



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα για μη ομογενές σώμα

user

της

Μπουζνεάν Σιμόνας Μιχαέλας

Ιούλιος 2018

Επιβλέπων: Δρόσος Γκιντίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του ευθέος και του αντιστρόφου προβλήματος σκέδασης. Αρχικά ορίζεται το κάθε πρόβλημα για ένα μη-διαπερατό σώμα. Η μερική διαφορική εξίσωση που χρησιμοποιείται στην μοντελοποίηση των προβλημάτων είναι η εξίσωση Helmholtz για διάφορες συνοριακές συνθήκες. Εισάγονται βασικές έννοιες τελεστών και θεωρήματα που είναι απαραίτητα εργαλεία της μελέτης. Με την χρήση του μακρινού πεδίου και των αποτελεσμάτων που μπορούμε να εξάγουμε από αυτά τα δεδομένα, γίνεται η προσέγγιση των λύσεων και των δύο προβλημάτων. Στο αντίστροφο πρόβλημα, καθώς παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες αναφέρεται και η μη καλή τοποθέτηση του καθώς και μέθοδοι ομαλοποίησης όπως η κανονικοποίηση Tikhonov. Επίσης παρουσιάζονται μέθοδοι επίλυσης με διαφορετικές προσεγγίσεις. Η βασική εξίσωση της εργασίας είναι η εξίσωση Lippmann-Schwinger η οποία μας εξασφαλίζει και την τελική λύση του προβλήματος. Είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση που στηρίζεται στην χρήση τελεστών για την εύρεση της λύσης με έναν αρκετά απλοποιημένο τρόπο. Τέλος, με ένα αριθμητικό παράδειγμα επιτυγχάνεται η λύση του ευθέος προβλήματος σκέδασης, σε μία μοναδιαία σφαίρα για διάφορες τιμές κυματάρθμου και με κατάλληλες παραμέτρους. Η παραπάνω αριθμητική επίλυση έγινε σε περιβάλλον Mathematica.

ABSTRACT

The purpose of this diploma is the study of the direct and the inverse scattering problem. Initially we define scattering theory for an inhomogeneous medium. In the case of scattering by an impenetrable obstacle the problem is modeled as a boundary value problem for Helmholtz equation. Each boundary condition leads to another type of problem. We introduce the far field operator and theorems that are the tools which are necessary for this study. The basic function for this procedure is the far field amplitude that provides us the necessary information to approximate solutions. We refer at the improperly posed nature of the inverse scattering problem and regularization methods such as Tikhonov regularization. The equation that provides us the solution to the inhomogeneous scattering problem is the Lippmann-Schwinger equation. At the end we have a numerical method for the direct scattering problem for several simple cases. We used Mathematica for the numerical method.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μία εισαγωγή στην θεωρία της σκέδασης και ειδικότερα στο ευθύ και στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ενός αντικειμένου-στόχου D . Στη συνέχεια, μοντελοποιούμε τα προβλήματα αυτά, τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση Helmholtz με διάφορες συνοριακές συνθήκες, και κάνουμε μία αναφορά για το πως προέκυψε αυτή η εξίσωση από την διάδοση ενός ακουστικού κύματος μέσα σε ρευστό.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα θεωρήματα Green και την συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld που ικανοποιείται μακριά από τον σκεδαστή. Επίσης μελετάμε το μακρινό πεδίο και την συμπεριφορά των λύσεων στο άπειρο. Εισάγουμε βασικούς ολοκληρωτικούς τελεστές που χρησιμοποιούμε, τις κυματικές συναρτήσεις Herglotz καθώς και ορισμούς όπως η συνέχεια Holder. Όλα αυτά αποτελούν βασικά εργαλεία της θεωρίας της σκέδασης.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζουμε το πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων σε μη ομογενή μέσα διάδοσης. Αρχικά εξηγούμε το φυσικό πρόβλημα που μας οδήγησε στο συγκεκριμένο μοντέλο και στη συνέχεια αναφερόμαστε στο μακρινό πεδίο, του οποίου οι πληροφορίες είναι απαραίτητες στη λύση του προβλήματος. Η εξίσωση στην οποία στηρίζεται η λύση που παρουσιάζουμε είναι η ολοκληρωτική Lippmann-Schwinger, μία εξίσωση που περιγράφει ισοδύναμα το πρόβλημα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάμε εκτενέστερα το αντίστροφο πρόβλημα καθώς και την μη-καλά τοποθετημένη φύση του. Αναπτύσσουμε μεθόδους ομαλοποίησης όπως η μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov και περιγράφουμε μεθόδους επίλυσης και προσέγγισης των προβλημάτων.

Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο έχουμε μία αριθμητική εφαρμογή του ευθέως προβλήματος όπου με την βοήθεια της εξίσωσης Lippmann-Schwinger προσδιορίζουμε γραφικά τον σκεδαστή για την περίπτωση μίας σφαίρας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.Εισαγωγή για ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα για την εξίσωση Helmholtz

- 1.1 Ευθύ μη ομογενές πρόβλημα
- 1.2 Αντίστροφο μη ομογενές πρόβλημα
- 1.3 Εξίσωση Helmholtz

2.Ολοκληρωτικοί τελεστές

- 2.1 Το θεώρημα Green και η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld
- 2.2 Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος
- 2.3 Συνέχεια Holder
- 2.4 Ολοκληρωτικοί τελεστές

3.Μη ομογενές σώμα και εξίσωση Lippmann

- 3.1 Διατύπωση φυσικού προβλήματος
- 3.2 Η εξίσωση Lippmann-Schwinger
- 3.3 Το μακρινό πεδίο
- 3.4 Το εσωτερικό πρόβλημα διάδοσης

4.Αντίστροφο πρόβλημα

- 4.1 Μη καλά τοποθετημένα προβλήματα
- 4.2 Μοναδικότητα και φυσική προσέγγιση
- 4.3 Ο τελεστής μακρινού πεδίου
- 4.4 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης
- 4.5 Μέθοδοι αποσύνθεσης
- 4.6 Μέθοδοι δειγματοληψίας

5.Αριθμητική εφαρμογή και συμπεράσματα

1.Εισαγωγή σε ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης για εξίσωση Helmholtz

Η θεωρία σκέδασης έχει παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη μαθηματική φυσική του εικοστού αιώνα. Τα αντίστροφα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν περισσότερο έχουν εφαρμογή σε πολλούς τεχνικούς και επιστημονικούς τομείς όπως ιατρική και γεωφυσική απεικόνιση, ηλεκτρομαγνητική σκέδαση και μη καταστροφικό έλεγχο υλικών, ανακατασκευή εικόνων και χαμένης πληροφορίας. Επίσης στην αστρονομία και την βιομετρική εφαρμογές που περιλαμβάνουν αναγνώριση δακτυλικών αποτυπωμάτων και ίριδας.

Γενικά η θεωρία σκέδασης ενδιαφέρεται για τις επιδράσεις ενός προσπίπτον σωματιδίου ή κύματος σε ένα μη ομογενές μέσο. Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε το ολικό πεδίο u_{total} ως το άθροισμα του προσπίπτον κύματος u^i και του σκεδαζόμενου κύματος u^s , τότε το ευθύ πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε το u^s γνωρίζοντας το u^i και την εξίσωση του κύματος. Στο αντίστροφο πρόβλημα σκοπός είναι να προσδιορίσουμε την φύση της μη ομοιογένειας έχοντας γνωστό την ασυμπτωτική συμπεριφορά του u^s , να κατασκευάσουμε την εξίσωση του κύματος ή να προσδιορίσουμε το άγνωστο χωρίο από την συμπεριφορά των διάφορων λύσεων.

Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες. Στη πρώτη το αντικείμενο σκέδασης είναι ένα ομογενές εμπόδιο με γνωστές συνοριακές συνθήκες το οποίο θέλω να προσδιορίσω από την γνώση του μακρινού πεδίου. Στη δεύτερη κατηγορία, με την απλούστερη περιγραφή, το αντικείμενο σκέδασης είναι ένα μη ομογενές μέσο τέτοιο ώστε οι υλικοί παράμετροι διαφέρουν σε όλη την έκταση με έναν συνεχή τρόπο και στόχος είναι η εύρεση των παραμέτρων αυτών από τις πληροφορίες που παίρνουμε από το μακρινό πεδίο.

1.1 Ευθύ πρόβλημα σκέδασης

Στο απλούστερο πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων έχω ένα μέσο μη ομογενές στο οποίο υπάρχει ένα αντικείμενο-στόχος (σκεδαστής) και στέλνοντας γνωστά προσπίπτον κύματα θέλω να προσδιορίσω τις ιδιότητες του σκεδαζόμενου κύματος. Μας δίνεται και η εξίσωση του κύματος και ο σκεδαστής D . Για τα ακουστικά κύματα λοιπόν θεωρώ ότι το προσπίπτον πεδίο(κύμα) δίνετε από την χρόνο-αρμονική εξίσωση:

$$u^i(x, t) = e^{i(kxd - \omega t)} \quad (1.1)$$

όπου $k = \frac{\omega}{c_0}$ ο κυματάριθμος, ω η συχνότητα, c_0 η ταχύτητα του ήχου και d η κατεύθυνση διάδοσης. Σε ένα μη ομογενές μέσο το πρόβλημα σκέδασης είναι η εύρεση του ολικού πεδίο u έτσι ώστε:

$$\Delta u + k^2 n(x)u = 0, \text{ στον } R^3 \quad (1.2)$$

$$u(x) = e^{ikxd} + u^s(x) \quad (1.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad (1.4)$$

Αυτό είναι το γενικό μοντέλο όπου το $n(x)$ είναι ο δείκτης διάθλασης $n = \frac{c_0}{c}$, c_0 η ταχύτητα του ήχου στο ομογενές μέσο και c στο μη ομογενές. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πιο ειδικά προβλήματα με συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση 1.4 είναι η Sommerfeld συνθήκη ακτινοβολίας η οποία μας εξασφαλίζει ότι το κύμα διαπερνά το σώμα.

Τώρα στην περίπτωση που έχω ένα αδιαπέραστο σκεδαστή D το πρόβλημα περιγράφεται από την εξίσωση Helmholtz και ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες έχουμε δύο περιπτώσεις.

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ στον } R^3 \setminus \bar{D} \quad (1.5)$$

$$u = 0, \text{ στο } \partial D \text{ (Dirichlet)} \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \text{ στο } \partial D \text{ (Neumann)} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\nu u = 0, \text{ στο } \partial D \text{ (Robin)} \quad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.5) είναι η εξίσωση Helmholtz και μαζί με την συνθήκη (1.6) αποτελούν το συνοριακό πρόβλημα Dirichlet που αφορά έναν μαλακό σκεδαστή D (sound-soft), λ μια θετική παράμετρος και ν το κάθετο στο ∂D μοναδιαίο διάνυσμα.

Η μαθηματική προσέγγιση για να μελετήσει κανείς ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης ακουστικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εξαρτάται από την συχνότητα του κύματος. Συγκεκριμένα αν το μήκος κύματος $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ είναι πολύ μικρό σε σχέση με την μικρότερη απόσταση που μπορώ να παρατηρήσω με τα διαθέσιμα μηχανήματα τότε το αντικείμενο-στόχος δημιουργεί μία σκιά με αιχμηρές γωνίες ή σαν κρόσσια και έχουμε το φαινόμενο της περίθλασης. Επίσης σκεδαστές μικρών διαστάσεων σε σχέση με το μήκος κύματος διακόπτουν το προσπίπτον κύμα χωρίς να σχηματιστεί μια αναγνωρίσιμη σκιά. Επομένως υπάρχουν δύο περιοχές συχνοτήτων ανάλογα με το μέγεθος ka όπου a η τυπική διάσταση του σκεδαστή. Το σύνολο τιμών του k για τις οποίες ισχύει $ka \gg 1$ ονομάζεται περιοχή υψηλής συχνότητας ενώ οι τιμές για τις οποίες ικανοποιείται η συνθήκη $ka \ll 1$ συχνότητα συντονισμού. Λόγω της διαφοράς από την πλευρά της φυσικής η επίλυση του προβλήματος είναι διαφορετική στις δύο περιοχές όπως και οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται.

Βασικά ερωτήματα για την επίλυση ενός προβλήματος είναι η μοναδικότητα, η ύπαρξη καθώς και η δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε εκτενέστερα στα ζητήματα αυτά. Την μοναδικότητα μας την εξασφαλίζουν τα θεωρήματα Green και η μοναδικότητα των λύσεων ελλειπτικών εξισώσεων. Για την ύπαρξη η πιο συνηθισμένη μέθοδος

είναι μέσω των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Για το πρόβλημα (1.2-1.4) έχει αποδειχθεί ότι για θετικές τιμές του κ το ολικό πεδίο u είναι λύση της εξίσωσης Lippmann-Schwinger:

$$u(x) = u^i(x) - \kappa^2 \int_{R^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, x \in R^3$$

όπου $m = 1 - n$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, x \neq y$$

και η $\Phi(x, y)$ είναι η βασική λύση της εξίσωσης Helmholtz.

1.2 Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης απασχολεί τους επιστήμονες και τους μαθηματικούς περισσότερο τα τελευταία χρόνια μιάς και αντιμετωπίζει περισσότερα προβλήματα στη λύση τους από το ευθύ. Το μεγαλύτερο πρόβλημα των αντίστροφων προβλημάτων είναι η μη γραμμικότητα που παρουσιάζουν καθώς και η μη καλή τοποθέτηση στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Η πληροφορία που χρησιμοποιούμε σε αυτού του είδους προβλήματα είναι του μακρινού πεδίου και αν δεν χρησιμοποιούνται μέθοδοι ομαλοποίησης των λύσεων, μικρές διαταραχές των δεδομένων μπορούν να βγάλουν μεγάλα σφάλματα στην ανακατασκευή του σκεδαστή. Ωστόσο η επίλυση αυτών των προβλημάτων είναι βασική σε εφαρμογές στην ιατρική απεικόνιση, γεωφυσική εξερεύνηση, ραντάρ και σόναρ.

Την μοναδικότητα της λύσης τέτοιων προβλημάτων την απέδειξε πρώτος ο Schiffer, έδειξε δηλαδή ότι το μακρινό πεδίο $u_\infty(\hat{x}, d)$ για κάθε $\hat{x}, d \in S^2$ και σταθερό κ προσδιορίζει μοναδικά το αντικείμενο-στόχος D . Σε αυτήν την περίπτωση δεν κάνουμε συζήτηση για την ύπαρξη της λύσης αλλά για το πώς μπορούμε να τοποθετήσουμε σωστά ένα πρόβλημα και να βρούμε μια προσεγγιστική λύση του.

Μία προσέγγιση, είναι η γραμμικοποίηση του προβλήματος, που οδηγεί στην επίλυση μιας απλής γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτου είδους. Βέβαια αυτή η απλοποίηση αγνοεί την μη γραμμική φύση του αρχικού προβλήματος και χάνει αρκετή πληροφορία από πολλές ανακλάσεις του σκεδαστή. Στη συνέχεια έγιναν απόπειρες επίλυσης χωρίς την γραμμικοποίηση και συγκεκριμένα τα ακουστικά αντίστροφα προβλήματα αντιμετωπίζονται σαν προβλήματα βελτιστοποίησης αφού αναδιατυπωθούν με την βοήθεια των εξισώσεων Green ή των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Βέβαια αυτή η προσέγγιση απαιτεί αρχικά την λύση του ευθέως προβλήματος καθώς χρειάζεται τα αποτελέσματα αυτά σε κάθε επαναληπτικό βήμα μιας μεθόδου βελτιστοποίησης.

Προς αποφυγή αυτών των προβλημάτων της μη γραμμικότητας, της μη καλής τοποθέτησης προβλημάτων όπως και της επίλυσης του ευθύ προβλήματος σε κάθε βήμα οι Kirsch και Kress

προτείνουν μία μέθοδο αποσύνθεσης (decomposition methods) όπου γίνεται διάσπαση του προβλήματος σε δύο μέρη. Αρχικά κατασκευάζω το σκεδασμένο κύμα u^s γνωρίζοντας το u_∞ και στο δεύτερο μέρος προσδιορίζω το άγνωστο σύνορο ∂D του σκεδαστή ως τον χώρο όπου η συνοριακή συνθήκη του ολικού πεδίου ικανοποιείται. Η πιο πρόσφατη εκδοχή είναι η μέθοδος των σημειακών πηγών η οποία συνδυάζει το σκεπτικό της μεθόδου αποσύνθεσης με την επαναληπτική μέθοδο Newton.

Πέραν των επαναληπτικών μεθόδων γίνεται και η χρήση μεθόδων δειγματοληψίας (sampling methods). Οι δύο πιο γνωστές από αυτές είναι η γραμμική μέθοδος δειγματοληψίας και η μέθοδος παραγοντοποίησης. Παρακάτω θα αναλύσουμε εκτενέστερα τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην κάθε μέθοδο καθώς και τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα που έχουν.

1.3 Εξίσωση Helmholtz

Με μία μικρή ιστορική αναδρομή θα δούμε πως φτάσαμε στην εξίσωση Helmholtz η οποία είναι και η βασική στην εργασία μας. Μελετάμε την διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους σε ένα ομογενές ισότροπο μέσο στον R^3 σαν ένα μη ιζώδες ρευστό. Οπότε έχουμε τα εξής μεγέθη του ρευστού: $v = v(x, t)$ πεδίο ταχύτητας, $p=p(x,t)$ η πίεση, $\rho=\rho(x,y)$ η πυκνότητα και $S=S(x,y)$ η εντροπία. Τότε η κίνηση του δίνεται από την εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \text{grad})v + \frac{1}{\rho} \text{grad}p = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \text{εξίσωση συνέχειας}$$

$$\rho = f(p, S), \text{καταστατική εξίσωση}$$

όπου f μια συνάρτηση που εξαρτάται από την φύση του ρευστού

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \text{grad}S = 0, \text{υπόθεση αδιαβατικού}$$

Θεωρώντας ότι τα v, S, p, ρ είναι μικρές διαταραχές της στατικής κατάστασης: $u_0 = 0$, $p_0, S_0, \rho_0 = \text{σταθερά}$, προκύπτει η γραμμική εξίσωση Euler:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad}p = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(v) = 0, \text{εξίσωση συνέχειας}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial p}{\partial t}$$

Καταλήγουμε έτσι στην κυματική εξίσωση:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

Όπου η ταχύτητα του ήχου ορίζεται ως εξής:

$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)$$

Από την γραμμικοποιημένη εξίσωση Euler φαίνεται ότι υπάρχει το δυναμικό της ταχύτητας $U = U(x, t)$ που ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και για το οποίο ισχύει:

$$v = \frac{1}{\rho_0} \text{grad} U, p = -\frac{\partial U}{\partial t}. \text{ Άρα για χρόνο-αρμονικά κύματα της μορφής}$$

$U(x, t) = \text{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \}$ με συχνότητα $\omega > 0$, η u ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz :

$$\Delta u + k^2 u = 0, \text{ όπου } k = \omega/c.$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το πρόβλημα σκέδασης χρόνο-αρμονικών κυμάτων αντικειμένων-στόχων σε ομογενή και μη ομογενή μέσα με διάφορες συνοριακές συνθήκες. Καταρχήν το σύνορο μπορεί να είναι αδιαπέραστο ή διαπερατό. Για έναν μαλακό σκεδαστή D το ολικό κύμα εξαφανίζεται στο σύνορο και ικανοποιεί το πρόβλημα Dirichlet με συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D . Το συνολικό κύμα $u = u^i + u^s$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση στο εξωτερικό $R^3 \setminus \bar{D}$. Αντίστοιχα για έναν σκληρό σκεδαστή οδηγούμαστε σε ένα Neumann συνοριακό πρόβλημα $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ στο ∂D όπου ν είναι το μοναδιαίο κάθετο στο σύνορο διάνυσμα, και εδώ η κανονική ταχύτητα του ακουστικού κύματος εξαφανίζεται στο σύνορο. Μία πιο γενική συνοριακή συνθήκη είναι η συνθήκη σύνθετης αντίστασης (impedance boundary condition) $\frac{\partial u}{\partial \nu} + ik\lambda u = 0$ με λ μια θετική παράμετρο. Για διαπερατά αντικείμενα D υπάρχει και η συνθήκη μετάδοσης στο ∂D , όπου εκτός από το εισερχόμενο κύμα u^i και το σκεδαζόμενο κύμα u^s υπάρχει και το κύμα μετάδοσης v στο D που ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz με $k_D = \frac{\omega}{c_D} \neq k$. Οι συνθήκες μετάδοσης είναι οι: $u = v, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho_D} \frac{\partial v}{\partial \nu}$, στο ∂D .

Θα μας απασχολήσει το πρώτο πρόβλημα ενός μαλακού σκεδαστή, όπου το σκεδαζόμενο κύμα u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld η οποία εξασφαλίζει και την μοναδικότητα του προβλήματος. Η εξίσωση Helmholtz έχει λοιπόν σε αυτή τη περίπτωση δύο σφαιρικές συμμετρικές λύσεις: $\frac{e^{ik|x|}}{|x|}$ και $\frac{e^{-ik|x|}}{|x|}$ από τις οποίες μόνο η πρώτη ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας αφού:

$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{ik|x|-i\omega t}}{|x|} \right\} = \frac{\cos(k|x|-\omega t)}{|x|}$ που αντιστοιχεί σε ένα σφαιρικό εξερχόμενο κύμα.

2. Ολοκληρωτικοί τελεστές

2.1 Το θεώρημα Green και η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

Ένα βασικό εργαλείο στη μελέτη της εξίσωσης Helmholtz είναι τα ολοκληρωτικά θεωρήματα Green. Οι λύσεις της εξίσωσης $\Delta u + k^2 u = 0$ μπορούν να προκύψουν από την βασική:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y$$

Για σταθερά $y \in \mathbb{R}^3$ η βασική λύση ικανοποιεί την Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$.

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και ν το ορθομοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D . Τότε για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε:

Το πρώτο θεώρημα Green:

$$\int_D (u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds$$

Το δεύτερο θεώρημα Green:

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds, \quad u, v \in C^2(\bar{D})$$

Θα διατυπώσουμε θεωρήματα με λιγότερες συνθήκες για το χωρίο D για τις οποίες ισχύουν τα θεωρήματα Green και υπάρχει η λύση u της εξίσωσης Helmholtz που μας ενδιαφέρει.

Θεώρημα 2.1

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και ν το ορθομοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D . Έστω $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ είναι μια συνάρτηση που έχει κανονική παράγωγο στο σύνορο ∂D δηλαδή υπάρχει το όριο ομοιόμορφα:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \operatorname{grad} u(x - h\nu(x)), \quad x \in \partial D$$

Τότε έχουμε τον τύπο Green:

$$\int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) = \int_D \{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \} \Phi(x, y) dy, \quad x \in D$$

όπου το χωρικό ολοκλήρωμα υπάρχει σαν γενικευμένο ολοκλήρωμα. Αν το u είναι και λύση της εξίσωσης Helmholtz τότε γράφεται:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \quad , x \in D$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(\bar{D})$. Θεωρώ τη σφαίρα $S(x; \rho) := \{y \in R^3 : |x - y| = \rho\}$ που περιέχεται στο D και ένα τυχαίο σημείο $x \in D$ καθώς και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ν πάνω στο $S(x; \rho)$. Στο πεδίο $D_\rho := \{y \in D : |x - y| > \rho\}$ εφαρμόζω το θεώρημα Green στις συναρτήσεις u και $\Phi(x, \cdot)$ οπότε προκύπτει:

$$\int_{\partial D \cup S(x; \rho)} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) =$$

$$\int_{D_\rho} \Phi(x, y) \Delta u(y) - u(y) \Delta \Phi(x, y) dy = \int_{D_\rho} \{\Delta u(y) + k^2 u(y)\} \Phi(x, y) dy$$

αφού η $\Phi(x, y)$ είναι θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Στη σφαίρα $S(x; \rho)$ έχουμε $\Phi(x, y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi\rho}$ και $grad\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{\rho} - ik\right) \frac{e^{ikr}}{4\pi\rho} \nu(y)$.

Παίρνοντας τα όρια $\rho \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S(x; \rho)} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{D_\rho} \{\Delta u(y) + k^2 u(y)\} \Phi(x, y) dy - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) = u(x)$$

Και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Η ύπαρξη του χωρικού ολοκληρώματος εξασφαλίζεται από την ολοκληρωτέα συνάρτηση η οποία είναι ασθενώς ιδιάζουσα.

Θεώρημα 2.2

Αν η u είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη και λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D τότε η u είναι αναλυτική.

Το θεώρημα αυτό είναι εφαρμογή του προηγούμενου για μια κλειστή μπάλα με κέντρο x εντός του D οπότε ισχύει η αναλυτικότητα της βασικής λύσης.

Θεώρημα 2.3 (Holmgren)

Έστω D ένα φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και ν το ορθομοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D . Έστω $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ λύση της εξίσωσης Helmholtz τέτοια ώστε $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ στο Γ όπου Γ ένα ανοιχτό υποσύνολο του ∂D . Τότε η u μεταδίδεται με τον ίδιο τρόπο στο D .

Απόδειξη:

Ορίζουμε:

$$u(x) := \int_{\partial D/\Gamma} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)$$

για κάθε $x \in (R^3 \setminus \bar{D} \cup \Gamma)$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο θεώρημα Green στις συναρτήσεις u και $\Phi(x, y)$ συνεπάγεται ότι $u=0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$. Έστω G ένα υποσύνολο του $R^3 \setminus \bar{D}$ τέτοιο ώστε $\Gamma \cup \partial D \neq \emptyset$. Προφανώς η u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $R^3 \setminus \partial D \cup \Gamma$ και άρα $u=0$ στο D αφού το D και το G συνδέονται μέσω του χάσματος Γ στο ∂D .

Ορισμός:

Μία λύση της εξίσωσης Helmholtz που το πεδίο ορισμού της είναι το εξωτερικό κάποιας σφαίρας ονομάζεται ακτινοβολούσα αν ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

Όπου το $r=|x|$ και το όριο υπάρχουν ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις $\frac{x}{|x|}$.

Θεώρημα 2.4

Έστω ότι το φραγμένο χωρίο D είναι το ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και ν το μοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D . Έστω $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R \setminus D)$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $R^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας και έχει κανονική παράγωγο στο σύνορο ∂D δηλαδή υπάρχει το όριο ομοιόμορφα:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x - h\nu(x)), x \in \partial D$$

Τότε έχουμε την εξίσωση Green:

$$\int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) , x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

Άρα η u ικανοποιεί την συνθήκη Sommerfeld στο άπειρο :

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) , |x| \rightarrow \infty$$

Ολόκληρη λύση είναι αυτή που υπάρχει σε όλο τον R^3 .

Απόδειξη:

Έστω S_r μία σφαίρα με ακτίνα r και κέντρο στην αρχή. Επιλέγουμε την ακτίνα r αρκετά μεγάλη ώστε να περιέχει το D και ορίζουμε $D_r := \{y \in R^3 \setminus \bar{D} : |y| < r\}$. Έστω ν το μοναδιαίο κάθετο προς τα έξω στο S_r διάνυσμα. Θα δείξουμε ότι:

$$\int_{S_r} |u|^2 ds = O(1) , r \rightarrow \infty$$

Δηλαδή ότι το ολοκλήρωμα είναι φραγμένο.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} + ik\bar{u} \right) = \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik\bar{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2\text{Im} \left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \end{aligned}$$

Οπότε απο την συνθήκη ακτινοβολίας θα έχουμε:

$$\int_{S_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2\text{Im} \left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \right\} ds = \int_{S_r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds \rightarrow 0 , r \rightarrow \infty$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Green στο D_r για την συνάρτηση u και έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{D_r} (u \Delta \bar{u} + \Delta u \cdot \bar{u}) dy &= \int_{\partial D \cup S_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \Leftrightarrow \\ \int_{D_r} u \Delta \bar{u} dy + \int_{D_r} |\text{grad} u|^2 dy &= - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds + \int_{S_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \end{aligned}$$

Όμως ικανοποιείται η εξίσωση Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ στον $R^3 \setminus \bar{D}$ οπότε ισχύει και

$\Delta \bar{u} + k^2 \bar{u} = 0$ άρα $\Delta \bar{u} = -k^2 \bar{u}$. Οπότε έχουμε:

$$\int_{S_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - k^2 \int_{D_r} |u|^2 ds + \int_{D_r} |\text{gradu}|^2 dy$$

Επιλέγοντας το φανταστικό μέρος της τελευταίας σχέσης και παίρνοντας το όριο $r \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 + k^2 |u|^2) ds = - \lim_{r \rightarrow \infty} (2k \text{Im}(\int_{S_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds)) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 + k^2 |u|^2) ds = -2k \text{Im}(\int_{S_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds)$$

Άρα βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της σχέσης είναι θετικό γιατί κάθε όρος είναι θετικός και το άθροισμα τους είναι πεπερασμένο όριο καθώς $r \rightarrow \infty$ άρα είναι φραγμένο. Άρα ισχύει:

$$\int_{S_r} |u|^2 ds = O(1) \quad , r \rightarrow \infty$$

Τώρα από την συνθήκη ακτινοβολίας έχουμε:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - ik\Phi(x, y) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , r \rightarrow \infty \text{ για κάθε } y \in S_r$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι :

$$I_1 := \int_{S_r} \{u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - ik\Phi(x, y)\} ds(y) \rightarrow 0 \quad , \quad r \rightarrow \infty$$

$$I_2 := \int_{S_r} \Phi(x, y) \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - iku(y) \right\} ds(y) \rightarrow 0 \quad , \quad r \rightarrow \infty$$

Αφού :

$$\int_{S_r} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y) = I_1 - I_2 = 0 \quad , \quad r \rightarrow \infty$$

Οπότε αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.1 στο φραγμένο χωρίο D_r και πάρουμε το όριο $r \rightarrow \infty$ η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Θεώρημα 2.5

Κάθε λύση u της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός εξερχομένου σφαιρικού κύματος

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, |x| \rightarrow \infty$$

ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ όπου η συνάρτηση u_∞ είναι ορισμένη στην μοναδιαία σφαίρα S^2 και είναι γνωστή ως το μακρινό πεδίο της u . Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε:

$$u_\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial v(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial v} e^{-ik\hat{x}y} \right\} ds(y), x \in S^2$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε την λύση της εξίσωσης Helmholtz από το γνωστό μακρινό πεδίο u_∞ . Δηλαδή η επίλυση μίας εξίσωσης της μορφής $Au = u_\infty$, η οποία να έχει μοναδική λύση.

Το μακρινό πεδίο

Μας ενδιαφέρει η ένα προς ένα αντιστοίχιση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz με το μακρινό πεδίο οπότε τα επόμενα θεωρήματα μας δείχνουν την συμπεριφορά των λύσεων στο άπειρο.

Λήμμα (Rellich):

Έστω ότι το φραγμένο χωρίο D είναι ανοικτό και συνεκτικό και έστω $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D})$ λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0$$

Τότε $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη:

Για αρκετά μεγάλο $|x|$ έχουμε την ανάπτυξη σε σειρά τύπου Fourier για την u :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m(|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

Όπου $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. Οι συντελεστές δίνονται από τον τύπο:

$$a_n^m(r) = \int_{S^2} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x})$$

και ικανοποιούν την εξίσωση Parseval:

$$\int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_n^m|^2$$

Από την υπόθεση του λήμματος έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0 \quad , \text{για κάθε } m, n.$$

Αφού η $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D})$ και ικανοποιεί την εξίσωση $\Delta u + k^2 u = 0$ είναι αναλυτική και μπορούμε να διαφορίσουμε μέσα στα ολοκληρώματα και να ολοκληρώσουμε κατά μέλη. Οι συντελεστές a_n^m λοιπόν είναι λύσεις της σφαιρικής εξίσωσης Bessel:

$$a_n^m(r) = a_n^m h_{(n)}^{(1)}(kr) + b_n^m h_{(n)}^{(2)}(kr)$$

Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel και καθώς $r \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $a_n^m = b_n^m = 0$ για κάθε n, m . Επομένως θα είναι $u = 0$ έξω από μία αρκετά μεγάλη σφαίρα και αφού η u είναι αναλυτική θα είναι $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Το λήμμα αυτό μας εξασφαλίζει την μοναδικότητα λύσεων στα εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών μέσω του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 2.6

Έστω ότι το φραγμένο χωρίο D είναι ανοικτό και συνεκτικό και έστω το σύνορο ∂D κλάσης C^2 , ν το μοναδιαίο κάθετο στο ∂D διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό του D και έστω $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\bar{R}^3 \setminus D)$ μία ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz με κυματάριθμο $k > 0$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα και για την οποία ισχύει:

$$\operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \geq 0$$

Τότε $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη:

Έχουμε την σχέση:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=r} |u(x)|^2 ds = -\frac{1}{k^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 ds - \frac{2}{k} \operatorname{Im} \left(\int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \right)$$

Αφού το πρώτο μέλος είναι θετικό και το δεύτερο αρνητικό έπεται ότι και τα δύο πρέπει να είναι μηδέν. Άρα ικανοποιείται η σχέση του λήμματος Rellich οπότε έχουμε ότι $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Θεώρημα 2.7

Έστω ότι το φραγμένο χωρίο D είναι ανοικτό και συνεκτικό και έστω $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D})$ μία ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz της οποίας μηδενίζεται το πλάτος σκέδασης. Τότε $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι :

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Άρα ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = \int_{S^2} |u_\infty(\hat{x})|^2 ds + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Όταν μάλιστα παίρνουμε το όριο $r \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0$$

Άρα από το λήμμα Rellich $u = 0$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$.

Θεώρημα 2.8

Έστω u μία ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz στο εξωτερικό κάποιας σφαίρας $|x| > R > 0$. Τότε u έχει μια επέκταση που ικανοποιεί την εξίσωση κύματος και είναι της μορφής :

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \sum_{m=-n}^n a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

που συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε χωρία $|x| > R$.

Αντίστροφα, αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν κατά μέση τετραγωνική τιμή στη σφαίρα $|x| = R$, τότε συγκλίνουν και απόλυτα και ομοιόμορφα σε περιοχές $|x| > R$ και η u είναι ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz.

Θεώρημα 2.9

Το μακρινό πεδίο της ακτινοβολούσας λύσης της εξίσωσης Helmholtz με την επέκταση δίνεται από τις ομοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές:

$$u_\infty = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{i^{n+1}} \sum_{m=-n}^{\infty} a_n^m Y_n^m$$

Οι συντελεστές ικανοποιούν την συνθήκη αύξησης για όλα τα $r > R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{ker}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |a_n^m|^2 < \infty$$

Θεώρημα 2.10

Έστω οι συντελεστές Fourier b_n^m της $u_\infty \in L^2(S^2)$ που ικανοποιούν τις σφαιρικές αρμονικές και την προηγούμενη συνθήκη ανάπτυξης για κάποιο $R > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{ker}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |b_n^m|^2 < \infty$$

Τότε για $|x| > R$:

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \sum_{m=-n}^n b_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Είναι η ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz με μακρινό πεδίο u_∞ .

Τα δύο τελευταία θεωρήματα μας υποδεικνύουν ότι η εξίσωση $Au = u_\infty$, με τον γραμμικό τελεστή A να χαρτογραφεί μία ακτινοβολούσα λύση u της εξίσωσης Helmholtz στο μακρινό της πεδίο u_∞ , είναι ένα μη-καλά τοποθετημένο πρόβλημα.

Σύμφωνα με τον ορισμό του Hadamard ένα πρόβλημα καλείται καλά τοποθετημένο αν:

- Έχει λύση
- Η λύση αυτή είναι μοναδική
- Η λύση εξαρτάται πάντα από τα δεδομένα του προβλήματος

Διαφορετικά αν κάποιο από αυτά δεν ισχύει το πρόβλημα καλείται **μη-καλά τοποθετημένο**. Όπως θα δούμε και παρακάτω στα προβλήματα που μελετάμε κάποιες φορές δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη λύσης ή η λύση δεν εξαρτάται πάντα από τα δεδομένα του προβλήματος. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε διάφορες μεθόδους προσέγγισης της λύσης ή ομαλοποίησης τους.

2.2 Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος

Για την λύση του ευθέως προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ολοκληρωτικών εξισώσεων για προβλήματα συνοριακών τιμών. Στη συνέχεια θα θεωρούμε πάντα ότι το χωρίο D είναι φραγμένο, συνεκτικό και ανοικτό κλάσης C^2 και θα δουλεύουμε στον R^3 .

Ορισμός:

Δοθέντος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης φ τα ολοκληρώματα:

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y)$$

$$v(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y)$$

ονομάζονται ακουστικό μονό δυναμικό στρώμα και διπλό δυναμικό στρώμα με πυκνότητα φ και $x \in R^3 \setminus \partial D$.

Είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο D και ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld στο $R^3 \setminus \bar{D}$. Οι τύποι Green μας δείχνουν ότι όλες οι λύσεις μπορούν να γραφτούν σαν συνδυασμό αυτών των δύο. Για συνεχείς πυκνότητες η συμπεριφορά των επιφανειακών δυναμικών στο σύνορο περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις. Με $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty, G}$ θα συμβολίζουμε την supremum νόρμα πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένα σε ένα υποσύνολο $G \subset R^3$.

Θεώρημα 2.11

Έστω ∂D κλάσης C^2 και έστω φ συνεχής. Τότε το μονό δυναμικό στρώμα (single-layer potential) u με πυκνότητα φ είναι συνεχής σε όλο τον R^3 και

$$\|u\|_{\infty, R^3} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

για κάποια σταθερά C η οποία εξαρτάται από το ∂D . Στο σύνορο έχουμε:

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y)$$

$$\frac{\partial u_\pm(x)}{\partial \nu} = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x)$$

όπου $x \in \partial D$ και $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x - h\nu(x))$, $x \in \partial D$

Θεωρούμε ότι όπου υπάρχει ομοιόμορφη σύγκλιση στο ∂D τα ολοκληρώματα υπάρχουν σαν γενικευμένα ολοκληρώματα. Το διπλό δυναμικό στρώμα v με πυκνότητα φ μπορεί να επεκταθεί από το D στο \bar{D} και $R^3 \setminus \bar{D}$ στο $R^3 \setminus D$ με οριακές τιμές:

$$v_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x)$$

Όπου $x \in \partial D$ και $v_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} u(x - hv(x))$ και τα ολοκληρώματα υπάρχουν ως γενικευμένα. Επιπροσθέτως,

$$\|u\|_{\infty, \bar{D}} \leq C \|\varphi\|_{\infty, D} \quad \text{και} \quad \|u\|_{\infty, R^3 \setminus D} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

για κάποια σταθερά C που εξαρτάται από το ∂D και

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\partial v}{\partial v}(x + hv(x)) - \frac{\partial v}{\partial v}(x - hv(x)) \right\} = 0$$

$x \in \partial D$ ομοιόμορφα στο ∂D .

2.3 Συνέχεια Hölder

Ορισμοί:

Μία πραγματική ή μιγαδική συνάρτηση φ ορισμένη σε ένα υποσύνολο $G \subset R^3$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής Hölder με τον συντελεστή Hölder $0 < \alpha \leq 1$, αν υπάρχει μία σταθερά C τέτοια ώστε:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \text{για κάθε } x, y \in G$$

Ορίζουμε τον χώρο Hölder $C^{0,\alpha}(G)$ να είναι ο γραμμικός χώρος όπου όλες οι συναρτήσεις ορισμένες στο G είναι φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχής Hölder με δείκτη α . Είναι ένας χώρος Banach με νόρμα:

$$\|\varphi\|_\alpha := \|\varphi\|_{\alpha, G} = \sup_{x \in G} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Χώρος Hölder $C^{1,\alpha}(G)$ ομοιόμορφα συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων θα είναι ο χώρος των διαφορίσιμων συναρτήσεων φ για τις οποίες το $\text{grad} \varphi$ θα ανήκει στο $C^{0,\alpha}(G)$ με την νόρμα:

$$\|\varphi\|_{1,\alpha} = \|\varphi\|_{1,\alpha, G} = \|\varphi\|_\infty + \|\text{grad} \varphi\|_{0,\alpha}$$

Ο χώρος $C^{1,\alpha}(G)$ είναι Banach.

Θεώρημα 2.12

Έστω $0 < \alpha < \beta \leq 1$ και G συμπαγής. Τότε οι φορείς:

$$I^b: C^{0,b}(G) \rightarrow C(G)$$

$$I^{0,b}: C^{0,b}(G) \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

είναι συμπαγείς.

Θεώρημα 2.13

Έστω ∂D κλάσης C^2 και $0 < \alpha < 1$. Τότε το δυναμικό μονού στρώματος u με πυκνότητα $\varphi \in C(\partial D)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής Hölder στον R^3 και:

$$\|u\|_{a,R^3} \leq C_a \|\varphi\|_{\infty,\partial D}$$

Η πρώτη παράγωγος του δυναμικού μονού στρώματος u με πυκνότητα $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής Hölder και μπορεί να επεκταθεί από το D στο \bar{D} και από το $R^3 \setminus \bar{D}$ στο $R^3 \setminus D$ με συνοριακές τιμές:

$$\text{grad } u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \text{grad}_x \Phi(x,y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x) \nu(x) \text{ όπου}$$

$$\text{grad } u_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \text{grad } u(x \pm h\nu(x))$$

Και έχουμε:

$$\|\text{grad } u\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\varphi\|_{a,\partial D} \text{ και } \|\text{grad } u\|_{a,R^3 \setminus D} \leq C_a \|\varphi\|_{a,\partial D}$$

Η πρώτη παράγωγος του δυναμικού διπλού στρώματος v με πυκνότητα $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής Hölder και μπορεί να επεκταθεί από το D στο \bar{D} και από το $R^3 \setminus \bar{D}$ στο $R^3 \setminus D$ με συνοριακές τιμές:

$$\|\text{grad } v\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\varphi\|_{1,a,\partial D} \text{ και } \|\text{grad } v\|_{a,R^3 \setminus D} \leq C_a \|\varphi\|_{1,a,\partial D}$$

Σε όλες τις ανισώσεις το C_a είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το ∂D και το a .

2.4 Ολοκληρωτικοί τελεστές

Ορισμοί:

Θα ορίσουμε τους τελεστές μονού και διπλού στρώματος S, K οι οποίοι θα μας χρησιμεύσουν στη συνέχεια :

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x,y) \varphi(y) ds(y), x \in \partial D$$

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \varphi(y) ds(y), x \in \partial D$$

Και οι τελεστές κανονικής παραγωγίσεως:

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(x)} \varphi(y) ds(y), x \in \partial D$$

$$(T\varphi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(x)} \varphi(y) ds(y), x \in \partial D$$

Θεώρημα 2.14

Έστω το σύνορο ∂D να είναι κλάσης C^2 . Τότε οι τελεστές S, K, K' είναι φραγμένοι τελεστές από το $C(\partial D)$ στο $C^{0,a}(\partial D)$, οι τελεστές S, K είναι επίσης φραγμένοι από το $C^{0,a}(\partial D)$ στο $C^{1,a}(\partial D)$ και ο τελεστής T είναι φραγμένος και οριοθετείται από το $C^{1,a}(\partial D)$ στο $C^{0,a}(\partial D)$.

Αλλάζοντας τη σειρά των ολοκληρώσεων στους τελεστές βλέπουμε ότι ο τελεστής S είναι αυτοσυζηγής και οι K, K' συζηγείς που ικανοποιούν τη διγραμμική μορφή:

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial D} \varphi \psi ds$$

Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\langle S\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, S\psi \rangle \quad \text{και} \quad \langle K\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, K\psi \rangle$$

για κάθε $\varphi, \psi \in C(\partial D)$.

Θεώρημα 2.15 (Lax Theorem):

Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι με νόρμα και εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) και έστω ότι υπάρχει μια θετική σταθερά c τέτοια ώστε:

$$|(\varphi, \psi)| \leq c \|\varphi\| \|\psi\|$$

για κάθε $\varphi, \psi \in X$. Έστω U υπόχωρος $U \subset X$ και έστω $A: U \rightarrow Y$ και $B: Y \rightarrow X$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές που ικανοποιούν τη σχέση:

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi)$$

για κάθε $\varphi \in U$ και $\psi \in Y$. Τότε ο τελεστής $A: U \rightarrow Y$ είναι φραγμένος ως προς την νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τον φραγμένο τελεστή $M: U \rightarrow X$

$$M := BA \quad \mu\epsilon \quad \|M\| \leq \|B\| \|A\|$$

Ο M είναι αυτοσυζηγής αφού ισχύει η ιδιότητα:

$$(M\varphi, \psi) = (\varphi, M\psi) \text{ για κάθε } \varphi, \psi \in U$$

Επομένως από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\|M^n \varphi\|_s^2 = (M^n \varphi, M^n \varphi) = (\varphi, M^{2n} \varphi) \leq \|M^{2n} \varphi\|_s$$

για κάθε $\varphi \in U$ με $\|\varphi\|_s \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με επαγωγή έχουμε:

$$\|M\varphi\|_s \leq \|M^{2^n} \varphi\|_s^{2^{-n}}$$

Όμως ισχύει $\|\varphi\|_s \leq \sqrt{c} \|\varphi\|$ για κάθε $\varphi \in X$. Επομένως:

$$\|M\varphi\|_s \leq \{\sqrt{c} \|M^{2^n} \varphi\|\}^{2^{-n}} \leq \{\sqrt{c} \|\varphi\| \|M\|^{2^n}\}^{2^{-n}} = \{\sqrt{c} \|\varphi\|\}^{2^{-n}} \|M\|$$

Παίρνοντας και το όριο $n \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\|M\varphi\|_s \leq \|M\| \text{ για κάθε } \varphi \in U \text{ με } \|\varphi\|_s \leq 1$$

Τέλος, για κάθε $\varphi \in U$ με $\|\varphi\|_s \leq 1$ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται:

$$\|A\varphi\|_s^2 = (A\varphi, A\varphi) = (\varphi, M\varphi) \leq \|M\varphi\|_s \leq \|M\|$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο ότι ο τελεστής A είναι φραγμένος.

Σκέδαση μαλακού σκεδαστή (sound-soft obstacle)

Το ευθύ ακουστικό πρόβλημα σκέδασης αντικειμένου (Obstacle problem) όπως έχουμε ξαναπεί διατυπώνεται ως εξής: δοθέντως μίας λύσης u^i της εξίσωσης Helmholtz του προσπίπτον κύματος να βρούμε μια λύση $u = u^i + u^s$ της εξίσωσης Helmholtz στο $R^3 \setminus \bar{D}$ τέτοια ώστε το σκεδασμένο πεδίο u^s να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και το ολικό πεδίο u να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D .

Αυτό το πρόβλημα είμαι μια ειδική περίπτωση του ακόλουθου προβλήματος Dirichlet.

Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Δοθέντος μίας συνεχούς συνάρτησης f στο ∂D να βρεθεί μια ακτινοβολούσα λύση $u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R \setminus D)$ της εξίσωσης Helmholtz:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad R^3 \setminus \bar{D}$$

Που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = f$ στο ∂D .

Θεώρημα 2.16

Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει το πολύ μία λύση.

Απόδειξη:

Πρέπει να δείξουμε ότι οι λύσεις στο ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών $u = 0$ στο ∂D έχουν το ίδιο πλάτος σκέδασης. Δεν γνωρίζουμε ωστόσο για την u αν είναι παραγωγίσιμη και αν η παράγωγός της συγκλίνει ομοιόμορφα. Αυτό που ξέρουμε από την διατύπωση του προβλήματος είναι απλά ότι είναι συνεχής στο σύνορο. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green και να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα σύγκλισης των ολοκληρωμάτων Lebesgue. Άρα η μοναδικότητα λύσεων των προβλημάτων Dirichlet δεν απαιτούν καμία κανονικότητα του συνόρου. Επίσης θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.6 με την βοήθεια του επόμενου λήμματος.

Λήμμα

Έστω $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ μία λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $R^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί

την ομογενή συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D . Ορίζουμε $D_R := \{y \in R^3 \setminus \bar{D} : |y| < R\}$

$S_R := \{y \in R^3 \setminus \bar{D} : |y| = R\}$ για αρκετά μεγάλη ακτίνα R . Τότε το $u \in L^2(D_R)$ και:

$$\int_{D_R} |\text{grad } u|^2 dx - k^2 \int_{D_R} |u|^2 dx = \int_{S_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds$$

Απόδειξη:

Έστω u πραγματικός. Επιλέγουμε μία περιττή συνάρτηση $\psi \in C^1(R)$ τέτοια ώστε:

$$\psi(t) = 0 \text{ για } 0 \leq t \leq 1, \quad \psi(t) = t \text{ για } t \geq 2 \text{ και } \psi'(t) \geq 0 \text{ για κάθε } t.$$

Θέτουμε: $u_n := \psi(nu)/n$. Οπότε τώρα έχουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση $\|u - u_n\|_\infty \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Green και έχουμε:

$$\int_{D_R} \text{grad } u_n \cdot \text{grad } u dx = k^2 \int_{D_R} u_n u dx + \int_{S_R} u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

Οπότε ισχύει:

$$0 \leq \text{grad } u_n(x) \cdot \text{grad } u(x) = \psi'(nu(x)) |\text{grad } u(x)|^2 \rightarrow |\text{grad } u(x)|^2 \text{ όταν } n \rightarrow \infty$$

για όλα τα x που δεν περιέχονται στο $\{x \in D_R: u(x) = 0, \text{grad}u(x) \neq 0\}$. Ως συνέπεια του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων το τελευταίο σύνολο έχει μέτρο Lebesgue μηδέν οπότε από το λήμμα Fatou έπεται ότι $\text{grad}u \in L^2(D_R)$.

Τώρα θέτουμε: $u = v + iw$ με v, w πραγματικές συναρτήσεις και καθώς ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος θα ισχύει $\text{grad}v, \text{grad}w \in L^2(D_R)$.

$$\begin{aligned} \text{grad}v_n + i\text{grad}w_n &= \psi'(nw)\text{grad}v + i\psi'(nw)\text{grad}w \Rightarrow \\ |(\text{grad}v_n + i\text{grad}w_n) \cdot \text{grad}\bar{u}| &\leq 2\|\psi'\|_\infty \cdot \{| \text{grad}v|^2 + | \text{grad}w|^2\} \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Κυρίαρχης Σύγκλισης του Lebesgue μπορούμε να περάσουμε το όριο $n \rightarrow \infty$ στο θεώρημα Green:

$$\begin{aligned} \int_{D_R} \{(\text{grad}v_n + i\text{grad}w_n) \cdot \text{grad}\bar{u} + (v_n + iw_n)\Delta\bar{u}\} dx &= \int_{S_R} (v_n + iw_n) \frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu} ds \Rightarrow \\ \int_{D_R} |\text{grad}u|^2 dx - k^2 \int_{D_R} |u|^2 dx &= \int_{S_R} u \frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu} ds \end{aligned}$$

Και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Θεώρημα 2.17

Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση η οποία εξαρτάται συνεχώς από τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούν την ομοιόμορφη σύγκλιση της λύσης στο $R^3 \setminus \bar{D}$ και όλων των παραγώγων της στους κλειστούς υποχώρους του $R^3 \setminus \bar{D}$.

Για να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους αναπαράστασης Green για την λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet χρειαζόμαστε την κανονική τους παράγωγο. Η υπόθεση μόνο της συνέχειας των συνοριακών τιμών δεν μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της κανονικής παραγώγου. Επομένως θα επιβάλλουμε κάποιες παραπάνω συνθήκες ομαλότητας των συνόρων. Η παράγωγος $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ της λύσης u θα υπάρχει και θα ανήκει στο $C^{0,a}(\partial D)$ αν η

$f \in C^{1,a}(\partial D)$ και θα δίνεται απο τον τύπο:

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = A f$$

όπου $A := (i\eta I - i\eta K' + T)(I + K - i\eta S)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \rightarrow C^{0,a}(\partial D)$.

Τους τελεστές K, K', T, S τους έχουμε ήδη ορίσει και έχουμε και την παράμετρο σύζευξης η .

Ο τελεστής A είναι ένα προς ένα και επί και έχει και φραγμένο αντίστροφο. Ο τελεστής A μεταφέρει τις συνοριακές τιμές Dirichlet σε συνοριακές τιμές Neumann όπου έχουμε την κανονική παράγωγο $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ και έχει και την ονομασία της χαρτογράφησης από το Dirichlet στο Neumann πρόβλημα (Dirichlet to Neumann map).

Σκέδαση σκληρού σκεδαστή (sound-hard obstacle)

Εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Δοθέντος μίας συνεχούς συνάρτησης g στο ∂D να βρεθεί μια ακτινοβολούσα λύση

$u \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R} \setminus D)$ της εξίσωσης Helmholtz:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad R^3 \setminus \bar{D}$$

που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{στο } \partial D$$

Δηλαδή συγκλίνει ομοιόμορφα στο ∂D .

Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann περιγράφει την σκέδαση ενός σκληρού αντικειμένου-στόχο. Η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από προηγούμενα θεωρήματα οπότε πρέπει να αναζητήσουμε την ύπαρξη λύσης. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το απλό και διπλό δυναμικό. Η κανονική παράγωγος του διπλού δυναμικού στρώματος εν γένει δεν υπάρχει, αν η πυκνότητα είναι εν μέρη συνεχής, το πρόβλημα αυτό θα το ξεπεράσουμε την εισαγωγή ενός τελεστή ομαλοποίησης οπότε η λύση του προβλήματος θα γραφτεί στη μορφή:

$$u(x) = \int_{\partial D} \{ \Phi(x, y) \varphi(y) + i\eta \int \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} (S_0^2 \varphi)(y) \} ds(y), \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

με συνεχή πυκνότητα φ και την πραγματική παράμετρο σύζευξης $\eta \neq 0$. Με S_0 συμβολίζουμε τον τελεστή μονού στρώματος στην θεωρητική περίπτωση $k=0$. Να σημειώσουμε ότι η πυκνότητα $S_0^2 \varphi$ του δυναμικού μονού στρώματος ανήκει στο $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Η $u(x)$ όπως την γράψαμε είναι λοιπόν λύση του εξωτερικού προβλήματος Neumann αν η πυκνότητα φ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\varphi - K' \varphi - i\eta T S_0^2 \varphi = -2g$$

όπου g είναι η συνεχής συνοριακή συνθήκη του προβλήματος Neumann.

Θεώρημα 2.18

Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες και η λύση συγκλίνει ομοιόμορφα στο $R^3 \setminus \bar{D}$ και η παράγωγος της ανήκει στους κλειστούς υπόχωρους του $R^3 \setminus \bar{D}$.

Οι συνοριακές τιμές της u στο ∂D δίνονται απο τον τύπο:

$$u = \mathbf{B}g$$

όπου ο τελεστής \mathbf{B} ορίζεται:

$$\mathbf{B} := (i\eta S_0^2 + i\eta k S_0^2 + S)(K' - I + i\eta T S_0^2)^{-1}: C^{0,a}(\partial D) \rightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

Ο τελεστής \mathbf{B} είναι φραγμένος και είναι ο αντίστροφος του \mathbf{A} .

Θεώρημα 2.19

Ο τελεστής \mathbf{A} , που μεταφέρει τις συνοριακές τιμές Dirichlet στην κανονική τους παράγωγο σε συνοριακές τιμές Neumann της ακτινοβολούσας λύσης u της εξίσωσης Helmholtz είναι ένας φραγμένος τελεστής, ένα προς ένα και επί, με φραγμένο αντίστροφο από το $C^{1,a}(\partial D)$ στο $C^{0,a}(\partial D)$. Η λύση στο εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet $u \in C^{1,a}(R^3 \setminus D)$ αν οι συνοριακές τιμές ανήκουν στο $C^{1,a}(\partial D)$ και η χαρτογράφηση των συνοριακών δεδομένων στην λύση είναι συνεχής απο το $C^{1,a}(\partial D)$ στο $C^{1,a}(R^3 \setminus D)$.

Αντί να ψάχνουμε λύση στο πρόβλημά μας σε κλασικούς χώρους όπου οι συναρτήσεις είναι συνεχείς ή Hölder συνεχείς μπορούμε να λύσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Helmholtz με ασθενέστερες υποθέσεις σε χώρους Sobolev ή L^2 . Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην ανάλυση σφαλμάτων σε προσεγγιστικές μεθόδους μιάς και η ύπαρξη της λύσης μπορεί να αποδειχθεί με ασθενέστερες υποθέσεις ομαλότητας στις συνοριακές συνθήκες και στην συνεχόμενη εξάρτηση των δεδομένων με διάφορες νόρμες.

Ένα μεγάλο μειονέκτημα στην απόδειξη ύπαρξης μίας λύσης με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι η σχετικά δύσκολη υπόθεση κανονικότητας για το σύνορο να είναι κλάσης C^2 . Μπορούμε να ελαφρύνουμε λίγο την απαίτηση της κανονικότητας αν επιτρέψουμε στο σύνορο αντί να είναι κλάσης C^2 να ικανοποιεί τις υποθέσεις Lyapunov παραμένοντας στο πλαίσιο των συμπαγών τελεστών σε χώρους Hölder συνεχών συναρτήσεων. Ένα σύνορο λέμε ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις Lyapunov αν για κάθε σημείο $x \in \partial D$ και το κάθετο διάνυσμα ν στην επιφάνεια υπάρχει και υπάρχουν οι θετικοί παράμετροι L και a τέτοιοι ώστε για κάθε γωνία $\theta(x,y)$ των κάθετων διανυσμάτων x,y ισχύει:

$$\theta(x,y) \leq L|x - y|^a \quad , x,y \in \partial D$$

Ωστόσο η κατάσταση αλλάζει όταν το σύνορο έχει άκρες και γωνίες μιας και αυτό επηρεάζει την συμπαγεία του ολοκληρωτικού τελεστή διπλού δυναμικού σε χώρους συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι συμβατή η ίδια θεωρία για έναν σκεδαστή με τέτοιο σύνορο πρέπει ο ολοκληρωτικός τελεστής να διασπαστεί σε ένα άθροισμα συμπαγών τελεστών και ενός φραγμένου τελεστή με νόρμα μικρότερη του ένα που να αντικατοπτρίζει τις ιδιότητες των γωνιών και των άκρων του συνόρου. Επίσης σκεδαστές τέτοιου τύπου μπορούν να αντιμετωπιστούν με ολοκληρωτικούς τελεστές μονού στρώματος σε χώρους Sobolev όπου οι μερικές διαφορικές εξισώσεις έχουν λύση πιο εύκολα.

Ρητή λύση στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης έχουμε μόνο σε ειδικές γεωμετρίες του σκεδαστή και ειδικά εισερχόμενα πεδία. Γενικά για να καταστρωθεί μια λύση πρέπει να καταφύγουμε σε αριθμητική προσέγγιση για ολοκληρωτικών εξισώσεων δεύτερου είδους με διάφορες μεθόδους όπως με την μέθοδο Nystrom, με την μέθοδο Galerkin ή με μεθόδους συγκατάταξης.

Θεώρημα 2.20

Για την σκέδαση ενός ολόκληρου πεδίου u^i ενός μαλακού αντικειμένου D έχουμε:

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds(y) \quad , x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

και το μακρινό πεδίο του σκεδασμένου u^s δίνεται από τον τύπο:

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}y} ds(y) \quad , \hat{x} \in S^2$$

Αυτή η έκφραση του πεδίου u στη φυσική για το σκεδασμένο πεδίο δευτερευουσών πηγών όπως ονομάζεται είναι γνωστή ως το **Huygens' principle**.

Κυματικές συναρτήσεις Herglotz και το μακρινό πεδίο:

Στη συνέχεια θα δούμε για το προσπίπτον κύμα $u^i(x) = u^i(x, d) = e^{ikxd}$ την εξάρτηση από το σκεδαζόμενο πεδίο $u^s(x, d)$, το ολόκληρο πεδίο $u(x, d)$ και το $u_\infty(\hat{x}, d)$ πεδίο στο άπειρο.

Θεώρημα 2.21

Το μακρινό πεδίο της σκέδασης ενός μαλακού αντικειμένου D ικανοποιεί την σχέση αμοιβαιότητας:

$$u_\infty(\hat{x}, d) = u_\infty(-d, -\hat{x}) \quad x, d \in S^2$$

Δηλαδή το πεδίο στο άπειρο είναι αμετάβλητο αν η κατεύθυνση του προσπίπτοντος πεδίου και οι κατευθύνσεις παρατηρήσεις εναλλάσσονται.

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green στις συναρτήσεις u^i του προσπίπτων πεδίου:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \{u^i(\cdot, d) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(\cdot, -\hat{x}) - u^i(\cdot, -\hat{x}) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(\cdot, d)\} ds \\ &= \int_D (u^i(y, d) \Delta u^i(y, -\hat{x}) - u^i(y, -\hat{x}) \Delta u^i(y, d)) dy \\ &= -k^2 \int_D u^i(y, d) u^i(y, -\hat{x}) - u^i(y, -\hat{x}) u^i(y, d) dy = 0 \end{aligned}$$

Αφού το u^i ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στον R^3 . Στο σύνορο όμως ισχύει $u^i + u^s = 0$ άρα τελικά έχουμε :

$$\int_{\partial D} \{u^s(\cdot, d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot, -\hat{x}) - u^s(\cdot, -\hat{x}) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot, d)\} ds = 0$$

Οπότε προκύπτει:

$$4\pi u_\infty(\hat{x}, d) = \int_{\partial D} \{u^s(\cdot, d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot, -\hat{x}) - u^s(\cdot, -\hat{x}) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot, d)\} ds = 0$$

Αλλάζοντας τις θέσεις των \hat{x}, d έχουμε:

$$4\pi u_\infty(-d, -\hat{x}) = \int_{\partial D} \{u^s(\cdot, -\hat{x}) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(\cdot, d) - u^i(\cdot, d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot, -\hat{x})\} ds$$

Προσθέτουμε τις τρεις τελευταίες σχέσεις και προκύπτει:

$$4\pi \{u_\infty(\hat{x}, d) - u_\infty(-d, -\hat{x})\} = \int_{\partial D} \{u^i(\cdot, d) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(\cdot, -\hat{x}) - u^i(\cdot, -\hat{x}) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(\cdot, d)\} ds$$

Με την συνοριακή συνθήκη $u(\cdot, d) = u(\cdot, -\hat{x}) = 0$ το ολοκλήρωμα μηδενίζεται οπότε έχουμε:

$$u_\infty(\hat{x}, d) = u_\infty(-d, -\hat{x}) \quad , x, d \in S^2$$

Για την σκέδαση μίας σημειακής πηγής $w^i(x, z) = \Phi(x, z)$ με $z \in R^3 \setminus \bar{D}$ θα συμβολίζουμε με $w^s(x, z)$ το σκεδασμένο πεδίο, το ολικό πεδίο με $w(x, z)$ και το μακρινό πεδίο με $w_\infty^s(\hat{x}, d)$.

Θεώρημα 2.22

Για την σκέδαση με τη μέθοδο των σημειακών πηγών επίπεδων κυμάτων ισχύει η μικτή σχέση αμοιβαιότητα:

$$4\pi w_{\infty}^s(-d, z) = u^s(z, d), \quad z \in R^3 \setminus \bar{D}, d \in S^2$$

Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για όλες τις συνοριακές συνθήκες. Αφού το μακρινό πεδίο Φ_{∞} του προσπίπτοντος πεδίου Φ δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_{\infty}(d, z) = \frac{1}{4\pi} e^{-ikdz}$$

Τότε συμπεραίνουμε ότι το μακρινό πεδίο w^s γράφεται:

$$w_{\infty}(d, z) = \frac{1}{4\pi} u(z, -d)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ακολουθεί τα ίδια βήματα με την προηγούμενη απόδειξη με την χρήση δηλαδή του θεωρήματος Green.

Θεώρημα 2.23

Για την σκέδαση σημειακών πηγών ισχύει η σχέση συμμετρίας:

$$w^s(x, y) = w^s(y, x) \quad x, y \in R^3 \setminus \bar{D}$$

Τίθεται τώρα το ερώτημα αν όλα τα μακρινά πεδία για ένα σταθερό αντικείμενο-στόχο D είναι πλήρες για όλα τα προσπίπτον επίπεδα κύματα στον $L^2(S^2)$.

Υπενθύμιση:

Ο υπόχωρος U ενός χώρου X Hilbert είναι πλήρης αν όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του U είναι πυκνοί στο X . Δηλαδή ισχύει η σχέση $X = \overline{\text{span}U}$. Με άλλα λόγια ο χώρος U είναι πλήρης αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο $u \in U$ η σχέση $(u, \varphi) = 0$ μας δίνει αναγκαστικά $\varphi = 0$.

Ορισμός:

Η κυματική συνάρτηση Herglotz έχει την μορφή:

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d) \quad , x \in R^3, g \in L^2(S^2)$$

Η συνάρτηση g καλείται **πυρήνας Herglotz** της v .

Οι κυματικές συναρτήσεις Herglotz είναι προφανώς λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.

Το ακόλουθο θεώρημα αποτυπώνει την ένα προς ένα αντιστοίχιση των συναρτήσεων Herglotz και των πυρήνων τους.

Θεώρημα 2.24

Αν η κυματική συνάρτηση Herglotz u με πυρήνα g γίνεται μηδέν στον R^3 , τότε $g = 0$.

Απόδειξη:

Έστω $u(x)=0$ για κάθε $x \in R^3$. Τότε ισχύει:

$$\int_{S^2} e^{-ikxd} g(d) ds(d) = 0 \quad x \in R^3$$

Αφού $g \in L^2(S^2)$ έχουμε ότι :

$$g(d) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n(d)$$

Όπου οι συντελεστές δίνονται απο τον τύπο:

$$c_n = \int_{S^2} g(d) \overline{Y_n(d)} ds(d) \quad n = 0, 1, \dots$$

Άρα έπεται ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{S^2} e^{-ikxd} Y_n(d) ds(d) = 0 \quad x \in R^3$$

Όμως ισχύει ο τύπος των Funk-Hecke:

$$\int_{S^2} e^{-ikxz} Y_n(z) ds(z) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(k|x|) Y_n(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{4\pi}{i^n} j_n(k|x|) Y_n(x) = 0 \Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow \int_{S^2} g(d) \overline{Y_n(d)} ds(d) = 0$$

Λόγω πληρότητας των σφαιρικών αρμονικών στον $L^2(S^2) \Rightarrow g = 0$.

Λήμμα 2.25

Για μία δεδομένη συνάρτηση $g \in L^2(S^2)$ η λύση για το πρόβλημα σκέδασης για το προσπίπτον κύμα:

$$v^i(x) = \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d) \quad , x \in R^3$$

δίνεται από τη σχέση:

$$v^s(x) = \int_{S^2} u^s(x, d) g(d) ds(d) \quad , x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

και έχει πεδίο στο άπειρο:

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

Το πεδίο στο άπειρο είναι πλήρης στο $L^2(S^2)$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει τετριμμένη Herglotz v που μηδενίζεται στο σύνορο ∂D . Μια τέτοια συνάρτηση είναι μια Dirichlet ιδιοσυνάρτηση για την αρνητική Λαπλασιανή στο D με μηδενικές συνοριακές τιμές.

Θεώρημα 2.26

Έστω (d_n) μία ακολουθία απο μοναδιαία διανύσματα που είναι πυκνά στο S^2 και ορίζουμε το σετ F του πεδίου στο άπειρο ως εξής:

$$F := \{ u_\infty(\hat{x}, d): n = 1, \dots \}$$

Τότε ο F είναι πλήρης στον $L^2(S^2)$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει ιδιοσυνάρτηση Dirichlet για το D που να είναι κυματική συνάρτηση Herglotz.

Απόδειξη:

Το σύνολο $F := \{ u_\infty(\hat{x}, d): n = 1, \dots \}$ είναι πλήρης στον $L^2(S^2) \Leftrightarrow (u_\infty, h) = 0$ για κάθε $u \in F$ έπεται ότι $h=0$. Έστω η u_∞ συνεχής που ικανοποιεί την συνθήκη πληρότητας:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d_n) h(\hat{x}) ds(\hat{x}) = 0 \quad , n = 1, 2, \dots$$

Για μία συνάρτηση $h \in L^2(S^2)$ και μ την χρήση της σχέσης αμοιβαιότητας το ολοκλήρωμα αυτό ισοδυναμεί με :

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d_n) g(d) ds(d) = 0 \quad , \hat{x} \in S^2$$

για $g \in L^2(S^2)$ με $g(d) = h(-d)$.

Η ύπαρξη μίας μη τετριμμένης συνάρτησης g που να ικανοποιεί την τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την ύπαρξη μίας μη τετριμμένης κυματικής συνάρτησης Herglotz v^i για την οποία το μακρινό πεδίο που αντιστοιχεί στο σκεδαζόμενο κύμα v^s είναι $v_\infty = 0$. Άρα αν $v_\infty = 0$ στην μοναδιαία σφαίρα S^2 τότε $v^s = 0$ στον $R^3 \setminus \bar{D}$. Απο την συνοριακή συνθήκη $v^i + v^s = 0$ και την μοναδικότητα του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet αυτό ισοδυναμεί με $v^i = 0$ στο ∂D . Άρα:

$$\int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d) = 0 \quad \text{στο } \partial D$$

Η v^i ικανοποιεί και την διαφορική εξίσωση Helmholtz επομένως:

$$(\Delta + k^2) \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d) = 0 \quad \text{στο } D$$

Τέλος ο F είναι πλήρης στον $L^2(S^2)$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει ιδιοσυνάρτηση Dirichlet για το D που να είναι κυματική συνάρτηση Herglotz.

Θεώρημα 2.27

Ο τελεστής μακρινού πεδίου $F: L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ που ορίζεται απο τη σχέση:

$$F(g)(\hat{x}) = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d) \quad , x \in S^2$$

Είναι ένα προς ένα και έχει πυκνό πεδίο τιμών αν και μόνο αν δεν υπάρχει ιδιοσυνάρτηση Dirichlet για το D που να είναι κυματική συνάρτηση Herglotz.

Απόδειξη:

Ορίζουμε τον συζυγή του τελεστή μας $F^*: L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ για τον οποίο από την σχέση αμοιβαιότητας ισχύει:

$$F^* g = \overline{RFR\bar{g}}$$

Όπου $R: L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ ορίζεται ο: $(Rg)(d) := g(-d)$.

Ο F είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν είναι και ο συζυγής του F^* . Ο F^* είναι όμως 1-1 \Leftrightarrow ισχύει $\text{Ker}(F^*) = \{\emptyset\} \Leftrightarrow \text{Ker}(F^*)^\perp = \{\emptyset\}^\perp = L^2(S^2)$. Σε έναν χώρο Hilbert έχουμε $\text{Ker}(F^*)^\perp = F(L^2(S^2))$ για τον φραγμένο τελεστή F άρα το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα.

Ο τελεστής μακρινού πεδίου F παίζει σημαντικό ρόλο στα αντίστροφα προβλήματα οπότε θα δούμε μερικές ιδιότητες του.

Λήμμα 2.28

Ο τελεστής F ικανοποιεί την σχέση:

$$2\pi \{(Fg, h) - (g, Fh)\} = ik(Fg, Fh) \quad g, h \in L^2(S^2)$$

όπου με (\cdot, \cdot) συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στο $L^2(S^2)$.

Απόδειξη:

Έστω v^s και w^s λύσεις της διαφορικής Helmholtz που ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας και έχουν πλάτος σκέδασης v_∞, w_∞ αντίστοιχα. Τότε από την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μακρινού πεδίου και το δεύτερο θεώρημα του Green έχουμε:

$$\int_{\partial D} (v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu}) ds = -2ik \int_{S^2} v_\infty \overline{w_\infty} ds$$

Αν η w_h^i είναι μία κυματική συνάρτηση Herglotz με πυρήνα h τότε:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} (v^s(x) \frac{\partial \overline{w_h^i}}{\partial \nu}(x) - \overline{w_h^i}(x) \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x)) ds(x) = \\ & = \int_{S^2} \overline{h(d)} \int_{\partial D} (v^s(x) \frac{\partial e^{-ikxd}}{\partial \nu(x)} - e^{-ikxd} \frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x)) ds(x) ds(d) = 4\pi \int_{S^2} \overline{h(d)} v_\infty(d) ds(d) \end{aligned}$$

Έστω τώρα v_g^i, v_h^i κυματικές συναρτήσεις Herglotz με πυρήνες $g, h \in L^2(S^2)$ και v_g, v_h λύσεις του προβλήματος σκέδασης. Τότε από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} & -2ik(Fg, Fh) + 4\pi(Fg, h) - 4\pi(g, Fh) = \\ & = -2ik \int_{S^2} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} ds + 4\pi \int_{S^2} v_{g,\infty} \overline{h} ds - 4\pi \int_{S^2} g \overline{v_{h,\infty}} ds \\ & = \int_{\partial D} (v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu}) ds \end{aligned}$$

Λόγω συνοριακής συνθήκης προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.29

Ο τελεστής μακρινού πεδίου F είναι κανονικός και συμπαγής, δηλαδή ισχύει η σχέση

$FF^* = F^*F$, και άρα έχει και πεπερασμένο αριθμό ιδιοτιμών.

Απόδειξη:

Αφού ο F είναι ένας ολοκληρωτικός τελεστής με συνεχή πυρήνα θα είναι και συμπαγής. Άρα από το λήμμα έχουμε:

$$(g, ikF^*Fh) = 2\pi\{(g, Fh) - (g, F^*h)\} \text{ για κάθε } g, h \in L^2(S^2)$$

Επομένως:

$$ikF^*F = 2\pi(F - F^*) \Rightarrow (F^*g, F^*h) = (FR\bar{h}, FR\bar{g}) \Rightarrow$$

$$ik(F^*g, F^*h) = 2\pi\{(g, F^*h) - (F^*g, h)\} \text{ για κάθε } g, h \in L^2(S^2)$$

$$\text{Άρα : } ikF^*F = 2\pi(F - F^*) \Rightarrow FF^* = F^*F.$$

Συνέπεια:

Ο τελεστής σκέδασης $S : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ που ορίζεται απο τη σχέση:

$$S := I + \frac{ik}{2\pi}F$$

είναι ορθοκανονικός δηλαδή: $SS^* = S^*S = I$.

Άρα από την ορθοκανονικότητα του S συνεπάγεται ότι οι ιδιοτιμές του F βρίσκονται σε έναν κύκλο με κέντρο $(0, \frac{2\pi}{\kappa})$ στον θετικό φανταστικό άξονα με ακτίνα $\frac{2\pi}{\kappa}$.

Θεώρημα 2.30

Έστω v^s να είναι μια ακτινοβολούσα λύση της εξίσωσης Helmholtz με πεδίο στο άπειρο v_∞ . Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d)ds(d) = v_\infty(\hat{x}), \quad \hat{x} \in S^2$$

Έχει λύση $g \in L^2(S^2)$ αν και μόνο αν η v^s ορίζεται στο $R^3 \setminus \bar{D}$, είναι συνεχής στο $R^3 \setminus D$ και το εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης Helmholtz:

$$\Delta v^i + k^2 v^i = 0 \quad \text{στο } D$$

$$v^i + v^s = 0 \quad \text{στο } \partial D$$

είναι επιλύσιμη με την λύση v^i να είναι μία Herglotz κυματική συνάρτηση.

Ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος είναι η σφαιρική κυματική συνάρτηση:

$$v(x)^s = h_n^{(1)}(k|x|)Y_n\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{με} \quad v_\infty = \frac{1}{ki^{n+1}}Y_n$$

Θεώρημα 2.31

Έστω (d_n) ακολουθία απο μοναδιαία διανύσματα που είναι πυκνά στο S^2 . Τότε η κανονική παράγωγος του συνολικού πεδίου

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} u(\cdot, d_n) : n = 1, \dots \right\}$$

που αντιστοιχούν στα προσπίπτοντα επίπεδα κύματα με κατευθύνσεις (d_n) είναι πλήρης στο $L^2(\partial D)$.

Θεώρημα 2.32

Ο τελεστής $A : C(\partial D) \rightarrow L^2(S^2)$ που χαρτογραφεί τις συνοριακές τιμές των ακτινοβολούσων λύσεων $w \in C^2(R^3 \setminus \bar{D}) \cap C(R \setminus D)$ της Helmholtz στο πεδίο στο άπειρο w_∞ μπορεί να επεκταθεί σε ένα, ένα προς ένα, φραγμένο, γραμμικό τελεστή

$$A : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(S^2) \text{ με πυκνό σύνολο τιμών. (dense range)}$$

Θεώρημα 2.33

Για τον τελεστή μακρινού πεδίου F έχουμε την παραγοντοποίηση:

$$F = -2\pi A S^* A^*$$

Απόδειξη:

Ορίζουμε τον τελεστή Herglotz $H : L^2(S^2) \rightarrow L^2(\partial D)$:

$$(Hg)(x) := \int_{S^2} e^{-ikxd} g(d) ds(d) \quad , x \in \partial D$$

Ο Fg αναπαριστά το πλάτος σκέδασης του σκεδαζόμενου πεδίου που αντιστοιχεί στο προσπίπτον πεδίο Hg . Οπότε έχουμε:

$$F = -AH$$

Ο L^2 συζυγής $H^* : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(S^2)$ δίνεται απο τον τύπο:

$$(H^*g)(x) := \int_{\partial D} e^{-ik\hat{x}d} \varphi(y) ds(y) \quad , \hat{x} \in S^2$$

Και αναπαριστά το μακρινό πεδίο ενός μονού δυναμικού με πυκνότητα 4π . Επομένως:

$$H^* = 2\pi AS \Rightarrow H = 2\pi S^* A^*$$

Άρα $F = -A(2\pi S^* A^*) = -2\pi AS^* A^*$.

Θεώρημα 2.34

Η ολόκληρη λύση v της εξίσωσης Helmholtz ικανοποιεί την συνθήκη αύξησης

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x|\leq R} |v(x)|^2 dx < \infty$$

αν και μόνο αν είναι μία κυματική συνάρτηση Herglotz δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει μία συνάρτηση $g \in L^2(S^2)$ της μορφής:

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d), \quad x \in R^3.$$

Για τις κυματικές συναρτήσεις Herglotz v με πυρήνα g έχουμε:

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x|\leq R} |v(x)|^2 dx = \frac{8\pi^2}{k^2} \|g\|_{L^2(S^2)}^2$$

3. Μη ομογενές σώμα - Εξίσωση Lippmann-Schwinger

3.1 Διατύπωση φυσικού προβλήματος

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων σε μη-ομογενή μέσα διάδοσης με συμπαγή φορέα σε όλο τον R^3 . Το πρόβλημα αυτό το έχουμε ορίσει από την αρχή και θα αναλύσουμε τώρα την απλούστερη περίπτωση όπου το δυναμικό της ταχύτητας δεν έχει ασυνέχειες στα σύνορα του μη-ομογενούς σώματος. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι ολοκληρωτικές εξισώσεις αλλά δυναμικά όγκου πλέον και όχι επιφάνειας όπως μέχρι τώρα λόγω απουσίας των συνοριακών συνθηκών.

Θα διατυπώσουμε το φυσικό πρόβλημα αρχικά για να καταλήξουμε στην εξίσωση Helmholtz για το μη ομογενές σώμα. Όμοια με πριν θεωρώ την διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους στον R^3 ένα πρόβλημα ρευστοδυναμικής.

Έστω $u(x,y)$, $x \in R^3$ η ταχύτητα ενός σωματιδίου του μη ιξώδες ρευστού, $p=p(x,t)$ η πίεση, $\rho=\rho(x,y)$ η πυκνότητα και $S=S(x,y)$ η ειδική εντροπία. Αν στο υγρό δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις τότε έχουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad})u + \frac{1}{\rho} \text{grad}p = 0, \text{ εξίσωση Euler}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0, \text{ εξίσωση συνέχειας}$$

$$\rho = f(p, S), \text{ καταστατική εξίσωση}$$

όπου f μια συνάρτηση που εξαρτάται από την φύση του ρευστού

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot \text{grad}S = 0, \text{ υπόθεση αδιαβατικού}$$

Θεωρώντας ότι τα v, S, p, ρ είναι μικρά διαταράσσουμε αυτά τα μεγέθη γύρω από την στατική κατάσταση $v = 0$, $p = p_0 = \text{σταθερά}$, $\rho = \rho_0(x)$, $S = S_0(x)$ με $p_0 = f(\rho_0, S_0)$ έχουμε:

$$v(x, t) = \epsilon v_1(x, t) + \dots$$

$$p(x, t) = p_0 + \epsilon p_1(x, t) + \dots$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \epsilon \rho_1(x, t) + \dots$$

$$S(x, t) = S_0(x) + \epsilon S_1(x, t) + \dots$$

όπου $0 < \epsilon \ll 1$ και οι τελείες εννοούν μεγαλύτερη τάξη του ϵ .

Κρατώντας μόνο τους όρους τάξης του ϵ έχω τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 v_1) = 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2(x) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \cdot \text{grad} \rho_0 \right)$$

Όπου η ταχύτητα του ήχου είναι : $c^2(x) = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(x), S_0(x))$

Άρα η p_1 ικανοποιεί την σχέση:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2(x) \rho_0(x) \text{div} \left(\frac{1}{\rho_0(x)} \text{grad} p_1 \right)$$

Αγνοώντας τώρα τους όρους που περιέχουν $\text{grad} p_0$ και υποθέτοντας ότι η p_1 είναι αρμονική:

$$p_1(x, t) = \text{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \}$$

Βλέπουμε ότι η u ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση διάδοσης του χρονοαρμονικού κύματος μικρού πλάτους σε αργά μεταβαλλόμενο μη ομογενές μέσο.

Για την διατύπωση του προβλήματος θεωρώ το απλούστερο σενάριο κάνοντας κάποιες υποθέσεις. Αρχικά ότι η ανομοιογένεια έχει συμπαγή φορέα σε όλο τον R^3 και ότι το κύμα δημιουργείται από το προσπίπτον πεδίο u^i που ικανοποιεί την γραμμικοποιημένη «ατάραχη εξίσωση». Στη συνέχεια για το μη ομογενές μέσω θεωρώ ότι υπάρχει στο εσωτερικό μίας μπάλας B άρα για κάθε $x \in R^3 \setminus B$ έχω σταθερό $c(x) = c_0$. Οπότε το πρόβλημα γίνεται:

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \quad / R^3$$

$$u = u^i + u^s$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0$$

όπου $k = \frac{\omega}{c_0} > 0$ είναι ο κυματάριθμος και $n(x) := \frac{c_0^2}{c^2(x)} > 0$ ο δείκτης διάθλασης.

Ο δείκτης διάθλασης είναι πάντα θετικός και στην περίπτωσή μας για $n(x)=1$ το $x \in R^3 \setminus B$. Σε κάποιες περιπτώσεις όταν το μέσο απορροφά το κύμα ο δείκτης παίρνει την μορφή:

$$n(x) = n_1(x) + i \frac{n_2(x)}{k}$$

3.2 Η εξίσωση Lippmann-Schwinger

Σκοπός είναι να βρούμε μια ολοκληρωτική εξίσωση για το παραπάνω πρόβλημα όπου ο δείκτης διάθλασης n να είναι τμηματικά συνεχής στον R^3 . Έστω:

$$m := 1 - n$$

με συμπαγή στήριξη και $n_1(x) > 0$ και $n_2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R^3$.

Στα επόμενα θεωρήματα θα θεωρήσουμε ότι οι υποθέσεις μας ισχύουν στο

$$D := \{x \in R^3 : m(x) \neq 0\}$$

Επίσης θα χρειαστούμε το δυναμικό του όγκου:

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^3$$

Όπου ως γνωστόν η

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y$$

Είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz. Η $\varphi \in C_0(R^3)$ και είναι συνεχής στο R^3 .

Θεώρημα 3.1

Το δυναμικό όγκου u υπάρχει ως κατάλληλο ολοκλήρωμα για κάθε $x \in R^3$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Αν $\varphi \in C_0(R^3)$ τότε η $u \in C^{1,a}(R^3)$ και η τάξη παραγωγίσιμης με την ολοκλήρωση μπορούν να αντιστραφούν. Αν $\varphi \in C_0(R^3) \cap C^{0,a}(R^3)$ τότε η $u \in C^{2,a}(R^3)$ και

$$\Delta u + k^2 u = -\varphi / R^3$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\|u\|_{2,a,R^3} \leq C \|\varphi\|_{a,R^3}$$

για κάποια θετική σταθερά C που εξαρτάται μόνο από την στήριξη φ .

Επιπροσθέτως αν $\varphi \in C_0(R^3) \cap C^{1,a}(R^3)$ τότε $u \in C^{3,a}(R^3)$.

Λόγω του τμηματικά συνεχούς n δεν θα υπάρχουν C^2 λύσεις της ανισότητας του θεωρήματος γι' αυτό απαιτείται να υπάρχουν λύσεις στον χώρο Sobolev $H_{loc}^2(R^3)$. Οπότε χρειαζόμαστε έναν

τρόπο χαρτογράφησης για το δυναμικό όγκου σε χώρους Sobolev από τις κλασικές ιδιότητες στους χώρους Hölder.

Θεώρημα 3.2

Για δύο φραγμένα χωρία D και G το δυναμικό όγκου

$$(V\varphi)(x) := \int_D \Phi(x, y)\varphi(y) ds(y), x \in R^3$$

Ορίζει ένα φραγμένο τελεστή: $V: L^2(D) \rightarrow H^2(G)$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος μας ισοδυναμεί με την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Lippmann-Schwinger:

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{R^3} \Phi(x, y)m(y)u(y)dy, x \in R^3 \quad (3.1)$$

Θεώρημα 3.3

Αν $u \in H_{loc}^2(R^3)$ είναι λύση του αρχικού προβλήματος τότε είναι λύση και της (3.1). Αντίστροφα αν $u \in C(R^3)$ είναι λύση της (3.1) τότε $u \in H_{loc}^2(R^3)$ και είναι λύση του αρχικού προβλήματος.

Απόδειξη:

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος Green.

Έστω $u \in H_{loc}^2(R^3)$ λύση του αρχικού προβλήματος. Έστω $x \in R^3$ τυχαίο σημείο και επιλέγουμε μία ανοιχτή μπάλα B με εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ν που περιέχει τη στήριξη του m τέτοιο ώστε $x \in B$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green για την u :

$$u(x) = \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(x, \cdot) - u \frac{\partial \Phi(x, \cdot)}{\partial \nu} \right\} ds - k^2 \int_B \Phi(x, \cdot) m u dy$$

Αφού ισχύει $\Delta u + k^2 u = m k^2 u$. Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει σε όλο τον R^3 αφού το m έχει στήριξη στη B .

Εφαρμόζοντας τους τύπους Green και για τα u^i, u^s έχουμε:

$$u^i(x) = \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \Phi(x, \cdot) - u^i \frac{\partial \Phi(x, \cdot)}{\partial \nu} \right\} ds$$

$$u^s(x) = \int_{\partial B} \left\{ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} \Phi(x, \cdot) - u^s \frac{\partial \Phi(x, \cdot)}{\partial \nu} \right\} ds = 0$$

Η τελευταία ισούται με μηδέν λόγω της συνθήκης ακτινοβολίας. Άρα εφόσον $u = u^i + u^s$ προκύπτει το ζητούμενο δηλαδή ότι ικανοποιείται και η (3.1).

Αντίστροφα, έστω $u \in C(R^3)$ λύση της (3.1) και έστω:

$$u^s := -k^2 \int_{R^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, x \in R^3$$

Αφού η Φ ικανοποιεί την συνθήκη Sommerfeld δηλαδή συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς y σε συμπαγή σύνολα και το m έχει συμπαγή φορέα φαίνεται ότι και η u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας. Εφόσον το m είναι συνεχής κατά τμήματα εύκολα συμπεραίνουμε ότι $u \in H_{loc}^2(R^3)$ με $\Delta u^s + k^2 u^s = mk^2 u$. Όμως $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ άρα έχουμε:

$$\Delta u + k^2 u = (\Delta u^i + k^2 u^i) + \Delta u^s + k^2 u^s = mk^2 u$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αφού $\Delta u + k^2 nu = 0 / R^3$.

Η μοναδικότητα της (3.1) μπορεί ναδειχθεί εύκολα για αρκετά μικρά k με την απλή μέθοδο των συνεχών επαναλήψεων.

Θεώρημα 3.4

Έστω $m(x) = 0$ για $|x| \geq a$ για κάποιο $a > 0$ και $k^2 < \frac{2}{Ma^2}$ όπου $M := \sup_{|x| \leq a} |m(x)|$.

Τότε υπάρχει μοναδική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.1).

Απόδειξη:

Η (3.1) αρκεί να λυθεί για $u \in C(\bar{B})$ όπου $B := \{x \in R^3 : |x| < a\}$. Στον χώρο Banach $C(\bar{B})$ έχω τον τελεστή: $T_m: C(\bar{B}) \rightarrow C(\bar{B})$

$$(T_m)(x) := \int_B \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, x \in \bar{B}$$

Άρα η (3.1) παίρνει την μορφή:

$$u = u^i - k^2 T u \Leftrightarrow (I + k^2 T) u = u^i$$

Με την μέθοδο των συνεχών παραγωγίσεων το θεώρημα θαδειχθεί αν δείξω ότι:

$$\|T_m\|_\infty \leq \frac{Ma^2}{2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα τελεστών στον χώρο Banach αφού ισχύει $\frac{Ma^2}{2} < 1$

Έχουμε:

$$|(T_m u)(x)| \leq \frac{M \|u_\infty\|}{4\pi} \int_B \frac{dy}{|x-y|}, \quad x \in \bar{B}$$

Ορίζουμε την λύση της εξίσωσης Poisson $\Delta h = -4\pi$ και είναι συνάρτηση μόνο για $r = |x|$:

$$h := \int_B \frac{dy}{|x-y|}$$

Άρα η h λύνει την διαφορική:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dh}{dr} \right) = -4\pi$$

που έχει γενική λύση:

$$h(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{c_1}{r} + c_2$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Επειδή η h είναι συνεχής βλέπουμε ότι $c_1 = 0$. Για $r \rightarrow 0$:

$$c_2 = h(0) = \int_B \frac{dy}{|y|} = 4\pi \int_0^a \rho \, d\rho = 2\pi a^2$$

Άρα $h(r) = 2\pi \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$ και $\|h\|_\infty = 2\pi a^2$.

Άρα έχουμε το ζητούμενο:

$$|T_m(u)(x)| \leq \frac{Ma^2}{2} \|u\|_\infty, \quad x \in \bar{B}.$$

3.3 Το μακρινό πεδίο

Το μακρινό πεδίο μας εξασφαλίζει σημαντική πληροφορία για την λύση του προβλήματος. Θα ορίσουμε και την αρχική προσέγγιση (born approximation) από την οποία ξεκινάμε μία επαναληπτική μέθοδο. Να θυμίσουμε ότι έχουμε:

$$u^s := -k^2 \int_{R^3} \Phi(x,y) m(y) u(y) dy, \quad x \in R^3$$

Όταν $|x| \rightarrow \infty$ παίρνουμε:

$$u^s(x) = \frac{e^{-ikx}}{|x|} u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{R^3} e^{ik\hat{x}y} m(y)u(y)dy$$

Όπου $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ στην μοναδιαία σφαίρα S^2 .

Αν αντικαταστήσουμε στην $u_\infty(\hat{x})$ όπου $u(y)$ το $u^i(y)$ παίρνουμε την αρχική προσέγγιση.

Θεώρημα 3.5

Το μακρινό πεδίο ικανοποιεί την σχέση αμοιβαιότητας:

$$u_\infty(\hat{x}, d) = u_\infty(-d, -\hat{x}), \quad \text{για κάθε } \hat{x} \in S^2$$

Η σχέση αυτή έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Έστω $\{d_n: n = 1, 2, \dots\}$ ένα μετρήσιμο πυκνό σύνολο διανυσμάτων στην μοναδιαία σφαίρα S^2 και έστω η κλάση μακρινών πεδίων $F := \{u_\infty(\cdot, d_n): n = 1, 2, \dots\}$.

Θεώρημα 3.6

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του F στον $L^2(S^2)$ αποτελείται από τις συζυγείς των συναρτήσεων $g \in L^2(S^2)$ για τις οποίες υπάρχουν $w \in H^2(D)$ και μία Herglotz κυματική συνάρτηση:

$$v(x) = \int_{S^2} e^{-ik \cdot x} g(d) ds(d), \quad x \in R^3$$

τέτοια ώστε το ζεύγος w, v είναι λύσεις των:

$$\Delta w + k^2 n(x)w = 0, \quad \Delta v + k^2 v = 0 \text{ στο } D$$

Και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες :

$$w = v, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ στο } \partial D$$

Απόδειξη:

Έστω F^\perp το ορθογώνιο συμπλήρωμα του F . Θα δείξουμε ότι $\bar{g} \in F^\perp$ αν και μόνο αν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος. Από την συνέχεια του u_∞ ως συνάρτηση του d και επειδή $\bar{g} \in F^\perp$ θα έχουμε:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d_n) g(\hat{x}) ds(\hat{x}) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \Leftrightarrow$$

$$\int_{S^2} u_\infty(-d, -\hat{x}) g(\hat{x}) ds(\hat{x}) = 0 \quad \forall d \in S^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g(-d) ds(d) = 0 \quad \forall \hat{x} \in S^2$$

Από την εξίσωση Lippmann Schwinger βλέπουμε ότι η τελευταία σχέση είναι το μακρινό πεδίο w^s που αντιστοιχεί στο προσπίπτον πεδίο :

$$w^i := \int_{S^2} e^{ikxd} g(-d) ds(d) = \int_{S^2} e^{-ikxd} g(d) ds(d)$$

Άρα από θεώρημα προηγούμενου κεφαλαίου $w^s = 0$ στο $R^3 \setminus D$.

Αν $v = w^i$ και $w = w^i + w^s$ τότε $w = v$ στο ∂D και $\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ στο ∂D .

Αντίστροφα, αν οι v, w ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος αν θέσουμε $v = w$ στο $R^3 \setminus \bar{D}$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green βλέπουμε ότι η w επεκτείνεται σε όλο τον R^3 ως λύση H^2 της $\Delta w + k^2 n(x)w = 0$.

Καταλαβαίνουμε από την απόδειξη ότι η συνθήκη του θεωρήματος μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη $w = v$ στο $R^3 \setminus D$ σε ένα πιο γενικό πρόβλημα σκέδασης με μία ασθενής λύση.

Θεώρημα 3.7

Έστω $v_p(x) = h_p^{(1)}(k|x|Y_p(\hat{x}))$ μία κυματική σφαιρική εξίσωση τάξης p . Η ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους:

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_p(\hat{x}) ds(\hat{x}) = \frac{i^{p-1}}{k} Y_p(d), \quad d \in S^2$$

Έχει μία λύση $g_p \in L^2(S^2)$ αν και μόνο αν υπάρχει $w \in H^2(D)$ και μία κυματική συνάρτηση Herglotz:

$$v(x) = \int_{S^2} e^{-ikxd} g_p(d) ds(d), \quad x \in R^3$$

Τέτοια ώστε οι v, w να είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$\Delta w + k^2 n(x)w = 0 \quad , \quad \Delta v + k^2 v = 0 \quad \text{στο } D$$

Που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες:

$$w - v = v_p \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v_p}{\partial \nu} \quad \text{στο } \partial D$$

4. Αντίστροφο πρόβλημα

4.1 Μη-καλά τοποθετημένα προβλήματα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ένα πρόβλημα είναι καλά τοποθετημένο κατά Hadamard αν έχει λύση, η λύση αυτή είναι μοναδική και τέλος αν η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του προβλήματος. Η τελευταία συνθήκη μας ενδιαφέρει γιατί τα δεδομένα είναι μετρήσιμες ποσότητες και θέλουμε να δούμε αν μικρές αποκλίσεις των δεδομένων αλλάζουν την λύση. Άρα δεν θέλουμε να υπάρχουν μεγάλα σφάλματα στις λύσεις των προβλημάτων επομένως θα μελετήσουμε και την ευστάθεια αυτών. Ειδικά τα αντίστροφα προβλήματα είναι συχνά μη-καλά τοποθετημένα λόγω της περιπλοκότητάς τους. Γι'αυτό θα μελετήσουμε μεθόδους ομαλοποίησης που θα μας βοηθήσουν να λύσουμε προσεγγιστικά τα προβλήματα.

Ορισμός 4.1

Έστω $A : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ τελεστής από τον υπόχωρο U ενός χώρου με νόρμα X στον υπόχωρο V ενός χώρου με νόρμα Y . Η εξίσωση $A(\varphi) = f$ λέγεται **καλά τοποθετημένη** αν ο τελεστής $A: U \rightarrow V$ είναι 1-1 και επί και ο τελεστής $A^{-1}: V \rightarrow U$ είναι συνεχής. Διαφορετικά η εξίσωση είναι **μη-καλά τοποθετημένη**.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό μπορούμε να προσδιορίσουμε ποια συνθήκη δεν ικανοποιείται ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Συγκεκριμένα:

- Αν ο τελεστής A δεν είναι επί \Rightarrow μη-ύπαρξη της λύσης
- Αν ο τελεστής A δεν είναι 1-1 \Rightarrow μη-ύπαρξη μοναδικότητας της λύσης
- Αν ο τελεστής $A^{-1}: V \rightarrow U$ υπάρχει αλλά δεν είναι συνεχής \Rightarrow αστάθεια λύσης

Υπενθύμιση

Αν ο $A : X \rightarrow Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, X, Y χώροι Banach και ο A είναι 1-1 και επί τότε ο αντίστροφος $A^{-1}: X \rightarrow Y$ είναι φραγμένος και συνεχής.

Ο τελεστής $A: U \rightarrow V$ είναι συμπαγής αν απεικονίζει φραγμένα σύνολα του U σε συμπαγή σύνολα του V .

Αν ο A είναι συμπαγής και συνεχής τότε είναι απόλυτα συνεχής.

Θεώρημα 4.2

Έστω $A : U \subset X \rightarrow Y$ είναι απόλυτα συνεχής τελεστής από τον υπόχωρο U του χώρου με νόρμα X στον υπόχωρο V του χώρου με νόρμα Y . Η εξίσωση πρώτου είδους $A(\varphi) = f$ δεν είναι καλά τοποθετημένη ή αλλιώς είναι κακής κατάστασης αν ο χώρος U δεν έχει πεπερασμένη διάσταση.

Απόδειξη:

Έστω ότι ο $A^{-1}: V \rightarrow U$ υπάρχει και είναι συνεχής. Τότε από την σχέση $I = A^{-1}A$ βλέπουμε ότι ο μοναδιαίος τελεστής U είναι συμπαγής αφού το γινόμενο ενός συνεχούς και ενός συμπαγή τελεστή είναι συμπαγής. Επομένως ο U πρέπει να είναι πεπερασμένης διάστασης.

Ομαλοποίηση μη καλά τοποθετημένων προβλημάτων

Βασική ιδέα της ομαλοποίησης μη καλά τοποθετημένων προβλημάτων είναι η εύρεση προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος. Η αντιμετώπιση δηλαδή όποιων προβλημάτων υπάρχουν και καθιστούν το πρόβλημα μη καλά τοποθετημένο. Επίσης σκοπός είναι να εξασφαλίσουμε ότι μικρά σφάλματα στα δεδομένα του προβλήματος δεν θα προκαλέσουν μεγάλες διαταραχές στη λύση του. Γι' αυτό υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι με την πιο γνωστή να είναι η κανονικοποίηση Tikhonov. Θα αναλύσουμε αυτήν την ιδέα για το ευθύ πρόβλημα όπου έχουμε την εξίσωση $A\varphi = f$ και θέλουμε να προσεγγίσουμε την φ από την γνώση μίας διατάραξης f^δ με ένα

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta$$

Όταν η $f \in A(x) := \{A\varphi: \varphi \in X\}$ και μάλιστα η φ να είναι μοναδική λύση. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τελεστής $A: X \rightarrow Y$ είναι 1-1. Γνωρίζοντας λοιπόν την διατάραξη f^δ προσεγγίζουμε την φ^δ η οποία θα είναι ευσταθής και θα είναι η προσσέγγιση της πραγματικής λύσης φ . Επομένως πρέπει να προσεγγίσουμε τον μη φραγμένο τελεστή $A^{-1}: A(x) \rightarrow Y$ από την γνώση ενός φραγμένου τελεστή $R: Y \rightarrow X$.

Ορισμός 4.3

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και ο τελεστής $A: X \rightarrow Y$ να είναι 1-1, γραμμικός και φραγμένος. Τότε μια οικογένεια γραμμικών φραγμένων τελεστών $R_\alpha: Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$ με την ιδιότητα της κατά σημείο σύγκλισης :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A\varphi = \varphi \quad , \text{για κάθε } \varphi \in X$$

λέγεται **μέθοδος ομαλοποίησης** (regularization scheme) για τον τελεστή A . Η παράμετρος α λέγεται **παράμετρος ομαλοποίησης**.

Θεώρημα 4.4

Έστω X, Y χώροι με νόρμα, έστω $A: X \rightarrow Y$ γραμμικός, φραγμένος και συμπαγής τελεστής και έστω $\dim X = \infty$. Τότε για μία μέθοδο ομαλοποίησης οι τελεστές R_α δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα φραγμένοι για κάθε α και οι τελεστές $R_\alpha A$ δεν συγκλίνουν κατά νόρμα όταν $\alpha \rightarrow 0$.

Η μέθοδος ομαλοποίησης προσεγγίζει την λύση φ της $A\varphi = f$ με την προσεγγιστική λύση:

$$\varphi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta$$

Τότε από το σφάλμα της προσέγγισης έχουμε:

$$\varphi_\alpha^\delta - \varphi = R_\alpha f^\delta - R_\alpha A\varphi - \varphi$$

Και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha A\varphi - \varphi\|$$

Αυτή η ανάλυση μας δείχνει ότι το σφάλμα προκύπτει από τους δύο όρους στο δεξί μέλος. Από την επιρροή του $\delta \|R_\alpha\|$ που αφορά λανθασμένα δεδομένα του προβλήματος και από την επιρροή του δεύτερου όρου που προκύπτει λόγω σφάλματος προσέγγισης μεταξύ R_α και A^{-1} . Στην πρώτη περίπτωση δεν γίνεται καλή ομοιόμορφη εκτίμηση για κάθε α ενώ στην δεύτερη περίπτωση για κάθε φ . Συγκεκριμένα όσο το $\alpha \rightarrow 0$ ο όρος $\delta \|R_\alpha\|$ θα μεγαλώνει και ο $\|R_\alpha A\varphi - \varphi\|$ θα μικραίνει λόγω της κακής κατάστασης του προβλήματος. Άρα μία μέθοδος ομαλοποίησης αναζητά μία στρατηγική εύρεσης μίας παραμέτρου α που να εξαρτάται από το επίπεδο σφάλματος δ και από τα δεδομένα f^δ ώστε να έχει επιτρεπτό σφάλμα για την προσεγγιστική λύση.

Ορισμός 4.5

Η στρατηγική μίας μεθόδου ομαλοποίησης $R_\alpha, \alpha > 0$ είναι η επιλογή της παραμέτρου ομαλοποίησης $\alpha = \alpha(\delta, f^\delta)$ και ονομάζεται **κανονική ή ομαλή** αν για κάθε $f \in A(X)$ και για κάθε $f^\delta \in Y$ με

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta$$

Έχουμε:

$$R_\alpha(\delta, f^\delta) f^\delta \rightarrow A^{-1} f, \delta \rightarrow 0$$

Στην αναζήτηση μεθόδων ομαλοποίησης υπάρχουν επιλογές για την παράμετρο α που έχουν προτεραιότητα. Για παράδειγμα η πρώτη επιλογή της παραμέτρου μπορεί να βασίζεται στο να ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας του προβλήματος αλλά πρακτικά αυτό να μην είναι πολύ εύκολο με αποτέλεσμα να διαλέξουμε ένα επόμενο κριτήριο βασισμένο σε δεδομένα σφάλματος δ που είναι πιο πρακτικό. Μία δευτερεύουσα στρατηγική δίνεται από την αποκοπή ή την αρχή των υπολοίπων που δίνεται από τον Morozov. Αυτή βασίζεται στην ιδέα ότι το υπόλοιπο $\|A\varphi - f\|$ δεν θα πρέπει να είναι μικρότερο από την ακρίβεια της f . Δηλαδή η επιλογή του α θα γίνει με την συνθήκη:

$$\|AR_\alpha f^\delta - f^\delta\| = \gamma \delta$$

Για κάποιο σταθερό $\gamma \geq 1$ πολλαπλασιάζοντας το σφάλμα επιπέδου δ . Τέλος υπάρχει και η μέθοδος επιλογής. Δηλαδή βρίσκοντας διάφορες τιμές για το a με διαφορετικά κριτήρια τις δοκιμάζουμε στο πρόβλημα και διαλέγουμε την καλύτερη στα δεδομένα μας.

Σε χώρους Hilbert έχουμε μεθόδους ομαλοποίησης όπως η ιδιάζουσα παραγοντοποίηση για συμπαγείς τελεστές η οποία είναι γενίκευση της φασματικής παραγοντοποίησης για συμπαγείς αυτοσυζηγείς τελεστές. Αυτή περιγράφεται ως εξής:

Έστω X χώρος Hilbert και $A: X \rightarrow X$ αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής δηλαδή ισχύει:

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi) \text{ για κάθε } \varphi, \psi \in X$$

Τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές. Αν επιπλέον $A \neq 0$ τότε έχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή διάφορη του μηδενός και αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών. Όλες οι ιδιοτιμές έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα άρα και οι ιδιοχώροι που αντιστοιχούν σε αυτές είναι πεπερασμένων διαστάσεων. Τέλος τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Έστω οι ιδιοτιμές που είναι διάφορες του μηδενός:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

οι οποίες επαναλαμβάνονται ανάλογα με την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών και έστω (φ_n) μία ακολουθία των αντίστοιχων ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων τους. Τότε για κάθε $\varphi \in X$ μπορούμε να επεκτείνουμε την:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q_\varphi$$

όπου $Q: X \rightarrow N(A)$ είναι οι ορθογώνιες προβολές του X στον πυρήνα $N(A) := \{\varphi \in X : A\varphi = 0\}$ και έχουμε:

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi, \varphi_n) \varphi_n$$

Στους μη-γραμμικούς τελεστές η ομαλοποίηση είναι απαραίτητη. Στην διαδικασία εύρεσης μίας προσεγγιστικής λύσης με οποιαδήποτε μέθοδο όπως μία επαναληπτική Newton η γραμμικοποίηση του προβλήματος καθιστά το πρόβλημα μη καλά τοποθετημένο. Είναι λοιπόν αναγκαίο αυτό να λυθεί και μπορεί να επιτευχθεί με την μέθοδο ιδιάζουσας παραγοντοποίησης ή την ομαλοποίηση Tikhonov.

Θεώρημα 4.6

Για έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή ισχύουν οι ιδιότητες:

$$A(X)^\perp = N(A^*)$$

$$N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}$$

Θεώρημα 4.7

Έστω (μ_n) μία ακολουθία μη μηδενικών μονοτιμών του συμπαγή γραμμικού τελεστή $A, (A \neq 0)$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$$

με επαναληπτικότητα ανάλογα με την πολλαπλότητα τους η οποία είναι ανάλογη με την διάσταση του πυρήνα $N(\mu_n^2 I - A^*A)$. Τότε υπάρχει μία ορθοκανονική ακολουθία (φ_n) στο X και (g_n) στο Y έτσι ώστε:

$$A\varphi_n = \mu_n g_n \quad A^*g_n = \mu_n \varphi_n \text{ για κάθε } n \in N$$

Για κάθε $\varphi \in X$ έχουμε την μονοτιμή:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q_\varphi$$

Με την ορθογώνια προβολή $Q: X \rightarrow N(A)$

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\varphi, \varphi_n) g_n$$

Κάθε σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **ιδιάζον σύστημα ή μη ομαλό**.

Θεώρημα 4.8 (Picard)

Έστω $A: X \rightarrow Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής με το ιδιάζον σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) . Η εξίσωση πρώτου είδους $A\varphi = f$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα $N(A^*)^\perp$ και ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, g_n)|^2 < \infty$$

Και η λύση δίνεται από τον τύπο:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \varphi_n$$

Θεώρημα 4.9

Έστω $A: X \rightarrow Y$ ένα προς ένα, συμπαγής, γραμμικός τελεστής με το ιδιάζον σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) . Έστω $q: (0, \infty) \times (0, \|A\|] \rightarrow R$ μία φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε

$$|q(a, \mu)| \leq c(a)\mu \quad , 0 < \mu \leq \|A\|$$

$$\text{και } \lim_{a \rightarrow 0} q(a, \mu) = 1$$

Τότε οι γραμμικοί φραγμένοι τελεστές $R_a : Y \rightarrow X$, $a > 0$:

$$R_a f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(a, \mu_n) (f, g_n) \varphi_n \quad f \in Y$$

Περιγράφουν μία μέθοδο κανονικοποίησης με:

$$\|R_a\| \leq c(a)$$

Θεώρημα 4.10

Έστω $A: X \rightarrow Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής με το ιδιάζον σύστημα (μ_n, φ_n, g_n) . Τότε η φασματική αποκοπή (spectral cut-off) :

$$R_m f = \sum_{\mu_n \geq \mu_m} \frac{1}{\mu_n} (f, g_n) \varphi_n$$

Περιγράφει μία μέθοδο κανονικοποίησης με παράμετρο $m \rightarrow \infty$ και

$$\|R_m\| = \frac{1}{\mu_m}$$

Θεώρημα 4.11

Έστω $A: X \rightarrow Y$ 1-1 συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο τιμών στο Y . Έστω $f \in Y$, $\delta > 0$, τότε υπάρχει ένας μικρότερος ακέραιος m :

$$\|AR_m f - f\| \leq \delta$$

Θεώρημα 4.12

Έστω $A: X \rightarrow Y$ 1-1 συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο τιμών στο Y . Έστω $f \in A(X)$, $f^\delta \in Y$:

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta, \delta > 0$$

Έστω $\gamma > 1$. Τότε υπάρχει $m = m(\delta)$:

$$\|AR_{m(\delta)} f^\delta - f^\delta\| \leq \gamma \delta$$

$$R_{m(\delta)} f^\delta \rightarrow A^{-1} f, \delta \rightarrow 0$$

Κανονικοποίηση Tikhonov

Θεώρημα 4.13

Έστω $A: X \rightarrow Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Για κάθε $\alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + A^*A: X \rightarrow X$ είναι ένα προς ένα και επί και έχει φραγμένο αντίστροφο.

Αν ο A είναι 1-1 τότε:

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$$

Μία μέθοδο κανονικοποίησης με:

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$$

Θεώρημα 4.14

Έστω $A: X \rightarrow Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής, $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μοναδική $\varphi_\alpha \in X$:

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\varphi_\alpha\|^2 = \inf_{\varphi \in X} \{ \|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2 \} \quad (4.1)$$

Η φ_α είναι η μοναδική λύση της παρακάτω εξίσωσης και εξαρτάται συνέχεια από την f :

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f$$

Η σχέση (4.1) είναι η συνάρτηση Tikhonov και η κανονικοποίηση Tikhonov είναι η ελαχιστοποίηση αυτής της συνάρτησης. Η λύση της συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση των υπολοίπων $\|A\varphi_\alpha - f\|^2$ τα οποία είναι και σταθεροποιημένα λόγω του όρου $\alpha\|\varphi_\alpha\|^2$ (penalty term). Αν και η μέθοδος Tikhonov δεν είναι μέθοδος ποινής πρέπει να προσέξουμε τους περιορισμούς στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα έχουμε τα εξής προβλήματα:

- Αν για δοθέντος $\delta > 0$ θέλω την ελαχιστοποίηση της νόρμας $\|\varphi\|$ υπό τον περιορισμό $\|A\varphi - f\| < \delta$ αυτό μας οδηγεί σε ασυμφωνία στην καταρχήν διαφορά (discrepancy principle)
- Αν για δοθέντος $\rho > 0$ ελαχιστοποιούμε τον όρο $\|A\varphi - f\|$ υπό τον περιορισμό $\|\varphi\| \leq \rho$ μας οδηγεί σε ψευδό-λύση (quasi-solution)

Θεώρημα 4.15

Έστω $A: X \rightarrow Y$ 1-1 συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο τιμών στο Y , $f \in Y$ με $0 < \delta < \|f\|$. Τότε υπάρχει μοναδικό α :

$$\|AR_a f - f\| = \delta$$

Δηλαδή ότι η $F(a) := \|AR_a f - f\|^2 - \delta^2$ έχει μοναδικό μηδενικό.

Θεώρημα 4.16

Έστω $A: X \rightarrow Y$ 1-1 συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνό σύνολο τιμών στο Y . Έστω $f \in A(X)$, $f^\delta \in Y$ να ικανοποιεί την $\|f^\delta - f\| \leq \delta \leq \|f^\delta\|$ με $\delta > 0$. Τότε υπάρχει μοναδικό $\alpha = \alpha(\delta)$:

$$\|AR_{\alpha(\delta)} f^\delta - f^\delta\| = \delta$$

Με $R_{\alpha(\delta)} f^\delta \rightarrow A^{-1} f$, $\delta \rightarrow 0$.

Ορισμός 4.17

Θεωρούμε τους χώρους με νόρμα X, Y και μία απεικόνιση $F: X \rightarrow Y$ και $x_0 \in X, n \in X$. Η F θα καλείται **Fréchet διαφορίσιμη** στο x_0 αν υπάρχει A γραμμικός και φραγμένος τελεστής

$A: X \rightarrow Y$ έτσι ώστε:

$$\lim_{n \neq 0, \|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|(F(x_0 + h) - F(x_0) - A(h))\|_Y}{\|h\|_X} = 0, \text{ για κάθε } h \in X$$

Τον γραμμικό και φραγμένο τελεστή A ονομάζουμε **Fréchet παράγωγο** της απεικόνισης F στο x_0 . Η F καλείται **Fréchet παραγωγίσιμη** αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x_0 \in X$.

Θεώρημα 4.18

Έστω $A: U \subset X \rightarrow Y$ ένας απολύτως συνεχής τελεστής από έναν ανοιχτό υπόχωρο U χώρου με νόρμα X στον χώρο Banach Y και έστω ο A Fréchet διαφορίσιμος στο $\psi \in U$. Τότε η παράγωγος $A'\psi$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα 4.19

Έστω $A: U \subset X \rightarrow Y$ ασθενώς διαδοχικά κλειστός τελεστής από τον υπόχωρο U χώρου Hilbert X στον χώρο Hilbert Y . Για κάθε ακολουθία (φ_n) από τον U που συγκλίνει ασθενώς $(\varphi_n) \rightarrow \varphi \in X$ και $A(\varphi_n) \rightarrow g \in Y$ με $\varphi \in U$ και $A\varphi = g$. Έστω $a > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει $\varphi_\alpha \in U$ τέτοια ώστε:

$$\|A(\varphi_\alpha) - f\|^2 + a\|\varphi_\alpha\|^2 = \inf_{\varphi \in U} \{ \|A(\varphi) - f\|^2 + a\|\varphi\|^2 \}$$

Θεώρημα 4.20

Έστω $A : U \subset X \rightarrow Y$ συνεχής τελεστής από το U συμπαγής υπόχωρος χώρου Hilbert X στον χώρο Hilbert Y . Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει $\alpha_{\varphi_0} \in U$ τέτοια ώστε:

$$\|A(\varphi_0) - f\|^2 = \inf_{\varphi \in U} \{ \|A(\varphi) - f\|^2 \}$$

Το στοιχείο φ_0 λέγεται ψευδο-λύση της $A\varphi = f$ εντός του χώρου U .

Εν κατακλείδι για την μη γραμμική και μη καλά τοποθετημένη εξίσωση $A(\varphi) = f$ προσπαθούμε με μία επαναληπτική μέθοδο να βρώ την λύση της από την προσεγγιστική γνώση της f^δ με σφάλμα:

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta$$

Υποθέτουμε ότι ο τελεστής A είναι απολύτως συνεχής και Fréchet διαφορίσιμος. Εφαρμόζω την μέθοδο Newton στην διαταραγμένη εξίσωση $A\varphi^\delta = f^\delta$ και λύνω την γραμμικοποιημένη εξίσωση:

$$B_n h_n = f^\delta - A(\varphi_n^\delta)$$

Με βήμα h_n και επαναληπτικό τύπο $\varphi_{n+1}^\delta = \varphi_n^\delta + h_n$ και θέτουμε $B_n := A' \varphi_n^\delta$.

Βέβαια η γραμμικοποίηση επιφέρει κάποια προβλήματα και πρέπει να εφαρμοστεί μια μέθοδο ομαλοποίησης από τις προηγούμενες που αναφέραμε ή υπάρχει και ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt.

4.2 Αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης και μοναδικότητα

Το αντίστροφο πρόβλημα ξεκινάει από την λύση του ευθύ προβλήματος δηλαδή από την γνώση του μακρινού πεδίου να προσδιορίσουμε την φύση του σκεδαστή. Υπάρχει μεγάλη ποικιλία προβλημάτων βέβαια όπως για παράδειγμα να γνωρίζω τις συνοριακές συνθήκες και να θέλουμε να προσδιορίσουμε το σχήμα του σκεδαστή ή το ανάποδο να γνωρίζουμε το σχήμα και να ψάχνουμε τις συνθήκες, να τα γνωρίζουμε όλα αυτά και να υπάρχει μετάδοση του κύματος μέσα στον σκεδαστή οπότε εκεί ανάλογα με το υλικό που υπάρχει να δούμε πως μεταβάλλεται ο δείκτης διάθλασης και άλλα πολλά όλα με δικό τους ενδιαφέρον και σκοπό.

Το αντίστροφο πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Γνωρίζουμε το πεδίο στο άπειρο (το πλάτος σκέδασης) για ένα ή περισσότερα επίπεδα κύματα και ότι ο σκεδαστής είναι μαλακός (sound-soft). Στόχος μας είναι να βρούμε το σχήμα του σκεδαστή για συχνότητες στην περιοχή του συντονισμού. Για σκεδαστές D και για k -κυματάριθμο θέλουμε να ισχύει και η συνθήκη $\frac{2\pi}{k} \leq d$ όπου d η διάμετρος του σκεδαστή.

Αυτό το πρόβλημα είναι και μη γραμμικό και μη καλά τοποθετημένο. Είναι μη γραμμικό αφού δοθέντος του προσπίπτον κύματος u^i και του σκεδαζόμενου u^s το πρόβλημα εύρεσης του συνόρου του σκεδαστή ως τόπος που μηδενίζεται το συνολικό κύμα $u^i + u^s$ είναι μη γραμμικό. Δεν είναι καλά τοποθετημένο αφού το να βρω το σκεδαζόμενο κύμα u^s από το πεδίο στο άπειρο u_∞ ανήκει σε αυτήν την κατηγορία.

Θα δούμε λοιπόν αρχικά υπό ποιες συνθήκες ένας σκεδαστής καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την γνώση του πλάτους σκέδασης επίπεδων κυμάτων. Η αναλυτικότητα του μακρινού πεδίου στην μοναδιαία σφαίρα έπεται και από την αναλυτικότητα σε μία μικρότερη επιφάνεια.

Θεώρημα 4.21 (Schiffer)

Έστω D_1, D_2 δύο μαλακοί σκεδαστές που έχουν το ίδιο μακρινό πεδίο για ένα άπειρο αριθμό επίπεδων κυμάτων με διαφορετικές κατευθύνσεις και τον ίδιο κυματάριθμο. Τότε $D_1 = D_2$.

Απόδειξη:

Προς απαγωγή σε άτοπο έστω ότι $D_1 \neq D_2$.

Από το Λήμμα Rellich το μακρινό πεδίο προσδιορίζει μοναδικά το σκεδασμένο πεδίο. Για κάθε προσπίπτον κύμα $u^i(x) = e^{ikx \cdot d}$ το κύμα u^s συμπίπτει για τους δύο σκεδαστές στο μη φραγμένο σύνολο G που είναι συμπλήρωμα της ένωσης συνόλων $D_1 \cup D_2$ και το ολικό κύμα εξαφανίζεται στο σύνορο ∂D .

Έστω $D^* := (R^3 \setminus G) \setminus \bar{D}_2$ είναι μη κενό. Τότε το u^s ορίζεται στο D^* αφού περιγράφει το σκεδαζόμενο κύμα στο D_2 οπότε το ολικό κύμα $u^i + u^s$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο D^* με την συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο D^* .

Το u είναι μία ιδιοσυνάρτηση Dirichlet για την αρνητική Λαπλασιανή στο D^* με ιδιοτιμή k^2 και ανήκει στον χώρο Sobolev $u \in H_0^1(D^*)$. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να δείξω ότι το ολικό πεδίο για ξεχωριστά εισερχόμενα κύματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ότι για ένα συγκεκριμένο k υπάρχει μόνο πεπερασμένες γραμμικά ανεξάρτητες Dirichlet ιδιοσυναρτήσεις στο $H_0^1(D^*)$. Έστω ότι:

$$\sum_{n=1}^N c_n u(\cdot, d_n) = 0 \text{ στο } D^*$$

Η οποία ικανοποιείται στο εξωτερικό μίας σφαίρας που έχει τα D_1, D_2 . Έχουμε:

$$u(x, d_n) = e^{ikx \cdot d_n} + u^s(x, d_n)$$

Και επειδή

$$u^s(x, d_n) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

Αντικαθιστώντας αυτά στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε:

$$\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^N c_n \int_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)} dS(x) = O\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty$$

για $m=1,2,\dots,N$. Από το θεώρημα Funk-Hecke έχουμε:

$$\int_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)} dS(x) = \frac{4\pi R \sin(kR|d_n-d_m|)}{k|d_n-d_m|}, \quad n \neq m$$

$$\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^N c_n \int_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)} dS(x) = 4\pi c_m + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

Αν πάρουμε όμως το όριο $R \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι $c_m = 0$ για κάθε $m=1,2,\dots,N$. Άρα δείξαμε την γραμμική ανεξαρτησία των συναρτήσεων $u(\cdot, d_n)$.

Μένει να δείξω ότι είναι και πεπερασμένες. Έστω ότι είναι άπειρες οι u_n .

Από ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt έχω:

$$\int_{D^*} u_n \bar{u}_m dx = \delta_{nm}$$

όπου δ_{nm} είναι η δέλτα του Kronecker. Από τις εξισώσεις Green τώρα έχουμε:

$$\int_{D^*} |\operatorname{grad} u_n|^2 dx = k^2 \int_{D^*} |u_n|^2 dx = k^2$$

Οπότε η ακολουθία (u_n) είναι φραγμένη κατά νόρμα στον $H_0^1(D^*)$. Από το θεώρημα Rellich και τη συμπάγεια της εμφύτευσης του χώρου Sobolev $H_0^1(D^*)$ στον $L^2(D^*)$ μπορούμε να επιλέξουμε μία συγκλίνουσα κατά νόρμα υπακολουθία της (u_n) στον $L^2(D^*)$. Άρα προκύπτει:

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(D^*)}^2 = 2 \quad \text{για } n \neq m$$

Έτσι προκύπτει το άτοπο και τελειώνει η απόδειξη αφού τα (u_n) είναι ορθοκανονικά.

Θεώρημα 4.22

Έστω D_1 και D_2 δύο μαλακοί σκεδαστές που υπάρχουν σε μία μπάλα ακτίνας R , θέτουμε:

$$N := \sum_{t_{nl} < kR} (2n + 1)$$

και έστω ότι το πεδίο στο άπειρο συμπίπτει για $N+1$ προσπίπτον κύματα με διαφορετικές κατευθύνσεις και για ένα συγκεκριμένο k . Τότε $D_1 = D_2$.

Πόρισμα 4.23

Έστω D_1 και D_2 δύο μαλακοί σκεδαστές που υπάρχουν σε μία μπάλα ακτίνας R με $kR < \pi$ και έστω ότι το πεδίο στο άπειρο συμπίπτει για ένα επίπεδο κύμα με κυματάριθμο k . Τότε $D_1 = D_2$.

Θεώρημα 4.24

Μία μαλακή (sound-soft) μπάλα είναι μοναδικά καθορισμένη από το μακρινό πεδίο ενός προσπίπτον επίπεδου κύματος.

Θεώρημα 4.25

Ένα μαλακό κυρτό πολύεδρο μπορεί να εκτιμηθεί από το μακρινό πεδίο ενός προσπίπτον επίπεδου κύματος.

Θεώρημα 4.26

Έστω D_1, D_2 δύο μαλακοί σκεδαστές με συνοριακές συνθήκες B_1, B_2 , τέτοιες ώστε για ένα άπειρο αριθμό επίπεδων κυμάτων με διαφορετικές κατευθύνσεις και τον ίδιο κυματάριθμο το μακρινό τους πεδίο συμπίπτει. Τότε $D_1 = D_2$ και $B_1 = B_2$.

Η απόδειξη κάνει χρήση σημειακών πηγών.

Φυσική οπτική προσέγγιση

Το αντίστροφο πρόβλημα του να προσδιορίσεις το σύνορο του σκεδαστή από το μακρινό πεδίο είναι μη γραμμικό πρόβλημα όπως έχουμε ήδη πεί. Θα δούμε λοιπόν μία γραμμικοποιημένη μέθοδο από τις προσεγγίσεις Kirchhoff. Στην φυσική οπτική προσέγγιση για ένα κυρτό μαλακό σκεδαστή D για έναν αρκετά μεγάλο αριθμό κυμάτων k έχουμε την προσέγγιση του μακρινού πεδίου από τον τύπο:

$$u_\infty(\hat{x}, d) = -\frac{ik}{2\pi} \int_{\partial D_-} v(y) \cdot d e^{ik(d-\hat{x})y} ds(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

Όπου $\partial D_- := \{y \in \partial D: v(y) \cdot d < 0\}$ δηλαδή είναι το μέρος του συνόρου που είναι φωτισμένο από το επίπεδο κύμα με κατεύθυνση d . Συγκεκριμένα για $\hat{x} = -d$ για την ανάποδη κατεύθυνση σκέδασης έχουμε:

$$u_{\infty}(-d, d) = -\frac{1}{4\pi} \int_{v(y) \cdot d < 0} \frac{\partial}{\partial v(y)} e^{2ikdy} ds(y)$$

Με απλή αντικατάσταση του d με το $-d$ έχουμε:

$$u_{\infty}(d, -d) = -\frac{1}{4\pi} \int_{v(y) \cdot d > 0} \frac{\partial}{\partial v(y)} e^{-2ikdy} ds(y)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες δύο εξισώσεις και το θεώρημα Green παίρνουμε:

$$\begin{aligned} u_{\infty}(-d, d) + \overline{u_{\infty}(d, -d)} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial D} e^{2ikdy} ds(y) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_D \Delta e^{2ikdy} ds(y) = \frac{k^2}{\pi} \int_D e^{2ikdy} ds \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με χ την χαρακτηριστική συνάρτηση του πεδίου D το προηγούμενο συμπέρασμα γράφεται και με τον εξής τρόπο και η εξίσωση αυτή είναι γνωστή και ως ιδιότητα Bojarski:

$$\int_{R^3} \chi(y) e^{2ikdy} dy = \frac{\pi}{k^2} \{u_{\infty}(-d, d) + \overline{u_{\infty}(d, -d)}\}$$

Επομένως παρατηρούμε ότι η φυσική οπτική προσέγγιση οδηγεί σε γραμμικοποίηση του αντίστροφου προβλήματος διότι από τις μετρήσεις του μακρινού πεδίου και χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να προσδιορίσουμε πρώτα την χαρακτηριστική χ και στη συνέχεια τον σκεδαστή D .

Υπάρχουν ωστόσο κάποια προβλήματα και με αυτήν την μέθοδο διότι αρχικά, χρειαζόμαστε τα δεδομένα u_{∞} για όλους τους κυματάριθμους αλλά η φυσική οπτική προσέγγιση ισχύει μόνο για μεγάλα k και δεύτερον πρακτικά ο μετασχηματισμός Fourier των χαρακτηριστικών χ ισχύει για $k \geq k_0$ για κάποιο $k_0 > 1$. Άρα πρέπει να γίνει ο μετασχηματισμός με ελεειπή δεδομένα που οδηγεί σε ασάφεια στην μοναδικότητα της λύσης. Οπότε αυτή η προσέγγιση δεν είναι κατάλληλη για όλες τις περιπτώσεις.

4.3 Ο τελεστής μακρινού πεδίου (Far Field Mapping)

Ο τελεστής $\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_{\infty}$ αντιστοιχεί στο ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Το αντίστροφο συνιστάται στην επίλυση της μη γραμμικής μη καλά τοποθετημένης εξίσωσης:

$$\mathcal{F}(\partial D) = u_{\infty}$$

με άγνωστο το σύνορο ∂D . Στη συνέχεια θα δουλεύουμε στον χώρο Hilbert $L^2(S^2)$, των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στην μοναδιαία σφαίρα.

Έστω $\partial D = \{r(\hat{x})\hat{x} : \hat{x} \in S^2\}$ με r μία θετική συνάρτηση $r > 0 \in C^1(S^2)$ και:

$$\mathcal{F}(r): C^1(S^2) \mapsto L^2(S^2)$$

Άρα θέλουμε να μελετήσουμε τον τελεστή \mathcal{F} ως προς την συνέχεια, την συμπάγεια, την διαφορισιότητα και όποιες άλλες χρήσιμες ιδιότητες μίας και έχει τόσο σημαντικό ρόλο στην προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων μας.

Θεώρημα 4.27

Για ένα συγκεκριμένο (fix) προσπίπτον κύμα u^i ο τελεστής $\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_\infty$ που καθορίζει το σύνορο ∂D στο μακρινό πεδίο u_∞ του σκεδασμένου κύματος u^s είναι συνεχής από το $C^1(S^2)$ στο $L^2(S^2)$.

Θεώρημα 4.28

Η χαρτογράφηση $\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_\infty$ είναι Fréchet διαφορίσιμη δηλαδή παραγωγίσιμη σε χώρους Banach από το $C^1(S^2)$ στο $L^2(S^2)$.

Θεώρημα 4.29

Η χαρτογράφηση $\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_\infty$ είναι τοπικά συμπαγής από το $C^1(S^2)$ στο $L^2(S^2)$ αν:

Για κάθε $r \in C^1(S^2)$ υπάρχει περιοχή U του r τέτοια ώστε:

$\mathcal{F}: U \mapsto L^2(S^2)$ να είναι συμπαγής.

Η διαφορισιότητα του μακρινού πεδίου χαρτογράφησης \mathcal{F} μέσω φραγμένων ολοκληρωτικών εξισώσεων καθιερώθηκε από τον Potthast. Στην προσέγγιση ασθενούς λύσης οι φορείς πρέπει να μετασχηματιστούν σε μία επιφάνεια αναφοράς. Έστω ότι το σύνορο είναι σαν αστέρι με μία θετική συνάρτηση $r \in C^2(S^2)$. Αντιστοιχούμε σε κάθε μονόμετρη συνάρτηση $q \in S^2$ με μία διανυσματική συνάρτηση $p_q \in S^2$ μέσω:

$$p_q(\hat{x}) := q(\hat{x})\hat{x}, \quad \hat{x} \in S^2$$

Η συνάρτηση p_q χαρτογραφεί το S^2 ένα προς ένα και επί στο σύνορο ∂D . Αντικαθιστώντας με $x = p_r(\hat{x})$ και $y = p_r(\hat{y})$ στις εκφράσεις των ολοκληρωτικών τελεστών που έχουμε ήδη δει S, K, K' παίρνουμε τους μετασχηματισμένους τελεστές: $S_r, K_r, K_r^* : C(S^2) \rightarrow C(S^2)$:

$$(S_r \psi)(\hat{x}) = 2 \int_{S^2} \Psi(p_r(\hat{x}) - p_r(\hat{y})) J_r(\hat{y}) \psi(\hat{y}) ds(\hat{y})$$

$$(K_r \psi)(\hat{x}) = 2 \int_{S^2} v_r(y) \cdot \text{grad} \Psi(p_r(\hat{x}) - p_r(\hat{y})) J_r(\hat{y}) \psi(\hat{y}) ds(\hat{y})$$

$$(K_r^* \psi)(\hat{x}) = 2 \int_{S^2} v_r(\hat{x}) \cdot \text{grad} \Psi(p_r(\hat{x}) - p_r(\hat{y})) J_r(\hat{y}) \psi(\hat{y}) ds(\hat{y})$$

$$\text{όπου } \Psi(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|z|}}{|z|}, \quad z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

και J_r η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού που δίνεται από τον τύπο:

$$J_r = r \sqrt{r^2 + |\text{grad}r|^2}, \quad v_r = \frac{p_r - \text{Grad}r}{\sqrt{r^2 + |\text{grad}r|^2}}$$

Με v_r συμβολίζουμε το κανονικό διάνυσμα που περιγράψαμε.

Λήμμα 4.30

Η ανισότητα:

$$|\{p_r(\hat{x}) - \text{Grad}r(\hat{x})\} \cdot \{p_r(\hat{x}) - p_r(\hat{y})\}| \leq C \|r\|_{1,a}^2 |\hat{x} - \hat{y}|^{1+a}$$

Ισχύει για κάθε $r \in C^{1,a}(S^2)$, για κάθε $\hat{x}, \hat{y} \in S^2$ και κάποια σταθερά C .

Λήμμα 4.31

Οι ανισότητες:

$$\frac{1}{2} \min_{\hat{z} \in S^2} |r(\hat{z})| |\hat{x} - \hat{y}| \leq |p_r(\hat{x}) - p_r(\hat{y})| \leq \pi \|r\|_{C^1(S^2)} |x - y|$$

Ισχύουν για κάθε $r \in C^1(S^2)$, για κάθε $\hat{x}, \hat{y} \in S^2$.

Τα λήμματα αυτά εξασφαλίζουν ότι οι πυρήνες των ολοκληρωτικών τελεστών S_r, K_r, K_r^* είναι ασθενώς μονά αν $r \in C^2(S^2)$, δηλαδή ότι οι S_r, K_r, K_r^* είναι συμπαγείς τελεστές από το $C(S^2)$ στο $C(S^2)$.

Η χαρτογράφηση $r \rightarrow J_r$ είναι Fréchet διαφορίσιμη από το $C^1(S^2)$ στο $C(S^2)$ με παράγωγο:

$$J_r' q = q \sqrt{r^2 + |\text{Grad}r|^2} + r \frac{rq + \text{Grad}r \cdot \text{Grad}q}{\sqrt{r^2 + |\text{Grad}r|^2}}, \quad r > 0$$

Θεώρημα 4.32

Η χαρτογράφηση $r \rightarrow S_r$ είναι Fréchet διαφορίσιμη από το $C^2(S^2)$ στον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}(C(S^2), C(S^2))$, των $C(S^2)$ στον εαυτό του.

Θεώρημα 4.33

Οι χαρτογραφήσεις $r \rightarrow K_r$, $r \rightarrow K_r^*$ είναι Fréchet διαφορίσιμες από το $C^2(S^2)$ στον χώρο γραμμικών φραγμένων τελεστών $\mathcal{L}(C(S^2), C(S^2))$.

Θεώρημα 4.34

Η χαρτογράφηση $\mathcal{F}: \partial D \mapsto u_\infty$ είναι Fréchet διαφορίσιμη από το $C^2(S^2)$ στο $L^2(S^2)$. Η παράγωγος δίνεται από :

$$\mathcal{F}'_r q = u_\infty$$

Όπου u_∞ είναι το μακρινό πεδίο της λύσης u της εξίσωσης Helmholtz στο $R^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και την συνοριακή:

$$u = -v(p_q \circ p_r^{-1}) \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ στο } \partial D$$

Θεώρημα 4.35

Ο γραμμικός τελεστής \mathcal{F}'_r είναι 1-1 και έχει πυκνό σύνολο τιμών. (dense range)

Θεώρημα 4.36

Έστω (Λ_n) μία ακολουθία αστέρων στον C^2 που συγκλίνει κατά νόρμα στον $C^{1,\alpha}$ σε μία επιφάνεια C^2 , Λ όταν $n \rightarrow \infty$, και έστω u_n, u λύσεις της εξίσωση Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας στα εξωτερικά των Λ_n, Λ αντίστοιχα. Έστω ότι οι συνεχείς συνοριακές τιμές των u_n στο Λ_n είναι L^2 συγκλίνουσες στο u πάνω στο Λ . Τότε η ακολουθία u_n και όλες οι παραγώγους της συγκλίνουν ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του εξωτερικού της ανοιχτής επιφάνειας Λ .

4.4 Επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης

Η προηγούμενη ανάλυση της συνέχειας, συμπάγειας και διαφορισιμότητας της χαρτογράφησης του μακρινού πεδίου μας ενδιαφέρει για να εφαρμόσουμε την μέθοδο Newton ή άλλων επαναληπτικών μεθόδων για την εύρεση μίας προσεγγιστικής λύσης.

Σε αυτήν την μέθοδο δοθέντος της u_∞ έχουμε την μη-γραμμική εξίσωση:

$$\mathcal{F}(r) = u_\infty$$

Η οποία αντικαθίσταται από την γραμμικοποιημένη:

$$\mathcal{F}(r) + \mathcal{F}'_r q = u_\infty \quad (4.1)$$

Το επαναληπτικό βήμα είναι q και παίρνουμε μία νέα τιμή $\tilde{r} = r + q$ από την προηγούμενη r .

Για πρακτικούς λόγους, υπολογιστικούς παίρνουμε το q από ένα πεπερασμένο υπόχωρο W_n του $C^2(S^2)$ με διάσταση N και η (4.1) είναι προσεγγιστικά λυμένη προβάλλοντας την σε έναν πεπερασμένο υπόχωρο του $L^2(S^2)$. Η καλύτερη προβολή δίνεται από την συγκατάταξη στο M των $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N \in S^2$ και έχουμε την βάση του W_n :

$$q = \sum_{j=1}^N a_j q_j$$

η οποία λύνει το γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{j=1}^N a_j (\mathcal{F}'_r q_j)(\hat{x}_i) = u_\infty(\hat{x}_i) - (\mathcal{F}(r))(\hat{x}_i), i = 1, \dots, M \quad (4.2)$$

Για τους πραγματικούς συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$. Αν $2M > N$ το σύστημα θα είναι αόριστο και θα χρειαστεί η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την επίλυση του. Η (4.1) είναι μη γραμμική και στην διαδικασία γραμμικοποίησης ελαχιστοποιούμε τα σφάλματα χρησιμοποιώντας μία μέθοδο ομαλοποίησης όπως η Tikhonov λύνοντας το σύστημα:

$$\sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^N a_j (\mathcal{F}'_r q_j)(\hat{x}_i) - u_\infty(\hat{x}_i) + (\mathcal{F}(r))(\hat{x}_i) \right|^2 + a \sum_{j=1}^N a_j^2$$

Για να υπολογίσω το δεξί μέλος της (4.2) προτείνεται ο αριθμητικός υπολογισμός ολοκληρωτικών εξισώσεων πρώτου είδους και θα έχουμε άμεσα προσεγγίσεις για την κανονική παράγωγο του μακρινού πεδίου. Για να υπολογίσω τους πίνακες $(\mathcal{F}'_r q_j)(\hat{x}_i)$ πρέπει να λύσω N επιπλέον ευθύ προβλήματα για το ίδιο σύνορο ∂D και διαφορετικές συνοριακές τιμές που δίνονται από τις βασικές $q = q_j, j = 1, \dots, N$.

Η επαναληπτική μέθοδος Newton έχει αρκετά πλεονεκτήματα καθώς τα αριθμητικά παραδείγματα οδηγούν σε αρκετά ακριβείς αναπαραστάσεις με λογική ευστάθεια ενάντια σε σφάλματα στο μακρινό πεδίο. Βέβαια χρειάζεται να λύσουμε και το ευθύ πρόβλημα για κάθε βήμα και να κάνουμε μία πρώτη καλή εκτίμηση (μαντεψιά) για την πρώτη επανάληψη. Για τροποποιημένες Newton με χαμηλότερο κόστος θυμόμαστε το Huygens's principle. Δηλαδή την εξίσωση πεδίου (1) και την εξίσωση δεδομένων (2):

$$u^i(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi(x, y) ds(y), x \in \partial D \quad (1)$$

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} e^{-ik\hat{x}y} ds(y), \hat{x} \in S^2 \quad (2)$$

Οπότε έχουμε ένα σύστημα δύο ολοκληρωτικών εξισώσεων με άγνωστο το σύνορο ∂D και την κανονική παράγωγο που ορίζεται από τον τύπο: $\varphi := -\frac{\partial u}{\partial \nu}$ στο ∂D . Και οι δύο εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς φ και μη γραμμικές ως προς ∂D και επίσης και οι δύο δεν είναι καλά τοποθετημένες. Υπάρχουν τρεις μέθοδους επίλυσης αυτού του συστήματος. Μπορούμε να λύσουμε την μία αρχικά προσεγγιστικά και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτές να γραμμικοποιήσουμε και την δεύτερη και στη συνέχεια να λυθεί και αυτή με μία επαναληπτική μέθοδο ή με την μέθοδο Newton να προσπαθήσουμε να τις λύσουμε ταυτόχρονα και τις δύο αφού τις γραμμικοποιήσουμε.

Για την λύση αντίστροφων προβλημάτων και του προηγούμενου συστήματος με επαναληπτικές μεθόδους χρειαζόμαστε και τις λύσεις των αντίστοιχων ευθέων προβλημάτων. Όμως οι λύσεις αυτές δεν είναι πάντα διαθέσιμες άμεσα οπότε είναι σύνηθες να χρησιμοποιούνται συνθετικά δεδομένα. Πρέπει να προσέξουμε τους κινδύνους που κρύβει αυτή η τακτική σε αριθμητικά παραδείγματα. Συγκεκριμένα πρέπει τα συνθετικά δεδομένα να προκύψουν χωρίς να έχουμε γνώση του αντίστροφου προβλήματος εξαρχής. Για την καλύτερη κατανόηση αυτού του ζητήματος ας το δούμε και από την μαθηματική σκοπιά.

Έστω m -μία παραμετρική οικογένεια επιφανειών G_m και \mathcal{M} μία αριθμητική μέθοδο επίλυσης του ευθύ προβλήματος για να αποκτήσω n εκτιμήσεις του μακρινού πεδίου. Τότε έχω μία συνάρτηση $g: R^m \rightarrow C^m$ την οποία υπολογίζω για μία παράμετρο $a_0 \in R^m$. Δηλαδή χρησιμοποιώ την μέθοδο \mathcal{M} για να δημιουργήσω τα συνθετικά δεδομένα για μία συνοριακή επιφάνεια $\partial D \in G_m$. Τότε στην μέθοδο Newton χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο \mathcal{M} στην λύση του αντίστροφου προβλήματος σημαίνει ότι απλά λύνω την πεπρασμένη μη γραμμική εξίσωση $g(a) = g(a_0)$ και το σύνορο ∂D έχει ανακτηθεί αρκετά καλά.

4.5 Μέθοδοι ανάλυσης ή παραγοντοποίησης ή διάσπασης (Decomposition Methods)

Η μεθοδολογία αυτή στηρίζεται στη διάσπαση του αντίστροφου προβλήματος σε δύο και στην επιμέρους λύση αυτών. Όπως έχουμε πει τα αντίστροφα προβλήματα έχουν και πρόβλημα γραμμικότητας και είναι και μη καλά τοποθετημένα. Οπότε η διάσπαση γίνεται ως εξής: το πρώτο ασχολείται με το μη καλά τοποθετημένο πρόβλημα της κατασκευής του σκεδασμένου κύματος u^s γνωρίζοντας το u_∞ . Το δεύτερο ασχολείται με το μη γραμμικό πρόβλημα προσδιορισμού του άγνωστου συνόρου ∂D του σκεδαστή ως τον χώρο όπου ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη του ολικού πεδίου $u^i + u^s$.

Αρχικά λοιπόν για το πρώτο πρόβλημα ψάχνουμε το σκεδασμένο κύμα στην μορφή ενός δυναμικού επιφάνειας. Επιλέγω μια βοηθητική κλειστή C^2 επιφάνεια, Γ . Χρειαζόμαστε ελάχιστη πληροφορία για τον σκεδαστή D για να κάνουμε αυτήν την επιλογή. Το επιλέγουμε έτσι ώστε η εξίσωση Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ στο εσωτερικό του Γ με συνοριακή $u = 0$ να έχει μόνο την τετριμμένη λύση $u = 0$. Άρα το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή για την αρνητική Λαπλασιανή. Για παράδειγμα το Γ μπορεί να είναι μία σφαίρα ακτίνας R ώστε $kR \neq 0$ όπου μηδέν οι σφαιρικές Bessel $j_n = 0$, $n = 0, \dots$ δηλαδή να μην συμπίπτει με μία τέτοια συνάρτηση. Άρα με γνωστό το Γ θέλουμε να προσδιορίσουμε το u^s από το ολοκλήρωμα:

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y)$$

Όπου έχω άγνωστη την πυκνότητα $\varphi \in L^2(\Gamma)$. Γνωρίζω επιπλέον και την ασυμπτωτική συμπεριφορά:

$$u^s(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\hat{x}y}}{|x|} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x}y} \varphi(y) ds(y) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad |x| \rightarrow \infty$$

Άρα πρέπει να λύσω το σύστημα:

$$S_{\infty} \varphi = \varphi_{\infty}$$

Όπου $S_{\infty}: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(S^2)$

$$(S_{\infty} \varphi)(\hat{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} e^{-ik\hat{x}y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

Θεώρημα 4.37

Ο ολοκληρωτικός τελεστής S_{∞} είναι 1-1 και έχει πυκνό πεδίο τιμών (dense range) υπό την προϋπόθεση ότι το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή της αρνητικής Λαπλασιανής στο εσωτερικό του Γ .

Θεώρημα 4.38

Ο τελεστής μονού στρώματος $S: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Lambda)$ που δίνεται από τον τύπο:

$$(S\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Lambda$$

είναι 1-1 και έχει πυκνό πεδίο τιμών (dense range) υπό την προϋπόθεση ότι το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή της αρνητικής Λαπλασιανής στο εσωτερικό του Γ . Το Λ είναι C^2 κλειστός χώρος που περιέχει το Γ .

Θα ορίσουμε και τον τελεστή Herglotz $H: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Lambda)$

$$(Hg)(x) := \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d), \quad x \in \Lambda$$

Θεώρημα 4.39

Ο τελεστής Herglotz H είναι και αυτός 1-1 και έχει πυκνό πεδίο τιμών αν το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή της αρνητικής Λαπλασιανής στο εσωτερικό του Γ . Το Λ είναι C^2 κλειστός χώρος που περιέχει το Γ .

Από την επιλογή του Γ γνωρίζουμε ότι έχουμε το πολύ μία λύση της εξίσωσης $S_\infty u = u_\infty$ αλλά δεν έχουμε δεδομένο ότι έχει τουλάχιστον μία λύση. Η επιλυσιμότητα της εξίσωσης συνδέεται με τις ιδιότητες του σκεδαστή αλλά στην περίπτωση του αντίστροφου προβλήματος αυτός είναι άγνωστος. Για να καταλάβουμε τον βαθμό της μη-καλής τοποθετημένης αυτής εξίσωσης θα σκεφτούμε την απλούστερη περίπτωση όπου το Γ είναι η μοναδιαία σφαίρα και οι μονοτιμές της S_∞ δίνονται από την εξίσωση Funk-Hecke:

$$\mu_n = |j_n(k)|, \quad n = 0, \dots$$

Από την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά παρατηρούμε ότι φθίνουν πολύ γρήγορα οπότε το πρόβλημα όντως είναι σε κακή κατάσταση:

$$\mu_n = O\left(\frac{ek}{2n}\right)^2 \quad n \rightarrow \infty$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ομαλοποίηση Tikhonov όμως για παράδειγμα οπότε να έχουμε:

$$a\varphi_\alpha + S_\infty^* S_\infty \varphi_\alpha = S_\infty^* u_\infty, \quad a > 0$$

Από την λύση φ_α παίρνουμε την προσεγγιστική λύση:

$$u_\alpha^s(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, a) (aI + S_\infty^* S_\infty)^{-1} S_\infty^* u_\infty ds$$

Όμως αυτή η λύση δεν συγκλίνει απαραίτητα στην ακριβής λύση $u_\alpha^s \rightarrow u^s$ ειδικά αν η εξίσωση που εξετάζουμε δεν έχει λύση. Γνωρίζοντας όμως την προσεγγιστική λύση u_α^s μπορούμε να αναζητήσουμε το σύνορο του σκεδαστή ως τον χώρο των μηδενικών τιμών της νόρμας του $u^i + u_\alpha^s$. Άρα μπορώ να ελαχιστοποιήσω το $\|u^i + u_\alpha^s\|_{L^2(\Lambda)}$ πάνω σε ένα κατάλληλο χωρίο U της επιφάνειας $\Lambda = \{r(\hat{x})\hat{x}, \hat{x} \in S^2\}$ $r \in C^2(S^2)$, που να ικανοποιεί την συνθήκη:

$$0 < r_i(\hat{x}) \leq r(x) \leq r_e(\hat{x}), \quad \hat{x} \in S^2$$

όπου $r_i(\hat{x}), r_e(\hat{x})$ δοθέντες συναρτήσεις που αντιπροσωπεύουν της επιφάνειες Λ_i, Λ_e . Συγκεκριμένα επιλέγουμε τις επιφάνειες έτσι ώστε το σύνορο ∂D να είναι ανάμεσα στο Λ_i και Λ_e και το Γ να είναι στο εσωτερικό του Λ_i . Σύγκλιση επιφάνειας $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ πρακτικά σημαίνει $\|r_n - r\|_{C^{1,b}(S^2)} \rightarrow 0$ για $n \rightarrow \infty$.

Ορισμός 4.40

Αν για το προσπίπτον πεδίο u^i μετρήσουμε το μακρινό πεδίο του $u_\infty \in L^2(S^2)$ και για μία παράμετρο ομαλοποίησης $a > 0$ τότε μία επιφάνεια Λ_0 απο το συμπαγές σύνολο U ονομάζεται **βέλτιστη** αν υπάρχει $\varphi_0 \in L^2(\Gamma)$ τέτοια ώστε η φ_0 και το Λ_0 ελαχιστοποιούν το λειτουργικό κόστος πάνω σε όλες τις $\varphi \in L^2(\Gamma)$ και όλα τα $\Lambda \in U$, δηλαδή ισχύει:

$$\mu(\varphi_0, \Lambda_0; a) = m(a)$$

$$m(a) := \inf_{\varphi \in L^2(\Gamma), \Lambda \in U} \mu(\varphi, \Lambda; a)$$

Θεώρημα 4.41

Για κάθε $a > 0$ υπάρχει μία βέλτιστη επιφάνεια $\Lambda \in U$.

Θεώρημα 4.42

Έστω u_∞ το ακριβές μακρινό πεδίο ενός σκεδαστή D τέτοιο ώστε το ∂D να ανήκει στο U . Τότε έχουμε σύγκλιση του συναρτησιακού κόστους:

$$\lim_{a \rightarrow 0} m(a) = 0$$

Θεώρημα 4.43

Έστω (α_n) μία μηδενική ακολουθία και (Λ_n) μία αντίστοιχη ακολουθία βέλτιστων επιφανειών για την παράμετρο ομαλοποίησης α_n . Τότε υπάρχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία της (Λ_n) . Έστω u_∞ το ακριβές μακρινό πεδίο ενός σκεδαστή D τέτοιο ώστε το ∂D να ανήκει στο U . Τότε κάθε οριακό σημείο Λ^* της Λ_n αντιπροσωπεύει μία επιφάνεια όπου το συνολικό πεδίο μηδενίζεται.

Για πιο ακριβείς αναπαραστάσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα κύματα u_1^i, \dots, u_n^i οπότε θα χρειαστεί να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα:

$$\sum_{j=1}^n \{ \|S_\infty \varphi_j - u_{\infty,j}\|_{L^2(S^2)}^2 + a \|\varphi_j\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \gamma \|u_j^i + S\varphi_j\|_{L^2(\Lambda)}^2 \}$$

Βέβαια επειδή αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγαλύτερο κόστος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μερικά κύματα και μετά γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Μπορώ επίσης, για την ανοικοδόμηση του D από το μακρινό πεδίο u_∞ , να θεωρήσω την ανοικοδόμηση ενός κοντινού πεδίου δηλαδή από μετρήσεις του σκεδασμένου κύματος u^s σε μία κλειστή επιφάνεια Γ_{meas} που περιέχει το D . Από την μοναδικότητα του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet ξέρω ότι για να βρω το u^s πρέπει να έχω το u_∞ . Στην περίπτωση αυτή λοιπόν θα έχω τον τελεστή $S: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma_{meas})$ και την εξίσωση:

$$S\varphi = u_{meas}^s$$

$$(S\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y)\varphi(y)ds(y), x \in \Gamma_{meas}$$

Άρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση της:

$$\|S\varphi - u_{meas}^s\|_{L^2(\Gamma_{meas})}^2 + a\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \gamma\|u^i + S\varphi\|_{L^2(\Lambda)}^2 \quad \varphi \in L^2(\Lambda), \Lambda \in U$$

Αν το Γ είναι η μοναδιαία σφαίρα και το Γ_{meas} είναι μία ομόκεντρη σφαίρα ακτίνας R τότε οι μονοτιμές της S δίνονται από τον τύπο:

$$\mu_n = kR|j_n(k)|\left|h_n^{(1)}(kR)\right|$$

$$\mu_n = O\left(\frac{R^{-n}}{2n+1}\right), n \rightarrow \infty$$

Και το πρόβλημα που προέκυψε είναι μη καλά τοποθετημένο αλλά σίγουρα καλύτερο από το προηγούμενο με το κανονικό u_∞ .

Αριθμητικά παραδείγματα έχουν δείξει ότι αυτή η μέθοδος δεν είναι πολύ ικανοποιητική στην ανοικοδόμηση ενός σκεδαστή. Υπάρχουν βέβαια και πολλές παραλλαγές που στοχεύουν στην καλύτερη προσέγγιση και στο χαμηλότερο κόστος αυτής. Επιπροσθέτως προτείνονται και μέθοδοι που συνδυάζουν αυτήν με την επαναληπτική Newton για παράδειγμα, δηλαδή πολύ συχνά είναι πετυχημένος ένας συνδυασμός μεθόδων στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

4.6 Μέθοδοι δειγματοληψίας

Μέχρι στιγμής για τις επαναληπτικές αλλά και για τις μεθόδους ανάλυσης χρειαζόμασταν μία αρχική πληροφορία για τον σκεδαστή D για τα πρώτα βήματα των προσεγγίσεων. Στην μέθοδο δειγματοληψίας κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο καθώς είναι βασισμένη στην επιλογή μίας κατάλληλης $f \in R^3$ τέτοια ώστε η τιμή $f(z)$ να μας δείχνει αν το z είναι μέσα ή έξω από το D . Δηλαδή πληροφορίες όπως η γεωμετρία του σκεδαστή, ιδιότητες του συνόρου ή την φύση του σκεδαστή δεν απαιτούνται οπότε είναι ευκολότερες από την άποψη της πληροφορίας όμως δουλεύουν με την χρήση πολλών κυμάτων σε αντίθεση με τις προηγούμενες. Μία τέτοια συνάρτηση για τον Potthast είναι η:

$$f(z) := w^s(z, z)$$

Η συνάρτηση αυτή για $z \in R^3 \setminus \bar{D}$ θα μας δίνει μικρές τιμές αν είναι το z είναι μακριά από το σύνορο και θα εκτοξεύονται όταν πλησιάζει το σύνορο. Οπότε με μία καλή μαντεψιά και πολλές τιμές καθορίζεις σχετικά εύκολα το σύνορο που αναζητάς.

Υποθέτοντας ότι το μακρινό πεδίο είναι γνωστό για όλα τα προσπίπτον κύματα μπορώ να βρω την $w^s(z, z)$ (indicator function) από την προσέγγιση:

$$w_\infty(-d, z) = \frac{1}{4\pi} u^s(z, d) \approx \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g_z(\hat{x}) u_\infty(-\hat{x}, d) ds(\hat{x})$$

$$w^s(z, z) \cong \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \int_{S^2} g_z(d) g_z(\hat{x}) u_\infty(-\hat{x}, d) ds(\hat{x}) ds(d)$$

Σε αντίθεση με την μέθοδο σημειακών πηγών δεν χρειάζεται να γνωρίζω το σύνορο. Άν έχω τον τελεστή ανάκλασης R (reflection operator) η συνάρτηση γράφεται στη μορφή:

$$w^s(z, z) \approx \frac{1}{4\pi} (F g_z, R \bar{g}_z)$$

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες στην δειγματοληψία: η μέθοδος ανιχνευτή και η γραμμική μέθοδος δειγματοληψίας. Η πρώτη χρησιμοποιεί για δείκτρια συνάρτηση ένα ενεργειακό ολοκλήρωμα αντί για σημειακή προσέγγιση και την έχει προτείνει ο Ikehata. Η δεύτερη με την οποία έχουν ασχοληθεί οι Colton και ο Kirsch βασίζεται στην εύρεση μίας κυματικής συνάρτησης Herglotz v^i με πυρήνα g κάνοντας χρήση της επαλληλίας κυμάτων ώστε το σκεδασμένο κύμα u^s να συμπίπτει με μία σημειακή πηγή $\Phi(\cdot, z)$ όπου το z είναι στο εσωτερικό του D . Τον πυρήνα g_z τον βρίσκω από την εξίσωση:

$$F g_z = \Phi(\cdot, z)$$

$$\text{όπου } \Phi_\infty(\hat{x}, z) = \frac{1}{4\pi} e^{-ik\hat{x}z}$$

Η συνάρτηση Herglotz :

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ikxd} g_z(d) ds(d) \quad , x \in R^3$$

λύνει το εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet $\Delta v + k^2 v = 0$ με συνοριακή συνθήκη

$$v + \Phi(\cdot, z) = 0, \partial D.$$

Άρα $\|g_z\|_{L^2(S^2)} \rightarrow \infty$ οπότε η σημειακή πηγή z προσεγγίζει το σύνορο.

Πόρισμα 4.44

Ο τελεστής Herglotz $H: L^2(S^2) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$:

$$(Hg)(x) := \int_{S^2} e^{ikxd} g(d) ds(d) \quad , x \in \partial D$$

είναι 1-1 και έχει πυκνό πεδίο τιμών αν το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή της αρνητικής Λαπλασιανής στο εσωτερικό του D .

Πόρισμα 4.45

Ο τελεστής $A: H^{1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(S^2)$, που χαρτογραφεί τις συνοριακές τιμές της λύσης $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ της εξίσωση Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας, στο μακρινό πεδίο u_∞ είναι φραγμένος, 1-1 και με πυκνό πεδίο τιμών.

Λήμμα 4.46

Η $\Phi_\infty(\cdot, z) \in A(H^{1/2}(\partial D))$ αν και μόνο αν $z \in D$.

Θεώρημα 4.47

Έστω ότι το k^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή της αρνητικής Λαπλασιανής στο εσωτερικό του D και F τελεστής μακρινού πεδίου στην περίπτωση του μαλακού σκεδαστή.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Για $z \in D$ και δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g_z^\varepsilon \in L^2(S^2)$:

$$\|Fg_z^\varepsilon - \Phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(S^2)} < \varepsilon$$

Και η συνάρτηση Herglotz $v_{g_z^\varepsilon}$ με πυρήνα g_z^ε συγκλίνει στη λύση $w \in H^1(D)$ της Helmholtz με $w + \Phi(\cdot, z) = 0$ στο ∂D όταν $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Για $z \notin D$ και για κάθε $g_z^\varepsilon \in L^2(S^2)$ που ικανοποιεί την προηγούμενη ανίσωση δοθέντος $\varepsilon > 0$ ισχύει:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{g_z^\varepsilon}\|_{H^1(D)} = \infty$$

5. Αριθμητική εφαρμογή και συμπεράσματα

Περιγραφή της μεθόδου

Το πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων σε ένα μη ομογενές μέσο στο οποίο έχω έναν σκεδαστή D όπως έχουμε ήδη πει μοντελοποιείται από την εξίσωση:

$$\Delta u + k^2 n(x)u = 0$$

Έχουμε αποδείξει ότι αντί να λύσουμε την διαφορική αυτή εξίσωση μπορούμε να λύσουμε την ολοκληρωτική Lippmann-Schwinger:

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{R^3} \Phi(x, y) m(y) u(y) dy, x \in R^3$$

Δηλαδή είναι της μορφής:

$$u = u^i - k^2 T u \Leftrightarrow \\ \underline{u}(x) = (I + k^2 T)^{-1} u^i(x)$$

Προσεγγιστική τιμή:

$$\underline{u}(x) \approx u^i(x) - k^2 T u^i(x)$$

Επειδή δουλεύουμε σε χώρους Banach και θέλουμε μοναδικότητα της λύσης πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{M\alpha}{2} < 1 \Rightarrow \|k^2 T\| \leq k^2 \Rightarrow \|T\| \leq \frac{M\alpha^2}{2} \Rightarrow \left\| k^2 \frac{M\alpha^2}{2} \right\| \leq k^2 \Rightarrow \\ k^2 < \frac{2}{M\alpha^2} \quad (5.1)$$

Όπου $M = \sup_{|x| \leq a} |m(x)|$ και $m(x) = 1 - n(x)$.

Για σκεδαστή D έχουμε επιλέξει την μοναδιαία σφαίρα με σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\text{ακτίνα } r: 0 \leq r \leq 1$$

$$\text{γωνία } \theta \text{ που την κρατάμε ως παράμετρο } t: 0 \leq t \leq \pi$$

$$\text{γωνία } \varphi: 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Θα ορίσουμε τις συντεταγμένες στον τρισδιάστατο χώρο και την ευκλείδεια απόσταση πού θα χρειαστούμε:

Έστω $d = |x - y|$ όπου $x(x_1, y_1, z_1)$ και $y(x_2, y_2, z_2)$:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \qquad x_2 = r' \sin \theta' \cos \varphi'$$

$$y_1 = r \sin \theta \sin \varphi \qquad y_2 = r' \sin \theta' \sin \varphi'$$

$$z_1 = r \cos \theta \qquad z_2 = r' \cos \theta'$$

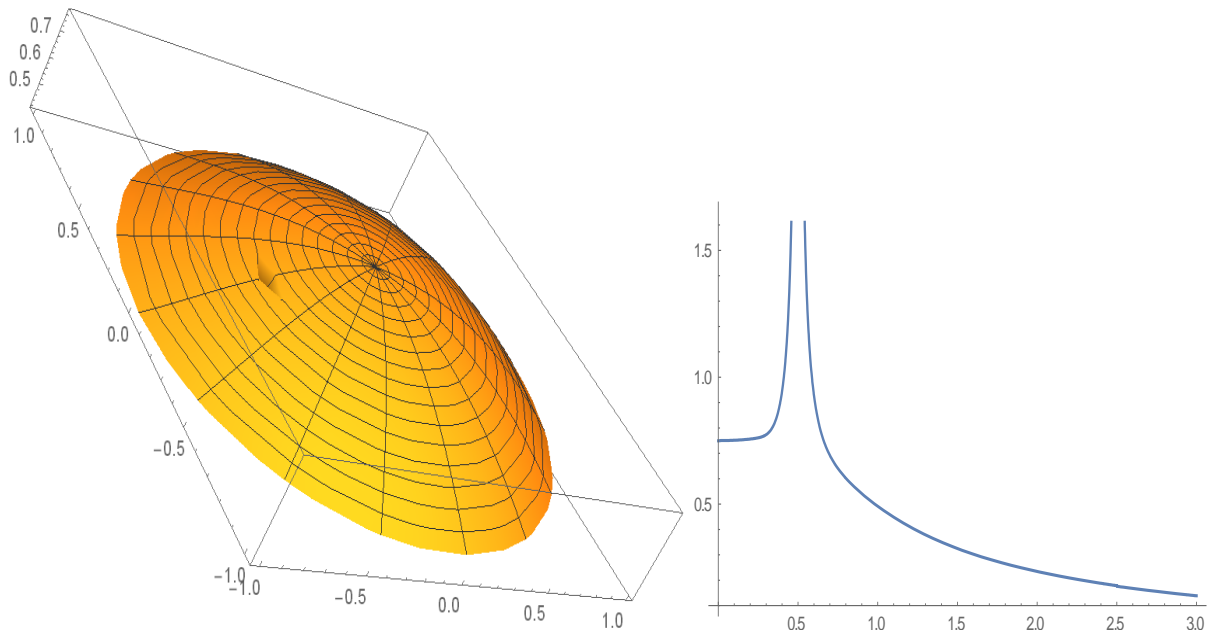
$$d = |x - y| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Άρα η προσεγγιστική λύση παίρνει την μορφή:

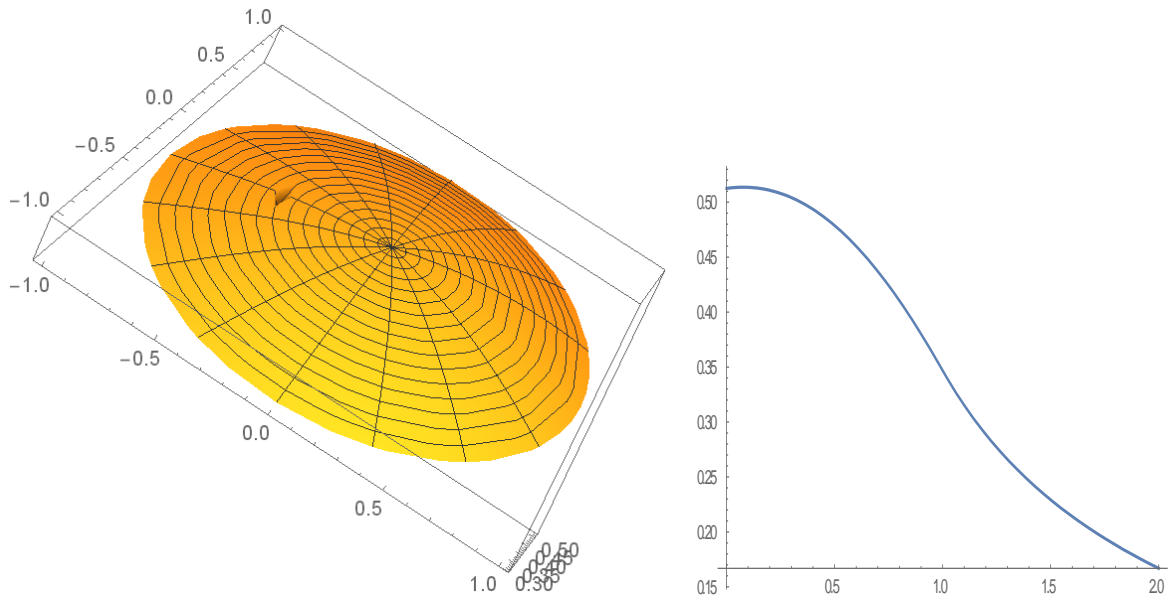
$$u_{appr}(r, \theta, \varphi) = e^{ikr \sin \theta \cos \varphi} - \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(1-n)e^{ikr'd} e^{ikr' \sin \theta' \cos \varphi'} (r')^2 \sin \theta'}{4\pi d} dr' d\theta' d\varphi'$$

Στον κώδικα ορίζουμε τον δείκτη διάθλασης $n = r'(1 - r') + 2.5$, $\alpha = 1$ και θα βγάλουμε γραφικές παραστάσεις για διάφορους κυματάριθμους πού ικανοποιούν την σχέση (5.1).

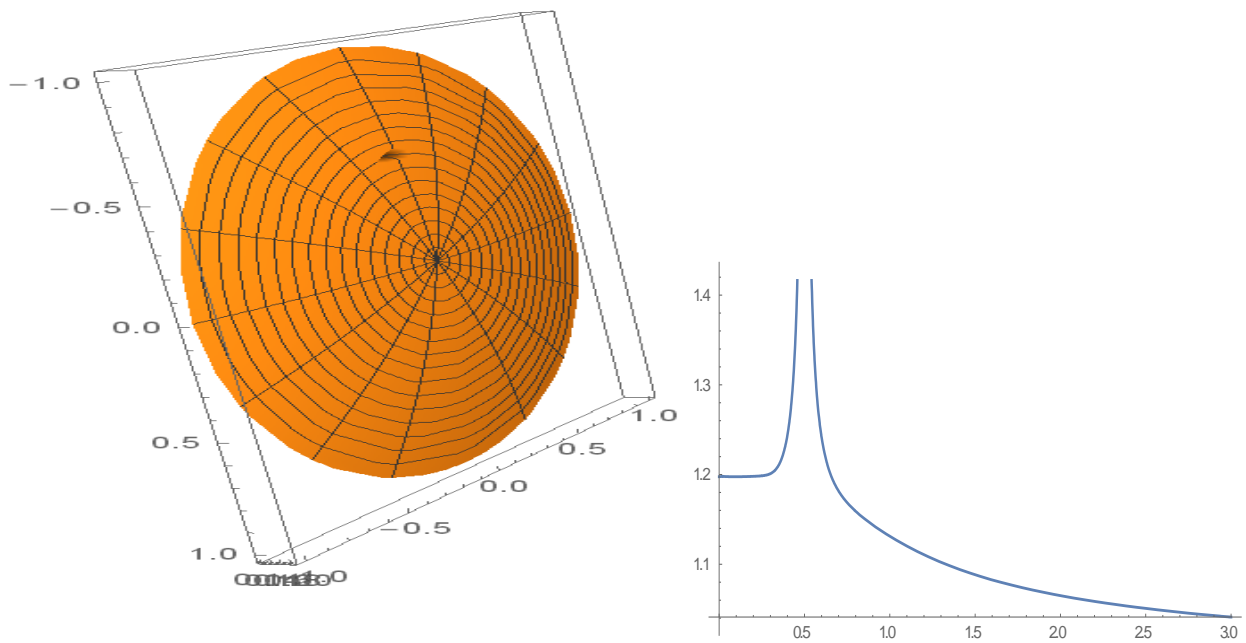
Υπολογίζοντας τα παραπάνω σε περιβάλλον Mathematica παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές για το σκεδαζόμενο πεδίο:



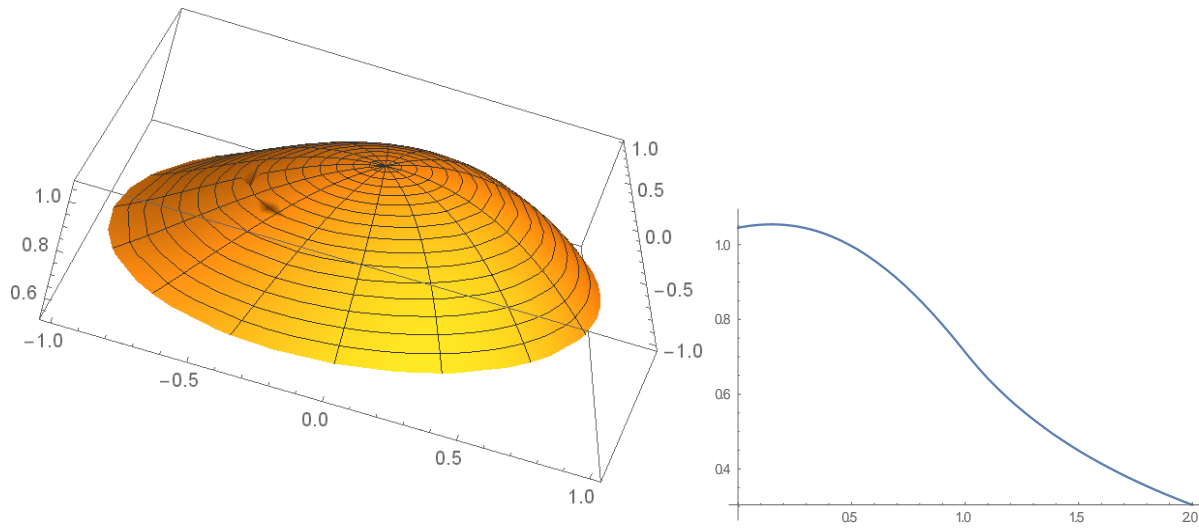
Σχήμα 5.1 Σκεδαζόμενο πεδίο u^s , κυματάριθμου $k = 1$



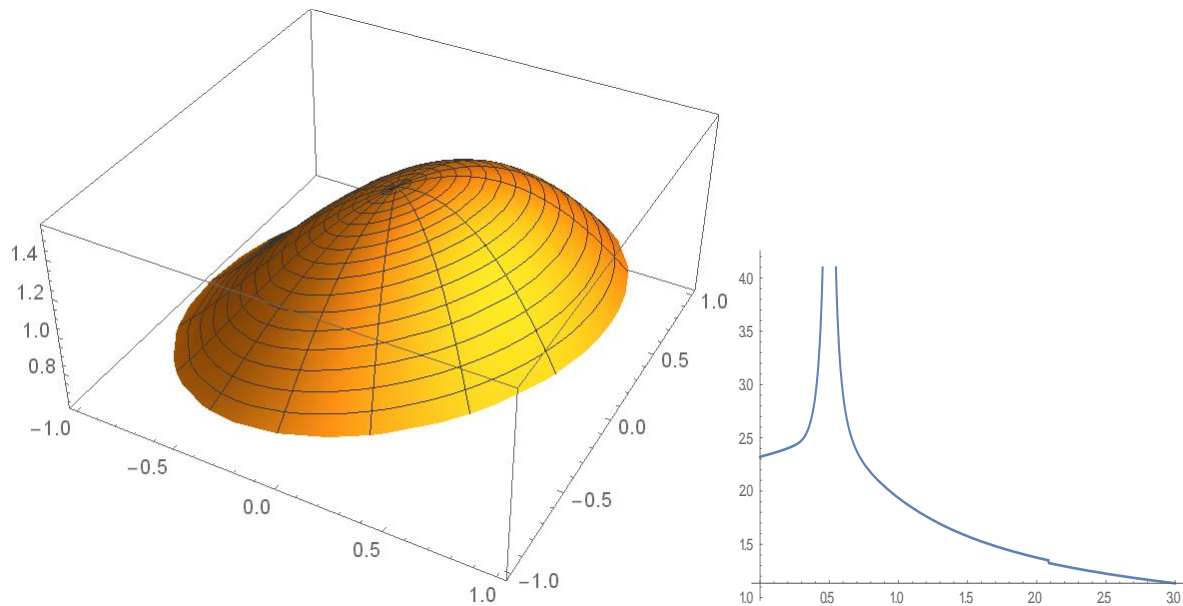
Σχήμα 5.2 Σκεδαζόμενο πεδίο u^s , κυματάρθμου $k = 0.8$



Σχήμα 5.3 Σκεδαζόμενο πεδίο u^s , κυματάρθμου $k = 0.5$



Σχήμα 5.4 Σκεδαζόμενο πεδίο u^s , κυματάριθμου $k = 1.2$



Σχήμα 5.5 Σκεδαζόμενο πεδίο u^s , κυματάριθμου $k = 1.5$

Όπως παρατηρούμε από τις γραφικές παραστάσεις για μικρά k έχουμε μικρές μεταβολές στο πεδίο. Οι μεταβολές αυτές παρατηρούνται για ένα μικρό ευρύς κυματάριθμων μιάς και παρατηρήσαμε ότι από την τιμή $k=2$ και μετά έχουμε απόκλιση και δεν μπορώ να απεικονίσω το πεδίο.

Βιβλιογραφία

- [1] Colton D., and Kress R. : *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin 2003.
- [2] Colton D., and Kirch A. : *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*. Inverse problem 12 (1996) 383-393. Printed in UK.
- [3] Kress, R. : *Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York 1998.
- [4] Tolstov G. *Fourier Series*. Dover Publication, 1962.
- [5] Δάσιος Γ., Κυριάκη Κ. : *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Αθήνα 1994.
- [6] Διπλωματική εργασία του Τραντόπουλου Κ. : *Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης ακουστικών κυμάτων και η αριθμητική του επίλυση*. Αθήνα 2005.
- [7] Διπλωματική εργασία του Γεωργιάδη Χ. : *Υπολογιστικές εφαρμογές σε αλγόριθμους σχημάτων αντίστροφης σκέδασης*. Αθήνα 2003.

