ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# «Το πέρασμα από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα. Μία έρευνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου και πρωτοετείς φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π.»

**ΛΑΠΠΑ ΕΙΡΗΝΗ**

**Επιβλέπουσα:** Παυλοπούλου Καλλιόπη, Ε.ΔΙ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2018

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# «Το πέρασμα από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα. Μία έρευνα για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου και πρωτοετείς φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π.»

**ΛΑΠΠΑ ΕΙΡΗΝΗ**

**Επιβλέπουσα:** Παυλοπούλου Καλλιόπη, Ε.ΔΙ.Π.

**Τριμελής Επιτροπή:**

Παυλοπούλου Καλλιόπη, Ε.ΔΙ.Π.

Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Γκιντίδης Δρόσος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2018

# Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους συνέβαλαν στη διεκπεραίωσή της.

Ξεχωριστά όμως, θεωρώ αναγκαίο, να εκφράσω τις πιο θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στην Καθηγήτρια μου κα. Κάλλια Παυλοπούλου επιβλέπουσα της εργασίας μου, για δυο λόγους. Πρώτον, γιατί παρακολουθώντας στο $5^{ο}$ εξάμηνο των σπουδών μου, το μάθημά της «Διδακτική», μου ενέπνευσε το ιδιαίτερο ενδιαφέρον να ασχοληθώ με θέματα διδακτικής των μαθηματικών και δεύτερον, για την πολύτιμη βοήθεια, τη μεθοδική και αποτελεσματική καθοδήγησή της σε κάθε βήμα της έρευνας αυτής, αλλά και την ψυχολογική στήριξη και την ενθάρρυνση που όποτε τη χρειάστηκα μου την προσέφερε ολόψυχα.

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κ. Ψαρράκο Παναγιώτη, που μου διέθεσε την ώρα διδασκαλίας του στο μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές», προκειμένου να διανείμω στους φοιτητές του $1^{ου}$ έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π. τα ερωτηματολόγια που αφορούσαν στην έρευνά μου. Επίσης ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή κ. Γκιντίδη Δρόσο που με τίμησε με την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Ευχαριστώ τους ίδιους τους φοιτητές του $1^{ου}$ έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., του Ακαδημαϊκού Έτους 2015 - 2016, που με ιδιαίτερο ενδιαφέρον αντιμετώπισαν τα ερωτηματολόγια που τους διένειμα και οι απαντήσεις τους αποτέλεσαν μέρος του ερευνητικού υλικού της εργασίας μου.

Οφείλω επίσης να αναφερθώ και να ευχαριστήσω τους Διευθυντές των σχολείων: $1^{ου}$ Γ.Ε.Λ. Αγίου Νικολάου Λασιθίου κ. Ν. Αποστολάκη, $2^{ου}$ Γ.Ε.Λ. Αγίου Νικολάου Λασιθίου κ. Γ. Τζώρτζη και Γ.Ε.Λ. Νεαπόλεως Λασιθίου κα. Μ. Κωστάκη που με δέχθηκαν στα σχολεία τους και τους εκπαιδευτικούς μαθηματικούς που με προθυμία δέχθηκαν να μου παραχωρήσουν τις ώρες διδασκαλίας τους.

Επίσης ευχαριστώ τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, του Σχ. Έτους 2015 – 2016, των παραπάνω σχολείων που συνεργάστηκαν μαζί μου και διέθεσαν τον πολύτιμο χρόνο τους (προετοιμάζονταν για Πανελλαδικές εξετάσεις), προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια της έρευνάς μου και οι απαντήσεις τους αποτέλεσαν μέρος του ερευνητικού υλικού της εργασίας μου.

Τις συμφοιτήτριές μου, για τη σχέση που αναπτύξαμε όλα αυτά τα χρόνια και για την ηθική και πρακτική υποστήριξη που μου παρείχαν, ιδιαίτερα τα τελευταία έτη των σπουδών μας.

Επίσης τους φίλους και φίλες, από τον Άγιο Νικόλαο Λασιθίου, για τη συντροφικότητα και την ενθάρρυνση στις δύσκολες ημέρες και νύχτες των εξεταστικών περιόδων.

Ιδιαίτερα όμως ευχαριστώ τους γονείς μου, Γιάννη και Κατερίνα για την **αμέριστη αγάπη** που μου δείχνουν και με ενθαρρύνουν σε κάθε βήμα στη ζωή μου και σε όλες μου τις επιλογές.

Τον αδελφό μου Αλέξανδρο, που ως μεγαλύτερος που είναι, τον είχα και τον έχω πρότυπο, θαυμάζοντάς τον στο κάθε βήμα της ζωής του και στην κάθε του επιτυχία. Ίσως αυτό αποτέλεσε και τον λόγο που από μικρό παιδί έμαθα να αγαπώ τον γοητευτικό κόσμο των Θετικών Επιστημών και ιδιαίτερα τον κόσμο των Μαθηματικών.

Τέλος, για τη βοήθεια που μου παρείχε στην τελική διαμόρφωση αυτής της εργασίας, για την υπομονή, αλλά και για την κατανόηση και τη συνεχή υποστήριξη ευχαριστώ το σύντροφο της ζωής μου Ιωσήφ, που εδώ και λίγα χρόνια έχουμε ξεκινήσει μαζί το πιο όμορφο ταξίδι της ζωής.

Λάππα Ειρήνη

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Αθήνα, 2018

# Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία τέθηκε σαν θέμα διερεύνησης η δυνατότητα μετάβασης ή αλλιώς «μετάφρασης» ή αλλιώς το πέρασμα από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα, σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και σε φοιτητές του 1ου Έτους της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία του μαθήματος των Μαθηματικών.

Στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρείται ο προσδιορισμός των όρων «αναπαράσταση» και «συστήματα αναπαράστασης» καθώς η «φυσική γλώσσα» και η «συμβολική γραφή», δύο από τα κύρια θέματα της παρούσας εργασίας, αποτελούν μέρος των συστημάτων έκφρασης και αναπαράστασης στην εκμάθηση των Μαθηματικών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο επιχειρείται ένα πέρασμα από τα σχολικά συγγράμματα της Άλγεβρας: Β’ Γυμνασίου, Γ’ Γυμνασίου, Α΄Λυκείου και Β’ Λυκείου, εντοπίζουμε και παραθέτουμε διάφορες ενδεικτικές εφαρμογές, δραστηριότητες και προβλήματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη αναφορά σε παλαιότερες έρευνες.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνά μας και τα αποτελέσματα αυτής σε ποσοτική και ποιοτική μορφή.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς μας.

## Abstract

This diploma thesis has as a matter of inquiry the capability of students of Secondary education and of the 1st year of Higher Education to translate natural language to symbolic writing and vice versa during the educational process of the Mathematics course.

In the first chapter of this paper, an attempt is made in the direction of defining the terms "representation” and "representation systems" as well as the terms "internal and external representation" in order to highlight their importance, as "natural language" and "symbolic writing" two of the main themes of this work, are part of the systems of expression and representation in the learning of mathematics.

In second chapter school textbooks of Algebra used in Secondary education are studied in order to identify and list the various indicative applications, activities and problems.

In third chapter a brief reference is made to various studies from the international literature and an exploration of similar scientific work that has taken place in various educational institutions of Secondary and Tertiary Education.

The fourth chapter presents our research and its results in quantitative and qualitative form.

The fifth chapter presents the conclusions drawn from the study and analysis of the research results and their use in teaching practice.

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

**ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ ΣΤΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ 57**



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

**ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ 71**



**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

**ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΕΡΕΥΝΑΣ 83**

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία έθεσε σαν θέμα διερεύνησης τη δυνατότητα μετάβασης ή αλλιώς «μετάφρασης» ή αλλιώς το πέρασμα από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα, σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και σε φοιτητές του 1$^{\underline{ου}}$ έτους της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία του μαθήματος των Μαθηματικών.

Ένας σημαντικός λόγος που με οδήγησε στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος είναι η αδυναμία μεγάλης μερίδας μαθητών, αλλά και φοιτητών στο να ανταποκρίνονται με ακρίβεια, συνέπεια και πληρότητα στην κατανόηση – ερμηνεία και στη συνέχεια «μετάφραση» από την καθημερινή «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και το ανάποδο. Ένας ακόμη παράγοντας επιλογής του θέματος είναι ότι κατά το πέρασμά μου από τα σχολικά και φοιτητικά  έδρανα και από τη μικρή εμπειρία μου από το χώρο της διδασκαλίας των μαθηματικών (ασχολούμαι τα τέσσερα τελευταία χρόνια με την παράδοση ιδιαίτερων μαθημάτων σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης), έχω διαπιστώσει ότι στα σχολικά εγχειρίδια και γενικότερα στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, δεν επισημαίνονται οι ιδιαιτερότητες του περάσματος από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα, έτσι ώστε οι μαθητές – φοιτητές να διευκολύνονται στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Επίσης υπάρχει αδυναμία μεγάλης μερίδας εκπαιδευτικών να παρουσιάσουν με τη χρήση αναπαράστασης ένα πρόβλημα στους μαθητές τους, για να μπορέσουν αυτοί με τη σειρά τους να ανταποκριθούν, να το κατανοήσουν και να το λύσουν με επιτυχία.

Στόχος λοιπόν της παρούσας έρευνας είναι:

**Α.** Η μελέτη των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίζονται κατά την ανάγνωση – κατανόηση και εκφορά απλών και σύνθετων μαθηματικών εννοιών και μαθηματικών αντικειμένων, δοσμένων στη φυσική γλώσσα, στο να αποδοθούν στη συμβολική γραφή και αντίστροφα.

**Β.** Ποιες διδακτικές προσεγγίσεις απαιτούνται, που να λαμβάνουν υπόψη τους τη σημασία της γλώσσας για τη μάθηση των μαθηματικών, αλλά και τον μαθηματικό συμβολισμό ως ένα ισχυρό εργαλείο επικοινωνίας σε κάθε μαθηματική συνδιάλεξη.

**Γ.** Ποιες μέθοδοι διδακτικής πρέπει να εφαρμόζονται προκειμένου η μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο να μην αποτελεί δύσκολη διαδικασία στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Για τους λόγους αυτούς συντάχθηκαν δύο ερωτηματολόγια τα οποία μοιράστηκαν σε μαθητές Γ' Λυκείου και σε φοιτητές $1^{ου}$ Έτους της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, τον Απρίλιο του 2016. Επιλέξαμε από τη μία την Γ΄ Τάξη του Λυκείου διότι οι μαθητές ήδη έχουν εξοικειωθεί σε έναν βαθμό με τη χρήση της μεταβλητής και την επίλυση ενός προβλήματος με τη βοήθεια μίας εξίσωσης, μίας ανίσωσης ή ενός συστήματος επίσης έχουν διδαχθεί σε αρχικό στάδιο την έννοια και τις ιδιότητες των διανυσμάτων. Από την άλλη επιλέξαμε το Α΄ Έτος της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. γιατί οι φοιτητές που έχουν εισαχθεί σε αυτήν τη σχολή πιστεύουμε πως διαθέτουν μία καλή γνώση στα Μαθηματικά, μια και το μάθημα «Μαθηματικά Κατεύθυνσης», αποτελούσε ένα σημαντικό κριτήριο για την εισαγωγή τους.

Στο **$1^{ο}$ Κεφάλαιο** αυτής της εργασίας, επιχειρείται ο προσδιορισμός των όρων «αναπαράσταση» και «συστήματα αναπαράστασης» καθώς και των όρων «εσωτερική και εξωτερική αναπαράσταση» σε μια προσπάθεια ανάδειξης της σημασίας τους, καθώς η «φυσική γλώσσα» και η «συμβολική γραφή», δυο από τα κύρια θέματα της παρούσας εργασίας, αποτελούν μέρος των συστημάτων έκφρασης και αναπαράστασης στην εκμάθηση των Μαθηματικών. Γίνεται εκτενής αναφορά στη «φυσική γλώσσα» ως το κύριο μέσο με το οποίο η διδασκαλία και η μάθηση λαμβάνει χώρα, αλλά και ως ένα από τα πιο σημαντικά επίπεδα της σημειωτικής αναπαράστασης. Επίσης αναφέρονται αρκετά στοιχεία από τη «συμβολική γραφή», μια και οι αναπαραστάσεις στο επίπεδο της «συμβολικής γραφής», συμβάλουν τα μέγιστα στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι διαδικασίες του περάσματος ή της «μετάφρασης» από το ένα επίπεδο στο άλλο και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζονται κατά το πέρασμα αυτό.

Σε ολόκληρο το κεφάλαιο γίνεται εκτενής επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας και δημοσίευσης σχετικών άρθρων και ερευνητικών εργασιών.

Στο **2ο Κεφάλαιο** επιχειρείται ένα πέρασμα από τα σχολικά συγγράμματα της Άλγεβρας: Β΄ Γυμνασίου, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, εντοπίζουμε και παραθέτουμε διάφορες ενδεικτικές εφαρμογές, δραστηριότητες και προβλήματα. Στη συνέχεια προσπαθούμε να υποθέσουμε τους λόγους για τους οποίους μαθητές οδηγούνται σε λανθασμένα αποτελέσματα και να εντοπίσουμε τυχόν αβλεψίες ή παραλήψεις των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών εγχειριδίων.

Στο **3ο Κεφάλαιο** γίνεται μια σύντομη αναφορά σε διάφορες έρευνες από τη διεθνή βιβλιογραφία και μια διερεύνηση σε παρόμοιες επιστημονικές εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί σε διάφορα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης.

Στο **4ο Κεφάλαιο** παρουσιάζεται η έρευνά μας και τα αποτελέσματα αυτής σε ποσοτική και ποιοτική μορφή.

Στο **5ο Κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη και την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας και η αξιοποίηση αυτών στη διδακτική πρακτική, έτσι ώστε το πέρασμα από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής και το αντίστροφο, να γίνεται με την τυπική τελειότητα και ακρίβεια που απαιτεί η επιστήμη των μαθηματικών.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΣΤΙΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

## 1.1. Αναπαραστάσεις

### 1.1.1. Ο ρόλος και η χρησιμότητα των αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά

Βασικό εργαλείο της Σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών αποτελεί η ιδέα της αναπαράστασης, η οποία κυριαρχεί σε όλη την έκταση της Θεωρίας της Γνώσης και της Γνωστικής Ψυχολογίας (Billman, 1999). Ο λόγος για τον οποίο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια αυτή στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι ότι οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σύμφυτες με τα μαθηματικά (Dufur – Janvier et al, 1987). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά δεμένες με μία μαθηματική έννοια, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. Τα τελευταία χρόνια έχει αναγνωριστεί ευρέως η κεντρική θέση που κατέχουν τα διάφορα πεδία αναπαράστασης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Ο ρόλος και η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και εκτενούς συζήτησης κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών στη μαθηματική κοινότητα. Ενδεικτικά, ένα από τα κριτήρια που περιελήφθη πρόσφατα στα (Principles and Evaluation Standards for School Mathematics) (Αρχές και Πρότυπα Αξιολόγησης για τα Μαθηματικά) (**N.C.T.M.**, 2000) (**N**ational **C**ouncil of **T**eachers of **M**athematics) (Εθνικό Συμβούλιο Διδασκόντων Μαθηματικά) σχετίζεται με τη χρήση αναπαραστάσεων κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Σε αυτό επισημαίνεται ότι είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να αναπαριστούν τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο που να έχει νόημα για τους ίδιους, έστω και αν οι αναπαραστάσεις που πιθανόν να χρησιμοποιήσουν να μην είναι οι συμβατικές. Ταυτόχρονα, θα πρέπει να μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τις συμβατικές μορφές αναπαράστασης κατά τρόπο που να διευκολύνεται η μάθηση και η επικοινωνία των μαθηματικών εννοιών (N.C.T.M., 2000). Ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης και η αλλαγή πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, φαίνεται από το πλήθος των ερευνητικών εργασιών, που εξετάζουν το συγκεκριμένο θέμα.

### 1.1.2. Ο ορισμός της αναπαράστασης

Ο όρος «αναπαράσταση» μεταφράζεται σε διάφορα λεξικά με τον όρο «απεικόνιση» (Νεοελληνικό Λεξικό Πατάκη), «αποτύπωση έργου, πράγματος ή γεγονότος, εικαστική ή γραφική παράσταση γεγονότος ή κατασκευής που δεν υπάρχει ή που δεν έχει πλέον τη μορφή που είχε» (Λεξικό της Κοινής Ελληνικής), «η εκ νέου παράσταση, επανάληψη ή απομίμηση γεγονότος ή πράξεως» (Λεξικό Γ. Μπαμπινιώτη). Αναπαράσταση σημαίνει ότι μια οντότητα αντιπροσωπεύει μια άλλη οντότητα μέσω κάποιας αντιστοίχισης.

Οι Confrey και Smith αναφέρουν την αναπαράσταση ως μία νοητική δομή, η οποία καθορίζεται από διάφορα εργαλεία όπως πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις και από τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και εννοιών (Confrey & Smith, 1991). Κατά τον (Palmer, 1977) μία αναπαράσταση είναι ένας σχηματισμός (configuration) ο οποίος ολοκληρωτικά ή εν μέρει συνδέεται, αντιστοιχεί, αλληλεπιδρά, συμβολίζει, «αναπαριστά» κάτι άλλο. Τον ορισμό του (Palmer, 1977), υιοθετούν οι (Kaput, 1987) και (Goldin, 1987).

Η γνωστική ψυχολογία χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο με δύο κυρίως τρόπους:

1. Κάποια οργάνωση που αντιστοιχεί σε κάποια οντότητα και αποτελεί μοντέλο διανοητικών διεργασιών.
2. Την οργάνωση της γνώσης στο ανθρώπινο νοητικό σύστημα.

Κατά τον (Bruner, 1996) υπάρχουν τρεις τύποι που συνδέονται εξελικτικά:

1. Ενεργητική (λειτουργική) αναπαράσταση (δράση, π.χ. οι διάφορες κινήσεις).
2. Εικονική αναπαράσταση (νοερές εικόνες, όχι λεπτομέρειες αλλά κάποια πολύ χρήσιμα χαρακτηριστικά).
3. Συμβολική αναπαράσταση (ο τρόπος αυτός αναπαράστασης εμπειριών στη μνήμη γίνεται μέσω γλωσσικών ή άλλων συμβόλων. Ένα σύμβολο είναι μια λέξη ή ένα σημάδι που δεν μοιάζει καθόλου με το αντικείμενο ή την ενέργεια που παριστάνει.)

Επομένως, ο όρος «αναπαράσταση» είναι ασαφής και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες. (Goldin & Kaput, 1996), (Roth & McGinn, 1998), (Seeger, 1998), (Glasersfeld, 1987). Επικρατέστερος ορισμός μπορεί να θεωρηθεί αυτός που δίνεται από τον (Kaput, 1987), σύμφωνα με τον οποίο ο όρος «αναπαράσταση» αναφέρεται σε ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια (signified and referenced concept), το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο και εμπεριέχει ένα σύνολο νοητικών δραστηριοτήτων και πρακτικών και ως έννοια περιλαμβάνει πέντε ολότητες:

**α.** την ολότητα που αναπαρίσταται,

**β.** την ολότητα που αναπαριστά,

**γ.** τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται,

**δ.** τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση,

**ε.** την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες.

Αυτοί οι ορισμοί έχουν επηρεαστεί από τις ιδέες του (Johnson Laird, 1983), ο οποίος διακρίνει τρεις τύπους αναπαράστασης:

**1.** Προτασιακές αποδείξεις (γραπτές προτάσεις της φυσικής γλώσσας) (prepositiona proofs): Είναι λεκτικές ή συμβολικές, που διέπονται από ξεκάθαρους και συγκεκριμένους κανόνες.

**2.** Νοητικά μοντέλα (δομημένα ανάλογα με τον κόσμο) (thought experiments)

**3.** Νοητικές εικόνες (αντιλήψεις των μοντέλων από μία οπτική γωνία): Θεωρούνται ότι αναπαριστούν πράγματα ταυτόχρονα, χωρίς ιδιαίτερα σύμβολα που να συσχετίζουν τις διάφορες εκφάνσεις τους.

Η αναπαράσταση είναι μια δύσκολη έννοια (Vergnaud, 1998). Υπάρχουν τουλάχιστον δύο απλοί λόγοι που καθιστούν τις αναπαραστάσεις σημαντικό θέμα για επιστημονική μελέτη. Ο πρώτος, είναι ότι χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση ως έκφραση των εσωτερικών εικόνων, των χειρονομιών και των λέξεων. Ο δεύτερος, είναι ότι οι λέξεις και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε στην επικοινωνία δεν αναφέρονται άμεσα στην πραγματικότητα, αλλά αντιπροσωπεύουν τις οντότητες: αντικείμενα, ιδιότητες, σχέσεις, διαδικασίες, ενέργειες και κατασκευάσματα, για τα οποία δεν υπάρχει καμία αυτόματη συμφωνία μεταξύ δύο ατόμων. Οι γλωσσικές και συμβολικές εκφράσεις διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά και στην εκπαίδευση γενικότερα.

Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα: προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin & Kaput, 1996). Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί «σχήματα συμβόλων» (Kaput, 1987) ή «συστήματα αναπαράστασης» (Goldin, 1987), (Lesh, Landau & Hamilton,1983).

Είναι σημαντικό να γίνει μια διάκριση ανάμεσα στις εσωτερικές – ψυχολογικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος και έχει να κάνει κυρίως με τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσονται.

Στο πιο πάνω γενικό πλαίσιο οι (Janvier Bednarz & Belanger, 1987) κάνουν μια ενδιαφέρουσα διάκριση:

α. **εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις** και

β. **εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις** (DeLoache et al, 1998), (Gagatsis et al, 1999), (Goldin & Kaput, 1996), (Janvier, 1987), (Maher & Speiser, 1998), (Roth & McGinn, 1998), (Seeger, 1998).

Οι Goldin και Kaput διακρίνουν τα εσωτερικά από τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης υποστηρίζοντας ότι «η διάκριση αυτή είναι ουσιαστικής σημασίας για την ψυχολογία και τη μάθηση των μαθηματικών» (Goldin & Kaput, 1996). Το γεγονός ότι ένα σύμβολο οδηγεί σε μια έννοια του νου, με τη σειρά του οδηγεί στη διάκριση ανάμεσα στην **Εξωτερική** αναπαράσταση και την **Εσωτερική** αναπαράσταση.

**Ι. Εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις**: είναι οι νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε, για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου) (Dufour – Janvier et al, 1987). Είναι προϊόν νοητικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε. Η Εσωτερική αναπαράσταση (νοητική αναπαράσταση) είναι ο προσωπικός τρόπος με τον οποίο ο μαθητής / φοιτητής κινητοποιεί τις γνώσεις του. Το άτομο δεν περιμένει απλώς να αποτυπωθούν οι επιδράσεις του περιβάλλοντός του στο μυαλό του. Προσπαθεί ενεργητικά να το ερμηνεύσει και να το κατανοήσει.

Το ερμηνεύει νοητικά, χτίζει ένα μοντέλο του κόσμου στο μυαλό του, ένα σύστημα εσωτερικών αναπαραστάσεων, το κινητοποιεί όταν θέλει να προβλέψει γεγονότα ή όταν αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα και πάντα με τον δικό του προσωπικό τρόπο. Εξαιτίας της φύσης τους, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν με βάση την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Όπως επισημαίνει ο (Glasersfeld, 1987), μια νοητική αναπαράσταση αποτελείται από στοιχεία που αρχικά προήλθαν από το αισθησιοκινητικό επίπεδο της εμπειρίας. Δεν αποκλείονται, ωστόσο, οι πρωτότυποι συνδυασμοί επιμέρους στοιχείων της εμπειρίας ή κάποιος βαθμός αφαίρεσης σε σχέση με τα αρχικά αισθησιοκινητικά στοιχεία, με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέες νοητικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τις αρχές του **εποικοδομισμού**, ή αλλιώς **κονστρουκτιβισμού** (Φιλοσοφία κατά την οποία η μάθηση θεωρείται ως ενεργός διαδικασία στην οποία οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργά τη γνώση δεδομένου ότι προσπαθούν να κατανοήσουν τον κόσμο που τους περιβάλλει. Κάθε οργανισμός συνθέτει νοητικά πρότυπα ή σχήματα μέσω των οποίων κατανοεί τις εμπειρίες του. Αυτά τα νοητικά πρότυπα κατασκευάζονται με βάση την προγενέστερη γνώση, τις νοητικές δομές και τις υπάρχουσες πεποιθήσεις του. Η μάθηση είναι απλά η εσωτερική ρύθμιση των νοητικών προτύπων ή σχημάτων, ώστε να ενσωματώσουν τις νέες εμπειρίες.) οι νοητικές αναπαραστάσεις έχουν δυναμικό χαρακτήρα, δηλαδή, δεν πρόκειται για καταχωρήσεις που ανακαλούνται από κάποιο αρχείο, αλλά για παραγωγικές διαδικασίες, οι οποίες ενεργοποιούνται. Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις έχουν μεγάλη σημασία για την εκμάθηση των μαθηματικών και της μαθηματικής σκέψης. Οι Εσωτερικές Αναπαραστάσεις δεν είναι σαφείς και δεν είναι εύκολο να παρατηρηθούν απευθείας, αλλά γίνονται αντιληπτές μόνο από παρατηρήσεις επί των μαθητών όταν εργάζονται. Οι παραστάσεις που σχηματίζει καθένας στο μυαλό του για μια έννοια ή ένα σύμβολο είναι διαφορετικές και καθορίζουν τον ατομικό τρόπο κατάκτησης της έννοιας.

II. **Εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις**: είναι οι αναπαραστάσεις που εκφέρονται με χρήση σημείων (signes), (εκφωνήσεις στη φυσική γλώσσα, αλγεβρικοί τύποι, γραφικές παραστάσεις, γεωμετρικά σχήματα) και αποτελούν το μέσο που διαθέτει το άτομο για να εξωτερικεύσει τις νοητικές του αναπαραστάσεις αφορούν στην εξωτερική οργάνωση συμβόλων που αναπαριστούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος) (Dufour – Janvier et al, 1987). Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ποικίλουν, από τα καθιερωμένα συμβολικά συστήματα των Μαθηματικών (δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) ως το περιβάλλον των πιο δομημένων θεωριών (δακτύλιοι, ομάδες). Τα βασικά εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνουν: γλώσσες, σύμβολα (αλγεβρικά και αριθμητικά), διαγράμματα, εικόνες, γραφικές παραστάσεις και άλλες παραστάσεις της μαθηματικής γλώσσας και δρουν ως ερεθισμοί στις αισθήσεις. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι «οι παρατηρήσιμες ενσωματώσεις του τρόπου, με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές» (Lesh et al, 1987, σ.33). Ιδιαίτερα σημαντική είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998. Γαγάτση, «Συναρτήσεις, ένα παιγνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης», 2000, σελ. 16). Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας, ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα. Σύμφωνα με μια από τις βασικές αρχές του εποικοδομισμού (Glasersfeld, 1987) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της, αλλά χρειάζεται ερμηνεία. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών. Η ερμηνεία, ωστόσο, μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια. Το ότι οι μαθηματικές έννοιες, δεν προσεγγίζονται μέσω των αισθήσεων - γεγονός που διαφοροποιεί τα Μαθηματικά από τις άλλες Θετικές Επιστήμες- είναι μια αδιαμφισβήτητη θέση. Το σημαντικό είναι ότι στα Μαθηματικά μπορεί κάποιος να χειρίζεται έννοιες μέσω των αναπαραστάσεών τους και να αναφέρεται σε ιδιότητές τους, χωρίς να χρειάζεται να πάρει θέση στο φιλοσοφικό ερώτημα της ύπαρξης ή μη των μαθηματικών αντικειμένων. Οι αναπαραστάσεις των μαθηματικών αντικειμένων είναι κυρίως εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις.

### 1.1.3. Αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί ένα εξαιρετικά βοηθητικό θεωρητικό εργαλείο για το χαρακτηρισμό των γνωστικών διαδικασιών στη μάθηση των μαθηματικών και αυτό γιατί η περιγραφή του τρόπου εξέλιξης των συστημάτων αναπαράστασης στο χρόνο περιλαμβάνει τόσο σημειωτικές πράξεις, μέσω των οποίων οι αναπαραστάσεις αποκτούν συγκεκριμένο νόημα, όσο και τη δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, τα οποία οικοδομούνται πάνω στις βάσεις που παρέχουν τα προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης (Goldin & Kaput,1996). Όπως αναφέραμε και παραπάνω η ανθρώπινη σκέψη χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλών ειδών αναπαράστασης για την ίδια έννοια, γεγονός που τη διαφοροποιεί τόσο από τη νοημοσύνη των ζώων όσο και από την τεχνητή νοημοσύνη. Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, ως μια έκφραση της ανθρώπινης σκέψης, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους (Γαγάτσης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2001).

Η μαθηματική εκπαίδευση ως αναπόσπαστο μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί επίσης τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης, ο οποίος χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Απαραίτητες προϋποθέσεις, όμως, για την αποτελεσματική κατανόηση μιας έννοιας αποτελούν

**α)** η ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης,

**β)** η ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα

**γ)** η ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Lesh, Behr & Post, 1987). Η τελευταία προϋπόθεση, δηλαδή η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας σε άλλο, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών, αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987). Οι (Schwartz και Yerushalmy, 1992) θεωρούν ότι, μέσω της δυνατότητας των πολλαπλώς συνδεδεμένων αναπαραστάσεων, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν να βλέπουν τις αναπαραστάσεις ως διαδικασία. Η σύνδεση διαφόρων μορφών αναπαράστασης προσφέρει στους μαθητές την απαραίτητη ποιοτική και ποσοτική ανατροφοδότηση για την ενίσχυση της κατανόησης των συμβολικών χειρισμών τους. Ο Kaput (1994) δίνει πολύ μεγάλη έμφαση στη σχέση μεταξύ μαθηματικών συμβολικών συστημάτων.

Οι μαθητές στα πλαίσια του μαθήματος των μαθηματικών έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων. Ο Lesh και η ομάδα του (1987), εξέτασαν το ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις μεταφράσεις από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και στους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο σύστημα. Οι ίδιοι ερευνητές διαπίστωσαν δυσκολίες μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

Ο R. Duval σημειώνει επίσης ότι η αναπαράσταση που γίνεται σε κάποιο σύστημα είναι ανάλογη με τις δυνατότητες του συστήματος. *«…η νοητική επεξεργασία των μαθηματικών αντικειμένων (εννοιών), εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα αναπαράστασης. Αρκεί να εξετάσει κάποιος την περίπτωση της Αριθμητικής για να το καταλάβει: δεν παρατηρείται το ίδιο επίπεδο δυσκολίας στην περίπτωση της δεκαδικής γραφής και στη περίπτωση της κλασματικής γραφής ενός αριθμού. Αν δούμε το θέμα σφαιρικά, η πρόοδος στα Μαθηματικά συνοδεύεται πάντα από την εμφάνιση και εξέλιξη νέων σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν με το πρώτο και βασικότερο σύστημα, εκείνο της φυσικής γλώσσας. Η ποικιλία των σημειωτικών συστημάτων επιτρέπει την ύπαρξη διαφόρων μορφών αναπαράστασης του ίδιου αντικειμένου αυξάνοντας έτσι τις γνωστικές δυνατότητες του υποκειμένου και κατά συνέπεια τις νοητικές του αναπαραστάσεις…»*

Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει ικανότητα συσχετισμού των διαφόρων σημειωτικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας.

Ένα άτομο μπορεί να έχει πρόσβαση σε μια μαθηματική έννοια, μόνον αν διαθέτει τουλάχιστον δύο σημειωτικά συστήματα γι’ αυτή την έννοια, και αν μπορεί να περνά χωρίς δυσκολία από το ένα σύστημα στο άλλο (Duval 1995α, σελ. 22).

Γι’ αυτό και παρατηρείται συχνά το γεγονός οι μαθητές να μπορούν εύκολα να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, η να αναγνωρίζουν μια συνάρτηση από τη συνολική της μορφή, αλλά να μη μπορούν να περάσουν από τη γραφική παράσταση στην αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης, ή να συσχετίσουν συμβολικές εκφράσεις και λεκτικές εκφράσεις με αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Ο (Schoenfeld, 1986), χαρακτηρίζει αυτή την αδυναμία ως «ακατάλληλη τμηματοποίηση» (“inappropriate compartmentalization”): *«Οι μαθητές δεν βλέπουν καμία σύνδεση μεταξύ των παραγωγικών Μαθηματικών που χρησιμοποιούνται σε μια μαθηματική απόδειξη και των επαγωγικών Μαθηματικών των διαδικασιών κατασκευής. Αν (όμως) δεν μπορούν να κάνουν τέτοιους συσχετισμούς, αγνοούν την ουσία των Μαθηματικών».*

Στην πραγματικότητα, οι σημαντικοί συσχετισμοί που πρέπει να επιδιώξουμε μέσω της διδασκαλίας δεν είναι μεταξύ παραγωγικών και εμπειρικών Μαθηματικών, μεταξύ αποδείξεων και κατασκευών, αλλά μεταξύ διαφόρων μορφών σημειωτικών αναπαραστάσεων. Οι συσχετισμοί αυτοί δημιουργούν τη γνωστική αρχιτεκτονική μέσω της οποίας οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίζουν το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων και έτσι να κάνουν αντικειμενική σύνδεση παραγωγικών και εμπειρικών Μαθηματικών (Duval, 1995)

Μια ιδιαιτερότητα της ανθρώπινης σκέψης είναι η χρήση πολλών συστημάτων αναπαραστάσεων, χάρη στα οποία μια μαθηματική έννοια μπορεί να κωδικοποιηθεί με ένα σχέδιο, ένα σύμβολο ή μια προφορική έκφραση. Εν τούτοις κάθε αναπαράσταση παρέχει πληροφορίες για κάποιες πτυχές της γνώσης, χωρίς να έχει την ικανότητα να την περιγράψει ολοκληρωτικά, αλλά αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας γνώσης αλληλο-συμπληρώνονται.

Η δυνατότητα χειρισμού μαθηματικών αντικειμένων, εξαρτάται άμεσα από το χρησιμοποιούμενο σημειωτικό σύστημα.

Ο Θ.Σκούρας σε σχετικό άρθρο, για ένα και το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο, αναφέρεται στις δυνατότητες των αναπαραστάσεων γενικά, τονίζοντας όμως και τους περιορισμούς στους οποίους υπόκεινται αυτές.

Είναι ουσιαστικό «να μη συγχέονται τα μαθηματικά αντικείμενα, δηλαδή οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, οι ευθείες κ.λ.π. με τις αναπαραστάσεις τους, δηλαδή τις δεκαδικές γραφές ή τις κλασματικές, τα σύμβολα, τα γραφήματα, …Κάθε σύγχυση ανάμεσα στο αντικείμενο και στην αναπαράστασή του οδηγεί σε μια έλλειψη κατανόησης» (Duval R., 1996). Το φαινόμενο όμως αυτό, η σύγχυση δηλαδή αντικειμένου και αναπαραστάτη δεν είναι καθόλου σπάνιο, και μάλιστα εμφανίζεται σε πολλά και διαφορετικά επίπεδα εκμάθησης. Οι μαθητές/φοιτητές μπορούν εύκολα να οδηγηθούν σε συγχύσεις ανάμεσα στο αντικείμενο και σε έναν αναπαραστάτη του. Μάλιστα όπως αναφέρεται στο βιβλίο (*διδακτική μέθοδοι και εφαρμογές των: ΔΑΣΔΙΕΛΗ Β., ΠΑΥΛΟΠΟΥΛΟΥ Κ., ΤΡΙΓΓΑ Π.*) σε έρευνα σε πρωτοετείς φοιτητές στο Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου στη Γαλλία, οι φοιτητές συγχέουν πολύ συχνά ένα διάνυσμα με ένα βέλος μέσα στο επίπεδο ή στο χώρο των τριών διαστάσεων. Αλλά αυτό το βέλος δεν είναι παρά ένας αναπαραστάτης του μαθηματικού αντικειμένου που ονομάστηκε διάνυσμα. Αυτό το λάθος οδηγεί πολλές φορές τους φοιτητές σε αδιέξοδο. Η προσκόλληση σε μια αναφορά συγκεκριμένη, εμποδίζει τους φοιτητές να συλλογιστούν μέσα στο αφηρημένο. Σύμφωνα με τον R. Ruval « *Για να μη συγχέεται ένα αντικείμενο με την αναπαράστασή του είναι αναγκαίο να διαθέτουμε πολλές αναπαραστάσεις σημειωτικά ετερογενείς αυτού του αντικειμένου και να τις συντονίζουμε*» (R. Duval, 1996).

Είναι βέβαιο λοιπόν, όπως αναφέρεται στο παραπάνω βιβλίο ότι, η διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας δεν μπορεί να περιοριστεί στη χρήση ενός μόνο επιπέδου σημειωτικής αναπαράστασης, διότι ένα μόνο απομονωμένο επίπεδο δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο μαθηματικό αντικείμενο, «…. *Η φύση του σημειωτικού επιπέδου επιβάλει μια επιλογή από τα εννοιολογικά στοιχεία ή πληροφοριακά στοιχεία του περιεχομένου που αναπαρίσταται. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική σε σχέση με αυτό που αναπαριστά, καθώς και ότι οι αναπαραστάσεις των διαφορετικών επιπέδων δεν παρουσιάζουν τις ίδιες όψεις ενός ίδιου θεωρητικού περιεχομένου*» (R. Duval, 1996).

Οι (Dufour – Janvier, 1987) προσδιορίζουν τις σημειωτικές αναπαραστάσεις ως όλους τους εξωτερικούς φορείς (σύμβολα, διαγράμματα, σχήματα κλπ), οι οποίοι έχουν στόχο να αναπαραστήσουν μια συγκεκριμένη μαθηματική ή άλλη «πραγματικότητα» και επεξήγησαν την αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν την ίδια έννοια που δόθηκε σε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η (Hart, 1991) μελέτησε τις αναπαραστάσεις που προτιμούν οι μαθητές και τον τρόπο κατά τον οποίο η επιλογή των αναπαραστάσεων ποίκιλε όσον αφορά το πρόβλημα. Τα συμπεράσματά της έδειξαν ότι η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται από τους μαθητές για να λύσουν προβλήματα επηρεάζεται έντονα από την προηγούμενη εμπειρία τους.

Οι θεωρητικές απόψεις που υποστηρίχθηκαν προηγουμένως, δεν αφορούν μόνο τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, αλλά και στην Τριτοβάθμια επίσης. Σε ένα συλλογικό τόμο σχετικά με την διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας, (Dorier, 1997), ο Joel Hillel υποστηρίζει ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές στη Γραμμική Άλγεβρα, οφείλονται κυρίως στη δυσκολία γνωστικής σύνδεσης των διαφόρων επιπέδων αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στη συγκεκριμένη θεματική περιοχή: σύνδεση της γλώσσας της γενικής θεωρίας των διανυσματικών χώρων με τη γλώσσα της πιο ειδικής θεωρίας των πραγματικών ν-άδων (της γλώσσας του Rn ) και της γεωμετρικής γλώσσας του δισδιάστατου και τρισδιάστατου χώρου. Αυτός εστιάζει ειδικότερα στην αναπαράσταση των διανυσμάτων και των γραμμικών τελεστών σε τρία διαφορετικά επίπεδα: αφηρημένο, αλγεβρικό και γεωμετρικό. Οι φοιτητές/ μαθητές δυσκολεύονται να ταυτίσουν ένα διάνυσμα με τις αναπαραστάσεις του σε διαφορετικές βάσεις. Αυτά τα τρία επίπεδα αντιστοιχούν σε τρεις μορφές συλλογισμού: Συνθετικό-Γεωμετρικό, Αναλυτικό-Αριθμητικό και Αναλυτικό-Δομικό. Οι μορφές αυτές συλλογισμού, αντικατοπτρίζουν την ιστορική σημειωτική εξέλιξη της Γραμμικής Άλγεβρας: Από την «αλγεβροποίηση» του χώρου (μετάβαση από τη Συνθετική στην Αναλυτική Γεωμετρία), στην δόμηση, χάρη της οποίας ο χώρος γίνεται ένα αλγεβρικό σύστημα, κλειστό ως προς κάποιες πράξεις. Η έρευνα της (Κ. Παυλοπούλου, 1994) για τη συσχέτιση σημειωτικών αναπαραστάσεων στη περίπτωση της Γραμμικής Άλγεβρας, επιβεβαιώνει ότι οι σχέσεις μεταξύ εννοιολογικής μάθησης και σημειωτικής μάθησης είναι πολύ πιο σύνθετη από αυτή που υποπτευόμαστε όταν οργανώνουμε τη διδασκαλία. Παρόμοια συμπεράσματα έχουν προκύψει και από τη διδακτικο-ψυχολογική ανάλυση και άλλων μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα της έννοιας του ορίου (Cornu, 1991), (Tall& Vinner, 1981). Σύμφωνα με αρκετές έρευνες, μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες σε αυτή τη διαδικασία, που επηρεάζουν τόσο την μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος. Ο Duval ισχυρίστηκε (2002) ότι παρατηρείται μια στεγανοποίηση των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης σε διάφορες μαθηματικές έννοιες. Με τον όρο "στεγανοποίηση" εννοούμε ότι ο μαθητής εργάζεται σε ένα πεδίο αναπαράστασης χωρίς να είναι σε θέση να επικοινωνεί τις ιδέες του με επιτυχία σε ένα άλλο πεδίο αναπαράστασης. Επομένως, μια άλλη βασική επιδίωξη της διδασκαλίας μιας έννοιας πέρα από την κατανόησή της μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων, θα πρέπει να εστιάζεται στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη με συνέπεια και ακρίβεια, χωρίς αντιφάσεις (Duval, 2002). Ένα σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται συχνά στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι ότι οι μαθητές δεν μπορούν να περάσουν από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (conversion), δεν μπορούν δηλαδή να κινητοποιήσουν πολλά συστήματα συγχρόνως, και κυρίως δεν αναγνωρίζουν την ίδια έννοια μέσα από διαφορετικές της αναπαραστάσεις σε διάφορα σημειωτικά συστήματα (πχ. φυσική γλώσσα - γεωμετρικό σχήμα, αλγεβρικός τύπος - γραφική παράσταση, αριθμητική γραφή - γεωμετρική αναπαράσταση.). Πολλές φορές μάλιστα, αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες και στο να κάνουν μετατροπές μέσα στο ίδιο σημειωτικό σύστημα. Τα συστήματα αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδη και καθοριστικά για τη μάθηση (Cheng, 2000). Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρουσιάζεται η πληροφορία στους μαθητές με ποικίλες μορφές και να διδάσκεται η σχέση και η σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η ικανότητα να προσδιορίζεται η ίδια έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη, είναι κύρια στοιχεία στη μάθηση των Μαθηματικών, διότι επιτρέπουν στους μαθητές να δουν τις πολλαπλές σχέσεις και να κατανοήσουν βαθιά την έννοια (Even, 1998).

### 1.1.4. Συμπέρασμα για το πώς βοηθούν τα συστήματα αναπαράστασης στη Διδακτική των Μαθηματικών

Ωστόσο, ας σημειωθεί ότι το θέμα των αναπαραστάσεων έχει ένα βαθύτερο νόημα στη Διδακτική, καθώς παίζουν καθοριστικό ρόλο στη μάθηση. Η αποστήθιση, και μόνο, ενός ορισμού δεν εγγυάται την κατανόηση της έννοιας. Είναι απαραίτητο να αποδοθεί ένα νόημα στις λέξεις που πλαισιώνουν τον ορισμό της, να βρεθεί, με λίγα λόγια, ο καλύτερος τρόπος με τον οποίο πρέπει να παρουσιαστεί. Οι αναπαραστάσεις, φυσικά, συντελούν σε κάτι τέτοιο. Η κωδικοποίηση που προάγουν ευνοεί την καλύτερη κατανόηση και εκμάθηση των εννοιών, όπως για παράδειγμα, κάνει η φυσική γλώσσα, η φαντασία, οι ευρετικές και οι διαδικασίες που ακολουθούνται κατά την επίλυση προβλημάτων και το πιο σημαντικό ο τρόπος, με τον οποίο αυτές επιδρούν στα Μαθηματικά. Οι αναπαραστάσεις που έχει ο μαθητής για μια έννοια συνδέονται άμεσα με την ικανότητά του στα Μαθηματικά. Όσο πιο πλούσιες είναι αυτές τόσο πιο κατανοητή είναι η έννοια και αντίστροφα. Ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας σημαίνει να ελευθερώσει ο μαθητής τη σκέψη του από το συγκεκριμένο, χωρίς όμως να αποκοπεί και από αυτό που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του αναπαραστασιακού χαρακτήρα του συμβολισμού. Πρέπει να δει ότι ένα τυπικό σύστημα (δηλαδή ένα σύνολο από σύμβολα, ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα κ.λ.π.), πέρα από το αναφορικό του νόημα, μπορεί να λειτουργεί και από μόνο του. Σε αυτή τη δύναμή του οφείλεται η αξία του. Δε θα μπορούσαν να αναπτυχθούν τα Μαθηματικά και η μαθηματική σκέψη, ούτε θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε με ανώτερα θέματα και προβλήματα, έχοντας πάντοτε αναφορικό νόημα στα σύμβολα.

Έχει παρατηρηθεί ότι συχνά οι μαθητές παρουσιάζουν ορισμένες προτιμήσεις για κάποια συγκεκριμένη εξωτερική αναπαράσταση.

Είναι γενική η πεποίθηση, ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις βοηθούν τους μαθητές να συλλάβουν το νόημα των μαθηματικών εννοιών και προωθούν έτσι, μια πολυδιάστατη προσέγγιση στην εξέταση της μάθησης των Μαθηματικών. Στην περίπτωση του μαθηματικού συμβολισμού, αυτό αναδεικνύεται από τον τρόπο που συνδυάζονται μέσω αυτών η έννοια και η διεργασία. Αντιθέτως, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις συμπεριλαμβάνοντας τους συμβολισμούς που χρησιμοποιεί ο καθένας, κυρίως συντάσσουν και προωθούν το νόημα των μαθηματικών εννοιών.

Για να κατανοήσουμε τις δυσκολίες που πολλοί μαθητές / φοιτητές έχουν με την κατανόηση των Μαθηματικών θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη γνωστική λειτουργία που διέπει την ποικιλομορφία των μαθηματικών διαδικασιών. Ποια είναι όμως τα γνωστικά συστήματα που απαιτούνται για την πρόσβαση των μαθηματικών αντικειμένων; Οι διεργασίες της γνώσης και των γνωστικών συστημάτων είναι ορισμένες και ειδικές για μαθηματικές δραστηριότητες. Ξεκινώντας από την πρωταρχική σημασία της σημειωτικής αναπαράστασης για κάθε μαθηματική δραστηριότητα, ταξινομήσαμε μητρώα σημειωτικών αναπαραστάσεων που δραστηριοποιούνται σε μαθηματικές διαδικασίες. Έτσι μπορούμε να δώσουμε δυο τύπους μετασχηματισμού της σημειωτικής αναπαράστασης: **Επεξεργασία** και

**Μετατροπή**. Αυτοί οι δυο τύποι αντιστοιχούν σε εντελώς διαφορετικές γνωστικές διαδικασίες. Πρόκειται για δυο ξεχωριστές πηγές της έλλειψης κατανόησης στην εκμάθηση των Μαθηματικών. Εάν μπορέσουμε να θεραπεύσουμε την έλλειψη κατανόησης σίγουρα θα έχουμε καταφέρει ένα σημαντικό παράγοντα στη μάθηση των Μαθηματικών.

Στα θεωρητικά εργαλεία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Ρ.Μ.Ε.) ανήκουν η έννοια της μαθηματικοποίησης και το εμπλουτισμένο πλαίσιο. Η μαθηματικοποίηση αποτελεί μία δραστηριότητα οργάνωσης και δόμησης, στην οποία ο μαθητής χρησιμοποιώντας τη γνώση που έχει αποκτήσει και τις ικανότητες που διαθέτει, ανακαλύπτει άγνωστες για αυτόν μέχρι τώρα σχέσεις, συνδέσεις και δομές. Η μαθηματικοποίηση διαχωρίζεται στην οριζόντια και κατακόρυφη.

**Οριζόντια:** Το πραγματικό πρόβλημα διατυπώνεται σε ένα πλαίσιο, μοντελοποιείται και ο μαθητής μεταφέρεται από τον κόσμο των αισθήσεων στον κόσμο των συμβόλων.

**Κατακόρυφη:** Ο μαθητής εργάζεται μέσα στο μαθηματικό σύστημα. Έχει μετασχηματίσει το πραγματικό πρόβλημα σε μαθηματικό και το επεξεργάζεται με σύμβολα, σχέσεις και κανόνες.

Στην πορεία της μαθηματικοποίησης ο μαθητής μπορεί να δυσκολευτεί να βρει τη μαθηματική πλευρά του προβλήματος ή μπορεί να δυσκολευτεί να εφαρμόσει τους κανόνες που έμαθε σε κάποιο άλλο πρόβλημα. Όταν όμως αντιμετωπίσει το πρόβλημα και το κατανοήσει, τότε θεωρούμε ότι «έχει ανέβει» επίπεδο. Τα χαμηλότερα επίπεδα μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση ενός επόμενου και ίσως, πιο δύσκολου προβλήματος. Η παραπάνω ιδέα αποτελεί τον κατακόρυφο σχεδιασμό της μαθηματικοποίησης. Βασίζεται στην άποψη του Bruner για τη ψυχολογία της μάθησης, η οποία αποδίδεται ως εξής: Οποιοδήποτε θέμα μπορεί να διδαχθεί επιτυχώς, σε κάθε βαθμίδα και σε οποιοδήποτε στάδιο ανάπτυξής του, με κατάλληλη προσαρμογή. Υπάρχουν πολλοί τρόποι προσαρμογής της διδασκαλίας, ένας από αυτούς είναι η χρήση κατάλληλων συστημάτων αναπαράστασης.

## 1.2 Τα Μαθηματικά στο Επίπεδο της Φυσικής Γλώσσας

### 1.2.1. Η γλώσσα ως όργανο επικοινωνίας

Η γλώσσα είναι ένα πολιτισμικό εργαλείο, ένα ιδιαίτερο όργανο επικοινωνίας, το οποίο συσχετίζεται με τη σκέψη. Οι περισσότεροι άνθρωποι και πολλοί σύγχρονοι επιστήμονες υποστηρίζουν ότι προϋπόθεση για την σκέψη είναι η δημιουργία του γλωσσικού οργάνου και των λέξεων (Παπαδάτος, 2011). Άρα η γλωσσική ανάπτυξη είναι καθοριστική στην εξέλιξη της Μαθηματικής Σκέψης και Λογικής.

Η ερμηνεία μιας ανθρώπινης γλώσσας δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η απόδοση νοήματος στις λέξεις του συντακτικού της και μέσω αυτού, ο χαρακτηρισμός των προτάσεων σαν αληθών ή ψευδών (Αναπολιτάνος, 1985). Για τη φυσική γλώσσα, οι γλωσσολόγοι διακρίνουν τέσσερις επιμέρους τομείς της γλώσσας: το φωνολογικό, το συντακτικό, το σημασιολογικό και τον πραγματολογικό (Βοσνιάδου, 2001). Σύμφωνα με τον Chomsky ο συντακτικός τομέας της γλώσσας είναι και ο πιο σημαντικός αφού οι κανόνες που εμπεριέχει είναι κύριοι υπεύθυνοι, τόσο για το σημασιολογικό νόημα, όσο και για το φωνητικό σύμβολο (Βοσνιάδου, 2001).

Στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι πρωτίστως οι μαθητές να μάθουν μαθηματικά. Ωστόσο η μάθηση διαμεσολαβείται μέσω της γλώσσας. Πράγματι, κάθε μέρος της μάθησης εξαρτάται και στηρίζεται στη γλώσσα από μία απορία έως την εξήγηση μιας έννοιας από τον καθηγητή και τέλος την καταγραφή της. Επιπροσθέτως στη διαδρομή από την απορία έως την επίλυσή της, υπάρχει μια εσωτερική διαδικασία από τον μαθητή, υποθέσεις, σκέψεις, κατανόηση, που και αυτή πραγματοποιείται μέσω της γλώσσας.

Με τη φυσική γλώσσα μπορούμε να περιγράψουμε καταστάσεις, διαδικασίες, να δώσουμε κριτήρια και πιο γενικά να περιγράψουμε αυτό που κάνουμε. Οι καθηγητές χρησιμοποιούν τη γλώσσα για να εξηγήσουν διαδικασίες και να αποσαφηνίσουν μαθηματικές έννοιες. Σύμφωνα με τους (Bresser, Melanese & Sphar, 2008), οι μαθητές μπορούν να εμβαθύνουν την κατανόησή τους στα μαθηματικά, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα ώστε να επικοινωνήσουν, να εκφράσουν τις ιδέες τους,

να σταθεροποιήσουν τη γνώση τους. Όταν μιλούν οι μαθητές για αυτά που σκέφτονται, βελτιώνουν την ικανότητά τους να αιτιολογούν.
Σύμφωνα με (Morgan, 2006) τα τελευταία χρόνια, η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών έχει καταβάλει αυξημένη προσοχή στο κοινωνικό και γλωσσικό πλαίσιο και τη σημασία της γλώσσας ως το κύριο μέσο με το οποίο η διδασκαλία και η μάθηση λαμβάνει χώρα.

### 1.2.2. Η γλώσσα και τα Μαθηματικά ως πηγή σημειωτικών συστημάτων

Η ιστορία δείχνει ότι η εξέλιξη των Μαθηματικών συνδέεται με την εξέλιξη διαφόρων σημειωτικών συστημάτων που είχαν ως απαρχή τα δυο βασικά αντιληπτικά συστήματα:

Γλώσσα και Εικόνα (Μιλάω και Βλέπω). Για παράδειγμα: Από τη γραπτή γλώσσα, προέκυψαν τα συμβολικά συστήματα, από αυτά η αλγεβρική γραφή και από αυτή, από τον 19ο αιώνα και μετά, οι τυπικές γλώσσες.
Από την εικόνα, προέκυψαν τα γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση εργαλείων, στη συνέχεια τα σχήματα σε προοπτική, μετά οι γραφικές παραστάσεις με στόχο να μεταφραστούν οι γραμμές σε εξισώσεις.

Η «στροφή προς τη γλώσσα» έχει φέρει μαζί της αυξημένη προσοχή στη φύση της γλώσσας, σαν ένα από τα σημειωτικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική δραστηριότητα και τους ρόλους που αυτά μπορούν να παίξουν στη διδασκαλία και στη μάθηση των μαθηματικών, καθώς αντλούνται πολλά στοιχεία από τα συστήματα σημειωτικής και ιδιαίτερα από τις γλωσσικές θεωρίες και την εξέλιξή τους. Όλη αυτή η διαδικασία βρίσκει μεγάλη ανταπόκριση στις ανάγκες των ερευνητών στον τομέα αυτό (βλ. Anderson κ.ά., 2003), (Duval, 2000), (Sfard, 2000), και άρθρα σε αυτό το ειδικό θέμα.

Με βάση την (Chapman, 1993) η γλώσσα και μαθηματικά μπορούν και τα δύο να νοηθούν ως σημειωτικά συστήματα: συστήματα εννοιών και συστήματα για την κατασκευή των νοημάτων. Είναι επίσης δύο συστήματα πόρων για τη δημιουργία των νοημάτων. Οι άνθρωποι χρησιμοποιούν συνεχώς τη γλώσσα για να κατανοήσουν τις εμπειρίες τους. Τα μαθηματικά είναι επίσης ένα σύστημα πόρος. Είναι ένας πόρος για να δημιουργεί τα νοήματα των άλλων σχολικών θεματικών περιοχών, όπως των επιστημών και των κοινωνικών σπουδών. Η γλώσσα χρησιμοποιείται για την κατασκευή και τη διανομή μαθηματικών νοημάτων. Τα σχολικά μαθηματικά αποτελούνται από αυτές τις δυνατότητες νοήματος. Οι θεματικοί σχηματισμοί σημειωτικών πόρων συστημάτων πραγματοποιούνται συχνότερα στη γλώσσα.  Στα σχολεία η γλώσσα χρησιμοποιείται ως εργαλείο με το οποίο πρόκειται να κατασκευαστεί το «περιεχόμενο» των διαφόρων θεμάτων. Η φυσική γλώσσα αποτελεί το εργαλείο αυτό που χρησιμοποιώντας το σωστά οι διδάσκοντες όλων των βαθμίδων (Πρωτοβάθμιας – Δευτεροβάθμιας – Τριτοβάθμιας) δίνουν το θεωρητικό υπόβαθρο της κάθε μαθηματικής έννοιας.

### 1.2.3. Η «φυσική γλώσσα» στο διπλό ρόλο του σημαίνοντος και του σημαινόμενου

Η κοινωνική σημειωτική βλέπει το «νόημα» ως μια αεικίνητη διαδικασία, που δημιουργείται μέσα από την κοινωνική αλληλεπίδραση. Η κεντρική έννοια της κοινωνικής σημειωτικής είναι ότι όλα τα νοήματα κατασκευάζονται. Δεν υπάρχουν ως αντικείμενα ή συγκεκριμένα γεγονότα, είναι κατασκευασμένα μέσω των σημειολογικών συστημάτων. Ένα σημείο είναι κάποιο φυσικό πράγμα που αντιπροσωπεύει, ή αναφέρεται σε κάτι άλλο. Μια λέξη, είτε μιλιέται είτε γράφεται, είναι ένα γλωσσικό σύμβολο. Έχει μια φυσική μορφή, είτε τον προφορικό ήχο ή τα γράμματα, και σχετίζεται με ορισμένες νοητικές έννοιες. Η φυσική μορφή του σημείου έχει ονομαστεί ως σημαίνον, και η έννοια στην οποία αναφέρεται, ως σημαινόμενο (de Saussure, 1974, αναφορά σε Chapman, 1993). Η σημασία, ή η παραγωγή νοήματος, είναι «η σχέση ενός σημείου ή ενός συστήματος σημείων με την αναφορική πραγματικότητα» (O'Sullivan κ.ά., 1983, αναφορά σε Chapman, 1993). Αυτό που απασχολεί την κοινωνική σημειωτική είναι η φύση της σχέσης του σημαίνοντος και του σημαινόμενου, δηλαδή οι πρακτικές αυτές, οι οποίες είναι οι διαδικασίες δημιουργίας νοήματος. Η μαθηματική γλώσσα, όπως και κάθε φυσική γλώσσα, παίζει τον διπλό ρόλο του σημαίνοντος και του σημαινόμενου. Υπάρχει όμως μια διαφορά στη γλώσσα των Μαθηματικών. Υπάρχουν σύμβολα και ποικίλες λέξεις της φυσικής γλώσσας με εντελώς διαφορετική σημασία. Λέξεις στα μαθηματικά που έχουν διαφορετικές έννοιες μέσα στην καθημερινή γλώσσα προκαλούν, συχνά, σύγχυση τους μαθητές. Όπου οι λέξεις έχουν μαθηματικό και μη μαθηματικό νόημα οι μαθητές πρέπει να ξέρουν και τα δύο και να είναι σε θέση να ερμηνεύσουν την έννοια σωστά στο κατάλληλο πλαίσιο. Στα μαθηματικά η κάθε έννοια είναι αρκετά διαφορετική. Πολλές από τις λέξεις που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά έχουν διαφορετική σημασία στον «πραγματικό κόσμο» και αρκετές έχουν περισσότερες από μια σημασία. Για παράδειγμα, η έννοια του «ορίου» στην καθημερινή επικοινωνία χρησιμοποιείται ποικιλοτρόπως. Στα Μαθηματικά δίνεται ένας **φορμαλιστικός** ορισμός με εντελώς διαφορετικό περιεχόμενο από αυτό που έχει στη φυσική γλώσσα. (**Φορμαλισμός**: Θεωρία κατά την οποία δεν υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα. Απλά τα μαθηματικά αποτελούνται από αξιώματα, ορισμούς και θεωρήματα, δηλαδή από τύπους. Από μια ακραία άποψη, υπάρχουν κανόνες με τους οποίους φτάνουμε από τον ένα τύπο στον άλλο, αλλά οι τύποι δεν αφορούν τίποτε. Είναι απλά σειρές συμβόλων. ) Ερμηνεία όμως, ενός συμβόλου σημαίνει να το συνδέσουμε με κάποια έννοια ή μία νοητική απεικόνιση, για να μπορεί να αφομοιωθεί από την ανθρώπινη συνείδηση. Απαιτεί προσοχή, διότι η σύνδεση αυτή έχει σχέση και με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, η δύναμη του συμβόλου είναι τόσο μεγάλη, που μπορεί ο μαθητής να ταυτίσει την έννοια με το σύμβολο, π.χ. την έννοια της συνάρτησης με το σύμβολο f(x) ή της μεταβλητής με το x.

### 1.2.4. Οι δυσκολίες κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας

Το μαθηματικό λεξιλόγιο και τα μαθηματικά σύμβολα, εξαιτίας της πολυσημίας, όπως επίσης και το μαθηματικό κείμενο είναι οι πλευρές της μαθηματικής γλώσσας που αναφέρονται συχνότερα, ως πιθανές αιτίες δυσκολιών. Ο (Maier, 1993) αναφέρει: « *κατά τη γνώμη μου είναι επικίνδυνο λάθος να υποθέσουμε ότι λέξεις από την καθημερινή γλώσσα των μαθητών εξηγούν τις έννοιες ή μπορούν να κάνουν τη δημιουργία αντιλήψεων για αυτές τις έννοιες ευκολότερη. Αντίθετα, ο κίνδυνος από παρεμβολές αυξάνει σοβαρά … πολλές από τις λέξεις της καθημερινής γλώσσας στερούνται μιας απαραίτητης γενικότητας… η δική μου λύση στο πρόβλημα είναι να χρησιμοποιούμε τεχνικούς όρους όπως ακριβώς έχουν καθιερωθεί σαφώς από την* *αρχή, στα μαθηματικά αλλά να περιορίσουμε το πλήθος τους στο ελάχιστο δυνατό. Λέξεις που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνιμα και που δεν είναι αναγκαίες για την απλούστευση της διδασκαλίας και των εξηγήσεων του διδάσκοντος και αντίστοιχα των απαντήσεων και περιγραφών των μαθητών δεν πρέπει να εισάγονται στην αίθουσα διδασκαλίας. Δεν πρέπει να αντικαθίστανται από άλλες λέξεις αλλά μάλλον να παραφράζονται ή να σκιαγραφούνται λεπτομερώς στην καθημερινή γλώσσα. Η τεχνική ορολογία δεν πρέπει να θεωρείται ως περιεχόμενο της μάθησης, ως αυτοσκοπός, στη μαθηματική παιδεία. Πρέπει να παραμείνει ένα μέσο για το σκοπό που είναι να εκφράζουμε ιδέες και να παρουσιάζουμε πληροφορίες. »*

Σύμφωνα με (Pimm, 1994) στη φυσική γλώσσα υπάρχουν συμβατικά δύο βασικοί δίαυλοι επικοινωνίας, η ομιλία και η γραφή. Μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν όλοι οι καθηγητές των μαθηματικών είναι το πώς θα διευκολυνθεί η μετακίνηση των μαθητών τους από την κυρίως άτυπη ομιλούμενη γλώσσα, με την οποία είναι εξοικειωμένοι, στην επίσημη γραπτή γλώσσα, η οποία θεωρείται συχνά ως το σήμα κατατεθέν της μαθηματικής δραστηριότητας. Για πολλούς μαθητές, τα μαθηματικά είναι σαν μία ξένη γλώσσα. Τα σύμβολα και οι εκφράσεις παρέχουν ένα τρομερό εμπόδιο στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. *(COAG, 2008).* Ο (O'Halloran, 2000) προτείνει: *οι εκπαιδευτικοί να χρησιμοποιούν προφορική γλώσσα για να αποσυμπιέσουν και να εξηγήσουν τα νοήματα στο συμβολισμό των μαθηματικών ως ένα τρόπο χρησιμοποιώντας την πολυ-σημειωτική φύση των μαθηματικών για να βοηθήσουν τους μαθητές να αντλήσουν από τους διαφορετικούς τρόπους κατασκευής νοήματος για την κατανόηση. Ρητά εστιάζοντας την προσοχή των μαθητών σε γλωσσικά χαρακτηριστικά μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές να εξερευνήσουν και να αποσαφηνίσουν τις τεχνικές σημασίες.* Σύμφωνα με (Maier, 1993) η γλώσσα που έχουν συνηθίσει οι μαθητές να επικοινωνούν και που τους επιτρέπει να κατανοούν ιδέες και πληροφορίες από άλλους ανθρώπους είναι η καθημερινή γλώσσα. Εντούτοις, η γλώσσα που χρησιμοποιεί ο καθηγητής μέσα στην αίθουσα είναι ένα κράμα γλώσσας μαθηματικών (όπως αυτή ορίζεται από την Μαθηματική κοινότητα) και καθημερινής γλώσσας. Μερικά από τα χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιεί ο καθηγητής κάνουν την κατανόηση πιο δύσκολη για τους μαθητές. Ο Maier αναφέρει μερικά από αυτά τα χαρακτηριστικά σαν πιο ενδεικτικά ως προς τις δυσκολίες τις οποίες επιφέρουν: 1) *άγνωστο λεξιλόγιο*: τεχνικοί όροι που δεν υπάρχουν στην καθημερινή γλώσσα των μαθητών ή υπάρχουν με διαφορετική σημασία, 2) *γλωσσικές συμβάσεις που αλλάζουν*: αλλαγή των γλωσσικών συμβάσεων υπό την επίδραση των κανόνων χρήσης της τεχνικής γλώσσας, 3) *ανάμειξη των σημασιών*: η απόδοση από τους μαθητές νέων σημασιών σε όρους που στο μυαλό τους, έχουν ήδη το χαρακτήρα καλά στερεωμένων ιδεών από την καθημερινή επικοινωνία.

Ένας άλλος βασικός παράγοντας είναι ο τρόπος που επικοινωνούν οι καθηγητές τα μαθηματικά, κάτι που φαίνεται να επηρεάζεται από τα σχολικά τους χρόνια. « *Ο τρόπος που οι καθηγητές εξηγούν μαθηματικά εξαρτάται, σε μεγάλο βαθμό, από την εννοιολογική κατανόηση, που αποκτούν από τα μαθήματα στο Πανεπιστήμιο. Επιπλέον, διδάσκουν συχνά όπως εκείνοι διδάχθηκαν, μοντελοποιώντας τους εαυτούς τους, τόσο με τους καθηγητές του Πανεπιστημίου όσο και του σχολείου*» (Selden, 1997, σελίδα 1, αναφορά σε Boulet, 2007). Μία άλλη σημαντική παράμετρος είναι η δυσχέρεια από την μεριά των μαθητών να κατασκευάσουν πλούσιες μαθηματικές ιδέες κάτι που αποτελεί για τον Maier θεμελιώδη συνθήκη για την κατανόηση της διδασκαλίας. Αυτό οφείλεται, σύμφωνα με τον Maier α) στο *ελάχιστο ενδιαφέρον για τη σημασία*, β) στους *στενούς δεσμούς με τα οπτικά βοηθήματα*, γ) στις *πολύ στενές (ή πολύ πλατιές) αντιλήψεις*, δ) στην *πα ραβίαση της σαφήνειας και της συνοχής*.

Ο (Vygotsky, 1962) περιγράφει τις δυσκολίες που προκύπτουν όταν κάποιος προσπαθεί να μεταδώσει νόημα μέσω της γλώσσας και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι «απόλυτη ορθότητα επιτυγχάνεται μόνο πέρα από τη φυσική γλώσσα, στα μαθηματικά». Οι κύριες δυσκολίες που συναντώνται στα μαθηματικά έχουν σχέση με το λεξιλόγιο όπως επισημαίνει και ο Maier, τη σύνταξη, τη φυσική γλώσσα, λάθος ανάγνωση και παρερμηνείες σε λεκτικά προβλήματα και την επικράτηση της δομής πάνω από το περιεχόμενο. Ως προς το λεξιλόγιο τα Μαθηματικά χρησιμοποιούν έναν αριθμό τεχνικών όρων που συνήθως δεν συναντώνται εκτός σχολικής αίθουσας. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην εξασκούνται με αυτές τις λέξεις εκτός σχολείου και να μη βλέπουν τη χρήση τους σε άλλα πλαίσια. Υπάρχουν λέξεις που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα με διαφορετικό ή πιο συγκεκριμένο νόημα (π.χ. διαφορά του

12 από το 8, η απάντηση προφανώς δεν είναι ότι το ένα έχει ένα ψηφίο και το άλλο έχει δύο ψηφία). Ως προς το συντακτικό προκύπτουν πολλά προβλήματα από τη χρήση των προθέσεων. Επίσης οι συντακτικές πολυπλοκότητες δημιουργούν πρόβλημα στην κατανόηση. Συμβαίνουν παρερμηνείες σε λεκτικά προβλήματα, Τα λεκτικά προβλήματα, δηλαδή τα προβλήματα με εκφωνήσεις και διατυπώσεις και όχι οι καθαρά μαθηματικές πράξεις αποτελούν την καρδιά των επιστημονικών αντικειμένων. Είναι κατανοητό ότι η ικανότητα της ανάγνωσης είναι σημαντική στην αποκωδικοποίηση της εκφώνησης ενός μαθηματικού προβλήματος, έτσι ώστε να μπορέσουν οι μαθητές να κατανοήσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα. Κατόπιν και αφού στηριχθούν στις μαθηματικές τους γνώσεις, θα χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα για να προχωρήσουν στη λύση, δηλαδή να οδηγηθούν στα ζητούμενα. Τότε οφείλουν να διατυπώσουν την μαθηματική απάντηση. Άρα από άποψη γλώσσας, έχουμε αρχικά ανάγνωση και αποκωδικοποίηση της εκφώνησης και στη συνέχεια διατύπωση λύσης. Επίσης πολλές φορές συμβαίνει το ζητούμενο ενός μαθηματικού προβλήματος να μπορεί να απαντηθεί από την καθημερινότητα χωρίς τη χρήση μαθηματικών, δηλαδή παρατηρείται επικράτηση της δομής πάνω από το περιεχόμενο. Η Morgan γράφει: *ήμουν δυσαρεστημένη με την ποιότητα των γραπτών εργασιών που παρήγαγαν οι μαθητές μου. Ήταν συχνή η περίπτωση που η ποιότητα των δραστηριοτήτων που είχαν λάβει χώρα στην τάξη και οι παρατηρήσεις και ο συλλογισμός που ένας μαθητής είχε εμφανίσει σε μένα στη συζήτηση δεν εκπροσωπούνταν στη γραπτή έκθεση ή εκφράστηκαν τόσο κακώς που ήταν δύσκολη η κατανόησή τους. (1988, σελ.1). Η αρχική ανησυχία μου στη μελέτη της γλώσσας των μαθηματικών κειμένων προέκυψε από τη συνειδητοποίηση ότι οι μαθητές εμφάνισαν δυσκολία να παράγουν γραπτά κείμενα τα οποία να αποδέχονται οι καθηγητές των μαθηματικών και που θα κρίνουν τη μαθηματική πραγματοποίησή τους με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ψάχνω, λοιπόν, αν η περιγραφή των ιδιαίτερων μαθηματικών ειδών που κατέστη δυνατή από τη χρήση αυτών των γλωσσικών εργαλείων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές και τους καθηγητές ώστε να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση.* (αναφορά σε Pimm, 2004, σελ.9)

Μελέτες σχετικά με το ρόλο της γλώσσας στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών κυρίως στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση επικεντρώνονται κυρίως στους μαθηματικούς διαλόγους. Ασχολούνται με την ανάπτυξη μεθοδολογικών πλαισίων για την ανάλυση των μαθηματικών διαλόγων στην τάξη (Cobb κ.ά., 1997), (Krussel, Springer & Edwards, 2004), (Ryve, 2006), (Sfard, 2001) ενώ άλλοι ασχολούνται με την ανάπτυξη προσεγγίσεων που αποσκοπούν στη σωστή ανάγνωση και γραφή των μαθηματικών (Barwell, Leung, Morgan & Street, 2002), (Esty, 1992), (Adams, 2003), (Usiskin, 1996), (αναφορά σε Boulet, 2007). Οι ερευνητές στην διδακτική των μαθηματικών συμφωνούν ότι η επικοινωνία είναι απαραίτητη για την εκμάθηση των μαθηματικών (Ryve, 2004). Συγκεκριμένα, «*από τη σκοπιά της μάθησης των μαθηματικών, από τη διατύπωση των αρχών, τις έννοιες και τη λογική πίσω από τα βήματα της λύσης ενός συγκεκριμένου προβλήματος, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ενισχύσουν και να εμβαθύνουν την κατανόηση τους σε υψηλότερου επιπέδου δομών γνώσης στο περιεχόμενο των μαθηματικών*" (Huang, Normandia & Greer, 2005, σελ.45) (αναφορά σε Boulet, 2007). Ωστόσο όπως επισημαίνει ο Ryve (2004), το θέμα δεν είναι αν τα μαθηματικά μαθαίνονται ή όχι μέσα από τη επικοινωνία, αλλά με τη δημιουργία των μέσων που θα καλλιεργήσουν μαθηματικά παραγωγικές ομιλίες. Ενώ οι ερευνητές καταπιάνονται με το ζήτημα του τι συνιστά παραγωγική ομιλία, είναι σημαντικό να αρχίσουμε να υποστηρίζουμε τους εκπαιδευτικούς στην συνειδητοποίηση των διαφόρων μορφών της μαθηματικής επικοινωνίας και πώς αυτές συμβάλλουν στη μάθηση των μαθητών τους (Barwell κ.ά., 2005, σελ. 145, όπως αναφέρεται σε Boulet, 2007). Οι (Rubenstein and Thompson, 2002) σύμφωνα με (Boulet, 2007), υπογραμμίζουν ότι: «*για να είμαστε πιο ενήμεροι, και ευαίσθητοι απέναντι σε θέματα απόκτησης της μαθηματικής γλώσσας και για να είμαστε πιο δημιουργικοί και επίμονοι στην εύρεση τρόπων που να υποστηρίξουν την μάθηση, οι καθηγητές πρέπει πρώτα να καταλάβουμε τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας*» (σελ. 107). Κατά συνέπεια, αν και ο στόχος ενός αλγορίθμου είναι να αυτοματοποιηθεί η διαδικασία, ώστε να μην απαιτείται σκέψη, οι μαθητές πρέπει πρώτα να μάθουν πώς αναπτύσσονται οι αλγόριθμοι και πώς λειτουργούν, πριν συμμετάσχουν στην μαθηματική εξερεύνηση. Αυτό σημαίνει ότι μαζί με την εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν σαφή γλώσσα που να αποκαλύπτει το σκεπτικό πίσω από τις μαθηματικές διαδικασίες. Επιπλέον, απαιτείται να γίνεται παρουσίαση και περιγραφή των συμβολικών αναπαραστάσεων μέσω της φυσικής γλώσσας. Επίσης η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων θα έπρεπε να είναι παρόμοια με την ανάγνωση συνήθων κειμένων, δεδομένου ότι ο αναγνώστης πρέπει να υπερβεί τον κώδικα και να κατανοήσει την έννοια του κειμένου. Όταν η γλώσσα περιγράφει σύμβολα, ο καθηγητής πρέπει να διδάξει κανόνες για να συντονίσει τη σύνδεση από τον ένα συμβολισμό σε άλλο ή από μια διαδικασία σε άλλη ιδιαίτερα στις πρώτες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Όταν οι μαθητές δεν μπορούν να καταλάβουν τη γλώσσα των Μαθηματικών, λόγω γλωσσικών εμποδίων, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να χρησιμοποιούν ποικίλες στρατηγικές για να βοηθήσουν στην αποκατάσταση των δυσκολιών και για να ενισχύσουν τη μάθησή τους, είτε αφιερώνοντας περισσότερο χρόνο είτε εξηγώντας με περισσότερες λεπτομέρειες το λεξιλόγιο είτε προχωρώντας σε λεπτομερέστερη συντακτική ανάλυση. Για τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση η αποτελεσματική εφαρμογή πρακτικών που βασίζονται στη μεταρρύθμιση απαιτεί έναν εκπαιδευτικό που να έχει μια βαθιά κατανόηση των μαθηματικών, να γνωρίζει πολύ καλά τις μαθηματικές έννοιες που οι μαθητές έχουν ανάγκη, να γνωρίζει το πλαίσιο του δικτύου εννοιών, να ξέρει τι πρέπει να είναι γνωστό από πριν, να γνωρίζει επίσης τι πρέπει να προστεθεί αργότερα για να σχηματίσουν οι μαθητές μια σταθερή εννοιολογική δομή" (Skemp, 1987, όπως αναφέρεται σε Kabasakalian, 2007). Για να ενθαρρύνουν οι καθηγητές τον διάλογο πρέπει να δείξουν στους μαθητές ότι δίνουν περισσότερη σημασία στην κατανόηση των εννοιών και όχι στις σωστές απαντήσεις (Truxaw & DeFranco, 2007, όπως αναφέρεται σε Wachira, Pourdavood & Skitzki, 2013).

### 1.2.5. Η σωστή εκπαίδευση του λεξιλογίου, εννοιολογίου, συντακτικών κανόνων και γραμματικών κανόνων στα Μαθηματικά

Αξιολογώντας όλα τα παραπάνω, βλέπουμε ότι δημιουργείται η αναγκαιότητα της ύπαρξης λεξιλογίου - εννοιολογίου στα Μαθηματικά, όπου θα συνδέονται και ταυτόχρονα θα διαχωρίζονται οι εκφράσεις που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Είναι αναγκαίο να σημειώσουμε, ότι σαν τις υπόλοιπες γλώσσες τα Μαθηματικά έχουν το δικό τους λεξιλόγιο, την γραμματική, το συντακτικό, τα συνώνυμα, τους συνδέσμους, τις συντομογραφίες και την δημιουργία προτάσεων. Είναι μια ειδική γλώσσα (όπως για παράδειγμα η γλώσσα της μουσικής) με τις δικές της αρχές και σύμβολα. Τα Μαθηματικά βέβαια περιλαμβάνουν γνώσεις, ικανότητες, μεθόδους και θεωρήματα. Αλλά αυτή η επιστήμη έχει ανάγκη και κατασκευάζει μια σημαντική σύνδεση ανάμεσα στο τι λέγεται και στο πώς λέγεται.

Οι (Oginni και Owolabi, 2013) υποστήριξαν ότι η γλώσσα των μαθηματικών είναι η γνώση των σημάτων, των συμβόλων, των συντομογραφιών, των αξιωμάτων και των λημμάτων, όπως επίσης των μεθόδων, των τύπων και των μονάδων που είναι απαραίτητες στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το λεξιλόγιο – εννοιολόγιο, αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής εκπαίδευσης στο σύγχρονο σχολείο. Είναι πολύ σημαντικό στην προσφερόμενη βοήθεια του εννοιολογίου να δώσουμε κύρια την ομοιότητα με την προηγούμενη κατακτημένη γνώση. Στο προτεινόμενο λεξιλόγιο – εννοιολόγιο επιδιώκεται να συνδέονται και ταυτόχρονα να διαχωρίζονται οι εκφράσεις που αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες μαθηματικές σχέσεις, εκφράσεις, ποσότητες. Η αντιστοιχία της λέξης στην μαθηματική ποσότητα ή το σύμβολο και η κατανόηση της συγκεκριμένης πραξιακής μαθηματικής έννοιας αποτελεί κεντρικό ζήτημα στην σύλληψη και την εμπέδωση του θέματος. Το μητρώο των σχολικών μαθηματικών έχει ένα εξαιρετικά εξειδικευμένο λεξιλόγιο: οι λέξεις ιδιοποιούνται και επαναπροσδιορίζονται από την καθημερινή γλώσσα. Η επανερμηνεία των υπαρχουσών λέξεων είναι ένα γνώρισμα των μαθηματικών γενικά. Λέξεις οι οποίες έχουν ένα πλήθος από μη-μαθηματικές ερμηνείες, παίρνουν συγκεκριμένες ιδιότητες στα μαθηματικά. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα χρήσης μαθηματικών από καθημερινές λέξεις όπως πλευρά, όριο, σύνολο, ακέραιος, ακολουθία, κ.λ.π.

Το μαθηματικό μητρώο, περιλαμβάνει σύμβολα, εικόνες, λέξεις και αριθμούς και σε σχέση με τη φυσική γλώσσα είναι πιο επίσημο. Κάποιοι όροι συναντώνται αποκλειστικά στα μαθηματικά, άλλοι δανείζονται από την καθημερινή γλώσσα και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται με διαφορετικό νόημα. Χρησιμοποιείται με συγκεκριμένο τρόπο και οι μαθητές καλούνται σε μία συνεχή και ενεργή διαπραγμάτευση ανάμεσα στο μαθηματικό νόημα μιας λέξης και το καθημερινό νόημά της. Έτσι εμπλουτίζεται το μαθηματικό λεξιλόγιο και πραγματοποιείται μάθηση της σύνταξης των μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει σταδιακή αλλά σαφώς καθορισμένη εξέλιξη από τη φυσική γλώσσα στην επίσημη γλώσσα των μαθηματικών. Τις περισσότερες φορές η αντικατάσταση καθημερινών εκφράσεων από συγκεκριμένη μαθηματική ορολογία γίνεται ομαλά χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα από την πλειονότητα των μαθητών. Η ομιλούμενη γλώσσα είναι σε μεγάλο βαθμό υπεύθυνη για προβλήματα στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Στην πραγματικότητα, «*πάνω από όλα, οι καθηγητές πρέπει να έχουν επίγνωση της γλώσσας που χρησιμοποιούν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών και ότι το προτεινόμενο λεξιλόγιο... θα πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή*» (Raiker's, 2002) σελίδα 59, αναφορά σε Boulet, 2007). Σύμφωνα με (Pisa, 2007): *Αν θεωρήσουμε ότι τα Μαθηματικά είναι ένας κώδικας, όπως ακριβώς και η γλώσσα, τότε είναι απαραίτητο οι μαθητές να μάθουν τα βασικά συστατικά της γλώσσας των Μαθηματικών. Αυτά τα συστατικά συμπεριλαμβάνουν τις έννοιες και τα σύμβολα των Μαθηματικών, τους αλγόριθμους και τις αποδεικτικές διαδικασίες που συνήθως διδάσκονται στα σχολεία. Επί πλέον οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν πώς αυτά τα συστατικά είναι δομημένα και πώς χρησιμοποιούνται. Όμως, ενδέχεται κάποιος να γνωρίζει αρκετά για τα συστατικά των Μαθηματικών, αλλά να αγνοεί τη δομή τους και τον τρόπο χρησιμοποίησής τους για τη λύση προβλημάτων.* (σελ. 184) Το μητρώο της τάξης των μαθηματικών περιλαμβάνει μια σειρά από διάφορα μητρώα που δραστηριοποιούνται σε διαφορετικά πλαίσια κατάστασης. Είναι σαφές ότι υπάρχει μητρώο «τυπικών» ή «τεχνικών» μαθηματικών. Υπάρχει επίσης το μητρώο της διδασκαλίας - τα διαφορετικά είδη της γλώσσας που χρησιμοποιούνται από το διδάσκοντα στις διάφορες κοινωνικές εκδηλώσεις των μαθημάτων. Για παράδειγμα, η γλώσσα που χρησιμοποιείται από το διδάσκοντα σε μία συζήτηση με όλη την τάξη ενδέχεται να διαφέρει από εκείνη που χρησιμοποιείται σε έναν διάλογο με ένα μαθητή, ή από ένα μονόλογο εισαγωγής μιας νέας έννοιας. Αυτά τα διάφορα είδη της γλώσσας στο μητρώο των σχολικών μαθηματικών θα είναι πιο μαθηματική ή λιγότερο μαθηματική, ανάλογα με τη φύση της δραστηριότητας. (Chapman, 1993).

Συμπερασματικά, το μαθηματικό μητρώο εάν δεν γίνει σαφές στους μαθητές μπορεί όντως να ακούγεται, να γίνεται αισθητό και να μοιάζει τόσο πολύ σαν μία ξένη γλώσσα. (Kotsopoulos D., 2007). Για να χειριστούν και να ελέγξουν το μητρώο των

μαθηματικών, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν καλά τα πολύπλοκα συστήματα των εννοιολογικών σχέσεων και τους «τρόπους σκέψης» μέσα στο πλαίσιο της καθημερινής χρήσης.
Στην τάξη των μαθηματικών, υπάρχει μια σιωπηρή απαίτηση να χρησιμοποιείται η γλώσσα με συγκεκριμένους τρόπους. Οι καθηγητές εισαγάγουν και μοντελοποιούν «μαθηματικές» λέξεις και δομές της γλώσσας που είναι προνομιούχες έναντι άλλων μορφών της γλώσσας. Η μάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει την εκμάθηση του μητρώου.

Περιγράφοντας το μητρώο στην τάξη των φυσικών επιστημών, ο Lemke αναφέρει: *Η αποτελεσματική γλώσσα της τάξης είναι η κοινή γλώσσα των μαθητών και των εκπαιδευτικών, ένα συνεχώς μεταβαλλόμενο υβρίδιο της καθομιλουμένης, των συνήθων τρόπων ομιλίας μας, με τα μητρώα που οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιούν σε άλλους χώρους (στο βιβλίο ανάγνωσης, σε πανεπιστημιακές διαλέξεις, μιλώντας με τους συμμαθητές, κλπ).* (1982)

Επίσης να σημειώσουμε την άποψη του Piaget ότι η λογική μπόρεσε να γίνει σημαντική στο «μέτρο που αρνήθηκε την αοριστία του λεκτικού ιδιώματος για να συγκροτήσει, ως λογιστική πλέον, έναν αλγόριθμο του οποίου η ορθότητα είναι ισοδύναμη με αυτήν της μαθηματικής έκφρασης». Ακόμη προσθέτει ότι «τίποτε δεν μπορεί να φωτίσει περισσότερο αυτήν την άποψη, όσο η εμπεριστατωμένη μελέτη της γλώσσας των μαθηματικών, που είναι μεν γλώσσα, αλλά γλώσσα καθαρά νοητική, προσπελάσιμη μόνο με τον νου και ξένη προς τις πλάνες των σχημάτων» (Παπαδάτος, 2011)

Η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην τάξη μαθηματικών δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σταθερό ή ευδιάκριτο σύνολο λέξεων. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η (Morgan, 2006): *Η έννοια του μητρώου, το σημασιολογικό σύστημα που συγκροτεί ένα συγκεκριμένο είδος της κατάστασης, χρησιμοποιείται επίσης μάλλον διαφορετικά για να δηλώσει τα διάφορα σημασιολογικά συστήματα που συνδέονται με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης. Έτσι, ο (*Duval*, 2000), διακρίνει μεταξύ διαφόρων μητρώων που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά, θεωρώντας ξεχωριστά τη φυσική γλώσσα, τα γεωμετρικά σχήματα, τα αριθμητικά συστήματα και* *συμβολικούς ή αλγεβρικούς συμβολισμούς, και τις γραφικές παραστάσεις. Όπως υποστηρίζει ο Duval, οι δυνατότητες νοήματος αυτών των διάφορων μητρώων είναι διαφορετικές, δίνοντας αφορμή για πιθανές δυσκολίες για τους μαθητές, καθώς προσπαθούν να μετατρέψουν παραστάσεις από το ένα στο άλλο. Ωστόσο, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε το μητρώο με την ευρύτερη έννοια, που περιλαμβάνει μαθηματικά νοήματα που πραγματοποιούνται μέσω όλων αυτών των συστημάτων και των συνδυασμών τους.* (σελ. 7)

### 1.2.6. Η συμβολή της «φυσικής γλώσσας» για την ανάπτυξη μιας μαθηματικής επάρκειας

Σύμφωνα με το Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (Ε.Π.Π.Σ. σελ. 5), η μαθηματική εκπαίδευση πρέπει να προσανατολίζεται προς το να προσφέρει στους μαθητές ένα πλήρη έλεγχο της γλώσσας των Μαθηματικών ως ένα μέσο επικοινωνίας. Αυτό σημαίνει:

1. Να έχουν ένα πλήρες λεξιλόγιο μαθηματικών όρων και συμβόλων υπό τον έλεγχό τους.
2. Να κατανοούν τη σύνταξη της μαθηματικής γλώσσας και να κάνουν σωστή χρήση αυτής της γλώσσας όταν συζητούν, συνθέτουν λύσεις ή διατυπώνουν ερωτήσεις.
3. Να είναι ικανοί να διαβάζουν και να ερμηνεύουν μαθηματικά κείμενα που είναι διατυπωμένα σε προφορική, διαγραμματική ή συμβολική μορφή.
4. Να διαθέτουν ικανότητα για μετάφραση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γλώσσα και αντίστροφα.
5. Να συσχετίζουν πραγματικά αντικείμενα και καταστάσεις, εικόνες και διαγράμματα με μαθηματικές έννοιες και ιδέες. (Ε.Π.Π.Σ., 1997)

Η τρέχουσα κίνηση μεταρρύθμισης στην διδακτική των μαθηματικών στις Ηνωμένες Πολιτείες βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο έργο του N.C.T.M. (1989-2000), που υποδηλώνει ότι οι μαθητές πρέπει να μάθουν μαθηματικά με κατανόηση, καθώς ασχολούνται με μαθηματικές διαδικασίες, συμπεριλαμβανομένων, της επίλυσης προβλήματος, συλλογισμό και απόδειξη, επικοινωνία, συνδέσεις και αναπαράσταση. Περιγραφές αυτών των πέντε διαδικασιών περιγράφουν μία οπτική των μαθητών ως ενεργούς συμμετέχοντες στις τάξεις των μαθηματικών που είναι πλούσιες σε μαθηματικές ομιλίες. Η εμπλοκή στις μαθηματικές διαδικασίες υπόσχεται την ανάπτυξη της μαθηματικής επάρκειας που ορίζεται σε γενικές γραμμές να περιλαμβάνει πέντε άξονες — εννοιολογική κατανόηση, ευχέρεια στις διαδικασίες, στρατηγική ικανότητα, προσαρμοστική αιτιολόγηση και παραγωγική διάθεση — που είναι συνυφασμένοι και αναπτύσσονται ταυτόχρονα (Kilpatrick et al. 2001, αναφορά σε Bell & Pape, 2012). Οι (Mejía-Ramos & Inglis, 2011), αναφέρουν τα ακόλουθα τρία βήματα ώστε να κατανοηθούν οι λόγοι που επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών σε μία δεδομένη έννοια.

Πρώτο βήμα: Ανάλυση του νοήματος και της χρήσης της έννοιας στη φυσική γλώσσα.

Δεύτερο βήμα: Διερεύνηση του πώς η έννοια είναι κατανοητή από τους μαθητές στα μαθηματικά κείμενα.

Τρίτο βήμα: Πώς η χρήση της φυσικής γλώσσας για την έννοια και η κατανόηση της έννοιας στο μαθηματικό πλαίσιο από τους μαθητές αντιστοιχούν ώστε να προταθεί μια αιτιώδης σχέση. Η ανάλυση αυτή οδήγησε στο συμπέρασμα πως για να γίνουν ικανοί στα Μαθηματικά*, οι μαθητές πρέπει να συμμετάσχουν σε μαθηματικές συζητήσεις μέσα στην τάξη. Αυτή η συμμετοχή, με τη σειρά της, θα επιτρέψει στους εκπαιδευτικούς να αντιληφθούν καλύτερα αν οι μαθητές κάνουν κατάλληλη εννοιολογική σύνδεση μεταξύ των λέξεων και των μαθηματικών εννοιών.* (Kotsopoulos, 2007).

Η αναφορά του National Numeracy Review Report (2008) σε έρευνα που πραγματοποίησε υπό την ανάθεση του συμβουλίου των Αυστραλιανών κυβερνήσεων (COAG), επεσήμανε τη σημασία της γλώσσας στη μάθηση των μαθηματικών και πρότεινε: *Ότι η γλώσσα και ο αλφαβητισμός των μαθηματικών πρέπει να διδάσκονται ρητά από όλους τους καθηγητές των μαθηματικών με στόχο την αναγνώριση ότι η γλώσσα μπορεί να παρέχει ένα τρομερό εμπόδιο τόσο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και στην παροχή πρόσβασης στους μαθητές σε στοιχεία αξιολόγησης με στόχο την εκμαίευση μαθηματικών αντιλήψεων.*

### 1.3. Τα Μαθηματικά στο Επίπεδο της Συμβολικής Γραφής

#### 1.3.1. Η καθοριστική συμβολή των συμβόλων στην εννοιολογική μάθηση και τη μαθηματική σκέψη

Στα μαθηματικά και στις επιστήμες, η χρήση των συμβόλων πέρα από την πρακτική πλευρά της συντομογραφίας, έχει τη δύναμη να αναπτύσσει τη διαίσθηση και την εποπτεία και να εκμεταλλεύεται τη λειτουργικότητα για τη δημιουργία σύντομων και αποτελεσματικών διαδικασιών. Οι σύνθετοι συλλογισμοί για ορισμένα ποσοτικά χαρακτηριστικά χωρίς τη χρήση συμβολικής γραφής έχουν πολύ αυστηρά όρια στην αποδοτικότητά τους κάτι που γίνεται φανερό από προβλήματα των πρώτων τάξεων της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η εισαγωγή και ο χειρισμός των συμβόλων για τις έννοιες και τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά, αποτελεί ιστορικά ένα τεράστιο επίτευγμα της μαθηματικής σκέψης, κρίσιμο για την εξέλιξη της γνώσης των μαθηματικών κατά τους περασμένους αιώνες. Αποτελεί παράλληλα και ένα πρωταρχικό παράγοντα αποτελεσματικότητας για τη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση. Η ανταπόδοση από τη συμβολική γραφή μιας έννοιας ή μίας διαδικασίας με ακρίβεια, σαφήνεια και συντομία, όπως την παρουσιάζει ο Alfred North Whitehead είναι *«να ανακουφίζει τον εγκέφαλο από κάθε εργασία που δεν είναι αναγκαία. Ένας καλός συμβολισμός τον απελευθερώνει, ώστε να συγκεντρωθεί σε πιο προχωρημένα προβλήματα και, στην πραγματικότητα, αυξάνει τη νοητική δύναμη του ανθρώπου»* (Davis & Hersh, 1981, σελ. 134). Η δύναμη αυτή εμφανίζεται κυρίως στη σχέση που συνδέει το σύμβολο με το νόημα που περιέχει, την έννοια που αναπαριστά και τη διαδικασία την οποία «υπηρετεί» προσδίδοντάς της, λειτουργικότητα και αποτελεσματικότητα. Η συμβολική φύση των μαθηματικών είναι ένα από τα πιο εμφανή χαρακτηριστικά τους (Pimm, 1987). Στο πλαίσιο της εκμάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών, ο Pimm αναφέρει *"... είναι σημαντικό να είναι σε θέση να διακρίνει κατά βούληση μεταξύ του σύμβολου και της έννοιας, μεταξύ του σημαίνοντος (το σύμβολο) και του σημαινόμενου (το αναφερόμενο)"* (σελ. 139). Ουσιαστικά ο Pimm συμφωνεί με την οπτική του (Mason's, 1980) ότι τα σύμβολα λειτουργούν ως παράθυρα μέσω των οποίων έχουμε πρόσβαση στις μαθηματικές έννοιες. Η παιδαγωγική πρακτική αναδεικνύει τον κεντρικό ρόλο της συμβολικής γραφής, για την καθοριστική συμβολή της στην εννοιολογική μάθηση και τη μαθηματική σκέψη.

### 1.3.2. Δυσκολίες του μαθηματικού συμβολισμού

Ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ένα εκπληκτικό και ισχυρό εργαλείο, του οποίου η μάθηση είναι μια δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία (*it is subtle and difficult to learn*) (Davis & Hersh, 1981), (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης και αποπλαισίωση των εκφράσεων.

Πολλές έρευνες , εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στη σημασία του συμβόλου κατά τη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια αλλά και στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Συγκεκριμένοι ερευνητές, ασχολούνται με τη δομή και τη διαδικασία απόδοσης νοήματος στα σύμβολα, ερευνούν τις δυσκολίες και τον τρόπο όπου, εκπαιδευτικοί και μαθητές παρουσιάζουν και αφομοιώνουν τα σύμβολα, τις έννοιες και τις διαδικασίες που συνδέονται με αυτά, καθώς και τη δυσκολία ή την ευκολία μετάβασης από το πλαίσιο της συμβολικής γραφής σε φυσική γλώσσα ή και το αντίστροφο. Και αυτό, γιατί η μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και αντίστροφα, είναι μία διαρκής διαδικασία «μετάφρασης» και αποτελεί απόδειξη της κατανόησης, της σημασίας και της χρήσης του συμβολισμού. Για παράδειγμα, οι μαθηματικοί κατανοούν εύκολα την έννοια της μεταβλητής από τον αντίστοιχο συμβολισμό σε πολλά και διαφορετικά πλαίσια. Αντίθετα οι μαθητές ιδιαίτερα στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στην άλγεβρα με την κατανόηση της έννοιας αυτής, λόγω των πολλαπλών νοημάτων της και της απαιτούμενης ακρίβειας στη σήμανση και το χειρισμό (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Ο William Betz αναφέρει ότι ο συμβολισμός στην άλγεβρα αποτελεί στοιχείο υψίστης σπουδαιότητας και συγχρόνως υψίστης δυσκολίας. (Sasmanet. Al., 1997). Ένας άλλος λόγος που πολλοί ερευνητές ασχολούνται με το συγκεκριμένο θέμα είναι ότι συχνά μία καινούρια γλώσσα συμβόλων, όπως αυτή που εισάγεται στα μαθηματικά από τα πρώτα χρόνια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, λειτουργεί περισσότερο σε επίπεδο μίμησης και λιγότερο σε επίπεδο κατανόησης. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα που χρησιμοποιεί ο R.Davis και αναφέρει ο (Hughes, 1996, σελ.76), παρομοιάζοντας τον χειρισμό της γλώσσας των συμβόλων με το να τραγουδά κάποιος ένα ξένο τραγούδι, χωρίς να καταλαβαίνει τη γλώσσα που είναι γραμμένο και κατ΄ επέκταση τι λέει το τραγούδι αυτό, επισημαίνοντας: «*Είναι πολύ διαφορετική μία πετυχημένη μίμηση από μία θεμελιωμένη κατανόηση*».

### 1.3.3. «Εργαλεία» έκφρασης της «συμβολικής γραφής»

Για να μεταβαίνουν με ευκολία οι μαθητές από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική και ανάποδα χρειάζεται αρκετή εξοικείωση. Η συμβολική γλώσσα χρησιμοποιεί γράμματα και διάφορα άλλα σύμβολα που είναι τα εργαλεία έκφρασης και σύνταξης των αλγεβρικών προτάσεων και σχέσεων. Τα γράμματα χρησιμοποιούνται στην Άλγεβρα με διαφορετικές σημασίες που εξαρτώνται από τα συμφραζόμενα και τις εκφράσεις. Ο (Kuchemann, 1981) αναφέρει αρκετούς τρόπους ερμηνείας και χρήσης των γραμμάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικούς:

1. Άγνωστοι – το γράμμα έχει μία συγκεκριμένη αλλά άγνωστη τιμή. Το γράμμα ως άγνωστος χρησιμοποιείται όταν χρειάζεται να επιλυθεί μια εξίσωση, ή στην διατύπωση εκφράσεων όπως π.χ. η διάμετρος d ενός κύκλου είναι 10cm.
2. Γενικευμένοι αριθμοί – το γράμμα μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές. Τα γράμματα ως γενικευμένοι αριθμοί χρησιμοποιούνται σε προβλήματα όπως: ‘’ η ισότητα α+β+γ=α+δ+γ είναι πάντα αληθής, μερικές φορές αληθής, ή ποτέ αληθής;’’
3. Μεταβλητές – χρησιμοποιούνται όταν τα γράμματα θεωρούνται ότι αντιπροσωπεύουν μία συλλογή μη ορισμένων τιμών και όταν μία συστηματική σχέση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ δύο τέτοιων συνόλων τιμών των μεταβλητών.

Αρκετοί ερευνητές δήλωσαν ότι η έννοια της μεταβλητής είναι μία από τις πιο ουσιαστικές έννοιες στη διδασκαλία των μαθηματικών, για όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης. (Sasmanet, 1997). Ο (Philipp, 1992) αναφέρει τον Rajaratnam ο οποίος ανέφερε στο τέλος της δεκαετίας του 50 ότι αυτή η έννοια είναι τόσο σπουδαία και η ανακάλυψη της ήταν ένα ορόσημο στην ιστορία των μαθηματικών. Σε σχέση με το ίδιο θέμα, ο Percy Nunn δήλωσε το 1919 ότι η ανακάλυψη των μεταβλητών είναι ίσως το πιο σπουδαίο συμβάν στην ιστορία της ανθρωπότητας.

Σύμφωνα με την ανάλυση του Kuchemann, τα γράμματα χρησιμοποιούνται ως μεταβλητές όταν το πρόβλημα διατυπώνει μία δεύτερου βαθμού σχέση μεταξύ σχέσεων. Σύμφωνα με την μελέτη του Tonnessen, ο οποίος ανέλυσε μαθηματικά εγχειρίδια που εκδόθηκαν κατά την διάρκεια των αρχών της δεκαετίας του 50 μέχρι και το τέλος της δεκαετίας του 80, σχεδόν όλα αυτά τα βιβλία, εμμέσως πλην σαφώς έδιναν έναν ορισμό της μεταβλητής και η μεταβλητή ήταν ένα σύμβολο που αναπαριστούσε οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου που περιείχε τουλάχιστον δύο στοιχεία (Philipp, 1992). Με άλλα λόγια όλες οι χρήσεις των γραμμάτων-συμβόλων ήταν μεταβλητές. Ας ξαναθυμηθούμε ότι ο x είναι μεταβλητή με την προϋπόθεση ότι ανήκει σε ένα σύνολο, που περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Υπάρχουν παραδείγματα γραμμάτων που δεν είναι μεταβλητές. Είναι σύμβολα που αναπαριστούν ειδικούς αριθμούς, όπως το e – η βάση των φυσικών λογαρίθμων, c – η ταχύτητα του φωτός και π – ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς την διάμετρο του (Philipp, 1992). Σύμφωνα με τους (Graham & Thomas, 2000), η κατανόηση αυτή είναι η βάση για όλες τις ανώτερες σπουδές. Είναι προφανώς σημαντικό για όλους τους μαθητές να κερδίσουν αυτοπεποίθηση χρησιμοποιώντας μεταβλητές. Καθώς όμως η μεταβλητή είναι μία έννοια που συνδέεται με ποικιλία αναφορικών νοημάτων και εικόνων (Tall & Vinner, 1981) οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν αυτή την έννοια.

Σύμφωνα με τον (Kuchemann, 1981) οι μαθητές δίνουν έξι διαφορετικές ερμηνείες στα γράμματα, που συναντούν σε αλγεβρικές παραστάσεις:

1. Το γράμμα παίρνει μια αριθμητική τιμή από κάποιο σύνολο.
2. Η τιμή ενός γράμματος μπορεί να αγνοηθεί, χωρίς να χρειασθεί να υπολογισθεί.
3. Χρησιμοποιείται για να συμβολίσει ένα αντικείμενο.
4. Χρησιμοποιείται ως ένας συγκεκριμένος αλλά άγνωστος αριθμός.
5. Χρησιμοποιείται σαν ένας γενικός αριθμός που μπορεί να πάρει περισσότερες από μία τιμές.
6. Χρησιμοποιείται σαν μεταβλητή, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει ένα σύνολο όχι συγκεκριμένων τιμών.

Ένα άλλο αλγεβρικό αντικείμενο, που οι μαθητές δύσκολα κατανοούν, είναι η **παράμετρος**, η οποία είναι ακαθόριστη σταθερά που παίρνει τιμές από ένα σύνολο. Η επιστημολογική φύση αυτού του αλγεβρικού αντικειμένου συνδέεται με ένα παράδοξο και μία πρόδηλη αντίφαση: είναι ένας παγιωμένος, ιδιαίτερος αριθμός, παρόλα αυτά παραμένει ακαθόριστος. Από τη σκοπιά της Διδακτικής το ερώτημα είναι: Πώς μπορεί ένα τέτοιο αντικείμενο να γίνει αντικείμενο της σκέψης των μαθητών; Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές δεν μπορούν να διαχωρίσουν την ''παράμετρο'' από την ''μεταβλητή''. Χρησιμοποιούν την παράμετρο με τον ίδιο τρόπο όπως την μεταβλητή, αλλά έχουν την πεποίθηση ότι πρέπει να υπάρχει διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών, την οποία δεν μπορούν να εξηγήσουν. Εξαιτίας των διαφορετικών εκφράσεων προκύπτει το ερώτημα εάν κάποιο μοντέλο ή ιδέα μπορεί να αναπτυχθεί, εστιάζοντας στην ιδέα της παραμέτρου σαν ένα κατώτερο είδος μεταβλητής.

Η παράμετρος είναι μία ''έξτρα'' μεταβλητή σε μία αλγεβρική έκφραση ή συνάρτηση που γενικεύει πάνω στην κλάση των εκφράσεων και πάνω στην κλάση των συναρτήσεων. Η παράμετρος μπορεί να θεωρηθεί ως μετα-μεταβλητή.

### 1.3.4. Το νόημα και η χρηστικότητα της «συμβολικής γραφής»

Τα μαθηματικά σύμβολα, από την πρώτη γνωστή, ιδιαίτερα απλή, εμφάνισή τους, μέχρι και την πιο σύνθετη, με την οποία χρησιμοποιούνται σήμερα, φέρουν μαζί τους **νόημα και χρηστικότητα**. Από την αρχική μορφή, όπου το σύμβολο εξυπηρετούσε μόνο ανάγκες συντόμευσης και απεικόνισης, φτάνουμε στη σημερινή μορφή της τυποποιημένης συμβολικής γραφής, που όχι μόνο παριστάνει αντικείμενα, αλλά εμπεριέχοντας δεδομένους κανόνες, σχηματίζει και μετασχηματίζει σύμβολα σε νέα σύμβολα, δίνει ώθηση και παρέχει ευκολία σε υπολογισμούς, δημιουργεί εποπτεία και μοτίβα, παράγει γενικεύσεις και συλλογισμούς και γενικά λειτουργεί με ακρίβεια και αποτελεσματικότητα. Οι (Marks και Mousley, 1990), όπως αναφέρεται σε (Chapman, 1993) επισημαίνουν ότι τα μαθηματικά είναι πλέον ευρέως αποδεκτά ως ένα σημειωτικό σύστημα. Σαφώς, τα μαθηματικά είναι ένα σύστημα συμβόλων. Στην πραγματικότητα, τα μαθηματικά αποτελούνται από πολλά συστήματα σημείων, με τα οποία οι άνθρωποι αποκτούν αίσθηση του κόσμου. Ένα σύμβολο στα μαθηματικά έχει αφαιρετικό νόημα το οποίο κατά μία έννοια θεωρείται απόλυτο. Δεν έχει υποκειμενικότητα. Για έναν μαθηματικό η δύναμη του συμβόλου έγκειται στο γεγονός ότι είναι ξεκάθαρο και την ίδια στιγμή περιλαμβάνει μια σειρά από επεξηγηματικές εικόνες. Ο μαθηματικός συμβολισμός κατά μία έννοια είναι ανεξάρτητος από τις εμπειρίες του αναγνώστη και είναι ανοιχτός για ερμηνεία μόνο μέσω της χρήσης φυσικής γλώσσας, η οποία συνδέει τα μαθηματικά με τις προηγούμενες κατανοήσεις του αναγνώστη. Σε αυτό το σημείο διαφαίνεται μία ρήξη μεταξύ της κατανόησης και του νοήματος. Η συμβολική αναπαράσταση έχει την πρόθεση να ενσωματώσει μαθηματικά νοήματα, αλλά πώς οι μαθητές είναι σε θέση να γνωρίζουν ποιες εικόνες τίθενται σε ενέργεια από το συμβολισμό;

### 1.4. Ο Μετασχηματισμός από το ένα Σύστημα Αναπαράστασης στο άλλο

Στα μαθηματικά και στη μαθηματική παιδεία, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται λιγότερο στις αναπαραστάσεις και περισσότερο στους μετασχηματισμούς ανάμεσά τους. Η μαθησιακή δραστηριότητα στα μαθηματικά μπορεί να αναλυθεί σε δυο τύπους μετασχηματισμών των σημειωτικών αναπαραστάσεων: τους χειρισμούς και τις μεταφράσεις. Οι χειρισμοί αποτελούν μετασχηματισμούς των αναπαραστάσεων που λαμβάνουν χώρα μέσα στο ίδιο το σύστημα αναπαραστάσεων. Οι μαθηματικοί χειρισμοί εξαρτώνται τόσο από το σύστημα αναπαράστασης όσο και από τους μαθηματικούς κανόνες (Duval,2006). Οι μεταφράσεις αφορούν τους μετασχηματισμούς οι οποίοι περιλαμβάνουν αλλαγή του συστήματος αναπαράστασης. Κατά τη διαδικασία μετάφρασης όλο ή μέρος του νοήματος της αρχικής αναπαράστασης διατηρείται χωρίς να μεταβάλλεται το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται, (Duval, 2006). Οι (Lesh κ.α., 1987) επισημαίνουν ότι οι χειρισμοί και οι μεταφράσεις βρίσκονται στην πραγματικότητα σε σχέση αλληλοεξάρτησης. Αν και οι χειρισμοί στα πλαίσια του ίδιου συστήματος αναπαράστασης είναι πιο σημαντικοί από μαθηματικής άποψης, οι μεταφράσεις αποτελούν αποφασιστικό παράγοντα μάθησης (Duval, 2006). Πέρα από την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από την αναγνώριση και την ευέλικτη χρήση τους σε ποιοτικά διαφορετικά συστήματα αναπαραστάσεων (λεκτικό, εικονικό, συμβολικό), βασικός στόχος της διδασκαλίας, στα πλαίσια της αναπαραστατικής προσέγγισης των μαθηματικών, πρέπει να είναι η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα στο άλλο. Όπως έχουμε πει και στα προηγούμενα, στα γενικά περί των αναπαραστάσεων, ο όρος «μετάφραση αναπαραστάσεων» αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο και αποτελεί σημαντικό κριτήριο αξιολόγησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και παράλληλα αποτελεσματικό μέσο επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Janvier, 1987) αφού σύμφωνα με τους (Carpenter et al., 1993), μέσα από τη διαδικασία μετάφρασης οι μαθητές/φοιτητές αναπτύσσουν βασικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος. Βέβαια, κάθε πεδίο έκφρασης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά, γι' αυτό και οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται με αναφορές σε διαφορετικά επίπεδα της γνωστικής δραστηριότητας.

Για να γίνει η μετάφραση χρειάζονται δύο τουλάχιστον μορφές αναπαράστασης. Η μια θα αποτελεί την πηγή και η άλλη το στόχο και αντίστροφα. Στην έρευνά μας τη μια μορφή θα αποτελέσει η « **φυσική γλώσσα»** και την άλλη μορφή η «**συμβολική γραφή»**.

Κατά τη διαδικασία της μετατροπής, η **φορά της μετατροπής** είναι ένας παράγοντας πολύ σημαντικός. Οι διαδικασίες μετάφρασης αναπτύσσονται αποτελεσματικότερα όταν οι μαθητές καλούνται να κάνουν μετάφραση τόσο από την πηγή στο στόχο όσο και από το στόχο στην πηγή κατά τρόπο συμμετρικό (Janvier, 1987). Όμως το πέρασμα από ένα επίπεδο σε ένα άλλο και το αντίστροφο δεν είναι δυο ισοδύναμες διαδικασίες, διότι οι κανόνες δεν είναι οι ίδιοι. Η ικανότητα πραγματοποίησης μιας μετατροπής με επιτυχία κατά τη μια φορά, δεν σημαίνει ότι θα συμβαίνει το ίδιο και κατά την αντίστροφη μετατροπή. Όπως αναφέρεται στο βιβλίο (*διδακτική μέθοδοι και εφαρμογές των: ΔΑΓΔΙΕΛΗ Β., ΠΑΥΛΟΠΟΥΛΟΥ Κ., ΤΡΙΓΓΑ Π.*) σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας σε πρωτοετείς φοιτητές του Πανεπιστημίου, παρατηρήθηκε διαφορά επιτυχίας ανάμεσα σε δύο περάσματα αντίστροφης φοράς, η οποία γίνεται θεαματική όταν παρεμβαίνει το επίπεδο της συμβολικής γραφής.

Γλωσσικές εκφράσεις, που συμπεριλαμβάνουν κωδικοποιημένα μηνύματα, θα μπορούσαν να λειτουργήσουν ως μέσα εκμάθησης για τους μαθητές, πραγματοποιώντας τη μετάβαση από τη **φυσική γλώσσα** στη **συμβολική** και - αντιστρόφως. Εδώ να καταστήσουμε σαφές ότι μαθηματικές-γλωσσικές εκφράσεις που θα εμπεδωθούν και θα χρησιμοποιούνται σαν «μοτίβα» μπορεί να λύσουν μεγάλα ζητήματα στους μαθητές/φοιτητές, ειδικά στην φάση της διατύπωσης λύσης, όμως πολλές φορές στη θέα της εκφώνησης ενός προβλήματος αισθάνονται αμήχανα και δυσκολεύονται στη μετάβαση προς τη συμβολική γραφή επειδή έχουν μάθει μηχανικά να χρησιμοποιούν τα συγκεκριμένα «μοτίβα».

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/φοιτητές είναι η « μετάφραση» από τη μια μορφή στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, αλλά επίσης και ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και στα μαθηματικά.

Η επιτυχία των μαθητών στο πέρασμα από «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και ανάποδα εξαρτάται από τη γνωστική σχέση που δημιουργείται μεταξύ αρχικής και τελικής αναπαράστασης. Επίσης η προηγούμενη εμπειρία, το πλούσιο λεξιλόγιο και η σωστή χρήση της γλώσσας επηρεάζουν θετικά και άμεσα τη δυνατότητα περάσματος από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Οι μαθητές κατασκευάζουν ενεργητικά τη γνώση, κατανοώντας την, σύμφωνα με τις δικές τους προϋπάρχουσες εμπειρίες, μέσα από δραστηριότητες, οι οποίες βασίζονται στη λογικομαθηματική εμπειρία και οι οποίες έχουν νόημα και σχέση με τη ζωή τους.

Ο διαχωρισμός όμως αυτός δεν είναι απόλυτος, ιδιαίτερα όσον αφορά έννοιες από το χώρο της Ανάλυσης και των Ανώτερων Μαθηματικών.
Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτήν, μία μαθηματική ιδέα, κατανοείται ως διαδικασία σε ένα αρχικό στάδιο και στη συνέχεια στο επόμενο στάδιο, ως αντικείμενο. Παράλληλα, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, οι όροι «*διαδικασία*» και «*αντικείμενο*»

πρέπει να γίνουν κατανοητοί εδώ ως διαφορετικές όψεις του ιδίου πράγματος και όχι ως τελείως διακριτά, ξεχωριστά συστατικά του μαθηματικού κόσμου. Με άλλα λόγια, ο λειτουργικός και δομικός τρόπος σκέψης, μολονότι είναι φαινομενικά ασυμβίβαστοι, στην πραγματικότητα δρουν συμπληρωματικά. Η διπλή αυτή φύση των μαθηματικών αντικείμενων, μπορεί να παρατηρηθεί όχι μόνο στη λεκτική εκφορά τους αλλά και στις συμβολικές αναπαραστάσεις με διάφορους τρόπους.
Η όσο το δυνατόν πληρέστερη κατανόηση μιας έννοιας βασίζεται στο συνδυασμό δύο τουλάχιστον πεδίων αναπαράστασης, ο οποίος επιτυγχάνεται από την ταχύτητα και τον αυθόρμητο χαρακτήρα της γνωστικής δραστηριότητας της μετάφρασης (Duval,1987).

Οι κανόνες μετατροπής από το ένα επίπεδο στο άλλο μπορεί να φαίνονται απλοί, αλλά το πέρασμα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη αποδεικνύεται πολύ γρήγορα μια πολύπλοκη διαδικασία. Όσο και αν το πέρασμα από τη μια μορφή στην άλλη φαίνεται φυσικό σε μερικές περιπτώσεις, ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία (Duval, 1987) στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Η διαδικασία αυτή της μετάφρασης από το ένα πεδίο στο άλλο στοχεύει στην ενίσχυση των συνδέσεων ανάμεσα στα γνωστικά πεδία και τις εσωτερικές αναπαραστάσεις.

Ο (Tall, 1995), αναφέρεται στη χρήση των αναπαραστάσεων στην εκπαίδευση με στόχο να βοηθήσουν ουσιαστικά τους μαθητές/φοιτητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφθούν και να οδηγηθούν σε εικασίες να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις. Επισημαίνεται η γνωστική δυσκολία η οποία προκύπτει από την ανάγκη να επιτευχθεί ευέλικτη και έγκυρη μετάφραση από **φυσική γλώσσα** σε **συμβολική γραφή** αλλά και αντίστροφα της ίδιας κατάστασης, η οποία αποτελεί τον πυρήνα της κατανόησης σε μεγάλο μέρος των μαθηματικών. Επίσης επισημαίνεται η σημασία της ευελιξίας στην οικοδόμηση συνδέσεων μεταξύ διαφόρων μαθηματικών πεδίων. Ο (Duval, 2006) επισημαίνει ότι η κατανόηση των μαθηματικών ξεκινά όταν αρχίσουν να συντονίζονται τα διαφορετικά πεδία. Επισημαίνεται ότι ορισμένες από τις γνωστικές δυσκολίες οι οποίες συνοδεύουν την έννοια μπορεί να συσχετίζονται με την αλληλεπίδραση της οπτικής διαίσθησης και της τυπικής αιτιολόγησης. Η αιτιολόγηση αυτού του περάσματος βασίζεται στο γεγονός ότι ένα από τα δυο επίπεδα είναι η φυσική γλώσσα η οποία αποτελεί ένα ξεχωριστό επίπεδο ως προς τα άλλα επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης (Duval, 1996). Επίσης για τον ίδιο λόγο, ως προς την αναφορά του Duval, κατά τη διάρκεια του περάσματος από το επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο επίπεδο της συμβολικής γραφής, πρέπει να διαλέξουμε τις κατάλληλες μεταβολές που θα εκτελέσουμε.

Συμβαίνοντας όλα τα παραπάνω οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν τη φυσική γλώσσα με τη συμβολική γραφή και να είναι σε θέση να μεταβαίνουν από τη μια μορφή στην άλλη με ευκολία και με ακρίβεια, εφαρμόζοντας πάντοτε τους κανόνες μετατροπής.

Τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αναφέρουν βασικές αρχές και οδηγίες για τα μαθηματικά, όπως, «*οι μαθητές οφείλουν να μαθαίνουν μαθηματικά με κατανόηση, να κατασκευάζουν ενεργά την νέα γνώση από την εμπειρία τους και την προηγούμενη γνώση*». Κάνοντας ειδικότερη αναφορά στη χρήση των συμβόλων, τα συγκεκριμένα στοιχεία για κάθε επίπεδο, αναφέρουν ως σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών, την κατανόηση και χρήση των εννοιών, την κατανόηση των σχέσεων και των ιδιοτήτων, τη μετάφραση των προβλημάτων σε μαθηματική γλώσσα παράλληλα με την εφαρμογή κατάλληλων τεχνικών και αλγορίθμων, καθώς και τη χρήση των μαθηματικών εργαλείων (γλώσσα, σύμβολα, διαδικασίες, αλγόριθμοι, κλπ) για την επικοινωνία, τη σκέψη και την καταγραφή δεδομένων (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998, Hiebert, 1997, NCTM, 2004). Ωστόσο, παρά τον ουσιαστικό ρόλο που διαδραματίζουν οι μεταφράσεις, και ιδιαίτερα αυτή από τη «φυσική γλώσσα» στη «συμβολική γραφή» και αντίστροφα, οι στρατηγικές μετάφρασης σπάνια αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας μέσα στην τάξη (Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995; Janvier, 1987a; Janvier, 1987b; Lesh et al, 1987a; Lesh et al, 1987b).

Έχει διαπιστωθεί ότι στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση οι φοιτητές οικοδομούν τεχνικές ρουτίνας και δεξιότητες χειρισμού και δεν κατανοούν εννοιολογικά τις θεωρητικές έννοιες των ανώτερων μαθηματικών. Βασίζονται στην ανάγκη χρήσης αλγεβρικών τύπων, συμβολικής γραφής, τις περισσότερες φορές με μη κατανοητό τρόπο. Πολλοί από αυτούς αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως ένα αλγοριθμικό σύστημα κανόνων και διαδικασιών. Τα Ανώτερα μαθηματικά είναι πλούσια σε έννοιες που χρειάζονται αφαιρετική σκέψη. Αυτό προϋποθέτει υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης. Οι θεωρητικές έννοιες δεν μπορούν να εξαντλούνται μόνο με συμβολικές προσεγγίσεις που ως επί το πλείστον συμβαίνει στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η διδασκαλία αυτών των εννοιών αρχίζει από τις τελευταίες τάξεις της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα αναλυτικά προγράμματα πρέπει να είναι προσαρμοσμένα έτσι ώστε να δίδεται στους μαθητές η δυνατότητα να γνωρίσουν, να αναπτύξουν και να παρουσιάσουν τη θεωρητική σκέψη και να προβλέπεται η διδασκαλία των διαδικασιών μεταφράσεις ανάμεσα στην προφορική και γραπτή φυσική γλώσσα και τη συμβολική γραφή. Έτσι μέσω της φυσικής γλώσσας θα μελετήσουν ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα κ.λ.π. Η πρόοδος των γνώσεων συνοδεύεται από τη δημιουργία και την ανάπτυξη νέων ειδικών σημειωτικών συστημάτων που συνυπάρχουν και λειτουργούν παράλληλα με το πρώτο σύστημα αυτό της φυσικής γλώσσας. (Gagatsis et.al., 1999). Ο (Tall, 1995) αναφέρεται στα συγκεκριμένα σημειωτικά συστήματα και στη χρήση αυτών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση με στόχο να βοηθήσουν ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφθούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που κρύβονται μέσα σε τυπικές αποδείξεις. Επισημαίνεται η γνωστική δυσκολία η οποία προκύπτει από την ανάγκη να επιτευχθεί ευέλικτη και έγκυρη μετάφραση από φυσική γλώσσα σε συμβολική γραφή αλλά και αντίστροφα της ίδιας κατάστασης, η οποία αποτελεί τον πυρήνα της κατανόησης σε μεγάλο μέρος των μαθηματικών. Τη σημασία της ευελιξίας στην οικοδόμηση συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών πεδίων επισημαίνει ο (Duval, 2006). Λέει ότι η κατανόηση των μαθηματικών ξεκινά όταν αρχίσουν να συντονίζονται τα διαφορετικά πεδία, προτείνει επίσης ένα πλαίσιο το οποίο λαμβάνει υπόψη τους επιστημολογικούς περιορισμούς της συγκεκριμένης μαθηματικής δραστηριότητας και τις γνωστικές λειτουργίες της σκέψης.

Είναι, λοιπόν, εμφανές ότι η μετάφραση συγκαταλέγεται ανάμεσα στους σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος
Κύριος στόχος των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών σε όλες της βαθμίδες εκπαίδευσης είναι να καταστούν οι μαθητές /φοιτητές ικανοί να λύνουν προβλήματα

και να αξιοποιούν τα συμπεράσματά τους. Όμως μπορεί να λαμβάνουν τις απαραίτητες δεξιότητες και να γνωρίζουν τις μαθηματικές έννοιες, δεν έχουν όμως κατανοήσει τις διαδικασίες «μετάφρασης» από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο, διότι δεν δίδεται η ιδιαίτερη σημασία και ο απαιτούμενος χρόνος στη διδασκαλία σχετικά με το πέρασμα αυτό, επειδή θεωρείται προφανές. Ο στόχος της παρούσας έρευνας, όπως είπαμε και στην αρχή, είναι να μελετήσουμε ακριβώς αυτές τις δυσκολίες της μετάβασης από το σημειωτικό επίπεδο της «φυσικής γλώσσας» στο σημειωτικό επίπεδο της «συμβολικής γραφής» και αντίστροφα, και τα αποτελέσματά της να αξιοποιηθούν για παιδαγωγικό όφελος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΑΠΟ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ ΣΤΗ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

Ένας από τους σημαντικότερους στόχους των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών του σχολείου στο μάθημα των Μαθηματικών, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, είναι να καταστήσει τους μαθητές ικανούς να λύνουν προβλήματα και να αξιοποιούν τα συμπεράσματά τους.

Αυτό για να συμβεί πρέπει οι έχοντες την ευθύνη της σύνταξης των αναλυτικών προγραμμάτων, να στέκουν με ιδιαίτερη σημασία στη βαρύτητα του κάθε μαθηματικού αντικειμένου, στις ιδιαίτερες δυσκολίες κατανόησής του από μέρους των μαθητών και στον τρόπο μετάδοσης του από μέρους των εκπαιδευτικών.

Πιο συγκεκριμένα από τα πρώτα κιόλας μαθητικά χρόνια, τα παιδιά καλούνται να κατανοήσουν και ύστερα να «μεταφράσουν» προβλήματα από τη φυσική καθημερινή γλώσσα σε σύμβολα και αριθμούς. Η συμπυκνωμένη όμως δύναμη του συμβόλου, απαιτεί από τους μαθητές ιδιαίτερες προσπάθειες σε διαφορετικά επίπεδα εκπαίδευσης.

Οι μαθητές συχνά αντιλαμβάνονται το μαθηματικό συμβολισμό ως μία καινούρια γλώσσα στην οποία είναι αναγκασμένοι να μεταφράζουν τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας και αντίστροφα. Η μάθηση του νέου συμβολισμού για αυτούς, είναι μία δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία, που απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης και αποπλαισίωση των συμβολικών εκφράσεων.

Επιχειρώντας λοιπόν ένα πέρασμα από τα σχολικά συγγράμματα της Άλγεβρας Β΄ Γυμνασίου, Γ΄ Γυμνασίου, Α΄ Λυκείου και Β΄ Λυκείου, εντοπίζουμε και παραθέτουμε διάφορες ενδεικτικές εφαρμογές, δραστηριότητες και προβλήματα.

Στη συνέχεια προσπαθούμε να υποθέσουμε τους λόγους για τους οποίους μαθητές οδηγούνται σε λανθασμένα αποτελέσματα και να εντοπίσουμε τυχόν αβλεψίες ή παραλήψεις των αναλυτικών προγραμμάτων και των σχολικών εγχειριδίων.

### 2.1. Β΄ Γυμνασίου

**Ι. Εφαρμογή Β΄ Γυμνασίου. «σελ.27, Σχολικό βιβλίο»**

*«Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δυο βρύσες; »*

Στο πρόβλημα αυτό η λύση είναι η ακόλουθη:

Οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δίνουν λανθασμένα την εξής απάντηση: «χ+ψ=25»
Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές δεν κατανοούν, πως θα πρέπει αρχικά να κατασκευάσουν αναλογία, έχοντας στο μυαλό τους την εξής αντιστοιχία: (μια δεξαμενή γεμίζει σε 10 λεπτά, σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $\frac{1}{10}$ της δεξαμενής και σε $x$ λεπτά τα $\frac{X}{10}$ της δεξαμενής). Όμοια, η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $\frac{X}{15}$ της δεξαμενής. Αφού και οι δυο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, θα συμπληρωθεί η μια ακέραιη μονάδα, άρα η πρόταση στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής που θα μεταφράζει την παραπάνω πρόταση του σημειωτικού επιπέδου της φυσικής γλώσσας θα είναι η εξής: « $\frac{X}{10}+\frac{X}{15}=1$ »

Οι μαθητές οδηγούνται σε λάθος συλλογισμό, γιατί από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, μετά στο Γυμνάσιο, αλλά και πιο χαρακτηριστικά, στην αρχή αυτού του κεφαλαίου1.4: «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων», διδάσκονται να ακολουθούν αυστηρά κάποιες μεθοδολογίες, όπως η παρακάτω που συναντούμε στο εγχειρίδιο Β΄ Γυμνασίου σελ. 27:

1. ***Διαβάζουμε*** *καλά το πρόβλημα και* ***διακρίνουμε*** *τα* ***δεδομένα*** *από τα* ***ζητούμενα****.*
2. ***Χρησιμοποιούμε*** *ένα γράμμα (****συνήθως το x****) για να μεταφράσουμε τον* ***άγνωστο αριθμό*** *που πρέπει να προσδιορίσουμε.*
3. *Εκφράζουμε* ***όλα τα άλλα μεγέθη*** *του προβλήματος* ***με τη βοήθεια του χ****.*
4. ***Γράφουμε την εξίσωση*** *του προβλήματος* ***χρησιμοποιώντας τα δεδομένα*** *της εκφώνησης.*

5. ***Λύνουμε*** *την εξίσωση.*
6. ***Ελέγχουμε*** *αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.*

Επίσης διδάσκονται λέξεις «κλειδιά» που χρησιμοποιώντας της κατασκευάζουν τις αντίστοιχες εκφράσεις με μαθηματικά σύμβολα. Στην εφαρμογή που δώσαμε, αναγνωρίζουν την έκφραση «κλειδί» *«και οι δυο μαζί»* και τη μεταφράζουν στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής, με το σύμβολο της πρόσθεσης (+). Άλλες συσχετίσεις ή λέξεις ή εκφράσεις «κλειδιά» που παρατηρούμε να επαναλαμβάνονται κατά τη διαδικασία εκμάθησης της επίλυσης προβλημάτων είναι οι ακόλουθες:

«παίρνω ακόμα»
«αυξάνω κατά»
«καταθέτω»
«και»
«βάζω»
«θέλω ακόμη»
«ενώνω»
«συγκεντρώνω»
«εισπράττω», και άλλες ………………………………… για την πράξη της πρόσθεσης (+).

«δίνω»
«ξοδεύω»
«μου έμειναν»
«λιγοστεύω»
«μειώνω»
«ελαττώνω»
«διαφέρω κατά»
«συμπληρώνω»
«αδειάζω»
«αδυνατίζω»
«βγάζω»
«διαγράφω»

«καταναλώνω»

«έχω έκπτωση»

«έχω υπόλοιπο» και άλλες ……………………………… για την πράξη της αφαίρεσης (−).

«πέντε φορές μεγαλύτερο»

«αν το 1 κοστίζει τόσο…. πόσο κοστίζουν τα χ ίδια πράγματα;»

«πενταπλό» και πολλές άλλες ……………… για την πράξη του πολλαπλασιασμού (·).

«μοιράζω»

«χωρίζω»

«τέμνω»

«κόβω σε …. ίσα μέρη»

«κατανέμω ισότιμα»

«πόσες φορές χωράει»

«πόσες συσκευασίες χρειάζονται….»

«πόσες ομάδες θα σχηματίσω» και πολλές άλλες για την πράξη της διαίρεσης(÷).

Όμως με αυτές τις «συνταγές» οι μαθητές οδηγούνται, όχι μόνο σε μια μηχανιστική ανάγνωση της εκφώνησης, αλλά και σε μια μηχανιστική μετάφραση αυτής, σε πράξεις μεταξύ των αριθμών. Αυτή η διαδικασία, το να προσπαθούν να αναγνωρίσουν μια συγκεκριμένη μεθοδολογία ή μια συγκεκριμένη λέξη «κλειδί», προφανώς δεν οδηγεί τους μαθητές σε μια ουσιαστική ανάγνωση και κατανόηση του «σεναρίου» της εκφώνησης με αποτέλεσμα να οδηγούνται σε λάθος αποτέλεσμα.

**II. Προβλήματα Β΄ Γυμνασίου.**

**Πρόβλημα 1.**

*« Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2€ την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26€ λιγότερα από την Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.»*

Στο πρόβλημα αυτό η λύση είναι η ακόλουθη: «$5 \cdot x=(x+2) \cdot 7-26$»

Οι μαθητές στην πλειοψηφία τους δίνουν λανθασμένα την εξής απάντηση: «$5 \cdot x-26=(x+2) \cdot 7$»

Αυτό συμβαίνει γιατί διαβάζουν με τη σειρά λέξη προς λέξη τα δεδομένα του προβλήματος στη φυσική γλώσσα και προσπαθούν να τα μεταφράσουν αντίστοιχα με την ίδια «γραμμική πορεία» στη συμβολική γραφή. Επίσης έχει δοθεί στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα, για να το λύσουν στο σπίτι.

**Πρόβλημα 2**

*«Ένας πατέρας είναι 44ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου; »*

Το πρόβλημα αυτό έχει την εξής λύση:

«$44+x = 3 \cdot (8+x)$ »

που στην πλειοψηφία τους οι μαθητές το επιλύουν σωστά, καθώς είναι λογικό ο πατέρας να έχει την τριπλάσια ηλικία του γιου του.

Μελετώντας αυτά τα δυο προβλήματα, οδηγούμεθα στην εξής σημαντική παρατήρηση. Υπάρχουν προβλήματα στα οποία η λύση είναι αναμενόμενη, όπως εκείνο με τις ηλικίες και άλλα που αυτό δεν ισχύει, όπως εκείνο με τα δυο παιδιά και τις ώρες που εργάζεται κάθε ένας.

Σε κανένα όμως κεφάλαιο του βιβλίου δεν επισημαίνεται αυτή η παρατήρηση, ότι δηλαδή αν τα αντικείμενα δεν είναι οικεία στους μαθητές και δεν ακολουθούν ορισμένα στερεότυπα, δυσκολεύουν τη διαδικασία δημιουργίας της αντίστοιχης μαθηματικής εξίσωσης που θα επιλύσει το πρόβλημα. Άλλο θέμα είναι η γνώση των γραμματικών κανόνων και η σωστή συντακτική ερμηνεία της κάθε πρότασης στη φυσική γλώσσα, έτσι ώστε να είναι σε θέση ο μαθητής να αντιλαμβάνεται για την κάθε λέξη χωριστά, πότε λειτουργεί σαν υποκείμενο, πότε σαν αντικείμενο, πότε σαν προσδιορισμός και ανάλογα να γίνεται η μετάβαση από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής. Μια μικρή παρερμηνεία στη σύνταξη ή άγνοια γραμματικής μπορεί να διαφοροποιήσει τελείως το αποτέλεσμα στη συμβολική γραφή.

Αυτό φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

«*Το επταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένου κατά 5»* που η σωστή του απάντηση είναι: «$7\cdot(x+5)$ »

Οι μαθητές συχνά απαντούν λανθασμένα ως εξής: «$7\cdot x+5$»

Αυτό συμβαίνει γιατί παραβλέπουν ότι η γενική πτώση του επιθέτου «αυξημένου» προσδιορίζει τη λέξη «αριθμού», με αποτέλεσμα να προσπερνούν αρχικά τη δημιουργία του αριθμού, δηλαδή το $(x+5)$.

**Πρόβλημα 3**

*«Η ισοτιμία του Ευρώ (€) έναντι του Δολαρίου (£) την 21/07/2003 ήταν 112(£) για 100(€). Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την τιμή σε (£) ενός προϊόντος ως συνάρτηση της τιμής του προϊόντος αυτού σε (€). »*

Σε αυτό το πρόβλημα η σωστή λύση είναι η εξής: «$y= 1{,}12\,x$»

Οι μαθητές συνήθως απαντούν εδώ: «$\frac{112}{100}=1{,}12$»

Η απάντησή τους αυτή, δηλώνει πως δεν έχουν κατανοήσει καθόλου την έννοια της συνάρτησης.

Παρατηρούμε πως δεν χρησιμοποιούν καθόλου μεταβλητές. Επίσης μπορεί να κάνουν και το εξής λάθος: «$x=\frac{112}{100}=1{,}12$» δηλαδή, χρησιμοποιούν έναν μόνο άγνωστο.

Συμπεράνουμε πως οι μαθητές οδηγούνται σε αυτά τα λάθη, γιατί η αναφορά στην έννοια της συνάρτησης στο εγχειρίδιο του σχολείου ξεκινά με την εξής δραστηριότητα:

**ΙΙΙ. Δραστηριότητα 1. (Σελ.55 Σχολικό Βιβλίο)**

«Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%. α) Δυο εργαζόμενοι έχουν

μισθούς 800€ και 1.100€ τον μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;
β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος ;»

Η σωστή λύση για την παραπάνω δραστηριότητα είναι:

α) Η αύξηση θα είναι :

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24€$

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1.100 = 3 \cdot 11 = 33€$

β) Η αύξηση θα είναι : $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03 \cdot x$ δηλαδή y= $0{,}03 \cdot x$

Παρατηρούμε ότι η επίλυση της Δραστηριότητας 1, γίνεται με τη βοήθεια της Πρακτικής Αριθμητικής και στη συνέχεια γίνεται αντιστοίχιση της λύσης αυτής, χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές x, y, δίνοντας έμφαση στο ότι η μεταβλητή y θα πρέπει να εξαρτάται από τη μεταβλητή x.

Δίνεται μια συγκεκριμένη μεθοδολογία που οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να την ακολουθούν προκειμένου να κατασκευάσουν μια συνάρτηση.

### 2.2. Γ΄ Γυμνασίου

**Ι. Παραδείγματα με εξισώσεις Δευτέρου Βαθμού.**

Οι μαθητές της Γ΄ τάξης του Γυμνασίου μαθαίνουν στην παράγραφο 2.2 «Εξισώσεις δευτέρου βαθμού» του $2^{ου}$ κεφαλαίου τον μηχανισμό επίλυσης μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

Στην παράγραφο 2.3 «Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού», καλούνται όμως να κατασκευάσουν εκείνοι την μαθηματική σχέση που περιγράφει η εκφώνηση και έπειτα με τη βοήθεια του «μηχανισμού επίλυσης της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού» να λύσουν την εξίσωση και να δώσουν σαν μια απάντηση μια αριθμητική τιμή.

Για παράδειγμα στο **πρόβλημα 1:** «*Το εμβαδόν μιας κολυμβητικής πισίνας είναι 400m$^2$. Να βρείτε τις διαστάσεις της, αν αυτές έχουν άθροισμα 41 m.*»

Η σωστή απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι: « x·(41−x) =400 »

Εδώ πολλοί μαθητές απαντούν λανθασμένα: « α$= 25, \beta = 16$ »

Από τη λανθασμένη απάντησή τους καταλαβαίνουμε πως δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι σκοπός του προβλήματος είναι να δημιουργήσουν μια έκφραση γραμμένη στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής, δηλαδή την «$x \cdot (41 - x) = 400$» και έπειτα να προχωρήσουν στη λύση της παραπάνω πρότασης και να βρουν τις τιμές α= $25\text{m}$ και β=16m.

Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι σε προβλήματα που δεν απαιτείται η κατασκευή μιας δύσκολης εξίσωσης 2ου βαθμού, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να απαντήσουν σωστά.

Όπως για παράδειγμα στο **πρόβλημα 2:** *«Ένας οικονομολόγος υπολόγισε ότι μια βιοτεχνία ρούχων, για να κατασκευάσει x πουκάμισα ξοδεύει* $\frac{1}{10} \cdot x^2 + 20 \cdot x + 500$ *€ Αν η βιοτεχνία πουλάει κάθε πουκάμισο 60 €, πόσα πουκάμισα πρέπει να πουλήσει, ώστε να κερδίσει 3.500,00 €.»*

Σε αυτό το πρόβλημα η σωστή απάντηση είναι:

«$60 \cdot x - (\frac{1}{10} \cdot x^2 + 20 \cdot x + 500) = 3.500{,}00$»

Εύκολα εδώ οι μαθητές δημιουργούν την παραπάνω εξίσωση, έπειτα πραγματοποιούν σωστά τα βήματα του «μηχανισμού επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης» και προχωρούν άμεσα στη σωστή λύση.

**ΙΙ. Παραδείγματα με συστήματα**

**Εφαρμογή 1.**

*«Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών, δέχεται κέρματα των 50 λεπτών και του 1 €. Όταν ανοίχτηκε διαπιστώθηκε ότι περιείχε 126 κέρματα συνολκής αξίας 90€. Πόσα κέρματα υπήρχαν από κάθε είδος;»*

Στην παραπάνω εφαρμογή, η σωστή λύση είναι η εξής:

«$x + y = 126$

$0{,}50 \cdot x + 1 \cdot y = 90$»

Όμως οι περισσότεροι μαθητές κατασκευάζουν μόνο μια εξίσωση που θα δώσει τη λύση στο πρόβλημα. Για παράδειγμα, σαν απάντηση στην προηγούμενη εφαρμογή, συχνά δίνουν της εξής: «$x+y=126$». Δεν μπορούν να λύσουν την εφαρμογή, διότι έχουν δημιουργήσει μια εξίσωση, ενώ οι άγνωστοι είναι δυο.

Ένας λόγος που αυτό συμβαίνει μπορεί να είναι το γεγονός ότι όταν ξεκινάει η παράγραφος 3.3 «Άλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος» του σχολικού βιβλίου της Γ΄ τάξης Γυμνασίου, γίνεται εκτενής ανάλυση των δυο μεθοδολογιών επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, δηλαδή της μεθόδου «αντικατάστασης» και της μεθόδου «των αντιθέτων συντελεστών». Σε αυτή την παράγραφο όμως δεν γίνεται λόγος για την ύπαρξη των δυο σημειωτικών επιπέδων εκείνου της φυσικής γλώσσας και εκείνου της συμβολικής γραφής, ούτε για το πέρασμα από το ένα στο άλλο.

Θα πρέπει να επισημαίνεται στους μαθητές να διαβάζουν πολύ προσεκτικά την εκφώνηση και να προσέχουν ώστε κάθε έκφραση που τους δίνεται στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας να τη μεταφράζουν εξ΄ ολοκλήρου στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής. Κάθε έκφραση που περιγράφει μια σχέση μεταξύ δυο ποσοτήτων μπορεί να απαιτεί τη δική της μαθηματική εξίσωση. Έτσι αν περιγράφονται δυο διαφορετικές σχέσεις μπορεί να απαιτούνται δυο διαφορετικές μαθηματικές εξισώσεις.

Πιο συγκεκριμένα θα πρέπει να σκέφτονται ότι ο αριθμός των εξισώσεων θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των αγνώστων. Το ότι απλά δίνουν μια απάντηση μπορεί να ερμηνευτεί και με τη θεωρία του διδακτικού συμβολαίου (βλ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ σελ. 161 Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγγα Π., 1988)διότι πολλοί μαθητές αρκούνται δίνοντας μια μόνο απάντηση στον καθηγητή τους , που τους φαίνεται λογική και δεν μελετούν περισσότερο το ζητούμενο της εκφώνησης.

## 2.3. Α΄ Λυκείου

**Πρόβλημα 1: (Άλγεβρα, σελ.66 Σχολικό Βιβλίο)**

*«Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης»*

Σε αυτό το πρόβλημα η σωστή απάντηση είναι: «$|2{,}37 - D| \leq 0.005$»

Αντί όμως αυτής της απάντησης, οι μαθητές συχνά απαντούν «D−2.37=0.005.

Αυτό συμβαίνει γιατί πρώτον: δεν έχουν συνειδητοποιήσει, πως για να δηλώσουμε τη λέξη «απόσταση» θα πρέπει να χρησιμοποιήσομε το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Είναι μια έννοια που διδάσκεται από το Γυμνάσιο, ωστόσο οι μαθητές δεν δείχνουν να την έχουν κατανοήσει.

Δεύτερον: Δεν δίνουν καθόλου σημασία στην έκφραση «το πολύ» που θα πρέπει να αναπαρασταθεί με το σύμβολο «$\leq$», στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής.

Όμοια περίπου είναι τα λάθη τους, όταν αναφέρονται οι εκφράσεις «το λιγότερο», τουλάχιστον», «το ελάχιστον», «το μέγιστο». Αυτό συμβαίνει γιατί δεν έχουν κατανοήσει πως ακόμη και μια λέξη στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας , μπορεί να προκαλέσει μεγάλη αλλαγή και αντί για εξίσωση, να χρειαστεί ανίσωση να αναπαραστήσει την έκφραση στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής.

**Πρόβλημα 2**

*«Δυο φίλοι έκαναν συλλογή από γραμματόσημα. Αν ο ένας χαρίσει στον άλλο 7 γραμματόσημα, τότε ο πρώτος θα έχει τα διπλάσια από ότι έχει ο δεύτερος. »*

Εδώ η σωστή απάντηση είναι: «x+7 $= 2 \cdot (y - 7)$»

Όμως οι μαθητές δίνουν συνήθως την εξής λανθασμένη απάντηση: «x−7 $= 2 \cdot y$»

Παρατηρούμε δηλαδή πως σχεδόν πάντα αφαιρούν τα γραμματόσημα από το πρώτο παιδί, αλλά συνήθως λησμονούν να τα προσθέσουν στο δεύτερο. Ακόμη μπορεί να αφαιρέσουν γραμματόσημα από το δεύτερο παιδί και όχι από το πρώτο. Αυτό το λάθος συνάδει και με το συμπέρασμα της έρευνας (βλ. σελ.291 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ: Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγγα Π., 1988) διότι πολλοί μαθητές συνηθίζουν να γράφουν τη συμβολική αναπαράσταση με την ίδια σειρά που διαβάζουν την εκφώνηση. Έτσι ενώ παρατηρούν τη λέξη «χαρίσει» που αυτόματα τη συνδέουν με τη πράξη της αφαίρεσης ($-$) δεν κατανοούν σε βάθος το νόημά της, ότι αυτά που θα χαρίσει ο ένας θα τα πάρει ο άλλος, άρα κρύβεται και η πράξη της πρόσθεσης (+).

**Πρόβλημα 3**

*«Μια κοινωνία βακτηριδίων διπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 3 βακτηρίδια, πόσα βακτηρίδια θα υπάρχουν ύστερα από 12 ώρες;»*

Πολλοί μαθητές απαντούν λανθασμένα:

«$\beta = 2 \cdot 3 + 12$»

αντί της σωστής απάντησης:

«$\alpha_{13} = 3 \cdot 2^{12}$»

Δίνουν αυτή τη λανθασμένη απάντηση γιατί όπως είπαμε και προηγουμένως μεταφράζουν τη πρόταση στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής με την ίδια σειρά που τους δίδεται στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας. Προσπαθούν κάθε λέξη να την αντιστοιχίσουν σε ένα μαθηματικό σύμβολο και τοποθετούν ακόμη και τους αριθμούς ακριβώς με τη σειρά που τους δίδονται. Το παραπάνω πρόβλημα λύνεται με τη βοήθεια της Γεωμετρικής Προόδου, μιας μεθοδολογίας που διδάσκεται στην Α΄ Λυκείου. Οι μαθητές όμως σπάνια ή σχεδόν καθόλου την εφαρμόζουν.

## 2.4. Β΄ Λυκείου

**Πρόβλημα 1: (Άλγεβρα, σελ.59, Σχολικό βιβλίο)**

*«Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι 1mm/sec. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.»*

Συνήθως οι μαθητές δίδουν την εξής λανθασμένη απάντηση: «$\frac{1mm}{1cec}$»

Αντί της σωστής απάντησης: «$\frac{2 \cdot \pi}{3.600} \cdot \rho = 1mm$»

Αυτό γιατί προσπαθούν απλά να δώσουν μια απάντηση χωρίς να σκεφθούν σε βάθος όλες τις πληροφορίες που τους δίδονται στην εκφώνηση και να οδηγηθούν στην αντιστοιχία της συμβολικής γραφής.

Εδώ θα πρέπει να σκεφθούν ότι ο λεπτοδείκτης εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο μιας (1) ώρας ή 3.600 δευτερολέπτων (sec). Επομένως σε 1sec διαγράφει γωνία $\frac{2\pi}{3.600}$rad. Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι ίσο με «$\rho$» τότε σύμφωνα με τον τύπο «S$= \alpha \cdot \rho$» το άκρο του λεπτοδείκτη σε 1sec θα διαγράψει τόξο μήκους «$\frac{2 \cdot \pi}{3.600} \cdot \rho$». Για αυτό το λόγο η μαθηματική σχέση που περιγράφει το παραπάνω πρόβλημα είναι η «$\frac{2 \cdot \pi}{3.600} \cdot \rho = 1mm$».

Εδώ πρέπει επίσης να σχολιάσουμε ότι, δεν υπάρχει αντίστοιχη εφαρμογή στο σχολικό εγχειρίδιο, που οι μαθητές θα μπορούσαν να μελετήσουν προκειμένου να κατανοούν τέτοιου είδους προβλήματα.

**Πρόβλημα 2: (Άλγεβρα, σελ.172, Σχολικό βιβλίο)**

*«Ένας πωλητής αυτοκινήτων βεβαιώνει τους πελάτες του ότι η αξία ενός αυτοκινήτου 40.000€ ελαττώνεται κατά 15% το χρόνο στα πρώτα 6 χρόνια από την πώλησή του. Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου μέσα στα 6 χρόνια. »*

Οι μαθητές δίδουν την εξής λανθασμένη απάντηση: «x$= 40.000 - \frac{15}{100}$»

Αντί της σωστής: «$T_t = 40 \cdot (0.85)^t$, $t \leq 6$»

Παρατηρούμε λοιπόν πως οι μαθητές παρουσιάζουν τεράστια δυσκολία στην κατασκευή συνάρτησης και ακόμη περισσότερη στη δημιουργία εκθετικής συνάρτησης.

Πολλοί δεν έχουν καταλάβει καν την έννοια της συνάρτησης, αφού δεν χρησιμοποιούν καθόλου μεταβλητές, αλλά προσπαθούν να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα είτε χρησιμοποιώντας έναν μόνο άγνωστο είτε χρησιμοποιώντας μόνο αριθμούς.

Επίσης παρατηρούμε ότι μπορεί να έχουν μεγάλη ευχέρεια στο να λύνουν εκθετικές εξισώσεις, δεν έχουν όμως καθόλου στο να τις κατασκευάζουν, γεγονός που μας επιβεβαιώνει για ακόμη μια φορά τη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο να κατανοούν τα διαφορετικά σημειωτικά επίπεδα στα οποία βρίσκονται και να έχουν την ικανότητα να περνούν από το ένα στο άλλο με άνεση όποτε αυτό απαιτείται.

### 2.5. Γενικές Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Από το πέρασμά μου σαν μαθήτρια από τη βαθμίδα της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, αλλά και από τη μικρή μου εμπειρία διδάσκοντας Μαθηματικά σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης από Α΄ Γυμνασίου έως και Γ΄ Λυκείου τα τέσσερα τελευταία χρόνια, διαπίστωσα ότι το θέμα «Αναπαραστάσεις» και πώς αυτό αποτυπώνεται στα διάφορα σημειωτικά επίπεδα, δεν περιλαμβάνεται στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών της ύλης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευσης και ως εκ τούτου δεν διδάσκεται στο ωρολόγιο πρόγραμμα των Μαθηματικών.

Οι μαθητές όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, δυσκολεύονται αρκετά στην μετάβαση από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο, συγκεκριμένα εδώ από αυτό της φυσικής γλώσσας σε αυτό της συμβολικής γραφής και για το αντίστροφο ακόμη περισσότερο. Αυτό συμβαίνει γιατί συχνά αντιλαμβάνονται τη συμβολική γραφή ως μία καινούρια γλώσσα στην οποία είναι αναγκασμένοι να μεταφράζουν τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας.

Οι εκπαιδευτικοί χειρίζονται με ευκολία, θα λέγαμε, τη συμβολική γραφή τόσο σε επίπεδο συντακτικό όσο και σημασιολογικό και μεταβαίνουν εύκολα, από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο, χωρίς ουσιαστικές απώλειες σε χαρακτηριστικά και ιδιότητες, όταν πρόκειται οι ίδιοι να λύσουν ένα πρόβλημα. Όμως ταυτόχρονα αρκετοί από αυτούς παρουσιάζουν μεγάλη αδυναμία στο να παρουσιάσουν με τη χρήση αναπαράστασης ένα πρόβλημα στους μαθητές τους, για να μπορέσουν αυτοί να ανταποκριθούν, να το κατανοήσουν και να το λύσουν με επιτυχία. Υπάρχει έλλειμμα ως προς τη συγκεκριμένη διδακτική ενότητα.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μεταδίδονται μονομερώς από τους εκπαιδευτικούς συγκεκριμένες μηχανιστικές μέθοδοι, οι οποίες θα πρέπει απλώς να εφαρμόζονται από τους μαθητές χωρίς την ύπαρξη εναλλακτικών μεθόδων λύσης. Το χαρακτηριστικό αυτό οδηγεί στην απουσία της ευέλικτης μαθηματικής σκέψης από την πλευρά των μαθητών και της ανακάλυψης προσωπικών μεθόδων που θα νοηματοδοτούν και τη χρήση αναπαραστάσεων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Αυτή η ελλιπής κατανόηση, μερίδας εκπαιδευτικών, σε αυτή τη μαθηματική περιοχή, μάλλον οφείλεται στο ότι δεν έχουν λάβει τα απαραίτητα εφόδια, από τις σχολές αποφοίτησής τους, μια και τα μαθήματα ανάλογου περιεχομένου, αποτελούν μαθήματα επιλογής στα διάφορα τμήματα της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΠΑΛΑΙΟΤΕΡΕΣ ΕΡΕΥΝΕΣ

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση της δικής μας έρευνας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά σε διάφορες έρευνες από τη διεθνή βιβλιογραφία και μια διερεύνηση σε παρόμοιες επιστημονικές εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί σε διάφορα εκπαιδευτικά ιδρύματα της Δευτεροβάθμιας και Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης.

Στη διεθνή βιβλιογραφία έχει μελετηθεί ο ρόλος των αναπαραστάσεων και το πέρασμα από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο από αρκετούς ερευνητές και έχουν καταγραφεί οι απόψεις και τα συμπεράσματά τους.

Οι (Lesh et al, 1987) εξέτασαν το ρόλο των αναπαραστάσεων στη μάθηση των μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις μεταφράσεις από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και στους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο σύστημα, όπως έχουμε αναφέρει και στο 1ο Κεφάλαιο της εργασίας μας. Οι ίδιοι ερευνητές διαπίστωσαν όπως επίσης έχουμε προαναφέρει στο ίδιο κεφάλαιο, δυσκολίες μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, καθώς οι μετασχηματισμοί μέσα στο ίδιο σύστημα αποτελούν σημαντικούς παράγοντες, οι οποίοι επηρεάζουν τόσο τη μάθηση των μαθηματικών όσο και την επίδοση των μαθητών στην επίλυση προβλήματος.

Οι (Mayer & Hegarty, 1996) περιγράφοντας τα στάδια από τα οποία περνά η επίλυση ενός προβλήματος τονίζουν τη σημασία των αναπαραστάσεων στη διαδικασία αυτή.

Ο (Duval, 1987) αναφέρει: Όσο κι αν το πέρασμα από το ένα επίπεδο στο άλλο, φαίνεται φυσικό ώστε να χαρακτηρίζεται ως φυσική ερμηνεία, για μερικές περιπτώσεις, στα μαθηματικά αποτελεί μια από τις σημαντικότερες δυσκολίες, επίλυσης μαθηματικού προβλήματος.

Οι αναπαραστάσεις έχει αποδειχθεί ότι μπορούν να λειτουργήσουν ως εργαλείο για τη μάθηση των Μαθηματικών (Billman, 1999), (Stufflebeam, 1999). Ωστόσο οι απλές αναπαραστάσεις, όπως έχουν υποδείξει αρκετοί ερευνητές, δεν είναι δυνατόν από μόνες τους να βοηθήσουν στην κατανόηση των Μαθηματικών. Σημαντικό ρόλο παίζουν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, αλλά και η κατάλληλη επεξήγηση και ερμηνεία που συνοδεύει μια αναπαράσταση.

Οι (Lowrie, Diezmann, 2005) αναφέρουν ότι οι μη αυθόρμητες αναπαραστάσεις, δηλαδή εκείνες που υπάρχουν στα εγχειρίδια και χρησιμοποιούνται κατά τη διδασκαλία απαιτούν αποκωδικοποίηση. Οι μαθητές χρειάζεται να διδαχθούν τον τρόπο «ανάγνωσης» μιας αναπαράστασης, ώστε να μπορέσουν να τις δημιουργήσουν και οι ίδιοι στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων (Roth, 2002).

Παρακάτω παραθέτουμε δύο εργασίες, για τις οποίες δεν υπάρχει συγκεκριμένο δείγμα επάνω στο οποίο έγινε η έρευνα, αλλά βασίζονται στα αποτελέσματα άλλων ερευνών.

Στη διπλωματική εργασία «**Το νόημα και η σημασία των συμβόλων στα μαθηματικά. Ιστορική εξέλιξη και σύγχρονη διδακτική πρακτική**.», που πραγματοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αθηνών και στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, το 2007, από τον **Δημήτρη Γιαννόπουλο**, με επιβλέποντα Καθηγητή τον κ. **Ευστάθιος Γιαννακούλιας, Αναπλ. Καθηγητής** δεν υπάρχει συγκεκριμένο δείγμα για την έρευνα και σκοπό έχει να παρουσιάσει την παιδαγωγική πρακτική του μαθηματικού συμβολισμού και να αναδείξει τη δύναμη που κρύβουν τα σύμβολα στα μαθηματικά, σε τομείς όπως η εξέλιξη των ίδιων των μαθηματικών, η χρήση και η διδασκαλία τους.

Η δύναμη αυτή εμφανίζεται κυρίως στη σχέση που συνδέει το σύμβολο με το νόημα που περιέχει, την έννοια που αναπαριστά και τη διαδικασία την οποία «υπηρετεί» προσδίδοντάς της λειτουργικότητα και αποτελεσματικότητα. Τα συμπεράσματα σε αυτή την εργασία δείχνουν ότι ο μαθηματικός συμβολισμός είναι ένα ισχυρό εργαλείο επικοινωνίας σε κάθε μαθηματική συνδιάλεξη. Συμπερασματικά επίσης μας λένε ότι, οι διδάσκοντες χειρίζονται με ευκολία το συμβολισμό τόσο σε επίπεδο συντακτικό όσο και σημασιολογικό, ενώ μεταβαίνουν μέσω των συμβόλων από το λειτουργικό στάδιο μιας ιδέας στο δομικό, χωρίς ουσιαστικές απώλειες σε χαρακτηριστικά και ιδιότητες.

Αντίθετα, οι μαθητές συχνά αντιλαμβάνονται το μαθηματικό συμβολισμό ως μία καινούρια γλώσσα στην οποία είναι αναγκασμένοι να μεταφράζουν τις εκφράσεις της φυσικής γλώσσας και αντίστροφα. Η μάθηση του νέου συμβολισμού για αυτούς, είναι μία δύσκολη και περίπλοκη διαδικασία, που απαιτεί αφαιρετικό τρόπο σκέψης και αποπλαισίωση των συμβολικών εκφράσεων. Η καλή γνώση του μαθηματικού συμβολισμού, βοηθάει για μία επιτυχημένη μάθηση, ενώ η ανεπαρκής γνώση αυτού, οδηγεί σε ένα μειωμένο επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών καθιστώντας τον μαθηματικό συμβολισμό ένα απαραίτητο υποστηρικτικό εργαλείο για τα περαιτέρω στάδια της βασικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στη διπλωματική εργασία «**Μαθηματική γλώσσα και φυσική γλώσσα στην τάξη των μαθηματικών**» που πραγματοποιήθηκε στο Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο και στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, από τον **Παναγιώτη Ασημάκη** στην Αθήνα τον Οκτώβριο του 2015, με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. **Παναγιώτη Σπύρου, Αναπληρωτή Καθηγητή,** με στόχο να αναγνωρισθούν οι σχέσεις αλληλεπίδρασης μεταξύ καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας, σύμφωνα με (Pimm, 1994) στη φυσική γλώσσα υπάρχουν συμβατικά δύο βασικοί δίαυλοι επικοινωνίας, η ομιλία και η γραφή. Μία δυσκολία που αντιμετωπίζουν όλοι οι καθηγητές των μαθηματικών είναι το πώς θα διευκολυνθεί η μετακίνηση των μαθητών τους από την κυρίως άτυπη ομιλούμενη γλώσσα, με την οποία είναι εξοικειωμένοι, στην επίσημη γραπτή γλώσσα, η οποία θεωρείται συχνά ως το σήμα κατατεθέν της μαθηματικής δραστηριότητας.

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας λένε ότι, οι κύριες δυσκολίες που συναντώνται στα μαθηματικά, έχουν σχέση με το λεξιλόγιο, τη σύνταξη, τη φυσική γλώσσα, λάθος ανάγνωση σε παρερμηνείες σε λεκτικά προβλήματα και την επικράτηση της δομής πάνω από το περιεχόμενο. Όλα αυτά συμβάλουν στο να δυσκολεύονται αρκετά οι μαθητές στο πέρασμα από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο.

### 3.1. Έρευνες στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Στην πτυχιακή εργασία, «**Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου**», του **Σωφρόνη Βαμβακούση**, που πραγματοποιήθηκε στο Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών και στο Πανεπιστήμιο Κύπρου, το Σεπτέμβρη του 2014, στην Αθήνα, με επιβλέπουσα καθηγήτρια την κ. **Δέσποινα Πόταρη**, επιχειρείται η μελέτη του επιπέδου κατανόησης των εννοιών της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου από μαθητές της Γ΄ γυμνασίου.

Για τον σκοπό της έρευνας κατασκευάστηκαν ερωτηματολόγια και δόθηκαν στους μαθητές στις αρχές του Μάη, στο τέλος ουσιαστικά της σχολικής χρονιάς. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, είναι μαθητές ενός Γυμνασίου της Ανατολικής Αττικής. Η διδασκαλία του μαθήματος διεξάγονταν σύμφωνα με το Επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα και τα σχολικά εγχειρίδια. Κρίθηκε σκόπιμο κάποιοι μαθητές να δώσουν συνεντεύξεις για να διευκρινιστούν κάποιες ασάφειες καθώς και κάποιοι άλλοι, που οι απαντήσεις τους στα ερωτηματολόγια παρουσίαζαν ερευνητικό ενδιαφέρον, να ερωτηθούν περαιτέρω. Οι απαντήσεις των μαθητών και οι συνεντεύξεις τους αποτέλεσαν το υλικό επεξεργασίας και εξαγωγής συμπερασμάτων.

Από τις απαντήσεις των μαθητών γραπτές ή προφορικές εξήχθησαν μάλλον αρνητικά συμπεράσματα όσον αφορά στην κατανόηση εκ μέρους των μαθητών των εννοιών της μεταβλητής, του αγνώστου και της παραμέτρου. Οι μαθητές δυσκολεύονται να μεταφράσουν από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική, να σχηματίσουν τις εξισώσεις, τις ανισώσεις ή τα συστήματα που προκύπτουν από προβλήματα.

Μία από τις πηγές προβλημάτων στην άλγεβρα αποτελεί η ιδιαιτερότητα της φυσικής γλώσσας που χρησιμοποιείται για την διατύπωση των αλγεβρικών εννοιών. Ως διαδοχικοί αριθμοί συνήθως εκλαμβάνονται από τους μαθητές οι α, β, γ ή χ, ψ, ω, δηλαδή η διαδοχή τους στο αλφάβητο. Το φαινόμενο αυτό έχει διαπιστωθεί σε ξένες και ελληνικές έρευνες.

Φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν μία περιορισμένη οπτική για τις αλγεβρικές παραστάσεις και χρησιμοποιούν αριθμητικά μοντέλα περισσότερο παρά αλγεβρικά, οπότε χάνουν το νόημα που αποδίδεται στις μεταβλητές και τα ‘’γραμματικά’’ σύμβολα.

Ως προς την επίλυση προβλήματος (Problem solving) οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν τρία επίπεδα δυσκολίας:

1. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές έχουν να μεταφράσουν το κείμενο του προβλήματος από την καθομιλουμένη στην αλγεβρική γλώσσα.
2. Το δεύτερο επίπεδο δυσκολίας είναι να επιλύσουν την εξίσωση που προκύπτει.
3. Στο τρίτο επίπεδο πρέπει να ερμηνεύσουν την απάντηση που έδωσαν από την επίλυση της εξίσωσης και να επανέλθουν στο πρόβλημα που μελετούν.

Η δυσκολία των μαθητών όσον αφορά στο πρώτο επίπεδο πηγάζει από την έμφαση που δίνεται, στο Δημοτικό σχολείο, στις αριθμητικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος και όχι στην αναπαράσταση της επίλυσης. Το άλμα από την Αριθμητική στην Άλγεβρα είναι μεγάλο αφού οι μαθητές πρέπει να επικεντρωθούν στη δομή και όχι στις πράξεις που απαιτούνται. Η δυσκολία αυτή αποτυπώθηκε στις απαντήσεις των μαθητών.

Η δυσκολία των μαθητών να επιλύουν προβλήματα είναι μεγαλύτερη από τη δυσκολία που έχουν να επιλύουν εξισώσεις, ανισώσεις ή συστήματα χωρίς αναφορά σε κείμενο. Η διδακτική εμπειρία φαίνεται να ενισχύει την άποψη κάποιων ερευνητών ότι τα προβλήματα των μαθητών δεν είναι τόσο στο διαδικαστικό κομμάτι όσο στην εννοιολογική κατανόηση.

Στην εργασία, «**Ένα σημαντικό βήμα στη διδασκαλία των μαθηματικών: Το πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή**», που πραγματοποιήθηκε στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., τον Απρίλιο του 2018 και εργάστηκαν οι φοιτήτριες **Κυρούση Άννα-Μαρία, Ντάγκα Ελένη** με επιβλέπουσα καθηγήτρια την κα. **Κ. Παυλοπούλου,** τέθηκε σαν στόχος της έρευνας η μελέτη της εξοικείωσης που είχαν οι μαθητές στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και με σκοπό την παιδαγωγική αξιοποίηση των αποτελεσμάτων.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 52 μαθητές της Β' Γυμνασίου και 40 μαθητές της Α' Λυκείου. Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε 20 ερωτήματα. Δόθηκαν αναπαραστάσεις στο σύστημα της φυσικής γλώσσας και ζητήθηκε η αντίστοιχη αναπαράσταση στο σύστημα της συμβολικής γραφής. Στα δύο ερωτηματολόγια υπήρχαν κάποιες κοινές ερωτήσεις προκειμένου να υπάρξουν πιο σαφή αποτελέσματα συγκριτικά για τις δύο τάξεις.

Από τις απαντήσεις φάνηκε πως το ερωτηματολόγιό δεν αντιμετωπίστηκε ως εύκολο από τους μαθητές της Β' Γυμνασίου, μια που οι μισές σχεδόν ερωτήσεις απαντήθηκαν λανθασμένα από τα 4/5 των μαθητών. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι κανένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις.

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου έδειξαν την αδυναμία που έχουν οι μαθητές της Β' Γυμνασίου στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου αντιμετώπισαν με σχετική ευκολία το ερωτηματολόγιο αυτό. Παρόλα αυτά, αξιοσημείωτο επίσης είναι ότι κανένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις. Από τα αποτελέσματα της Α΄ Λυκείου, παρατηρήθηκε μεγαλύτερο ποσοστό σωστών απαντήσεων σε σχέση με τη Β' Γυμνασίου πράγμα το οποίο αποδεικνύει την ωριμότητα καθώς και την εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση μεταβλητών και συμβόλων.

Συμπεράσματα-Προοπτικές:

Ως επακόλουθο των αναλύσεων της έρευνας προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Τα ποσοστά επιτυχίας φθίνουν σε μεγάλο βαθμό όταν δεν παρουσιάζεται εννοιολογική συνάφεια στην μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή.

2. Δεν παρατηρούνται σημαντικές δυσκολίες όταν οι εκφωνήσεις αποτελούνται από απλές εκφράσεις, αριθμούς και σύμβολα βασικών πράξεων.
3. Με τη χρήση παρενθέσεων και δύο μεταβλητών η εμφάνιση λαθών είναι υψηλότερη.
4. Μεγάλη διαφορά στην απόδοση παρατηρείται όταν υπάρχουν δύο ερωτήματα με διαφορετική διατύπωση.
5. Το πλήθος των σωστών απαντήσεων των μαθητών του γυμνασίου είναι εμφανώς μικρότερο από το αντίστοιχο πλήθος των σωστών απαντήσεων των μαθητών του λυκείου. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την πιο ώριμη σκέψη και πείρα που απέκτησαν οι μαθητές στο πέρασμα των σχολικών ετών.

Στην παραπάνω έρευνα φάνηκε από τη μία η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή, και από την άλλη δόθηκε η δυνατότητα της αξιολόγησης της δυσκολίας κάθε εκφώνησης. Συγχρόνως, δόθηκε η ευκαιρία του προβληματισμού πάνω στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να προετοιμάζεται μια διδασκαλία πάνω στην εκμάθηση της ανάγνωσης μιας εκφώνησης από τους μαθητές, με σκοπό να αντιληφθούν τις ιδιαιτερότητες του περάσματος από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και κατά συνέπεια να διευκολυνθούν στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος.

### 3.2. Έρευνες στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση

Στην τριτοβάθμια εκπαίδευση δεν έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες για τη μελέτη του συγκεκριμένου θέματος. Από τις λιγοστές που έχουν δημοσιευθεί παραθέτουμε κάποια στοιχεία τα οποία θεωρούμε ότι θα συνδράμουν στη δική μας έρευνα.

Στην διπλωματική εργασία: **« Η αναπαραστασιακή ικανότητα των υποψηφίων δασκάλων, αναπαραστώντας προβλήματα κλασμάτων »**, της **Παπαϊωάννου Αικατερίνης**, που πραγματοποιήθηκε στο Πανεπιστήμιο Πατρών, με επιβλέπουσα καθηγήτρια την κα. **Κολέζα Ευγενία**, το Νοέμβριο του 2014, με συμμετέχοντες στην έρευνα 100 φοιτητές, οι οποίοι φοιτούσαν στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής

Εκπαίδευσης της Πάτρας, το ακαδημαϊκό έτος 2012-2013, σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε ένα σύνολο έξι (6) ερωτήσεων – προβλημάτων τα οποία είχαν σκοπό να εξετάσουν την αναπαραστατική ικανότητα των φοιτητών που θα συμμετείχαν στην έρευνα.

Τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα παρουσίαζαν τρία κοινά χαρακτηριστικά.

1. επιλύονται με μία μόνο πράξη
2. εμπεριέχουν τα (δυο) ίδια αριθμητικά δεδομένα
3. εε κάθε πρόβλημα ζητείται η λύση και η αναπαράστασή της

Τα προβλήματα σχεδιάστηκαν με τρόπο τέτοιο ώστε η λύση τους να δίνεται κάθε φορά με τη χρήση διαφορετικής αλγοριθμικής πράξης. Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα:

Λύστε και αναπαραστήστε:

1. Ο Τάσος κόβει 12 μέτρα σύρμα σε κομμάτια των ¾. Πόσα κομμάτια θα πάρει;
2. Είχα 12 κεϊκάκια και έφαγα τα ¾. Πόσα έφαγα;
3. Είχα 12 κιλά παγωτό στο ψυγείο. Το βράδυ σέρβιρα τα ¾ του κιλού σε φίλους. Πόσο μου έμεινε;
4. Η κυρία Άννα επιστρέφει με τα παιδιά της από το σχολείο. Τα παιδιά κουράστηκαν και την ρωτάνε: «πόσο έχουμε ακόμα; » Τους απαντάει ότι έχουνε ακόμα να διανύσουν 12 χιλιόμετρα που είναι τα 3/4 της συνολικής διαδρομής. Πόσο απέχει το σχολείο των παιδιών από το σπίτι τους;
5. Το εμβαδόν του κήπου μου είναι τα ¾ του στρέμματος. Τον χώρισα σε 12 παρτέρια. Ποιο είναι το μέγεθος του κάθε παρτεριού;
6. Η Κάτια αγόρασε ¾ του μέτρου ύφασμα και έδωσε 12 ευρώ. Πόσο κόστιζε το μέτρο;

Ιδιαίτερα σημαντικά ήταν τα αποτελέσματα της έρευνας τα οποία δείχνουν ότι ένας μικρός αριθμός φοιτητών είναι σε θέση να χρησιμοποιεί σωστά μια αναπαράσταση προκειμένου να επιλύσει ένα πρόβλημα. Πολλοί φοιτητές δυσκολεύονται στο να δημιουργήσουν μια σωστή αναπαράσταση καθώς και να στο να την ερμηνεύσουν σωστά. Οι περισσότεροι από αυτούς, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα, όταν τους δίνεται ένα πρόβλημα εμμένουν μόνο στην αναπαράσταση των δεδομένων της εκφώνησης του προβλήματος και δεν είναι σε θέση να την χρησιμοποιήσουν σωστά ώστε να οδηγηθούν στην επίλυσή του.

Σημαντικό είναι το γεγονός ότι ένα ποσοστό των φοιτητών της τάξεως 30% δεν μπορεί να κάνει καμία αναπαράσταση ή κάνει λανθασμένη αναπαράσταση, η οποία δεν έχει καμία σχέση με τα δεδομένα του προβλήματος, και αυτό τους οδηγεί και σε λάθος απάντηση ή αδυναμία επίλυσης του προβλήματος. Αρκετοί φοιτητές (περίπου το 25%) άλλωστε φαίνεται ότι για να καταφέρουν να δημιουργήσουν μια αναπαράσταση, έλυσαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας κάποια αλγοριθμική διαδικασία, και με βάση το αλγεβρικό αποτέλεσμα έκαναν την αναπαράσταση. Δεν ήταν σε θέση να αναπαραστήσουν παρά μόνο το αλγεβρικό αποτέλεσμα.

Στη διπλωματική εργασία*:* **«Συναρτήσεις: Ιστορική αναδρομή και μία έρευνα για την αντίληψη και κατανόησή τους από φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.»**, του **Αντωνόπουλου Ματθαίου**, που πραγματοποιήθηκε στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., το Νοέμβρη του 2010, με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. **Κραββαρίτη Δημήτρη** και συμμετέχοντες στην έρευνα 95 φοιτητές της Σχολής, κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο βασισμένο στην έννοια της συνάρτησης και δόθηκε στους φοιτητές.

Η έρευνα αυτή διεξήχθη με στόχο να μελετηθεί ο τρόπος αντίληψης και ο βαθμός κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης από τους φοιτητές. Στην πρώτη ερώτηση ζητήθηκε από τους φοιτητές τι τους έρχεται στο νου με τη λέξη ‘‘συνάρτηση’’. Η δεύτερη ερώτηση ήταν αν έχουν συναντήσει συναρτήσεις σε θέματα των σπουδών τους και αν θυμούνται κάποιες εφαρμογές. Στην τρίτη ζητήθηκε να δοθούν δύο παραδείγματα σχέσεων: ένα παράδειγμα συνάρτησης και ένα μη συνάρτησης. Στην τέταρτη ερώτηση ζητήθηκε, να απαντήσουν τι είναι τελικά γι’ αυτούς μια συνάρτηση.

Μελετώντας τα αποτελέσματα που δόθηκαν σε σημειωτικά επίπεδα φυσικής γλώσσας σε συμβολική γραφή ή και αντίστροφα φάνηκε ότι οι φοιτητές έχουν συναντήσει σε πολλά θέματα των σπουδών τους συναρτήσεις με πολλές εφαρμογές κυρίως στα Μαθηματικά, τη Φυσική, τη Μηχανική αλλά και τα Οικονομικά και τον Προγραμματισμό, φάνηκε όμως επίσης ότι ένα σημαντικό μέρος των φοιτητών έχει μια μηχανιστική αντίληψη της συνάρτησης και δεν είναι σε θέση να μεταβαίνουν με ορθόδοξο τρόπο από το ένα σημειωτικό επίπεδο αυτό π.χ. της συμβολικής γραφής σε αυτό της φυσικής γλώσσας.

Στη διπλωματική εργασία: «**Ανάλυση λαθών στη Γραμμική Άλγεβρα**», της **Κατσαμπίρη Θεοδώρας,** που πραγματοποιήθηκε στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π. το 2012, με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. **Φελλούρη Ανάργυρο, Αν. Καθηγητή Ε.Μ.Π.**, με δείγμα πρωτοετείς φοιτητές της σχολής Πολιτικών Μηχανικών Ε.Μ.Π., είχε σαν στόχο την ποιοτική και ποσοτική ανίχνευση και ανάλυση λαθών ή σφαλμάτων στη Γραμμική Άλγεβρα. Η εργασία απαρτίζεται από 4 κεφάλαια.

1. Διανυσματικοί (ή Γραμμικοί) Χώροι
2. Γραμμικές απεικονίσεις και Πίνακες
3. Χαρακτηριστικά Μεγέθη
4. Λόγοι εμφάνισης των λαθών ή σφαλμάτων στη Γραμμική Άλγεβρα

Η έρευνα και η μελέτη των λαθών έγινε πάνω σε τρία προβλήματα, από τα τρία πρώτα κεφάλαια που προαναφέραμε, που αποτέλεσαν θέματα τελικών εξετάσεων στους Πολιτικούς Μηχανικούς του Ε.Μ.Π., τον Φεβρουάριο του 2012.

Τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας, για τη σημαντικότατη έννοια του διανύσματος, στη Γραμμική Άλγεβρα έδειξαν ότι οι διδάσκοντες χρησιμοποιούν μονομερώς την αλγεβρική αναπαράσταση του διανύσματος με αποτέλεσμα οι διδασκόμενοι να αποκτούν ελλιπή και μονομερή γνώση αυτής της έννοιας. Η αδυναμία τους να αντιληφθούν το διάνυσμα, ως ένα γεωμετρικό αντικείμενο δημιουργεί μια σειρά από παρανοήσεις και λάθη. Σε αυτή την έρευνα, τονίζεται ιδιαίτερα ότι το αναλυτικό πρόγραμμα θα πρέπει να καλλιεργεί στους μαθητές την ικανότητα:

α) να δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις, με στόχο να οργανώνουν, να κωδικοποιούν και να επικοινωνούν τις μαθηματικές τους ιδέες.

β) να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις με στόχο την κατανόηση και επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης.

γ) να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις στη μοντελοποίηση και ερμηνεία φυσικών, κοινωνικών και μαθηματικών φαινομένων.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος της παρούσας έρευνας είναι:

- Η μελέτη των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίζονται κατά την ανάγνωση – κατανόηση και εκφορά απλών και σύνθετων μαθηματικών εννοιών και μαθηματικών αντικειμένων, δοσμένων στη συμβολική γραφή, στο να αποδοθούν στη φυσική γλώσσα και αντίστροφα. Πιο συγκεκριμένα σκοπός είναι να εντοπιστούν και να μελετηθούν επίσης οι δυσκολίες και τα εμπόδια που εμφανίζονται, λεκτικά δοσμένων πληροφοριών μαθηματικών εννοιών και μαθηματικών αντικειμένων, κατά το στάδιο της μετάβασης «μετάφρασής» τους, σε συμβολική γραφή.
- Ποιες διδακτικές προσεγγίσεις απαιτούνται, που να λαμβάνουν υπόψη τους τη σημασία της γλώσσας για τη μάθηση των μαθηματικών, την τυπική τελειότητα, την ακρίβεια, τη συντομία, τη σχολαστικότητα, τη μονοσημαντότητα και αυστηρότητα των νοημάτων.
- Ποιες μέθοδοι διδακτικής πρέπει να εφαρμόζονται προκειμένου η μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο να μην αποτελεί δύσκολη διαδικασία στην επιστήμη των Μαθηματικών.

Για τους λόγους αυτούς συντάχθηκαν δύο ερωτηματολόγια τα οποία μοιράστηκαν σε μαθητές Γ΄ Λυκείου και σε φοιτητές Α΄ Έτους της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, τον Απρίλιο του 2016. Επιλέξαμε από τη μία την Γ΄ Τάξη του Λυκείου διότι οι μαθητές ήδη έχουν εξοικειωθεί σε έναν βαθμό με τη χρήση της μεταβλητής και την επίλυση ενός προβλήματος με τη βοήθεια μίας εξίσωσης, μίας ανίσωσης ή ενός συστήματος και έχουν έρθει σε μία αρχική επαφή με την έννοια και τις ιδιότητες των διανυσμάτων. Από την άλλη επιλέξαμε το Ά Έτος της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. γιατί οι φοιτητές που έχουν εισαχθεί σε αυτήν τη σχολή πιστεύουμε πως καλούνται να απαντήσουν με μεγαλύτερη ωριμότητα στα παραπάνω ζητήματα.

## 4.1. ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

### 4.1.1. Πλαίσιο Έρευνας Μαθητών

Το δείγμα της έρευνάς μας αποτελείται από 31 μαθητές της Γ' Τάξης του 1ου Γ.Ε.Λ. Αγίου Νικολάου του νομού Λασιθίου , από 31 μαθητές της Γ' Τάξης του 2ου Γ.Ε.Λ. Αγίου Νικολάου νομού Λασιθίου και από 19 μαθητές της Γ' Τάξης του Γ.Ε.Λ. Νεάπολης του νομού Λασιθίου. Οι απαντήσεις των 81 μαθητών στα ερωτηματολόγια αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό αυτής της μελέτης.

Μετά τη συμπλήρωση και την παράδοση των εντύπων συζητήσαμε σχετικά με το περιεχόμενο των ερωτήσεων. Με εντυπωσίασε το γεγονός ότι πριν προλάβω να δώσω τις απαραίτητες οδηγίες, δέχθηκα ερωτήσεις σχετικές με το αντικείμενο των σπουδών μου, τις δυσκολίες, την εξέλιξη ακόμη και την επαγγελματική αποκατάσταση. Εξηγήθηκα ότι πρέπει αρχικά να δώσουμε έμφαση στο θέμα των ερωτηματολογίων, να επικεντρωθούν με μεγάλη προσοχή στις επεξηγήσεις μου, έτσι ώστε να υπάρξει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα στις απαντήσεις τους και μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας αυτής θα έχουμε την ευκαιρία να συζητήσουμε σε ότι τους απασχολεί για τη συγκεκριμένη σχολή, αλλά και εφόσον εγώ γνωρίζω για να απαντήσω. Έτσι κι έγινε, οπότε στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας, δηλαδή 45 λεπτά ολοκληρώθηκε η διαδικασία. Παρατήρησα ότι οι περισσότεροι μαθητές ήταν αρκετά συγκεντρωμένοι και με ιδιαίτερο ενδιαφέρον ανταποκρίθηκαν στο συγκεκριμένο θέμα.
Στη συνέχεια, δηλαδή στη διάρκεια του διαλείμματος αλλά και λίγο από την επόμενη διδακτική ώρα συζητήσαμε για θέματα που προέκυψαν από το περιεχόμενο των ερωτήσεων. Μου εξέφρασαν τη διαπίστωση ότι δεν είχαν ξανασυναντήσει αυτή κάθε αυτή τη μεταφορά από τη μια γλώσσα στην άλλη. Παρά όλα αυτά ήταν χαρούμενοι γιατί διαπίστωσαν ότι είχαν τη δυνατότητα να απαντήσουν. Συνειδητοποίησαν πόσο σημαντικό είναι αυτό το πέρασμα από τη μια μορφή γραφής στην άλλη και συνεχώς είχαν την απορία αν πρέπει να δώσουν ένα τελικό αποτέλεσμα, μια τελική δηλαδή τιμή στο πρόβλημα ή αν έπρεπε μόνο να κάνουν τη μετάβαση. Με χαρά επίσης μου ανέφεραν ότι οι ερωτήσεις που έβλεπαν

μπροστά τους ήταν ιδιαίτερες και διαφορετικές σε σχέση με ότι είχαν μέχρι τώρα συναντήσει σε σχολικά εγχειρίδια και σχολικά βοηθήματα, ότι απαιτούσαν λογική σκέψη και κρίση για να απαντηθούν και όχι αυτή την τυπική και απόλυτη μαθηματική γνώση, ότι τους θύμιζαν λογικές συνεπαγωγές και ότι εμπεριείχαν αυτό που αγαπούν τα παιδιά που ασχολούνται ιδιαίτερα με τα μαθηματικά, δηλαδή το έξυπνο και τον γρίφο. Πρέπει να σημειώσουμε ότι έπειτα από αυτή την εκδήλωση ενδιαφέροντος και ενθουσιασμού των μαθητών, οι καθηγητές ενδιαφέρθηκαν αρχικά να ρίξουν μια γρήγορη ματιά στα ερωτηματολόγια και στη συνέχεια ζήτησαν να έχουν ένα δικό τους προκειμένου να το συμπληρώσουν. Εγώ με προθυμία ανταποκρίθηκα.

Από αρκετούς μαθητές δέχθηκα ερωτήσεις ως προς τα κριτήρια επιλογής του συγκεκριμένου θέματος για τη διπλωματική μου. Τους απάντησα λοιπόν ότι είχα παρακολουθήσει το μάθημα «Διδακτική των Μαθηματικών» με καθηγήτρια την Κ$^{α}$ Καλλιόπη Παυλοπούλου που συνεργαζόμαστε στην Διπλωματική μου εργασία και μου είχε προκαλέσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Μία αφορμή ακόμη ήταν η ενασχόλησή μου με μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών και η διαπίστωση της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν να στήσουν ένα πρόβλημα Μαθηματικών ξεκινώντας από το πολύ απλό «Δεδομένα – Ζητούμενα», η διαπίστωση δηλαδή της δυσκολίας της μετάφρασης της Ελληνικής γλώσσας σε μαθηματικούς συμβολισμούς.

Με το πέρας της συζήτησης οι μαθητές και οι καθηγητές μου ευχήθηκαν «Καλή συνέχεια» και με αγωνία αναμένουν τα αποτελέσματα των απαντήσεών τους.

### 4.1.2. Ερωτηματολόγιο Μαθητών Γ’ Λυκείου

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές περιλάμβανε 24 ερωτήματα. Τα πρώτα 15 ερωτήματα ήταν διατυπωμένα σε φυσική γλώσσα και ζητήθηκε από τους μαθητές η αντίστοιχη αναπαράσταση στη συμβολική γραφή. Τα επόμενα 9 ερωτήματα διατυπώθηκαν στη συμβολική γραφή και ζητήθηκε από τους μαθητές η μετάβαση σε φυσική γλώσσα.
Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν από ένα κάθε φορά και πριν αρχίσουν να απαντούν οι μαθητές διευκρινίστηκε ο σκοπός της έρευνας ενώ τους ζητήθηκε να μην αναφέρουν το όνομά τους ώστε το δείγμα να είναι ανώνυμο προκειμένου να αποφευχθεί πιθανή σύγχυση

και αμηχανία τους κατά τη διαδικασία συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Τονίστηκε επίσης ότι τα στοιχεία της έρευνας θα χρησιμοποιούνταν για τη συγκεκριμένη έρευνα και ότι οι απαντήσεις τους δεν είχαν σκοπό την αξιολόγησή τους.

Τα ερωτηματολόγια όπως ακριβώς δόθηκαν στους μαθητές παρουσιάζονται στα παραρτήματα 7.1 της παρούσας εργασίας.

### 4.1.3. Ποσοτική Ανάλυση

Στη συνέχεια, προς διευκόλυνση του αναγνώστη, παρουσιάζουμε τις είκοσι τέσσερις εκφράσεις στα δύο σημειωτικά επίπεδα (φυσική γλώσσα – συμβολική γραφή), με τη σειρά που δόθηκαν στους μαθητές, συνοδευόμενες από τις ενδεικτικές ορθές απαντήσεις στα αντίστοιχα σημειωτικά επίπεδα σε κάθε περίπτωση και τα ποσοστά επιτυχίας που συγκέντρωσε η καθεμία.

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** | **Ποσοστά Επιτυχίας** |
|---|---|---|
| 1) Υπάρχει αριθμός (α) που ανήκει στο σύνολο όλων των ακεραίων εκτός του μηδενός. | $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^*$ | 80% |
| 2) Οι θαμώνες (θ) ενός ξενοδοχειακού συγκροτήματος είναι δεκαπλάσιοι από το προσωπικό (π). | $\theta=10\cdot\pi$ | 89% |
| 3) Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων(x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω. | $(10x+2x)+27= 10\cdot 2x+x$ | 17% |
| 4) Να δοθεί το άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών (α). | $\alpha \in \mathbb{Z}$,<br>$\alpha, \alpha+1, \alpha+2$<br>$\alpha+\alpha+1+\alpha+2$ | 27% |
| 5) Σε ένα θέατρο πωλούνται φοιτητικά εισιτήρια (φ) των 12€ και κανονικά εισιτήρια (κ) των 16€. Από τα εισιτήρια που πουλήθηκαν εισπράχθηκαν 800€. | $12\cdot\phi + 16\cdot\kappa=800$ | 79% |
| 6) Σε ένα στρατόπεδο υπηρετούν τη θητεία τους εικοσαπλάσιοι στρατιώτες (σ) από τους αξιωματικούς (α) του στρατοπέδου. | $\sigma=20\cdot\alpha$ | 77% |
| 7) Σε ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής ο ζαχαροπλάστης παράγει πενταπλάσια ταρτάκια (τ) από παστάκια (π). | $\tau=5\cdot\pi$ | 72% |
| 8) Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n). | $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=50\cdot n$<br>$x_2+\ldots+x_{n-1}=45\cdot(n-2)$<br>$x_1+x_n=5\cdot n+90$ | 21% |
| 9) Ένας πατέρας έχει τριπλάσια ηλικία από την ηλικία(x) της κόρης του. Μετά από 7 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι κατά 13 χρόνια μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ηλικίας της κόρης του. Να εκφράσετε συμβολικά την παραπάνω πρόταση. | $3x+7=2(x+7)+13$ | 17% |

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** | Ποσοστά Επιτυχίας |
|---|---|---|
| 10) Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις. | $\begin{cases} x-2y=-4 \\ \mathrm{y}-\frac{2}{3}\mathrm{x}=-2 \end{cases}$ | 14% |
| 11) Τρία παιδία έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας(κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη(β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια(θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. | κ + β + θ = 30<br>κ-1=β-1=θ+2 | 33% |
| 12) Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; | Σx $\geq 8\cdot 100+(x-8)\cdot 70$ | 38% |
| 13) Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. | ν ∈ ℕ<br>$(\nu+1)^2 - \nu^2 = 2\cdot \nu+1$ | 26% |
| 14) Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. | $100\cdot x+15\succ 0, x\in N^*$<br>$S=(100\cdot x_1+15)$<br>$+(100\cdot x_2+15)+\dots$<br>$+(100\cdot x_{15}+15)\Leftrightarrow$<br>$S=25\cdot[4\cdot k+9], k\in N$ | 11% |
| 15) Ένα αεροπλάνο($U_1$) ταξιδεύοντας με αντίθετο άνεμο ($U_2$) διήνυσε την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων που ήταν 4.048 km σε 4,6 ώρες ενώ για την επιστροφή χρειάστηκε 4,4 ώρες. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα την παραπάνω πρόταση. | $\begin{cases} (U1-U2)\cdot 4{,}6=4.048 \\ (U1+U2)\cdot 4{,}4=4.048 \end{cases}$ | 30% |

| Συμβολική Γραφή | Φυσική Γλώσσα | Ποσοστά Επιτυχίας |
|---|---|---|
| 16) $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^*$ | Υπάρχει ακέραιος (α) διάφορος του μηδενός. | 89% |
| 17) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$<br>$\alpha, \beta=\alpha+1, \gamma=\alpha+2, \delta=\alpha+3$ | Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Οι α, β, γ, δ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί. | 48% |
| 18) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ | Μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. | 49% |
| 19) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2=-1$ | Δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους εάν και μόνο εάν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους $\lambda_1$, $\lambda_2$ είναι ίσο με το -1. | 47% |
| 20) $(\alpha-\beta)^3$ | Κύβος διαφοράς. | 58% |
| 21) $\alpha^3-\beta^3$ | Διαφορά κύβων. | 65% |
| 22) $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert=\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}, \beta \neq 0$ | Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους. Ο αριθμός που βρίσκεται στον παρονομαστή πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. | 52% |
| 23) $\lvert\alpha+\beta\rvert \leq \lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$ | Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίση ή μικρότερη από το άθροισμα των απολύτων τιμών των αριθμών αυτών. | 67% |
| 24) $\nu \in \mathbb{N}$<br>$(\nu+1)^2-\nu^2=2\nu+1$ | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. | 32% |

Στους επόμενους πίνακες, εκτός από τα ποσοστά επιτυχίας, παρουσιάζουμε αναλυτικά το πλήθος των απαντήσεων προσδιορίζοντας και τις αναπάντητες ερωτήσεις.

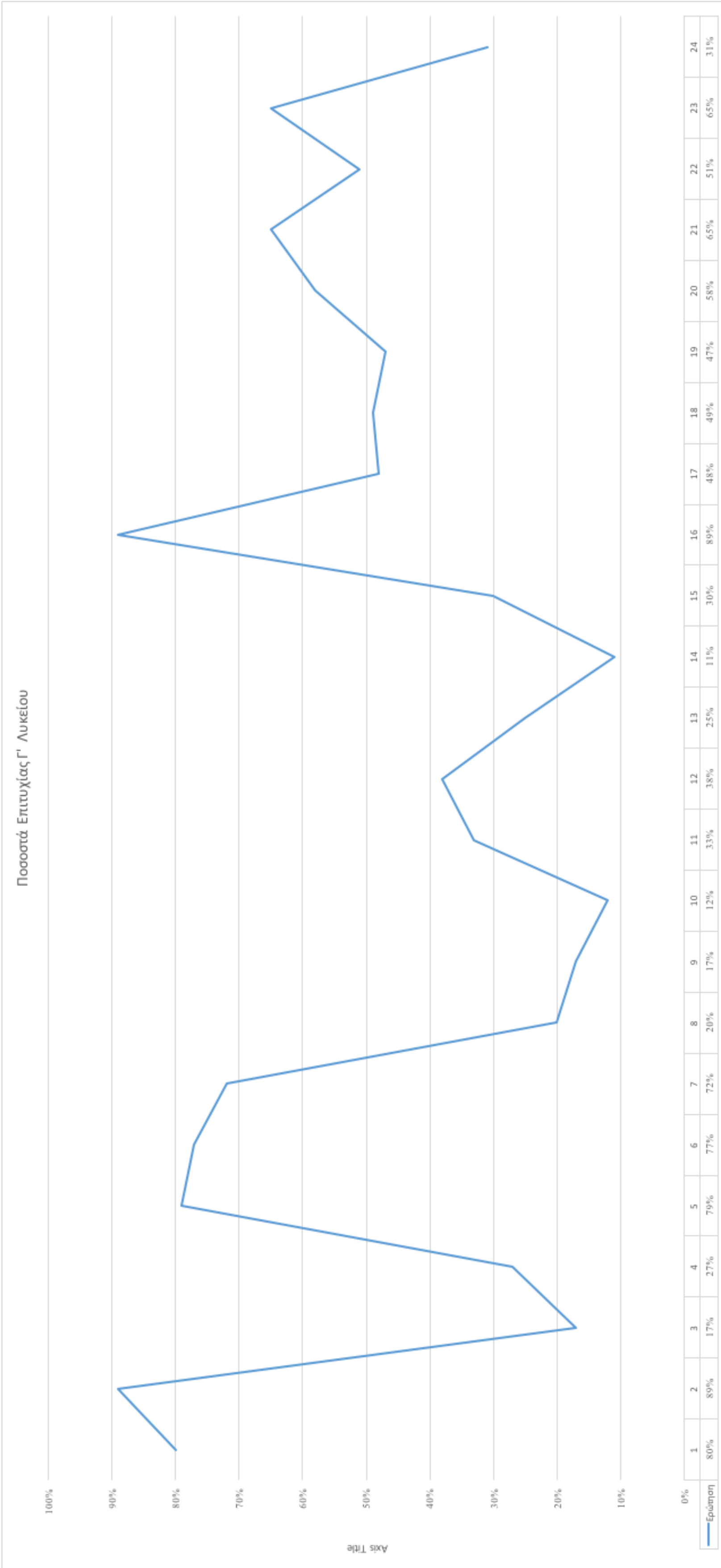
| **Ερώτηση Φ.Γ. (Γ' Λυκείου)** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ποσοστά Επιτυχίας** | 80% | 89% | 17% | 27% | 79% | 77% | 72% | 20% | 17% | 12% | 33% | 38% | 25% | 11% | 30% |
| **Σωστές Απαντήσεις** | 65 | 72 | 14 | 22 | 64 | 62 | 58 | 17 | 14 | 11 | 27 | 31 | 20 | 9 | 24 |
| **Λανθασμένες Απαντήσεις** | 16 | 7 | 27 | 44 | 9 | 15 | 20 | 27 | 55 | 56 | 45 | 30 | 53 | 19 | 22 |
| **Χωρίς Απάντηση** | 0 | 2 | 40 | 15 | 8 | 4 | 3 | 37 | 12 | 14 | 9 | 20 | 8 | 53 | 35 |

Αποτελέσματα μαθητών: ζητούμενο πέρασμα Φυσική Γλώσσα → Συμβολική Γραφή

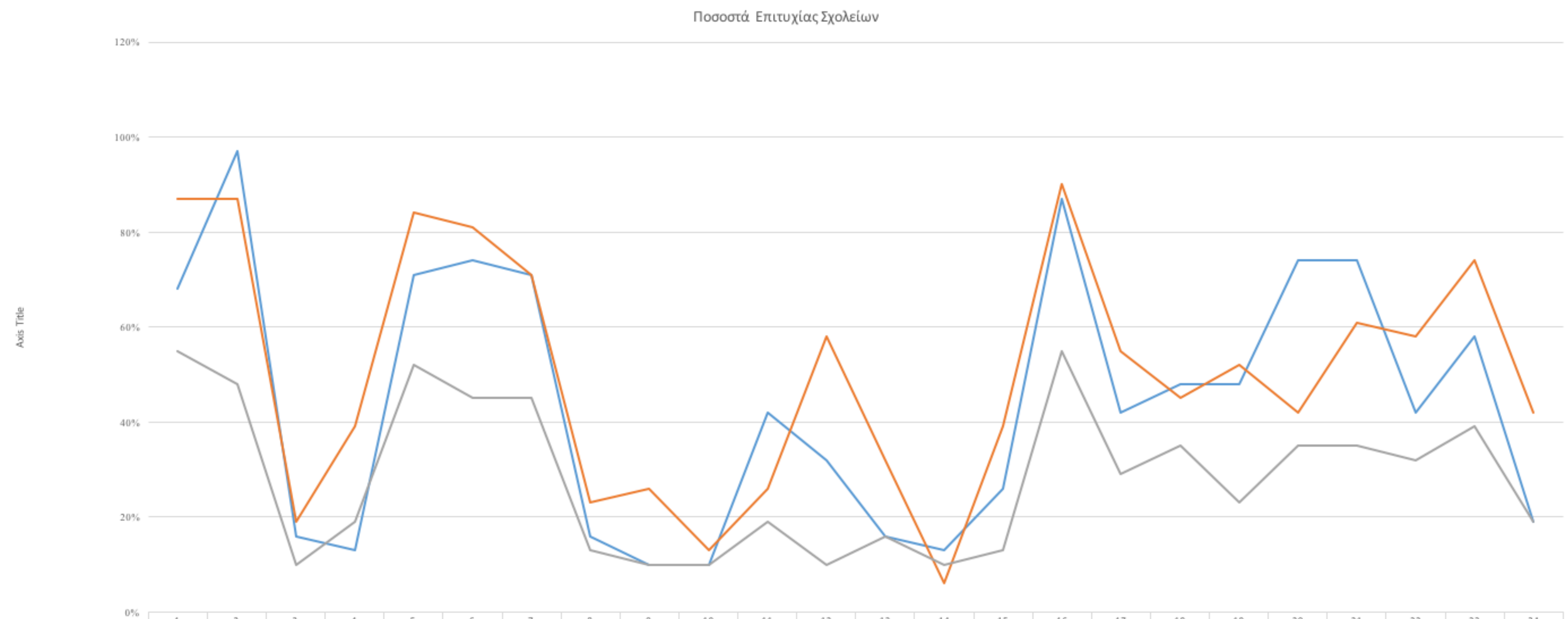
| **Ερώτηση Σ.Γ. (Γ' Λυκείου)** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ποσοστά Επιτυχίας** | 89% | 48% | 49% | 47% | 58% | 65% | 51% | 65% | 31% |
| **Σωστές Απαντήσεις** | 72 | 39 | 40 | 38 | 47 | 53 | 41 | 53 | 25 |
| **Λανθασμένες Απαντήσεις** | 8 | 35 | 27 | 33 | 26 | 14 | 23 | 15 | 34 |
| **Χωρίς Απάντηση** | 1 | 7 | 14 | 10 | 8 | 14 | 17 | 13 | 22 |

Αποτελέσματα μαθητών: ζητούμενο πέρασμα Συμβολική Γραφή → Φυσική Γλώσσα

Στη συνέχεια, ακολουθεί το διάγραμμα με τα ποσοστά επιτυχίας ανά ερώτημα, συνολικά από όλα τα σχολεία, καθώς και ένα άλλο όπου φαίνεται ξεχωριστά η επίδοση του κάθε σχολείου.



Ποσοστά Επιτυχίας Γ' Λυκείου
Axis Title
0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%
100%
Ερώτηση
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
80% 89% 17% 27% 79% 77% 72% 20% 17% 12% 33% 38% 25% 11% 30% 89% 48% 49% 47% 58% 65% 51% 65% 31%




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ο ΓΕΛ Αγίου Νικολάου | 68% | 97% | 16% | 13% | 71% | 74% | 71% | 16% | 10% | 10% | 42% | 32% | 16% | 13% | 26% | 87% | 42% | 48% | 48% | 74% | 74% | 42% | 58% | 19% |
| 2ο Γελ Αγίου Νικολάου | 87% | 87% | 19% | 39% | 84% | 81% | 71% | 23% | 26% | 13% | 26% | 58% | 32% | 6% | 39% | 90% | 55% | 45% | 52% | 42% | 61% | 58% | 74% | 42% |
| ΓΕΛ Νεάπολης | 55% | 48% | 10% | 19% | 52% | 45% | 45% | 13% | 10% | 10% | 19% | 10% | 16% | 10% | 13% | 55% | 29% | 35% | 23% | 35% | 35% | 32% | 39% | 19% |

Το ερωτηματολόγιό μας δείχνει να μην αντιμετωπίστηκε ως εύκολο από τους μαθητές της Γ' Τάξης του Λυκείου, μια που παραπάνω από τις μισές ερωτήσεις απαντήθηκαν λανθασμένα από τα 3/5 των μαθητών.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι υπήρχαν τριών βαθμών δυσκολίας ερωτήσεις: εύκολες, μέτριες και δύσκολες. Αξιοσημείωτο επίσης είναι ότι ούτε ένας μαθητής δεν απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις.

### 4.1.4. Ποιοτική Ανάλυση

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους μαθητές της Γ' Τάξης του Λυκείου, ανέδειξαν ορισμένες αδυναμίες τους στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αναλυτικά τις λανθασμένες απαντήσεις που εμφανίζονται με μεγαλύτερη συχνότητα.

### I. Ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή

### A. Σύγχυση της συμβολικής αναπαράστασης ενός αριθμού και της αξίας του αριθμού.

Σε πολλά ερωτηματολόγια παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές δεν γνώριζαν πώς να κατασκευάσουν τη σχέση που θα αναπαριστούσε την αξία ενός αριθμού.

- **Ερώτηση 3**

| Ερώτηση 3 | Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων(x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω. |
|---|---|
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | (10x+2x)+27= 10·2x+x |
| Ποσοστό επιτυχίας | **17%** |

Σε αυτήν την ερώτηση οι 4 από τους 27 που απάντησαν λανθασμένα (αναφερόμαστε στους μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνονται εκείνοι που άφησαν αναπάντητη την ερώτηση) έδωσαν την εξής απάντηση:

«*είναι το 36, αφού 63-36=27*».

Εδώ βλέπουμε πως οι μαθητές **<u>επικεντρώθηκαν στο να λύσουν το πρόβλημα</u>**, δεν κατάλαβαν δηλαδή ότι εμείς απλά τους ζητούσαμε να μεταφράσουν τις εκφράσεις που τους δώσαμε στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας. Εμείς θέλαμε μία έκφραση που θα δινόταν σε συμβολική μορφή, όχι μία λύση δηλαδή μία τελική απάντηση.

Ενώ οι 7 από τους 27 έδωσαν την εξής λανθασμένη απάντηση:

« *y=2x*
*yx = xy+27*»

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η πλειοψηφία των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών παρουσιάζει μια **<u>σύγχυση μεταξύ της συμβολικής αναπαράστασης ενός αριθμού και της αξίας του αριθμού</u>**. Πιο συγκεκριμένα:

Η συμβολική αναπαράσταση του αριθμού της εκφώνησής μας είναι:

| | |
|---|---|
| x | 2x |

Η αξία του είναι: x _10+2x_1, ενώ οι μαθητές εκείνοι θεωρούν ότι η αξία του είναι η εξής: x_2x, παραλείποντας τον πολλαπλασιασμό επί 10 και την πράξη της πρόσθεσης.

Η μετάφραση της έκφρασης: «*...κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό.*» φαίνεται να μην τους δημιούργησε εμπόδιο.

Οι 3 από τους 27 που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν την εξής απάντηση:

« *yx ο αριθμός*
*y=10x*
*xy > yx+27* »

Βλέπουμε δηλαδή ότι **συνδύασαν τη σχέση των δύο αριθμών με το σύμβολο της ανίσωσης " > " αντί για το σύμβολο " = " της εξίσωσης. Η έκφραση που προφανώς τους μπέρδεψε ήταν η εξής: «*...κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό.*».**

Μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η ερώτηση 3 δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές αφού 40 από τους 81 δηλαδή σχεδόν το 50% του δείγματος δεν απάντησε καθόλου στην ερώτηση.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε μερικά γραπτά των υπόλοιπων 13 μαθητών που απάντησαν λανθασμένα. Στον πίνακα αυτόν θα δούμε τα λάθη των μαθητών που είχαν κάποιο ενδιαφέρον, παραλείπουμε τα λάθη που δεν είχαν αντίστοιχο ενδιαφέρον.

| Μεμονωμένες λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 3 | |
|---|---|
| Γραπτό 16 | x = μονάδες κ' y = δεκάδες<br>x = 2y y;x=27x;y |
| Γραπτό 25 | y=2x<br>3x |
| Γραπτό 29 | x/1 = 2(x/10) |
| Γραπτό 34 | $x \in (9,99)$ |
| Γραπτό 59 | N(y) = 2x+10(x) |

- **Ερώτηση 14**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 14 | Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $100 \cdot x + 15 >), x \in N^*$<br>$S = (100 \cdot x_1 + 15)$<br>$+(100 \cdot x_2 + 15)$<br>$+ ... + (100 \cdot x_{15} + 15)$<br>$S = 25 \cdot [4(x_1 + x_2 + ... + x_{15}) + 9]$ |
| Ποσοστό Επιτυχίας | **11%** |

Σε αυτήν την ερώτηση δεν είχαμε κοινές λανθασμένες απαντήσεις από τους 19 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα. Είναι όμως η ερώτηση με τις περισσότερες μηδενικές απαντήσεις. Βλέπουμε ότι δεν απάντησαν οι 53 από τους 89 μαθητές που αποτελούσαν το δείγμα της έρευνάς μας. Σε αυτό οφείλεται και το πολύ χαμηλό ποσοστό επιτυχίας που είχε, μόλις 11%.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε μερικά γραπτά των 19 μαθητών που απάντησαν λανθασμένα. Στον πίνακα αυτόν θα δούμε τα λάθη των μαθητών που είχαν κάποιο ενδιαφέρον, παραλείπουμε τα λάθη που δεν είχαν αντίστοιχο ενδιαφέρον.

| Μεμονωμένες λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 14 | |
|---|---|
| Γραπτό 23 | Αν $x_1, x_2, x_3 ... x_{15} \in \mathbb{Z}$<br>Κ' $x_1 - 15 = x_2 + a_1 - 15 ... = x_{15} + a_{14} - 15$<br>Τότε $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{15} = k \cdot 25$ |
| Γραπτό 27 | $S = 2 \cdot 25$ |

| | |
|---|---|
| Γραπτό 50 | $A \cdot 15 + AB \cdot 15 + ... + V \cdot 15 = 25x$ |
| Γραπτό 59 | $15 \succ \mathbb{Z}$<br>$\mathbb{S}^{*}25$ |
| Γραπτό 63 | $S = V \cdot 5$ |
| Γραπτό 65 | $S = 25(x \cdot 15) \cdot 15$ όπου<br>$x \geq 1$ |

**B. Μη αξιοποίηση όλων των δοσμένων πληροφοριών σε φυσική γλώσσα**

- **Ερώτηση 9**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 9 | Ένας πατέρας έχει τριπλάσια ηλικία από την ηλικία (x) της κόρης του. Μετά από 7 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι κατά 13 χρόνια μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ηλικίας της κόρης του. Να εκφράσετε συμβολικά την παραπάνω πρόταση. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | 3x+7=2(x+7)+13 |
| Ποσοστό επιτυχίας | **17%** |

Στην ερώτηση αυτή οι 30 από τους 55 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση: «*7 + 3x = 13 + 2x*».

Εδώ βλέπουμε ότι **δεν έχουν αντιληφθεί πως η εκφώνηση περιγράφει δύο διαφορετικές χρονικές καταστάσεις. Περιγράφει αρχικά το «τώρα» δηλαδή ότι ο πατέρας έχει τριπλάσια ηλικία από την κόρη του και το «μετά», δηλαδή ότι μετά από επτά χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι κατά 13 χρόνια μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ηλικίας της κόρης του.** Θα πρέπει λοιπόν να δημιουργηθούν δύο διαφορετικές μαθηματικές εξισώσεις που θα περιγράφουν αντίστοιχα τις δύο αυτές χρονικές καταστάσεις. Έπειτα θα μπορούσαν να τις ενώσουν και σε μία εξίσωση.

Παρακάτω παρατίθενται μερικές από τις λανθασμένες απαντήσεις των υπολοίπων 25 μαθητών.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 18 | π=3x<br>7π=13˙2x |
| Γραπτό 31 | Ηπ=Ηκ˙3<br>Ηπ+7-13>2˙Ηκ |
| Γραπτό 36 | y+x=26x |
| Γραπτό 73 | 3x+7=13˙2x |
| Γραπτό 79 | $x^3$ |

- **Ερώτηση 8**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 8 | Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n). |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=50\cdot n$ (1)<br>$x_2+\ldots+x_{n-1}=45\cdot(n-2)$ (2)<br>$x_1+x_n=5\cdot n+90$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **21%** |

Σε αυτήν την ερώτηση οι 6 από τους 27 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

«

$$\frac{x_1+x_n}{n}=5$$

»

Παρατηρούμε δηλαδή ότι  οι μαθητές **<u>μπερδεύτηκαν και αντί αρχικά να αφαιρέσουν τον  μικρότερο και τον μεγαλύτερο βαθμό των μαθημάτων από το σύνολο των βαθμών προσπάθησαν να δημιουργήσουν άμεσα μία μαθηματική σχέση που θα έδινε ένα αποτέλεσμα.</u>** Παρατηρούμε δηλαδή πως δεν δίνουν ιδιαίτερο βάρος και σημασία στο να περάσουν στο σύνολό τους τις πληροφορίες από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής. Δημιούργησαν απλά μία σχέση με τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο βαθμό, η οποία θα έδινε την τελική απάντηση στο πρόβλημα και δεν έλαβαν υπόψη ότι ξεκινώντας από λάθος «μετάφραση» της εκφώνησης, δηλαδή με λανθασμένες μαθηματικές σχέσεις, είναι σίγουρο ότι η τελική απάντηση δε θα ήταν σωστή.

Όμοια οι 7 από τους από τους 27 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

«

$$\frac{x_1 + x_n}{n} = 50$$

»

**<u>Πάλι οι μαθητές βιάστηκαν να δώσουν μία μαθηματική σχέση που θα έδινε τη σωστή απάντηση. Δηλαδή δεν προσπάθησαν να μεταφράσουν στο σύνολό τους τις πληροφορίες που τους δόθηκαν στην εκφώνηση και ούτε έκαναν προσεκτικά το πέρασμα με αποτέλεσμα να δώσουν λάθος μαθηματική εξίσωση.</u>**

Ενώ οι 4 από τους 27 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν την απάντηση :

«

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = 50$$

, όπου

$$x_2 = x_1 + 1$$

$$x_3 = x_1 + 2$$

$$\frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}}{n-2} = 45$$

»

Εδώ βλέπουμε πως οι μαθητές χειρίστηκαν αρκετά καλά τη μετάφραση της εκφώνησης που τους δόθηκε, από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής. Απλά **δεν επεξεργάστηκαν στο σύνολό τους τις πληροφορίες που τους δόθηκαν στη φυσική γλώσσα, με αποτέλεσμα να μεταφράσουν ένα μέρος των πληροφοριών αυτών.** Ένα σημαντικό ακόμη λάθος στο οποίο υπέπεσαν οι μαθητές είναι ο τρόπος που προσπάθησαν να δηλώσουν ότι οι βαθμοί είναι διαφορετικοί «$x_2 = x_1 + 1$, $x_3 = x_1 + 2$».
Πιο συγκεκριμένα στην ερώτηση 8 δεν μετέφρασαν την πρόταση «Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου ($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων (n).», για την οποία έπρεπε να κάνουν την εξής μετάφραση: «$x_1+x_n=5\cdot n+90$ ».

Υπήρχαν λάθη τα οποία ήταν μεμονωμένα στο κάθε γραπτό. Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε μερικά γραπτά των υπόλοιπων 10 μαθητών που απάντησαν λανθασμένα. Στον πίνακα αυτόν θα δούμε τα λάθη των μαθητών που είχαν κάποιο ενδιαφέρον, παραλείπουμε τα λάθη που δεν είχαν αντίστοιχο ενδιαφέρον.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 6 | $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=50$<br>$\frac{x_1+x_n}{2}=50$ |
| Γραπτό 18 | $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=50$<br>$\frac{x_1+x_n}{2}=50$<br>$x_1 \geq 0$<br>$x_n \leq 100$ |
| Γραπτό 34 | $x_1 \prec x_n, B \in (0,100)$<br>$\beta_1 \neq \beta_2 \neq ... \neq \beta_\nu$<br>$\mathrm{MO}\beta = 50$<br>$\frac{\beta_\nu}{\mathrm{A}-x_1-x_n}=45$ |

| | |
|---|---|
| Γραπτό 56 | $0 \prec \beta \prec 100$<br>$\text{M.O.} = \frac{\Sigma_\nu}{\nu} = 50$<br><br>$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_\nu$<br>$\text{M.O.}' = \frac{\Sigma_{\nu-1}}{\nu - 1} = 45$<br>$\Sigma_{\nu-1} = \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{\nu-1}$ |
| Γραπτό 73 | $\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} = 5$ |
| Γραπτό 79 | $\mu\alpha\theta\eta\mu.(n)$<br>$0 - 100, \text{M.O.} = 50$<br>$\text{A}\pi o\rho.\mu\iota\kappa\rho.\kappa'\mu\varepsilon\gamma.\acute{\alpha}\rho\alpha \text{M.O.} = 45$<br>$x_1 \succ x_n$ |

- **Ερώτηση 12**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 12 | Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\Sigma x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **38%** |

Όμοια και σε αυτήν την ερώτηση οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν επιπόλαια και δεν αξιοποίησαν όλες τις πληροφορίες που τους δόθηκαν στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας. Αυτό ερμηνεύεται και με τη θεωρία του διδακτικού συμβολαίου(βλ. ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ σελ. 161 Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγγα Π., 1988) διότι πολλοί μαθητές αρκούνται δίνοντας μια μόνο απάντηση στον καθηγητή τους, αυτή που τους φαίνεται λογική, και δεν μελετούν περισσότερο το ζητούμενο της εκφώνησης.

- **Ερώτηση 10**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 10 | Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ \mathrm{y} - \frac{2}{3}\mathrm{x} = -2 \end{cases}$ |
| Ποσοστό Επιτυχίας | **12%** |

Στην 10 ερώτηση οι 14 από τους 56 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

«*κ-4 =2μ*
*μ+6=* $\frac{2}{3}$*(κ+6)*».

Εδώ βλέπουμε ότι **έχουν δημιουργήσει σωστά τη μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την σχέση των ηλικιών του Κώστα και της Μαρίας στο «μετά» δηλαδή έπειτα από έξι χρόνια. Όμως δεν έχουν πραγματοποιήσει σωστά την πρώτη σχέση, δηλαδή στο «πριν» , πριν από 4 χρόνια. Με αποτέλεσμα οι απαντήσεις τους να θεωρηθούν λανθασμένες.** Παρατηρούμε λοιπόν πως δεν ήταν τόσο προσεκτικοί όσο θα έπρεπε ώστε να πραγματοποιήσουν ολοκηρωμένα το πέρασμα από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής.

Οι 5 από τους 56 μαθητές απάντησαν:

«*κ-4=2(μ-6)*
$\frac{2}{3}$*(κ-4+6)=μ-4+6*
$\frac{2}{3}$*(κ+2)=μ+2*».

Αυτό φανερώνει ότι **<u>υπάρχει σύγχυση με τις δύο διαφορετικές χρονικές καταστάσεις που περιγράφονται στην εκφώνηση.</u>** Περιγράφει αρχικά το «πριν» δηλαδή ότι «Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία.» και το «μετά», ότι «Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα.». Θα έπρεπε λοιπόν να δημιουργήσουν δύο διαφορετικές εξισώσεις που θα περιέγραφαν αντίστοιχα τις δύο αυτές χρονικές καταστάσεις.

Επίσης οι 5 από τους 56 μαθητές έδωσαν την εξής λανθασμένη απάντηση:

«*K=2M*
$\frac{2}{3}$*K=M*».

Όμοια με προηγουμένως οι μαθητές **<u>δεν έχουν αντιληφθεί πως οι μαθηματικές εξισώσεις που δόθηκαν στον συμβολικό λόγο θα έπρεπε να περιγράφουν το «πριν 4 έτη» και το «έπειτα από 6 έτη». Πιο συγκεκριμένα αυτοί οι 5 μαθητές βλέπουμε πως λανθασμένα θεωρούν ότι οι σχέσεις που δίδονται για τις ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αφορούν στο «τώρα».</u>**

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε μερικά γραπτά των υπόλοιπων 32 μαθητών που απάντησαν λανθασμένα. Στον πίνακα αυτόν θα δούμε τα λάθη των μαθητών που είχαν κάποιο ενδιαφέρον, παραλείπουμε τα λάθη που δεν είχαν αντίστοιχο ενδιαφέρον.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 11 | K=2M<br>K=$\frac{2}{3}$M |
| Γραπτό 41 | K-4=2(M-4)<br>M=$\frac{2}{3}$(K+6) |
| Γραπτό 63 | K-4=2(M-4)<br>K+2=<br>M'=2/3(K+2) |
| Γραπτό 71 | $M = \frac{4K}{2}$ |

| | |
|---|---|
| Γραπτό 72 | $K = 2M$ πριν από 4 χρόνια <br> $M + 10 = \frac{2}{3}K \Rightarrow$ <br> $M + 10 = \frac{2}{3} \cdot 2M \Rightarrow$ <br> $M/3 = 10 \Rightarrow M = 30$ και $K = 60$ |
| Γραπτό 79 | $K^2 + \frac{2}{3}$ |

- **Ερώτηση 11**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 11 | Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας(κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη(β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια(θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | κ + β + θ = 30 <br> κ-1=β-1=θ+2 |
| Ποσοστό επιτυχίας | **33%** |

Στην ερώτηση 11 οι 6 από τους 45 μαθητές που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

«*κ + β + ϑ = 30*»

Ενώ οι 5 από τους 45 μαθητές έδωσαν την απάντηση:

«

$$\kappa + \beta + \theta = 30$$

$$\left.\begin{array}{l} \kappa - 3 = 10 \\ \beta - 4 = 10 \\ \theta - 2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa - 3 = \beta - 4 = \theta - 2 = 10$$

»

Αυτό φανερώνει ότι **<u>δεν έχουν αντιληφθεί πως η εκφώνηση περιγράφει δύο διαφορετικές χρονικές καταστάσεις.</u>** Περιγράφει αρχικά το «τώρα» δηλαδή ότι τα παιδιά έχουν τώρα μαζί 30 μπάλες και το «μετά». Θα πρέπει λοιπόν να δημιουργηθούν δύο διαφορετικές εξισώσεις που θα περιγράφουν αντίστοιχα τις δύο αυτές χρονικές καταστάσεις.

Στον παρακάτω πίνακα παραθέτουμε μερικά γραπτά των υπόλοιπων 34 μαθητών που απάντησαν λανθασμένα. Στον πίνακα αυτόν θα δούμε τα λάθη των μαθητών που είχαν κάποιο ενδιαφέρον, παραλείπουμε τα λάθη που δεν είχαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 4 | $\kappa-3 \Rightarrow \beta+3$<br>$\beta-4 \Rightarrow \theta+4$<br>$\theta+2 \Rightarrow \beta+2$<br>τέτοιο ώστε<br>$\kappa=\beta=\theta$ |
| Γραπτό 9 , 11 | 10 μπάλες το κάθε παιδί<br>Άρα K=9<br>B=13-4=9<br>Θ=12 |
| Γραπτό 17, 22, 29 | K+B+Θ=30<br>(K-3)+(B-4)+(Θ+2)<br>Άρα<br>30=K+2=B+3=Θ+4<br>30=K+1=B+2=Θ+3 |
| Γραπτό 25 | $\frac{(\mathrm{B}+3)+(\Theta+4)+(\mathrm{K}+2)}{3}=30$ |
| Γραπτό 28 | $\mathrm{B}=x+3$<br>$\Theta=\psi+4$<br>$\mathrm{K}=z+2$<br>$\mathrm{B}=\Theta=\mathrm{K}$ |
| Γραπτό 37,38, 62 | (Κώστας 11 μπάλες)+3<br>(Βασίλης 11 μπάλες)+4<br>(Θάλεια 8 μπάλες)<br>K+B+Θ=30 |

| | |
|---|---|
| Γραπτό 39 | $K \rightarrow 3(B)$<br>$B \rightarrow 4(\Theta)$<br>$\Theta \rightarrow 2(K)$<br>$\frac{30}{3} = 10 \mu\pi\acute{\alpha}\lambda\varepsilon\varsigma$ |
| Γραπτό 78 | 30=3K+4B+2Θ |

- **Εννοιολογική Συνάφεια - Αντιστροφή του αντικειμένου αναφοράς**

Στα ερωτήματα όπου υπήρχε εννοιολογική συνάφεια μεταξύ της φυσικής γλώσσας και της συμβολικής γραφής η μετάβαση ήταν πιο εύκολη όπως για παράδειγμα « Οι θαμώνες (θ) ενός ξενοδοχειακού συγκροτήματος είναι δεκαπλάσιοι από το προσωπικό (π).» (ερώτηση 2, ποσοστό επιτυχίας **89%** ).

Οι θαμώνες (θ) ενός ξενοδοχειακού ... είναι δεκαπλάσιοι από το προσωπικό (π).

↓ ↓ ↓ ↓

$\theta \quad = \quad 10 \quad \pi$

Σε αντίθεση με την εκφώνηση « Σε ένα στρατόπεδο υπηρετούν τη θητεία τους εικοσαπλάσιοι στρατιώτες (σ) από τους αξιωματικούς (α) του στρατοπέδου. » (ερώτηση 6, ποσοστό επιτυχίας **77%** ), στην οποία η μετάβαση είναι πιο δύσκολη.

Σε ένα ... εικοσαπλάσιοι στρατιώτες (σ) από τους αξιωματικούς (α) ...

↘ ↙ ↙

σ = 20 α

- **Αναμενόμενο Αποτέλεσμα**

Είναι γεγονός ότι όταν η σχέση δύο μεγεθών προκύπτει με βάση τη λογική οι μαθητές διευκολύνονται.

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από τα ποσοστά των δύο ερωτήσεων.

« **Ερώτηση 2:** Οι θαμώνες (θ) ενός ξενοδοχειακού συγκροτήματος είναι δεκαπλάσιοι από το προσωπικό (π).» και

« **Ερώτηση 7:** Σε ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής ο ζαχαροπλάστης παράγει πενταπλάσια ταρτάκια (τ) από παστάκια (π).», όπου το ποσοστό της πρώτης στην οποία το μέγεθος που είναι μεγαλύτερο είναι αναμενόμενο, είναι **89%** ενώ η δεύτερη έρχεται με ποσοστό **72%**.

- **Μία αλλαγή στην αναπαράσταση της φυσικής γλώσσας μπορεί να αντιστοιχεί σε μία πολλή σημαντική αλλαγή στη συμβολική γραφή.**

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αυτό που κυρίως ζητείται από τους μαθητές είναι η πραγματοποίηση της μετάβασης από μία αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα, στην αντίστοιχη αναπαράσταση στη συμβολική γραφή. Το στάδιο αυτό δεν είναι άλλο από τη «μετάφραση» των δοσμένων πληροφοριών της εκφώνησης σε σύμβολα και μαθηματικές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές θα πρέπει να περιγράφουν με ακρίβεια, συνέπεια και πληρότητα όλα τα στοιχεία που δίνονται στην εκφώνηση του προβλήματος. Αυτή η διαδικασία παρουσιάζει πολλές ιδιαιτερότητες καθώς βάζει σε αντιστοιχία δύο γλώσσες που έχουν διαφορετικούς κανόνες σύνταξης και διαφορετικές δυνατότητες περιγραφής αντικειμένων ( βλ. Δαγδιλέλης, Παυλοπούλου, Τρίγγα, 1998 και Duval, 1995). Η φυσική γλώσσα διαθέτει μεγάλη ποικιλία ουσιαστικών, επιθέτων και ρημάτων με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να περιγράψει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους το νόημα μιας φράσης, η οποία όμως να αντιστοιχεί στην ίδια έκφραση στη συμβολική γραφή.

Για παράδειγμα:

- **Ερώτηση 1**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 1 | Υπάρχει αριθμός (α) που ανήκει στο σύνολο όλων των ακεραίων εκτός του μηδενός.» |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | **a**. $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^*$<br><br>**b**. $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0$ |
| Ποσοστό Επιτυχίας | **80%** |

Παρατηρούμε ότι μία μικρή αλλαγή στην αναπαράσταση στη φυσική γλώσσα αντιστοιχεί σε πολύ σημαντική αλλαγή στη συμβολική γραφή. Πιο συγκεκριμένα προσθέτοντας μόνο την έκφραση «... το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων ...», που μπορεί να αγνοηθεί εξαιτίας μίας επιπόλαιης ανάγνωσης, προκύπτει η εκφώνηση της ερώτησης 4, που βλέπουμε παρακάτω.

- **Ερώτηση 4**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 4 | Να δοθεί το άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών (α). |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | $\alpha \in \mathbb{Z}$,<br>α, α+1, α+2<br>α+α+1+α+2 |
| Ποσοστό Επιτυχίας | **27%** |

## II. Ανάλυση Λανθασμένων Απαντήσεων στο Πέρασμα από τη Συμβολική Γραφή στη Φυσική Γλώσσα

- **Δυσκολία Έκφρασης στον Φυσικό Λόγο**
- **Ερώτηση 17**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 17 | $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$<br>α, β=α+1, γ=α+2, δ=α+3 |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | Έστω α, β, γ, δ φυσικοί αριθμοί. Οι α, β, γ, δ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **48%** |

Σε αυτήν την ερώτηση οι 16 από τους 35 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

*« Οι αριθμοί α, β, γ, δ ανήκουν στους φυσικούς. Ο β είναι άθροισμα του α+1, ο γ είναι άθροισμα α+2 ο δ άθροισμα α+3 »*

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η πλειοψηφία των λανθασμένων απαντήσεων ταυτίζεται αφού αποδίδει τις εκφράσεις που ήταν δοσμένες στο συμβολικό επίπεδο σε «μικτές» εκφράσεις και όχι σε εκφράσεις δοσμένες απόλυτα σε φυσική γλώσσα.

**<u>Η αναπαράσταση δηλαδή δεν ήταν καθαρά μία έκφραση μέσα στο επίπεδο της φυσικής γλώσσας  αλλά θύμιζε μία «μικτή έκφραση» κατά την έννοια του R. Duval (Duval R.1996).</u>**

Οι «**μικτές**» εκφράσεις είναι εκφράσεις γραμμένες στη φυσική γλώσσα οι οποίες μοιάζουν να είναι μια ανάγνωση της έκφρασης γραμμένης στη συμβολική γραφή, αναμιγνύοντας χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας και άλλα της συμβολικής γραφής. Αυτή η ανάμιξη γίνεται «παίρνοντας τα ονόματα των συμβόλων ή των εκφράσεων που τα κωδικοποιούν, και αριθμώντας έτσι την ακολουθία των συμβόλων, σεβόμενοι φυσικά τους συντακτικούς κανόνες της φυσικής γλώσσας. Αποκτούμε κατά αυτόν τον τρόπο μια εκφώνηση που μοιάζει με μία εκφώνηση στη φυσική γλώσσα» (Duval R.,1996).

Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι η πλειοψηφία των μαθηματικών εγχειριδίων χρησιμοποιεί συχνά «μικτές» εκφράσεις. Το γεγονός αυτό οδηγεί τους φοιτητές σε κακό χειρισμό των δύο επιπέδων λόγου (φυσικής γλώσσας και συμβολικής γραφής).

Παρακάτω παρατίθενται μερικές από τις  λανθασμένες απαντήσεις των υπολοίπων 19 μαθητών.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 6 | Να γράψετε 4 διαδοχικούς αριθμούς. |
| Γραπτό 32 | Το α,β,γ,δ είναι ακέραιοι αριθμοί. |
| Γραπτό 34 | Αν οι διαδοχικοί αριθμοί ανήκουν στο σύνολο των φυσικών. |
| Γραπτό 47, 53 | Το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών. |

- **Δυσκολία σε έννοιες της Άλγεβρας (όπως συντελεστές διεύθυνσης, ιδιότητες απολύτων)**

  - **Ερώτηση 19**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 19 | $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | Δύο ευθείες $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους εάν και μόνο εάν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους $\lambda_1$, $\lambda_2$ είναι ίσο με το -1. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **47%** |

Στην ερώτηση 19 οι 18 από τους 33 μαθητές απάντησαν λάθος, ως εξής:

«*Η ευθεία $\varepsilon_1$ είναι κάθετη στην $\varepsilon_2$ συνεπάγεται το γινόμενο του $\lambda_1$ και του $\lambda_2$ ισούται με -1.*». Όπως και στην

  - **Ερώτηση 22**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 22 | $\left\|\dfrac{\alpha}{\beta}\right\| = \dfrac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}, \beta \neq 0$ |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους. Ο αριθμός που βρίσκεται στον παρονομαστή πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **52%** |

Οι 10 από τους 22 μαθητές απάντησαν λανθασμένα ως εξής:

«*Η απόλυτη τιμή του πηλίκου με αριθμητή α και παρονομαστή β ισούται με την απόλυτη τιμή του α προς τον β*»

Με τον τρόπο που απαντούν οι μαθητές, καταλαβαίνουμε ότι **προσπαθούν μηχανιστικά να δώσουν μία απάντηση χωρίς να δίνουν βάση στον τρόπο που μεταφράζουν τις εκφράσεις της συμβολικής γραφής στη φυσική γλώσσα. Σκοπός τους λοιπόν ήταν να δώσουν μια απάντηση, χωρίς αυτή να αντιστοιχεί απόλυτα στην ιδιότητα που περιγράφεται στην εκφώνηση της ερώτησης και αφορά τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών στην ερώτηση 19 και στην ιδιότητα του πηλίκου της απόλυτης τιμής στην ερώτηση 22.**

- **Λάθος σύνταξη στη φυσική γλώσσα**
  - **Ερώτηση 24**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 24 | $\nu \in \mathbb{N}$<br>$(\nu+1)^2 - \nu^2 = 2\,\nu + 1$ |
| Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **32%** |

Οι 10 από τους 23 μαθητές απάντησαν λανθασμένα ως εξής:

«*Δίδεται αριθμός ν που ανήκει στους φυσικούς. Ο ν κατά 1 αυξημένος και όλος στο τετράγωνο μείον τον ν στο τετράγωνο ισούται με το διπλάσιο του ν αυξημένου κατά 1.*»

**Εδώ οι μαθητές προσθέτοντας ένα μόνο γράμμα στο τέλος της λέξης αυξημένο το (υ), διαφοροποιούν εντελώς την απάντηση. Στην συμβολική έκφραση « *2ν+1*»**

**αντιστοιχεί η έκφραση της φυσικής γλώσσας «*το διπλάσιο του ν αυξημένο κατά 1*» ενώ οι μαθητές χρησιμοποίησαν την έκφραση «*το διπλάσιο του ν αυξημένου κατά 1*» που σε συμβολικό λόγο αντιστοιχεί «*2(ν+1)*».**

Παρακάτω παρατίθενται μερικές από τις λανθασμένες απαντήσεις των υπολοίπων 13 μαθητών.

| | |
|---|---|
| Γραπτό 30 | Για τον αριθμό ν που ανήκει στο σύνολο των φυσικών ισχύει ότι η διαφορά του αριθμού ν+1 και όλο στο τετράγωνο και του ν στο |

| | |
|---|---|
| | τετράγωνο ισούται με το άθροισμα του γινομένου 2 και ν και του 1. |
| Γραπτό 48 | Το τετράγωνο του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίσο με τον 1$^{ον}$ στο τετράγωνο και τον δεύτερο στο τετράγωνο συν το διπλάσιο γινόμενο τους. |
| Γραπτό 53 | ν παρένθεση και 1 κλίνει η παρένθεση κ' όλο στο τετράγωνο. |
| Γραπτό 58 | Η διαφορά των τετραγώνων δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμά τους. |
| Γραπτό 78 | Αριθμός ν ανήκει στους φυσικούς αριθμούς. |
| Γραπτό 79 | ν ανήκει στους Ν. Παρένθση ν συν 1 στο τετράγωνο πλην ν στο τετράγωνο = δύο ν συν ένα. |

**III. Ερωτήσεις όπου ελέγχουμε το πέρασμα και από τις δυο κατευθύνσεις**

Υπήρχαν ερωτήσεις μέσα στο ερωτηματολόγιο όπου ζητούσαμε το πέρασμα π.χ. από τη φυσική γλώσσα (Φ.Γ.) στη συμβολική γραφή (Σ.Γ.), ενώ σε μία άλλη ζητούσαμε το αντίστροφο πέρασμα, με στόχο να δούμε αν σε κάποιο από τα δύο υπάρχει μεγαλύτερη δυσκολία. Στη συνέχεια παρατίθενται πίνακες με τα ποσοστά επιτυχίας ανά ζητούμενο πέρασμα.

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 1) | Υπάρχει αριθμός (α) που ανήκει στο σύνολο όλων των ακεραίων εκτός του μηδενός. |
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 16) | $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^*$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. σε Σ.Γ. | **80%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. σε Φ.Γ. | **89%** |

Η **ερώτηση 13** στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας που αντιστοιχούσε στην **ερώτηση 24** στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής.

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 13) | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. |

| | |
|---|---|
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 24) | $\nu \in \mathbb{N}$<br>$(\nu+1)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. σε Σ.Γ. | **26%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. σε Φ.Γ. | **32%** |

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ερευνάς μας καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές εμφανίζουν μία μεγαλύτερη αδυναμία στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή παρά το αντίστροφο.

## 4.2 . Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

### 4.2.1 Πλαίσιο Έρευνας Φοιτητών

Η έρευνά μας πραγματοποιήθηκε στις 4 Απριλίου του 2016 και το δείγμα μας αποτελείται από 70 πρωτοετείς φοιτητές του 2$^{ου}$ εξαμήνου της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.. Οι απαντήσεις των φοιτητών στα ερωτηματολόγια αποτέλεσαν το ερευνητικό υλικό αυτής της μελέτης. Επισκεφθήκαμε τμήμα του πρώτου έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., κατόπιν συνεννοήσεως με τον καθηγητή κ. Π. Ψαρράκο, μας παραχώρησε μια ώρα από το μάθημά του «Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές», προκειμένου οι φοιτητές να συμπληρώσουν τα ερωτηματολόγια που είχαμε ετοιμάσει. Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν από ένα κάθε φορά και πριν αρχίσουν να απαντούν οι φοιτητές διευκρινίστηκε ο σκοπός της έρευνας ενώ τους ζητήθηκε να μην αναφέρουν το όνομά τους ώστε το δείγμα να είναι ανώνυμο προκειμένου να αποφευχθεί πιθανή σύγχυση και αμηχανία των φοιτητών κατά τη διαδικασία συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου. Τονίστηκε επίσης ότι τα στοιχεία της έρευνας θα χρησιμοποιούνταν για τη συγκεκριμένη εργασία και ότι οι απαντήσεις τους δεν είχαν σκοπό την αξιολόγησή τους. Αφού έγινε η διανομή των εντύπων και δόθηκαν οι απαραίτητες οδηγίες για τη συμπλήρωσή τους, αποχώρησαν αμέσως πέντε φοιτητές χωρίς να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο και οι οποίοι δεν συμπεριλήφθηκαν στο δείγμα της έρευνάς μας. Όλοι όμως οι υπόλοιποι εξάντλησαν την διδακτική ώρα δουλεύοντας το σχετικό ερωτηματολόγιο.

Μετά τη συμπλήρωση και την παράδοση των εντύπων συζητήσαμε σχετικά με το περιεχόμενο των ερωτήσεων με τους φοιτητές. Ανέφεραν ότι τους φάνηκε ιδιαίτερα ενδιαφέρον το ερωτηματολόγιο κι ότι τους έκανε να δουν τα μαθηματικά από μια άλλη σκοπιά. Διαπίστωσαν ότι είναι πολύ σημαντικό να μπορείς να πραγματοποιείς αυτό το πέρασμα από τη μια μορφή γραφής στην άλλη. Διατυπώθηκαν πολλές ερωτήσεις ως προς το κίνητρο επιλογής του συγκεκριμένου θέματος της διπλωματικής εργασίας. Τέλος, εξέφρασαν και τη διαπίστωσή τους για το μεγάλο βαθμό δυσκολίας των μαθημάτων της σχολής, όμως μετά από έναν εποικοδομητικό διάλογο καταλήξαμε ότι με ένα σωστό προγραμματισμό και με παρακολούθηση των μαθημάτων, δημιουργούνται κίνητρα, αναζητήσεις, ενδιαφέροντα που οδηγούν όχι μόνο στην απόκτηση του πτυχίου, αλλά και σε περεταίρω στόχους και επιδιώξεις για ως αναφορά στην επιστήμη, αλλά και σαν άνθρωπος γενικότερα.

### 4.2.2 Ερωτηματολόγιο Φοιτητών Ά Έτους Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους φοιτητές περιλάμβανε 26 ερωτήματα. Τα πρώτα 17 ερωτήματα ήταν διατυπωμένα σε φυσική γλώσσα και ζητήθηκε από τους φοιτητές η αντίστοιχη αναπαράσταση στη συμβολική γραφή. Τα επόμενα 9 ερωτήματα είχαν διατυπωθεί στη συμβολική γραφή και ζητήθηκε από τους φοιτητές η μετάβαση σε φυσική γλώσσα. Τα ερωτηματολόγια, όπως ακριβώς δόθηκαν στους φοιτητές, παρουσιάζονται στο παράρτημα 7.3 της παρούσας εργασίας.

### 4.2.3 Ποσοτική Ανάλυση

Στη συνέχεια, προς διευκόλυνση του αναγνώστη, παρουσιάζουμε τις είκοσι έξι εκφράσεις στα δύο σημειωτικά επίπεδα (φυσική γλώσσα – συμβολική γραφή), με τη σειρά που δόθηκαν στους φοιτητές, συνοδευόμενες από μια ενδεικτική ορθή απάντηση στα αντίστοιχα σημειωτικά επίπεδα σε κάθε περίπτωση και τα ποσοστά επιτυχίας που συγκέντρωσε η καθεμία.

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** | **Ποσοστά Επιτυχίας** |
|---|---|---|
| 1) Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων (x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Να εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω. | $\beta, \chi, \alpha \in N$<br>$\alpha=10\chi+2\chi$,<br>$\beta=20\chi+\chi$,<br>$\beta-\alpha=27$ | 34% |
| 2) Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου ($x_1$) και του μεγαλύτερου ($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n). | $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=50\cdot n$<br>$x_2+\ldots+x_{n-1}=45\cdot(n-2)$<br>$x_1+x_n=5\cdot n+90$ | 36% |
| 3) Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις. | $\begin{cases} \kappa-4=2(\mu-4) \\ \mu+6=\frac{2}{3}(\mu+6) \end{cases}$ | 54% |
| 4) Έστω α, β ανήκουν στο σύνολο $Δ^3$. Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης είναι οι εξής:<br><br>i) αντιμεταθετική ιδιότητα<br>ii) προσεταιριστική ιδιότητα<br>iii) ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου<br>iv) ύπαρξη αντίθετου στοιχείου του α. | $\alpha, \beta \in \Delta^3, +: \Delta^3 \rightarrow \Delta^3$<br>$i)\ \forall \alpha, \beta \in \Delta^3, \alpha+\beta=\beta+\alpha$<br>$ii)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Delta^3, (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$<br>$iii)\ \forall \alpha \in \Delta^3, \exists 0 \in \Delta^3:$<br>$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$<br>$iv)\ \forall \alpha \in \Delta^3,$<br>$\exists -\alpha \in \Delta^3 : \alpha+(-\alpha)=0$ | 21% |
| 5) Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη. | $(D,+): +: D \times D \rightarrow D$ | 39% |
| 6) Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα Κ είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις. Εκείνη της πρόσθεσης και εκείνη του πολλαπλασιασμού. | $V=\mathbb{R}^n$<br>$K=\mathbb{R}$<br>$V(+,\cdot)$ | 29% |
| 7) Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα Κ είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις. Εκείνη της πρόσθεσης και εκείνη του πολλαπλασιασμού οι οποίες ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του Κ. | $V=\mathbb{R}^n$<br>$K=\mathbb{R}$<br>$V(+,\cdot): \forall x \in V, \forall \kappa, \lambda \in K$<br>$(\kappa+\lambda)\cdot x=\kappa\cdot x+\lambda\cdot x$ | 14% |

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** | **Ποσοστά Επιτυχίας** |
|---|---|---|
| 8) Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων **a**, **b** ισούται με το εμβαδόν E( **a**, **b**) του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά. | $a \neq 0, b \neq 0,$ <br> $\lvert a \times b \rvert = E(a, b)$ | 57% |
| 9) Αν V1, V2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V. | $V_1, V_2: V_1 \ \leq V, V_2 \leq V$ <br> $\Rightarrow V_1 \cap V_2 \leq V$ | 66% |
| 10) Δύο μη μηδενικά διανύσματα **x**, **y** ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, λέγονται ορθογώνια αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο <**x**, **y**> ισούται με το μηδέν. | $x \in V, y \in V, x \neq 0, y \neq 0$ <br> $x \neg y \Leftrightarrow < x, y \geq 0$ | 71% |
| 11) Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας (κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη (β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια (θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. | $\kappa + \beta + \theta = 30,$ <br> $\kappa - 1 = \beta - 1 = \theta + 2$ | 63% |
| 12) Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; | $\Sigma x \geq 8 \cdot 100 + (x - 8) \cdot 70$ | 54% |
| 13) Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. | $\nu \in N,$ <br> $(\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1) + \nu$ | 57% |
| 14) Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. | $x_i = 100k + 15, k \in Z^*,$ <br> $i = 1, \dots, 15 \ \Rightarrow$ <br> $S = \sum_{i=1}^{15} x_i = 25 \cdot n, n \in N^*$ | 4% |
| 15) Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική αντιμεταθετική πράξη. | $(D, +): +: D \times D \to D, \forall a \in$ <br> $D, \forall b \in D, a + b = b + a$ | 39% |

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** | **Ποσοστά Επιτυχίας** |
|---|---|---|
| 16) Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν $2^m$, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοσή τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε «γύρους». Στον πρώτο «γύρο» ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου «γύρου» κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στο δεύτερο «γύρο». Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3 να δημιουργήσετε μία μαθηματική σχέση που να δείχνει ότι το συνολικό πλήθος (P) των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7. | $P=2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\ldots+2+1$<br>$=2^m-1$, m=3k, k_N*<br>$P=2^m-1=2^{3k}-1=(2^3)^k-1$<br>$=8^k-1$<br>$=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\ldots+1)$<br>$=7n$, $n \in N^*$ | 7% |
| 17) Ένας nxn πίνακας έχει βαθμό μικρότερο του n-1 αν και μόνο αν ο συμπληρωματικός του πίνακα είναι μηδενικός. | $A \in \Pi_{nxn}, rank(A) < n-1$<br>$\Leftrightarrow adj(A) = 0$ | 34% |

| Συμβολική Γραφή | Φυσική Γλώσσα | Ποσοστά Επιτυχίας |
|---|---|---|
| 18) $\alpha, \beta \in \Delta^3, +: \Delta^3 \to \Delta^3$ $i)\ \forall \alpha, \beta \in \Delta^3, \alpha + \beta = \beta + \alpha$ $ii)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Delta^3, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ | Έστω α, β ανήκουν στο σύνολο $\Delta^3$. Έστω ότι ικανοποιείται η πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο $\Delta^3$. Οι ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης είναι οι εξής:<br>i) αντιμεταθετική ιδιότητα<br>ii) προσεταιριστική ιδιότητα | 41% |
| 19) $(D, +), +: D \times D \to D$ | Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη. | 47% |
| 20) $(D, +), +: D \times D \to D$, $\forall a \in D, \forall b \in D, a + b = b + a$ | Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική αντιμεταθετική πράξη. | 54% |
| 21) $V_1, V_2: V_1 \leq V, V_2 \leq V \Rightarrow V_1 \cap V_2 \leq V$ | Έστω V1 διανυσματικός υπόχωρος του V και V2 διανυσματικός υπόχωρος του V τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V. | 47% |
| 22) $A_{n\times n}, \rho \in N, \sigma \in N, A^{\rho} \cdot A^{\sigma} = A^{\rho+\sigma}$ | Έστω A τετραγωνικός πίνακας n__n και έστω ρ, σ φυσικοί. Το γινόμενο του A εις την ρ επί του A εις την σ είναι ίσο με τον A υψωμένου στο άθροισμα ρ και σ. | 23% |
| 23) $A \in \Pi_{nxn}$ , $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ | Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$, τέτοιοι ώστε να είναι αντιμεταθετικοί. Τότε ισχύει για αυτούς τους πίνακες η ταυτότητα του τετραγώνου του αθροίσματος. | 13% |
| 24) $\nu \in N, (\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1) + \nu$ | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. | 46% |
| 25) $A \in \Pi_{n\times n}, \|A\| \neq 0, A \cdot X_0 = \lambda_0 \cdot X_0 \Rightarrow A^{-1} \cdot X_0 = {\lambda_0}^{-1} \cdot X_0$ | Αν A nxn αντιστρέψιμος πίνακας με ιδιοτιμή $\lambda_0$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $X_0$ τότε ο $A^{-1}$ έχει ιδιοτιμή $\lambda_0^{-1}$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_0$. | 6% |
| 26) $A \in \Pi_{n\times n}, B \in \Pi_{n\times n}, \|B\| \neq 0$ ή $\|A\| \neq 0 \Rightarrow$ $\|\lambda \cdot I - A \cdot B\| = \|\lambda \cdot I - B \cdot A\|$ | Αν A,B nxn πίνακες με τουλάχιστον τον ένα αντιστρέψιμο τότε η AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. | 7% |

Στους επόμενους πίνακες, εκτός από τα ποσοστά επιτυχίας, παρουσιάζουμε αναλυτικά το πλήθος των απαντήσεων προσδιορίζοντας και τις αναπάντητες ερωτήσεις.

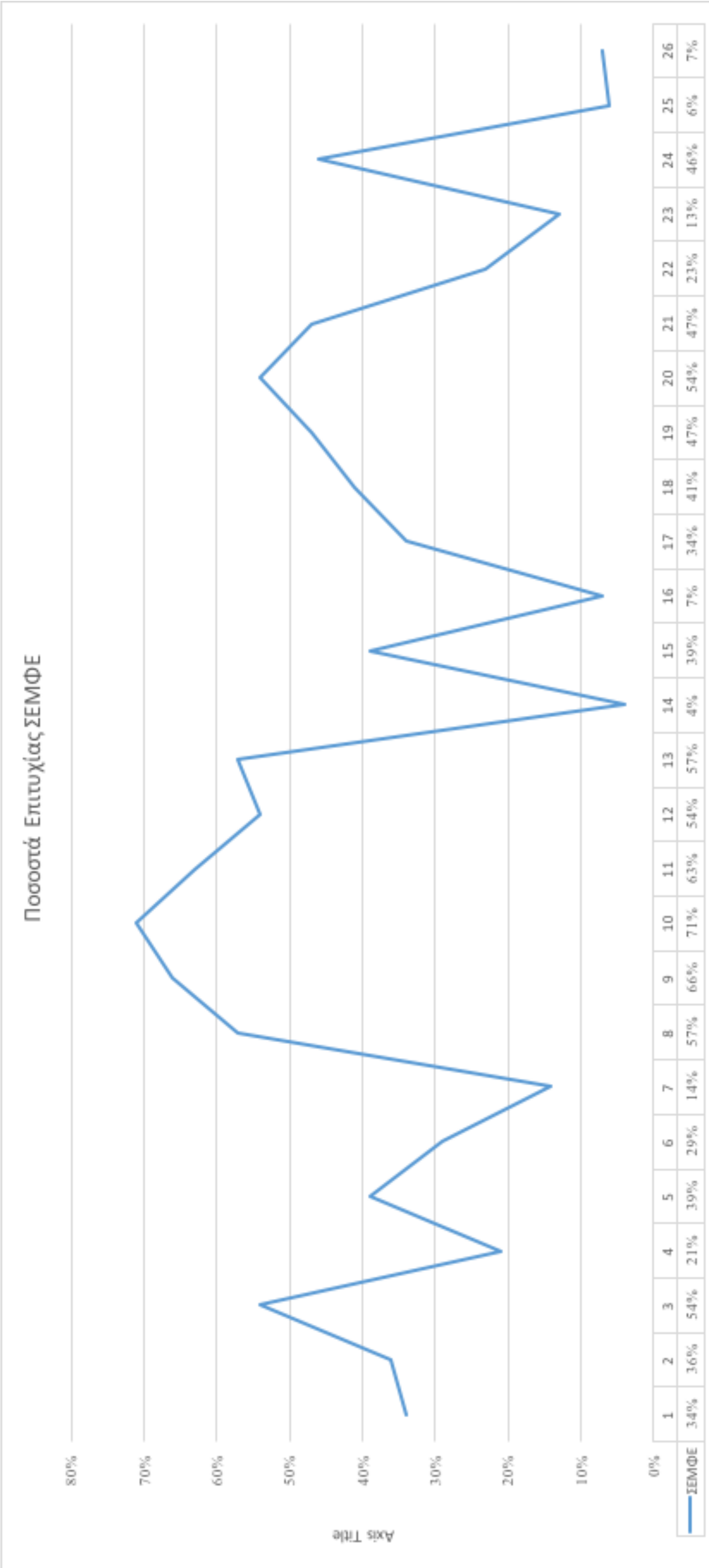
| **Ερώτηση Φ.Γ. (ΣΕΜΦΕ)** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ποσοστά Επιτυχίας** | 34% | 36% | 54% | 21% | 39% | 29% | 14% | 57% | 66% | 71% | 63% | 54% | 57% | 4% | 39% | 7% | 34% |
| **Σωστές Απαντήσεις** | 24 | 25 | 38 | 15 | 27 | 20 | 10 | 40 | 46 | 50 | 44 | 38 | 40 | 3 | 27 | 5 | 24 |
| **Λανθασμένες Απαντήσεις** | 37 | 28 | 24 | 44 | 13 | 16 | 16 | 17 | 12 | 13 | 16 | 16 | 24 | 18 | 9 | 11 | 6 |
| **Χωρίς Απάντηση** | 9 | 17 | 8 | 11 | 30 | 34 | 44 | 13 | 12 | 7 | 10 | 16 | 6 | 49 | 34 | 54 | 40 |

Αποτελέσματα φοιτητών: ζητούμενο πέρασμα Φυσική Γλώσσα → Συμβολική Γραφή

| **Ερώτηση Σ.Γ. (ΣΕΜΦΕ)** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Ποσοστά Επιτυχίας** | 41% | 47% | 54% | 47% | 23% | 13% | 46% | 6% | 7% |
| **Σωστές Απαντήσεις** | 29 | 33 | 38 | 33 | 15 | 9 | 32 | 4 | 5 |
| **Λανθασμένες Απαντήσεις** | 18 | 12 | 7 | 12 | 12 | 16 | 18 | 16 | 19 |
| **Χωρίς Απάντηση** | 23 | 25 | 25 | 25 | 43 | 45 | 20 | 50 | 46 |

Αποτελέσματα φοιτητών: ζητούμενο πέρασμα Συμβολική Γραφή → Φυσική Γλώσσα

Στη συνέχεια, ακολουθεί το διάγραμμα με τα ποσοστά επιτυχίας ανά ερώτημα.


Ποσοστά Επιτυχίας ΣΕΜΦΕ
Axis Title
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
ΣΕΜΦΕ
1 34%
2 36%
3 54%
4 21%
5 39%
6 29%
7 14%
8 57%
9 66%
10 71%
11 63%
12 54%
13 57%
14 4%
15 39%
16 7%
17 34%
18 41%
19 47%
20 54%
21 47%
22 23%
23 13%
24 46%
25 6%
26 7%

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το ερωτηματολόγιο δεν αντιμετωπίστηκε ως εύκολο από τους πρωτοετείς φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., μια που περισσότερες από τις μισές ερωτήσεις απαντήθηκαν λανθασμένα από τα 3/5 των φοιτητών. Υπήρχαν ερωτήματα διαφόρων βαθμών δυσκολίας. Πιο συγκεκριμένα υπήρχαν 8 ερωτήσεις οι οποίες είχαν ποσοστό επιτυχίας μικρότερο του 25%. Πρόκειται για τέσσερις που ζητούν το πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και τέσσερις που ζητούν το αντίστροφο πέρασμα. Αξιοσημείωτο επίσης είναι ότι ούτε ένας φοιτητής δεν απάντησε σωστά σε όλα, δηλαδή και στα 26 ερωτήματα.

### 4.2.4 Ποιοτική Ανάλυση

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που δόθηκε στους πρωτοετείς φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., ανέδειξαν ορισμένες αδυναμίες τους στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε αναλυτικά τις λανθασμένες απαντήσεις που εμφανίζονται με τη μεγαλύτερη συχνότητα, προσπαθώντας να τα ομαδοποιήσουμε σε κατηγορίες.

**Ι. Ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων στο πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή**

**Α. Σύγχυση της συμβολικής αναπαράστασης ενός αριθμού και της αξίας του αριθμού.**

Σε πολλά ερωτηματολόγια παρατηρήθηκε ότι οι φοιτητές δεν γνώριζαν πώς να κατασκευάσουν τη σχέση που θα αναπαριστούσε την αξία ενός αριθμού.

- **Ερώτηση 1**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 1 | Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων (χ). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\beta, \chi, \alpha \ \in N \ \alpha = 10\chi + 2\chi, \beta = 20\chi + \chi, \beta - \alpha = 27$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **34%** |

Στην ερώτηση 1 οι 18 από τους 37 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα (αναφερόμαστε στους φοιτητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, δηλαδή, δεν συμπεριλαμβάνονται εκείνοι που άφησαν αναπάντητη την ερώτηση) έδωσαν την εξής απάντηση:

«*ψ = 2 x*

*2x x = x 2x + 27*»

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η πλειοψηφία των λανθασμένων απαντήσεων παρουσιάζει μια **<u>σύγχυση των φοιτητών μεταξύ της συμβολικής αναπαράστασης ενός αριθμού και της αξίας του ίδιου αριθμού</u>**. Πιο συγκεκριμένα:

Η συμβολική αναπαράσταση του αριθμού της εκφώνησής μας είναι:

| | |
|---|---|
| x | 2x |

Η αξία του είναι: $x \cdot 10 + 2x \cdot 1$, ενώ οι φοιτητές εκείνοι θεωρούν ότι η αξία του είναι η εξής: $x \cdot 2x$, παραλείποντας τον πολλαπλασιασμό επί 10 και την πράξη της πρόσθεσης. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι ελάχιστοι διευκρίνισαν τη φύση των μεταβλητών, επισημαίνοντας ότι πρόκειται για φυσικούς αριθμούς.

Στα υπόλοιπα γραπτά παρουσιάζονται λάθη μεμονωμένα που δεν επαναλαμβάνονται και δε μας δίνουν στοιχεία για να γενικεύσουμε. Ορισμένοι φοιτητές έδωσαν απευθείας την απάντηση στο πρόβλημα παραλείποντας το πέρασμα από τη συμβολική γραφή. Άλλοι παρανόησαν την αντίστροφή των ψηφίων αλλά ελάχιστοι φάνηκε να δυσκολεύτηκαν στη μετάφραση της έκφρασης: «...*κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό.*».

- **Ερώτηση 14**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 14 | Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $x_i = 100k + 15, k \in Z^*, i = 1, \dots, 15 \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{15} x_i = 25 \cdot n, n \in N^*$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **4%** |

Στην ερώτηση 14 οι 3 από τους 18 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την απάντηση:

$$\ll \sum_{i=1}^{15} x_i = 25 \cdot n, n \in N^*, \left(\frac{x_i}{100}\right) > 1, x_i = 100 \cdot k + 15 \quad \gg$$

Παρατηρούμε ότι έχουν κατανοήσει ακριβώς πώς να δημιουργήσουν την αξία των δεκαπέντε διαφορετικών ακέραιων αριθμών με ψηφία περισσότερα από δύο που στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους έχουν τον αριθμό 15, δηλαδή πραγματοποίησαν τη μετάφραση από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής με επιτυχία. **Το μοναδικό τους λάθος είναι ότι δεν προσδιόρισαν το σύνολο στο οποίο ανήκει η μεταβλητή k ($k$ ∈Z*).**

Ενώ οι 4 από τους 18 έδωσαν την απάντηση:

$$\sum_{i=1}^{i=15} = 25 \cdot x_i$$

Εδώ βλέπουμε πως οι φοιτητές έχουν μεταφράσει ένα μέρος των πληροφοριών που τους δόθηκαν στην εκφώνηση («...*το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25*»). Και αυτοί δυσκολεύτηκαν να αποδώσουν σε συμβολική γραφή την αξία του αριθμού, με τις συνθήκες που ζητείται στην εκφώνηση, γεγονός που το προσδιορίσαμε και στην ερώτηση 1.

Τέλος, παρατηρήσαμε πως ελάχιστοι φοιτητές ερμήνευσαν με συνεπαγωγή την έκφραση «*αν ... τότε*». Οι περισσότεροι τοποθέτησαν τη συμβολική γραφή κάθε έκφρασης που μετέτρεψαν, χωρίς σύνδεση μεταξύ τους.

### Β. Μη αξιοποίηση όλων των δοσμένων πληροφοριών σε φυσική γλώσσα

- **Ερώτηση 11**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 11 | Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας(κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη(β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια(θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\kappa + \beta + \theta = 30, \kappa - 1 = \beta - 1 = \theta + 2$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **63%** |

Σε αυτήν την ερώτηση όλοι οι φοιτητές ερμήνευσαν σωστά την έκφραση «Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες». Αλλά οι 5 από τους 16 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

$$\ll \kappa + \beta + \theta = 30, \kappa - 3 = \beta - 1 = \theta + 4 \gg$$

Στη συγκεκριμένη συμβολική έκφραση έχουν παραλείψει να μεταφράσουν το γεγονός ότι «η Θάλεια δίνει 2 στον Κώστα». Αυτό φανερώνει ότι **<u>δεν έχουν αντιληφθεί συνολικά πως η εκφώνηση περιγράφει δύο καταστάσεις σε δυο διαφορετικές χρονικές στιγμές.</u>** Περιγράφει αρχικά το «τώρα» δηλαδή ότι τα παιδιά έχουν τώρα μαζί 30 μπάλες και το «μετά» αφού γίνουν οι ενέργειες που περιγράφει η εκφώνηση.

Από την άλλη, η έκφραση «*αν ... τότε*» που υπάρχει στην εκφώνηση, οδήγησε 4 από τους 16 φοιτητές σε παρανόηση του όρου και την ερμήνευσαν με ισοδυναμία, δίνοντας την απάντηση:

$$\ll \kappa + \beta + \theta = 30 \Leftrightarrow (\ \kappa + 2 - 3) = (\beta + 3 - 4) = (\theta + 4 - 2) = 30 \gg$$

Παρατηρούμε δηλαδή και πάλι μια δυσκολία στην ερμηνεία και καταγραφή στοιχείων της Λογικής στις εκφράσεις τους.

- **Ερώτηση 3**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 3 | Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία(x) από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας(y) θα είναι τα 2/3 της ηλικίας του Κώστα. Να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\begin{cases} \kappa - 4 = 2(\mu - 4) \\ \mu + 6 = \frac{2}{3}(\kappa + 6) \end{cases}$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **54%** |

Στην εκφώνηση αυτού του προβλήματος παρατηρούμε ότι συνυπάρχουν καταστάσεις που αφορούν σε τρεις χρονικές στιγμές: στο *παρόν* με τη σημερινή ηλικία, στο *παρελθόν* πριν 4 χρόνια και στο *μέλλον* μετά από 6 χρόνια. **<u>Εδώ παρατηρούμε πως οι φοιτητές υπέπεσαν ξανά στο ίδιο λάθος με εκείνο της ερώτησης 11</u>** και εμπλέκοντας τρεις χρονικές στιγμές αντί δύο, τα ποσοστά επιτυχίας πέφτουν ακόμα πιο χαμηλά κατα 10%.

Πιο συγκεκριμένα, 9 από τους 24 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

$$\ll \kappa - 4 = 2\mu\ , \mu + 6 = \tfrac{2}{3}\ \kappa\ \gg,$$

ενώ 5 από τους 24 έδωσαν την εξής απάντηση:

$$\ll \kappa - 4 = 2\mu\ , \mu + 6 = \tfrac{2}{3}\ (\kappa + 6)\ \gg,$$

και άλλοι 5 από τους 24 απάντησαν:

$$\ll x = 2y\ , 3y = 2x \gg$$

- **Ερώτηση 2**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 2 | Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n). |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=50\cdot n$ (1)<br>$x_2+\ldots+x_{n-1}=45\cdot(n-2)$ (2)<br>$x_1+x_n=5\cdot n+90$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **36%** |

Στην ερώτηση 2 οι 18 από τους 28 που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν την απάντηση :

«$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n=50\cdot n$ , $x_2+\ldots+x_{n-1}=45\cdot(n-2)$ »

Εδώ βλέπουμε πως οι φοιτητές χειρίστηκαν αρκετά καλά τη μετάφραση της εκφώνησης που τους δόθηκε, αλλά **δεν επεξεργάστηκαν στο σύνολό τους όλες τις πληροφορίες που τους δόθηκαν στη φυσική γλώσσα, με αποτέλεσμα να μεταφράσουν ένα μέρος των πληροφοριών αυτών.** Πιο συγκεκριμένα, δεν μετέφρασαν την τελευταία πρόταση.

- **Ερώτηση 12**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 12 | Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\Sigma x \geq 8\cdot 100+(x-8)\cdot 70$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **54%** |

Οι μισοί από τους 16 φοιτητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, έγραψαν:

$$\ll \Sigma x \geq 70x \gg \text{ ή } \ll \Sigma x \geq (x-8)\cdot 70 + 100 \gg$$

Μία από τις δυσκολίες του περάσματος οφείλεται στο φαινόμενο της μη εννοιολογικής συνάφειας μεταξύ των δυο αναπαραστάσεων όπως περιγράφεται από τον R. Duval. Στις παραπάνω απαντήσεις διαφαίνεται και παράλειψη πληροφοριών από την εκφώνηση.

- **Ερώτηση 16**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 16 | Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν $2^m$, όπου mθετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε «γύρους». Στον πρώτο «γύρο» ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου «γύρου» κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο «γύρο». Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3 να δημιουργήσετε μία μαθηματική σχέση που να δείχνει ότι το συνολικό πλήθος(P) των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $P=2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\ldots+2+1=2^m-1$<br>m=3k, k_N*<br>$P=2^m-1=2^{3k}-1=(2^3)^k-1=8^k-1=$<br>$(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\ldots+1)=7n$, $n \in N^*$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **7%** |

Εδώ οι 6 από τους 11 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν την εξής απάντηση:

« *$P=2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\ldots+2+1=2^m-1$*
*m=3λ, λ_N**
*$P=2^{3\lambda}-1$* »

Η πλειοψηφία δηλαδή των λανθασμένων απαντήσεων οφείλεται στην παράλειψη της δημιουργίας της τελευταίας συμβολικής περιγραφής που ζητείται στην εκφώνηση. **Αν στην τελική τους έκφραση «$P=2^{3\lambda}-1$» πρόσθεταν «$P = 2^{3\lambda}-1= 7n$, $n$ $N^*$» τότε θα είχαν πραγματοποιήσει τη μετάφραση ολοκληρωμένα.**

Τέλος, σημειώνουμε ότι η ερώτηση 16 είναι η ερώτηση με τον μεγαλύτερο αριθμό μηδενικών απαντήσεων (54) για αυτό και έχει από τα μικρότερα ποσοστά επιτυχίας.

### Γ. Μαθηματική Ορολογία-Στοιχεία Λογικής

- **Ερώτηση 8**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 8 | Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων a, b ισούται με το εμβαδόν E( a, b) του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $a \neq 0, b \neq 0, \|a \times b\| = E(a,b)$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **57%** |

Εδώ οι 4 φοιτητές από τους 17 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την απάντηση:

$$a \neq 0, b \neq 0, a \times b = E(a,b)$$

Στην απάντηση αυτή έχει παραληφθεί **η έννοια του μέτρου του εξωτερικού γινομένου**, άρα και η συμβολική της αναπαράσταση. Αυτό μας κάνει να αναρωτηθούμε αν συνειδητοποιούν την ισότητα κατά τη διάρκεια που τη γράφουν διότι εξισώνουν ένα διάνυσμα με έναν αριθμό! Αυτό θα μπορούσε να σταθεί ως ένα μέσο αυτοελέγχου στην προκειμένη περίπτωση και να ανατρέξουν εκ νέου στην εκφώνηση που δίνεται σε φυσική γλώσσα.

- **Ερώτηση 9**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 9 | Αν V1, V2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $V_1, V_2 : V_1 \leq V, V_2 \leq V \Rightarrow V_1 \cap V_2 \leq V$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **66%** |

Οι 10 από τους 12 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα έγραψαν: «V1∩*V2* ∈ *V*». Παρατηρούμε δηλαδή **<u>μια σύγχυση του διανυσματικού υποχώρου και των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου</u>** τουλάχιστον ως προς το συμβολισμό τους. Η παρανόηση οφείλεται είτε στο ότι θεώρησαν τα V1 και V2 διανύσματα είτε στην ελλειπή γνώση της χρήσης των συμβόλων ( $\in, \leq$ ).

- **Ερώτηση 13**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 13 | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμά τους. |
| Σωστή απάντηση | $\nu \in N, (\nu+1)^2 - \nu^2 = (\nu+1) + \nu$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **57%** |

Στην ερώτηση αυτή παρατηρήσαμε ένα λάθος που συναντάμε και στους μαθητές, την **<u>αδυναμία έκφρασης δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών</u>** σε συμβολική γραφή. Πράγματι οι 5 από τους 24 που απάντησαν λανθασμένα, έγραψαν:

$$\ll x, y \in N, y > x, \qquad y^2 - x^2 = x + y \gg$$

- **Ερώτηση 4**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 4 | Έστω α, β ανήκουν στο σύνολο $Δ^3$ . Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης είναι οι εξής:<br>i) αντιμεταθετική ιδιότητα<br>ii) προσεταιριστική ιδιότητα<br>iii) ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου<br>iv) ύπαρξη αντίθετου στοιχείου του α, το x. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $\alpha, \beta \in \Delta^3, +: \Delta^3 \to \Delta^3$<br>$i)\ \forall \alpha, \beta \in \Delta^3, \alpha + \beta = \beta + \alpha$<br>$ii)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Delta^3, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$<br>$iii)\ \forall \alpha \in \Delta^3, \exists 0 \in \Delta^3 : \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$<br>$iv)\ \forall \alpha \in \Delta^3, \exists -\alpha \in \Delta^3 : \alpha + (-\alpha) = 0$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **21%** |

Στην ερώτηση 4 οι μισοί από τους 44 που απάντησαν λανθασμένα δίνοντας την εξής απάντηση:

«*α + β = β + α*

*(α + β) + γ = α +( β + γ)*
*α + 0 = α*
*α+( — α)=0»*

Εδώ βλέπουμε πως οι φοιτητές επικεντρώθηκαν στο να μεταφράσουν τις τέσσερις ιδιότητες της πρόσθεσης (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου και αντίθετου στοιχείου) μη θεωρώντας απαραίτητο να ορίσουν τις μεταβλητές στις οποίες αναφέρονται, δηλαδή **παράλειψαν τις πρώτες φράσεις του κειμένου που τους δόθηκε**. Πιο συγκεκριμένα, αγνόησαν τις φράσεις :«*Έστω α, β ανήκουν στο σύνολο* $Δ^3$» και «*Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης...* ». Επίσης είναι ολοφάνερη **η παράλειψη των ποσοδεικτών** στη σύνταξη μιας φράσης σε συμβολική γραφή.

Ενώ οι άλλες μισές λανθασμένες απαντήσεις φανερώνουν μια **σύγχυση των φοιτητών σχετικά με την προσεταιριστική ιδιότητα και την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση**:

$$\ll α, β \ \in Δ^3, με\ ιδιότητες: i)\ α + β = β + α, ii)\ γ(α + β) = γα + γβ,$$
$$iii)\ α + 0 = α, \qquad iv)\ \forall α\ \exists - α \ \gg$$

Παρατηρούμε και σε αυτήν την ομάδα των λανθασμένων απαντήσεων **είτε παραλείπονται οι ποσοδείκτες είτε χρησιμοποιούνται με τέτοιο τρόπο ο οποίος φανερώνει την έλλειψη γνώσεων των συντακτικών κανόνων της Λογικής.**

- **Ερώτηση 7**

| **Ερώτηση 7** | Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα Κ είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις. Εκείνη της πρόσθεσης και εκείνη του πολλαπλασιασμού οι οποίες ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του Κ. |
|---|---|
| **Ενδεικτική σωστή απάντηση** | V= $\mathbb{R}^n$, K= $\mathbb{R}$ <br> $V(+,\cdot): \forall x \in V, \forall κ, λ \in K$ <br> $(κ + λ) \cdot x = κ \cdot x + λ \cdot x$ |
| **Ποσοστό επιτυχίας** | **14%** |

Σε αυτήν την ερώτηση οι 8 από τους 16 που απάντησαν λανθασμένα έδωσαν την εξής απάντηση:

$$\ll V = R^n, K = R, V(+,\cdot): a \in R, \forall \kappa, \lambda \in K, (\kappa + \lambda) \cdot \alpha = \alpha \cdot \kappa + \alpha \cdot \lambda \gg :$$

Η λανθασμένη έκφραση «$\alpha \in R$» φανερώνει μία **<u>σύγχυση για το που ανήκει το στοιχείο α</u>**. Μάλλον, δεν είναι ξεκάθαρος ο διαχωρισμός των δύο συνόλων V και K, δηλαδή του διανυσματικού χώρου V πάνω στο σώμα K, με αποτέλεσμα να θεωρούν το α στοιχείο του σώματος K=$\mathbb{R}$. Μελετώντας τα μεμονωμένα λάθη που συναντήσαμε στα υπόλοιπα γραπτά παρατηρήσαμε ότι η επιμεριστική ιδιότητα δείχνει να μην τους δυσκόλεψε αλλά **<u>κοινό χαρακτηριστικό σε όλες είναι η παράλειψη ποσοδεικτών</u>**, όπως επισημάνθηκε και στην ανάλυση των λανθασμένων απαντήσεων της ερώτησης 4.

- **Ερώτηση 17**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 17 | Ένας nxn πίνακας έχει βαθμό μικρότερο του n-1 αν και μόνο αν ο συμπληρωματικός του πίνακα είναι μηδενικός. |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | $A \in \Pi_{nxn}, rank(A) < n - 1 \Leftrightarrow adj(A) = 0$ |
| Ποσοστό επιτυχίας | **34%** |

Οι 4 από τους 6 που απάντησαν λάθος, έγραψαν: «*βαθμ. (Anxn)< n-1*$\Longrightarrow A^C = \emptyset$ »

Παρατηρούμε ότι δεν μετέφρασαν την έκφραση «*αν και μόνο εάν*» από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής ως ισοδυναμία «⟺» αλλά ως συνεπαγωγή «⟹». Εμφανίζονται δηλαδή και σε αυτό το σημείο αδυναμίες ερμηνείας των συμβόλων της Λογικής.

### II. Ανάλυση λανθασμένων απαντήσεων που αφορούν στο πέρασμα από τη συμβολική γραφή στη φυσική γλώσσα

### A. Σύγχυση μαθηματικών συμβόλων, μαθηματικών εννοιών

- **Ερώτηση 21**

| Ερώτηση 21 | $V_1, V_2 : V_1 \leq V, V_2 \leq V \Rightarrow V_1 \cap V_2 \leq V$ |
|---|---|
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Έστω V1 διανυσματικός υπόχωρος του V και V2 διανυσματικός υπόχωρος τουV τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **47%** |

Οι 3 από τους 12 που απάντησαν λανθασμένα, έγραψαν:

*«Έστω V1, V2 διανύσματα. Η τομή τους είναι υπόχωρος του V»*

Βλέπουμε ότι οι φοιτητές **ταύτισαν τα V1, V2 με διανύσματα αντί για διανυσματικούς χώρους. Παρασύρθηκαν σε αυτό το λάθος επειδή σε πολλά συγγράμματα το διάνυσμα συμβολίζεται με τη μεταβλητή (V) από τη λέξη «vector».** Αυτό το συναντήσαμε και στο αντίστροφο πέρασμα. Παρατηρούμε ότι συμβαίνει συχνά τόσο στους μαθητές όσο και στους φοιτητές να ταυτίζουν μια μεταβλητή με μια συγκεκριμένη έννοια και να μη μπορούν να δεχθούν ότι αυτή η μεταβλητή μπορεί να αντιπροσωπεύει και άλλες έννοιες.

### B. Μη αξιοποίηση όλων των δοσμένων πληροφοριών σε συμβολική γλώσσα

- **Ερώτηση 24**

| Ερώτηση 24 | $\nu \in N, (\nu + 1)^2 - \nu^2 = (\nu + 1) + \nu$ |
|---|---|
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμά τους. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **46%** |

Οι πιο συχνές λανθασμένες απαντήσεις ήταν οι εξής:

«*Για ν φυσικός, ανάπτυγμα τετραγώνου πλην ν στο τετράγωνο ίσο με το διπλάσιο ν και ένα*» (4/18)

«*Διαφορά τετραγώνου*» (5/18)

Παρατηρούμε ότι **<u>εντόπισαν γνωστές τους ταυτότητες και απλά έκαναν τη μετάφραση τους στη φυσική γλώσσα, ενώ εμείς ζητήσαμε να περιγράψουν τη μαθηματική σχέση που συνδέει δυο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.</u>** Άρα δεν μπόρεσαν μέσα από τη συμβολική γραφή να αναγνωρίσουν τους δυο διαδοχικούς αριθμούς.

- **Ερώτηση 18**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 18 | $\alpha, \beta \ \in \Delta^3, +: \Delta^3 \to \Delta^3$ <br> $i)\ \forall \alpha, \beta \in \Delta^3, \alpha + \beta = \beta + \alpha$ <br> $ii)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Delta^3, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Έστω α, β δύο στοιχεία του συνόλου $\Delta^3$. Το σύνολο $\Delta^3$ είναι εφοδιασμένο με την πράξη + η οποία είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική. Έστω α, β δύο στοιχεία του συνόλου $\Delta^3$. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **41%** |

Οι μισοί φοιτητές από αυτούς που απάντησαν λάθος (9/18) **<u>αρκέστηκαν στο να αναγνωρίσουν απλώς τις δοσμένες συμβολικά ιδιότητες</u>**, σημειώνοντας:

«*i) αντιμεταθετική ιδιότητα ii) προσεταιριστική ιδιότητα*».

Παρατηρούμε δεν θεώρησαν σημαντικό να προσδιορίσουν το σύνολο στο οποίο αναφερόμαστε μη αξιοποιώντας όλα τα δεδομένα της εκφώνησης.

- **Ερώτηση 20**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 20 | $(D, +), +: D \times D \to D, \forall a \in D, \forall b \in D, a + b = b + a$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική αντιμεταθετή πράξη. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **54%** |

Και σε αυτή την ερώτηση οι περισσότεροι επικεντρώθηκαν **στην αναγνώριση και λεκτική ορολογία της δοσμένης ιδιότητας** χωρίς να γίνει αναφορά στο σύνολο όπου ανήκουν τα στοιχεία, και **μην ορίζοντας τις μεταβλητές a και b** απαντώντας απλά: «*Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα*»

- **Ερώτηση 22**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 22 | $A_{n\times n}, \rho \in N, \sigma \in N, A^{\rho} \cdot A^{\sigma} = A^{\rho+\sigma}$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Έστω Α τετραγωνικός πίνακας n×n και έστω ρ, σ φυσικοί. Το γινόμενο της ρ-δύναμης του Α επί της σ-δύναμης του Α είναι ίσο με την ρ+σ δύναμη του Α. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **23%** |

Στην ερώτηση 22 οι 8 από τους 12 φοιτητές απάντησαν λάθος, ως εξής:

«*Έστω πίνακας* $n\times n$ *, ισχύουν ιδιότητες δυνάμεων.*».

Βλέπουμε ότι **αναφέρονται γενικά σε ιδιότητες δυνάμεων και όχι στην ιδιότητα του πολλαπλασιασμού δυνάμεων με ίδια βάση, όπου αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε για εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.** Δίνουν λοιπόν μια απάντηση, χωρίς αυτή να αντιστοιχεί απόλυτα στην ιδιότητα που περιγράφεται στην εκφώνηση της ερώτησης και αφορά τους πίνακες.

- **Ερώτηση 23**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 23 | $A \in \Pi_{nxn}, A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Έστω Α, Β τετραγωνικοί πίνακες nxn. Αν οι πίνακες είναι αντιμεταθετικοί τότε ισχύει για αυτούς τους πίνακες η ταυτότητα του τετραγώνου του αθροίσματος. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **13%** |

Σε αυτήν την ερώτηση οι 9 από τους 16 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν την απάντηση:

«*Α, Β ανήκουν στους πίνακες. Ανάπτυξη ταυτότητας τετραγώνου.*»

Δηλαδή **<u>παρατήρησαν σε ένα σημείο της εκφώνησης την πρόταση «*(Α+Β)$^2$= ...*» και το μετέφρασαν αμέσως ως «*Ανάπτυξη ταυτότητας τετραγώνου*».</u>** Στάθηκαν μεμονωμένα στην ιδιότητα που τους ήταν γνώριμη από το Γυμνάσιο, δηλαδή την ταυτότητα του τετραγώνου αθροίσματος **<u>μη δίνοντας σημασία στην αντιμεταθετική ιδιότητα που ικανοποιούσαν οι πίνακες ούτε στη συνεπαγωγή</u>**, στη δομή της οποίας υπάρχει μια υπόθεση κι ένα συμπέρασμα. Το θέμα αυτό διδάσκεται στο μάθημα «Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα» στο Α΄ εξάμηνο της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Οι υπόλοιποι φοιτητές που απάντησαν μετάφρασαν μερικώς το παραπάνω ερώτημα.

- **Ερώτηση 25**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 25 | $A \in \Pi_{n\times n}, \lvert A\rvert \neq 0, A\cdot X_0 = \lambda_0 \cdot X_0 \ \Rightarrow A^{-1}\cdot X_0 = {\lambda_0}^{-1}\cdot X_0$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Αν Anxn αντιστρέψιμος πίνακας με ιδιοτιμή $\lambda_0$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $X_0$ τότε ο $A^{-1}$ έχει ιδιοτιμή $\lambda_0^{-1}$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $X_0$. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **6%** |

Στην ερώτηση 25, αξιοποιώντας μερικώς τα δεδομένα της εκφώνησης οι 4 από τους 16 απάντησαν λανθασμένα ως εξής:
«*Έστω Α τετραγωνικός πίνακας. Μη μηδενικός. Οι ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του Α και του $A^{-1}$* »

Οι 3 από τους 16 επίσης απάντησαν ως εξής: «*ιδιοτιμές – ιδιοδιανύσματα*»

*Και οι 5 από τους 16 απάντησαν λανθασμένα ως εξής: « Έστω Α τετραγωνικός πίνακας*».

- **Ερώτηση 26**

| | |
|---|---|
| Ερώτηση 26 | $A \in \Pi_{n\times n}, B \in \Pi_{n\times n}$ , $\lvert B\rvert \neq 0$ ή $\lvert A\rvert \neq 0 \Rightarrow$ <br> $\lvert \lambda \cdot I - A \cdot B\rvert = \lvert \lambda \cdot I - B \cdot A\rvert$ |
| Ενδεικτική σωστή απάντηση | Αν Α,Β nxn πίνακες με τουλάχιστον τον ένα αντιστρέψιμο τότε η ΑΒ και ΒΑ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. |
| Ποσοστό επιτυχίας | **7%** |

Οι 7 από τους 19 φοιτητές που απάντησαν λανθασμένα προσδιόρισαν απλώς τη φύση των πινάκων, γράφοντας:

«*Έστω Α,Β τετραγωνικοί πίνακες, μη μηδενικοί*»,

και οι 3 από τους 19 σημείωσαν:

«*Α,Β ανήκουν στους πίνακες. Απόλυτες τιμές τους μη μηδενικές*» .

Τα λάθη των υπόλοιπων φοιτητών φανερώνουν την παρανόηση των συμβόλων:

| Μεμονωμένες λανθασμένες απαντήσεις στην ερώτηση 26 | |
|---|---|
| Γραπτό 15 | Αν η ορίζουσες του Α και του Β είναι μη μηδενικές τότε τα Α·Β και Β·Α είναι αντίθετα. |
| Γραπτό 17 | Έστω Α,Β nxn πίνακες με $\lvert B\rvert \neq 0$ ή$\lvert A\rvert \neq 0$. |
| Γραπτό 32 | Α,Β πίνακες. Το απόλυτο γινόμενό τους είναι αντίθετο. |
| Γραπτό 48 | Απόλυτο Α≠0 και απόλυτο Β≠0. Τότε το Α·Β είναι αντίθετο με το Β·Α. Απόλυτα. |
| Γραπτό 60 | Α, Β τετραγωνικοί πίνακες Α·Β αντίθετο με το Β·Α |
| Γραπτό 62 | Α, Β ανήκουν Πίνακες |

Σε αυτές τις δυο ερωτήσεις, εμφανίστηκαν τα μεγαλύτερα ποσοστά αποτυχίας. Ήταν δυο ερωτήσεις επιλεγμένες από το μάθημα «Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα» του Α΄ έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Στην ερώτηση 25, οι φοιτητές **<u>εντόπισαν τα πολύ σημαντικά και γνωστά σε αυτούς μαθηματικά αντικείμενα, όπως «Α τετραγωνικός πίνακας», «ιδιοτιμές», «ιδιοδιανύσματα» τα ανέφεραν απλά από το σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής στο σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας, αλλά δεν μπόρεσαν να κατανοήσουν στο σύνολό της την εκφώνηση.</u>** Δεν προσδιόρισαν δηλαδή απόλυτα την ιδιότητα που περιέγραφε η εκφώνηση και δεν την μετέφρασαν στη φυσική γλώσσα.
Στην ερώτηση 26 οι περισσότεροι **<u>υπέπεσαν στο σφάλμα που υπέπεσαν και αυτοί της 25. Όμως τρεις από αυτούς συνδύασαν και το σύμβολο της απόλυτης τιμής με ορισμό που γνώριζαν από το Λύκειο και αντιστοιχεί στο μέτρο ενός διανύσματος.</u>**

Εδώ διαπιστώνουμε πως τα αποτελέσματα της έρευνάς μας συνάδουν με τα συμπεράσματα της έρευνας που έχει πραγματοποιηθεί από τη Ντίνου Μαρία στα πλαίσια Διπλωματικής εργασίας στο Ε.Μ.Π. στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. με θέμα «Από το Λύκειο στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο: Έρευνα για «το κενό» στη διδασκαλία των μαθηματικών», στην οποία τα μαθηματικά στο Ε.Μ.Π. αξιολογούνται ως δύσκολα και πολύ δύσκολα από το 64,6% των ερωτηθέντων. Επίσης στην ίδια Διπλωματική εργασία αναφέρεται ότι το συμπέρασμα αυτό συνάδει με τα ευρήματα της βιβλιογραφικής έρευνας σε αντίστοιχες έρευνες άλλων πανεπιστημίων.

Έχοντας υπόψη μας τα συμπεράσματα από την έρευνα αυτή μπορούμε να δικαιολογήσουμε τα μεγάλα ποσοστά αποτυχίας στις συγκεκριμένες ερωτήσεις, όμως παράλληλα πρέπει να ανησυχήσουμε ιδιαίτερα, για αυτά τα μεγάλα ποσοστά αποτυχίας , καθότι οι φοιτητές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. έχουν ανταποκριθεί με επιτυχία στις Πανελλήνιες εξετάσεις, στο μάθημα των Μαθηματικών, προκειμένου να επιτύχουν την εισαγωγή τους στη συγκεκριμένη σχολή του Ε.Μ.Π. Επομένως το μεγάλο κενό δημιουργείται στο Α΄ κιόλας εξάμηνο κατά τη φοίτησή τους στη σχολή.

### III. Ερωτήσεις όπου ελέγχουμε το πέρασμα και από τις δυο κατευθύνσεις

Υπήρχαν ερωτήσεις μέσα στο ερωτηματολόγιο όπου ζητούσαμε το πέρασμα π.χ. από τη φυσική γλώσσα (Φ.Γ.) στη συμβολική γραφή (Σ.Γ.), ενώ σε μία άλλη ζητούσαμε το αντίστροφο πέρασμα, με στόχο να δούμε αν σε κάποιο από τα δύο υπάρχει μεγαλύτερη δυσκολία. Στη συνέχεια παρατίθενται πίνακες με τα ποσοστά επιτυχίας ανά ζητούμενο πέρασμα.

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 5) | Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη. |
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 19) | $(D,+),+\colon D\times D\rightarrow D$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. → Σ.Γ. | **39%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. → Φ.Γ. | **47%** |

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 15) | Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική αντιμεταθετική πράξη. |
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 20) | $(D,+)\colon +\colon D\times D\rightarrow D, \forall a\in D, \forall b\in D, a+b=b+a$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. → Σ.Γ. | **39%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. → Φ.Γ. | **54%** |

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 9) | Αν V1, V2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι τουV τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V. |
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 21) | $V_1,V_2\colon V_1 \le V, V_2\le V$<br>$\Rightarrow V_1\cap V_2\le V$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. → Σ.Γ. | **66%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. → Φ.Γ. | **47%** |

| | |
|---|---|
| Φυσική Γλώσσα (Ερώτηση 13) | Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους. |
| Συμβολική Γραφή (Ερώτηση 24) | $\nu \in N, (\nu+1)^2 - \nu^2 = (\nu+1) + \nu$ |
| Ποσοστό επιτυχίας από Φ.Γ. → Σ.Γ. | **57%** |
| Ποσοστό επιτυχίας από Σ.Γ. → Φ.Γ. | **46%** |

Τα παραπάνω αποτελέσματα φανερώνουν ότι δεν υπάρχει ακριβώς η ίδια αντιμετώπιση στα περάσματα με διαφορετική κατεύθυνση. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε μια απόκλιση από 10% έως 20% περίπου από τη μία κατεύθυνση προς την άλλη χωρίς να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το ένα από τα δυο περάσματα αποδεικνύεται πιο εύκολο ή πιο δύσκολο για το δείγμα μας. Θα μπορούσαμε απλώς να υποθέσουμε ότι είναι χρήσιμο να μπορούμε να επεξεργαζόμαστε και τις δυο κατευθύνσεις.

### 4.3. Κοινές Ερωτήσεις στους δύο Πληθυσμούς

Στα δύο ερωτηματολόγια υπήρχαν κάποιες κοινές ερωτήσεις για να έχουμε πιο σαφή αποτελέσματα συγκριτικά για τους μαθητές και τους φοιτητές. Παρακάτω υπάρχουν οι κοινές ερωτήσεις και η απόδοση των μαθητών και φοιτητών αντίστοιχα αποτυπώνεται στο διάγραμμα.

**Ερώτηση 1:** « *Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων(x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω.* »

**Ερώτηση 2:** « *Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n).* »

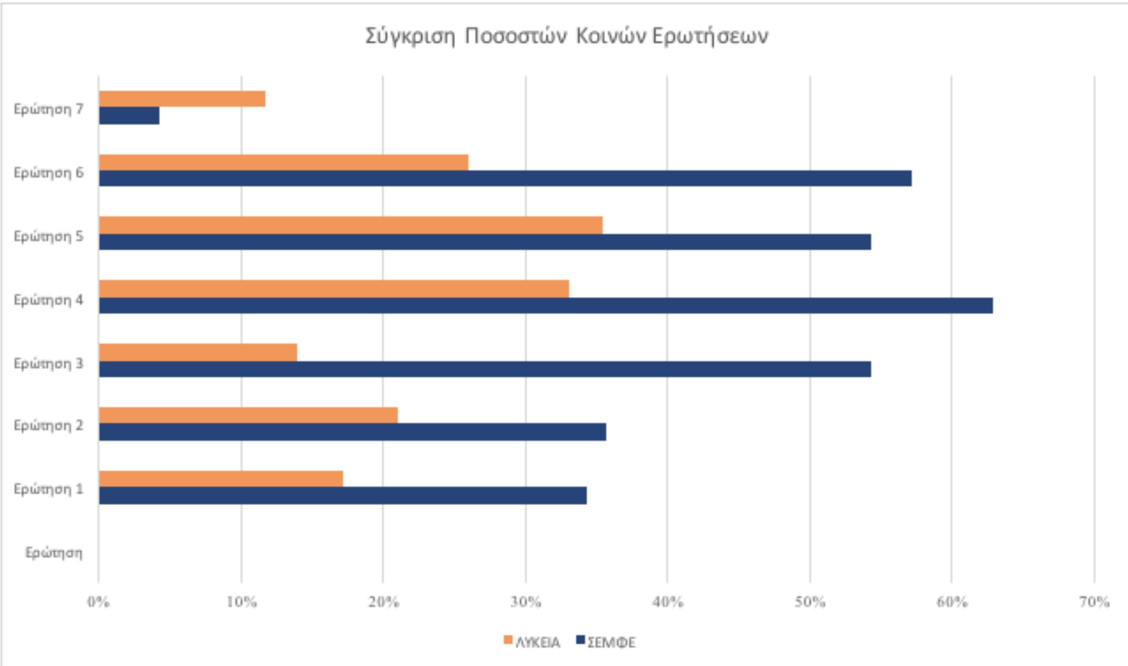
**Ερώτηση 3:** «*Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις.*»

**Ερώτηση 4:** « *Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας(κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη(β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια(ϑ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα.* »

**Ερώτηση 5:** «*Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών;* »

**Ερώτηση 6:** « *Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμά τους.* »

**Ερώτηση 7:** « *Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα.* »



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή αυτής της εργασίας, ότι η παρούσα έρευνα εστίασε στην ικανότητα μετάβασης, των μαθητών της Γ΄ τάξης των Γ.Ε.Λ. και των φοιτητών του 1ου έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π., από το σημειωτικό επίπεδο της Φυσικής Γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της Συμβολικής Γραφής και το αντίστροφο. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των ερωτηματολογίων μας οδήγησε στα παρακάτω συμπεράσματα.

Διαπιστώθηκε σύγχυση της συμβολικής αναπαράστασης ενός αριθμού και της αξίας του αριθμού τόσο στους μαθητές (περίπου το 1/3) όσο και στους φοιτητές (περίπου οι μισοί).

Αξιοποιούν μερικώς τις πληροφορίες που τους δίδονται στις εκφωνήσεις, είτε από φυσική γλώσσα σε συμβολική γραφή είτε το αντίστροφο. Δεν αντιλαμβάνονται σε πολλές περιπτώσεις και οι μαθητές αλλά και οι φοιτητές ότι οι εκφωνήσεις μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές καταστάσεις.

Δεν χειρίζονται σωστά ή δε δίδουν την πρέπουσα σημασία στους συντακτικούς κανόνες της ελληνικής γλώσσας τόσο οι μαθητές όσο και οι φοιτητές.

Δεν έχουν συνηδειτοποιήσει την αξία του ποσοδείκτη στη συμβολική γραφή Παρατηρείται σύγχυση μαθηματικών συμβόλων, μεταβλητών και μαθηματικών εννοιών σε μεγάλο ποσοστό των μαθητών αλλά και των φοιτητών.

Δυσκολεύονται να εκφραστούν στη φυσική γλώσσα. Αποδίδουν τις εκφράσεις της συμβολικής γραφής σε «μικτή» γλώσσα και όχι στην καθαρή φυσική γλώσσα. Αυτό το αποδίδουμε στο γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητικών εγχειριδίων χρησιμοποιεί συχνά «μικτές» εκφράσεις.»

Όσον αφορά τους συντακτικούς κανόνες της Λογικής και τη χρήση συμβόλων Λογικής από το σημειωτικό επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της συμβολικής γραφής παρατηρείται ότι οι φοιτητές δεν αναγνωρίζουν κάποια σύμβολα όταν αυτά δίδονται λεκτικά για παράδειγμα τη συνεπαγωγή ή την ισοδυναμία. Αλλά και αντίστροφα όταν οι εκφράσεις δίδονται στο συμβολικό επίπεδο δεν θεωρούν πάντα απαραίτητο να τις εκφράσουν λεκτικά. Κατά συνέπεια οδηγούνται σε μία σύγχυση μεταξύ της υπόθεσης και του συμπεράσματος καθώς δεν τους είναι ξεκάθαρο.

Πολλά ήταν τα γραπτά των φοιτητών στα οποία διαπιστώθηκαν αδυναμίες σε μαθηματικά αντικείμενα η συμβολισμούς. Υπήρχε συχνά σύγχυση με γνωστούς συμβολισμούς του γυμνάσιου, αλλά και δυσκολίες σε έννοιες της Άλγεβρας όπως: συντελεστές διεύθυνσης, ιδιότητες ιδιοτιμών, ιδιοδιανυσμάτων.

Όπου υπήρχε εννοιολογική συνάφεια μεταξύ της φυσικής γλώσσας και της συμβολικής γραφής, η μετάβαση φάνηκε πιο εύκολη για τους μαθητές.

Όταν το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, δηλαδή η σχέση δυο μεγεθών προκύπτει με βάση τη λογική, τότε οι μαθητές διευκολύνονται και ενεργούν σωστά.

Στα δύο ερωτηματολόγια υπήρχαν 7 κοινές ερωτήσεις, προκειμένου να διαπιστώσουμε το βαθμό δυσκολίας με τον οποίο αντιμετωπίστηκε το θέμα που ερευνούμε στα δυο διαφορετικά επίπεδα εκπαίδευσης, έχοντας ένα κοινό κριτήριο. Παρατηρούμε ότι οι φοιτητές έχουν τη δυνατότητα λόγω της πληρέστερης και καλλίτερης εννοιολογικής κατάρτισής τους, να χειρίζονται με την πρέπουσα προσοχή τη φυσική γλώσσα και να μπορούν να μεταφράζουν με πληρότητα και σχολαστικότητα από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο.

Κλείνοντας καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν αρκετές δυσκολίες στο πέρασμα από το σημειωτικό επίπεδο της Φυσικής Γλώσσας στο σημειωτικό επίπεδο της Συμβολικής Γραφής και αντίστροφα και από τους μαθητές της Γ΄ τάξης των Γ.Ε.Λ., αλλά και από τους φοιτητές του 1ου έτους της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. του Ε.Μ.Π.

Σαν μια αρχή θα μπορούσαν οι διδάσκοντες να επιμείνουν σε αυτό το πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο διότι βλέπουμε ότι στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση οι κανόνες σύνταξης και η κατανόηση των συμβολών λογικής είναι απαραίτητοι. Οι βάσεις λοιπόν για τη «μετάφραση» από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο μπορούν να μπαίνουν από τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

Ξεκινώντας από αυτό το πρώτο βήμα, οι μαθητές - φοιτητές θα έχουν συλλάβει την ύπαρξη αυτής της διαδικασίας, θα προσπαθούν να την αναγνωρίζουν, θα εξοικειωθούν μαζί της και θα τη χειρίζονται σαν εργαλείο, ώστε με μεγάλη ευκολία να γίνεται το πέρασμα από το ένα σημειωτικό επίπεδο στο άλλο. Η καλή γνώση του συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου, των αναπαραστάσεων δηλαδή, αλλά συγκεκριμένα της μετάβασης από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική γραφή και το αντίστροφο, βοηθάει αρκετά για μια επιτυχημένη μάθηση και οδηγεί σε αρκετά καλό επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Θα τους καταστήσει ικανούς να ερμηνεύουν, να αξιοποιούν και να ανακαλύπτουν όλα όσα χρειάζονται για μία επιτυχημένη στάση απέναντι στην επίλυση προβλημάτων και στα Μαθηματικά γενικότερα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ


1. Αναπολιτάνος Δ. (1985), Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, Αθήνα Εκδ. Νεφέλη.
2. Αναστασιάδου Σοφία (2007), *«Δυσκολίες χειρισμού των σημειωτικών συστημάτων αναπαράστασης στατιστικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο»,* Πρακτικά 20ου Πανελληνίου Συνεδρίου Στατιστικής, Σελ.87-94.
3. Βικιπαίδια.
4. Βοσνιάδου Σ. (2001), Εισαγωγή στην Ψυχολογία. τόμος Α΄, Αθήνα, Εκδ. Gutenberg.
5. Δαγδιλέλης Β., Παυλοπούλου Κ., Τρίγκα Π. (1998), Διδακτική μέθοδοι και εφαρμογές, Εκδ. Ευγ. Μπένου.
6. Θ.Σκούρας (1999), «Η Σύνδεση των αναπαραστάσεων στην πορεία διαμόρφωσης αφηρημένων εννοιών. Η περίπτωση της συνάρτησης $f(\chi) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ », Ευκλείδης Γ., Τεύχος 51.
7. Μπαμπινιώτης Γ., Λεξικό για το σχολείο και το γραφείο.
8. Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής.
9. Μικρό Νεοελληνικό Λεξικό «Πατάκη».
10. Παπαδάτος Γ. (2011), Ψυχοφυσιολογία, Λειτουργίες του Εγκεφάλου και Μαθηματικά, Αθήνα, Επιστημονικές Εκδόσεις Παρισιάνου.
11. Σπύρου Π. (2005), Επιστημολογία των Μαθηματικών, Σημειώσεις Παραδόσεων Αθήνα.
12. Χριστοδουλίδης Π. (1993), Η φιλοσοφία των Μαθηματικών, Αθήνα, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός.

## ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

13. Παυλοπούλου Κ. (1993), Un probleme decisive pour l' apprentissage de l' Algebre Lineaire : la coordination des registres de representation, Annales de Didactique et de Science Cognitives,5, 67-93.
14. Bell, C. V., & Pape, S. J. (2012). Scaffolding students' opportunities to learn mathematics through social interactions. Mathematics Education Research Journal, 24(4), 423-445.
15. Bilman D. (1999), Representations, in A Companion to Cognitive Science, (Edit. By Bechtel & Graham G.), Blackwell, London.
16. Boulet, G. (2007). How does language impact the learning of mathematics? Let me count the ways. Journal of Teaching and Learning, 5(1).
17. Boyer, C. B. (1959). A History of the Calculus and its Conceptual Development . Dover Publication, Inc., New York.
18. Bresser, R., Melanese, K., & Sphar, C. (2008). Supporting English Language Learners in Math Class, Grades K-2. Math Solutions.
19. Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University.
20. Chapman, A. (1993). Language and learning in school mathematics: A social semiotic perspective. Issues in educational research, 3(1), 35-46.
21. Cornu, B.: 1991, Limits, In D. O. Tall(ed), Advanced mathematical thinking, Dordrecht: Kluwer, 153-166.
22. Davis, P., Hersh, R. (1981). Η μαθηματική Εμπειρία Αθήνα, Εκδ. Τροχαλία.
23. Dorier, J. L.:1997, L' Enseignement de l' Algebre Lineaire en Question, Editions La Pensee Sauvage.
24. Dufour – Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
25. Duval, R. (2001). Pourquoi les représentations sémiotiques doivent-elles être placées au centre des apprentissages en mathématiques? In A. Gagatsis (Ed),

Learning in Mathematics and Science and Educational Technology. (pp.67-90). Intercollege press : Cyprus.
26. Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, Springer 2006.
27. Glasersfeld, E. von: 1987, “Construction of Knowledge”, Intersystem’s Publications, Salinas
28. Goldin, G. A. (1988). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2)
29. Goldin G.A , Kaput J. M. (1996). A Joint Perspective of the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In von L.P. Steffe, Nesher P. (Eds.). Mahwah (New Jersey): LEA.
30. Hughes, M., (1996). Τα Παιδιά και η Έννοια των Αριθμών. (Βοσνιάδου Σ. επιμ.), Αθήνα, Εκδ Gutenberg.
31. Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
32. Johnson-Laird, P. (1983). Mental Models: Towards a Cognitive Science of Language, Inference and Consciousness. Cambridge: Cambridge University Press.
33. Kabasakalian, R. (2007). Language and thought in mathematics staff development: A problem probing protocol. Teachers College Record, 109(4), 837-876.
34. Kaput J.J (1987a) Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Eds)., Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbau.
35. Kaput, J. J. (1987b). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
36. Kaput. J.J.(1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer, B. Winkelmann (Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline (pp. 379–397). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

37. Kieran, C., (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In: S. Wagner & Kieran (Eds), Research issues in the learning and teaching of algebra (pp. 33 – 56). Reston, VA: National Council of Teaching of Mathematics.
38. Kotsopoulos, D. (2007). Mathematics discourse: “It’s like hearing a foreign language”. Mathematics Teacher, 101 (4), 301-305.
39. Kuchemann, D. (1981). ‘Algebra’ in Children’s Understanding of Mathematics, 11 – 16, K. Hart(Ed.). Alden Press, Oxford, London.
40. Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning mathematics. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbawm Associates.
41. Maier H., 1993. Προβλήματα γλώσσας και επικοινωνίας στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών. Α. Γαγάτσης, Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Κυριακίδης, σ. 222-237.
42. Morgan, C. (2014). Understanding practices in mathematics education: structure and text. Educational Studies in Mathematics, 87(2), 129-143.
43. Oginni, O. & Olugbuyi, P. (2013). An Appraisal of Sciences and Mathematics Dyslexia and Dyscalculia Syndrome among Secondary Schools Students. American Journal of Educational Research, 2014, Vol. 2, No. 4, 219-224.
44. O’Halloran, K. L. (2000). Classroom discourse in mathematics: A multisemiotic analysis. Linguistics and Education, 10(3), 359-388.
45. Philipp, R. A., (1992). The many uses of algebraic variables. Mathematics Teacher, 85(7), 557 – 561.
46. Pimm, D. (1994). Mathematics classroom language form, function and force. Didactics of mathematics as a scientific discipline, 13, 159.
47. Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Towards a Theory of Representing as Social Practice. Review of Educational Research, 68 (1), 35-59.
48. Ryve, A. (2004). Can collaborative concept mapping create mathematically productive discourses? Educational Studies in Mathematics, 26, 157-177.
49. Schoenfeld, A., Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable, Mathematics Teacher 81, 420-427.

50. Schwartz, J & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. . In Harel, G and Dubinsky, E. (Eds.). The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy (pp.261-289). West LaFayette. IN: Mathematical Association of America.
51. Seeger, F. (1998). Representations in the Mathematical Classroom: Reflections and Constructions. In von F. Seeger, J. Voight & U. Waschescio (Eds.), The culture of the mathematical classroom (pp. 308-343). Cambridge: Cambridge UP.
52. Steinberg, H. (2000). Interaction Analysis of Mathematical Communication in Primary Teacting: The Epistemological Perspective. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 5, 138-148.
53. Tall, D. & Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in Mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
54. Wachira, P., Pourdavood, R. G., & Skitzki, R. (2013). Mathematics teacher's role in promoting classroom discourse. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 6648707.

## ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ

55. nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/.../3/Nimertis_Papaioannou%28ptde%29.pdf.

56. www.math.uoa.gr/me/dipl/2014-15/dipl_asimakis.pdf.

57. www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_dimitris_giannopoulos.pdf.

58. www.math.uoa.gr/me/dipl/2013-2014/dipl_sofronis_vamvakousis_.pdf.

59. www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_grabbani.pdf.

60. mathslife.eled.uowm.gr/wp-content/.../09/Perasma-apo-tin-arithmitiki-stin-algebra.pdf.

61. www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/gagilia.pdf.

62. www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/514.pdf.

63. opencourses.uoa.gr/.../H%20ennoia%20tis%20synartisis-Koleza-Fakoydis-2008.pdf

64. www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_sterodima.pdf

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### 7.1. Ερωτηματολόγιο Γ' Λυκείου (όπως δόθηκε στους μαθητές)

Ερωτηματολόγιο

| | |
|---|---|
| Σχολείο:<br>Τμήμα:<br>Φύλο: | Ημερομηνία: |

Παρακάτω δίνονται εκφράσεις γραμμένες σε φυσική γλώσσα. Ζητείται να τις γράψετε με μαθηματικά σύμβολα στη στήλη «Συμβολική Γραφή».

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
|---|---|
| 1. Υπάρχει αριθμός (α) που ανήκει στο σύνολο όλων των ακεραίων εκτός του μηδενός.<br><br>2. Οι θαμώνες (θ) ενός ξενοδοχειακού συγκροτήματος είναι δεκαπλάσιοι από το προσωπικό (π).<br><br>3. Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων(x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω.<br><br>4. Να δοθεί το άθροισμα τριών διαδοχικών ακέραιων αριθμών (α).<br><br>5. Σε ένα θέατρο πωλούνται φοιτητικά εισιτήρια (φ) των 12€ και κανονικά εισιτήρια (κ) των 16€. Από τα εισιτήρια που πουλήθηκαν εισπράχθηκαν 800€.<br><br>6. Σε ένα στρατόπεδο υπηρετούν τη θητεία τους εικοσαπλάσιοι στρατιώτες (σ) από τους αξιωματικούς (α) του στρατοπέδου.<br><br>7. Σε ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής ο ζαχαροπλάστης παράγει πενταπλάσια ταρτάκια (τ) από παστάκια (π). | |

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
|---|---|
| 8. Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου($x_1$) και του μεγαλύτερου($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n).<br><br>9. Ένας πατέρας έχει τριπλάσια ηλικία από την ηλικία(x) της κόρης του. Μετά από 7 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι κατά 13 χρόνια μεγαλύτερη από το διπλάσιο της ηλικίας της κόρης του. Να εκφράσετε συμβολικά την παραπάνω πρόταση.<br><br>10. Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις.<br><br>11. Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας(κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη(β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια(θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα.<br><br>12. Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; | |

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
|---|---|
| 13. Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους.<br><br>14. Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα.<br><br>15. Ένα αεροπλάνο($U_1$) ταξιδεύοντας με αντίθετο άνεμο($U_2$) διήνυσε την απόσταση μεταξύ δύο πόλεων που ήταν 4.048 km σε 4,6 ώρες ενώ για την επιστροφή χρειάστηκε 4,4 ώρες. Εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα την παραπάνω πρόταση. | |

Παρακάτω δίνονται εκφράσεις γραμμένες σε συμβολική γραφή. Ζητείται να τις γράψετε με λόγια στη στήλη «Φυσική Γλώσσα».

| **Συμβολική Γραφή** | **Φυσική Γλώσσα** |
|---|---|
| 16. $\exists\ \alpha \in \mathbb{Z}^*$ | |
| 17. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$<br>$\alpha$, $\beta=\alpha+1$, $\gamma=\alpha+2$, $\delta=\alpha+3$ | |
| 18. $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$ | |
| 19. $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2=-1$ | |
| 20. $(\alpha-\beta)^3$ | |
| 21. $\alpha^3-\beta^3$ | |
| 22. $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert=\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}, \beta\neq0$ | |
| 23. $\lvert\alpha+\beta\rvert \leq \lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$ | |
| 24. $\nu \in \mathbb{N}$<br>$(\nu+1)^2-\nu^2= 2\,\nu+1$ | |

## 7.3. Ερωτηματολόγιο 1ου Έτους Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. (όπως δόθηκε στους φοιτητές)

# Ερωτηματολόγιο

| | |
|---|---|
| Σχολή:<br><br>Φύλο: | Ημερομηνία: |

Παρακάτω δίνονται εκφράσεις γραμμένες σε φυσική γλώσσα. Ζητείται να τις γράψετε με μαθηματικά σύμβολα στη στήλη «Συμβολική Γραφή».

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
|---|---|
| 1. Σε έναν διψήφιο φυσικό αριθμό το ψηφίο των μονάδων είναι διπλάσιο από το ψηφίο των δεκάδων (x). Αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του, τότε ο αριθμός που προκύπτει είναι κατά 27 μεγαλύτερος από τον αρχικό. Να εκφράστε με μαθηματικά σύμβολα τα παραπάνω.<br><br>2. Στις εξετάσεις του ΑΣΕΠ τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να εκφράσετε συμβολικά τη μαθηματική σχέση του μικρότερου ($x_1$) και του μεγαλύτερου ($x_n$) βαθμού συναρτήσει του αριθμού των μαθημάτων(n). | |

| **Φυσική Γλώσσα** | **Συμβολική Γραφή** |
|---|---|
| 3. Ο Κώστας πριν από 4 χρόνια είχε διπλάσια ηλικία από την Μαρία. Έπειτα από 6 χρόνια η ηλικία της Μαρίας θα είναι τα $\frac{2}{3}$ της ηλικίας του Κώστα. Αν συμβολίσουμε κ και μ τις σημερινές ηλικίες του Κώστα και της Μαρίας αντίστοιχα, να εκφράσετε συμβολικά τις παραπάνω προτάσεις.<br><br>4. Έστω α, β ανήκουν στο σύνολο $Δ^3$. Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη της πρόσθεσης είναι οι εξής:<br>i) αντιμεταθετική ιδιότητα<br>ii) προσεταιριστική ιδιότητα<br>iii) ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου<br>iv) ύπαρξη αντίθετου στοιχείου του α.<br>5. Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη<br><br>6. Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις. Εκείνη της πρόσθεσης και εκείνη του πολλαπλασιασμού.<br><br>7. Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K είναι ένα σύνολο V εφοδιασμένο με δύο πράξεις. Εκείνη της πρόσθεσης και εκείνη του πολλαπλασιασμού οι οποίες ικανοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του K. | |

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
| --- | --- |
| 8. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων **a**, **b** ισούται με το εμβαδόν Ε( **a**, **b**) του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα αυτά.<br><br>9. Αν V1, V2 είναι δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε η (συνολο)τομή τους είναι ένας υπόχωρος του V.<br><br>10. Δύο μη μηδενικά διανύσματα **x**, **y** ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, λέγονται ορθογώνια αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο <**x**, **y**> ισούται με το μηδέν.<br><br>11. Τρία παιδιά έχουν μαζί 30 μπάλες. Αν ο Κώστας (κ) δώσει 3 μπάλες στον Βασίλη (β), ο Βασίλης δώσει 4 στη Θάλεια (θ) και η Θάλεια δώσει 2 στον Κώστα, τότε τα παιδιά θα έχουν ίσο αριθμό από μπάλες. Να εκφράσετε με μαθηματικά σύμβολα τις πληροφορίες που μας δίνει το πρόβλημα.<br><br>12. Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Ποια μαθηματική σχέση εκφράζει το άθροισμα (Σx) των βαθμών όλων των μαθητών; | |

| Φυσική Γλώσσα | Συμβολική Γραφή |
| --- | --- |
| 13. Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το άθροισμα τους.<br><br>14. Αν δεκαπέντε διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί με ψηφία περισσότερα από 2 έχουν στο τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15, τότε το άθροισμά τους (S) είναι πολλαπλάσιο του 25.<br><br>15. Έστω ένα σύνολο D εφοδιασμένο με μία εσωτερική αντιμεταθετική πράξη.<br><br>16. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν $2^m$, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοσή τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε «γύρους». Στον πρώτο «γύρο» ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου «γύρου» κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στο δεύτερο «γύρο». Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3 να δημιουργήσετε μία μαθηματική σχέση που να δείχνει ότι το συνολικό πλήθος (P) των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.<br><br>17. Ένας nxn πίνακας έχει βαθμό μικρότερο του n-1 αν και μόνο αν ο συμπληρωματικός του πίνακα είναι μηδενικός. | |

Παρακάτω δίνονται εκφράσεις γραμμένες σε συμβολική γραφή. Ζητείται να τις γράψετε με λόγια στη στήλη «Φυσική Γλώσσα».

| **Συμβολική Γραφή** | **Φυσική Γλώσσα** |
|---|---|
| 18. $\alpha, \beta \in \Delta^3$<br>$+: \Delta^3 \times \Delta^3 \to \Delta^3$<br>i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \ \forall \alpha, \beta \in \Delta^3$<br>ii) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$<br>$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \Delta^3$ | |
| 19. $(D, +)$ :<br>$+ : D \times D \to D$ | |
| 20. $(D, +)$ :<br>$+ : D \times D \to D$<br>$\forall a \in D, \forall b \in D$<br>$a + b = b + a$ | |
| 21. V1, V2:<br>$V1 \leq V$<br>$V \leq V \Longrightarrow$<br>$V1 \cap V2 \leq V$ | |
| 22. $A \in \Pi_{nxn}$<br>$\rho, \sigma \in \mathbb{N}$<br>$A^{\rho} \cdot A^{\sigma} = A^{\rho+\sigma}$ | |
| 23. $A, B \in \Pi_{nxn}$:<br>$A \cdot B = B \cdot A \Longrightarrow$<br>$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ | |
| 24. $\nu \in \mathbb{N}$<br>$(\nu + 1)^2 - \nu^2 = 2\nu + 1$ | |
| 25. $A \in \Pi_{nxn}$<br>$\lvert A \rvert \neq 0$:<br>$A \cdot X_0 = \lambda_0 \cdot X_0 \Longrightarrow A^{-1} \cdot X_0 = \lambda_0^{-1} \cdot X_0$ | |
| 26. $A, B \in \Pi_{nxn}$:<br>$\lvert B \rvert \neq 0$ ή $\lvert A \rvert \neq 0 \Longrightarrow$<br>$\lvert \lambda \cdot I - A \cdot B \rvert = \lvert \lambda \cdot I - B \cdot A \rvert$ | |

### 7.4. Πίνακας Επιτυχίας/ Αποτυχίας 1ου Έτους Σ.Ε.Μ.Φ.Ε