



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Πολυπλοκότητα Υπολογισμού Πολυνύμων Γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ**

Επιβλέπων: Αριστείδης Παγουρτζής
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος, 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Πολυπλοκότητα Υπολογισμού Πολυνύμων Γραφημάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

Επιβλέπων: Αριστείδης Παγουρτζής
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή Ιούλιος, 2018

.....
Αριστείδης Παγουρτζής
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Νικόλαος Παπασπύρου
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής

.....

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

(Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός & Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.)

Οι απόψεις που εκφράζονται σε αυτό το κείμενο είναι αποκλειστικά του συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα την επίσημη θέση του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Απαγορεύεται η χρήση της παρούσας εργασίας για εμπορικούς σκοπούς

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International”](#) license.



ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ, 2018

Περίληψη

Το πολυώνυμο Tutte είναι ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών το οποίο κωδικοποιεί πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες ενός δυαδικού matroid ή ενός γραφήματος. Εξετάζονται οι δύο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες εκφράσεις του πολυωνύμου Tutte, το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Tutte και το μοντέλο Potts. Περιγράφεται η πολυπλοκότητα του πολυωνύμου Tutte όσον αφορά τις αναγωγές Cook (πολυωνυμικού χρόνου) και διαπιστώνεται ότι παραμένει ίδια σε κάποιες ειδικές καμπύλες (q σταθερό). Η πολυπλοκότητα του πολυωνύμου Tutte ορίζεται πλήρως σε σχέση με τις αναγωγές Cook και πιο συγκεκριμένα είναι $\#P - complete$ εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις, οι οποίες περιγράφονται. Συνεπώς, εξετάζεται η προσεγγισσιμότητα του πολυωνύμου Tutte σε διαφορετικές περιοχές του επιπέδου για τις κλάσεις των γενικών γραφημάτων, επίπεδων γραφημάτων και δυαδικών matroids.

Το πλαίσιο $\#CSP(F)$ μελετάται και διαπιστώνονται τα ακόλουθα συμπεράσματα: Το μοντέλο Ising, στην ferromagnetic περίπτωση έχει FPRAS, ενώ στην antiferromagnetic περίπτωση δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$ και επίσης ότι το πρόβλημα μέτρησης $P(G, \lambda = 2) \in FP$, όπου $P(G, \lambda)$ είναι το χρωματικό πολυώνυμο. Γίνεται ανάλυση του FPRAS για την ferromagnetic περίπτωση του μοντέλου Ising χρησιμοποιώντας αλυσίδες Markov.

Όσον αφορά την αφύσικη περίπτωση του μοντέλου Ising, αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο Tutte είναι ισοδύναμο κατά AP αναγωγές με το γνωστό πρόβλημα $\#PerfectMatchings$. Επίσης για την περίπτωση όπου $q > 2$ και $\gamma > 0$, αποδεικνύεται ότι η σχέση $Z_{Tutte}(G, q, \gamma) \geq_{AP} \#BIS$ είναι αληθής και περιγράφονται ορισμένες εφαρμογές της σχέσης αυτής.

Οι κλάσεις TotP, $\#PE$, $\#RH\Pi 1$ ορίζονται ως σημαντικές υποκλάσεις του $\#P$. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι τα προβλήματα μέτρησης που αντιστοιχούν στο πολυώνυμο Tutte και ταυτόχρονα έχουν εύκολο πρόβλημα απόφασης, ανήκουν στην κλάση TotP.

Λέξεις κλειδιά: Matroids, Δυαδικά matroids, Πολυώνυμο Tutte, μοντέλο Potts, αναγωγή AP, FPRAS, $\#RH\Pi 1$, $\#BIS$, Αλυσίδα Markov, μοντέλο Ising, TotP, $\#PE$, $\#P$, Χρωματικό πολυώνυμο, Cycle Index Polynomial, αναγωγές Cook, αναγωγές Karp, $\#CSP(F)$, ferromagnetic, $\#PerfectMatchings$, ειδικά σημεία.

Abstract

The Tutte polynomial is a two - variable polynomial that encodes many interesting properties of a binary matroid or a graph. The two different equivalent expressions of the Tutte polynomial, the multivariate Tutte polynomial and the Potts model, are considered and examined. The complexity of the Tutte polynomial is examined with respect to Cook (poly-time) reductions and it is shown that it remains the same at special curves (q constant). The complexity of the Tutte polynomial is fully determined with respect to poly-time reductions and more specifically it is $\#P$ -complete except from some special cases, which are described. Therefore, the approximability of the Tutte polynomial is examined in different regions of the plane for the classes of general graphs, planar graphs and binary matroids.

By studying the $\#CSP(F)$ framework it is shown that the Ising model for the ferromagnetic case has an FPRAS, while for the antiferromagnetic case there is no FPRAS unless $NP = RP$. It is also shown that the enumeration problem $P(G, \lambda = 2) \in FP$, where $P(G, \lambda)$ is the chromatic polynomial. The FPRAS for the ferromagnetic case of the Ising model is analysed using Markov chains.

As far as the unphysical case of the Ising model is concerned, it is shown that the Tutte polynomial is AP irreducible to the known problem of $\#PerfectMatchings$. It is also shown that for $q > 2$ and $\gamma > 0$, the relationship $Z_{Tutte}(G, q, \gamma) \geq_{AP} \#BIS$ holds true and applications of this relationship are analysed.

TotP, $\#PE$, $\#RHII1$ are defined as important subclasses of $\#P$. Subsequently, it is proven that the counting problems that correspond to the Tutte polynomial and also have easy decision problems, belong to TotP.

Keywords: Matroids, Binary matroids, Tutte Polynomial, Potts model, AP reductions, FPRAS, $\#RHII1$, $\#BIS$, Markov chain, Ising model, TotP, $\#PE$, $\#P$, Chromatic polynomial, Cycle Index Polynomial, Cook reductions, Karp reductions, $\#CSP(F)$, ferromagnetic, $\#PerfectMatchings$, special points.

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Αριστείδη Παγουρτζή για την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την συνεχή στήριξή της καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου, και ιδίως τον πατέρα μου που με έμαθε να σκέφτομαι. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους τους φίλους και συμφοιτητές, για την βοήθεια που μου παρείχαν κατά την κοινή μας αυτήν πορεία, ιδιαιτέρως δε τους Βασίλη και Πλούτωνα.

Αλέξανδρος Παπαδημητρίου,
Αθήνα, 16η Ιουλίου 2018

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Matroids	1
1.2	Υπεργράφος - Hypergraph	3
1.3	Πολυνώνυμο Tutte	3
1.3.1	Αρχικός ορισμός του πολυνώμου Tutte	3
1.3.2	Γραμμικός αναδρομικός ορισμός του πολυνώμου Tutte	4
1.3.3	Καθολικότητα του πολυνώμου Tutte	5
1.3.4	Βασικές ιδιότητες του πολυνώμου Tutte	5
1.4	Multivariate πολυνώνυμο Tutte	7
1.4.1	Multivariate πολυνώνυμο Tutte για γραφήματα	7
1.4.2	Multivariate πολυνώνυμο Tutte για matroids	10
1.5	Μοντέλο Potts	13
1.5.1	Μοντέλο Potts για γραφήματα	13
1.5.2	Μοντέλο Potts για δυαδικά matroids (Γενίκευση)	15
1.5.3	Μοντέλο Ising στα δυαδικά matroids	15
1.6	Αρ αναγωγή και η τάξη πολυπλοκότητας $\#P$	16
2	Πολυπλοκότητα του πολυνώμου Tutte	23
2.1	Εισαγωγή	23
2.2	Δυαδικά Matroids - Γραφικά Matroids	26
2.3	Διμερής Υποκλάση	26
3	$\#CSP$ framework	29
3.1	Εισαγωγή	29
3.2	Ising μοντέλο υπό το πλαίσιο $\#CSP$	31
4	Πολυπλοκότητα του μοντέλου Ising στα γραφικά matroids	33
4.1	FPRAS για την ferromagnetic περίπτωση	33
4.2	Προσεγγισιμότητα του Ising μοντέλου για την antiferromagnetic περίπτωση	40

5	Πολυώνυμο Tutte για γραφήματα	43
5.1	Γενικά γραφήματα	43
5.2	Επίπεδα γραφήματα	59
6	Πολυώνυμο Tutte για δυαδικά matroids	63
7	Πολυώνυμο που σχετίζονται με το πολυώνυμο Tutte	69
7.1	Το χρωματικό πολυώνυμο	69
7.2	Το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Flow	69
7.3	Weight Enumerator	71
7.4	Cycle Index Polynomial	72
8	Σύνολα μέσα στην κλάση #P	77
9	Λογικός χαρακτηρισμός του #P	83
9.1	Εισαγωγή	83
9.2	Λογικός χαρακτηρισμός του #P	83
9.3	Λογικός χαρακτηρισμός της #RHP1	85
10	Πολυώνυμο Tutte και self reducibility	87
11	Προτάσεις	89
12	Παράρτημα	91
12.1	Υπολογισμός του $T(M, x, y)$ στο H_1	91
12.2	Chernoff bounds	91
12.3	Απόδειξη της Πρότασης 1	92
12.4	Σχήματα που αφορούν την πολυπλοκότητα του πολυωνύμου Tutte(x,y)	92
13	Βιβλιογραφία	97

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Matroids

Ένα **matroid** $M = (E, I)$ είναι ένα ζεύγος (E, I) , όπου το E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο που ονομάζεται **ground set** και το I είναι η συλλογή των γραμμικά **ανεξάρτητων** υποσυνόλων του E που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- I είναι μη κενό.
- Κάθε υποσύνολο του κάθε στοιχείου του I ανήκει επίσης στο I .
- Αν $X, Y \in I$ και $|X| = |Y| + 1$, τότε $\exists x \in X - Y : Y \cup \{x\} \in I$.

Επίσης για τον ορισμό ενός matroid χρειάζεται η συνάρτηση **rank** του matroid M , r_M η οποία πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες, για $A \subseteq E$:

- $0 \leq r_M(A) \leq |A|$.
- $A \subseteq B : r_M(A) \leq r_M(B)$ μονοτονία.
- $r_M(A \cup B) + r_M(A \cap B) \leq r_M(A) + r_M(B)$ submodularity.

Η **nullity** συνάρτηση του A ορίζεται ως εξής:

$$n_M(A) = |A| - r_M(A).$$

Έστω A ένα υποσύνολο του E , τότε αν $r_M(A) = |A|$ το σύνολο A ονομάζεται **ανεξάρτητο-independent** ($A \in I$), ενώ σε διαφορετική περίπτωση ονομάζεται **εξαρτημένο-dependent**. Βάση - **basis** είναι ένα μεγιστοτικό ανεξάρτητο σύνολο (**maximal independent**). **Circuit** είναι ένα

ελαχιστοτικό εξαρτημένο σύνολο (**minimal dependent**). Βρόχος (**loop**) ονομάζεται ένα circuit με ένα στοιχείο. Αφού πρόκειται για εξαρτημένο σύνολο με ένα στοιχείο, σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, θα ισχύει ότι αν $\{e\}$ είναι loop θα ισχύει ότι $r_M(\{e\}) = 0$. Τέλος, το A ονομάζεται **spanning** αν $r_M(A) = r_M(E)$.

Στα matroids ορίζονται οι δύο παρακάτω λειτουργίες:

- Διαγραφή (Deletion)

$$M \setminus e : r_{M \setminus e}(A) = r_M(A), \forall A \subseteq E - e$$

- Σύμπτυξη (Contraction)

$$M/e : r_{M/e}(A) = r_M(A \cup \{e\}) - r_M(\{e\}), \forall A \subseteq E - e$$

Uniform Matroid U_n^k είναι το matroid με n στοιχεία του οποίου τα ανεξάρτητα σύνολα είναι όλα τα υποσύνολα με k στοιχεία.

Δυικότητα των matroids

Κάθε matroid $M = (E, r)$ συσχετίζεται με το δυικό του matroid $M^* = (E, r^*)$, όπου

$$r^*(A) = |A| + r(E - A) - r(E), \forall A \subseteq E.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $(M^*)^* = M$.

Ορίζουμε ότι το $e \in E$ είναι **coloop** του M αν είναι loop στο M^* , και άρα θα ισχύει ότι (με βάση την παραπάνω σχέση):

$$r(E - \{e\}) = r^*(\{e\}) + r(E) - |\{e\}| \Rightarrow r(E - \{e\}) = 0 + r(E) - 1 \Rightarrow r(E - \{e\}) = r(E) - 1$$

και συνεπώς το $\{e\}$ ανήκει σε κάθε βάση του M . Επίσης ένα σύνολο $A \subseteq E$ ονομάζεται **cocircuit** αν είναι circuit στο δυικό matroid.

Δυαδικά matroids

Ένα matroid είναι δυαδικό αν μπορεί να αναπαρασταθεί στο $GF(2)$.

Γραφικά matroids ή cycle matroids

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ συμβολίζουμε με $M(G)$ το **cycle matroid** με ground set το σύνολο των ακμών E και το I να αποτελείται από όλα τα σύνολα ακμών που δεν περιέχουν κύκλο. Ανεξάρτητα σύνολα στα γραφικά matroids είναι σύνολα ακμών χωρίς κύκλους. Οι βάσεις, εφόσον είναι μεγιστοτικά ανεξάρτητα σύνολα, αντιστοιχούν στα συνδετικά δέντρα του γραφήματος. Ένα matroid ονομάζεται **graphic** (γραφικό) αν είναι ισομορφικό με το cycle matroid κάποιου γραφήματος.

Αν αναπαραστήσουμε το γράφημα $G = (V, E)$ με τον πίνακα προσπτώσεων (incidence matrix), τότε παίρνουμε την αντίστοιχη έκφραση του γράφου σαν (δυαδικό) matroid.

1.2 Υπεργράφος - Hypergraph

Πρόκειται για ένα ζεύγος (V, \mathcal{E}) , όπου το σύνολο V είναι το αντίστοιχο σύνολο των κορυφών και το \mathcal{E} είναι σύνολο των μη κενών υποσυνόλων του V που καλούνται **hyperedges** (υπερακμές). Στα παραπάνω επιτρέπεται η γενίκευση των συνόλων σε multisets.

Uniform hypergraph ονομάζεται ένα υπεργράφημα, όπου όλες οι υπερακμές έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m : \mathcal{E}_i \subseteq V, |\mathcal{E}_i| = t, \forall i \in [m]\}$$

1.3 Πολυνώνιο Tutte

1.3.1 Αρχικός ορισμός του πολυνόμου Tutte

Θα δούμε τον αρχικό ορισμό του πολυνόμου Tutte για ένα συνεκτικό γράφημα. Αντικαθιστώντας τις λέξεις "συνδετικό δέντρο", "circuit" με "βάση" και "ελάχιστο εξαρτημένο σύνολο" παίρνουμε την γενίκευση στα matroids.

Με δεδομένο ένα συνεκτικό γράφημα G και ένα συνδετικό δέντρο T , κάθε ακμή $e \notin T$ κλείνει έναν μοναδικό κύκλο στο $T \cup \{e\}$. Συμβολίζουμε αυτόν τον κύκλο με $C(T, e)$.

Έστω ένα γράφημα G του οποίου οι ακμές αμφιμονοσήμαντα χαρακτηρίζονται από ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο ετικετών και έστω T ένα συνδετικό δέντρο του G . Μία **εσωτερική ακμή** $e \in T$ είναι **internally active** αν για κάθε ακμή $f \notin T$, έτσι ώστε $(T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ είναι συνδετικό δέντρο του G , ισχύει ότι $label(e) < label(f)$. Αλλιώς, η ακμή $e \in T$ ονομάζεται **internally inactive**.

Από την άλλη μεριά μία **external edge** $f \notin T$ (εξωτερική ακμή) είναι **externally active** (εξωτερικά ενεργής) αν f έχει την μικρότερη τιμή ετικέτας στο σύνολο $C(T, f)$. Σε διαφορετική περίπτωση $f \notin T$ είναι **externally inactive** (εξωτερικά αδρανής).

Με δεδομένο ένα συνεκτικό γράφημα G και ένα συνδετικό δέντρο T , η εσωτερική ακμή $e \in T$ μπορεί να αντικατασταθεί από μία εξωτερική ακμή $f \notin T$, έτσι ώστε $(T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ να είναι επίσης ένα συνδετικό δέντρο αν $e \in C(T, f)$.

Αναθέτουμε βάρος x σε κάθε εσωτερικά ενεργή ακμή (internally active) και βάρος y σε κάθε εξωτερικά ενεργή ακμή, όπου x, y είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι αδρανείς ακμές έχουν βάρος 1. Επομένως, ορίζεται μία συνάρτηση

$w : \mathcal{T} * E \rightarrow \{x, y, 1\}$, όπου δέχεται σαν είσοδο ένα συνδετικό δέντρο (\mathcal{T} : είναι το σύνολο των συνδετικών δέντρων του γραφήματος) και μία ακμή και επιστρέφει το **βάρος** της ακμής με βάση την σχέση του με το συγκεκριμένο συνδετικό δέντρο. Έστω $w : \mathcal{T} \rightarrow P[x, y]$ να ορίζεται ως εξής: $w(T) = \prod_{e \in G} w(T, e)$.

Το πολυώνυμο Tutte $T(G)$ ορίζεται ως το άθροισμα όλων των $w(T)$ σε όλα τα συνδετικά γραφήματα του G .

$$T(G, x, y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} w(T)$$

Το σημαντικό αποτέλεσμα του Tutte [13] είναι ότι αυτό το πολυώνυμο είναι ανεξάρτητο από το labeling των ακμών που γίνεται στην αρχή.

1.3.2 Γραμμικός αναδρομικός ορισμός του πολυωνύμου Tutte

Ο παρακάτω ορισμός αφορά τα matroids και εξειδικεύεται και για την κλάση των γραφημάτων.

Αν M είναι ένα matroid, τότε

$$T(M, x, y) = \begin{cases} x * T(M \setminus e, x, y) & , e: \text{coloop (γραφήματα: γέφυρα)} \\ y * T(M / e, x, y) & , e: \text{loop (γραφήματα: loop)} \\ T(M \setminus e, x, y) + T(M / e, x, y) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 1

Αν G, H είναι γραφήματα τότε,

$$T(G \cup H) = T(G) * T(H) \text{ και } T(G * H) = T(G) * T(H)$$

, όπου το γράφημα $G * H$ σχηματίζεται ταυτοποιώντας μία κορυφή $u \in G$ και μία κορυφή $v \in H$ σε μία κορυφή $w \in G * H$. $G \cup H$ είναι η ένωση των γραφημάτων G, H .

Απόδειξη

Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα 3.

1.3.3 Καθολικότητα του πολωνύμου Tutte

Graph invariant ονομάζεται κάθε συνάρτηση $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί $f(G_1) = f(G_2)$, όταν $G_1 \cong G_2$ (G_1, G_2 είναι ισοδύναμα). Ένα graph invariant ονομάζεται Tutte-Grothendieck invariant αν ισχύει

$$f(G) = a * f(G \setminus e) + b * f(G/e)$$

και για κάθε δύο γραφήματα G, H ισχύει

$$f(G \cup H) = f(G) * f(H) \text{ και } f(G * H) = f(G) * f(H)$$

Θεώρημα 1: Recipe Theorem

Έχουμε ότι, για κάθε f που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες

$$f(G) = a^{c(G)} * \lambda^{c(G)+m(G)-n(G)} * \mu^{n(G)-c(G)} * T(G, \gamma * a^{-1}, \beta * b^{-1})$$

1.3.4 Βασικές ιδιότητες του πολωνύμου Tutte

Το πολωνύμο Tutte ορίζεται ως εξής:

$$T(M, x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} * (y-1)^{|A|-r(A)} \quad (1)$$

Ο αντίστοιχος ορισμός για τα γραφήματα είναι ο εξής

$$T(G, x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} * (y-1)^{|A|-n+k(A)} \quad (2)$$

, όπου $k(A)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος (V, A) .

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό

- $T(M, x, y) = T(M^*, y, x)$.
- $T(M, 1, 1)$ μετράει τον αριθμό των **βάσεων** του M .
 $r(E) = r(A) = |A|$. Στα γραφήματα αντίστοιχα μετράει τον αριθμό των **συνδετικών δέντρων** σε ένα συνεκτικό γράφημα.
- $T(M, 2, 1)$ μετράει τον αριθμό των ανεξάρτητων συνόλων του M .
 $|A| = r(A)$. Στα γραφήματα αντίστοιχα μετράει τον αριθμό των **συνδετικών δασών**.
- $T(M, 1, 2)$ μετράει τον αριθμό των spanning sets του M . Στα γραφήματα αντίστοιχα μετράει τον αριθμό των **συνδετικών συνεκτικών συνιστωσών**.
- Όταν $M = M(G)$ και $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, **score vector** που σχετίζεται με μία κατεύθυνση των ακμών είναι ένα σύνολο $\{s_1, \dots, s_n\}$, όπου s_i είναι ο αριθμός των ακμών που κατευθύνονται έξω από την v_i . Έχειδειχθεί [8] ότι $T(M, 2, 1)$ είναι ο αριθμός των διαφορετικών score vectors του G .
- Όταν το M είναι graphic τότε έχειδειχθεί [9] ότι
 $T(M, -1, -1) = (-1)^{|E|} * (-2)^{\dim(B)}$, όπου B είναι ο binary bicycle space του M . Το αποτέλεσμα επεκτείνεται και στα δυαδικά matroids.
- Όταν $M = M(G)$, $T(M, 2, 0)$ είναι ο αριθμός των ακυκλικών κατευθύνσεων του G [8].
- Αν G είναι ένα γράφημα με k συνεκτικές συνιστώσες και $M = M(G)$, τότε

$$\lambda^k * T(M, 1 - \lambda, 0) = (-1)^{r(M)} * P(G, \lambda)$$

, όπου $P(G, \lambda)$ είναι το χρωματικό πολυώνυμο του G , το οποίο όταν $\lambda \in \mathbb{N}^+$, μετράει τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών κορυφών του G , χρησιμοποιώντας λ χρώματα.

- Αν $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα και $M = M(G)$, και H αβελιανή ομάδα με $|H| = h$, ο αριθμός των nowhere 0 flows με τιμές στο H στις ακμές του G συμβολίζεται με $F(G, H)$ και ισχύει ότι [10]:

$$F(G, H) = (-1)^{|E| - r(M)} * T(M, 0, 1 - h)$$

- $H_a = \{(x, y) : (x - 1) * (y - 1) = a\}$.
- Για κάθε matroid M και σημείο $(x, y) \in H_1$: $T(M, x, y) = x^n * (x - 1)^{r - n}$, όπου n είναι το μέγεθος και r είναι το rank του M . Η απόδειξη δίνεται στο παράρτημα Α.

- Όταν $M = M(G)$ και $(x, y) \in H_2$, το πολυώνυμο Tutte του M υπολογίζει την **partition** συνάρτηση του μοντέλου Ising στο G .
- Αν \mathcal{L} είναι ένας γραμμικός κώδικας μήκους n και διάστασης r στο πεπερασμένο πεδίο \mathbb{F}_q , το **weight enumerator** του \mathcal{L} δίνεται από την σχέση:

$$A_q(\mathcal{L}, z) = (1 - z)^r * z^{n-r} * T(M, \frac{1 + (q-1) * z}{1 - z}, \frac{1}{z})$$

, όπου M είναι το matroid που επάγεται στο σύνολο των στηλών του generator matrix του \mathcal{L} [11].

- Για κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και $q \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$, έστω ότι κάθε ακμή του G , ανεξάρτητα από τις άλλες ακμές, αφαιρείται με πιθανότητα q ή διατηρείται με πιθανότητα $p = 1 - q$. Συμβολίζουμε με $Q(G, p)$ την **percolation probability** που είναι η πιθανότητα το τυχαίο υπογράφημα που θα παραχθεί να συνδέει όλες τις κορυφές του G . Τότε θα ισχύει ότι [14]:

$$Q(G, p) = q^{|E|-r(G)} * p^{r(G)} * T(M(G), 1, \frac{1}{q})$$

1.4 Multivariate πολυώνυμο Tutte

1.4.1 Multivariate πολυώνυμο Tutte για γραφήματα

Έστω $G = (V, E)$ ένα πεπερασμένο μη κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E . Το multivariate πολυώνυμο Tutte ορίζεται ως [29]:

$$Z_{Tutte}(G, q, \gamma) = \sum_{A \subseteq E} q^{k(A)} \prod_{e \in A} \gamma_e \quad (3)$$

όπου $\gamma = \{\gamma_e\}_{e \in E}$ και $k(A)$ συμβολίζει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών στο υπογράφημα (V, A) . Επίσης υπάρχει και η παρακάτω μορφή του πολυωνύμου, η οποία μερικές φορές είναι πιο βολική [29]

$$\tilde{Z}_{Tutte}(G, q, \gamma) = q^{-|V|} * Z_{Tutte}(G, q, \gamma) = \sum_{A \subseteq E} q^{k(A)-|V|} \prod_{e \in A} \gamma_e. \quad (4)$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση $k(A) = |V| - |A| + c(A)$, όπου $c(A)$ είναι ο κυκλωματικός αριθμός στο γράφημα (V, A) που μετράει τον ελάχιστο αριθμό από ακμές που πρέπει να αφαιρεθούν ώστε να μην υπάρχουν κύκλοι στο γράφημα. Ισοδύναμα ο κυκλωματικός αριθμός

(cyclomatic number) μετράει τον αριθμό από γραμμικά ανεξάρτητους κύκλους. Τότε έχουμε την εξής ισοδύναμη μορφή του πολυμεταβλητού πολυνόμου Tutte.

$$Z_{Tutte}(G, q, \gamma) = q^{|V|} * \sum_{A \subseteq E} q^{c(A)} \prod_{e \in A} \frac{\gamma_e}{q}$$

Στην περίπτωση όπου $q = 1$, έχουμε την εξής ισοδύναμη μορφή (για τον ίδιο λόγο όπως στην παράγραφο 1.5.3)

$$Z_{Tutte}(G, 1, \gamma) = \prod_{e \in E} (1 + \gamma_e),$$

που υπολογίζεται εύκολα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Σύγκριση με το πολυνόμο Tutte

$$T(G, x, y) = (x - 1)^{-k(E)} * (y - 1)^{-|V|} * Z_{Tutte}(G, q = (x - 1) * (y - 1), \gamma = y - 1),$$

δηλαδή $\gamma_e = y - 1, \forall e \in E$.

Αν έχουμε ένα γράφημα G που διασπάται σε k συνεκτικές συνιστώσες G_1, \dots, G_k , τότε θα ισχύει ότι

$$\tilde{Z}_{Tutte}(G, q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(G_1, q, \gamma) * \dots * \tilde{Z}_{Tutte}(G_k, q, \gamma)$$

Δυικότητα

Έστω ότι $G = (V, E)$ είναι ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα, και έστω $G^* = (V^*, E^*)$ το αντίστοιχο δυικό γράφημα.

Υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση μεταξύ των E και E^* , καθώς κάθε ακμή $e \in E$ προσπίπτει σε δύο όψεις οι οποίες στο δυικό γράφημα ορίζουν μία μοναδική ακμή. Επομένως, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τα σύνολα E, E^* . Επίσης, οι όψεις του αρχικού γραφήματος μπορούν να απεικονιστούν αμφιμονοσήμαντα με τις κορυφές του δυικού γραφήματος V^* .

Επομένως, από την σχέση του Euler έχουμε ότι

$$|V| - |E| + |V^*| = 2.$$

Από τα παραπάνω ισχύει ότι

$$k_G(A) = c_{G^*}(E \setminus A) + 1, k_{G^*}(E \setminus A) = c_G(A) + 1$$

Επομένως, έχουμε την παρακάτω έκφραση για το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Tutte στο δυικό γράφημα:

$$Z_{Tutte}(G^*, q, \gamma) = q^{1-|V|} * \left(\prod_{e \in E} \gamma_e \right) * Z_{Tutte}(G, q, \frac{q}{\gamma})$$

Η αντίστοιχη κανονικοποιημένη έκφραση είναι η εξής:

$$\tilde{Z}_{Tutte}(G^*, q, \gamma) = q^{|V|-1} * \left(\prod_{e \in E} \frac{\gamma_e}{q} \right) * \tilde{Z}_{Tutte}(G, q, \frac{q}{\gamma}) \quad (5)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο στην κλάση των επίπεδων γραφημάτων ορίζεται η δυικότητα και άρα έχουν νόημα τα παραπάνω.

Ταυτότητα της παράλληλης αναγωγής

Αν το γράφημα G περιέχει δύο ακμές e_1, e_2 που συνδέουν το ίδιο ζευγάρι κορυφών x, y .

Αν ταυτοποιήσουμε την νέα ακμή e με μία από τις δύο e_1, e_2 (έστω e_1) και διαγράψουμε την άλλη ακμή (e_2), έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

$$Z_{Tutte}(G, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1}, \gamma_{e_2}) = Z_{Tutte}(G \setminus e_2, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2} + \gamma_{e_1} * \gamma_{e_2}) \quad (6)$$

Ταυτότητα της σε σειρά αναγωγής

Θεωρούμε ότι οι ακμές e_1, e_2 είναι **σε σειρά** οι ακμές $\{e_1 = (x, y), e_2 = (y, z)\}$ είναι ένα **2-edge cut**. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως παραπάνω, οι δύο ακμές e_1, e_2 μπορούν να αντικατασταθούν από μία ακμή $e = (x, z)$ με βάρος:

$$1 + \frac{q}{\gamma_e} = \left(1 + \frac{q}{\gamma_{e_1}}\right) * \left(1 + \frac{q}{\gamma_{e_2}}\right) \Rightarrow \gamma_e = \frac{\gamma_{e_1} * \gamma_{e_2}}{q + \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2}}.$$

Επομένως, παίρνουμε την παρακάτω σχέση αν συμπτύξουμε την ακμή e_2 και ταυτοποιήσουμε την νέα ακμή e με την ακμή e_1 .

$$Z_{Tutte}(G, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1}, \gamma_{e_2}) = (q + \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2}) * Z_{Tutte}(G / e_2, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \frac{\gamma_{e_1} * \gamma_{e_2}}{q + \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2}}) \quad (7)$$

Θα αποδείξουμε την παραπάνω σχέση στην γενικότερη μορφή της, στα matroids.

1.4.2 Multivariate πολυώνυμο Tutte για matroids

Οι παραπάνω έννοιες γενικεύονται και στα matroids.

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \gamma) = \sum_{A \subseteq E} q^{-r_M(A)} \prod_{e \in A} \gamma_e \quad (8)$$

Αυτός ο ορισμός επεκτείνει τον ορισμό για τα γραφήματα, καθώς σε περίπτωση όπου $M = M(G)$

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M(G), q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(G, q, \gamma)$$

καθώς ισχύει ότι $r_{M(G)}(A) = |V| - k(A)$.

Σύγκριση με το πολυώνυμο Tutte

$$T(M, x, y) = (x-1)^{r_M(E)} * \tilde{Z}_{Tutte}(M, q = (x-1)*(y-1), \gamma = y-1) = \frac{q^{r_M(E)}}{\gamma} * \tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \gamma)$$

Δυικότητα

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, μόνο στα επίπεδα γραφήματα ορίζονται δυικά γραφήματα με καλές ιδιότητες. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των matroids είναι ότι κάθε matroid έχει δυικό. Έχουμε ορίσει παραπάνω την rank συνάρτηση του δυικού matroid και άρα παίρνουμε την έκφραση για το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Tutte του δυικού matroid.

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M^*, q, \gamma) = q^{-r_{M^*}(E)} * \left(\prod_{e \in E} \gamma_e \right) * \tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \frac{q}{\gamma}) = q^{r_M(E)} * \left(\prod_{e \in E} \frac{\gamma_e}{q} \right) * \tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \frac{q}{\gamma}) \quad (9)$$

Ταυτότητα της παράλληλης αναγωγής

Για τα matroids ισχύουν αντίστοιχα αποτελέσματα με τα γραφήματα. Αν e_1, e_2 είναι παράλληλα στοιχεία (δηλαδή σχηματίζουν ένα circuit δύο στοιχείων), θα ισχύει ότι

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1}, \gamma_{e_2}) = \tilde{Z}_{Tutte}(M \setminus e_2, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2} + \gamma_{e_1} * \gamma_{e_2}) \quad (10)$$

Το ίδιο ισχύει στοιχειωδώς αν τα e_1, e_2 είναι βρόχοι.

Ταυτότητα της σε σειρά αναγωγής

Έστω ότι οι ακμές e_1, e_2 είναι **σε σειρά** στοιχεία σε ένα matroid M , δηλαδή έστω ότι $\{e_1, e_2\}$ είναι **cocircuit**. Τότε $\forall A \subseteq E \setminus \{e_1, e_2\}$, θα ισχύει ότι

$$r_M(A \cup e_1) = r_M(A \cup e_2) = r_M(A) + 1,$$

επειδή ισχύει ότι

$$r_{M/e}(A) = \begin{cases} r_M(A \cup e) - 1 & , e \text{ not a loop} \\ r_M(A \cup e) & , e \text{ is a loop} \end{cases}$$

Επομένως, παίρνουμε την παρακάτω σχέση

$$Z_{Tutte}(M, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \gamma_{e_1}, \gamma_{e_2}) = \frac{q + \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2}}{q} * Z_{Tutte}(M/e_2, q, \gamma_{\neq e_1, e_2}, \frac{\gamma_{e_1} * \gamma_{e_2}}{q + \gamma_{e_1} + \gamma_{e_2}}) \quad (11)$$

Παράλληλες επεκτάσεις για τα δυαδικά matroids [Goldberg and Jerrum, 27]

Λήμμα 1

Έστω \mathcal{M} ένα δυαδικό matroid που αντιστοιχεί στον πίνακα M με γραμμές V και στήλες E . Έστω $\gamma = \{\gamma_e\}_{e \in E}$. Έστω c μία στήλη του E . Έστω $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ικανοποιούν $1 + \gamma_c = (1 + \gamma_1) * (1 + \gamma_2)$. Έστω e' μία νέα στήλη. Ορίζουμε με $\gamma' = \{\gamma'_e\}_{e \in E \cup \{e'\}}$ ως εξής. $\gamma'_{e'} = \gamma_2$ και $\gamma'_c = \gamma_1$ και για κάθε άλλη στήλη $\gamma'_e = \gamma_e$. Υπάρχει ένα δυαδικό matroid \mathcal{M}' που αναπαρίσταται από έναν πίνακα M' με $|V|$ γραμμές και στήλες $E \cup \{e'\}$, έτσι ώστε να ισχύει ότι $\tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}', q, \gamma')$.

Απόδειξη

- Παίρνουμε την νέα στήλη e' να είναι **αντίγραφο** της στήλης c . Με βάση τα παραπάνω (παράλληλη αναγωγή) έχουμε ότι τα στοιχεία c, e' στο matroid \mathcal{M}' είναι παράλληλα.
- Επομένως, με βάση τα παραπάνω, στο matroid \mathcal{M}' μπορούμε να διαγράψουμε την νέα ακμή e' και να αντικαταστήσουμε την στήλη c με μία νέα στήλη c βάρους $1 + \gamma_{new.c} = (1 + \gamma'_c) * (1 + \gamma'_{e'}) = (1 + \gamma_1) * (1 + \gamma_2) = 1 + \gamma_c$.
- Επομένως, με μία διαδικασία παράλληλης αναγωγής στο matroid \mathcal{M}' καταλήγουμε στο αρχικό matroid \mathcal{M} .
- Συνεπώς, από την σχέση (10) θα ισχύει ότι

$$\tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}', q, \gamma')$$

Σε σειρά επεκτάσεις για τα δυαδικά matroids [Goldberg and Jerrum, 27]

Λήμμα 2

Έστω \mathcal{M} ένα δυαδικό matroid που αντιστοιχεί στον πίνακα M με γραμμές V και στήλες E . Έστω $\gamma = \{\gamma_e\}_{e \in E}$. Έστω c μία στήλη του E . Έστω $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ικανοποιούν $(1 + \frac{q}{\gamma_c}) = (1 + \frac{q}{\gamma_1}) * (1 + \frac{q}{\gamma_2})$. Έστω e' μία νέα στήλη. Ορίζουμε με $\gamma' = \{\gamma'_e\}_{e \in E \cup \{e'\}}$ ως εξής: $\gamma'_{e'} = \gamma_2$ και $\gamma'_c = \gamma_1$ και για κάθε άλλη στήλη $\gamma'_e = \gamma_e$. Υπάρχει ένα δυαδικό matroid \mathcal{M}' που αναπαρίσταται από έναν πίνακα M' με $|V| + 1$ γραμμές και στήλες $E \cup \{e'\}$, έτσι ώστε να ισχύει ότι $(1 + \frac{\gamma_1}{q} + \frac{\gamma_2}{q}) * \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}', q, \gamma')$.

Απόδειξη

- Παίρνουμε έναν νέο πίνακα M' προσθέτοντας στον πίνακα M μία νέα γραμμή r' και μία νέα στήλη e' . Η νέα γραμμή r' έχει 1 στις στήλες c, e' και 0 στις άλλες. Η στήλη e' δεν έχει άλλα 1 (μόνο στην γραμμή r').
- Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $\mathcal{M} = \mathcal{M}' / e'$. Ισοδύναμα θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$r_{\mathcal{M}}(A) = r_{\mathcal{M}'}(A \cup \{e'\}) - r_{\mathcal{M}}(\{e'\}) = r_{\mathcal{M}'}(A \cup \{e'\}) - 1, \forall A \subseteq E$$

Η σχέση αυτή επαληθεύεται άμεσα αν διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $A \subseteq E - \{c\}$: τότε καμία άλλη στήλη δεν έχει 1 στην γραμμή r' .
 2. $c \in A$ και $r_{\mathcal{M}}(A) = r_{\mathcal{M}}(A - \{c\})$.
 3. $c \in A$ και $r_{\mathcal{M}}(A) = r_{\mathcal{M}}(A - \{c\}) + 1$.
- Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι (c, e') είναι **cocircuit** ή ότι c, e' είναι **coloops**.
 1. Έστω ότι c είναι colooper στο \mathcal{M} . Αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για ένα στοιχείο που ανήκει σε κάθε βάση του \mathcal{M} . Θεωρούμε ένα ανεξάρτητο σύνολο $A \subseteq E - \{c\}$ του \mathcal{M}' . Αφού το c είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τις στήλες του A στο \mathcal{M} , c και e' είναι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από το A στο \mathcal{M}' . Επομένως, c και e' είναι coloops στο \mathcal{M}' .
 2. Έστω ότι c δεν είναι colooper στο \mathcal{M} . Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\{c, e'\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο που τέμνει κάθε βάση του \mathcal{M}' .
 - Κάθε ανεξάρτητο σύνολο στο \mathcal{M}' που δεν περιλαμβάνει τις δύο αυτές στήλες μπορεί να επεκταθεί σε ένα μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο αν προσθέσουμε μία οποιαδήποτε στήλη από αυτές. Οπότε, κάθε βάση του \mathcal{M}' τέμνει το $\{c, e'\}$.

- Όμως, επειδή το c δεν είναι color στο \mathcal{M} , υπάρχει μία βάση B στο \mathcal{M} που δεν περιέχει το c . Τότε $B \cup \{c\}$, $B \cup \{c'\}$ είναι βάσεις στο \mathcal{M}' .
- Επομένως, το $\{c, c'\}$ είναι cocircuit στο \mathcal{M}' .

- Συνεπώς, θα ισχύει ότι

$$\tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, q, \gamma) = \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}', q, \gamma')$$

1.5 Μοντέλο Potts

1.5.1 Μοντέλο Potts για γραφήματα

Πρόκειται για ένα μοντέλο που αφορά τον τομέα της στατιστικής φυσικής.

Στο μοντέλο Potts ένα atom ή spin στον τόπο (site) $x \in V$ μπορεί να υπάρχει σε ένα από τα διαφορετικά q states.

Η ενέργεια ενός configuration είναι το άθροισμα, σε όλες τις ακμές e , όπου ο όρος σε κάθε ακμή είναι

- Αν τα δύο spins στα άκρα της ακμής είναι διαφορετικά: 0.
- Αν είναι ίσα: $-J_e$.

Με βάση τα παραπάνω εισάγουμε τις παρακάτω έννοιες:

- **Singleton** S είναι ένα σύνολο που περιέχει μόνο ένα διακριτό στοιχείο.
- Η συνάρτηση $\delta(S) = 1$ αν S είναι singleton και 0 αλλιώς.
- Το **Boltzmann weight** ενός **configuration** είναι $e^{-\beta * H}$ (Η συμβολίζει την ενέργεια και $\beta \geq 0$ είναι η αντίστροφη θερμοκρασία).
- Η **partition function** είναι το άθροισμα σε όλα τα configurations των Boltzmann weights.

Ορίζουμε $\gamma_e = e^{\beta * J_e} - 1$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. **Ferromagnetic:** $J_e \geq 0, \gamma_e \geq 0$.
2. **Antiferromagnetic:** $J_e \leq 0, -1 \leq \gamma_e \leq 0$.
3. **Unphysical:** $\gamma_e < -1$.

Επομένως, ο ορισμός του Potts μοντέλου στην περίπτωση του γραφήματος είναι:

$$Z_{Potts}(G, q, \gamma) = \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \prod_{e \in E} (1 + \gamma_e * \delta(\{\sigma(x_1(e)), \sigma(x_2(e))\})) \quad (12)$$

Το q συμβολίζει τον αριθμό των διαφορετικών states για κάθε spin και άρα στο μοντέλο Potts έχει νόημα μόνο για $q \in \mathbb{N}^+$.

Στην περίπτωση όπου $q=1$.

$$Z_{Potts}(G, 1, \gamma) = \prod_{e \in E} (1 + v_e) = \sum_{A \subseteq E} \prod_{e \in A} \gamma_e$$

Θεώρημα 2 (Fortuin-Kasteleyn)

Για $q \in \mathbb{N}^+$ ισχύει ότι:

$$Z_{Potts}(G, q, \gamma) = Z_{Tutte}(G, q, \gamma)$$

Δηλαδή η partition συνάρτηση του μοντέλου Potts είναι απλά η εξειδίκευση του πολυμεταβλητού πολυνόμου Tutte για $q \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Ξεκινώντας από την έκφραση του μοντέλου Potts έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Z_{Potts}(G, q, \gamma) &= \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \prod_{e \in E} [1 + \gamma_e * \delta(\{\sigma(x_1(e)), \sigma(x_2(e))\})] \\ &= \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \sum_{A \subseteq E} \prod_{e \in A} \gamma_e * \delta(\{\sigma(x_1(e)), \sigma(x_2(e))\}) = \sum_{A \subseteq E} \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \prod_{e \in A} \gamma_e * \delta(\{\sigma(x_1(e)), \sigma(x_2(e))\}) \end{aligned}$$

Το κάθε υπογράφημα (V, A) θα έχει $k(A)$ συνεκτικές συνιστώσες. Σε κάθε συνεκτική συνιστώσα έστω G_{A_i} , $1 \leq i \leq k(A)$ εξετάζουμε το γινόμενο

$$\prod_{e \in A_i} \delta(\{\sigma(x_1(e)), \sigma(x_2(e))\})$$

Προκειμένου το παραπάνω γινόμενο να είναι μη μηδενικό πρέπει υποχρεωτικά όλες οι κορυφές της συνεκτικής συνιστώσας να έχουν την ίδια τιμή $\sigma(v \in G_{A_i}) = p \in [q]$, $\forall v$, και επομένως θα έχουμε q σε πλήθος μη μηδενικών γινομένων στο

άθροισμα πάνω σε όλα τα configurations. Επομένως, για το υπογράφημα A μπορούμε να επιλέξουμε για κάθε συνιστώσα ($k(A)$ σε πλήθος) μία από τις q τιμές και άρα το πλήθος των μη μηδενικών όρων είναι $q^{k(A)}$ και προκύπτει το ζητούμενο.

Εφαρμογή: Chromatic polynomial

Αν θέσουμε $\gamma_e = -1, \forall e$ τότε έχουμε 1 για κάθε σωστό χρωματισμό (δεν θα είναι singleton) και 0 σε διαφορετική περίπτωση. Επομένως, μετράει τον αριθμό των σωστών χρωματισμών.

$$P_G(q) = Z_{Potts}(G, q, -1) = Z_{Tutte}(G, q, -1)$$

1.5.2 Μοντέλο Potts για δυαδικά matroids (Γενίκευση)

- V, E πεπερασμένα σύνολα δεικτών.
- $M = M_{i,e}, i \in V, e \in E$ δυαδικό matroid.

$$\tilde{Z}_{Potts}(M, q, \gamma) = \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \prod_{e \in E} [1 + \gamma_e * \delta(\sum_{i \in V} \sigma(i) * M_{i,e}, 0)] \quad (13)$$

1.5.3 Μοντέλο Ising στα δυαδικά matroids

Το μοντέλο Ising αντιστοιχεί στο μοντέλο του Potts για την περίπτωση όπου $q = 2$.

$$Z_{Ising}(M, \gamma) = Z_{Potts}(M, 2, \gamma)$$

Ισχύει η εξής σχέση

$$\prod_{e \in E} [1 + \gamma_e * \delta(\sum_{i \in V} \sigma_i * M_{i,e}, 0)] = \sum_{A \subseteq E} \prod_{e \in A} \gamma_e * \delta(\sum_{i \in V} \sigma(i) * M_{i,e}, 0),$$

η οποία είναι γενίκευση των παρακάτω παραδειγμάτων:

- $(1 + a) * (1 + b) = 1 + a + b + a * b$
- $(1 + a) * (1 + b) * (1 + c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc$

$$\begin{aligned} Z_{Ising}(M, \gamma) &= \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \sum_{A \subseteq E} \prod_{e \in A} \gamma_e * \delta_e(\sigma) = \sum_{A \subseteq E} \gamma_A \sum_{\sigma: V \rightarrow [q]} \prod_{e \in A} \delta_e(\sigma) = \sum_{A \subseteq E} \gamma_A * (\# \Lambda_A) \\ &= \sum_{A \subseteq E} \gamma_A * 2^{|V| - r_M(A)} = 2^{|V|} * \tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma) \end{aligned}$$

Όπου $\gamma_A = \prod_{e \in A} \gamma_e$, $\delta_e(\sigma) = \delta(\sum_{i \in V} \sigma(i) * M_{i,e}, 0)$.

$\# \Lambda_A$ είναι ο αριθμός των configurations $\sigma : V \rightarrow \{0, 1\}$ για τα οποία ισχύει ότι $\prod_{e \in A} \delta_e(\sigma) = 1$, που είναι ισοδύναμα ο αριθμός των λύσεων του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων $\Lambda_A = \{\Lambda_e : \sum_{i \in V} M_{i,e} * \sigma(i) = 0 : e \in A\}$.

1.6 Αρ αναγωγή και η τάξη πολυπλοκότητας #P

RAS: Randomized Approximation Scheme

Πρόκειται για έναν αλγόριθμο για τον κατά προσέγγιση υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$. Το approximation scheme έχει μία παράμετρο $\epsilon > 0$ που δηλώνει το σφάλμα της προσέγγισης (error tolerance). Ένα **RAS** για την f είναι ένας randomized αλγόριθμος που δέχεται σαν είσοδο ένα στιγμιότυπο $x \in \Sigma^*$ και ένα ρητό $\epsilon > 0$ και δίνει σαν έξοδο έναν ρητό z , έτσι ώστε για κάθε στιγμιότυπο x να ισχύει: $Pr [e^{-\epsilon} * f(x) \leq z \leq e^{\epsilon} * f(x)] \geq 3/4$.

Ο αριθμός $\frac{3}{4}$ μπορεί να αντικατασταθεί από έναν οποιονδήποτε αριθμό στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$.

Ένα randomized approximation scheme (RAS) ονομάζεται **fully polynomial randomized approximation scheme - FPRAS** αν τρέχει σε χρόνο $poly(|x|, \frac{1}{\epsilon})$.

Ένας πραγματικός αριθμός z είναι **efficiently approximable** αν υπάρχει FPRAS για την σταθερή συνάρτηση $f(x) = z$.

Έστω ότι $f, g : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ είναι συναρτήσεις για τις οποίες θέλουμε να συγκρίνουμε την πολυπλοκότητα της προσέγγισης τους.

Μία approximation preserving αναγωγή από την f στην g δίνει έναν τρόπο να μετασχηματιστεί ένα FPRAS για την g σε ένα FPRAS για την f .

Μία **approximation-preserving reduction** (AP - αναγωγή) από την f στην g είναι ένα **probabilistic oracle Turing machine M** που παίρνει σαν είσοδο ένα ζευγάρι $(x, \epsilon) \in \Sigma^* \times (0, 1)$, και ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

- Κάθε **oracle call** που γίνεται από την M είναι της μορφής (w, δ) , όπου $w \in \Sigma^*$ είναι ένα στιγμιότυπο της συνάρτησης g , και $\delta \in (0, 1)$ είναι ένα φράγμα λάθους (error bound) που ικανοποιεί $\delta^{-1} \leq poly(|x|, \epsilon^{-1})$.
- Η μηχανή Turing M τηρεί τις συνθήκες για να αποτελεί RAS για την f όποτε το μαντείο (oracle) τηρεί τις συνθήκες για να είναι RAS για την συνάρτηση g .
- Ο χρόνος εκτέλεσης της M είναι $poly(|x|, \frac{1}{\epsilon})$.

Αν υπάρχει μία AP αναγωγή από την f στην g τότε γράφουμε $f \leq_{AP} g$ και λέμε ότι η f είναι AP αναγωγίσιμη (AP reducible) στην g .

Στην περίπτωση όπου ισχύει ότι $f \leq_{AP} g$ και $g \leq_{AP} f$, τότε οι συναρτήσεις f, g ονομάζονται **AP interreducible** και ισοδύναμα η σχέση αυτή συμβολίζεται ως $f \equiv_{AP} g$.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε δύο γνωστά προβλήματα:

#SAT

Όνομα: *#SAT*

Είσοδος: Μία Boolean formula φ σε κανονική συζευκτική μορφή (CNF).

Έξοδος: Το πλήθος των ικανοποιητικών αναθέσεων της φ .

#BIS

Όνομα: *#BIS*

Είσοδος: Ένα διμερές γράφημα B .

Έξοδος: Το πλήθος των ανεξάρτητων συνόλων του B .

Στην κλάση *#P* θα ασχοληθούμε με τις τρεις **AP interreducible** παρακάτω κλάσεις.

- Η κλάση όλων των προβλημάτων μέτρησης που έχουν FPRAS.
- Η κλάση όλων των προβλημάτων μέτρησης που είναι AP interreducible με το πρόβλημα *#SAT*.
- Η κλάση όλων των προβλημάτων μέτρησης που είναι AP interreducible με το πρόβλημα *#BIS*.

1. Προβλήματα που έχουν FPRAS

Τα προβλήματα αυτής της κλάσης είναι προφανώς AP interreducible μεταξύ τους (δεν χρειάζεται oracle). Στην κλάση αυτή περιλαμβάνονται και τα προβλήματα που ανήκουν στην κλάση *FP*. Τα προβλήματα μέτρησης αυτά μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς σε πολυωνυμικό χρόνο. Παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι το πλήθος των συνδετικών δέντρων σε ένα γράφημα (Kirchhoff) και το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων σε ένα επίπεδο (planar) γράφημα. Ωστόσο, τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα αυτής της κλάσης είναι τα προβλήματα που έχουν FPRAS και είναι *#P - complete* (στο πλαίσιο της πολυωνυμικής αναγωγής Turing - Cook αναγωγές). Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων.

#MATCH

Όνομα: *#MATCH*

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Έξοδος: Το πλήθος των ταιριασμάτων, όλων των μεγεθών, του G .

#DNF

Όνομα: #SAT

Είσοδος: Μία Boolean formula φ σε κανονική διαζευκτική μορφή (DNF).

Έξοδος: Το πλήθος των ικανοποιητικών αναθέσεων της φ .

#PerfectMatchBipartite

Όνομα: #PerfectMatchBipartite

Είσοδος: Ένα διμερές γράφημα B .

Έξοδος: Το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων στο B .

Το πρόβλημα #MATCH μπορεί να προσεγγιστεί με την έννοια του FPRAS με MCMC [1], και το πρόβλημα #DNF μέσω μίας άμεσης τεχνικής δειγματοληψίας [2].

2. Προβλήματα AP interreducible με το #SAT

Έστω $f, g : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$. Μία **parsimonious reduction** [3] από την f στην g είναι μία συνάρτηση $\varrho : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- $f(w) = g(\varrho(w)), \forall w \in \Sigma^*$.
- Η συνάρτηση ϱ είναι υπολογίσιμη από μία πολυωνυμικού χρόνου ντετερμινιστική μηχανή Turing.

Στο πλαίσιο των προβλημάτων μέτρησης, οι parsimonious αναγωγές διατηρούν το πλήθος των λύσεων.

Πρόταση 2

Το πρόβλημα #SAT είναι #P-complete στο πλαίσιο των AP αναγωγών.

Απόδειξη

Υπάρχει μία parsimonious αναγωγή μεταξύ του προβλήματος #SAT και μεταξύ του αριθμού των **accepting paths** (μονοπατιών που αποδέχονται) για ένα δεδομένο ζεύγος Μηχανής Turing και εισόδου. Επειδή μία parsimonious αναγωγή είναι ειδική περίπτωση μίας AP αναγωγής, συμπεραίνουμε ότι κάθε πρόβλημα που ανήκει στην κλάση #P είναι AP-reducible στο #SAT. Επομένως, το πρόβλημα #SAT είναι #P-complete στο πλαίσιο των AP αναγωγών.

Θεώρημα 3 [Zuckerman,4]

Το πρόβλημα $\#SAT$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Το ίδιο ισχύει προφανώς και για κάθε πρόβλημα στην κλάση $\#P$ στο οποίο το $\#SAT$ είναι AP reducible ($\#SAT \leq_{AP} \#f$). Για την ακρίβεια ο Zuckerman είχε αποδείξει ένα πιο δυνατό αποτέλεσμα: δεν υπάρχει FPRAS για τον λογάριθμο του προβλήματος $\#SAT(\varphi)$ εκτός αν $NP = RP$ [4].

Έστω $A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ να είναι κάποιο πρόβλημα απόφασης $A \in NP$. Από τον ορισμό της κλάσης NP θα υπάρχουν ένα πολυώνυμο p και ένα κατηγορημα, υπολογίσιμο σε πολωνυμικό χρόνο R (witness checking predicate) που θα ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη:

$$A(x) \longleftrightarrow \exists y \in \Sigma^* : |y| = p(|x|) \wedge R(x, y)$$

Θεώρημα 4 [28]

Έστω ότι A είναι ένα NP -complete πρόβλημα απόφασης. Τότε το αντίστοιχο πρόβλημα μέτρησης $\#A$ είναι $\#P$ -complete στο πλαίσιο των AP αναγωγών.

Απόδειξη

- $\#A \in \#P$ είναι προφανές.
- Αρκεί να δειχθεί ότι $\#SAT \leq_{AP} \#A$.
- **Λήμμα 3 (Valliant, Vazirani [5, Corollary 3.6])**

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μία randomized μηχανή Turing πολωνυμικού χρόνου με ένα SAT μαντείο, το οποίο αν πάρει σαν είσοδο μία πρόταση φ έχει σαν έξοδο: $k : (1 - \epsilon) * \#\varphi \leq k \leq (1 + \epsilon) * \#\varphi$, με πιθανότητα $p > 1 - \epsilon$.

Δηλαδή το πρόβλημα $\#SAT$ έχει FPRAS αν έχουμε στην διάθεση μας ένα μαντείο (oracle) για το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης SAT .

- Αντικαθιστούμε το decision oracle για το πρόβλημα SAT με ένα προσεγγιστικό (approximate) counting oracle (με την έννοια του RAS) για το $\#A$, καθώς το A είναι NP -complete και ένα RAS πρέπει να μπορεί να διακρίνει το κανένα από τα μερικά (Η πιθανότητα λάθους γίνεται αμελητέα με την επανάληψη δοκιμών [6, Lemma 6.1]).
- Επομένως, η μηχανή Turing M , μόνο με μία απλή μετατροπή, ικανοποιεί τις συνθήκες για μία AP αναγωγή από το $\#SAT$ στο $\#A$. Επομένως, το πρόβλημα απαρίθμησης

κάθε προβλήματος απόφασης που είναι $NP - complete$ είναι $\#P - complete$ στο πλαίσιο των AP αναγωγών.

Παρακάτω δίνονται μερικά παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων μέτρησης της κλάσης αυτής: $\#LargeIS$

Όνομα: $\#LargeIS$

Είσοδος: $m \in \mathbb{N}$ και ένα γράφημα G όπου κάθε ανεξάρτητο σύνολο έχει μέγεθος το πολύ m .

Έξοδος: Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων μεγέθους m .

Το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι $NP - complete$ και επομένως θα ισχύει, λόγω του θεωρήματος 4 ότι $\#LargeIS \equiv_{AP} \#SAT$.

Όμως, το ενδιαφέρον είναι ότι υπάρχουν προβλήματα μέτρησης που ανήκουν σε αυτήν την κλάση προβλημάτων, δηλαδή είναι AP interreducible με το $\#SAT$, των οποίων τα αντίστοιχα προβλήματα απόφασης ανήκουν στην κλάση P ή είναι στοιχειώδη ($O(1)$), όπως για παράδειγμα το παρακάτω πρόβλημα $\#IS$

Όνομα: $\#IS$

Είσοδος: Ένα γράφημα G .

Έξοδος: Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνόλων όλων των μεγεθών.

Για το παραπάνω πρόβλημα το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι στοιχειώδες, όμως για το πρόβλημα μέτρησης ισχύει ότι $\#LargeIS \leq_{AP} \#IS$ και άρα καταλήγουμε στο ότι $\#IS \equiv_{AP} \#SAT$.

Λήμμα 4 [28]

$$\#LargeIS \leq_{AP} \#IS.$$

Απόδειξη

Έστω m και $G = (V, E)$ να είναι ένα στιγμιότυπο του $\#LargeIS$ και θέτουμε $n = |V|$. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο $G' = (V', E')$ του $\#IS$ ως εξής:

- $V' = V * [r]$ ($[r] = 1, 2, \dots, r$).
- $E' = \{\{(u, i), (v, j)\} : u, v \in E \wedge i, j \in [r]\}$.

Παρατηρούμε ότι οι κορυφές του G μετατρέπονται σε r -ανεξάρτητα σύνολα (καθώς οι κορυφές (v, i) και (v, j) για $i \neq j$ δεν συνδέονται $\forall v \in V$) και οι ακμές μετατρέπονται σε πλήρη διμερή γραφήματα $K_{r,r}$.

Από κάθε ανεξάρτητο σύνολο I' του G' μπορούμε να πάρουμε εύκολα το αντίστοιχο ανεξάρτητο σύνολο I για το γράφημα G . Για παράδειγμα αν $I' = \{(a, 2), (a, 4), (b, 1), (b, 4), (c, 4)\}$, τότε $I = \{a, b, c\}$. Κάθε τέτοιο ανεξάρτητο σύνολο I του G μεγέθους k ισοδυναμεί με ακριβώς $(2^r - 1)^k$ ανεξάρτητα σύνολα I' . Συμβολίζουμε με $I_m(G)$ το σύνολο όλων των ανεξάρτητων συνόλων μεγέθους m του G και με $I(G')$ το σύνολο όλων των ανεξάρτητων συνόλων του G' . Τότε θα ισχύει ότι:

$$|I(G')| \geq (2^r - 1)^m * |I_m(G)|$$

Από την άλλη μεριά, το πολύ $(2^r - 1)^{m-1}$ ανεξάρτητα σύνολα I' του G' αντιστοιχούν σε κάθε ανεξάρτητο σύνολο I του G με μέγεθος γνησίως μικρότερο από το m . Επομένως,

$$|I(G')| \leq (2^r - 1)^m * |I_m(G)| + (2^r - 1)^{m-1} * 2^n$$

Απο τις δύο παραπάνω ανισότητες ισχύει ότι

$$|I_m(G)| = \left\lfloor \frac{|I(G')|}{(2^r - 1)^m} \right\rfloor$$

, αν διαλέξουμε $r \geq n + 3$ και παίρνουμε τελικά ότι

$$|I_m(G)| \leq \frac{|I(G')|}{(2^r - 1)^m} \leq |I_m(G)| + \frac{1}{4}.$$

Επομένως, κατασκευάσαμε AP reduction από το $\#LargeIS$ στο $\#IS$: χρησιμοποιούμε ένα μαντείο για την προσέγγιση του $|I(G')|$, διαιρούμε με $(2^r - 1)^m$ και στρογγυλοποιούμε στον πλησιέστερο ακέραιο.

3. Προβλήματα AP interreducible με το $\#BIS$

Το πρόβλημα $\#BIS$ είναι interreducible με άλλα πολλά προβλήματα μέτρησης για τα οποία ωστόσο δεν έχει βρεθεί FPRAS αλλά ούτε έχει αποδειχθεί ότι δεν έχουν FPRAS στην περίπτωση που $NP \neq RP$. Παρακάτω δίνονται κάποια παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων.

#DOWNSETS

Όνομα: #DOWNSETS

Είσοδος: Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (partially ordered set) (X, \preceq) .Έξοδος: Ο αριθμός των **downsets** στο (X, \preceq) .

Poset (partially ordered set) είναι ένα σύνολο ανακλαστικό, αντισυμμετρικό και μεταβατικό.

Downset L είναι ένα υποσύνολο τέτοιο ώστε $x \in L \wedge y \preceq x \longrightarrow y \in L$.

#IPINSAT

Όνομα: #1P1NSAT

Είσοδος: Μία Boolean πρόταση (Boolean formula) φ σε CNF μορφή με το πολύ ένα μη αρνητικό κατηγορημα ανά **clause** και το πολύ ένα αρνητικό κατηγορημα.

Έξοδος: Ο αριθμός των ικανοποιητικών αναθέσεων της φ .

Κεφάλαιο 2

Πολυπλοκότητα του πολυνύμου Tutte

2.1 Εισαγωγή

Το βασικό πρόβλημα είναι το ακόλουθο:

Για μία δεδομένη κλάση από matroids \mathcal{L} , αν υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει το πολυνύμο Tutte σε κάθε μέλος της \mathcal{L} σε πολωνυμικό χρόνο σε σχέση με το μέγεθος του matroid

Παρατηρούμε ότι η αναπαράσταση του πολυνύμου Tutte είναι πολωνυμική στο $|E| = n$ καθώς μπορεί να περιγραφεί σαν μία λίστα από n^2 συντελεστές, όπου κάθε συντελεστής έχει μήκος $O(n)$.

Ιδανικά θα θέλαμε να μπορούσαμε να υπολογίσουμε το Tutte πολυνύμο σε χρόνο πολωνυμικό σε σχέση με το μέγεθος του matroid.

Ωστόσο, για την κλάση όλων των matroids αυτό δεν είναι δυνατόν. Αν $f(n)$ είναι ο αριθμός των μη ισομορφικών matroids μεγέθους n ισχύει ότι:

$$2^{2^{n-\frac{3}{2}*\log(n)+O(\log\log n)}} \leq f(n) \leq 2^{2^{n-\frac{1}{2}*\log(n)+O(\log\log n)}}$$

Μία κλάση \mathcal{L} από matroids ονομάζεται **succinct** αν $|\mathcal{L}_n| = O(2^{q(n)})$, για κάποιο πολυνύμο q , όπου $\mathcal{L}_n = \{M \in \mathcal{L}, M = (E, r), |E| = n\}$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

Συμπεράσματα [15]

- Η κλάση όλων των matroids δεν είναι succinct.
- Όταν \mathcal{L} είναι η κλάση των γραφικών (graphic) matroids υπάρχει μία 1-1 αντιστοίχιση του $M \in \mathcal{L}$ στον πίνακα προσπτώσεων κάθε γραφήματος G , τέτοιο ώστε $M = M(G)$. Επομένως, η κλάση των γραφικών matroids είναι succinct.
- Όταν \mathcal{L} είναι η κλάση των δυαδικών matroids και $M \in \mathcal{L}$ έχει $r(E) = r, |E| = n$, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το M από ένα $r * n$ πίνακα A με 0-1 τιμές έτσι ώστε το M να είναι ισομορφικό με το matroid που επάγεται στις στήλες του A από την γραμμική ανεξαρτησία στο $GF(2)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε πεπερασμένο σώμα \mathbb{F}_k . Επομένως, η κλάση των δυαδικών matroids είναι succinct.

Ορίζονται τα εξής τρία προβλήματα [15]:

1. Όνομα: $\pi_1[\mathcal{L}]$
Είσοδος: matroid $M \in \mathcal{L}$, \mathcal{L} succinct.
Έξοδος: Tutte πολυώνυμο του M .
2. Όνομα: $\pi_2[\mathcal{L}, a, b]$.
Είσοδος: matroid $M \in \mathcal{L}$, \mathcal{L} succinct.
Έξοδος: $T(M, a, b)$.

Είναι σαφές ότι ο ακριβής υπολογισμός είναι υποπερίπτωση του υπολογισμού της γενικής περίπτωσης: $\pi_2[\mathcal{L}, a, b] \propto \pi_1[\mathcal{L}]$.

3. Όνομα: $\pi_3[\mathcal{L}, l]$.
Είσοδος: matroid $M \in \mathcal{L}$, \mathcal{L} succinct, l ρητή καμπύλη.
Έξοδος: $T(M, x(s), y(s))$ υπολογισμός στην καμπύλη l .

$$\pi_3[\mathcal{L}, l] \propto \pi_1[\mathcal{L}], \pi_2[\mathcal{L}, a, b] \propto \pi_3[\mathcal{L}, l], \forall (a, b) \in l$$

Θεώρημα 5 [Jaeger, Vertigan and Welsh ,15]

\mathcal{L} succinct κλειστή κλάση από matroids και l ρητή καμπύλη στο \mathbb{F}^2 . Το πρόβλημα $\pi_1[\mathcal{L}]$ είναι polynomial time reducible στο $\pi_3[\mathcal{L}, l]$, στην περίπτωση όπου l δεν είναι ειδική καμπύλη. **Ειδική καμπύλη** είναι μία καμπύλη $(x(s), y(s))$ όπου ισχύει ότι $(x(s) - 1) * (y(s) - 1) = q = \text{cons}$.

Θεώρημα 6 [Jaeger, Vertigan and Welsh ,15]

\mathcal{L} succinct κλειστή κλάση από matroids και l **ειδική καμπύλη** στο \mathbb{F}^2 . Το πρόβλημα $\pi_3[\mathcal{L}, l]$

είναι polynomial time reducible στο $\pi_2[\mathcal{L}, a, b], \forall (a, b) \in l$, αν δεν πρόκειται για ένα από τα ειδικά σημεία (special points).

Ειδικά σημεία - **special points** είναι τα σημεία:

$$\mathcal{S} = \{(1, 1), (0, 0), (-1, -1), (0, -1), (-1, 0)\}$$

Για τα ειδικά σημεία γνωρίζουμε τα εξής:

1. $(0, 0)$: είναι εύκολο για κάθε κλάση \mathcal{L} .
2. $(1, 1)$: μετράει τον αριθμό των βάσεων και αντίστοιχα στα γραφήματα μετράει τον αριθμό των συνδετικών δέντρων. Επομένως, το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι εύκολο για γραφήματα ενώ το πρόβλημα παραμένει άγνωστο για δυαδικά matroids.
3. $(-1, -1)$: Ο πίνακας προσπτώσεων D του γραφήματος G ορίζει έναν διανυσματικό χώρο στο \mathbb{Z}_2 , που ονομάζεται **cycle space** C . **Bicycle space** είναι τότε το $C \cap C^\perp$. Τότε ισχύει ότι

Θεώρημα 7 [Rosenstiehl and Read, 9]

$$T(G, -1, -1) = (-1)^{|E|} * (-2)^{\dim(B)}$$

Το πρόβλημα αποδεικνύεται ότι λύνεται ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο στα γραφήματα. Επίσης, η απόδειξη επεκτείνεται και στα **δυαδικά matroids**.

4. $(-1, 0)$: Το πολυώνυμο Tutte σχετίζεται με το χρωματικό πολυώνυμο ως εξής

$$P(G, \lambda) = (-1)^{r(E)} * \lambda^{k(G)} * T(G, 1 - \lambda, 0).$$

Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης του πολωνύμου Tutte στο συγκεκριμένο ειδικό σημείο είναι ισοδύναμο με την εύρεση του αριθμού των 2-χρωματισμών ενός γραφήματος. Το πρόβλημα αυτό λύνεται στην κλάση των γραφημάτων ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο. Αποδεικνύεται ότι είναι εύκολο και για τα δυαδικά matroids.

5. $(0, -1)$: Το πολυώνυμο Tutte σχετίζεται με το flow πολυώνυμο ως εξής

$$F(G, H) = (-1)^{|E|-r(E)} * T(G, 0, 1 - |H|).$$

Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης του πολωνύμου Tutte στο συγκεκριμένο ειδικό σημείο είναι ισοδύναμο με την εύρεση του αριθμού των nowhere 0 flows όταν H είναι αβελιανή ομάδα 2 στοιχείων (τάξης 2). Το πρόβλημα αυτό λύνεται στην κλάση των γραφημάτων ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο. Αποδεικνύεται ότι είναι εύκολο και για τα δυαδικά matroids.

2.2 Δυαδικά Matroids - Γραφικά Matroids

Θεώρημα 8

Αν \mathcal{L} είναι η κλάση των γραφικών matroids τότε το πρόβλημα $\pi_2[L, a, b]$ είναι $\#P - hard$ σε όλα τα σημεία του συνόλου $\mathbb{F}^2 \setminus (H_1 \cup S)$, όπου S είναι τα special points. Στο σύνολο $\mathbb{F}^2 \cap (H_1 \cup S)$ το πρόβλημα του υπολογισμού του πολωνύμου Tutte είναι εύκολο.

Απόδειξη

- Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω το πρόβλημα είναι εύκολο στα ειδικά σημεία και στην H_1 .
- Για $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, H_n είναι $\#P - hard$ για την κλάση των γραφικών matroids καθώς περιέχει το (μη ειδικό σημείο) $(1 - n, 0)$, που αντιστοιχεί στον αριθμό των n -χρωματισμών που είναι $\#P - hard$.
- Αποδεικνύεται με την μέθοδο interpolation του Lagrange ότι το σημείο $(1 - a, 0)$ είναι $\#P - hard$ [15].
- Λόγω του θεωρήματος 6 το πρόβλημα θα είναι $\#P - hard$ σε κάθε ειδική καμπύλη H_a και άρα παίρνουμε το ζητούμενο.

Το παραπάνω θεώρημα, εφόσον αφορά $\#P - hardness$, γενικεύεται και στα δυαδικά matroids.

2.3 Διμερής Υποκλάση

Για μία κλάση από matroids \mathcal{L} , έστω \mathcal{L}_B η κλάση των διμερών matroids, δηλαδή όλα τα circuits είναι άρτια.

Λήμμα 5 [Welsh and Vertigan, 16]

Αν \mathcal{L} είναι succinct τότε η κλάση \mathcal{L}_B είναι succinct.

Θεώρημα 9 [Welsh and Vertigan, 16]

Αν L είναι succinct τότε

1. $\pi_1[\mathcal{L}] \equiv \pi_1[\mathcal{L}_B]$.
2. $\pi_3[\mathcal{L}, k] \equiv \pi_3[\mathcal{L}_B, k]$, για κάθε μη ειδική καμπύλη k .

3. $\pi_3[\mathcal{L}, k] \equiv \pi_3[\mathcal{L}_B, k]$, για κάθε ειδική καμπύλη k .
4. $\pi_2[\mathcal{L}, x, y] \equiv \pi_2[\mathcal{L}_B, x, y]$, για κάθε μη ειδικό σημείο (x, y) .

Επομένως, παρατηρούμε ότι όσον αφορά το $\#P - hardness$ ο περιορισμός στην διμερή υποκλάση \mathcal{L}_B δεν επηρεάζει την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Όπως θα δούμε και αργότερα αυτό συνεπάγεται το ότι το πρόβλημα $\#PerfectMatchingsBipartite$ είναι $\#P - complete$, καθώς το πρόβλημα $\#PerfectMatchings$ αντιστοιχεί σε ειδική καμπύλη στο πολυώνυμο Tutte για $q = 2$.

Κεφάλαιο 3

#CSP framework

3.1 Εισαγωγή

Ένα στιγμιότυπο Ω του $\#CSP(F)$ αποτελείται από ένα σύνολο μεταβλητών, που παίρνουν τιμές σε κάποιο χώρο (**domain**) D , και από ένα σύνολο από περιορισμούς. Κάθε περιορισμός είναι ένα σύνολο που περιέχει μία λίστα από μεταβλητές, που ονομάζεται **scope**, και μία συνάρτηση περιορισμού, **constraint function**, που είναι ένα στοιχείο του F , και έχει σαν πλήθος ορισμάτων το πλήθος των μεταβλητών στο scope. Επομένως, με βάση τα παραπάνω μπορούμε να εκφράσουμε το σύνολο όλων των constraints ως εξής:

$$C = \{c : c = \{v_1, \dots, v_n, f(v_1, \dots, v_n)\}, f \in F\}$$

Κάθε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές δίνει ένα βάρος (**weight**) που είναι το γινόμενο πάνω σε όλες τις συναρτήσεις περιορισμού. Το ζητούμενο είναι ότι με είσοδο ένα στιγμιότυπο Ω να βρεθεί το άθροισμα των βαρών πάνω σε όλες τις αναθέσεις.

$$Z(\Omega) = \sum_{\sigma} \prod_{c \in C} f_c(\sigma(v))$$

Πολλά προβλήματα μέτρησης μπορούν να εκφραστούν στο πλαίσιο $\#CSP$, όπως για παράδειγμα το πρόβλημα της μέτρησης των 2-χρωματισμών σε ένα γράφημα $G = (V, E)$. Αν πάρουμε σαν συνάρτηση περιορισμού την f , όπου

$$f = \begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως, το ζητούμενο θα είναι ο παρακάτω υπολογισμός

$$Z(\Omega) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \prod_{c \in C} f(\sigma(v_1), \sigma(v_2)),$$

όπου το σύνολο των μεταβλητών αντιστοιχεί με τις κορυφές του γραφήματος και οι περιορισμοί είναι οι ακμές του γραφήματος. Είναι σαφές ότι $Z(\Omega)$ υπολογίζει τον αριθμό των 2-χρωματισμών σε ένα γράφημα.

Ορίζουμε τις εξής κλάσεις συναρτήσεων $B_k = \{b : \{0, 1\}^k \rightarrow \mathbb{Q}^+\}$. $B = \cup_k B_k$. Μία συνάρτηση $f \in B_k$ ονομάζεται **log-supermodular** αν

$$f(x \vee y) * f(x \wedge y) \geq f(x) * f(y), \forall x, y \in \{0, 1\}^k.$$

Σχετικά με τις δυαδικές συναρτήσεις $f \in B_2$. f είναι **log-modular** αν $f(0, 1) * f(1, 0) = f(0, 0) * f(1, 1)$. Η δυαδική συνάρτηση f ονομάζεται **trivial** αν είναι **log-modular** ή υπάρχει μία μονομελής συνάρτηση $g \in B_1$, έτσι ώστε $f(x, y) = g(x) * EQ(x, y)$ ή $f(x, y) = g(y) * NEQ(x, y)$. Μία δυαδική συνάρτηση f είναι **log-supermodular** αν και μόνο αν είναι **ferromagnetic**, που ισοδύναμα σημαίνει ότι $f(0, 0) * f(1, 1) \geq f(0, 1) * f(1, 0)$. Μία συνάρτηση $f \in B_k$ είναι **μονότονη** αν

$$\forall a, b \in \{0, 1\}^k, a \leq b : f(a) \leq f(b).$$

Μετασχηματισμοί Fourier μίας συνάρτησης $f \in B_k$ ορίζεται ως

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{2^k} * \sum_{p_i \in \{0, 1\}} (-1)^{p_1 x_1 + \dots + p_k x_k} * f(p_1, \dots, p_k).$$

Στην περίπτωση όπου $f \in B_2$, έχουμε τις εξής σχέσεις για τους συντελεστές Fourier.

$$\hat{f}_{00} = \frac{1}{4} * (f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11})$$

$$\hat{f}_{01} = \frac{1}{4} * (f_{00} - f_{01} + f_{10} - f_{11})$$

$$\hat{f}_{10} = \frac{1}{4} * (f_{00} + f_{01} - f_{10} - f_{11})$$

$$\hat{f}_{11} = \frac{1}{4} * (f_{00} - f_{01} - f_{10} + f_{11})$$

3.2 Ising μοντέλο υπό το πλαίσιο #CSP

Θεώρημα 10 [25]

Έστω $f \in B_2$.

1. Αν f είναι **trivial** τότε $\#CSP(\{f\}) \in FP$.
2. Αλλιώς, αν f είναι ferromagnetic:
 - (α') Αν $\hat{f}_{01} * \hat{f}_{10} < 0$, τότε $\#CSP(\{f\})$ είναι ισοδύναμο με το $\#BIS$, κατά αναγωγές AP.
 - (β') Αλλιώς, $\#CSP(\{f\})$ έχει FPRAS.
3. Αλλιώς, αν $f(x, y)$ και $f(1 - x, 1 - y)$ δεν είναι μονότονες, τότε $\#CSP(\{f\})$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Στο μοντέλο Ising (κεφάλαιο 1.5.3) καλούμαστε να υπολογίσουμε την παρακάτω παράσταση.

$$Z_{Ising}(G, \gamma) = Z_{Potts}(G, 2, \gamma) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \prod_{e \in E} (1 + \gamma_e * \delta_e(\sigma))$$

Η παραπάνω παράσταση μπορεί να εκφρασθεί στο πλαίσιο #CSP. Όπως και στο παράδειγμα των 2-χρωματισμών παίρνουμε σαν σύνολο μεταβλητών, το σύνολο των κορυφών του γραφήματος και σαν σύνολο των περιορισμών τις ακμές του γραφήματος. Επίσης, θεωρούμε την περίπτωση της μίας μεταβλητής του προβλήματος

$$\gamma_e = \gamma, \forall e \in E.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. $\sigma(v_1) = \sigma(v_2)$, τότε $f(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) = 1 + \gamma$.
2. $\sigma(v_1) \neq \sigma(v_2)$, τότε $f(\sigma(v_1), \sigma(v_2)) = 1$.

Επομένως, ορίζεται η ακόλουθη δυαδική, συμμετρική συνάρτηση $f \in B_2$ για το παραπάνω πρόβλημα.

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \gamma & 1 \\ 1 & 1 + \gamma \end{pmatrix}$$

Όμως, επειδή μας ενδιαφέρει η περίπτωση μόνο των μη αρνητικών τιμών πρέπει $\gamma \geq -1$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $\gamma = 0, \gamma = -1$: Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση FP .
 - Για $\gamma = 0$, f είναι log-modular και άρα είναι trivial.

- Για $\gamma = -1$, $f(x, y) = NEQ(x, y)$ και άρα είναι trivial.

2. $\gamma > 0$: Το πρόβλημα έχει FPRAS.

$$f(0, 0) * f(1, 1) = (1 + \gamma)^2 \geq 1$$

και άρα είναι ferromagnetic, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς. Επίσης, για τους συντελεστές Fourier ισχύει ότι $\hat{f}_{10} = \hat{f}_{01} = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

3. $\gamma \in (-1, 0)$: Το πρόβλημα δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$. Σε αυτήν την περίπτωση η f δεν είναι trivial και δεν είναι ferromagnetic. Επίσης, οι συναρτήσεις $f(x, y)$ και $f(1 - x, 1 - y)$ δεν είναι μονότονες.

Κεφάλαιο 4

Πολυπλοκότητα του μοντέλου Ising στα γραφικά matroids

4.1 FPRAS για την ferromagnetic περίπτωση

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, το πολυώνυμο Tutte σχετίζεται με το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Tutte, το οποίο σχετίζεται με το μοντέλο Potts της στατιστικής φυσικής. Η περίπτωση του μοντέλου Potts όπου υπάρχουν δύο καταστάσεις (spins), $q = 2$, ορίζεται ως το μοντέλο Ising.

Παρακάτω δίνεται ο ορισμός του προβλήματος.

- Έχουμε μία συλλογή από κορυφές $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
- Κάθε ζευγάρι κορυφών (i, j) σχετίζεται με μία ενέργεια αλληλεπίδρασης V_{ij} .
- Ένα **configuration** σ είναι η ανάθεση θετικών και αρνητικών spin σε κάθε σημείο $\sigma_i \in \{1, -1\}$.
- Η **ενέργεια** ενός configuration δίνεται από την σχέση:

$$H(\sigma) = - \sum_{\{i,j\} \in E} V_{ij} * \sigma_i * \sigma_j - B * \sum_{k \in [n]} \sigma_k$$

- Ferromagnetic (στην αντίστοιχη μορφή του πολυωνύμου Tutte $\gamma \geq 0$) αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $V_{ij} \geq 0$.
- Το κέντρικο πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης **partition**

$$Z = Z(V_{ij}, B, \beta) = \sum_{\sigma} e^{-\beta * H(\sigma)}$$

Μία στρατηγική που ακολουθείται συχνά σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι να θεωρήσουμε τα 2^n πιθανά διανύσματα των spin $\sigma \in \{-1, 1\}^n$, σαν τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov. Ένας καλός τρόπος η αλυσίδα Markov να είναι εργοδική είναι οι μεταβάσεις να συμβαίνουν μεταξύ configurations που διαφέρουν μόνο σε έναν παράγοντα και η επιλογή των πιθανοτήτων μεταβάσεων να γίνεται σύμφωνα με τον κανόνα Metropolis. Όμως, η αλυσίδα Markov που περιγράφηκε παραπάνω δεν συγκλίνει γρήγορα [18]. Το παραπάνω μοντέλο, που τελικά αποτυγχάνει, ονομάζεται **spin-world process**.

Περιγραφή των **subgraph-world configurations** και της αντίστοιχης partition συνάρτησης.

- Ένα spanning υπογράφημα του $([n], E)$ είναι της μορφής $([n], X \subseteq E)$.
- Ορίζονται τα εξής μεγέθη: $\lambda_{ij} = \tanh(\beta * V_{ij})$ και $\mu = \tanh(\beta * B)$.
- Για κάθε configuration $X \subseteq E$ ορίζεται η συνάρτηση:

$$w(X) = \mu^{|odd(X)|} * \prod_{\{i,j\} \in X} \lambda_{ij}$$

, όπου $odd(X)$ είναι το σύνολο όλων των κορυφών με περιττό βαθμό στο γράφημα X .

- Η συνάρτηση partition του subgraphs-world είναι:

$$Z' = \sum_{X \subseteq E} w(X)$$

Επίσης, έχουμε τον ορισμό της παρακάτω ποσότητας:

$$A = (2 * \cosh(\beta * B))^n * \prod_{\{i,j\} \in E} \cosh(\beta * V_{ij})$$

Θεώρημα 11 [Jerrum and Sinclair, 18]

$$Z = A * Z'$$

Συνεπώς, αρκεί να προσεγγιστεί η partition συνάρτηση Z' για το μοντέλο subgraph-world configurations, ώστε να πάρουμε την επιθυμητή προσέγγιση της partition συνάρτησης Z .

Ορίζουμε την αλυσίδα Markov MC_{Ising} ως εξής:

Για $X \neq X' \in \Omega$, η πιθανότητα μετάβασης από το X στο X' δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$p(X, X') = \begin{cases} \frac{1}{2*m} & |X \oplus X'| = 1 \text{ and } w(X') \geq w(X) \\ \frac{w(X')}{2*m*w(X)} & |X \oplus X'| = 1 \text{ and } w(X') < w(X) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Οι πιθανότητες $p(X, X)$ υπολογίζονται ως $1 - \sum_{X' \neq X} p(X, X')$. Επομένως, οι μεταβάσεις στο MC_{Ising} αφορούν διαταραχές όπου μία ακμή διαγράφεται ή προστίθεται από ένα υπογράφημα. Επομένως, αν βρισκόμαστε σε μία κατάσταση-υπογράφημα X τότε η επόμενη κατάσταση μπορεί να προκύψει με την προσθήκη οποιασδήποτε ακμής λείπει ($m - |X|$) ή από την διαγραφή μίας ακμής του X ($|X|$). Συνεπώς, υπάρχουν m μεταβάσεις από κάθε κατάσταση. Επίσης παρατηρούμε ότι $p(X, X') \leq \frac{1}{2m}$ και άρα $p(X, X) = 1 - \sum_{X' \neq X} p(X, X') \geq 1 - m * \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$.

Παρακάτω δίνεται η προσομοίωση της παραπάνω αλυσίδας, η οποία είναι "εύκολη".

Έστω ότι η τρέχουσα κατάσταση της αλυσίδας είναι η $X \in \Omega$. Τότε οι μεταβάσεις από το X μπορούν να επιλεγούν με βάση το μοντέλο που ακολουθεί.

1. Με πιθανότητα $\frac{1}{2}$, $X' = X$.
2. Επιλογή τυχαίας ακμής $e \in E$ και $Y = X \oplus \{e\}$.
3. Αν $w(Y) \geq w(X)$ τότε $X' = Y$, αλλιώς αν $w(Y) < w(X)$ τότε με πιθανότητα $\frac{w(Y)}{w(X)}$ θέτουμε $X' = Y$, αλλιώς $X' = X$.

Παρατηρούμε ότι επειδή τα Y, X διαφέρουν σε μόνο μία ακμή ο λόγος $\frac{w(Y)}{w(X)}$ μπορεί να υπολογιστεί με 2 πολλαπλασιασμούς.

Η αλυσίδα MC_{Ising} είναι **irreducible** καθώς μπορούμε να φτάσουμε από οποιαδήποτε υπογράφημα σε ένα οποιοδήποτε άλλο με την προσθήκη ή διαγραφή ακμής σε κάθε βήμα. Επίσης είναι **aperiodic** καθώς $p(X, X) > 0$. Επομένως, ορίζεται μία stationary κατανομή π , που είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση. $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και

$$\pi(X) = \frac{w(X)}{\sum_{X'} w(X')} = \frac{w(X)}{Z'}.$$

Αποδεικνύεται ότι $\pi(X)$ είναι η stationary κατανομή της αλυσίδας MC_{Ising} . Αν ορίσουμε ως $q(X, X') = \pi(X) * p(X, X')$ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$q(X, X') = \pi(X) * p(X, X') = \pi(X') * p(X', X) = q(X', X)$$

- $X = X'$ προφανές.
- $|X \oplus X'| > 1$, τότε $p(X, X') = p(X', X) = 0$.
- $|X \oplus X'| = 1$ και $\chi.\beta.\tau.\gamma \ w(X') < w(X)$, τότε

$$q(X, X') = \pi(X) * p(X, X') = \frac{w(X)}{Z'} * \frac{w(X')}{2m * w(X)} = \frac{w(X')}{Z' * 2m}$$

$$q(X', X) = \pi(X') * p(X', X) = \frac{w(X')}{Z'} * \frac{1}{2m} = \frac{w(X')}{Z' * 2m} = q(X, X')$$

Προκειμένου η αλυσίδα Markov MC_{Ising} να είναι η βάση μίας αποδοτικής δειγματοληψίας πρέπει να είναι **rapidly mixing**, που σημαίνει ότι αν αρχίσει από μία κατάλληλη αρχική κατάσταση, η κατανομή στην τελική κατάσταση θα προσεγγίζει την κατανομή π μετά από πολυωνυμικό πλήθος βημάτων.

Conductance σε μία αλυσίδα Markov ορίζεται ως

$$\Phi = \min_{S \subseteq \Omega} \left\{ \frac{\sum_{X \in S, X' \notin S} q(X, X')}{\sum_{X \in S} \pi(X)} \right\}$$

Επομένως, μία αλυσίδα με μεγάλο Φ θα κολλήσει σε κάποια μικρή περιοχή του χώρου καταστάσεων με πολύ μικρή πιθανότητα, και άρα αναμένεται να συγκλίνει πιο γρήγορα.

Θεώρημα 12 [Jerrum and Sinclair, 18]

Έστω ότι Φ είναι η conductance μίας εργοδικής, αντιστρέψιμης αλυσίδας Markov με stationary κατανομή π και $\min_X p(X, X) \geq \frac{1}{2}$. $p^{(t)}$ συμβολίζει την κατανομή της κατάστασης την χρονική στιγμή t , δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση είναι X_0 . Τότε

$$\|p^{(t)} - \pi\| \leq \frac{(1 - \Phi^2)^t}{\pi(X_0)}.$$

Η απόδειξη δίνεται στο [18.Theorem 6].

Επομένως, θέλουμε να βρεθεί ένα καλό κάτω όριο για το Φ .

Θεώρημα 13 [Jerrum and Sinclair, 18]

$$\Phi \geq \frac{\mu^4}{4m}$$

Generator για το subgraph-worlds configuration είναι ένας πιθανοτικός αλγόριθμος (probabilistic algorithm) που δέχεται σαν είσοδο ένα ferromagnetic Ising σύστημα με την μορφή $\langle \lambda_{ij}, \mu \rangle$, και ένα $\delta > 0$ το περιθώριο λάθους (error tolerance), και έχει σαν έξοδο ένα στοιχείο του Ω από μία κατανομή πιθανότητας p , έτσι ώστε να ικανοποιείται:

$$\|p - \pi\| = \frac{1}{2} * \sum_{X \in \Omega} |p(X) - \pi(X)| = \max_{A \subseteq \Omega} |p(A) - \pi(A)| \leq \delta$$

Θεώρημα 14 [Jerrum and Sinclair, 18]

Υπάρχει ένα generator για το subgraph-world configuration το οποίο με είσοδο $\langle \lambda_{ij}, \mu \rangle$ και δ έχει χρόνο εκτέλεσης $O(m^2 * \mu^{-8} * (\log(\delta^{-1}) + m))$, όπου $m = |E|$.

Απόδειξη

Προσομοίωση της αλυσίδας Markov MC_{Ising} για $16 * m^2 * \mu^{-8} * (\log(\delta^{-1}) + m)$ βήματα, ξεκινώντας από την κατάσταση $X_0 = \emptyset$. Επειδή ισχύει ότι $\lambda_{ij} < 1$ και $\mu \leq 1$, είναι σαφές ότι $w(X_0) \geq w(X)$, $\forall X \in \Omega$. Επομένως, $\pi(X_0) \geq \frac{1}{2}$. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 11 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|p^{(t)} - \pi\| &\leq \frac{(1 - \Phi^2)^t}{\pi(X_0)} \leq 2^m * \left(1 - \frac{\mu^8}{16m^2}\right)^{16*m^2*\mu^{-8}*(\log(\delta^{-1})+m)} \\ &\leq 2^m * e^{-\ln(\delta^{-1})} * e^{-m} < \delta \end{aligned}$$

λόγω της ανισότητας $1 + x \leq e^x$.

Στην συνέχεια προκειμένου να προσεγγιστεί η τιμή μιας φυσικής ποσότητας που σχετίζεται με ένα ferromagnetic Ising σύστημα:

1. Έκφραση της ποσότητας ως αναμενόμενη τιμή μίας κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής.

Πιο συγκεκριμένα έστω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Τότε, η συνάρτηση f μετατρέπεται σε τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή

$$E(f) = \frac{1}{Z'} \sum_{X \in \Omega} w(X) * f(X)$$

2. Προσέγγιση του $E(f)$ παίρνοντας δείγματα τυχαία, χρησιμοποιώντας την γεννήτρια του θεωρήματος 2 και υπολογίζοντας τον μέσο όρο: Κατασκευάζουμε ένα ανεξάρτητο δείγμα

$\{X_i\}$ από configurations, μεγέθους s , και υπολογίζουμε τον μέσο του δείγματος $s^{-1} * \sum_i f(X_i)$. Η έξοδος της γεννήτριας θα προσεγγίσει το $E(f)$. Αυξάνοντας την τιμή του s αυξάνεται και ο βαθμός προσέγγισης. Η πιθανότητα λάθους του εκτιμητή μειώνεται δραστικά, επαναλαμβάνοντας ολόκληρη την διαδικασία t φορές και παίρνοντας την διάμεσο των t δειγμάτων.

Λήμμα 6 [Jerrum and Sinclair, 18]

Έστω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ και έστω $0 < \xi \leq 1, 0 < \eta \leq \frac{1}{2}$. Τότε υπάρχει ένα πείραμα, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, που χρησιμοποιεί συνολικά

$504 * \xi^{-2} * \log(n^{-1}) * \frac{\max(f)}{E(f)}$ δείγματα από την γεννήτρια, όπου κάθε δείγμα έχει είσοδο

$< \lambda_{ij}, \mu >$ και περιθώριο $\delta = \frac{\xi * E(f)}{8 * \max(f)}$ και παράγει μία έξοδο Y :

$$Pr[Y \leq (1 + \xi) * E(f)] \geq 1 - \eta$$

Σύμφωνα το θεώρημα 11 αρκεί να υπολογίσουμε την ποσότητα Z' , καθώς η ποσότητα A μπορεί να υπολογιστεί άμεσα. Αρχικά, εκφράζουμε το Z' ως συνάρτηση του μ .

$$Z' = Z'(\mu) = \sum_{X \subseteq E} \mu^{|odd(X)|} \prod_{\{i,j\} \in X} \lambda_{ij} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k * \mu^{2k}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μόνο άρτιες δυνάμεις του μ , καθώς σε κάθε γράφημα ο αριθμός των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος. Επομένως, θεωρούμε το Z' σαν ένα πολυώνυμο στο μ^2 , με συντελεστές

$$c_k = \sum_{X: |odd(X)|=2k} \prod_{\{i,j\} \in X} \lambda_{ij}.$$

Στην ferromagnetic περίπτωση όλοι οι συντελεστές $c_k > 0$, και συνεπώς $Z'(\mu)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του μ .

Επομένως, με βάση τα παραπάνω, θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $Z'(\mu = \tanh(\beta * B))$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η τιμή του $Z'(\mu = 1)$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα, $Z'(1) = \prod_{\{i,j\} \in E} (1 + \lambda_{ij})$. Στην συνέχεια θα συσχετίσουμε την τιμή $Z'(\mu = \tanh(\beta * B))$ με την τιμή του $Z'(\mu = 1)$, χρησιμοποιώντας τις τιμές $Z'(\mu)$ σε συγκεκριμένα σημεία $\tanh(\beta * B) < \mu < 1$.

Ο μηχανισμός συσχέτισης των τιμών του Z' σε δύο σημεία $\mu = \mu_0$ και $\mu = \mu_1$, με $1 \geq \mu_0 > \mu_1 \geq 0$ είναι ο ακόλουθος. Τυχαιά μεταβλητή $f(X) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{|odd(X)|}$ και επιλέγουμε το σημείο μ_0 . Τότε η αναμενόμενη τιμή της f είναι

$$E_{\mu_0}(f) = \frac{1}{Z'(\mu_0)} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k * \mu_0^{2k} * \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{2k} = \frac{Z'(\mu_1)}{Z'(\mu_0)}$$

Επομένως, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή $\frac{Z'(\mu_1)}{Z'(\mu_0)}$ χρησιμοποιώντας την τεχνική δειγματοληψίας που είδαμε παραπάνω. Ωστόσο πρέπει να ισχύει ότι $\frac{max(f)}{E_{\mu_0}(f)}$ να είναι μην είναι μεγάλο.

Για να επιτευχθεί αυτή η συνθήκη η ακολουθία των σημείων (μ_k) , από το 1 στην ζητούμενη τιμή, που επιλέγεται είναι η εξής

$$\mu_k = \begin{cases} \frac{n-k}{n} & , 0 \leq k \leq r \\ \tanh(\beta * B) & , k = r + 1 \end{cases}$$

, όπου $r < n$ ικανοποιεί $\frac{n-r}{n} > \tanh(\beta * B) \geq \frac{n-r-1}{n}$.

Θεώρημα 15 [Jerrum and Sinclair, 18]

Ο παρακάτω αλγόριθμος είναι ένα FPRAS για το ferromagnetic Ising σύστημα.

1. Υπολογισμός του A (του θεωρήματος 1) και $Z'(1)$.
2. Ορίζουμε την ακολουθία $\mu_k, 0 \leq k \leq r + 1$, όπως παραπάνω για την προσέγγιση του $\frac{Z'(\mu_{k+1})}{Z'(\mu_k)}$. Χρησιμοποιώντας την τεχνική του παραπάνω λήμματος 6 υπολογίζεται η ποσότητα Y_k , η οποία ικανοποιεί

$$Pr[Y_k \leq \frac{Z'(\mu_{k+1})}{Z'(\mu_k)} * (1 + \frac{\epsilon}{2n})] \geq 1 - \frac{1}{4n}$$

3. Η έξοδος είναι $A * Z'(1) * \prod_{k=0}^r Y_k$

Απόδειξη

Για την έξοδο ισχύει ότι :

$$A * Z'(1) * \prod_{k=0}^r Y_k \leq Z * (1 + \frac{\epsilon}{2n})^n \leq Z * (1 + \epsilon)$$

, με πιθανότητα $(1 - \frac{1}{4n})^n \geq 3/4$

Επομένως, αρκεί να αποδειχθεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $poly(n, \epsilon^{-1})$.

Ο υπολογισμός των βημάτων 1 και 3 του αλγορίθμου είναι $O(n^2)$. Για την πολυπλοκότητα του βήματος 2 έχουμε τα εξής :

- Για μία συγκεκριμένη τιμή του k , η διαδικασία του υπολογισμού Y_k χρειάζεται $N = 20160 * \epsilon^{-2} * n^2 * \log(4n)$ κλήσεις στην γεννήτρια του Θεωρήματος 14.
- Το περιθώριο λάθους σε κάθε κλήση είναι $\delta = \frac{\epsilon}{160n}$ και $\mu \geq n^{-1}$.
- Ακολουθεί από το θεώρημα 14 ότι ο χρόνος εκτέλεσης κάθε κλήσης είναι $q(n, \epsilon^{-1})$ για κάποιο πολυώνυμο q .
- Ο συνολικός αριθμός κλήσεων είναι $n * N$ και άρα ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n * N * q(n, \epsilon^{-1}))$.
- Επομένως, ο αλγόριθμος είναι πράγματι FPRAS.

4.2 Προσεγγισιμότητα του Ising μοντέλου για την antiferromagnetic περίπτωση

Θεώρημα 16 [Jerrum and Sinclair, 18]

Δεν υπάρχει FPRAS για το μοντέλο Ising στην antiferromagnetic περίπτωση εκτός αν $NP=RP$.

Απόδειξη

Αρχικά, θα αναφέρουμε τα εξής γνωστά προβλήματα.

Όνομα: *MAXCUT*.

Είσοδος: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G και $b \in \mathbb{N}$.

Έξοδος: Αν υπάρχει cut-set στο G , μεγέθους τουλάχιστον b .

Όνομα: *#MAXCUT*.

Είσοδος: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G .

Έξοδος: Ο αριθμός των cut-sets του G μέγιστου μεγέθους.

Το πρόβλημα απόφασης *MAXCUT* είναι *NP-complete*. Έστω $G = ([n], E)$ και $b \in \mathbb{N}$ να ορίζουν ένα στιγμιότυπο του *MAXCUT*. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Ising θέτοντας $\beta = n$ και $V_{ij} = -1$, όταν $\{i, j\} \in E$, και αλλιώς $V_{ij} = 0$. Κάθε configuration σ διαμερίζει το σύνολο των κορυφών σε 2 υποσύνολα, ανάλογα με την τιμή $\sigma(i \in [n])$, και έτσι

ορίζεται ένα cut-set του G : $cut(\sigma) = \{\{i, j\} \in E : \sigma(i) * \sigma(j) = -1\}$. Οι ακμές του γραφήματος χωρίζονται σε 3 κατηγορίες: E_1, E_2 , οι ακμές που τα 2 άκρα είναι στο πρώτο και στο δεύτερο σύνολο αντίστοιχα και $cut(\sigma)$ οι ακμές που ορίζει η τομή. $|E_1| + |E_2| + |cut(\sigma)| = |E| = m$.

$$H(\sigma) = - \sum_{\{i,j\} \in E} V_{ij} * \sigma(i) * \sigma(j) = |E_1| + |E_2| - |cut(\sigma)| = |E| - 2 * |cut(\sigma)|.$$

Η συνάρτηση partition:

$$Z = \sum_{\sigma} 2^{-\beta * H(\sigma)} = \sum_{\sigma} 2^{-\beta * (m - 2|cut(\sigma)|)} = \sum_{k=0}^m N_k * 2^{\beta * (2k - m)},$$

όπου N_k είναι ο αριθμός των σ για τα οποία $|cut(\sigma)| = k$. Θα ισχύει ότι $\sum_{k=0}^m N_k = 2^n$, καθώς κάθε cut-set ορίζει 1-1 μία διαμέριση του $[n]$ σε 2 σύνολα.

Αν ένα cut-set μεγέθους b υπάρχει στο G τότε $Z \geq 2^{\beta * (2b - m)} = 2^{n * (2b - m)}$, και αν δεν υπάρχει cut-set μεγέθους b , $Z \leq 2^n * 2^{\beta * (2b - 2 - m)} = 2^{-n} * 2^{n * (2b - m)}$. Αν υπήρχε FPRAS για το πρόβλημα Ising θα μπορούσαμε σε πολωνυμικό χρόνο με πιθανότητα λάθους $\frac{1}{4}$, να λύσουμε το πρόβλημα $MAXCUT$, και άρα ισοδύναμα ότι $MAXCUT \in BPP$ και άρα ισοδύναμα θα ισχύει, αφού $MAXCUT$ είναι NP-complete, ότι $NP = RP$.

Κεφάλαιο 5

Πολυώνυμο Tutte για γραφήματα

5.1 Γενικά γραφήματα

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $S \cup H_1$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο κεφάλαιο 2 το Tutte πολυώνυμο στα ειδικά σημεία S και στην ειδική καμπύλη H_1 γίνεται εύκολο και επιλύεται ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο.

Περίπτωση 2: $q > 2, \gamma < 0$

Σε αυτήν την περίπτωση το Tutte πολυώνυμο δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Απόδειξη

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις :

1. *Πρόταση 3 [Goldberg and Jerrum, 7]*

Αν $x < -1$ και (x, y) δεν ανήκει στις H_0, H_1 , τότε δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

2. *Πρόταση 4 [Goldberg and Jerrum, 7]*

Αν $y < -1$ και (x, y) δεν ανήκει στις H_1, H_2 , τότε δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

3. Πρόταση 5 [Goldberg and Jerrum, 7]

Αν (x, y) σημείο κοντά στο $(0, 0)$, δηλαδή ισχύει ότι $|x|, |y| \leq 1$, και $q > 1.5$, τότε δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Έχουμε ότι: $\gamma < 0 \Rightarrow y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1$ και αφού $q > 2 > 0$ έχουμε ότι $x < 1$.

Αν $x < -1$ ή $y < -1$ τότε από τις παραπάνω προτάσεις 3 και 4 έχουμε ότι δεν υπάρχει πράγματι FPRAS εκτός αν $NP = RP$. Για την περίπτωση όπου $x, y \in [-1, 1]$ πρόκειται για σημείο κοντά στο $(0, 0)$ και επίσης έχουμε ότι $q > 2$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 5, το Tutte πολυώνυμο δεν έχει FPRAS στο σημείο (q, γ) . Επομένως, πράγματι σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Περίπτωση 3: $q > 2, \gamma > 0$

Ισχύει ότι

$$\#BIS \leq_{AP} TUTTE(q, \gamma).$$

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω πολύ χρήσιμη σχέση:

Λήμμα 7 [Goldberg and Jerrum, 19]

Έστω ότι ισχύουν οι δύο παρακάτω σχέσεις:

$$e^{\frac{-\epsilon}{n+m}} * q \leq \hat{q} \leq e^{\frac{\epsilon}{n+m}} * q$$

$$e^{\frac{-\epsilon}{n+m}} * \gamma \leq \hat{\gamma} \leq e^{\frac{\epsilon}{n+m}} * \gamma$$

Τότε,

$$e^{-\epsilon} * Z_{Tutte}(G, q, \gamma) \leq Z_{Tutte}(G, \hat{q}, \hat{\gamma}) \leq e^{\epsilon} * Z_{Tutte}(G, q, \gamma).$$

Η αλυσίδα των αναγωγών που θα χρησιμοποιηθεί είναι η εξής:

$$\#BIS \leq_{AP} \#BipartiteMaxIS \leq_{AP} \#BIS(\mu) \leq_{AP} \#SemiReguralBIS(\mu) \leq_{AP} UniformHyperTutte(\mu+1 = q, \mu) \leq_{AP} TwoWeightFerroTutte(\mu+1 = q) \leq_{AP} Tutte(\mu+1 = q, \gamma)$$

Επομένως, πρέπει να οριστούν τα παρακάτω προβλήματα.

#SemiReguralBIS

Όνομα: *#SemiReguralBIS*(μ)

Είσοδος: Διμερές γράφημα $B = (U, V, E)$ έτσι ώστε κάθε κορυφή στο V να έχει τον ίδιο βαθμό.

Έξοδος: $Z_{IS}(B, \mu) = \sum_I \mu^{|I|}$, όπου I είναι κάθε ανεξάρτητο σύνολο του B .

#BipartiteMaxIS

Όνομα: *#BipartiteMaxIS*

Είσοδος: Διμερές γράφημα $B = (U, V, E)$.

Έξοδος: Το πλήθος των μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων.

#BIS

Όνομα: *#BIS*(μ)

Είσοδος: Διμερές γράφημα $B = (U, V, E)$.

Έξοδος: $Z_{IS}(B, \mu) = \sum_I \mu^{|I|}$, όπου I είναι κάθε ανεξάρτητο σύνολο του B .

UniformHyperTutte

Όνομα: *UniformHyperTutte*(q, γ)

Είσοδος: H : υπεργράφος, $H = (V, E)$.

Έξοδος: $Z_{Potts}(H, q, \gamma)$, όπου $\gamma_f = \gamma, \forall f$.

Λήμμα 8 [Goldberg and Jerrum, 19]

$$\#BIS \leq_{AP} \#BipartiteMaxIS$$

Απόδειξη

Έστω ότι G είναι ένα στιγμιότυπο του *#BIS*, με σύνολο κορυφών $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο G' του *#BipartiteMAXIS* ως εξής.

- Οι κορυφές του G' είναι $\{v_0, \dots, v_{n-1}\} \cup \{v'_0, \dots, v'_{n-1}\}$.
- Οι ακμές του G' είναι οι ακμές του G μαζί με $\{(v_i, v'_i)\} \forall i$.

Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοίχιση (bijection) μεταξύ των ανεξάρτητων συνόλων του G και των μέγιστων ανεξάρτητων συνόλων του G' .

Ακόμα, ισχύει ότι :

Λήμμα 9

$$\#BipartiteMaxIS \leq \#BIS$$

Απόδειξη

Το μέγιστο μέγεθος των ανεξάρτητων συνόλων, m σε ένα διμερές γράφημα μπορεί να προσδιοριστεί σε πολωνυμικό χρόνο. Επομένως, η αναγωγή είναι προφανής σε πολωνυμικό χρόνο.

Λήμμα 10

Από λήμμα 8 και λήμμα 9 ισχύει ότι $\#BipartiteMaxIS \equiv_{AP} \#BIS$.

Λήμμα 11 [Goldberg and Jerrum, 19]

$$\#BipartiteMaxIS \leq_{AP} \#BIS(\mu)$$

Απόδειξη

Έστω B ένα στιγμιότυπο του $\#BipartiteMaxIS$ με n κορυφές και m ακμές και έστω $\epsilon > 0$ να είναι η επιθυμητή προσέγγιση του AP reduction. Έστω ξ να είναι το μέγεθος ενός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου του B και έστω Y να είναι το πλήθος των μεγίστων ανεξάρτητων συνόλων. Προκειμένου να κάνουμε την κατασκευή χρειαζόμαστε μία προσέγγιση του μ . Έτσι, υπολογίζουμε έναν ρητό στο διάστημα

$$\frac{3}{4} * \mu \leq \hat{\mu} \leq \frac{5}{4} * \mu$$

Έστω s ο ακέραιος που ικανοποιεί

$$s - 1 \leq \left\lfloor \frac{n + 3}{\log_2(1 + \frac{2*\hat{\mu}}{5})} \right\rfloor \leq s$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$s \geq \frac{n + 3}{\log_2(1 + \frac{\hat{\mu}}{2})}$$

Έστω B' να είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών $\{(u, i) : u \in V(B), i \in [s]\}$ και σύνολο ακμών $\{((u, i), (v, j)) : (u, v) \in E(B), \forall i, j \in [s]\}$.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε ένα ρητό στο διάστημα

$$e^{\frac{-\epsilon}{60n*s}} * \mu \leq \hat{\mu} \leq e^{\frac{\epsilon}{60n*s}} * \mu$$

Επειδή υπάρχουν $n * s$ κορυφές στο γράφημα B' , $|I| < n * s$ και έτσι από το Λήμμα 7 παίρνουμε ότι

$$e^{\frac{-\epsilon}{60}} * Z_{IS}(B', \mu) \leq Z_{IS}(B', \hat{\mu}) \leq e^{\frac{\epsilon}{60}} * Z_{IS}(B', \mu).$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας oracle για το $\#BIS(\mu)$ με παράμετρο προσέγγισης $\frac{\epsilon}{60}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή Z που ικανοποιεί την σχέση

$$e^{\frac{-\epsilon}{30}} * Z_{IS}(B', \hat{\mu}) \leq Z \leq e^{\frac{\epsilon}{30}} * Z_{IS}(B', \hat{\mu}) \quad (14)$$

Παρατηρούμε ότι κάθε ανεξάρτητο σύνολο του B' οδηγεί σε ένα ανεξάρτητο σύνολο του B . Η κορυφή u του B ανήκει σε ανεξάρτητο σύνολο του B αν υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή (u, i) που ανήκει σε ανεξάρτητο σύνολο του B' . Ένα ανεξάρτητο σύνολο του B μεγέθους k και επομένως κάνει μια συνεισφορά

$$((1 + \hat{\mu})^s - 1)^k$$

στο $Z_{IS}(B', \hat{\mu})$.

Αυτό ισχύει επειδή:

Στο γράφημα B' τα blocks $V_i = (v_i, k = [s])$ και $W_j = (w_j, [s])$ (των s κορυφών το καθένα) θα ενώνονται πλήρως με ακμές, θα είναι δηλαδή πλήρως διμερή, αν οι αντίστοιχες κορυφές του B , v_i και w_j ενώνονται με ακμή στο B . Αλλιώς θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Έστω ότι στο γράφημα έχουμε το ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n\}$, με $m+n = k$, ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k . Εφόσον είναι ανεξάρτητο σύνολο δεν θα υπάρχει στο γράφημα καμία από τις ακμές (v_i, w_j) , $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Επομένως, στο γράφημα θα έχουμε αντίστοιχα όλα τα ανεξάρτητα σύνολα $\{V_1, V_2, \dots, V_m, W_1, W_2, \dots, W_n\}$, όπου τα V_i και W_j είναι όλα τα υποσύνολα κορυφών των συνόλων $(v_i, k \in [s])$ και $(w_j, k \in [s])$.

Επειδή ο μέγιστος αριθμός από ανεξάρτητα σύνολα του είναι 2^n , έχουμε ότι

$$Y \leq \frac{Z_{IS}(B', \hat{\mu})}{((1 + \hat{\mu})^s - 1)^\xi} \leq Y + \frac{2^n}{(1 + \hat{\mu})^s - 1} \leq Y + \frac{1}{4}$$

Όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό του s και επειδή $\hat{\mu} \geq \frac{\mu}{2}$.

Παίρνουμε την τιμή του Z από την σχέση (14) και την διαιρούμε με το $((1 + \hat{\mu})^s - 1)$ και την στρογγυλοποιούμε κάτω στον πλησιέστερο ακέραιο.

Λήμμα 12 [Goldberg and Jerrum, 19]

$$\#BIS(\mu) \leq_{AP} \#SemiRegularBIS(\mu)$$

Απόδειξη

Έστω $B = (U, V, E)$ ένα στιγμιότυπο του $\#BIS(\mu)$ με n κορυφές στο οποίο ο μέγιστος βαθμός μίας κορυφής είναι $d > 1$. Θα κατασκευάσουμε $B' = (U', V', E')$ ένα στιγμιότυπο του $\#SemiRegularBIS(\mu)$ στο οποίο κάθε κορυφή του V' έχει βαθμό d . Έστω $\epsilon > 0$ να είναι η επιθυμητή προσέγγιση του AP reduction.

Με σκοπό την απλότητα των εκφράσεων θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$L(s, x) = (1 + x)^s$$

Έστω Ψ να είναι ένα πλήρες διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών z_1, z_2, \dots, z_d και y_1, \dots, y_s . Επομένως, για κάθε κορυφή ισχύει $\deg(y_i) = d$. Για κάθε κορυφή $v \in V$ βαθμού δ , παίρνουμε $d - \delta$ νέα αντίγραφα του Ψ και συνδέουμε την v με την z_1 κάθε αντιγράφου. Έστω $g < d * n$ ο

αριθμός των αντιγράφων του Ψ που συμπεριλαμβάνονται στο B' . Παρατηρούμε ότι το σύνολο U' είναι το σύνολο U και η ένωση όλων των συνόλων $\{z_1, \dots, z_d\}$ των g αντιγράφων. Αντίστοιχα, το σύνολο V' είναι το σύνολο V και η ένωση όλων των συνόλων $\{y_1, \dots, y_s\}$ των g αντιγράφων του Ψ .

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} Z_{IS}(\Psi, \mu) &= 1 + \binom{d}{1} * \mu + \binom{d}{2} * \mu^2 + \dots + \binom{d}{d} * \mu^d + \binom{s}{1} * \mu + \dots + \binom{s}{s} * \mu^s \\ &= L(d, \mu) + L(s, \mu) - 1 \end{aligned}$$

, καθώς ανεξάρτητα σύνολα σε ένα πλήρες διμερές γράφημα είναι όλοι οι υπογράφοι του κάθε συνόλου κορυφών του διμερούς.

Η συνολική συνεισφορά στο $Z_{IS}(\Psi, \mu)$ από ανεξάρτητα σύνολα που περιλαμβάνουν την z_1 είναι

$$Z_1 = \mu + \binom{d}{1} * \mu^2 + \dots = \mu * (1 + \mu)^{d-1} = \mu * L(d-1, \mu)$$

.

Έστω $Y = Z_{IS}(\Psi, \mu) - Z_1 = Y(s, \mu)$, που εκφράζει την συνολική συνεισφορά από ανεξάρτητα σύνολα που δεν συμπεριλαμβάνουν την z_1 .

Επομένως,

$$Z_{IS}(B, \mu) * Y^g \leq Z_{IS}(B', \mu) \leq Z_{IS}(B, \mu) * (Z_{IS}(\Psi, \mu))^g$$

Άρα,

$$Z_{IS}(B, \mu) \leq \frac{Z_{IS}(B', \mu)}{Y^g} \leq Z_{IS}(B, \mu) * \left(\frac{Z_{IS}(\Psi, \mu)}{Y} \right)^g$$

Όπως παραπάνω υπολογίζουμε έναν ρητό τέτοιο ώστε

$$\mu_- = \frac{4}{5} * \tilde{\mu} \leq \mu \leq \frac{4}{3} * \tilde{\mu} = \mu_+$$

Υπολογίζουμε s ακέραιο έτσι ώστε

$$\frac{1}{L(s, \mu_-)} * \max \{L(d+1, \mu_+) - 1, \mu_+ * L(d-1, \mu_+)\} \leq \frac{\epsilon}{6 * d * n} \quad (15)$$

Παρατηρούμε ότι $s = O(n * \epsilon^{-1})$, έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά μία τέτοια τιμή s , ξεκινώντας από αρχική τιμή $s = 1$, και αυξάνοντας το s κατά ένα μέχρι να βρούμε την τιμή του s για την οποία ισχύει η σχέση (15).

Έχουμε τα εξής:

- Το $Z_{IS}(B', \mu)$ μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια $\frac{\epsilon}{3}$ χρησιμοποιώντας το μαντείο
- Το Y^g μπορεί να υπολογιστεί απευθείας υπολογίζοντας

$$e^{\frac{-\epsilon}{6dn}} * \mu \leq \hat{\mu} \leq e^{\frac{\epsilon}{6dn}} * \mu$$

Για το οποίο έχουμε ότι,

$$e^{\frac{-\epsilon}{6dn}} * L(s, \mu) \leq L(s, \hat{\mu}) \leq e^{\frac{\epsilon}{6dn}} * L(s, \mu)$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$L(s, \mu) \leq Y = L(s, \mu) * (1 + \frac{L(d-1, \mu) - 1}{L(s, \mu)}) \leq e^{\frac{\epsilon}{6dn}} * L(s, \mu)$$

- Τελικά από την σχέση (15) και από την γνωστή ανισότητα $1 + x \leq e^x$ ισχύει ότι

$$(\frac{Z_{IS}(\Psi, \mu)}{Y})^g = (1 + \frac{\mu * L(d-1, \mu)}{Y(s, m)})^g \leq e^{\frac{\epsilon}{3}}.$$

Λήμμα 13 [Goldberg and Jerrum, 19]

Έστω ότι $\mu > 0$ είναι efficiently approximable τότε

$$\#SemiReguralBIS(\mu) \leq_{AP} UniformHyperTutte(\mu + 1, \mu)$$

Απόδειξη

Έστω $B = (U, V, E)$ ένα στιγμιότυπο του $\#SemiReguralBIS(\mu)$. Έστω

$H = (V, \mathcal{E})$ ένα στιγμιότυπο του $UniformHyperTutte(\mu + 1, \mu)$.

Έστω s μία νέα κορυφή που δεν ανήκει στο $U \cup V$ και έστω $X = U \cup \{s\}$. Για $v \in V$, έστω $\Gamma(v) = \{u \in U : (u, v) \in E\}$ και $F_v = \Gamma(v) \cup \{s\}$. Προφανώς θα ισχύει ότι $|F_v| = |\Gamma(v)| + 1 = d + 1$. Έστω $\mathcal{E} = \bigcup_{v \in V} F_v$.

Θα δείξουμε παρακάτω ότι

$$Z_{IS}(B, \mu) = (\mu + 1)^{-1} * Z_{Tutte}(H, \mu + 1, \mu) \quad (16)$$

Έστω $\epsilon > 0$ να είναι η επιθυμητή προσέγγιση του AP reduction.

Αρχικά, υπολογίζουμε μια τιμή x

$$e^{\frac{-\epsilon}{2}} * (\mu + 1)^{-1} \leq x \leq e^{\frac{\epsilon}{2}} * (\mu + 1)^{-1}$$

Έπειτα, χρησιμοποιούμε το μαντείο $Z_{Tutte}(H, \mu + 1, \mu)$ με παράμετρο προσέγγισης $\frac{\epsilon}{2}$.

Έστω $S \subseteq V$. Η συνεισφορά στο $Z_{IS}(B, \mu)$ από ανεξάρτητα σύνολα I με $I \cap V = S$ είναι $\mu^{|S|} * (\mu + 1)^{|U| - |\Gamma(S)|}$, όπου $\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma(v)$.

Επομένως, ισχύει ότι

$$Z_{IS}(B, \mu) = \sum_{S \subseteq V} \mu^{|S|} * (\mu + 1)^{|U| - |\Gamma(S)|}$$

Από την άλλη πλευρά η συνεισφορά στο $Z_{Tutte}(H, \mu + 1, \mu)$ των υπερακμών $\mathcal{E} = \{F_v : v \in S\}$ είναι

$$\mu^{|S|} * (\mu + 1)^{k(X, \mathcal{E})} = \mu^{|S|} * (\mu + 1)^{(|U| - |\Gamma(S)| + 1)},$$

καθώς όλες οι κορυφές στο $\Gamma(S)$ σχηματίζουν μία συνεκτική συνιστώσα και όλες οι άλλες κορυφές είναι απομονωμένες.

Λήμμα 14 [Goldberg and Jerrum, 19]

Έστω ότι $q > 2$ και $\gamma > 0$ είναι efficiently Approximable τότε

$$UniformHyperTutte(q, \gamma) \leq_{AP} TwoWeightFerroTutte(q)$$

Θα ορίσουμε το παρακάτω πρόβλημα.

Όνομα: $TwoWeightFerroTutte(q)$

Είσοδος: $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση των βαρών των ακμών $\gamma' : E \longrightarrow \{\gamma', \gamma''\}$, όπου γ', γ'' είναι ρητοί στο διάστημα $[|V|^{-3}, 1]$.
 Έξοδος: $Z_{Tutte}(G, q, \gamma')$.

Λήμμα 15 [Goldberg and Jerrum, 19]

Έστω ότι $q > 2$ και $\gamma > 0$ είναι efficiently approximable τότε

$$TwoWeightFerroTutte(q) \leq_{AP} Tutte(q, \gamma)$$

Απόδειξη

Έστω $G = (V, E)$ ένα στιγμιότυπο του $TwoWeightFerroTutte(q)$ με συνάρτηση βαρών ακμών $\gamma' : E \longrightarrow \{\gamma', \gamma''\}$, όπου γ', γ'' είναι ρητοί στο διάστημα $[|V|^{-3}, 1]$. Θεωρούμε ότι το $|E|$ είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με τις παραμέτρους q, γ .

Έστω $\epsilon > 0$ να είναι η επιθυμητή παράμετρος προσέγγισης του AP reduction. Έστω $x = \frac{\epsilon}{4 * (|V| + |E|^2)}$.

Έστω $\hat{q}, \hat{\gamma}$ ρητοί τέτοιοι ώστε, $e^{-x} \leq \frac{\hat{q}}{q}, \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} \leq e^x$. Επειδή q, γ είναι efficiently approximable η χρονική πολυπλοκότητα του υπολογισμού των $\hat{q}, \hat{\gamma}$ είναι πολυωνυμική.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να δείξουμε πως θα χρησιμοποιηθούν οι σε σειρά και παράλληλα συνθέσεις από το σύνολο $W = \{\hat{\gamma}\}$, για να φτιαχτούν τα βάρη ακμών γ'^* και γ''^* , έτσι ώστε

$$e^{-x} \leq \frac{\gamma'^*}{\gamma'}, \frac{\gamma''^*}{\gamma''} \leq e^x \quad (17)$$

Έστω γ^* να είναι η συνάρτηση βαρών των ακμών που προκύπτει από την γ' αν αντικαταστήσουμε το γ' με το γ'^* και το γ'' με το γ''^* . Από το Λήμμα 7 έχουμε ότι:

$$e^{-\frac{\epsilon}{4}} * Z_{Tutte}(G, q, \gamma') \leq Z_{Tutte}(G, \hat{q}, \gamma^*) \leq e^{\frac{\epsilon}{4}} * Z_{Tutte}(G, q, \gamma')$$

Έστω $\hat{\gamma}, \gamma$ να είναι η συνάρτηση βαρών των ακμών που αντιστοιχίζει κάθε ακμή στο βάρος $\hat{\gamma}, \gamma$ αντίστοιχα.

Θέλουμε να φτιάξουμε ένα γράφημα \hat{G} , έτσι ώστε

$$Z_{Tutte}(G, \hat{q}, \gamma^*) = Z_{Tutte}(\hat{G}, \hat{q}, \hat{\gamma}) * Poly(\hat{q}, \hat{\gamma})$$

Πρέπει κάθε εφαρμογή να έχει το πολύ $|E|$ ακμές ώστε το γράφημα \hat{G} να έχει το πολύ $|E|^2$ ακμές.

Πάλι από το Λήμμα 7 παίρνουμε ότι:

$$e^{-\frac{\epsilon}{4}} * Z_{Tutte}(\hat{G}, q, \gamma) \leq Z_{Tutte}(\hat{G}, \hat{q}, \hat{\gamma}) \leq e^{\frac{\epsilon}{4}} * Z_{Tutte}(\hat{G}, q, \gamma)$$

Η προσέγγιση του $Z_{Tutte}(\hat{G}, q, \gamma)$ ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας το μαντείο για την προσέγγιση του $Z_{Tutte}(\hat{G}, q, \gamma)$ με παράμετρο προσέγγισης $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Μένει να δειχτούν οι κατασκευές.

$$\pi = \frac{x}{2 * |V|^3} \leq \frac{\gamma' * x}{2} \leq \gamma' * (1 - e^{-x})$$

Θα δείξουμε πως χρησιμοποιούμε το $W = \{\hat{\gamma}\}$ για να κατασκευάσουμε ένα βάρος ακμής γ'^* που ικανοποιεί $\gamma' - \pi \leq \gamma'^* \leq \gamma'$, που είναι ισοδύναμο με την σχέση (17). Η κατασκευή του γ'' γίνεται ομοίως.

Αρχικά μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα βάρος $\gamma_1 \leq \frac{1}{4}$ παίρνοντας με σειρά σύνθεση k ακμές βάρους $\hat{\gamma}$ για αρκετά μεγάλο

$$k = \left\lfloor \frac{\log(1 + 4 * \hat{q})}{\log(1 + \frac{\hat{q}}{\hat{\gamma}})} \right\rfloor$$

.

Έπειτα, κατασκευάζουμε ένα βάρος γ_j παίρνοντας σε σειρά j αντίγραφα βάρους γ_1 .

Επίσης οι παρακάτω ορισμοί δίνονται [20.Section 2.1],

$$d_j = \left\lfloor \frac{\log((1 + \gamma') * \prod_{l=1}^{j-1} (1 + \gamma_l)^{-d_l})}{\log(1 + \gamma_j)} \right\rfloor$$

$$m = \left\lfloor \frac{\log(\hat{q} * \frac{1+\gamma'}{\pi} + 1)}{\log(\frac{\hat{q}}{\gamma_1} + 1)} \right\rfloor$$

Έπειτα παίρνουμε παράλληλα d_j ακμές με βάρος γ_j για όλα τα $j \in [m]$. Το αποτέλεσμα γ'^* ικανοποιεί την σχέση $\gamma' - \pi \leq \gamma'^* \leq \gamma'$ [20, Section 2.1].

Τέλος, αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^m d_i \leq |E|$.

Χρησιμοποιώντας ότι $\gamma' \leq 1$, βλέπουμε ότι η τιμή του m είναι λογαριθμική στο π^{-1} που είναι το πολύ λογαριθμικό σε σχέση με τα $|V|, |E|, \epsilon^{-1}$.

Το ίδιο ισχύει και για τα d_i και μάλιστα υπάρχει ένα άνω όριο για τα d_i που εξαρτάται μόνο από τα \hat{q} και $\hat{\gamma}$. Λόγω της υπόθεσης ότι το $\|\cdot\|$ είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με τα q, γ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{i=1}^m d_i \leq |E|$.

Περίπτωση 4: $q = 2, -2 < \gamma < 0$

Σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP=RP$.

$$-2 < \gamma < 0 \Rightarrow -1 < y < 1 \Rightarrow |y| < 1$$

Για το x διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $x < -1$: Από το συμπέρασμα 1 προκύπτει άμεσα ότι δεν ορίζεται FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
2. $x \in [-1, 1]$: Το σημείο (x, y) είναι κοντά στο $(0, 0)$, και άρα αφού $q = 2 > 1.5$, προκύπτει από την Πρόταση 5 ότι δεν ορίζεται FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
3. $x = 1$: Τότε $q = (x - 1) * (y - 1) = 0 \neq 2$.
4. $x > 1$: Τότε $q = (x - 1) * (y - 1) < 0 < 2$.

Περίπτωση 5: $q = 2, \gamma < -2$

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι

Λήμμα 16 [Goldberg and Jerrum, 7]

$$Tutte(x, y) \equiv_{AP} \#PerfectMatchings$$

Απόδειξη

$$\bullet \#PerfectMatchings \leq_{AP} Tutte(x, y)$$

Λήμμα 17 [Goldberg and Jerrum, 7]

Έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{Q} - \{0\}$ που ικανοποιούν $a_1 > -1$ και $a_2 < -1$. Τότε

$$\#PerfectMatchings \leq_{AP} MultiTutte(2, a_1, a_2)$$

Απόδειξη

Έστω $G = (V, E)$ ένα στιγμιότυπο του προβλήματος $\#PerfectMatchings$ και επίσης έστω $n = \frac{|V|}{2}$. Έστω $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ να είναι το γράφημα με $\hat{V} = V \cup \{t\}$ και $\hat{E} = E \cup T$, όπου $T = \{(t, v) : v \in V\}$.

Ορίζουμε συνάρτηση βαρών των ακμών $w : \hat{E} \rightarrow \{\beta_1, \beta_2\}$ με $w(e \in E) = \beta_1$ και $w(e \in T) = \beta_2$.

Ισχύει ότι $|\frac{\beta_1}{q}| \rightarrow 0$ και $\beta_2 \rightarrow -2 = -q$.

$$Z(G, 2, w) = \sum_{A \subseteq E} w(A) * 2^{k(A)} = \sum_{B \subseteq E} \sum_{C \subseteq T} w(B \cup C) * 2^{k(B \cup C)} = \sum_{B \subseteq E} \sum_{C \subseteq T} \beta_1^{|B|} * \beta_2^{|C|} * 2^{k(B \cup C)} = \sum_{B \subseteq E} h(B, \beta_2) * \beta_1^{|B|},$$

όπου

$$h(B, \beta_2) = \sum_{C \subseteq T} \beta_2^{|C|} * 2^{k(B \cup C)}$$

Θα αποδείξουμε τα παρακάτω

$$1. \text{ Αν } |B| < n \text{ τότε } h(B, -2) = 0.$$

Αν $|B| < n$ τότε το γράφημα (V, B) θα περιέχει μία απομονωμένη κορυφή και έστω $f \in T$ η ακμή που συνδέει αυτήν την κορυφή με την t . Στην συνέχεια παίρνουμε ένα

σύνολο $C \subseteq T$, όπου $f \notin C$ και $C' = C \cup f$.

$$(-2)^{|C|} * 2^{k(B \cup C)} + (-2)^{|C'|} * 2^{k(B \cup C')} = (-2)^{|C|} * 2^k + (-2)^{(|C|+1)} * 2^{(k-1)} = 0$$

2. Το σύνολο $\{B : |B| = n \text{ και } (\hat{V}, T \cup B) \text{ που είναι } bridgeconnected\}$ είναι σε 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των λύσεων του στιγμιότυπου του προβλήματος του $\#PerfectMatchings$. Συγκεκριμένα το $(\hat{V}, T \cup B)$ είναι bridge connected ανν το B είναι perfect matching στο G .
3. Αν $|B| = n$ τότε $h(B, -2) = 2^{n+1}$, αν B perfect matching και 0 αλλιώς.

Αν B είναι perfect matching έχουμε ότι

$$h(B, -2) = 2 * ((-2)^2 + 2 * (-2) + 2)^n = 2^{n+1}$$

(α) Το 2 είναι από την συνιστώσα που περιέχει το t .

Για κάθε μία από τις n ακμές του ταιριάσματος έχουμε ότι:

(β) Το $(-2)^2$ προέρχεται αν βάλουμε και τις 2 ακμές με το t .

(γ) Το $2 * (-2)$ προέρχεται από τους δύο τρόπους που μπορούμε να βάλουμε μία ακμή με το t .

(δ) Το 2 προέρχεται αν δεν βάλουμε καμία ακμή με το t , τότε προστίθεται μία ακμή.

- $Tutte(x, y) \leq_{AP} \#PerfectMatchings$ [Goldberg and Jerrum, 7]

Απόδειξη

Από την Potts αναπαράσταση όπως είδαμε στην παράγραφο 1.5.3, στο μοντέλο Ising, έχουμε ότι

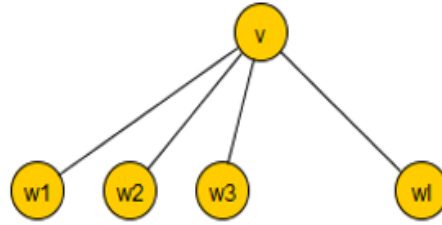
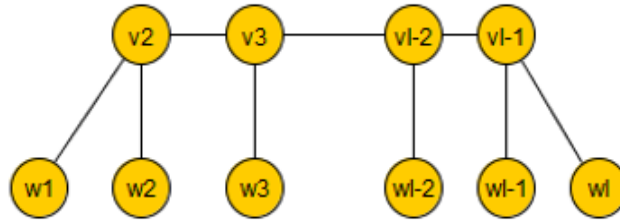
$$Z_{Potts}(G, 2, y - 1) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{-1, 1\}} y^{mono(\sigma)},$$

όπου $mono(\sigma)$ είναι ο αριθμός των μονοχρωματικών ακμών.

Έστω .

Από το G παίρνουμε το G' κάνοντας τον εξής μετασχηματισμό (**Fisher**). Για κάθε κορυφή v με βαθμό $deg(v) = l > 3$ κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό. Η v αντιστοιχίζεται σε ένα μονοπάτι $v_2 - v_3 - \dots - v_{l-1}$ από $l - 2$ κορυφές βαθμού 3 όπως φαίνεται στα σχήματα 1 και 2.

Οι ακμές μεταξύ των κορυφών v_i ονομάζονται **supplementary**. Οι ακμές μεταξύ των κορυφών v_i και w_j ονομάζονται **primary**.

Σχήμα 5.1: κορυφή v στο γράφημα G Σχήμα 5.2: 1-2 μονοπάτι στο G' που αντιστοιχεί στην v

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε γράφημα G'' από το G' ως εξής : Αντικαθιστούμε κάθε κορυφή βαθμού 2 ή 3 με τον παρακάτω τρόπο, όπως φαίνεται στα σχήματα 3 και 4.

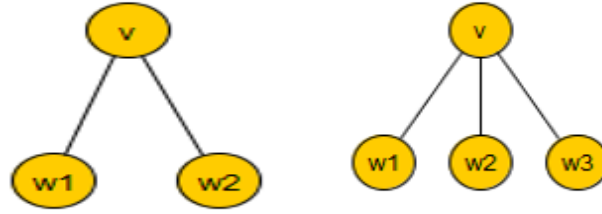
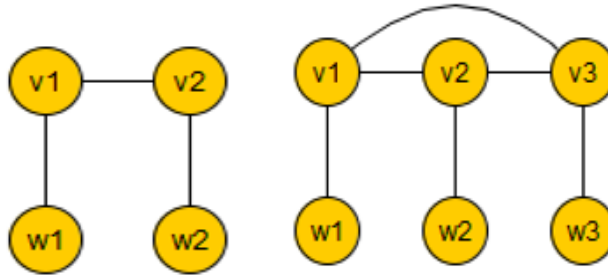
Οι ακμές (w_i, v_i) είναι primary στο G'' ανν (w_i, v) είναι primary ακμή στο G' . Επομένως, οι primary ακμές στο G'' αντιστοιχούν σε primary ακμές στο G .

Θεώρημα 17 (Fisher)

$$Z(G, 2, y - 1) = y^m * 2^n * \left(\frac{v}{1+v}\right)^m * \sum_X \prod_e \frac{1}{v}$$

Όπου το άθροισμα γίνεται πάνω σε όλα τα τέλεια ταιριάσματα X του G'' και το γινόμενο σε όλες τις primary ακμές του G'' , που είναι στο τέλει ταίριασμα X . Έστω $\frac{1}{v} = \frac{n_1}{n_2}$, με $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Έστω H το γράφημα του σχήματος 5.

Σχήμα 5.3: κορυφή στο G' με βαθμό 2 ή 3Σχήμα 5.4: κορυφή v στο G''

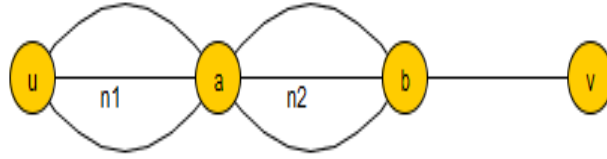
Έστω M τα ταιριάσματα που περιέχουν τις κορυφές a και b . Υπάρχουν n_1 ταιριάσματα με $a - u$ και $b - v$ (τέλεια ταιριάσματα), n_2 ταιριάσματα $a - b$ (όχι τέλεια ταιριάσματα).

Κατασκευάζουμε γράφημα \hat{G} από το G'' , αντικαθιστώντας κάθε primary ακμή $\{u, v\}$ του G'' με το γράφημα. Τότε η έκφραση $\sum_X \prod_e \frac{1}{v}$ είναι ίση με το αριθμό των τέλειων ταιριάσμάτων του \hat{G} διαιρεμένο με n_2^m .

Οπότε αν μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό από τέλεια ταιριάσματα θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το $Z(G, 2, y - 1)$

Περίπτωση 6: $q = 2, \gamma > 0$

Υπάρχει FPRAS. Έχει αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3. Η ίδια περίπτωση για τα binary matroids είναι πιο περίπλοκη, όσον αφορά την προσεγγισσιμότητα, όπως φαίνεται και αργότερα.



Σχήμα 5.5: Γράφημα H

5.2 Επίπεδα γραφήματα

Ορίστηκε το παρακάτω πρόβλημα (Vertigan [12]) που είναι ο περιορισμός του προβλήματος του πολωνύμου Tutte στα επίπεδα γραφήματα.

Όνομα: $PlanarTutte(x, y)$.

Είσοδος: Ένα επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$.

Έξοδος: $T(G, x, y)$.

Περίπτωση 1: $S \cup H_1 \cup H_2$

Σε αυτήν την περίπτωση το πρόβλημα υπολογισμού του πολωνύμου Tutte ανήκει στην κλάση FP. Για την περίπτωση των ειδικών σημείων (S) καθώς και στην περίπτωση της ειδικής καμπύλης H_1 έχουμε ήδη αναφέρει ότι το πρόβλημα υπολογίζεται ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο. Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι το πρόβλημα $PlanarTutte(x, y)$ στην ειδική καμπύλη H_2 ανήκει στην κλάση FP.

- Το πρόβλημα $Z_{Tutte}(G, q = 2, \gamma < -2)$ στην κλάση των (general) γραφημάτων είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα $\#PerfectMatchings$.
- Στην κλάση των επίπεδων γραφημάτων (planar graphs) το πρόβλημα $\#PerfectMatchings$ λύνεται ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο (FKT αλγόριθμος).
- $Z_{Tutte}(G : planar, q = 2, \gamma < -2) \in FP$ και λόγω του Θεωρήματος 6 του κεφαλαίου 2 ισχύει ότι είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα $Z_{Tutte}(G : planar, q = 2, \gamma)$ (εκτός ειδικών σημείων) κατά αναγωγές Cook (poly time reducible).
- Επομένως, $Z_{Tutte}(G : planar, q = 2, \gamma) \in FP$.

Περίπτωση 2: $q > 5, \gamma < -1$ [Goldberg and Jerrum, 20]

Μέσω μετασχηματισμών βαρών όπως είδαμε και στην απόδειξη του λήμματος 15 αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το

$MultiTutte(G, q, \gamma_1 \notin [-2, 0], \gamma_2 \in (-2, 0), \gamma_3 < -1)$ που δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP=RP$.

Περίπτωση 3: $q = 3, \gamma < 0$ [Goldberg and Jerrum, 19]

Σε αυτήν την ειδική καμπύλη ανήκει το σημείο ($q = 3, \gamma = -1$) που αντιστοιχεί στο πρόβλημα μέτρησης $\#Planar - 3 - Coloring$. Το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης, δηλαδή το αν υπάρχει 3-coloring σε ένα επίπεδο γράφημα, είναι γνωστό NP-complete πρόβλημα. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 4, το πρόβλημα $Z_{Tutte}(G : planar, q = 3, \gamma = -1)$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $-2 < \gamma < 0$. Έστω $G = (V, E)$ να είναι η είσοδος του $Planar - 3 - Coloring$ με n κορυφές. Για έναν άρτιο ακέραιο k , έστω G^k να είναι το γράφημα που σχηματίζεται από το G με k -thickening σε κάθε ακμή και έστω E^k να είναι το σύνολο ακμών του G^k . Όπως έχουμε δει από το μοντέλο Potts ισχύει ότι

$$Z_{Tutte}(G^k, q, \gamma) = \gamma^{-n} * \left(\frac{q}{\gamma}\right)^{-k(V, E^k)} * \sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} (\gamma + 1)^{mono(\sigma)},$$

όπου $mono(\sigma)$ είναι ο αριθμός των ακμών του E^k που είναι μονοχρωματικές υπό την σ . Παρατηρούμε ότι για κάθε μονοχρωματική ακμή, όλες οι k παράλληλες ακμές θα έχουν ίδιο χρώμα αφού έχουν το ίδιο χρώμα στα άκρα της ακμής. Επομένως, $mono(\sigma)$ είναι άρτιος αριθμός, αφού το k είναι άρτιος. Συνεπώς, $\sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} (\gamma + 1)^{mono(\sigma)}$ είναι ένας θετικός αριθμός για τον οποίο γνωρίζουμε ότι

- Αν το γράφημα G έχει ένα proper 3 coloring και έστω σ_p αυτός ο χρωματισμός. Τότε $mono(\sigma_p) = 0$ και άρα θα ισχύει ότι

$$\sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} y^{mono(\sigma)} > (\gamma + 1)^{mono(\sigma_p)} = 1$$

- Αν το γράφημα G δεν έχει proper 3 coloring τότε για κάθε σ , που σε πλήθος είναι 3^n , υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή στο G που είναι μονοχρωματική. Στο γράφημα G^k η ακμή αυτή θα αντιστοιχεί στις k παράλληλες ακμές και άρα θα ισχύει

$$\sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} (\gamma + 1)^{mono(\sigma)} = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} (\gamma + 1)^{k * mono_G(\sigma)} < \sum_{\sigma: V \rightarrow \{1,2,3\}} (\gamma + 1)^k = 3^n * (\gamma + 1)^k$$

Διαλέγοντας κατάλληλη τιμή του k , έτσι ώστε να ισχύει ότι $3^n * y^k \leq \frac{1}{4}$. Τότε μία 2-προσέγγιση του $Z_{Tutte}(G^k, q = 3, \gamma \in (-2, 0))$ θα μας επέτρεπε να αποφασίσουμε αν το G είναι 3-χρωματίσιμο.

Επομένως, το πρόβλημα υπολογισμού του πολωνύμου Tutte $Z_{Tutte}(G, q = 3, \gamma \in (-2, 0))$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$. Όμως επειδή το γράφημα είναι επίπεδο και ορίζεται δυικό γράφημα, όπως έχουμε δείξει ήδη στο κεφάλαιο 1, το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα

$$Z_{Tutte}(G, q = 3, \frac{3}{\gamma \in (-2, 0)}) \equiv Z_{Tutte}(G, q = 3, \gamma < 0)$$

Περίπτωση 4: $q \geq 4, \gamma = -1$ [Goldberg and Jerrum, 20]

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ότι αντιστοιχεί το πρόβλημα της εύρεσης του πλήθους των q -χρωματισμών σε ένα επίπεδο γράφημα. Όμως, το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι trivial, καθώς γνωρίζουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει έναν ($q \geq 4$)-χρωματισμό. Επομένως, παραμένει ανοικτό το ερώτημα της προσεγγισιμότητας του πολωνύμου Tutte σε όλα αυτά τα σημεία.

Κεφάλαιο 6

Πολυώνυμο Tutte για δυαδικά matroids

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \gamma) = \sum_{A \subseteq E} q^{-r_M(A)} \prod_{e \in A} \gamma_e$$

Έχουμε τον ορισμό του παρακάτω προβλήματος.

Όνομα: *BinaryMatroidTutte*(q, γ)

Είσοδος: Πίνακας M στο $GF(2)$ με γραμμές το σύνολο V , στήλες το E που αναπαριστούν ένα δυαδικό matroid.

Έξοδος: $\tilde{Z}_{Tutte}(M, q, \gamma)$, όπου $\gamma_e = \gamma \forall e \in E$.

Θεώρημα 18 [Goldberg and Jerrum, 27]

Έστω ότι $q \geq 2$ και γ είναι efficiently approximable αριθμοί. Τότε

1. Αν $\gamma = 0$ ή $(q, \gamma) \in \mathcal{S}$ τότε το πρόβλημα *BinaryMatroidTutte*(q, γ) λύνεται ακριβώς σε πολυωνυμικό χρόνο.
2. Αν $\gamma < 0$, τότε δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
3. Αν $\gamma > 0$, τότε $\#BIS \leq_{AP} \text{BinaryMatroidTutte}(q, \gamma)$.

Παρατηρήσεις

Οι ακόλουθες παρατηρήσεις γίνονται με βάση την σύγκριση με τα αποτελέσματα περί της πολυπλοκότητας του Tutte πολυωνύμου για τα γραφήματα.

1. Στις περιπτώσεις όπου το πολυώνυμο Tutte για τα γραφήματα δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$, το ίδιο θα ισχύει και για το πολυώνυμο Tutte για τα binary matroids καθώς είναι μία γενικότερη έννοια από τα γραφήματα.

2. Για τις άλλες περιπτώσεις αναμένουμε το αντίστοιχο πρόβλημα για τα δυαδικά matroids να είναι πιο περίπλοκο από αυτό για τα γραφήματα.
3. Για την περίπτωση όπου $q > 2$ έχουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με την πολυπλοκότητα στα γραφήματα. Το πρόβλημα αλλάζει στην περίπτωση όπου $q = 2$. Στα γραφήματα γίνεται πιο εύκολο.

Απόδειξη (1)

Για $\gamma = 0$ ο υπολογισμός είναι τετριμμένος.

Από τις παρατηρήσεις του κεφαλαίου 2.2 περί πολυπλοκότητας του πολωνύμου Tutte στα δυαδικά matroids γνωρίζουμε ότι το πολωνύμο Tutte στα ειδικά σημεία $\{(4, -2), (2, -2), (2, -1)\}$ υπολογίζεται ντετερμινιστικά σε πολωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη (2)

- Αν $q > 2$ και $\gamma < 0$, τότε έχουμε ήδη δείξει ότι το πρόβλημα δεν έχει FPRAS στο πιο απλό πρόβλημα του υπολογισμού του Tutte πολωνύμου γραφημάτων (general graphs), και επομένως, δεν θα έχει και FPRAS στο αντίστοιχο πρόβλημα των δυαδικών matroids.
- Το ίδιο ισχύει για την περίπτωση όπου $q = 2$ και $-2 < \gamma < 0$.
- Το ενδιαφέρον σημείο είναι ότι η περίπτωση $q = 2$ και $\gamma < -2$. Τότε $-1 < \frac{q}{\gamma} < 0$ και από δυσκολία των matroids έχουμε ότι το πρόβλημα $Z_{Tutte}(M, q, \gamma)$ ανάγεται σε πολωνυμικό χρόνο στο πρόβλημα $Z_{Tutte}(M, q, \frac{q}{\gamma})$, το οποίο όπως έχουμε δείξει ότι δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Απόδειξη (3)

Η μοναδική περίπτωση ενδιαφέροντος είναι η περίπτωση όπου $q = 2$, καθώς για $q > 2$ ήδη γνωρίζουμε το αποτέλεσμα καθώς ισχύει για τα γραφήματα όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5.1.

Για την απόδειξη ακολουθούνται τα εξής βήματα

1. $\#BIS \leq_{AP} \text{UniformHyperTutte}(2, 1)$

Απόδειξη

Έχουμε ήδη δείξει ότι ισχύει αυτή η σχέση, και μάλιστα ισχύει η γενικότερη σχέση από το κεφάλαιο 4.1.

$$\#BIS \leq_{AP} \text{UniformHyperTutte}(\mu + 1, \mu),$$

όπου για $\mu = 1$ παίρνουμε την επιθυμητή σχέση.

2. Λήμμα 18 [Goldberg and Jerrum, 27]

$$\text{UniformHyperTutte}(2, 1) \leq_{AP} \text{VarBinaryMatroidTutte}(2)$$

Απόδειξη

Έχουμε το εξής πρόβλημα.

Όνομα: $\text{VarBinaryMatroidTutte}(q)$

Είσοδος: Πίνακας στο $GF(2)$ και ακέραιος σε unary μορφή (που σημαίνει ότι το μέγεθος της εισόδου είναι N και όχι $\log N$).

Έξοδος: $\tilde{Z}_{\text{Tutte}}(M, q, \gamma)$, όπου $\gamma_e = 2^{\frac{2}{N}} - 1, \forall e \in E$.

Έστω $H = (V, \mathcal{E})$ t -uniform υπεργράφος, στιγμιότυπο του $\text{UniformHyperTutte}(2, 1)$. Υποθέτουμε ότι $t > 2$ καθώς η περίπτωση για $t = 2$ είναι η περίπτωση του γράφου. Από τον ορισμό του μοντέλου Potts έχουμε:

$$Z_{\text{Potts}}(H, 2, 1) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \prod_{f \in E} (1 + \delta_e(\{\sigma(v) : v \in f\})) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} 2^{\text{mono}(\sigma)},$$

όπου $\text{mono}(\sigma)$ είναι το πλήθος των υπερακμών που είναι μονοχρωματικές υπό τον μετασχηματισμό σ .

Παίρνουμε $N \geq \frac{6 * m^2 * (n + \ln(16 * m))}{\epsilon^2}$ και δημιουργούμε πίνακα με διαστάσεις $n * Nm$ ως εξής:

Οι γραμμές του πίνακα θα είναι οι κορυφές του υπεργράφου.

Στήλες: για κάθε υπερακμή f , συνολικά έχουμε m υπερακμές, παίρνουμε f_1, \dots, f_N που αντιστοιχούν σε τυχαία-ομοιόμορφα άρτιου πλήθους υποσύνολα του f .

Αν σ μονοχρωματικό στην f , τότε

$$\forall f_j : \sum_{i \in V} M_{i, f_j} * \sigma(i) \equiv 0 \pmod{2}$$

Σε αντίθετη περίπτωση, αν σ όχι μονοχρωματική σε μία υπερακμή f , l στοιχεία δίνουν 1 και k δίνουν 0, και άρα $k + l = t$, καθώς ο υπεργράφοι είναι t uniform.

Το πλήθος των άρτιων σε πλήθος στοιχείων (άρτια υποσύνολα) της υπερακμής f είναι $\frac{2^t}{2} = 2^{t-1}$.

Το πλήθος των άρτιων σε πλήθος στοιχείων για τα οποία η σ έχει ένα άρτιο πλήθος από 1 είναι $2^{l-1} * 2^{k-1} = 2^{t-2}$, καθώς το πλήθος των υποσυνόλων άρτιου πλήθους στοιχείων που δίνουν 1 είναι 2^{l-1} και για κάθε ένα τέτοιο σύνολο μπορούμε να διαλέξουμε ένα οποιοδήποτε σύνολο με άρτιο σε πλήθος στοιχεία μόνο από το σύνολο των k στοιχείων.

Επομένως, η πιθανότητα να ικανοποιείται η εξίσωση που αφορά την στήλη f_i είναι

$$\frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Από **Chernoff bounds** έχουμε ότι το πλήθος των στηλών που ικανοποιούν τις αντίστοιχες εξισώσεις είναι στο διάστημα $[(\frac{N}{2}) * (1 - \delta), (\frac{N}{2}) * (1 + \delta)]$, με πιθανότητα αποτυχίας $\frac{1}{8 * m * 2^n}$.

Έστω $y = 2^{2/N}$ και $\gamma = y - 1$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $Z_{Potts}(H, 2, 1)$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα δεδομένου ότι έχουμε το $\tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma) = 2^{-|V|} * Z_{Ising}(M, \gamma)$, από κεφάλαιο 1.5.3.

Από παραπάνω έχουμε ότι:

Η συνεισφορά ενός μετασχηματισμού σ στην ποσότητα $2^m * Z_{Potts}(H, 2, 1)$ είναι $2^m * 2^{mono(\sigma)}$.

Έστω Ψ_σ η συνεισφορά του σ στο $Z_{Ising}(M, \gamma)$, τότε χωρίζοντας τις υπερακμές σε μονοχρωματικές και όχι, υπό το σ , και σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\bullet \Psi_\sigma \leq y^{N * mono(\sigma)} * y^{(m - mono(\sigma)) * (\frac{N}{2}) * (1 + \delta)} \leq y^{\frac{m * N}{2} * (1 + \delta)} y^{\frac{N}{2} * mono(\sigma)} = 2^{m * \delta + m + mono(\sigma)} = e^\epsilon * (2^{m + mono(\sigma)})$$

$$\bullet \Psi_\sigma \geq y^{N * \text{mono}(\sigma)} * y^{(m - \text{mono}(\sigma)) * (\frac{N}{2}) * (1 - \delta)} \leq y^{\frac{m * N}{2} * (1 - \delta)} y^{\frac{N}{2} * \text{mono}(\sigma)} = 2^{-m * \delta + m + \text{mono}(\sigma)} = e^{-\epsilon} * (2^{m + \text{mono}(\sigma)})$$

Αν σ μονοχρωματική, τότε επαληθεύεται η εξίσωση για όλες τις στήλες.

Λήμμα 19 [Goldberg and Jerrum, 27]

Έστω ότι $\gamma > 0$ είναι efficiently approximable. Τότε

$$\text{VarBinaryMatroidTutte}(2) \leq_{AP} \text{BinaryMatroidTutte}(2, \gamma)$$

Απόδειξη

Έστω M, N ένα στιγμιότυπο του $\text{VarBinaryMatroidTutte}(2)$ και έστω το matroid που αντιστοιχεί στον πίνακα. Ακόμα, έστω C_γ [21] μία αρκετά μεγάλη συνάρτηση. Έστω ότι ο πίνακας έχει n γραμμές και m στήλες και έστω ότι $N * m$ είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με το C_γ και έστω $\gamma' = 2^{\frac{2}{N}} - 1$.

Έστω $\epsilon > 0$ η επιθυμητή προσέγγιση του AP reduction και έστω

$$x = \frac{\epsilon^2}{4 * C_\gamma * m^2 * N}$$

Αφού γ είναι efficiently Approximable μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο έναν ρητό $\hat{\gamma}$ έτσι ώστε $e^{-x * \gamma} \leq \hat{\gamma} \leq e^{x * \gamma}$.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να δείξουμε πως θα χρησιμοποιήσουμε την σε σειρά και παράλληλη σύνθεση ακμών βάρους $\hat{\gamma}$ (του στιγμιότυπου που έχουμε το μαντείο $\text{BinaryMatroidTutte}(2, \gamma)$) για να κατασκευαστούν ακμές βάρους γ^* , που ικανοποιούν $e^{-x} * \gamma' \leq \gamma^* \leq e^x * \gamma'$.

Από το λήμμα 7 έχουμε ότι

$$e^{-\frac{\epsilon}{4}} * \tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma') \leq \tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma^*) \leq e^{\frac{\epsilon}{4}} * \tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma')$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα matroid \hat{M} , έτσι ώστε

$$\tilde{Z}_{Tutte}(M, 2, \gamma^*) = \tilde{Z}_{Tutte}(\hat{M}, 2, \hat{\gamma}) * \text{Poly}(\hat{\gamma})$$

και πρέπει το \hat{M} να έχει το πολύ $\frac{C_\gamma * m^2 * N}{\epsilon}$ ground elements.

Επίσης, από το λήμμα 7 και από τον ορισμό του x , έχουμε ότι

$$e^{-\frac{\epsilon}{4}} * \tilde{Z}_{Tutte}(\hat{M}, 2, \gamma) \leq \tilde{Z}_{Tutte}(\hat{M}, 2, \hat{\gamma}) \leq e^{\frac{\epsilon}{4}} * \tilde{Z}_{Tutte}(\hat{M}, 2, \gamma)$$

Η αναγωγή ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας το μαντείο για την προσέγγιση του $\tilde{Z}_{Tutte}(\hat{M}, 2, \gamma')$ με παράμετρο προσέγγισης $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Μένει ναδειχθεί πως θα γίνει η κατασκευή.

Παίρνουμε $\pi = \frac{x}{2} * (2^{\frac{2}{N}} - 1) = \frac{x}{2} * \gamma' \leq \gamma' * (1 - e^{-x})$.

Ομοίως με την απόδειξη του λήμματος 15 έχουμε την διαδικασία κατασκευής ώστε να πάρουμε σαν αποτέλεσμα ένα βάρος $\gamma' - \pi \leq \gamma^* \leq \gamma'$.

Οι σε σειρά και παράλληλα συνθέσεις εισάγουν το πολύ $C_\gamma * \log(\pi^{-1})$ ground elements.

Ισχύει ότι $2^{\frac{2}{N}} - 1 \geq 2 * \frac{\ln(2)}{N} \Rightarrow \pi^{-1} \leq \frac{2 * N}{x}$

Επομένως, έχουμε ότι $m * C_\gamma * \log(\pi^{-1}) \leq \frac{C_\gamma * m^2 * N}{\epsilon}$.

Επομένως, το \hat{M} θα έχει το πολύ $\frac{C_\gamma * m^2 * N}{\epsilon}$ ground elements όπως ήταν επιθυμητό.

Κεφάλαιο 7

Πολυώνυμα που σχετίζονται με το πολυώνυμο Tutte

7.1 Το χρωματικό πολυώνυμο

Αν G είναι ένα γράφημα με k συνεκτικές συνιστώσες και $M = M(G)$, τότε

$$\lambda^k * T(M, 1 - \lambda, 0) = (-1)^{r(M)} * P(G, \lambda),$$

όπου $P(G, \lambda)$ είναι το χρωματικό πολυώνυμο του G , το οποίο όταν $\lambda \in \mathbb{N}^+$, μετράει τον αριθμό των διαφορετικών χρωματισμών κορυφών του G , χρησιμοποιώντας λ χρώματα.

Η παραπάνω έκφραση του πολυώνυμου Tutte είναι ισοδύναμη με την εξής μορφή, με την βοήθεια του multivariate Tutte πολωνύμου:

$Z_{Tutte}(M, q = \lambda, \gamma = -1)$. Επομένως, έχουμε τα εξής για την πολυπλοκότητα του χρωματικού πολωνύμου στα γραφήματα:

- $\lambda = 1, 2$, το πρόβλημα λύνεται σε πολωνυμικό χρόνο.
- $\lambda \geq 3$, το πρόβλημα δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

7.2 Το πολυμεταβλητό πολυώνυμο Flow

Έστω Γ πεπερασμένη αβελιανή ομάδα με τάξη $q = |\Gamma|$.

Γ - *flow* στο G , όπου G είναι ένα γράφημα, είναι μία αντιστοίχιση $\psi : E \rightarrow \Gamma$, που ικανοποιεί την διατήρηση του ρεύματος σε κάθε κόμβο.

Ένα Γ - *flow* ονομάζεται **nowhere 0 Γ -flow** στο G , αν $\psi(e) \neq 0, \forall e$.

$F_G(\Gamma)$ συμβολίζει τον αριθμό των nowhere 0 Γ -flow στο G .

Έχει αποδειχτεί ότι εξαρτάται μόνο από το πλήθος των στοιχείων του Γ (q), δηλαδή $F_G(\Gamma) = F_G(q)$.

Το πολυμεταβλητό flow πολυώνυμο για γραφήματα είναι

$$F_G(\Gamma, u) = \sum_{\Gamma\text{-flows}} \prod_{\psi} [1 + u_e * \delta(\psi(e), 0)].$$

Είναι σαφές ότι για την περίπτωση όπου $u = -1$ η παραπάνω σχέση απαριθμεί τα nowhere-0 Γ -flows.

Πρόταση 6

$$F_G(\Gamma, u) = q^{-|V|} * \prod_{e \in E} u_e * Z_{Tutte}(G, q, q/u)$$

και εξαρτάται μόνο από το $|\Gamma| = q$.

Επομένως, με βάση την πολυπλοκότητα του πολυωνύμου Tutte έχουμε ότι:

Συμπέρασμα:

- $q = 1$: Υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
- $q = 2, u > 0$: Υπάρχει FPRAS.
- $q = 2, -1 < u < 0$: $F_G(\Gamma, u) \equiv_{AP} \#PerfectMatchings$.
- $q = 2, u < -1$: Δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
- $q > 2, u > 0$: $\#BIS \leq_{AP} F_G(\Gamma, u)$.
- $q > 2, u < 0$: Δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Για την περίπτωση των nowhere 0 Γ -flow στο G ή ισοδύναμα $u = -1$

$$F_G(\Gamma) = q^{-|V|} * (-1)^{|E|} * Z_{Tutte}(G, q, -q)$$

Συμπέρασμα:

- $q = 2$: πρόκειται για ειδικό σημείο και υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

- $q > 2$: Δεν υπάρχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$. Αυτή είναι μία ενδιαφέρουσα συνέπεια της πολυπλοκότητας υπολογισμού του πολυνύμου Tutte, καθώς έχει δειχθεί από τον Seymour [24] ότι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι στο P, για $\lambda = 6$. Συγκεκριμένα, ένα γράφημα έχει ένα 6-flow αν και μόνο αν δεν έχει γέφυρα.

7.3 Weight Enumerator

Με δεδομένο έναν πίνακα M στο $GF(2)$ με r ανεξάρτητες γραμμές και c στήλες, **code word** w ονομάζεται ένα διάνυσμα στον γραμμικό υποχώρο Y που παράγεται από τις γραμμές του, που ονομάζεται **generating matrix**.

Για κάθε πραγματικό αριθμό λ , ορίζουμε σαν weight enumerator του κωδικού την παρακάτω έκφραση.

$$W_M(\lambda) = \sum_{w \in Y} \lambda^{|w|}$$

, όπου $|w|$ είναι ο αριθμός των μη μηδενικών θέσεων του διανύσματος w .

Στην συνέχεια θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα.

Όνομα: $WE(\lambda)$

Είσοδος: Ένα generating matrix M στο $GF(2)$.

Έξοδος: $W_M(\lambda)$

Παρακάτω δείχνουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με μία ειδική περίπτωση του υπολογισμού του Tutte πολυνύμου ενός δυαδικού matroid.

Λήμμα 20 (Greene)

Έστω M generating matrix στο $GF(2)$ με γραμμές V και στήλες E . Έστω \mathcal{M} το δυαδικό matroid που αναπαριστά το M . Έστω λ ένας τυχαίος μη μηδενικός, πραγματικός αριθμός και $\gamma = \frac{1}{\lambda} - 1$.

$$W_M(\lambda) = \lambda^{|E|} * 2^{|V|} * \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, 2, \gamma)$$

Απόδειξη

Από την παράγραφο 1.5.3 έχουμε ότι

$$2^{|V|} * \tilde{Z}_{Tutte}(\mathcal{M}, 2, \gamma) = \tilde{Z}_{Ising}(\mathcal{M}, \gamma) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} (1 + \gamma)^{sat(\sigma)} = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \lambda^{-sat(\sigma)}$$

, όπου $sat(\sigma)$ είναι ο αριθμός των στηλών $e \in E$, έτσι ώστε $\sum_{i \in V} M_{i,e} * \sigma(i) = 0 \pmod{2}$, ισοδύναμα $\delta_e(\sigma) = 1$.

Ομοίως, έχουμε ότι:

$$W_M(\lambda) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \prod_{e \in E} \lambda^{1-\delta_e(\sigma)} = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{0,1\}} \lambda^{|E| - \text{sat}(\sigma)}$$

Από το παραπάνω λήμμα έχουμε το εξής συμπέρασμα:

Συμπέρασμα

Έστω ότι λ είναι efficiently Approximable.

1. Αν $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, τότε $WE(\lambda)$ λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.
2. Αν $|\lambda| > 1$, τότε δεν υπάρχει FPRAS για το $WE(\lambda)$ εκτός αν $NP = RP$.
3. Αν $\lambda \in (-1, 0)$, τότε δεν υπάρχει FPRAS για το $WE(\lambda)$ εκτός αν $NP = RP$.
4. Αν $\lambda \in (0, 1)$ τότε $\#BIS \leq_{AP} WE(\lambda)$.

Απόδειξη

1. $\lambda \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \gamma \in \{-2, 0\}$, που έχουμε δείξει ότι το multivariate Tutte polynomial $Z_{Tutte}(\mathcal{M}, 2, \gamma)$ λύνεται επακριβώς σε πολυωνυμικό χρόνο.
2. $|\lambda| > 1 \Rightarrow \gamma < 0$ και έχουμε δείξει ότι το multivariate Tutte polynomial $Z_{Tutte}(\mathcal{M}, 2, \gamma < 0)$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
3. $\lambda \in (-1, 0) \Rightarrow \gamma < 0$ και έχουμε δείξει ότι το multivariate Tutte polynomial $Z_{Tutte}(M, 2, \gamma < 0)$ δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.
4. $\lambda \in (0, 1) \Rightarrow \gamma > 0$ και έχουμε δείξει ότι για το multivariate Tutte polynomial ισχύει: $\#BIS \leq_{AP} Z_{Tutte}(\mathcal{M}, 2, \gamma > 0)$.

7.4 Cycle Index Polynomial

Έστω Γ μία ομάδα μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Κάθε μετάθεση $g \in \Gamma$ χωρίζει το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ σε ένα σύνολο από **κύκλους**. Με $cyc(g)$ συμβολίζουμε τον αριθμό από κύκλους.

Το πολυώνυμο μίας μεταβλητής **cycle index polynomial** του Γ ορίζεται ως εξής:

$$Z_{CI}(\Gamma, x) = \frac{1}{|\Gamma|} * \sum_{g \in \Gamma} x^{cyc(g)}$$

Ορίζεται το παρακάτω πρόβλημα:

Όνομα: $CycleIndex(x)$

Είσοδος: Ένα σύνολο από γεννήτορες της ομάδας μετάθεσης Γ .

Έξοδος: $Z_{CI}(\Gamma, x)$

Από το θεώρημα [22.Theorem 4], έχουμε ότι για x πραγματικό αριθμό και όχι ακέραιο ($x \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$) το παραπάνω πρόβλημα δεν έχει FPRAS εκτός αν $NP = RP$.

Όμως, τι γίνεται στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου x είναι ακέραιος.

Έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 19 [Goldberg and Jerrum, 27]

Έστω ότι $x > 0$ είναι efficiently approximable. Τότε:

1. Αν $x = 1$, $CycleIndex(x)$ λύνεται ακριβώς σε πολωνυμικό χρόνο.
2. Αν x δεν είναι ακέραιος τότε δεν υπάρχει FPRAS για το πρόβλημα $CycleIndex(x)$ εκτός αν $NP = RP$.
3. Αν $x > 1, x \in \mathbb{Z}$, τότε $\#BIS \leq_{AP} CycleIndex(x)$.

Απόδειξη (3)

Έχουμε ήδη δείξει από το προηγούμενο κεφάλαιο (Weight Enumerator) ότι $\#BIS \leq_{AP} WE(\lambda)$.

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $WE(\lambda) \leq_{AP} CycleIndex(x)$.

Έστω generating matrix, στιγμιότυπο του $WE(\lambda)$ με r ανεξάρτητες γραμμές και c στήλες και ο υποχώρος που ορίζουν οι r γραμμές (διάστασης r , $\dim(Y) = r$). Επίσης, έστω $M_{i,*}$ να είναι η γραμμή i του πίνακα.

$\forall m \in \{0, 1\}^r$, $w(m) = \sum_{i=1}^r m_i * M_{i,*} \pmod{2}$ σε $GF(2)$ και έστω $k(m)$ να είναι το πλήθος των 1 σε αυτό το διάνυσμα.

Επειδή οι γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες, κάθε στοιχείο του μπορεί να εκφρασθεί μοναδικά σαν $w(m)$ με $m \in \{0, 1\}^r$. Οπότε, θα ισχύει ότι

$$W_M(\lambda) = \sum_{m \in \{0,1\}^r} \lambda^{k(m)}$$

Έστω ότι $n = 2 * c$. Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μία ομάδα μεταθέσεων Γ του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$, έτσι ώστε $W_M(\lambda)$ να μπορεί να υπολογιστεί από το $Z_{CI}(\Gamma, x)$.

Στην συνέχεια θα πρέπει να ορίσουμε τους γεννήτορες του Γ . Για $i \in [r]$, g_i είναι η μετάθεση του $\{1, 2, \dots, n\}$ που ορίζεται ως εξής. Για όλα τα $j \in [c]$ τα στοιχεία $(2 * j - 1)$ και $2 * j$ εναλλάσσονται μεταξύ τους αν $M_{i,j} = 1$, αλλιώς αν $M_{i,j} = 0$ δεν εναλλάσσονται και παραμένουν όπως είναι. Έστω Γ να είναι η ομάδα μεταθέσεων του $\{1, 2, \dots, n\}$ που παράγεται από τα g_1, g_2, \dots, g_r .

Από τον παραπάνω ορισμό των g_i είναι σαφές ότι $g_i^2 = g_i^0 = i, \forall i \in [m]$.

Για κάθε δυαδική ακολουθία $m \in \{0, 1\}^r$, έστω $g(m)$ να είναι η μετάθεση

$$g(m) = g_1^{m_1} * g_2^{m_2} * \dots * g_r^{m_r} = \prod_{i=1}^r g_i^{m_i}$$

.

Τα στοιχεία $2 * j$ και $2 * j - 1$ εναλλάσσονται μόνο στην περίπτωση όπου έχουμε έναν περιττό αριθμό από τα $g_i^{m_i}$ για $m_i = 1$ και για τα οποία ισχύει ότι $M_{i,j} = 1$. Ισοδύναμα τα στοιχεία $2 * j$ και $2 * j - 1$ εναλλάσσονται μόνο στην περίπτωση όπου $\sum_{i=1}^r m_i * M_{i,j} = 1 \pmod{2}$ και επομένως ο αριθμός των j που εναλλάσσονται είναι $k(m)$ και άρα ισχύει ότι $cyc(g(m)) = n - k(m)$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε μετάθεση $g \in \Gamma$ μπορεί να γραφτεί ως $g(m)$ για ένα μοναδικό m .

$$\bullet \quad g \in \Gamma \Rightarrow g = g_{i_1} * g_{i_2} \dots * g_{i_l}$$

Όμως οι γεννήτορες g_i είναι αντιμεταθετικοί και, όπως αναφέραμε και παραπάνω ισχύει ότι, $g_i^2 = i$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε το g ως εξής:

$$g = g_1^{m_1} * g_2^{m_2} * \dots * g_r^{m_r} \text{ και } m = (m_1, \dots, m_r) \in \{0, 1\}^r.$$

$$\bullet \quad \text{Αρκεί να δειχθεί ότι πρόκειται για μοναδικό } m. \text{ Υποθέτουμε ότι } g(m) = g(m'), m \neq m'.$$

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω αυτό είναι ισοδύναμο με την παρακάτω έκφραση

$$\sum_{i=1}^r m_i * M_{i,*} = \sum_{i=1}^r m'_i * M_{i,*} \pmod{2}$$

Αφού οι γραμμές του M είναι γραμμικά ανεξάρτητες συμπεραίνουμε ότι $m = m'$ και

επομένως δείξαμε ότι $\Gamma = g(m) : m \in \{0, 1\}^r$.

Από τον ορισμό του CycleIndex έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\Gamma| * Z_{CI}(\Gamma, x) &= \sum_{g \in \Gamma} x^{cyc(g)} = \sum_{m \in \{0, 1\}^r} x^{n-k(m)} = x^n * \sum_{m \in \{0, 1\}^r} x^{-k(m)} \\ &= x^n * \sum_{m \in \{0, 1\}^r} \lambda^{k(m)} = x^n * W_M(\lambda) \end{aligned}$$

Όπου $\lambda = \frac{1}{x} \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Κεφάλαιο 8

Σύνολα μέσα στην κλάση #P

Deterministic Turing machine, PDTM

Είναι μία τετράδα $M = (K, \Sigma, \delta, s)$, όπου

- K : είναι ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
- $s \in K$: είναι η αρχική κατάσταση.
- Σ : είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από σύμβολα, το αλφάβητο του .
- $\delta : K * \Sigma \rightarrow (K \cup \{h, "yes", "no"\}) * \Sigma * \{\rightarrow, \leftarrow, -\}$: συνάρτηση μετάβασης.

Nondeterministic Turing machine, PNTM

Είναι μία τετράδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s)$, όπου

- K, Σ, s : ορίζονται όπως παραπάνω.
- Δ : σχέση μετάβασης $\Delta : K * \Sigma * (K \cup \{h, "yes", "no"\}) * \Sigma * \{\rightarrow, \leftarrow, -\}$, δηλαδή για κάθε συνδυασμό κατάστασης και συμβόλου μπορεί να υπάρχουν περισσότερα από ένα κατάλληλα επόμενα βήματα.

P^g : η κλάση των γλωσσών που μπορούν να αποφανθούν με μία πολυωνυμικού χρόνου ντετερμινιστική μηχανή Turing (PDTM), με πρόσβαση σε μία συνάρτηση, μαντείο g . Αντίστοιχα, ορίζεται η κλάση $P^{g[1]}$ όπου το μαντείο-συνάρτηση g μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο μία φορά.

Αντίστοιχα έχουμε ότι για μία κλάση συναρτήσεων G : $P^G = \bigcup_{g \in G} P^g$.

$F - G$: όπου F, G είναι κλάσεις συναρτήσεων συμβολίζει την κλάση των συναρτήσεων που μπορούν να γραφούν σαν την διαφορά μίας συνάρτησης που ανήκει στην κλάση F και μίας συνάρτησης που ανήκει στην κλάση G .

Πολυωνυμικού χρόνου αναγωγές μεταξύ συναρτήσεων

Cook (poly-time Turing)

$$f \leq_T^p g : f \in FP^g$$

Δηλαδή το πρόβλημα που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν έχουμε στην διάθεση μας μαντείο της συνάρτησης g .

Cook[1] (poly-time 1-Turing)

$$f \leq_{1-T}^p g : f \in FP^{g[1]}$$

Δηλαδή το πρόβλημα που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο αν έχουμε στην διάθεση μας μαντείο της συνάρτησης g , κάνοντας μόνο μία κλήση σε αυτό. Επομένως, είναι σαφές ότι αυτή η αναγωγή είναι πιο ισχυρή, δηλαδή ισχύει ότι αν

$$f \leq_{1-T}^p g \Rightarrow f \leq_T^p g$$

.

Karp (poly-time many-one) parsimonious αναγωγή

$$f \leq_m^p g : \exists h \in FP, \forall x f(x) = g(h(x))$$

Η αναγωγή αυτή είναι ισχυρότερη και άρα ισχύει ότι:

$$f \leq_m^p g \Rightarrow f \leq_{1-T}^p g \Rightarrow f \leq_T^p g$$

Αν F είναι μία κλάση συναρτήσεων, τότε είναι **closed** για την αναγωγή \leq_r αν $f \leq_r g \wedge g \in F \rightarrow f \in F$.

Η συνάρτηση g ονομάζεται $F - hard$ υπό την αναγωγή \leq_r αν $\forall f \in F f \leq_r g$.

Η συνάρτηση g ονομάζεται $F - complete$ υπό την αναγωγή \leq_r αν $\forall f \in F : f \leq_r g \wedge g \in F$.

Self-reducibility

Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται poly-time self-reducible αν υπάρχουν πολυώνυμα r και q και συναρτήσεις υπολογίσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο $h : \Sigma^* * \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*, g : \Sigma^* * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ και $t : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\forall x \in \Sigma^*$:

1. $f(x) = t(x) + \sum_{i=0}^{r(|x|)} g(x, i) * f(h(x, i))$, που σημαίνει ότι η f μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά ανάγοντας το x στο $h(x, i)$.
2. Η αναδρομή τερματίζει μετά από το πολύ πολυωνυμικό βάθος. Ισοδύναμα η τιμή

$$h(\dots h(h(x, i_1), i_2), \dots, i_q(|x|))$$

μπορεί να υπολογιστεί ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο.

3. Η συνάρτηση $h : \Sigma^* * \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ επιστρέφει μία τιμή $y \in \Sigma^*, |y| = Poly(|x|)$, όπου x το αρχικό στιγμιότυπο.

Συμβολίζουμε με $acc_M(x)$ τον αριθμό των αποδεχόμενων υπολογιστικών μονοπατιών του $M(x)$ και με $tot_M(x)$ τον συνολικό αριθμό από μονοπάτια υπολογισμού του $M(x)$.

Ορισμός #P [Valiant]

Είναι η κλάση των συναρτήσεων f για τις οποίες υπάρχει ένα $PNTM$, έτσι ώστε $\forall x \in \Sigma^*$ να ισχύει $f(x) = acc_M(x)$.

Ορισμός #PE [Pagourtzis, 3]

Είναι η κλάση των $\#P$ συναρτήσεων f για τις οποίες η αντίστοιχη γλώσσα $L_f = \{x \in \Sigma^* : f(x) > 0\}$ είναι στην P .

Το πρόβλημα $\#PerfectMatchings$ είναι δύσκολο ($\#P - complete$), αλλά το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης, δηλαδή το να αποφασίσουμε αν ένα γράφημα έχει τέλει ταίριασμα είναι εύκολο (αλγόριθμος του Blosson).

Ορισμός TotP [Kiyas et al. 3] Είναι η κλάση των συναρτήσεων f για τις οποίες υπάρχει ένα $PNTM$, έτσι ώστε $\forall x \in \Sigma^*$ να ισχύει $f(x) = tot_M(x) - 1$.

Πρόταση 7 [Pagourtzis et al. 3]

$$FP \subseteq TotP \subseteq \#PE \subseteq \#P$$

Οι σχέσεις είναι γνήσιες εκτός αν $P = NP$.

Πρόταση 8 [Pagourtzis et al. 3]

$TotP, \#PE, \#P$ δεν είναι Karp ισοδύναμες κλάσεις εκτός αν $P = NP$.

Πρόταση 9 [Pagourtzis et al. 3]

Οι κλάσεις $TotP, \#PE, \#P$ είναι $Cook[1]$ ισοδύναμες.

$$FP^{TotP[1]} = FP^{\#PE[1]} = FP^{\#P[1]}$$

Πρόταση 10 [Pagourtzis et al. 3]

$\#PerfectMatchings \in TotP$ και μάλιστα ισχύει ότι
 $\#PerfectMatchings \in TotP - complete\ under\ Cook[1]$.

Απόδειξη

Για το πρόβλημα των $\#PerfectMatchings$, αν συμβολίζουμε με $PM_E(V)$ τον αριθμό των τέλει ταιριασμάτων σε ένα γράφημα με σύνολο ακμών το E και σύνολο κορυφών το V , σε ένα γράφημα έχουμε την εξής αναδρομική σχέση

$$PM_{S \cup \{e\}}(V) = PM_S(V) + PM_S(V - \{x_1(e), x_2(e)\})$$

, όπου $x_1(e), x_2(e)$ είναι τα δύο άκρα της ακμής e .

Η παραπάνω αναδρομική σχέση εξηγείται ως εξής: Για να μετρήσουμε τα τέλεια ταιριάσματα σε ένα γράφημα παίρνουμε μία τυχαία ακμή e του γραφήματος και έχουμε δύο επιλογές (non deterministic)

1. Δεν συμπεριλαμβάνουμε την ακμή e στο τέλει ταιρίασμα: Οι κορυφές θα πρέπει να βρουν τέλει ταιρίασμα στις υπόλοιπες ακμές.
2. Συμπεριλαμβάνουμε την ακμή e στο τέλει ταιρίασμα: Τα δύο άκρα της ακμής $e, x_1(e), x_2(e)$, ανήκουν στο ταιρίασμα και άρα μπορούμε να τα διαγράψουμε από το σύνολο των κορυφών.

Επομένως, πρόκειται για ένα μη ντετερμινιστικό αλγόριθμο, που λήγει στην χειρότερη περίπτωση (longest path of tree) $|E|$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μονοπάτι οδηγεί σε λύση του αλγορίθμου. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό, πριν καλέσουμε τον αναδρομικό αλγόριθμο, ελέγχουμε για κάθε από τα 2 γράφηματα που καλούμε στην αναδρομή, αν υπάρχει perfect matching σε πολωνυμικό χρόνο. Έπομένως, το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα της permanent σε κάθε πίνακα με μη αρνητικές ακέραιες εισόδους ανήκει στην ίδια κλάση, είναι δηλαδή $TotP - complete$ under Cook[1]

Επίσης, το πρόβλημα #DNF ανήκει στην ίδια κλάση.

$$\#DNF, NonNegativePermanent \in TotP - Cook[1] Complete$$

Τα δύο παραπάνω προβλήματα έχει βρεθεί ότι έχουν FPRAS.

Πρόταση 11 [Pagourtzis, 3]

$TotP$ είναι η κλάση των self-reducible (αυτό- αναγωγίσιμων) συναρτήσεων της κλάσης #PE. Δηλαδή ισχύει ότι $TotP$ είναι ακριβώς το κλείσιμο υπό Karp αναγωγή του $\#PE_{SR}$, που είναι η κλάση όλων των self-reducible συναρτήσεων του #PE.

Παρατηρήσεις

1. Η αναγωγή Karp είναι ειδική περίπτωση των AP αναγωγών. Επομένως, αν βρεθεί FPRAS για ένα πρόβλημα που είναι $TotP - complete$ με την έννοια της αναγωγής Karp, τότε κάθε πρόβλημα στην κλάση $TotP$ θα έχει FPRAS.
2. Η τάξη #RHP1 ανήκει στην κλάση $TotP$.
3. Παρατηρούμε ότι στην τάξη #P υπάρχει ένα μεγάλο σύνολο προβλημάτων που είναι ισοδύναμα υπό αναγωγές Cook. Αυτό το είχαμε παρατηρήσει και μέσω του πολωνύμου Tutte. Όπως είχαμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια η πολυπλοκότητα του πολωνύμου Tutte σε μία καμπύλη όπου το q μένει σταθερό διατηρείται (υπό αναγωγές Cook). Ωστόσο, παρατηρούσαμε ότι καθώς αλλάζαμε την τιμή της παραμέτρου γ με σταθερό το q άλλαζε η συμπεριφορά της πολυπλοκότητας σε σχέση με το FPRAS-bility. Για παράδειγμα, για $q = 2$ είχαμε προβλήματα που όριζαν FPRAS ($\gamma > 0$), προβλήματα που δεν όριζαν FPRAS εκτός αν $NP = RP$ και προβλήματα ισοδύναμα με το #PerfectMatchings.

Κεφάλαιο 9

Λογικός χαρακτηρισμός του #P

9.1 Εισαγωγή

Στην λογική και στα μαθηματικά η δεύτερη τάξη λογικής - **second order logic** είναι επέκταση της πρώτης τάξης λογικής - **first order logic**. Η λογική πρώτης τάξης ποσοτικοποιεί μόνο τις μεταβλητές (individuals), ενώ η λογική δεύτερης τάξης ποσοτικοποιεί και σχέσεις. Για παράδειγμα

$$\forall P \forall x (x \in P \vee x \notin P)$$

9.2 Λογικός χαρακτηρισμός του #P

Ένα πρόβλημα μέτρησης είναι ένα σύνολο $L = (I_L, F_L, f_L)$, όπου I_L είναι το σύνολο των στιγμιότυπων εισόδου, $F_L(I)$ είναι το σύνολο των λύσεων που αντιστοιχεί σε είσοδο $I \in I_L$ και $f_L(I) = |F_L(I)|$ είναι η συνάρτηση μέτρησης που αντιστοιχεί στο πρόβλημα.

Έστω L ένα πρόβλημα μέτρησης με πεπερασμένη δομή $\mathcal{A} = (A, \leq)$ με λεξιλόγιο σ . Η σχέση \leq ερμηνεύεται σαν μία ολική σχέση στο A .

Έστω $T = (T_1, T_2, \dots, T_r), r \geq 0$, να είναι μία ακολουθία από σύμβολα κατηγορημάτων και έστω $z = (z_1, \dots, z_m), m \geq 0$, να είναι μία ακολουθία από μεταβλητές πρώτης τάξης (first order variables), έτσι ώστε $m + r > 0$. Λέμε ότι $L \in \#FO$, αν υπάρχει μία πρόταση πρώτης τάξης (first order formula) $\phi(z, T)$ με σύμβολα κατηγορημάτων από το $\sigma \cup T$ και ελεύθερες μεταβλητές από το z , έτσι ώστε $f_L(\mathcal{A}) = |\{ \langle T, z \rangle : \mathcal{A} \models \phi(z, T) \}|$.

Ορίζονται οι υποκλάσεις $\#\Pi_n, \#\Sigma_n, n \geq 0$ ανάλογα για τους τύπους προτάσεων Π_n, Σ_n . Μία Π_n formula (αντίστοιχα Σ_n) είναι μία πρόταση σε μορφή **quantifier prenex normal form** με n ποσοτικούς τελεστές - δεσμευμένες μεταβλητές (δηλαδή οι τελεστές \forall, \exists βρίσκονται στην αρχή της πρότασης και εναλλάσσονται μεταξύ τους), όπου ο πρώτος ποσοτικός τελεστής είναι \forall (αντίστοιχα \exists).

Για ένα πρόβλημα μέτρησης στην κλάση $\#FO$, το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι το εξής: Έχοντας σαν είσοδο μία δομή \mathcal{A} , υπάρχει μία ερμηνεία του $\langle T, z \rangle$ στην δομή \mathcal{A} έτσι ώστε $|\mathcal{A}| = \phi(T, z)$?

Θεώρημα 20 [Sanjeev Saluja and K.V.Subrahmanyam,23]

$$\#\Sigma_0 = \#\Pi_n \subset \#\Sigma_1 \subset \#\Pi_1 \subset \#\Sigma_2 \subset \#\Pi_2 = \#P = \#FO$$

Παρατηρήσεις

- $\#3DNF \in \#\Sigma_1 - \#\Sigma_0$
- $\#3SAT \in \#\Pi_1 - \#\Sigma_1$
- $\#DNF \in \#\Sigma_2 - \#\Pi_1$
- $\#HAMILTONIAN \in \#\Pi_2 - \#\Sigma_2$

Θεώρημα 21 [Sanjeev Saluja and K.V.Subrahmanyam,23]

Κάθε πρόβλημα μέτρησης στην κλάση $\#\Sigma_0$ είναι υπολογίσιμο σε ντετερμινιστικό πολυωνυμικό χρόνο.

Θεώρημα 22 [Sanjeev Saluja and K.V.Subrahmanyam,23]

Κάθε συνάρτηση μέτρησης στο $\#\Sigma_1$ έχει FPRAS.

L είναι στην κλάση $\#R\Sigma_2$ αν υπάρχει μία quantifier-free first order formula $\psi_L(z, T)$ στο $\sigma \cup T$, έτσι ώστε

$$f_L(\mathcal{A}) = |\{ \langle T, z \rangle : \mathcal{A} = |\exists x \forall y \psi_L(x, y, z, T) \}|,$$

όπου $\psi_L(x, y, z, T)$ είναι quantifier free formula ή οποία αν εκφρασθεί στην ισοδύναμη CNF μορφή κάθε clause έχει το πολύ μία εμφάνιση από ένα κατηγορημα του T .

Θεώρημα 23 [Sanjeev Saluja and K.V.Subrahmanyam,23]

Κάθε πρόβλημα μέτρησης στο $\#R\Sigma_2$ έχει FFPRAS. Επιπλέον, το πρόβλημα απόφασης του κάθε τέτοιου προβλήματος της κλάσης $\#R\Sigma_2$ είναι στην P .

Παρακάτω δίνονται κάποια παραδείγματα προβλημάτων αυτής της κλάσης.

Παραδείγματα

- *#NonDominatingSets*
- *#NonEdgeDominatingSets*

9.3 Λογικός χαρακτηρισμός της #RHP1

Το πρόβλημα *#BIS* ανήκει σε μία συντακτικά περιορισμένη υποκλάση $\#RHP1 \subseteq \#P1$.

Ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση *#RHP1* αν μπορεί να εκφρασθεί με την μορφή

$$f(A) = |\{(T, z) : A = \forall y \psi(y, z, T)\}|$$

, όπου ψ είναι μία unquantified-χωρίς ποσοτικοποιήσεις (χωρίς την ύπαρξη τελεστών \forall, \exists) CNF formula όπου κάθε clause έχει το πολύ ένα μη αρνητικό και το πολύ ένα αρνητικό κατηγορήμα του T .

Η κλάση αυτή ονομάζεται *#RHP1* επειδή:

- “P1” δηλώνει ότι επιτρέπεται μόνο καθολική ποσοτικοποίηση.
- “RH” δηλώνει ότι η unquantified subformula ψ είναι σε “restricted Horn” μορφή. Μορφή Horn σημαίνει το πολύ ένα unnegated κατηγορήμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο περιορισμός στα clauses του ψ αφορά μόνο τους όρους που αφορούν τα σύμβολα του T .

Παρακάτω είναι κάποια παραδείγματα προβλημάτων που ανήκουν σε αυτήν την κλάση:

Παραδείγματα

1. Έστω ότι αναπαριστούμε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος *#DOWNSETS* σαν μία δομή $\mathcal{A} = (A, \preceq)$, όπου \preceq είναι η δυαδική σχέση του poset. Το downset αναπαρίσταται από μία μονομελή σχέση D . Τότε $\#DOWNSETS \in \#RHP1$, αφού το πλήθος των downsets στο poset (A, \preceq) μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$f_{DS}(\mathcal{A}) = |\{(D) : \mathcal{A} = \forall x \forall y (D(x) \wedge y \preceq x \rightarrow D(y))\}|$$

2. Αναπαριστούμε ένα στιγμιότυπο του $\#1P1NSAT$ σαν μία δομή $\mathcal{A} = (|A|, \sim)$, όπου \sim είναι μία δυαδική σχέση και $x \sim y$ αναπαριστά ότι οι μεταβλητές x, y υπάρχουν στην ίδια clause, x negated και y unnegated. Η αληθής ανάθεση αναπαρίσταται από μία μονομελή σχέση. Τότε $\#1P1NSAT \in \#RHP1$, αφού το πλήθος των ικανοποιητικών αναθέσεων μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$f_{1P1NSAT}(\mathcal{A}) = |\{(T) : \mathcal{A} \models \forall x \forall y (T(x) \wedge x \sim y \rightarrow T(y))\}|$$

3. Αναπαριστούμε ένα στιγμιότυπο του $\#BIS$ σαν μία δομή $\mathcal{A} = (|A|, L, \sim)$, όπου L είναι το αριστερό σύνολο κορυφών του διμερούς γραφήματος και \sim είναι η διμελής σχέση που αναπαριστά την σχέση του "γείτονα". Η σχέση I είναι αληθής για τις αριστερές κορυφές που ανήκουν στο ανεξάρτητο σύνολο και για τις δεξιές κορυφές που δεν ανήκουν στο ανεξάρτητο σύνολο. Τότε $\#BIS \in \#RHP1$, αφού το πλήθος των ανεξάρτητων συνόλων μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$f_{BIS}(\mathcal{A}) = |\{(I) : \mathcal{A} \models \forall x \forall y (L(x) \wedge x \sim y \wedge I(x)) \rightarrow I(y)\}|$$

Κεφάλαιο 10

Πολυώνυμο Tutte και self reducibility

Σε αυτήν την εργασία γίνεται μία σύνδεση μεταξύ του πολυωνύμου Tutte και της κλάσης πολυπλοκότητας NP . Αρχικά έχουμε ότι

$$T(G, x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(A)} * (y-1)^{|A|-r(A)}$$

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης rank: $r(A \subseteq E) \leq r(E)$, $|A|$. Επομένως, παρατηρούμε ότι για $x, y \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $T(G, x, y) \in \mathbb{N}$ και άρα ο υπολογισμός του πολυωνύμου Tutte αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα μέτρησης στο γράφημα.

Στην συνέχεια, παίρνουμε τον ακόλουθο ορισμό του πολυωνύμου Tutte για τα γραφήματα.

$$T(G, x, y) = \begin{cases} x * T(G \setminus e, x, y) & , e: \text{γέφυρα} \\ y * T(G/e, x, y) & , e: \text{loop} \\ T(G \setminus e, x, y) + T(G/e, x, y) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συμβολίζουμε το γράφημα G με το πίνακα προσπτώσεως, ο οποίος έχει $|V| = n$ γραμμές και $|E| = m$ στήλες και συνεπώς χρειάζονται $m * n$ bits. Στην συνέχεια ορίζουμε τις παρακάτω συνάρτησεις:

1. $g(G, 1)$: Από τον πίνακα προσπτώσεως η συνάρτηση παίρνει την πρώτη ακμή (την πρώτη στήλη) και αποφασίζει σε σταθερό χρόνο ή σε γραμμικό (γέφυρα) αν πρόκειται για γέφυρα ή για βρόχο και επιστρέφει μία τιμή στο \mathbb{N} .

$$g(G, 1) = \begin{cases} x & , e_1 : \text{γέφυρα} \\ 0 & , e_1 : \text{βρόχος} \\ 1 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

2. $g(G, 2)$: Από τον πίνακα προσπτώσεως η συνάρτηση παίρνει την πρώτη ακμή (την πρώτη στήλη) και αποφασίζει σε σταθερό χρόνο ή σε γραμμικό (γέφυρα) αν πρόκειται για γέφυρα ή για βρόχο και επιστρέφει μία τιμή στο \mathbb{N} .

$$g(G, 2) = \begin{cases} 0 & , e_1 : \text{γέφυρα} \\ y & , e_1 : \text{βρόχος} \\ 1 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

3. $h(G, 1) = G \setminus e : \Sigma^{m*n} \rightarrow \Sigma^{(m-1)*n}$: Από τον πίνακα προσπτώσεως η συνάρτηση απλά διαγράφει την πρώτη στήλη που αντιστοιχεί στην πρώτη ακμή (e_1).
4. $h(G, 2) = G/e : \Sigma^{m*n} \rightarrow \Sigma^{(r < m)*(n-1)}$: Η συνάρτηση σε γραμμικό χρόνο υπολογίζει τον νέο πίνακα προσπτώσεων μετά την σύμπτυξη της πρώτης ακμής (e_1).

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν πολωνυμικό χρόνο εκτέλεσης $h : \Sigma^* * \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*, g : \Sigma^* * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$T(G) = \sum_{i=1}^2 g(G, i) * T(h(G, i)).$$

Τέλος, το μέγιστο βάθος της αναδρομής είναι αν κάνουμε συνέχεια διαγραφή ακμής, καθώς η σύμπτυξη διαγράφει τουλάχιστον μία ακμή και μία κορυφή, είναι $O(m) = O(n^2)$, που είναι πολωνυμικό σε βάθος.

Επομένως, τα προβλήματα μέτρησης που αντιστοιχούν σε φυσικές τιμές των παραμέτρων του πολωνύμου Tutte είναι self reducible. Συνεπώς, αν το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι στην κλάση P και άρα το πρόβλημα μέτρησης είναι στην κλάση $\#PE$, τότε το πρόβλημα μέτρησης θα ανήκει στην κλάση $TotP$.

Κεφάλαιο 11

Προτάσεις

Για περαιτέρω μελέτη, τα ακόλουθα προβλήματα είναι ανοικτά:

1. Να βρεθεί μία διαμέριση του $\#P$ σε υποκλάσεις P_1, \dots, P_n , έτσι ώστε όλα τα προβλήματα π που ανήκουν στην ίδια κλάση να είναι AP interreducible και να ισχύει ότι

$$\pi_i <_{AP} \pi_j, i > j, \pi_i \in P_i, \pi_j \in P_j.$$

Το πρόβλημα εύρεσης μίας τέτοιας διαμέρισης έγκειται στην παρακάτω πρόταση.

Αν $NP \neq RP$ τότε υπάρχει ένας άπειρος αριθμός από προβλήματα $\pi_{A_1}, \pi_{A_2}, \dots$ έτσι ώστε:

- (α') $\forall i, \pi_{A_i}$ δεν έχει FPRAS.
- (β') $\forall i, \#SAT$ δεν είναι AP - αναγωγίσιμο στο π_{A_i} .
- (γ') $i < j \Rightarrow \pi_{A_j} <_{AP} \pi_{A_i}$.

Δηλαδή υπάρχει μία απειρία κλάσεων μεταξύ των προσεγγίσιμων προβλημάτων και $\#SAT$.

2. Η κλάση $\#RHP1$ αν έχει FPRAS ή αν δεν έχει FPRAS, εκτός αν $NP = RP$.
3. Να μελετηθεί η προσεγγισιμότητα του $\#PerfectMatchings$ με την βοήθεια του πολυωνύμου Tutte και άλλων πλαισίων που δίνουν αποτελέσματα για το μοντέλο Ising.
4. Να βρεθεί μία σχέση του πολυωνύμου Tutte με προβλήματα μέτρησης μεγέθους διανυσμάτων. Στην βιβλιογραφία [Bampas, Gobel, Pagourtzis and Tentes, 30] έχουν αποδειχθεί κάποια σημαντικά αποτελέσματα

$$\bullet \text{ } TotP \equiv IF_t^{LN}.$$

- $IF_t^{rmed} \subseteq TotP.$
 - $\#PE \equiv IF_p^{\prec}.$
5. Να βρεθεί η προσεγγισιμότητα του πολυώνυμου Tutte σε περιοχές που παραμένει ανοικτό το πρόβλημα.
 6. Να βρεθούν περισσότερα προβλήματα μέτρησης που αντιστοιχούν σε τιμές του πολωνύμου Tutte.

Κεφάλαιο 12

Παράρτημα

12.1 Υπολογισμός του $T(M, x, y)$ στο H_1

Στην ειδική καμπύλη H_1 ισχύει ότι $(x - 1) * (y - 1) = 1$.

$$\begin{aligned} T(M, x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - r(A)} * (y - 1)^{|A| - r(A)} = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{r(E) - |A|} \\ &= (x - 1)^{r(E)} * \sum_{A \subseteq E} \frac{1}{(x - 1)^{|A|}} = (x - 1)^{r(E)} * \left(\frac{\binom{n}{0}}{(x - 1)^0} + \frac{\binom{n}{1}}{(x - 1)^1} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{(x - 1)^n} \right) \\ &= (x - 1)^{r(E)} * \left(1 + \frac{1}{x - 1} \right)^n = (x - 1)^{r - n} * x^n \end{aligned}$$

12.2 Chernoff bounds

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in [n]$. Θέτουμε $p = \frac{\sum_i p_i}{n}$ και $m = n * p$ και έστω X_1, \dots, X_n και Y_1, \dots, Y_n να είναι ανεξάρτητες 0-1 τυχαίες μεταβλητές με $Pr(X_i = 1) = p_i$ και $Pr(Y_i = 1) = p$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $S = X_1 + \dots + X_n$ και $S' = Y_1 + \dots + Y_n$.

Έστω $\epsilon, t \geq 0$, τότε ισχύει ότι

$$Pr(S \geq (1 + \epsilon) * m) \leq e^{-t(1+\epsilon)m} * e^{t(1+\epsilon)m} * Pr(e^{tS} \geq e^{t(1+\epsilon)m}) \leq e^{-t(1+\epsilon)m} * E(e^{tS}).$$

Επειδή οι μεταβλητές X_1, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες, έχουμε ότι

$$E(e^{tS}) = E(e^{t(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{tX_1} * \dots * e^{tX_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n (p_i * e^t + (1 - p_i))$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 + p_i * (e^t - 1)) \leq \prod_{i=1}^n e^{p_i(e^t - 1)} = e^{m(e^t - 1)}$$

. Θέτοντας $t = \ln(1 + \epsilon)$, αποδεικνύεται ότι

$$Pr(S \geq (1 + \epsilon) * m) \leq e^{-\frac{\epsilon^2 m}{3}}$$

, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{-1}{2} * \epsilon^2 \leq \epsilon - (1 + \epsilon) * \ln(1 + \epsilon) \leq \frac{-1}{3} * \epsilon^2$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$Pr(S \leq (1 - \epsilon) * m) \leq e^{-\frac{\epsilon^2 m}{2}}$$

12.3 Απόδειξη της Πρότασης 1

Αν G, H είναι γραφήματα τότε,

$$T(G \cup H) = T(G) * T(H) \text{ και } T(G * H) = T(G) * T(H)$$

Απόδειξη

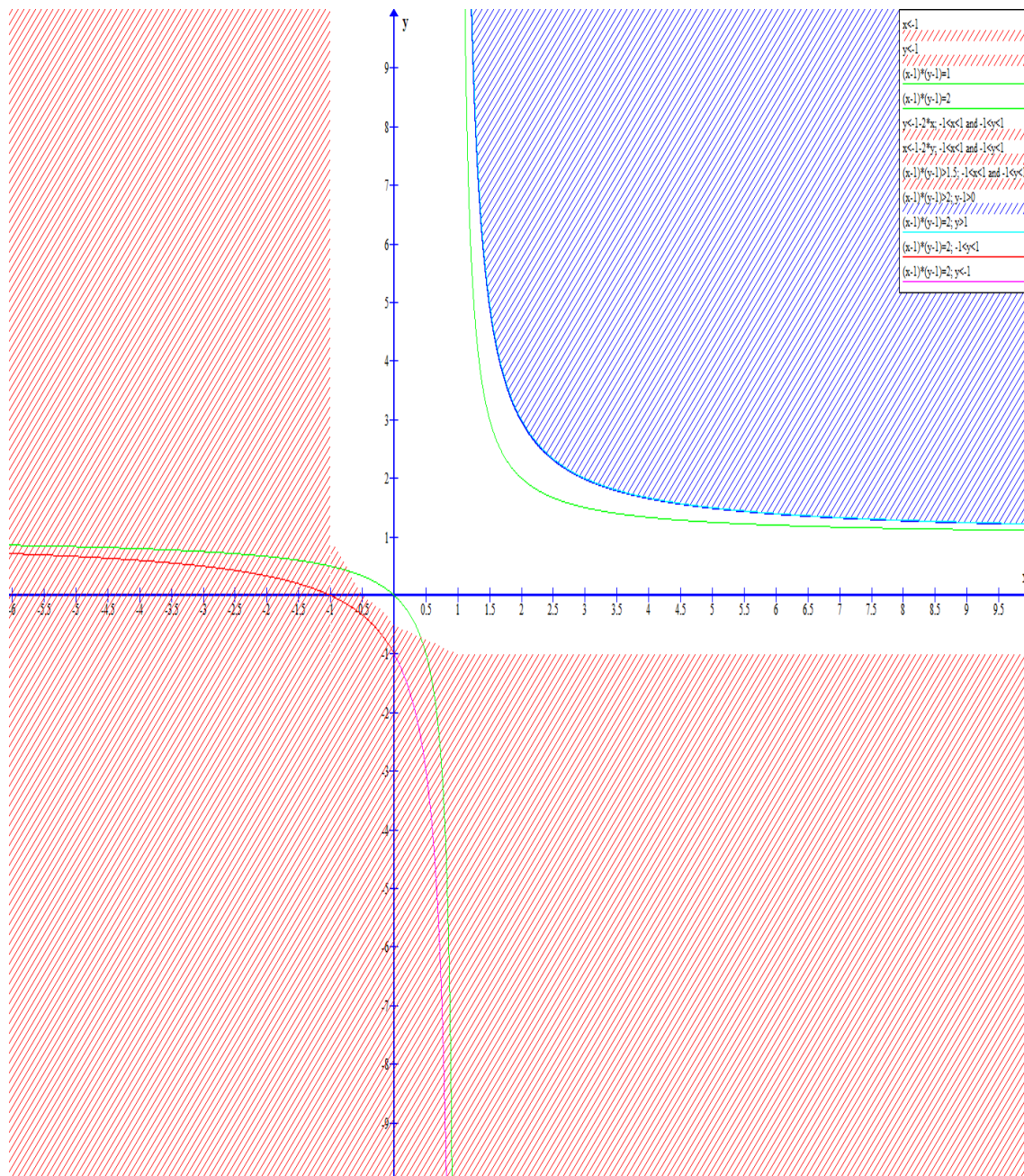
θα το αποδείξουμε με επαγωγή στον αριθμό των ακμών των γραφημάτων $G * H$ και $G \cup H$. Οι βασικές περιπτώσεις είναι προφανείς με την χρήση της σχέσης $T(G, x, y) = x^i * y^j$ καθώς διατηρείται ο αριθμός των γεφυρών και των βρόχων. Έστω ότι ισχύει η σχέση για k ακμές.

Έστω $|E(G * H)| = k + 1$, τότε (διαλέγουμε χ.β.τ.γ $e \in H$)

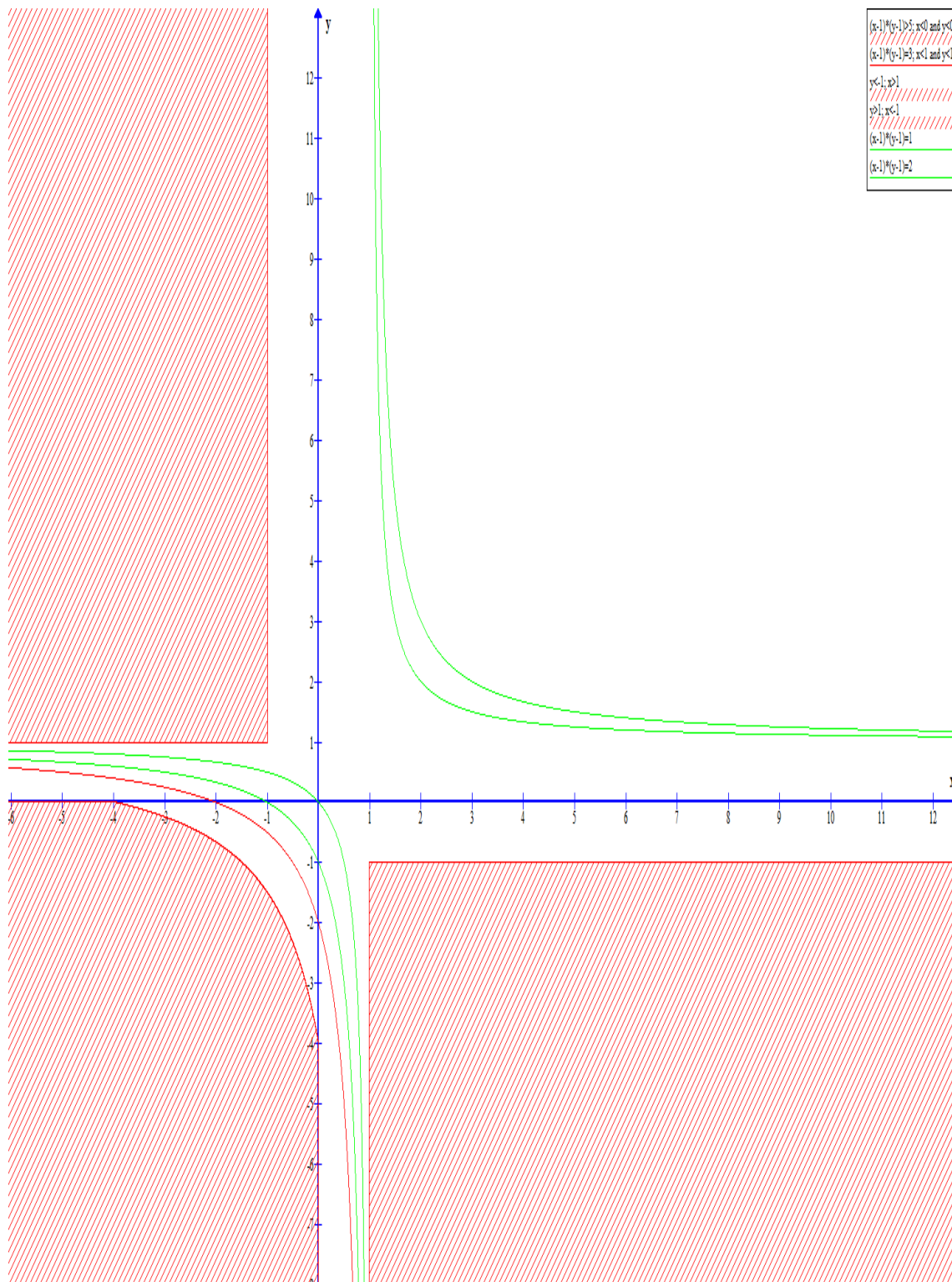
$$\begin{aligned} T(G * H, x, y) &= T((G * H) \setminus e, x, y) + T((G * H)/e, x, y) \\ &=^{i.h} T(G, x, y) * T(H \setminus e, x, y) + T(G, x, y) * T(H/e, x, y) = T(G, x, y) * (T(H \setminus e, x, y) + T(H/e, x, y)) \\ &= T(G, x, y) * T(H, x, y) \end{aligned}$$

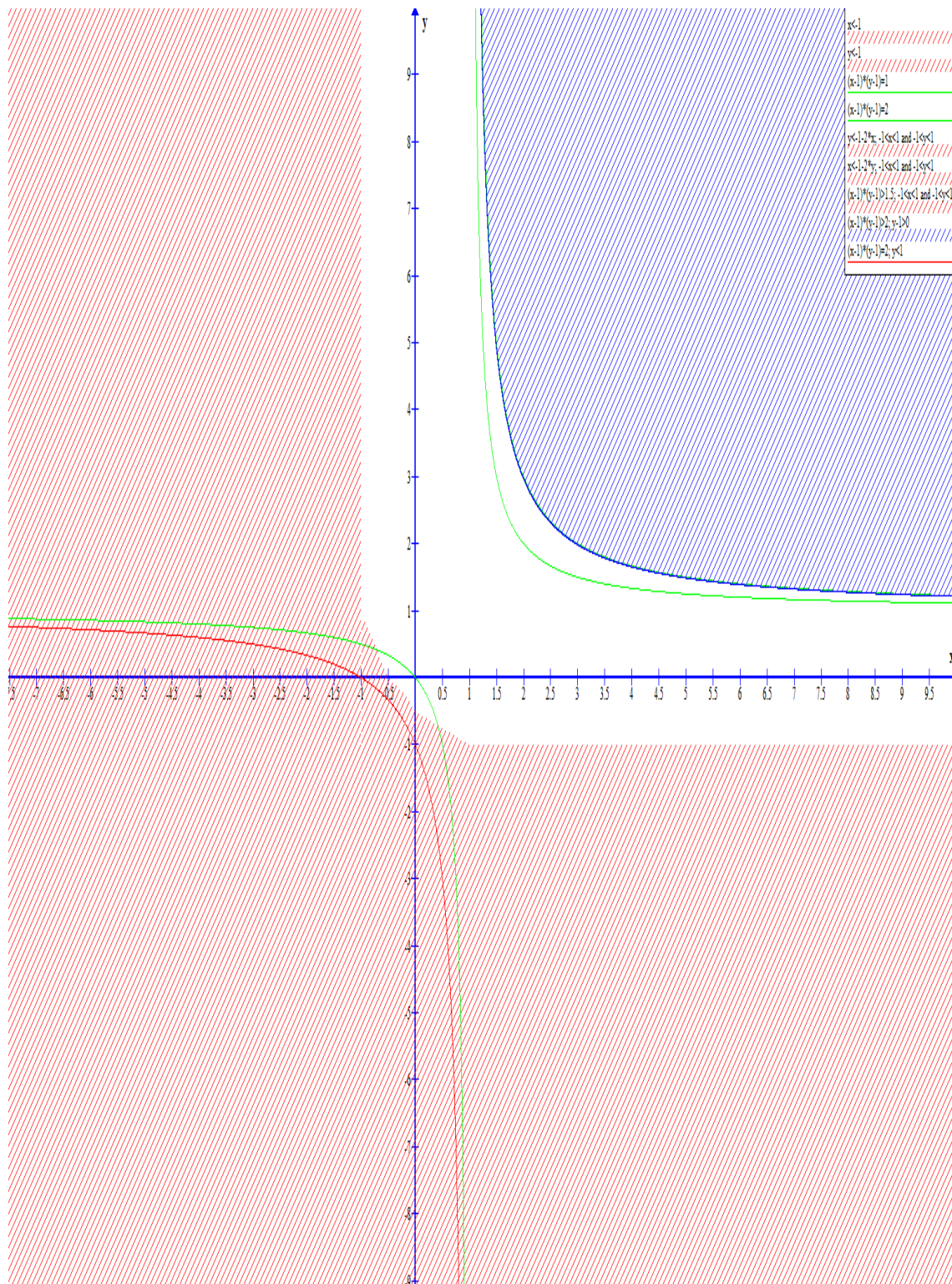
12.4 Σχήματα που αφορούν την πολυπλοκότητα του πολυωνύμου Tutte(x,y)

Στα παρακάτω σχήματα το κόκκινο χρώμα συμβολίζει την μη προσεγγισιμότητα με FPRAS εκτός αν $NP = RP$. Το πράσινο συμβολίζει υπολογισιμότητα σε πολυωνυμικό χρόνο. Το μπλε σημαίνει $\geq_{AP} \#BIS$ και το μωβ $\equiv_{AP} \#PerfectMatchings$.



Σχήμα 12.1: Πολυώνυμο Tutte σε γενικά γραφήματα





Σχήμα 12.3: Πολυώνυμο Tutte σε δυαδικά matroids

Κεφάλαιο 13

Βιβλιογραφία

- [1] M.Jerrum and A.Sinclair, The Markov chain Monte Carlo method:an approach to approximate counting and integration. In *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems* (D.Hochbaum, ed.), PWS, Boston, MA, 1996, pp. 482-520.
- [2] R.M.Karp,M.Luby and N.Madras. Monte-Carlo approximation algorithms for enumeration problems, *Journal of Algorithms* 10 (1989), 429-448.
- [3] Aris Pagourtzis,Stathis Zachos. The complexity of Counting Functions with Easy Decision Version.
- [4] D.Zuckerman, On unapproximable versions of NP-complete problems, *SIAM Journal on Computing* 25 (1996), 1293-1304.
- [5] L.G.Valiant and V.V.Vazirani, NP is as easy as detecting unique solutions, *Theoretical Computer Science* 47 (1986), 85-93.
- [6] M.R.Jerrum, L.G.Valiant and V.V.Vazirani. Random generation of combinatorial structures from a uniform distribution, *Theoretical Computer Science* 43 (1986), 169-188.
- [7] Leslie Ann Goldberg, Mark Jerrum, Inapproximability of the Tutte polynomial, *Inform. and Comput.* 206 (7) (2008) 908–929.
- [8] R.P.Stanley. *Enumerative Combinatorics*, vol.1 (Wadsworth & Brooks/Cole, 1986).
- [9] P.Rosenstiehl and R.C.Read. On the principal edge tripartition of a graph. *Ann. Discrete Math.* 3 (1978), 195-226.
- [10] F.Jaeger. Nowhere zero flows problems. In *Selected Topics in Graph Theory 3*(ed.L.Beineke and R.J.Wilson)(Academic Press, 1988), pp. 71-95.
- [11] C.Greene. Weight enumeration and the geometry of linear codes. *Stud. Appl. Math.* 99 (1976), 117-128.
- [12] Dirk Vertigan. The computational complexity of Tutte invariants for planar graphs. *SIAM J. Comput.*, 35(3): 690-712 (electronic), 2005.
- [13] W.T.Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canadian J.Math.* 6 (1954), 80-91.

- [14] J.G.Oxley and D.J.A.Welsh. The Tutte polynomial and percolation. In *Graph Theory and Related Topics* (Academic Press, 1979), pp.329-339.
- [15] F. Jaeger, D.L. Vertigan, D.J.A. Welsh, On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 108 (1)(1990) 35–53.
- [16] D.L.Vertigan and D.J.A.Welsh. The Computational Complexity of the Tutte Plane: the Bipartite Case. *Combinatorics, Probability and Computing* (1992), 1, 181-187.
- [17] Vertigan, D.L.(submitted)The computational complexity of Tutte invariants for planar graphs. *SIAM J.Comput.*
- [18] Mark Jerrum, Alistair Sinclair, Polynomial-time approximation algorithms for the Ising model, *SIAM J. Comput.* 22 (5) (1993) 1087–1116.
- [19] Leslie Ann Goldberg, Mark Jerrum, Approximating the partition function of the ferromagnetic Potts model, in: *International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, in: Springer Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 6198, 2010, pp. 396–407.
- [20] Leslie Ann Goldberg and Mark Jerrum. Inapproximability of the Tutte polynomial of a planar graph. *Computational Complexity*, 2012. To Appear.
- [21] Leslie Ann Goldberg, Mark Jerrum, Approximating the partition function of the ferromagnetic Potts model, in: *International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, in: Springer Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 6198, 2010, pp. 396–407.
- [22] Leslie Ann Goldberg, Automating Pólya theory: The computational complexity of the cycle index polynomial, *Inform. and Comput.* 105 (2) (1993) 268–288.
- [23] Sanjeev Saluja and K.V.Subrahmanyam. Descriptive Complexity of #P Functions. *Journal of Computer and system sciences* 50, 493-505 (1995).
- [24] P.D.Seymour, Nowhere-zero 6-flows, *J.Combin. Theory B* 30 (2) (1981) 130-135.
- [25] Miriam Backens, Andrei Bulatov, Leslie Ann Goldberg, Colin McQuillan and Stanislav Zivny. Boolean approximate counting CSPs with weak conservativity, and implications for ferromagnetic two-spin.
- [26] Joanna A.Ellis-Monaghan, Criel Merino. *Graph Polynomials and Their Applications I:The Tutte Polynomial*.
- [27] Leslie Ann Goldberg, Mark Jerrum. Approximating the Tutte polynomial of a binary matroid and other related combinatorial polynomials. *Journal of Computer and System Sciences* 79 (2013) 68-78.
- [28] Martin E. Dyer, Leslie Ann Goldberg, Catherine S. Greenhill, Mark Jerrum, The relative complexity of approximate counting problems, *Algorithmica* 38 (3) (2003) 471–500.
- [29] Alan D. Sokal, The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids, in: *Surveys in Combinatorics, 2005*, in: London Math.Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, pp. 173–226.
- [30] Evangelos Bampas, Andreas-Nikolas Gobel, Aris Pagourtzis, and Aris Tentes. On the connection between interval size functions and path counting.