



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Διαγράμματα Ελέγχου με Βάρη για την Ταυτόχρονη
Παρακολούθηση της Θέσης και της Διασποράς της Διεργασίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ Α. ΙΩΑΝΝΗΣ

A.M.: 09414007

Επιβλέπων Καθηγητής: Χ. Κουκουβίνος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2018



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

MASTER: APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES

Time Weighted Control Charts for Simultaneous
Monitoring Process Location and Dispersion.

MASTER THESIS

VASILOPOULOS A. IOANNIS

Supervisor Professor: Koukouvinos C.

Professor NTUA

Athens, 2018

Περίληψη

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (ΣΕΠ) χρησιμοποιείται ευρύτατα στην σύγχρονη βιομηχανία. Επηρεάζει σημαντικά τις αποφάσεις που πρέπει να πάρει μια επιχείρηση, ώστε μέσω αυτών να διασφαλίσει την εντός προδιαγραφών παραγωγή ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας. Μια από τις τεχνικές του ΣΕΠ είναι ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ). Το σημαντικότερο εργαλείο του ΣΕΔ, που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση των διεργασιών μια επιχείρησης σε πραγματικό χρόνο είναι τα διαγράμματα ελέγχου.

Ένα διάγραμμα ελέγχου είναι μια γραφική παράσταση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που μετρήθηκε σε συνάρτηση με τον χρόνο. Με την παρακολούθηση του λαμβάνουμε γνώση πότε η διαδικασία είναι υπό έλεγχο και πότε απαιτούνται ενέργειες για να βρεθούν οι αιτίες που προκαλούν το πρόβλημα, δηλαδή την καθιστούν εκτός ελέγχου. Στις περισσότερες περιπτώσεις, σκοπός μας είναι να ελεγχθεί η διεργασία για μετατοπίσεις είτε θέσης είτε διασποράς μεμονωμένα. Εντούτοις, κρίνεται σημαντική η ταυτόχρονη ανίχνευση μετατοπίσεων της θέσης και της διασποράς της διεργασίας. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν διαγράμματα ελέγχου για την ταυτόχρονη παρακολούθηση της θέσης και της διασποράς της διεργασίας.

Στο 1ο κεφάλαιο περιγράφουμε τα βασικά χαρακτηριστικά του ΣΕΠ, του ΣΕΔ και των διαγραμμάτων ελέγχου. Στο 2ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στα διαγράμματα ελέγχου που έχουν αναπτυχθεί για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς. Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά μερικά διαγράμματα ελέγχου CUSUM για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς μιας διεργασίας. Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά EWMA διαγράμματα ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς μιας διεργασίας. Στο 5ο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά διαγράμματα ελέγχου με συνδυασμούς CUSUM και EWMA διαγραμμάτων ελέγχου για τον από κοινού έλεγχο του μέσου και της διασποράς μιας διεργασίας. Στο 6ο κεφάλαιο παραθέτουμε εφαρμογές των διαγραμμάτων ελέγχου που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια. Στο

τέλος συνοψίζουμε μερικά στοιχεία που προέκυψαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

Λέξεις κλειδιά: ΣΕΠ, ΣΕΔ, Διαγράμματα Ελέγχου, CUSUM, EWMA

Abstract

Statistical Quality Control (SQC) is widely used in the modern industry. SQC affects massively the decisions that a corporation has to make in order to ensure the in control production of a product or a service. One of the technics that are used is Statistical Process Control (SPC). The most important tool of SPC, that is used for monitoring the processes of a corporation in real time are the Control Charts.

Control Chart is a graphical presentation of a quality feature which values are measured in association with time. By monitoring the Control Charts we have the ability to know when the process is in control and when actions are necessary in order to find the reasons that cause problems, the process is out of control. Most of the times our goal is to monitor the process for changes in the mean or the variance separately. Therefore, it is very important the use of simultaneous monitoring the changes of process mean or the process variance. In this thesis we present Control Charts for the simultaneous monitoring the mean and the variance of the process.

The 1st chapter is an introduction in the basic features of SQC, SPC and Control Charts. In the 2nd chapter an overview of control chart that are developed for joint monitoring of mean and variance is provided. In the 3rd chapter we present some CUSUM control charts for joint monitoring mean and variance of an operation. In the 4th chapter we present some EWMA control charts for joint monitoring process mean and variance. In the 5th chapter we present control charts that combine CUSUM and EWMA control charts for joint monitoring process mean and variance. In the 6th chapter we apply the control charts that we presented at the previous chapters. Finally we sum up with the results from the previous chapters.

Keywords: SQC, SPC, Control Charts, CUSUM, EWMA

Ευχαριστίες

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα κ. Χρήστο Κουκουβίνο, καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την υποστήριξη και την καθοδήγηση κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών αλλά και για την διπλωματική εργασία.

Ευχαριστώ την υποψήφια διδάκτορα του Ε.Μ.Π. Αγγελική Λάππα για όλη την βοήθεια και υποστήριξη που μου προσέφερε

Τελευταίο, αλλά όχι λιγότερο σημαντικό, ευχαριστώ τους γονείς, τον αδερφό μου και τους φίλους μου για την υποστήριξη τους στην μέχρι τώρα σταδιοδρομία μου.

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Περίληψη | v |
| Abstract | vii |
| Ευχαριστίες..... | ix |
| Περιεχόμενα | xi |
| Κατάλογος Συντομογραφιών | xv |
| Λίστα Σχημάτων | xvii |
| Λίστα Πινάκων | xix |
| Κεφάλαιο 1 | 21 |
| 1. Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας | 21 |
| 1.1 Εισαγωγή..... | 21 |
| 1.1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας..... | 21 |
| 1.1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών..... | 23 |
| 1.2 Διαγράμματα Ελέγχου | 26 |
| 1.2.1 Παρουσίαση των Διαγραμμάτων Ελέγχου..... | 26 |
| 1.2.2 Επιλογή Ορίων Ελέγχου Διαγραμμάτων Ελέγχου..... | 27 |
| 1.2.3 Μέγεθος και Συχνότητα Δείγματος | 28 |
| 1.2.4 Κανόνες Ευαισθητοποίησης Διαγραμμάτων Ελέγχου | 31 |
| Κεφάλαιο 2 | 33 |
| 2. Διαγράμματα Ελέγχου Ταυτόχρονης Παρακολούθησης Μέσου και Διασποράς | 33 |
| 2.1 Εισαγωγή..... | 33 |
| 2.2 Σχέδια Παρακολούθησης Ενός Διαγράμματος | 34 |
| 2.2.1 Παραμετρικά Σχέδια Ενός Διαγράμματος με Γνωστές Παραμέτρους..... | 34 |
| 2.2.1.1 Ταυτόχρονα Διαγράμματα..... | 35 |
| 2.2.1.2 Μονά Διαγράμματα με Παραδοσιακά Όρια Ελέγχου | 36 |
| 2.2.1.3 Μονά Διαγράμματα με Περιοχές Ελέγχου | 37 |
| 2.2.2 Παραμετρικά Σχέδια Ενός Διαγράμματος με Άγνωστες Παραμέτρους..... | 38 |
| 2.2.3 Μειονεκτήματα του Ενός Διαγράμματος Σχέδιο Επίβλεψης | 39 |
| 2.3 Σχέδια Παρακολούθησης Δύο Διαγραμμάτων | 40 |
| 2.3.1 Παραμετρικά Σχέδια Δύο Διαγραμμάτων με Γνωστές Παραμέτρους..... | 42 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 2.3.2 | Παραμετρικά Σχέδια Δύο Διαγραμμάτων με Άγνωστες Παραμέτρους..... | 42 |
| 2.4 | Μη Παραμετρικά Διαγράμματα | 43 |
| 2.5 | Διάφορα Προβλήματα στην Ταυτόχρονη Παρακολούθηση | 44 |
| 2.5.1 | Διαδικασία Πολλαπλών Παραγόντων | 44 |
| 2.5.2 | Αυτοσυσχέτιση | 45 |
| 2.5.3 | Μεμονωμένες Παρατηρήσεις..... | 45 |
| 2.5.4 | Προσαρμοζόμενα Διαγράμματα | 46 |
| 2.5.5 | Σχεδίαση με Οικονομικά Κριτήρια | 47 |
| 2.6 | Συμπεράσματα | 47 |
| Κεφάλαιο 3 | | 49 |
| 3. Αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας..... | | 49 |
| 3.1 | Εισαγωγή..... | 49 |
| 3.1.1 | Διάγραμμα Tabular CUSUM..... | 51 |
| 3.1.2 | Τυποποιημένο Διάγραμμα CUSUM | 52 |
| 3.1.3 | Διάγραμμα Scale CUSUM..... | 53 |
| 3.1.4 | V-μάσκα | 54 |
| 3.1.5 | FIR CUSUM | 56 |
| 3.2 | Ενοποιημένα CUSUM διαγράμματα για την παρακολούθηση του Μέσου και της Μεταβλητότητας της διεργασίας | 57 |
| 3.2.1 | Περιγραφή..... | 57 |
| 3.2.2 | Κατασκευή των CUSUM M- και CUSUM V-Διαγραμμάτων..... | 58 |
| 3.2.3 | Απόδοση | 61 |
| 3.3 | CUSUM διαδικασίες για την παρακολούθηση του Μέσου και της Μεταβλητότητας της διεργασίας | 70 |
| 3.3.1 | Περιγραφή..... | 70 |
| 3.3.2 | Κατασκευή του CPC..... | 71 |
| 3.3.3 | Εκτίμηση του ARL για το CPC διάγραμμα..... | 74 |
| 3.3.4 | Απόδοση | 77 |
| Κεφάλαιο 4 | | 81 |
| 4. EWMA διαγράμματα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας | | 81 |
| 4.1 | Εισαγωγή..... | 81 |
| 4.1.1 | Σχεδιασμός EWMA | 84 |
| 4.1.2 | FIR Ιδιότητα..... | 85 |

| | | |
|---|---|------------|
| 4.1.3 | Χρήση του EWMA Διαγράμματος για την παρακολούθηση της Μεταβλητότητας | 86 |
| 4.1.4 | Το EWMA για Poisson δεδομένα | 87 |
| 4.1.5 | Το EWMA ως εργαλείο για την πρόβλεψη της τιμής του μέσου μιας διαδικασίας | 88 |
| 4.1.6 | Μειονεκτήματα του EWMA Διαγράμματος Ελέγχου | 89 |
| 4.1.7 | Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους | 90 |
| 4.2 | Ένα μονό EWMA διάγραμμα για την παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς της διεργασίας | 91 |
| 4.2.1 | Εισαγωγή | 91 |
| 4.2.2 | Κατασκευή του EWMA με T στατιστικό | 91 |
| 4.2.3 | Απόδοση | 93 |
| 4.3 | Το Max EWMAMS διάγραμμα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς για μεμονωμένες παρατηρήσεις | 100 |
| 4.3.1 | Περιγραφή | 100 |
| 4.3.2 | Κατασκευή του Max EWMAMS | 100 |
| 4.3.3 | Απόδοση | 102 |
| 4.4 | Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγράμματα ελέγχου για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας | 113 |
| 4.4.1 | Περιγραφή | 113 |
| 4.4.2 | Κατασκευή του Max-DEWMA | 114 |
| 4.4.3 | Κατασκευή του SS-DEWMA | 116 |
| 4.4.4 | Απόδοση | 117 |
| Κεφάλαιο 5 | | 121 |
| 5. Συνδυασμός των EWMA και CUSUM διαγραμμάτων για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς | | 121 |
| 5.1 | Εισαγωγή | 121 |
| 5.2 | Κατασκευή των διαγραμμάτων | 122 |
| 5.2.1 | Συνδυαζόμενο μεικτό EWMA-CUSUM (CMEC) διάγραμμα | 122 |
| 5.2.2 | Συνδυαζόμενο μεικτό διπλό EWMA-CUSUM (CMDEC) διάγραμμα | 124 |
| 5.2.3 | Συνδυαζόμενο CUSUM (CC) διάγραμμα | 125 |
| 5.2.4 | Απόδοση | 125 |
| Κεφάλαιο 6 | | 133 |
| 6. Εφαρμογές | | 133 |

| | | |
|-----|--------------------------|------------|
| 6.1 | Παράδειγμα 1..... | 133 |
| 6.2 | Παράδειγμα 2..... | 154 |
| 6.3 | Παράδειγμα 3..... | 158 |
| | Σύνοψη | 161 |
| | Βιβλιογραφία..... | 163 |

Κατάλογος Συντομογραφιών

| | | |
|-----------|--|---|
| ΔΟΠ | Διοίκηση Ολικής Ποιότητας | Total Quality Management |
| SQC (ΣΕΠ) | Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας | Statistical Quality Control |
| SPC (ΣΕΔ) | Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών | Statistical Process Control |
| CUSUM | Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου | Cumulative Sum Control Charts |
| EWMA | Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη | Exponentially Weighted Moving Average Control Charts |
| IC | Εντός Ελέγχου | In Control |
| OC | Εκτός Ελέγχου | Out of Control |
| CPC | CUSUM Διάγραμμα Αλλαγής Σημείου | Change Point CUSUM Chart |
| UCL | Άνω Όριο Ελέγχου | Upper Control Limit |
| LCL | Κάτω Όριο Ελέγχου | Lower Control Limit |
| FIR | Ταχεία Αρχική Απόκριση | Fast Initial Response |
| EWMS | Εκθετικά Σταθμισμένο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα | Exponentially Weighted Mean Square Error |
| EWRMS | Εκθετικά Σταθμισμένη Μέση Τετραγωνική Ρίζα | Exponentially Weighted Root Mean Square |
| EWMV | Εκθετικά Σταθμισμένη Κινητή Διασπορά | Exponentially Weighted Moving Variance |
| ARL | Μέσο Μήκος Ροής | Average Run Length |
| MRL | Διάμεσος του Μήκους Ροής | Median Run Length |
| ATS | Μέσος Χρόνος Μέχρι την Πρώτη Ένδειξη | Average Time to Signal |
| ZS-ARL | Κατάσταση Μηδέν ARL | Zero-State ARL |
| SS-ARL | Σταθερή Κατάσταση ARL | Steady State ARL |
| Max-DEWMA | Μέγιστο Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητό Μέσο και Διπλό Εκθετικό Βάρος | Maximum Double Exponentially Weighted Moving Average Chart |
| SS-DEWMA | Διάγραμμα Ελέγχου του Αθροίσματος Τετραγώνων με Κινητό Μέσο και Διπλό Εκθετικό Βάρος | Sum of Squares Double Exponentially Weighted Moving Average Chart |
| CMEC | Συνδυαζόμενα Αναμεμιγμένα EWMA-CUSUM Διαγράμματα | Combined Mixed EWMA-CUSUM Charts |

| | | |
|-------|---|---|
| CMDEC | Συνδυαζόμενα Αναμεμιγμένα Διπλά EWMA-CUSUM Διαγράμματα | Combined Mixed Double EWMA- CUSUM Charts |
| CC | Συνδυαζόμενα CUSUM Διαγράμματα | Combined CUSUM Charts |

Λίστα Σχημάτων

| | |
|--|-----|
| Σχήμα 1.1 Τυπικό Διάγραμμα Ελέγχου..... | 26 |
| Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ελέγχου χωρισμένο σε ζώνες..... | 31 |
| Σχήμα 2.1 Σχέδιο Ταυτόχρονου Ελέγχου..... | 35 |
| Σχήμα 2.2: Σχέδιο Μονού Διαγράμματος με Κανονικά Όρια Ελέγχου..... | 36 |
| Σχήμα 2.3: Σχέδιο Μονού Διαγράμματος με Μια Περιοχή Ελέγχου | 37 |
| Σχήμα 2.4: Σχέδιο Διπλού Διαγράμματος Ελέγχου | 40 |
| Σχήμα 3.1: V-μάσκα..... | 56 |
| Σχήμα 3.2: FIR CUSUM..... | 57 |
| Σχήμα 4.1: EWMA Διάγραμμα | 83 |
| Σχήμα 6.1: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου..... | 134 |
| Σχήμα 6.2: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου | 135 |
| Σχήμα 6.3: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου | 136 |
| Σχήμα 6.4: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 137 |
| Σχήμα 6.5: MAX DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου | 138 |
| Σχήμα 6.6: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου | 139 |
| Σχήμα 6.7: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 140 |
| Σχήμα 6.8: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου..... | 141 |
| Σχήμα 6.9: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου | 142 |
| Σχήμα 6.10: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου | 143 |
| Σχήμα 6.11: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 144 |
| Σχήμα 6.12: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 145 |
| Σχήμα 6.13: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου | 146 |
| Σχήμα 6.14: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 147 |
| Σχήμα 6.15: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου..... | 148 |
| Σχήμα 6.16: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου | 149 |
| Σχήμα 6.17: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου | 150 |
| Σχήμα 6.18: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 151 |
| Σχήμα 6.19: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 152 |
| Σχήμα 6.20: SS EWMA Διάγραμμα Ελέγχου | 152 |
| Σχήμα 6.21: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 153 |
| Σχήμα 6.22: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 155 |
| Σχήμα 6.23: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 156 |
| Σχήμα 6.24: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου | 156 |
| Σχήμα 6.25: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 157 |
| Σχήμα 6.26: Max EWMAMS Διάγραμμα Ελέγχου..... | 159 |
| Σχήμα 6.27: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου..... | 160 |

Λίστα Πινάκων

| | |
|---|-----|
| Πίνακας 3.1: Τα εντός ελέγχου ARL για διάφορα όρια ελέγχου H. | 62 |
| Πίνακας 3.2: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές του μέσου..... | 63 |
| Πίνακας 3.3: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές του μέσου. | 64 |
| Πίνακας 3.4: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αυξήσεις στην μεταβλητότητα. | 65 |
| Πίνακας 3.5: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αυξήσεις στην μεταβλητότητα. | 66 |
| Πίνακας 3.6: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές στον μέσο και στην μεταβλητότητα..... | 66 |
| Πίνακας 3.7: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές στον μέσο και στην μεταβλητότητα..... | 67 |
| Πίνακας 3.8: Σύγκριση ARL για CUSUM V-διαγράμματος με διαφορετικά K. | 69 |
| Πίνακας 3.9: ARL για CUSUM V – διάγραμμα με τιμή εκκίνησης 0.05..... | 70 |
| Πίνακας 3.10 Απόδοση $SS - ARL$ των διαγραμμάτων CPC | 78 |
| Πίνακας 4.1: Σύγκριση τιμών ARL διαγραμμάτων ελέγχου $X - R$ και $T(d = 0)$ | 95 |
| Πίνακας 4.2: Τιμές ARL του EWMA διάγραμμα που βασίζεται σε στατιστικό T. | 98 |
| Πίνακας 4.3: Συγκριτικές τιμές ARL των EWMA διαγραμμάτων που βασίζεται σε στατιστικό T και $X - \ln S^2$ | 99 |
| Πίνακας 4.4: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS0 = 370$ και $\lambda=0.05$ | 103 |
| Πίνακας 4.5: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS0 = 370$ και $\lambda = 0.10$ | 104 |
| Πίνακας 4.6: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS0 = 370$ και $\lambda=0.20$ | 105 |
| Πίνακας 4.7: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS0 = 370$ και $\lambda=0.30$ | 106 |
| Πίνακας 4.8: Τα ποσοστά διάγνωσης για τα διαγράμματα των τριών σχεδίων. | 109 |
| Πίνακας 4.9: Συνδυασμοί των ιδανικών τιμών (λ, KMD) και λ, KSD | 118 |
| Πίνακας 4.10: Σύγκριση των $MRL1$ του Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων. | 118 |
| Πίνακας 5.1: Συνδυασμοί συντελεστών λ, k και h για τα ARL | 126 |
| Πίνακας 5.2: Τιμές ARL των CMEC διαγραμμάτων ελέγχου. | 128 |
| Πίνακας 5.3: Τιμές ARL των συνδυαζόμενων CUSUM (CC) διαγραμμάτων ελέγχου. | 129 |
| Πίνακας 5.4: Τιμές ARL των CMDEC διαγραμμάτων ελέγχου..... | 129 |
| Πίνακας 5.5: Τιμές ARL των διαφόρων ανταγωνιστικών σχεδίων. | 130 |
| Πίνακας 6.1: Δεδομένα δειγματοληψίας 2^{ou} παραδείγματος. | 154 |

Κεφάλαιο 1

Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

1.1 Εισαγωγή

Κάθε καταναλωτής πριν την αγορά ενός προϊόντος κάνει επισταμένη σύγκριση τιμών και ποιότητας στα ομοειδή προϊόντα. Οι επιχειρήσεις για να ικανοποιήσουν τους πελάτες τους, αναζητούν επιχειρησιακές τακτικές επιδιώκοντας τη βέλτιστη δυνατή ποιότητα με το μικρότερο δυνατό κόστος. Η φιλοσοφία της επιχείρησης που επιζητά τη διαρκή βελτίωση στην ποιότητα εκτέλεσης όλων των διεργασιών, προϊόντων και υπηρεσιών, ονομάζεται Διοίκηση Ολικής Ποιότητας (ΔΟΠ, *Total Quality Management*). Η Διοίκηση Ολικής Ποιότητας περιλαμβάνει ένα σύνολο διαδικασιών της επιχείρησης που επηρεάζουν το κόστος και την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος.

1.1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας

Με τον όρο ποιότητα εννοούμε γενικά την διαισθητική άποψη που έχουν οι άνθρωποι ως προς τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχει ένα προϊόν. Ένα βασικό χαρακτηριστικό είναι η απόδοση του, δηλαδή να κάνει την δουλειά για την οποία έχει επιλεγεί και μάλιστα καλύτερα από τα άλλα ομοειδή προϊόντα. Οι δυνατότητες του αν και κατά πόσο αυτές μας καλύπτουν και αν είναι τουλάχιστον όσες των ανταγωνιστικών προϊόντων. Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό είναι η αξιοπιστία. Δηλαδή πόσο συχνά χρειάζεται επισκευή και για πόσο διάστημα δεν θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Βέβαια εξίσου σημαντικό για τα προϊόντα, είναι να επιδέχονται επισκευή. Μια ερώτηση που κάνουμε συχνά είναι αν θα έχει μεγάλη διάρκεια ζωής. Η ποιότητα έχει πολλές διαστάσεις. Επίσης θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την εκλαμβανόμενη ποιότητα, την αισθητική και τη συμμόρφωση στις προδιαγραφές, πράγμα που

ενισχύει την άποψη ότι η ποιότητα είναι μια πολύπλευρη έννοια και δεν είναι εύκολο να οριστεί αυστηρά. Βάση αυτών, ίσως θα μπορούσαμε να συνδέσουμε την ποιότητα με την καταλληλότητα προς χρήση, δηλαδή την ικανοποίηση που προσφέρει το προϊόν στον καταναλωτή.

Ένας νεότερος ορισμός ορίζει την ποιότητα ως αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών της παραγόμενης διαδικασίας, που προσδιορίζουν την ποιότητα του προϊόντος.

Σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας παίζει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (SQC, *Statistical Quality Control*). Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας είναι μια μέθοδος ελέγχου παραγωγικών διεργασιών με βασικό στόχο την διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων σηματοδοτώντας τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την αντιμετώπιση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων τα οποία μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

- i. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design of Experiments*)
- ii. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (*Statistical Process Control*)
- iii. Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*)

Ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση Πειραμάτων περιέχει όλες εκείνες τις στατιστικές τεχνικές οι οποίες μας βοηθούν στην ανακάλυψη της επίδρασης που έχουν τα διάφορα επίπεδα των παραγόντων (μεταβλητών), που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος και συνεπώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη βέλτιστη σχεδίαση της παραγωγικής διεργασίας. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών περιέχει στατιστικές τεχνικές, που είναι απαραίτητες για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά την διάρκεια της παραγωγής των προϊόντων. Η Δειγματοληψία Αποδοχής περιέχει στατιστικές τεχνικές (δειγματοληπτικές), που είναι απαραίτητες για να αποφασίσουμε αν μια συγκεκριμένη παρτίδα (σωρός) προϊόντων θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί.

1.1.2 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών

Ένα προϊόν για να ικανοποιεί το χρήστη πρέπει να παράγεται σύμφωνα με μια “σταθερά επαναλαμβανόμενη” διεργασία. Η διεργασία πρέπει να είναι ικανή να λειτουργεί με μικρή μεταβλητότητα γύρω από κάποιες τιμές στόχους, που έχουν τεθεί στα ποιοτικά χαρακτηριστικά που πρέπει να διακρίνει το τελικό προϊόν. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (ΣΕΔ, *Statistical Process Control*) είναι μια συλλογή εργαλείων που είναι χρήσιμα για την επίβλεψη της σταθερότητας μιας διεργασίας και τη βελτίωση της ικανότητάς της (*capability*) μέσω της μείωσης της μεταβλητότητάς της.

Τα επτά κύρια εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι:

- i. Ιστόγραμμα (*Histogram*): Το Ιστόγραμμα είναι η γραφική απεικόνιση ενός πίνακα συχνοτήτων και εμφανίζει σημαντικές πληροφορίες για το σύνολο των τιμών που αντιπροσωπεύει, όπως η κεντρική τάση, η μεταβλητότητα και το σχήμα της κατανομής των τιμών.
- ii. Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*): Το Φύλλο Ελέγχου είναι ένα εργαλείο συλλογής και καταγραφής στοιχείων. Μπορούμε να καταχωρήσουμε λεπτομέρειες ως προς το είδος και το χρόνο των σφαλμάτων που εμφανίζουν τα παραγόμενα προϊόντα, να καταγράψουμε τις παρατηρήσεις κατά τον έλεγχο μιας διεργασίας κ.α. Ακόμα το φύλλο ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως φύλλο εργασίας για την εισαγωγή των δεδομένων σε υπολογιστή.
- iii. Διάγραμμα Pareto (*Pareto Chart*): Το Διάγραμμα Pareto είναι ένα εργαλείο διερεύνησης των κυριότερων παραγόντων που επηρεάζουν την ποιότητα του προϊόντος. Έχει σκοπό να διαχωρίσει τις σημαντικές αιτίες ενός προβλήματος από τις λιγότερο σημαντικές.
- iv. Διάγραμμα Αιτίας – Αποτελέσματος (*Cause and Effect Diagram*): Το Διάγραμμα Αιτίας – Αποτελέσματος χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των αιτιών, που συνεισφέρουν στην δημιουργία ενός προβλήματος.
- v. Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect Concentration Diagram*): Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων έχει σκοπό την

απεικόνιση των τοποθεσιών που εμφανίζονται τα διάφορα ελαττώματα σε ένα προϊόν. Είναι μια εικόνα της εξωτερικής όψης ενός προϊόντος, όπου μπορούμε να σημειώσουμε τις ελαττωματικές περιοχές.

- vi. Διάγραμμα Συσχετισμού (*Scatter Chart*): Το Διάγραμμα Συσχετισμού είναι μια απεικόνιση της σχέσης δυο μεταβλητών με τη μορφή σημείων σε ένα επίπεδο. Αν οι μεταβλητές είναι συσχετισμένες τότε τα σημεία εμφανίζονται γύρω από μια γραμμή. Όσο πιο μεγάλη η συσχέτιση τόσο πιο κοντά στην γραμμή βρίσκονται.
- vii. Διάγραμμα Ελέγχου (*Control Chart*): Παρακολούθηση σε πραγματικό χρόνο της ποιότητας παραγωγής και της πορείας παραγωγικών διεργασιών.

Τα παραπάνω εργαλεία μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε διαδικασία με σημαντικότερο όλων το Διάγραμμα Ελέγχου.

Τα διαγράμματα ελέγχου είναι μια τεχνική για τη ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία. Σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα του πόσο καλά έχει γίνει ο αρχικός σχεδιασμός και της ύπαρξης συνεχούς βελτίωσής της, πάντα θα υπάρχει μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας. Είναι συνήθως μικρή σε μέγεθος και οφείλεται σε μη ελεγχόμενους παράγοντες. Λόγω αυτής της φυσικής μεταβλητότητας ποτέ δύο παραγόμενα προϊόντα προερχόμενα από την ίδια διεργασία δεν θα είναι ακριβώς ίδια. Βέβαια εκτός της φυσικής μεταβλητότητας εμφανίζονται και άλλες μορφές μεταβλητότητας, τις ονομάζουμε ειδικές μορφές μεταβλητότητας, που δεν οφείλονται σε τυχαίες αιτίες αλλά στην συστηματική αλλαγή κάποιων παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Το μέγεθος αυτών των μορφών μεταβλητότητας είναι αρκετά μεγαλύτερο της φυσικής μεταβλητότητας και έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή μη αποδεκτών προϊόντων.

Όταν μια διεργασία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός ελέγχου ή ότι είναι σε ευσταθή κατάσταση. Ενώ όταν λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας τότε λέμε ότι είναι εκτός ελέγχου ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση.

Μια έννοια απόλυτα συνδεδεμένη με την παραγωγή ενός προϊόντος, είναι αυτή των ορίων προδιαγραφών των ποιοτικών χαρακτηριστικών του. Τα όρια προδιαγραφών καθορίζονται στην φάση του σχεδιασμού σύμφωνα με τα δεδομένα που έχουμε. Αυτά είναι το άνω και το κάτω όριο προδιαγραφών, όπου μεταξύ τους πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του χαρακτηριστικού που εποπτεύουμε, ώστε το προϊόν να είναι αποδεκτό. Εκτός των ορίων έχουμε και την τιμή στόχο που θέλουμε να επιτύχουμε, συνήθως το μέσο του διαστήματος των δύο ορίων.

Το κύριο αντικείμενο του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η έγκαιρη ανίχνευση της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι ώστε να ερευνήσουμε τον λόγο και να πάρουμε αποφάσεις για τις απαραίτητες διορθώσεις προτού κατασκευάσουμε προϊόντα που δεν πληρούν τις προδιαγραφές.

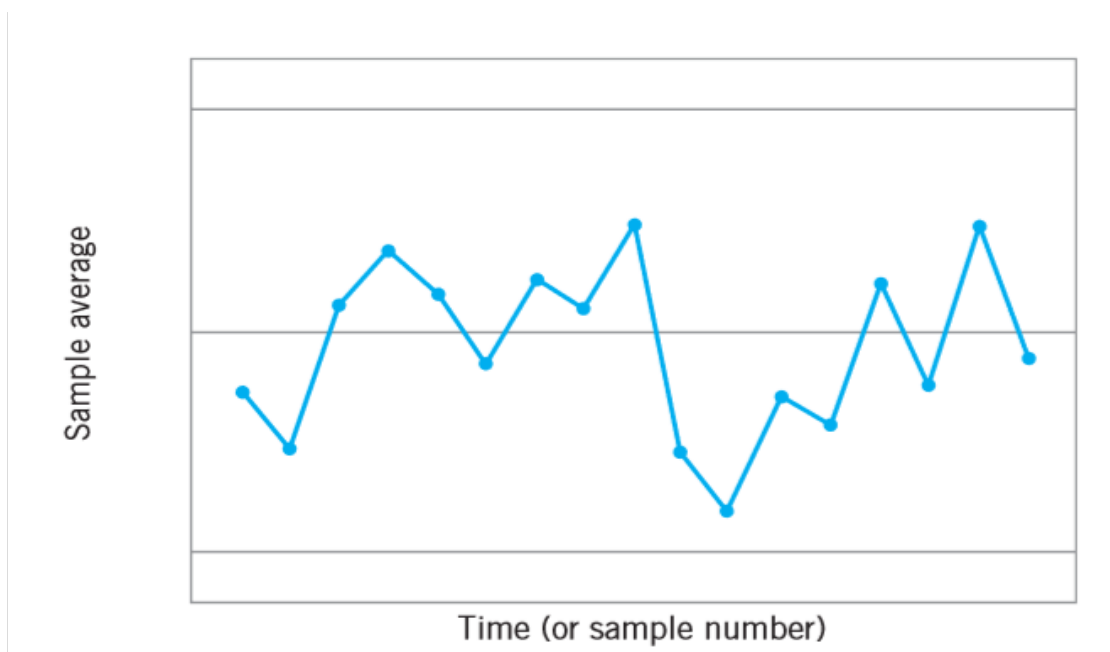
Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών θα πρέπει να ακολουθείται από ένα εκτός ελέγχου πρόγραμμα δράσης, το οποίο θα ενεργοποιείται κάθε φορά που παρουσιάζονται ενδείξεις εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στη διεργασία. Θα πρέπει στο πρόγραμμα αυτό να περιγράφονται όλες οι ενέργειες που θα πρέπει να γίνουν ώστε να εξαλειφθούν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας.

Όταν η τιμή ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού του προϊόντος μας είναι εκτός των ορίων προδιαγραφών, δηλαδή παρουσιάζει μια ατέλεια ή ένα ελάττωμα, τότε το ονομάζουμε μη συμμορφούμενο ή ελαττωματικό προϊόν. Όμως κατά την διάρκεια μιας παραγωγικής διεργασίας εποπτεύουμε τις τιμές όλων των ποιοτικών χαρακτηριστικών που μας ενδιαφέρουν. Το πλήθος αυτών των χαρακτηριστικών μπορεί να είναι μεγαλύτερο του ενός. Κάποιες φορές ένα προϊόν έχει ελάττωμα μόνο σε μικρό πλήθος χαρακτηριστικών αναλογικά ή είναι ελαττωματικό σε μικρό βαθμό. Έτσι και παρόλο που το θεωρούμε ελαττωματικό να προωθηθεί στην αγορά προς πώληση. Σε αυτές τις περιπτώσεις κατασκευάζουμε διαγράμματα ελέγχου για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που θέλουμε να ελέγξουμε. Οι τιμές των χαρακτηριστικών μπορεί να είναι είτε διακριτές είτε συνεχείς. Διακριτές όταν μετράμε αριθμήσιμο πλήθος εμφανίσεων ή συνεχείς όταν έχουμε τιμές που προέρχονται από συνεχή κλίμακα.

1.2 Διαγράμματα Ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την παρακολούθηση των διεργασιών στη βιομηχανία. Αυτού του τύπου οι γραφικές παραστάσεις επιτρέπουν στον επαγγελματία να εξακριβώσει πότε μια διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου (*In Statistical Control, IC*) και πότε εκτός στατιστικού ελέγχου (*Out of Statistical Control, OC*). Αυτό είναι δυνατό με την λήψη δειγμάτων σε διακεκριμένα διαστήματα και απεικονίζοντας τις ευρεθείσες τιμές κατόπιν στατιστικής ανάλυσης σε ένα γράφημα. Το γράφημα περιέχει οριζόντιες γραμμές (*decision lines*) τις οποίες ονομάζουμε όρια ελέγχου (*control limits*).

1.2.1 Παρουσίαση των Διαγραμμάτων Ελέγχου



Σχήμα 1.1 Τυπικό Διάγραμμα Ελέγχου

Ένα τυπικό Διάγραμμα Ελέγχου περιλαμβάνει μια κεντρική γραμμή (*Central Line, CL*) που είναι η μέση τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου κατάσταση. Ακόμα υπάρχουν άλλες δύο οριζόντιες γραμμές. Η μια πάνω από αυτήν της μέσης τιμής και αναπαριστά το Άνω Όριο

Ελέγχου (*Upper Control Limit, UCL*). Η άλλη κάτω από αυτήν της μέσης τιμής το Κάτω Όριο Ελέγχου (*Lower Control Limit, LCL*). Τα όρια αυτά επιλέγονται ώστε σχεδόν όλα τα σημεία του δείγματος να είναι μεταξύ των δυο ορίων ελέγχου. Όσο τα σημεία κατανέμονται εντός των ορίων τότε η διαδικασία είναι εντός ελέγχου και δεν απαιτείται επέμβαση. Ενώ, αν έχουμε σημεία εκτός των ορίων ελέγχου τότε απαιτούνται ενέργειες για την εύρεση των αιτιών που προκαλούν προβληματικά προϊόντα. Επιπλέον, πρέπει να προσέξουμε εκτός του αν τα σημεία εμφανίζονται μεταξύ των ορίων ελέγχου στο διάγραμμα αλλά και αν αυτό γίνεται κατά τυχαίο τρόπο. Η μη τυχαία θέση των σημείων είναι ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Σε κάθε περίπτωση, όταν έχουμε ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου απαιτούνται ενέργειες για να βρεθούν οι αιτίες που προκαλούν το πρόβλημα.

1.2.2 Επιλογή Ορίων Ελέγχου Διαγραμμάτων Ελέγχου

Ένα γενικό μοντέλο για τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μοντέλο που την θεωρία του την εισήγαγε αρχικά ο Dr. Walter S. Shewhart και για αυτό ονομάζονται συχνά διαγράμματα Shewhart. Έστω ότι W είναι το στατιστικό ενός δείγματος που μετρά το ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Έτσι ο μέσος και η τυπική απόκλιση του W είναι μ_W και σ_W , αντίστοιχα.

Τότε έχουμε τα όρια ελέγχου:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_W + L \sigma_W \\ CL &= \mu_W \\ LCL &= \mu_W - L \sigma_W \end{aligned} \tag{1.1}$$

όπου L είναι η απόσταση των ορίων από την κεντρική γραμμή.

Η επιλογή του L είναι μια πολύ κρίσιμη επιλογή γιατί ορίζει τα όρια ελέγχου. Όσο μεγαλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή τόσο μειώνουμε το σφάλμα τύπου I, δηλαδή την εμφάνιση ενός σημείου εκτός ελέγχου στο διάγραμμα ενώ στην πραγματικότητα είναι εντός ελέγχου

διαδικασίας. Βέβαια έτσι αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή ενώ στο διάγραμμα ένα σημείο φαίνεται εντός ελέγχου να είναι εκτός. Από την άλλη όμως αν μειώσουμε την απόσταση των ορίων με την κεντρική γραμμή έχουμε το αντίθετο αποτέλεσμα. Αυξάνεται το σφάλμα τύπου I και μειώνεται το σφάλμα τύπου II.

Αν για $L = 3$ έχουμε τα τρία σίγμα (3-sigma) όρια ελέγχου (3-Sigma).

Πολλές φορές στα διαγράμματα ελέγχου μαζί με τα όρια ελέγχου χρησιμοποιούμε και ένα άλλο ζεύγος ορίων, τα προειδοποιητικά όρια (Warning Limits). Αυτά σχεδιάζονται όπως τα όρια ελέγχου αλλά σε απόσταση 2σ από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (βλέπε Σχήμα 1.2). Αν ένα ή περισσότερα σημεία του δείγματος βρίσκονται μεταξύ των προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου ή πολύ κοντά στα προειδοποιητικά όρια υπάρχουν ενδείξεις ότι η διαδικασία δεν λειτουργεί σωστά. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αυξήσουμε την συχνότητα ή και το μέγεθος των δειγμάτων έτσι ώστε να λαμβάνουμε μεγαλύτερη πληροφορία ταχύτερα για τη διαδικασία. Η χρήση προειδοποιητικών ορίων αυξάνει την ευαισθησία του διαγράμματος ελέγχου γιατί εντοπίζει ταχύτερα μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας. Από την άλλη όμως αυξάνει αισθητά την πιθανότητα λανθασμένων σημμάτων.

1.2.3 Μέγεθος και Συχνότητα Δείγματος

Μια απαραίτητη εργασία κατά τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος είναι ο καθορισμός του μεγέθους και της συχνότητας της δειγματοληψίας. Γενικά μεγάλα δείγματα δίνουν περισσότερες πληροφορίες για τις αποκλίσεις της διαδικασίας, δηλαδή ανιχνεύουν ευκολότερα τυχόν μικρές μετατοπίσεις του μέσου.

Αν χρησιμοποιήσουμε τα 3σ όρια ελέγχου, υποθέτουμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου και η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού X είναι κανονική, τότε ανεξαρτήτως του μεγέθους του δείγματος το διάγραμμα ελέγχου δίνει εσφαλμένη ένδειξη εκτός ελέγχου με πιθανότητα $\alpha = 0.0027$.

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και στο διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή απεικονίζεται ο δειγματικός μέσος \bar{X} , τότε το σφάλμα τύπου I είναι:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\bar{X} < \mu - 3\sigma_{\bar{X}} \text{ ή } \bar{X} > \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \mid X \sim N(\mu, \sigma^2)) \\
 &= P(\bar{X} < \mu - 3\sigma_{\bar{X}}) + P(\bar{X} > \mu + 3\sigma_{\bar{X}}) \\
 &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} < \frac{-3\sigma_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} > \frac{3\sigma_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
 &= P(Z < -3) + P(Z > 3) \\
 &= \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) \\
 &= 1 - \Phi(3) + 1 - \Phi(3) \\
 &= 2(1 - \Phi(3)) \\
 &= 0.0027.
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα η πιθανότητα σφάλματος τύπου II, δηλαδή να δώσει το διάγραμμα εσφαλμένη ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, ενώ να είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας από μ σε μ^* είναι ίση με:

$$\begin{aligned}
 \beta &= P(\mu - 3\sigma_{\bar{X}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\sigma_{\bar{X}} \mid X \sim N(\mu^*, \sigma^2)) \\
 &= P\left(\frac{\mu - 3\sigma_{\bar{X}} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\mu + 3\sigma_{\bar{X}} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \\
 &= P\left(\frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} - 3 \leq \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} \leq \frac{\mu - \mu^*}{\sigma_{\bar{X}}} + 3\right) \\
 &= P\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} - 3 \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu^*}{\sigma} \leq \sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} + 3\right) \\
 &= \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} + 3\right) - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\mu - \mu^*}{\sigma} - 3\right),
 \end{aligned}$$

όπου παρατηρούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II εξαρτάται από το μ^* και το μέγεθος n του δείγματος. Αποδεικνύεται ότι αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος η πιθανότητα σφάλματος τύπου II μικραίνει, οπότε αυξάνεται η ικανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει τις μετατοπίσεις του μέσου επιπέδου της διεργασίας. Άρα η επιλογή του μεγέθους εξαρτάται από το είδος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Όταν η διαδικασία αλλαγής είναι σχετικά μεγάλη τότε χρησιμοποιούμε μεγάλα δείγματα

Ως προς την συχνότητα της δειγματοληψίας, η ιδανική περίπτωση θα ήταν να ελέγχουμε όλα τα παραγόμενα προϊόντα. Κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό λόγω του τεράστιου κόστους. Στην πράξη προτιμούμε να παίρνουμε μικρά μεγέθη δειγμάτων ανά τακτά χρονικά διαστήματα, παρά δείγματα με μεγάλο πλήθος αλλά λιγότερο συχνά.

Ένας άλλος τρόπος επιλογής του μεγέθους και της συχνότητας δειγματοληψίας είναι με τη χρήση του μέσου μήκους ροής του διαγράμματος (*Average Run Length*, ARL). Η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα μέχρι να εμφανιστεί το πρώτο σημείο εκτός ορίων ελέγχου. Για οποιοδήποτε διάγραμμα Shewhart έχουμε τη σχέση:

$$ARL = \frac{1}{p}, \quad (1.2)$$

όπου p είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εκτός ορίων ελέγχου.

Για το σφάλμα τύπου I με πιθανότητα α έχουμε:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.3)$$

όπου ο αριθμός που προκύπτει είναι κάθε πόσα δείγματα θα έχουμε ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Θέλουμε να είναι μεγάλος αυτός ο αριθμός γιατί θέλουμε και μεγάλο αριθμό δειγμάτων μέχρι το πρώτο δείγμα εκτός ορίων ελέγχου, δηλαδή εκτός ελέγχου διαδικασία. Για το προηγούμενο παράδειγμα με $\alpha = 0.0027$ έχουμε:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Για το σφάλμα τύπου II με πιθανότητα β έχουμε ότι για να βρεθεί ένα σημείο εκτός ελέγχου η πιθανότητα θα είναι $p = 1 - \beta$, οπότε θα έχουμε:

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}.$$

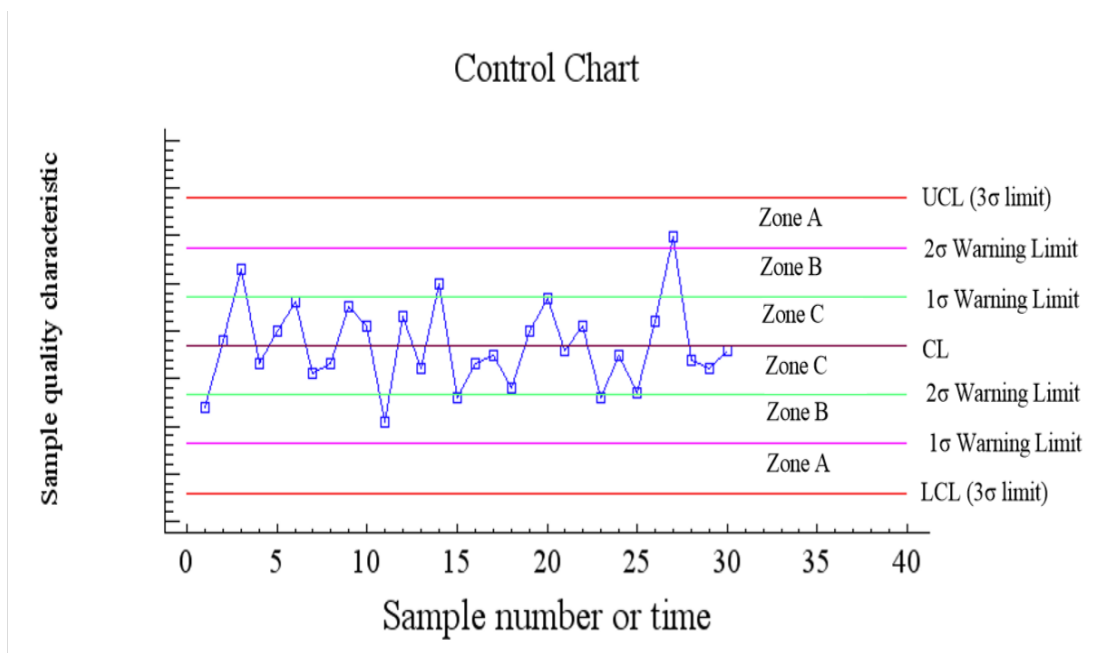
Προφανώς θέλουμε μικρό αριθμό δειγμάτων μέχρι την ορθή ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Το ARL_1 δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση στο μέσο επίπεδο μιας διεργασίας από την στιγμή που θα συμβεί.

1.2.4 Κανόνες Ευαισθητοποίησης Διαγραμμάτων Ελέγχου

Για να μπορούμε να ελέγξουμε την εντός ελέγχου διαδικασία ακολουθούμε κάποιους κανόνες που βοηθούν να κρίνουμε αν ένα ή περισσότερα σημεία είναι εκτός ελέγχου, τους κανόνες ευαισθητοποίησης διαγραμμάτων ελέγχου.

Οι σημαντικότεροι εξ αυτών είναι οι εξής:

- i. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
- ii. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στη Ζώνη Α.
- iii. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C.
- iv. Οκτώ συνεχόμενα σημεία πάνω ή κάτω από την κεντρική γραμμή.
- v. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
- vi. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή.
- vii. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά σε οποιαδήποτε όρια.
- viii. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική ζώνη C.
- ix. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
- x. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ελέγχου χωρισμένο σε ζώνες

Κεφάλαιο 2

Διαγράμματα Ελέγχου Ταυτόχρονης Παρακολούθησης Μέσου και Διασποράς

2.1 Εισαγωγή

Οι περισσότερες βιομηχανίες χρησιμοποιούν Διαγράμματα Ελέγχου για τον έλεγχο των διεργασιών τους. Τι γίνεται όμως για πολύπλοκες διεργασίες στις οποίες ειδικά αίτια δημιουργούν μετατοπίσεις ταυτόχρονα στον μέσο και στη διασπορά; Σε αυτή την περίπτωση έχουν αναπτυχθεί τα Διαγράμματα Ελέγχου Ταυτόχρονης Παρακολούθησης Μέσου και Διασποράς. Αυτού του είδους τα διαγράμματα δίνουν την δυνατότητα στον ερευνητή να αποφύγει την εσφαλμένη ένδειξη που θα δώσουν τα δύο ανεξάρτητα διαγράμματα ελέγχου, μέσου και διασποράς. Οι εσφαλμένες ενδείξεις αυτές θα μπορούσαν να οδηγήσουν στη λήψη αποφάσεων, για αλλαγές στην παραγωγική διαδικασία οι οποίες θα είχαν το αντίθετο αποτέλεσμα από αυτό που επιδιώκουμε, δηλαδή τη βελτίωση της ποιότητας του παραγόμενου προϊόντος. Το πρόβλημα με τα δύο ανεξάρτητα διαγράμματα είναι ότι θα μπορούσαν λόγω κάποιας αιτίας να έχουμε αλλαγές ταυτόχρονα στον μέσο και στη διασπορά. Μια μετατόπιση στη διασπορά επηρεάζει τα όρια ελέγχου του μέσου, άρα είναι λογικό να θέλουμε να τα προσεγγίζουμε ταυτόχρονα.

Χρησιμοποιώντας τον ταυτόχρονο έλεγχο, μας επιτρέπεται να εξακριβώσουμε ποια από τα δείγματα που συλλέξαμε προέρχονται από κάποια άλλη κανονική κατανομή και που διαφέρουν με την κανονική κατανομή που έχουμε προσδιορίσει αρχικά. Επιπροσθέτως, τα σχέδια που βασίζονται σε δύο ανεξάρτητα διαγράμματα μπορούν να επηρεαστούν από το κλασικό πρόβλημα των πολλαπλών ελέγχων. Σε αυτή την περίπτωση αν δεν γίνουν διορθωτικές αλλαγές στα όρια ελέγχου μεγαλώνει η πιθανότητα εσφαλμένων ενδείξεων αφού η διαδικασία είναι καταδικασμένη να είναι εκτός ελέγχου.

2.2 Σχέδια Παρακολούθηση Ενός Διαγράμματος

Από τους δύο τύπους σχεδίων ταυτόχρονης παρακολούθησης, εκείνα του ενός διαγράμματος τυγχάνουν ιδιαίτερης προσοχής τα τελευταία χρόνια λόγω των πολλών πλεονεκτημάτων που προσφέρουν. Πρώτα από όλα, το γεγονός ότι ο επαγγελματίας έχει να παρακολουθεί ένα και μοναδικό διάγραμμα κάνει ευκολότερη την χρήση του σε σύγκριση με το αν είχε δυο, ειδικά όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου. Ακόμα, είναι σχετικά ευκολότερο να θέσουμε τα όρια ελέγχου σε αυτού του τύπου τα διαγράμματα τα οποία βασίζονται σε κατανομές που αποτελούν συνδυασμό των δυο στατιστικών, ένα για τον μέσο και ένα για τη διασπορά. Εν τω μεταξύ, πολλά από αυτά τα σχέδια έχουν διαγνωστική ικανότητα. Δηλαδή μπορούν να υποδείξουν σε ποια από τις δύο παραμέτρους υπήρξε αλλαγή και σε αυτή την περίπτωση σηματοδοτείται.

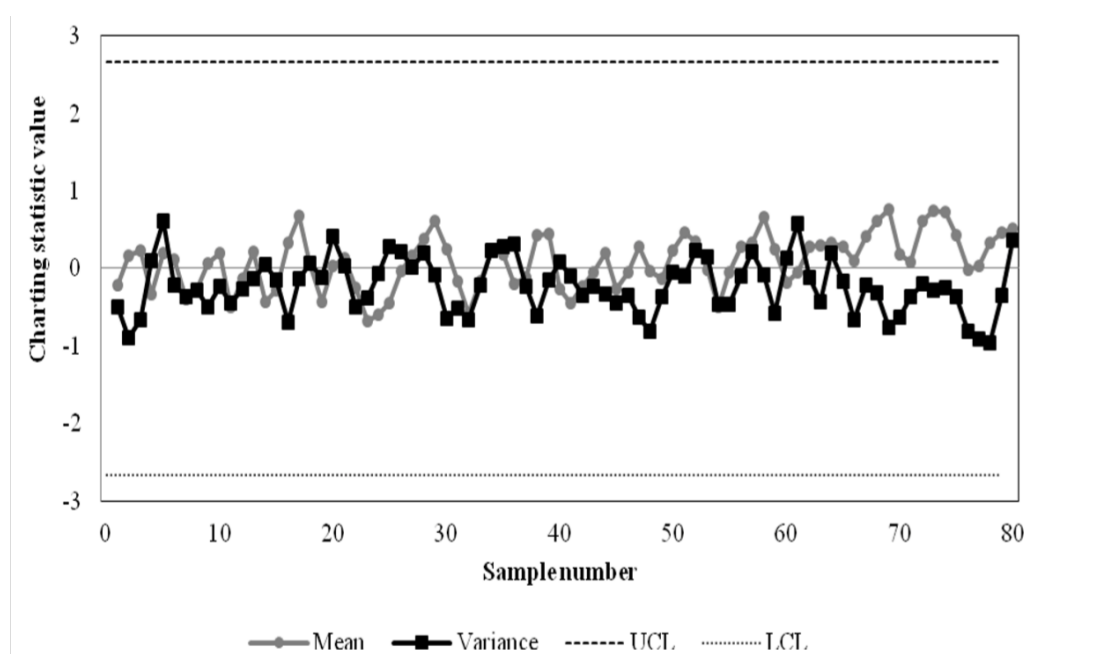
2.2.1 Παραμετρικά Σχέδια Ενός Διαγράμματος με Γνωστές Παραμέτρους

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου για την εντός ελέγχου διεργασία γνωρίζουμε τον μέσο και τη διασπορά. Αυτό συμβαίνει κάποιες φορές επειδή οι παράμετροι δίνονται ως προδιαγραφές ή κάποιες άλλες φορές έχουμε δεδομένα από παλαιότερες εφαρμογές. Όταν έχουμε γνωστές παραμέτρους, λέμε ότι έχουμε την περίπτωση K (*case K*). Τα περισσότερα σχέδια που έχουν προταθεί είναι με δεδομένο την περίπτωση K .

Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες Παραμετρικών Σχεδίων Ενός Διαγράμματος υπό την περίπτωση K : τα Ταυτόχρονα Διαγράμματα Ελέγχου (*Simultaneous Control Charts*), τα οποία χρησιμοποιούν δύο στατιστικά ξεχωριστά για τον μέσο και τη διασπορά, τα οποία σχεδιάζονται στο ίδιο διάγραμμα, και τα Μονά Διαγράμματα Ελέγχου (*Single Control Charts*), τα οποία χρησιμοποιούν ένα στατιστικό, το οποίο υπολογίζεται από τον συνδυασμό των δύο αρχικών στατιστικών.

Τα Μονά Διαγράμματα Ελέγχου, επιπλέον μπορούν να τα διακρίνουμε σε εκείνα με δισδιάστατη περιοχή ελέγχου, όπου τα στατιστικά σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα δύο διαστάσεων και σε εκείνα που έχουν τα «παραδοσιακά» όρια ελέγχου και τα στατιστικά σχεδιάζονται συναρτήσεως του χρόνου. Οι Cheng και Thaga το 2006 παρουσίασαν μια συνολική εικόνα για τα ταυτόχρονα και μονά διαγράμματα ελέγχου και κατέληξαν στο ότι η καλύτερη επιλογή είναι τα μονά διαγράμματα λόγω της απλότητας και σαφήνειας τους.

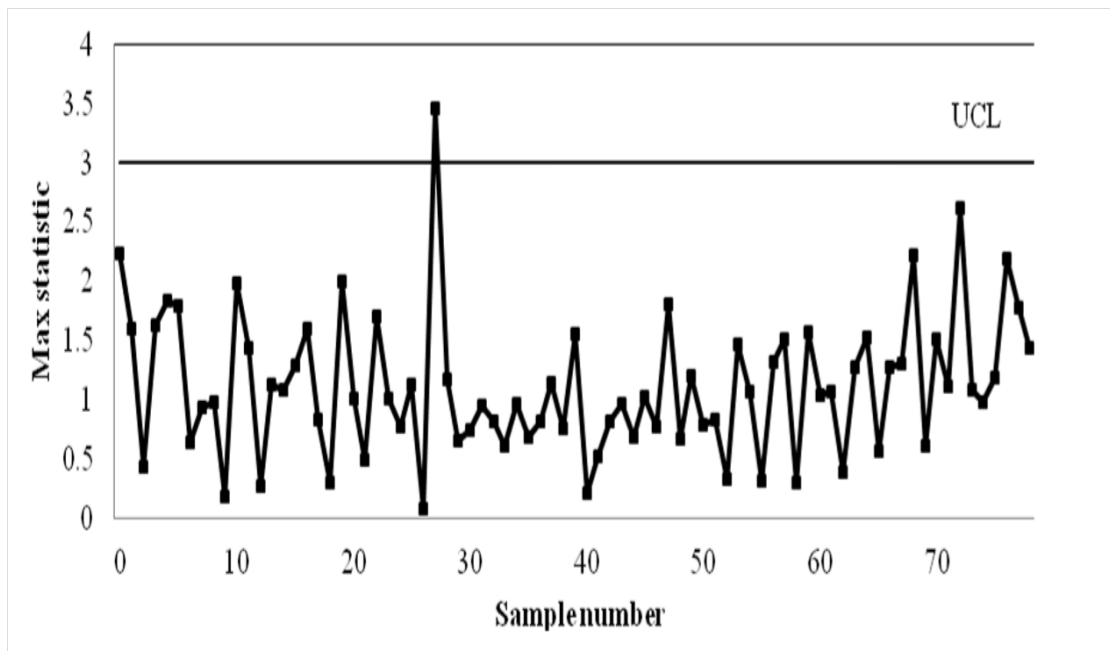
2.2.1.1 Ταυτόχρονα Διαγράμματα



Σχήμα 2.1 Σχέδιο Ταυτόχρονου Ελέγχου

Τα Ταυτόχρονα Διαγράμματα προσπαθούν να απεικονίσουν τον μέσο και τη διακύμανση μέσα στο ίδιο διάγραμμα. Είναι ένας συμβιβασμός μεταξύ σχεδίων μονών και διπλών διαγραμμάτων, αφού διατηρούν διαφορετικά στατιστικά, τα οποία σχεδιάζονται σε ένα μόνο διάγραμμα.

2.2.1.2 Μονά Διαγράμματα με Παραδοσιακά Όρια Ελέγχου



Σχήμα 2.2: Σχέδιο Μονού Διαγράμματος με Κανονικά Όρια Ελέγχου

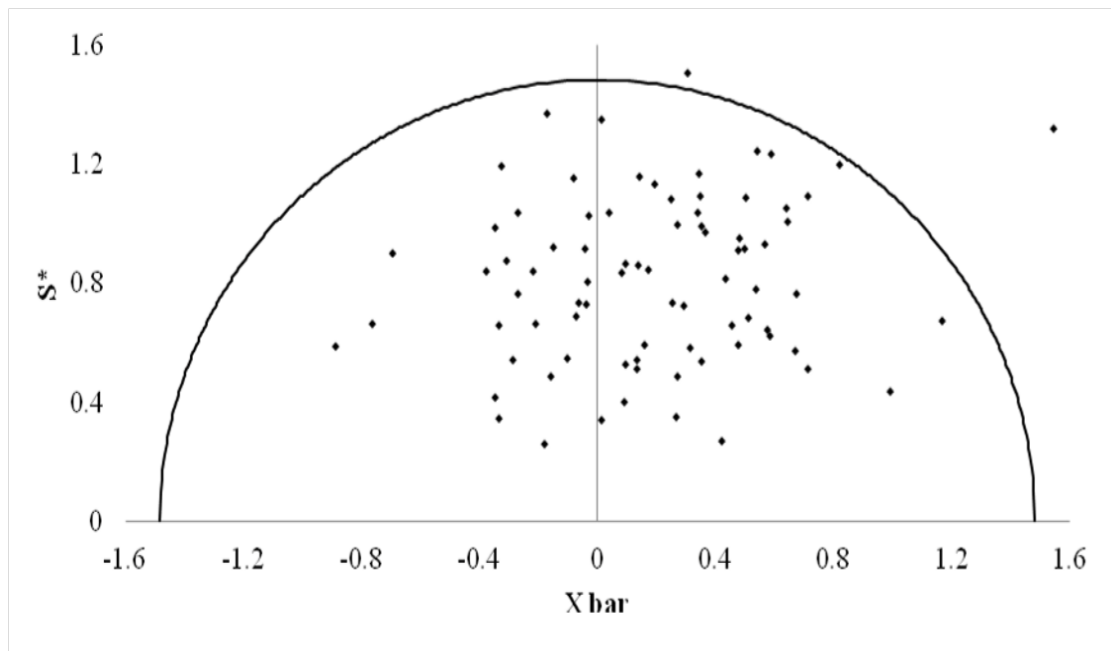
Αυτά τα σχέδια βασίζονται στην μοναδική απεικόνιση των στατιστικών που προέρχονται από τον συνδυασμό, κατόπιν επεξεργασίας, των ελάχιστων επαρκών στατιστικών των \bar{X} και S^2 . Παρόλα αυτά υπάρχουν μερικά διαγράμματα που δεν προέρχονται από τον άμεσο συνδυασμό των στατιστικών στοιχείων του μέσου και της διασποράς. Αντιθέτως, σε αυτήν την περίπτωση αυτά τα σχέδια ενσωματώνουν τις τιμές στόχους του μέσου μ_0 και διασποράς σ_0 .

Το 1991 οι Domangue και Patch κατασκεύασαν ένα EWMA διάγραμμα με στατιστικό:

$$A_i = r \left| \frac{\sqrt{n} (\bar{X}_i - \mu_0)}{\sigma_0} \right|^\alpha + (1 - r) A_{i-1}, \quad (2.1)$$

όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος και r είναι μια σταθερά που δηλώνει το βάρος έτσι ώστε $0 \leq r \leq 1$.

2.2.1.3 Μονά Διαγράμματα με Περιοχές Ελέγχου



Σχήμα 2.3: Σχέδιο Μονού Διαγράμματος με Μια Περιοχή Ελέγχου

Κάποιοι ερευνητές έχουν αναπτύξει σχέδια από κοινού παρακολούθησης, όπου τα δεδομένα απεικονίζονται επάνω σε ένα επίπεδο δύο διαστάσεων και θεωρούνται εντός ελέγχου αν βρίσκονται μέσα σε κάποια καθορισμένη περιοχή ελέγχου. Σε κάθε άλλη περίπτωση η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Μια μεγάλη ποικιλία από αυτά τα μονά διαγράμματα έχει αναπτυχθεί με περιοχές ελέγχου που έχουν σχήματα ημικυκλικά, κυκλικά και ελλειπτικά. Παρόλο που αυτού του τύπου τα διαγράμματα είναι αρκετά εμφανίσιμα έχουν ένα σοβαρό μειονέκτημα, την απώλεια της πληροφορίας της στιγμής εμφάνισης των δεδομένων. Έτσι ο χειριστής χάνει την δυνατότητα να εντοπίσει τάσεις που σχετίζονται με τον χρόνο.

Το 1996 οι Chao και Cheng ανέπτυξαν ένα διάγραμμα ελέγχου όπου τα διανυσματικά σημεία (\bar{X}_i, S_i^*) σχεδιάζονται στο επίπεδο (\bar{X}_i, S_i^*) , όπου:

$$S_i^* = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (2.2)$$

Η περιοχή ελέγχου του διαγράμματος βασίζεται στο στατιστικό:

$$T = (\bar{X} - \mu_0)^2 + S^{*2}. \quad (2.3)$$

Αν τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή το $(\frac{n}{\sigma_0^2})T$ ακολουθεί χ^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας και η περιοχή T είναι κυκλικού σχήματος. Βέβαια, επειδή το S^* πρέπει να είναι θετικό, τότε μόνο η μισή περιοχή μας ενδιαφέρει. Αυτό το σχέδιο είναι γνωστό ως ημικυκλικό διάγραμμα. Το 2008 οι ίδιοι ασχολήθηκαν με το ημικυκλικό διάγραμμα και την ελαχιστοποίηση του μεγέθους του.

2.2.2 Παραμετρικά Σχέδια Ενός Διαγράμματος με Άγνωστες Παραμέτρους

Όλα τα από κοινού διαγράμματα ελέγχου του μέσου και της διασποράς που είναι διαθέσιμα στην βιβλιογραφία είναι σχεδιασμένα με την παραδοχή ότι η κατανομή που ακολουθεί η διεργασία είναι κανονική υπό την περίπτωση Κ. Παρόλα αυτά συχνά στην πραγματικότητα μια ή περισσότερες από αυτές τις παραμέτρους είναι άγνωστες και δεν έχουν προσδιοριστεί. Αυτή η περίπτωση, αγνώστων ή απροσδιόριστων παραμέτρων, ονομάζεται περίπτωση U (case U). Υπό την περίπτωση U η προσπάθεια να βρεθεί και να ερμηνευθεί ένα διάγραμμα ελέγχου έχει πολύ ενδιαφέρον. Ακόμα και αν λάβουμε υπόψιν ότι είναι γνωστή η κατανομή της διεργασίας, όπως η κανονική, έχει πολύ ενδιαφέρον η εκτίμηση των παραμέτρων του μέσου και της διασποράς από τα δεδομένα. Στην συνέχεια θα πρέπει να κατασκευαστούν δοκιμαστικά όρια ελέγχου ώστε να ελέγξουμε την στατιστική εξάρτηση των παραμέτρων. Αυτή η εξάρτηση μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος, δίνοντας εσφαλμένες ενδείξεις, σε τέτοιο βαθμό που ο χρήστης να χάσει την εμπιστοσύνη του και να σταματήσει την όλη προσπάθεια.

Για την δημιουργία ενός διαγράμματος ελέγχου για την εποπτεία μιας διεργασίας έχουμε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση (Φάση I) έχουμε αναδρομική

εξέταση της διεργασίας. Στη δεύτερη (Φάση II) εστιάζουμε στην ίδια την εποπτεία της διεργασίας, δηλαδή συλλέγουμε τα δεδομένα σε τακτικά διαστήματα και υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, το στατιστικό και το απεικονίζουμε στο διάγραμμα.

Στην περίπτωση U, κατά την διάρκεια της Φάσης I, ένας σημαντικός στόχος είναι να αποκτήσουμε δεδομένα εντός ελέγχου, με τα οποία θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους για τα όρια ελέγχου της Φάσης II. Είναι κρίσιμης σημασίας το μέγεθος και η ποιότητα των δεδομένων αυτών γιατί επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος. Παρατηρούμε τους διαφορετικούς στόχους των δύο φάσεων, όπου η πρώτη ενεργεί βοηθητικά για την κατασκευή της δεύτερης. Η πρώτη σχεδιάζεται με μια συγκεκριμένη εντός ελέγχου πιθανότητα λανθασμένης ένδειξης, ενώ η δεύτερη κατασκευάζεται να έχει συγκεκριμένο εντός ελέγχου *ARL*.

Στην Φάση I ψάχνουμε δοκιμαστικά όρια. Αρχικά φτιάχνουμε το δείγμα αναφοράς που θα χρησιμοποιήσουμε, το οποίο προέρχεται από τα δεδομένα μας, ύστερα από μια επαναληπτική διαδικασία επιλογής. Κατά την διαδικασία αυτή, τα υποσύνολα που τα στατιστικά τους βρίσκονται εκτός ελέγχου, εμφανίζονται εκτός ορίων ελέγχου, αφαιρούνται και υπολογίζουμε εκ νέου καινούρια στενότερα όρια από τα εναπομείναντα δεδομένα. Μετά από αρκετές επαναλήψεις καταλήγουμε στα τελικά όρια ελέγχου όπου όλα τα στατιστικά είναι εντός ελέγχου, τώρα είμαστε έτοιμοι για την επόμενη φάση.

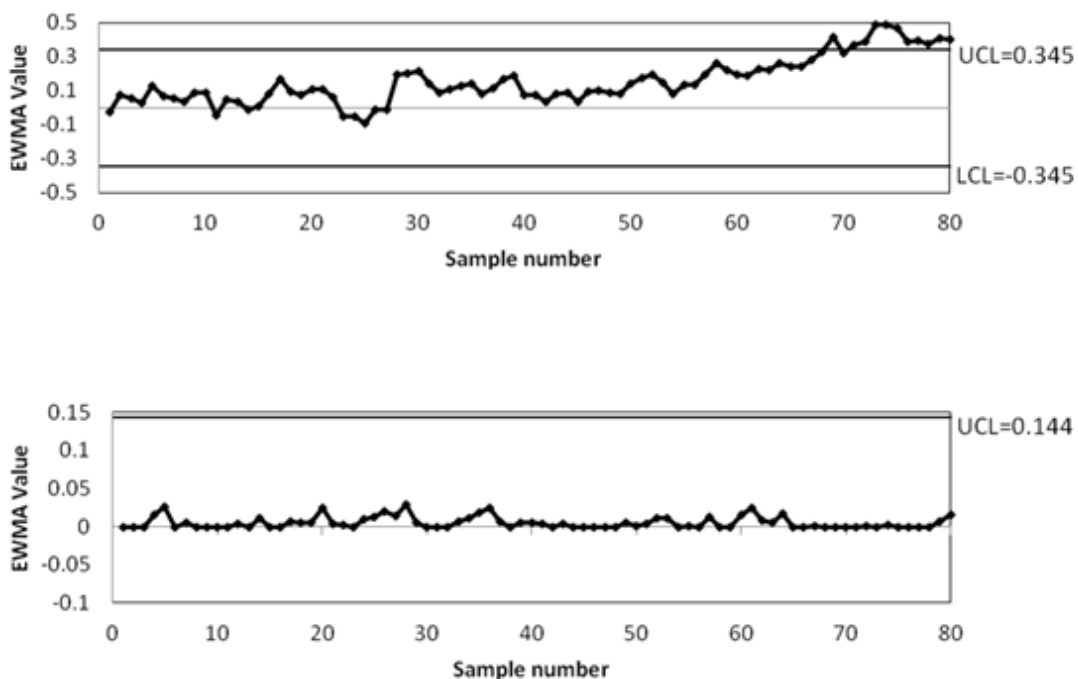
2.2.3 Μειονεκτήματα του Ενός Διαγράμματος Σχέδιο Επίβλεψης

Ακόμα και στα ενός διαγράμματος σχέδια υπάρχουν μειονεκτήματα. Σύμφωνα με τους Chao και Cheng (1996), αυτά τα σχέδια χάνουν ένα σημαντικό χαρακτηριστικό σε σχέση με τα σχέδια δύο διαγραμμάτων. Έτσι, είτε θα χάσουν την σύνδεση της ακολουθίας του χρόνου των δεδομένων, στην περίπτωση των διαγραμμάτων με περιοχές ελέγχου, είτε την ξεχωριστή μεταχείριση των στατιστικών του μέσου και της διασποράς, στην περίπτωση που έχουμε

παραδοσιακά όρια ελέγχου. Στην πρώτη περίπτωση δεν μπορούμε να παρουσιάσουμε την σειρά συλλογής των δεδομένων, οπότε γίνεται αδύνατο να παρατηρήσουμε κάποια τάση σχετική με τον χρόνο. Στην δεύτερη περίπτωση, υπάρχει μια μείωση στην πληροφορία που έχουμε συλλέξει. Σε περίπτωση μιας μετατόπισης στον μέσο, δεν μπορεί να αποδοθεί στον μέσο ή στην διασπορά, χωρίς να επιμείνουμε ώστε να εξακριβώσουμε που οφείλεται.

Άλλο ένα μειονέκτημα είναι ότι συχνά χρησιμοποιούνται ιδιαίτερα πολύπλοκες παράμετροι για το διάγραμμα. Η επιλογή των κατάλληλων τιμών για αυτές τις παραμέτρους μπορεί να αποδειχθεί πολύ δύσκολη υπόθεση. Σε κάποια διαγράμματα παρατηρούμε προβλήματα ευαισθησίας σε μικρές ή μεγάλες αλλαγές στις παραμέτρους ή στην μείωση της διασποράς. Παρόλο που τα σχέδια ενός διαγράμματος έχουν αρκετά πλεονεκτήματα έναντι των σχεδίων δύο διαγραμμάτων αλλά δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι έχουν καλύτερες επιδόσεις.

2.3 Σχέδια Παρακολούθησης Δύο Διαγραμμάτων



Σχήμα 2.4: Σχέδιο Διπλού Διαγράμματος Ελέγχου

Από το ξεκίνημα της χρήσης του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών παρουσιάστηκαν σχέδια από κοινού παρακολούθησης με δύο διαγράμματα. Σε αυτού του τύπου τα σχέδια, με κανονικά κατανομημένα δεδομένα, τα δύο αυτά διαγράμματα κατασκευάζονται ένα για τον μέσο, όπως το διάγραμμα \bar{X} και ένα για τη διακύμανση, όπως τα διαγράμματα S^2 ή R . Μπορεί να αποτελούνται από ένα ζευγάρι διαγραμμάτων Shewhart, CUSUM ή EWMA, ένα για τον μέσο και ένα για τη διασπορά, ή ένας συνδυασμός ενός CUSUM και ενός EWMA. Το διάγραμμα που αφορά στον μέσο σε αυτά τα σχέδια είναι αμφίπλευρο ενώ αυτό που αφορά στη διασπορά μπορεί να είναι είτε μονόπλευρο είτε αμφίπλευρο.

Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των σχεδίων παρακολούθησης δύο διαγραμμάτων είναι η οικειότητα και η ευκολία της ερμηνείας. Επιπροσθέτως, φαίνεται φυσικό σε κάποιους επαγγελματίες να επιβλέπουν τον μέσο και τη διασπορά ξεχωριστά και συγχρόνως, μιας που τα στατιστικά των \bar{X} και S είναι ανεξάρτητα.

Οι Cheng και Thaga (2006) όμως επεσήμαναν και κάποια μειονεκτήματα. Τα σχέδια αυτού του τύπου χρειάζονται περισσότερο προσωπικό, χρόνο και άλλους πόρους συγκριτικά με τα σχέδια ενός διαγράμματος. Επιπλέον αυτού, συνήθως τα σχέδια δύο διαγραμμάτων δίνουν την ψευδαίσθηση ότι δείχνουν ξεκάθαρα πότε μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αφού ελέγχουμε μέσο και διακύμανση ξεχωριστά ή και συγχρόνως. Για παράδειγμα, μια ένδειξη εκτός ελέγχου στο διάγραμμα του μέσου ή μια ένδειξη στο διάγραμμα της διακύμανσης ή και στα δύο διαγράμματα συγχρόνως. Σε αντίθεση με την γενική πεποίθηση, αυτή η κατάσταση είναι παραπλανητική. Δεν σημαίνει απαραίτητα ότι μια μετατόπιση στον μέσο θα επηρεάσει και τη διασπορά ή το αντίθετο. Σε πολλά τέτοια σχέδια τα διαγράμματα του μέσου και της διασποράς είναι κατασκευασμένα ανεξάρτητα και κάθε ένα έχει ένα συγκεκριμένο ARL. Για να αποφύγουμε τις εσφαλμένες ενδείξεις και να μειώσουμε το ποσοστό εμφάνισης τους, θα πρέπει να έχουμε όρια ελέγχου που να έχουν ρυθμιστεί σύμφωνα με την τιμή ενός συνολικού ARL.

2.3.1 Παραμετρικά Σχέδια Δύο Διαγραμμάτων με Γνωστές Παραμέτρους

Όπως και με τα σχέδια παρακολούθησης ενός διαγράμματος, έτσι και η μεγαλύτερη πλειοψηφία των σχεδίων δύο διαγραμμάτων αφορούν δεδομένα από μια συγκεκριμένη κατανομή, όπως η κανονική, για την οποία οι παράμετροι είναι γνωστές. Η πρόταση του Gan (1995) το CC σχέδιο, με ένα αμφίπλευρο CUSUM διάγραμμα για τον μέσο και ένα για τη διακύμανση. Οι Domangue και Patch (1991) με το σχέδιο EE, αποτελείται από ένα αμφίπλευρο EWMA διάγραμμα ένα για τον μέσο και ένα για τη διακύμανση. Ο Gan (1995) μάλιστα απέδειξε ότι το EE σχέδιο έχει μεγαλύτερη ευαισθησία σε μικρές αλλαγές του μέσου που συμβαίνουν συγχρόνως με μια μικρή αύξηση της διακύμανσης, συγκριτικά με το δικό του σχέδιο. Οι Reynolds και Stoumbos (2004) επίσης ερεύνησαν και συνέκριναν τα δημοφιλή σχέδια Shewhart, EWMA και CUSUM, όπου τελικά πρότειναν ένα ζευγάρι EWMA (ή CUSUM) διαγραμμάτων, αλλά με διαφορετικό στατιστικό για τη διακύμανση από αυτό του Gan (1995). Οι Reynolds και Stoumbos (2004) επέκτειναν σε αυτή την εργασία και συνέκριναν μια ποικιλία από δύο ή τρεις συνδυασμούς διαγραμμάτων, συμπεριλαμβανομένου και κάποιων σχεδίων Shewhart – EWMA. Τελικά πρότειναν ένα ζευγάρι EWMA (ή CUSUM) διαγραμμάτων.

2.3.2 Παραμετρικά Σχέδια Δύο Διαγραμμάτων με Άγνωστες Παραμέτρους

Για τα σχέδια παρακολούθησης δύο διαγραμμάτων η άγνοια των παραμέτρων δημιουργεί πιο πολύπλοκα προβλήματα από ότι στα σχέδια με ένα διάγραμμα. Στην Φάση I ένα σημαντικό πρόβλημα είναι πως διεξάγουμε την επαναληπτική διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων. Ερωτήσεις γεννώνται αν θα έπρεπε να σχεδιάσουμε τα δοκιμαστικά όρια των δύο διαγραμμάτων συγχρόνως και όταν ένα υποσύνολο είναι εκτός ελέγχου να το αφαιρέσουμε. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε πρώτα με το ένα διάγραμμα και μετά με το άλλο,

χρησιμοποιώντας για το δεύτερο τα δεδομένα που έχουν μείνει από την διαδικασία του πρώτου. Μία άλλη δυσκολία είναι να κατασκευάσουμε το σχέδιο έτσι ώστε να έχει μία συγκεκριμένη πιθανότητα εμφάνισης σφαλμάτων.

2.4 Μη Παραμετρικά Διαγράμματα

Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις ασχολούμαστε με κανονικά κατανομημένα δεδομένα, αυτό συμβαίνει με την πλειοψηφία των διαθέσιμων διαγραμμάτων ταυτόχρονης παρακολούθησης. Σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία για την απόδοση των ξεχωριστών διαγραμμάτων του μέσου και της διασποράς, που ακολουθούν κανονική κατανομή, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από την κανονικότητα τόσο μεγαλύτερη επίπτωση θα έχουμε στην αποτελεσματικότητα αυτών των διαγραμμάτων. Αυτές οι περιπτώσεις μπορεί να αποκατασταθούν με την χρήση μη παραμετρικών ή χωρίς περιορισμό στην κατανομή διαγραμμάτων ελέγχου, όπου δεν έχουμε τον περιορισμό μια βασικής κατανομής. Μια ανασκόπηση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου μπορούμε να βρούμε στους Chakraborti, et al. στη δημοσίευσή τους το 2011. Παρόλα αυτά η βιβλιογραφία στην περιοχή των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ταυτόχρονης παρακολούθησης είναι προς το παρόν περιορισμένη και για τα σχήματα ενός και δύο διαγραμμάτων.

Υπάρχουν διαθέσιμα λίγα μη παραμετρικά σχήματα ταυτόχρονης παρακολούθησης και αυτά όλα αφορούν σε ενός διαγράμματος σχήματα. Οι Ζου και Tsung το 2010 παρουσίασαν ένα EWMA διάγραμμα ελέγχου. Απέδειξαν ότι αυτό το διάγραμμα είναι αποτελεσματικό στην ανίχνευση αλλαγών στην θέση, στην κλίμακα (*scale*) και στο σχήμα (*shape*). Το 2012 οι Mukherjee και Chakraborti κατασκεύασαν ένα διάγραμμα που βασίζεται στο στατιστικό του Lepage. Αυτό το διάγραμμα τύπου Shewhart ονομάζεται διάγραμμα Lepage-Shewhart και έχει την ικανότητα να βρίσκει την φύση της αλλαγής αφού έχει ανιχνευθεί η αλλαγή.

Για τα σχέδια μη παραμετρικών διαγραμμάτων παρακολούθησης δεν έχουν παρουσιαστεί προτάσεις ακόμα. Αλλά οι Reynolds και Stoumbos το 2010

παρουσίασαν μερικά σχέδια που αποτελούνται από δύο CUSUM διαγράμματα τα οποία φαίνονται να έχουν πολύ ενδιαφέρον.

2.5 Διάφορα Προβλήματα στην Ταυτόχρονη Παρακολούθηση

Τα τελευταία χρόνια οι ερευνητές έχουν προσανατολιστεί σε ειδικές περιπτώσεις όπως η διαδικασία πολλαπλών παραγόντων, αυτοσυσχετισμένες διαδικασίες και επαναλαμβανόμενες αλλαγές στις παραμέτρους που ακολουθούν κάποιο μοτίβο. Σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις τα σχέδια ταυτόχρονης παρακολούθησης κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας ως βάση τα υπάρχοντα σχέδια και στην συνέχεια υπόκεινται σε βελτιώσεις. Επιπροσθέτως κάποιες ερευνητικές προσπάθειες έχουν στρέψει την προσοχή τους στην ενσωμάτωση μεταβλητού πλήθους δειγμάτων και μεταβλητών διαστημάτων δειγματοληψίας σε τέτοιου είδους διαγράμματα.

2.5.1 Διαδικασία Πολλαπλών Παραγόντων

Όταν οι χρήστες θέλουν να παρακολουθήσουν την ποιότητα πολλαπλών χαρακτηριστικών σε μια συγκεκριμένη διεργασία, ένα διάγραμμα πολλαπλών παραγόντων είναι η λύση. Στις περιπτώσεις της από κοινού παρακολούθησης του μέσου και της διασποράς ένα σχέδιο παρακολούθησης αποτελείται είτε από ένα είτε από δύο πολλαπλών παραγόντων διαγράμματα ελέγχου.

Στην βιβλιογραφία θα βρούμε τους Reynolds και Cho το 2006 και τους Reynolds και Stoumbos το 2008 να ασχολούνται με πληθώρα σχεδίων δυο διαγραμμάτων από κοινού παρακολούθησης του διανύσματος του μέσου και του πίνακα της συνδιακύμανσης και ανέδειξαν τα σχέδια που συμπεριφέρονται καλύτερα στους διάφορους τύπους μετατοπίσεων. Το 2006 επίσης οι Cheng και Thaga ασχολήθηκαν με σχέδια που αποτελούνται από τέσσερα μοναδικά διαγράμματα πολλαπλών παραγόντων από κοινού παρακολούθησης. Από τα

τέσσερα διαγράμματα, τα τρία είναι μοναδικά διαγράμματα που χρησιμοποιούν τη μεγιστοποίηση μιας συνάρτησης (*maximum function*) για να συνδέσουν τα στατιστικά του μέσου με αυτά της συνδιακύμανσης και ένα τέταρτο διάγραμμα ταυτόχρονης απεικόνισης.

2.5.2 Αυτοσυσχέτιση

Μια σημαντική υπόθεση για τα περισσότερα διαγράμματα είναι ότι τα δείγματα είναι ανεξάρτητα. Παρόλο που αυτό ισχύει, σε πολλές περιπτώσεις παρατηρούμε αυτοσυσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων ή των δειγμάτων. Όταν έχουμε αυτοσυσχέτιση έχουμε και αυξημένη πιθανότητα εσφαλμένης ένδειξης, για αυτό χρειάζεται σε αυτές τις περιπτώσεις να γίνουν οι απαραίτητες ρυθμίσεις στο διάγραμμα που να αποτρέπουν κάτι τέτοιο να γίνεται. Είναι γνωστό ότι αν αγνοήσουμε την αυτοσυσχέτιση, όταν υπάρχει, μπορεί να έχουμε σοβαρή αρνητική επίδραση στην επίδοση του διαγράμματος ελέγχου μας.

Το 1999 οι Lu και Reynolds και το 2006 οι Cheng και Thaga παρουσίασαν κάποιες προσεγγίσεις στην επίβλεψη αυτοσυσχετισμένων διεργασιών. Αναφέρουν περιπτώσεις σχεδίων όπου οι διεργασίες για την εκτίμηση των παραμέτρων αλλά και την επιλογή των ορίων ελέγχου προσαρμόζονται ώστε να λάβουν υπόψη την αυτοσυσχέτιση σε σχέδια όπου χρησιμοποιείται ένα μοντέλο χρονικής ακολουθίας. Καταλήγουν ότι μια προσέγγιση δύο διαγραμμάτων, η οποία αποτελείται από ένα EWMA διάγραμμα με τις παρατηρήσεις και ένα Shewhart των υπολοίπων έχει την καλύτερη απόδοση με μικρή ή μέτρια αυτοσυσχέτιση.

2.5.3 Μεμονωμένες Παρατηρήσεις

Τα περισσότερα διαγράμματα χρησιμοποιούν δειγματικά υποσύνολα με περισσότερα του ενός δείγματα, αλλά κάποιες φορές έχουμε ένα μόνο δείγμα εξαιτίας του κόστους ή κάποιας άλλης δυσκολίας που παρουσιάζεται στην παραγωγική διαδικασία. Για αυτές τις περιπτώσεις υπάρχουν αρκετά σχέδια

μονών ή διπλών διαγραμμάτων προς χρήση. Κάποια από αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για μεμονωμένες παρατηρήσεις, ενώ τα υπόλοιπα χρησιμοποιούνται και για μεγαλύτερα του ενός σύνολα δειγμάτων.

Οι Reynolds και Stoumbos (2001a) ερεύνησαν αρκετά σχέδια δύο διαγραμμάτων συνδυασμένης παρακολούθησης για δείγματα με μία παρατήρηση για την ανίχνευση βαθμιαίων αλλαγών στις παραμέτρους κατά την διάρκεια της διεργασίας, αντί για σταθερές αλλαγές. Σε επόμενη εργασία τους το 2004 έκαναν σύγκριση της απόδοσης αρκετών τέτοιων διαγραμμάτων. Κατέληξαν ότι με τη λήψη δειγμάτων με ένα συγκεκριμένο ρυθμό, η επιλογή μεμονωμένων δειγμάτων παρατήρησης συγκριτικά με περισσότερα δείγματα, επιτυγχάνει καλύτερη απόδοση στην ανίχνευση και διάγνωση για τα διαγράμματα EWMA και CUSUM.

Οι Wu και Wang το 2007 ανέπτυξαν ένα σχέδιο με ένα μονό διάγραμμα ειδικά για περιπτώσεις με μεμονωμένες παρατηρήσεις. Για το CUSUM μονό διάγραμμα τους, το στατιστικό του βασίζεται στον γραμμικό συνδυασμό των $x_i - \mu_0$ και $(x_i - \mu_0)^2$, ώστε να έχουμε:

$$A_t = \begin{cases} \max[0, A_{t-1} + \lambda y + (1 - \lambda)y^2 - k_A] \text{ αν } A_{t-1} > 0 \text{ ή } (A_{t-1} = 0 \text{ και } y > 0) \\ \min[0, A_{t-1} + \lambda y + (1 - \lambda)y^2 - k_A] \text{ αν } A_{t-1} < 0 \text{ ή } (A_{t-1} = 0 \text{ και } y < 0) \end{cases}$$

όπου k_A είναι μια παράμετρος, $A_0 = 0$ και $y = x_i - \mu_0$.

2.5.4 Προσαρμοζόμενα Διαγράμματα

Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να αλλάξουμε κάποιο χαρακτηριστικό του διαγράμματος, για παράδειγμα το μέγεθος του δείγματος ή τα όρια ελέγχου. Με αυτόν τον τρόπο αλλάζουμε τον τρόπο που παρατηρούμε το διάγραμμα ώστε μια αλλαγή να ανιχνευθεί ταχύτερα και πιο αποδοτικά. Τέτοιες προσαρμογές χρησιμοποιούνται σε σχέδια του ενός αλλά και των δύο διαγραμμάτων.

Οι Chengalur, et al. το 1989 ασχολήθηκαν με την σύγκριση της απόδοσης μεταξύ διαφόρων σταθερών και προσαρμοζόμενων διαστημάτων δειγματοληψίας σε σχέδια ενός και δύο διαγραμμάτων Shewhart. Κατέληξαν ότι

τα προσαρμοσμένα διαστήματα είναι αποδοτικότερα και στις δύο περιπτώσεις. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι Reynolds και Stoumbos (2001b) για δείγματα με μία παρατήρηση. Οι Costa και De Magalhães το 2007 έκαναν παρόμοιες συγκρίσεις για το NCS διάγραμμα με αντίστοιχα αποτελέσματα. Ανέπτυξαν μια προσαρμοζόμενη έκδοση του NCS διαγράμματος που έχει κυμαινόμενα όρια ελέγχου, μεγέθη δειγμάτων και δειγματικά διαστήματα. Οι Wu, et al. (2007) τροποποίησαν το WLC διάγραμμα ελέγχου ώστε να ενσωματώνει κυμαινόμενα δειγματικά διαστήματα.

2.5.5 Σχεδίαση με Οικονομικά Κριτήρια

Κάποιες φορές η μείωση του κόστους είναι σημαντικότερη της στατιστικής απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου. Οπότε σε αυτές τις περιπτώσεις επιλέγουμε τις παραμέτρους του διαγράμματος ελέγχου βάσει οικονομικών κριτηρίων, όπως ελαχιστοποίηση του κόστους. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την λήψη μικρότερου δείγματος, ή με δείγματα από λιγότερα στάδια παραγωγής.

2.6 Συμπεράσματα

Αρκετά σχέδια διαγραμμάτων ελέγχου είναι διαθέσιμα για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς μια κανονικής κατανομής, ενός ή δύο διαγραμμάτων. Όλα έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα, αλλά τα σχέδια με ένα διάγραμμα φαίνεται να είναι η καλύτερη επιλογή, αφού έχει δημιουργηθεί αρκετός προβληματισμός όταν στην πρώτη φάση έχουμε εκτίμηση των παραμέτρων, για τα σχέδια δύο διαγραμμάτων.

Κεφάλαιο 3

Αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας

3.1 Εισαγωγή

Τα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου, γνωστά ως CUSUM (*Cumulative Sum*) εισήχθησαν από τον από τον Βρετανό χημικό Page το 1954. Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι η ιδιαίτερη ευαισθησία τους στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων για αυτό και χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μικρών σφαλμάτων. Χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην βιομηχανία στον έλεγχο διεργασιών και μετρήσεων. Συνήθως τα CUSUM διαγράμματα εφαρμόζονται στην επίβλεψη των μετατοπίσεων του μέσου ή της μεταβλητότητας διεργασιών. Τα διαγράμματα CUSUM ενσωματώνουν άμεσα όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των παρατηρήσεων γιατί δημιουργούν συσσωρευμένα αθροίσματα των δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο μ_0 . Είναι γνωστό ότι τα CUSUM δίνουν στενότερο έλεγχο διεργασιών από τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου ποιότητας όπως του Shewhart. Επιπλέον τα CUSUM έχουν την δυνατότητα να διακρίνουν μικρά σφάλματα που τα κλασικά σχέδια ελέγχου αδυνατούν.

Έστω ότι το χαρακτηριστικό X που μας ενδιαφέρει ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma^2)$ όπου μ_0 και σ είναι οι τιμές στόχος. Λαμβάνουμε m ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους $n \geq 1$ το καθένα. Τότε ο δειγματικός μέσος θα είναι:

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n} \quad (3.1)$$

Ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\bar{X}_i} = \mu_0$ και διασπορά $\sigma_{\bar{X}_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Τα διαγράμματα CUSUM ενσωματώνουν άμεσα όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των παρατηρήσεων γιατί στο διάγραμμα απεικονίζονται τα συσσωρευμένα αθροίσματα C_i των διαφόρων δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο μ_0 .

Οι τιμές των C_i θα είναι:

$$C_1 = X_1 - \mu_0,$$

$$C_2 = (X_2 - \mu_0) + (X_1 - \mu_0), \dots,$$

$$C_m = (X_m - \mu_0) + \dots + (X_1 - \mu_0).$$

Και γενικά:

$$C_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0) \text{ ή } C_i = (X_i - \mu_0) + C_{i-1}, 1 \leq i \leq m,$$

με αρχική τιμή $C_0 = 0$.

Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι όποιο συστηματικό σφάλμα προκύψει όσο μικρό και να είναι θα δημιουργήσει ένα υπολογίσιμο συσσωρευμένο σφάλμα που θα αποκλίνει από την τιμή του μηδενός και θα εμφανιστεί αυτή η διαφορά στο διάγραμμα. Δηλαδή αν $\mu_i > \mu_0$, τότε θα έχουμε μια μετατόπιση του C_i στο διάγραμμα προς τα επάνω, ενώ αν $\mu_i < \mu_0$, τότε θα έχουμε μετατόπιση του C_i προς τα κάτω.

Παρατηρούμε ότι στις εντός ελέγχου διεργασίες το συσσωρευτικό άθροισμα τείνει στη τιμή μηδέν και οι αποκλίσεις είναι τυχαία κατανομημένες γύρω από το μηδέν. Οπότε αν εμφανιστεί κάποια τάση προς τα επάνω ή προς τα κάτω τότε υπάρχει ένδειξη μετατόπισης του μέσου και απαιτείται η εύρεση των αιτιών που προκάλεσαν την μετατόπιση. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφερθούμε στο σημαντικότερο μειονέκτημα των CUSUM. Μετά την λήψη αποφάσεων με σκοπό την εξάλειψη των αιτιών δεν έχουμε άμεση πληροφόρηση ότι η διεργασία είναι ξανά εντός ελέγχου. Αυτό συμβαίνει γιατί το συσσωρευτικό άθροισμα χρειάζεται αρκετά αθροίσματα από διαφορές του αντίθετου πρόσημου για να επιστρέψει στη μέση τιμή των ορίων ελέγχου.

Μια ακόμα αδυναμία των διαγραμμάτων CUSUM είναι ο εντοπισμός τυχαίων συστηματικών σφαλμάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν μια διεργασία εμφανίζει

πολλά τυχαία σφάλματα εκατέρωθεν της μέσης τιμής με αποτέλεσμα οι τιμές των διαφορών $X_i - \mu_0$ να αλληλοαναιρούνται χωρίς να υπάρχει κάποια ένδειξη προβλήματος.

Ένα χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων CUSUM είναι ότι ερμηνεύεται μόνο ποιοτικά, δηλαδή παρατηρώντας την κλίση της καμπύλης που σχηματίζεται. Σε αντίθεση με άλλα διαγράμματα δεν έχουμε συγκεκριμένα όρια ελέγχου όπως τα διαγράμματα τύπου Shewhart. Από την κλίση της καμπύλης μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για το είδος του προβλήματος. Εντονότερες κλίσεις υποδηλώνουν συστηματικές εκτροπές, ενώ οι συστηματικές εκτροπές δίνουν μικρές κλίσεις.

Στην συνέχεια θα δούμε κάποιους εναλλακτικούς τρόπους εφαρμογής της μεθόδου των διαγραμμάτων CUSUM.

3.1.1 Διάγραμμα Tabular CUSUM

Στο διάγραμμα Tabular CUSUM έχουμε δύο συσσωρευτικά αθροίσματα για κάθε τιμή ελέγχου. Στο ένα άθροισμα έχουμε τις θετικές αποκλίσεις από τον στόχο που συναθροίζονται στο άνω συσσωρευτικό άθροισμα C_i^+ και στο άλλο τις αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο που συναθροίζονται στο κάτω συσσωρευτικό άθροισμα C_i^- .

Οι σχέσεις των συσσωρευτικών αθροισμάτων:

$$C_i^+ = \max[0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (3.2)$$

$$C_i^- = \min[0, (\mu_0 - K) - X_i + C_{i-1}^-], \quad (3.3)$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Παρατηρούμε ότι οι διαφορές $X_i - (\mu_0 + K)$ και $(\mu_0 - K) - X_i$ μοιάζουν με τη διαφορά $X_i - \mu_0$ του αθροίσματος CUSUM αλλά διαφέρουν, στην πρόσθεση ή αφαίρεση αντίστοιχα, της τιμής K . Η τιμή K ονομάζεται τιμή αναφοράς και

συμμετέχει μόνο στους υπολογισμούς των αθροισμάτων. Κάθε φορά που οι διαφορές γίνονται αρνητικές μηδενίζονται, έτσι τα αθροίσματα C_i^+ και C_i^- ξαναρχίζουν να αυξάνονται όταν οι διαφορές γίνουν πάλι μεγαλύτερες του μηδενός.

Τα αθροίσματα C_i^+ και C_i^- έχουν αντίθετα πρόσημα με το ένα C_i^+ πάνω και το άλλο C_i^- κάτω από τη μέση τιμή μ_0 και σχεδιάζονται ως δύο διαφορετικές στήλες. Ακόμα πάνω στο διάγραμμα σχεδιάζουμε το διάστημα απόφασης H με τα όρια ελέγχου H^+ και H^- , ως δύο ευθείες παράλληλες προς το μέσο μ_0 .

Όταν επιλέγουμε τα K και H , η επιλογή είναι πολύ σημαντική γιατί επηρεάζει την απόδοση του διαγράμματος, σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την απόδοση του διαγράμματος μέσω του μέσου μήκους ροής ARL.

Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε για τη επιλογή των K και H :

$$H = h \sigma \text{ και } K = k \sigma = \frac{\delta}{2} \sigma, \text{ με } \delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma},$$

όπου η k παράμετρος είναι το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνευθεί σε μονάδες τυπικών αποκλίσεων σ , μ_0 είναι η τιμή στόχος και μ_1 είναι η εκτός ελέγχου τιμή του μέσου.

3.1.2 Τυποποιημένο Διάγραμμα CUSUM

Σε κάποιες περιπτώσεις προτιμάται η τυποποίηση της μεταβλητής X_i πριν συνεχίσουμε με τους υπολογισμούς των συσσωρευμένων αθροισμάτων. Έτσι ορίζουμε μια καινούρια μεταβλητή την τυποποιημένη τιμή της X_i :

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Οπότε έχουμε τα τροποποιημένα συσσωρευτικά αθροίσματα:

$$C_i^+ = \max[0, Y_i - k + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, -k - Y_i + C_{i-1}^-],$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$.

Βασικά πλεονεκτήματα των τυποποιημένων διαγραμμάτων CUSUM:

- i. Μπορούμε να έχουμε περισσότερα από ένα διαγράμματα με τις τιμές των k και h , αφού οι παράμετροι δεν είναι εξαρτημένες. Στην τυποποιημένη κανονική κατανομή οι παράμετροι δεν εξαρτώνται από την τυπική απόκλιση σ η οποία είναι ίση με τη μονάδα.
- ii. Με τη χρήση της τυποποιημένης τιμής της X_i είναι ευκολότερη η κατασκευή των διαγραμμάτων για τον έλεγχο της μεταβλητότητας μιας διαδικασίας.

3.1.3 Διάγραμμα Scale CUSUM

Ένας τύπος διαγράμματος CUSUM για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας μιας διαδικασίας είναι το Διάγραμμα Scale CUSUM. Όπως και προηγουμένως θεωρούμε την κανονική μεταβλητή X_i με μέση τιμή στόχο μ_0 και τυπική απόκλιση σ .

Η τυποποιημένη τιμή της X_i είναι: $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Κατασκευάζουμε μια καινούρια μεταβλητή την v_i (Hawkins 1981, 1993):

$$v_i = \frac{\sqrt{|Y_i|} - 0.822}{0.349} \sim N(0,1), \quad (3.4)$$

με $1 \leq i \leq m$ και $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$.

Οι ποσότητες v_i είναι περισσότερο ευαίσθητες σε μετατοπίσεις της διασποράς μιας διαδικασίας από ότι σε μετατοπίσεις του μέσου. Αφού ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$ έχουμε τα συσσωρευτικά αθροίσματα για τα διαγράμματα Scale CUSUM:

$$S_i^+ = \max[0, v_i - k + S_{i-1}^+] \quad (3.5)$$

$$S_i^- = \max[0, -k - v_i + S_{i-1}^-], \quad (3.6)$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $S_0^+ = S_0^- = 0$.

Η ερμηνεία των διαγραμμάτων Scale CUSUM είναι αντίστοιχη των διαγραμμάτων CUSUM για το μέσο, μόνο που αυτή τη φορά ασχολούμαστε με την τυπική απόκλιση. Έτσι αν η τυπική απόκλιση της διεργασίας αυξηθεί τότε θα αυξηθούν και οι τιμές των αθροισμάτων S_i^+ . Ενώ αν η τυπική απόκλιση μειωθεί τότε θα μειωθούν και οι τιμές των S_i^- . Και στις δύο περιπτώσεις αν αυξηθούν ή μειωθούν αντίστοιχα τόσο ώστε να ξεπεράσουν διάστημα απόφασης H θεωρούμε ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου. Η επιλογή των k και h γίνεται με τον ίδιο τρόπο με τα διαγράμματα του μέσου. Τώρα αν δοθεί σήμα και στα δύο διαγράμματα μέσου και τυπικής μεταβλητότητας τότε υποπτευόμαστε μετατόπιση του μέσου.

3.1.4 V-μάσκα

Ένας άλλος τρόπος εφαρμογής της μεθόδου CUSUM είναι η μέθοδος V-μάσκα όπου προτάθηκε από τον Barnard το 1959. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί δύο τέμνουσες ευθείες που σχηματίζουν μια V μάσκα που οριοθετεί τα εντός ελέγχου σημεία του διαγράμματος, μεταξύ των δύο πλευρών την άνω και την κάτω.

Η V μάσκα εφαρμόζεται στις διαδοχικές τιμές των αθροισμάτων:

$$C_i = X_i + C_{i-1} \quad \text{ή} \quad C_i = Y_i + C_{i-1}$$

με $1 \leq i \leq m$ και $Y_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma}$ η τυποποιημένη τιμή της X_i και $C_0 = 0$.

Η τελευταία τιμή C_i είναι το σημείο τομής των άνω και κάτω πλευρών, η κορυφή P. Αν όλα τα προηγούμενα σημεία C_1, C_2, \dots, C_{i-1} βρίσκονται μεταξύ των δύο πλευρών τότε η διεργασία είναι εντός ελέγχου, αν όμως είναι σημείο βρεθεί

εκτός τότε η διεργασία είναι εκτός ελέγχου και έχουμε ένδειξη ότι ο μέσος της διαδικασίας έχει μετακινηθεί.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιεί η V μάσκα είναι d και θ . Η απόσταση του τελευταίου συσσωρευτικού αθροίσματος C_m από την κορυφή είναι το d και το θ είναι το $\frac{1}{2}$ της γωνίας της μάσκας.

Από την V μάσκα επιλέγοντας τις παραμέτρους d και θ έτσι ώστε:

$$k = A \tan \theta \quad (3.7)$$

και

$$h = A d \tan \theta = d k, \quad (3.8)$$

έχουμε ισοδύναμο διάγραμμα με το Tabular CUSUM, όπου A είναι ένας παράγοντας που συνδέει τους άξονες του διαγράμματος και ισούται με την απόσταση δυο διαδοχικών σημείων, απόσταση σταθερή και συνήθως ίση με 1σ ή 2σ .

Ως προς την επιλογή των k και h ο Johnson το 1961 πρότεινε την σύνδεση τους με τις πιθανότητες α και β :

$$d = \frac{2}{\delta^2} \ln\left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \quad (3.9)$$

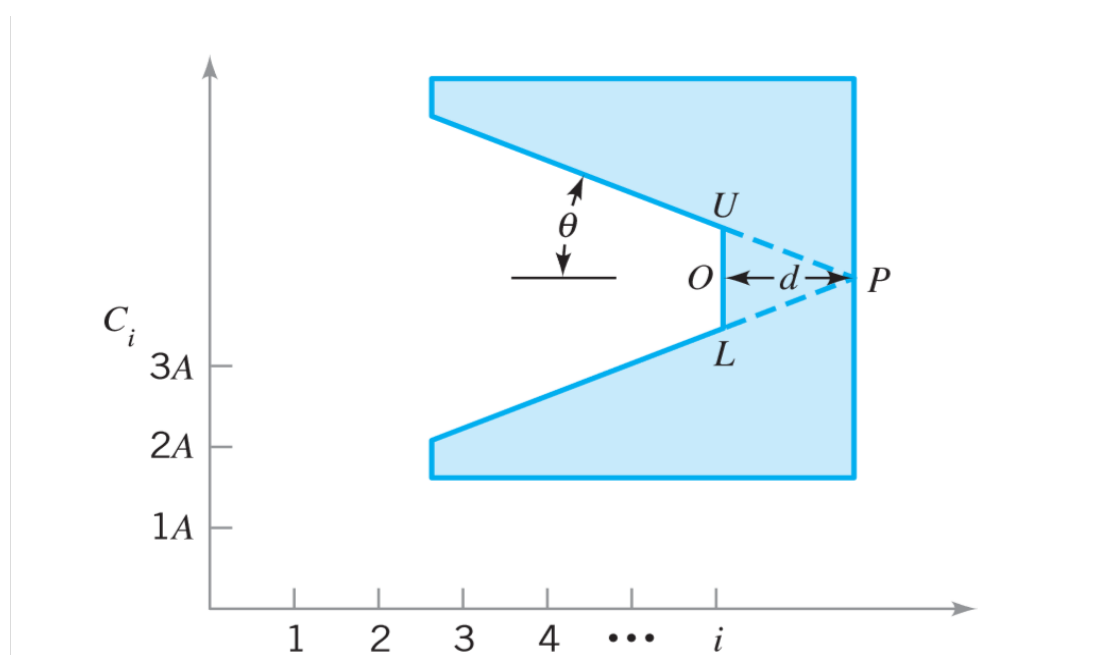
και

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{2A}\right). \quad (3.10)$$

Αν η πιθανότητα β είναι μικρή, συνήθως συμβαίνει, τότε προσεγγιστικά καταλήγουμε:

$$d \cong -2 \frac{\ln \alpha}{\delta^2}. \quad (3.11)$$

Η χρήση της V μάσκας έχει αρκετά μειονεκτήματα που την καθιστούν δύσκολη στην εφαρμογή. Με σχήμα αμφίπλευρο είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση προβλημάτων σε μονόπλευρες διαδικασίες. Επίσης είναι δύσκολος ο προσδιορισμός του πόσο πίσω πρέπει να προεκτείνουμε τις πλευρές της V μάσκας άρα δυσχεραίνει την στατιστική συμπερασματολογία. Αναφορικά με την χρήση των πιθανοτήτων α και β επιπλέον έχουμε και την σωστή επιλογή των πιθανοτήτων, διότι για κάθε διαφορετική επιλογή έχουμε και διαφορετικά αποτελέσματα. Ένας τελευταίος περιορισμός που έχουμε είναι ότι το άθροισμα πρέπει να ξεκινάει από το μηδέν.

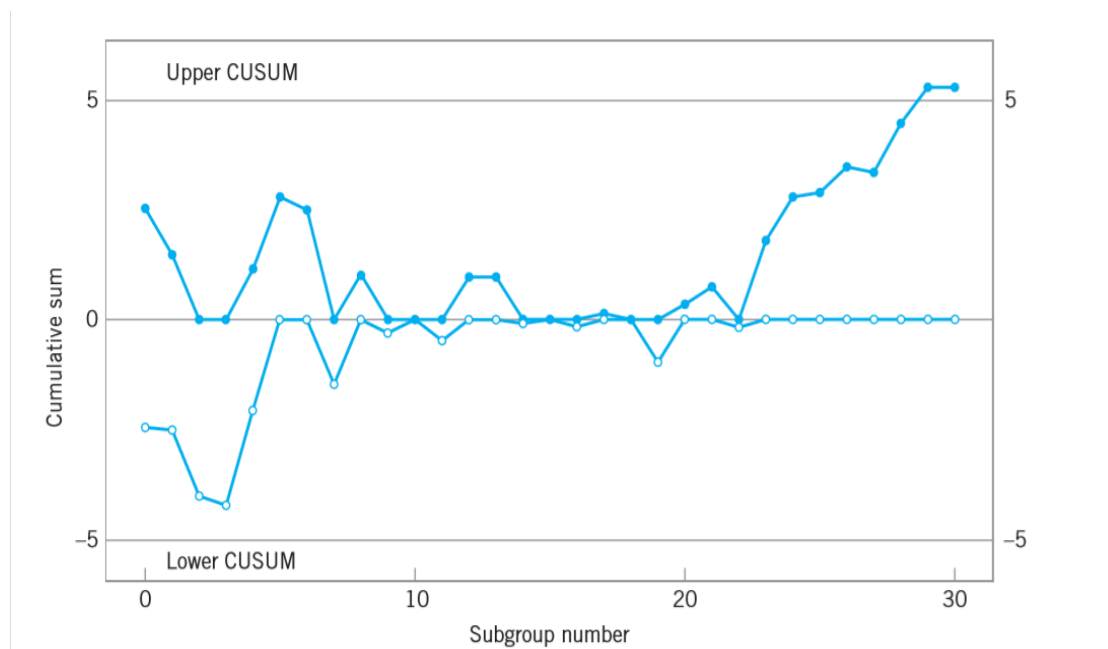


Σχήμα 3.1: V-μάσκα

3.1.5 FIR CUSUM

Μια τεχνική με σκοπό στην αρχή της διαδικασίας την αύξηση της ευαισθησίας της είναι των Lucas και Crosier το 1982 και λέγεται γρήγορη αρχική απόκριση (*Fast Initial Response, FIR*). Χρησιμοποιεί αρχικές τιμές στα συσσωρευτικά αθροίσματα $C_0^+ = C_0^-$ συνήθως ίσες με το $\frac{H}{2}$ οι οποίες αυξάνουν το μέσο μήκος ροής *ARL* για διαδικασίες που είναι εκτός ελέγχου. Έχοντας δώσει αρχικές τιμές στα συσσωρευτικά αθροίσματα αρκετά κοντά στα όρια ελέγχου εφόσον η διεργασία είναι εκτός ελέγχου τότε με λίγες αθροίσεις ξεπερνάμε τα όρια

ελέγχου και το διάγραμμα ανιχνεύει γρήγορα την αλλαγή στον μέσο. Από την άλλη αν είναι εντός ελέγχου οι παρατηρήσεις είναι κοντά στο μηδέν οπότε και τα συσσωρευτικά αθροίσματα πλησιάζουν σύντομα στην τιμή στόχου.



Σχήμα 3.2: FIR CUSUM

3.2 Ενοποιημένα CUSUM διαγράμματα για την παρακολούθηση του Μέσου και της Μεταβλητότητας της διεργασίας

3.2.1 Περιγραφή

Οι Yeh, et al. (2004) πρότειναν δύο νέα CUSUM διαγράμματα, δηλαδή το CUSUM M-διάγραμμα και το CUSUM V-διάγραμμα. Το CUSUM M-διάγραμμα είναι ειδικά σχεδιασμένο να ανιχνεύει μικρές μεταβολές του μέσου της διεργασίας, ενώ το CUSUM V-διάγραμμα να ανιχνεύει μικρές μετατοπίσεις της μεταβλητότητας της διεργασίας. Τον συνδυασμό αυτών των δύο νέων

διαγραμμάτων CUSUM μπορούμε να τον θεωρήσουμε σαν την CUSUM έκδοση των \bar{X} - και S -διαγραμμάτων, αντίστοιχα.

Η βασική ιδέα είναι να μετασχηματίσουμε τα στατιστικά που χρησιμοποιούνται ώστε να ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό πιθανότητας (*Probability integral transform*). Στην συνέχεια το CUSUM διάγραμμα υπολογίζεται βασιζόμενο στην ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$. Αφού ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός πιθανότητας (*Probability integral transform*) δεν περιορίζεται στην κανονική κατανομή τα CUSUM M- και CUSUM V-διαγράμματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε μη κανονικές διεργασίες, εφόσον οι κατανομές των στατιστικών που δοκιμάζουμε είναι γνωστές. Επιπλέον αφού και τα δύο διαγράμματα ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, όταν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, τότε δεν είναι ανάγκη να υπολογίσουμε ξεχωριστά όρια ελέγχου για το κάθε διάγραμμα. Στην πραγματικότητα κάποια στατιστικά μπορούν να μετασχηματιστούν κατάλληλα για να ακολουθούν ομοιόμορφη $U(0,1)$ και οι διαδικασίες CUSUM που έχουν αναπτυχθεί βασισμένες σε $U(0,1)$ θα έχουν την ίδια εντός ελέγχου κατανομή. Αυτό ακριβώς είναι που διευκολύνει το σχεδιασμό διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM για διαφορετικά στατιστικά στοιχεία. Ακόμα, τα παραγόμενα αποτελέσματα μπορούν να σχεδιαστούν σε ένα μοναδικό διάγραμμα δίνοντας τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε κάποια ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας υπό την οπτική των CUSUM.

Έτσι τα CUSUM M- και CUSUM S-διαγράμματα παρέχουν ένα ενοποιημένο σχέδιο παρακολούθησης του μέσου και της μεταβλητότητας. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν υπάρχουν πολλαπλές διεργασίες ή πολλαπλές τροφοδοσίες διεργασιών υπό παρακολούθηση, αφού η εποπτεία όλων των ποιοτικών χαρακτηριστικών μπορεί να γίνει με ένα μόνο διάγραμμα.

3.2.2 Κατασκευή των CUSUM M- και CUSUM V-Διαγραμμάτων

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει ένα ενιαίο ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει από μια διεργασία. Υποθέτουμε ότι όταν η διεργασία είναι

εντός ελέγχου, το X ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ_0 , τα οποία είναι άγνωστα. Για να ελέγξουμε την ποιότητα της διεργασίας, λαμβάνουμε επαναλαμβανόμενα δείγματα μεγέθους n , $X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn}$, με $j \geq 1$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι τα μ_0 και σ_0 μπορούν να εκτιμηθούν από ένα σύνολο k δειγμάτων n παρατηρήσεων το καθένα. Αυτά τα σύνολα δειγμάτων αποκτώνται κατά την αρχική φάση, όπου η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Υποθέτουμε ότι $n > 1$ ούτως ώστε η δειγματική τυπική απόκλιση των διαγραμμάτων να μπορεί να υπολογιστεί. Έστω ότι οι:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^k \frac{\bar{X}_i}{k} \quad \text{και} \quad \bar{S} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.12)$$

είναι οι εκτιμητές των μ_0 και σ_0 , αντίστοιχα, που προέρχονται από τις αρχικές τιμές. Τα \bar{X}_i και S_i^2 είναι ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διακύμανση του i -οστού δείγματος, αντίστοιχα. Έστω ότι οι:

$$\bar{X}_j = \sum_{h=1}^n \frac{X_{jh}}{n} \quad \text{και} \quad S_j^2 = \sum_{h=1}^n \frac{(X_{jh} - \bar{X}_j)^2}{n-1}, j \geq 1, \quad (3.13)$$

είναι ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διακύμανση του j -οστού δείγματος, αντίστοιχα όταν ξεκινάει η παρακολούθηση.

Υπό κανονικές συνθήκες ισχύουν:

$$\bar{X}_j - \frac{\bar{X}}{\sigma_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N}}} \sim N(0,1), \quad \frac{(N-k)\bar{S}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{N-k}^2 \quad \text{και} \quad \frac{(n-1)S_j^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2, \text{ για } j \geq 1,$$

όπου και οι τρεις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν τα μ_0 και σ_0 παραμείνουν αναλλοίωτα για $j \geq 1$, έχουμε:

$$\frac{\bar{X}_j - \bar{X}}{\bar{S} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N}}} \sim t_{N-k} \quad \text{και} \quad \frac{S_j^2}{\bar{S}^2} \sim F_{n-1, N-k}, \quad (3.14)$$

όπου $N = n \times k$, t_{N-k} η κατανομή t -student με $N - k$ βαθμούς ελευθερίας και $F_{n-1, N-k}$ η F κατανομή με $n - 1$ και $N - k$ βαθμούς ελευθερίας.

Θέτουμε τη συνάρτηση $G_t(\cdot)$ για την κατανομή t_{N-k} και τη συνάρτηση $G_F(\cdot)$ για την κατανομή $F_{n-1, N-k}$. Οπότε για $j \geq 1$ έχουμε:

$$m_j = G_t \left(\frac{\bar{X}_j - \bar{X}}{\bar{S} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N}}} \right) \text{ και } v_j = G_F \left(\frac{S_j^2}{\bar{S}^2} \right), \quad (3.15)$$

όπου m_j και v_j τυχαίες μεταβλητές. Έτσι ορίζουμε δύο CUSUM διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στα m_j και v_j , ως ακολούθως:

Έστω για $t \geq 1$:

$$S_m(t) = \sum_{j=1}^t (m_j - \frac{1}{2}) = \left(m_t - \frac{1}{2} \right) + S_m(t-1) \quad (3.16)$$

και

$$S_v(t) = \sum_{j=1}^t (v_j - \frac{1}{2}) = \left(v_t - \frac{1}{2} \right) + S_v(t-1), \quad (3.17)$$

όπου $S_m(0) = S_v(0) = 0$.

Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, με γνωστά τα n και k , τα $S_m(t)$ και $S_v(t)$ ακολουθούν την ίδια κατανομή και είναι ανεξάρτητα αν ισχύει η υπόθεση κανονικότητας (*normality assumption*). Επιπλέον, το $S_m(t)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων στον μέσο της διεργασίας. Ενώ το $S_v(t)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μικρές μετατοπίσεις στην διακύμανση της διεργασίας.

Η ιδέα είναι ότι αν υπάρχει μια μετατόπιση στον μέσο, για παράδειγμα αύξηση της τιμής του, τότε το $m_j - \frac{1}{2}$ τείνει να γίνει θετικό και σταδιακά θα μεγαλώσει η τιμή του $S_m(t)$. Έτσι αν $S_m(t) > H_u$, θα απορρίψουμε την διεργασία και θα καταλήξουμε ότι ο μέσος αυξάνεται, όπου το H_u είναι ένα άνω όριο ελέγχου που έχουμε επιλέξει εξ αρχής. Παρομοίως, αν $S_m(t) < H_l$, θα απορρίψουμε την

διεργασία και θα συμπεράνουμε ότι ο μέσος έχει μειωθεί. Αντίστοιχα για το $S_v(t)$, όταν υπάρχει μια αύξηση στην διακύμανση της διεργασίας το $v_j - \frac{1}{2}$ τείνει να γίνει θετικό, δηλαδή βαθμιαία θα έχουμε αύξηση της τιμής του $S_v(t)$. Αντιθέτως, όταν υπάρχει μείωση στη διακύμανση το $v_j - \frac{1}{2}$ τείνει προς αρνητική τιμή, το οποίο με την σειρά του σταδιακά θα μειώσει την τιμή του $S_v(t)$. Παρόλα αυτά, η τελευταία περίπτωση θα πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα, όταν η τιμή του $S_v(t)$ πέφτει κάτω από το όριο ελέγχου σημαίνει ότι η διακύμανση μειώνεται και άρα έχουμε μια πιθανή βελτίωση της διεργασίας.

Όσο η διεργασία είναι εντός ελέγχου το $S_m(t)$ είναι συμμετρικό γύρω από το σημείο 0, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $|H_l| = H_u = H$. Επιπροσθέτως, αφού το $S_m(t)$ και το $S_v(t)$ έχουν την ίδια κατανομή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο όριο ελέγχου H και στα δύο διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στις δύο συναρτήσεις. Επιπλέον, μπορούμε τα στατιστικά, $S_m(t)$ και $S_v(t)$, να σχεδιαστούν σε ένα μοναδικό διάγραμμα. Ακόμα αν οι αρχικές παρατηρήσεις είναι κανονικοποιημένες η κατανομή του m_j ακολουθεί $U(0,1)$ και η $S_m(t)$ δεν θα επηρεαστεί. Οπότε δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε τα όρια ελέγχου H σε κανονικοποιημένες ή μη-κανονικοποιημένες παρατηρήσεις. Το γεγονός ότι τα m_j και v_j δεν ακολουθούν $U(0,1)$ όταν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου είναι το σήμα που μας ειδοποιεί ότι έχουμε αλλαγή στις παραμέτρους της διεργασίας.

Το CUSUM M-διάγραμμα ελέγχου βασίζεται στο $S_m(t)$ και το CUSUM V-διάγραμμα ελέγχου βασίζεται στο $S_v(t)$ και ο συνδυασμός των δύο είναι το CUSUM M- και V-διάγραμμα ελέγχου. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τα CUSUM M- και V-διαγράμματα ως μια CUSUM έκδοση των \bar{X} - και S -διαγραμμάτων.

3.2.3 Απόδοση

Με την βοήθεια του ARL συγκρίνουμε την απόδοση του CUSUM M- και του V-διαγράμματος με το τυπικό διάγραμμα ελέγχου CUSUM. Η σύγκριση γίνεται με τη χρήση προσομοίωσης Monte Carlo. Σκοπός είναι να εξακριβώσουμε τον αριθμό των δειγμάτων που πρέπει να λάβουμε μέχρι να έχουμε την πρώτη

ένδειξη από το διάγραμμα ελέγχου ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Το μέγεθος της προσομοίωσης είναι 5000 και το μέγεθος των υποσυνόλων είναι $n = 4, 6, 8, 10$.

Πίνακας 3.1: Τα εντός ελέγχου ARL για διάφορα όρια ελέγχου H.

| H | CUSUM M (V) (one-sided ARL) | CUSUM M (V) (two-sided ARL) | CUSUM M and V (two-sided ARL) |
|--------|--------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 2.6178 | 100.44 | 50.22 | 25.11 |
| 2.6403 | 200.80 | 100.40 | 50.20 |
| 2.6476 | 296.93 | 148.47 | 74.24 |
| 2.6514 | 396.46 | 198.23 | 99.12 |
| 2.6538 | 504.04 | 252.02 | 126.01 |
| 2.6566 | 730.77 | 365.39 | 182.70 |
| 2.6583 | 1001.08 | 500.54 | 250.27 |

Όπως βλέπουμε στον ανωτέρω πίνακα για $H = 2.6566$ και 2.6583 έχει σαν αποτέλεσμα εντός ελέγχου ARL 365 και 500, αντίστοιχα, για μεμονωμένα CUSUM M- ή CUSUM V- διαγράμματα.

Σύμφωνα με αυτά οδηγούμαστε στις πιθανότητες να ανιχνεύσουμε ένδειξη εκτός ελέγχου για μια εντός ελέγχου διεργασία 0.0027 και 0.002, αντίστοιχα. Όλα τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου είναι βαθμονομημένα να έχουν περίπου το ίδιο εντός ελέγχου ARL. Για το CUSUM διάγραμμα η τιμή αναφοράς είναι 0.5 και τα όρια ελέγχου είναι μεταξύ 4.77 και 5.10 για εντός ελέγχου ARL 365 και 500 αντίστοιχα. Για το CUSUM S-διάγραμμα η τιμή αναφοράς ορίζεται 1.18 και τα όρια ελέγχου επιλέγονται να είναι 1.45 και 1.56, αντίστοιχα, για το εντός ελέγχου ARL με τιμές 365 και 500.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η διεργασία που είναι εντός ελέγχου ακολουθεί $N(0,1)$. Στην συνέχεια θεωρούμε τρεις δυνατές μετατοπίσεις στην διεργασία: μετατόπιση στον μέσο, μετατόπιση στην διακύμανση και συγχρόνως μετατοπίσεις στον μέσο και στη διακύμανση. Στην πράξη όταν τα μ_0 και σ_0 εκτιμώνται από k δείγματα που λαμβάνονται όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, το εκτός ελέγχου ARL θα εξαρτάται από το k .

Πίνακας 3.2: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές του μέσου.

| μ | CUSUM M-chart | | CUSUM chart | | μ | CUSUM M-chart | | CUSUM chart | |
|-------------|---------------|----------|-------------|----------|--------------|---------------|-----------|-------------|----------|
| ($n = 4$) | | | | | ($n = 8$) | | | | |
| 0.25 | 33.58 | (0.3152) | 27.87 | (0.3168) | 0.25 | 18.23 | (0.1686) | 15.45 | (0.1535) |
| 0.50 | 9.88 | (0.0816) | 8.70 | (0.0673) | 0.50 | 5.68 | (0.0429) | 5.36 | (0.0330) |
| 0.75 | 5.13 | (0.0371) | 4.92 | (0.0283) | 0.75 | 3.27 | (0.0195) | 3.14 | (0.0151) |
| 1.00 | 3.37 | (0.0216) | 3.46 | (0.0615) | 1.00 | 2.21 | (0.0112) | 2.40 | (0.0093) |
| 1.25 | 2.55 | (0.0144) | 2.73 | (0.0116) | 1.25 | 1.77 | (0.0081) | 1.97 | (0.0069) |
| 1.50 | 2.08 | (0.0098) | 2.27 | (0.0083) | 1.50 | 1.44 | (0.0073) | 1.69 | (0.0068) |
| 1.75 | 1.78 | (0.0080) | 1.99 | (0.0067) | 1.75 | 1.19 | (0.0056) | 1.39 | (0.0069) |
| 2.00 | 1.55 | (0.0075) | 1.79 | (0.0067) | 2.00 | 1.05 | (0.0032) | 1.16 | (0.0052) |
| ($n = 6$) | | | | | ($n = 10$) | | | | |
| 0.25 | 23.48 | (0.2146) | 19.69 | (0.2045) | 0.25 | 15.06 | (0.01323) | 12.83 | (0.1186) |
| 0.50 | 7.14 | (0.0517) | 6.52 | (0.0435) | 0.50 | 4.72 | (0.0344) | 4.60 | (0.0259) |
| 0.75 | 3.85 | (0.0264) | 3.49 | (0.0196) | 0.75 | 2.88 | (0.0162) | 2.71 | (0.0127) |
| 1.00 | 2.59 | (0.0146) | 2.78 | (0.0118) | 1.00 | 1.97 | (0.0090) | 2.17 | (0.0077) |
| 1.25 | 2.02 | (0.0094) | 2.22 | (0.0079) | 1.25 | 1.58 | (0.0076) | 1.81 | (0.0071) |
| 1.50 | 1.71 | (0.0078) | 1.92 | (0.0068) | 1.50 | 1.25 | (0.0062) | 1.49 | (0.0065) |
| 1.75 | 1.42 | (0.0071) | 1.67 | (0.0068) | 1.75 | 1.07 | (0.0036) | 1.21 | (0.0057) |
| 2.00 | 1.21 | (0.0056) | 1.43 | (0.0070) | 2.00 | 1.01 | (0.0015) | 1.05 | (0.0031) |

($\sigma = 1$, εντός ελέγχου $ARL = 365$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Στους πίνακες 3.1 και 3.2 βλέπουμε προσομοιωμένες τιμές του εκτός ελέγχου ARL για το CUSUM M-διάγραμμα και το κλασικό CUSUM διάγραμμα. Κρίνοντας τα αποτελέσματα, όταν $0 < \mu < 1$ το CUSUM διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση και όταν $1 < \mu < 2$ το CUSUM M-διάγραμμα έχει λίγο καλύτερη απόδοση στις περισσότερες περιπτώσεις.

Παρόλα αυτά, εκτός από μια μικρή μετατόπιση στον μέσο της διεργασίας $\mu = 0.25$, τα δύο αυτά διαγράμματα έχουν συγκρίσιμα αποτελέσματα από πρακτικής σκοπιάς. Οι διαφορές μειώνονται μεταξύ των δύο διαγραμμάτων όσο το μέγεθος τους δείγματος αυξάνεται. Ωστόσο τα μεγέθη 8 ή 10 στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρούνται μεγάλα.

Πίνακας 3.3: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές του μέσου.

| μ | CUSUM M-chart | | CUSUM chart | | μ | CUSUM M-chart | | CUSUM chart | |
|---------|---------------|----------|-------------|----------|----------|---------------|----------|-------------|----------|
| (n = 4) | | | | | (n = 8) | | | | |
| 0.25 | 35.89 | (0.2372) | 31.39 | (0.3641) | 0.25 | 19.08 | (0.1692) | 16.24 | (0.1575) |
| 0.50 | 10.36 | (0.0837) | 9.21 | (0.0696) | 0.50 | 5.92 | (0.0437) | 5.58 | (0.0328) |
| 0.75 | 5.44 | (0.0401) | 5.22 | (0.0303) | 0.75 | 3.41 | (0.0207) | 3.28 | (0.0158) |
| 1.00 | 3.51 | (0.0221) | 3.60 | (0.0166) | 1.00 | 2.35 | (0.0102) | 2.50 | (0.0097) |
| 1.25 | 2.67 | (0.0137) | 2.85 | (0.0117) | 1.25 | 2.02 | (0.0062) | 2.06 | (0.0065) |
| 1.50 | 2.23 | (0.0085) | 2.35 | (0.0086) | 1.50 | 1.78 | (0.0060) | 1.81 | (0.0063) |
| 1.75 | 2.03 | (0.0061) | 2.07 | (0.0066) | 1.75 | 1.53 | (0.0071) | 1.50 | (0.0070) |
| 2.00 | 1.87 | (0.0057) | 1.88 | (0.0061) | 2.00 | 1.27 | (0.0063) | 1.24 | (0.0060) |
| (n = 6) | | | | | (n = 10) | | | | |
| 0.25 | 25.26 | (0.2262) | 21.82 | (0.2326) | 0.25 | 15.83 | (0.1355) | 13.54 | (0.1220) |
| 0.50 | 7.55 | (0.0590) | 6.88 | (0.0462) | 0.50 | 5.08 | (0.0359) | 4.88 | (0.0268) |
| 0.75 | 4.04 | (0.0266) | 3.99 | (0.0201) | 0.75 | 2.99 | (1.0157) | 2.83 | (0.0125) |
| 1.00 | 2.73 | (0.0145) | 2.91 | (0.0121) | 1.00 | 2.16 | (0.0076) | 2.25 | (0.0078) |
| 1.25 | 2.21 | (0.0084) | 2.31 | (0.0082) | 1.25 | 1.88 | (0.0056) | 1.88 | (0.0061) |
| 1.50 | 1.97 | (0.0057) | 1.99 | (0.0062) | 1.50 | 1.61 | (0.0069) | 1.58 | (0.0070) |
| 1.75 | 1.79 | (0.0062) | 1.77 | (0.0065) | 1.75 | 1.29 | (0.0066) | 1.27 | (0.0063) |
| 2.00 | 1.56 | (0.0071) | 1.52 | (0.0070) | 2.00 | 1.11 | (0.0044) | 1.09 | (0.0040) |

($\sigma = 1$, εντός ελέγχου $ARL = 500$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Στην περίπτωση των αλλαγών στην μεταβλητότητα της διεργασίας, το CUSUM V-διάγραμμα συγκρίνεται με το CUSUM S-διάγραμμα των Lowry, et al. (1995). Το S-διάγραμμα, του οποίου ο υπολογισμός βασίζεται στο CUSUM της δειγματικής τυπικής απόκλισης, θεωρείται η καλύτερη CUSUM διαδικασία για την παρακολούθηση της μεταβλητότητας της διεργασίας.

Σκοπός μας είναι να αξιολογήσουμε την απόδοση των δύο CUSUM διαγραμμάτων ελέγχου ανιχνεύοντας αυξήσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας που έχει σαν αποτέλεσμα την επιδείνωση της ποιότητας. Από την άλλη, στα πλαίσια της διαρκούς βελτίωσης μια μείωση της μεταβλητότητας χρήζει περαιτέρω διερεύνησης.

Στην συνέχεια οι παρακάτω πίνακες 3.4 και 3.5 περιέχουν προσομοιωμένα δεδομένα.

Πίνακας 3.4: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αυξήσεις στην μεταβλητότητα.

| σ | CUSUM M-chart | | CUSUM S-chart | | σ | CUSUM M-chart | | CUSUM S-chart | |
|-------------|---------------|----------|---------------|----------|--------------|---------------|----------|---------------|----------|
| ($n = 4$) | | | | | ($n = 8$) | | | | |
| 1.10 | 155.04 | (1.7114) | 77.76 | (1.0518) | 1.10 | 66.16 | (0.7059) | 49.91 | (0.7252) |
| 1.20 | 46.54 | (0.4966) | 29.49 | (0.3765) | 1.20 | 19.76 | (0.2006) | 14.18 | (0.1928) |
| 1.30 | 23.26 | (0.2441) | 15.18 | (0.1774) | 1.30 | 10.47 | (0.0135) | 7.32 | (0.0844) |
| 1.40 | 14.83 | (0.1587) | 9.71 | (0.1057) | 1.40 | 6.54 | (0.0645) | 4.56 | (0.0480) |
| 1.50 | 10.55 | (0.1139) | 7.02 | (0.0701) | 1.50 | 4.73 | (0.0486) | 3.43 | (0.0323) |
| 1.60 | 7.98 | (0.0857) | 5.52 | (0.0516) | 1.60 | 3.67 | (0.0376) | 2.66 | (0.0237) |
| 1.80 | 5.38 | (0.0587) | 3.89 | (0.0330) | 1.80 | 2.47 | (0.0253) | 1.79 | (0.0159) |
| 2.00 | 4.11 | (0.0457) | 3.09 | (0.0250) | 2.00 | 1.90 | (0.0188) | 1.33 | (0.0118) |
| ($n = 6$) | | | | | ($n = 10$) | | | | |
| 1.10 | 92.13 | (1.0115) | 61.39 | (0.8401) | 1.10 | 50.41 | (0.5091) | 44.14 | (0.5928) |
| 1.20 | 27.63 | (0.2920) | 20.37 | (0.2532) | 1.20 | 15.67 | (0.1557) | 13.05 | (0.1603) |
| 1.30 | 13.96 | (0.1447) | 10.18 | (0.1128) | 1.30 | 8.07 | (0.0791) | 6.47 | (0.0674) |
| 1.40 | 8.98 | (0.0913) | 6.60 | (0.0649) | 1.40 | 5.23 | (0.0507) | 4.07 | (0.0359) |
| 1.50 | 6.35 | (0.0641) | 4.73 | (0.0430) | 1.50 | 3.81 | (0.0367) | 3.08 | (0.0256) |
| 1.60 | 5.01 | (0.0523) | 2.32 | (0.0329) | 1.60 | 2.89 | (0.0281) | 2.44 | (0.0180) |
| 1.80 | 3.35 | (0.0357) | 2.74 | (0.0212) | 1.80 | 2.03 | (0.0196) | 1.83 | (0.0129) |
| 2.00 | 2.49 | (0.0269) | 2.17 | (0.0156) | 2.00 | 1.55 | (0.0137) | 1.48 | (0.0094) |

($\sigma = 1$, εντός ελέγχου $ARL = 365$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Παρατηρούμε ότι για μικρές αυξήσεις του σ , μεταξύ 10% και 30%, το CUSUM S-διάγραμμα έχει ξεκάθαρο πλεονέκτημα συγκριτικά με το CUSUM V-διάγραμμα. Όμως όσο μεγαλώνει το εύρος της αύξησης, 30% με 100%, ενώ το CUSUM S-διάγραμμα αποδίδει καλύτερα, το CUSUM V-διάγραμμα γίνεται πρακτικά συγκρίσιμο με το CUSUM –S διαγραμμα. Η διαφορά στην απόδοση μεταξύ των δύο διαγραμμάτων ελέγχου μικραίνει όσο το n μεγαλώνει. Σύμφωνα με τους Chang και Gan (1995) το CUSUM V-διάγραμμα είναι συγκρίσιμο και με το CUSUM διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο $\log(s^2)$ στην ανίχνευση αυξήσεων στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

Πίνακας 3.5: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αυξήσεις στην μεταβλητότητα.

| σ | CUSUM M-chart | | CUSUM S-chart | | σ | CUSUM M-chart | | CUSUM S-chart | |
|----------|---------------|----------|---------------|----------|----------|---------------|----------|---------------|----------|
| (n = 4) | | | | | (n = 8) | | | | |
| 1.10 | 168.69 | (1.8139) | 93.74 | (1.2526) | 1.10 | 70.83 | (0.7025) | 59.14 | (0.8016) |
| 1.20 | 50.34 | (0.5199) | 33.12 | (0.4141) | 1.20 | 20.98 | (0.2267) | 17.63 | (0.2137) |
| 1.30 | 25.52 | (0.2612) | 16.52 | (0.1903) | 1.30 | 10.66 | (0.1041) | 8.28 | (0.0861) |
| 1.40 | 15.74 | (0.1611) | 10.43 | (0.1122) | 1.40 | 6.95 | (0.0690) | 5.27 | (0.0496) |
| 1.50 | 11.26 | (0.1182) | 7.48 | (0.0721) | 1.50 | 4.99 | (0.0496) | 3.92 | (0.0341) |
| 1.60 | 8.51 | (0.0912) | 5.78 | (0.0539) | 1.60 | 3.87 | (0.0395) | 3.09 | (0.0245) |
| 1.80 | 5.67 | (0.0619) | 4.12 | (0.0350) | 1.80 | 2.62 | (0.0269) | 2.27 | (0.0162) |
| 2.00 | 4.28 | (0.0481) | 3.22 | (0.0260) | 2.00 | 1.96 | (0.0199) | 1.81 | (0.0120) |
| (n = 6) | | | | | (n = 10) | | | | |
| 1.10 | 100.05 | (1.0450) | 74.45 | (1.0033) | 1.10 | 55.68 | (0.5497) | 52.88 | (0.7106) |
| 1.20 | 29.52 | (0.2989) | 22.59 | (0.2915) | 1.20 | 16.55 | (0.1594) | 14.68 | (0.1764) |
| 1.30 | 15.21 | (0.1534) | 10.93 | (0.1206) | 1.30 | 8.48 | (0.0801) | 6.92 | (0.0711) |
| 1.40 | 9.52 | (0.0933) | 7.06 | (0.0692) | 1.40 | 5.58 | (0.0541) | 4.41 | (0.0401) |
| 1.50 | 6.72 | (0.0680) | 4.95 | (0.0438) | 1.50 | 3.98 | (0.0397) | 3.21 | (0.0264) |
| 1.60 | 5.19 | (0.0526) | 3.96 | (0.0328) | 1.60 | 3.13 | (0.0309) | 2.60 | (0.0195) |
| 1.80 | 3.48 | (0.0375) | 2.83 | (0.0222) | 1.80 | 2.08 | (0.0202) | 1.90 | (0.0130) |
| 2.00 | 2.62 | (0.0282) | 2.26 | (0.0164) | 2.00 | 1.59 | (0.0144) | 1.52 | (0.0096) |

($\sigma = 1$, εντός ελέγχου $ARL = 500$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Πίνακας 3.6: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές στον μέσο και στην μεταβλητότητα.

| μ/σ | CUSUM M-chart - CUSUM V-chart | | | | CUSUM M-chart - CUSUM S-chart | | | |
|--------------|-------------------------------|----------|---------|----------|-------------------------------|----------|---------|----------|
| | (n = 4) | | (n = 8) | | (n = 4) | | (n = 8) | |
| 0.25/1.10 | 32.44 | (0.3465) | 17.14 | (0.1683) | 21.52 | (0.2443) | 13.04 | (0.1274) |
| 0.25/1.30 | 17.38 | (0.1925) | 8.23 | (0.0827) | 10.36 | (0.1046) | 6.15 | (0.0558) |
| 0.25/1.60 | 7.03 | (0.0779) | 3.35 | (0.0340) | 4.80 | (0.402) | 2.81 | (0.0210) |
| 0.25/2.00 | 3.59 | (0.0422) | 1.80 | (0.0173) | 2.82 | (0.0218) | 1.71 | (0.0113) |
| 0.75/1.10 | 5.55 | (0.0518) | 3.26 | (0.0265) | 5.12 | (0.0316) | 3.40 | (0.0171) |
| 0.75/1.30 | 5.44 | (0.0442) | 3.20 | (0.0321) | 4.66 | (0.0317) | 3.11 | (0.0176) |
| 0.75/1.60 | 4.50 | (0.0496) | 2.42 | (0.0221) | 3.59 | (0.0258) | 2.32 | (0.0144) |
| 0.75/2.00 | 2.97 | (0.0341) | 1.58 | (0.0138) | 2.52 | (0.0181) | 1.61 | (0.0098) |
| 1.25/1.10 | 2.75 | (0.0247) | 1.78 | (0.0089) | 2.85 | (0.0150) | 2.05 | (0.0075) |
| 1.25/1.30 | 2.68 | (0.0232) | 1.78 | (0.0106) | 2.84 | (0.0144) | 2.03 | (0.0085) |
| 1.25/1.60 | 2.63 | (0.0215) | 1.64 | (0.0117) | 2.61 | (0.0138) | 1.81 | (0.0094) |
| 1.25/2.00 | 1.96 | (0.0168) | 1.37 | (0.0097) | 2.13 | (0.0130) | 1.46 | (0.0082) |

| | | | | | | | | |
|-----------|------|----------|------|----------|------|----------|------|----------|
| 1.50/1.10 | 2.17 | (0.0195) | 1.46 | (0.0075) | 2.39 | (0.0122) | 1.77 | (0.0068) |
| 1.50/1.30 | 2.16 | (0.0186) | 1.46 | (0.0082) | 2.36 | (0.0121) | 1.71 | (0.0075) |
| 1.50/1.60 | 2.14 | (0.0143) | 1.42 | (0.0091) | 2.27 | (0.0107) | 1.61 | (0.0083) |
| 1.50/2.00 | 1.96 | (0.0117) | 1.25 | (0.0076) | 1.98 | (0.0094) | 1.36 | (0.0074) |
| 2.00/1.10 | 1.55 | (0.0079) | 1.07 | (0.0036) | 1.85 | (0.0068) | 1.24 | (0.0061) |
| 2.00/1.30 | 1.56 | (0.0089) | 1.10 | (0.0043) | 1.84 | (0.0078) | 1.28 | (0.0064) |
| 2.00/1.60 | 1.56 | (0.0110) | 1.12 | (0.0048) | 1.77 | (0.0089) | 1.27 | (0.0063) |
| 2.00/2.00 | 1.51 | (0.0120) | 1.11 | (0.0048) | 1.60 | (0.0095) | 1.20 | (0.0057) |

(εντός ελέγχου $ARL = 183$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Πίνακας 3.7: Συγκριτικός πίνακας του ARL για αλλαγές στον μέσο και στην μεταβλητότητα.

| μ/σ | CUSUM M-chart - CUSUM V-chart | | | | CUSUM M-chart - CUSUM S-chart | | | |
|--------------|-------------------------------|----------|-----------|-----------|-------------------------------|----------|-----------|----------|
| | $(n = 4)$ | | $(n = 8)$ | | $(n = 4)$ | | $(n = 8)$ | |
| 0.25/1.10 | 34.44 | (0.3360) | 18.35 | (0.01674) | 22.72 | (0.2460) | 13.60 | (0.1312) |
| 0.25/1.30 | 18.53 | (0.2009) | 8.80 | (0.0867) | 10.67 | (0.1090) | 6.40 | (0.0564) |
| 0.25/1.60 | 7.62 | (0.0841) | 3.62 | (0.0363) | 5.08 | (0.0438) | 2.97 | (0.0222) |
| 0.25/2.00 | 3.88 | (0.439) | 1.89 | (0.0183) | 2.97 | (0.0225) | 1.77 | (0.0117) |
| 0.75/1.10 | 5.97 | (0.0551) | 3.45 | (0.0278) | 5.19 | (0.0333) | 3.41 | (0.0180) |
| 0.75/1.30 | 5.75 | (0.0515) | 3.44 | (0.0233) | 4.83 | (0.0324) | 3.17 | (0.0169) |
| 0.75/1.60 | 4.93 | (0.0453) | 2.65 | (0.0231) | 3.74 | (0.0261) | 2.40 | (0.0144) |
| 0.75/2.00 | 3.29 | (0.0374) | 1.71 | (0.0151) | 2.63 | (0.0186) | 1.67 | (0.0102) |
| 1.25/1.10 | 2.95 | (0.0251) | 2.03 | (0.0073) | 2.87 | (0.0152) | 2.06 | (0.0073) |
| 1.25/1.30 | 2.94 | (0.0249) | 2.02 | (0.0096) | 2.83 | (0.0138) | 2.02 | (0.0085) |
| 1.25/1.60 | 2.77 | (0.0210) | 1.85 | (0.0122) | 2.68 | (0.0140) | 1.84 | (0.0095) |
| 1.25/2.00 | 2.48 | (0.0162) | 1.48 | (0.0101) | 2.24 | (0.0127) | 1.51 | (0.0086) |
| 1.50/1.10 | 2.41 | (0.0194) | 1.80 | (0.0094) | 2.39 | (0.0121) | 1.78 | (0.0082) |
| 1.50/1.30 | 2.41 | (0.0183) | 1.74 | (0.0084) | 2.39 | (0.0119) | 1.73 | (0.0076) |
| 1.50/1.60 | 2.32 | (0.0143) | 1.62 | (0.0079) | 2.29 | (0.0109) | 1.63 | (0.0074) |
| 1.50/2.00 | 2.15 | (0.0109) | 1.35 | (0.0064) | 2.03 | (0.0096) | 1.39 | (0.0067) |
| 2.00/1.10 | 1.87 | (0.0065) | 1.29 | (0.0064) | 1.85 | (0.0067) | 1.26 | (0.0062) |
| 2.00/1.30 | 1.87 | (0.0086) | 1.31 | (0.0066) | 1.86 | (0.0078) | 1.29 | (0.0063) |
| 2.00/1.60 | 1.85 | (0.0117) | 1.29 | (0.0066) | 1.82 | (0.0091) | 1.29 | (0.0065) |
| 2.00/2.00 | 1.73 | (0.0134) | 1.18 | (0.0059) | 1.71 | (0.0097) | 1.21 | (0.0059) |

(εντός ελέγχου $ARL = 250$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Αναφορικά με μετατοπίσεις συγχρόνως στον μέσο και στη μεταβλητότητα της διεργασίας, τα συνδυαζόμενα CUSUM M- και V-διαγράμματα συγκρίνονται με τα συνδυαζόμενα CUSUM και S-διαγράμματα. Στους δύο ανωτέρω πίνακες παρατηρούμε αυτή ακριβώς την εικόνα, εκτός από τις περιπτώσεις όπου οι μετατοπίσεις στον μέσο και την μεταβλητότητα είναι μικρές. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα συνδυαζόμενα CUSUM και S-διαγράμματα αποδίδουν καλύτερα. Για άλλη μια φορά, η συνολική διαφορά μικραίνει όσο το n μεγαλώνει.

Τα πλεονεκτήματα των προτεινόμενων CUSUM M- και V-διαγραμμάτων βασίζονται σε δύο χαρακτηριστικά. Το πρώτο είναι, μετά από τον κατάλληλο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό πιθανότητας διαφορετικά στατιστικά ελέγχου μπορούν να μετασχηματιστούν ώστε να ακολουθούν $U(0,1)$. Η διαδικασία CUSUM αναπτύχθηκε ώστε να έχουμε την ίδια εντός ελέγχου κατανομή. Αυτό μας διευκολύνει στο να φτιάχνουμε CUSUM διαγράμματα ελέγχου για διαφορετικά στατιστικά ελέγχου. Δεύτερον, αυτά τα CUSUM διαγράμματα μπορούν να απεικονιστούν σε ένα μόνο σχέδιο, πράγμα που μας δίνει την δυνατότητα στην ταυτόχρονη παρακολούθηση, από την πλευρά των CUSUM, διαφορετικών παραμέτρων πληθυσμών σε ένα μόνο διάγραμμα ελέγχου. Έχοντας στο μυαλό μας αυτό, υπάρχει η δυνατότητα να μειώσουμε σημαντικά το συνολικό πλήθος των διαγραμμάτων ελέγχου που χρειάζεται να παρακολουθούμε, ειδικά όταν υπάρχουν πολλαπλές διεργασίας ή πολλαπλές ροές διαδικασιών που πρέπει να παρακολουθήσουμε.

Τα προτεινόμενα CUSUM διαγράμματα ελέγχου συμπεριφέρονται σαν σχέδια CUSUM με τιμή αναφοράς $k = 0$. Για παράδειγμα η συνάρτηση (3.17) του CUSUM V-διαγράμματος μπορεί γραφεί ως:

$$S_v(t) = \left(v_t - \frac{1}{2} \right) - k + S_v(t - 1),$$

όπου $S_v(0) = 0$ και $k = 0$. Το CUSUM με $k = 0$ όχι μόνο απαιτεί μεγαλύτερη τιμή απόφασης H σε σχέση με άλλα CUSUM με $k > 0$ ώστε να επιτύχει το ίδιο εντός ελέγχου ARL , αλλά επιπλέον τείνει να έχει μεγαλύτερη τιμή εκτός ελέγχου ARL . Για παράδειγμα, για να επιτύχουμε ένα εντός ελέγχου $ARL = 2000$, απαιτείται $H = 2.6617$ για το CUSUM V-διάγραμμα με $k = 0$. Ενώ το CUSUM V-διάγραμμα με $k = 0.1$ ζητά $H = 1.9103$.

Στην περίπτωση με $k = 0.1$ είναι το ίδιο με το να μετακινήσουμε την ομοιόμορφη κατανομή προς τα αριστερά κατά 0.1. Τα προσομοιωμένα εκτός ελέγχου ARL ($n = 4$) των δύο CUSUM V-διαγραμμάτων θα τα βρούμε στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 3.8: Σύγκριση ARL για CUSUM V-διαγράμματος με διαφορετικά k .

| σ ($n = 4$) | $k = 0$ | | $k = 0.1$ | |
|-------------------------|---------|----------|-----------|----------|
| 1.10 | 253.36 | (2.2406) | 204.65 | (2.2363) |
| 1.20 | 70.63 | (0.6317) | 57.16 | (0.6472) |
| 1.30 | 35.14 | (0.3180) | 26.39 | (0.3232) |
| 1.40 | 22.23 | (0.2079) | 15.93 | (0.2055) |
| 1.50 | 15.35 | (0.1459) | 10.85 | (0.1466) |
| 1.60 | 11.35 | (0.1125) | 7.99 | (0.1127) |
| 1.80 | 7.47 | (0.0778) | 4.88 | (0.0738) |
| 2.00 | 5.48 | (0.0596) | 3.49 | (0.0541) |

($n = 4, \mu = 0$, εντός ελέγχου $ARL = 250$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Παρατηρούμε στον πίνακα 3.8 ότι το CUSUM V-διάγραμμα με $k = 0.1$ έχει καλύτερη απόδοση από αυτό με $k = 0$.

Υποθέτουμε ότι η διαδικασία ξεκινάει από την τιμή στόχο μετά την επανεκκίνηση. Ωστόσο, αυτό δεν συμβαίνει πάντα στην πράξη. Ένας τρόπος για να αυξήσουμε την ευαισθησία του CUSUM V-διαγράμματος, ειδικά στην αρχή της διαδικασίας είναι να συνδυάσουμε το CUSUM V-διάγραμμα με το Shewhart S-διάγραμμα. Παρόλο που τα συνδυαζόμενα διαγράμματα ελέγχου, αν δεν προσαρμοστούν, θα βγάλουν σαν αποτέλεσμα ένα διαφορετικό εντός ελέγχου ARL σε σχέση με ξεχωριστά διαγράμματα ελέγχου. Η άλλη προσέγγιση είναι να ενσωματώσουμε το χαρακτηριστικό της γρήγορης αρχικής απόκρισης (FIR) των Lucas και Grosier (1982) στον σχεδιασμό του CUSUM V-διαγράμματος. Βασιζόμενοι στην προσέγγιση της Μακροβιανής αλυσίδας, αν θέσουμε $S_V(0) = 0.05$ και $H = 2.6583$, για παράδειγμα το εντός ελέγχου ARL είναι περίπου 500, αφού μια τόσο μικρή αρχική τιμή 0.05 δεν αλλάζει την αρχική κατάσταση της Μακροβιανής αλυσίδας.

Πίνακας 3.9: ARL για CUSUM V-διάγραμμα με τιμή εκκίνησης 0.05.

| σ | CUSUM V-διάγραμμα ($S_V(0) = 0.05$) | |
|----------|---------------------------------------|----------|
| 1.10 | 150.45 | (1.9331) |
| 1.20 | 42.40 | (0.5454) |
| 1.30 | 19.98 | (0.2687) |
| 1.40 | 12.67 | (0.1718) |
| 1.50 | 8.82 | (0.1235) |
| 1.60 | 6.41 | (0.0934) |
| 1.80 | 4.11 | (0.0612) |
| 2.00 | 3.08 | (0.0447) |

($n = 4, \mu = 0$, εντός ελέγχου $ARL = 500$)

Οι τιμές στις παρενθέσεις είναι το τυπικό σφάλμα.

Στο πίνακα 3.9 βλέπουμε το εκτός ελέγχου ARL για $n = 4$ για το CUSUM V-διάγραμμα με τιμή εκκίνησης $S_V(0) = 0.05$. Συγκρίνοντας τις τιμές του ARL με ή χωρίς τιμή εκκίνησης, παρατηρούμε ότι ακόμα και με τόσο μικρή τιμή εκκίνησης έχουμε βελτίωση της απόδοσης του CUSUM V-διαγράμματος.

3.3 CUSUM διαδικασίες για την παρακολούθηση του Μέσου και της Μεταβλητότητας της διεργασίας

3.3.1 Περιγραφή

Η πρόταση των Zhang και Zhang (2013) ονομάζεται CUSUM διάγραμμα αλλαγής σημείου (Change Point CUSUM, CPC), το οποίο με τη χρήση του λόγου των πιθανοφανειών είναι ικανό να ανιχνεύσει τις αλλαγές συγχρόνως και για τον μέσο αλλά και την διακύμανση. Το σημαντικότερο είναι ότι το CPC διάγραμμα είναι πιο εύκολο να σχεδιαστεί και να εκτελεστεί συγκριτικά με άλλα σχέδια, διότι είναι το μόνο που χρησιμοποιεί κατά την διάρκεια της επεξεργασίας τρεις παραμέτρους, τον μέσο, την διακύμανση και μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι σχεδιάζει μια μοναδική στατιστική τιμή για κάθε συνδυασμό των τριών σε ένα μοναδικό διάγραμμα.

Το CPC διάγραμμα χωρίζει τις παρατηρήσεις σε υποσύνολα. Έστω ότι μέχρι ένα υποσύνολο οι παρατηρήσεις ακολουθούν κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, ενώ τα υπόλοιπα $N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$. Αν αυτό το υποσύνολο θεωρήσουμε ότι είναι το τελευταίο, τότε όλα τα υποσύνολα μας ακολουθούν την ίδια κανονική κατανομή. Οπότε κάνουμε έλεγχο υποθέσεων με H_0 , όπου όλες οι παρατηρήσεις ακολουθούν την ίδια κατανομή, έναντι της H_1 , όπου όλες οι παρατηρήσεις μετά από ένα συγκεκριμένο υποσύνολο ακολουθούν διαφορετική κανονική κατανομή. Αυτό το συγκεκριμένο υποσύνολο είναι άγνωστο. Με χρήση του λόγου των πιθανοφανειών δεχόμαστε την H_1 έναντι της H_0 και η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου ή δεχόμαστε την H_0 έναντι της H_1 και η διαδικασία είναι εντός ελέγχου.

3.3.2 Κατασκευή του CPC

Έστω ότι x_{tj} είναι η j -οστή παρατήρηση του υποσυνόλου t , όπου $j = 1, 2, \dots, n$ και $t = 1, 2, \dots, T$, με T να είναι το τρέχον υποσύνολο κάθε φορά. Οπότε για τα υποσύνολα $0 < t \leq \psi$, υποθέτουμε ότι τα x_{tj} είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν $N(\mu_0, \sigma_0^2)$, αλλά για το υποσύνολο $\psi < t \leq T$ τα x_{tj} είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν $N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$. Οπότε η ψ παράμετρος είναι το τελευταίο υποσύνολο πριν μια αλλαγή στην διεργασία. Αν το $\psi \geq T$, τότε δεν έχει υπάρξει μέχρι στιγμής κάποια αλλαγή.

Όπως και το 1999 οι Acosta-Meja, et al. ελέγχουν την υπόθεση ότι η μέση τιμή και η διακύμανση της διεργασίας δεν έχουν αλλάξει ($\psi \geq T$) έναντι της υπόθεσης ότι έχει συμβεί ταυτόχρονη αλλαγή ($\psi < T$). Εφαρμόζοντας τον έλεγχο του λόγου Πιθανοφανειών έχουμε:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_T^2 = \sigma_0^2, \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_T = \mu_0,$$

$$H_1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_\psi^2 = \sigma_0^2, \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_\psi = \mu_0,$$

$$\sigma_{\psi+1}^2 = \sigma_{\psi+2}^2 = \dots = \sigma_{\psi+T}^2 = \sigma_\alpha^2, \quad \mu_{\psi+1} = \mu_{\psi+2} = \dots = \mu_T = \mu_\alpha,$$

όπου $0 < \psi \leq T$ είναι άγνωστο.

Έτσι οι L_0 και L_1 είναι οι συναρτήσεις των πιθανοφαιγιών για τα υποσύνολα από το χρόνο 1 έως T , για τους ελέγχους H_0 και H_1 αντίστοιχα. Οπότε έχουμε:

$$L_0 = (X_1, X_2, \dots, X_T) = \prod_{t=1}^T \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x_{tj} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\},$$

$$L_1 = (X_1, X_2, \dots, X_T) = \prod_{t=1}^{\psi} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(x_{tj} - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

$$\times \prod_{t=\psi+1}^T \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\alpha} \exp\left\{-\frac{(x_{tj} - \mu_\alpha)^2}{2\sigma_\alpha^2}\right\},$$

όπου το n είναι το μέγεθος της υποομάδας και $X_t = (x_{t1}, \dots, x_{tn})$ είναι το n -διάστατο διάνυσμα των παρατηρήσεων του δείγματος που λάβαμε από το t -οστό υποσύνολο. Ο λόγος των Πιθανοφαιγιών LR_ψ δίνεται από τον τύπο:

$$LR_\psi = \frac{L_0(X_1, X_2, \dots, X_T)}{L_1(X_1, X_2, \dots, X_T)} \quad (3.18)$$

Αντικαθιστώντας καταλήγουμε στην συνάρτηση:

$$LR_\psi = \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_\alpha^2}\right)^{\frac{n(T-\psi)}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{t=\psi+1}^T \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{x_{tj} - \mu_0}{\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{x_{tj} - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha}\right)^2 \right]\right\}. \quad (3.19)$$

Έστω η LR_ψ^* η μεγιστοποιημένη της LR_ψ όταν $0 \leq \psi < T$. Δηλαδή:

$$LR_\psi^* = \max_{0 \leq \psi < T} LR_\psi.$$

Σε αυτό το σημείο για την υποομάδα T παρατηρούμε ότι θα επιλέγαμε την H_1 έναντι της H_0 , δηλαδή η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, εάν $LR_\psi^* > A$, για κάποια αυθαίρετη σταθερά τέτοια ώστε $A \geq 1$. Αλλιώς θα επιλέγαμε την H_0 έναντι της H_1 άρα η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

Έστω $\gamma^2 = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_0^2}$, $k = \ln \gamma^2$ και $V_T = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{x_{tj} - \mu_0}{\sigma_0} \right)^2 - \left(\frac{x_{tj} - \mu_\alpha}{\sigma_\alpha} \right)^2 \right]$, τότε έχουμε από την (3.12):

$$Y_T = \max_{0 \leq \psi < T} \ln LR_\psi \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{2} \max_{0 \leq \psi < T} \left[n(\psi - T) \ln \gamma^2 + \sum_{t=\psi+1}^T V_t \right].$$

Οπότε θα επιλέγαμε την H_1 έναντι της H_0 εάν:

$$2Y_T = \max_{0 \leq \psi < T} \left[nk(\psi - T) + \sum_{t=\psi+1}^T V_t \right] > 2 \ln A. \quad (3.21)$$

Αν $h = 2 \ln A$ τότε έχουμε:

$$\max_{0 \leq \psi < T} \left[-nk + V_T, -2nk + \sum_{t=T-1}^T V_t, \dots, -Tnk + \sum_{t=1}^T V_t \right] > h. \quad (3.22)$$

Σύμφωνα με τους Acosta-Meja, et al. (1999) αποδεικνύεται ότι απορρίπτοντας την H_0 η παραπάνω συνθήκη είναι ισοδύναμη με την συνθήκη των CUSUM διαγραμμάτων:

$$C_t = \max\{0, V_t - nk + C_{t-1}\},$$

με $C_0 = 0$ και h ως το όριο ελέγχου.

Για $\gamma > 1$, γ^+ όταν $\sigma_\alpha > \sigma_0$, έστω $k^+ = \ln \left(\frac{\sigma_\alpha^+}{\sigma_0} \right)^2$, το μονόπλευρο CUSUM διάγραμμα για τον έλεγχο της διασποράς της διεργασίας και αλλαγής του μέσου μπορεί να δοθεί από:

$$C_t^+ = \max\{0, V_t - nk^+ + C_{t-1}^+\}, \quad (3.23)$$

με $C_0^+ = 0$ και h^+ ως το όριο ελέγχου.

Αντίστοιχα, για $\gamma < 1$, γ^- όταν $\sigma_\alpha < \sigma_0$, έστω $k^- = \ln\left(\frac{\sigma_\alpha^-}{\sigma_0}\right)^2$, το μονόπλευρο CUSUM διάγραμμα για τον έλεγχο της διασποράς της διεργασίας και μετατόπισης του μέσου μπορεί να δοθεί από:

$$C_t^- = \max\{0, V_t - nk^- + C_{t-1}^-\}, \quad (3.24)$$

με $C_0^- = 0$ και h^- ως το όριο ελέγχου.

Το CPC διάγραμμα δίνει σήμα κάθε φορά που τα C_t^+ ή C_t^- υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου h_u ή h_l . Ένας συνδυασμός από δύο μονόπλευρα διαγράμματα μπορεί να υλοποιηθεί για να ανιχνεύει και τις δύο κατευθύνσεις των μετατοπίσεων της διακύμανσης.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι αν $\sigma_\alpha = \sigma_0$ αλλά $\mu_\alpha \neq \mu_0$ ($n = 1$) το CPC διάγραμμα γίνεται ένα παραδοσιακό CUSUM διάγραμμα που ανιχνεύει τον μέσο της διεργασίας. Επίσης αν $\mu_\alpha = \mu_0$ και $\sigma_\alpha \neq \sigma_0$ τότε CPC διάγραμμα γίνεται ένα CP διάγραμμα, των Acosta-Meja, et al. (1999), που ανιχνεύει την διασπορά της διεργασίας.

3.3.3 Εκτίμηση του ARL για το CPC διάγραμμα

Το ARL αποτυπώνει την αποδοτικότητα ενός διαγράμματος ελέγχου να ανιχνεύει μια μετατόπιση στην διεργασία. Η απόδοση του ARL καλείται κατάσταση μηδέν (*Zero State ARL, ZS-ARL*). Θεωρούμε ότι στην πράξη η διεργασία ξεκινά εντός ελέγχου και κάποια τυχαία στιγμή t συμβαίνει η αλλαγή. Για ένα αυθαίρετο $t > 0$, η ARL απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου ονομάζεται σταθερή κατάσταση ARL (*Steady State ARL, SS-ARL*). Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να υπολογιστεί το ARL κάποιες από αυτές είναι οι Μαρκοβιανές αλυσίδες, η προσομοίωση Monte Carlo κ.α. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες είναι ευρύτατα διαδεδομένες στην εκτίμηση του ARL ενός διαγράμματος ελέγχου. Στην περίπτωση του CPC διαγράμματος, μας παρέχει τον γρήγορο υπολογισμό του ARL χωρίς να απαιτεί μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων.

Το 1972 οι Brook και Evans κατασκεύασαν ένα μοντέλο Μαρκοβιανών αλυσίδων. Στηριζόμενοι σε αυτό το μοντέλο οι Zhang και Zhang (2013) ανέπτυξαν το δικό τους μοντέλο για τη βαθμονόμηση των ZS- και SS-ARL του CPC διαγράμματος.

Υποθέτουμε ότι $\mu_0 = 0$ και $\sigma_0 = 1$, εναλλακτικά θα μπορούσαμε να κανονικοποιήσουμε τις παρατηρήσεις χρησιμοποιώντας τον μέσο και την τυπική απόκλιση της διεργασίας μας.

Ορίζουμε τον δυσδιάστατο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = (p_{ij})$ μεγέθους $m \times m$, όπου το p_{ij} είναι η πιθανότητα μετάβασης του C_t από την κατάσταση i στην κατάσταση j και m είναι το πλήθος των καταστάσεων με $0 < m < h$. Το εύρος κάθε τμήματος είναι $\omega = \frac{2h}{2m-1}$, εκτός από το πρώτο τμήμα όπου έχει εύρος $\frac{\omega}{2}$. Οι καταστάσεις διαμήκους του άξονα παίρνουν τιμές $i = 1, 2, \dots, (m-1)$. Το κεντρικό σημείο της κατάστασης i πάνω στον άξονα είναι το σημείο $i\omega$. Έτσι η εντός ελέγχου περιοχή είναι χωρισμένη σε m το πλήθος περιοχές.

Η μέση τιμή και η μεταβλητότητα της διεργασίας τη στιγμή t είναι μ_t και σ_t^2 , αντίστοιχα. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου τότε έχουμε $\sigma_t = \sigma_0$, αλλιώς $\sigma_t = \sigma_\alpha$.

Έστω: $\alpha = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$, $b = \frac{\delta}{\gamma^2-1}$, $c = \frac{n\delta^2}{\gamma^2-1}$ τότε έχουμε:

$$V_t = \alpha\sigma_t^2 \left(\frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} + \frac{n(\bar{x}_t+b)^2}{\sigma_t^2} \right) - c,$$

όπου $\bar{x}_t = \sum_{j=1}^n \frac{x_{ij}}{n}$ και $S_t^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_{ij}-\bar{x}_t)^2}{n}$ είναι ο μέσος και η διακύμανση του t -οστού δείγματος, αντίστοιχα.

Έστω:

$$\alpha_j = \frac{1}{a\sigma_t^2} [c + nk + (j - i - 0.5)\omega],$$

$$b_j = \frac{1}{a\sigma_t^2} [c + nk + (j - i + 0.5)\omega],$$

$$c_j = \frac{1}{a\sigma_t^2} [c + nk + (-i - 0.5)\omega].$$

Όταν $j \neq 0$ και $\gamma > 1$ (άρα $\alpha > 0$), τότε

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \Pr\{(j - i - 0.5)\omega + nk < V_t < (j - i + 0.5)\omega + nk\} \\ &= \Pr\left\{\frac{1}{a\sigma_t^2} [(j - i - 0.5)\omega + nk + c] < \frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} + \frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2} \right. \\ &\quad \left. < \frac{1}{a\sigma_t^2} [(j - i + 0.5)\omega + nk + c] \right\} \\ &= \Pr\left\{a_j < \frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} + \frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2} < b_j\right\}. \end{aligned}$$

Όπως γνωρίζουμε η $\frac{nS_t^2}{\sigma_t^2}$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $n - 1$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή $\frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ και $\frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2}$ ακολουθεί την γενικευμένη κατανομή χ^2 με 1 βαθμό ελευθερίας και παράμετρο $d = \frac{n(\mu_t + b)^2}{\sigma_t^2}$, δηλαδή $\frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2} \sim \chi_1^2(d)$.

Τα δυο στατιστικά $\frac{nS_t^2}{\sigma_t^2}$ και $\frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2}$ είναι ανεξάρτητα. Έτσι έχουμε ότι $\frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} + \frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2} \sim \chi_n^2(d)$.

Οπότε η πιθανότητα μετάβασης μπορεί να γίνει:

$$p_{ij} = F_{(n,d)}(b_j) - F_{(n,d)}(a_j),$$

όπου το $F_{(n,d)}$ είναι η συνάρτηση της κατανομής της πιθανότητας μια κατανομής $\chi_n^2(d)$.

Αν $\gamma < 1$ (δηλαδή $\alpha < 0$) τότε έχουμε:

$$p_{ij} = F_{(n,d)}(a_j) - F_{(n,d)}(b_j).$$

Ομοίως, όταν $j = 0$ και $\gamma > 1$ η πιθανότητα μετάβασης του C_t από την κατάσταση i στην κατάσταση 0 μπορεί να γραφτεί ως:

$$P_{i0} = \Pr\left\{V_t - nk + i\omega < \frac{\omega}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr \left\{ \frac{nS_t^2}{\sigma_t^2} + \frac{n(\bar{x}_t + b)^2}{\sigma_t^2} < \frac{1}{a\sigma_t^2} (nk - (i - 0.5)\omega) \right\} \\
&= F_{(n,d)}(c_i).
\end{aligned}$$

Αν $\gamma < 1$ τότε έχουμε:

$$p_{i0} = 1 - F_{(n,d)}(c_i).$$

Το ARL του CPC διαγράμματος μπορεί να υπολογιστεί από την παρακάτω εξίσωση:

$$ARL = \mathbf{p}_{ini}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1},$$

όπου \mathbf{p}_{ini} είναι το διάνυσμα της αρχικής πιθανότητας των καταστάσεων και ο υποπίνακας \mathbf{Q} περιλαμβάνει τις πιθανότητες μετάβασης από την μια κατάσταση στην άλλη.

Για να ρυθμίσουμε το SS-ARL, σύμφωνα με τους Lucas και Saccussi (1990), θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα:

$$\mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & (\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{1} \\ 0 \dots 1 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω \mathbf{p}_{ss} το διάνυσμα των αναλλοίωτων πιθανοτήτων μετάβασης, τότε μπορούμε να το διάνυσμα μπορεί να υπολογιστεί από $\mathbf{p} = \mathbf{P}^{*T} \mathbf{p}$, όπου $\mathbf{p}\mathbf{1} = 1$ και το $\mathbf{1}$ είναι ένα διάνυσμα με μονάδες. Τελικά έχουμε:

$$ARL = \mathbf{p}_{ss}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}.$$

3.3.4 Απόδοση

Για να καταλάβουμε πόσο η παράμετρος επηρεάζει την απόδοση των διαγραμμάτων CPC θα συγκρίνουμε την συμπεριφορά του προτεινόμενου διαγράμματος για δύο μεγέθη λογικών ομάδων, $n = 5$. Οι επιλογές αυτές είναι ευρέως προτεινόμενες και χρησιμοποιούνται στις λογικές ομάδες. Το εντός ελέγχου ARL επιλέγεται να είναι 370 στις διάφορες προαποφασισμένες τιμές των (δ, γ) .

Ο Πίνακας 3.10 παρουσιάζει τα αποτελέσματα του *SS-ARL* των διαγραμμάτων ελέγχου για την ανίχνευση των αλλαγών της διασποράς στο διάστημα [1.1,2.0]. Επιπλέον για να εκτιμήσουμε καλύτερα τα αποτελέσματα έχουμε και τον δείκτη της σχετικής απώλειας της απόδοσης (*RLE*), από τον Sparks (2003), με τύπο:

$$RLE = \sum_{l=1}^N \frac{ARL_{\gamma l} - MARL_{\gamma l}}{MARL_{\gamma l}},$$

όπου N είναι το συνολικό πλήθος των μετατοπίσεων που μελετάμε, το $ARL_{\gamma l}$ είναι το εκτός ελέγχου *ARL* του δοσμένου διαγράμματος ελέγχου όταν ανιχνεύει μετατόπιση γl και το $MARL_{\gamma l}$ είναι το μικρότερο εκτός ελέγχου *ARL* μεταξύ των εκτός ελέγχου *ARL* των διαγραμμάτων ελέγχου που μελετάμε όταν ανιχνεύσαμε

Πίνακας 3.10 Απόδοση *SS-ARL* των διαγραμμάτων *CPC*

($n = 5, ARL_0 = 370$)

| δ | γ | (0.25,1.1) | (0.5,1.1) | (0.75,1.1) | (0.25,1.2) | (0.5,1.2) | (0.75,1.2) | (0.8,1.4) |
|----------|----------|------------|-----------|------------|------------|-----------|------------|-----------|
| 0.00 | 1.0 | 370 | 370 | 370 | 370 | 370 | 370 | 370 |
| | 1.1 | 85.8 | 125 | 140 | 64.3 | 99.2 | 120 | 102 |
| | 1.2 | 34.5 | 58.1 | 69.0 | 23.0 | 39.1 | 52.9 | 39.8 |
| | 1.4 | 12.5 | 21.1 | 26.3 | 7.98 | 12.6 | 17.7 | 11.8 |
| | 1.6 | 7.19 | 11.4 | 14.0 | 4.64 | 6.65 | 9.03 | 5.82 |
| | 1.8 | 4.95 | 7.48 | 9.12 | 3.28 | 4.43 | 5.77 | 3.71 |
| | 2.0 | 3.77 | 5.49 | 6.66 | 2.57 | 3.29 | 4.16 | 2.73 |
| 0.25 | 1.0 | 22.7 | 25.7 | 34.0 | 35.3 | 32.5 | 38.2 | 54.8 |
| | 1.1 | 14.8 | 17.5 | 21.9 | 16.6 | 17.9 | 21.5 | 24.6 |
| | 1.2 | 10.7 | 13.0 | 15.7 | 10.2 | 11.7 | 14.1 | 13.9 |
| | 1.4 | 6.85 | 8.40 | 9.79 | 5.57 | 6.53 | 7.84 | 6.55 |
| | 1.6 | 4.94 | 6.12 | 6.91 | 3.78 | 4.47 | 5.27 | 4.13 |
| | 1.8 | 3.83 | 4.76 | 5.34 | 2.88 | 3.41 | 3.97 | 2.98 |
| | 2.0 | 3.13 | 3.90 | 4.37 | 2.35 | 2.74 | 3.18 | 2.37 |
| 0.50 | 1.0 | 7.70 | 7.14 | 7.96 | 9.79 | 8.30 | 8.78 | 12.2 |
| | 1.1 | 6.58 | 6.34 | 6.87 | 7.26 | 6.67 | 7.07 | 8.37 |
| | 1.2 | 5.71 | 5.64 | 6.08 | 5.72 | 5.51 | 5.87 | 6.21 |
| | 1.4 | 4.48 | 4.64 | 4.93 | 4.01 | 4.10 | 4.39 | 4.06 |
| | 1.6 | 3.64 | 3.91 | 4.15 | 3.09 | 3.24 | 3.51 | 3.05 |
| | 1.8 | 3.07 | 3.37 | 3.56 | 2.50 | 2.68 | 2.91 | 2.44 |
| | 2.0 | 2.64 | 2.96 | 3.17 | 2.12 | 2.29 | 2.52 | 2.06 |
| 0.75 | 1.0 | 4.40 | 3.83 | 3.76 | 4.94 | 4.13 | 4.02 | 4.87 |
| | 1.1 | 4.07 | 3.62 | 3.58 | 4.26 | 3.74 | 3.67 | 4.10 |
| | 1.2 | 3.76 | 3.47 | 3.43 | 3.77 | 3.42 | 3.38 | 3.56 |
| | 1.4 | 3.26 | 3.12 | 3.12 | 3.01 | 2.88 | 2.89 | 2.83 |
| | 1.6 | 2.84 | 2.82 | 2.85 | 2.51 | 2.50 | 2.55 | 2.34 |
| | 1.8 | 2.53 | 2.57 | 2.61 | 2.16 | 2.20 | 2.27 | 2.01 |

| | | | | | | | | |
|--------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 2.0 | 2.27 | 2.36 | 2.43 | 1.90 | 1.97 | 2.06 | 1.79 |
| 1.00 | 1.0 | 3.05 | 2.62 | 2.45 | 3.18 | 2.70 | 2.52 | 2.80 |
| | 1.1 | 2.91 | 2.56 | 2.40 | 2.93 | 2.56 | 2.42 | 2.59 |
| | 1.2 | 2.77 | 2.46 | 2.35 | 2.73 | 2.44 | 2.33 | 2.41 |
| | 1.4 | 2.53 | 2.34 | 2.25 | 2.37 | 2.20 | 2.16 | 2.10 |
| | 1.6 | 2.31 | 2.20 | 2.15 | 2.08 | 2.01 | 1.98 | 1.88 |
| | 1.8 | 2.12 | 2.08 | 2.06 | 1.88 | 1.85 | 1.86 | 1.71 |
| | 2.0 | 1.97 | 1.98 | 1.98 | 1.71 | 1.73 | 1.75 | 1.58 |
| 1.50 | 1.0 | 1.88 | 1.64 | 1.48 | 1.82 | 1.61 | 1.48 | 1.51 |
| | 1.1 | 1.85 | 1.62 | 1.48 | 1.77 | 1.58 | 1.47 | 1.48 |
| | 1.2 | 1.81 | 1.60 | 1.48 | 1.72 | 1.56 | 1.46 | 1.46 |
| | 1.4 | 1.74 | 1.58 | 1.48 | 1.63 | 1.51 | 1.44 | 1.42 |
| | 1.6 | 1.67 | 1.55 | 1.48 | 1.54 | 1.47 | 1.42 | 1.37 |
| | 1.8 | 1.60 | 1.52 | 1.47 | 1.47 | 1.42 | 1.39 | 1.33 |
| | 2.0 | 1.54 | 1.50 | 1.45 | 1.40 | 1.37 | 1.36 | 1.30 |
| | <i>RLE</i> | 9.635 | 15.05 | 19.60 | 4.346 | 6.314 | 10.74 | 6.928 |
| Όριο ελέγχου | <i>h</i> | 7.01 | 8.15 | 8.50 | 7.35 | 8.06 | 8.31 | 7.98 |

την μετατόπιση γl . Το διάγραμμα ελέγχου με τη μικρότερη τιμή *RLE* θεωρούμε ότι έχει την καλύτερη συνολική απόδοση. Στην περίπτωση μας οι τιμές του *RLE* αξιολογούνται όταν $N = 41$. Τα αντίστοιχα όρια ελέγχου παρατίθενται στην τελευταία γραμμή του Πίνακα 3.3. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι το διάγραμμα *CPC* με τιμές $\mu = \mu_\alpha = 0.25$ και $\sigma_\alpha = 1.2$ έχει συνολικά εύρωστη απόδοση.

Κεφάλαιο 4

EWMA διαγράμματα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας

4.1 Εισαγωγή

Ένας άλλος τύπος διαγραμμάτων με μεγαλύτερη ευαισθησία μικρών μεταβολών, της τάξεως $\frac{1}{2}\sigma$ έως 2σ , είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (*Exponentially Weighted Moving Average Control Charts*, EWMA). Εν αντιθέσει των διαγραμμάτων τύπου Shewhart, που δεν είναι αρκετά ευαίσθητα και βασίζονται σε ένα μόνο δείγμα, τα EWMA διαγράμματα εξαρτώνται από τις προγενέστερες παρατηρήσεις. Παρουσιάστηκαν από τον Roberts το 1959. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μεμονωμένες παρατηρήσεις αλλά και όταν έχουμε δείγματα.

Στα διαγράμματα τύπου EWMA τοποθετούνται οι τιμές z_i βάσει του τύπου:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} \quad (4.1)$$

με x_i τις παρατηρήσεις και παράμετρο $\lambda \in (0,1]$ που ονομάζεται συντελεστής βαρύτητας. Η παράμετρος αυτή είναι ο βαθμός κατά τον οποίο οι προηγούμενες παρατηρήσεις υπολογίζονται στο στατιστικό του διαγράμματος. Όσο πιο κοντά στην μονάδα, τόσο μικρότερο βάρος δίνεται στις προηγούμενες παρατηρήσεις. Η πρώτη τιμή $z_0 = \mu_0$ είναι η μέση τιμή στόχος. Για πρώτη τιμή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μέσο από πρότερη γνώση ή τον δειγματικό μέσο \bar{x} .

Ο ορισμός των διαγραμμάτων EWMA είναι ένας αναδρομικός τύπος που δίνει λ βάρος στην τελευταία παρατήρηση, $\lambda(1 - \lambda)$ στην προηγούμενη, $\lambda(1 - \lambda)^2$ στην αμέσως προηγούμενη, ..., $\lambda(1 - \lambda)^i$ στην i -οστή. Οπότε ο τύπος για το z_i αν τον αναπτύξουμε γίνεται:

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} = \lambda x_i + (1 - \lambda)[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}] = \\ &\quad \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2} = \\ &\quad \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 [\lambda x_{i-2} + (1 - \lambda)z_{i-3}] = \\ &\quad \dots = \\ &\quad \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^2 x_{i-2} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{i-1} x_1 + (1 - \lambda)^i z_0 = \\ &\quad \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i z_0. \end{aligned}$$

Η σπουδαιότητα που δίνουμε στις παρατηρήσεις όσο παλαιώνουν φαίνεται από τα βάρη $\lambda(1 - \lambda)^j$, των οποίων οι τιμές μειώνονται γεωμετρικά όσο μεγαλώνει το πλήθος τους. Μεγαλύτερο μερίδιο έχουν οι πρόσφατες παρατηρήσεις και όσο προχωράμε στις παλαιότερες παίρνουν μικρότερη τιμή. Λόγω αυτής την γεωμετρικής μείωσης που έχουν τα βάρη του EWMA διαγράμματος το ονομάζουμε και Διάγραμμα Γεωμετρικού Κινούμενου Μέσου.

Τα όρια ελέγχου του EWMA διαγράμματος:

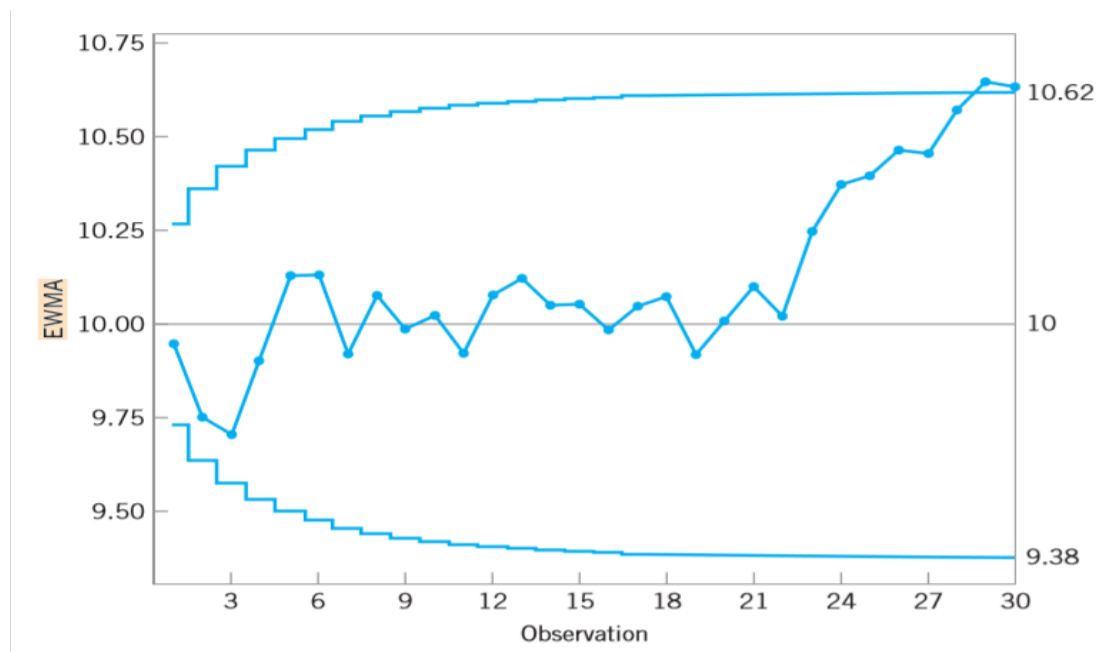
$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} (1 - (1 - \lambda)^{2i})}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου L είναι το εύρος των ορίων και μ_0 η τιμή στόχος.

Παρατηρούμε ότι επειδή όσο το i αυξάνεται το $(1 - (1 - \lambda)^{2i})$ τείνει στο μηδέν, τότε από ένα σημείο και πέρα τα όρια ελέγχου γίνονται:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \\
 CL &= \mu_0 \\
 LCL &= \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα:



Σχήμα 4.1: EWMA Διάγραμμα

Σε περίπτωση που αντί για μεμονωμένες παρατηρήσεις έχουμε δείγματα τότε αντικαθιστούμε τα x_i με \bar{x}_i και σ με $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος.

Οπότε αντίστοιχα έχουμε:

$$z_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)z_{i-1}.
 \tag{4.4}$$

με x_i τις παρατηρήσεις και παράμετρο $\lambda \in (0,1]$ και όρια ελέγχου:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i})} \\
 CL &= \mu_0 \\
 LCL &= \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2i})}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

4.1.1 Σχεδιασμός EWMA

Για τον σχεδιασμό ενός διαγράμματος EWMA είναι κρίσιμη η επιλογή των παραμέτρων λ και L , ώστε να έχουμε την επιθυμητή απόδοση ARL. Θέλουμε μεγάλο ARL_0 (εντός ελέγχου) και μικρό ARL_1 (εκτός ελέγχου). Επιθυμούμε μεγάλο ARL_0 ώστε σε μια εντός ελέγχου διαδικασία να χρειάζεται μεγάλος αριθμός δειγμάτων μέχρι την εσφαλμένη ένδειξη εκτός ελέγχου, ενώ επιθυμούμε μικρό ARL_1 ώστε σε μια εκτός ελέγχου διαδικασία να χρειαστεί μικρός αριθμός δειγμάτων για να σηματοδοτηθεί, ορθώς, η διαδικασία εκτός ελέγχου.

Γενικός κανόνας όσον αφορά στο λ είναι η χρήση μικρών αριθμών, ώστε να ανιχνεύει μικρές αλλαγές. Συνηθισμένες επιλογές του λ είναι οι τιμές: 0.05, 0.10 και 0.20. Για το L συνήθως δίνεται η τιμή 3, η κλασική πρακτική των 3σ , ειδικά όταν έχουμε μεγάλο λ . Αντί της τιμής 3 για το L μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, μεγαλύτερες ή μικρότερες ανάλογα αν θέλουμε να φαρδύνουμε ή να στενέψουμε τα όρια ελέγχου. Μην ξεχνάμε όμως ότι μεγαλώνοντας το πλάτος των ορίων μειώνουμε τη πιθανότητα του σφάλματος τύπου I αλλά συγχρόνως αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II. Γενικά όμως κατά την επιλογή των λ και L , αν έχουμε μικρή τιμή στο πρώτο καλό είναι να έχει και σχετικά μικρή τιμή και στο δεύτερο.

Υπάρχουν αρκετές έρευνες με αντικείμενο την εύρεση του βέλτιστου διαγράμματος EWMA με κριτήριο την τιμή του ARL σε σχέση με την επιλογή

των λ και L . Αυτές οι έρευνες έχουν καταλήξει ότι επιτυγχάνεται το βέλτιστο διάγραμμα EWMA όταν:

- Έχουμε καθορίσει την επιθυμητή τιμή του ARL.
- Έχουμε καθορίσει την ελάχιστη μετατόπιση που θέλουμε να εντοπίσουμε στο μέσο της διαδικασίας.
- Από τους προϋπολογισμένους συνδυασμούς των ARL, λ και L επιλέγουμε τα λ και L που δίνουν την μικρότερη τιμή του ARL για την αλλαγή στον μέσο που θέλουμε.

4.1.2 FIR Ιδιότητα

Όπως και στο διάγραμμα CUSUM έτσι και στο EWMA μπορούμε να πετύχουμε την γρήγορη αρχική αντίδραση (*Fast Initial Response*, FIR). Έτσι εντοπίζουμε ένα σημείο που είναι εκτός ελέγχου όσο δυνατόν πιο κοντά στην αρχή της διαδικασίας μειώνοντας χρόνο και κόστος για να εξακριβώσουμε αν μια διαδικασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς να χάσουμε πολύτιμο χρόνο παράγοντας εκτός προδιαγραφών προϊόντα.

Οι πιο γνωστές μέθοδοι είναι των Rhoads, et al. (1996) και του Steiner (1999). Η μέθοδος του Steiner που είναι η πιο διαδεδομένη αλλά και πιο εύκολη στην υλοποίηση, χρησιμοποιεί στενότερα όρια ελέγχου:

$$\pm L\sigma \left\{ (1 - (1 - f)^{1+a(i-1)}) \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \right\},$$

όπου f , a σταθερές που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Το a θα πρέπει να έχει τιμή τέτοια ώστε το FIR να έχει μικρή επιρροή από την 20^ή περίπου παρατήρηση και μετά. Οπότε έχουμε για το a τον τύπο:

$$a = \frac{\left[\frac{-2}{\log(1-f)-1} \right]}{19}.$$

Μια τιμή που είναι αρκετά καλή για το f είναι $f = 0.5$ διότι μιμείται το 50% του FIR που χρησιμοποιείται συχνά στα CUSUM.

4.1.3 Χρήση του EWMA Διαγράμματος για την παρακολούθηση της Μεταβλητότητας

Μια πρόταση στατιστικού βασισμένου στα EWMA για την παρακολούθηση της τυπικής απόκλισης μιας διαδικασίας έγινε το 1993 από τους MacGregor και Harris. Ορίζεται το Εκθετικά Σταθμισμένο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (EWMS) S_i^2 :

$$S_i^2 = \lambda(x_i - \mu)^2 + (1 - \lambda)S_{i-1}^2. \quad (4.6)$$

Αποδεικνύεται ότι $E(S_i^2) = \sigma^2$ για μεγάλα i και αν οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανομημένες τότε έχουμε:

$$\frac{S_i^2}{\sigma^2} \sim X_{\frac{2-\lambda}{\lambda}}^2.$$

Οπότε αν η τιμή στόχος της τυπικής απόκλισης της διαδικασίας είναι σ_0 τότε μπορούμε να κάνουμε το γράφημα της ποσότητας $\sqrt{S_i^2}$ σε ένα Εκθετικά Σταθμισμένο Μέσης Τετραγωνικής Ρίζας (EWRMS) διάγραμμα ελέγχου με όρια ελέγχου:

$$UCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{X_{v, \alpha/2}^2}{v}} \quad (4.7)$$

$$LCL = \sigma_0 \sqrt{\frac{X_{v, 1 - (\frac{\alpha}{2})}^2}{v}}, \quad (4.8)$$

όπου $v = \frac{2-\lambda}{\lambda}$.

Επιπλέον οι MacGregor και Harris το 1993 αναφέρουν ότι το EWMS στατιστικό μπορεί να γίνει το ίδιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της διαδικασίας όσο και στην τυπικής απόκλισης με αντικατάσταση του μ με κάποια εκτίμηση του $\hat{\mu}_i$ σε κάθε σημείο. Ένας εκτιμητής είναι το z_i του EWMA, όπου βρήκαν τα όρια ελέγχου για την Εκθετικά Σταθμισμένη Κινητή Διασπορά (EWMV)

$$S_i^2 = \lambda(x_i - z_i)^2 + (1 - \lambda)S_{i-1}^2. \quad (4.9)$$

4.1.4 Το EWMA για Poisson δεδομένα

Το 1998 οι Borror, et al. έδειξαν πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το EWMA διάγραμμα αν οι παρατηρήσεις μας προέρχονται από την Poisson κατανομή. Έχουμε:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$$

που είναι ο ίδιος τύπος για τις τιμές προς έλεγχο που έχουμε για τα διαγράμματα EWMA στην εισαγωγή αλλά τα όρια ελέγχου είναι:

$$UCL = \mu_0 + A_U \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$CL = \mu_0 \quad (4.10)$$

$$LCL = \mu_0 - A_L \sqrt{\frac{\lambda \mu_0}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]},$$

όπου τα A_U και A_L είναι οι άνω και κάτω παράγοντες ορίων ελέγχου αντίστοιχα. Σε πολλές εφαρμογές έχουμε: $A_U = A_L = A$.

Ακόμα υπάρχουν και γραφήματα της ARL συμπεριφοράς του EWMA διαγράμματος συναρτήσει των λ και A για αρκετά μ_0 . Οπότε επιλέγουμε την τιμή στόχο μ_0 και την τιμή του λ και από τα γραφήματα βρίσκουμε την τιμή του A που μας δίνει το επιθυμητό ARL_0 .

4.1.5 Το EWMA ως εργαλείο για την πρόβλεψη της τιμής του μέσου μιας διαδικασίας

Τα διαγράμματα EWMA μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την πρόβλεψη της τιμής του μέσου μ στην επόμενη χρονική περίοδο. Δηλαδή το z_i είναι ουσιαστικά η τιμή που θα έχει το μ στο βήμα $i + 1$, με i το πλήθος των τιμών που έχουμε παρατηρήσει και που βασίζεται η πρόβλεψη. Ο έλεγχος περιλαμβάνει την ευρεθείσα τιμή και την συγκρίνει με την πρόβλεψη και αν υπάρχει μεγάλη διαφορά τότε δίνουν σήμα ότι είναι αναγκαία κάποια διόρθωση κατά την παραγωγική εργασία. Βέβαια αυτές οι αλλαγές δεν πρέπει να γίνονται με μεγάλη συχνότητα γιατί θα έχουμε αύξηση της μεταβλητότητας της διαδικασίας. Επιπλέον η διαφορά της τιμής στόχου και της πρόβλεψης μ_{i+1} του μέσου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί το μέγεθος της διόρθωσης που πρέπει να γίνει. Έτσι το στατιστικό z_i μπορεί να γραφτεί ως:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} = \lambda(x_i - z_{i-1}) + z_{i-1}. \quad (4.11)$$

Οπότε αν θεωρήσουμε το z_{i-1} ως πρόβλεψη του μέσου για την περίοδο $i - 1$ τότε η τιμή $x_i - z_{i-1}$ μπορεί να θεωρηθεί ως την πρόβλεψη για το σφάλμα e_i την περίοδο i . Δηλαδή:

$$z_i = z_{i-1} + \lambda e_i. \quad (4.12)$$

Προσθέτοντας έναν όρο ακόμα έχουμε:

$$z_i = z_{i-1} + \lambda_1 e_i + \lambda_2 \sum_{j=1}^i e_j, \quad (4.13)$$

όπου τα λ_1 και λ_2 είναι σταθερές που δίνουν βάρη στα σφάλματα και στο άθροισμα των σφαλμάτων που έχουμε μέχρι την περίοδο i . Αν θέσουμε:

$$\Delta e_i = e_i - e_{i-1},$$

την πρώτη διαφορά στα σφάλματα, έχουμε την τελική τροποποίηση του EWMA:

$$z_i = z_{i-1} + \lambda_1 e_i + \lambda_2 \sum_{j=1}^i e_j + \lambda_3 \Delta e_i \quad (4.14)$$

Από το παραπάνω EWMA στατιστικό εκτός από μια εκτίμηση του τωρινού μέσου έχουμε και τρεις ακόμα όρους. Έναν ανάλογο του σφάλματος, έναν που σχετίζεται με το άθροισμα των σφαλμάτων και έναν που σχετίζεται με την πρώτη διαφορά στα σφάλματα. Για να οδηγηθούμε σε μια αρκετά καλή προβλεπτική απόδοση του EWMA πρέπει με την κατάλληλη επιλογή των λ_1, λ_2 και λ_3 να διορθώσουμε αυτούς τους όρους. Συνηθίζεται το γράφημα των z_i γίνεται σε σχέση με την περίοδο $i + 1$, πράγμα που δίνει τη δυνατότητα οπτικού ελέγχου της διαφοράς της τωρινής παρατήρησης και της εκτίμησης του τωρινού μέσου της διαδικασίας.

4.1.6 Μειονεκτήματα του EWMA Διαγράμματος Ελέγχου

Η επιλογή της τιμής του λ είναι καθοριστικής σημασίας για τον χρόνο αντίδρασης του διαγράμματος. Αν έχουμε επιλέξει μικρή τιμή στο λ τότε δεν δίνουμε μεγάλη βαρύτητα στις νέες παρατηρήσεις. Δηλαδή αν προκύψει μια μεταβολή στον μέσο θα χρειαστούν αρκετές χρονικές περιόδους για να αντιδράσει το EWMA διάγραμμα και να εντοπίσει την αλλαγή. Αυτό ονομάζεται φαινόμενο αδράνειας.

Ένα ακόμα πρόβλημα που έχει το EWMA διάγραμμα είναι ότι συγκριτικά με το Shewhart διάγραμμα δεν αντιδρά γρήγορα σε μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο. Μια μέθοδος αντιμετώπισης χωρίς να χάσουμε την ικανότητα της ανίχνευσης των μικρών αλλαγών είναι η συνδυαστική χρήση ενός Shewhart και ενός EWMA διαγράμματος. Το τελικό διάγραμμα που θα προκύψει θα είναι εξίσου αποτελεσματικό στις μικρές και στις μεγάλες μεταβολές στον μέσο, ιδίως αν χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερα όρια στο Shewhart διάγραμμα.

4.1.7 Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους

Μια εναλλακτική περίπτωση διαγράμματος EWMA χωρίς όμως βάρη είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους (*Moving Average Control Charts*). Έστω ότι έχουμε $x_i, i = 1, 2, \dots$ μεμονωμένες παρατηρήσεις μια διαδικασίας. Ο κινητός μέσος διάρκειας m στο χρόνο i , όπου $i \geq m$, είναι:

$$M_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-m+1}}{m}$$

Δηλαδή στην περίοδο i η παλαιότερη παρατήρηση διαγράφεται και προστίθεται η πιο καινούρια. Το μέγεθος της μετατόπισης που θέλουμε να ανιχνεύσουμε είναι αντιστρόφως ανάλογο από το m . Δηλαδή αν θέλουμε να ανιχνεύσουμε μια αρκετά μικρή μετατόπιση στον μέσο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ μεγάλο m , με επίπτωση στην όχι και τόσο γρήγορη απόκριση του διαγράμματος στην ανίχνευση μεγάλων αλλαγών.

Για $0 < i < m$ ο κινητός μέσος είναι ο μέσος των παρατηρήσεων:

$$M_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{i}$$

Η διασπορά του M_i είναι:

$$\text{Var}(M_i) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^i \text{Var}(x_j) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^i \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{m},$$

οπότε τα 3σ όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{m}} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{m}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Και για $0 < i < m$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_0 + \frac{3\sigma}{\sqrt{i}} \\ CL &= \mu_0 \\ LCL &= \mu_0 - \frac{3\sigma}{\sqrt{i}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2 Ένα μονό EWMA διάγραμμα για την παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς της διεργασίας

4.2.1 Εισαγωγή

Συνήθως ο συνδυασμός δύο διαγραμμάτων, ενός \bar{X} - και ενός R - διαγράμματος, χρησιμοποιείται για την ανίχνευση αιτιών που έχουν σαν αποτέλεσμα την μετατόπιση στον μέσο ή στην διακύμανση μιας διεργασίας. Μια εναλλακτική είναι τα EWMA διαγράμματα ελέγχου. Η πρόταση των Costa και Rahim (2006) είναι ένα τέτοιο EWMA διάγραμμα για την παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς μίας διεργασίας. Το διάγραμμα αυτό βασίζεται σε ένα στατιστικό και είναι πιο αποδοτικό από τον συνδυασμό των \bar{X} - και R - διαγραμμάτων στην ανίχνευση κοινών αιτιών. Μας ενδιαφέρει η άμεση ανίχνευση μιας εκτός ελέγχου διεργασίας, και έτσι είναι μεγάλο πλεονέκτημα να μελετάμε μόνο ένα στατιστικό για τον έλεγχο του μέσου και της διασποράς της διεργασίας.

4.2.2 Κατασκευή του EWMA με T στατιστικό

Οι Chen, et al. το 2004 χρησιμοποίησαν την ιδέα ενός μοναδικού στατιστικού για τον έλεγχο του μέσου και της διασποράς. Ο ορισμός του στατιστικού T^* που χρησιμοποίησαν είναι λίγο διαφορετικός από τον ορισμό της διακύμανσης του δείγματος S^2 :

$$S^2 = \sum \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \text{ και } T^* = \sum \frac{(X_i - \mu_0)^2}{n},$$

όπου μ_0 είναι η τιμή στόχος του μέσου της διεργασίας. Ενώ το S^2 είναι ευαίσθητο στις αλλαγές της διακύμανσης, το T^* επηρεάζεται από τις αλλαγές του μέσου. Παρόλα αυτά το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό είναι πολύ αργό στην ανίχνευση των πιο συνηθισμένων αιτιών, αυτών που αλλάζουν τον μέσο αλλά κρατάνε την διακύμανση αναλλοίωτη. Προκειμένου να

διατηρήσουμε την ικανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει αυτού του τύπου τις αιτίες συστήνουμε το στατιστικό:

$$T = \sum (X_i - \mu_0 + \xi_i \sigma_0)^2, \quad (4.17)$$

όπου σ_0^2 είναι η τιμή στόχος της διακύμανσης της διεργασίας και $\xi_i = d > 0$ αν $\bar{X} > \mu_0$, αλλιώς $\xi_i = -d$. Το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό T έχει συνολικά καλύτερη απόδοση ως προς την ταχύτητα ανίχνευσης αιτιών, συμπεριλαμβανομένων και αυτών που επηρεάζουν τον μέσο ή μόνο αυξάνουν την μεταβλητότητα ή αλλάζουν τον μέσο και αυξάνουν την μεταβλητότητα της διεργασίας.

Έστω ότι έχουμε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό το X που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ . Έστω η εντός ελέγχου τιμή του μ να είναι μ_0 και η εντός ελέγχου τιμή του σ να είναι σ_0 . Ο σκοπός μας είναι η επίβλεψη της διεργασίας ώστε να ανιχνεύσουμε πιθανά αίτια που αλλάζουν τον μέσο μ από μ_0 σε $\mu_1 = \mu_0 + \delta \sigma_0$, με $\delta \neq 0$ ή αλλάζουν την τυπική απόκλιση σ από σ_0 σε $\sigma_1 = \gamma \sigma_0$, με $\gamma \neq 1$. Όταν υπάρχει μετατόπιση στον σ , συνήθως υποθέτουμε ότι είναι αύξηση του σ , διότι μια αύξηση του σ επιδεινώνει την ποιότητα του προϊόντος.

Έστω x_{ij} , $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots$ οι τιμές της μεταβλητής X , χωρισμένες σε σύνολα με μέγεθος $n > 1$ με i δείκτης τον αριθμό του συνόλου. Έστω ότι το:

$$\bar{X}_i = \frac{(X_{i1} + \dots + X_{in})}{n}$$

είναι ο i -οστός μέσος του δείγματος και έστω $e_i = \bar{X}_i - \mu_0$ η διαφορά μεταξύ του i -οστού δειγματικού μέσου και της τιμής στόχο του μέσου της διεργασίας. Ορίζουμε:

$$\xi_i = \begin{cases} d, & \text{αν } e_i \geq 0 \\ -d, & \text{αν } e_i < 0 \end{cases}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \mu_0 + \xi_i \sigma_0)^2, \quad (4.18)$$

με $i = 1, 2, \dots$, όπου το d είναι μια θετική σταθερά όπου:

όταν $d = 0$, το $\frac{T_i}{(\gamma\sigma_0)^2} \sim \chi_n^2(\lambda)$ όπου $\lambda = \frac{n\delta^2}{\gamma^2}$.

όταν $d > 0$, το $\frac{T_i}{(\gamma\sigma_0)^2} \sim \chi_n^2(\lambda^*)$ όπου $\lambda^* = \frac{n(\delta+d)^2}{\gamma^2}$ αν $\bar{X} > \mu_0$, αλλιώς

$$\lambda^* = \frac{n(\delta-d)^2}{\gamma^2}.$$

Το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό T έχει ένα άνω όριο ελέγχου που δίνεται από $k\sigma_0^2$, όπου η τιμή του k επιλέγεται ώστε να παρέχει την απαιτούμενη προστασία που χρειαζόμαστε έναντι των λανθασμένων ενδείξεων. Έστω P_s η πιθανότητα ότι το διάγραμμα ελέγχου να δώσει ένα σήμα εμφάνισης προσδιορισμένων αιτιών:

$$P_s = \Pr[T_i > k\sigma_0^2] \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\delta\sqrt{n}}{\gamma}} \Pr\left\{\chi_n^2 > \left[\frac{k}{\gamma^2} - \left(y + \sqrt{n}\frac{\delta-d}{\gamma}\right)\right]\right\} e^{-0.5y} dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta\sqrt{n}}{\gamma}}^{\infty} \Pr\left\{\chi_n^2 > \left[\frac{k}{\gamma^2} - \left(y + \sqrt{n}\frac{\delta+d}{\gamma}\right)\right]\right\} e^{-0.5y} dy \end{aligned}$$

Αν $\gamma = 1$ και $\delta = 0$ τότε $P_s = \alpha$, η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού και ονομάζεται κίνδυνος του παραγωγού. Ο κίνδυνος του παραγωγού είναι η πιθανότητα του ρίσκου που είναι συνδεδεμένη με την απόρριψη ενός καλής ποιότητας προϊόντος, σφάλμα τύπου I. Ενώ αν $P_s = 1 - \beta$ η πιθανότητα του διαγράμματος να ανιχνεύει αιτίες, όπου το β είναι το ρίσκο του καταναλωτή. Το ρίσκο του καταναλωτή είναι η πιθανότητα να αποδεχθεί ένα χαμηλής ποιότητας προϊόν, σφάλμα τύπου II.

4.2.3 Απόδοση

Την αποτελεσματικότητα του διαγράμματος ελέγχου στην ανίχνευση μιας μετατόπισης στην διαδικασία θα την μετρήσουμε με το ARL , το οποίο είναι ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων που συλλέγονται ενώ η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, έως ότου το διάγραμμα δώσει ένα σήμα. Κατά τη διάρκεια της

περιόδου εκτός ελέγχου, ο αριθμός των δειγμάτων που λαμβάνουμε μέχρι μια ένδειξη είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1 - \beta$. Έτσι έχουμε $ARL = \frac{1}{1-\beta}$, που είναι συνάρτηση των $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ και $\sigma_1 = \lambda\sigma_0$.

Μεγάλες αλλαγές στον μέσο ή την μεταβλητότητα της διαδικασίας δίνουν μικρό ARL . Έστω ότι ARL_0 είναι ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων που λαμβάνουμε κατά τη διάρκεια που η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, από τη στιγμή που ξεκινάμε την παρακολούθηση μέχρι και τη στιγμή που έχουμε κάποια ένδειξη. Ομοίως, ο αριθμός των δειγμάτων που θα λάβουμε ενώ είμαστε εντός ελέγχου μέχρι την πρώτη ένδειξη, είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο α , έτσι $ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$.

Οι Chen, et al. (2004) ερεύνησαν τις ιδιότητες των διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζονται στο στατιστικό T με $d = 0$ και έδειξαν ότι είναι πολύ καλά στον έλεγχο μεμονωμένων μετατοπίσεων της διασποράς, για $\gamma > 1.0$ και $\delta = 0$, αλλά είναι πολύ αργά στην ανίχνευση μεμονωμένων αλλαγών στον μέσο της διεργασίας, για $\gamma = 1.0$ και $\delta \neq 0$.

Για παράδειγμα αν $n = 5$, $\delta = 0.5$ και $\gamma = 1.0$ το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό T χρειάζεται κατά μέσο όρο 91.8 δείγματα για να ανιχνεύσει την διαταραχή, ενώ ο συνδυασμός $\bar{X} - R$ μόνο 49.0. Στον Πίνακα 4.1 μπορούμε να δούμε την σύγκριση στην απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζονται στο στατιστικό T και στο συνδυασμό των \bar{X} και R διαγραμμάτων.

Αν $d = 1.00$, το ARL μειώνεται περισσότερο από το μισό και από 91.8 γίνεται 40.8. Βασιζόμενοι στην συνολική απόδοση η επιλογή $d = 1.00$ οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα, για $n = 3, 4, 5$ και $\alpha \leq 0.0027$. Έτσι ξεκινάμε από το $d = 1.00$, μετά επιλέγουμε α και χρησιμοποιώντας την συνάρτηση (4.19) βρίσκουμε το k .

Πίνακας 4.1: Σύγκριση τιμών ARL διαγραμμάτων ελέγχου $\bar{X} - R$ και T ($d = 0$).

| $a = 0$ | | $n = 3$ | | $n = 4$ | | $n = 5$ | |
|--|----------|---------------------------------------|---------------------|---------------------------------------|--------------------|---------------------------------------|---------------------|
| δ | γ | $\bar{X} - R$ | T $k = 14.157$ | $\bar{X} - R$ | T $k = 1.252$ | $\bar{X} - R$ | T $k = 18.206$ |
| 0.0 | 1.0 | 370.4 | 370.4 | 370.4 | 370.4 | 370.4 | 370.4 |
| | 1.25 | 41.2 | 35.1 | 36.8 | 29.3 | 33.6 | 25.1 |
| | 1.5 | 12.2 | 10.2 | 10.3 | 8.0 | 8.9 | 6.6 |
| | 2.0 | 3.6 | 3.2 | 3.0 | 2.5 | 2.6 | 2.1 |
| 0.25 | 1.0 | 230.6 | 255.3 | 201.7 | 246.7 | 178.0 | 239.4 |
| | 1.25 | 34.5 | 30.1 | 29.8 | 24.8 | 26.4 | 21.1 |
| | 1.5 | 11.2 | 9.5 | 9.4 | 7.4 | 8.1 | 6.1 |
| | 2.0 | 3.6 | 3.1 | 2.9 | 2.5 | 2.5 | 2.1 |
| 0.5 | 1.0 | 88.1 | 113.5 | 64.4 | 101.3 | 49.0 | 91.8 |
| | 1.25 | 22.1 | 20.4 | 17.8 | 16.5 | 14.9 | 13.8 |
| | 1.5 | 9.0 | 7.8 | 7.4 | 6.1 | 6.3 | 5.0 |
| | 2.0 | 3.3 | 2.9 | 2.7 | 2.3 | 2.3 | 2.0 |
| 0.75 | 1.0 | 32.7 | 46.2 | 21.4 | 37.9 | 15.1 | 31.9 |
| | 1.25 | 12.8 | 12.6 | 9.7 | 9.9 | 7.7 | 8.1 |
| | 1.5 | 6.7 | 5.9 | 5.3 | 4.6 | 4.4 | 3.8 |
| | 2.0 | 3.0 | 2.7 | 2.5 | 2.1 | 2.1 | 1.8 |
| 1.0 | 1.0 | 13.6 | 19.8 | 8.5 | 15.2 | 5.8 | 12.1 |
| | 1.25 | 7.5 | 7.8 | 5.4 | 6.0 | 4.2 | 4.8 |
| | 1.5 | 4.8 | 4.4 | 3.8 | 3.5 | 3.1 | 2.9 |
| | 2.0 | 2.6 | 2.4 | 2.2 | 1.9 | 1.9 | 1.7 |
| 1.5 | 1.0 | 3.6 | 5.0 | 2.4 | 3.6 | 1.8 | 2.8 |
| | 1.25 | 3.1 | 3.3 | 2.2 | 2.6 | 1.8 | 2.1 |
| | 1.5 | 2.6 | 2.6 | 2.1 | 2.0 | 1.7 | 1.7 |
| | 2.0 | 2.0 | 1.9 | 1.7 | 1.5 | 1.5 | 1.4 |
| Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος | | $\mu_0 \pm 3.190 \sigma_0 / \sqrt{3}$ | | $\mu_0 \pm 3.190 \sigma_0 / \sqrt{4}$ | | $\mu_0 \pm 3.190 \sigma_0 / \sqrt{5}$ | |
| Ανω όριο ελέγχου R διαγράμματος | | 4.971 σ_0 | | 5.220 σ_0 | | 5.397 σ_0 | |

Το EWMA διάγραμμα που προτείνουν οι Costa και Rahim (2006), ανιχνεύει τις μετατοπίσεις στον μέσο ή στην διασπορά, στηρίζεται στο στατιστικό T :

$$W_i = (1 - r)W_{i-1} + rT_i, \quad (4.20)$$

με $i = 1, 2, \dots$ όπου το r είναι μια παράμετρος εξομάλυνσης που ικανοποιεί $0 < r \leq 1$. Η τιμή της r καθορίζει το βάρος που θα δοθεί στην τιμή του συγκεκριμένου δείγματος. Όταν το $r = 1$, το EWMA δίνει όλο το βάρος στην τελευταία παρατήρηση. Ένδειξη έχουμε στο δείγμα m όταν $W_m > UCL_E$, που είναι και το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος. Σύμφωνα με το βιβλίο του Montgomery (2013), οι τιμές του r στο διάστημα $[0.05, 0.25]$ δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, με πιο συνηθισμένες επιλογές τις 0.05, 0.10 και 0.20. Ο κανόνας λέει να χρησιμοποιούμε μικρές τιμές του r ώστε να ανιχνεύουμε και μικρές αλλαγές.

Για το EWMA διάγραμμα με T στατιστικό, ο χρόνος που απαιτείται από την αλλαγή μέχρι την ένδειξη εξαρτάται από την τιμή που έχει το W την στιγμή που συμβαίνει η μετατόπιση. Υποθέτουμε ότι το W έχει φτάσει στην κατάσταση ισορροπίας την τυχαία στιγμή που συμβαίνει η αλλαγή. Υποθέτουμε ότι το στατιστικό ελέγχου έχει φτάσει στην κατανομή μόνιμης κατάστασης εκκινώντας από ένα τυχαίο σημείο του χρόνου όπου συνέβη η αλλαγή. Όταν η υιοθετηθεί η κατανομή σταθερής κατάστασης, η απόδοση του διαγράμματος μετριέται από το σταθερής κατάστασης ARL ($SSARL$). Για τον υπολογισμό του $SSARL$ χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση της Μακροβιανής αλυσίδας που περιγράφεται από τους Saccucci και Lucas το 1990.

Παρόμοια με τα διαγράμματα ελέγχου που βασίζονται στο στατιστικό T , υπάρχουν και τα $EWMA$ διαγράμματα που βασίζονται στο στατιστικό W με $d = 0$, είναι πολύ καλό στον εντοπισμό μεμονωμένων αλλαγών στην μεταβλητότητα ($\gamma > 1.0$ και $\delta = 0$), αλλά αργούν πολύ στον εντοπισμό μεμονωμένων αλλαγών στον μέσο ($\gamma = 1.0$ και $\delta \neq 0$).

Για παράδειγμα, αν $n = 5$, $\delta = 0.5$, $\gamma = 1.0$ και $\lambda = 0.10$, το EWMA διάγραμμα χρειάζεται κατά μέσο όρο 33.3 δείγματα για να ανιχνεύσει την διατάραξη, ενώ ο συνδυασμός \bar{X} και R διαγραμμάτων 49.0. Αν $d = 1.00$ το ARL μειώνεται περισσότερο από το μισό, από 33.3 σε 16.3. Συνοψίζοντας, ο Πίνακας 4.2 δείχνει ότι η EWMA διαδικασία βελτιώνει τη χρησιμότητα των διαγραμμάτων ελέγχου που βασίζονται στο στατιστικό T για τον ανίχνευση των μικρών και μέτριων αλλαγών στην διαδικασία.

Πίνακας 4.4: Διάγραμμα ελέγχου βασισμένα στο στατιστικό T .

| $n = 5$ | | | Διάγραμμα ελέγχου βασισμένα στο στατιστικό T | |
|----------|----------|---------------|---|---------------------------|
| δ | γ | $\bar{X} - R$ | $d = 0$ $k = 18.206$ | $d = 1.0$ $k = 33.351$ |
| 0.0 | 1.0 | 370.4 | 370.4 | 370.4 |
| | 1.25 | 33.6 | 25.1 | 32.7 |
| | 1.5 | 8.9 | 6.6 | 8.8 |
| | 2.0 | 2.6 | 2.1 | 2.5 |
| 0.25 | 1.0 | 178.0 | 239.4 | 151.0 |
| | 1.25 | 26.4 | 21.1 | 22.7 |
| | 1.5 | 8.1 | 6.1 | 7.5 |
| | 2.0 | 2.5 | 2.1 | 2.5 |
| 0.5 | 1.0 | 49.0 | 91.8 | 40.8 |
| | 1.25 | 14.9 | 13.8 | 11.5 |
| | 1.5 | 6.3 | 5.0 | 5.3 |
| | 2.0 | 2.3 | 2.0 | 2.2 |
| 0.75 | 1.0 | 15.1 | 31.9 | 13.4 |
| | 1.25 | 7.7 | 8.1 | 5.9 |
| | 1.5 | 4.4 | 3.8 | 3.6 |
| | 2.0 | 2.1 | 1.8 | 2.0 |
| 1.0 | 1.0 | 5.8 | 12.1 | 5.5 |
| | 1.25 | 4.2 | 4.8 | 3.4 |
| | 1.5 | 3.1 | 2.9 | 2.5 |
| | 2.0 | 1.9 | 1.7 | 1.7 |
| 1.5 | 1.0 | 1.8 | 2.8 | 1.8 |
| | 1.25 | 1.8 | 2.1 | 1.6 |
| | 1.5 | 1.7 | 1.7 | 1.5 |
| | 2.0 | 1.5 | 1.4 | 1.4 |

Όρια ελέγχου \bar{X} διαγράμματος $\mu_0 \pm 3.190 \sigma_0/\sqrt{5}$ και άνω όριο ελέγχου R διαγράμματος $5.397 \sigma_0$.

Το διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό T με $d = 0$, είναι η πρόταση των Chen, Cheng και Xie (2004) για $\lambda = 1$.

Σε αυτό το σημείο θα συγκρίνουμε το EWMA διάγραμμα που βασίζεται στο στατιστικό T με συνδυασμένα EMWA διαγράμματα. Ένα από τα δύο EWMA διαγράμματα είναι το τυπικό EWMA \bar{X} διάγραμμα που πρότεινε ο Roberts το 1959 και το άλλο είναι ένα τροποποιημένο EWMA $\ln(S^2)$ διάγραμμα των Crowder και Hamilton (1992).

Πίνακας 4.2: Τιμές ARL του EWMA διάγραμμα που βασίζεται σε στατιστικό T.

| n = 5 | | | EWMA διάγραμμα βασισμένο στο στατιστικό T | | | |
|-------|------|-----------------|---|-------------|-----------|-------------|
| | | | r = 0.10 | | r = 0.20 | |
| δ | γ | $\bar{X} - R^*$ | d = 0** | d = 1.00 | d = 0** | d = 1.00 |
| | | | k = 6.954 | k = 16.5737 | k = 8.337 | k = 18.6438 |
| 0.00 | 1.0 | 370.4 | 370.4 | 370.4 | 370.4 | 370.4 |
| | 1.25 | 33.6 | 11.6 | 14.2 | 12.2 | 15.2 |
| | 1.5 | 8.9 | 4.9 | 5.9 | 4.6 | 5.5 |
| | 2.0 | 2.6 | 2.3 | 2.8 | 2.1 | 2.4 |
| 0.25 | 1.0 | 178.0 | 147.3 | 80.3 | 174.5 | 96.8 |
| | 1.25 | 26.4 | 10.3 | 11.3 | 10.6 | 11.5 |
| | 1.5 | 8.1 | 4.7 | 5.5 | 4.3 | 5.0 |
| | 2.0 | 2.5 | 2.3 | 2.7 | 2.1 | 2.4 |
| 0.5 | 1.0 | 49.0 | 33.3 | 16.3 | 41.6 | 17.8 |
| | 1.25 | 14.9 | 7.6 | 7.2 | 7.5 | 6.8 |
| | 1.5 | 6.3 | 4.1 | 4.4 | 3.8 | 4.0 |
| | 2.0 | 2.3 | 2.2 | 2.5 | 2.0 | 2.2 |
| 0.75 | 1.0 | 15.1 | 11.6 | 6.8 | 12.6 | 6.4 |
| | 1.25 | 7.7 | 5.4 | 4.7 | 5.1 | 4.2 |
| | 1.5 | 4.4 | 3.5 | 3.5 | 3.1 | 3.1 |
| | 2.0 | 2.1 | 2.1 | 2.3 | 1.8 | 2.0 |
| 1.00 | 1.0 | 5.8 | 6.0 | 4.0 | 5.8 | 3.6 |
| | 1.25 | 4.2 | 3.9 | 3.3 | 3.5 | 2.9 |
| | 1.5 | 3.1 | 2.9 | 2.8 | 2.6 | 2.4 |
| | 2.0 | 1.9 | 1.9 | 2.1 | 1.7 | 1.8 |
| 1.5 | 1.0 | 1.8 | 2.7 | 2.2 | 2.4 | 1.8 |
| | 1.25 | 1.8 | 2.3 | 2.0 | 2.0 | 1.7 |
| | 1.5 | 1.7 | 2.0 | 1.9 | 1.8 | 1.6 |
| | 2.0 | 1.5 | 1.6 | 1.6 | 1.4 | 1.5 |

* Το \bar{X} διάγραμμα με όρια ελέγχου $\mu_0 \pm 3.190 \sigma_0 / \sqrt{5}$ και R διάγραμμα με άνω όριο ελέγχου $5.397\sigma_0$.
 ** Το διάγραμμα ελέγχου των Chen, Cheng και Xie (2004).

Το EWMA \bar{X} διάγραμμα έχει όρια ελέγχου:

$$UCL_1 = \mu_0 + L_1 \sqrt{\frac{r_1}{2 - r_1}} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right),$$

$$CL_1 = \mu_0,$$

$$LCL_1 = \mu_0 - L_1 \sqrt{\frac{r_1}{2 - r_1}} \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right).$$

Τα στατιστικά που φτιάχνουμε το διάγραμμα είναι:

$$Q_i = (1 - \lambda_1)Q_{i-1} + r_1\bar{X}_i,$$

$i = 1, 2, \dots$, με $Q_0 = \mu_0$.

Για το EWMA $\ln(S^2)$ διάγραμμα, τα όρια ελέγχου είναι:

$$UCL_2 = \mu_{\ln(S^2)} + L_2 \sqrt{\frac{r_2}{2-r_2}} (\sigma_{\ln(S^2)}/\sqrt{n}),$$

$$CL_2 = \mu_{\ln(S^2)},$$

$$LCL_2 = \mu_{\ln(S^2)} - L_2 \sqrt{\frac{r_2}{2-r_2}} (\sigma_{\ln(S^2)}/\sqrt{n}).$$

Τα στατιστικά που φτιάχνουμε το διάγραμμα είναι:

$$Y_i = (1 - r_2)T_{i-1} + r_2 \ln(S^2)$$

$i = 1, 2, \dots$, με $Y_0 = \mu_{\ln(S^2)}$.

Στον πίνακα 4.3 μπορούμε να δούμε τις τιμές του ARL των συνδυασμένων EWMA διαγραμμάτων για $n = 5$, $ARL_0 = 250$ και $r = 0.10$ και 0.20 .

Πίνακας 4.3: Συγκριτικές τιμές ARL των EWMA διαγραμμάτων που βασίζεται σε στατιστικό T και $\bar{X} - \ln(S^2)$.

| n = 5 | | r = 0.10 | | r = 0.20 | |
|----------|----------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|
| δ | γ | $d = 1.0$ | $L = 2.45$ | $d = 1.0$ | $L = 2.45$ |
| | | $k = 16.2772$ | $L_1 = 2.81$ | $k = 18.2482$ | $L_1 = 2.81$ |
| | | $L_2 = 2.86$ | | $L_2 = 2.86$ | |
| | | T | $\bar{X} - \ln(S^2)$ | T | $\bar{X} - \ln(S^2)$ |
| 0.0 | 1.0 | 250.0 | 251.1 | 250.0 | 250.9 |
| | 1.25 | 12.7 | 24.4 | 13.1 | 36.1 |
| | 1.5 | 5.6 | 9.7 | 5.0 | 10.2 |
| | 2.0 | 2.7 | 5.0 | 2.3 | 4.4 |
| 0.25 | 1.0 | 60.9 | 25.1 | 71.6 | 31.5 |
| | 1.25 | 10.3 | 15.8 | 10.2 | 17.9 |
| | 1.5 | 5.2 | 8.8 | 4.6 | 8.7 |
| | 2.0 | 2.6 | 4.8 | 2.3 | 4.3 |
| 0.5 | 1.0 | 14.4 | 8.8 | 15.1 | 8.6 |
| | 1.25 | 6.7 | 8.4 | 6.2 | 7.9 |
| | 1.5 | 4.2 | 6.9 | 3.7 | 6.3 |
| | 2.0 | 2.4 | 4.5 | 2.1 | 3.9 |
| 1.0 | 1.0 | 3.8 | 3.9 | 3.3 | 3.3 |
| | 1.25 | 3.2 | 3.9 | 2.7 | 3.3 |
| | 1.5 | 2.7 | 3.9 | 2.3 | 3.3 |
| | 2.0 | 2.0 | 3.5 | 1.7 | 2.9 |
| 2.0 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 1.2 | 1.7 |
| | 1.25 | 1.4 | 2.1 | 1.2 | 1.7 |
| | 1.5 | 1.4 | 2.1 | 1.2 | 1.7 |
| | 2.0 | 1.3 | 2.1 | 1.2 | 1.7 |

Συμπερασματικά έχουμε ότι το EWMA διάγραμμα που βασίζεται στο στατιστικό T συμπεριφέρεται καλύτερα από τον συνδυασμό των EWMA \bar{X} και EWMA $\ln(S^2)$ διαγραμμάτων, εκτός από την περίπτωση που έχουμε αιτίες που

προκαλούν μικρές αλλαγές στον μέσο της διαδικασίας χωρίς αλλαγή στην μεταβλητότητα.

4.3 Το Max EWMAMS διάγραμμα ελέγχου για την από κοινού παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς για μεμονωμένες παρατηρήσεις.

4.3.1 Περιγραφή

Η πρόταση των Memar και Niaki (2011) έχει σκοπό την κατασκευή ενός μοναδικού μεταβλητού διαγράμματος ελέγχου το οποίο ανιχνεύει μετατοπίσεις στο μέσο και στη διακύμανση μιας διεργασίας, όσο οι παρατηρήσεις προέρχονται από ανεξάρτητες δειγματοληψίες. Έτσι ανέπτυξαν το διάγραμμα Μέσης Τετραγωνικής Απόκλισης Max EWMAMS, το οποίο και συνδυάζει για τον μέσο και την διακύμανση μια μοναδική μεταβλητή ελέγχου ώστε να έχουμε την καλύτερη απόδοση με μια απεικόνιση.

Η κατασκευή ξεκινάει με την ανεύρεση μιας εκτιμήτριας για κάθε μία παράμετρο που χρησιμοποιείται, με μοναδική απαίτηση να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Στην συνέχεια δημιουργούν δυο EWMA διαγράμματα, ένα για τον μέσο και ένα για διακύμανση, και μετά να τα μετασχηματίσουν ώστε να ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή. Οπότε για κάθε σημείο έχουμε δύο τιμές, μια από κάθε διάγραμμα, και κρατάμε την μέγιστη τιμή. Οπότε τελικά για την επίβλεψη χρειαζόμαστε μόνο ένα Άνω Σημείο Ελέγχου αφού πλέον κοιτάμε μόνο την μέγιστη τιμή των δύο τιμών.

4.3.2 Κατασκευή του Max EWMAMS

Έστω ότι το στατιστικό του EWMA στο δειγματικό σημείο k με παράμετρο εξομάλυνσης λ , είναι:

$$E_k^X = (1 - \lambda)E_{k-1}^X + \lambda\bar{X}_k \quad (4.21)$$

με $E_0^X = \mu_0$.

Η E_k^X ακολουθεί κανονική κατανομή μέσου μ_0 και διακύμανσης

$$\left(\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}(1 - (1 - \lambda)^{2k})\sigma_0^2\right).$$

Άρα η μετασχηματισμένη μεταβλητή U_k ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, με τύπο:

$$U_k = \frac{(E_k^X - \mu_0)}{\sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}(1 - (1 - \lambda)^{2k})\sigma_0^2}}$$

Η ποσότητα $\frac{E_k^{X^2}}{\sigma_0^2} \sim \frac{\chi_v^2}{v}$, όπου $v = \frac{n(2-\lambda)}{\lambda}$.

Έτσι η μετασχηματισμένη μεταβλητή στη συνέχεια επίσης ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή, με τύπο:

$$V_k = \Phi^{-1} \left[H \left\{ \frac{vE_k^{X^2}}{\sigma_0^2}; v \right\} \right],$$

όπου $H\{\alpha; d\} = \Pr\{\chi_d^2 \leq \alpha\}$ και Φ^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση πυκνότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

Τώρα το μέγιστο του EWMA και Μέσης Τετραγωνικής Απόκλισης EWMAMS στο δειγματικό σημείο k είναι:

$$M_k = \max\{|U_k|, |V_k|\} \quad (4.22)$$

Στην περίπτωση του ισχύει πάντα ότι $M_k \geq 0$ και προτιμούμε μικρές τιμές. Έτσι για να επιτηρήσουμε το M_k χρειάζεται μόνο ένα άνω όριο ελέγχου.

Παρόλα αυτά η εύρεση του M_k δεν γίνεται απευθείας. Η εξάρτηση μεταξύ του \bar{X}_k του E_k^X και του αθροίσματος της συνάρτησης του

$$E_k^{X^2} = (1 - \lambda)E_{k-1}^{X^2} + \lambda \sum_{j=1}^k \frac{(X_{kj} - \mu_0)^2}{n} \quad \text{με } E_0^{X^2} = \sigma_0^2,$$

μας οδηγεί στην εξάρτηση των E_k^X και $E_k^{X^2}$. Έτσι παρόλο που τα U_k και V_k ακολουθούν κοινή κατανομή, είναι εξαρτημένα και μας δυσκολεύει να βρούμε την κατανομή και τις ροπές (*moments*) των M_k .

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, αν ισχύει $M_k > UCL$ με UCL το άνω όριο ελέγχου, μπορούμε να αποκτήσουμε τις ενδείξεις του διαγράμματος μετά από προσομοιώσεις:

$$UCL = h_M$$

Σε μια διαγνωστική διεργασία με τον παρακάτω αλγόριθμο μπορούμε να καθορίσουμε την πηγή και την κατεύθυνση της μετατόπισης:

1^η περίπτωση: $|U_k| > UCL$ και $|V_k| \leq UCL$.

Μας δείχνει ότι μόνο ο μέσος της διεργασίας υφίσταται μετατόπιση. Αυτή η μετατόπιση αυξάνεται αν $U_k > 0$ και μειώνεται αν $U_k < 0$.

2^η περίπτωση: $|U_k| \leq UCL$ και $|V_k| > UCL$.

Μας υποδεικνύει ότι μόνο η διακύμανση μετατοπίζεται. Αυτή η μετατόπιση αυξάνεται αν $V_k > 0$ και μειώνεται αν $V_k < 0$.

3^η περίπτωση: $|U_k| > UCL$ και $|V_k| > UCL$.

Αυτή η ένδειξη σημαίνει ότι έχουμε ταυτόχρονη μετατόπιση στον μέσο και στην διακύμανση της διεργασίας. Για να μπορέσουμε να καθορίσουμε αν αυξάνεται ή μειώνεται η μετατόπιση για κάθε ένα κοιτάμε τις προηγούμενες περιπτώσεις.

4.3.3 Απόδοση

Το προτεινόμενο Max EWMAMS διάγραμμα θα το συγκρίνουμε με άλλα διαγράμματα ως προς την απόδοση τους. Δύο σχέδια που πρότειναν οι Reynolds και Stoumbos (2001b) επιλέχθηκαν για να συγκρίνουμε τις αποδόσεις τους. Το πρώτο σχέδιο είναι ο συνδυασμός των E_k^X και $E_k^{X^2,max}$ για την ανίχνευση αλλαγών στον μέσο της διαδικασίας και αύξηση στην μεταβλητότητα της διαδικασίας ταυτόχρονα και το δεύτερο είναι ο συνδυασμός των E_k^X ,

$E_k^{X^2,max}$ και $E_k^{X^2,min}$ για την ανίχνευση ταυτόχρονων αλλαγών στον μέσο και τη μεταβλητότητα της διαδικασίας. Και τα δύο αυτά σχέδια αποδίδουν καλά για $n = 1$.

Πίνακας 4.4: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS_0 = 370$ και $\lambda=0.05$.

| δ | ψ | Max EWMAMS | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max}$ | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max} - E_k^{X^2,min}$ | | |
|----------|--------|------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|---|---------|---------|
| | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ |
| 0.00 | 1.00 | 371.0 | 373.5 | 375.9 | 370.6 | 369.1 | 375.9 | 372.6 | 374.2 | 371.8 |
| 0.25 | 1.00 | 82.9 | 69.9 | 60.7 | 89.4 | 79.1 | 80.0 | 104.2 | 90.6 | 91.3 |
| 0.50 | 1.00 | 25.9 | 23.4 | 21.5 | 31.5 | 32.0 | 37.2 | 35.3 | 35.4 | 41.2 |
| 0.75 | 1.00 | 12.7 | 11.9 | 11.7 | 18.1 | 19.4 | 24.1 | 19.8 | 21.2 | 26.6 |
| 1.00 | 1.00 | 7.8 | 7.6 | 8.1 | 12.8 | 13.9 | 18.0 | 13.7 | 15.1 | 19.7 |
| 1.50 | 1.00 | 4.0 | 4.2 | 5.6 | 8.0 | 8.6 | 11.7 | 8.5 | 9.3 | 12.8 |
| 2.00 | 1.00 | 2.5 | 2.8 | 5.0 | 5.7 | 5.9 | 8.1 | 6.0 | 6.3 | 8.8 |
| 0.00 | 0.10 | 15.0 | 18.0 | 25.0 | - | - | - | 15.0 | 18.0 | 25.0 |
| 0.00 | 0.25 | 15.9 | 19.6 | 25.1 | - | - | - | 15.9 | 18.9 | 25.0 |
| 0.00 | 0.50 | 22.7 | 26.0 | 33.3 | - | - | - | 22.0 | 25.3 | 32.8 |
| 0.00 | 0.75 | 66.3 | 57.5 | 62.1 | - | - | - | 56.9 | 54.6 | 61.7 |
| 0.00 | 1.10 | 130.8 | 128.6 | 124.9 | 128.0 | 122.6 | 121.2 | 165.6 | 154.5 | 149.6 |
| 0.00 | 1.25 | 41.1 | 41.6 | 44.8 | 44.9 | 44.0 | 48.3 | 53.5 | 51.1 | 55.3 |
| 0.00 | 1.50 | 15.6 | 17.1 | 20.5 | 18.6 | 19.4 | 23.1 | 20.6 | 21.3 | 25.5 |
| 0.00 | 2.00 | 6.3 | 7.5 | 10.3 | 8.5 | 8.8 | 11.4 | 9.1 | 9.4 | 12.3 |
| 0.25 | 0.10 | 16.1 | 20.0 | 25.0 | - | - | 87.5 | 16.1 | 19.5 | 25.0 |
| 0.25 | 0.25 | 17.6 | 21.2 | 28.6 | - | 219.7 | 88.2 | 17.5 | 20.7 | 27.8 |
| 0.25 | 0.50 | 26.3 | 28.9 | 35.0 | - | 130.7 | 88.3 | 25.2 | 28.4 | 36.1 |
| 0.25 | 0.75 | 64.7 | 52.1 | 49.0 | 165.0 | 101.4 | 86.8 | 63.3 | 56.8 | 63.0 |
| 0.25 | 1.10 | 59.1 | 54.6 | 51.6 | 63.4 | 60.9 | 65.3 | 76.3 | 71.6 | 76.0 |
| 0.25 | 1.25 | 30.9 | 31.5 | 33.4 | 35.1 | 35.7 | 40.8 | 40.5 | 40.7 | 46.2 |
| 0.25 | 1.50 | 14.4 | 15.5 | 18.7 | 17.5 | 18.2 | 22.0 | 19.3 | 20.1 | 24.4 |
| 0.25 | 2.00 | 6.2 | 7.2 | 10.0 | 8.5 | 8.6 | 11.2 | 9.0 | 9.2 | 12.1 |
| 0.50 | 0.10 | 23.4 | 25.3 | 20.4 | 42.5 | 32.7 | 35.6 | 22.6 | 25.6 | 33.8 |
| 0.50 | 0.25 | 25.5 | 24.5 | 20.7 | 41.3 | 32.9 | 36.1 | 25.5 | 27.9 | 34.8 |
| 0.50 | 0.50 | 28.1 | 24.3 | 20.8 | 38.2 | 33.2 | 36.6 | 32.0 | 32.1 | 38.2 |
| 0.50 | 0.75 | 29.0 | 24.69 | 21.2 | 35.1 | 33.1 | 37.7 | 37.2 | 35.5 | 40.8 |
| 0.50 | 1.10 | 23.1 | 22.0 | 21.0 | 28.8 | 29.9 | 35.3 | 32.2 | 33.2 | 39.3 |
| 0.50 | 1.25 | 18.2 | 18.3 | 19.3 | 22.9 | 24.1 | 29.1 | 25.5 | 26.9 | 32.6 |
| 0.50 | 1.50 | 11.4 | 12.4 | 14.8 | 14.8 | 15.6 | 19.2 | 16.2 | 17.1 | 21.2 |
| 0.50 | 2.00 | 5.8 | 6.8 | 9.4 | 8.1 | 8.2 | 10.8 | 8.5 | 8.8 | 11.6 |
| 0.75 | 0.10 | 14.5 | 12.1 | 10.0 | 18.7 | 19.1 | 24.6 | 20.4 | 20.8 | 25.1 |
| 0.75 | 0.25 | 14.5 | 12.2 | 10.6 | 18.8 | 19.2 | 23.7 | 20.4 | 20.9 | 25.8 |
| 0.75 | 0.50 | 14.3 | 12.3 | 10.9 | 18.9 | 19.4 | 23.8 | 20.5 | 21.1 | 26.1 |
| 0.75 | 0.75 | 13.6 | 12.2 | 11.4 | 18.8 | 19.7 | 24.1 | 20.4 | 21.4 | 26.5 |
| 0.75 | 1.10 | 12.3 | 11.8 | 11.9 | 17.5 | 18.8 | 23.5 | 19.0 | 20.5 | 26.0 |
| 0.75 | 1.25 | 11.1 | 11.2 | 12.1 | 15.7 | 16.9 | 21.3 | 17.1 | 18.6 | 23.5 |
| 0.75 | 1.50 | 8.6 | 9.3 | 11.1 | 12.1 | 12.8 | 16.2 | 13.1 | 13.9 | 17.8 |
| 0.75 | 2.00 | 5.2 | 6.1 | 8.5 | 7.5 | 7.6 | 10.0 | 7.9 | 8.1 | 10.8 |
| 1.00 | 0.10 | 8.1 | 7.3 | 5.6 | 12.8 | 13.9 | 18.8 | 13.7 | 14.7 | 20.0 |
| 1.00 | 0.25 | 8.2 | 7.3 | 6.6 | 12.8 | 13.7 | 18.0 | 13.7 | 14.9 | 19.9 |
| 1.00 | 0.50 | 8.2 | 7.4 | 7.1 | 12.9 | 13.9 | 17.9 | 13.9 | 15.0 | 19.7 |
| 1.00 | 0.75 | 8.1 | 7.5 | 7.6 | 13.0 | 14.0 | 18.1 | 13.9 | 15.2 | 19.8 |
| 1.00 | 1.10 | 7.7 | 7.6 | 8.3 | 12.5 | 13.7 | 17.6 | 13.5 | 14.8 | 19.3 |
| 1.00 | 1.25 | 7.3 | 7.5 | 8.6 | 11.7 | 12.7 | 16.3 | 12.6 | 13.7 | 17.9 |
| 1.00 | 1.50 | 6.4 | 7.0 | 8.6 | 9.8 | 10.4 | 13.5 | 10.5 | 11.3 | 14.7 |
| 1.00 | 2.00 | 4.6 | 5.3 | 7.7 | 6.8 | 6.9 | 9.3 | 7.2 | 7.4 | 9.9 |
| 2.00 | 0.10 | 2.2 | 2.0 | 5.0 | 6.1 | 6.2 | 10.0 | 6.9 | 8.0 | 10.0 |

| | | | | | | | | | | |
|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|
| 2.00 | 0.25 | 2.4 | 2.2 | 5.0 | 6.3 | 6.6 | 10.0 | 6.7 | 7.5 | 10.0 |
| 2.00 | 0.50 | 2.4 | 2.5 | 5.0 | 6.2 | 6.5 | 9.2 | 6.5 | 7.0 | 9.7 |
| 2.00 | 0.75 | 2.5 | 2.7 | 5.0 | 6.0 | 6.2 | 8.6 | 6.3 | 6.6 | 9.3 |
| 2.00 | 1.10 | 2.6 | 2.9 | 5.1 | 5.6 | 5.7 | 7.9 | 5.9 | 6.1 | 8.6 |
| 2.00 | 1.25 | 2.6 | 3.0 | 5.2 | 5.4 | 5.5 | 7.7 | 5.8 | 5.9 | 8.3 |
| 2.00 | 1.50 | 2.6 | 3.2 | 5.3 | 5.2 | 5.1 | 7.3 | 5.4 | 5.5 | 7.8 |
| 2.00 | 2.00 | 2.6 | 3.3 | 5.5 | 4.6 | 4.5 | 6.6 | 4.8 | 4.7 | 6.9 |

Την απόδοση την μετράμε με κριτήριο τον μέσο χρόνο μέχρι τη πρώτη σηματοδότηση ότι η διαδικασία μας είναι εκτός ελέγχου από την αρχή της παρακολούθησης της διαδικασίας, *ATS (Average Time to Signal)*. Το εντός ελέγχου *ATS* για τη συγκεκριμένη σύγκριση είναι $ATS_0 = 370$.

Πίνακας 4.5: Συγκριτικές τιμές *ATS* για $ATS_0 = 370$ και $\lambda = 0.10$.

| δ | ψ | Max EWMAMS | | | $E_k^X - E_k^{X^2, \max}$ | | | $E_k^X - E_k^{X^2, \max} - E_k^{X^2, \min}$ | | |
|----------|--------|------------|---------|---------|---------------------------|---------|---------|---|---------|---------|
| | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ |
| 0.00 | 1.00 | 364.2 | 371.3 | 372.1 | 363.4 | 371.0 | 369.8 | 365.4 | 370.1 | 373.3 |
| 0.25 | 1.00 | 106.9 | 84.3 | 69.1 | 110.9 | 88.9 | 79.2 | 134.5 | 103.7 | 90.4 |
| 0.50 | 1.00 | 31.3 | 26.5 | 24.2 | 34.6 | 31.0 | 33.5 | 39.9 | 34.6 | 36.9 |
| 0.75 | 1.00 | 14.5 | 13.4 | 13.2 | 17.6 | 17.4 | 21.0 | 19.4 | 18.9 | 22.8 |
| 1.00 | 1.00 | 8.7 | 8.4 | 8.9 | 11.7 | 12.1 | 15.5 | 12.6 | 13.0 | 16.8 |
| 1.50 | 1.00 | 4.4 | 4.5 | 5.8 | 7.1 | 7.3 | 10.1 | 7.5 | 7.8 | 10.8 |
| 2.00 | 1.00 | 2.8 | 3.1 | 5.1 | 5.1 | 5.1 | 7.2 | 5.4 | 5.4 | 7.6 |
| 0.00 | 0.10 | 12.0 | 14.0 | 20.0 | - | - | - | 11.5 | 14.0 | 20.0 |
| 0.00 | 0.25 | 13.2 | 16.0 | 20.1 | - | - | - | 12.6 | 14.7 | 20.0 |
| 0.00 | 0.50 | 22.5 | 22.5 | 27.7 | - | - | - | 19.3 | 20.9 | 27.1 |
| 0.00 | 0.75 | 122.2 | 65.0 | 57.2 | - | - | - | 69.1 | 55.8 | 55.6 |
| 0.00 | 1.10 | 134.0 | 133.2 | 130.5 | 135.2 | 128.2 | 121.8 | 175.8 | 166.6 | 153.4 |
| 0.00 | 1.25 | 43.9 | 42.7 | 44.8 | 47.6 | 44.2 | 45.6 | 58.6 | 52.6 | 52.3 |
| 0.00 | 1.50 | 15.9 | 16.8 | 19.7 | 18.5 | 18.1 | 21.0 | 20.8 | 20.1 | 23.1 |
| 0.00 | 2.00 | 6.3 | 7.2 | 9.7 | 8.1 | 8.0 | 10.4 | 8.6 | 8.6 | 11.0 |
| 0.25 | 0.10 | 13.5 | 16.0 | 20.0 | - | - | 133.5 | 12.8 | 15.1 | 20.0 |
| 0.25 | 0.25 | 15.3 | 17.4 | 23.2 | - | - | 122.6 | 14.2 | 16.4 | 22.2 |
| 0.25 | 0.50 | 28.6 | 26.1 | 30.2 | - | - | 106.0 | 23.3 | 21.1 | 30.1 |
| 0.25 | 0.75 | 135.7 | 64.4 | 51.0 | - | 162.8 | 93.7 | 89.0 | 62.5 | 57.5 |
| 0.25 | 1.10 | 66.2 | 60.5 | 55.9 | 69.6 | 63.2 | 62.2 | 86.3 | 76.0 | 72.6 |
| 0.25 | 1.25 | 32.9 | 32.4 | 33.8 | 36.2 | 34.7 | 37.3 | 43.2 | 40.1 | 42.4 |
| 0.25 | 1.50 | 14.4 | 15.2 | 18.0 | 16.9 | 16.8 | 19.9 | 19.0 | 18.6 | 21.8 |
| 0.25 | 2.00 | 6.1 | 7.1 | 9.5 | 8.0 | 7.9 | 10.2 | 8.4 | 8.5 | 10.9 |
| 0.50 | 0.10 | 26.2 | 22.9 | 24.3 | - | 39.6 | 32.6 | 21.1 | 21.3 | 26.9 |
| 0.50 | 0.25 | 33.1 | 25.0 | 23.8 | - | 39.0 | 32.8 | 25.6 | 24.1 | 29.1 |
| 0.50 | 0.50 | 48.6 | 27.7 | 23.7 | 86.4 | 36.5 | 33.3 | 44.2 | 30.7 | 33.1 |
| 0.50 | 0.75 | 43.2 | 29.2 | 24.3 | 47.8 | 34.0 | 33.9 | 52.0 | 36.0 | 36.3 |
| 0.50 | 1.10 | 26.5 | 24.3 | 23.4 | 30.0 | 28.3 | 31.6 | 34.1 | 31.7 | 35.1 |
| 0.50 | 1.25 | 19.4 | 19.2 | 20.3 | 22.6 | 22.5 | 26.0 | 25.6 | 25.2 | 29.0 |
| 0.50 | 1.50 | 11.6 | 12.3 | 14.6 | 14.2 | 14.2 | 17.3 | 15.6 | 15.6 | 18.9 |

| | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.50 | 2.00 | 5.8 | 6.6 | 9.0 | 7.6 | 7.5 | 9.8 | 8.1 | 8.0 | 10.5 |
| 0.75 | 0.10 | 21.3 | 14.3 | 11.6 | 22.9 | 17.4 | 20.0 | 28.2 | 19.1 | 21.5 |
| 0.75 | 0.25 | 20.6 | 14.3 | 12.2 | 22.5 | 17.5 | 20.4 | 26.7 | 19.2 | 22.1 |
| 0.75 | 0.50 | 18.6 | 14.3 | 12.6 | 20.9 | 17.8 | 20.7 | 23.8 | 19.4 | 22.5 |
| 0.75 | 0.75 | 16.6 | 14.0 | 12.9 | 19.3 | 17.8 | 21.0 | 21.4 | 19.4 | 22.8 |
| 0.75 | 1.10 | 13.7 | 13.1 | 13.3 | 16.7 | 16.8 | 20.5 | 18.5 | 18.4 | 22.4 |
| 0.75 | 1.25 | 11.8 | 12.0 | 13.0 | 14.7 | 15.1 | 18.7 | 16.2 | 16.5 | 20.4 |
| 0.75 | 1.50 | 8.8 | 9.5 | 11.4 | 11.2 | 11.5 | 14.4 | 12.2 | 12.4 | 15.6 |
| 0.75 | 2.00 | 5.2 | 5.9 | 8.2 | 7.0 | 6.9 | 9.2 | 7.4 | 7.4 | 9.7 |
| 1.00 | 0.10 | 9.7 | 8.2 | 9.1 | 12.1 | 11.9 | 15.0 | 13.1 | 12.5 | 15.0 |
| 1.00 | 0.25 | 9.7 | 8.3 | 8.2 | 12.2 | 11.9 | 15.1 | 13.2 | 12.8 | 15.8 |
| 1.00 | 0.50 | 9.6 | 8.4 | 8.1 | 12.2 | 12.0 | 15.4 | 13.3 | 12.9 | 16.5 |
| 1.00 | 0.75 | 9.2 | 8.5 | 8.4 | 12.1 | 12.2 | 15.6 | 13.1 | 13.1 | 16.8 |
| 1.00 | 1.10 | 8.4 | 8.3 | 9.1 | 11.3 | 11.7 | 15.1 | 12.3 | 12.7 | 16.4 |
| 1.00 | 1.25 | 7.8 | 8.0 | 9.1 | 10.6 | 11.0 | 14.2 | 11.5 | 11.9 | 15.4 |
| 1.00 | 1.50 | 6.6 | 7.2 | 8.9 | 9.0 | 9.2 | 12.0 | 9.7 | 10.0 | 13.0 |
| 1.00 | 2.00 | 4.6 | 5.3 | 7.5 | 6.4 | 6.2 | 8.5 | 6.7 | 6.6 | 9.0 |
| 2.00 | 0.10 | 2.8 | 2.1 | 5.0 | 5.2 | 6.0 | 10.0 | 5.8 | 6.0 | 10.0 |
| 2.00 | 0.25 | 2.7 | 2.5 | 5.0 | 5.3 | 5.9 | 9.3 | 5.7 | 6.0 | 9.8 |
| 2.00 | 0.50 | 2.7 | 2.8 | 5.0 | 5.3 | 5.5 | 8.2 | 5.6 | 5.8 | 8.9 |
| 2.00 | 0.75 | 2.7 | 2.9 | 5.0 | 5.2 | 5.3 | 7.6 | 5.5 | 5.6 | 8.1 |
| 2.00 | 1.10 | 2.8 | 3.1 | 5.1 | 5.0 | 5.0 | 7.1 | 5.3 | 5.3 | 7.5 |
| 2.00 | 1.25 | 2.8 | 3.2 | 5.2 | 4.9 | 4.8 | 6.9 | 5.2 | 5.1 | 7.3 |
| 2.00 | 1.50 | 2.8 | 3.3 | 5.4 | 4.7 | 4.6 | 6.7 | 4.9 | 4.9 | 7.0 |
| 2.00 | 2.00 | 2.7 | 3.4 | 5.5 | 4.3 | 4.1 | 6.2 | 4.5 | 4.3 | 6.4 |

Πίνακας 4.6: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS_0 = 370$ και $\lambda=0.20$.

| δ | ψ | Max EWMAMS | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max}$ | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max} - E_k^{X^2,min}$ | | |
|----------|--------|------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|---|---------|---------|
| | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ |
| 0.00 | 1.00 | 367.5 | 365.1 | 373.2 | 364.4 | 366.8 | 371.1 | 367.3 | 371.0 | 374.1 |
| 0.25 | 1.00 | 149.4 | 110.9 | 82.0 | 150.7 | 113.3 | 86.2 | 185.1 | 136.9 | 101.3 |
| 0.50 | 1.00 | 13.8 | 32.2 | 27.1 | 45.9 | 34.3 | 31.7 | 56.1 | 40.0 | 35.2 |
| 0.75 | 1.00 | 18.5 | 15.1 | 14.4 | 20.4 | 17.0 | 18.6 | 23.7 | 18.9 | 20.1 |
| 1.00 | 1.00 | 10.2 | 9.3 | 9.6 | 12.0 | 11.0 | 13.4 | 13.3 | 11.9 | 14.3 |
| 1.50 | 1.00 | 4.8 | 4.9 | 6.0 | 6.5 | 6.3 | 8.8 | 7.0 | 6.8 | 9.3 |
| 2.00 | 1.00 | 3.0 | 3.2 | 5.1 | 4.6 | 4.4 | 6.5 | 4.9 | 4.7 | 6.9 |
| 0.00 | 0.10 | 10.0 | 12.0 | 15.0 | - | - | - | 9.0 | 10.0 | 15.0 |
| 0.00 | 0.25 | 12.1 | 12.9 | 16.1 | - | - | - | 10.1 | 11.6 | 15.1 |
| 0.00 | 0.50 | 39.1 | 22.1 | 23.3 | - | - | - | 19.8 | 18.2 | 22.1 |
| 0.00 | 0.75 | - | 120.2 | 60.3 | - | - | - | 103.1 | 69.0 | 54.0 |
| 0.00 | 1.10 | 137.6 | 137.3 | 136.3 | 142.1 | 135.7 | 126.7 | 184.5 | 178.8 | 162.4 |
| 0.00 | 1.25 | 47.0 | 45.2 | 45.2 | 51.4 | 46.8 | 44.7 | 65.2 | 57.9 | 53.0 |
| 0.00 | 1.50 | 17.0 | 16.9 | 18.8 | 19.4 | 18.0 | 19.4 | 22.5 | 20.4 | 21.4 |
| 0.00 | 2.00 | 6.3 | 7.0 | 9.1 | 7.8 | 7.5 | 9.5 | 8.5 | 8.0 | 10.1 |
| 0.25 | 0.10 | 12.9 | 13.3 | 16.4 | - | - | - | 10.4 | 12.0 | 15.0 |
| 0.25 | 0.25 | 17.1 | 15.1 | 19.5 | - | - | - | 12.3 | 13.1 | 17.9 |
| 0.25 | 0.50 | 67.9 | 28.2 | 26.4 | - | - | 282.9 | 26.5 | 22.2 | 25.0 |
| 0.25 | 0.75 | - | 134.8 | 58.0 | - | - | 135.6 | 146.3 | 89.9 | 58.5 |
| 0.25 | 1.10 | 80.0 | 69.0 | 61.5 | 82.7 | 70.8 | 63.4 | 106.5 | 88.2 | 75.8 |
| 0.25 | 1.25 | 36.1 | 34.4 | 34.4 | 39.4 | 36.9 | 35.8 | 48.8 | 42.9 | 41.1 |
| 0.25 | 1.50 | 15.2 | 15.5 | 17.3 | 17.5 | 16.6 | 18.3 | 20.2 | 18.6 | 20.1 |

| | | | | | | | | | | |
|------|------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
| 0.25 | 2.00 | 6.2 | 6.8 | 9.0 | 7.8 | 7.4 | 9.4 | 8.4 | 7.9 | 9.9 |
| 0.50 | 0.10 | - | 25.3 | 24.0 | - | - | 33.0 | 96.6 | 19.6 | 21.8 |
| 0.50 | 0.25 | - | 32.6 | 24.2 | - | - | 33.5 | 48.2 | 24.2 | 24.6 |
| 0.50 | 0.50 | - | 48.9 | 26.2 | - | 86.2 | 33.7 | 102.1 | 43.4 | 30.2 |
| 0.50 | 0.75 | 113.8 | 43.7 | 28.1 | 116.9 | 47.2 | 33.2 | 130.7 | 52.5 | 35.2 |
| 0.50 | 1.10 | 33.3 | 27.6 | 25.4 | 35.4 | 29.5 | 29.5 | 42.5 | 34.2 | 33.0 |
| 0.50 | 1.25 | 21.8 | 20.6 | 21.1 | 24.2 | 22.4 | 23.8 | 28.3 | 25.4 | 26.5 |
| 0.50 | 1.50 | 12.2 | 12.4 | 14.2 | 14.1 | 13.5 | 15.6 | 15.9 | 15.0 | 16.9 |
| 0.50 | 2.00 | 5.8 | 6.5 | 8.6 | 7.3 | 7.0 | 9.0 | 7.9 | 7.5 | 9.5 |
| 0.75 | 0.10 | - | 20.3 | 14.6 | - | 20.9 | 18.2 | - | 25.9 | 20.0 |
| 0.75 | 0.25 | - | 20.0 | 13.9 | - | 20.9 | 17.9 | - | 25.0 | 19.6 |
| 0.75 | 0.50 | 54.4 | 18.4 | 14.2 | 55.7 | 19.7 | 18.3 | 85.7 | 22.6 | 19.8 |
| 0.75 | 0.75 | 26.9 | 16.9 | 14.4 | 28.7 | 18.5 | 18.6 | 35.0 | 20.7 | 20.2 |
| 0.75 | 1.10 | 16.2 | 14.3 | 14.4 | 18.1 | 16.1 | 18.2 | 20.7 | 17.9 | 19.7 |
| 0.75 | 1.25 | 13.1 | 12.6 | 13.6 | 15.1 | 14.2 | 16.6 | 17.1 | 15.6 | 18.0 |
| 0.75 | 1.50 | 9.2 | 9.5 | 11.3 | 11.0 | 10.6 | 12.9 | 12.1 | 11.5 | 13.9 |
| 0.75 | 2.00 | 5.2 | 5.8 | 8.0 | 6.7 | 6.4 | 8.5 | 7.2 | 6.8 | 8.9 |
| 1.00 | 0.10 | 26.3 | 9.6 | 10.0 | 27.3 | 10.8 | 14.2 | 107.2 | 11.9 | 15.0 |
| 1.00 | 0.25 | 18.5 | 9.7 | 9.3 | 19.6 | 11.0 | 13.2 | 27.8 | 12.0 | 14.5 |
| 1.00 | 0.50 | 14.3 | 9.7 | 9.0 | 15.7 | 11.2 | 13.1 | 18.7 | 12.2 | 14.0 |
| 1.00 | 0.75 | 11.9 | 9.5 | 9.3 | 13.5 | 11.2 | 13.3 | 15.4 | 12.2 | 14.3 |
| 1.00 | 1.10 | 9.6 | 9.0 | 9.8 | 11.4 | 10.7 | 13.2 | 12.6 | 11.7 | 14.1 |
| 1.00 | 1.25 | 8.6 | 8.5 | 9.7 | 10.4 | 10.0 | 12.5 | 11.4 | 10.9 | 13.4 |
| 1.00 | 1.50 | 6.9 | 7.3 | 9.0 | 8.6 | 8.4 | 10.7 | 9.3 | 9.0 | 11.5 |
| 1.00 | 2.00 | 4.7 | 5.2 | 7.3 | 6.1 | 5.7 | 7.8 | 6.4 | 6.1 | 8.2 |
| 2.00 | 0.10 | 3.0 | 2.9 | 5.0 | 4.9 | 4.0 | 5.0 | 5.0 | 4.3 | 6.6 |
| 2.00 | 0.25 | 2.9 | 3.0 | 5.0 | 4.7 | 4.2 | 5.5 | 5.0 | 4.7 | 7.1 |
| 2.00 | 0.50 | 2.9 | 3.0 | 5.0 | 4.7 | 4.5 | 6.3 | 5.0 | 4.8 | 7.3 |
| 2.00 | 0.75 | 3.0 | 3.1 | 5.0 | 4.7 | 4.5 | 6.5 | 4.9 | 4.8 | 7.1 |
| 2.00 | 1.10 | 3.0 | 3.3 | 5.2 | 4.6 | 4.3 | 6.4 | 4.8 | 4.6 | 6.8 |
| 2.00 | 1.25 | 3.0 | 3.4 | 5.3 | 4.5 | 4.3 | 6.4 | 4.8 | 4.5 | 6.7 |
| 2.00 | 1.50 | 2.9 | 3.4 | 5.4 | 4.4 | 4.2 | 6.2 | 4.6 | 4.4 | 6.5 |
| 2.00 | 2.00 | 2.8 | 3.4 | 5.5 | 4.1 | 3.8 | 5.9 | 4.3 | 4.0 | 6.1 |

Πίνακας 4.7: Συγκριτικές τιμές ATS για $ATS_0 = 370$ και $\lambda=0.30$.

| δ | ψ | Max EWMAMS | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max}$ | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max} - E_k^{X^2,min}$ | | |
|----------|--------|------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|---|---------|---------|
| | | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ |
| 0.00 | 1.00 | 370.4 | 360.8 | 371.3 | 368.9 | 357.6 | 364.6 | 365.1 | 364.5 | 370.1 |
| 0.25 | 1.00 | 181.3 | 137.0 | 95.2 | 180.6 | 138.7 | 97.8 | 219.1 | 168.8 | 116.2 |
| 0.50 | 1.00 | 58.1 | 38.8 | 29.2 | 59.0 | 40.3 | 32.0 | 76.2 | 48.9 | 36.1 |
| 0.75 | 1.00 | 23.9 | 17.0 | 15.2 | 25.2 | 18.4 | 17.8 | 30.5 | 21.1 | 19.4 |
| 1.00 | 1.00 | 12.2 | 9.9 | 10.0 | 13.6 | 11.0 | 12.5 | 15.7 | 12.2 | 13.3 |
| 1.50 | 1.00 | 5.2 | 5.0 | 6.1 | 6.6 | 5.9 | 8.0 | 7.2 | 6.3 | 8.5 |
| 2.00 | 1.00 | 3.1 | 3.3 | 5.1 | 4.5 | 4.1 | 5.9 | 4.7 | 4.3 | 6.2 |
| 0.00 | 0.10 | 9.2 | 10.0 | 15.0 | - | - | - | 7.8 | 8.0 | 15.0 |
| 0.00 | 0.25 | 14.4 | 11.9 | 15.0 | - | - | - | 9.2 | 10.0 | 15.0 |
| 0.00 | 0.50 | 147.2 | 26.7 | 21.6 | - | - | - | 23.2 | 18.0 | 19.6 |
| 0.00 | 0.75 | - | 266.6 | 72.8 | - | - | - | 139.6 | 89.1 | 58.6 |
| 0.00 | 1.10 | 140.0 | 139.2 | 141.7 | 145.0 | 140.0 | 130.0 | 188.8 | 182.1 | 170.8 |
| 0.00 | 1.25 | 49.1 | 47.2 | 47.2 | 52.8 | 49.0 | 46.2 | 68.7 | 62.0 | 55.4 |
| 0.00 | 1.50 | 17.8 | 17.5 | 18.7 | 19.9 | 18.5 | 19.1 | 23.6 | 21.3 | 21.1 |
| 0.00 | 2.00 | 6.5 | 6.9 | 8.9 | 7.9 | 7.4 | 9.1 | 8.6 | 7.9 | 9.6 |
| 0.25 | 0.10 | 22.4 | 12.2 | 15.0 | - | - | - | 9.8 | 10.1 | 15.0 |
| 0.25 | 0.25 | 34.3 | 14.9 | 16.0 | - | - | - | 12.5 | 11.7 | 15.2 |

| | | | | | | | | | | |
|------|------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| 0.25 | 0.50 | 336.6 | 39.9 | 25.5 | - | - | - | 34.3 | 23.5 | 22.9 |
| 0.25 | 0.75 | - | 298.9 | 74.3 | - | - | 207.9 | 192.4 | 119.7 | 66.6 |
| 0.25 | 1.10 | 88.9 | 77.2 | 66.1 | 91.5 | 78.5 | 66.4 | 119.4 | 100.4 | 81.5 |
| 0.25 | 1.25 | 39.4 | 36.2 | 35.4 | 42.3 | 37.9 | 36.2 | 53.5 | 46.3 | 42.0 |
| 0.25 | 1.50 | 16.3 | 16.0 | 17.2 | 18.3 | 16.9 | 17.8 | 21.4 | 19.3 | 19.7 |
| 0.25 | 2.00 | 6.4 | 6.8 | 8.7 | 7.8 | 7.2 | 9.0 | 8.5 | 7.8 | 9.5 |
| 0.50 | 0.10 | - | 233.8 | 21.4 | - | - | 50.4 | - | 26.6 | 20.1 |
| 0.50 | 0.25 | - | 87.8 | 24.4 | - | - | 46.3 | 136.3 | 32.1 | 22.8 |
| 0.50 | 0.50 | - | 154.6 | 29.2 | - | 386.7 | 40.2 | 161.1 | 75.2 | 31.0 |
| 0.50 | 0.75 | 266.9 | 73.9 | 32.3 | 261.7 | 79.0 | 36.2 | 248.1 | 89.2 | 38.6 |
| 0.50 | 1.10 | 39.8 | 30.9 | 26.9 | 41.4 | 32.4 | 29.3 | 51.5 | 39.0 | 33.2 |
| 0.50 | 1.25 | 24.2 | 21.7 | 21.6 | 26.0 | 23.0 | 23.1 | 31.3 | 26.8 | 26.0 |
| 0.50 | 1.50 | 12.7 | 12.6 | 14.1 | 14.5 | 13.5 | 15.0 | 16.6 | 15.2 | 16.4 |
| 0.50 | 2.00 | 5.9 | 6.4 | 8.3 | 7.3 | 6.9 | 8.6 | 8.0 | 7.4 | 9.1 |
| 0.75 | 0.10 | - | - | 15.0 | - | - | 16.5 | - | - | 19.4 |
| 0.75 | 0.25 | - | 67.2 | 15.2 | - | 70.8 | 17.2 | - | 177.9 | 19.0 |
| 0.75 | 0.50 | 339.6 | 28.6 | 15.5 | 325.6 | 29.7 | 17.8 | - | 39.0 | 19.4 |
| 0.75 | 0.75 | 49.5 | 21.2 | 15.4 | 50.0 | 22.3 | 18.0 | 68.7 | 26.4 | 19.6 |
| 0.75 | 1.10 | 19.3 | 15.6 | 14.8 | 20.9 | 16.8 | 17.3 | 24.7 | 19.1 | 18.8 |
| 0.75 | 1.25 | 14.6 | 13.3 | 13.9 | 16.2 | 14.4 | 15.7 | 18.8 | 16.1 | 17.1 |
| 0.75 | 1.50 | 9.7 | 9.7 | 11.3 | 11.3 | 10.5 | 12.3 | 12.6 | 11.5 | 13.3 |
| 0.75 | 2.00 | 5.4 | 5.9 | 7.8 | 6.7 | 6.3 | 8.2 | 7.2 | 6.7 | 8.5 |
| 1.00 | 0.10 | - | 11.6 | 10.0 | - | 12.1 | 10.3 | - | 14.2 | 12.9 |
| 1.00 | 0.25 | - | 11.8 | 9.6 | - | 12.4 | 11.3 | - | 14.4 | 12.7 |
| 1.00 | 0.50 | 32.4 | 11.3 | 9.5 | 32.8 | 12.0 | 11.9 | 49.6 | 13.7 | 12.8 |
| 1.00 | 0.75 | 17.2 | 10.6 | 9.7 | 18.3 | 11.7 | 12.4 | 22.6 | 13.0 | 13.2 |
| 1.00 | 1.10 | 11.0 | 9.6 | 10.0 | 12.5 | 10.6 | 12.3 | 14.2 | 11.6 | 13.1 |
| 1.00 | 1.25 | 9.4 | 8.8 | 9.8 | 10.9 | 9.7 | 11.6 | 12.1 | 10.7 | 12.5 |
| 1.00 | 1.50 | 7.3 | 7.3 | 9.0 | 8.7 | 8.1 | 10.0 | 9.6 | 8.8 | 10.8 |
| 1.00 | 2.00 | 4.7 | 5.2 | 7.1 | 6.0 | 5.6 | 7.5 | 6.4 | 5.9 | 7.8 |
| 2.00 | 0.10 | 3.0 | 3.4 | 5.0 | 4.4 | 4.0 | 5.0 | 4.9 | 4.0 | 5.0 |
| 2.00 | 0.25 | 3.1 | 3.2 | 5.0 | 4.5 | 4.0 | 5.0 | 4.7 | 4.1 | 5.0 |
| 2.00 | 0.50 | 3.1 | 3.1 | 5.0 | 4.6 | 4.1 | 5.2 | 4.8 | 4.3 | 5.5 |
| 2.00 | 0.75 | 3.1 | 3.2 | 5.0 | 4.5 | 4.1 | 5.6 | 4.8 | 4.3 | 5.9 |
| 2.00 | 1.10 | 3.1 | 3.4 | 5.2 | 4.5 | 4.0 | 5.9 | 4.7 | 4.3 | 6.2 |
| 2.00 | 1.25 | 3.1 | 3.4 | 5.3 | 4.4 | 4.0 | 5.9 | 4.6 | 4.2 | 6.2 |
| 2.00 | 1.50 | 3.0 | 3.4 | 5.4 | 4.3 | 3.9 | 5.9 | 4.5 | 4.1 | 6.1 |
| 2.00 | 2.00 | 2.8 | 3.4 | 5.5 | 4.0 | 3.6 | 5.7 | 4.2 | 3.8 | 5.9 |

Από τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τους παραπάνω πίνακες καταλήγουμε ότι για όλες τις τιμές του n , το προτεινόμενο Max EWMAMS διάγραμμα αποδίδει πολύ καλύτερα τον συνδυασμό των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ διαγραμμάτων. Βέβαια ψ είναι αποδοτικότερος του συνδυασμού των διαγραμμάτων E_k^X , $E_k^{X^2, \max}$ και $E_k^{X^2, \min}$. Για μικρές τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης $\lambda = 0.05$ και 0.1 απόδοση του Max EWMAMS είναι πολύ

καλύτερη από αυτή των δύο προαναφερθέντων συνδυασμών. Παρόλα αυτά, όσο η παράμετρος εξομάλυνσης αυξάνεται η διαφορά μικραίνει. Επιπρόσθετα, για κάθε τιμή της λ όταν το μέγεθος της αλλαγής του μέσου είναι μικρό, η απόδοση των διαγραμμάτων που συγκρίνουμε βελτιώνεται όσο το n αυξάνεται. Για μεγάλες αλλαγές στον μέσο, η περίπτωση $n = 1$ δείχνει την καλύτερη απόδοση.

Στα σενάρια όπου έχουμε περιορισμένες αλλαγές στη μεταβλητότητα, ο συνδυασμός των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ διαγραμμάτων παρουσιάζει μια ελαφρώς καλύτερη απόδοση σε σχέση με το προτεινόμενο Max EWMAMS. Τα σενάρια είναι:

1. Για $\psi = 1.1$ και
 - a. για όλες τις τιμές του n όταν $\lambda = 0.05$,
 - b. όταν $\lambda = 0.1$ και 0.2 για $n = 2$ και 5 ,
 - c. για $\lambda = 0.3$ με $n = 5$.
2. Για $\psi = 1.3$ όταν $\lambda = 0.2$ και 0.3 με $n = 5$.

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις αύξησης της μεταβλητότητας το προτεινόμενο Max EWMAMS αποδίδει καλύτερα από τον συνδυασμό των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ διαγραμμάτων. Επιπρόσθετα, ο συνδυασμός των διαγραμμάτων E_k^X , $E_k^{X^2, \max}$ και $E_k^{X^2, \min}$ δεν έχει ποτέ καλύτερη απόδοση συγκριτικά με τα άλλα γραφήματα όταν η διασπορά της διαδικασίας αυξάνεται.

Για τις περιπτώσεις μείωσης της μεταβλητότητας, όπως είναι αναμενόμενο, ο συνδυασμός των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ δεν ανιχνεύει ποτέ την αλλαγή. Παρόλα αυτά, για οποιαδήποτε τιμή των λ και n , το σχέδιο με τον συνδυασμό των διαγραμμάτων E_k^X , $E_k^{X^2, \max}$ αποδίδει καλύτερα από το Max EWMAMS διάγραμμα. Επιπλέον, η διαφορά μεταξύ των αποδόσεων γίνονται μικρότερες όσο το n αυξάνεται και/ή το ψ μικραίνει. Για μικρές τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης και για μέτριες προς μεγάλες μειώσεις στην διακύμανση, οι αποδόσεις των διαγραμμάτων είναι τόσο κοντά που σε μερικές περιπτώσεις έχουν σχεδόν ίδια απόδοση.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι οποιοδήποτε από τα τρία διαγράμματα ανιχνεύσει μια αλλαγή στην διακύμανση, όταν το μέγεθος της

απόλυτης αλλαγής από τον στόχο $\sigma_0 = 1$ είναι μικρό, η απόδοση του διαγράμματος βελτιώνεται όσο το n αυξάνεται. Εντούτοις, για μέτρια προς μεγάλα μεγέθη της απόλυτης τιμής των αλλαγών από το στόχο, η περίπτωση $n = 1$ είναι η καλύτερη.

Για όλες τις τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης όταν η μετατόπιση του μέσου είναι μεγαλύτερη από 0.5 (για παράδειγμα για μέτριες και μεγάλες αλλαγές στον μέσο) το Max EWMAMS διάγραμμα ανιχνεύει τις ταυτόχρονες αλλαγές ταχύτερα από τους δύο άλλους συνδυασμούς διαγραμμάτων. Σε αυτές τις περιπτώσεις το σχέδιο του συνδυασμού των E_k^X και $E_k^{X^2,max}$ έχει καλύτερη απόδοση από το σχέδιο του συνδυασμού των E_k^X , $E_k^{X^2,max}$ και $E_k^{X^2,min}$ διαγραμμάτων. Παρόλα αυτά, όταν έχουμε $\delta = 0.25$ ή 0.5 και $\psi < 1$, υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις όπου ο συνδυασμός των E_k^X , $E_k^{X^2,max}$ και $E_k^{X^2,min}$ έχει καλύτερη απόδοση από το προτεινόμενο διάγραμμα. Οι περιπτώσεις αυτές είναι:

1. Όταν $\lambda = 0.05$ ή 0.1 , οι διαφορές είναι αμελητέες, εκτός της περίπτωσης όπου $\lambda = 0.1$, $\delta = 0.25$ και $\psi = 0.75$.
2. Όταν $\lambda = 0.2, 0.3$, όπου ο αριθμός των περιπτώσεων με σημαντική διαφορά στο ATS είναι μεγαλύτερος και ο συνδυασμός των διαγραμμάτων E_k^X , $E_k^{X^2,max}$ και $E_k^{X^2,min}$ αποδίδει καλύτερα από το Max EWMAMS διάγραμμα.

Πίνακας 4.8: Τα ποσοστά διάγνωσης για τα διαγράμματα των τριών σχεδίων.

| δ | ψ | Max EWMAMS | | | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max}$ | | | | | $E_k^X - E_k^{X^2,max} - E_k^{X^2,min}$ | | | | |
|----------|--------|------------|-------|-------|--------|--------|-------------------------|-------|-------|--------|--------|---|-------|-------|--------|--------|
| | | m | v^+ | v^- | mv^+ | mv^- | m | v^+ | v^- | mv^+ | mv^- | m | v^+ | v^- | mv^+ | mv^- |
| 0.25 | 1.00 | 89 | 7 | 2 | 2 | 0 | 84 | 12 | 0 | 3 | 0 | 82 | 10 | 6 | 2 | 0 |
| 0.50 | 1.00 | 95 | 2 | 0 | 2 | 0 | 90 | 6 | 0 | 4 | 0 | 92 | 5 | 0 | 3 | 0 |
| 0.75 | 1.00 | 96 | 1 | 0 | 3 | 0 | 88 | 6 | 0 | 7 | 0 | 90 | 4 | 0 | 5 | 0 |
| 1.00 | 1.00 | 96 | 1 | 0 | 4 | 0 | 80 | 8 | 0 | 12 | 0 | 83 | 7 | 0 | 10 | 0 |
| 1.50 | 1.00 | 93 | 0 | 0 | 7 | 0 | 51 | 21 | 0 | 28 | 0 | 54 | 19 | 0 | 27 | 0 |
| 2.00 | 1.00 | 88 | 0 | 0 | 12 | 0 | 18 | 45 | 0 | 37 | 0 | 19 | 44 | 0 | 37 | 0 |
| 0.00 | 0.10 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.00 | 0.25 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.00 | 0.50 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.00 | 0.75 | 1 | 0 | 99 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.00 | 1.10 | 35 | 61 | 0 | 3 | 0 | 26 | 71 | 0 | 3 | 0 | 24 | 71 | 3 | 3 | 0 |
| 0.00 | 1.25 | 25 | 70 | 0 | 5 | 0 | 12 | 84 | 0 | 4 | 0 | 11 | 86 | 0 | 4 | 0 |
| 0.00 | 1.50 | 26 | 65 | 0 | 9 | 0 | 5 | 91 | 0 | 5 | 0 | 4 | 92 | 0 | 4 | 0 |
| 0.00 | 2.00 | 31 | 48 | 0 | 21 | 0 | 1 | 94 | 0 | 5 | 0 | 1 | 95 | 0 | 4 | 0 |
| 0.25 | 0.10 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.25 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.25 | 0.50 | 1 | 0 | 99 | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|------|-----|----|-----|----|---|-----|----|---|----|---|-----|----|-----|----|---|
| 0.25 | 0.75 | 36 | 0 | 64 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 0 | 79 | 0 | 0 |
| 0.25 | 1.10 | 69 | 26 | 0 | 5 | 0 | 59 | 35 | 0 | 6 | 0 | 61 | 32 | 1 | 6 | 0 |
| 0.25 | 1.25 | 41 | 51 | 0 | 8 | 0 | 26 | 66 | 0 | 8 | 0 | 26 | 66 | 0 | 8 | 0 |
| 0.25 | 1.50 | 31 | 58 | 0 | 11 | 0 | 8 | 85 | 0 | 7 | 0 | 7 | 86 | 0 | 7 | 0 |
| 0.25 | 2.00 | 31 | 48 | 0 | 22 | 0 | 1 | 93 | 0 | 6 | 0 | 1 | 94 | 0 | 5 | 0 |
| 0.50 | 0.10 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 0.50 | 0.25 | 20 | 0 | 79 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 95 | 0 | 0 |
| 0.50 | 0.50 | 67 | 0 | 33 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 49 | 0 | 51 | 0 | 0 |
| 0.50 | 0.75 | 95 | 0 | 5 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 90 | 0 | 10 | 0 | 0 |
| 0.50 | 1.10 | 85 | 8 | 0 | 6 | 0 | 74 | 17 | 0 | 9 | 0 | 77 | 15 | 0 | 8 | 0 |
| 0.50 | 1.25 | 63 | 25 | 0 | 13 | 0 | 43 | 43 | 0 | 14 | 0 | 45 | 41 | 0 | 14 | 0 |
| 0.50 | 1.50 | 41 | 42 | 0 | 17 | 0 | 13 | 74 | 0 | 13 | 0 | 13 | 75 | 0 | 12 | 0 |
| 0.50 | 2.00 | 33 | 42 | 0 | 25 | 0 | 2 | 90 | 0 | 8 | 0 | 2 | 91 | 0 | 7 | 0 |
| 0.75 | 0.10 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0.25 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0.50 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 0.75 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 1.10 | 90 | 4 | 0 | 7 | 0 | 74 | 13 | 0 | 12 | 0 | 77 | 12 | 0 | 11 | 0 |
| 0.75 | 1.25 | 74 | 11 | 0 | 14 | 0 | 48 | 33 | 0 | 19 | 0 | 51 | 31 | 0 | 18 | 0 |
| 0.75 | 1.50 | 52 | 26 | 0 | 22 | 0 | 18 | 63 | 0 | 19 | 0 | 19 | 63 | 0 | 18 | 0 |
| 0.75 | 2.00 | 37 | 34 | 0 | 30 | 0 | 2 | 86 | 0 | 11 | 0 | 2 | 87 | 0 | 11 | 0 |
| 1.00 | 0.10 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.00 | 0.25 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.00 | 0.50 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1.00 | 0.75 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 98 | 0 | 0 | 1 | 0 | 99 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1.00 | 1.10 | 91 | 2 | 0 | 8 | 0 | 67 | 15 | 0 | 18 | 0 | 71 | 13 | 0 | 17 | 0 |
| 1.00 | 1.25 | 80 | 6 | 0 | 15 | 0 | 45 | 31 | 0 | 25 | 0 | 48 | 29 | 0 | 24 | 0 |
| 1.00 | 1.50 | 60 | 16 | 0 | 24 | 0 | 18 | 57 | 0 | 25 | 0 | 19 | 57 | 0 | 24 | 0 |
| 1.00 | 2.00 | 39 | 27 | 0 | 34 | 0 | 3 | 83 | 0 | 14 | 0 | 3 | 84 | 0 | 13 | 0 |
| 2.00 | 0.10 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 91 | 0 | 0 | 9 | 0 | 71 | 0 | 0 | 29 | 0 |
| 2.00 | 0.25 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 63 | 3 | 0 | 34 | 0 | 67 | 1 | 0 | 33 | 0 |
| 2.00 | 0.50 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 42 | 18 | 0 | 39 | 0 | 46 | 14 | 0 | 40 | 0 |
| 2.00 | 0.75 | 96 | 0 | 0 | 4 | 0 | 28 | 32 | 0 | 40 | 0 | 31 | 29 | 0 | 39 | 0 |
| 2.00 | 1.10 | 83 | 0 | 0 | 17 | 0 | 15 | 50 | 0 | 35 | 0 | 16 | 49 | 0 | 35 | 0 |
| 2.00 | 1.25 | 77 | 1 | 0 | 23 | 0 | 11 | 56 | 0 | 33 | 0 | 12 | 56 | 0 | 33 | 0 |
| 2.00 | 1.50 | 64 | 2 | 0 | 34 | 0 | 6 | 65 | 0 | 29 | 0 | 6 | 65 | 0 | 28 | 0 |
| 2.00 | 2.00 | 46 | 7 | 0 | 48 | 0 | 2 | 77 | 0 | 21 | 0 | 1 | 79 | 0 | 20 | 0 |

ATS₀ = 370, λ = 0.05 και n = 1

Για μεγάλη τιμή της παραμέτρου εξομάλυνσης όταν η μετατόπιση στον μέσο είναι μικρή και αυξάνεται η διασπορά, υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις όπου το Max EWMAMS διάγραμμα δεν μπορεί να ανιχνεύσει τις ταυτόχρονες μετατοπίσεις, όπου για το σχέδιο του συνδυασμού των διαγραμμάτων E_k^X , $E_k^{X^2, \max}$ και $E_k^{X^2, \min}$ είναι μόνο μια περίπτωση.

Στον πίνακα 4.8 βλέπουμε για $\lambda = 0.05$ και $n = 1$ το ποσοστό διαγνωστικής επιτυχίας των τριών σχεδίων. Για κάθε ένα σχέδιο έχουμε πέντε στήλες όπου το m απεικονίζει την αλλαγή στον μέσο, το v^+ την αύξηση στη διακύμανση ενώ το v^- την μείωση και το mv^+ τον συνδυασμό μετατόπιση στον μέσο και αύξηση

στην διακύμανση ενώ το mv^- τον συνδυασμό μετατόπιση στον μέσο και μείωση στην διακύμανση.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες μετατοπίσεις στον μέσο τα ποσοστά της σωστής διάγνωσης του προτεινόμενου διαγράμματος είναι λίγο χαμηλότερα από τους άλλους τύπους αλλαγών. Τα άλλα δύο σχέδια με τα συνδυαστικά διαγράμματα δεν μπορούν να διαγνώσουν αποδοτικά τις μεγάλες μετατοπίσεις. Σε όλες τις περιπτώσεις μετατοπίσεων μέσου το Max EWMAMS διάγραμμα αντιλαμβάνεται καλύτερα από τα άλλα δύο συνδυαστικά διαγράμματα.

Όταν η διακύμανση μειώνεται ο συνδυασμός των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ διαγραμμάτων δεν μπορεί να ανιχνεύσει και να διαγνώσει την μετατόπιση. Παρόλα αυτά, τα άλλα δύο σχέδια αντιλαμβάνονται την μείωση της μεταβλητότητας σε κάθε περίπτωση. Για μικρές αυξήσεις στην διακύμανση, και τα δύο σχέδια συνδυαστικών διαγραμμάτων ανιχνεύουν καλύτερα την κατεύθυνση των μετατοπίσεων από το Max EWMAMS διάγραμμα και όσο το μέγεθος της μετατόπισης στην διακύμανση μεγαλώνει, τόσο η ακρίβεια της ανίχνευσης τους αυξάνεται. Σε αυτή την περίπτωση για το Max EWMAMS διάγραμμα συμπληρώνουμε ότι παρουσιάζει σημαντικό πλήθος λανθασμένων ενδείξεων στις μετατοπίσεις του μέσου.

Όταν η διαδικασία έχει μια ταυτόχρονη μετατόπιση, κανένα από τα διαγράμματα που ελέγξαμε δεν μπορούν να ανιχνεύσουν την μετατόπιση αποδοτικά και η απόδοση ανίχνευσης της ταυτόχρονης μετατόπισης της διαδικασίας βελτιώνεται όσο το μέγεθος της μετατόπισης αυξάνεται. Γενικά, τα διαγράμματα δεν σηματοδοτούν ότι παρουσιάζεται μια ταυτόχρονη μετατόπιση αλλά σηματοδοτούν μια από τις δύο αλλαγές αυτή στον μέσο ή αυτή στην διακύμανση.

Για την ταυτόχρονη αλλαγή στον μέσο και μείωση στην διακύμανση έχουμε:

1. Για το Max EWMAMS διάγραμμα:
 - a. Για $\delta = 0.25$ ή $\delta = 0.5$ με μεγάλη μείωση στην μεταβλητότητα, το διάγραμμα ανιχνεύει μόνο μια μείωση στην διακύμανση της διαδικασίας.
 - b. Για τις άλλες περιπτώσεις, το διάγραμμα ανιχνεύει μόνο μια αλλαγή στον μέσο της διαδικασίας.

2. Για τον συνδυασμό των E_k^X και $E_k^{X^2, \max}$ διαγραμμάτων:
 - a. Αν το διάγραμμα δώσει μια ένδειξη, τότε διαγιγνώσκεται ως μετατόπιση στον μέσο για $\delta < 2.0$.
 - b. Αν $\delta = 0.25$, υπάρχει μια πιθανότητα ότι το διάγραμμα δίνει εσφαλμένη ένδειξη που μπορεί να περιλαμβάνει στην μια περίπτωση μια αύξηση στην διακύμανση ή στην άλλη περίπτωση ταυτόχρονη αύξηση στον μέσο και στην διακύμανση.
3. Για τον συνδυασμό των E_k^X , $E_k^{X^2, \max}$ και $E_k^{X^2, \min}$ διαγραμμάτων:
 - a. Για $\delta = 0.25$ ή $\delta = 0.5$ με μεγάλες μειώσεις στην μεταβλητότητα, το διάγραμμα ανιχνεύει μόνο μια μείωση στην διακύμανση της διαδικασίας.
 - b. Όταν η μετατόπιση στον μέσο είναι μεγάλη, ανιχνεύει μόνο μια μετατόπιση στον μέσο. Παρόλα αυτά, υπάρχει μια πιθανότητα εσφαλμένης ένδειξης.
 - c. Για τις άλλες περιπτώσεις, το διάγραμμα ανιχνεύει μόνο μια μετατόπιση στον μέσο της διαδικασίας.

Για τις περιπτώσεις ταυτόχρονης μετατόπισης στον μέσο και αύξησης της διακύμανσης, και τα τρία διαγράμματα σηματοδοτούν μια μετατόπιση στον μέσο, μια αύξηση στις διακύμανση ή ταυτόχρονη μετατόπιση στον μέσο και αύξηση στην διακύμανση. Επίσης, παρατηρούμε ότι ενώ η πιθανότητα το Max EWMAMS διάγραμμα να σηματοδοτήσει μόνο μια μετατόπιση στον μέσο είναι υψηλότερη από τους άλλους δύο συνδυασμούς διαγραμμάτων, η πιθανότητα σηματοδότησης μιας αύξησης στη διακύμανση για τα συνδυαζόμενα διαγράμματα είναι μεγαλύτερη από το προτεινόμενο.

Γενικά, ενώ το Max EWMAMS διάγραμμα έχει καλύτερη απόδοση από τους άλλους δύο συνδυασμούς γραφημάτων, στη συνέχεια έχουμε κάποιες περιπτώσεις που χρήζουν προσοχής:

1. Η απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος βελτιώνεται όσο η παράμετρος εξομάλυνσης μειώνεται. Έτσι σαν αποτέλεσμα έχουμε τα όρια ελέγχου για μικρές τιμές του λ να είναι πιο ακριβή πράγμα το οποίο οδηγεί στην καλύτερη απόδοση του Max EWMAMS διαγράμματος για αυτές τις τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης.

2. Ο βαθμός ελευθερίας είναι μια μονότονη αύξουσα συνάρτηση του πλήθους του υποσυνόλου. Με άλλα λόγια, η απόδοση του διαγράμματος βελτιώνεται όσο αυξάνεται το n . Παρόλα αυτά, αυτό ισχύει μόνο για μικρές ή μεσαίες μετατοπίσεις. Για μεγάλες μετατοπίσεις το διάγραμμα συνήθως σηματοδοτεί πολύ γρήγορα και ανιχνεύει μια αλλαγή από τα πρώτα κιάλας δείγματα. Ως εκ τούτου, αν το διάγραμμα δουλεύει για ένα δοθέν δειγματικό μέγεθος n , δεν μπορεί να σηματοδοτήσει μέχρι να δεχθεί πολλαπλάσια του n παρατηρήσεις.
3. Οι Box (1954) και Macgregor και Harris (1993) παρατήρησαν ότι η προσεγγιστική κατανομή του X_n^2/n έχει μικρότερη ακρίβεια στο κάτω όριο από ότι στο πάνω όριο. Από αυτό το γεγονός, η απόδοση του Max EWMAMS διαγράμματος όταν παρουσιάζονται μειώσεις στην διασπορά της διαδικασίας δεν είναι τόσο καλή από όταν έχουμε αυξήσεις στην διασπορά.

4.4 Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγράμματα ελέγχου για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας

4.4.1 Περιγραφή

Η πρόταση των Teh, et al. (2014) είναι δύο EWMA διαγράμματα, το πρώτο είναι το Μέγιστο Διάγραμμα Ελέγχου με Κινητό Μέσο και Διπλά Εκθετικό Βάρος (Maximum Double Exponentially Weighted Moving Average, Max-DEWMA), και το δεύτερο είναι το Διάγραμμα Ελέγχου του Αθροίσματος Τετραγώνων με Κινητό Μέσο και Διπλά Εκθετικό Βάρος (Sum of Squares Exponentially Weighted Moving Average, SS-DEWMA). Τα διαγράμματα αυτά μπορούν να επιβλέπουν ταυτόχρονα τον μέσο και την μεταβλητότητα μιας διεργασίας και να ανιχνεύουν αλλαγές οποιουδήποτε μεγέθους.

4.4.2 Κατασκευή του Max-DEWMA

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια σειρά από τυχαίες παρατηρήσεις,

$$X_i \sim N(\mu + \alpha\sigma, b^2\sigma^2),$$

για $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$, όπου το α και το b είναι σταθερές και $b \geq 1$. Η διεργασία είναι εντός ελέγχου όταν $(\alpha, b) = (0, 1)$, αλλιώς η διεργασία έχει μετατοπιστεί.

Έστω:

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}}{n_i}$$

και

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}$$

είναι ο μέσος και η διακύμανση του i -οστού δείγματος, αντίστοιχα. Αυτά τα δύο στατιστικά είναι ομοιόμορφα η ελάχιστη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητριών μ_0 και σ_0^2 αντίστοιχα, αλλά ακολουθούν διαφορετικές κατανομές. Στη συνέχεια έχουμε τα δύο ανεξάρτητα στατιστικά:

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n_i}} \quad (4.23)$$

και

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left[\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_0^2}; n_i - 1 \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Η $\Phi^{-1}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση της αντίστροφης τυποποιημένης κανονικής σωρευτικής κατανομής και $H[\cdot; n_i - 1]$ είναι η συνάρτηση της χ^2 κατανομής με $n_i - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, και τα δύο στατιστικά U_i και V_i είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν μια κοινή τυποποιημένη κανονική κατανομή, που είναι ανεξάρτητη του μεγέθους του δείγματος n_i .

Οπότε τα δύο EWMA στατιστικά που υπολογίζουμε από τα U_i και V_i θα είναι:

$$Y_i = (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda U_i \quad (4.25)$$

και

$$Z_i = (1 - \lambda)Z_{i-1} + \lambda V_i, \quad (4.26)$$

όπου $i = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda \leq 1$ και τα $Y_0 = 0$ και $Z_0 = 0$ είναι οι αρχικές τιμές των Y_i και Z_i .

Από τα δύο EWMA στατιστικά θα έχουμε τα δύο DEWMA στατιστικά αντίστοιχα:

$$W_i = (1 - \lambda)W_{i-1} + \lambda Y_i \quad (4.27)$$

και

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda Z_i, \quad (4.28)$$

με $i = 1, 2, \dots$, όπου τα $W_0 = 0$ και $Q_0 = 0$ είναι οι αρχικές τιμές των W_i και Q_i αντίστοιχα. Οι Khoo, et al. (2010) χρησιμοποίησαν το ίδιο λ σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις.

Στη συνέχεια συνδυάζουμε τα δύο DEWMA στατιστικά W_i και Q_i , και κρατάμε το μέγιστο των απολύτων τιμών τους. Έτσι έχουμε το στατιστικό για το Max-DEWMA διάγραμμα:

$$M_i = \max\{|W_i|, |Q_i|\}. \quad (4.29)$$

Άρα βλέπουμε ότι, αν ο μέσος της διεργασίας αλλάξει από την τιμή στόχο ή η διακύμανση αυξηθεί ή μειωθεί το στατιστικό M_i θα έχει μεγάλη τιμή. Αν και τα δύο, ο μέσος και η διακύμανση, μείνουν κοντά στις τιμές στόχους τους τότε το M_i θα είναι μικρό. Επειδή το M_i παίρνει μόνο θετικές τιμές, οι τιμές των W_i και Q_i είναι μέσα σε απόλυτο, το Max-DEWMA διάγραμμα χρειάζεται μόνο άνω όριο ελέγχου:

$$\begin{aligned} UCL_{MD} &= E(M_i) + K_{MD}\sqrt{V(M_i)} \\ &= (1.128379 + 0.602810 K_{MD}) \times \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda^4 \{1 + (1 - \lambda)^2 - (i^2 + 2i + 1)(1 - \lambda)^{2i} + (i^2 + 2i - 1)(1 - \lambda)^{2i+2} - i^2(1 - \lambda)^{2i+4}\}}{[1 - (1 - \lambda)^2]^3}}$$

Για $i = 1, 2, \dots$, όπου $E(M_i)$ και $V(M_i)$ είναι η μέση τιμή και η διακύμανση του M_i , αντίστοιχα, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, και ο K_{MD} είναι ο πολλαπλασιαστής που ελέγχει το εύρος του UCL_{MD} .

4.4.3 Κατασκευή του SS-DEWMA

Σε αντίθεση με την προηγούμενη πρόταση, όπου πήραμε τον μέγιστο των απολύτων τιμών των W_i και Q_i , οι Teh, et al. (2010) εκμεταλλεύτηκαν το άθροισμα των τετραγώνων των W_i και Q_i :

$$W_i = (1 - \lambda)W_{i-1} + \lambda Y_i \quad (4.30)$$

και

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda Z_i, \quad (4.31)$$

με $i = 1, 2, \dots$, όπου τα $W_0 = 0$ και $Q_0 = 0$ είναι οι αρχικές τιμές των W_i και Q_i αντίστοιχα.

Για το SS-DEWMA διάγραμμα χρησιμοποιούμε το στατιστικό L_i , το οποίο συνδυάζει τα W_i και Q_i σύμφωνα με την παρακάτω συνάρτηση:

$$L_i = W_i^2 + Q_i^2 \quad (4.32)$$

Οπότε το L_i θα πάρει μεγάλη τιμή αν οι τιμές του μέσου ή της διακύμανση απομακρυνθούν από τη τιμή στόχου αντίστοιχα. Ενώ αν παραμένουν κοντά στη τιμή στόχο της η κάθε μια, τότε το L_i θα έχει μικρή τιμή. Όπως και για το προηγούμενο διάγραμμα, έτσι και για αυτό λόγω των τετραγώνων έχουμε μόνο θετικές τιμές. Οπότε και σε αυτήν την περίπτωση θα χρειαστούμε μόνο ένα όριο ελέγχου, το άνω όριο ελέγχου:

$$UCL_{SD} = E(L_i) + K_{SD}\sqrt{V(L_i)}, \quad (4.33)$$

όπου τα $E(L_i)$ και $V(L_i)$ είναι η εντός ελέγχου μέση τιμή και διακύμανση αντίστοιχα, αντίστοιχα και το K_{SD} είναι μια σταθερά που ελέγχει το εύρος του UCL_{SD} . Ένας τύπος που μας δίνει το UCL_{SD} ώστε να υπολογίσουμε γρήγορα την αρχική κατάσταση του SS-DEWMA διαγράμματος με γνωστές τις τιμές των λ και K_{SD} είναι:

$$UCL_{SD} = 2(1 + K_{SD}) \times \frac{\lambda^4 \{1 + (1 - \lambda)^2 - (i^2 + 2i + 1)(1 - \lambda)^{2i} + (2i^2 + 2i - 1)(1 - \lambda)^{2i+2} - i^2(1 - \lambda)^{2i+4}\}}{[1 - (1 - \lambda)^2]^3}.$$

Για το λ το διάστημα $0.05 \leq \lambda \leq 0.30$ μας δίνει γρήγορη ανίχνευση μικρών ή μεσαίων αλλαγών στον μέσο ή στην διακύμανση.

4.4.4 Απόδοση

Την απόδοση των Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων για την παρακολούθηση του μέσου της διαδικασίας και, ή της μεταβλητότητας θα εκτιμήσουμε κάνοντας χρήση του κριτηρίου MRL (Διάμεσος του Μήκους Ροής, *Median Run Length*). Θέτουμε $MRL_0 = 250$ στα δύο γραφήματα ώστε να μπορέσουμε να τα συγκρίνουμε με το εκτός ελέγχου MRL_1 για μια δοθείσα αλλαγή στην διαδικασία. Με δεδομένα, το μέγεθος του δείγματος $n = 5$ και $\lambda \in \{0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.80, 1\}$ και τα δύο διαγράμματα να έχουν τα ίδια όρια. Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, θεωρούμε ότι $\mu_0 = 0$ και $\sigma_0^2 = 1$ για την εντός ελέγχου διεργασία. Η εκτός ελέγχου διεργασία παρουσιάζει μια μετατόπιση στον μέσο ή, και στην μεταβλητότητα της διεργασίας. Όταν εμφανίζεται μια ένδειξη εκτός ελέγχου, μας σηματοδοτεί ότι έχουμε μια μετατόπιση στον μέσο ή στη μεταβλητότητα.

Στο πίνακα 4.9 που ακολουθεί έχουμε τις ιδανικές τιμές των συνδυασμών (λ, K_{MD}) και (λ, K_{SD}) για τα σχέδια των Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων.

Πίνακας 4.9: Συνδυασμοί των ιδανικών τιμών (λ, K_{MD}) και (λ, K_{SD}).

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| λ | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | 0.80 | 0.90 | 1.00 |
| K_{MD} | 1.93 | 2.32 | 2.57 | 2.74 | 2.88 | 2.99 | 3.16 | 3.28 | 3.35 | 3.40 | 3.41 | 3.42 | 3.42 |
| K_{SD} | 2.09 | 2.77 | 3.19 | 3.51 | 3.77 | 3.99 | 4.33 | 4.56 | 4.73 | 4.84 | 4.85 | 4.88 | 4.89 |

$n = 5$ και $MRL_0 = 250$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω τιμών υπολογίζουμε το MRL_1 του Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων αντίστοιχα.

Πίνακας 4.10: Σύγκριση των MRL_1 του Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων.

| Max-DEWMA διάγραμμα | | | | | | SS-DEWMA διάγραμμα | | | | |
|---|------|------|------|------|------|--------------------|------|------|------|------|
| α | | | | | | α | | | | |
| b | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.00 | 2.00 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.00 | 2.00 |
| 0.25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0.50 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 1.00 | 250 | 16 | 5 | 2 | 1 | 250 | 16 | 5 | 2 | 1 |
| 1.50 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 2.00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.05, K_{MD} = 1.930$ και $K_{SD} = 2.094$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 0.50 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 1 | 1 |
| 1.00 | 250 | 18 | 6 | 2 | 1 | 250 | 19 | 6 | 2 | 1 |
| 1.50 | 4 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 2.00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.10, K_{MD} = 2.327$ και $K_{SD} = 2.770$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0.50 | 4 | 4 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 20 | 7 | 2 | 1 | 250 | 21 | 7 | 2 | 1 |
| 1.50 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.20, K_{MD} = 2.743$ και $K_{SD} = 3.510$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0.50 | 4 | 4 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 24 | 7 | 2 | 1 | 250 | 25 | 7 | 2 | 1 |
| 1.50 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.30, K_{MD} = 2.998$ και $K_{SD} = 3.995$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0.50 | 5 | 5 | 4 | 2 | 1 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 30 | 7 | 2 | 1 | 250 | 31 | 7 | 2 | 1 |
| 1.50 | 5 | 4 | 4 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.40, K_{MD} = 3.163$ και $K_{SD} = 4.334$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0.50 | 5 | 5 | 5 | 2 | 1 | 6 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 38 | 8 | 2 | 1 | 250 | 39 | 8 | 2 | 1 |
| 1.50 | 5 | 4 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|----|----|---|-----|-----|----|---|---|
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.50, K_{MD} = 3.280$ και $K_{SD} = 4.568$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 0.50 | 8 | 8 | 7 | 3 | 1 | 11 | 8 | 5 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 60 | 11 | 3 | 1 | 250 | 60 | 12 | 3 | 1 |
| 1.50 | 5 | 5 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.70, K_{MD} = 3.407$ και $K_{SD} = 4.840$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 0.50 | 12 | 12 | 12 | 3 | 1 | 19 | 15 | 7 | 2 | 1 |
| 1.00 | 250 | 75 | 15 | 3 | 1 | 250 | 74 | 16 | 3 | 1 |
| 1.50 | 5 | 5 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $\lambda = 0.80, K_{MD} = 3.414$ και $K_{SD} = 4.858$ | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 | 11 | 10 | 6 | 2 | 1 |
| 0.50 | 67 | 67 | 67 | 19 | 1 | 131 | 105 | 55 | 6 | 1 |
| 1.00 | 250 | 123 | 34 | 4 | 1 | 250 | 124 | 35 | 5 | 1 |
| 1.50 | 7 | 6 | 5 | 2 | 1 | 6 | 6 | 4 | 2 | 1 |
| 2.00 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| $\lambda = 1.00, K_{MD} = 3.427$ και $K_{SD} = 4.899$ | | | | | | | | | | |
| $n = 5$ και $MRL_0 = 250$ | | | | | | | | | | |

Οι τιμές του MRL_1 του SS-DEWMA διαγράμματος που έχουν σημειωθεί είναι αυτές που είναι συγκριτικά μικρότερες από του Max-DEWMA διαγράμματος.

Από την σύγκριση της απόδοσης του MRL των Max-DEWMA και SS-DEWMA διαγραμμάτων παρατηρούμε ότι το 15.33% του SS-DEWMA διαγράμματος είναι χαμηλότερα από το αντίστοιχο του Max-DEWMA διαγράμματος. Αυτό σημαίνει ότι το SS-DEWMA διάγραμμα είναι πιο ευαίσθητο από το Max-DEWMA διάγραμμα στην ανίχνευση αλλαγών. Στο 74.1% των καταχωρήσεων το MRL_1 για το SS-DEWMA διάγραμμα είναι ίσο με αυτό του Max-DEWMA διαγράμματος. Παρόλο που η σύγκριση των τιμών του MRL_1 δείχνει ότι το SS-DEWMA διάγραμμα γενικά δίνει καλύτερα αποτελέσματα από το Max-DEWMA διάγραμμα, η διαφορά είναι αμελητέα στις περισσότερες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, για $\lambda = 0.4$ και ο μέσος της διαδικασίας αυξάνεται κατά μισό βαθμό ενώ η τυπική απόκλιση αυξάνεται κατά 1.5 και 2, το MRL_1 για το Max-DEWMA διάγραμμα δίνει τιμές 4 και 2 αντίστοιχα, ενώ το MRL_1 του SS-DEWMA διαγράμματος δίνει τιμές 3 και 1. Απροσδόκητα, όταν το $\lambda = 1$ και η τυπική απόκλιση $\sigma = \frac{1}{2}$ και αύξηση του μέσου κατά μία μονάδα, το MRL_1 του SS-DEWMA διαγράμματος δίνει τιμή 6 ενώ για το Max-DEWMA διάγραμμα 19. Σε αυτή την περίπτωση, η ταχύτητα ανίχνευσης σημείου εκτός ελέγχου αυξάνεται

περισσότερο από τρεις φορές όταν χρησιμοποιούμε το διάγραμμα SS-DEWMA.

Παρατηρούμε ότι το SS-DEWMA διάγραμμα είναι λίγο ταχύτερο στην ανίχνευση μετατοπίσεων στον μέσο και ή στη μεταβλητότητας της διεργασίας συγκρινόμενο με το Max-DEWMA διάγραμμα, με βάση το *MRL*.

Κεφάλαιο 5

Συνδυασμός των EWMA και CUSUM διαγραμμάτων για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς

5.1 Εισαγωγή

Στην συνδυασμένη και από κοινού παρακολούθηση, μια μετατόπιση στην διακύμανση μπορεί επίσης να επηρεάσει το διάγραμμα του μέσου. Αυτό μπορεί να συμβεί γιατί και τα δύο μπορεί να μετατοπιστούν την ίδια στιγμή, λόγω της συμμετοχής της διακύμανσης στα όρια ελέγχου του διαγράμματος του μέσου. Μια συνήθης πρακτική για τον παρακολούθηση της εμφάνισης αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία, είναι η χρήση περισσότερων του ενός διαγράμματα, ιδίου τύπου. Τα διαγράμματα αυτά απαιτούνται για την παρακολούθηση του μέσου και της διασποράς της διεργασίας, ταυτόχρονα. Για να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες απλουστεύοντας τον έλεγχο, οι Abbas, et al. (2013a και 2013b) πρότειναν μια ανάμειξη διαγραμμάτων EWMA και CUSUM για την θέση και τη διασπορά ξεχωριστά.

Πάνω στην πρόταση των Abbas, et al. (2013a και 2013b) στηρίζονται τα διαγράμματα των Zaman, et al. (2017), από την διαχωρισμένη στην συνδυασμένη επίβλεψη διεργασιών. Οπότε έχουμε τρία προτεινόμενα διαγράμματα, τα συνδυαζόμενα μεικτά EWMA-CUSUM (*Combined Mixed EWMA-CUSUM*, CMEC), τα συνδυαζόμενα μεικτά διπλά EWMA-CUSUM (*Mixed Double EWMA-CUSUM*, CMDEC) και τα συνδυαζόμενα CUSUM (*Combined CUSUM*, CC) διαγράμματα ελέγχου.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό, οπότε έστω ότι το x_{ij} παριστάνει ένα συγκεκριμένο ποιοτικό χαρακτηριστικό της διεργασίας που θέλουμε να παρακολουθήσουμε. Το x_{ij} ακολουθεί κανονική $N(\mu + \delta_\mu, \sigma\delta_\mu)$, με μέσο μ και τυπική απόκλιση σ . Υποθέτουμε ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου

όταν: $\delta_\mu = 0$ και $\delta_\gamma = 1$. Έστω $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n$ οι δείκτες του x_{ij} , χωρισμένο σε ομάδες πλήθους i και μεγέθους n . Έστω:

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}}{n} \text{ και } S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n-1}$$

είναι ο μέσος και η διακύμανση της διεργασίας, αντίστοιχα, του i -οστού δείγματος. Για την παρακολούθηση της θέσης και της διασποράς της διεργασίας, ο μετασχηματισμός των δειγματικών στατιστικών δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n_i}} \quad (5.1)$$

και

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H \left[\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_0^2}; n_i - 1 \right] \right\}. \quad (5.2)$$

Η $\Phi^{-1}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση της αντίστροφης τυποποιημένης κανονικής σωρευτικής κατανομής και $H[\cdot; n_i - 1]$ είναι η συνάρτηση της χ^2 κατανομής με $n_i - 1$ βαθμούς ελευθερίας. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου και τα δύο στατιστικά U_i και V_i είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν μια κοινή τυποποιημένη κανονική κατανομή που είναι ανεξάρτητη του μεγέθους του δείγματος n_i .

5.2 Κατασκευή των διαγραμμάτων

5.2.1 Συνδυαζόμενο μεικτό EWMA-CUSUM (CMEC) διάγραμμα

Η τυπική δομή των EWMA διαγραμμάτων για τις παραμέτρους του μέσου και της διασποράς είναι:

$$Y_i = (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda U_i$$

$$Z_i = (1 - \lambda)Z_{i-1} + \lambda V_i$$

όπου $0 < \lambda \leq 1$ είναι η παράμετρος εξομάλυνσης του EWMA διαγράμματος.

Αντίστοιχα η τυπική δομή των CUSUM διαγραμμάτων για τη θέση και τη διασπορά είναι:

$$L_i^+ = \max[0, (U_i - \mu) - K + L_{i-1}^+] \quad (5.3)$$

$$L_i^- = \min[0, (U_i - \mu) + K + L_{i-1}^-]$$

$$D_i^+ = \max[0, (V_i - \mu) - K + D_{i-1}^+] \quad (5.4)$$

$$D_i^- = \min[0, (V_i - \mu) + K + D_{i-1}^-],$$

όπου $K = \frac{|\delta|}{2}$ είναι η βέλτιστη παράμετρος για την ανίχνευση μιας μετατόπισης και L_i^+ , L_i^- , D_i^+ και D_i^- είναι τα στατιστικά που σχεδιάζονται στο διάγραμμα σύμφωνα με το τυπικό CUSUM διάγραμμα.

Συνδυάζουμε όλα τα παραπάνω σε μια καινούρια δομή για τη θέση και τη διασπορά:

$$CMECL_i^+ = \max[0, (Y_i - \mu) - K_i + CMECL_{i-1}^+] \quad (5.5)$$

$$CMECL_i^- = \min[0, (Y_i - \mu) + K_i + CMECL_{i-1}^-]$$

$$CMECV_i^+ = \max[0, (Z_i - \mu) - K_i + CMECV_{i-1}^+] \quad (5.6)$$

$$CMECV_i^- = \min[0, (Z_i - \mu) + K_i + CMECV_{i-1}^-],$$

όπου $K_i = k^* \sqrt{\text{Variance}(Y_i)} = k^* \sigma_Y^2 \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^i) \right]$, με k σταθερός συντελεστής. Τα $CMECL_i^+$, $CMECL_i^-$, $CMECV_i^+$ και $CMECV_i^-$ είναι τα στατιστικά που σχεδιάζονται στο διάγραμμα. Ακόμα θέτουμε τα απαραίτητα όρια ελέγχου $\pm H_i$.

Αν τα $CMECL_i^+$ και $CMECV_i^+$ στατιστικά υπερβαίνουν το H_i ή τα $CMECL_i^-$ και $CMECV_i^-$ στατιστικά είναι μικρότερα του $-H_i$, τότε δηλώνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αλλιώς ότι είναι εντός ελέγχου.

Η ποσότητα H_i παριστάνει το χρονικό όριο στην μελέτη μας και ο τύπος της δίνεται:

$$H_i = h^* \sigma_Y^2 \left[\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^i) \right] \quad (5.7)$$

όπου η h είναι ο σταθερός συντελεστής και έχει επιλεγεί σύμφωνα με τον προαποφασισμένο ποσοστό λανθασμένων ενδείξεων. Σε αυτή την περίπτωση τα στατιστικά αλλάζουν σε:

$$CMECL_i^+ = \max[0, (Y_i - \mu) - K_i + CMECL_{i-1}^+] \quad (5.8)$$

$$CMECL_i^- = \min[0, -(Y_i - \mu) + K_i + CMECL_{i-1}^-]$$

$$CMECV_i^+ = \max[0, (Z_i - \mu) - K_i + CMECV_{i-1}^+] \quad (5.9)$$

$$CMECV_i^- = \min[0, -(Z_i - \mu) + K_i + CMECV_{i-1}^-]$$

Αν τα $CMECL_i^+$, $CMECL_i^-$, $CMECV_i^+$ ή $CMECV_i^-$ στατιστικά υπερβαίνουν το H_i , τότε δηλώνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αλλιώς ότι είναι εντός ελέγχου.

5.2.2 Συνδυαζόμενο μεικτό διπλό EWMA-CUSUM (CMDEC) διάγραμμα

Από τις εξισώσεις του τυπικού EWMA των Y_i και Z_i , έχουμε για διπλό EWMA τα εξής:

$$W_i = (1 - \lambda)W_{i-1} + \lambda Y_i$$

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda Z_i.$$

Χρησιμοποιούμε τα W_i και Q_i στη δομή των στατιστικών ενός τυπικού CUSUM και έχουμε τις εξισώσεις για τη θέση και την διασπορά:

$$CMDECL_i^+ = \max[0, (W_i - \mu) - K_{1i} + CMDECL_{i-1}^+] \quad (5.10)$$

$$CMDECL_i^- = \min[0, -(W_i - \mu) + K_{1i} + CMDECL_{i-1}^-]$$

$$CMDECV_i^+ = \max[0, (Q_i - \mu) - K_{1i} + CMDECV_{i-1}^+] \quad (5.11)$$

$$CMDECV_i^- = \min[0, -(Q_i - \mu) + K_{1i} + CMDECV_{i-1}^-]$$

όπου $k_{1i} = k_1 \sigma_{W_i}^2$, με k_1 τον συντελεστή σαν τον k και $\pm H_{D_i} = \pm h_1 \sigma_{W_i}^2$. Όμοια με την προηγούμενη πρόταση ισχύει ότι αν τα στατιστικά $CMDECL_i^+$, $CMDECL_i^-$,

$CMDECV_i^+$ ή $CMDECV_i^-$ υπερβαίνουν το H_{D_i} , τότε δηλώνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αλλιώς ότι είναι εντός ελέγχου.

5.2.3 Συνδυαζόμενο CUSUM (CC) διάγραμμα

Μια ειδική περίπτωση διαγραμμάτων για την ταυτόχρονη παρακολούθηση των παραμέτρων μιας διεργασίας είναι ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων προτάσεων, των CMEC και CMDEC διαγραμμάτων. Αν η παράμετρος εξομάλυνσης $\lambda = 1$, τότε τα CMEC και CMDEC διαγράμματα ελέγχου οδηγούν σε ένα τυπικό CUSUM διάγραμμα με την ακόλουθη δομή:

$$\begin{aligned} CCL_i^+ &= \max[0, (U_i - \mu) - K_{2i} + CCL_{i-1}^+] \\ CCL_i^- &= \min[0, (U_i - \mu) + K_{2i} + CCL_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} CCV_i^+ &= \max[0, (V_i - \mu) - K_{2i} + CCV_{i-1}^+] \\ CCV_i^- &= \min[0, (V_i - \mu) + K_{2i} + CCV_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (5.13)$$

όπου το K_{2i} έχει την ίδια δομή με τα K και K_{1i} . Τα όρια ελέγχου θα είναι H_2 και ισχύει ότι αν τα στατιστικά CCL_i^+ , CCL_i^- , CCV_i^+ ή CCV_i^- υπερβαίνουν το H_2 , τότε δηλώνουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, αλλιώς ότι είναι εντός ελέγχου.

5.2.4 Απόδοση

Θα χρησιμοποιήσουμε το ARL για να αξιολογήσουμε την απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου. Ένα διάγραμμα ελέγχου με μεγάλη τιμή ARL_0 και μικρή τιμή ARL_1 θεωρείται η καλύτερη επιλογή.

Πίνακας 5.1: Συνδυασμοί συντελεστών λ , k και h για τα ARL

| $ARL_0 = 250$ | | | | | |
|---------------|-----------|-----------|---------|-----------|---------|
| CMEC | | | | | |
| λ | h | | | | |
| | $k = 0.1$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 1.5$ | $k = 2$ |
| 0.05 | 100.71 | 51.080 | 22.025 | 8.150 | 2.3105 |
| 0.10 | 75.505 | 36.780 | 16.152 | 6.920 | 2.3195 |
| 0.20 | 52.705 | 23.480 | 10.728 | 4.940 | 1.9815 |
| 0.30 | 41.402 | 17.480 | 8.0650 | 3.920 | 1.7315 |
| 0.40 | 34.002 | 13.526 | 6.4160 | 3.206 | 1.5090 |
| 0.50 | 28.900 | 11.099 | 5.3065 | 2.750 | 1.3615 |
| 0.60 | 24.701 | 9.2860 | 4.4760 | 2.376 | 1.2590 |
| 0.70 | 21.361 | 7.8860 | 3.8860 | 2.126 | 1.2000 |
| 0.80 | 18.750 | 6.7990 | 3.3865 | 1.935 | 1.1615 |
| 0.90 | 16.466 | 5.8260 | 2.9860 | 1.796 | 1.1321 |
| 1.00 | 14.380 | 5.0850 | 2.6850 | 1.715 | 1.1108 |

| $ARL_0 = 250$ | | | | | |
|---------------|-----------|-----------|---------|-----------|---------|
| CMDEC | | | | | |
| λ | h_1 | | | | |
| | $k = 0.1$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 1.5$ | $k = 2$ |
| 0.05 | 126.03 | 70.20 | - | - | 4.960 |
| 0.10 | 102.83 | 54.10 | - | - | 3.720 |
| 0.20 | 75.125 | 37.00 | - | - | 3.920 |
| 0.30 | 60.050 | 27.70 | - | - | 3.380 |
| 0.40 | 48.251 | 21.731 | - | - | 2.225 |
| 0.50 | 40.985 | 17.19 | - | - | 1.965 |
| 0.60 | 34.431 | 13.731 | - | - | 1.689 |
| 0.70 | 28.301 | 11.001 | - | - | 1.419 |
| 0.80 | 22.990 | 8.590 | - | - | 1.247 |
| 0.90 | 18.431 | 6.6910 | - | - | 1.160 |
| 1.00 | 14.380 | 5.090 | - | - | 1.110 |

| $ARL_0 = 185$ | | | | | |
|---------------|-----------|-----------|---------|-----------|---------|
| CMEC | | | | | |
| λ | h | | | | |
| | $k = 0.1$ | $k = 0.5$ | $k = 1$ | $k = 1.5$ | $k = 2$ |
| 0.05 | 81.867 | 35.60 | 18.060 | 6.250 | 1.369 |
| 0.10 | 62.567 | 27.10 | 13.860 | 5.641 | 1.689 |
| 0.20 | 45.167 | 18.702 | 9.517 | 4.310 | 1.629 |
| 0.30 | 36.167 | 14.250 | 7.262 | 3.450 | 1.438 |
| 0.40 | 30.107 | 11.330 | 5.865 | 2.900 | 1.309 |
| 0.50 | 22.967 | 9.4600 | 4.866 | 2.490 | 1.201 |
| 0.60 | 22.105 | 8.556 | 4.166 | 2.180 | 1.130 |
| 0.70 | 19.005 | 7.306 | 3.600 | 1.959 | 1.090 |
| 0.80 | 15.367 | 5.890 | 2.965 | 1.791 | 1.055 |
| 0.90 | 14.785 | 5.456 | 2.6187 | 1.681 | 1.029 |
| 1.00 | 13.145 | 4.756 | 2.510 | 1.599 | 1.015 |

Για την αξιολόγηση της απόδοσης των προτεινόμενων διαγραμμάτων δοκιμάζουμε μετατοπίσεις. Για τα διπλά (CMEC, CMDEC και CC) αυξήσεις ή μειώσεις ($a = 0 \pm \delta_\mu$ και $b = \delta_\mu$) και για τα μονά (CMEC) μόνο αυξήσεις ($a = 0 + \delta_\mu$ και $b = \delta_\mu$).

Οι δύο παράμετροι λ και k επηρεάζουν με διαφορετικό τρόπο την ικανότητα ανίχνευσης μετατοπίσεων των διαγραμμάτων ελέγχου. Το λ που χρησιμοποιείται για τα EWMA διαγράμματα δείχνει ότι όσο μικρότερη τιμή έχει τόσο περισσότερο βοηθάει στην ανίχνευση εκτός ελέγχου πιο αποδοτικά για μικρές μετατοπίσεις. Οι μικρές τιμές του λ δίνει πάντα και μικρές τιμές ARL συγκριτικά με μεγαλύτερες τιμές για κάθε τιμή μετατόπισης. Τα αποτελέσματα δείχνουν για την παράμετρο k , συνδυαστικά με την επιλογή του λ , ότι όσο μεγαλύτερη τιμή επιλέγουμε το ARL μικραίνει, ενώ όταν μικραίνει το k το ARL μεγαλώνει.

Γενικά παρατηρούμε ότι το προτεινόμενο CMEC διάγραμμα ελέγχου προσφέρει καλύτερη απόδοση σε συγκρινόμενο με το προτεινόμενο CMDEC διάγραμμα. Επιπλέον το CMDEC διάγραμμα είναι καλύτερο από το CC διάγραμμα ελέγχου.

Στον πίνακα 5.1 βλέπουμε τις τιμές των συντελεστών λ , k και h για $ARL_0 = 250$ και 180.

Στην συνέχεια έχουμε τρεις πίνακες 5.2, 5.3 και 5.4 με τις τιμές των ARL για κάθε ένα από τα τρία προτεινόμενα διαγράμματα και έναν τέταρτο με τις τιμές των ARL ανταγωνιστικών σχημάτων.

Προσφάτως οι Ramzy και Peiris (2014) πρότειναν την ιδέα του συνδυασμού ορθογώνιων και ελλειπτικών περιοχών ελέγχου με το EWMA σχέδιο. Οι Zaman, et al. (2017) παρέθεσαν τον προηγούμενο συγκριτικό πίνακα με τις τιμές του ARL των ανταγωνιστικών σχημάτων EE_r και EE_e με τιμές ARL_0 250 και 370. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι τα CMEC, CMDEC και CC για τιμές $k \geq 0.5$ είναι καλύτερα από τα EE_r και EE_e στην ανίχνευση σημμάτων εκτός ελέγχου.

Πίνακας 5.2: Τιμές ARL των CMEC διαγραμμάτων ελέγχου.

| δ_y | $k = 0.1$ | | | | | $k = 0.5$ | | | | | $k = 1$ | | | | |
|---------------------------|--------------|-------|------|------|------|--------------|-------|-------|-------|------|--------------|-------|-------|------|------|
| | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | |
| | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 |
| $\lambda=0.05, h=100.705$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 16.1 | 16.1 | 16.1 | 16.1 | 11.0 | 10.59 | 10.60 | 10.60 | 10.58 | 7.00 | 6.34 | 6.33 | 6.33 | 6.33 | 4.00 |
| 0.50 | 23.4 | 23.4 | 23.4 | 17.8 | 11.0 | 15.93 | 15.90 | 15.85 | 11.77 | 6.98 | 10.25 | 10.27 | 10.20 | 7.14 | 3.95 |
| 1.00 | 250.0 | 47.9 | 29.0 | 17.9 | 11.0 | 252.23 | 35.08 | 20.01 | 11.86 | 6.97 | 251.88 | 26.85 | 13.50 | 7.20 | 3.86 |
| 1.50 | 26.7 | 26.4 | 25.0 | 17.9 | 11.0 | 18.11 | 17.97 | 16.69 | 11.88 | 6.99 | 11.90 | 11.56 | 10.43 | 7.15 | 3.88 |
| 2.00 | 16.8 | 16.8 | 16.8 | 15.9 | 11.0 | 11.02 | 11.05 | 10.95 | 10.24 | 7.00 | 6.57 | 6.64 | 6.50 | 5.88 | 3.88 |
| $\lambda=0.1, h=75.505$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 13.0 | 12.9 | 12.9 | 12.9 | 9.0 | 8.22 | 8.22 | 8.23 | 8.23 | 5.04 | 5.00 | 5.01 | 5.00 | 4.97 | 3.00 |
| 0.50 | 19.1 | 19.1 | 19.1 | 14.3 | 8.8 | 12.55 | 15.57 | 15.51 | 9.15 | 5.18 | 8.32 | 8.29 | 8.22 | 5.63 | 2.99 |
| 1.00 | 250.0 | 42.5 | 24.0 | 14.4 | 8.7 | 255.22 | 30.20 | 16.01 | 9.22 | 5.31 | 246.97 | 24.08 | 11.17 | 5.71 | 2.97 |
| 1.50 | 21.9 | 21.8 | 20.4 | 14.4 | 8.8 | 14.41 | 14.16 | 13.05 | 9.23 | 5.35 | 9.63 | 9.32 | 8.30 | 5.65 | 2.97 |
| 2.00 | 13.5 | 13.5 | 13.5 | 12.7 | 8.7 | 8.60 | 8.59 | 8.49 | 7.85 | 5.33 | 5.20 | 5.16 | 5.08 | 4.52 | 2.95 |
| $\lambda=0.2, h=52.705$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 10.0 | 10.0 | 10.0 | 10.1 | 6.7 | 5.88 | 5.87 | 5.87 | 5.85 | 3.94 | 3.66 | 3.65 | 3.65 | 3.63 | 2.00 |
| 0.50 | 15.5 | 15.5 | 15.4 | 11.2 | 6.6 | 9.32 | 9.34 | 9.26 | 6.56 | 3.78 | 6.40 | 6.41 | 6.29 | 4.14 | 2.00 |
| 1.00 | 250.3 | 38.4 | 20.1 | 11.3 | 6.6 | 253.94 | 26.33 | 12.44 | 6.62 | 3.67 | 249.36 | 23.50 | 8.97 | 4.24 | 2.04 |
| 1.50 | 18.1 | 17.9 | 16.5 | 11.4 | 6.6 | 10.89 | 10.67 | 9.58 | 6.60 | 3.68 | 7.58 | 7.22 | 6.23 | 4.12 | 2.07 |
| 2.00 | 10.5 | 10.5 | 10.5 | 9.8 | 6.6 | 6.14 | 6.10 | 6.02 | 5.49 | 3.68 | 3.76 | 3.75 | 3.65 | 3.18 | 2.02 |
| $\lambda=0.3, h=41.402$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 8.7 | 8.7 | 8.7 | 8.6 | 5.4 | 4.72 | 4.73 | 4.71 | 4.71 | 3.00 | 2.95 | 2.94 | 2.94 | 2.89 | 1.50 |
| 0.50 | 13.8 | 13.9 | 13.9 | 9.7 | 5.4 | 7.84 | 7.84 | 7.75 | 5.30 | 2.98 | 5.44 | 5.46 | 5.33 | 3.33 | 1.51 |
| 1.00 | 252.2 | 36.9 | 18.4 | 9.8 | 5.5 | 248.37 | 24.89 | 10.73 | 5.39 | 2.87 | 246.16 | 24.61 | 8.05 | 3.45 | 1.50 |
| 1.50 | 16.4 | 16.2 | 14.8 | 9.9 | 5.5 | 9.26 | 9.00 | 7.93 | 5.34 | 2.86 | 6.54 | 6.16 | 5.24 | 3.31 | 1.54 |
| 2.00 | 9.1 | 9.1 | 9.0 | 8.4 | 5.5 | 4.90 | 4.91 | 4.82 | 4.32 | 2.84 | 3.00 | 2.98 | 2.89 | 2.47 | 1.52 |
| $\lambda=0.5, h=28.90$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 7.2 | 4.0 | 3.37 | 3.36 | 3.37 | 3.34 | 2.00 | 2.10 | 2.10 | 2.10 | 2.02 | 1.00 |
| 0.50 | 12.2 | 12.2 | 12.2 | 8.2 | 4.1 | 6.19 | 6.18 | 6.07 | 3.89 | 1.99 | 4.58 | 4.55 | 4.38 | 2.45 | 1.00 |
| 1.00 | 253.5 | 34.6 | 16.7 | 8.3 | 4.3 | 249.17 | 23.99 | 9.01 | 3.97 | 1.93 | 247.72 | 30.15 | 7.43 | 2.59 | 1.04 |
| 1.50 | 14.6 | 14.4 | 13.0 | 8.3 | 4.3 | 7.50 | 7.15 | 6.11 | 3.91 | 1.91 | 5.48 | 5.08 | 4.09 | 2.41 | 1.13 |
| 2.00 | 7.7 | 7.6 | 7.6 | 6.9 | 4.3 | 3.54 | 3.51 | 3.41 | 2.97 | 1.88 | 2.19 | 2.16 | 2.05 | 1.74 | 1.13 |
| $\lambda=0.8, h=18.7502$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 5.9 | 5.9 | 5.9 | 5.9 | 3.0 | 2.40 | 2.40 | 2.40 | 2.37 | 1.00 | 1.50 | 1.50 | 1.50 | 1.45 | 1.00 |
| 0.50 | 10.6 | 10.6 | 10.6 | 6.9 | 3.1 | 5.14 | 5.16 | 5.00 | 2.86 | 1.01 | 4.41 | 4.44 | 4.21 | 1.84 | 1.00 |
| 1.00 | 253.3 | 31.8 | 14.8 | 6.9 | 3.3 | 252.94 | 26.00 | 8.03 | 2.96 | 1.11 | 254.05 | 41.98 | 8.11 | 2.02 | 1.00 |
| 1.50 | 12.9 | 12.6 | 11.2 | 7.0 | 3.3 | 6.22 | 5.76 | 4.76 | 2.79 | 1.22 | 4.89 | 4.48 | 3.43 | 1.85 | 1.02 |
| 2.00 | 6.4 | 6.4 | 6.2 | 5.6 | 3.3 | 2.51 | 2.49 | 2.39 | 2.01 | 1.23 | 1.71 | 1.67 | 1.57 | 1.31 | 1.04 |
| $\lambda=1, h=14.3802$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 5.3 | 5.3 | 5.3 | 5.3 | 3.0 | 2.05 | 2.03 | 2.04 | 1.96 | 1.00 | 1.32 | 1.33 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |
| 0.50 | 9.9 | 9.9 | 9.8 | 6.2 | 2.9 | 4.87 | 4.86 | 4.69 | 2.45 | 1.00 | 5.10 | 5.10 | 4.86 | 1.69 | 1.00 |
| 1.00 | 248.0 | 30.5 | 13.8 | 6.4 | 2.8 | 252.00 | 28.58 | 7.79 | 2.56 | 1.02 | 248.41 | 55.06 | 9.80 | 1.95 | 1.01 |
| 1.50 | 11.9 | 11.6 | 10.2 | 6.3 | 2.8 | 5.61 | 5.22 | 4.20 | 2.39 | 1.09 | 4.72 | 4.31 | 3.33 | 1.75 | 1.01 |
| 2.00 | 5.8 | 5.7 | 5.6 | 4.9 | 2.8 | 2.18 | 2.11 | 2.00 | 1.65 | 1.10 | 1.63 | 1.56 | 1.51 | 1.27 | 1.03 |
| $k = 1.5$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\lambda=0.05, h=8.15$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 3.50 | 3.50 | 3.50 | 3.48 | 2.00 | 3.09 | 3.08 | 3.08 | 3.01 | 1.39 | 2.35 | 2.35 | 2.36 | 2.28 | 1.00 |
| 0.50 | 6.55 | 6.51 | 6.40 | 4.03 | 1.93 | 5.90 | 5.92 | 5.78 | 3.55 | 1.44 | 4.96 | 4.97 | 4.76 | 2.71 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 22.19 | 9.23 | 4.14 | 1.80 | 250.62 | 22.63 | 8.51 | 3.66 | 1.49 | 250.00 | 24.17 | 7.38 | 2.81 | 1.07 |
| 1.50 | 7.70 | 7.32 | 6.28 | 3.98 | 1.81 | 6.91 | 6.60 | 5.57 | 3.50 | 1.53 | 5.81 | 5.51 | 4.44 | 2.64 | 1.16 |
| 2.00 | 3.60 | 3.56 | 3.46 | 2.94 | 1.76 | 3.15 | 3.13 | 3.01 | 2.55 | 1.52 | 2.38 | 2.37 | 2.26 | 1.86 | 1.18 |
| $\lambda=0.1, h=6.92$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2.00 | 2.01 | 2.01 | 1.93 | 1.00 | 1.53 | 1.52 | 1.54 | 1.48 | 1.00 | 1.29 | 1.27 | 1.29 | 1.16 | 1.00 |
| 0.50 | 4.48 | 4.48 | 4.29 | 2.34 | 1.00 | 4.24 | 4.26 | 4.00 | 1.86 | 1.00 | 6.01 | 5.95 | 5.75 | 1.62 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 29.07 | 7.27 | 2.45 | 1.02 | 250.09 | 38.86 | 7.96 | 2.01 | 1.00 | 250.55 | 63.29 | 11.58 | 1.92 | 1.00 |
| 1.50 | 5.36 | 4.91 | 3.94 | 2.25 | 1.09 | 4.83 | 4.40 | 3.41 | 1.84 | 1.03 | 4.90 | 4.39 | 3.30 | 1.68 | 1.01 |
| 2.00 | 2.06 | 2.02 | 1.93 | 1.60 | 1.10 | 1.71 | 1.70 | 1.60 | 1.34 | 1.04 | 1.54 | 1.52 | 1.44 | 1.23 | 1.02 |
| $\lambda=0.2, h=4.94$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2.00 | 2.01 | 2.01 | 1.93 | 1.00 | 1.53 | 1.52 | 1.54 | 1.48 | 1.00 | 1.29 | 1.27 | 1.29 | 1.16 | 1.00 |
| 0.50 | 4.48 | 4.48 | 4.29 | 2.34 | 1.00 | 4.24 | 4.26 | 4.00 | 1.86 | 1.00 | 6.01 | 5.95 | 5.75 | 1.62 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 29.07 | 7.27 | 2.45 | 1.02 | 250.09 | 38.86 | 7.96 | 2.01 | 1.00 | 250.55 | 63.29 | 11.58 | 1.92 | 1.00 |
| 1.50 | 5.36 | 4.91 | 3.94 | 2.25 | 1.09 | 4.83 | 4.40 | 3.41 | 1.84 | 1.03 | 4.90 | 4.39 | 3.30 | 1.68 | 1.01 |
| 2.00 | 2.06 | 2.02 | 1.93 | 1.60 | 1.10 | 1.71 | 1.70 | 1.60 | 1.34 | 1.04 | 1.54 | 1.52 | 1.44 | 1.23 | 1.02 |
| $\lambda=0.3, h=3.92$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2.00 | 2.01 | 2.01 | 1.93 | 1.00 | 1.53 | 1.52 | 1.54 | 1.48 | 1.00 | 1.29 | 1.27 | 1.29 | 1.16 | 1.00 |
| 0.50 | 4.48 | 4.48 | 4.29 | 2.34 | 1.00 | 4.24 | 4.26 | 4.00 | 1.86 | 1.00 | 6.01 | 5.95 | 5.75 | 1.62 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 29.07 | 7.27 | 2.45 | 1.02 | 250.09 | 38.86 | 7.96 | 2.01 | 1.00 | 250.55 | 63.29 | 11.58 | 1.92 | 1.00 |
| 1.50 | 5.36 | 4.91 | 3.94 | 2.25 | 1.09 | 4.83 | 4.40 | 3.41 | 1.84 | 1.03 | 4.90 | 4.39 | 3.30 | 1.68 | 1.01 |
| 2.00 | 2.06 | 2.02 | 1.93 | 1.60 | 1.10 | 1.71 | 1.70 | 1.60 | 1.34 | 1.04 | 1.54 | 1.52 | 1.44 | 1.23 | 1.02 |
| $\lambda=0.5, h=2.75$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2.00 | 2.01 | 2.01 | 1.93 | 1.00 | 1.53 | 1.52 | 1.54 | 1.48 | 1.00 | 1.29 | 1.27 | 1.29 | 1.16 | 1.00 |
| 0.50 | 4.48 | 4.48 | 4.29 | 2.34 | 1.00 | 4.24 | 4.26 | 4.00 | 1.86 | 1.00 | 6.01 | 5.95 | 5.75 | 1.62 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 29.07 | 7.27 | 2.45 | 1.02 | 250.09 | 38.86 | 7.96 | 2.01 | 1.00 | 250.55 | 63.29 | 11.58 | 1.92 | 1.00 |
| 1.50 | 5.36 | 4.91 | 3.94 | 2.25 | 1.09 | 4.83 | 4.40 | 3.41 | 1.84 | 1.03 | 4.90 | 4.39 | 3.30 | 1.68 | 1.01 |
| 2.00 | 2.06 | 2.02 | 1.93 | 1.60 | 1.10 | 1.71 | 1.70 | 1.60 | 1.34 | 1.04 | 1.54 | 1.52 | 1.44 | 1.23 | 1.02 |
| $\lambda=0.8, h=1.935$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.25 | 2.00 | 2.01 | 2.01 | 1.93 | 1.00 | 1.53 | 1.52 | 1.54 | 1.48 | 1.00 | 1.29 | 1.27 | 1.29 | 1.16 | 1.00 |
| 0.50 | 4.48 | 4.48 | 4.29 | 2.34 | 1.00 | 4.24 | 4.26 | 4.00 | 1.86 | 1.00 | 6.01 | 5.95 | 5.75 | 1.62 | 1.00 |
| 1.00 | 250.00 | 29.07 | 7.27 | 2.45 | 1.02 | 250.09 | 38.86 | 7.96 | 2.01 | 1.00 | 250.55 | 63.29 | 11.58 | 1.92 | 1.00 |
| 1.50 | 5.36 | 4.91 | 3.94 | 2.25 | 1.09 | 4.83 | 4.40 | 3.41 | 1.84 | 1.03 | 4.90 | 4.39 | 3.30 | 1.68 | 1.01 |
| 2.00 | 2.06 | 2.02 | 1.93 | 1.60 | 1.10 | 1.71 | 1.70 | 1.60 | 1.34 | 1.04 | 1.54 | 1.52 | 1.44 | 1.23 | 1.02 |

Πίνακας 5.3: Τιμές ARL των συνδυαζόμενων CUSUM (CC) διαγραμμάτων ελέγχου.

| δ_y | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | |
|------------|------------------------|-------|------|------|------|----------------------|-------|-------|------|------|------------------------|--------|-------|------|------|
| | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 | 0.00 | 0.25 | 0.50 | 1.0 | 2.00 |
| | $k_2=0.1, h_2=14.3802$ | | | | | $k_2=0.5, h_2=5.085$ | | | | | $k_2=0.75, h_2=3.5254$ | | | | |
| 0.25 | 5.30 | 5.30 | 5.30 | 5.30 | 3.00 | 2.05 | 2.03 | 2.04 | 1.96 | 1.00 | 1.52 | 1.52 | 1.52 | 1.48 | 1.00 |
| 0.50 | 9.90 | 9.90 | 9.80 | 6.20 | 2.90 | 4.87 | 4.86 | 4.69 | 2.45 | 1.00 | 4.56 | 4.53 | 4.33 | 1.90 | 1.00 |
| 1.00 | 248 | 30.5 | 13.8 | 6.40 | 2.80 | 252.00 | 28.58 | 7.79 | 2.56 | 1.02 | 249.00 | 39.14 | 8.23 | 2.07 | 1.00 |
| 1.50 | 11.90 | 11.6 | 10.2 | 6.30 | 2.80 | 5.61 | 5.22 | 4.20 | 2.39 | 1.09 | 4.93 | 4.40 | 3.48 | 1.90 | 1.03 |
| 2.00 | 5.80 | 5.70 | 5.60 | 4.90 | 2.80 | 2.18 | 2.11 | 2.00 | 1.65 | 1.10 | 1.75 | 1.70 | 1.63 | 1.34 | 1.04 |
| | $k_2=1, h_2=2.685$ | | | | | $k_2=1.5, h_2=1.715$ | | | | | $k_2=2, h_2=1.1108$ | | | | |
| 0.25 | 1.32 | 1.33 | 1.32 | 1.22 | 1.00 | 1.40 | 1.40 | 1.40 | 1.27 | 1.00 | 1.96 | 1.94 | 1.95 | 1.81 | 1.00 |
| 0.50 | 5.10 | 5.10 | 4.86 | 1.69 | 1.00 | 12.19 | 12.07 | 11.94 | 1.95 | 1.00 | 38.95 | 37.81 | 37.96 | 3.85 | 1.00 |
| 1.00 | 248 | 55.06 | 9.80 | 1.95 | 1.00 | 250 | 94.31 | 18.41 | 2.25 | 1.00 | 251.8 | 120.10 | 28.95 | 3.16 | 1.00 |
| 1.50 | 4.72 | 4.31 | 3.33 | 1.75 | 1.01 | 5.54 | 5.04 | 3.78 | 1.82 | 1.01 | 6.80 | 6.20 | 4.53 | 2.12 | 1.03 |
| 2.00 | 1.63 | 1.56 | 1.51 | 1.27 | 1.03 | 1.63 | 1.59 | 1.50 | 1.26 | 1.03 | 1.80 | 1.76 | 1.63 | 1.34 | 1.03 |

Πίνακας 5.4: Τιμές ARL των CMDEC διαγραμμάτων ελέγχου.

| δ_y | $ARL_0 = 250$ | | | | | | | | | | $ARL_0 = 370$ | | | | |
|------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------|-------|-------|------|------|
| | $k_1 = 0.1$ | | | | | $k_1 = 0.5$ | | | | | $k_1 = 2$ | | | | |
| | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | |
| | $\lambda=0.05, h_1=126.025$ | | | | | $\lambda=0.1, h_1=70.20$ | | | | | $\lambda=0.05, h_1=1.955$ | | | | |
| 0.25 | 23.66 | 23.62 | 23.63 | 23.64 | 16.78 | 16.92 | 16.93 | 16.93 | 16.91 | 11.44 | 1.83 | 1.81 | 1.82 | 1.71 | 1.00 |
| 0.50 | 32.79 | 32.74 | 32.83 | 25.88 | 16.69 | 24.29 | 24.27 | 24.26 | 18.61 | 11.48 | 4.97 | 4.93 | 4.65 | 2.21 | 1.00 |
| 1.00 | 253.67 | 59.75 | 39.33 | 25.91 | 16.67 | 256.55 | 47.16 | 29.64 | 18.65 | 11.50 | 370.02 | 22.36 | 7.87 | 2.42 | 1.01 |
| 1.50 | 36.52 | 36.17 | 34.74 | 25.94 | 16.70 | 27.30 | 27.09 | 25.54 | 18.79 | 11.53 | 5.72 | 5.20 | 4.15 | 2.23 | 1.06 |
| 2.00 | 24.51 | 24.36 | 24.39 | 23.29 | 16.66 | 17.59 | 17.48 | 17.46 | 16.54 | 11.43 | 2.03 | 1.99 | 1.90 | 1.51 | 1.07 |
| | $\lambda=0.1, h_1=102.825$ | | | | | $\lambda=0.1, h_1=54.10$ | | | | | $\lambda=0.1, h_1=3.715$ | | | | |
| 0.25 | 18.58 | 18.59 | 18.60 | 18.58 | 13.02 | 12.99 | 13.00 | 12.99 | 12.97 | 8.99 | 2.84 | 2.82 | 2.82 | 2.75 | 1.00 |
| 0.50 | 25.77 | 25.76 | 25.76 | 20.26 | 13.15 | 18.59 | 18.59 | 18.56 | 14.25 | 8.90 | 6.28 | 6.28 | 6.02 | 3.34 | 1.02 |
| 1.00 | 253.0 | 49.60 | 31.12 | 20.33 | 13.19 | 249.68 | 37.70 | 22.71 | 14.31 | 8.85 | 369.56 | 24.49 | 9.22 | 3.49 | 1.14 |
| 1.50 | 28.74 | 28.74 | 27.29 | 20.43 | 13.22 | 20.87 | 20.63 | 19.41 | 14.33 | 8.88 | 7.23 | 6.82 | 5.63 | 3.22 | 1.26 |
| 2.00 | 19.26 | 19.27 | 19.18 | 18.35 | 13.22 | 13.41 | 13.42 | 13.38 | 12.59 | 8.88 | 2.89 | 2.80 | 2.63 | 2.16 | 1.27 |
| | $\lambda=0.2, h_1=75.125$ | | | | | $\lambda=0.1, h_1=54.10$ | | | | | $\lambda=0.2, h_1=3.915$ | | | | |
| 0.25 | 13.53 | 13.53 | 13.52 | 13.52 | 9.41 | 9.03 | 9.02 | 9.02 | 9.01 | 6.00 | 2.77 | 2.78 | 2.77 | 2.70 | 1.00 |
| 0.50 | 19.34 | 19.36 | 19.35 | 14.84 | 9.45 | 13.19 | 13.20 | 13.13 | 9.92 | 6.03 | 5.86 | 5.87 | 5.68 | 3.26 | 1.02 |
| 1.00 | 253.26 | 42.86 | 24.06 | 14.96 | 9.49 | 251.39 | 30.19 | 16.51 | 9.98 | 6.08 | 369.51 | 26.65 | 8.72 | 3.35 | 1.15 |
| 1.50 | 22.08 | 21.88 | 20.57 | 14.95 | 9.52 | 14.95 | 14.74 | 13.59 | 9.98 | 6.09 | 6.89 | 6.45 | 5.37 | 3.14 | 1.26 |
| 2.00 | 14.08 | 14.07 | 14.01 | 13.24 | 9.49 | 9.35 | 9.33 | 9.25 | 8.63 | 6.10 | 2.80 | 2.72 | 2.61 | 2.13 | 1.27 |
| | $\lambda=0.3, h_1=60.005$ | | | | | $\lambda=0.3, h_1=27.70$ | | | | | $\lambda=0.3, h_1=3.3790$ | | | | |
| 0.25 | 11.09 | 11.09 | 11.09 | 11.09 | 7.68 | 6.95 | 6.94 | 6.94 | 6.92 | 4.66 | 2.39 | 2.38 | 2.39 | 2.33 | 1.00 |
| 0.50 | 16.58 | 16.57 | 16.54 | 12.27 | 7.59 | 10.46 | 10.47 | 10.41 | 7.66 | 4.58 | 5.23 | 5.23 | 5.06 | 2.82 | 1.00 |
| 1.00 | 254.91 | 39.97 | 21.22 | 12.36 | 7.58 | 250.28 | 27.41 | 13.53 | 7.76 | 4.56 | 370.58 | 30.46 | 8.01 | 2.94 | 1.06 |
| 1.50 | 19.21 | 19.02 | 17.66 | 12.41 | 7.60 | 12.05 | 11.77 | 10.76 | 7.70 | 4.58 | 6.14 | 5.76 | 4.71 | 2.67 | 1.16 |
| 2.00 | 11.61 | 11.57 | 11.53 | 10.80 | 7.59 | 7.22 | 7.17 | 7.08 | 6.53 | 4.57 | 2.39 | 2.37 | 2.25 | 1.85 | 1.17 |
| | $\lambda=0.5, h_1=40.985$ | | | | | $\lambda=0.5, h_1=17.190$ | | | | | $\lambda=0.5, h_1=2.3498$ | | | | |
| 0.25 | 8.50 | 8.49 | 8.49 | 8.48 | 5.16 | 4.65 | 4.65 | 4.64 | 4.64 | 3.00 | 1.77 | 1.78 | 1.78 | 1.73 | 1.00 |
| 0.50 | 13.72 | 13.71 | 13.69 | 9.58 | 5.31 | 7.63 | 7.62 | 7.55 | 5.19 | 2.99 | 4.53 | 4.54 | 4.31 | 2.12 | 1.00 |
| 1.00 | 253.54 | 36.90 | 18.37 | 9.64 | 5.41 | 249.45 | 24.47 | 10.47 | 5.29 | 2.90 | 366.19 | 42.26 | 8.28 | 2.27 | 1.01 |
| 1.50 | 16.33 | 16.03 | 14.65 | 9.69 | 5.45 | 9.06 | 8.77 | 7.70 | 5.22 | 2.89 | 5.43 | 4.95 | 3.85 | 2.06 | 1.05 |
| 2.00 | 8.98 | 8.98 | 8.91 | 8.20 | 5.46 | 4.81 | 4.80 | 4.73 | 4.25 | 2.85 | 1.91 | 1.86 | 1.76 | 1.44 | 1.06 |
| | $\lambda=0.8, h_1=22.985$ | | | | | $\lambda=0.8, h_1=8.590$ | | | | | $\lambda=0.8, h_1=2.3498$ | | | | |
| 0.25 | 6.40 | 6.41 | 6.41 | 6.40 | 3.90 | 2.83 | 2.82 | 2.82 | 2.78 | 1.16 | 1.38 | 1.38 | 1.38 | 1.28 | 1.00 |
| 0.50 | 11.27 | 11.28 | 11.23 | 7.40 | 3.73 | 5.50 | 5.51 | 5.41 | 3.24 | 1.31 | 7.39 | 7.35 | 7.13 | 1.79 | 1.00 |
| 1.00 | 248.99 | 33.11 | 15.59 | 7.48 | 3.66 | 249.49 | 24.45 | 8.33 | 3.35 | 1.41 | 368.57 | 82.01 | 13.69 | 2.06 | 1.00 |
| 1.50 | 13.57 | 13.38 | 11.96 | 7.50 | 3.69 | 6.66 | 6.30 | 5.31 | 3.25 | 1.45 | 5.55 | 4.98 | 3.61 | 1.77 | 1.02 |
| 2.00 | 6.85 | 6.83 | 6.78 | 6.06 | 3.69 | 2.94 | 2.91 | 2.79 | 2.38 | 1.45 | 1.61 | 1.59 | 1.50 | 1.25 | 1.02 |
| | $\lambda=1, h_1=14.3802$ | | | | | $\lambda=1, h_1=5.085$ | | | | | $\lambda=1, h_1=1.2228$ | | | | |
| 0.25 | 5.35 | 5.34 | 5.34 | 5.33 | 3.00 | 2.05 | 2.03 | 2.04 | 1.96 | 1.00 | 2.10 | 2.11 | 2.12 | 1.96 | 1.00 |
| 0.50 | 9.85 | 9.89 | 9.81 | 6.25 | 2.92 | 4.87 | 4.86 | 4.69 | 2.45 | 1.00 | 48.01 | 48.84 | 47.71 | 4.30 | 1.00 |
| 1.00 | 248.00 | 30.50 | 13.83 | 6.36 | 2.82 | 256.84 | 28.58 | 7.79 | 2.56 | 1.02 | 367.69 | 160.3 | 36.84 | 3.33 | 1.00 |
| 1.50 | 11.86 | 11.60 | 10.21 | 6.28 | 2.85 | 5.61 | 5.22 | 4.20 | 2.39 | 1.09 | 7.69 | 6.94 | 5.08 | 2.28 | 1.03 |
| 2.00 | 5.83 | 5.74 | 5.61 | 4.93 | 2.85 | 2.18 | 2.11 | 2.00 | 1.65 | 1.10 | 1.88 | 1.84 | 1.71 | 1.39 | 1.04 |

Πίνακας 5.5: Τιμές ARL των διαφόρων ανταγωνιστικών σχεδίων.

| δ_γ | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | |
|-----------------|---|-------|-------|-------|------|---|------|------|------|------|--|--------|-------|------|------|
| | 0.00 | 0.2 | 0.40 | 1.0 | 3.00 | 0.00 | 0.2 | 0.40 | 1.0 | 3.00 | 0.00 | 0.2 | 0.40 | 1.0 | 3.00 |
| | <i>EE_r chart</i> | | | | | <i>EE_e chart</i> | | | | | <i>Max - CUSUM</i> | | | | |
| 0.50 | 5.79 | 5.79 | 5.79 | 5.70 | 2.59 | 6.33 | 6.27 | 6.05 | 4.95 | 2.48 | 250.0 | 69.66 | 29.13 | 7.99 | 3.44 |
| 1.00 | 250 | 129.5 | 48.0 | 10.1 | 2.61 | 250 | 128 | 49.2 | 10.5 | 2.77 | 82.42 | 3.6.97 | 19.58 | 7.40 | 3.44 |
| 1.50 | 8.15 | 8.07 | 7.82 | 6.38 | 2.72 | 7.90 | 7.75 | 7.42 | 5.83 | 2.68 | 41.84 | 24.08 | 15.20 | 6.93 | 3.42 |
| 3.00 | 2.57 | 2.57 | 2.57 | 5.52 | 2.16 | 5.47 | 2.46 | 2.46 | 5.41 | 2.03 | 18.81 | 13.72 | 10.39 | 5.95 | 3.37 |
| δ_γ | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | | δ_μ | | | | |
| | <i>Max - GWMA chart</i> (q, a, L_{MG}) | | | | | <i>ONE - EWMA chart</i> $k = 3.246, \lambda = 0.8$ | | | | | <i>Max - DEWMA chart</i> $k = 3.251, \lambda = 0.8$ | | | | |
| 0.50 | 1.70 | 1.750 | 1.750 | 1.662 | 1.00 | 2.9 | 2.9 | 2.9 | 2.8 | 1.00 | 2.2 | 2.2 | 2.2 | 2.1 | 1.00 |
| 1.00 | 4.02 | 4.019 | 3.821 | 2.03 | 1.00 | 26.4 | 27.0 | 26.5 | 5.1 | 1.00 | 13.9 | 13.9 | 13.6 | 3.1 | 1.00 |
| 1.50 | 4.69 | 4.290 | 3.42 | 2.02 | 1.01 | 7.1 | 6.5 | 4.9 | 2.6 | 1.01 | 6.6 | 5.9 | 4.5 | 2.4 | 1.20 |
| 3.00 | 1.93 | 1.901 | 1.8 | 1.527 | 1.03 | 2.3 | 2.3 | 2.1 | 1.8 | 1.03 | 2.2 | 2.2 | 2.1 | 1.7 | 1.20 |

Οι Sheu, et al. το 2012 πρότειναν το max-GEWMA διάγραμμα ελέγχου για ταυτόχρονη παρακολούθηση και το συνέκριναν με το MEWMA διάγραμμα ελέγχου με $\lambda = 0.05$. Το CMEC και το max-GEWMA έχουν σχεδόν την ίδια ικανότητα στην ανίχνευση σημάτων εκτός ελέγχου για μικρές μετατοπίσεις αλλά για μεγάλες αλλαγές (δ_μ και $\delta_\gamma \geq 1.5$) το διάγραμμα ελέγχου CMEC έχει καλύτερη απόδοση.

Οι Chen, et al. (2001) συνέκριναν το διάγραμμα τους με μια συνδυασμένη δομή από \bar{x} και S διαγράμματα και με το σχέδιο των Crowder και Hamilton (1992) έναν συνδυασμό του EWMA \bar{x} και $\log(S^2)$ διαγραμμάτων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι το διάγραμμά τους είναι μια αρκετά ελκυστική εναλλακτική στην ταυτόχρονη παρακολούθηση. Επιπροσθέτως, συγκρίνοντας το CMEC με το One EWMA των Chen, et al. (2001) μας έδειξε ότι για κάθε τιμή $k \geq 1$ το CMEC έχει σαφές προβάδισμα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Μάλιστα για μεγάλες τιμές, για παράδειγμα $\lambda = 0.8$ το CMEC είναι αποτελεσματικότερο, αλλά για τιμές $k > 1$ και $\lambda < 0.3$ το One EWMA είναι καλύτερο. Ενώ για $\lambda \geq 0.3$ το CMEC έχει καλύτερη απόδοση. Αντίστοιχα το CC διάγραμμα με $k \geq 0.75$ υπερέρχει του One EWMA διαγράμματος για $\lambda \geq 0.3$.

Ο Khoo, et al. (2010) συνέχισαν την μελέτη των Chen, et al. (2001) με τα διπλά EWMA σχέδια για ταυτόχρονη παρακολούθηση. Το CMEC έχει την σχεδόν την ίδια απόδοση με τα διπλά EWMA σχέδια για κάθε τιμή του λ όταν το $k = 2$, ενώ για όλες τις άλλες τιμές του k το CMEC υπερτερεί. Το CC σχέδιο είναι ανώτερο

του διπλών EWMA σχεδίων για κάποιους συνδυασμούς λ και k . Αντίστοιχα το CMDEC δίνει καλύτερη απόδοση, ειδικά όταν $\lambda > 0.5$.

Το CC διάγραμμα έχει ανώτερη απόδοση συγκριτικά με το max-CUSUM σχέδιο των Cheng και Thaga (2010) για διάφορες τιμές του k για όλες τις αλλαγές. Επιπλέον πλεονέκτημα είναι η ικανότητα αμφίπλευρου ελέγχου. Επίσης τα CMEC και CMDEC διαγράμματα έχουν καλύτερη απόδοση συγκριτικά με το max-CUSUM διάγραμμα. Οι Cheng και Thaga (2010) έδειξαν ότι το max-CUSUM διάγραμμα είναι καλύτερο από το max διάγραμμα των Chen και Cheng (1998) άρα η απόδοση των CMEC, CMDEC και CC διαγραμμάτων είναι καλύτερη από το max διάγραμμα.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τρία παραδείγματα εφαρμογής διαγραμμάτων ελέγχου από αυτά που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Τα σύνολα των δεδομένων που χρησιμοποιούνται προέρχονται από πραγματικά δεδομένα ή ακολουθούν την κανονική κατανομή με προαποφασισμένη μετατόπιση, ώστε να γίνουν συγκρίσεις της συμπεριφοράς των διαγραμμάτων μεταξύ τους.

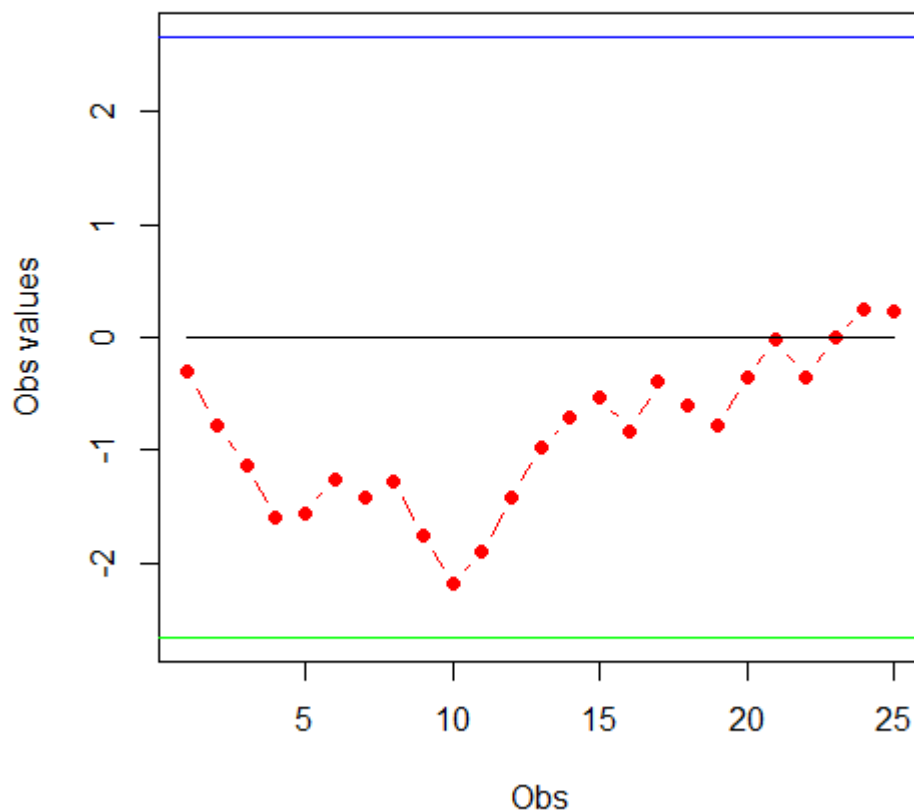
6.1 Παράδειγμα 1

Στο παρόν παράδειγμα ακολουθούμε την διαδικασία των Yeh et al. (2004). Τα δεδομένα προέρχονται από τον Montgomery (2013) και είναι μετρήσεις που σχετίζονται με την εσωτερική διάμετρο ενισχυμένων δακτυλίων πιστονιών. Για το παράδειγμα χρησιμοποιούμε τρία σύνολα δεδομένων, το κάθε σύνολο δεδομένων περιέχει 25 δείγματα με 5 παρατηρήσεις σε κάθε δείγμα.

Στο πρώτο σύνολο δεδομένων τα πρώτα 10 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με εντός ελέγχου μέσο $\mu_0 = 74.001$ και τυπική απόκλιση $\sigma_0 = 0.009$. Τα επόμενα 15 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $\mu_a = 74.0055$ και τυπική απόκλιση $\sigma_a = 0.009$. Δηλαδή έχουμε μετατόπιση του μέσου της διεργασίας.

Για την κατασκευή του CUSUM M διαγράμματος χρησιμοποιήσαμε την παράμετρο H με τιμή 2.6566. Στο διάγραμμα, Σχήμα 6.1, παρατηρούμε ότι εσφαλμένα έχουμε ένδειξη εντός ελέγχου διεργασίας μέχρι και την τελευταία παρατήρηση.

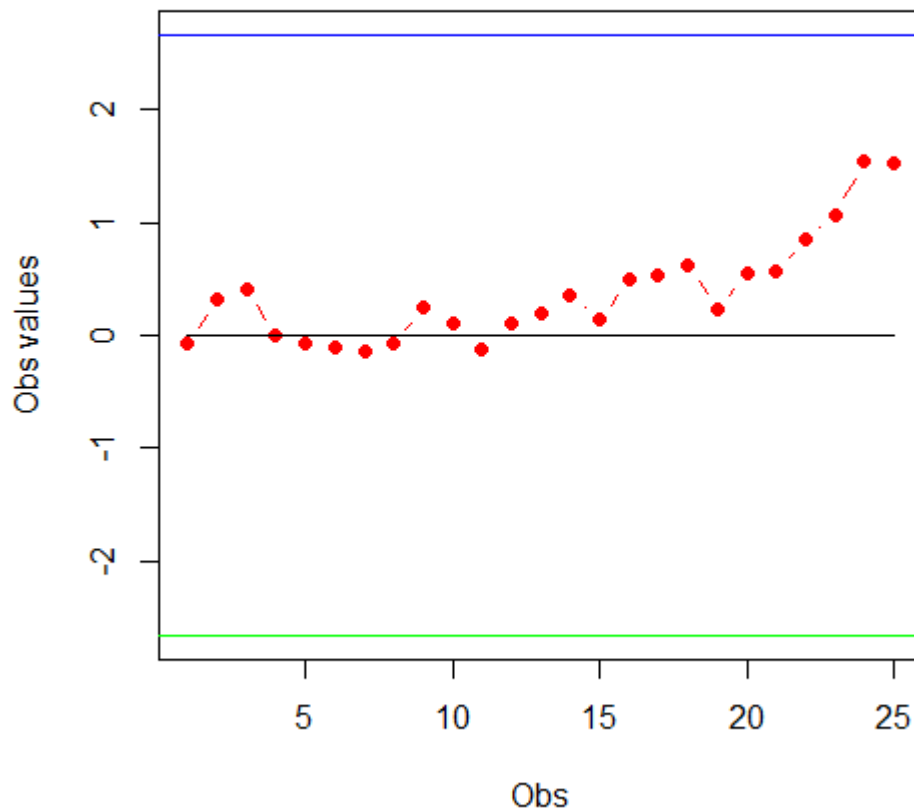
CUSUM M-chart (1st sample)



Σχήμα 6.1: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου

Αντίστοιχα, το CUSUM V διάγραμμα κατασκευάστηκε με ίδια τιμή στην παράμετρο H . Παρατηρώντας το διάγραμμα, Σχήμα 6.2, μας δίνει σταθερά λανθασμένες ενδείξεις εντός ελέγχου διεργασίας.

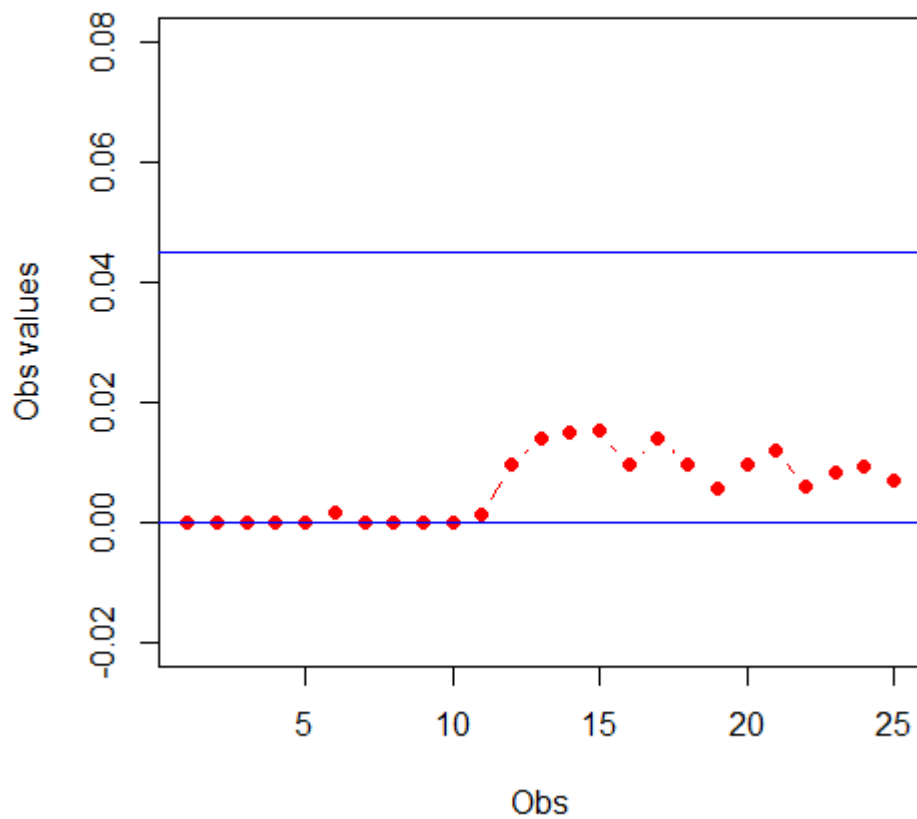
CUSUM V-chart (1st sample)



Σχήμα 6.2: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου

Για την κατασκευή του Μονόπλευρου Tabular CUSUM διαγράμματος χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους K και h με τιμές 0.0045 και 0.045 αντίστοιχα. Παρατηρούμε στο διάγραμμα, Σχήμα 6.3, ότι και εδώ έχουμε λανθασμένη ένδειξη εκτός ελέγχου.

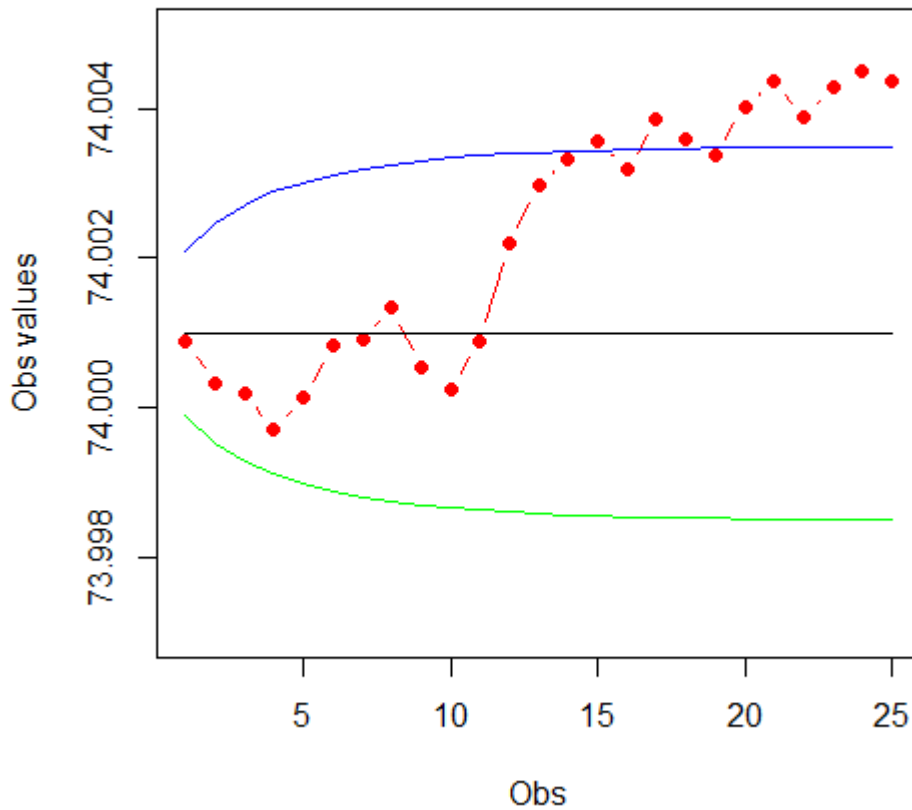
Tabular CUSUM (1st sample)



Σχήμα 6.3: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου

Στην συνέχεια ακολουθεί το EWMA διάγραμμα ελέγχου, Σχήμα 6.4, το οποίο κατασκευάστηκε με τιμές παραμέτρων $L = 2.7$ και $\lambda = 0.1$. Παρατηρούμε ότι στην 15^η παρατήρηση δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου, αλλά στην 16^η και στην 19^η παρατήρηση εσφαλμένα μας δίνει ένδειξη ότι η διεργασία επέστρεψε εντός ελέγχου.

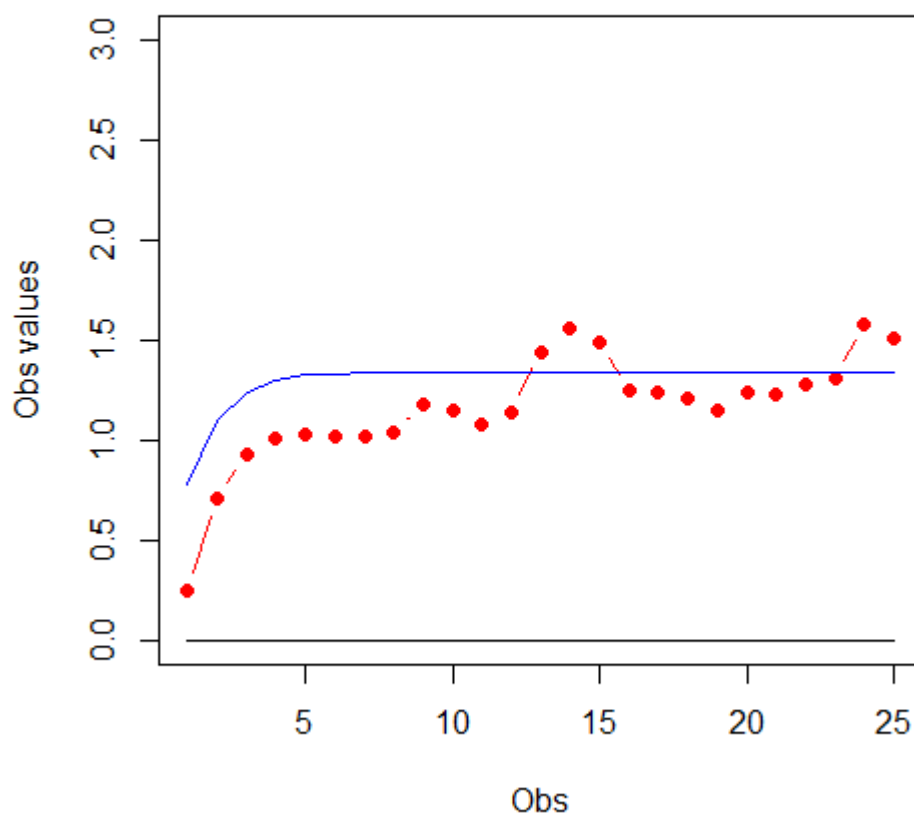
EWMA Control Chart (1st sample)



Σχήμα 6.4: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους με τιμές $K_{MD} = 3.280$, $K_{SD} = 4.568$ και $\lambda = 0.5$ κατασκευάσαμε το Max DEWMA διάγραμμα. Παρατηρούμε, Σχήμα 6.5, ότι το διάγραμμα μας δίνει πρώτη φορά ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου στην 13^η παρατήρηση. Ενώ θα περιμέναμε να συνεχίσει να δίνει την ίδια ένδειξη, εκτός ελέγχου, μέχρι και την 25^η παρατήρηση, εσφαλμένα μας δίνει ενδείξεις ότι επανήλθε η διεργασία εντός ελέγχου.

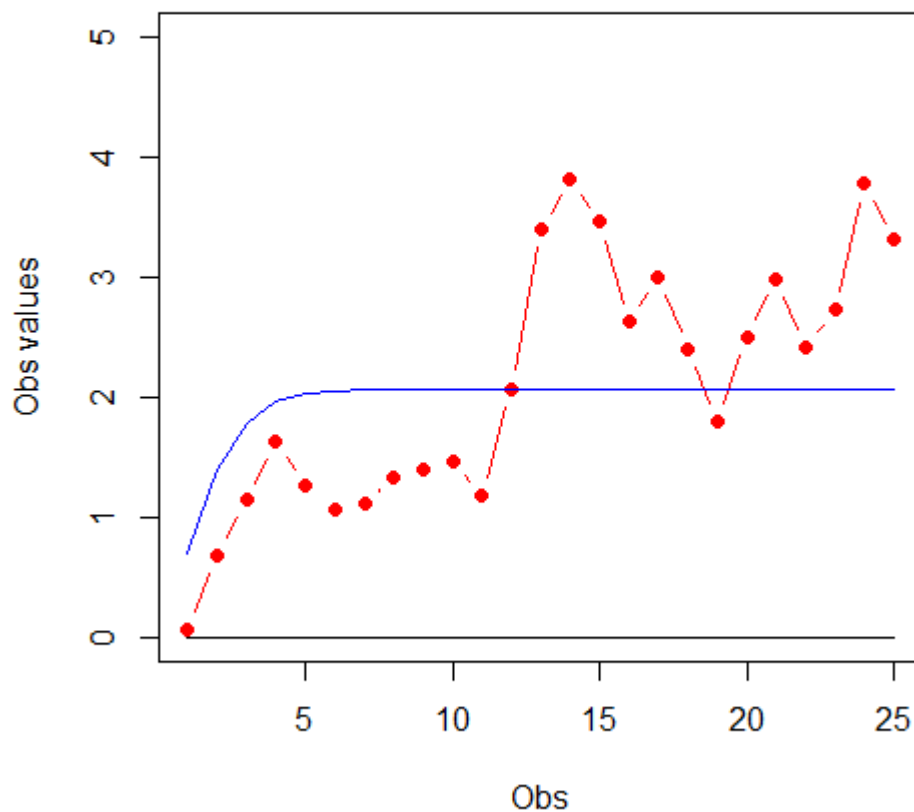
Max DEWMA Control Chart (1st sample)



Σχήμα 6.5: MAX DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Ακολουθεί το SS DEWMA διάγραμμα ελέγχου, Σχήμα 6.6, για την κατασκευή του χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους $K_{MD} = 3.280$, $K_{SD} = 4.568$ και $\lambda = 0.5$. Το διάγραμμα στην 12^η παρατήρηση πρώτη φορά μας δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου. Χρειάστηκε 2 παρατηρήσεις για να αντιληφθεί την μετατόπιση στον μέσο της διεργασίας. Αποτελεί την καλύτερη επίδοση σε αυτό το πρώτο σύνολο δεδομένων μεταξύ των διαγραμμάτων που εφαρμόσαμε.

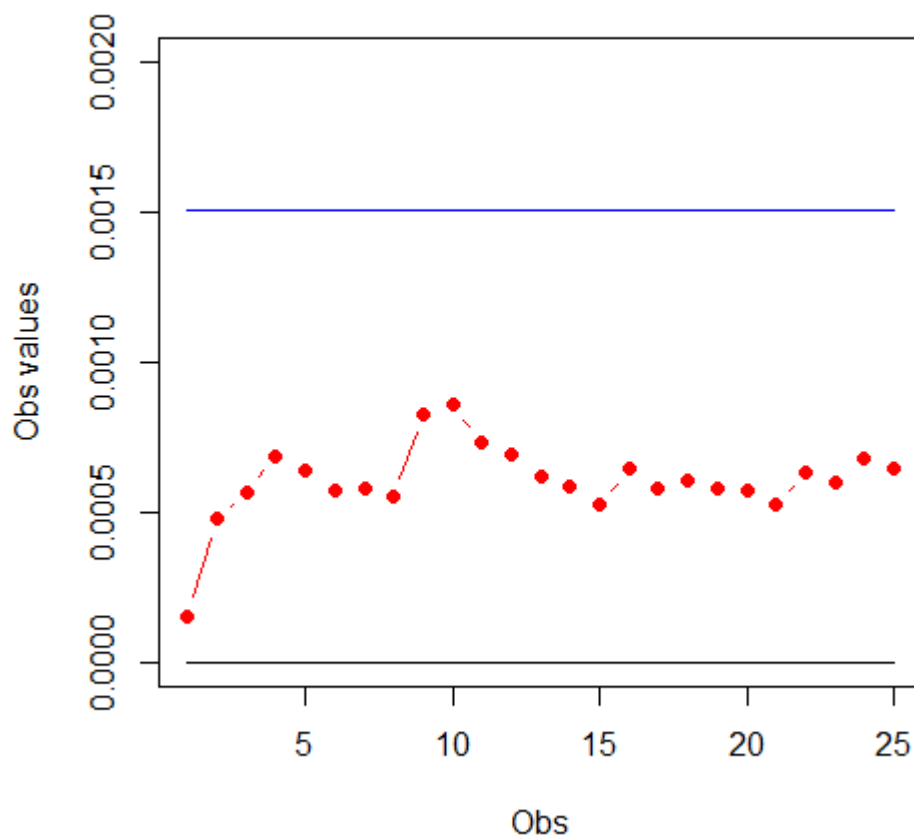
SS DEWMA Control Chart (1st sample)



Σχήμα 6.6: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το Single EWMA διάγραμμα για το οποίο χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους με τιμές $K = 18.6438$, $\lambda = 0.2$ και $d = 1$, Σχήμα 6.7. Παρατηρούμε ότι μας δίνει σταθερά εντός ελέγχου την διεργασία, εσφαλμένα.

Single EWMA Control Chart (1st sample)

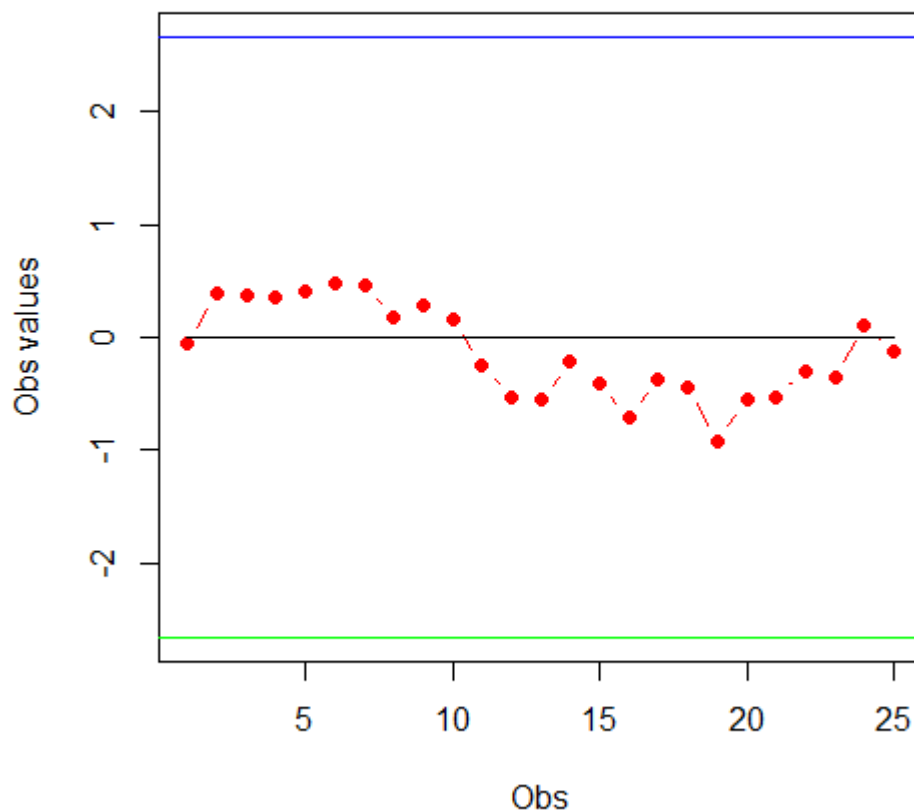


Σχήμα 6.7: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Συνοψίζοντας, για το πρώτο σύνολο δεδομένων τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM M, CUSUM V, Single EWMA και Tabular CUSUM αποτυγχάνουν να δώσουν σωστή ένδειξη. Ενώ τα EWMA, MAX DEWMA και SS DEWMA παρουσιάζουν πολύ καλή συμπεριφορά στην ανίχνευση της εκτός ελέγχου διεργασίας, με καλύτερη συμπεριφορά το SS DEWMA διάγραμμα ελέγχου με πρώτη αντίδραση στην 12^η παρατήρηση.

Στο δεύτερο σύνολο δεδομένων τα πρώτα 10 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με εντός ελέγχου μέσο $\mu_0 = 74.001$ και τυπική απόκλιση $\sigma_0 = 0.009$. Τα επόμενα 15 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $\mu_a = 74.001$ και τυπική απόκλιση $\sigma_a = 0.0135$. Δηλαδή έχουμε αύξηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας κατά 50%.

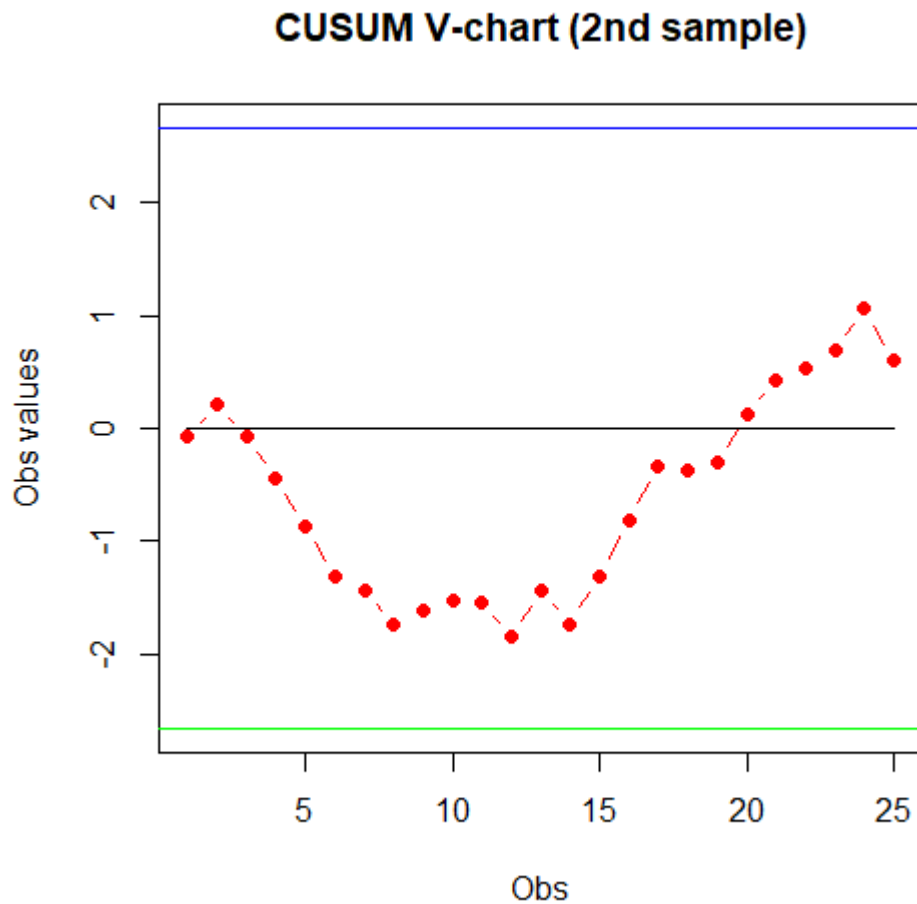
CUSUM M-chart (2nd sample)



Σχήμα 6.8: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου

Πρώτη εφαρμογή έχουμε για τα CUSUM M και CUSUM V διαγράμματα ελέγχου, Σχήμα 6.8 και Σχήμα 6.9 αντίστοιχα. Για την κατασκευή τους χρησιμοποιήσαμε παράμετρο H με τιμή 2.6566. Παρατηρούμε ότι το CUSUM M διάγραμμα δεν δίνει καμία ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου,

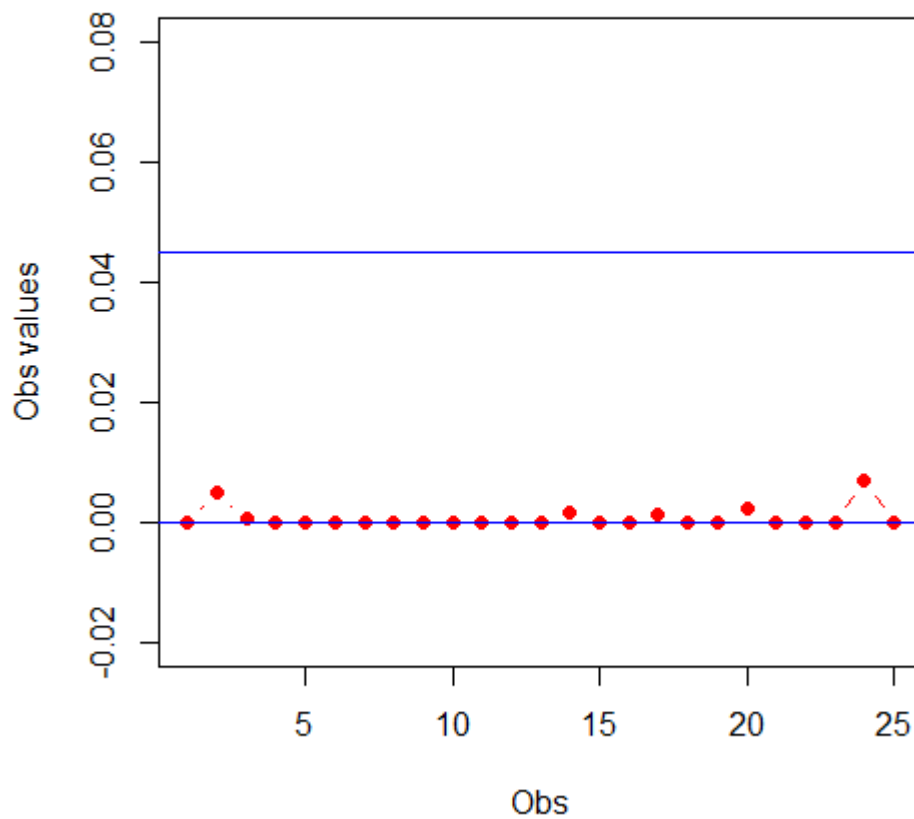
εσφαλμένα. Έτσι καταλήγουμε ότι αποτυγχάνει να αντιληφθεί την αύξηση στην τυπική απόκλιση. Ομοίως και το CUSUM V διάγραμμα δεν δίνει καμία ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.



Σχήμα 6.9: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου

Επόμενο ακολουθεί το Μονόπλευρο Tabular CUSUM διάγραμμα όπου για την κατασκευή του χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους K και h με τιμές 0.0045 και 0 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα, Σχήμα 6.10, δεν κατάφερε να ανιχνεύσει την αύξηση της τυπικής απόκλισης, αφού μας δίνει λανθασμένη ένδειξη εντός ελέγχου από την 11^η παρατήρηση και μετά.

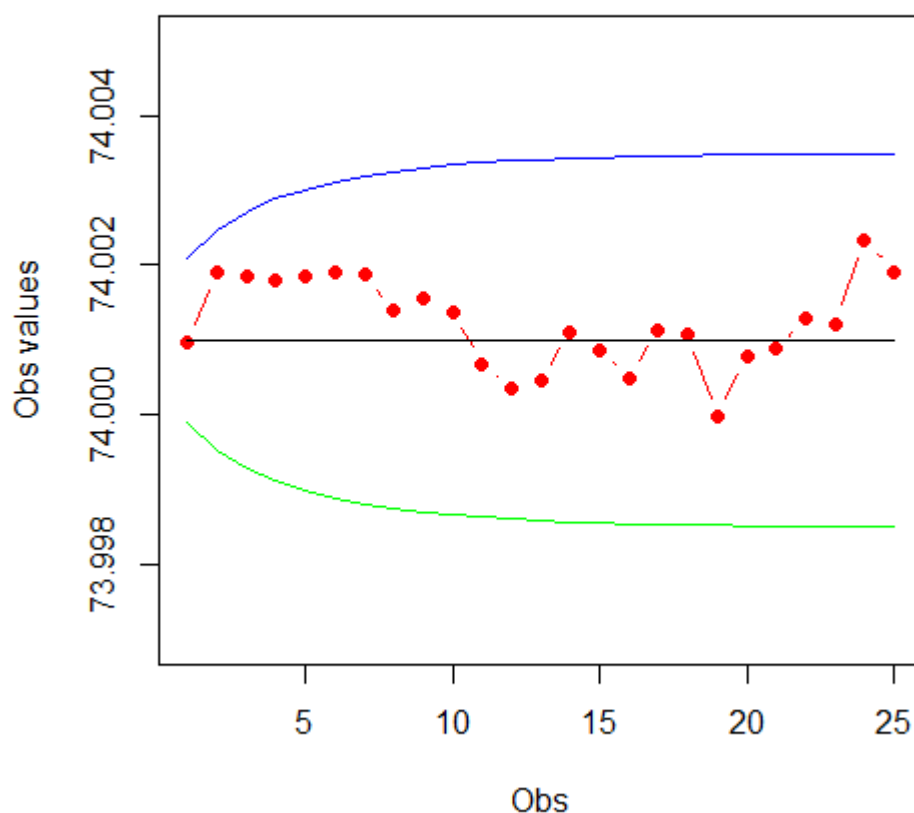
Tabular CUSUM (2nd sample)



Σχήμα 6.10: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου

Ομοίως με το Tabular CUSUM διάγραμμα, έτσι και το EWMA διάγραμμα ελέγχου, Σχήμα 6.11, σε αυτό το σύνολο δεδομένων δεν κατάφερε να ανιχνεύσει την αύξηση της τυπικής απόκλισης και μας δίνει λανθασμένη ένδειξη εντός ελέγχου. Για την κατασκευή του διαγράμματος χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους $L = 2.7$ και $\lambda = 0.1$.

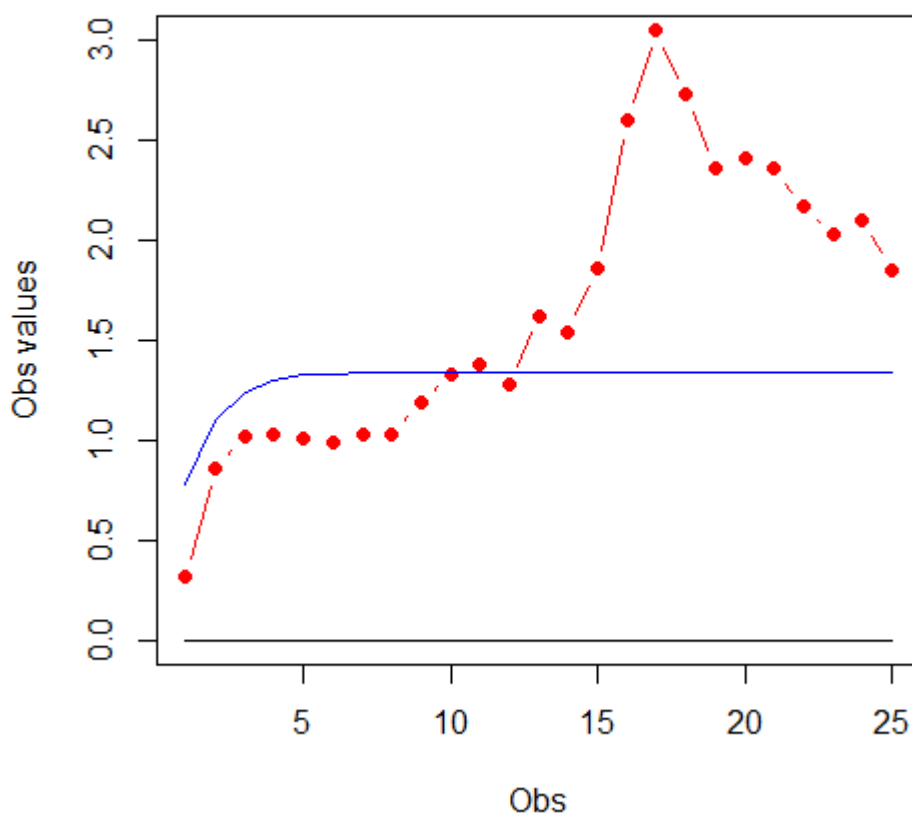
EWMA Control Chart (2nd sample)



Σχήμα 6.11: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Το Max DEWMA διάγραμμα, Σχήμα 6.12, ενώ σωστά σηματοδοτεί την 11^η παρατήρηση ως εκτός ελέγχου, μας δίνει μια λάθος ένδειξη στην 12^η παρατήρηση δίνοντας ένδειξη εντός ελέγχου και από την 13^η και μετά έχουμε σωστή ένδειξη εκτός ελέγχου. Παρόλο που έκανε λάθος στην αρχή με την αύξηση της τυπικής απόκλισης χρειάστηκε 3 δείγματα για να δώσει σωστή ένδειξη εκτός ελέγχου. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή $K_{MD} = 3.280$, $K_{SD} = 4.568$ και $\lambda = 0.5$.

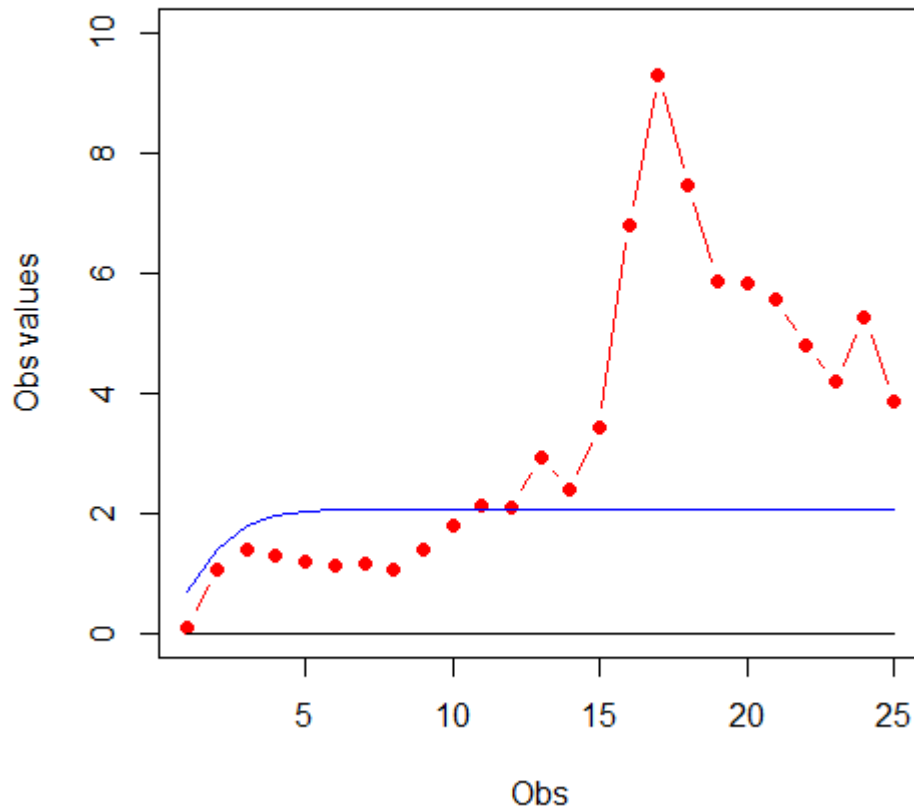
Max DEWMA Control Chart (2nd sample)



Σχήμα 6.12: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Στην περίπτωση του SS DEWMA, Σχήμα 6.13, έχουμε σωστή πρώτη ένδειξη στην 11^η παρατήρηση που είναι και η καλύτερη αντίδραση που θα μπορούσαμε να έχουμε από την παρακολούθηση της διεργασίας. Για την κατασκευή του χρησιμοποιήσαμε τις ίδιες παραμέτρους με το προηγούμενο διάγραμμα το Max DEWMA διάγραμμα.

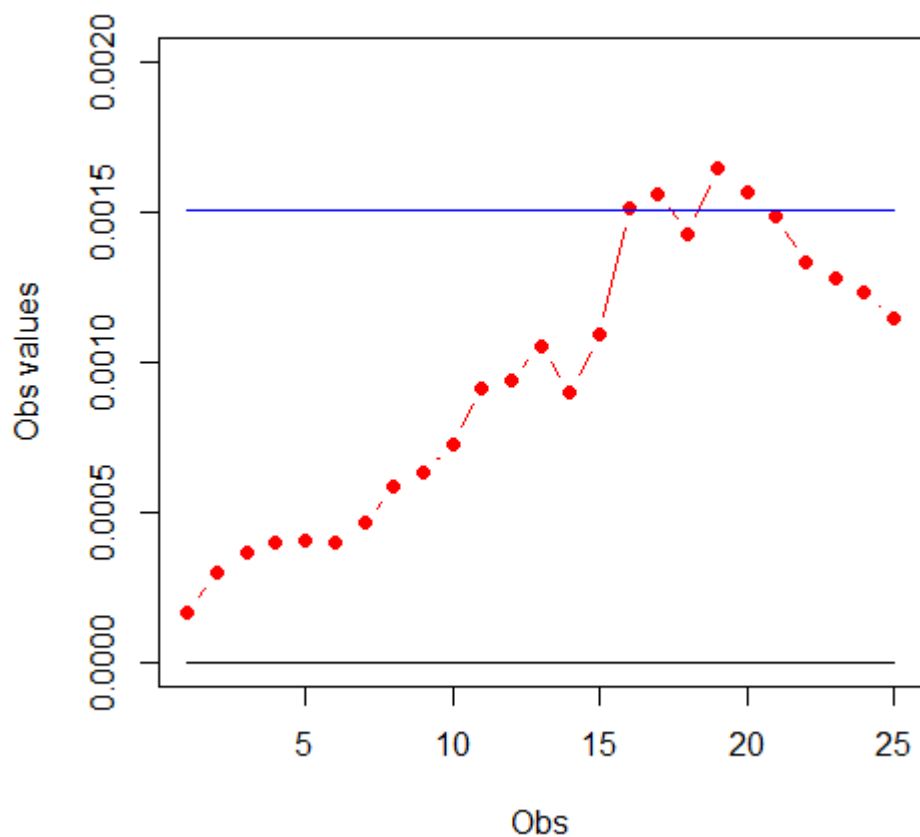
SS DEWMA Control Chart (2nd sample)



Σχήμα 6.13: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Τελευταίο για αυτό το σύνολο δεδομένων παρουσιάζεται το Single EWMA, Σχήμα 6.14. Έχουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου από την 16^η παρατήρηση και μετά. Δηλαδή χρειάστηκε 6 παρατηρήσεις για να ανιχνεύσει την αύξηση στην τυπική απόκλιση, το οποίο δεν αποτελεί καλή απόδοση. Το διάγραμμα κατασκευάστηκε με παραμέτρους K , d και λ με τιμές 18.6438, 1 και 0.2 αντίστοιχα.

Single EWMA Control Chart (2nd sample)

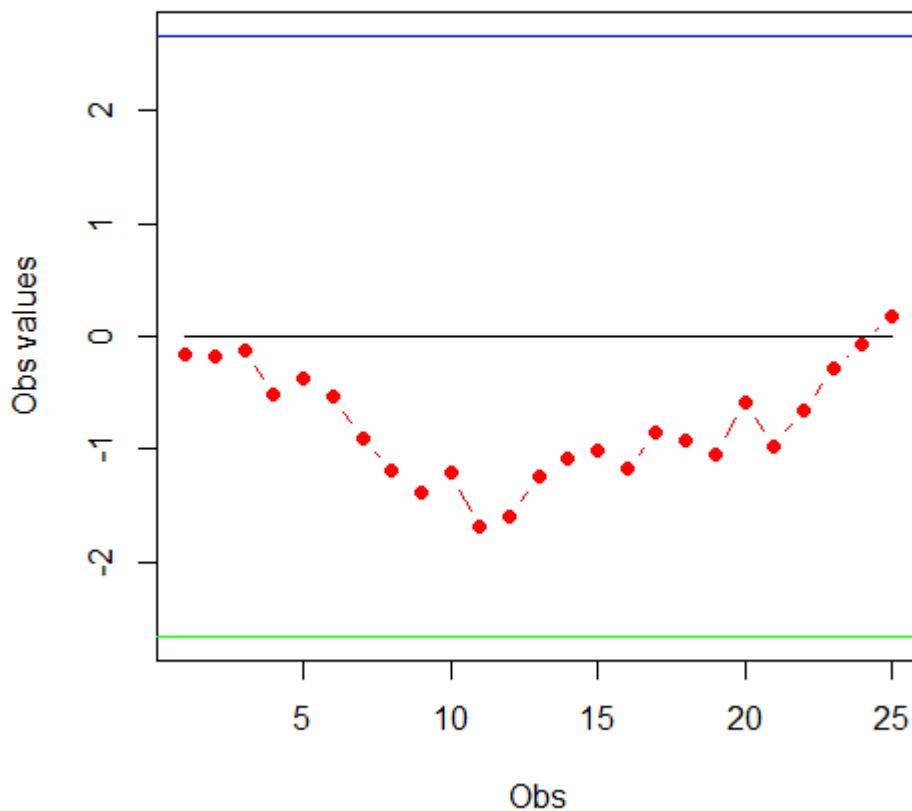


Σχήμα 6.14: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Συνοψίζοντας, για το δεύτερο σύνολο δεδομένων τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM M, CUSUM V, Tabular CUSUM και EWMA αποτυγχάνουν να δώσουν σωστή ένδειξη. Το Single EWMA αργούν να δώσουν σωστή ένδειξη απαιτώντας περισσότερες από 5 παρατηρήσεις εκτός ελέγχου για να σηματοδοτήσουν σωστά. Ενώ τα MAX DEWMA, SS DEWMA παρουσιάζουν πολύ καλή συμπεριφορά στην ανίχνευση της εκτός ελέγχου διεργασίας, με καλύτερη συμπεριφορά το SS DEWMA διάγραμμα ελέγχου με πρώτη αντίδραση στην 11^η παρατήρηση.

Στο τρίτο και τελευταίο σύνολο δεδομένων τα πρώτα 10 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με εντός ελέγχου μέσο $\mu_0 = 74.001$ και τυπική απόκλιση $\sigma_0 = 0.009$. Τα επόμενα 15 δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο $\mu_a = 74.0055$ και τυπική απόκλιση $\sigma_a = 0.0135$. Δηλαδή έχουμε μετατόπιση του μέσου και αύξηση της τυπικής απόκλισης του μέσου της διεργασίας κατά 50%.

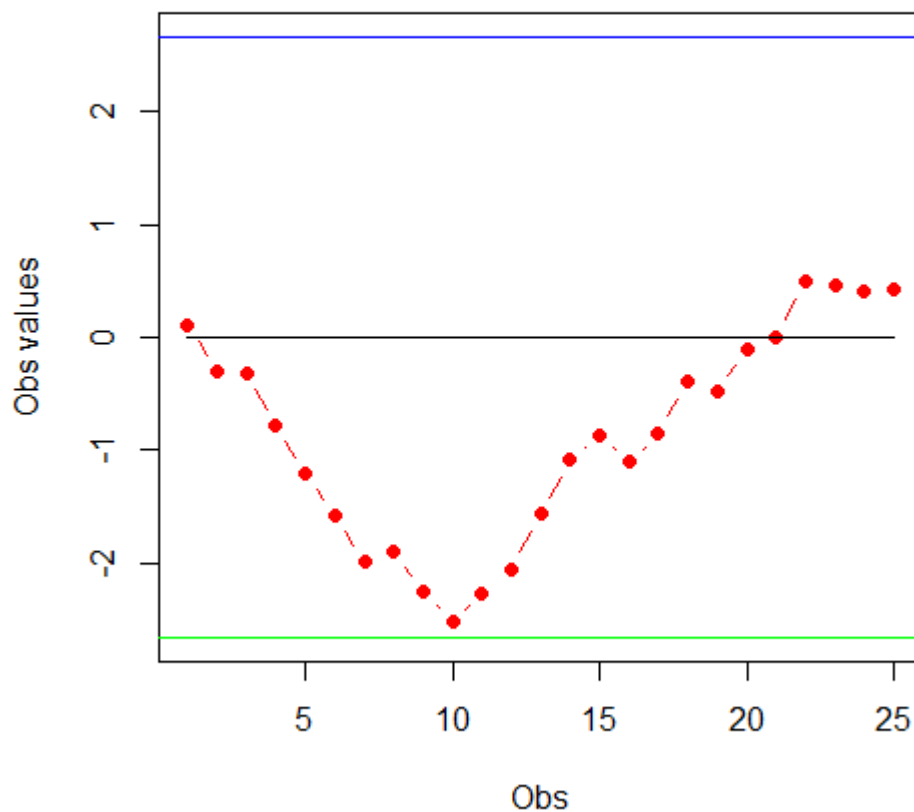
CUSUM M-chart (3rd sample)



Σχήμα 6.15: CUSUM M-Διάγραμμα Ελέγχου

Στα Σχήματα 6.15 και 6.16 βλέπουμε τα CUSUM M και CUSUM V διαγράμματα ελέγχου αντίστοιχα. Για την κατασκευή τους χρησιμοποιήσαμε την παράμετρο $H = 2.6566$. Παρατηρούμε ότι και τα δύο διαγράμματα ελέγχου αποτυγχάνουν στην ανίχνευση ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή δεν καταφέρνουν να ανιληφθούν την μετατόπιση του μέσου και την αύξηση της τυπικής απόκλισης.

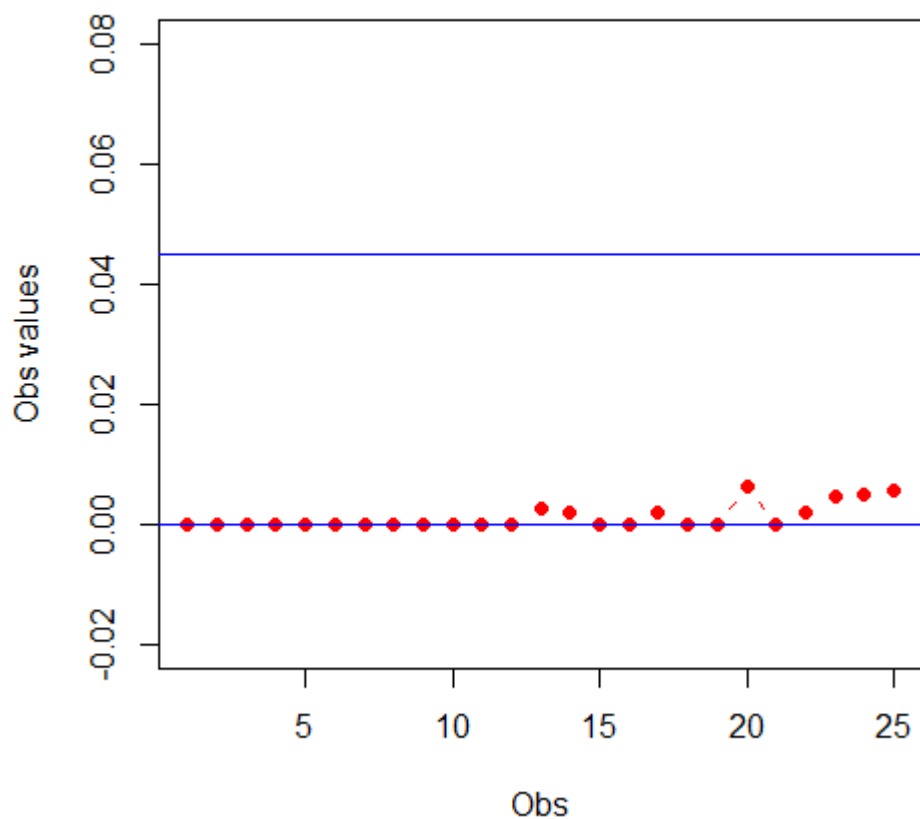
CUSUM V-chart (3rd sample)



Σχήμα 6.16: CUSUM V-Διάγραμμα Ελέγχου

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το Μονόπλευρο Tabular CUSUM διάγραμμα, για την κατασκευή του χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους $K = 0.0045$ και $h = 0.045$, Σχήμα 6.17. Από το διάγραμμα μπορούμε να δούμε ότι στην περίπτωση που έχουμε μετατόπιση του μέσου και αύξηση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας το διάγραμμα αδυνατεί να μας δώσει ένδειξη εκτός ελέγχου.

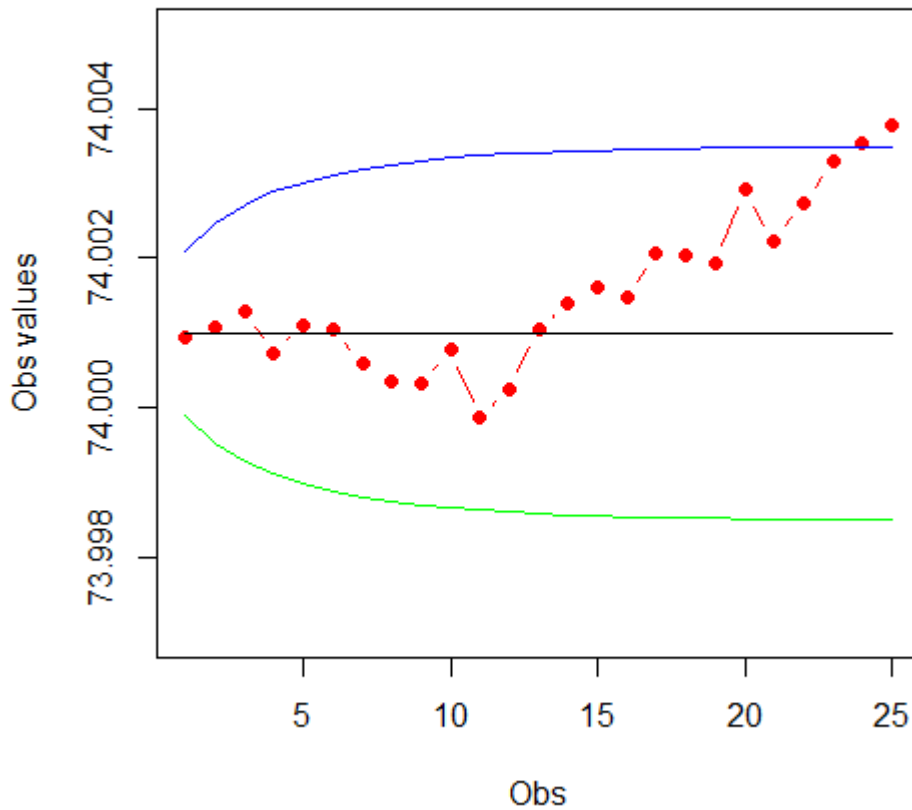
Tabular CUSUM (3rd sample)



Σχήμα 6.17: Μονόπλευρο Tabular CUSUM Διάγραμμα Ελέγχου

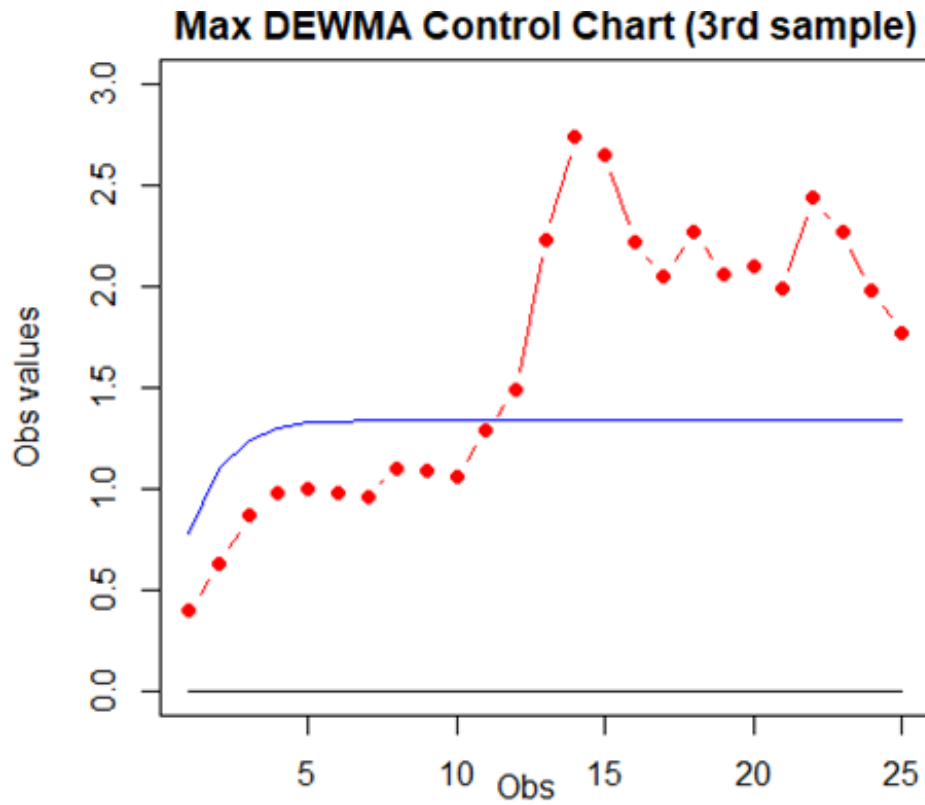
Βελτιωμένη εικόνα σε σχέση με τις προηγούμενες έχουμε με το EWMA διάγραμμα, Σχήμα 6.18. Στη περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι αργεί να ανιχνεύσει την εκτός ελέγχου διεργασία δίνοντας την πρώτη ένδειξη στην 24η παρατήρηση. Για την κατασκευή του χρησιμοποιήσαμε παραμέτρους $L = 2.7$ και $\lambda = 0.1$. Στο διάγραμμα EWMA, παρατηρούμε αδυναμία έγκαιρης σηματοδότησης στην ταυτόχρονη μετατόπιση του μέσου και αύξηση της τυπικής απόκλισης του μέσου της διεργασίας.

EWMA Control Chart (3rd sample)

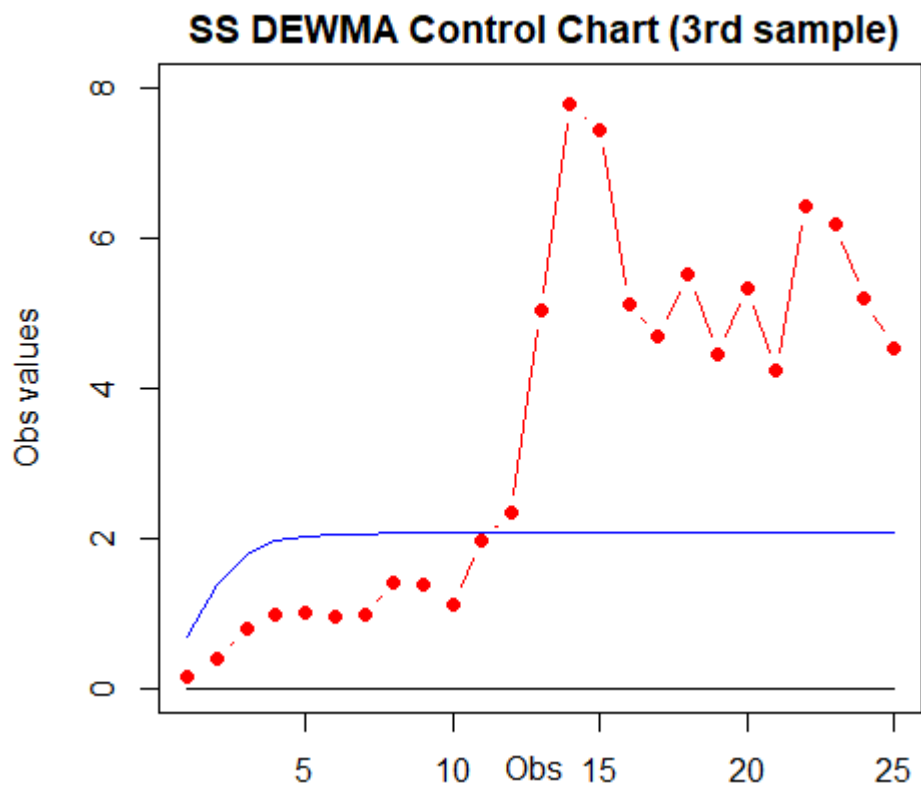


Σχήμα 6.18: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Στο Max EWMA διάγραμμα ελέγχου, Σχήμα 6.18, κατασκευάστηκε με παραμέτρους $K_{MD} = 3.280$, $K_{SD} = 4.568$ και $\lambda = 0.5$. Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε ότι από την 12^η παρατήρηση έχουμε σωστή εκτός ελέγχου ένδειξη. Την ίδια συμπεριφορά παρατηρούμε στο SS EWMA διάγραμμα, Σχήμα 6.20, κατασκευασμένο με τις ίδιες παραμέτρους. Ξεχωριστά το κάθε ένα αλλά και συνδυαστικά αυτά τα δύο διαγράμματα αποτελούν την καλύτερη επίδοση μεταξύ των διαγραμμάτων αυτού το σετ δεδομένων.

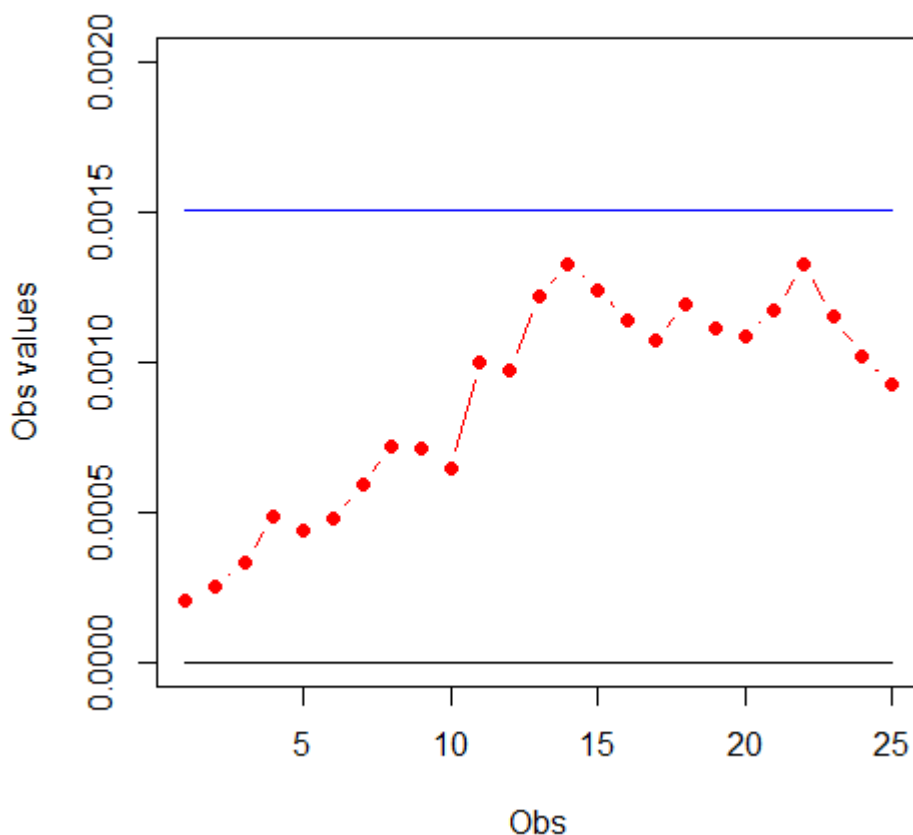


Σχήμα 6.19: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου



Σχήμα 6.20: SS EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Single EWMA Control Chart (3rd sample)



Σχήμα 6.21: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Μια γνώριμη εικόνα με τα πρώτα διαγράμματα παρατηρούμε και στο Single EWMA διάγραμμα, Σχήμα 6.21. Το διάγραμμα ελέγχου αδυνατεί να αντιληφθεί την μετατόπιση στον μέσο και την αύξηση στην τυπική απόκλιση. Για την κατασκευή του χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι $K = 18.6438$, $d = 1$ και $\lambda = 0.2$.

Συνοψίζοντας, για το τρίτο σύνολο δεδομένων τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM M, CUSUM V, Tabular CUSUM και Single EWMA αποτυγχάνουν να δώσουν σωστή ένδειξη. Το EWMA αργεί να δώσει σωστή ένδειξη απαιτώντας σχεδόν 10 παρατηρήσεις εκτός ελέγχου για να σηματοδοτήσει σωστά εκτός ελέγχου. Ενώ τα MAX DEWMA και SS DEWMA παρουσιάζουν την ιδανική συμπεριφορά στην ανίχνευση της εκτός ελέγχου διεργασίας. Έχουμε πρώτη

αντίδραση άμεσα μόλις γίνεται η μετατόπιση στον μέσο και η αύξηση στην τυπική απόκλιση στην 11^η παρατήρηση.

6.2 Παράδειγμα 2

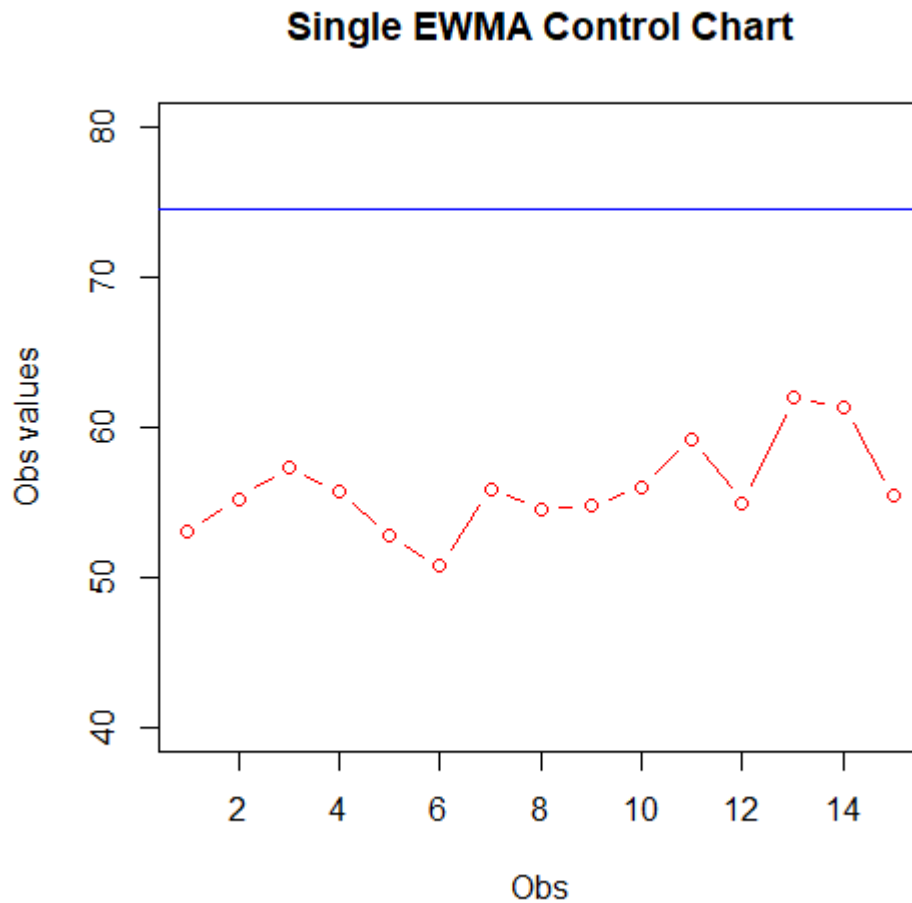
Στο δεύτερο παράδειγμα ακολουθούμε την διαδικασία των Costa et al. (2006) όπως περιγράφεται στην δημοσίευσή τους. Οι τιμές των παρατηρήσεων προέρχονται από δειγματοληψία μιας διαδικασίας πλήρωσης φιαλών 600ml. Τις τιμές μπορούμε να τις δούμε στον Πίνακα 6.1, έχουμε 15 δειγματοληψίες με 5 παρατηρήσεις σε κάθε δειγματοληψία.

Στο πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα δεδομένα της δειγματοληψίας που χρησιμοποιηθήκαν, Πίνακας 6.1.

Πίνακας 6.1: Δεδομένα δειγματοληψίας 2^{ου} παραδείγματος.

| α/α | Παρατηρήσεις | | | | |
|-----|--------------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | 599.94 | 601.41 | 596.2 | 601.92 | 600.08 |
| 2 | 602.97 | 600.17 | 602.74 | 600.1 | 595.21 |
| 3 | 599.86 | 598.74 | 602.84 | 600.42 | 595.11 |
| 4 | 597.47 | 599.73 | 601.79 | 597.98 | 599.29 |
| 5 | 601.8 | 599.81 | 599.2 | 598.14 | 602.64 |
| 6 | 600.33 | 603.75 | 598.96 | 597.59 | 599.74 |
| 7 | 596.1 | 599.29 | 598.61 | 598.21 | 599.08 |
| 8 | 599.09 | 600.95 | 598.31 | 599.04 | 597.83 |
| 9 | 597.96 | 597.89 | 597.32 | 602.58 | 601.75 |
| 10 | 601.23 | 600.13 | 599.94 | 603.95 | 600.62 |
| 11 | 598.15 | 596.57 | 598.95 | 597.72 | 602.48 |
| 12 | 598.6 | 600.52 | 601.39 | 601.12 | 601.16 |
| 13 | 598.34 | 599.36 | 597.09 | 600.41 | 595.43 |
| 14 | 596.75 | 602.11 | 599.54 | 597.97 | 599.02 |
| 15 | 598.85 | 600.74 | 599.65 | 602.51 | 598.65 |

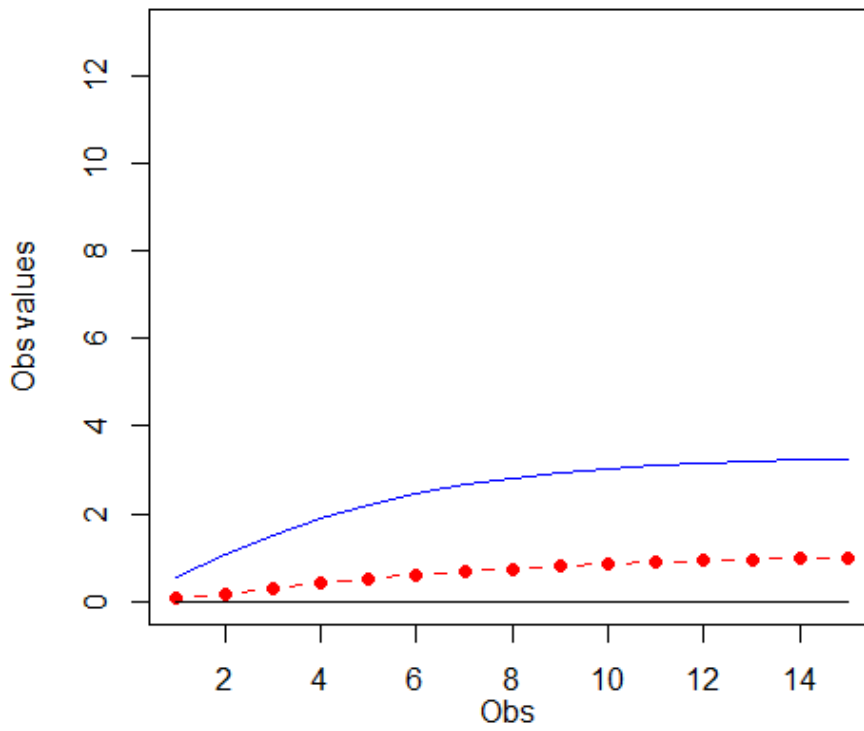
Στα διαγράμματα Single EWMA, Max DEWMA και SS DEWMA, Σχήμα 6.22, Σχήμα 6.23 και Σχήμα 6.24 αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, όπως αναμενόταν.



Σχήμα 6.22: Single EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

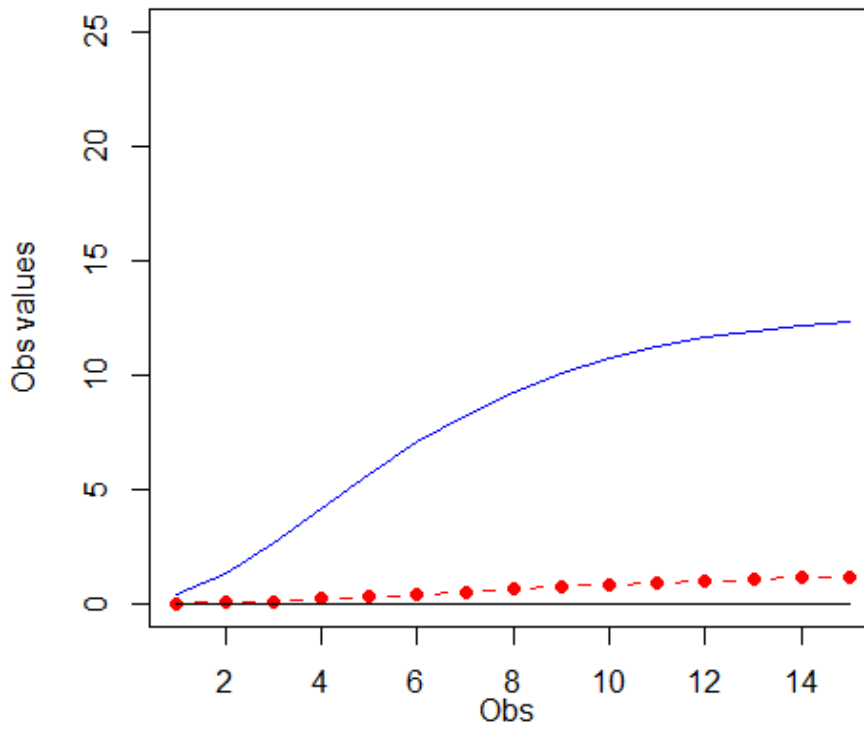
Για την κατασκευή του διαγράμματος Single EWMA χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι $K = 18.6438$, $d = 1$ και $\lambda = 0.2$. Ενώ για τα Max DEWMA και SS DEWMA οι $K_{MD} = 2.743$, $K_{SD} = 3.510$ και $\lambda = 0.2$.

Max DEWMA Control Chart



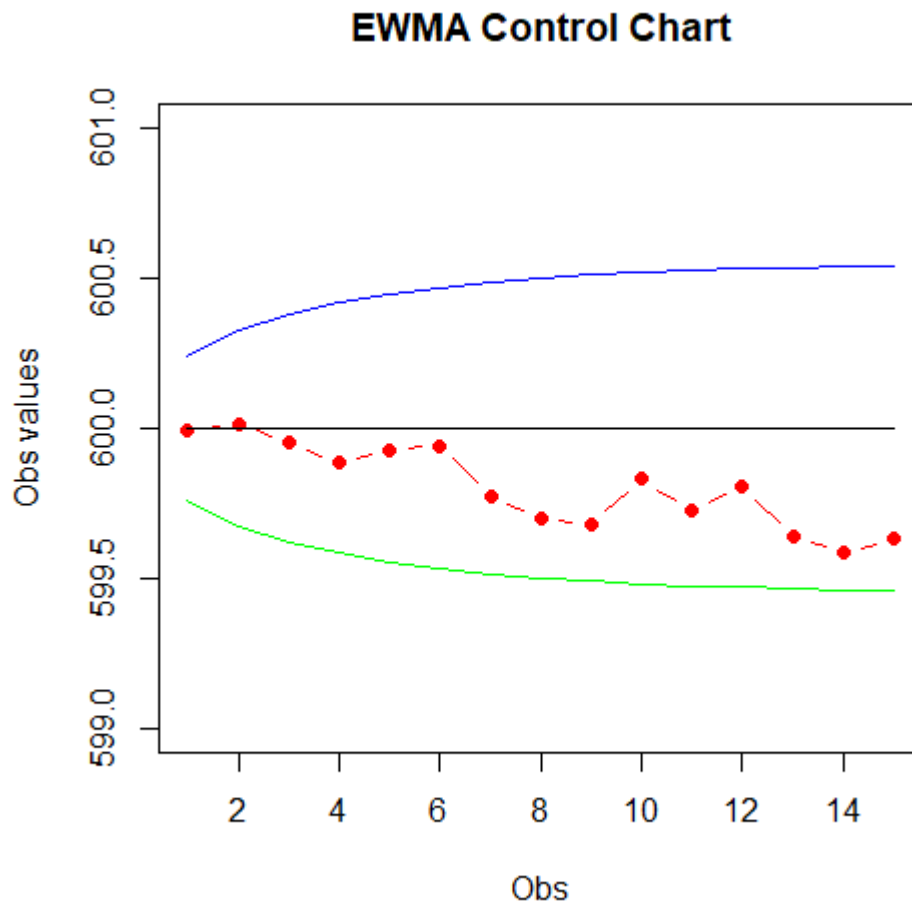
Σχήμα 6.23: Max DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

SS DEWMA Control Chart



Σχήμα 6.24: SS DEWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Μια γνώριμη εικόνα για τα δεδομένα μας από τα προηγούμενα διαγράμματα, έχουμε και από το EWMA, Σχήμα 6.25. Το διάγραμμα δίνει σταθερά εντός ελέγχου ένδειξη μέχρι και την 15η παρατήρηση, κατασκευάστηκε με παραμέτρους $L = 2.7$ και $\lambda = 0.1$.



Σχήμα 6.25: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

6.3 Παράδειγμα 3

Στο τελευταίο παράδειγμα ακολουθούμε την διαδικασία που εφάρμοσαν οι Memar et al. (2011) στην δημοσίευσή τους. Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό το οποίο ακολουθεί μια κανονική κατανομή με εντός ελέγχου μέσο $\mu_0 = 0$ και τυπική απόκλιση $\sigma_0 = 1$. Οι παρατηρήσεις που λαμβάνονται από την εκτός ελέγχου διαδικασία ακολουθούν κατανομή με $\mu_{out} = \mu_0 + \delta\sigma_0$ και $\sigma_{out} = \psi\sigma_0$. Για 300 παρατηρήσεις οι τιμές των δ και ψ θα είναι όπως περιγράφονται παρακάτω:

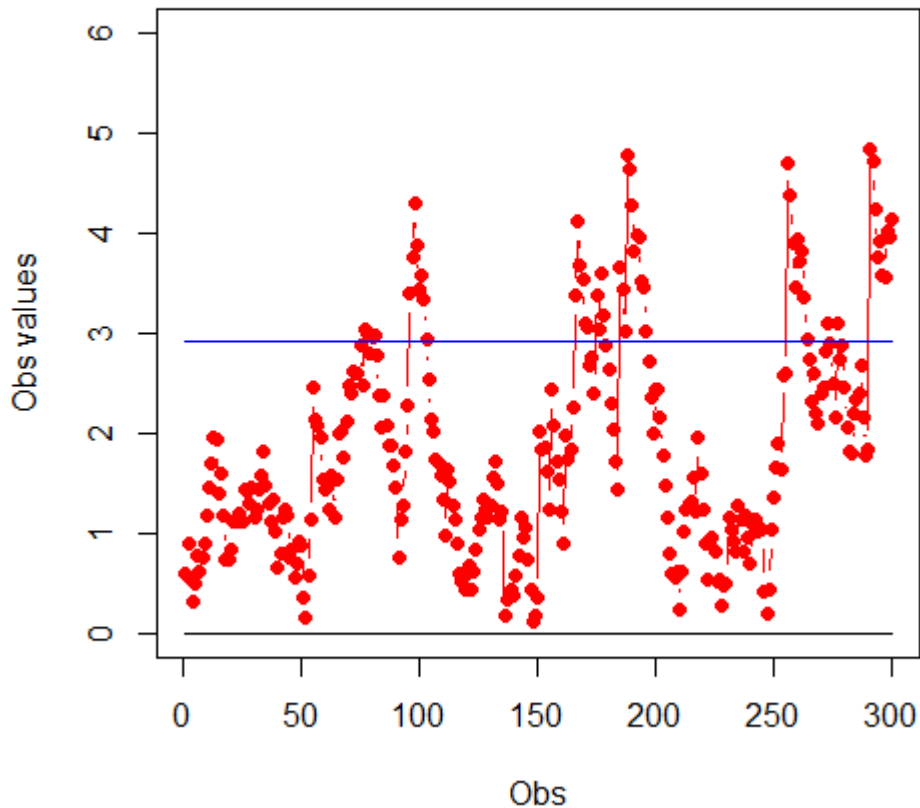
- Για τα 50 πρώτα δείγματα $\delta = 0$ και $\psi = 1$ (εντός ελέγχου παρατηρήσεις).
- Για τα δείγματα από 51 έως και 100, $\delta = 1.0$ και $\psi = 1$ (μετατόπιση στον μέσο).
- Για τα δείγματα από 101 έως και 150, $\delta = 0$ και $\psi = 1$ (εντός ελέγχου παρατηρήσεις).
- Για τα δείγματα από 151 έως και 200, $\delta = 0.0$ και $\psi = 1.5$ (αύξηση στη διασπορά).
- Για τα δείγματα από 201 έως και 250, $\delta = 0$ και $\psi = 1$ (εντός ελέγχου παρατηρήσεις).
- Για τα δείγματα από 251 έως και 300, $\delta = 0.5$ και $\psi = 1.5$ (μετατόπιση στον μέσο και αύξηση στη διασπορά).

Ανά 50 δείγματα όπου παρουσιάζεται μετατόπιση στον μέσο ή στην διασπορά της διαδικασίας δίνεται χρόνος για κάθε διάγραμμα να επανέλθει στην κατάσταση εντός ελέγχου.

Η ακολουθία των δεδομένων εφαρμόζεται στο Max EWMAMS διάγραμμα, στο Σχήμα 6.26, και στο τυπικό EWMA διάγραμμα, Σχήμα 6.27. Ο μέσος χρόνος για την πρώτη ένδειξη (ATS_0), η παράμετρος εξομάλυνσης και το μέγεθος της υποομάδας έχουν τιμές 370, 0.1 και 1, αντίστοιχα. Στα διαγράμματα που ακολουθούν βλέπουμε τις αντιδράσεις των διαγραμμάτων.

Στο Max-EWMAMS διάγραμμα ελέγχου δίνει ενδείξεις εκτός ελέγχου στην 58^η παρατήρηση μέχρι και την 61^η, δηλαδή υπάρχει μετατόπιση του μέσου της

Max EWMAMS Control Chart

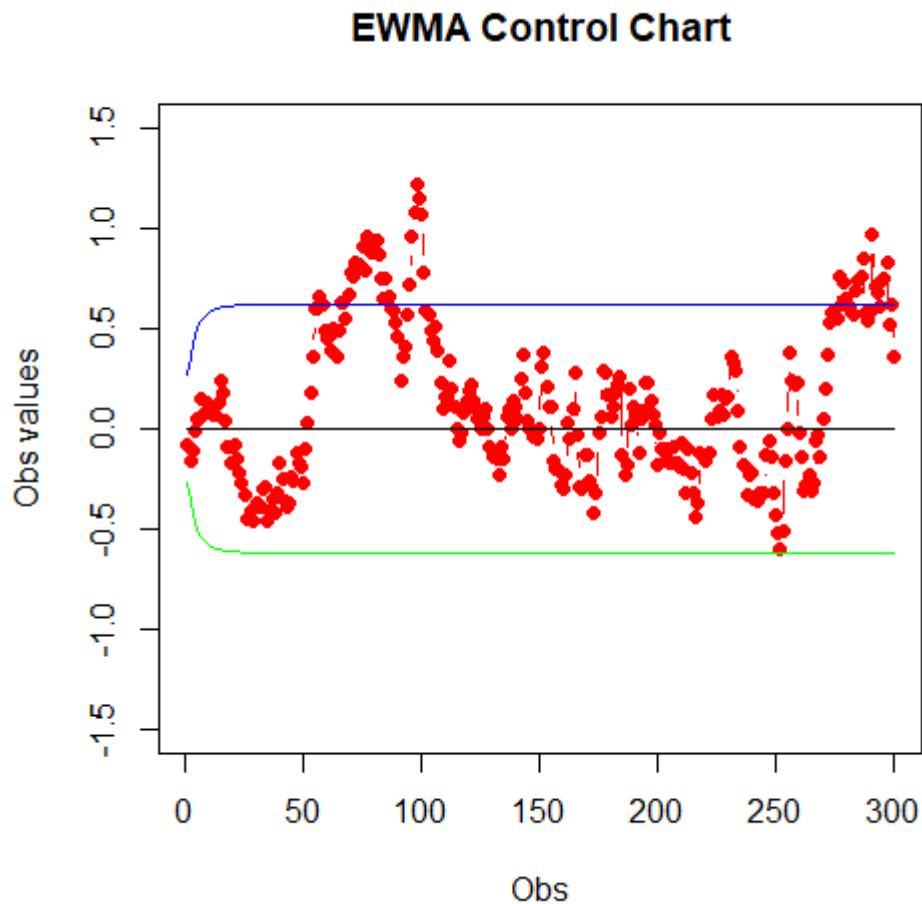


Σχήμα 6.26: Max EWMAMS Διάγραμμα Ελέγχου

διεργασίας, αλλά από την 62^η και μέχρι την 78^η εσφαλμένα μας δείχνει ότι είμαστε εντός ελέγχου. Μέχρι και την 100^η παρατήρηση μας δίνει ενδείξεις εκτός ελέγχου και από την 103^η παρατήρηση μας δείχνει ότι είμαστε εντός ελέγχου, δηλαδή χρειάστηκε μόλις δύο παρατηρήσεις εντός ελέγχου για να δώσει τη σωστή ένδειξη. Ενώ το τυπικό EWMA μας δίνει την πρώτη ένδειξη στην 60^η παρατήρηση μέχρι και την 100^η ορθώς αλλά χρειάζεται 6 παρατηρήσεις για να αντιληφθεί ότι επανήλθε η διεργασία εντός ελέγχου.

Στην 155^η το Max-EWMA διάγραμμα ξεπερνάει το άνω όριο ελέγχου, που σημαίνει ότι ανίχνευσε μετατόπιση στην διακύμανση. Από την 201^η μέχρι και την 204^η παρατήρηση μας δίνει εσφαλμένη ένδειξη, χρειάστηκε 6 παρατηρήσεις για να δώσει σωστή ένδειξη ότι επανήλθε η διεργασία εντός ελέγχου. Αντίστοιχα το τυπικό EWMA διάγραμμα ξεπερνά το άνω όριο ελέγχου

μόνο στις 177 και 178 παρατηρήσεις αλλά δεν έχουμε κάποια άλλη ένδειξη, που φανερώνει ότι αποτυγχάνει να ανιχνεύσει μετατόπιση στην διακύμανση.



Σχήμα 6.27: EWMA Διάγραμμα Ελέγχου

Στην 256^η παρατήρηση και τα δύο διαγράμματα ελέγχου δίνουν την πρώτη ένδειξη τους ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, όμως το τυπικό EWMA διάγραμμα έχει περισσότερες διάσπαρτες εσφαλμένες ενδείξεις, πράγμα που σημαίνει ότι το Max-EWMA διάγραμμα συμπεριφέρεται καλύτερα στην ταυτόχρονη μετατόπιση του μέσου και της διακύμανσης της διεργασίας.

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων Max EWMAMS και τυπικού EWMA χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους για το πρώτο $h_M = 2.01628$ και $\lambda = 0.1$ και για το δεύτερο $L = 2.7$ και $\lambda = 0.1$.

Σύνοψη

Στην πράξη όταν μια ειδική αιτία προκαλεί μια αλλαγή σε μια ή περισσότερες παραμέτρους, είναι πολύ σημαντικό να μπορέσουμε να ανιχνεύσουμε αυτή την αλλαγή γρήγορα.

Εξίσου σημαντικό είναι να διαγνώσουμε πότε μια διεργασία είναι εκτός ελέγχου και ποια παράμετρος ή ποιες παράμετροι έχουν παρουσιάσει μετατόπιση όταν σηματοδοτηθεί η διεργασία ως εκτός ελέγχου.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία στα πρώτα κεφάλαια έγινε αναφορά στα βασικά διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA τα οποία δίνουν λύση στο παραπάνω πρόβλημα.

Στα επόμενα κεφάλαια αναφέραμε κάποιες καινούριες προτάσεις που βασίζονται στα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου.

Τέλος έγινε αλγοριθμική εφαρμογή των διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και σχολιάστηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

Βιβλιογραφία

1. Abbas, N., Riaz, M. and Does, RJMM. (2013a). CS-EWMA Chart for Monitoring Process Dispersion. *Quality and Reliability Engineering international*, Vol. 29(5), pp. 653-663.
2. Abbas, N., Riaz, M. and Does, RJMM. (2013b). Mixed Exponentially Weighted Moving Average-Cumulative Sum Charts for Process Monitoring. *Quality and Reliability Engineering international*, Vol. 29(3), pp. 345-356.
3. Acosta-Meja, C. A., Pignatiello, J. και Rao, B.V. (1999). A Comparison of Control Charting Procedure for Monitoring Process Dispersion. *IIE Transactions*, Vol. 31, pp. 569-579.
4. Αντζουλάκος, Δ. (2009). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας Β΄ Έκδοση*. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
5. Barnard, G. A. (1959). Control charts and stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, Vol. 21, pp. 239 – 271.
6. Borror, C. M., Champ, C. W., & Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, Vol. 30(4), pp. 352-361.
7. Box G. (1954). Some theorems on quadratic forms applied in study of analysis of variance problems: Effects of inequality of variance in one-way classification. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 25, pp. 290-302.
8. Brook, D., Evans, D. A. (1972). An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length. *Biometrika*, Vol. 59, pp. 539-549.
9. Chakraborti, S., Human, S. W. and Graham, M.A. (2011). Methods and Applications of Statistics in Engineering, *Quality and the Physical Sciences*. N. Balakrishnan eds., John Wiley, New York USA.
10. Chang T.C. and Gan F.F. (1995). A Cumulative Sum Control Chart for Monitoring Process Variance. *Journal of Quality Technology*. Vol. 27, pp. 109-119.
11. Chao, M.T. and Cheng, S.W. (1996). Semicircle Control Chart for Variable Data. *Quality Engineering*, Vol. 8(3), pp. 441-446.
12. Chao, M.T. and Cheng, S.W. (2008). On 2-D Control Charts. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 5(3), pp. 243-261.

13. Chen G., Cheng W.S. and Xie H. (2001). Monitoring process mean and reliability with one EWMA chart. *Journal of Quality Technology*. Vol. 33(2), pp.223-233.
14. Chen, G., Cheng, S.W. and Xie, H. (2004). A new EWMA Control Chart for Monitoring Both Location and Dispersion. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 2, pp.217-231.
15. Cheng G., Cheng S.W. (1998). Max-chart: Combining X-bar chart and S chart. *Statistica Sinica*, Vol. 8, pp. 263-271.
16. Cheng S.W. and Thaga K. (2010). The max CUSUM chart. *Frontiers in Statistical Quality Control*. Vol. 2010, pp. 85-98.
17. Cheng, S.W. and Thaga, K. (2006). Single Variables Control Charts: An Overview. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 22(7), pp. 811-820.
18. Chengalur, I.N., Arnold, J.C and Reynolds, M.R., JR (1989). Variable Sampling Intervals for Multiparameter Shewhart Charts. *Communication in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 18(5), pp. 1769-1792.
19. Costa, A.F.B. and De Magalhaes, M.S. (2007). An adaptive chart for monitoring the process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23(7), pp.821-831.
20. Costa, A.F.B. and Rahim, M.A. (2006). A Single EWMA Chart for Monitoring Process Mean and Process Variance. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 3, No. 3, pp. 295-305.
21. Crowder S. and Hamilton M. (1992). An EWMA for monitoring standard deviation. *Journal of Quality Technology*. Vol. 24, pp. 12-21.
22. Domangue, R. and Patch, S.C. (1991). Some Omnibus Exponentially Weighted Moving Average Statistical Process Monitoring Schemes. *Technometrics*, Vol. 33(3), pp. 299-313.
23. Gan, F.F. (1995). Joint Monitoring of Process Mean and Variance Using Exponentially Weighted Moving Average Control Charts. *Technometrics*, Vol. 37(4), pp. 446-453.
24. Hawkins, D. M. (1981). A CUSUM for a Scale Parameter. *Journal of Quality Technology*, Vol. 13(4), pp. 228–235.
25. Hawkins, D. M. (1993). Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool. *Quality Engineering*, Vol. 5(3), pp. 463–477.

26. Johnson, N. L. (1961). A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 56(296), pp. 835–840.
27. Khoo M.B.C., Teh S.Y. and Wu Z. (2010). Monitoring process mean and variability with one double EWMA chart. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. Vol. 39(20), pp. 3678-3694.
28. Κουκουβίνος, Χ. (2017). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*. Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
29. Lowry A.C., Champ C.W. and Woodall C.W. (1995). The Performance of Control Charts for Monitoring Process Variation. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. Vol. 24, pp. 409-437.
30. Lu, C.W. and Reynolds, M.R., Jr (1999). Control Charts for Monitoring the Mean and Variance of Autocorrelated Processes. *Journal of Quality Technology*, Vol. 31(3), pp. 259-274.
31. Lucas J.M. and Crosier R.B. (1982). Fast Initial Response for CUSUM Quality Schemes. *Technometrics*. Vol. 24, pp. 199-205.
32. Lucas, J.M., Saccussi, M.S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancement. *Technometrics*, Vol. 32, pp. 1-12.
33. MacGregor J.F. and Harris T.J. (1993). The exponentially weighted moving variance. *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp. 106-118.
34. McCracken, A. K. and Chakraborti, S. (2013). Control Charts for Joint Monitoring of Mean and Variance: An Overview. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 10, No. 1, pp. 17-36.
35. Memar, A.O. and Niaki, S.T.A. (2011). The Max EWMAMS Control Chart for Joint Monitoring of Process Mean and Variance with Individual Observations. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 27, pp. 499-514.
36. Montgomery, D.C. (2013). Introduction to Statistical Quality Control, 7th edition. *John Wiley & Sons*, New York.
37. Moustakides G.V. (1986). Optimal Stopping Times for Detecting Changes in Distributions. *Annals of Statistics*. Vol 14, pp. 1379-1387.
38. Mukherjee, A. and Chakraborti, S. (2012). A Nonparametric Phase II Control Chart for Simultaneous Monitoring of Location and Scale. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 28(3), pp. 335-352.

39. Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrics*, Vol. 41(1), pp. 100–115.
40. Page, E. (1961). Cumulative Sum Control Charts. *Technometrics*. Vol. 3, pp. 1-9.
41. Ramzy A. and Peiris T. (2014). Comparison of rectangular and elliptical control region EWMA schemes for joint quality Monitoring. *Open Journal of Statistics*. Vol. 4(11), pp. 970-976.
42. Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z.G. (2001a). Individual Control Schemes for Monitoring the Mean and Variance of Processes Subject to Drifts. *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 19(5), pp. 863-892.
43. Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z.G. (2001b). Monitoring the Process Mean and Variance Using Individual Observations and Variable Sampling Intervals. *Journal of Quality Technology*, Vol. 33(2), pp. 181-205.
44. Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z.G. (2004). Control Charts and the Optimal Allocation of Sampling Resources. *Technometrics*, Vol. 46(2), pp. 200-214.
45. Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z.G. (2008). Combinations of Multivariate Shewhart and MEMWA Control Charts for Monitoring the Mean Vector and Covariance Matrix. *Journal of Quality Technology*, Vol. 40(4), pp. 381-393.
46. Reynolds, M. R., Jr and Stoumbos, Z.G. (2010). Robustness to Non-normality of CUSUM Control Charts for Monitoring the Process Mean and Variance. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 26(5), pp. 453-473.
47. Reynolds, M.R., Jr and Cho, G. Y. (2006). Multivariate Control Charts for Monitoring the Mean Vector and Covariance Matrix. *Journal of Quality Technology*, Vol. 38(3), pp. 230-253.
48. Rhoads, T. R., Montgomery, D. C., & Mastrangelo, C. M. (1996). A fast initial response scheme for the exponentially weighted moving average control chart. *Quality Engineering*, Vol. 9(2), pp. 317-327.
49. Roberts S.W. (1959). Control charts tests based on geometric moving average. *Technometrics*. Vol. 1, pp. 239-250.
50. Shewhart, W.A.(1931). Economic Quality Control of Manufactures Product, *Van Nostrand*, New York.

51. Shewhart, W.A.(1931). Statistical Method from the Viewpoint of Quality Control, *Dover Publications*, New York.
52. Saccucci M.S. and Lucas J.M. (1990). Average run length for exponentially weighted moving average control schemes using the Markov chain approach. *Journal of Quality Technology*. Vol. 22, pp. 154-162.
53. Sheu S.H., Huang C.J. and Hsu T.S. (2012). Extended maximum generally weighted moving average control chart for monitoring process mean and variability. *Computer & Industrial Engineering*. Vol. 62(1), pp. 216-225.
54. Sparks, R. S. (2003). A Group of Moving Averages Control Plan for Signaling Varying Location Shifts. *Quality Engineering*, Vol. 15, pp. 519-532.
55. Steiner, S. H. (1999). EWMA control charts with time-varying control limits and fast initial response, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31(1), pp. 75–86.
56. Teh, S.Y., Khoo, M.B.Ch., Ong, K. H. and Soh, K.L. (2014). A Comparative Study of the Median Run Length (MRL) Performance of the Max-DEWMA and SS-DEWMA Control Charts. *Proceedings of the 21st National Symposium on Mathematical Sciences*.
57. Teh, S.Y., Khoo, M.B.Ch. and Wu, Z. (2010). A sum of squares double exponentially weighted moving average chart. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 61, pp. 1173-1188
58. Wu, Z. and Tian, Y. (2005). Weighted-Loss-Function CUSUM Chart for Monitoring Mean and Variance of a Production Process. *International Journal of Production Research*, Vol. 43(14), pp. 3027-3044.
59. Wu, Z. and Tian, Y. (2007). A Single CUSUM Chart Using a Single Observation to Monitor a Variable. *International Journal of Production Research*, Vol. 45(3), pp. 719-741.
60. Wu, Z. and Wang, Q. (2007). A single CUSUM chart using a single observation to monitor a variable. *International Journal of Production Research*, Vol. 45(3), pp. 719-741.
61. Wu, Z., Zhang, S. and Wang, P. (2007). A CUSUM scheme with variable sample sizes and sampling intervals for monitoring the process mean and variance. *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 23(2), pp. 157-170.

62. Yeh, A., Lin, D. and Venkataramani Ch. (2004). Unified CUSUM Charts for Monitoring Process Mean and Variability. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 1, No. 1, pp. 65-85.
63. Zaman, B., Riaz, M. and Lee, M.H. (2017). On the Performance of Control Charts for Simultaneous Monitoring of Location and Dispersion Parameters. *Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 33, pp. 37-56.
64. Zhang, X. and Zhang, J. (2013). CUSUM Procedures for Monitoring Process Mean and Variability. *Taylor & Francis*, London UK.
65. Zou, C. and Tsung, F. (2010). Likelihood ratio-based distribution-free EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, Vol. 42(2), pp. 174-196.