



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΕΡΓΩΝ ΥΠΟΔΟΜΗΣ ΚΑΙ ΑΓΡΟΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**

---

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΟΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ

**ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ  
ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΩΝ ΜΕ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΕΣ  
ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ  
ΣΕ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΜΗΤΡΑ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Καλλιακούδη Παναγιώτα**

**Επιβλέπων: Καττής Μαρίνος  
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π**

**Αθήνα, Μάρτιος 2018**

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	3
ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	3
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ .....	10
2.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί .....	10
2.2 Ο ορισμός της ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης .....	13
2.3 Συζυγείς συναρτήσεις .....	15
2.4 Η διαφορική εξίσωση του Laplace σε μιγαδική μορφή .....	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....	19
Η ΑΝΤΙ-ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ .....	19
3.1 Οι εξισώσεις της αντιεπίπεδης ελαστικότητας .....	19
3.2 Πολυφασικά δυναμικά για κυκλικές κυλινδρικές διεπιφάνειες .....	22
3.3 Τα ολοκληρώματα $J$ , $L$ και $M$ στην αντιεπίπεδη ελαστικότητα .....	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....	27
ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ .....	27
4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος .....	27
4.2 Βασικές εξισώσεις .....	28
4.3 Αναγωγή του αντιεπίπεδου προβλήματος σε πρόβλημα Somigliana .....	30
4.4 Επίλυση του προβλήματος Somigliana .....	31
4.5 Αριθμητική Εφαρμογή .....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....	40
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ .....	40
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	41



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεταβολή στις μηχανικές ιδιότητες και την αντοχή των σύνθετων μεταλλικών υλικών, που προκαλούνται από ετερογενή μικροσωματίδια που είναι διεσπαρμένα στην μάζα τους, είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων αυτών με πηγές εσωτερικών τάσεων που ενυπάρχουν στα υλικά αυτά ή στα ίδια τα μικροσωματίδια. Τέτοιες πηγές εσωτερικών τάσεων είναι, κυρίως, οι γεωμετρικές ατέλειες της δομής των υλικών αυτών και οι μετασχηματισμοί φάσης που λαμβάνουν χώρα σε αυτά. Η γενική θεωρία των εξαρμώσεων (dislocations), που ανεπτύχθηκε από τον Volterra [1], επιτρέπει την περιγραφή των γεωμετρικών ατελειών των μεταλλικών υλικών με την θεωρία ελαστικότητας χρησιμοποιώντας έναν περιορισμένο αριθμό παραμέτρων γεωμετρίας και ιδιοτήτων του υλικού. Σύμφωνα με τον Somigliana [2], που ανέπτυξε παραπέρα την θεωρία του Volterra, μια εξάρμωση περιγράφει μία ευρεία κλάση γεωμετρικών ατελειών στα μεταλλικά υλικά και ορίζεται ως μία δεδομένη ασυνέχεια μετατοπίσεων πάνω σε μία κλειστή ή ανοικτή επιφάνεια ενός ελαστικού μέσου, που αντιπροσωπεύει το μεταλλικό υλικό. Από την άλλη πλευρά, ένας μετασχηματισμός φάσης αντιπροσωπεύει μία πηγή εσωτερικών τάσεων ενός μεταλλικού υλικού, με διαφορετική φύση από αυτήν της εξάρμωσης. Σε ένα μεταλλικό υλικό, ένας μετασχηματισμός φάσης προέρχεται από χημικές διεργασίες που συμβαίνουν σε μία πεπερασμένη περιοχή του υλικού και προξενούν μία μεταβολή της γεωμετρικής δομής του στην περιοχή αυτή. Η μεταβολή αυτή μπορεί να συνοδεύεται και με μετασχηματισμό των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού στην περιοχή αυτή. Στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας, ένας μετασχηματισμός φάσης περιγράφεται με ιδιοπαραμορφώσεις που είναι ελεύθερες τάσεων (stress free eigenstrains) και συνεχώς διανεμημένες σε μία συγκεκριμένη περιοχή ενός ελαστικού μέσου. Ο όρος ιδιοπαραμόρφωση (eigenstrain) εισήχθη στην εφαρμοσμένη μηχανική για πρώτη φορά από

τον Dundurs [3]. Σύμφωνα με την ορολογία του Eshelby, όταν μία τέτοια περιοχή έχει τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες με το μέσον καλείται εγκλωβισμα ιδιοπαραμορφώσεων, ενώ όταν έχει διαφορετικές, καλείται ανομοιογένεια [4]. Ενδεχομένως, η περιοχή της ανομοιογένειας να μην καταπονείται από ιδιοπαραμορφώσεις. Για την μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων μεταλλικών υλικών με διεσπαρμένα ετερογενή σωματίδια, το σύνθετο μεταλλικό υλικό προσομοιώνεται με ένα ελαστικό μέσο που περιέχει ανομοιογένειες και εξαρμώσεις ή εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων. Σε τέτοια υλικά, η ελαστική αλληλεπίδραση των ετερογενών σωματιδίων με πηγές εσωτερικών τάσεων των υλικών έχει αποτελέσει ένα ιδιαίτερο αντικείμενο έρευνας, για περισσότερο από έναν αιώνα. Σε ένα ελαστικό υλικό που βρίσκεται υπό ένταση από κάποια πηγή εσωτερικών τάσεων, ως ελαστική αλληλεπίδραση της πηγής με μία ανομοιογένεια θεωρείται η μεταβολή που συμβαίνει στην εντατική και ενεργειακή κατάσταση του ελαστικού μέσου, όταν σε αυτό εμφανισθεί η ανομοιογένεια. Μέχρι πριν δύο δεκαετίες, η θεωρητική έρευνα πάνω στην μηχανική συμπεριφορά και αντοχή των μεταλλικών υλικών ενισχυμένων με ετερογενή σωματίδια είχε, κυρίως, αναπτυχθεί στην κλίμακα της μικρομηχανικής. Τις τελευταίες δύο δεκαετίες, η ραγδαία ανάπτυξη των νανουλικών αναζωογόνησε το ενδιαφέρον στην περιοχή αυτή θέτοντας νέα θέματα προς έρευνα. Για παράδειγμα, η διασαφήνιση του μηχανισμού μεταβολής της σκληρότητας των σύνθετων μεταλλικών υλικών, λόγω διασποράς νάνο-σωματιδίων σε αυτά, απαιτεί αναλύσεις ελαστικών αλληλεπιδράσεων νάνο-ανομοιογενειών με εγκλωβίσματα ιδιοπαραμορφώσεων στην κλίμακα του νανομέτρου. Επίσης, η ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς σύνθετων νάνο-υλικών με επικαλυμμένα νάνο-σωματίδια (νάνο-σωματίδια ζιρκόνιας, για παράδειγμα), ή με νάνο-σωματίδια πολλαπλών επικαλύψεων (nanooptions) εισάγει νέου τύπου ανομοιογένειες, τις δακτυλιοειδείς ανομοιογένειες με πυρήνα. Στην περίπτωση αυτή, οι ιδιοπαραμορφώσεις αναπτύσσονται στον πυρήνα ή στην δακτυλιοειδή ανομοιογένεια που την περιβάλλει. Η θεωρητική έρευνα πάνω στην μηχανική συμπεριφορά και αντοχή των μεταλλικών υλικών ενισχυμένων με ετερογενή σωματίδια αφορά, κυρίως, στην διασαφήνιση των μηχανισμών, με τους οποίους πηγές εσωτερικών τάσεων επιδρούν πάνω στη μακροσκοπική μηχανική συμπεριφορά και αντοχή τους. Οι σχετικές ελαστικές αναλύσεις χρησιμοποιούν απλοποιημένα μοντέλα της μικρομηχανικής, όπου τα διεσπαρμένα σωματίδια προσομοιώνονται με ανομοιογένειες απλής γεωμετρικής μορφής που βρίσκονται σε μία ελαστική μήτρα και διαταράσσουν ένα πεδίο εσωτερικών τάσεων της μήτρας. Στην κλίμακα της μικρομηχανικής, οι εσωτερικές τάσεις θεωρούνται ότι προέρχονται από σημειακές πηγές, όπως είναι τα κέντρα διαστολής (dilatation centres),

οι συνεπίπεδες και αντιεπίπεδες εξαρμώσεις (edge and screw dislocation), κλπ. Ένα κέντρο διαστολής μπορεί να προσομοιώσει ένα ξένο άτομο που βρίσκεται στο πλέγμα ενός κρυστάλλου, ένα μετασχηματισμό φάσης που αναπτύσσεται σε μία περιοχή του υλικού με μικρές διαστάσεις, κλπ. Η ελαστική αλληλεπίδραση ενός κέντρου διαστολής με μία συνεπίπεδη εξάρμωση μελετήθηκε από τον Bilby [5] χρησιμοποιώντας την ιδέα της δύναμης αλληλεπίδρασης. Η δύναμη αλληλεπίδρασης, που είναι μία πλασματική ενεργειακή δύναμη πάνω σε μία ιδιομορφία, είχε εισαχθεί αρκετά νωρίτερα στην ελαστικότητα και είχε χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές στην μελέτη της ελαστικής αλληλεπίδρασης ιδιομορφιών σε ένα ελαστικό υλικό. Στην συνέχεια, το έργο του Bilby επεκτάθηκε από άλλους ερευνητές στην ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης σημειακών πηγών τάσεων με μικροσωματίδια ή μικροκοιλότητες κρυσταλλικών υλικών [6]-[14]. Στα πλαίσια της μικρομηχανικής, οι αναλύσεις ελαστικής αλληλεπίδρασης διεσπαρμένων σωματιδίων με πηγές εσωτερικών τάσεων σε σύνθετα υλικά εμπλέκουν πηγές εσωτερικών τάσεων, κυρίως, σημειακής μορφής. Στην κλίμακα της μικρομηχανικής, το μέγεθος των διαστάσεων των μικροσωματιδίων σε σχέση με τις διαστάσεις των περιοχών, όπου λαμβάνουν χώρα μετασχηματισμοί φάσης, καθιστά αποδεκτή μία τέτοια θεώρηση, δηλαδή την προσομοίωση του μετασχηματισμού φάσης ως ένα πυρήνα ιδιοπαραμορφώσεων που δρα σημειακά [16]. Όμως, είναι προφανές ότι μία τέτοια θεώρηση δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά την αλληλεπίδραση μετασχηματισμών φάσης με διεσπαρμένα σωματίδια μεγέθους νανοκλίμακας. Έτσι, στην κλίμακα της νανομηχανικής, οι αναλύσεις αλληλεπίδρασης νανοσωματιδίων με γειτονικούς μετασχηματισμούς φάσης θα πρέπει να στηρίζονται σε μοντέλα όπου οι διαστάσεις των διεσπαρμένων σωματιδίων και των περιοχών των μετασχηματισμών φάσης θα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Πρόσφατα, με ένα τέτοιο μοντέλο, ο Lubarda [12]-[13] μελέτησε την αλληλεπίδραση ενός μετασχηματισμού φάσης, που λαμβάνει χώρα σε μία κυλινδρική κυκλική περιοχή του υλικού, με μία γειτονική κυλινδρική κοιλότητα. Η ελαστική ανάλυση του Lubarda έγινε για συν-επίπεδη και αντιεπίπεδη ιδιοπαραμόρφωση του εγκλωβίσματος, και η ενεργειακή αλληλεπίδραση μελετήθηκε χρησιμοποιώντας τα  $J$ ,  $L$  και  $M$  ολοκληρώματα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στο έργο του Lubarda, η μελέτη της ενεργειακής αλληλεπίδρασης περιορίζεται στον προσδιορισμό των  $J$  -,  $L$  - και  $M$  - ολοκληρωμάτων και στον υπολογισμό της ολικής ελαστικής ενέργειας που αποθηκεύεται σε αυτό. Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάλυση της ελαστικής αλληλεπίδρασης δύο γειτονικών κυκλικών ανομοιογενειών με αντιεπίπεδες διατμητικές ιδιοπαραμορφώσεις που βρίσκονται σε μια ελαστική μήτρα στα πλαίσια της

γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Με την ανάλυση που γίνεται προσδιορίζονται τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται στις ανομοιογένειες και στην μήτρα χρησιμοποιώντας μιγαδικές συναρτήσεις και την τεχνική των διφασικών δυναμικών. Με βάση τα αναλυτικά αποτελέσματα που εξάγονται παρέχονται ενδεικτικά αριθμητικά αποτελέσματα για την συγκεντρώσει τάσεων γύρω από τις δύο ανομοιογένειες. Η παρουσία εργασία είναι η επέκταση του έργου των έργου των Goree and Wilson [17]-[18] και των Honein et al. [19]-[20] στην περίπτωση που η αιτία παραμόρφωσης είναι ιδιοπαραμορφώσεις στις ανομοιογένειες.

## ABSTRACT

The change in mechanical properties and strength of composite metallic materials caused by heterogeneous microparticles dispersed in their mass is the result of the interaction of these particles with sources of internal stresses inherent in these materials or in the microparticles. Such sources of internal stresses are, in particular, the geometrical imperfections of the structure of these materials and the phase transformations that take place in them. The general theory of dislocations, developed by Volterra [1], allows the description of the geometrical imperfections of the metal materials with the elastic theory using a limited number of parameters of geometry and material properties. According to Somigliana [2], which further developed the theory of Volterra, a dislocation describes a broad class of geometrical imperfections in metallic materials and it is defined as a given discontinuity of displacements on a closed or open surface of an elastic material representing the metallic material. On the other hand, a phase transformation represents a source of internal stresses of a metallic material, with a different nature from that of the existence of a dislocation. In a metallic material, a phase transformation originates from chemical processes occurring in a finite region of the material and causes a change in its geometric structure in that region. This change can be accompanied by transformation of the elastic properties of the material in this area. This change can be accompanied by a transformation of the elastic properties of the material in this area. In the purview of the elastic theory, a phase transformation is described by eigenstrains that are free of stress (stress free eigenstrains) and they are continuously distributed in a particular area of an elastic medium. The term eigenstrain was introduced to applied mechanics for the first time by Dundurs [3]. According to Eshelby's method, when a finite region has the same elastic properties as the medium, the region is called an inclusion. If the finite region has the elastic properties different from those of the medium the region is called an inhomogeneity [4]. Possibly, the area of inhomogeneity is not affected by eigenstrains. In order to study the mechanical behavior of composite metallic materials with dispersed heterogeneous particles, the composite metallic material is simulated with an elastic medium containing inhomogeneities and dislocation or



---

inclusions of eigenstrains. In such materials, the elastic interaction of heterogeneous particles with sources of internal stresses of materials has been a remarkable subject of research for more than a century. In an elastic material under stress tension from a source of internal stresses, the elastic interaction of the source with an inhomogeneity is considered to be the change in the intensive and energetic

state of the elastic medium when an inhomogeneity occurs. Until two decades ago, theoretical research into the mechanical behavior and strength of heterogeneous particle reinforced with metal materials composites had, in particular, been developed on the scale of micro-mechanics. Over the past two decades, the rapid progress of nano-materials has revitalized the interest in this region by putting new issues to research. For example, the clarification of the mechanism of changing the hardness of composite metallic materials due to nanoparticle dispersion therein requires an analysis of nano-homogeneous elastic interactions with inclusions of eigenstrains in the nanometer scale. Also, the analysis of the mechanical behavior of composite nano-materials with coated nanoparticles (for example nanoparticles of zirconia,), or nanoparticles with multiple coatings (nano-onions) introduces new types of inhomogeneities, which are annular inhomogeneities with a core. In this case, the inhomogeneities develop in the core or in the annular inhomogeneity that surrounds it. Theoretical research on the mechanical behavior and strength of metallic materials reinforced with heterogeneous particles mainly concerns the elucidation of the mechanisms by which the internal stressors influence their macroscopic mechanical behavior and strength. Relevant elastic analyzes use simplified models of micromechanics where the dispersed particles are simulated by inhomogeneities which have a simple geometric shape and they are found in an elastic matrix, disrupting a field of internal stresses in the matrix. In the micro-mechanical scale, the internal stresses are thought to originate in point sources such as dilatation centers, edge and screw dislocation, etc. An expansion center can simulate an atom in the grid of a crystal, a phase transformation that develops in a region of the material with small dimensions etc. The elastic interaction of a dilatation center with an in-plane dislocation was studied by Bilby [5] using the idea of interaction force. Interaction force, which is a fictitious energy power on a singularity, had been introduced much earlier in elasticity and it was used by many researchers to study the elastic interaction of inhomogeneities in an elastic material. Bilby's method was then expanded by other researchers to analyze the elastic interaction of point sources of stress with microparticles or micro-cavities of crystalline materials [6] - [14]. In the purview of

---

micromechanics, analysis of elastic interaction of dispersed particles with sources of internal stresses in composite materials involve sources of internal stresses, mainly of point form. In the micromechanical scale, the size of the microparticle dimensions in relation to the dimensions of the areas where phase transformations take place, makes

such a view, that is, the simulation of phase transformation as a core of eigenstrains acting on a point [16], acceptable. However, it is obvious that such a consideration can not adequately describe the interaction of phase transformations with nanoscale dispersed particles. Thus, in the nanomechanics scale, nanoparticle interaction analysis with adjacent phase transformations should be based on models where the dimensions of the dispersed particles and the areas of the phase transformations will be of the same order of magnitude. Recently, with such a model, Lubarda [12] - [13] studied the interaction of a phase transformation, which takes place in a cylindrical circular region of the material, with an adjacent cylindrical cavity. Lubarda's elastic analysis was made for in-plane and anti-plane deformation of the inclusion and the energy of interaction was studied using the  $J$  - , $L$  - and  $-M$  integrals. It should be noted that in the method of Lubarda, the study of energy interaction is limited to the determination of  $J$  - $L$  , - and  $M$  - integrals and the calculation of the total elastic energy captured in the interior.

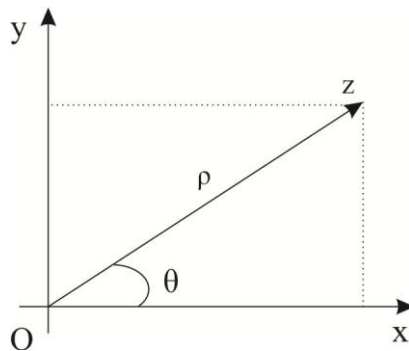
In the present diploma thesis, entitled "Elastic interaction of circular elastic inhomogeneities with anti-plane shear deformation found in an elastic matrix" the elastic interaction of two circular inhomogeneities embedded in an elastic matrix is analyzed, when they undergo uniform phase transformations described by constant longitudinal shear eigenstrains. The full elastic field is determined in a series form using the conformal mapping technique of the complex variable theory in combination with that of the two-phase potentials. Based on the analytical results obtained, indicative numerical results are provided for the stress concentration around the two inhomogeneities. The results obtained in the present work are the extension of those of Goree and Wilson [17]-[18] and Honein et al. [19]-[20] to the case in which the elastic deformation of the system is caused by eigenstrains in the inhomogeneities.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

#### 2.1 Βασικοί ορισμοί και συμβολισμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί θα αναφέρονται σε ένα επίπεδο, πάνω στο οποίο έχει τοποθετηθεί ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $z = x + iy$  του οποίου ο άξονας  $x$  αντιπροσωπεύει τον άξονα των πραγματικών αριθμών και ο άξονας  $y$  τον άξονα των φανταστικών αριθμών (Σχήμα 2.1). Έτσι, ένα σημείο του επιπέδου θα αντιπροσωπεύεται από τον μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , όπου  $i^2 = -1$  και  $x, y$  είναι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $(x, y)$ .



Σχήμα 2.1 Το μιγαδικό επίπεδο  $z$

Αν  $\rho$  και  $\theta$  αντιπροσωπεύουν τις πολικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, τότε

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad (2.1)$$

όπου έχει τεθεί

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (2.2)$$

Αν  $f(z)$  είναι συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ , με τον συμβολισμό  $\overline{f(z)}$  θα συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή του μιγαδικού αριθμού  $f(z)$ . Έτσι, αν  $f(z) = 6z + 3iz^2$ , τότε θα έχουμε  $\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})} = 6\bar{z} - 3i\bar{z}^2$ . Επίσης, με τον συμβολισμό  $f(\bar{z})$  θα εννοούμε την συνάρτηση  $f$ , της οποίας η μεταβλητή είναι ο μιγαδικός αριθμός  $\bar{z} = x - iy$ . Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{z})}. \quad (2.3)$$

Για παράδειγμα, για την παραπάνω συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε

$$\overline{f(z)} = 6z - 3iz^2, \quad f(\bar{z}) = 6\bar{z} + 3i\bar{z}^2. \quad (2.4)$$

Γενικά, μια συνάρτηση  $F(x, y)$  των πραγματικών μεταβλητών  $x, y$  και με πεδίο τιμών στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, με βάση τις σχέσεις

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (2.5)$$

μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = f(z, \bar{z}). \quad (2.6)$$

Με άλλα λόγια, μία συνάρτηση  $F$  των πραγματικών μεταβλητών  $x$  και  $y$  μπορεί να γραφτεί ως μία συνάρτηση  $f$  των μιγαδικών μεταβλητών  $z$  και  $\bar{z}$ .

Στο μιγαδικό επίπεδο του Σχήματος 1, που θα το καλούμε στο εξής  $z$ -επίπεδο, η σχέση  $z \cdot \bar{z} = R^2$  αντιπροσωπεύει ένα κύκλο με ακτίνα  $R$ . Πράγματι, αν  $z = x + iy$ , τότε από τη σχέση αυτή προκύπτει η εξίσωση του κύκλου

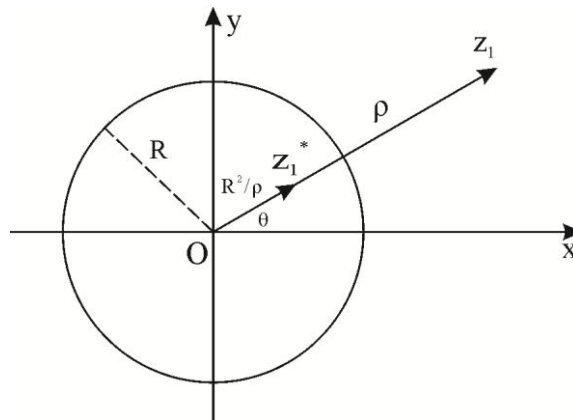
$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.7)$$

Αν ο μιγαδικός αριθμός  $z_1 = \rho e^{i\theta}$  βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου με ακτίνα  $R$ , δηλαδή, αν  $\rho > R$ , τότε ο μιγαδικός αριθμός  $z_1^* = (R^2 / \rho) e^{-i\theta}$  βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου  $R$ .

Επειδή  $|z_1^*| \cdot |z_1| = R^2$ , θα λέμε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_1^*$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο αντανάκλασης του σημείου που ορίζει ο μιγαδικός αριθμός  $z_1$ .

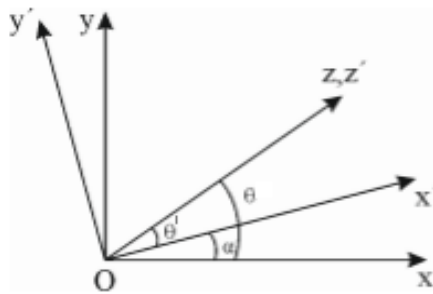
Έστω η μεταβλητή  $z_1$  ότι τείνει στο σημείο  $t$ , που είναι ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου με ακτίνα  $R$ . Τότε, και η μεταβλητή  $z_1^*$  τείνει στο ίδιο σημείο  $t$  από το εσωτερικό

του κύκλου. Το γεγονός αυτό έχει χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του ολομορφικού μετασχηματισμού μιας μιγαδικής μη ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης  $f(z, \bar{z})$ .



Σχήμα 2.2 Το σημείο αντανάκλασης  $z_1^*$  του μιγαδικού αριθμού  $z_1$

Επίσης, θα συζητήσουμε την αλλαγή που υφίσταται ο μιγαδικός αριθμός  $z$ , αν αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, αν αντί του συστήματος συντεταγμένων  $(x, y)$ , θεωρήσουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων  $(x', y')$  στραμμένο ως προς το παλιό κατά



Σχήμα 2.3 Το στραμμένο σύστημα  $(x', y')$

γωνία  $\alpha$ , τότε ο μιγαδικός αριθμός  $z$  ως προς το νέο σύστημα θα γίνει  $z'$ . Οι πολικές μορφές των δύο αυτών μορφών θα είναι

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad z' = \rho' e^{i\theta'}. \tag{2.7}$$

Τα μέτρα  $\rho$  και  $\rho'$  των  $z$  και  $z'$  είναι ίσα, αλλά οι γωνίες  $\theta$  και  $\theta'$  διαφέρουν κατά την γωνία  $\alpha$  που σχηματίζει ο άξονας  $x'$  με τον άξονα  $x$ , δηλαδή

$$\theta - \theta' = \alpha. \quad (2.8)$$

Συνεπώς,

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\alpha}, \quad (2.9)$$

από όπου,

$$z = z' e^{i\alpha}, \quad (2.10\alpha)$$

ή

$$z' = z e^{-i\alpha} \quad (2.10\beta)$$

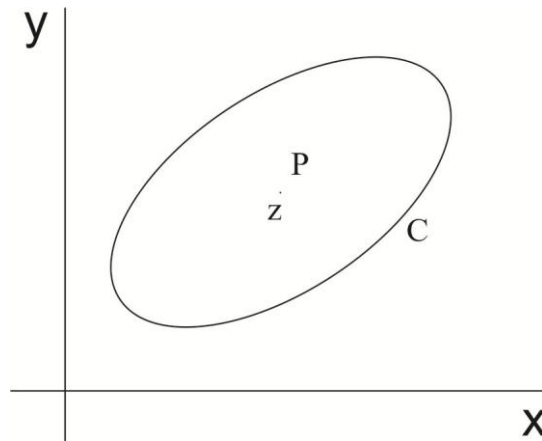
## 2.2 Ο ορισμός της ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης

Αν  $\varphi = \varphi(x, y)$  και  $\psi = \psi(x, y)$  είναι δύο πραγματικές συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών  $x, y$ , τότε ο συνδυασμός  $\varphi + i\psi$ , μέσω των σχέσεων (2.4), ορίζει μία μιγαδική συνάρτηση  $f(z, \bar{z})$ , της οποίας το πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\psi$ , αντίστοιχα, δηλαδή  $f(z, \bar{z}) = \varphi + i\psi$ .

Στη συνέχεια, οι ιδιότητες της μιγαδικής συνάρτησης  $f(z, \bar{z})$  θα συζητηθούν σε σχέση με δύο ορισμένες καμπύλες του  $z$ -επίπεδο, που θα ορισθούν ως *απλό τόξο* και ως *κλειστή καμπύλη*.

Ένα απλό τόξο πάνω στο  $z$ -επίπεδο είναι ένα τόξο, που δεν τέμνει τον εαυτό του και είναι πεπερασμένο, δηλαδή έχει πεπερασμένο μήκος. Μια απλή κλειστή καμπύλη πάνω στο  $z$ -επίπεδο είναι μία κλειστή καμπύλη, όταν από κάθε ζευγάρι σημείων της, διασπάται σε δύο απλά τόξα.

Έστω, τώρα, ότι μας δίνεται μία απλή καμπύλη  $C$  πάνω στο  $z$ -επίπεδο και μία συνάρτηση  $f = f(z, \bar{z})$ . Θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f(z, \bar{z})$  θα είναι *ολόμορφη* εντός της καμπύλης  $C$ ,



Σχήμα 2.4

αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες (Milne-Thomson, 1962):

- (i). Για κάθε τιμή της μεταβλητής  $z$  που βρίσκεται μέσα στην  $C$ , αντιστοιχεί μία και μόνο μία τιμή της  $f(z, \bar{z})$ . Με άλλα λόγια, η  $f(z, \bar{z})$  είναι πεπερασμένη και μοναδική μέσα στην καμπύλη  $z$ .
- (ii). Για κάθε τιμή του  $z$  μέσα στην  $C$ , η συνάρτηση  $f(z, \bar{z})$  έχει ένα μοναδικό και πεπερασμένο διαφορικό  $df$ . Δηλαδή, το διαφορικό της  $f$  ως προς τις μεταβλητές  $z$  και  $\bar{z}$ , που παρέχεται με τη σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \tag{2.11}$$

είναι πεπερασμένο και μοναδικό. Από την σχέση αυτή, έχουμε

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz}, \tag{2.12}$$

όπου το διαφορικό ορίζεται ως εξής

$$dz = dx + idy = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} (\delta x + i\delta y) \tag{2.13}$$

Συνεπώς,

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{dx - idy}{dx + idy} = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{\delta x - i\delta y}{\delta x + i\delta y} = \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0}} \frac{1 - i \frac{\delta y}{\delta x}}{1 + i \frac{\delta y}{\delta x}}. \tag{2.14}$$

Όμως, επειδή τα  $dx$  και  $dy$  τείνουν στο μηδέν, ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, μπορούν να προκύψουν διάφορα διαφορετικά όρια για την ποσότητα  $\frac{d\bar{z}}{dz}$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην έχουμε μία και μοναδική τιμή του διαφορικού  $df$ . Για να εξασφαλίζεται η μία και μοναδική τιμή του διαφορικού  $df$ , θα πρέπει ο συντελεστής  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  στην (2.11) να μηδενίζεται, δηλαδή θα πρέπει

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.15)$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $f$  είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $z$ . Ας υποθέσουμε τώρα ότι  $f = \phi + i\psi$  και ότι η  $f$  είναι μία ολόμορφη συνάρτηση, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση (2.17).

Αφού ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi + i\psi)i = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right), \quad (2.16)$$

λόγω της (2.17) προκύπτει

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.17)$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις των Cauchy-Riemann και είναι αναγκαίες, αλλά όχι και ικανές για να είναι μία συνάρτηση  $f = \phi + i\psi$  ολόμορφη. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να καταστούν και ικανές, αν οι συναρτήσεις

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.18)$$

είναι συνεχείς εντός της καμπύλης  $C$ . Έτσι, οι συνθήκες (2.17) μαζί με τη συνθήκη (2.18) αποτελούν τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες, ώστε η  $f = \phi + i\psi$  να είναι μια ολόμορφη συνάρτηση.

### 2.3 Συζυγείς συναρτήσεις

Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη μιας ολόμορφης συνάρτησης  $f$  ονομάζονται συζυγείς συναρτήσεις. Έτσι, αν



$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (2.19)$$

οι  $\varphi$  και  $\psi$  είναι συζυγείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η ολόμορφη συνάρτηση  $f(z) = z^3$  μπορεί να γραφτεί

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3). \quad (2.20)$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις

$$\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad \psi(x, y) = 3x^2y - y^3$$

είναι συζυγείς συναρτήσεις.

Τώρα θα εξάγουμε μία χρήσιμη ιδιότητα των ολόμορφων μιγαδικών συναρτήσεων. Από τις συνθήκες των Cauchy και Riemann εύκολα εξάγεται ότι

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.21)$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι οι συζυγείς συναρτήσεις της ολόμορφης συνάρτησης  $f$  ικανοποιούν την διδιάστατη διαφορική εξίσωση του Laplace. Με άλλα λόγια, οι συζυγείς συναρτήσεις  $\phi$  και  $\psi$  μιας ολόμορφης συνάρτησης  $f = (\phi + i\psi)$  αποτελούν λύσεις της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace. Το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του αντεπίπεδου ελαστικού προβλήματος.

Αν τώρα, εξισώσουμε τις συζυγείς συναρτήσεις με σταθερές τιμές, δηλαδή  $\phi(x, y) = c_1$ ,  $\psi(x, y) = c_2$ , τότε παίρνουμε δύο συστήματα καμπυλών πάνω στο  $z$ -επίπεδο. Αυτές οι καμπύλες είναι ορθογώνιες, δηλαδή, οι εφαπτόμενές τους σε ένα σημείο της διατομής είναι κάθετες. Για να αποδειχθεί αυτό, παρατηρούμε ότι η κλίση  $dy/dx$  της καμπύλης  $\phi(x, y) = c_1$  προκύπτει από την σχέση

$$\frac{d}{dx} \phi = \frac{d}{dx} c_1, \quad (2.22)$$

από την οποία εξάγεται ότι

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (2.23)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}. \quad (2.24\alpha)$$

Ομοίως, βρίσκουμε την κλίση των καμπυλών  $\psi(x, y) = c_2$  στην μορφή

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}}. \quad (2.25\beta)$$

Από τις σχέσεις (2.25) παίρνοντας υπόψη τις συνθήκες των Cauchy-Riemann (2.19) προκύπτει ότι το γινόμενο των κλίσεων αυτών είναι  $-1$ , που σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες στις καμπύλες αυτές στο σημείο τομής τους είναι κάθετες.

## 2.4 Η διαφορική εξίσωση του Laplace σε μιγαδική μορφή

Από την αλυσιδωτή ιδιότητα παραγωγίσις μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών εύκολα εξάγονται οι παρακάτω τελεστές

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \quad (2.26)$$

από τις οποίες

$$2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.27)$$

Έτσι, η παρακάτω διαφορική εξίσωση του Laplace με άγνωστη συνάρτηση την  $w = w(x, y)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.28)$$

με χρήση των παραπάνω τελεστών, γράφεται

$$4\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.29)$$

Η λύση της (2.28) θα εκφραστεί εξισώνοντας την  $w$  με ένα πολλαπλάσιο του πραγματικού μέρους  $\phi$  μιας ολόμορφης συνάρτησης  $f(z)$ , έστω

$$w = 2\phi, \tag{2.30\beta}$$

από όπου

$$w = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{2.30\beta}$$

Επίσης, μια άλλη γενική έκφραση της λύσης της (2.28) θα μπορούσε να βρεθεί παίρνοντας ένα πολλαπλάσιο του φανταστικού μέρους  $\psi$  της  $f(z)$ , ας πούμε

$$w = 2\psi, \tag{2.31\alpha}$$

από όπου

$$w = f(z) - \overline{f(z)}. \tag{2.31\beta}$$

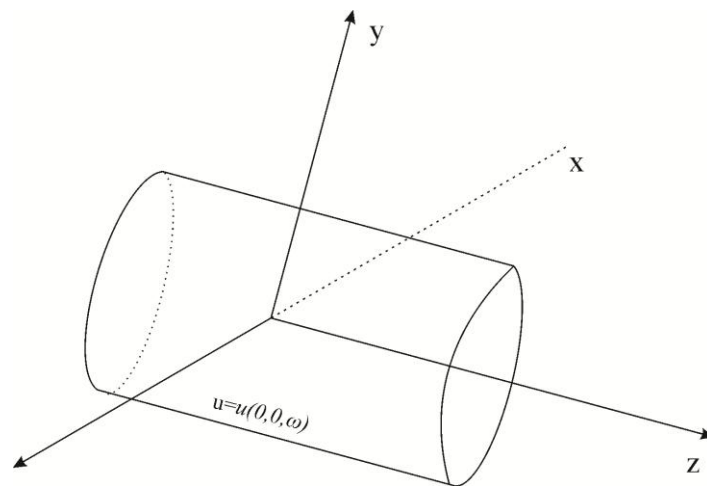
Στην βιβλιογραφία έχουν χρησιμοποιηθεί και οι δύο παραπάνω μορφές στην επίλυση συνοριακών προβλημάτων που εμπλέκουν την διαφορική εξίσωση του Laplace. Παρακάτω, για την μελέτη του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος υιοθετείται η πρώτη γενική έκφραση (2.30β) της λύσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Η ΑΝΤΙ-ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

#### 3.1 Οι εξισώσεις της αντεπίπεδης ελαστικότητας

Θεωρούμε το στερεό σώμα του Σχήματος 3.1, που λόγω κάποιας αιτίας βρίσκεται σε εντατική κατάσταση αντεπίπεδης παραμόρφωσης. Στα πλαίσια της γραμμικής ισότροπης ελαστικότητας, η κατάσταση της αντεπίπεδης παραμόρφωσης, ως προς τον άξονα  $z$  ενός σταθερού συστήματος αναφοράς  $(x, y, z)$  ορίζεται ως εκείνη η δισδιάστατη παραμόρφωση



Σχήμα 3.1 Ένα ελαστικό στερεό σώμα σε κατάσταση αντεπίπεδης ελαστικής παραμόρφωσης

στην οποία, η μη μηδενική συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης είναι η συνιστώσα  $w$  που είναι παράλληλη στον άξονα  $z$  του συστήματος  $(x, y, z)$ . Το σύστημα αναφοράς  $(x_1, x_2, x_3)$  είναι ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και η μετατόπιση  $w$  είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών  $x_1, x_2$ , δηλαδή  $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ . Με τις υποθέσεις αυτές, οι εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας ανάγονται στην επίλυση της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης του Laplace

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad (3.1)$$

με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Όταν η συνάρτηση της αντιεπίπεδης μετατόπισης  $u_3 = u_3(x_1, x_2)$  προσδιορισθεί από την επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, τότε οι μη μηδενικές τάσεις  $\sigma_{13} = \sigma_{13}(x_1, x_2)$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{23}(x_1, x_2)$  του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος, προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (3.2)$$

όπου  $\mu$  είναι το μέτρο διάτμησης του υλικού του σώματος. Από την θεωρία των ολόμορφων συναρτήσεων που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

Έτσι, αν θέσουμε την άγνωστη συνάρτηση  $u_3 = u_3(x_1, x_2)$  ως το διπλάσιο του πραγματικού μέρους μιας ολόμορφης συνάρτησης  $f(z)$  προκύπτει (βλέπε εξίσωση (2.31α) στο 2.4)

$$u_3 = f(z) + \overline{f(z)}, \quad z = x_1 + ix_2 \quad (3.3)$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συνδυασμός  $\sigma_{13} - i\sigma_{23}$  μπορεί να γραφτεί σε όρους της ολόμορφης συνάρτησης  $f(z)$  στην μορφή

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2\mu f'(z)e^{i\theta}. \quad (3.4)$$

Στην ελαστική ανάλυση που γίνεται παρακάτω, για την διατύπωση των διεπιφανειακών συνθηκών των τάσεων στην διεπιφάνεια δύο υλικών, εισάγεται μια νέα μεταβλητή πεδίου  $X_3(x_1, x_2)$ , που χρησιμοποιείται αντί του ελκυστή που επενεργεί πάνω σε μία απειροστή

επιφάνεια  $dS$  του σώματος. Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, η μεταβλητή αυτή εκφράζεται σε όρους της ολόμορφης συνάρτησης  $f(z)$  με την σχέση

$$X_3 = -\mu i [f(z) - \overline{f(z)}], \quad (3.5)$$

και συνδέεται με τον τασικό συνδυασμό  $\sigma_{13} + i\sigma_{23}$  με την σχέση

$$\sigma_{13} + i\sigma_{23} = 2\mu \overline{X_3(z)}. \quad (3.6)$$

Η νέα αυτή μεταβλητή πεδίου εκφράζει την συνισταμένη δύναμη των τάσεων που επενεργούν πάνω σε μία κυλινδρική επιφάνεια του σώματος. Συγκεκριμένα, έστω μία κυλινδρική επιφάνεια μέσα στο σώμα, που βρίσκεται σε αντιεπίπεδη παραμόρφωση, της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες με τον άξονα συντεταγμένων  $z$ . Έστω η τομή της κυλινδρικής επιφάνειας με το επίπεδο  $xy$  ότι είναι ένα τόξο  $MN$ , του οποίου η θετική διεύθυνση είναι από το  $M$  στο  $N$ . Η κυλινδρική επιφάνεια χωρίζει το σώμα σε δύο γειτονιές, στη γειτονιά 1 και στη γειτονιά 2. Η συνισταμένη δύναμη (δύναμη ανά μονάδα μήκους), που επενεργεί πάνω στην κυλινδρική αυτή επιφάνεια, παρέχεται από την σχέση

$$X_3 = \int_M^N (\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2) ds, \quad (3.7)$$

όπου

$$n_1 = \frac{dx_1}{ds}, \quad n_2 = -\frac{dx_2}{ds}, \quad (3.8)$$

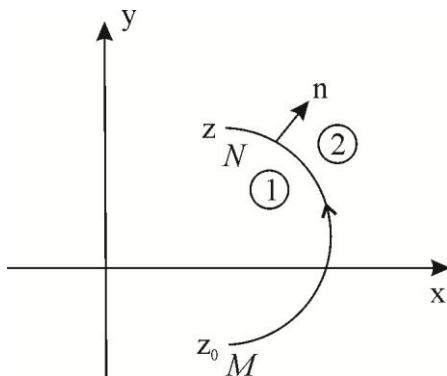
είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  πάνω στην  $MN$  που διευθύνεται από τη γειτονιά 1 στη γειτονιά 2.

Με βάση τις εξισώσεις (3.4) και (3.8), η εξίσωση (3.5) παρέχει

$$X_3 = -\mu i [f(z) - \overline{f(z)}] + \mu i [f(z_0) - \overline{f(z_0)}], \quad (3.9)$$

όπου  $z$  είναι ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στο (μεταβλητό) σημείο  $N$  και  $z_0$  είναι ο μιγαδικός αριθμός που αντιστοιχεί στο (σταθερό) σημείο  $M$ . Εισάγουμε τώρα την  $X_3 = X_3(z, \bar{z})$  ως μια μεταβλητή πεδίου της αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, με την προϋπόθεση ότι η καμπύλη  $MN$  είναι μία λεία και συνεχής καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της. Η νέα αυτή μεταβλητή πεδίου ορίζεται μονοσήμαντα σε κάθε σημείο του

σώματος, που αντιπροσωπεύεται με τον μιγαδικό αριθμό  $z$  και παρέχει το πεδίο των τάσεων με την σχέση (3.6). Επειδή ο δεύτερος όρος στην (3.9) είναι σταθερός και



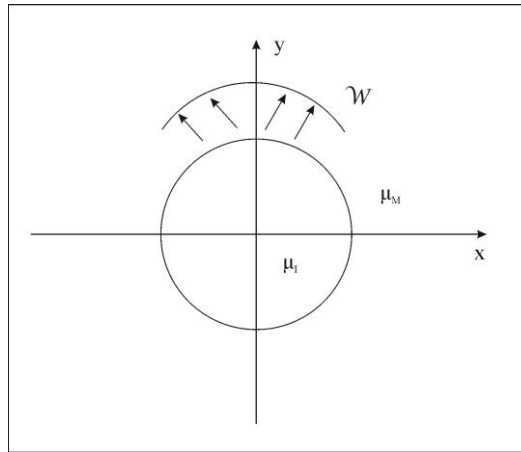
Σχήμα 3.1 Η καμπύλη MN για τον ορισμό της μεταβλητής  $z$

αυθαίρετος, μπορεί να ληφθεί ως  $z_0$  εκείνο το σημείο για το οποίο ο όρος αυτός μηδενίζεται. Συνεπώς, αντί της (3.9) θα θεωρηθεί η σχέση (3.5).

### 3.2 Πολυφασικά δυναμικά για κυκλικές κυλινδρικές διεπιφάνειες

Θεωρούμε μια κυλινδρική διεπιφάνεια  $S_K$  που διαχωρίζει δύο ελαστικά μέσα  $R$  και  $K$ , με γενέτειρες παράλληλες στον άξονα  $x_3$  και μέτρα διάτμησης  $\mu_R$  και  $\mu_K$ , αντίστοιχα. Στη συνέχεια, οι δείκτες  $R$  και  $K$ , όπου εμφανίζονται, θα δηλώνουν ποσότητες που σχετίζονται με τα ελαστικά μέσα  $R$  και  $K$ , αντίστοιχα. Τα δύο συνδεδεμένα μέσα βρίσκονται σε κατάσταση αντιεπίπεδης παραμόρφωσης, με αντιεπίπεδες μετατοπίσεις  $u_3^K = u_3^K(x_1, x_2)$  και  $u_3^R = u_3^R(x_1, x_2)$ , παράλληλες στον άξονα  $x_3$ . Οι συνθήκες που επικρατούν στην διεπιφανειακή σύνδεση είναι συνέχεια του ελκυστή και μια δεδομένη ασυνέχεια των μετατοπίσεων  $W_K(x, y)$ .

Αφού προσδιοριστούν τα μιγαδικά δυναμικά  $f_K(z)$  και  $f_R(z)$  των δύο φάσεων με τον τρόπο



Σχήμα 3.3 Η ασυνέχεια των μετατοπίσεων στην κυκλική επιφάνεια

που θα παρουσιασθεί παρακάτω, οι τάσεις και οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του σώματος  $(x,y)$  θα προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$(\sigma_{13} - i\sigma_{23})_R = 2\mu_R \frac{\partial f_R(z)}{\partial z}, \quad (3.10)$$

$$u_3^R = f_R(z) + \overline{f_R(z)}, \quad (3.11)$$

όταν  $z \in R$ , και

$$(\sigma_{xz} - i\sigma_{yz})^K = 2\mu_K \frac{\partial f_K(z)}{\partial z}, \quad (3.12)$$

$$u_3^K = f_K(z) + \overline{f_K(z)}, \quad (3.13)$$

όταν  $z \in K$ . Αμέσως παρακάτω, θα αναπτυχθούν οι εκφράσεις που παρέχουν τις άγνωστες μιγαδικές συναρτήσεις  $f_R(z)$ ,  $f_K(z)$  των δύο φάσεων του σύνθετου σώματος. Οι διεπιφανειακές συνθήκες που επικρατούν κατά μήκος της διεπιφάνειας είναι

$$X_3^K(t, \bar{t}) = X_3^R(t, \bar{t}), \quad (3.14)$$

$$u_3^K(t, \bar{t}) - u_3^R(t, \bar{t}) = U_K(t, \bar{t}), \quad (3.15)$$

όπου  $t$  βρίσκεται πάνω στην  $S_K$ . Η πρώτη συνθήκη εκφράζει την συνέχεια των τάσεων σε μία ισοδύναμη ολοκληρωμένη μορφή, ενώ η δεύτερη, την ασυνέχεια των μετατοπίσεων των δύο υλικών. Στις παραπάνω σχέσεις και στην συνέχεια, οι άνω δείκτες  $K$  και  $R$ , όπου αυτοί εμφανίζονται, θα δηλώνουν ποσότητες που σχετίζονται με τα μέσα  $K$  και  $R$  αντίστοιχα.



Με βάση τις σχέσεις (3.3) και (3.4), οι συνθήκες (3.7) και (3.8) γράφονται

$$\mu_K[f_K(t) - \overline{f_K(t)}] = \mu_R[f_R(t) - \overline{f_R(t)}], \quad t \text{ πάνω στην } S \quad (3.16)$$

$$[f_K(t) - \overline{f_K(t)}] - [f_R(t) - \overline{f_R(t)}] = U_K(t, \bar{t}), \quad t \text{ πάνω στην } S \quad (3.17)$$

Οι δύο αυτές συνθήκες μπορούν να αναχθούν ισοδύναμα σε μία μόνο εξίσωση

$$f_K(t) = \Gamma_{KR}f_R(t) + \gamma_{KR}f_R(t) + \frac{1}{2}U_K(t, \bar{t}), \quad t \text{ πάνω στην } S \quad (3.18)$$

όπου έχουν εισαχθεί οι σταθερές

$$\Gamma_{KR} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu_R}{\mu_K} \right), \quad \gamma_{KR} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mu_R}{\mu_K} \right). \quad (3.19)$$

Αν η διεπιφάνεια  $S_K$  είναι κυλινδρική με κυκλική διατομή ακτίνας  $R_K$  και ο άξονας  $x_3$  διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής διατομής, τότε η σχέση (3.11) γράφεται

$$f_K(t) = \Gamma_{KR}f_R(t) + \gamma_{KR}\bar{f}_R\left(\frac{R_K^2}{t}\right) + \frac{1}{2}U_K\left(t, \frac{R_K^2}{t}\right), \quad (3.20)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση  $t \cdot \bar{t} = R_K^2$  που ισχύει για τα σημεία που ανήκουν στην περιφέρεια  $S_K$ . Από την παραπάνω σχέση γίνεται φανερό ότι αυτή ικανοποιείται, όταν τα δυναμικά των δύο ελαστικών μέσων ορισθούν με τις σχέσεις

$$f_R(z) = f_0(z), \quad (3.21)$$

$$f_K(z) = \Gamma_{KR}f_0(z) + \gamma_{KR}\bar{f}_0\left(\frac{R_K^2}{z}\right) + \frac{1}{2}U_K\left(z, \frac{R_K^2}{z}\right). \quad (3.22)$$

Με τις παραπάνω σχέσεις, τα μιγαδικά δυναμικά των δυο φάσεων εκφράζονται σε όρους μιας μόνο ολόμορφης συνάρτησης  $f_0(z)$ , που στο εξής θα καλείται **διφασικό δυναμικό**.

### 3.3 Τα ολοκληρώματα $J$ , $L$ και $M$ στην αντιεπίπεδη ελαστικότητα

Σε δισδιάστατα ελαστικά προβλήματα, το ολοκλήρωμα  $J$  είναι η πρώτη συνιστώσα του διανύσματος

$$J_k = \int_{C_s} (Wn_k - t_i u_{i,k}) dl, \quad (3.23)$$

όπου  $C$  είναι μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο  $x_1, x_2$ ,  $W$  είναι η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης,  $t_i (i=1,2)$  είναι οι συνιστώσες του ελκυστή που επενεργεί στο σύνορο του πεδίου που περικλείεται από την  $C$ ,  $u_i$  είναι οι συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων και  $dl$  είναι ένα απειροστό τμήμα κατά μήκος της καμπύλης  $C$ . Η πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης  $W$  ορίζεται με τη σχέση

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.24)$$

όπου  $\sigma_{ij}$  και  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  είναι οι συνιστώσες του τανυστή τάσης και παραμόρφωσης, αντίστοιχα. Τα ανεξάρτητα του δρόμου ολοκληρώματα  $L$  και  $M$  έχουν εξαχθεί από τους Gunter (1962) και Knowles και Sternberg (1972) και στην δισδιάστατη μορφή έχουν την μορφή

$$L = \int_C \varepsilon_{ijk} (Wx_j n_i + t_i u_j - t_k u_{k,i} x_j) dl, \quad (3.25)$$

και

$$M = \int_C (Wx_j n_i - t_k u_{k,i} x_j) dl, \quad (3.26)$$

όπου  $\varepsilon_{ijk}$  είναι ο εναλλακτικός τανυστής. Στις παραπάνω σχέσεις τα  $n_i$  είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στην καμπύλη  $C$  που κατευθύνεται προς τα έξω και παρέχονται από τις σχέσεις  $n_1 = dx_1/dl$ ,  $n_2 = dx_2/dl$ .

Το  $J_2$  ολοκλήρωμα μπορεί να ερμηνευτεί ως το αρνητικό της μεταβολής της ολικής δυναμικής ενέργειας καθώς μια ελεύθερη από τάσεις κοιλότητα υποστεί μια μοναδιαία ομοιόθετη επέκταση στην  $x_2$  διεύθυνση. Το  $L$  ολοκλήρωμα ονομάζεται υλική ροπή περιστροφής και μπορεί να ερμηνευθεί ως θετική μεταβολή της ενέργειας όταν το σώμα υποστεί μια ομοιόμορφη περιστροφή ως προς την αρχή, ενώ το  $M$  ολοκλήρωμα μπορεί να ερμηνευθεί ως η αρνητική μεταβολή της ενέργειας καθώς μια ελεύθερη τάσεων κοιλότητα υποστεί μια ομοιόθετη επέκταση σχετικά με την αρχή. Τα παραπάνω ολοκληρώματα, για την αντιεπίπεδη παραμόρφωση μπορούν να εκφραστούν σε όρους του μιγαδικού δυναμικού  $f(z)$  με τις σχέσεις

$$J_1 - iJ_2 = 2i\mu \int_C [f'(z)]^2 dz, \quad (3.27)$$

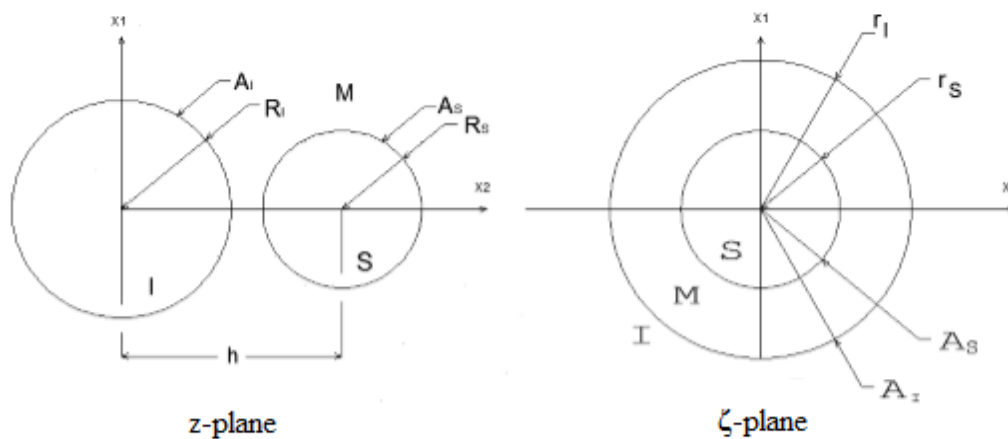
$$L - iM = 2\mu \int_C z [f'(z)]^2 dz, \quad (3.28)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΤΟ ΑΝΤΙΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ Η ΛΥΣΗ ΤΟΥ

### 4.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα ελαστικό σύστημα που αποτελείται από ένα άπειρο ελαστικό υλικό που περιέχει δύο κυλινδρικές ελαστικές ανομοιογένειες κυκλικής διατομής και απείρου μήκους με παράλληλους άξονες. Η τομή του ελαστικού συστήματος με ένα επίπεδο, που είναι κάθετο στους άξονες των κυλινδρικών ανομοιογενειών, δείχνεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 Το ελαστικό σύστημα των δύο κυκλικών ανομοιογενειών

Το επίπεδο αυτό ταυτίζεται με το επίπεδο των αξόνων  $x_1, x_2$  ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$  του οποίου η αρχή είναι τοποθετημένη στο

εσωτερικό της πρώτης ανομοιογένειας με τον άξονα  $x_3$  να ταυτίζεται με τον άξονά της. Οι δύο κυλινδρικές ανομοιογένειες έχουν διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες, τόσο μεταξύ τους, όσο και με το άπειρο ελαστικό υλικό στο οποίο βρίσκονται. Στο εξής, το άπειρο ελαστικό μέσο θα ονομάζεται μήτρα. Στο Σχήμα 1, τα  $S$ ,  $L$  και  $M$  δηλώνουν τα πεδία των δύο ανομοιογενειών και της μήτρας αντίστοιχα, πάνω στο επίπεδο αναφοράς, ενώ τα  $A_S$  και  $A_L$  τα ίχνη των κυλινδρικών συνόρων των δύο ανομοιογενειών πάνω στο επίπεδο αυτό. Τα  $A_S$  και  $A_L$  είναι κυκλικές περιφέρειες με ακτίνες  $R_L$  και  $R_S$ . Οι άξονες των δύο ανομοιογενειών απέχουν απόσταση  $h$ . Οι ανομοιογένειες είναι τέλεια συνδεδεμένες με την μήτρα με τέτοιο τρόπο, ώστε το ελαστικό σύστημα στην αφόρτιστη κατάσταση να είναι χωρίς τάσεις. Το ελαστικό σύστημα υφίσταται μία αντεπίπεδη παραμόρφωση στη διεύθυνση του άξονα  $x_3$ , η οποία προέρχεται από ομοιόμορφους μετασχηματισμούς φάσης των ανομοιογενειών και περιγράφονται από τις ιδιοπαραμορφώσεις  $\varepsilon_{13}^{*I}$ ,  $\varepsilon_{23}^{*I}$  και  $\varepsilon_{13}^{*S}$ ,  $\varepsilon_{23}^{*S}$  αντίστοιχα. Ο προσδιορισμός των ελαστικών πεδίων που αναπτύσσονται στο ελαστικό σύστημα γίνεται παρακάτω επιλύοντας το σχετικό ελαστικό πρόβλημα.

## 4.2 Βασικές εξισώσεις

Στην αντεπίπεδη παραμόρφωση, οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στα πεδία  $I$  και  $S$  των ανομοιογενειών θα δηλώνονται με  $\sigma_{13}^I$ ,  $\sigma_{23}^I$  και  $\sigma_{13}^S$ ,  $\sigma_{23}^S$  αντίστοιχα, ενώ αυτές που αντιστοιχούν στο πεδίο  $M$  της μήτρας  $\sigma_{13}^M$ ,  $\sigma_{23}^M$ . Στην παρούσα εργασία, οι άνω δείκτες  $S$ ,  $I$  και  $M$  χρησιμοποιούνται για να δηλώνουν ποσότητες συνδεδεμένες με τα πεδία  $S$ ,  $I$  και  $M$  αντίστοιχα. Οι τάσεις αυτές και οι αντεπίπεδες μετατοπίσεις μπορούν να εξαχθούν από τα δυναμικά των τριών φάσεων του συστήματος  $F_S(z)$ ,  $F_I(z)$ ,  $F_M(z)$  χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\sigma_{13}^K - i\sigma_{23}^K = 2\mu_K F_K'(z) \quad (4.1)$$

$$u_3^K = F_K(z) + \overline{F_K(z)} \quad (4.2)$$

όπου  $K=I$ ,  $S$  ή  $M$ . Το  $z$ , το οποίο δίνεται από την σχέση  $z = x_1 + ix_2$  με  $i^2 = -1$  αποτελεί ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , που είναι συνδεδεμένο με τους άξονες  $x_1$  και  $x_2$  του καρτεσιανού συστήματος αναφοράς.

Η ανάλυση του αντιεπίπεδου ελαστικού προβλήματος θα γίνει σε ένα νέο μιγαδικό επίπεδο  $\zeta$ , πάνω στο οποίο μετασχηματίζεται το φυσικό πεδίο, το οποίο αντιστοιχεί στο επίπεδο  $z$ , με τον παρακάτω σύμμορφο μετασχηματισμό

$$z = m(\zeta) = \frac{a\zeta}{a - \zeta} \quad (4.3)$$

Με τον μετασχηματισμό αυτό, οι περιφέρειες  $A_S$  και  $A_I$  μετασχηματίζονται αντίστοιχα στις περιφέρειες  $A'_S$  και  $A'_I$  του επιπέδου  $\zeta$ , ενώ τα πεδία  $S$ ,  $I$  και  $M$  στα πεδία  $S'$ ,  $I'$  και  $M'$  αντίστοιχα. Η παράμετρος  $a$  που υπεισέρχεται στην σχέση (4.3) υπολογίζεται από την σχέση

$$a = \frac{1}{\alpha} \quad (4.4)$$

όπου

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{(R_S^2 - R_I^2)^2 - 2L^2(R_S^2 + R_I^2) + h^4}}. \quad (4.5)$$

Η παράμετρος αυτή αποτελεί την ακτίνα μιας ομόκεντρης περιφέρειας των  $A'_S$  και  $A'_I$  των οποίων οι ακτίνες  $r_S$  και  $r_I$  παρέχονται από τις σχέσεις,

$$r_I = \frac{\sqrt{1 + 4a^2 R_I^2} + 1}{2R_I a^2}, \quad (4.6)$$

$$r_S = \frac{\sqrt{1 + 4a^2 R_S^2} - 1}{2R_S a^2}. \quad (4.7)$$

Τα σημεία της ομόκεντρης αυτής περιφέρειας με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (4.3) αντιστοιχούν στο σημείο του απείρου του  $z$  επιπέδου.

Στο μετασχηματισμένο επίπεδο, οι σχέσεις (4.1) και (4.2) παίρνουν τη μορφή

$$\sigma_{13}^K - i\sigma_{23}^K = 2\mu_K \frac{f'_K(\zeta)}{m'(\zeta)}, \quad (4.8)$$

$$u_3^K = f_K(\zeta) + \overline{f_K(\zeta)}, \quad (4.9)$$

όπου έχει τεθεί

$$f_K(\zeta) = F_K(m(\zeta)) \quad (4.10)$$

και έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$F'_K(z) = \frac{f'_K(\zeta)}{m'(\zeta)} \quad (4.11)$$

### 4.3 Αναγωγή του αντιεπίπεδου προβλήματος σε πρόβλημα Somigliana

Στο φυσικό επίπεδο  $z$ , οι ιδιομετατοπίσεις  $u_3^{*I}$ ,  $u_3^{*S}$  που αναπτύσσονται στα πεδία  $S$  και  $I$  έχουν τη μορφή

$$u_3^{*S} = E^{*S}z + \overline{E}^{*S}\bar{z}, \quad u_3^{*I} = E^{*I}z + \overline{E}^{*I}\bar{z} \quad (4.12)$$

όπου

$$E^{*I} = \varepsilon_{13}^{*I} - i\varepsilon_{23}^{*I}, \quad \overline{E}^{*I} = \varepsilon_{13}^{*S} - i\varepsilon_{23}^{*S}. \quad (4.13)$$

Λόγω συνέχειας των μετατοπίσεων στα σύνορα  $A_S$  και  $A_I$  θα ισχύει

$$u_3^M = u_3^I + u_3^{*I}, \quad \text{πάνω στο } A_I, \quad (4.14)$$

$$u_3^M = u_3^S + u_3^{*S}, \quad \text{πάνω στο } A_S. \quad (4.15)$$

Από τις σχέσεις αυτές και τις (4.12)-(4.13) προκύπτει ότι οι ελαστικές μετατοπίσεις που αναπτύσσονται στο σύστημα παρουσιάζουν τις παρακάτω ασυνέχειες πάνω στις περιφέρειες  $A_S$  και  $A_I$ ,

$$U_I(z, \bar{z}) = u_3^{*I} = u_3^M - u_3^I = E^{*I} z + \bar{E}^{*I} \bar{z}, \text{ πάνω στο } A_I \quad (4.16)$$

$$U_S(z, \bar{z}) = u_3^{*S} = u_3^M - u_3^S = E^{*S} z + \bar{E}^{*S} \bar{z}, \text{ πάνω στο } A_S. \quad (4.17)$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελαστικό πρόβλημα που εξετάζεται έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα τύπου Somigliana, στο οποίο οι συνέχειες των ελαστικών μετατοπίσεων πάνω στις περιφέρειες  $A_S$  και  $A_I$  παρέχονται από τις σχέσεις (4.16) και (4.17). Η επίλυση του προβλήματος αυτού θα γίνει στο μιγαδικό επίπεδο  $\zeta$  (επίπεδο μετασχηματισμού), προσδιορίζοντας τα μιγαδικά δυναμικά των τριών φάσεων. Στο μιγαδικό επίπεδο  $\zeta$  οι παραπάνω συναρτήσεις γράφονται,

$$\mathcal{U}_I(\zeta, \bar{\zeta}) = U_I(m(\zeta), m(\bar{\zeta})) = -\frac{E^{*I} a \zeta}{\zeta - a} - \frac{\bar{E}^{*I} a \bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - a} \quad (4.18)$$

$$\mathcal{U}_S(\zeta, \bar{\zeta}) = U_S(m(\zeta), m(\bar{\zeta})) = -\frac{E^{*S} a \zeta}{\zeta - a} - \frac{\bar{E}^{*S} a \bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - a} \quad (4.19)$$

#### 4.4 Επίλυση του προβλήματος Somigliana

Όπως προαναφέρθηκε, το αντιεπίπεδο ελαστικό πρόβλημα που μελετάται έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα τύπου Somigliana, το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Να προσδιοριστούν τρεις συναρτήσεις  $f_S(\zeta)$ ,  $f_I(\zeta)$ ,  $f_M(\zeta)$  που είναι ορισμένες στα πεδία  $S'$ ,  $L'$  και  $M'$ , αντίστοιχα, του  $\zeta$  επιπέδου έτσι ώστε: (i) να έχουν πεπερασμένες τιμές σε κάθε σημείο των πεδίων που ορίζονται, (ii) να παράγουν από την σχέση (4.8) ελκυστές που είναι συνεχείς στις περιφέρειες  $A'_S$  και  $A'_I$ , (iii) από τη σχέση (4.9), να παράγουν μετατοπίσεις με ασυνέχειες  $\mathcal{U}_S$  και  $\mathcal{U}_I$  δια μέσω των περιφερειών  $A'_S$  και  $A'_I$ , που παρέχονται από τις σχέσεις (4.18) και (4.19).

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος θα γίνει με την μέθοδο των διφασικών δυναμικών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, τα τρία δυναμικά που ικανοποιούν εκ των προτέρων τις συνθήκες (ii) και (iii), μπορούν να γραφτούν σε μορφή μιας ολόμορφης συνάρτησης  $f_0(\zeta)$  με τις σχέσεις



$$f_I(\zeta) = \Gamma_{IM} f_0(\zeta) + \gamma_{IM} \bar{f}_0\left(\frac{r_I^2}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}_I\left(\zeta, \frac{r_I^2}{\zeta}\right) \quad (4.20)$$

$$f_M(\zeta) = f_0(\zeta), \quad (4.21)$$

$$f_S(\zeta) = \Gamma_{SM} f_0(\zeta) + \gamma_{SM} \bar{f}_0\left(\frac{r_S^2}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{U}_S\left(\zeta, \frac{r_S^2}{\zeta}\right) \quad (4.22)$$

όπου

$$\mathcal{U}_I\left(\zeta, \frac{r_I^2}{\zeta}\right) = U_I\left(m(\zeta), \bar{m}\left(\frac{r_I^2}{\zeta}\right)\right), \quad (4.23)$$

$$\mathcal{U}_S\left(\zeta, \frac{r_S^2}{\zeta}\right) = U_S\left(m(\zeta), \bar{m}\left(\frac{r_S^2}{\zeta}\right)\right), \quad (4.24)$$

και

$$\Gamma_{IM} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_M}{\mu_I}\right), \quad \gamma_{IM} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_M}{\mu_I}\right) \quad (4.25)$$

$$\Gamma_{SM} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_M}{\mu_S}\right), \quad \gamma_{SM} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_M}{\mu_S}\right) \quad (4.26)$$

Για την επίλυση αυτού του ελαστικού προβλήματος αυτό που απομένει είναι η ικανοποίηση της συνθήκης (i). Σύμφωνα με την συνθήκη αυτή, τα τρία δυναμικά  $f_S(\zeta)$ ,  $f_I(\zeta)$ ,  $f_M(\zeta)$  πρέπει να είναι ολόμορφα παντού στα πεδία που ορίζονται. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να προσδιοριστεί η ολόμορφη συνάρτηση  $f_0(\zeta)$ , έτσι ώστε, με τις σχέσεις (4.20), (4.21), (4.22) τα τρία δυναμικά να ορίζονται παντού στα πεδία τους.

Η αναζήτηση της κατάλληλης συνάρτησης  $f_0(\zeta)$  θα ξεκινήσει προσδιορίζοντας πρώτα τους  $\mathcal{U}$ -όρους που υπεισέρχονται στην δεξιά πλευρά των σχέσεων (4.20) και (4.22). Από τις σχέσεις (4.23) και (4.24) προκύπτει

$$\mathcal{U}_I(\zeta, \frac{r_I^2}{\zeta}) = -\frac{E^{*I} a \zeta}{\zeta - a} + \frac{\bar{E}^{*I} r_I^2}{\zeta - a_I} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{U}_S(\zeta, \frac{r_S^2}{\zeta}) = -\frac{E^{*S} a \zeta}{\zeta - a} + \frac{\bar{E}^{*S} r_S^2}{\zeta - a_S} \quad (4.28)$$

όπου

$$a_I = \frac{r_I^2}{a}, \quad a_S = \frac{r_S^2}{a} \quad (4.29)$$

Επειδή  $a_I > r_I$  και  $a_S < r_S$ , οι  $\mathcal{U}$ -όροι εισάγουν δύο ανεπιθύμητες ιδιομορφίες στα μιγαδικά δυναμικά  $f_S(\zeta)$ ,  $f_I(\zeta)$ , οι οποίες θα πρέπει να απαλειφθούν ορίζοντας την κατάλληλη συνάρτηση  $f_0(\zeta)$ . Προς αυτό τον σκοπό, σε μία πρώτη δοκιμή (δοκιμή 1) ορίζουμε την  $f_0^{(1)}(\zeta)$  με την σχέση

$$f_0^{(1)}(\zeta) = \frac{A_I^{(1)}}{\zeta - a_I} + \frac{A_S^{(1)}}{\zeta - a_S}, \quad (4.30)$$

όπου  $A_I^{(1)}$  και  $A_S^{(1)}$  είναι μιγαδικές σταθερές, οι οποίες θα υπολογιστούν, έτσι ώστε να απαλειφθούν οι ανεπιθύμητες ιδιομορφίες. Εισάγοντας την (4.27) και (4.28) στις (4.20) και (4.22) αντίστοιχα, οι ανεπιθύμητες ιδιομορφίες απαλείφονται όταν

$$A_I^{(1)} = -\frac{\bar{E}^{*I} r_I^2}{2\Gamma_{IM}}, \quad (4.31)$$

$$A_S^{(1)} = -\frac{\bar{E}^{*S} r_S^2}{2\Gamma_{SM}}. \quad (4.32)$$

Για το διφασικό δυναμικό που παρέχεται από την (4.30) με  $A_I^{(1)}$  και  $A_S^{(1)}$  να παρέχονται από τις σχέσεις (4.31) και (4.32), τα μιγαδικά δυναμικά των τριών φάσεων των συναρτήσεων (4.20), (4.21) και (4.22) παίρνουν τη μορφή,

$$f_I^{(1)}(\zeta) = \frac{\Gamma_{IM} A_S^{(1)}}{\zeta - a_S} + \gamma_{IM} \left[ -\frac{\bar{A}_I^{(1)}}{a_I} - \frac{\bar{A}_I^{(1)} r_I^2 / a_I^2}{\zeta - r_I^2 / a_I} - \frac{\bar{A}_S^{(1)}}{a_S} - \frac{\bar{A}_S^{(1)} r_I^2 / a_S^2}{\zeta - r_I^2 / a_S} \right] - \frac{E^{*I} a \zeta}{2(\zeta - a)} \quad (4.33)$$

$$f_0^{(1)}(\zeta) = \frac{A_I^{(1)}}{\zeta - a_I} + \frac{A_S^{(1)}}{\zeta - a_S} \quad (4.34)$$

$$f_S^{(1)}(\zeta) = \frac{\Gamma_{SM} A_I^{(1)}}{\zeta - a_I} + \gamma_{SM} \left[ -\frac{\bar{A}_S^{(1)}}{a_S} - \frac{\bar{A}_S^{(1)} r_S^2 / a_S^2}{\zeta - r_S^2 / a_S} - \frac{\bar{A}_I^{(1)}}{a_I} - \frac{\bar{A}_I^{(1)} r_S^2 / a_I^2}{\zeta - r_S^2 / a_I} \right] - \frac{E^{*S} a \zeta}{2(\zeta - a)} \quad (4.35)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι με την επιλογή των μιγαδικών δυναμικών που έγινε, απαλείφθηκαν μεν οι αρχικές ιδιομορφίες των μιγαδικών δυναμικών, αλλά η επιλογή αυτή εισήγαγε μία νέα ιδιομορφία στο δυναμικό της ανομοιογένειας  $I'$  στη θέση  $\zeta = r_I^2 / a_S$ , καθώς και μία ιδιομορφία στο δυναμικό της ανομοιογένειας  $S'$  στη θέση  $\zeta = r_S^2 / a_I$ . Οι δύο αυτές ιδιομορφίες θα απαλειφθούν με μία δεύτερη δοκιμή. Επιλέγοντας την  $f_0^{(2)}(\zeta)$  με την σχέση (δοκιμή 2),

$$f_0^{(2)}(\zeta) = f_0^{(1)}(\zeta) + \frac{A_I^{(2)}}{\zeta - r_I^2 / a_S} + \frac{A_S^{(2)}}{\zeta - r_S^2 / a_I} \quad (4.36)$$

και εισάγοντας την παραπάνω σχέση στις (4.20) και (4.22), οι σχέσεις αυτές γράφονται,

$$f_I^{(2)}(\zeta) = \frac{\Gamma_{IM} A_S^{(1)}}{\zeta - a_S} + \gamma_{IM} \left[ -\frac{\bar{A}_I^{(1)}}{a_I} - \frac{\bar{A}_I^{(1)} r_I^2 / a_I^2}{\zeta - r_I^2 / a_I} - \frac{\bar{A}_S^{(1)}}{a_S} - \frac{\bar{A}_S^{(1)} r_I^2 / a_S^2}{\zeta - r_I^2 / a_S} \right] - \frac{E^{*I} a \zeta}{2(\zeta - a)} \\ + \Gamma_{IM} \left[ \frac{A_I^{(2)}}{\zeta - r_I^2 / a_S} + \frac{A_S^{(2)}}{\zeta - r_S^2 / a_I} \right] + \gamma_{IM} \left[ -\frac{\bar{A}_I^{(2)} a_S}{r_I^2} - \frac{\bar{A}_I^{(2)} a_S / r_I^2}{\zeta - a_S} - \frac{\bar{A}_S^{(2)} a_I}{r_S^2} - \frac{\bar{A}_S^{(2)} a_I^2 r_I^2 / r_S^4}{\zeta - a_I r_I^2 / r_S^2} \right] \quad (4.37)$$

$$f_M^{(2)}(\zeta) = f_M^{(1)}(\zeta) + \frac{A_I^{(1)}}{\zeta - r_I^2 / a_S} + \frac{A_S^{(1)}}{\zeta - r_S^2 / a_I} \quad (4.38)$$

$$f_S^{(2)}(\zeta) = \frac{\Gamma_{SM} A_I^{(1)}}{\zeta - a_I} + \gamma_{SM} \left[ -\frac{\bar{A}_S^{(1)}}{a_S} - \frac{\bar{A}_S^{(1)} r_S^2 / a_S^2}{\zeta - r_S^2 / a_S} - \frac{\bar{A}_I^{(1)}}{a_I} - \frac{\bar{A}_I^{(1)} r_S^2 / a_I^2}{\zeta - r_S^2 / a_I} \right] - \frac{E^{*S} a \zeta}{2(\zeta - a)} \\ + \Gamma_{SM} \left[ \frac{A_I^{(2)}}{\zeta - r_I^2 / a_S} + \frac{A_S^{(2)}}{\zeta - r_S^2 / a_I} \right] + \gamma_{SM} \left[ -\frac{\bar{A}_S^{(2)} a_I}{r_S^2} - \frac{\bar{A}_S^{(2)} a_I^2 / r_S^2}{\zeta - a_I} - \frac{\bar{A}_I^{(2)} a_S}{r_I^2} - \frac{\bar{A}_I^{(2)} a_S^2 r_S^2 / r_I^4}{\zeta - a_S r_S^2 / r_I^2} \right] \quad (4.39)$$

Οι ιδιομορφίες που έχουν εισαχθεί απαλείφονται όταν

$$\Gamma_{IM} A_I^{(2)} - \gamma_{IM} \bar{A}_S^{(1)} \frac{r_I^2}{a_S^2} = 0 \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{SM} A_S^{(2)} - \gamma_{SM} \bar{A}_I^{(1)} \frac{r_S^2}{a_I^2} = 0 \quad (4.41)$$

από όπου

$$A_I^{(2)} = \frac{\gamma_{IM}}{\Gamma_{IM}} \bar{A}_S^{(1)} \frac{r_I^2}{a_S^2} \quad (4.42)$$

$$A_S^{(2)} = \frac{\gamma_{SM}}{\Gamma_{SM}} \bar{A}_I^{(1)} \frac{r_S^2}{a_I^2} \quad (4.43)$$

Όμως, εισάγοντας την  $f_0^{(2)}(\zeta)$  προκύπτουν δύο ακόμα ιδιομορφίες στο σημείο  $\zeta = a_I r_I^2 / r_S^2$  του πεδίου  $I'$  και στο σημείο  $\zeta = a_S r_S^2 / r_I^2$  του πεδίου  $S'$ . Προκειμένου να απαλειφθούν οι ιδιομορφίες αυτές, στην τρίτη δοκιμή (δοκιμή 3) εισάγεται

$$f_0^{(3)}(\zeta) = f_0^{(1)}(\zeta) + f_0^{(2)}(\zeta) + \frac{A_I^{(3)}}{\zeta - a_I r_I^2 / r_S^2} + \frac{A_S^{(3)}}{\zeta - a_S r_S^2 / r_I^2} \quad (4.44)$$

Ανακυκλώνοντας την ίδια διαδικασία, η απαλοιφή των ιδιομορφιών αυτών γίνεται όταν

$$A_I^{(3)} = \frac{\gamma_{IM}}{\Gamma_{IM}} \bar{A}_S^{(2)} \frac{r_I^2}{r_S^4} a_I^2 \quad (4.45)$$

$$A_S^{(3)} = \frac{\gamma_{SM}}{\Gamma_{SM}} \bar{A}_I^{(2)} \frac{r_S^2}{r_I^4} a_S^2 \quad (4.46)$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι η  $f_0(\zeta)$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή της παρακάτω απειροσειράς

$$f_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_I^{2n-1}}{\zeta - a_I (r_I/r_S)^{2n-1}} + \frac{A_S^{2n-1}}{\zeta - a_S (r_S/r_I)^{2n-1}} + \frac{A_I^{2n}}{\zeta - r_I^{2n} / (r_S^{2(n-1)} a_S)} + \frac{A_S^{2n}}{\zeta - r_S^{2n} / (r_I^{2(n-1)} a_I)} \right] \quad (4.47)$$

ενώ οι μιγαδικές σταθερές  $A_I$  και  $A_S$  μπορούν να δοθούν από τους τύπους

$$A_L^{(2n)} = \frac{\gamma_{LM}}{\Gamma_{LM}} \overline{A}_N^{(2n-1)} \frac{r_L^{(4n-2)}}{r_N^{(4n-4)} a_N^2} \quad (4.48\alpha)$$

$$A_L^{(2n-1)} = \frac{\gamma_{LM}}{\Gamma_{LM}} \overline{A}_N^{(2n-2)} \frac{r_L^{(4n-6)}}{r_N^{(4n-4)} a_N^2} \quad (4.48\beta)$$

όπου

$$L = I \text{ και } N = S$$

ή

$$L = S \text{ και } N = I$$

Η σχέση (4.47) παρέχει την γενική λύση του προβλήματος. Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στις (4.20), (4.21) και (4.22) αποσπώνται τα μιγαδικά των τριών φάσεων του συστήματος μήτρα-ανομοιογενειών. Αυτά τα μιγαδικά των τριών φάσεων του συστήματος εξάγουν μέσω των σχέσεων (4.8) και (4.9) τις τάσεις και τις ελαστικές μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του συστήματος.

## 4.5 Αριθμητική εφαρμογή

Η παραπάνω ανάλυση θα εφαρμοσθεί σε ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα δύο γειτονικών ανομοιογενειών με τα παρακάτω γεωμετρικά στοιχεία:

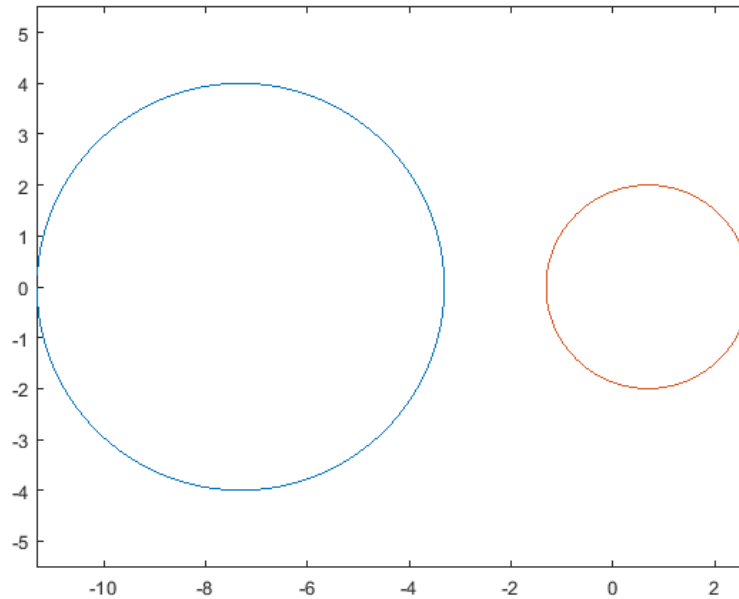
$$R_I = 4 \text{ mm}, R_S = 2 \text{ mm}, h = 8 \text{ mm} \quad (4.49)$$

Με το πρόγραμμα Conformal mapping, που συντάχθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας και έχει καταχωρηθεί στο Παράρτημα, τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι:

$$r_I = 9,365 \text{ mm}, r_S = 1,763 \text{ mm}, a = 5,123 \text{ mm} \quad (4.50)$$

Με βάση τα αποτελέσματα αυτά ο σύμμορφος μετασχηματισμός που μετασχηματίζει τους δύο κύκλους σε ένα δακτύλιο του ζ-επιπέδου με ακτίνες  $r_I = 9.365 \text{ mm}$ ,  $r_S = 1.763 \text{ mm}$  είναι:

$$z = \frac{5.123\zeta}{5.123 - \zeta} \quad (4.51)$$



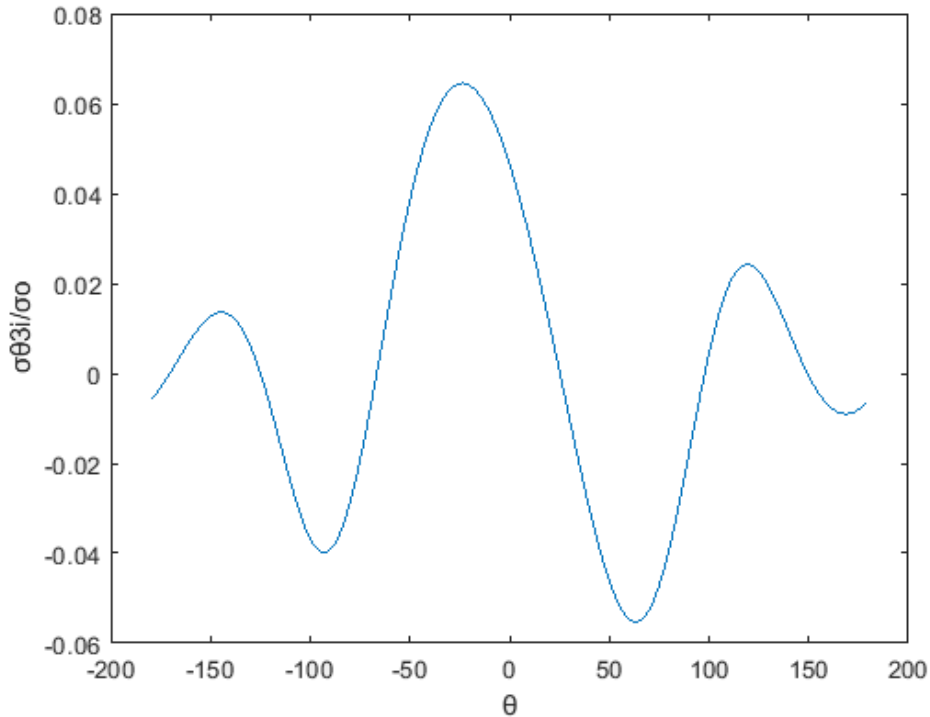
**Σχήμα 4.2.** Οι δύο ανομοιογένειες του παραδείγματος στο φυσικό επίπεδο  $z$

Στο Σχήμα 4.2. έχουν σχεδιασθεί οι δυο ανομοιογένειες με το σχετικό πρόγραμμα. Στην συνέχεια θα προσδιορισθούν οι συγκεντρώσεις τάσεων γύρω από τις ανομοιογένειες χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα STRESS που συντάχθηκε για αυτό τον σκοπό και έχει καταχωρηθεί στο Παράρτημα της εργασίας. Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα γύρω από την αριστερή ανομοιογένεια όταν οι τιμές των μέτρων διάτμησης είναι ίσες με

$$\mu_M = 100.000 \text{ MPa}, \mu_I = 50.000 \text{ MPa}, \mu_S = 100.000 \text{ MPa} \quad (4.52)$$

Η κατανομή των εφαπτομενικών τάσεων  $\sigma_{\theta 3}^I(R_I, \vartheta) / \sigma_0$ , ( $\sigma_0 = \mu_M |\varepsilon_{23}^{*I}|$ ) σε ανηγμένη μορφή γύρω από την αριστερή ανομοιογένεια δείχνεται στο Σχήμα 4.3, στο Σχήμα 4.4 και στο Σχήμα 4.5. Αρχικά παρουσιάζεται η κατανομή των εφαπτομενικών τάσεων όταν οι τιμές των ιδιοπαραμορφώσεων είναι ίσες με

$$E^{*I} = \varepsilon_{13}^{*I} - i\varepsilon_{23}^{*I} = (5 - i5) \times 10^{-3}, E^{*S} = \varepsilon_{13}^{*S} - i\varepsilon_{23}^{*S} = 0 \quad (4.53)$$



**Σχημα 4.3 Κατανομή εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_{93}^I$  στην ανομοιογένεια I**

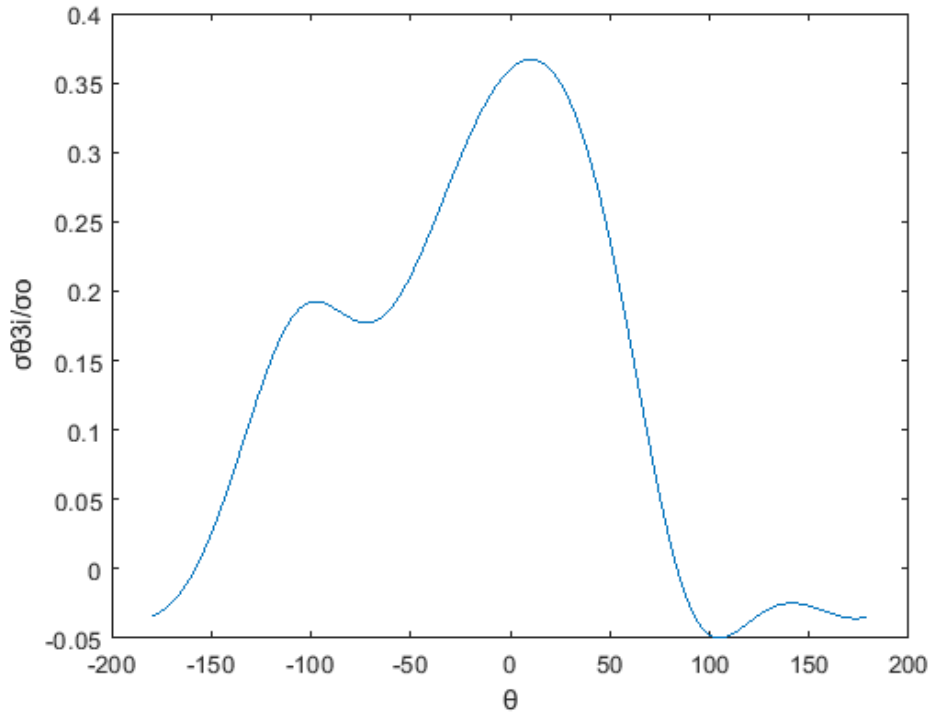
Στην συνέχεια, παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων για την αριστερή ανομοιογένεια για τις ελαστικές παραμέτρους που δίνονται από τη σχέση (4.52) και για τις παρακάτω τιμές ιδιοπαραμορφώσεων

$$E^{*I} = \varepsilon_{13}^{*I} - i\varepsilon_{23}^{*I} = 0, \quad E^{*S} = \varepsilon_{13}^{*S} - i\varepsilon_{23}^{*S} = (5 - i5) \times 10^{-3} \quad (4.54)$$

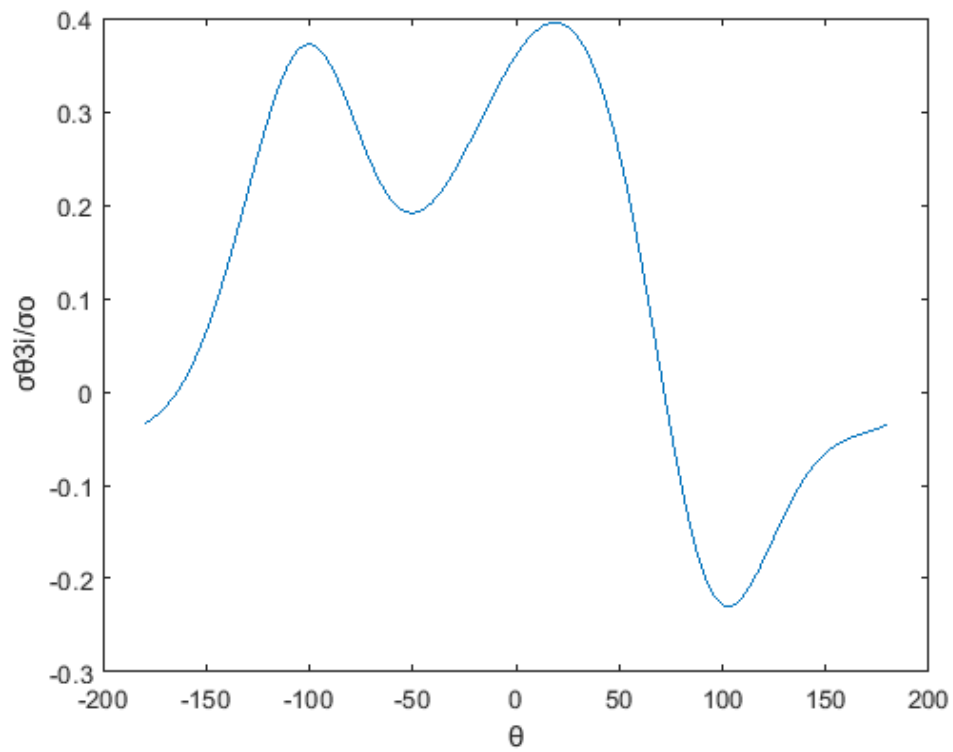
και

$$E^{*I} = \varepsilon_{13}^{*I} - i\varepsilon_{23}^{*I} = 0, \quad E^{*S} = \varepsilon_{13}^{*S} - i\varepsilon_{23}^{*S} = (5 - i2) \times 10^{-3} \quad (4.55)$$

αντίστοιχα, όπου  $\sigma_0 = \mu_M \left| \varepsilon_{23}^{*S} \right|$ ,



Σχῆμα 4.4 Κατανομή εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_{g_3}^I$  στην ανομοιογένεια I



Σχῆμα 4.5 Κατανομή εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_{g_3}^I$  στην ανομοιογένεια I



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΠΕΡΑ ΕΡΕΥΝΑ

Στην εργασία αυτή προσδιορίστηκαν τα πλήρη ελαστικά πεδία που αναπτύσσονται σε ένα ελαστικό σύστημα που αποτελείται από δυο γειτονικές κυκλικές ανομοιογένειες που περιέχονται σε μια ελαστική μήτρα και υφίστανται ομοιόμορφους μετασχηματισμούς φάσης αντιεπίπεδου διατμητικού τύπου. Η σχετική ελαστική ανάλυση στηρίχθηκε στην μέθοδο των μιγαδικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με αυτή των διφασικών δυναμικών. Η λύση αναπτύχθηκε σε μορφή απειροσειράς, της οποίας η σύγκλιση διερευνήθηκε αριθμητικά. Με βάση τα αναλυτικά αποτελέσματα προσδιορίστηκαν αριθμητικά οι συγκεντρώσεις τάσεων γύρω από τις δυο ανομοιογένειες για διάφορες περιπτώσεις ελαστικών και γεωμετρικών παραμέτρων του συστήματος.

Για παραπέρα έρευνα προτείνεται:

- Με βάση την ελαστική ανάλυση που έγινε, να γίνει η μελέτη της ενεργειακής κατάστασης του ελαστικού συστήματος υπολογίζοντας τις ελαστικές ενέργειες που αποθηκεύονται στο σύστημα και στα επιμέρους συστατικά του, καθώς και τα συντηρητικά ολοκληρώματα γύρω από τις ανομοιογένειες.
- Να γίνει επέκταση της παρούσας ανάλυσης για ομοιόμορφους μετασχηματισμούς συνεπίπεδου τύπου
- Να μελετηθούν οι παραπάνω περιπτώσεις για διεπιφάνειες μεμβρανικού και ελατηριακού τύπου.

---

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [1]. Volterra, V. (1905). Sull' equilibrio dei corpi elastici piu' volte connessi. *Il Nuovo Cimento* (1901-1910), 5(1): 361-385.
- [2]. Somigliana, C. (1914). Atti accad.nazl. lincei rend. *Classe sci. fis. mat. e nat.*, 23(1): 463
- [3]. Dundurs, J. (1970). Some properties of elastic stresses in a composite. *Proceedings of the 6th Annual Meeting of the Society of Engineering Science*, 5: 203-216.
- [4]. Eshelby J.D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London*, 241(A): 376–396.
- [5]. Bilby, B.A. (1950). On the interactions of dislocations and solute atoms. *Proceedings of the Physical Society*, 63(A): 191.
- [6]. Bhargava, R.D., Radhakrishna, H.C. (1963). Elliptic inclusions in a stressed matrix. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 59: 821-832.
- [7]. Chen, F.M., Chao, C.K. (2008). Stress analysis of an infinite plate with a coated elliptical hole under a remote uniform heat flow. *Journal of Thermal Stresses*, 31: 599-613.
- [8]. Dundurs, J., Mura, T. (1964). Interaction between an edge dislocation and a circular inclusion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 12: 177-189.
- [9]. Jaswon, M.A., Bhargava, R.D. (1961). Two-dimensional elastic inclusion problems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 57: 669-680.
- [10]. Kattis, M.A., Providas, E. (1998). Two-phase potentials in anisotropic elasticity: antiplane deformation. *International Journal of Engineering Science*, 36(7-8): 801-811
- [11]. Kattis, M.A., Karalis, N.T. (2013). Elastic energies in circular inhomogeneities: imperfect versus perfect interfaces. *Journal of Elasticity*, 111: 131-151.
- [12]. Lubarda, V.A. (2015a). Interaction between a circular inclusion and a circular void under plain strain conditions. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(3): 317-330.
- [13]. Lubarda, V.A. (2015b). Circular inclusion near a circular void: determination of elastic antiplane shear fields and configurational forces. *Acta Mechanica*, 226: 643-664.
- [14]. Nabarro, F.R. (1996). Inclusion and inhomogeneities under stress. *Philosophical Magazine Letters*, 72(2): 45-49.

- 
- [15]. Smith, E. (1968). The interaction between dislocations and inhomogeneity-I. *International Journal of Engineering. Science*, 6:129-143.
- [16]. Hutchinson, J.W. (1974). *On steady quasi-static crack growth*. Harvard University Rep. Division of Applied Sciences, DEAP S-8.
- [17]. Goree, J.G. (1967). In plane loading in an elastic containing two cylindrical inclusions. *Journal of Composite Materials*, 1:404-412.
- [18]. Goree, J.G. (1967). In plane loading in an elastic containing two cylindrical inclusions. *Journal of Composite Materials*, 1:404-412.
- [19]. Honein E., Honein T., Herrmann G. (1992). On two circular inclusions in harmonic problems. *Quarterly of Applied Mechanics*; L(3):479-99.
- [20]. Honein E., Honein T., Herrmann G. (1992). Further aspects of the elastic field for two circular inclusions in antiplane elastostatics. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 59:774-779.
- [21]. Milne-Thomson L.M. *Theoretical Hydrodynamics*. 5th ed. Macmillan, (1968).

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ CONFORMAL MAPPING

```
%geometria (mm)
Ri=4;
Rs=2;
L=8;
a=L/((((Rs^2)-(Ri^2))^2-2*(L^2)*((Rs^2)+(Ri^2))+(L^4)))^0.5);
rs=((1+4*(a^2)*(Rs^2))^0.5)-1)/(2*Rs*(a^2));
ri=((1+4*(a^2)*(Ri^2))^0.5)+1)/(2*Ri*(a^2));
aa=1/a;
for i=1:1:360
    uu=i*pi/180;
    xx1(i)=((aa^2)*ri*(cos(uu))-aa*(ri^2))/(((aa-
ri*(cos(uu)))^2)+((sin(uu))^2)*(ri^2));
    xx2(i)=((aa^2)*ri*(sin(uu)))/(((aa-
ri*(cos(uu)))^2)+((sin(uu))^2)*(ri^2));
end
for i=1:1:360
    uuu=i*pi/180;
    xxx1(i)=((aa^2)*rs*(cos(uuu))-aa*(rs^2))/(((aa-
rs*(cos(uuu)))^2)+((sin(uuu))^2)*(rs^2));
    xxx2(i)=((aa^2)*rs*(sin(uuu)))/(((aa-
rs*(cos(uuu)))^2)+((sin(uuu))^2)*(rs^2));
end
plot (xx1,xx2,xxx1,xxx2);
axis equal;
```

### ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ STRESS

```
mi=0.001;
ms=100000;
mm=100000;
ri=9.3654;
rs=1.7631;
aa=5.1235;
e13i=0*10^(-3);
e23i=0*10^(-3);
e13s=5*10^(-3);
e23s=5*10^(-3);
Gim=0.5*(1+(mm/mi));
gim=0.5*(1-(mm/mi));
Gsm=0.5*(1+(mm/ms));
gsm=0.5*(1-(mm/ms));
ai=(ri^2)/aa;
as=(rs^2)/aa;
```

---

```

Ei=complex(e13i,-e23i);
Es=complex(e13s,-e23s);
n=1;
k=1;
As(1)=-((conj(Es))*(rs^2))/(2*Gsm);
Ai(1)=-((conj(Ei))*(ri^2))/(2*Gim);
Bs(1)=-((conj(Es))*(rs^2))/(2*Gsm);
Bi(1)=-((conj(Ei))*(ri^2))/(2*Gim);
while n<91
    Ai(2*n)=(gim/Gim)*(conj(As(2*n-1)))*(((ri^(4*n-2)))/((rs^(4*n-4)))*(as^2));
    n=n+1;
    As(2*n-1)=(gsm/Gsm)*(conj(Ai(2*n-2)))*(((rs^(4*n-6)))/((ri^(4*n-4))))*(as^2);
end
while k<91
    Bs(2*k)=(gsm/Gsm)*(conj(Bi(2*k-1)))*(((rs^(4*k-2)))/((ri^(4*k-4)))*(ai^2));
    k=k+1;
    Bi(2*k-1)=(gim/Gim)*(conj(Bs(2*k-2)))*(((ri^(4*k-6)))/((rs^(4*k-4))))*(ai^2);
end
for l=1:1:360
    uu(l)=(l*pi/180);
    rr=ri;
    zeta(l)=complex((rr*(cos(uu(l)))),rr*(sin(uu(l))));
    sum=0;
    for p=1:1:60
        a(p)=-((Bi(2*p-1))/(zeta(l)-ai*((ri/rs)^(2*p-1)))^2)-((As(2*p-1))/(zeta(l)-as*((rs/ri)^(2*p-1)))^2)-((Ai(2*p))/(zeta(l)-((ri^(2*p))/((rs^(2*(p-1)))*as)))^2)-((Bs(2*p))/(zeta(l)-((rs^(2*p))/((ri^(2*(p-1)))*ai)))^2);
        sum=sum+a(p);
    end
    ftz(l)=sum;
    mtz(l)=(aa^2)/((aa-zeta(l))^2);
    ee(l)=complex(cos(uu(l)),sin(uu(l)));
    st(l)=(2*mm*ftz(l)*ee(l))/mtz(l);
    sr3(l)=real(st(l));
    su3(l)=-imag(st(l));
end
plot(uu*360/6.28,su3/(mm*e13s))

```



















