



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

**ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΔΕΙΚΤΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ
ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΕ ΠΡΟΦΙΛ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΜΑΡΙΑΣ ΠΕΤΡΟΓΙΑΝΝΟΥ

A.M.:

09416025

Επιβλέπων: Κουκουβίνος Χρήστος,
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2018



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICS SCIENCES
MSc "APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES"

**CONTROL CHARTS AND PROCESS CAPABILITY INDICES IN
LINEAR AND LOGISTIC REGRESSION PROFILES**

MASTER THESIS
by
MARIA PETROGIANNOU

I.D.:
09416025

Supervisor professor: Koukouvinos Christos,
Professor N.T.U.A.

Athens, 2018

Περίληψη

Η ποιότητα κατέχει ένα σημαντικό ρόλο στην επιτυχία πολλών επιχειρήσεων. Μια εταιρεία που μπορεί να εκπληρώσει τις ανάγκες των πελατών της εγκαίρως, με ανταγωνιστικό κόστος και ανώτερη ποιότητα, μπορεί να επικρατήσει των ανταγωνιστών της. Σε πολλές περιπτώσεις η ποιότητα μιας διεργασίας είναι καλώς ορισμένη από τη σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και ενός ή περισσότερων επεξηγηματικών μεταβλητών. Αυτή η σχέση είναι ένα προφίλ και είναι επιθυμητό να παρακολουθείται στο πέρασμα του χρόνου. Μια ειδική περίπτωση προφίλ είναι όταν η μεταβλητή απόκρισης ακολουθεί μια διωνυμική κατανομή, γνωστή ως προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία υπάρχουν μελέτες για την παρακολούθηση διεργασιών που ορίζονται μέσω απλού γραμμικού προφίλ παλινδρόμησης. Υπάρχουν πολλές τεχνικές για την παρακολούθηση προφίλ όπως είναι τα διαγράμματα ελέγχου και οι δείκτες ικανότητας διεργασίας.

Στη συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία παρουσιάζονται τα κύρια διαγράμματα ελέγχου και οι δείκτες ικανότητας διεργασίας για προφίλ γραμμικής και λογιστικής παλινδρόμησης.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στην παρακολούθηση των προφίλ και στα κύρια χαρακτηριστικά αυτής. Το δεύτερο κεφάλαιο εστιάζει στη λογιστική παλινδρόμηση. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου, τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση των γραμμικών μοντέλων όπως επίσης και μελέτη σύγκρισης και αξιολόγηση κάποιων από αυτών. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου τα οποία χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των πιο διάσημων δεικτών ικανότητας διεργασίας που έχουν προταθεί για την παρακολούθηση προφίλ γραμμικής παλινδρόμησης καθώς και επεξηγηματικών παραδειγμάτων και μελετών σύγκρισης. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι δείκτες ικανότητας διεργασίας για την παρακολούθηση των προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης.

Abstract

Quality plays an important role in the success of many organizations. A company that can fulfill customers' needs on time, with competitive cost and superior quality, can dominate its competitors. In many practical situations the quality of a process is well characterized by a relationship between a response variable and one or more explanatory variables. This relationship is a profile (curve) and it is desirable to be monitored over time. A special case of the profiles is where the response variable follows a binomial distribution known as logistic regression profile. In recent literature there are studies in monitoring processes characterized by simple linear regression profiles. There are many techniques for monitoring the profiles such as control charts and process capability indices.

In the current master thesis we present the main control charts and capability indices in linear and logistic regression profiles.

In the first chapter we present an introduction to profile monitoring and the main characteristics of it. In the second chapter we focus on the logistic regression. In the third chapter we present the control charts which are used to monitor linear models as well as a comparison study and an evaluation some of them. In the fourth chapter we present the control charts which are used to monitor logistic regression profiles. In the fifth chapter we present the most popular process capability indices that have been proposed for monitoring linear regression profiles, illustrative examples and comparison studies. In the last chapter we present the capability indices for monitoring logistic regression profiles.

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση και η ολοκλήρωση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την επίβλεψη του καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κ. Χρήστου Κουκουβίνου, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για την καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια συγγραφής της εργασίας, καθώς και τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτωρ Λάππα Αγγελική, για τη βοήθεια της.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υποστήριξη, τα εφόδια που μου προσέφερε και την ενθάρρυνση της στην ολοκλήρωση της προσπάθειάς μου.

Περιεχόμενα

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Περίληψη | v |
| Abstract..... | vii |
| Ευχαριστίες | ix |
| Περιεχόμενα..... | xi |
| Κατάλογος Πινάκων | xv |
| Κατάλογος Σχημάτων | xvii |
| Κεφάλαιο 1 ^ο | 19 |
| Εισαγωγή..... | 19 |
| 1.1. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας | 19 |
| 1.2. Προφίλ..... | 21 |
| 1.3. Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής..... | 23 |
| 1.4. Φάση I και Φάση II..... | 25 |
| 1.5. Προφίλ Γραμμικής Παλινδρόμησης | 26 |
| 1.6. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα | 30 |
| 1.6.1. Εισαγωγή | 30 |
| 1.6.2. Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και εφαρμογή τους στη διεργασία στατιστικού ελέγχου | 32 |
| 1.6.2.1. Πολυστρωματικά «perceptron» νευρωνικά δίκτυα..... | 33 |
| 1.6.2.2. Εκπαίδευση πολυστρωματικού «perceptron» | 34 |
| 1.6.2.3. Αλγόριθμος «back-propagation» (BPR) | 35 |
| Κεφάλαιο 2 ^ο | 37 |
| Λογιστική Παλινδρόμηση | 37 |
| 2.1. Εισαγωγή..... | 37 |
| 2.2. Απλό Λογιστικό Μοντέλο..... | 40 |
| 2.3. Απλή Λογιστική Παλινδρόμηση | 42 |
| 2.3.1. Ερμηνεία για το συντελεστή παλινδρόμησης b_1 | 46 |
| 2.3.2. Επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις..... | 47 |
| 2.4. Πολλαπλή Λογιστική Παλινδρόμηση | 48 |
| 2.4.1. Εκτίμηση παραμέτρων | 49 |
| 2.4.2. Ερμηνεία για τους συντελεστές παλινδρόμησης | 50 |
| 2.5. Κατασκευή μοντέλου..... | 51 |
| 2.5.1. Έλεγχος αν κάποια από τα $\beta_k=0$ | 51 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.6. Διαγνωστικά..... | 56 |
| Κεφάλαιο 3 ^ο | 59 |
| Διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση γραμμικών μοντέλων | 59 |
| 3.1. ΚΜW διαγράμματα (EWMA-3) | 59 |
| 3.2. MEWMA διάγραμμα..... | 61 |
| 3.3. T ² διάγραμμα ελέγχου..... | 63 |
| 3.4. MCUSUM διάγραμμα ελέγχου | 65 |
| 3.5. Kang και Albin μέθοδοι | 66 |
| 3.6. F μέθοδος..... | 68 |
| 3.7. X ² διάγραμμα ελέγχου..... | 69 |
| 3.8. Μέθοδος βασισμένη στην P-τιμή..... | 71 |
| 3.9. Προσέγγιση «σημείου αλλαγής» | 72 |
| 3.10. ELR διάγραμμα..... | 81 |
| 3.11. «Self Starting» διάγραμμα..... | 83 |
| 3.12. Εφαρμογή του «perceptron» νευρωνικού δικτύου (PNN) για την παρακολούθηση γραμμικών προφίλ | 85 |
| 3.12.1. Δομή για τα προτεινόμενα νευρωνικά δίκτυα | 86 |
| 3.12.2. Εκπαίδευση δεδομένων..... | 87 |
| 3.12.3. Φάση εκπαίδευσης | 88 |
| 3.12.4. Καθορισμός του ARL μετά την εκπαίδευση..... | 88 |
| 3.13. Αξιολόγηση και μελέτη σύγκρισης..... | 90 |
| Κεφάλαιο 4 ^ο | 99 |
| Διαγράμματα ελέγχου για το Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης | 99 |
| 4.1. Εισαγωγή..... | 99 |
| 4.2. Λογιστική Παλινδρόμηση | 100 |
| 4.3. Προτεινόμενοι μέθοδοι για τη Φάση I της λογιστικής παλινδρόμησης..... | 101 |
| 4.3.1. Μέθοδος ελέγχου αναλογίας πιθανοφάνειας | 102 |
| 4.3.2. Μέθοδος ομαδοποίησης..... | 104 |
| 4.3.2.1. Εκτεταμένες ομάδες εντός διακύμανσης | 105 |
| 4.3.2.2. Ομάδες ανάμεσα σε μεταβολή αποσύνθεσης..... | 106 |
| 4.4. Προτεινόμενοι μέθοδοι για τη Φάση II της λογιστικής παλινδρόμησης..... | 107 |
| 4.4.1. Μέθοδος EWMA2..... | 107 |
| 4.4.1.1. Μέθοδος βασισμένη στο υπόλοιπο Pearson..... | 108 |
| 4.4.1.2. Μέθοδος βασισμένη στο υπόλοιπο Anscombe | 109 |
| 4.4.1.3. Παράδειγμα (Saghaei et al. (2012)) | 109 |
| 4.4.2. T ² Μέθοδος | 112 |
| Κεφάλαιο 5 ^ο | 113 |

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Δείκτες ικανότητας διεργασίας για παρακολούθηση προφίλ γραμμικής παλινδρόμησης..... | 113 |
| 5.1. Εισαγωγή..... | 113 |
| 5.2. Δείκτες ικανότητας διεργασίας..... | 114 |
| 5.3. Υπάρχοντες δείκτες ικανότητας διεργασίας για απλά γραμμικά προφίλ | 119 |
| 5.4. Προτεινόμενη προσέγγιση από τους Keshteli et al. (2014)..... | 123 |
| 5.5. Επεξηγηματικά παραδείγματα και μελέτες σύγκρισης | 128 |
| 5.5.1. Παράδειγμα 1 | 128 |
| 5.5.2. Παράδειγμα 2 | 129 |
| 5.5.3. Παράδειγμα 3 | 130 |
| 5.5.4. Συμπεράσματα | 131 |
| Κεφάλαιο 6 ^ο | 133 |
| Δείκτες ικανότητας διεργασίας για Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης | 133 |
| 6.1. Εισαγωγή..... | 133 |
| 6.2. Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης..... | 134 |
| 6.3. Καθορισμός δείκτη ικανότητας διεργασίας για Λογιστικό Προφίλ με τη βοήθεια δύο μεθόδων | 135 |
| 6.3.1. Μέθοδος I : Προτεινόμενος διακριτός δείκτης ικανότητας διεργασίας.... | 136 |
| 6.3.2. Μέθοδος II : Προτεινόμενος συνεχής δείκτης ικανότητας διεργασίας | 138 |
| 6.3.3. Αξιολόγηση απόδοσης | 139 |
| 6.3.4. Μια πραγματική περίπτωση | 141 |
| 6.3.4. Σύγκριση των δύο μεθόδων..... | 143 |
| 6.4. Καθορισμός του δείκτη ικανότητας S_{pmk} για το Λογιστικό Προφίλ | 143 |
| 6.4.1 Απόδοση του δείκτη ικανότητας S_{pmk} | 146 |
| 6.4.2 Παράδειγμα για το δείκτη ικανότητας S_{pmk} στο Λογιστικό Προφίλ..... | 149 |
| Βιβλιογραφία..... | 153 |

Κατάλογος Πινάκων

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Πίνακας 3.1: Συγκρίσεις για τις τιμές εκτός ελέγχου ARL όταν η τετμημένη μετατοπίζεται από το A_0 στο $A_0+\lambda\sigma$. Το εντός ελέγχου ARL ισούται με 200..... | 93 |
| Πίνακας 3.2: Συγκρίσεις για τις εκτός ελέγχου ARL τιμές όταν η κλίση μετατοπίζεται από το A_1 στο $A_1+\eta\sigma$. Το εντός ελέγχου ARL=200..... | 94 |
| Πίνακας 3.3: Συγκρίσεις για τις εκτός ελέγχου ARL τιμές όταν η τυπική απόκλιση μετατοπίζεται από το σ στο $\gamma\sigma$. Το εντός ελέγχου ARL=200..... | 96 |
| Πίνακας 4.1: Η πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων σε διαφορετικά επίπεδα ταχύτητας..... | 110 |
| Πίνακας 5.1: Ιδιότητες του δείκτη C_{pmk} | 119 |
| Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο I..... | 140 |
| Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο II..... | 140 |
| Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο I για πραγματική περίπτωση..... | 142 |
| Πίνακας 6.4: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο II για πραγματική περίπτωση..... | 142 |
| Πίνακας 6.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης του εκτιμώμενου δείκτη ικανότητας διεργασίας και αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης..... | 149 |
| Πίνακας 6.6: Αποτέλεσμα του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης..... | 150 |

Κατάλογος Σχημάτων

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Σχήμα 1.1: Τοπολογία του πολυστρωματικού «perceptron» με δύο κρυφά στρώματα..... | 34 |
| Σχήμα 2.1: Η λογιστική αναμενόμενη συνάρτηση για (α) μονότονα αύξουσα και (β) μονότονα φθίνουσα συνάρτηση..... | 42 |
| Σχήμα 2.2: Γραφική απεικόνιση των τεσσάρων παραπάνω συναρτήσεων σύνδεσης..... | 45 |
| Σχήμα 3.1: Η δομή τριών προτεινόμενων μεθόδων τεχνητών νευρωνικών δικτύων..... | 89 |
| Σχήμα 3.2: Το διάγραμμα ροής βήμα προς βήμα για τη χρήση νευρωνικών δικτύων για την παρακολούθηση γραμμικού «προφίλ»..... | 90 |
| Σχήμα 3.3: Συγκρίσεις στις τιμές του ARL όταν η τετμημένη μετατοπίζεται από το A_0 στο $A_0+\lambda\sigma$ | 93 |
| Σχήμα 3.4: Συγκρίσεις για τις ARL τιμές όταν η κλίση μετατοπίζεται από το A_1 στο $A_1+\eta\sigma$ | 95 |
| Σχήμα 3.5: Συγκρίσεις για τις ARL τιμές όταν η τυπική απόκλιση μετατοπίζεται από το σ στο $\gamma\sigma$ | 96 |
| Σχήμα 4.1: Τα σχήματα δείχνουν τα $EWMA2^P$ διαγράμματα υπό την περίοδο χρόνου των 127 ημερών. Το πρώτο σημείο που δίνει μια ειδοποίηση μιας εκτός ελέγχου κατάστασης είναι το σημείο 89 και στα δύο διαγράμματα, $EWMA_M^P$ (πάνω) και $EWMA_E^P$ (κάτω)..... | 111 |
| Σχήμα 5.1: Η γραμμή αναφοράς, τα όρια προδιαγραφών και τα όρια φυσικής ανοχής για το απλό γραμμικό «προφίλ»..... | 124 |
| Σχήμα 5.2: Μια ειδική περίπτωση όπου το $USLy(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $\mu_y(x)$ στο $[x_1, x_m]$ και μικρότερο από το $\mu_y(x)$ στο $[x_m, x_u]$ | 127 |

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

1.1. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας

Η ποιότητα παίζει ένα σημαντικό ρόλο για την επιτυχία των επιχειρήσεων. Μια επιχείρηση που μπορεί να εκπληρώσει τις απαιτήσεις και τις ανάγκες των πελατών της εγκαίρως, με ανταγωνιστικό κόστος και ανώτερη ποιότητα, θεωρείται πολύ επιτυχημένη και κερδοφόρα. Γι' αυτό είναι σημαντικό για τις επιχειρήσεις να βλέπουν την ποιότητα σαν μια επιχειρηματική στρατηγική. Κάθε διεργασία επηρεάζεται από τυχαίες διακυμάνσεις. Αυτές οι τυχαίες διακυμάνσεις μπορεί να είναι εξαιτίας τυχαίων αιτιών ή προσδιορισμένων αιτιών. Οι τυχαίες αιτίες της μεταβλητότητας είναι έμφυτες της φυσικής μεταβλητότητας της διεργασίας. Ο Montgomery (2013) ανέφερε αυτήν τη φυσική μεταβλητότητα σαν φόντο θορύβου. Μια διεργασία, η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φόντου θορύβου, δηλαδή τυχαίων αιτιών λέγεται ότι είναι εντός ελέγχου. Μια προσδιορισμένη αιτία μεταβλητότητας είναι αποτέλεσμα μιας εξωτερικής αλλαγής στη διεργασία και μπορεί να διορθωθεί παίρνοντας κατάλληλα μέτρα. Μια διεργασία που λειτουργεί με την παρουσία προσδιορισμένων αιτιών λέγεται ότι είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Προκειμένου να παράγουμε ένα προϊόν που συναντά τις προσδοκίες του πελάτη, η διεργασία θα πρέπει να είναι σταθερή και να λειτουργεί με μικρή μεταβλητότητα γύρω από το επιθυμητό επίπεδο. Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη αυτή είναι, η φυσική μεταβλητότητα πάντα υπάρχει στο σύστημα. Ο στατιστικός έλεγχος ποιότητας είναι μια συλλογή από εργαλεία χρήσιμα για τη βελτίωση της απόδοσης της διεργασίας μέσω της μείωσης της μεταβλητότητας. Μεταξύ αυτών των εργαλείων, το διάγραμμα ελέγχου (control chart) είναι μια από τις πρωταρχικές τεχνικές στατιστικού ελέγχου ποιότητας που είναι χρήσιμη για

την παρακολούθηση της διεργασίας λόγω της γρήγορης ανίχνευσης της περίπτωσης προσδιορισμένων αιτιών σε μετατοπίσεις διεργασίας. Ως εκ τούτου, κατάλληλες διορθωτικές ενέργειες ίσως πρέπει να γίνουν προτού παραχθούν περισσότερα μη συμμορφούμενα προϊόντα.

Το διάγραμμα ελέγχου εισήχθη από τον Walter A. Shewhart, το 1924 ως ένας γραφικός τρόπος παρακολούθησης, ο οποίος απεικονίζει σημεία που αντιπροσωπεύουν ένα στατιστικό (π.χ. ένα δειγματικό μέσο) των μετρήσεων ενός χαρακτηριστικού ποιότητας σε δείγματα που λαμβάνονται από τη διεργασία σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Το διάγραμμα ελέγχου περιέχει μια κεντρική γραμμή που αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή του χαρακτηριστικού ποιότητας από το υπό έλεγχο στάδιο όπως επίσης και δύο όρια ελέγχου. Εφόσον όλα τα σημεία του γραφήματος εμπίπτουν εντός αυτών των ορίων, η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου και καμία ενέργεια δεν είναι απαραίτητη. Αλλά, αν ένα σημείο πέφτει έξω από αυτά τα όρια ελέγχου, το διάγραμμα δίνει σήμα για ένα εκτός ελέγχου δείγμα και μια έρευνα απαιτείται για να βρεθούν οι ριζικές αιτίες. Εξαλείφοντας αυτές τις αιτίες από τη διεργασία θα μειωθεί η μεταβλητότητα και επομένως θα βελτιωθεί η διεργασία.

Επίσης πολλές βιομηχανικές επιχειρήσεις χρησιμοποιούν ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, που λέγονται δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας (process capability indices). Οι δείκτες ικανότητας μιας διεργασίας χρησιμοποιούνται ευρέως και δίνουν με έναν εύχρηστο και άμεσο τρόπο μια άμεση ένδειξη για το πως μπορεί να βελτιωθεί η παραγωγική διαδικασία και να αποκτήσουν υψηλή ποιότητα τα προϊόντα της εκάστοτε επιχείρησης. Οι παραπάνω δείκτες χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της ικανότητας μιας παραγωγικής διαδικασίας να κατασκευάσει προϊόντα τα οποία ικανοποιούν κάποιες προδιαγραφές. Οι προδιαγραφές αυτές είναι άμεσα συνδεδεμένες με ένα ποιοτικό, μετρήσιμο χαρακτηριστικό (π.χ. μήκος, βάρος, διάμετρος) των παραγόμενων από τη διεργασία προϊόντων, οι τιμές του οποίου είναι επιθυμητό να βρίσκονται εντός κάποιων προκαθορισμένων, από τη φάση σχεδιασμού τους, ορίων. Τα όρια αυτά ονομάζονται όρια προδιαγραφών.

Τα όρια προδιαγραφών (specification limits) των ποιοτικών χαρακτηριστικών του προϊόντος καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού, όπως επίσης εκεί ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το ποιοτικό χαρακτηριστικό που αναφέρεται ως τιμή στόχος (target value, T), η οποία βρίσκεται ανάμεσα στο διάστημα των ορίων προδιαγραφών δηλαδή στο διάστημα $[LSL, USL]$ όπου LSL , USL είναι το κάτω και το άνω όριο προδιαγραφών, αντίστοιχα. Εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτό. Κάτω από συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας η συντριπτική πλειοψηφία των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού στα παραγόμενα προϊόντα βρίσκεται εντός των ορίων προδιαγραφών. Όμως κάτω από συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας δεν ισχύει το ίδιο μιας και η εμφάνιση της μπορεί να επιφέρει αλλαγή στην κατανομή των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού.

Οι δείκτες επίδοσης διεργασιών είναι μη αρνητικές συναρτήσεις των ποσοτήτων μ , σ , LSL , USL και T της διεργασίας, όπου μ είναι η μέση τιμή και σ είναι η τυπική απόκλιση της διεργασίας. Μια σημαντική ιδιότητα τους είναι ότι δεν επηρεάζονται από τις μονάδες μέτρησης του ποιοτικού χαρακτηριστικού με αποτέλεσμα να επιτρέπουν τη σύγκριση διαδικασιών με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Μια μεγάλη τιμή ενός δείκτη ικανότητας διεργασίας αποτελεί συνήθως ένδειξη ότι η διεργασία είναι ικανή δηλαδή ότι παράγει προϊόντα με τιμές X εντός των ορίων προδιαγραφών και όσο το δυνατό πιο κοντά στην τιμή στόχο T .

1.2. Προφίλ

Στις περισσότερες εφαρμογές στατιστικού ελέγχου διεργασίας, υποθέτουμε ότι η ποιότητα μιας διεργασίας μπορεί επαρκώς να εκφραστεί από την κατανομή του χαρακτηριστικού ποιότητας. Ωστόσο, σε κάποιες καταστάσεις, η ποιότητα μιας διεργασίας χαρακτηρίζεται καλύτερα από μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και μιας ή περισσότερων

επεξηγηματικών μεταβλητών. Τα συναρτησιακά δεδομένα χαρακτηρίζονται από παρατηρήσεις που είναι συναρτήσεις κάποιων συνεχών μετρήσεων. Ένα παράδειγμα συναρτησιακών δεδομένων μπορεί να είναι οι μετρήσεις ύψους και βάρους που παίρνονται σε διαφορετικές ηλικίες για το ίδιο άτομο. Συχνά η ποιότητα ενός προϊόντος μπορεί να καθοριστεί από το μέτρημα αρκετών χαρακτηριστικών σε κάθε διάστημα δειγματοληψίας. Μια αλληλουχία μετρήσεων ενός ή περισσότερων χαρακτηριστικών ποιότητας παίρνεται με την πάροδο του χρόνου από διαστήματα και παράγει μια καμπύλη ή μια επιφάνεια που αναπαριστά την ποιότητα του αντικειμένου. Αυτή η καμπύλη ή η επιφάνεια αναφέρεται ως ένα «προφίλ» (profile). Συγκεκριμένα, το «προφίλ» είναι συχνά κάποια συνάρτηση που ποικίλλει πάνω σε μια συμμεταβλητή που είναι συνήθως ο χρόνος, αλλά ίσως είναι και μια χωρική τοποθεσία και άλλα. Ο στόχος της παρακολούθησης «προφίλ» είναι να ελέγχει την σταθερότητα αυτής της συναρτησιακής σχέσης ή σχέσης καμπύλης στο πέρασμα του χρόνου. Στη στατιστική παρακολούθηση «προφίλ» ένα κρίσιμο βήμα είναι η αναγνώριση οποιουδήποτε απομακρυσμένου «προφίλ» ανάμεσα σε ένα σύνολο πολύπλοκων «προφίλ» και να αφαιρέσουν αυτό από ένα σύνολο δεδομένων αναφοράς. Η παρουσία απομακρυσμένων τιμών έχει σοβαρές δυσμενείς επιπτώσεις στη μοντελοποίηση της συναρτησιακής καμπύλης και αναλόγως στις ιδιότητες των διαγραμμάτων ελέγχου. Σε πολλές εργασίες ανάλυσης δεδομένων, η ανίχνευση απομακρυσμένων τιμών αποτελεί ένα σημαντικό ρόλο στη μοντελοποίηση, στη συμπερασματολογία και ακόμα και στην επεξεργασία, ανάλυση δεδομένων επειδή οι απομακρυσμένες τιμές μπορούν δυστυχώς να οδηγήσουν το μοντέλο εκτός προδιαγραφών, σε μεροληπτική εκτίμηση παραμέτρου και σε κακές προβλέψεις.

Η παρακολούθηση «προφίλ» έχει πρόσφατα προκαλέσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών λόγω του μεγάλου εύρους των εφαρμογών. Η παρακολούθηση «προφίλ» έχει εκτενείς εφαρμογές κατά τη βαθμονόμηση της μέτρησης οργάνων.

Τα δεδομένα «προφίλ» περιλαμβάνουν ένα σύνολο μετρήσεων με μια μεταβλητή απόκρισης y και μια ή περισσότερες επεξηγηματικές μεταβλητές $x_j, j = 1, 2, \dots, k$, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να αξιολογήσουν την

ποιότητα ενός βιομηχανικού προϊόντος. Για παράδειγμα, καθώς μια παρτίδα ενός φαρμάκου παράγεται, αρκετές διαφορετικές δόσεις του φαρμάκου χορηγούνται σε ασθενείς και οι αποκρίσεις μετριοούνται. Η αποτελεσματική καμπύλη δόσης-απόκρισης συνοψίζει την ποιότητα της συγκεκριμένης παρτίδας φαρμάκου και το ρυθμό με τον οποίο η απόκριση αλλάζει μεταξύ των δύο. Σε αυτό το παράδειγμα, μια απλή μέτρηση δεν είναι επαρκής για να εκτιμήσει κατάλληλα την ποιότητα. Αντ' αυτού μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, που αναφέρεται ως «προφίλ» πρέπει να παρακολουθηθεί στο πέρασμα του χρόνου.

1.3. Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής

Το μέσο μήκος ροής (ή μέσο μήκος διαδρομής) του διαγράμματος (average run length, ARL) σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου και ορίζεται ως $ARL = \frac{1}{p}$, όπου το p συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να υπενθυμίσουμε τη γεωμετρική κατανομή. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p (συμβολίζεται ως $X \sim G(p)$), δηλαδή $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \dots$ τότε $E(X) = \frac{1}{p}$ και $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Από τα παραπάνω εύκολα συμπεραίνουμε ότι το ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, αφού το μήκος ροής ή διαδρομής (run length) ακολουθεί την κατανομή $G(p)$.

Όταν η διαδικασία φαίνεται εκτός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εντός τότε έχουμε σφάλμα τύπου I (πιθανότητα α) ενώ όταν η διαδικασία

φαίνεται εντός ελέγχου ενώ στην πραγματικότητα είναι εκτός τότε έχουμε σφάλμα τύπου II (πιθανότητα β).

Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου με κανονική κατανομή, έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 (in-control average run length) ισούται με $ARL_0 = \frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha}$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου και υποθέτουμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι κανονική, τότε ανεξαρτήτως του μεγέθους του δείγματος, το διάγραμμα ελέγχου δίνει (εσφαλμένη) ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου (σφάλμα τύπου I) με πιθανότητα $\alpha = 0.0027$. Και αυτό γιατί $\alpha = P(|X - \mu| > 3\sigma) = 1 - P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 1 - P(-3\sigma \leq X - \mu \leq 3\sigma) = 1 - P\left(-3 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 3\right) = 1 - [\Phi(3) - \Phi(-3)] = 2(1 - \Phi(3)) = 0.0027$.

Συνεπώς, $ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = 370$ δείγματα. Άρα, η διεργασία είναι εντός και θα μας δίνει σήμα ότι ένα σημείο είναι εκτός κάθε 370 δείγματα. Προφανώς και θέλουμε να έχουμε μεγάλο ARL_0 .

Για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας, από μ σε μ^* , η πιθανότητα ένα σημείο να βρίσκεται εντός των ορίων είναι β (όσο και το σφάλμα τύπου II). Επομένως, σε μια εκτός ελέγχου διεργασία η πιθανότητα ένα σημείο να βρεθεί πράγματι εκτός των αποδεκτών ορίων είναι $p = 1 - \beta$ και έτσι το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_1 (out-of-control average run length) ισούται με $ARL_1 = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - \beta}$.

Προφανώς και θέλουμε να έχουμε μικρό ARL_1 , γιατί σε μια εκτός ελέγχου διεργασία θέλουμε μικρό αριθμό δειγμάτων μέχρι την (ορθή) ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου (μέχρι την εμφάνιση σημείου εκτός ορίων). Το ARL_1 δηλώνει δηλαδή τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας, από τη στιγμή που θα συμβεί αυτή η μετατόπιση.

1.4. Φάση I και Φάση II

Η παρακολούθηση μιας διεργασίας, η οποία κυρίως χρησιμοποιεί διαγράμματα ελέγχου, μπορεί να μελετηθεί μέσω δύο φάσεων: Φάση I και Φάση II.

Στη Φάση I συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία και αναλύονται όλα μαζί τα δεδομένα ταυτόχρονα, για να καθοριστεί αν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σ' αυτήν τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν το διαχειριστή της διαδικασίας να «φέρει» τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου με τη χρησιμοποίηση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί, τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (Αντζουλάκος, 2008).

Γενικά τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι πολύ αποτελεσματικά στη Φάση I επειδή αυτά είναι εύκολα στην κατασκευή και στην ερμηνεία τους και λόγω του ότι είναι αποτελεσματικά στην ανίχνευση και μεγάλων και σταθερών μετατοπίσεων των παραμέτρων της διεργασίας και σημείων εκτός των ορίων προδιαγραφών, λανθασμένων μετρήσεων, εγγραφών δεδομένων και διαδόσεων λαθών. Επιπλέον, οι μορφές των διαγραμμάτων ελέγχων Shewhart είναι συχνά εύκολες στην ερμηνεία και έχουν απόλυτα φυσικό νόημα. Οι κανόνες ευαισθητοποίησης, ακόμα, είναι εύκολο να εφαρμοσθούν στα διαγράμματα Shewhart. Οι τύποι των προσδιορισμένων αιτιών που συνήθως συμβαίνουν στη Φάση I έχουν ως αποτέλεσμα αρκετά μεγάλες μετατοπίσεις να παρατηρούνται στη διεργασία. Το *ARL* δεν είναι συνήθως ένα λογικό μέτρο απόδοσης για τη Φάση I, τυπικά μας ενδιαφέρει πολύ περισσότερο η πιθανότητα με την οποία μια «προσδιορισμένη αιτία» θα ανιχνευτεί παρά το γεγονός των λάθους ειδοποιήσεων.

Στην Φάση II τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από τη διεργασία ο διαχειριστής δίνει άμεσα μια απάντηση στο ερώτημα «παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;».

Κατά τη Φάση II, συνήθως υποθέτουμε ότι η διαδικασία είναι λογικά σταθερή. Συχνά, οι προσδιορισμένες αιτίες που συμβαίνουν σ' αυτήν τη φάση έχουν ως αποτέλεσμα μικρότερες μετατοπίσεις διεργασίας, μιας και οι περισσότερες από τις πραγματικά σοβαρές πηγές μεταβλητότητας έχουν συστηματικά αφαιρεθεί κατά τη διάρκεια της Φάσης I. Τώρα στο στάδιο αυτό έμφαση δίνεται στην παρακολούθηση της διεργασίας, όχι στην εύρεση μιας ασυνήθιστης διεργασίας υπό έλεγχο. Το *ARL* είναι μια έγκυρη βάση για αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στη Φάση II. Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι πολύ λιγότερο πιθανό να είναι αποτελεσματικά στη Φάση II σε κάποιες περιπτώσεις επειδή αυτά δεν είναι πολύ ευαίσθητα για μικρό και μέτριο μέγεθος μετατόπισης διεργασίας. Οι προσπάθειες να λύσουν αυτό το πρόβλημα με τη χρήση κανόνων ευαισθητοποίησης είναι μη ικανοποιητικές, επειδή η χρήση αυτών των κανόνων αυξάνει το ρυθμό λάθους ειδοποιήσεων στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart (1924).

1.5. Προφίλ Γραμμικής Παλινδρόμησης

Τα γραμμικά «προφίλ» παρατηρούνται σε πολλές καταστάσεις όπως στις μελέτες βαθμονόμησης. Ως γενική περίπτωση θεωρούμε το παραμετρικό γραμμικό «προφίλ» μοντέλο που σχετίζει τις επεξηγηματικές μεταβλητές $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}$ με τη μεταβλητή απόκρισης Y_{ij} (το χαρακτηριστικό απόκρισης υπό μελέτη) και δηλώνεται μέσω της παρακάτω εξίσωσης:

$$Y_{ij} = A_{0j} + A_{1j}X_{1i} + \dots + A_{pj}X_{pi} + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.1)$$

όπου A_{lj} ($l = 0, 1, 2, \dots, p$) είναι ο συντελεστής παλινδρόμησης. Το ζεύγος παρατηρήσεων (X_{li}, Y_{ij}) λαμβάνεται στο j -οστό τυχαίο δείγμα ($j = 1, 2, \dots, k$) όπου X_{li} είναι το i -οστό σημείο σχεδιασμού ($i = 1, 2, \dots, n$) για την l -οστή επεξηγηματική μεταβλητή ($l = 0, 1, 2, \dots, p$). Υποθέτουμε ότι οι ε_{ij} (τυχαίοι όροι σφάλματος) είναι ανεξάρτητες, ισόνομες κανονικές κατανομημένες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_j^2 . Για την απλούστερη περίπτωση θεωρούμε ένα απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης στο οποίο για n σταθερά X σημεία, οι παρατηρήσεις (X_i, Y_{ij}) συλλέγονται στο πέρασμα του χρόνου ($i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, k$). Όταν η διεργασία είναι υπό-έλεγχο, το υποκείμενο γραμμικό μοντέλο που συσχετίζει την ανεξάρτητη μεταβλητή X με τη μεταβλητή απόκρισης Y είναι:

$$Y_{ij} = A_{0j} + A_{1j}X_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.2)$$

όπου ε_{ij} είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ_j^2 . Αν $A_{0j} = A_0$, $A_{1j} = A_1$ και $\sigma_j^2 = \sigma^2$ ($j = 1, 2, \dots, k$) τότε η διεργασία θεωρείται ότι είναι σταθερή στην Φάση I. Στη Φάση I της παρακολούθησης «προφίλ», οι παράμετροι «προφίλ», A_0 , A_1 και σ^2 είναι άγνωστοι και είναι εκτιμημένοι από ένα ιστορικό σύνολο δεδομένων. Γι' αυτό, η εκτιμημένη γραμμική συνάρτηση παλινδρόμησης που βασίζεται σε όλα τα διαθέσιμα υπό-έλεγχο δεδομένα (η γραμμή αναφοράς) στη Φάση I δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{Y} = a_0 + a_1X, \quad (1.3)$$

όπου a_0 και a_1 είναι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των A_0 και A_1 , αντίστοιχα. Έπειτα, στη Φάση II της παρακολούθησης «προφίλ» εμείς επίσης χρειάζεται να εκτιμήσουμε τους συντελεστές παλινδρόμησης (a_0 και a_1) σε κάθε δείγμα υλοποίησης προκειμένου να παρακολουθήσουμε τα δεδομένα κατά τη διάρκεια παραγωγής δια μέσου της καθιερωμένης γραμμής αναφοράς, σχέση (1.3), που υπολογίστηκε από τη Φάση I.

Η γνωστή μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι η πιο συνηθισμένη χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την εκτίμηση των συντελεστών στο απλό

γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Το κυρίαρχο της μεθόδου «ελαχίστων τετραγώνων» είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος στο τετράγωνο των αποστάσεων μεταξύ των παρατηρούμενων μεταβλητών αποκρίσεων Y_{ij} και των αντίστοιχων θεωρητικών τιμών \hat{Y}_{ij} . Οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων των συντελεστών παλινδρόμησης στην Φάση I για το δείγμα j ($j = 1, 2, \dots, k$) δίνονται από τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο:

$$a_{0j} = \bar{Y}_j - a_{1j}\bar{X}, \quad (1.4)$$

$$a_{1j} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}(X_{ij} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2} = \frac{S_{XY}(j)}{S_{XX}(j)}, \quad (1.5)$$

όπου $\bar{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{ij}}{n}$, $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, $S_{XY}(j) = \sum_{i=1}^n Y_{ij}(X_{ij} - \bar{X})$, $S_{XX}(j) = \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2$. Τα στατιστικά δείγματος a_{0j} και a_{1j} έχουν μια διπαραμετρική κατανομή με διάνυσμα μέσης τιμής $\mu = (a_{0j}, a_{1j})$ και τον πίνακα διασποράς-συνδιασποράς: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{01}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$,

όπου

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right), \quad (1.6)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{01}^2 = -\sigma^2 \left(\frac{\bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right), \quad (1.8)$$

είναι η διασπορά των a_{0j} , a_{1j} και η συνδιασπορά μεταξύ των a_{0j} και a_{1j} , αντίστοιχα. Όταν τα υπόλοιπα είναι κανονικά κατανεμημένα, αυτή η κατανομή είναι διπαραμετρική κανονική κατανομή.

Η εκτίμηση των A_0 , A_1 και σ^2 που χρησιμοποιήθηκε στη Φάση I για την απόδειξη της γραμμής αναφοράς, δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_{0j}}{k}, \quad (1.9)$$

$$a_1 = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_{1j}}{k}, \quad (1.10)$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^k MSE_j}{k}, \quad (1.11)$$

όπου $MSE_j = \frac{\sum_{i=1}^n e_{ij}^2}{n-2}$ είναι η αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ^2 για το δείγμα j ($j = 1, 2, \dots, k$). Έχουμε $e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij}$ όπου \hat{Y}_{ij} είναι οι προσαρμοσμένες τιμές. Το στατιστικό $(n-2) \frac{MSE_j}{\sigma^2}$ ακολουθεί την X^2 - κατανομή με $(n-2)$ βαθμούς ελευθερίας.

Δύο πιθανές προσεγγίσεις μπορούν να θεωρηθούν για την απόκτηση του «προφίλ» συνόλου δεδομένων. Μια εναλλακτική είναι να υποθέσουμε ότι τα σημεία σχεδιασμού εντός ενός «προφίλ» είναι ντετερμινιστικά (σταθερά) έτσι αυτά είναι αμετάβλητα από το ένα «προφίλ» στο άλλο. Σ' αυτήν την προσέγγιση, εμείς επιλέγουμε ένα σύνολο από n σταθερά επεξηγηματικά σημεία που δηλώνονται $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ στην περιοχή (X_l, X_h) για τη μέτρηση των αποκρίσεων, $Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{nj}$ ($j = 1, 2, \dots, k$), ενώ το ίδιο σύνολο από επεξηγηματικά σημεία χρησιμοποιείται για την παραγωγή διαφορετικών συνόλων αποκρίσεων. Αυτή η περίπτωση είναι συνηθισμένη σε εφαρμογές πρακτικής βαθμονόμησης στην κατασκευαστική βιομηχανία. Η δεύτερη προσέγγιση είναι όταν για την απόκτηση των δεδομένων χρησιμοποιείται ένα τυχαίο σχέδιο. Γι' αυτό τα σχεδιαστικά σημεία «προφίλ» θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες, ισόνομες κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές από μια δοσμένη κατανομή. Αυτή η περίπτωση είναι το λεγόμενο αυθαίρετο (τυχαίο) σχεδιαστικό σχέδιο.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, στην παραμετρική μορφή της παρακολούθησης «προφίλ» εμείς χρειάζεται να εκτιμήσουμε τους συντελεστές παλινδρόμησης στις δύο φάσεις, Φάση I και Φάση II. Ωστόσο, αυτοί οι εκτιμώμενοι συντελεστές χρησιμοποιούνται για να εγκαθιδρύσουμε τη γραμμή αναφοράς στη Φάση I και να παρακολουθήσουμε τα δεδομένα κατά τη διάρκεια παραγωγής σε κάθε υλοποίησιμο δείγμα στη Φάση II.

Στη Φάση I, μετά τον καθορισμό των αρχικών εκτιμητριών των παραμέτρων παλινδρόμησης όπως δίνονται στις παραπάνω εξισώσεις των α_0 , α_1 και MSE , χρησιμοποιούμε αυτές τις εκτιμήτριες για να κατασκευάσουμε

διαγράμματα ελέγχου Φάσης I για την αναγνώριση σημείων εκτός ελέγχου. Αν όλα τα στατιστικά ελέγχου είναι εντός των ορίων ελέγχου, τότε τα α_0 και α_1 είναι οι καλύτεροι εκτιμητές των A_0 και A_1 , αντίστοιχα. Αλλιώς, εμείς πρέπει να αναγνωρίσουμε τις προσδιορισμένες αιτίες και να αφαιρέσουμε αυτά τα σημεία από το σύνολο δεδομένων, έπειτα να ξαναεκτιμήσουμε τα α_0 , α_1 και MSE για να κατασκευάσουμε τα νέα όρια ελέγχου με τα δεδομένα που έχουν μείνει. Αυτός ο αλγόριθμος μπορεί να επαναληφθεί μέχρι όλα τα στατιστικά του δείγματος που έχουν μείνει να είναι εντός των ορίων ελέγχου και η γραμμή αναφοράς να είναι κατασκευασμένη για τη Φάση II.

1.6. Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα

1.6.1. Εισαγωγή

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι παράλληλοι υπολογιστικοί μηχανισμοί που μοντελοποιούνται με βάση τη λειτουργία ενός ανθρώπινου εγκεφάλου. Πολλοί μηχανικοί που ασχολούνται με την απόδοση καλύτερης ποιότητας σε παρεχόμενα προϊόντα και υπηρεσίες καθώς και πολλοί ερευνητές είναι οικείοι με τις επιτυχείς εφαρμογές των τεχνητών νευρωνικών δικτύων στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας από το 1989 (Pugh, 1989). Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα έχουν χρησιμοποιηθεί σε ποικίλες εργασίες, περιλαμβανομένου της υπολογιστικής όρασης, της αναγνώρισης ομιλίας, στο «φιλτράρισμα» κοινωνικών δικτύων, στα ηλεκτρονικά παιχνίδια και στα επιτραπέζια παιχνίδια στο διαδίκτυο, στις ιατρικές διαγνώσεις και σε πολλούς άλλους τομείς.

Παρακάτω προτείνονται τρεις μέθοδοι βασισμένοι σε τεχνητά νευρωνικά δίκτυα για την παρακολούθηση γραμμικών «προφίλ» στην Φάση II. Τα προτεινόμενα νευρωνικά δίκτυα αναπτύχθηκαν για την ανίχνευση και την ταξινόμηση των μετατοπίσεων στα γραμμικά «προφίλ». Στην πρώτη και δεύτερη μέθοδο, παρουσιάζεται ένα απλό νευρωνικό δίκτυο για την ανίχνευση

μετατοπίσεων στα «προφίλ». Στην τρίτη μέθοδο, χρησιμοποιούνται τρία νευρωνικά δίκτυα ταυτόχρονα για να ανιχνεύσουν και να ταξινομήσουν μετατοπίσεις «προφίλ».

Το νευρωνικό δίκτυο που χρησιμοποιείται εδώ είναι ένα πολλαπλών στρώσεων «perceptron», το οποίο εφαρμόζει τον κανόνα εκπαίδευσης «back-propagation». Ο νευρώνας «perceptron» ή Αντίληπτρο είναι ένα είδος τεχνητού νευρωνικού δικτύου που εφευρέθηκε το 1957 στο Αεροναυτικό Εργαστήριο του Κορνέλλ. Μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα απλό είδος ενός εμπροσθοτροφοδοτούμενου νευρωνικού δικτύου: ένας γραμμικός ταξινομητής. Στη μηχανική μάθηση, το «perceptron» είναι ένας αλγόριθμος για εποπτευόμενη μάθηση δυαδικών ταξινομητών (συναρτήσεις που μπορούν να αποφασίσουν εάν μια είσοδος, αντιπροσωπεύεται από ένα διάνυσμα από αριθμούς, που ανήκει σε κάποια συγκεκριμένη τάξη ή όχι). Είναι ένας τύπος γραμμικού ταξινομητή, δηλαδή ένας αλγόριθμος ταξινόμησης που κάνει τις προβλέψεις του βασιζόμενος σε μια γραμμική συνάρτηση πρόβλεψης συνδυασμένος με ένα σύνολο βαρών μαζί με το διάνυσμα χαρακτηριστικών. Ο αλγόριθμος επιτρέπεται για τη διαδικτυακή μάθηση, στην οποία αυτός επεξεργάζεται στοιχεία σε ένα σετ εκπαίδευσης κάθε φορά. Στην πρώτη του εκτέλεση, το προσαρμοσμένο υλικό, ήταν ένα από τα πρώτα νευρωνικά δίκτυα που παράχθηκαν.

Ένα πολυστρωματικό «perceptron» είναι ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο με προς τα εμπρός τροφοδοσία και αποτελείται από τουλάχιστον τρία στρώματα κόμβων. Εκτός από τους κόμβους εισόδου, κάθε κόμβος είναι ένας νευρώνας που χρησιμοποιεί μη-γραμμικές συναρτήσεις ενεργοποίησης. Ένα πολυστρωματικό «perceptron» χρησιμοποιεί μια εποπτευόμενη τεχνική μάθησης, που ονομάζεται «back-propagation», για εκπαίδευση. Τα πολλαπλά στρώματα του και η μη γραμμική ενεργοποίηση διαχωρίζει ένα πολυστρωματικό «perceptron» από ένα γραμμικό «perceptron». Αυτό μπορεί να διακρίνει δεδομένα που είναι μη γραμμικά διαχωρίσιμα. Γενικά, «perceptron» είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο ή μια υπολογιστική μηχανή που επινοήθηκε για την παρουσίαση ή την προσομοίωση της ικανότητας του μυαλού να αναγνωρίζει και να κάνει διακρίσεις.

Η «back-propagation» είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της βαθμίδας της συνάρτησης απώλειας με σεβασμό στα βάρη σε ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο. Αυτή χρησιμοποιείται συνήθως σαν ένα μέρος ενός αλγορίθμου που βελτιστοποιεί την απόδοση του δικτύου με προσαρμογή των βαρών.

Στη συνέχεια ακολουθεί μια σύντομη εισαγωγή στη δομή των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, ένα πολυστρωματικό «perceptron» και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι εκπαίδευσης διερευνώνται.

1.6.2. Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και εφαρμογή τους στη διεργασία στατιστικού ελέγχου

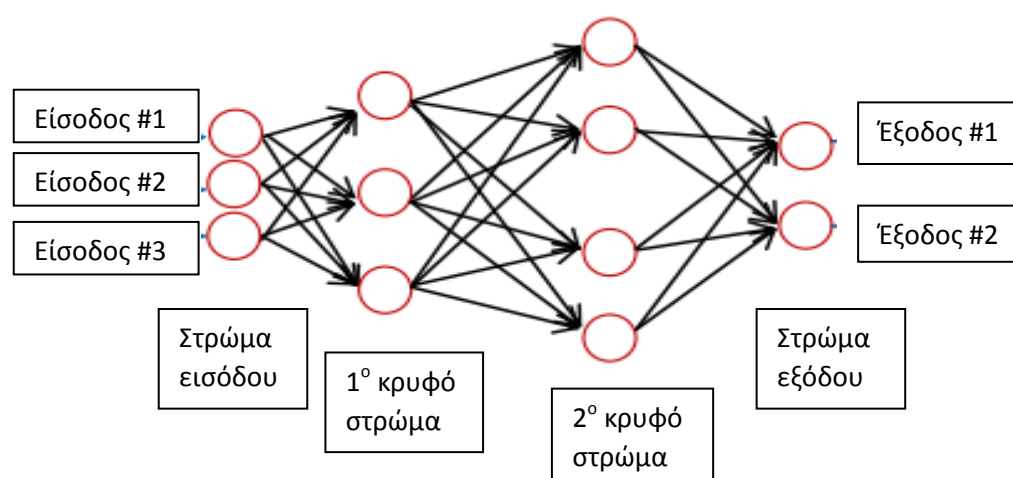
Ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο μπορεί να ορισθεί σαν έναν μαζικά παράλληλο κατανεμημένο επεξεργαστή που μπορεί να αποθηκεύσει πειραματικές γνώσεις και να τον κάνει διαθέσιμο για μελλοντική χρήση. Οι γνώσεις αποκτώνται μέσω μιας διαδικασίας μάθησης δια μέσου αρκετών διανυσμάτων εισόδου-εξόδου και αποθηκεύονται σε σημεία μεταξύ νευρωνικών συνδέσεων γνωστά ως συνοπτικά βάρη και μεροληπτικές (κατώφλι-οριακές) τιμές. Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα αποτελούνται από πολυάριθμα διασυνδεδεμένα στοιχεία επεξεργασίας, που ονομάζονται νευρώνες, με μια συνάρτηση ενεργοποίησης, τα οποία είναι τυπικά οργανωμένα σε στρώματα που συνδέονται μέσω βαρών. Τα μοντέλα τεχνητών νευρωνικών δικτύων χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν και να λύσουν μια ποικιλία προβλημάτων που προκύπτουν στην πρόβλεψη ή πρόγνωση, προσέγγιση συναρτήσεων, ταξινόμηση προτύπων, ομαδοποίηση και κατηγοριοποίηση. Οι βασικές αρχές των τεχνητών νευρωνικών δικτύων μπορούν να βρεθούν από το Haykin (1994). Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται ένα πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο το οποίο εφαρμόζει το «back-propagation» κανόνα εκπαίδευσης που αναπτύχθηκε από τους Rumelhart et al. (1986). Μια σύντομη αναφορά για το πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο και για τον αλγόριθμο εκπαίδευσης «back-propagation» παρουσιάζεται στις επόμενες υποενότητες.

1.6.2.1. Πολυστρωματικά «perceptron» νευρωνικά δίκτυα

Σε αυτό τον τύπο δικτύου, οι νευρώνες είναι διατεταγμένοι σε μια τοπολογία στρωματοποιημένης τροφοδότησης προς τα εμπρός, όπου οι νευρώνες σχηματίζουν ένα μεροληπτικό σταθμισμένο άθροισμα των εισόδων τους και περνούν αυτό το επίπεδο ενεργοποίησης μέσω μιας συνάρτησης μεταφοράς για να παράγουν τις εξόδους τους. Το πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο είναι ίσως η πιο δημοφιλής αρχιτεκτονική δικτύου, η οποία αναφέρεται αρκετά διεξοδικά στα περισσότερα βιβλία νευρωνικών δικτύων (Bishop, 1995). Στο πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο, κάθε νευρώνας στο στρώμα εισόδου είναι συνδεδεμένος με το κάθε νευρώνα στο πρώτο «κρυφό» στρώμα, η έξοδος κάθε νευρώνα στο πρώτο στρώμα συνδέεται με το κάθε νευρώνα στο δεύτερο στρώμα κ.ο.κ.. Αυτός ο τύπος δομής είναι γνωστός ως ένα πλήρως συνδεδεμένο δίκτυο. Το πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο έχει έτσι μια απλή ερμηνεία ως μια μορφή μοντέλου εισόδου-εξόδου, με τα βάρη και τα κατώφλια (μεροληπτικά) ως τις ελεύθερες παραμέτρους του μοντέλου. Τα πολυστρωματικά «perceptron» νευρωνικά δίκτυα μπορούν να μοντελοποιήσουν συναρτήσεις με σχεδόν αυθαίρετη πολυπλοκότητα, με τον αριθμό των στρωμάτων και τον αριθμό των νευρώνων σε κάθε στρώμα, να καθορίζει την πολυπλοκότητα των συναρτήσεων.

Σημαντικά ζητήματα στο πολυστρωματικό «perceptron» σχεδιασμό αποτελούν ο προσδιορισμός του αριθμού των «κρυφών» στρωμάτων και του αριθμού των νευρώνων σε αυτά τα στρώματα. Οι αριθμοί των νευρώνων εισόδου και εξόδου αποφασίζονται βάσει του προβλήματος. Ωστόσο, ίσως υπάρχει κάποια αβεβαιότητα σχετικά με την ακρίβεια των ποιών εισόδων να χρησιμοποιήσουμε. Δεν υπάρχει κάποιο θεωρητικό όριο για τον αριθμό των «κρυφών» στρωμάτων, συνίσταται όμως να χρησιμοποιούνται ένα ή δύο «κρυφά» στρώματα. Κάθε μονάδα στο δεύτερο «κρυφό» στρώμα επιτρέπει στο τεχνητό νευρωνικό δίκτυο να προσαρμόσει κάτι διαφορετικό. Έτσι, ένα πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο με δύο «κρυφά» στρώματα

μπορεί να αποδώσει μια πιο ακριβή προσέγγιση με λιγότερα βάρη από ένα πολυστρωματικό «perceptron» νευρωνικό δίκτυο με ένα «κρυφό» στρώμα (Chester, 1990). Ο αριθμός των νευρώνων στο κρυφό στρώμα επίσης καθορίζεται από δοκιμές και από σφάλματα. Μερικές μελέτες έχουν αποδείξει ότι ένα μέγιστο νευρωνικό δίκτυο που αποτελείται από πέντε στρώματα (δηλαδή ένα στρώμα εισόδου, τρία κρυφά στρώματα και ένα στρώμα εξόδου) είναι ικανό για να λύσει προβλήματα οποιασδήποτε πολυπλοκότητας (Chester, 1990).



Σχήμα 1.1: Τοπολογία του πολυστρωματικού «perceptron» με δύο κρυφά στρώματα.

1.6.2.2. Εκπαίδευση πολυστρωματικού «perceptron»

Καθώς ο αριθμός των στρωμάτων και ο αριθμός των μονάδων σε κάθε στρώμα επιλέγονται, τα βάρη του νευρωνικού δικτύου και τα κατώφλια (μεροληπτικές τιμές) πρέπει να ρυθμιστούν ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα πρόβλεψης που σχετίζεται με το δίκτυο. Αυτός είναι ο ρόλος του αλγορίθμου εκπαίδευσης.

Προκειμένου να ελαχιστοποιείται το σφάλμα, χρησιμοποιούμε ιστορικές περιπτώσεις όπου ο χρήστης έχει συλλέξει για να προσαρμόσει τα βάρη και τα κατώφλια-οριακές τιμές αυτόματα (Haykin, 1994). Αυτή η διεργασία είναι ισοδύναμη με την προσαρμογή του μοντέλου που αναπαριστάται με το δίκτυο

για τα διαθέσιμα δεδομένα εκπαίδευσης. Το σφάλμα μιας ιδιαίτερης διαμόρφωσης του δικτύου μπορεί να καθοριστεί από την εκτέλεση όλων των περιπτώσεων εκπαίδευσης μέσω του δικτύου και να συγκρίνει τις πραγματικές εξόδους που δημιουργήθηκαν με τις επιθυμητές εξόδους (στόχους). Έπειτα, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση σφάλματος, οι διαφορές συνδυάζονται μαζί για να πάρουν το σφάλμα δικτύου. Η πιο κοινή συνάρτηση σφάλματος που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία είναι το άθροισμα τετραγώνων του σφάλματος (*SSE*), στο οποίο τα ατομικά σφάλματα των μονάδων εξόδου σε κάθε περίπτωση είναι υψωμένα στο τετράγωνο και αθροισμένα μαζί. Ένας από τους πιο αποτελεσματικούς αλγόριθμους για την εκπαίδευση του πολυστρωματικού «perceptron» νευρωνικού δικτύου είναι ο αλγόριθμος εκπαίδευσης «back-propagation».

1.6.2.3. Αλγόριθμος «back-propagation» (BPR)

Το καλύτερο γνωστό παράδειγμα ενός αλγόριθμου εκπαίδευσης νευρωνικού δικτύου είναι ο αλγόριθμος «back-propagation» (Patterson (1996), Haykin (1994), Fausett (1994)). Οι σύγχρονοι δεύτερο-διατεταγμένοι αλγόριθμοι όπως ο αλγόριθμος για τη συζευγμένη κάμψη κλίσης και ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt (Bishop (1995)) είναι ουσιαστικά γρηγορότεροι, παραδείγματος χάρη για πολλά προβλήματα αυτοί έχουν ταχύτερη τάξη μεγέθους. Ωστόσο, η πίσω διάδοση (back propagation) ακόμα έχει πλεονεκτήματα σε πολλές περιπτώσεις και είναι ο ευκολότερος αλγόριθμος. Υπάρχουν επίσης ευρετικές τροποποιήσεις στην πίσω διάδοση, που την κάνουν να δουλεύει καλά σε κάποιους προβληματικούς τομείς.

Στη μέθοδο «back-propagation», το διάνυσμα κλίσης της επιφάνειας σφάλματος υπολογίζεται. Αυτό το διάνυσμα μετακινείται μεταξύ της γραμμής της απότομης ανόδου από το τρέχων σημείο. Γι' αυτό αν μετακινηθούμε μεταξύ μιας «μικρής» απόστασης, θα αυξηθεί το σφάλμα. Μια σειρά από τέτοιες κινήσεις τελικά θα βρουν ένα ελάχιστο από κάποιο είδος. Το δύσκολο κομμάτι είναι να αποφασίσουμε πόσα μεγάλα βήματα θα πρέπει να γίνουν. Τα μεγάλα βήματα ίσως συγκλίνουν πολύ πιο γρήγορα, αλλά ίσως επίσης

υπερβούν τη λύση ή ίσως πάνε προς λάθος κατεύθυνση (αν η λάθος επιφάνεια είναι πολύ εκκεντρική).

Ένα κλασικό παράδειγμα από αυτό στην εκπαίδευση νευρωνικού δικτύου είναι που ο αλγόριθμος εξελίσσεται πολύ αργά μεταξύ μιας απότομης στενής κοιλάδας, αναπηδώντας από τη μια πλευρά στην άλλη πλευρά. Σε αντίθεση, αν και πολύ μικρά βήματα ίσως πηγαίνουν στην σωστή κατεύθυνση, αυτά απαιτούν ένα μεγάλο αριθμό από επαναληπτικές εποχές. Στην πράξη, το μέγεθος βήματος είναι ανάλογο προς την κλίση (έτσι ώστε αυτοί οι αλγόριθμοι να καταλαγιάζουν σε μια ελάχιστη τιμή) και προς μια ειδική σταθερά: το ποσοστό μάθησης. Η σωστή ρύθμιση για το ποσοστό μάθησης είναι εφαρμογή-εξαρτημένη και επιλέγεται τυπικά από το πείραμα. Αυτό ίσως επίσης είναι χρονική διακύμανση, που γίνεται μικρότερη καθώς ο αλγόριθμος εξελίσσεται.

Ο αλγόριθμος επομένως εξελίσσεται επαναληπτικά, μέσα από έναν αριθμό εποχών. Σε κάθε εποχή, υποβάλλουμε τις περιπτώσεις εκπαίδευσης με τη σειρά στο δίκτυο και στοχεύουμε σε πραγματικές εξόδους. Έπειτα υπολογίζουμε και συγκρίνουμε το σφάλμα. Αυτά τα σφάλματα, μαζί με την κλίση επιφάνειας σφάλματος, χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή των βαρών και έπειτα η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Η αρχική διαμόρφωση δικτύου είναι τυχαία και η εκπαίδευση σταματά όταν ένας δοσμένος αριθμός εποχών παρέρχεται ή όταν το σφάλμα φθάνει σε ένα αποδεκτό επίπεδο ή όταν το σφάλμα σταματάει να βελτιώνεται. Η εφαρμογή των πολυστρωματικών «perceptron» νευρωνικών δικτύων εμπεριέχει επιλεγμένα διανύσματα χαρακτηριστικών, καθιερώνοντας την αρχιτεκτονική του δικτύου, επιλέγοντας τη συνάρτηση ενεργοποίησης και εκπαίδευσης (Haykin (1994)).

Κεφάλαιο 2^ο

Λογιστική Παλινδρόμηση

2.1. Εισαγωγή

Το λογιστικό μοντέλο είναι ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο στο οποίο όμως τα σφάλματα δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και η μεταβλητή απόκρισης είναι διακριτή. Η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις στις οποίες επιθυμούμε να προβλέψουμε την απουσία ή την παρουσία ενός χαρακτηριστικού, ή ενός συμβάντος. Είναι μια γενίκευση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για την περίπτωση όπου η εξαρτημένη μεταβλητή (Y) είναι δίτιμη (δηλαδή παίρνει την τιμή 0 όταν απουσιάζει το χαρακτηριστικό ή την τιμή 1 όταν υπάρχει το χαρακτηριστικό). Μερικά παραδείγματα στα οποία χρησιμοποιούμε τη λογιστική παλινδρόμηση είναι τα εξής:

- Μια βιομηχανία βαμβακιού θέλει να εξετάσει εάν κάποιοι από τους εργάτες της πάσχουν από καρκίνο του πνεύμονα (0:δεν πάσχει και 1:πάσχει) με ανεξάρτητες μεταβλητές το φύλο, εάν καπνίζουν και τη διάρκεια εργασίας.
- Σε ένα νοσοκομείο εξετάζουν την εμφάνιση στεφανιαίας νόσου σε ένα δείγμα ανδρών σε σχέση με την ηλικία, εάν καπνίζουν, τη συστολική και διαστολική πίεση του αίματος, τα επίπεδα της χοληστερόλης και το βάρος τους (κωδικοποίησαν με 0 τα άτομα που δεν έχουν πάθει έμφραγμα τα τελευταία 10 χρόνια και με 1 τα άτομα που έχουν υποστεί έμφραγμα).
- Σε ένα δείγμα από γυναίκες θέλουμε να δούμε κατά πόσο οι γυναίκες εργάζονται (0: δεν εργάζεται, 1: εργάζεται) σε σχέση με την ηλικία, το εισόδημα του συζύγου και τον αριθμό των παιδιών.

Όπως είπαμε και πιο πάνω η λογιστική παλινδρόμηση είναι η γενίκευση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης, οπότε θα ξεκινήσουμε από το απλό γραμμικό μοντέλο:

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, όπου το Y_i είναι δυαδικό, δηλαδή παίρνει ή την τιμή 0 ή την 1.

Επειδή $E(\varepsilon_i) = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\ &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i) + E(\varepsilon_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Επίσης, αφού η Y_i είναι μια δίτιμη μεταβλητή θα είναι μια μεταβλητή Bernoulli, οπότε ορίζουμε τις πιθανότητες ως εξής:

- Όταν το $Y_i = 1$, τότε $P(Y_i = 1) = \pi_i$.
- Όταν το $Y_i = 0$, τότε $P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$.

Με τη βοήθεια του ορισμού της αναμενόμενης τιμής βρίσκουμε ότι

$$E(Y_i) = 1\pi_i + 0(1 - \pi_i) = \pi_i. \tag{2.2}$$

Εξισώνοντας τις (2.1) και (2.2) βρίσκουμε:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i = \pi_i. \tag{2.3}$$

Δηλαδή η αναμενόμενη τιμή είναι η πιθανότητα το $Y_i = 1$ όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι X_i .

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι έχουμε τρία βασικά προβλήματα όταν η μεταβλητή Y είναι δυαδική και μας απαγορεύουν να χρησιμοποιήσουμε το γραμμικό μοντέλο:

1. Τα σφάλματα δεν είναι κανονικά

Έχουμε $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \Leftrightarrow \varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)$.

Όταν $Y_i = 0$: $\varepsilon_i = -\beta_0 - \beta_1$, ενώ όταν

$Y_i = 1$: $\varepsilon_i = 1 - \beta_0 - \beta_1$, οπότε τα σφάλματα δεν κατανομούνται κανονικά.

2. Τα σφάλματα έχουν άνισες διασπορές

Όταν η αποκρινόμενη μεταβλητή παίρνει τις τιμές 0 ή 1 τα σφάλματα δεν έχουν ίσες διασπορές. Εδώ να πούμε πως $Var(\varepsilon_i) = Var(Y_i - \pi_i) = Var(Y_i) + Var(-\pi_i) = Var(Y_i) + 0 = Var(Y_i)$, αφού το π_i είναι μια σταθερά. Άρα θα βρούμε, με βάση τον ορισμό, τη $Var(Y_i)$ και κατά συνέπεια θα έχουμε βρει και τη $Var(\varepsilon_i)$. Οπότε

$$\begin{aligned} Var(Y_i) &= E[(Y_i - E(Y_i))^2] \\ &= (1 - \pi_i)^2 \pi_i + (0 - \pi_i)^2 (1 - \pi_i) \\ &= \pi_i (1 - \pi_i) [(1 - \pi_i) + \pi_i] \\ &= \pi_i (1 - \pi_i) \\ &= (E(Y_i))(1 - E(Y_i)) \\ &= (\beta_0 + \beta_1 X_i)(1 - \beta_0 - \beta_1 X_i) \\ &= Var(\varepsilon_i). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Από την πιο πάνω σχέση βλέπουμε πως η διασπορά των σφαλμάτων εξαρτάται από τα X_i , άρα η τιμή της διασποράς θα είναι διαφορετική για κάθε διαφορετικό X . Αυτό μας εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

3. Περιορισμός στη συνάρτηση απόκρισης

Η συνάρτηση απόκρισης επειδή παριστάνει πιθανότητες θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός $0 \leq E(Y) = \pi \leq 1$.

Εδώ να τονίσουμε ότι τα προβλήματα 1 και 2 είναι σημαντικά, αλλά με κάποιες τεχνικές θα μπορούσαμε να τα παραλείψουμε και να χρησιμοποιούσαμε το γραμμικό μοντέλο (α. Με ένα μεγάλο δείγμα η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων θα έδινε εκτιμητές που είναι ασυμπτωτικά κανονικοί ακόμα και αν τα σφάλματα δεν είναι κανονικά και β. Τις άνισες διασπορές θα μπορούσαμε να τις αντιμετωπίσουμε με τη βοήθεια των σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων). Το πρόβλημα 3 δεν μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε, για αυτό το λόγο δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε το γραμμικό μοντέλο. Άρα θα πρέπει να βρούμε ένα άλλο μοντέλο που θα εφαρμόζουμε όταν η Y είναι δίτιμη.

2.2. Απλό Λογιστικό Μοντέλο

Το μοντέλο που χρησιμοποιούμε όταν η Y_i είναι δίτιμη είναι το λογιστικό, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$Y_i = E(Y_i) + \varepsilon_i$, όπου Y_i : ανεξάρτητη τ.μ. Bernoulli και

$$E(Y_i) = \pi_i = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} = [e^{(-\beta_0 - \beta_1 X_i)} + 1]^{-1}. \quad (2.5)$$

Είδαμε πως η αναμενόμενη συνάρτηση πρέπει να παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και είχαμε δει τη σχέση (2.3), δηλαδή $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i = \pi_i$. Οι τιμές όμως της $\beta_0 + \beta_1 X_i$ κυμαίνονται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, μια σκέψη θα ήταν να αντικαταστήσουμε την πιθανότητα π_i της επιτυχίας του γεγονότος με τη σχετική πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή με το λόγο της πιθανότητας επιτυχίας

του γεγονότος προς την πιθανότητα αποτυχίας του γεγονότος $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$. Ένα μοντέλο της μορφής $\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \beta_0 + \beta_1 X_i$ όμως και πάλι δε θα ήταν σωστό, γιατί ο λόγος παίρνει τιμές από το 0 μέχρι το $+\infty$. Αν όμως πάρουμε το φυσικό λογάριθμο αυτού του λόγου θα λύναμε και αυτό το πρόβλημα, οπότε ο μετασχηματισμός είναι $\pi'_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$. (2.6)

Οπότε έχουμε:

$$\pi'_i = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi_i}{1-\pi_i} = e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}$$

$$\Leftrightarrow \pi_i = e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}(1 - \pi_i)$$

$$\Leftrightarrow \pi_i + \pi_i e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)} = e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}$$

$$\Leftrightarrow \pi_i (1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}) = e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}$$

$$\Leftrightarrow \pi_i = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} \quad \Leftrightarrow$$

| |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E(Y_i) = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} \cdot \quad (\text{Kutner et al., 2005})$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

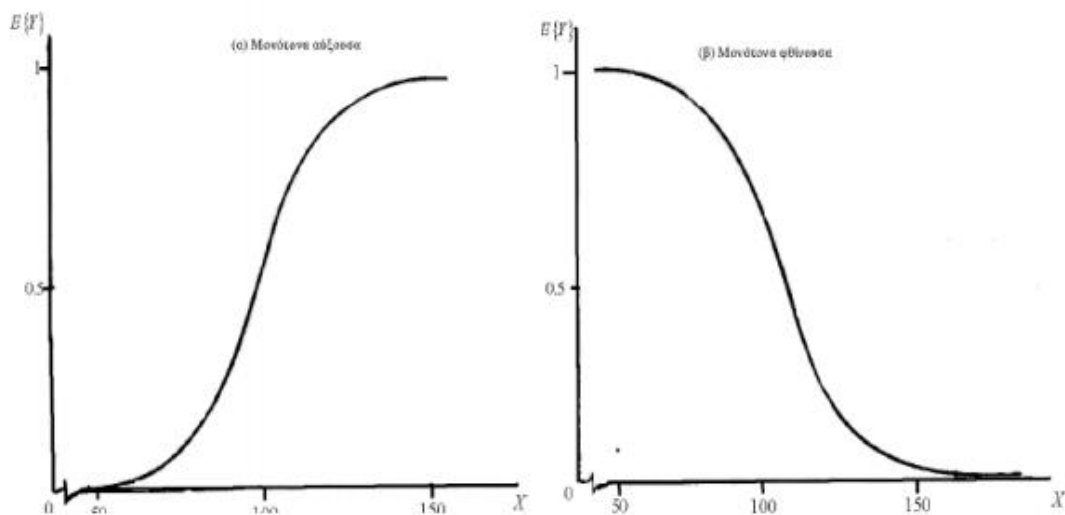
Επίσης πρέπει να δείξουμε γιατί ισχύει $E(Y_i) = (1 + e^{(-\beta_0 - \beta_1 X_i)})^{-1}$:

$$E(Y_i) = \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} = \left(\frac{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} + \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}\right)^{-1} = (e^{(-\beta_0 - \beta_1 X_i)} + 1)^{-1}. \quad (2.8)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο λόγος $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$ ονομάζεται odds ενώ ο μετασχηματισμός (2.6) ονομάζεται logit μετασχηματισμός της πιθανότητας π_i .

Η αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση είναι:

- α) Είτε μονότονα αύξουσα συνάρτηση είτε μονότονα φθίνουσα,
- β) Είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή $[0.1, 0.9]$ (Τζαβελάς Γ., 2011),
- γ) Πλησιάζει το 0 και 1 στις ακραίες τιμές της εμβέλειας του X όπως βλέπουμε και στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Η λογιστική αναμενόμενη συνάρτηση για (α) μονότονα αύξουσα και (β) μονότονα φθίνουσα συνάρτηση.

2.3. Απλή Λογιστική Παλινδρόμηση

Πρέπει να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους που έχει το λογιστικό μοντέλο και αυτό θα το κάνουμε με τη μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας γιατί αυτή η

μέθοδος μπορεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα το ότι οι μεταβλητές Y είναι δίτιμες.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Αφού τα Y_i είναι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli όπου $P(Y_i = 1) = \pi_i$ και $P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_i(Y_i) = \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i}, \quad Y_i = 0,1 \text{ και } i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Οι παρατηρήσεις Y_i είναι ανεξάρτητες οπότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας θα είναι:

$$g(Y_1, \dots, Y_n) = \prod_{i=1}^n f_i(Y_i) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i}. \quad (2.10)$$

Βέβαια είναι εύκολο να δουλέψουμε με το λογάριθμο της από κοινού συνάρτησης και άρα η σχέση (2.9) θα γίνει :

$$\begin{aligned} \ln g(Y_1, \dots, Y_n) &= \ln \prod_{i=1}^n \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[Y_i \ln \left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right) \right] + \sum_{i=1}^n [\ln(1 - \pi_i)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Όμως λόγω των σχέσεων (2.5) και (2.7) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\ln \left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right)$ και το $(1 - \pi_i)$ οπότε θα έχουμε τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας των εκτιμώμενων παραμέτρων:

$$\ln L(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n Y_i (\beta_0 + \beta_1 X_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 - \frac{e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n Y_i (\beta_0 + \beta_1 X_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1+e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)} - e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}}{1+e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n Y_i (\beta_0 + \beta_1 X_i) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)})^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^n Y_i (\beta_0 + \beta_1 X_i) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{(\beta_0 + \beta_1 X_i)}). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Να σημειωθεί ότι δεν μπορούμε να βρούμε τους εκτιμητές όπως θα τους βρίσκαμε στα γραμμικά μοντέλα (δηλαδή να βρούμε τις τιμές των β_0, β_1 που θα μεγιστοποιούσαν τη λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας), γιατί πολύ απλά δεν υπάρχουν λύσεις κλειστής μορφής για τις τιμές των β_0, β_1 που θα μεγιστοποιούσαν τη σχέση (2.12). Πρέπει να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικές μέθοδοι, οι οποίες θα μας δίνουν τους εκτιμητές b_0, b_1 . Αν τους αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.5) θα βρούμε την προσαρμοσμένη αποκρινόμενη συνάρτηση για την i παρατήρηση και άρα θα έχουμε και την αποκρινόμενη λογιστική συνάρτηση η οποία είναι:

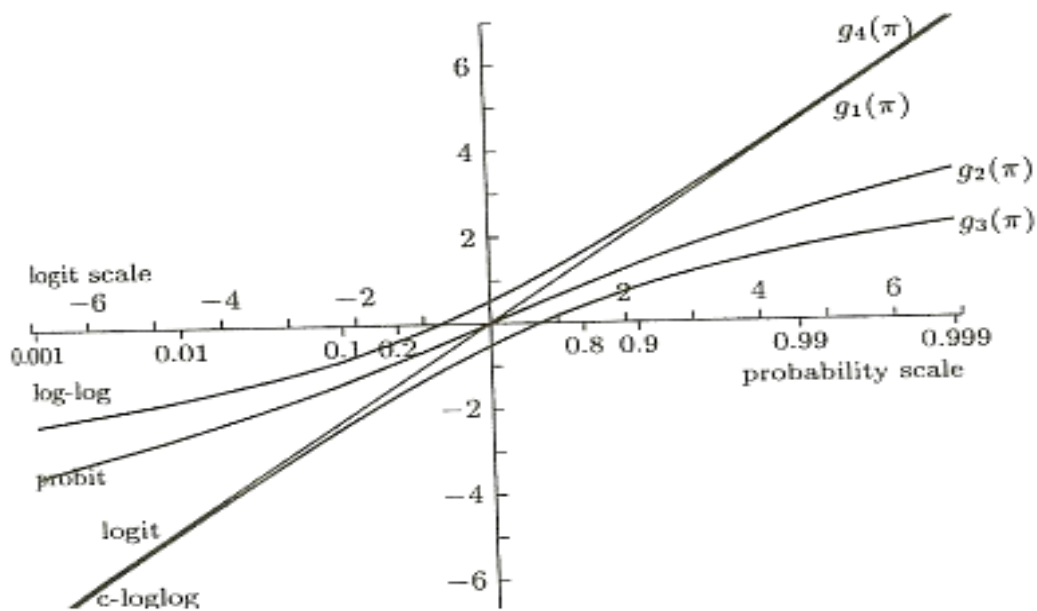
$$\hat{\pi} = \frac{e^{b_0 + b_1 X}}{1 + e^{b_0 + b_1 X}}. \quad (2.13)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό logit θα έχουμε $\hat{\pi}' = \ln \left(\frac{\hat{\pi}}{1 - \hat{\pi}} \right)$ και οπότε θα πάρουμε την προσαρμοσμένη αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση (fitted logit)

$$\hat{\pi}' = b_0 + b_1 X. \quad (2.14)$$

Υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία από συναρτήσεις σύνδεσης, δηλαδή από συναρτήσεις που συσχετίζουν την πιθανότητα π_i με τη γραμμική έκφραση $\eta_i = \sum_{j=1}^p x_{ij} \beta_j$. Για τη συσχέτιση αυτή χρησιμοποιούμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $g(\pi)$, ο οποίος απεικονίζει το διάστημα $(0,1)$ σε όλη την ευθεία $(-\infty, +\infty)$.

Στην πράξη χρησιμοποιούνται πιο πολύ η προσαρμοσμένη αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση (fitted logit) $g_1(\pi) = \log \frac{\pi}{1-\pi}$, η probit ή αντίστροφη κανονική συνάρτηση $g_2(\pi) = \Phi^{-1}(\pi)$, όπου $\Phi(x)$ είναι η συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής που ορίζεται ως $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ και η συμπληρωματική log-log συνάρτηση $g_3(\pi) = \log \{-\log(1-\pi)\}$. Η συνάρτηση $g_4(\pi) = -\log \{-\log(\pi)\}$ δεν χρησιμοποιείται συχνά γιατί δεν συμπεριφέρεται καλά για $\pi < 1/2$.



Σχήμα 2.2: Γραφική απεικόνιση των τεσσάρων παραπάνω συναρτήσεων σύνδεσης.

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε τα εξής:

- Η logit και η probit σχετίζονται σχεδόν γραμμικά για τιμές του π στο διάστημα $0.1 \leq \pi \leq 0.9$. Γι' αυτό το λόγο είναι δύσκολη η διάκριση μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων όταν πρόκειται για ζητήματα καλής προσαρμογής.

- Για μικρές τιμές της πιθανότητας, π , η συμπληρωματική log-log συνάρτηση είναι κοντά στη λογιστική συνάρτηση.
- Όταν η πιθανότητα, π , τείνει στο 1 τότε η συμπληρωματική log-log συνάρτηση τείνει στο άπειρο πολύ πιο αργά σε σύγκριση με τις άλλες τρεις συναρτήσεις.
- Παρομοίως η πιο αργή συνάρτηση στην περιοχή του 0 είναι η log-log.

2.3.1. Ερμηνεία για το συντελεστή παλινδρόμησης b_1

Ο εκτιμώμενος συντελεστής δεν έχει την ερμηνεία της κλίσης όπως είχαμε δει στα γραμμικά μοντέλα αλλά έχει μια εντελώς διαφορετική ερμηνεία. Η ερμηνεία προέρχεται από την ιδιότητα που έχει ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων (odds) $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$, ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το e^{b_1} για κάθε μονάδα που αυξάνεται το X .

Αυτό μπορούμε να το δούμε, γιατί γίνεται με βάση τα πιο κάτω βήματα:

1. Θα βρούμε την τιμή για την προσαρμοσμένη αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση (2.14) όταν $X = X_j$:

$$\hat{\pi}'(X_j) = b_0 + b_1 X_j.$$

2. Θα το βρούμε και όταν $X = X_j + 1$:

$$\hat{\pi}'(X_j + 1) = b_0 + b_1(X_j + 1).$$

3. Βρίσκουμε τη διαφορά αυτών των δύο:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}'(X_j + 1) - \hat{\pi}'(X_j) &= b_0 + b_1(X_j + 1) - b_0 - b_1 X_j \\ &= b_1 X_j + b_1 - b_1 X_j = b_1. \end{aligned}$$

Όμως πιο πριν είδαμε πως το $\hat{\pi}'(X)$ είναι ο λογάριθμος των εκτιμώμενων odds άρα $\hat{\pi}'(X_j) = \ln(odds_1)$ και $\hat{\pi}'(X_j + 1) = \ln(odds_2)$, οπότε η πιο πάνω σχέση θα γίνει:

$$\ln(odds_2) - \ln(odds_1) = \ln\left(\frac{odds_2}{odds_1}\right) = b_1 \iff \frac{odds_2}{odds_1} = e^{b_1},$$

το οποίο ονομάζεται λόγος των εκτιμώμενων πιθανοτήτων και συμβολίζεται με OR .

| |
|----------------------------------------------------|
| $OR = \frac{odds_2}{odds_1} = e^{b_1}. \tag{2.15}$ |
|----------------------------------------------------|

Αν το b_1 είναι θετικό, ο παράγοντας e^{b_1} είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, δηλαδή ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων αυξάνεται. Αν το b_1 είναι αρνητικό, ο παράγοντας e^{b_1} είναι μικρότερος της μονάδας, και άρα ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων μειώνεται. (Kutner et al., 2005).

2.3.2. Επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις

Σε κάποιες περιπτώσεις, σε διαφορετικά επίπεδα της ανεξάρτητης μεταβλητής X μπορούμε να έχουμε έναν αριθμό επαναλαμβανόμενων παρατηρήσεων. Για παράδειγμα θέλουμε να κάνουμε μια μελέτη στο αν οι πελάτες μιας εταιρείας θα αγόραζαν ένα προϊόν και σε ποιά τιμή. Η συνάρτηση απόκρισης εδώ είναι δυαδική (θα αγοραστεί το προϊόν ή όχι), οι μεταβλητές πρόβλεψης είναι οι τιμές του προϊόντος και έχουν επίπεδα.

Όταν έχουμε επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις η συνάρτηση πιθανοφάνειας (2.12) μπορεί να απλουστευθεί. Θα δηλώσουμε τα X επίπεδα στα οποία έχουμε επαναλαμβανόμενες παρατηρήσεις ως X_1, \dots, X_c . Ο αριθμός των παρατηρήσεων στα επίπεδα X_j θα ορίζεται από το n_j , $j = 1, 2, \dots, c$ και με

R_j θα ορίζουμε πόσα $Y = 1$ έχουμε σε κάθε X_j . Οπότε $\pi_j = \frac{R_j}{n_j}$, άρα η συνάρτηση πιθανοφάνειας (2.12) θα γίνει:

$$\ln L(\beta_0, \beta_1) = \sum_{j=1}^c \left\{ \ln \binom{n_j}{R_j} + R_j (\beta_0 + \beta_1 X_j) - n_j \ln[1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_j}] \right\}$$

(Kutner et al., 2005).

2.4. Πολλαπλή Λογιστική Παλινδρόμηση

Πολλές φορές έχουμε περισσότερες από μια ανεξάρτητη μεταβλητή οπότε θα πρέπει να προεκτείνουμε το απλό λογιστικό μοντέλο σε πολλαπλό μοντέλο.

Το λογιστικό μοντέλο είναι:

$$Y_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1}}} + \varepsilon_i = E(Y_i) + \varepsilon_i, \quad (2.16)$$

για να διευκολυνθούμε με τις πράξεις αλλά και για την απλοποίηση των σχέσεων θα χρησιμοποιήσουμε πίνακες και διανύσματα:

$$\beta_{p \times 1} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \end{bmatrix} \quad X_{p \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{p-1} \end{bmatrix} \quad X_{i,p \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_{i,1} \\ X_{i,2} \\ \vdots \\ X_{i,p-1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Οπότε θα έχουμε $\beta' X = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_{p-1} X_{p-1}$ και

$$\beta' X_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \dots + \beta_{p-1} X_{i,p-1}.$$

Με τη βοήθεια των πιο πάνω και με τα Y_i να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές Bernoulli μπορούμε να γράψουμε την αναμενόμενη εξίσωση λογιστικής παλινδρόμησης ως εξής (Kutner et al., 2005):

$$E(Y_i) = \pi_i = \frac{e^{\beta' X_i}}{1 + e^{\beta' X_i}}. \quad (2.18)$$

Σχόλια:

1. Πρέπει να αναφέρουμε εδώ ότι όλες οι σχέσεις που είχαμε δει στο απλό λογιστικό μοντέλο μπορούν να επεκταθούν και στο πολλαπλό λογιστικό μοντέλο.
2. Επίσης να επισημάνουμε ότι και εδώ η αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση είναι μονότονη και η καμπύλη έχει σχήμα S ή ανάποδο S σε σχέση με το $\beta' X$ και είναι σχεδόν γραμμική όταν $0.2 \leq E(Y) \leq 0.8$.
3. Οι μεταβλητές X μπορεί να είναι είτε ποσοτικές είτε ποιοτικές. Στην περίπτωση που είναι ποιοτικές αναπαριστώνται με δυαδικές μεταβλητές. Αν οι μεταβλητές είναι όλες ποιοτικές τότε το μοντέλο μπορεί να το ονομάσουμε και λογαριθμικό μοντέλο.

2.4.1. Εκτίμηση παραμέτρων

Όπως και στο απλό λογιστικό μοντέλο έτσι και εδώ η εκτίμηση παραμέτρων θα γίνει με τη βοήθεια της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας. Οπότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας εδώ είναι (Kutner et al., 2005):

$$\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^n Y_i (\beta' X_i) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{\beta' X_i}). \quad (2.19)$$

Και πάλι για να τους βρούμε τους εκτιμητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο η οποία θα μας δίνει τις τιμές των $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ που θα μεγιστοποιούν τη σχέση (2.18). Τις τιμές αυτές θα τις συμβολίζουμε με το μοναδιαίο διάνυσμα $b_{p \times 1} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{p-1}]^T$. Οπότε η αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση θα γίνει

$$\hat{\pi} = \frac{e^{b'X}}{1 + e^{b'X}} = [1 + e^{-b'X}]^{-1}, \quad (2.20\alpha)$$

ή για κάποια τιμή

$$\hat{\pi}_i = \frac{e^{b'X_i}}{1 + e^{b'X_i}} = [1 + e^{-b'X_i}]^{-1}. \quad (2.20\beta)$$

Σχόλια:

1. Προηγουμένως είπαμε πως οι εκτιμητές βρίσκονται με τη βοήθεια κάποιας αριθμητικής μεθόδου, μερικές φορές μπορεί να παρουσιαστεί κάποιο πρόβλημα σύγκλισης. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν οι μεταβλητές πρόβλεψης είναι πάρα πολλές ή όταν κάποιες έχουν μεγάλη συσχέτιση. Αν συμβεί κάτι τέτοιο πρέπει να μειώσουμε τις μεταβλητές πρόβλεψης.
2. Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας μπορούν να βρεθούν και με τη μέθοδο των επαναλαμβανόμενων σταθμισμένων ελαχίστων τετραγώνων.
3. Όταν η λογιστική συνάρτηση δεν είναι μονότονη ή δεν έχει τη μορφή s θα πρέπει όλες τις μεταβλητές πρόβλεψης να τις μετατρέψουμε σε κατηγορικές, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το λογαριθμικό μοντέλο.

2.4.2. Ερμηνεία για τους συντελεστές παλινδρόμησης

Όταν το πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης είναι ένα πρώτης τάξεως μοντέλο, η ερμηνεία των εκτιμώμενων συντελεστών είναι ίδια με αυτή της απλής λογιστικής συνάρτησης. Ο όρος e^{b_k} είναι ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων για τη μεταβλητή X_k , υπό την προϋπόθεση ότι οι άλλες μεταβλητές πρόβλεψης είναι σταθερές.

Όταν το πολλαπλό μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης δεν είναι ένα πρώτης τάξεως αλλά περιέχει τετραγωνικούς ή μεγαλύτερου βαθμού όρους για τις μεταβλητές πρόβλεψης, οι εκτιμώμενοι συντελεστές παλινδρόμησης δεν έχουν πλέον μια απλή ερμηνεία.

2.5. Κατασκευή μοντέλου

2.5.1. Έλεγχος αν κάποια από τα $\beta_k=0$

Η κατασκευή του μοντέλου μας εξαρτάται από ποιες μεταβλητές πρόβλεψης θα χρησιμοποιήσουμε. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε τις μεταβλητές εκείνες που θα κάνουν το μοντέλο μας πιο βέλτιστο. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με το να ελέγξουμε εάν κάποια από τα β_k είναι ίσα με το μηδέν.

Ο έλεγχος αυτός γίνεται με το τεστ λόγου πιθανοφάνειας (likelihood ratio test) και θα πρέπει να έχουμε μεγάλο δείγμα. Η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιεί ονομάζεται μοντέλο απόκλισης.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

Η απόκλιση στο αναμενόμενο μοντέλο συγκρίνει τη λογαριθμική πιθανοφάνεια του αναμενόμενου μοντέλου με τη λογαριθμική συνάρτηση ενός κορεσμένου (saturated) μοντέλου (δηλαδή με ένα μοντέλο με n παραμέτρους που έχουν οριστεί τέλεια, οπότε το μοντέλο είναι τέλεια προσαρμοσμένο). Άρα θα πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις:

α) Λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας του προσαρμοσμένου μοντέλου:

Είναι η συνάρτηση του πολλαπλού λογιστικού μοντέλου όταν έχουμε τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (γιατί τότε έχουμε τη μέγιστη τιμή της λογαριθμικής συνάρτησης), δηλαδή

$$\ln L(b_0, b_1, \dots, b_{p-1}) = \sum_{i=1}^n Y_i (b' X_i) - \sum_{i=1}^n \ln[1 + e^{b' X_i}]. \quad (2.21)$$

β) Λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας του κορεσμένου μοντέλου:

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.11) θα ορίσουμε τη λογαριθμική συνάρτηση του κορεσμένου μοντέλου. Για να μπορέσουμε να το κάνουμε αυτό θα πρέπει το π_i να μην έχει κανένα περιορισμό και να είναι η πιθανότητα όταν το $Y_i = 1$, οπότε θα έχουμε n παραμέτρους και n παρατηρήσεις οι οποίες προσαρμόζονται πλήρως. Επίσης να πούμε πως τη μέγιστη τιμή την παίρνει όταν $\pi_i = Y_i$. Η εκτιμήτρια για αυτό το μοντέλο θα ορίζεται με π_{is} και έχουμε ότι $\pi_{is} = Y_i$. Οπότε η λογαριθμική συνάρτηση θα είναι:

$$\begin{aligned} \ln L(Y_1, \dots, Y_n) &= \ln \prod_{i=1}^n \pi_i^{Y_i} (1 - \pi_i)^{1-Y_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[Y_i \ln \left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right) \right] + \sum_{i=1}^n [\ln(1 - \pi_i)] \quad \Leftrightarrow \\ \ln L(\pi_{1s}, \dots, \pi_{ns}) &= \sum_{i=1}^n \left[Y_i \ln \left(\frac{Y_i}{1-Y_i} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \ln(1 - Y_i) \quad \Leftrightarrow \\ \ln L(\pi_{1s}, \dots, \pi_{ns}) &= \sum_{i=1}^n [Y_i \ln Y_i - Y_i \ln(1 - Y_i)] + \sum_{i=1}^n \ln(1 - Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [Y_i \ln Y_i - Y_i \ln(1 - Y_i) + \ln(1 - Y_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n [Y_i \ln Y_i + (1 - Y_i) \ln(1 - Y_i)] \quad \Leftrightarrow \\ \ln L(\pi_{1s}, \dots, \pi_{ns}) &= \sum_{i=1}^n [Y_i \ln Y_i + (1 - Y_i) \ln(1 - Y_i)] = 0. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Η απόκλιση είναι η διαφορά των δύο αυτών λογαριθμικών συναρτήσεων (εδώ να πούμε πως η τιμή της συνάρτησης για το κορεσμένο μοντέλο είναι μεγαλύτερη, γιατί στο προσαρμοσμένο μοντέλο έχουμε λιγότερες παραμέτρους). Την απόκλιση θα την ορίζουμε με $DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1})$ και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}) &= 2 \ln L(\pi_{1s}, \dots, \pi_{ns}) - 2 \ln L(b_0, b_1, \dots, b_{p-1}) \\ &= 0 - 2 \left[\sum_{i=1}^n Y_i (b' X_i) - \sum_{i=1}^n \ln[1 + e^{b' X_i}] \right] \\ &\stackrel{(2.12)}{=} -2 \left[\sum_{i=1}^n Y_i \ln \left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right) - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\pi_i}{1-\pi_i} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \left[\sum_{i=1}^n (Y_i \ln \hat{\pi}_i - Y_i \ln(1 - \hat{\pi}_i) - \ln \left(\frac{1 - \hat{\pi}_i + \hat{\pi}_i}{1 - \hat{\pi}_i} \right)) \right] \\
&= -2 \left[\sum_{i=1}^n (Y_i \ln \hat{\pi}_i - Y_i \ln(1 - \hat{\pi}_i) - \ln \left(\frac{1}{1 - \hat{\pi}_i} \right)) \right] \\
&= -2 \left[\sum_{i=1}^n (Y_i \ln \hat{\pi}_i - Y_i \ln(1 - \hat{\pi}_i) - \ln 1 + \ln(1 - \hat{\pi}_i)) \right] \\
&= -2 \left[\sum_{i=1}^n (Y_i \ln \hat{\pi}_i + (1 - Y_i) \ln(1 - \hat{\pi}_i)) \right]. \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Να αναφέρουμε πως η απόκλιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο καλής προσαρμογής, γιατί όσο πιο μικρή τιμή έχει τόσο πιο κοντά είναι το προσαρμοσμένο μοντέλο στο κορεσμένο, και άρα έχουμε καλύτερη προσαρμογή.

ΜΕΡΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Ονομάζουμε τη διαφορά των αποκλίσεων δύο προσαρμοσμένων μοντέλων, το πλήρες μοντέλο και το μειωμένο. Με τη μερική απόκλιση ελέγχουμε εάν μπορούμε να παραλείψουμε κάποιες προβλεπόμενες μεταβλητές.

Έστω ότι το πλήρες μοντέλο είναι $\pi = [1 + e^{-\beta_F' X}]^{-1}$, όπου $\beta_F' = [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{p-1}]$ και έστω ότι ο έλεγχος που θέλουμε να κάνουμε είναι ο εξής:

$$\begin{array}{l}
H_0: \beta_q = \beta_{q+1} = \dots = \beta_{p-1} = 0, \\
H_1: \text{έστω κάποιο από τα } \beta \text{ όχι μηδέν}
\end{array}
\begin{array}{l}
\uparrow \\
| \\
\downarrow
\end{array}
\tag{2.24}$$

Οπότε το μειωμένο μοντέλο (είναι το μοντέλο που περιέχει όλες τις μεταβλητές για τις οποίες δεν κάνω έλεγχο) θα είναι $\pi = [1 + e^{-\beta_R' X}]^{-1}$ όπου $\beta_R' = [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{q-1}]$.

Βρίσκουμε τους εκτιμητές και την απόκλιση, που έχει το κάθε μοντέλο. Εάν η απόκλιση που έχει το μειωμένο μοντέλο, $DEV(X_0, X_1, \dots, X_{q-1})$, δεν έχει μεγάλη διαφορά από την απόκλιση που έχει το πλήρες μοντέλο,

$DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1})$, τότε θα μπορούμε να πούμε ότι ισχύει η H_0 , γιατί και το μειωμένο μοντέλο μας θα έχει καλή προσαρμογή. Ενώ αν η διαφορά είναι μεγάλη τότε η H_0 απορρίπτεται.

Η διαφορά των δύο αποκλίσεων θα ορίζεται ως εξής:

$$DEV(X_q, \dots, X_{p-1} | X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) = DEV(X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) - DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}). \quad (2.25)$$

Ο έλεγχος (2.24) θα γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω κανόνα απόφασης (2.26), (Kutner et al., 2005):

Εάν $DEV(X_q, \dots, X_{p-1} | X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) \leq \chi^2_{1-\alpha, p-q}$, τότε ισχύει η H_0 .

Εάν $DEV(X_q, \dots, X_{p-1} | X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) > \chi^2_{1-\alpha, p-q}$, τότε ισχύει η H_1 .

και αυτό γιατί αν ισχύει η H_0 και το n είναι πολύ μεγάλο η (2.25) ακολουθεί την χ^2 κατανομή και οι βαθμοί ελευθερίας είναι η διαφορά των βαθμών ελευθερίας των δύο μοντέλων $(n - q) - (n - p) = p - q$.

Παραδείγματα:

Έστω ότι έχουμε το μοντέλο $\pi = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4}}$ και θέλουμε να ελέγξουμε τα β_i .

- Εάν ο έλεγχος που θέλουμε να κάνουμε είναι $H_0: \beta_2 = \beta_4 = 0$, τότε θα συγκρίνουμε τη μερική απόκλιση που εδώ είναι $DEV(X_2, X_4 | X_0, X_1, X_3) = DEV(X_0, X_1, X_3) - DEV(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ με την χ^2 κατανομή με $p - q = 5 - 3 = 2$ βαθμούς ελευθερίας.
- Ενώ αν θέλουμε να κάνουμε τον έλεγχο $H_0: \beta_3 = 0$, τότε θα συγκρίνουμε τη μερική απόκλιση $DEV(X_3 | X_0, X_1, X_2, X_4) = DEV(X_0, X_1, X_2, X_4) -$

$DEV(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ με την χ^2 κατανομή με $p-q = 5 - 4 = 1$ βαθμούς ελευθερίας.

Σχόλιο:

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε πως τη μερική απόκλιση και το τεστ που είδαμε παραπάνω μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να ελέγξουμε εάν το μοντέλο μας έχει όρους αλληλεπίδρασης. Εμείς θα θέλαμε να μην υπάρχει κανένας τέτοιος όρος (δηλαδή θα θέλαμε να αποδεχτούμε την H_0), γιατί δε θα είχαμε την ερμηνεία που αναφέραμε πιο πάνω για το e^{β_k} .

ΤΕΣΤ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Το τεστ αυτό είναι το ίδιο με το τεστ μερικής απόκλισης. Βασίζεται στο λόγο της συνάρτησης πιθανοφάνειας του πλήρους μοντέλου και της συνάρτησης πιθανοφάνειας του μειωμένου μοντέλου.

Για να βρεθεί η συνάρτηση πιθανοφάνειας για το πλήρες μοντέλο ($\pi = [1 + e^{-\beta_F' X}]^{-1}$) θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (2.19) το διάνυσμα β με το διάνυσμα των εκτιμητών b_F . Την τιμή αυτή την ορίζουμε με $L(F) = L(b_0, b_1, \dots, b_{q-1})$. Τη στατιστική συνάρτηση για το τεστ μέγιστης πιθανοφάνειας θα την ορίζουμε με X^2 και είναι $X^2 = -2 \ln \left(\frac{L(R)}{L(F)} \right)$ (2.27).

Τώρα θα δούμε γιατί είναι ακριβώς ίδιο με τη μερική απόκλιση.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X^2 &= -2 \ln \left(\frac{L(R)}{L(F)} \right) \\ &= -2 (\ln L(R) - \ln L(F)) \\ &= -2 \ln L(R) + 2 \ln L(F) \\ &= DEV(X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) - 2 \ln L(\hat{\pi}_{1s}, \dots, \hat{\pi}_{ns}) + 2 \ln L(\hat{\pi}_{1s}, \dots, \hat{\pi}_{ns}) \\ &\quad - DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}) \\ &= DEV(X_0, X_1, \dots, X_{q-1}) - DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}) \end{aligned}$$

$$= DEV(X_q, \dots, X_{p-1} | X_0, X_1, \dots, X_{q-1}).$$

■

2.6. Διαγνωστικά

Πριν χρησιμοποιήσουμε το λογιστικό μοντέλο θα πρέπει να ελέγχουμε αν είναι αποτελεσματικό. Άρα θα πρέπει να ελέγξουμε αν η αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση είναι μονότονη και αν η καμπύλη της είναι σχήματος «S», γι' αυτό το λόγο άλλωστε συνηθίζεται να συναντάται και με το όνομα «σιγμοειδής» (sigmoid). Επίσης θα πρέπει να δούμε ποιές είναι οι ακραίες τιμές και ποιές από τις μεταβλητές πρόβλεψης ασκούν μεγαλύτερη επιρροή.

Ανεπίσημη μέθοδος καταλληλότητας μοντέλου

Σε αυτή τη μέθοδο χωρίζουμε τις παρατηρήσεις μας σε κλάσεις. Τις κλάσεις τις χωρίζουμε με βάση τις προσαρμοσμένες τιμές π , ή καλύτερα με τη βοήθεια των προσαρμοσμένων λογαριθμικών τιμών π' . Θα θέλαμε βέβαια σε κάθε κλάση να είχαμε περίπου τον ίδιο αριθμό περιπτώσεων. Πρέπει να βρούμε τη μεσαία τιμή της κάθε κλάσης και να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα σε σχέση με το

$$p_j = \frac{(\text{πόσα έχουν σαν } Y_i=1)}{n_j}.$$

Αν δούμε ότι η γραφική παράσταση είναι μονότονη και έχει σιγμοειδές σχήμα τότε θα καταλάβουμε πως το προσαρμοσμένο μοντέλο μας θα είναι κατάλληλο, (Dobson A.J., 1990).

χ^2 έλεγχος καλής προσαρμογής

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη μέθοδο θα πρέπει οι Y_i να είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και το μέγεθος του δείγματος να είναι πολύ μεγάλο. Οι εναλλακτικές αυτού του ελέγχου θα είναι:

$$H_0: E(Y) = [1 + \exp(-\beta' X)]^{-1} \quad (2.28)$$

$$H_1: E(Y) \neq [1 + \exp(-\beta' X)]^{-1}.$$

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής, (Kutner et al., 2005):

1. Θα χωρίσουμε τις περιπτώσεις μας σε ομάδες με βάση τις τιμές π' (να αναφερθεί ότι ο διαχωρισμός θα μπορούσε να γίνει και με τις τιμές π). Συνήθως έχουμε 5 έως 10 ομάδες και τον αριθμό των ομάδων τον συμβολίζουμε με c . Σε κάθε ομάδα θέλουμε να έχουμε περίπου τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων, ο οποίος θα συμβολίζεται με n_j . Άρα θα έχουμε
$$\sum_{i=1}^c n_j = n. \quad (2.29)$$

2. Θα ορίσουμε με O_{j1} τον αριθμό των παρατηρήσεων στην j κλάση όπου $Y_i = 1$. Ενώ με O_{j0} τον αριθμό των παρατηρήσεων στην j κλάση όπου $Y_i = 0$. Οπότε έχουμε $O_{j1} = \sum Y_i$ (2.30α) και $O_{j0} = \sum(1 - Y_i) = n_j - O_{j1}$ (2.30β).

3. Εάν η αποκρινόμενη λογιστική συνάρτηση είναι κατάλληλη, οι αναμενόμενες τιμές όταν $Y_i = 1$ και $Y_i = 0$ θα είναι $E_{j1} = \sum \pi_i$ (2.31α) και $E_{j0} = \sum(1 - \pi_i) = n_j - E_{j1}$ (2.31β). Εδώ να αναφέρουμε πως οι περισσότερες συχνότερες τιμές για τα E_{jk} πρέπει να είναι μεγαλύτερες ή ίσες με 5 και καμία να μην είναι μικρότερη από 1. Η στατιστική συνάρτηση του ελέγχου είναι:
$$X^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{k=0}^1 \frac{(O_{jk} - E_{jk})^2}{E_{jk}}. \quad (2.32)$$

4. Αν η λογιστική αποκρινόμενη συνάρτηση είναι κατάλληλη τότε η X^2 θα ακολουθεί μια χ^2 κατανομή με $c - 2$ βαθμούς ελευθερίας. Οπότε ο κανόνας απόφασης για τον έλεγχο (2.28) είναι:

$$\text{Εάν } X^2 \leq \chi^2_{1-a, c-2}, \text{ δεν απορρίπτουμε την } H_0.$$

$$\text{Εάν } X^2 > \chi^2_{1-a, c-2}, \text{ απορρίπτουμε την } H_0. \quad (2.33)$$

Έλεγχος απόκλισης ως έλεγχος καλής προσαρμογής

Αν το λογιστικό μας μοντέλο είναι σωστό και το δείγμα μας είναι μεγάλο, τότε και η απόκλιση (DEV) θα ακολουθεί μια χ^2 κατανομή με $n - p$ βαθμούς. Άρα ο κανόνας απόφασης για τον έλεγχο (2.28) εδώ είναι:

Εάν $DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}) \leq \chi^2_{1-\alpha, n-p}$, συμπεραίνουμε H_0 .

Εάν $DEV(X_0, X_1, \dots, X_{p-1}) > \chi^2_{1-\alpha, n-p}$, συμπεραίνουμε H_1 . (2.34)

Απόκλιση καταλοίπων

Στη λογιστική παλινδρόμηση τα κατάλοιπα δεν κατανέμονται κανονικά και μάλιστα εάν το μοντέλο είναι σωστό δεν μπορούμε να ξέρουμε και ποια κατανομή ακολουθούν, οπότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη γραφική παράσταση των καταλοίπων, όμως μπορούμε να πάρουμε την απόκλιση καταλοίπων. Τι είναι όμως η απόκλιση καταλοίπων; Είναι η τετραγωνική ρίζα των παραγόντων που βρίσκονται μέσα στο άθροισμα της απόκλισης που είδαμε πιο πάνω και το συμβολίζουμε με dev_i , δηλαδή

$$dev_i = \pm \{-2[Y_i \ln(\pi_i) + (1 - Y_i) \ln(1 - \pi_i)]\}^{1/2}, \quad (2.35)$$

Η οποία θα παίρνει θετική τιμή όταν $Y_i \geq \pi_i$ και θα παίρνει αρνητική τιμή όταν $Y_i < \pi_i$. Οπότε η γραφική παράσταση που θα έχουμε εδώ θα είναι ένα index plot, δηλαδή θα σχεδιάσουμε τα dev_i σε συνάρτηση με κάθε i . Με αυτή την απεικόνιση βρίσκουμε τα εκτός ορίων κατάλοιπα, για τα οποία όμως δε συνεπάγεται πως είναι και ακραίες παρατηρήσεις.

Κεφάλαιο 3^ο

Διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση γραμμικών μοντέλων

3.1. ΚΜW διαγράμματα (EWMA-3)

Οι Kim et al. (2003), χρησιμοποιώντας κωδικοποιημένες επεξηγηματικές μεταβλητές, πρότειναν την ακόλουθη μορφή του μοντέλου:

$$y_{ij} = B_0 + B_1 x_i^* + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

όπου $B_0 = A_0 + A_1 \bar{x}$, $B_1 = A_1$, $x_i^* = x_i - \bar{x}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Για το j -οστό δείγμα, οι εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων για τα B_0 , B_1 και σ^2 είναι

$$b_{0j} = \bar{y}_j, \quad b_{1j} = \frac{S_{xy(j)}}{S_{xx}}, \quad MSE_j = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - b_{1j} x_i^* - b_{0j})^2 \quad \text{όπου } \bar{y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy(j)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}.$$

Να σημειώσουμε ότι αυτοί οι τρεις εκτιμητές είναι ανεξάρτητοι. Έτσι, αυτοί πρότειναν να χρησιμοποιήσουν τρία EWMA διαγράμματα ($EWMA_I$, $EWMA_S$, $EWMA_E$) για να ανιχνεύσουν αν η Y -τετμημένη (B_0), η κλίση (B_1) και η τυπική απόκλιση (σ) έχουν αλλάξει, αντίστοιχα. Αυτά είναι:

$$EWMA_I(j) = \theta b_{0j} + (1 - \theta)EWMA_I(j - 1), \quad (3.2)$$

$$EWMA_S(j) = \theta b_{1j} + (1 - \theta)EWMA_S(j - 1), \quad (3.3)$$

$$EWMA_E(j) = \max\{\theta \ln(MSE_j) + (1 - \theta)EWMA_E(j - 1), \ln(\sigma^2)\} \quad (3.4)$$

όπου $EWMA_I(0) = B_0$, $EWMA_S(0) = B_1$, $EWMA_E(0) = \ln(\sigma^2)$ και θ είναι μια σταθερά βαρύτητας. Τα τρία $EWMA$ διαγράμματα, που δηλώνονται ως διαγράμματα KMW , χρησιμοποιούνται από κοινού. Αυτά δίνουν σήμα μιας εκτός-ελέγχου κατάστασης όταν ένα από τα διαγράμματα ενεργοποιηθεί.

Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το $EWMA$ διάγραμμα για την παρακολούθηση της τετμημένης είναι:

$$LCL = B_0 - L_I \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta) \cdot n}} \quad (3.5)$$

$$UCL = B_0 + L_I \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta) \cdot n}}, \quad (3.6)$$

με $0 < \theta \leq 1$ μια σταθερά βαρύτητας και $L_I > 0$ είναι επιλεγμένο για να δίνει ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου ARL_0 .

Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το $EWMA$ διάγραμμα για την παρακολούθηση της κλίσης είναι:

$$LCL = B_1 - L_S \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta) \cdot S_{xx}}} \quad (3.7)$$

$$UCL = B_1 + L_S \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta) \cdot S_{xx}}}, \quad (3.8)$$

με $0 < \theta \leq 1$ μια σταθερά βαρύτητας και $L_S > 0$ είναι επιλεγμένο για να δίνει ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου ARL .

Όσον αφορά το $EWMA$ διάγραμμα για τη διασπορά του σφάλματος, χρησιμοποιείται η παρακάτω προσέγγιση,

$$Var[\ln(MSE_j)] \approx \frac{2}{n-2} + \frac{2}{(n-2)^2} + \frac{4}{3 \cdot (n-2)^3} - \frac{16}{15 \cdot (n-2)^5}. \quad (3.9)$$

Το άνω όριο ελέγχου δίνεται από την εξίσωση,

$$UCL = L_E \cdot \sqrt{\frac{\theta \cdot Var[\ln(MSE_j)]}{2-\theta}}, \quad L_E > 0 \text{ είναι επιλεγμένο για να δίνει ένα}$$

συγκεκριμένο εντός ελέγχου ARL . Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής για

αυτό το διάγραμμα ορίζεται από τον τύπο $ARL_0 = 1/\alpha$ όπου α είναι το σφάλμα τύπου I. Η τιμή για αυτό το μεμονωμένο *EWMA* διάγραμμα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\alpha_i = 1 - \sqrt[3]{1 - \alpha} . \quad (3.10)$$

Οι Kim et al. (2003) πρότειναν η μέθοδος τους για τη Φάση II να χρησιμοποιηθεί και στην ανάλυση της Φάσης I για γραμμικά «προφίλ», αντικαθιστώντας τα τρία *EWMA* διαγράμματα με τρία διαγράμματα Shewhart. Ωστόσο δεν συνιστάται η χρήση της προσέγγισης *EWMA* στην Φάση I για δύο λόγους. Τα *EWMA* διαγράμματα συνιστανται να χρησιμοποιούνται στη Φάση II λόγω της δύναμης τους να ανιχνεύουν συνεχείς μετατοπίσεις στις παραμέτρους και της γρήγορης ανίχνευσης μικρών προς μέτριων μετατοπίσεων διεργασίας συγκρινόμενα με διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart. Παρ' όλα αυτά, η γρήγορη ανίχνευση δεν είναι ένα θέμα στη Φάση I καθώς έχουμε να εκτιμήσουμε ένα σταθερό σύνολο από ιστορικά δεδομένα. Δεύτερον, στην εφαρμογή ενός *EWMA* διαγράμματος στη Φάση I, αρκετά δείγματα δεν μπορούν να συνεισφέρουν σε καμία εκτός ελέγχου ειδοποίηση. Έτσι, αυτό δεν είναι καθαρά ορισμένο πως να αναγνωρίσουμε και να διαγράψουμε τις εκτός ελέγχου γραμμές παλινδρόμησης για να επιτύχουμε σταθερότητα στη διεργασία πριν εκτιμήσουμε τις εντός ελέγχου παραμέτρους παλινδρόμησης.

3.2. MEWMA διάγραμμα

Οι Zou et al. (2007) πρότειναν το *MEWMA* διάγραμμα για την παρακολούθηση των γενικευμένων γραμμικών «προφίλ». Υποθέτοντας ότι για το j -οστό τυχαίο δείγμα που έχει συλλεχθεί στο πέρασμα του χρόνου, αυτοί έχουν τις παρατηρήσεις (X_i, Y_i) , όπου Y_i είναι n_j -παραμετρικό διάνυσμα και X_i είναι ένας $n_j \times p$ ($n_j > p$) πίνακας. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, το υποκείμενο μοντέλο είναι:

$$Y_i = X_i \vec{\beta} + \vec{\varepsilon}_j, \quad (3.11)$$

όπου $\vec{\beta} = (\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(p)})$ είναι το p -διάστατο διάνυσμα συντελεστή και $\vec{\varepsilon}_j$ είναι ισόνομα και ανεξάρτητα κατανομημένα ως ένα n_j -παραμετρικό πολυπαραμετρικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα με μέση τιμή $\vec{0}$ και $\sigma^2 I$ πίνακα διασποράς. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε ότι X_j είναι της μορφής $(1, X_j^*)$, όπου X_j^* είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{1}$ και $\mathbf{1}$ είναι ένα n_j -παραμετρικό διάνυσμα από όλα τα 1. Τα n_j είναι ίσα και X_j υποθέτουμε ότι είναι σταθερό για διαφορετικά j , δηλωμένα ως n και X , αντίστοιχα. Σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο του Y_i , ορίζονται

$$Z_j(\vec{\beta}) = (\vec{\hat{\beta}}_j - \vec{\beta}) / \sigma \quad (3.12)$$

$$\text{και } Z_j(\sigma) = \Phi^{-1} \left\{ F \left(\frac{(n-p)\hat{\sigma}_j^2}{\sigma^2}; n-p \right) \right\}, \quad (3.13)$$

όπου $\vec{\hat{\beta}}_j = (X'X)^{-1}X'Y_j$, $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-p} (Y_j - X\vec{\hat{\beta}}_j)' (Y_j - X\vec{\hat{\beta}}_j)$, Φ^{-1} δηλώνει την αντίστροφη συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής της κανονικής τυχαίας μεταβλητής και $F(\cdot; \nu)$ είναι η X^2 συνάρτηση κατανομής με ν βαθμούς ελευθερίας. Δηλώνουμε το Z_j με $(Z_j'(\vec{\hat{\beta}}_j), Z_j(\sigma)')$, το οποίο είναι ένα $(p+1)$ -παραμετρικό τυχαίο διάνυσμα. Όταν η διεργασία είναι εντός-ελέγχου, το διάνυσμα είναι πολυπαραμετρικά κανονικά κατανομημένο με μέση τιμή $\vec{0}$ και πίνακα διασποράς $\Sigma = \begin{pmatrix} (X'X)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$.

Το στατιστικό του διαγράμματος EWMA ορίζεται ως εξής:

$$W_j = \lambda Z_j + (1 - \lambda)W_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

όπου W_0 είναι ένα $(p+1)$ -διάστατο αρχικό διάνυσμα και λ είναι ο συντελεστής βαρύτητας. Το διάγραμμα δίνει σήμα όταν

$$U_j = W_j' \Sigma^{-1} W_j > L \frac{\lambda}{2-\lambda}, \quad (3.15)$$

όπου $L > 0$ είναι επιλεγμένο για να επιτυγχάνει μια συγκεκριμένη εντός ελέγχου τιμή ARL . Αυτό το σκηνικό ελέγχου μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική εφαρμογή $MEWMA$ διαγραμμάτων.

3.3. T^2 διάγραμμα ελέγχου

Οι Kang και Albin (2000) πρότειναν ένα T^2 διάγραμμα ελέγχου κατάλληλο για την περίπτωση των απλών γραμμικών «προφίλ» με σταθερές X -τιμές σε όλα τα δείγματα (δηλαδή $X_{ij} = X_i, j = 1, 2, \dots, m$) για τη Φάση I. Το διάγραμμα αυτό στηρίζεται σε διαδοχικά διανύσματα των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων της Y -τετμημένης και της κλίσης. Τα T^2 στατιστικά σ' αυτήν τη μέθοδο είναι όπως ακολούθως:

$$T_j^2 = \frac{m(z_j - \bar{z})^T S_2^{-1} (z_j - \bar{z})}{(m-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.16)$$

όπου $z_j = (\alpha_j \ b_j)^T$ και $\bar{z} = (\bar{a} \ \bar{b})^T$, $\alpha_j = \bar{Y}_j - b_j \bar{X}_j$, $b_j = \frac{S_{XY(j)}}{S_{XX(j)}}$, $\bar{Y}_j = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{Y_{ij}}{n_j}$,

$S_{XY(j)} = \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j) \cdot Y_{ij}$, $S_{XX(j)} = \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2$ και

$$S_2 = MSE \begin{pmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} & \frac{-\bar{X}}{S_{XX}} \\ \frac{-\bar{X}}{S_{XX}} & \frac{1}{S_{XX}} \end{pmatrix},$$

όπου $MSE = \sum_{j=1}^m MSE_j / m$, $MSE_j = SSE_j / (n_j - 2)$, $SSE_j = \sum_{i=1}^{n_j} e_{ij}^2$, $e_{ij} = Y_{ij} - a_j - b_j X_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n_j$, $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$, $S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

Οι Kang και Albin (2000) απέδειξαν ότι το παραπάνω T^2 στατιστικό διαιρεμένο με 2 ακολουθεί μια F -κατανομή με 2 και $m(n-2)$ βαθμούς ελευθερίας. Ως εκ τούτου, το κατάλληλο άνω όριο ελέγχου αυτού του T^2 διαγράμματος που παράγει μια εσφαλμένη ειδοποίηση με πιθανότητα α λαμβάνεται μέσω του ακόλουθου τύπου

$$UCL = 2F_{2,m(n-2),\alpha} \quad (3.17)$$

Επίσης, οι Kang και Albin (2000) πρότειναν δύο μεθόδους διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση των γραμμικών «προφίλ» στη Φάση II. Η πρώτη τους προσέγγιση είναι ένα διπαραμετρικό T^2 διάγραμμα βασισμένο σε διαδοχικά διανύσματα των εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων της Y -τετμημένης και της κλίσης, υποθέτοντας γνωστές τιμές παραμέτρων. Εδώ, το T^2 στατιστικό είναι:

$$T_j^2 = (\mathbf{z}_j - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{z}_j - \boldsymbol{\mu}), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

όπου $\mathbf{z}_j = (\alpha_j b_j)^T$ είναι το διάνυσμα των εκτιμητών του δείγματος και $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι το διάνυσμα της εντός ελέγχου μέσης τιμής και ο πίνακας διασποράς-συνδιασποράς, αντίστοιχα. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, το προαναφερθέν T^2 στατιστικό ακολουθεί μια κεντραρισμένη X^2 κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας. Το άνω όριο ελέγχου για αυτό το διάγραμμα που χρησιμοποιήθηκε από τους Kang και Albin (2000) δίνεται παρακάτω ως

$$UCL = X_{2,\alpha}^2 \quad (3.19)$$

Υπό τις εκτός ελέγχου μετατοπίσεις στις παραμέτρους διεργασίας (υποθέτοντας ότι οι X -τιμές είναι οι ίδιες για όλα τα δείγματα), το προαναφερθέν T^2 στατιστικό ακολουθεί μια μη-κεντραρισμένη X^2 κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας και μη κεντραρισμένη παράμετρο

$$\tau = n(\lambda + \beta \bar{X})^2 + \beta^2 S_{XX}, \quad (3.20)$$

όπου λ και β είναι οι μετατοπίσεις στην τετμημένη και στην κλίση, αντίστοιχα. Μπορεί να δειχθεί ότι το ακριβές ARL αυτού του T^2 διαγράμματος ελέγχου αξιολογείται χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο τύπο:

$$ARL = \frac{1}{Pr(T_j^2 > X_{2,\alpha}^2)}, \quad (3.21)$$

Αν οι X -τιμές δεν είναι οι ίδιες για όλα τα δείγματα, το ARL που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη πιθανότητα ειδοποίησης λάθους μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας προσομοίωση.

3.4. MCUSUM διάγραμμα ελέγχου

Για την αύξηση της αποδοτικότητας της παρακολούθησης για μικρές συνεχείς μετατοπίσεις, οι Noorossana et al. (2004) πρότειναν να αντικαταστήσουν το T^2 διάγραμμα των Kang και Albin (2000) με ένα πολυπαραμετρικό αθροιστικό διάγραμμα ελέγχου *MCUSUM* βασιζόμενο στα διανύσματα των εκτιμητών παλινδρόμησης. Ακόμα, για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας, αυτοί πρότειναν τη χρήση αυτού του *MCUSUM* διαγράμματος σε συνδυασμό με το *R*-διάγραμμα. Όσον αφορά το *R*-διάγραμμα αξίζει να σημειώσουμε ότι σχεδιάζεται με τη βοήθεια του εύρους του κάθε δείγματος:

$$R_j = \max_i(d_{ij}) - \min_i(d_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

$$\text{όπου } d_{ij} = (Y_{ij} - A_0 - B_0 X_j) / \sigma_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

και έχει τα ακόλουθα όρια ελέγχου:

$$LCL = \sigma(d_2 - L_2 d_3) \quad \text{και} \quad UCL = \sigma(d_2 + L_2 d_3),$$

με $L_2 > 0$ να είναι μια σταθερά επιλεγμένη να παράγει ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου *ARL*, d_2 και d_3 είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος n . Για παράδειγμα, οι Ryan (2000), Montgomery (2013) παρέχουν πίνακες για τις τιμές των d_2 και d_3 που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του δείγματος μεγέθους n .

Το *MCUSUM* διάγραμμα προτάθηκε πρώτα από το Healy (1987) για την παρακολούθηση του διανύσματος της μέσης τιμής μιας πολυπαραμετρικής κανονικής διεργασίας. Τα στατιστικά του *MCUSUM* που προτάθηκαν από τους Noorossana et al. (2004) είναι τα εξής:

$$S_j = \max(S_{j-1} + \alpha^T (\mathbf{z}_j - \boldsymbol{\mu}) - 0.5D, 0), \quad (3.23)$$

όπου $S_0 = 0$, $\alpha^T = \frac{\Delta^T \Sigma^{-1}}{\sqrt{\Delta^T \Sigma^{-1} \Delta}}$, $D = \sqrt{\Delta^T \Sigma^{-1} \Delta}$ και Δ είναι η μικρότερη μετατόπιση στο διάνυσμα της μέσης τιμής της διεργασίας $\boldsymbol{\mu} = (A B)^T$ θεωρώντας

σημαντικό να ανιχνευτεί γρήγορα. Η τιμή D αναφέρεται συνήθως ως μη κεντραρισμένη παράμετρος. Αυτό το $MCUSUM$ διάγραμμα δίνει σήμα μιας μετατόπισης είτε στην τετμημένη είτε στην κλίση οποτεδήποτε $S_j > H$, όπου H έχει επιλεγθεί να ικανοποιεί ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου ARL .

3.5. Kang και Albin μέθοδοι

Οι Kang και Albin (2000) πρότειναν τις ακόλουθες μεθόδους για την Φάση II, για τη γραμμική συνάρτηση $Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + e_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$ $j = 1, 2, \dots, k$:

Μέθοδος 1: Στρατηγική πολυπαραμετρικού ελέγχου - - - A_0, A_1, σ^2 γνωστά.

Μέθοδος 2: Στρατηγική ελέγχου υπολοίπου - - - A_0, A_1, σ^2 γνωστά.

Μέθοδος 3: Στρατηγική πολυπαραμετρικού ελέγχου - - - A_0, A_1, σ^2 άγνωστα.

Μέθοδος 4: Στρατηγική ελέγχου υπολοίπου - - - A_0, A_1, σ^2 άγνωστα.

Στη μέθοδο 1 έχουμε να αναλύσουμε για κάθε δείγμα j την τετμημένη του δείγματος και την κλίση,

$$a_{0j} = \bar{Y} - a_{1j} \bar{X}, \quad a_{1j} = \frac{S_{XY(j)}}{S_{XX}},$$

$Z_j = (a_{0j}, a_{1j})^T$ είναι ένα διπαραμετρικό μοντέλο, το οποίο έχει αναμενόμενη τιμή U και τον πίνακα διασποράς-συνδιασποράς Σ ,

$$U = (A_0, A_1)^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01}^2 \\ \sigma_{01}^2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \sigma_0^2 = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right), \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma^2}{S_{XX}},$$

$$\sigma_{01}^2 = \frac{-\sigma^2 \bar{X}}{S_{XX}}.$$

Το στατιστικό του δείγματος για το T^2 πολυπαραμετρικό διάγραμμα ελέγχου είναι:

$$T_j^2 = (Z_j - U)^T \Sigma^{-1} (Z_j - U). \quad (3.24)$$

Το άνω όριο ελέγχου είναι $UCL = X_{2,\alpha}^2$ όπου α είναι το α -ποσοστιαίο σημείο της X^2 κατανομής με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Στη μέθοδο 2 έχουμε n υπόλοιπα ε_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, n$) για το δείγμα j ,

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - a_{0j} - a_{1j}X_i. \quad (3.25)$$

Η μέση τιμή των υπολοίπων για κάθε δείγμα είναι $\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}$.

Το j -οστό στατιστικό δείγμα για το διάγραμμα $EWMA$ είναι

$$z_j = \theta \bar{\varepsilon}_j + (1 - \theta)z_{j-1}, \quad (3.26)$$

όπου $0 < \theta < 1$ (σταθμισμένη σταθερά) και η αρχική τιμή του είναι μηδέν. Τα κάτω και τα άνω όρια ελέγχου είναι

$$LCL = -L\sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}}, \quad UCL = L\sigma \sqrt{\frac{\theta}{(2-\theta)n}},$$

όπου L είναι ο πολλαπλασιαστής της τυπικής απόκλισης του δείγματος που καθορίζει το ποσοστό της λάθους ειδοποίησης. Το $EWMA$ διάγραμμα ελέγχου δεν επαρκεί, καθώς εμείς θέλουμε να αναγνωρίσουμε μετατοπίσεις στη μεταβολή σφάλματος. Η λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε μαζί με $EWMA$ διάγραμμα και το R διάγραμμα για την παρακολούθηση των υπολοίπων. Το τελευταίο έχει το εύρος δείγματος που ορίζεται ως εξής:

$$R_j = \max_i(\varepsilon_{ij}) - \min_i(\varepsilon_{ij}), \quad (3.27)$$

Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για αυτό είναι

$$LCL = \sigma(d_2 - Ld_3) \quad \text{και} \quad UCL = \sigma(d_2 + Ld_3),$$

όπου το L ορίζεται όπως προηγουμένως και d_2, d_3 είναι σταθερές που υπάρχουν σε πολλά βιβλία για διαφορετικές τιμές του n .

Η μέθοδος 3 και η μέθοδος 4 χρησιμοποιούνται, όταν οι παράμετροι είναι άγνωστοι. Για το γραμμικό μοντέλο που ορίσαμε παραπάνω μπορούμε να αποκτήσουμε τους εκτιμητές των A_0 , A_1 και σ^2 . Αυτό θα γίνει από ένα πρωταρχικό σύνολο από δεδομένα το οποίο περιέχει k -δείγματα. Από κάθε δείγμα έχουμε τους εκτιμητές,

$$a_{0j} = \bar{Y} - a_{1j}\bar{X}, \quad a_{1j} = \frac{S_{XY(j)}}{S_{XX}}, \quad MSE_j = (\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}^2)/(n-2).$$

Οι εκτιμητές των A_0 , A_1 και σ^2 είναι αντίστοιχα οι ακόλουθοι:

$$a_0 = \frac{\sum_{j=1}^k a_{0j}}{k}, \quad a_1 = \frac{\sum_{j=1}^k a_{1j}}{k}, \quad MSE = \frac{\sum_{j=1}^k MSE_j}{k}.$$

Η μέθοδος 3 είναι πολυπαραμετρική προσέγγιση, αλλά αυτό έχει ως απαραίτητο τη χρήση των εκτιμητών A_0 , A_1 και σ^2 . Εμείς δεν θα παρουσιάσουμε εδώ αυτήν τη μέθοδο γιατί είναι παρόμοια με τη μέθοδο 1. Η μέθοδος 4 είναι προσέγγιση υπολοίπου, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να πάρουμε τους εκτιμητές A_0 , A_1 και σ^2 .

3.6. F μέθοδος

Οι Mahmoud και Woodall (2004) πρότειναν μια εναλλακτική μέθοδο για την ανάλυση δεδομένων στη Φάση I. Η μέθοδος τους βασίζεται στη χρήση δείκτριων μεταβλητών σ' ένα πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης συνδυασμένο με ένα διάγραμμα ελέγχου για την ανίχνευση αλλαγών στη διασπορά της διεργασίας. Το F στατιστικό για τον έλεγχο της ισότητας m γραμμών παλινδρόμησης είναι:

$$F = \{SSE(reduced) - SSE(full)\} / \{2(m-1)MSE(full)\}, \quad (3.28)$$

όπου $SSE(full)$ και $MSE(full)$ είναι το άθροισμα τετραγώνων των υπολοίπων και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, αντίστοιχα, που προκύπτει από το μοντέλο παλινδρόμησης

$$Y_i = A + BX_i + \beta_{01}Z_{1i} + \beta_{02}Z_{2i} + \dots + \beta_{0m'}Z_{m'i} + \beta_{11}Z_{1i}X_i + \beta_{12}Z_{2i}X_i + \dots + \beta_{1m'}Z_{m'i}X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.29)$$

όπου (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$ είναι N διπαραμετρικές παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη συγκέντρωση m δειγμάτων εντός ενός δείγματος, $m' = m - 1$ και οι Z_{ji} όροι είναι δείκτριες μεταβλητές που ορίζονται ως εξής:

$$Z_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{αν η παρατήρηση } i \text{ είναι από το δείγμα } j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, m'$$

(3.30)

Επίσης, $SSE(reduced)$ είναι το άθροισμα τετραγώνων του υπολοίπου που προκύπτει από την προσαρμογή του μειωμένου μοντέλου παλινδρόμησης

$$Y_i = A + BX_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Το στατιστικό τεστ F που αναφέραμε παραπάνω ακολουθεί μια F κατανομή με $2(m - 1)$ και $N - 2m$ βαθμούς ελευθερίας υπό την εντός ελέγχου κατάσταση. Για την παρακολούθηση της διασποράς της διεργασίας, οι Mahmoud και Woodall (2004) πρότειναν τη χρήση του τρίτου διαγράμματος ελέγχου των Kim et al. (2003). Για διαγνωστικούς σκοπούς, αυτοί πρότειναν ότι αν ένα εκτός ελέγχου σημείο αποκτάται από το F τεστ, τότε θα ακολουθήσει η εφαρμογή 3σ διαγραμμάτων ελέγχου για την Y -τετμημένη και την κλίση.

3.7. X^2 διάγραμμα ελέγχου

Αν οι παράμετροι β και σ^2 του μοντέλου είναι γνωστοί, όταν η διεργασία λειτουργεί υπό σταθερότητα, δεν είναι απαραίτητο να εξετάσουμε λεπτομερώς

τις εκτιμήσεις τους, αυτό ακριβώς κάνει και η λεγόμενη Φάση I μεθοδολογία διαγραμμάτων ελέγχου. Έτσι πάμε αμέσως στη Φάση II, που αντιστοιχεί στη χρήση διαγράμματος ελέγχου κατά τη διάρκεια παρακολούθησης για την παρακολούθηση της παραγωγικής διεργασίας. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, κάποιος περιοδικά εξάγει τυχαία ένα δείγμα από τη διεργασία, που το δηλώνουμε με i , μεγέθους n , υπολογίζει τους εκτιμητές των συντελεστών παλινδρόμησης και υπολογίζει τα επιλεγμένα στατιστικά προκειμένου να σχεδιάσουμε το διάγραμμα X_p^2 , για κάθε δείγμα, με τον ακόλουθο τρόπο,

$$X_0^2 = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^i - \boldsymbol{\beta})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}^i - \boldsymbol{\beta}), \quad (3.31)$$

$$\text{όπου } \hat{\boldsymbol{\beta}}^i = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{i0} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{ir} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01} & \dots & \sigma_{0r} \\ \sigma_{01} & \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{0r} & \sigma_{1r} & \dots & \sigma_r^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2$$

είναι, αντίστοιχα, ο εκτιμητής για το i δείγμα της παραμέτρου $\boldsymbol{\beta}$, το διάνυσμα της μέσης τιμής και ο πίνακας συνδιασποράς.

Σ' αυτό το διάγραμμα, το άνω όριο ελέγχου, UCL , δίνεται από τον τύπο $UCL = X_{p,\alpha}^2$ όπου α είναι το σφάλμα τύπου I, που είναι η πιθανότητα το διάγραμμα να δώσει σήμα όταν η διεργασία είναι υπό έλεγχο, δηλαδή μια λάθος ειδοποίηση.

Αν όλες οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\beta}$, οι συντελεστές β_0, \dots, β_r , παραμένουν υπό έλεγχο, οι τιμές των στατιστικών X_0^2 θα είναι μικρότερες από το UCL . Ωστόσο, αν τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές αλλάζει για μια νέα τιμή, η πιθανότητα του X_p^2 θα είναι μεγαλύτερη από το UCL .

Αν τα σημεία που σχεδιάζονται στο διάγραμμα παραμένουν κάτω από το UCL και παρουσιάζουν μια τυχαία μορφή, το διάγραμμα αποδεικνύει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και έτσι δε χρειάζεται παρέμβαση. Ωστόσο, αν δεν είναι αυτή η περίπτωση, το διάγραμμα μας προτρέπει να επέμβουμε στη διεργασία επειδή αυτό έχει δώσει σήμα ότι αυτό ίσως είναι εκτός ελέγχου. Μια έρευνα για μια συγκεκριμένη αιτία μεταβολής θα πρέπει να γίνει και η

παραγωγική διεργασία θα πρέπει αναλόγως να προσαρμοστεί και να επισκευαστεί.

Εν συντομία, περιοδικά κάποιος εξάγει ένα δείγμα της παραγωγικής διεργασίας, υπολογίζει και σχεδιάζει το X_0^2 και ελέγχει την υπόθεση $H_0: \beta$ (το διάνυσμα των συντελεστών) είναι εντός ελέγχου ή $H_1: \beta$ είναι εκτός ελέγχου.

3.8. Μέθοδος βασισμένη στην P-τιμή

Το υπο έλεγχο μοντέλο για την i -οστή παρατήρηση εντός του j -οστού τυχαίου δείγματος υποθέτουμε ότι είναι μια γραμμική μορφή:

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots$$

όπου ε_{ij} είναι ανεξάρτητες, ισόνομες κατανεμημένες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και γνωστή διασπορά σ^2 και n είναι ο αριθμός των επιπέδων του X που αξιολογήθηκε σε κάθε περίοδο χρόνου. Οι X -τιμές σε κάθε δείγμα υποθέτουμε ότι είναι γνωστές σταθερές.

Επειδή είμαστε στη Φάση II, οι συντελεστές παλινδρόμησης, δηλαδή η τετμημένη (β_0) και η κλίση (β_1) υποθέτουμε ότι είναι γνωστές. Σ' αυτήν τη μέθοδο (Adibi, 2013), οι P -τιμές για όλα τα επίπεδα X εντός ενός δείγματος υπολογίζονται. Αν τουλάχιστον μια από τις P -τιμές είναι μικρότερη από την καθορισμένη οριακή τιμή (κατώφλι) το δείγμα αναγνωρίζεται ως εκτός ελέγχου. Η οριακή τιμή αποκτάται βασιζόμενη στην προσαρμογή Bonferroni από τη διαίρεση του επιπέδου σημαντικότητας με τον αριθμό των παρατηρήσεων ενός δείγματος. Η μέθοδος προσαρμογής Bonferroni χρησιμοποιείται για να εξαφανίσει το πρόβλημα των πολλαπλών συγκρίσεων. Τις περισσότερες φορές, το α θεωρείται ως 0.005 για να αποδώσει ένα εντός ελέγχου ARL ίσο με 200.

3.9. Προσέγγιση «σημείου αλλαγής»

Υποθέτουμε ότι το j -οστό τυχαίο δείγμα που συλλέχθηκε στο πέρασμα του χρόνου είναι $\{(x_i, y_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και των επεξηγηματικών μεταβλητών υποθέτουμε ότι είναι

$$y_{ij} = A_0 + A_1 x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

όπου το ε_{ij}/σ είναι ανεξάρτητο και αυτόνομα κατανομημένο ως μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, η επεξηγηματική μεταβλητή X υποθέτουμε ότι είναι σταθερή στις n τιμές. Αυτή είναι συνήθως η περίπτωση σε πρακτικές εφαρμογές και είναι συνεπής με τη μέθοδο των Kang και Albin (2000), Kim et al. (2003) και των Mahmoud και Woodall (2004) που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Όταν οι παράμετροι A_0 , A_1 και σ^2 είναι άγνωστοι, μια μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρέως είναι να εκτιμήσει αυτά μέσω από ιστορικά δεδομένα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συνολικά m ($m \geq 1$) εντός ελέγχου ιστορικά δείγματα $\{(x_i, y_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$, οι αμερόληπτοι εκτιμητές για τα A_0 , A_1 , σ^2 είναι η μέση τιμή των m εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων a_{0j} , a_{1j} , MSE_j που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$a_{0j} = \bar{y}_j - a_{1j} \bar{x}, \quad a_{1j} = \frac{S_{XY(j)}}{S_{XX}}, \quad MSE_j = \frac{(\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}^2)}{(n-2)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{ij} - a_{1j} x_i - a_{0j})^2}{(n-2)}$$

όπου $\bar{y}_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}/n$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$, $S_{XX} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ και $S_{XY(j)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}$.

Αφού πάρουμε τους εκτιμητές, οι παράμετροι υποθέτουμε ότι είναι γνωστοί και η παρακολούθηση πρέπει να αρχίσει. Όσα περισσότερα εντός ελέγχου δείγματα αποκτώνται, ενημερώνουμε τους εκτιμητές και αρχίζουμε την παρακολούθηση πάλι. Ωστόσο, οι στατιστικές ιδιότητες αυτής της διεργασίας, όπως το εντός ελέγχου ARL , δεν μπορεί να αποκτηθεί εύκολα, έτσι ο σχεδιασμός αυτής της διεργασίας φαίνεται πολύ δύσκολος. Η μέθοδος μας

εδώ που ασχολείται με άγνωστες παραμέτρους είναι να χρησιμοποιήσει τη διαδοχική διατύπωση «σημείο αλλαγής» (change point) για την κατασκευή διαγράμματος ελέγχου, το οποίο μπορεί να ενημερώνει τις εκτιμήσεις παραμέτρου με νέες παρατηρήσεις και να ελέγχει για τις εκτός ελέγχου συνθήκες ταυτόχρονα.

Θεωρούμε το ακόλουθο μοντέλο

$$y_{ij} = A_{0j} + A_{1j}x_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, m, m + 1, \dots$$

Μετά την παρατήρηση t μελλοντικών υποομάδων, η μηδενική υπόθεση που μας ενδιαφέρει είναι ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Έτσι λοιπόν $A_{0j} = A_0$, $A_{1j} = A_1$ και $\sigma_j = \sigma$ για όλα τα j . Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι η διεργασία ήταν αρχικά εντός ελέγχου αλλά μετά από αλλαγή σημείου τ ($\tau \geq m$), μια μετατόπιση βήματος στην τετμημένη και/ή στην κλίση και/ή στην τυπική απόκλιση συμβαίνει, δηλαδή το A_{0j} , A_{1j} , σ_j για $j = 1, 2, \dots, m, m + 1, \dots, \tau$ είναι A_0 , A_1 , σ και τα τελευταία $m + t - \tau$ δείγματα έχουν την ίδια τετμημένη, κλίση και τυπική απόκλιση, που την ονομάζουμε A'_0 , A'_1 και σ' αντίστοιχα.

Έστω t μελλοντικά δείγματα έχουν συλλεχθεί και έστω $k = m + t$,

$$\bar{y}_{kn} = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij} \quad \text{και} \quad S_{xy(kn)} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}.$$

Έπειτα, ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας για τα t δείγματα είναι

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \left[\log(2\pi\sigma_j^2) + \frac{(y_{ij} - A_{0j} - A_{1j}x_i)^2}{2\sigma_j^2} \right]. \quad (3.32)$$

Αν τα δεδομένα συλλέχθηκαν υπό εντός ελέγχου συνθήκες, η μέγιστη τιμή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι

$$l_0 = -\frac{kn}{2} \log(2\pi) - \frac{kn}{2} \log(\hat{\sigma}_{kn}^2) - \frac{kn}{2}, \quad (3.33)$$

$$\text{όπου} \quad \hat{\sigma}_{kn}^2 = \frac{1}{kn} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \hat{A}_{0(kn)} - \hat{A}_{1(kn)}x_i)^2, \quad \hat{A}_{1(kn)} = \frac{S_{xy(kn)}}{kS_{xx}},$$

$$\hat{A}_{0(kn)} = \bar{y}_{kn} - \hat{A}_{1(kn)}\bar{x}.$$

Ομοίως,

$$\bar{y}_{k_1n} = \frac{1}{k_1n} \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n y_{ij}, \quad (3.34)$$

$$S_{xy(k_1n)} = \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}, \quad (3.35)$$

$$\bar{y}_{k_2n} = \frac{1}{k_2n} \sum_{j=k_1+1}^k \sum_{i=1}^n y_{ij}, \quad (3.36)$$

$$S_{xy(k_2n)} = \sum_{j=k_1+1}^k \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_{ij}, \quad (3.37)$$

όπου $k_2 = k - k_1$, $m \leq k_1 < k$. Όταν υπάρχει μια μετατόπιση βήματος μετά το k_1 -οστό δείγμα, η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι

$$l_1 = -\frac{kn}{2} \log(2\pi) - \frac{k_1n}{2} \log(\hat{\sigma}_{k_1n}^2) - \frac{k_2n}{2} \log(\hat{\sigma}_{k_2n}^2) - \frac{kn}{2}, \quad (3.38)$$

όπου

$$\hat{\sigma}_{k_1n}^2 = \frac{1}{k_1n} \sum_{j=1}^{k_1} \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \hat{A}_{0(k_1n)} - \hat{A}_{1(k_1n)} x_i)^2$$

$$\hat{\sigma}_{k_2n}^2 = \frac{1}{k_2n} \sum_{j=k_1+1}^k \sum_{i=1}^n (y_{ij} - \hat{A}_{0(k_2n)} - \hat{A}_{1(k_2n)} x_i)^2$$

$$\hat{A}_{1(k_1n)} = \frac{S_{xy(k_1n)}}{k_1 S_{xx}}$$

$$\hat{A}_{1(k_2n)} = \frac{S_{xy(k_2n)}}{k_2 S_{xx}}$$

$$\hat{A}_{0(k_1n)} = \bar{y}_{k_1n} - \hat{A}_{1(k_1n)} \bar{x}$$

$$\hat{A}_{0(k_2n)} = \bar{y}_{k_2n} - \hat{A}_{1(k_2n)} \bar{x}.$$

Το κλασικό στατιστικό του λόγου πιθανοφάνειας ορίζεται ως εξής:

$$lr(k_1n, kn) = -2(l_0 - l_1) = kn \log \left[\hat{\sigma}_{kn}^2 (\hat{\sigma}_{k_1n}^2)^{-\frac{k_1}{k}} (\hat{\sigma}_{k_2n}^2)^{-\frac{k_2}{k}} \right]. \quad (3.39)$$

Το $lr(k_1n, kn)$ είναι το ίδιο με το στατιστικό LRT των Mahmoud et al. (2007). Στην πραγματικότητα, αυτό το στατιστικό του λόγου πιθανοφάνειας πρώτα δόθηκε από το Quandt (1958).

Ορίζουμε $lr_{max,m,k} = \max_{m \leq k_1 < k} lr(k_1n, kn)$. Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε από τους Hawkins και Zamba (2005), είναι φυσικό να κατασκευάσουμε το διάγραμμα ελέγχου για γραμμικά «προφίλ»

βασιζόμενοι στο στατιστικό $lr_{max,m,k}$ όταν υπάρχουν m εντός ελέγχου ιστορικά δείγματα. Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει μια μικρή διαφορά από τον τύπο των Hawkins και Zamba (2005), το $lr_{max,m,k}$ δεν είναι το μέγιστο του $lr(k_1n, kn)$ κατά μήκος όλων των τιμών του k_1 αλλά $m \leq k_1 < k$. Από την άποψη της «αλλαγής σημείου», λόγω του ότι τα m πρώτα δείγματα είναι εντός ελέγχου, η μετατόπιση δε θα έπρεπε να συμβαίνει σ' αυτά τα δείγματα, που αυτό συνεπάγεται ότι, η μέγιστη τιμή του $lr(k_1n, kn)$ αναμένεται να είναι μια από τις τιμές του $\{lr(k_1n, kn), k_1 = m, m + 1, \dots, k\}$. Οφελούμενοι από αυτή τη μικρή τροποποίηση, ο σχεδιασμός του διαγράμματος ελέγχου μας θα είναι πολύ πιο απλοποιημένος για διαφορετικές τιμές του m .

Η διασπορά του $lr(k_1n, kn)$ ποικίλει με τις τιμές του k_1 .

Η τυποποιημένη $lr(k_1n, kn)$ ορίζεται όπως φαίνεται και παρακάτω:

$$slr(k_1n, kn) = \frac{lr(k_1n, kn) - E[lr(k_1n, kn)]}{\sqrt{\text{Var}[lr(k_1n, kn)]}} \quad (3.40)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά για αυτήν την οριακή κατανομή δίνεται ως:

$$E[lr(k_1n, \infty)] = k_1n \left[\log\left(\frac{k_1n}{2}\right) - \psi_0\left(\frac{k_1n-2}{2}\right) \right], \quad (3.41)$$

$$\text{Var}[lr(k_1n, \infty)] = (k_1n)^2 \psi_1\left(\frac{k_1n-2}{2}\right) - 2k_1n, \quad (3.42)$$

όπου $\psi_0(\cdot)$ και $\psi_1(\cdot)$ είναι η δι-γάμμα και τρι-γάμμα συνάρτηση. Να σημειώσουμε ότι για σταθερά k_1 , αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η κατανομή του $lr(k_1n, kn)$ είναι συμμετρική για k_1n , τα $lr(k_1n, kn)$ και $lr((k - k_1)n, kn)$ είναι ισόνομα κατανεμημένα.

Για απλότητα, η ασυμπτωτική, μέση τιμή και διασπορά χρησιμοποιείται για να επαναπροσδιορίσει τον τυποποιημένο λόγο πιθανοφάνειας ως

$$slr(k_1n, kn) = \frac{lr(k_1n, kn) - E[lr(k_1n, \infty)]}{\sqrt{\text{Var}[lr(k_1n, \infty)]}} \quad (3.43)$$

Το προτεινόμενο διάγραμμα των Zou et al. (2006) στηριζόμενοι στην προσέγγιση «σημείο αλλαγής»

Ο μέγιστος τυποποιημένος στατιστικός λόγος πιθανοφάνειας για $k = m + t$ παρατηρήσεις ορίζεται ως

$$slr_{max,m,k} = \max_{m \leq k_1 < k} slr(k_1 n, kn). \quad (3.44)$$

Αν $slr_{max,m,m+t} > h_{m,t}$, μια εκτός ελέγχου ειδοποίηση δίνεται. Ωστόσο, αν $slr_{max,m,m+t} < h_{m,t}$, η παρακολούθηση συνεχίζεται και το $(t + 1)$ -οστό μελλοντικό δείγμα θα αποκτηθεί. Η διαδικασία θα επαναληφθεί. Το διάγραμμα αυτό καλείται *LRT* διάγραμμα.

Όπως ξέρουμε, εξαιτίας της εμφάνισης του «σημείου αλλαγής», όχι μόνο η προσδοκώμενη τιμή του γενικευμένου λόγου πιθανοφάνειας στο σημείο αλλαγής αλλά επίσης και αυτές στις δυο πλευρές του «σημείου αλλαγής» έχουν γίνει μεγαλύτερες. Αν εμείς μόνο θεωρούμε τη μέγιστη τιμή του slr που δίνεται από τον τύπο $slr(k_1 n, kn) = \frac{lr(k_1 n, kn) - E[lr(k_1 n, kn)]}{\sqrt{Var[lr(k_1 n, kn)]}}$, ίσως εμείς δεν

κάνουμε την καλύτερη χρήση της πληροφορίας για το «σημείο αλλαγής». Όταν υπάρχει μια μικρή μετατόπιση στη διεργασία, εμείς νομίζουμε διαισθητικά ότι όλες οι τιμές του $slr(k_1 n, kn)$ για μικρά k δεν θα είναι μεγάλες και η μέγιστη τιμή του $slr(tn, kn)$ είναι μικρή αντιστοίχως. Έτσι, το διάγραμμα δε θα δώσει κάποια ειδοποίηση. Έτσι, το επόμενο $(k + 1)$ -οστό δείγμα θα το πάρουμε μέχρι η μέγιστη τιμή του slr να είναι τόσο μεγάλη που το διάγραμμα ελέγχου να δίνει ειδοποιήσεις. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *EWMA* ή *CUSUM* για να συσσωρεύσουμε τις μικρές αυξήσεις και να κάνουμε το διάγραμμα ελέγχου να δώσει ειδοποίηση γρηγορότερα. Σύμφωνα με την παραπάνω σκέψη, βασιζόμενοι στο τυποποιημένο λόγο πιθανοφάνειας του στατιστικού $slr(k_1 n, kn)$ που δίνεται από την εξίσωση $slr(k_1 n, kn) = \frac{lr(k_1 n, kn) - E[lr(k_1 n, \infty)]}{\sqrt{Var[lr(k_1 n, \infty)]}}$, το στατιστικό του προτεινόμενου διαγράμματος *EWMA* δίνεται από τον τύπο:

$$Y_j(m, t) = \max \left(0, \lambda \cdot slr(jn, (m + t)n) + (1 - \lambda)Y_{j-1}(m, t) \right), \quad (3.45)$$

όπου $j = m, m + 1, \dots, m + t - 1$, $Y_{m-1}(m, t) = 0$ και λ ($0 < \lambda \leq 1$) είναι μια σταθερά ομαλότητας. Δηλώνουμε το $Y_{max}(m, t) = \max_{m \leq j < m+t} Y_j(m, t)$. Η διεργασία του διαγράμματος δίνεται όπως ακολουθεί.

- Μετά την παρακολούθηση του t -οστού δείγματος, υπολογίζουμε το $Y_{max}(m, t)$.
- Αν $Y_{max}(m, t) \leq h_{m,t}$, όπου το $h_{m,t}$ έχει επιλεχθεί για την επίτευξη του δοσμένου συγκεκριμένου εντός ελέγχου ARL , τότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει κανένα στοιχείο μιας μετατόπισης και παρακολουθούμε το $(t + 1)$ -οστό μελλοντικό δείγμα.
- Αν $Y_{max}(m, t) > h_{m,t}$, τότε μια εκτός ελέγχου ειδοποίηση ενεργοποιείται.

Η διαφορά μεταξύ του διαγράμματος LRT που στηρίζεται στην εξίσωση $slr_{max,m,k} = \max_{m \leq k_1 < k} slr(k_1n, kn)$ και σ' αυτό το διάγραμμα $EWMA$ είναι ότι μετά το $(m + 1)$ -οστό δείγμα που παρακολουθείται, το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις μέγιστες τιμές του $slr(k_1n, (m + t)n)$ και το τελευταίο να υπολογίσουμε το μέγιστο εκθετικά σταθμισμένο μέσο όρο του $slr(k_1n, (m + t)n)$.

Γενικά, μικρότερες σταθερές ομαλότητας οδηγούν σε γρηγορότερη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Στην πραγματικότητα, όταν το λ ισούται με 1.0, η απόδοση του διαγράμματος $EWMA$ είναι η ίδια με αυτήν του διαγράμματος LRT της εξίσωσης $slr_{max,m,k} = \max_{m \leq k_1 < k} slr(k_1n, kn)$.

Για τη δοσμένη πιθανότητα ειδοποίησης λάθους, α , το όριο ελέγχου για το προτεινόμενο $EWMA$ διάγραμμα, $h_{m,t}(a)$, μπορεί να αποκτηθεί λύνοντας τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$Pr(Y_{max}(m, t) > h_{m,t}(a) | Y_{max}(m, i) \leq h_{m,i}(a), 1 \leq i < t) = \alpha \text{ για } t > 1, \quad (3.46)$$

$$Pr(Y_{max}(m, 1) > h_{m,1}(a)) = \alpha. \quad (3.47)$$

Το προτεινόμενο διάγραμμα των Mahmoud et al. (2007) στηριζόμενοι στην προσέγγιση «σημείο αλλαγής»

Οι Mahmoud et al. (2007) πρότειναν την παρακολούθηση των «προφίλ» ως ένα πρόβλημα ανίχνευσης «αλλαγής σημείου» και πρότειναν το στατιστικό λόγο πιθανοφανειών (lrt) για να ανιχνεύσουν την τοποθεσία και το μέγεθος της μετατόπισης στα γραμμικά «προφίλ». Ακόμα οι παραπάνω συγγραφείς πρότειναν να χωρίσουν το lrt σε τρεις συνιστώσες διακύμανσης, που είναι η μεταβολή του σφάλματος, η τετμημένη και η κλίση, προκειμένου να πάρουμε μια ιδέα για τις μεμονωμένες συνεισφορές της τετμημένης, της κλίσης και της διακύμανσης του σφάλματος.

Οι Mahmoud et al. (2007) πρότειναν έναν εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας για την τοποθεσία του «σημείου αλλαγής» για k απλών γραμμικών «προφίλ» συνόλων δεδομένων. Αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σ' ένα απλό «προφίλ» γραμμικής παλινδρόμησης σύνολο δεδομένων με οποιοδήποτε μέγεθος υποομάδας, συμπεριλαμβανομένου του $n = 1$ και 2 . Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσει τη θέση μιας αλλαγής μετά από μια προσέγγιση παρακολούθησης ενός «προφίλ» που δίνει ειδοποίηση μιας αλλαγής στη σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης του «προφίλ» και της μεταβλητής πρόβλεψης. Για την περιγραφή αυτής της μεθόδου, υποθέτουμε ότι μια ειδοποίηση εκτός ελέγχου δίνεται στην υποομάδα k από το συνδυασμό $EWMA$ διαγράμματος. Τα στατιστικά του λόγου πιθανοφάνειας που δίνονται από τους Mahmoud et al. (2007) για τον έλεγχο της μετατόπισης ενός βήματος σε μία ή περισσότερους παραμέτρους παλινδρόμησης μετά το δείγμα k_1 ($k_1 = 1, 2, \dots, k - 1$) είναι lrt_{k_1} , όπου

$$lrt_{k_1} = 2k \log \hat{\sigma}^2 - 2k_1 \log \hat{\sigma}_1^2 - 2(k - k_1) \log \hat{\sigma}_2^2, \quad (3.48)$$

όπου $\hat{\sigma}^2$ είναι ο μέγιστος εκτιμητής πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimator, MLE) για τη διασπορά του όρου σφάλματος για το μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόστηκε για όλα τα k δείγματα που συγκεντρώθηκαν σε ένα δείγμα μεγέθους $2k$, $\hat{\sigma}_1^2$ είναι ο MLE για τη διασπορά

του όρου σφάλματος για το μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόστηκε για όλα τα δείγματα πριν το k_1 που συγκεντρώθηκαν σε ένα δείγμα μεγέθους $2k_1$ και $\hat{\sigma}_2^2$ είναι ο *MLE* για τη διασπορά του όρου σφάλματος για το μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόστηκε για όλα τα δείγματα μετά το k_1 που συγκεντρώθηκαν σε ένα δείγμα μεγέθους $2(k - k_1)$. Οι Mahmoud et al. (2007) εκτίμησαν τη θέση του σημείου αλλαγής τ με $\hat{\tau}$, όπου

$$\hat{\tau} = \mathop{\text{arg}}_{2 \leq k_1 < k-1} \max \left[\frac{lrt_{k_1}}{e_{k_1}} \right], \quad (3.49)$$

όπου e_{k_1} είναι μια προσέγγιση της αναμενόμενης τιμής του λόγου πιθανοφάνειας στο k_1 ,

$$e_{k_1} \approx 2 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k-k_1} \right) - \left(\frac{k}{k-1} - \frac{k_1}{k_1-1} - \frac{k-k_1}{k-k_1-1} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{k}{(k-1)^2} - \frac{k_1}{(k_1-1)^2} - \frac{k-k_1}{(k-k_1-1)^2} \right). \quad (3.50)$$

Η εκτίμηση του «σημείου αλλαγής» σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση είναι η τιμή του k_1 που μεγιστοποιεί το στατιστικό της εξίσωσης του $\hat{\tau}$. Οι Zou et al. (2006) χρησιμοποίησαν ένα παρόμοιο στατιστικό λόγο πιθανοφάνειας για να ανιχνεύσουν και να βρουν τη θέση μιας αλλαγής στις παραμέτρους ενός απλού γραμμικού «προφίλ» σύνολου δεδομένων Φάσης II. Ο περιορισμός αυτής της προσέγγισης όταν $n = 2$, ωστόσο, είναι το στατιστικό του λόγου πιθανοφάνειας που δεν μπορεί να υπολογιστεί για $k_1 = 1$ ή $k_1 = k - 1$.

Αυτή η προσέγγιση είναι παρόμοια με αυτήν των Samuel et al. (1998) και των Pignatiello και Samuel (2001), οι οποίοι συστήνουν τη χρήση ενός εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας μιας διεργασίας «αλλαγής σημείου» τ όταν ένα Shewhart \bar{X} , ένα συσσωρευτικό άθροισμα *CUSUM* ή ένα *EWMA* διάγραμμα δίνει ειδοποίηση μιας αλλαγής στη μέση τιμή.

Έχοντας εκτιμήσει τη θέση του σημείου αλλαγής χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο του «σημείου αλλαγής», κάποιος ίσως προβεί στον καθορισμό της πηγής της μεταβολής του «προφίλ». Οι Mahmoud et al. (2007)

πρότειναν το διαμερισμό του λόγου των πιθανοφανειών τους σε τρία μέρη που αναπαριστούν τις σχετικές συνεισφορές της διακύμανσης, της κλίσης και της τετμημένης που μετατοπίζουν αυτό το στατιστικό. Αυτοί έδειξαν ότι το στατιστικό lrt_{k_1} της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως

$$lrt_{k_1} = VAR_{\sigma^2} + VAR_B + VAR_A, \quad (3.51)$$

όπου

$$VAR_{\sigma^2} = 2k \log\{(k_1 r^{(k-k_1)/k} + (k - k_1) r^{-k_1/k})/k\},$$

$$VAR_B = 2k \log\{1 + (c_2 d_B^2 / c_1)\},$$

$$VAR_A = 2k \log\left\{1 + \left[\frac{c_3 d_A^2}{c_1 + c_2 d_B^2}\right]\right\},$$

και $r = \hat{\sigma}_1 / \hat{\sigma}_2$, $d_A = \bar{Y}_2 - \bar{Y}_1$, $d_B = S_{XY1} / S_{XX1} - S_{XY2} / S_{XX2}$, $c_1 = N_1 \hat{\sigma}_1^2 + N_2 \hat{\sigma}_2^2$, $c_2 = S_{XX1} S_{XX2} / S_{XX}$, $c_3 = N_1 N_2 / N$. Εδώ, $\bar{Y}_1 = \sum_{i=1}^{N_1} y_i / N_1$, $\bar{Y}_2 = \sum_{i=N_1+1}^N y_i / N_2$, $S_{XX} = \sum_{i=1}^N x_i^2$, $S_{XX1} = \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2$, $S_{XX2} = \sum_{i=N_1+1}^N x_i^2$, $S_{XY1} = \sum_{i=1}^{N_1} x_i y_i$ και $S_{XY2} = \sum_{i=N_1+1}^N x_i y_i$ όπου (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$ είναι $N = 2k$ διπαραμετρικές παρατηρήσεις που είναι αποτέλεσμα των k συγκεντρωμένων δειγμάτων σ' ένα δείγμα, $N_1 = 2k_1$ και $N_2 = 2(k - k_1)$. Στη συγκεκριμένη προσέγγιση, διαχωρίζουμε το $lrt_{\hat{\tau}}$ στα παραπάνω αναφερόμενα τρία μέρη, μετά την εκτίμηση της θέσης της αλλαγής τ με το $\hat{\tau}$. Αν η τιμή της VAR_{σ^2} είναι πολύ μεγάλη, θεωρούμε αυτό ως στοιχείο ότι η μεταβολή του «προφίλ» έχει υψηλή απόδοση για τις μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης. Επιπλέον, μια μεγάλη τιμή του VAR_B δείχνει ότι οι γραμμές παλινδρόμησης δεν είναι παράλληλες. Στην πράξη, συνήθως αν οι γραμμές παλινδρόμησης δεν είναι παράλληλες, ίσως δεν θα χρειαστεί να νοιαστούμε αν οι τετμημένες τους είναι ίσες. Η ιδέα της αποσύνθεσης του στατιστικού του ελέγχου του λόγου της πιθανοφάνειας σε συνιστώσες που αντιστοιχούν σε αλλαγές των παραμέτρων παλινδρόμησης θεωρούνται από πολλούς συγγραφείς.

3.10. ELR διάγραμμα

Θεωρούμε το μοντέλο $y_{ij} = B_0 + B_1 x_i^* + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$ όπου $B_0 = A_0 + A_1 \bar{x}$, $B_1 = A_1$, $x_i^* = x_i - \bar{x}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ και θεωρούμε ότι $\sigma^2 = 1$ όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, χωρίς απώλεια της γενικότητας. Για το t -οστό τυχαίο δείγμα που συλλέχθηκε στο πέρασμα του χρόνου, έχουμε παρατηρήσεις (x_i^*, y_{it}) , $i = 1, 2, \dots, n$. Αν το κωδικοποιημένο μοντέλο τη χρονική στιγμή t υποθέτουμε ότι είναι

$$y_{it} = b_0^{(t)} + b_1^{(t)} x_{it}^* + \varepsilon_{it}, \quad (3.52)$$

τότε θεωρούμε τον ακόλουθο έλεγχο υπόθεσης

$$H_0: b_0^{(t)} = B_0, \quad b_1^{(t)} = B_1, \quad \sigma^2 = 1 \Leftrightarrow H_1: b_0^{(t)} \neq B_0 \quad \text{ή} \quad b_1^{(t)} \neq B_1 \quad \text{ή} \quad \sigma^2 \neq 1,$$

Ο γενικευμένος λόγος πιθανοφάνειας είναι

$$LR_t = C_t - n \log \hat{\sigma}_t^2 - n, \quad (3.53)$$

όπου

$$C_t = \sum_{i=1}^n (y_{it} - B_0 - B_1 x_i^*)^2, \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{it} - b_{0t} - b_{1t} x_i^*)^2,$$

$$b_{0t} = \bar{y}_t, \quad b_{1t} = \frac{S_{xy(t)}}{S_{xx}}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Η παράγωγος της εξίσωσης LR_t αποκτάται μέσω της παρακάτω διαδικασίας.

Καθώς $y_{it} - B_0 - B_1 x_i^* = \varepsilon_{it} \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε ότι ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας υπό τη μηδενική υπόθεση (H_0) είναι

$$l_0 = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{\sum_{i=1}^n (y_{it} - B_0 - B_1 x_i^*)^2}{2}. \quad (3.54)$$

Όταν παίρνουμε n δείγματα, οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας είναι

$$\hat{B}_0 = \bar{y}_t, \quad \hat{B}_1 = \frac{S_{xy(t)}}{S_{xx}}, \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{it} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 x_i^*)^2$$

αντίστοιχα, και έπειτα ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας υπό την εναλλακτική υπόθεση (H_1) είναι

$$l_1 = -\frac{n}{2} \log 2\pi \hat{\sigma}_t^2 - \frac{n}{2}. \quad (3.55)$$

Στη συνέχεια έχουμε τα LR_t στατιστικά ως ακολούθως:

$$-2(l_0 - l_1) = \sum_{i=1}^n (y_{it} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 x_i^*)^2 - n \log \hat{\sigma}_t^2 - n. \quad (3.56)$$

Αφού είδαμε αναλυτικά πως προκύπτει, στη συνέχεια θα δούμε πως θα ενσωματώσουμε τη διεργασία $EWMA$ στην κατασκευή του LR_t . Εδώ το $EWMA$ δεν είναι για τον ευθύ μέσο όρο των στατιστικών LR_t αλλά για να πάρουμε τις πιο ακριβείς εκτιμήσεις της τετμημένης της διεργασίας, της κλίσης και της διασποράς. Πιο συγκεκριμένα, τρία $EWMA$ στατιστικά εισάγονται ως

$$EI_t = \lambda b_{0t} + (1 - \lambda)EI_{t-1}, \quad (3.57)$$

$$ES_t = \lambda b_{1t} + (1 - \lambda)ES_{t-1}, \quad (3.58)$$

$$EE_t = \lambda S_T^* + (1 - \lambda)EE_{t-1}, \quad (3.59)$$

όπου $S_T^* = \sum_{i=1}^n (y_{it} - ES_t x_i^* - EI_t)^2$, $EI_0 = B_0$, $ES_0 = B_1$, $EE_0 = 1$ και λ είναι συντελεστής βαρύτητας που ικανοποιεί τη σχέση $0 < \lambda < 1$. Γενικά, ένα μικρότερο λ οδηγεί σε μια γρηγορότερη ανίχνευση μικρότερων μετατοπίσεων. Επίσης, εκτίμηση κινούμενου μέσου όρου μιας διασποράς διεργασίας EI_t και ES_t χρησιμοποιείται στην εκτίμηση διασποράς για την αντικατάσταση του B_0 και B_1 . Αναμένεται να είναι πιο ακριβές χρησιμοποιώντας διαδοχικούς ενημερωμένους εκτιμητές και έτσι ίσως βελτιώσει την ικανότητα ανίχνευσης της δυνατής αλλαγής της διεργασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο πρώτος όρος των στατιστικών LR_t , επίσης περιέχει περισσότερες πληροφορίες για τη διεργασία, έτσι εμείς εισάγουμε ένα άλλο στατιστικό $EWMA$, ως

$$EC_t = \lambda C_t + (1 - \lambda)EC_{t-1}, \quad (3.60)$$

όπου $EC_0 = n$ αρχική τιμή.

Τελικά, αντικαθιστώντας με EC_t και EE_t το C_t και $\hat{\sigma}_t^2$ της εξίσωσης LR_t , αποκτάμε τα διαγραμματικά στατιστικά

$$ELR_t = EC_t - n \log EE_t - n, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.61)$$

Αν $ELR_t > h$, μια ειδοποίηση ενεργοποιείται, όπου $h > 0$ επιλέγεται για να κατορθώσει ένα συγκεκριμένο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_0).

3.11. «Self Starting» Διάγραμμα

Το προτεινόμενο διάγραμμα «self-starting» βασίζεται σε αναδρομικά υπόλοιπα που πρώτα εφαρμόστηκαν σε ένα μοντέλο παλινδρόμησης από τους Brown et al. (1975). Πρώτον, συγκεντρώνουμε όλα τα $m - 1$ εντός ελέγχου ιστορικά δείγματα και τα μελλοντικά $m, m + 1, \dots$ δείγματα μεγέθους n εντός ενός δείγματος, δηλαδή $\{(x_i, y_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m - 1, m, m + 1, \dots\}$. Για ευκολία, έστω $y_{(j-1)n+i} = y_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τα τυποποιημένα αναδρομικά υπόλοιπα για τα μελλοντικά δείγματα από τον τύπο (3.62):

$$e_{ij} = \frac{[y_{(j-1)n+i} - z'_i \beta_{(j-1)n+i-1}]}{\left[S_{(j-1)n+i-1} \left(1 + z'_i (X'_{(j-1)n+i-1} X_{(j-1)n+i-1})^{-1} z_i \right) \right]^{1/2}},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = m, m + 1, \dots$$

όπου $z'_i = (1, x_i)$, $y'_{(j-1)n+i-1} = (y_1, y_2, \dots, y_{(j-1)n+i-1})$, $X'_{(j-1)n+i-1} =$
 $(\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_n, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, z_1, z_2, \dots, z_{i-1}}_{(j-1) \times n})$

$$\beta_t = (X'_t X_t)^{-1} X'_t y_t$$

$$S_t = \frac{1}{t-2} (y_t - X_t \beta_t)' (y_t - X_t \beta_t).$$

Υπό το απλό εντός ελέγχου γραμμικό μοντέλο, είναι γνωστό ότι το e_{ij} έχει μια t κατανομή με $(j-1)n+i-3$ βαθμούς ελευθερίας. Με χρήση ενός θεωρήματος από τον Basu (1955), μπορούμε να δείξουμε ότι τα σφάλματα e_{ij} είναι στατιστικά ανεξάρτητα. Έτσι, μέσω ενός μετασχηματισμού, αποκτούμε το ακόλουθο στατιστικό:

$$w_{ij} = \Phi^{-1}[T_{(j-1)n+i-3}(e_{ij})], \quad (3.63)$$

το οποίο καλείται ως «Q»-στατιστικό και στο οποίο το Φ^{-1} δηλώνει την αντίστροφη συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής της κανονικής τυχαίας μεταβλητής, T_ν είναι η αντίστροφη συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής με ν βαθμούς ελευθερίας. Για αυτό, $\{w_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = m, m+1, \dots\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

Όταν μια προσδιορισμένη αιτία συμβαίνει μετά από κάποιες υποομάδες, έστω τ υποομάδες, η κατανομή των «Q»-στατιστικών $\{w_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = \tau + 1, \tau + 2, \dots\}$ είναι διαφορετική από το $\{w_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, \dots, \tau\}$. Η διαφορά μεταξύ αυτών θα χρησιμοποιηθεί στη μέθοδο μας για την ανίχνευση της προσδιορισμένης αιτίας.

Για τα μετασχηματισμένα υπόλοιπα $\{w_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = m, m+1, \dots\}$, έστω $\bar{w}_j = (1/n) \sum_{i=1}^n w_{ij}$ και $S_{w_j} = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (w_{ij} - \bar{w}_j)^2$ δηλώνουν, αντίστοιχα, τη μέση τιμή του δείγματος και τη διασπορά της j -οστής υποομάδας. Ορίζουμε δύο EWMA στατιστικά, $EWMA_{IS}$ και $EWMA_\sigma$, ως

$$EWMA_{IS}(j) = \lambda \sqrt{n} \bar{w}_j + (1 - \lambda) EWMA_{IS}(j-1), \quad (3.64)$$

$$EWMA_\sigma(j) = \max \left(0, \lambda \sqrt{\frac{n-1}{2}} (S_{w_j} - 1) + (1 - \lambda) EWMA_\sigma(j-1) \right), \quad (3.65)$$

όπου $j = m, m+1, \dots$, $EWMA_{IS}(m-1) = EWMA_\sigma(m-1) = 0$ και λ ($0 < \lambda \leq 1$) είναι συντελεστής βαρύτητας. Η προτεινόμενη μας «self-starting» προσέγγιση (δηλώνεται και ως SS διάγραμμα εφεξής) ορίζεται ως ο συνδυασμός των παραπάνω δύο EWMA διαγραμμάτων, δηλαδή, μια εκτός

ελέγχου ειδοποίηση ενεργοποιείται καθώς $EWMA_{IS}(j) < LCL_{IS}$ ή $EWMA_{IS}(j) > UCL_{IS}$ και/ή $EWMA_{\sigma}(j) > UCL_{\sigma}$, όπου UCL_{IS} , LCL_{IS} και UCL_{σ} είναι επιλεγμένα για να αποκτήσουν το δοσμένο συγκεκριμένο ARL_0 .

Αξίζει να σημειωθεί ότι το διάγραμμα $EWMA_{\sigma}$ είναι μια μονόπλευρη προσέγγιση που χρησιμοποιείται μόνο για την ανίχνευση της αύξησης στη διασπορά της διεργασίας.

Από τον ορισμό, γνωρίζουμε ότι το $EWMA_{IS}$ διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της αλλαγής στην κλίση και στην τετμημένη, ενώ το $EWMA_{\sigma}$ είναι αποτελεσματικό στην παρακολούθηση της μετατόπισης της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.

3.12. Εφαρμογή του «perceptron» νευρωνικού δικτύου (PNN) για την παρακολούθηση γραμμικών προφίλ

Χρησιμοποιώντας «perceptron» νευρωνικά δίκτυα (perceptron neural network, PNN) μοντελοποιούμε ανιχνεύσεις μετατόπισης στην παρακολούθηση «προφίλ» ως ένα πρόβλημα ταξινόμησης. Ως εκ τούτου, αναμένουμε το «perceptron» νευρωνικό δίκτυο να ταξινομήσει τα δεδομένα εντός ελέγχου από τα δεδομένα εκτός ελέγχου. Τρεις μέθοδοι αναπτύσσονται για την παρακολούθηση γραμμικών «προφίλ». Στην πρώτη μέθοδο, σχεδιάζουμε ένα «perceptron» νευρωνικό δίκτυο για να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις στην κλίση, στην τετμημένη και στη διακύμανση των υπολοίπων χρησιμοποιώντας τις εκτιμημένες τιμές των συντελεστών παλινδρόμησης και τις μέσες τιμές του δείγματος. Υποδηλώνουμε αυτήν τη μέθοδο ως ANN1. Η δεύτερη μέθοδος είναι παρόμοια με την πρώτη, αλλά τροποποιούμε τις εισόδους του νευρωνικού δικτύου. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται ANN-a ή προσαρμοσμένη ANN. Στην τρίτη μέθοδο, σχεδιάζουμε να ανιχνεύσουμε και να ταξινομήσουμε μετατοπίσεις ταυτόχρονα, έτσι, τρία ξεχωριστά νευρωνικά

δίκτυα χρησιμοποιούνται για να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις στην κλίση, στην τετμημένη και στην διασπορά υπολοίπου. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται *3ANN*.

3.12.1. Δομή για τα προτεινόμενα νευρωνικά δίκτυα

Στο σχεδιασμό της δομής του «perceptron» νευρωνικού δικτύου, πρέπει να καθορίσουμε τον αριθμό των νευρώνων σε κάθε στρώμα. Οι αριθμοί των νευρώνων στα στρώματα εισόδου και εξόδου εξαρτώνται από τον ορισμό του προβλήματος. Ο αριθμός των νευρώνων στα κρυφά στρώματα καθορίζεται στη φάση εκπαίδευσης από δοκιμές και σφάλματα.

Στην *ANN1* μέθοδο, ορίζουμε τρεις μεταβλητές στο στρώμα εισόδου, η πρώτη και η δεύτερη μεταβλητή είναι η εκτιμώμενη κλίση και η εκτιμώμενη τετμημένη από το δείγμα και η τρίτη είσοδος είναι η μέση τιμή του δείγματος. Σαν ένα αποτέλεσμα, τρεις νευρώνες τοποθετούνται στο πρώτο στρώμα-επίπεδο. Για την ταξινόμηση των εντός και εκτός καταστάσεων, τοποθετούμε ένα νευρώνα στο στρώμα εξόδου και επιλέγουμε ένα κρυμμένο-εσωτερικό στρώμα στο δίκτυο. Ο αριθμός των νευρώνων στο κρυφό στρώμα επιλέγεται βασιζόμενο σε δοκιμές και στο σφάλμα διεργασίας.

Στην *ANN-a* μέθοδο, ορίζουμε τρεις μεταβλητές εισόδου. Η πρώτη είσοδος είναι η εκτιμώμενη κλίση από το δείγμα ενώ η τετμημένη έχει οριστεί ως η εντός ελέγχου τιμή που αποκτήθηκε στη Φάση I. Η δεύτερη είσοδος είναι η τετμημένη που εκτιμάται από το δείγμα ενώ η κλίση έχει οριστεί ως η εντός ελέγχου τιμή που αποκτάται στη Φάση I. Τέλος, η τρίτη είσοδος είναι η μέση τιμή του δείγματος. Γι' αυτό τοποθετούμε τρεις νευρώνες στο πρώτο στρώμα και έναν νευρώνα στο τελευταίο στρώμα του δικτύου όπως επίσης θεωρούμε και ένα κρυφό στρώμα παρόμοια με τη μέθοδο *ANN1*.

Στην *3ANN* μέθοδο, οι εισοδοί στο κάθε δίκτυο είναι οι παρατηρήσεις του δείγματος και η μέση τιμή του δείγματος. Για παράδειγμα, για ένα δείγμα μεγέθους τέσσερα, έχουμε πέντε νευρώνες στο πρώτο στρώμα και ένα νευρώνα στο τελευταίο στρώμα του κάθε δικτύου. Παρόμοια με τις δύο προηγούμενες μεθόδους, ένα κρυφό στρώμα προτιμάται εδώ και ο αριθμός

των νευρώνων στο κρυφό στρώμα επιλέγεται από δοκιμές και το σφάλμα της διεργασίας.

3.12.2. Εκπαίδευση δεδομένων

Για την εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων, διαφορετικά πρότυπα πρέπει να παραχθούν για να ταξινομηθούν οι εντός ελέγχου και οι εκτός ελέγχου καταστάσεις. Γι' αυτό, τα πρότυπα της εκπαίδευσης δεδομένων είναι εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου δείγματα. Σ' ένα *ANN1* μοντέλο, παράγουμε δείγματα μεγέθους n από μία υπό-έλεγχο διεργασία και εκτιμάμε την κλίση, την τετμημένη και τη μέση τιμή του δείγματος για κάθε δείγμα. Αυτές οι τρεις τιμές είναι οι είσοδοι για την εκπαίδευση των δεδομένων, ενώ η αντίστοιχη τιμή-στόχος τους είναι μηδέν. Σε αντίθεση, παράγουμε δείγματα μεγέθους n από μια εκτός ελέγχου διεργασία όπου η προσδιορισμένη αιτία θα πρέπει να είναι λόγω των μετατοπίσεων στην κλίση, την τετμημένη, τη διασπορά υπολοίπου και των ταυτόχρονων μετατοπίσεων στην κλίση και στην τετμημένη. Εμείς θα θεωρήσουμε ίσο αριθμό από δείγματα σε καθένα από τα τέσσερα εκτός ελέγχου σενάρια.

Γι' αυτά τα δείγματα, οι εκτιμημένοι συντελεστές παλινδρόμησης και η μέση τιμή του δείγματος είναι οι είσοδοι για την εκπαίδευση δείγματος. Για τα παραγόμενα δείγματα από μια εκτός ελέγχου διεργασία, οι τιμές στόχοι από την εκπαίδευση δεδομένων είναι ίσες με ένα. Να σημειωθεί ότι οι είσοδοι της μεθόδου *ANN1* μπορούν να αποκτηθούν από τους εκτιμημένους συντελεστές παλινδρόμησης.

Τα παραγόμενα εντός έλεγχου και εκτός ελέγχου δείγματα μεγέθους n για τη μέθοδο *ANN-a* αποκτώνται παρόμοια με τη μέθοδο *ANN1*. Για κάθε παραγόμενο δείγμα, εκτιμάμε την κλίση όταν η τετμημένη αποκτάται στην Φάση I χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \alpha_0)}{\sum_{i=1}^n X_i^2}. \quad (3.66)$$

Επίσης, εκτιμούμε την τετμημένη όταν η κλίση υπολογίζεται στη Φάση I χρησιμοποιώντας την εξής εξίσωση:

$$\alpha_0 = \bar{Y} - \alpha_1 \bar{X}. \quad (3.67)$$

Επίσης χρειάζεται να υπολογίσουμε τη μέση τιμή των παραγόμενων δειγμάτων. Αυτές οι τρεις τιμές είναι οι εισόδοι στην εκπαίδευση δεδομένων. Οι εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου τιμές στόχοι έχουν ρυθμιστεί ως 0 και 1, αντίστοιχα.

Για την 3ANN μέθοδο, παράγουμε τα εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου δείγματα μεγέθους n παρόμοια με τη μέθοδο ANN1, ωστόσο, γι' αυτήν τη μέθοδο οι παρατηρήσεις σε κάθε δείγμα και οι μέσες τιμές τους σχηματίζουν τις εισόδους της εκπαίδευσης δεδομένων. Θέτουμε τιμή στόχο 0 και 1 για τα εντός ελέγχου και εκτός ελέγχου δείγματα, αντίστοιχα. Για να παρέχουν το εκτός ελέγχου πρότυπο στην εκπαίδευση δεδομένων, οι επαγγελματίες ποιότητας χρειάζεται να αποφασίσουν το μέγεθος των μετατοπίσεων που αυτοί επιθυμούν να ανιχνεύσουν.

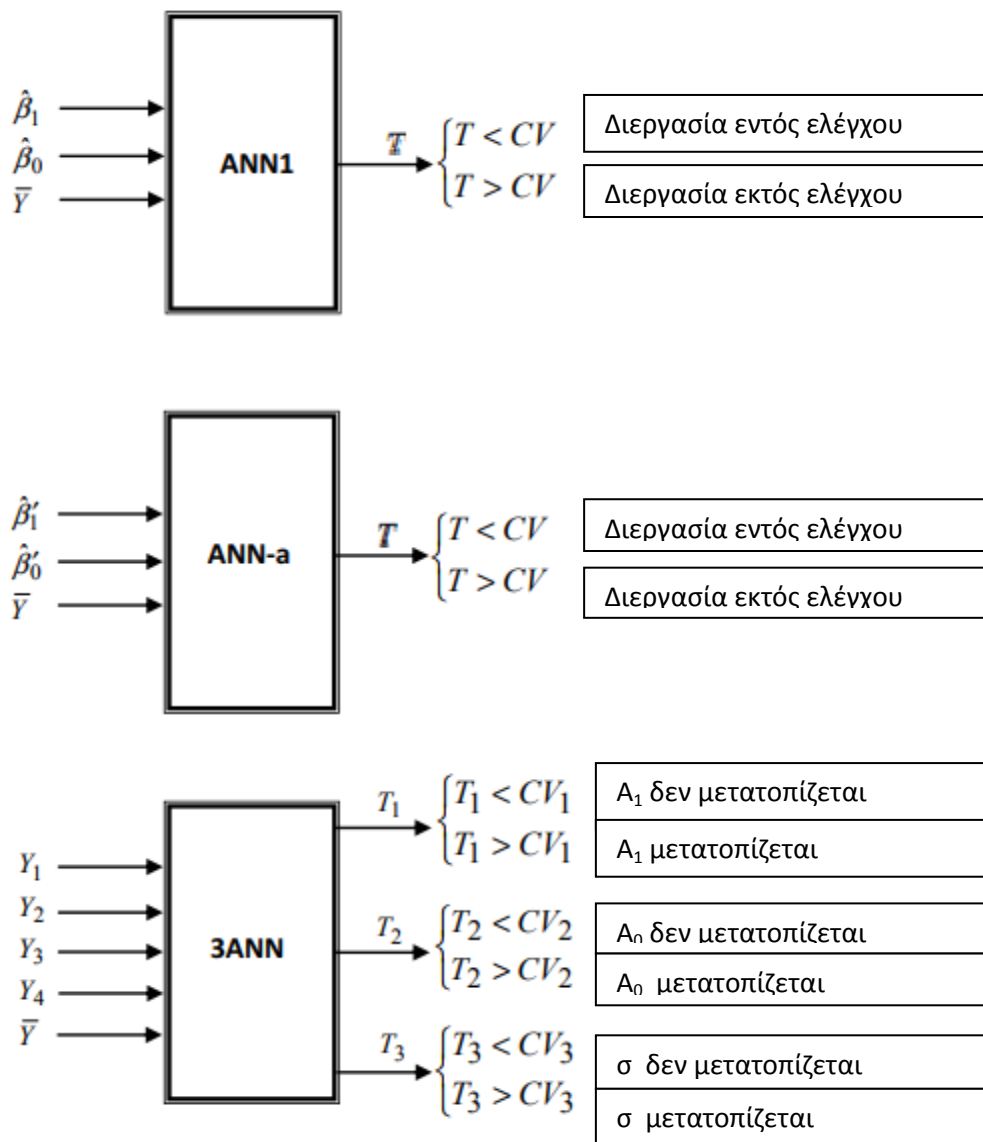
3.12.3. Φάση εκπαίδευσης

Εδώ, ο αλγόριθμος «back propagation» χρησιμοποιείται για να εκπαιδεύσει (δηλαδή για την ενημέρωση των βαρών) δίκτυα που βασίζονται σε δεδομένα εκπαίδευσης που παρέχονται. Χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό άθροισμα σφάλματος, $SSE = 0.005$ σαν κριτήριο τερματισμού.

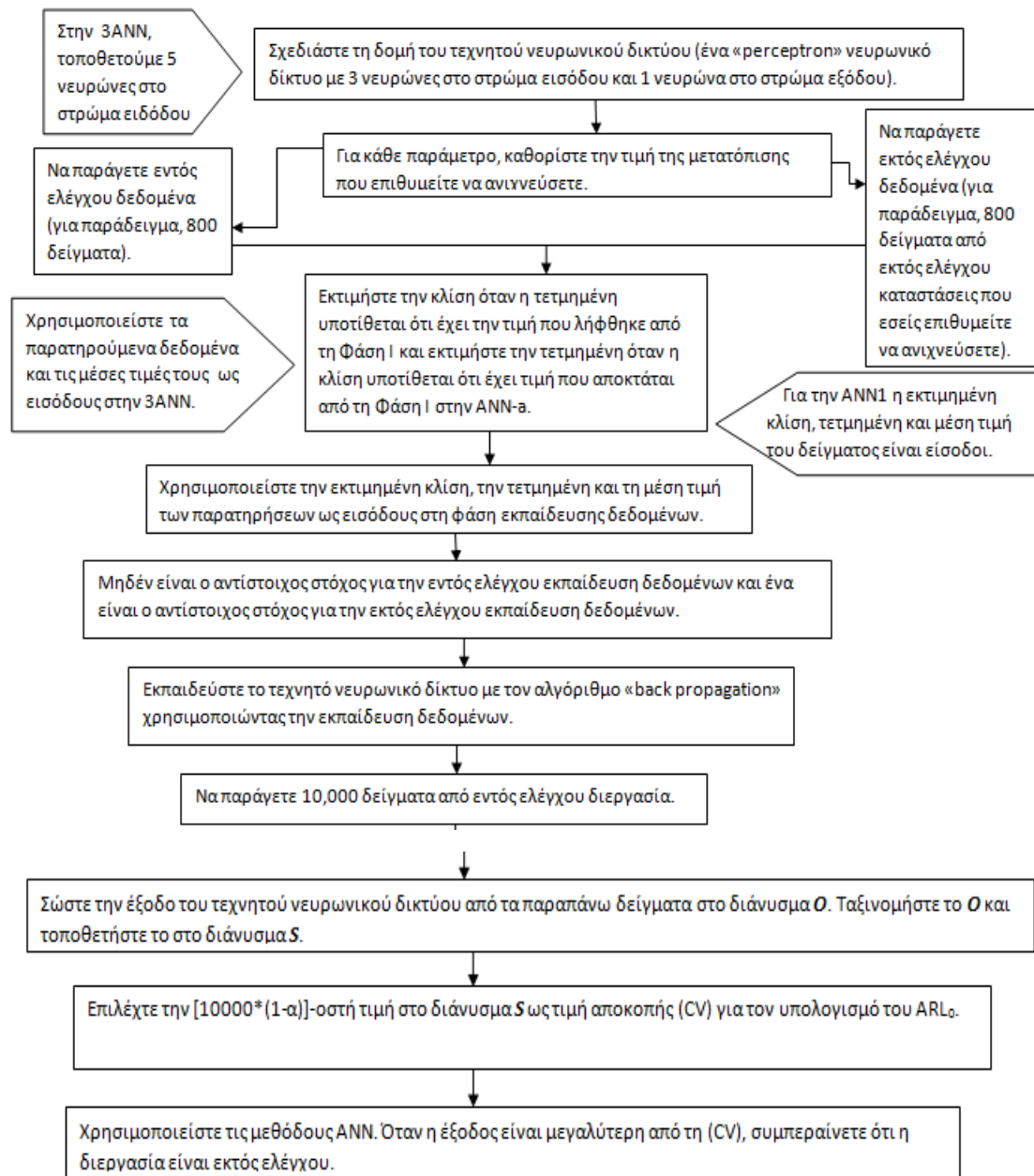
3.12.4. Καθορισμός του ARL μετά την εκπαίδευση

Μετά την εκπαίδευση, δηλαδή την ενημέρωση των βαρών, πρέπει να ρυθμίσουμε το σφάλμα τύπου I (α) ή το ισοδύναμο του ARL_0 ($ARL_0 = 1/\alpha$) για τα δίκτυα. Γι' αυτό, παράγουμε τα 10000 εντός ελέγχου δεδομένα και θέτουμε αυτά ως εισόδους του εκπαιδευμένου νευρωνικού δικτύου. Μετά την

ταξινόμηση των εξόδων του νευρωνικού δικτύου, θεωρούμε την $[10000 * (1 - \alpha)]$ -οστή τιμή των ταξινομημένων δεδομένων ως την τιμή αποκοπής («cutting value», CV). Αν οι τιμές εξόδου του δικτύου είναι μεγαλύτερες από την CV , συμπεραίνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει τις δομές τριών προτεινόμενων μεθόδων βασισμένων σε νευρωνικό δίκτυο. Μια εξήγηση βήμα προς βήμα των μεθόδων για παρακολούθηση γραμμικών «προφίλ» δίνεται στη συνέχεια.



Σχήμα 3.1: Η δομή τριών προτεινόμενων μεθόδων τεχνητών νευρωνικών δικτύων.



Σχήμα 3.2 : Το διάγραμμα ροής βήμα προς βήμα για τη χρήση νευρωνικών δικτύων για την παρακολούθηση γραμμικού «προφίλ».

3.13. Αξιολόγηση και μελέτη σύγκρισης

Σε αυτήν την ενότητα, χρησιμοποιούμε το παράδειγμα που δίνεται από τους Kang και Albin (2000) για να αξιολογήσουμε την απόδοση κάποιων προτεινόμενων μεθόδων από αυτές που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Η

μελέτη σύγκρισης με τις μεθόδους $EWMA-3$, $EWMA/R$ και T^2 παρουσιάζεται. Όλα τα θεωρούμενα διαγράμματα σχεδιάζονται να έχουν το ίδιο συνολικό εντός ελέγχου ARL ίσο με 200. Σε αυτήν τη μελέτη προσομοίωσης, ένα σύνολο από 10000 επαναλήψεις χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει την τιμή του μέσου μήκους ροής, ARL , για κάθε διάγραμμα. Οι συντελεστές βαρύτητας θ στις εξισώσεις (3.2), (3.3), (3.4), (3.26) είναι ίσοι με 0.2, όπως συνηθίζεται στους Kang και Albin (2000) και στους Kim et al. (2003).

Το βασικό εντός ελέγχου μοντέλο γραμμικού «προφίλ» που χρησιμοποιήθηκε από τους Kang και Albin (2000) είναι $y_{ij} = 3 + 2x_i + \varepsilon_{ij}$ όπου ε_{ij} είναι αυτόνομες, ανεξάρτητες κατανομημένες, κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ένα. Οι σταθερές x_i - τιμές 2, 4, 6, 8 (με μέση τιμή $\bar{x} = 5$) χρησιμοποιήθηκαν στη μελέτη προσαρμογής από τους Kang και Albin (2000). Οι επιθυμητές μετατοπίσεις που ανιχνεύτηκαν είναι 0.1 στην κλίση, 0.2 στην τετμημένη και 0.3 στο υπόλοιπο διασποράς. Αυτές οι τιμές χρησιμοποιούνται στη φάση εκπαίδευσης των δεδομένων.

Θεωρούμε 27 και 30 νευρώνες στα κρυφά στρώματα της $ANN1$ και της $ANN-a$, αντίστοιχα. Επίσης, 23 νευρώνες θεωρούνται στα κρυφά στρώματα του κάθε δικτύου στην $3ANN$. Μετά από 254 και 325 εποχές στη φάση εκπαίδευσης, οι τιμές του αθροίσματος του τετραγώνου του σφάλματος (SSE) για την πρώτη και τη δεύτερη μέθοδο είναι 0.00423, 0.004091, αντίστοιχα. Το αντίστοιχο SSE για τη μέθοδο $3ANN$ μετά από 225, 185 και 210 εποχές για τα τρία νευρωνικά δίκτυα είναι 0.0049, 0.0042 και 0.0048, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην $3ANN$ μέθοδο, το πρώτο νευρωνικό δίκτυο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσει τη μετατόπιση της κλίσης, το δεύτερο νευρωνικό δίκτυο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσει τη μετατόπιση στην τετμημένη και το τρίτο χρησιμοποιείται για να ανιχνεύσει τη μετατόπιση του υπολοίπου διασποράς.

Μετά την παραγωγή 10000 εντός ελέγχου δειγμάτων και τον υπολογισμό της αντίστοιχης εξόδου από το νευρωνικό δίκτυο για την $ANN1$ ή την $ANN-a$, σώζουμε τις ταξινομημένες εξόδους στο διάνυσμα S . Θέτοντας $ARL_0 = 200$, η τιμή αποκοπής επιλέγεται ως η $[10000 * 0.9995]$ -οστή τιμή του S . Οι τιμές

αποκοπής για την $ANN1$ και την $ANN-a$ για αυτό το παράδειγμα είναι 0.9981 και 0.996, αντίστοιχα.

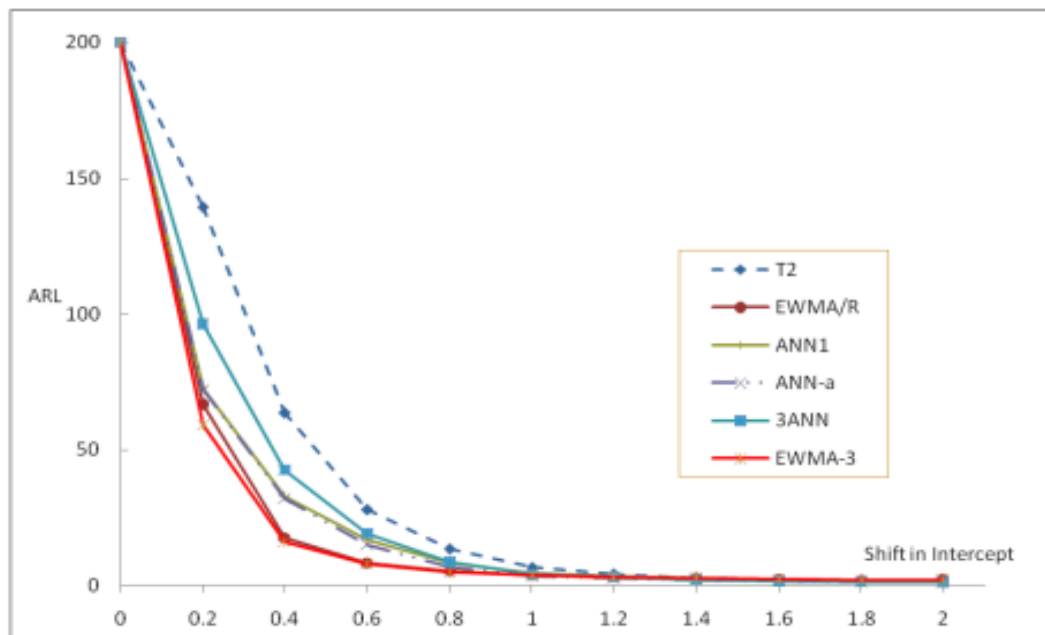
Για την επίτευξη του $ARL_0 = 200$ στην $3ANN$ μέθοδο, θέτουμε $\alpha_i = 1 - \sqrt[3]{1 - a} = 1 - \sqrt[3]{0.005} = 0.001669$ για κάθε νευρωνικό δίκτυο. Ως εκ τούτου παράγουμε 10000 εντός ελέγχου δείγματα μεγέθους 4 και υπολογίζουμε την αντίστοιχη έξοδο για κάθε δίκτυο και έπειτα σώζουμε τις ταξινομημένες εξόδους στο διάνυσμα S . Η τιμή αποκοπής είναι επιλεγμένη ως η $[10000 * 0.99983]$ -οστή τιμή του S . Οι τιμές αποκοπής για την $3ANN$ σ' αυτό το παράδειγμα είναι 0.9697, 0.999 και 0.9743 για τα δίκτυα 1-3, αντίστοιχα.

Σ' αυτήν τη μελέτη προσομοίωσης για 10000 επαναλήψεις αποκτούμε ένα εντός ελέγχου ARL ίσο με 200.06 για την $ANN1$, 200.2 για την $ANN-a$ και 199.1 για την $3ANN$. Να σημειώσουμε επίσης ότι το εντός ελέγχου ARL για το πολυπαραμετρικό T^2 και τα $EWMA/R$ διαγράμματα είναι 200.1 και 200.0, αντίστοιχα.

Τρία διαφορετικά επίπεδα μετατόπισης θεωρούνται στη μελέτη μας. Οι αντίστοιχες εκτός ελέγχου ARL τιμές υπολογίζονται από τις μετατοπίσεις στην κλίση, στην τετμημένη και στη διασπορά σφάλματος χρησιμοποιώντας 10000 επαναλήψεις. Τα αποτελέσματα του ARL παρουσιάζονται παρακάτω στους πίνακες (3.1)-(3.3).

Πίνακας 3.1: Συγκρίσεις για τις τιμές εκτός ελέγχου ARL όταν η τετμημένη μετατοπίζεται από το A_0 στο $A_0 + \lambda\sigma$. Το εντός ελέγχου ARL ισούται με 200.

| Method | λ | | | | | | | | | |
|--------|-----------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2 |
| ANN1 | 72.5 | 32.7 | 16.9 | 8.1 | 4.5 | 3.5 | 2.6 | 2.1 | 1.6 | 1.1 |
| ANN a | 72.2 | 32.2 | 14.8 | 6.7 | 3.5 | 2.8 | 1.9 | 1.5 | 1.2 | 1.1 |
| 3ANN | 96.2 | 42.5 | 19.2 | 8.7 | 4.1 | 3.1 | 2.1 | 1.6 | 1.3 | 1.1 |
| EWMA/R | 66.5 | 17.7 | 8.4 | 5.4 | 3.9 | 3.2 | 2.7 | 2.3 | 2.1 | 1.9 |
| T^2 | 139.2 | 63.5 | 27.9 | 13.3 | 6.9 | 4 | 2.6 | 1.8 | 1.5 | 1.2 |
| EWMA-3 | 59.1 | 16.2 | 7.9 | 5.1 | 3.8 | 3.1 | 2.6 | 2.3 | 2.1 | 1.9 |

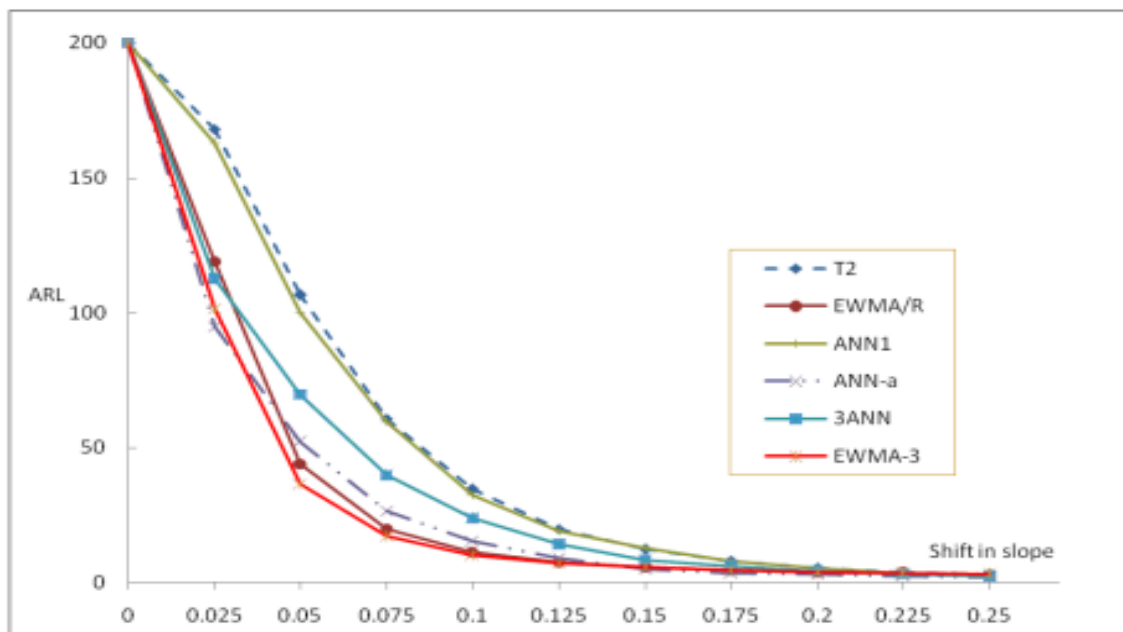


Σχήμα 3.3: Συγκρίσεις στις τιμές του ARL όταν η τετμημένη μετατοπίζεται από το A_0 στο $A_0 + \lambda\sigma$.

Τα αποτελέσματα στον πίνακα (3.1) και στο σχήμα (3.3) αναπαριστούν την *ARL* απόδοση των προτεινόμενων μεθόδων μας για μετατοπίσεις στην τετμημένη (A_0) και τα αντίστοιχα *ARL* από τα διαγράμματα T^2 , *EWMA/R* και *EWMA-3*. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι στις περισσότερες από τις θεωρούμενες μετατοπίσεις, οι προτεινόμενοι *ANN* μέθοδοι συμπεριφέρονται καλύτερα από το T^2 διάγραμμα ως προς την ανίχνευση μετατοπίσεων στην τετμημένη. Η απόδοση της *ANN-a* και της *3ANN* είναι καλύτερη από τα διαγράμματα *EWMA/R* και *EWMA-3* για μέτριες προς μεγάλες μετατοπίσεις ενώ η *ANN1* είναι ανώτερη από τα *EWMA/R* και το *EWMA-3* στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Τα αποτελέσματα επίσης δείχνουν ότι μεταξύ των τριών προτεινόμενων μεθόδων για τα νευρωνικά δίκτυα, η *ANN-a* έχει καλύτερη απόδοση ως προς την ανίχνευση μετατοπίσεων στην τετμημένη, ενώ η *3ANN* έχει καλύτερη απόδοση από την *ANN1* στην ανίχνευση μεσαίων και μεγάλων μετατοπίσεων.

Πίνακας 3.2: Συγκρίσεις για τις εκτός ελέγχου *ARL* τιμές όταν η κλίση μετατοπίζεται από το A_1 στο $A_1 + \eta\sigma$. Το εντός ελέγχου $ARL = 200$.

| Method | η | | | | | | | | | |
|---------------|--------|-------|-------|------|--------|-------|-------|-----|-------|-------|
| | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.1 | 0.1252 | 0.150 | 0.175 | 0.2 | 0.225 | 0.250 |
| <i>ANN1</i> | 119 | 43.9 | 19.8 | 11.3 | 7.7 | 5.8 | 4.7 | 3.9 | 3.4 | 3 |
| <i>ANN a</i> | 162.6 | 100.1 | 59.6 | 32.4 | 18.9 | 12.6 | 7.9 | 5.3 | 3.5 | 2.6 |
| <i>3ANN</i> | 94.9 | 52 | 26.5 | 15.5 | 9.1 | 5.1 | 3.4 | 3.1 | 2.4 | 1.9 |
| <i>EWMA/R</i> | 112.6 | 69.6 | 39.7 | 23.7 | 14.2 | 8.4 | 6.2 | 4.3 | 3.2 | 2.4 |
| T^2 | 119 | 43.9 | 19.8 | 11.3 | 7.7 | 5.8 | 4.7 | 3.9 | 3.4 | 3 |
| <i>EWMA-3</i> | 168 | 106.5 | 60.7 | 34.5 | 19.9 | 12.3 | 7.8 | 5.2 | 3.7 | 2.7 |

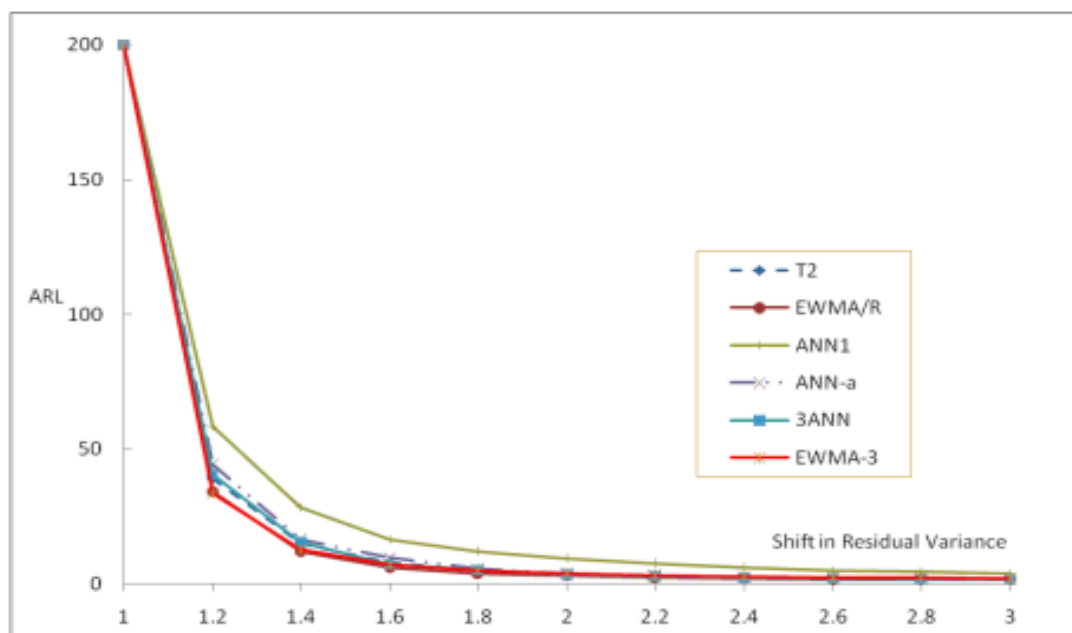


Σχήμα 3.4: Συγκρίσεις για τις ARL τιμές όταν η κλίση μετατοπίζεται από το A_1 στο $A_1 + \eta\sigma$.

Τα αποτελέσματα στον πίνακα (3.2) και το σχήμα (3.4) παρουσιάζουν τα υπολογισμένα εκτός ελέγχου ARL των προτεινόμενων μεθόδων όταν υπάρχει μια μετατόπιση ως προς την κλίση, παράμετρο A_1 . Οι μέθοδοι $ANN-a$ και $3ANN$ αποδίδουν πολύ καλύτερα από το T^2 διάγραμμα, ενώ η απόδοση του $ANN1$ και του T^2 είναι η ίδια ως προς ολόκληρο το εύρος των μετατοπίσεων που θεωρούμε. Η απόδοση του $ANN-a$ είναι πολύ καλύτερη από των $EWMA/R$ και $EWMA-3$ στην ανίχνευση μεσαίων προς μεγάλων μετατοπίσεων στην κλίση ενώ οι μέθοδοι $ANN1$ και $3ANN$ αποδίδουν ελαφρώς καλύτερα από τις $EWMA/R$ και $EWMA-3$ στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων στην κλίση. Τα αποτελέσματα επίσης δείχνουν ότι η $ANN-a$ αποδίδει σημαντικά καλύτερα από την $ANN1$ και $3ANN$ ενώ οι αποδόσεις των $3ANN$ και $ANN1$ στην ανίχνευση μετατοπίσεων είναι περίπου οι ίδιες.

Πίνακας 3.3: Συγκρίσεις για τις εκτός ελέγχου *ARL* τιμές όταν η τυπική απόκλιση μετατοπίζεται από το σ στο $\gamma\sigma$. Το εντός ελέγχου *ARL* = 200.

| Method | γ | | | | | | | | | |
|----------------|----------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 | 3 |
| ANN1 | 58.2 | 28.3 | 16.4 | 11.8 | 9.3 | 7.4 | 5.9 | 5 | 4.7 | 3.9 |
| ANN a | 44.2 | 16.3 | 8.8 | 4.5 | 2.8 | 2.6 | 2.3 | 1.6 | 1.5 | 1.3 |
| 3ANN | 40.4 | 15.4 | 7.3 | 5.2 | 3.5 | 2.8 | 2.3 | 2.1 | 1.8 | 1.7 |
| EWMA/R | 34.3 | 12 | 6.1 | 3.9 | 2.9 | 2.3 | 1.9 | 1.7 | 1.5 | 1.4 |
| T ² | 39.2 | 14.9 | 7.9 | 5.1 | 3.8 | 3 | 2.5 | 2.2 | 2 | 1.8 |
| EWMA-3 | 33.5 | 12.7 | 7.2 | 5.1 | 3.9 | 3.2 | 2.8 | 2.5 | 2.3 | 2.1 |



Σχήμα 3.5: Συγκρίσεις για τις *ARL* τιμές όταν η τυπική απόκλιση μετατοπίζεται από το σ στο $\gamma\sigma$.

Ο πίνακας (3.3) και το σχήμα (3.5) παρουσιάζουν τις εκτός ελέγχου τιμές του *ARL* όταν υπάρχουν αυξανόμενες μετατοπίσεις στη διασπορά υπολοίπου, σ . Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η *ANN-a* μέθοδος υπερτερεί σε σχέση με το διάγραμμα *EWMA/R* υπό την άποψη μεγάλων μετατοπίσεων στη διασπορά υπολοίπων. Επιπλέον, η απόδοση των *3ANN* και *ANN-a* μεθόδων ως προς την ανίχνευση μεσαίων προς μεγάλων μετατοπίσεων στη διασπορά υπολοίπων είναι καλύτερη από των T^2 και *EWMA-3*. Τα αποτελέσματα επίσης δείχνουν ότι η *3ANN* αποδίδει καλύτερα από την *ANN-a* στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στη διασπορά υπολοίπου ενώ και οι δύο αποδίδουν καλύτερα από την *ANN1*.

Το πλεονέκτημα της χρήσης της *3ANN* είναι ότι αυτή μπορεί να καθορίσει τη πηγή της μετατόπισης στην εκτός ελέγχου κατάσταση. Αυτό δεν είναι δυνατό στις άλλες προτεινόμενες μεθόδους πέρα της *EWMA-3*.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη χρήση του *ARL* κριτηρίου για την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας των έξι προαναφερόμενων μεθόδων παρουσιάζονται πιο πάνω. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μέθοδοι *ANN-a* και *3ANN* έχουν καλύτερες αποδόσεις από ότι το T^2 διάγραμμα, ειδικά για μέτριες προς μεγάλες μετατοπίσεις. Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος *ANN-a* υπερέχει του διαγράμματος *EWMA-3* στην ανίχνευση μεσαίας προς μεγάλης μετατόπισης ενώ αυτό αποδίδει καλύτερα από το διάγραμμα *EWMA/R* στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Ένα αξιοσημείωτο πλεονέκτημα της χρήσης τεχνητών νευρωνικών δικτύων (*ANN*) είναι ότι τα δίκτυα μπορούν να εκπαιδευτούν για την ανίχνευση επιθυμητών μετατοπίσεων.

Κεφάλαιο 4^ο

Διαγράμματα ελέγχου για το Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης

4.1. Εισαγωγή

Στο στατιστικό έλεγχο διεργασίας, στη Φάση I σκοπός είναι η αξιολόγηση της σταθερότητας μιας διεργασίας και η εκτίμηση των παραμέτρων. Δεν παύει όμως να αποτελεί σημαντικό θέμα και η αναγνώριση του χρόνου μιας αλλαγής στις παραμέτρους διεργασίας. Τα διαγράμματα ελέγχου παρακολουθούν τη διεργασία στο πέρασμα του χρόνου, αλλά ο χρόνος που ένα διάγραμμα ελέγχου θα σημάνει συναγερμό δεν είναι απαραίτητα ο πραγματικός χρόνος αλλαγής της διεργασίας. Το να βρεθεί ο πραγματικός χρόνος μιας αλλαγής, που καλείται σημείο αλλαγής, είναι σημαντικό επειδή οδηγεί στην εξοικονόμηση κόστους και χρόνου στην ανίχνευση προσδιορισμένης αιτίας. Τα τελευταία χρόνια, η παρακολούθηση «προφίλ», στο οποίο μια μεταβλητή απόκρισης και μια ή περισσότερες επεξηγηματικές μεταβλητές μοντελοποιούνται από μια συνάρτηση παλινδρόμησης, ελκύει πολλούς ερευνητές. Ένας τύπος «προφίλ» που θεωρείται στη βιβλιογραφία είναι το λογιστικό «προφίλ». Παρακάτω θα αναπτύξουμε δύο μεθόδους, την εξέταση της αναλογίας της πιθανοφάνειας και την ομαδοποίηση, για την εκτίμηση του πραγματικού χρόνου ενός βήματος αλλαγής στη Φάση I παρακολούθησης του λογιστικού «προφίλ». Ακόμα, δύο μέθοδοι προτείνονται για την παρακολούθηση της Φάσης II, τη φάση ανίχνευσης, στην παρακολούθηση του λογιστικού «προφίλ». Η πρώτη μέθοδος είναι ένας συνδυασμός από δύο διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (*EWMA*) για το

μέσο και τη διασπορά που παρακολουθεί τα υπόλοιπα που ορίστηκαν στα μοντέλα λογιστικής παλινδρόμησης και η δεύτερη μέθοδος είναι ένα παραμετρικό T^2 διάγραμμα για την παρακολούθηση των παραμέτρων του μονέλου.

4.2. Λογιστική Παλινδρόμηση

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα επεκτείνουν τα συνηθισμένα μοντέλα παλινδρόμησης και περικλείουν μη-κανονικές κατανομές απόκρισης και μοντελοποίηση συναρτήσεων μέσης τιμής. Τρεις συνιστώσες εξειδικεύουν ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο:

1. Μια τυχαία συνιστώσα αναγνωρίζει τη μεταβλητή απόκρισης y και την κατανομή πιθανότητας της.
2. Μια συστηματική συνιστώσα καθιστά συγκεκριμένες επεξηγηματικές μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν σε μια γραμμική συνάρτηση πρόβλεψης.
3. Μια συνάρτηση σύνδεσης καθορίζει τη συνάρτηση της μέσης τιμής του y , $E(y)$, εκείνη που ισοδυναμεί με τη συστηματική συνιστώσα.

Έστω ότι η y δηλώνει μια δυαδική μεταβλητή απόκρισης. Για παράδειγμα, η y δηλώνει την ποιότητα ενός προϊόντος (ελαττωματικά, μη-ελαττωματικά). Κάθε παρατήρηση έχει ένα από τα δύο αποτελέσματα, που δηλώνεται με 0 ή 1, είναι δηλαδή δυαδική για μια απλή δοκιμή. Η μέση τιμή είναι $E(y) = P(y = 1)$. Δηλώνουμε την πιθανότητα $P(y = 1)$ με $\pi(\mathbf{x})$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ είναι οι ανεξάρτητες τιμές των προβλεπόμενων τιμών. Η διασπορά του y είναι ίση με $Var(y) = \pi(\mathbf{x})[1 - \pi(\mathbf{x})]$.

Για το λογιστικό μοντέλο παλινδρόμησης, η συνάρτηση σύνδεσης, *logit*, που χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές έχει μια γραμμική σχέση όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\log\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}, \quad (4.1)$$

όπου $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ είναι το διάνυσμα παραμέτρων του μοντέλου.

Επίσης, το λογιστικό μοντέλο παλινδρόμησης μπορεί να πάρει και την ακόλουθη μορφή:

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(x_i\beta)}{1+\exp(x_i\beta)}, \quad (4.2)$$

όπου $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$.

4.3. Προτεινόμενοι μέθοδοι για τη Φάση I της λογιστικής παλινδρόμησης

Σ' αυτήν την ενότητα προτείνονται δυο μέθοδοι για την αναγνώριση του πραγματικού χρόνου μιας αλλαγής στη Φάση I παρακολούθησης του «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Αυτές χρησιμοποιούνται όταν η μεταβλητή απόκρισης ακολουθεί μια διωνυμική κατανομή και η σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και των επεξηγηματικών μεταβλητών μοντελοποιείται από μια λογιστική παλινδρόμηση. Οι μεταβλητές απόκρισης σε διαφορετικές τιμές της επεξηγηματικής μεταβλητής σε κάθε «προφίλ» είναι ανεξάρτητες από κάθε άλλες. Δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ διαφορετικών «προφίλ» στη Φάση I. Επιπλέον, οι τιμές των επεξηγηματικών μεταβλητών είναι καθορισμένες και σταθερές από «προφίλ» σε «προφίλ». Ακόμα, υποθέτουμε ότι μόνο μετατοπίσεις βήματος συμβαίνουν στις παραμέτρους της λογιστικής παλινδρόμησης.

4.3.1. Μέθοδος ελέγχου αναλογίας πιθανοφάνειας

Στη συγκεκριμένη μέθοδο (Zand et al., 2013) υποθέτουμε ότι m ανεξάρτητα δείγματα με μέγεθος n είναι διαθέσιμα και κάθε δείγμα μπορεί να προσαρμοστεί με ένα προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Επίσης, υποθέτουμε ότι στο m_1 , συμβαίνει ένα βήμα αλλαγής σε μια ή περισσότερες παραμέτρους του προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης.

$$g(\pi_{1j}) = \log \frac{\pi_{1ij}}{1-\pi_{1ij}} = \beta_{01} + \beta_{11}x_{1ij} + \beta_{21}x_{2ij} + \dots + \beta_{p1}x_{pij} \quad (4.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$g(\pi_{2j}) = \log \frac{\pi_{2ij}}{1-\pi_{2ij}} = \beta_{02} + \beta_{12}x_{1ij} + \beta_{22}x_{2ij} + \dots + \beta_{p2}x_{pij} \quad (4.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = m_1 + 1, \dots, m,$$

Για τον έλεγχο της ισότητας των παραμέτρων, ελέγχουμε τις υποθέσεις $H_0: \pi_{i1} = \pi_{i2} = \pi_i$ εναντίον της υπόθεσης $H_1: H_0$ δεν είναι σωστή.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας για όλες τις παρατηρήσεις υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$P_{Y_{ij}}(y_{ij}) = \pi_i^{y_{ij}} (1 - \pi_i)^{1-y_{ij}} \quad (4.5)$$

$$L = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n P_{Y_{ij}}(y_{ij}) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_{ij}} (1 - \pi_i)^{1-y_{ij}}. \quad (4.6)$$

Αφού πάρουμε το λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας, η παραπάνω εξίσωση ορίζεται ως:

$$\log(L) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n y_{ij} \log \pi_i + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (1 - y_{ij}) \log(1 - \pi_i) \quad (4.7)$$

Η απόκτηση των μέγιστων εκτιμητών πιθανοφάνειας του π_i επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης του π_i και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με μηδέν, έτσι παίρνουμε:

$$\frac{\partial \log(L)}{\partial \pi_i} = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{\pi_i} - \frac{(m - \sum_{j=1}^m y_{ij})}{(1 - \pi_i)} = 0. \quad (4.8)$$

Συνεπώς,

$$\hat{\pi}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m}. \quad (4.9)$$

Υπό τη μηδενική υπόθεση, η μέγιστη τιμή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας για όλες τις παρατηρήσεις είναι ως εξής:

$$l_0 = \sum_{i=1}^n m \hat{\pi}_i \log \hat{\pi}_i + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_i) - \sum_{i=1}^n m \hat{\pi}_i \log(1 - \hat{\pi}_i), \quad (4.10)$$

όπου $\hat{\pi}_i$ είναι ο εκτιμητής του π_i . Να σημειωθεί ότι η τιμή αυτού του εκτιμητή υπολογίζεται από τιμές που έχουν συγκεντρωθεί και είναι υπό-έλεγχο για τη μεταβλητή απόκρισης.

Η μέγιστη τιμή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας για όλες τις παρατηρήσεις πριν το σημείο αλλαγής (l_1) και μετά το σημείο αλλαγής (l_2) ορίζεται ως ακολούθως (Zand et al., 2013):

$$l_1 = \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log \hat{\pi}_{i1} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) - \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) \quad (4.11),$$

$$l_2 = \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log \hat{\pi}_{i2} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i2}) - \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log(1 - \hat{\pi}_{i2}) \quad (4.12),$$

$$\text{όπου } \hat{\pi}_{i1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} y_{ij}}{m_1}, \quad \hat{\pi}_{i2} = \frac{\sum_{j=m_1+1}^m y_{ij}}{m - m_1} \text{ και } m_2 = m - m_1.$$

Η μέγιστη τιμή του λογαρίθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας υπό την εναλλακτική υπόθεση H_1 ονομάζεται l_α και αποκτάται από το άθροισμα του l_1 και του l_2 :

$$l_\alpha = l_1 + l_2,$$

$$l_\alpha = \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log \hat{\pi}_{i1} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) - \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) + \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log \hat{\pi}_{i2} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i2}) - \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log(1 - \hat{\pi}_{i2}). \quad (4.13)$$

Το στατιστικό της γενικευμένης αναλογίας πιθανοφάνειας υπολογίζεται με τη βοήθεια της παρακάτω εξίσωσης:

$$lrt_{m_1} = -2(l_0 - l_a),$$

$$lrt_{m_1} = -2(\sum_{i=1}^n m\hat{\pi}_i \log \hat{\pi}_i + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_i) - \sum_{i=1}^n m\hat{\pi}_i \log(1 - \hat{\pi}_i) - \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log \hat{\pi}_{i1} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) + \sum_{i=1}^n m_1 \hat{\pi}_{i1} \log(1 - \hat{\pi}_{i1}) - \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log \hat{\pi}_{i2} - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \log(1 - \hat{\pi}_{i2}) + \sum_{i=1}^n m_2 \hat{\pi}_{i2} \log(1 - \hat{\pi}_{i2})). \quad (4.14)$$

Το στατιστικό της τυποποιημένης αναλογίας πιθανοφάνειας ονομάζεται $slrt_{m_1}$ και υπολογίζεται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση (Zand et al., 2013):

$$slrt_{m_1} = \frac{lrt_{m_1} - E(lrt_{m_1})}{\sqrt{Var(lrt_{m_1})}}, \quad (4.15)$$

όπου $E(lrt_{m_1})$ και $Var(lrt_{m_1})$ είναι η μέση τιμή και η διασπορά του στατιστικού lrt υπό τη μηδενική υπόθεση, αντίστοιχα. Οι τιμές των $E(lrt_{m_1})$ και $Var(lrt_{m_1})$ εκτιμώνται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις. Το $slrt_{m_1}$ υπολογίζεται για όλες τις δυνατές τιμές του m_1 ($m_1 = 1, 2, \dots, m - 1$).

Το μέγιστο όρισμα του $slrt_{m_1}$ χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει το σημείο αλλαγής όταν ένα διάγραμμα ελέγχου δείξει το εκτός-ελέγχου στάδιο. Με άλλα λόγια, όταν η μηδενική υπόθεση, H_0 , απορριφθεί, ο πραγματικός χρόνος ενός βήματος αλλαγής καθορίζεται από τον εκτιμητή του σημείου αλλαγής που δίνεται στη συνέχεια (Zand et al., 2013), για $1 \leq m_1 < m$:

$$\hat{m}_1 = \arg \max\{slrt_{m_1}\}. \quad (4.16)$$

4.3.2. Μέθοδος ομαδοποίησης

Στη μέθοδο ομαδοποίησης (Zand et al., 2013), οι παρατηρήσεις στηριζόμενες στην ομοιότητα τους χωρίζονται σε αρκετές ομάδες έτσι ώστε η ομοιότητα μεταξύ των παρατηρήσεων εντός μιας ομάδας να μεγιστοποιείται και η ομοιότητα των παρατηρήσεων μεταξύ ομάδων να ελαχιστοποιείται.

Στο πρόβλημα εκτίμησης αλλαγής σημείου υπό μετατόπιση βήματος, ο αριθμός των ομάδων είναι γνωστός και ίσος με 2. Η εντός-ελέγχου ομάδα περιλαμβάνει όλες τις παρατηρήσεις πριν το σημείο αλλαγής και η εκτός-ελέγχου ομάδα περιλαμβάνει όλες τις παρατηρήσεις μετά το σημείο αλλαγής.

Για την εκτίμηση του πραγματικού χρόνου μιας αλλαγής βήματος στη μέθοδο ομαδοποίησης, το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε έναν κατάλληλο δείκτη εγκυρότητας. Έπειτα, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παρατηρήσεων, για τις εντός και εκτός ελέγχου ομάδες, ο ορισμένος δείκτης υπολογίζεται και το σημείο τ με την καλύτερη τιμή του δείκτη είναι το σημείο αλλαγής.

Στη συνέχεια, δύο δείκτες προτείνονται από τους Ghazanfari et al. (2008) για την εκτίμηση του βήματος αλλαγής σημείου στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart που αφορούν το λογιστικό «προφίλ».

4.3.2.1. Εκτεταμένες ομάδες εντός διακύμανσης

Μια ομάδα εντός διακύμανσης δείχνει την απόσταση των εντός και εκτός ελέγχου παρατηρήσεων από τις μέσες τιμές των ομάδων τους και ορίζεται ως:

$$SS_w = SS_{w_{In}} + SS_{w_{Out}}, \quad (4.17)$$

$$SS_w = \sum_{j=1}^{m_1} (\bar{y}_j - C_{In})^2 + \sum_{j=m_1+1}^m (\bar{y}_j - C_{Out})^2, \quad (4.18)$$

όπου \bar{y}_j είναι η μέση τιμή των τιμών απόκρισης σε όλα τα επίπεδα των

επεξηγηματικών μεταβλητών στο j -οστό «προφίλ», $C_{In} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} \bar{y}_j}{m_1}$ είναι το

κέντρο της εντός-ελέγχου ομάδας και $C_{Out} = \frac{\sum_{j=m_1+1}^m \bar{y}_j}{(m - m_1)}$ είναι το

κέντρο της εκτός-ελέγχου ομάδας. Ο στόχος αυτού του δείκτη είναι η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης των παρατηρήσεων σε κάθε ομάδα.

Το ελάχιστο ορίσμα του SS_w χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του σημείου αλλαγής μετά από ένα διάγραμμα ελέγχου που δείχνει το εκτός ελέγχου στάδιο και ορίζεται για $1 \leq m_1 < m$ ως:

$$\hat{m}_1 = \arg \min\{SS_w\}. \quad (4.19)$$

Να σημειωθεί ότι ο δείκτης SS_w υπολογίζεται για διαφορετικούς συνδυασμούς των ομάδων και οι ομάδες με τον ελάχιστο SS_w δείκτη θεωρούνται ως ο καλύτερος συνδυασμός. Για παράδειγμα, η μέση τιμή της μεταβλητής απόκρισης στο πρώτο «προφίλ» μπορεί να τοποθετηθεί στην πρώτη ομάδα και οι μέσες τιμές των άλλων μεταβλητών απόκρισης είναι τοποθετημένες στη δεύτερη ομάδα. Αυτός είναι ένας συνδυασμός από δύο ομάδες. Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των «προφίλ» ελέγχονται και ο καλύτερος συνδυασμός βασιζόμενος στον SS_w επιλέγεται. Το όρισμα της πρώτης παρατήρησης στην εκτός ελέγχου ομάδα εισάγεται ως το σημείο αλλαγής.

4.3.2.2. Ομάδες ανάμεσα σε μεταβολή αποσύνθεσης

Μια ομάδα μεταξύ διακύμανσης δείχνει τις αποστάσεις για τις εντός και εκτός ελέγχου μέσες τιμές από τις ολικές μέσες τιμές τους και ορίζεται ως:

$$SS_B = SS_{B_{In}} + SS_{B_{Out}}, \quad (4.20)$$

$$SS_B = m_1(C_{In} - C_T)^2 + (m - m_1)(C_{Out} - C_T)^2, \quad (4.21)$$

όπου $C_T = \sum_{j=1}^m \bar{y}_j / m$ είναι ο μέσος από όλες τις μέσες τιμές της μεταβλητής απόκρισης.

Ο στόχος αυτού του δείκτη είναι η μεγιστοποίηση της μεταβολής μεταξύ των παρατηρήσεων των δύο ομάδων.

Σε αυτόν το δείκτη, το μέγιστο όρισμα του SS_B χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του σημείου αλλαγής αφού το διάγραμμα ελέγχου δείξει το εκτός ελέγχου στάδιο. Με άλλα λόγια, ο πραγματικός χρόνος του βήματος αλλαγής καθορίζεται ως ακολούθως για $1 \leq m_1 < m$:

$$\hat{m}_1 = \arg \max\{SS_B\}. \quad (4.22)$$

Παρόμοια με την προηγούμενη μέθοδο ομαδοποίησης, όλοι οι συνδυασμοί μεθόδων σχηματίζονται και ο αντίστοιχος δείκτης SS_B υπολογίζεται για όλους

τους συνδυασμούς ομάδων. Έπειτα, ο συνδυασμός με το μεγαλύτερο δείκτη SS_B επιλέγεται και το όρισμα της πρώτης παρατήρησης από την ομάδα εκτός ελέγχου θεωρείται ως το σημείο αλλαγής.

4.4. Προτεινόμενοι μέθοδοι για τη Φάση II της λογιστικής παλινδρόμησης

4.4.1. Μέθοδος EWMA2

Η διαφορά μεταξύ των παρατηρούμενων και των προβλεπόμενων τιμών για ένα δοσμένο επίπεδο των ανεξάρτητων μεταβλητών ακολουθεί μια κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και μια σταθερή διασπορά, δηλαδή $e_{ij} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_j)$, σ' ένα «προφίλ» με κανονική μεταβλητή απόκρισης.

Στο λογιστικό «προφίλ», τα συνηθισμένα υπόλοιπα έχουν μέση τιμή μηδέν και μια μεταβλητή διασπορά, $e_{ij} \sim N(\mathbf{0}, m_j \pi_{ij}(1 - \pi_{ij}))$, γι' αυτό η χρήση κάποιων υπολοίπων που ορίζονται στο μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης ως υπόλοιπα Pearson και Anscombe προτείνονται στη συνέχεια. Στην πρώτη μέθοδο (Saghaei et al., 2012), δύο διαγράμματα EWMA προτείνονται για τη Φάση II παρακολούθησης του λογιστικού «προφίλ», το ένα από αυτά είναι για την παρακολούθηση της μέσης τιμής των υπολοίπων όπως είναι και η μέθοδος EWMA/R των Kang and Albin (2000) και το άλλο είναι για την παρακολούθηση της διασποράς των υπολοίπων βασιζόμενο στον αντίστροφο κανονικό μετασχηματισμό που προτείνεται από τους Acosta-Mejia et al. (1999). Αν το MSE_j παριστάνει τη διασπορά του j -οστού δείγματος και:

$$P_{\sigma_j} = \Phi^{-1} \left(F_{X_n^2} (nMSE_j / \sigma_0^2) \right), \quad (4.23)$$

τότε τα $nMSE_j / \sigma_0^2$ και P_{σ_j} θα ακολουθούν μια X^2 -κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και μια τυπική κανονική κατανομή, αντίστοιχα. Στην παραπάνω εξίσωση, η $F_{X_n^2}(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cumulative distribution function, *cdf*) για την X^2 -κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και $\Phi(\cdot)$ είναι η *cdf* για την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Μια αύξηση (μείωση) στην τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων έχει ως αποτέλεσμα μια αύξηση (μείωση) στη μέση τιμή του P_{σ_j} .

4.4.1.1. Μέθοδος βασιζόμενη στο υπόλοιπο Pearson

Η μέθοδος $EWMA_2$ βασιζόμενη στα υπόλοιπα Pearson (Saghaei et al., 2012), που ονομάζεται $EWMA^p_2$, χρησιμοποιεί τα ακόλουθα $EWMA^p_{M,j}$ και $EWMA^p_{E,j}$ στατιστικά για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς των υπολοίπων Pearson, αντίστοιχα.

$$EWMA^p_{M,j} = \theta \bar{R}_j^p + (1 - \theta)EWMA^p_{M,j-1}, \quad (4.24)$$

$$EWMA^p_{E,j} = \theta P_{\sigma_j} + (1 - \theta)EWMA^p_{E,j-1}, \quad (4.25)$$

όπου $\bar{R}_j^p = \sum_{i=1}^n R_{ij}^p / n$, $EWMA^p_{M,0} = EWMA^p_{E,0} = 0$ και θ είναι μια σταθερά βαρύτητας, $0 < \theta \leq 1$. Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για τα διαγράμματα δίνονται στη συνέχεια:

$$UCL_M^p = L_M^p \sqrt{\theta / ((2 - \theta)n)}, \quad LCL_M^p = -UCL_M^p.$$

$$UCL_E^p = L_E^p \sqrt{\theta / (2 - \theta)}, \quad LCL_E^p = -UCL_E^p.$$

Οι πολλαπλασιαστές $L_M^p (> 0)$ και $L_E^p (> 0)$ επιλέγονται προκειμένου να δώσουν ένα συγκεκριμένο εντός-ελέγχου μέσο μήκο ροής, ARL .

4.4.1.2. Μέθοδος βασιζόμενη στο υπόλοιπο Anscombe

Η μέθοδος $EWMA_2$ βασιζόμενη στα υπόλοιπα Anscombe (Saghaei et al., 2012), που ονομάζεται $EWMA^a_2$, χρησιμοποιεί τα ακόλουθα $EWMA^a_{M,j}$ και $EWMA^a_{E,j}$ στατιστικά για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διασποράς των υπολοίπων Anscombe, αντίστοιχα.

$$EWMA^a_{M,j} = \theta \bar{R}_j^a + (1 - \theta)EWMA^a_{M,j-1}, \quad (4.26)$$

$$EWMA^a_{E,j} = \theta P_{\sigma_j} + (1 - \theta)EWMA^a_{E,j-1}, \quad (4.27)$$

όπου $\bar{R}_j^a = \sum_{i=1}^n R_{ij}^a/n$, $EWMA^a_{M,0} = EWMA^a_{E,0} = 0$ και θ είναι μια σταθερά εξομάλυνσης, $0 < \theta \leq 1$. Τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για τα διαγράμματα δίνονται στη συνέχεια:

$$UCL_M^\alpha = L_M^\alpha \sqrt{\theta / ((2 - \theta)n)}, \quad LCL_M^\alpha = -UCL_M^\alpha.$$

$$UCL_E^\alpha = L_E^\alpha \sqrt{\theta / (2 - \theta)}, \quad LCL_E^\alpha = -UCL_E^\alpha.$$

Οι πολλαπλασιαστές $L_M^\alpha (> 0)$ και $L_E^\alpha (> 0)$ επιλέγονται προκειμένου να δώσουν ένα συγκεκριμένο ARL_0 .

4.4.1.3. Παράδειγμα (Saghaei et al. (2012))

Αυτή η ενότητα δίνει ένα παράδειγμα που έχει ληφθεί από τη μελέτη παρακολούθησης μιας μηχανής πιεστηρίου. Η σχέση μεταξύ του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων και της ταχύτητας της μηχανής πιεστηρίου μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα λογιστικό προφίλ.

Ένα τις εκατό των προϊόντων είναι ελαττωματικό όταν μια ειδική μηχανή πιεστηρίου δουλεύει σε κανονική ταχύτητα. Η αύξηση της ταχύτητας (ή μείωση) οδηγεί σε αύξηση (ή μείωση αντίστοιχα) του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων. Για παράδειγμα, το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μειώνεται κατά 0.5% όταν η ταχύτητα της μηχανής πιεστηρίου

μειωθεί κατά το ένα τέταρτο των αναδιπλώσεων. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει περισσότερες πληροφορίες γι' αυτήν τη σχέση. Η πιθανότητα του ελαττωματικού προϊόντος είναι η μακροπρόθεσμη πιθανότητα παρατηρούμενη σε ορισμένο επίπεδο της ταχύτητας για δείγματα 100 προϊόντων τα οποία παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Η πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων σε διαφορετικά επίπεδα ταχύτητας.

| Ταχύτητα της μηχανής πιεστηρίου | Πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων |
|---------------------------------|----------------------------------------|
| 0.25 | 0.005 |
| 0.50 | 0.006 |
| 0.75 | 0.008 |
| 1.00 | 0.010 |
| 1.30 | 0.015 |
| 1.50 | 0.019 |
| 1.80 | 0.026 |
| 2.00 | 0.035 |

Με βάση το λογιστικό μοντέλο, το μοντέλο προσαρμόστηκε στα δεδομένα και οι παράμετροι μοντέλου εκτιμήθηκαν μέσω της προσέγγισης Newton-Raphson. Ως ένα αποτέλεσμα, η πιθανότητα της Bernoulli διεργασίας (όντας ελαττωματικό ή μη ελαττωματικό προϊόν) και ο πίνακας διασποράς λήφθηκαν ως:

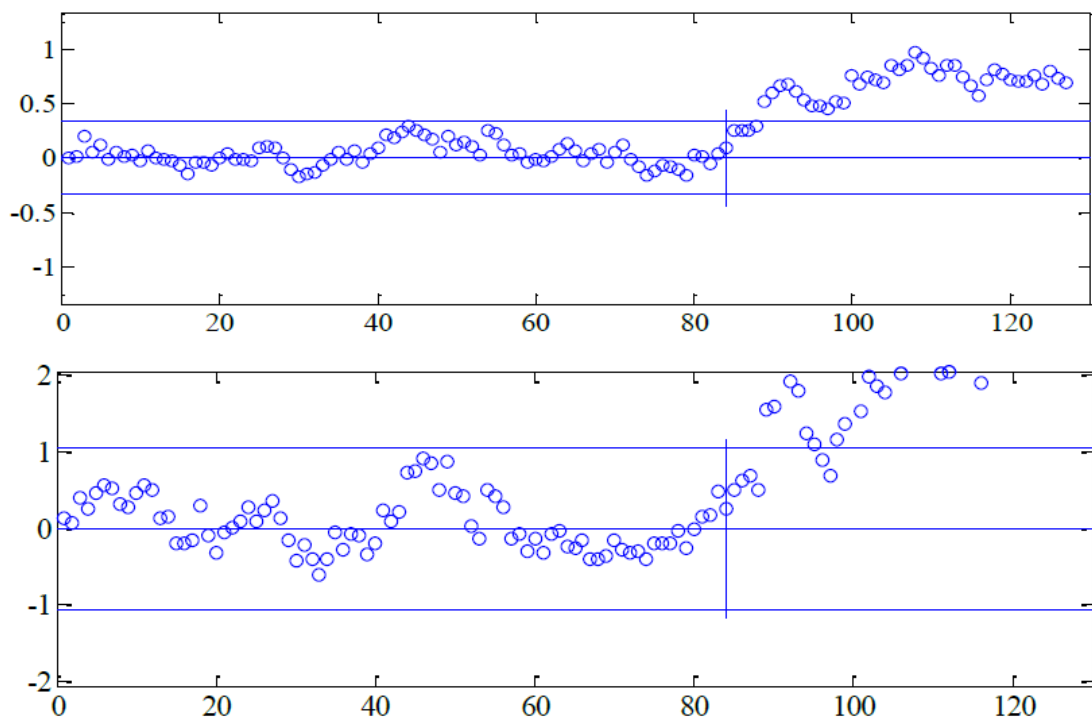
$$\pi(x_i) = \frac{1}{1+\exp(x_i^T \beta)} = \frac{1}{1+\exp(5.702-1.174x_i)},$$

$$\text{Var}(\beta) = (X^T W X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0621 & -0.1658 \\ -0.1658 & 0.6226 \end{pmatrix},$$

όπου W είναι ένας διαγώνιος πίνακας με $m_i \pi(x_i)(1 - \pi(x_i))$ το i -οστό διαγώνιο στοιχείο, m_i είναι ο αριθμός των δοκιμών σε κάθε παρατήρηση.

Να σημειωθεί ότι ο πίνακας X θεωρήθηκε χωρίς λογαριθμικό μετασχηματισμό των x τιμών. Η EWMA2 μέθοδος που βασίστηκε στο υπόλοιπο Pearson, επιλέχθηκε για την παρακολούθηση των παραμέτρων του μοντέλου στο

πέρασμα του χρόνου προκειμένου να ανιχνεύσει μια μετατόπιση στον έλεγχο της Φάσης II. Τα άνω όρια ελέγχου για τα διαγράμματα $EWMA_M^P$, $EWMA_E^P$ ισούνται με 2.87 και 3.14, αντίστοιχα, για την απόκτηση ενός συνολικού ARL_0 σχεδόν 200. Όταν το δείγμα j συλλεχθεί, κάποιος μπορεί να υπολογίσει τις τιμές υπολοίπου και να υπολογίσει την P_{σ_j} από τη σχέση $P_{\sigma_j} = \Phi^{-1}\left(F_{X_n^2}(nMSE_j/\sigma_0^2)\right)$. Τα j -οστά διαγραμματικά στατιστικά υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4.24), (4.25). Το σχήμα 4.1 παρουσιάζει 127 εικονογραφημένα στατιστικά στα $EWMA2^P$ διαγράμματα ελέγχου. Το σημείο 89 είναι εκτός των ορίων ελέγχου σχεδιασμένο και στα δύο $EWMA_E^P$, $EWMA_M^P$ διαγράμματα ελέγχου. Αναλυτικότεροι έλεγχοι αποδεικνύουν ότι μια προσδιορισμένη αιτία συνέβη την 84^η ημέρα και η διεργασία βγήκε εκτός ελέγχου.



Σχήμα 4.1: Τα σχήματα δείχνουν τα $EWMA2^P$ διαγράμματα υπό την περίοδο χρόνου των 127 ημερών. Το πρώτο σημείο που δίνει μια ειδοποίηση μιας εκτός ελέγχου κατάστασης είναι το σημείο 89 και στα δύο διαγράμματα, $EWMA_M^P$ (πάνω) και $EWMA_E^P$ (κάτω).

Συγκρίνοντας την απόδοση των δύο υπολοίπων διαπιστώθηκε ότι η EWMA2 μέθοδος βασιζόμενη στο υπόλοιπο Pearson είναι εύρωστη, γι' αυτό και η εφαρμογή του υπολοίπου Pearson είναι προτιμότερη στις περιπτώσεις όπου ο αριθμός επαναλήψεων είναι μικρός.

4.4.2. T^2 Μέθοδος

Οι παράμετροι του μοντέλου, β_j , ακολουθούν μια πολυπαραμετρική κανονική κατανομή αυμππρωτικά με $E(\beta_j) = \beta_0$ και $Var(\beta_j) = (X^T W X)^{-1}$ όπου W είναι ένας διαγώνιος πίνακας με $m_i \pi(x_i)(1 - \pi(x_i))$ να είναι το j -οστό διαγώνιο στοιχείο. Το αντίστοιχο T^2 στατιστικό προτείνεται για την παρακολούθηση του λογιστικού «προφίλ» στη Φάση II:

$$T_j^2 = (\beta_j - \beta_0)^T (X^T W X) (\beta_j - \beta_0), \quad (4.28)$$

όπου το T_j^2 ακολουθεί μια X^2 κατανομή με p βαθμούς ελευθερίας. Το άνω όριο ελέγχου UCL για το δοσμένο ψευδές ποσοστό συναγερμού α είναι $UCL_{T^2} = X_{\alpha}^2(p)$.

Κεφάλαιο 5^ο

Δείκτες ικανότητας διεργασίας για παρακολούθηση προφίλ γραμμικής παλινδρόμησης

5.1. Εισαγωγή

Υπάρχει ένας αξιοπρόσεχτος αριθμός καταστάσεων, στον οποίο η ποιότητα μιας διεργασίας ή ενός προϊόντος μπορεί να χαρακτηριστεί από τη σχέση («προφίλ») μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και ενός ή περισσότερων επεξηγηματικών μεταβλητών παρά από ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά ποιότητας που παρατηρείται στον παραδοσιακό στατιστικό έλεγχο διεργασίας. Τα «προφίλ» συνήθως εκπροσωπούνται από παραμετρικά μοντέλα όπως είναι η απλή γραμμική παλινδρόμηση. Ποικίλες μέθοδοι παρουσιάζονται για την παρακολούθηση «προφίλ» και στις δύο Φάσεις. Στην Φάση I, ο στόχος είναι ο έλεγχος της σταθερότητας της διεργασίας, καθώς και η παραμετρική εκτίμηση, ενώ ο στόχος στη Φάση II είναι η ανίχνευση των μετατοπίσεων στις παραμέτρους του «προφίλ» όσον το δυνατό γρηγορότερα. Οι δείκτες ικανότητας διεργασίας χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της απόδοσης της διεργασίας. Όλες οι υπάρχουσες μέθοδοι που μετρούν τους δείκτες ικανότητας διεργασίας σ' ένα απλό γραμμικό «προφίλ» εξετάζουν τις μεταβλητές απόκρισης σε κάποια επίπεδα επεξηγηματικής μεταβλητής και αγνοούν όλο το εύρος των x -τιμών. Παρακάτω μια συναρτησιακή προσέγγιση προτείνεται για τη μέτρηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας στα απλά γραμμικά «προφίλ» σε όλο το εύρος της επεξηγηματικής μεταβλητής. Αυτή η νέα προσέγγιση ακολουθεί τον παραδοσιακό ορισμό των δεικτών ικανότητας διεργασίας και οδηγεί σε ακριβέστερες τιμές τους για το απλό γραμμικό «προφίλ». Συγκεκριμένα, αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιεί ένα «προφίλ»

αναφοράς, συναρτήσεις ως όρια προδιαγραφών και ως φυσικά όρια ανοχής για να παρουσιάσει μια συναρτησιακή μορφή των δεικτών ικανότητας διεργασίας. Αυτή η συναρτησιακή μορφή έχει σαν αποτέλεσμα τη μέτρηση της ικανότητας διεργασίας σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ», όπως επίσης, και της μοναδικής τιμής ενός δείκτη ικανότητας διεργασίας για ένα απλό γραμμικό «προφίλ».

5.2. Δείκτες ικανότητας διεργασίας

Το γενικό μοντέλο ενός απλού γραμμικού «προφίλ» παρουσιάζεται μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$y_{ij} = A_0 + A_1 X_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ και } j = 1, 2, \dots, k \quad (5.1)$$

όπου το ζεύγος παρατηρήσεων (x_{ij}, y_{ij}) λαμβάνεται στο j -οστό τυχαίο δείγμα στο οποίο x_{ij} είναι το i -οστό σημείο σχεδιασμού για την επεξηγηματική μεταβλητή, A_0 είναι η τετμημένη, A_1 είναι η κλίση και τα σφάλματα ε_{ij} είναι ανεξάρτητες κανονικά κατανοημένες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και διασπορά ίση με σ^2 .

Οι δείκτες ικανότητας διεργασίας είναι ευρέως χρησιμοποιούμενες στην εκτίμηση της απόδοσης διεργασίας. Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας C_p μετράει την ενδεχόμενη ικανότητα μιας διεργασίας χωρίς να επηρεάζεται από το μέσο της διεργασίας. Ο δείκτης C_p παρουσιάζεται στην παρακάτω εξίσωση (Juran, 1974):

$$C_p = \frac{USL - LSL}{UNTL - LNTL} = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (5.2)$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση της διεργασίας, LSL είναι το κάτω όριο προδιαγραφών και USL είναι το άνω όριο προδιαγραφών, $LNTL$ είναι το κάτω φυσικό όριο ανοχής ($LNTL = \mu - 3\sigma$) και $UNTL$ είναι το άνω όριο φυσικής ανοχής ($UNTL = \mu + 3\sigma$). Μεγάλες τιμές του C_p είναι επιθυμητές και μικρές

τιμές δεν είναι επιθυμητές καθώς αντιπροσωπεύουν μεγάλη τυπική απόκλιση της διεργασίας. Ο δείκτης C_p δε συμπεριλαμβάνει τη μέση τιμή της διεργασίας, μ , για την εκτίμηση του. Γι' αυτό το λόγο, όταν η μέση τιμή της διεργασίας δεν είναι ίση με το μεσαίο σημείο των ορίων προδιαγραφών, η τιμή C_p δίνει παραπλανητική μέτρηση. Σαν αποτέλεσμα, ορίστηκε ο C_{pk} για την εκτός κέντρου διεργασία (Kane, 1986). Αυτός ερμηνεύει καλύτερα τη διεργασία σε σχέση με τον δείκτη C_p . Ο C_{pk} έχει ως πλεονέκτημα ότι συγκρίνει τη διασπορά διεργασίας και το εύρος ανοχής και ταυτόχρονα συμπεριλαμβάνει τη θέση του μέσου της διεργασίας:

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\}, \quad (5.3)$$

$$C_{pu} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \quad (5.4)$$

$$C_{pl} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}. \quad (5.5)$$

Οπότε $C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\}$ και παρακάτω θα αποδείξουμε ότι

$$C_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}.$$

Ισχύει $\min(a, b) = \frac{1}{2}(|a + b| - |a - b|)$, όπου $|a + b| = \frac{|USL - LSL|}{3\sigma}$ και $|a - b| = \frac{|USL + LSL - 2\mu|}{3\sigma}$ εδώ, άρα $\min \left(\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right) = \frac{1}{2} \left| \frac{|USL - LSL|}{3\sigma} - \frac{|USL + LSL - 2\mu|}{3\sigma} \right| = \frac{1}{3\sigma} \left(d - \frac{1}{2} |USL + LSL - 2\mu| \right) = \frac{1}{3\sigma} \left(d - \frac{1}{2} |2\mu - (USL + LSL)| \right) = \frac{1}{3\sigma} \left(d - \frac{1}{2} |2\mu - 2M| \right) = \frac{1}{3\sigma} (d - |\mu - M|) = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}$ όπου $d = \frac{USL - LSL}{2}$, M είναι το μεσαίο σημείο μεταξύ του άνω και κάτω ορίου προδιαγραφών, δηλαδή $M = \frac{USL + LSL}{2}$ και μ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της διεργασίας, που λαμβάνεται από τον μέσο όρο των υποομάδων που είναι διαθέσιμες στην Φάση I.

Ο δείκτης C_p θα χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της απόδοσης μιας διεργασίας, όταν το μεσαίο σημείο των ορίων προδιαγραφών είναι κεντραρισμένο με τη μέση τιμή της διεργασίας. Αν η διεργασία δεν είναι κεντραρισμένη (δηλαδή $\mu \neq M$) τότε οι άνω και κάτω μονόπλευροι δείκτες

ικανότητας, C_{pu} και C_{pl} μπορούν να εφαρμοσθούν. Γι' αυτό οι C_p και C_{pk} χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις των διμερών ορίων προδιαγραφών, ενώ οι C_{pu} και C_{pl} ως μονόπλευρες μετρήσεις ικανότητας, εφαρμόζονται σε περιπτώσεις μονομερών ορίων προδιαγραφών. Σαφώς, $C_p \geq C_{pk}$.

Όταν μ και σ είναι άγνωστα και η διεργασία είναι σταθερή, αυτοί μπορούν να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή του δείγματος, \bar{Y} και την τυπική απόκλιση, S , τα οποία αποκτώνται από όλα τα δεδομένα που συλλέγονται. Αυτοί οι εκτιμώμενοι δείκτες ικανότητας διεργασίας μερικές φορές δηλώνονται ως P_p και P_{pk} στη βιβλιογραφία. Η τυπική απόκλιση της διεργασίας, σ , μερικές φορές εκτιμάται με τη χρήση του $\frac{\bar{R}}{d_2}$, όπου \bar{R} είναι το μέσο εύρος μιας υποομάδας και d_2 είναι ένας διαιρέτης του \bar{R} που χρησιμοποιείται για να εκτιμήσει την τυπική απόκλιση της διεργασίας. Και οι δύο εκτιμητές της τυπικής απόκλισης της διεργασίας (δηλαδή S και $\frac{\bar{R}}{d_2}$) δίνουν προσεγγιστικά αμερόληπτους εκτιμητές του σ , αλλά το S αποδίδει εκτιμητή με το μικρότερο τυπικό σφάλμα.

Οι τιμές του C_p και του C_{pk} που είναι μεγαλύτερες από τη μονάδα δείχνουν ότι η απόσταση μεταξύ της μέσης τιμής της διεργασίας και σε οποιαδήποτε πλευρά των ορίων προδιαγραφών είναι μεγαλύτερη από τρεις φορές την τυπική απόκλιση. Ωστόσο, μια τιμή του C_{pk} που είναι ίση με δύο ή μεγαλύτερη από το δύο είναι συχνά ζητούμενη από τους προμηθευτές στην αυτοβιομηχανία.

Τα προϊόντα στα οποία τα χαρακτηριστικά ποιότητας είναι πέρα από τα όρια προδιαγραφών ή ανοχής θεωρούνται ελαττωματικά, έτσι αυτά καλούνται μη-συμμορφούμενα αντικείμενα. Στην πραγματικότητα, οι δείκτες C_p και C_{pk} είναι περισσότερο χρησιμοποιούμενοι για τη μέτρηση του ποσοστού των μη-συμμορφούμενων προϊόντων. Ωστόσο, σε μερικές καταστάσεις, το προσδοκώμενο ποσοστό των μη-συμμορφούμενων προϊόντων δεν είναι το πρωταρχικό κίνητρο για τη χρήση των δεικτών ικανότητας διεργασίας, αλλά η συνάρτηση απώλειας είναι πιο σημαντική.

Υπενθύμιση: Σύμφωνα με την τετραγωνική συνάρτηση απώλειας του Taguchi, ένα προϊόν με αρκετά μικρές αποκλίσεις από την τιμή στόχο έχει ως αποτέλεσμα μια απώλεια ποιότητας. Αυτή η προσέγγιση επισημαίνει την ανάγκη να υπάρχει χαμηλή μεταβλητότητα γύρω από την τιμή στόχο. Η συνάρτηση απώλειας Taguchi ορίζεται ως: $L(x) = k(x - t)^2$, όπου k είναι ο συντελεστής απώλειας, x είναι η τιμή μέτρησης και t δηλώνει την τιμή στόχο.

Γι' αυτό το λόγο, ο C_{pm} δείκτης εισήχθη από τους Hsiang και Taguchi (1985) ως:

$$C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d}{3\sqrt{E[(X - T)^2]}} \quad (5.6)$$

όπου T είναι η τιμή στόχος και $E[\cdot]$ δηλώνει την αναμενόμενη τιμή των χαρακτηριστικών ποιότητας, Y . Ο δείκτης C_{pm} μερικές φορές καλείται και δείκτης Taguchi. Σαφώς, $C_p \geq C_{pm}$. Συνήθως είναι $T = M$. Αν $T \neq M$ η κατάσταση περιγράφεται από ασυμμετρικά όρια προδιαγραφών. Το κίνητρο για τον C_{pm} απαιτεί η διεργασία να είναι κοντά στην τιμή στόχο, έτσι, δεν είναι αξιόπιστο αν το αναμενόμενο ποσοστό των μη-συμμορφούμενων θεωρείται ως το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό της διεργασίας. Σε αντίθεση, οι μετρήσεις ικανότητας διεργασίας των C_p και C_{pk} συνήθως χρησιμοποιούνται για να παρέχουν πληροφορίες για τον αριθμό ή το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων.

Ο δείκτης C_{pmk} που εισήχθη αρχικά από τους Choi και Owen (1990) και στη συνέχεια από τους Pearn et al. (1992), είναι ένας συνδυασμός του δείκτη C_{pk} και του δείκτη C_{pm} , μιας και όπως θα δούμε παρακάτω ο αριθμητής του προκύπτει από εκείνον του C_{pk} και ο παρονομαστής του από εκείνον του C_{pm} . Σε αντίθεση με τους άλλους δείκτες μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν η κατανομή δεν είναι κανονική και οι παρατηρήσεις μας δεν είναι ανεξάρτητες. Είναι ο μόνος δείκτης που λαμβάνει υπόψη του την τυπική απόκλιση σ , πόσο απέχει ο δειγματικός μέσος μ από την κεντρική τιμή στόχο T αλλά και από την κεντρική τιμή του διαστήματος των ορίων προδιαγραφών χωρίς να είναι

απαραίτητο το άνω όριο προδιαγραφών USL να είναι συμμετρικό με το κάτω όριο προδιαγραφών LSL .

Ορίζεται από τη σχέση

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\tau} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu-T)^2}}, \quad (5.7)$$

Ισοδύναμες μορφές ορισμού:

$$C_{pmk} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} = \left(1 - \frac{|\mu-M|}{d}\right) C_{pm} = \frac{d-|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu-T)^2}}. \quad (5.8)$$

Υπάρχει και μια ενδιαφέρουσα σχέση που συνδέει τους τέσσερις δείκτες C_{pmk} , C_{pm} , C_p και C_{pk} η οποία είναι η ακόλουθη:

$$C_{pmk} = \frac{C_{pm}C_{pk}}{C_p}. \quad (5.9)$$

Ο λόγος για τον οποίο προτάθηκε ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} είναι ότι ο δείκτης C_{pm} λαμβάνει υπόψη του τη θέση του μέσου μ της διεργασίας σε σχέση με την τιμή στόχο T όμως δε λαμβάνει καθόλου υπόψη τη θέση του μέσου μ σε σχέση με τα όρια προδιαγραφών (LSL, USL). Ο δείκτης ικανότητας C_{pmk} χωρίς τον όρο $(\mu - T)^2$ στον παρονομαστή, η ύπαρξη του οποίου δείχνει ότι ο μέσος της διεργασίας δεν ταυτίζεται με την τιμή στόχο, είναι ίδιος με το δείκτη C_{pk} . Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται μεγαλύτερη ευαισθησία στο δείκτη ικανότητας C_{pmk} σε σχέση με το δείκτη C_{pk} σε απομακρύνσεις του μέσου μ από την τιμή στόχο T .

Στον ακόλουθο πίνακα 5.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι βασικότερες ιδιότητες του δείκτη C_{pmk} (Αντζουλάκος (2008)).

Πίνακας 5.1 : Ιδιότητες του δείκτη C_{pmk}

$$\begin{aligned} \mu = M &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pm} (C_{pk} = C_p) \\ \mu = M &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pk} (C_{pm} = C_p) \\ \mu = T = M &\Rightarrow C_{pmk} = C_{pk} = C_{pm} = C_p \Rightarrow C_{pmk} \leq C_{pm} \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι αν $\sigma \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow T$ τότε $C_{pmk} \rightarrow \infty$ και ο τύπος του γίνεται

$$C_{pmk} = \frac{USL-LSL}{6|\mu-T|} - \frac{1}{3}. \quad (5.10)$$

Άρα, για κάθε τιμή του δείκτη C_{pmk} υπάρχει το εξής όριο

$$|\mu - T| < \frac{USL-LSL}{2(1+3C_{pmk})}. \quad (5.11)$$

$$\text{Τέλος, αν ισχύει } C_{pmk} = 1 \Leftrightarrow |\mu - T| < \frac{USL-LSL}{8}. \quad (5.12)$$

Ο λόγος για τον οποίο υπερτερεί ο δείκτης C_{pmk} έναντι όλων των προγενέστερων δεικτών του είναι ότι είναι ο μόνος δείκτης ο οποίος συνδυάζει όλα τα στατιστικά δεδομένα μ , σ , T , USL και LSL . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι έχει περίπλοκο τύπο και έχει σαν αποτέλεσμα να δυσκολεύεται η εύρεση εκτιμητριών και συνεπώς και η εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης.

5.3. Υπάρχοντες δείκτες ικανότητας διεργασίας για απλά γραμμικά προφίλ

Οι Shahriari και Sarafian (2009) πρότειναν μια μέθοδο για ένα δείκτη ικανότητας διεργασίας για την παρακολούθηση ενός απλού γραμμικού

«προφίλ». Αυτοί θεώρησαν τη μεταβλητή απόκρισης ως ένα χαρακτηριστικό ποιότητας με κανονική κατανομή και γνωστά όρια προδιαγραφών. Ο C_{pk} της μεταβλητής απόκρισης υπολογίζεται σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής και έπειτα η ελάχιστη τιμή του C_{pk} θεωρείται ως ο δείκτης ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Οι Ebadi και Shahriari (2012) αντικατέστησαν τη μεταβλητή απόκρισης των Shahriari και Sarafian (2009) με μια προβλεπόμενη μεταβλητή απόκρισης σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής και έπειτα χρησιμοποίησαν ένα πολυπαραμετρικό δείκτη ικανότητας διεργασίας για να μετρήσουν την ικανότητα μιας διεργασίας. Αυτοί επίσης ανέφεραν πως ο ελάχιστος C_{pk} στα επίπεδα της επεξηγηματικής μεταβλητής οδηγεί σε ένα υποτιμημένο δείκτη ικανότητας διεργασίας. Έτσι, εκείνοι πρότειναν μια μέθοδο, στη μελέτη του Bothe (1997) όπου χρησιμοποιεί ένα ποσοστό μη συμμορφούμενων αντικειμένων. Μη συμμορφούμενα αντικείμενα είναι αυτά που έχουν μια ή περισσότερες μεταβλητές απόκρισης εκτός του εύρους ανοχής.

Οι Hosseinifard et al. (2011) συγκέντρωσαν το δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ» υπό την υπόθεση της μη-κανονικότητας της μεταβλητής απόκρισης. Αυτοί προσάρμοσαν μια Burr XII κατανομή στη μεταβλητή απόκρισης σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής και έπειτα χρησιμοποίησαν τη μέθοδο Clements (1989) για τον υπολογισμό του C_{pu} , C_{pl} και C_{pk} για τη μεταβλητή απόκρισης σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής. Κατά τη μέθοδο τους, ο δείκτης C_{pk} της μεταβλητής απόκρισης υπολογίζεται σε n επίπεδα της επεξηγηματικής μεταβλητής και έπειτα ο ελάχιστος δείκτης C_{pk} εισάγεται ως ο δείκτης ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ».

Οι Hosseinifard και Abbasi (2012) θεώρησαν τη μεταβλητή απόκρισης του απλού γραμμικού «προφίλ» ως ένα χαρακτηριστικό ποιότητας το οποίο θα έχει γνωστά σταθερά ή μεταβλητά όρια προδιαγραφών. Η μέθοδος τους για την επεξεργασία του δείκτη ικανότητας της μεταβλητής απόκρισης βασίζεται στο ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων. Οι δείκτες C_p και C_{pk}

βασιζόμενοι σε αυτήν τη μέθοδο υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$C_p = \frac{1}{6} [\Phi^{-1}(1 - P_U) - \Phi^{-1}(P_L)], \quad (5.13)$$

$$C_{pk} = \min \left[\frac{1}{3} \Phi^{-1}(1 - P_U), \frac{1}{3} \Phi^{-1}(1 - P_L) \right], \quad (5.14)$$

όπου P_U υπολογίζεται με τη βοήθεια της παρακάτω εξίσωσης:

$$P_U = 1 - \prod_{i=1}^n Pr(y_{ij} < USL_i), \quad (5.15)$$

σαν αποτέλεσμα της σχέσης:

$$P_U = 1 - \prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{USL_i - \mu_i}{\sigma} \right) \quad (5.16)$$

και P_L εκτιμάται μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$P_L = 1 - \prod_{i=1}^n Pr(y_{ij} > LSL_i). \quad (5.17)$$

Συνεπώς,

$$P_L = 1 - \prod_{i=1}^n \Phi \left(1 - \frac{LSL_i - \mu_i}{\sigma} \right), \quad (5.18)$$

όπου μ_i και σ στις παραπάνω εξισώσεις είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεταβλητής απόκρισης σε διαφορετικά επίπεδα της επεξηγηματικής μεταβλητής, αντίστοιχα. Τα USL_i και LSL_i είναι τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών για τη μεταβλητή απόκρισης στο i -οστό επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής. Αυτοί θεώρησαν n σταθερά σημεία σχεδιασμού εντός ενός απλού γραμμικού «προφίλ». Προφανώς, $P_{NC} = P_U + P_L$. Καθώς, το ποσοστό του ελαττωματικού προϊόντος, το P_{NC} παρέχει ένα απλό και συνοπτικό άθροισμα της ποιότητας διεργασίας που εύκολα καταλαβαίνεται.

Τρεις βασικές υποθέσεις για τους δείκτες ικανότητας διεργασίας ($C_p, C_{pk}, C_{pu}, C_{pl}, C_{pm}$) υπάρχουν:

- Η διεργασία υπό εξέταση πρέπει να είναι υπό έλεγχο και σταθερή.

- Τα συλλεγόμενα δεδομένα της διεργασίας πρέπει να είναι ανεξάρτητα και κατανεμημένα ισόνομα.
- Τα δεδομένα της διεργασίας που έχουν συλλεχθεί πρέπει να είναι κανονικά κατανεμημένα.

Οι Shahriari και Sarafian (2009) χρησιμοποίησαν τον παραδοσιακό ορισμό των δεικτών ικανότητας διεργασίας σε κάποια σημεία σχεδιασμού ώστε να προτείνουν το δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Ωστόσο, διαλέγοντας έναν ελάχιστο δείκτη ικανότητας διεργασίας μεταξύ των σημείων σχεδιασμού της επεξηγηματικής μεταβλητής παίρνουμε μια υποεκτιμημένη τιμή για το δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Οι Ebadi και Shahriari (2012) τροποποίησαν αυτήν τη μέθοδο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων του Bothe (1997). Ο μέσος όρος της αναλογίας των μη-συμμορφούμενων σε κάποια επίπεδα επεξηγηματικής μεταβλητής δεν μπορεί να προτείνει μια επαρκή εκτίμηση της αναλογίας των μη-συμμορφούμενων της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλο το εύρος των επεξηγηματικών μεταβλητών. Οι Ebadi και Shahriari (2012) αντικατέστησαν τη μεταβλητή απόκρισης με μια προβλεπόμενη μεταβλητή απόκρισης σε n σημεία σχεδιασμού και χρησιμοποίησαν πολυπαραγοντικούς δείκτες ικανότητας διεργασίας των n προβλεπόμενων μεταβλητών απόκρισης ως δείκτες ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Οι Hosseinifard et al. (2011) χρησιμοποίησαν τον ελάχιστο δείκτη ικανότητας μεταξύ των σημείων σχεδιασμού της επεξηγηματικής μεταβλητής που δίνει έναν υποεκτιμημένο δείκτη ικανότητας διασποράς παρόμοιο με του Shahriari και Sarafian (2009). Οι Hosseinifard και Abbasi (2012) πρότειναν μια μέθοδο βασισμένη στο ποσοστό των μη-συμμορφούμενων. Παρόμοια με τους Ebadi και Shahriari (2012), η μέθοδος από τους Hosseinifard και Abbasi (2012) δεν μπορεί να προτείνει μια κατάλληλη εκτίμηση της αναλογίας των μη-συμμορφούμενων της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλο το εύρος των επεξηγηματικών μεταβλητών.

Οι Ebadi και Amiri (2012) πρότειναν ένα δείκτη ικανότητας διεργασίας για ένα πολυπαραμετρικό απλό γραμμικό «προφίλ» βασιζόμενο στο ποσοστό των

μη-συμμορφούμενων αντικειμένων. Αυτοί ανέπτυξαν ένα πολυπαραμετρικό δείκτη ικανότητας διεργασίας για ένα πολυπαραμετρικό απλό γραμμικό «προφίλ» σαν μια δεύτερη μέθοδο. Τελικά, χρησιμοποίησαν την ανάλυση πρωταρχικών στοιχείων για να αναπτύξουν τον τρίτο δείκτη.

Παρακάτω, αναπτύσσεται μια μέθοδος για τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ», κατά την οποία όλα τα εύρη της επεξηγηματικής μεταβλητής χρησιμοποιούνται. Αυτή η προσέγγιση ακολουθεί τον παραδοσιακό ορισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας και προτείνει μια συναρτησιακή μορφή των δεικτών ικανότητας διεργασίας. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια αληθινή τιμή του δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ».

5.4. Προτεινόμενη προσέγγιση από τους Keshteli et al. (2014)

Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας C_p ορίζεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{UNTL - LNTL} = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad (5.19)$$

που είδαμε προηγουμένως και είναι μια σύγκριση μεταξύ των φυσικών ορίων ανοχής και των ορίων προδιαγραφών μιας διεργασίας. Σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ», $y = A_0 + A_1X$ είναι η γραμμή αναφοράς μιας διεργασίας, $a_0 + a_1x$ είναι ο υπο συνθήκη μέσος του y στο x και έτσι ο μ υπολογίζεται ως:

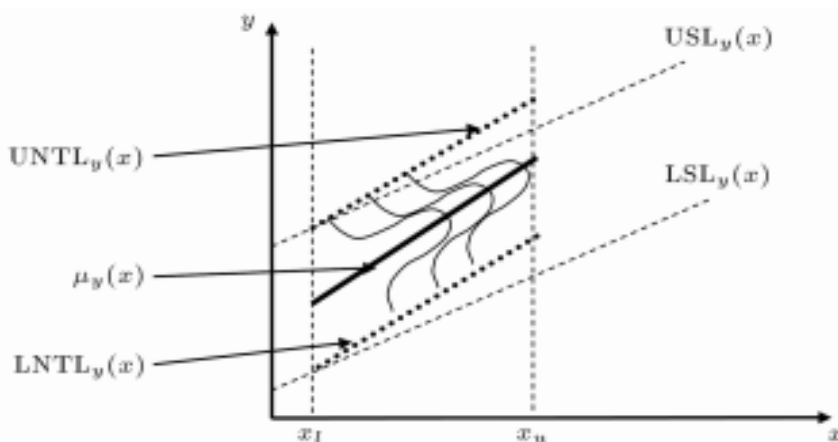
$$\mu = a_0 + a_1x. \quad (5.20)$$

Το y είναι μια τυχαία κανονική μεταβλητή με μέση τιμή $a_0 + a_1x$ και διασπορά σ^2 και α_0, α_1 είναι οι εκτιμήσεις των A_0 και A_1 , αντίστοιχα, οι οποίες υπολογίζονται ως $a_0 = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_{0j}}{k}$ και $a_1 = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_{1j}}{k}$ αντίστοιχα. Τα α_{0j} και α_{1j} είναι οι εκτιμώμενοι συντελεστές της τετμημένης και της κλίσης στο j -οστό δείγμα «προφίλ», αντίστοιχα.

Η διασπορά διεργασίας (σ^2) εκτιμάται χρησιμοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*mean squared error – MSE*) και υπολογίζεται ως $MSE = \frac{\sum_{j=1}^k MSE_j}{k}$, όπου MSE_j είναι η εκτίμηση της διασποράς στο j -οστό δείγμα «προφίλ». Ως εκ τούτου, μπορούμε να ορίσουμε τα $UNTL$ και $LNTL$ του y όπως φαίνεται παρακάτω:

$$UNTL_y = \mu + 3\sigma = a_0 + a_1x + 3\sigma, \quad (5.21)$$

$$LNTL_y = \mu - 3\sigma = a_0 + a_1x - 3\sigma. \quad (5.22)$$



Σχήμα 5.1: Η γραμμή αναφοράς, τα όρια προδιαγραφών και τα όρια φυσικής ανοχής για το απλό γραμμικό «προφίλ».

Είναι φανερό ότι τα $UNTL$ και $LNTL$ του y είναι δύο παράλληλες γραμμές όπου η απόσταση μεταξύ αυτών είναι ίση με 6σ . Όπως αναφέρεται παραπάνω, μ , $UNTL$ και $LNTL$ είναι συναρτήσεις του x δηλαδή

$$\mu_y(x) = a_0 + a_1x, \quad (5.23)$$

$$UNTL_y(x) = a_0 + a_1x + 3\sigma, \quad (5.24)$$

$$LNTL_y(x) = a_0 + a_1x - 3\sigma. \quad (5.25)$$

Υποθέτοντας ότι τα όρια προδιαγραφών του y είναι δύο συναρτήσεις των x , όπως αποκτώνται από τις δύο παρακάτω εξισώσεις:

$$USL_y(x) = a_{0u} + a_{1u}x, \quad (5.26)$$

$$LSL_y(x) = a_{0l} + a_{1l}x. \quad (5.27)$$

Τα $UNTL_y(x)$, $LNTL_y(x)$, $USL_y(x)$ και $LSL_y(x)$ είναι συναρτησιακές μορφές των $UNTL$, $LNTL$, USL και LSL , αντίστοιχα. Από την αντικατάσταση των συναρτησιακών μορφών των $UNTL$, $LNTL$, USL και LSL στον παραδοσιακό δείκτη που τον παρουσιάσαμε προηγουμένως, δηλαδή στον τύπο $P_L = 1 - \prod_{i=1}^n Pr(y_{ij} > LSL_i)$, η επόμενη εξίσωση υπολογίστηκε ως:

$$C_p(x) = \frac{USL_y(x) - LSL_y(x)}{UNTL_y(x) - LNTL_y(x)}, \quad x \in [x_l, x_u]. \quad (5.28)$$

Πράγματι, ο τύπος C_p ενός απλού γραμμικού «προφίλ» έχει μια συναρτησιακή μορφή, όπως φαίνεται και στην παραπάνω εξίσωση.

Με τη χρήση του $C_p(x)$ ως δείκτη ικανότητα διεργασίας του απλού γραμμικού «προφίλ», είναι δυνατή η αξιολόγηση της ικανότητας της διεργασίας σε κάθε επίπεδο του x . Η ικανότητα διεργασίας σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής προτείνει μια λεπτομερή πληροφόρηση της διεργασίας. Ωστόσο, είναι απαραίτητο να έχει μια μοναδική τιμή ο δείκτης ικανότητας διεργασίας για ένα απλό γραμμικό «προφίλ» σε όλα τα εύρη της επεξηγηματικής μεταβλητής προκειμένου να δώσει μια συνολική εικόνα για την ικανότητα διεργασίας. Για αυτό το σκοπό, συστήνεται να χρησιμοποιήσουμε την περιοχή που οριοθετείται μεταξύ $USL_y(x)$ και $LSL_y(x)$ για να υπολογίσουμε τη διαφορά $USL_y(x) - LSL_y(x)$ και επίσης την περιοχή που οριοθετείται μεταξύ $UNTL_y(x)$ και $LNTL_y(x)$ για να υπολογίσουμε τη διαφορά $UNTL_y(x) - LNTL_y(x)$. Ως εκ τούτου, προτείνεται η παρακάτω εξίσωση για να καθορίσει μια μοναδική τιμή για το δείκτη C_p για ένα απλό γραμμικό «προφίλ»:

$$C_p(profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [USL_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - LNTL_y(x)] dx}, \quad x \in [x_l, x_u], \quad (5.29)$$

όπου $UNTL_y(x)$ και $LNTL_y(x)$ είναι δύο παράλληλες γραμμές. Υποθέτουμε ότι $USL_y(x)$ και $LSL_y(x)$ είναι δύο παράλληλες ευθείες μιας και $USL_y(x) =$

$a_{0u} + \alpha'_1 x$ και $LSL_y(x) = a_{0l} + \alpha'_1 x$, όπου a_{0u} , a_{0l} και α'_1 είναι η τετμημένη του $USL_y(x)$, η τετμημένη του $LSL_y(x)$ και η κλίση και των δύο $USL_y(x)$ και $LSL_y(x)$, αντίστοιχα. Η απόσταση αυτών των δύο παράλληλων γραμμών μπορεί

να θεωρηθεί ως η διαφορά τους. Συνεπώς, είναι δυνατό να υπολογίσουμε το $C_p(profile)$ με τη βοήθεια της παρακάτω εξίσωσης: $C_p(profile) = \frac{a_{0u} - a_{0l}}{6\sigma}$. (5.30)

Παρόμοια, η συναρτησιακή μορφή του C_{pk} υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$C_{pk}(x) = \min \left\{ \frac{USL_y(x) - \mu_y(x)}{UNTL_y(x) - \mu_y(x)}, \frac{\mu_y(x) - LSL_y(x)}{\mu_y(x) - LNTL_y(x)} \right\}, \quad x \in [x_l, x_u]. \quad (5.31)$$

όπου $\mu_y(x)$ είναι η συνάρτηση της γραμμής αναφοράς. Ο δείκτης $C_{pk}(x)$ δίνει την τιμή του C_{pk} για ένα απλό γραμμικό «προφίλ» σε κάθε επίπεδο του x . Η παρακάτω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσει μια μοναδική τιμή για το C_{pk} για ένα απλό γραμμικό «προφίλ»:

$$C_{pk}(profile) = \min \left\{ \frac{\int_{x_l}^{x_u} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}, \frac{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL_y(x)] dx} \right\}, \quad x \in [x_l, x_u]. \quad (5.32)$$

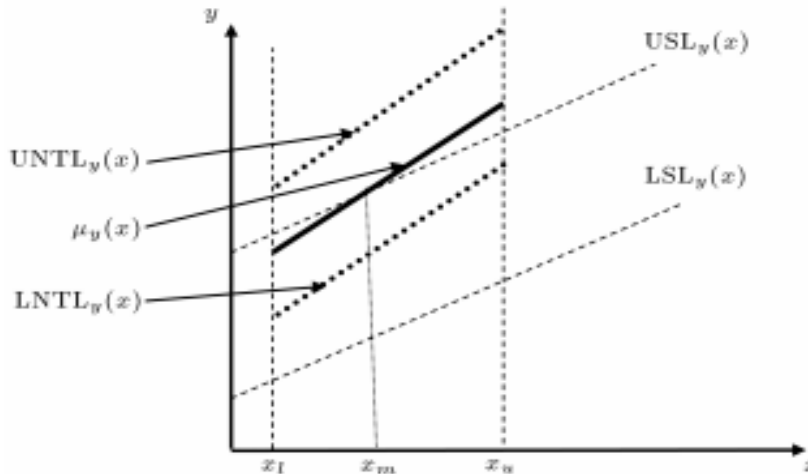
Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας C_{pk} , μόνο όταν το άνω και το κάτω συναρτησιακό όριο προδιαγραφών είναι διαθέσιμο, μπορεί να υπολογιστεί μέσω των παρακάτω εξισώσεων αντίστοιχα:

$$C_{pu}(profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}, \quad (5.33)$$

$$C_{pl}(profile) = \frac{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL_y(x)] dx}. \quad (5.34)$$

Είναι προφανές ότι το $\mu_y(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $LNTL_y(x)$ και μικρότερο από το $UNTL_y(x)$ σε κάθε περίπτωση ενός απλού γραμμικού «προφίλ». Ωστόσο, δεν υπάρχει μια προκαθορισμένη σχέση μεταξύ του $\mu_y(x)$ και του $USL_y(x)$, ή μεταξύ του $\mu_y(x)$ και του $LSL_y(x)$.

Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι το $USL_y(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $\mu_y(x)$ στο κλειστό διάστημα $[x_l, x_m]$ και μικρότερο από το $\mu_y(x)$ στο κλειστό διάστημα $[x_m, x_u]$.



Σχήμα 5.2: Μια ειδική περίπτωση όπου το $USL_y(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $\mu_y(x)$ στο $[x_l, x_m]$ και μικρότερο από το $\mu_y(x)$ στο $[x_m, x_u]$.

Έτσι, ο τύπος του C_{pk} μπορεί να αλλάξει σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$C_{pk}(profile) = \min \left\{ \frac{\int_{x_l}^{x_m} [USL_y(x) - \mu_y(x)] dx - \int_{x_m}^{x_u} [\mu_y(x) - USL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [UNTL_y(x) - \mu_y(x)] dx}, \frac{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LSL_y(x)] dx}{\int_{x_l}^{x_u} [\mu_y(x) - LNTL_y(x)] dx} \right\}. \quad (5.35)$$

Στην πραγματικότητα, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε το σημείο τομής μεταξύ του $\mu_y(x)$ και του $USL_y(x)$. Αν το σημείο τομής είναι εντός του $[x_l, x_m]$, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την περιοχή που οριοθετείται μεταξύ του $\mu_y(x)$ και του $USL_y(x)$ με ένα κατάλληλο σημείο. Αυτή η ανάλυση πρέπει να γίνει και για το $\mu_y(x)$ και το $LSL_y(x)$, επίσης.

Συμπερασματικά, αναπτύξαμε τους παραδοσιακούς δείκτες C_p και C_{pk} για τον υπολογισμό της ικανότητας μιας διεργασίας με ένα απλό γραμμικό «προφίλ» ενός χαρακτηριστικού ποιότητας. Να σημειωθεί ότι οι ερμηνείες για τους

αναπτυγμένους δείκτες είναι οι ίδιες όπως και για τους παραδοσιακούς, δηλαδή το ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων και για τα δύο, το μονοπαραμετρικό και για το «προφίλ» χαρακτηριστικού ποιότητας, είναι ίσο όταν οι τιμές των δεικτών ικανότητας διεργασίας για τα δύο χαρακτηριστικά ποιότητας είναι οι ίδιες. Με άλλα λόγια, η σχέση μεταξύ των τιμών των δεικτών ικανότητας διεργασίας για το «προφίλ» χαρακτηριστικού ποιότητας και το ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων είναι παρόμοια με τις παραδοσιακές καταστάσεις.

5.5. Επεξηγηματικά παραδείγματα και μελέτες σύγκρισης

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζονται τρία παραδείγματα για την αξιολόγηση της απόδοσης της προτεινόμενης μεθόδου σε σύγκριση με τη μέθοδο μη-συμμορφούμενου ποσοστού.

5.5.1. Παράδειγμα 1

Οι Hosseinifard και Abbasi (2012) χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των μη-συμμορφούμενων προϊόντων σε μια διεργασία παραγωγής γιαουρτιού. Η μεταβλητή απόκρισης σε αυτήν τη διαδικασία είναι το PH του μείγματος του γάλακτος και η επεξηγηματική μεταβλητή είναι ο χρόνος. Το εύρος της επεξηγηματικής μεταβλητής είναι $[0,4]$ ώρες. Αυτοί χρησιμοποίησαν δύο παράλληλες γραμμές για το άνω όριο προδιαγραφών (USL) και το κάτω όριο προδιαγραφών (LSL), που ορίζονται ως $USL = 6.1 - 0.4x$ και $LSL = 5.85 - 0.4x$. Η υπολογισμένη γραμμή αναφοράς είναι $y = 5.98 - 0.39x$, όπου $MSE = 0.06$. Οι εξισώσεις (5.16) και (5.18) χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό των $P_u = 0.019$ και $P_l = 1$, αντίστοιχα. Ο δείκτης $C_p = 1.22$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση $C_p = \frac{1}{6} [\Phi^{-1}(1 - P_u) - \Phi^{-1}(P_l)] = 1.22$.

Υπάρχουν δύο παράλληλες γραμμές σαν όρια προδιαγραφών, έτσι η εξίσωση (5.30) δίνει το δείκτη C_p ως εξής:

$$C_p(\text{profile}) = \frac{\alpha_{ou} - \alpha_{ol}}{6\sigma} = \frac{6.1 - 5.85}{6\sqrt{0.06}} = 0.17.$$

Η απόσταση μεταξύ των παράλληλων γραμμών, USL και LSL , είναι προφανώς λιγότερη από την απόσταση των παράλληλων γραμμών, $UNTL$ και $LNTL$. Έτσι, ο C_p του y είναι λιγότερος από τη μονάδα σε κάθε επίπεδο του x . Το συμπέρασμα αυτού του αποτελέσματος είναι ότι ο $C_p(\text{profile})$ πρέπει να είναι μικρότερος από τη μονάδα. Στην πραγματικότητα, ο δείκτης C_p του y σε κάθε επίπεδο του x είναι ίσος με τη σταθερή τιμή 0.17. Συνεπώς, δεν είναι δυνατό να έχουμε $C_p = 1.22$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αυτή η νέα μέθοδος οδηγεί σε πιο ακριβή τιμή του δείκτη ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ» προτιμότερη από της μη-συμμορφούμενης μεθόδου. Οι $C_{pl}(\text{profile})$, $C_{pu}(\text{profile})$ και $C_{pk}(\text{profile})$ για αυτήν τη διεργασία υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$C_{pl}(\text{profile}) = \frac{\int_0^4 [(5.98 - 0.39x) - (5.85 - 0.4x)] dx}{\int_0^4 [(5.98 - 0.39x) - (5.26 - 0.39x)] dx} = 0.2,$$

$$C_{pu}(\text{profile}) = \frac{\int_0^4 [(6.1 - 0.4x) - (5.98 - 0.39x)] dx}{\int_0^4 [(6.72 - 0.39x) - (5.98 - 0.39x)] dx} = 0.136,$$

$$C_{pk}(\text{profile}) = \min\{C_{pl}(\text{profile}), C_{pu}(\text{profile})\} = 0.136.$$

5.5.2. Παράδειγμα 2

Οι Hosseinifard και Abbasi (2012) παρουσίασαν ένα παράδειγμα για την αξιολόγηση του C_{pu} σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ», όπου $y = 3 + 2x$, $USL = 6 + 2x$, $MSE = 1$ και η αληθινή τιμή του C_{pu} είναι ίση με 1. Το εύρος του x είναι [2,8]. Αυτοί χρησιμοποίησαν μια μέθοδο ποσοστού μη συμμορφούμενων προϊόντων για τον υπολογισμό του C_{pu} σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ» για τρία σενάρια, που είναι για $n = 40$, $n = 100$,

$n = 1000$. Οι υπολογισμένες μέσες τιμές του C_{pu} για 1000 επαναλήψεις είναι 0.9851, 0.9823 και 0.9972, αντίστοιχα. Μελέτες προσομοίωσης δείχνουν ότι η τυπική απόκλιση του C_{pu} μειώνεται αν έχουμε μια αύξηση στο n .

Τώρα, χρησιμοποιούμε τη νέα μας μέθοδο για εκτίμηση του C_{pu} σε αυτό το παράδειγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (5.27) για τον υπολογισμό του C_{pu} ως:

$$C_{pu}(profile) = \frac{\int_2^8 [(6 + 2x) - (3 + 2x)] dx}{\int_2^8 [(6 - 2x) - (3 - 2x)] dx} = 1.$$

Αυτό δείχνει ότι η νέα μέθοδος είναι μια ακριβής μέθοδος, επειδή αυτή υπολογίζει την αληθινή τιμή του C_{pu} . Επίσης, η νέα μέθοδος δεν έχει ευαισθησία στο n . Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η νέα προσέγγιση είναι πιο ακριβής και σταθερή συγκριτικά με τη μέθοδο του μη συμμορφούμενου ποσοστού.

5.5.3. Παράδειγμα 3

Σε αυτό το παράδειγμα η γραμμή αναφοράς του «προφίλ» έχει ένα σημείο τομής με τη γραμμή του άνω ορίου προδιαγραφών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα απλό γραμμικό «προφίλ», όπου $USL = 6 + x$, $LSL = 2 + x$, $y = 4 + 1.5x$, $MSE = 1$. Υποθέτουμε ότι $[2,8]$ είναι το εύρος των τιμών του x . Ο στόχος είναι ο καθορισμός του C_{pk} . Υπάρχει ένα σημείο τομής μεταξύ του $USL = 6 + x$ και του $y = 4 + 1.5x$, που αυτό είναι το $x = 4$. Στην πραγματικότητα, το $USL = 6 + x$ είναι μεγαλύτερο από το $y = 4 + 1.5x$ στο $[2,4]$, αλλά αυτό είναι μικρότερο από το $y = 4 + 1.5x$ στο $[4,8]$. Οι δείκτες $C_{pl}(profile)$, $C_{pu}(profile)$ και $C_{pk}(profile)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$C_{pl}(profile) = \frac{\int_2^8 [(4+1.5x)-(2+x)] dx}{\int_2^8 [(4+1.5x)-(1+1.5x)] dx} = 1.5,$$

$$C_{pu}(profile) = \frac{\int_2^4 [(6+x)-(4+1.5x)] dx - \int_4^8 [(4+1.5x)-(6+x)] dx}{\int_2^8 [(7+1.5x)-(4+1.5x)] dx} = -0.167,$$

$$C_{pk}(profile) = \min\{C_{pl}(profile), C_{pu}(profile)\} = -0.167.$$

Είναι προφανές ότι όταν το μ είναι μεγαλύτερο από το USL σε ένα εύρος x -τιμών, θα πρέπει να αναμένουμε αρνητικές τιμές στο δείκτη ικανότητας διεργασίας.

5.5.4. Συμπεράσματα

Αυτή η νέα προτεινόμενη προσέγγιση από τους Keshteli et al. (2014) ορίζει τους δείκτες ικανότητας διεργασίας ως μια συνάρτηση της επεξηγηματικής μεταβλητής. Αυτοί οι δείκτες μπορούν να υπολογίσουν την ικανότητα της διεργασίας σε κάθε επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής. Επιπλέον, η οριοθετημένη περιοχή μεταξύ της μέσης τιμής, των ορίων προδιαγραφών και των φυσικών ορίων ανοχής χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό μιας μοναδικής τιμής των δεικτών ικανότητας διεργασίας για ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Με τη χρήση αυτής της ιδέας, οι παραδοσιακοί δείκτες C_p και C_{pk} γενικεύονται για τον υπολογισμό των δεικτών ικανότητας διεργασίας σε ένα απλό γραμμικό «προφίλ». Η απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου αξιολογείται μέσω τριών αριθμητικών παραδειγμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν πιο ακριβή απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου σε σύγκριση με την παραδοσιακή μέθοδο του μη συμμορφούμενου ποσοστού. Η προτεινόμενη συναρτησιακή προσέγγιση μπορεί να αναπτυχθεί και για άλλους τύπους «προφίλ», όπως είναι τα πολυωνυμικά «προφίλ» και τα πολλαπλά γραμμικά «προφίλ».

Κεφάλαιο 6^ο

Δείκτες ικανότητας διεργασίας για Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης

6.1. Εισαγωγή

Σε πολλές εφαρμογές η ποιότητα μιας διεργασίας ή ενός προϊόντος χαρακτηρίζεται από μια σχέση μεταξύ μιας μεταβλητής απόκρισης και μιας ή περισσότερων επεξηγηματικών μεταβλητών. Από την άλλη πλευρά, για μια εντός ελέγχου διεργασία, οι δείκτες ικανότητας είναι ένα κριτήριο για βελτίωση της ποιότητας διεργασίας που επιτρέπει την επίτευξη των προσδοκιών του πελάτη. Τα τελευταία χρόνια, ο έλεγχος «προφίλ» έχει εκτεταμένα μελετηθεί υπό κανονική μεταβλητή απόκρισης, αλλά αξίζει προσοχής και το «προφίλ» με μη-κανονική μεταβλητή απόκρισης. Εδώ συγκεκριμένα, εστιάζουμε σε δυαδική μεταβλητή απόκρισης που ακολουθεί μια διωνυμική κατανομή εξαιτίας των εφαρμογών της σε πολλά πεδία των επιστημών. Τέτοια «προφίλ» είναι γνωστά ως «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Παρακάτω παρουσιάζονται οι δύο μέθοδοι που προτείνονται από τους Rezaye Abbasi Charkhi et al. (2016) για τη μέτρηση της ικανότητας της διεργασίας όταν η ποιότητα μιας διεργασίας χαρακτηρίζεται από ένα «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Επιπλέον, προτείνεται και ένας νέος S_{pmk} δείκτης για τη μέτρηση της ικανότητας διεργασίας όταν η ποιότητα της διεργασίας χαρακτηρίζεται από ένα «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης καθώς και ένα προσεγγιστικό $(1 - \alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης βασισμένο στην ποσοστιαία «bootstrap» μέθοδο. Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειωθεί ότι στο «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης, μια συνάρτηση σύνδεσης συσχετίζει τη μέση τιμή μιας μεταβλητής απόκρισης με τις επεξηγηματικές μεταβλητές.

Υπάρχουν πολλά είδη συνάρτησης σύνδεσης στη βιβλιογραφία των μεθόδων λογιστικής παλινδρόμησης, όπως για παράδειγμα «Logit», «Probit», «cloglog» (*complementary log-log*), που η εφαρμογή τους έχει επίδραση στην επίδοση του T^2 διαγράμματος ελέγχου για τον έλεγχο των παραμέτρων ενός λογιστικού «προφίλ». Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως γίνεται η εκτίμηση παραμέτρων σε ένα λογιστικό «προφίλ». Όταν οι παρατηρήσεις υποθέτουμε ότι είναι κανονικές, η μέθοδος που ονομάζεται «μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων» (*LSE*) μπορεί να εφαρμοσθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός «προφίλ». Αλλά για την περίπτωση που η μεταβλητή απόκρισης ακολουθεί μια κατανομή Bernoulli, η προαναφερθείσα μέθοδος οδηγεί σε αμερόληπτους εκτιμητές, οι οποίοι δεν έχουν ελάχιστη διασπορά. Γι' αυτό η μέθοδος εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας (*MLE*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την περίπτωση.

6.2. Προφίλ Λογιστικής Παλινδρόμησης

Σε αυτό το σημείο αξίζει να υπενθυμίσουμε κάποια πράγματα για το μοντέλο της λογιστικής παλινδρόμησης. Πρώτα από όλα είναι ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων κατά τα οποία η μεταβλητή απόκρισης ακολουθεί διωνυμική κατανομή.

Θεωρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων $\{x_i, y_{ij}\}_{i=1}^n$ όπου $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{ip})^T$ και y_{ij} είναι οι j -οστές δυαδικές μεταβλητές απόκρισης στο i -οστό επίπεδο της επεξηγηματικής μεταβλητής. Η πιθανότητα της επιτυχίας y_{ij} ισούται με π_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ όπου m είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων της μεταβλητής Bernoulli σε κάθε επίπεδο και έχει $E(y_{ij}) = \mu_i = \pi_i$ και $Var(y_{ij}) = \pi_i(1 - \pi_i)$. Έστω $\pi_i = \pi(x_i)$, αφού η πιθανότητα μιας Bernoulli διεργασίας είναι μια συνάρτηση των x_i . Στο μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης υπάρχουν διαφορετικά είδη συναρτήσεων σύνδεσης τα οποία αναπαριστούν τη σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και της/των ανεξάρτητης/-ων μεταβλητής/-ων. Συνήθως, η

συνάρτηση σύνδεσης του $logit\ g(\pi_i)$ χρησιμοποιείται για τη λογιστική παλινδρόμηση ως ακολούθως:

$$g(\pi_i) = \log \frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}, \quad (6.1)$$

όπου $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^T$ είναι το διάνυσμα παραμέτρων του μοντέλου στο οποίο τα β_i είναι πραγματικοί αριθμοί. Όταν η μεταβλητή απόκρισης είναι δυαδική, εμπειρικές παρατηρήσεις αποκαλύπτουν ότι η συνάρτηση απόκρισης είναι μια μη-γραμμική, μορφής «s»-σχήματος. Αυτή η συνάρτηση καλείται λογιστική παλινδρόμηση και ορίζεται ως:

$$\pi_i = \frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)}. \quad (6.2)$$

Η περισσότερο επικρατούσα μέθοδος για την εκτίμηση των παραμέτρων στο μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης είναι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας.

6.3. Καθορισμός δείκτη ικανότητας διεργασίας για Λογιστικό Προφίλ με τη βοήθεια δύο μεθόδων

Υπάρχουν δύο μέθοδοι για τον καθορισμό δεικτών ικανότητας διεργασίας για «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης που προτείνονται από τους Rezayee Abbasi Charkhi et al. (2016). Η Μέθοδος I ασχολείται με τον καθορισμό των δεικτών ικανότητας διεργασίας για συγκεκριμένα σταθερά επίπεδα επεξηγηματικής μεταβλητής. Η Μέθοδος II καθορίζει τους δείκτες ικανότητας διεργασίας για ολόκληρο το φάσμα των ανεξάρτητων μεταβλητών.

6.3.1. Μέθοδος I : Προτεινόμενος διακριτός δείκτης ικανότητας διεργασίας

Ο Castagliola (1996) πρότεινε μια μέθοδο για την εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας για μη κανονικά δεδομένα. Αυτός επεξήγησε πως να γίνει χρήση μιας Burr κατανομής για την εκτίμηση μιας αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και κατά συνέπεια για τον υπολογισμό του ποσοστού των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων. Επίσης, οι Hosseinifard και Abbasi (2012) χρησιμοποίησαν την ίδια προσέγγιση για τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας για μη-κανονικά «προφίλ». Ο προτεινόμενος δείκτης είναι ο εξής:

$$C_{P(Y_i)} = \frac{1}{3} \Phi^{-1} \left[0.5 + 0.5 \left(F_{Y_i}(USL) - F_{Y_i}(LSL) \right) \right], \quad (6.3)$$

όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη αθροιστική κατανομή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής. Τα USL και LSL είναι τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών, αντίστοιχα, και $F_{Y_i}(x)$ η cdf του «προφίλ». Να σημειωθεί ότι η παραπάνω εξίσωση υπολογίζει δείκτες ικανότητας διεργασίας για κάθε επίπεδο. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιεί συναρτήσεις αθροιστικής κατανομής και υπολογίζει το ποσοστό των συμμορφούμενων προϊόντων ως $(F_{Y_i}(USL) - F_{Y_i}(LSL))$. Παρόμοια, έχουμε και το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Ως εκ τούτου, οι δείκτες ικανότητας διεργασίας για τα «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης θα καθοριστούν για κάθε επίπεδο από την ακόλουθη εξίσωση:

$$C_{P(Y_i)} = \frac{1}{3} \Phi^{-1} [0.5 + 0.5(1 - \pi_i)], \quad (6.4)$$

όπου το π_i δίνεται από την (6.2).

Μετά τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας για κάθε επίπεδο της ανεξάρτητης μεταβλητής, το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση χρησιμοποιώντας το δείκτη ικανότητας διεργασίας για κάθε επίπεδο:

$$P_{Profile} = 1 - \prod_{i=1}^n (2\Phi(3C_{P(Y_i)}) - 1). \quad (6.5)$$

Η προαναφερθείσα εξίσωση αποδεικνύεται μέσω του παρακάτω σκεπτικού:

$$P_{Profile} = Pr(\cup_{i=1}^n (Y_i < LSL, Y_i > USL)), \quad (6.6)$$

$$P_{Profile} = 1 - Pr(\cap_{i=1}^n (LSL < Y_i < USL)). \quad (6.7)$$

Επειδή οι μεταβλητές απόκρισης (Y_i) είναι ανεξάρτητες σε κάθε επίπεδο των επεξηγηματικών μεταβλητών, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$P_{Profile} = 1 - \prod_{i=1}^n [Pr(LSL < Y_i < USL)]. \quad (6.8)$$

Στη συνέχεια, έχουμε ότι

$$P_{Profile} = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - Pr(Y_i < LSL, Y_i > USL)]. \quad (6.9)$$

Επειδή $Pr(Y_i < LSL, Y_i > USL)$ είναι η πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων σε κάθε επίπεδο, συμπεραίνουμε ότι

$$P_{Profile} = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - \pi_i]. \quad (6.10)$$

Αν στην παραπάνω σχέση αντικαταστήσουμε το π_i με το $[2\Phi(3C_{P(Y_i)}) - 1]$, που προκύπτει από την προαναφερθείσα εξίσωση που υπενθυμίζεται στη συνέχεια

$$C_{P(Y_i)} = \frac{1}{3} \Phi^{-1}[0.5 + 0.5(1 - \pi_i)], \quad (6.11)$$

οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση που θέλαμε άλλωστε να αποδείξουμε

$$P_{Profile} = 1 - \prod_{i=1}^n (2\Phi(3C_{P(Y_i)}) - 1). \quad (6.12)$$

Συνεπώς, τώρα ο γενικός δείκτης ικανότητας διεργασίας ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση, χρησιμοποιώντας το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων:

$$C_{P(profile)} = \frac{1}{3} \Phi^{-1}[0.5 + 0.5(1 - P_{Profile})]. \quad (6.13)$$

6.3.2. Μέθοδος II : Προτεινόμενος συνεχής δείκτης ικανότητας διεργασίας

Ένας περιορισμός στη Μέθοδο I είναι ότι δεν χρησιμοποιεί την εξίσωση «προφίλ» σε όλο το εύρος των ανεξάρτητων μεταβλητών. Αυτό κυρίως εστιάζει στα σημεία σχεδιασμού για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Σε αυτήν την περίπτωση, κάποιο μέρος των δεδομένων από τα δείγματα «προφίλ» χάνονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια της ακρίβειας για τον υπολογισμένο δείκτη.

Λόγω των δοσμένων εξισώσεων που παρουσιάζονται στη Μέθοδο I, είναι αρκετά εύκολος ο υπολογισμός του ολικού ποσοστού των μη-συμμορφούμενων αντικείμενων για μια διεργασία σε μια συνεχή κατάσταση.

Δηλαδή για την απόδειξη του δείκτη ικανότητας διεργασίας υπό συνεχείς καταστάσεις θα στηριχτούμε στον τύπο του $P_{Profile}$ που αποδείξαμε προηγουμένως στη διακριτή κατάσταση.

Για τον υπολογισμό του ολικού ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων για το λογιστικό «προφίλ» θα υπολογίσουμε το φυσικό λογάριθμο στα δύο μέλη του συμπληρώματος της εξίσωσης του $P_{Profile}$, που αποδείξαμε προηγουμένως στη διακριτή κατάσταση, στο εύρος της επεξηγηματικής μεταβλητής, η οποία ορίζεται ως « i ». Σαν αποτέλεσμα, εμείς θα έχουμε

$$P_{profile}^c = \prod_{i=1}^n [1 - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}]. \quad (6.14)$$

Παίρνοντας το λογάριθμο και από τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\ln(P_{profile}^c) = \ln[\prod_{i=1}^n [1 - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}]]. \quad (6.15)$$

Απλοποιώντας την παραπάνω έχουμε

$$\ln(P_{profile}^c) = \sum_{i=1}^n \ln[1 - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}]. \quad (6.16)$$

Επειδή είναι συνεχής, το άθροισμα θα γίνει ολοκλήρωμα. Γι' αυτό

$$\ln(P_{profile}^c) = \int_{i=1}^n \ln[1 - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}] dx. \quad (6.17)$$

Παίρνοντας το εκθετικό και στα δύο μέλη έχουμε

$$P_{profile}^c = e^{\int_{i=1}^n \ln[1-e^{\beta_0+\beta_1 x_i}] dx} \quad (6.18)$$

Τελικά, η πιθανότητα για ελαττωματικά αντικείμενα υπολογίζεται ως:

$$P_{Profile} = 1 - e^{\int_{i=1}^n \ln[1-e^{\beta_0+\beta_1 x_i}] dx} \quad (6.19)$$

Έτσι λοιπόν αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στην εξίσωση $C_{P(Y_i)} = \frac{1}{3} \Phi^{-1}[0.5 + 0.5(1 - P_{Profile})]$ θα πάρουμε το δείκτη ικανότητας διεργασίας υπό μια συνεχή κατάσταση.

6.3.3. Αξιολόγηση απόδοσης

Σε αυτήν την ενότητα, η απόδοση των προτεινόμενων μεθόδων αξιολογείται μέσω μελέτης προσομοίωσης στο στατιστικό πακέτο *R*. Γι' αυτό το σκοπό θεωρούμε ένα λογιστικό προφίλ. Το συγκεκριμένο εντός ελέγχου λογιστικό μοντέλο περιλαμβάνει εννιά επίπεδα επεξηγηματικών μεταβλητών και τις σταθερές τιμές των επεξηγηματικών μεταβλητών που ισούνται με $\log(0.1)$, $\log(0.2)$, $\log(0.3)$, $\log(0.4)$, $\log(0.5)$, $\log(0.6)$, $\log(0.7)$, $\log(0.8)$ και $\log(0.9)$ όπου το λογιστικό προφίλ παλινδρόμησης ορίζεται ως :

$$\pi_i = \frac{e^{(3+2x_i)}}{1 + e^{(3+2x_i)}}$$

Οι αριθμοί παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο ισούνται με 25, 50, 100 και 1000 στις μελέτες προσομοίωσης. Ακόμα, 1000 εκτελέσεις προσομοίωσης χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας. Η διαδικασία προσομοίωσης γίνεται ως εξής: αρχικά, το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων υπολογίζεται σε κάθε επίπεδο. Έπειτα παράγονται διωνυμικοί τυχαίοι αριθμοί. Αυτοί οι τυχαίοι αριθμοί ακολουθούν μια διωνυμική κατανομή με παραμέτρους που λαμβάνονται στο πρώτο βήμα. Αυτό το βήμα επαναλαμβάνεται 1000 φορές. Στη συνέχεια, μια λογιστική

παλινδρόμηση προσαρμόζεται στα δεδομένα, συμπεριλαμβανομένου τις x και τις y τιμές. Το αποτέλεσμα είναι 1000 προφίλ. Έπειτα, το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων υπολογίζεται σε κάθε επίπεδο για κάθε προφίλ. Ακολούθως, το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων για κάθε επίπεδο καθορίζεται. Ως εκ τούτου, οι δείκτες ικανότητας διεργασίας υπολογίζονται για κάθε επίπεδο και μετά το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων για κάθε προφίλ λαμβάνεται. Τέλος, ο συνολικός δείκτης ικανότητας διεργασίας για κάθε προφίλ υπολογίζεται και η μέση τιμή του αναφέρεται.

Τα αποτελέσματα των υπολογισμένων δεικτών ικανότητας διεργασίας του παραδείγματος με βάση τη μέθοδο I και τη μέθοδο II παρουσιάζονται στους πίνακες 6.1 και 6.2 αντίστοιχα.

Πίνακας 6.1: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο I.

| m | C_p | \hat{C}_p |
|------|--------|-------------|
| 25 | 0.0802 | 0.08124 |
| 50 | 0.0802 | 0.08081 |
| 100 | 0.0802 | 0.08055 |
| 1000 | 0.0802 | 0.08029 |

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο II.

| m | C_p | \hat{C}_p |
|------|---------|-------------|
| 25 | 0.00046 | 0.000466 |
| 50 | 0.00046 | 0.000463 |
| 100 | 0.00046 | 0.000462 |
| 1000 | 0.00046 | 0.000460 |

Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι οι προτεινόμενες μέθοδοι για τον υπολογισμό των δεικτών ικανότητας διεργασίας μπορούν αποτελεσματικά να εκτιμήσουν τους δείκτες ικανότητας διεργασίας για προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Επιπλέον, όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο αυξηθεί, η απόδοση του προτεινόμενου δείκτη βελτιώνεται. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο επηρεάζει την εκτίμηση των δεικτών ικανότητας διεργασίας. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, επειδή η τιμή των δεικτών ικανότητας διεργασίας είναι μικρότερη από τη μονάδα, συμπεραίνουμε ότι η διεργασία είναι ανίκανη να ικανοποιήσει τις προσδοκίες των πελατών.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι σε μια συνεχή κατάσταση, το ποσοστό των ολικών ελαττωματικών αντικειμένων για ένα προφίλ είναι αρκετά υψηλότερο από το ποσοστό των ολικών ελαττωματικών αντικειμένων για συγκεκριμένα επίπεδα. Ως ένα αποτέλεσμα, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας σε μια συνεχή κατάσταση είναι φυσικά χαμηλότερος.

6.3.4. Μια πραγματική περίπτωση

Στην ενότητα αυτή, μια πραγματική περίπτωση από τους Saghaei et al. (2012) διερευνάται για να απεικονίσει εφαρμογές για τους προτεινόμενους δείκτες ικανότητας διεργασίας. Αυτή η περίπτωση είναι για τη διαμόρφωση μιας μηχανής πιεστηρίου, στην οποία η σχέση μεταξύ του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων και της ταχύτητας του πιεστηρίου διαμορφώνεται μέσω ενός προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης, όπως προαναφέρθηκε και στο 4^ο Κεφάλαιο. Τα αποτελέσματα των παρατηρήσεων παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1, που παρουσιάστηκε παραπάνω και με βάση αυτά τα δεδομένα του πίνακα εκτιμήθηκαν οι παράμετροι, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton-Raphson. Έτσι λοιπόν, το λογιστικό μοντέλο παλινδρόμησης είναι:

$$\pi_i = \frac{e^{(5.702-1.174x_i)}}{1 + e^{(5.702-1.174x_i)}}$$

Τα αποτελέσματα λήφθηκαν για τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας στο παράδειγμα και δίνονται στον πίνακα 6.3 που ακολουθεί.

Πίνακας 6.3: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο I για πραγματική περίπτωση.

| m | C_p | \hat{C}_p |
|------|--------|-------------|
| 25 | 0.0065 | 0.00658 |
| 50 | 0.0065 | 0.00655 |
| 100 | 0.0065 | 0.00653 |
| 1000 | 0.0065 | 0.00651 |

Τα αποτελέσματα για το δείκτη ικανότητας διεργασίας για το λογιστικό προφίλ παλινδρόμησης σε πραγματική περίπτωση με βάση τη μέθοδο II παρουσιάζονται στον πίνακα 6.4.

Πίνακας 6.4: Αποτελέσματα προσομοιώσεων του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας με βάση τη μέθοδο II για πραγματική περίπτωση.

| m | C_p | \hat{C}_p |
|------|----------|-------------|
| 25 | 0.000042 | 0.0000425 |
| 50 | 0.000042 | 0.0000423 |
| 100 | 0.000042 | 0.0000422 |
| 1000 | 0.000042 | 0.0000420 |

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας για συνεχή κατάσταση είναι φυσικά χαμηλότερος από το δείκτη που υπολογίστηκε υπο συγκεκριμένα επίπεδα της ανεξάρτητης μεταβλητής.

6.3.4. Σύγκριση των δύο μεθόδων

Στη μέθοδο I, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας υπολογίστηκε πρώτα για καθορισμένα επίπεδα. Έπειτα, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας για κάθε επίπεδο καθορίστηκε από τον υπολογισμό του ποσοστού των μη συμμορφούμενων αντικειμένων για το προφίλ. Στο επόμενο βήμα, το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων χρησιμοποιήθηκε για να εκτιμήσει το δείκτη ικανότητας διεργασίας.

Στη μέθοδο II, ο δείκτης ικανότητας διεργασίας υπολογίστηκε για όλα τα επίπεδα υπό μια συνεχή κατάσταση. Ως εκ τούτου, το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων για τα προφίλ υπολογίστηκε πρώτα σε μια συνεχή κατάσταση και έπειτα το ποσοστό για το σύνολο των μη συμμορφούμενων αντικειμένων λήφθηκε. Η απόδοση των προτεινόμενων μεθόδων αξιολογείται μέσω μελέτης προσομοίωσης και μιας πραγματικής περίπτωσης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι και οι δύο μέθοδοι συμπεριφέρονται καλά. Ωστόσο, η δεύτερη μέθοδος παρέχει πιο ακριβή αποτελέσματα επειδή αυτή θεωρεί ολόκληρο το σύνολο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής υπο συνεχείς καταστάσεις.

Μέχρι στιγμής θεωρήθηκε μόνο ο δείκτης C_p για την αξιολόγηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας στο προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης.

6.4. Καθορισμός του δείκτη ικανότητας S_{pmk} για το Λογιστικό Προφίλ

Οι Chen και Ding (2001) πρότειναν ένα νέο δείκτη ικανότητας διεργασίας υπό μη-κανονική κατανομή. Ο προτεινόμενος δείκτης είναι ο ακόλουθος:

$$S_{pmk} = \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{1+F(USL)-F(LSL)}{2}\right)}{3\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} = \frac{\Phi^{-1}\left(1-\frac{P}{2}\right)}{3\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \quad (6.20)$$

όπου $F(x)$ δηλώνει την αθροιστική κατανομή της διεργασίας, μ και σ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της διεργασίας, αντίστοιχα, και T είναι η τιμή στόχος. Τα USL και LSL είναι τα άνω και κάτω όρια προδιαγραφών, αντίστοιχα. Επιπλέον, Φ^{-1} είναι η αντίστροφη αθροιστική κατανομή της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και P το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων.

Βασιζόμενοι στον παραπάνω τύπο για το δείκτη, θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας του «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Θεωρούμε μια διεργασία στην οποία η σχέση μεταξύ της μεταβλητής απόκρισης και των επεξηγηματικών μεταβλητών περιγράφονται από «προφίλ» λογιστικής παλινδρόμησης. Το ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων σε κάθε επίπεδο, το οποίο ισούται με το μέσο του «προφίλ», υπολογίζεται με τη χρήση της εξίσωσης $\pi_i = \frac{\exp(x_i^T \beta)}{1 + \exp(x_i^T \beta)}$.

Υποθέτουμε ότι οι τιμές απόκρισης ακολουθούν διωνυμική κατανομή. Σαν αποτέλεσμα, έχουμε ότι:

$$\pi_i = P_{(y(i))}, \quad (6.21)$$

$$E_{(y(i))} = \mu_i = mP_{(y(i))}, \quad (6.22)$$

$$Var_{(y(i))} = mP_{(y(i))} (1 - P_{(y(i))}), \quad (6.23)$$

όπου $P_{(y(i))}$ δηλώνει το ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων σε κάθε επίπεδο. Ένας νέος δείκτης ικανότητας διεργασίας S_{pmk} για κάθε επίπεδο προτείνεται σύμφωνα με τον τύπο των Rezaye Abbasi Charkhi et al. (2015):

$$S_{pmk}(y(i)) = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{P(y(i))}{2}\right)}{\sqrt{3 \frac{\left(mP(y(i))^{-T}(y(i))\right)^2}{1 + \frac{\left(mP(y(i))^{-T}(y(i))\right)^2}{mP(y(i))(1-P(y(i)))}}}} \quad (6.24)$$

Μετά τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας σε κάθε επίπεδο, το συνολικό ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων πρέπει να υπολογιστεί. Σύμφωνα με τους Wang (2014) και Wang και Guo (2014), το συνολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$P_{profile} = \frac{\sum_{i=1}^n P(y_i)}{n}. \quad (6.25)$$

Τώρα, ο συνολικός δείκτης ικανότητας διεργασίας καθορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση χρησιμοποιώντας το συνολικό ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων:

$$S_{pmk} = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{P_{(profile)}}{2}\right)}{\sqrt[3]{1 + \frac{(nP_{(profile)} - T_{(profile)})^2}{nP_{(profile)}(1 - P_{(profile)})}}}. \quad (6.26)$$

όπου $P_{(profile)}$ είναι το συνολικό ποσοστό των μη-συμμορφούμενων αντικειμένων, $nP_{(profile)}$, $nP_{(profile)}(1 - P_{(profile)})$ είναι η μέση τιμή και η διασπορά του «προφίλ», αντίστοιχα, και $T_{(profile)}$ είναι η τιμή στόχος του «προφίλ» που είναι ο μέσος αριθμός των ελαττωματικών αντικειμένων βαιζόμενος στις προσδοκίες του πελάτη.

Από την άλλη πλευρά, στις καταστάσεις μηχανικών το ενδιαφέρον έγκειται στην αξιολόγηση του διαστήματος εμπιστοσύνης της απόδοσης διεργασίας. Να σημειωθεί ότι στις κατασκευές ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την ικανότητα διεργασίας, μια αρχική υπόθεση για την κατανομή ενός δοσμένου πληθυσμού απαιτείται. Μιας και η κατανομή ενός S_{pmk} δείκτη είναι άγνωστη, εμείς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό διαστημάτων εμπιστοσύνης, τα οποία δεν χρειάζονται καθόλου υποθέσεις για την κατανομή του δοσμένου πληθυσμού. Γι' αυτόν τον σκοπό, μη-παραμετρικοί μέθοδοι πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Ο Efron (1982) πρότεινε μια μη-παραμετρική υπολογιστική μέθοδο γνωστή και ως «bootstrap». Η «bootstrap» είναι μέθοδος προσομοίωσης δεδομένων για στατιστική συμπερασματολογία, η οποία ταξινομείται σε παραμετρικές και μη-

παραμετρικές «bootstrap» μεθόδους. Η μη-παραμετρική «bootstrap» μέθοδος όταν η κατανομή του δοσμένου πληθυσμού είναι άγνωστη, γίνεται αναδειγματοληψία με αντικατάσταση στο κύριο δείγμα. Ως εκ τούτου, στο υπολογιστικό «bootstrap» διάστημα εμπιστοσύνης καμία αρχική υπόθεση για το δοσμένο πληθυσμό δεν απαιτείται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε ποσοστιαία «bootstrap» μέθοδο διαστήματος εμπιστοσύνης για τον υπολογισμό ενός διαστήματος εμπιστοσύνης του δείκτη ικανότητας διεργασίας.

Υποθέτουμε ότι θ είναι παράμετρος που μας ενδιαφέρει, $\hat{\theta}$ μια εκτίμηση του θ βασισμένη σε παρατηρούμενα δεδομένα και $\hat{\theta}^*$ ένας «bootstrap» εκτιμητής ο οποίος υπολογίζεται με βάση το «bootstrap» δείγμα. Η αναδειγματοληψία επαναλαμβάνεται B φορές και B «bootstrap» εκτιμητές, δηλαδή $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$, παράγονται. Μετά τη διαλογή των «bootstrap» εκτιμητών $\hat{\theta}^*$, $(1 - \alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται με τη βοήθεια της επόμενης εξίσωσης:

$$\left[\hat{\theta}_{\left(\frac{\alpha}{2} \times B\right)}^*, \hat{\theta}_{\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times B\right)}^* \right]. \quad (6.27)$$

Σαν αποτέλεσμα, με βάση την παραπάνω εξίσωση, το διάστημα εμπιστοσύνης για το δείκτη S_{pmk} υπολογίζεται ως:

$$\left[\hat{S}_{pmk\left(\frac{\alpha}{2} \times B\right)}^*, \hat{S}_{pmk\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times B\right)}^* \right]. \quad (6.28)$$

Στην πράξη, μια διεργασία θεωρείται ικανή να συναντήσει τις προσδοκίες του πελάτη αν $S_{pmk} > 1$, οριακά ικανή αν $S_{pmk} = 1$ και μη-ικανή αν $0 \leq S_{pmk} < 1$.

6.4.1 Απόδοση του δείκτη ικανότητας S_{pmk}

Σε αυτήν την ενότητα, αξιολογούμε την απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα μέσω μελετών

προσομοίωσης. Γι' αυτό το σκοπό θεωρούμε ένα λογιστικό προφίλ. Το συγκεκριμένο εντός ελέγχου μοντέλο λογιστικού προφίλ περιέχει 9 επίπεδα των επεξηγηματικών μεταβλητών και σταθερές τιμές των επεξηγηματικών μεταβλητών που ορίζονται ως $\log(0.1)$, $\log(0.2)$, $\log(0.3)$, ..., $\log(0.9)$ όπου το προφίλ της λογιστικής παλινδρόμησης ορίζεται ως:

$$\pi_i = \frac{e^{(3+2x_i)}}{1+e^{(3+2x_i)}} \quad (6.29)$$

Ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο (m) είναι ίσος με 25, 50, 100 και 1000 στις εκτελέσεις προσομοίωσης. Επιπλέον, αρκετοί αριθμοί επιπέδων (l) και αρκετοί αριθμοί προφίλ (k) θεωρούνται. 1000 εκτελέσεις προσομοίωσης χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας. Τα αποτελέσματα της υπολογισμένης ικανότητας διεργασίας συνοψίζονται στον πίνακα 6.5. Ο αλγόριθμος προσομοίωσης επεξηγείται εν συντομία όπως ακολουθεί:

1. Πρώτον, το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων σε κάθε επίπεδο υπολογίζεται. Καθώς η τιμή στόχος δεν καθορίζεται στο παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η τιμή στόχος υπολογίζεται από τον πολλαπλασιασμό του μέσου ποσοστού των μη συμμορφούμενων αντικειμένων που λαμβάνονται από την εξίσωση (6.29) και του αριθμού των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο. Στην πραγματικότητα, η τιμή στόχος υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Τιμή στόχος} = \frac{m \sum_{i=1}^9 \pi_i}{9}, \quad (6.30)$$

όπου π_i υπολογίζεται από την εξίσωση (6.29), m είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο και i ο αριθμός των επιπέδων.

2. Στη συνέχεια, διωνυμικοί τυχαίοι αριθμοί παράγονται με παράμετρο που λαμβάνεται από το προηγούμενο βήμα (αυτό το βήμα επαναλαμβάνεται 1000 φορές).
3. Έπειτα, μια λογιστική παλινδρόμηση προσαρμόζεται στο σύνολο των δεδομένων, συμπεριλαμβανομένου των x και y τιμών, τα αποτελέσματα των οποίων θα είναι 1000 προφίλ.

4. Σε αυτό το βήμα, το ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων υπολογίζεται σε κάθε επίπεδο για κάθε προφίλ.
5. Ακολουθώντας αυτό, το ολικό ποσοστό των ελαττωματικών αντικειμένων σε κάθε προφίλ καθορίζεται (με βάση την εξίσωση (6.25)).
6. Στο τέλος της διεργασίας προσομοίωσης, ο συνολικός δείκτης ικανότητας διεργασίας σε κάθε προφίλ υπολογίζεται και ο μέσος όρος του αναφέρεται.

Ο δείκτης \hat{S}_{pmk} υπολογίζεται με βάση τα έξι προαναφερθέντα βήματα.

Ωστόσο, ο S_{pmk} υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.26).

7. Σε αυτό το βήμα, το 95% του διαστήματος εμπιστοσύνης και ο ρυθμός κάλυψης υπολογίζονται. Για ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης, τα κάτω όρια της δηλωμένης ονομαστικής τιμής για το ρυθμό κάλυψης είναι ίσο με 93.6%, το οποίο υπολογίζεται ως :

$$(0.95 - 1.96\sqrt{0.05 * (0.95/\text{επανάληψη})}) * 100\%.$$

Όπως τα αποτελέσματα στον πίνακα 6.5 δείχνουν, οι ρυθμοί κάλυψης στις περισσότερες περιπτώσεις είναι πάνω από το 93.64%.

Με βάση τα αποτελέσματα του πίνακα 6.5, η προτεινόμενη μέθοδος για τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας μπορεί αποτελεσματικά να εκτιμήσει το δείκτη ικανότητας διεργασίας για τι προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Όταν ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο αυξηθεί, η απόδοση του προτεινόμενου δείκτη βελτιώνεται. Ως εκ τούτου, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο επηρεάζει την εκτίμηση του δείκτη ικανότητας διεργασίας. Επιπλέον, όταν ο αριθμός των επιπέδων αυξηθεί, η τιμή του προτεινόμενου δείκτη θα μειωθεί. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν ο αριθμός των επιπέδων αυξηθεί, το ολικό ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων γίνεται μεγαλύτερο και ως αποτέλεσμα, η τιμή του δείκτη ικανότητας μειώνεται. Γενικά, αύξηση του αριθμού των επιπέδων οδηγεί σε βελτίωση της ακρίβειας του προτεινόμενου δείκτη. Όπως τα αποτελέσματα δείχνουν, καθώς οι τιμές των δεικτών ικανότητας διεργασίας είναι μικρότερες από τη μονάδα για το συγκεκριμένο παράδειγμα, η διεργασία είναι ανίκανη να συναντήσει τις απαιτήσεις του πελάτη.

Πίνακας 6.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης του εκτιμώμενου δείκτη ικανότητας διεργασίας και αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης.

| k | l | m | S_{pmk} | \hat{S}_{pmk} | CI | CR (%) |
|------|-----|------|-----------|-----------------|------------------|-------------|
| 100 | 5 | 25 | 0.1890 | 0.1935 | [0.1873-0.2033] | 93.7 |
| | | 50 | | 0.1899 | [0.1875-0.1921] | 93.7 |
| | | 100 | | 0.1894 | [0.1873-0.1917] | 94.8 |
| | | 1000 | | 0.1891 | [0.1885-0.1899] | 93.8 |
| | 9 | 25 | 0.1180 | 0.1214 | [0.1177-0.1250] | 93.6 |
| | | 50 | | 0.1198 | [0.1178-0.1218] | 94.3 |
| | | 100 | | 0.1195 | [0.1178-0.1215] | 94.5 |
| | | 1000 | | 0.1183 | [0.1179-0.1199] | 93.8 |
| | 12 | 25 | 0.0921 | 0.0933 | [0.0905 -0.0941] | 94.4 |
| | | 50 | | 0.0928 | [0.0909-0.0947] | 94.7 |
| | | 100 | | 0.0925 | [0.0912-0.0929] | 93.7 |
| | | 1000 | | 0.0922 | [0.0918 -0.0923] | 93.7 |
| 1000 | 5 | 25 | 0.1890 | 0.1900 | [0.1881-0.1919] | 93.7 |
| | | 50 | | 0.1898 | [0.1884-0.1904] | 93.4 |
| | | 100 | | 0.1894 | [0.1885-0.1899] | 94.3 |
| | | 1000 | | 0.1891 | [0.1889-0.1892] | 93.7 |
| | 9 | 25 | 0.1180 | 0.1214 | [0.1178-0.1250] | 93.6 |
| | | 50 | | 0.1203 | [0.1178-0.1229] | 94.7 |
| | | 100 | | 0.1193 | [0.1179-0.1199] | 93.7 |
| | | 1000 | | 0.1182 | [0.1178-0.1184] | 93.7 |
| | 12 | 25 | 0.0921 | 0.0926 | [0.0916 -0.0932] | 94.1 |
| | | 50 | | 0.0923 | [0.0917-0.0926] | 94.7 |
| | | 100 | | 0.0922 | [0.0918-0.0926] | 94.3 |
| | | 1000 | | 0.0921 | [0.0919 -0.0925] | 93.7 |

6.4.2 Παράδειγμα για το δείκτη ικανότητας S_{pmk} στο Λογιστικό Προφίλ

Σ' αυτήν την ενότητα, επεξηγούμε πως η προτεινόμενη μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί σε μια πραγματική εφαρμογή. Ως εκ τούτου, θεωρούμε και πάλι την πραγματική περίπτωση σ' ένα σύνολο δεδομένων από τους Saghaei et al. (2012). Υπενθυμίζουμε πως η μελέτη πραγματοποιήθηκε σε μια μηχανή πιεστήριο (πρέσα) στην οποία η σχέση μεταξύ του ποσοστού των

ελαττωματικών προϊόντων και της ταχύτητας της πρέσας μοντελοποιείται από ένα προφίλ λογιστικής παλινδρόμησης. Οι παρατηρήσεις του παραδείγματος παρουσιάστηκαν προηγουμένως στον πίνακα 4.1, στον οποίο η πιθανότητα των ελαττωματικών προϊόντων είναι η μέση μακροπρόθεσμη πιθανότητα σε κάθε επίπεδο βασιζόμενη σε 100 δείγματα.

Το υποκείμενο μοντέλο λογιστικής παλινδρόμησης στο οποίο οι παράμετροι εκτιμώνται χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν στον πίνακα 4.1 και βασίζεται στη μέθοδο Newton-Raphson, είναι το εξής:

$$\pi_i = \frac{e^{(5.702-1.174x_i)}}{1+e^{(5.702-1.174x_i)}}$$

Τα αποτελέσματα αφορούν τον υπολογισμό του δείκτη ικανότητας διεργασίας του παραδείγματος και παρουσιάζονται στον πίνακα 6.6, όπου παρουσιάζεται η απόδοση του προτεινόμενου δείκτη σε πραγματική εφαρμογή. Συμπεραίνουμε ότι αυτή η διεργασία είναι ανίκανη να συναντήσει τις προσδοκίες του πελάτη.

Πίνακας 6.6: Αποτέλεσμα του εκτιμημένου δείκτη ικανότητας διεργασίας και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης.

| m | S_{pmk} | CI |
|-----|-----------|-----------------|
| 100 | 0.0065 | [0.0040-0.0095] |

Υπάρχουν πολλές πραγματικές περιπτώσεις στις οποίες τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης όπως είναι η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν προφίλ. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον έντονο ανταγωνισμό μεταξύ των βιομηχανιών, η μείωση κόστους και η βελτίωση της ποιότητας θεωρούνται ως σημαντικά σημεία τα οποία πρέπει σίγουρα να τους δίνεται μεγάλη σημασία και προσοχή. Ως εκ τούτου, παρέχοντας μια διεργασία η οποία συναντά τις προσδοκίες του πελάτη είναι εξαιρετικά σημαντικό.

Ο δείκτης ικανότητας διεργασίας S_{pmk} υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το ποσοστό των μη συμμορφούμενων αντικειμένων του προφίλ και την παρέκκλιση της μέσης τιμής της διεργασίας από την τιμή στόχο, που ορίζεται ως:

$$\text{Τιμή στόχος} = \frac{m \sum_{i=1}^l \pi_i}{l},$$

όπου m είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων σε κάθε επίπεδο και i είναι ο αριθμός των επιπέδων.

Καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνεται, η απόδοση του δείκτη βελτιώνεται και όταν ο αριθμός των επιπέδων αυξάνεται, η τιμή του προτεινόμενου δείκτη μειώνεται.

Βιβλιογραφία

- [1] Acosta-Mejia, C.A., Pignatiello, J.J., Rao, B.V. (1999). "A Comparison of Control Charting Procedures for Monitoring Process Dispersion", *IIE Transactions*, Vol. 31, pp. 569-579.
- [2] Adibi, A. (2013). "A P-value based Approach for Phase II Profile Monitoring", a Dissertation for the Degree Doctor of Philosophy, Arizona State University.
- [3] Αντζουλάκος, Δ. (2008-B' Έκδοση). «Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας». Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [4] Bishop, C. (1995). "*Neural networks for pattern recognition*", Oxford University Press, New York, NY, USA.
- [5] Bothe, D.R. (1997), "*Measuring Process Capability: Techniques and Calculations for Quality and Manufacturing Engineers*", McGraw-Hill, New York.
- [6] Brown, R. L.; Durbin, J.; and Evans, J. M. (1975). "Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships Over Time". *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, 37, pp.149-192.
- [7] Castagliola, P. (1996). "Evaluation of non-normal process capability indices using Burr's distributions". *Quality Engineering*, 8(4): 587-593.
- [8] Chen, J.-P., Ding, C.G. (2001), "A new process capability index for non-normal distributions". *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 18, No. 7, 762-770.
- [9] Chester, D.L. (1990). "Why two hidden layers are better than one." IJCNN-90-WASH-DC, Lawrence Erlbaum, 1: 265-268.
- [10] Choi, B.C. and Owen, D.B. (1990). A study of a new Process Capability Index. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 19(4),1231-1245.
- [11] Clements, J.A. (1989). "Process capability calculations for non-normal distributions". *Quality Progress*, 22: 95-100.
- [12] Dobson, A.J. (1990). "*An Introduction to Generalized Linear Models*", Second Edition, University of Newcastle. Chapman & Hall/CRC.

- [13] Ebadi, M., Shahriari, H. (2012). "A process capability index for simple linear profile", *The International Journal of Advanced Manufacturing and Technology*, 64(5-8), pp. 857-865.
- [14] Ebadi, M. and Amiri, A. "Evaluation of process capability in multivariate simple linear profiles." *Scientia Iranica-Transaction E: Industrial Engineering*, Vol. 19, No. 6, (2012), pp.1960–1968.
- [15] Efron, B. "*The jackknife, the bootstrap and other resampling plans.*" SIAM-NFS, Philadelphia, (1982).
- [16] Fausett, L. (1994). "*Fundamentals of neural networks: architectures, algorithms and applications*". Prentice Hall, New York.
- [17] Fernandes, V. L., De Magalhaes, Maysa S., and Moura Neto, F. D. (2009). "Chi-Square Control Chart for Linear Profiles". (Apresentação de Trabalho/Simpósio).
- [18] Fernandes, V. L., De Magalhaes, Maysa S., and Moura Neto, F. D. (2014). "*Statistical design of an adaptive control chart for linear profile monitoring*", 3rd SMTDA Conference Proceedings, Lisbon Portugal.
- [19] Ghazanfari M., Alaeddini A., Akhavan Niaki ST, Aryanezhad MB, (2008) "A clustering approach to identify the time of a step change in Shewhart control charts". *Qual. Reliab. Eng. Int.* 24(7): 765-777.
- [20] Gupta, S., Montgomery, D.C., Woodall, W.H., (2006). "Performance Evaluation of Two Methods for Online Monitoring of Linear Calibration Profiles", *International Journal of Production Research*, Vol.44, pp.1927-1942.
- [21] Gupta, S., (2010). "*Profile Monitoring-Control Chart Schemes for Monitoring Linear and low Order Polynomial Profiles*", a Dissertation for the Degree Doctor of Philosophy, Arizona State University.
- [22] Haykin, S. (1994). "*Neural Networks: A comprehensive foundation*", Macmilan Publishing, New York.
- [23] Hawkins, D.M., Zamba, K.D. (2005). "Statistical Process Control for Shifts in Mean or Variance Using a Change-Point Formulation", *Technometrics*, Vol. 47, pp.164-173.
- [24] Healy, J.D. (1987). "A note on multivariate CUSUM procedures." *Technometrics*, Vol. 29, No. 4, pp. 409-412.

- [25] Hosseiniard, S.Z., Abbasi, B., Abdollahian, M. (2011). "Performance analysis in non-normal linear profiles using gamma distribution", 2010 *Eighth International Conference on Information Technology: New Generations*, pp. 603-607.
- [26] Hosseiniard, S.Z., Abbasi, B. (2012). "Evaluation of process capability indices of linear profiles", *International Journal of Quality and Reliability Management*, Vol. 29, No. 2, pp. 162-176.
- [27] Hosseiniard, S.Z. (2012). "Monitoring and performance analysis of regression profiles", a Dissertation for the Degree Doctor of Philosophy, School of Mathematical and Geospatial Sciences RMIT University, Melbourne, Victoria, Australia.
- [28] Hsiang, T.C., Taguchi, G. (1985). "A tutorial on quality control and assurance-the Taguchi methods", *ASA Annual Meeting*, Las Vegas, Nevada.
- [29] Juran, J.M. (1974). "Quality control handbook", 3rd Edition, McGraw-Hill, New York.
- [30] Kane, V.E. (1986). "Process capability indices", *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, pp. 41-52.
- [31] Kang, L. and Albin, S. L. (2000). "On-line monitoring when the process yields a linear profile", *Journal of Quality Technology*, Vol. 32, No. 4, pp. 418-426.
- [32] Καρώνη, Χ., Οικονόμου, Π. (2010). «Στατιστικά Μοντέλα Παλινδρόμησης», Εκδόσεις Συμείων.
- [33] Keshteli, R. N., Kazemzadeh, R. B., Amiri, A. and Noorossana, R. (2014). "Developing functional process capability indices for simple linear profile", *Scientia Iranica, Transactions E: Industrial Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 1044-1050.
- [34] Kim, K., Mahmoud, M. A. and Woodall, W. H. (2003). "On the Monitoring of Linear Profiles", *Journal of Quality Technology*, Vol. 35, pp. 317-328.
- [35] Koosha, M., Amiri, A. (2011). "The Effect of Link Function on the Monitoring of Logistic Regression Profiles", *Proceedings of the World Congress on Engineering*, London, U.K. .

- [36] Κουκουβίνος, Χ. (2017). “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας”, Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ.
- [37] Koulouriotis, J., Psarakis, S. (2005). “*Quality control charts for the analysis and monitoring of linear profiles*”. Proceedings of the 7th Hellenic European Conference on Computer Mathematics and its Applications.
- [38] Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter J., Wasserman, W. “*Applied Linear Statistical Models*”, 5th edition, McGraw-Hill Irwin (2005), New York.
- [39] Mahmoud, M. A., Woodall, W. H. (2004). “Phase I Analysis of Linear Profiles with Calibration Applications”, *Technometrics*, Vol.46, No.4, pp. 380-391.
- [40] Mahmoud, M. A., Parker, P. A., Woodall, W. H., Hawkins, D. M. (2007). “A Change Point Method for Linear Profile Data”, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23, No. 2, pp. 247-268.
- [41] Mahmoud, M. A., Morgan, J.P., Woodall, W. H. (2010). “The monitoring of simple linear regression profiles with two observations per sample, *Journal of Applied Statistics*, pp. 1249-1263.
- [42] Montgomery, D.C. (2013). “*Introduction to Statistical Quality Control*”, 7th Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [43] Noorossana, R., Amiri, A., Vaghefi, S. A., and Roghanian, E., (2004). Monitoring quality characteristics using linear profile, *Proceedings of the 3rd International Industrial Engineering Conference*, Tehran, Iran.
- [44] Noorossana, R., Saghaei, A., Amiri, A. (2011). “*Statistical Analysis of Profile Monitoring*”, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [45] Patterson, D. (1996). “*Artificial neural networks*”, Prentice Hall, Singapore.
- [46] Pearn, W.L., Kotz, S., Johnson, N.L. (1992). Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology*, 24, 216231.
- [47] Pignatiello, J. J. Jr., Samuel, T. R. (2001). “Estimation of the Change Point of a Normal Process Mean in SPC Applications”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 33, pp. 82-95.

- [48] Pugh, G. A. (1989). "Synthetic neural networks for process control", *Computers and Industrial Engineering*, Vol. 17, pp. 24-26.
- [49] Quandt, R. E. (1958). "The Testing of the Parameters of a Linear Regression System Obeys Two Separate Regimes", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 53, pp. 873-880.
- [50] Qui, P., Zou, C. and Wang, Z. (2010). "Nonparametric profile monitoring by mixed effects modeling", *Technometrics*, Vol. 52, No. 3, pp. 265-277.
- [51] Rezaie Abbasi Charkhi, M., Aminnayeri, M., Amiri, A., (2015). "Process Capability Index for Logistic Regression Profile Based on S_{pmk} Index", *International Journal of Engineering*, Vol. 28, No. 8, pp. 1186-1192.
- [52] Rezaie Abbasi Charkhi, M., Aminnayeri, M., Amiri, A. (2016). "Process Capability Indices for Logistic Regression Profile", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 32, No. 5, pp. 1655-1661.
- [53] Rumelhart, D. E., McClelland, J.L., PDP Research Group, (1986). "*Parallel distributed processing: Explorations in the microstructure of cognition*", MA. Cambridge: MIT Press.
- [54] Ryan, T.P. (2000). "Statistical Methods for Quality Improvement", Second Edition, New York: Wiley.
- [55] Saghaei, A., Rezazadeh-Saghaei, M., Noorossana, R., Dorri, M. (2012). "Phase II Logistic Profile Monitoring", *International Journal of Industrial Engineering and Production Research*, Vol. 23, No. 4, pp. 291-299.
- [56] Samuel, T.R., Pignatiello, J.J., Jr., Calvin, J.A. (1998). "Identifying the time of a step change with \bar{X} control charts", *Quality Eng.*, Vol.10, pp. 521-527.
- [57] Shahriari, H. and Sarrafian, M. (2009). "Assessment of process capability in linear profiles", *Proceedings of the 6th International Industrial Engineering Conference*, Tehran, Iran (in Farsi).
- [58] Taguchi, G. (1986). "*Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes*", Asian Productivity

Organization, Tokyo and Unipub/ Kraus International, White Plains, NY.

- [59] Τζαβελάς Γεώργιος, σημειώσεις στα Γενικευμένα Γραμμικά Μοντέλα, μέρος Α, μαθήματος «Εισαγωγή στη Λογιστική Παλινδρόμηση», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, (2011).
- [60] Wang, F.-K. "A process yield for simple linear profiles." *Quality Engineering*, Vol. 26, No. 3, (2014), pp. 311-318.
- [61] Wang, F. and Guo, Y. "Measuring process yield for nonlinear profiles." *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 30, No. 8, (2014), pp. 1333-1339.
- [62] Woodall, W. H., Spitznen, D. J., Montgomery, D.C., Gupta, S. (2004). "Using Control Charts to Monitor Process and Product Quality Profiles", *Journal of Quality Technology*, Vol. 36, pp. 309-320.
- [63] Zand, A., Yazdanshenas, N., Amiri, A. (2013), "Change point estimation in phase I monitoring of logistic regression profile", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, pp. 2301-2311.
- [64] Zhang, J., Li, Z., Wang, Z. (2009). "Control chart based on likelihood ratio for monitoring linear profiles", *Computational Statistics and Data Analysis*, pp. 1440-1448.
- [65] Zou, C., Zhang, Y., Wang, Z. (2006). "Control Chart Based On Change-Point Model For Monitoring Linear Profiles", *IIE Transactions*, Vol. 38, pp. 1093-1103.
- [66] Zou, C., Tsung, F. and Wang, Z. (2007). "Monitoring general linear profiles using multivariate exponential weighted moving average schemes", *Technometrics*, Vol. 49, pp. 395-408.
- [67] Zou, C., Zhou, C., Wang, Z. (2007). "A Self-Starting Control Chart for Linear Profiles", *Journal of Quality Technology*, Vol. 39, No. 4, pp. 364.