

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Διπλωματική Εργασία

Σύζευξη των μεθόδων στοιχείων στροβιλότητας
και συνοριακών στοιχείων άμεσης διατύπωσης
με εφαρμογή στην αεροδυναμική

Μακρής Ηλίας

Επιβλέπων
Βουτσινάς Σπυρίδων

Μάρτιος 2018, Αθήνα

Ευχαριστίες

Η συμπαράσταση των δικών μου ανθρώπων, της οικογένειάς μου και των φίλων μου, αποδείχθηκε ανεκτίμητη καθ' όλη την διάρκεια ενασχόλησής μου με την παρούσα εργασία. Ήταν η συνεχής στήριξη και η ενθάρρυνση που μου παρείχαν που με βοήθησαν να την φέρω εις πέρας. Τους ευχαριστώ θερμά.

Έμπνευση να ασχοληθώ με το αντικείμενο, πρότυπο όχι μόνο καθηγητή αλλά και ανθρώπου, αποτέλεσε ο καθηγητής μου Σπύρος Βουτσινάς. Το αμιγές ενδιαφέρον που έδειξε, η υποστήριξή του και η στάση του απέναντι στα καθημερινά προβλήματα που προέκυπταν κατά τη διάρκεια της εργασίας συνέβαλλαν απεριόριστα και καθοριστικά στην διεκπεραίωσή της.

Δε θα μπορούσα παρά να ευχαριστήσω και τον καθηγητή μου Βασίλειο Ριζιώτη, που μέσω αυτού ήρθα για πρώτη φορά σε επαφή με την αεροδυναμική και ο οποίος δε σταμάτησε να με συμβουλεύει και να με κατευθύνει. Ευχαριστώ επίσης τον υποψήφιο διδάκτορα Θεολόγο Ανδρόνικο, που η ενεργή ενασχόλησή του, η συνεισφορά του αλλά και οι λογομαχίες μας πρόσθεταν πάντα στην εφευρετικότητα, τον Βασίλειο Γιαννάτο για τις δημιουργικές συζητήσεις μας αλλά και όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π..

Περίληψη

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι διττός. Αρχικά επιχειρείται η διάρθρωση ενός σχήματος που συνδυάζει τις άμεσες συνοριακές μεθόδους με την μέθοδο των στοιχείων στροβιλότητας στα πλαίσια ενός προβλήματος αεροδυναμικής. Το εγχείρημα αυτό περιλαμβάνει την προσαρμογή της συζευγμένης μεθόδου στα μέτρα του προβλήματος, το οποίο είναι η πρόλεξη της ροής γύρω από ένα ανωστικό σώμα. Κατά την πορεία αυτή διατηρείται το δυνατόν γενικός χαρακτήρας.

Στη συνέχεια γίνεται υλοποίηση της μεθόδου σε προγραμματιστικό περιβάλλον. Η υλοποίηση πραγματοποιείται αξιοποιώντας το υπολογιστικό εργαλείο που αναπτύχθηκε στο εργαστήριο του Ε.Μ.Π., GenUVP (Generalized Unsteady Vortex Particle method), με απώτερο σκοπό την πιστοποίηση αυτής της μεθόδου. Παρουσιάζεται η διαδικασία αριθμητικής επίλυσης που ακολουθήθηκε, δηλαδή η μετάβαση από τις ολοκληρωματικές εξισώσεις του προβλήματος στην κατασκευή ενός γραμμικοποιημένου αλγεβρικού συστήματος. Ενώ στην σχετική εργασία εξετάζονται προβλήματα μόνιμης ροής, η μεθοδολογία είναι δομημένη ώστε να επιτρέπει και την επίλυση μη μόνιμων προβλημάτων.

Συνοψίζοντας, σκοπός είναι να γίνει μια πρώτη διερεύνηση των χαρακτηριστικών της μεθόδου και των αποτελεσμάτων που παράγει έτσι ώστε να αποκτηθεί μια κατεύθυνση για την πιστοποίησή της και να γίνει μια εκτίμηση των ιδιοτήτων της.

Abstract

The purpose of this thesis is twofold. First, a formulation which couples the direct Boundary Element Methods (BEM) with the Vortex Particle Methods (VPM) is attempted. This is done in a context of an aerodynamics problem and in particular the formulation is designed to carry out an aerodynamic analysis of a lifting body.

Consequently, an implementation of the coupled method is presented, by making use of the open source code developed in the laboratory of aerodynamics of NTUA, GenUVP (Generalized Unsteady Vortex Particle method). The numerical procedure is described, which in this case is the transition from a system of boundary integral equations to a linearized algebraic system. While this thesis is confined in solving steady state problems, the structure is designed for the general unsteady case.

The ultimate aim of this endeavor is a first validation of this method. The investigation of its characteristics outlines a direction for its further study and yields an estimation of its peculiarities.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	2
1.1 Οι Μέθοδοι Συνοριακών Στοιχείων	3
1.2 Οι Μέθοδοι Στοιχείων Στροβιλότητας	4
1.3 Δομή της εργασίας	5
Θεωρητικό υπόβαθρο	6
2.1 Οι παραδοχές ασυμπίεστης και μη-συνεκτικής ροής	6
2.2 Η μεταβλητή της στροβιλότητας	8
2.3 Η συνάρτηση δυναμικού	9
2.4 Νόμος Biot-Savart και φύλλα στροβιλότητας	10
2.5 Οι νόμοι και η αναπαράσταση του Helmholtz	12
2.5.1 Νόμοι του Helmholtz	12
2.5.2 Διαχωρισμός του Helmholtz	13
2.6 Τοποθέτηση του προβλήματος	16
2.6.1 Διαχωρισμός του πεδίου ταχύτητας	17
2.6.2 Συνοριακές συνθήκες	18
2.6.3 Αναπαράσταση των αρμονικών πεδίων	18
2.7 Οι εναλλακτικές διατυπώσεις	22
2.7.1 Η έμμεση διατύπωση	22
2.7.2 Η άμεση διατύπωση	24
2.8 Το Θεώρημα του Hess	25
2.9 Η εμφάνιση της στροβιλότητας στην εξίσωση του δυναμικού	26
Αριθμητική Επίλυση	31
3.1 Επιλογή της μεθόδου επίλυσης	31
3.2 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας	32
3.3 Διανομές των ιδιομορφιών και βαθμοί ελευθερίας	35
3.4 Διάρθρωση του αλγεβρικού συστήματος	38
3.4.1 Επαγόμενο δυναμικό από κατανομές ιδιομορφιών	39
3.4.2 Διακριτοποίηση συνθηκών Kutta-Kelvin	45
3.5 Η δημιουργία των στοιχείων στροβιλότητας	49
3.5.1 Η αναπαράσταση του μακρινού ομόρρου	50
3.6 Υπολογισμός φορτίων και άλλων μεγεθών	56
3.6.1 Υπολογισμός στερεάς γωνίας	56
3.6.2 Υπολογισμός επαγόμενου δυναμικού από στροβιλότητα	56
3.6.3 Υπολογισμός Πιέσεων	58
3.6.4 Παράμετρος αποκοπής	59
3.7 Λογικό διάγραμμα της μεθόδου	61

Αποτελέσματα	62
4.1 Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας	63
4.2 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης	65
4.3 Ροή με γωνία πρόσπτωσης 8 μοιρών	68
4.3.1 Ευαισθησία χρονικού βήματος	68
4.3.2 Πύκνωση του πλέγματος	71
4.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων	76
4.3.4 Η κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα	78
4.3.5 Οπτικοποίηση του στροβιλού ομόρρου	79
Συμπεράσματα	82

Εισαγωγή

Ο κλάδος της ρευστομηχανικής απασχόλησε και απασχολεί μερίδα ανθρώπων ευρύτερη της επιστημονικής κοινότητας με αμείωτο ενδιαφέρον, μέσα στους αιώνες. Η ρευστομηχανική ασχολείται με τη μελέτη της κίνησης των ρευστών και τις δυνάμεις που την προκαλούν. Ο λόγος που καθιστά τη μελέτη τέτοιων φαινομένων σημαντική, δεν είναι μόνο η πολλαπλή εφαρμογή της σε πληθώρα τεχνολογικών προβλημάτων, αλλά και το αμιγές επιστημονικό ενδιαφέρον που αυτά παρουσιάζουν.

Η διατύπωση ενός τρισδιάστατου, μη-μόνιμου προβλήματος με μαθηματικές εξισώσεις οδηγεί κατά κανόνα σε μορφές των οποίων η αναλυτική λύση δεν είναι γνωστή, ακόμα και αφού γίνουν όλες οι δυνατές παραδοχές. Τρανό παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις Navier-Stokes, στις οποίες αναλυτική λύση υπάρχει μόνο σε περιορισμένο αριθμό "απλών" περιπτώσεων. Σχεδόν στο σύνολο των περιπτώσεων λοιπόν, οδηγούμαστε σε αριθμητική επίλυση των εκάστοτε εξισώσεων μέσω γραμμικών ή γραμμικοποιημένων συστημάτων.

Οι εξισώσεις προς διακριτοποίηση στις οποίες συνήθως καταλήγει κανείς, είναι είτε μερικές διαφορικές εξισώσεις (λ.χ. οι Navier-Stokes ή κάποια πιο απλοποιημένη μορφή τους), είτε ολοκληρωματικές εξισώσεις (λ.χ. Boundary Integral Equations). Και στα δύο παραδείγματα πρόκειται για πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η μέθοδος που θα επιλεγεί για την αντιμετώπιση του προβλήματος εξαρτάται από την ίδια την φύση του, έχοντας πάντα κατά νου τον παράγοντα του υπολογιστικού κόστους.

Ενώ η εξέλιξη των υπερυπολογιστών είναι βασικής σημασίας για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων, η ανάγκη για εύρεση έξυπνων τρόπων προσέγγισης των ρευστοδυναμικών προβλημάτων και όχι μόνο δεν θα πάψει να υπάρχει. Βασικό κριτήριο για την επιλογή της μεθόδου επίλυσης είναι το πόσο "κοντά" στην λύση θέλει να φτάσει κανείς, δηλαδή το πόσο απαιτείται να περιοριστεί το σφάλμα. Η επιλογή λοιπόν της μεθόδου που τελικά θα εφαρμοστεί συντελεί κατά πολύ στην οικονομία υπολογιστικού χρόνου.

Κάτω από αυτό το πρίσμα, οι συνηθέστερες επιλογές που έχει κανείς όταν αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα αεροδυναμικής, είναι είτε να ακολουθήσει μεθόδους υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD), που εμπλέκουν μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων, είτε συνοριακές μεθόδους, ενώ μια σύζευξη των δύο είναι επίσης γνωστή τακτική. Στην παρούσα εργασία γίνεται υλοποίηση των συνοριακών μεθόδων και σύζευξή τους με μια άλλη γνωστή μεθοδολογία, αυτή των στοιχείων στροβιλότητας. Οι τελευταίες μέθοδοι παράγουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε προβλήματα που δεν εμφανίζουν έντονα φαινόμενα συμπίεσότητας και συνεκτικότητας και έχουν αποδειχθεί εξαιρετικά αποδοτικές τις τελευταίες δεκαετίες. Το πλεονέκτημα σε υπολογιστικό κόστος που έχουν σε σχέση με τις κλασικές μεθοδολογίες ενθαρρύνει πολλούς ερευνητές να επιχειρήσουν την επέκτασή τους, ώστε να διευρύνουν το πεδίο εφαρμογής τους.

1.1 Οι Μέθοδοι Συνοριακών Στοιχείων

Η χρήση των μεθόδων συνοριακών στοιχείων (Boundary Element Methods, BEM) συναντάται πλέον όλο και συχνότερα στην επιστημονική κοινότητα και ιδιαίτερα στον κλάδο των μηχανικών. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματά τους έναντι των κλασικών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Methods, FEM) είναι ο μη-πλεγματικός χαρακτήρας τους. Μέσω αυτών, το πλέγμα που δημιουργείται για την επίλυση των εξισώσεων είναι μόνο επάνω στο σύνορο του χωρίου του προβλήματος, έτσι η διακριτοποίησή τους απαιτείται μόνο εκεί. Λόγω του χαρακτηριστικού τους αυτού, είναι απαλλαγμένες από ενδεχόμενη αριθμητική διάχυση και επιπλέον το γραμμικό σύστημα που προκύπτει προς επίλυση αποτελείται από μητρώα με πολύ μικρότερες διαστάσεις απ' ότι στις FEM, με αποτέλεσμα τη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Μια τυπική εφαρμογή των BEM είναι φυσικά προβλήματα που ανάγονται στην επίλυση της εξίσωσης δυναμικού (εξίσωση Laplace). Τέτοια συναντώνται στη θεωρία της βαρύτητας, στον ηλεκτρομαγνητισμό, στη μεταφορά θερμότητας, στην υδροδυναμική και στην αεροδυναμική. Η τελευταία περίπτωση είναι και αυτή που μελετάται στην παρούσα εργασία.

Η αεροδυναμική ανάλυση ενός ανωστικού σώματος με πάχος (λ.χ. μιας πτέρυγας), ανάγεται σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών μιας πεδιακής εξίσωσης Laplace το οποίο με τη σειρά του οδηγεί σε ολοκληρωματικές εξισώσεις διατυπωμένες στο σύνορο, μέσω των συνοριακών μεθόδων. Αυτό γίνεται εφικτό με τις παραδοχές ασυμπίεστου και μη-συνεκτικού ρευστού και μέσω των συνοριακών συνθηκών.

Οι ολοκληρωματικές εξισώσεις που παράγουν οι BEM δεν είναι παρά μία αναδιατύπωση του προβλήματος συνοριακών τιμών, όταν αυτό αποτελείται από ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Υπάρχουν δύο διατυπώσεις που οδηγούν στην επίλυση των εξισώσεων αυτών, η έμμεση και η άμεση. Στην έμμεση διατύπωση χρησιμοποιείται η ιδιότητα συγκεκριμένων συναρτήσεων δυναμικού να λύνουν την Laplace για τυχαία δεδομένη συνάρτηση πυκνότητας, η οποία είναι μια συνάρτηση που έχουν σαν παράμετρο (βλέπε 2.7.1). Επειδή η επιλογή που θα γίνει για την συνάρτηση πυκνότητας δεν είναι απαραίτητο να έχει φυσική υπόσταση, η διατύπωση αυτή λέγεται έμμεση. Άμεση διατύπωση λέγεται αυτή όπου το πρόβλημα λύνεται για το δυναμικό και τις παραγώγους του χρησιμοποιώντας την τρίτη ταυτότητα του Green (2.7.2).

Στο πρόβλημα αεροδυναμικής ανάλυσης μιας πτέρυγας, η ολοκληρωματική εξίσωση που λύνεται είτε με την άμεση είτε με την έμμεση διατύπωση αποτελείται κατά κανόνα από ιδιόμορφα ολοκληρώματα. Αυτό είναι ένα εκ πρώτης όψεως μειονέκτημα των μεθόδων αυτών, καθώς ενώ η άρση των ιδιομορφιών τους είναι δυνατή [1], ο υπολογισμός τους γίνεται όλο και πιο περίπλοκος όσο η τάξη των στοιχείων ή ο βαθμός των διανομών αυξάνονται [2]. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η θεωρία ευστάθειας και σύγκλισης σε τρισδιάστατα προβλήματα δεν έχει εδραιωθεί ακόμα σε αυτές τις μεθόδους, επιβάλλεται ο αναλυτικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων, και έτσι συνήθως υπάρχουν σαφείς περιορισμοί για την τάξη των στοιχείων (κυρίως επίπεδα στοιχεία) και την διανομή των ιδιομορφιών (σταθερές ή γραμμικές στις περισσότερες περιπτώσεις).

Μία άλλη ιδιαιτερότητα των BEM είναι ότι τα μητρώα του τελικού γραμμικού συστήματος είναι πυκνά (dense matrices), δηλαδή τα περισσότερα στοιχεία τους είναι μη μηδενικά, σε αντίθεση με εκείνα των FEM. Το υπολογιστικό κόστος από αυτή τη σκοπιά είναι ανάλογο του n^2 , γεγονός που θέτει περιορισμούς για την πυκνότητα του πλέγματος. Όμως τα τελευταία χρόνια η επιτάχυνση των BEM με μεθόδους όπως το Panel Leveling [3] και με παραλληλοποίηση του εκάστοτε κώδικα σε πολλούς επεξεργαστές δείχνουν να ξεπερνούν προοδευτικά τα προβλήματα κόστους, ανακτώντας τα πλεονεκτήματά τους.

1.2 Οι Μέθοδοι Στοιχείων Στροβιλότητας

Μέθοδοι Στροβιλότητας (Vortex Methods ,VM) λέγονται αυτές που χρησιμοποιώντας την στροβιλότητα ως κύρια μεταβλητή προσεγγίζουν αριθμητικά την εξέλιξή της. Οι Μέθοδοι Στοιχείων Στροβιλότητας (Vortex Particle Methods, VPM) είναι μια υποκατηγορία τους που χρησιμοποιεί στοιχεία (είτε σημειακά, είτε που καταλαμβάνουν όγκο) για να υλοποιήσει τον σκοπό αυτό. Είναι και αυτές μη-πλεγματικές μέθοδοι, στις οποίες τα ελεύθερα υλικά στοιχεία (free vortex particles) μεταφέρουν στροβιλότητα.

Η ιδέα πίσω από τα στοιχεία στροβιλότητας δεν είναι καινούρια. Το 1931, ο Rosenhead, εμπνευσμένος από δημοσιεύσεις των Helmholtz, Kelvin κι άλλων ερευνητών, μελέτησε την περίπτωση των σημειακών στοιχείων στροβιλότητας στις δύο διαστάσεις σαν μία "προσεγγιστική λύση", όταν η επιφανειακή στροβιλότητα διαλύεται λόγω αστάθειας. Ουσιαστικά στη δημοσίευσή του, ο Rosenhead αντικατέστησε τη δισδιάστατη επιφάνεια (φύλλο στροβιλότητας) που χώριζε δύο αντίθετης φοράς ροές ρευστού με 2, 4, 8 και 12 σημειακούς στροβίλους αντίστοιχα, με εντυπωσιακά αποτελέσματα [4]. Το 1954 ο Truesdell ερμήνευσε την στροβιλότητα με 4 διαφορετικούς τρόπους και μελέτησε εκτενώς την κινηματική της [5]. Έκτοτε υπήρξε πληθώρα εναλλακτικών προτάσεων για την μοντελοποίηση των στοιχείων στροβιλότητας ενώ η θεωρητική μελέτη πάνω σε αυτά είναι διαρκώς εξελισσόμενη. Μία καλή απόπειρα συλλογής μεγάλου μέρους αυτών των ιδεών βρίσκεται εδώ [6].

Ένα χαρακτηριστικό των στροβιλών μεθόδων που αποτελεί και βασικό πλεονέκτημά τους, είναι ότι έχουν την στροβιλότητα σαν κύρια μεταβλητή αντί της ταχύτητας. Όπως θα φανεί στο 2.2, το γεγονός αυτό διευκολύνει αισθητά τους υπολογισμούς, λόγω της απλότητας της εξίσωσης που διέπει την στροβιλότητα σε σχέση με αυτήν της ταχύτητας. Η μετάβαση από το πεδίο στροβιλότητας στο πεδίο ταχύτητας είναι εφικτή, εφόσον το ρευστό είναι ασυμπιεστο, μέσω του νόμου Biot-Savart. Φυσικά η στροβιλότητα ορίζεται ως η συστροφή του πεδίου ταχύτητας.

Άλλο προτέρημα των στροβιλών μεθόδων είναι η αποφυγή των γεωμετρικών ασταθειών που παρουσιάζει η αναπαράσταση του ομόρρου, σαν συμβατικό φύλλο στροβιλότητας. Οι αναδιπλώσεις που προκαλούνται γύρω από τους πυρήνες των στροβίλων δημιουργούσαν ανέκαθεν πρόβλημα στους αριθμητικούς υπολογισμούς, που για να ξεπεραστεί συνήθως απαιτείται κάποια εμπειρία της εξέλιξης του φαινομένου. Τα προβλήματα αυτά αντιμετωπίζονται αποτελεσματικά με την εισαγωγή στοιχείων στροβιλότητας.

Το βασικό σημείο που καθιστά τις VPM κατάλληλες για σύζευξη με τις BEM είναι ότι είναι και αυτές μη-πλεγματικές. Τα στοιχεία στροβιλότητας είναι υλικά στοιχεία και έτσι για την περιγραφή της παραγωγής και της παραμόρφωσής τους (χωρικά και χρονικά κατά την 2.8) χρησιμοποιούνται υλικές συντεταγμένες, γεγονός αρκετά βολικό για τους υπολογισμούς.

1.3 Δομή της εργασίας

Στις πρώτες ενότητες της εργασίας γίνεται μια γενική επισκόπηση των βασικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται. Αρχικά συζητούνται οι παραδοχές ασυμπίεστης και αστρόβιλης ροής, εξάγεται η εξίσωση στροβιλότητας του Helmholtz και η εξίσωση Laplace για το ασυμπίεστο και μη-συνεκτικό ρευστό. Παρουσιάζονται κάποιες χρήσιμες προτάσεις της στροβιλότητας και των δομών της.

Στη συνέχεια ακολουθεί η τοποθέτηση του προβλήματος. Περιγράφεται η αναπαράσταση των αρμονικών πεδίων και γίνεται αναφορά των εναλλακτικών διατυπώσεων και των συνοριακών συνθηκών. Δίνεται έμφαση στην άμεση διατύπωση για το δυναμικό και τις εκδοχές που προσφέρονται μέσω της υπόθεσης για το εσωτερικό πρόβλημα σε συνδυασμό με τον τρόπο αναπαράστασης του πεδίου.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποσκοπεί στην αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου και συχνά αναφέρεται στο υπολογιστικό κομμάτι του σχετικού κώδικα. Γίνεται διακριτοποίηση της γεωμετρίας και των εξισώσεων και αναλύεται η κατασκευή των μητρώων του συστήματος προς επίλυση. Αναπτύσσεται ένα σχήμα για τον μηχανισμό δημιουργίας στοιχείων στροβιλότητας, σύμφωνα με τις απαιτήσεις που οριοθετεί το φυσικό πρόβλημα και παρατήθεται ένα διάγραμμα ροής της μεθόδου.

Στο τρίτο μέρος παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου στο μόνιμο πρόβλημα. Μετά την πιστοποίηση για την ορθότητα του μη-ανωστικού προβλήματος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του ελεύθερου στροβιλού ομόρρου που παράγει η παρούσα μέθοδος με πρότυπο προδιαγεγραμμένου ομόρρου για το ανωστικό πρόβλημα. Διαπιστώνεται συνέπεια μεταξύ των δύο μεθόδων. Γίνεται ακολούθως μια πρώτη διερεύνηση των παραγόντων ευαισθησίας του αλγορίθμου, δηλαδή του χρονικού βήματος και της πύκνωσης του υπολογιστικού πλέγματος. Τέλος, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με άλλες μεθοδολογίες και σχολιάζεται η συνάφειά τους.

Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Οι παραδοχές ασυμπίεστης και μη-συνεκτικής ροής

Η αναγκαιότητα των παραδοχών ασυμπίεστου και μη συνεκτικού ρευστού στην θεωρία δυναμικού γίνεται φανερή στην ανάλυση του προβλήματος στο υποκεφάλαιο 2.3, ενώ εδώ γίνεται μια γενική επισκόπηση για το πότε και κατά πόσο οι παραδοχές αυτές ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα.

Γράφοντας την εξίσωση της ορμής στην αδιαστατοποιημένη της μορφή

$$(St) \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* = \left(\frac{1}{Fr^2}\right) \mathbf{f}^* - (Eu) \nabla p^* + \left(\frac{1}{Re}\right) \nabla^2 \mathbf{u}^* \quad (2.1)$$

μας δίνεται η δυνατότητα απλοποίησής της, καθώς εάν στην αδιαστατοποίηση που έγινε οι χαρακτηριστικές ποσότητες επιλεγθούν κατάλληλα, όλες οι αδιάστατες μεταβλητές θα είναι της τάξης της μονάδας και ως εκ τούτου άμεσα συγκρίσιμες. Έτσι για παράδειγμα εάν ο αριθμός Re είναι μεγάλος συγκριτικά με τους άλλους αδιάστατους αριθμούς, ο όρος συνεκτικότητας μπορεί να αμεληθεί.

Όσον αφορά τον όρο κλίσης πίεσης, επειδή $p/\rho \sim \alpha^2$ όπου α η ταχύτητα του ήχου, ο αριθμός Euler (Eu) μπορεί να συσχετιστεί με τον αριθμό Mach. Μπορεί να δειχθεί ότι όταν για τον αριθμό Mach ισχύουν οι:

$$M \ll 1, \quad \frac{M^2}{Fr^2} \ll 1, \quad \frac{M^2}{Re} \ll 1 \quad (2.2)$$

το ρευστό μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο [7].

Καθώς η συνεκτικότητα των τυπικών ρευστών, όπως ο αέρας και το νερό, έχει σχετικά μικρές τιμές σε συνθησμένες θερμοκρασίες (της τάξης 10^{-5} , 10^{-6} αντίστοιχα) ο αριθμός Re :

$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (2.3)$$

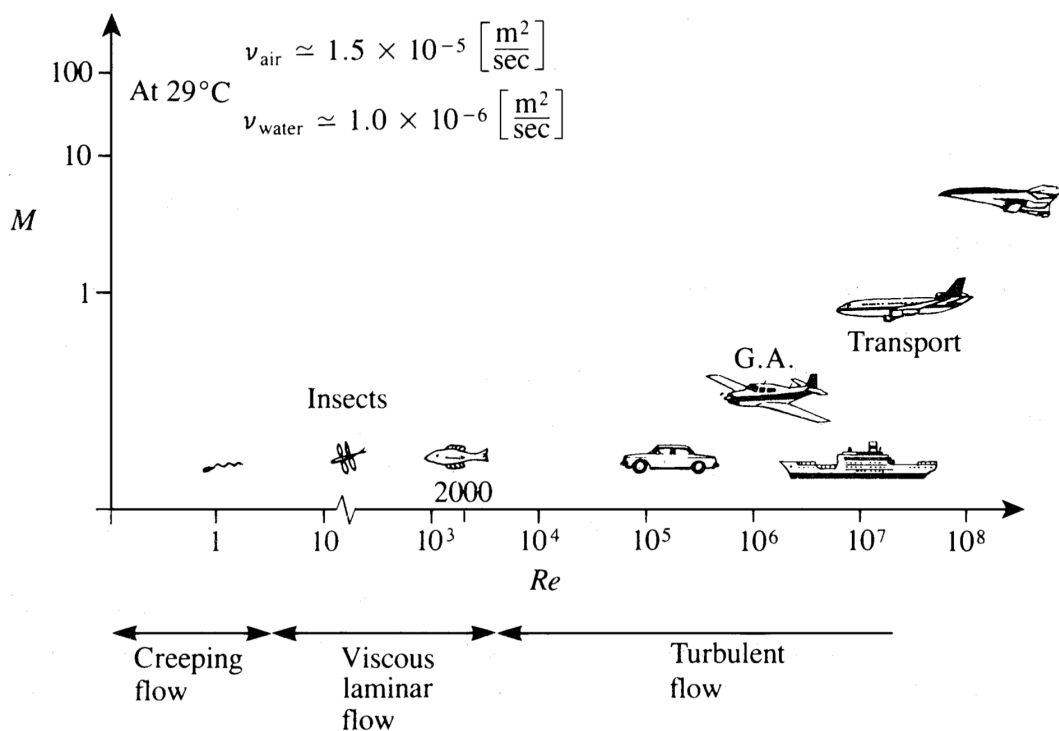
παίρνει τιμές $Re \gg 1$ όταν η χαρακτηριστική ταχύτητα V και το χαρακτηριστικό μήκος L είναι της τάξης της μονάδας. Η παραδοχή αυτή στηρίζεται στην παραδοχή ότι ο $\nabla^2 \mathbf{u}$ είναι και αυτός της τάξης της μονάδας. Αν αναλογιστούμε όμως την ροή γύρω από μια αεροτομή όλο και πιο κοντά στην επιφάνειά της, γίνεται αντιληπτό ότι σε εκείνες τις περιοχές $\nabla^2 \mathbf{u} \gg 1$ και άρα ο όρος συνεκτικότητας δεν μπορεί να αμεληθεί εκεί.

Ο συλλογισμός αυτός οδηγεί στην γνωστή τακτική διαχωρισμού του προβλήματος επίλυσης ροής γύρω από ένα σώμα σε δύο περιοχές, την κοντινή (εσωτερική) και την μακρινή (εξωτερική). Στην

πρώτη (περιοχή οριακού στρώματος) οι όροι συνεκτικότητας δεν αμελούνται και η επίλυση των εξισώσεων εκεί παράγει πληροφορία για τις διαμητρικές τάσεις, ενώ στην δεύτερη οι όροι αυτοί δεν λαμβάνονται υπόψη και η επίλυση παράγει πληροφορία για την κατανομή πίεσης.

Η μετάβαση από την μία περιοχή στη άλλη λαμβάνει χώρα σε απόσταση μήκους δ από το στερεό σύνορο, το λεγόμενο πάχος του οριακού στρώματος. Όταν το πάχος δ είναι πολύ μικρό σε σχέση με άλλα χαρακτηριστικά μεγέθη του προβλήματος (όπως η χορδή μιας αεροτομής), τότε παρατηρώντας το φαινόμενο με βάση την κλίμακα της εξωτερικής περιοχής το οριακό στρώμα σχεδόν δεν διακρίνεται. Ακολουθώντας αυτή την λογική, για την επίλυση του εξωτερικού προβλήματος είναι σύνηθες να θεωρείται ως σύνορο το στερεό σύνορο και να επιβάλλεται μόνο συνθήκη μη-εισχώρησης εκεί και όχι μη-ολίσθησης.

Σε πολλά τεχνολογικά προβλήματα, συμπεριλαμβανομένου και αυτά της αεροδυναμικής χαμηλών ταχυτήτων, οι παραπάνω παραδοχές οδηγούν σε αποτελέσματα που προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα πραγματικά. Στο σχήμα 2.1 φαίνονται ποιοτικά σε ποιές περιοχές εμπίπτουν διάφορα τεχνολογικά προβλήματα σε σχέση με τους αριθμούς Re , M .



Σχήμα 2.1: Τυπικές ροές σε σχέση με τους αριθμούς Reynolds και Mach

2.2 Η μεταβλητή της στροβιλότητας

Όπως προαναφέρθηκε, ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα των στροβιλών μεθόδων είναι το ότι η κύρια μεταβλητή τους είναι η στροβιλότητα του πεδίου αντί της ταχύτητας. Αυτό αναδεικνύεται ρίχνοντας μια ματιά στην εξίσωση που δέπει την εξέλιξη της στροβιλότητας, την εξίσωση του Helmholtz. Η εξίσωση της ορμής για ασυμπιεστο ρευστό είναι

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.4)$$

ενώ η σχέση στροβιλότητας-ταχύτητας

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Παίρνοντας λοιπόν την συστροφή της εξίσωσης ορμής καταλήγουμε στην εξίσωση στροβιλότητας του Helmholtz

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.6)$$

όπου με \mathbf{F} συμβολίζονται οι εξωτερικές δυνάμεις. Η σχέση 2.6 καθορίζει την εξέλιξη της στροβιλότητας σε ασυμπιεστο ρευστό. Η εξίσωση αυτή επιδέχεται απλοποιήσεις. Αν οι \mathbf{F} είναι συντηρητικές (λ.χ. βαρύτητας), έχουν μηδενική συστροφή. Θεωρώντας την κλίση της πυκνότητας μηδενική και χρησιμοποιώντας τον τελεστή υλικής παραγώγου $\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot)$:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.7)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της 2.7 είναι γνωστός ως *vortex stretching* ενώ ο δεύτερος παριστά την συνεκτική διάχυση της στροβιλότητας (*viscous diffusion*). Με τη θεώρηση μη-συνεκτικού ρευστού, ο όρος συνεκτικής διάχυσης μπορεί επίσης να αμεληθεί και η τελική μορφή να μην τον περιέχει

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.8)$$

Στο τελευταίο βήμα που έγινε προς απλοποίηση πρέπει να γίνει μια σημαντική παρατήρηση: στις ροές με σχετικά μικρή συνεκτική διάχυση, ο λόγος του όγκου του ρευστού που παρουσιάζει μέτρο στροβιλότητας μη αμελητέο προς τον συνολικό όγκο αναφοράς, είναι μικρός. Αυτό είναι βασική προϋπόθεση για τις στροβιλές υπολογιστικές μεθόδους. Επιπλέον, στην εξίσωση 2.8 δεν υπάρχει ο όρος κλίσης πίεσης και η εξίσωση συνέχειας επαληθεύεται αυτόματα, καθώς χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή της. Τα δυο αυτά χαρακτηριστικά διευκολύνουν την αριθμητική τους επίλυση.

2.3 Η συνάρτηση δυναμικού

Ένα πρόβλημα ρευστοδυναμικής είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που διέπεται απ' την εξίσωση Laplace μέσω της υπόθεσης ασυμπίεστο και αστρόβιλο πεδίου ροής. Είναι γνωστό ότι για ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο \mathbf{u} ισχύει η ισοδυναμία

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \nabla \varphi \quad (2.9)$$

όπου το φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Θεωρώντας ασυμπίεστο πεδίο ροής, η εξίσωση συνέχειας παίρνει την μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

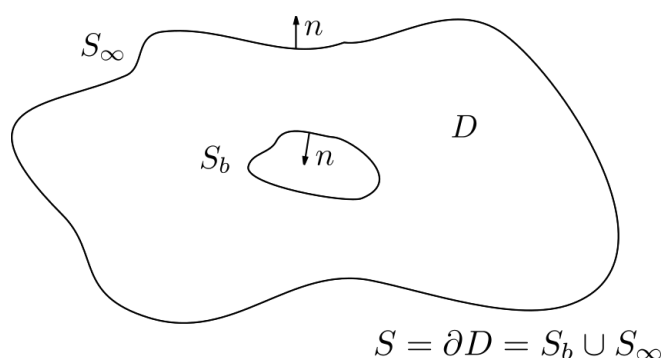
για ένα πεδίο ταχύτητας \mathbf{u} ασυμπίεστο και αστρόβιλο ισχύει δηλαδή

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.11)$$

όπου η φ είναι γνωστή ως συνάρτηση δυναμικού, που με την χωρική παραγωγή της προκύπτει το πεδίο ταχύτητας. Οι ιδιότητες που είναι ισοδύναμες μέσω της 2.9 είναι κατά τα γνωστά και ισοδύναμες με μια τρίτη ιδιότητα

$$2.9 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = 0 \quad (2.12)$$

που λέει ότι η κυκλοφορία είναι μηδενική για οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C . Η τελευταία ισοδυναμία ισχύει με μια προϋπόθεση: το χωρίο πρέπει να είναι μονά συνεκτικό. Μονά συνεκτικό λέγεται ένα χωρίο στο οποίο οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που αρχικά ανήκει σε αυτό μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο του χωρίς να χρειαστεί να διαπεράσει το σύνορό του. Ένα χωρίο D που περικλύεται από το σύνορο $S_b \cup S_\infty$ όπως στο σχήμα σχήμα 2.2 και ανήκει στον R^3 , είναι μονά συνεκτικό αν το σύνορο S_b είναι πεπερασμένο.



Σχήμα 2.2: Τα σύνορα S_∞ και S_b του χωρίου D

Ο δείκτης του απείρου στο εξωτερικό σύνορο του D υπονοεί ότι το σύνορο αυτό μπορεί να τεθεί να εκτείνεται στο άπειρο. Η διεύθυνση των κάθετων στο σύνορο διανυσμάτων φαίνεται στο σχήμα. Θεωρώντας λοιπόν ένα ασυμπίεστο και αστρόβιλο πεδίο ταχύτητας καταλήγει κανείς στην εξίσωση

Laplace για το δυναμικό στο χωρίο D , με μηδενική όμως κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε καμπύλη. Στον παραπάνω συλλογισμό αξίζει να τονιστεί ότι η φ θεωρήθηκε παντού συνεχής. Στο υποκεφάλαιο 2.5 θα δειχθεί πως αυτό είναι και το σημείο-κλειδί για την αναπαράσταση πεδίων με κυκλοφορία.

2.4 Νόμος Biot-Savart και φύλλα στροβιλότητας

Ένα ανωστικό σώμα το οποίο κινείται σε ρευστό διαταράσσει το πεδίο κατόπιν της ροής, δημιουργώντας έτσι τον λεγόμενο ομόρρου. Από φυσικής σκοπιάς, η στροβιλότητα που δημιουργείται με την κίνηση του σώματος περιορίζεται σε συγκεκριμένες περιοχές του ομόρρου της. Οι περιοχές αυτές συνθέτουν ένα χωρίο $D_\omega \subset D$ το οποίο λέγεται *στήριξη* της στροβιλότητας και στο χωρίο αυτό η στροβιλότητα παίρνει μη μεδινκές τιμές.

Ενώ η σχέση για το δυναμικό που επάγει μια διανομή στροβιλότητας σε ένα σημείο στον χώρο δεν είναι προφανής, η ταχύτητα δίνεται από τον γωνστό νόμο των Biot-Savart. Θεωρώντας ένα σωληνοειδές πεδίο ταχύτητας \mathbf{u}_ω , αυτό μπορεί πάντα να γραφτεί ως η συστροφή ενός διανυσματικού δυναμικού Ψ

$$\mathbf{u}_\omega = \nabla \times \Psi \quad (2.13)$$

και παίρνοντας τη συστροφή της 2.13 καταλήγει κανείς στη διανυσματική εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2.14)$$

όπου στην 2.14 νοείται η βαθμωτή Poisson για κάθε συνιστώσα κατά τα γνωστά. Η λύση της 2.14 δίνεται

$$\Psi(\mathbf{x}_o) = - \int_{D_\omega} \omega(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) dD_\omega(\mathbf{x}) \quad (2.15)$$

όπου \mathbf{x}_o είναι το διάνυσμα θέσης για τυχαίο σημείο υπολογισμού στο D , \mathbf{x} η μεταβλητή ολοκλήρωσης που διατρέχει όλο το D_ω και $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o)$ η συνάρτηση Green

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|} \quad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας την 2.15 στην 2.13 και έχοντας πάντα κατά νου ότι η παραγωγήιση εκεί γίνεται κατά \mathbf{x}_o

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_o) &= - \int_{D_\omega} \nabla_o \times (\omega(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o)) dD_\omega = - \int_{D_\omega} \omega(\mathbf{x}) \times \nabla_o G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) dD_\omega \\ &= - \int_{D_\omega} \omega(\mathbf{x}) \times \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|^3} dD_\omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η 2.17 είναι ο νόμος Biot-Savart για δεδομένη διανομή στροβιλότητας ω . Θεωρώντας ότι η στροβιλότητα διανέμεται σε ένα στρώμα με πάχος b και θέτωντας το πάχος να τείνει στο μηδέν ενώ απαιτούμε το γινόμενο ωb να παίρνει πεπερασμένες τιμές, λαμβάνουμε από την 2.17 την επαγωγή ταχύτητας ενός φύλλου στροβιλότητας σε ένα σημείο στον χώρο. Χαρακτηριστικό των φύλλων

στροβιλότητας είναι η ασυνέχεια της εφαπτομενικής ταχύτητας που παρουσιάζουν στην πάνω και την κάτω πλευρά τους, κάτι το οποίο αποτελεί και εναλλακτικό τρόπο ορισμού τους. Το φυσικό ανάλογο ενός φύλλου στροβιλότητας είναι ένα στρώμα διάτμησης.

Λόγω των ιδιοτήτων του, ένα φύλλο στροβιλότητας χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τον ομόρρου ενός ανωστικού σώματος, όταν αυτό τήθεται σε κίνηση. Η πλέον συνηθισμένη περίπτωση είναι το φύλλο στροβιλότητας να θεωρείται ως επιφάνεια ασυνέχειας δυναμικού (ισοδύναμα ως μια επιφάνεια διανομής διπόλων προσανατολισμένων κάθετα σε αυτή, βλέπε [7]). Τότε το φύλλο στροβιλότητας είναι μια υλική επιφάνεια, έστω S_w , για την οποία ισχύουν

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rrbracket &= 0, & \mathbf{x} \in S_w \\ \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{x}) \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{u}_w(\mathbf{x}) \\ \llbracket p \rrbracket(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Προφανώς όλα τα μεγέθη είναι και συναρτήσεις του χρόνου και οι 2.18 ισχύουν για $t \geq 0$. Ως $\boldsymbol{\gamma}$ ορίζεται η ένταση της επιφανειακής στροβιλότητας και ως \mathbf{u}_w ορίζεται η μέση ταχύτητα μεταφοράς του φύλλου στροβιλότητας, δηλαδή το ημίθροισμα των εφαπτομενικών ταχυτήτων στον ομόρρου. Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αποτελούν την κινηματική και την δυναμική εξίσωση του ομόρρου αντίστοιχα. Η κινηματική συνθήκη ουσιαστικά περιγράφει την χωρική εξέλιξη της γεωμετρίας του ομόρρου ενώ η δυναμική την εξέλιξη της έντασης της στροβιλότητας σε κάθε σημείο του. Η απαίτηση η ταχύτητα που μεταφέρεται ο ομόρρους να είναι η μέση δικαιολογείται εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli σε τυχαίο σημείο της πάνω πλευράς του ομόρρου, στο αντίστοιχο της κάτω και παίρνοντας την διαφορά τους (με "+" συμβολίζεται η πάνω πλευρά ενώ με "-" η κάτω)

$$p^+ + \frac{u_+^2}{2} - p^- - \frac{u_-^2}{2} = 0 \Rightarrow \llbracket p \rrbracket = -\llbracket \frac{\mathbf{u}^2}{2} \rrbracket \quad (2.19)$$

Με την απαίτηση μηδενικού πηδήματος πίεσης καταλήγει κανείς μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial \llbracket \varphi \rrbracket}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) \cdot \nabla \llbracket \varphi \rrbracket &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \llbracket \varphi \rrbracket}{\partial t} + \mathbf{u}_w \cdot \nabla \llbracket \varphi \rrbracket &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d_m \llbracket \varphi \rrbracket}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Όπου $\llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) = -\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_w$ είναι η ένταση της αντίστοιχης διανομής διπόλων στον ομόρρου. Στην τελευταία ισότητα ορίστηκε ως μέση υλική παράγωγος η $\frac{d_m}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_w \cdot \nabla$. Η εισαγωγή ενός φύλλου στροβιλότητας σε ένα κατά τα άλλα ασυμπίεστο και μη-συνεκτικό πεδίο ροής είναι αυτή που θα δημιουργήσει κυκλοφορία στο πεδίο αυτό, καθιστώντας δυνατή την αναπαράσταση ανωστικών σωμάτων. Επιπλέον, η έννοια της στροβιλότητας μπορεί να επεκταθεί ορίζοντάς τη σαν μία γενικευμένη συνάρτηση και εκφράζοντας έτσι τον νόμο Biot-Savart για όλα τα σώματα που φέρουν στροβιλότητα σε μία πιο περιεκτική μορφή. Η ιδέα αυτή είναι κατευθυντήρια για την εισαγωγή των στοιχείων στροβιλότητας.

2.5 Οι νόμοι και η αναπαράσταση του Helmholtz

2.5.1 Νόμοι του Helmholtz

Οι νόμοι διατήρησης της στροβιλότητας διατυπώθηκαν από τον Helmholtz και είναι οι εξής

1. Η ένταση ενός σωλήνα στροβιλότητας δεν μεταβάλλεται στον χρόνο.
2. Στοιχεία ρευστού που σε κάποια χρονική στιγμή βρίσκονται σε μια γραμμή στροβιλότητας θα συνεχίσουν να βρίσκονται στην ίδια γραμμή στροβιλότητας. Η γραμμή αυτή πρέπει είτε να σχηματίζει κλειστό μονοπάτι είτε να εκτείνεται στο άπειρο.
3. Στοιχεία ρευστού που αρχικά δεν έχουν στροβιλότητα παραμένουν χωρίς στροβιλότητα όταν δεν υπάρχουν στροβιλές εξωτερικές δυνάμεις.

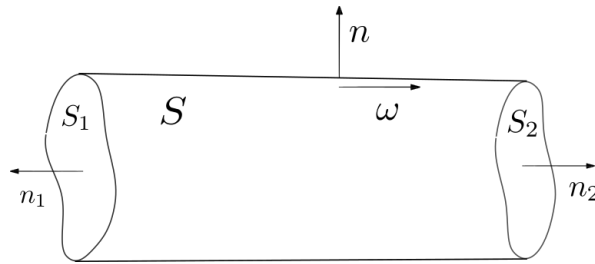
Για την κατανόηση των νόμων αυτών, αρκεί να γίνει μια σύντομη περιγραφή του τι είναι σωλήνας στροβιλότητας (ή αλλιώς "δινωσωλήνας"), τι είναι ένα νήμα στροβιλότητας και του τι ορίζεται ως ένταση σε αυτά τα στοιχεία. Στο σχήμα 2.3 απεικονίζεται ένα μέρος μιας κυλινδρικής επιφάνειας στην οποία το διάνυσμα της στροβιλότητας είναι παντού παράλληλο σε αυτή. Θεωρείται πως η επιφάνεια αυτή είτε κλείνει είτε εκτείνεται στο άπειρο. Η εν λόγω επιφάνεια λέγεται δινωσωλήνας. Θέτωντας το πάχος του δινωσωλήνα αυτού να τείνει στο μηδέν, λαμβάνουμε ένα νήμα στροβιλότητας. Η ένταση ενός δινωσωλήνα ορίζεται για μία διατομή του A

$$\int_A \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.21)$$

, ιδιότητα γνωστή ως η παροχή του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{\omega}$ από την διατομή A. Λαμβάνοντας την συνολική παροχή από την κλειστή επιφάνεια S του σχήματος 2.3 και εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης του Green

$$\int_D \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dD = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (2.22)$$

καθώς το $\boldsymbol{\omega}$ είναι σωληνοειδές και αφού $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ εκτός των διατομών. Η ένταση ενός δινωσωλήνα είναι λοιπόν σταθερή κατά μήκος του.



Σχήμα 2.3: Ένα μέρος του δινοσωλήνα συνολικής επιφάνειας S και διατομών S_1, S_2 .

Μπορεί ναδειχθεί εύκολα ότι ο πρώτος νόμος είναι ισοδύναμος με το θεώρημα του Kelvin για την κυκλοφορία $\Gamma \equiv \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (2.23)$$

Τα παραπάνω θεωρήματα πρέπει να τηρούνται ανεξάρτητα με τον τρόπο που θα επιλεγθεί για την αναπαράσταση της στροβιλότητας. Το θεώρημα του Kelvin μάλιστα αποτελεί συνθήκη απαραίτητη για να κλείσει το σύστημα γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει προς επίλυση.

2.5.2 Διαχωρισμός του Helmholtz

Ένα άλλο χρήσιμο θεώρημα είναι αυτό της αναπαράστασης ενός τυχαίου πεδίου ταχύτητας. Εάν το πεδίο αυτό \mathbf{u} είναι πεπερασμένο, συνεχές, συνεχώς διαφορίσιμο και φθίνει στο άπειρο, τότε μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της σχέσης

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_s = \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\alpha} \quad (2.24)$$

όπου η φ είναι βαθμωτή συνάρτηση και το $\boldsymbol{\alpha}$ σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο. Στην 2.24 υπονοείται ότι $\mathbf{u}_i = \nabla\varphi$ και $\mathbf{u}_s = \nabla \times \boldsymbol{\alpha}$. Για να αποδειχθεί η 2.24 απαιτείται η λύση της εξίσωσης Poisson για το βαθμωτό δυναμικό

$$\nabla^2\varphi = -f(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

η οποία όπως θα δειχθεί παρακάτω είναι η

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \int_D f(\boldsymbol{\xi})G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})dD(\boldsymbol{\xi}) = \int \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{4\pi|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}dD(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.26)$$

Η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλο τον χώρο καθώς ακόμα και αν η f είναι ορισμένη μόνο στο χωρίο $D \subset R^3$, αυτή μπορεί να οριστεί μηδενική έξω από αυτό και εάν $D = R^3$ τότε απαιτούμε αυτή να τείνει στο μηδέν όσο $|\boldsymbol{\xi}|$ τείνει στο άπειρο. Θέτοντας $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ και θεωρώντας την χωρική

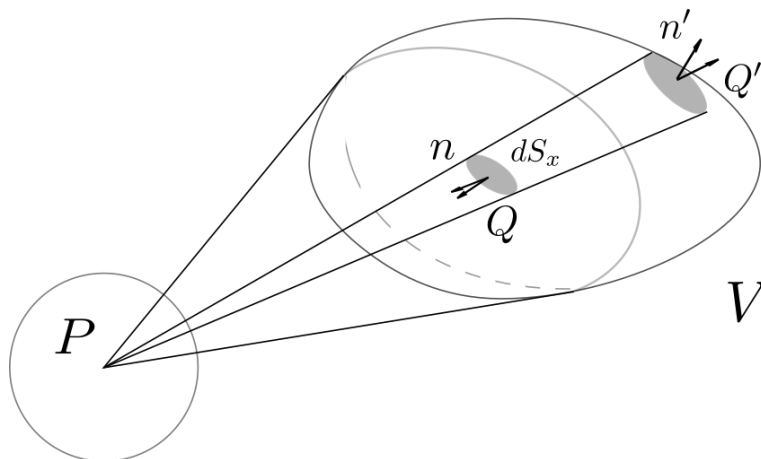
κλίση της 2.26 λαμβάνουμε

$$\nabla\varphi = - \int \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{4\pi r^3} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dD(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.27)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την ποσότητα $\nabla^2\varphi$ σε ένα πεπερασμένο χωρίο V (σχήμα 2.4) έχουμε μέσω του θεωρήματος του Green

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2\varphi dV_x &= \int_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} dS_x \\ &= - \int_S dS_x \int_{R^3} \frac{f(\boldsymbol{\xi})}{4\pi r^3} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n} dD_\xi \\ &= - \int_{R^3} f(\boldsymbol{\xi}) dD_\xi \int_S \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS_x \end{aligned} \quad (2.28)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης. Παρατηρώντας ότι το $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}/r$ είναι ουσιαστικά το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση PQ (σχήμα 2.4), όπου είναι $P(\boldsymbol{\xi}), Q(\mathbf{x})$, το $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})/r = dS_x/r^2$ δεν είναι παρά η στερεά γωνία που βλέπει παρατηρητής στο σημείο P από το στοιχείο που καταλαμβάνει εμβαδό στο σημείο Q .



Σχήμα 2.4: Η στερεά γωνία που βλέπει παρατηρητής στο σημείο P από τα στοιχεία επιφάνειας στα Q, Q'

Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο P βρίσκεται έξω από τον V , κάθε συνεισφορά από στοιχείο στο Q αλληλοαναιρείται από την αντίστοιχη συνεισφορά του στοιχείου στο Q' . Έτσι στην περίπτωση αυτή η συνολική στερεά γωνία είναι μηδέν. Θεωρώντας τώρα το P εσωτερικό του V η ολοκλήρωση δίνει την συνολική στερεά γωνία, 4π . Οπότε

$$\int_S \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS_x = \begin{cases} 1 & \text{αν } \boldsymbol{\xi} \text{ εσωτερικό του } V \\ 0 & \text{αν } \boldsymbol{\xi} \text{ εξωτερικό του } V \end{cases} \quad (2.29)$$

Η ολοκλήρωση στην 2.28 πρακτικά γίνεται μόνο εντός του χωρίου V , αφού παντού αλλού η 2.29 δίνει μηδενική συνεισφορά, άρα

$$\int_V \nabla^2\varphi dV = - \int_V f(\mathbf{x}) dV \quad (2.30)$$

Εφόσον η 2.30 ισχύει για οποιοδήποτε χωρίο V , τότε θα πρέπει να ισχύει παντού η 2.25, οπότε αποδείχθηκε ότι η 2.26 όντως αποτελεί λύση.

Η παραπάνω απόδειξη έχει αξία κυρίως για να γίνει κατανοητός ο ρόλος της στερεάς γωνίας σε τέτοιου είδους προβλήματα. Όπως θα φανεί αργότερα, οι εξισώσεις που προκύπτουν στην παρούσα εργασία εμπλέκουν στερεές γωνίες που παίρνουν τυχαίες τιμές ανάμεσα στο εύρος $[0,1]$ και οι οποίες υπολογίζονται μέσω του ολοκληρώματος της σχέσης 2.29. Αυτό δεν αντιφάσκει με όσα ειπώθηκαν έως τώρα, αφού αποφύγαμε συνειδητά να συζητήσουμε την περίπτωση που το σημείο P βρίσκεται επάνω στο σύνορο του V και το τι γίνεται αν το σύνορο αυτό παρουσιάζει απότομες (αιχμηρές) ακμές.

Είναι πλέον εύκολο να αποδειχθεί η 2.24. Λαμβάνοντας την απόκλιση του συνολικού πεδίου ταχύτητας

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = \nabla^2 \varphi \quad (2.31)$$

καθώς εκ ταυτότητος $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0$. Όμως η εξίσωση 2.31 έχει λύση

$$\varphi(\mathbf{x}) = - \int_D \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})}{4\pi r} dD_{\xi} \quad (2.32)$$

σύμφωνα με την 2.26. Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u} - \nabla \varphi$ έχει όμως μηδενική απόκλιση και άρα είναι σωληνοειδές. Παίρνοντας σαν δεδομένη την παρακάτω ισοδυναμία

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b} \quad (2.33)$$

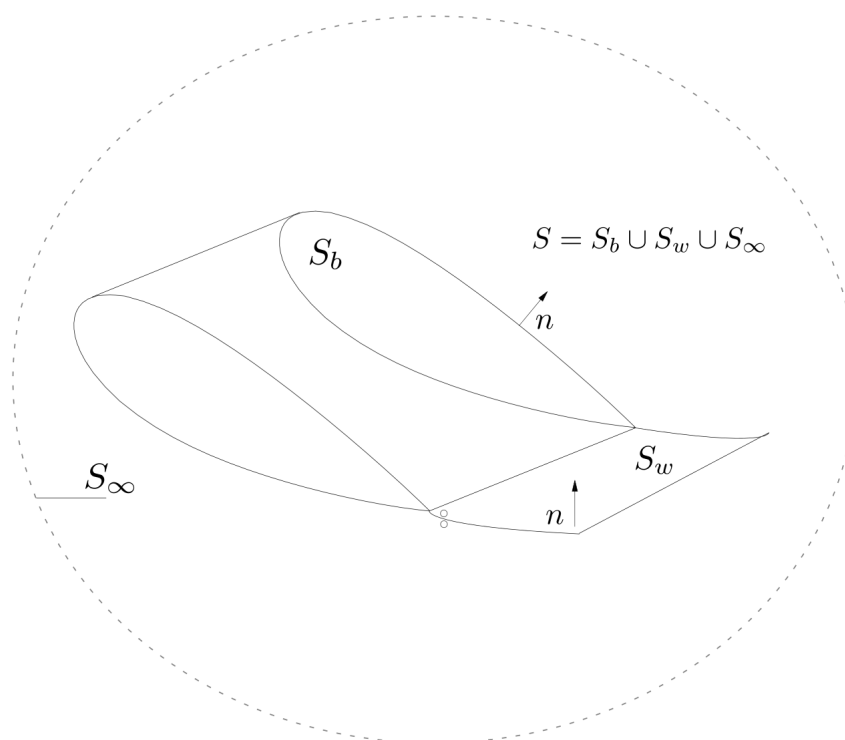
όπου το \mathbf{b} είναι επίσης σωληνοειδές, για το πεδίο $\mathbf{u} - \nabla \varphi$ ισχύει

$$\mathbf{u} - \nabla \varphi = \nabla \times \boldsymbol{\alpha} \quad (2.34)$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε. Εδώ έγινε η υπόθεση ενός πεδίου που είναι παντού συνεχές, ενώ είναι εφικτή και η επέκταση σε τμηματικά συνεχές πεδίο το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει και επιφάνειες ασυνεχειών. Το σημαντικό είναι ότι οποιοδήποτε φραγμένο πεδίο ταχύτητας που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις παραγωγισιμότητας μπορεί να διαχωριστεί σε ένα αστρόβιλο και ένα στροβιλό μέρος. Η τακτική αυτή του διαχωρισμού βρίσκει άμεση χρήση στην τοποθέτηση του προβλήματος δυναμικού, όπως αυτή αναπτύσσεται στη συνέχεια.

2.6 Τοποθέτηση του προβλήματος

Για την τοποθέτηση του προβλήματος, θεωρείται ως $S = S_b \cup S_w$ η επιφάνεια μιας πτέρυγας και του ομόρρου της όπως στο σχήμα 2.5. Η S είναι μια κλειστή επιφάνεια. Ο ομόρρος που δημιουργείται με την κίνηση της πτέρυγας εισάγεται ως ένα φύλλο στροβιλότητας S_w που ξεκινάει από την ακμή εκφυγής και εκτείνεται κατάντη της ροής. Θα δειχθεί πως η εισαγωγή αυτού του φύλλου στροβιλότητας δημιουργεί πεδίο ταχύτητας με κυκλοφορία.



Σχήμα 2.5: Η επιφάνεια S_b της πτέρυγας και η αναπαράσταση του ομόρρου σαν φύλλο στροβιλότητας S_w .

Στην ανάλυση που ακολουθεί θεωρείται ως "εσωτερικό" πεδίο D^- αυτό που εσωκελείεται της S και "εξωτερικό" D^+ αυτό που περιβάλλει την S , όπως στο σχήμα 2.6. Η S_b θεωρείται απαραμόρφωτη ενώ η S_w μπορεί να παραμορφώνεται στον χρόνο. Για την επιφάνεια S_b ισχύει η συνθήκη μη-εισχώρησης καθώς είναι στερεό σύνορο ενώ για τον ομόρρο S_w επιβάλεται ο μηδενισμός των κάθετων σε αυτόν ταχυτήτων, ως φύλλο διάτμησης.

2.6.1 Διαχωρισμός του πεδίου ταχύτητας

Αναπαριστώντας το πεδίο ταχύτητας στο χωρίο $D = D^- \cup D^+$ ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_\omega \quad (2.35)$$

όπου \mathbf{u}_o αστρόβιλο, \mathbf{u}_ω σωληνοειδές και \mathbf{U}_∞ η ταχύτητα της επ' άπειρου ροής, επίσης αστρόβιλο πεδίο, τα επιμέρους πεδία μπορούν να εκφραστούν ως

$$\mathbf{U}_\infty = \nabla\varphi_\infty, \quad \mathbf{u}_o = \nabla\varphi, \quad \mathbf{u}_\omega = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad (2.36)$$

σύμφωνα με την ανάλυση του 2.4.

Λαμβάνοντας την απόκλιση της σχέσης 2.36

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla(\varphi + \varphi_\infty) + \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \nabla^2(\varphi + \varphi_\infty) = 0 \quad (2.37)$$

δηλαδή η εξίσωση Laplace για το δυναμικό $\varphi^* = \varphi + \varphi_\infty$:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi^* &= 0 \\ \Rightarrow \nabla^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Η συστροφή της 2.37 δίνει

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \nabla \times (\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_o) + \nabla \times \mathbf{u}_\omega = \nabla \times \mathbf{u}_\omega = \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \\ \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \\ \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - \nabla^2 \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega} \quad (2.40)$$

που είναι η διανυσματική Poisson για το δυναμικό $\boldsymbol{\psi}$. Η διανομή στροβιλότητας $\boldsymbol{\omega}$ ορίζεται στην στήριξη D_ω και θεωρείται δεδομένη. Οι εξισώσεις 2.38 και 2.40 είναι οι βασικές εξισώσεις του προβλήματος. Αξίζει να τονιστεί εδώ ότι συνήθως είναι βολικό να υπολογίζεται κατευθείαν η ταχύτητα \mathbf{u}_ω μέσω της 2.17 χωρίς να εμπλέκεται ο υπολογισμός του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{\psi}$.

Το πεδίο ταχύτητας χωρίζεται έτσι στο αστρόβιλο τμήμα, $\nabla\varphi$, το οποίο όπως θα δούμε χρησιμοποιείται και για την επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών, και το στροβιλό τμήμα \mathbf{u}_ω , που εκπροσωπεί τον δυναμικό χαρακτήρα της ροής.

2.6.2 Συνοριακές συνθήκες

Η πρώτη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος είναι ο μηδενισμός της ταχύτητας στο άπειρο, όπως απαιτήθηκε και από το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz. Για να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη αρκεί η ταχύτητα που επάγει το δυναμικό φ να μηδενίζεται στο άπειρο, δηλαδή

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \nabla \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.41)$$

Επειδή η εξίσωση 2.41 πρακτικά σημαίνει ότι η ροή μένει αδιατάρακτη μακριά από το σώμα, το δυναμικό αυτό λέγεται δυναμικό διαταραχής. Το ρευστό δεν επιτρέπεται να εισχωρεί στο σώμα ούτε να διαπερνάει το φύλλο στροβιλότητας οπότε η δεύτερη συνοριακή συνθήκη είναι η κινηματική συνθήκη μη-εισχώρησης για το σώμα

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_b \quad (2.42)$$

όπου \mathbf{n} είναι το κάθετο διάνυσμα στην πτέρυγα και η συνθήκη μηδενικού πηδήματος της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας στο φύλλο στροβιλότητας του ομόρρου

$$[[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad \mathbf{x} \in S_w \quad (2.43)$$

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη είναι ισοδύναμη με τον νόμο του Kelvin και απαιτεί μηδενικό πήδημα πίεσης στο φύλλο στροβιλότητας του ομόρρου.

$$[[p]](\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_w \quad (2.44)$$

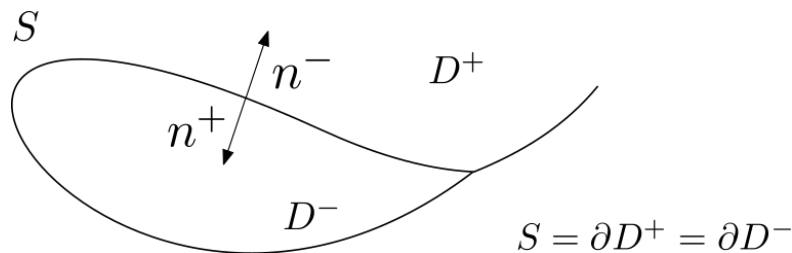
Πρόκειται λοιπόν για μια δυναμική συνθήκη. Η ισοδυναμία με τον νόμο του Kelvin φαίνεται ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία στη σχέση 2.20. Η εφαρμογή της συνθήκης αυτής στην ακμή εκφυγής της πτέρυγας είναι η γνωστή συνθήκη των Kutta-Joukowski. Η συνθήκη αυτή είναι μη-γραμμική λόγω του τετραγώνου της ταχύτητας που περιέχει, έτσι το πρόβλημα γίνεται μη-γραμμικό και απαιτείται γραμμικοποίηση.

2.6.3 Αναπαράσταση των αρμονικών πεδίων

Αφού ορίστηκαν οι βασικές εξισώσεις του προβλήματος και οι συνοριακές συνθήκες, το επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή των συνοριακών μεθόδων. Η επίλυση για το διανυσματικό δυναμικό ψ της 2.40 αντικαθίσταται από τον Νόμο Biot-Savart για τον άμεσο υπολογισμό της ταχύτητας, οπότε πλέον η εξίσωση που μένει να λυθεί είναι η Laplace για όλο το πεδίο $D = D^- \cup D^+$. Τα πεδία που ικανοποιούν την Laplace είναι γνωστά ως αρμονικά πεδία.

Προχωρώντας στην επίλυση, έστω τυχαίο σώμα επιφάνειας S στον χώρο D που τον διαχωρίζει σε εσωτερικό και εξωτερικό, όπως στο σχήμα 2.6. Έστω επίσης δύο αρμονικές συναρτήσεις, φ^+ , φ^- οι οποίες επιτρέπεται να παίρνουν μη μηδενικές τιμές στα χωρία D^+ , D^- αντίστοιχα, και οι οποίες ικανοποιούν την Laplace εκεί

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi^+(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in D^+ \\ \nabla^2 \varphi^-(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in D^- \end{aligned} \quad (2.45)$$



Σχήμα 2.6: Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων δυναμικού $\varphi, \varphi^+, \varphi^-$, το σύνορο του D και η κατεύθυνση των κάθετων διανύσμάτων

Το άθροισμα αυτών των συναρτήσεων, το δυναμικό $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, $\mathbf{x} \in D$, μπορεί να παίρνει μη μηδενικές τιμές οπουδήποτε στο D , ενώ ικανοποιεί αυτόματα την Laplace λόγω της γραμμικότητάς της. Για το συνολικό δυναμικό φ , μένει να αποφασιστεί τι γίνεται στο σύνορο. Ορίζονται λοιπόν στο σύνορο S οι ποσότητες

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) &\equiv \varphi^+(\mathbf{x}) - \varphi^-(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial}{\partial n} \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) = (\nabla \varphi^+ - \nabla \varphi^-) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (2.46)$$

Η πρώτη συνάρτηση των 2.46 είναι το πήδημα του δυναμικού, ενώ η δεύτερη η προβολή της χωρικής κλίσης του πεδίου στην κάθετη κατεύθυνση. Με άλλα λόγια, το δυναμικό φ και η χωρική παράγωγός του επιτρέπεται να είναι ασυνεχείς στο σύνορο. Εάν στα επιμέρους χωρία D^+, D^- οι συναρτήσεις δυναμικού που ορίστηκαν είναι συνεχείς και οι παραγώγοι τους τμηματικά συνεχείς, η δεύτερη ταυτότητα του Green σύνορο $S = S_b \cup S_w \cup S_\infty$ του συνολικού χωρίου, εκφράζεται για το δυναμικό $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$ ως εξής

$$\int_S [f \partial_n g - g \partial_n f] dS = \int_D [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] dD \quad (2.47)$$

όπου το χωρίο D επιτρέπεται να εκτείνεται στο άπειρο και οι ολοκληρωτέες ποσότητες να έχουν ιδιομορφίες αρκεί τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν [8]. Η εμφάνιση των τελεστών Laplace στην εξίσωση μας προτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση του Green, η οποία είναι εξ ορισμού η λύση της Laplace και είναι μια γενικευμένη συνάρτηση. Στην προκειμένη περίπτωση, η $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o)$ είναι η λύση του γραμμικού διαφορικού τελεστή Laplace στον R^3 σύμφωνα με την

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad (2.48)$$

και δεν είναι άλλη από αυτή της σχέσης 2.16. Το Β' μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι η γενικευμένη συνάρτηση δ του Dirac στον R^3 , για την οποία ισχύουν

$$\begin{aligned}
\delta &= 0, & \mathbf{x} &\neq \mathbf{x}_o \\
\delta &\rightarrow \infty, & \mathbf{x} &= \mathbf{x}_o \\
\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dD &= 1
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Θέτοντας $f = \varphi(\mathbf{x})$, $g = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o)$ στην 2.47 λαμβάνουμε

$$\int_S [G \partial_n \varphi - \varphi \partial_n G] dS = \int_D [G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G] dD \tag{2.50}$$

όπου οι παραγωγίσεις είναι ως προς \mathbf{x} . Αντικαθιστώντας την 2.48, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της Dirac και το γεγονός ότι $\nabla^2 \varphi = 0$ η 2.50 παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D^-} [G \partial_n \varphi^- - \varphi^- \partial_n G] d(\partial D^-) + \int_{\partial D^+} [G \partial_n \varphi^+ - \varphi^+ \partial_n G] d(\partial D^+) \\
&= \int_D -\varphi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) dD = \varphi(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{x}_o \in D
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Αν θεωρήσουμε ως $\mathbf{n} = \mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$ τότε

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D^-} [G \partial_n \varphi^- - \varphi^- \partial_n G] d(\partial D^-) - \int_{\partial D^+} [G \partial_n \varphi^+ - \varphi^+ \partial_n G] d(\partial D^+) \\
&= - \int_S [G \partial_n \llbracket \varphi \rrbracket - \llbracket \varphi \rrbracket \partial_n G] dS = -\varphi(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{x}_o \in D
\end{aligned} \tag{2.52}$$

και τελικά μέσω της 2.16 και θέτοντας $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$,

$$\int_S \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) + \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS = \varphi(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{x}_o \in D \tag{2.53}$$

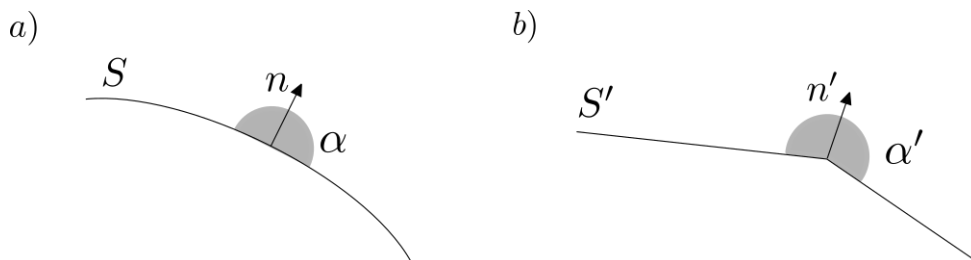
Το ολοκλήρωμα στην S της παραπάνω σχέσης είναι ιδιόμορφο καθώς όταν $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_o \Rightarrow |\mathbf{r}| \rightarrow 0 \Rightarrow 1/r \rightarrow \infty$, κάτι που συμβαίνει για οποιοδήποτε $\mathbf{x}_o \in S$. Για την άρση αυτών των ιδιομορφιών, υποθέτουμε ότι ένα τυχαίο σημείο υπολογισμού που ανήκει στην S και βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας ε . Η επιφάνεια που είναι η τομή της σφαίρας αυτής με την S λέγεται S_ε και πάντα θα ισχύει ότι η S_ε μαζί με το υπόλοιπο της επιφάνειας δίνουν την αρχική, δηλαδή $S = S/S_\varepsilon \cup S_\varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτή την τεχνική στην 2.50, εφόσον η συνάρτηση δυναμικού ικανοποιεί τις συνθήκες λειότητας γύρω από το \mathbf{x}_o , λαμβάνουμε το όριο

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S/S_\varepsilon} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n [\varphi] + [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n [\varphi] + [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS \\
&= \int_{S/x_o} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n [\varphi] + [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n [\varphi] + [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS \quad (2.54) \\
&\Rightarrow \int_{S/x_o} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n [\varphi] + [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS = 0
\end{aligned}$$

όπου όλα τα χωρικά ολοκληρώματα και το $\int_{S_\varepsilon} 1/r dS$ μηδενίζονται. Το τελευταίο όριο δίνει

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} [\varphi] \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi](\mathbf{x}_o) \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^+(\mathbf{x}_o) \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^-(\mathbf{x}_o) \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS \quad (2.55) \\
&= \varphi^+(\mathbf{x}_o) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} dS + \varphi^-(\mathbf{x}_o) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot (-\mathbf{n})}{4\pi r^3} dS \\
&= \alpha \varphi^+(\mathbf{x}_o) + (1 - \alpha) \varphi^-(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{x}_o \in S
\end{aligned}$$

καθώς το ολοκλήρωμα της S_ε δεν είναι παρά οι στερεές γωνίες α , $(1 - \alpha)$ που βλέπει ένας παρατηρητής που προσεγγίζει το \mathbf{x}_o από το D^+ και το D^- αντίστοιχα (βλέπε σχήμα 2.7).



Σχήμα 2.7:

Ενώ στην περίπτωση που η S είναι λεία οι στερεές γωνίες θα είναι ίσες με $1/2$, σε ενδεχόμενες απότομες ακμές οι στερεές γωνίες μπορούν να παίρνουν τιμές σε όλο το εύρος $[0,1]$, όπως φαίνεται στο μέρος b) του 2.7. Ο λόγος που δίνεται έμφαση σε αυτή την κατά τα άλλα ιδιαίτερη περίπτωση είναι ότι τα πλέγματα των προς εξέταση γεωμετριών, τόσο για λόγους κατασκευής όσο και επί τούτου, είναι στη γενική περίπτωση τύπου b). Όταν οι εξισώσεις επιλύονται σε ενδιάμεσα σημεία των υπολογιστικών panel, οι στερεές γωνίες θα είναι πάντα ίσες με $1/2$, όταν όμως επιλύονται στους κόμβους αυτές πρέπει να υπολογιστούν κανονικά. Είναι λοιπόν ορθότερο να γραφτεί η ολοκληρωματική εξίσωση στην παρακάτω μορφή

$$\int_{S/x_o} \left[-\frac{1}{4\pi r} \partial_n \llbracket \varphi \rrbracket + \llbracket \varphi \rrbracket \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS = \begin{cases} \varphi^+ = \varphi(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in D^+ \\ \alpha \varphi^+ + (1 - \alpha) \varphi^-, & \mathbf{x}_o \in S \\ \varphi^- = \varphi(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in D^- \end{cases} \quad (2.56)$$

Έπειδη είναι γνωστό ότι ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της 2.56 είναι το δυναμικό που επάγουν μια διανομή πηγών και μια διανομή διπόλων προσανατολισμού \mathbf{n} αντίστοιχα, θέτουμε

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial n} \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S, \\ \mu(\mathbf{x}) &= -\llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \quad (2.57)$$

Οι παραπάνω είναι γνωστές ως "συναρτήσεις πυκνότητας" (density functions, [1]) και ο καθορισμός τους στο σύνορο οδηγεί στη λύση του προβλήματος. Μέσω αυτών η 2.56 γράφεται

$$\int_{S/x_o} \left[-\frac{1}{4\pi r} \sigma(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS = \begin{cases} \varphi^+ = \varphi(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in D^+ \\ \alpha \varphi^+ + (1 - \alpha) \varphi^-, & \mathbf{x}_o \in S \\ \varphi^- = \varphi(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in D^- \end{cases} \quad (2.58)$$

Η αναπαράσταση των αρμονικών πεδίων πήρε λοιπόν την τελική μορφή της. Οι εντάσεις σ, μ σχετίζονται με το εσωτερικό και με το εξωτερικό πρόβλημα, καθώς ορίζονται μέσω του πηδήματος. Μένει να καθοριστούν οι οριακές συνθήκες για τις εντάσεις αυτές.

2.7 Οι εναλλακτικές διατυπώσεις

Καθώς το εσωτερικό πρόβλημα συνήθως δεν έχει κάποιο ενδιαφέρον, αρκεί να επιλέξουμε μια επιπλέον συνθήκη για το δυναμικό φ^- η οποία θα ικανοποιεί την Laplace. Ενώ είναι γνωστό ότι μια τέτοια συνθήκη μπορεί να είναι είτε μια συνθήκη Neumann, είτε μια Dirichlet, είτε ένας γραμμικός συνδυασμός τους, από μαθηματικής σκοπιάς δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός ως προς το ποιά θα επιλεγεί εν τέλη. Εντούτοις, από φυσική σκοπιά, η κάθε επιλογή αναδεικνύει διαφορετικά χαρακτηριστικά.

2.7.1 Η έμμεση διατύπωση

Ενώ η ανάλυση που προηγήθηκε καταλήγει σε λύση που αποτελείται από διανομές πηγών και διπόλων όπου οι εντάσεις τους ορίστηκαν μέσω του δυναμικού φ , θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει μια λύση της μορφής 2.58 για το δυναμικό χωρίς προφανή συσχέτισή του με τις σ, μ . Σε αυτή την

περίπτωση το δυναμικό σχετίζεται έμμεσα με τις εντάσεις αυτές. Συγκεκριμένα, η συνθήκη Dirichlet

$$-\mu = 0 \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \Rightarrow \varphi^- = \varphi^+, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.59)$$

οδηγεί στην διανομή πηγών στο σώμα (Hess and Smith, 1962), ενώ η συνθήκη Neumann

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \llbracket \varphi \rrbracket = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial n}, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.60)$$

στην διατύπωση διπόλων (Johnson and Rubbert, 1975).

Με την διατύπωση πηγών γίνεται η αναπαράσταση μη-ανωστικών σωμάτων, ενώ με αυτή των διπόλων αναπαριστώνται και ανωστικά σώματα. Αυτό συμβαίνει διότι όταν μια κλειστή καμπύλη στην οποία υπολογίζεται η κυκλοφορία "διαπεράσει" ένα φύλλο στροβιλότητας, η κυκλοφορία θα πάρει την τιμή της ασυνέχειας του δυναμικού εκεί, που είναι και ίσο με το αντίθετο της έντασης του διπόλου. Επειδή όμως η συνολική συνεισφορά εκτός αυτού του σημείου είναι μηδενική (βλέπε 2.3) θα ισχύει

$$\Gamma(\mathbf{x}_w) = -\mu(\mathbf{x}_w) = \llbracket \varphi \rrbracket(\mathbf{x}_w), \quad \mathbf{x}_w \in S_w \quad (2.61)$$

οπότε η άνωση θα παίρνει και μη-μηδενικές τιμές μέσω της Kutta-Joukowski

$$\mathbf{L} = \rho \mathbf{u} \times \mathbf{\Gamma} \quad (2.62)$$

Η διανομή διπόλων εισάγει επιφανειακή στροβιλότητα έντασης

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times \nabla \llbracket \varphi \rrbracket, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.63)$$

Στην μικτή διατύπωση (Hess, 1972), η οποία περιλαμβάνει και τους δύο τύπους ιδιομορφιών, ο γραμμικός συνδυασμός πηγών-διπόλων προσδιορίζεται μέσω της κινηματικής συνθήκης μη-εισχώρησης στο σώμα

$$\frac{\partial}{\partial n} \llbracket \varphi \rrbracket = \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = u_n \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.64)$$

και της δυναμικής συνθήκης Kutta στην ακμή εκφυγής. Επειδή όπως προαναφέρθηκε η συνθήκη Kutta έχει τοπικό χαρακτήρα (περιορίζεται στην ακμή εκφυγής), κατά κανόνα πρέπει να γίνει μια υπόθεση για την χορδική κατανομή των διπόλων. Συνήθως θεωρείται ότι αυτή μεταβάλλεται γραμμικά κατά το μήκος κάθε αεροτομής της πτέρυγας.

Οποιαδήποτε από τις παραπάνω εκδοχές έχει σαν άγνωστους τις εντάσεις σ , μ επάνω στο σώμα. Αφού αυτές είναι γνωστές, είναι δυνατόν να υπολογιστεί το δυναμικό σε τυχαίο σημείο στον χώρο, ενώ για την ταχύτητα η παραγωγή της 2.58 στη γενική της μορφή δίνει μέσω του θεωρήματος του Hess

$$\nabla_o \varphi(\mathbf{x}_o) = \int_S (\sigma(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) \times \mathbf{K}) dS + \oint_{\partial S} \mu(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{K} dl, \quad \mathbf{x}_o \in D^+ \quad (2.65)$$

όπου $S = S_b \cup S_w$ αφού η S_∞ τείνει στο άπειρο, $\boldsymbol{\tau}$ το εφαπτομενικό στο σύνορο ∂S με ανθωρολογιακή φορά και $\mathbf{K} = \mathbf{r}/4\pi r^3$. Υπενθυμίζεται ότι ο όρος πηγών στον ομόρροο είναι μηδενικός, άρα η 2.65 παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \nabla_o \varphi(\mathbf{x}_o) &= \int_{S_b} (\sigma_b(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}_b(\mathbf{x}) \times \mathbf{K}) dS + \oint_{\partial S_b} \mu_b(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{K} dl \\ &+ \int_{S_w} \boldsymbol{\gamma}_w(\mathbf{x}) \times \mathbf{K} dS + \oint_{\partial S_w} \mu_w(\mathbf{x}) \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{K} dl, \quad \mathbf{x}_o \in D^+ \end{aligned} \quad (2.66)$$

Επειδή η σχέση 2.65 εξάγεται για συνεχή κατανομή του μ στην S , εάν αυτή στη πραγματικότητα είναι τμηματικά συνεχής, ολοκληρώματα γραμμικά διανεμημένης στροβιλότητας (δηλαδή όπως το επικαμπύλιο του B' μέλους) θα πρέπει να θεωρούνται για κάθε τμήμα. Εάν τυχόν η μ είναι συνεχής σε όλη την S και παίρνει μηδενικές τιμές στο ευρύτερο σύνορο, τότε η συνεισφορά του επικαμπύλιου αυτού όρου είναι μηδενική. Η γραμμικά διανεμημένη στροβιλότητα (line vorticity) πρέπει να διαχωρίζεται από τα νήματα στροβιλότητας (vortex fillaments), που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2.5 και έχουν σταθερή ένταση καθ'όλο το μήκος τους [3].

2.7.2 Η άμεση διατύπωση

Η τετριμμένη λύση για το εσωτερικό πρόβλημα, $\varphi^- \equiv 0$, αποδίδεται στον Morino (1974) και συσχετίζει άμεσα το δυναμικό με τις εντάσεις πηγών και διπόλων

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial}{\partial n} \llbracket \varphi \rrbracket = \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = u_n, \\ \mu &= -\llbracket \varphi \rrbracket = -\varphi^+, \quad \mathbf{x} \in S_b \end{aligned} \quad (2.67)$$

Η ένταση σ προσδιορίζεται από τη συνθήκη μη-εισχώρησης ενώ η μ από την μηδενική τιμή του φ^- στο σύνορο. Το μέτρο της επιφανειακής στροβιλότητας ταυτίζεται με αυτό της επιφανειακής ταχύτητας

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times \nabla \llbracket \varphi \rrbracket = \mathbf{n} \times \nabla \varphi^+ = \mathbf{n} \times u_s, \quad \mathbf{x} \in S_b \quad (2.68)$$

Έτσι η εξίσωση του δυναμικού παίρνει την μορφή

$$\int_{S/x_o} \left[-\frac{1}{4\pi r} u_n + \varphi^+ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \right] dS = \begin{cases} \varphi^+(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in D^+ \\ \alpha \varphi^+(\mathbf{x}_o), & \mathbf{x}_o \in S \\ \varphi^- = 0, & \mathbf{x}_o \in D^- \end{cases} \quad (2.69)$$

Όπου πάλι η συνθήκη Kutta χρησιμοποιείται στην ακμή εκφυγής, για την αποφυγή απειρισμού της ταχύτητας εκεί. Φυσικά μέσω της άμεσης διατύπωσης επιτυγχάνεται αναπαράσταση ανωστικών σωμάτων με πάχος, όπως και στην μικτή διατύπωση, καθώς περιλαμβάνονται και οι δύο τύποι ιδιομορφιών. Το πεδίο ταχύτητας μπορεί να προκύψει είτε με αριθμητική παραγωγή του δυναμικού, αφού αυτό βρεθεί, είτε μέσω της 2.66.

2.8 Το Θεώρημα του Hess

Ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα για τις μεθόδους στροβιλότητας αλλά και γενικότερα για τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούν στοιχεία με διανομές ιδιομορφιών, είναι αυτό του Hess. Το θεώρημα συσχετίζει την επαγόμενη ταχύτητα από μια διανομή διπόλων μ σε μια επιφάνεια S με την επαγόμενη ταχύτητα από την αντίστοιχη διανομή επιφανειακής στροβιλότητας. Έστω ότι η εν λόγω επιφάνεια είναι λεία, η μ είναι συνεχής εκεί και $\mathbf{K} = \nabla G = -\mathbf{r}/4\pi r^3$, τότε

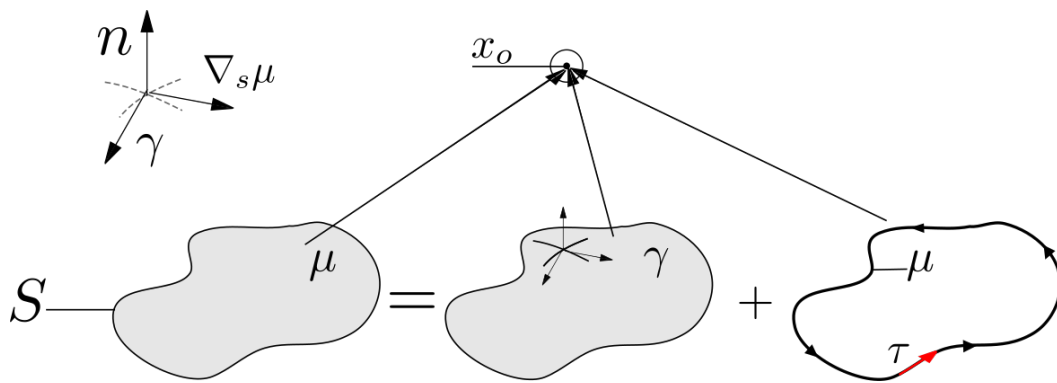
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\mu(\mathbf{x}_o) &= \int_S \mu \nabla_o (\partial_n G) dS \\ &= \int_S (\nabla_s \mu \times \mathbf{n}) \times \mathbf{K} dS + \oint_{\partial S} \mu \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{K} dl \end{aligned} \quad (2.70)$$

όπου το εφαπτομενικό $\boldsymbol{\tau}$ είναι όπως στο σχήμα 2.70.

Το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί με παραγωγή της γνωστής σχέσης επαγόμενου δυναμικού από διανομή διπόλων και μέσω μιας ειδικής μορφής του θεωρήματος του Stokes. Ο δείκτης "s" στο ανάδελτα δηλώνει ότι οι παραγωγίσεις γίνονται ως προς την επιφανειακή βάση της S.

Πέρα από τον υπολογισμό της επαγόμενης ταχύτητας από τυχαία διανομή διπόλων, μέσω του θεωρήματος γίνεται φανερό η σχέση της έντασης των διπόλων με αυτή της στροβιλότητας, καθώς δικαιολογεί τον ορισμό

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \mu \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.71)$$



Σχήμα 2.8: Η ισοδυναμία επαγώμενης ταχύτητας διανομής διπόλων με διανομή επιφανειακής και γραμμικής στροβιλότητας σε σημείο υπολογισμού \mathbf{x}_o - Σχηματική αναπαράσταση της 2.70

Ορίζοντας την στροβιλότητα σαν μια γενικευμένη συνάρτηση μέσω γραμμικών και επιφανειακών συναρτήσεων Dirac στον R^3

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) = \delta_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}) + \delta_{\partial S}\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad (2.72)$$

Μάλιστα η παραπάνω σχέση έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τον νόμο Biot-Savart (2.4) ο οποίος μπορεί να προκύψει με δεδομένη στροβιλότητα της παραπάνω μορφής. Ο ορισμός αυτός δείχνει ότι η ίδια φιλοσοφία μπορεί να ακολουθηθεί και για την επαγωγή σημειακών στοιχείων στον χώρο που φέρουν στροβιλότητα (βλέπε κεφάλαιο 3.1). Ο παραπάνω ορισμός καταλήγει σε απειρισμό της ταχύτητας επάνω στην ασυνέχεια, οπότε απαιτείται ομαλοποίηση μέσω μιας κατάλληλης συνάρτησης αποκοπής [3].

2.9 Η εμφάνιση της στροβιλότητας στην εξίσωση του δυναμικού

Λόγω της γραμμικότητας του τελεστή Laplace, είναι δυνατόν να καταλήξει κανείς σε διάφορες εκδοχές για το πιο δυναμικό τελικά θα εισάγει στην ταυτότητα του Green 2.47 και άρα για το πιο δυναμικό θα λύσει. Υποθέτοντας ότι η στροβιλότητα περιορίζεται στο φραγμένο χωρίο $D_\omega \subset D$ και ότι ορίζεται σαν γενικευμένη συνάρτηση σύμφωνα με την σχέση 2.72, στο χωρίο D/D_ω η ταχύτητα που επάγει η γενικευμένη στροβιλότητα μπορεί να παρασταθεί σαν την κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού φ_ω , δηλαδή

$$\mathbf{u}_\omega = \nabla\varphi_\omega \quad (2.73)$$

καθώς το πεδίο είναι αστρόβιλο έξω από το D_ω . Έτσι το συνολικό πεδίο ταχύτητας στο $D_\omega \subset D$ γράφεται

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty + \nabla\varphi + \mathbf{u}_\omega = \mathbf{U}_\infty + \nabla\varphi + \nabla\varphi_\omega = \mathbf{U}_\infty + \nabla(\varphi + \varphi_\omega) \quad (2.74)$$

δηλαδή

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty + \nabla\Phi, \quad \Phi = \varphi + \varphi_\omega \quad (2.75)$$

Είναι λοιπόν δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα του Green είτε για το δυναμικό Φ είτε για το φ . Έτσι στην άμεση διατύπωση, για το εσωτερικό πρόβλημα προσφέρονται οι επιλογές

$$\begin{cases} \varphi^- \equiv 0 \Rightarrow \Phi^- = \varphi^- + \varphi_\omega^- = \varphi_\omega^- \\ \Phi^- \equiv 0 \Rightarrow \varphi^- + \varphi_\omega^- = 0 \Rightarrow \varphi^- = -\varphi_\omega^- \end{cases} \quad (2.76)$$

Προφανώς η επιλογή που θα γίνει για το εσωτερικό πρόβλημα στην 2.76 είναι ανεξάρτητη με το ποιο δυναμικό θα παρασταθεί μέσω της ταυτότητας του Green 2.47. Εισάγοντας στην πρώτη περίπτωση το δυναμικό φ και στην δεύτερη το Φ στην ταυτότητα του Green και εξετάζοντας και τις δύο επιλογές για το εσωτερικό πρόβλημα, η 2.67 παίρνει τις πιθανές μορφές

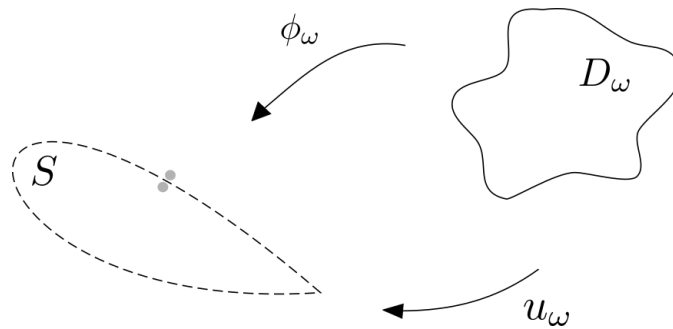
$$\begin{cases} f = \varphi, \quad \varphi^- \equiv 0, \\ \sigma = \partial_n \llbracket \varphi \rrbracket = \partial_n \varphi^+ = -\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_\omega \cdot \mathbf{n}, \\ \mu = -\llbracket \varphi \rrbracket = -\varphi^+, \quad \mathbf{x} \in S_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \Phi, \quad \varphi^- \equiv 0, \\ \sigma = \partial_n \llbracket \Phi \rrbracket = \partial_n \Phi^+ - \partial_n \varphi_\omega^- = \partial_n (\varphi^+ + \varphi_\omega^+) - \partial_n \varphi_\omega^- = \partial_n \varphi^+ = -\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_\omega \cdot \mathbf{n}, \\ \mu = -\llbracket \Phi \rrbracket = -\Phi^+ + \varphi^- = -\varphi^+ - \varphi_\omega^- + \varphi_\omega^+ = -\varphi^+, \quad \mathbf{x} \in S_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \varphi, \quad \Phi^- \equiv 0, \\ \sigma = \partial_n \llbracket \varphi \rrbracket = \partial_n \varphi^+ - \partial_n \varphi^- = \partial_n \varphi^+ + \partial_n \varphi_\omega^- = \partial_n \Phi = -\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}, \\ \mu = -\llbracket \varphi \rrbracket = -\varphi^+ + \varphi^- = -(\varphi^+ + \varphi_\omega^+), \quad \mathbf{x} \in S_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = \Phi, \quad \Phi^- \equiv 0, \\ \sigma = \partial_n \llbracket \Phi \rrbracket = \partial_n \Phi^+ = -\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}, \\ \mu = -\llbracket \Phi \rrbracket = -\Phi^+ = -(\varphi^+ + \varphi_\omega^+), \quad \mathbf{x} \in S_b \end{cases} \quad (2.77)$$

όπου υπενθυμίζεται ότι το δυναμικό φ_ω που επάγει μια διανομή στροβιλότητας της στήριξης D_ω είναι συνεχές στην S (βλέπε σχήμα 2.9), οπότε οι δείκτες "-", "+" εγκαταλείπονται.



Σχήμα 2.9: Το δυναμικό και η ταχύτητα που επάγει η στροβιλότητα της στήριξης D_ω είναι συνεχή στην S

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση είναι η συνθήκη για το εσωτερικό πρόβλημα που καθορίζει την μορφή που παίρνουν οι εντάσεις σ , μ και όχι το ποιά συνάρτηση δυναμικού αναπαριστάται μέσω της Green, όπως αναμενόταν.

Η παρατήρηση ότι στην εκδοχή του $\varphi^- \equiv 0$ εμφανίζεται η επαγωγή της στροβιλότητας σαν όρος πηγής (της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας $\mathbf{u}_\omega \cdot \mathbf{n}$), ενώ στην $\Phi^- \equiv 0$ σαν όρος διπόλου (δυναμικό φ_ω), είναι κατευθυντήρια. Έστω ότι μελετάται η περίπτωση όπου το δυναμικό που εισάγεται στην ταυτότητα του Green είναι το $f = \varphi$. Οι μορφές που μπορεί να πάρει η τελική εξίσωση ανάλογα με την επιλογή που θα γίνει για το εσωτερικό πρόβλημα θα είναι οι

$$\begin{cases} \alpha\varphi^+ + (1-\alpha)\varphi^- = -\int_{S_b} [G(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega) \cdot \mathbf{n} + \varphi^+ \partial_n G] dS + W, & \varphi^- \equiv 0 \\ \alpha\varphi^+ + (1-\alpha)\varphi^- = -\int_{S_b} [G\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n} + (\varphi^+ + \varphi_\omega) \partial_n G] dS + W, & \Phi^- \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (2.78)$$

$$\begin{cases} \alpha\varphi^+ & = -\int_{S_b} [G(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega) \cdot \mathbf{n} + \varphi^+ \partial_n G] dS + W, & \varphi^- \equiv 0 \\ \alpha\varphi^+ - (1-\alpha)\varphi_\omega & = -\int_{S_b} [G\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n} + (\varphi^+ + \varphi_\omega) \partial_n G] dS + W, & \Phi^- \equiv 0 \end{cases}$$

όπου $\mathbf{x}_o \in S$ και ο όρος του ομόρρου $W = \int_{S_w} \mu_\omega \partial_n G dS$ είναι κοινός. Επόμενο είναι να αναρωτηθεί κανείς ποιά είναι η σχέση του δυναμικού από τον όρο πηγής με το δυναμικό από τον όρο διπόλου που δημιουργεί στην S η διανεμημένη στροβιλότητα. Αποδεικνύεται (S.G. Voutsinas) ότι οι δύο αυτοί όροι είναι ίσοι, δηλαδή

$$\int_{S_b} G \mathbf{u}_\omega \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_b} \varphi_\omega \partial_n G dS = 0 \quad (2.79)$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολισμοί για τις συναρτήσεις Green

$$\begin{aligned} G &= G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o|} \\ G_w &= G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_w) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_w|} \end{aligned} \quad (2.80)$$

όπου \mathbf{x} είναι τη μεταβλητή ολοκλήρωσης στην S_b και \mathbf{x}_w στην S_w αντίστοιχα, ενώ \mathbf{x}_o το σημείο υπολογισμού. Θα θεωρηθεί ότι η στροβιλότητα είναι διανεμημένη σε φύλλο στροβιλότητας S_w στον ομόρρου. Το δυναμικό φ_ω είναι

$$\varphi_\omega = \int_{S_w} \mu_w \mathbf{n}_w \cdot \nabla_w (G_w) dS_w \quad (2.81)$$

και η ταχύτητα \mathbf{u}_ω η παράγωγός του, άρα η 2.79 γράφεται

$$\begin{aligned} & \int_{S_b} G \mathbf{n} \cdot \nabla \int_{S_w} \mu_w \mathbf{n}_w \cdot \nabla_w (G_w) dS_w dS - \int_{S_b} \mathbf{n} \cdot \nabla G \int_{S_w} \mu_w \mathbf{n}_w \cdot \nabla_w (G_w) dS_w dS = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{S_b} \int_{S_w} \mu_w G \partial_n \{ \partial_{n_w} (G_w) \} dS_w dS - \int_{S_b} \int_{S_w} \mu_w \partial_n (G) \partial_{n_w} (G_w) dS_w dS = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{S_w} \int_{S_b} \mu_w \partial_{n_w} \{ G \partial_n (G_w) \} dS dS_w - \int_{S_w} \int_{S_b} \mu_w \partial_{n_w} \{ \partial_n (G) G_w \} dS dS_w = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{S_w} \mu_w \partial_{n_w} \int_{S_b} G \partial_n (G_w) dS dS_w - \int_{S_w} \mu_w \partial_{n_w} \int_{S_b} \partial_n (G) G_w dS dS_w = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{S_w} \mu_w \partial_{n_w} \int_{S_b} [G \partial_n (G_w) - \partial_n (G) G_w] dS dS_w = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Στην παραπάνω διαδικασία πρέπει να δωθεί προσοχή στους δείκτες. Ο δείκτης "w" σημαίνει ότι το μέγεθος είναι συνάρτηση του \mathbf{x}_w και η ολοκλήρωση για αυτό διατρέχει την S_w . Οπότε αν δεν είναι ταυτόχρονα και συνάρτηση του \mathbf{x} τότε δεν επηρεάζεται από την παραγωγή ∇ που γίνεται κατά \mathbf{x} . Αντίστοιχα, όπου δεν υπάρχει δείκτης, σημαίνει ότι το μέγεθος είναι συνάρτηση του \mathbf{x} και δεν επηρεάζεται από την παραγωγή κατά \mathbf{x}_w . Επίσης χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι δεν έχει σημασία η σειρά παραγωγίσιων των συναρτήσεων Green.

Αρκεί λοιπόν το παραπάνω ολοκλήρωμα στην S_b να είναι μηδέν. Λαμβάνοντας την ταυτότητα του Green 2.47 διαδοχικά για τις

$$\begin{cases} f = G \Rightarrow \nabla^2 f = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \\ g = G_w \Rightarrow \nabla^2 g = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) \end{cases} \quad (2.83)$$

$$\Rightarrow \int_S [G \partial_n G_w - G_w \partial_n G] dS = \int_D [G \nabla^2 G_w - G_w \nabla^2 G] dD$$

Όμως

$$g\nabla^2 f = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_w) = G(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_w) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_w)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_o) = f\nabla^2 g$$

$$\Rightarrow \int_S [G \partial_n G_w - G_w \partial_n G] dS = 0 \quad (2.84)$$

άρα η 2.79 αποδείχθηκε.

Εξετάζοντας τώρα την 2.78 παρατηρεί κανείς ότι είτε η συνθήκη του εσωτερικού προβλήματος είναι η $\varphi^- \equiv 0$ είτε η $\Phi^- \equiv 0$ τα Β' μέλη των εξισώσεων είναι ίδια. Στην πρώτη περίπτωση, που απαιτείται το εσωτερικό δυναμικό φ^- να είναι μηδέν, προκύπτει μόνο το φ^- στο Α' μέλος, ανάλογο της εξωτερικής στερεάς γωνίας σε εκείνο το σημείο. Στην δεύτερη περίπτωση, που η απαίτηση μηδενισμού είναι για το συνολικό δυναμικό Φ^- , προκύπτει στο Α' μέλος και η διαφορά του δυναμικού αυτού από το φ^- , δηλαδή το φ_w , ανάλογο αυτή τη φορά με την εσωτερική στερεά γωνία σε εκείνο το σημείο. Με άλλα λόγια η εφαρμογή της σχέσης 2.79 που μόλις αποδείχθηκε οδήγησε σε συνέπεια μεταξύ των εναλλακτικών υποθέσεων για το εσωτερικό πρόβλημα.

Επιπλέον, υπάρχει πλέον η δυνατότητα να χρησιμοποιούμε τους όρους της σχέσης 2.79 εναλλακτικά, αποφασίζοντας αν η επαγωγή της στροβιλότητας θα θεωρείται σαν δυναμικό ή σαν ταχύτητα. Η θεώρηση της ταχύτητας που επάγει μια διανομή στροβιλότητας μοιάζει να είναι η προτιμότερη καθώς ο υπολογισμός της γίνεται εύκολα μέσω του νόμου Biot-Savart. Αντίθετα ο αναλυτικός υπολογισμός του δυναμικού που επάγει η ίδια διανομή είναι κάπως πιο περίπλοκος.

Αριθμητική Επίλυση

Στα πλαίσια της εργασίας η υλοποίηση της σύζευξης της άμεσης διατύπωσης με τις VPM έγινε σε δύο στάδια. Αρχικά αναπτύχθηκε κώδικας για το διδιάστατο μόνιμο πρόβλημα γύρω από μια αεροτομή, έτσι ώστε να αποκτηθεί σχετική εμπειρία των ιδιοτεροτήτων που παρουσιάζουν οι προαναφερθείσες μέθοδοι. Αυτό έγινε εκ νέου, αλλά με την βοήθεια ήδη υπάρχοντος λογισμικού.

Κύριο υπολογιστικό εργαλείο του εργαστηρίου αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. για την αεροδυναμική ανάλυση είναι ο κώδικας GenUVP (Generalized Unsteady Vortex Particle method), που χρησιμοποιεί την μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων σε συνδυασμό με την μέθοδο στοιχείων στροβιλότητας. Με πρωτοβουλία του επιβλέποντα, αναπτύχθηκε κώδικας εξωτερικά του ήδη υπάρχοντος (GenUVP), διαρθρωμένος αυτή τη φορά με βάση την άμεση διατύπωση για το δυναμικό σε συνδυασμό με τις VPM. Ο κώδικας αυτός ακολούθησε την ίδια φιλοσοφία με του GenUVP, έτσι ώστε να υπάρχει η δυνατότητα να αποτελέσει μελλοντικά μια ακόμα εκδοχή του. Στην παρούσα εργασία δεν επιχειρείται βέβαια πλήρης πιστοποίηση του κώδικα αυτού ως προς όλες δυνατότητές του, αλλά περιοριζόμαστε στην επίλυση του πεδίου ροής γύρω από σχετικά απλής γεωμετρίας πτέρυγες. Αυτό αποτελεί το δεύτερο στάδιο της εργασίας.

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μια γενική περιγραφή των τεχνικών που χρησιμοποιήθηκαν στον κώδικα που λύνει το τρισδιάστατο πρόβλημα. Οι τεχνικές του διδιάστατου προβλήματος ήταν ανάλογες, προφανώς με αρκετά μικρότερο βαθμό δυσκολίας. Ο 3D κώδικας είναι γραμμένος σε FORTRAN 90 και είναι διαρθρωμένος στην λογική των *δομών* (structures).

3.1 Επιλογή της μεθόδου επίλυσης

Όπως μαρτυρά και ο τίτλος, στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η άμεση διατύπωση για το δυναμικό με σκοπό την αεροδυναμική ανάλυση μιας πτέρυγας. Στο κεφάλαιο δύο έγινε φανερό ότι η επιλογή που θα γίνει για το εσωτερικό πρόβλημα φ^- ή Φ^- διαμορφώνει ανάλογα την ολοκληρωματική εξίσωση που προκύπτει.

Επιβάλλοντας στο συνολικό δυναμικό Φ συνθήκη μηδενισμού για το εσωτερικό πρόβλημα, η μορφή 2.78 που προέκυψε περιλαμβάνει και το δυναμικό που επάγει η στροβιλότητα, φ_ω , έξω από την ολοκλήρωση. Η επιρροή της στροβιλότητας της στήριξης προκύπτει πάντα στην εξίσωση είτε σαν όρος πηγής ή διπόλου, η ισοδυναμία των οποίων μελετήθηκε σε θεωρητικό επίπεδο στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Με στόχο την περαιτέρω μελέτη της μετάβασης από ταχύτητα σε δυναμικό που επάγει μια διανομή στροβιλότητας και κυρίως του τρόπου που αυτή η μετάβαση επιτρέπει την σύζευξη των στροβιλών μεθόδων με την άμεση διατύπωση, επιλέχθηκε η παρακάτω τελική μορφή

$$\begin{aligned}
-\int_{S_b} [G(\mathbf{U}_\infty - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + (\varphi + \varphi_\omega) \partial_n G] dS - \int_{S_w} \llbracket \varphi \rrbracket_w \partial_{n_w} G dS &= \begin{cases} \varphi, & \mathbf{x}_o \in D^+ \\ \alpha\varphi - (1-\alpha)\varphi_\omega, & \mathbf{x}_o \in S_b \\ \varphi_\omega, & \mathbf{x}_o \in D^- \end{cases} \\
\Rightarrow \\
-\int_{S_b} [G(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + \varphi \partial_n G] dS - \int_{S_w} \llbracket \varphi \rrbracket_w \partial_{n_w} G dS &= \begin{cases} \varphi, & \mathbf{x}_o \in D^+ \\ \alpha\varphi - (1-\alpha)\varphi_\omega, & \mathbf{x}_o \in S_b \\ \varphi_\omega, & \mathbf{x}_o \in D^- \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

όπου στην ταχύτητα του πεδίου αφαιρέθηκε η ταχύτητα που κινείται το σώμα, \mathbf{U}_b . Οι συνοριακές συνθήκες ορίστηκαν στο 2.6.2 και αναλύθηκαν στο 2.9, οπότε μένει να περιγραφεί η εισαγωγή των στοιχείων στροβιλότητας. Αυτή θα αναλυθεί στο 3.5.

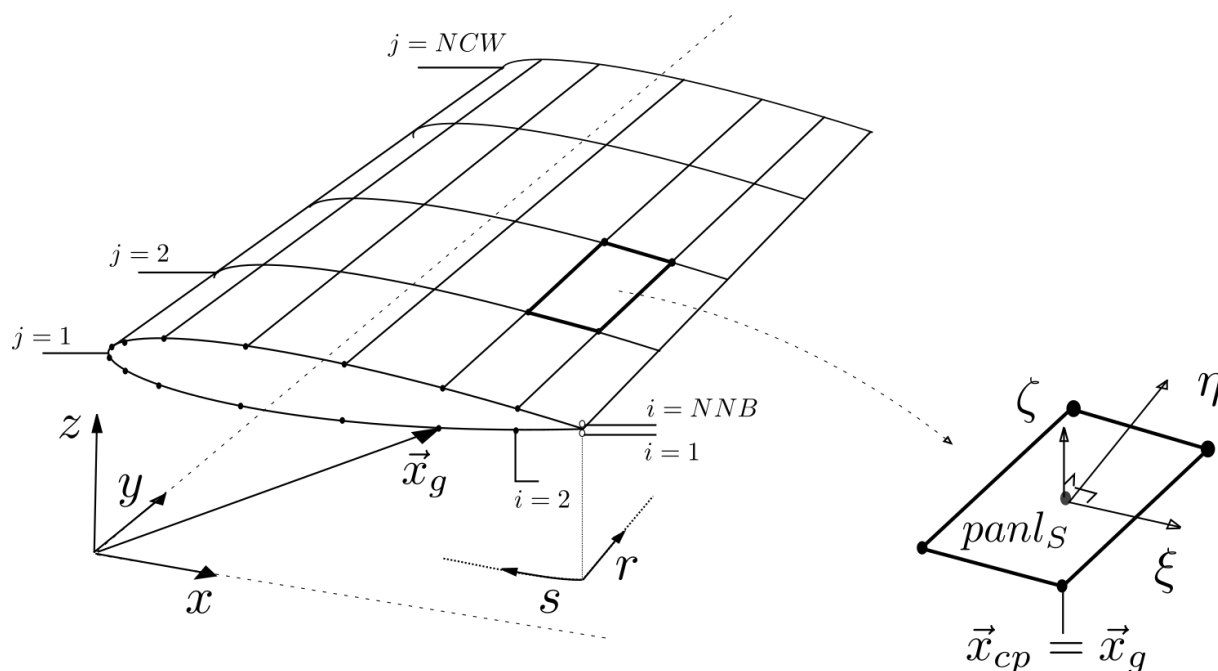
3.2 Διακριτοποίηση της γεωμετρίας

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου σώματος εισάγονται πάντα σαν δεδομένο του προβλήματος. Ο επιλύτης μπορεί να χειρίζεται πολλά *μέρη* ("components", λ.χ. μία έλικα από τις τέσσερις ενός ελικοπτέρου μπορεί να αποτελεί ένα μέρος) τα οποία συνθέτουν έναν *σχηματισμό* ("configuration", λ.χ. το ελικόπτερο), ή ακόμα και πολλούς σχηματισμούς μαζί (λ.χ. το ελικόπτερο και μία ανεμογεννήτρια). Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, περιοριζόμαστε σε ένα μέρος μόνο, μια πτέρυγα. Επίσης στα πλαίσια της εργασίας ο όρος "μέρος" θα είναι ισοδύναμος με τον όρο "σώμα" (footnote*).

Η γεωμετρία λοιπόν του σώματος της πτέρυγας προσεγγίζεται από ένα επιφανειακό πλέγμα σημείων, που τα διανύσματα θέσης τους συμβολίζονται \mathbf{x}_g (βλέπε σχήμα 3.10). Η επιφάνεια S_b περιγράφεται διπαραμετρικά ως $S_b(r_j, s_i)$

$$\mathbf{x}_g = x_g(k, i + (j-1) * NNB), \quad i = 1, 2, \dots, NNB, \quad j = 1, 2, \dots, NCW, \quad k = 1, 2, 3 \tag{3.86}$$

όπου NNB είναι το πλήθος των κόμβων κάθε αεροτομής (κατά την s διάσταση), NCW το πλήθος των αεροτομών που συνθέτουν την πτέρυγα (κατά την r διάσταση) και k η x, y , ή z συνιστώσα στο αδρανειακό σύστημα. Η παράμετρος s είναι το μήκος τόξου μετρούμενο από την ακμή εκφυγής που ξεκινά από την πλευρά υπερπίεσης για κάθε σταθερή ακτινική θέση που αντιστοιχεί σε σταθερό r . Η διεύθυνση της ροής θα είναι πάντα παράλληλη της s στα εξεταζόμενα προβλήματα.



Σχήμα 3.10: Η διακριτοποίηση του σώματος, το αδρανειακό και τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων.

Το σώμα χωρίζεται μέσω των κόμβων σε τετράπλευρα στοιχεία (panel) όπως στο σχήμα 3.10. Επειδή στη γενική περίπτωση τα σημεία αυτά δεν είναι πάντα συνεπίπεδα, προβλέπεται η θεώρηση ενός μέσου επιπέδου στο οποίο προβάλλονται. Αυτό είναι επιθυμητό γιατί διευκολύνει κατά πολύ την αναλυτική λύση των ολοκληρωμάτων. Εντούτοις σε σχετικά απλές γεωμετρίες, όπως αυτές που θα εξεταστούν, τα στοιχεία είναι κατά κανόνα επίπεδα και έτσι δεν υφίσταται κάποιο σφάλμα λόγω της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, σε μια ορθογωνική πτέρυγα με σταθερό μήκος χορδής, ίδιο προφίλ αεροτομής κατά το εκπέτασμα και χωρίς συστροφή, τα στοιχεία είναι όλα ορθογώνια. Επίσης στην ίδια περίπτωση αλλά προσθέτοντας τον παράγοντα της οπισθόκλισης, τα στοιχεία έχουν όλα σχήμα τραπεζίου. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις τα στοιχεία ήταν το πολύ τραπεζοειδή και είχαν πλευρές παράλληλες κατά την s διεύθυνση.

Βασική ιδιαιτερότητα της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε είναι ότι τα σημεία ελέγχου στα οποία επαληθεύονται οι εξισώσεις ταυτίζονται με τους κόμβους της γεωμετρίας. Ο λόγος είναι ότι θεωρήθηκαν διγραμμικές κατανομές για τις εντάσεις διανομής πηγών και τις εντάσεις διανομής διπόλων παντού. Το χαρακτηριστικό αυτό συζητείται σε επόμενο μέρος (3.3).

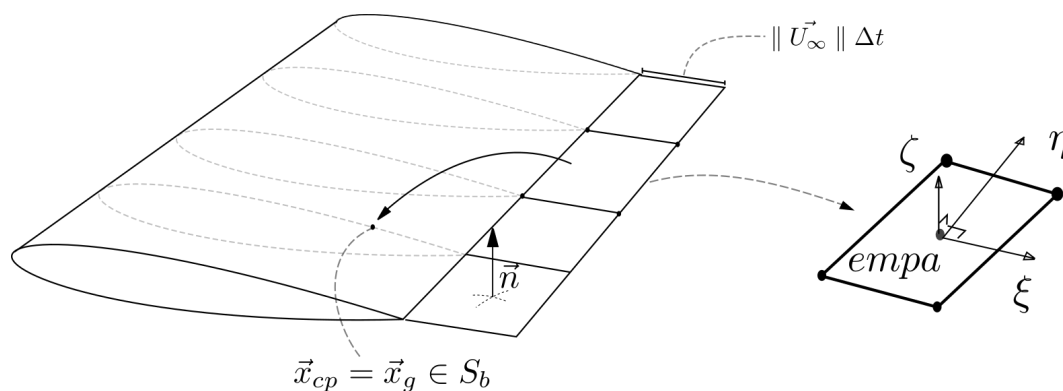
Κάθε στοιχείο που ανήκει στο σώμα ορίζεται από τις τέσσερις ακμές του και σε κάθε στοιχείο ορίζεται μία τοπική ορθομοναδιαία βάση όπως στο σχήμα 3.10. Στον κώδικα, το σύνολο των τετράπλευρων στοιχείων αποτελεί μια δομή, όπου κάθε στοιχείο αριθμείται από τον δείκτη του και φέρει όλα τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά (επιφάνεια, αρίθμηση των κόμβων που το αποτελούν, γειτονικά στοιχεία κλπ). Η δομή αυτή λέγεται " $Panl_s$ ".

Ο ομόρρους που εκλύεται με την κίνηση της πτέρυγας (ισοδύναμα με την αντίστοιχη ταχύτητα της επ' άπειρου ροής), χωρίζεται στη γενική περίπτωση σε δύο μέρη, τον κοντινό και τον μαρκινό ομόρρο. Στον κοντινό ομόρρο, το κάθε στοιχείο εκεί αποτελείται από δύο κόμβους στην ακμή εκφυγής, που ταυτίζονται με τους αντίστοιχους της γεωμετρίας του σώματος, και δύο κόμβους που αποτελούν υλικά στοιχεία του ομόρρου και μεταφέρονται με την ταχύτητα έκλυσης σε κάθε σημείο της ακμής εκφυγής ($\mathbf{u}_{emission}$) 3.11. Στην απλοποιημένη περίπτωση, αυτή ταυτίζεται με την ταχύτητα της επ' άπειρου ροής, και έτσι τα υλικά στοιχεία μεταφέρονται κατά $\mathbf{U}_\infty \Delta t$. Τα

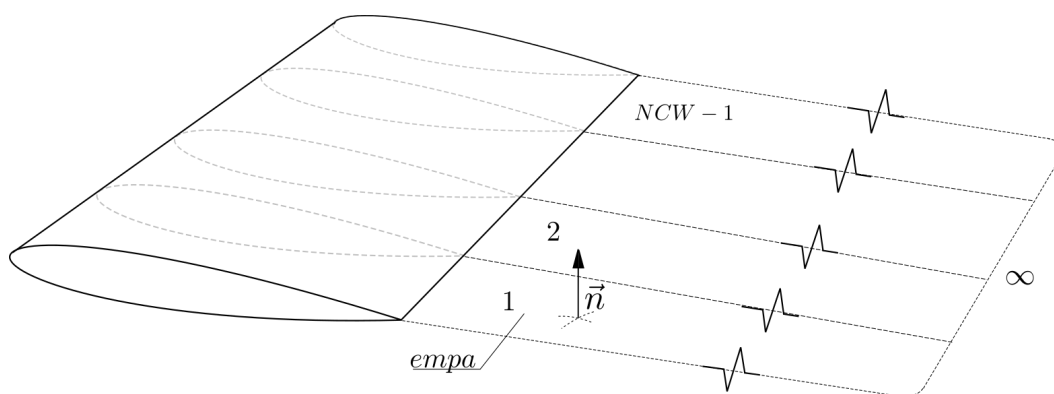
συνοριακά στοιχεία του ομόρρου ανήκουν σε μια ξεχωριστή δομή, αντίστοιχη αυτής των στοιχείων του σώματος, την " $EmPa_w$ " (Emission Panels of the Wake).

Εξαιρέση στο παραπάνω μοντέλο κοντινού ομόρρου αποτελούν οι προσομοιώσεις που γίνονται για την πρόλεξη του πεδίου του μόνιμου προβλήματος με προδιαγεγραμμένο ομόρρου που θεωρείται ότι εκτείνεται στο άπειρο (στην πράξη περίπου 20 χορδές), με στόχο της σύγκρισής της με τη λύση του ελεύθερου ομόρρου, σχήμα 3.12.

Όπως φαίνεται στα σχήματα 3.10, 3.11, το σώμα χωρίζεται σε λωρίδες (strips), η κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από μια ομάδα τετράπλευρων στοιχείων (panels) και διακρίνεται από τις δύο αεροτομές που την περικλύουν (sections). Η κάθε αεροτομή περιλαμβάνει φυσικά ένα συνολο κόμβων που αποτελούν το διακριτοποιημένο προφίλ της. Τα χαρακτηριστικά αυτά περιλαμβάνονται στις δομές " $Strip_s$ ", " $Sect_s$ ". Να σημειωθεί ότι κάθε λωρίδα είχε το ίδιο πλήθος στοιχείων.



Σχήμα 3.11: Τα στοιχεία του κοντινού ομόρρου στην απλοποιημένη περίπτωση. Τα στοιχεία αυτά επάγουν δυναμικό σε κάθε σημείο υπολογισμού στην πτέρυγα.



Σχήμα 3.12: Ο προδιαγεγραμμένος ομόρρου που εκτείνεται στο άπειρο για την εκτίμηση της λύσης του μόνιμου προβλήματος.

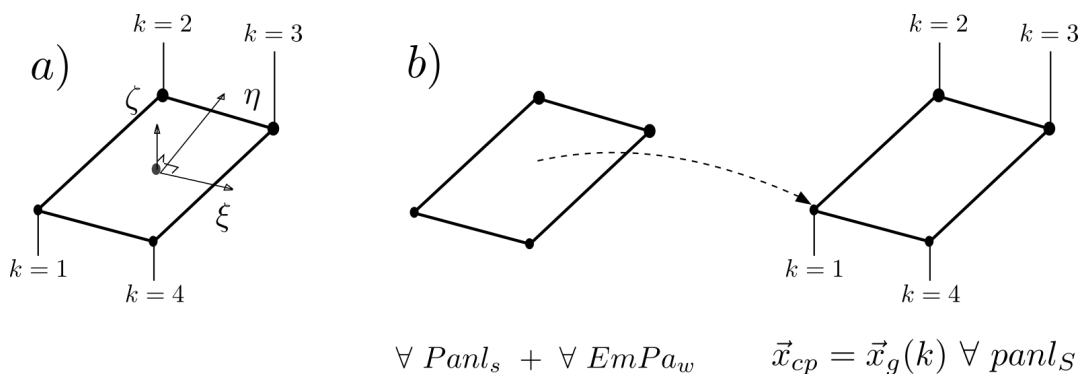
Για τους κόμβους του σώματος και τους κόμβους του ομόρρου χρησιμοποιήθηκαν οι δομές "GSNod" και "GWNod" αντίστοιχα ενώ μία επιπλέον δομή περιλαμβάνει όλους τους κόμβους από τους οποίους γίνεται έκλυση στροβιλότητας, " $EmNo_w$ ". Οι δομές αυτές περιλάμβαναν μέσα σε άλλα τις θέσεις τον κόμβων σε κάθε βήμα, την αρίθμησή τους, και τα γειτονικά στοιχεία.

Ο μακρινός ομόρρος αποτελείται από στοιχεία στροβιλότητας που προέκυψαν από το φύλλο στροβιλότητας του κοντινού ομόρρου σε προηγούμενα χρονικά βήματα και μεταφέρθηκαν και παραμορφώθηκαν σύμφωνα με την εξίσωση του Helmholtz. Ο μηχανισμός δημιουργίας τους περιγράφεται σε επόμενο κεφάλαιο (3.5).

Να τονιστεί ότι σε όλη την παραπάνω θεώρηση ο μηχανισμός παραγωγής στροβιλότητας, δηλαδή ο κοντινός ομόρρος, θεωρήθηκε ότι εκλύεται από δεδομένο γεωμετρικό τόπο (την ακμή εκφυγής), ενώ φαινόμενα αποκόλλησης είτε από τα ακροπτερύγια είτε επάνω στην πτέρυγα δεν λήφθηκαν υπόψιν. Πάνω στο θέμα αυτό, ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε περιλαμβάνει πρόβλεψη για σημεία αποκόλλησης επάνω σε κάθε αεροτομή της πτέρυγας, τα οποία όμως θα πρέπει να εισάγονται σαν δεδομένο. Αυτό συμβαίνει διότι οι θέσεις αποβολής στροβιλότητας καθορίζονται απο συνεκτικούς μηχανισμούς. Ο συνδυασμός των μεθόδων αυτών με δυναμικές μεθόδους είναι αντικείμενο υπό έρευνα.

3.3 Διανομές των ιδιομορφιών και βαθμοί ελευθερίας

Κάθε συνοριακό στοιχείο φέρει διανομές πηγών και διπόλων που για υπολογιστικούς λόγους είναι προκαθορισμένης μορφής. Επιλέχθηκε και οι δύο στοιχειώδεις κατανομές να είναι παντού διγραμμικές, πράγμα που έρχεται σε συμφωνία με τις σχετικές θέσεις των βαθμών ελευθερίας, οι οποίες ήταν στους κόμβους των συνοριακών στοιχείων. Οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος είναι φυσικά οι τιμές του δυναμικού στους κόμβους. Οι ιδιομορφίες ήταν διανεμημένες είτε σε επιφάνειες (συνοριακά στοιχεία τοποθετημένα στην επιφάνεια του σώματος) είτε σε σημεία (vortex particles). Η αρίθμηση των κόμβων σε σχέση με το τοπικό σύστημα συντεταγμένων φαίνεται στο σχήμα 3.13 a), ενώ στο b) φαίνεται σχηματικά η επαγωγή σε δυναμικό ή/και ταχύτητα προς κάθε σημείο ελέγχου \Leftrightarrow κόμβο του σώματος



Σχήμα 3.13: a) Η αρίθμηση των κόμβων σε σχέση με το τοπικό σύστημα για κάθε συνοριακό στοιχείο και b) σχηματικά η επαγωγή από κάθε συνοριακό στοιχείο σε κάθε κόμβο.

Έστω ότι μελετάται το επαγόμενο δυναμικό σε σημείο υπολογισμού από ένα στοιχείο διγραμμικής κατανομής πηγών και διπόλων. Εκφράζοντας την κατανομή αυτή σαν διπαραμετρική συνάρτηση στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε στοιχείου επιφάνειας S_p , συμβολίζουμε

$$\begin{aligned} f_\sigma(\xi, \eta) &= \sigma(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in S_p \\ f_\mu(\xi, \eta) &= \mu(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in S_p \end{aligned} \quad (3.87)$$

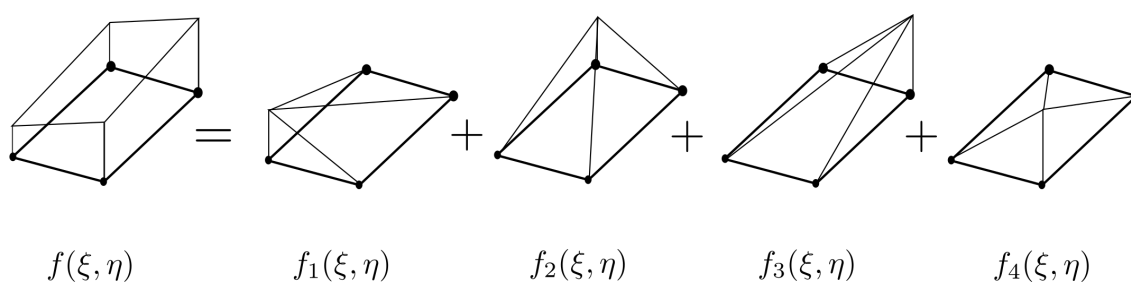
και χρησιμοποιώντας για ευκολία μια μόνο συνάρτηση f που αντιπροσωπεύει τις παραπάνω, θα έχουμε

$$f(\xi, \eta) = a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{11}\xi\eta, \quad \xi, \eta \in S_p \quad (3.88)$$

Η f γράφεται σαν ένα άθροισμα τεσσάρων επιμέρους συναρτήσεων, οι οποίες είναι και αυτές διγραμμικές και ορίζονται έτσι ώστε να λαμβάνουν την τιμή 1 στον κόμβο k και μηδενική τιμή στους υπόλοιπους. Αυτό εκφράζεται ως εξής

$$f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 f_k = \sum_{k=1}^4 (a_{00}^k + a_{10}^k \xi + a_{01}^k \eta + a_{11}^k \xi \eta), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad \xi, \eta \in S_p \quad (3.89)$$

και σχηματικά φαίνεται στο 3.14.



Σχήμα 3.14: Ο διαχωρισμός της διγραμμικής συνάρτησης f στις επιμέρους f_k

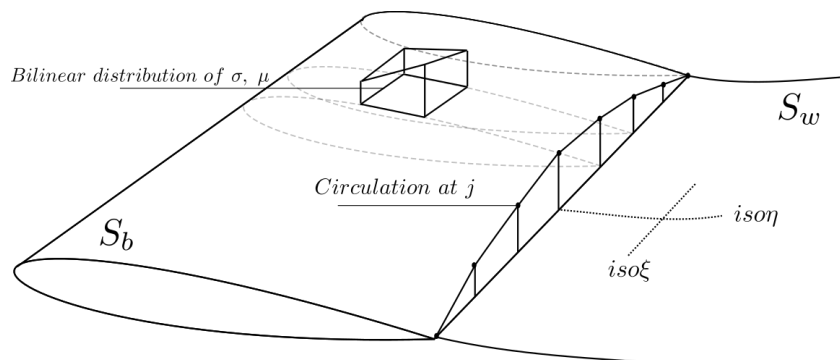
Κάθε συνοριακό στοιχείο λοιπόν έχει $4 \times 4 = 16$ συντελεστές βαρύτητας για τις 4 συναρτήσεις βάσεις του που αποτελούν καθαρά γεωμετρικό χαρακτηριστικό. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται εύκολα απαιτώντας διαδοχικά

$$\begin{bmatrix} 1 & s_1 & t_1 & s_1 t_1 \\ 1 & s_2 & t_2 & s_2 t_2 \\ 1 & s_3 & t_3 & s_3 t_3 \\ 1 & s_4 & t_4 & s_4 t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}^k \\ a_{10}^k \\ a_{01}^k \\ a_{11}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^k \\ \delta_2^k \\ \delta_3^k \\ \delta_4^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.90)$$

όπου δ_i^k το δέλτα του Kronecker και s_i, t_i οι συντεταγμένες του i κόμβου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

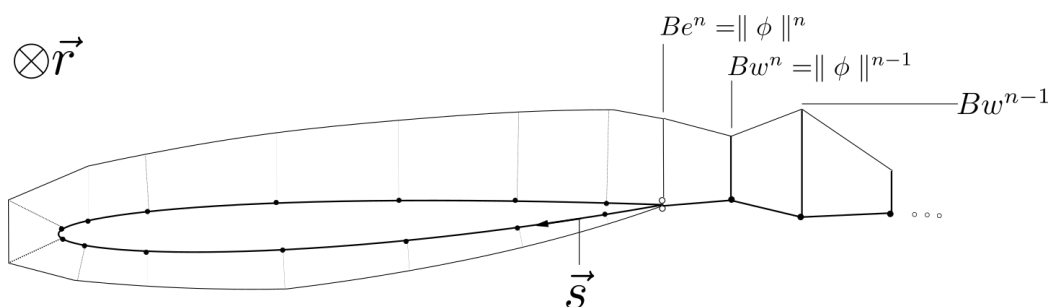
Ο υπολογισμός των συντελεστών αυτών γίνεται στην αρχή του κάθε χρονικού βήματος καθώς προβλέπεται η παραμόρφωση των συνοριακών στοιχείων. Αυτό αφορά κυρίως την γεωμετρία του κοντινού ομόρρου, για τα χαρακτηριστικά της οποίας (μήκος και διεύθυνση των στοιχείων), υπάρχει η επιλογή εσωτερικής σύγκλισης. Στο εξεταζόμενο πρόβλημα όμως, τα στοιχεία δεν επιδέχονταν παραμορφώσεις στη γεωμετρία τους.

Η επιλογή της ταύτισης των θέσεων των βαθμών ελευθερίας με των κόμβων σε συνδυασμό με την άμεση διατύπωση έδωσε μέσω της διγραμμικής θεώρησης για το δυναμικό την δυνατότητα διγραμμικά μεταβαλλόμενων σ, μ στα σώματα. Έτσι για μια ακτινική θέση r το προφίλ των διανομών θα είναι όπως στο σχήμα 3.16 ενώ η συνολική εικόνα του σώματος φαίνεται στο 3.15. Ενα θετικό αυτής της προσέγγισης είναι το γεγονός ότι η κυκλοφορία υπολογίζεται και ακριβώς επάνω στα ακροπτερύγια προσεγγίζοντας καλύτερα την μηδενική τιμή εκεί.



Σχήμα 3.15: = Αναπαράσταση των διγραμμικών διανομών στο σώμα, της κυκλοφορίας στην ακμή εκφυγής και του ομόρρου.

Το άγνωστο πήδημα δυναμικού στην ακμή εκφυγής για κάθε ακτινική θέση r_j ονομάζεται $Be_j^n = \llbracket \phi \rrbracket_j^n$ ("B emission") όπου n το τρέχον χρονικό βήμα. Αντίστοιχα, με $Bw_j^n = Be_j^{n-1}$, συμβολίζεται το πήδημα του δυναμικού εκεί στο προηγούμενο χρονικό βήμα, που έχει μεταφερθεί στον ομόρρου σύμφωνα με την συνθήκη Kelvin ("B wake") (σχήμα 3.16).



Σχήμα 3.16: Χορδική κατανομή του πηδήματος του δυναμικού που ισοδυναμεί με την ένταση διπόλων.

Στο σχήμα 3.15 οι καμπύλες σταθερού η αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία που εκλύθηκαν από το σημείο j της γραμμής έκλυσης (emission line) σε προηγούμενα χρονικά βήματα, δηλαδή για $t < \tau$ όπου τ το τρέχον χρονικό βήμα. Οι καμπύλες σταθερού ξ αντιστοιχούν στην τρέχουσα θέση όλων των σημείων που εκλύθηκαν την στιγμή $t < \tau$ από την γραμμή έκλυσης.

Μέσω των παραπάνω ορισμών, είναι πλέον δυνατό να ξεκινήσει η κατασκευή του αλγεβρικού συστήματος προς επίλυση. Πέρα από τις κατανομές των ιδιομορφιών, πρέπει να γίνει και διακρίτοποίηση των συνθηκών Kutta, Kelvin στην ακμή εκφυγής και στον κοντινό ομόρρου αντίστοιχα. Τέλος μένει να περιγραφεί η αριθμητική διαδικασία δημιουργίας στοιχείων στροβιλότητας.

3.4 Διάρθρωση του αλγεβρικού συστήματος

Η διάρθρωση του τελικού συστήματος προς επίλυση περιλαμβάνει την γραφή της εξίσωσης 3.85 και των συνθηκών Kutta και Kelvin σε αλγεβρική μορφή. Οι εξίσωση 3.85 επαληθεύεται για κάθε κόμβο του σώματος. Καθώς οι κόμβοι της ακμής εκφυγής είναι διπλοί κόμβοι, εκεί επαληθεύεται επιπλέον η συνθήκη Kutta. Η συνθήκη Kelvin επαληθεύεται για τις γνωστές εντάσεις των διπόλων του κοντινού ομόρρου.

Στην παρακάτω ανάλυση η επαγόμενη ταχύτητα από την στροβιλότητα της στήριξης θεωρείται δεδομένη. Αυτή υπολογίζεται μέσω του νόμου Biot-Savart για όλα τα στοιχεία στροβιλότητας και όλα τα σημεία ελέγχου. Η ταχύτητα της επ'άπειρου ροής είναι εδώ σταθερή και έχει μοναδιαίο μέτρο (θεωρείται αδιάστατη). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των συνοριακών στοιχείων και των κόμβων είναι επίσης γνωστά όπως και η ταυτότητα του κάθε κόμβου σε σχέση με τον δείκτη του στο κάθε στοιχείο (k από 1 έως 4). Τέλος τα γειτονικά στοιχεία που περιλαμβάνουν έναν συγκεκριμένο κόμβο είναι επίσης πάντα γνωστά.

3.4.1 Επαγόμενο δυναμικό από κατανομές ιδιομορφιών

Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στο 3.3, έστω ότι με p συμβολίζεται το συνοριακό στοιχείο και με k ο δείκτης της κάθε ακμής στο στοιχείο p (όπως στο σχήμα 3.13). Ο βαθμός ελευθερίας σε έναν κόμβο j , ($j = 1, 2, \dots, NNB * NCW$) του σώματος μπορεί να ταυτοποιηθεί μέσω του στοιχείου p στο οποίο ανήκει και του δείκτη του k εκεί, δηλαδή φ_k^p . Άρα για κάθε φ_j αντιστοιχούν 4 συνδυασμοί των k, p για το φ_k^p . Ονομάζοντας τα γειτονικά στοιχεία ενός κόμβου (δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ανήκει) ως " np " ("Near Panels"), η σχέση των k με τα np για έναν κόμβο j φαίνεται στο σχήμα 3.17. Ορίζονται τα μεγέθη

$$\begin{aligned}
 V_k^p &= (\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} |k^p \\
 F_k^p(\xi, \eta) &= a_{00}^k + a_{01}^k \xi + a_{10}^k \eta + a_{11}^k \xi \eta \\
 S^p(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^4 V_k^p F_k^p \\
 D^p(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^4 \varphi_k^p F_k^p \\
 K^p &= \nabla G \cdot \mathbf{n}^p
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

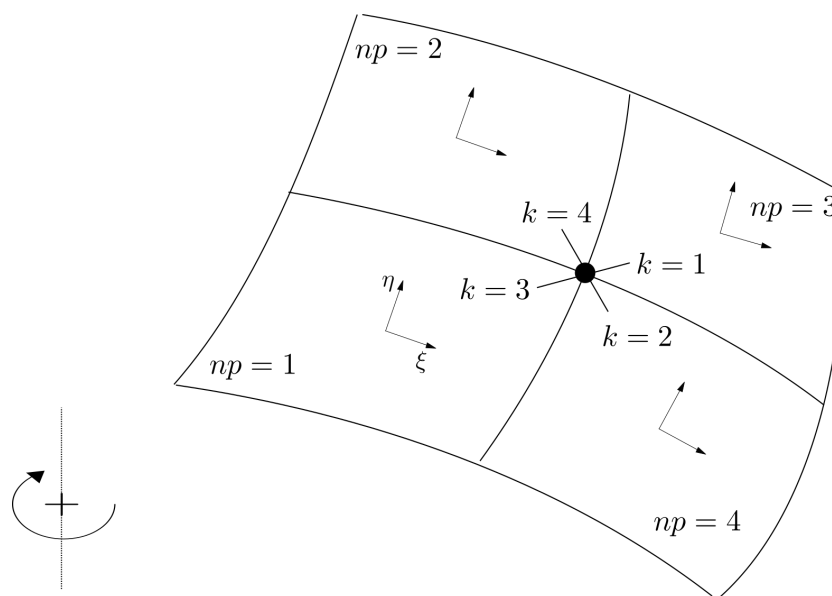
όπου δεν υπονοείται πουθενά άθροιση. Έστω ότι το κάθε στοιχείο έχει επιφάνεια S_p που είναι μέρος της $S_b \cup S_w$ και ότι ο συνολικός αριθμός των συνοριακών στοιχείων για το σώμα και τον ομόρρου είναι aps (All Panels of S_b) και apw (All Panels of Wake) αντίστοιχα. Για ένα συγκεκριμένο σημείο ελέγχου i που ανήκει στην στην S_b η εξίσωση 3.85 γράφεται

$$\begin{aligned}
 & - \sum_p^{aps} \int_{S_p} [S^p G + D^p K^p] dS - \sum_p^{apw} \int_{S_p} D^p K^p dS = (\alpha \varphi - (1 - \alpha) \varphi_\omega)|_i \\
 & \Rightarrow \\
 & - \sum_p^{aps} \int_{S_p} \left[\sum_{k=1}^4 V_k^p F_k^p G + \sum_{k=1}^4 \varphi_k^p F_k^p K^p \right] dS \\
 & - \sum_p^{apw} \int_{S_p} \sum_{k=1}^4 B_k^p F_k^p K^p dS = (\alpha \varphi - (1 - \alpha) \varphi_\omega)|_i
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

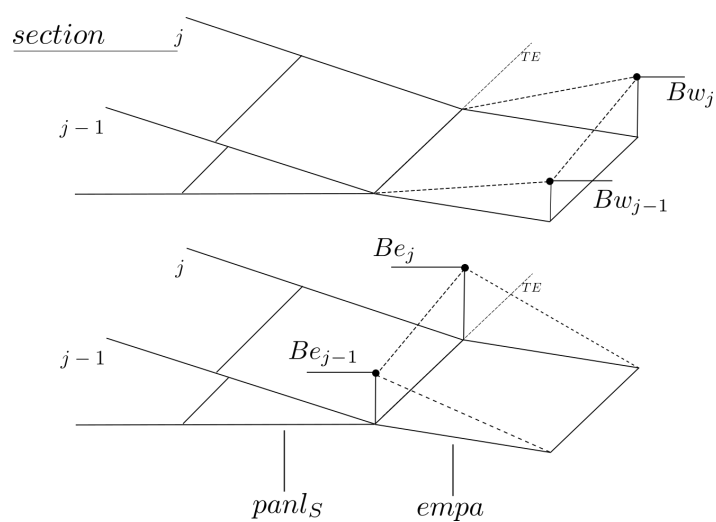
όπου :

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= [B_{e_1} \ B_{e_2} \ \dots \ B_{NCW} \ B_{w_1} \ B_{w_2} \ \dots \ B_{NCW}] = \\
 &= [[\varphi]_1^n \ [\varphi]_2^n \ \dots \ [\varphi]_{NCW}^n \ [\varphi]_1^{n-1} \ [\varphi]_2^{n-1} \ \dots \ [\varphi]_{NCW}^{n-1}]
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

αποτελούν τα πηδήματα του δυναμικού στο τρέχον και το προηγούμενο χρονικό βήμα. Έτσι η επιρροή του κοντινού ομόρρου διαχωρίζεται σε ένα μέρος που είναι άγνωστο (εντάσεων Be_j) και ένα γνωστό (εντάσεων Bw_j), όπως στο σχήμα 3.18.



Σχήμα 3.17: Τα γειτονικά στοιχεία και οι αντίστοιχοι δείκτες ενός βαθμού ελευθερίας. Η φορά σάρωσης φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 3.18: Ο διαχωρισμός της διανομής διπόλων του κοντινού ομόρρου σε άγνωστο και γνωστό μέρος.

Το ζήτημα στην 3.92 είναι να βγουν οι φ_k^p και B_k^p κοινοί παράγοντες ώστε να μπορεί να γραφτεί το αλγεβρικό σύστημα σε μητρική μορφή. Σύμφωνα με το σχήμα 3.17, αν ο $\varphi_j = \varphi_3^{p \leftarrow np=1}$, τότε στη γενική περίπτωση

$$\varphi_j = \varphi_3^{np=1} = \varphi_4^{np=2} = \varphi_1^{np=3} = \varphi_2^{np=4} \quad (3.94)$$

όπου για τυχαίο κόμβο στο "μέσο" του σώματος

$$\begin{aligned} np = 1 &\rightarrow p \Rightarrow \\ np = 2 &\rightarrow p + 1 \\ np = 3 &\rightarrow p + NNB \\ np = 4 &\rightarrow p + NNB + 1 \end{aligned} \quad (3.95)$$

ενώ στην ακμή εκφυγής και στο ακροπερύγιο υπάρχουν οι ανάλογες παραλλαγές. Επειδή τα γειτονικά στοιχεία του καθε κόμβου είναι γνωστά, στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ολικό δείκτη του στοιχείου p στη θέση του np .

Το σημείο-κλειδί είναι ότι όταν ο φ_j βγει κοινός παράγοντας, ουσιαστικά ο συντελεστής του θα είναι η άθροιση των συνεισφορών από τα γειτονικά στοιχεία του ($NP \rightarrow$ Near Panels) όποια και αν είναι αυτά, δηλαδή

$$\begin{aligned} \varphi_j A s_j &\equiv \varphi_j \sum_{S_p}^{NP} \int F_k^p K^p dS, \quad for S_b \\ B_j A w_j &\equiv B_j \sum_{S_p}^{NP} \int F_k^p K^p dS, \quad for S_w \end{aligned} \quad (3.96)$$

και αντίστοιχα για τους όρους πηγών

$$V_j C s_j \equiv V_j \sum_{S_p}^{NP} \int F_k^p G dS, \quad for S_b \quad (3.97)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η 3.92 μπορεί να αναδιαμορφωθεί ώστε η άθροιση να γίνεται ως προς τους κόμβους, μέσω της 3.96 για τους όρους διπόλων και της 3.97 για τους όρους πηγών

$$-\sum_j^{NS} \varphi_j As_j - \sum_j^{NS} V_j Cs_j - \sum_j^{NT} B_j Aw_j = \alpha_i \varphi_i - (1 - \alpha_i) \varphi_{\omega_i}$$

$$\Rightarrow$$

(3.98)

$$\sum_j^{NS} \varphi_j As_j + \alpha_i \varphi_i = -\sum_j^{NT} B_j Aw_j - \sum_j^{NS} V_j Cs_j - (1 - \alpha_i) \varphi_{\omega_i}$$

όπου $NS = NNB * NCW$ όλοι οι κόμβοι του σώματος και $NT = 2 * NCW$ οι κόμβοι του σώματος στην ακμή εκφυγής συν άλλους τόσους του κοντινού ομόρρου. Ο λόγος που η συνεισφορά των βαθμών ελευθερίας του TE μένει στο Β' μέλος είναι ότι η εύρεση του πηδήματος του δυναμικού γίνεται λύνοντας ένα ξεχωριστό σύστημα, όπως θα αναλυθεί παρακάτω. Σε μητρική μορφή η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} & [As_1 \quad As_2 \quad \dots \quad As_{NS}] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{NS} \end{bmatrix} + [0 \quad 0 \quad \dots \quad \alpha_i \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \\ \varphi_{NS} \end{bmatrix} = \\ & - [Aw_1 \quad Aw_2 \quad \dots \quad Aw_{NT}] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{NT} \end{bmatrix} - [Cs_1 \quad Cs_2 \quad \dots \quad Cs_{NS}] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{NS} \end{bmatrix} - (1 - \alpha_i) \varphi_{\omega_i} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Η εξίσωση 3.99 είναι γραμμένη για ένα σημείο ελέγχου i . Γράφοντάς την για όλα τα σημεία ελέγχου

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} As_{1,1} & As_{1,2} & \dots & As_{1,NS} \\ As_{2,1} & As_{2,2} & \dots & As_{2,NS} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ As_{NS,1} & As_{NS,2} & \dots & As_{NS,NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{NS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{NS} \end{bmatrix} = \\
& - \begin{bmatrix} Aw_{1,1} & Aw_{1,2} & \dots & Aw_{1,NT} \\ Aw_{2,1} & Aw_{2,2} & \dots & Aw_{2,NT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Aw_{NT,1} & Aw_{NT,2} & \dots & Aw_{NT,NT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{NT} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} Cs_{1,1} & Cs_{1,2} & \dots & Cs_{1,NS} \\ Cs_{2,1} & Cs_{2,2} & \dots & Cs_{2,NS} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cs_{NS,1} & Cs_{NS,2} & \dots & Cs_{NS,NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{NS} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1-\alpha_{NS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\omega_1} \\ \varphi_{\omega_2} \\ \vdots \\ \varphi_{\omega_{NS}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Οπότε πιο περιεκτικά

$$([AS] + [\alpha])\{\varphi\} = -[Cs][V] - [Aw]\{B\} - [(1-\alpha)]\{\varphi_{\omega}\} \tag{3.101}$$

Στην εξίσωση 3.101 έχει ήδη αρθεί η ιδιομορφία για τους αυτεπαγόμενους όρους στα ολοκληρώματα διπόλων (βλέπε 2.6.3) και το αποτέλεσμα για τυχαίο βαθμό ελευθερίας είναι το γινόμενο του με τη στερεά γωνία σε εκείνη τη θέση. Οπότε στην παραπάνω εξίσωση, ο πίνακας $[AS]$ έχει μηδενική διαγώνιο, καθώς οι αυτεπαγόμενοι όροι έχουν εξαιρεθεί στην ολοκλήρωση, η οποία συμπληρώνεται όπως φαίνεται με την στερεά γωνία. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο και μάλιστα δημιουργεί πίνακα με ισχυρή διαγώνιο. Ο πίνακας αυτός γράφεται

$$[AS] = [As] + [\alpha] \tag{3.102}$$

Στην παραπάνω ανάλυση η ολοκληρωματική εξίσωση γράφτηκε για κάθε σημείο ελέγχου. Είναι όμως επιθυμητό στον διπλό κόμβο της ακμής εκφυγής να λύνεται μια φορά η ολοκληρωματική εξίσωση και μια η συνθήκη Kutta, ενώ η συνθήκη Kelvin επαληθεύεται στους μεταφερμένους κόμβους του κοντινού ομόρρου. Στην πράξη στο παραπάνω σύστημα η εξίσωση που αντιστοιχεί στην ακμή εκφυγής προσεγγιζόμενη από την πλευρά υποπίεσης αντικαθίσταται από μία γραμμική συνθήκη ισότητας.

Αυτό γίνεται διότι οι συνθήκες Kutta-Kelvin επαληθεύονται σε ξεχωριστό σύστημα για λόγους επιτάχυνσης της επίλυσης, καθώς το σύστημα 3.101 έχει υπολογιστικό κόστος ανάλογο του

$NS^2 = (NNB * NCW)^2$. Το πρόβλημα χωρίζεται σε επιμέρους ως εξής. Καταρχάς είναι γνωστό ότι το κομμάτι των πηγών, δηλαδή ότι το $[Cs][V]$, έχει να κάνει με το στατικό πρόβλημα και μόνο, δηλαδή ότι αφορά το πάχος του σώματος, και είναι ανεξάρτητο με το μέρος της λύσης που σχετίζεται με την ανωστικό κομμάτι. Το κομμάτι αυτό παράγει ένα παντού συνεχές δυναμικό επάνω στο σώμα. Συνεχές είναι επίσης και το μέρος της λύσης του επαγόμενου δυναμικού από στροβιλότητα, $[\varphi_\omega](1 - \alpha)$, καθώς το φ_ω είναι συνεχές στην επιφάνεια της πτέρυγας (βλέπε 2.9). Το μέρος που σχετίζεται με το πήδημα του δυναμικού είναι το $[Aw]\{B\}$. Γίνεται έτσι ο διαχωρισμός

$$\begin{aligned}
 1. \quad & [AS] \{S_o\} = - [Cs] [V] = - [C] \\
 2. \quad & [AS] \{S_\omega\} = - [1 - \alpha] [\varphi_\omega] = - [B_\omega] \\
 3. \quad & [AS] \{S_k\} = - [Aw] \{B\} \\
 & S = S_o + S_\omega + S_k
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Τα συστήματα 1., 2., 3. της 3.103 λύνονται με LU -παραγοντοποίηση. Το σύστημα 2. μπορεί να λυθεί αφού είναι γνωστό το διάνυσμα \vec{B} , το οποίο όπως θα δούμε στο 3.4.2 προκύπτει με ικανοποίηση των συνθηκών Kutta-Kelvin. Ο κοντινός ομόρρους θεωρήθηκε προκαθορισμένος οπότε δεν χρειάστηκε η επιπλέον σύγκλιση του.

Η συνθήκη ισότητας θα ισχύει για διπλό κόμβο της ακμής εκφυγής από την πάνω πλευρά, δηλαδή για όλες τις γραμμές $\kappa * NNB$, $\kappa = 1, 2, \dots, NCW$ του συστήματος και έχει για τα επιμέρους προβλήματα τη μορφή

$$\kappa = 1 \Rightarrow \kappa * NNB = NNB$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ AS_{NNB,1} = 1 & 0 & \dots & AS_{NNB,NNB} = -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{o1} \\ \vdots \\ S_{o_{NNB}} \\ \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{NNB} = 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ AS_{NNB,1} = 1 & 0 & \dots & AS_{NNB,NNB} = -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{\omega 1} \\ \vdots \\ S_{\omega_{NNB}} \\ \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vdots \\ B_{\omega_{NNB}} = 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ AS_{NNB,1} = 1 & 0 & \dots & AS_{NNB,NNB} = -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{k1} \\ \vdots \\ S_{k_{NNB}} \\ \vdots \end{bmatrix} = \\
 & - \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Aw_{NNB,1} = 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{NT} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Όπως φαίνεται και παραπάνω, στο σύστημα 3. η συνθήκη δεν είναι άλλη από τον ορισμό των B_e , ενώ για τα 1., 2. η συνθήκη επαληθεύει την συνέχεια των επιμέρους λύσεων S_o, ω επάνω στην S_b .

Τέλος, τα ολοκληρώματα τα οποία απαιτείται να υπολογιστούν για την εύρεση των συντελεστών

των πινάκων είναι αυτά των σχέσεων 3.96 και 3.97. Αυτά μπορούν να γραφτούν στην γενικότερη μορφή

$$I(k, l, m) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{(x_o - \xi)^k (y_o - \eta)^l}{R^m} dS$$

$$R = \sqrt{(x_o - \xi)^2 + (y_o - \eta)^2 + z_o^2}, \quad \mathbf{x}_o \in D$$

$$\Rightarrow$$

$$As_j = \sum_p^{NP} (a_{00} I(0, 0, 1) + a_{10} I(1, 0, 1) + a_{01} I(0, 1, 1) + a_{11} I(1, 1, 1)) |^p \quad (3.105)$$

$$Aw_j = \sum_p^{NP} (a_{00} I(0, 0, 1) + a_{10} I(1, 0, 1) + a_{01} I(0, 1, 1) + a_{11} I(1, 1, 1)) |^p$$

$$Cs_j = \sum_p^{NP} (a_{00} I(0, 0, 3) + a_{10} I(1, 0, 3) + a_{01} I(0, 1, 3) + a_{11} I(1, 1, 3)) |^p$$

όπου για $m = 1$ είναι τα ολοκληρώματα διπόλων, για $m = 3$ τα ολοκληρώματα πηγών, οι συντελεστές είναι το άθροισμα των επιμέρους (π.χ. $a_{00} = \sum_{k=1}^4 a_{00}^k$) και η άθροιση γίνεται για όλα τα γειτονικά panel p του κόμβου j (τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από την ταυτότητα του panel). Οι αναλυτικές λύσεις των ολοκληρωμάτων μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [9], [2], [7].

Ένα σημείο που πρέπει πάντως να τονιστεί, είναι ότι από υπολογιστικής σκοπιάς, οι λύσεις των παραπάνω ολοκληρωμάτων περιλαμβάνουν λογάριθμους και τόξα εφαπτομένης που υπό συνθήκες (όταν λ.χ. οι παρονομαστές τείνουν να μηδενιστούν) μπορούν να προκαλέσουν μεγάλα σφάλματα στον υπολογισμό τους. Οπότε μια ειδική μεταχείριση των λύσεων για την ευστάθεια των υπολογισμών αυτών είναι απαραίτητη.

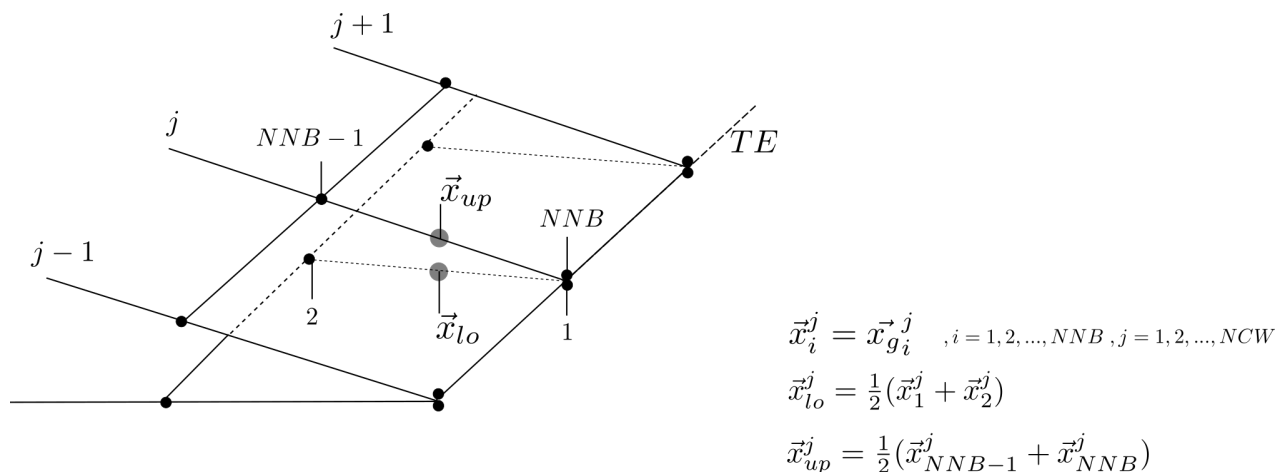
3.4.2 Διακριτοποίηση συνθηκών Kutta-Kelvin

Η συνθήκη Kutta, που λέει ότι η ταχύτητα σε ένα σημείο πρέπει να είναι φραγμένη, ερμηνεύεται σαν μια δυναμική συνθήκη μηδενισμού του πηδήματος της πίεσης. Αυτή η ερμηνεία οδηγεί βέβαια σε μη-γραμμικότητα λόγω του τετραγώνου της ταχύτητας.

Όπως είναι γνωστό, η συνθήκη Kutta παρουσιάζει μια ευαισθησία στην εφαρμογή της. Ενώ η συνθήκη θα πρέπει να εφαρμόζεται αρκετά κοντά στην ακμή εκφυγής, εάν επιλεχθεί ο αναλυτικός υπολογισμός της ταχύτητας, θα πρέπει να ληφθούν κατάλληλα μέτρα (π.χ. συναρτήσεις αποκοπής) έτσι ώστε να αποφεύγεται ο απειρισμός της ταχύτητας εάν υπάρχουν δινοσωλήνες κοντά ή επάνω στο TE. Από την άλλη, αν η ταχύτητα υπολογίζεται με κάποιο σχήμα πεπερασμένων διαφορών μέσω του δυναμικού, το σχήμα αυτό θα πρέπει να εγκυάται την απαιτούμενη ακρίβεια σε εκείνα τα σημεία. Η πύκνωση του πλέγματος κοντά στο TE κατά την χορδική κατεύθυνση συνήθως επιβάλλει έμμεσα και την πύκνωση στην ακτινική κατεύθυνση. Αυτό συμβαίνει γιατί στον αναλυτικό υπολογισμό έχει ση-

μασία η απόσταση μεταξύ των δινοσωλίνων, ενώ στον αριθμητικό επηρεάζεται το σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Προφανώς μεγάλη πυκνωση δεν είναι επιθυμητή για λόγους υπολογιστικού κόστους, καθώς αυξάνει τα παραγόμενα στοιχεία στροβιλότητας. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας ο υπολογισμός ταχυτήτων έγινε αριθμητικά. Παρατηρήθηκε και στην πράξη ότι η μεγάλη πυκνωση του πλέγματος κατά την χορδική κατεύθυνση στην ακμή εκφυγής παρουσίαζε προβλήματα σύγκλισης, ενώ η πυκνωση και στις δύο κατευθύνσεις αύξανε απότομα τον υπολογιστικό χρόνο χωρίς μεγάλη διαφορά στο αποτέλεσμα. Επιλέχθηκαν έτσι πλέγματα όπου τα στοιχεία να μην έχουν πολύ μεγάλο λόγο των κάθετων πλευρών τους και να πυκνώνουν κοντά στο TE σε λογικά πλαίσια.

Το σημείο εφαρμογής της συνθήκης Kutta φαίνεται στο σχήμα 3.19



Σχήμα 3.19: Σημεία εφαρμογής της συνθήκης Kutta (γκρι), \vec{x}_{up} , \vec{x}_{lo} . Τα σημεία αυτά δευσιμένουν μόνο τους εικονιζόμενους βαθμούς ελευθερίας (μαύρο).

Εφαρμόζοντας το θεώρημα διαχωρισμού του Helmholtz για τις πιέσεις στο θεώρημα της ορμής, προκύπτει ([9]) ότι η εξίσωση Bernoulli για το αστρόβιλο πεδίο ροής θα είναι

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} = ct. \quad (3.106)$$

Σε ένα σχετικό σύστημα αναφοράς, αλλά με βάση τις απόλυτες ταχύτητες, η 3.106 αναδιατυπώνεται

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p_o}{\rho} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b = ct. \quad (3.107)$$

όπου \mathbf{U}_b η ταχύτητα του σώματος. Εφαρμόζοντας την 3.107 στα σημεία \vec{x}_{up} , \vec{x}_{lo} και μετά από πράξεις καταλήγει κανείς

$$\frac{\partial \llbracket \varphi \rrbracket}{\partial t} + \llbracket \frac{\nabla \varphi}{2} \cdot (\nabla \varphi + (\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b)) \rrbracket = -\llbracket \mathbf{U}_a \cdot (\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b) \rrbracket \quad (3.108)$$

$$\mathbf{U}_a = \mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega$$

όπου εδώ το πήδημα στα μεγέθη είναι διαφορά από την θέση \vec{x}_{up} στην θέση \vec{x}_{lo} . Οι βαθμοί ελευθερίας που εμπλέκονται είναι βέβαιο το δυναμικό σε όλους του γειτονικούς κομβους, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.19. Γραμικοποιώντας την 3.108 θα προκύψει το επιθυμητό γραμμικό αλγεβρικό σύστημα. Η γραμμικοποίηση σε συγκεκριμένο χρονικό βήμα n γίνεται θεωρώντας τον ένα όρο ταχύτητας $\nabla \varphi^m$ άγνωστο και τον άλλο $\nabla \varphi^{m-1}$ γνωστό, ως εξής

$$\frac{\partial \llbracket \varphi \rrbracket}{\partial t} + \llbracket \frac{\nabla \varphi^m}{2} \cdot (\nabla \varphi^{m-1} + (\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b)) \rrbracket = -\llbracket \mathbf{U}_a \cdot (\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b) \rrbracket \quad (3.109)$$

όπου m ο τρέχον κύκλος της επαναληπτικής διαδικασίας και $m - 1$ ο προηγούμενος. Η αρχικοποίηση γίνεται με τις τιμές του προηγούμενου χρονικού βήματος n , ενώ στο πρώτο χρονικό βήμα δίνονται μηδενικές τιμές.

Για να είναι εφικτή η διακριτοποίηση της 3.109 μένει να περιγραφεί ο τρόπος υπολογισμού της ταχύτητας έτσι ώστε να γίνει η συσχέτισή της με το δυναμικό στους κόμβους. Οι τιμές του δυναμικού στον κόμβο k του στοιχείου p είναι οι φ_k^p , οπότε αυτό υπολογίζεται μέσω της σχέσης διγραμμικής κατανομής

$$\varphi(\xi, \eta)^p = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \begin{bmatrix} a_{00}^1 & a_{00}^2 & a_{00}^3 & a_{00}^4 \\ a_{10}^1 & a_{10}^2 & a_{10}^3 & a_{10}^4 \\ a_{01}^1 & a_{01}^2 & a_{01}^3 & a_{01}^4 \\ a_{11}^1 & a_{11}^2 & a_{11}^3 & a_{11}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^p \\ \varphi_2^p \\ \varphi_3^p \\ \varphi_4^p \end{bmatrix}, \quad \forall p$$

$$\Rightarrow \quad (3.110)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] [RMG] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}, \quad \text{for some } p$$

Η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο επάνω στο p μπορεί να υπολογιστεί με παραγωγή ως προς ξ , η , το οποίο είναι στην περίπτωση μας ένα ορθομοναδιαίο σύστημα συντεταγμένων, άρα

$$\nabla_{\vec{\xi}} \varphi(\xi, \eta) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad \eta] [RMG] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \vec{e}_{\xi} + [0 \quad 0 \quad 1 \quad \xi] [RMG] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \vec{e}_{\eta} \quad (3.111)$$

Προφανώς η ταχύτητα κατά ζ είναι μηδενική εξ ορισμού της φ . Τα μοναδιαία \vec{e}_{ξ} , \vec{e}_{η} είναι εκφρασμένα στο γενικό-αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, οπότε η σχέση 3.111 είναι συμβατή με

την 3.109.

Εισάγοντας έτσι τις τοπικές συντεταγμένες ξ, η του σημείου υπολογισμού της ταχύτητας στα στοιχεία που το περιλαμβάνουν και παίρνοντας τον μέσο όρο λαμβάνουμε μια αλγεβρική σχέση που εμπλέκει τους γειτονικούς βαθμούς ελευθερίας. Για παράδειγμα, στο σχήμα 3.19, ο υπολογισμός της ταχύτητας στο \vec{x}_{l_0} περιλαμβάνει τα 2 στοιχεία στα οποία ανήκει το \vec{x}_{l_0} και εμπλέκει τους $4 + 4 - 2 = 6$ γειτονικούς βαθμούς ελευθερίας (οι δύο είναι κοινοί). Υπολογίζοντας την ταχύτητα από τα δύο στοιχεία ξεχωριστά, εισάγεται στην εξίσωση 3.108 ο μέσος όρος τους.

Γράφεται έτσι διακριτοποιημένη εξίσωση Kutta για κάθε αεροτομή (section) της πτέρυγας. Η εξίσωση Kelvin εκράζεται απλώς απαιτώντας

$$Bw_j^n = Be_j^{n-1}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, NCW \quad (3.112)$$

Η διακριτοποιημένη Kutta είναι γραμμένη ως προς τους βαθμούς ελευθερίας, μπορεί όμως να γραφτεί ως προς τους αγνώστους \vec{B} . Αν με $[AK1]$ συμβολίσουμε τον πίνακα διάστασης $(2 * NCW) \times (NNB * NCW)$ στον οποίο είναι γραμμένες οι Kutta και Kelvin μέσω της 3.108 για κάθε σημείο εφαρμογής τους και ως προς S_k (βλέπε 3.4.1), τότε

$$[AK1] \{S_k\} = [B_k] \quad (3.113)$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η S_k για την οποία είναι γραμμένο το παραπάνω σύστημα είναι μερική λύση του δυναμικού σύμφωνα με την 3.103. Το μέρος της λύσης $S_o + S_\omega$ θεωρείται γνωστό σε αυτό το σημείο και οι αντίστοιχοι όροι μεταφέρονται στο B' μέλος B_k . Από την 2. της 3.103 \Rightarrow

$$\begin{aligned} [AK1] \{S_k\} &= - [AK1] [AS]^{-1} [Aw] \{B\} \equiv [AS_k] \{B\} \\ \Rightarrow \\ [AS_k] \{B\} &= [B_k] \end{aligned} \quad (3.114)$$

Το τελευταίο σύστημα είναι διαστάσεων $(2 * NCW) \times (2 * NCW)$ και είναι αυτό για το οποίο γίνεται ο εσωτερικός κύκλος επαναλήψεων. Οι πρώτες NCW εξισώσεις είναι οι Kutta και οι επόμενες οι Kelvin, όλες ως προς \vec{B} . Έτσι κλείνει το σύστημα 3.103 και μέσω αυτού και της 3.114 υπολογίζεται η λύση σε κάθε χρονικό βήμα.

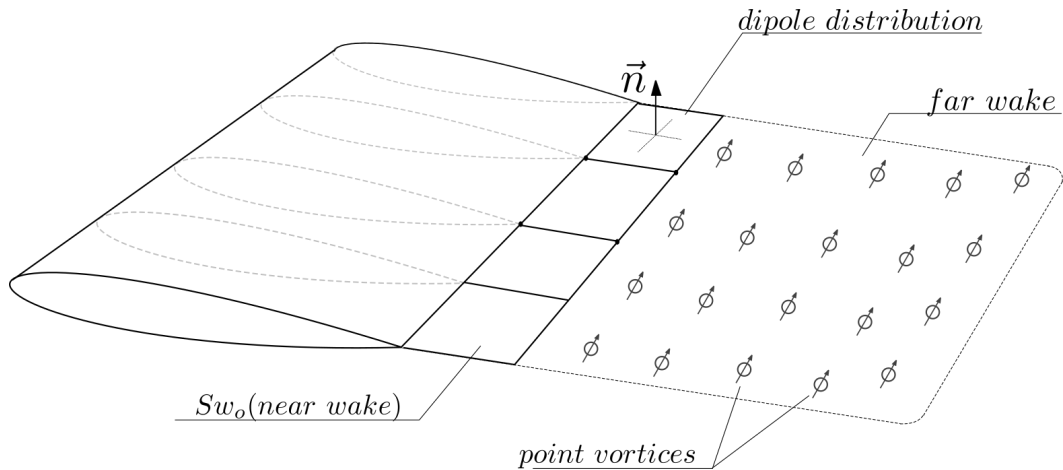
3.5 Η δημιουργία των στοιχείων στροβιλότητας

Εώς αυτό το σημείο, η επίδραση του ομόρρου θεωρήθηκε ότι περιλαμβάνεται σαν μια διανομή διπόλων στο φύλλο στροβιλότητας S_w του οποίου η έκλυση επιβάλεται στην ακμή εκφυγής.

Η μέθοδος στοιχείων στροβιλότητας εφαρμόζεται ουσιαστικά στο τέλος κάθε χρονικού βήματος όπου η λύση για το δυναμικό, άρα και αντίστοιχες εντάσεις των διανομών διπόλων του ομόρρου $Be_j^n = \llbracket \phi \rrbracket_j^n$ είναι γνωστές σε κάθε κόμβο έκλυσης j . Η κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι η αναπαράσταση του μακρινού ομόρρου με διακριτά στοιχεία, εγκαταλείποντας την θεώρησή του σαν συνεχή οντότητα. Έτσι μία σειρά συνοριακών στοιχείων του φύλλου στροβιλότητας, αντικαθίσταται σε κάθε χρονικό βήμα από διακριτούς σημειακούς στροβίλους οι οποίοι είναι ελεύθερα υλικά σημεία (σχήμα 3.20). Η διανεμημένη στροβιλότητα συγκεντρώνεται λοιπόν στους σημειακούς στροβίλους, οι οποίοι έχουν ένταση και ροπή που καθορίζονται από την ολοκλήρωση των αντίστοιχων μεγεθών των διανομών

$$\Omega_p(t) = \int_{D_p} \omega(\mathbf{x}, t) dD \quad (3.115)$$

$$\Omega_p(t) \times \mathbf{Z}_p(t) = \int_{D_p} \omega(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{x} dD$$



Σχήμα 3.20: Η προσέγγιση του μακρινού ομόρρου από σημειακούς στροβίλους με την πάροδο του χρόνου. Ο κοντινός ομόρρος διατηρείται σαν φύλλο στροβιλότητας S_{w_o} .

Η παραπάνω προσέγγιση γίνεται εφικτή μέσω του ορισμού της στροβιλότητας που φέρουν αυτοί οι σημειακοί στρόβιλοι σαν μια γενικευμένη συνάρτηση σημειακών συναρτήσεων Dirac.

$$\omega(\mathbf{x}_o, t) \approx \sum_p \Omega(t) \delta(\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p(t)) \quad (3.116)$$

Η ταχύτητα που επάγει ένα πεπερασμένο σύνολο σημειακών στροβίλων είναι τότε μέσω του νόμου Biot-Savart

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}_o, t) = \sum_p \frac{\boldsymbol{\Omega}_p(t) \times (\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p(t))}{4\pi|\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p(t)|^3} \quad (3.117)$$

ενώ η χρονική εξέλιξη της έντασης $\boldsymbol{\Omega}_p(t)$ και της θέσης $\mathbf{Z}_p(t)$ των υλικών σημείων δίνεται

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Z}_p(t)}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{Z}_p(t), t) \\ \frac{d\boldsymbol{\Omega}_p(t)}{dt} &= (\boldsymbol{\Omega}_p(t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{Z}_p(t), t) \end{aligned} \quad (3.118)$$

όπου $\mathbf{u}(\mathbf{Z}_p(t), t)$ η συνολική ταχύτητα του πεδίου στην θέση του στοιχείου $\mathbf{Z}_p(t)$ εκείνη τη χρονική στιγμή.

Οι παραπάνω ιδέες υλοποιούνται αποτελεσματικά μέσω της μικτής διατύπωσης πηγών-διπόλων με επιτυχία. Για την υλοποίησή τους μέσω της άμεσης διατύπωσης στα πλαίσια της εργασίας, λαμβάνονται υποψιν δύο απαιτήσεις:

1. Η κατανομή του πηδήματος του δυναμικού στον κοντινό ομόρρου είναι διγραμμική σε κάθε στοιχείο και
2. Η συνέχεια της κατανομής αυτής πρέπει να διατηρείται.

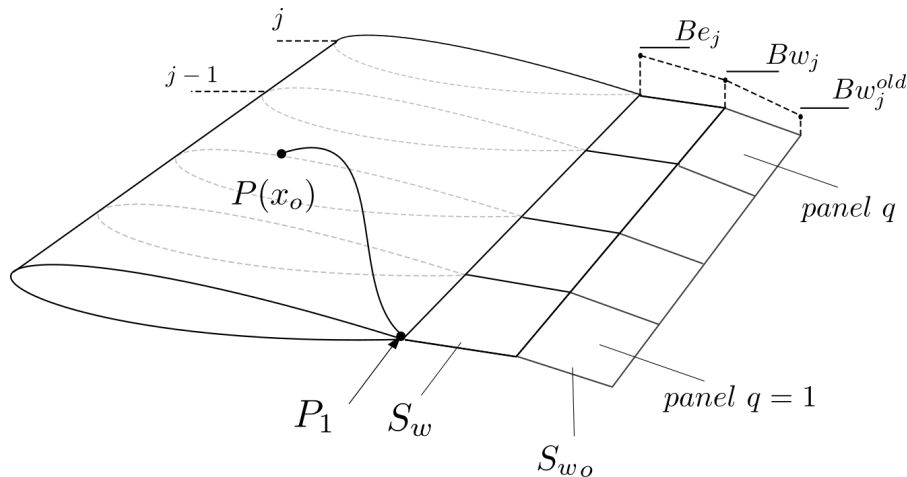
Επίσης θεωρείται ότι το επαγόμενο δυναμικό από τα στοιχεία στροβιλότητας προσεγγίζεται ικανοποιητικά με την ολοκλήρωση της επαγόμενης ταχύτητας, σύμφωνα με τη σχέση 3.131.

3.5.1 Η αναπαράσταση του μακρινού ομόρρου

Θεωρώντας ότι το πρώτο χρονικό βήμα έχει ολοκληρωθεί και η λύση είναι γνωστή, ο ομόρρος μεταφέρεται (μέσω της 2.18) όπως στο σχήμα 3.21.

Η εξίσωση για το δυναμικό σε ένα σημείο υπολογισμού $\mathbf{x}_o \in S_b$ τότε γράφεται

$$\begin{aligned} \alpha\varphi - (1 - \alpha)\varphi_\omega &= - \int_{S_b} [G(\mathbf{U}_\infty + \mathbf{u}_\omega - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + \varphi \partial_n G] dS \\ &\quad - \int_{S_w} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS - \int_{S_{w_o}} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS \end{aligned} \quad (3.119)$$



Σχήμα 3.21: Η μεταφερμένη επιφάνεια S_{w_o} σε σχέση με την S_w , η αρίθμηση των στοιχείων q επάνω της και η καμπύλη ολοκλήρωσης της ταχύτητας από P_1 σε $P(x_o)$

Έστω $A \equiv \int_{S_{w_o}} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS$, C μια καμπύλη που ξεκινά από το σημείο P_1 , όπου το δυναμικό θεωρείται δεδομένο, και καταλήγει σε σημείο υπολογισμού $P(x_o)$ και q ένα στοιχείο της S_{w_o} . Τότε ο όρος A γράφεται

$$\begin{aligned}
 A &= \varphi_\mu(P_1) + \int_{P_1}^P \mathbf{u}_\mu(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \varphi_\mu(P_1) + \int_{P_1}^P \left(\int_{S_{w_o}} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{K} dS + \oint_{\partial S_{w_o}} \boldsymbol{\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\
 &= \varphi_\mu(P_1) + \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q^Q \left(\int_{S_{w_q}} \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{K} dS + \oint_{\partial S_{w_q}} \boldsymbol{\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\
 &= \varphi_\mu(P_1) + \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q^Q \left(\mathbf{u}_\omega^q(\mathbf{x}) + \oint_{\partial S_{w_q}} \boldsymbol{\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\
 &= \varphi_\mu(P_1) + \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q^Q \mathbf{u}_\omega^q(\mathbf{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl + \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q^Q \oint_{\partial S_{w_q}} \boldsymbol{\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

όπου Q είναι όλα τα panel της S_{w_o} και $\mathbf{u}_\omega^q(\mathbf{x})$ η επαγόμενη ταχύτητα επιφανειακής στροβιλότητας $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times \nabla \mu$ από το στοιχείο q σε σημείο της καμπύλης \mathbf{x} . Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους είναι ο

$$B \equiv \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q^Q \mathbf{u}_\omega^q(\mathbf{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{P_1}^P \mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \phi_\omega(P) - \phi_\omega(P_1) \tag{3.121}$$

Σε κάθε στοιχείο στροβιλότητας p αντιστοιχεί η ένταση $\boldsymbol{\Omega}_p$ που προκύπτει από την ολοκλήρωση της επιφανειακής στροβιλότητας του αντίστοιχου panel q . Θεωρούμε λοιπόν ότι η επαγόμενη ταχύτητα από επιφανειακή στροβιλότητα ενός στοιχείου q (panel) προσεγγίζεται από την επαγόμενη

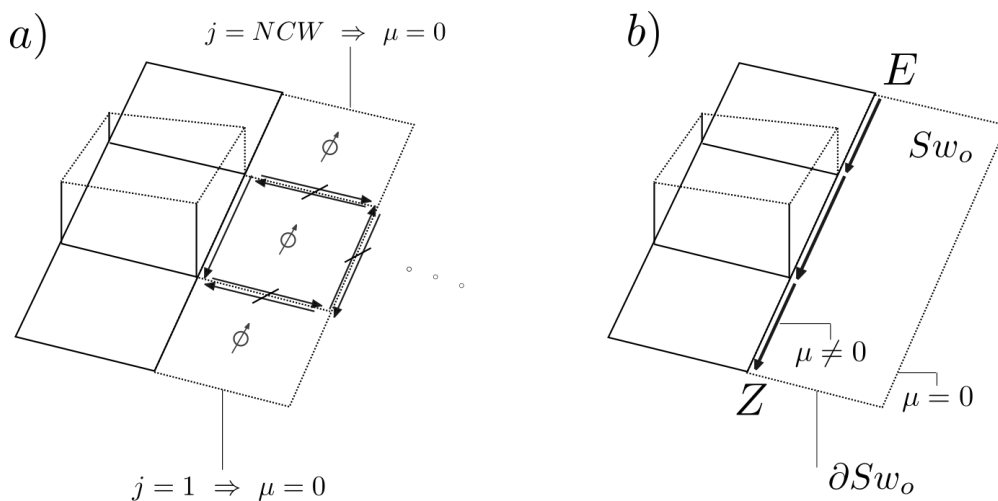
ταχύτητα ενός σημειακού στοιχείου p (particle) στην αρχική θέση του $\mathbf{Z}_p(t_o)$

$$\mathbf{u}_\omega^p(\mathbf{x}_o) \approx \mathbf{u}_\omega^q(\mathbf{x}_o) \quad (3.122)$$

Η επαγόμενη ταχύτητα από το σύνολο των στοιχείων στροβιλότητας θα δίνεται από την 3.117.

Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης ουσιαστικά αντιστοιχεί στις επαγωγές των δινοσωλήνων στα σύνορα των στοιχείων q . Για όλα τα panel της Sw_o , οι εσωτερικοί επικαμπύλιοι όροι θα αλληλοαναιρεθούν λόγω συνέχειας, ενώ οι όροι για $j = 1, j = NCW$ είναι μηδενικοί επειδή η κυκλοφορία ξεκινάει και καταλήγει στο μηδέν στα άκρα της πτέρυγας (σχήμα 3.22). Επίσης αφού είμαστε στο τέλος του πρώτου βήματος, μηδενικής έντασης θα είναι και οι δινοσωλήνες στο πίσω μέρος της Sw_o (σε επόμενα χρονικά βήματα η διαδικασία είναι ανάλογη), άρα

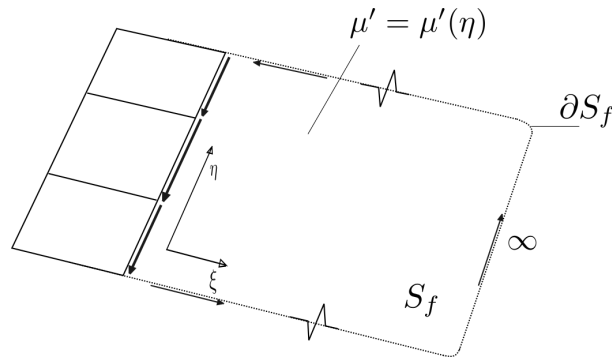
$$\begin{aligned} C &\equiv \int_{P_1}^P \left\{ \sum_q \oint_{\partial Sw_q} \mu \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right\} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \int_{P_1}^P \left(\oint_{\partial Sw_o} \mu \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\ &= \int_{P_1}^P \left(\int_E^Z \mu \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dl \end{aligned} \quad (3.123)$$



Σχήμα 3.22: a) Η αλληλοαναιρέση των δινοσωλήνων και τα στοιχεία στροβιλότητας από επιφανειακή στροβιλότητα, b) ο δινοσωλήνας μη μηδενική έντασης που απομένει στο τμήμα EZ

Εφόσον η μ στην 3.123 παίρνει μηδενικές τιμές εκτός του τμήματος EZ κατά την επικαμπύλια ολοκλήρωση (σχήμα 3.22), ορίζοντας μία συνάρτηση μ' στο πεδίο ορισμού S_f (σχήμα 3.23) η οποία παίρνει τις ίδιες τιμές με την μ στο EZ και μεταβάλλεται μόνο κατά η , το θεώρημα του Hess για την μ' στην S_f δίνει

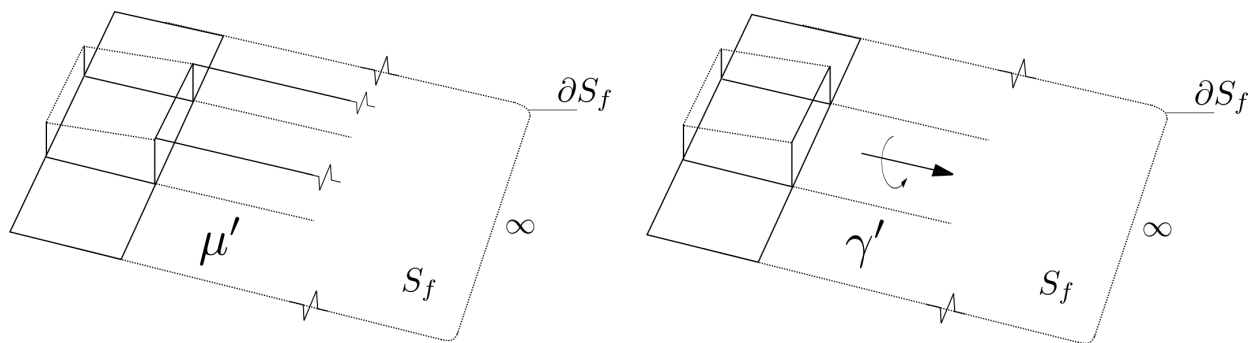
$$\begin{aligned}
\int_{S_f} \mu' \nabla_o (\partial_n G) dS &= \int_{S_f} (\mathbf{n} \times \nabla \mu') \times \mathbf{K} dS + \oint_{\partial S_f} \mu' \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl \Rightarrow \\
\oint_{\partial S_f} \mu' \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl &= \int_{S_f} \mu' \nabla_o (\partial_n G) dS - \int_{S_f} (\mathbf{n} \times \nabla \mu') \times \mathbf{K} dS \Rightarrow \\
\int_E^Z \mu' \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl &= \int_{S_f} \mu' \nabla_o (\partial_n G) dS - \int_{S_f} (\mathbf{n} \times \nabla \mu') \times \mathbf{K} dS
\end{aligned} \tag{3.124}$$



Σχήμα 3.23: Το πεδίο εφαρμογής S_f του θεωρήματος του Hess για την μ' που μεταβάλλεται μόνο κατά η

Όμως αφού $\int_E^Z \mu' \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl = \int_E^Z \mu \mathbf{s} \times \mathbf{K} dl$, αντικαθιστώντας την 3.124 στην 3.123 προκύπτει

$$\begin{aligned}
C &= \int_{P_1}^P \left(\int_{S_f} \mu' \nabla_o (\partial_n G) dS - \int_{S_f} (\mathbf{n} \times \nabla \mu') \times \mathbf{K} dS \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \\
&= \int_{P_1}^P \mathbf{u}_{\mu'}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} dl - \int_{P_1}^P \left(\int_{S_f} (\mathbf{n} \times \nabla \mu') \times \mathbf{K} dS \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \\
&= \phi_{\mu'}(P(\mathbf{x}_o)) - \phi_{\mu'}(P_1) - \int_{P_1}^P \mathbf{u}_{\gamma'} \cdot \boldsymbol{\tau} dl
\end{aligned} \tag{3.125}$$



Σχήμα 3.24: Οι ημάπειρες διανομές διπόλων και επιφανειακής στροβιλότητας που προκύπτουν από την 3.124. Οι εντάσεις μεταβάλλονται κατά το εκπέτασμα και μόνο.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$A = B + C = \phi_{\omega}(P) + \phi_{\mu'}(P) - \int_{P_1}^P \mathbf{u}_{\gamma'} \cdot \boldsymbol{\tau} dl + \varphi_{\mu}(P_1) - \phi_{\omega}(P_1) - \phi_{\mu'}(P_1) \quad (3.126)$$

Οι όροι που προέκυψαν αντιστοιχούν στις επαγωγές μιας ημιάπειρης διπόλων μ' και μιας ημιάπειρης διανομής επιφανειακής στροβιλότητας γ' που μεταβάλλονται μόνο κατά η . Ο όρος επιφανειακής στροβιλότητας που προέκυψε έρχεται σε συνέπεια με το γεγονός ότι όταν αντικαταστάθηκε η επαγωγή του δινοσωλήνα EZ από την επαγωγή διπόλων μ' , προστέθηκε στο σύστημα επιπλέον στροβιλότητα μέτρου $\frac{\partial \mu}{\partial \eta}$, η οποία τώρα αφαιρείται.

Σημαντικό είναι να γίνει ξεκάθαρο ότι αυτές οι επαγωγές είναι υπολογιστικό ισοδύναμο του όρου C και δεν είναι πραγματικές υλικές επιφάνειες. Ουσιαστικά έγινε αντικατάσταση της επαγωγής δυναμικού από δινοσωλήνα του όρου C με δυναμικό διπόλων και επιφανειακής στροβιλότητας. Έτσι διατηρήθηκε η συνέχεια από άποψη εντάσεων πηδήματος δυναμικού στον ομόρρο και ταυτόχρονα αποφεύχθηκε ο υπολογισμός επαγωγής από τον δινοσωλήνα στο EZ . Ο υπολογισμός αυτός δίνει ως γνωστόν ταχύτητες που τείνουν στο άπειρο όταν το σημείο υπολογισμού τους είναι πολύ κοντά του, πράγμα το οποίο οδηγεί στην αναγκαστική επιβολή συναρτήσεων αποκοπής.

Αντικαθιστώντας τον όρο A στην 3.119 λαμβάνουμε

$$\alpha\varphi - (1 - \alpha)\varphi_{\omega} = - \int_{S_b} [G(\mathbf{U}_{\infty} + \mathbf{u}_{\omega} - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + \varphi \partial_n G] dS - \int_{S_w} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS - A$$

\Rightarrow

$$\alpha\varphi - (1 - \alpha)\varphi_{\omega} = - \int_{S_b} [G(\mathbf{U}_{\infty} + \mathbf{u}_{\omega} - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + \varphi \partial_n G] dS - \int_{S_w} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS - \varphi_{\omega} + \varphi_{\mu'} - \int_{P_1}^P \mathbf{u}_{\gamma'} \cdot \boldsymbol{\tau} dl$$

\Rightarrow

$$\alpha\varphi = - \int_{S_b} [G(\mathbf{U}_{\infty} + \mathbf{u}_{\omega} - \mathbf{U}_b) \cdot \mathbf{n} + \varphi \partial_n G] dS - \int_{S_w} [[\varphi]]_w \partial_{n_w} G dS - \alpha\varphi_{\omega} + \varphi_{\mu'} - \varphi_{\gamma'}$$

(3.127)

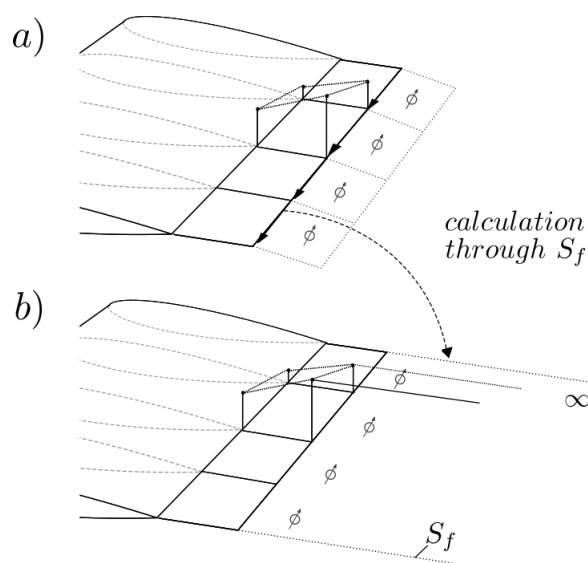
Ο όρος $\varphi_{\mu'}$ στην παραπάνω εξίσωση υπολογίζεται εύκολα αφού είναι επαγόμενο δυναμικό από

γνωστή διανομή διπόλων. Η επιφάνεια S_f η οποία επάγει αυτό το δυναμικό θεωρήθηκε ότι είναι παντού παράλληλη στο πεδίο ταχύτητας της U_∞ . Ο όρος $\varphi_{\gamma'}$ μπορεί να υπολογιστεί με ολοκλήρωση της επαγόμενης ταχύτητας από τη διανομή επιφανειακής στροβιλότητας της S_f , όπως ακριβώς γίνεται για το φ_ω . Τα σημεία υπολογισμού αυτών των διανομών είναι επάνω στην πτέρυγα και ως εκ τούτου έξω από την S_f , άρα οι επαγωγές υπολογίζονται χωρίς προβλήματα απειρισμού.

Από από υπολογιστική σκοπιά, η εξίσωση 2. του συστήματος 3.103 μπορεί να γραφτεί εναλλακτικά

$$2.' \quad [AS] \{S_\omega\} = - [\alpha] [\varphi_\omega] + [I][\varphi_{\mu'} - \varphi_{\gamma'}] = - [B'_\omega] \quad (3.128)$$

Συνοψίζοντας, ενώ ουσιαστικά η προσέγγιση του ομόρρου είναι αυτή του σχήματος 3.25 a), ο υπολογισμός για τους επικαμπύλιους όρους του κοντινού ομόρρου γίνεται με τον ισοδύναμο τρόπο b). Η συγκεκριμένη προσέγγιση παρήγαγε ευσταθή αποτελέσματα για το συγκεκριμένο πρόβλημα.



Σχήμα 3.25: Ο τρόπος υπολογισμού των επικαμπύλιων όρων μέσω επιφανειακών όρων διανεμημένων στην ημίαιρη επιφάνεια S_f .

3.6 Υπολογισμός φορτίων και άλλων μεγεθών

3.6.1 Υπολογισμός στερεάς γωνίας

Η στερεά γωνία κάθε κόμβου της γεωμετρίας του σώματος υπολογίζεται εύκολα θέτοντας στην ολοκληρωματική εξίσωση $\varphi \equiv 1, \forall \mathbf{x}_s \in S_b$. Έτσι η εξίσωση εκφυλίζεται στην

$$\alpha(\mathbf{x}_s) = - \int_{S_b} \partial_n G dS = \int_{S_b} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{n}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^3} dS, \quad \forall \mathbf{x}_s \in S_b \quad (3.129)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το σημείο ιδιομορφίας \mathbf{x}_s έχει εξαιρεθεί, οπότε ουσιαστικά η στερεά γωνία εκεί υπολογίζεται από τις συνεισφορές όλων των υπόλοιπων κόμβων. Έτσι σε μία γραμμή του πίνακα AS που αντιστοιχεί σε έναν κόμβο i , αθροίζοντας τους συντελεστές επιρροής όλων των άλλων κόμβων λαμβάνουμε την στερεά γωνία στον i .

$$\alpha_i = \sum_{i \neq j} AS_{i,j}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, NNB * NCW \quad (3.130)$$

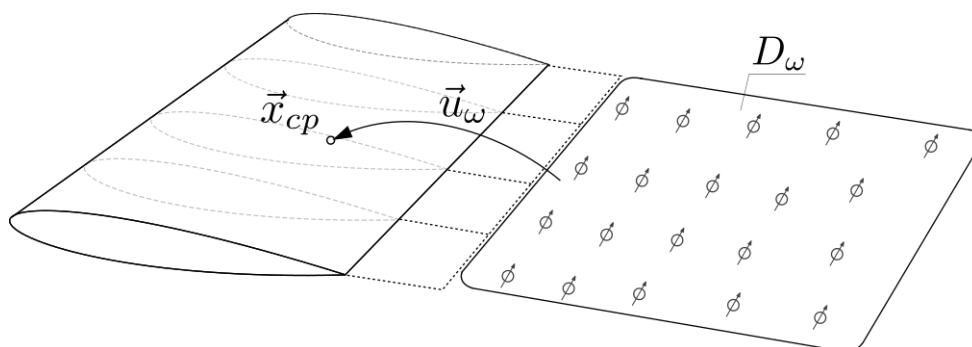
Η στερεά γωνία αποθηκεύεται στο διάνυσμα $SolidAngle(i)$, $i = 1, 2, \dots, NNB * NCW$. Ο υπολογισμός της γίνεται στο μηδενικό χρονικό βήμα και απαιτείται η γεωμετρία να είναι κλειστή (δηλαδή με μηδενικό κενό στην ακμή εκφυγής και κλειστά ακροπερύγια). Αφού υπολογιστεί, αποθηκεύεται αυτόματα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν δεδομένο για οποιοδήποτε υπολογισμό που αφορά την ίδια γεωμετρία, αν αυτή θεωρηθεί απαραμόρφωτη.

3.6.2 Υπολογισμός επαγόμενου δυναμικού από στροβιλότητα

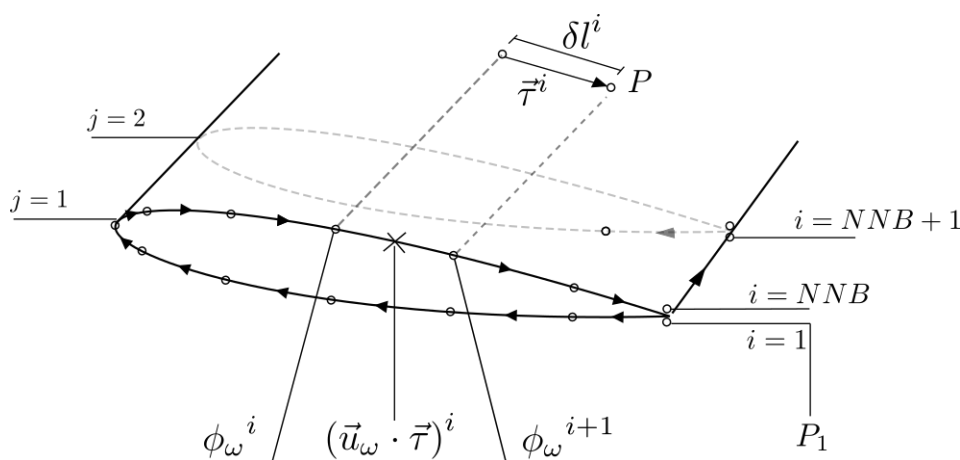
Ένας εύκολος τρόπος υπολογισμού του φ_ω στην πράξη είναι με επικαμπύλια ολοκλήρωση της επαγόμενης ταχύτητας, \mathbf{u}_ω που επάγει η στήριξη D_ω σε μια καμπύλη πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία ελέγχου. Υπενθυμίζεται ότι στην στήριξη θεωρείται πλέον ότι ανήκουν μόνο τα στοιχεία στροβιλότητας (σχήμα 3.26). Η εν λόγω διαδικασία μπορεί να γίνει αριθμητικά εφόσον είναι γνωστή η επαγόμενη ταχύτητα

$$\begin{aligned} \varphi_\omega(P) &= \int_{P_1}^{P(\mathbf{x}_o)} \mathbf{u}_\omega \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \varphi_\omega(P_1) + \int_0^{P(\mathbf{x}_o)} \mathbf{u}_\omega \cdot \boldsymbol{\tau} dl \\ &\rightarrow \\ \varphi_\omega(P) &= \varphi_\omega(P_1) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_\omega \cdot \boldsymbol{\tau})^i \delta l^i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad N = 1, 2, \dots, NNB * NCW \end{aligned} \quad (3.131)$$

όπου P_1 το σημείο από το οποίο ξεκινάει η ολοκλήρωση και P ένα τυχαίο σημείο ελέγχου πάνω στην μονοπαραμετρική καμπύλη που διατρέχει την πτέρυγα όπως στο σχήμα 3.27. Το σημείο P_1 επιλέγεται να είναι το πρώτο σημείο ελέγχου και το δυναμικό φ_ω παίρνει εκεί μια αρχική τιμή ίση με το μηδέν, καθώς είναι πάντα η κλίση του που μας ενδιαφέρει. Για κάθε επόμενο σημείο ελέγχου το φ_ω υπολογίζεται εφόσον η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας \vec{u}_ω στο μέσο μεταξύ δύο κόμβων, το μήκος από κόμβο σε κόμβο και το δυναμικό φ_ω του προηγούμενου κόμβου είναι γνωστά. Η καμπύλη ολοκλήρωσης καθώς και τα μεγέθη τα οποία αναφέρθηκαν φαίνονται στο σχήμα 3.27.



Σχήμα 3.26: Η επαγόμενη ταχύτητα \vec{u}_ω από τα στοιχεία στροβιλότητας σε ένα σημείο ελέγχου στην πτέρυγα



Σχήμα 3.27: Ο υπολογισμός του δυναμικού φ_ω στους κόμβους με επικαμπύλια ολοκλήρωση

Ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται στην αρχή κάθε χρονικού βήματος καθώς οι επαγόμενες ταχύτητες από τα στοιχεία στροβιλότητας μπορούν να υπολογιστούν άμεσα, αφού οι εντάσεις τους είναι γνωστές. Υπενθυμίζεται επίσης ότι το φ_ω είναι συνεχές επάνω στην επιφάνεια S , οπότε όποια διαφορά προκύψει στις υπολογισμένες τιμές του στον διπλό κόμβο της ακμής εκφυγής είναι λόγω αριθμητικών σφαλμάτων και επιβάλεται ο μηδενισμός της.

Τέλος, ο υπολογισμός του επαγόμενου δυναμικού από επιφανειακή στροβιλότητα που προέκυψε στο σχήμα που αναλύθηκε στην ενότητα 3.5 πραγματοποιείται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

3.6.3 Υπολογισμός Πίεσεων

Στην παρούσα μεθοδολογία ο υπολογισμός των πιέσεων ήταν ανεξάρτητος από την πρόλεξη του πεδίου ροής και γινόταν αφού ήταν γνωστή η λύση σε κάθε χρονικό βήμα, μέσω μιας παραπάνω εξίσωσης. Στην εξίσωση αυτή γίνεται διαχωρισμός της πίεσης του αστρόβιλου (δυναμικό φ) και του στροβιλού (particles) πεδίου

$$P(\mathbf{x}, t) = P_{\Phi}(\mathbf{x}, t) + P_{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (3.132)$$

Για το αστρόβιλο μέρος του πεδίου $P_{\Phi}(\mathbf{x}, t)$, γίνεται ολοκλήρωση του θεωρήματος της ορμής και προκύπτει η εξίσωση Bernoulli ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα $\mathbf{U}_b(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{P_{\Phi}}{\rho} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{U}_b &= c(t), \\ \Phi &= \varphi + \varphi_{\infty} \end{aligned} \quad (3.133)$$

όπου $c(t)$ μια σταθερά που προκύπτει από την παραπάνω έκφραση για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Προσοχή πρέπει να δίνεται στο σύστημα αναφοράς που γίνονται αυτοί οι υπολογισμοί. Μέσω της σχετικής ταχύτητας $\mathbf{u}_r = \mathbf{u} - \mathbf{U}_b$ και διαχωρίζοντας επίσης την πίεση p_{Φ} στο μόνιμο και το μη-μόνιμο μέρος της προκύπτει μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} P_{st} + P_{\infty} &= \frac{1}{2}(u^2 - U_b^2 - u_r^2) \\ P_{unst} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\infty}}{\partial t} \\ P_{\omega} &= \sum_p^{NVR} \mathbf{u}_{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}_p \frac{(\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p)}{4\pi|\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p|^3} \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$P_{\Phi} = P_{st} + P_{unst} \Rightarrow$$

$$P = P_{\Phi} + P_{\omega}$$

όπου NVR το τρέχον πλήθος των στοιχείων στροβιλότητας. Η συνολική ταχύτητα \mathbf{u} είναι

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\infty} - \mathbf{U}_b + \nabla \varphi + \mathbf{u}_{\omega} \quad (3.135)$$

Ο όρος $\nabla\varphi$ υπολογίζεται μέσω της 3.111 εφόσον η λύση είναι γνωστή και ο \mathbf{u}_ω είναι η συνολική επαγωγή των στοιχείων στροβιλότητας που υπολογίζεται μέσω της 3.117. Για τον υπολογισμό του συντελεστή πίεσης έχουμε

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{P_{ref}} = \frac{P_{st} + P_{unst} + P_\omega}{\frac{1}{2}U_\infty^2} \quad (3.136)$$

3.6.4 Παράμετρος αποκοπής

Μια άλλη παράμετρος που έχει να κάνει με τις μεθόδους στοιχείων στροβιλότητας είναι η παράμετρος αποκοπής (cut-off function), που υποδηλώνει ότι ο υπολογισμός της ταχύτητας που επάγει ένα στοιχείο γίνεται από κάποια συνάρτηση ομαλοποίησης αντί της αναλυτικής σχέσης κοντά στον πυρήνα του. Αυτό συμβαίνει λόγω του απειρισμού της ταχύτητας εκεί, χαρακτηριστικό που απορρέει από τον ορισμό της στροβιλότητας μέσω συναρτήσεων Dirac. Πάνω στο ζήτημα αυτό υπάρχει εκτενής μελέτη στην βιβλιογραφία [6], ενώ εδώ απλώς γίνεται μια σύντομη περιγραφή της συνάρτησης που χρησιμοποιείται. Η προσέγγιση για την στροβιλότητα είναι η

$$\omega(\mathbf{x}_o, t) \approx \sum_p \Omega_p \zeta_\epsilon(\mathbf{x}_o - \mathbf{Z}_p) \quad (3.137)$$

Η ζ_ϵ σχετίζεται με την συνάρτηση αποκοπής με τον παρακάτω τρόπο

$$\zeta_\epsilon(r) = (\zeta(r))' \frac{1}{4\pi r^2} \quad (3.138)$$

όπου υποθέσαμε σφαιρική συμμετρία γύρω από τον πυρήνα, δηλαδή εξάρτηση μόνο από την ακτίνα r . Η συνάρτηση αποκοπής ζ πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \zeta(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.139)$$

Μια τυπική συνάρτηση ζ που πληροί τις προδιαγραφές είναι η

$$\zeta(r) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{r}{\epsilon}\right)^3\right] \quad (3.140)$$

που οδηγεί στην συνάρτηση Beale and Majda (1985)

$$\zeta_{\epsilon}(r) = \frac{3}{4\pi\epsilon^3} \exp\left[-\left(\frac{r}{\epsilon}\right)^3\right] \quad (3.141)$$

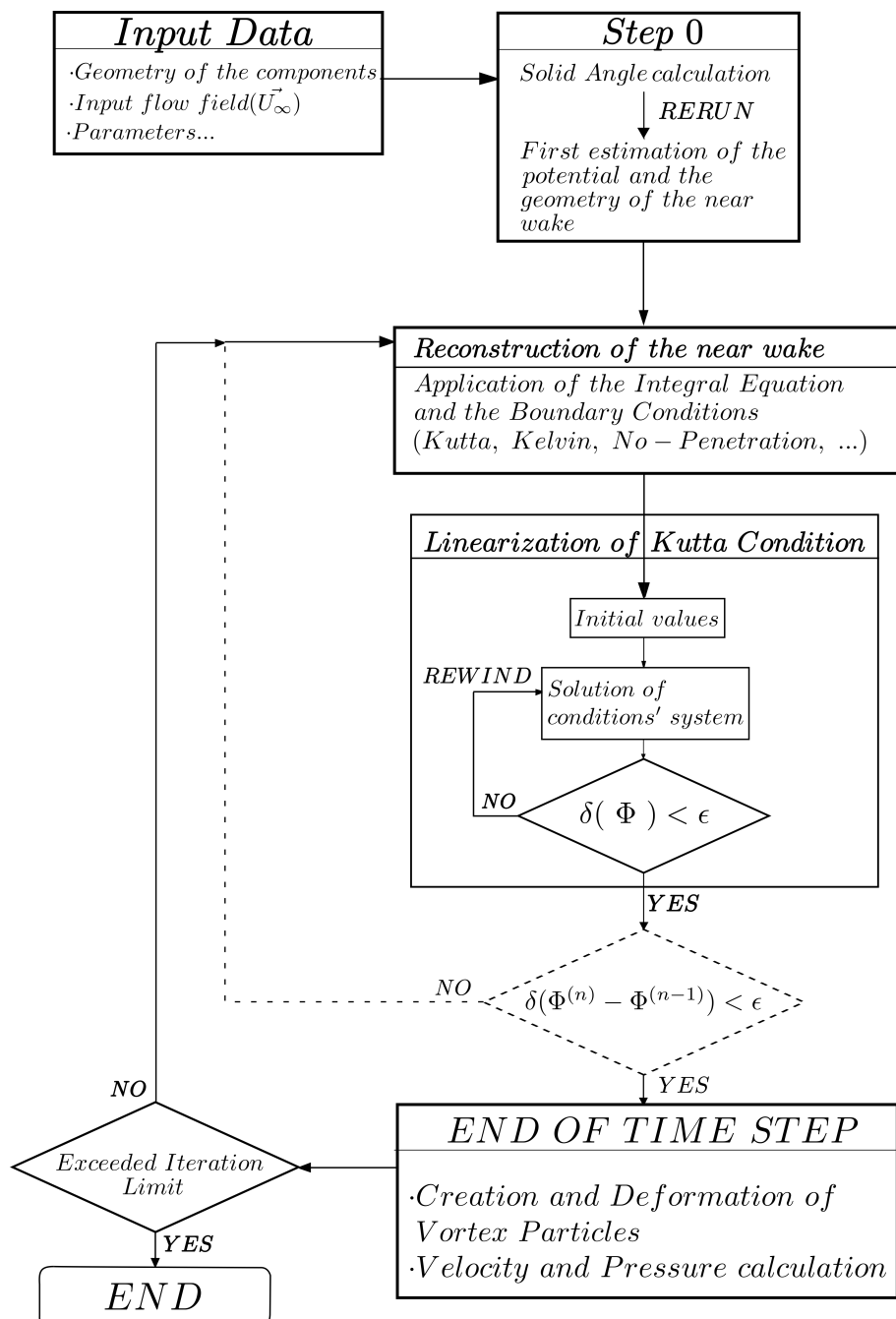
καταλήγοντας στην ακόλουθη προσέγγιση για τον πυρήνα $\mathbf{K} = \nabla G$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} (1 - \exp[-(\frac{r}{\epsilon})^3]) \quad (3.142)$$

όπου ϵ η παράμετρος (μήκος) αποκοπής. Η παραπάνω ομαλοποίηση εφαρμόζεται για τα στοιχεία στροβιλότητας.

3.7 Λογικό διάγραμμα της μεθόδου

Στο επόμενο διάγραμμα σκιαγραφείται το μέρος του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε για τους σκοπούς της εργασίας. Η επιλογή της σύγκλισης των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του κοντινού ομόρρου δεν χρησιμοποιήθηκε και φαίνεται με διακεκμένες γραμμές.



Σχήμα 3.28: Το λογικό διάγραμμα της μεθόδου

Αποτελέσματα

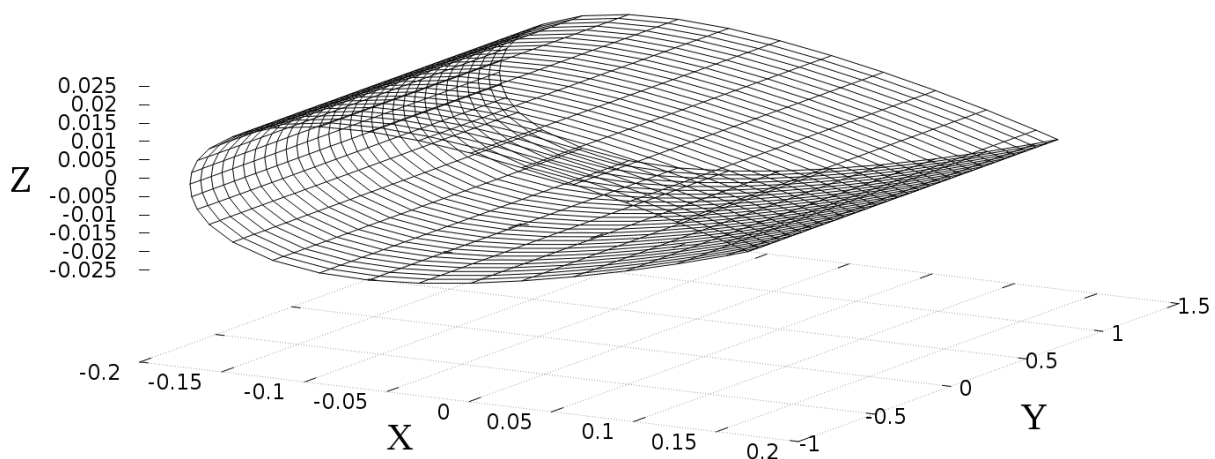
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο προέκυψαν μέσω του αλγορίθμου που δημιουργήθηκε ο οποίος εφαρμόζει την άμεση διατύπωση για το δυναμικό με ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας. Ο κοντινός ομόρρους θεωρήθηκε παγωμένος με διεύθυνση της επ'άπειρου ροής ενώ η εξέλιξη του μακρινού ομόρρου (στοιχεία στροβιλότητας) διέπονταν από την εξίσωση του Helmholtz. Ο κοντινός ομόρρους έχει προκαθορισμένη διεύθυνση, η οποία μπορεί να είναι είτε στην διχοτόμο της πάνω και της κάτω πλευράς στην ακμή εκφυγής, είτε πάνω σε μία από αυτές τις πλευρές. Επιλέχθηκε η διχοτόμος.

Τα προβλήματα που εξετάστηκαν ήταν μόνιμων ροών πάνω σε απλές γεωμετρίες ανωστικών σωμάτων. Απώτερος σκοπός είναι η πιστοποίηση της μεθόδου σε πιο σύνθετες γεωμετρίες και μη-μόνιμες ροές. Ο αλγόριθμος είναι μη-μόνιμος, δηλαδή πραγματοποιείται σύγκλιση του μόνιμου προβλήματος με την πάροδο χρονικών βημάτων. Προσφέρεται όμως μέσα στα πλαίσια του αλγορίθμου και η επιλογή του προδιαγεγραμμένου ομόρρου, για την άμεση σύγκριση με μια μόνιμη λύση (λύση που παράγεται σε ένα χρονικό βήμα). Τέλος η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε αντιμετωπίζει τα σώματα ως σώματα με πάχος και όχι ως λεπτές επιφάνειες.

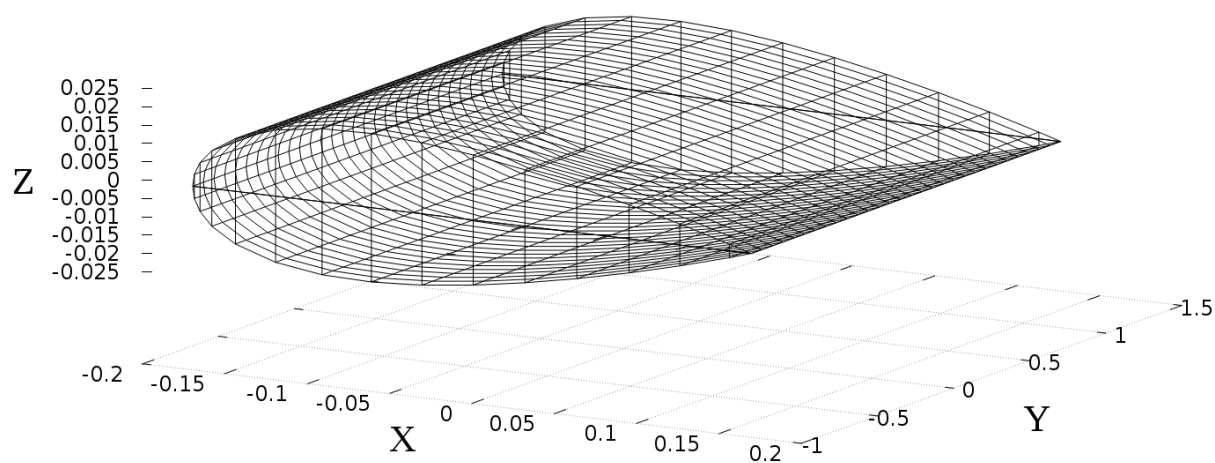
Συγκεκριμένα, γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων μόνιμης ροής γύρω από ορθογωνική πτέρυγα η οποία κατασκευάζεται από συμμετρικές NACA0012 αεροτομές και δεν μεταβάλλεται ακτινικά. Λόγω της συμμετρίας της, η πτέρυγα ήταν δυνατόν να εξεταστεί και σαν μη ανωστικό σώμα μέσω της έκθεσής της σε ροή μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης. Έτσι διαπιστώθηκε η ορθότητα του αλγορίθμου σε τέτοιες γεωμετρίες για το μη-ανωστικό μέρος της λύσης.

Η μελέτη της ευαισθησίας του κώδικα σε αριθμητικές παραμέτρους, δηλαδή το χρονικό βήμα και την πυκνωση του πλέγματος της γεωμετρίας, έγινε ανεξάρτητα. Αρχικά εξετάστηκε η σύγκλιση της λύσης σε μια συγκεκριμένη γεωμετρία για διάφορες τιμές χρονικών βημάτων. Έτσι επιλέχθηκε ο λόγος χρονικού βήματος σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος των στοιχείων (panel) στην ακμή εκφυγής, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια ως δεδομένος. Όσον αφορά την διακριτοποίηση του πλέγματος εξετάστηκαν 3 διαφορετικές πυκνώσεις που έγιναν όμως ομοιόμορφα κατά την ακτινική και την χορδική κατεύθυνση (ο λόγος των κάθετων πλευρών των στοιχείων ήταν πάντα ο ίδιος).

Τέλος, η επιλογή της παραμέτρου αποκοπής (cut-off length) για τα στοιχεία στροβιλότητας ήταν τέτοια ώστε δύο γειτονικά στοιχεία να αλληλοκαλύπτονται, υπό την έννοια ότι το ένα ενέπιπτε στην περιοχή όπου ο υπολογισμός ταχύτητας από το άλλο γινόταν με την συνάρτηση αποκοπής και όχι την αναλυτική λύση. Η επιλογή αυτή παράγει σε γενικές γραμμές έναν πιο "συνεκτικό" ομόρρου (που δεν διαλύεται εύκολα), χωρίς να προκαλεί μεγάλο σφάλμα στις επαγόμενες ταχύτητες σε τέτοια φύσης προβλήματα.



Σχήμα 4.30: Η κλειστή γεωμετρία της ορθογωνικής πτέρυγας σε πλάγια όψη υπό γωνία. Η διακριτοποίηση είναι 31x32



Σχήμα 4.31: Η ανοιχτή γεωμετρία της ορθογωνικής πτέρυγας σε πλάγια όψη υπό γωνία. Χωρίς τους κόμβους στα ακροπτερύγια, η πύκνωση είναι 31x30.

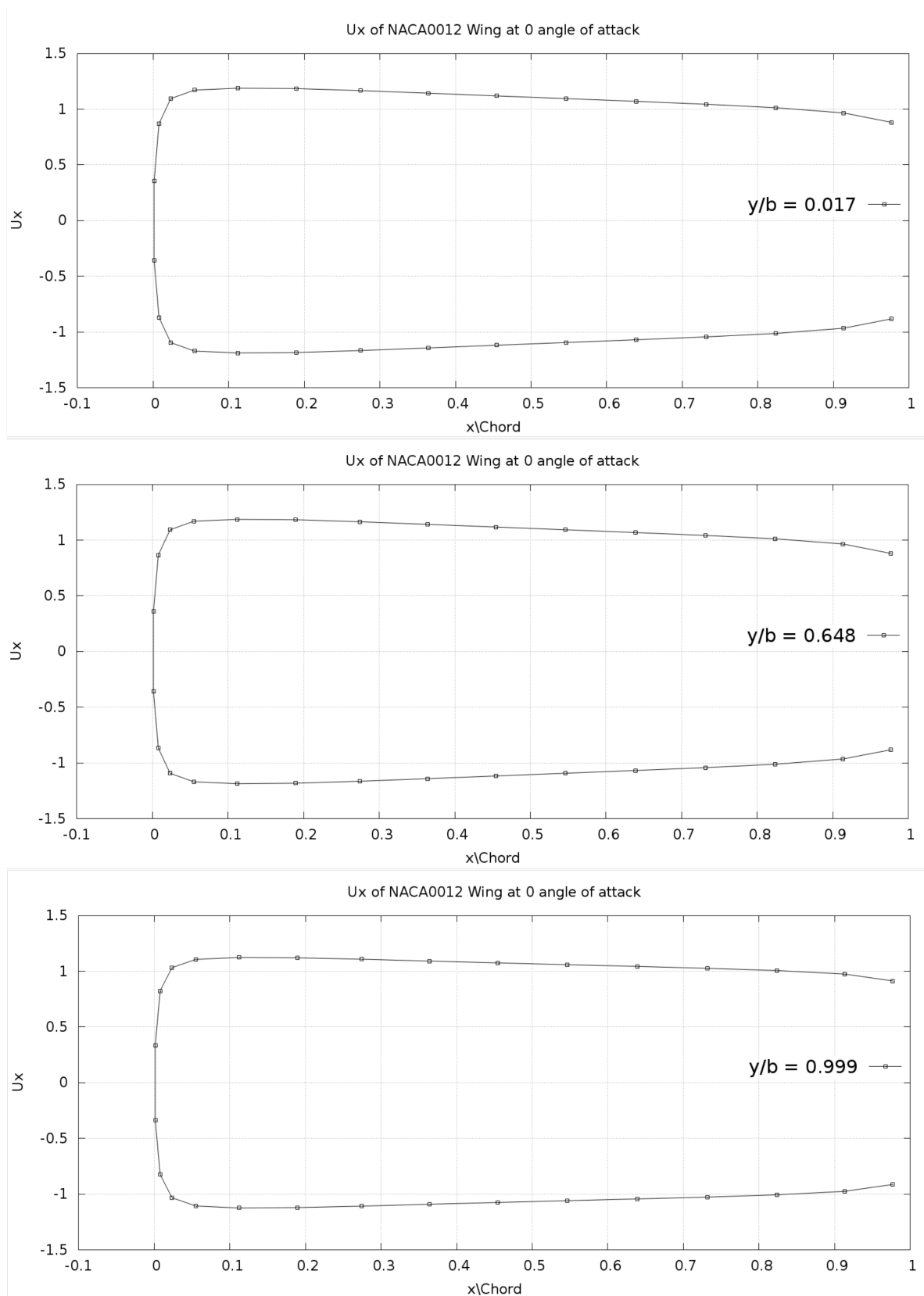
4.2 Ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης

Ένας καλός έλεγχος για την επαλήθευση της ορθότητας του αλγορίθμου από άποψη προγραμματισμού και προσέγγισης της γεωμετρίας είναι η ροή σε μηδενική γωνία πρόσπτωσης. Η πτέρυγα κατασκευάζεται από συμμετρικές αεροτομές, οπότε όλα τα μεγέθη θα πρέπει να προκύπτουν συμμετρικά στις πλευρές υποπίεσης και υπερπίεσης. Έτσι το σώμα στη μηδενική γωνία πρόσπτωσης αντιμετωπίζεται ως μη-ανωστικό. Επίσης συμμετρία θα πρέπει να υπάρχει και στο xz επίπεδο, λόγω κατασκευής της γεωμετρίας.

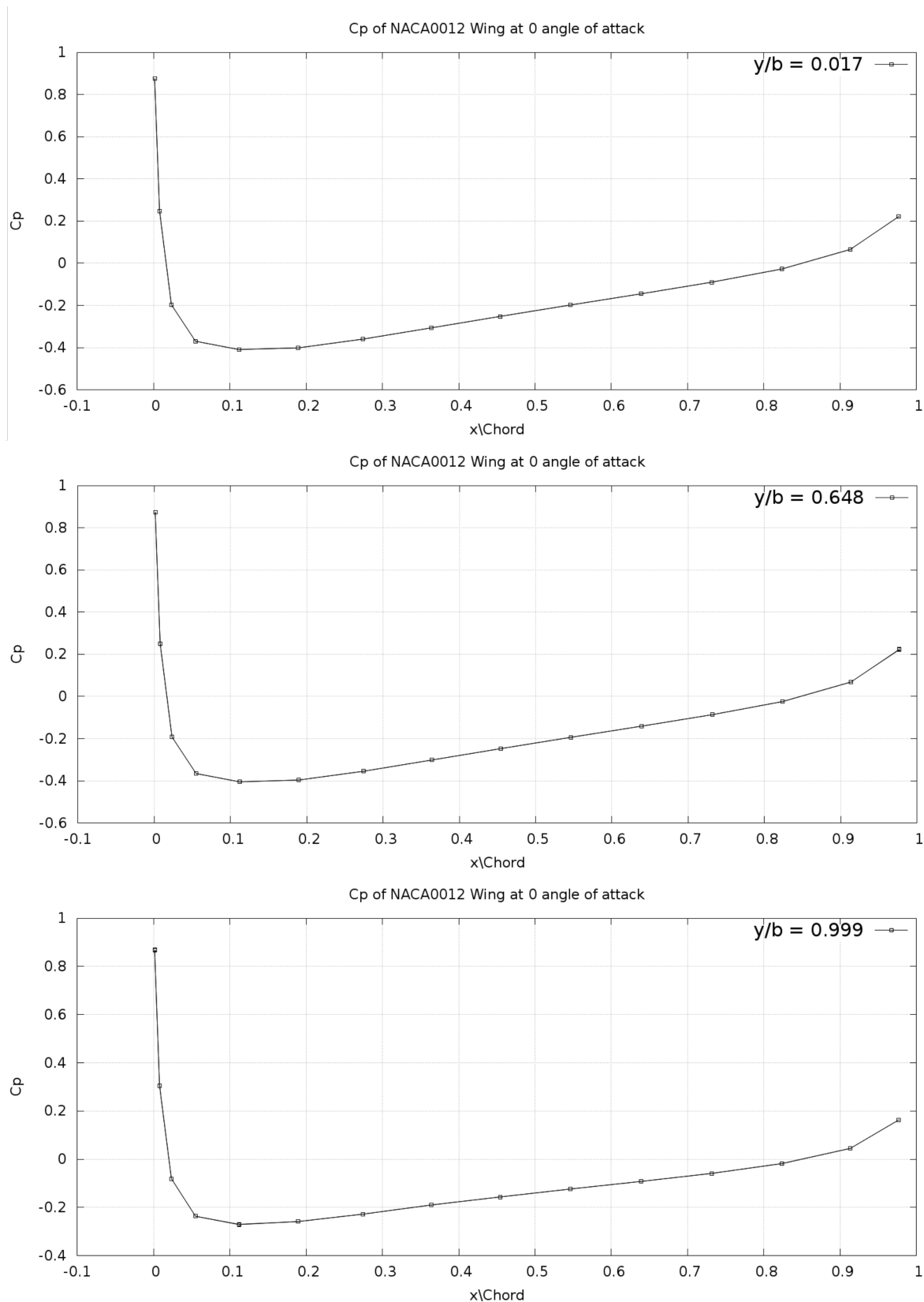
Οι βαθμοί ελευθερίας (το δυναμικό στους κόμβους), δεν θα παίρνουν φυσικά μηδενικές τιμές, αλλά η συμμετρία τους στην πάνω και την κάτω πλευρά δημιουργεί συμμετρικά προφίλ ταχύτητας και άρα μηδενικές διαφορές πίεσης. Έτσι επαληθεύεται ότι η μέθοδος αντιμετωπίζει αποτελεσματικά μη-ανωστικά σώματα, και γενικότερα το μη-ανωστικό μέρος της λύσης του προβλήματος.

Το μη-ανωστικό πρόβλημα λύνεται με χρήση προδιαγεγραμμένου ομόρρου, καθώς δεν έχει νόημα η εισαγωγή των στοιχείων στροβιλότητας (μηδενική κυκλοφορία σημαίνει ότι δεν υπάρχει εκπομπή στροβιλότητας σε καμία μορφή).

Παρακάτω φαίνονται σε τρεις διαφορετικές χορδικές θέσεις, ($y/b = 0.017, 0.648, 0.999$) οι διανομές της εφαιπτομενικής στην πτέρυγα συνιστώσας της ταχύτητας και του συντελεστή πίεσης. Η ταχύτητα που απεικονίζεται είναι προβεβλημένη στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων κάθε στοιχείου, οπότε η z συνιστώσα είναι μηδενική, ενώ η y είναι μηδενική λόγω της μηδενικής γωνίας πρόσπτωσης και της μορφής της γεωμετρίας. Η συμμετρία που αναμενόταν επαληθεύεται σε κάθε χορδική θέση.



Σχήμα 4.32: Η εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας για διάφορες χορδικές θέσεις. Παρατηρείται συμμετρία σε κάθε περίπτωση.



Σχήμα 4.33: Η διανομή του συντελεστή πίεσης σε διάφορες χορδικές θέσεις. Πατηρείται το μηδενικό εύρος του.

4.3 Ροή με γωνία πρόσπτωσης 8 μοιρών

Οι ακόλουθες προλέξεις γίνονται για γωνία πρόσπτωσης $\alpha = 8$ μοίρες και σταθερό πεδίο ταχύτητας της επ'άπειρου ροής με μοναδιαίο μέτρο.

Όπως είναι γνωστό, ένας βασικός παράγοντας της ποιότητας και της ακρίβειας των αποτελεσμάτων είναι η γεωμετρία του πλέγματος. Ένα πυκνότερο πλέγμα αναπαριστά καλύτερα την γεωμετρία του σώματος, η οποία είναι λεία στην πραγματικότητα, όμως η υπερβολική πύκνωση αυξάνει απότομα το υπολογιστικό κόστος και ενδεχομένως να δημιουργήσει αστάθειες στο πρόβλημα.

Ένας δεύτερος παράγοντας ευαισθησίας είναι το χρονικό βήμα με το οποίο παράγεται το φύλλο στροβιλότητας του ομόρρου. Έχει διαπιστωθεί ([9]) ότι το βήμα αυτό προσεγγίζεται έμμεσα μέσω της σχέσης

$$\Delta l_w = \| \mathbf{u}_{em} \| \Delta T \quad (4.143)$$

όπου Δl_w το μήκος του κοντινού ομόρρου, και \mathbf{u}_{em} η ταχύτητα εκπομπής του. Στην περίπτωση που εξετάζεται η \mathbf{u}_{em} θεωρείται ίση με την ταχύτητα της επ' άπειρου ροής και άρα έχει μοναδιαίο μέτρο οπότε τα μεγέθη είναι ίσα. Το μήκος του κοντινού ομόρρου πρέπει να είναι της τάξης μεγέθους των μηκών των στοιχείων που εφάπτονται στην ακμή εκφυγής εκεί. Με τον παραπάνω τρόπο γίνεται μια εκτίμηση του χρονικού βήματος.

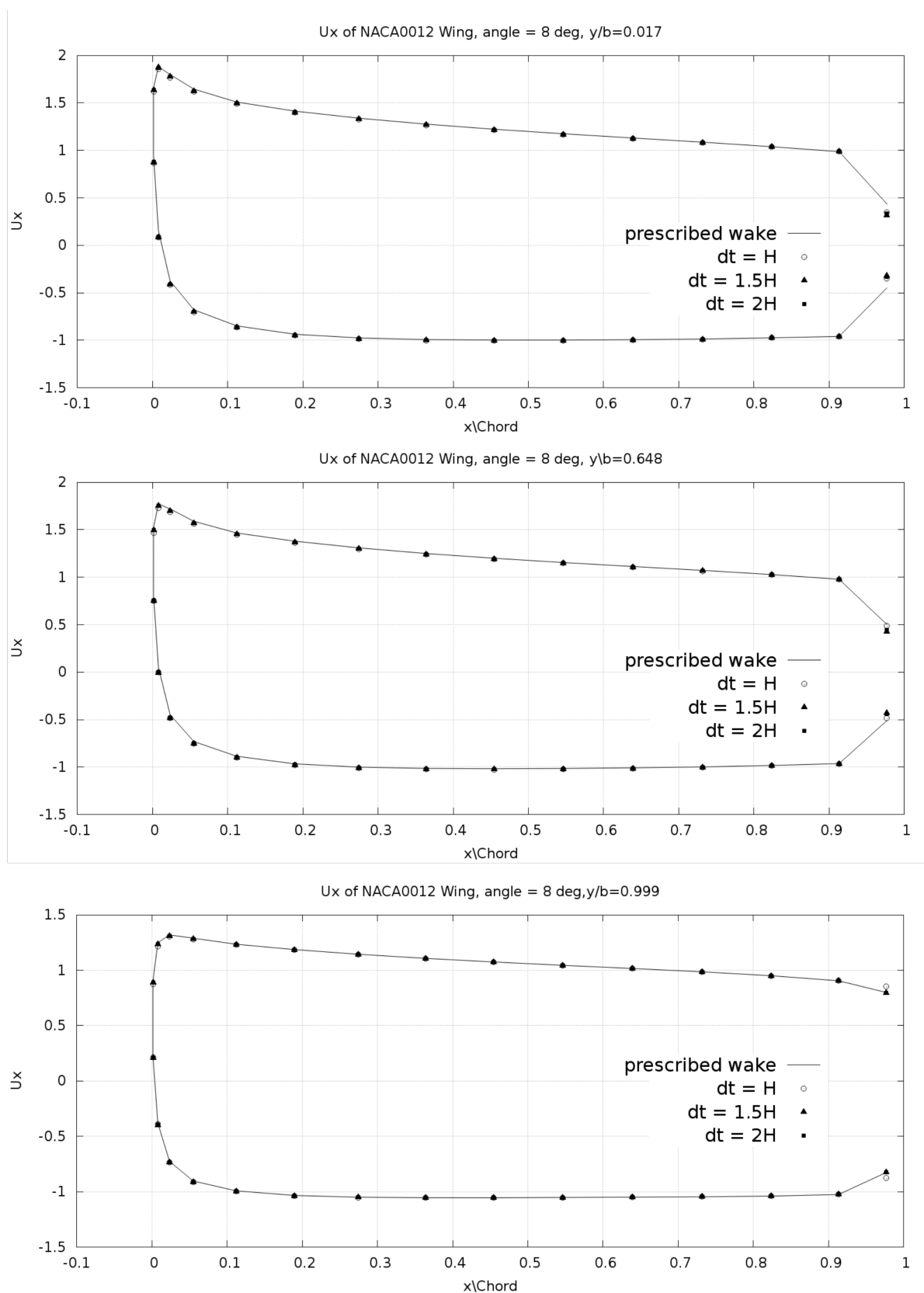
Στα πλαίσια τις εργασίας οι παράμετροι της πύκνωσης του πλέγματος και του χρονικού βήματος εξετάζονται ανεξάρτητα. Μία ολοκληρωμένη επισκόπηση θα απαιτούσε την εξέταση πολλών περιπτώσεων και συσχέτισης των δύο παραμέτρων.

4.3.1 Ευαισθησία χρονικού βήματος

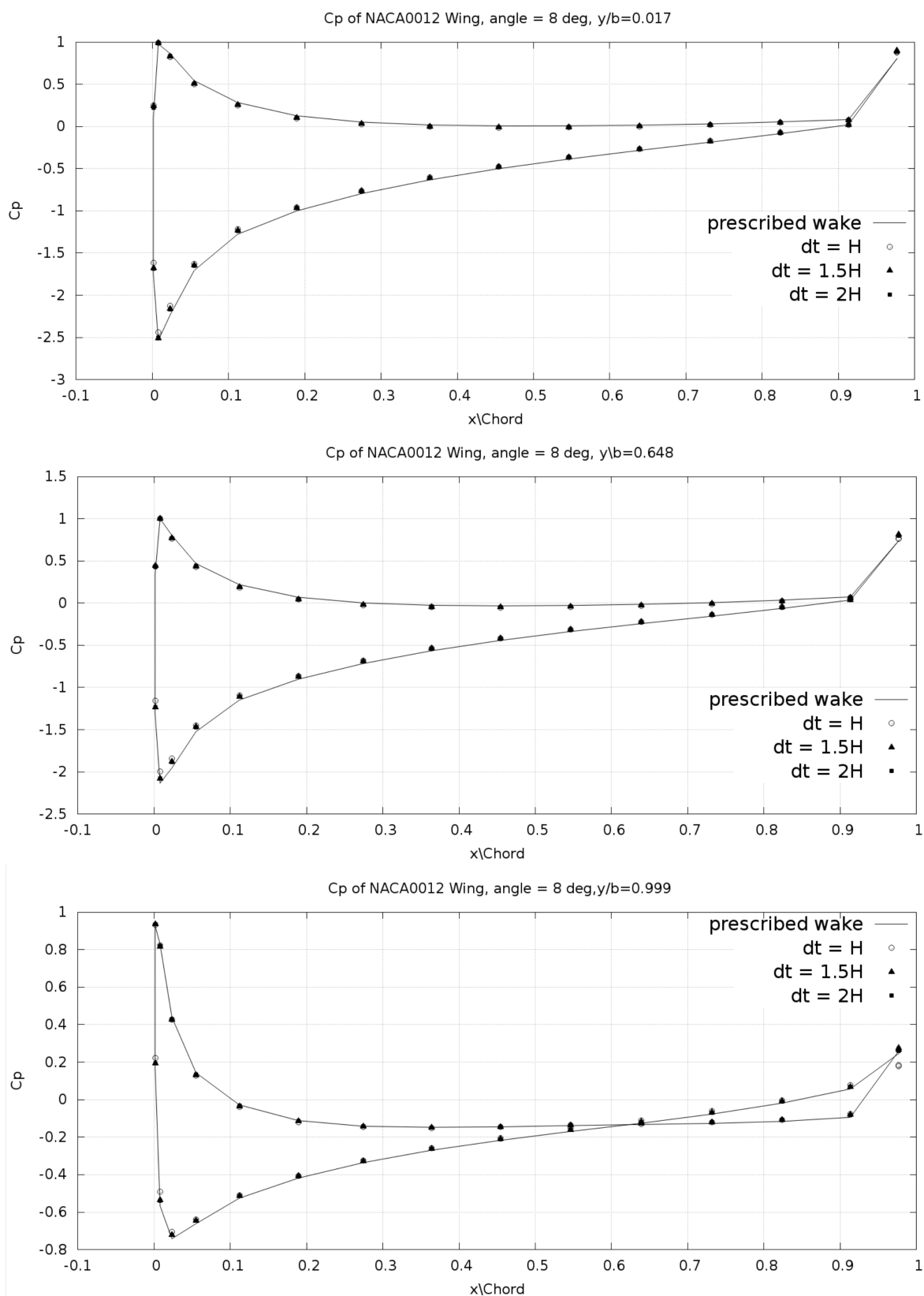
Στην παρακάτω ανάλυση χρησιμοποιείται ένα πλέγμα 31 x 30, όπου 31 είναι το πλήθος κόμβων κάθε αεροτομής και 30 το σύνολο των αεροτομών που συνθέτουν την πτέρυγα. Έστω ότι με H συμβολίζεται το χαρακτηριστικό μήκος του τελευταίου στοιχείου κάθε λωρίδας του σώματος (ταυτίζεται με του πρώτου). Το χαρακτηριστικό μήκος στο παραπάνω πλέγμα έχει τιμή $H \cong 0.015$. Επιλέχθηκαν λοιπόν οι περιπτώσεις

$$\begin{aligned} H &\Rightarrow \Delta T = 0.015, \\ 1.5H &\Rightarrow \Delta T = 0.0225, \\ 2H &\Rightarrow \Delta T = 0.030 \end{aligned} \quad (4.144)$$

Οι λύσεις που προκύπτουν από τις παραπάνω περιπτώσεις συγκρίνονται πάντα με τη λύση του προδιαγεγραμμένου ομόρρου, ο οποίος αποτελείται από μια διανομή διπόλων για την αναπαράσταση του φύλλου στροβιλότητας που εκτείνεται περίπου 20 χορδές κατάντη της ροής. Ο στροβιλός ομόρρου τίθεται να εκτείνεται επίσης 20 χορδές έτσι ώστε να είναι άμεση η σύγκριση.



Σχήμα 4.34: Το προφίλ της εφαπτομενικής ταχύτητας κατά την \bar{x} διεύθυνση σε διάφορες χορδικές θέσεις.



Σχήμα 4.35: Η διανομή του συντελεστή πίεσης σε διάφορες χορδικές θέσεις. Η συμφωνία των αναπαραστάσεων του ομόρρου και το σφάλμα στο ακροπτερύγιο.

Φαίνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις ο μη-μόνιμος αλγόριθμος προσεγγίζει ικανοποιητικά το μόνιμο πρόβλημα. Οι διαφορές που προκαλεί η αλλαγή του χρονικού βήματος είναι ανεπαίσθητες, οπότε επιλέγεται η μεγαλύτερη τιμή, $\Delta T = 2H = 0.03$.

Στην θέση $y/b = 0.999$ που προσεγγίζει πολύ το ακροπτερύγιο, ο συντελεστής πίεσης παρουσιάζει ένα μη-μηδενικό εύρος, σε αντίθεση με αυτό που αναμενόταν. Μια πιθανή εξήγηση που συμβαίνει αυτό είναι η θεώρηση της ανοιχτής γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα η γεωμετρία εκεί θα πρέπει να είναι κλειστή και οι επιπλέον όροι πηγών και διπόλων που διανέμονται πάνω της προσεγγίζουν καλύτερα την ταχύτητα στις γύρω περιοχές. Εντούτοις, η μείωση του εύρους του συντελεστή πίεσης σε σχέση με τις προηγούμενες ακτινικές θέσεις είναι φανερή.

Ένα άλλο σημείο που παρατηρεί κανείς είναι οι μεγάλες κλίσεις της ταχύτητας (άρα και του C_p) στους κόμβους του TE. Αυτό αναλύεται παρακάτω.

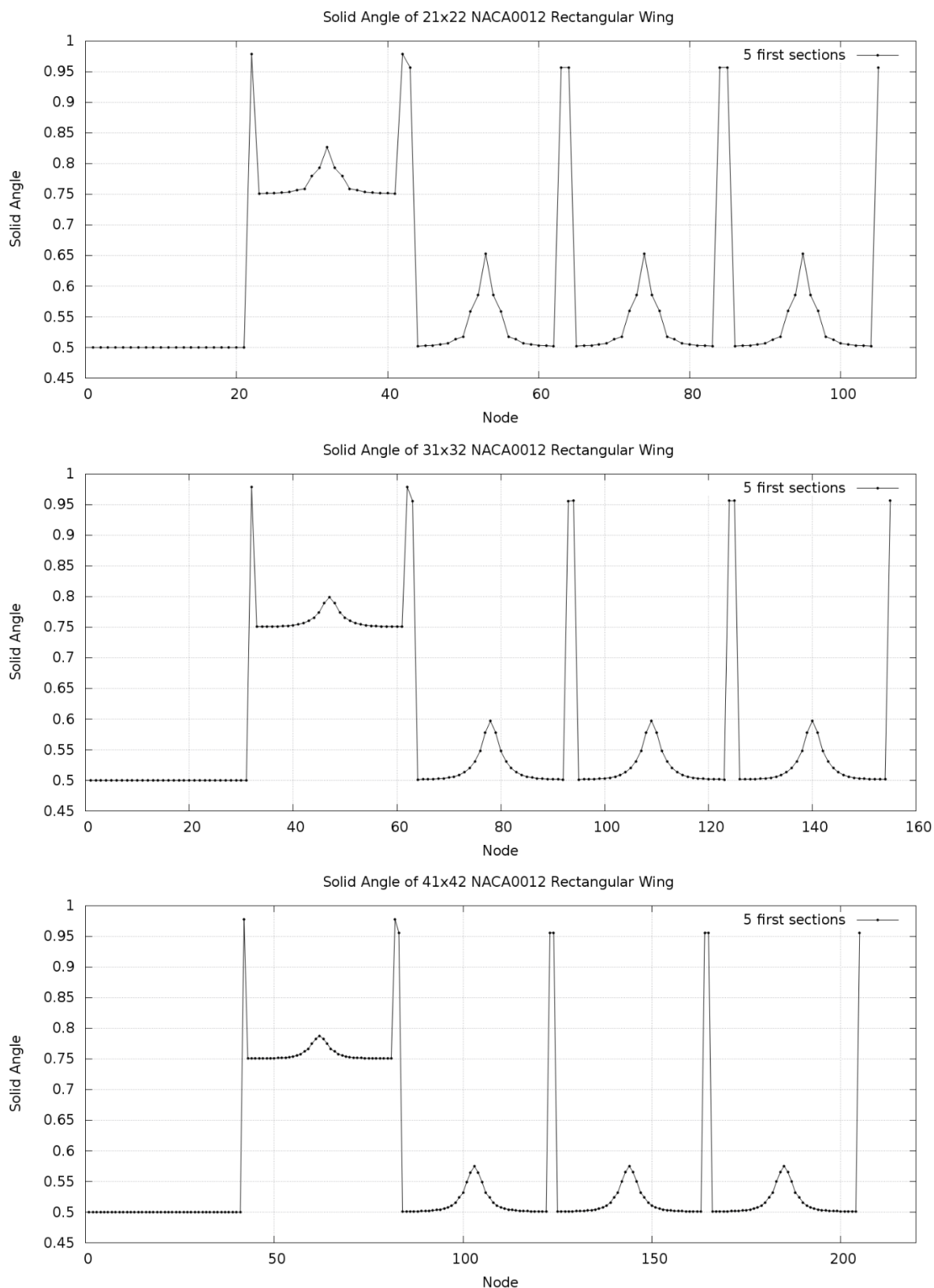
Το βασικότερο όμως συμπέρασμα που απορρέει από την παραπάνω σύγκριση είναι ότι η μετάβαση από τον προδιαγεγραμμένο ομόρρου στον ελεύθερο στροβιλό ομόρρου μέσω της άμεσης διατύπωσης πραγματοποιείται χωρίς σημαντικά σφάλματα, όπως φαίνεται στα σχήματα 4.34, 4.35.

4.3.2 Πύκνωση του πλέγματος

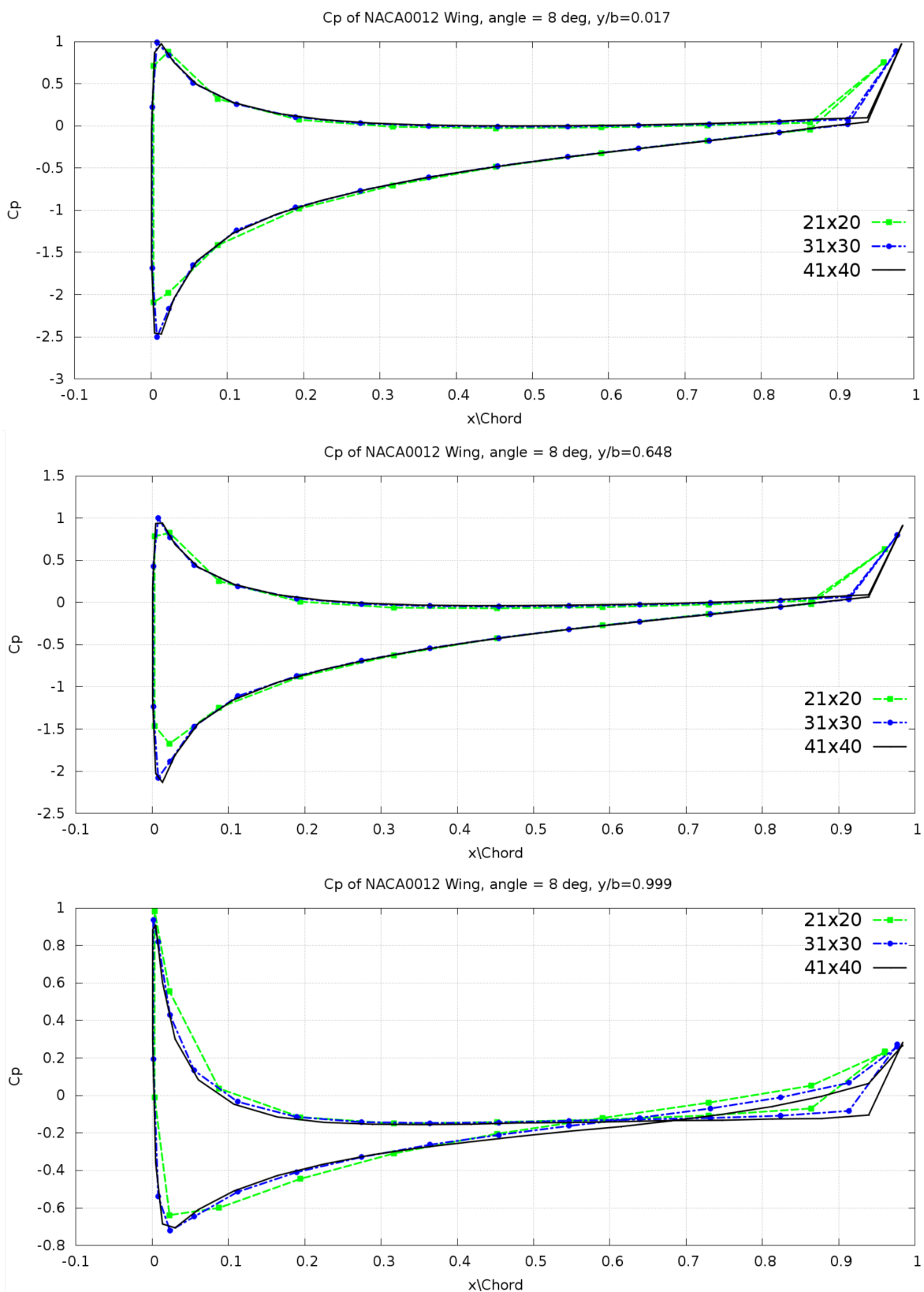
Έχοντας πλέον επιλέξει το μέγεθος του χρονικού βήματος σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος των στοιχείων στην ακμή εκφυγής, εξετάζεται η παράμετρος της πυκνωσης του πλέγματος. Όπως έχει ήδη ειπωθεί, η πυκνωση γίνεται ομοιόμορφα κατά x και κατά y , διατηρώντας όμοια στοιχεία. Σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να εξεταστεί και το πόσο στενόμακρο επιτρέπεται να είναι ένα στοιχείο. Τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν διακριτοποίησης 21x20, 31x30, 41x40 και είχαν όλα ίδα γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Για οπτικοποίηση, το πλέγμα 31x30 είναι αυτό του σχήματος 4.31.

Το πρώτο μέγεθος στο οποίο μελετάται η διαφοροποίηση λόγω πυκνωσης είναι η στερεά γωνία. Λόγω της yz συμμετρίας και του ότι στις ενδιάμεσες αεροτομές ακολουθείται το ίδιο γεωμετρικό πρότυπο, παρουσιάζονται οι πρώτες 5 αεροτομές για την κάθε διακριτοποίηση.

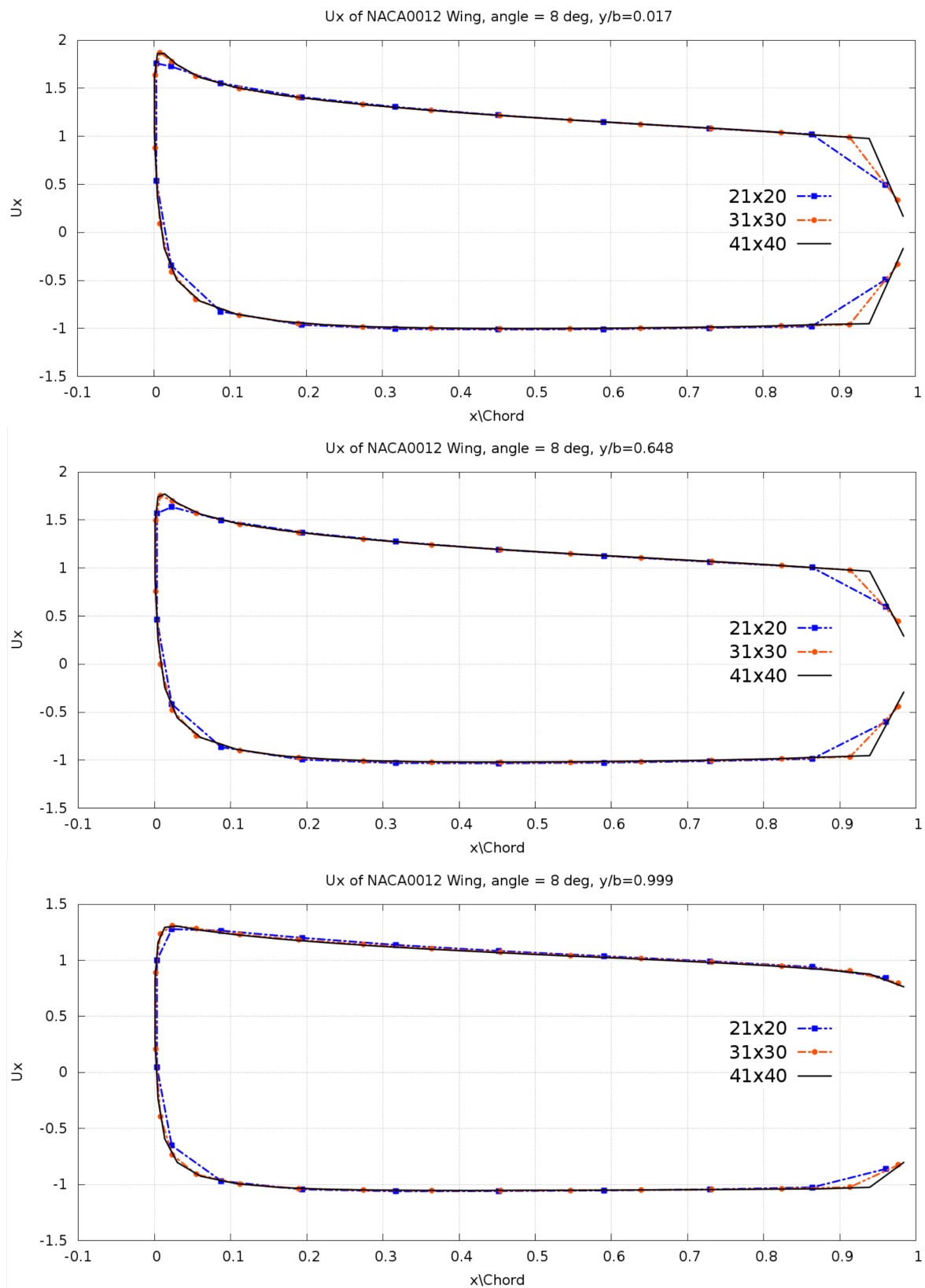
Στη συνέχεια, συγκρίνονται οι εφαπτομενικές ταχύτητες ("Ux") στην \vec{s} διεύθυνση (που διατρέχει το μήκος τόξου γύρω από την κάθε αεροτομή) και οι συντελεστές πίεσης C_p για κάθε διακριτοποίηση. Το σφάλμα στα ακροπτερύγια υπάρχει σε όλες τις περιπτώσεις και είναι άλλη μια ένδειξη ότι οφείλεται στην θεώρηση ανοιχτής γεωμετρίας εκεί.



Σχήμα 4.36: Η στερεά γωνία (αδιάστατη, σε steradian) για τις 3 διαφορετικές διακριτοποιήσεις. Παρατηρείται η σταδιακή ομαλοποίηση προς την ακμή πρόσπτωσης με την πυκνωση του πλέγματος.



Σχήμα 4.37: Η διανομή του συντελεστή πίεσης C_p για τις διαφορετικές διακριτοποιήσεις της γεωμετρίας στις 3 ακτινικές θέσεις



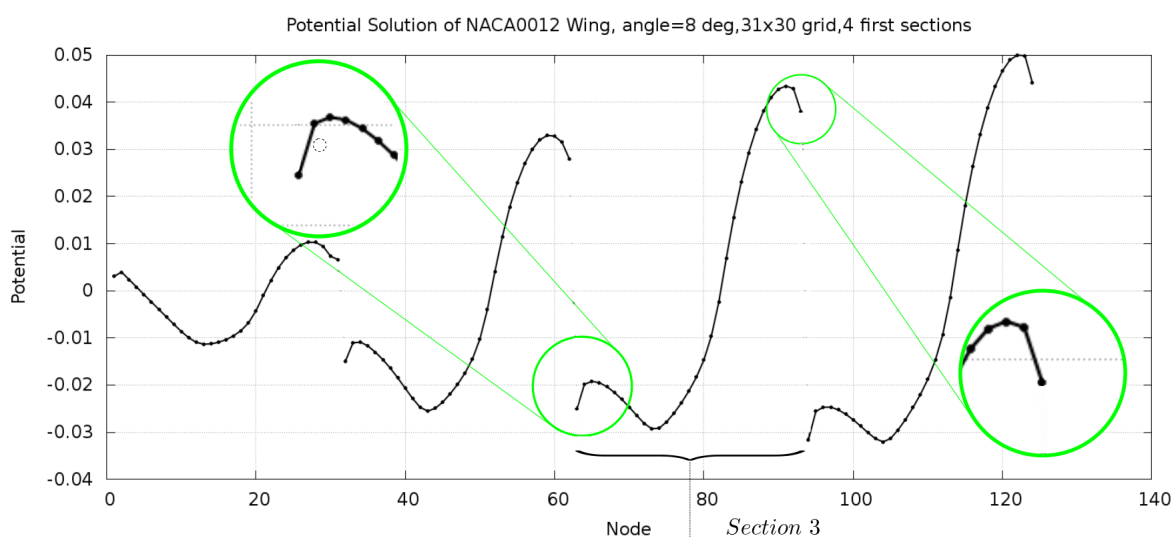
Σχήμα 4.38: Τα προφίλ εφαπτομενικής ταχύτητας U_x για τις διαφορετικές διακριτοποιήσεις στις 3 ακτινικές θέσεις.

Όπως αναλύθηκε στο 4.1, μεγαλύτερη πύκνωση οδηγεί σε πιο "λείο" πλέγμα το οποίο σημαίνει ότι η στερεά γωνία θα παίρνει τιμές όλο και πιο κοντά στο $1/2$ στους ενδιάμεσους κόμβους, κάτι που επιβεβαιώνεται στο σχήμα 4.36. Υπενθυμίζεται ότι η στερεά γωνία ενός σημείου που ανήκει σε ένα επίπεδο είναι $1/2$, και αντιστοιχεί στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας (με κέντρο αυτό το σημείο) που αφήνει απ' έξω το επίπεδο που την κόβει, προς τη συνολική (δηλαδή $2\pi/4\pi = 1/2$). Στο σχήμα 4.30 φαίνεται πως η πρώτη σειρά κόμβων βρίσκεται σε ένα επίπεδο, οπότε είναι αναμενόμενο το αποτέλεσμα $1/2$. Στην δεύτερη σειρά ο κάθε κόμβος βρίσκεται προσεγγιστικά σε μια ακμή ενός κύβου, οπότε η στερεά γωνία προσεγγίζει τα $3/4$ κ.ο.κ.. Όπως προαναφέρθηκε (4.1) η αύξηση της τιμής προς την ακμή πρόσπτωσης συμβαίνει λόγω των μεγάλων κλίσεων εκεί. Τέλος, οι κορυφές που πλησιάζουν την τιμή της μονάδας είναι οι στερεές γωνίας στους κόμβους της ακμής εκφυγής.

Η διαφοροποίηση που παρατηρείται στην ακμή εκφυγής σε ταχύτητα και C_p έχει να κάνει μόνο με τα ζευγάρια κόμβων επάνω της και όχι με τα αμέσως προηγούμενα και αξίζει να συζητηθεί. Τα σημεία επαλήθευσης της ολοκληρωματικής εξίσωσης είναι ακριβώς επάνω στο TE. Η στερεά γωνία εκεί, που είναι και ο συντελεστής του βαθμού ελευθερίας, περνάει απότομα από τιμή κοντά στο $1/2$ σε τιμή κοντά στην μονάδα. Ενώ λοιπόν η συνθήκη Kutta (που εφαρμόζεται λίγο πιο πίσω απ' το TE) δίνει όπως θα δειχθεί μια καλή εκτίμηση του πηδήματος $[[\phi]]_j$, $j = 1, 2..NCW$, η τιμή του δυναμικού στον κάτω κόμβο, που καθορίζεται από την ολοκληρωματική εξίσωση, παρουσιάζει μια απότομη μεταβολή.

Λαμβάνοντας την λύση του δυναμικού για τις πρώτες 4 αεροτομές της ανοιχτής πτέρυγας (σχήμα 4.39), παρατηρούμε ότι όντως, η τιμή του δυναμικού στον πρώτο κόμβο κάθε αεροτομής έχει μια εμφανή απόκλιση από τις αμέσως επόμενες, όμως το ίδιο ισχύει και για τον τελευταίο κόμβο για τις αμέσως προηγούμενες. Η τιμή του δυναμικού εκεί επιδέχεται μία σχετικά απότομη μεταβολή λόγω της απότομης γωνίας της ακμής εκφυγής. Συνεπώς η μεταβολή αυτή στην τιμή του δυναμικού εκεί μεταφέρεται στον υπολογισμό της της εφαπτομενικής ταχύτητας στο πρώτο και το τελευταίο στοιχείο κάθε λωρίδας, αφού αυτός γίνεται αριθμητικά, κάτι που εξηγεί τελικά την απότομη κλίση του συντελεστή πίεσης στο TE.

Να τονιστεί τέλος ότι αυτή η ιδιοτροπία στον αριθμητικό υπολογισμό της εφαπτομενικής ταχύτητας δεν επηρεάζει τον υπολογισμό του πηδήματος μέσω των συνθηκών Kutta-Kelvin, αφού αυτός υλοποιείται ανεξάρτητα, όπως αναλύθηκε στην ενότητα 3.



Σχήμα 4.39: Η λύση του δυναμικού στις πρώτες 4 αεροτομές της πτέρυγας. Παρατηρείται η απότομη μετάβαση στους πρώτους και τους τελευταίους κόμβους κάθε αεροτομής ($i = 1, i = NNB$)

Όσον αφορά την πύκνωση του πλέγματος, φαίνεται ότι το πλέγμα 21x20 έχει σημαντικές διαφορές από τα άλλα δύο στο σημείο μέγιστης υποπίεσης, οπότε το πλέγμα αυτό απορρίπτεται. Οι διαφορές ανάμεσα στα πλέγματα 31x30 και 41x40 είναι αρκετά δυσδιάκριτες και υφίστανται κυρίως στην περιοχή κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Επιλέγεται ως καταλληλότερη η διακριτοποίηση 41x40 για πιο ασφαλή πρόλεξη του πεδίου ροής.

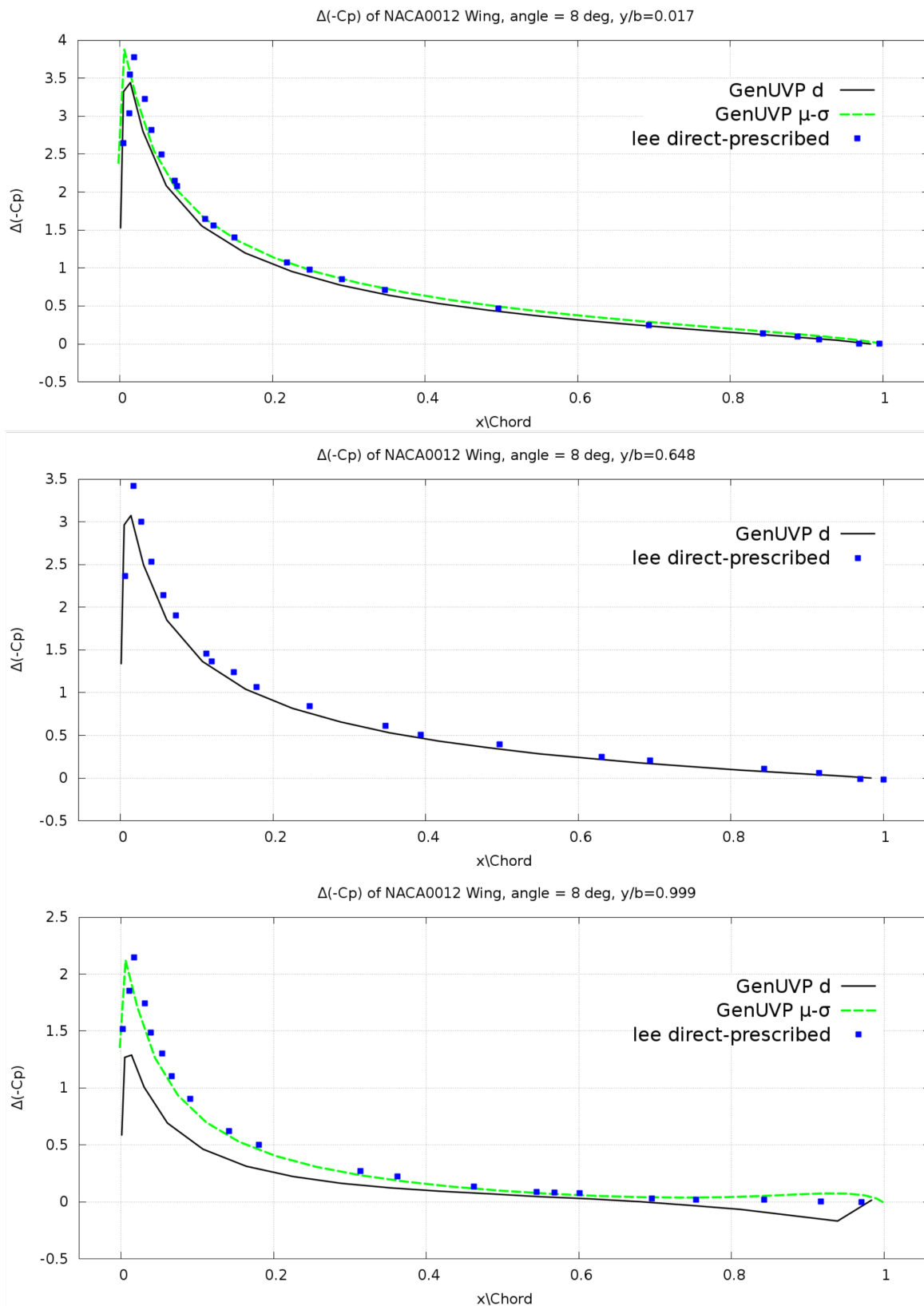
4.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, επιλέγεται ως πρότυπο το πλέγμα 41x40 με χρονικό βήμα $2H = 0.02$. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση της διαφοράς του συντελεστή πίεσης $\Delta(-C_p)$ με αποτελέσματα του GenUVP (μικτή διατύπωση πηγών-διπόλων και ελεύθερος ομόρρους στοιχείων στροβιλότητας) και του Lee (άμεση διατύπωση - προδιαγεγραμμένος ομόρρους). Τα αποτελέσματα της παρούσας μεθοδολογίας είναι με το όνομα "*GenUVP - d*" όπου το *d* παραπέμπει στο "*direct*".

Στο σχήμα 4.40 φαίνεται ότι για τις ακτινικές θέσεις $y/b = 0.017, 0.648$ τα αποτελέσματα συμπίπτουν σε ικανοποιητικό βαθμό. Παρατηρείται μια μικρή υποεκτίμηση της παρούσας μεθοδολογίας που μεγιστοποιείται στο σημείο μέγιστης υποπίεσης, που είναι πολύ κοντά στην ακμή πρόσπτωσης. Στην προηγούμενη ενότητα η πύκνωση που πραγματοποιήθηκε ήταν ομοιόμορφη, άρα πιθανότατα μία επιπλέον τοπική πύκνωση στην ακμή πρόσπτωσης θα βελτίωνε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Στην θέση $y/b = 0.999$ που είναι πολύ κοντά στο ακροπερύγιο, το εύρος $\Delta(-C_p)$ μειώνεται αρκετά, και προσεγγίζει τη μηδενική τιμή. Η θεώρηση ανοιχτής γεωμετρίας του ακροπερυγίου παράγει κάποιο σφάλμα στα υπολογισμένα μεγέθη σε εκείνη την περιοχή. Παρ' όλα αυτά η καμπύλη προσεγγίζει καλύτερα το μηδέν από τις άλλες μεθόδους λόγω των σημείων ελέγχου που είναι στους κόμβους της γεωμετρίας.

Συμπερασματικά, η πρόλεξη της ροής είναι αρκετά κοντά με αυτή των άλλων μεθοδολογιών στο μεγαλύτερο μέρος της πτέρυγας. Η θεώρηση ανοιχτών ακροπερυγίων οδηγεί σε κάποιο σφάλμα στις κοντινές περιοχές, αλλά φαίνεται ξεκάθρα ότι τα μεγέθη τείνουν προς την σωστή κατεύθυνση.

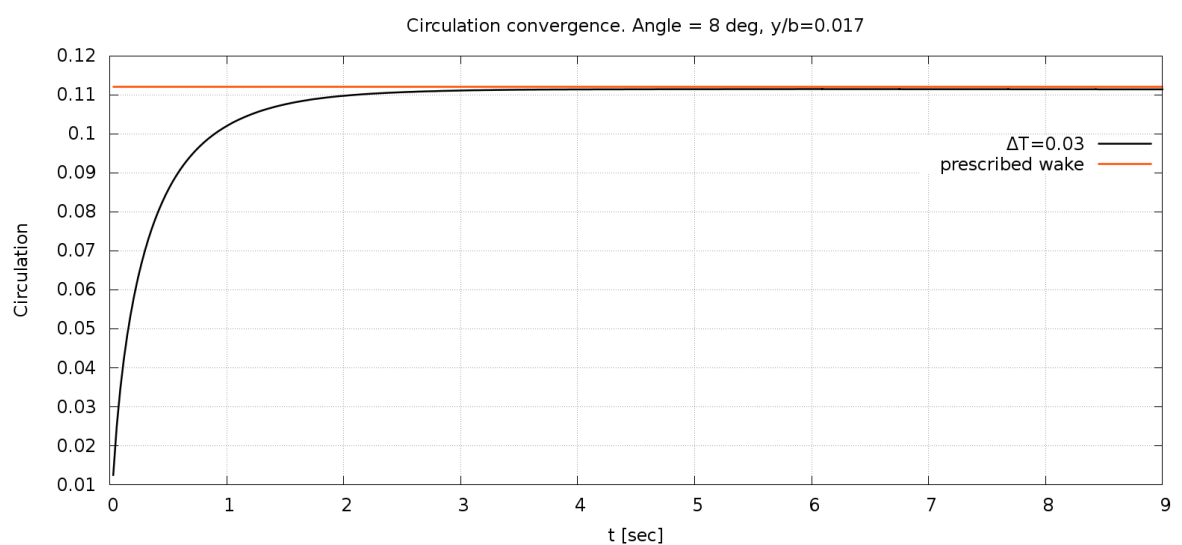


Σχήμα 4.40: Σύγκριση του εύρους του συντελεστή πίεσης $\Delta(-C_p)$ με αποτελέσματα άλλων μεθοδολογιών για διάφορες ακτινικές θέσεις της πτέρυγας.

4.3.4 Η κυκλοφορία γύρω από την πτέρυγα

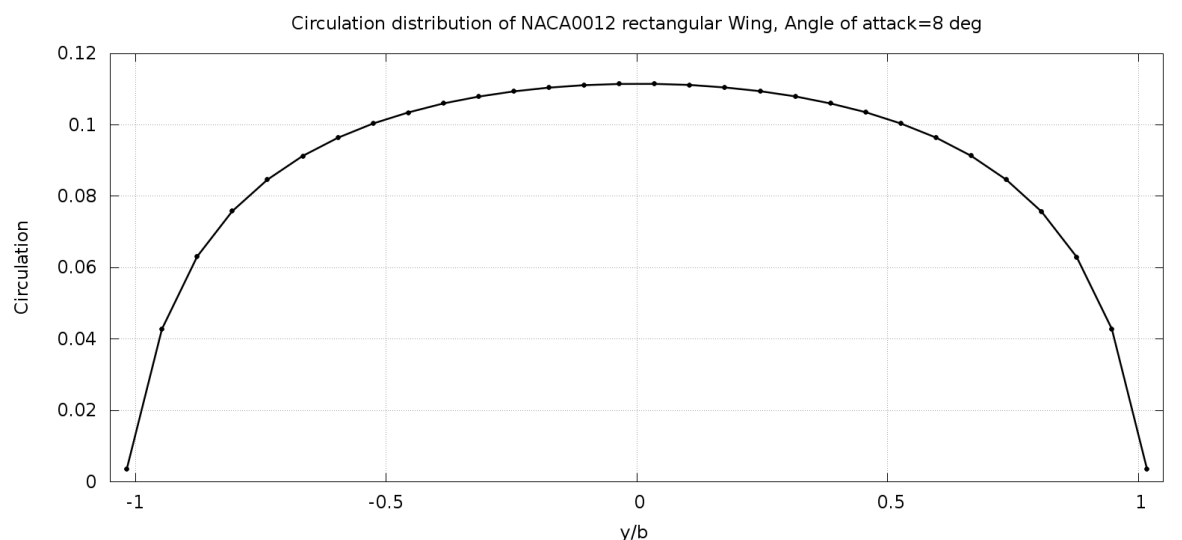
Η κυκλοφορία αποτελεί ενδεικτικό μέγεθος για τον έλεγχο της σύγκλισης του μη-μόνιμου αλγορίθμου και δίνει μια καλή εικόνα της κατανομής της πίεσης κατά το εκπέτασμα. Όπως αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2, η κυκλοφορία ταυτίζεται με το πήδημα του δυναμικού σε κάθε ακτινική θέση, δηλαδή $\Gamma_j = \llbracket \phi \rrbracket_j = Be_j$, $j = 1, 2, \dots, NCW$, οπότε η τιμή της υπάρχει ήδη στις μεταβλητές του αλγορίθμου και αποθηκεύεται αυτόματα.

Στο σχήμα 4.41 φαίνεται η σύγκλιση της κυκλοφορίας στην ακτινική θέση $y/b = 0.017$ (περίπου στο μέσο της ορθογωνικής πτέρυγας, εκεί που παίρνει την μέγιστη τιμή της) με την πάροδο των χρονικών βημάτων. Η κυκλοφορία προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή την οποία παράγει η λύση μέσω της θεώρησης του προδιαγεγραμμένου ομόρρου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το πλέγμα είναι διακριτοποίησης 31x30, με χρονικό βήμα $\Delta T = 0.03 = 2H$ και για 300 επαναλήψεις. Έτσι ο ομόρρος εκτείνεται περίπου 25 χορδές κατάντη της ροής και όπως φαίνεται στο σχήμα είναι ασφαλές να θεωρηθεί ότι ο αλγόριθμος τότε έχει συγκλίνει.



Σχήμα 4.41: Η σύγκλιση της κυκλοφορίας με την πάροδο των χρονικών βημάτων στην θέση $y/b = 0.017$

Η διανομή της κυκλοφορίας κατά το εκπέτασμα στην περίπτωση που προαναφέρθηκε φαίνεται στο σχήμα 4.42. Η διανομή έχει την αναμενόμενη ελλειπτική μορφή και ο μηδενισμός της κυκλοφορίας στα ακροπτερύγια προσεγγίζεται ικανοποιητικά καθώς τα σημεία ελέγχου ταυτίζονται με τους κόμβους. Το πλέγμα έχει ομοιόμορφη πύκνωση κατά την ακτινική διεύθυνση, οπότε ο μηδενισμός αποτυπώνεται με μικρή ακρίβεια. Μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνεται βέβαια με τοπική πύκνωση.



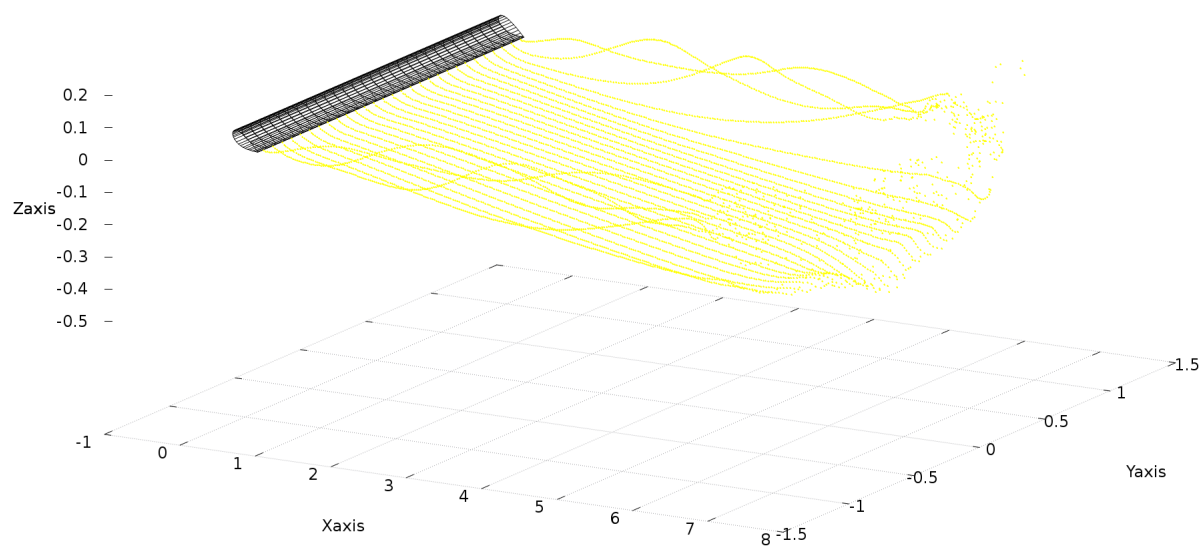
Σχήμα 4.42: Η διανομή της κυκλοφορίας κατά το εκπέτασμα για την ορθογωνική πτέρυγα σε γωνία πρόσπτωσης 8 μοιρών.

4.3.5 Οπτικοποίηση του στροβιλού ομόρρου

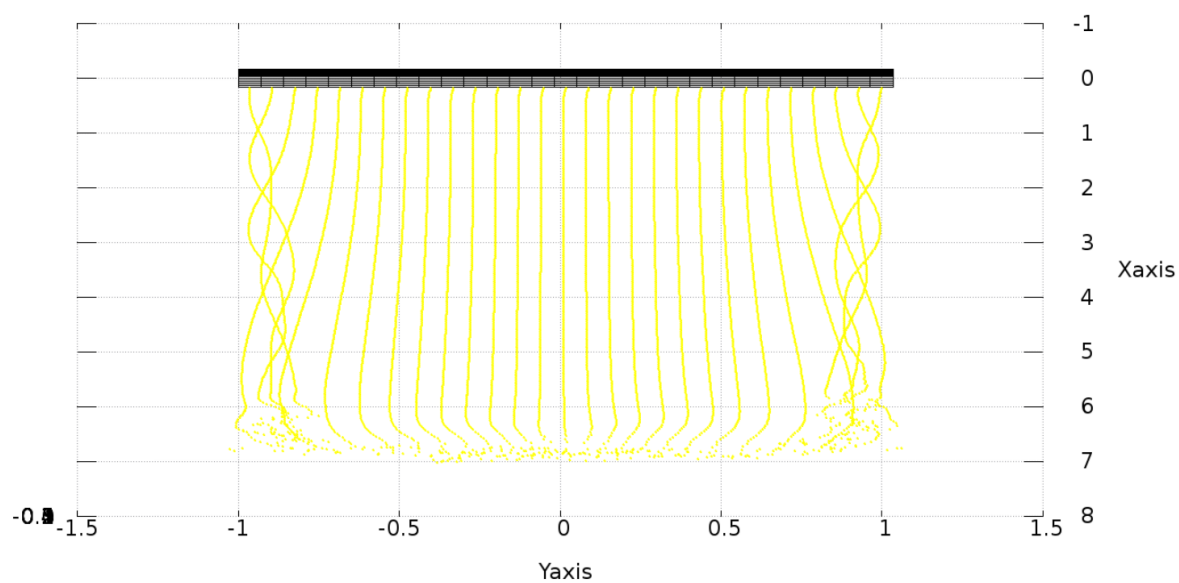
Στα σχήματα 4.43 με 4.46 γίνεται μια οπτικοποίηση του ομόρρου στοιχείων στροβιλότητας. Η περίπτωση που παρουσιάζεται είναι του πλέγματος 31x30 για 225 χρονικά βήματα με $\Delta T=0.03$. Ο ομόρρος εκτείνεται έτσι περίπου 20 χορδές κατάντη της ροής.

Σε όλα τα σχήματα και ιδιαίτερα στο 4.43 και στο 4.46 φαίνεται η ορθή αναπαράσταση των στροβίλων των ακροπτερυγίων (wingtip vortices). Οι δύο στρόβιλοι έχουν κατά τα γνωστά αντίθετη φορά περιστροφής και το κατώρρευμα που δημιουργούν στην μεταξύ τους περιοχή είναι εμφανές στα σχήματα. Παρατηρώντας την περιοχή κοντά στην ακμή εκφυγής (σχήμα 4.45) φαίνεται πως ο ομόρρος ακολουθεί ένα μονοπάτι σχεδόν παράλληλο του ακριανού στοιχείου της πάνω πλευράς της πτέρυγας, όπως αναμενόταν. Τέλος μετά την απόσταση των 5 περίπου μέτρων (~ 15 χορδές) είναι εμφανής η αρχή της αποσύνθεσης του ομόρρου.

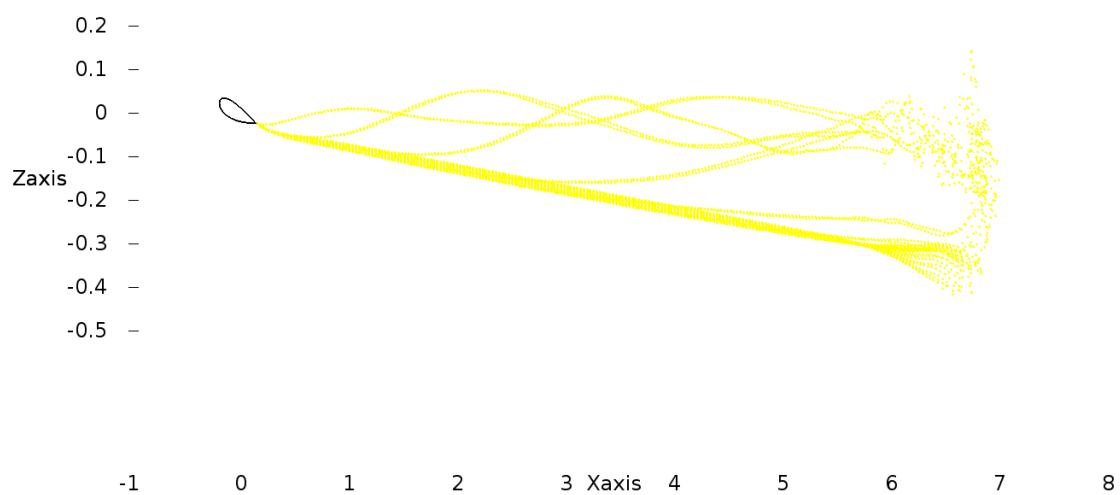
Σε όλες τις προς εξέταση περιπτώσεις η τιμή της παραμέτρου αποκοπής ήταν μεγαλύτερη του 1% της χορδής, πράγμα που είχε σταθεροποιητική επίδραση στον ομόρρο, όπως φαίνεται και στα σχήματα.



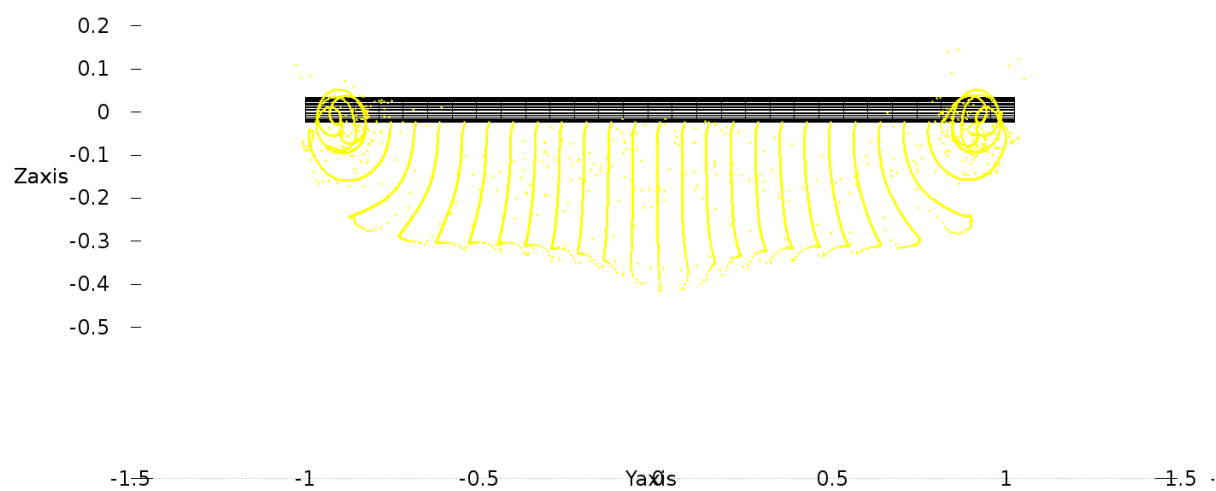
Σχήμα 4.43: Η αναπαράσταση του ομόρρου με στοιχεία στροβιλότητας σε πλάγια όψη υπό γωνία. Η γωνία πρόσπτωσης είναι 8 μοίρες.



Σχήμα 4.44: Κάτοψη του ομόρρου



Σχήμα 4.45: Πλάγια όψη του ομόρρου



Σχήμα 4.46: Πρόσοψη του ομόρρου από την πίσω πλευρά στην διεύθυνση της πτήσης. Οι στρόβιλοι των ακροπτερυγίων και η περιοχή κατωρρέματος.

Συμπεράσματα

Στο παρόν εκπόνημα πραγματοποιήθηκε σύζευξη της μεθόδου στοιχείων στροβιλότητας με την μέθοδο συνοριακών στοιχείων, μέσω της άμεσης διατύπωσης για το δυναμικό. Στη συνέχεια έγινε ανάπτυξη λογισμικού που χρησιμοποιεί την συζευγμένη μέθοδο και εφαρμογή της για την επίλυση πεδίου ροής γύρω από ορθογωνική πτέρυγα σε συνθήκες μόνιμης ροής. Ο ομόρρους του σώματος διαχωρίστηκε σε δύο μέρη, τον κοντινό και τον μακρινό ομόρρο, όπου το πρώτο μέρος αναπαρίσταται από φύλλα στροβιλότητας (δυναμική θεώρηση) ενώ το δεύτερο από ελεύθερα στοιχεία στροβιλότητας (στροβιλή θεώρηση). Η στροβιλή θεώρηση υλοποιήθηκε μέσω ενός σχήματος για την προσέγγιση του φύλλου στροβιλότητας από πεπερασμένου πλήθους σημειακά στοιχεία στροβιλότητας, διατηρώντας την συνέχεια των εντάσεων των διανομών διπόλων του ομόρρου.

Από θεωρητική σκοπιά, έγινε διερεύνηση των εναλλακτικών μορφών που αποκτά η άμεση διατύπωση για το δυναμικό μέσω των υποθέσεων για το εσωτερικό πρόβλημα και την ενσωμάτωση ή μη του δυναμικού επαγόμενου από στροβιλότητα. Η συσχέτιση του επαγόμενου δυναμικού με την επαγόμενη ταχύτητα από στροβιλότητα μέσω των διανομών διπόλων και πηγών αντίστοιχα, φανέρωσε την συνέπεια μεταξύ αυτών των μορφών και συνέβαλε στην περαιτέρω κατανόηση του προβλήματος (η απόδειξη της συσχέτισης αποδίδεται στον επιβλέποντα, Σπύρο Βουτσινά).

Κύριο μέρος της εργασίας αποτέλεσε η μετάβαση από την δυναμική στην στροβιλή θεώρηση του ομόρρου, καθώς ο μηχανισμός που την υλοποιεί έπρεπε να δημιουργηθεί εκ νέου, λόγω των απαιτήσεων που τέθηκαν για την μορφή του κοντινού ομόρρου. Οι απαιτήσεις αυτές ήταν η πλήρης διατήρησή του σαν φύλλο στροβιλότητας και η συνέχεια του πηδήματος του δυναμικού καθ' όλη την έκτασή του. Βασικός λόγος που ήταν επιθυμητό να ισχύουν αυτές οι δύο απαιτήσεις ήταν η αποφυγή υπολογισμού επαγόμενης ταχύτητας από δινοσωλήνες σε σημεία που πλησιάζουν πολύ κοντά σε αυτούς (όπως τα σημεία της ακμής εκφυγής), που προκύπτει συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις. Στα πλαίσια του προβλήματος μόνιμης ροής, για την επίλυση του οποίου ακολουθείται όμως μια βηματική διαδικασία στον χρόνο, διαπιστώθηκε ότι τα αποτελέσματα του προδιαγεγραμμένου ομόρρου σε σχέση με του ελεύθερου στροβιλού ομόρρου ήταν ικανοποιητικά κοντά. Επίσης η μέθοδος φάνηκε να έχει φυσιολογική ανταπόκριση σε μια πρώτη εξέταση των παραμέτρων ευαισθησίας του αλγορίθμου, από προγραμματιστικής σκοπιάς.

Συνοψίζοντας, η εφαρμογή της παρούσας μεθοδολογίας απέφερε ικανοποιητικά αποτελέσματα για την πρόλεξη του πεδίου ροής στο μόνιμο πρόβλημα. Η ορθότητα του υπολογιστικού σχήματος αλλά και οι εναλλακτικές μορφές των εξισώσεων που χρησιμοποιήθηκαν επαληθεύτηκαν, και επιπλέον αποτυπώθηκαν οι ιδιαιτερότητες της μεθόδου στα πλαίσια του προβλήματος.

Τέλος, για την εδραίωση της μεθόδου, επιβάλλεται φυσικά η προσαρμογή του αλγορίθμου ώστε να διαχειρίζεται κλειστές γεωμετρίες και η εφαρμογή του σε μη-μόνιμα προβλήματα. Εκεί θα γίνει φανερό αν το υπολογιστικό σχήμα μετάβασης στον στροβιλό ομόρρο είναι αποδοτικό σε ευρύτερο πλαίσιο προβλημάτων.

Βιβλιογραφία

- [1] S. Rjasanow and O. Steinbach, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.
- [2] S. Voutsinas and G. Bergeles, "Numerical calculation of singular integrals appearing in three dimensional potential flow problems," *Appl. Math. Model.*, vol. 14,618-629, 1990.
- [3] S. G. Voutsinas, "Vortex methods in aeronautics: How to make things work," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 20:1,3-18, 2006.
- [4] L. Rosenhead, "The formation of vortices from a surface of discontinuity," *Proc. Roy. Soc. London Ser.*, vol. A 134, 170-192, 1931.
- [5] C. Truesdell, *The Kinematics of Vorticity*, 1st ed. Indiana University Press, 1954.
- [6] M. J. Stock, "Summary of vortex methods literature (a living document rife with opinion)," 2007.
- [7] J. Katz and A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.
- [8] A. Rutherford, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, 2nd ed. New York: Dover Publications, Inc., 1989.
- [9] P. I. Chasapogiannis, "Steady and unsteady axial rotor performance analysis," PhD thesis, 2005.