



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Πρωτόκολλα Consensus για πράκτορες
με Άγνωστες Κατευθύνσεις Ελέγχου:
η περίπτωση της Διατήρησης Συνοχής
με Αποφυγή Συγκρούσεων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΕΥΘΥΜΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Πρωτόκολλα Consensus για πράκτορες με
Άγνωστες Κατευθύνσεις Ελέγχου: η
περίπτωση της Διατήρησης Συνοχής με
Αποφυγή Συγκρούσεων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΕΥΘΥΜΙΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 2 Ιουλίου 2018.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Παπαβασιλόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Μαράτος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου



Το περιεχόμενο της εργασίας διατίθεται υπό την άδεια Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0. (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

.....
Ευθύμιος Γεωργίου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός & Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Ένα πολυπρακτορικό σύστημα αποτελείται από ένα δίκτυο αυτόνομων δυναμικών συστημάτων, τα οποία συνεργάζονται-αλληλεπιδρούν με σκοπό την επίτευξη ενός κοινού συνήθως σκοπού. Όταν μέσω των πρακτόρων αναπαριστούμε οντότητες που κινούνται στο χώρο, κάνουμε λόγο για συστήματα πολλαπλών διασυνδεδεμένων οχημάτων. Ο έλεγχος τέτοιων συστημάτων είναι αντικείμενο του κατανεμημένου ελέγχου. Συγκεκριμένα λόγω περιορισμένης επικοινωνίας εντός του δικτύου, κάθε ατομικότητα εφαρμόζει ένα σχήμα ελέγχου, στο οποίο χρησιμοποιεί μόνο τοπικά περιορισμένη πληροφορία.

Ειδικότερα θεωρήσαμε γραμμικοποιημένες δυναμικές πρακτόρων με πολύπλοκες χρονο-μεταβλητές τοπολογίες επικοινωνίας. Υπό αυτό το πρίσμα επιχειρήσαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα ομοφωνίας, δηλαδή συνάντησης των πρακτόρων με μη-προκαθορισμένο τρόπο, κάπου στο χώρο. Η ανάγκη για πιο ρεαλιστικές εφαρμογές, ανήγειρε κάποιους περιορισμούς όπως η αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων και η διατήρηση της συνοχής της εκάστοτε τοπολογίας, λόγω περιορισμένων δυνατοτήτων επικοινωνίας. Ο συνδυασμός αυτός, μας οδήγησε στη θεμελίωση μιας έννοιας ευρύτερης απ' αυτή της συνάντησης στο χώρο (consensus) και συγκεκριμένα αυτή της συγκέντρωσης στο χώρο, μέσω του λεγόμενου ϵ -box consensus.

Παράλληλα σε αυτά προσθέσαμε και αβεβαιότητες στην ίδια τη δυναμική των πρακτόρων και ειδικότερα θεωρήσαμε άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου στη γραμμική δυναμική των υπό εξέταση οντοτήτων. Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το πεδίο του προσαρμοστικού ελέγχου και έχει μελετηθεί ευρέως. Η λύση που χρησιμοποιήσαμε απαντάται στη βιβλιογραφία ως συναρτήσεις ή κέρδη Nussbaum.

Αναπτύξαμε και θεμελιώσαμε λοιπόν δύο νέα πρωτοκόλλα ελέγχου σε πολυπρακτορικά συστήματα 1^{ης} και 2^{ης} τάξης στα οποία συνδυάσαμε επιτυχώς για πρώτη φορά, τα προβλήματα κατανεμημένου ελέγχου (α) ϵ -box consensus, με (β) αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων και (γ) διατήρηση της αρχικής συνοχής της τοπολογίας επικοινωνίας του δικτύου, με το πρόβλημα προσαρμοστικού ελέγχου (δ) επιτυχούς αντιμετώπισης της έλλειψης γνώσης ως προς τις κατευθύνσεις ελέγχου και όλα αυτά πάντα με κατανεμημένο τρόπο. Τέλος παρουσιάσαμε αριθμητικά αποτελέσματα και παραστάσεις που επιβεβαίωσαν τις θεωρητικές μας αναλύσεις.

Λέξεις Κλειδιά

Πολυπρακτορικά Συστήματα, Σύστημα Πολλαπλών Οχημάτων, Πρόβλημα Ομοφωνίας, Αποφυγή Συγκρούσεων, Διατήρηση Συνοχής, Άγνωστες Κατευθύνσεις Ελέγχου, Συναρτήσεις Δυναμικού, Κέρδη Nussbaum, ϵ -box ομοφωνία

Abstract

A multiagent system consists of a network of autonomous dynamical systems, which cooperate in order to achieve a common goal. We refer to multivehicle systems, when agents model moving mobile individuals. The scientific field which copes with control in such systems, is called distributed control. Moreover, due to restricted communication range within the network, each individual applies a control scheme which uses locally restricted information only.

In particular we assumed linear agent dynamics with complicated time varying communication topology. In the light of this assumption, we attempted to solve the so called consensus problem which aims to force all agents meet somewhere in space. The need for more realistic applications, as well as, the constantly growing interest of scientific society for this research field, led to problems such as collision avoidance and network connectivity preservation. Combining consensus with these restrictions, led us to the concept of ϵ -box consensus, which could be described as assembling agents in space, rather than meeting.

Apart from the aforementioned objectives, we also included uncertainties in the agent's dynamical model, namely the unknown control directions problem. This problem arises from adaptive control field and has been studied extensively. One solution proposed in literature are the so called Nussbaum functions.

In this diploma thesis we propose and establish two nonlinear protocols, for first and second order agents respectively, that allow us to successfully combine for the first time the following distributed control problems (a) ϵ -box consensus , with (b) collision avoidance between agents, while (c) preserving connectivity and at the same time, tackle the adaptive control problem of (d) unknown control directions in agent's dynamics, always in a distributed manner. We finally presented some numerical results and figures which validate our theoretical framework.

Keywords

Multiagent System, Multivehicle System, Consensus, Collision Avoidance, Connectivity Maintenance, Potential Field Approach, Nussbaum Gains, ϵ -box consensus

στους γονείς μου Γιώργο και Ειρήνη
και στην αδερφή και συγκάτοικο μου
Αναστασία, ως ελάχιστη και αναντάξια
ανταπόδοση των όσων μου προσφέρουν
μέχρι σήμερα, ο καθένας με το
δικό του ιδιαίτερο τρόπο

στο Βίκο,
χωρίς τον οποίο δε θα είχε
ολοκληρωθεί το παρόν δοκίμιο

στους φίλους και τις φίλες,
που έντυσαν με τα πιο έντονα
χρώματα τα φοιτητικά μου χρόνια

Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω το λέκτορα κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη, γιατί μου έδωσε την ευκαιρία και την έμπνευση να ασχοληθώ με ένα πραγματικά ενδιαφέρον θέμα του αυτομάτου ελέγχου. Επίσης τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για την καθοδήγησή και τις πολύωρες συναντήσεις που είχαμε καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους δασκάλους μου Γιώργο Β. και Κώστα Γ., για τα όσα μου δίδαξαν, αλλά κυρίως διότι μου σύστησαν τον κόσμο των συμβόλων.

Τέλος θα ήθελα να ξαναευχαριστήσω την αδερφή μου, της οποίας το laptop έχω απαγάγει τον τελευταίο χρόνο, καθώς επίσης και όσους μοιρασθήκαμε παραγωγικά και μη ξενύχτια τους παράξενους αυτούς καιρούς.

Αθήνα, Ιούλης 2018

Ευθύμιος Γεωργίου

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	7
Περιεχόμενα	9
Κατάλογος Σχημάτων	11
Κατάλογος Πινάκων	13
Κατάλογος Συμβόλων	15
1 Εισαγωγή	17
1.1 Πολυπρακτορικά Συστήματα	17
1.2 Κατανεμημένα Συστήματα Ελέγχου	18
1.3 Συνεισφορά της διπλωματικής	19
1.4 Οργάνωση του τόμου	20
2 Αντικείμενο Διπλωματικής	21
2.1 Σχετικές Εργασίες	21
2.2 Διατύπωση Υποπροβλημάτων	22
2.2.1 Το πρόβλημα Consensus	23
2.2.2 Το πρόβλημα αποφυγής συγκρούσεων	24
2.2.3 Το πρόβλημα διατήρησης συνεκτικότητας	24
2.2.4 Το πρόβλημα των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου	24
3 Μοντελοποίηση Προβλήματος	25
3.1 Τοπολογία Ανίχνευσης	25
3.2 Δυναμική Πρακτόρων	26
3.3 Μοντέλο Επικοινωνίας	27
3.4 Συναρτήσεις Δυναμικών	28
3.5 Συναρτήσεις Nussbaum	31
3.6 Τεχνικά Στοιχεία και Βασικά Λήμματα	32
3.6.1 Τεχνικό Λήμμα Nussbaum	32
3.6.2 Παραγωγήιση Δυναμικών	34

3.6.3	Λήμμα e-box consensus	34
4	Προτεινόμενα Πρωτόκολλα Ελέγχου	37
4.1	Διαμέριση του χρονικού ορίζοντα	37
4.2	Κατανεμημένο Πρωτόκολλο απλών ολοκληρωτών	38
4.3	Κατανεμημένο Πρωτόκολλο διπλών ολοκληρωτών	42
5	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	45
5.1	Περιβάλλον Προσομοίωσης	45
5.2	Προσομοιώσεις Απλών Ολοκληρωτών	46
5.2.1	Μονοδιάστατοι Πράκτορες (1D)	46
5.2.2	Διδιάστατοι Πράκτορες (2D)	49
5.3	Προσομοιώσεις Διπλών Ολοκληρωτών	56
5.3.1	Διδιάστατοι Πράκτορες (2D)	56
5.3.2	Τρισδιάστατοι Πράκτορες (3D)	62
6	Επίλογος	71
6.1	Σύνοψη και Συμπεράσματα	71
6.2	Μελλοντικές Επεκτάσεις	72
	Παραρτήματα	73
	Α' Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων	75
	Β' Θεωρία Συστημάτων	77
	Γ' Παράγωγοι Δυναμικών	79
	Δ' Συνάρτηση Dead Zone	81
	Βιβλιογραφία	86

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Συλλογική συμπεριφορά ζώνων [1]	17
1.2	Κατανεμημένη Αρχιτεκτονική [2]. Τα P1, P2 και P3 είναι agents με ελεγχτές C1, C2 and C3 αντίστοιχα.	18
1.3	Δημοφιλή Multiagent Προβλήματα	18
2.1	Δίκτυο απλών ολοκληρωτών [3]	21
2.2	Σχηματική απεικόνιση του ϵ -box consensus (παράλλαξη από [4])	23
3.1	Γεωμετρίες Αισθητήρων Ανίχνευσης: (α)Ακτινική, (β)Σφηνοειδής, (γ)Μονής Ακτίνας	25
3.2	Μετάβαση από χώρο εργασίας agent σε Γράφο Επικοινωνίας	26
3.3	Υποδιαίρέσεις περιοχών ανίχνευσης σε πράκτορα	27
3.4	Παράδειγμα ενδοατομικού δυναμικού	28
3.5	Δυναμικό Αποφυγής Συγκρούσεων	29
3.6	Hysteresis [5]	29
3.7	Δυναμικό Διατήρησης Συνεκτικότητας ψ_{ij} για $R = 1$	30
3.8	Συνολικό Δυναμικό μεταξύ 2 πρακτόρων	31
3.9	Γραφική παράσταση $\mathcal{N}(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και $\int_0^\zeta \mathcal{N}(\sigma) d\sigma$	32
3.10	“Νέα” Συνάρτηση Nussbaum	33
4.1	Διαστήματα σταθερής τοπολογίας	37
5.1	Αρχική Τοπολογία Επικοινωνίας Πρακτόρων	46
5.2	Τροχιές των Agent στην ευθεία	47
5.3	Κέρδη Nussbaum	47
5.4	Είσοδος-Έλεγχος στο Σύστημα	48
5.5	Τελική Διάταξη Πρακτόρων ($\epsilon/4$)	48
5.6	Μέγιστη/ελάχιστη απόσταση πρακτόρων	49
5.7	Αρχική Διάταξη-Γράφημα των Agent	50
5.8	Τροχιές των Agent στην x-διεύθυνση	50
5.9	Τροχιές των Agent στην y-διεύθυνση	51
5.10	Είσοδοι των Agent στην x-διεύθυνση	51
5.11	Είσοδοι των Agent στην y-διεύθυνση	52
5.12	Κέρδη Nussbaum στην x-διεύθυνση	52
5.13	Κέρδη Nussbaum στην y-διεύθυνση	53
5.14	Τελική Διάταξη Πρακτόρων	53

5.15	Μέγιστη/ελάχιστη απόσταση πρακτόρων	53
5.16	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο	54
5.16	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο	55
5.17	Αρχική Διάταξη Πρακτόρων	56
5.18	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην οριζόντια διεύθυνση	57
5.19	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην κάθετη διεύθυνση	57
5.19	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην κάθετη διεύθυνση	58
5.20	Ορίσματα συναρτήσεων Nussbaum	58
5.21	Είσοδοι πρακτόρων σε κάθε διάσταση	59
5.22	Τελική Κατάσταση Πρακτόρων	59
5.23	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο	60
5.23	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο	61
5.24	Αρχική Διάταξη Agent στο χώρο	63
5.25	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην x διεύθυνση	63
5.25	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην x διεύθυνση	64
5.26	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην y διεύθυνση	64
5.26	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην y διεύθυνση	65
5.27	Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην z διεύθυνση	65
5.28	Κέρδη Nussbaum	66
5.29	Ασκούμενοι Έλεγχοι ανά Πράκτορα σε κάθε διάσταση	67
5.30	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Χώρο	68
5.30	Στιγμιότυπα Κίνησης στο Χώρο	69
5.31	Διάταξη Πρακτόρων στη Μόνιμη κατάσταση ($t = 180 s$)	70
5.32	Min-Max Interagent Αποστάσεις	70
A'.1	Συνεκτικότητα Γραφημάτων	75
A'.2	Ειδικές Κατηγορίες Γράφων	75
Δ'.1	Dead-Zone Function	81

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Μεταβαλλόμενες Παράμετροι Προσομοίωσης	45
-----	--	----

Κατάλογος Συμβόλων

\forall	για κάθε
\exists	υπάρχει
\nexists	δεν υπάρχει
\in	ανήκει
\notin	δεν ανήκει
\mapsto	απεικόνιση
\rightarrow	τείνει σε
\Rightarrow	συνεπάγεται
\nRightarrow	δε συνεπάγεται
\Leftrightarrow	εαν και μόνο αν
\mathbb{R}	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
\mathbb{R}^n	το σύνολο των n -διάστατων πραγματικών διανυσμάτων
$\mathbb{R}^{n \times m}$	το σύνολο των $n \times m$ πραγματικών πινάκων
$\mathbb{R}^{n \times n}$	το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πραγματικών πινάκων
\mathbf{x}	διάνυσμα
\mathbf{x}^T	ανάστροφο διάνυσμα
$\ \mathbf{x}\ $	ευκλείδεια νόρμα διανυσματος
\mathbf{A}	πίνακας
\mathbf{A}^T	ανάστροφος πίνακας
\sum	τελεστής αθροίσματος
\int	τελεστής ολοκλήρωσης
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	τελεστής μερικής παραγώγισης
$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$	διαγώνια μήτρα με στοιχεία a_i
\max	τελέστης μεγίστου
\min	τελέστης ελαχίστου
\sup	supremum, ελάχιστο άνω φράγμα
\inf	infimum, μέγιστο κάτω φράγμα
\mathcal{G}	γράφημα
\mathcal{V}	σύνολο κορυφών γράφου
\mathcal{E}	σύνολο ακμών γράφου
\mathcal{N}_i	γειτονιά κόμβου u_i
\mathcal{L}_1	χώρος απολύτως ολ/μων συναρτήσεων
\mathcal{L}_2	χώρος τετραγωνικά ολ/μων συναρτήσεων
\mathcal{L}_∞	χώρος φραγμένων συναρτήσεων

Κεφάλαιο **1**

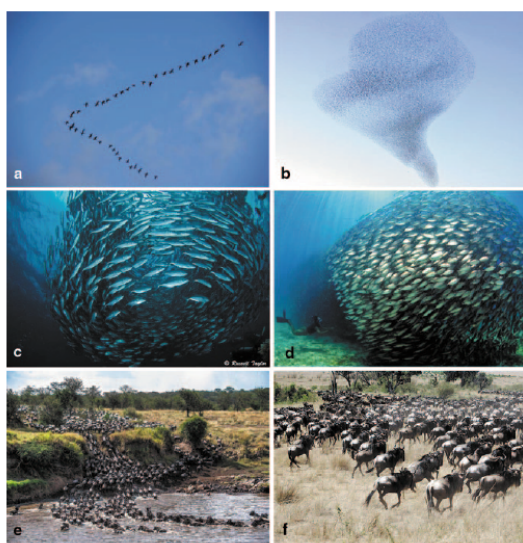
Εισαγωγή

1.1 Πολυπρακτορικά Συστήματα

Ως πολυπρακτορικό σύστημα (multiagent system) θεωρούμε μια μονάδα, η οποία αποτελείται από πολλαπλούς διασυνδεδεμένους πράκτορες (agents). Με τον όρο πράκτορας, περιγράφουμε οποιαδήποτε διάταξη, η οποία λαμβάνει πληροφορία από το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται και παράλληλα αλληλεπιδρά με αυτό. Λόγω της διασύνδεσης των πρακτόρων ορισμένες φορές γίνεται λόγος και για δίκτυα πρακτόρων.

Οι απαρχές της μελέτης των πολυπρακτορικών συστημάτων εντοπίζονται στην επιστήμη των υπολογιστών και συγκεκριμένα, στο πεδίο του distributed computing [6]. Η ερευνητική κοινότητα μελέτησε επιπλέον τέτοια συστήματα στα πλαίσια της θεωρίας αποφάσεων και των παράλληλων συστημάτων [7]. Τα πλεονεκτήματα των διασυνδεδεμένων υπολογιστικών συστημάτων κίνησαν το ενδιαφέρον ερευνητών από τον κλάδο της θεωρίας ελέγχου.

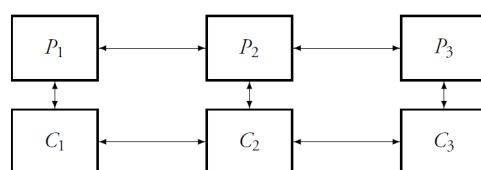
Επιπλέον κίνητρα για τον έλεγχο τέτοιων συστημάτων προσέθεσαν παραδείγματα από το ζωικό βασίλειο, όπως σμήνη πτηνών και ορδές ζώων, όπου παρατηρούνται ομαδικές συμπεριφορές [8]. Ακόμα και στον ίδιο τον άνθρωπο, σε καταστάσεις πανικού (φωτιά/σεισμός), παρατηρούνται τέτοιες συμπεριφορές [9]. Ένας ακόμα λόγος για τον οποίο αξίζει κανείς να μελετήσει πολυπρακτορικά συστήματα, είναι η εφαρμογή τους στην τεχνολογία π.χ ασύρματα δίκτυα αισθητήρων [10], δίκτυα παροχής ηλεκτρικής ενέργειας [11], συστήματα πολλαπλών κεραίων [12], έλεγχος σε πολλαπλούς κινητήρες [13] και δίκτυα δορυφόρων [14].



Σχήμα 1.1: Συλλογική συμπεριφορά ζώων [1]

1.2 Κατανεμημένα Συστήματα Ελέγχου

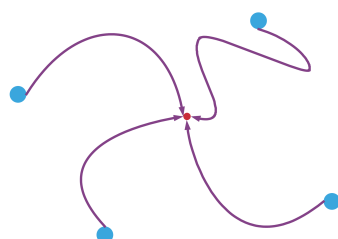
Υπάρχουν δύο φιλοσοφίες ως προς τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να επιτευχθεί ο επιθυμητός έλεγχος σε κατανεμημένα συστήματα. Η *κεντρική (centralized)* και η *κατανεμημένη (distributed)* προσέγγιση. Η πρώτη βασίζεται στην ύπαρξη ενός ισχυρού κεντρικού συστήματος που ελέγχει τα υπόλοιπα μικρότερα και είναι άμεση επέκταση της κλασικής θεωρίας ελέγχου για ένα μόνο σύστημα. Η δεύτερη, που είναι και αυτή που θα ασχοληθούμε, δεν απαιτεί την ύπαρξη μιας κεντρικής μονάδας-συστήματος, καθώς όλες οι “διαδικασίες” επιτελούνται στις επιμέρους μονάδες-συστήματα, οι οποίες ανταλλάσσουν πληροφορία μεταξύ τους 1.2 [15].



Σχήμα 1.2: Κατανεμημένη Αρχιτεκτονική [2]. Τα P_1 , P_2 και P_3 είναι agents με ελεγκτές C_1 , C_2 and C_3 αντίστοιχα.

Η κατανεμημένη σκοπιά έχει πολλά πλεονεκτήματα καθώς, σε ρεαλιστικές εφαρμογές δεν μπορούμε πάντα να έχουμε ισχυρά κεντρικά συστήματα με σταθερή επικοινωνία με όλα τα υπόλοιπα, ενώ ακόμα είναι πιο ευέλικτη και μπορεί να πετύχει περισσότερα πράγματα από την κεντρική προσέγγιση. Επί της ουσίας ο κατανεμημένος έλεγχος προσπαθεί να πετύχει, καθολική-ομαδική συμπεριφορά στηριζόμενος σε “τοπικά” περιορισμένη πληροφορία, για κάθε επιμέρους σύστημα-μονάδα [16].

Δημοφιλή προβλήματα κατανεμημένου ελέγχου είναι: (α) **Consensus** (πρόβλημα ομοφωνίας, το οποίο καλείται και πρόβλημα *agreement* ή *rendezvous* και έχει σκοπό να οδηγήσει ένα σύστημα πρακτόρων σε μια κοινή τιμή/κατάσταση/θέση), (β) **Formation Control** (έλεγχος σχηματισμού διάταξης) που επιτυγχάνει μια προκαθορισμένη ή όχι, διάταξη στο χώρο, ανάλογα με κάποια κριτήρια-περιορισμούς και (γ) **Flocking** (συμπεριφορά σμήνους), που προσομοιώνει συμπεριφορές παρόμοιες με αυτές πουλιών, ψαριών, εντόμων και άλλων ειδών.



(α') Σχηματική αναπαράσταση προβλήματος consensus



(β') Formation Control

Σχήμα 1.3: Δημοφιλή Multiagent Προβλήματα

1.3 Συνεισφορά της διπλωματικής

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα ομοφωνίας (consensus) ενός πολυπρακτορικού συστήματος, οι agents του οποίου απαρτίζουν ένα δίκτυο ιδεατών οχημάτων (multivehicle system) που κινούνται στο χώρο. Οι πράκτορες-οχήματα είναι εφοδιασμένοι με αισθητήρια όργανα, τα οποία ανιχνεύουν τους πλησιέστερους agents-γείτονες και παρέχουν μετρήσεις για τις σχετικές θέσεις και ταχύτητες αυτών. Επιπλέον θεωρούνται σημειακοί (kinematic particles) με γραμμική δυναμική. Εάν επιπρόσθετα θεωρήσουμε αβεβαιότητες στη δυναμική των πρακτόρων, αυξάνουμε αφενός τη δυσκολία του προβλήματος, αφετέρου παρέχουμε ένα πιο ρεαλιστικό σενάριο ελέγχου.

Ο τελικός μας στόχος είναι να συγκεντρώσουμε το σύνολο των διασυνδεδεμένων πρακτόρων σε μια περιοχή του χώρου, ενώ θα αποφεύγουμε τις μεταξύ τους συγκρούσεις, διασφαλίζοντας ταυτόχρονα τη συνοχή του δικτύου. Παράλληλα θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε επιτυχώς την έλλειψη γνώσης μας για τις κατευθύνσεις ελέγχου, στη δυναμική των agent. Όλα τα παραπάνω πρέπει να επιτευχθούν με πλήρως κατανοημένο τρόπο, υπό την έννοια ότι κάθε ελεγκτής-agent θα χρησιμοποιεί μόνο τοπικά περιορισμένη πληροφορία.

Στην κατεύθυνση αυτή λοιπόν, σχεδιάζουμε ένα μη-γραμμικό, κατανοημένο, προσαρμοστικό πρωτόκολλο ελέγχου. Εξαιτίας της κίνησης των πρακτόρων στο χώρο, η τοπολογία επικοινωνίας μεταβάλλεται και συνεπώς τόσο το συνολικό σύστημα όσο και το σχήμα ελέγχου είναι διακοπτόμενο (switched) [17]. Στη σχεδίαση λαμβάνουμε υπόψιν τους αντικρουόμενους περιορισμούς της αποφυγής συγκρούσεων και αποφυγής απώλειας συνεκτικότητας, ενώ παράλληλα αντιμετωπίζουμε και τις άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου. Τέλος η μόνη πληροφορία που χρησιμοποιούμε κατά τη σχεδίαση είναι οι μετρήσεις σχετικής θέσης/ταχύτητας των εκάστοτε γειτόνων. Η κύρια ερευνητική συνεισφορά της διπλωματικής συνοψίζεται στα εξής:

- Χρησιμοποιούμε συναρτήσεις δυναμικού (potential functions) για κωδικοποίηση και επίλυση των αντικρουόμενων περιορισμών
- Επιλύουμε το προσαρμοστικό πρόβλημα ελέγχου των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου, μέσω της μεθόδου συναρτήσεων Nussbaum
- Εισάγουμε μια νέα γενικευμένη έννοια συμφωνίας στο χώρο, αυτή του “ ϵ -box consensus”, η οποία μοντελοποιεί σύγκλιση σε μια περιορισμένη περιοχή του χώρου και είναι κατάλληλη για να περιγράψει αλληλοαναιρούμενες απαιτήσεις
- Σχεδιάζουμε κατανοημένο πρωτόκολλο με προσαρμοστικά στοιχεία που χρησιμοποιεί μόνο μετρήσεις σχετικής θέσης και ταχύτητας
- Εξασφαλίζουμε την αποφυγή συγκρούσεων, τη διατήρηση συνοχής, την επιτυχή αντιμετώπιση των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου, καθώς και τη σύγκλιση σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου

Η ουσιαστική καινοτομία της εργασίας είναι ότι συνδυάζει για πρώτη φορά επιτυχώς, τα προβλήματα αποφυγής συγκρούσεων και διατήρησης συνοχής, με το πρόβλημα των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου, ενώ εγγυάται σύγκλιση σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου.

1.4 Οργάνωση του τόμου

Η ενότητα αυτή παρέχει μια σφαιρική εικόνα της δομής της παρούσας εργασίας. Συγκεκριμένα ο τόμος οργανώνεται σε έξι κεφάλαια και τέσσερα παραρτήματα, το περιεχόμενο του καθενός σκιαγραφείται παρακάτω

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

Περιγράφει τα κίνητρα και κάποιες βασικές έννοιες της παρούσας εργασίας, ενώ σκιαγραφεί και τη συνεισφορά αυτής.

Κεφάλαιο 2 - Αντικείμενο Διπλωματικής

Δίνεται αρχικά μια βιβλιογραφική αναφορά σε εργασίες με αντικείμενο σχετικό με αυτό της διπλωματικής, ενώ στη συνέχεια σκιαγραφούνται με μαθηματικό τρόπο τα επιμέρους προβλήματα που θα μελετήσουμε.

Κεφάλαιο 3 - Μοντελοποίηση Προβλήματος

Προπαρασκευαστικό κεφάλαιο στο οποίο παρατίθενται έννοιες και μοντέλα, πάνω στα οποία θα στηριχτεί τόσο η περιγραφή του προβλήματος, όσο και η εξαγωγή των προτεινόμενων σχημάτων ελέγχου.

Κεφάλαιο 4 - Προτεινόμενα Πρωτόκολλα Ελέγχου

Παρουσιάζονται τα πρωτόκολλα ελέγχου που προτείνουμε και εν συνεχεία αποδεικνύεται η ισχύς του για τα προβλήματα που μοντελοποιήσαμε.

Κεφάλαιο 5 - Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Επαληθεύονται τα θεωρητικά αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, μέσω προσομοιώσεων σε κατάλληλο υπολογιστικό περιβάλλον και παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα.

Κεφάλαιο 6 - Επίλογος

Συνοψίζουμε τη συνεισφορά της εργασίας μας και παράλληλα σκιαγραφούμε ορισμένες πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις των προτεινόμενων πρωτοκόλλων.

Παράρτημα Α' - Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

Βασικές έννοιες από τη θεωρία γράφων, που μοντελοποιούν κατάλληλα τη ροή-ανταλλαγή πληροφορίας σε ένα πολυπρακτορικό δίκτυο.

Παράρτημα Β' - Θεωρία Συστημάτων

Θεμελιώδη τεχνικά αποτελέσματα που θα μας χρησιμεύσουν στην εξαγωγή των προτεινόμενων σχημάτων ελέγχου.

Παράρτημα Γ' - Παραγωγίσεις Δυναμικών

Τεχνικές λεπτομέρειες που παραλήφθησαν από το κυρίως σώμα των αποδείξεων προς αποσυμφόρηση και καλύτερη κατανόηση.

Παράρτημα Δ' - Συνάρτηση τύπου Dead Zone

Μια ιδιαίτερη συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στο δυναμικό αποφυγής συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων.

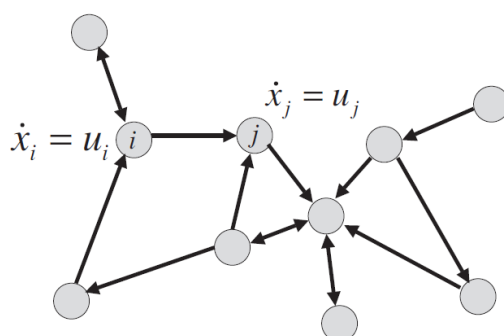
Κεφάλαιο 2

Αντικείμενο Διπλωματικής

Το κεφάλαιο συνοψίζει τα σημαντικότερα αποτελέσματα σε προβλήματα consensus, τα οποία σχετίζονται με το αντικείμενο της εργασίας μας. Στην πρώτη υποενότητα σχηματίζουμε βασικές εργασίες στη βιβλιογραφία των πολυπρακτορικών συστημάτων, ενώ στη δεύτερη παραθέτουμε συνοπτικά τα υποπροβλήματα που απαρτίζουν το συνολικό πρόβλημα που θα μελετήσουμε.

2.1 Σχετικές Εργασίες

Σε ότι αφορά το πρόβλημα consensus για multi-vehicle συστήματα, η βασική ιδέα είναι ο σχεδιασμός ενός καταναμημένου πρωτοκόλλου ελέγχου, με συγκεκριμένους στόχους, κάτω από περιορισμένες δυνατότητες επικοινωνίας. Τα τελευταία χρόνια, έχει εμφανιστεί στη βιβλιογραφία πληθώρα αποτελεσμάτων με διαφορετικές εκφάνσεις, προσαρμοσμένων κάθε φορά στις απαιτήσεις και τους περιορισμούς του προβλήματος, όπως π.χ η δυναμική των agent, η τοπολογία και το μοντέλο επικοινωνίας, η ύπαρξη ή μη χρονοκαθυστερήσεων, οι υπολογιστικές δυνατότητες των πρακτόρων κ.λ.π. Για μια συγκεντρωτική βιβλιογραφική ανασκόπηση παραπέμπουμε στα [18], [19] και [20].



Σχήμα 2.1: Δίκτυο απλών ολοκληρωτών [3]

Στις περισσότερες εργασίες μελετούνται συστήματα με απλή δυναμική πρακτόρων και πολύπλοκες τοπολογίες επικοινωνίας. Ορισμένα πρώιμα αποτελέσματα που αποτέλεσαν βασικό πυλώνα αυτής της έρευνας είναι τα [21], [22], [23], [24], [25], [26], όπου παρουσιάζονται τόσο σταθερές όσο και χρονομεταβαλλόμενες τοπολογίες με προσανατολισμένη ή μη ροή πληροφορίας, για συστήματα απλών και διπλών ολοκληρωτών. Συγκεκριμένα οι απλοί ολοκληρωτές

προσομοιώνουν τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα για συστήματα σωματιδίων [27], [28], ενώ οι διπλοί ολοκληρωτές μοντελοποιούν με μια αφηρημένη έννοια το 2^ο νόμο του Newton για κίνηση υλικών σημείων-πρακτόρων στο χώρο [29], [30].

Για να γεφυρωθεί το κενό μεταξύ των αρχικών θεωρητικών αποτελεσμάτων και των φυσικών περιορισμών που κληρονομούνται από τη μελέτη ρεαλιστικών συστημάτων, οι ερευνητές προσάρμοσαν τα αποτελέσματα τους λαμβάνοντας υπόψιν πολλούς πρακτικούς παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα οι περιορισμοί *αποφυγής συγκρούσεων* (collision avoidance) και *διατήρησης της τοπολογίας επικοινωνίας* (connectivity maintainance) είναι αρκετά συνηθισμένοι σε εφαρμογές multivehicle συστημάτων. Η βασική προσέγγιση είναι η κατασκευή ενός τεχνητού δυναμικού, μεταξύ κάθε ζεύγους γειτόνων agent, το οποίο θα μοντελοποιεί κατάλληλα τον εκάστοτε περιορισμό [5], [31], [32], [33], [34]. Σε ότι αφορά την αποφυγή συγκρούσεων χρησιμοποιείται ένα δυναμικό που παράγει απωστικές “δυνάμεις” όταν δύο γείτονες agents τείνουν να συναντηθούν. Για τη διατήρηση συνοχής χρησιμοποιείται επιπλέον και ένα πρωτόκολλο υστέρησης το οποίο σε συνδυασμό με το κατάλληλο δυναμικό, αποτρέπει την απώλεια συνδέσμου μεταξύ δύο οποιονδήποτε γειτόνων agent, αλλά επιτρέπει τη δημιουργία νέων συνδέσμων.

Μια διαφορετική θεώρηση, το λεγόμενο *ϵ -box consensus*, δίνεται στο [4], όπου αποδεικνύεται σύγκλιση σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου, αντί για κάποιο σημείο (position consensus). Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ένα αποτέλεσμα που μας επιτρέπει να οριοθετήσουμε μετρικά την περιοχή του χώρου στην οποία θα συγκεντρωθεί το σύστημα. Χρησιμοποιήσαμε λοιπόν το αποτέλεσμα αυτό, διότι μπορεί να μοντελοποιήσει τους αντικρουόμενους περιορισμούς που εμφανίζονται στη μελέτη μας.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα υποθέτουν γνωστή δυναμική πρακτόρων. Την τελευταία δεκαεπενταετία εμφανίστηκαν εργασίες που αντιμετωπίζουν την έλλειψη a-priori γνώσης για το σύστημα και συγκεκριμένα για τις κατευθύνσεις ελέγχου [35], [36], [37], βασιζόμενες στα κέρδη Nussbaum [38]. Συγκεκριμένα έχουν εμφανιστεί αποτελέσματα σε απλούς και διπλούς ολοκληρωτές [39] ή ακόμα και παθητικά συστήματα [40], στα οποία γίνεται χρήση είτε sub-Lyapunov συναρτήσεων για κάθε πράκτορα-υποσύστημα είτε μιας global Lyapunov συνάρτησης αντίστοιχα. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε ένα βασικό τεχνικό αποτέλεσμα που παρουσιάζεται στο [41] και βασίζεται σε ένα λήμμα από το [42], το οποίο χρησιμοποιεί μια καθολική συνάρτηση τύπου Lyapunov στην οποία εμπλέκονται πολλαπλά κέρδη Nussbaum. Μια παρεμφερής προσέγγιση μπορεί να βρεθεί στο [43], στο οποίο εξετάζονται adaptive συστήματα, χωρίς όμως να γίνεται λόγος για τους περιορισμούς συνεκτικότητας και αποφυγής συγκρούσεων.

2.2 Διατύπωση Υποπροβλημάτων

Σε ένα multiagent δίκτυο, κάθε πράκτορας μπορεί να επικοινωνεί με άλλους πράκτορες, οι οποίοι καλούνται γείτονές του. Το δίκτυο των N πρακτόρων δομεί το γράφημα επικοινωνίας $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$, όπου ως κόμβοι $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ ορίζονται οι ίδιοι οι πράκτορες, ενώ ως ακμές $\mathcal{E}(t) \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ορίζονται οι “συνδέσεις” μεταξύ των οποίων έχουμε διαβίβαση πληροφορίας σε κάθε χρονική στιγμή. Οι ποσότητες $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{v}_i(t)$ αναπαριστούν τη θέση και την ταχύτητα του πράκτορα i αντίστοιχα, στο χώρο \mathbb{R}^m .

2.2.1 Το πρόβλημα Consensus

Ο όρος *consensus* προέρχεται από το λατινικό *com* που σημαίνει “με” ή “μαζί με” και το *sentire* που μεταφράζεται ως “να αισθάνομαι”. Συνδυάζοντάς τα μπορούμε να πούμε ότι *consensus* σημαίνει να νιώθεις κάτι μαζί με άλλους ή να συμφωνείς μαζί με άλλους πάνω σε κάποιο κοινό συναίσθημα [9].

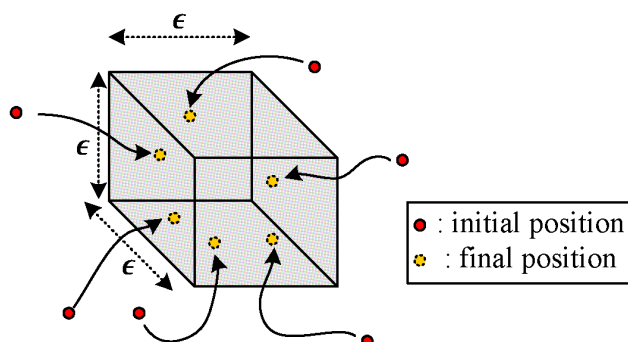
Στη θεωρία ελέγχου το πρόβλημα *consensus* σημαίνει είτε να συμφωνήσουν όλοι οι πράκτορες σε μια τιμή (πρόβλημα *agreement*), είτε να συναντηθούν όλοι με μη-προκαθορισμένο τρόπο κάπου στο χώρο (πρόβλημα *rendezvous*). Εμείς θα ασχοληθούμε με το δεύτερο. Φορμαλιστικά έχουμε:

Ορισμός 2.1 (Consensus). Θα λέμε ότι το δίκτυο των N πρακτόρων φτάνει σε κατάσταση *consensus* όταν για κάθε αρχική διάταξη, δηλαδή $\forall \mathbf{x}_i(0), i \in \mathcal{V}$ ισχύει ότι $\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| \rightarrow 0, \forall i, j \in \mathcal{V}$, με $i \neq j$ καθώς $t \rightarrow \infty$

Εισάγουμε τώρα μια απ’ τις βασικές συνεισφορές της παρούσας εργασίας, αυτή του προσεγγιστικού *consensus* ή πιο ορθά του ϵ -box *consensus*.

Ορισμός 2.2 (ϵ -box consensus [4]). Θα λέμε ότι ένα σύνολο από N agents επιτυγχάνει ϵ -box consensus, αν όλοι οι agents συγκλίνουν ασυμπτωτικά σε έναν υπερκύβο ακμής ϵ . Φορμαλιστικά έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i, j \leq N} |x_{ik}(t) - x_{jk}(t)| \leq \epsilon \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση του ϵ -box consensus (παράλλαξη από [4])

Σημείωση 1. Ο ορισμός 2.2 μας λέει ουσιαστικά ότι, για κάθε agent σε κάθε επιμέρους διάσταση, μπορώ να βρω τουλάχιστον έναν άλλο, ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση το πολύ $\sqrt{m}\epsilon$. Να σημειωθεί ότι δεν είναι απαραίτητο να έχω τον ίδιο agent-γείτονα σε κάθε διάσταση, ενώ ακόμα, το χειρότερο δυνατό σενάριο είναι να διαταχθούν οι πράκτορες κατά μήκος της διαγωνίου του υπερκύβου (μήκος διαγωνίου: $(N - 1)\sqrt{m}\epsilon$).

2.2.2 Το πρόβλημα αποφυγής συγκρούσεων

Σε ρεαλιστικές εφαρμογές για multivehicle συστήματα, είναι φυσικό να απαιτούμε να μην έχουμε συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων-πρακτόρων. Στη βιβλιογραφία αναφέρεται συχνά και ως περιορισμός ασφαλείας (safety constraint) και είναι αντικρουόμενη απαίτηση με το consensus.

Συγκεκριμένα κάθε πράκτορας $i \in \mathcal{V}$, θα πρέπει να αποφεύγει να συγκρουστεί με οποιονδήποτε άλλον agent στο $\mathcal{V} \setminus \{i\}$. Για δύο διακριτούς σημειακούς πράκτορες $i, j \in \mathcal{V}$, που κινούνται στο χώρο, η απαίτηση αποφυγής ορίζεται από τη σχέση:

$$\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| > 0, \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

Σημείωση 2. Στη βιβλιογραφία όταν εξετάζονται πράκτορες με διάσταση, ο περιορισμός αποφυγής συγκρούσεων μοντελοποιείται ως $\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| > \rho, \forall t \geq 0, \rho > 0$

2.2.3 Το πρόβλημα διατήρησης συνεκτικότητας

Προκειμένου να πετύχουμε έναν κοινό στόχο σε κάποιο πολυπρακτορικό δίκτυο, απαιτούμε τη συνεχή επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων. Εξαιτίας των περιορισμένων δυνατοτήτων των αισθητήριων διατάξεων, αλλά και της κίνησης των πρακτόρων στο χώρο, ενδέχεται η επικοινωνία μεταξύ ορισμένων γειτόνων να χαθεί. Αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα την απώλεια συνεκτικότητας του δικτύου επικοινωνίας.

Έτσι το να διατηρούμε το γράφημα επικοινωνίας συνεκτικό, είναι πρωταρχικό μας μέλημα σε ρεαλιστικές εφαρμογές. Απαιτούμε λοιπόν να διατηρούμε τη συνοχή μιας αρχικά συνεκτικής τοπολογίας επικοινωνίας. Το μαθηματικό ισοδύναμο αυτής της πρότασης είναι:

$$\mathcal{G}_0 : \text{συνεκτικό} \Rightarrow \mathcal{G}(t) : \text{συνεκτικό} \forall t > 0 \quad (2.3)$$

2.2.4 Το πρόβλημα των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου

Σε πολλές εφαρμογές τα δίκτυα απαρτίζονται από agents με αβεβαιότητες στη δυναμική τους. Το ενδιαφέρον στα προβλήματα αυτά, είναι ότι λόγω της έλλειψης γνώσης, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους αυτές στα σχήματα ελέγχου.

$$\dot{x}_i = b_i u_i, i \in \mathcal{V}$$

Όταν έχουμε άγνωστα ή μερικώς άγνωστα b_i , το πρόβλημα καλείται άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου (unknown control directions) και πρακτικά εμφανίζεται είτε λόγω εγγενών αβεβαιοτήτων στο σύστημα, είτε λόγω κατασκευαστικών ατελειών. Οι λύσεις που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία ποικίλουν. Αναφέρουμε ονομαστικά τα κέρδη *Nussbaum*, το μη-γραμμικό αναλογικό ολοκληρωτικό έλεγχο (N.P.I) [44], [45] καθώς και τη μέθοδο correction vector [46].

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση Προβλήματος

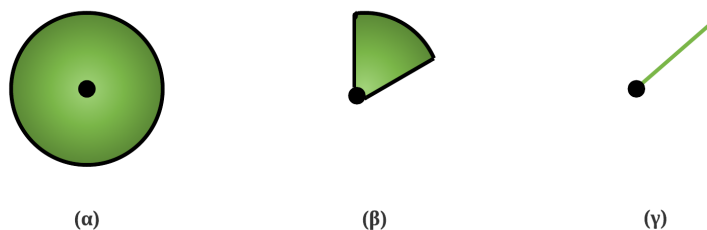
Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το πλήρες μοντέλο για το δίκτυο των agent. Η περιγραφή που θα ακολουθήσουμε βασίζεται κυρίως στους εξής άξονες: (i) τον τρόπο διασύνδεσης και επικοινωνίας των πρακτόρων εντός του δικτύου, (ii) τη δυναμική που διέπει την κίνηση των πρακτόρων στο χώρο, (iii) τις κατάλληλες συναρτήσεις δυναμικού και τεχνικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε.

3.1 Τοπολογία Ανίχνευσης

Προκειμένου να πετύχουμε κάποιο κοινό-συνεργατικό στόχο σε ένα πολυπρακτορικό σύστημα, είναι απαραίτητη η επικοινωνία μεταξύ των ατομικότητων. Ως εκ τούτου υποθέτουμε ότι όλοι οι agents έχουν τη δυνατότητα ανίχνευσης του περιβάλλοντα χώρου τους και συγκεκριμένα θεωρούμε πως κάθε πράκτορας μπορεί να ανιχνεύσει όσες οντότητες βρίσκονται πλησίον του. Το κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο για να περιγράψει αυτή τη ροή πληροφορίας είναι τα γραφήματα $\mathcal{G}(t)$ (βλ. Παράρτημα Α').

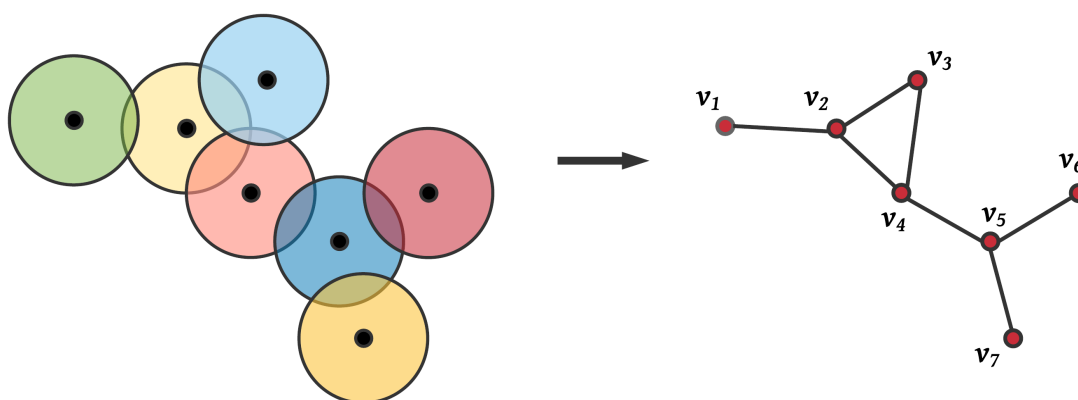
Εν γένει ένα multiagent σύστημα αποτελείται από N πράκτορες, οι οποίοι αναπαριστούν το σύνολο των κόμβων \mathcal{V} , καθώς και από τους συνδέσμους επικοινωνίας των πρακτόρων, οι οποίοι με τη σειρά τους δομούν τον χρονομεταβλητό σύνολο των ακμών $\mathcal{E}(t)$ του γραφήματος. Το συνολικό δίκτυο αναπαρίσταται δηλαδή ως $\mathcal{G}(t) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(t))$.

Η ανταλλαγή πληροφορίας μεταξύ των ατομικότητων επιτυγχάνεται μέσω αισθητήριων οργάνων (sensors) που φέρει κάθε agent, π.χ camera, laser [10] και τους επιτρέπει ακτινική γεωμετρία ανίχνευσης (field of view).



Σχήμα 3.1: Γεωμετρίες Αισθητήριων Ανίχνευσης: (α)Ακτινική, (β)Σφηνοειδής, (γ)Μονής Ακτίνας

Συγκεκριμένα δύο agents λέγονται γείτονες όταν ανταλλάσουν πληροφορία μεταξύ τους. Εν προκειμένω όταν ο ένας βρίσκεται τουλάχιστον εντός του field of view του άλλου.



Σχήμα 3.2: Μετάβαση από χώρο εργασίας agent σε Γράφο Επικοινωνίας

3.2 Δυναμική Πρακτόρων

Θεωρούμε ένα σύστημα N σημειακών πρακτόρων που κινούνται σε κάποιο ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^m . Τα κινηματικά μοντέλα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι δύο και διέπονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

- Απλοί Ολοκληρωτές

$$\dot{x}_{il} = b_{il}u_{il} \quad (3.1)$$

- Διπλοί Ολοκληρωτές

$$\begin{cases} \dot{x}_{il} = v_{il} \\ \dot{v}_{il} = b_{il}u_{il} \end{cases} \quad (3.2)$$

,όπου ο δείκτης $i \in \mathcal{V}$ αναπαριστά κάποιον agent, ενώ ο δείκτης $l = \{1, \dots, m\}$ αντιπροσωπεύει τη διάσταση του χώρου την οποία εξετάζουμε.

Χρησιμοποιούμε τα διάνυσματα $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, \dots, x_{im}]^T$, $\mathbf{v}_i = [v_{i1}, \dots, v_{im}]^T$ για να αναπαράσουμε τη θέση και την ταχύτητα του πράκτορα i στο χώρο \mathbb{R}^m . Με u_{il} συμβολίζουμε τον έλεγχο που ασκείται στον πράκτορα i στη διάσταση l .

Υποθέτουμε επιπλέον πως η μόνη διαθέσιμη πληροφορία για ανάδραση ανά agent, είναι η σχετική θέση και ταχύτητα των εκάστοτε γειτόνων του. Τέλος οι κατευθύνσεις ελέγχου b_{il} θεωρούνται πως έχουν

- άγνωστο, μη μηδενικό πεπερασμένο μέτρο
- κοινό αλλά άγνωστο πρόσημο

3.3 Μοντέλο Επικοινωνίας

Μπορεί να αναφέραμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε το ακτινικό μοντέλο ανίχνευσης, αλλά δεν έχουμε καθορίσει πλήρως τον τρόπο που θα επικοινωνούν οι agents εντός του δικτύου. Στην κατεύθυνση αυτή ορίζουμε τρεις περιοχές στο χώρο εργασίας $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ κάθε πράκτορα. Συγκεκριμένα εαν \mathbf{x}_i είναι η θέση του agent i , ορίζουμε τις εξής περιοχές:

Ορισμός 3.3 (Περιοχή Διατήρησης). Η περιοχή εντός της οποίας ένας agent $i \in \mathcal{V}$ διατηρεί τους γείτονες πράκτορες του. Φορμαλιστικά δίνεται από την

$$\mathcal{S}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq R\} \quad (3.3)$$

,όπου R μια σταθερά που καλείται *ακτίνα ανίχνευσης*.

Ορισμός 3.4 (Περιοχή Δημιουργίας Συνδέσμου). Η περιοχή εντός της οποίας έχουμε δημιουργία νέου link μεταξύ ενός ζεύγους πρακτόρων. Φορμαλιστικά δίνεται από την

$$\mathcal{Q}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq R - \delta\} \quad (3.4)$$

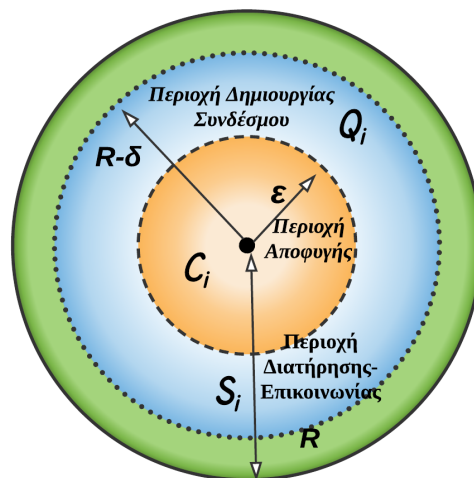
όπου δ θετική σταθερά η οποία ονομάζεται *παράμετρος δημιουργίας συνδέσμου*.

Ορισμός 3.5 (Περιοχή Ενεργοποίησης Αποφυγής). Η περιοχή εντός της οποίας ενεργοποιείται ο μηχανισμός αποφυγής συγκρούσεων Φορμαλιστικά δίνεται από την

$$\mathcal{C}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\| \leq \epsilon\} \quad (3.5)$$

όπου ϵ η *ακτίνα αποφυγής* του agent i .

Οι παραπάνω ορισμοί συνοψίζονται σχηματικά στο 3.3



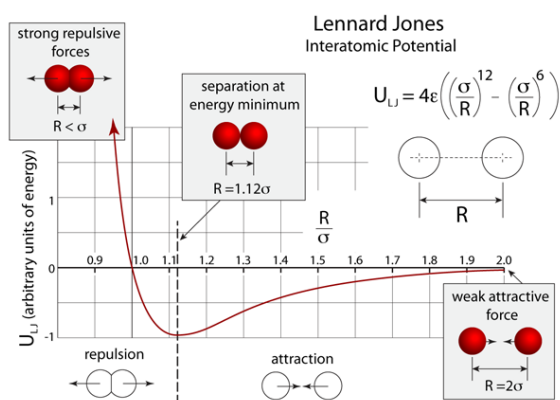
Σχήμα 3.3: Υποδιαίρεσεις περιοχών ανίχνευσης σε πράκτορα

Σημείωση 3. Παραθέτουμε και κάποιες παρατηρήσεις πάνω στο μοντέλο επικοινωνίας.

- Δύο agents θα μπορούν να επικοινωνούν εαν και μόνο αν η μεταξύ τους απόσταση είναι το πολύ R και προϋπάρχει link. Διαφορετικά απαιτείται απόσταση το πολύ $R - \delta$ ώστε να δημιουργηθεί link.
- Όλοι οι agent έχουν πανομοιότυπους αισθητήριους μηχανισμούς και συνεπώς την ίδια ακτίνα ανίχνευσης R , την ίδια παράμετρο δημιουργίας πρώτου συνδέσμου δ και την ίδια ακτίνα αποφυγής ϵ .
- Το μοντέλο επικοινωνίας τριών περιοχών που παρουσιάσαμε, καθορίζεται μονοσήμαντα από τις τρεις προαναφερθείσες μεταβλητές (R, δ, ϵ), στις οποίες από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε ως **τριπλέτα επικοινωνίας**.

3.4 Συναρτήσεις Δυναμικών

Σε όλες τις πρακτικές εφαρμογές εγείρονται με φυσικό τρόπο ορισμένοι περιορισμοί όπως η αποφυγή συγκρούσεων (*collision avoidance*), η διατήρηση συνοχής της τοπολογίας επικοινωνίας (*connectivity maintainance*), η κίνηση σε συγκεκριμένους σχηματισμούς-διατάξεις κ.λ.π. Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τις απαιτήσεις αυτές, δανειζόμαστε την έννοια του δυναμικού (*potential field*) από τη φυσική (π.χ βαρυτικό δυναμικό, δυναμικό Lennard Jones).



Σχήμα 3.4: Παράδειγμα ενδοατομικού δυναμικού

Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε ένα δυναμικό για την αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των agent (απωστικοί νόμοι ελέγχου) και ένα για τη διατήρηση της επικοινωνίας δύο γειτονικών agents (ελκτικοί νόμοι ελέγχου). Και τα δύο μαζί θα μας δώσουν το συνολικό δυναμικό, το οποίο εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις $\|l_{ij}\| = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ των πρακτόρων στο χώρο.

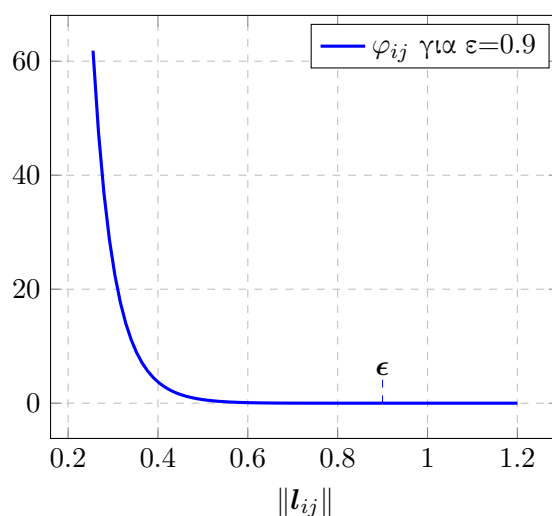
Δυναμικό Collision Avoidance

Σκοπός μας είναι να ενεργοποιείται ένας μηχανισμός αποφυγής όταν δύο γειτονικοί πράκτορες πλησιάζουν σε απόσταση μικρότερη από ένα κατώφλι το οποίο ονομάζεται *ακτίνα ενεργοποίησης αποφυγής* και συμβολίζεται με ϵ .

Ορισμός 3.6 (Δυναμικό C.A.). Ως δυναμικό αποφυγής συγκρούσεων ορίζουμε την ποσότητα

$$V_{C.A} = \Phi = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{ij}, \quad \text{όπου } \varphi_{ij} = \left[\frac{1}{\|l_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^4 \quad (3.6)$$

και φ_{ij} είναι το δυναμικό αποφυγής μεταξύ των διακριτών πρακτόρων $i, j \in \mathcal{V}$, ενώ με $[\cdot]_{\epsilon}$ συμβολίζουμε έναν dead-zone τελεστή που ορίζεται στο Παράρτημα Δ'.

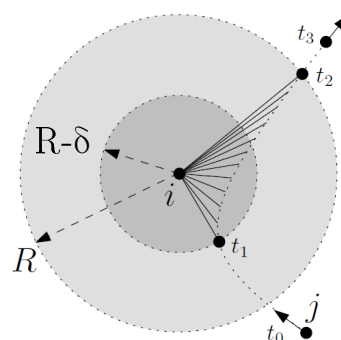


Σχήμα 3.5: Δυναμικό Αποφυγής Συγκρούσεων

Δυναμικό Connectivity Maintenance

Προκειμένου να διατηρήσουμε τη συνοχή μιας αρχικά συνεκτικής τοπολογίας κατασκευάσαμε ένα δυναμικό που να εξασφαλίζει την επικοινωνία μεταξύ δύο γειτονικών πρακτόρων σε κάθε χρονική στιγμή. Συγκεκριμένα διατηρεί δύο γείτονες agents εντός μιας περιοχής με ακτίνα R , η οποία καλείται ακτίνα διατήρησης ή ανίχνευσης.

Επιπλέον χρησιμοποιήσαμε και ένα πρωτόκολλο υστέρησης ώστε να επιτρέπουμε και τη δημιουργία νέων συνδέσμων επικοινωνίας. Το πρωτόκολλο αυτό επιτρέπει τη σύναψη νέου link μόνο εαν η απόσταση μεταξύ των πρακτόρων είναι μικρότερη από ένα κατώφλι το οποίο καλείται ακτίνα δημιουργίας συνδέσμου $(R - \delta)$. Όπως αναφέραμε και στη θεμελίωση του μοντέλου επικοινωνίας η παράμετρος δημιουργίας συνδέσμου δ είναι αυτή που παίζει τον κρίσιμο ρόλο στο πόσο “διαρκεί” η υστέρηση.



Σχήμα 3.6: Hysteresis [5]

Θεωρούμε μια δείκτηρα συνάρτηση $\sigma(i, j) \in \{0, 1\}$ η οποία σε συνδυασμό με τη σχετική

απόσταση $\|l_{ij}\|$ των πρακτόρων μας ενημερώνει για το αν δύο πράκτορες είναι γείτονες ή όχι. Η σχέση η οποία προτείνεται στο [31] και υιοθετούμε και εμείς στην εργασία μας ορίζεται απίτη

$$\sigma(i, j)[t^+] = \begin{cases} 0 & \text{εαν } \sigma(i, j)[t^-] = 0 \wedge \|l_{ij}\| \geq R - \delta, \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.7)$$

ενώ η έννοια της γειτονιάς-γείτονα agent μετατρέπεται σε μια χρονομεταβλητή έκδοση:

$$\mathcal{N}_i(t) = \{j \in \mathcal{V} : \sigma(i, j)[t] = 1\} \quad (3.8)$$

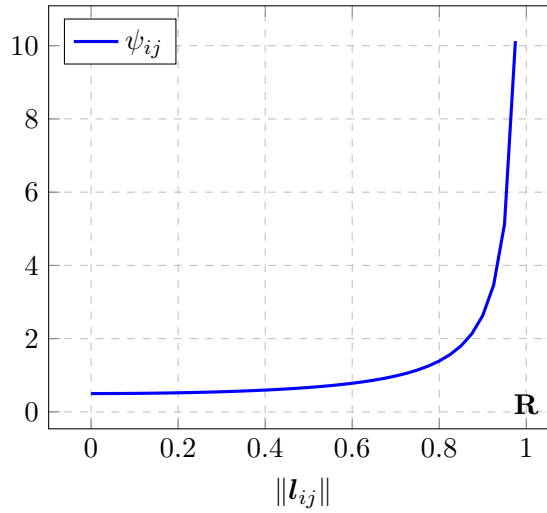
Δίνεται τέλος το δυναμικό διατήρησης:

Ορισμός 3.7 (Δυναμικό C.M.). Ως δυναμικό διατήρησης συνοχής ορίζουμε την ποσότητα

$$V_{C.M} = \Psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \psi_{ij}, \quad \text{όπου } \psi_{ij} = \frac{R/2}{R^2 - \|l_{ij}\|^2} \quad (3.9)$$

και $\|l_{ij}\| = [(x_{i1} - x_{j1})^2 + \dots + (x_{im} - x_{jm})^2]^{1/2}$

Η συνάρτηση ψ_{ij} είναι το δυναμικό διατήρησης συνοχής μεταξύ των διακριτών πρακτόρων $i, j \in \mathcal{V}$.



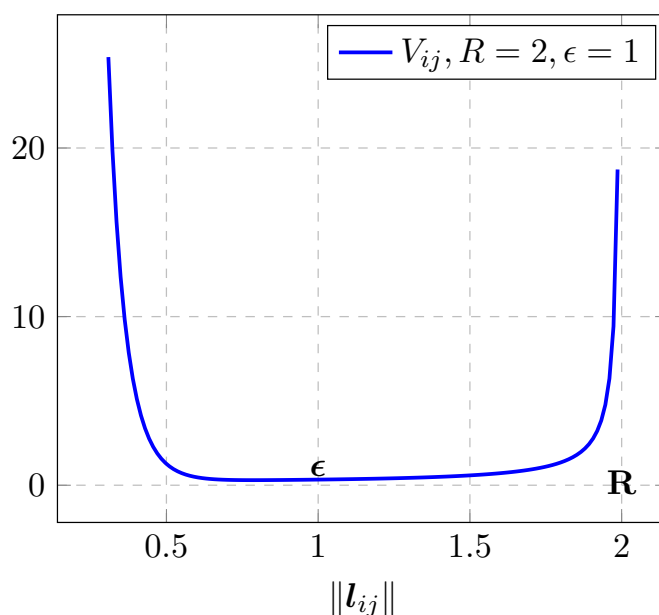
Σχήμα 3.7: Δυναμικό Διατήρησης Συνεκτικότητας ψ_{ij} για $R = 1$

Ολικό Δυναμικό

Η “συνολική” συνάρτηση δυναμικού που θα χρησιμοποιήσουμε δίνεται ως το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών

$$V_{total} = V_{C.M} + V_{C.A} = \Psi + \Phi \quad (3.10)$$

και είναι συνεχώς διαφορίσιμη ως άθροισμα συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων. Αποδίδουμε γραφικά το συνολικό δυναμικό μεταξύ δύο agent στο παρακάτω σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Συνολικό Δυναμικό μεταξύ 2 πρακτόρων

3.5 Συναρτήσεις Nussbaum

Οι συναρτήσεις Nussbaum είναι οι λύσεις σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο έχει άμεση εφαρμογή στον προσαρμοστικό έλεγχο [38]. Συγκεκριμένα έστω οι συναρτήσεις $f(\cdot) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ και $\mathbf{g}(\cdot) : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, οι οποίες αναπαριστούν έναν ελεγκτή $u(\cdot)$ και έναν προσαρμοστικό νόμο $\mathbf{y}(\cdot)$ αντίστοιχα. Υπάρχουν λύσεις του:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + \lambda u(t), \\ u(t) &= f(x(t), \mathbf{y}(t)), \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{g}(x(t), \mathbf{y}(t)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

για κάθε πραγματικό $\lambda \neq 0$ και για όλες τις αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, ώστε να ορίζεται λύση για $t \geq 0$ και επιπλέον να ισχύει $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ και $\mathbf{y}(t)$ φραγμένο στο $[0, \infty)$;

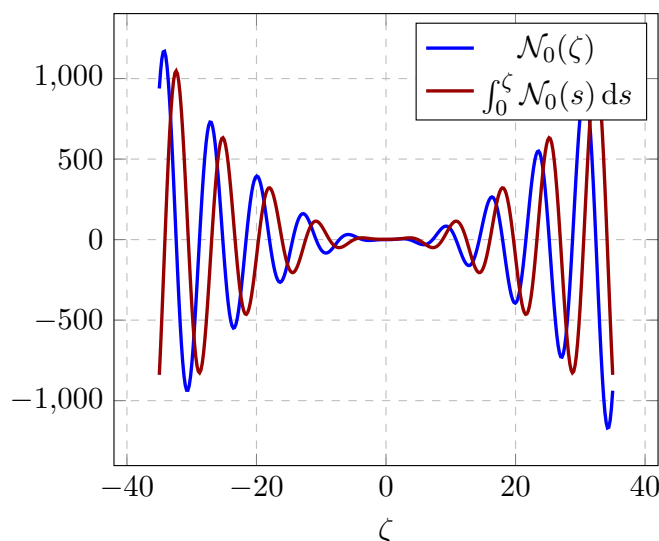
Την απάντηση σε αυτό το πρόβλημα που αρχικά έθεσε ο A.S.Morse, βρήκε ο Nussbaum δίνοντας ως λύσεις **παλλινδρομικές συναρτήσεις αυξανόμενου πλάτους**. Με όρους συστημάτων στο παραπάνω πρόβλημα, λ είναι το άγνωστο μη-μηδενικό κέρδος ελέγχου, $u(\cdot)$ ο έλεγχος και $\mathbf{y}(\cdot)$ η εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου.

Πριν δώσουμε τη λύση ασ σχετούμε το εξής. Αν η παράμετρος λ ήταν γνωστή, τότε θα αρκούσε ένας απλός νόμος ανάδρασης κατάστασης της μορφής $u = Kx$ με κατάλληλα επιλεγμένη παράμετρο K ως προς το πρόσημο. Ο Nussbaum ουσιαστικά επέλεξε για παράμετρο “κέρδους” K κάποιες συναρτήσεις που συμβολίζονται με $\mathcal{M}(\cdot)$ ή $\mathcal{N}(\cdot)$ και ικανοποιούν τις

εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathcal{N}(s) ds &= +\infty \\ \liminf_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mathcal{N}(s) ds &= -\infty \end{aligned} \quad (3.12)$$

Τυπικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι $\zeta^2 \sin(\zeta)$, $\zeta^2 \cos(\zeta)$, $\exp(\zeta^4) \cos(\zeta)$. Σε



Σχήμα 3.9: Γραφική παράσταση $\mathcal{N}(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και $\int_0^\zeta \mathcal{N}(\sigma) d\sigma$

συστήματα της μορφής $\dot{x} = x + \lambda u$, $\lambda \neq 0$ το πλήρες σχήμα ελέγχου δίνεται ως:

$$\begin{cases} u = \mathcal{N}(\zeta)x \\ \dot{\zeta} = x^2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Σημείωση 4. Ουσιαστικά ο νόμος ελέγχου που θα χρησιμοποιήσουμε θα δομείται ως εξής:

$$u_i = \underbrace{\mathcal{N}_0(k)}_{\text{Nussbaum για u.c.d.}} \overbrace{(\xi_i + \dots)}^{\text{consensus+άλλοι όροι}}$$

3.6 Τεχνικά Στοιχεία και Βασικά Λήμματα

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζουμε τη μετάβαση από τα δυναμικά σε μια πρώιμη μορφή των νόμων ελέγχου καθώς επίσης και δύο απαραίτητα λήμματα.

3.6.1 Τεχνικό Λήμμα Nussbaum

Κατά τον έλεγχο πολλαπλών διασυνδεδεμένων συστημάτων με άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου παρουσιάζονται εν γένει δύο σχολές αντιμετώπισης. Η πρώτη προτείνει να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση Lyapunov για κάθε υποσύστημα-πράκτορα [39],[47], ενώ η δεύτερη να κατασκευάζουμε μια καθολική Lyapunov-like συνάρτηση για όλο το σύστημα πρακτόρων [41].

Η πρώτη είναι πιο εύκολη στην κατασκευή, ενώ η δεύτερη είναι πιο στριφνή, αλλά επιτρέπει “αλληλεπιδράσεις” μεταξύ των agents.

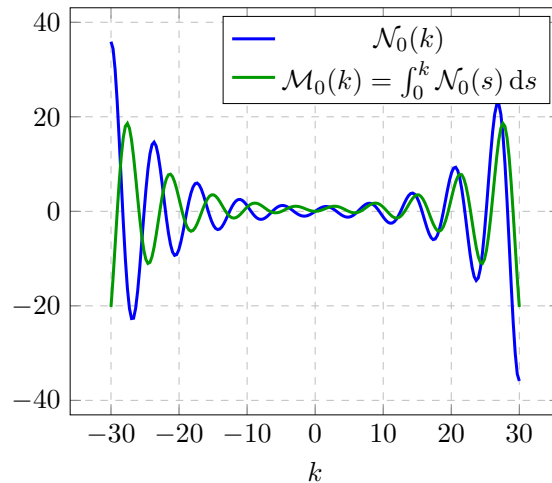
Από τον τρόπο κατασκευής των δυναμικών και μόνο, είναι φανερό ότι θα ακολουθήσουμε τη δεύτερη προσέγγιση. Συγκεκριμένα καταλήγουμε σε μια ανισότητα προκειμένου να φράξουμε την καθολική Lyapunov-like συνάρτηση. Η δυσκολία έγκειται στο να συσχετίσουμε τα πολλαπλά κέρδη Nussbaum. Στο [41] επι παραδείγματι, οι συγγραφείς καταλήγουν στην

$$V(t) \leq \int_0^t (\eta \mathcal{N}_0(k(s)) + 1) \dot{k}(s) ds + c \quad (3.14)$$

όπου c, η σταθερές και $k(t)$ η συνάρτηση κέρδους Nussbaum.

Το πρόβλημα όμως παραμένει εάν συνοπολογίσουμε μία ακόμα τουλάχιστον συνάρτηση Nussbaum. Στο [42] χρησιμοποιείται η τεχνική του backstepping προκειμένου να ξεπεραστεί το εμπόδιο αυτό. Η τεχνική αυτή δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημά μας και έτσι ανατρέχουμε στο [41], όπου ορίζεται ως συνάρτηση Nussbaum η “ιδιότροπη” πλην σωτήρια:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(k) &= \cosh(\lambda k) \sin(k), \text{ όπου } \cosh(\lambda k) = \frac{e^{\lambda k} + e^{-\lambda k}}{2} \text{ και } \lambda > 0 \\ \mathcal{M}_0(k) &= \int_0^k \mathcal{N}_0(s) ds = \frac{1}{1 + \lambda^2} \left[-\cosh(\lambda k) \cos(k) + \lambda \sinh(\lambda k) \sin(k) + 1 \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$



Σχήμα 3.10: “Νέα” Συνάρτηση Nussbaum

Σημείωση 5. Η συνάρτηση αυτή είναι περιττή και το ολοκλήρωμά της πέρα από άρτιο ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες για τα μέγιστα και τα ελάχιστα της, οι οποίες παίζουν καταλυτικό ρόλο στην απόδειξη του παρακάτω θεμελιώδους λήμματος, πάνω στο οποίο θα βασιστούν τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας.

Το βασικό λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε δίνεται παρακάτω

Λήμμα 1. Έστω συνάρτηση τύπου Lyapunov $V(t)$ και οικογένεια λείων συναρτήσεων $k_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ορισμένες στο $[0, t_f]$, ενώ επιπλέον ισχύει ότι $V(t) \geq 0$, $\forall t$ και $k_i(0) = 0$. Επιπλέον η $\mathcal{N}(\cdot)$ ορίζεται από τη (3.15) με $\lambda > \max\{\frac{1}{\pi} \ln \frac{\eta_{max}(n-1)}{\eta_{min}}, 0\}$, όπου $\eta_{max} > \eta_{min} > 0$. Αν ισχύει η ακόλουθη ανισότητα :

$$V(t) \leq \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^t \mathcal{N}(k_i(s)) \dot{k}_i(s) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^t \dot{k}_i(s) ds + c, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (3.16)$$

όπου α_i και η_i είναι σταθερές με $\alpha_i > 0$, και όλα τα η_i έχουν το ίδιο πρόσημο και επιπλέον είναι φραγμένα υπό την έννοια ότι $|\eta_i| \in [\eta_{min}, \eta_{max}] \forall i = 1, 2, \dots, n$, τότε οι συναρτήσεις $V(t)$, $k_i(t)$ και $\sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^t \mathcal{N}(k_i(s)) \dot{k}_i(s) ds$ είναι φραγμένες στο $[0, t_f]$.

Σημείωση 6. Η ανισότητα (3.16) μπορεί να ξαναγραφεί ισοδύναμα σε πιο βολική μορφή ως:

$$V(t) \leq \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{k_i(t)} \mathcal{N}(s) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i(s) + \tilde{c}, \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (3.17)$$

3.6.2 Παραγωγή Δυναμικών

Όπως ήδη αναφέρθηκε, χρησιμοποιήσαμε την έννοια του potential field από τη φυσική. Στην κατεύθυνση αυτή και στηριζόμενοι στη σχέση που συνδέει δυναμικό με δύναμη $\mathbf{F} = -\nabla V$ οδηγούμαστε στο ανάλογο που συνδέει δυναμικό με ασκούμενο έλεγχο $u_i = -\nabla_{x_i} V$.

Συγκεκριμένα για το δυναμικό διατήρησης συνοχής έχουμε:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} w_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.18)$$

ενώ για το δυναμικό αποφυγής συγκρούσεων

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} m_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.19)$$

Σημείωση 7. Για αποσυμφόρηση του συμβολισμού θέσαμε:

- w_{ij} : ως βάρη του δυναμικού διατήρησης
- m_{ij} : ως βάρη του δυναμικού αποφυγής συγκρούσεων

Σημείωση 8. Από “φυσικής” σκοπιάς οι ποσότητες $(w_{ij} - m_{ij})(x_i - x_j)$ μεταφράζονται ως οι δυνάμεις που ακούονται μεταξύ των πρακτόρων i και j . Από τη σκοπιά αυτή και με βάση τη συμμετρία $w_{ij} = w_{ji}$ έπεται ότι ισχύει ο 3^{ος} νόμος του Νεύτωνα υπό την έννοια ότι κάθε πράκτορας ασκεί μια δύναμη σε κάθε γείτονά του, η οποία είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε φορά από αυτή που ασκείται στον ίδιο.

3.6.3 Λήμμα ϵ -box consensus

Μια από τις βασικές καινοτομίες της εργασίας αυτής είναι η απόδειξη σύγκλισης σε κάποιο πεπερασμένο χωρίο. Στο [4] εισάγεται για πρώτη φορά η έννοια του ϵ -box consensus και

εξάγεται ένα λήμμα μέσω του οποίου είναι εφικτό να αποδείξουμε τη σύγκλιση.

Συγκεκριμένα έχουμε:

Λήμμα 2 ([4]). Έστω οι ποσότητες:

$$A_{il} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_{ij} - m_{ij})(x_{il} - x_{jl}) \quad , \quad i \in \mathcal{V}, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (3.20)$$

Αν $A_{il}(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ για κάθε $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, 2, \dots, m$ και για όλα τα βάρη w_{ij} , m_{ij} , τότε οι agent πετυχαίνουν $(N-1)\epsilon$ -box consensus, δηλαδή συγκεντρώνονται σε έναν m -διάστατο κύβο πλευράς $(N-1)\epsilon$.

Σημείωση 9. Με βάση το παραπάνω Λήμμα 2, παρατηρούμε ότι αν σχεδιάσουμε κατανεμημένους νόμους ελέγχου με αρκετά μικρό ϵ ώστε να ισχύει $A_{il} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ για κάθε $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, 2, \dots, m$, μπορούμε πρακτικά να πετύχουμε οσοδήποτε μικρές αποστάσεις μεταξύ των agents. Η παράμετρος ϵ με άλλα λόγια, δημιουργεί ένα trade-off μεταξύ σύγκρουσης και ομοφωνίας στο χώρο.

Σημείωση 10. Για να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα αρκεί να θεωρήσουμε ως A_{il} τις παραγώγους των δυναμικών. Δηλαδή

$$\frac{\partial V}{\partial x_{il}} = A_{il} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_{ij} - m_{ij})(x_{il} - x_{jl})$$

και τις χρονικές παραγώγους αυτών:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_{il}} = \dot{A}_{il} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\dot{w}_{ij} - \dot{m}_{ij})(x_{il} - x_{jl}) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_{ij} - m_{ij})(\dot{x}_{il} - \dot{x}_{jl})$$

όπου $i, j \in \mathcal{V}$, $l = 1, 2, \dots, m$. Για συστήματα πρώτης τάξης έχουμε $\dot{x}_{il} = b_{il}u_{il}$, ενώ για συστήματα δεύτερης τάξης έχουμε $\dot{x}_{il} = v_{il}$.

Κεφάλαιο 4

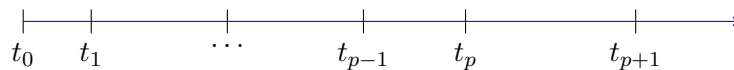
Προτεινόμενα Πρωτόκολλα Ελέγχου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μελέτη που έγινε για πολυπρακτορικά συστήματα, στα οποία έχουμε περιορισμένη πληροφορία με την έννοια ότι (i) κάθε agent επικοινωνεί με ορισμένους μόνο agents στο δίκτυο, ενώ επιπλέον (ii) οι κατευθύνσεις ελέγχου θεωρούνται άγνωστες. Υπό αυτό το πρίσμα, θέλουμε να πετύχουμε συγκέντρωση των πρακτόρων σε μια περιοχή του χώρου (ϵ - box consensus) με παράλληλη αποφυγή συγκρούσεων και διατήρηση της συνεκτικότητας του αρχικού γραφήματος-διάταξης. Τα προτεινόμενα πρωτόκολλα που θα παρουσιαστούν είναι πλήρως καταναμεμημένα και αφορούν τόσο συστήματα απλών, όσο και συστήματα διπλών ολοκληρωτών.

4.1 Διαμέριση του χρονικού ορίζοντα

Λόγω της κίνησης των πρακτόρων στο χώρο έχουμε μεταβολές στην τοπολογία επικοινωνίας. Μεταβολές της τοπολογίας συνεπάγονται μεταβολές στις αλληλεπιδράσεις των πρακτόρων και συνεπώς στην ίδια τη δυναμική του συστήματος.

Συγκεκριμένα δύναται να έχουμε προσθήκη νέων συνδέσμων επικοινωνίας σύμφωνα με το πρωτόκολλο υστέρησης 3.7, 3.8, αλλά θα αποδείξουμε πως δεν μπορούμε να έχουμε απώλεια link. Διαμερίζουμε λοιπόν το χρονικό ορίζοντα, με διαμέριση \mathcal{P} , σε διαστήματα σταθερής τοπολογίας της μορφής $[t_p, t_{p+1})$ με $p \in \mathcal{P}$.



Σχήμα 4.1: Διαστήματα σταθερής τοπολογίας

Αν αναλογιστούμε πως απαιτούμε συνδεδεμένο γράφημα κατά τη στιγμή $t_0 = 0$, τότε το “ελάχιστο” γράφημα που συνδέει και τους N agents είναι ένα δέντρο $\mathcal{T}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει $|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}(t_0)| = N - 1$. Θα αποδείξουμε ότι καμία ακμή δεν μπορεί να χαθεί, σε κάθε $[t_p, t_{p+1})$, απ τη στιγμή που δημιουργήθηκε. Έτσι αφού ξεκινάμε από (τουλάχιστον) ένα δεντρό το “πολύ” να καταλήξουμε σε ένας πλήρες γράφημα (όλοι επικοινωνούν με όλους) \mathbb{K}_N , για το οποίο ισχύει $|\mathbb{K}_N| = N(N - 1)/2$. Συνεπώς το πλήθος των εναλλαγών στις τοπολογίες, είναι το πολύ $(N - 1)(N - 2)/2$, δηλαδή πεπερασμένο.

4.2 Καταναμημένο Πρωτόκολλο απλών ολοκληρωτών

Εξετάζουμε σύστημα N agent σε χώρο m διαστάσεων με δυναμική απλών ολοκληρωτών

$$\dot{x}_{il} = b_{il}u_{il} \quad (4.1)$$

και ελεγκτές της μορφής

$$\begin{cases} u_{il} = \rho N_0(k_{il})A_{il}, \\ \dot{k}_{il} = A_{il}^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

όπου $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, \dots, m$, $\rho > 0$, ενώ $N_0(k) = \cosh(\lambda k) \sin(k)$ η συνάρτηση Nussbaum 3.15 και $A_{il} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_{ij} - m_{ij})(x_{il} - x_{jl})$ οι μερικές παράγωγοι του δυναμικού (βλ. Παράρτημα Γ'). Παραθέτουμε τις ακόλουθες τεχνικές υποθέσεις.

Υπόθεση 1. Το αρχικό γράφημα επικοινωνίας \mathcal{G}_0 είναι συνεκτικό.

Υπόθεση 2. Το μοντέλο επικοινωνίας καθορίζεται μονοσήμαντα από την τριπλέτα επικοινωνίας (R, δ, ϵ) και το πρωτόκολλο υστέρησης 3.7.

Υπόθεση 3. $\mathbf{x}_i(0) \neq \mathbf{x}_j(0)$, $\forall i, j \in \mathcal{V}$, $i \neq j$

Υπόθεση 4. Οι άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου b_{il} , $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, \dots, m$ έχουν κοινό αλλά άγνωστο πρόσημο, ενώ επιπλέον έχουν άγνωστο φραγμένο μέτρο, με την έννοια $|b_{il}| \in [|b_{min}|, |b_{max}|]$

Παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας

Θεώρημα 4.1. Έστω σύνολο N πρακτόρων με δυναμική απλών ολοκληρωτών (4.1) και ελεγκτές της μορφής (4.2). Εάν επιλέξουμε τη σταθερά Nussbaum ως $\lambda > \max \left\{ 0, \frac{1}{\pi} \ln \frac{(N-1)b_{max}}{b_{min}} \right\}$, τότε υπό τις υποθέσεις 1, 2, 3, 4, επιτυγχάνουμε:

1. $\mathcal{G}(t)$ συνεκτικό $\forall t > 0$
2. Αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων
3. $A_{il} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ για κάθε $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, 2, \dots, m$
4. ϵ -box consensus

για όλες τις αρχικές θέσεις $\mathbf{x}_i(0)$, $i \in \mathcal{V}$.

Απόδειξη. Σε πρώτη φάση πρέπει να εγγυηθούμε την ύπαρξη λύσης. Γράφουμε τη συνολική δυναμική του συστήματος αντικαθιστώντας τον έλεγχο (4.2) στη δυναμική (4.1) και

παίρνουμε την

$$\dot{x}_{il} = \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}) A_{il}, i \in \mathcal{V}, l = 1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

και αντικαθιστώντας τις αναλυτικές εκφράσεις (Γ'.3), (Γ'.7) για τα δυναμικά έχουμε

$$\dot{x}_{il} = \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} - \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} \right) (x_{il} - x_{jl}) \quad (4.4)$$

Η συνολική δυναμική του συστήματος γράφεται πλέον ως το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{il} \\ \vdots \\ k_{il} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}) A_{il} \\ \vdots \\ A_{il}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

όπου $i \in \mathcal{V}, l = 1, 2, \dots, m$. Παρατηρούμε ότι έχουμε πρόβλημα με τις ποσότητες A_{il} , διότι όταν $\|\mathbf{l}_{ij}\| \rightarrow 0, R$ τα δυναμικά και συνεπώς και οι παράγωγοί τους τείνουνε στο άπειρο.

Υποθέτουμε σε πρώτη φάση βασιζόμενοι στην ανάλυση της ενότητας 4.1, ότι το διάστημα ύπαρξης λύσης $[0, t_f)$ διαμερίζεται ως $[t_p, t_{p+1})$ με $p = \{1, 2, \dots\}$ και t_p να είναι τα switch times, δηλαδή οι χρονικές στιγμές αλλαγής τοπολογίας του γράφου επικοινωνίας. Ορίζουμε τη συνάρτηση τύπου Lyapunov:

$$V(t) = V_{tot} = \Phi + \Psi \geq 0, \quad t \in [t_p, t_{p+1}) \quad (4.6)$$

και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε με βάση τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \quad (4.7)$$

Κατόπιν αντικαθιστούμε τις αναλυτικές εκφράσεις για τα δυναμικά από τις (Γ'.3), (Γ'.7) και θέτοντας $\mathbb{B}_i \triangleq \text{diag}\{b_{i1}, \dots, b_{im}\}$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} - \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} \right) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i \quad (4.8)$$

Στο σημείο αυτό ξαναγράφουμε σε συμπαγή μορφή την εξίσωση και κάνουμε ένα trick προσθαφαίρεσης των ποσοτήτων $\mathbf{A}_i = [A_{i1}, \dots, A_{im}]^T$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^T \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i = - \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^T (\mathbf{A}_i + \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i) \quad (4.9)$$

Σπάμε το άθροισμα και μέσω της (4.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m A_{il} (A_{il} + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}) A_{il}) \\
 &= - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m A_{il}^2 (1 + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il})) \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \dot{k}_{il} (1 + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il})) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την (4.10) στο διάστημα $[t_p, t]$ με $t < t_{p+1}$ και $p \in \{1, 2, \dots\}$

$$V(t) - V(t_p) = - \sum_{i=1}^N \int_{t_p}^t \|\mathbf{A}_i(s)\|^2 ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_p}^t \dot{k}_{il}(s) \{1 + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}(s))\} ds \quad (4.11)$$

από τη μη αρνητικότητα των $V(t)$ και $\|\mathbf{A}_i(s)\|^2$ έχουμε:

$$0 \leq V(t) \leq V(t_p^+) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_p}^t \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_p}^t \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.12)$$

Από το Λήμμα 1 παίρνουμε φραγή της συνάρτησης Lyapunov σε κάθε διάστημα της μορφής $[t_p, t_{p+1})$, αφού ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις:

1. φραγή: $b_{min} < |b_{il}| < b_{max} \implies \rho b_{min} < \rho |b_{il}| < \rho b_{max}$, αφού $\rho > 0$
2. παράμετρος λ : $\lambda > \frac{1}{\pi} \ln \frac{b_{max}(N-1)}{b_{min}} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\rho b_{max}(N-1)}{\rho b_{min}}$

Η φραγή αυτή μας εξασφαλίζει ότι δεν μπορούμε να έχουμε απειρισμό των ποσοτήτων αποφυγής συγκρούσεων και διατήρησης συνοχής σε κάθε διάστημα $[t_p, t_{p+1})$. Δηλαδή καμία ακμή δε χάνεται απ'τη στιγμή που δημιουργείται και οι συγκρούσεις αποφεύγονται επιτυχώς. Από την ανάλυση της ενότητας 4.1, προκύπτει ότι έχουμε πεπερασμένο πλήθος εναλλαγών στην τοπολογία. Αθροίζοντας τις ανισότητες 4.12 για κάθε $[t_p, t_{p+1})$ παίρνουμε: Για το διάστημα $[t_0, t_1)$

$$0 \leq V(t_1^-) \leq V(t_0) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_1^-} \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_1^-} \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.13)$$

για το $[t_1, t_2)$

$$0 \leq V(t_2^-) \leq V(t_1^+) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_1^+}^{t_2^-} \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_1^+}^{t_2^-} \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.14)$$

και συνολικά για το $[t_0, t_2)$

$$0 \leq V(t_2^-) \leq V(t_0) + (V(t_1^+) - V(t_1^-)) + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_2^-} \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_2^-} \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.15)$$

Επιπλέον λόγω δημιουργίας link τη χρονική στιγμή t_p ισχύει η εξής σχέση:

$$V(t_p^+) = V(t_p^-) + c, \text{ όπου } c = R/(R^2 - (R - \delta)^2)^2 \geq 0 \quad (4.16)$$

Επαγωγικά η τελική ανίσωση σε όλο το διάστημα $[0, t_p)$ είναι:

$$0 \leq V(t) \leq V_0 + (p-1)c + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_p^-} \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_0}^{t_p^-} \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.17)$$

Ακολουθώντας τη συλλογιστική της ενότητας 4.1 παίρνουμε για $t \in [0, t_f)$

$$V(t) \leq V_0 + \frac{(N-1)(N-2)}{2}c + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_0^t \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_0^t \rho b_{il} \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.18)$$

Τελικά η (4.18) και το Λήμμα 1 μας εξασφαλίζει φραγή των $V(t)$, Φ , Ψ και συνεπώς και των $\partial\Phi/\partial x_i$, $\partial\Psi/\partial x_i$, $i \in \mathcal{V}$. Επιπλέον έχουμε φραγή των:

- $k_{il}(t) = \int_0^t A_{il}^2(s) ds$: φραγμένο $\forall i, l, \forall t \in [0, t_f)$
- $\mathcal{N}_0(k_{il}(t))$: φραγμένο $\forall i, l, \forall t \in [0, t_f)$ αφού $k_{il}(t)$ φραγμένα
- $u_{il}(t) = \rho \mathcal{N}_0(k_{il}) \frac{\partial V}{\partial x_{il}}$: φραγμένο αφού $\mathcal{N}_0(k_{il}(t))$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_{il}}$ και $\frac{\partial \Psi}{\partial x_{il}}$ φραγμένα
- $\dot{x}_{il}(t) = \rho b_{il} u_{il}(t) = \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}) \frac{\partial V}{\partial x_{il}}$: φραγμένο αφού u_{il} , b_{il} φραγμένα στο $[0, t_f)$

Αφού έχουμε φραγμένες παραγώγους-δυναμική συστήματος για όλο το διάστημα ύπαρξης της λύσης $[0, t_f)$, για όλα τα $i \in \mathcal{V}$ και $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ και σε συνδυασμό με το Λήμμα 3 παίρνουμε ότι δεν δύναται να έχουμε finite escape phenomenon και επομένως η λύση μπορεί να επεκταθεί σε όλο το χρονικό διάστημα $[0, \infty)$ [48]. Επίσης

$$V(t) \in \mathcal{L}_\infty \implies \frac{\partial \Psi}{\partial x_{il}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{il}} \in \mathcal{L}_\infty \implies A_{il}(t) \in \mathcal{L}_\infty \forall i \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m. \quad (4.19)$$

Για τα κέρδη Nussbaum $k_{il}(t)$ έχουμε

$$k_{il}(t) = \int_0^t |A_{il}(s)|^2 ds \in \mathcal{L}_\infty \implies A_{il}(t) \in \mathcal{L}_2 \forall i \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m. \quad (4.20)$$

Για τις παραγώγους των $A_{il}(t)$ έχουμε επίσης φραγή σε όλο το χρονικό ορίζοντα με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις για τα βάρη (Γ'.7), (Γ'.3) και τις παραγώγους τους (Γ'.10), (Γ'.8). Δηλαδή:

$$\dot{A}_{il}(t) \in \mathcal{L}_\infty \forall i, j \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m. \quad (4.21)$$

Συνοψίζοντας μέχρι στιγμής, έχουμε φράξει όλες τις εμπλεκόμενες στο σχήμα ελέγχου

ποσότητες $x_{il}, k_{il}, u_{il}, A_{il}$. Ειδικά για τις παραγώγους των δυναμικών δείξαμε ότι

$$\begin{aligned} A_{il}(t) &\in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2 \\ \dot{A}_{il}(t) &\in \mathcal{L}_\infty \quad \forall i \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Από την (4.22) και μέσω του Λήμματος Barbalat (Λήμμα 4) προκύπτει το γεγονός ότι οι ποσότητες $A_{il}(t) \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$. Πιο αναλυτικά έχουμε καταλήξει στην:

$$\begin{aligned} A_{il} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left\{ \frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} - \left\lfloor \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right\rfloor_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} \right\} (x_{il} - x_{jl}) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (w_{ij} - m_{ij}) (x_{il} - x_{jl}) \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.23)$$

για κάθε $i, j \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m$.

Τέλος κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2 παίρνουμε ϵ -box consensus σε ένα m -διάστατο κύβο πλευράς $(N-1)\epsilon$. \square

4.3 Κατανεμημένο Πρωτόκολλο διπλών ολοκληρωτών

Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε σύστημα N agent με δυναμική διπλών ολοκληρωτών

$$\begin{cases} \dot{x}_{il} = v_{il} \\ \dot{v}_{il} = b_{il} u_{il} \end{cases} \quad (4.24)$$

και ελεγχτές της μορφής

$$\begin{cases} u_{il} = \rho \mathcal{N}_0(k_{il}) [A_{il} + \dot{A}_{il} + z_{il}], \\ \dot{k}_{il} = z_{il} [A_{il} + \dot{A}_{il} + z_{il}] \end{cases} \quad (4.25)$$

όπου $i \in \mathcal{V}, l = 1, \dots, m, \rho > 0$ και $z_{il} \triangleq A_{il} + v_{il}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι έχουμε διαθέσιμες μετρήσεις σχετικής ταχύτητας. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα δίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 4.2. Έστω σύστημα N πρακτόρων οι οποίοι κινούνται σε χώρο m διαστάσεων, με δυναμική (4.24). Επιλέγοντας $\lambda > \max \left\{ 0, \frac{1}{\pi} \ln \frac{(N-1)b_{max}}{b_{min}} \right\}$ και υποθέτοντας τα 1, 2, 3 4, υπό το σχήμα ελέγχου (4.25), πετυχαίνουμε:

1. $\mathcal{G}(t)$ συνεκτικός $\forall t > 0$
2. Αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων
3. $A_{il} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$
4. Velocity consensus, δηλαδή $\mathbf{v}_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$
5. ϵ -box consensus

Απόδειξη. Σε πλήρη αντιστοιχία με την προηγούμενη ανάλυση και λαμβάνοντας υπόψιν την ανάλυση της ενότητας 4.1, ορίζουμε τη συνάρτηση τύπου Lyapunov:

$$V(t) = V_{tot} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} = \Phi + \Psi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i + \mathbf{v}_i)^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{v}_i) \geq 0, \quad t \in [t_p, t_{p+1}) \quad (4.26)$$

απόπου και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο και αφού θέσουμε $\mathbb{B}_i \triangleq \text{diag}\{b_{i1}, \dots, b_{im}\}$, παίρνουμε

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} + \mathbf{z}^T \dot{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} + \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T \left(\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} + \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i \right) \quad (4.27)$$

Αντικαθιστώντας τώρα $\mathbf{v}_i = \mathbf{z}_i - \mathbf{A}_i$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i^T \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T (\dot{\mathbf{A}}_i + \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i) = - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T (\mathbf{A}_i + \dot{\mathbf{A}}_i + \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i) \quad (4.28)$$

Κάνουμε το trick προσαφαίρεσης των ποσοτήτων \mathbf{z}_i και σπάμε το άθροισμα στη μορφή

$$\dot{V}(t) = - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{z}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m z_{il} (A_{il} + \dot{A}_{il} + z_{il} + b_{il} u_{il}) \quad (4.29)$$

Αντικαθιστούμε το νόμο ελέγχου και το νόμο ανανέωσης των παραμέτρων Nussbaum από την (4.25) και έχουμε

$$\dot{V}(t) = - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{z}_i\|^2 - \sum_{i=1}^N \|\mathbf{A}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \dot{k}_{il}(t) (1 + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il})), \quad t \in [t_p, t_{p+1}) \quad (4.30)$$

Ολοκληρώνοντας σε κάθε διάστημα σταθερής τοπολογίας $[t_p, t] \subseteq [t_p, t_{p+1})$, έχουμε ότι:

$$V(t) - V(t_p) = - \sum_{i=1}^N \int_{t_p}^t (\|\mathbf{z}_i(s)\|^2 + \|\mathbf{A}_i(s)\|^2) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_{t_p}^t \dot{k}_{il}(s) (1 + \rho b_{il} \mathcal{N}_0(k_{il}(s))) ds \quad (4.31)$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με αυτή στην ενότητα 4, φράσσουμε τη Lyapunov-like συνάρτηση

$$0 \leq V(t) \leq \frac{(N-1)(N-2)}{2} c + V_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \int_0^t \dot{k}_{il}(s) ds + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \rho b_{il} \int_0^t \dot{k}_{il}(s) \mathcal{N}_0(k_{il}(s)) ds \quad (4.32)$$

και από το Λήμμα 1 παίρνουμε φραγή των ποσοτήτων

$$V(t), \quad \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^m \rho b_{il} \int_{k_{il}(0)}^{k_{il}(t)} \mathcal{N}_0(\sigma) d\sigma, \quad k_{il}(t)$$

για κάθε $i \in \mathcal{V}$ και $l = 1, 2, \dots, m$ σε όλο το διάστημα $[0, t_f)$, ενώ δεν έχουμε ο-

ύτε συγκρούσεις ούτε απώλεια συνεκτικότητας του αρχικού γράφου καθώς ακμές μόνο προστίθενται και δεν χάνονται. Από τις αναλυτικές εκφράσεις (Γ'.3) και (Γ'.7) για τα $\partial\Psi/\partial\mathbf{x}_i, \partial\Phi/\partial\mathbf{x}_i, i \in \mathcal{V}$ αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι και αυτές οι ποσότητες είναι φραγμένες. Το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα \mathbf{A}_i . Από την εξίσωση (4.26) έχουμε

$$V(t) = \Phi(t) + \Psi(t) + \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{z} \geq 0, \text{ με } V(t) < \infty, \text{ και } 0 \leq \Phi < \infty, 0 \leq \Psi < \infty \implies \|\mathbf{z}\|^2 < \infty \\ \implies \|\mathbf{z}(t)\| < \infty \implies \text{τα } \mathbf{z}_i(t) \text{ είναι φραγμένα } \forall i \in \mathcal{V} \quad (4.33)$$

Όμως $\mathbf{z}_i(t) = \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)$ και αφού οι 2 από τις 3 εμπλεκόμενες διανυσματικές ποσότητες είναι φραγμένες, έπεται ότι το ίδιο θα συμβαίνει και με την τρίτη. Έτσι καταλήγουμε στην

$$\mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^m \text{ φραγμένα } \forall i \in \mathcal{V} \quad (4.34)$$

Για τη χρονική παράγωγο $\dot{\mathbf{A}}_i(t)$ παίρνουμε φραγή από τις αναλυτικές εκφράσεις (Γ'.8) και (Γ'.10). Με εντελώς ανάλογο τρόπο οι ποσότητες

- $\dot{k}_{il}(t) = z_{il}(z_{il} + A_{il} + \dot{A}_{il})$
- $\mathcal{N}_0(k_{il})$
- $u_{il} = \rho \mathcal{N}_0(k_{il})[z_{il} + A_{il} + \dot{A}_{il}]$
- $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{v}_i$
- $\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbb{B}_i \mathbf{u}_i$

είναι φραγμένες ως αθροίσματα και γινόμενα φραγμένων ποσοτήτων για όλους τους δείκτες $i \in \mathcal{V}$, και $l = 1, \dots, m$. Έτσι η λύση δύναται να επεκταθεί σε όλο το χρονικό διάστημα $[0, \infty)$ [48].

Επιπλέον οι ποσότητες $A_{il}(t)$ και $z_{il}(t)$ ανήκουν στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με βάση την ανάλυση που ακολουθήσαμε για να προκύψει η (4.28). Για τα \dot{A}_{il} έχουμε ότι είναι φραγμένα καθώς επίσης και ότι

$$\frac{d}{dt}z_{il} = \dot{A}_{il} + \dot{v}_{il} = \dot{A}_{il} + b_{il}u_{il} \in \mathcal{L}_\infty \quad (4.35)$$

Από τα παραπάνω και μέσω του Λήμματος Barbalat (Λήμμα 4) προκύπτει το γεγονός ότι οι ποσότητες $A_{il}(t) \rightarrow 0$, και $z_{il}(t) \rightarrow 0$, καθώς $t \rightarrow \infty$ και

$$z_{il} = A_{il} + v_{il} \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \implies \lim_{t \rightarrow \infty} v_{il}(t) = 0, \forall i \in \mathcal{V}, l = \{1, \dots, m\} \quad (4.36)$$

Δηλαδή οι ταχύτητες όλων των πρακτόρων θα τείνουν στο μηδέν πετυχαίνοντας velocity consensus υπό την έννοια $\|\mathbf{v}_i(t)\| \rightarrow 0 \implies \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty \forall i, j \in \mathcal{V}$. Τέλος κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2 παίρνουμε ϵ -box consensus σε ένα m -διάστατο κύβο πλευράς $(N - 1)\epsilon$. \square

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται παρουσίαση των προσομοιώσεων για τα προτεινόμενα πρωτόκολλα ελέγχου σε συστήματα πρώτης και δεύτερης τάξης. Τα παραδείγματα που θα παραθέσουμε αφορούν πολυπρακτορικά συστήματα στη μία, στις δύο και στις τρεις διαστάσεις.

5.1 Περιβάλλον Προσομοίωσης

Οι προσομοιώσεις έγιναν σε περιβάλλον Matlab και Simulink. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν κάποιες συναρτήσεις αρχικοποίησης καθώς και οπτικοποίησης των τελικών αποτελεσμάτων, σε γλώσσα Matlab, ενώ το “σύστημα” στήθηκε και επιλύθηκε σε περιβάλλον Simulink.

Οι παράμετροι που θα μεταβάλλουμε κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων είναι αυτές που φαίνονται στον Πίνακα 5.1. Σε κάθε διάσταση θα παρουσιάσουμε κάποια γραφικά αποτελέσματα που θα επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές μας αναλύσεις και επιπλέον θα μας δίνουν μια πιο πρακτική αίσθηση για το ποιες παράμετροι επηρεάζουν ορισμένες συμπεριφορές.

Παράμετροι Προσομοίωσης	
$\mathbf{x}_i(0)$	οι αρχικές θέσεις των agent στο χώρο
$\mathbf{v}_i(0)$	οι αρχικές ταχύτητες των agent
b_i	άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου
λ	παράμετρος σ /σης Nussbaum
R	ακτίνα διατήρησης
δ	παράμετρος περιοχής δημιουργίας συνδέσμου
ϵ	ακτίνα ενεργοποίησης αποφυγής
ρ	παράμετρος ελέγχου

Πίνακας 5.1: Μεταβαλλόμενες Παράμετροι Προσομοίωσης

Κάποιες παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι οι εξής:

- Η παράμετρος R επηρεάζει το πόσο μακριά δύναται να απομακρυνθούν οι πράκτορες από τη στιγμή που υπάρχει σύναψη μεταξύ τους.
- Η παράμετρος ϵ επηρεάζει το πόσο κοντά θα έρθουν τελικά οι πράκτορες, αφού ουσιαστικά πρόκειται για την περιοχή εντός της οποίας ασκούνται απωστικές δυνάμεις μεταξύ των πρακτόρων.

- Η παράμετρος δ επηρεάζει την ακτίνα στην οποία δημιουργούνται νέες συνάψεις-ακμές.
- Η παράμετρος ρ επηρεάζει το μέτρο του ελέγχου.

Σημείωση 11. Το σύστημα που εξετάσαμε είναι stiff, δηλαδή σε ελεύθερη μετάφραση “άκαμπτο”. Ανατρέχοντας σε κάποιο πιο αυστηρό μαθηματικό ορισμό βρίσκουμε το εξής. *Stiff* συστήματα ονομάζονται τα συστήματα, η αριθμητική επίλυση των οποίων ενδέχεται να είναι ασταθής με τη μικρή μεταβολή ορισμένων παραμέτρων.

Σημείωση 12. Στα παραδείγματα σε 2 και 3 διαστάσεις, οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες (όπου αυτές ορίζονται), καθώς και οι τιμές των άγνωστων κατευθύνσεων ελέγχου παρήχθησαν τυχαία μέσω κώδικα MATLAB, ο οποίος βασίζεται κυρίως στη συνάρτηση `rand()`.

Σημείωση 13. Για καλύτερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων οι μεταβλητές κατάστασης x_{il}, v_{il} $i \in \mathcal{V}$, $l = 1, 2, 3$ (θέση και ταχύτητα κάθε πράκτορα σε κάθε διάσταση), γράφονται ως x_i, v_{x_i} όταν $l = 1$, y_i, v_{y_i} όταν $l = 2$ και z_i, v_{z_i} όταν $l = 3$.

5.2 Προσομοιώσεις Απλών Ολοκληρωτών

5.2.1 Μονοδιάστατοι Πράκτορες (1D)

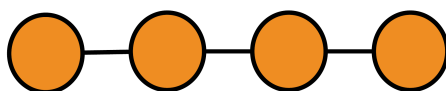
Παράμετροι Προσομοίωσης

- Πλήθος Πρακτόρων: $N = 4$
- Τριπλέτα Επικοινωνίας: $(R, \delta, \epsilon) = (5, 1, 2.5)$
- Παράμετρος Nussbaum: $\lambda = 1$
- Παράμετρος Ελέγχου: $\rho = 0.05$

Αρχικοποιήσεις

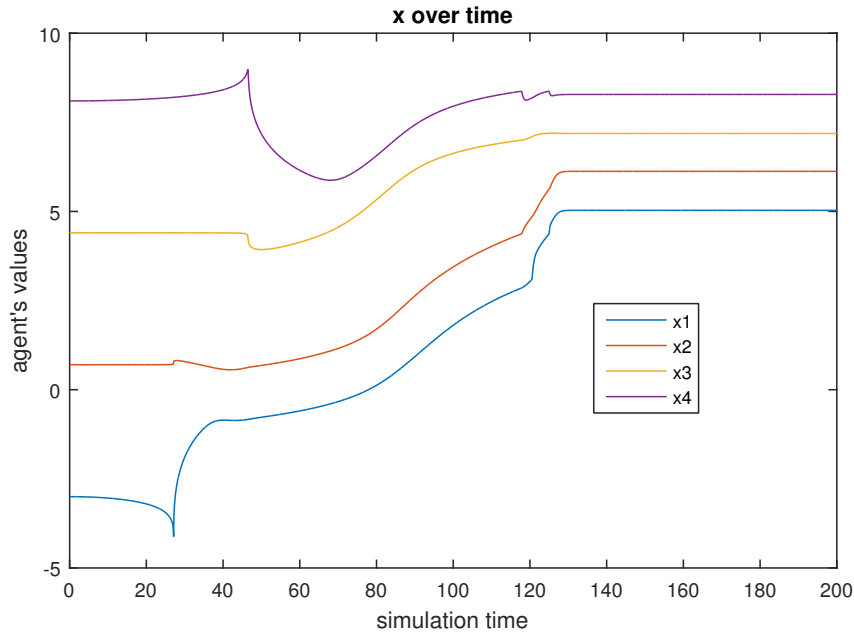
- Αρχικές Θέσεις: $\mathbf{x}_0 = [-3, 0.7, 4.4, 8.1]^T$
- Κέρδη Nussbaum: $\mathbf{k}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$
- Κατευθύνσεις Ελέγχου: $b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 1.5$

Παραθέτουμε την αρχική τοπολογία επικοινωνίας των πρακτόρων (Σχήμα 5.1). Παρατηρούμε ότι η τοπολογία είναι η “απλούστερη” δυνατή, δηλαδή ένα γράφημα-γραμμή.



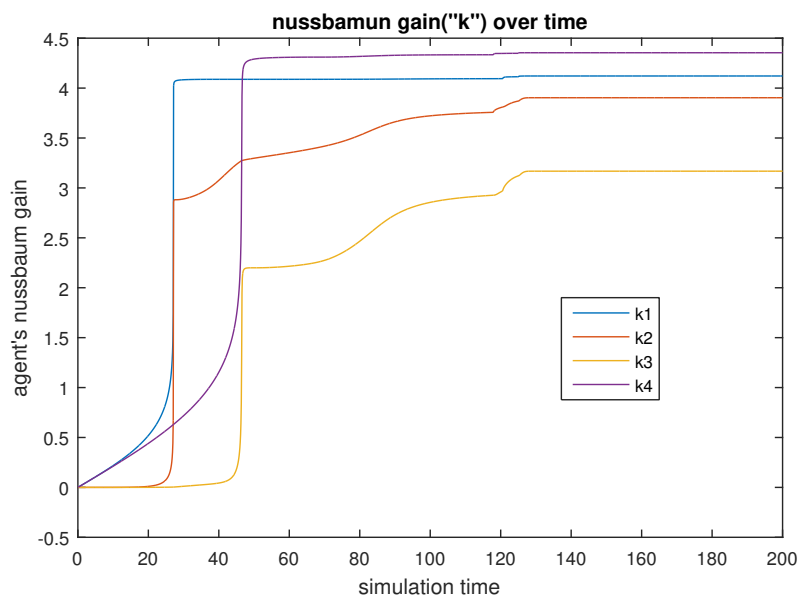
Σχήμα 5.1: Αρχική Τοπολογία Επικοινωνίας Πρακτόρων

Παραθέτουμε τις τροχιές των πρακτόρων στη γραμμή. Στην αρχή έχουμε ένα διάστημα ακινησίας και στη συνέχεια μια μεταβατική περίοδο, η οποία καταλήγει στη μόνιμη κατάσταση (“ισορροπίας”).



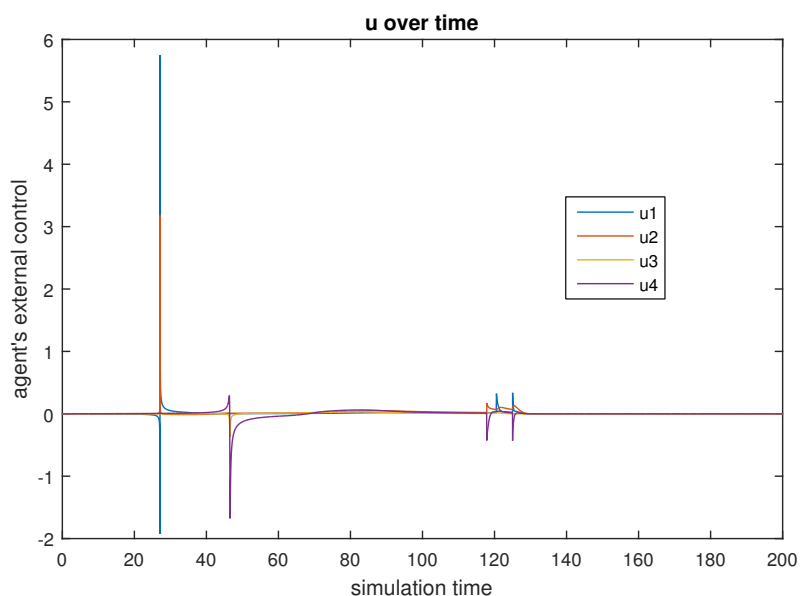
Σχήμα 5.2: Τροχιές των Agent στην ευθεία

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα ορίσματα-κέρδη των συναρτήσεων Nussbaum. Παρατηρούμε ότι σταθεροποιούνται σε κάποιες τιμές. Η σταθεροποίηση αυτή “φυσικά” σημαίνει ότι η αναζήτηση των άγνωστων κερδών στέφθηκε με επιτυχία! Όπως είναι λογικό, όταν σταθεροποιούνται τα κέρδη-ορίσματα σταθεροποιούνται και οι ίδιες οι συναρτήσεις Nussbaum.



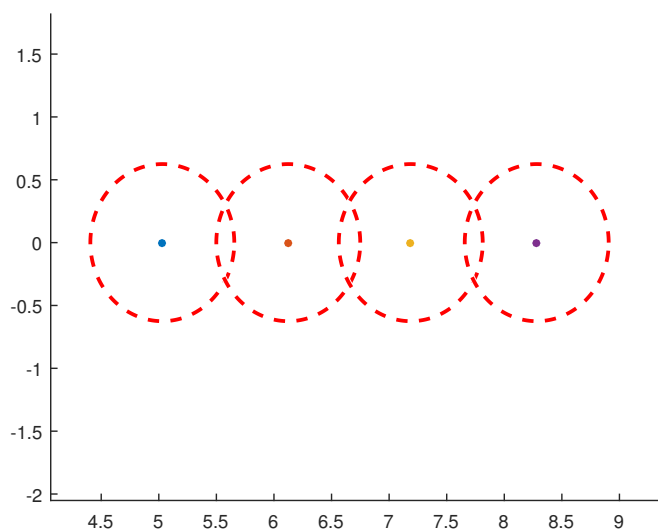
Σχήμα 5.3: Κέρδη Nussbaum

Οι είσοδοι του συστήματος δίνονται στο Σχήμα 5.4. Οι απότομες εκτινάξεις οφείλονται (α) σε μεταβολές στην τοπολογία του συστήματος και (β) σε έντονες αλληλεπιδράσεις του δυναμικού, ενώ παρατηρούμε ότι εμφανίζονται ανά ζεύγη. Στη μόνιμη κατάσταση τείνουν στο μηδέν, αφού είναι ανάλογοι των συναρτήσεων Nussbaum και των δυναμικών A_i , για τα οποία έχουμε αποδείξει ότι συγκλίνουν στο μηδέν. Η “φυσική” ερμηνεία αυτού του γεγονότος είναι ότι το σύστημα τελικά ισοροπεί, υπό την έννοια ότι τόσο οι απωστικές, όσο και οι ελκτικές δυνάμεις σε κάθε πράκτορα έχουν μηδενική συνισταμένη.



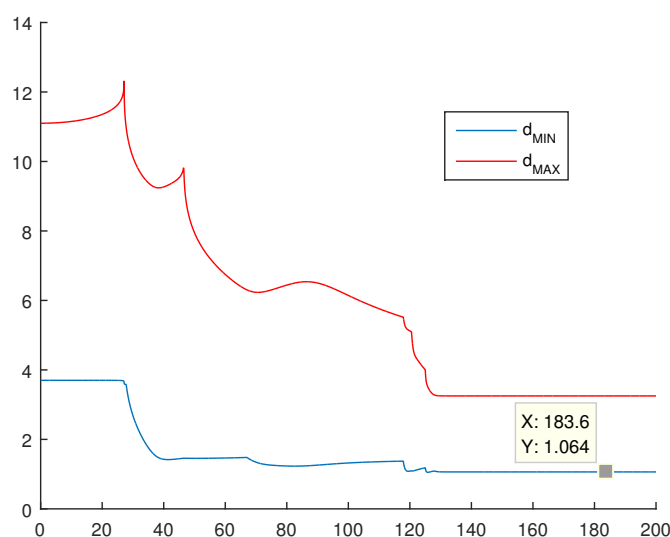
Σχήμα 5.4: Είσοδος-Έλεγχος στο Σύστημα

Τέλος η διάταξη των agent στη μόνιμη κατάσταση καθώς και ένα διάγραμμα που αναπαριστά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των agent του συστήματος, δίνεται στα Σχήματα 5.5 και 5.6 αντίστοιχα.



Σχήμα 5.5: Τελική Διάταξη Πρακτόρων ($\epsilon/4$)

Οι κύκλοι στο Σχήμα 5.5 είναι ακτίνας $\epsilon/4$ και χοντρικά αυτό σημαίνει ότι η ελάχιστη απόσταση θα είναι περίπου $2 \times \frac{\epsilon}{4} = \epsilon/2$, ενώ η μέγιστη αρκετά μικρότερη από $(N - 1)\epsilon$.



Σχήμα 5.6: Μέγιστη/ελάχιστη απόσταση πρακτόρων

Το 5.6 επιβεβαιώνει το παραπάνω σχόλιο και δίνει $d_{min} = 1.064 < \frac{\epsilon}{2} = 1.25$ και $d_{max} = 3.251 < (N - 1)\epsilon = 7.5$

5.2.2 Διδιάστατοι Πράκτορες (2D)

Πάμε τώρα να δούμε τις αντίστοιχες συμπεριφορές για πράκτορες που κινούνται στο επίπεδο. Όπως είναι φυσικό λόγω της αύξησης της διαστατικότητας του προβλήματος, η διαδικασία διήρκτησε ελαφρώς περισσότερο.

Παράμετροι Προσομοίωσης

- Πλήθος Πρακτόρων: $N = 8$
- Τριπλέτα Επικοινωνίας: $(R, \delta, \epsilon) = (5.5, 0.5, 0.5)$
- Παράμετρος Nussbaum: $\lambda = 1.5$
- Παράμετρος Ελέγχου: $\rho = 0.008$

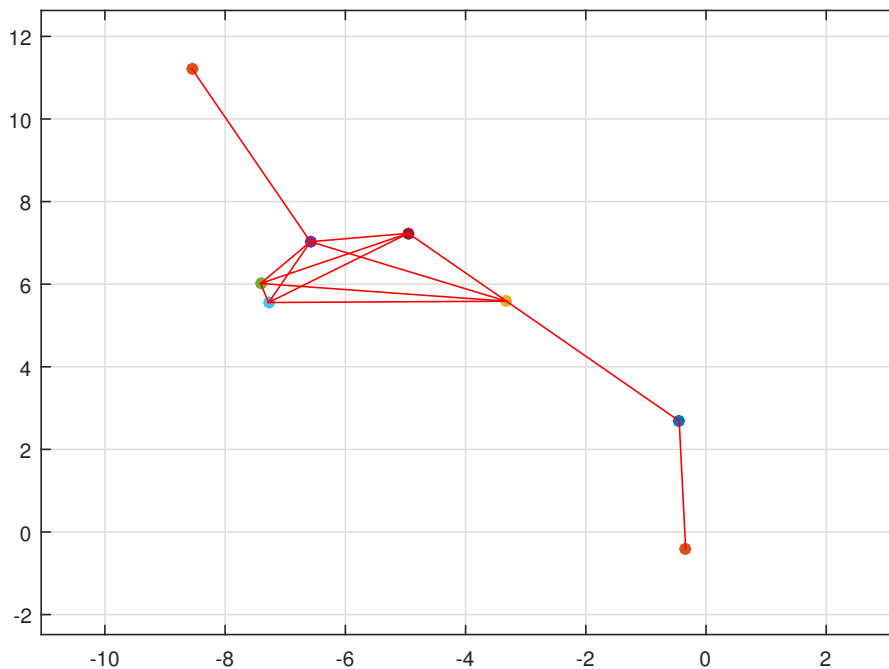
Αρχικοποιήσεις

- Αρχικές Θέσεις:

$$\mathbf{x}_0 = [-0.3387, -3.3195, -6.5805, -7.4100, -7.2769, -4.9514, -0.4470, -8.5536]^T$$

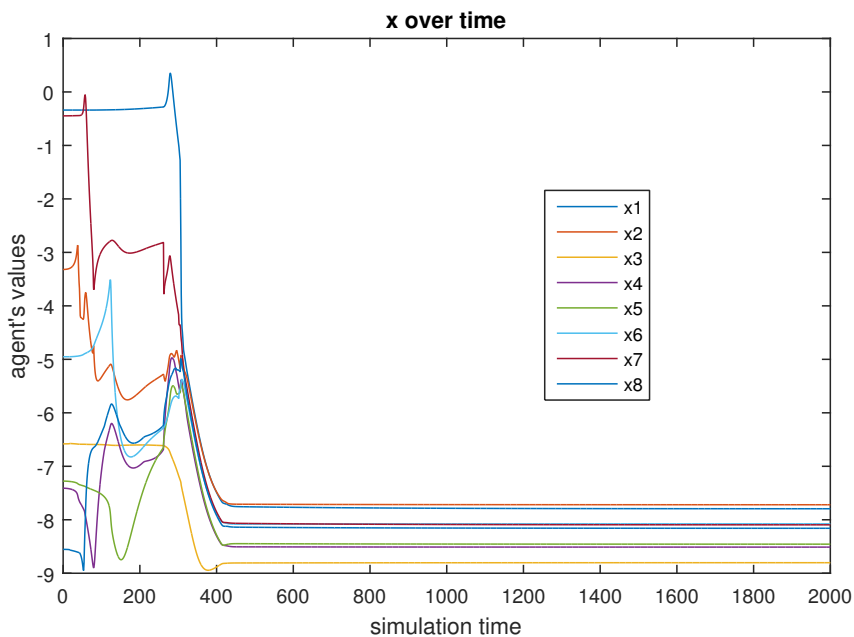
$$\mathbf{y}_0 = [-0.4125, 5.5875, 7.0279, 6.0177, 5.5561, 7.2311, 2.6882, 11.2190]^T$$

- Κατευθύνσεις Ελέγχου: $b_{x_1} = 1.83, b_{x_2} = 1.2913, b_{x_3} = 2.468, b_{x_4} = 2.339, b_{x_5} = 2.2709, b_{x_6} = 2.0857, b_{x_7} = 1.5041, b_{x_8} = 1.1478, b_{y_1} = 1.7744, b_{y_2} = 2.9093, b_{y_3} = 1.0483, b_{y_4} = 2.1827, b_{y_5} = 2.7688, b_{y_6} = 2.1638, b_{y_7} = 2.4326, b_{y_8} = 2.4332$



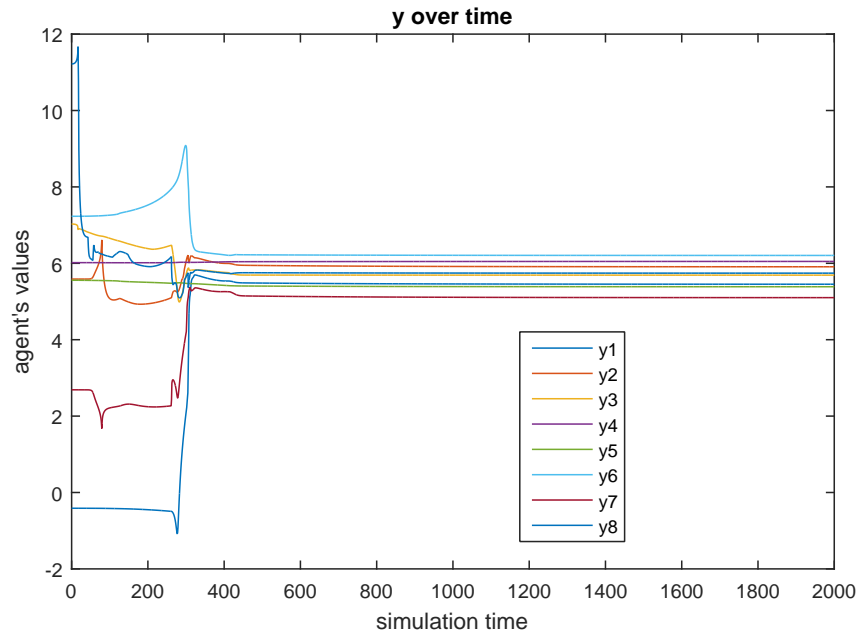
Σχήμα 5.7: Αρχική Διάταξη-Γράφημα των Agent

Η αρχική διάταξη γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 5.7. Το γράφημα είναι συνεκτικό, όπως και θα έπρεπε. Στη συνέχεια έχουμε τις τροχιές σε κάθε διάσταση.

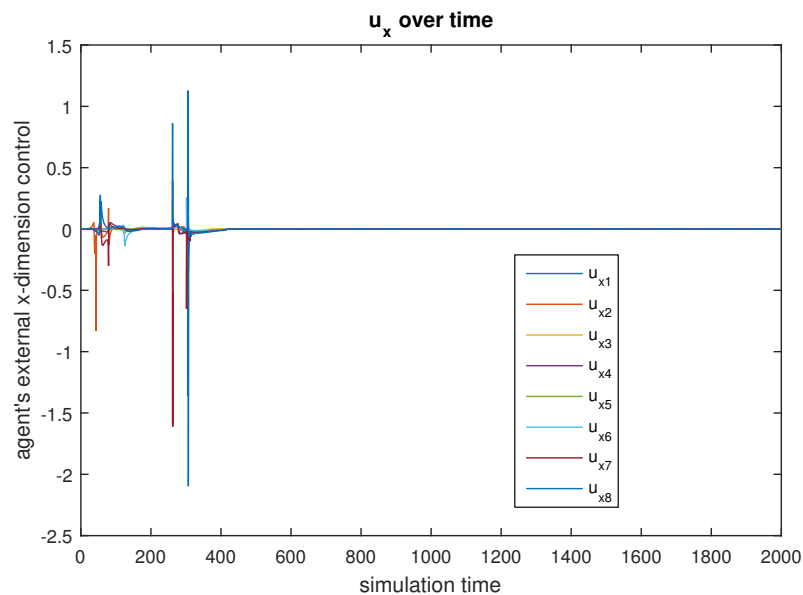


Σχήμα 5.8: Τροχιές των Agent στην x-διεύθυνση

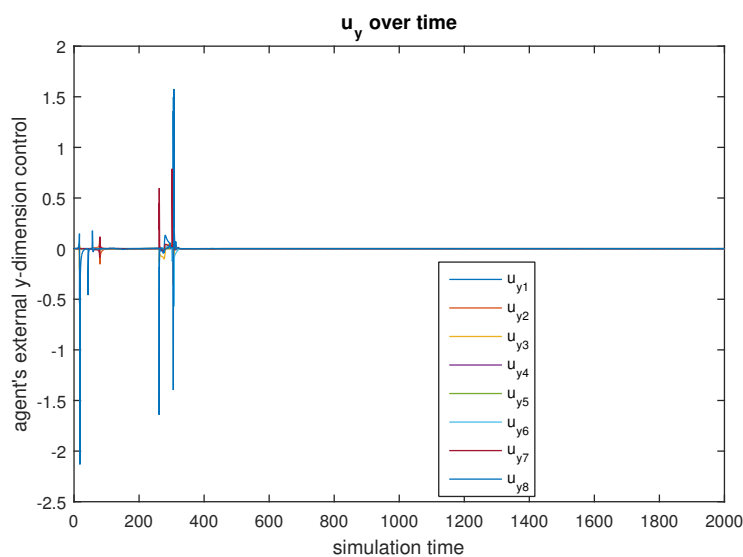
Παρατηρούμε ότι έχουμε ορισμένα crossings (σημεία τομής) μεταξύ των τροχιών των πρακτόρων σε κάθε διάσταση. Αυτό δεν παραβιάζει τη συνθήκη για αποφυγή συγκρούσεων καθώς η “μετρική” για τις συγκρούσεις δεν είναι ούτε η απόλυτη διαφορά $|x_i - x_j|$ ούτε η $|y_i - y_j|$, αλλά η ευκλείδεια απόσταση $\|l_{ij}\| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$. Έτσι σε αντίθεση με τη μία διάσταση τα γραφήματα $x_i(t)$ και $y_i(t)$ στις 2 διαστάσεις δύναται να έχουν τομές.

Σχήμα 5.9: Τροχιές των Agent στην y -διεύθυνση

Στα Σχήματα 5.10, 5.11 παρουσιάζουμε τις εισόδους στο σύστημα, που δεν είναι άλλοι από τους ελέγχους. Σε κάθε agent αυτή τη φορά ασκούνται δύο νόμοι, ένας για την οριζόντια και ένας για την κάθετη διεύθυνση. Η συνισταμένη των ελέγχων σε συνδυασμό με τη δυναμική των πρακτόρων δίνουν τη συνολική κίνηση του συστήματος.

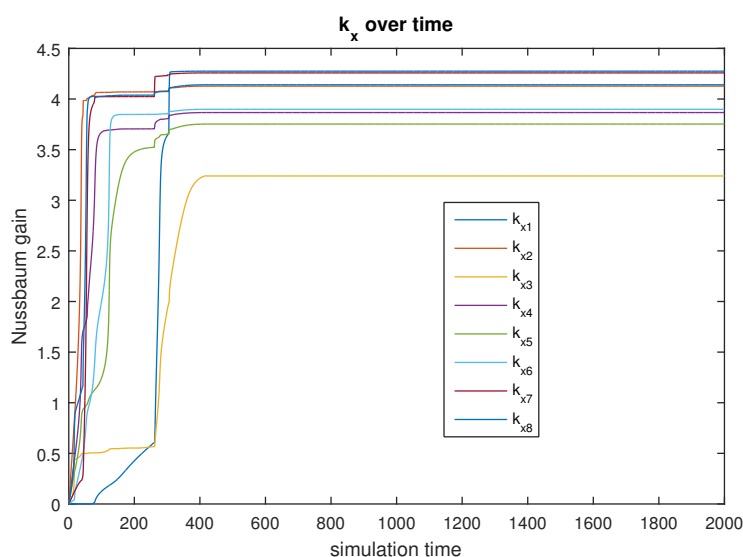
Σχήμα 5.10: Είσοδοι των Agent στην x -διεύθυνση

Η αύξηση της διαστατικότητας καθώς και της πολυπλοκότητας του αρχικού γράφου (σε σχέση με το μονοδιάστατο ανάλογο), οδηγεί στην ύπαρξη πολλαπλών γειτόνων και συνεπώς πολλαπλών ασκούμενων δυνάμεων προς διαφορετικές κατευθύνσεις με αποτέλεσμα η “κίνηση του σμήνους” να γίνεται όλο και πιο περίπλοκη.



Σχήμα 5.11: Είσοδοι των Agent στην y -διεύθυνση

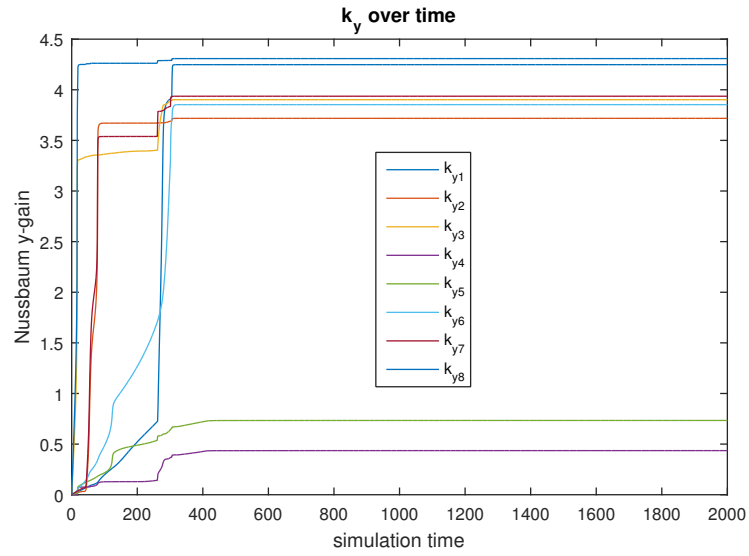
Παρατηρώντας τα κέρδη Nussbaum στα Σχήματα 5.12, 5.13 βλέπουμε ότι όπως ήταν αναμενόμενο σταθεροποιούνται σε κάποιες τιμές. Να σημειωθεί ότι έχουμε ένα κέρδος για κάθε πιθανή κατεύθυνση κίνησης του agent, δηλαδή 2 κέρδη για κάθε πράκτορα. Συνε-



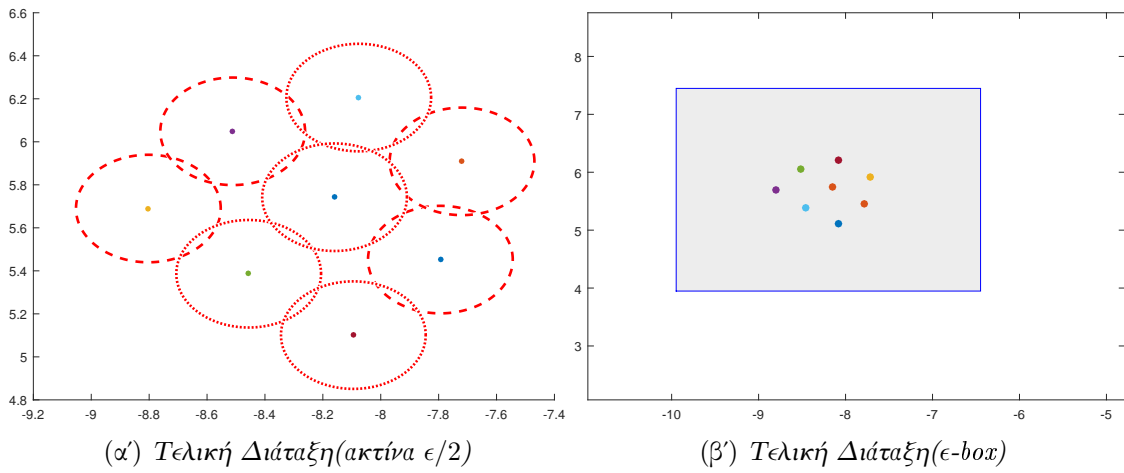
Σχήμα 5.12: Κέρδη Nussbaum στην x -διεύθυνση

πακόλουθα και οι ίδιες οι συναρτήσεις Nussbaum σταθεροποιούνται και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα A_{x_i}, A_{y_i} τείνουν στο μηδέν, εξηγείται και ο μηδενισμός των ελέγχων στα Σχήματα 5.10, 5.11. Η τελική διάταξη των πρακτόρων δίνεται στο Σχήμα 5.14. Από τους κόκκινους κύκλους του Σχήματος 5.14α', καταλαβαίνουμε ότι έχουμε σύγκλιση σε μια περιοχή αρκετά μικρότερη από την προβλεπόμενη $(N - 1)\epsilon$ -box, εν προκειμένω ένα τετράγωνο πλευράς $7 \times \epsilon = 3.5$. Συγκεκριμένα το Σχήμα 5.15 δίνει $d_{min} = 0.4605 \approx \epsilon$ και $d_{max} = 1.1055 < \sqrt{2}(N - 1)\epsilon = \sqrt{2} \times 3.5 = 4.95$.

Τέλος για καλύτερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων παραθέτουμε κάποια στιγμιότυπα της κίνησης των πρακτόρων, που μας δείχνουν πως ακριβώς επιτεύχθηκε ϵ -box consensus.



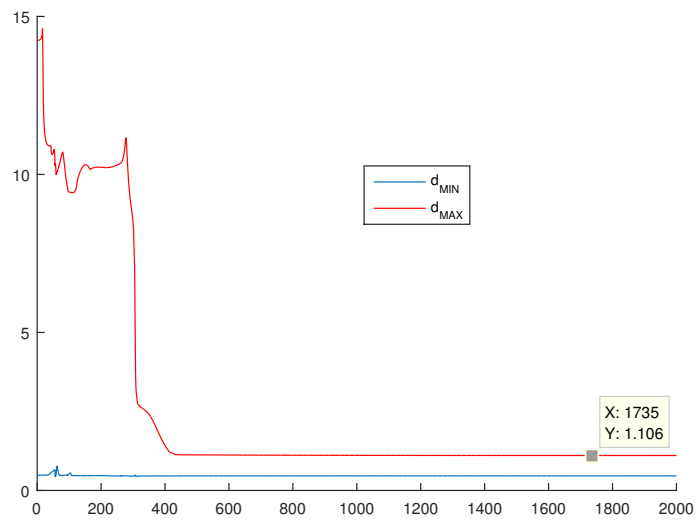
Σχήμα 5.13: Κέρδη Nussbaum στην y -διεύθυνση



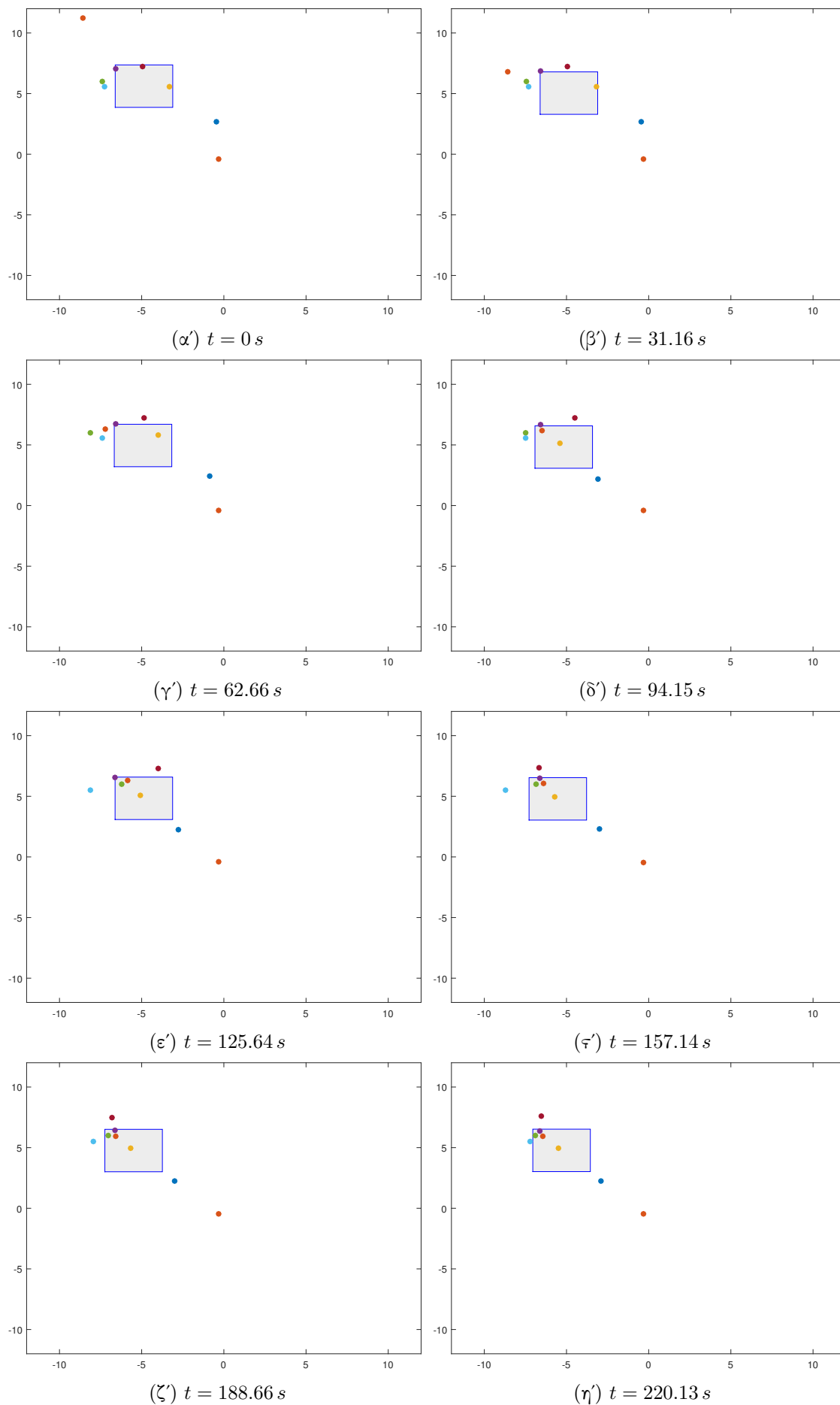
(α) Τελική Διάταξη(ακτίνα $\epsilon/2$)

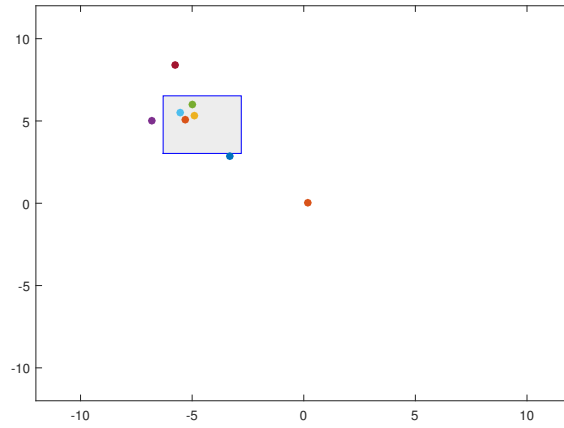
(β') Τελική Διάταξη(ϵ -box)

Σχήμα 5.14: Τελική Διάταξη Πρακτόρων

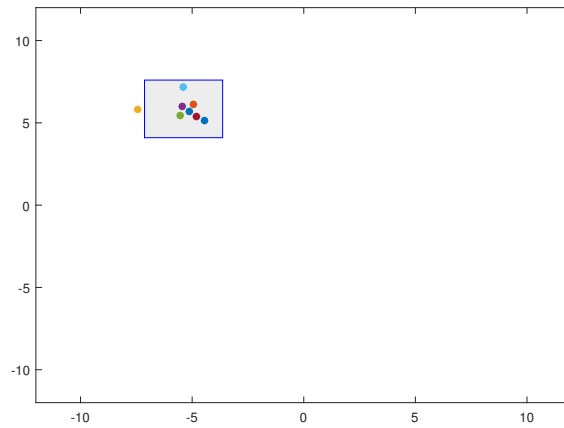


Σχήμα 5.15: Μέγιστη/ελάχιστη απόσταση πρακτόρων

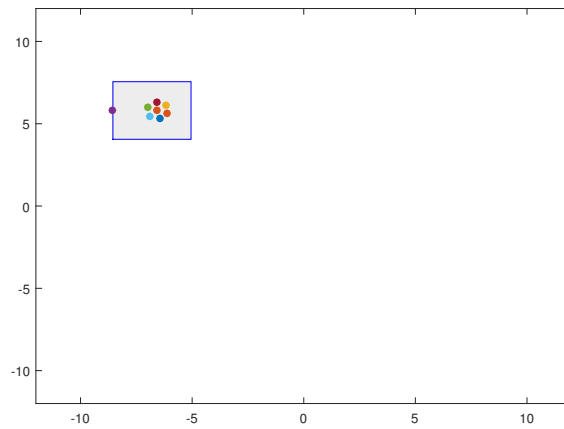




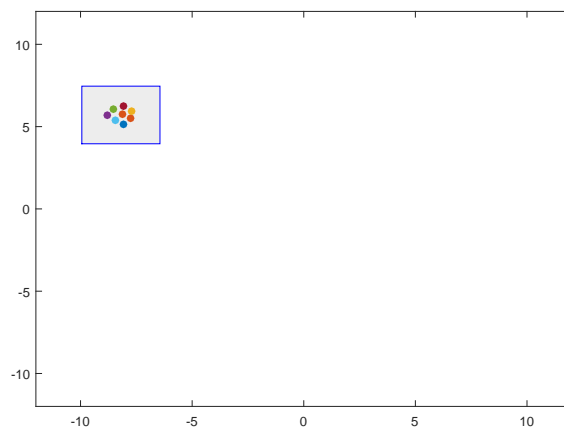
(θ') $t = 283.09 s$



(ι') $t = 310.02 s$



(ια') $t = 346.01 s$



(ιβ') $t = 535 s$

Σχήμα 5.16: Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο

5.3 Προσομοιώσεις Διπλών Ολοκληρωτών

5.3.1 Διδιάστατοι Πράκτορες (2D)

Παράμετροι Προσομοίωσης

- Πλήθος Πρακτόρων: $N = 8$
- Τριπλέτα Επικοινωνίας: $(R, \delta, \epsilon) = (5.5, 1, 0.8)$
- Παράμετρος Nussbaum: $\lambda = 1.5$
- Παράμετρος Ελέγχου: $\rho = 0.005$

Αρχικοποιήσεις

- Αρχικές Θέσεις:

$$\mathbf{x}_0 = [-0.2417, 4.4815, -3.5285, 6.0956, 1.8774, -1.8915, -0.9722, 4.6008]^T$$

$$\mathbf{y}_0 = [-0.6915, 6.2068, 0.7107, 6.0270, 3.2404, 5.5132, 9.2896, 8.7489]^T$$

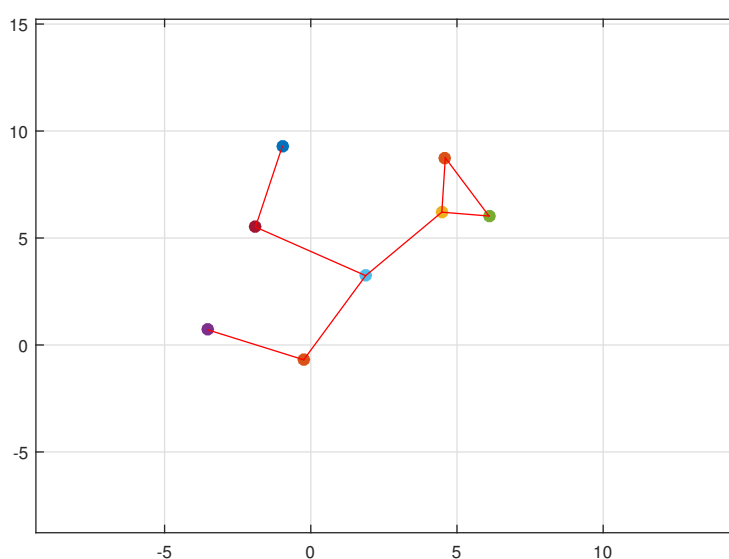
- Αρχικές Ταχύτητες:

$$\mathbf{v}_x(0) = [0.9263, 1.8942, 1.1656, -0.1594, 1.0597, 1.8884, -0.9759, 1.6630]^T$$

$$\mathbf{v}_y(0) = [-0.3308, -0.6371, -0.1313, 0.5211, 0.8327, 0.0036, -0.2506, 0.5432]^T$$

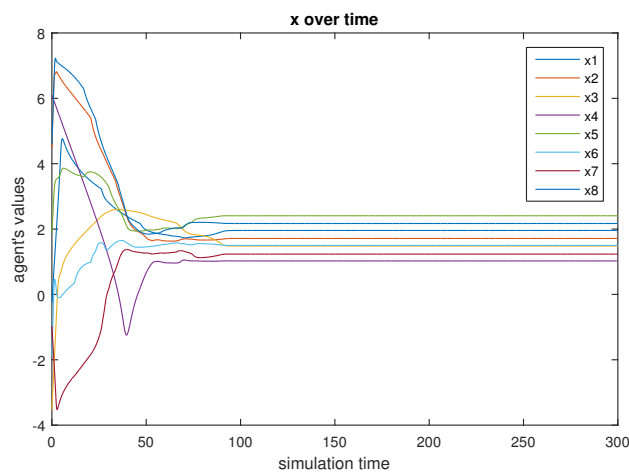
- Κατευθύνσεις Ελέγχου: $b_{x_1} = 2.9565, b_{x_2} = 2.1773, b_{x_3} = 1.8345, b_{x_4} = 1.0179, b_{x_5} = 2.7917, b_{x_6} = 2.9506, b_{x_7} = 2.9828, b_{x_8} = 2.8446, b_{y_1} = 1.3643, b_{y_2} = 2.1242, b_{y_3} = 1.99, b_{y_4} = 2.73, b_{y_5} = 1.73, b_{y_6} = 2.807, b_{y_7} = 2.2306, b_{y_8} = 2.5442$

Η αρχική διάταξη-γράφημα είναι η:

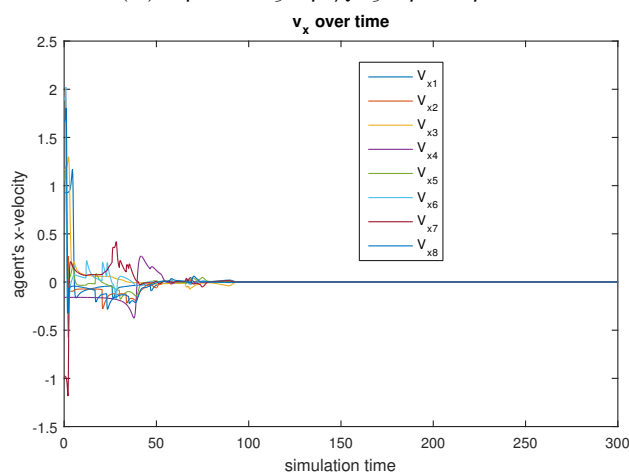


Σχήμα 5.17: Αρχική Διάταξη Πρακτόρων

Στα Σχήματα 5.18 και 5.19 φαίνονται οι οριζόντιες και κάθετες τροχιές και ταχύτητες.



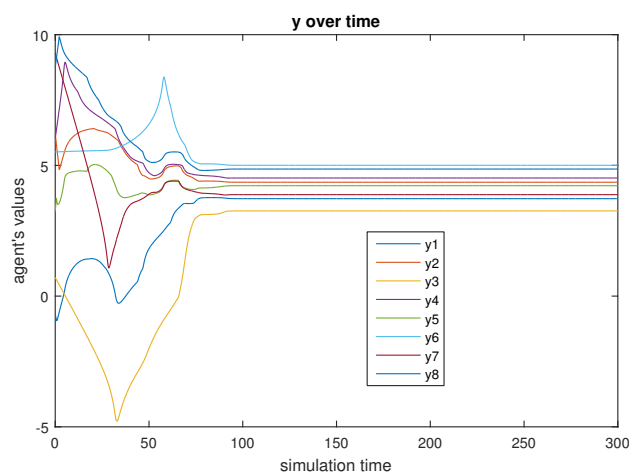
(α') Οριζόντιες Τροχιές Πρακτόρων



(β') Τιμές Οριζόντιας Συνιστώσας Ταχύτητας

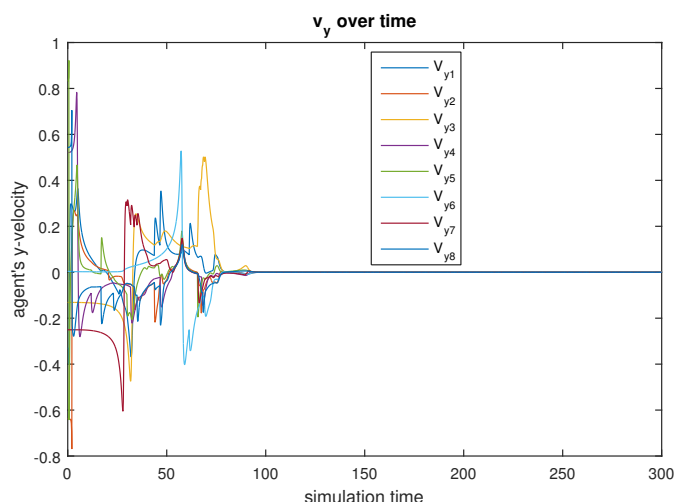
Σχήμα 5.18: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην οριζόντια διεύθυνση

Οι τροχιές στο χώρο είναι πιο ομαλές σε σχέση με αυτές των απλών ολοκληρωτών



(α') Κάθετες Τροχιές Πρακτόρων

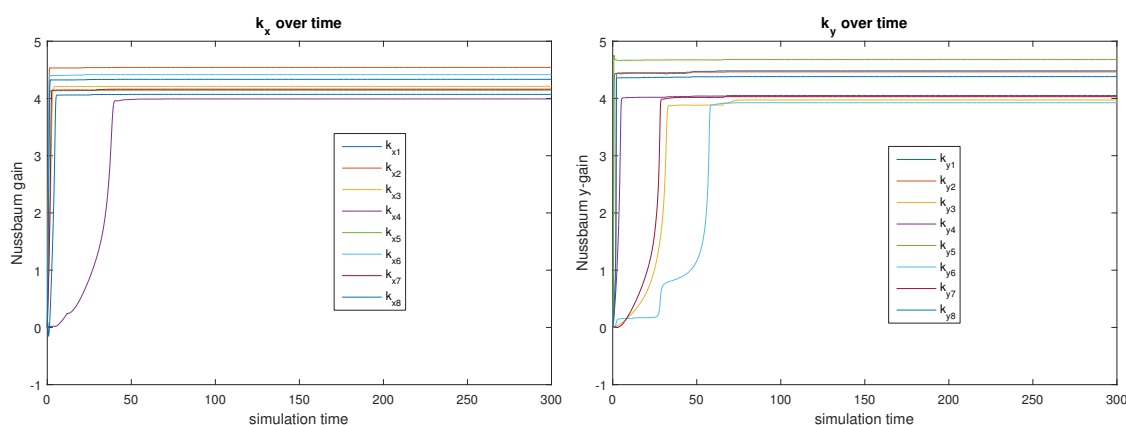
Σχήμα 5.19: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην κάθετη διεύθυνση



(β') Τιμές Κάθετης Συνιστώσας Ταχύτητας

Σχήμα 5.19: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην κάθετη διεύθυνση

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι τα κέρδη Nussbaum (Σχήμα 5.20) σταθεροποιούνται σε κάποιες τιμές, όπως ήταν αναμενόμενο. Οι αντίστοιχοι νόμοι ελέγχου (Σχήμα 5.21), πα-



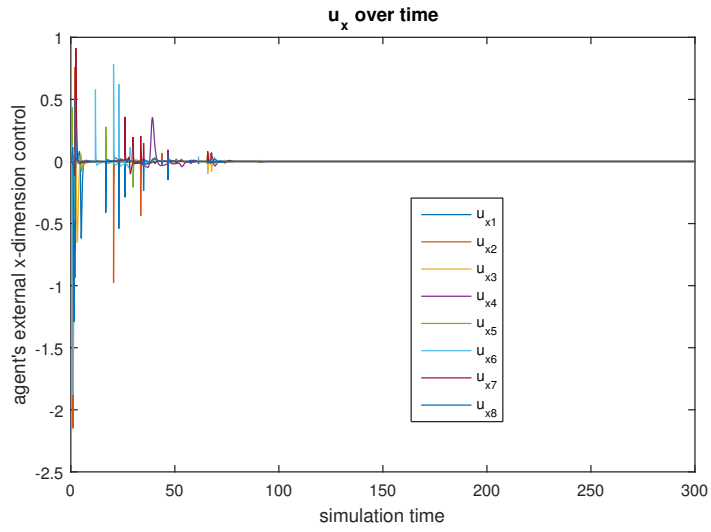
(α') Κέρδη x κατεύθυνσης

(β') Κέρδη y κατεύθυνσης

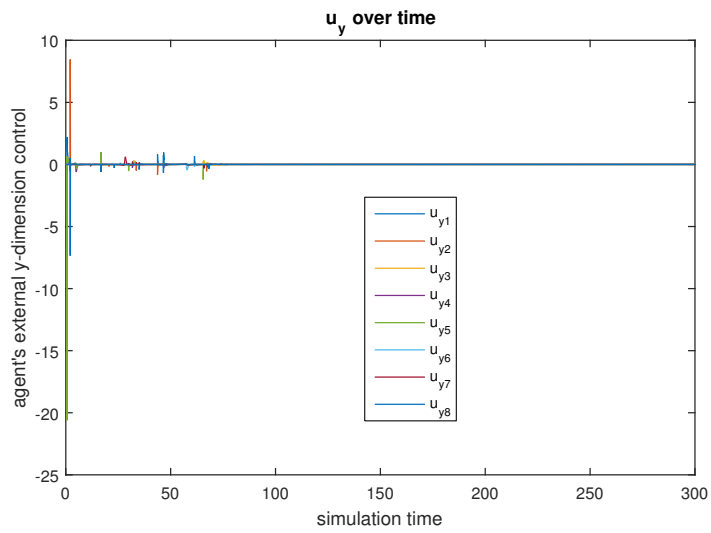
Σχήμα 5.20: Ορίσματα συναρτήσεων Nussbaum

ρουσιάζουν κάποιες ακμές που οφείλονται στις αλληλεπιδράσεις των πρακτόρων μέσω των δυναμικών τους. Στη μόνιμη κατάσταση οι έλεγχοι τείνουν στο μηδέν, γεγονός που είναι λογικό αν αναλογιστεί κανείς ότι πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Παραθέτουμε και την τελική διάταξη των πρακτόρων όπου οι κύκλοι του Σχήματος 5.22α' είναι ακτίνας $\epsilon/2$. Από αυτό παρατηρούμε ότι η ελάχιστη απόσταση είναι περίπου ϵ , γεγονός που επιβεβαιώνει το Σχήμα 5.22β', από το οποίο παίρνουμε ότι $d_{min} = 0.6687 < \epsilon = 0.8$. Για τη μέγιστη απόσταση έχουμε $d_{max} \approx 1.744$, γεγονός που συμβαδίζει με το αποτέλεσμα $d_{max} < \sqrt{2}(N - 1)\epsilon \Rightarrow 1.75 < 7.92$. Κλείνουμε και αυτό το παράδειγμα παραθέτοντας την κίνηση των πρακτόρων στο χώρο.

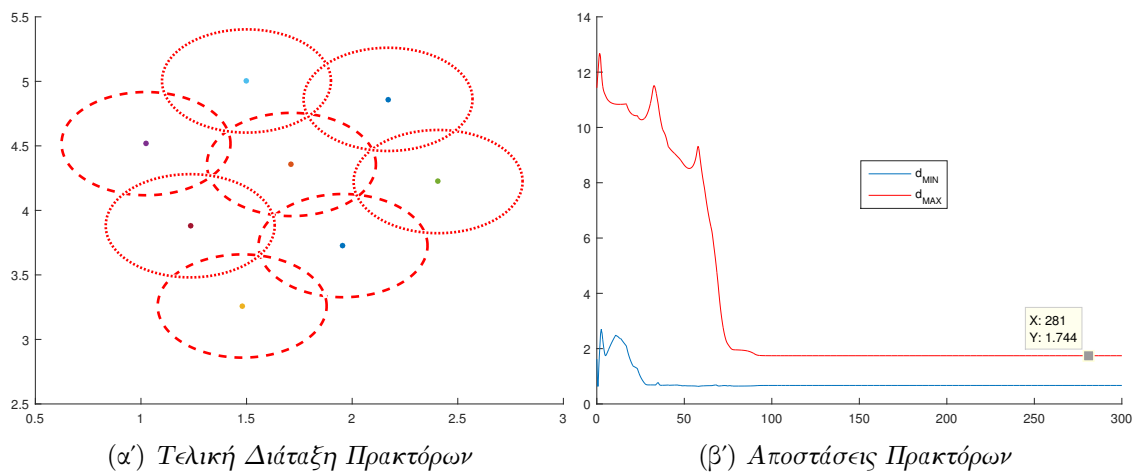


(α') Έλεγχος x κατεύθυνσης



(β') Έλεγχος y κατεύθυνσης

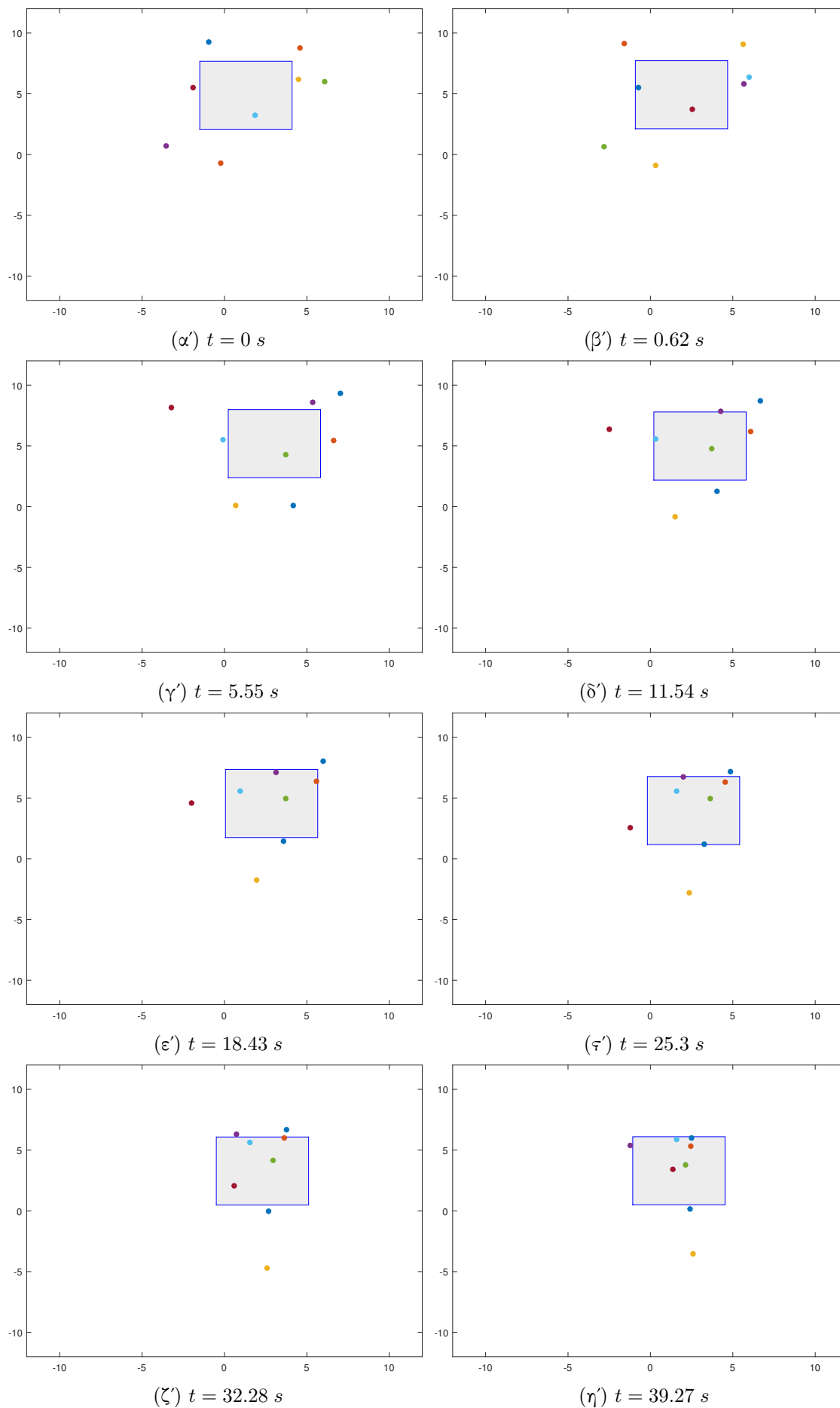
Σχήμα 5.21: Είσοδοι πρακτόρων σε κάθε διάσταση

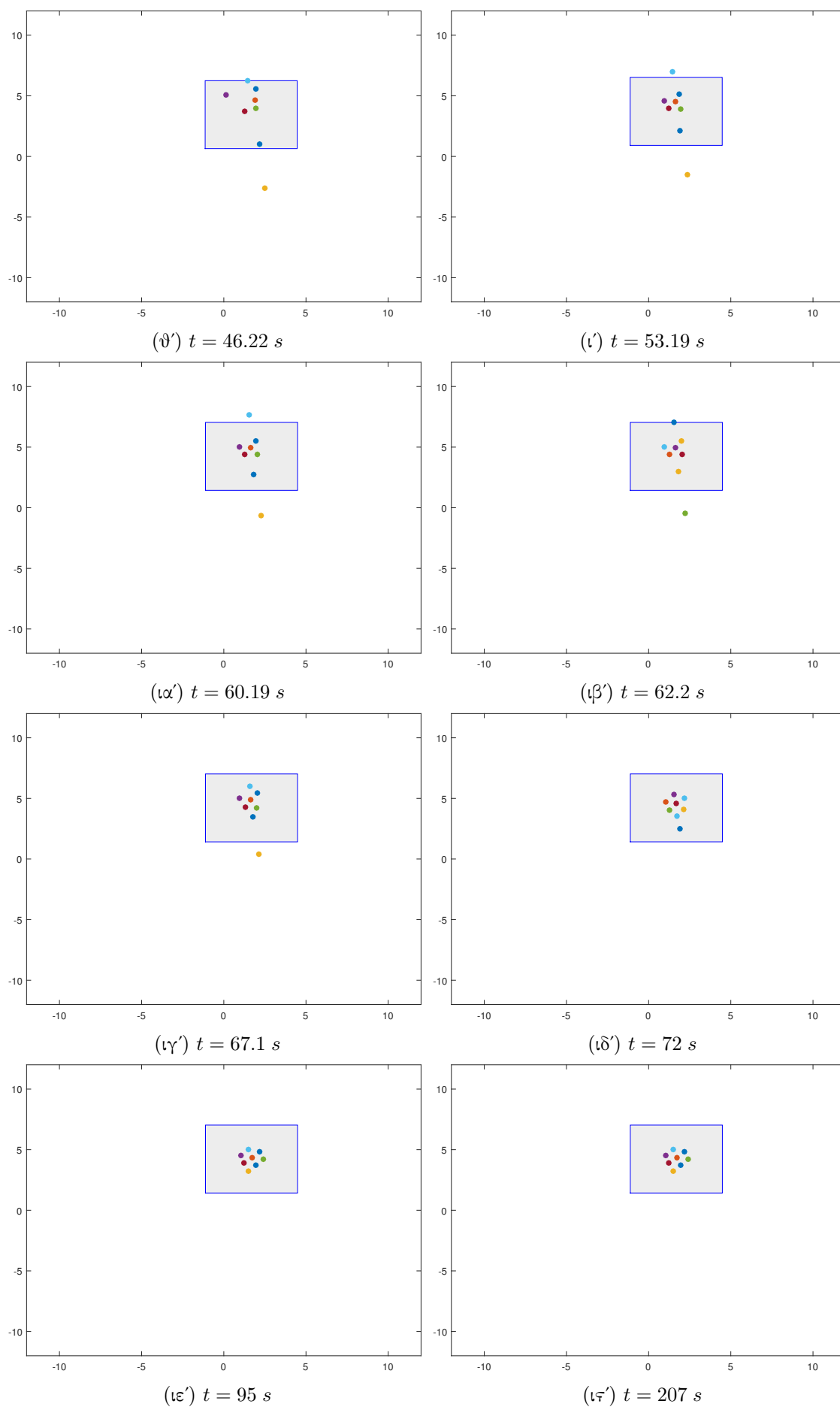


(α') Τελική Διάταξη Πρακτόρων

(β') Αποστάσεις Πρακτόρων

Σχήμα 5.22: Τελική Κατάσταση Πρακτόρων





Σχήμα 5.23: Στιγμιότυπα Κίνησης στο Επίπεδο

5.3.2 Τρισδιάστατοι Πράκτορες (3D)

Εξετάζουμε και ένα παράδειγμα στις 3 διαστάσεις. Λόγω πολυπλοκότητας υπολογισμών αρχικών τιμών ($N \times 3 + N \times 3 + N \times 3 = N \times 3 \times 3 = 8 \times 9 = 72$), τόσο οι αρχικές θέσεις όσο και οι αρχικές ταχύτητες και οι άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου παρήχθησαν από έναν τυχαίο αλγόριθμο. Για τις ταχύτητες ισχύει ότι $v_{il}(0) \in [-0.5, 0.5]$ ενώ για τις άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου $b_{il}(0) \in [1, 3]$, όπου ο δείκτης $i = \{1, 2, \dots, 15\}$ και ο $l = \{1, 2, 3\}$. Οι θέσεις των πρακτόρων στον 3σδιάστατο ευκλείδιο χώρο παρήχθησαν ώστε το αρχικό γράφημα να είναι συνεκτικό. Υπενθυμίζουμε ότι *μόνο στο κεφάλαιο των προσομοιώσεων*, οι ποσότητες που αναπαριστούν τις θέσεις και τις ταχύτητες των πρακτόρων στο χώρο, συμβολίζονται ως x_i, y_i, z_i και $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$ αντίστοιχα.

Παράμετροι Προσομοίωσης

- Πλήθος Πρακτόρων: $N = 8$
- Τριπλέτα Επικοινωνίας: $(R, \delta, \epsilon) = (4.7, 0.7, 0.4)$
- Παράμετρος Nussbaum: $\lambda = 1.5 > \ln \frac{14 \times 3}{1} \approx 1.19$
- Παράμετρος Ελέγχου: $\rho = 0.006$

Αρχικοποιήσεις

- Αρχικές Θέσεις:

$$\mathbf{x}_0 = [0.0470, -3.1998, -5.0537, -8.7926, -6.6422, -8.3928, -5.5747, -5.9573]^T$$

$$\mathbf{y}_0 = [-0.5156, 1.6805, 2.2031, 2.6821, 0.7378, 3.6430, 0.8133, 2.3904]^T$$

$$\mathbf{z}_0 = [-0.7435, 0.0538, -3.4519, -2.1135, 0.6425, -1.4778, -1.2508, -4.9068]^T$$

- Αρχικές Ταχύτητες:

$$\mathbf{v}_x(0) = [0.3154, 0.0983, 0.0012, -0.0828, -0.0102, 0.4216, 0.0310, 0.2870]^T$$

$$\mathbf{v}_y(0) = [-0.4064, -0.3993, -0.2290, 0.4474, 0.4755, 0.2219, 0.1668, 0.3650]^T$$

$$\mathbf{v}_z(0) = [-0.0669, -0.2396, -0.0732, 0.3533, 0.3003, 0.3921, -0.3622, 0.2742]^T$$

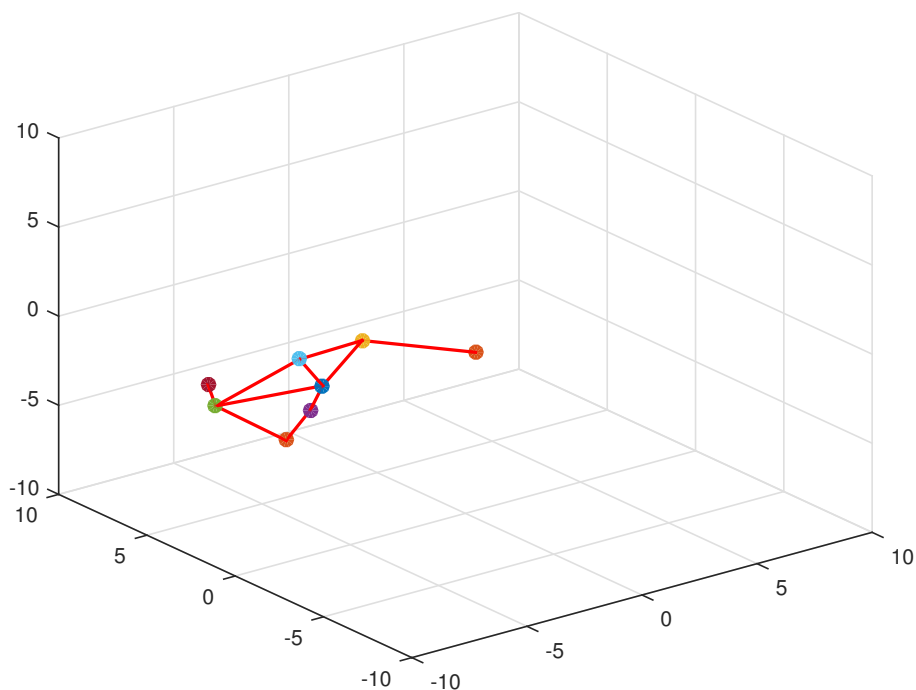
- Κατευθύνσεις Ελέγχου:

$$\mathbb{B}_x = \text{diag}\{2.9207, 2.2568, 1.4898, 1.8644, 1.8365, 2.8153, 1.2537, 2.9690\}$$

$$\mathbb{B}_y = \text{diag}\{1.4484, 2.4466, 2.7143, 1.5816, 2.9201, 1.7796, 2.2235, 2.5587\}$$

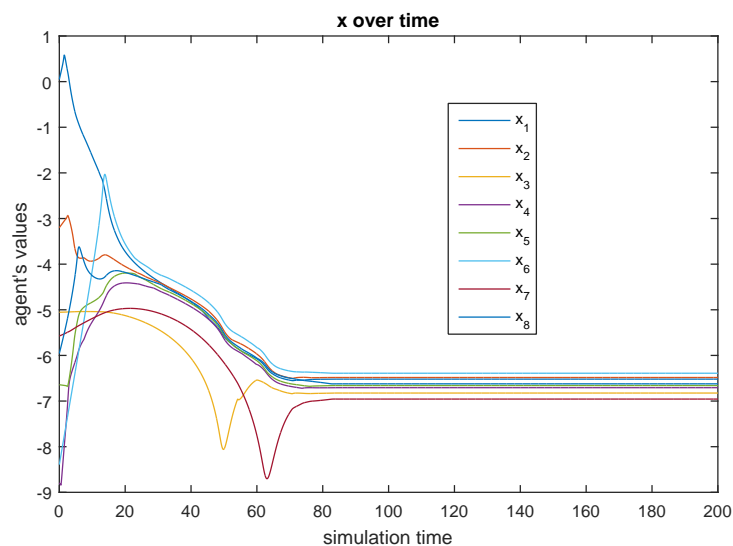
$$\mathbb{B}_z = \text{diag}\{1.6200, 2.9438, 2.6269, 2.9019, 1.8446, 1.7402, 2.3069, 2.7634\}$$

Η αρχική διάταξη των πρακτόρων στο χώρο - αρχικό γράφημα δίνεται στο Σχήμα 5.24. Στη συνέχεια παραθέτουμε τις τροχιές σε κάθε διάσταση στα Σχήματα 5.25α', 5.26α', 5.27α' καθώς και τις αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας στα Σχήματα 5.25β', 5.26β', 5.27β'. Όπως



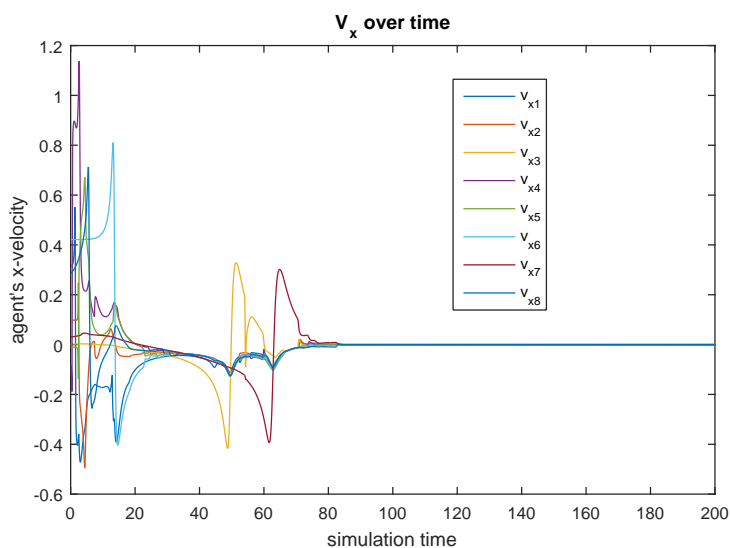
Σχήμα 5.24: Αρχική Διάταξη Agent στο χώρο

αναμενόταν οι τροχιές ενδέχεται να έχουν σημεία τομής, ενώ στην τελική κατάσταση σταθεροποιούνται σχετικά κοντά μεταξύ τους. Σε ό,τι αφορά τις ταχύτητες τώρα παρατηρούμε ότι

(α) x Τροχιές ΠρακτόρωνΣχήμα 5.25: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην x διεύθυνση

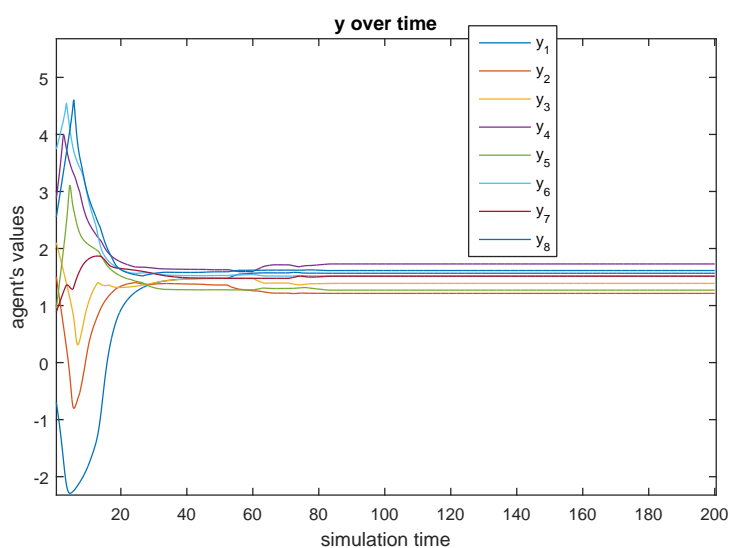
συγκλίνουν στο μηδέν όπως έχουμε αποδείξει. Φυσικά το αποτέλεσμα αυτό μας λέει ότι το σύστημα είναι ακίνητο και οι θέσεις των πρακτόρων δεν μεταβάλλονται στη μόνιμη κατάσταση.

Προς επιβεβαίωση των θεωρητικών μας αποτελεσμάτων παραθέτουμε και τις γραφικές παραστάσεις των κερδών Nussbaum, που όπως παρατηρούμε και στο Σχήμα 5.28 σταθεροποιούνται σε ορισμένες τιμές.



(β') x Συνιστώσα Ταχύτητας

Σχήμα 5.25: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην x διεύθυνση



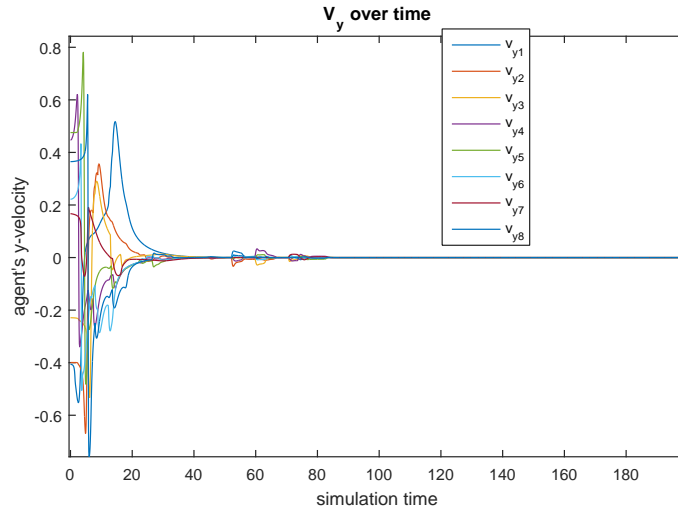
(α) y Τροχιές Πρακτόρων

Σχήμα 5.26: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην y διεύθυνση

Εν συνεχεία δίνουμε του ασκούμενους ελέγχους στο σύστημα (Σχήμα 5.29). Παρατηρούμε ότι συγκλίνουν στο μηδέν δίνοντας έτσι το επιθυμητό αποτέλεσμα, που δεν είναι άλλο από την ισορροπία του συστήματος.

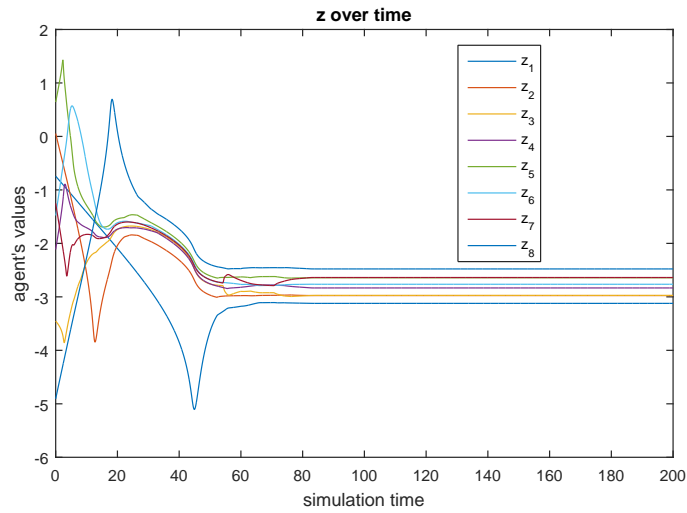
Παρουσιάζουμε κάποια στιγμιότυπα της κίνησης των πρακτόρων για καλύτερη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μας στο Σχήμα 5.30. Στο τέλος έχουμε και μια μεγενθυμένη εκδοχή της τελικής κατάστασης, όπου με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το προβλεπόμενο ϵ -box. Παρατηρούμε ότι οι agents καλύπτουν αρκετά μικρότερη περιοχή από τη μέγιστη δυνατή.

Κλείνουμε με το Σχήμα 5.32 μέγιστων-ελάχιστων αποστάσεων, από το οποίο έχουμε $d_{max} \approx 0.65$ και $d_{min} \approx 0.38$, το οποίο πρακτικά επιβεβαιώνει ότι η τελική διάταξη, ϵ -μπεριέχεται στο ϵ -box, μέσω της ανισότητας $d_{max} < \sqrt{3}(N-1)\epsilon$, ή ισοδύναμα $0.65 < 4.85$.

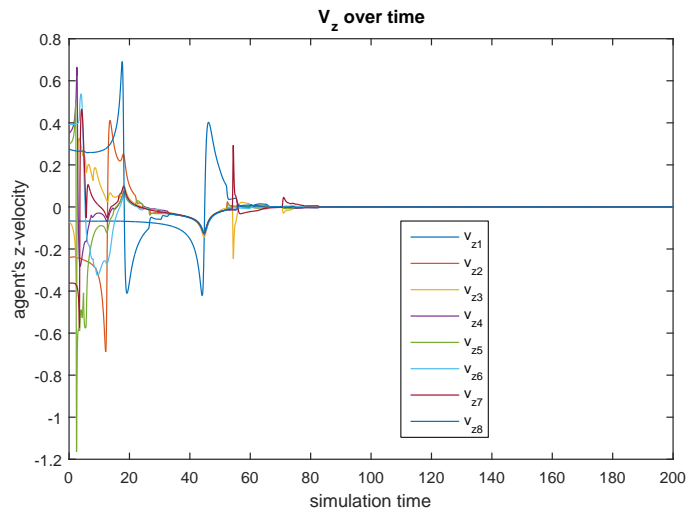


(β') y Συνιστώσα Ταχύτητας

Σχήμα 5.26: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην y διεύθυνση

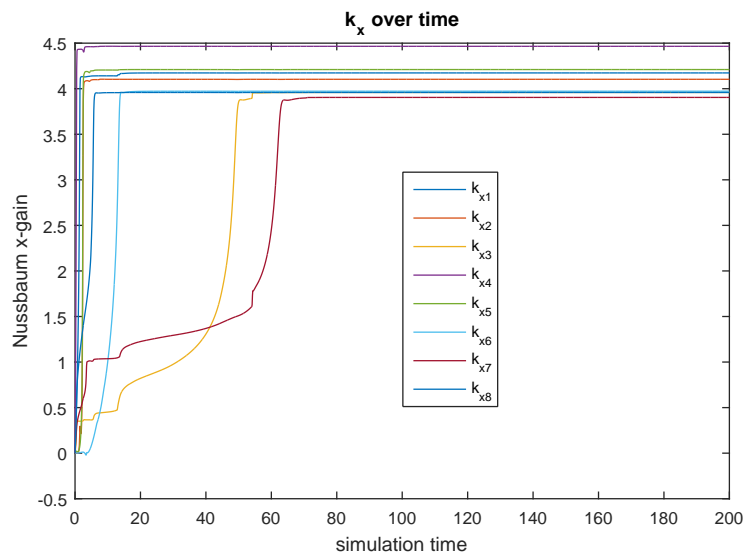


(α') z Τροχιές Πρακτόρων

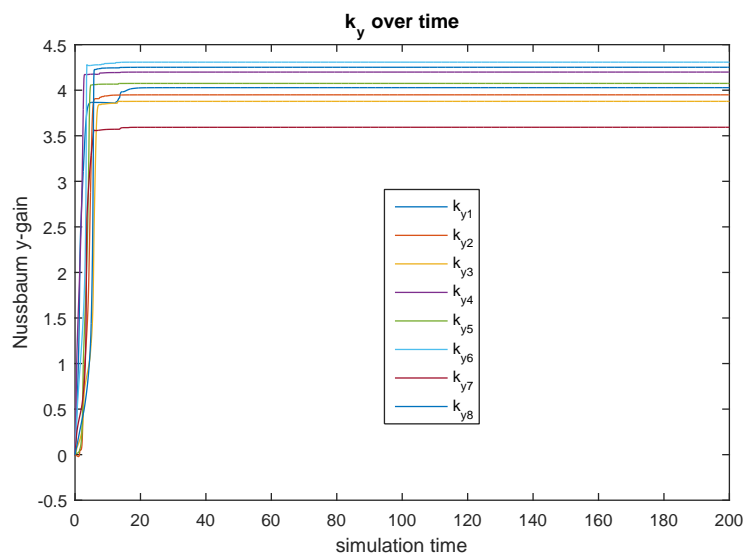


(β') z Συνιστώσα Ταχύτητας

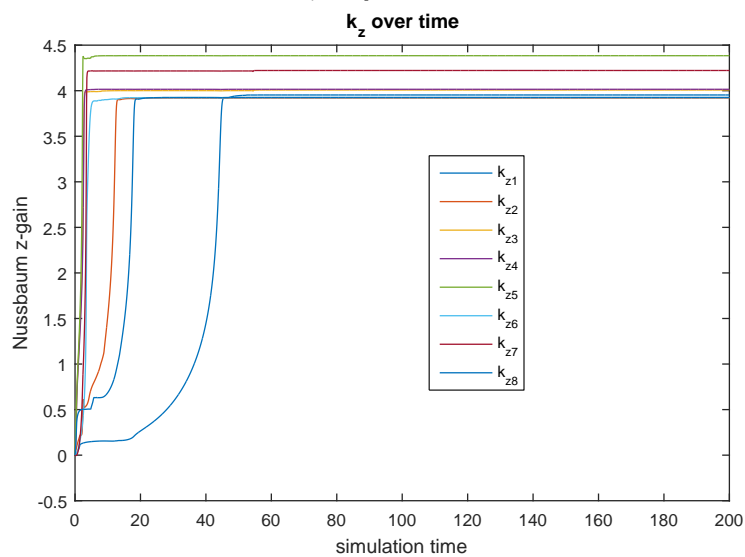
Σχήμα 5.27: Μεταβλητές Κατάστασης Πρακτόρων στην z διεύθυνση



(α') k_x κέρδη

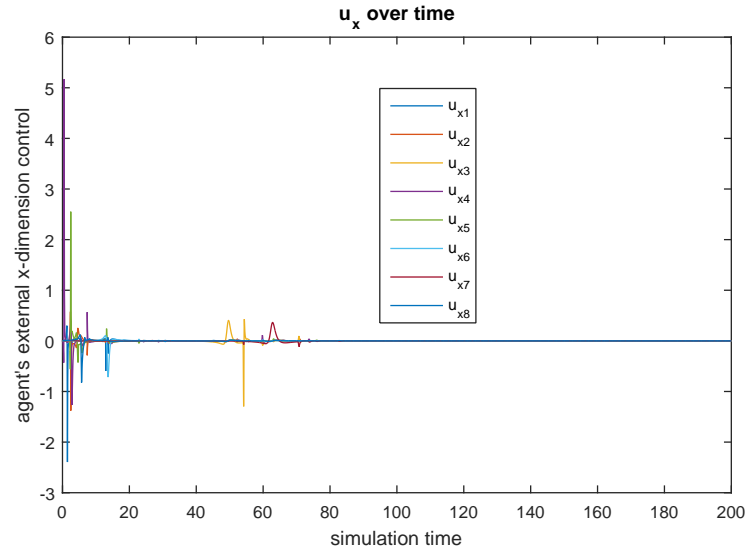


(β') k_y κέρδη

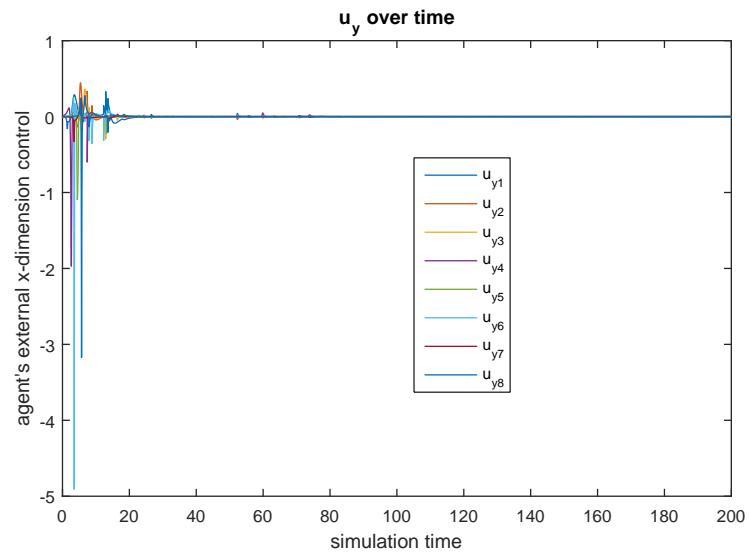


(γ') k_z κέρδη

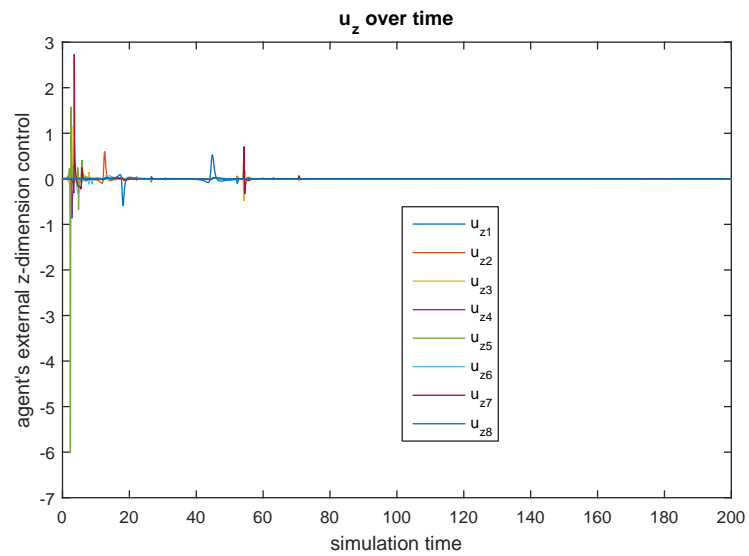
Σχήμα 5.28: Κέρδη Nussbaum



(α') x έλεγχοι

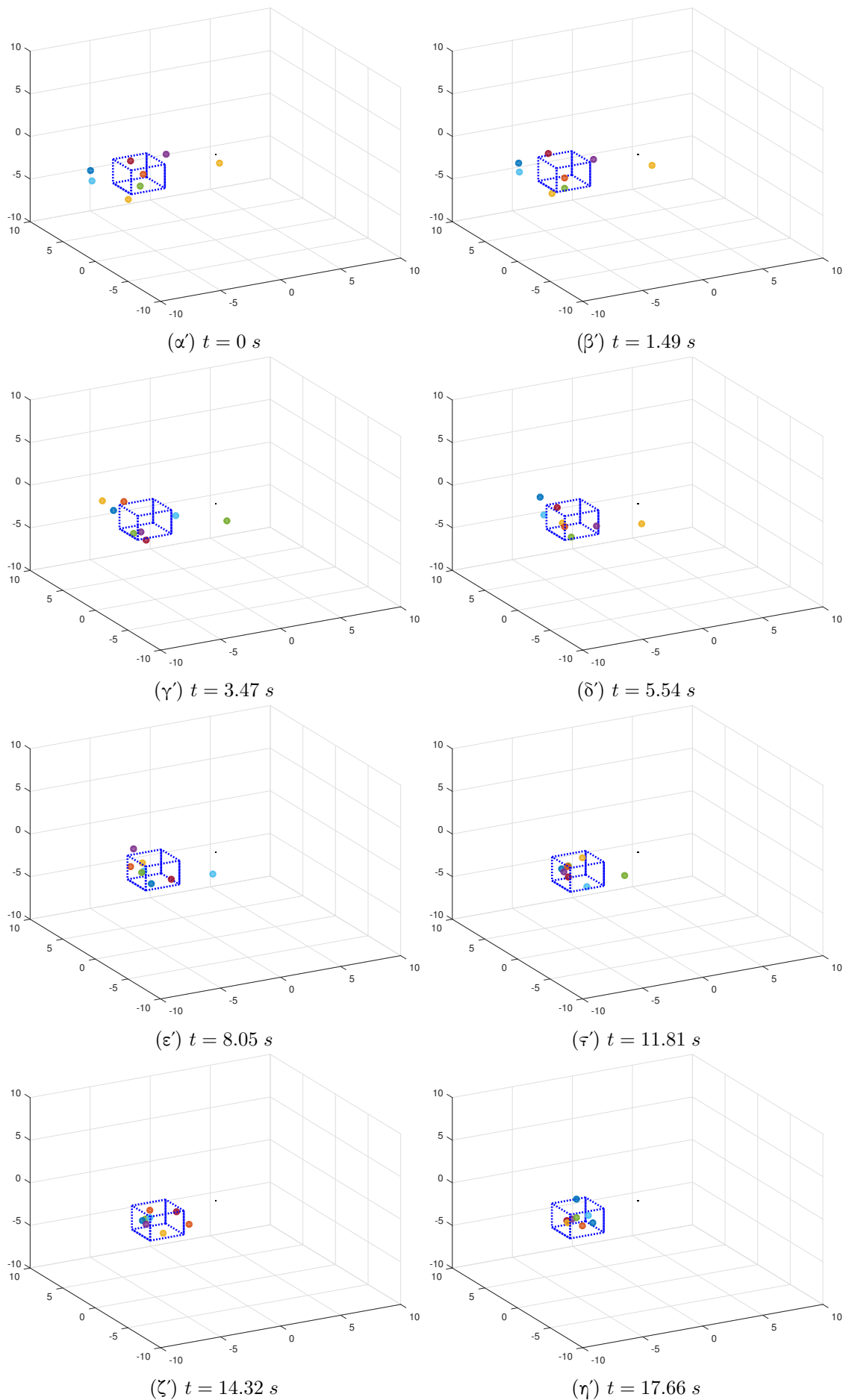


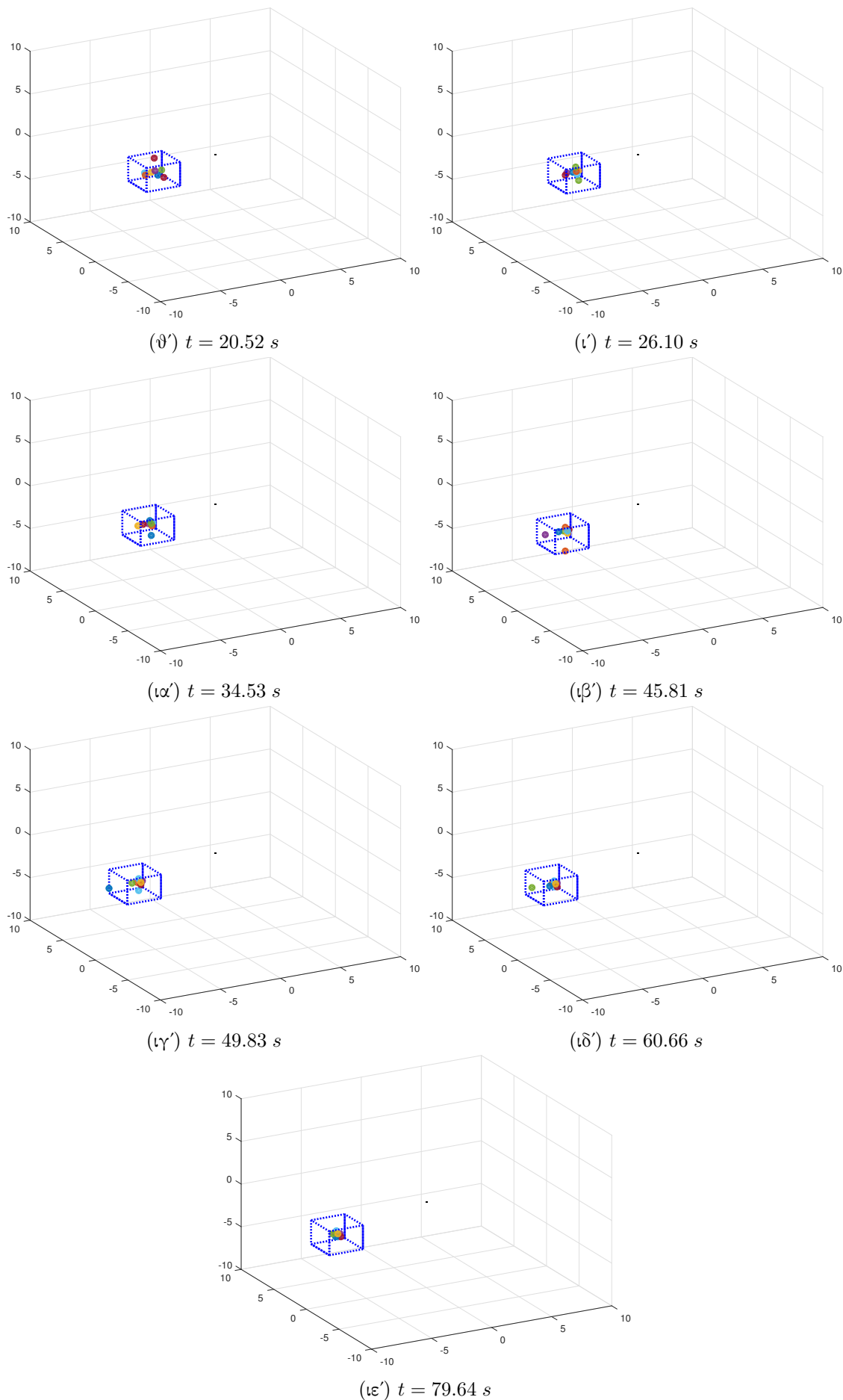
(β') y έλεγχοι



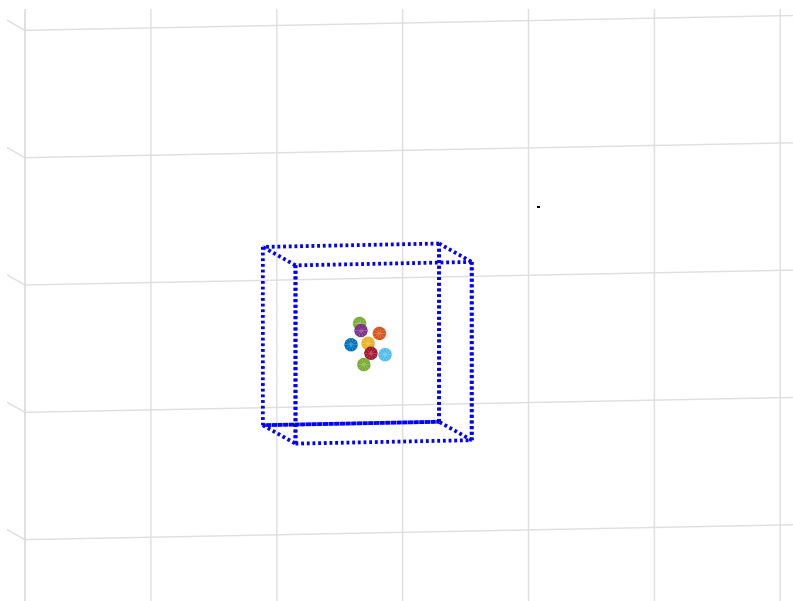
(γ') z έλεγχοι

Σχήμα 5.29: Ασκούμενοι Έλεγχοι ανά Πράκτορα σε κάθε διάσταση

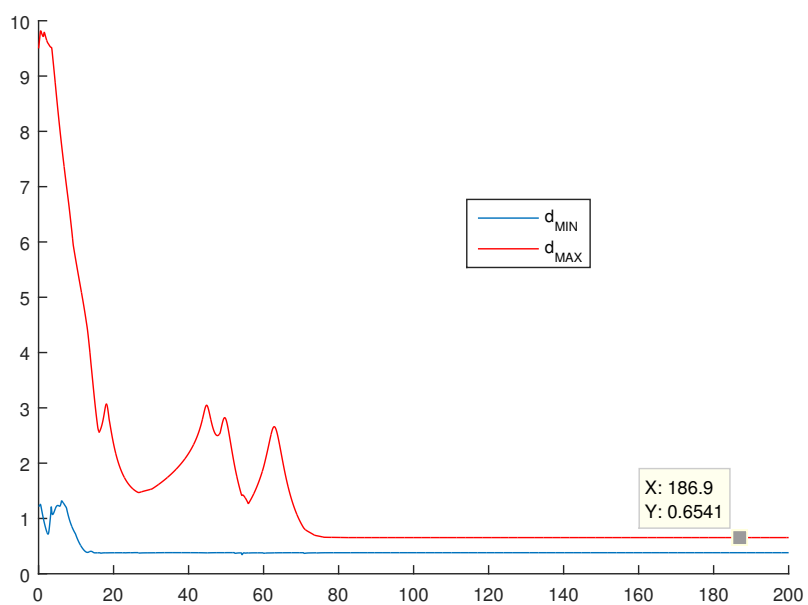




Σχήμα 5.30: Στιγμιότυπα Κίνησης στο Χώρο



Σχήμα 5.31: Διάταξη Πρακτόρων στη Μόνιμη κατάσταση ($t = 180 s$)



Σχήμα 5.32: Min-Max Interagent Αποστάσεις

Κεφάλαιο **6**

Επίλογος

6.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία προτάθηκαν δύο νέα καταναμημένα πρωτόκολλα ελέγχου, τα οποία έλυσαν επιτυχώς το πρόβλημα *consensus* με αποφυγή συγκρούσεων και παράλληλη διατήρηση συνοχής με επιπρόσθετες άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου στη δυναμική των πρακτόρων.

Αρχικά παρουσιάσαμε κάποιες βασικές έννοιες και μοντέλα πάνω στις οποίες στηρίξαμε σε πρώτη φάση τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκαν έννοιες από τη θεωρία γραφημάτων (Παρ. Α') προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την ανταλλαγή πληροφορίας εντός του πολυπρακτορικού δικτύου. Στη συνέχεια μοντελοποιήσαμε τη δυναμική των agent με απλούς και διπλούς ολοκληρωτές και ορίσαμε τον τρόπο με τον οποίο αυτοί θα επικοινωνούν, καθώς κινούνται στο χώρο (Κεφ. 3).

Κατόπιν παρουσιάσαμε τα προτεινόμενα σχήματα ελέγχου (Κεφ. 4) και αποδείξαμε την ισχύ τους. Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι υλοποιήθηκαν πλήρως καταναμημένα πρωτόκολλα που (i) κάνουν χρήση μόνο μετρήσεων σχετικής θέσης και ταχύτητας, (ii) αποφεύγουν επιτυχώς τις συγκρούσεις και διατηρούν τη συνοχή της τοπολογίας επικοινωνίας, μέσω κατάλληλων συναρτήσεων δυναμικού, (iii) αντιμετωπίζουν τις άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου μέσω κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων Nussbaum και (iv) εισάγουν μια νέα γενικευμένη έννοια ομοφωνίας στο χώρο, αυτή του ϵ -box consensus και αποδεικνύουν τελική χωρική φραγή του συστήματος. Εν ολίγοις τα υπό εξέταση σχήματα συνδυάζουν επιτυχώς προβλήματα του καταναμημένου και του προσαρμοστικού ελέγχου, με ρεαλιστικές υποθέσεις.

Προς την κατεύθυνση επαλήθευσης των θεωρητικών μας αποτελεσμάτων, προσομοιώσαμε κάποια διασυνδεδεμένα συστήματα απλών και διπλών ολοκληρωτών, σε περιβάλλον Matlab και Simulink (Κεφ. 5). Τα παραδείγματα αφορούν τόσο τη μονοδιάστατη, όσο και τη διδιάστατη και τρισδιάστατη περίπτωση. Πρακτικά έδειξαν σύγκλιση των συστημάτων εντός των προβλεπόμενων χωρίων, αρκετά πριν το χρονικό όριο στο άπειρο και επιπλέον ανέδειξαν τη σημασία της παραμέτρου ϵ ως προς το εύρος της περιοχής εντός της οποίας θα σταθεροποιηθεί τελικά η διάταξη.

6.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Τα σχήματα ελέγχου που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας θα μπορούσαν να βελτιωθούν και να επεκταθούν περαιτέρω, τουλάχιστον ως προς τις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Ενσωμάτωση άγνωστων παραμέτρων στη δυναμική των πρακτόρων με σκοπό την εισαγωγή προσαρμοστικών νόμων ελέγχου (**adaptive control laws**), που θα υλοποιούνται είτε με κλασσικούς adaptive κανόνες είτε με νευρωνικά δίκτυα.
- Εισαγωγή διαστάσεων στους ίδιους τους agents, ώστε να μη θεωρούνται πλέον σημειακοί (particle agents), γεγονός που φέρει τα προτεινόμενα σχήματα ελέγχου πιο κοντά στην πραγματικότητα.
- Εισαγωγή κάποιου/κάποιων οδηγών-ηγετών πρακτόρων (**leader-follower**) στο multi-agent σύστημα, που ενώ από μαθηματικής απόψεως καθαρά είναι πιο εύκολο πρόβλημα, μπορεί να οδηγήσει σε εντυπωσιακότερες προσομοιώσεις.
- Τροποποίηση του δυναμικού μοντέλου των πρακτόρων, είτε προς κάποιο πιο σύνθετο π.χ 3^{ης} τάξης, είτε προς κάποιο πιο ρεαλιστικό π.χ Euler-Lagrange.
- Εκ νέου θεώρηση του μοντέλου επικοινωνίας ως προς τη δομή. Δηλαδή αντί για το σφαιρικό-ακτινικό που χρησιμοποιήσαμε εμείς μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιο άλλο όπως π.χ το σφηνοειδές, το οποίο μοντελοποιεί καλύτερα βιολογικούς οργανισμούς.
- Εισαγωγή μη-ομοίμορφου μοντέλου επικοινωνίας, που πρακτικά σημαίνει διαφορετική ακτίνα διατήρησης, ενεργοποίησης αποφυγής κ.λ.π.
- Πλήρη έλλειψη πληροφορίας για τις κατευθύνσεις ελέγχου.
- Εισαγωγή εμποδίων στο χώρο εργασίας και αποφυγή αυτών με χρήση δυναμικών ή άλλης μεθόδου.
- Μελέτη κίνησης πρακτόρων σε μη-ευκλείδειους χώρους π.χ επιφάνεια σφαίρας.

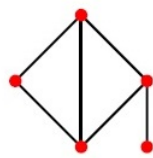
Παραρτήματα

Παράρτημα **A'**

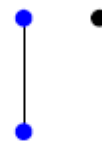
Στοιχεία Θεωρίας Γραφημάτων

Είναι φυσικό να μοντελοποιούμε τη ροή πληροφορίας σε ένα πολυπρακτορικό δίκτυο μέσω γραφημάτων. Ως *γράφος* ορίζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, όπου \mathcal{V} είναι το σύνολο κορυφών και \mathcal{E} το σύνολων των ακμών. Πιο συγκεκριμένα εαν $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ είναι το σύνολο των κορυφών, τότε το σύνολο των ακμών $\mathcal{E} \subseteq \{\mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$, αποτελείται από μη-διατεταγμένα δισύνολα του \mathcal{V} .

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε απλά και μη κατευθυνόμενα γραφήματα, δηλαδή $(i, i) \notin \mathcal{E}$ και $(i, j) \in \mathcal{E} \iff (j, i) \in \mathcal{E}$. Δύο κόμβοι $i, j \in \mathcal{V}$ λέγονται *γείτονες* εαν υπάρχει ακμή $(i, j) \in \mathcal{E}$ που να τους συνδέει. Το σύνολο των γειτόνων ενός κόμβου i ορίζεται ως $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$. Ως *μονοπάτι* νοείται μια διατεταγμένη ακολουθία κόμβων, της οποίας κάθε διαδοχικό ζεύγος είναι γείτονες. Ένα γράφημα καλείται *συνεκτικό* ή *συνδεδεμένο*, εαν υπάρχει μονοπάτι που να συνδέει δύο οποιουδήποτε κόμβους του.



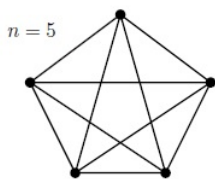
(α') Συνεκτικός Γράφος



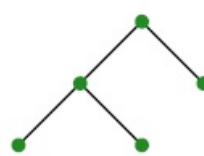
(β') Μη συνεκτικός-Αποσυνδεδεμένος Γράφος

Σχήμα A'.1: Συνεκτικότητα Γραφημάτων

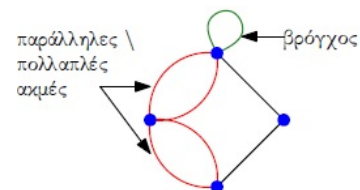
Δύο ειδικές κατηγορίες γραφημάτων που θα μας απασχολήσουν είναι (α) το *δέντρο*, που ορίζεται ως ένας γράφος στον οποίο κάθε ζεύγος κόμβων του συνδέεται από ένα και μοναδικό μονοπάτι και (β) το *πλήρες γράφημα*, που ορίζεται ως το γράφημα στο οποίο κάθε κόμβος γειτνιάζει με όλους τους άλλους κόμβους.



(α') K_5



(β') Δέντρο



(γ') Μη-απλός γράφος

Σχήμα A'.2: Ειδικές Κατηγορίες Γράφων

Παράρτημα **B'**

Θεωρία Συστημάτων

Ως δυναμικό σύστημα νοείται οποιοδήποτε σύστημα μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Η δυναμική μιας μεγάλης κατηγορίας γραμμικών και μη συστημάτων, μπορεί να εκφραστεί από το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (\text{B'.1})$$

Εάν δεν υπάρχει άμεση χρονική εξάρτηση της $\mathbf{f}(\cdot)$, τότε παίρνουμε το σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, το οποίο καλείται *αυτόνομο*. Σε κάθε άλλη περίπτωση το σύστημα λέγεται *μη-αυτόνομο*. Να σημειωθεί ότι εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με αυτόνομα συστήματα.

Ύπαρξη, Μοναδικότητα και Επέκταση Λύσεων

Σε πρώτη φάση πρέπει να εγγυηθούμε την ύπαρξη λύσης στο σύστημα (B'.1).

Ορισμός 2.8 ([49]). Μία συνάρτηση $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, καλείται *Lipschitz* συνεχής ως προς τη μεταβλητή \mathbf{x} , εάν $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D \exists L \geq 0 : \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$

Θεώρημα 2.3 (Τοπικής Ύπαρξης και Μοναδικότητας [49]). Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, τμηματικά συνεχής ως προς τη μεταβλητή t και ικανοποιεί τη συνθήκη συνέχειας Lipschitz: $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Τότε $\exists \delta > 0$, ώστε η εξίσωση $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, να έχει μοναδική λύση $\mathbf{x} : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.4 (Καθολικής Ύπαρξης και Μοναδικότητας [49]). Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}(\cdot)$ του θεωρήματος 2.3 ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz για οποιοδήποτε ζεύγος $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε η λύση υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το διάστημα $[t_0, t_1]$.

Λήμμα 3 (Επέκτασης Λύσης [48], [50]). Έστω C συμπαγές υποσύνολο του συνόλου $D \subset \mathbb{R}^n$ και έστω τμηματικά συνεχής, ως προς t , συνάρτηση $\mathbf{f} : D \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz στο D . Αν η λύση $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ βρίσκεται εξολοκλήρου στο C , τότε δύναται να υπάρξει συνεχής λύση $\mathbf{x} : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ σχεδόν παντού διαφορίσιμη με

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

Η έννοια της λύσης που συναντάμε στα παραπάνω θεωρήματα επιδέχεται δύο ερμηνείες:

1. η λύση \mathbf{x} είναι διαφορίσιμη παντού και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (B'.1) σε όλο το χρονικό ορίζοντα.
2. η λύση \mathbf{x} είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s) ds$. Αυτή η ασθενέστερη μορφή, επιτρέπει μεγαλύτερο εύρος συναρτήσεων $\mathbf{f}(\cdot)$ για λύσεις και καλούνται λύσεις *Caratheodory*.

Λήμμα 4 (Barbalat). Έστω συνάρτηση $\phi(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

1. $\phi(\cdot)$ ομοιόμορφα συνεχής συναρτηση στο $[t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$
2. το $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \phi(s) ds$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο

Τότε ισχύει ότι $\phi(\cdot) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$

Παράρτημα **Γ'**

Παράγωγοι Δυναμικών

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζεται η εξαγωγή των παραγώγων των δυναμικών αποφυγής και διατήρησης. Παρατίθεται η ανάλυση για το κάθε ένα επιμέρους δυναμικό χωριστά.

Παραγωγή του δυναμικού Ψ

Από κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \frac{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\Gamma'.1)$$

Εξετάζουμε τους όρους που εμπλέκονται στην παραγωγή

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} &= \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \left(\frac{R/2}{R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2} \right) = \frac{-\frac{R}{2} \times (-2\|\mathbf{l}_{ij}\|)}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} = R \frac{\|\mathbf{l}_{ij}\|}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} \\ \bullet \frac{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{\partial \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} = \frac{\mathbf{l}_{ij}}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας πίσω στη $(\Gamma'.1)$ παίρνουμε ότι :

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{\partial \psi_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\Gamma'.2)$$

αφού $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ (ιδιότητα συμμετρίας σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα). Η συνολική παράγωγος γράφεται τελικά ως

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \psi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}_j} \frac{\partial \psi_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i}$$

και από την $(\Gamma'.2)$ καθώς και από το γεγονός ότι $j \in \mathcal{N}_i \iff i \in \mathcal{N}_j$, παίρνουμε

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (\Gamma'.3)$$

Ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και για το δυναμικό αποφυγής συγκρούσεων.

Παραγωγή του Δυναμικού Φ

Ξανά από κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \frac{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\Gamma'.4)$$

όπου ο δεύτερος όρος είναι ίδιος με τον αντίστοιχο της $(\Gamma'.1)$, ενώ ο πρώτος όρος έχει ως

εξής:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} = \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^4 = 4 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{-1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^2} \quad (\Gamma'.5)$$

Τελικά αντικαθιστώντας πίσω στην (Γ'.4) και με βάση την (Γ'.5) έχουμε:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = 4 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{-1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^2} \frac{\mathbf{l}_{ij}}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \mathbb{I}_m = -4 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \frac{\partial \varphi_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\Gamma'.6)$$

Η συνολική παράγωγος γράφεται πλέον σαν

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \varphi_{ij} = \frac{1}{8} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{1}{8} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \varphi_{ji}}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \stackrel{(\Gamma'.6)}{\implies} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} \stackrel{(\Gamma'.6)}{=} - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (\Gamma'.7)$$

Κατά τη θεμελίωση των προτεινόμενων νόμων ελέγχου θα χρειαστούμε και τις χρονικές παραγώγους των “δυνάμεων” που ασκούνται μεταξύ των agent, δηλαδή τις χρονικές παραγώγους των εξισώσεων (Γ'.3) και (Γ'.7). Οι χρονικές παραγώγοι των βαρών είναι:

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \frac{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|}{\partial t} = \frac{4R}{(R^2 - \|\mathbf{l}_{ij}\|^2)^3} \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \quad (\Gamma'.8)$$

Για το δυναμικό αποφυγής συγκρούσεων η χρονική παράγωγος αναλύεται με εντελώς αντίστοιχο τρόπο βάση του κανόνα της αλυσίδας. Ιδιαίτερη προσοχή απαιτεί ο υπολογισμός του πρώτου αντίστοιχου όρου:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} = \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \left\{ \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} \right\} = \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \left\{ \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \right\} \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} = 3 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^2 \frac{-1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^2} \times \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^3} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^3 \times \frac{-3\|\mathbf{l}_{ij}\|^2}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^6}$$

που τελικά με τη σειρά του δίνει

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} = -3 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^2 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^4} \left(\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon} \right) \quad (\Gamma'.9)$$

Σε κλειστή μορφή η χρονική παράγωγος των “βαρών” είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ij}}{dt} &= \frac{\partial m_{ij}}{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|} \frac{\partial \|\mathbf{l}_{ij}\|}{\partial t} = -3 \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^2 \frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^4} \left(\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon} \right) \left(\frac{\mathbf{l}_{ij}}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ \implies \frac{dm_{ij}}{dt} &= \frac{-3}{\|\mathbf{l}_{ij}\|^5} \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon}^2 \left(\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{l}_{ij}\|} \right]_{1/\epsilon} \right) (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \end{aligned} \quad (\Gamma'.10)$$

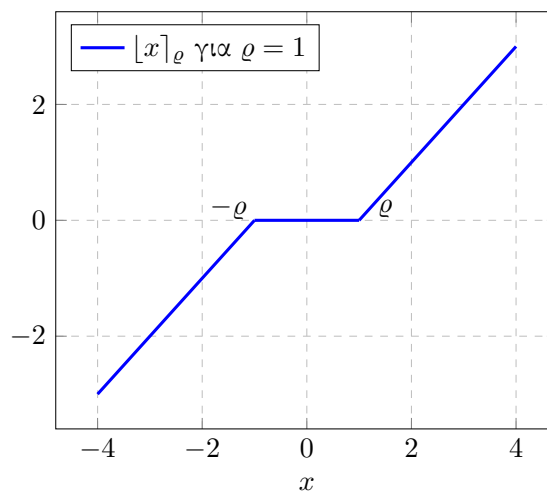
Παράρτημα Δ'

Συνάρτηση Dead Zone

Μια ιδιαίτερη συνάρτηση που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία είναι η λεγόμενη συνάρτηση dead-zone. Η συνάρτηση αυτή αυτή μοντελοποιεί πρακτικά τη μη-απόκριση ενός συστήματος για χαμηλές τιμές εισόδου. Φορμαλιστικά δίνεται απ'την:

$$[x]_{\varrho} = \begin{cases} x - \varrho & , x > \varrho \\ x + \varrho & , x > -\varrho \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \quad (\Delta'.1)$$

όπου ϱ θετική σταθερά. Η γραφική αναπαράσταση της $(\Delta'.1)$ είναι



Σχήμα $\Delta'.1$: *Dead-Zone Function*

Bibliography

- [1] Frank.L.Lewis, H. Zhang, K. Hengster-Movric, and A. Das, *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. Springer, 1 ed., 2014.
- [2] M. Andreasson, “Control of multi-agent systems with applications to distributed frequency control of power systems,” 2013.
- [3] “Networked control modeling, design, and applications.” <https://www.control.isy.liu.se/student/graduate/autonom/lin/LiU-Egerstedt.pdf>. Accessed: 07-09-2017.
- [4] H. Psillakis, “Adaptive control for swarm consensus: Geometric characterization of limiting configurations,” *in preperation*, 2017.
- [5] A. J. Michael M.Zavlanos and G. Pappas, “Flocking while preserving network connectivity,” *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, dec 2007.
- [6] N. A. Lynch, *Distributed Algorithms*. San Fransisco, CA: Morgan Kaufmann, 1997.
- [7] D. P. Bertsekas and J. Tsitsiklis, *Parallell and Distributed Computation*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [8] A. Okubo, “Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds,” *Advances in Biophysics*, vol. 22, pp. 1–94, nov 1986.
- [9] P. Wieland, *From Static to Dynamic Couplings in Consensus and Synchronization among Identical and Non-Identical Systems*. PhD thesis, Universität Stuttgart, sep 2010.
- [10] M. Meshabi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 1 ed., 2010.
- [11] J. Shamma, *Cooperative Control of Distributed Multi-Agent Systems*. Wiley, 2008.
- [12] D.Z.Zhao, C.W.Li, and J.Ren, “Speed synchronisation of multiple induction motors with adjacent cross-coupling control,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 4, pp. 119–128, 2010.
- [13] F. D. Hutu, S. Cauet, and P. Coirault, “Robust synchronization of different coupled oscillators:application to antenna arrays,” *Journal of The Franklin Institute*, vol. 346, no. 5, pp. 413–430, 2009.

- [14] Z. Li and Z. Duan, *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: A Consensus Region Approach*. CRC Press (Taylor & Francis Group), 1 ed., 2015.
- [15] W. Ren and Y. Cao, *Distributed Coordination of Multi-agent Networks (Emergent Problems, Models, and Issues)*. Springer, 1 ed., 2011.
- [16] W. Ren and R. W. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control: Theory and Applications*. Springer, 1 ed., 2008.
- [17] H. Psillakis, "Consensus in networks of agents with unknown high-frequency gain signs and switching topology," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 8, pp. 3993–3998, 2017.
- [18] R. W. Wei Ren and E. M. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 71–82, 2007.
- [19] J. F. Reza Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [20] W. R. Yongcan Cao, Wenwu Yu and G. Chen, "An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination," *arXiv:1207.3231v1*, 2012.
- [21] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.
- [22] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus protocols for networks of dynamic agents," *IEEE*, vol. 2, pp. 951–956, 2003.
- [23] L. Moreau, "Stability of multiagent systems with time-dependent communication links," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [24] W. Ren and R. W. Beard, "Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.
- [25] W. Ren and E. Atkins, "Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, aug 2005.
- [26] W. Ren, "Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations," *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 505–512, 2007.
- [27] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas, "Coordination of multiple autonomous vehicles," *In Proceedings of the 11th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003.
- [28] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus protocols in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.

- [29] W. Ren and R. W. Beard, "On consensus algorithms for double-integrator dynamics," *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, dec 2007.
- [30] G. Xie and L. Wang, "Consensus control for a class of networks of dynamic agents: Fixed topology," *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, dec 2005.
- [31] M. Ji and M. Egerstedt, "Distributed coordination control of multiagent systems while preserving connectedness," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 4, pp. 693–703, 2007.
- [32] A. G. M.M.Zavlanos, H.G.Tanner, "Hybrid control for connectivity preserving flocking," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 12, pp. 2869 – 2875, 2009.
- [33] X. . G. H.Su, "A connectivity-preserving flocking algorithm for multi-agent systems based only on position measurements," *International Journal of Control*, vol. 82, no. 7, pp. 1334–1343, 2009.
- [34] S. Li and X. Wang, "Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple auvs," *Automatica*, vol. 49, no. 11, pp. 3359–3367, 2013.
- [35] P. P.Jiang and R.Unbehauen, "Uncalibrated visual servo control with neural network," *Robotica*, vol. 20, no. 2, pp. 149–158, 2002.
- [36] S. J.Du, C.Guo and Y.Zhao, "Adaptive autopilot design of time-varying uncertain ships with completely unknown control coefficient," *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 32, no. 2, pp. 346 – 352, 2007.
- [37] J. C. Rok Klobuear and R. Safaric, "Uncalibrated visual servo control with neural network," *10th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*, march 2008.
- [38] R. D. Nussbaum, "Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control," *Systems& Control Letters*, vol. 3, pp. 243–246, nov 1983.
- [39] P. Junmin and Y. Xudong, "Cooperative control of multiple heterogeneous agents with unknown high-frequency-gain signs," *Systems& Control Letters*, vol. 68, no. 1, pp. 51–56, 2014.
- [40] Y. Tang, "Output consensus of nonlinear multi-agent systems with unknown control directions," *Kybernetika*, vol. 51, no. 2, pp. 335–346, 2015.
- [41] W. C. W.Chen, X.Li, "Adaptive consensus of multi-agent systems with unknown identical control directions based on a novel nussbaum-type function," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 7, pp. 1887 – 1892, 2014.
- [42] Y. Xudong and J. Jingping, "Adaptive nonlinear design without *a Priori* knowledge of control directions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 11, pp. 1617–1621, 1998.

- [43] L. G.Wang, Ch.Wang and Z.Zhang, “Designing distributed consensus protocols for second-order nonlinear multi-agents with unknown control directions under directed graphs,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 354, no. 1, pp. 571–592, 2016.
- [44] N. R.Ortega, A.Astolfi, “Nonlinear pi control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation,” *Systems & Control Letters*, vol. 47, no. 3, pp. 259–278, 2002.
- [45] H. Psillakis, “Integrator backstepping with the nonlinear pi method: An integral equation approach,” *European Journal of Control*, vol. 28, pp. 49–55, 2016.
- [46] J. R.Lozano and S.Mondie, “Model reference adaptive control without a priori knowledge of the high frequency gain,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 35, no. 1, 1990.
- [47] H.E.Psillakis, “Pi consensus error transformation for adaptive cooperative control of nonlinear multi-agent systems,” *arXiv:1803.09362*, 2018.
- [48] M. W.Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York 1974.
- [49] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3 ed., 2002.
- [50] “Ece 528: Analysis of nonlinear systems.” <http://liberzon.csl.illinois.edu/teaching/james-notes.pdf>. Accessed: 07-09-2017.

