Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Τεχνολογιας Πληροφορικης και Υπολογιστων

Ανάλυση απόδοσης άμεσων αλγόριθμων για ευσταθείς εισόδους προβλημάτων ομαδοποίησης

Διπλωματικη Εργασια

του

ΒΑΛΚΑΝΟΥ Δ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Ανάλυση απόδοσης άμεσων αλγόριθμων για ευσταθείς εισόδους προβλημάτων ομαδοποίησης

Διπλωματικη Εργασια

του

ΒΑΛΚΑΝΟΥ Δ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26 Ιουνίου 2018.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
.....	.....	.....
Δημήτριος Φωτάκης	Αριστείδης Παγουρτζής	Νικόλαος Παπασπύρου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Copyright ©–All rights reserved Γεώργιος Βαλκάνος, 2018.
Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

.....
Γεώργιος Βαλκάνος

Περίληψη

Η ανάγκη να επιλύουμε γρήγορα και με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα αλγοριθμικά μας προβλήματα έχει οδηγήσει τους ερευνητές σε νέες τεχνικές και μεθόδους. Η πιο ενδιαφέρουσα από αυτές στηρίζεται στην μελέτη και κατασκευή αλγόριθμων που αντιμετωπίζουν μόνο τις εισόδους με τις οποίες έρχεται αντιμέτωπο το πρόβλημα. Μιλάμε, δηλαδή, για μια ανάλυση πέρα της χειρότερης περίπτωσης που εστιάζει στην μελέτη και αξιοποίηση των χαρακτηριστικών των καλών εισόδων. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής παρουσιάζουμε δουλειά προγενέστερων πάνω σε προβλήματα ομαδοποίησης. Δείχνουμε, ότι κάτω από λογικές συνθήκες που πρέπει να διέπουν μια πραγματική είσοδο μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα k-median σε πολυωνυμικό χρόνο. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε δύο κλάσεις εισόδων, αυτές που είναι σταθερές στις προσεγγίσεις και αυτές που είναι ανθεκτικές στις διαταραχές. Στη συνέχεια, μελετάμε το πρόβλημα της online τοποθέτησης εργοστασίων και κάνουμε αναφορά σε δύο 2 γνωστούς αλγορίθμους. Τέλος, εισάγουμε για πρώτη φορά την έννοια της ανθεκτικής στις διαταραχές εισόδου σε πρόβλημα online ομαδοποίησης και συγκεκριμένα στο πρόβλημα της online τοποθέτησης εργοστασίων. Δείχνουμε, πως η γεωμετρία της εισόδου μπορεί να μας ωφελήσει ακόμη και όταν δεν γνωρίζουμε ολόκληρη την είσοδο. Παίρνουμε έναν γνωστό αλγόριθμο για το πρόβλημα και απλοποιούμε την ανάλυση του για ανθεκτικές εισόδους. Δείχνουμε ότι χρειάζεται σταθερός αριθμός εργοστασίων για να ανεξαρτητοποιηθούν δύο ομάδες τις βέλτιστης λύσης, ώστε να μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά.

Λέξεις Κλειδιά

Ανάλυση πέρα της χειρότερης περίπτωσης, Σταθερότητα στις προσεγγίσεις, Ανοχή στις διαταραχές, Τοποθέτηση εργοστασίων, Ανταγωνιστική ανάλυση.

Abstract

The need to solve fast and with the best possible way our algorithmic problems has led us to new methods and techniques. The most interesting of them is based on the study and design of algorithms that are able to confront only the instances which are faced by our problem. This is called beyond worst case analysis and its main focus is the understanding of the characteristics of a good instance. In this thesis we will study former work in problems of classification. We will see that under reasonable premises about a real instance one can solve the k-median problem in polynomial time. We are studying two notion for good instances, aproximation stability and perturbation resilience. Then, we are refering to the online facility location problem and to two known algorithms for the problem. Finally, for the first time, we introduce the concepts of perturbation resilience in online classification. We are proving that the geometry of an unknown input can be very beneficial in the competitive analysis of Fotakis' Incremental Facility Location algorithm. We are showing that after a constant number of facilities we can analyze two optimal clusters independently.

Keywords

Beyond worst case analysis, Approximation stability, Perturbation resilience, Facility location, Competitive analysis

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου Δημήτρη Φωτάκη για τις συμβουλές και την βοήθεια του όλο αυτό το διάστημα. Μου σύστησε τον θαυμάσιο κόσμο τον αλγορίθμων και με καθοδήγησε να ασχοληθώ με αυτό που αγαπάω. Ευχαριστώ, επίσης, τα μέλη τις επιτροπής. Μέσα από τα μαθήματα τους μου πρόσφεραν μερικές πολύ χρήσιμες γνώσεις που αναμφίβολα θα αξιοποιήσω στο μέλλον.

Ευχαριστώ του γονείς μου Δημήτρη και Ελένη, καθώς και την αδερφή μου Μαρία, για την αδιάκοπη στήριξη τους σε όλα τα χρόνια της φοιτητικής μου πορείας.

Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους μου, οι οποίοι μου χάρισαν μια αξέχαστη φοιτητική ζωή. Αναφέρω τα ονόματα τους αλφαβητικά για αποφυγή παρεξηγήσεων: Αλέξανδρος Μ., Γιάννης Σ., Γιώργος Β., Κωνσταντίνος Α., Μηνάς Χ., Πέτρος Α., Σέβη Π., Φαίη Σ.

Περιεχόμενα

Περίληψη **i**

Abstract **iii**

Ευχαριστίες **v**

Περιεχόμενα **viii**

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Οργάνωση διπλωματικής 2

2 Εισαγωγικές έννοιες **5**
2.1 Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι 5
2.2 Online αλγόριθμοι 6

3 Ανάλυση αλγορίθμων πέρα της χειρότερης περίπτωσης **9**
3.1 Σταθερότητα στις προσεγγίσεις 11
3.1.1 Βασικές έννοιες 11
3.1.2 Σταθεροί στις προσεγγίσεις είσοδοι για το K-median 13
3.1.3 Ο αλγόριθμος BBG 15
3.2 Ανοχή στις διαταραχές 16
3.2.1 Ορισμός 16
3.2.2 Ομαδοποίηση σε ανθεκτικές εισόδους 18

4 Το πρόβλημα της τοποθέτησης εργοστασίων **23**
4.1 Ο πιθανοτικός αλγόριθμος του Meyerson 25
4.1.1 Ανάλυση του αλγορίθμου 26
4.2 Ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος 28
4.2.1 Ανάλυση του αλγορίθμου 30

5 Τοποθέτηση εργοστασίων σε ανθεκτικές στις διαταραχές εισόδους **35**
5.1 Αλγόριθμος 35
5.2 Ανταγωνιστική ανάλυση 38

5.3 Ανταγωνιστική ανάλυση σε ανθεκτικές εισόδους 41
5.3.1 Ανάλυση για 2 βέλτιστα κέντρα 43
5.3.2 Ανάλυση για K βέλτιστες ομάδες 45

Βιβλιογραφία **51**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι ο εικοστός πρώτος αιώνας είναι η εποχή της πληροφορίας. Καθημερινά, τεράστιος όγκος δεδομένων και πληροφοριών επεξεργάζεται από διάφορες επιχειρήσεις ανά τον κόσμο. Είναι τόσο σημαντική η επεξεργασία όλων αυτών τον πληροφοριών που ένα μεγάλο κομμάτι του ερευνητικού κόσμου έχει εστιάσει εδώ και δεκαετίες στο πως μπορούμε να επεξεργαζόμαστε και να αποθηκεύουμε αποδοτικά όλα αυτά τα δεδομένα.

Η συνεχής αύξηση της ροής πληροφοριών είναι δυσανάλογη με την ανάπτυξη των υπολογιστών, με αποτέλεσμα ακόμη και η πιο δυνατοί υπολογιστές που διαθέτουμε να μην μπορούν να επεξεργαστούν αποδοτικά όλα αυτά τα δεδομένα. Για το λόγο αυτό, οι ερευνητές έχουν αναπαράγει ανά τα χρόνια διάφορους τρόπους για να μπορούν να επεξεργάζονται αποδοτικά τα δεδομένα.

Ένα μεγάλο κομμάτι της έρευνας οφείλεται στους θεωρητικούς οι οποίοι προσπαθούν μέσω των αλγορίθμων να διαχειριστούν τις απαιτήσεις των σημερινών εφαρμογών. Δυστυχώς, ο μεγάλος όγκος πληροφοριών και η αδυναμία μας να επιλύσουμε βέλτιστα τα NP-Δύσκολα προβλήματα μας έχει οδηγήσει στην αναζήτηση τεχνικών και μεθόδων που προσεγγίζουν όσο καλύτερα γίνεται το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες τεχνικές προκύπτει από απλή παρατήρηση του πραγματικού κόσμου. Για πολλά χρόνια οι σχεδιαστές αλγορίθμων προσπαθούσαν να βρουν μεθόδους που αντιμετωπίζουν καθολικά τα προβλήματα με βέλτιστο τρόπο. Στην πράξη, όμως, αυτό δεν είναι απαραίτητο. Μια εφαρμογή, για παράδειγμα, που συλλέγει δεδομένα από ένα κοινωνικό δίκτυο χρηστών έχει μια εικόνα για τον τύπο τον δεδομένων που θα λάβει ανάλογα με τον πληθυσμό μιας χώρας, την κουλτούρα και την ηλικία των χρηστών της. Είναι εύλογο, επομένως, να μας ενδιαφέρει να λύσουμε ένα πρόβλημα μόνο για τις εισόδους τις οποίες αντιμετωπίζει.

Πάνω σε αυτή την ιδέα πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να μελετήσουν την συμπεριφορά αλγορίθμων στη λεγόμενη μέση περίπτωση αποφεύγοντας την συχνά απαισιόδοξη ανάλυση χειρότερης περίπτωσης. Κάποιες από αυτές αφορούν στην μελέτη αλγορίθμων των οποίων οι είσοδοι ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή (diffused adversaries π.χ. [27,40]) και στη σύγκριση αλγορίθμων πάνω σε ίδιες κατηγορίες εισόδου (bijective analysis, π.χ. [1,2]).

Ο χώρος που εισάγουν ερευνητικές μελέτες όπως οι παραπάνω αφορά στην ανάλυση αλγορίθμων "πέρα" από τη χειρότερη περίπτωση (beyond worst case analysis). Σε γενικές

γραμμές, ορίζουν κλάσεις εισόδων με βάση χαρακτηριστικά που πρέπει να υπάρχουν σε μια είσοδο και είτε μελετάνε γνωστούς αλγορίθμους πάνω σε αυτές είτε σχεδιάζουν καινούργιους, βασισμένους στις ιδιότητες των κλάσεων. Ένα μεγάλο κομμάτι της παρούσας διπλωματικής είναι αφιερωμένο στη μελέτη και ανάλυση τέτοιων ιδεών. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε προγενέστερη δουλειά πάνω στο αντικείμενο και μελετάμε δύο βασικές κατηγορίες εισόδων (approximation stability και perturbation resilience).

Στη συνέχεια, μελετάμε το πρόβλημα της τοποθέτησης εργοστασίων (facility location) και παρουσιάζουμε δύο ενδιαφέρον αλγορίθμους που αφορούν στην *online* εκδοχή του. Τέλος, εισάγουμε για πρώτη φόρα την έννοια του perturbation resilience σε *online* προβλήματα και δείχνουμε μέσο του Incremental Facility Location αλγορίθμου [18] πως η γεωμετρία της εισόδου μπορεί να απλουστεύσει την ανάλυση του αλγορίθμου.

1.1 Οργάνωση διπλωματικής

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικές βασικές σχετικά με την φιλοσοφία των προσεγγιστικών και των online αλγορίθμων. Εισάγουμε βασικούς ορισμούς και έννοιες (προσεγγιστική σταθερά, ανάλυση χειρότερης περίπτωσης, ανταγωνιστική ανάλυση κλπ.) που θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο εστιάζουμε στην ανάλυση αλγορίθμων πέρα τις χειρότερης περίπτωσης (beyond worst case analysis). Ορίζουμε τα βασικά της χαρακτηριστικά και την σπουδαιότητα της συγκρίνοντας την με την κλασσική ανάλυση χειρότερης περίπτωσης. Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε εισόδους που είναι σταθερές στις προσεγγίσεις (approximation stable) για προβλήματα ομαδοποίησης. Ουσιαστικά, η απόκλιση από την βέλτιστη τιμή σε μια τέτοια είσοδο οφείλεται σε ένα μικρό ποσοστό (ϵn) των σημείων που ομαδοποιήθηκαν λάθος. Επιπλέον, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο BBG [6,32] για το k-median ο οποίος σε αυτήν την κατηγορία εισόδων ομαδοποιεί σωστά όλα τα σημεία εκτός από ένα ποσοστό τάξης $O(\epsilon/a)$.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου 3 παρουσιάζουμε άλλη μια κλάση εισόδων, αυτές που είναι ανθεκτικές στις διαταραχές (perturbation resilient). Εδώ μιλάμε για εισόδους που διατηρούν την βέλτιστη λύση αν μεταβάλουμε τις αποστάσεις των σημείων κατά έναν παράγοντα. Δίνουμε τους ορισμούς και της ιδιότητες μια τέτοιας εισόδου και παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος πετυχαίνει σωστή ομαδοποίηση των σημείων για a-perturbation resilient εισόδους με $a \geq 1 + \sqrt{2}$ [5].

Το κεφάλαιο τέσσερα αφιερώνεται στο πρόβλημα τοποθέτησης εργοστασίων. Αναφέρουμε τον κλασσικό ορισμό του προβλήματος, καθώς και τον ορισμό της online εκδοχής. Στη συνέχεια μελετάμε δύο γνωστούς αλγορίθμους για το online πρόβλημα. Αρχικά , επικεντρώνουμε στον πιθανοτικό αλγόριθμο του Meyerson [33] και έπειτα στον ντετερμινιστικό αλγόριθμο του Fotakis [19]. Παρουσιάζουμε την βασική διαίσθηση και τα βασικά σημεία της ανταγωνιστικής ανάλυσης για την περίπτωση που έχουμε 1 εργοστάσιο στην βέλτιστη λύση και σχολιάζουμε το πως γίνεται προέκταση της ανάλυσης στην γενική περίπτωση.

Σε όλους τους αλγορίθμους των κεφαλαίων 3-4 αναλύουμε την διαίσθηση πίσω από την ανάλυση τους και προσπαθούμε μέσω παραδειγμάτων και σχημάτων να εξηγήσουμε τα βασικά

τους σημεία και ποιες ιδιομορφίες των προβλημάτων τους εκμεταλλεύονται για να πετύχουν τον στόχο τους.

Στο κεφάλαιο πέντε παρουσιάζουμε την Incremental εκδοχή του προβλήματος τοποθέτησης εργοστασίων. Είναι παρόμοια με την online απλά μπορούμε να συγχωνεύσουμε 2 ή περισσότερα εργοστάσια μεταξύ τους. Δείχνουμε τον αλγόριθμο του Fotakis [18] και παρουσιάζουμε την ανάλυση για εισόδους με 1 εργοστάσιο στην βέλτιστη λύση. Ο αλγόριθμος αυτός κατορθώνει να είναι $O(1)$-competitive. Στη συνέχεια, ορίζουμε για πρώτη φόρα πως μοιάζει μια ανθεκτική στις διαταραχές είσοδος για το πρόβλημα αυτό και δείχνουμε μια διαφορετική ανάλυση του αλγορίθμου στην γενική περίπτωση πάνω σε αυτές τις εισόδους. Κάνουμε μια διαφορετική ανάλυση από το [18] για τις εισόδους αυτές. Η ανάλυση μας εκμεταλλεύεται τις γεωμετρικές ιδιότητες που έχει μια είσοδος αυτής της κλάσης. Αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος ($O(1)$) των εργοστασίων που μπορεί να ανοίξει ο αλγόριθμος μέχρι η κάθε βέλτιστη ομάδα να σταματήσει να επηρεάζει την άλλη και να μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Στην γενική περίπτωση δεν είναι σίγουρο κατά πόσο μπορεί να γίνει αυτό λόγω τις ακανόνιστης μορφής μιας τυχαίας εισόδου. Αρχικά, κάνουμε την πλήρη ανάλυση για 2 βέλτιστες ομάδες. Καταλήγουμε στο γεγονός ότι η μέγιστη τιμή για το πλήθος των εργοστασίων εξαρτάται από τις σταθερές του αλγορίθμου και την σταθερά που ορίζει την είσοδο. Τέλος, γενικεύουμε την ιδέα μας και κατορθώνουμε το $O(1)$-competitive με μια πιο σύντομη ανάλυση.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικές έννοιες

2.1 Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή είναι δύσκολο να επιλύσουμε βέλτιστα μεγάλο μέρος των προβλημάτων που μας ενδιαφέρουν. Ο κύριος λόγος για αυτό είναι ότι τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε είναι NP-δύσκολα (NP-hard) και εφόσον δεν γνωρίζουμε αν $P = NP$ δεν υπάρχει τρόπος να τα επιλύσουμε βέλτιστα σε πολυωνυμικό χρόνο. Επομένως, δεν μπορούμε να έχουμε αλγορίθμους οι οποίοι μας δίνουν ταυτόχρονα (1) την βέλτιστη λύση και (2) τρέχουν σε πολυωνυμικό χρόνο. Είμαστε αναγκασμένοι να σχεδιάζουμε αλγορίθμους οι οποίοι είναι ανεκτικοί σε τουλάχιστον μια από τις 2 συνθήκες. Με άλλα λόγια ο μόνος τρόπος για να είμαστε αξιόπιστοι είναι να θυσιάσουμε πολύτιμο υπολογιστικό χρόνο. Αντίστοιχα, ο μόνος τρόπος για να πετύχουμε γρήγορες λύσεις είναι εις βάρος της εγκυρότητας της λύσης μας.

Η μια κλάση αλγορίθμων, λοιπόν, εστιάζει στην εύρεση της βέλτιστης λύσης. Ο τρόπος που αυτό επιτυγχάνεται συνήθως είναι με έξυπνη αναζήτηση όλων των πιθανών λύσεων που μπορούν να προκύψουν από την είσοδος του προβλήματος. Όσο έξυπνη και αν είναι η αναζήτηση μας, βέβαια, ο αλγόριθμος μας μπορεί να εκτελείται από μερικά λεπτά έως και για πολλές εβδομάδες. Τέτοιοι αλγόριθμοι που υλοποιούν έξυπνη αναζήτηση του χώρου των λύσεων χρησιμοποιούνται από χώρου όπως η τεχνητή νοημοσύνη (για παράδειγμα ο A^* αλγόριθμος).

Η επικρατούσα κλάση αλγορίθμων, όμως, είναι αυτή που είναι πιο ανεκτική με την αξιοπιστία της λύσης. Η ανάγκη να μπορούμε να επεξεργαζόμαστε ταχύτατα των τεράστιο όγκο δεδομένων μας έχει κάνει να συμβιβαστούμε με όχι και τόσο καλές λύσεις. Σκοπός, λοιπόν, είναι να σχεδιάζουμε αλγορίθμους οι οποίοι μπορούν να προσεγγίζουν ταχύτητα όσο περισσότερο γίνεται την βέλτιστη λύση. Ένας τέτοιος αλγόριθμος ονομάζεται προσεγγιστικός (approximation).

Ορισμός 2.1. *[39, Definition 1.1] Ένας a-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που για κάθε είσοδο του προβλήματος παράγει μια λύση η οποία απέχει το πολύ έναν παράγοντα a από την βέλτιστη.*

Η σταθερά a είναι η εγγύηση που μας δίνει ο αλγόριθμος μας για το πόσο κοντά είναι στην βέλτιστη λύση. Για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με βέλτιστο κόστος OPT, ένας a-προσεγγιστικός αλγόριθμος μας υπόσχεται ότι θα δίνει πάντα λύση στο διάστημα $[OPT, aOPT]$ ($[aOPT, OPT]$ για πρόβλημα μεγιστοποίησης).

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε την αξιοπιστία ενός a-προσεγγιστικού αλγορίθμου A είναι υπολογίζοντας την συμπεριφορά του πάνω στις χειρότερες εισόδους. Πρακτικά, μια κακή είσοδος για έναν αλγόριθμο είναι μια "στρατηγικά" φτιαγμένη είσοδος που αναγκάζει τον αλγόριθμο να αποδώσει το μέγιστο δυνατό κόστος. Μια τέτοια μελέτη του αλγορίθμου ονομάζεται ανάλυση χειρότερης περίπτωσης (worst case analysis, WCA) και είναι αυτή που μας δίνει το κόστος ενός προσεγγιστικού αλγορίθμου A. Τυπικά, αν S είναι το σύνολο των εισόδων σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης, ισχύει

$$a = sup_{z \in S} \frac{cost(A, z)}{OPT(z)} \tag{2.1}$$

και αντίστοιχα για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$a = inf_{z \in S} \frac{cost(A, z)}{OPT(z)} \tag{2.2}$$

όπου $cost(A, z)$ είναι το κόστος του αλγορίθμου για την είσοδο z και $OPT(z)$ είναι το βέλτιστο κόστος για την ίδια είσοδο.

Έχουμε, πλέον, ένα μέτρο για να ταξινομούμε τους αλγορίθμους μεταξύ τους. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι η προσεγγιστική σταθερά τόσο πιο αξιόπιστος είναι ο αλγόριθμος. Βέβαια, η επιλογή ενός αλγορίθμου δεν στηρίζεται πάντα στην καλύτερη προσέγγιση. Λόγω του τεράστιου όγκου δεδομένων, υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ των διαφόρων κλάσεων πολυωνυμικής πολυπλοκότητας. Πριν μερικά χρόνια που τα δεδομένα μας ήταν λίγα αρκούσε ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για να επιλυθεί γρήγορα το πρόβλημα. Στη σημερινή εποχή, όμως, υπάρχει τεράστια χρονική διαφορά μεταξύ των $O(n^2)$ και $O(nlogn)$ όταν για παράδειγμα $n \geq 10^9$. Επομένως, η επιλογή του κατάλληλου προσεγγιστικού αλγορίθμου εξαρτάται και αυτή από ένα συνδυαστικό κριτήριο μεταξύ αξιοπιστίας και χρόνου εκτέλεσης.

2.2 Online αλγόριθμοι

Η κλασσική ανάλυση και ο σχεδιασμός αλγορίθμων προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε εξ αρχής όλη την είσοδο του προβλήματος. Στην πράξη, όμως, αυτό δεν ισχύει πάντοτε. Πολλές φορές η είσοδος μας γίνεται γνωστή σε κομμάτια. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, αλγορίθμους οι οποίοι αποφασίζουν για τα δεδομένα την στιγμή που μας αποκαλύπτονται. Ένα τέτοιο πρόβλημα ονομάζεται *online* πρόβλημα και οι αλγόριθμοι που τα αντιμετωπίζουν ονομάζονται *online* αλγόριθμοι.

Πως, λοιπόν, μετράμε την απόδοση ενός αλγορίθμου που δεν γνωρίζει τι του επιφυλάσσει το μέλλον ; Ο πιο δημοφιλής τρόπος μέχρι και σήμερα είναι μέσο του λεγόμενου ανταγωνιστικού κόστους (competitive cost). Έστω I μια είσοδος ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Αν επιλύσουμε το πρόβλημα γνωρίζοντας προκαταβολικά όλη την είσοδο τότε το πρόβλημα θα έχει ένα βέλτιστο κόστος $OPT(I)$. Συνεπώς, εκφράζουμε το κόστος του *online* αλγορίθμου σε σχέση με το βέλτιστο κόστος $OPT(I)$. Τυπικά, ένας *online* αλγόριθμος θα λέγετε c-competitive εάν για κάθε είσοδο I αποδίδει κόστος το πολύ $c \cdot OPT(I) + a$, όπου το a είναι ένας προσθετικός όρος που δεν επηρεάζεται από την είσοδο.

Όπως και με τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους, το c (competitive ratio) υπολογίζεται με βάση την συμπεριφορά του αλγορίθμου σε μια κακή είσοδο. Ενώ ο αλγόριθμος προσπαθεί να βελτιστοποιήσει το κόστος, μια κακόβουλη είσοδος (adversary) είναι μια στρατηγικά φτιαγμένη είσοδος η οποία αναγκάζει τον αλγόριθμο να αποδώσει το χειρότερο δυνατό κόστος.

Για να πάρουμε μια ιδέα για την λογική ενός *online* προβλήματος θα αναφερθούμε σε ένα κλασσικό πρόβλημα της κατηγορίας, την ενοικίαση σκι (ski rental). Το πρόβλημα είναι αρκετά απλό. Διαμένουμε σε ένα χειμερινό θέρετρο και θέλουμε να ασχοληθούμε με το σκι. Η ενοικίαση του εξοπλισμού κοστίζει 1\$ τη μέρα, ενώ το να αγοράσουμε τον εξοπλισμό κοστίζει B\$. Υπάρχει αλγόριθμος [24] ο οποίος κατορθώνει 2-competitive cost όταν δεν γνωρίζουμε το πλήθος τον ημερών που θα παραμείνουμε. Αν γνωρίζαμε ότι θα μείνουμε n μέρες τότε η βέλτιστη λύση είναι σχεδόν προφανής. Αν $n < B$ τότε μας συμφέρει η καθημερινή ενοικίαση, ενώ αν $n \geq B$ μας συμφέρει η αγορά. Συνεπώς, $OPT \leq B$. Όταν δεν γνωρίζουμε την είσοδο πράττουμε ως εξής: ενικοιάζουμε τον εξοπλισμό όσο παραμένει $n < B$ και την B-οστή μέρα αγοράζουμε τον εξοπλισμό. Επομένως, αν παραμείνουμε $n < B$ μέρες ο αλγόριθμος μας δίνει το βέλτιστο κόστος. Διαφορετικά μας δίνει κόστος $B - 1 + B = 2B$, που είναι διπλάσιο του βέλτιστου. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν αλγόριθμοι που κατορθώνουν καλύτερο ανταγωνιστικό κόστος χρησιμοποιώντας πιο σύνθετες ιδέες ($e/(e-1)$-competitive [11, 23]).

Στην σημερινή εποχή τα *online* προβλήματα έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών, καθώς συναντιόνται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Τα περισσότερα προβλήματα της θεωρητικής πληροφορικής έχουν μοντελοποιηθεί και μελετηθεί στην *online* εκδοχή τους. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα είναι αυτό της *online* ομαδοποίησης. Με βάση τις παραπάνω έννοιες που σχολιάσαμε, σε μια *online* ομαδοποίηση τα σημεία καταφθάνουν σειριακά και πρέπει να ανατεθούν σε ομάδες κατά την άφιξη τους. Σε επόμενο κεφάλαιο θα σχολιάσουμε εκτενέστερα αυτήν την κατηγορία καθώς αποτελεί βασικό κομμάτι του πυρήνα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση αλγορίθμων πέρα της χειρότερης περίπτωσης

Στο δεύτερο κεφάλαιο μιλήσαμε για το πώς ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος μας προσφέρει γρήγορες λύσεις εις βάρος της αξιοπιστίας του. Είπαμε ότι η ανάλυση της χειρότερης περίπτωσης μας δίνει μια καθολική εικόνα για την συμπεριφορά ενός αλγορίθμου, εφόσον για κάθε είσοδο ενός προβλήματος μας δίνει το εύρος στο οποίο κυμαίνεται η λύση του αλγορίθμου. Μέσω της προσεγγιστικής σταθεράς κάθε τέτοιου αλγορίθμου έχουμε εξάγει ένα μέτρο σύγκρισης μεταξύ των αλγορίθμων που επιλύουν το ίδιο πρόβλημα. Συγκεκριμένα, είπαμε ότι όσο πιο κοντά στην μονάδα είναι η προσεγγιστική σταθερά τόσο πιο καλός είναι ο αλγόριθμος. Θα δούμε, όμως, ότι ορισμένες φορές στην πράξη η σύγκριση αυτή είναι λανθασμένη.

Ο βασικός λόγος που η προσέγγιση ενός προβλήματος είναι δύσκολη, καθώς και ο λόγος που πολλοί αλγόριθμοι έχουν μεγάλες προσεγγιστικές σταθερές είναι η ύπαρξη κάποιων δύσκολων εισόδων. Θεωρητικά, όταν μελετάμε έναν αλγόριθμο είμαστε υποχρεωμένοι να τον μελετήσουμε πάνω σε κάθε πιθανή είσοδο. Στην πράξη, όμως, τα περισσότερα προβλήματα αντιμετωπίζουν μια υπό-κλάση του συνόλου των πιθανών εισόδων και έρχονται σπάνια αντιμέτωπα με δύσκολες εισόδους. Είναι εύλογο, λοιπόν, να σκεφτούμε ότι ένας αλγόριθμος μπορεί να είναι απαγορευτικός σε δύσκολες εισόδους, αλλά στην μέση περίπτωση να είναι ικανοποιητικά αποδοτικός.

Μια πολύ γνωστή περίπτωση που αποτυγχάνει η ανάλυση χειρότερης περίπτωσης είναι στη σύγκριση μεταξύ των αλγορίθμων $FIFO$ και LRU για την μνήμη cache του υπολογιστή. Η μνήμη του υπολογιστή είναι περιορισμένη όποτε κάθε φορά που είναι γεμάτη, ένα καινούριο δεδομένο που ζητάει θέση πρέπει να πάρει την θέση κάποιου άλλου. Συνοπτικά, η αντικατάσταση $FIFO$ πετάει από την μνήμη το δεδομένο που είναι τον περισσότερο χρόνο εκεί. Αν για παράδειγμα έχουν ζητηθεί τα δεδομένα a, b, c, d, a, e με αυτήν την σειρά και η μνήμη μας είναι τεσσάρων θέσεων, τότε το e θα καταβάλει την θέση του δεδομένου a. Από την άλλη, η αντικατάσταση LRU πετάει από την μνήμη το δεδομένο που δεν χρειάστηκε πρόσφατα. Στο προηγούμενο παράδειγμα, το δεδομένο που χρειάστηκε παλαιότερα από τα άλλα είναι το b και επομένως το e παίρνει τη θέση του. Από την σκοπιά της ανάλυσης και οι δύο αλγόριθμοι κατορθώνουν τον ελάχιστο αριθμό αντικαταστάσεων στην μνήμη. Αν πάρουμε, για παράδειγ-

Sequence : a, b, c, d, a, c, e, f

LRU			
a	b	c	d
a	e	c	d
a	e	c	f

FIFO			
a	b	c	d
e	b	c	d
e	f	c	d

Σχήμα 3.1: Για την δεδομένη ακολουθία δεδομένων βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος LRU θα αντικαταστήσει τα b, d με τα e, f γιατί ήταν τα δεδομένα που έχουν τον περισσότερο χρόνο να χρησιμοποιηθούν. Αντίθετα, ο $FIFO$ θα αντικαταστήσει τα a, b με τα καινούρια δεδομένα, αφού είναι αυτά που βρίσκονται περισσότερο χρόνο στην μνήμη.

μα, μια ακολουθία με δεδομένα διαφορετικά ανά δύο, τότε και οι δύο αλγόριθμοι πετυχαίνουν τον ελάχιστο αριθμό αντικαταστάσεων. Στην πράξη, όμως, γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος LRU είναι πολύ πιο αποδοτικός και χρησιμοποιείται κατά κόρον στην κατασκευή hardware. Η βασική διαίσθηση για την καλύτερη απόδοση έχει να κάνει με τον τρόπο που συντάσσουμε τα προγράμματα που εκτελούνται. Τα δεδομένα που εισέρχονται στην μνήμη για επεξεργασία είναι πολύ πιθανό να ζητηθούν στο άμεσο μέλλον ξανά (locality of reference). Μια δομή επανάληψης, για παράδειγμα, μπορεί να προκαλεί την χρήση του ίδιου δεδομένου ακριβώς, με αποτέλεσμα να μας συμφέρει η παραμονή του στην μνήμη.

Ένα, επίσης, γνωστό παράδειγμα είναι το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού (linear programming). Με βάση την ανάλυση χειρότερης περίπτωσης ο αρχαιότερος αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος, ο simplex, αναγκάζεται σε κάποιες εισόδους να διασχίσει όλους τους κόμβους του πολυγώνου (2^n) και να αποδώσει εκθετικό χρόνο εκτέλεσης [26]. Όμως, όπως μελετήθηκε στο [37], αν υπάρχει μια τυχαιότητα στην είσοδο ο αλγόριθμος έχει πολυωνυμικό αναμενόμενο χρόνο εκτέλεσης. Ενώ θεωρητικά η μελέτη αυτή δεν αποτελεί ανάλυση του αλγορίθμου στην μέση περίπτωση, πρακτικά μπορεί να προσομοιώσει την συμπεριφορά του αλγορίθμου σε μια μέση είσοδο. Πράγματι, στην πράξη ο simplex όχι μόνο τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο , αλλά καταπατάει και θεωρητικά καλύτερους αλγόριθμους. Για παράδειγμα, ο αλγόριθμος ellipsoid [25] είναι αρκετά χρήσιμος στην θεωρία, καθώς μας αποδεικνύει ότι το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, αλλά είναι αρκετά πιο χρονοβόρος από τον simplex στην πράξη.

Ένα ακόμη σημαντικό και γνωστό πρόβλημα στον χώρο των αλγορίθμων, που θα μας απασχολήσει και στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, είναι το πρόβλημα της ομαδοποίησης δεδομένων (clustering). Πρακτικά, έχουμε ένα σύνολο από σημεία στο χώρο και προσπαθούμε να τα κατατάξουμε σε ομάδες(clusters), με τρόπο κατάλληλο, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε (ή μεγιστοποιήσουμε) μια αντικειμενική συνάρτηση. Ανάλογα με τον τρόπο υπολογισμού του κόστους αυτής της ομαδοποίησης, το οποίο συνήθως εξαρτάται από τις αποστάσεις των σημείων με τα κέντρα των ομάδων, το πρόβλημα εμφανίζεται σε διάφορες εκδοχές (k-median, k-means, k-center, κλπ). Στην γενική περίπτωση η προσέγγιση της βέλτιστης λύσης είναι NP-δύσκολο πρόβλημα. Στην πραγματικότητα, όμως, οι είσοδοι που μας καθιστούν την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης δύσκολη μοιάζουνε με τυχαία σημεία στο χώρο. Στην πράξη κανένας δεν ενδιαφέρεται να ομαδοποιήσει ένα σύνολο από τυχαία σημεία και συνεπώς μπο-

ρούμε να πούμε ότι ομαδοποίηση είναι δύσκολη όταν δεν μας ενδιαφέρει ([17]). Επομένως, η μορφολογία της εισόδου επιτρέπει στους αλγορίθμους μας να αποδίδουν αρκετά ικανοποιητικά στην πράξη.

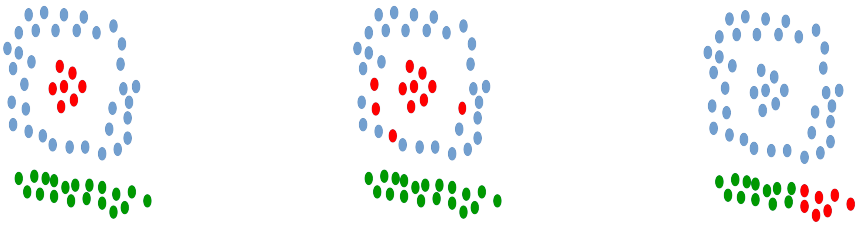
Στο σημείο αυτό καταλαβαίνουμε ότι χρειαζόμαστε ένα καινούριο μέτρο σύγκρισης της απόδοσης των αλγορίθμων. Αλγόριθμοι με φαινομενικά απαγορευτικούς χρόνους εκτέλεσης στην πράξη αποδεικνύονται ταχύτατοι. Ένα από τα ερευνητικά ενδιαφέροντα που πηγάζει από το γεγονός αυτό είναι το γιατί τέτοιοι αλγόριθμοι είναι τόσο αποδοτικοί στην μέση περίπτωση. Πια είναι τα μορφολογικά χαρακτηριστικά που εκμεταλλεύονται και αποδίδουν τόσο καλά στην πράξη·

Το άλλο ερώτημα που προκύπτει είναι αν η γνώση των χαρακτηριστικών μιας καλής εισόδου μας βοηθάει να κατασκευάζουμε αποδοτικότερους αλγορίθμους. Στα πλαίσια μιας πραγματικής εφαρμογής, θα θέλαμε έναν αλγόριθμο ο οποίος επιλύει βέλτιστα το πρόβλημα στο σύνολο των εισόδων που ενδιαφέρει την εφαρμογή. Η μελέτη και κατασκευή αλγορίθμων επηρεαζόμενων από τα δεδομένα που επεξεργάζονται, εισάγει μια νέα έννοια ανάλυσης πέρα της χειρότερης περίπτωσης (beyond worst case analysis). Από αυτήν την οπτική, η κατάταξη των αλγορίθμων γίνεται με βάση την αποδοτικότητα τους στις εισόδους που μελετάνε. Στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου θα εστιάσουμε στην μελέτη προβλημάτων ομαδοποίησης δεδομένων και στο πως η γεωμετρία του χώρου μας βοηθάει να κατασκευάσουμε βέλτιστους αλγορίθμους.

3.1 Σταθερότητα στις προσεγγίσεις

3.1.1 Βασικές έννοιες

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε το πρόβλημα του k-median, το οποίο είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Εν συντομία, στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων από τα βέλτιστα κέντρα τους. Έστω, επιπλέον, έχουμε και έναν a-προσεγγιστικό αλγόριθμο. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2 κάθε τέτοιος αλγόριθμος θα αποδώσει κόστος μέχρι και a φορές το βέλτιστο κόστος, δηλαδή $OPT \leq cost(A) \leq aOPT$. Τι γίνεται, όμως, με την μορφή της λύσης μας· Στην γενική περίπτωση ο αλγόριθμος μας υπόσχεται μόνο το εύρος τιμών στο οποίο θα αποδίδει και συνεπώς η εικόνα της λύσης μπορεί να είναι τελείως τυχαία. Όσον αφορά, όμως, τις καλές εισόδους, η βασική πεποίθηση, η οποία μελετάτε εκτεταμένα στα [6,32], είναι ότι η λύση πρέπει να παρουσιάζει κάποια ομοιότητα με την βέλτιστη. Ιδανικά, ο αλγόριθμος πετυχαίνει σωστή ομαδοποίηση, δηλαδή ίδιο πλήθος ομάδων με την βέλτιστη λύση, αλλά τοποθετηθεί σε λάθος ομάδες ορισμένα σημεία. Βασισμένοι σε αυτήν την ιδέα και δεχόμενοι ότι η λύση μας ακολουθεί όμοια μορφολογία με την βέλτιστη, αναζητάμε πόσα σημεία διαφοροποιούνται από αυτήν. Για το λόγο αυτό, εισάγουμε την έννοια της απόστασης 2 ομαδοποιήσεων για το ίδιο πρόβλημα ως το πλήθος των σημείων στα οποία διαφέρουν.



(α΄) Βέλτιστη ομάδα (β΄) Επιτρεπτή ομαδοποίηση (γ΄) Μη-επιτρεπτή ομαδοποίηση

Σχήμα 3.2: Στο σχήμα (α) βλέπουμε την βέλτιστη λύση του προβλήματος. Αν ο προσεγγιστικός αλγόριθμος δώσει κάτι αντίστοιχο με το σχήμα (β), βλέπουμε ότι η λύση δεν απέχει πολύ από την βέλτιστη (μερικά σημεία μπήκαν στην κόκκινη ομάδα) οπότε το instance αυτό μπορεί να θεωρηθεί stable . Αντίθετα, αν προκύψει κάτι ανάλογο με το (γ) βλέπουμε ότι η λύση δεν μοιάζει με την βέλτιστη και δεν είναι αποδεχτό (Το σχήμα είναι εμπνευσμένο από το [35]).

Ορισμός 3.2 ([32]). *Ορίζουμε την απόσταση $dist(C, \hat{C})$ μεταξύ 2 σετ ομάδων $C = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ και $\hat{C} = \{\hat{C}_1, \hat{C}_2, ..., \hat{C}_k\}$, ως το πλήθος των σημείων στα οποία διαφέρουν και δεδομένου ότι αυτά εκφράζονται ως ποσοστό των συνολικών σημείων έχουμε:*

$$dist(C, \hat{C}) := min_{\sigma \in S_k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} |C - \hat{C}|$$

όπου S_k είναι το σύνολο όλων των αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών μεταξύ των σημείων των 2 ομαδοποιήσεων, δηλαδή $S_k : k \to k$.

Με βάση πλέον τον παραπάνω ορισμό εξάγεται το παρακάτω λήμμα για την σχέση 2 διαφορετικών ομαδοποιήσεων

Λήμμα 3.1. *Θα λέμε ότι 2 ομαδοποιήσεις $C, \hat{C}$ είναι ϵ-κοντά αν και μόνο αν ισχύει:*

$$dist(C, \hat{C}) < \epsilon$$

Επιστρέφοντας στην αρχική ιδέα, μπορούμε να ορίσουμε ότι υπάρχει μια ευρύτερη κλάση εισόδων στις οποίες ο οποιοσδήποτε a-προσεγγιστικός αλγόριθμος θα οδηγεί σε μια λύση η οποία θα είναι ϵ-κοντά. Με άλλα λόγια η είσοδος μας είναι σταθερή στις προσεγγίσεις (approximation stable), εννοώντας ότι οι προσεγγίσεις δεν αλλοιώνουν ουσιαστικά την μορφή της βέλτιστης λύσης.

Ορισμός 3.3. *[32, Definiton 1] Δοσμένης μιας αντικειμενικής συνάρτησης Φ (όπως για παράδειγμα τα προβλήματα k-median, k-means, k-center), θα λέμε ότι η είσοδος μας είναι (a, ϵ)-approximation stable , αν όλες οι ομαδοποιήσεις C για τις οποίες $\Phi(C) \leq aOPT$, είναι ϵ-κοντά στην ομαδοποίηση-στόχο (target clustering).*

Παρατηρούμε, στον ορισμό ότι μιλάμε για ομαδοποίηση-στόχο και όχι απαραίτητα την βέλτιστη ομαδοποίηση. Αυτό στην ουσία αποτελεί μια γενίκευση της βασικής μας ιδέας, εφόσον θεωρητικά η βέλτιστη λύση σε κόστος να διαφέρει από αυτό που εμείς ορίζουμε σωστή ομαδοποίηση των δεδομένων. Τυπικά, όμως, λόγο του ορισμού η ομαδοποίηση στόχος πρέπει

να είναι ϵ-κοντά στην βέλτιστη. Στην πλειοψηφία των φορών, όμως, καθώς και στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Ιδανικά, λοιπόν, ο οποιοσδήποτε γνωστός a-προσεγγιστικός αλγόριθμος εξ΄ ορισμού καταφέρνει να ομαδοποιήσει σχεδόν σωστά τα δεδομένα μας. Πόσο χρήσιμο είναι στην ουσία αυτό το εργαλείο· Στην θεωρία πολυπλοκότητας υπάρχει ένα φράγμα για όλους τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους που εμποδίζει τις προσεγγιστικές σταθερές να λαμβάνουν αυθαίρετες τιμές. Για παράδειγμα, το πρόβλημα k-median δεν έχει αποδεδειγμένα πολυωνυμικό προσεγγιστικό αλγόριθμο με $a < 1 + \frac{2}{e} \approx 1.736$ εκτός και αν $P = NP$ [21]. Συνεπώς, ο προσδιορισμός μιας κλάσης εισόδων με a σε αυτό το εύρος τιμών δεν θα είχε κανένα πρακτικό και θεωρητικό ενδιαφέρον.

Μια ακόμη δυσκολία που προκύπτει είναι ότι ακόμη και αν βρισκόμαστε μέσα στα όρια υπαρκτών προσεγγιστικών αλγορίθμων, αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει και κατάλληλος αλγόριθμος που πετυχαίνει αυτήν την τιμή. Για παράδειγμα, ο καλύτερος γνωστός προσεγγιστικός αλγόριθμος για το k-median κατορθώνει $a = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$ [28], το οποίο είναι μακριά από το θεωρητικό ελάχιστο. Δυστυχώς για εμάς, δεν μπορούμε αυθαίρετα να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο αυτό σε μια σταθερή είσοδο και a μικρότερο από 2.73 ,και να επιδιώκουμε πάντα την αναμενόμενη ομαδοποίηση.

Πώς, λοιπόν, μπορούμε να καταρρίψουμε τα φράγματα που μας επιβάλλει η θεωρία πολυπλοκότητας ; Στις προηγούμενες παραγράφους, εισάγαμε την έννοια της σωστής ομαδοποίησης. Αντί, λοιπόν, να εστιάζουμε στην εύρεση μικρότερου κόστους, προσπαθούμε να βρούμε έναν αλγόριθμο ο οποίος μας ομαδοποιεί σωστά σε πολυωνυμικό χρόνο τα περισσότερα δεδομένα.

Θεώρημα 3.1. *[6, Theorem 3.9] Για κάθε ζευγάρι σταθερών $a, \epsilon > 0$, υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος, τέτοιος ώστε για κάθε $(1 + a, \epsilon)$-approximation stable instance k-median, βρίσκει λύση με k ομάδες που διαφέρει από την βέλτιστη σε $O(\epsilon/a)$ ποσοστό των σημείων.*

Επί της ουσίας, προκειμένου να αποφύγουμε τους περιορισμούς των φραγμάτων, χρησιμοποιούμε τις γεωμετρικές ιδιότητες της εισόδου. Οπότε, εκεί που η αριθμητική προσέγγιση είναι δύσκολη (NP-Hard), μέσω του θεωρήματος 3.1 μπορούμε να επιτύχουμε ομαδοποίηση κοντά στην βέλτιστη όσον αφορά την ανάθεση των σημείων.

3.1.2 Σταθεροί στις προσεγγίσεις είσοδοι για το K-median

Υποθέτουμε, λοιπόν, το πρόβλημα K-median. Στόχος μας σε πρώτη φάση είναι να μεταφράσουμε την έννοια της σταθερότητας στις προσέγγισης σε χρήσιμες μαθηματικές σχέσεις. Στην γενική περίπτωση, σε οποιοδήποτε πρόβλημα ομαδοποίησης πάνω σε μετρικούς χώρους, τα σημεία τα οποία συνήθως ομαδοποιούνται λάθος βρίσκονται είτε πολύ μακριά από το βέλτιστο κέντρο τους σε σχέση με την πλειοψηφία, είτε έχουν παρόμοιες αποστάσεις από πολλά κέντρα. Και τα δύο αυτά χαρακτηριστικά είναι αυτά που συνήθως δυσκολεύουν τους αλγορίθμους να επιλέξουν βέλτιστα την ομάδα κάθε σημείου. Ιδανικά, λοιπόν, θα θέλαμε έναν τρόπο ο αλγόριθμος μας να μπορεί να ξεχωρίσει τα καλά από τα προβληματικά σημεία για να μπορέσει να κατατάξει τα μεν σίγουρα σωστά και τα δε με αδιάφορο τρόπο. Πώς, όμως, η σταθερότητα προσέγγισης μας βοηθάει· Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια τέτοια κλάση εισόδων, η

οποία είναι (a, ϵ)-σταθερή. Η ανάλυση που ακολουθεί, καθώς και ο αλγόριθμος της επόμενης υπό-ενότητας, στηρίζονται στα [6, 32].

Έστω $w(x)$ η απόσταση του σημείου x από το κοντινότερο βέλτιστο κέντρο και $w_2(x)$ η απόσταση αυτού από το δεύτερο πιο κοντινό κέντρο.

Ορισμός 3.4. *Για κάθε σημείο $x \in X$, όπου X το σύνολο των σημείων της εισόδου, και έστω OPT το βέλτιστο κόστος:*

1. *Το σημείο x θα λέγεται κοντινό (close) αν:*

$$w(x) \leq \frac{OPT}{n} \frac{a}{5\epsilon} \tag{3.1}$$

2. *Το σημείο x θα λέγεται καλά διαχωρισμένο ($well - separated$) αν:*

$$w_2(x) - w(x) > \frac{OPT}{n} \frac{a}{\epsilon} \tag{3.2}$$

3. *Το σημείο x θα λέγεται καλό σημείο αν ισχύουν οι παραπάνω 2 ιδιότητες*

Σε πρώτη φάση οι έννοιες που ορίσαμε μοιάζουν να ορίστηκαν τελείως αυθαίρετα. Μπορούμε, όμως, να παρατηρήσουμε ότι και οι δύο πηγάζουν από τις δύο βασικές μας δυσκολίες σε αυτά προβλήματα και προσπαθούν να διακρίνουν τα καλά από τα κακά σημεία. Για να κατανοήσουμε λίγο καλύτερα τις έννοιες θα μελετήσουμε πόσα το πολύ κακά σημεία προκύπτουν από τον παραπάνω ορισμό.

Λήμμα 3.2. *Σε κάθε είσοδο το πολύ $\frac{5\epsilon}{a}n$ δεν είναι κοντινά.*

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν περισσότερα τέτοια σημεία τότε το άθροισμα των αποστάσεων τους από τα βέλτιστα κέντρα (έστω s) θα ήταν:

$$s > \frac{5\epsilon}{a} * n * \frac{OPT}{n} * \frac{a}{5\epsilon} = OPT \tag{3.3}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υπερβαίνει το βέλτιστο κόστος. □

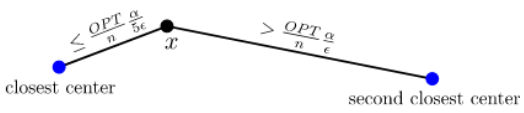
Λήμμα 3.3. *Υπάρχουν το πολύ ϵn σημεία που δεν είναι καλά διαχωρισμένα.*

Απόδειξη. Εάν αυτό δεν ισχύει τότε αλλάζοντας ϵn τέτοια σημεία από το βέλτιστο κέντρο τους στο δεύτερο πιο κοντινό τους κέντρο, το κόστος ανάθεσης των σημείων θα γινόταν:

$$OPT + \epsilon n \frac{aOPT}{n\epsilon} = (1 + a)OPT \tag{3.4}$$

Επομένως, θα είχαμε μια ομάδα με ϵn λάθος τοποθετημένα σημεία και κόστος $(1 + a)OPT$ που είναι άτοπο εξ' ορισμού. □

Με βάση, λοιπόν, τα παραπάνω λήμματα το πολύ $b = \epsilon n(1 + \frac{5}{a}) = O(\epsilon/a)$ δεν είναι καλά σημεία. Επομένως, αν σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο που καταφέρνει να ομαδοποιήσει σε πολυωνυμικό χρόνο σωστά τα σημεία που ορίσαμε ως καλά, τότε έχουμε πετύχει τον στόχο μας. Για το υπόλοιπο της ανάλυσης, θα υποθέσουμε ότι οι ομάδες της βέλτιστης λύσης περιέχουν τουλάχιστον $2b + 2$ σημεία. Ο λόγος που κάνουμε αυτή την υπόθεση έχει να κάνει με την χρονική εκτέλεση του αλγορίθμου μας και θα τον αναλύσουμε στην επόμενη υπό-ενότητα.



Σχήμα 3.3: Η απόσταση από το δεύτερο κέντρο προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 3.4, αφού $w_2(x) > w_2(x) - w(x)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε καλό σημείο είναι τουλάχιστον 5 φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο του από κάθε άλλο κέντρο (Το σχήμα είναι εμπνευσμένο από το [35]).

3.1.3 Ο αλγόριθμος BBG

Θα μελετήσουμε, λοιπόν, τον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο [6] και, όπως θα περιμέναμε, προσπαθεί να ομαδοποιήσει σωστά τα καλά σημεία. Χρησιμοποιεί μια χαρακτηριστική απόσταση η οποία ισούται με δύο φορές την μέγιστη απόσταση των κοντινών σημείων και σχεδιάζει ένα γράφο βάζοντας ακμές μεταξύ των σημείων που απέχουν το πολύ τόσο.

Αλγόριθμος BBG

Θέτουμε $\tau = \frac{OPT}{n}\frac{2a}{5\epsilon}$ και εκτελούμε τα εξής διαδοχικά:

- Βήμα 1: Σχεδιάζουμε ένα γράφο $G = (V, E)$ ζωγραφίζοντας μια ακμή σε κάθε ζεύγος σημείων (x, y) για τα οποία $d(x, y) \leq \tau$
- Βήμα 2: Σχεδιάζουμε τον γράφο (X, F) με βάση τον γράφο του βήματος 1, ζωγραφίζοντας την ακμή (x, y) αν $(x, y) \in E$ και τα σημεία x, y έχουν τουλάχιστον b κοινούς γείτονες στον γράφο G.
- Βήμα 3: Για κάθε σημείο $x \in X$ εφαρμόζουμε τα παρακάτω:
  1. Για κάθε ομάδα C_i που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα κοιτάμε την μέση απόσταση μεταξύ του x και κάθε σημείου $y \in C_i (y \neq x$ αν $x \in C_i)$.
  2. Μετακινούμε το x στην κοντινότερη ομάδα με βάση την παραπάνω μετρική.

Αρχικά με βάση τον ορισμό 3.4, τα καλά σημεία απέχουν από το βέλτιστο κέντρο τους το πολύ $\tau/2$ και άρα μέσο τριγωνικής ανισότητας τα καλά σημεία που ανήκουν στην ίδια βέλτιστη ομάδα απέχουν μεταξύ τους το πολύ τ και επομένως συνδέονται μεταξύ τους στον γράφο G σχεδιάζοντας μια κλίκα.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι τα καλά σημεία διαφορετικών βέλτιστων ομάδων (έστω x, y) απαιτούν τουλάχιστον 3 ακμές για να συνδεθούν μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το x ως καλό σημείο απέχει τουλάχιστον $\frac{5}{2}\tau$ από κάθε άλλο βέλτιστο κέντρο (εφόσον είναι καλά διαχωρισμένο) και το y ως κοντινό απέχει το πολύ $\tau/2$ από το κέντρο του. Οπότε, με βάση την τριγωνική ανισότητα προκύπτει:

$$d(x, y) \geq w_2(x) - w(y) > \frac{5\tau}{2} - \frac{\tau}{2}$$

Συνεπώς, απαιτούνται τουλάχιστον 3 ακμές για να σχηματιστεί μονοπάτι μεταξύ τους πάνω

στον γράφο.

Τι γίνεται, όμως, με τα κακά σημεία· Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στον σχεδιαζόμενο γράφο η γειτονιά ενός κακού σημείου μπορεί να περιέχει μόνο κακά σημεία (το πολύ $b-1$) ή καλά σημεία από την ίδια βέλτιστη ομάδα. Αν οι καλοί γείτονες του κακού σημείου ήταν από διαφορετικές ομάδες τότε θα παραβιαζόταν η προηγούμενη ιδιότητα που αποδείξαμε.

Προχωρώντας στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου, γνωρίζουμε ότι η επιλογή κλικών με τουλάχιστον $b+2$ σημεία, διατηρεί τις κλίκες καλών σημείων εφόσον δεν υπάρχουν τόσα πολλά κακά σημεία. Η μόνη ερώτηση, λοιπόν, είναι τι γίνεται με τα μονοπάτια μεταξύ καλών σημείων σε ξένες βέλτιστες ομάδες στον δεύτερο γράφο. Η απάντηση είναι ότι κανένα τους δεν επιβιώνει. Οι μόνες ακμές που ένωναν ξένες ομάδες μεταξύ τους ήταν αυτές μεταξύ των κακών τους σημείων. Από προηγούμενη όμως παρατήρηση η γειτονιά ενός κακού σημείου περιέχει καλά σημεία από μόνο μία βέλτιστη ομάδα. Οπότε, αν τα 2 κακά αυτά σημεία είχαν b κοινούς γείτονες, τότε θα υπήρχε ακμή μεταξύ τουλάχιστον ενός καλού σημείου με ξένο κακό σημείο, το οποίο έχουμε δείξει ότι δεν γίνεται. Επομένως, ο προκύπτον γράφος έχει ακριβώς k συνεκτικές συνιστώσες (ακριβώς όσες και οι βέλτιστες ομάδες). Οι συνεκτικές συνιστώσες υπολογίζονται γραμμικά από γνωστούς αλγορίθμους, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε μια ομαδοποίηση με το πολύ b σημεία λάθος τοποθετημένα.

Αφού η ομαδοποίηση έχει γίνει, ο αλγόριθμος στο τελευταίο του βήμα αναλαμβάνει να τοποθετήσει σωστά σημεία τα οποία είναι καλά διαχωρισμένα αλλά όχι κοντινά. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε την υπόθεση για την πληθικότητα των ομάδων, η οποία στην πράξη μας δίνει την πλειοψηφία των καλών σημείων σε κάθε ένα από αυτά. Έστω το σημείο x ανήκει στο C_i. Ανεξάρτητα από το αν ήδη βρίσκεται σε αυτό, η ομάδα περιέχει τουλάχιστον $b+1$ διακριτά καλά σημεία διαφορετικά από αυτό για τα οποία ισχύει από τριγωνική ανισότητα

$$d(x,y) \leq d(x,c_i) + d(y,c_i) \leq d(x,c_i) + \tau/2 \tag{3.5}$$

Επειδή, όμως, τα κακά σημεία στην ομάδα υστερούν σε πλήθος αναγκαστικά η μεσαία ($median$) απόσταση ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα. Αντίθετα, για τα καλά σημεία κάποιας άλλης ομάδας C_j έχουμε:

$$d(x,y) \geq d(x,c_j) - d(y,c_j) \geq d(x,c_i) + 5\tau/2 - \tau/2 = d(x,c_i) + 2\tau \tag{3.6}$$

Όμοια, λόγω της πλειοψηφίας των καλών σημείων η μεσαία απόσταση ικανοποιεί την παραπάνω ιδιότητα. Συνεπώς, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τη βέλτιστη ομάδα για το x και να το μεταφέρουμε σε αυτήν αν χρειάζεται.

3.2 Ανοχή στις διαταραχές

3.2.1 Ορισμός

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια διαφορετική οπτική της βέλτιστης λύσης. Αν πάρουμε ένα σημείο μιας εισόδου και το απομακρύνουμε από όλα τα άλλα σημεία κάποια ορισμένη απόσταση, τότε η βέλτιστη λύση μένει ανεπηρέαστη. Με άλλα λόγια, η βέλτιστη λύση είναι

ευέλικτη και διατηρείται κάτω από ένα εύρος μεταβολών των αποστάσεων. Μια τέτοια προσέγγιση έγινε από τους Bilu and Linial [9] η οποίοι όρισαν την έννοια της σταθερής (stable) εισόδου.

Ορισμός 3.5. *Μια είσοδος ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, θα λέγεται γ-σταθερή (γ-stable), εάν η βέλτιστη λύση παραμένει βέλτιστη κάτω από οποιαδήποτε μεταβολή απόστασης (ή βάρους ακμής) κατά έναν παράγοντα $\sigma_{xy} \in [1, \gamma]$.*

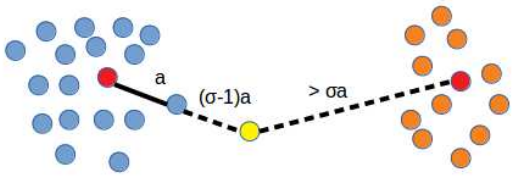
Με άλλα λόγια αν μας δοθεί ένας γράφος $G = (V, E, W)$ και αλλάξουμε τα βάρη των ακμών με τέτοιο τρόπο, ώστε $\forall (x, y) \in E, w'_{xy} = \sigma_{xy} w_{xy}$ με $\sigma_{xy} \in [1, \gamma]$, η βέλτιστη λύση διατηρείται. Βασισμένοι σε αυτή την ιδέα έγινε αρκετή μελέτη για το πρόβλημα max-cut και αποδείχθηκε ότι υπάρχουν αλγόριθμοι που μπορούν να βρουν την βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο([8, 31]).

Μια παρόμοια ιδέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στα προβλήματα ομαδοποίησης. Υπάρχει αρκετή δουλειά στον χώρο (π.χ. [4, 34]), αλλά εμείς θα εστιάσουμε κυρίως στην δουλειά των Liang Y. , Balcan M.F. [5]. Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, μια είσοδος μπορεί να θεωρηθεί σταθερή αν κάτω από οποιαδήποτε μεταβολή ορισμένων αποστάσεων διατηρεί την ίδια βέλτιστη λύση. Μια τέτοια μεταβολή ονομάζεται διαταραχή (perturbation) και άρα μια είσοδος που διατηρεί την βέλτιστη λύση θα λέμε ότι είναι ανθεκτική στις διαταράξεις (perturbation resilient). Σχηματικά, τα σημεία είναι τόσο κοντά στο κέντρο τους, ώστε αν μεγαλώσουμε την απόσταση αυτή κατά έναν παράγοντα a, τότε η βέλτιστη λύση παραμένει αμετάβλητη. Διαισθητικά, λοιπόν, μια βέλτιστη ομάδα εκτός από τα σημεία που τις ανήκουν περιέχει και τα νοητά σημεία που αντιστοιχούν στις μέγιστες απομακρύνσεις των σημείων από το κέντρο τους. Τα νοητά αυτά σημεία οριοθετούν έναν κενό χώρο ανάμεσα στις βέλτιστες ομάδες και μπορούμε με ένα έμμεσο τρόπο να ξεχωρίσουμε τις ομάδες μεταξύ τους. Ορίζουμε, λοιπόν, πως μοιάζει μια σταθερή είσοδος για ένα πρόβλημα ομαδοποίησης.

Ορισμός 3.6. *[5, Definition 2.1] Θα ονομάζουμε μια είσοδο a-perturbation resilient για $a \geq 1$, ως προς μια αντικειμενική συνάρτηση Φ, αν για οποιαδήποτε συνάρτηση $d' : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε για κάθε $p, q \in S$ να ισχύει $d(p, q) \leq d'(p, q) \leq ad(p, q)$, υπάρχει μοναδική βέλτιστη ομαδοποίηση C' για την Φ υπό την d' και είναι ίδια με την βέλτιστη ομαδοποίηση C για την Φ υπό την d.*

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι ο ορισμός αυτός μας επιτρέπει να ξεφύγουμε από τον ευκλείδειο χώρο. Στην πραγματικότητα, οποιαδήποτε μετρική $d'(x, y)$ για την οποία $d'(x, y) \leq ad(x, y)$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του παραπάνω ορισμού. Το εργαλείο αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, αφού πολλά πρακτικά προβλήματα, όπως η ομαδοποίηση πρωτεϊνών, που δεν χρησιμοποιούν πραγματικές αποστάσεις μεταξύ των σημείων, μπορούν να μελετηθούν έμμεσα ως ένα πρόβλημα ομαδοποίησης στον ευκλείδειο χώρο.

Η δεύτερη παρατήρηση έχει να κάνει με την σύγκριση των δύο εννοιών που έχουμε εισάγει. Ενώ η σταθερότητα στις προσεγγίσεις στηριζόταν στην ιδέα ότι η δομή της λύσης είναι πολύ κοντά στην βέλτιστη, εδώ είμαστε πιο ανεκτικοί με τις αποστάσεις των σημείων. Με άλλα λόγια αν "τεντώσουμε" μια βέλτιστη ομάδα τότε τα σημεία της συνεχίζουν να είναι πιο κοντά μεταξύ τους σε σχέση με τις άλλες ομάδες με αποτέλεσμα η ομάδα να διατηρείται.



Σχήμα 3.4: Παρατηρούμε για να ισχύει η ιδιότητα του resilience η πιθανή θέση του σημείου (κίτρινο σημείο) μετά από την μέγιστη απομάκρυνση του από το κέντρο του, οφείλει να παραμένει πιο κοντά στο κέντρο της από το κέντρο της άλλης ομάδας. Συνεπώς, υπάρχει ένα νοητός κενός χώρος ανάμεσα στις ομάδες που μας βοηθάει στο να τις διαφοροποιήσουμε (Το σχήμα είναι εμπνευσμένο από το [35]).

Όπως και με την προηγούμενη έννοια σταθερότητας και εδώ μπορούμε να είμαστε ευέλικτοι με τον ορισμό, εννοώντας ότι μπορούμε να εξαιρέσουμε μερικά σημεία από την παραπάνω ιδιότητα και να καταλήξουμε σε έναν λίγο πιο γενικό ορισμό.

Ορισμός 3.7. *[5, Definition 2.4] Θα ονομάζουμε μια είσοδο (a, ϵ)-perturbation resilient για $a \geq 1$, ως προς μια αντικειμενική συνάρτηση Φ, αν για οποιαδήποτε συνάρτηση d' : $S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε για κάθε $p, q \in S$ να ισχύει $d(p, q) \leq d'(p, q) \leq ad(p, q)$, υπάρχει μοναδική βέλτιστη ομαδοποίηση C' για την Φ υπό την d' η οποία είναι ϵ-κοντά στην βέλτιστη ομαδοποίηση C για την Φ υπό την d.*

3.2.2 Ομαδοποίηση σε ανθεκτικές εισόδους

Πώς μπορούμε, λοιπόν, να ωφεληθούμε από μια τέτοια ιδιότητα στα γνωστά προβλήματα, όπως τα K-median, K-means, κλπ. Αρχικά, πρέπει να μεταφράσουμε την έννοια του resilience σε μαθηματικές εκφράσεις. Ήδη ο ορισμός μας εισάγει έμμεσα την πρώτη σχέση, την οποία θα ονομάζουμε a-center proximity.

Ορισμός 3.8. *[5, Definition 3.1] Θα λέμε ότι μια είσοδος με βέλτιστη ομαδοποίηση $\mathcal{C}$ ικανοποιεί την a-center proximity ιδιότητα αν για κάθε ζεύγος βέλτιστων ομάδων $C_i, C_j \in \mathcal{C}, (i \neq j)$ και $\forall p \in C_i$ ισχύει $d(p, c_j) > ad(p, c_i)$*

Σε πρώτη φάση η παραπάνω ιδιότητα μοιάζει να προκύπτει από το πουθενά. Όμως θα αποδείξουμε, στο παρακάτω λήμμα, ότι συνδέεται άμεσα με την έννοια της ανθεκτικής εισόδου.

Λήμμα 3.4. *[5, Lemma 3.2] Κάθε είσοδος που είναι a-perturbation resilient ικανοποιεί την ιδιότητα του a-center proximity .*

Απόδειξη. Σχεδιάζουμε το εξής a-perturbation : πολλαπλασιάζουμε όλες τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων μια βέλτιστης ομάδας, έστω C_i, με τον παράγοντα a. Λόγω του resilience κάθε σημείο $p \in C_i$ συνεχίζει να προτιμάει το ίδιο βέλτιστο κέντρο, οπότε αν d' οι καινούριες αποστάσεις των σημείων έχουμε $\forall$ ζεύγος βέλτιστων κέντρων $c_i, c_j (i \neq j)$ και $\forall p \in C_i$

$$ad(p, c_i) = d'(p, c_i) < d'(p, c_j) = d(p, c_j)$$

□

Στην συνέχεια της ενότητας θα ασχοληθούμε με εισόδους που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα, οπότε τα αποτελέσματα μας θα ισχύουν κατ΄ επέκταση και για resilient εισόδους. Βασισμένοι στο proximity εξάγουμε μερικές ακόμη χρήσιμες ιδιότητες που θα μας βοηθήσουν στις αποδείξεις που ακολουθούν.

Λήμμα 3.5. *[5, Lemma 3.3] Για κάθε σημείο $p \in C_i$ και $q \in C_j (i \neq j)$, όπου C_i, C_j είναι βέλτιστες ομάδες ενός a-center proximity instance:*

1. $d(c_i, q) > \frac{a(a-1)}{a+1} d(c_i, p)$
2. $d(p, q) > (a-1) max\{d(c_i, p), d(c_i, q)\}$

Απόδειξη.

1. $$d(c_i, p) < \frac{1}{a} d(c_j, p) \leq \frac{1}{a}(d(c_i, p) + d(c_i, c_j) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-1) d(c_i, p) < d(c_i, c_j)$$

   Και επιπλέον,

$$d(c_i, c_j) \leq d(c_i, q) + d(c_j, q) < d(c_i, q) + \frac{1}{a} d(c_i, q) = \frac{a+1}{a} d(c_i, q)$$

   Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέση προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d(p, c_i) \leq d(q, c_j)$, οπότε:

$$d(p, q) \geq d(q, c_i) - d(p, c_i) > a d(q, c_j) - d(p, c_i) \geq$$

$$\geq a d(q, c_j) - d(q, c_j) = (a-1) d(q, c_j)$$

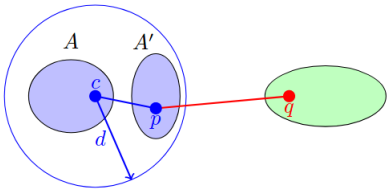
Παρατηρούμε ότι αν στις παραπάνω σχέσεις υποθέσουμε ότι $a \geq 1 + \sqrt{2}$, τότε αυτές απλοποιούνται και παίρνουν την παρακάτω μορφή:

1. $d(c_i, q) > d(c_i, p)$
2. $d(p, q) > \sqrt{2} max\{d(c_i, p), d(c_j, q)\}$

□

Η επιλογή της τιμής δεν είναι τυχαία καθώς θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη που θα ακολουθήσει στη συνέχεια.

Όλες οι εκδοχές προβλημάτων ομαδοποίησης που μας ενδιαφέρουν συνήθως χρησιμοποιούν μετρικές για το κόστος που είναι ανάλογες των αποστάσεων των σημείων από το κέντρο των ομάδων τους. Θα δείξουμε, λοιπόν, στη συνέχεια έναν αλγόριθμο ο οποίος μπορεί βέλτιστα να διακρίνει τις βέλτιστες ομάδες σε πολυωνυμικό χρόνο για κατάλληλη τιμή του a, συγκεκριμένα



Σχήμα 3.5: Αναπαράσταση του closure distance (από το [5]) μεταξύ 2 ομάδων A, A'. Η απόσταση του σημείου p που ανήκει στην σφαίρα $Ball(c, d)$ από το κέντρο c είναι μικρότερη από κάθε άλλη απόσταση $d(p, q)$ για $q \notin Ball(c, d)$.

μεγαλύτερη ίση του $1 + \sqrt{2}$. Βάση της διαίσθησης που αναλύσαμε το resilience αποτελεί ένα εργαλείο για να ξεχωρίζουμε έμμεσα τις βέλτιστες ομάδες μεταξύ τους. Οπότε είναι λογικό να φανταστούμε ότι αν μεγαλώσουμε το a τόσο ώστε να ξεχωρίσουν οι ομάδες αρκετά μεταξύ τους, τότε ο αλγόριθμος μας θα μπορέσει να τις διακρίνει. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι η εικασία μας είναι σωστή και ότι υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος που λύνει βέλτιστα σε πολυωνυμικό χρόνο το πρόβλημα ομαδοποίησης με τις παραπάνω προϋποθέσεις Σαν πρώτο βήμα θα χρειαστεί να ορίσουμε την παρακάτω έννοια:

Ορισμός 3.9. *[5, Definition 3.4] Έστω 2 ξένα μεταξύ τους υποσύνολα σημείων του χώρου A, A'. Ορίζουμε ως closure distance $d_s(A, A')$ την ελάχιστη ακτίνα d με βάση κατάλληλο κέντρο $c \in A \cup A'$ για το οποίο:*

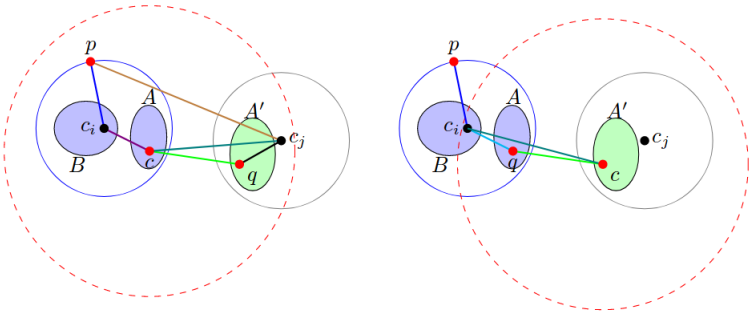
1. $A \cup A' \subseteq Ball(c, d)$
2. $\forall p \in Ball(c, d), q \notin Ball(c, d) \Rightarrow d(p, c) < d(p, q)$

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι ισχύει η εξής ιδιότητα: $d_s(A, A') \leq max_{p,q \in B} d(p, q)$. Με βάση, πλέον, αυτό τον ορισμό έχουμε ένα κριτήριο για να ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα μας. Σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος μας συγχωνεύει τις ομάδες με το ελάχιστο closure distance .

Αλγόριθμος για resilient εισόδους (k-median)

- Βήμα 1: Θεωρούμε κάθε σημείο ως ομάδα η οποία αποτελείται μόνο από αυτό.
- Βήμα 2: Όσο δεν έχει απομείνει 1 ομάδα, ενώνουμε τις ομάδες $A, A^{'}$ για τις οποίες το $d_s(A, A^{'})$ ελαχιστοποιείται.
- Βήμα 3: Έστω τ το δυαδικό δέντρο που έχει ως φύλλα τα σημεία της εισόδου και για εσωτερικούς κόμβους τις ομάδες που σχηματίζονται από τις ενώσεις του βήματος 2. Χρησιμοποιούμε δυναμικό προγραμματισμό για την εύρεση των ομάδων με το ελάχιστο κόστος.

Αρχικά, θα αναλύσουμε την διαίσθηση πίσω από το κριτήριο συγχώνευσης που είναι και η ουσία του αλγορίθμου. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι όντως καταφέρνει να κάνει σωστές



Σχήμα 3.6: Σχηματική αναπαράσταση (από το [5]) των αποστάσεων μεταξύ των ομάδων προς συγχώνευση σε ένα τυχαίο βήμα του αλγορίθμου. Οι A, B αποτελούν υποομάδες τις ίδιας βέλτιστης, ενώ η A' είναι ξένη μεταξύ τους. Η πρώτη εικόνα αφορά την περίπτωση που το κέντρο c ανήκει στην A, ενώ η δεύτερη είναι για $c \in A'$.

συγχωνεύσεις. Τι εννοούμε όμως με τον όρο σωστή συγχώνευση· Ιδανικά σε κάθε βήμα αν μια ομάδα είναι υποομάδα βέλτιστης προτιμάει να ενωθεί με οποιαδήποτε άλλη υποομάδα της ίδιας βέλτιστης. Συνεπώς ο μόνος τρόπος για μια ομάδα να περιέχει στοιχεία από δύο οι περισσότερες βέλτιστες ομάδες είναι να τις περιέχει εξ' ολοκλήρου. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή για να δείξουμε ότι σε κάθε βήμα για κάθε ομάδα A και βέλτιστη C ισχύει ένα από τα τρία: $A \subseteq C, C \subseteq A, A \cap C = \emptyset$.

Στο πρώτο βήμα ισχύει εμφανώς ότι $A \subseteq C$, αφού όλες οι ομάδες αποτελούνται από ένα και μόνο στοιχείο. Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε ένα ενδιάμεσο βήμα. Αρχικά, θα υπολογίσουμε το closure distance μεταξύ 2 υποομάδων της ίδιας βέλτιστης. Έστω A_i μια ομάδα για την οποία $A_i \subseteq C_i$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υποσύνολο $B \subseteq C_i/A_i$ τέτοιο ώστε $d_s(A_i, B) \leq \tilde{d} = max_{p \in C_i} d(c_i, p)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το που ανήκει το κέντρο της συγχώνευσης. Αν $c_i \notin A_i$, τότε υποθέτουμε ως B την υποομάδα που εμπεριέχει το c_i και για την οποία ισχύει $B \subseteq C_i$ λόγο επαγωγικής υπόθεσης και επομένως $B \subseteq C_i/A$. Συνεπώς, $\forall p \in C_i, d(c_i, p) \leq \tilde{d}$ και λόγω του ορισμού ισχύει $\forall q \in C_j (j \neq i), d(c_i, q) > \tilde{d}$. Με παρόμοια βήματα εκτελούμε την απόδειξη και όταν $c_i \in A$ αφού μπορούμε να ορίσουμε το B όπως θέλουμε αρκεί να είναι υποσύνολο του C_i/A.

Μένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι οποιοδήποτε άλλο closure distance είναι αυστηρά μεγαλύτερο από αυτό 2 υποσυνόλων της ίδιας βέλτιστης ομάδας. Συγκεκριμένα, αν A' μια ομάδα που αποτελείται από στοιχεία μιας η περισσότερων ομάδων ξένων με την C_i, τότε $\tilde{d} < \hat{d} := d_s(A, A')$. Στην ίδια φιλοσοφία με πριν και εδώ διακρίνουμε δύο πιθανές περιπτώσεις ανάλογα με το που ανήκει το κέντρο c. Έστω, λοιπόν, $c \in A$. Για ένα τυχαίο σημείο $q \in A'$ θέτουμε C_j την βέλτιστη ομάδα στην οποία ανήκει και εξ' ορισμού $d(c, q) \leq \hat{d}$. Από το λήμμα 3.5 έχουμε ότι $d(c_j, q) < d(c, q)$ για $a \geq 1 + \sqrt{2}$. Αναγκαστικά πρέπει $d(c_j, c) \leq \hat{d}$ γιατί αν δεν ισχύει τότε από τον ορισμό του closure distance εφόσον το c_j είναι σημείο εκτός της σφαίρας $B(c, \hat{d})$ από την δεύτερη συνθήκη του ορισμού θα ίσχυε $d(c, q) < d(c_j, q)$, που είναι άτοπο. Έστω $p \in C_i$ το σημείο για το οποίο ισχύει $\tilde{d} = d(c_i, p)$. Έχουμε από το λήμμα 3.5 και την τριγωνική ανισότητα ότι $d(c_i, p) < d(c_j, p)/a \leq (\tilde{d} + d(c_i, c) + d(c, c_j))/a$. Επιπλέον, ισχύει $d(c_i, c) < d(c_j, c)/a$, οπότε συνδυάζοντας τις ανισότητες για $a \geq 1 + \sqrt{2}$ παίρνουμε

$\tilde{d} < d(c, c_j) < \hat{d}$, που είναι και το ζητούμενο. Με παρόμοιο τρόπο η απόδειξη οδηγεί σε ανάλογο αποτέλεσμα όταν $c \in A'$.

Αφού σχηματιστεί το δέντρο που περιγράψαμε στο τρίτο βήμα του αλγορίθμου μένει τώρα να παράγουμε k συνεκτικές συνιστώσες που θα αποτελούν και τις βέλτιστες ομάδες. Οι λεπτομέρειες δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον μια και η μέθοδος είναι γνωστή μορφή δυναμικού προγραμματισμού, αλλά η βασική ιδέα είναι ότι ξεκινώντας από τα φύλλα του δέντρου ελέγχουμε για κάθε κόμβο αν μας συμφέρει σε κόστος να πάρουμε την ομάδα σαν ένα ή να την διασπάσουμε σε υποομάδες ελάχιστου κόστους που ορίζονται από τα παιδιά του κόμβου.

Στο [30] παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος για την επίλυση του προβλήματος σε πολυωνυμικό χρόνο για 2-perturbation resilient εισόδους. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ο καλύτερος δυνατός με την έννοια ότι έχει αποδειχθεί ότι δεν μπορούμε να επιλύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο για $(2 - \epsilon)$-perturbation resilient εισόδους, εκτός και αν $NP = RP$ [7].

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα της τοποθέτησης εργοστασίων

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα ομαδοποίησης, το οποίο θα μας απασχολήσει και στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής είναι το πρόβλημα τοποθέτησης εργοστασίων (Facility Location). Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ένα σύνολο από σημεία/πελάτες D και ένα σύνολο από εργοστάσια F. Για κάθε σημείο $i \in D$ και κάθε εργοστάσιο $j \in F$ υπάρχει ένα κόστος ανάθεσης του σημείου στο εργοστάσιο αυτό c_{ij}, καθώς και ένα κόστος f_j για το άνοιγμα του εργοστασίου j. Κάθε σημείο i ανατίθεται στο εργοστάσιο w για το οποίο ισχύει $d(i, w) = min_{j \in F} c_{ij}$. Επιζητούμε τον κατάλληλο αριθμό εργοστασίων, ο οποίος ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος ανοίγματος των εργοστασίων καθώς και το συνολικό κόστος ανάθεσης των σημείων σε αυτά. Τυπικά, λοιπόν, σκοπός μας είναι η ελαχιστοποίηση της παρακάτω αντικειμενικής συνάρτησης:

$$minimize\Big\{\sum_{j \in F} f_j + \sum_{i \in D} min_{j \in F} c_{ij}\Big\} \tag{4.1}$$

Σε αντίθεση με το πρόβλημα k-median έχουμε έναν επιπλέον αθροιστικό όρο στην αντικειμενική συνάρτηση, αυτόν του ανοίγματος των εργοστασίων. Αν ανοίξουμε μόνο ένα εργοστάσιο τότε καταφέρνουμε να πετύχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος στο άνοιγμα εργοστασίων, όμως το κόστος ανάθεσης των σημείων μπορεί να είναι υπερβολικά υψηλό λόγω του ότι τα σημεία μπορεί να είναι διασκορπισμένα και να έχουμε τεράστια κόστη ανάθεσης. Αν πάλι ανοίξουμε πολλά εργοστάσια, τότε τα κόστη ανάθεσης είναι μικρά, αφού κάθε σημείο θα έχει ένα εργοστάσιο κοντά του, αλλά το συνολικό κόστος των εργοστασίων μπορεί να οδηγηθεί σε τεράστιες τιμές. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι δεν μπορούμε να μελετήσουμε ανεξάρτητα τις 2 βασικές μεταβλητές του προβλήματος με αποτέλεσμα να αυξάνεται η δυσκολία του προβλήματος.

Η σημασία του συγκεκριμένου προβλήματος είναι τεράστια, καθώς μοντελοποιεί μερικά από τα πιο σημαντικά προβλήματα της καθημερινότητας. Για παράδειγμα, για μια εταιρία πώλησης ρούχων, τα σημεία αντιπροσωπεύουν τους πελάτες τις εταιρίας, ενώ τα εργοστάσια αντιπροσωπεύουν τα καταστήματα διανομής των προϊόντων σε όλη τη χώρα. Αντίστοιχα, για

μια εταιρία που προσφέρει online αποθηκευτικό χώρο, τα εργοστάσια αντιπροσωπεύουν τους σέρβερ της εν λόγω εταιρίας.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα μας απασχολήσει μια υποκατηγορία του προβλήματος όπου τα σημεία μας βρίσκονται σε μετρικό χώρο και τα κόστη ανάθεσης ορίζονται από την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων της εισόδου. Αξίζει να πούμε ότι γενικά το κόστος ανάθεσης μπορεί να είναι οτιδήποτε, και υπάρχουν και παραδείγματα από πρακτικές εφαρμογές με κόστος ανάθεσης διαφορετικό από την πραγματική απόσταση των σημείων. Στην περίπτωση που βρισκόμαστε στον ευκλείδειο χώρο, το πρόβλημα τοποθέτησης των εργοστάσιων δεν έχει κάποιον πολυωνυμικό αλγόριθμο επίλυσης του και η έρευνα μας μέχρι στιγμής περιστρέφεται γύρο από προσεγγιστικούς αλγορίθμους.

Υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι προσεγγίζουν το πρόβλημα με σταθερό παράγοντα προσέγγισης που στηρίζονται σε γραμμικό προγραμματισμό (linear programming) [22,36,38] και τοπική αναζήτηση (local search) [3, 16]. Επίσης, υπάρχουν αλγόριθμοι που βασίζονται σε πιο συνδυαστικές μεθόδους [13, 29]. Ο πιο γνωστός πολυωνυμικός αλγόριθμος κατορθώνει κόστος προσέγγισης το πολύ 1.5 φορές το βέλτιστο κόστος και οφείλεται στους Byrka και Aardal [14], ενώ είναι αποδεδειγμένο ότι δεν μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερη προσέγγιση από 1.463 φορές το βέλτιστο κόστος εκτός και αν ισχύει $NP \subseteq DTIME(n^{loglogn})$ [21].

Παρά τις δυσκολίες του προβλήματος, η παραπάνω έρευνα στηρίζεται στο γεγονός ότι έχουμε γνώση της εισόδου εξ΄ αρχής. Στην πράξη , όμως, αυτό δεν είναι πάντα εφικτό. Σε πολλές εφαρμογές τα σημεία πρέπει να εξυπηρετηθούν/ανατεθούν ενώ καταφθάνουν σειριακά, και σε κάθε χρονική στιγμή δεν έχουμε καμία απολύτως πληροφορία για το πλήθος ή την θέση των σημείων που θα εμφανιστούν στο μέλλον. Μια τέτοια εκδοχή του προβλήματος, όπου τα σημεία της εισόδου έρχονται το ένα μετά το άλλο για εξυπηρέτηση (από κάποιο εργοστάσιο) ονομάζεται online. Η online εκδοχή του προβλήματος τοποθέτησης εργοστασίων (Online Facility Location ή OFL για συντομία) εισήχθηκε αρχικά από τον Meyerson [33], και θα μονοπωλήσει το ενδιαφέρον μας στην συνέχεια του κεφαλαίου, καθώς θα μελετήσουμε διάφορους αλγορίθμους για την επίλυση του.

Στην προηγούμενη σελίδα είδαμε την αντικειμενική συνάρτηση την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε στο πρόβλημα τοποθέτησης εργοστασίων. Εμφανώς, ακόμη και όταν μιλάμε για την online εκδοχή παραμένει ίδια. Θα εστιάσουμε σε μια απλοποιημένη εκδοχή του προβλήματος όπου όλα τα εργοστάσια έχουν το ίδιο κόστος ανοίγματος f, με αποτέλεσμα η συνάρτηση της προηγούμενης σελίδας να τροποποιείται σε:

$$minimize\Big\{|F|f + \sum_{i \in D} min_{j \in F} c_{ij}\Big\} \tag{4.2}$$

Σε κάθε βήμα i ο κάθε αλγόριθμος μαθαίνει την τοποθεσία ενός σημείου u_i της εισόδου και το επεξεργάζεται κατάλληλα. Συμβολίζουμε με F_i το σύνολο των εργοστασίων που έχουν ανοίξει μέχρι και το βήμα i. Ο κάθε αλγόριθμος είτε δεν ανοίγει κάποιο εργοστάσιο, οπότε $F_i = F_{i-1}$, είτε ανοίγει ένα εργοστάσιο w, οπότε $F_i = F_{i-1} \cup \{w\}$. Μετά από αυτό το u_i ανατίθεται στο κοντινότερο εργοστάσιο στο F_i και το κόστος του αλγορίθμου αυξάνεται κατά $d(F_i, u_i)$. Οπότε μετά την επεξεργασία του σημείου u_i το συνολικό κόστος του αλγορίθμου

ορίζεται ως:

$$|F_i|f + \sum_{k=1}^{i} d(F_k, u_k) \tag{4.3}$$

4.1 Ο πιθανοτικός αλγόριθμος του Meyerson

Ο πρώτος αλγόριθμος που θα μελετήσουμε για το OFL είναι πιθανοτικός και οφείλεται στον Meyerson [33]. Στηριζόμενος σε μια πολύ απλή ιδέα, ο αλγόριθμος αυτός πετυχαίνει κόστος πολύ κοντά στο βέλτιστο. Κάθε φορά που καταφθάνει ένα σημείο u_i ο αλγόριθμος μας ανοίγει ένα εργοστάσιο στην θέση του σημείου αυτού με πιθανότητα $d(F_{i-1}, u_i)/f$ (ή 1 $d(F_{i-1}, u_i) \geq f$)αν . Αν ανοίξει εργοστάσιο τότε το σημείο ανατίθεται σε αυτό με μηδενικό κόστος ανάθεσης. Αν δεν ανοίξει καινούριο εργοστάσιο, τότε το σημείο ανατίθεται στο κοντινότερο ήδη ανοιχτό εργοστάσιο που υπάρχει.

Η βασική ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο είναι ότι όσο πιο μακριά είναι το σημείο από τα ήδη υπάρχοντα εργοστάσια, τόσο πιο πιθανό είναι η βέλτιστη λύση να θέλει ένα επιπλέον εργοστάσιο κοντά στο σημείο αυτό. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο αλγόριθμος μας ανοίγει εργοστάσια με πιθανότητα ανάλογη της απόστασης του σημείου από τα ήδη ανοιχτά εργοστάσια. Η πιο ισχυρή διαίσθηση, όμως, πίσω από τον αλγόριθμο είναι ότι οποιαδήποτε περιοχή σημείων χωρίς ανοιχτό εργοστάσιο και να πάρουμε, το συνολικό αναμενόμενο κόστος ανάθεσης των σημείων της είναι το πολύ f. Αρχικά, λοιπόν, θα δείξουμε διαισθητικά γιατί ισχύει αυτό. Κάθε σημείο που καταφθάνει έχει μια πιθανότητα να χρεώσει τον αλγόριθμο με κόστος f. Άρα μετά από το σημείο u_n, η αναμενόμενη τιμή για το συνολικό κόστος ανάθεσης είναι $E = f(1 - p_n)$, όπου p_n είναι η πιθανότητα να μην ανοίξει εργοστάσιο σε κανένα από τα σημεία $u_1, u_2, ..., u_n$. Επομένως, $E \leq f$.

Σε κάθε βήμα ο αλγόριθμος είτε αυξάνει το συνολικό κόστος κατά f με μηδενικό κόστος ανάθεσης, είτε δεν ανοίγει καινούριο εργοστάσιο και το κόστος αυξάνεται μόνο από το κόστος ανάθεσης $d(F_{i-1}, u_i)$. Εμφανώς, το αναμενόμενο κόστος ανάθεσης σε κάθε βήμα είναι το πολύ $d(F_{i-1}, u_i)$. Επιπλέον, κάθε σημείο συνεισφέρει στο κόστος των εργοστασίων $d(F_{i-1}, u_i)$, εφόσον:

$$E[new\ factory] = \frac{d(F_{i-1}, u_i)}{f} f + (1 - \frac{d(F_{i-1}, u_i)}{f})0 = d(F_{i-1}, u_i) \tag{4.4}$$

Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να φράξουμε το κόστος ανάθεσης από το κοντινότερο εργοστάσιο, κάθε σημείου, προκειμένου να υπολογίσουμε το κόστος του αλγορίθμου. Η ανάλυση μας θα χωριστεί σε φάσεις ανάλογα με τις θέσεις των ήδη ανοιχτών εργοστασίων. Η διαίσθηση πίσω από την ανάλυση των φάσεων είναι ότι αν ένα σημείο βρίσκεται μακριά από το βέλτιστο κέντρο του (εξωτερικό σημείο) τότε συνεισφέρει στην βέλτιστη λύση μεγάλο κόστος ανάθεσης. Αν, λοιπόν, το αναθέσουμε σε κάποιο εργοστάσιο στην περιφέρεια του ίδιου κέντρου, τότε από την τριγωνική ανισότητα το κόστος θα είναι κάποιος μικρός παράγοντας του βέλτιστου κόστους ανάθεσης. Αντίθετα, αν ένα σημείο βρίσκεται πολύ κοντά στο κέντρο του (εσωτερικό σημείο), η ανάθεση του σε κάποιο εργοστάσιο στην περιφέρεια μπορεί να οδηγήσει σε εκθετικά μεγαλύτερο κόστος ανάθεσης. Κάποια στιγμή ο αλγόριθμος, όμως, μπορεί να

ανοίξει κάποιο εργοστάσιο πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο και κάποια σημεία που θεωρούνταν εσωτερικά, πλέον να είναι εξωτερικά. Επομένως, κάθε φορά που ανοίγουν εργοστάσια όλο και πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο, όλο και περισσότερα σημεία γίνονται εξωτερικά και μπορούμε να τα αναθέσουμε σε κάποιο εργοστάσιο χωρίς να επιβαρύνουμε υπερβολικά το κόστος του αλγορίθμου.

4.1.1 Ανάλυση του αλγορίθμου

Εστιάζουμε, αρχικά, στην περίπτωση όπου η βέλτιστη λύση αποτελείται από ένα μόνο εργοστάσιο. Χωρίζουμε την ανάλυση του αλγορίθμου μας σε $h+2$ φάσεις, για το οποίο h ισχύει $m^h > n$. Το n είναι το σύνολο των σημείων και τα m, h είναι αριθμοί κατάλληλοι για να ικανοποιήσουν την παραπάνω ανισότητα. Η φάση $j = h, h-1, ..., 1, 0$ αρχίζει μόλις ανοίξει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $m^{j+1}\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο, και τελειώνει μόλις ανοίξει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $m^j\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο. Επιπλέον, σε κάθε φάση ένα σημείο u ορίζεται ως εσωτερικό σημείο αν ισχύει $d_u^* < m^j\delta^*$, αλλιώς θα λέμε ότι είναι εξωτερικό σημείο. Η μεταβλητή δ^* ορίζεται κατάλληλα, ώστε να ικανοποιεί την σχέση $\delta^* = Asg(c)/n$, όπου $Asg(c)$ είναι το βέλτιστο κόστος ανάθεσης. Εμφανώς, στην πρώτη φάση όλα τα σημεία είναι εσωτερικά, εφόσον $d_u^* \leq Asg(c) \leq n\delta^* < m^h\delta^*$. Τέλος, ορίζεται μια τελευταία φάση μετά την μηδενική η οποία συνεχίζει ανενάως καθώς προχωράει ο αλγόριθμος και τα σημεία που καταφθάνουν σε αυτήν είναι όλα εξωτερικά.

Όπως αναφέραμε, σε κάθε φάση j έχουμε εξωτερικά και εσωτερικά σημεία.Εφόσον η φάση j ξεκινάει αφού έχει ανοίξει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $m^{j+1}\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο τότε ισχύει στην χειρότερη περίπτωση : $d(F_{i-1}, c) < m^{j+1}\delta^*$. Επιπλέον, επειδή το σημείο που μελετάμε είναι εξωτερικό για την δεδομένη φάση, ισχύει ότι $d_{u_i}^* \geq m^j\delta^*$ και άρα συνάγουμε ότι $d(F_{i-1}, c < md_{u_i}^*$ και οδηγούμαστε στην σχέση

$$d(u_i, F_{i-1}) \leq d_{u_i}^* + d(F_{i-1}, c) \leq (m+1)d_{u_i}^* \tag{4.5}$$

Συνεπώς, η αναμενόμενη αύξηση του κόστους από ένα εξωτερικό σημείο στις πρώτες $h+1$ φάσεις είναι το πολύ $2(m+1)d_{u_i}^*$, ανάλογη δηλαδή του βέλτιστου κόστους.

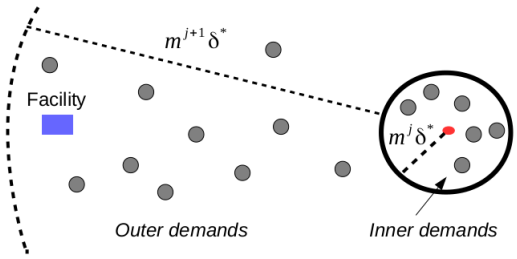
Όσον αφορά τα σημεία της τελευταίας φάσης (τα οποία όπως είπαμε είναι όλα εξωτερικά), η σχέση 4.5 τροποποιείται σε:

$$d(u_i, F_{i-1}) \leq d_{u_i}^* + d(F_{i-1}, c) \leq d_{u_i}^* + \delta^* \tag{4.6}$$

Επομένως, αθροίζοντας τα άνω φράγματα για τα εξωτερικά σημεία, λαμβάνουμε ότι η συνεισφορά τους στο κόστος του αλγορίθμου είναι το πολύ:

$$\begin{aligned} \sum 2(m+1)d_u^* + \Big[\sum 2d_u^* + \sum 2\delta^*\Big] \leq \sum_{u\ outer} 2(m+1)d_u^* + 2n\delta^* \leq \\ \leq 2(m+1)Asg^*(c) + 2Asg^*(c) = 2(m+2)Asg^*(c) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Όσον αφορά τα εσωτερικά σημεία πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Τα σημεία αυτά είναι συγκεντρωμένα κοντά στο βέλτιστο κέντρο, και οποιαδήποτε ανάθεση τους σε κάποιο



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση μιας τυχαίας φάσης j της ανάλυσης. Βλέπουμε ότι οι βέλτιστες αποστάσεις των εξωτερικών σημείων (outer demands) είναι συγκρίσιμες με το κόστος ανάθεσης τους στο ανοιχτό εργοστάσιο, ενώ τα εσωτερικά σημεία (inner demands) είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο κέντρο σε σχέση με το εργοστάσιο.

εργοστάσιο τις περιφέρειας μπορεί να οδηγήσει σε εκθετικά μεγαλύτερο κόστος ανάθεσης. Όμως, προηγουμένως δείξαμε ότι μια οποιαδήποτε περιοχή σημείων χωρίς ανοιχτό εργοστάσιο συνεισφέρει κόστος ανάθεσης περίπου f μέχρι το άνοιγμα του πρώτου εργοστασίου. Με βάση τον τρόπο που έχουμε ορίσει τις φάσεις, σε κάθε φάση η εσωτερική περιοχή αποτελεί μια τέτοια περιοχή. Οπότε, συνολικά έχουμε κόστος $2f$ από τα εσωτερικά σημεία.

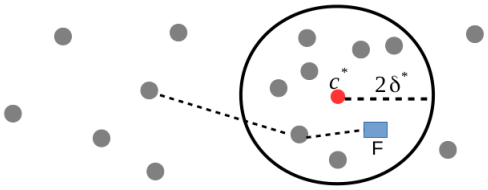
Συνοψίζοντας, το κόστος για ένα βέλτιστο κέντρο είναι το πολύ $2(m+1)Asg(c)+2(h+1)f$. Αν θέσουμε $m = h = \Theta(\frac{logn}{log(logn)})$, τότε το συνολικό κόστος προκύπτει να είναι το πολύ $\Theta(\frac{logn}{log(logn)})OPT^*$.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα της ανάλυσης αυτής είναι ότι μπορούμε εύκολα να την γενικεύσουμε σε περιπτώσεις με πολλά βέλτιστα κέντρα, εφαρμόζοντας την ανεξάρτητα σε κάθε ένα από αυτά. Από τι στιγμή που ανοίξει ένα εργοστάσιο στην περιφέρεια μιας βέλτιστης ομάδας, η ανάλυση για την ομάδα αυτή γίνεται όπως περιγράψαμε παραπάνω αγνοώντας την ύπαρξη των άλλων ομάδων. Μέχρι, λοιπόν, το πρώτο εργοστάσιο η βέλτιστη ομάδα συμπεριφέρεται ως ένα σύνολο σημείων χωρίς εργοστάσιο και όπως δείξαμε θα χρεώσει τον αλγόριθμο με κόστος το πολύ f μέχρι να ανοίξει κάποιο εργοστάσιο. Συνεπώς, η τάξη πολυπλοκότητας του αλγορίθμου διατηρείται και το κόστος στην γενική περίπτωση παραμένει $\Theta(\frac{logn}{log(logn)})OPT^*$.

Η μεγάλη δύναμη του αλγορίθμου βρίσκεται στην περίπτωση όπου τα σημεία καταφθάνουν σε τελείως τυχαία σειρά. Σε αυτήν την περίπτωση ο αλγόριθμος καταφέρνει να πετύχει σταθερό αναμενόμενο κόστος. Εστιάζουμε πάλι στην ανάλυση ενός βέλτιστου κέντρου, απλά αυτή την φορά υποθέτουμε ότι έχουμε μια μόνο φάση, όπου τα μισά σημεία είναι εσωτερικά (τα πιο κοντινά στο βέλτιστο κέντρο) και τα άλλα εξωτερικά. Οπότε κάθε σημείο έχει πιθανότητα $1/2$ να ανήκει σε καθ΄ ένα από τα 2 σύνολα. Με την βοήθεια της απαγωγής σε άτοπο μπορούμε να δείξουμε ότι τα εσωτερικά σημεία απέχουν το πολύ $2\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο τους. Έστω, ότι αυτό δεν ίσχυε, τότε θα υπήρχαν $x > n/2$ σημεία τα οποία θα απείχαν τουλάχιστον $2\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο τους. Οπότε, για το συνολικό κόστος ανάθεσης στο βέλτιστο κέντρο θα είχαμε

$$Asg(c) > x * 2\delta^* \geq \frac{n}{2} 2 \frac{Asg^*(c)}{n} = Asg^* \tag{4.8}$$

το οποίο εμφανώς είναι άτοπο. Όπως και πριν, μέχρι να ανοίξει ένα εργοστάσιο στην περιοχή



Σχήμα 4.2: Στην περίπτωση που τα σημεία καταφθάνουν τυχαία υπάρχουν ισάριθμα εσωτερικά και εξωτερικά σημεία. Μέσω αντιστοιχίας των εξωτερικών στα εσωτερικά σημεία, παίρνουμε το άνω φράγμα για το κόστος ανάθεσης τους στα ήδη ανοιχτά εργοστάσια στην εσωτερική περιοχή.

των εσωτερικών σημείων, το συνολικό αναμενόμενο κόστος είναι $f + f$. Από εκείνο το σημείο και μετά υπάρχει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $2\delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο, οπότε μέσω τριγωνικής ανισότητας το αναμενόμενο κόστος ανάθεσης και ανοίγματος εργοστασίου είναι $2(2\delta^* + d^*_{u_i})$, για κάθε εσωτερικό σημείο u_i. Συνεπώς, για τα εσωτερικά σημεία έχουμε ότι το συνολικό κόστος είναι το πολύ:

$$2f + \sum_{u_i \ inner} 2(2\delta^* + d^*_{u_i}) = 2f + \frac{n}{2}4\delta^* + 2 \sum_{u_i \ inner} d^*_{u_i} \leq 2f + 3Asg^* \tag{4.9}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι τα εσωτερικά σημεία ως πιο κοντινά σημεία συνεισφέρουν το πολύ το μισό του κόστους στην βέλτιστη λύση. Το συγκεκριμένο άνω φράγμα ισχύει ανεξάρτητα της σειράς με την οποία καταφθάνουν τα εσωτερικά σημεία.

Όσον αφορά τώρα τα εξωτερικά σημεία, λόγο της τυχαίας άφιξης των σημείων πρέπει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις. Αν ένα εξωτερικό σημείο καταφθάσει πριν οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο τότε, χρεώνει τον αλγόριθμο με κόστος f. Αν τώρα ένα εξωτερικό σημείο φτάσει μετά από κάποιο εσωτερικό χρησιμοποιούμε τα εσωτερικά σημεία για να φράξουμε το κόστος. Πιο συγκεκριμένα, αν u ένα εξωτερικό σημείο και v το εσωτερικό σημείο που έχει καταφθάσει τελευταίο μέχρι στιγμής, τότε το κόστος του u φράσσεται από $2(d^*_u + d^*_v)$ συν το αναμενόμενο κόστος του εσωτερικού σημείου v. Δεδομένου ότι έχουμε ισάριθμα εσωτερικά και εξωτερικά σημεία και δεδομένου ότι τα σημεία φτάνουν περίπου εναλλάξ ($1/2$ πιθανότητα να είναι εξωτερικό ή εσωτερικό) τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα σημεία ένα προς ένα μεταξύ τους, με αποτέλεσμα το συνολικό κόστος από τα εξωτερικά σημεία να είναι το πολύ $f + 2Asg^*$ συν το αναμενόμενο κόστος των εσωτερικών σημείων. Συνοψίζοντας,

$$2f + 3Asg^* + f + 2Asg^* + (2f + 3Asg^*) = 5f + 8Asg^* \tag{4.10}$$

Αθροίζοντας για όλα τα βέλτιστα κέντρα παίρνουμε ότι το αναμενόμενο κόστος του αλγορίθμου είναι το πολύ $5Fac^* + 8Asg^*$, το οποίο είναι σταθερός αριθμός επί το βέλτιστο κόστος.

4.2 Ένας ντετερμινιστικός αλγόριθμος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε και αναλύσαμε τον πιθανοτικό αλγόριθμο του Meyerson. Είδαμε και αναλύσαμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες οι οποίες οδηγούν μέχρι και σε

σταθερό competitive cost. Θα θέλαμε, ιδανικά, να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο, ο οποίος πετυχαίνει την ίδια τάξη κόστους. Στις επόμενες σελίδες, λοιπόν, θα μελετήσουμε και θα αναλύσουμε έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο που προσομοιώνει σε μεγάλο βαθμό τις βασικές ιδέες του αλγορίθμου του Meyerson, ακολουθεί παρόμοια ανάλυση και πετυχαίνει κόστος τάξης $\Theta(\frac{logn}{log(logn)})$. Ο αλγόριθμος αυτός (DetOFL εν συντομία) οφείλεται στον Fotakis [19].

Ο πιθανοτικός αλγόριθμος της προηγούμενης ενότητας χρησιμοποιούσε την έννοια των φάσεων στην ανάλυση του. Πιο συγκεκριμένα, κάθε φάση τελείωνε όταν άνοιγε ένα εργοστάσιο στην περιοχή των εσωτερικών σημείων (δηλαδή αρκετά κοντά στο βέλτιστο κέντρο), ενώ το κόστος των εσωτερικών σημείων δεν ξεπερνούσε το $2f$ σε κάθε φάση. Ο DetOFL προσομοιώνει μια πιο χαλαρή εκδοχή αυτών των βασικών ιδιοτήτων και κατορθώνει, όπως αναφέραμε, λογαριθμική τάξη κόστους.

Αρχικά, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την έννοια των ανικανοποίητων σημείων για το άνοιγμα εργοστασίων. Όταν ένα σημείο u_i καταφθάνει, εντάσσεται αυτόματα στο σύνολο των ανικανοποίητων σημείων L. Στη συνέχεια ο αλγόριθμος υπολογίζει το πιθανό κόστος ανάθεσης όλων των ανικανοποίητων σημείων στην γειτονιά $L(u_i)$ του u_i στα ήδη ανοιχτά εργοστάσια. Αν το κόστος αυτό, ή αλλιώς $Pot(L(u_i))$, ξεπερνάει το κόστος εργοστασίου f, τότε ο αλγόριθμος ανοίγει ένα καινούριο εργοστάσιο στην περιοχή και αναθέτει σε αυτό τα σημεία στο $L(u_i)$. Με τον τρόπο αυτό ο DetOFL κατορθώνει την χρήσιμη ιδιότητα του πιθανοτικού αλγορίθμου να χρεώνει με κόστος το πολύ f πριν ανοίξει το πρώτο εργοστάσιο. Υπολογίζει επακριβώς το συνολικό κόστος ανάθεσης και αν αυτό είναι παραπάνω από f, τότε ανοίγει νέο εργοστάσιο.

DetOFL algorithm

Για κάθε σημείο u_i που καταφθάνει κάνουμε τα εξής:

- Βήμα 1: Εντάσσουμε το σημείο u_i στο σύνολο L των ανικανοποίητων σημείων.
- Βήμα 2: Ορίζουμε την γειτονιά ανικανοποίητων σημείων γύρο από το u_i ως: $L(u_i) = L \cap Ball(u_i, d(u_i, F_{i-1})/x)$, όπου x είναι μια αρκετά μεγάλη σταθερά. Υπολογίζουμε το πιθανό κόστος ανάθεσης όλων των σημείων στο $L(u_i)$ στα ήδη ανοιχτά εργοστάσια. Τυπικά, $Pot(L(u_i)) = \sum_{u \in L(u_i)} d(u, F_{i-1})$.
- Βήμα 3: Αν $Pot(L(u_i)) \geq f$, τότε ο αλγόριθμος ανοίγει ένα καινούριο εργοστάσιο w. Αν $d(u_i, F_{i-1}) \geq f$, τότε το εργοστάσιο ανοίγει στην θέση του u_i. Αλλιώς, το w ανοίγει στο κέντρο της μικρότερης σφαίρας b ($b \subseteq L(u_i)$) που περιέχει περισσότερο από το μισό κόστος του $Pot(L(u_i))$. Τα σημεία στο $L(u_i)$ ανατίθενται στο καινούριο αυτό εργοστάσιο και αφαιρούνται από το L, ως ικανοποιημένα, πλέον, σημεία.
- Βήμα 4: Αν $Pot(L(u_i)) < f$, δεν ανοίγει καινούριο εργοστάσιο και το σημείο ανατίθεται στο κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο.

Αρχικά, η έννοια των ανικανοποίητων σημείων μας διαβεβαιώνει ότι κάθε σημείο u συνει-

σφέρει στον αλγόριθμο κόστος το πολύ $d(u, F_{i-1})$. Αυτό ισχύει γιατί όσο το σημείο είναι ανικανοποίητο τότε το κόστος του είναι ίδιο με το πιθανό κόστος ανάθεσης στο κοντινότερο εργοστάσιο. Αν συνεισφέρει στο άνοιγμα νέου εργοστάσιου, τότε το σημείο γίνεται ικανοποιημένο και δεν επηρεάζει ξανά το κόστος του αλγορίθμου. Επιπλέον, είδαμε στην ανάλυση του προηγούμενου αλγορίθμου ότι σε κάθε φάση το αναμενόμενο κόστος των εσωτερικών σημείων μέχρι να ανοίξει ένα εργοστάσιο είναι f. Προκειμένου να κάνουμε το ίδιο εδώ, θα έπρεπε όλα τα εσωτερικά σημεία μιας φάσης να ανήκουν στην ίδια ανικανοποίητη γειτονιά. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε μια αρκετά μεγάλη σταθερά λ για να ορίσουμε τις φάσεις μας. Η ακτίνα της περιοχής των εσωτερικών σημείων βρίσκεται τουλάχιστον $1/\lambda$ φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο από το κοντινότερο εργοστάσιο. Αν ανατρέξουμε στα βήματα του αλγορίθμου θα δούμε ότι η ανικανοποίητη γειτονιά είναι ανάλογη της απόστασης από το κοντινότερο εργοστάσιο. Διαισθητικά, λοιπόν, η εσωτερική περιοχή είναι μια αρκετά μικρή σφαίρα και η γειτονιά κάθε εσωτερικού σημείου είναι αρκετά μεγάλη για να την περιέχει ολόκληρη.

4.2.1 Ανάλυση του αλγορίθμου

Όπως θα φανταζόμασταν, η ανάλυση ακολουθεί την ίδια φιλοσοφία με τον προηγούμενο αλγόριθμο. Ορίζουμε ένα ζεύγος σταθερών m, h για τις οποίες $m^h > n$ και επικεντρωνόμαστε στην ανάλυση ενός βέλτιστου κέντρου. Χωρίζουμε την ανάλυση σε $h+2$ φάσεις και κάθε φάση $j = h, h-1, ..., 1, 0$ αρχίζει όταν ανοίξει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $\lambda m^{j+1}\delta^*$ και τελειώνει όταν ανοίξει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $\lambda m^j \delta^*$ από το βέλτιστο κέντρο c. Σε κάθε φάση j ένα σημείο u είναι εσωτερικό αν ισχύει $d_u^* < m^j\delta^*$, διαφορετικά είναι εξωτερικό. Όπως και πριν υπάρχει μια φάση μετά την μηδενική η οποία δεν τελειώνει ποτέ και όλα τα σημεία που φθάνουν σε αυτήν είναι εξωτερικά.

Όσον αφορά τα εξωτερικά σημεία, όπως και πριν, η απόσταση τους από το βέλτιστο κέντρο είναι αρκετά μεγάλη, οπότε η ανάθεση τους σε κάποιο εργοστάσιο της περιφέρειας θα οδηγήσει σε κόστος ανάλογο του βέλτιστου κόστους. Πράγματι, σε μια τυχαία φάση $j = h, h-1, ..., 1, 0$, για το εξωτερικό σημείο u έχουμε

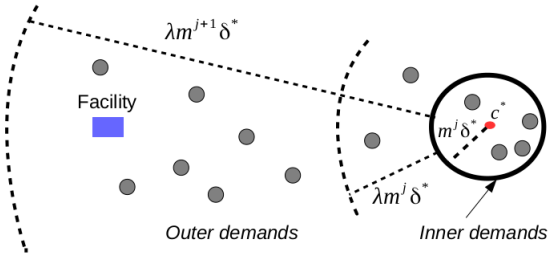
$$d(u, F_{i-1}) \leq d_u^* + d(F_{i-1}, c) \leq d_u^* + \lambda m^{j+1}\delta^* \leq d_u^* + \lambda m d_u^* \tag{4.11}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το u είναι εξωτερικό σημείο και ισχύει $d_u^* \geq m^j\delta^*$. Για την τελευταία φάση, όλα τα σημεία θεωρούνται εξωτερικά και υπάρχει ένα εργοστάσιο σε ακτίνα $\lambda\delta^*$ από το c. Οπότε, για ένα εξωτερικό σημείο u της τελευταίας φάσης έχουμε

$$d(u, F_{i-1}) \leq d_u^* + \lambda\delta^* \tag{4.12}$$

Αθροίζοντας τα κόστη του συνόλου των εξωτερικών σημείων παίρνουμε ότι το συνολικό κόστος είναι το πολύ

$$\begin{aligned}\sum(d_u^* + \lambda m d_u^*) + \sum(d_u^* + \lambda\delta^*) &= \sum_{u\ is\ outer} d_u^* + \sum_{not\ final\ phase} \lambda m d_u^* + \sum_{final\ phase} \lambda\delta^* \\ &\leq Asg^*(c) + \lambda m Asg^*(c) + \lambda n\frac{Asg^*(c)}{n} = (\lambda(m+1)+1)Asg^*(c)\end{aligned} \tag{4.13}$$



Σχήμα 4.3: Σχηματική αναπαράσταση μιας τυχαίας φάσης j της ανάλυσης DetOFL. Η μικρή σφαίρα γύρο από το βέλτιστο κέντρο περιέχει τα εσωτερικά σημεία της φάσης, ενώ τα υπόλοιπα σημεία είναι εξωτερικά. Το κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο βρίσκεται αρκετά μακριά με αποτέλεσμα η ανικανοποίητη γειτονιά ενός εσωτερικού σημείου να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει όλη την εσωτερική περιοχή. Επιπλέον, αν παραπάνω από το μισό κόστος για ένα καινούριο εργοστάσιο οφείλεται σε εσωτερικά σημεία, τότε το κέντρο της μικρότερης σφαίρας, στο οποίο θα ανοίξει το εργοστάσιο, βρίσκεται αναγκαστικά εντός της σφαίρας $Ball(c^*, \lambda m^j \delta^*)$ και η φάση j τελειώνει.

Σε κάθε φάση τα εσωτερικά σημεία βρίσκονται σε μια μικρή σφαίρα γύρο από το βέλτιστο κέντρο. Οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των εσωτερικών σημείων είναι τόσο μικρές σε σχέση με τις αποστάσεις τους από το κοντινότερο εργοστάσιο που πρακτικά όλα τα εσωτερικά σημεία έχουν προσεγγιστικά το ίδιο πιθανό κόστος ανάθεσης. Επομένως, για ευκολία στην ανάλυση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το βέλτιστο κέντρο σαν αντιπρόσωπο των εσωτερικών σημείων, και να μιλάμε για πιθανό κόστος ανάθεσης του c.

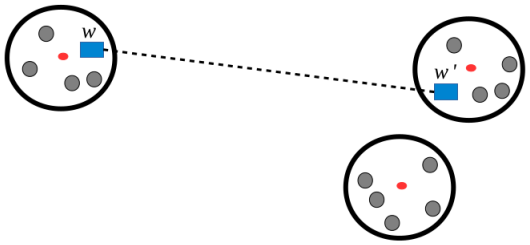
Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε κάθε φάση το πιθανό κόστος του c είναι 0 στην αρχή. Καθώς καταφθάνουν εσωτερικά σημεία το κόστος αυξάνεται. Ο μόνος τρόπος για να μειωθεί, είναι είτε να ανοίξει κάποιο εργοστάσιο στην εξωτερική περιοχή πιο κοντά από τα ήδη ανοιχτά, οπότε το κόστος ανάθεσης να πέσει, είτε να ανοίξει ένα εργοστάσιο το οποίο έχει στην ανικανοποίητη γειτονιά του κάποια (ή όλα) από τα εσωτερικά σημεία. Η βασική ιδέα, λοιπόν, είναι ότι το κόστος που συνεισφέρουν στον αλγόριθμο τα εσωτερικά σημεία είναι το πολύ ίσο με το άθροισμα των μειώσεων στο κόστος του c.

Στο σημείο αυτό βλέπουμε τον λόγο για τον οποίο ορίσαμε της φάσεις μας με αυτόν τρόπο. Στην φάση j το κοντινότερο εργοστάσιο απέχει από το βέλτιστο κέντρο τουλάχιστον $\lambda m^j \delta^*$. Επομένως, για ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο u αυτής της φάσης ισχύει

$$(\lambda - 1)m^j\delta^* \leq d(u, F_{i-1}) \leq (\lambda + 1)m^j\delta^* \tag{4.14}$$

από την τριγωνική ανισότητα. Δεδομένου ότι η ακτίνα της ανικανοποίητης γειτονιάς ορίζεται από την απόσταση με το κοντινότερο εργοστάσιο δια μια σταθερά x, αν υποχρεώσουμε το λ να έχει μια τιμή τουλάχιστον $2x + 1$, τότε : $d(u, F_{i-1})/x \geq (\lambda - 1)m^j\delta^*/x \geq 2m^j\delta^*$. Άρα, κάθε εσωτερικό σημείο έχει όλα τα ανικανοποίητα εσωτερικά σημεία στην γειτονιά του. Το κόστος ανάθεσης τους δεν μπορεί να ξεπερνάει το f, γιατί διαφορετικά ο αλγόριθμος θα άνοιγε καινούριο εργοστάσιο και η φάση θα τελείωνε.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, κάθε μείωση που γίνεται στο κόστος ανάθεσης του c φράσσεται από το f. Επιπλέον, το κόστος αυξάνεται κατά f από το εργοστάσιο που προκάλεσε τη μείωση



Σχήμα 4.4: Σχηματική αναπαράσταση περίπτωσης με πολλά βέλτιστα κέντρα. Το εργοστάσιο $w^{'}$, ανοίγει μετά το w και η ακτίνα της ανικανοποίητης γειτονιάς του είναι τόσο μεγάλη που περιλαμβάνει σημεία και από τις 2 κοντινές ομάδες. Το καινούριο εργοστάσιο μειώνει το κόστος ανάθεσης των εσωτερικών σημείων των 2 ομάδων. Βλέπουμε, λοιπόν, την δυσκολία στο να υπολογίσουμε το κόστος των εσωτερικών σημείων με το επιχείρημα για το ένα βέλτιστο κέντρο .

και κατά f/x αν το εργοστάσιο δεν ανοίξει στο σημείο που προκάλεσε το άνοιγμα, αλλά σε κάποια άλλη θέση στην γειτονιά του. Συνολικά ο αλγόριθμος επιβαρύνεται από κάθε μείωση κόστους ανάθεσης των εσωτερικών σημείων το πολύ με $(2+1/x)f$. Πόσες φορές όμως σε κάθε φάση χρειάζεται να παίρνουμε υπόψιν μας το κόστος αυτό· Αν ανοίξει ένα εργοστάσιο από εξωτερικό σημείο και η ανικανοποίητη γειτονιά του περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία, τότε το κόστος του υπολογίζεται όπως προηγουμένως, δηλαδή μέσω του βέλτιστου κόστους ανάθεσης των σημείων που το ανοίγουν. Εκεί που πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί είναι όταν τα σημεία που συμμετέχουν στο άνοιγμα του εργοστασίου είναι και εντός και εκτός της σφαίρας $Ball(c, \lambda m^j \delta^*)$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: αν τα εσωτερικά σημεία συνεισφέρουν παραπάνω από το μισό κόστος τότε βάση του αλγορίθμου το εργοστάσιο θα ανοίξει στην εσωτερική περιοχή και η φάση τελειώνει. Αν τώρα το μεγαλύτερο μέρος του κόστους προέρχεται από τα εξωτερικά σημεία, αυτό σημαίνει ότι είναι τουλάχιστον $f/2$, και μπορούμε να φράξουμε το κόστος του εργοστασίου από το βέλτιστο κόστος ανάθεσης των εξωτερικών σημείων. Επομένως σε κάθε φάση το κόστος του αλγορίθμου αυξάνεται κατά $(2+1/x)f$ από τα εσωτερικά σημεία, δηλαδή συνολικά $(h+1)(2+1/x)f$.

Γενικεύοντας, το συνολικό κόστος για ένα βέλτιστο κέντρο είναι $(\lambda(m+1)+1)Asg^*(c)+(h+1)(2+1/x)f$. Θέτοντας $m = h = \frac{logn}{log(logn)}$, το κόστος του αλγορίθμου είναι της τάξης $\Theta(\frac{logn}{log(logn)})$. Δυστυχώς, η γενίκευση σε εισόδους με πολλά βέλτιστα κέντρα δεν είναι τόσο προφανής. Στον προηγούμενο αλγόριθμο δείξαμε ότι κάθε βέλτιστη ομάδα χρεώνει τον αλγόριθμο με κόστος το πολύ f μέχρι να ανοίξει το πρώτο εργοστάσιο στην περιοχή της. Μετά κάθε άνω φράγμα που χρησιμοποιήσαμε μπορεί να εκφραστεί μέσω αυτού του εργοστασίου και η ανάλυση για κάθε βέλτιστη ομάδα να γίνει ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Αυτή η παραλληλοποίηση της ανάλυσης, δεν μπορεί να εφαρμοστεί στον ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι επειδή ένα εργοστάσιο μπορεί να επηρεάζει το κόστος ανάθεσης των εσωτερικών σημείων σε πολλές ομάδες. Οπότε, αν εφαρμόσουμε την παραπάνω ανάλυση, κάθε καινούριο εργοστάσιο χρεώνει τον αλγόριθμο με κόστος $\Omega(kf)$ για τα εσωτερικά σημεία όλων των βέλτιστων ομάδων.

Χρειαζόμαστε, λοιπόν, ένα καινούριο επιχείρημα για να φράξουμε το κόστος στην γενική

περίπτωση. Στο [19] παρουσιάζεται αναλυτική μαθηματική απόδειξη, η οποία καταλήγει ότι και στην γενική περίπτωση ο DetOFL διατηρεί την ίδια τάξη κόστους, δηλαδή $\Theta(\frac{logn}{log(logn)})$. Η βασική διαίσθηση είναι ότι στην αρχή όλος ο χώρος αποτελεί μια υπέρ-ομάδα. Καθώς ο αλγόριθμος προχωράει και ανοίγουν καινούρια εργοστάσια, ομαδοποιούμε τα βέλτιστα κέντρα που είναι πολύ κοντά μεταξύ τους σε σχέση με το κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο. Ως προς εκείνο το εργοστάσιο, οι ομάδες που είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους συμπεριφέρονται σαν μια βέλτιστη ομάδα με ένα κοινό κέντρο. Αυτά τα σύνολα βέλτιστων κέντρων (coalitions) χωρίζονται σε απομονωμένα (isolated), που σημαίνει ότι είναι αρκετά πιο κοντά σε κάποιο εργοστάσιο από κάθε άλλο βέλτιστο κέντρο, είτε σε μη απομονωμένα (non-isolated). Αν έχουμε απομονωμένο σύνολο τότε η ανάλυση ακολουθεί παρόμοια φιλοσοφία με την ανάλυση που παρουσιάσαμε για μία βέλτιστη ομάδα. Όταν ένα σύνολο δεν είναι απομονωμένο, αποδεικνύεται ότι το κόστος του αλγορίθμου αυξάνει κατά σταθερής τάξης όρους μέχρι να η ομάδα αυτή να διασπαστεί και εν τέλη να καταλήξει σε ένα σύνολο από απομονωμένες ομάδες. Εμφανώς, μια ομάδα διασπάται όταν ο αλγόριθμος ανοίγει εργοστάσια όλο και πιο κοντά στα βέλτιστα κέντρα που την συγκροτούν.

Κεφάλαιο 5

Τοποθέτηση εργοστασίων σε ανθεκτικές στις διαταραχές εισόδους

5.1 Αλγόριθμος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε μια σειρά από αλγορίθμους σχετικά με το πρόβλημα του online facility location και καταφέραμε να επιτύχουμε μέχρι και σταθερής τάξης μεγέθους κόστος. Σε αυτό το κεφάλαιο, λοιπόν, θα εστιάσουμε σε μια παραδοχή του προβλήματος, κατά την οποία μας δίνετε η δυνατότητα να συγχωνεύσουμε δύο ή περισσότερα εργοστάσια μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, όπως και πριν, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου καταφθάνει ένα σημείο u_i. Ο αλγόριθμος, λοιπόν, μπορεί είτε να αναθέσει το σημείο στο κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο και να χρεωθεί με κόστος $d(u_i, F_{i-1})$, είτε να ανοίξει κάποιο καινούριο εργοστάσιο w στην θέση του σημείου, οπότε $F_i = F_{i-1} \cup \{w\}$, και να χρεωθεί με κόστος f.

Επιπλέον, ο αλγόριθμος διατηρεί έναν κανόνα συγχώνευσης και σε κάθε βήμα αποφασίζει αν κάποια εργοστάσια πρέπει να συγχωνευτούν μεταξύ τους. Αν το $z \in F_i$ συγχωνευτεί με το $z' \in F_i$, τότε το z κλείνει (οπότε $F_i = F_i/\{z\}$) και τα σημεία που εξυπηρετούσε ανατίθενται πλέον στο z'. Αν, λοιπόν, ορίσουμε με $C(z)$ το σύνολο των σημείων που εξυπηρετούνται από το εργοστάσιο z, τότε μετά από την επεξεργασία κάθε σημείου u_i το κόστος του αλγορίθμου δίνεται από:

$$|F_i|f + \sum_{z \in F_i} \sum_{u \in C(z)} d(u, z) \tag{5.1}$$

Η φιλοσοφία ενός προβλήματος *online* ομαδοποίησης που επιτρέπει πιθανές συγχωνεύσεις σε κάθε βήμα εισήχθηκε αρχικά στο [15]. Η αντίστοιχη εκδοχή για το πρόβλημα τοποθέτησης εργοστάσιων οφείλεται στο [18] όπου και αποδεικνύεται ότι υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος κατορθώνει σταθερής τάξης κόστος ($O(1)$-competitive ratio). Στην πορεία αυτού του κεφαλαίου, ο αλγόριθμος αυτός θα αποτελέσει το κέντρο του ενδιαφέροντος μας.

Αρχικά, ο αλγόριθμος (εν συντομία $IncrFL$) θυμίζει αρκετά τον $DetOFL$ του προηγούμε-

νου κεφαλαίου. Κάθε σημείο που καταφθάνει ελέγχει το κόστος ανάθεσης στην ανικανοποίητη γειτονιά του και ανάλογα με την τιμή αποφασίζει αν θα ανοίξει ή όχι καινούριο εργοστάσιο στην θέση του σημείου. Επιπλέον, για κάθε εργοστάσιο διατηρεί μια ακτίνα συγχώνευσης. Αν ένα καινούριο εργοστάσιο ανοίξει στην ακτίνα συγχώνευσης ενός παλαιότερου εργοστασίου, τότε το παλιό εργοστάσιο συγχωνεύεται με το καινούριο.

Θυμίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι με $d(F_{i-1}, u_i)$ δηλώνουμε την απόσταση του σημείου u_i από το κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο, με $L(u_i)$ συμβολίζουμε την ανικανοποίητη γειτονιά του σημείου και με $Pot(L(u_i))$ το κόστος ανάθεσης των σημείων της γειτονιάς. Επιπλέον, το $C(z)$ είναι το σύνολο των σημείων που ανατίθενται στο z εκείνη την στιγμή, και $Init(z)$ είναι το σύνολο των σημείων που ανατίθενται στο z κατά την άφιξη τους. Πρώτη παρατήρηση, λοιπόν, είναι ότι (1) $Init(z) \subseteq C(z)$ και (2) $\bigcup_{\forall z \in F} C(z) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Παραθέτουμε, για αρχή τον κανόνα με τον οποίο ο $IncrFL$ ανοίγει καινούρια εργοστάσια.

Κανόνας για το άνοιγμα εργοστασίου

Έστω $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ η ακολουθία των σημείων. Για κάθε σημείο u_i:

- Βήμα 1: Το σημείο u_i γίνεται ανικανοποίητο και προστίθεται στο σύνολο L.
- Βήμα 2: Υπολογίζουμε το $Pot(L(u_i)) = \sum_{u \in L(u_i)} d(u_i, F_{i-1})$, όπου $L(u_i) = Ball(u_i, d(u_i, F_{i-1})) \cap L$.
- Βήμα 3: Εάν $Pot(L(u_i)) \geq \beta f$, όπου β μια αρκετά μεγάλη σταθερά, τότε ανοίγουμε ένα εργοστάσιο w στη θέση του σημείου u_i. Η ακτίνα συγχώνευσης του νέου εργοστασίου θέτετε ως $m(w) = 3d(u_i, F_{i-1})/x$ και τα σύνολα $C(w), Init(w)$ αρχικοποιούνται ως κενά. Τα σημεία που ανήκουν στο $L(u_i)$ σημειώνονται ως ικανοποιημένα και αφαιρούνται από το L.
- Βήμα 4: Το σημείο u_i ανατίθεται στο κοντινότερο ανοιχτό εργοστάσιο $w_i \in F$ και προστίθεται στα σύνολα $C(w_i), Init(w_i)$.

Βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί έναν απλουστευμένο κανόνα για το άνοιγμα των εργοστασίων παρόμοιο με αυτόν του $DetOFL$. Εδώ τα εργοστάσια ανοίγουν μόνο σε θέσεις σημείων χωρίς να χρειάζεται κάποιος άλλος χρονικά επίπονος υπολογισμός για την θέση του καινούριου εργοστασίου. Το κριτήριο απαιτεί μια γειτονιά να έχει συνολικό κόστος ανάθεσης μεγαλύτερο του βf (και όχι f όπως ο $DetOFL$) για να ανοίξει καινούριο εργοστάσιο. Τα περισσότερα σημεία μιας βέλτιστης ομάδας είναι διαισθητικά συγκεντρωμένα κοντά στο βέλτιστο κέντρο. Αν ανοίξει, λοιπόν, ένα εργοστάσιο, τότε το κόστος ανάθεσης των σημείων της ομάδας φράσσεται από το εργοστάσιο αυτό. Όσο ανοίγουν καινούρια εργοστάσια, το κόστος ανάθεσης των σημείων μιας γειτονιάς ακολουθεί φθίνουσα πορεία και όλο και περισσότερα σημεία απαιτούνται σε μια γειτονιά για να ξεπεραστεί η τιμή βf. Είπαμε, όμως, ότι τα σημεία είναι πιο πυκνά όσο πλησιάζουμε το βέλτιστο κέντρο, άρα κάθε καινούριο εργοστάσιο που ανοίγει θα πρέπει να βρίσκεται όλο και πιο κοντά σε βέλτιστο κέντρο. Συνάγουμε, λοιπόν, το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.6. *[18, Lemma 2] Αν $\beta \geq \frac{4(x+1)}{x-8}$, τότε για κάθε εργοστάσιο w που ανοίγει στην περιφέρεια της βέλτιστης ομάδας με κέντρο c_w, ισχύει:*

$$d(w, c_w) \leq \frac{d(F_w, c_w)}{3}$$

Απόδειξη. Στηριζόμενοι στην απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα εργοστάσιο w τέτοιο ώστε : $d(w, c_w) > d(F_w, c_w)/3$. Θα δείξουμε ότι αυτό δεν μπορεί να ισχύει γιατί το συνολικό κόστος του αλγορίθμου θα ήταν μικρότερο από το βέλτιστο. Τυπικά, θα δείξουμε ότι θα ίσχυε :

$$f + \sum_{u \in B_w} d(u, w) \leq \sum_{u \in B_w} \Big(\frac{1}{\beta} d(u, F_w) + d(u, w) \Big) < \sum_{u \in B_w} d_u^* \tag{5.2}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί διαφορετικά η βέλτιστη λύση θα περιείχε το εργοστάσιο w. Με τον όρο B_w αναφερόμαστε στην γειτονιά του w που συνείσφερε στο άνοιγμα του εργοστασίου και για την οποία προφανώς ισχύει $Pot(B_w) \geq \beta f$ και $B_w \subseteq Ball(w, d(F_w, w)/x)$. Αρχικά, έχουμε

$$\forall u \in B_w, d(u, w) \leq \frac{d(F_w, w)}{x} \leq \frac{d(c_w, w)}{x} + \frac{d(F_w, c_w)}{x} < \frac{4}{x} d(c_w, w) \tag{5.3}$$

η οποία σχέση προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα και την υπόθεση ότι $d(w, c_w) > d(F_w, c_w)/3$. Επιπλέον, ισχύει

$$\forall u \in B_w, d_u^* = d(c_u, u) \geq d(c_u, w) - d(u, w) > d(c_w, w) - \frac{4}{x} d(c_w, w) = \frac{x-4}{x} d(c_w, w) \tag{5.4}$$

όπου η σχέση αυτή προκύπτει μέσω της προηγούμενης σχέσης και του ότι το κοντινότερο βέλτιστο κέντρο στο w είναι το c_w. Συνδυάζοντας τις 2 σχέσεις μας παίρνουμε

$$d(u, w) < \frac{4}{x} d(c_w, w) < \frac{4}{x} \frac{x}{x-4} d_u^* = \frac{4}{x-4} d_u^* \tag{5.5}$$

και επίσης

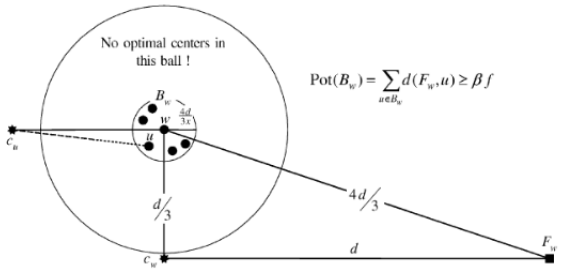
$$d(F_w, u) \leq d(F_w, c_w) + d(c_w, w) + d(u, w) < \frac{4(x+1)}{x} d(c_w, w) < \frac{4(x+1)}{x-4} d_u^* \tag{5.6}$$

Συνδυάζοντας τις 2 τελευταίες σχέσεις οδηγούμαστε στην σχέση 5.2 αν ισχύει $\frac{1}{\beta} \frac{4(x+1)}{x-4} + \frac{4}{x-4} \leq 1$. □

Το δεύτερο σκέλος του αλγορίθμου αφορά τον κανόνα συγχώνευσης. Σε κάθε βήμα, αν ανοίξει κάποιο καινούριο εργοστάσιο, ελέγχεται αν αυτό βρίσκεται στην ακτίνα συγχώνευσης παλαιότερων εργοστασίων. Αν ναι, τότε τα παλιά εργοστάσια συγχωνεύονται στο καινούριο. Συνοπτικά, λοιπόν, ό αλγόριθμος ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

Κανόνας συγχώνευσης εργοστασίων

- Βήμα 1: Αν το σημείο u_i ανοίξει ένα εργοστάσιο w', τότε κάθε εργοστάσιο $w \in F_i$ τέτοιο ώστε $w' \in Ball(w, m(w))$ συγχωνεύεται με το w'.
- Βήμα 2: Αν το w συγχωνευτεί, τότε κλείνει και τα σημεία που είχαμε αναθέσει σε αυτό ανατίθενται τώρα στο w'. Επομένως, $C(w') = C(w') \cup C(w)$



Σχήμα 5.1: Σχηματική αναπαράσταση ([18, Fig. 2]) του λήμματος 5.6

Όπως είδαμε η ακτίνα συγχώνευσης κάθε εργοστασίου ορίζεται ως το τριπλάσιο της ακτίνας που ορίζει την γειτονιά του σημείου. Είπαμε επίσης ότι καθώς προχωράει ο αλγόριθμος, λόγω των αυξανόμενων ανοιχτών εργοστασίων χρειάζονται όλο και περισσότερα σημεία για να ανοίξει κάποιο καινούριο εργοστάσιο. Οπότε αν αυτό συγχωνευτεί στο μέλλον υπάρχει κίνδυνος να έχουμε μεγάλη αύξηση στο κόστος ανάθεσης από τα σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά στο εργοστάσιο και ξανά-ανατίθενται. Για το λόγο αυτό, ο αλγόριθμος επιβάλει στην ακτίνα συγχώνευσης να μικραίνει ανάλογα με το πλήθος των σημείων που βρίσκονται στην κοντινή περιοχή του εργοστασίου. Πιο συγκεκριμένα,

$$\forall z \in F : |Init(z) \cap Ball(z, m(z)/4)| \cdot m(z) \leq \beta f \tag{5.7}$$

Όπως και στον $DetOFL$, η βασική ιδέα πίσω από τον κανόνα ανοίγματος εργοστασίων είναι ότι εφόσον το κόστος στην περιοχή είναι τόσο μεγάλο, πολύ πιθανόν η βέλτιστη λύση να θέλει ένα εργοστάσιο στην περιοχή. Ο αλγόριθμος μας εξασφαλίζει ότι από τι στιγμή που θα ανοίξει ένα εργοστάσιο w θα υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα ανοιχτό εργοστάσιο στην περιοχή $Ball(w, \frac{x}{x-3}m(w))$. Σε κάποια μελλοντική στιγμή μετά το άνοιγμα του, το w μπορεί να συγχωνευτεί με ένα εργοστάσιο w' και να "μετακινηθεί" το πολύ $m(w)$ (στην θέση του w'). Για το το w' ισχύει ότι $m(w') \leq \frac{3}{x}d(w, w') \leq \frac{3}{x}m(w)$ και άρα αν και αυτό συγχωνευτεί με κάποιο w'' να 'μετακινηθεί' το πολύ $\frac{3}{x}m(w)$. Παρατηρούμε ότι οι ακτίνες συγχώνευσης ακολουθούν φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο και τελικά το w μπορεί να απομακρυνθεί κατά

$$m(w) + \frac{3}{x}m(w) + \frac{3^2}{x^2}m(w) + ... = \frac{x}{x-3}m(w) \tag{5.8}$$

5.2 Ανταγωνιστική ανάλυση

Αφού έχουμε αναλύσει την βασική διαίσθηση πίσω από τον αλγόριθμο, θα παρουσιάσουμε την ανάλυση του αλγόριθμου από το [18] και πως πετυχαίνει σταθερής τάξης κόστος ($O(1)$-competitive ratio). Αρχικά θα εστιάσουμε στην απλουστευμένη περίπτωση, όπου η βέλτιστη λύση αποτελείται από ένα μόνο εργοστάσιο και θα φράξουμε ξεχωριστά το κόστος των εργοστασίων και το κόστος ανάθεσης.

Σαν πρώτο βήμα χωρίζουμε τα εργοστάσια που ανοίγει ο αλγόριθμος μας σε υποστηριζόμενα (*supported*) και μη υποστηριζόμενα (*unsupported*). Ένα εργοστάσιο w θα λέγεται

υποστηριζόμενο αν ισχύει $Asg^*(B_w) = \sum_{u \in B_w} d_u^* \geq \frac{\beta}{3x} f$, αλλιώς θα είναι μη υποστηριζόμενο. Όπως και στον $DetOFl$ κάθε σημείο συνεισφέρει στο κόστος εργοστασίων μόνο μία φορά και κάθε υποστηριζόμενο εργοστάσιο φράσσεται από $\frac{3x}{\beta} Asg^*(B_w)$ (προκύπτει από τον ορισμό του). Αθροιστικά, λοιπόν, το κόστος όλων των υποστηριζόμενων εργοστασίων φράσσεται από $\frac{3x}{\beta} Asg^*$.

Όσον αφορά τα μη υποστηριζόμενα εργοστάσια θα δείξουμε ότι κάθε χρονική στιγμή το πολύ ένα μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο μπορεί να είναι ανοιχτό και επομένως το συνολικό κόστος εργοστασίων είναι $f + \frac{3x}{\beta} Asg^*$. Αν, λοιπόν, έχουμε w ένα μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο, και w' ένα εργοστάσιο που ανοίγει μελλοντικά του w, τότε το w συγχωνεύεται πάντα με το w'. Με τον τρόπο αυτό το πλήθος των μη υποστηριζόμενων εργοστασίων διατηρείται στο ένα.

Η απόδειξη στον τελευταίο ισχυρισμό είναι γεωμετρική. Αν w είναι το πρώτο μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο που ανοίγει , θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $v \in B_w$ για το οποίο θα ισχύει $d_v^* < \frac{1}{3x} d(w, v)$ (διαφορετικά θα ήταν υποστηριζόμενο το εργοστάσιο). Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι αν ένα καινούριο εργοστάσιο w' ανοίξει, θα είναι αναγκαστικά σε ακτίνα συγχώνευσης από το w. Πρώτα θα δείξουμε ότι το w την στιγμή που ανοίγει είναι αρκετά πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο του από το κοντινότερο σε αυτό εργοστάσιο F_w. Συγκεκριμένα,θα αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 5.1. *Για κάθε μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο w, με βέλτιστο κέντρο c_w ισχύει:*

$$d(c_w, w) < \frac{4x+1}{3x^2} d(F_w, w)$$

Απόδειξη. Όπως τεκμηριώσαμε, επειδή το εργοστάσιο είναι μη υποστηριζόμενο υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στην γειτονιά του για το οποίο $d_v^* < \frac{1}{3x} d(F_w, v)$. Διαισθητικά, υπάρχει ένα σημείο στην γειτονιά του εργοστασίου το οποίο είναι αρκετά κοντά στο βέλτιστο κέντρο του. Τυπικά, λοιπόν, παίρνουμε

$$d(c_w, w) \leq d(c_v, w) \leq d(w, v) + d_v^* < \frac{1}{x} d(F_w, w) + \frac{1}{3x} d(F_w, v)$$

,όπου $d(w, v) \leq \frac{1}{x} d(F_w, w)$ ισχύει εφόσον μιλάμε για σημείο εντός της γειτονιάς του w. Επιπλέον, έχουμε

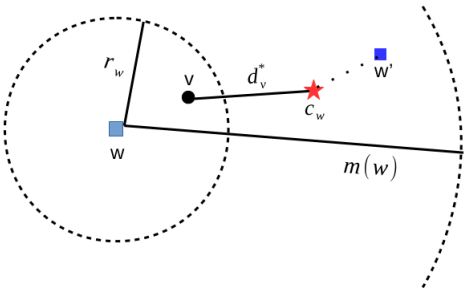
$$d(F_w, v) \leq d(F_w, w) + d(w, v) \leq \frac{x+1}{x} d(F_w, w)$$

Συνδυάζοντας τις 2 ανισότητες προκύπτει ότι

$$d(c_w, w) < \Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} \frac{x+1}{x}\Big) d(F_w, w) = \frac{4x+1}{3x^2} d(F_w, w)$$

□

Έχοντας φράξει την απόσταση από το βέλτιστο κέντρο και δεδομένου ότι $m(w) = d(F_w, w)/3x$ (από τον ορισμό του αλγορίθμου) οδηγούμαστε στην επόμενη πρόταση



Σχήμα 5.2: Σχηματική αναπαράσταση του μη υποστηριζόμενου εργοστασίου w. Με w' είναι το επόμενο χρονικά εργοστάσιο, r_w είναι η ακτίνα της γειτονιάς του w και $m(w)$ η ακτίνα συγχώνευσης του. Το εργοστάσιο w είναι αρκετά κοντά στο βέλτιστο κέντρο και ακτίνα συγχώνευσης του είναι τουλάχιστον $3d_w^*/2$ ενώ το επόμενο εργοστάσιο w' είναι το πολύ $4d_w^*/3$ μακριά από το w.

Πρόταση 5.2. *Για κάθε μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο w ισχύει*

$$m(w) \geq \frac{3}{2} d(c_w, w)$$

Απόδειξη.

$$m(w) = \frac{1}{3} d(F_w, w) \geq \frac{1}{3} \frac{3x^2}{4x+1} d(c_w, w) = \frac{9x}{4x+1} d(c_w, w) \geq \frac{3}{2} d(c_w, w)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για όλα τα $x \geq 1$. □

Είπαμε, όμως, ότι κάθε καινούριο εργοστάσιο βρίσκεται τουλάχιστον 3 φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο. Συνεπώς, αν ανοίξει στο μέλλον ένα εργοστάσιο w' , τότε θα ισχύει $d(w, w') \leq d(c_w, w) + d(c_w, w') \leq d(c_w, w) + d(c_w, w)/3 = 4d(c_w, w)/3$. Εμφανώς ισχύει ότι $d(w, w') < 3d(c_w, w)/2 \leq m(w)$ και άρα το w συγχωνεύεται με το w'. Οπότε, το πολύ ένα μη υποστηριζόμενο εργοστάσιο μπορεί να είναι ανοιχτό σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή.

Όσον αφορά το κόστος ανάθεσης χρησιμοποιούμε πάλι την έννοια των εξωτερικών και εσωτερικών σημείων. Σε αντίθεση με τον $DetOFL$ δίνουμε τον ορισμό σε μια πιο γενική μορφή. Ένα σημείο θα λέγεται εξωτερικό αν το κόστος ανάθεσης του είναι σταθερός παράγοντας της βέλτιστης τιμής του, διαφορετικά το σημείο είναι εσωτερικό. Οπότε, τα εξωτερικά σημεία διατηρούν το κόστος του αλγορίθμου σε σταθερή τάξη και όπως θα δείξουμε, ακόμη και αν το εργοστάσιο συγχωνευτεί το κόστος διατηρεί την σταθερή τάξη κόστους. Αρχικά, εισάγουμε την έννοια της εκτεταμένης απόστασης ([18], configuration distance 4.1.1).

Ορισμός 5.10 (Εκτεταμένη απόσταση)**.** *Για ένα βέλτιστο κέντρο $c \in F^*$ και ένα εργοστάσιο $w \in F$, η εκτεταμένη απόσταση μεταξύ αυτών ορίζεται ως*

$$g(c, w) = d(c, w) + \frac{x}{x-3} m(w)$$

Επίσης, ορίζουμε ως εκτεταμένη απόσταση ενός βέλτιστου κέντρου c

$$g(c) = min_{w \in F}\{g(c, w)\} = min_{w \in F}\left\{d(c, w) + \frac{x}{x-3} m(w)\right\}$$

Η εκτεταμένη απόσταση είναι στην ουσία η μέγιστη απομάκρυνση ενός εργοστασίου από ένα βέλτιστο κέντρο. Θα δούμε πιο κάτω, ότι στην ανάλυση για πολλά βέλτιστα κέντρα είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την καινούρια έννοια απόστασης. Όσον αφορά τα εξωτερικά σημεία, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ότι ένα εργοστάσιο μπορεί να μετακινηθεί απόσταση ανάλογη της ακτίνας συγχώνευσης. Διαισθητικά, ένα εξωτερικό σημείο απέχει αρκετά από το βέλτιστο κέντρο του και οι αποστάσεις $d(c, w), m(w)$ μπορούν να εκφραστούν ως $O(1)$ παράγοντας του βέλτιστου κόστους του σημείου, με αποτέλεσμα το κόστος ανάθεσης να παραμένει σε $O(1)$ κόστους.

Σχετικά με τα εσωτερικά σημεία η ιδέα είναι να δείξουμε ότι το κόστος τους συγκλίνει στο βέλτιστο με κάθε συγχώνευση. Αν w είναι το πιο κοντινό στο βέλτιστο κέντρο εργοστάσιο, τότε τα εσωτερικά σημεία, τα οποία βρίσκονται σε μια μικρή σφαίρα γύρω από το κέντρο τους έχουν κόστος ανάθεσης το πολύ βf. Η αιτία για αυτό μας είναι αρκετά οικία από το τρίτο κεφάλαιο. Κάθε εργοστάσιο βρίσκεται τουλάχιστον 3 φορές πιο μακριά από το w, με αποτέλεσμα τα εσωτερικά σημεία τα οποία βρίσκονται περίπου στην ίδια απόσταση από κάθε εργοστάσιο (επειδή είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο κέντρο να έχουν το ελάχιστο κόστος ανάθεσης τους στο w. Επιπλέον, η ακτίνα της γειτονιάς ορίζεται από ως το $1/x$ της απόσταση του σημείου από το εργοστάσιο. Η περιοχή των εσωτερικών σημείων είναι αρκετά μικρή (για παράδειγμα $d(c_w, w)/3x$) και κάθε σημείο την εμπεριέχει ολόκληρη στην γειτονιά του. Αν ανοίξει, λοιπόν, ένα καινούριο εργοστάσιο w' τότε αυτό θα είναι τουλάχιστον 3 φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο και αποδεικνύεται ότι το κόστος ανάθεσης των εσωτερικών ανικανοποίητων σημείων θα μειωθεί τουλάχιστον κατά 2 φορές. Αναλυτικά, στο [18] αποδεικνύεται ότι το κόστος ανάθεσης των εσωτερικών σημείων είναι σταθερός παράγοντας του βέλτιστου κόστους, οπότε συνολικά ο αλγόριθμος είναι $O(1) - competitive$.

Στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση αποτελείται από 2 ή περισσότερα εργοστάσια, το πρόβλημα μοιράζεται τις ίδιες δυσκολίες στην ανάλυση με τον $DetOFL$. Χρησιμοποιούμε πάλι την ιδέα με τα σύνολα βέλτιστων κέντρων τις προηγούμενης ενότητας (isolated and non-isolated coalitions) με μια βασική διαφορά. Στην ανάλυση του $DetOFL$ είπαμε ότι ανάλογα με τις αποστάσεις των εργοστασίων από τα βέλτιστα κέντρα ορίζουμε μια ιεραρχική διάσπαση του χώρου. Σε αυτήν την περίπτωση, όμως, ένα εργοστάσιο δεν έχει σταθερή θέση λόγω των πιθανών συγχωνεύσεων, επομένως ο χώρος διασπάται με βάση την εκτεταμένη απόσταση που μας δείχνει το πόσο μακριά μπορεί να πάει ένα ανοιχτό εργοστάσιο. Στο [18] αποδεικνύεται ότι και στην γενική περίπτωση το κόστος του αλγορίθμου παραμένει $O(1) - competitive$.

5.3 Ανταγωνιστική ανάλυση σε ανθεκτικές εισόδους

Δείξαμε, λοιπόν, ότι ο αλγόριθμος $IncrFL$ κατορθώνει σταθερή τάξης κόστος, αλλά στην γενική περίπτωση με $k \geq 1$ βέλτιστα κέντρα η ανάλυση είναι γιγαντιαία. Η δυσκολία προκύπτει από την ακανόνιστη μορφή που μπορεί να έχει η είσοδος μας. Πιο συγκεκριμένα, όταν δύο η περισσότερες ομάδες βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους, είναι πολύ πιθανό τα εσωτερικά σημεία τους να συμμετέχουν στο άνοιγμα του ίδιου εργοστασίου. Επιπλέον, ένα εργοστάσιο που περιέχει εσωτερικά σημεία μιας ομάδας μπορεί να συγχωνευτεί με εργοστάσιο

ξένης βέλτιστης ομάδας. Οπότε, αν δεν είμαστε προσεκτικοί με την ανάλυση οποιαδήποτε συγχώνευση μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια κόστη ανάθεσης.

Διαισθητικά αν τα βέλτιστα κέντρα είναι αρκετά απομακρυσμένα μεταξύ τους, τότε είναι αρκετά πιο απίθανο ένα εργοστάσιο να περιέχει σημεία από πολλές βέλτιστες ομάδες. Ιδανικά, αν έχουμε 2 βέλτιστα κέντρα που απέχουν μεταξύ τους τουλάχιστον $2f$, τότε η ανάλυση του ενός είναι ανεξάρτητη με του άλλου. Αν πλησιάσουμε τα βέλτιστα κέντρα, τότε η ύπαρξη του ενός επηρεάζει το άλλο. Στον αλγόριθμο που μελετήσαμε, όμως, είπαμε ότι οι ακτίνες συγχώνευσης εξαρτώνται από τα κοντινότερα ανοιχτά εργοστάσια, και κάθε φορά που ανοίγει ένα εργοστάσιο είναι τουλάχιστον 3 φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο του από το προηγούμενο ανοιχτό εργοστάσιο. Διαισθητικά, λοιπόν, καθώς ο αλγόριθμος προχωράει τα καινούρια εργοστάσια συγκλίνουν σε βέλτιστα κέντρα και οι ακτίνες συγχώνευσης τους μικραίνουν. Επομένως, μετά από κάποιο αριθμό βημάτων θα υπάρχουν εργοστάσια που δεν μπορούν να συγχωνευτούν με κάποιο εργοστάσιο σε ξένη ομάδα και η ανάλυση τους ανεξαρτητοποιείται.

Η ερώτηση που προκύπτει, πλέον, είναι αν με κάποιον τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε πόσα εργοστάσια χρειάζονται να ανοίξουν μέχρι οι 2 ομάδες να γίνουν ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δυστυχώς, στην γενική περίπτωση δεν είναι γνωστό αν μπορεί να γίνει αυτό. Βέβαια, μια πρόχειρη ματιά μπορεί να μας οδηγήσει σε λογαριθμικό πλήθος εργοστασίων, το οποίο είναι άσκοπο μιας και με την ανάλυση του [18] το κόστος αποδεικνύεται να είναι σταθερής τάξης.

Άλλη μια βασική διαίσθηση είναι ότι ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι σχετικός με την απόσταση των ομάδων, και συγκεκριμένα ανάλογος. Όσο πιο κοντά είναι 2 κέντρα τόσο περισσότερα συνεργατικά εργοστάσια είναι πιθανόν να ανοίξουν. Στόχος μας , λοιπόν, να βρούμε μια συνθήκη η οποία ανάλογα με την απόσταση των βέλτιστων κέντρων να μας δίνει το πλήθος των εργοστασίων που χρειάζεται να ανοίξουμε για να ανεξαρτητοποιηθούν τα δύο βέλτιστα κέντα μεταξύ τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μιλήσαμε για το πως μοιάζει μια καλή είσοδος. Είπαμε ότι τα σημεία σε ένα πρόβλημα ομαδοποίησης δεν είναι τυχαία, καθώς αυτά προέρχονται από πραγματικές εφαρμογές. Πιο συγκεκριμένα ορίσαμε πως μοιάζει μια ανθεκτική είσοδος ενός συνόλου σημείων S πάνω σε ένα μετρικό χώρο. Βασισμένη σε αυτόν τον ορισμό μπορούμε να συνάγουμε εύκολα τον ορισμό για το πρόβλημα τοποθέτησης εργοστασίων.

Ορισμός 5.11. *Θα ονομάζουμε μια είσοδο a-perturbation resilient με $a \geq 1$, για το facility location, αν για οποιαδήποτε συνάρτηση $d' : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ τέτοια ώστε για κάθε $p, q \in S$ να ισχύει $d(p,q) \leq d'(p,q) \leq ad(p,q)$, υπάρχει μοναδική βέλτιστη ομαδοποίηση C' υπό την d' και είναι ίδια με την βέλτιστη ομαδοποίηση C υπό την d.*

Στην περίπτωση μα, όμως, έχουμε ένα *online* πρόβλημα. Ανεξάρτητα από το γεγονός ότι τα σημεία καταφθάνουν σειριακά, οι συνθήκες που ορίζουν την είσοδο ως καλή αφορούν και πάλι ολόκληρη την (άγνωστη) είσοδο. Συνεπώς, ορίζουμε την έννοια του *resilience* για το OFL

Ορισμός 5.12. *Έστω μια ακολουθία εισόδου $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Θα λέμε ότι η είσοδος είναι a-perturbation resilient για το online facility location με $a \geq 1$, αν η είσοδος U είναι*

a-perturbation resilient για το facility location.

Θυμίζουμε ότι αυτή η έννοια προκύπτει από το γεγονός η βέλτιστη λύση είναι ανεκτική ως προς τις αποστάσεις των σημείων, με αποτέλεσμα αν απομακρύνουμε κάποια σημεία κατά έναν παράγοντα, να παραμένουν στην ίδια ομάδα στην βέλτιστη λύση. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετήσαμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες για τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του χώρου. Όπως θα δείξουμε στην συνέχεια, η δυνατότητα να μπορούμε να ξεχωρίζουμε τα σημεία μιας βέλτιστης ομάδας μας απλοποιεί πολύ την ανάλυση του αλγορίθμου.

5.3.1 Ανάλυση για 2 βέλτιστα κέντρα

Έστω, λοιπόν, ότι η είσοδος μας αποτελείται από 2 βέλτιστες ομάδες και έστω ότι είναι και a-perturbation resilient. Στο λήμμα 3.5 δώσαμε 2 πολύ χρήσιμες σχέσεις για τις αποστάσεις 2 σημείων που ανήκουν σε ξένες βέλτιστες ομάδες. Πριν προχωρήσουμε στην βασική ανάλυση θα αποδείξουμε μια εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα (από το [5]).

Λήμμα 5.7. *Αν C_i^*, C_j^* 2 βέλτιστες ομάδες μιας a-perturbation resilient εισόδου , τότε $\forall p_1, p_2 \in C_i^*, q \in C_j^*$ ισχύει:*

$$d(p_1, p_2) < min_{p \in \{p_1, p_2\}} \Big\{ \frac{2a}{(a-1)^2} d(p, q) \Big\}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την σχέση μόνο για το p_1, αλλά με παρόμοια μεθοδολογία αποδεικνύεται και για το p_2. Αρχικά από τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$d(p_1, p_2) \leq d(p_1, c_1^*) + d(p_2, c_1^*)$$

ενώ από το λήμμα 3.5 παίρνουμε τις

$$d(p_1, c_1^*) < \frac{1}{a-1} d(p_1, q)$$

και

$$d(p_2, c_1^*) < \frac{a+1}{a(a-1)} d(q, c_1^*) \leq \frac{a+1}{a(a-1)} [d(p_1, q) + d(p_1, c_1^*)] < \frac{a+1}{(a-1)^2} d(p_1, q)$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ακριβώς από πάνω σχέση. Συνδυάζοντας όλες τις σχέσεις που δείξαμε προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Το πρόβλημα με την συνύπαρξη 2 βέλτιστων ομάδων είναι ότι οι ακτίνα συγχώνευσης μπορεί να οδηγήσει ένα εργοστάσιο σε ξένη βέλτιστη ομάδα. Η βασική ιδέα μοιάζει με την περίπτωση που έχουμε μια βέλτιστη ομάδα. Καθώς ανοίγουν εργοστάσια σε μια βέλτιστη ομάδα, αυτά αρχίζουν να συγκλίνουν προς το βέλτιστο κέντρο. Μετά από κάποιο αριθμό εργοστασίων, το πιο πρόσφατο εργοστάσιο θα βρίσκεται αρκετά κοντά στο βέλτιστο κέντρο του και με μικρή ακτίνα συγχώνευσης . Έτσι η μόνη πιθανή συγχώνευση είναι με εργοστάσιο της ίδιας βέλτιστης ομάδας το οποίο βρίσκεται τουλάχιστον 3 φορές πιο κοντά στο βέλτιστο κέντρο. Από το σημείο αυτό η ομάδα μπορεί να αναλυθεί αγνοώντας την ύπαρξη οποιασδήποτε άλλης ομάδας.

Λήμμα 5.8. *Αν C_1^*, C_2^* 2 βέλτιστες ομάδες μιας a-perturbation resilient εισόδου, τότε χρειάζεται σταθερός αριθμών ανοιχτών εργοστασίων μέχρι οι 2 ομάδες να γίνουν ανεξάρτητες μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Θα εστιάσουμε σε ένα βέλτιστο κέντρο. Έστω $\{w_1, ..., w_i, ...\}$ η ακολουθία των εργοστασίων που ανοίγει ο αλγόριθμος στην περιοχή της βέλτιστης ομάδας C_1^*, και έστω w_0 ένα ανοιχτό εργοστάσιο που προηγείται της ακολουθίας αυτής. Η ακτίνα συγχώνευσης κάθε εργοστασίου φράσσεται από την θέση του προηγούμενου εργοστασίου, οπότε έχουμε

$$m(w_i) \leq \frac{3}{x}\big(d(w_i, w_{i-1}) + \frac{x}{x-3}m(w_{i-1})\big)$$

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιούμε την εκτεταμένη απόσταση του προηγούμενου εργοστασίου και όχι την θέση την οποία είχε ανοίξει. Ο λόγος για αυτό είναι ότι οι 2 ομάδες συνυπάρχουν και στο ενδιάμεσο του ανοίγματος των w_{i-1}, w_i μπορεί να ανοίξει ένα εργοστάσιο στην απέναντι ομάδα και το w_{i-1} να συγχωνευτεί μαζί του. Θεωρούμε ότι το w_{i-1} είναι ένα εργοστάσιο του οποίου η ακτίνα συγχώνευσης περιλαμβάνει κάποιο σημείο από την άλλη βέλτιστη ομάδα. Επομένως, $\exists v \in C_2^* : d(v, w_{i-i}) \leq m(w_{i-1})$. Άρα με τη βοήθεια της 5.7 παίρνουμε

$$m(w_i) < \frac{3}{x}\left(\frac{2a}{(a-1)^2}d(v, w_{i-1}) + \frac{x}{x-3}m(w_{i-1})\right) \leq \frac{3}{x}\left(\frac{2a}{(a-1)^2} + \frac{x}{x-3}\right)m(w_{i-1})$$

Σε αυτήν την μορφή η ανισότητα μας οδηγεί στην παρακάτω γενικευμένη σχέση

$$m(w_i) \leq \left[\frac{3}{x}\left(\frac{2a}{(a-1)^2} + \frac{x}{x-3}\right)\right]^{i-1} m(w_1), i \geq 1$$

με την ισότητα να ισχύει για $i = 1$.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις ανάλογα με την θέση του εργοστασίου w_0 την στιγμή που ανοίγει το w_1. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $m(w_1) \leq 3d(w_0, w_1)/x$. Αν $w_0 \in C_1^*$, για κάθε $v \in C_2^*$ έχουμε μέσω του λήμματος 5.7

$$d(w_0, w_1) \leq d(w_1, w_i) + d(w_i, w_0) < \frac{2a}{(a-1)^2}d(v, w_i) + \frac{2a}{(a-1)^2}d(v, w_i)$$

$$\Rightarrow d(w_0, w_1) < \frac{4a}{(a-1)^2}d(v, w_i)$$

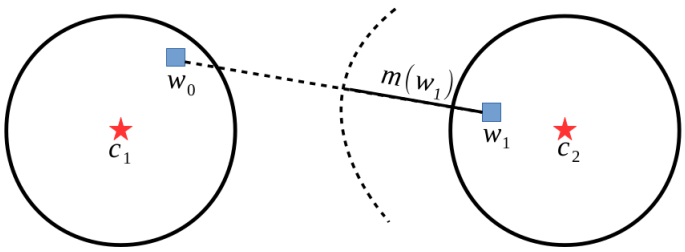
ενώ αν $w_0 \notin C_1^*$, για κάθε $v \in C_2^*$ παίρνουμε

$$d(w_0, w_1) \leq d(w_1, w_i) + d(w_i, v) + d(v, w_0) < \frac{2a}{(a-1)^2}d(v, w_i) + d(v, w_i) + \frac{2a}{(a-1)^2}d(v, w_i)$$

$$\Rightarrow d(w_0, w_1) < \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}d(v, w_i)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για $i > 1$ αλλά τα πάνω φράγματα εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν και για $i = 1$. Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\forall v \in C_2^*, d(w_0, w_1) < \frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}d(v, w_i)$$



Σχήμα 5.3: Σχηματική αναπαράσταση για 2 βέλτιστες ομάδες και $(a, x, i) = (2, 27, 1)$. Από το πρώτο εργοστάσιο που ανοίγει στην C_2 ισχύει $m(w_1) < d(w_1, v)$, για κάθε $v \in C_1$, και άρα η ομάδα μπορεί να μελετηθεί ανεξάρτητα.

και άρα για την ακτίνα συγχώνευσης

$$m(w_i) < \left[\frac{3}{x}\left(\frac{2a}{(a-1)^2} + \frac{x}{x-3}\right)\right]^{i-1} \frac{3(a+1)^2}{x(a-1)^2} d(v, w_i), i \geq 1$$

Αν ο συντελεστής του $d(v, w_i)$ είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδας, τότε η ακτίνα συγχώνευσης του εργοστασίου δεν μπορεί να περιλαμβάνει κανένα σημείο από την ξένη ομάδα. Κατά συνέπεια κάθε άλλο εργοστάσιο που ανοίγει στο μέλλον στην περιοχή της C_1^* μέσω του w_{i-1} υπακούει στην ίδια ανισότητα. Έτσι όλα τα μελλοντικά εργοστάσια της C_1^* δεν επιδέχονται συγχωνεύσεις με εργοστάσιο της άλλης ομάδας. Επιπλέον, επειδή η ακτίνα συγχώνευσης είναι τριπλάσια από την ακτίνα της ανικανοποίητης γειτονιάς, σε κάθε εργοστάσιο συμμετέχουν μόνο σημεία του C_1^*. Επομένως, μπορούμε να μελετήσουμε την ομάδα ανεξάρτητα από την άλλη.

□

Για κατάλληλη τιμή του x ο συντελεστής φθίνει ανάλογα με το i. Όσο πιο μεγάλο είναι x τόσο λιγότερα εργοστάσια απαιτούνται για να ανεξαρτητοποιηθεί η ομάδα. Το x, βέβαια, επηρεάζει το κόστος του αλγορίθμου, αλλά σε κάθε περίπτωση δείξαμε ότι κάθε μια από τις 2 ομάδες χρειάζεται το πολύ σταθερό αριθμό εργοστασίων μέχρι να ανεξαρτητοποιηθεί από την άλλη.

Τα εργοστάσια που απαιτούνται σε κάθε βέλτιστη ομάδα για την απομόνωση της, εφόσον είναι σταθερού πλήθους, προσδίδουν στον αλγόριθμο κόστος $O(f)$. Τα σημεία που συμμετέχουν στο άνοιγμα των εργοστασίων αυτών από τον κανόνα ανοίγματος εργοστασίων του αλγορίθμου προσδίδουν κόστος $O(\beta f)$ και επομένως ο αλγόριθμος είναι constant competitive.

5.3.2 Ανάλυση για K βέλτιστες ομάδες

Ήρθε η ώρα να γενικεύσουμε την λύση μας σε εισόδους με περισσότερες βέλτιστες ομάδες. Θυμίζουμε ότι ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζετε μέχρι στιγμής στο [18] η γενική περίπτωση βασίζεται σε μια ιεραρχική διάσπαση του χώρου. Πιο συγκεκριμένα, στην αρχή όλος ο χώρος αποτελεί μια υπέρ-ομάδα F^* με όλα τα βέλτιστα κέντρα και καθώς ανοίγουν

εργοστάσια η υπέρ-ομάδα διασπάται σε μικρότερα σύνολα βέλτιστων κέντρων. Ονομάζουμε ένα σύνολο K από βέλτιστα κέντρα συγκρότημα (coalition) με αντιπρόσωπο c_k ένα από τα βέλτιστα κέντρα που περιέχει. Όσο $g(c_K) \geq \rho D(K)$, όπου $D(K) = max_{c_i,c_j \in K}\{d(c_i,c_j)\}$, τα στοιχεία του K αποτελούν ένα ενεργό συγκρότημα. Ένα συγκρότημα είναι απομονωμένο(isolated) εάν $g(c_K) \leq sep(K)/3$, αλλιώς είναι μή απομονωμένο (non-isolated).

Επιπλέον, έχουμε $sep(K) = min_{c_i \in K, c_j \in F^*/K} d(c_i,c_j)$ την απόσταση ενός συγκροτήματος από τον υπόλοιπο χώρο και $D_N(K) = max\{D(K), \frac{1}{3\rho}sep(K)\}$. Εμφανώς, ισχύει $D(K) \leq D_N(K)$. Το ρ που δεν έχουμε σχολιάσει μέχρι στιγμής, είναι μια σταθερά της οποίας η τιμή έχει να κάνει με την δυνατότητα του χώρου να διασπαστεί. Το K διασπάται, ή γίνεται απομονωμένο, από την στιγμή που ισχύει $g(c_K) < \rho D_N(K)$. Με τη βοήθεια του [19, Λήμμα 1] δείχνουμε ότι κανένα συγκρότημα δεν μπορεί να ¨ενεργοποιηθεί' πριν να ισχύει $g(c_K) < (\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$, και συνάγουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.9. *([18, Λήμμα 10]) Για κάθε $\gamma \geq 12\rho$ υπάρχει μια ιεραρχική διάσπαση $\mathcal{K}$ του F^* τέτοια ώστε για κάθε μη απομονωμένο συγκρότημα $K \in \mathcal{K}$,*

$$\rho D_N(K) \leq g(c_K) < (\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

Η ανάλυση του αλγορίθμου διαχωρίζεται στην μελέτη απομονωμένων και μη απομονωμένων συγκροτημάτων. Γνωρίζουμε από το [18] ότι οποιαδήποτε ιεραρχική διάσπαση μπορεί να περιέχει το πολύ $2F^* - 1$ διακριτά σύνολα. Επίσης, αποδεικνύεται ότι κάθε μη απομονωμένο συγκρότημα αυξάνει το κόστος του αλγορίθμου κατά σταθερής τάξης προσθετικούς όρους μέχρι είτε να διασπαστεί είτε να γίνει απομονωμένο. Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι μπορούμε πολύ εύκολα να μετρήσουμε το πλήθος τον εργοστασίων που ανοίγουν σε ένα μη απομονωμένο συγκρότημα όταν η είσοδος είναι a-perturbation resilient. Αρχικά θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας το παρακάτω λήμμα

Λήμμα 5.10. *Για κάθε συγκρότημα $K \in \mathcal{K}$, όπου $\mathcal{K}$ μια ιεραρχική διάσπαση του F^* και το K περιέχει τουλάχιστον 2 βέλτιστα κέντρα:*

1. *Για κάθε σημείο v για το οποίο το βέλτιστο κέντρο c_v ανήκει στο K*

$$d(v,c_K) < \frac{a}{a-1} D_N(K)$$

2. *Για κάθε v_1, v_2 των οποίων το βέλτιστο κέντρο c_v ανήκει στο $\in K$*

$$d(v_1,v_2) < \frac{2a}{a-1} D_N(K)$$

Απόδειξη.

1. Αρχικά, αν $c_v \equiv c_K$ και $c \in K, c \not\equiv c_K$

$$D(K) \geq d(c,c_K) \geq d(c,v) - d(v,c_K) > ad(v,c_K) - d(v,c_K)$$

$$\Rightarrow d(v, c_K) < \frac{1}{a-1} D(K) \leq \frac{1}{a-1} D_N(K)$$

Αν $c_v \not\equiv c_K$

$$d(v, c_K) \leq d(v, c_v) + d(c_v, c_K) < \frac{1}{a-1} d(c_v, c_K) + d(c_v, c_K) \leq \frac{a}{a-1} D(K)$$

$$\Rightarrow d(v, c_K) < \frac{a}{a-1} D_N(K)$$

2. Μέσο της προηγούμενης ιδιότητας έχουμε

$$d(v_1, v_2) \leq d(v_1, c_v) + d(v_2, c_v) < \frac{2a}{a-1} D_N(K)$$

□

Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να δείξουμε ότι κάθε μη απομονωμένο συγκρότημα χρειάζεται σταθερό αριθμό εργοστασίων μέχρι είτε να διασπαστεί είτε να γίνει απομονωμένο. Αυτό μας οδηγεί στο παρακάτω λήμμα

Λήμμα 5.11. *Αν $K \in \mathcal{K}$ ένα μη απομονωμένο συγκρότημα, όπου $\mathcal{K}$ μια ιεραρχική διάσπαση του F^*, απαιτούνται $O(1)$ εργοστάσια που αντιστοιχούν στο K μέχρι το K να διασπαστεί ή να γίνει απομονωμένο.*

Απόδειξη. Έχουμε, λοιπόν, ότι από το λήμμα 5.9 υπάρχει εργοστάσιο w_0 τέτοιο ώστε:

$$\rho D_N(K) \leq d(w_0, c_K) + \frac{x}{x-3} m(w_0) < (\rho+1)\gamma^2 D_N(K) \tag{5.9}$$

Έστω $\{w_1, w_2, ...\}$ η ακολουθία εργοστασίων που αντιστοιχούν στο K από τη στιγμή που έγινε ενεργό. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις ανάλογα με το πόσα βέλτιστα κέντρα ανήκουν στο K. Αν το συγκρότημα μας αποτελείται από μόνο ένα κέντρο τότε $d(w_i, c_K) \leq g(w_{i-1}, c_K)/3$ από λήμμα 5.6. Για την ακτίνα συγχώνευσης ισχύει

$$m(w_i) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_i, w_{i-1}) + \frac{x}{x-3} m(w_{i-1})\right) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_i, c_K) + d(w_{i-1}, c_K) + \frac{x}{x-3} m(w_{i-1})\right)$$

$$\Rightarrow m(w_i) \leq \frac{3}{x}\Big(d(w_i, c_K) + g(w_{i-1}, c_K)\Big) \leq \frac{3}{x}\Big(g(w_{i-1}, c_K)/3 + g(w_{i-1}, c_K)\Big) = \frac{4}{x} g(w_{i-1}, c_K)$$

Άρα για την εκτεταμένη απόσταση κάθε καινούριου εργοστασίου έχουμε

$$g(w_i, c_K) = d(w_i, c_K) + \frac{x}{x-3} m(w_i) \leq \frac{1}{3} g(w_{i-1}, c_K) + \frac{4}{x-3} g(w_{i-1}, c_K) \frac{x+9}{3x-9} g(w_{i-1}, c_K)$$

$$\Rightarrow g(w_i, c_K) \leq \frac{x+9}{3x-9} g(w_{i-1}, c_K) \leq ... \leq \left(\frac{x+9}{3x-9}\right)^i g(w_0, c_K)$$

$$\Rightarrow g(w_i, c_K) \leq \left(\frac{x+9}{3x-9}\right)^i (\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

Ο συντελεστής του $D_N(K)$ φθίνει καθώς μεγαλώνει το πλήθος των εργοστασίων που αντιστοιχούν στο K. Χρειάζονται, επομένως, το πολύ m εργοστάσια για το οποίο m ισχύει:

$$\left(\frac{x+9}{3x-9}\right)^m (\rho+1)\gamma^2 < \rho$$

Στην περίπτωση που το συγκρότημα K έχει τουλάχιστον 2 βέλτιστα κέντρα, ακολουθούμε παρόμοια πορεία. Αρχικά για την ακτίνα συγχώνευσης του w_1 μέσω του λήμματος 5.10 έχουμε:

$$m(w_1) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_1,w_0)+\frac{x}{x-3}m(w_0)\right) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_1,c_K)+d(w_0,c_K)+\frac{x}{x-3}m(w_0)\right)$$

$$\Rightarrow m(w_1) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_1,c_K)+g(w_0,c_K)\right) < \frac{3}{x}\left(\frac{a}{a-1}D_N(K)+g(w_0,c_K)\right)$$

$$\Rightarrow m(w_1) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x}g(w_0,c_K)$$

$$\Rightarrow m(w_1) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x}(\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

Για κάθε επόμενο εργοστάσιο $w_i, i \geq 2$ έχουμε:

$$m(w_i) \leq \frac{3}{x}\left(d(w_i,w_{i-1})+\frac{x}{x-3}m(w_{i-1})\right) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x-3}m(w_{i-1})$$

$$\Rightarrow m(w_i) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x-3}\left(\frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x-3}m(w_{i-2})\right)$$

$$\Rightarrow m(w_i) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\frac{3}{x}\frac{3}{x-3}\frac{2a}{a-1}D_N(K)+\left(\frac{3}{x-3}\right)^2\left(\ldots\right)$$

Παρατηρούμε ότι επαγωγικά για το i-οστό εργοστάσιο ισχύει

$$m(w_i) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}\left(1+\frac{3}{x-3}+\frac{3^2}{(x-3)^2}+\ldots\right)D_N(K)+\frac{3}{x}\left(\frac{3}{x-3}\right)^{i-1}(\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

Το άθροισμα στην παρένθεση είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και η σχέση γίνεται:

$$m(w_i) < \frac{3}{x}\frac{2a}{a-1}\frac{x-3}{x-6}D_N(K)+\frac{3}{x}\left(\frac{3}{x-3}\right)^{i-1}(\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

Επομένως, για την εκτεταμένη απόσταση του κέντρου c_K παίρνουμε

$$g(c_K) \leq g(w_i,c_K) = d(w_i,c_K)+\frac{x}{x-3}m(w_i)$$

$$\Rightarrow g(c_K) < \frac{a}{a-1}D_N(K)+\frac{2a}{a-1}\frac{3}{x-6}D_N(K)+\left(\frac{3}{x-3}\right)^i(\rho+1)\gamma^2 D_N(K)$$

$$\Rightarrow g(c_K) < \left[\frac{a}{a-1}\frac{x}{x-6}+\left(\frac{3}{x-3}\right)^i(\rho+1)\gamma^2\right]D_N(K)$$

Καθώς ανοίγουν εργοστάσια η ποσότητα μπροστά από το $D_N(K)$ φθίνει μέχρι που κάποια στιγμή θα γίνει μικρότερη του ρ και το συγκρότημα θα διασπαστεί. □

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ανάλογα με την επιλογή των σταθερών του προβλήματος κανένα μη απομονωμένο συγκρότημα δεν διατηρείται για μεγάλο διάστημα. Μετά από ένα πλήθος εργοστασίων $m = f(a, x, \rho, \gamma)$ το συγκρότημα είναι υποχρεωμένο να διασπαστεί. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να φράξουμε το κόστος τον μη απομονωμένων συγκροτημάτων από ένα σταθερό παράγοντα του βέλτιστου κόστους εργοστασίων.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ένα μη απομονωμένο συγκρότημα με ένα κέντρο δεν διατηρείται για πολύ ανεξάρτητα από την ύπαρξη resilient εισόδου. Όταν το συγκρότημα αυτό έχει τουλάχιστον 2 βέλτιστα κέντρα, είναι άγνωστο κατά πόσο γίνεται στην γενική περίπτωση να μετρήσουμε τα εργοστάσια μέχρι την διάσπαση. Αντίθετα, όταν η είσοδος είναι resilient, μπορούμε να μετρήσουμε τα εργοστάσια μέσω του a όπως δείξαμε στο παραπάνω λήμμα. Ο συντελεστής του $D_N(K)$ αποτελείται από 2 όρους. Ο ένας όρος λόγω του φθίνων εκθετικού όρου συγκλίνει στο 0, επομένως προκείμενου να μπορέσουμε να μπορέσουμε να επωφεληθούμε από την σχέση που αποδείξαμε πρέπει να ισχύει

$$\frac{a}{a-1}\frac{x}{x-6} < \rho \Rightarrow ... \Rightarrow x > \frac{6\rho(a-1)}{\rho(a-1)-a}$$

Η σχέση αυτή έχει νόημα αν $\rho > a/(a-1)$. Το ρ έχουμε πει μέχρι στιγμής ότι είναι μια σταθερά η οποία έχει να κάνει με την ικανότητα του F^* να διασπαστεί. Η τιμή της είναι μεγάλη γιατί μας βοηθάει στο να ορίζουμε τα συγκροτήματα. Θυμίζουμε ότι ένα συγκρότημα είναι ενεργό όσο ισχύει $g(c_K) > \rho D(K)$, δηλαδή το κοντινότερο εργοστάσιο απέχει από το κέντρο του συγκροτήματος πολλές απόσταση πολλές φορές μεγαλύτερη από τη διάμετρο του.

Όσον αφορά τα απομονωμένα συγκροτήματα η ανάλυση τους ακολουθεί το σκεπτικό της περίπτωσης μια βέλτιστης ομάδας. Συγκεκριμένα, κάθε νέο εργοστάσιο που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο συγκρότημα είτε το διασπά είτε βρίσκεται αρκετά πιο κοντά στο c_K και τα εσωτερικά σημεία ανατίθενται κάθε φορά στο νεότερο ανοιχτό εργοστάσιο. Στο [18] υπολογίζεται το κόστος που συνεισφέρουν στον αλγόριθμο και συνολικά όλος ο αλγόριθμος πετυχαίνει $O(1)$-competitive ratio.

Βιβλιογραφία

[1] Spyros Angelopoulos, Reza Dorrigiv και Alejandro López-Ortiz. On the separation and equivalence of paging strategies. Στο *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2007, New Orleans, Louisiana, USA, January 7-9, 2007*, σελίδες 229–237, 2007.

[2] Spyros Angelopoulos και Pascal Schweitzer. Paging and list update under bijective analysis. Στο *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2009, New York, NY, USA, January 4-6, 2009*, σελίδες 1136–1145, 2009.

[3] Vijay Arya, Naveen Garg, Rohit Khandekar, Adam Meyerson, Kamesh Munagala και Vinayaka Pandit. Local search heuristics for k-median and facility location problems. *SIAM J. Comput.*, 33(3):544–562, 2004.

[4] Pranjal Awasthi, Avrim Blum και Or Sheffet. Center-based clustering under perturbation stability. *Inf. Process. Lett.*, 112(1-2):49–54, 2012.

[5] Liang Y. Balcan M.F. Clustering under perturbation resilience. *SIAM J. Comput.*, 45(1):102–155, 2016.

[6] Maria-Florina Balcan, Avrim Blum και Anupam Gupta. Clustering under approximation stability. *J. ACM*, 60(2):8:1–8:34, 2013.

[7] Maria-Florina Balcan, Nika Haghtalab και Colin White. Symmetric and asymmetric k-center clustering under stability. *CoRR*, abs/1505.03924, 2015.

[8] Yonatan Bilu, Amit Daniely, Nati Linial και Michael E. Saks. On the practically interesting instances of MAXCUT. Στο *30th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2013, February 27 - March 2, 2013, Kiel, Germany*, σελίδες 526–537, 2013.

[9] Yonatan Bilu και Nathan Linial. Are stable instances easy? Στο *Innovations in Computer Science - ICS 2010, Tsinghua University, Beijing, China, January 5-7, 2010. Proceedings*, σελίδες 332–341, 2010.

[10] Allan Borodin και Ran El-Yaniv. *Online computation and competitive analysis*. Cambridge University Press, 1998.

[11] Niv Buchbinder, Kamal Jain και Joseph Naor. Online primal-dual algorithms for maximizing ad-auctions revenue. Στο *Algorithms - ESA 2007, 15th Annual European Symposium, Eilat, Israel, October 8-10, 2007, Proceedings*, σελίδες 253–264, 2007.

[12] Niv Buchbinder και Joseph Naor. The design of competitive online algorithms via a primal-dual approach. *Foundations and Trends in Theoretical Computer Science*, 3(2-3):93–263, 2009.

[13] Jaroslaw Byrka και Karen Aardal. An optimal bifactor approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem. *SIAM J. Comput.*, 39(6):2212–2231, 2010.

[14] Jaroslaw Byrka και Karen Aardal. An optimal bifactor approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem. *SIAM Journal on Computing*, 39(6):2212–2231, 2010.

[15] Moses Charikar, Chandra Chekuri, Tomás Feder και Rajeev Motwani. Incremental clustering and dynamic information retrieval. Στο *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, El Paso, Texas, USA, May 4-6, 1997*, σελίδες 626–635, 1997.

[16] Moses Charikar και Sudipto Guha. Improved combinatorial algorithms for facility location problems. *SIAM J. Comput.*, 34(4):803–824, 2005.

[17] Amit Daniely, Nati Linial και Michael E. Saks. Clustering is difficult only when it does not matter. *CoRR*, abs/1205.4891, 2012.

[18] Dimitris Fotakis. Incremental algorithms for facility location and k-median. *Theoretical Computer Sciene*, 361(2-3):275–313, 2006.

[19] Dimitris Fotakis. On the competitive ratio for online facility location. *Algorithmica*, 50(1):1–57, 2008.

[20] Dimitris Fotakis. Online and incremental algorithms for facility location. *SIGACT News*, 42(1):97–131, 2011.

[21] S. Guha και S. Khuller. Greedy strikes back: Improved facility location algorithms. *Journal of Algorithms*, 31(1):228–248, 1999.

[22] Kamal Jain και Vijay V. Vazirani. Approximation algorithms for metric facility location and k-median problems using the primal-dual schema and lagrangian relaxation. *J. ACM*, 48(2):274–296, 2001.

[23] Anna R. Karlin, Mark S. Manasse, Lyle A. McGeoch και Susan S. Owicki. Competitive randomized algorithms for nonuniform problems. *Algorithmica*, 11(6):542–571, 1994.

[24] Anna R. Karlin, Mark S. Manasse, Larry Rudolph και Daniel Dominic Sleator. Competitive snoopy caching. Στο *27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Toronto, Canada, 27-29 October 1986*, σελίδες 244–254, 1986.

[25] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 20(1):53–72, 1980.

[26] V. Klee και G. J. Minty. How good is the simplex algorithm? *In Inequalities*, 3:159–175, 1972.

[27] Elias Koutsoupias και Christos H. Papadimitriou. Beyond competitive analysis. Στο *35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, New Mexico, USA, 20-22 November 1994*, σελίδες 394–400, 1994.

[28] S. Li και O. Svensson. Approximating k-median via pseudo-approximation. *In Proceedings of the 45th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, σελίδες 901–910, 2013.

[29] Mohammad Mahdian, Yinyu Ye και Jiawei Zhang. Improved approximation algorithms for metric facility location problems. Στο *Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, 5th International Workshop, APPROX 2002, Rome, Italy, September 17-21, 2002, Proceedings*, σελίδες 229–242, 2002.

[30] Konstantin Makarychev και Yury Makarychev. Metric perturbation resilience. *CoRR*, abs/1607.06442, 2016.

[31] Konstantin Makarychev, Yury Makarychev και Aravindan Vijayaraghavan. Bilu-linial stable instances of max cut and minimum multiway cut. Στο *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2014, Portland, Oregon, USA, January 5-7, 2014*, σελίδες 890–906, 2014.

[32] Anupam Gupta Maria-Florina Balcan, Avrim Blum. Approximate clustering without the approximation. *In Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 2009.

[33] A. Meyerson. Online facility location. *In Proc. of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '01)*, σελίδες 426–431, 2001.

[34] Lev Reyzin. Data stability in clustering: A closer look. Στο *Algorithmic Learning Theory - 23rd International Conference, ALT 2012, Lyon, France, October 29-31, 2012. Proceedings*, σελίδες 184–198, 2012.

[35] Tim Roughgarden. Cs264: Beyond worst-case analysis, 2014.

[36] David B. Shmoys, Éva Tardos και Karen Aardal. Approximation algorithms for facility location problems (extended abstract). Στο *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual*

ACM Symposium on the Theory of Computing, El Paso, Texas, USA, May 4-6, 1997, σελίδες 265–274, 1997.

[37] Daniel A. Spielman και Shang-Hua Teng. Smoothed analysis of algorithms: why the simplex algorithm usually takes polynomial time. Στο *Proceedings on 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, July 6-8, 2001, Heraklion, Crete, Greece*, σελίδες 296–305, 2001.

[38] Maxim Sviridenko. An improved approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem. Στο *Integer Programming and Combinatorial Optimization, 9th International IPCO Conference, Cambridge, MA, USA, May 27-29, 2002, Proceedings*, σελίδες 240–257, 2002.

[39] David P. Williamson και David B. Shmoys. *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press, 2011.

[40] Neal E. Young. Bounding the diffuse adversary. Στο *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 25-27 January 1998, San Francisco, California.*, σελίδες 420–425, 1998.