



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

---

**Αεροδυναμική Ανάλυση Πτερύγων  
σε Ισεντροπικές Συνθήκες**

---

Διπλωματική Εργασία

Κυριάκος Α. Σιούτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Σπυρίδων Βουτσινάς

Αθήνα, 2018



## **Ευχαριστίες**

Ξεκινώντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Σπυρίδων Βουτσινά, για την ευκαιρεία που μου έδωσε να εκπονήσω την διπλωματική μου εργασία σε ένα επιμορφωτικό και ενδιαφέρον θέμα. Η καθοδήγηση του και οι συμβουλές του καθ'όλη την διάρκεια την παρούσας εργασίας ήταν καθοριστική.

Συνεχίζοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα Γεώργιο Παπαδάκη για την συνεχή επίλυση αποριών και την προθυμία του να βοηθήσει οποιαδήποτε στιγμή, καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα Θεολόγο Ανδρόνικο για τις ατελείωτες ώρες συζήτησης και τις συμβουλές του. Φυσικά δεν θα μπορούσα να ξεχάσω τα παιδιά του εργαστηρίου, Δημήτρη Ντούρα, Αντώνη Στρατή και Ηλία Μακρή για το ευχάριστο κλίμα που δημιούργησαν και την αμέριστη βοήθεια τους όποτε την είχα ανάγκη, ιδιαίτερα τον Δημήτρη που με βοήθησε στην διαμόρφωση της δομής της διπλωματικής μου εργασίας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια και κυρίως τον πατέρα μου Αναστάσιο, που αποτέλεσε πρότυπο για την μέχρι στιγμής πορεία μου. Η παρούσα διπλωματική είναι αφιερωμένη στην μνήμη του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την Νίνα Χαμπαίου για την συνεχή στήριξη στις όσες δυσκολίες παρουσιάστηκαν.

Αθήνα, 23 Ιουλίου 2018



## Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η αεροδυναμική ανάλυση του αεροσκάφους ACFA2020 με χρήση της Μεθόδου *Particle Mesh*. Ο σχεδιασμός αεροσκαφών με υψηλό λόγο επιμήκους θα επιφέρει μεγάλες αλλαγές στην αεροπορική βιομηχανία διότι μειώνει δραστικά την κατανάλωση καυσίμου, τον εξωτερικό θόρυβο και την εκπομπή ρύπων προς το περιβάλλον. Η μέθοδος που αρχικά χρησιμοποιήθηκε προσέγγιζε την ροή ως ασυμπίεστη. Η μεγάλη διαφορά στη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με αντίστοιχα συμπιεστού ρευστού, οδήγησε στην ανάγκη προγραμματισμού μιας μεθόδου που θα λαμβάνει υπόψιν τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας γύρω από την πτέρυγα. Για την προσέγγιση της συμπιεστότητας αναπτύχθηκαν δύο μέθοδοι. Στην πρώτη επιλύθηκε η εξίσωση Bernoulli με την παραδοχή της ισεντροπικής ροής γύρω από το σώμα ενώ στην δεύτερη έγινε επιπλέον επίλυση των Lagrange εξισώσεων ενέργειας και συνέχειας. Κατά την διάρκεια του προγραμματισμού αυτού, έγιναν τροποποιήσεις στον τρόπο υπολογισμού δύο μεγεθών, με χρήση της μεθόδου *Particle Mesh*, μειώνοντας σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.



## Abstract

The purpose of this thesis is the aerodynamic analysis of the aircraft ACFA2020 with use of the *Particle Mesh Method*. The design of aircrafts with high aspect ratio will enhance huge changes in the aviation world, due to the significant reduction in fuel consumption, the external noise and the pollution they emit. At first, we approach this analysis assuming the flow unsteady and incompressible. The results which came through were compared with those one of unsteady compressible flow. The big divergence of this comparison lead to the need to modify the existing code in order to take into account the variations of enthalpy and density around the wing. Two methods were developed for this approach. Firstly, by solving Bernoulli equation in the nodes of the grid under the condition of isentropic flow and secondly, by solving two more Lagrangian equations for energy and continuity. Also, during this approximation, some alterations took place in the calculation of two variables, having as a result the optimization of the computational cost.





# Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Αεροδυναμική αντίσταση αεροσκάφους.....	1
1.2 Συντελεστής αντίστασης αεροσκάφους.....	2
1.3 <i>BWB (Blended Wing Body) aircraft</i> .....	4
1.4 Μειονεκτήματα <i>BWB aircraft</i> .....	5
1.5 <i>ACFA 2020 (Active Control for Flexible 2020 Aircraft)</i> .....	5
1.6 Δομή της εργασίας.....	7
2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος.....	8
2.1 Μέθοδος προσομοίωσης.....	8
2.2 Αναπαράσταση φύλλων στροβιλότητας.....	9
2.2.1 Η δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας.....	11
2.2.2 Η στροβιλή θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας.....	12
2.3 Ο ομόρρους ως φύλλο στροβιλότητας.....	12
2.4 Κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης.....	14
2.5 Υπολογισμός των πιέσεων.....	16
2.6 Υπολογισμός της πίεσης που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας.....	17
2.7 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας.....	19
2.8 Στοιχεία Στροβιλότητας.....	22
3. Μέθοδος <i>Particle Mesh</i> .....	27
3.1 Διατύπωση της μεθόδου ( <i>Particle Mesh Method</i> ).....	27
3.2 Προβολή και Παρεμβολή.....	29
3.3 Αλγόριθμος επίλυσης Μεθόδου <i>Particle Mesh</i> .....	30
3.4 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας ( <i>ACFA2020</i> ).....	31
3.5 Αποτελέσματα <i>ACFA2020</i> .....	35
3.6 Οπτικοποίηση του ομόρρου.....	41
4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους.....	44
4.1 Εισαγωγή.....	44
4.2 Η ορθογωνική πτέρυγα.....	45
4.3 Επαγόμενη ταχύτητα στοιχείων στροβιλότητας.....	47
4.4 Αποτελέσματα προσομοίωσης (ταχύτητα).....	48
4.4.1 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης.....	48
4.4.2 Ροή σε γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών.....	51
4.4.3 Αποτίμηση των αποτελεσμάτων (ταχύτητα).....	54
4.5 Επαγόμενη πίεση στοιχείων στροβιλότητας.....	55
4.6 Αποτελέσματα προσομοίωσης (πίεση).....	58
4.6.1 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης.....	58
4.6.2 Ροή σε γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών.....	60
4.6.3 Αποτίμηση των αποτελεσμάτων (πίεση).....	64
4.7 Συμπεράσματα.....	64

5. Προσέγγιση συμπίεστος.....	65
5.1 Εισαγωγή.....	65
5.2 Η περίπτωση ισεντροπικής ροής γύρω από την πτέρυγα.....	66
5.3 Εξίσωση ενέργειας και συνέχειας.....	68
6. Συμπεράσματα-αποτίμηση της εργασίας.....	70
6.1 Σύνοψη της διπλωματικής εργασίας.....	70
6.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία.....	71
Βιβλιογραφία.....	72

# 1. Εισαγωγή

## 1.1 Αεροδυναμική αντίσταση αεροσκάφους

Η αεροναυπηγική είναι ένας κλάδος της επιστήμης που έχει πολλά περιθώρια βελτιστοποίησης. Η συνεχής ανάγκη για βελτίωση της επίδοσης των αεροσκαφών και παράλληλα την μείωση του λειτουργικού κόστους, της ελάττωσης των εκπομπών ρύπων προς το περιβάλλον, τη μείωση του εξωτερικού θορύβου ( κυρίως στη φάση της απογείωσης ) αποτελούν μερικά από τα προβλήματα που απασχολούν όλες τις αεροπορικές εταιρείες. Σήμερα οι διεθνείς κανονισμοί επιβάλλουν μια μέγιστη επιτρεπτή στάθμη θορύβου που ορισμένες φορές τα αεροσκάφη δεν μπορούν να ικανοποιήσουν. Παράδειγμα αυτού του αυστηρού κανονισμού αποτελεί το αεροσκάφος Concorde οπού, λόγω της υψηλής στάθμης θορύβου, του απαγορεύτηκε η χρήση του αεροδρομίου της Νέας Υόρκης.

Σημαντική παράμετρος στην βελτίωση της επίδοσης ενός αεροσκάφους αποτελεί η αεροδυναμική του αντίσταση. Η αεροδυναμική αντίσταση ενός αεροσκάφους μπορεί να χωριστεί σε τρεις κατηγορίες:

- αντίσταση τριβής: η οποία οφείλεται στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων πάνω στις στερεές επιφάνειες λόγω της συνεκτικότητας του αέρα και της γνωστής συνθήκης μη ολίσθησης.
- αντίσταση μορφής: η οποία οφείλεται στην ασύμμετρη διανομή πιέσεων γύρω από το αεροσκάφος που δίνει συνιστώσα δύναμης αντίθετη προς την κατεύθυνση κίνησης του αεροσκάφους
- επαγόμενη αντίσταση: η οποία οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ του κάτω και του πάνω τμήματος της πτέρυγας και σχετίζεται απευθείας με την άνωση του αεροσκάφους.

Για τον υπολογισμό της συνολικής αντίστασης ενός αεροσκάφους και εν συνεχεία του συντελεστή αντίστασης, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε όλες τις αντιστάσεις των μερών του, ως πτέρυγα, άτρακτος, πηδάλια κλπ. Με αυτό τον τρόπο, η συνολική αντίσταση του αεροσκάφους μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά:

$$D = D_{\pi} + D_{\sigma\pi} + D_{\pi\delta} + \Sigma\delta D + D_{\epsilon\gamma} \quad (1.1)$$

όπου,  $\Sigma\delta D$  το άθροισμα των αντιστάσεων λόγω αλληλεπίδρασης.

## 1. Εισαγωγή

---

Αναλογικά μπορούν να ορισθούν οι συντελεστές αντίστασης του αεροσκάφους  $C_D, C_{D\pi}, C_{Dατρ}$  ως:

$$D_{\pi} = C_{D\pi} \rho / 2 U_{oo}^2 S_{\pi} \quad (1.2)$$

Ορισμένες φορές η αεροδυναμική αντίσταση του αεροσκάφους εκφράζεται ως:

$$C_D = \bar{C}_f \frac{\rho}{2} U_{oo}^2 S_{\beta\rho\epsilon\chi} \quad (1.3)$$

όπου  $S_{\beta\rho\epsilon\chi}$  η συνολική βρεχόμενη επιφάνεια του αεροσκάφους και  $\bar{C}_f$  ένας μέσος συντελεστής τριβής για ολόκληρο το αεροσκάφος. Είναι φανερό πως ένας τρόπος για να μειωθεί ο συντελεστής αντίστασης ενός αεροσκάφους είναι η ελαχιστοποίηση της βρεχόμενης επιφάνειας του.

### 1.2 Συντελεστής αντίστασης αεροσκάφους

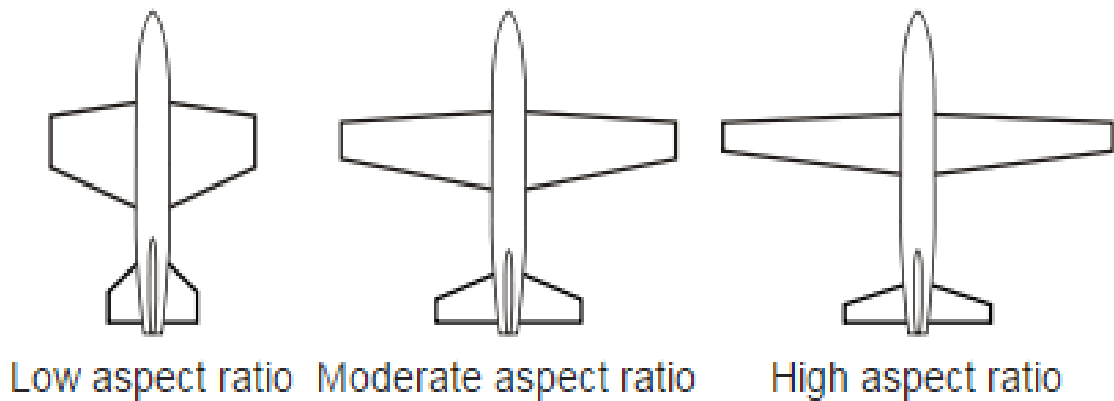
Ο συντελεστής επαγόμενης αντίστασης  $C_{Di}$  είναι ανάλογος του τετραγώνου του συντελεστή άνωσης  $C_L$  της πτέρυγας και γράφεται:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A R e} = \frac{C_L^2}{\pi A R} (1 + \delta) \quad (1.4)$$

όπου,  $\delta$  συντελεστής που εξαρτάται από τη μορφή της πτέρυγας και  $AR$  ο λόγος επιμήκους του αεροσκάφους. Ο λόγος επιμήκους ( $A.R.$ ) μιας πτέρυγας προσδιορίζεται από την σχέση:

$$A.R. = \frac{S^2}{A} \quad (1.5)$$

όπου  $A$  είναι η πτερυγική επιφάνεια και  $S$  το εκπέτασμα της πτέρυγας.



Εικόνα 1.1: Πτέρυγες με χαμηλό, ήπιο και υψηλό λόγο επιμήκους. [6]

Η αντίσταση του αεροσκάφους γράφεται ως άθροισμα των αντιστάσεων των μερών του αεροσκάφους επαυξημένων κατά τις αντιστάσεις αλληλεπίδρασης. Με κοινή αναγωγή των αντιστάσεων στην επιφάνεια της πτέρυγας έχουμε:

$$D = (C_{D_o} + C_{D_i}) S \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 \quad (1.6)$$

όπου,

$$C_{D_o} S = C_{D_{\text{πnp}}} S + C_{D_{\text{σnp}}} S + \Delta_{\alpha\beta} (C_D S) \quad (1.7)$$

$S$  η επιφάνεια της πτέρυγας και  $\Delta_{\alpha\beta} (C_D S)$  είναι η επαύξηση της αντίστασης ανάλογα με την θέση της ατράκτου.

Ο λόγος αυτός αποτελεί βασικό γεωμετρικό χαρακτηριστικό μιας πτέρυγας καθώς επηρεάζει κατά κύριο λόγο τον σχηματισμό των στροβίλων στα ακροπτερύγια και κατά συνέπεια την Επαγωγική Οπισθέλκουσα.

Απαιτώντας υψηλό  $A.R.$  επιτυγχάνουμε μείωση της Επαγωγικής Οπισθέλκουσας βελτιώνοντας την απόδοση του αεροσκάφους. Αυτές οι τροποποιήσεις εφαρμόζονται σε σύγχρονα εμπορικά αεροσκάφη με την χρήση σύνθετων υλικών για την άτρακτο αλλά και την πτέρυγα. Ωστόσο, σε μεγάλο υψόμετρο μια τέτοια γεωμετρία παρουσιάζει υψηλή παραμόρφωση και ευκαμψία. Για τον λόγο αυτό πραγματοποιούνται κατάλληλες προσομοιώσεις έτσι ώστε να επιτευχθεί η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας και παράλληλα η ασφάλεια κατά την διάρκεια της πτήσης.

Η άτρακτος αποτελεί ουσιαστικό στοιχείο της μορφής του αεροσκάφους με πρωταρχική συμβολή στην ποιότητα των πτητικών χαρακτηριστικών του. Η άτρακτος στα επιβατικά αεροσκάφη χρησιμοποιείται για την μεταφορά του φορτίου (επιβάτες, αποσκευές και άλλα) αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου στα μικρά

## 1. Εισαγωγή

---

αεροσκάφη αποτελεί και τον φορέα του προωθητικού μέσου. Η άτρακτος δέχεται ελάχιστη άνωση που οφείλεται εν μέρη στο αεροδυναμικό της σχήμα. Για τον λόγο αυτό έγινε προσπάθεια σχεδιασμού ενός αεροσκάφους όπου με την κατάλληλη αεροδυναμική σχεδίαση της ατράκτου του θα επωφελείται στην αύξηση της άνωσης. Χρήζει όμως μεγάλης προσοχής και προτέρημα μιας τέτοιας πρωτοβουλίας, να μην επηρεαστεί η ευστάθεια πτήσης του αεροσκάφους. Μια τέτοια καινοτομία ακολουθούν τα BWB αεροσκάφη.

### **1.3 BWB (Blended Wing Body) aircraft**

Με τον όρο *BWB aircraft* εννοούμε ένα αεροσκάφος στο οποίο η άτρακτος και η πτέρυγα αποτελούν ένα κομμάτι δίνοντας μας το δικαίωμα να αποκαλέσουμε το συγκεκριμένο αεροσκάφος σαν μια “μεγάλη πτέρυγα”. Η συγκεκριμένη μοντελοποίηση υπόσχεται μεγάλες αλλαγές στον τύπο των εμπορικών αεροσκαφών που θα χρησιμοποιούνται στο μέλλον. Όπως αναφερθήκαμε και προηγουμένως στα πλεονεκτήματα μια πτέρυγας με υψηλό *A.R.* έτσι και εδώ ένα αεροσκάφος τέτοιου είδους μπορεί να επωφεληθεί από το αεροδυναμικό του σχήμα και να μειώσει σε σημαντικό βαθμό την επαγωγική οπισθέλκουσα. Με τον τρόπο αυτό η κατανάλωση καυσίμου θα μειωθεί σε σχέση με τα υπόλοιπα εμπορικά αεροπλάνα, επιτυγχάνοντας έναν από τους πιο σημαντικούς στόχους κάθε αεροπορικής εταιρείας, την ελαχιστοποίηση του λειτουργικού κόστους του αεροπορικού στόλου τους. Ένα *BWB* μπορεί να παράξει πολύ μεγαλύτερο λόγο άνωσης προς αντίσταση ( *Lift to Drag ratio*) σε σχέση με τα υπόλοιπα αεροσκάφη, βελτιώνοντας σημαντικά την εξοικονόμηση καυσίμου. Οι κινητήρες του αεροσκάφους τοποθετούνται στην επάνω μεριά και στο πίσω μέρος της ατράκτου εξυπηρετώντας την μείωση του θορύβου που προκαλούν.



Εικόνα 1.2: *Blended Wing Body aircraft* [8]

Παρόλαυτα υπάρχουν κάποια αξιολογούμενα μειονεκτήματα τα οποία δεν μπορούν να παραληφθούν.

#### **1.4 Μειονεκτήματα BWB aircraft**

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα πλεονεκτήματα μια τέτοιας διάταξης είναι πολύ ελκυστικά καθώς συνδυάζουν καλύτερη επίδοση του αεροσκάφους σε συνδυασμό με την μείωση της κατανάλωσης καυσίμου. Ωστόσο δεν μπορούμε να παραλείψουμε τα μειονεκτήματα που έχουν, μερικά από τα οποία αν δεν αντιμετωπισθούν κατάλληλα μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλες καταστροφές. Τα μειονεκτήματα μια τέτοιας διάταξης είναι:

- Σε περίπτωση έκτακτης ανάγκης η εκκένωση μιας “μεγάλης πτέρυγας” δημιουργεί πολλούς προβληματισμούς. Στα περισσότερα αεροσκάφη οι θέσεις είναι δομημένες πάνω στο σωληνοειδές σχήμα της ατράκτου ενώ σε ένα *BWB* αεροσκάφος οι θέσεις και οι διάδρομοι θυμίζουν την διάταξη ενός θεάτρου, περιορίζοντας σε μεγάλο βαθμό τον αριθμό των εξόδων κινδύνου.
- Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί πριν, οι κινητήρες είναι τοποθετημένοι πάνω από την άτρακτο του αεροσκάφους. Μια τέτοια διάταξη φέρει ανησυχίες στην περίπτωση ενός ατυχήματος όπου οι κινητήρες θα αποκολληθούν από το αεροσκάφος και λόγω της ορμής που θα έχουν θα μετατοπιστούν προς τα μπροστά, και πιο συγκεκριμένα προς την καμπίνα των επιβατών. Για τον λόγο αυτό χρήζει μεγάλης προσοχής η κατάλληλη επιλογή των υλικών που θα χρησιμοποιηθούν για τους πυλώνες των κινητήρων και ο σχεδιασμός τους έτσι ώστε σε μια τέτοια περίπτωση να αποτραπεί μια τέτοια ενέργεια.
- Λόγω του εξειδικευμένου σχεδιασμού μιας “μεγάλης πτέρυγας”, όπου οι πτέρυγες του αεροσκάφους είναι ενσωματωμένες στην άτρακτο, δεν αφήνουν περιθώρια σχεδίασης θέσεων με παράθυρο για του επιβάτες. Ένα τέτοιο περιβάλλον μπορεί να γίνει αρκετά άβολο και ασφυκτικό, με συνέπεια να δημιουργήσει δυσαρέσκεια στους επιβάτες, ιδίως σε μεγάλο μήκος μετακινήσεις.

#### **1.5 ACFA 2020 (Active Control for Flexible 2020 Aircraft)**

Η μελέτη και η σχεδίαση του *ACFA 2020* επικεντρώνεται κυρίως στον σχεδιασμό ενός αεροσκάφους 450 θέσεων με μικρή κατανάλωση καυσίμου, το οποίο θα επιτυγχάνει ταυτόχρονα και την ελαχιστοποίηση των φορτίων που ασκούνται σε αυτό καθώς και την μείωση του βάρους του σε σχέση με τα υπόλοιπα επιβατικά

## 1. Εισαγωγή

---

αεροσκάφη. Επιπλέον στόχος αυτής της μελέτης είναι η ελαχιστοποίηση του εξωτερικού θορύβου και η ελάττωση των εκπομπών ρύπων προς το περιβάλλον  $CO_2$  και  $NO_x$ . Για τον λόγο αυτό, για το συγκεκριμένο αεροσκάφος επιλέχθηκε η διάταξη *BWB* (*Blended Wing Body*).

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί παραπάνω στα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας διάταξης, μειώνοντας το συνολικό βάρος του αεροσκάφους και ταυτόχρονα της συνολικά βρεχόμενης επιφάνειας επωφελούμαστε σε μεγάλο βαθμό στην μείωση της επαγόμενης οπισθέλκουσας. Συνεπώς η απαιτούμενη ώση για την απογείωση του αεροσκάφους μειώνεται έχοντας σαν συνέπεια και την μείωση της κατανάλωσης καυσίμου.

Το *ACFA 2020* προσφέρει μεγάλες προοπτικές για την ελαχιστοποίηση του εξωτερικού θορύβου. Αυτό επιτυγχάνεται με την μείωση της ώσης που απαιτείται για την απογείωση του αεροσκάφους, και γενικότερα για την πτήση, και με την τοποθέτηση των κινητήρων στην πάνω μεριά και στο πίσω μέρος της ατράκτου, όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1.3: Το αεροσκάφος ACFA2020 [7]



## **1.6 Δομή της εργασίας**

Στα πρώτα κεφάλαια της εργασίας γίνεται μια γενική επισκόπηση των βασικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται και παρουσιάζονται κάποιες χρήσιμες προτάσεις της στροβιλότητας και των δομών τους. Αρχικά αναφέρεται η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της ασυμπίεστης και αστρόβιλης ροής. Έπειτα, περιγράφεται η μεθοδολογία που ακολουθείται για την διακριτοποίηση της γεωμετρίας του σώματος και ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται οι πιέσεις και τα φορτία πάνω στην πτέρυγα .

Στην συνέχεια ακολουθεί η περιγραφή της μεθόδου Particle Mesh, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των αεροδυναμικών φορτίων του αεροσκάφους ACFA2020. Γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ ασυμπίεστου και συμπιεστού ρευστού και σχολιάζεται η διαφορά τους.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποσκοπεί στην μείωση του υπολογιστικού κόστους της υπάρχουσας μεθόδου. Γίνεται τροποποίηση στον τρόπο υπολογισμού της επαγόμενης ταχύτητας και πίεσης των στοιχείων στροβιλότητας. Περιγράφεται αναλυτικά η διαδικασία που ακολουθείται για την υλοποίηση της μεθόδου και αποτυπώνονται αποτελέσματα για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης. Τέλος, πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων και η αποτίμηση της μεθόδου που αναπτύχθηκε.

Στο τελευταίο μέρος πραγματοποιείται η προσέγγιση της συμπιεστότητας του πεδίου ροής. Περιγράφονται αναλυτικά η προσέγγιση του προβλήματος με δύο διαφορετικούς τρόπους.

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

### 2.1 Μέθοδος προσομοίωσης

Η επίλυση των προβλημάτων της ρευστομηχανικής πραγματοποιείται βασισμένη σε μια πληθώρα μεθοδολογιών. Όλες οι μέθοδοι αποσκοπούν στην διακριτοποίηση του χώρου και χρόνου με σκοπό την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes Με κριτήριο την κίνηση των υπολογιστικών στοιχείων χωρίζονται στις ακόλουθες κατηγορίες.

- *Lagrangian*: Όπου τα υπολογιστικά στοιχεία κινούνται στον χώρο και παρακολουθούν την ροή
- *Eulerian*: Όπου τα υπολογιστικά στοιχεία παραμένουν ακίνητα
- *ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)*: Αποτελεί υβρίδιο των προηγούμενων μεθόδων, τα υπολογιστικά στοιχεία μπορούν να κινηθούν με αυθαίρετο τρόπο.

#### Οι πλεγματικές και μη-πλεγματικές μέθοδοι

Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου γίνεται με βάση την συνδεσιμότητα των υπολογιστικών στοιχείων. Στις Πλεγματικές Μεθόδους η συνδεσιμότητα μεταξύ των υπολογιστικών στοιχείων δεν αλλάζει. Σε αυτή την μέθοδο το πλέγμα καταλαμβάνει όλο το πεδίο ροής. Στις μη-πλεγματικές μεθόδους τα υπολογιστικά στοιχεία είναι ασύνδετα μεταξύ τους και το πλέγμα προσαρμόζεται πάνω στην γεωμετρία του υπό εξέταση σώματος.

#### Αριθμητική επίλυση

Για την Αεροδυναμική Ανάλυση του αεροσκάφους χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας *GenUVP (Generalized Unsteady Vortex Particle Method)* του εργαστηρίου Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π., ο οποίος χρησιμοποιεί την μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων σε συνδυασμό με την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας. Η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας (*Vortex Particles Method*) χρησιμοποιεί στοιχεία (σημειακά η που καταλαμβάνουν όγκο) τα οποία μεταφέρουν στροβιλότητα, την οποία χρησιμοποιούν ως κύρια μεταβλητή προσεγγίζοντας αριθμητικά την εξέλιξη τους. Η μέθοδος αυτή ανήκει στις μη-πλεγματικές μεθόδους, στην οποία τα ελεύθερα υλικά στοιχεία μεταφέρουν στροβιλότητα.

## **2.2 Αναπαράσταση φύλλων στροβιλότητας**

Κάθε κινούμενη ή μη επιφάνεια  $S_w$ , που παρουσιάζει ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας, σε πεδίο ροής ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού, ονομάζεται φύλλο στροβιλότητας και ουσιαστικά αποτελεί το φυσικό ανάλογο των στρωμάτων διάτμησης.

Στην περίπτωση της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ένα τρισδιάστατο ανωστικό σώμα επιβάλλεται ο ορισμός μιας γραμμής στο στερεό σύνορο του ( στην ακμή εκφυγής ), απ' όπου θα εκφεύγει ένα επιφανειακό φύλλο στροβιλότητας ( ο ομόρρους του ), με ασυνέχεια ( πήδημα ) της εφαπτομενικής ταχύτητας, επομένως και του δυναμικού. Η ύπαρξη μιας επιφάνειας ασυνέχειας του δυναμικού είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη επιφανειακής διανομής διπόλων και είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάπτυξη κυκλοφορίας, συνεπώς και άνωσης.

Οι στρόβιλες μεθοδολογίες διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες, αναλόγως του τρόπου με τον οποίο προσεγγίζεται ο ομόρρους ενός ανωστικού σώματος:

- στις μεθόδους προδιαγεγραμμένου ομόρρου ( prescribed wake ) και
- στις μεθόδους ελεύθερου ομόρρου ( free wake )

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι μεθοδολογίες όπου η γεωμετρία του ομόρρου είναι προδιαγεγραμμένη και αποτελείται από ένα επιφανειακό πλέγμα στροβιλότητας που σχηματίζεται από ευθύγραμμα τμήματα δινοσωλήνων. Η γεωμετρία του επιφανειακού πλέγματος περιγράφεται με τη χρήση περιορισμένου πλήθους βαθμών ελευθερίας.

Στην δεύτερη περίπτωση ο ομόρρους θεωρείται ελεύθερος. Αποτελείται είτε από πλέγμα δινοσωλήνων (vortex lattice, δινοπλέγματα) συνδεδεμένα μεταξύ τους, είτε από ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας ( vortex particles ) και η γεωμετρία του καθορίζεται από την επίλυση των κινηματικών και δυναμικών εξισώσεων του προβλήματος.

Εξ' ορισμού, το φύλλο στροβιλότητας είναι μία κινούμενη επιφάνεια  $S_w$  με ασυνέχεια (πήδημα) ταχύτητας  $[\vec{U}]$  στην τυχαία θέση  $\vec{x}_w \in S_w$ . Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση, που έχει άμεση σχέση με ρευστομηχανικές εφαρμογές, είναι αυτή ενός δυναμικού φύλλου στροβιλότητας που παράγεται ως επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού (ή ισοδύναμα ως μία διανομή διπόλων) και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

---

$$\llbracket \vec{U} \rrbracket(\vec{x}_w) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}_w) = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{x}_w \in S_w$$

$$\vec{\gamma}(\vec{x}_w) = \vec{\nu}(\vec{x}_w) \times \llbracket \vec{U} \rrbracket(\vec{x}_w) \quad (2.2)$$

όπου  $\vec{\nu}(\vec{x}_w)$  το κάθετο διάνυσμα στο σημείο  $\vec{x}_w$  της επιφάνειας  $S_w$  και  $\vec{\gamma}(\vec{x}_w)$  η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας στην ίδια θέση.

Σε κάθε σημείο  $\vec{x}_w$  του φύλλου στροβιλότητας  $S_w$  ισχύει:

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \vec{u}(\vec{x}_w; t) \quad (2.3)$$

$$\llbracket P \rrbracket(\vec{x}_w) = 0 \quad (2.4)$$

όπου  $\vec{u}(\vec{x}_w; t)$  είναι η μέση ταχύτητα μεταφοράς του φύλλου στροβιλότητας και  $\llbracket P \rrbracket(\vec{x}_w)$  είναι η ασυνέχεια ( το πήδημα ) της πίεσης στην θέση  $\vec{x}_w$ .

Η σχέση (2.3) είναι η κινηματική εξίσωση του ομόρρου που καθορίζει τη χρονική εξέλιξη της γεωμετρίας του. Η (2.4) είναι η δυναμική εξίσωση του ομόρρου που εξισώνει την πίεση της επάνω και της κάτω πλευράς σε κάθε σημείο του φύλλου στροβιλότητας και ουσιαστικά ρυθμίζει την χρονική εξέλιξη της έντασης της στροβιλότητας σε αυτό.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz το πεδίο ταχύτητας ασυμπίεστου μη συνεκτικού ρευστού μπορεί να γραφεί ως:

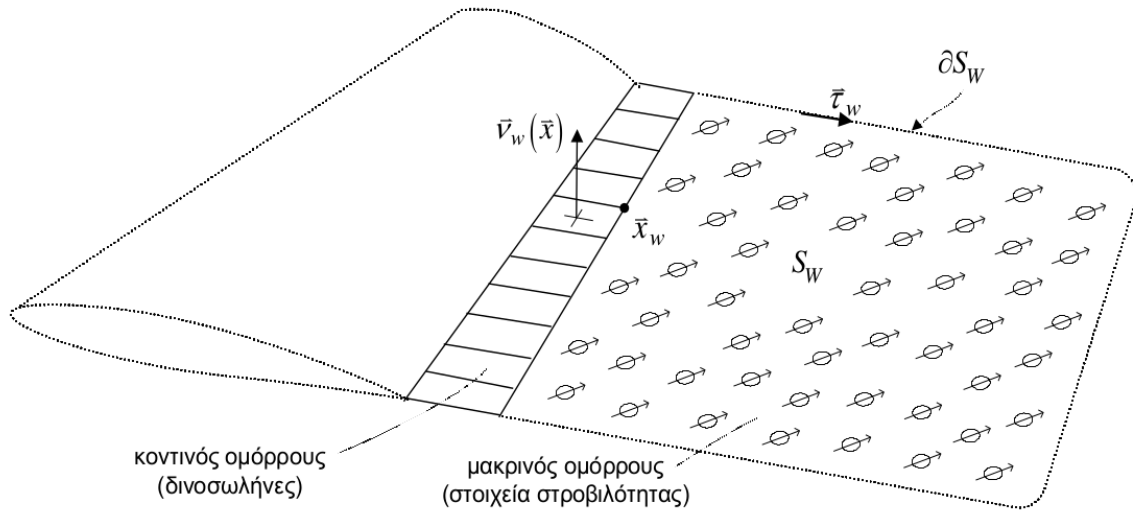
$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \nabla \Phi(\vec{x}, t) + \vec{u}_\omega(\vec{x}, t) \quad (2.5)$$

Στην περίπτωση ροής γύρω από ανωστικό σώμα ο όρος  $\nabla \Phi(\vec{x}, t)$  είναι δυνατόν να συμπεριλάβει και την συνεισφορά της αποβαλλόμενης στροβιλότητας αυτού του σώματος που μπορεί να διανέμεται ως ένα ελεύθερο φύλλο στροβιλότητας. Έτσι προκύπτει η δυναμική ( potential ) θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας, σύμφωνα με την οποία ο ομόρρος αναπαρίσταται από μία επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού κατασκευασμένη από πλέγμα δινοσωλήνων.

Όμως, καθώς η γεωμετρία του ομόρρου δεν είναι δεδομένη και προκύπτει από την (2.4), αυτή η θεώρηση είναι δυνατό να παρουσιάσει αριθμητικές αστάθειες, ιδιαίτερα σε περιοχές αναδίπλωσης του φύλλου στροβιλότητας, που είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν εάν αυτό αναπαρασταθεί μέσω του δεύτερου όρου της (2.5). Με τον τρόπο αυτό ορίζεται η θεωρητικά ισοδύναμη στροβιλή (vortex) εκδοχή του φύλλου στροβιλότητας, που εισάγει τον ομόρρο ως περιοχή γενικευμένης

στροβιλότητας. Στην περίπτωση αυτή ο ομόρρους απαρτίζεται από ένα σύνολο στοιχείων στροβιλότητας από τις θέσεις των οποίων προκύπτει η γεωμετρία του.

Στο αριθμητικό πρότυπο που παρουσιάζεται, δεχόμαστε ότι το φύλλο στροβιλότητας αποτελείται από δύο τμήματα: τον κοντινό και τον μακρινό ομόρρου, που αναπαρίστανται με τη δυναμική και τη στροβιλή θεώρηση αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1: Η αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας [2]

### 2.2.1 Η δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

Η δυναμική αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας γίνεται με τη θεώρηση πλέγματος ευθύγραμμων δινωσωλήνων, με ένταση  $\mu_w$  που προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin και γεωμετρία  $\vec{x}_w$  όπως αυτή προκύπτει από την κινηματική συνθήκη .

Με αυτά τα δεδομένα υπολογίζονται το δυναμικό  $\phi_w(\vec{x}_0; t)$  και η ταχύτητα  $\vec{u}_w(\vec{x}_0; t)$  που το φύλλο στροβιλότητας επάγει σε σημείο του χώρου  $\vec{x}_0 \in D$ :

$$\phi_w(\vec{x}_0; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} \mu_w(\vec{x}_w; t) \frac{\vec{v}(\vec{x}_w) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} dS_w(\vec{x}) \quad (2.6)$$

$$\vec{u}_w(\vec{x}_0; t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_w} [\nabla \mu_w(\vec{x}_w; t) \times \vec{v}_w(\vec{x})] \times \frac{\vec{x}_0 - \vec{x}_w}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} dS_w(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial S_w} \mu_w(\vec{x}_w; t) \frac{d\vec{l}_w \times (\vec{x}_0 - \vec{x}_w)}{|\vec{x}_0 - \vec{x}_w|^3} \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Η στροβιλή θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας

Η στροβιλή αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας προκύπτει με την μετατροπή της στροβιλότητας που είναι κατανεμημένη σε ένα πλέγμα δινοσωλήνων σε χωρική διανομή στοιχείων στροβιλότητας ( vortex particles ) ισοδύναμης έντασης  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$ . Για το σκοπό αυτό ορίζεται το γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$ :

$$\vec{\omega}(\vec{x};t) = \delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w) \cdot [\nabla \mu_w(\vec{x}_w; t) \times \vec{v}_w(\vec{x}_w; t)] + \delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w) \mu_w(\vec{x}_w; t) \vec{\tau}_w(\vec{x}_w; t) \quad (2.8)$$

όπου,  $\vec{\tau}_w(\vec{x}_w; t)$  το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα στο σύνορο  $\partial S_w(t) = (C_s) \cup (C_0)$  και  $\delta_{S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w), \delta_{\partial S_w}(\vec{x} - \vec{x}_w)$  συναρτήσεις Dirac οι οποίες είναι ορισμένες αποκλειστικά στην  $S_w$  και στο σύνορο  $\partial S_w$  αυτής αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από την (2.8) το γενικευμένο πεδίο στροβιλότητας  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$ : προκύπτει από την ολοκλήρωση τόσο του επιφανειακού όσο και του επικαμπύλιου όρου της στροβιλότητας όπως προκύπτει από τη δυναμική θεώρηση του φύλλου στροβιλότητας. Όταν η ένταση των διπόλων  $\mu_w(\vec{x}_w; t)$  παραμένει αμετάβλητη στην επιφάνεια  $S_w$  τότε ο επιφανειακός όρος στροβιλότητας στην (2.8) μηδενίζεται.

### 2.3 Ο ομόρρους ως φύλλο στροβιλότητας

Η εμφάνιση άνωσης ή ισοδύναμα κυκλοφορίας στο πρόβλημα της ροής μη συνεκτικού ρευστού γύρω από ανωστικό σώμα γίνεται με την επιβολή της δυναμικής συνθήκης Kutta-Joukowski. Στα πλαίσια της θεώρησης μη συνεκτικού ρευστού επιβάλλεται ο ορισμός επιφανειών που εκφεύγουν από το στερεό σύνορο του σώματος και παρουσιάζουν ασυνέχεια (πήδημα) στην εφαπτομενική ταχύτητα, συνεπώς και στο δυναμικό, με αποτέλεσμα την ανάπτυξη κυκλοφορίας γύρω από μία κλειστή καμπύλη που περικλείει το σώμα. Αυτή η επιφάνεια ασυνέχειας του δυναμικού είναι ο ομόρρους της πτέρυγας και αποτελεί το μη συνεκτικό ανάλογο ενός στρώματος διάτμησης. Τη χρονική στιγμή  $t$  σε μία τομή της πτέρυγας, η ασυνέχεια του δυναμικού στον ομόρρου στην ακμή εκφυγής, μεταξύ της κάτω πλευράς ( pressure side, δείκτης “-” ) και της επάνω πλευράς ( suction side, δείκτης “+” ) θα ισούται με την κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα σε αυτή την τομή:

$$\llbracket \Phi \rrbracket_w^t = \Phi_{w+}^t - \Phi_{w-}^t = \Gamma^t \quad (2.9)$$

Η ένταση της διαφοράς ( του πηδήματος ) δυναμικού  $\llbracket \Phi \rrbracket_w(\vec{x}_w)$  καθορίζει την ένταση δινοσωλήνα  $\mu_w(\vec{x}_w)$  στο υλικό σημείο  $\vec{x}_w \in S_w$  του ομόρρου:

$$\mu_w(\vec{x}_w) = -\llbracket \Phi \rrbracket_w(\vec{x}_w) = -(\Phi_w^+ - \Phi_w^-), \quad \vec{x}_w \in S_w \quad (2.10)$$

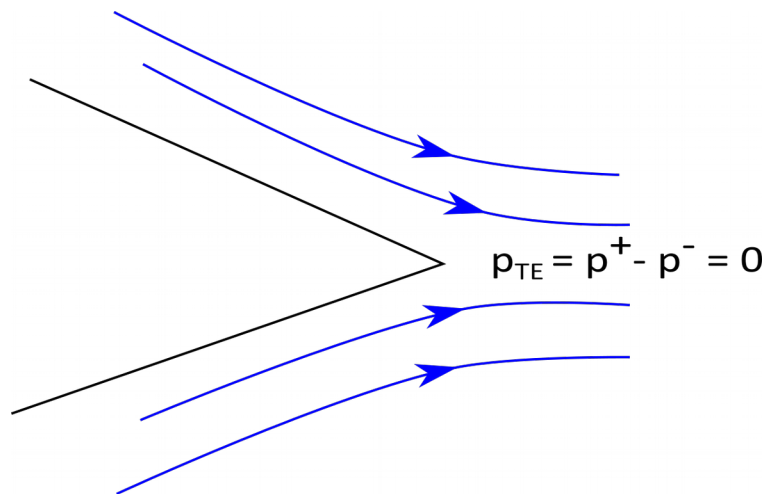
ενώ στη θέση  $\vec{x}_w \in S_w$  ενός σημείου του ομόρρου θα καθορίζεται από την μέση ταχύτητα:

$$\frac{d\vec{x}_w}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{u}^+(\vec{x}_w, t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w, t)] = \vec{u}_{mean}(\vec{x}_w, t) \quad (2.11)$$

Η ασυνέχεια του δυναμικού κατά μήκος της ακμής εκφυγής του ανωστικού σώματος επεκτείνεται στη συνέχεια σε επιφάνεια, που αποτελεί τον ομόρρου του σώματος, με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί το θεώρημα του Kelvin περί υλικής διατήρησης της κυκλοφορίας. Η αρχή διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin επιβάλλει την υλική διατήρηση της κυκλοφορίας κατά μήκος των αποβαλλόμενων γραμμών στροβιλότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ένταση της διανομής διπόλων που μεταφέρεται με ένα υλικό σημείο κατά μήκος μίας γραμμής στροβιλότητας συντηρεί τη ένταση που είχε αυτό το υλικό σημείο κατά την εκπομπή του από την ακμή εκφυγής. Έτσι τη χρονική στιγμή  $t$  το υλικό σημείο  $\vec{x}_w((\eta, t_0); t)$ , που αποβλήθηκε τη στιγμή  $t_0$  από την  $n$ -γραμμή στροβιλότητας, θα έχει ένταση ίση με την ένταση  $\llbracket \Phi \rrbracket_w^t(\vec{x}_w((\eta, t_0); t))$  που είχε η κυκλοφορία  $\Gamma(\eta, t_0)$  στην  $n$ -γραμμή στροβιλότητας τη στιγμή  $t_0$ :

$$\llbracket \Phi \rrbracket_w^t(\vec{x}_w((\eta, t_0); t)) = \Gamma(\eta, t_0) \quad (2.12)$$

Από τη συνθήκη Kutta καθορίζεται η τιμή της κυκλοφορίας γύρω από την αεροτομή, σύμφωνα με την οποία για μόνιμες συνθήκες ροής, η ροή στην ακμή εκφυγής (Trailing edge) πρέπει να είναι ομαλή ώστε η προκύπτουσα ροή να έχει φυσική υπόσταση. Αυτό σημαίνει ότι στην ακμή εκφυγής η πίεση της πάνω επιφάνειας ( $P^+$ ) πρέπει να ισούται με την πίεση της κάτω επιφάνειας ( $P^-$ ).



Σχήμα 2.2: Συνθήκη Kutta [9]

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

Αποτελεί τη δυναμική συνθήκη του προβλήματος και μαζί με την κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης ορίζουν πλήρως ένα σύστημα τόσων εξισώσεων όσες είναι και οι εντάσεις των αγνώστων διανομών πηγών και διπόλων. Η συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης καθορίζει ποσοτικά τη στροβιλότητα που αποβάλλεται στον ομόρρου της πτέρυγας ή ισοδύναμα την κυκλοφορία πάνω σε αυτή. Είναι μη γραμμική συνθήκη λόγω της ύπαρξης του τετραγωνικού όρου της ταχύτητας στο όρο της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση Bernoulli. Αποτέλεσμα είναι το πρόβλημα να μετατρέπεται σε μη γραμμικό (σε αντίθεση με το διδιάστατο πρόβλημα όπου η αντίστοιχη συνθήκη είναι γραμμική).

Η δυναμική συνθήκη μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με το θεώρημα διατήρησης της κυκλοφορίας του Kelvin. Πράγματι σύμφωνα με το θεώρημα του Kelvin θα πρέπει:

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=0 \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla \Gamma) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \llbracket \Phi \rrbracket(\vec{x}_w; t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}_w; t) \cdot (\nabla \llbracket \Phi \rrbracket(\vec{x}_w; t)) = 0 \quad (2.13)$$

όπου θεωρώντας ότι η ταχύτητα στον ομόρρου είναι ουσιαστικά η μέση ταχύτητα της πάνω και της κάτω πλευράς, θα έχουμε:

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=0 \Rightarrow \frac{\partial \llbracket \Phi \rrbracket(\vec{x}_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} [\vec{u}^+(\vec{x}_w; t) + \vec{u}^-(\vec{x}_w; t)] \cdot [\vec{u}^+(\vec{x}_w; t) - \vec{u}^-(\vec{x}_w; t)] = 0 \quad (2.14)$$

και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε:

$$\frac{\partial \Phi^+(\vec{x}_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^{\pm 2}(\vec{x}_w; t) = \frac{\partial \Phi^-(\vec{x}_w; t)}{\partial t} + \frac{1}{2} u^{\pm 2}(\vec{x}_w; t) \quad (2.15)$$

$$\frac{P^+}{\rho} = \frac{P^-}{\rho} \Rightarrow \frac{\llbracket P \rrbracket}{\rho} = 0 \Rightarrow \llbracket P \rrbracket = 0 \quad (2.16)$$

δηλαδή το θεώρημα του Kelvin ισοδυναμεί με τη συνθήκη του μηδενισμού των πιέσεων στον ομόρρου της πτέρυγας με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της ταχύτητας στην πάνω και κάτω πλευρά του φύλλου στροβιλότητας.

### 2.4 Κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης

Στα προβλήματα αεροδυναμικής με την επιβολή της κινηματικής συνθήκης μη εισχώρησης αποτυπώνουμε την ύπαρξη του εξεταζόμενου σώματος μέσα στο πεδίο ροής. Τα στοιχεία του ρευστού μπορούν να έχουν εφαπτομενική ταχύτητα πάνω στο



στερεό σύνορο, δεν μπορούν όμως να έχουν κάθετη ταχύτητα. Με τον τρόπο αυτό επιβάλλουμε τη μη εισχώρηση του ρευστού στο στερεό σύνολο  $S$ . Για την ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης σε ένα σημείο  $\vec{x}$  της επιφάνειας  $S$  του σώματος απαιτούμε τον μηδενισμό της κάθετης ταχύτητας σε αυτό το σημείο:

$$[\vec{u}(\vec{x},t) - \vec{U}_b(\vec{x};t)] \cdot \vec{v}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in S \quad (2.17)$$

όπου,  $\vec{U}_b(\vec{x};t)$  η ταχύτητα του σώματος  
 $\vec{u}(\vec{x},t)$  η ταχύτητα του πεδίου ροής στη θέση  $\vec{x}$   
 $\vec{v}(\vec{x})$  το κάθετο διάνυσμα στην θέση  $\vec{x}$

Η ταχύτητα  $\vec{u}(\vec{x},t)$  του πεδίου ροής υπολογίζεται απο την εξής σχέση:

$$\vec{u}(\vec{x};t) = \vec{U}_\infty(t) + \vec{u}_{SD}(\vec{x};t) + \vec{u}_{NW}(\vec{x};t) + \vec{u}_\omega(\vec{x};t), \quad \vec{x} \in D \quad (2.18)$$

όπου,  $\vec{U}_\infty(t)$  η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο  
 $\vec{u}_{SD}(\vec{x};t)$  η επαγόμενη ταχύτητα από τα σώματα  
 $\vec{u}_{NW}(\vec{x};t)$  η επαγόμενη ταχύτητα της επιφανειακής κατανομής στροβιλότητας στον κοντινό ομόρρου των σωμάτων  
 $\vec{u}_\omega(\vec{x};t)$ , η επαγόμενη ταχύτητα της χωρικά διανεμημένης στροβιλότητας

Ο υπολογισμός της  $\vec{u}_\omega(\vec{x};t)$ , πραγματοποιείται με την χρήση του νόμου των Biot-Savart, η επαγόμενη ταχύτητα από μια διανομή στροβιλότητας υπολογίζεται από την σχέση:

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}_0;t) = \frac{\int_D \vec{\omega}(\vec{x};t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x})}{4\pi |\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} dx \quad (2.19)$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο στο οποίο διανέμεται η ελεύθερη στροβιλότητα  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$ .

Το δυναμικό που επάγει μια διανομή στοιχείων στροβιλότητας σε σημείο  $\vec{x}_0 \in D$  έξω από τη στήριξη της δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_\omega(\vec{x}_0;t) = \frac{\int_D \vec{\omega}(\vec{x};t) \cdot (\vec{e} \times (\vec{x}_0 - \vec{x}))}{4\pi (\vec{x}_0 - \vec{x}) \cdot [(\vec{e} \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x})) \cdot \vec{e} + (\vec{x}_0 - \vec{x})]} dx, \quad \vec{x}_0 \notin \vec{x} \quad (2.20)$$

όπου  $\vec{e}$  είναι αυθαίρετο μοναδιαίο διάνυσμα που εκλέγεται έτσι ώστε να μην μηδενίζεται ο παρανομαστής της ολοκληρωτέας παράστασης. Προφανώς για σημεία υπολογισμού επάνω σε σώμα η παραπάνω σχέση υπολογίζεται χωρίς ιδιαίτερο πρόβλημα.

## 2.5 Υπολογισμός των πιέσεων

Το μέγεθος της πίεσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό από τεχνολογικής πλευράς στα διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με πεδία ροής. Στις διάφορες αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των πεδίων ροής η πίεση υπολογίζεται άμεσα. Είτε προκύπτει σαν λύση του προβλήματος, είτε η χρήση Eulerian χωρικού πλέγματος καθιστά τον υπολογισμό της πρωτογενή.

Σε κάθε χρονικό βήμα, έχοντας ολοκληρώσει την επίλυση των εξισώσεων του συστήματος, είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που αναπτύσσεται λόγω της ροής πάνω σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο.

Ο υπολογισμός των πιέσεων γίνεται μέσω της ολοκλήρωσης της απόκλισης του θεωρήματος της ορμής. Η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$P^e(\vec{x};t) = P_\phi^e(\vec{x};t) + P_\omega^e(\vec{x};t) \quad (2.21)$$

Στο απόλυτο σύστημα αναφοράς, στο τυχαίο στοιχείο  $e$  που ανήκει στο σώμα κινούμενο με σχετική ταχύτητα  $\vec{U}_B^e(\vec{x};t)$  θα ισχύει για τον υπολογισμό της πίεσης:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x};t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{u}^e(\vec{x};t)^2 + \frac{P_\omega^e(\vec{x};t)}{\rho} + \frac{P_\phi^e(\vec{x};t)}{\rho} - \vec{u}^e(\vec{x};t) \cdot \vec{U}_B^e(\vec{x};t) = c(t) \quad (2.22)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο δείκτης ( $e$ ) υποδηλώνει ότι όλα τα μεγέθη αναφέρονται στο στοιχείο  $e$ .

Ο μη μόνιμος όρος της εξίσωσης (2.22) υπολογίζεται ακολούθως:

$$\frac{\partial \Phi^e(\vec{x};t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x};t)}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\vec{x};t)}{\partial t} \quad (2.23)$$

Στην περίπτωση της μόνιμης ροής ο όρος  $\frac{\partial \Phi_\infty^e(\vec{x};t)}{\partial t}$  ισούται με μηδέν. Στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής, ο όρος αυτός πρέπει να υπολογιστεί σύμφωνα με τα δεδομένα του εξεταζόμενου προβλήματος.

Ο υπολογισμός του δυναμικού διαταραχής  $\partial \Phi_{\sigma,\mu}^e(\vec{x};t) / \partial t$  γίνεται χωρίς δυσκολία καθώς σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζουμε τις τιμές του δυναμικού  $\partial \Phi_\mu^e(\vec{x};t)$ ,  $\partial \Phi_\sigma^e(\vec{x};t)$  συνεπώς είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε και τη χρονική μεταβολή τους.

## 2.6 Υπολογισμός της πίεσης που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί και προηγουμένως, σύμφωνα με το θεώρημα του *Helmholtz* η ταχύτητα υπολογίζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \vec{A} \quad (2.24)$$

όπου,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\omega}$$

Επίσης η πίεση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων:

$$P = P_\phi + P_\omega \quad (2.25)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στο θεώρημα ορμής έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (2.26)$$

προκύπτει:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P_\phi}{\rho} \right) + \frac{\nabla P_\omega}{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (2.27)$$

Υπολογίζοντας την απόκλιση (div) αυτής της εξίσωσης, αν

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P_\phi}{\rho} \right) = 0 \quad (2.28)$$

τότε προκύπτει:

$$\frac{\nabla^2 P_\omega}{\rho} = -\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) \quad (2.29)$$

Η εξίσωση (2.29) αποτελεί μια εξίσωση *Poisson*, η οποία μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο *Particle Mesh (PM)*. Έχοντας υπολογίσει τις τιμές των  $\vec{u}$  και  $\vec{\omega}$  πάνω στο πλέγμα του *Particle Mesh* στη συνέχεια υπολογίζεται και η τιμή της  $P_\omega/\rho$ . Η διαδικασία και ο κώδικας που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό του λόγου πίεσης προς πυκνότητα των στοιχείων στροβιλότητας αποτελεί σημαντικό κομμάτι της παρούσας διπλωματικής. Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό αυτό

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

---

θα αναλυθεί με περισσότερες λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο. Μέχρι στιγμής ο λόγος αυτός προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$\frac{P_\omega}{\rho} = \frac{-1}{4\pi} \int_D \frac{((\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot \vec{r})}{r^3} dx \quad (2.30)$$

Από την εξίσωση (2.22) μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε την τιμή της πίεσης  $P^e$  σε κάθε τετράπλευρο στοιχείο της γεωμετρίας του σώματος. Ο υπολογισμός του συντελεστή πίεσης στο στοιχείο  $e$  γίνεται με την αδιαστατοποίηση της πίεσης  $P^e$  ως προς μία κατάλληλη πίεση αναφοράς  $P_{ref}$ . Προκειμένου να είναι δυνατή η σύγκριση του συντελεστή πίεσης  $C_p^e$  των αριθμητικών προλέξεων με τα πειραματικά δεδομένα θα πρέπει να είναι γνωστή η  $P_{ref}$  που χρησιμοποιήθηκε για την αδιαστατοποίηση των πειραματικών αποτελεσμάτων. Ο συντελεστής πίεσης υπολογίζεται από την σχέση:

$$C_p^e = \frac{P^e - P_\infty}{P_{ref}} \quad (2.31)$$

Ο υπολογισμός της κάθετης δύναμης που αναπτύσσεται στο στοιχείο  $e$  γίνεται αμέσως μετά τον υπολογισμό της πίεσης  $P^e$ :

$$\vec{F}_n(\vec{x}; t) = (P^e(\vec{x}; t) \cdot A^e) \cdot \vec{v}^e \quad (2.32)$$

Η δύναμη  $\vec{F}_n^e(\vec{x}; t)$  οφείλεται για την εμφάνιση ροπής  $\vec{Q}^e(\vec{x}; t)$  ως προς την αρχή των αξόνων:

$$\vec{Q}^e(\vec{x}; t) = \vec{x} \times \vec{F}_n^e(\vec{x}; t) \quad (2.33)$$

Επομένως η συνολική στιγμιαία δύναμη  $\vec{F}^{NB}(t)$  και ροπή  $\vec{Q}^{NB}(t)$  που αναπτύσσεται στο σώμα (NB) στο απόλυτο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\vec{F}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{F}_n^e(\vec{x}; t) \quad (2.34)$$

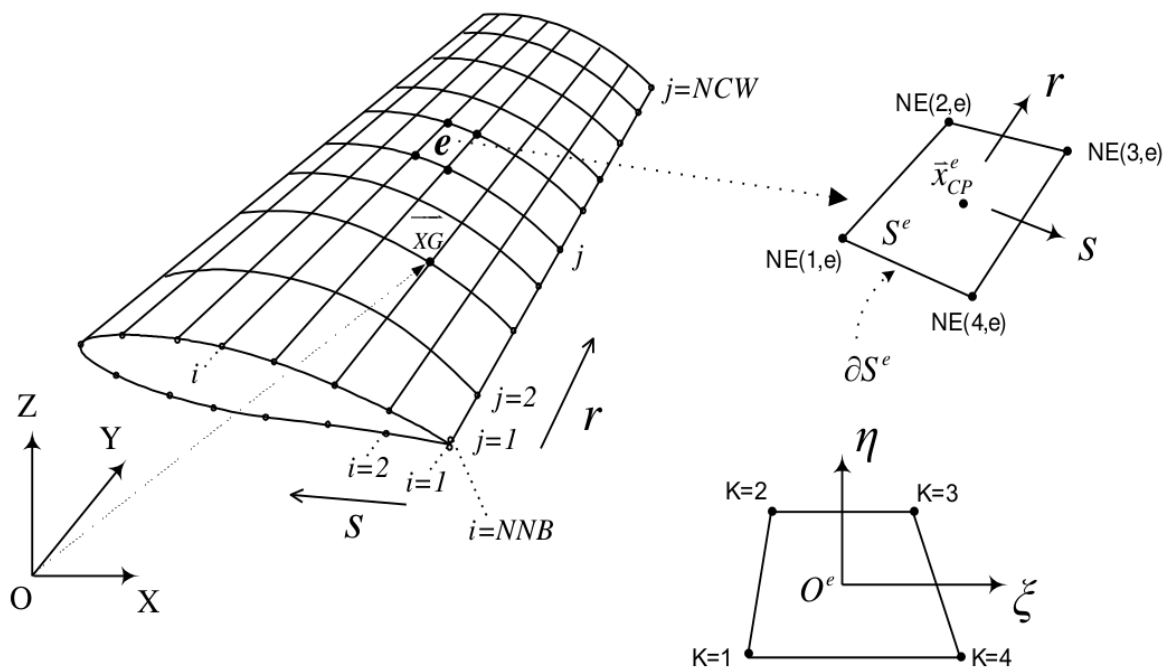
$$\vec{Q}^{NB}(t) = \sum_{e=1, NTEB(NB)} \vec{Q}_n^e(\vec{x}; t) \quad (2.35)$$

## 2.7 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Η γεωμετρία ενός σώματος αποτελεί δεδομένο του εξεταζόμενου προβλήματος. Προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων  $(\bar{XG})$  στο γενικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ένα τέτοιο επιφανειακό πλέγμα μπορεί να περιγραφεί από μία διπαραμετρική επιφάνεια  $S(s_i, t_i)$  :

$$S(s_i, t_i) \quad , i=1,NNB, j=1,NCW$$

όπου NNB, NCW ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος κατά την  $s$  και  $t$  διάστασή του αντίστοιχα. Οι γραμμές  $s_i$  είναι συνήθως προσανατολισμένες προς την κύρια κατεύθυνση της ροής, ιδιότητα που διευκολύνει τις αριθμητικές διαδικασίες όπως η αποβολή της στροβιλότητας. Ξεκινάει από την ακμή εκφυγής της κάτω πλευράς υπερπίεσης (pressure side), περνάει από το χείλος προσβολής και καταλήγει στην ακμή εκφυγής από την πάνω πλευρά υποπίεσης (suction side). Η παράμετρος μήκους



Σχήμα 2.3: Η διακριτοποίηση της γεωμετρίας [2]  
 $r$  αντιστοιχεί σε ακτινικές θέσεις πάνω στο σώμα.

Ένα επιφανειακό πλέγμα ορίζεται από NNT κόμβους, που σχηματίζουν NTE τετράπλευρα επιφανειακά στοιχεία:

$$NNT = NNB \cdot NCW$$

$$NTE = (NNB - 1) \cdot NCW - 1$$

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

---

Η γενική αρίθμηση των κόμβων NOD και των στοιχείων NEL του πλέγματος προκύπτει από μία ακολουθία της μορφής:

$$\begin{aligned} NOD(i, j) &= (j-1) \cdot NNB + i, \quad i=1, NNB, \quad j=1, NCW \\ NEL(i, j) &= (j-1) \cdot (NNB-1) + i, \quad i=1, NNB-1, \quad j=1, NCW-1 \end{aligned}$$

Οι κόμβοι που ορίζουν το επιφανειακό πλέγμα του σώματος βρίσκονται πάνω στην πραγματική επιφάνεια του σώματος και στην γενική περίπτωση ένα στοιχείο ορίζεται από τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία. Η αναπαράσταση των σωμάτων με επίπεδα στοιχεία οδηγεί σε απλούστευση των αριθμητικών υπολογισμών και εξοικονόμηση χρόνου υπολογιστή. Δεν αποτελεί θεωρητική απαίτηση της μεθόδου αλλά διευκολύνει τους υπολογισμούς ταχυτήτων ιδίως στην περίπτωση που αυτές γράφονται στην αναλυτική τους μορφή και έτσι περιορίζονται σημαντικά οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο. Στις περιοχές όπου η πτέρυγα εμφανίζει έντονες κλίσεις δημιουργούνται κενά μεταξύ των στοιχείων και η προσέγγιση της γεωμετρίας μπορεί να μην είναι ακριβής. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με πύκνωση των στοιχείων στις περιοχές αυτές και κυρίως στην ακμή προσβολής και στην ακμή εκφυγής. Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτουν τραπεζοειδή στοιχεία.

Έτσι στο γενικό-αδρανειακό σύστημα ορίζεται δομημένο πλέγμα από σημεία  $\overline{XG}(k, n)$ ,  $k=1:3, n=1:NNT$ , όπου το  $k$  αντιστοιχεί σε καρτεσιανή συνιστώσα του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και το  $n$  σε αριθμό κόμβου του πλέγματος, σύμφωνα με την αρίθμηση που περιγράφεται παρακάτω. Η θέση ενός τετράπλευρου στοιχείου  $e$ ,  $e=1:NTE$  καθορίζεται από τις συντεταγμένες  $\overline{XG}$  των τεσσάρων κορυφών που αριθμούνται δεξιόστροφα. Οι κορυφές  $K=1:4$ , στο τοπικό σύστημα του στοιχείου αντιστοιχούν σε κόμβους του γενικού συστήματος που έχουν αρίθμηση  $NE(K, e)$ ,  $K=1:4, e=1:NTE$ . Ένας κόμβος  $K$  της τοπικής αρίθμησης του στοιχείου θα αντιστοιχεί σε ένα και μόνο κόμβο  $NE$  έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} K = 1 &\rightarrow NE(1, e) = (j-1) * (NNB - 1) + i \\ K = 2 &\rightarrow NE(2, e) = j * (NNB - 1) + i \\ K = 3 &\rightarrow NE(3, e) = j * (NNB - 1) + i + 1 \\ K = 4 &\rightarrow NE(4, e) = (j-1) * (NNB - 1) + i + 1 \end{aligned}$$

Με δεδομένη την γεωμετρία των κόμβων του πλέγματος γίνεται ο υπολογισμός του εμβαδού  $S^e$ , του μήκους της περιφέρειας  $\partial S^e$  του στοιχείου  $e$ , τα μήκη και τις κλίσεις των πλευρών, το πλάτος και τις διαγώνιους του στοιχείου καθώς και άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται στους υπολογισμούς. Για κάθε στοιχείο του επιφανειακού πλέγματος ορίζεται το “σημείο ελέγχου”  $\overline{x}_{CP}^e$  που αποτελεί το σημείο επαλήθευσης της συνθήκης μη εισχώρησης. Στα σημεία ελέγχου

μιας γεωμετρίας πραγματοποιείται ο υπολογισμός των ταχυτήτων και των πιέσεων που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας τα οποία θα χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των πηγών αλλά και των δυνάμεων και στην συνέχεια των συντελεστών άνωσης, πίεσης και οπισθέλκουσας. Για την ικανοποίηση της συνθήκης μη εισχώρησης πάνω στα “σημεία ελέγχου” απαιτούμε τον μηδενισμό της εφαπτομενικής αυτεπαγόμενης ταχύτητας της διανομής πηγών του στοιχείου.

Η παραγωγή του ομόρρου ενός ανωστικού σώματος γίνεται σταδιακά σύμφωνα με ένα χρονικό σχήμα παραγωγής στροβιλότητας. Το φύλλο στροβιλότητας παράγεται σε κάθε χρονικό βήμα και χωρίζεται στον κοντινό και τον μακρινό ομόρρου. Ο κοντινός ομόρρους αποτελεί το φύλλο στροβιλότητας που εκφεύγει άμεσα από την ακμή εκφυγής και αναπαρίσταται μέσω της δυναμικής θεώρησης σύμφωνα με την οποία η ταχύτητα προκύπτει από το ημίαθροισμα των ταχυτήτων της πάνω και της κάτω πλευράς. Ο μακρινός ομόρρους περιλαμβάνει τα υπόλοιπα στοιχεία του φύλλου στροβιλότητας που παρήχθησαν σε προηγούμενα χρονικά βήματα. Ο μακρινός ομόρρους αποτελεί το υπόλοιπο τμήμα του φύλλου στροβιλότητας και αναπαρίσταται σύμφωνα με τη στρόβιλη θεώρηση με στοιχεία στροβιλότητας.

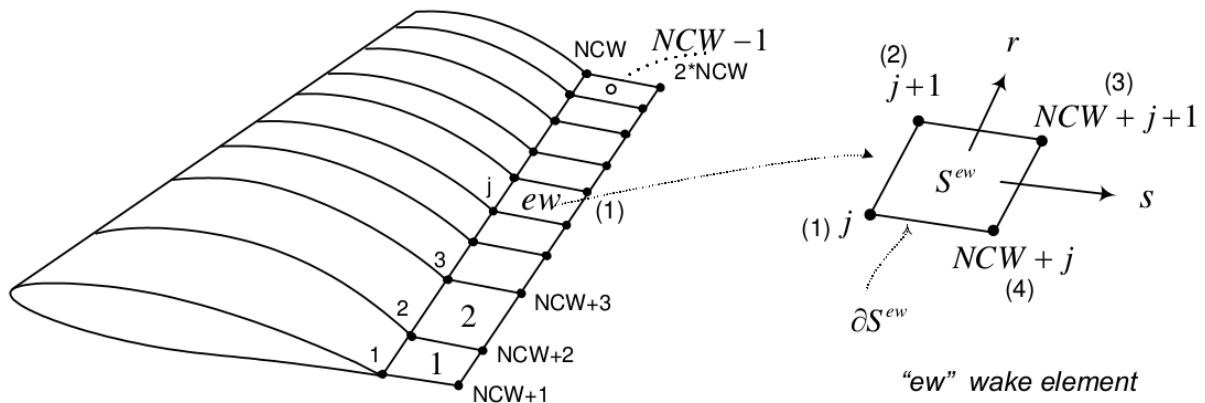
Στην περίπτωση μας η θέση αποβολή στροβιλότητας γίνεται από την ακμή εκφυγής. Η διακριτοποίηση του φύλλου στροβιλότητας (σύμφωνα με τη δυναμική θεώρηση) αποτελεί συνέχεια της ακτινικής διακριτοποίησης της επιφάνειας του σώματος και αναπαρίσταται από τετράπλευρα στοιχεία που αποτελούν προέκταση των γραμμών  $y=ct$  του σώματος. Οι γραμμές αυτές πρέπει να είναι κοινές για το σώμα και τον ομόρρου καθώς αυτό επιβάλλεται από το θεώρημα του Kelvin που εφαρμόζεται σε αυτές τις θέσεις. Η γεωμετρία του ομόρρου αποτελείται από κόμβους του σώματος που βρίσκονται πάνω στην ακμή εκφυγής καθώς και από κόμβους που προκύπτουν από τη μεταφορά αυτών. Αυτό έχει σαν συνέπεια τη δημιουργία  $NCW-1$  επιφανειακών στοιχείων που ορίζονται από  $2*NCW$  σημεία.

Για τον καθορισμό της θέσης του τετράπλευρου στοιχείου “ $ew$ ” του κοντινού ομόρρου χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες  $XWAKE(k,nw)$ ,  $k=1:3$ ,  $nw=1:NCW$  των τεσσάρων κορυφών του  $nw$ , που αριθμούνται δεξιόστροφα. Στα σημεία αυτά πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Επιπλέον, για τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου δεν απαιτείται ο προσδιορισμός του “σημείου ελέγχου” καθώς δεν επαληθεύεται η συνθήκη μη εισχώρησης σε αυτά.

Για κάθε στοιχείο  $ew$  του κοντινού ομόρρου ακολουθεί η ίδια διαδικασία διακριτοποίησης με τα επιφανειακά στοιχεία. Για τα στοιχεία αυτά κατασκευάζεται ο πίνακας  $NWAKE$  αντιστοίχισης της τοπικής με την γενική αρίθμηση ενός κόμβου.

$$\begin{aligned}
 K = 1 &\rightarrow \text{NEWAKE}(1,ew) = ew \\
 K = 2 &\rightarrow \text{NEWAKE}(2,ew) = ew + 1 \\
 K = 3 &\rightarrow \text{NEWAKE}(3,ew) = \text{NEWAKE}(2,ew) + \text{NCW} \\
 K = 4 &\rightarrow \text{NEWAKE}(4,ew) = \text{NEWAKE}(1,ew) + \text{NCW}
 \end{aligned}$$

Στο σχήμα 2.2 φαίνεται η διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου. Είναι αναγκαία η δημιουργία και ενός πίνακα  $ICIRC(e=1:NTE,)$  ο οποίος θα αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο “  $e$  ” του πλέγματος την αντίστοιχη τιμή  $j$  της ακτινικής λωρίδας στην οποία βρίσκεται. Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η αποβολή της στροβιλότητας γίνεται μόνο στην ακμή εκφυγής και όχι από παράπλευρες ακμές, τότε σε κάθε ακτινική λωρίδα αντιστοιχεί ένα στοιχείο του κοντινού ομόρρου. Συνεπώς, ο πίνακας γράφεται:



Σχήμα 2.4: Η διακριτοποίηση του κοντινού ομόρρου [2]

## 2.8 Στοιχεία Στροβιλότητας

Στην συγκεκριμένη προσομοίωση η επίλυση των *Lagrangian* εξισώσεων προσεγγίζεται με την χρήση στοιχείων στροβιλότητας (*particles*) στο επί εξεταζόμενο χωρίο. Τα στοιχεία μάζας  $M_p$  καταλαμβάνουν όγκο  $V_p(t)$  και χαρακτηρίζονται από την θέση  $\vec{Z}_p(t)$ . Ο συγκεκριμένος επιλυτής επεξεργάζεται τα στοιχεία στροβιλότητας για να προσομοιώσει τη ροή.



Διατύπωση των Lagrangian εξισώσεων

Η εξέλιξη της τροχιάς ένα στοιχείο στροβιλότητας που τη χρονική στιγμή  $t$  βρίσκεται στη θέση  $\vec{x}$  και κινείται με ταχύτητα  $\vec{u}$  προκύπτει από την εξίσωση:

$$\frac{D\vec{x}}{Dt} = \vec{u} \quad (2.36)$$

Ορίζοντας ως  $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$  την μεταβολή του όγκου (*dilatation*) από το την εξίσωση διατήρησης της μάζας έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho (\nabla \cdot \vec{u}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \theta \quad (2.37)$$

και

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\theta}{\rho} \quad (2.38)$$

Όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα και  $\vec{u}$  η ταχύτητα.

Απαιτώντας την διατήρηση της μάζας των στοιχείων στροβιλότητας και γνωρίζοντας ότι:

$$M = \rho V \quad (2.39)$$

έχουμε:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \quad (2.40)$$

από την εξίσωση (2.38),(2.39) έχουμε:

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{D}{Dt} \left( \frac{V}{M} \right) \Leftrightarrow \frac{DV}{Dt} = \theta V \quad (2.41)$$

Η υλική παράγωγος της στροβιλότητας  $\vec{\omega}$  ορίζεται ως:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega} \theta + (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla (-P) \quad (2.42)$$

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

Εισάγοντας τον όρο  $\vec{\Omega} = \vec{\omega}V$ , όπου  $\vec{\Omega}$  η στροβιλότητα του στοιχείου (*particle*) όγκου  $V$

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= \frac{D(\vec{\omega}V)}{Dt} = \vec{\omega} \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \Leftrightarrow \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \frac{D(\vec{\omega}V)}{Dt} = \vec{\omega} \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \Leftrightarrow \\ \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} &= V [(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla(-P)] \quad (2.43) \end{aligned}$$

Εισάγοντας ως  $\Theta = \theta V$  την μεταβολή του όγκου των στοιχείων στροβιλότητας (*particles*) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{D(\theta V)}{Dt} = \theta \frac{DV}{Dt} + V \frac{D\theta}{Dt} \Leftrightarrow \\ \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{D(\theta V)}{Dt} = V [(2\|\nabla \vec{u}\|) + \nabla \cdot \frac{\nabla(-P)}{\rho}] \quad (2.44) \end{aligned}$$

Η επίλυση των εξισώσεων στο χρόνο γίνεται με ένα σχήμα *Adams-Brasford* ακρίβειας  $O(\Delta t^2)$ . Η επιλογή του συγκεκριμένου σχήματος ολοκλήρωσης είναι σε συνέπεια με το πρόβλημα μεταφοράς της ελεύθερης στροβιλότητας που έχει υπερβολικό χαρακτήρα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το παραπάνω σχήμα για μια την μεταβολή του όγκου θα έχουμε ότι:

Έστω,  $n$  το χρονικό βήμα στο οποίο βρισκόμαστε. Σε αυτό το σημείο έχουμε υπολογίσει τις τιμές των μεγεθών που θα χρησιμοποιήσουμε στις παραπάνω εξισώσεις. Επομένως θα έχουμε:

$$f_{(\Theta)}^n = V [(2\|\nabla \vec{u}\|) + \nabla \cdot \frac{\nabla(-P)}{\rho}] \quad (2.45)$$

όπου είναι το δεξιά μέλος της εξίσωσης (2.8) για την χρονική στιγμή  $n$ . Η τιμή του  $\Theta$  την χρονική στιγμή  $n+1$  θα είναι:

$$\Theta^{n+1} = \Theta^n + \Delta T \left( \frac{3}{2} f_{(\Theta)}^n - \frac{1}{2} f_{(\Theta)}^{n-1} \right) \quad (2.46)$$

Είναι φανερό πως για να χρησιμοποιηθεί το συγκεκριμένο σχήμα απαιτείται η αποθήκευση της τιμής  $f_{(\Theta)}^n$  σε μια μεταβλητή έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί στο επόμενο βήμα ως η τιμή  $f_{(\Theta)}^{n-1}$ .

Το παραπάνω σύστημα συμπληρώνεται με το Θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz

Για την ανάλυση της ροής γύρω από πτέρυγα με πάχος ξεκινάμε από την “ιδεατή” θεώρηση. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε το ρευστό ασυμπίεστο και μη-συνεκτικό, ενώ την ροή αστρόβιλη σχεδόν παντού. (το “σχεδόν παντού” σημαίνει παντού εκτός από μία η δύο επιφάνειες ασυνέχειας)

Σύμφωνα με το θεώρημα διαχωρισμού της διανυσματικής ανάλυσης ( Helmholtz ), κάθε πεδίο ταχύτητας  $\vec{u}(\vec{x},t)$   $\vec{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0$ , αναλύεται σε άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου μηδενικής απόκλισης:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \nabla \Phi(\vec{x},t) + \vec{u}_\omega(\vec{x},t) + \vec{U}_\infty \quad (2.47)$$

όπου  $\vec{U}_\infty$  είναι η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο,  $\Phi(\vec{x},t)$  είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου τμήματος του πεδίου ροής,  $\vec{u}_\omega(\vec{x},t)$  το στροβιλό πεδίου που δημιουργεί (η επάγει) η κατανομή στροβιλότητας  $\vec{\omega}(\vec{x},t)$

$$\begin{aligned} \nabla \times \Phi(\vec{x},t) &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{u}_\omega(\vec{x},t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x},t) = \nabla^2 \Phi(\vec{x},t) = \vec{\Delta}(\vec{x},t) \quad (2.11) \quad \text{και} \quad \nabla \times \vec{u}(\vec{x},t) = \nabla \times \Phi(\vec{x},t) = \vec{\omega}(\vec{x},t) \quad (2.49)$$

όπου  $\vec{\Delta}(\vec{x},t)$  είναι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου  $\Theta$  ( *Dilatation* ).

Θεωρώντας την ροή ασυμπίεστη γύρω από την πτέρυγα  $S$ , δηλαδή  $\vec{\Delta}(\vec{x},t) \approx 0$  τότε η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση *Laplace*:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x},t) = 0 \quad (2.50)$$

με συνοριακή συνθήκη *Neumann*:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\vec{x},t) = 0 = \vec{\nu} \cdot \nabla \Phi(\vec{x},t) = g(\vec{x},t) \quad , \quad \vec{x} \in S \quad (2.51)$$

που εκφράζει την συνθήκη μη εισχώρησης, ενώ στο άπειρο

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \Phi(\vec{x},t) &= 0 \\ \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \nabla \Phi(\vec{x},t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2. Θεωρητική επισκόπηση του προβλήματος

---

Οι παραπάνω εξισώσεις (2.50-2.52) ορίζουν πλήρως ένα πρόβλημα αστρόβιλου πεδίου ροής με πεδιακή εξίσωση την (2.50). Στην επιφάνεια  $S$  ικανοποιείται η κινηματική συνθήκη μη εισχώρησης (2.51) και στο άπειρο η απαίτηση της αδιατάρακτης ροής και μηδενισμού του  $\nabla\Phi$  (2.52). Η τελευταία υποδηλώνει την επιλογή του  $\Phi$  ως το δυναμικό διαταραχής της ροής,

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \nabla\Phi(\vec{x},t) + \vec{u}_\omega(\vec{x},t) + \vec{U}_\infty, \vec{x} \in D^+ \quad (2.53)$$

που προκαλεί η παρουσία της πτέρυγας.

$$\vec{u}_\omega(\vec{x},t) = \nabla \times \vec{\Psi} \quad (2.54)$$

Επομένως το αστρόβιλο πεδίο ορίζεται μέσω του βαθμωτού δυναμικού  $\Phi$  ενώ το στροβιλό πεδίο μέσω του διανυσματικού δυναμικού  $\vec{\Psi}$  του πεδίου ταχύτητας.

Υπολογίζοντας την απόκλιση (*divergence*) και τον στροβιλισμό (*curl*) της εξίσωσης (2.53) έχουμε:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla^2 \Phi \quad (2.55)$$

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Psi} = -\nabla^2 \vec{\Psi} \quad (2.56)$$

Επομένως το πεδίο ταχυτήτων μπορεί να οριστεί από το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$  και το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{\Psi}$  λύνοντας τις παρακάτω εξισώσεις Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = \theta \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = -\vec{\omega} \quad (2.58)$$

Η επίλυση των εξισώσεων για τον υπολογισμό των  $\Phi$  και  $\vec{\Psi}$  πραγματοποιείται με την μέθοδο *Particle Mesh (PM)*. Η μέθοδος αυτή επιλύει τις παραπάνω εξισώσεις πάνω σε ένα καρτεσιανό επίπεδο χρησιμοποιώντας *Fast Poisson Solvers*. Με την χρήση αυτής της μεθόδου εξοικονομούμε σημαντικό υπολογιστικό κόστος, ιδίως στις προσομοιώσεις τριών διαστάσεων. Σε προβλήματα τριών διαστάσεων ο αριθμός των εξισώσεων αυξάνεται στις τέσσερις, σε σχέση με τα προβλήματα των δύο διαστάσεων που είναι τρεις, καθώς το δυναμικό  $\vec{\Psi}$  είναι ένα διανυσματικό μέγεθος. Η μέθοδος αυτή θα αναλυθεί λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο.

### 3. Μέθοδος Particle Mesh

#### 3.1 Διατύπωση της μεθόδου (Particle Mesh Method)

Στην μέθοδο αυτή η βασική ιδέα είναι να υπολογιστούν οι λύσεις των Poisson εξισώσεων πάνω σε ένα ομοιόμορφο δομημένο πλέγμα με την χρήση *Fast Fourier Transforms (FFT)*. Την δομή και την πύκνωση του πλέγματος την επιλέγουμε ανάλογα με την υπό εξέταση γεωμετρία του σώματος.

Ο αλγόριθμος James-Lackner για προβλήματα Poisson στον χώρο

Για την επίλυση μιας εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \omega = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathcal{R}^n \quad (3.1)$$

Αρχικά ορίζουμε ένα υποσύνολο  $D$  του  $\mathcal{R}^n$  το οποίο περιλαμβάνει την συνάρτηση  $f(\vec{x})$ . Επομένως το παραπάνω πρόβλημα αποκτά την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega &= f(\vec{x}), & \vec{x} &\in D \\ \omega &= \omega_B & \vec{x} &\in \partial D \end{aligned} \quad (3.2)$$

Η μεταβλητή  $\omega_B$ , η οποία είναι πάνω στο σύνορο μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της συνάρτησης *Green*,

$$\omega_B(\vec{x}_0) = \int_{\text{supp}\{f\}} f(\vec{x}) G(\vec{x}_0 - \vec{x}) dD(\vec{x}) \quad (3.3)$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος απαιτεί υψηλό κόστος. Για τον λόγο αυτό οι James και Lackner διαχώρισαν το πρόβλημα στο χώρο και στο σύνορο:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \quad (3.4)$$

Επομένως το πρόβλημα χωρίστηκε σε δύο μέρη:

α) Το ομογενές πρόβλημα

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega_0 &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in D \\ \omega_0 &= 0 & \vec{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (3.5)$$

β) Το πρόβλημα της διατύπωσης των πηγών

$$\begin{aligned} \nabla^2 \omega_1 &= f(\vec{x}), & \vec{x} \in D \\ \omega_1 &= 0 & \vec{x} \in \partial D \end{aligned} \quad (3.6)$$

Από το οποίο προκύπτει η έκφραση της διατύπωσης (πηγών):

$$\omega_1(\vec{x}_0) = \int_{\partial D} \sigma(\vec{x}) G(\vec{x}_0 - \vec{x}) dS(\vec{x}) \quad (3.7)$$

όπου:  $\sigma = \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial n} \right]$  είναι το πήδημα της κάθετης παραγώγου στο σύνορο  $\partial D$

Απαιτώντας το  $\omega$  να είναι συνεχής στο  $\partial D$  έχουμε:

$$\left[ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] = \left[ \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \right] + \left[ \frac{\partial \omega_1}{\partial n} \right] = 0, \text{ στο } \partial D \quad (3.8)$$

Επομένως, 
$$\sigma = - \left[ \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \right] \quad (3.9)$$

Με τον τρόπο αυτό, το χωρικό ολοκλήρωμα συνέλιξης αντικαταστήθηκε από ένα επιφανειακό.

Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα το σημείο υπολογισμού  $\vec{x}$  :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_1, & \vec{x} \in D \\ \omega &= \omega_1 & \vec{x} \in \mathcal{R}^n - D \end{aligned} \quad (3.10)$$

Συνεπώς, μέσα στο χώρο  $D$  επιλύονται δύο Poisson προβλήματα. Με το πρώτο υπολογίζουμε την μεταβλητή  $\omega_0$  από την οποία προκύπτει η  $\sigma$  και στην συνέχεια η  $\omega_B$ . Από το δεύτερο πρόβλημα υπολογίζεται η τιμή  $\omega_B$  πάνω στο σύνορο του αρχικού προβλήματος. (2.1)

Για να λυθούν οι εξισώσεις Poisson πρέπει πρώτα να οριστούν οι τιμές των μεταβλητών πάνω στο πλέγμα του Particle Mesh. Αρχικά ορίζουμε το πλέγμα πάνω στο οποίο θα υπολογίζεται το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$  και το διανυσματικό δυναμικό

$\vec{\Psi}$ . Σημαντικό ρόλο αποκτά η τοποθέτηση των *particles* στον χώρο καθώς καθορίζουν την δημιουργία του πλέγματος πάνω στο οποίο θα επιλύονται οι εξισώσεις του προβλήματος. Μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η ευελιξία στην επιλογή της τοποθέτησης του πλέγματος. Για την δημιουργία του πλέγματος τοποθετούμε δύο-τέσσερα *dummy Particles* στο χώρο τα οποία πρέπει να ορίζουν ένα “κουτί” μέσα στο οποίο θα δημιουργείται το πλέγμα της προσομοίωσης.

Ο χρήστης, πέρα από την επιλογή του χώρου που θα δημιουργηθεί το πλέγμα, έχει την δυνατότητα να καθορίσει και την πυκνωση του επιλέγοντας την απόσταση των κόμβων του πλέγματος πάνω στο οποίο θα πραγματοποιούνται οι υπολογισμοί. Για να ορίσουμε τις τιμές των μεταβλητών πάνω στους κόμβους του Particle Mesh κάνουμε προβολή της πληροφορίας των στοιχείων στροβιλότητας (*Particles*) πάνω στους κοντινούς κόμβους του κάθε στοιχείου. Στην συνέχεια εφαρμόζεται η παραπάνω μεθοδολογία επίλυσης των Poisson εξισώσεων και αφού έχουν ολοκληρωθεί όλες οι εντολές που θέλουμε, η πληροφορία μεταφέρεται από το πλέγμα πίσω στα στοιχεία στροβιλότητας το οποίο γίνεται με παρεμβολή από τους κόμβους στα πιο κοντινά *Particles*.

### 3.2 Προβολή και Παρεμβολή

Ορίζουμε ως  $Q_p = q_p V_p$  οποιοδήποτε μέγεθος το οποίο μεταφέρει ένα στοιχείο. Το αντίστοιχο μέγεθος πάνω στον κόμβο του Particle Mesh θα υπολογίζεται από την παρακάτω διαδικασία προβολής:

$$q_{i,j,k} \equiv Proj_{PM}(q_p; V_p) = \frac{\sum_p q_p V_p W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p)}{\sum_p V_p W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p)} \quad (3.11)$$

όπου  $i, j, k$  είναι οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος του Particle Mesh.

$$W(\vec{r}) = W_1(r_x/h)W_1(r_y/h)W_1(r_z/h) \quad (3.12)$$

$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z), h$  συμβολίζει την απόσταση μεταξύ δύο κόμβων και  $W_1$  η μονοδιάστατη συνάρτηση παρεμβολής.

Αντίστροφα τώρα και αφού έχουν πραγματοποιηθεί οι υπολογισμοί πάνω στο πλέγμα, τα μεγέθη που έχουν υπολογιστεί στους κόμβους θα επιστραφούν πίσω στα στοιχεία χρησιμοποιώντας την παρακάτω συνάρτηση παρεμβολής:

$$q_p \equiv \text{Intcrp}(q_{(i,j)}) = \sum_{i,j,k} q_{(i,j,k)} W(\vec{x}_{i,j,k} - \vec{Z}_p) \quad (3.13)$$

Στην περίπτωση των μεθόδων στοιχείων στροβιλότητας είναι γνωστό ότι η χωρική κατανομή των στοιχείων μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια της μεθόδου. Για αυτό το λόγο ανά τακτά χρονικά βήματα χρειάζεται η ανακατασκευή των ροϊκών δεδομένων γνωστή ως re-meshing. Το re-meshing συνιστάται στην επαναδιανομή των στοιχείων στροβιλότητας σε δομημένες θέσεις ώστε να διατηρηθεί η ομοιόμορφη κατανομή των στοιχείων.

### 3.3 Αλγόριθμος επίλυσης Μεθόδου Particle Mesh

Τα βήματα με τα οποία προσεγγίζεται η λύση με την μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

Για δεδομένα στοιχεία στροβιλότητας:  $[\vec{Z}_p^n, m_p^n, V_p^n, \vec{\Omega}_p^n, \vec{\Theta}_p^n]$  τη χρονική στιγμή  $t = n\Delta T$ :

**Βήμα 1:** Προβολή των  $[m_p^n, \vec{\Omega}_p^n, \vec{\Theta}_p^n]$  στο πλέγμα του Particle Mesh:  $\rho_{(i,j)}^n, \theta_{(i,j)}^n, \vec{\omega}_{i,j}^n$ .

**Βήμα 2:** Επίλυση των  $\nabla^2 \Phi = \theta, \nabla^2 \vec{\Psi} = -\vec{\omega}$  και υπολογισμός των  $\Phi_{(i,j)}^n, \Psi_{(i,j)}^n, \vec{u}_{i,j}^n, \vec{\omega}_{i,j}^n$  με χρήση πεπερασμένων διαφορών

**Βήμα 3:** Υπολογισμός στο πλέγμα του Particle Mesh των όρων των εξισώσεων εξέλιξης (δεύτερο μέλος των Lagrangian εξισώσεων)

**Βήμα 4:** Παρεμβολή των ποσοτήτων στο πλέγμα  $q_{(i,j)}$  στις θέσεις των στοιχείων στροβιλότητας:  $q_p^n = \sum_{i,j} q_{(i,j)}^n W(\vec{x}_{i,j} - \vec{Z}_p)$

**Βήμα 5:** Ανανέωση των ποσοτήτων που μεταφέρουν τα στοιχεία στροβιλότητας

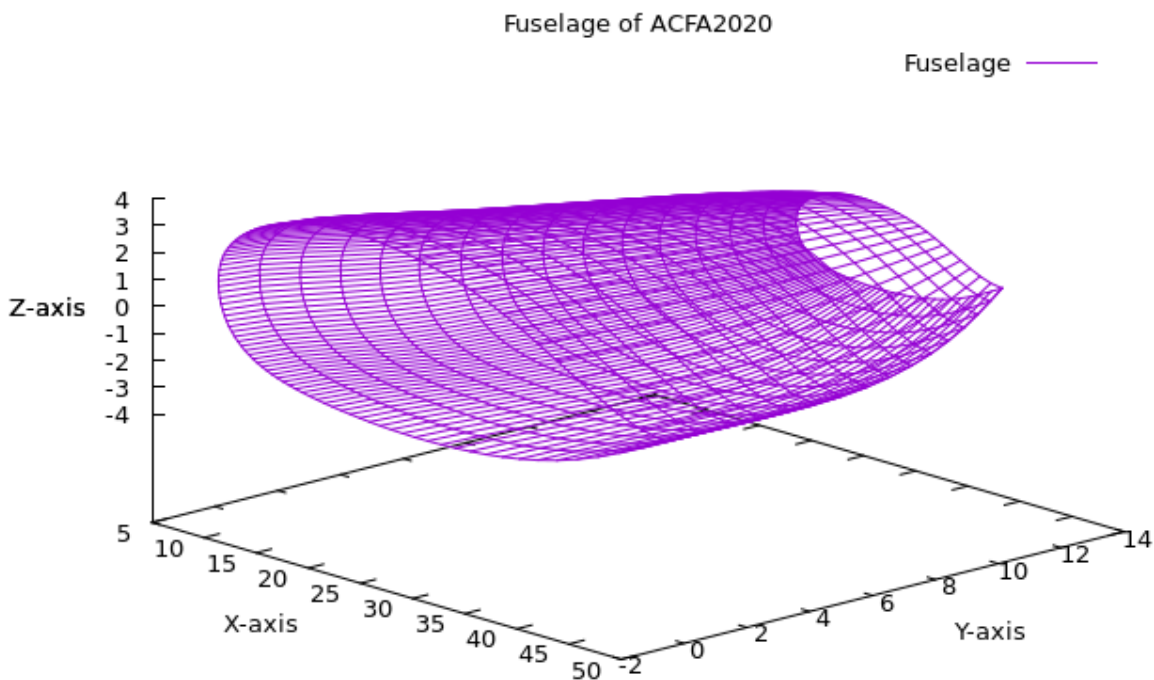
**Βήμα 6:** Re-meshing (εφόσον χρειάζεται)



### 3.4 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας (ACFA2020)

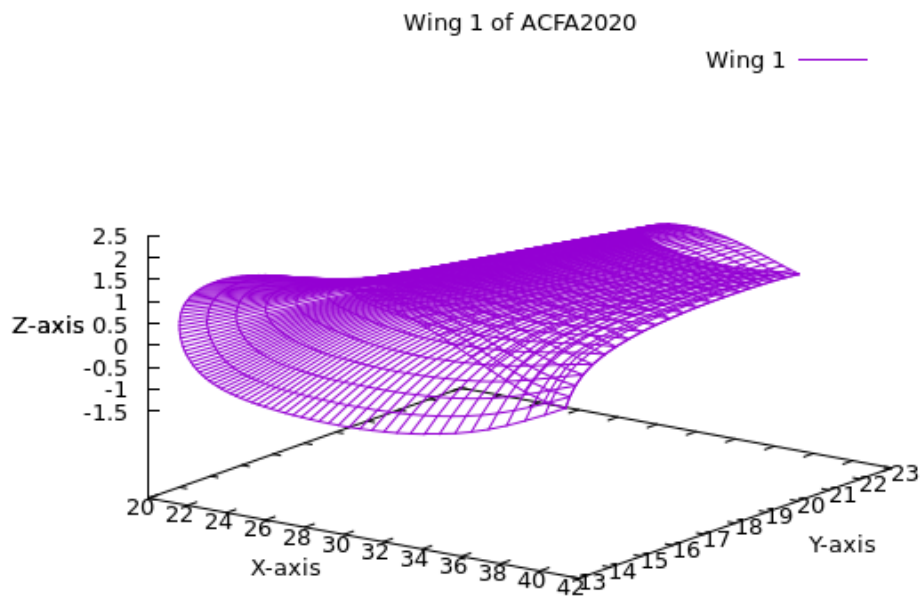
Έχοντας αναπτύξει και παρουσιάσει την μέθοδο Particle Mesh και τον τρόπο υπολογισμού και προσέγγισης του προβλήματος, επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή του σε προσομοιώσεις. Το σώμα που θα μελετήσουμε είναι το αεροσκάφος ACFA2020 που παρουσιάστηκε στην αρχή της παρούσας διπλωματικής. Λόγω της μεγάλης γεωμετρίας του σώματος, η γεωμετρία χωρίστηκε σε δώδεκα τμήματα. Στο κάθε τμήμα έχει εφαρμοστεί διαφορετική πυκνωση, ανάλογα τις διαστάσεις που το απαρτίζουν. Πιο συγκεκριμένα η διακριτοποίηση του κάθε τμήματος είναι:

- Άτρακτος (Fuselage): Η διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε είναι 101x16 και παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



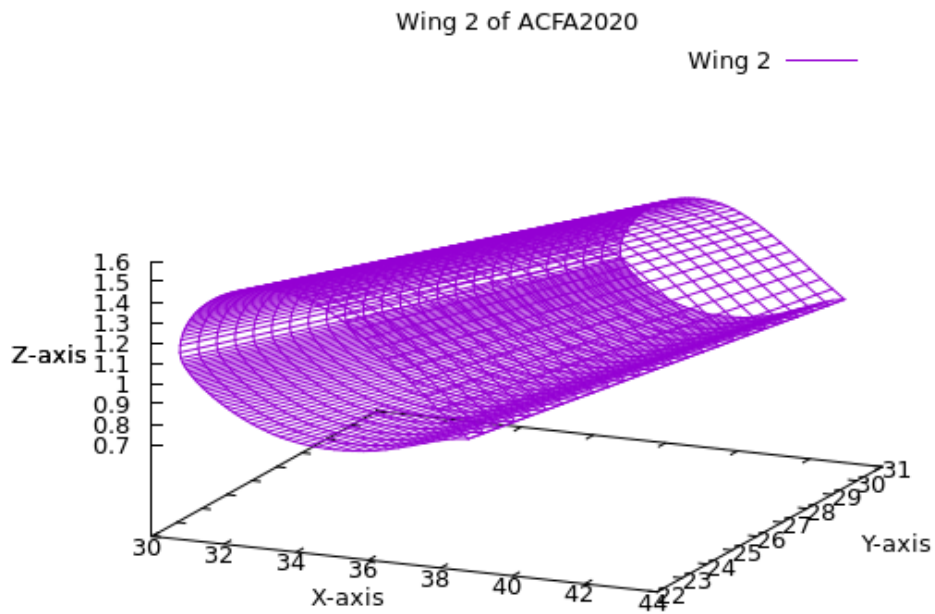
Σχήμα 3.1: Η διακριτοποίηση της άτρακτου του αεροσκάφους ACFA2020

- Πτέρυγα 1 (Wing 1): Στη γεωμετρία αυτή η διακριτοποίηση που εφαρμόστηκε είναι 101x21. Είναι εμφανές ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την άτρακτο η πυκνωση του κάθε πλέγματος όλο και αυξάνεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα φορτία είναι πιο μεγάλα και απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς.



Σχήμα 3.2: Η διακριτοποίηση πτέρυγας (1) του αεροσκάφους ACFA2020

- Πτέρυγα 2 (Wing 2): Στην πτέρυγα αυτή χρησιμοποιήθηκε διακριτοποίηση 101x25.



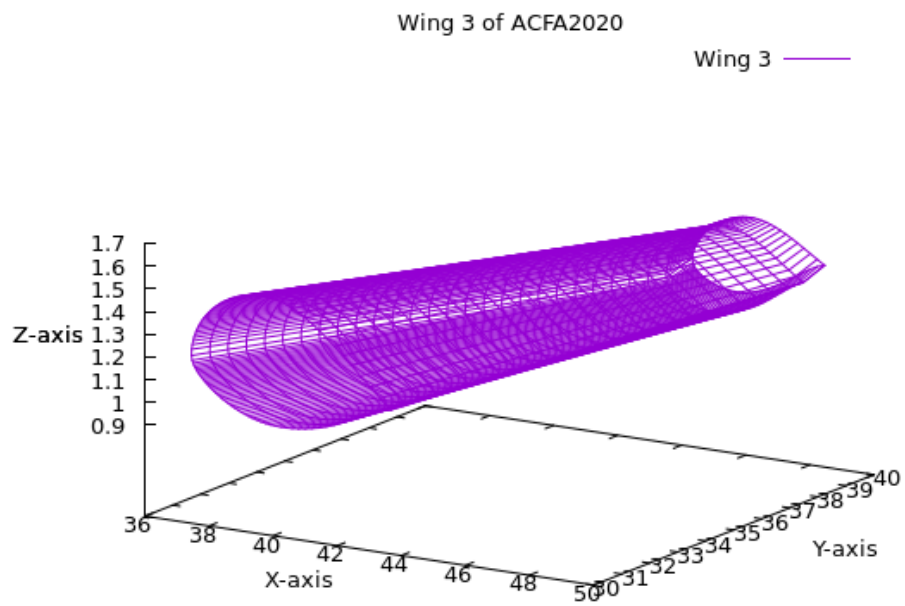
Σχήμα 3.3: Η διακριτοποίηση της πτέρυγας (2) του αεροσκάφους ACFA2020

Πάλι όπως και πριν, η πυκνωση του πλέγματος είναι διαφορετική σε σχέση με τις υπόλοιπες γεωμετρίες και πιο συγκεκριμένα πιο υψηλή.

- Πτέρυγα 3 (Wing 3): Το πλέγμα που εφαρμόστηκε σε αυτό το κομμάτι είναι 101x28.

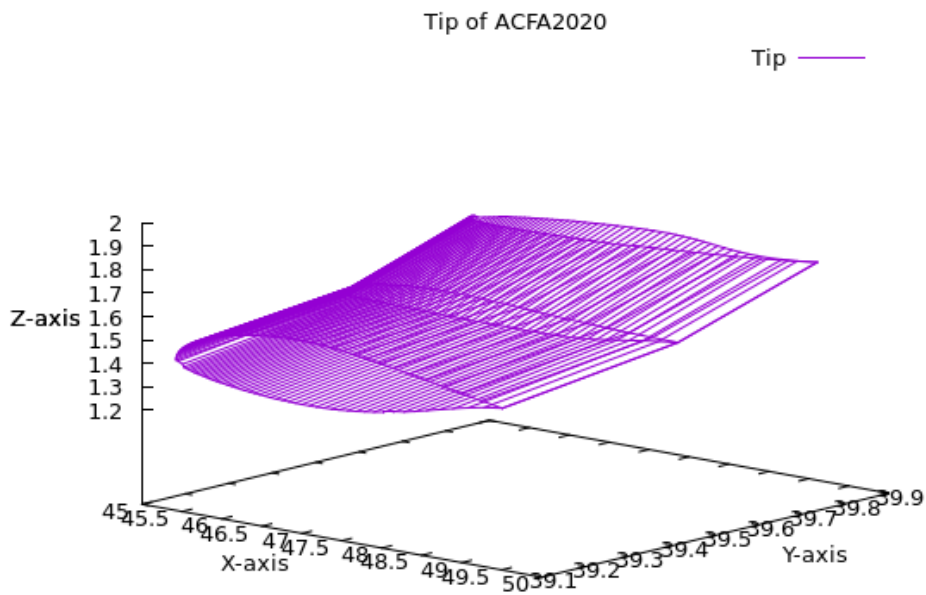
### 3. Μέθοδος Particle Mesh

---



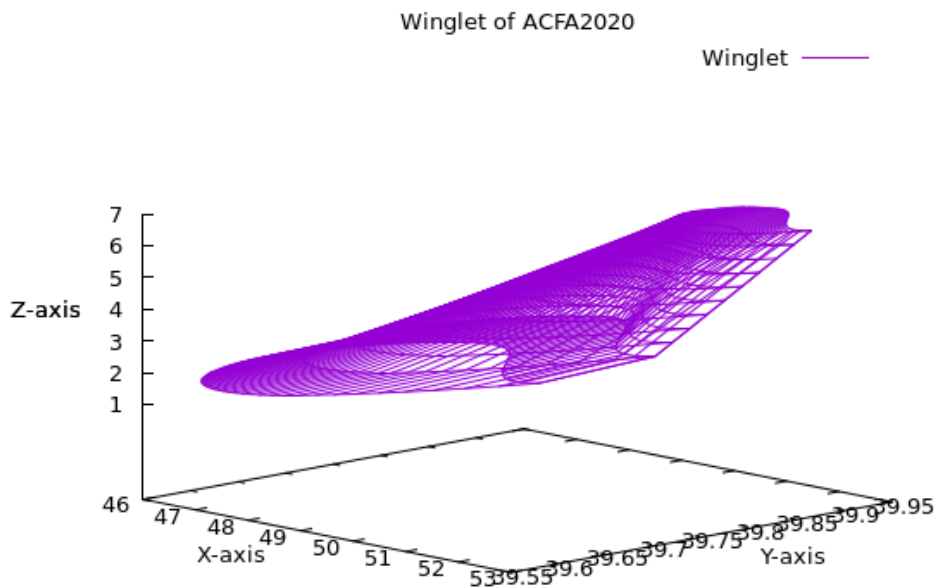
Σχήμα 3.4: Η διακριτοποίηση της πτέρυγας (3) του αεροσκάφους ACFA2020

- Tip: το πλέγμα στο συγκεκριμένο τμήμα είναι 101x3.



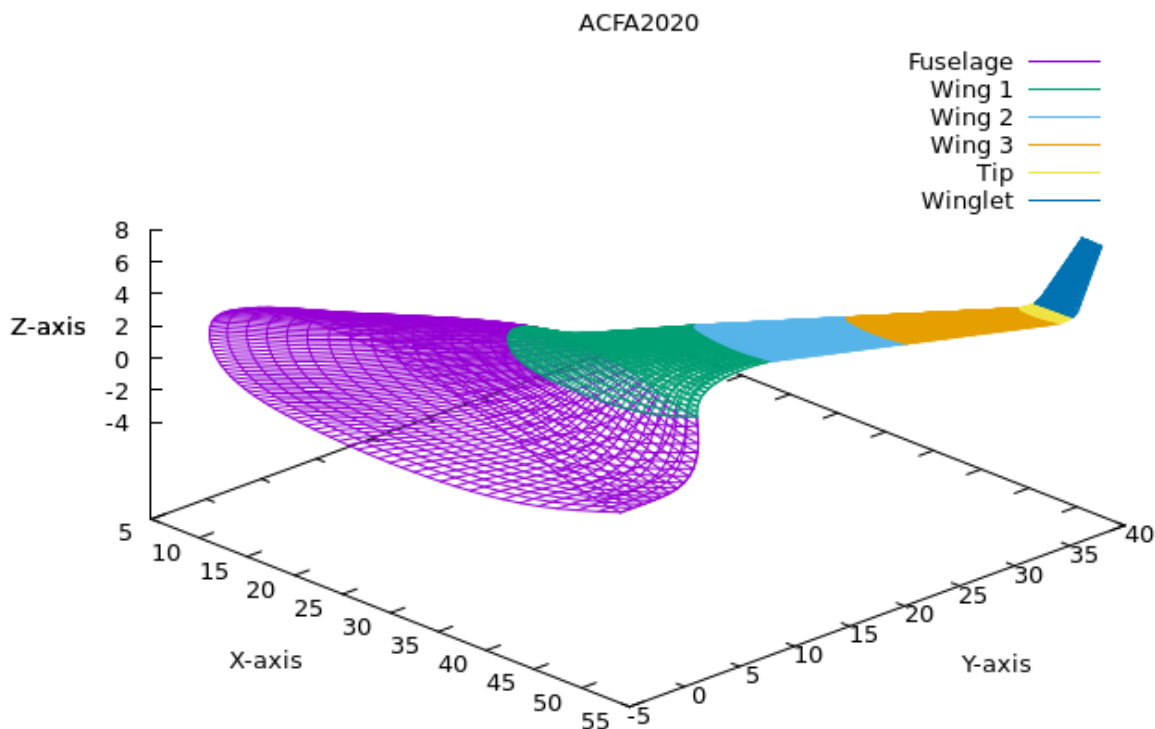
Σχήμα 3.5: Η διακριτοποίηση του tip του αεροσκάφους ACFA2020

- Winglet: Στο winglet το πλέγμα που εφαρμόστηκε είναι 101x11.



Σχήμα 3.6: Η διακριτοποίηση του winglet του αεροσκάφους ACFA2020

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η συνολική γεωμετρία του σώματος σε τομή.



Σχήμα 3.7: Η διακριτοποίηση της γεωμετρίας του ACFA2020 (σε τομή)

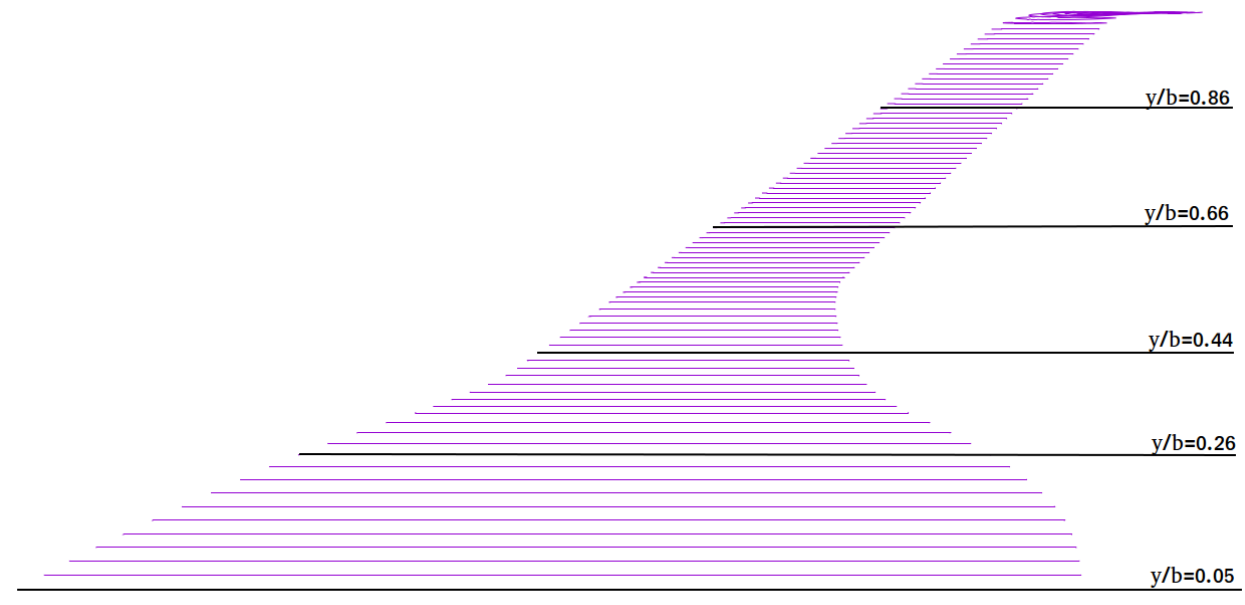
Έχοντας αναλύσει την διακριτοποίηση των επί μέρους τμημάτων που απαρτίζουν το την γεωμετρία του σώματος, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάλυση των αεροδυναμικών φορτίων.

#### **3.5 Αποτελέσματα ACFA2020**

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προσομοίωση με χρήση της μεθόδου Particle Mesh. Τα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν και τα αποτελέσματα αφορούν τριακόσια χρονικά βήμα με  $\Delta T=0.0008 \text{ sec}$  και ταχύτητα σώματος  $U=240 \text{ m/s}$ . Την συγκεκριμένη χρονική στιγμή έχουν συγκλίνει τα αεροδυναμικά φορτία που ασκούνται πάνω στην πτέρυγα. Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση χρησιμοποιεί την θεώρηση του ρευστού ως ασυμπύεστο και του πεδίου ροής ως μη-μόνιμο. Στα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν θα γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα αυτά με τον όρο “incompressible flow”.

Έχοντας υπολογίσει την κατανομή των φορτίων και του συντελεστή πίεσης του αεροσκάφους ACFA2020 ακολουθεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών με τα

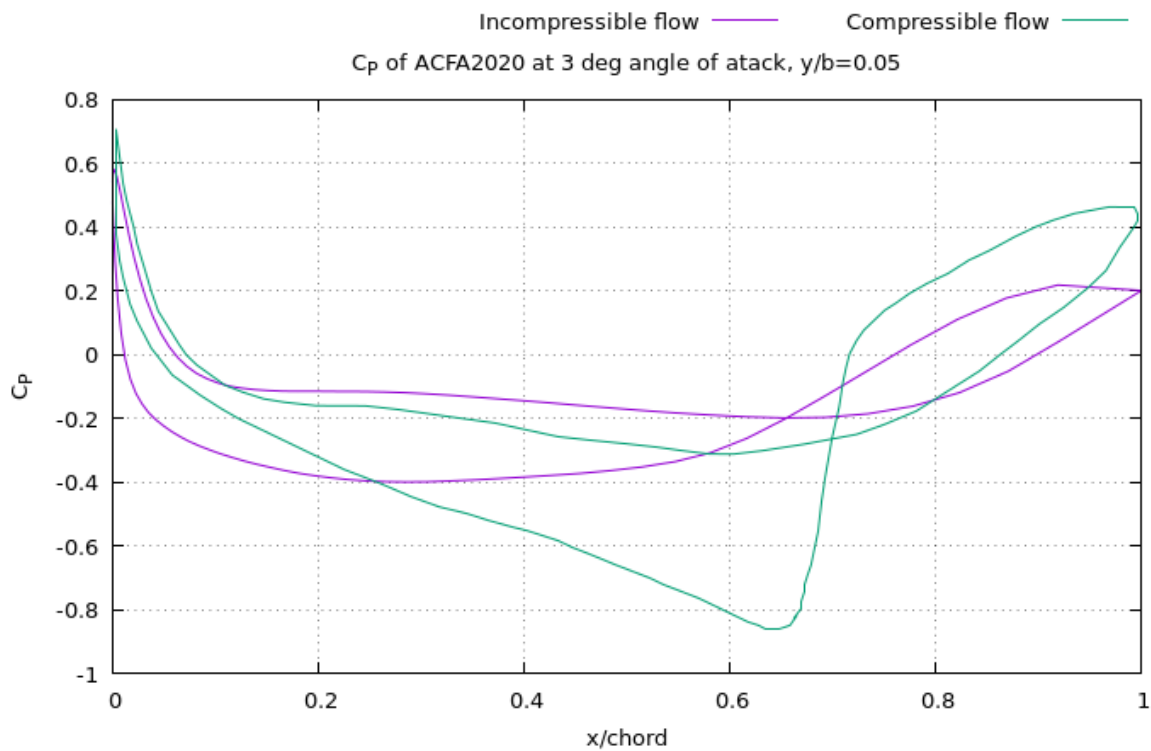
αντίστοιχα υπολογιστικά αποτελέσματα που είχαν προκύψει από παλιότερη εξέταση του συγκεκριμένου αεροσκάφους. Τα δεδομένα αυτά είχαν προκύψει με την θεώρηση του ρευστού ως συμπιεστό και του πεδίου ροής ως μη-μόνιμο. Στα επόμενα διαγράμματα θα γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα αυτά με τον όρο “compressible flow”. Και στις δύο προσομοιώσεις η γωνία πρόσπτωσης είναι τρεις μοίρες.



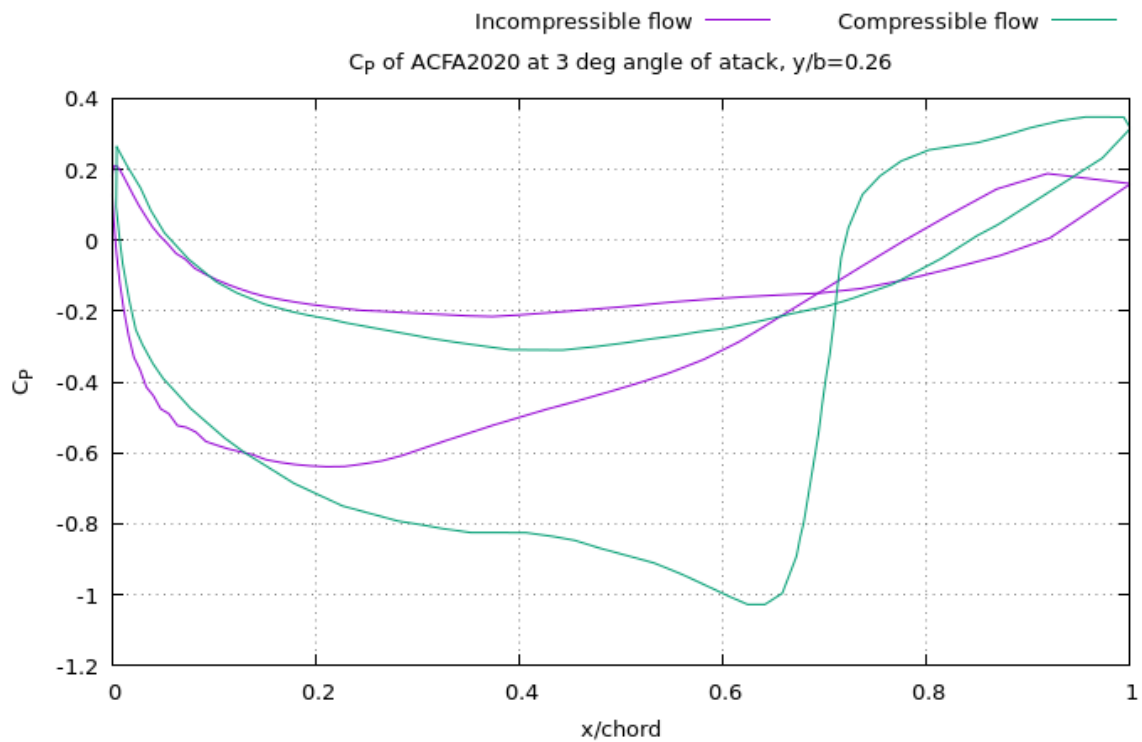
Σχήμα 3.8: Αναπαράσταση των πέντε ακτινικών θέσεων,  $y/b$ , πάνω στην πτέρυγα

Στα διαγράμματα που ακολουθούν απεικονίζεται ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  σε πέντε ακτινικές θέσεις:  $y/b=0.05$ ,  $y/b=0.26$ ,  $y/b=0.44$ ,  $y/b=0.66$  και  $y/b=0.86$ .

### 3. Μέθοδος Particle Mesh

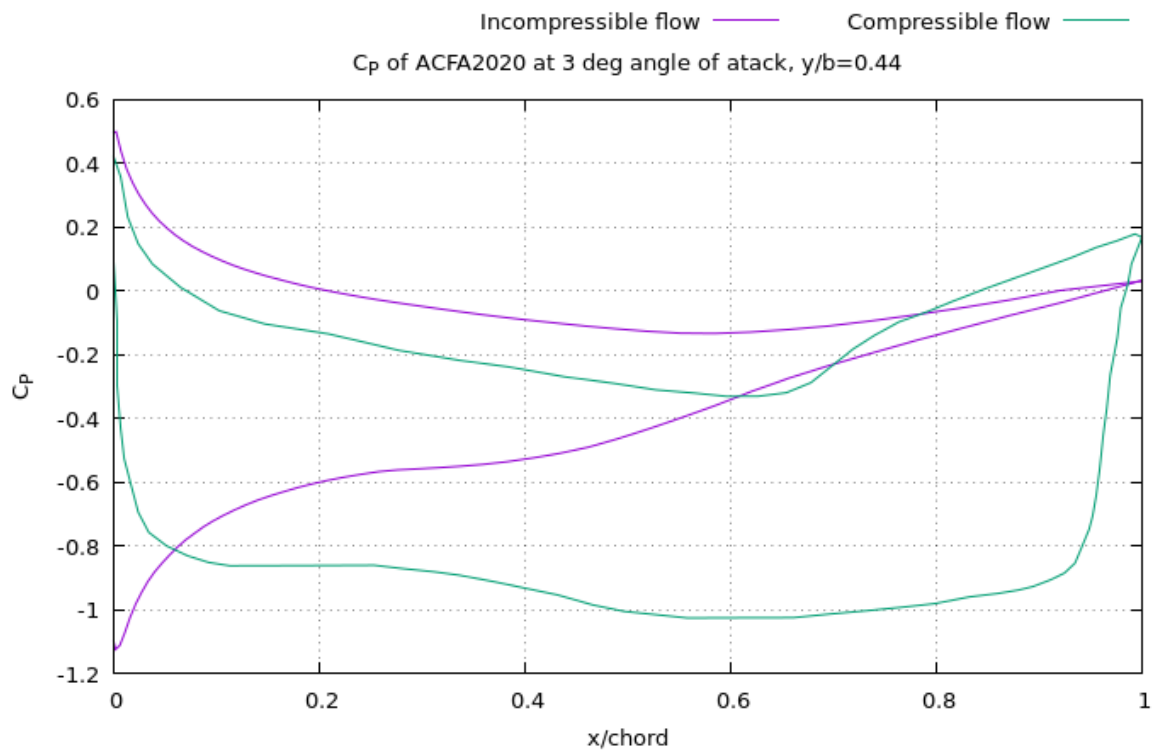


Σχήμα 3.9: Ο συντελεστής πίεσης στην θέση  $y/b=0.05$

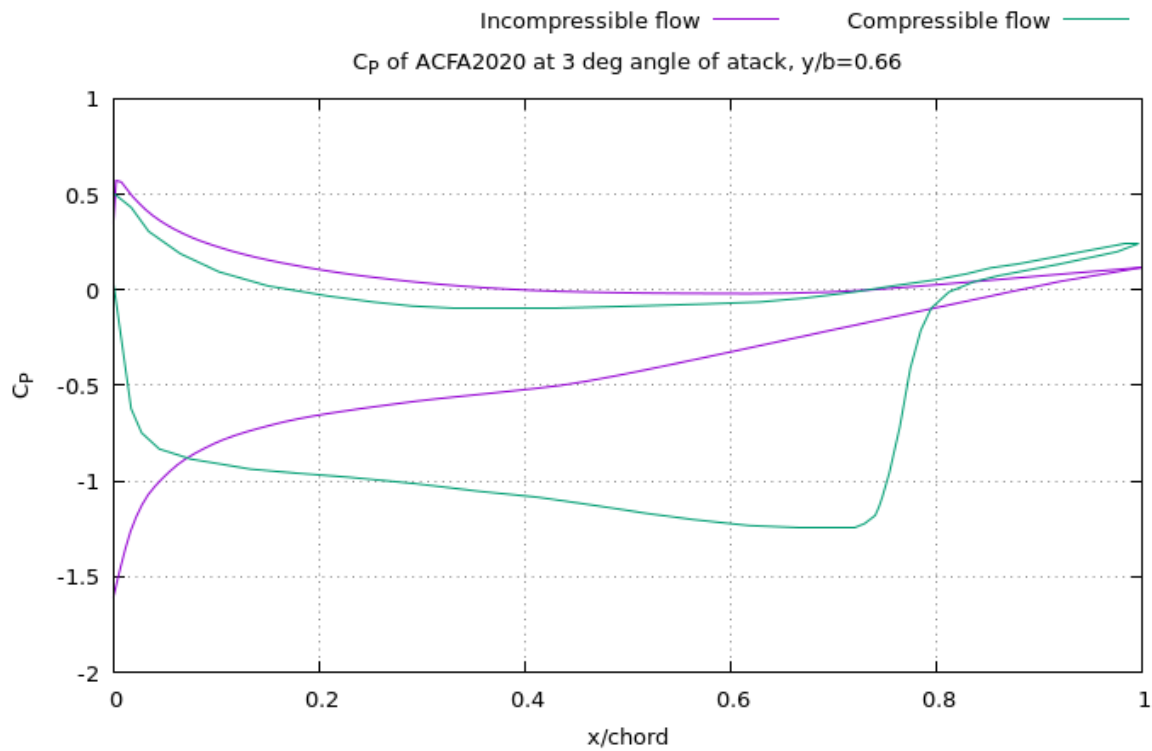


Σχήμα 3.10: Ο συντελεστής πίεσης στην θέση  $y/b=0.26$

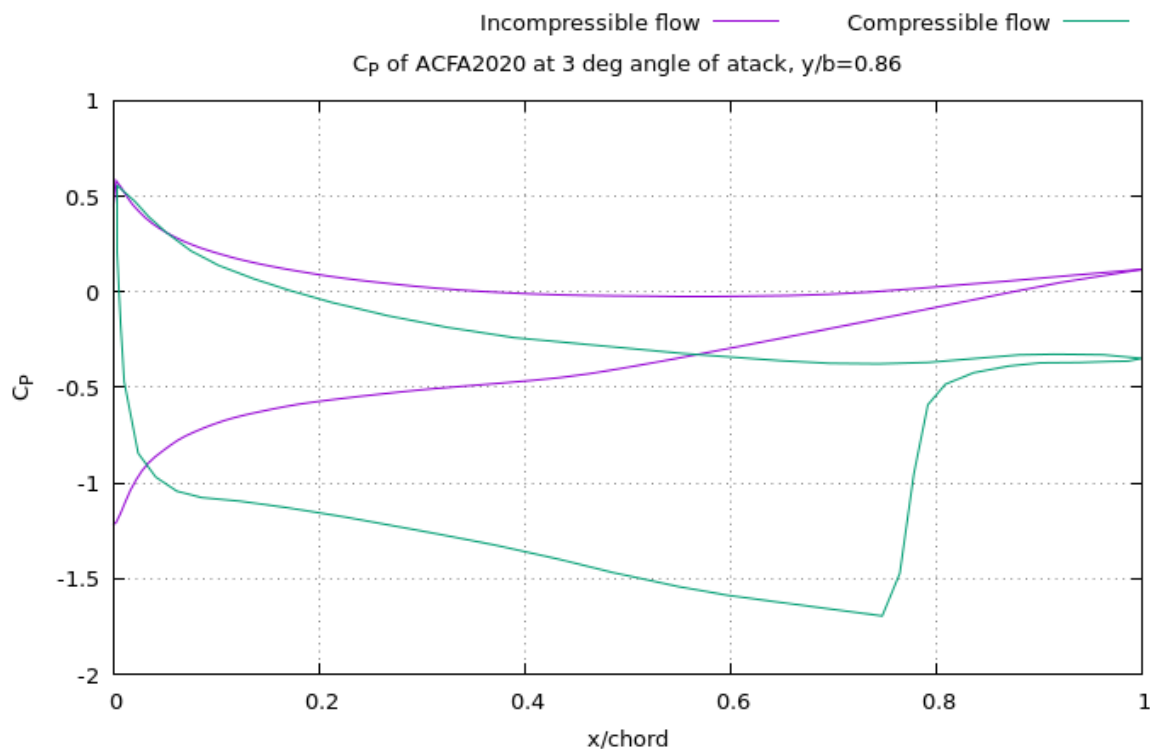




Σχήμα 3.11: Ο συντελεστής πίεσης στην θέση  $y/b=0.44$



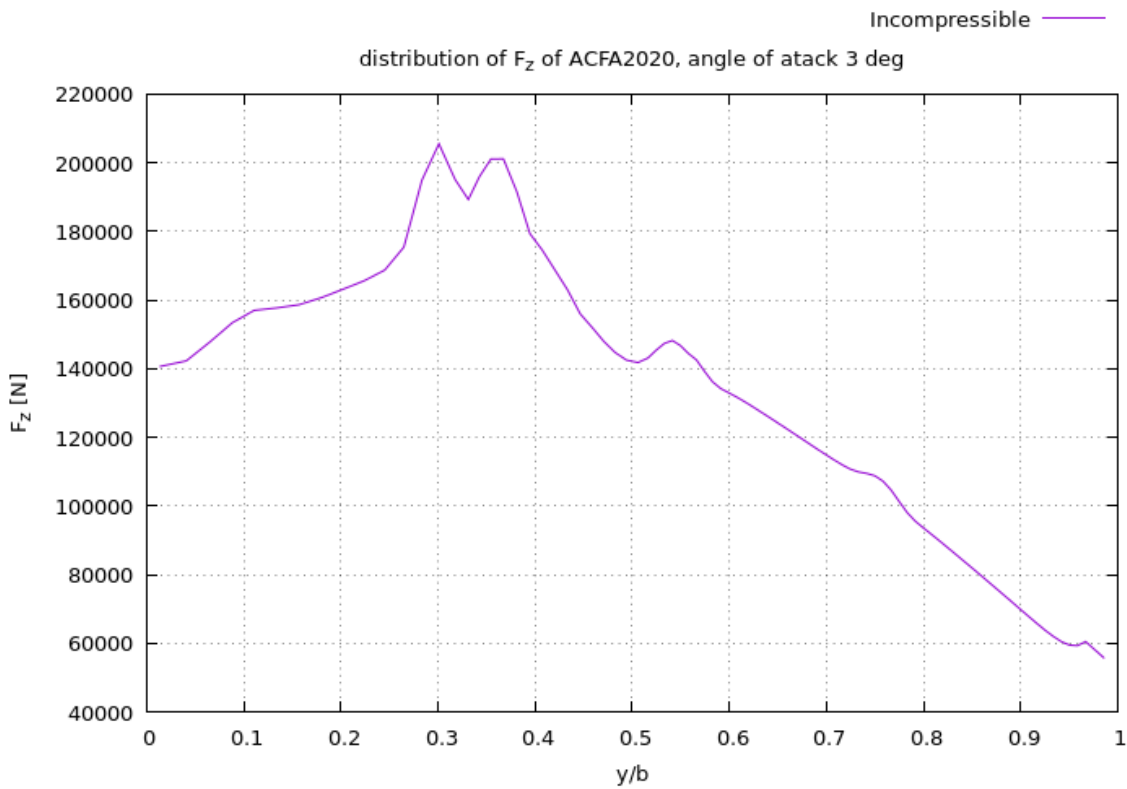
Σχήμα 3.12: Ο συντελεστής πίεσης στην θέση  $y/b=0.66$



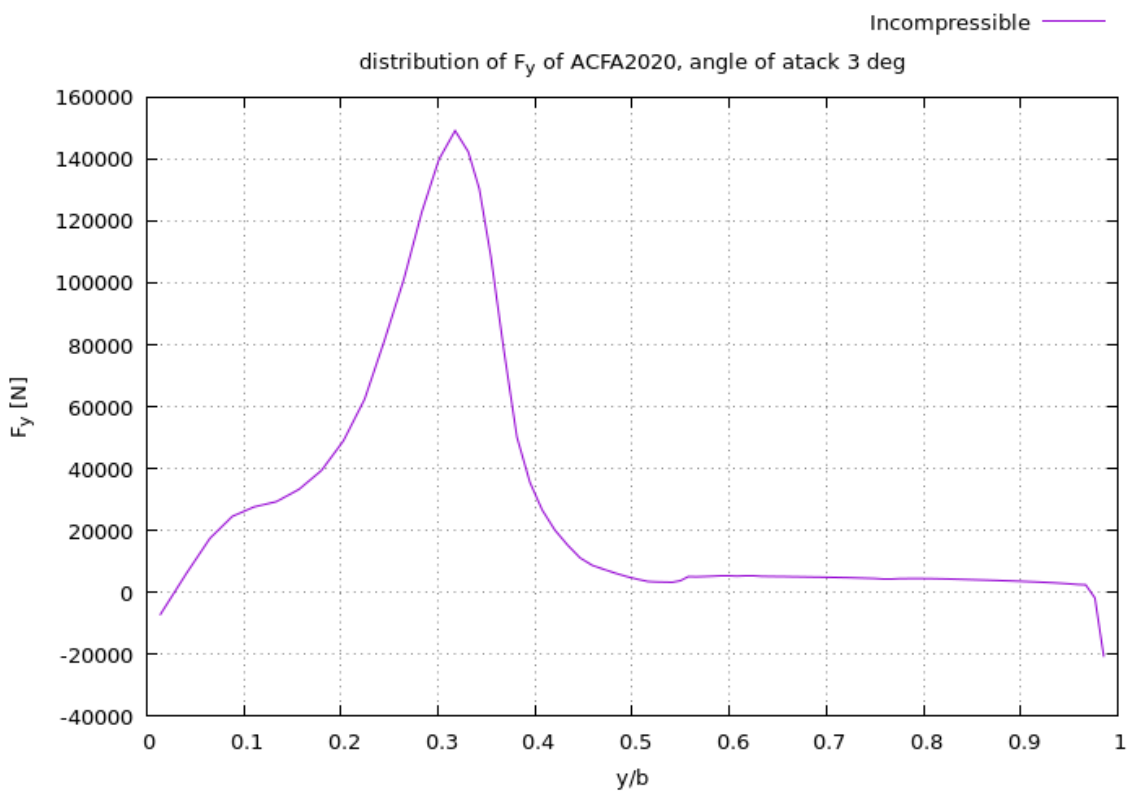
Σχήμα 3.13: Ο συντελεστής πίεσης στην θέση  $y/b=0.86$

Για όλες τις θέσεις μέτρησης που εξετάστηκαν παραπάνω παρατηρούμε ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν εμφανίζουν σημαντικές διαφορές, κυρίως στις ακτινικές λωρίδες  $y/b=0.44$ ,  $0.66$  και  $0.86$ . Σημαντικός παράγοντας στην εμφάνιση αυτής της διαφοράς είναι ο ρόλος της συμπεστότητας στην ροή γύρω από το αεροσκάφος. Τα συμπιεστά φαινόμενα είναι σημαντικά και τοπικά κυρίαρχα στις περιοχές του πεδίου ροής όταν εμφανίζονται. Οι περιοχές εμφάνισης των συμπιεστών φαινομένων ορίζονται από τον τοπικό αριθμό Mach της ροής. Για τον λόγο αυτό, στην παρούσα στιγμή της διπλωματικής εργασίας, δημιουργήθηκε η ανάγκη για τροποποίηση του υπάρχοντος υπολογιστικού κώδικα με εισαγωγή της θεώρησης συμπεστότητας. Η προσθήκη αυτής της διόρθωσης θα μας επιτρέψει να εξετάσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τα παραπάνω αποτελέσματα. Η ανάλυση της μεθόδου προσέγγισης της συμπεστότητας θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

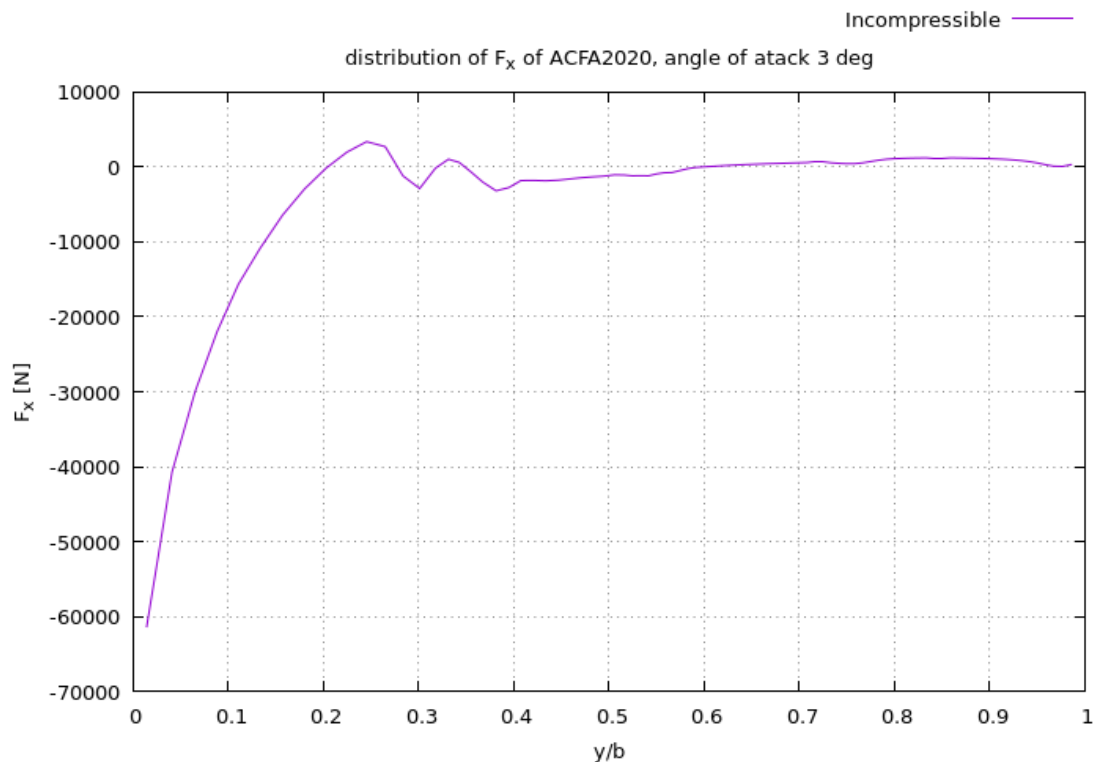
Στα διαγράμματα που ακολουθούν απεικονίζονται τα φορτία που αναπτύσσονται πάνω στην πτέρυγα του αεροσκάφους ACFA2020. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν από την προσομοίωση με χρήση της μεθόδου Particle Mesh. (ασυμπιεστή ροή)



Σχήμα 3.14: Κατανομή των φορτίων  $F_z$  πάνω στο αεροσκάφος



Σχήμα 3.15: Κατανομή των φορτίων  $F_y$  πάνω στο αεροσκάφος

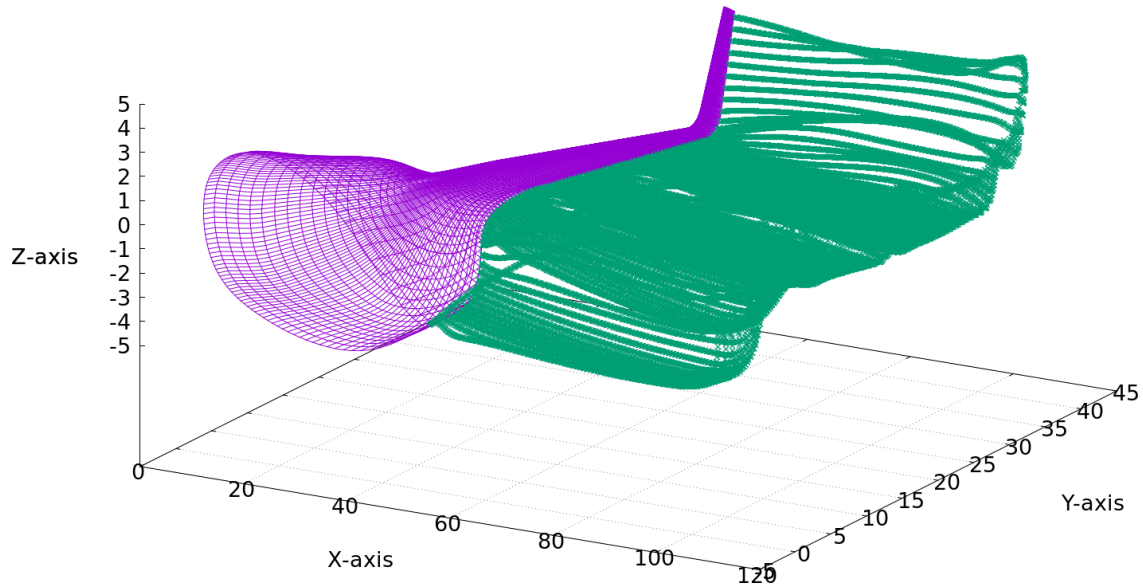


Σχήμα 3.16: Κατανομή των φορτίων  $F_x$  πάνω στο αεροσκάφος

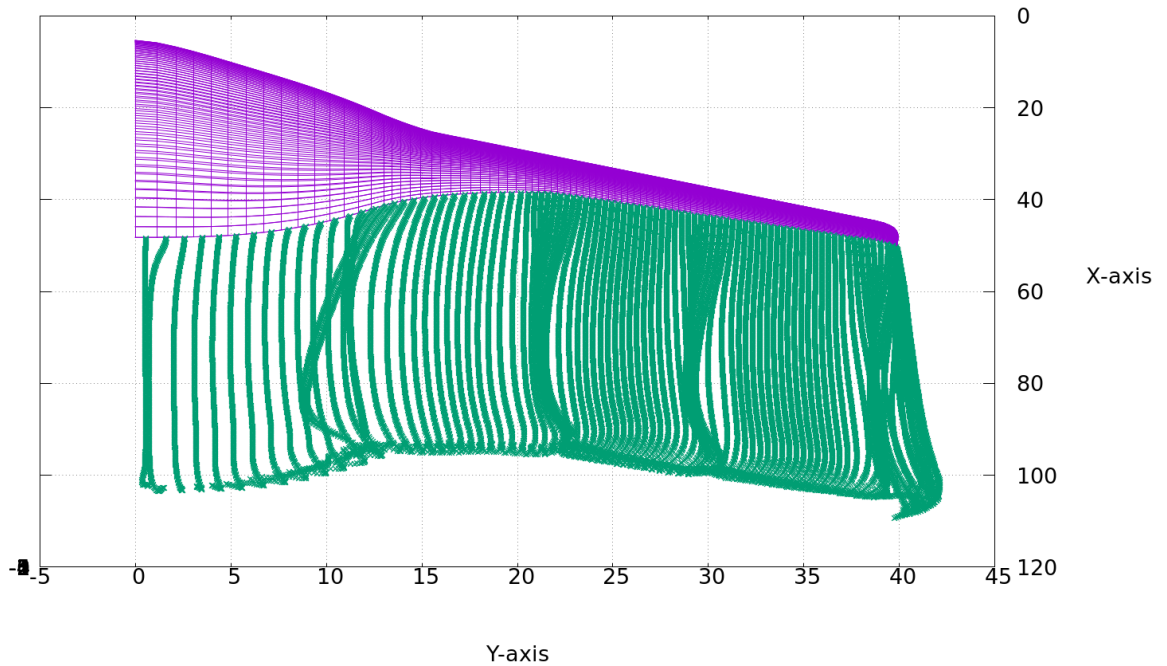
Τα διαγράμματα που προέκυψαν ακολουθούν την μορφή που περιμέναμε να δούμε. Ωστόσο γίνεται αντιληπτή η εμφάνιση κάποιων απότομων αλλαγών στις τιμές των φορτίων. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε κάποιες διακυμάνσεις στις τιμές των φορτίων για  $y/b=0.25$  μέχρι και  $y/b=0.35$ . Αυτό οφείλεται στην γεωμετρία που έχει εκεί η άτρακτος του αεροσκάφους, η οποία δημιουργεί αυτές τις απότομες αλλαγές. Τα διαγράμματα αυτά απεικονίζουν την κατανομή των φορτίων σε όλο το αεροσκάφος (σε τομή) συμπεριλαμβανομένου και της άτρακτου.

### **3.6 Οπτικοποίηση του ομόρρου**

Στα παρακάτω σχήματα γίνεται μια οπτικοποίηση του ομόρρου στοιχείων στροβιλότητας. Η συγκεκριμένη προσομοίωση είναι για τριακόσια χρονικά βήματα με  $\Delta T=0.0008$  sec.



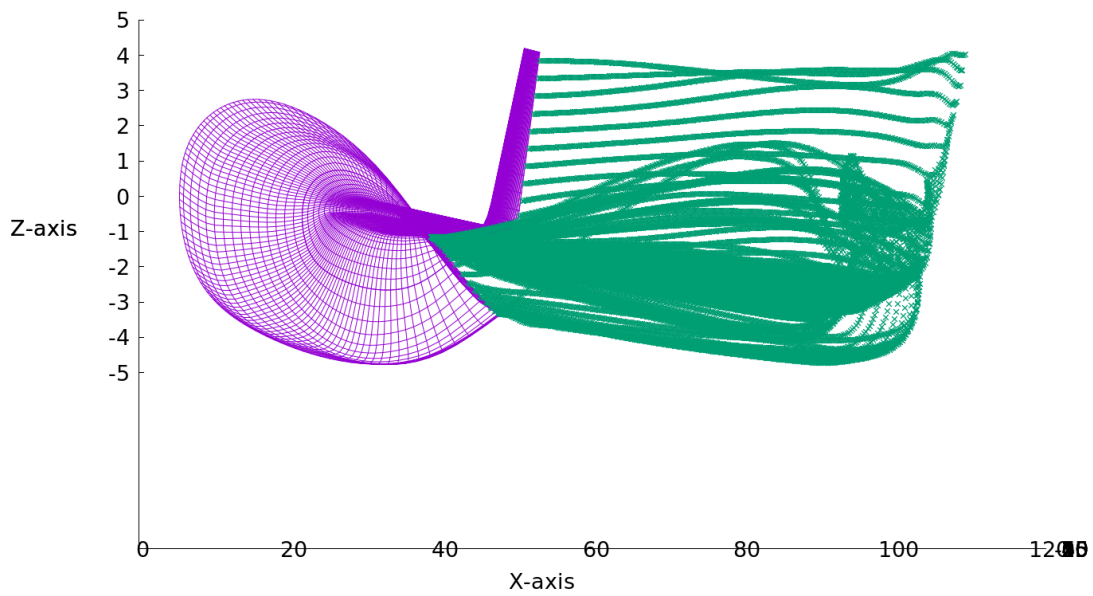
Σχήμα 3.17: Αναπαράσταση του ομόρρου με στοιχεία στροβιλότητας σε πλάγια όψη υπό γωνία



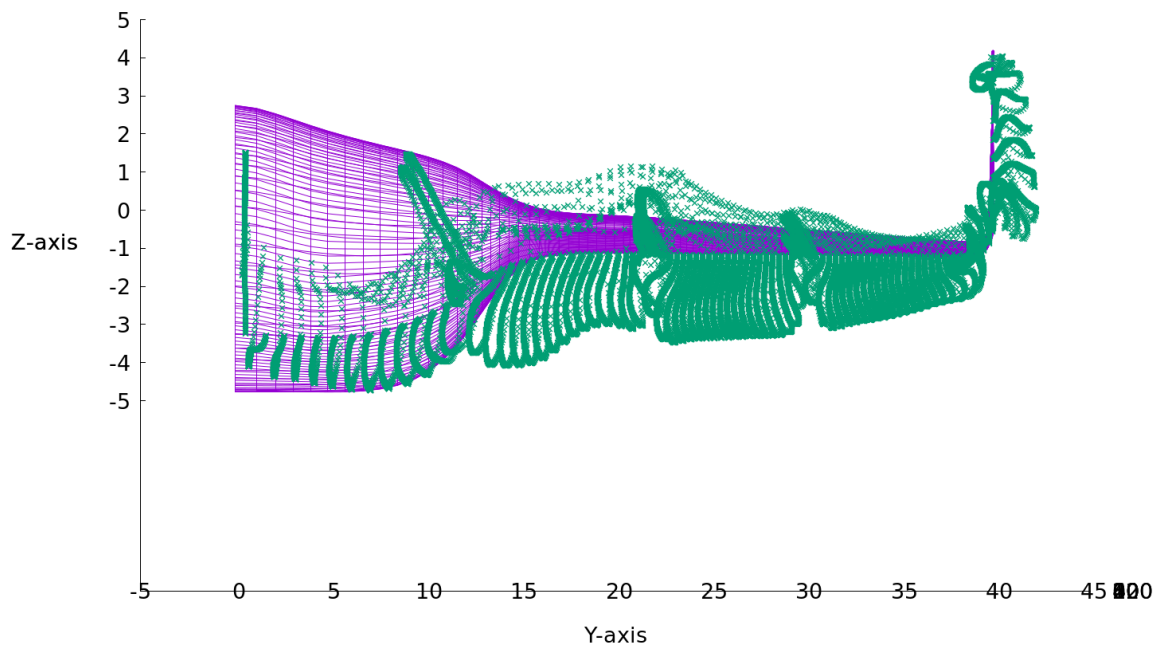
Σχήμα 3.18: Αναπαράσταση του ομόρρου σε κάτοψη

### 3. Μέθοδος Particle Mesh

---



Σχήμα 3.19: Αναπαράσταση του ομόρρου σε πλάγια όψη



Σχήμα 3.20: Αναπαράσταση του ομόρρου απο την πίσω πλευρά στην διεύθυνση της πτήσης

## 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται ο τρόπος και η διαδικασία που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό της ταχύτητας που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα σημεία ελέγχου, του υπό εξεταζόμενου σώματος, μέσω της μεθόδου Particle Mesh. Μέχρι στιγμής ο υπολογισμός αυτός γινόταν με χρήση του νόμου Biot-Savart. Το υπολογιστικό κόστος της μέχρι τώρα υπολογιστικής διαδικασίας για  $N$  αριθμό στοιχείων στροβιλότητας ανέρχεται σε  $N^2$ . Το κόστος αυτό μπορεί κάποιος να φανταστεί τι τιμές μπορεί να πάρει για εφαρμογές που απαιτείται πλήρης κάλυψη του πλέγματος με στοιχεία στροβιλότητας (Particles).

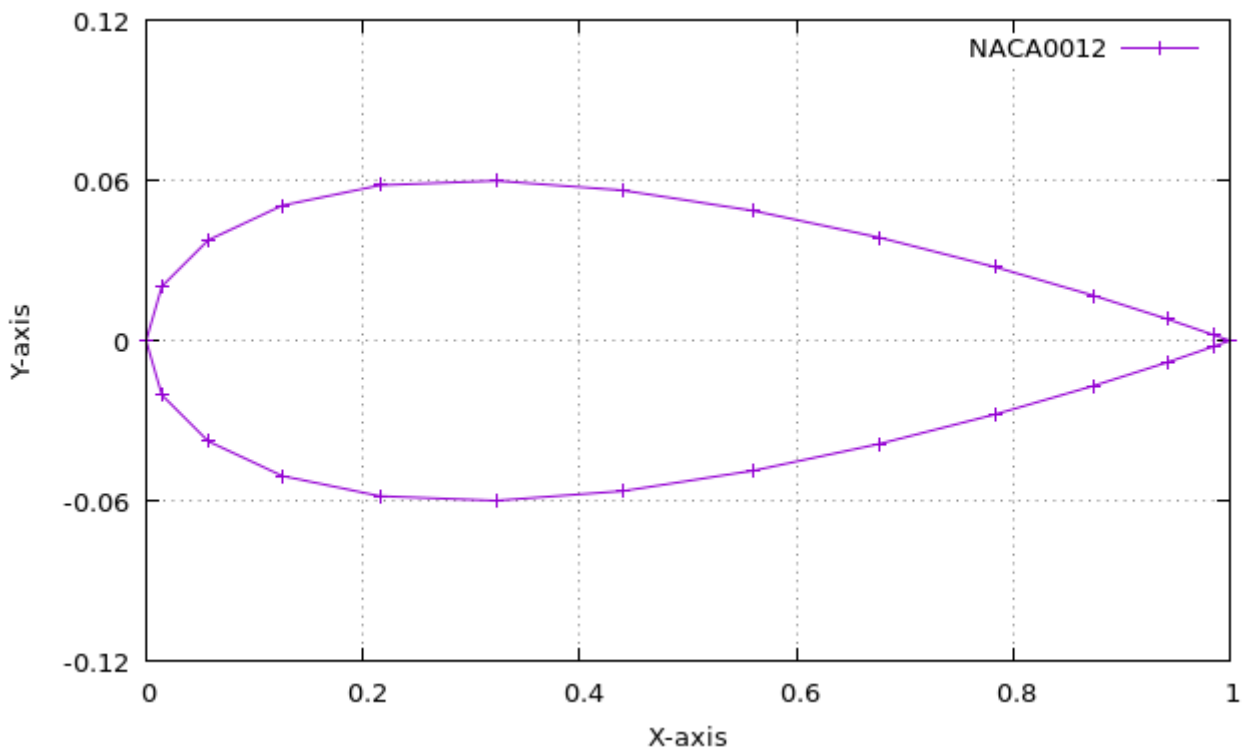
Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων χρησιμοποιήθηκε μια ορθογωνική πτέρυγα η οποία κατασκευάστηκε από συμμετρικές NACA0012 αεροτομές. Στις εφαρμογές που ακολούθησαν αρχικά εξετάστηκε η σύγκλιση της λύσης για διάφορα χρονικά βήματα. Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκαν δοκιμές για την εξέταση της επίδρασης της πυκνώσης του πλέγματος του Particle Mesh για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης. Πιο συγκεκριμένα έγιναν δοκιμές για γωνίες πρόσπτωσης  $\alpha=0^\circ$  και  $\alpha=8^\circ$ . Τέλος, η επιλογή της παραμέτρου αποκοπής (cut-off-length) για τα στοιχεία στροβιλότητας ήταν ζωτικής σημασίας, καθώς η σωστή ρύθμιση αυτής της παραμέτρου συντέλεσε στην ικανοποιητική σύγκλιση των δύο μεθόδων.

Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, έχοντας λύσει με την μέθοδο Particle Mesh το πρόβλημα υπολογισμού των ταχυτήτων που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στο σώμα, έγινε και η προσέγγιση για τον τροποποίηση του υπολογισμού των πιέσεων που επάγουν μια διανομή στοιχείων στροβιλότητας πάνω στα σημεία ελέγχου του σώματος, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο (Particle Mesh). Αυτή η τροποποίηση παρουσίασε περισσότερες ιδιαιτερότητες και δυσκολίες στην εφαρμογή της. Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων χρησιμοποιήθηκε η ίδια γεωμετρία πτέρυγας με την προηγούμενη εφαρμογή. Οι προσομοιώσεις που πήραν μέρος είχαν την ίδια δομή με αυτή των ταχυτήτων.

## 4.2 Η ορθογωνική πτέρυγα

Η ορθογωνική πτέρυγα που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από συμμετρικές αεροτομές NACA0012 οι οποίες δεν μεταβάλλονται ακτινικά. Ο λόγος που επιλέχθηκε η γεωμετρία αυτή είναι λόγω της εξαιρετικά απλής γεωμετρίας που παρουσιάζει. Ελέγχοντας την ορθότητα του αλγορίθμου σε αυτή την γεωμετρία, στην συνέχεια θα είμαστε σε θέση να τον εφαρμόσουμε και σε πιο περίπλοκες.

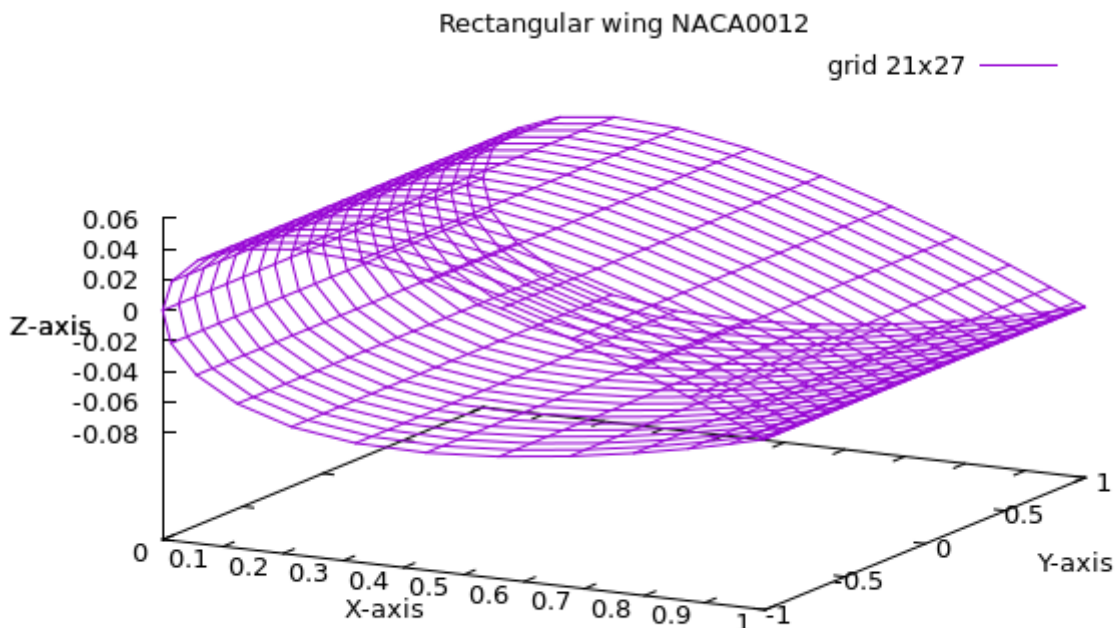
Η αεροτομή NACA0012 με βάση την οποία κατασκευάστηκε η πτέρυγα των πειραματικών δοκιμών παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Ο λόγος επιμήκους είναι  $AR=2$ .



Σχήμα 4.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ορθογωνικής πτέρυγας

Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση των πειραματικών δεδομένων είναι  $21 \times 2$ . Η διακριτοποίηση της πτέρυγας παρουσιάζεται παρακάτω σε πλάγια όψη υπό γωνία.





Σχήμα 4.2: Αναπαράσταση του πλέγματος

Όπως διαπιστώθηκε κατά την διάρκεια των πειραματικών δοκιμών η επιλογή της κατάλληλης διακριτοποίησης της γεωμετρίας του σώματος καθώς και του κατάλληλου χρονικού βήματος είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την αριθμητική ακρίβεια και ευστάθεια του προβλήματος.

Σε πρώτη φάση εξετάστηκε η σύγκλιση των ταχυτήτων που επάγει μια διανομή στροβιλότητας ( οι συνιστώσες τους καθώς και η συνολική κάθετη ταχύτητα ) των δύο μεθόδων. Στην συνέχεια, έχοντας ολοκληρώσει το κομμάτι των ταχυτήτων πήρε μέρος η εξέταση των πιέσεων που επάγουν τα Particles (στοιχεία στροβιλότητας) στο υπό εξέταση σώμα. Αναλυτικά διαγράμματα μεταξύ των τιμών των πιέσεων των δύο μεθόδων αλλά και του συντελεστή πίεσης παρουσιάζονται παρακάτω.

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν είναι για διακόσια χρονικά βήματα. Να σημειωθεί ότι από τα πρώτα κιάλας χρονικά βήματα μέχρι και το τελευταίο παρατηρείται ικανοποιητική σύμπτωση των δύο αυτών μεθόδων.

### 4.3 Επαγόμενη ταχύτητα στοιχείων στροβιλότητας

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζαμε μέχρι στιγμής την ταχύτητα που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα σημεία ελέγχου της επιφάνειας του σώματος, γινόταν με τον νόμο του Biot-Savart. Σύμφωνα με τον νόμο αυτό η ταχύτητα που επάγει ένα στοιχείο στροβιλότητας σε ένα σημείο στο χώρο δίνεται από την σχέση (34):

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}_0; t) = \frac{D}{4\pi|\vec{x}_0 - \vec{x}|^3} \int \vec{\omega}(\vec{x}; t) \times (\vec{x}_0 - \vec{x}) dx$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο στο οποίο διανέμεται η ελεύθερη στροβιλότητα  $\vec{\omega}(\vec{x}; t)$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η μέθοδος Particle Mesh χρησιμοποιεί ένα πλέγμα πάνω στο οποίο υπολογίζει το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$ ,  $\nabla^2 \Phi = \theta$ , και το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{\Psi}$ ,  $\nabla^2 \vec{\Psi} = -\vec{\omega}$ , λύνοντας τέσσερις εξισώσεις Poisson (μία για το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$ , και τρεις για το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{\Psi}$ ). Έχοντας λοιπόν τις τιμές του  $\vec{\Psi}$  μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα  $\vec{u}_\omega$  στο στρόβιλο πεδίο πάνω στους κόμβους του πλέγματος του Particle Mesh από την εξίσωση:

$$\vec{u} = \nabla \vec{\Psi} = \frac{\partial \vec{\Psi}_x}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{\Psi}_y}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{\Psi}_z}{\partial z} \vec{k} \quad (4.1)$$

Επομένως,

$$u_x = \frac{\partial \vec{\Psi}_x}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \vec{\Psi}_y}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \vec{\Psi}_z}{\partial z} \quad (4.2)$$

Έχοντας λοιπόν προσδιορίσει τις τιμές του πεδίου ταχύτητας, λόγω της στροβιλότητας του ομόρρου, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα που επάγουν οι κόμβοι του Particle Mesh πλέγματος στα σημεία ελέγχου του σώματος. Αυτό επιτυγχάνεται με παρεμβολή.

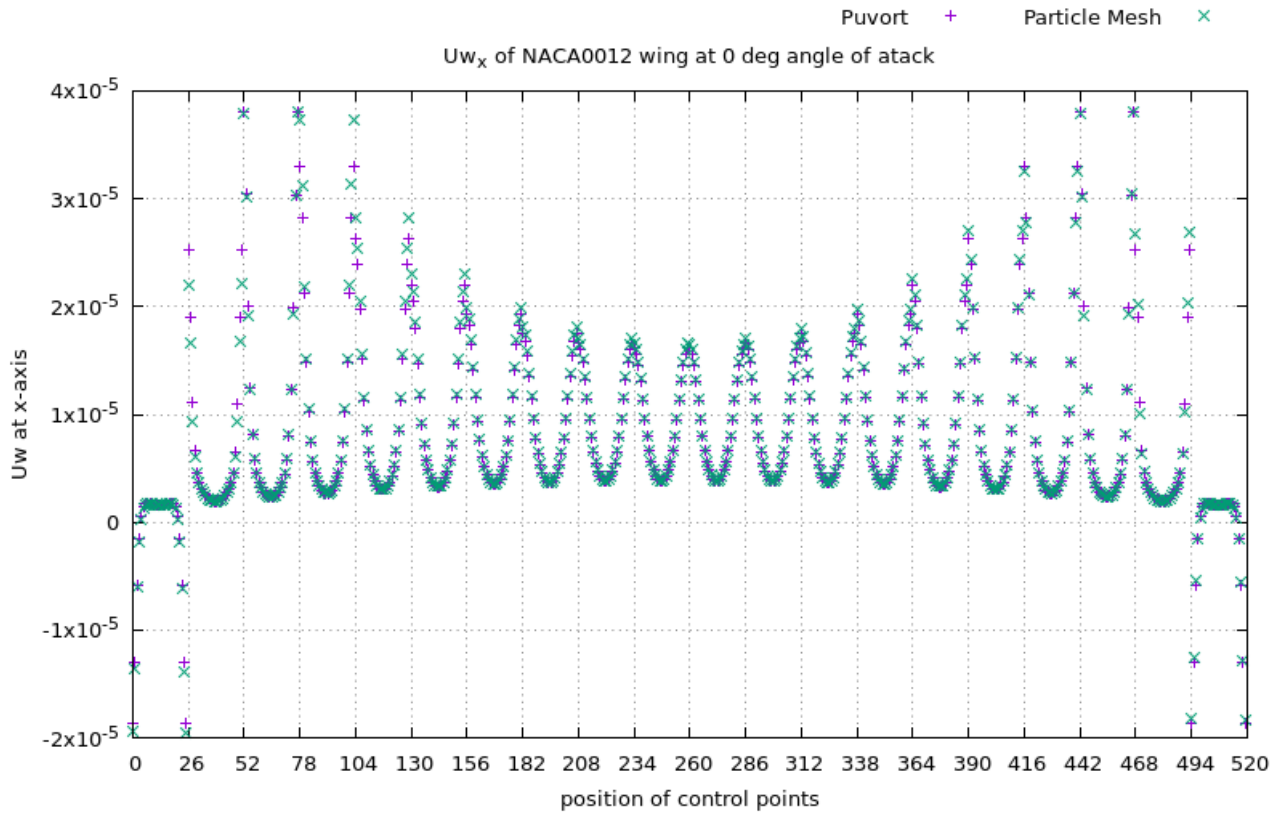
Στην συνέχεια ακολουθεί παρουσίαση των αποτελεσμάτων για την προσομοίωση γωνίας πρόσπτωσης  $\alpha = 0^\circ$  και  $\alpha = 8^\circ$ .

## **4.4 Αποτελέσματα προσομοίωσης (ταχύτητα)**

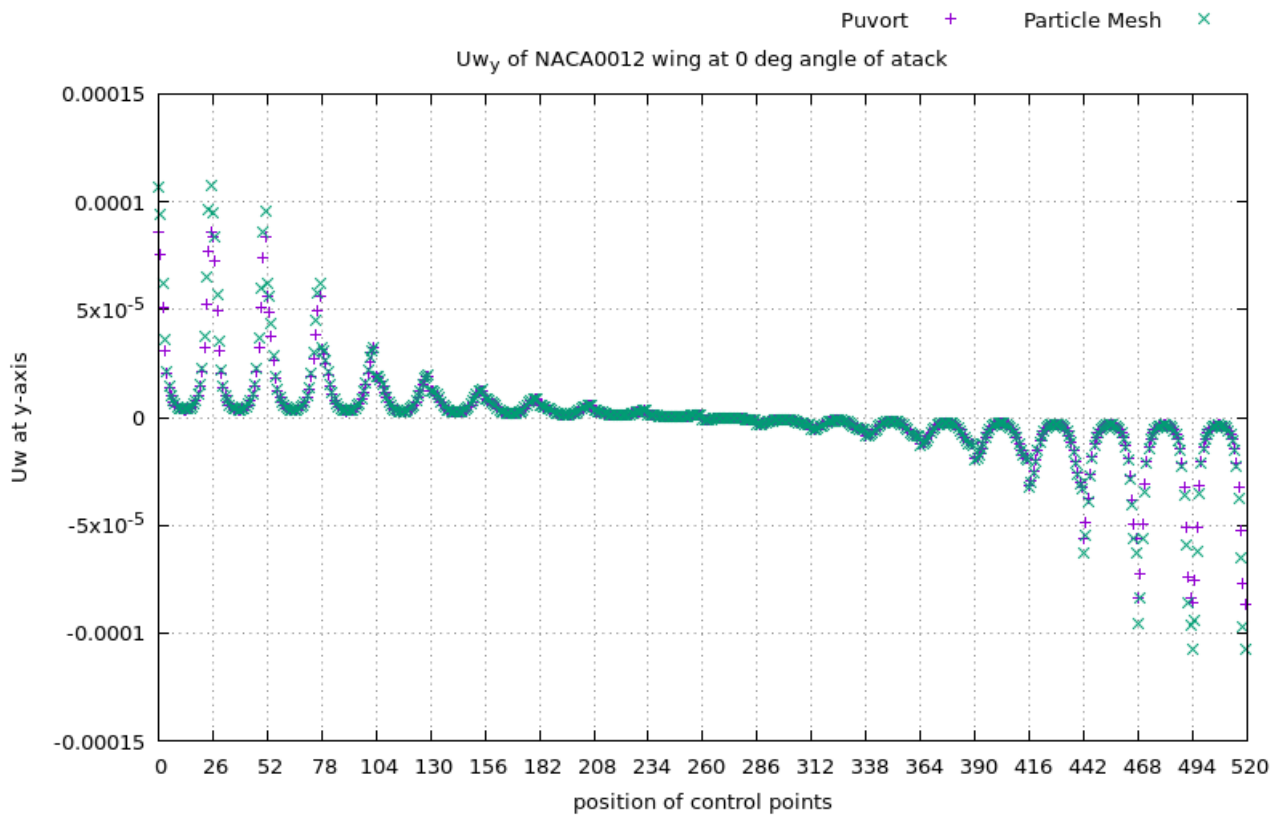
### **4.4.1 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης**

Έχοντας προγραμματίσει τον αλγόριθμο, ένας καλός τρόπος για να επαληθεύσουμε την ορθότητα του είναι η ροή σε μηδενική γωνίας πρόσπτωσης. Μεγάλη ευαισθησία στην σύγκλιση των δύο μεθόδων παρουσιάζει η ρύθμιση της παραμέτρου αποκοπής (cut-off-length) για τα στοιχεία στροβιλότητας. Η παράμετρος αυτή επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από την πυκνωση του πλέγματος (Particle Mesh). Στα αποτελέσματα που ακολουθούν για γωνία πρόσπτωσης μηδέν μοιρών αλλά και για γωνία οχτώ μοίρες επιλέχθηκε πλέγμα με  $\Delta X=0.1$ ,  $\Delta Y=0.1$  και  $\Delta Z=0.1$ . Το χρονικό βήμα της προσομοίωσης επιλέχθηκε με κριτήριο την διακριτοποίηση του σώματος και την ταχύτητα της ροής. Στα τρία πρώτα διαγράμματα παρουσιάζονται οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα σημεία ελέγχου του σώματος. Στον X-άξονα απεικονίζονται οι θέσεις των σημείων ελέγχου πάνω στην κάθε ακτινική λωρίδα. Επειδή έχουμε 21 αεροτομές που συνθέτουν την πτέρυγα, οι ακτινικές λωρίδες που δημιουργούνται είναι 20. Επομένως στα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν, ο άξονας-X είναι χωρισμένος σε 20 ίσα διαστήματα των 26 σημείων. Την μέχρι τώρα μέθοδο υπολογισμού, με Biot-Savart, θα την αποκαλούμε “Punort”.

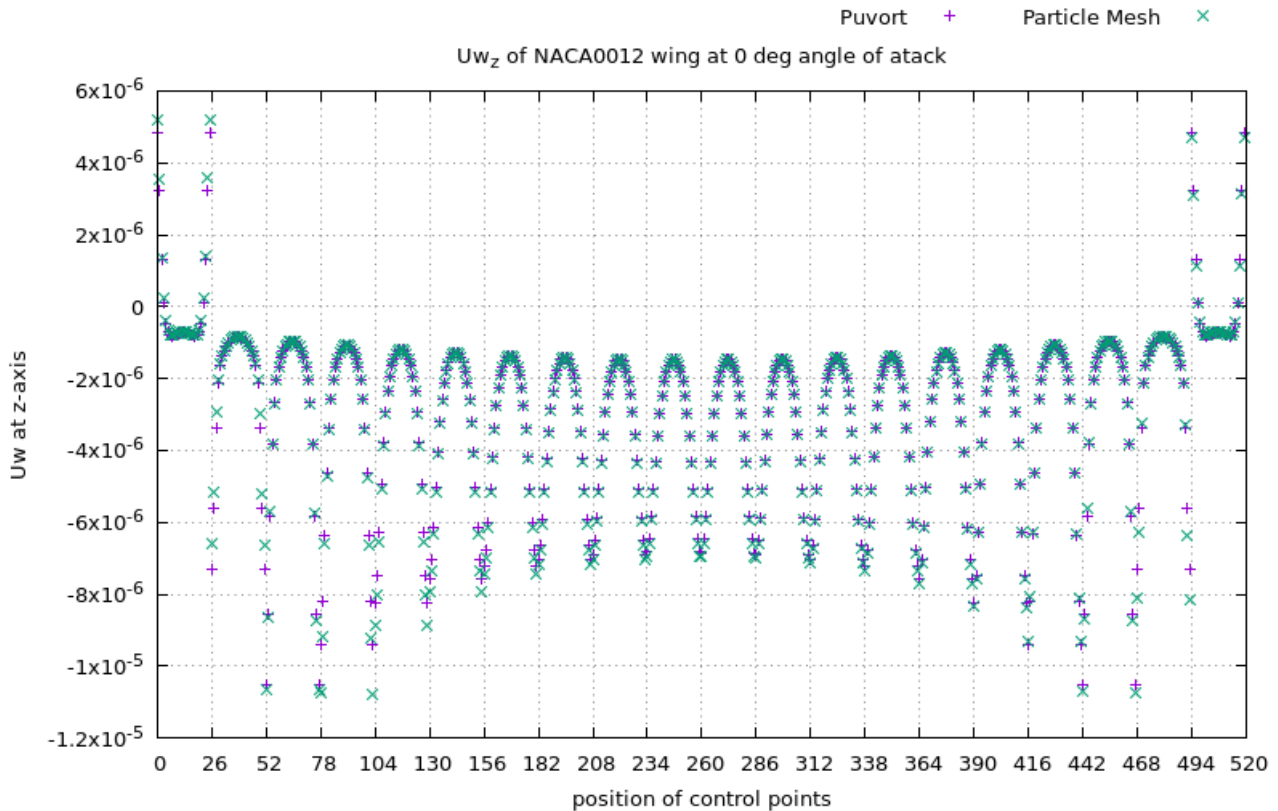
#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους



Σχήμα 4.3: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του X-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.



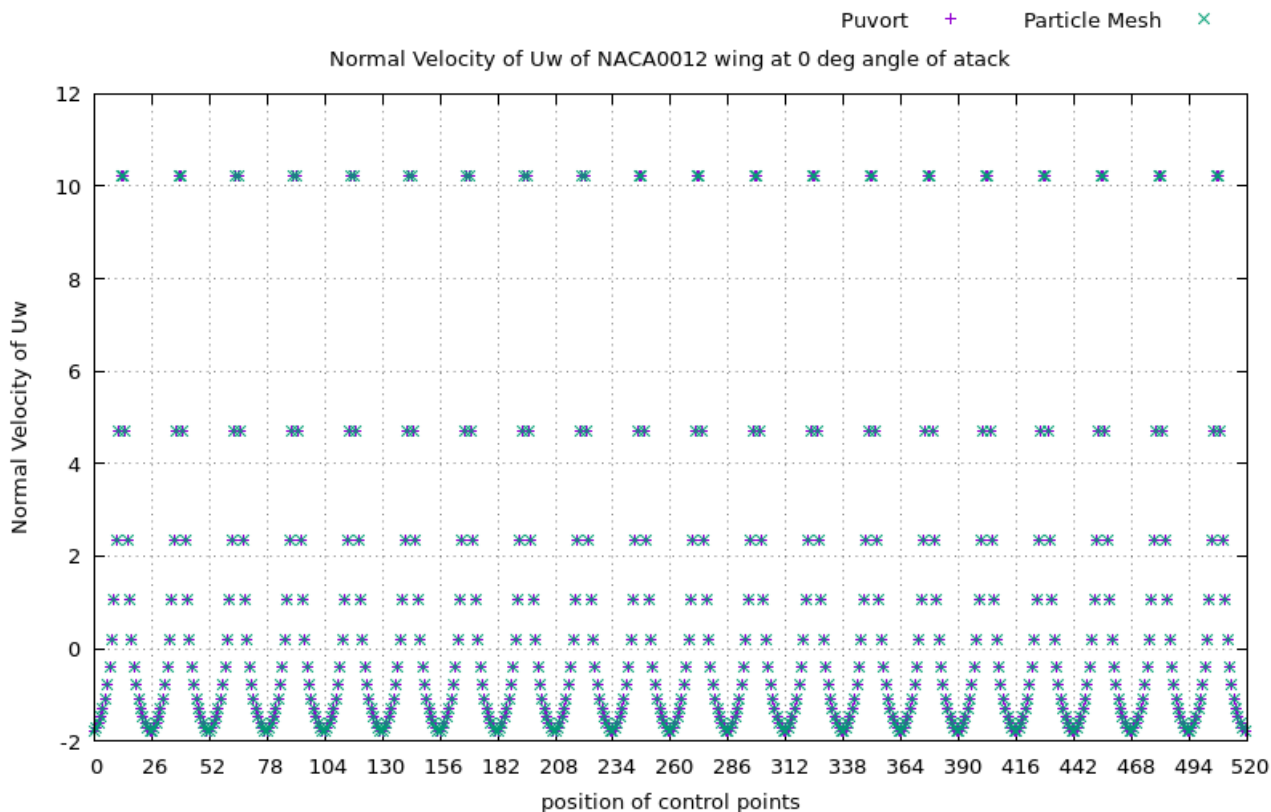
Σχήμα 4.4: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του Y-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.



Σχήμα 4.5: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του Z-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι εμφανές ότι η μέθοδος που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό των ταχυτήτων μέσω του Particle Mesh δίνει αποτελέσματα ταυτόσημα με τα αντίστοιχα της ήδη υπάρχουσας μεθόδου, Puvort. Και στα τρία διαγράμματα παρατηρείται μια μικρή διαφορά στις τιμές των συνιστωσών των ταχυτήτων καθώς πλησιάζουμε στο ακροπτερύγιο. Αυτό το σφάλμα οφείλεται στο γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει ανοιχτή γεωμετρία. Έχοντας λάβει λοιπόν ικανοποιητικά αποτελέσματα για την σύγκλιση των δύο αυτών μεθόδων, ακολουθεί ο υπολογισμός της κάθετης συνιστώσας της συνολικής ταχύτητας. Η κάθετη αυτή ταχύτητα συμβάλει σημαντικά στην εφαρμογή της συνθήκης μη εισχώρησης.

## 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους

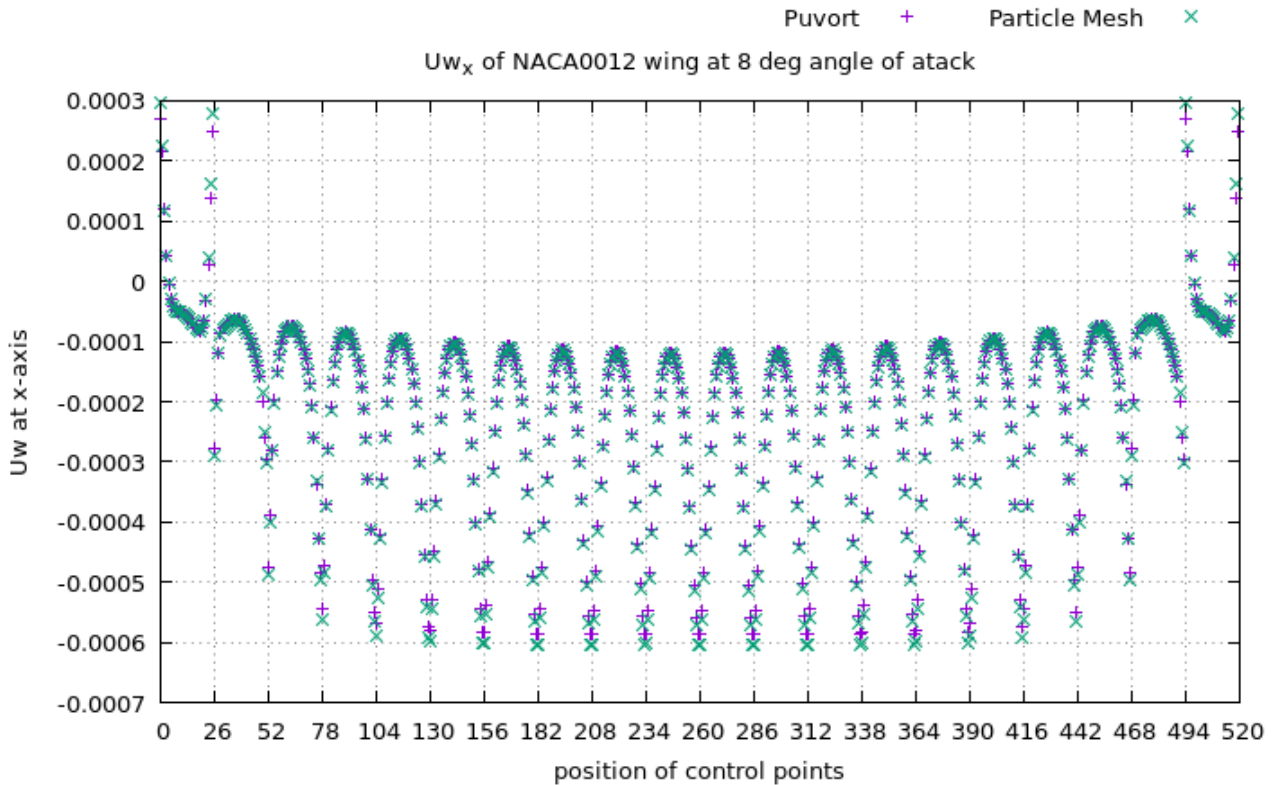


Σχήμα 4.6: Κάθετη συνιστώσα της συνολικής ταχύτητας πάνω στο σημείο ελέγχου. Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.

Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνεται η ακριβής σύμπτωση των δύο μεθόδων, όσο αφορά τον υπολογισμό της κάθετης συνιστώσας της  $u_\omega$ . Τα αποτελέσματα που διατυπώθηκαν για την περίπτωση μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης επιβεβαίωσαν σε έναν μεγάλο βαθμό την ορθότητα του αλγορίθμου.

### 4.4.2 Ροή σε γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών

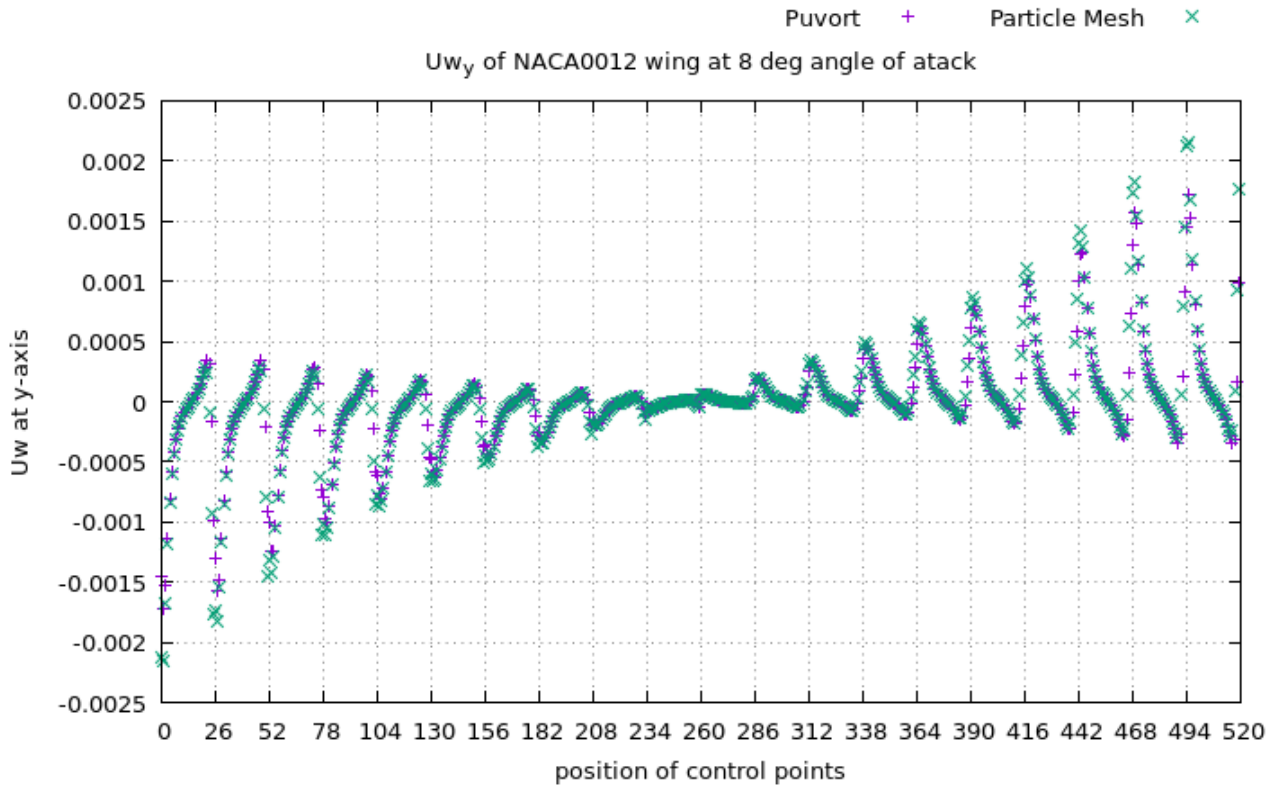
Έχοντας λάβει ικανοποιητικά αποτελέσματα για την περίπτωση της ροής σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης, πήρε μέρος η προσομοίωση για γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών. Με τον τρόπο αυτό θα αναλυθεί κατά πόσο θα επηρεαστούν τα αποτελέσματα λόγω της ροής υπό γωνία.



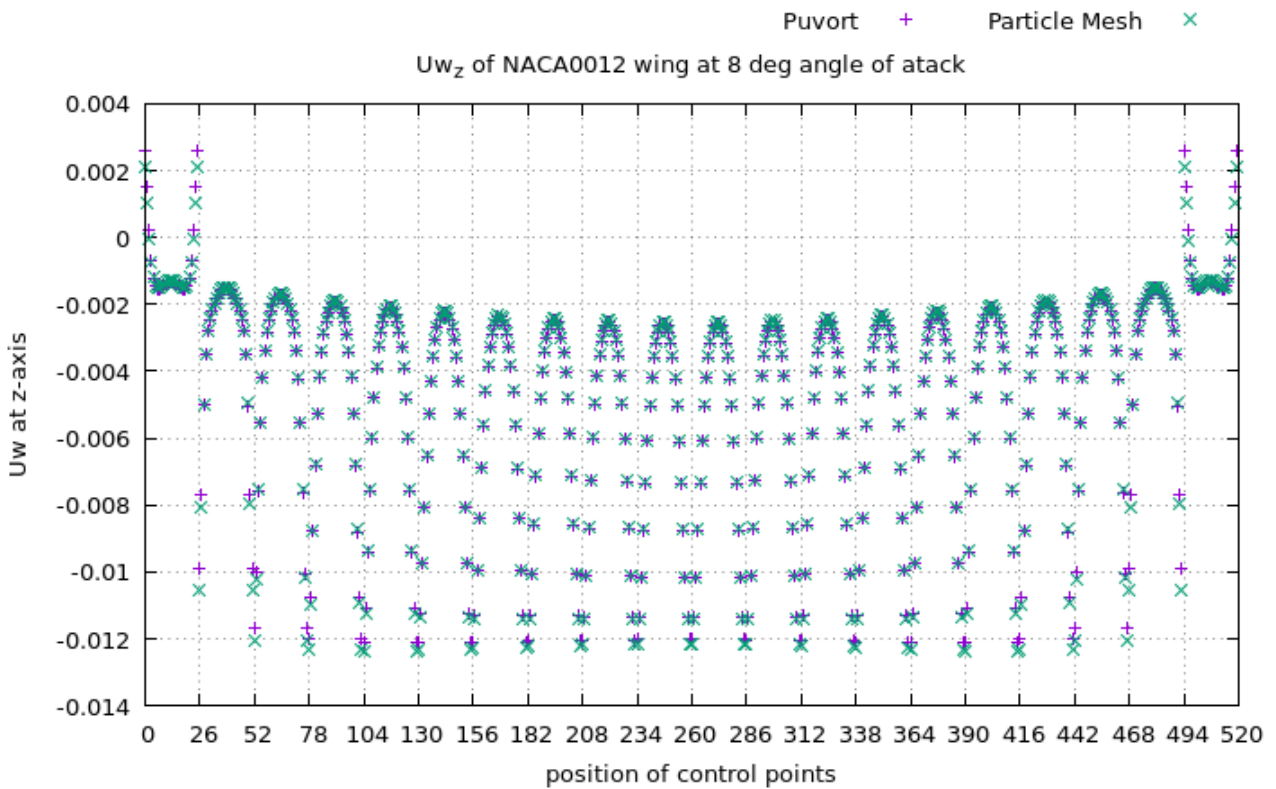
Σχήμα 4.7: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του X-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

Όπως και πριν, η σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου Particle Mesh σε σχέση με την Puvoort είναι ικανοποιητική. Ωστόσο υπάρχουν κάποιες μικρές διαφορές στις τιμές της X συνιστώσας, κυρίως όσο πλησιάζουμε προς το ακροπερύγιο. Αυτό, οφείλεται κυρίως στην ανοιχτή γεωμετρία που χρησιμοποιούμε, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για την προσομοίωση των μηδέν μοιρών.

#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους

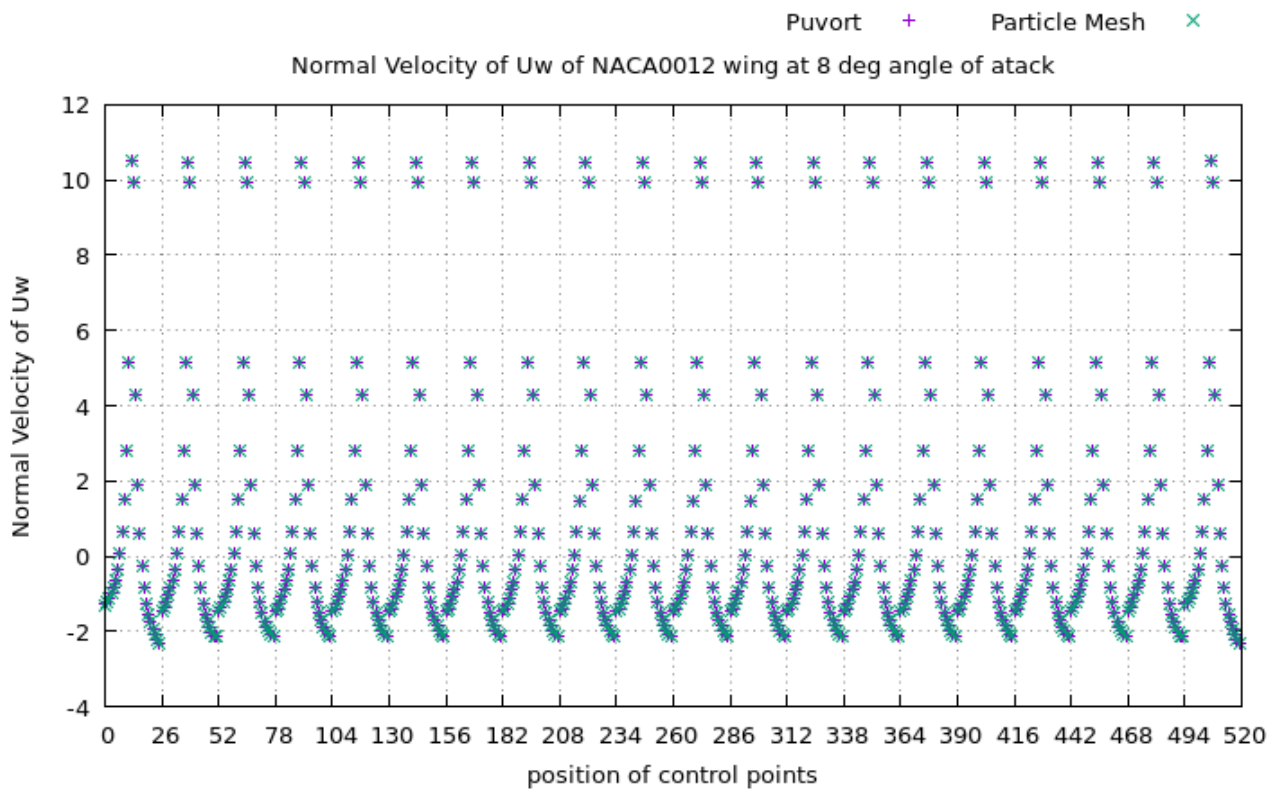


Σχήμα 4.8: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του Y-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.



Σχήμα 4.9: Επαγόμενη ταχύτητα κατά την διεύθυνση του Z-άξονα. Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.





Σχήμα 4.10: Κάθετη συνιστώσα της συνολικής ταχύτητας πάνω στο σημείο ελέγχου. Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

#### 4.4.3 Αποτίμηση των αποτελεσμάτων (ταχύτητα)

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα του αλγορίθμου συμπίπτουν ικανοποιητικά με την λύση της Puivort (Biot-Savart) και στην περίπτωση όπου έχουμε γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών.

Στην περίπτωση της ροής με μηδενική γωνία πρόσπτωσης έγινε μια πρώτη εξέταση της ορθότητας του αλγορίθμου για τυχόν ύπαρξη σφαλμάτων στην προσέγγιση της γεωμετρίας αλλά και στον τρόπο προγραμματισμού. Στην συγκεκριμένη περίπτωση λόγω της συμμετρίας αλλά και της μηδενικής άνωσης που έχουμε (το σώμα συμπεριφέρεται ως μη ανωστικό) όλα τα μεγέθη προκύπτουν συμμετρικά στην πάνω και στην κάτω πλευρά της πτέρυγας με μικρές διαφοροποιήσεις καθώς πλησιάζουμε στο ακροπερύγιο. Είναι εμφανές ότι στην συγκεκριμένη προσομοίωση και των δύο περιπτώσεων υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση των δύο αυτών μεθόδων, συνεπώς μας επιτρέπει να τον χρησιμοποιήσουμε και σε περαιτέρω προβλήματα.

## 4.5 Επαγόμενη πίεση στοιχείων στροβιλότητας

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσεται ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της πίεσης που επάγει μια διανομή στοιχείων στροβιλότητας στο υπό εξεταζόμενο σώμα. Ο τρόπος που υπολογιζόταν η τιμή της συγκεκριμένης πίεσης γινόταν με παρόμοιο τρόπο με αυτό του υπολογισμού της μέχρι στιγμής ταχύτητας  $u_\omega$ . Πιο συγκεκριμένα προκύπτει από την εξίσωση (2.30):

$$\frac{P_\omega}{\rho} = \frac{-1}{4\pi} \int_D \frac{((\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot \vec{r})}{r^3} dx$$

όπου  $D$  είναι το χωρίο στο οποίο διανέμεται η ελεύθερη στροβιλότητα  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$ .

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται η μέθοδος Particle Mesh, έτσι και εδώ θα επωφεληθούμε από την μέθοδο αυτή έτσι ώστε να γίνει ο υπολογισμός του όρου αυτού με όσο το δυνατόν μικρότερο υπολογιστικό κόστος και φυσικά με ικανοποιητική ακρίβεια. Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι στην υπάρχουσα μέθοδο ο όρος υπολογίζεται στην αρχή του κάθε βήματος, αφού έχουν μετακινηθεί τα στοιχεία στροβιλότητας, προσδιορίζοντας έτσι την τιμή της πίεσης για την χρονική στιγμή  $n+1$ . Στην μέθοδο που αναπτύχθηκε ο υπολογισμός αυτός παίρνει μέρος στην παρούσα χρονική στιγμή  $n$ , προσθέτοντας έτσι ένα μεγάλο πλεονέκτημα στην χρησιμοποίηση του αλγορίθμου.

Την χρονική στιγμή  $n$  κάνουμε προβολή στους κόμβους του pm-grid (Particle Mesh) την στροβιλότητα  $\vec{\omega}$  και την μεταβολή του όγκου  $\Theta$  (dilatation) που μεταφέρουν τα στοιχεία στροβιλότητας. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζεται η στροβιλότητα  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$  και η μεταβολή του όγκου  $\theta$  των κόμβων του πλέγματος. Λύνοντας τις τέσσερις Poisson εξισώσεις που προκύπτουν με χρήση του αλγορίθμου James-Lackner (ο τρόπος επίλυσης αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο) υπολογίζουμε το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$  και το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{\Psi}$ . Συνεπώς, σε αυτό το σημείο μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας  $\vec{u}(\vec{x},t)$ ,  $\vec{x} \in \mathcal{R}^3, t > 0$ , του Particle Mesh πλέγματος από την σχέση:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \nabla \Phi(\vec{x},t) + \vec{u}_\omega(\vec{x},t) + \vec{U}_\infty \quad (4.3)$$

όπου,

$\vec{U}_\infty$  είναι η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο

$\Phi(\vec{x},t)$  είναι το βαθμωτό δυναμικό του αστρόβιλου τμήματος του πεδίου ροής

$\vec{u}_\omega(\vec{x},t)$  το στροβιλό πεδίο που δημιουργεί (η επάγει) η κατανομή στροβιλότητας

$\vec{\omega}(\vec{x},t)$

Σύμφωνα με το θεώρημα του *Helmholtz* η ταχύτητα υπολογίζεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός στροβιλού πεδίου:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \vec{A} \quad (4.4)$$

όπου,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{\omega} \quad (4.5)$$

Γράφοντας την συνολική πίεση ως άθροισμα συνεισφορών από το αστρόβιλο και το στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων έχουμε:

$$P = P_\phi + P_\omega \quad (4.6)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στο θεώρημα ορμής έχουμε:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (4.7)$$

επομένως προκύπτει:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P_\phi}{\rho} \right) + \frac{\nabla P_\omega}{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{u} = 0 \quad (4.8)$$

Υπολογίζοντας την απόκλιση (div) αυτής της εξίσωσης, αν

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P_\phi}{\rho} \right) = 0 \quad (4.9)$$

τότε προκύπτει:

$$\frac{\nabla^2 P_\omega}{\rho} = -\nabla \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) \quad (4.10)$$

Έχοντας υπολογίσει την στροβιλότητα  $\vec{\omega}(\vec{x};t)$  και την ταχύτητα  $\vec{u}(\vec{x},t)$  στους κόμβους του πλέγματος είναι δυνατή και η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης για τον προσδιορισμό της πίεσης που επάγει μια διανομή στοιχείων στροβιλότητας στους κόμβους του πλέγματος. Ο υπολογισμός της πίεσης σε όλους τους κόμβους αποσκοπεί αρχικά στο υπολογισμό της πίεσης που επάγουν τα Particles στα σημεία ελέγχου του σώματος και εν συνεχεία στην επίλυση της εξίσωσης για τον υπολογισμό της ενθαλπίας στον κάθε κόμβο (η ανάλυση του υπολογισμού της ενθαλπίας θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο). Όσον αφορά το πρώτο μέρος της χρησιμότητας αυτού του υπολογισμού, έχοντας λάβει τις τιμές της πίεσης στους

#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους

---

κόμβους του πλέγματος, με παρεμβολή στα σημεία ελέγχου του σώματος υπολογίζουμε την συνολική πίεση που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας πάνω στο σώμα.

Για την εξέταση της ορθότητας του αλγορίθμου, θα χρησιμοποιηθεί ξανά η γεωμετρία της προηγούμενης προσομοίωσης, με την θεώρηση γωνίας πρόσπτωσης μηδέν και οχτώ μοιρών, και με την ίδια σειρά εκτέλεσης.

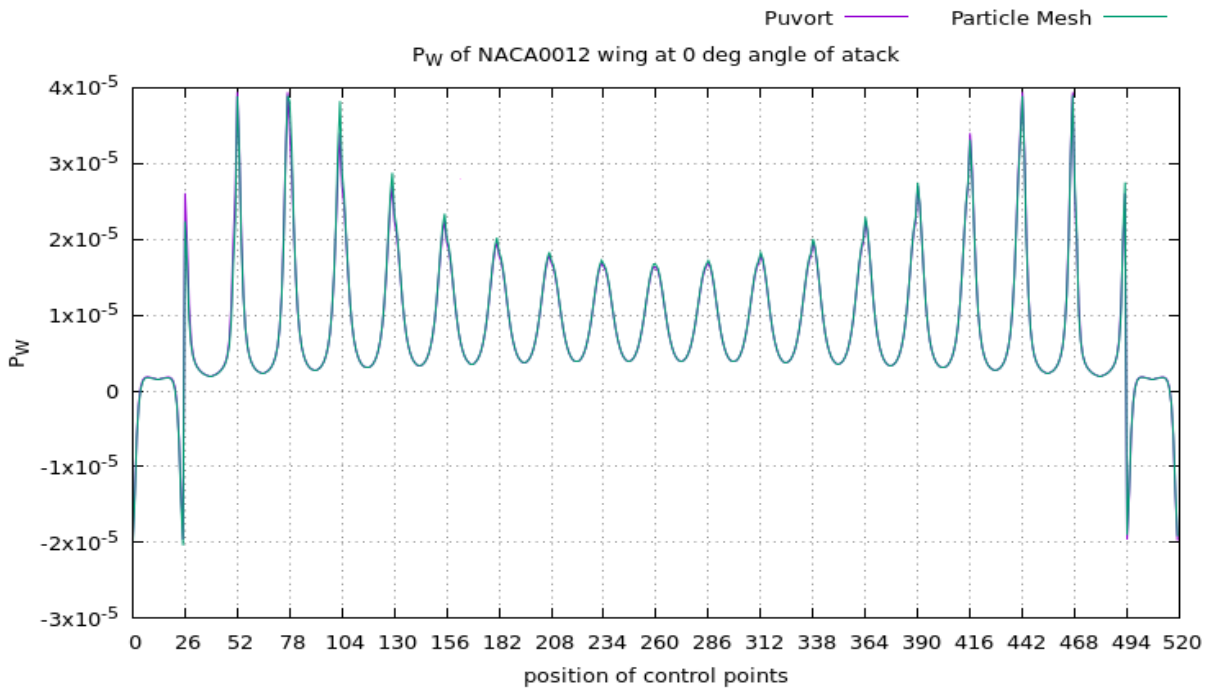
Τα διαγράμματα που ακολουθούν απεικονίζουν αρχικά την σύγκριση των δύο μεθόδων όσο αφορά τις τιμές των πιέσεων πάνω στα σημεία ελέγχου. Στη συνέχεια παρουσιάζεται και η σύγκριση των συντελεστών πίεσης  $C_p$  καθώς ο όρος υπολογισμού και εξέτασης συμβάλλει ενεργά στον προσδιορισμό αυτού του συντελεστή. Για την αποτελεσματική σύγκριση του συντελεστή πίεσης των δύο μεθόδων υπολογίστηκε ξεχωριστά η τιμή του  $C_p$  που περιλαμβάνει τον όρο  $P_\omega$ . Σε διαφορετική περίπτωση δεν θα ήταν διακρητή η σύγκριση των δύο μεθόδων λόγω των πολύ χαμηλών τιμών που λαμβάνει η πίεση  $P_\omega$  στην προσομοίωση που πραγματοποιήθηκε. Στην συνέχεια φυσικά, έχοντας υπολογίσει και τους υπόλοιπους όρους γίνεται πρόσθεση μεταξύ τους για τον υπολογισμό του συνολικού συντελεστή πίεσης.

Όπως και στην προηγούμενη προσομοίωση, έτσι και σε αυτή ο X-άξονας αναπαριστά τα σημεία ελέγχου του σώματος κατά μήκος μιας ακτινικής λωρίδας (STRIP). Στον Y-άξονα εμφανίζονται οι τιμές των πιέσεων που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα αντίστοιχα σημεία.

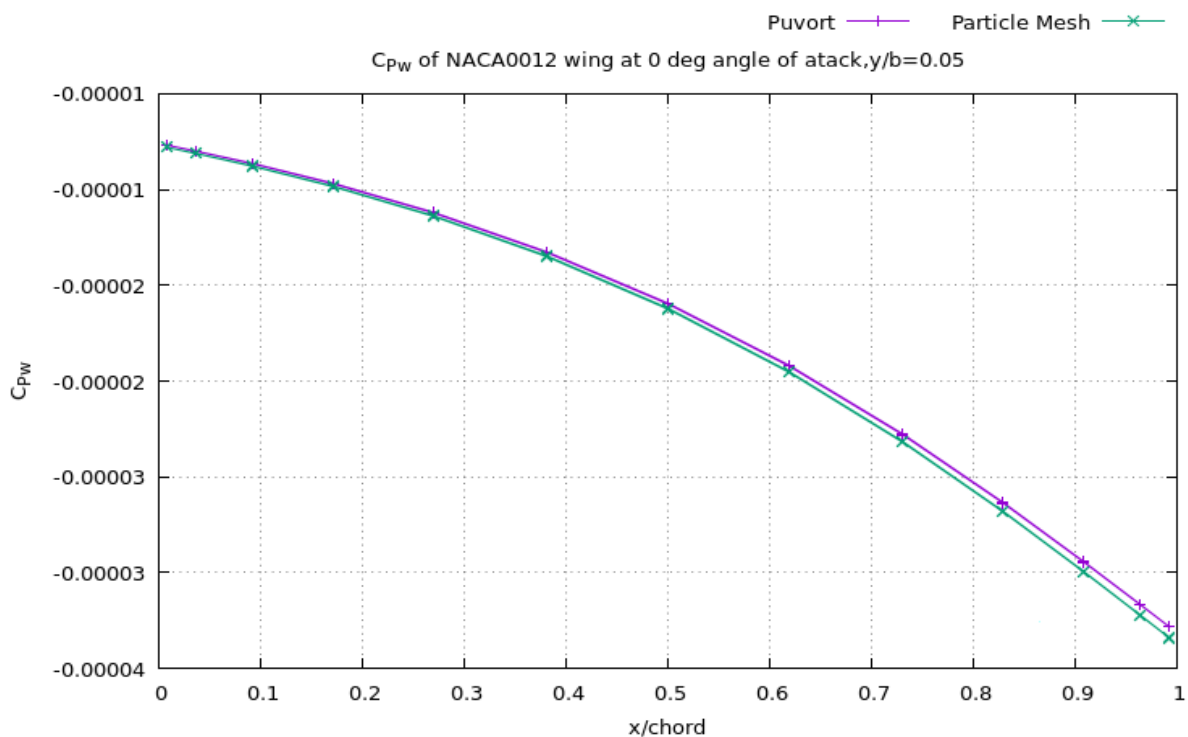
Στα διαγράμματα που ακολουθούν ο όρος 'Punort' θα δηλώνει τον μέχρι τώρα τρόπο υπολογισμού της πίεσης  $P_\omega$  ενώ ο όρος 'Particle Mesh' θα παραπέμπει στην νέα προσέγγιση του όρου αυτού που διαμορφώθηκε.

## 4.6 Αποτελέσματα προσομοίωσης (πίεση)

### 4.6.1 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης

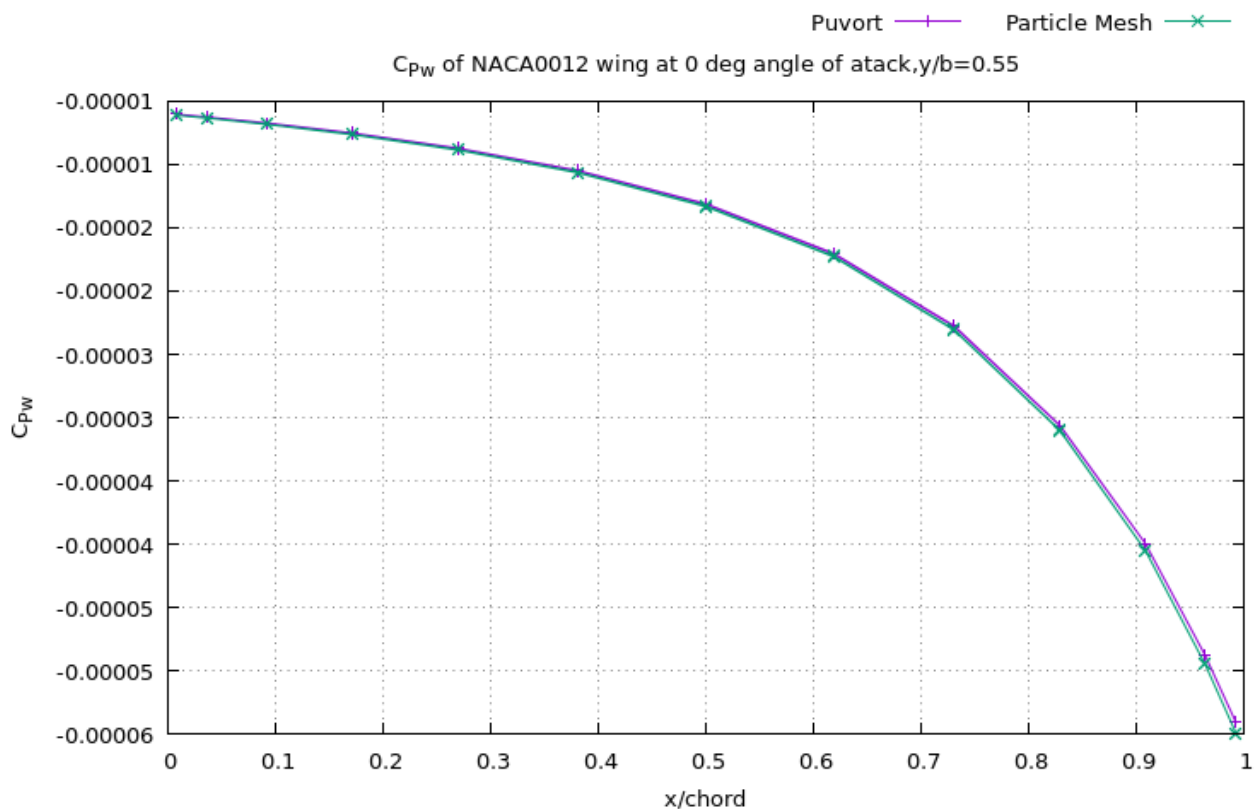


Σχήμα 4.11: Η πίεση που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα σημεία ελέγχου του σώματος. Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.

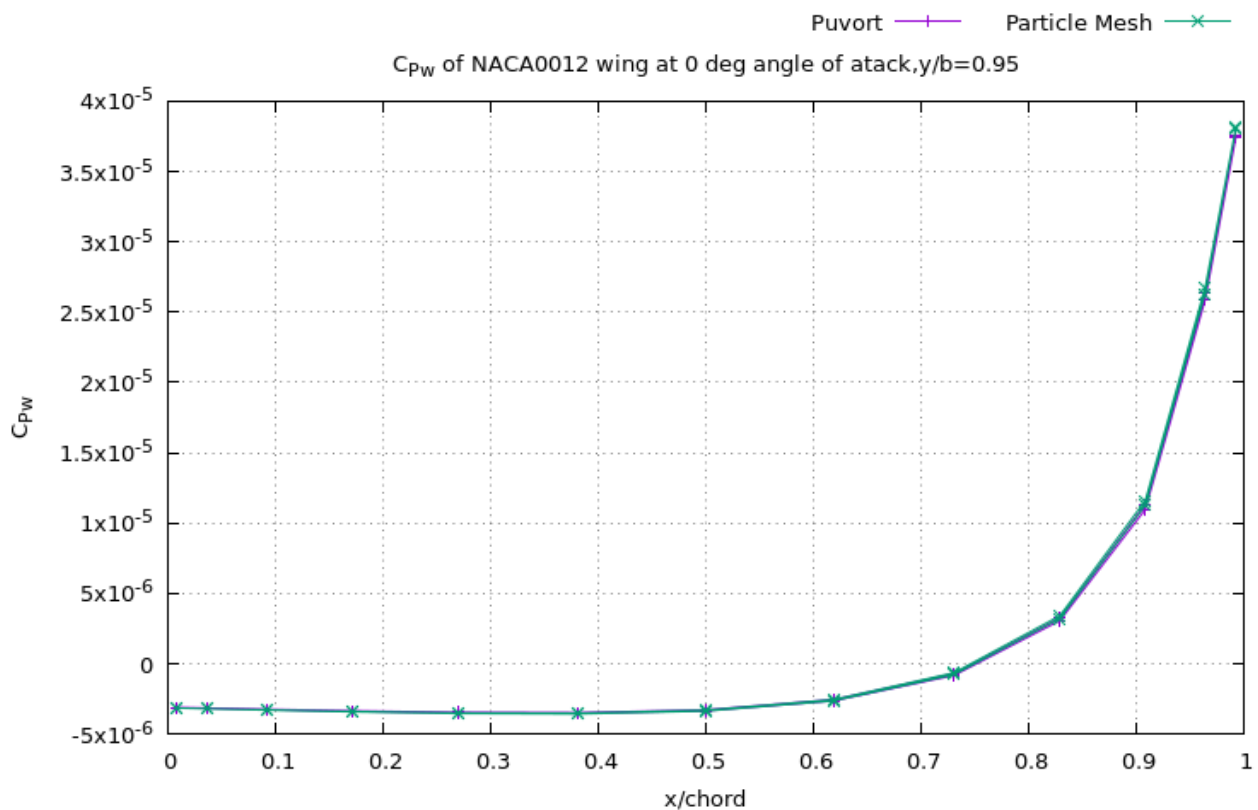


Σχήμα 4.12: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.05$ . Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.

#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους



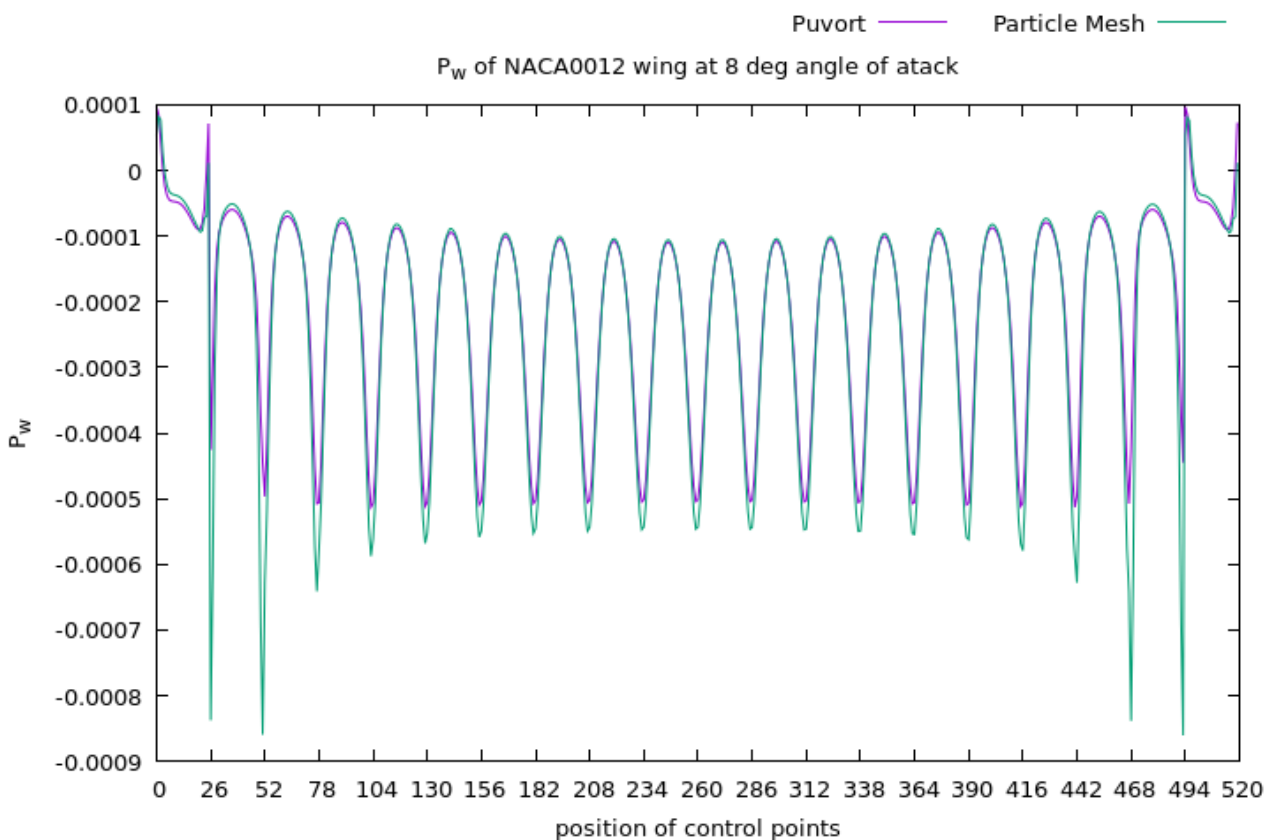
Σχήμα 4.13: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.55$ . Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.



Σχήμα 4.14: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.95$ . Γωνία πρόσπτωσης 0 μοίρες.

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι εμφανές πως η μέθοδος που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό της πίεσης  $P_w$  δίνει αποτελέσματα ταυτόσημα με τα αντίστοιχα της μεθόδου Puvort. Για την εξέταση των δύο μεθόδων σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης παρατηρούνται πολύ μικρές διαφορές (σχεδόν καθόλου) μεταξύ των τιμών των πιέσεων. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται η ορθότητα του αλγορίθμου και ακολουθεί η εξέταση του σε ροή με γωνία πρόσπτωσης μη μηδενική.

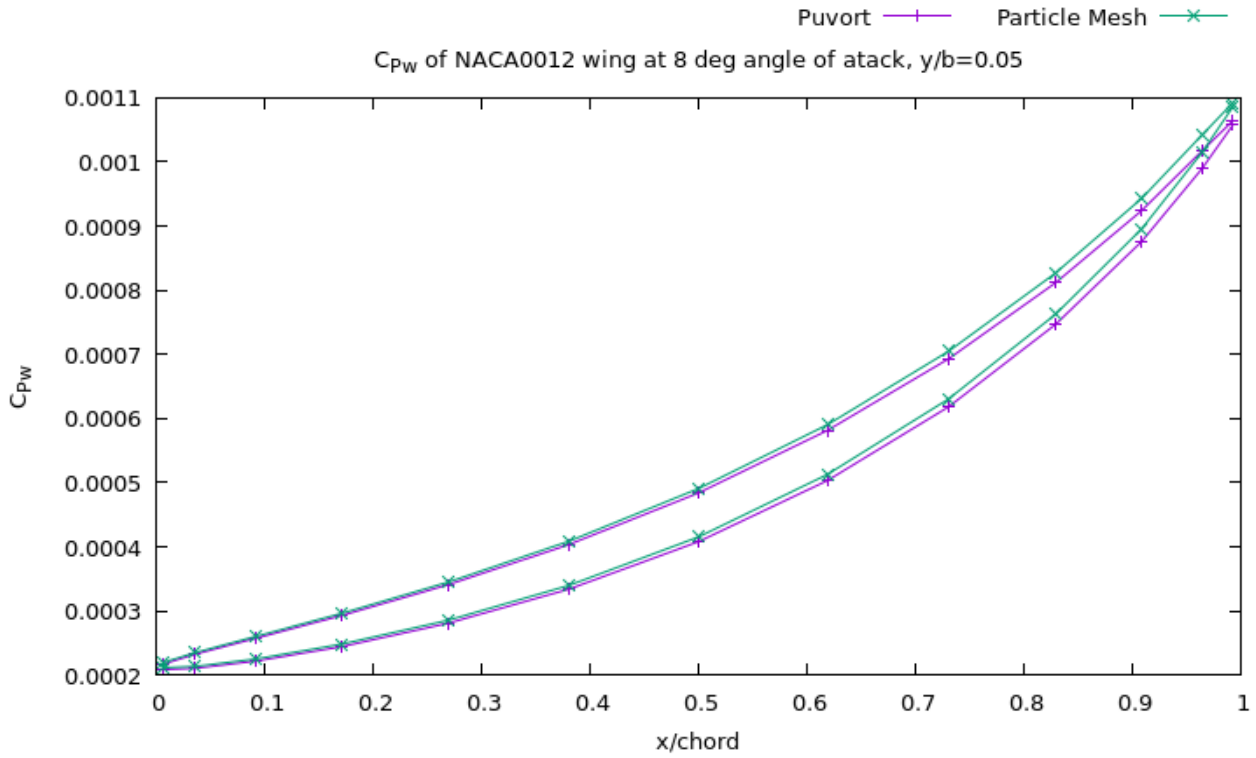
#### 4.6.2 Ροή σε γωνία πρόσπτωσης οχτώ μοιρών



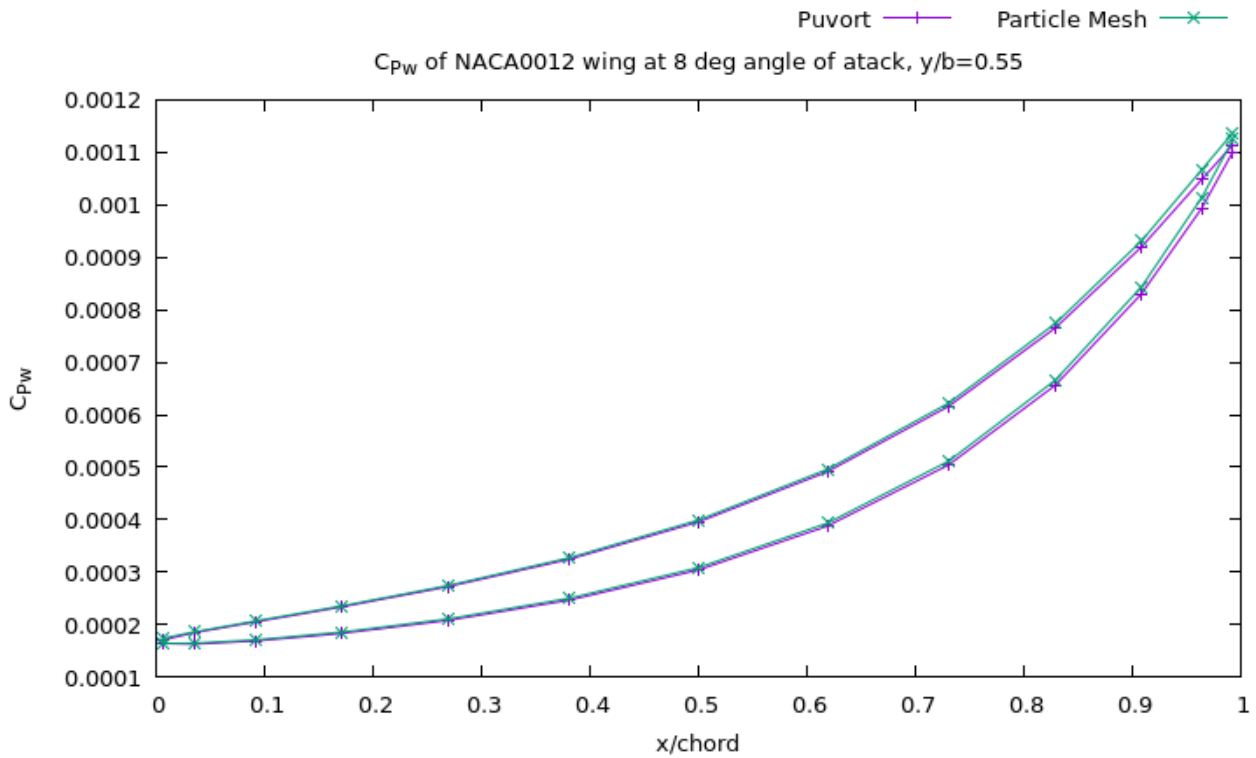
Σχήμα 4.15: Η πίεση που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στα σημεία ελέγχου του σώματος. Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

Στο παραπάνω διάγραμμα η σύγκριση των τιμών της πίεσης των δύο μεθόδων παρουσιάζει σημαντικές διαφορές, ιδίως όσο πλησιάζουμε προς το ακροπτερύγιο. Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί και προηγουμένως η γεωμετρία της πτέρυγας είναι ανοιχτή. Στην πραγματικότητα η γεωμετρία εκεί θα πρέπει να είναι κλειστή και οι επιπλέον όροι πηγών και διπόλων που διανέμονται πάνω της να προσεγγίζουν καλύτερα την ταχύτητα στις γύρω περιοχές.

#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους

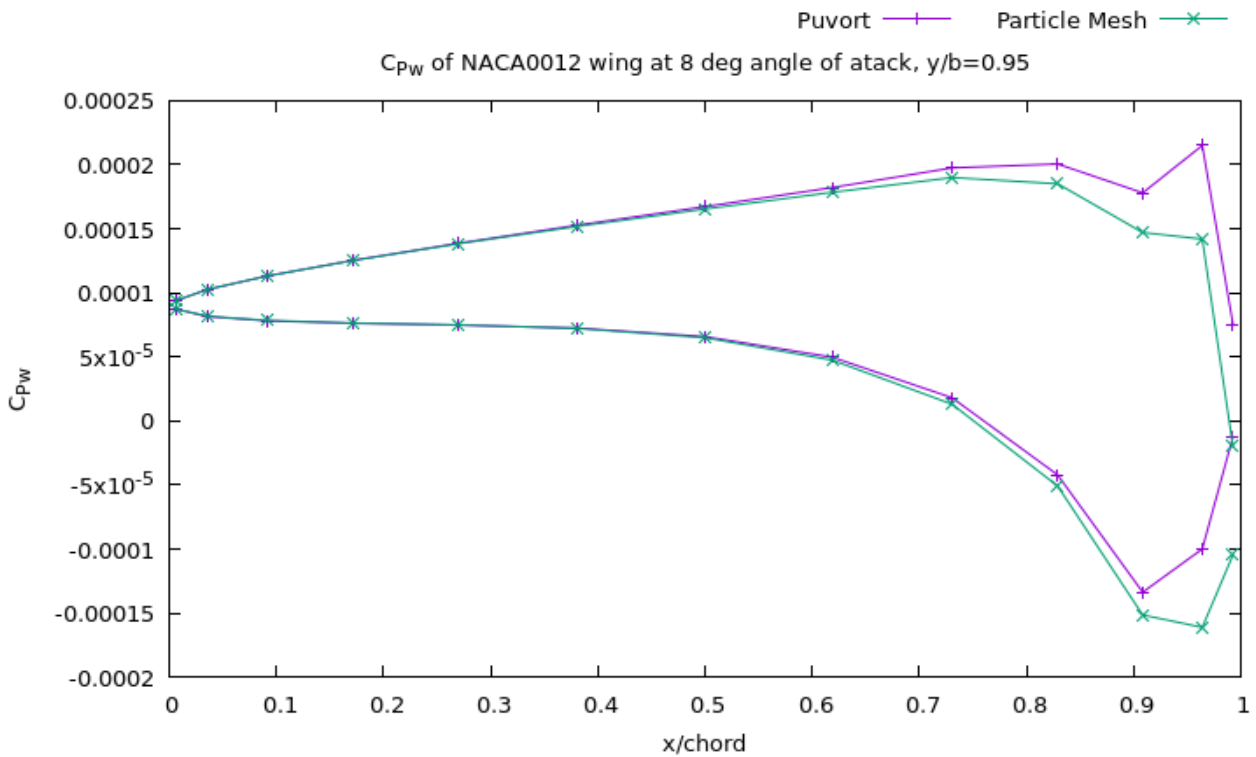


Σχήμα 4.16: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.05$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.



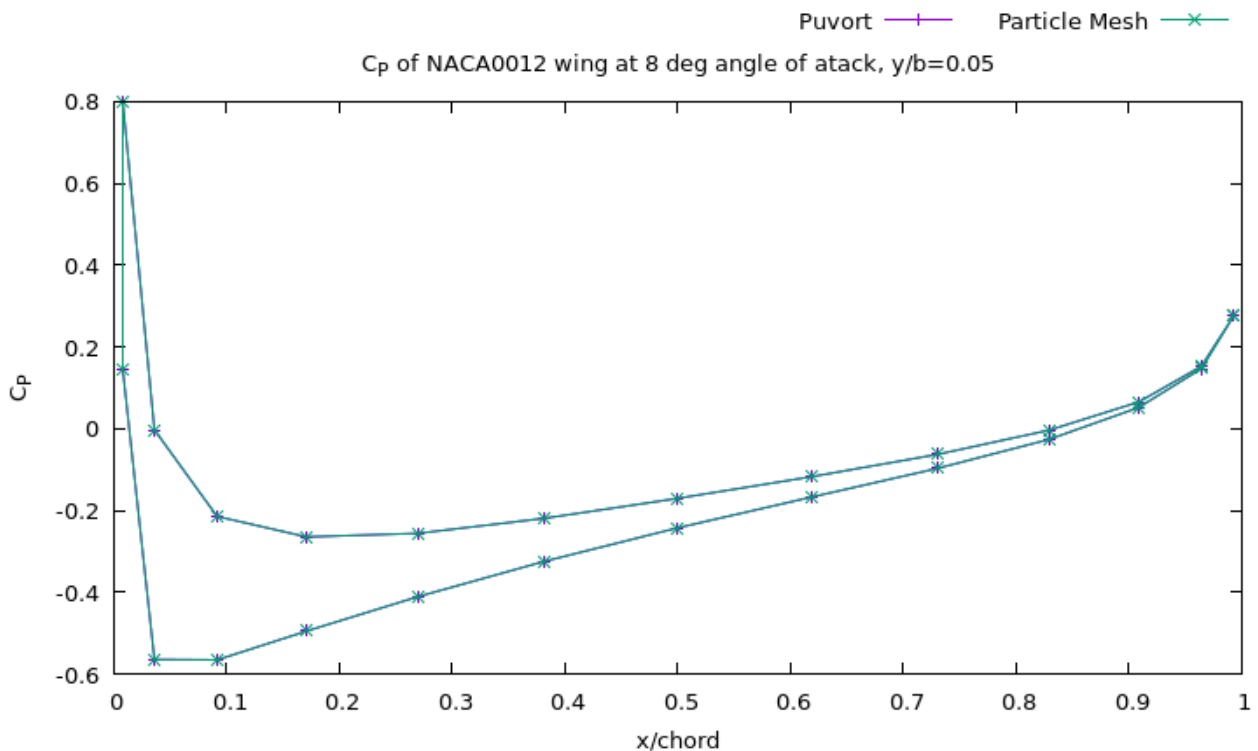
Σχήμα 4.17: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.55$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.





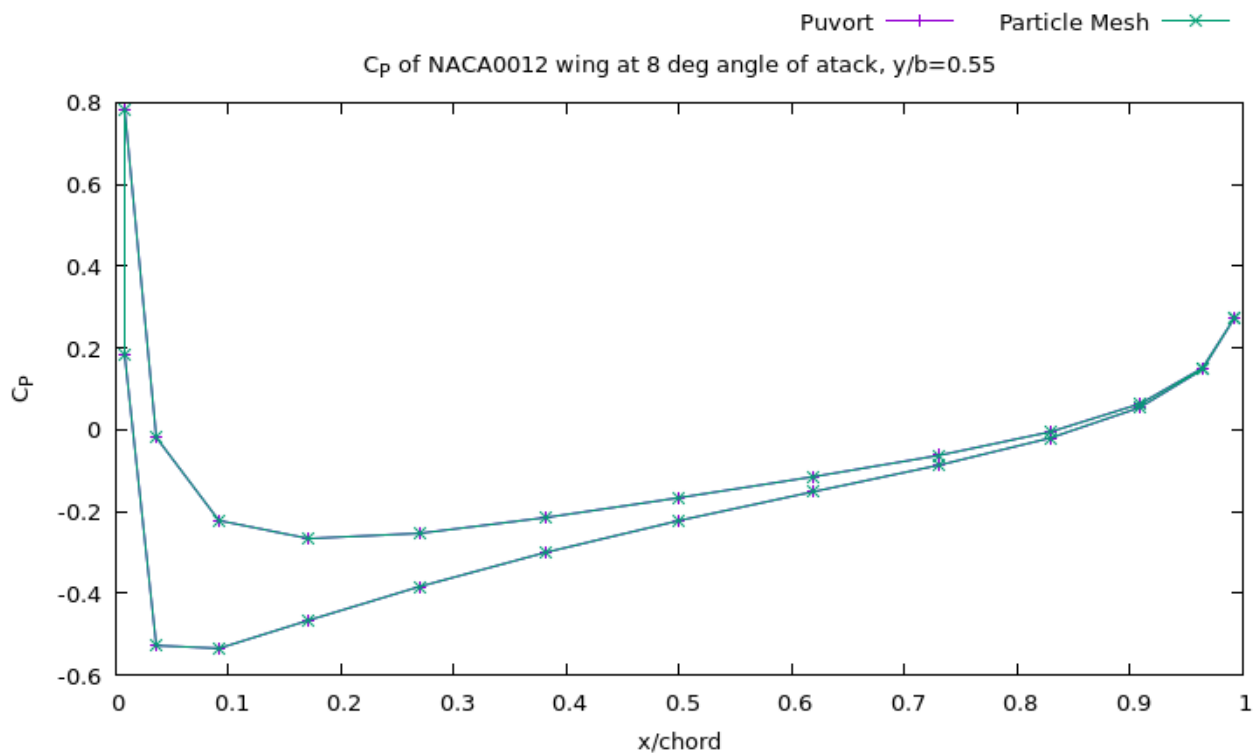
Σχήμα 4.18: Ο συντελεστής  $C_{p_w}$  στη θέση  $y/b=0.95$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

Στα επόμενα διαγράμματα απεικονίζεται ο συνολικός συντελεστής πίεσης  $C_p$  σε τρεις διαφορετικές χορδικές θέσεις (τις αντίστοιχες θέσεις που ήδη αναλύσαμε).

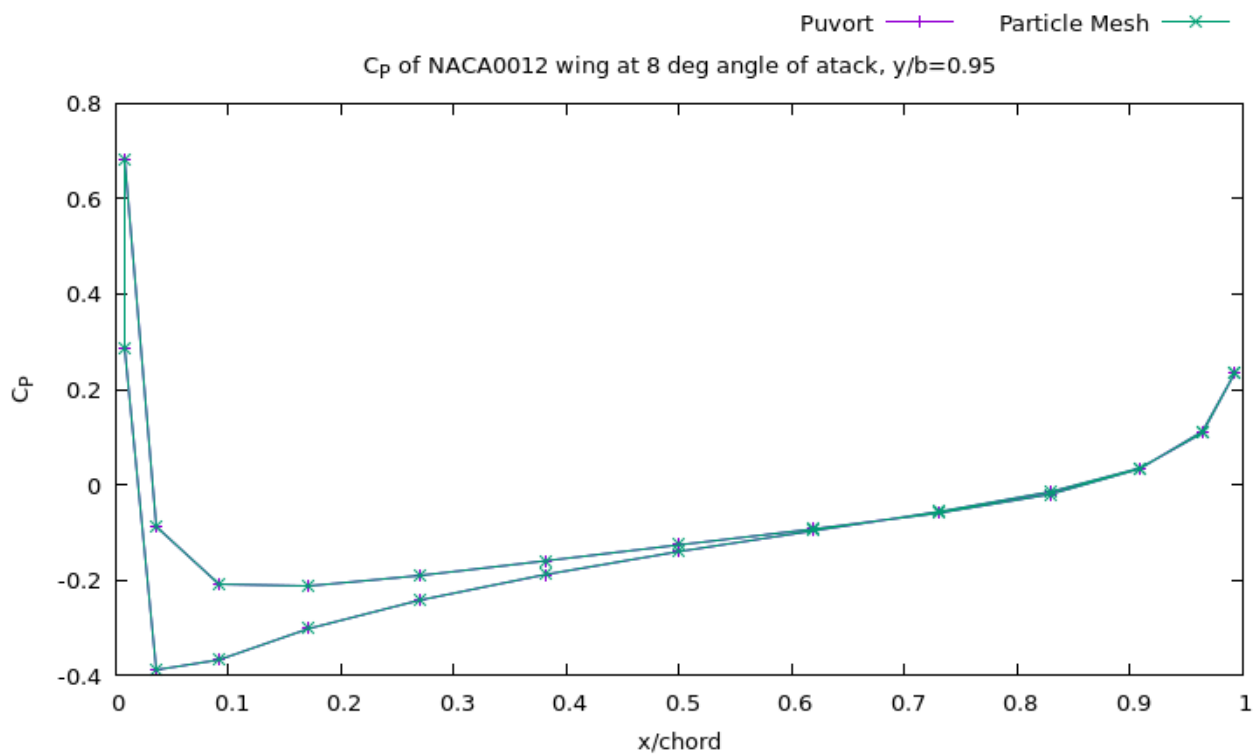


Σχήμα 4.19: Ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  στη θέση  $y/b=0.05$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

#### 4. Βελτιστοποίηση υπολογιστικού κόστους



Σχήμα 4.20: Ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  στη θέση  $y/b=0.55$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.



Σχήμα 4.21: Ο συντελεστής πίεσης  $C_p$  στη θέση  $y/b=0.95$ . Γωνία πρόσπτωσης 8 μοίρες.

### 4.6.3 Αποτίμηση των αποτελεσμάτων (πίεση)

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εξέταση υπό γωνία οχτώ μοιρών είναι άκρως ικανοποιητικά καθώς είναι όμοια με τα αντίστοιχα της ήδη υπάρχουσας μεθόδου. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, κάτω από τα αντίστοιχα διαγράμματα, υπάρχουν κάποια σφάλματα τα οποία οφείλονται κυρίως στην ανοιχτή θεώρηση της γεωμετρίας. Οι συγκρίσεις των συνολικών συντελεστών πίεσης  $C_p$  προέκυψαν όπως αναμενόταν καθώς ο όρος που εξετάζουμε είναι πολύ μικρός και δεν έχει μεγάλη επίδραση στις τυχόν μεταβολές του.

### 4.7 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, στην παράγραφο αυτή διαπιστώνουμε την ικανότητα της μεθόδου που αναπτύχθηκε να δώσει αποτελέσματα υψηλής ακρίβειας και αντίστοιχα με αυτά της μεθόδου που χρησιμοποιείται ήδη. Η σύγκριση της νέας μεθόδου υπολογισμού της ταχύτητας και της πίεσης που επάγουν τα Particles στα σημεία ελέγχου του σώματος με την μέθοδο Runort (η μέθοδος που χρησιμοποιείται ήδη) έδωσε σχετικά μικρά σφάλματα. Ωστόσο, λόγω της σημαντικής μείωσης του υπολογιστικού κόστους που επιφέρει η εφαρμογή του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε τον καθιστά αναγκαίο, ιδίως σε προβλήματα με πιο περίπλοκες γεωμετρίες.

Το υπολογιστικό κόστος υπολογίζεται σε σχέση με τον αριθμό των στοιχείων στροβιλότητας. Έχοντας  $N$  Particles, το κόστος αυτό για την μέθοδο που εφαρμοζόταν ήδη ανέρχεται σε  $N^2$ . Με την χρήση της νέας μεθόδου υπολογισμού (Particle Mesh) το κόστος μειώνεται σε  $N \log N$ .

## 5. Προσέγγιση συμπίεστος

### 5.1 Εισαγωγή

Η πτέρυγα είναι το τμήμα εκείνο του αεροσκάφους στο οποίο αναπτύσσεται και εφαρμόζεται η άνωση. Η ροή του αέρα γύρω από την πτέρυγα είναι τρισδιάστατη, το δε ρευστό, είναι συμπίεστο και συνεκτικό. Η αεροδυναμική μελέτη μια πτέρυγας αποσκοπεί στον υπολογισμό της διανομής των πιέσεων και κατά συνέπεια των δυνάμεων της άνωσης και της οπισθέλκουσας που ενεργούν στην πτέρυγα του αεροσκάφους. Ο υπολογισμός όμως αυτός είναι αρκετά δύσκολος στην πληρότητα του γι' αυτό συνήθως εφαρμόζεται η διάσπαση του προβλήματος σε επί μέρους προβλήματα. Οι μέχρι στιγμής προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν, είχαν την παραδοχή ασυμπίεστου ρευστού και μη συνεκτικού. Στο κεφάλαιο αυτό, θα γίνει η προσέγγιση του προβλήματος με διορθώσεις λόγω συμπίεστος.

Σε χαμηλές ταχύτητες, η συμπίεστος του αέρα δεν είναι σημαντική σε σχέση με την σχεδίαση του αεροσκάφους, αλλά καθώς η ροή του αέρα προσεγγίζει την ταχύτητα του ήχου, παρουσιάζονται μια σειρά αεροδυναμικών φαινομένων που πλέον επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό το αεροσκάφος. Η ανάγκη αυτή για την τροποποίηση του κώδικα, που χρησιμοποιείται ήδη, εμφανίστηκε στο κεφάλαιο 3, στην σύγκριση του συντελεστή πίεσης για διάφορες ακτινικές θέσεις πάνω στο αεροσκάφος ACFA2020. Η σημαντική διαφορά στην σύγκριση των αποτελεσμάτων ήταν εμφανής και για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε ο κώδικας που θα λαμβάνει υπόψη την τυχόν μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας του ρευστού.

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε ρευστό αποτελεί βασική έννοια στην ροή του συμπίεστου ρευστού. Ως ταχύτητα διαδόσεως του ήχου εννοούμε την ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα κύματα που προκαλούνται από μικρές διαταραχές. Συχνά λέγονται και ακουστικά κύματα ή ηχητικά κύματα. Με την εισαγωγή της ταχύτητας του ήχου μπορούμε να εισάγουμε τον αριθμό Mach, ο οποίος ορίζεται ως:

$$M = \frac{u}{c} \quad (5.1)$$

όπου,  $u$  είναι η ταχύτητα του σώματος και  $c$  η ταχύτητα του ήχου.

Στην αδιάστατη ροή, ο εισαγωγή του αριθμού Mach αποτελεί σημαντικό μέγεθος για τον καθορισμό των αδιάστατων μεγεθών στην επ' άπειρον ροή. Το κριτήριο συμπίεστος για μια ροή είναι ο αριθμός Mach να είναι μεγαλύτερος του 0.3

( $M > 0.3$ ). Η ανάλυση σε συμπίεστη ροή είναι συνεπώς πιο σύνθετη και συνήθως γίνεται η παραδοχή της ισεντροπικής ροής. Στην παρούσα διπλωματική, η προσέγγιση της συμπίεστικότητας του ρευστού πραγματοποιήθηκε με δύο τρόπους:

- Με την παραδοχή της ισεντροπικής ροής γύρω από το υπό εξεταζόμενο σώμα
- Με την επίλυση των *Lagrange* εξισώσεων ενέργειας και συνέχειας.

## 5.2 Η περίπτωση ισεντροπικής ροής γύρω από την πτέρυγα

Με την εισαγωγή της συνθήκης ισεντροπικής ροής γύρω από το σώμα, η ενθαλπία στους κόμβους του Particle Mesh πλέγματος υπολογίζεται από την σχέση:

$$h = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P}{\rho} \quad (5.2)$$

Από την εξίσωση *Bernoulli* προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}^2}{2} + h_p + h_\omega = \frac{U_\infty^2}{2} + h_\infty \quad (5.3)$$

όπου:  $\Phi$  είναι το συνολικά επαγόμενο δυναμικό του πεδίου ροής στον κόμβο του πλέγματος

$\vec{u}$  η συνολική ταχύτητα του κόμβου του πλέγματος του πεδίου ροής

$h_p$  η ενθαλπία του κόμβου του πλέγματος που οφείλεται από το αστρόβιλο μέρος της αναπαράστασης των ταχυτήτων,

$h_\omega$  η ενθαλπία του κόμβου του πλέγματος που οφείλεται στο στροβιλό μέρος της αναπαράστασης ταχυτήτων και προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Poisson που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 4,

$U_\infty$  η αδιατάρακτη ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο και

$h_\infty$  η ενθαλπία του ρευστού στο άπειρο.

Λύνοντας την εξίσωση (5.3) ως προς την ενθαλπία  $h_p$  έχουμε:

$$h_p = \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\vec{u}^2}{2} + h_\infty - h_\omega \quad (5.4)$$

Η επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος απαιτεί πλήρη κάλυψη του πλέγματος με στοιχεία στροβιλότητας, έτσι ώστε να αποτυπώνονται οι μεταβολές της πίεσης και

## 5. Προσέγγιση συμπίεστος

της πυκνότητας, συνεπώς και της ενθαλπίας. Για τον λόγο αυτό, εφαρμόζεται ανακατασκευή των ροϊκών δεδομένων σε κάθε χρονικό βήμα (re-meshing). Με την εισαγωγή της μεθόδου αυτής επιτυγχάνεται η επαναδιανομή των στοιχείων στροβιλότητας σε δομημένες θέσεις με σκοπό να διατηρηθεί η ομοιόμορφη κατανομή των στοιχείων.

Έχοντας υπολογίσει την ενθαλπία στους κόμβους του πλέγματος, είναι δυνατός και ο υπολογισμός της πυκνότητας του πεδίου ροής. Από την συνθήκη ισεντροπικής ροής έχουμε:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_{oo}}{\rho_{oo}^\gamma} \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho_{oo}} = \left(\frac{P}{P_{oo}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (5.5)$$

Από την εξίσωση (5.4) και (5.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = -\left[-\frac{U_{oo}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{u}^2}{2} - h_{oo} + h_\omega\right] \Leftrightarrow \frac{\rho}{\rho_{oo}} = \left(\frac{P/\rho}{P_{oo}/\rho_{oo}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{h_P}{h_{oo}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.6)$$

όπου λύνοντας ως προς την πυκνότητα:

$$\rho = \rho_{oo} \left(\frac{h_P}{h_{oo}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5.7)$$

Από την επίλυση των εξισώσεων (2.43) και (2.44) γινόταν ο υπολογισμός της στροβιλότητας  $\vec{\Omega}$  και την μεταβολής του όγκου  $\Theta$  των στοιχείων στροβιλότητας (Particles) για την επόμενη χρονική στιγμή. Μέχρι στιγμής, λόγω της ασυμπίεστης ροής γύρω από την πτέρυγα, ο δεύτερος όρος των εξισώσεων αυτών ήταν μηδέν. Έχοντας υπολογίσει την ενθαλπία σε όλους τους κόμβους του πλέγματος, πλέον ο δεύτερος όρος αυτών των εξισώσεων είναι μη μηδενικός και κατά συνέπεια εμφανίζεται μεταβολή του όγκου των στοιχείων στροβιλότητας. Από τις εξισώσεις (2.43) και (2.44) και την συνθήκη της ισεντροπικής ροής προκύπτει:

$$\frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \nabla \cdot [(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\nabla \rho}{\rho} \times \nabla h] \quad (5.8)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \nabla \cdot [(2\|\nabla \vec{u}\|) - \nabla \cdot (\nabla h)] \quad (5.9)$$

Γνωρίζοντας την πυκνότητα και την ενθαλπία στους κόμβους του πλέγματος είναι δυνατή η επίλυση και των δεύτερων μελών των παραπάνω εξισώσεων. Ωστόσο, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του χρονικού βήματος και της πύκνωσης του πλέγματος λόγω της ευαισθησίας των παραπάνω υπολογισμών.

Από την εξίσωση (2.39) και (2.40), διατηρώντας σταθερή την μάζα των στοιχείων στροβιλότητας, έχουμε:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \Leftrightarrow M^{n+1} = M^n = \rho_{oo} V_P^{(0)} = M \Leftrightarrow$$

$$\rho_P^{n+1} V_P^{n+1} = M \Leftrightarrow V_P^{n+1} = \frac{M}{\rho_P^{n+1}} \quad (5.10)$$

όπου,  $V_P^{(0)}$  ο αρχικός όγκος των στοιχείων στροβιλότητας  
 $V_P^{n+1}$  ο όγκος των στοιχείων στροβιλότητας αφού μετακινηθούν  
 $\rho_P^{n+1}$  η πυκνότητα των στοιχείων στροβιλότητας στην νέα χρονική στιγμή

Έχοντας υπολογίσει την πυκνότητα στους κόμβους του Particle Mesh πλέγματος είναι δυνατός και ο προσδιορισμός της πυκνότητας του κάθε στοιχείου στροβιλότητας. Αυτό επιτυγχάνεται με παρεμβολή από τους κόμβους στα particles.

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων αναπτύχθηκε σε κώδικα για την προσομοίωση της συμπιεστότητας της ροής.

### 5.3 Εξίσωση ενέργειας και συνέχειας

Στις προσομοιώσεις που έλαβαν μέρος έως τώρα, στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, γινόταν ο υπολογισμός της νέας θέσης των στοιχείων στροβιλότητας μάζας  $M$  και της πληροφορίας που μετέφεραν με την επίλυση των Lagrangian εξισώσεων. Τα στοιχεία αυτά μέχρι στιγμής μετέφεραν στροβιλότητα  $\Omega$ . Ωστόσο, λόγω της υπόθεσης ασυμπίεστης ροής δεν γινόταν κάποιος υπολογισμός για την μεταβολή του όγκου των στοιχείων. Στην προηγούμενη ενότητα αναλύθηκε ο τρόπος προσέγγισης της συμπιεστότητας με την επίλυση της εξίσωση Bernoulli στο πλέγμα του πεδίου ροής. Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιαστεί ένας διαφορετικός τρόπος όπου με την επίλυση των Lagrangian εξισώσεων ενέργειας και συνέχειας θα είναι δυνατή η εξέταση της μεταβολής της ενθαλπίας και της πυκνότητας στο πεδίο ροής. Πλέον, τα στοιχεία στροβιλότητας μάζας  $M$ , εκτός από στροβιλότητα θα μεταφέρουν και ενθαλπία. Από την εξίσωση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{DH}{Dt} = V[(2-\gamma)h\theta] \quad (5.11)$$

Όπου,  $H = hV$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, σε κάθε βήμα προβάλλουμε την πληροφορία των στοιχείων στροβιλότητας πάνω στους κόμβους του πλέγματος. Επομένως, με προβολή της ενθαλπίας των στοιχείων στροβιλότητας, πραγματοποιείται ο υπολογισμός του μεγέθους αυτού σε όλους τους κόμβους.

Κάνοντας προβολή της μάζας  $M$  των στοιχείων στροβιλότητας και από την εξίσωση (2.39), όπου  $M = \rho V$ , υπολογίζεται η πυκνότητα στους κόμβους του πλέγματος. Η μεταβολή του όγκου  $\Theta$  των particles δίνεται από την σχέση:

$$\Theta = \theta V \quad (5.12)$$

όπου,  $\theta$  είναι η μεταβολή του όγκου στους κόμβους.

Όταν γίνεται προβολή ενός στοιχείου στροβιλότητας πάνω στους κόμβους του πλέγματος, η ποσότητα που προβάλλεται διαιρείται με τον αντίστοιχο όγκο του στοιχείου. Είναι εμφανές λοιπόν, πως με την προβολή υπολογίζεται πάνω στους κόμβους το αντίστοιχο μέγεθος που μεταφέρεται από τα στοιχεία, εκτός από την μάζα που όταν διαιρεθεί με τον όγκο το αποτέλεσμα είναι η πυκνότητα.

Συνοψίζοντας λοιπόν, έχοντας προβάλει τα μεγέθη που μεταφέρουν τα στοιχεία στροβιλότητας πάνω στους κόμβους του πλέγματος, είμαστε σε θέση πλέον να υπολογίσουμε το δεύτερο μέλος των εξισώσεων Lagrange. Ο τρόπος επίλυσης των εξισώσεων αυτών έχει αναλυθεί ήδη στο κεφάλαιο 2 (22).

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, υποθέτουμε ότι η μάζα των στοιχείων παραμένει σταθερή και ότι μεταβάλλεται ο όγκος τους. Στην μέχρι στιγμής επίλυση των προβλημάτων δεν γινόταν χρήση της εξίσωσης συνέχειας (2.41)

$$\frac{DV}{Dt} = \theta V$$

καθώς ο όρος  $\theta$  ήταν ίσος με το μηδέν ( δεν μεταβάλλεται ο όγκος στη προσέγγιση των προβλημάτων με την παραδοχή ασυμπίεστου ρευστού). Στις προσομοιώσεις όμως όπου το ρευστό είναι συμπίεστο και μεταβάλλεται η πυκνότητα και η ενθαλπία του πεδίου ροής η χρήση της εξίσωσης συνέχειας είναι αναγκαία.

Συνοψίζοντας λοιπόν, στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεων Lagrange που λύναμε μέχρι στιγμής, προσθέτουμε και τις εξισώσεις συνέχειας και ενέργειας υπολογίζοντας με αυτόν τον τρόπο την ενθαλπία και την πυκνότητα στο πεδίο ροής. Επίσης, λόγω της μεταβολής της ενθαλπίας και της πυκνότητας, πλέον υπολογίζεται και προστίθεται και ο δεύτερος όρος στις εξισώσεις (2.43) και (2.44). Με τον τρόπο αυτό προσεγγίζεται η συμπίεστος της ροής γύρω από το εξεταζόμενο σώμα.



## 6. Συμπεράσματα-αποτίμηση της εργασίας

### 6.1 Σύνοψη της διπλωματικής εργασίας

Στο παρόν εκπόνημα πραγματοποιήθηκε η αεροδυναμική μελέτη του αεροσκάφους ACFA2020 με την χρήση του υπολογιστικού κώδικα του εργαστηρίου και της μεθόδου Particle Mesh, με τη θεώρηση μη συνεκτικής ασυμπίεστης ροής. Η μεγάλη διαφορά στη σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν, με αντίστοιχα από προσομοίωση με θεώρηση του πεδίου ροής ως συμπιεστό, οδήγησε στην ανάγκη ανάπτυξης μιας μεθοδολογίας που θα προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια το πρόβλημα της συμπιεστότητας και θα λαμβάνει υπόψη τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας στο πεδίο ροής.

Το δεύτερο στάδιο περιλάμβανε την μείωση του υπολογιστικού κόστους στον υπολογισμό της ταχύτητας και της πίεσης που επάγουν τα στοιχεία στροβιλότητας στο υπό εξεταζόμενο σώμα με χρήση της μεθόδου Particle Mesh. Η μέθοδος που αναπτύχθηκε εξετάστηκε για διάφορες γωνίες πρόσπτωσης. Από την σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν, με αντίστοιχα της ήδη υπάρχουσας μεθόδου, εξακριβώθηκε η αξιοπιστία της μεθόδου. Με την χρήση της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε, το υπολογιστικό κόστος μειώθηκε από  $N^2$  σε  $N \log N$ .

Στην συνέχεια έλαβε μέρος η προσέγγιση της συμπιεστότητας του ρευστού. Οι δύο μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν προγραμματίστηκαν σε υπολογιστικό κώδικα και πραγματοποιήθηκαν κάποιες πειραματικές προσπάθειες για να εξακριβωθεί το κατά πόσο είναι εφικτή η μοντελοποίηση αυτή.

## **6.2 Προτάσεις για μελλοντική εργασία**

Έχοντας αναπτύξει την μεθοδολογία προσέγγισης της συμπίεστικότητας της ροής, μια πρώτη ενέργεια για μελλοντική εργασία αποτελεί η υλοποίηση της σε προγραμματιστικό περιβάλλον και η σύγκριση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν με τα αντίστοιχα της συμπίεστης ροής που είχαν αποτυπωθεί στο παρελθόν. Έχοντας εξετάσει την ορθότητα του υπολογιστικού κώδικα, μια μετέπειτα ενέργεια θα μπορούσε να είναι η εφαρμογή του σε αεροδυναμικά προβλήματα, όπου εμφανίζονται έντονες μεταβολές της πυκνότητας και της πίεσης στο πεδίο ροής. Στην συνέχεια, μπορεί να πραγματοποιηθεί η προσθήκη επιφανειών ελέγχου στο αεροσκάφος ACFA 2020, να υλοποιηθεί η μοντελοποίηση τους και να εξεταστεί η αεροδυναμική συμπεριφορά τους.

---

## Βιβλιογραφία

- [1] G. Papadakis “Development of a hybrid compressible vortex particle method and application to external problems including helicopter flows”, Ph.D. Thesis, 2014
- [2] P. I. Chasapogiannis, “Steady and unsteady axial rotor performance analysis”, Ph.D Thesis, 2005
- [3] Σ. Βουτσινάς “Μη μόνιμη Αεροδυναμική, Αερολαστικότητα, Αερακουστική”, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις
- [4] Martin Kozek, Alexander Schirrer “Modeling and Control for a Blended Wing Body Aircraft, A Case Study”, Series editors, Springer (2014)
- [5] Γ. Μπεργελές “Η Αεροδυναμική του Υποχητικού Αεροσκάφους & η Μηχανική της Πτήσης”, Εκδόσεις Συμεών, (2009)
- [6] Wing Calculation-Aerodynamics  
“<https://sites.google.com/site/aerodynamicpropulsion/wings-measurements/wing-calculation>”
- [7] Variation on a Theme “<https://www.nasa.gov/content/variation-on-a-theme>”  
Nasa
- [8] Wikipedia “[https://en.wikipedia.org/wiki/Blended\\_wing\\_body](https://en.wikipedia.org/wiki/Blended_wing_body)”
- [9] Ι. Αντωνιάδης “Δυναμική και Έλεγχος Πτήσης”, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και βοηθήματα, (2015)