



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΤΙΤΛΟ

“Κινηματική Ανάλυση του Ρομποτικού βραχίονα KUKA KR 15/1”

“Kinematic Analysis of KUKA KR 15/1 robotic manipulator”

Όνοματεπώνυμο: Μαραγκουδάκης Θεόδωρος

Αριθμός Μητρώου: 02112405

Επιβλέπων Καθηγητής: Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2017

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	5
1.1. Περιγραφή και Σημασία του προβλήματος	5
1.2. Μεθοδολογία	5
1.3. Βασική Δομή της Διπλωματικής Εργασίας.....	7
2. Περιγραφή του Ρομπότ.....	8
2.1. Γενικά στοιχεία.....	8
2.2. Τεχνικά Χαρακτηριστικά.....	9
3. Κινηματική του Ρομποτικού Βραχίονα.....	12
3.1. Εισαγωγή της Κινηματικής	12
3.2. Ευθεία Κινηματική	13
3.2.1. Συμβαση Denavit - Hartenberg	14
3.3. Αντίστροφη Κινηματική.....	19
3.4. Έλεγχος Αποτελεσμάτων	28
3.2. Εργαλεία	30
4. Ιακωβιανή του Ρομποτικού Βραχίονα	32
4.1. Ευθεία Ιακωβιανή	32
4.2. Κινηματικές Ιδιομορφίες.....	35
5. Συμπεράσματα-Επόμενα Βήματα.....	42
Βιβλιογραφία.....	43
Appendix	44

1. Εισαγωγή

1.1. Περιγραφή και Σημασία του Προβλήματος

Η εργασία που ακολουθεί περιγράφει την κινηματική ανάλυση του ρομποτικού βραχίονα της KUKA, KR 15/1. Ο ρομποτικός αυτός βραχίονας κατατάσσεται στην κατηγορία των βιομηχανικών ρομπότ και έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η κινηματική του ανάλυση, τόσο η ευθεία όσο και η ανάστροφη. Επιπλέον σημαντικός ήταν και ο υπολογισμός της Ιακωβιανής.

Οι βιομηχανικοί ρομποτικοί βραχίονες είναι ευρέως χρησιμοποιούμενοι στην βιομηχανία. Για να μπορέσει ένα ρομπότ να επιτελέσει τις εργασίες για τις οποίες προορίζεται, καθοριστικός παράγοντας είναι ο υπολογισμός της κινηματικής του ανάλυσης, με μεγάλη ακρίβεια, για τον περιορισμό λαθών. Για να μπορέσει το εκάστοτε εργαλείο στην άκρη του ρομποτικού βραχίονα να φτάσει σε ένα σημείο στον χώρο με συγκεκριμένο προσανατολισμό, καθίσταται αναγκαίος ο υπολογισμός της αντίστροφης κινηματικής, για να γνωρίζει το ρομπότ πως πρέπει να κινηθεί η κάθε του άρθρωση. Επιπλέον, μείζονος σημασίας είναι και ο υπολογισμός της Ιακωβιανής, ώστε να βρεθούν οι κινηματικές ιδιομορφίες του ρομποτικού βραχίονα (singularities), αλλά και μία άλλη έκφραση του ανάστροφου κινηματικού προβλήματος μέσω αυτής.

Οι ιδιομορφίες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες τις συνοριακές και τις εσωτερικές. Οι συνοριακές είναι αυτές οι οποίες εμφανίζονται όταν ο ρομποτικός βραχίονας εκτείνεται ή επαναφέρεται. Οι ιδιομορφίες αυτές μπορούν να αποφευχθούν αν ρομποτικός βραχίονας δεν φτάνει τα άκρα του χώρου εργασίας του. Από την άλλη, οι εσωτερικές ιδιομορφίες, είναι ιδιομορφίες οι οποίες εμφανίζονται εντός του χώρου εργασίας του ρομπότ και προκαλούνται από την ευθυγράμμιση δύο ή περισσότερων αξόνων του ρομπότ, ή από ειδικές διατάξεις του τελικού σημείου δράσης. Απαραίτητος θεωρείται λοιπόν ο προσδιορισμός των ιδιομορφιών για την αποφυγή ανεπιθύμητων καταστάσεων.

1.2. Μεθοδολογία

Αρχικά το ρομπότ δεν είχε τοποθετηθεί στην βάση του στο εργαστήριο οπότε οι πρώτες κινήσεις ήταν κυρίως θεωρητικές. Αφού αποκτήθηκε η απαραίτητη γνώση σχετικά με την ευθεία κινηματική και την μεθοδολογία Denavit – Hartenberg, τοποθετήθηκαν εικονικά τα συστήματα συντεταγμένων πάνω στο ρομπότ και οι άξονες περιστροφής. Στην συνέχεια προσδιορίστηκαν οι παράμετροι Denavit – Hartenberg και με την υλοποίηση αλγορίθμου σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab υπολογίστηκαν οι ομογενείς μετασχηματισμοί κάθε άρθρωσης αλλά και ο τελικός ομογενής μετασχηματισμός που συνέδεε το τελικό σημείο δράσης με το σύστημα συντεταγμένων της βάσης.

Μετά τον υπολογισμό της ευθείας κινηματικής επόμενο βήμα ήταν αυτός της ανάστροφης. Για μπορέσει να υπολογιστεί η ανάστροφη κινηματική έπρεπε να τα πιστοποιηθούν τα αποτελέσματα της ευθείας. Αφού ο ρομποτικός βραχίονας είχε τοποθετηθεί στην βάση του στο εργαστήριο και πλέον ήταν λειτουργικός, τοποθετήθηκε σε πάρα πολλές θέσεις του χώρου εργασίας του. Καταγράφηκαν οι τιμές του διανύσματος που συνέδεε το σύστημα συντεταγμένων της βάσης με το τελικό σημείο δράσης αλλά και ο προσανατολισμός του, ο οποίος δινόταν από το ρομπότ μέσω των γωνιών Euler για περιστροφή κατά z , όπως επίσης και οι γωνίες που είχαν περιστραφεί οι αρθρώσεις του. Με δεδομένα τις γωνίες που είχαν περιστραφεί οι αρθρώσεις, στο πρόγραμμα που είχε φτιαχτεί σε Matlab, ελέγχθηκαν οι τιμές για το διάνυσμα του τελικού σημείου ως προς τη βάση αλλά και του προσανατολισμού. Το αποτέλεσμα ήταν να υπάρχει πολύ μικρή απόκλιση και η ευθεία κινηματική θεωρήθηκε σωστή.

Για τον υπολογισμό της αντίστροφης κινηματικής, σημαντικό στοιχείο ήταν η τομή των τελευταίων τριών αξόνων σε ένα κοινό σημείο. Αυτό κατατάσσει τον ρομποτικό βραχίονα στην κατηγορία αυτών με σφαιρικό καρπό. Από την στιγμή που ο βραχίονας έχει σφαιρικό καρπό, μπορεί να γίνει αποσύζευξη των τελευταίων τριών αξόνων περιστροφής στο αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα και να λυθεί σε δύο μέρη, πρώτα αυτό των τριών πρώτων αξόνων και στην συνέχεια αυτό των τελευταίων τριών, δηλαδή του καρπού.

Μετά τον υπολογισμό της αναλυτικής λύσης του ανάστροφου κινηματικού προβλήματος, επόμενο βήμα ήταν η επαλήθευση του. Δημιουργήθηκε ένα πρόγραμμα που έπαιρνε τυχαίες τιμές γωνιών στο εύρος που ορίζει ο κατασκευαστής, πραγματοποιούσε την ευθεία κινηματική και έδινε δεδομένα στο πρόγραμμα της αντίστροφης το διάνυσμα βάσης-τελικού σημείου δράσης αλλά και τον πίνακα προσανατολισμού. Ο αλγόριθμος του ανάστροφου κινηματικού προβλήματος παράγαγε 8 σετ λύσεων και κάθε φορά ελεγχόταν αν κάποιο από αυτά συνέπιπτε με τις αρχικές τυχαίες γωνίες που δόθηκαν σαν δεδομένα. Απαραίτητο δεδομένο για τον υπολογισμό των γωνιών αλλά και την επιλογή τους ήταν και οι δυαδικές ακολουθίες που δίνει η KUKA για κάθε θέση, Status και Turn Bits. Αφού ο αλγόριθμος έτρεξε για μία μεγάλη σειρά επαναλήψεων το αποτέλεσμα ήταν η ανάστροφη κινηματική να δίνει πάντα ένα σετ γωνιών ίδιο με αυτό των τυχαίων αρχικών οπότε και θεωρήθηκε σωστή.

Επόμενο βήμα ήταν ο υπολογισμός της Ιακωβιανής. Με δεδομένες τις γωνίες περιστροφής αλλά και το ευθύ κινηματικό πρόβλημα προσδιορίστηκαν όλα τα απαραίτητα διανύσματα αλλά και οι πίνακες περιστροφής για τον υπολογισμό της. Από την ορίζουσα της Ιακωβιανής, ήμασταν σε θέση να υπολογίσουμε τις κινηματικές ιδιομορφίες του ρομποτικού βραχίονα. Λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων, η Ιακωβιανή μετασχηματίστηκε ως προς το σημείο τομής των τελευταίων τριών αξόνων περιστροφής, και η ορίζουσα της τέθηκε ίση με μηδέν για τον υπολογισμό των κινηματικών ιδιομορφιών (singularities).

1.3. Βασική Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Κεφάλαιο 2 : Περιγραφή του Ρομπότ

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύεται το ρομπότ. Περιγράφονται οι λειτουργίες του αλλά και τα τεχνικά του χαρακτηριστικά. Δίνονται πληροφορίες σχετικά με τις διαστάσεις του, το εύρος των γωνιών που μπορούν να στρίψουν οι αρθρώσεις του και τέλος τοποθετούνται τα συστήματα συντεταγμένων πάνω στους άξονες περιστροφής.

Κεφάλαιο 3 : Κινηματική του Ρομποτικού βραχίονα

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται η επίλυση του ευθέως και ανάστροφου κινηματικού προβλήματος. Αρχικά περιγράφεται η μεθοδολογία Denavit – Hartenberg, στην συνέχεια προσαρμόζεται πάνω στον ρομποτικό βραχίονα που μελετήσαμε και έπειτα αναλύεται η μεθοδολογία όπως και οι σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του ανάστροφου κινηματικού προβλήματος. Στην συνέχεια, τα αποτελέσματα πιστοποιούνται και τέλος γίνεται μεταφορά του συστήματος συντεταγμένων από την βάση στο τελικό σημείο δράσης δύο πιθανών εργαλείων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στον ρομποτικό βραχίονα.

Κεφάλαιο 4 : Ιακωβιανή του Ρομποτικού βραχίονα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η Ιακωβιανή του ρομποτικού βραχίονα. Με δεδομένο το ευθύ κινηματικό πρόβλημα αλλά και των πινάκων ομογενούς προσανατολισμού, υπολογίζονται τα απαραίτητα διανύσματα αλλά και οι περιστροφές και προσδιορίζεται η Ιακωβιανή. Με δεδομένη την Ιακωβιανή, την προσαρμόζουμε ως προς το σημείο τομής των τελευταίων τριών αξόνων του ρομποτικού βραχίονα για διευκόλυνση των πράξεων, θέτουμε την ορίζουσα της ίση με μηδέν και υπολογίζουμε τις κινηματικές ιδιομορφίες (singularities).

Κεφάλαιο 5 : Συμπεράσματα – Επόμενα Βήματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν από όλη την πορεία αυτής της διπλωματικής και προσδιορίζονται τα επόμενα βήματα τα οποία μπορούν να υλοποιηθούν χρησιμοποιώντας την σαν βάση.

Appendix

Στο Appendix παρατίθενται οι αλγόριθμοι σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab, οι οποίοι φτιάχτηκαν για την επίλυση των προβλημάτων αλλά και οδηγίες για την χρησιμοποίησή τους.

2. Περιγραφή του Ρομπότ

2.1 Γενικά Στοιχεία

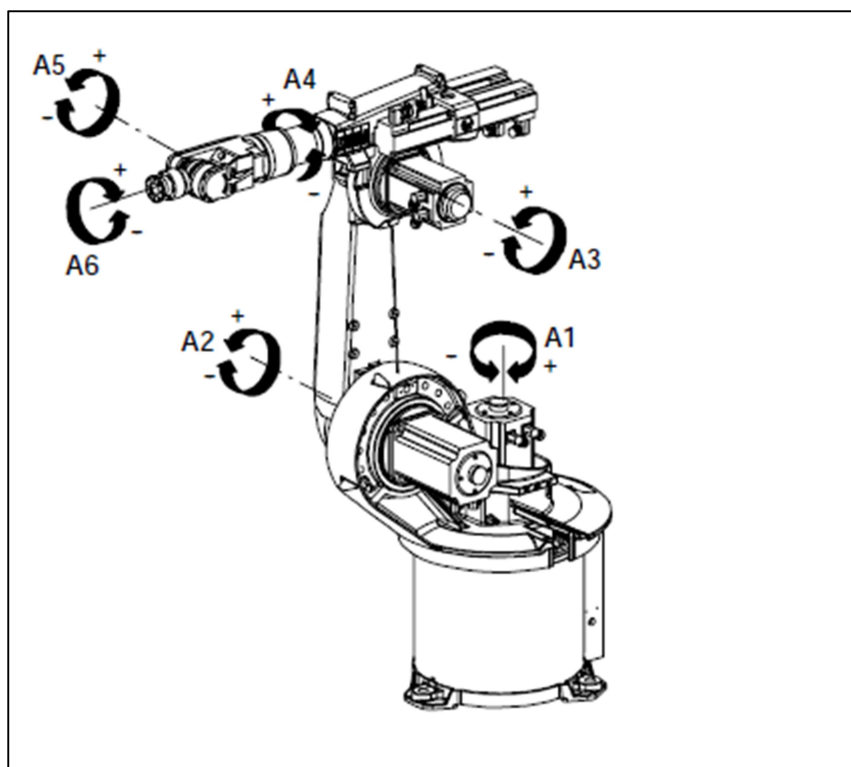
Το ρομπότ το οποίο μελετήθηκε είναι το KR 15/1 της εταιρίας KUKA (εικόνα 2.1.). Το ρομπότ αυτό, έχει μια ανθρωπομορφική δομή έξι περιστροφικών αρθρώσεων με σφαιρικό καρπό. Το KR 15/1 είναι ένας βιομηχανικός ρομποτικός βραχίονας ο οποίος μπορεί να τοποθετηθεί τόσο στο πάτωμα, όσο και στο ταβάνι. Οι εφαρμογές για τις οποίες έχει κατασκευαστεί είναι συναρμολόγηση, τοποθέτηση, τεχνολογικές κατεργασίες, MIG/MAG συγκολλήσεις, εφαρμογή συντηρητικών-στεγανωτικών-συγκολλητικών και τέλος συγκόλληση με δέσμη laser. Το μέγιστο ωφέλιμο φορτίο στο καρπό του ρομπότ είναι 15kg, ενώ πρόσθετο φορτίο 10kg στον βραχίονα μπορεί να κινηθεί με μέγιστη ταχύτητα, ακόμη και όταν ο βραχίονας είναι πλήρως εκτεταμένος.



Εικόνα 2.1. Ρομποτικός Βραχίονας KUKA KR 15/1 Τοποθετημένος στο Εργαστήριο

2.2. Τεχνικά Χαρακτηριστικά

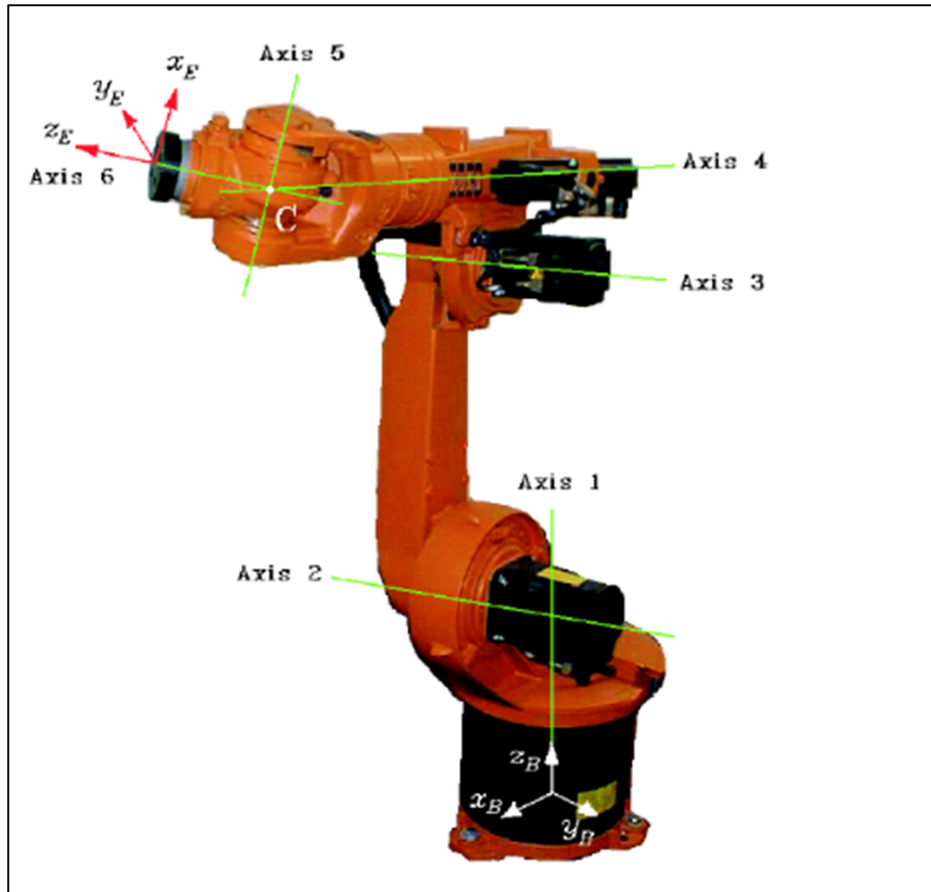
Το ρομπότ αποτελείται από ένα σταθερό πλαίσιο βάσης, πάνω στο οποίο η περιστρεφόμενη στήλη περιστρέφεται γύρω από έναν κάθετο άξονα, μαζί με τον βραχίονα σύνδεσης, τον βραχίονα και τον σφαιρικό καρπό. Ο καρπός αποτελείται από μια φλάντζα που χρησιμεύει στην προσάρτηση εργαλείων όπως αρπάγες και εργαλεία συγκόλλησης. Οι φορές περιστροφής των αρθρώσεων του ρομπότ φαίνονται στο (σχήμα 2.1.), στο οποίο οι άξονες A1-A3 αποτελούν τους κύριους άξονες και οι άξονες A4-A6 τους άξονες του καρπού.



Σχήμα 2.1. Άξονες Περιστροφής Ρομποτικού Βραχίονα – θετικές φορές

Οι άξονες του ρομπότ φαίνονται επίσης στο (σχήμα 2.2.). Όπως παρατηρούμε οι τρεις τελευταίοι άξονες τέμνονται σε ένα σημείο, το σημείο C. Ο καρπός του ρομποτικού βραχίονα, ονομάζεται σφαιρικός διότι όχι μόνο οι τρεις τελευταίοι άξονες τέμνονται σε ένα κοινό σημείο, αλλά και όταν αυτό το σημείο είναι ακίνητο, όλα τα υπόλοιπα σημεία του καρπού κινούνται σε σφαιρικές τροχιές γύρω από το σημείο τομής C.

Στο (σχήμα 2.2.) πέρα από τους άξονες περιστροφής του ρομπότ, παρατηρούμε επίσης και τα συστήματα συντεταγμένων της βάσης {B} αλλά και του end effector {EE}.

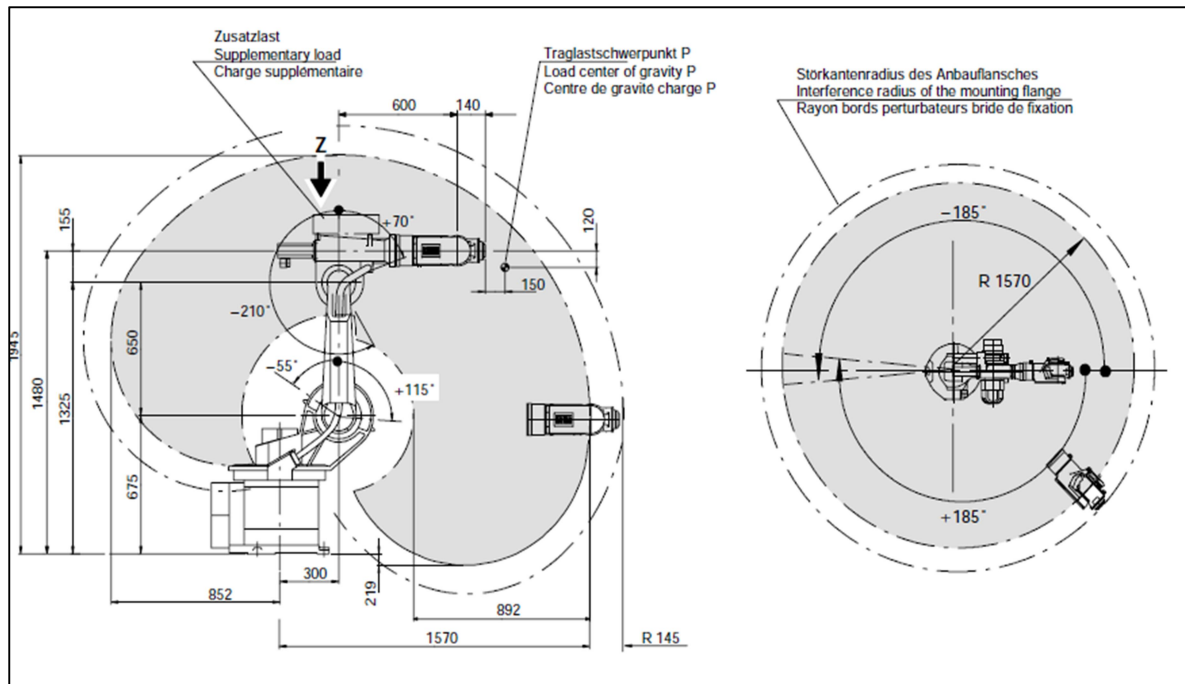


Σχήμα 2.2. Άξονες Περιστροφής και Συστήματα Συντεταγμένων Βάσης (B) και End Effector (E)

Στον (πίνακα 2.1.) παρουσιάζονται το εύρος γωνίας κάθε άξονα περιστροφής αλλά και η ταχύτητα περιστροφής. Η επαναληψιμότητα του KR 15/1 είναι $\pm 0.1\text{mm}$ και το βάρος του ίσο με 235kg. Το σύστημα οδήγησης είναι ηλεκτρομηχανικό με AC σερβοκινητήρες χωρίς ψήκτες. Οι διαστάσεις του ρομπότ καθώς και ο χώρος εργασίας παρουσιάζονται στο (σχήμα 2.3.).

Άξονας Περιστροφής	Εύρος Γωνίας	Ταχύτητα
1	$\pm 185^\circ$	152 °/s
2	+115° έως -55°	152 °/s
3	+70° έως -210°	152 °/s
4	$\pm 350^\circ$	284 °/s
5	$\pm 135^\circ$	293 °/s
6	$\pm 350^\circ$	604 °/s

Πίνακας 2.1. Εύρος γωνίας και ταχύτητας



Σχήμα 2.3. Διαστάσεις και Χώρος Εργασίας Ρομποτικού Βραχίονα KR 15/1

3. Κινηματική του Ρομποτικού Βραχίονα

3.1. Εισαγωγή της κινηματικής

Σκοπός της κινηματικής είναι ο προσδιορισμός της θέσης και του προσανατολισμού της άκρης του ρομποτικού βραχίονα συναρτήσει της βάσης και των μελών του αλλά και αντίστροφα, δηλαδή γνωρίζοντας την θέση και τον προσανατολισμό του τελικού σημείου να βρεθούν οι περιστροφές των αρθρώσεων. Αν θεωρήσουμε τον ρομποτικό βραχίονα σαν μία αλυσίδα στερεών σωμάτων (links) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω περιστροφικών αρθρώσεων (joints), η κίνηση αυτής της αλυσίδας προκύπτει μέσω της σύνθεσης των κινήσεων κάθε μέλους ως προς το προηγούμενο στοιχείο. Το ένα άκρο της αλυσίδας παραμένει ακινητοποιημένο στην βάση, ενώ στο άλλο άκρο στηρίζεται ένα τελικό στοιχείο δράσης (end-effector) όπως (λαβή, εργαλείο) και χειρίζεται αντικείμενα στον χώρο. Οι αλυσίδες χωρίζονται σε ανοιχτές και κλειστές. Αν για την αλυσίδα υπάρχει μόνο μία ακολουθία που να συνδέει τα δύο άκρα της, η αλυσίδα καλείται ανοιχτή, αλλιώς αν σχηματίζεται βρόχος τότε η ακολουθία καλείται κλειστή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ρομποτικός βραχίονας KUKA KR 15/1 μπορεί να παρασταθεί από μία ανοιχτή αλυσίδα. Η μηχανική δομή του ρομποτικού βραχίονα αποτελείται από έναν αριθμό βαθμών ελευθερίας που προσδιορίζουν κατά μοναδικό τρόπο την θέση και τον προσανατολισμό του. Κάθε βαθμός ελευθερίας αντιστοιχεί σε μία δυνατότητα κίνησης της άρθρωσης και άρα αποτελεί μία μεταβλητή άρθρωσης. Στον δικό μας ρομποτικό βραχίονα οι βαθμοί ελευθερίας είναι 6 και άρα οι μεταβλητές των αρθρώσεων είναι επίσης 6. Σκοπός της ευθείας κινηματικής είναι ο υπολογισμός της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης συναρτήσει των μεταβλητών των αρθρώσεων. Αντιθέτως σκοπός της αντίστροφης κινηματικής είναι, δοθέντος της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης, ο υπολογισμός των μεταβλητών των αρθρώσεων.

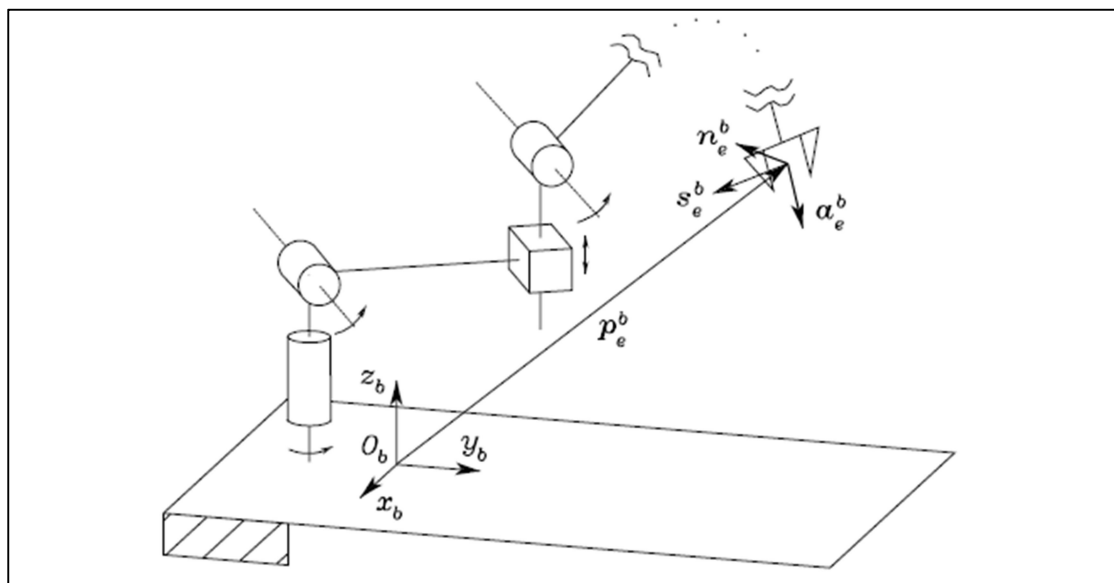
3.2. Ευθεία Κινηματική

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή σκοπός της ευθείας κινηματικής είναι ο προσδιορισμός της θέσης και του προσανατολισμού του τελικού στοιχείου δράσης συναρτήσει των μεταβλητών των αρθρώσεων. Ο τρόπος με τον οποίο υπάρχει σε ένα χώρο ένα σώμα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης της αρχής και τα μοναδιαία διανύσματα ενός σωματόδετου συστήματος.

Αν το σύστημα αναφοράς είναι το $O_b-x_b y_b z_b$ όπως φαίνεται στο (σχήμα 3.2.1.) η ευθεία κινηματική θα δίνεται από το μητρώο ομογενούς μετασχηματισμού

$$T_e^b = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Στο οποίο το \mathbf{q} είναι το $(n \times 1)$ διάνυσμα των μεταβλητών των αρθρώσεων, τα \mathbf{n}_e , \mathbf{s}_e , \mathbf{a}_e είναι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων το οποίο βρίσκεται στο τελικό σημείο δράσης και το \mathbf{p}_e είναι το διάνυσμα θέσης της αρχής του τελικού σωματόδετου συστήματος συντεταγμένων ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων της βάσης.



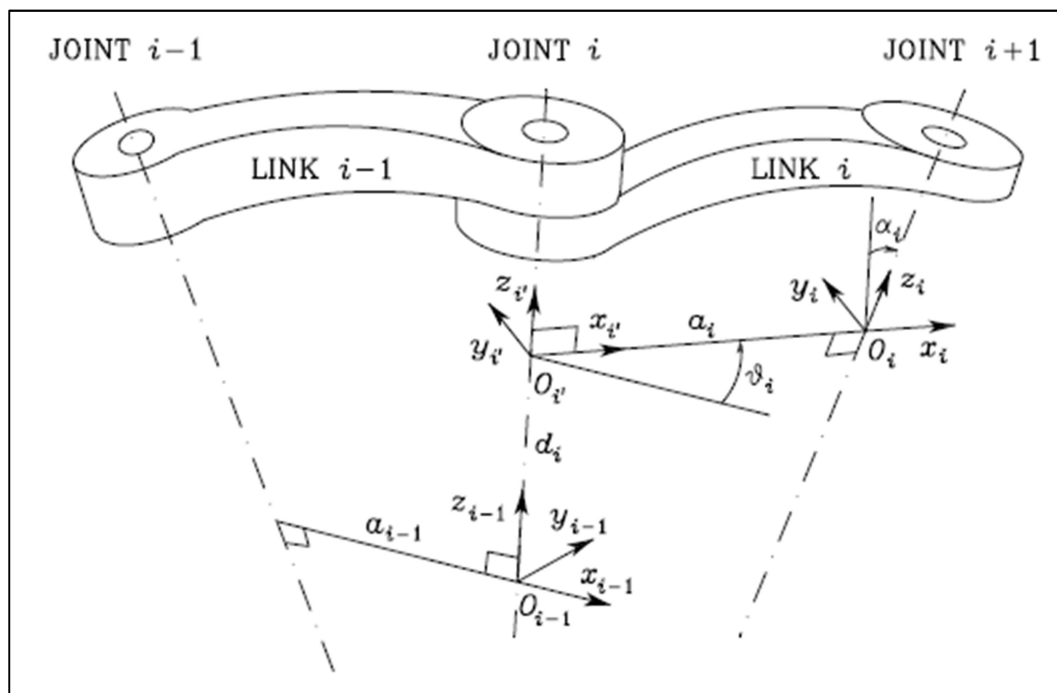
Σχήμα 3.2.1. Θέση και Προσανατολισμός του Τελικού σημείου δράσης ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης

Στην περίπτωση όπου η κινηματική αλυσίδα είναι ανοιχτή η κάθε άρθρωση συνδέει δύο διαδοχικά μέλη. Λόγω αυτού για τον υπολογισμό της κινηματικής της αλυσίδας πρέπει πρώτα να βρεθεί η κινηματική σχέση όλων των διαδοχικών μελών και στην συνέχεια με τρόπο αναδρομικό να βρεθεί ολόκληρη η κινηματική. Ο μετασχηματισμός τότε των συντεταγμένων για την περιγραφή της θέσης και του προσανατολισμού από το σύστημα της βάσης μέχρι το σύστημα του τελικού σημείο δράσης δίνεται από την σχέση

$$T_n^0(q) = A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) \dots A_n^{n-1}(q_n) \quad (3.2)$$

3.2.1. Σύμβαση Denavit – Hartenberg

Η σύμβαση Denavit – Hartenberg είναι μία μέθοδος υπολογισμού της ευθείας κινηματικής για ανοιχτές αλυσίδες. Η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση δύο συντεταγμένων συστημάτων προσαρτημένων στα δύο μέλη και στον υπολογισμό των μετασχηματισμών συντεταγμένων μεταξύ αυτών. Με βάση το (σχήμα 3.2.2.) αναλύεται η μεθοδολογία που ακολουθείτε.



Σχήμα 3.2.2. Κινηματικές Παράμετροι της μεθοδολογίας Denavit – Hartenberg

- Αρχικά επιλέγεται ο άξονας z_i κατά μήκος του άξονα της άρθρωσης $i+1$
- Στην συνέχεια εντοπίζεται η αρχή O_i η οποία βρίσκεται στην τομή του άξονα z_i με την κοινή κάθετο των αξόνων z_{i-1} και z_i . Επίσης εντοπίζεται το σημείο O_i' στην τομή της κοινής καθέτου με τον άξονα z_{i-1} .
- Στην συνέχεια τοποθετείται ο άξονας x_i κατά μήκος της κοινής καθέτου των αξόνων z_{i-1} και z_i με φορά από την άρθρωση i στην άρθρωση $i+1$
- Τέλος επιλέγεται ο άξονας y_i με τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο

Υπάρχουν όμως κάποιες περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει μονοσήμαντος ορισμός του συντεταγμένου συστήματος του μέλους. Οι περιπτώσεις αυτές είναι οι εξής :

- Για το πρώτο σύστημα, το σύστημα 0 καθορίζεται μόνο η φορά του z_0 . Σε αυτήν την περίπτωση ορίζονται αυθαίρετα τα O_0 και x_0 .
- Για το τελικό σύστημα, το σύστημα n , επειδή δεν υπάρχει άρθρωση μετά από αυτό ο άξονας z_n δεν καθορίζεται με τρόπο μοναδικό ενώ ο άξονας x_n πρέπει να είναι κάθετος στον άξονα z_{n-1} .
- Όταν δύο διαδοχικοί άξονες είναι παράλληλοι, η κοινή κάθετος δεν ορίζεται μονοσήμαντα.
- Όταν δύο διαδοχικοί άξονες τέμνονται, η φορά του x_i είναι αυθαίρετη.
- Όταν η άρθρωση i είναι πρισματική, η φορά του z_i είναι αυθαίρετη.

Αφού τοποθετηθούν τα συστήματα συντεταγμένων κάθε μέλους, η θέση αλλά και ο προσανατολισμός του συστήματος i ως προς το σύστημα $i-1$ καθορίζονται πλήρως από τις παρακάτω παραμέτρους :

- a_i όπου είναι η απόσταση μεταξύ O_i και O_i'
- d_i όπου είναι η συντεταγμένη του O_i' κατά μήκος του z_{i-1}
- α_i όπου είναι η γωνία μεταξύ των αξόνων z_{i-1} και z_i περί τον άξονα x_i με θετική φορά την αριστερόστροφη
- θ_i όπου είναι η γωνία των αξόνων x_{i-1} και x_i περί τον άξονα z_{i-1} με θετική φορά την αριστερόστροφη

Από τις παραπάνω παραμέτρους δύο (α_i και a_i) παραμένουν σταθερές και εξαρτώνται μόνο από την γεωμετρία της σύνδεσης των διαδοχικών αρθρώσεων. Από τις άλλες δύο παραμέτρους μόνο μία είναι μεταβλητή και εξαρτάται από το είδος της άρθρωσης, δηλαδή αν η άρθρωση είναι στροφική η μεταβλητή είναι η θ_i ενώ αν η άρθρωση είναι πρισματική η μεταβλητή είναι η d_i .

Τα βήματα που ακολουθούμε για να εκφράσουμε το σύστημα συντεταγμένων i ως προς το $i-1$ είναι τα εξής :

- Αρχικά επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων ευθυγραμμισμένο με το σύστημα $i-1$
- Στην συνέχεια μεταθέτουμε το σύστημα που επιλέξαμε κατά d_i πάνω στον άξονα z_{i-1} και το στρέφουμε κατά γωνία θ_i περί τον άξονα z_{i-1} . Το νέο σύστημα που προκύπτει είναι το σύστημα i' και περιγράφεται από το παρακάτω μητρώο ομογενούς μετασχηματισμού

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

- Στην συνέχεια μεταθέτουμε το σύστημα i' κατά a_i πάνω στον άξονα x_i , και στο στρέφουμε κατά γωνία α_i περί τον άξονα x_i . Μετά από αυτήν την μετάθεση προκύπτει το σύστημα συντεταγμένων i το οποίο περιγράφεται από τον ομογενή μετασχηματισμό

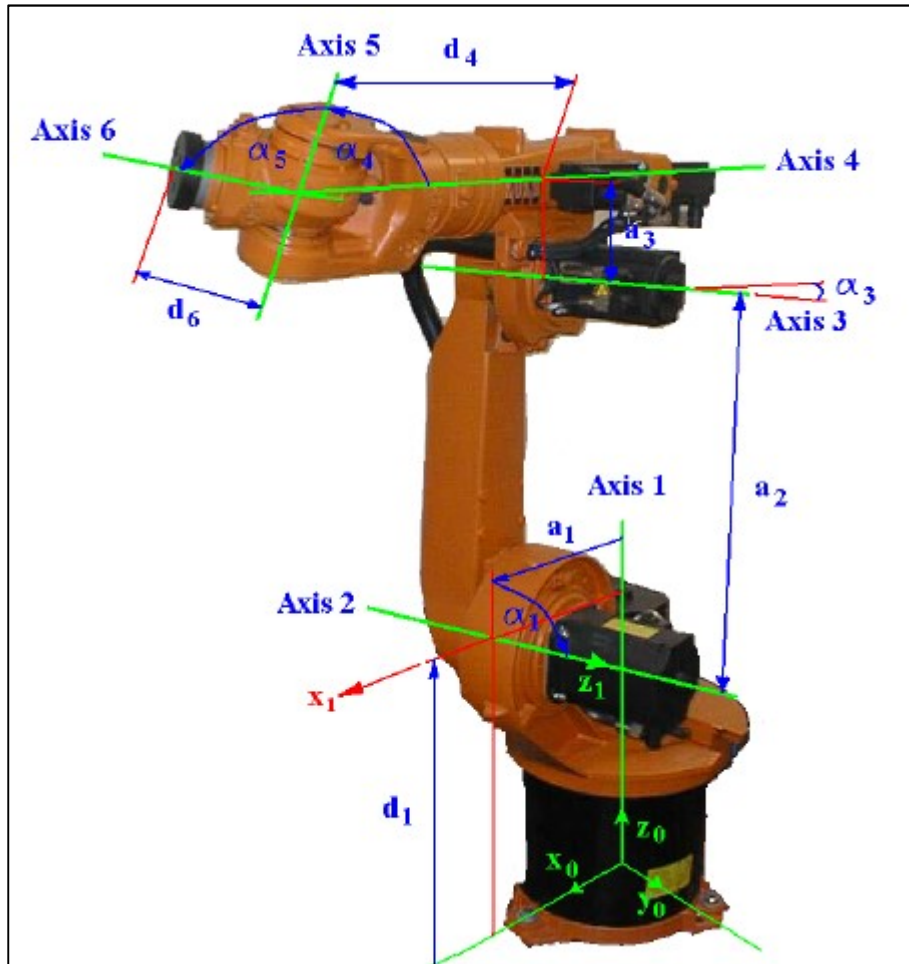
$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- Άρα ο ολικός μετασχηματισμός από το σύστημα συντεταγμένων $i-1$ στο σύστημα συντεταγμένων i προκύπτει με εκ δεξιών πολλαπλασιασμό των δύο μετασχηματισμών. Από τις σχέσεις (3.3) και (3.4) έχουμε

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_i^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Όπου στους παραπάνω τύπους για λόγους ευκολίας συμβολίζεται με c το $\cos()$ της γωνίας και με s το $\sin()$ της γωνίας.

Με εφαρμογή της παραπάνω μεθοδολογίας θα υπολογίσουμε την ευθεία κινηματική του ρομποτικού βραχίονα KUKA KR 15/1. Στο (σχήμα 3.2.3.) φαίνονται οι άξονες τοποθετημένοι πάνω στο ρομπότ ενώ στον (πίνακα 3.2.1) φαίνονται οι παράμετροι που υπολογίζονται με την βοήθεια των διαστάσεων του ρομπότ (σχήμα 2.3.) και παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.2.3. Άξονες και παράμετροι για την μεθοδολογία Denavit – Hartenberg

Μέλος	a_i (m)	α_i (°)	d_i (m)	θ_i (°)
1	0.300	-90	0.675	$-\theta_1$
2	0.650	180	0	θ_2
3	-0.155	90	0	$-\theta_3 - 90$
4	0	-90	-0.600	θ_4
5	0	90	0	$-\theta_5$
6	0	180	-0.140	θ_6

Πίνακας 3.2.1. Παράμετροι Denavit - Hartenberg

Οι διορθώσεις των γωνιών θ_i πραγματοποιήθηκαν για να είναι σε αρμονία με την θετική περιστροφή που έχει ορίσει η ΚΥΚΑ για τις αρθρώσεις όπως επίσης και για την θέση μηδέν (0) που αναγνωρίζει το ρομπότ.

Με γνωστές τις παραμέτρους Denavit – Hardenberg και εφαρμογή της σχέσης (3.5) μπορούμε να υπολογίσουμε τα μητρώα ομογενών μετασχηματισμών για τις επιμέρους αρθρώσεις και αυτά παρουσιάζονται παρακάτω :

$$A_1^0(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0.3\cos(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & -0.3\sin(\theta_1) \\ 0 & -1 & 0 & 0.675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$A_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 & 0.65\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 & 0.65\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$A_3^2(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3 + 90) & 0 & -\sin(\theta_3 + 90) & -0.155\cos(\theta_3 + 90) \\ -\sin(\theta_3 + 90) & 0 & -\cos(\theta_3 + 90) & 0.155\sin(\theta_3 + 90) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$A_4^3(\theta_4) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & -\sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$A_5^4(\theta_5) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & -\sin(\theta_5) & 0 \\ -\sin(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$A_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & \sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Με γνωστούς όλους τους ομογενείς μετασχηματισμούς μπορεί να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός συντεταγμένων που περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων {6} ως προς το σύστημα της βάσης {0} και προκύπτει ίσος με :

$$T_6^0(q) = A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(\theta_3) A_4^3(\theta_4) A_5^4(\theta_5) A_6^5(\theta_6) \quad (3.12)$$

Από τις σχέσεις (3.6), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) και (3.12) υπολογίζεται η σχέση της ευθείας κινηματικής η οποία λόγω της πολυπλοκότητας της παρατίθεται στο appendix.

3.3. Αντίστροφη Κινηματική

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω σκοπός της αντίστροφης κινηματικής είναι δοθέντος της θέσης και του προσανατολισμού του end-effector, να υπολογιστούν οι μεταβλητές των αρθρώσεων.

Αρχικά θα συμβολίσουμε τον προσανατολισμό με Q_i και το διάνυσμα στον χώρο με p_i έτσι ώστε να ισχύει :

$$T_i = \begin{bmatrix} Q_i & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1,2,3,4,5,6 \quad (3.13)$$

Όπως περιγράφηκε στην περιγραφή του ρομποτικού βραχίονα, αποτελείται από σφαιρικό βραχίονα. Το σημείο τομής των τριών τελευταίων αξόνων περιστροφής, όπως περιγράφηκε είναι το C. Η θέση του σημείου C είναι ανεξάρτητη από την τιμή των γωνιών θ_4 , θ_5 και θ_6 οπότε αρχικά θα προβούμε στον υπολογισμό των τριών πρώτων μεταβλητών των αρθρώσεων.

Η γενική περίπτωση των τριών πρώτων αρθρώσεων ως προς το σημείο C φαίνεται στο (σχήμα 3.3.1.). Από το σχήμα και συμβολίζοντας το διάνυσμα από την αρχή μέχρι το σημείο C με c έχουμε ότι ισχύει :

$$P_1 + Q_1 P_2 + Q_1 Q_2 P_3 + Q_1 Q_2 Q_3 P_4 = c \quad (3.14)$$

Για το P_i έχουμε ότι είναι ίσο με :

$$P_i = Q_i d_i \quad (3.15)$$

Όπου το d_i είναι ίσο με :

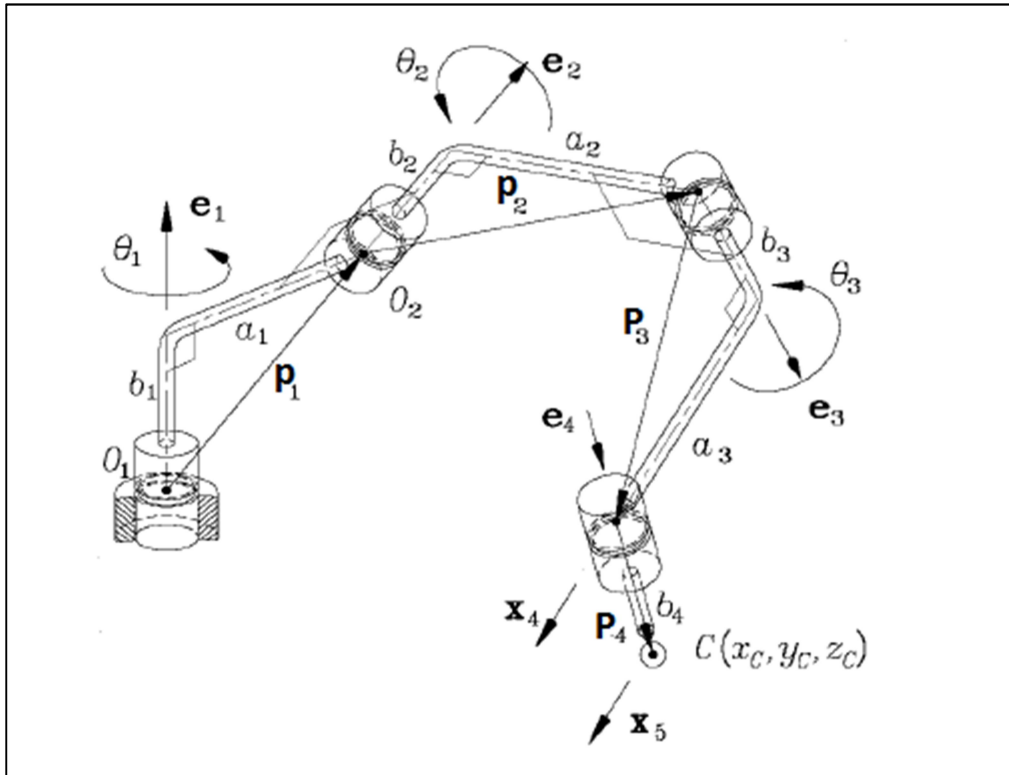
$$d_i = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \sin a_i \\ d_i \cos a_i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Από την Τρίτη στήλη του πίνακα ομογενοús μετασχηματισμού έχουμε ότι :

$$a_i = Q_i e_i \quad (3.17)$$

Όπου e_i το μοναδιαίο διάνυσμα στο σύστημα συντεταγμένων κάθε άρθρωσης. Η σχέση (3.14) με χρήση των σχέσεων (3.15), (3.16) και (3.17) καταλήγει στην :

$$Q_2(d_2 + Q_3 d_3 + d_4 a_3) = Q_1^T c - d_1 \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.3.1. Οι τρεις πρώτοι άξονες περιστροφής του ρομποτικού βραχίονα

Μία άλλη έκφραση του c μπορεί να προκύψει από την διανυσματική έκφραση του $\{EE\} p$ και από τον προσανατολισμό του Q οπότε έχουμε :

$$c = p - Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 P_5 - Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 P_6 \quad (3.19a)$$

Με δεδομένο όμως ότι $a_5=d_5=0$ έχουμε ότι :

$$c = p - Q b_6 \quad (3.19b)$$

Αν τώρα πάρουμε την Ευκλείδεια νόρμα της σχέσης (3.18) παίρνουμε ότι :

$$l^2 = a_2^2 + d_2^2 + a_3^2 + d_3^2 + d_4^2 + 2\mathbf{d}_2^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{d}_3 + 2d_4 \mathbf{d}_2^T \mathbf{a}_3$$

$$r^2 = \|\mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{d}_1\|^2 - 2\mathbf{d}_1^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{c}$$

Όπου l το αριστερό μέλος της σχέσης και r το δεξιό μέλος της σχέσης. Παρατηρούμε ότι το l^2 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\cos(\theta_3)$ και $\sin(\theta_3)$, όπως επίσης και ότι το r^2 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\cos(\theta_1)$ και $\sin(\theta_1)$. Εξισώνοντας τις δύο αυτές σχέσεις λοιπόν παίρνουμε :

$$Ac_1 + Bs_1 + Cc_3 + Ds_3 + E = 0 \quad (3.20a)$$

Για την οποία έχουμε ότι (κανένας άγνωστος) :

$$A = 2a_1 x_c \quad (3.20b)$$

$$B = 2a_1 y_c \quad (3.20c)$$

$$C = 2a_2 a_3 - 2d_2 d_4 \sin a_2 \sin a_3 \quad (3.20d)$$

$$D = 2a_2 d_2 \sin a_2 + 2a_2 d_4 \sin a_3 \quad (3.20e)$$

$$E = a_2^2 + d_2^2 + a_3^2 + d_3^2 + d_4^2 - a_1^2 - x_c^2 - y_c^2 - (z_c - d_1)^2 + 2d_2 d_3 \cos a_2 + 2d_2 d_4 \cos a_2 \cos a_3 + 2d_3 d_4 \cos a_3 \quad (3.20f)$$

Επίσης από την τρίτη εξίσωση που προκύπτει από την (3.18) παίρνουμε ότι :

$$Fc_1 + Gs_1 + Hc_3 + Is_3 + J = 0 \quad (3.21a)$$

Για την οποία επίσης έχουμε χωρίς κανέναν άγνωστο :

$$F = y_c \sin a_1 \quad (3.21b)$$

$$G = -\sin a_1 x_c \quad (3.21c)$$

$$H = -d_4 \sin a_2 \sin a_3 \quad (3.21d)$$

$$I = a_3 \sin a_2 \quad (3.21e)$$

$$J = d_3 \cos a_2 + \cos a_2 d_3 \cos a_3 + d_2 - (z_c - d_1) \cos a_1 \quad (3.21f)$$

Άρα έχουμε δύο σχέσεις μη γραμμικές ως προς τα θ_1 και θ_3 αλλά γραμμικές ως προς τα ημίτονα και τα συνημίτονα τους. Αν τώρα αντικαταστήσουμε τα ημίτονα-συνημίτονα κάθε γωνίας με τους τύπους της εφαπτομένης μισής γωνίας θα αφαιρεθεί ο ένας άγνωστος και προκύπτει μία σχέση ενός αγνώστου. Από τις (3.20a) και (3.21a) παίρνουμε ότι :

$$c_1 = \frac{-G(Cc_3 + Ds_3 + E) + B(Hc_3 + Is_3 + J)}{\Delta_1} \quad (3.22a)$$

$$s_1 = \frac{F(Cc_3 + Ds_3 + E) - A(Hc_3 + Is_3 + J)}{\Delta_1} \quad (3.22b)$$

Όπου έχουμε ότι :

$$\Delta_1 = AG - FB \quad (3.22c)$$

Αν θεωρήσουμε ότι το Δ_1 δεν μηδενίζεται τότε με ύψωση στο τετράγωνο των (3.22a) και (3.22b) και πρόσθεσή τους προκύπτει :

$$Kc_3^2 + Ls_3^2 + Mc_3s_3 + Nc_3 + Ps_3 + Q = 0 \quad (3.23)$$

Για τις σταθερές έχουμε ότι :

$$K = 4a_1^2 H^2 + sa_1^2 C^2 \quad (3.23a)$$

$$L = 4a_1^2 I^2 + sa_1^2 D^2 \quad (3.23b)$$

$$M = 2(4a_1^2 HI + sa_1^2 CD) \quad (3.23c)$$

$$N = 2(4a_1^2 HJ + sa_1^2 CE) \quad (3.23d)$$

$$P = 2(4a_1^2 IJ + sa_1^2 DE) \quad (3.23e)$$

$$Q = 4a_1^2 J^2 + sa_1^2 E^2 - 4a_1^2 sa_1^2 \rho^2 \quad (3.23f)$$

Όπου το ρ^2 ορίζεται ως :

$$\rho^2 \equiv x_c^2 + y_c^2$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη μας τις γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις που συνδέουν το ημίτονο και το συνημίτονο με την εφαπτομένη μισής γωνίας :

$$c_3 \equiv \frac{1 - \tau_3^2}{1 + \tau_3^2}, s_3 \equiv \frac{2\tau_3}{1 + \tau_3^2} \text{ όπου } \tau_3 \equiv \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \quad (3.24)$$

Με αντικατάσταση των (3.24) στην (3.23) παίρνουμε την παρακάτω σχέση :

$$R\tau_3^4 + S\tau_3^3 + T\tau_3^2 + U\tau_3 + V = 0 \quad (3.25)$$

Οι σταθερές της σχέσης είναι ίσες μετά από απλοποιήσεις με :

$$R = 4a_1^2 (J - H)^2 + sa_1^2 (E - C)^2 - 4a_1^2 \rho^2 sa_1^2 \quad (3.25a)$$

$$S = 4[4a_1^2 I(J - H) + sa_1^2 D(E - C)] \quad (3.25b)$$

$$T = 2[4a_1^2 (J^2 - H^2 + 2I^2) + sa_1^2 (E^2 - C^2 + 2D^2) - 4\rho^2 a_1^2 sa_1^2] \quad (3.25c)$$

$$U = 4[4a_1^2 I(J + H) + sa_1^2 D(E + C)] \quad (3.25d)$$

$$V = 4a_1^2 (J + H)^2 + sa_1^2 (E + C)^2 - 4a_1^2 \rho^2 sa_1^2 \quad (3.25e)$$

Από την παραπάνω πολυωνυμική εξίσωση 4^{ου} βαθμού προκύπτουν 4 λύσεις για το τ_3 . Άρα αντίστοιχα προκύπτουν 4 λύσεις και για την γωνία θ_3 οι οποίες είναι ίσες με :

$$(\theta_3)_i = 2\arctan(\tau_3)_i \text{ όπου } i = 1,2,3,4 \quad (3.26)$$

Από την στιγμή που υπολογίσαμε 4 λύσεις για την γωνία θ_3 αν αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (3.22a) και (3.22b) παίρνουμε αντίστοιχα 4 λύσεις για την γωνία θ_1 . Με γνωστές τις θ_1 και θ_3 μπορούμε για κάθε ένα από τους συνδυασμούς τους να υπολογίσουμε μία τιμή της θ_2 . Από την δεύτερη σχέση που προκύπτει από την σχέση (3.18) έχουμε :

$$A_{11} \cos(\theta_2) + A_{12} \sin(\theta_2) = x_c \cos(\theta_1) + y_c \sin(\theta_1) - a_1 \quad (3.27a)$$

$$\begin{aligned} & -A_{12} \cos(\theta_2) + A_{11} \sin(\theta_2) \\ & = -x_c \cos(a_1) \sin(\theta_1) + y_c \cos(a_1) \cos(\theta_1) + (Z_c - d_1) \sin(a_1) \end{aligned} \quad (3.27b)$$

Όπου

$$A_{11} \equiv a_2 + a_3 \cos(\theta_3) + d_4 \sin(a_3) \sin(\theta_3) \quad (3.27c)$$

$$\begin{aligned} A_{12} \equiv & -a_3 \sin(\theta_3) \cos(a_2) + d_3 \sin(a_2) + d_4 \cos(\theta_3) \cos(a_2) \sin(a_3) \\ & + d_4 \sin(a_2) \cos(a_3) \end{aligned} \quad (3.27d)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι τα A_{11} και A_{12} δεν μηδενίζονται μαζί παίρνουμε τις εξής σχέσεις για το θ_2 :

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) = \frac{1}{\Delta_2} \{ & A_{11}(x_c \cos(\theta_1) + y_c \sin(\theta_1) - a_1) \\ & - A_{12}[-x_c \cos(a_1) \sin(\theta_1) \\ & + y_c \cos(a_1) \cos(\theta_1) + (Z_c - d_1) \sin(a_1)] \} \end{aligned} \quad (3.28a)$$

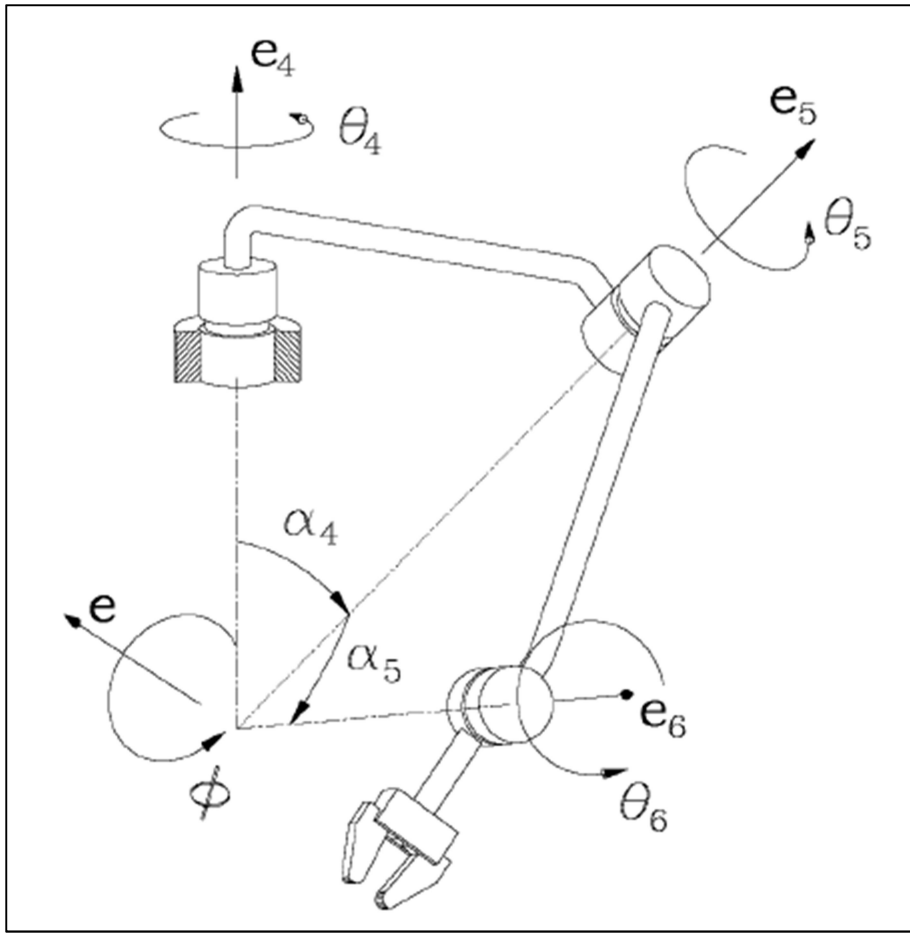
$$\begin{aligned} \sin(\theta_2) = \frac{1}{\Delta_2} \{ & A_{12}(x_c \cos(\theta_1) + y_c \sin(\theta_1) - a_1) \\ & - A_{11}[-x_c \cos(a_1) \sin(\theta_1) \\ & + y_c \cos(a_1) \cos(\theta_1) + (Z_c - d_1) \sin(a_1)] \} \end{aligned} \quad (3.28b)$$

Όπου

$$\Delta_2 = A_{11}^2 + A_{12}^2 \quad (3.29c)$$

Για να είναι το Δ_2 ίσο με το 0 θα πρέπει είτε το a_1 να είναι ίσο με το μηδέν είτε το $\sin(a_1)$ να είναι ίσο με το μηδέν (δεν γίνεται και τα δύο ταυτόχρονα). Στο ρομποτικό βραχίονα KR 15/1 όμως καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν είναι δυνατό να συμβεί οπότε δεν πραγματοποιείται περεταίρω ανάλυση.

Με γνωστές πλέον τις τρεις πρώτες γωνίες η ανάλυση θα συνεχιστεί στον προσδιορισμό των μεταβλητών του σφαιρικού καρπού. Αφού είναι πλέον δεδομένες οι θ_1 , θ_2 και θ_3 γνωρίζουμε και τα μητρώα προσανατολισμού \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 και \mathbf{Q}_3 . Το πρόβλημα τώρα παίρνει την μορφή του σχήματος (σχήμα 3.3.2.).



Σχήμα 3.3.2. Άξονες και παράμετροι προβλήματος σφαιρικού καρπού

Αφού είναι γνωστός ο προσανατολισμός του τελικού σημείου τότε γνωρίζουμε όλα τα μέλη του διανύσματος e_6 σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Αν θεωρήσουμε ότι :

$$[e_6]_4 = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Για το διάνυσμα e_5 γνωρίζουμε επίσης ότι αποτελεί την τρίτη στήλη του πίνακα προσανατολισμού Q_5 άρα :

$$[e_5]_4 = \begin{bmatrix} \sin(a_4) \sin(\theta_4) \\ -\sin(a_4) \cos(\theta_4) \\ \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα (3.3.2.) τα διανύσματα e_6 και e_5 σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία a_5 , αυτό σημαίνει ότι ισχύει :

$$e_6^T e_5 = \cos(a_5) \quad (3.32)$$

Αν τώρα αντικατασταθούν οι (3.30) και η (3.31) στην (3.32) τότε προκύπτει :

$$\xi \sin(\alpha_4) \sin(\theta_4) - \eta \sin(\alpha_4) \cos(\theta_4) + \zeta \cos(\theta_4) = \cos(\theta_5) \quad (3.33)$$

Και αν θεωρήσουμε τ_4 την εφαπτομένη της μισής θ_4 όπως έγινε και προηγουμένως, τότε η σχέση (3.33) μετασχηματίζεται σε :

$$[\cos(\alpha_5) - \eta \sin(\alpha_4) - \zeta \cos(\alpha_4)]\tau_4^2 - 2\xi \sin(\alpha_4) \tau_4 + [\cos(\alpha_5) + \eta \sin(\alpha_4) - \zeta \cos(\alpha_4)] = 0 \quad (3.34)$$

Οι δύο λύσεις λοιπόν που προκύπτουν για την γωνία θ_4 δίνονται από τον τύπο :

$$\tau_4 = \frac{\xi \sin(\alpha_4) \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2) \sin^2(\alpha_4) - [\cos(\alpha_5) - \zeta \cos(\alpha_4)]^2}}{\cos(\alpha_5) - \zeta \cos(\alpha_4) - \eta \sin(\alpha_4)} \quad (3.35)$$

Οι δύο ρίζες είναι πραγματικές εφόσον το υπόριζο είναι θετικός αριθμός, επίσης γίνονται μία λύση όταν το υπόριζο γίνει ίσο με το μηδέν. Αρνητικό υπόριζο σημαίνει μία θέση του end-effector η οποία δεν γίνεται να συμβεί. Στην περίπτωση όπου οι ρίζες είναι πραγματικές τότε μπορεί να υπολογιστεί η γωνία θ_5 .

Έχουμε ότι :

$$\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_5 \mathbf{Q}_6 = \mathbf{R} \quad (3.36a)$$

Όπου

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_3^T \quad (3.36b)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{R} στο 4^ο σύστημα συντεταγμένων ίσα με :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Αν τώρα η (3.36a) λυθεί για \mathbf{Q}_5 παίρνουμε την σχέση:

$$\mathbf{Q}_5 = \mathbf{Q}_4^T \mathbf{R} \mathbf{Q}_6^T \quad (3.37)$$

Η τρίτη γραμμή του πίνακα \mathbf{Q}_i δεν περιέχει καθόλου την μεταβλητή θ_i , οπότε η τρίτη στήλη από το αποτέλεσμα της σχέσης (3.37) δεν περιέχει καθόλου το θ_6 . Άρα από την σχέση (3.37) προκύπτουν δύο σχέσεις για το θ_5 ανεξάρτητες του θ_6 .

$$\begin{aligned} sa_5 s\theta_5 &= (sa_6 r_{12} + ca_6 r_{13})c\theta_4 + (sa_6 r_{22} + ca_6 r_{23})s\theta_4 \\ -sa_5 c\theta_5 &= -\cos(a_4)(sa_6 r_{12} + ca_6 r_{13})s\theta_4 + \cos(a_4)(sa_6 r_{22} + ca_6 r_{23})c\theta_4 \\ &\quad + \sin(a_4)(sa_6 r_{32} + ca_6 r_{33}) \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για κάθε μία από τις δύο τιμές της γωνίας θ_4 προκύπτει άλλη μία τιμή της γωνίας θ_5 . Προκειμένου τώρα να υπολογιστεί η γωνία θ_6 θα πρέπει η εξίσωση (3.36a) να λυθεί ως προς \mathbf{Q}_6 .

$$\mathbf{Q}_6 = \mathbf{Q}_5^T \mathbf{Q}_4^T \mathbf{R} \quad (3.38)$$

Αν πάρουμε το διάνυσμα \mathbf{n}_6 από τον πίνακα προσανατολισμού \mathbf{Q}_6 τότε προκύπτει ότι:

$$\mathbf{n}_6 = \mathbf{Q}_5^T \mathbf{Q}_4^T \mathbf{r}_1 \quad (3.39)$$

Όπου \mathbf{r}_1 είναι η πρώτη στήλη του πίνακα \mathbf{R} . Αν συμβολίσουμε τώρα με \mathbf{w} το γινόμενο $\mathbf{Q}_4^T \mathbf{r}_1$ τότε έχουμε ότι :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} sa_4 r_{21} + ca_4 r_{11} \\ -\cos(a_4)(sa_4 r_{11} - ca_4 r_{21}) + \sin(a_4)r_{31} \\ \sin(a_4)(sa_4 r_{11} - ca_4 r_{21}) + \cos(a_4)r_{31} \end{bmatrix}$$

Οπότε αν συμβολίσουμε με w_1, w_2 και w_3 το πρώτο, δεύτερο και τρίτο αντίστοιχα στοιχείο του πίνακα \mathbf{w} , παίρνουμε :

$$\mathbf{Q}_5^T \mathbf{Q}_4^T \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} sa_5 w_2 + ca_5 w_1 \\ \cos(a_5)(-sa_5 w_1 + ca_5 w_2) + \sin(a_5)w_3 \\ \sin(a_5)(sa_5 w_1 - ca_5 w_2) + \cos(a_5)w_3 \end{bmatrix}$$

Οπότε από τις δύο πρώτες σχέσεις της (3.39) προκύπτει για την θ_6 ότι :

$$\begin{aligned} \cos(\theta_6) &= sa_5 w_2 + ca_5 w_1 \\ \sin(\theta_6) &= \cos(a_5)(-sa_5 w_1 + ca_5 w_2) + \sin(a_5)w_3 \end{aligned}$$

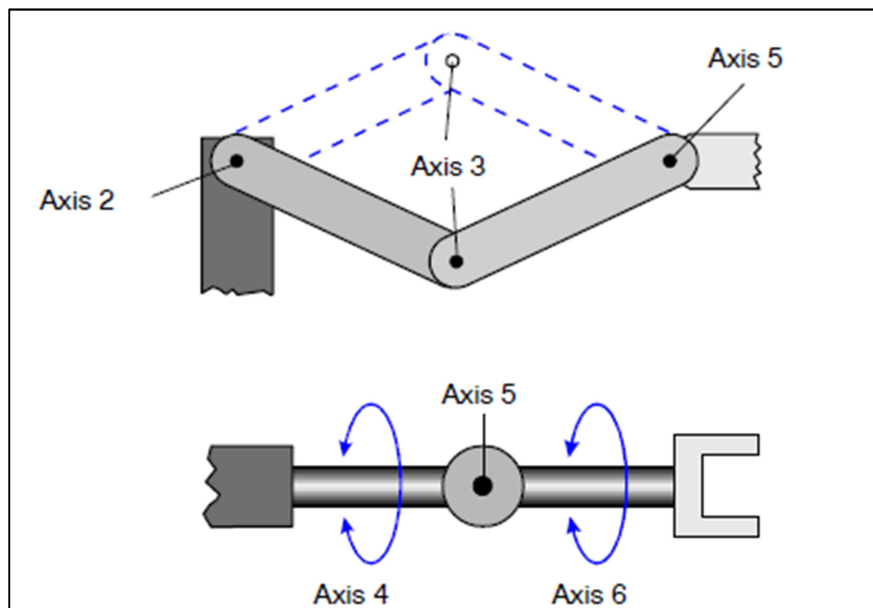
Για τον ακριβή προσδιορισμό των γωνιών με αντίστροφη κινηματική αλλά και την επιλογή της σωστής λύσης από τις 8 διαθέσιμες που προκύπτουν, απαραίτητο είναι να γνωρίζουμε τα Status και Turn bits τα οποία μας δίνει το ρομπότ σε κάθε θέση. Τα Status και Turn bits είναι δύο αριθμοί σε δυαδικό σύστημα τους οποίους δίνει η Kuka και προσδιορίζουν τον προσανατολισμό του ρομποτικού βραχίονα.

Τα Turn bits αποτελούν έναν αριθμό σε δυαδικό σύστημα που περιγράφει το πώς έχουν στραφεί οι αρθρώσεις. Είναι πρακτικά μια ακολουθία 6 bit, δηλαδή 0 και 1 που περιγράφει αν η κάθε άρθρωση έχει περιστραφεί θετικά ή αρνητικά με τρόπο που φαίνεται στον (πίνακα 3.3.1).

Τιμή	Bit 5	Bit 4	Bit 3	Bit 2	Bit 1	Bit 0
0	$A_6 \geq 0^\circ$	$A_5 \geq 0^\circ$	$A_4 \geq 0^\circ$	$A_3 \geq 0^\circ$	$A_2 \geq 0^\circ$	$A_1 \geq 0^\circ$
1	$A_6 < 0^\circ$	$A_5 < 0^\circ$	$A_4 < 0^\circ$	$A_3 < 0^\circ$	$A_2 < 0^\circ$	$A_1 < 0^\circ$

Πίνακας 3.3.1. Turn Bits

Τα Status bits από την άλλη χρησιμοποιούνται για να επιλύονται ασάφειες σχετικά με την θέση των αξόνων όπως φαίνονται στο (σχήμα 3.3.3.)



Σχήμα 3.3.3. Ασάφειες Αξόνων

Τα Status bits είναι μία ακολουθία τριών Bit από τα οποία το πρώτο εκφράζει την θέση της αρχής του καρπού, το δεύτερο τη διαμόρφωση του βραχίονα και το τρίτο την διαμόρφωση του καρπού με τρόπο που φαίνεται στον (πίνακα 3.3.2.).

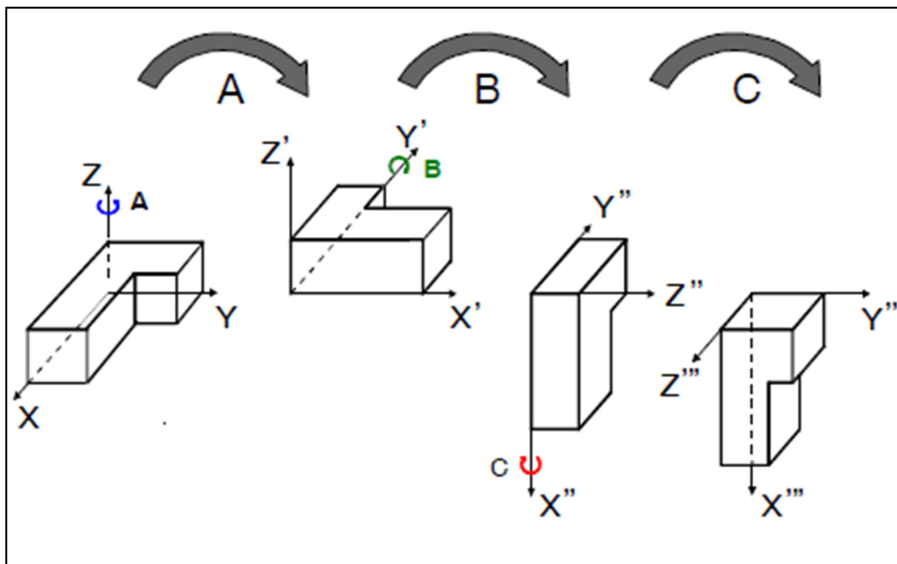
Τιμή	Bit 2	Bit 1	Bit 0
0	$0^\circ \leq A_5 < 180^\circ$ ή $A_5 < -180^\circ$	$A_3 < \phi$ Εξαρτάται από το μοντέλο	Basic Area
1	$-180^\circ \leq A_5 < 0^\circ$ ή $A_5 \geq 180^\circ$	$A_3 \geq \phi$ Εξαρτάται από το μοντέλο	Overhead Area

Πίνακας 3.3.2. Status Bits

Με την παραπάνω ανάλυση προκύπτουν 8 πιθανές λύσεις για τις γωνίες θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 , θ_5 και θ_6 ο κώδικας υπολογισμού των οποίων παρατίθεται στο appendix.

3.4. Έλεγχος Αποτελεσμάτων

Μετά την εξαγωγή των αποτελεσμάτων απαραίτητης σημασίας είναι ο έλεγχος εγκυρότητας τους. Αρχικά έπρεπε να πιστοποιηθεί η σωστή λειτουργία της ευθείας κινηματικής για να προχωρήσουμε και στην πιστοποίηση της αντίστροφης. Αρχικά ο ρομποτικός βραχίονας μας δίνει πληροφορίες για το διάνυσμα του τελικού σημείου δράσης, τον προσανατολισμό σε γωνίες Euler και τα Status και Turn Bits. Οπότε το πρώτο βήμα είναι να εναρμονιστούμε με τις πληροφορίες που δίνει ο ίδιος ο ρομποτικός βραχίονας. Από τον τελικό πίνακα του ομογενή μετασχηματισμού, και πιο συγκεκριμένα από τα τρία πρώτα στοιχεία της τέταρτης στήλης μπορούμε να πάρουμε το διάνυσμα της θέσης του end-effector ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης. Στην συνέχεια ο προσανατολισμός, που εκφράζεται από τις τρεις πρώτες στήλες και γραμμές του τελικού πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού, πρέπει να μετατραπεί σε γωνίες Euler. Οι γωνίες αυτές είναι οι A, B και C και εκφράζουν αντίστοιχα με τη σειρά, A περιστροφή κατά τον Z άξονα, B περιστροφή κατά τον Y άξονα και τέλος C περιστροφή κατά τον X άξονα. Ο τρόπος περιστροφής και έκφρασης αυτών των γωνιών φαίνεται στο (σχήμα 3.4.1.) και αντιστοιχεί στην γνωστή περίπτωση roll, pitch, yaw.



Σχήμα 3.4.1. Τρόπος έκφρασης των γωνιών Euler από την KUKA

Αφού μετατράπηκε ο πίνακας περιστροφής σε γωνίες A, B και C κινήθηκε το ρομπότ σε διάφορες θέσεις και τα οι τιμές του ρομποτικού βραχίονα συγκρίθηκαν με αυτές του προγράμματος ευθείας κινηματικής. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον (πίνακα 4.4.1.) και στον (πίνακα 4.4.2.). Στην πρώτη περίπτωση οι αρθρώσεις έστριψαν κατά $\theta_1=25^\circ$, $\theta_2=-105^\circ$, $\theta_3=90^\circ$, $\theta_4=0^\circ$, $\theta_5=0^\circ$ και $\theta_6=0^\circ$. Στην δεύτερη περίπτωση οι αρθρώσεις έστριψαν κατά $\theta_1=57,66^\circ$, $\theta_2=-71,59^\circ$, $\theta_3=90,06^\circ$, $\theta_4=23,06^\circ$, $\theta_5=-23,60^\circ$ και $\theta_6=81,46^\circ$. Στην τρίτη περίπτωση οι αρθρώσεις έστριψαν κατά $\theta_1=57,66^\circ$, $\theta_2=-77,25^\circ$, $\theta_3=53,70^\circ$, $\theta_4=-23,60^\circ$, $\theta_5=50,6^\circ$ και $\theta_6=186,73^\circ$ και τέλος στην τέταρτη περίπτωση οι αρθρώσεις έστριψαν κατά $\theta_1=120,54^\circ$, $\theta_2=-53,929^\circ$, $\theta_3=76,51^\circ$, $\theta_4=-49,86^\circ$, $\theta_5=-8,60^\circ$ και $\theta_6=276,38^\circ$.

Περιπτώσεις	X ρομπότ	X προγραμ	Y ρομπότ	Y προγραμ	Z ρομπότ	Z προγραμ
1	0,73094	0.73088	-0,341475	-0.34081	1,643386	1.6441
2	0,69332	0.69332	-1,054090	-1.05410	1,256951	1.2570
3	0,59971	0.59968	-0,866317	-0.86618	1,635256	1.6354
4	-0,74013	-0.74013	-1,222756	-1.2228	1,072378	1.0724

Πίνακας 4.4.1. Σύγκριση αποτελεσμάτων προγράμματος/ρομπότ για το διάνυσμα βάσης – end effector

Περιπτώσεις	A ρομπότ	A προγραμ	B ρομπότ	B προγραμ	C ρομπότ	C προγραμ
1	-25.047	-25.00	75.060	75.00	-0.006	0.00
2	-139.422	-139.42	-13.267	-13.29	-86.521	-86.52
3	-75.365	-75.37	-61.526	-61.54	-146.109	-146.10
4	-51.659	-51.66	-39.019	-39.02	111.973	111.98

Πίνακας 4.4.2. Σύγκριση αποτελεσμάτων προγράμματος/ρομπότ για τις γωνίες Euler

Παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις των τιμών του προγράμματος, με αυτές που πήραμε από το ρομπότ είναι πολύ μικρές και μπορεί να οφείλονται σε στρογγυλοποιήσεις που έγιναν στις γωνίες που δόθηκαν για δεδομένα στο πρόγραμμα ευθείας κινηματικής ή και σε απλοποιήσεις που έγιναν για την δομή του ρομποτικού βραχίονα κατά την κατασκευή της μεθόδου Denavit – Hartenberg.

Αξίζει να σημειωθεί ότι πέραν αυτών των τιμών ο αλγόριθμος δοκιμάστηκε σε πάρα πολλές τιμές σε ζωντανό χρόνο στο ρομπότ και οι τιμές παρουσίασαν πολύ μικρή απόκλιση όπως οι παραπάνω. Οι παραπάνω περιπτώσεις αποτελούν παραδείγματα αυτών των τιμών.

Μετά την επιβεβαίωση της ευθείας κινηματικής επόμενη κίνηση ήταν και η επιβεβαίωση της αντίστροφης. Για να επιβεβαιωθεί η αντίστροφη κινηματική, δημιουργήθηκε επαναληπτικός αλγόριθμος ο οποίος έπαιρνε τυχαίες τιμές γωνιών στο εύρος που ορίζει ο κατασκευαστής, πραγματοποιούσε την ευθεία κινηματική και έδινε σαν δεδομένα στο αλγόριθμο της αντίστροφης κινηματικής τον ομογενή μετασχηματισμό και τα Status και Turn Bits. Εν συνεχεία ο αλγόριθμος αντίστροφης κινηματικής υπολόγιζε τις πιθανές λύσεις για αυτά τα δεδομένα και αυτές συγκρινόντουσαν με τις τυχαίες τιμές γωνιών που δόθηκαν στην αρχή της ευθείας. Ο αλγόριθμος έτρεξε για 50 τυχαία σετ γωνιών και η αντίστροφη κινηματική έβγαλε σε όλες τις περιπτώσεις ένα σετ γωνιών που συνέπιπτε με αυτό που δόθηκε στην αρχή, οπότε σαν συμπέρασμα και η αντίστροφη κινηματική είναι σωστή.

3.5. Εργαλεία

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, στην τελευταία άρθρωση υπάρχει φλάτζα πάνω στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν διάφορα εργαλεία. Τα εργαλεία που μπορούν να τοποθετηθούν στο τέλος του ρομποτικού βραχίονα ποικίλουν και εξαρτώνται από την λειτουργία για την οποία αυτός προορίζεται. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με δύο ειδών εργαλεία. Η πρώτη περίπτωση εργαλείων προσομοιάζεται με μία απλή μετατόπιση του τελικού σημείου δράσης και αντιστοιχεί στην χρησιμοποίηση πχ κοπτικών εργαλείων, ενώ η δεύτερη περίπτωση προσομοιάζεται με μετατόπιση αλλά και διαφορετικό προσανατολισμό από αυτόν του τελικού σημείου της τελευταίας άρθρωσης και αντιστοιχεί σε εργαλεία όπως ο τροχός.

Περίπτωση 1^η

Στην πρώτη περίπτωση θα ασχοληθούμε με εργαλεία όπως τα κοπτικά. Τα κοπτικά εργαλεία προσθέτουν απλά μία μετατόπιση στο τελικό σημείο του τελευταίου άξονα περιστροφής. Για να βρούμε το διάνυσμα του τελικού σημείου δράσης ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης και τον προσανατολισμό του, υπάρχουν δύο τρόποι με το ίδιο αποτέλεσμα. Ο πρώτος τρόπος είναι να προσθέσουμε το μήκος του εργαλείου στον d_6 παράγοντα των παραμέτρων Denavit – Hartenberg, και ο δεύτερος να θεωρήσουμε άλλη μία περιστροφική άρθρωση με τα ίδια χαρακτηριστικά με την τελευταία μόνο που στην θέση d_7 θα βάλουμε το μήκος του κοπτικού εργαλείου. Εδώ θα παρουσιαστεί ο πρώτος τρόπος. Οι παράμετροι Denavit – Hartenberg φαίνονται στον παρακάτω (πίνακα 4.5.1.).

Μέλος	a_i (m)	α_i (°)	d_i (m)	θ_i (°)
1	0.300	-90	0.675	$-\theta_1$
2	0.650	0	0	θ_2
3	-0.155	-90	0	$-\theta_3 - 90$
4	0	90	-0.600	θ_4
5	0	-90	0	$-\theta_5$
6	0	0	$-(0.140+d_{εργ})$	θ_6

Πίνακας 4.5.1. Παράμετροι Denavit – Hartenberg για κοπτικό εργαλείο

Αυτό που αλλάζει σε σχέση με τον υπολογισμό χωρίς εργαλείο είναι ο ομογενής μετασχηματισμός A_6^5 αλλά και ο ολικός T_6^0 από το σύστημα συντεταγμένων της βάσης μέχρι το end-effector. Για τους καινούργιους μετασχηματισμούς αυτούς έχουμε ότι είναι ίσοι με:

$$A_6^5(\theta_6) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & \sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.14 - d_{εργ} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$T_6^0(q) = A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(\theta_3) A_4^3(\theta_4) A_5^4(\theta_5) A_6^5(\theta_6) \quad (3.41)$$

Με βάση τις σχέσεις (3.40) και (3.41) αλλά και τις σχέσεις των ομογενών μετασχηματισμών που υπολογίστηκαν στο κεφάλαιο (3.2.1.), υπολογίζεται η θέση αλλά και ο προσανατολισμός του τελικού σημείου δράσης του κοπτικού εργαλείου ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης. Οι υπολογισμοί λόγω της πολυπλοκότητας αλλά και ο κώδικας παρατίθενται στο Appendix.

Περίπτωση 2^η

Στην δεύτερη περίπτωση θα αναλυθεί η ευθεία κινηματική για την προσθήκη εργαλείων όπως ο τροχός. Στην περίπτωση προσθήκης τέτοιων εργαλείων το τελικό σημείο δράσης δεν μετατοπίζεται απλά αλλά αλλάζει και ο προσανατολισμός του. Για την προσέγγιση αυτής της περίπτωσης θεωρήθηκε άλλη μία στροφική άρθρωση πέραν της τελευταίας του ρομποτικού βραχίονα η οποία όμως βρίσκεται σε τελείως διαφορετικό προσανατολισμό από αυτόν του end-effector στην περίπτωση χωρίς εργαλείο. Οι νέοι παράμετροι Denavit-Hartenberg παρατίθενται στον (πίνακα 4.5.2.).

Μέλος	a_i (m)	α_i (°)	d_i (m)	θ_i (°)
1	0.300	-90	0.675	$-\theta_1$
2	0.650	0	0	θ_2
3	-0.155	-90	0	$-\theta_3 - 90$
4	0	90	-0.600	θ_4
5	0	-90	0	$-\theta_5$
6	0	0	-0.140	θ_6
7	$a_{\text{εργ}}$	0	$d_{\text{εργ}}$	θ_7

Πίνακας 4.5.2. Παράμετροι Denavit – Hartenberg εργαλείου τροχού

Πλέον έχουμε έναν επιπλέον πίνακα μετασχηματισμού και μία νέα σχέση για τον υπολογισμό του διανύσματος του τελικού σημείου δράσης από το σύστημα συντεταγμένων της βάσης αλλά και του προσανατολισμό του.

$$A_7^6(\theta_7) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_7) & \sin(\theta_7) & 0 & a_{\text{εργ}}\cos(\theta_7) \\ -\sin(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_{\text{εργ}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$T^0(q) = A_1^0(\theta_1) A_2^1(\theta_2) A_3^2(\theta_3) A_4^3(\theta_4) A_5^4(\theta_5) A_6^5(\theta_6) A_7^6(\theta_7) \quad (3.43)$$

Με βάση τα παραπάνω αλλά και γνωστούς τους ομογενείς μετασχηματισμούς για τις έξι πρώτες αρθρώσεις που παραμένουν ίδιοι υπολογίζουμε την θέση και τον προσανατολισμό του τελικού σημείου δράσης στην περίπτωση χρησιμοποίησης εργαλείου όπως τροχός. Ο αλγόριθμος υπολογισμού παρατίθεται στο appendix.

4 Ιακωβιανή του Ρομποτικού βραχίονα

4.1. Ευθεία Ιακωβιανή

Η Ιακωβιανή είναι μια μεταβλητού χρόνου γραμμική σχέση που συνδέει τις Καρτεσιανές ταχύτητες του End-Effector με τις χρονικά μεταβαλλόμενες μεταβλητές των αρθρώσεων. Επιτρέπει την σχέση μεταξύ των δύο διανυσμάτων με τον παρακάτω τρόπο :

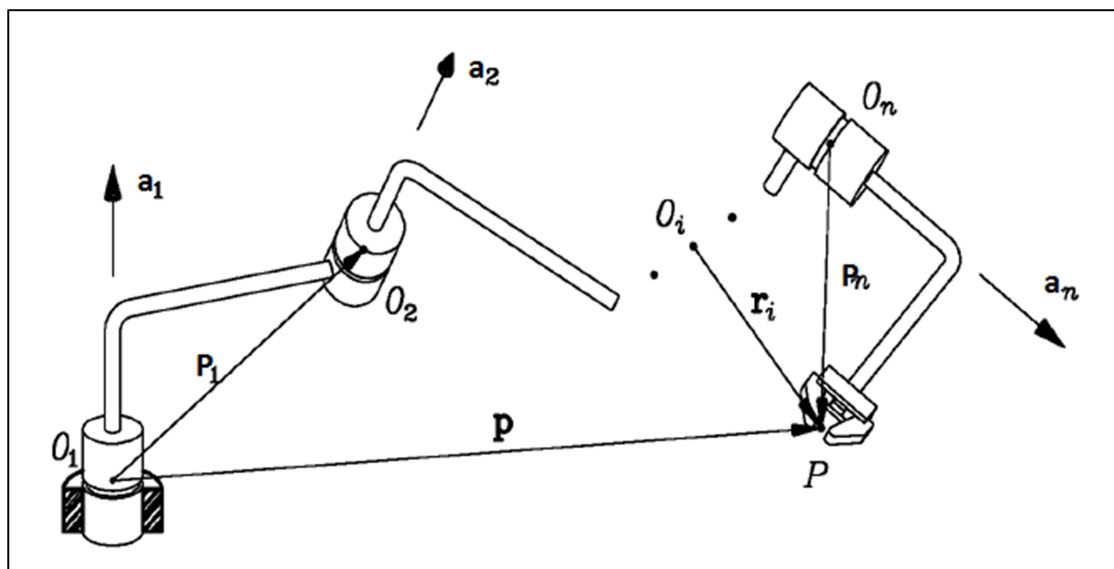
$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1)$$

Κατά την οποία οι παράγωγοι των μεταβλητών των αρθρώσεων δίνονται από :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \dots \dot{\theta}_n]^T \quad (4.2)$$

Αρχικά ας θεωρήσουμε έναν ρομποτικό βραχίονα με την μορφή που φαίνεται στο (σχήμα 4.1.1.). Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τις αρθρώσεις να έχουν περιστραφεί κατά θ_i , με ρυθμό $\dot{\theta}_i$ και το διάνυσμα \mathbf{a}_i το οποίο αποτελεί την τρίτη στήλη του μητρώου μετασχηματισμού όπως αναφέρθηκε νωρίτερα. Στο σχήμα αυτό δεν φαίνονται τα συστήματα συντεταγμένων όμως έχει σχεδιαστεί η αρχή τους O_i . Οι σχέσεις που διέπουν το παρακάτω σχήμα είναι οι εξής :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= 0 \\ \mathbf{w}_1 &= \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{w}_n &= \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (4.3)$$



Σχήμα 4.1.1. Γενική μορφή ρομποτικού βραχίονα n αρθρώσεων

Και αν συμβολίσουμε με \mathbf{w} την γωνιακή ταχύτητα του end-effector τότε αυτή θα προκύπτει από την σχέση :

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}_n = \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{a}_n = \sum_1^n \dot{\theta}_i \mathbf{a}_i$$

Επίσης από το (σχήμα 4.1.1) παρατηρούμε ότι το διάνυσμα \mathbf{P} , το οποίο είναι το διάνυσμα θέσης του end-effector του σημείου P είναι ίσο με :

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n \quad (4.4)$$

Για να μπορεί να πραγματοποιηθεί η παραπάνω πρόσθεση διανυσμάτων σημαντική προϋπόθεση είναι αυτά να έχουν εκφραστεί ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Με παραγωγή και των δύο μελών της σχέσης (4.4) προκύπτει η παρακάτω έκφραση :

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 + \dots + \dot{\mathbf{p}}_n \quad (4.5)$$

Για την οποία έχουμε ότι :

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{w}_i \times \mathbf{p}_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (4.3) και (4.6) στην σχέση (4.5) παίρνουμε την έκφραση :

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 \times \mathbf{p}_1 + (\dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2) \times \mathbf{p}_2 + \dots + (\dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{a}_n) \times \mathbf{p}_n \quad (4.7)$$

Η οποία έπειτα από πράξεις παίρνει την μορφή :

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n) + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 \times (\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \dots + \mathbf{p}_n) + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{a}_n \times \mathbf{p}_n$$

Τώρα το διάνυσμα \mathbf{r}_i το οποίο επίσης φαίνεται στο (σχήμα 4.1.1.) ορίζεται ως η ένωση του O_i με το P με τον εξής τρόπο :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_{i+1} + \dots + \mathbf{p}_n \quad (4.8)$$

Οπότε με την χρησιμοποίηση της σχέσης (4.8) στην (4.9) προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα $\dot{\mathbf{P}}$:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_1^n \dot{\theta}_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{r}_i$$

Αν ορίσουμε τώρα δύο πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} με διάσταση $3 \times n$ και οι δύο οι οποίοι είναι ίσοι με :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}_1 \ \mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n \times \mathbf{r}_n] \quad (4.9b)$$

Τότε μπορούμε να συνδέσουμε τα \mathbf{w} και $\dot{\mathbf{P}}$ με μία πιο βολική σχέση όπου :

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{P} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Οπότε η ταχύτητα του end-effector μπορεί να οριστεί ως :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η Ιακωβιανή είναι ίση με :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.11a)$$

Ή αλλιώς

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}_1 & \mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \times \mathbf{r}_n \end{bmatrix} \quad (4.11b)$$

Με βάση την παραπάνω μεθοδολογία δημιουργήθηκε αλγόριθμος σε matlab ο οποίος υπολογίζει την Ιακωβιανή του ρομποτικού βραχίονα της KUKA kr 15/1. Η Ιακωβιανή λόγω της πολυπλοκότητας της όπως και ο αλγόριθμος παρατίθενται στο appendix.

4.2. Κινηματικές Ιδιομορφίες (Singularities)

Αρχικά για την προσέγγιση των κινηματικών ιδιομορφιών του ρομποτικού βραχίονα, θα χρειαστεί να φέρουμε την Ιακωβιανή σε μία πολύ πιο βολική μορφή. Επειδή το ρομποτικός βραχίονας της KUKA KR 15/1 έχει σφαιρικό καρπό θα χρησιμοποιηθούν οι ταχύτητες ως προς το κέντρο του καρπού C και όχι ως προς το τελικό σημείο δράσης P.

Αρχικά το διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο C είναι ίσο με :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{c}} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Όπου για τα διανύσματα \mathbf{w} και $\dot{\mathbf{c}}$ έχουμε ότι είναι :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Το \mathbf{w} συμβολίζει το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος συντεταγμένων του End-Effector ενώ το διάνυσμα της ευθείας ταχύτητας του C ως προς το σύστημα συντεταγμένων της βάσης συμβολίζεται με $\dot{\mathbf{c}}$.

Η θέση του σημείου C ως προς το σύστημα της βάσης δεν εξαρτάται από το πως έχουν περιστραφεί οι τρεις τελευταίες αρθρώσεις θ_4 , θ_5 και θ_6 . Υπό αυτήν την έννοια το τελικό σημείο δράσης του end-effector μπορεί να πάει σε διάφορες θέσεις αλλάζοντας τις γωνίες γύρω από τους άξονες 1,2 και 3. Για τον λόγο αυτό, η γραμμική ταχύτητα του σημείου C εξαρτάται μόνο από τον ρυθμό μεταβολής των γωνιών θ_1 , θ_2 και θ_3 .

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει για την ταχύτητα στο σημείο C ότι είναι ίση με :

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{a}_3 \times \mathbf{r}_3 \quad (4.14)$$

Για το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας \mathbf{w} , για το σύστημα συντεταγμένων του end-effector του οποίου η αρχή βρίσκεται στο σημείο C μπορούμε να γράψουμε ότι είναι ίσο με το άθροισμα της συνεισφοράς των γωνιακών ταχυτήτων κάθε ξεχωριστής άρθρωσης και άρα προκύπτει ίσο με :

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 + \boldsymbol{\omega}_4 + \boldsymbol{\omega}_5 + \boldsymbol{\omega}_6 = \dot{\theta}_1 \mathbf{a}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \dot{\theta}_6 \mathbf{a}_6 \quad (4.15)$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, από τις σχέσεις (4.14) και (4.15) αν τις αντικαταστήσουμε στην σχέση (4.1) παίρνουμε για την Ιακωβιανή την έκφραση :

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_{1x} r_1 & \mathbf{a}_{2x} r_2 & \mathbf{a}_{3x} r_3 & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Επειδή οι άξονες 4, 5 και 6 τέμνονται στο σημείο C προκύπτει ότι $J_{22} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$.

Αφού η Ιακωβιανή μετασχηματίστηκε σε μία πιο βολική μορφή, επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των κινηματικών ιδιομορφιών. Γενικά, η Ιακωβιανή είναι συνάρτηση του γεωμετρικού σχηματισμού της κινηματικής αλυσίδας. Εκείνοι οι σχηματισμοί για τους οποίους η J έχει ελλiptή βαθμό, ονομάζονται κινηματικές ιδιομορφίες. Η εύρεση των κινηματικών ιδιομορφιών ενός ρομποτικού χειριστή έχει μεγάλη σημασία για τους εξής λόγους :

- Οι ιδιομορφίες παριστάνουν διατάξεις του ρομποτικού χειριστή όπου η κινητικότητα του είναι μειωμένη, δηλαδή δεν είναι δυνατό να επιβληθεί τυχούσα κίνηση στο τελικό σημείο δράσης.
- Όταν ο ρομποτικός χειριστής βρίσκεται σε ιδιόμορφη κατάσταση, ενδέχεται να υπάρξουν άπειρες λύσεις στο ανάστροφο κινηματικό πρόβλημα.
- Στη γειτονιά μίας ιδιομορφίας, μικρές ταχύτητες στον χώρο λειτουργίας μπορούν να προκαλέσουν μεγάλες ταχύτητες στο χώρο των αρθρώσεων.

Για τον υπολογισμό των κινηματικών ιδιομορφιών θα χρειαστεί να βρεθεί η οριζουσα του πίνακα της Ιακωβιανής.

Στον ρομποτικό βραχίονα KR 15/1 ο πρώτος άξονας περιστροφής κοιτάζει πάντα τον z άξονα του συστήματος συντεταγμένων της βάσης όπως φαίνεται και στο σχήμα του 2^{ου} κεφαλαίου (σχήμα 2.2.) . Επίσης οι άξονες 2 και 3 είναι παράλληλοι μεταξύ τους αλλά και στην xy επιφάνεια του συστήματος συντεταγμένων της βάσης, το οποίο σημαίνει ότι $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3$. Με βάση τα παραπάνω έχουμε για την αριστερά πάνω πλοκάδα του πίνακα της Ιακωβιανής J_{11} ότι είναι ίση με :

$$J_{11} = \begin{bmatrix} 0 & a_{3x} & a_{3x} \\ 0 & a_{3y} & a_{3y} \\ a_{1z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Οι παραπάνω απλοποιήσεις προκαλούν απλοποιήσεις και στην πλοκάδα J_{21} οπότε με βάση τα παραπάνω η Ιακωβιανή προκύπτει ίση με :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & a_{3x} & a_{3x} & a_{4x} & a_{5x} & a_{6x} \\ 0 & a_{3y} & a_{3y} & a_{4y} & a_{5y} & a_{6y} \\ a_{1z} & 0 & 0 & a_{4z} & a_{5z} & a_{6z} \\ -a_{1z}r_{1y} & a_{3y}r_{2z} & a_{3y}r_{3z} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1z}r_{1x} & -a_{3x}r_{2z} & -a_{3x}r_{3z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3x}r_{2y} - a_{3y}r_{2x} & a_{3x}r_{3y} - a_{3y}r_{3x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Η ορίζουσα της Ιακωβιανής θα είναι ίση με το αρνητικό γινόμενο των πλοκάδων J_{21} και J_{12} , αφού η πλοκάδα J_{22} είναι ίση με 0. Οπότε για την ορίζουσα μετά από πράξεις έχουμε ότι :

$$\det(J) = a_{1z}(r_{2z}a_{3y}r_{3x} - a_{3x}r_{2z}r_{3y} + a_{3x}r_{3z}r_{2y} - r_{3z}a_{3y}r_{2x}) \\ (r_{1y}a_{3x} - a_{3y}r_{1x})(a_{4x}a_{5z}a_{6y} - a_{4x}a_{6z}a_{5y} + a_{4y}a_{5x}a_{6z} - a_{4y}a_{6x}a_{5z} + a_{4z}a_{6x}a_{5y} \\ - a_{4z}a_{5x}a_{6y}) \quad (4.19)$$

Για να βρεθούν τώρα οι κινηματικές ιδιομορφίες θα πρέπει η ορίζουσα της Ιακωβιανής να γίνει ίση με μηδέν. Αυτό σημαίνει τουλάχιστον ένας από τους παραπάνω παράγοντες να γίνεται ίσος με το μηδέν οπότε διακρίνουμε 4 περιπτώσεις. Είναι φανερό ότι ο δεύτερος παράγοντας μηδενίζεται όταν το σημείο C βρίσκεται πάνω στο επίπεδο που ορίζουν τα \mathbf{a}_2 και \mathbf{a}_3 . Ο τρίτος παράγοντας γίνεται μηδέν όταν το σημείο C βρίσκεται πάνω στο άξονα περιστροφής της πρώτης άρθρωσης, ενώ ο τέταρτος παράγοντας είναι το εξωτερικό γινόμενο των τριών αξόνων του καρπού, οπότε μηδενίζεται όταν κάποιο ζευγάρι εκ των τριών γίνονται παράλληλοι.

Περίπτωση 1^η

Ο πρώτος παράγοντας της Ιακωβιανής είναι το a_{1z} . Ο παράγοντας αυτός εκφράζει τον προσανατολισμό του πρώτου άξονα περιστροφής οπότε δεν μπορεί ποτέ να γίνει ακριβώς μηδέν. Για τον λόγο αυτό θα το θέσουμε ίσο με 1, δίχως βλάβη της γενικότητας, για την διευκόλυνση των πράξεων και θα συνεχίσουμε την ανάλυση των περιπτώσεων με την νέα έκφραση της Ιακωβιανής :

$$\det(J) = (r_{2z}a_{3y}r_{3x} - a_{3x}r_{2z}r_{3y} + a_{3x}r_{3z}r_{2y} - r_{3z}a_{3y}r_{2x}) \\ (r_{1y}a_{3x} - a_{3y}r_{1x})(a_{4x}a_{5z}a_{6y} - a_{4x}a_{6z}a_{5y} + a_{4y}a_{5x}a_{6z} - a_{4y}a_{6x}a_{5z} + a_{4z}a_{6x}a_{5y} \\ - a_{4z}a_{5x}a_{6y}) \quad (4.20)$$

Περίπτωση 2^η

Στην δεύτερη περίπτωση θα εξετάσουμε τον μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται κινηματική ιδιομορφία αγκώνα. Η παρακάτω εξίσωση (4.21) περιλαμβάνει γινόμενα από τα στοιχεία \mathbf{a}_3 , \mathbf{r}_2 και \mathbf{r}_3 .

$$r_{2z}a_{3y}r_{3x} - a_{3x}r_{2z}r_{3y} + a_{3x}r_{3z}r_{2y} - r_{3z}a_{3y}r_{2x} = 0 \quad (4.21)$$

Κανένα από τα παραπάνω τρία διανύσματα δεν επηρεάζεται από την περιστροφή του πρώτου άξονα, οπότε μπορούμε να λάβουμε υπόψη τους άξονες περιστροφής 2 και 3 μόνο όταν είναι παράλληλοι με το yx επίπεδο. Τότε θεωρούμε την τομή της επιφάνειας με το επίπεδο $a_{3x} = 0$. Σε αυτό το επίπεδο, οι συνιστώσες του w ως προς το x των διανυσμάτων των αξόνων περιστροφής είναι ίσες με 0. Οπότε πλέον προκύπτει η παρακάτω σχέση :

$$r_{2z}a_{3y}r_{3x} - r_{3z}a_{3y}r_{2x} = 0 \quad (4.22)$$

Από την στιγμή που το διάνυσμα κατεύθυνσης δεν μπορεί ποτέ να γίνει μηδέν απαλείφεται και από τα δύο μέλη οπότε μας μένει η σχέση :

$$r_{2z}r_{3x} = r_{3z}r_{2x} \quad (4.23)$$

Η σχέση αυτή επαληθεύεται όταν τα r_2 και r_3 ευθυγραμμίζονται με τους άξονες z και x αντίστοιχα. Αν εκφράσουμε την σχέση (4.23) ως προς την γωνία ϕ μεταξύ των διανυσμάτων αυτών αλλά και των αξόνων z και x παίρνουμε την έκφραση :

$$\|r_3\| \cos(\varphi_3) \|r_2\| \sin(\varphi_2) = \|r_3\| \sin(\varphi_3) \|r_2\| \cos(\varphi_2) \quad (4.24)$$

Η σχέση (4.24) επαληθεύεται για $\varphi_3 = \pm\varphi_2$ και φαίνεται στο (σχήμα 4.2.1.)



Σχήμα 4.2.1. Ιδιομορφία αγκώνα στον ρομποτικό βραχίονα της KUKA KR 15/1

Περίπτωση 3^η

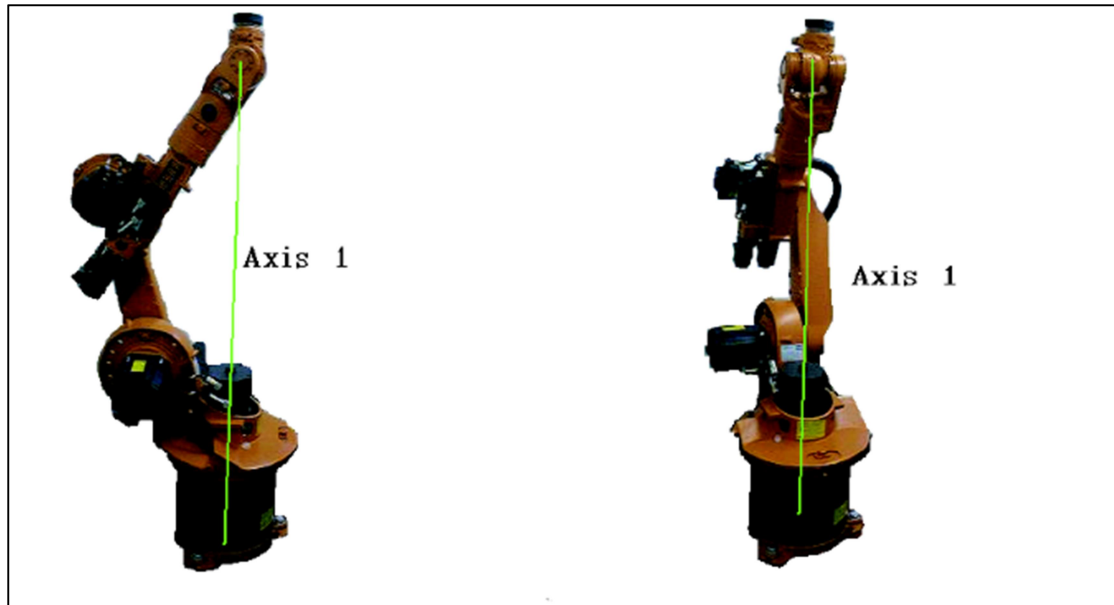
Στην τρίτη περίπτωση κινηματικής ιδιομορφίας εξετάζουμε την περίπτωση να μηδενίζεται ο τρίτος παράγοντας της ορίζουσας της Ιακωβιανής. Η περίπτωση αυτή εκφράζει την κινηματική ιδιομορφία ώμου. Η εξίσωση η οποία θα εξεταστεί είναι η εξής :

$$r_{1y}a_{3x} - a_{3y}r_{1x} \quad (4.25)$$

Για τον μηδενισμό της σχέσης (4.25) διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

- Εάν ο παράγοντας a_{3x} γίνει ίσος με μηδέν τότε είτε ο παράγοντας a_{3y} θα γίνει ίσος με μηδέν είτε ο παράγοντας r_{1x} . Από την στιγμή που το διάνυσμα \mathbf{a}_3 είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης και παραμένει παράλληλο στο επίπεδο xy δεν μπορούν οι παράγοντες ως προς τον x και τον y να μηδενίζονται ταυτόχρονα οπότε για να μηδενιστεί η σχέση (4.20) θα πρέπει ο παράγοντας r_{1x} να γίνει ίσος με μηδέν. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το σημείο C βρίσκεται πάνω στο επίπεδο yz του συστήματος συντεταγμένων της βάσης. Επίσης το σημείο C θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων της βάσης.
- Εάν ο παράγοντας a_{3y} γίνει ίσος με μηδέν είτε ο παράγοντας a_{3x} θα γίνει ίσος με μηδέν είτε ο παράγοντας r_{1y} . Οπότε με βάση αυτά που αναφέρθηκαν στην παραπάνω περίπτωση όμοια θα προκύψει το r_{1y} ίσο με μηδέν. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το σημείο C βρίσκεται πάνω στο επίπεδο zx του συστήματος συντεταγμένων της βάσης. Επίσης το σημείο C θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων της βάσης.
- Τέλος εάν κανένα από τα a_{3x} και a_{3y} δεν είναι ίσα με το μηδέν τότε θα πρέπει τα r_{1x} και r_{1y} να μηδενίζονται ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο C θα πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων της βάσης.

Σαν συμπέρασμα προκύπτει ότι σε αυτήν την κινηματική ιδιομορφία, σε οποιαδήποτε περίπτωση θα πρέπει το σημείο C να βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής της πρώτης άρθρωσης. Η κινηματική αυτή ιδιομορφία φαίνεται στο (σχήμα 4.2.2.)



Σχήμα 4.2.2. Κινηματική ιδιομορφία ώμου στον ρομποτικό βραχίονα της KUKA KR 15/1

Περίπτωση 4^η

Στην τέταρτη περίπτωση θα εξεταστεί ο μηδενισμός του 4^{ου} και τελευταίου παράγοντα της Ιακωβιανής. Ο παράγοντας αυτός εξαρτάται μόνο από τις κατευθύνσεις των τελευταίων τριών αξόνων και για αυτό το λόγο ονομάζεται κινηματική ιδιομορφία καρπού. Η εξίσωση που θα εξεταστεί είναι η εξής :

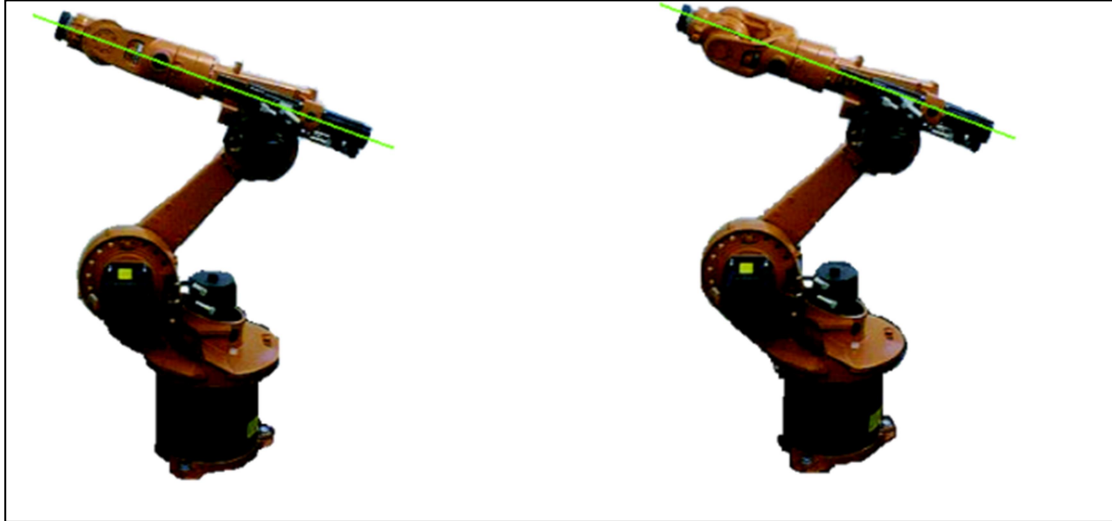
$$a_{4x}a_{5z}a_{6y} - a_{4x}a_{6z}a_{5y} + a_{4y}a_{5x}a_{6z} - a_{4y}a_{6x}a_{5z} + a_{4z}a_{6x}a_{5y} - a_{4z}a_{5x}a_{6y} = 0 \quad (4.26)$$

Για τον προσδιορισμό της κινηματικής αυτής ιδιομορφίας το που θα βρίσκεται το σημείο C δεν επηρεάζει τις πράξεις οπότε επιλέγεται αυθαίρετα για ευκολία των πράξεων να τοποθετηθεί στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων της βάσης. Επιπλέον επειδή αυτή η κινηματική ιδιομορφία επηρεάζεται από την σχέση του προσανατολισμού των αξόνων 4,5 και 6 μπορούμε να θεωρήσουμε τον έναν από αυτούς σταθερό ως προς τους άλλους δύο και της βάσης. Αν θεωρήσουμε σταθερό το e_5 έχουμε τις εξής περιπτώσεις :

- $e_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ τότε η σχέση (4.26) μετασχηματίζεται σε $a_{4y}a_{6z} - a_{4z}a_{6y} = 0$
- $e_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ τότε η σχέση (4.26) μετασχηματίζεται σε $a_{4z}a_{6x} - a_{4x}a_{6z} = 0$
- $e_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ τότε η σχέση (4.26) μετασχηματίζεται σε $a_{4x}a_{6y} - a_{4y}a_{6x} = 0$

Οι τρεις παραπάνω σχέσεις που προκύπτουν σημαίνουν ότι το εξωτερικό γινόμενο των προβολών των δύο διανυσμάτων προσανατολισμού στο σύστημα συντεταγμένων της βάσης πρέπει να γίνονται μηδέν. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι τα e_4 και e_6 είναι παράλληλα.

Με όμοια ανάλυση για τους άλλους δύο άξονες σταθερούς προκύπτει για τον καθέναν από αυτούς ότι οι άλλοι δύο θα πρέπει να είναι παράλληλοι μεταξύ τους. Όμως στο συγκεκριμένο ρομπότ αυτό είναι αδύνατο, οπότε η μοναδική περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη είναι αυτή στην οποία οι άξονες περιστροφής 4 και 6 είναι παράλληλοι και φαίνεται στο (σχήμα 4.2.3.).



Σχήμα 4.2.3. Κινηματική Ιδιομορφία καρπού στον ρομποτικό βραχίονα της KUKA KR 15/1

5. Συμπεράσματα-Επόμενα Βήματα

Αρχικά αυτό που παρατηρήθηκε είναι η σημαντικότητα της σωστής τοποθέτησης των αξόνων στην μέθοδο Denavit – Hartenberg, αλλά και η επαλήθευση του αποτελέσματος. Στην αρχή, είχε υποτεθεί μία ακολουθία παραμέτρων των Denavit – Hartenberg η οποία φαινόταν σωστή. Κατά την επαλήθευση στο ρομπότ οι παράμετροι αυτοί έδιναν σωστό διάνυσμα από το σύστημα συντεταγμένων της βάσης σε αυτό του end-effector όμως ο προσανατολισμός ήταν αντίθετος. Μετά από τροποποίηση των παραμέτρων το αποτέλεσμα έγινε ίδιο με αυτό του ρομπότ. Στην συνέχεια ένα σημαντικό κομμάτι ήταν η πιστοποίηση της αντίστροφης κινηματικής. Όταν ο αλγόριθμος της αντίστροφης κινηματικής ελέγχθηκε για πάρα πολλές τιμές παρατηρήθηκε ότι για τιμές μεγαλύτερες από 180° και μικρότερες από -180° ο αλγόριθμος αδυνατούσε να προσδιορίσει τις λύσεις. Αυτό οφειλόταν στην χρησιμοποίηση της συνάρτησης atan2 (αντίστροφης εφαπτομένης), που περιόριζε τις λύσεις στο εύρος από -180° μέχρι 180° . Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν οι δυαδικές ακολουθίες Status και Turn Bits, για την διόρθωση των λύσεων αυτών αλλά και την επιλογή της σωστής ανάμεσα στα 8 σετ λύσεων που προέκυπταν. Τέλος ο υπολογισμός της Ιακωβιανής έγινε ως προς το σύστημα συντεταγμένων βάσης, ενώ αν γινόταν ως προς το σημείο τομής των τελευταίων τριών αξόνων C, όπως και έγινε για τον υπολογισμό των κινηματικών ιδιομορφιών, οι πράξεις θα ήταν φανερά λιγότερες.

Με γνωστές και επαληθευμένες την ευθεία και αντίστροφη κινηματική αλλά και την Ιακωβιανή, πλέον το ρομπότ είναι διαθέσιμο για εργασία. Αρχικά θα πρέπει να επαληθευτεί η Ιακωβιανή μέσω κάποιου επαναληπτικού αλγορίθμου. Στην συνέχεια μπορεί να υλοποιηθεί η αντίστροφη κινηματική μέσω της Ιακωβιανής και να συγκριθεί με την αναλυτική μέθοδο. Με γνωστές πλέον δύο μεθόδους για τον υπολογισμό της αντίστροφης κινηματικής, ένα από τα επόμενα βήματα θα μπορούσε να είναι η υλοποίηση εργασιών στον χώρο του ρομποτικού βραχίονα. Επιπλέον, μπορεί να δημιουργηθεί Simulator με βάση τον ρομποτικό βραχίονα KUKA KR15/1 ή να βρεθεί κάποιος ήδη υπάρχον και το ρομπότ να χρησιμοποιηθεί και για μαθησιακούς σκοπούς.

Βιβλιογραφία

- [1] Robotics: Modeling, Planning and Control by Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo
- [2] Introduction to Robotics: Mechanics and Control (3rd edition) John J. Craig
- [3] Fundamental of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms (Second edition) Jorge Angeles
- [4] KUKA specification of robots KR 6/2, KR 15/1 and KR 15L6/2
- [5] KUKA software KR C, expert programming. KUKA System Software (KSS) Release 4.1
- [6] A Kinematic Notation of Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices J.Denavit, R.S. Hartenberg
- [7] Euler Angle Formulas David Eberly, Geometric Tools, LLC

Ιστοσελίδες

- [1] <https://www.kuka.com/>
- [2] <https://www.mathworks.com/>
- [3] <https://www.robot-forum.com/robotforum/>

Εικόνες

Από τις εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν οι (2.1.) και (2.3.) είναι από το εγχειρίδιο της KUKA για τα ρομπότ KR 6/2, KR 15/1 and KR 15L6/2, οι (3.3.3.) και (3.4.1.) από το εγχειρίδιο της KUKA για το λογισμικό KR C.

Οι εικόνες (3.2.1.) και (3.2.2.) από το βιβλίο [1].

Οι εικόνες (3.3.1.), (3.3.2) και (4.1.1.) από το βιβλίο [3].

APPENDIX

A ΜΕΡΟΣ

Στο πρώτο μέρος του APPENDIX παρατίθεται ο κώδικας της Matlab για τον υπολογισμό της ευθείας κινηματικής. Οδηγίες για την χρησιμοποίηση του αλλά και εξήγηση των τύπων βρίσκονται σε σχόλια σε όλο τον κώδικα.

```
%% Block 1
%dedomena eytheias kinimatikis

clear all
clc

%arithmitikes times gwniwn oi eisaswgi ginetai se moires mesa stin
%parenthesi

th1=deg2rad(62.02);
th2=deg2rad(-81.86);
th3=deg2rad(66);
th4=deg2rad(-5.3);
th5=deg2rad(15.94);
th6=deg2rad(-43.3);

%Otan theloume lysi me symvola se symbolic tote bazoume se sxolia tis
%arithmhtikes times kai kamoume uncommment tis ekfraseis me syms

%syms th1
%syms th2
%syms th3
%syms th4
%syms th5
%syms th6

%Stin periptwsi ergaleiou

syms th7
syms derg
syms dtry
syms dtrx

%diorthwseis gwniwn gia na prokryptoun me vasi ti thesi 0 tou rompot alla
%kai tis thetikies gwnies strofis gia na leitourgisei me noumera apla vgalte
%ta sxolia kai balte se sxolia pio katw tis ekfraseis syms

th1=-th1;
th5=-th5;
th3=deg2rad(-90)-th3;

%Parametroi Denavit - Hartenberg

ads=[0.300 0.650 -0.155 0 0 0 dtry];
aan=[deg2rad(-90) deg2rad(180) deg2rad(90) deg2rad(-90) deg2rad(90) deg2rad(180) deg2rad(0)];
d=[0.675 0 0 -0.600 0 -0.140 dtrx];

%Stin periptwsi koptikou ergaleiou

%d(1,6)=d(1,6)+derg;

%% Block 2
%ypologismos twm mitrwn omogenous metasximatismou

for i=1:6
    if i==1
        A1=[cos(th1) -sin(th1)*cos(aan(1,i)) sin(aan(1,i))*sin(th1) ads(1,i)*cos(th1);sin(th1)
cos(aan(1,i))*cos(th1) -sin(aan(1,i))*cos(th1) ads(1,i)*sin(th1);0 sin(aan(1,i)) cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        elseif i==2
```

```

        A2=[cos(th2)   -sin(th2)*cos(aan(1,i))   sin(aan(1,i))*sin(th2)   ads(1,i)*cos(th2);sin(th2)
cos(aan(1,i))*cos(th2)   -sin(aan(1,i))*cos(th2)   ads(1,i)*sin(th2);0   sin(aan(1,i))   cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        elseif i==3
            A3=[cos(th3)   -sin(th3)*cos(aan(1,i))   sin(aan(1,i))*sin(th3)   ads(1,i)*cos(th3);sin(th3)
cos(aan(1,i))*cos(th3)   -sin(aan(1,i))*cos(th3)   ads(1,i)*sin(th3);0   sin(aan(1,i))   cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        elseif i==4
            A4=[cos(th4)   -sin(th4)*cos(aan(1,i))   sin(aan(1,i))*sin(th4)   ads(1,i)*cos(th4);sin(th4)
cos(aan(1,i))*cos(th4)   -sin(aan(1,i))*cos(th4)   ads(1,i)*sin(th4);0   sin(aan(1,i))   cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        elseif i==5
            A5=[cos(th5)   -sin(th5)*cos(aan(1,i))   sin(aan(1,i))*sin(th5)   ads(1,i)*cos(th5);sin(th5)
cos(aan(1,i))*cos(th5)   -sin(aan(1,i))*cos(th5)   ads(1,i)*sin(th5);0   sin(aan(1,i))   cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        elseif i==6
            A6=[cos(th6)   -sin(th6)*cos(aan(1,i))   sin(aan(1,i))*sin(th6)   ads(1,i)*cos(th6);sin(th6)
cos(aan(1,i))*cos(th6)   -sin(aan(1,i))*cos(th6)   ads(1,i)*sin(th6);0   sin(aan(1,i))   cos(aan(1,i))
d(1,i);0 0 0 1];
        end
    end

%Stin periptwsi ergaleioy opws troxos uncommand

%A7=[cos(th7)   -sin(th7)*cos(aan(1,7))   sin(aan(1,7))*sin(th7)   ads(1,7)*cos(th7);sin(th7)
cos(aan(1,7))*cos(th7)   -sin(aan(1,7))*cos(th7)   ads(1,i)*sin(th7);0   sin(aan(1,7))   cos(aan(1,7))
d(1,7);0 0 0 1]

vpa(A1,3)
vpa(A2,3)
vpa(A3,3)
vpa(A4,3)
vpa(A5,3)
vpa(A6,3)

%Stin periptwsi ergaleioy opws troxos uncommand

%vpa(A7,3)

%% Block 3
%ypologismos telikou mitrwou vasis end-effector

T=A1*A2*A3*A4*A5*A6;
T=vpa(T,5)

%Stin periptwsi ergaleioy opws troxos uncommand

%Ttr=A1*A2*A3*A4*A5*A6*A7;
%Ttr=vpa(Ttr,5)

%Metatropi tou mitrwou prosanatolismou se gwnies Euler roll pitch yaw ZYX

if (T(3,1)<1);
    if (T(3,1)<1);
        B=rad2deg(asin(-T(3,1)))
        A=rad2deg(atan2(T(2,1),T(1,1)))
        C=rad2deg(atan2(T(3,2),T(3,3)))
    else
        B=90
        A=rad2deg(-atan2(-T(2,3),T(2,2)))
        C=0
    end
else
    B=-90
    A=rad2deg(atan2(-T(2,3),T(2,2)))
    C=0
end
end

```

Μέρος Β

Στο μέρος Β του APPENDIX παρατίθεται ο κώδικας της Matlab για τον υπολογισμό της αντίστροφης κινηματικής. Τοποθετήστε τα αρχεία του κεντρικού κώδικα όπως και των συναρτήσεων σε ένα φάκελο και ονομάστε τα αρχεία των συναρτήσεων με το όνομα που δύνεται σε κάθε συνάρτηση.

```
%% Block 1
% Antistrofi kinimatiki rompotikou vraxiona 6 vathmon eleytherias
% San dedomena pairnei ton pinaka prosanatolismou to dianysma tou end
% effector kai ta Status and turn bits

clear all
clc
%% Block 2
%Dedomena Prosanatolismos kai denavit Hartenberg
%DH parametroi gia ton rompotiko vraxiona KUKA KR15/1
%oi parametroi aytoi einai diaforetikoi apo aytous tis eytheias gia na
%dieykolithoun oi prakseis stis telikes gwnies oi swstes parametroi einai
%aytes sto programma tis eytheias kinimatikis

% parametros a se metra
a1=0.300; a2=0.650; a3=0.155; a4=0; a5=0; a6=0;
% Parametros d (kata Siciliano) se metra
% b6 gia kuka =0.14 se RA
b1=0.675; b2=0; b3=0; b4=0.600; b5=0; b6=0.140;
% Parametros strofis se moires oi opoies metepeita metatrepontai se rad
alpha1=degtorad(-90); alpha2=degtorad(0) ; alpha3=degtorad(-90) ;
alpha4=degtorad(90) ; alpha5=degtorad(-90) ; alpha6=degtorad(0) ;

%% Block 3
%dedomena thesi kai pinakas prosanatolismou
% Pinakas prosanatolismou 'Q'

Q=[-0.7392,-0.13479,0.65986;-0.63305,-0.19533,-0.74906;0.22986,-0.97143,0.059064];

%diorthoseis ston pinaka prosanatolismou gia na vrisketai se armonia me tis
%dh parametrous pou xrisimopoiisame stin antistrofi eseis apla peirakste
%mono ton pinaka Q kai valte ayton pou tha sas vgalei i eytheia sto
%programma tis eytheias kinimatikis

Q(1,1)=-Q(1,1);
Q(1,2)=-Q(1,2);
Q(2,1)=-Q(2,1);
Q(2,2)=-Q(2,2);
Q(3,1)=-Q(3,1);
Q(3,2)=-Q(3,2);

%Status and Turn Bits

Status=[1,1,0];
Turn=[0,1,0,0,1,0];

%% Block 4
% Uncomment Block 3 and uncomment block 4 gia na eisagetai strofi peri Z, Y, X
% Kai comment block 4
% O pinakas peristrofis mporei na vrethei me ton pollaplasiasmo
% ZYX EULER ANGLES
% Q =Rotation about Z * Rotation about Y * Rotiatoin about X
% Dedomena peristrofi peri x, y and z
% alpha = degtorad(90);
% beta = degtorad(0);
% gamma = degtorad(30);
%
% Q_x = [cos(alpha) -sin(alpha) 0; sin(alpha) cos(alpha) 0; 0 0 1];
% Q_y = [cos(beta) 0 sin(beta); 0 1 0; -sin(beta) 0 cos(beta)];
% Q_z = [1 0 0;0 cos(gamma) -sin(gamma) ; 0 sin(gamma) cos(gamma)];
% Q = Q_x*Q_y*Q_z;
%% Block 5
% thesi tou telikou simeiou drasis end-effector
% KUKA RA
xe=0.69332;
ye=-1.0541;
```

```

ze=1.257;
Ikin_sol_wcell=cell(1,3);
sol=1;
%% Ypologismos tou simeiou tomis C tw n aksonwn tou karpou
% thesi tou 'C' ,i.e. Karpos
xc = xe - (Q(1,1)*a6 + Q(1,2)*b6*sin(alpha6)+Q(1,3)*b6*cos(alpha6));
yc = ye - (Q(2,1)*a6 + Q(2,2)*b6*sin(alpha6)+Q(2,3)*b6*cos(alpha6));
zc = ze - (Q(3,1)*a6 + Q(3,2)*b6*sin(alpha6)+Q(3,3)*b6*cos(alpha6));
%% Statheres pou perigrafontai sto vivlio fundamental of Robotic mechanical systems: theory,
methods and algorithms tou Jorge Angeles
A=2*a1*xc;
B=2*a1*yc;
C=2*a2*a3-2*b2*b4*sin(alpha2)*sin(alpha3);
D=2*a3*b2*sin(alpha2)+2*a2*b4*sin(alpha3);
E=a2^2+a3^2+b2^2+b3^2+b4^2-a1^2-xc^2-yc^2-(zc-
b1)^2+2*b2*b3*cos(alpha2)+2*b2*b4*cos(alpha2)*cos(alpha3)+2*b3*b4*cos(alpha3);
F=yc*sin(alpha1);
G=-xc*sin(alpha1);
H=-b4*sin(alpha2)*sin(alpha3);
I=a3*sin(alpha2);
J=b2+b3*cos(alpha2)+b4*cos(alpha2)*cos(alpha3)-(zc-b1)*cos(alpha1);
K=4*a1^2*H^2+(sin(alpha1))^2*C^2;
L=4*a1^2*I^2+(sin(alpha1))^2*D^2;
M=2*(4*a1^2*H*I+(sin(alpha1))^2*C*D);
N=2*(4*a1^2*I*J+(sin(alpha1))^2*D*E);
P=2*(4*a1^2*J*I+(sin(alpha1))^2*E*D);
QQ=4*a1^2*J^2+(sin(alpha1))^2*E^2-4*a1^2*(sin(alpha1))^2*(xc^2+yc^2); % Afou to Q xrisimopoietai
gia ton prosanatolismo
R=4*a1^2*(J-H)^2+(sin(alpha1))^2*(E-C)^2-4*(xc^2+yc^2)*a1^2*(sin(alpha1))^2;
S=4*(4*a1^2*I*(J-H)+(sin(alpha1))^2*D*(E-C));
T=2*(4*a1^2*(J^2-H^2+2*I^2)+(sin(alpha1))^2*(E^2-C^2+2*D^2)-4*(xc^2+yc^2)*a1^2*(sin(alpha1))^2);
U=4*(4*a1^2*I*(J+H)+(sin(alpha1))^2*D*(E+C));
V=4*a1^2*(J+H)^2+(sin(alpha1))^2*(E+C)^2-4*(xc^2+yc^2)*a1^2*(sin(alpha1))^2;
%% Tesseris lyseis gia tin thita 3
syms zeta
% m=R*gama3^4+S*gama3^3+T*gama3^2+U*gama3+V;
Z=eval(solve(R*zeta^4+S*zeta^3+T*zeta^2+U*zeta+V,zeta));
a=imag(Z);
temp=1;
THETA1=[0 0 0 0];
THETA2=[0 0 0 0];
THETA3=[0 0 0 0];
for i=1:4
if a(i)==0
theta3=2*atan2(Z(i),1);
theta3_d=radtodeg(theta3);
THETA3(temp)=theta3_d;
dell1=-2*a1*sin(alpha1)*(xc^2+yc^2);
A11=a2+a3*cos(theta3)+b4*sin(alpha3)*sin(theta3);
A12=-
a3*cos(alpha2)*sin(theta3)+b3*sin(alpha2)+b4*cos(alpha2)*sin(alpha3)*cos(theta3)+b4*sin(alpha2)*co
s(alpha3);
del12=A11^2+A12^2;
if abs(dell1)>0.0001
c1=(1/dell1)*(-G*(C*cos(theta3)+D*sin(theta3)+E)+B*(H*cos(theta3)+I*sin(theta3)+J));
s1=(1/dell1)*(F*(C*cos(theta3)+D*sin(theta3)+E)-A*(H*cos(theta3)+I*sin(theta3)+J));
thetal=atan2(s1,c1);
thetal_d=radtodeg(thetal);
THETA1(temp)=thetal_d;
if abs(dell2)>0.0001
c2=(1/dell2)*(A11*(xc*cos(thetal)+yc*sin(thetal)-a1)-A12*(-
xc*cos(alpha1)*sin(thetal)+yc*cos(alpha1)*cos(thetal)+(zc-b1)*sin(alpha1)));
s2=(1/dell2)*(A12*(xc*cos(thetal)+yc*sin(thetal)-a1)+A11*(-
xc*cos(alpha1)*sin(thetal)+yc*cos(alpha1)*cos(thetal)+(zc-b1)*sin(alpha1)));
theta2=atan2(s2,c2);
theta2_d=radtodeg(theta2);
THETA2(temp)=theta2_d;
end
end
end
temp=temp+1;
end
Theta_123= [THETA1' THETA2' THETA3'];
%
Thetal23=[Theta_123(4,:);Theta_123(3,:);Theta_123(2,:);Theta_123(1,:)];
%
%% Parousiasi lysewn
% disp('solution1')
sol1_degree = [Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)];
sol1=degtorad([Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)]);
%
% disp('solution2')
sol2_degree = [Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)];
sol2 = degtorad([Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)]);
%
% disp('solution3')
sol3_degree = [Theta_123(3,1) Theta_123(3,2) Theta_123(3,3)];
sol3 = degtorad([Theta_123(3,1) Theta_123(3,2) Theta_123(3,3)]);

```

```

%
% disp('solution4')
sol4 = [Theta_123(3,1) Theta_123(3,2) Theta_123(3,3)];
%
% disp('solution5')
sol5_degree = [Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)];
sol5 = deg2rad([Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)]);
%
% disp('solution6')
sol6_degree = [Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)];
sol6 = degtorad([Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)]);
%
% disp('solution7')
sol7_degree = [Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)];
sol7 = degtorad([Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)]);
%
% disp('solution8')
sol8_degree = [Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)];
sol8 = degtorad([Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)]);
%% Antistrofi kinimatiki karpou
% Gia lyseis Set 1 angle 4 5 6
R36_1 = ((RZ(sol1(3))*RX(alpha3))*((RZ(sol1(2))*RX(alpha2))*((RZ(sol1(1))*RX(alpha1))'*Q) ; % RZ
and RX are rotation functions
Theta_456_1 = Theta456(R36_1) ; %Theta456 is a function
% Gia lyseis set 3 angle 4, 5, 6
%Gia lyseis set 3 and 4
R36_3 = ((RZ(sol3(3))*RX(alpha3))*((RZ(sol3(2))*RX(alpha2))*((RZ(sol3(1))*RX(alpha1))'*Q) ; % RZ
and RX are rotation functions
Theta_456_3 = Theta456(R36_3) ; %Theta456 is a function
%
% Gia lyseis set 3 angle 4, 5, 6
% gia lyseis set 5 and 6
R36_5 = ((RZ(sol5(3))*RX(alpha3))*((RZ(sol5(2))*RX(alpha2))*((RZ(sol5(1))*RX(alpha1))'*Q) ; % RZ
and RX are rotation functions
Theta_456_5 = Theta456(R36_5) ; %Theta456 is a function
% Gia lyseis set 3 angle 4, 5, 6
% Gia lyseis set 7 and 8
R36_8 = ((RZ(sol8(3))*RX(alpha3))*((RZ(sol8(2))*RX(alpha2))*((RZ(sol8(1))*RX(alpha1))'*Q) ; % RZ
and RX are rotation functions
Theta_456_7 = Theta456(R36_8) ; %Theta456 is a function

%% Parousiasi lysewn
sol1_degrees = [-Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)+90 -Theta_456_1(2,1)
Theta_456_1(1,2) -Theta_456_1(1,3)];
sol2_degrees = [-Theta_123(4,1) Theta_123(4,2) Theta_123(4,3)+90 -Theta_456_1(1,1)
Theta_456_1(2,2) -Theta_456_1(2,3)];
sol3_degrees = [-Theta_123(3,1) Theta_123(3,2) Theta_123(3,3)+90 -Theta_456_3(2,1)
Theta_456_3(1,2) -Theta_456_3(1,3)];
sol4_degrees = [-Theta_123(3,1) Theta_123(3,2) Theta_123(3,3)+90 -Theta_456_3(1,1)
Theta_456_3(2,2) -Theta_456_3(2,3)];
sol5_degrees = [-Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)+90 -Theta_456_5(2,1)
Theta_456_5(1,2) -Theta_456_5(1,3)];
sol6_degrees = [-Theta_123(2,1) Theta_123(2,2) Theta_123(2,3)+90 -Theta_456_5(1,1)
Theta_456_5(2,2) -Theta_456_5(2,3)];
sol7_degrees = [-Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)+90 -Theta_456_7(2,1)
Theta_456_7(1,2) -Theta_456_7(1,3)];
sol8_degrees = [-Theta_123(1,1) Theta_123(1,2) Theta_123(1,3)+90 -Theta_456_7(1,1)
Theta_456_7(2,2) -Theta_456_7(2,3)];
%% Synexeia
Ikin_sol=[sol1_degrees ; sol2_degrees; sol3_degrees; sol4_degrees; sol5_degrees; sol6_degrees;
sol7_degrees; sol8_degrees];
% Wrapping angle in the range of -180 to 180 degrees
[nrows ncol]= size(Ikin_sol);
for r = 1:nrows
for c = 1:ncol
Ikin_sol_w(r,c)=Ikin_sol(r,c);
Ikin_sol_w(r,c) = mod(Ikin_sol(r,c),360);
if (Ikin_sol_w(r,c)) < -180
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)+360;
elseif (Ikin_sol_w(r,c)) > 180
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)-360;
end
end
end
Ikin_sol_w
for r = 1:nrows
c=4;
if (Turn(1,3)==0)&&(Ikin_sol_w(r,c)<0);
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)+360;
elseif (Turn(1,3)==1)&&(Ikin_sol_w(r,c)>0);
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)-360;
end
end
Ikin_sol_w;
for r = 1:nrows

```



```

c=6;
if (Turn(1,1)==0)&&(Ikin_sol_w(r,c)<0);
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)+360;
elseif (Turn(1,1)==1)&&(Ikin_sol_w(r,c)>0);
Ikin_sol_w(r,c) = Ikin_sol_w(r,c)-360;
end
%
end
Ikin_sol_w;
format bank
Ikin_sol_wcell{sol}= Ikin_sol_w;
%% Apeikonisi tou pinaka lysewn
printmat(Ikin_sol_w, 'Eight Inverse Kinematics Solution of Wrist Partitioned Robot',...
'Sol1 Sol2 Sol3 Sol4 sol5 Sol6 Sol7 Sol8',...
'Theta_1 Theta_2 Theta_3 Theta_4 Theta_5 Theta_6')

```

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

RX (Περιστροφή κατά X)

```

function Rotmat = RX(angle)
c = cos(angle); s = sin(angle);
Rotmat = [ 1 0 0;
0 c -s;
0 s c ];
end

```

RY (Περιστροφή κατά Y)

```

function Rotmat = RY(angle)
c = cos(angle); s = sin(angle);
Rotmat = [ c 0 s;
0 1 0;
-s 0 c];
end

```

RZ (Περιστροφή κατά Z)

```

function Rotmat = RZ(angle)
c = cos(angle); s = sin(angle);
Rotmat = [ c -s 0;
s c 0;
0 0 1];
end

```

ΘΗΤΑ456 (Λύσεις Σφαιρικού Καρπού)

```

% dedomeno tou function einai o pinakas peristrofis
% R_30(Transpose)* R*60 = R_63
% R_63 einai o pinakas peristrofis tou EE w.r.t wrist
% To dedomeno Q tis function einai o R_63 kai dinei tin antistrofi kinimatiki twn gwniwn 4, 5, 6.
function Theta_456 = Theta456(Q)
% Prwti lysi se rad
theta_41=atan2(Q(2,3),Q(1,3)); % 6.43a
theta_51=atan2(sqrt(Q(1,3)*Q(1,3)+Q(2,3)*Q(2,3)),Q(3,3)); % 6.43b
theta_61=atan2(-Q(3,2),Q(3,1)); % 6.43c
% deyteri lysi se rad
theta_42=theta_41+pi;
theta_52=-theta_51;
theta_62=theta_61+pi;
% metatropi se moires
% apotelesma gwniwn se moires
r2d=180/pi; %r2d simainei rad se moires paragontas
th41d=theta_41*r2d;
th51d=theta_51*r2d;
th61d=theta_61*r2d;
th42d=theta_42*r2d;
th52d=theta_52*r2d;
th62d=theta_62*r2d;
% disp('dyo set lysewn dynontai se morfi grammwn');
Theta_456= [th41d th51d th61d;
th42d th52d th62d];
end

```

ΜΕΡΟΣ Γ

Στο Γ μέρος του APPENDIX παρατίθεται ο κώδικας σε Matlab για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής.

```
% Function gia to ypologismo Iakwvianis 6 vathmwv eleyhterias,
% Oi times twv gnwv einai [theta1, theta2, theta3, theta4, theta5, theta6]
function [kri51_jacobian] = kuka_jacobian( angle_value)
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 b1 b2 b3 b4 b5 b6 a11 a12 a13 a14 a15 a16 th1 th2 th3 th4 th5 th6
% % Arithmitikes times twv DH
% a1=.3; a2=.65; a3=-.155; a4=0; a5=0; a6=0;
%
% % Parametros d se metra
% % b6 gia kuka =0.14 se RA
% b1=.675; b2=0; b3=0; b4=-0.6; b5=0; b6=-0.14;
%
% % Parametros a se moires
% A1=degtorad(-90); A2=degtorad(180) ; A3=degtorad(90) ;
% A4=degtorad(-90) ; A5=degtorad(90) ; A6=degtorad(180) ;
b1 = 0.675; a1 = 0.300 ; a11 = deg2rad(-90) ; sal1 = sin(a11) ; cal1 = cos(a11);
b2 = 0 ; a2 = 0.650; a12 = deg2rad(180) ; sal2 = sin(a12) ; cal2 = cos(a12);
b3 = 0 ; a3 = -0.155; a13 = deg2rad(90) ; sal3 = sin(a13) ; cal3 = cos(a13);
b4 = -0.600; a4 = 0 ; a14 = deg2rad(-90) ; sal4 = sin(a14) ; cal4 = cos(a14);
b5 = 0 ; a5 = 0 ; a15 = deg2rad(90) ; sal5 = sin(a15) ; cal5 = cos(a15);
b6 = -0.140; a6 = 0 ; a16 = deg2rad(180) ; sal6 = sin(a16) ; cal6 = cos(a16);
% th1 = theta_1 ; th2 = theta_2 ; th3 = theta_3 ; th4 = theta_4 ; th5 = theta_5 ; th6 = theta_6;
% th1 = angle_value(1); th2 = angle_value(2); th3 = angle_value(3); th4 = angle_value(4); th5 =
angle_value(5); th6 = angle_value(6);
th1=deg2rad(57.66);
th2=deg2rad(-77.25);
th3=deg2rad(53.7);
th4=deg2rad(-23.6);
th5=deg2rad(50.6);
th6=deg2rad(186.73);

th1=-th1;
th5=-th5;
th3=deg2rad(-90)-th3;
%% pinakes omogenwn metasximatismwn
t1m = [ cos(th1) , -sin(th1)*cal1 , sin(th1)*sal1 , cos(th1)*a1 ;
sin(th1) , cos(th1)*cal1 , -cos(th1)*sal1 , sin(th1)*a1 ;
0 , sal1 , cal1 , b1 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
t2m = [ cos(th2) , -sin(th2)*cal2 , sin(th2)*sal2 , cos(th2)*a2 ;
sin(th2) , cos(th2)*cal2 , -cos(th2)*sal2 , sin(th2)*a2 ;
0 , sal2 , cal2 , b2 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
t3m = [ cos(th3) , -sin(th3)*cal3 , sin(th3)*sal3 , cos(th3)*a3 ;
sin(th3) , cos(th3)*cal3 , -cos(th3)*sal3 , sin(th3)*a3 ;
0 , sal3 , cal3 , b3 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
t4m = [ cos(th4) , -sin(th4)*cal4 , sin(th4)*sal4 , cos(th4)*a4 ;
sin(th4) , cos(th4)*cal4 , -cos(th4)*sal4 , sin(th4)*a4 ;
0 , sal4 , cal4 , b4 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
t5m = [ cos(th5) , -sin(th5)*cal5 , sin(th5)*sal5 , cos(th5)*a5 ;
sin(th5) , cos(th5)*cal5 , -cos(th5)*sal5 , sin(th5)*a5 ;
0 , sal5 , cal5 , b5 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
t6m = [ cos(th6) , -sin(th6)*cal6 , sin(th6)*sal6 , cos(th6)*a6 ;
sin(th6) , cos(th6)*cal6 , -cos(th6)*sal6 , sin(th6)*a6 ;
0 , sal6 , cal6 , b6 ;
0 , 0 , 0 , 1 ; ];
% nea prosthiki
dh = t1m * t2m * t3m * t4m * t5m * t6m;
% dh(1:3,1:3) = initial_orientation(1:3,1:3);
%% eksagwgi ai dianysmatwn apo systemata syntetagmenwn
t56m = t5m * t6m ;
t46m = t4m * t56m ;
t36m = t3m * t46m ;
t26m = t2m * t36m ;
t16m = t1m * t26m ;
% disp( t16m - dh); % gia to elegxo an i eksagwgi egine swsta;
% eksagwgi a_i dianysmatwn
a6_vec = t6m(1:3 , 4) ;
a56_vec = t56m(1:3 , 4);
a46_vec = t46m(1:3 , 4);
a36_vec = t36m(1:3 , 4);
a26_vec = t26m(1:3 , 4);
a16_vec = t16m(1:3 , 4);
%% eksagwgi twv e_i dianysmatwn apo ta systhmata syntetagmenwn
% Arxika prepei na paroume tous pinakes peristrofis
```

```

rot_1m = t1m(1:3,1:3);
rot_2m = rot_1m * t2m(1:3,1:3);
rot_3m = rot_2m * t3m(1:3,1:3);
rot_4m = rot_3m * t4m(1:3,1:3);
rot_5m = rot_4m * t5m(1:3,1:3);
e1_vec = transpose([ 0 0 1]);
e2_vec = rot_1m(1:3,3);
e3_vec = rot_2m(1:3,3);
e4_vec = rot_3m(1:3,3);
e5_vec = rot_4m(1:3,3);
e6_vec = rot_5m(1:3,3);
e1_cross_a1_vec = cross(e1_vec, a16_vec ) ;
e2_cross_a2_vec = cross(e2_vec, a26_vec ) ;
e3_cross_a3_vec = cross(e3_vec, a36_vec ) ;
e4_cross_a4_vec = cross(e4_vec, a46_vec ) ;
e5_cross_a5_vec = cross(e5_vec, a56_vec ) ;
e6_cross_a6_vec = cross(e6_vec, a6_vec ) ;
%% Ektypwsi tou pinaka iakwvianis
%   kr151_jacobian   = [   e1_cross_a1_vec   e2_cross_a2_vec   e3_cross_a3_vec   e4_cross_a4_vec
e5_cross_a5_vec e6_cross_a6_vec ] ;
i=1;
kr151_jacobian = [ e1_vec e2_vec e3_vec e4_vec e5_vec e6_vec ;
e1_cross_a1_vec e2_cross_a2_vec e3_cross_a3_vec e4_cross_a4_vec e5_cross_a5_vec e6_cross_a6_vec ]
;
end

```