quad 7.4$$

```

Octave
File Edit Debug Window Help News
Current Directory: C:\Users\ancha\Downloads
File Browser
Downloads
Name /
1.290098...
1.365690...
6.2006-1...
0013-79...
Workspace
Filter
Name / Cl
C do
KI do
c do
Command History
Filter
For_fatigue
For_fatigue
For_fatigue
For_fatigue
For_fatigue
Command Window Documentation
Editor
File Edit View Debug Run Help
For_fatigue.m
3
4 KI=[1 log10(10.3298708081814);1 log10(10.9239241226818);1 log10(11.6932669542846);1 log10(13.4011089002318)];
5 dadN=[0.0000386082644890318;0.0000707728787225756;0.0000886938790637794;0.000150733601756217;0.000244047619047];
6 ly=log10(dadN);
7 c=inv(KI'*KI)*(KI'*ly);
8 C=10^c(1);
9 n=c(2);
10 %model is y=C*KI^n

```

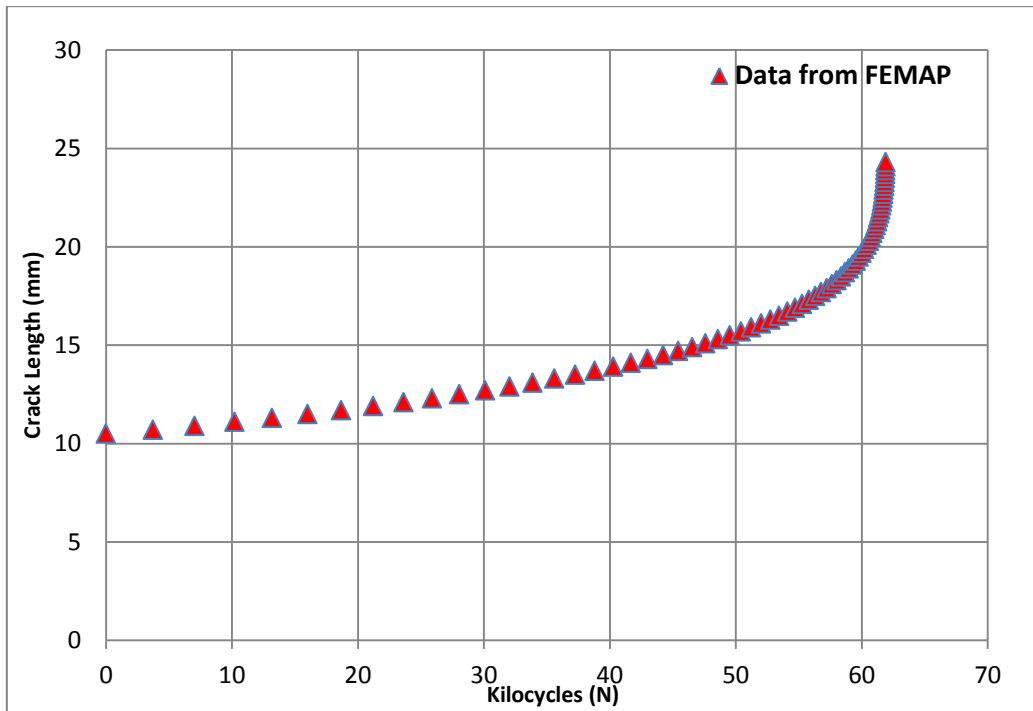
Σχήμα 48 Υπολογισμός των συντελεστών C και n



Σχήμα 49 Γραμμή τάσης με τα υπολογισθέντα C και n

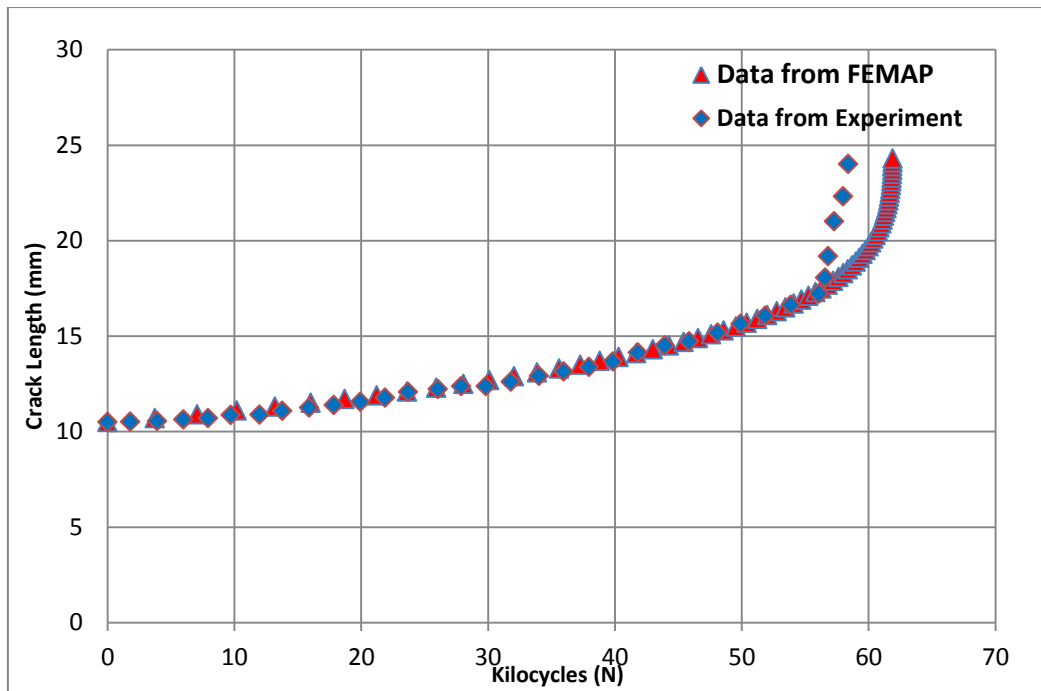
Συνεπώς οι συντελεστές είναι $C = 4.0773 \cdot 10^{-9}$ και $n = 4.0207$

Έχοντας πλέον τους συντελεστές C και n , εισήχθησαν στον κώδικα, και καθώς δημιουργήθηκε η διάδοση της ρωγμής, παράχθηκε το παρακάτω διάγραμμα Crack length/Kilocycles του μοντέλου από το FEMAP.



Σχήμα 50 Διάγραμμα Crack length-N του μοντέλου από το FEMAP

Στο Σχήμα 51 παρουσιάζονται συγκριτικά, τα αποτελέσματα από την πειραματική διαδικασία, και από τα αποτελέσματα που έχουν δημιουργηθεί από τον κώδικα και το FEMAP.



Σχήμα 51 Συγκριτικά αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας με τα αποτελέσματα από το FEMAP

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα, βλέπουμε ότι στην πειραματική διαδικασία, η διάδοση σταματά περίπου στους 58000 κύκλους φόρτισης, ενώ στα αποτελέσματα από το FEMAP η διάδοση σταματά στις 61900 κύκλους. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια απόκλιση 5,993%. Μέχρι περίπου τους 56000 κύκλους, και για μήκος ρωγμής περίπου 17 mm τα αποτελέσματα είναι πανομοιότυπα. Από το σημείο αυτό αλλάζει λίγο το μέγεθος των κύκλων φόρτισης για τις δύο περιπτώσεις. Περίπου στο ίδιο σημείο ξεκίνησε και η μικρή απόκλιση της τροχιά της διάδοσης στο FEMAP και αυτή της πειραματικής διαδικασίας (Σχήμα 43).

7.2 Εκτίμηση χρόνου ζωής σύμφωνα με τα CSR-H.

Στην ναυπηγική, ο υπολογισμός αντοχής των πλοίων γίνεται λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι κατά την διάρκεια ζωής τους (25 χρόνια), θα συναντήσει μια φορά ένα μεγάλο κύμα. Σύμφωνα με τα Common Structural Rules Harmonized (CSR-H) for Tankers and Bulk carriers [17], θεωρούμε κύμα με πιθανότητα 10^{-2} δηλαδή αυτό σημαίνει, ένα κύμα κάθε 13,14 λεπτά. Αυτό βγαίνει ως εξής:

$$10^{-2} = \frac{7,884}{x * 365 * 24 * 60 * 60}$$

Το νόμμερο που αναγράφεται στον αριθμητή είναι η διάρκεια του φαινομένου. Στον παρονομαστή είναι κάθε πόσα δευτερόλεπτα έρχεται αυτό το κύμα.

$$x = 25 * 10^{-6} \text{ sec}$$

$$\Rightarrow x = 13.14 \text{ min ή } 13 \text{ min και } 8.4 \text{ sec}$$

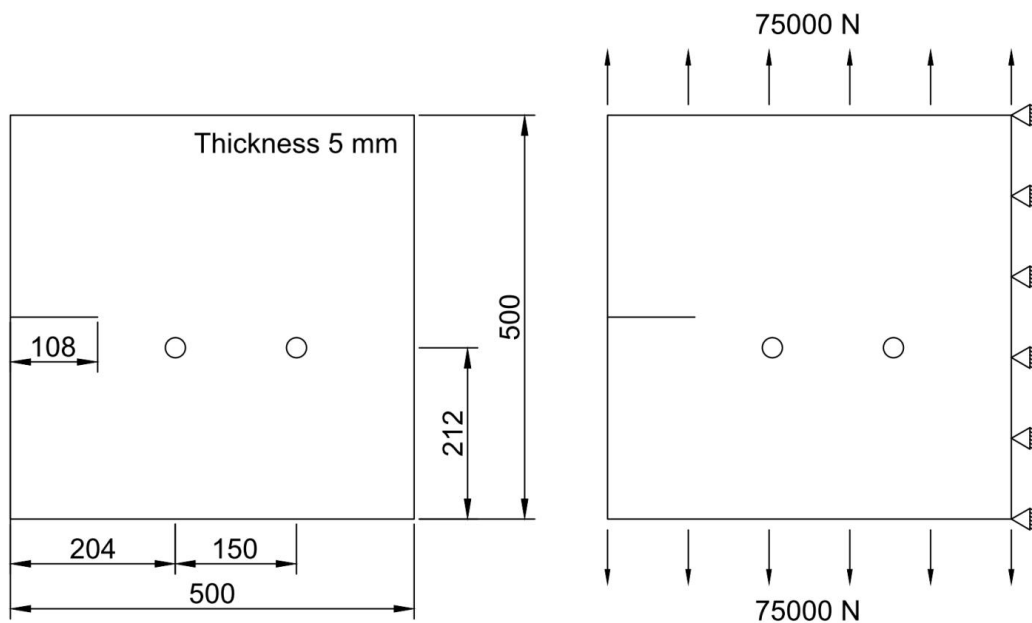
Άρα λοιπόν σύμφωνα με τους κανονισμούς SCR-H της ναυπηγικής [17], δύο κύκλοι φόρτισης, απέχουν μεταξύ τους 13.14 λεπτά. Άρα, όταν ξέρουμε, πόσους κύκλους φόρτισης χρειάζονται για να γίνει μια διάδοση, μπορούμε να υπολογίσουμε, πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να γίνει αυτή η διάδοση.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μιας πλάκας που εφελκύεται. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 52. Το μοντέλο που δημιουργήθηκε έχει 4067 στοιχεία και το βήμα της διάδοσης της ρωγμής είναι 4mm.

Τα χαρακτηριστικά του υλικού που χρησιμοποιήθηκε είναι $E = 206000 \text{ MPa}$ και $\nu = 0.3$. Σύμφωνα με το IIW Recommendation [18], για χάλυβα: Για $R = 0$

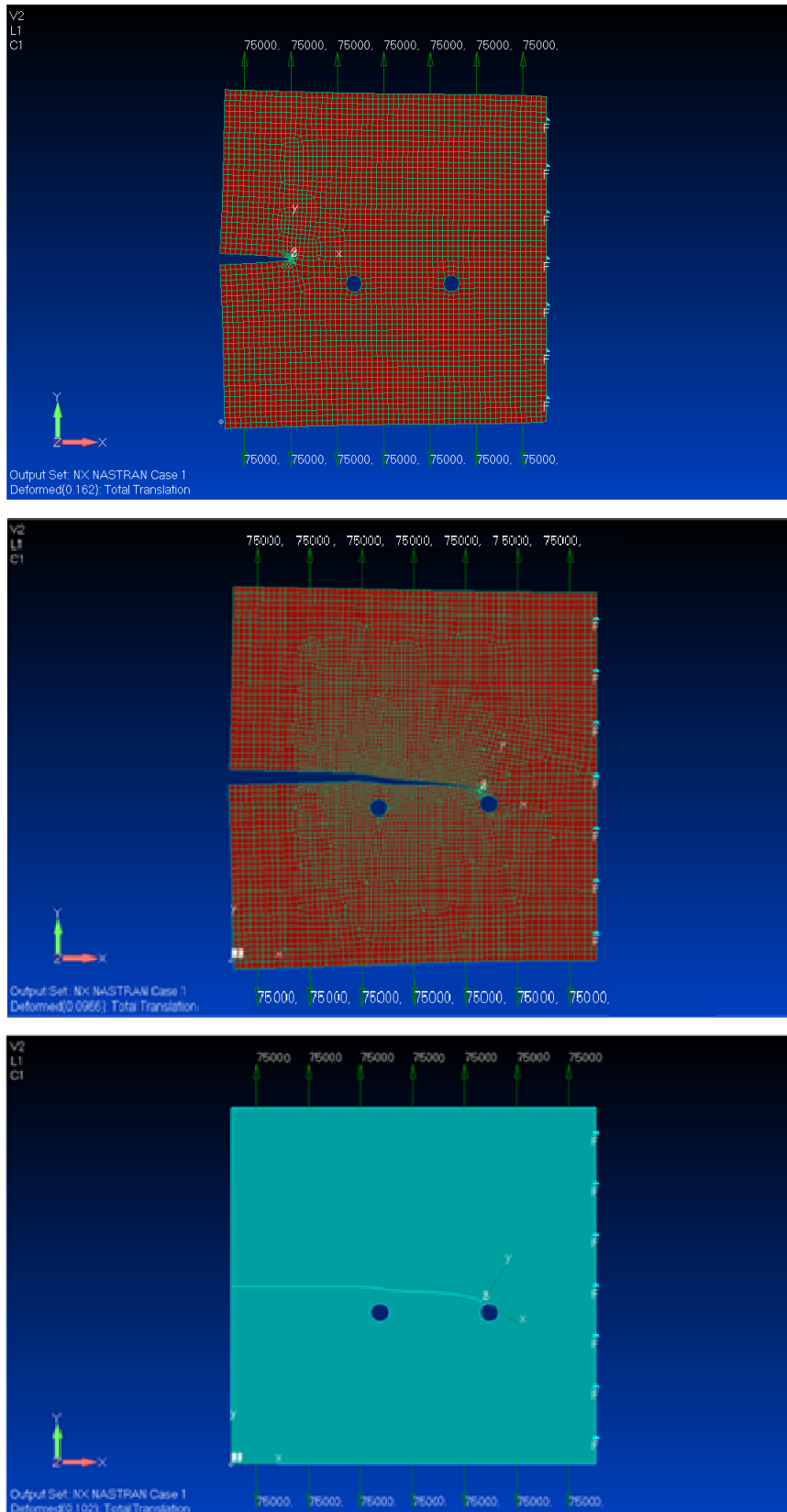
$$K_{th} = 170 \text{ MPa}\sqrt{mm}$$

$$C = 5.21 * 10^{-13} \quad m = 3.0.$$



Σχήμα 52 Παράδειγμα πλάκας που εφελκύεται

Στο Σχήμα 53 φαίνεται η διάδοση της ρωγμής της πλάκας που περιγράφηκε παραπάνω.



Σχήμα 53 Πορεία διάδοσης ρωγμής του παραδείγματος

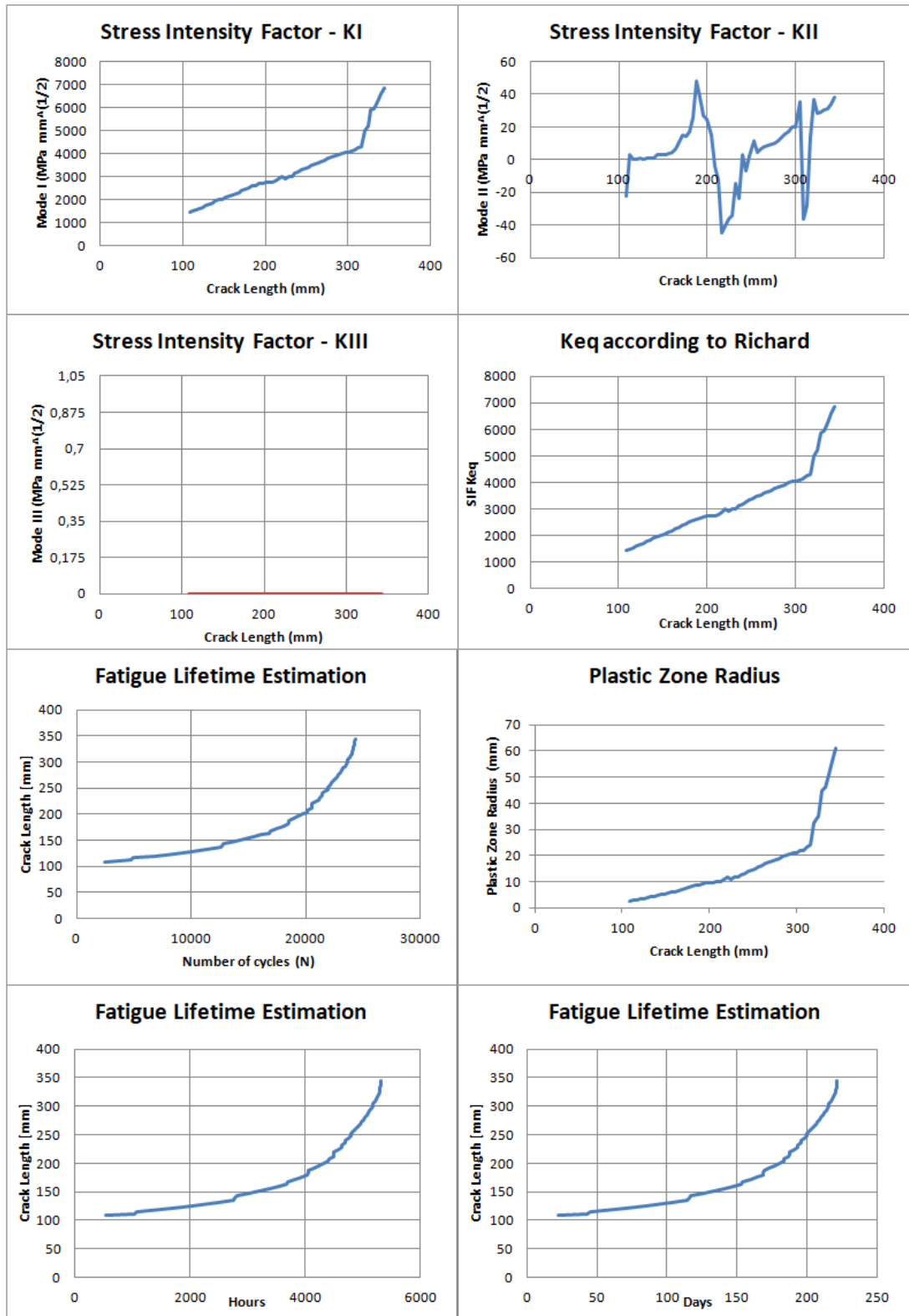
Στον Πίνακα 9 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διάδοσης της ρωγμής όπως τα εξήγαγε το FEMAP.

Πίνακας 9 Αποτελέσματα όπως δημιουργήθηκαν από των κώδικα.

Run No	Crack Size	KI	KII	KIII	Keq	dN	Ntotal	Plastic	min	Hours	Days
1	108	1454.953	-22.12	0	1455.402	2490.426	2490	2.752008	32718.6	545.31	22.72125
2	112	1509.456	2.970259	0	1509.464	2232.307	4722	2.960259	62047.08	1034.118	43.08825
3	116	1524.21	0.098129	0	1524.21	2168.143	4968	3.018378	65279.52	1087.992	45.333
4	120	1613.445	0.49798	0	1613.445	1827.93	6796	3.382147	89299.44	1488.324	62.0135
5	124	1667.239	0.5979	0	1667.239	1656.641	8453	3.611436	111072.4	1851.207	77.13363
6	128	1721.511	0.240082	0	1721.511	1504.849	9958	3.85038	130848.1	2180.802	90.86675
7	132	1777.164	0.856777	0	1777.165	1367.852	11326	4.103358	148823.6	2480.394	103.3498
8	136	1833.458	0.69646	0	1833.458	1245.688	12572	4.367432	165196.1	2753.268	114.7195
9	140	1925.24	1.102736	0	1925.241	1075.888	12710	4.815642	167009.4	2783.49	115.9788
10	144	1987.24	2.916747	0	1987.246	978.2899	12836	5.130825	168665	2811.084	117.1285
11	148	2009.708	2.884776	0	2009.714	945.8446	13782	5.247499	181095.5	3018.258	125.7608
12	152	2070.386	2.694906	0	2070.391	865.0981	14647	5.569147	192461.6	3207.693	133.6539
13	156	2132.845	3.794288	0	2132.854	791.2957	15438	5.910257	202855.3	3380.922	140.8718
14	160	2195.651	4.597706	0	2195.664	725.3117	16163	6.263481	212381.8	3539.697	147.4874
15	164	2259.896	6.638731	0	2259.922	665.184	16828	6.63546	221119.9	3685.332	153.5555
16	168	2314.25	10.60338	0	2314.315	619.3768	16902	6.958713	222092.3	3701.538	154.2308
17	172	2388.501	14.86223	0	2388.624	563.3505	17465	7.412757	229490.1	3824.835	159.3681
18	176	2452.559	14.22205	0	2452.669	520.3619	17985	7.815592	236322.9	3938.715	164.1131
19	180	2514.141	17.33545	0	2514.3	483.0263	18468	8.213313	242669.5	4044.492	168.5205
20	184	2578.32	25.32152	0	2578.652	447.7589	18522	8.639118	243379.1	4056.318	169.0133
21	188	2598.25	48.2834	0	2599.446	437.0989	18572	8.779015	244036.1	4067.268	169.4695
22	192	2670.788	38.04214	0	2671.511	402.6721	18975	9.272522	249331.5	4155.525	173.1469
23	196	2706.728	26.97517	0	2707.086	387.0044	19362	9.521125	254416.7	4240.278	176.6783
24	200	2731.705	24.62635	0	2732.001	376.5127	19739	9.697187	259370.5	4322.841	180.1184
25	204	2747.615	15.12143	0	2747.726	370.0856	20109	9.809136	264232.3	4403.871	183.4946
26	208	2768.14	-3.68951	0	2768.147	361.9554	20151	9.95548	264784.1	4413.069	183.8779
27	212	2774.585	-12.6214	0	2774.662	359.4116	20510	10.0024	269501.4	4491.69	187.1538
28	216	2874.25	-44.9655	0	2875.188	323.0156	20550	10.7403	270027	4500.45	187.5188
29	220	2998.24	-40.54	0	2998.971	284.6462	20589	11.685	270539.5	4508.991	187.8746
30	224	2913.533	-36.15	0	2914.131	310.2381	20899	11.03322	274612.9	4576.881	190.7034
31	228	2989.736	-34.5136	0	2990.267	287.1391	21186	11.61727	278384	4639.734	193.3223
32	232	3015.52	-14.4027	0	3015.612	279.96	21218	11.81503	278804.5	4646.742	193.6143
33	236	3143.491	-23.6827	0	3143.729	247.1081	21465	12.84027	282050.1	4700.835	195.8681
34	240	3201.24	2.780954	0	3201.243	234.0272	21493	13.31439	282418	4706.967	196.1236
35	244	3288	-6.85191	0	3288.019	215.9828	21709	14.046	285256.3	4754.271	198.0946
36	248	3354.904	2.044174	0	3354.906	203.3206	21912	14.62328	287923.7	4798.728	199.947
37	252	3402.14	11.19419	0	3402.189	194.9606	21935	15.03838	288225.9	4803.765	200.1569
38	256	3482.56	4.496192	0	3482.568	181.7705	22117	15.75735	290617.4	4843.623	201.8176
39	260	3543.41	6.569966	0	3543.426	172.5648	22290	16.31288	292890.6	4881.51	203.3963
40	264	3603.131	7.771788	0	3603.154	164.1247	22454	16.86746	295045.6	4917.426	204.8928
41	268	3660.953	8.561359	0	3660.98	156.4697	22610	17.41321	297095.4	4951.59	206.3163
42	272	3717.899	9.566886	0	3717.932	149.3887	22759	17.9592	299053.3	4984.221	207.6759
43	276	3772.539	10.39925	0	3772.578	142.9907	22902	18.491	300932.3	5015.538	208.9808
44	280	3826.904	11.56407	0	3826.95	136.9821	23039	19.02785	302732.5	5045.541	210.2309
45	284	3880.622	13.54978	0	3880.685	131.3703	23170	19.56594	304453.8	5074.23	211.4263
46	288	3933.16	15.4464	0	3933.241	126.1742	23296	20.0995	306109.4	5101.824	212.576
47	292	3985.673	17.11541	0	3985.771	121.251	23417	20.63995	307699.4	5128.323	213.6801
48	296	4036.034	20.22885	0	4036.169	116.7654	23534	21.16522	309236.8	5153.946	214.7478
49	300	4036.034	20.22885	0	4036.169	116.7654	23651	21.16522	310774.1	5179.569	215.8154
50	304	4098.14	35.125	0	4098.542	111.5152	23655	21.82442	310826.7	5180.445	215.8519
51	308	4124.21	-36.1452	0	4124.633	109.4124	23844	22.10317	313310.2	5221.836	217.5765
52	312	4244.484	-28.145	0	4244.733	100.3855	23944.39	23.40911	314629.2	5243.82	218.4925
53	316	4320.33	13.59565	0	4320.388	95.20377	24039.59	24.25099	315880.2	5264.67	219.3613
54	320	4998.21	36.76036	0	4998.571	61.47305	24101.06	32.46203	316688	5278.133	219.9222
55	324	5214.254	28.14	0	5214.457	54.14958	24155.21	35.32663	317399.5	5289.991	220.4163
56	328	5875.128	29.245	0	5875.322	37.85534	24193.07	44.84845	317896.9	5298.282	220.7617
57	332	5965.254	30.145	0	5965.457	36.16522	24229.23	46.23507	318372.1	5306.202	221.0917
58	336	6254.784	31.24	0	6254.992	31.37198	24260.6	50.83204	318784.3	5313.072	221.378
59	340	6587.874	34.15	0	6588.11	26.84972	24287.45	56.39047	319137.1	5318.952	221.623
60	344	6857.145	38.15	0	6857.428	23.80885	24311.26	61.09513	319450	5324.167	221.8403

Έχοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, δημιουργήθηκαν αυτόματα τα διαγράμματα του Σχήμα

54.



Σχήμα 54 Συνολικά αποτελέσματα του παραδείγματος

Παρατηρώντας τον Πίνακα 9 και το Σχήμα 54 βλέπουμε ότι κατά την έναρξη της διάδοσης της ρωγμής, για να διαδοθεί ένα βήμα (4mm). Θα χρειαστούν 2490 κύκλοι φόρτισης που αυτό μεταφράζεται σε 22.72 ημέρες, και στο τέλος της διάδοσης θα χρειαστούν συνολικά 24311 κύκλοι φόρτισης, δηλαδή 211.84 ημέρες .

8 Συμπεράσματα-Μελλοντική εξέλιξη κώδικα.

Ο βασικός σκοπός της μελέτης ήταν να δημιουργηθεί ένας κώδικας, ο οποίος σε συνεργασία με το Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP, να δώσει στον χρήστη την δυνατότητα να μελετήσει την διάδοση μιας ρωγμής. Να μπορεί δηλαδή, να υπολογίσει αν μια ρωγμή θα διαδοθεί, την κατεύθυνση της ρωγμής, καθώς επίσης και τους κύκλους φόρτισης που είναι απαραίτητοι να διαδοθεί η ρωγμή, για δεδομένο βήμα.

8.1 Συμπεράσματα.

Μετά την σύγκριση των αποτελεσμάτων του FEMAP, με τα αποτελέσματα από τον αναλυτικό υπολογισμό, αλλά και τα αποτελέσματα από τις πειραματικές διαδικασίες, μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Αρχικά, τα αποτελέσματα της σύγκρισης του αναλυτικού και του αριθμητικού υπολογισμού των Συντελεστών Έντασης τάσης είχαν μια απόκλιση της τάξης του 0.900% για το K_I και 4.924% για το K_{II} . Η διαφορά αυτή έχει περιθώρια βελτίωσης, αν εισαχθεί στον κώδικα το J ολοκλήρωμα, αντί της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε.
- Όσον αφορά την τροχιά της διάδοσης, σε όλες τις συγκρίσεις που έγιναν σε αυτή την μελέτη, φαίνεται πως δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά. Η διάδοση των ρωγμών των πειραματικών διαδικασιών, και των αντίστοιχων του FEMAP, είναι σχεδόν πανομοιότυπη.
- Τέλος, για τους κύκλους φόρτισης που είναι απαραίτητοι για την διάδοση μιας ρωγμής, χρησιμοποιήθηκε ο Νόμος του Paris, και συγκρίθηκε με αποτελέσματα από πειραματική διαδικασία. Μετά από την σύγκριση των αποτελεσμάτων, στο τέλος της διάδοσης της ρωγμής, υπήρξε μια απόκλιση της τάξης του 5,993%.

8.2 Μελλοντική εξέλιξη του κώδικα.

Έχοντας δημιουργηθεί ο κώδικας ,τα αποτελέσματα του οποίου φαίνεται πως είναι αξιοπρεπή και με μικρές αποκλίσεις από τα αντίστοιχα των πειραματικών διαδικασιών, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια καλή βάση για μελλοντική εξέλιξη.

Αρχικά, μια πρώτη αλλαγή θα είναι η αντικατάσταση της μεθόδου των SIF που χρησιμοποιήθηκε, με το J ολοκλήρωμα που έχει αναπτυχθεί από τον James Rice. Η μέθοδος αυτή είναι δυσκολότερο να εισαχθεί στον κώδικα, είναι όμως αποδεδειγμένο από πολλές μελέτες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, ότι δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα.

Ένα άλλο πρόβλημα που υπάρχει στις συγκολλητές κατασκευές, είναι η ίδια η ύπαρξη των συγκολλήσεων, διότι λόγω αυτών, υπάρχουν στην περιοχή παραμένουσες τάσεις. Θα ήταν ενδιαφέρον να εισαχθούν στον κώδικα οι κατάλληλοι υπολογισμοί ώστε να συνυπολογίζονται αυτές οι παραμένουσες τάσεις στον υπολογισμό των Συντελεστών Έντασης Τάσης.

Ένα επόμενο πρόβλημα που θα γίνει προσπάθεια επίλυσης, είναι η δυνατότητα να μπορεί μια ρωγμή να διακλαδωθεί καθώς προχωράει. Δηλαδή, σε περίπτωση που μια ρωγμή διαδίδεται σε μια πλάκα, και βρεθεί στον δρόμο της ένα ενισχυτικό, να μπορεί η ρωγμή, να αναπτυχθεί σε δυο δρόμους. Δηλαδή, αν χρειαστεί, να μπορεί να συνεχίσει να ανοίγει η πλάκα και μετά το ενισχυτικό, και ταυτόχρονα αν χρειαστεί πάλι, να μπορεί να ανέβει και να διαδοθεί η ρωγμή στον κορμό του ενισχυτικού.

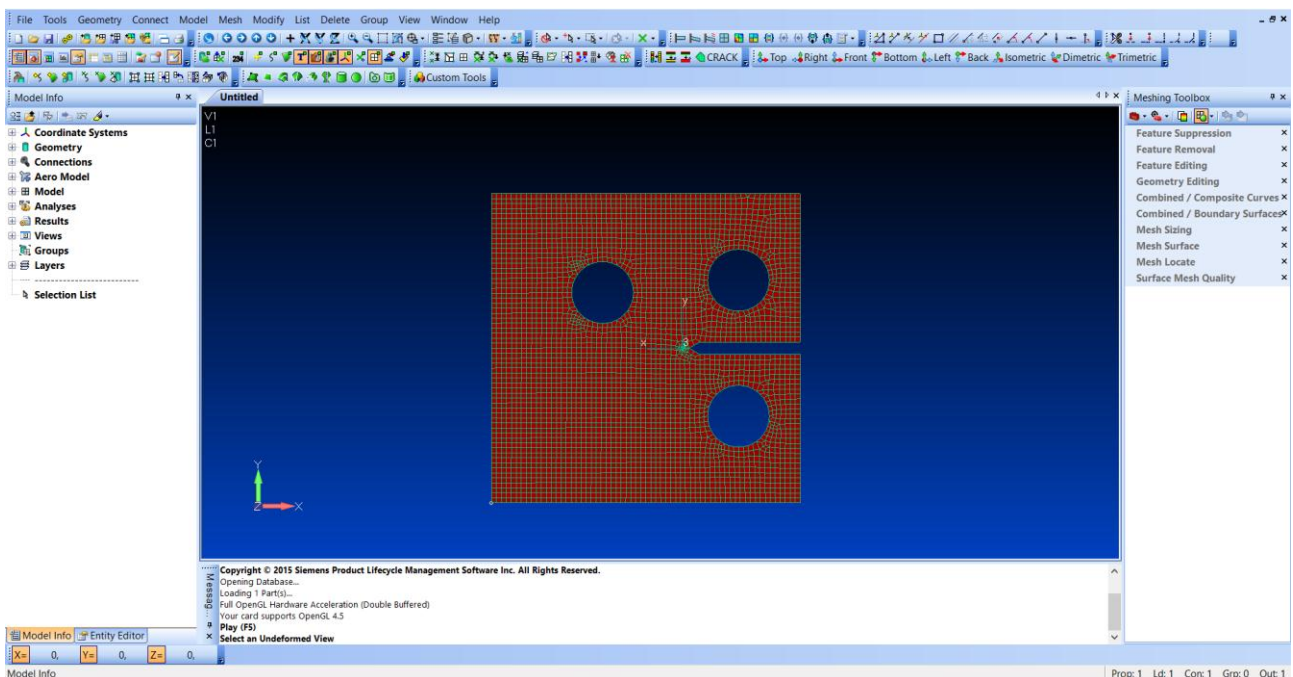
Τέλος, αφού γίνουν τα παραπάνω, το επόμενο βήμα, το οποίο είναι ομολογουμένως μια πρόκληση, είναι η αντικατάσταση των 2D στοιχείων με τα αντίστοιχα των τριών διαστάσεων. Να μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε την πορεία μιας ρωγμής, όχι μόνο στο επίπεδο, αλλά και κατά την κατεύθυνση του πάχους μιας κατασκευής.

Παράρτημα Α - Περιγραφή του Κώδικα.

Στις επόμενες σελίδες θα γίνει μια αναλυτική περιγραφή του κώδικα που δημιουργήθηκε μέσα στο FEMAP, και του τρόπου που χρησιμοποιεί το API (Application Program Interface)[19] ο κώδικας, ο οποίος υπολογίζει αν θα διαδοθεί μια ρωγμή, την διεύθυνσή της, καθώς επίσης και τους κύκλους φόρτισης που χρειάζεται να υποστεί μια κατασκευή ώστε να γίνει η διάδοση.

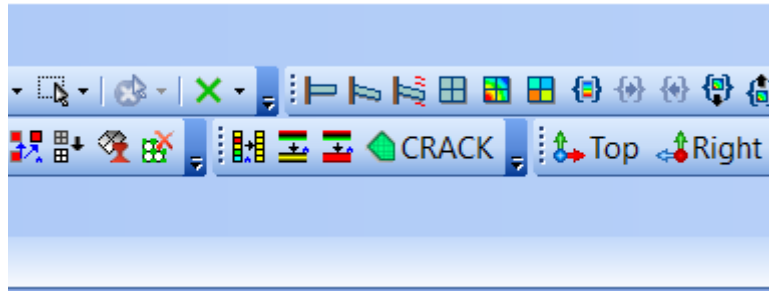
Αρχικά πρέπει να αναφερθεί, ότι στο Πρόγραμμα Πεπερασμένων που προαναφέρθηκε, η γλώσσα προγραμματισμού που καταλαβαίνει ονομάζεται *WinWrap*, η οποία μοιάζει πάρα πολύ με την *VBA* [20].

Ο κώδικας, είναι ένα αρχείο .BAS. Μπορεί να αποθηκευτεί σε οποιοδήποτε σημείο στον υπολογιστή, και να καλεστεί από εκεί. Συνηθίζεται, τα αρχεία αυτά να τα αποθηκεύουμε στην διεύθυνση: C:\FEMAPv112\api. Έτσι έγινε και τώρα. Στην πραγματικότητα δεν έχει καμία σημασία, απλά γίνεται για λόγους ευταξίας. Επίσης δημιουργήθηκε εργαλείο-κουμπί στο FEMAP το οποίο μόλις πατηθεί, καλείται και εκτελείτε ο κώδικας.



Σχήμα 55 Κλασική εικόνα από το Πρόγραμμα Πεπερασμένων Στοιχείων FEMAP

Στο Σχήμα 55 φαίνεται η επιφάνεια εργασίας του FEMAP. Στο αμέσως επόμενο σχήμα (Σχήμα 56), έχει γίνει εστίαση στο εργαλείο-κουμπί, που έχει συνδεθεί με το αρχείο.BAS. Όταν πατηθεί αυτό το κουμπί, τότε ο κώδικας καλείται, και ξεκινάει η διαδικασία.

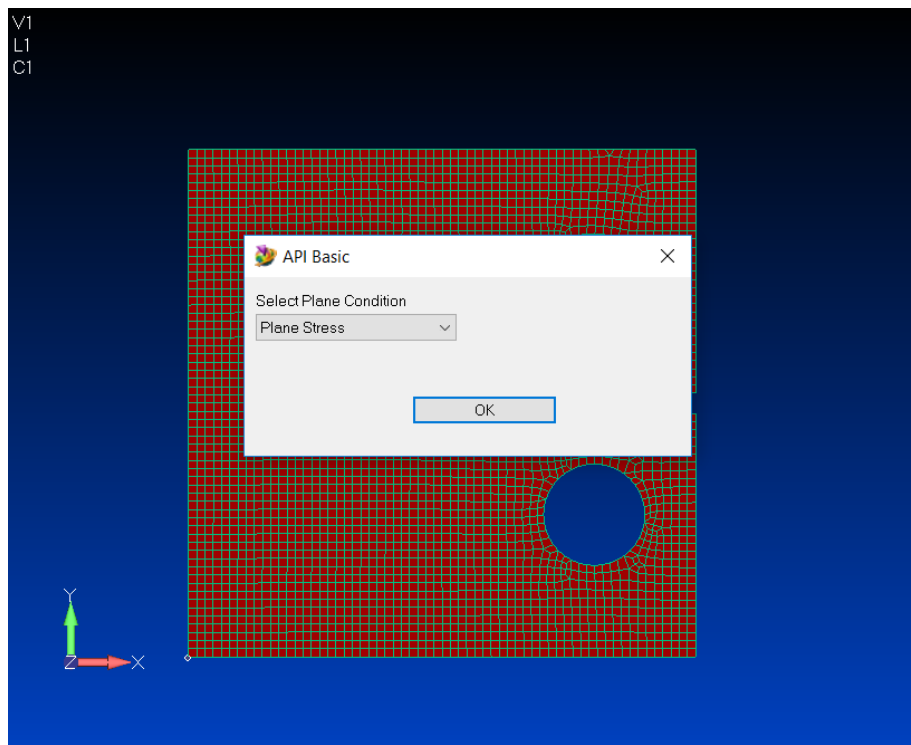


Σχήμα 56 Εστίαση στο εργαλείο CRACK

A.1 Αρχικοποιήσεις και δηλώσεις συντελεστών.

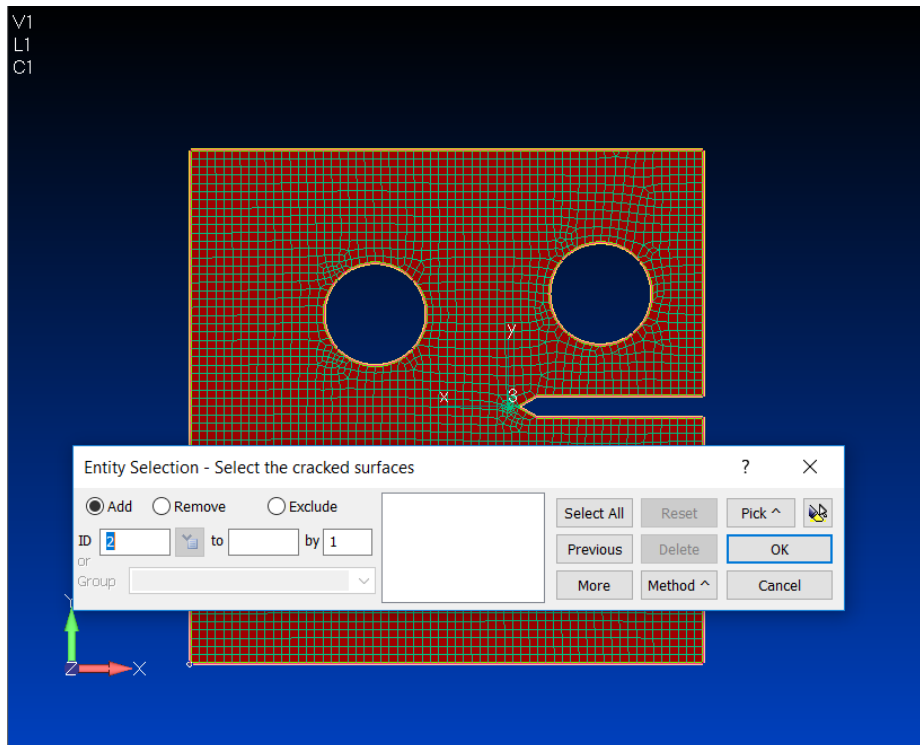
Όταν ετοιμαστεί το μοντέλο, και καλέσουμε τον κώδικα, αρχίζει μια αλληλουχία ερωτήσεων, τις οποίες καλείτε ο χρήστης να απαντήσει-δηλώσει τιμές.

- Το πρώτο πράγμα που ζητάει ο κώδικας είναι να δηλώσουμε, αν το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα επίπεδης έντασης, ή επίπεδης παραμόρφωσης (plane stress ή plane strain) (Σχήμα 57).



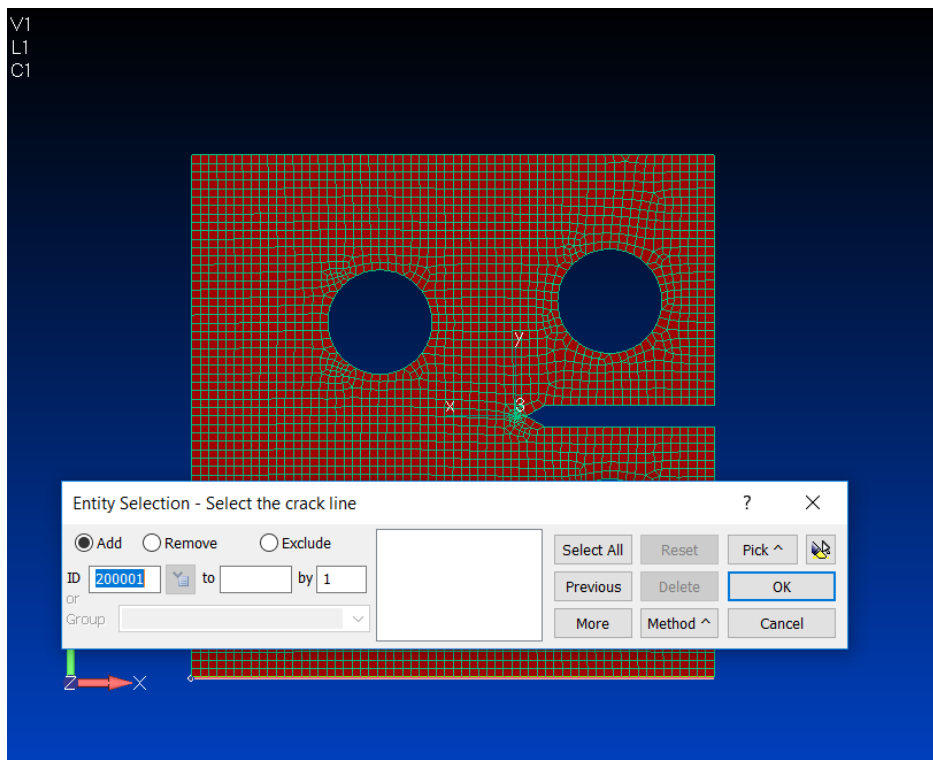
Σχήμα 57 Plane stress ή Plane strain

- Στην συνέχεια ζητάει να δηλώσει ο χρήστης ποια είναι η ρηγματωμένη επιφάνεια



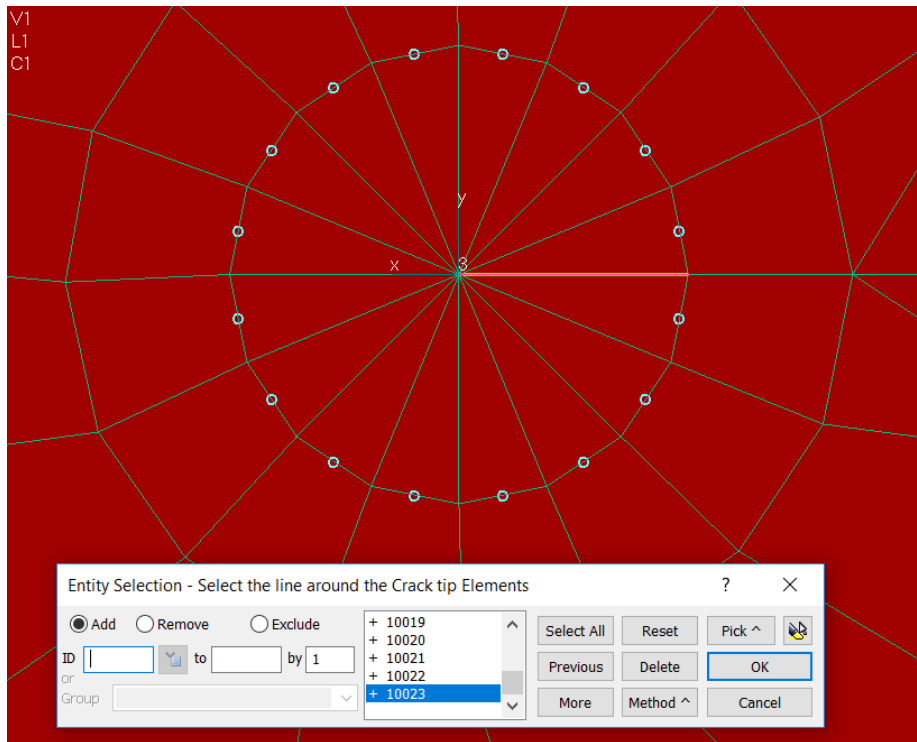
Σχήμα 58 Δήλωση της ρηγματωμένης επιφάνειας

- Έπειτα, ζητάει να δηλωθεί η ίδια η ρωγμή



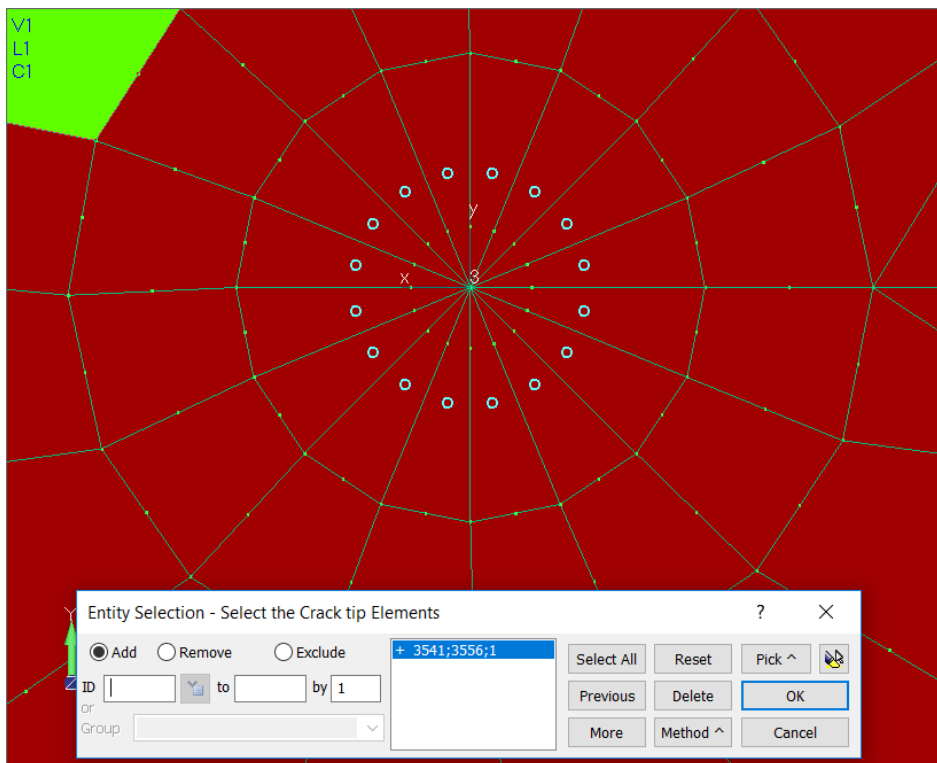
Σχήμα 59 Δήλωση της ρωγμής

- Αμέσως μετά, ζητάει ο κώδικας να διαλέξει ο χρήστης την γραμμή, η οποία περιβάλλει τα Crack Tip Elements.



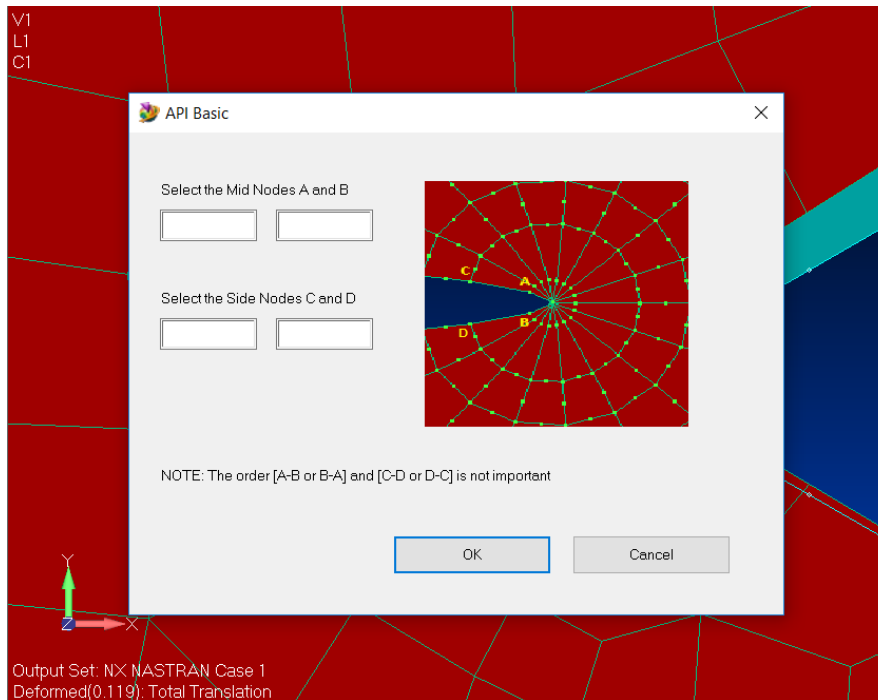
Σχήμα 60 Ζητάει το πρόγραμμα να διαλέξει ο χρήστης της γραμμή γύρω από τα CTE

- Έπειτα, χρειάζεται να ξέρει ποια είναι τα ίδια τα στοιχεία στην αιχμή της ρωγμής.



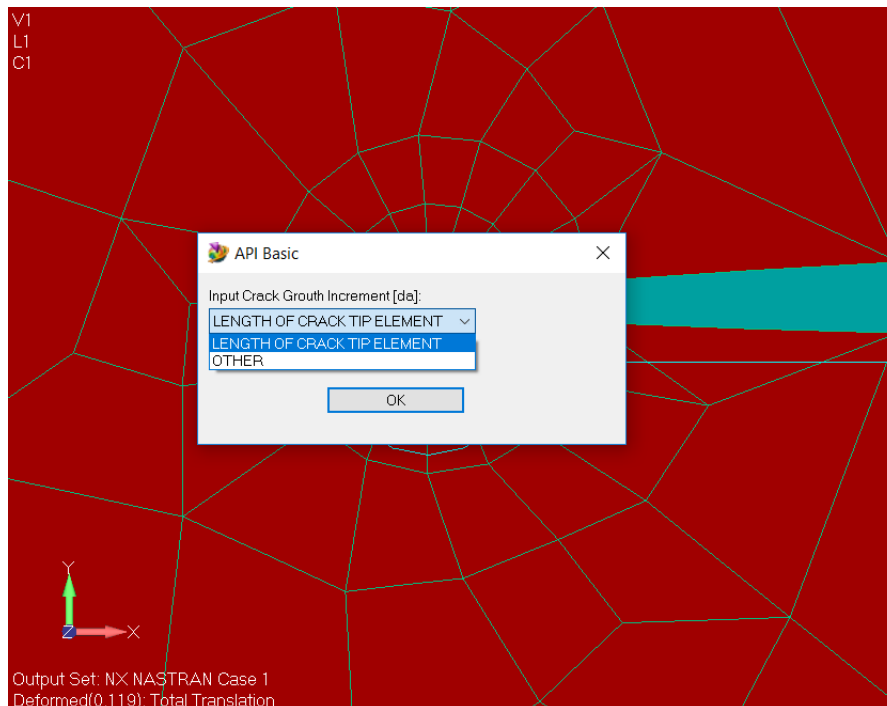
Σχήμα 61 Επιλογή των CTE

- Ενεργοποιούμε την εντολή για να παραμορφωθεί το μοντέλο, και διαλέγουμε τους κόμβους που βρίσκονται στο $L/4$ καθώς επίσης και τους ακραίους κόμβους των Crack Tip Elements, στην μεριά της ρωγμής.



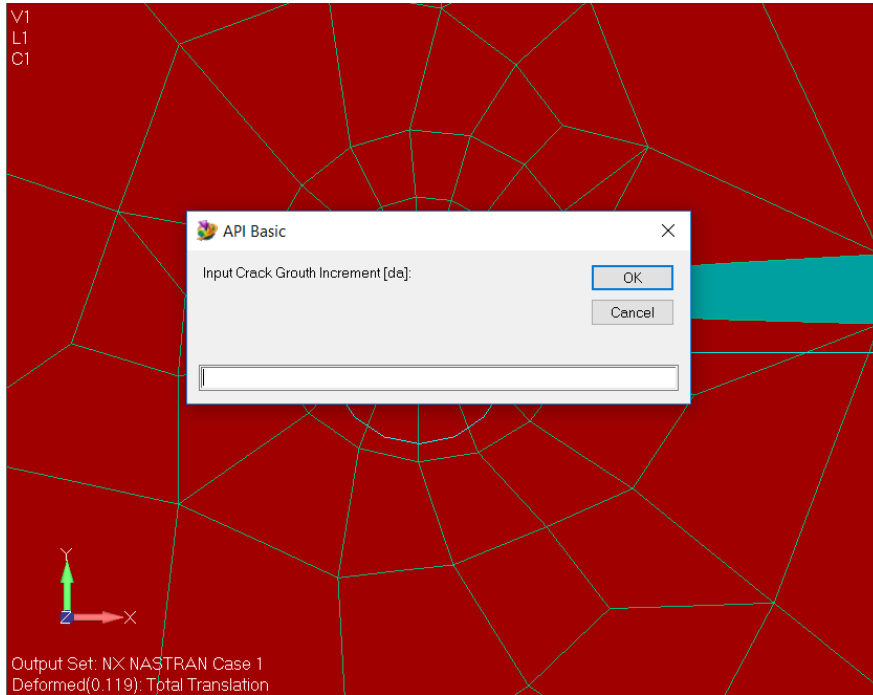
Σχήμα 62 Επιλογή των κατάλληλων κόμβων των CTE

- Τώρα πρέπει να δηλώσουμε το βήμα $[da]$ που θα κάνει η ρωγμή κατά την διάδοση (αν διαδοθεί η ρωγμή), σε κάθε επανάληψη.



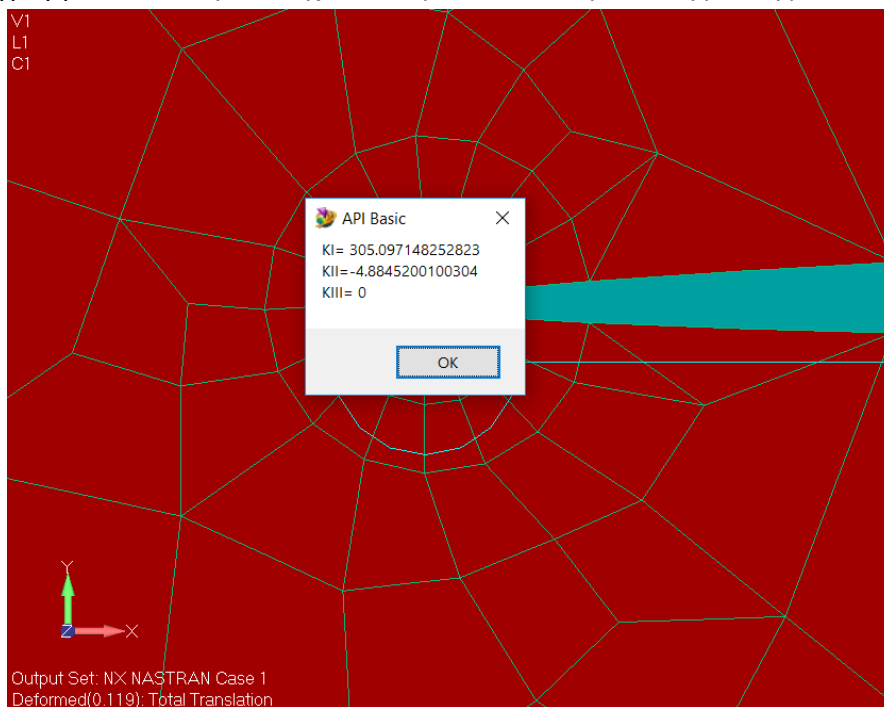
Σχήμα 63 Επιλογή για το μήκος του βήματος

Στην προηγούμενη εντολή, υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Το $[da]$ να είναι όμοιο με το μήκος των *Crack Tip Elements*, ή να είναι διαφορετικό. Σε περίπτωση που επιθυμούμε να είναι διαφορετικό (με τον περιορισμό ότι δεν επιτρέπεται το $[da]$ να είναι μικρότερο από το μήκος των *Crack Tip Elements*) τότε ανοίγει ένα παράθυρο, για να βάλουμε το επιθυμητό $[da]$.



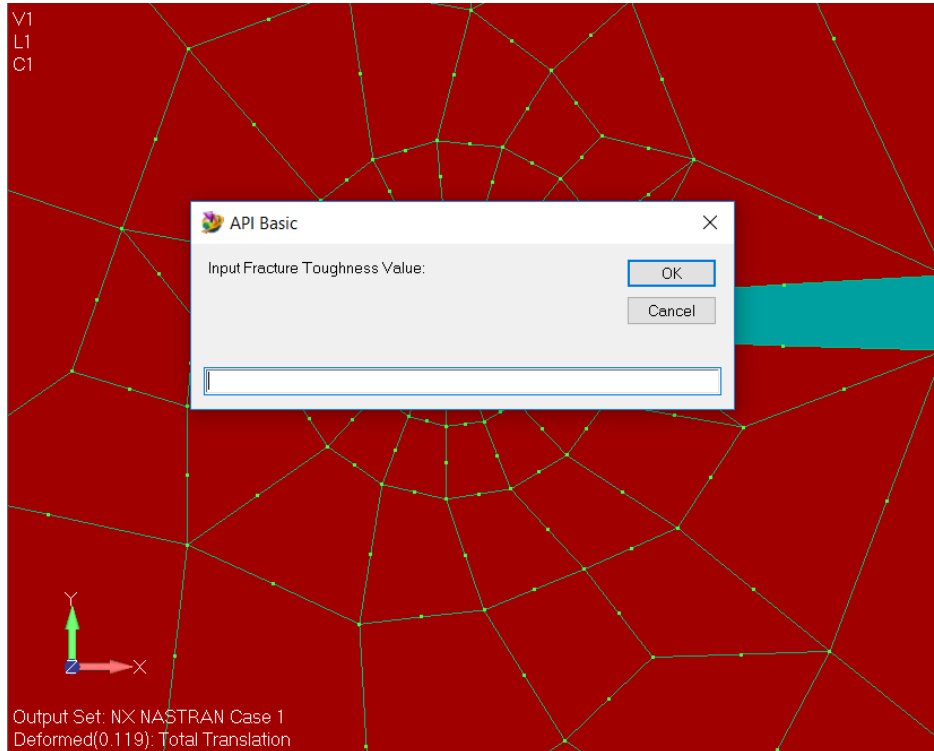
Σχήμα 64 Επιλογή τελικού μήκους βήματος

- Το πρόγραμμα δίνει στην συνέχεια τους Συντελεστές έντασης τάσης.



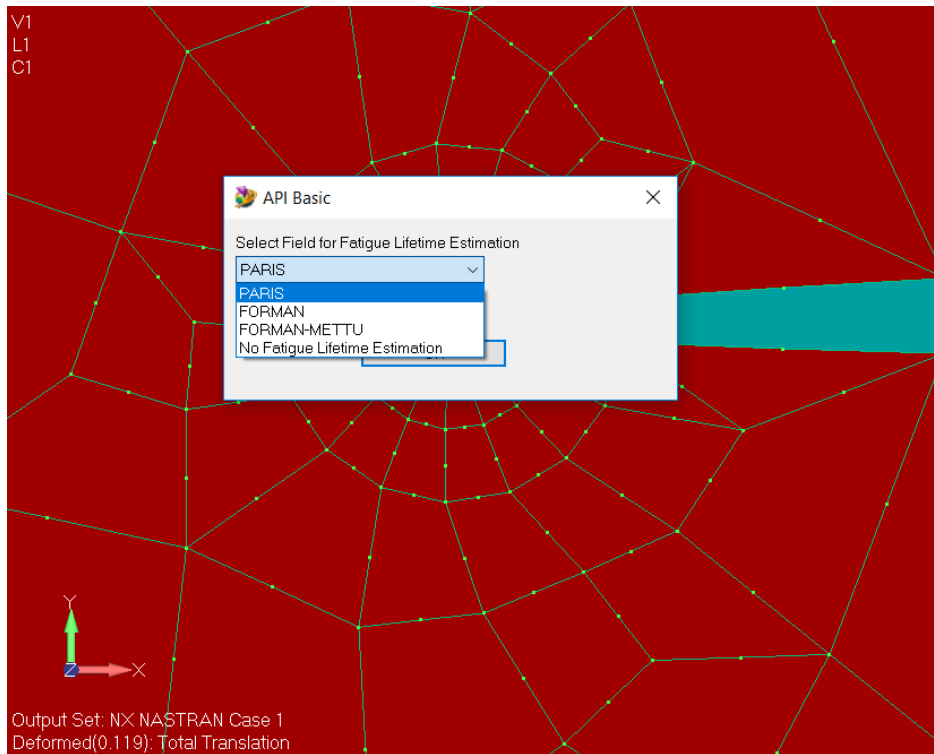
Σχήμα 65 Εμφάνιση αποτελεσμάτων

- Του δίνουμε τον κρίσιμο Συντελεστή Έντασης Τάσης. Το πρόγραμμα τότε θα συγκρίνει την τιμή που θα βάλουμε, με τον ισοδύναμο Συντελεστή Έντασης Τάσης. Αυτός ο συντελεστής υπολογίζεται από το πρόγραμμα. Έχει επιλεγθεί ο ισοδύναμος K_{eq} να είναι το κριτήριο του Richard (βλέπε κεφάλαιο 4.2).



Σχήμα 66 Δήλωση Κρίσιμου Συντελεστή Έντασης των Τάσεων

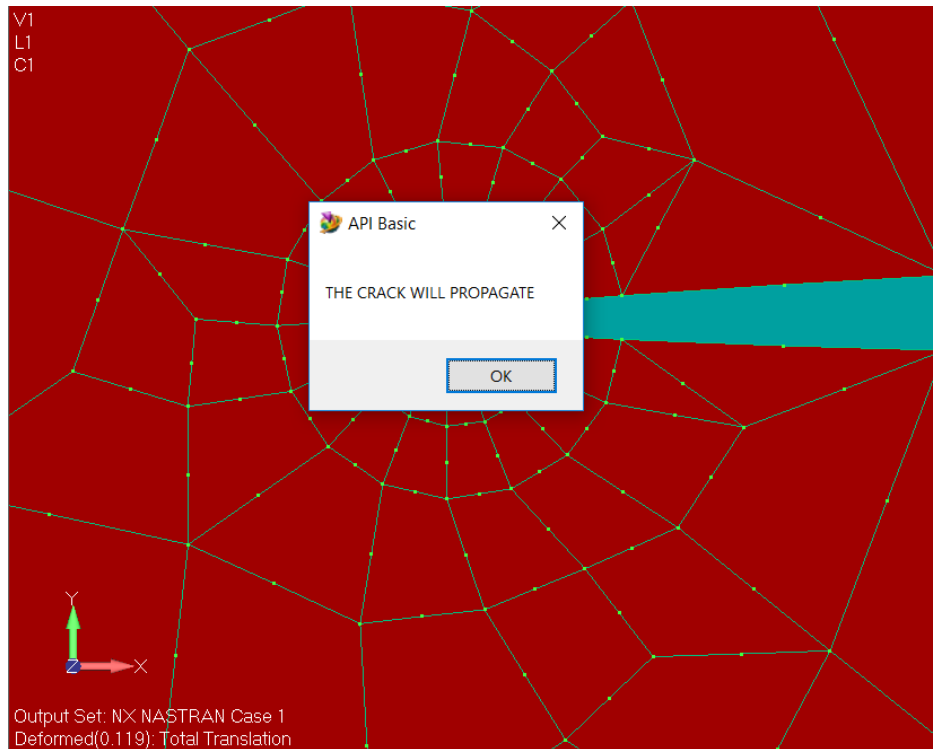
- Πριν συγκρίνει το πρόγραμμα τον K_C με τον K_{eq} , μας ζητάει το πρόγραμμα να δηλώσουμε αν επιθυμούμε να κάνει υπολογισμούς για τους κύκλους φόρτισης, και αν θέλουμε, με ποια μέθοδο.



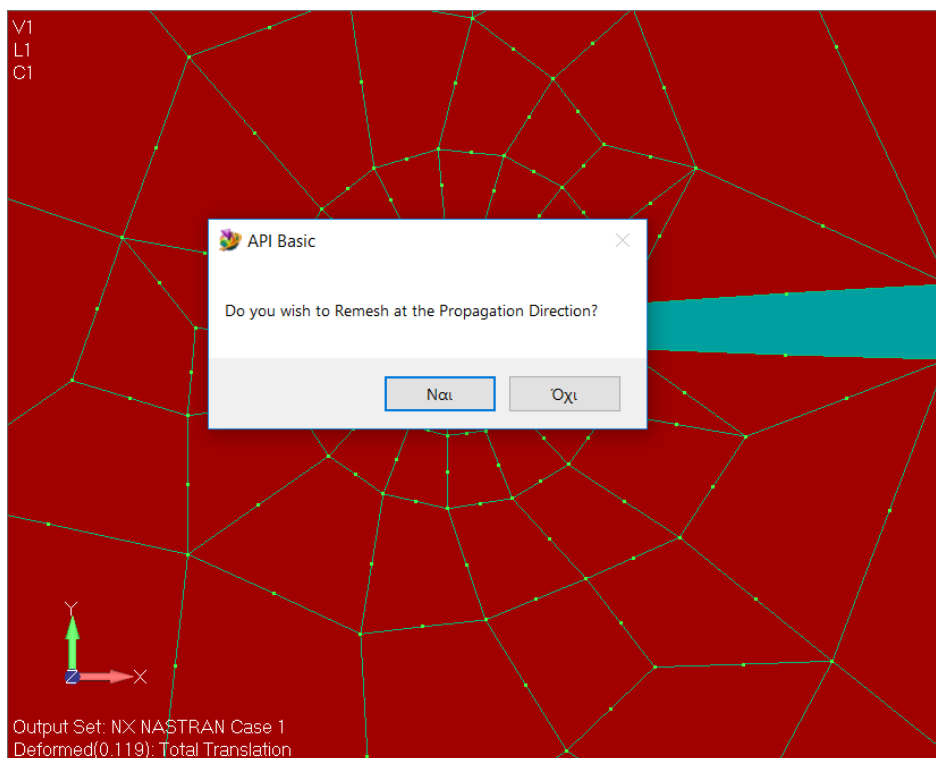
Σχήμα 67 Δήλωση μεθόδου για τους κύκλους φόρτισης

Ανάλογα ποια μέθοδο διαλέξουμε, θα ανοίξει αντίστοιχο παράθυρο, ώστε να βάλουμε τους κατάλληλους συντελεστές. Παράδειγμα, αν διαλέξουμε τον νόμο του Paris, τότε θα ζητήσει μόνο τους συντελεστές C και m . Αν δηλώσουμε τον Forman θα ζητήσει επιπλέον να του δώσουμε και τον R-ratio. Από την άλλη, αν δηλώσουμε ότι θέλουμε τον Forman-Mettu, τότε θα ανοίξει άλλο παράθυρο, που θα πρέπει να δώσουμε όλα τα παραπάνω, και επιπλέον τους συντελεστές p και q .

- Μετά από τα παραπάνω, ο κώδικας μας δίνει το αποτέλεσμα του ελέγχου. Αν τελικά η ρωγμή θα διαδοθεί, τότε εμφανίζεται τα δύο παρακάτω μηνύματα.



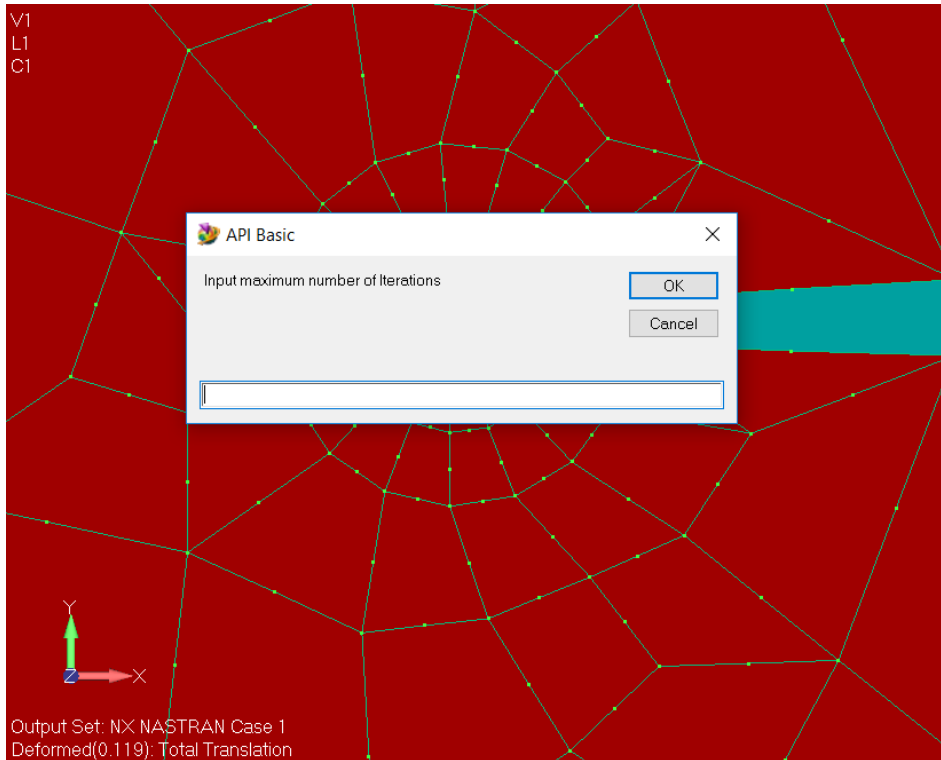
Σχήμα 68 Πληροφοριακό μήνυμα για το αν θα διαδοθεί η ρωγμή



Σχήμα 69 Δήλωση του χρήστη για το αν επιθυμεί να παρακολουθήσει την διάδοση της ρωγμής

A.2 Διάδοση της ρωγμής.

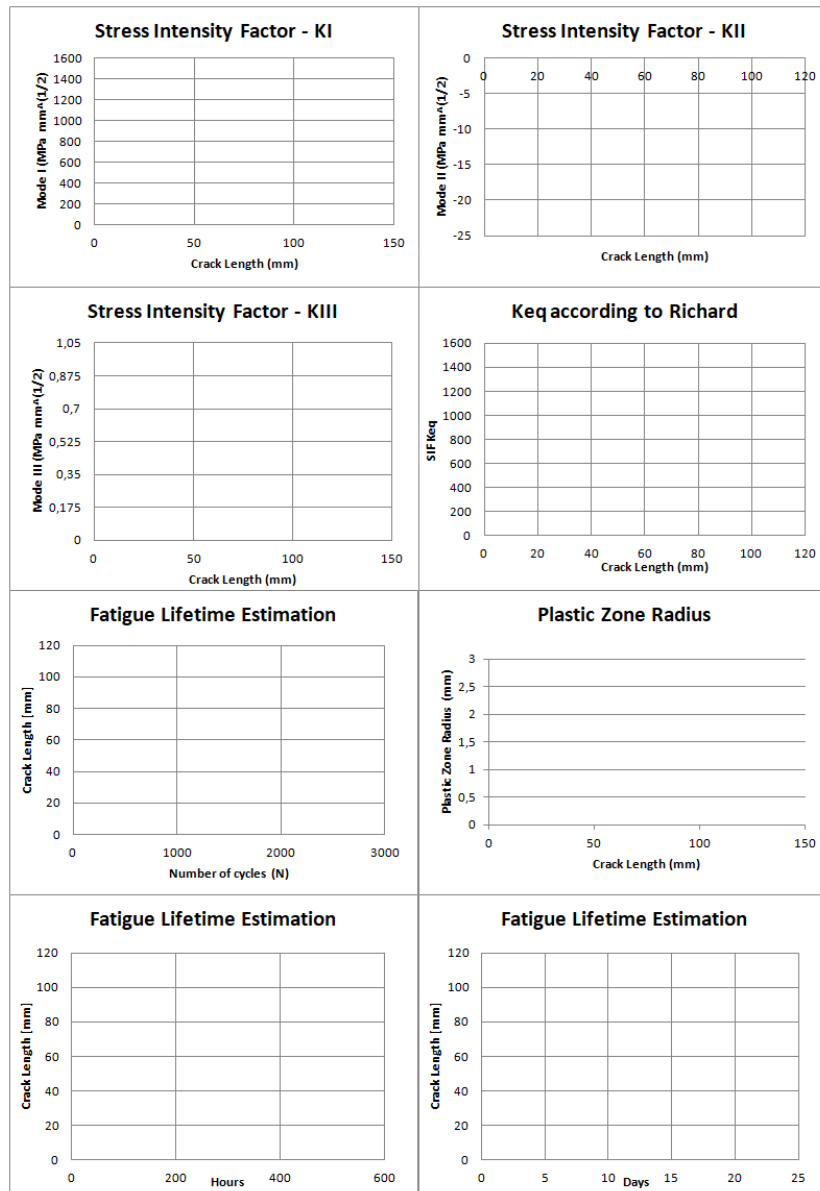
- Αν στο προηγούμενο βήμα επιλέξουμε πως θέλουμε δούμε την πορεία της διάδοσης, τότε θα μας ζητηθεί να βάλουμε τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων. Αυτό χρειάζεται για λόγους ασφαλείας, ώστε αν γίνει κάποιο λάθος, να σταματήσει ο κώδικας να υπολογίζει μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων.



Σχήμα 70 Δήλωση μέγιστου αριθμού επαναλήψεων.

Όταν βάλουμε τον μέγιστο επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων, τότε ξεκινάει μια επαναληπτική διαδικασία, κάνοντας τα εξής:

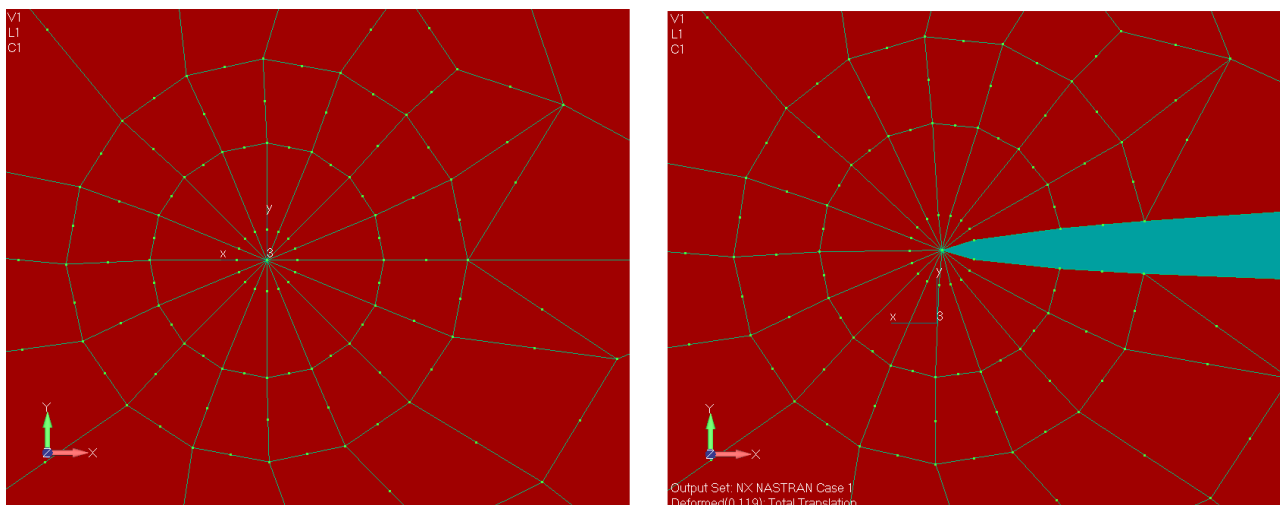
- Αρχικά, ανοίγει αυτόματα ένα φύλλο excel (Σχήμα 71) με μια σειρά από διαγράμματα. Αυτά τα διαγράμματα, μετά από κάθε επανάληψη, συμπληρώνονται με τα καινούργια δεδομένα.



Σχήμα 71 Διαγράμματα που εξαγάγει ο κώδικας

- Σβήνει όλα τα στοιχεία της κατασκευής, εκτός από τα Crack Tip Elements.
- Σβήνει την προηγούμενη ανάλυση.
- Περιστρέφει τα Crack Tip Elements, σύμφωνα με το κριτήριο των Erdogan-Sih.
- Μεταφέρει τα στοιχεία, σύμφωνα με το da που έχουμε δηλώσει.
- Ξανακάνει διακριτοποίηση της ρηγματωμένης επιφάνειας. Αυτό το βήμα δεν είναι απλό, διότι πρέπει να καταλάβει το πρόγραμμα, ότι πρέπει να διακριτοποιήσει την επιφάνεια, εκτός από το σημείο που υπάρχουν τα crack tip elements, που δεν σβηστήκανε σε παραπάνω βήμα.
- Δημιουργία της ρωγμής στην διακριτοποιημένη επιφάνεια.
Όταν γίνεται η διακριτοποίηση, επάνω στην γραμμή που ορίζει την ρωγμή, υπάρχουν μια σειρά από κόμβοι. Όμως εκεί δεν υπάρχει άνοιγμα. Έχει φτιαχτεί έτσι ο κώδικας, ώστε να

μπορεί να εξομοιώσει μια ρωγμή, που όταν η κατασκευή δεν φορτίζεται, να είναι εντελώς κλειστή (Σχήμα 72).



Σχήμα 72 Αφόρτιστη κατασκευή (αριστερά) και παραμορφωμένη κατασκευή (δεξιά)

Συνεπώς, αυτό δεν ήταν καθόλου απλό. Υπάρχει μια εντολή μέσα στο ΠΠΣ που ονομάζεται Unzip. Στην πραγματικότητα, κάνει αυτό ακριβώς που θέλουμε. Διαλέγουμε μια σειρά από κόμβους, και τα στοιχεία που βρίσκονται **από την μια πλευρά** την ρωγμής και σπάει τους κόμβους στα δυο. Όμως, στην περίπτωση μας που η ρωγμή αναπτύσσεται σε κάθε βήμα αυτόματα, δεν υπάρχει η πολυτέλεια να διαλέγουμε σε κάθε βήμα τα σωστά στοιχεία που θέλουμε να κάνουμε Unzip. Αυτό ξεπεράστηκε προγραμματιστικά, και χρειάστηκαν αρκετές γραμμές κώδικα.

- Μετά την δημιουργία της καινούργιας μεγαλύτερης ρωγμής, γίνεται ανάλυση της κατασκευής.
- Υπολογισμός των Συντελεστών Έντασης Τάσης της καινούργιας ρωγμής.
- Εξαγωγή μιας εικόνας του καινούργιου μοντέλου. Κάθε φορά που αναλύεται η κατασκευή, το ΠΠΣ χρειάζεται κάποιο χρόνο για να ολοκληρωθεί. Ανάλογα τον αριθμό των κόμβων, την πολυπλοκότητα της κατασκευής, και το πλήθος των καταστάσεων φόρτισης που επιβάλλουμε, ο χρόνος μπορεί να μπορεί να κυμαίνεται από λίγα δευτερόλεπτα, μέχρι αρκετή ώρες (για μεγάλα μοντέλα). Για τον λόγο αυτό, για λόγους καθαρά παρουσίασης, στο τέλος κάθε βήματος, ο κώδικας εξαγάγει μια εικόνα, και την αποθηκεύει σε έναν φάκελο. Στην συνέχεια, όταν μαζεύονται όλες οι εικόνες, με την βοήθεια προγράμματος παραγωγής βίντεο από εικόνες, δημιουργείται και παρουσιάζεται η διάδοση της ρωγμής με την μορφή animation.
- Στο τέλος του βήματος, γίνεται εξαγωγή των καινούργιων αποτελεσμάτων που έχουν υπολογιστεί, και συμπληρώνεται το excel (Πίνακας 10) και τα διαγράμματα (Σχήμα 71).

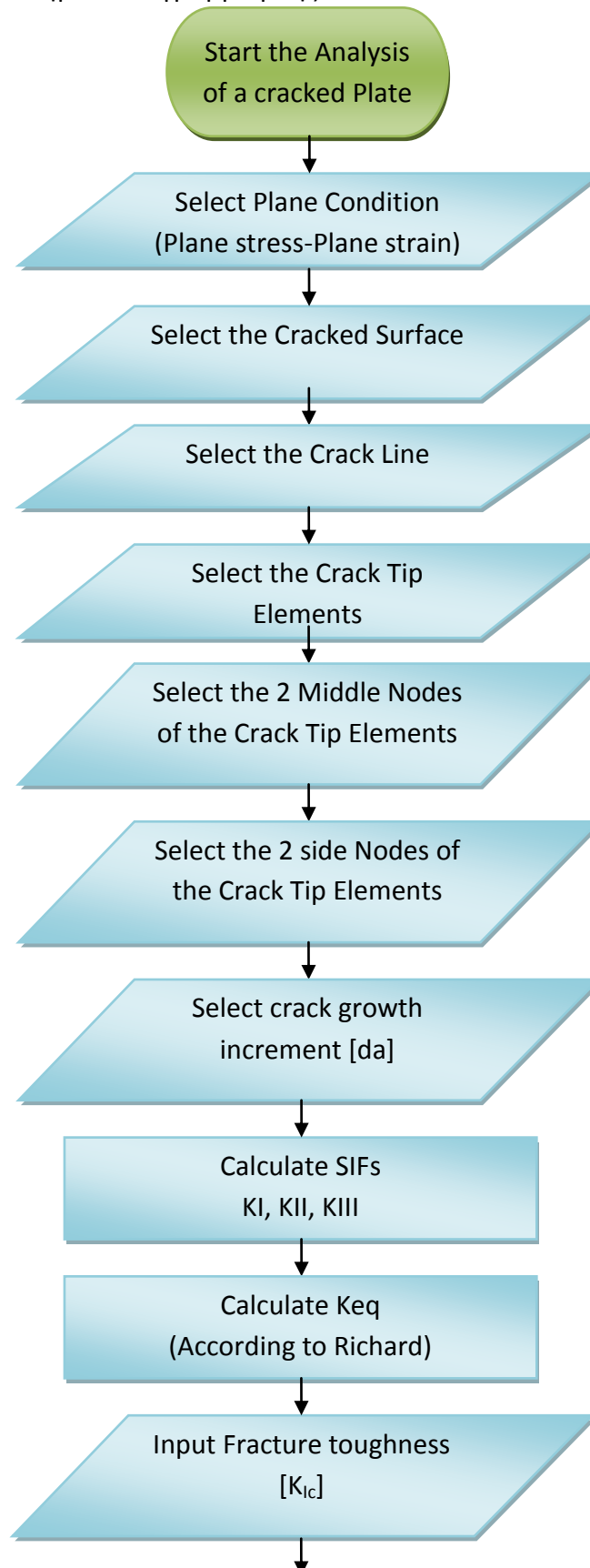
Πίνακας 10 Παρουσίαση του excel μετά από ένα βήμα ανάλυσης

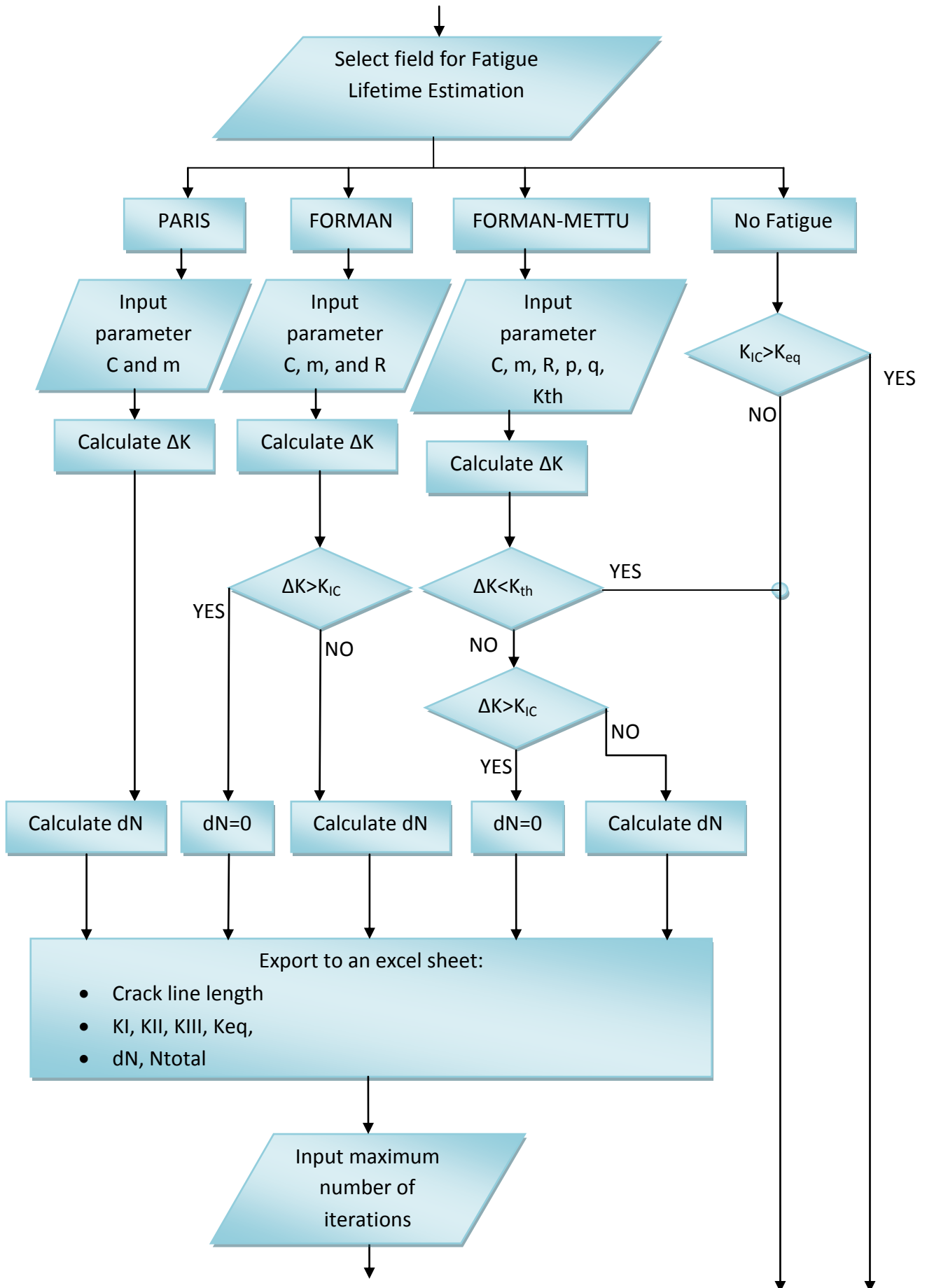
Run No	Crack Size	KI	KII	KIII	Keq	dN	Ntotal	Plastic	min	Hours	Days
1	108	1454,953	-22,12	0	1455,402	2490,426	2490	2,752008	32718,6	545,31	22,72125
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											
36											
37											
38											
39											
40											
41											
42											
43											
44											
45											

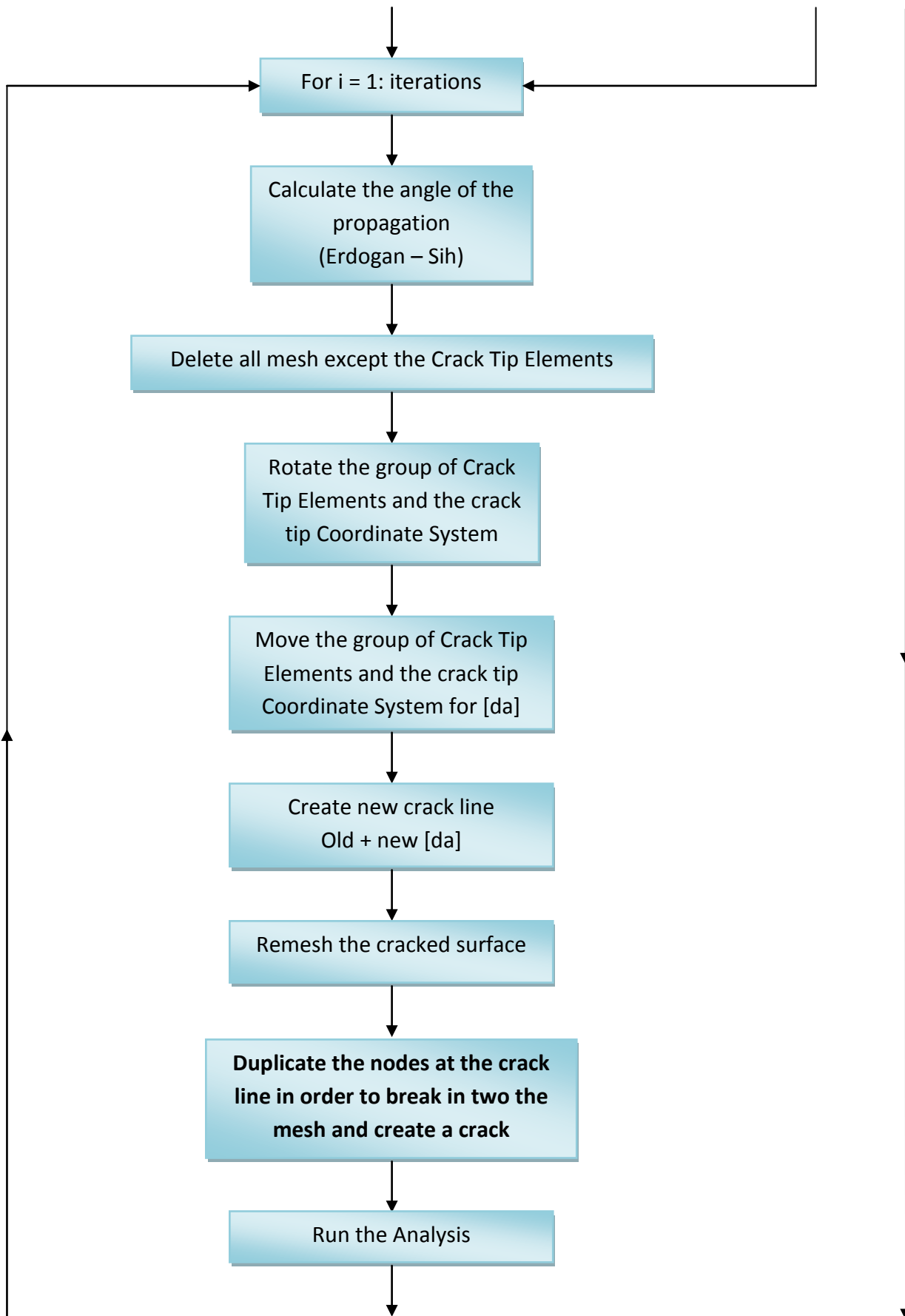
- Τέλος του πρώτου βήματος, και συνεχίζεται η ίδια διαδικασία μέχρι να εκπληρωθούν τα κριτήρια ανάπτυξης της ρωγμής (K_{th} , K_C), ή μέχρι να ολοκληρωθεί ο αριθμός των βημάτων που ορίσαμε στο πρόγραμμα.

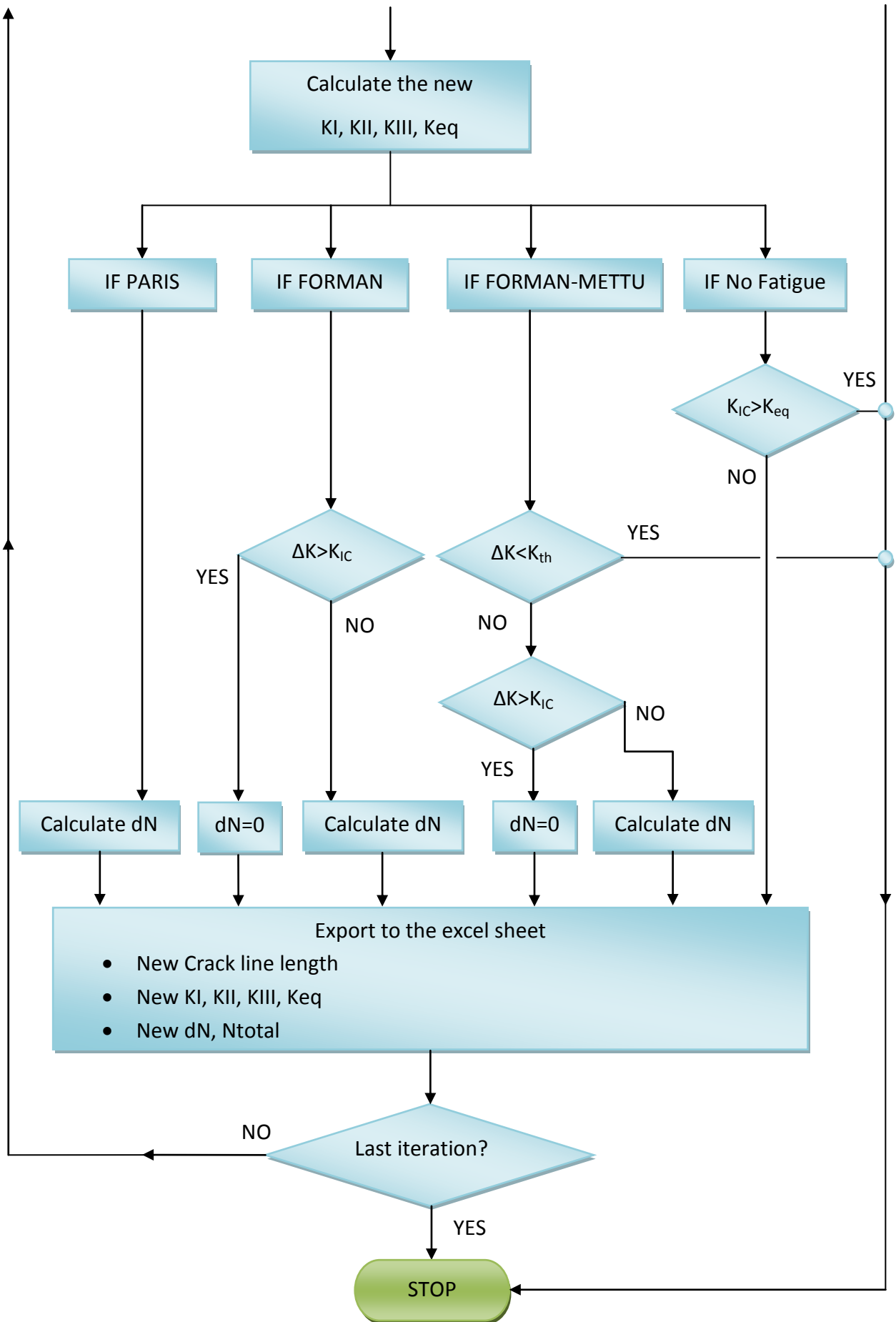
A.3 Διάγραμμα ροής του κώδικα.

Ακολουθεί ένα απλοποιημένο διάγραμμα ροής του κώδικα.









Βιβλιογραφία

- [1]. <http://www.linkedin.com/pulse/historical-failures-evolution-fracture-mechanics-ajay-taneja>.
- [2]. Νίκος Π. Ανδριανόπουλος "Μηχανική των Θραύσεων". Αθήνα: Εκδόσεις Συμείων, 2006.
- [3]. Meinhard Kuna, Finite Elements In Fracture Mechanics Theory-Numerics-Applications. 2013.
- [4]. R. I. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens og H. O. Fuchs, Metal Fatigue in Engineering Second Edition. 2001.
- [5]. R.D.Henshell, K.G.Shaw, Crack tip finite elements are unnecessary. International Journal Numer Methods. 1975.
- [6]. R.S. Barsoum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. 1976.
- [7]. Erdogan F, Sih GE On the crack extension in plates under plane loading and transverse. 1963.
- [8]. Paris P, Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. J Basic Eng 85:528–534. 1963.
- [9]. T.L. Andersen, Fracture Mechanics Fundamentals and Applications. 2005.
- [10]. Murakami Y., Stress Intensity Factors Handbook. 1987.
- [11]. Irwin G. R. Onset of Fast Crack Propagaion in High Strength Steel and Aluminum Alloys. 1956.
- [12]. Richard H. A. Fulland M. Sander. Theoretical Crack Path Prediction. 2004.
- [13]. Tanaka K. Fatigue Crack Propagation form a Crack Inclined to the Cyclic Tensile Axis. 1974.
- [14]. Spencer Wu (Project Monitor), Probabilistic Fracture Mechanics a Validation of Predictive Capability. 1990.
- [15]. Z.Lu, J.Xu, M.ASCE, L.Wang, J.Zhang, Y.Liu, Curvilinear Fatigue Crack Growth Simulation and Validation under Constant Amplitude and Overload Loading. 2014.
- [16]. <http://www.mathworks.com>curvefit>.
- [17]. Common Structural Rules for Tankers and Bulk ccarriers (NR 606 DT R 00). 2015.
- [18]. Hobbacher A. International Institute of Welding. Recommendations of Fatigue design of Welded Joints and Components. Paris, 2013.
- [19]. Using the FEMAP API.
- [20]. SIEMENS DMAP Programmers' s Guide.