



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Πολύ ακριβής υπολογισμός συνθέτων αγωγιμοτήτων εισόδου
γραμμικών κεραιών με χρήση μεθόδων επιτάχυνσης σύγκλισης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αχιλλέας Ε. Μαρινάκης

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Πολύ ακριβής υπολογισμός συνθέτων αγωγιμοτήτων εισόδου
γραμμικών κεραιών με χρήση μεθόδων επιτάχυνσης σύγκλισης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αχιλλέας Ε. Μαρινάκης

Επιβλέπων : Γεώργιος Ι. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την _____ Ιουλίου 2011

.....
Γ. Φικιώρης
Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ι. Τσαλαμέγκας
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ι. Ρουμελιώτης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2011

.....
Αχιλλέας Ε. Μαρινάκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Αχιλλέας Ε. Μαρινάκης 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ασχολείται με την μελέτη της γραμμικής κεραίας τροφοδοτούμενης στο κέντρο της. Η κεραία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ο θεμελιώδης τύπος κεραίας εκπομπής. Η κεραία προσεγγίζεται από ένα θεωρητικό μοντέλο που ονομάζεται «σωληνοειδές δίπολο». Πρόκειται για έναν τέλεια αγωγίμο μεταλλικό σωλήνα με απείρως λεπτά τοιχώματα, με το σημείο τροφοδοσίας ακριβώς στο κέντρο του. Βασικός σκοπός της μελέτης αυτής, είναι ο προσδιορισμός της ρευματικής κατανομής κατά μήκος της κεραίας, και επομένως της συνθέτου αγωγιμότητας εισόδου αυτής. Με την βοήθεια των κυματικών εξισώσεων και εξισώσεων Maxwell, γίνονται η εξαγωγή της ολοκληρωτικό-διαφορικής εξίσωσης του Rocklington και κατόπιν της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallen, για τον ακριβή πυρήνα. Χρησιμοποιούνται δύο μοντελοποιήσεις για την τροφοδοσία της κεραίας: η γεννήτρια δέλτα-συνάρτησης (delta function generator - DFG) και η γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (frill generator - FG).

Στη συνέχεια λύνουμε αριθμητικά την ακριβή εξίσωση του Hallen, χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές μεθόδους ροπών (Moment Methods): την μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (Galerkin method pulse functions - GMPF) και την τεχνική σημειακής ισότητας με τριγωνικές συναρτήσεις (point-matching triangular functions - PMTF). Στους αριθμητικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιούμε τον βελτιωμένο τύπο για την σταθερά C του δεξιού μέλους της εξίσωσης Hallen, ο οποίος έχει προταθεί από τον κύριο Φικιώρη [1], έτσι ώστε η αριθμητική μας λύση να συγκλίνει ταχύτερα.

Η σύγκλιση γίνεται ακόμη ταχύτερη, όταν στα αποτελέσματά μας εφαρμόσαμε συγκεκριμένες μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης (convergence acceleration methods - CAM), οι οποίες έχουν προταθεί από τον κύριο Φικιώρη [2]. Με την βοήθεια των μεθόδων αυτών, οι οποίες εφαρμόζονται πολύ απλά, καταγράφουμε πολύ ακριβείς τιμές συνθέτων αγωγιμοτήτων εισόδου γραμμικών κεραιών για διάφορα h/λ και a/λ , τις οποίες και παρουσιάζουμε στα αντίστοιχα γραφήματα. Πολύ καλές μέθοδοι έχουν προταθεί και από τον Oscar P. Bruno [3], αλλά στην διεθνή βιβλιογραφία, δεν βρήκαμε να έχουν εφαρμογή σε κεραίες εκπομπής.

Τέλος, συγκρίνουμε τα θεωρητικά μας αποτελέσματα με τα αντίστοιχα πειραματικά, που καταγράφονται στην εργασία του Richard B. Mack [4], εν έτει 1963. Για την σύγκριση χρησιμοποιείται η τροφοδοσία FG, καθώς αυτή προσεγγίζει καλύτερα το εν λόγω πείραμα. Τα συγκριτικά αποτελέσματα φαίνονται σε αντίστοιχα γραφήματα.

Λέξεις-κλειδιά: εξίσωση Hallen, ακριβής πυρήνας, DFG, FG, μέθοδοι ροπών, μέθοδοι επιτάχυνσης σύγκλισης (CAM), πείραμα Mack.

ABSTRACT

This diploma thesis deals with the study of the linear, center-driven antenna, which can be considered to be the most fundamental type of transmitting antenna. The antenna is approached by studying a theoretical model called "tubular dipole". This is a perfectly conducting metallic tube with infinitely thin walls, whose feed point is right at the center. The main purpose of this study is to compute the current distribution along the antenna, and therefore its input admittance. Using the wave equations and Maxwell's equations, we derive Pocklington's integral equation and then Hallen's integral equation, for case of the exact kernel. We use two models for the feed of the antenna: the delta-function generator (DFG) and the frill generator (FG).

We then solve numerically Hallen's exact integral equation, using two different moment methods: the Galerkin method with pulse functions (GMPF) and the point-matching technique with triangular functions (PMTF). In numerical calculations, we use the improved formula for the constant C on the right-hand side of this equation, which has been introduced by Dr. Fikioris [1], so that our numerical solution converges faster.

The convergence becomes even faster when we apply certain convergence acceleration methods (CAM) to our numerical results. These methods have been introduced by Dr. Fikioris [2] some years ago. Using these methods, which are applied very simply, we obtain accurate values of input admittances for linear antennas. These values are presented in the respective charts. Oscar P. Bruno [3] has also introduced some very good methods, but according to the international bibliography, they have not been applied to transmitting antennas.

Finally, we compare our values with those measured by Richard B. Mack [4] in his study in 1963. The most suitable feed for this experiment is the frill generator. The comparison results are shown in the respective charts.

Key-words: Hallen's equation, exact kernel, DFG, FG, moment methods, convergence acceleration methods (CAM), Mack's experiment

EΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, πάνω από όλους, τον καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Φικιώρη, που με εμπιστεύτηκε για την εργασία και μου παρείχε τις πολύτιμες γνώσεις του και την βοήθειά του σε οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα. Η καθοδήγησή του υπήρξε καταπληκτική και η εν γένει συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας ήταν άψογη.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την φίλη μου Αντιγόνη Παπαδάτου, για την πολύτιμη βοήθειά της στην μορφοποίηση της εργασίας. Κλείνοντας, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην οικογένειά μου: στον αδερφό μου και συνάδελφό Νίκο, στους γονείς μου Βαγγέλη και Θέκλα, για την ηθική τους συμπαράσταση κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

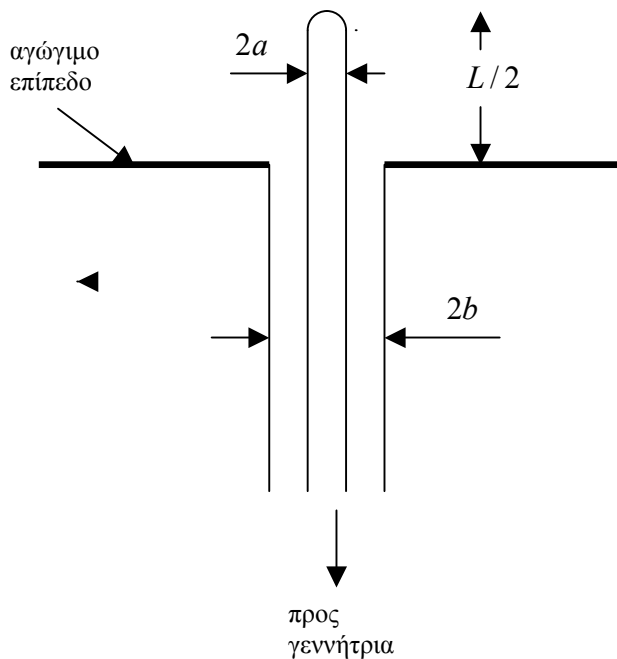
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΩΣΗ HALLEN ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΠΥΡΗΝΑ.....	9
1.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΣΩΛΗΝΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΠΟΛΟΥ	9
1.2 ΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ – ΕΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL	11
1.3 ΕΙΣΩΣΗ ROCKLINGTON ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΠΥΡΗΝΑ	14
1.4 ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΔΕΛΤΑ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Η DELTA FUNCTION GENERATOR	19
1.5 Η ΑΚΡΙΒΗΣ ΕΙΣΩΣΗ ΤΟΥ HALLEN ΓΙΑ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΔΕΛΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (DFG) .	21
1.6 ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΡΟΣΣΩΝ Η FRILL GENERATOR	25
1.7 Η ΑΚΡΙΒΗΣ ΕΙΣΩΣΗ ΤΟΥ HALLEN ΓΙΑ ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΡΟΣΣΩΝ (FG)	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ HALLEN.....	31
2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ (MOMENT METHOD - MOM)	31
2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN ΜΕ ΠΑΛΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (GALERKIN METHOD PULSE FUNCTIONS - GMPF)	33
2.3 ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ (POINT-MATCHING TECHNIQUE OR COLLOCATION TECHNIQUE) ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (TRIANGULAR FUNCTIONS)- PMTF	37
2.4 ΣΤΑΘΕΡΑ C ΤΟΥ ΔΕΞΙΟΥ ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ HALLEN: ΒΕΛΤΙΩΣΗ	41
2.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ GMPF.....	42
2.6 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ PMTF	45
2.7 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FG ΜΕ GMPF	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ (CONVERGENCE ACCELERATION METHODS – CAM).....	55
3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	55
3.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG.....	60
3.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FG.....	66
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MATLAB.....	85
5.1 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ G_b , ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ GMPF	85
5.2 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ G_b , ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ PMTF	88
5.3 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ G_b, B_b , ΓΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FG ΜΕ GMPF	91
5.4 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ	96
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Εξίσωση Hallen για τον ακριβή πυρήνα

1.1 Το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου

Το μοντέλο της κεραίας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το ακόλουθο [5]:

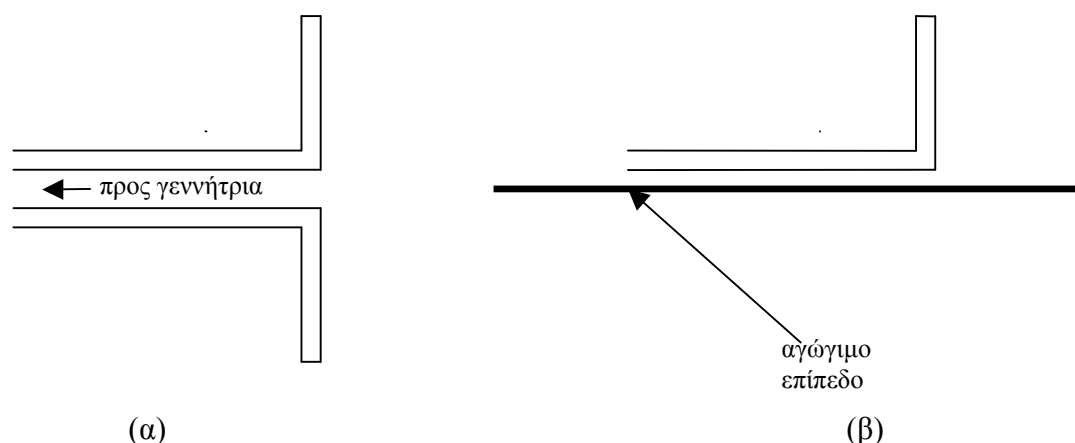


Σχήμα 1.1.1: Ένας απλός τύπος «πραγματικής» κεραίας

Ο εξωτερικός αγωγός, που έχει διάμετρο $2b$ καταλήγει σε ένα αγωγίμο επίπεδο (ground plane). Ο εσωτερικός αγωγός έχει διάμετρο $2a$ και εξέχοντας σχηματίζει μια μονοπολική κεραία μήκους h . Η εν λόγω κεραία είναι λεπτή με την έννοια ότι $a \ll h$ και $ka \ll 1$, όπου $k = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός του ελεύθερου χώρου. Με την εφαρμογή της θεωρίας των ειδώλων (για μικρά b και a), η ολική διάταξη είναι ισοδύναμη με μια διπολική, κεντρικά τροφοδοτούμενη γραμμική κεραία μήκους $2h$ και διαμέτρου $2a$. Η κεραία της πιο πάνω εικόνας έχει σφαιρικό καπάκι, αλλά συναντώνται και κεραίες με επίπεδο καπάκι, ή και χωρίς καπάκι.

Στη διάταξη αυτή, αν και είναι μία από τις απλούστερες που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές, η κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων Maxwell παρουσιάζει διάφορες δυσκολίες. Επιπλέον, η κεραία και η τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς αποτελούν ένα σύνθετο σύστημα ενώ συνήθως στην ανάλυση μας τις θεωρούμε δύο ανεξάρτητα συστήματα. Έτσι, είθισται να αγνοούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ της κεραίας και της τροφοδοτούσας γραμμής μεταφοράς.

Για τους παραπάνω λόγους, θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε ένα πιο απλό θεωρητικό μοντέλο, που λέγεται «σωληνοειδές δίπολο». Το σωληνοειδές δίπολο χρησιμεύει για την μοντελοποίηση όχι μόνο της κεραίας του σχήματος 1.1.1 αλλά και άλλων πραγματικών κεραιών, όπως της διπολικής κεραίας του σχήματος 1.1.2(α) που τροφοδοτείται από δισύρματη γραμμή μεταφοράς, καθώς και της ισοδύναμης διάταξης της κεραίας του σχήματος 1.1.2(β) πάνω από αγωγίμο επίπεδο.



Σχήμα 1.1.2: Δύο ακόμα «πραγματικές» κεραιές, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγωγίμο επίπεδο.

Το σωληνοειδές δίπολο είναι ένας τέλεια αγωγίμος μεταλλικός σωλήνας με απείρως λεπτά τοιχώματα. Στο κέντρο $z = 0$ υπάρχει ένα απειροστά μικρό διάκενο (infinitesimal gap). Η επιτυχία αυτής της μοντελοποίησης έγκειται στο γεγονός ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που διατυπώνονται είναι ακριβείς και η λύση δεν επηρεάζεται από τη φύση της τροφοδοσίας, ή από την ύπαρξη καπακιού.

1.2 Κυματικές Εξισώσεις – Εξισώσεις Maxwell

Στο σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell, ώστε στην επόμενη παράγραφο να καταλήξουμε στην ακριβή εξίσωση Rocklinton, η οποία θα αποδειχθεί ότι ισοδυναμεί με την εξίσωση του Hallen. Χάριν ευκολίας, θεωρούμε ότι η κεραία βρίσκεται στο κενό οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \text{B η μαγνητική επαγωγή και H η ένταση του μαγνητικού πεδίου}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \text{D η διηλεκτρική μετατόπιση και E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου}$$

Η μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και η διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 συνδέονται με την ταχύτητα του φωτός και με την αντίσταση του κενού χώρου, σύμφωνα με τις

σχέσεις: $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$ και $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ αντιστοίχως. Σε όλη την υπόλοιπη εργασία

θεωρούμε ότι $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ και $\zeta_0 = 376.73 \Omega$. Εάν πρόκειται για ισότροπο ομογενή χώρο με μαγνητική διαπερατότητα μ και διηλεκτρική σταθερά ϵ , τα παραπάνω μεγέθη τροποποιούνται αναλόγως.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής πηγών και πεδίων (μορφή $e^{j\omega t}$) διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell οι οποίες έπειτα από μετασχηματισμό Fourier, λαμβάνουν την ακόλουθη σημειακή μορφή:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (\text{Νόμος Faraday-Maxwell})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j \cdot \omega \cdot \vec{D} \quad (\text{Νόμος Ampere-Maxwell})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Νόμος του Gauss για τον Ηλεκτρισμό})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -j \cdot \omega \cdot \rho \quad (\text{Εξίσωση Συνέχειας})$$

Οι πηγές των πεδίων που δημιουργούνται είναι αφ' ενός η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και αφ' ετέρου η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} με χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{j\omega t}$.

Στο σημείο αυτό εισάγουμε το μέγεθος του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} , από την σχέση ορισμού του οποίου δίνεται η μαγνητική επαγωγή: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (1.2.1). Από τον Νόμο Faraday-Maxwell, και χρησιμοποιώντας την σχέση (1.1) έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + j \cdot \omega \cdot \vec{A}) = \vec{0}$$

Ομοίως με το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} , εισάγουμε το βαθμωτό δυναμικό Φ , τέτοιο ώστε $\vec{\nabla} \times (\nabla \Phi) = \vec{0}$ (που ισχύει πάντα) και κατ' επέκταση:

$$\vec{E} + j \cdot \omega \cdot \vec{A} = -\nabla \Phi \Rightarrow \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{A} - \nabla \Phi. \quad (1.2.2)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} στο νόμο Ampere-Maxwell και κάνοντας χρήση της γνωστής διανυσματικής ταυτότητας

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} &= j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot (-j \cdot \omega \cdot \vec{A} - \nabla \Phi) + \vec{J} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} \right) = -j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi + \omega^2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \vec{A} + \mu \cdot \vec{J} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} + k^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} + \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση ορισμού του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} (σχέση (1.2.1)) στο Νόμο του Gauss για τον Ηλεκτρισμό, λαμβάνουμε την σχέση:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - j \cdot \omega \cdot (\nabla \cdot \vec{A} + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi) \quad (1.2.4)$$

Παρατηρώντας τα μέλη των εξισώσεων (1.2.3) και (1.2.4) είναι πρόσφορο για έναν μεγάλο αριθμό περιπτώσεων να επιλέξουμε:

$\nabla \cdot \vec{A} + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = -j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \nabla \Phi$ (1.2.5), που είναι η συνθήκη του Lorentz. Με τη βοήθεια της παραδοχής αυτής, οι σχέσεις (1.2.3) και (1.2.4) παίρνουν την εξής μορφή:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \cdot \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J} \quad (1.2.6)$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \cdot \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.2.7)$$

Από το θεώρημα του Helmholtz στη διανυσματική ανάλυση, είναι γνωστό ότι ένα διάνυσμα \vec{A} είναι καθορισμένο κατά μοναδικό τρόπο, αν γνωρίζουμε την περιστροφή ($\nabla \times \vec{A}$) και την απόκλιση ($\nabla \cdot \vec{A}$) του. Η πρώτη εξασφαλίζεται με την συνθήκη ορισμού και η δεύτερη με την συνθήκη Lorentz. Με την παραπάνω επιλογή των συναρτήσεων δυναμικού, κάθε μία από τις συναρτήσεις-λύσεις ικανοποιεί την αντίστοιχη κυματική εξίσωση. Από αυτές έπεται ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών φορτίου. Οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω της εξίσωσης της συνέχειας, γεγονός που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των \vec{A} και Φ μέσω της συνθήκης Lorentz. Με χρήση της συνθήκης αυτής και της σχέσης (1.2.2) μπορεί να βρεθεί μία έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} συναρτήσει μόνο του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} :

$$\vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \vec{A} - j \cdot \frac{\omega}{k^2} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (1.2.8)$$

Οι γενικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων (1.2.6) και (1.2.7) για το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής, είναι αντίστοιχα:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \int_V \rho(x', y', z') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (1.2.9)$$

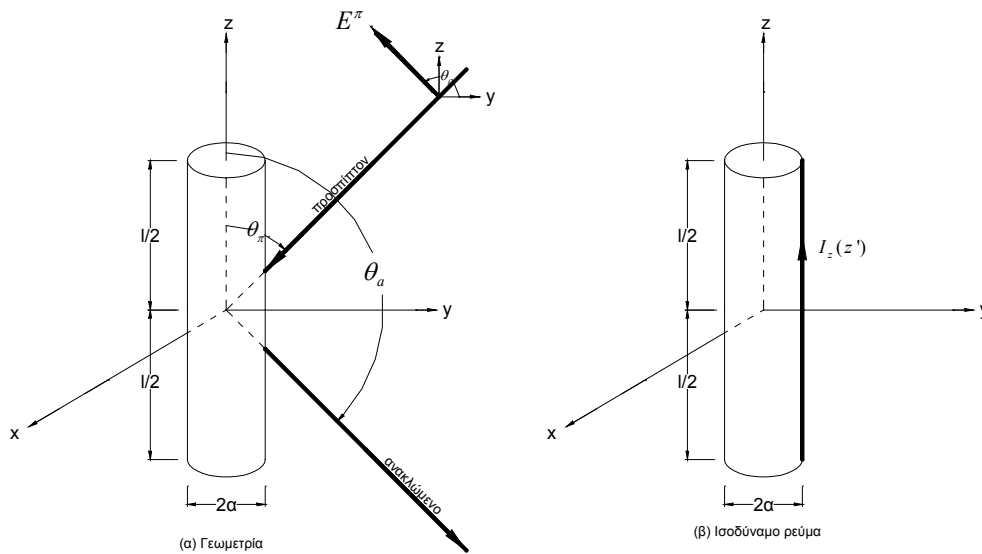
$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \vec{J}(x', y', z') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (1.2.10)$$

όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα παρατήρησης και $\vec{r}' = (x', y', z')$ είναι το διάνυσμα θέσης της πηγής και R είναι η απόσταση της θέσης της πηγής από την παρατήρηση, δηλαδή:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

1.3 Εξίσωση Pocklington για τον ακριβή πυρήνα

Η εξαγωγή της εξίσωσης Pocklington γίνεται με βάση το σχήμα 1.3.1:



Σχήμα 1.3.1: Πλάγια πρόσπτωση επιπέδου κύματος σε αγωγίμο σωλήνα

Έστω ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια της αγωγίμης ευθύγραμμης κεραίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3.1. Ονομάζουμε το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^i(r)$. Μέρος του προσπίπτοντος πεδίου πέφτει στην επιφάνεια της κεραίας, όπου επάγει μία γραμμική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}_s(A/m)$, η οποία ακτινοβολεί και παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο που ονομάζεται ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^s(r)$. Συνεπώς, σε κάθε σημείο του χώρου, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^t(r)$ θα είναι το διανυσματικό άθροισμα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου, δηλαδή:

$$\vec{E}^t(r) = \vec{E}^i(r) + \vec{E}^s(r) \quad (1.3.1)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το ηλεκτρικό πεδίο που ακτινοβολείται από το δίπολο έχει μία ακτινική E_ρ και μία εφαπτομενική συνιστώσα E_z . Στην περίπτωση που το σημείο παρατήρησης βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της λεπτής και τέλεια αγωγίμης κεραίας, δηλαδή $\rho = a$, το ολικό εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδενικό. Επίσης, η εφαπτομενική στην επιφάνεια $\rho = a$ συνιστώσα E_z του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι συνεχής, οπότε λαμβάνουμε:

$$E_z^t(\rho = a) = E_z^i(\rho = a) + E_z^s(\rho = a) = 0 \Rightarrow E_z^i(\rho = a) = -E_z^s(\rho = a)$$

Όπως δείξαμε παραπάνω (σχέση (1.2.8)), το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_s , δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E}^s(r) = -j \cdot \omega \cdot \vec{A} - j \cdot \frac{\omega}{k^2} \cdot \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -j \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega} \cdot (k^2 \cdot \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}))$$

Για παρατηρήσεις που γίνονται πάνω στην αγωγίμη επιφάνεια, απαιτείται μόνο η z συνιστώσα του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου, η οποία γράφεται:

$$E_z^s(r) = -j \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu \cdot \omega} \cdot \left(k^2 \cdot A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \quad (1.3.2)$$

Επειδή η J_s αντιπροσωπεύει γραμμική πυκνότητα (m^{-1}) το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.2.10) γίνεται επιφανειακό. Κατά συνέπεια, η z -συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού, γράφεται:

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \iint_S J_s(x', y', z') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} dS', \quad dS' = a \cdot d\phi' \cdot dz',$$

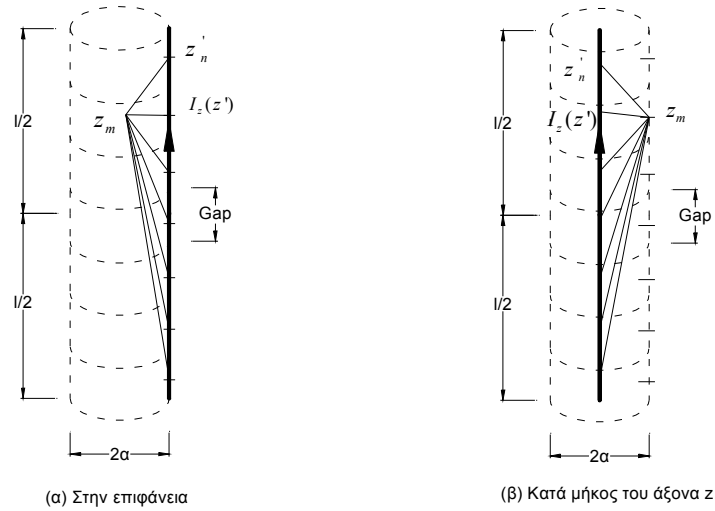
το στοιχειώδες εμβαδόν στην παράπλευρη επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου και a η ακτίνα της κυλινδρικής κεραίας. Έτσι λοιπόν, λαμβάνουμε:

$$A_z(\rho, \phi, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{z'=-h}^h \int_{\phi'=0}^{2\pi} J_z(a, \phi', z') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' \cdot dz' \quad (1.3.3)$$

Εάν τώρα ο αγωγός θεωρηθεί πολύ λεπτός, η χωρική πυκνότητα ρεύματος J_z δεν είναι συνάρτηση της αζιμουθιακής γωνίας ϕ , οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot J_z = I_z(z') \Rightarrow J_z = \frac{I_z(z')}{2 \cdot \pi \cdot \alpha}$$

Στη θεώρηση αυτή, το $I_z(z')$ είναι το ισοδύναμο γραμμικό ρεύμα που βρίσκεται σε ακτινική απόσταση $\rho = \alpha$ από τον άξονα z , όπως φαίνεται στο σχήμα (1.3.2):



Σχήμα 1.3.2 Κατάτμηση διπόλου και το ισοδύναμο ρεύμα του

Έτσι, η σχέση (1.3.3) γίνεται:

$$A_z(\rho, \phi, z) = \frac{\mu}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{z'=-h}^h \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha} \int_{\phi'=0}^{2\pi} I_z(z') \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' \right) dz' \quad (1.3.4)$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \\ &= \sqrt{(\rho \cdot \cos \phi - \alpha \cdot \cos \phi')^2 + (\rho \cdot \sin \phi - \alpha \sin \phi')^2 + (z-z')^2} = \\ &= \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 - 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\phi - \phi') + (z-z')^2} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις μετασχηματισμού ($x = \rho \cdot \cos \phi$, $y = \rho \cdot \sin \phi$, $z = z$) από τις καρτεσιανές στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του διπόλου ισχύει $\partial / \partial \phi = 0$, άρα τα μετρούμενα πεδιακά μεγέθη δεν εξαρτώνται από την γωνία ϕ . Για λόγους ευκολίας και απλότητας, θεωρούμε $\phi = 0^\circ$.

Η σχέση 1.3.4 γίνεται:

$$A_z(\rho = \alpha, \phi, z) = \mu \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot a \cdot d\phi' \right) dz' =$$

$$= \mu \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') dz'$$
(1.3.5)

$$K(z, z') = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkR}}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot d\phi'$$

$$R(\rho = \alpha, \phi = 0) = \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 - 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos((\phi = 0) - \phi') + (z - z')^2} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \alpha^2 \cdot (1 - \cos \phi) + (z - z')^2} = \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right) + (z - z')^2}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1.3.2) την έκφραση για το διανυσματικό δυναμικό A_z που βρέθηκε παραπάνω έχουμε:

$$E_z^s(\rho = \alpha) = -j \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \omega} \cdot \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz'$$
(1.3.6)

Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην τέλεια αγωγίμη επιφάνεια $\rho = \alpha$ του διπόλου, θα λάβουμε:

$$E_z^s(\rho = \alpha) = -E_z^i(\rho = \alpha) \Rightarrow \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = -j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot E_z^i(\rho = \alpha)$$

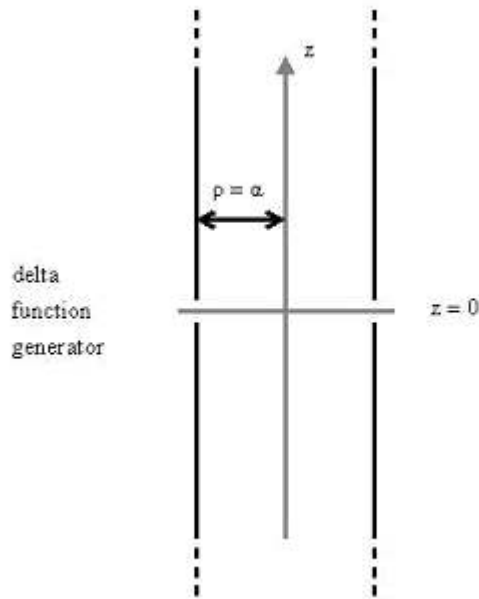
Η τελευταία εξίσωση που βρέθηκε, δηλαδή η:

$$\boxed{\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = -j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot E_z^i(\rho = \alpha)}$$
(1.3.7)

λέγεται **ολοκληρωτική εξίσωση του Pocklington** και με την επίλυσή της υπολογίζουμε το ισοδύναμο ρεύμα γραμμικής κατανομής, άρα και της πυκνότητας ρεύματος στην επιφάνεια του διπόλου, με γνωστό το προσπίπτον πεδίο στην επιφάνεια του.

1.4 Γεννήτρια δέλτα-συνάρτησης ή delta function generator

Πρόκειται για την απλούστερη και πλέον διαδεδομένη μέθοδο για την μοντελοποίηση της πηγής, που όμως υστερεί σε ακρίβεια στον υπολογισμό των αγωγιμοτήτων εισόδου. Η αναπαράστασή της δίνεται στο σχήμα 1.4.1



Σχήμα 1.4.1: Μοντελοποίηση τροφοδοσίας DFG

Θεωρούμε λοιπόν ένα απειροστά μικρό διάκενο (infinitesimal gap) στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου ($z = 0$), και μια διέγερση τάσης στους ακροδέκτες τροφοδοσίας σταθερής τιμής V στο κέντρο και μηδενικής τιμής οπουδήποτε αλλού. Στο κέντρο του σωληνοειδούς διπόλου βρίσκεται η γεννήτρια **delta function generator** η οποία διατηρεί ένα δυναμικό V στο διάκενο, έτσι ώστε το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\Phi(\alpha, 0^+) - \Phi(\alpha, 0^-) = V$$

Η z -συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι μηδενική σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της κεραίας, εκτός του διακένου. Στο διάκενο τροφοδοσίας η ένταση του προσπίπτοντος και η ένταση του ανακλωμένου πεδίου πρέπει να είναι αντίθετες. Η διαφορά δυναμικού στο διάκενο V , δίνεται από την σχέση [6]:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} E_z^i(z) \cdot dz \Rightarrow E_z^i(z) = V \cdot \delta(z) \quad (1.4.1)$$

Η παραπάνω σχέση απορρέει από γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα.

Έτσι, δεδομένου ότι $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ και $k = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$, αντικαθιστώντας στην σχέση

(1.3.7) λαμβάνουμε:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K_{ex}(z, z') \cdot dz' = \frac{j \cdot k \cdot V}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \quad -h \leq z \leq h \quad (1.4.2)$$

$$K_{exact}(z, z') = F(z - z') = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jk \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}}}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}} \cdot d\phi'$$

είναι ο πυρήνας αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης, που προφανώς εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $z - z'$ και όχι από τα z και z' ξεχωριστά, αποτελώντας έτσι έναν **πυρήνα διαφοράς**. Στην παραπάνω σχέση και τα δύο μέλη, δίνουν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο σωληνοειδές δίπολο. Κατά την εξαγωγή της δεν έγινε καμία προσέγγιση, συνεπώς είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Με εξαίρεση όμως την περίπτωση της κεραίας απείρου μήκους ($h \rightarrow \infty$), η (1.4.2) δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή.

Η σχέση 1.4.2 είναι η εξίσωση Pocklington για γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (delta function generator) για τον ακριβή πυρήνα.

1.5 Η ακριβής εξίσωση του Hallen για γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (DFG)

Η εξίσωση του Hallen δεν περιέχει τον τελεστή Helmholtz $\hat{T} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right)$ και είναι ισοδύναμη της εξίσωσης του Pocklington. Ο τελεστής Helmholtz δεν μπορεί να εναλλαχθεί με το ολοκλήρωμα στην (1.4.2), διότι όπως θα δείξουμε ο ακριβής πυρήνας K_{exact} , και πιο συγκεκριμένα το πραγματικό μέρος αυτού, **απειρίζεται με λογαριθμική συμπεριφορά για μικρά z** :

Έχουμε λοιπόν για το $\text{Re}(K_{exact}(z))$:

$$\frac{\text{Re}(K_{exact}(z))}{k} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2}}{\sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2}} d\theta$$

Η παραπάνω ολοκληρωτέα παράσταση αυξάνεται απότομα για $\theta = 0$ και $|kz| \ll ka$, με συνέπεια ο αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος να παρουσιάζει δυσκολίες. Για τον λόγο αυτό πραγματοποιούμε την ακόλουθη αντικατάσταση:

$$\frac{\text{Re}(K_{exact}(z))}{k} = I_1 + I_2, \text{ όπου}$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2} - 1}{\sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2}} d\theta = -\frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2} \right)}{\sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2}} d\theta$$

$$(\text{χρησιμοποιήθηκε η γνωστή ιδιότητα } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2})$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(kz)^2 + (2ka \sin \theta)^2}}$$

Η ολοκληρωτέα παράσταση στο I_1 έχει πάντα πεπερασμένη τιμή, διότι ακόμα και για $z = 0$ γίνεται:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(2ka \sin \theta)^2}\right)}{\sqrt{(2ka \sin \theta)^2}} = \frac{\sin^2(ka \sin \theta)}{2ka \sin \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(ka \sin \theta)}{2ka \sin \theta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2} = 0$$

(η μόνη τιμή για την οποία $\sin \theta = 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι η $\theta = 0$)

Το ολοκλήρωμα I_2 μπορεί να γραφτεί, με την βοήθεια του ελλειπτικού ολοκληρώματος $K(x)$ σαν:

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(kz)^2 + (2ka)^2}} K(x)$$

$$x = \frac{(2ka)^2}{(kz)^2 + (2ka)^2}$$

Όταν $z = 0$, $\Rightarrow x = 1$. Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[K(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{16}{1-x}\right) \right] = 0 \quad [7, \text{εξ.}(17.3.26)]$$

Άρα, $K(x) \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-x} \rightarrow \infty$, για $x \rightarrow 1$

Έτσι, η παράγωγος $\frac{d^2 K_{exact}(z)}{dz^2}$ θα συμπεριφέρεται ανάλογα με τον όρο $\frac{1}{z^2}$, επομένως είναι μια ποσότητα μη ολοκληρώσιμη απαγορεύοντας έτσι την εναλλαγή του διαφορικού τελεστή και του ολοκληρώματος.

Για να υπολογίσουμε τη δράση του τελεστή, θα θεωρήσουμε την εξίσωση του Rocklington ως μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστο το ολοκλήρωμα:

$$I_0(z) = \int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz', \text{ δηλαδή:}$$

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot I_0(z) = \frac{j \cdot k \cdot V}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \quad (1.5.5)$$

Το ολοκλήρωμα I_0 είναι το διανυσματικό δυναμικό $A_z(a, z)$ που είναι άρτια συνάρτηση του z . Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.5.5) θα είναι η υπέρθεση της λύσης της ομογενούς και μιας οποιασδήποτε λύσης της μη ομογενούς. Η άρτια λύση της ομογενούς είναι $I_{00,even}(z) = C \cdot \cos(k \cdot z)$ με $C \in \mathbb{R}$. Μια μερική λύση θα αναζητηθεί με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της συνάρτησης δέλτα και είναι η $I_{os}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|)$, όπου $\zeta_0 = 376,73 \Omega$ η κυματική αντίσταση του κενού χώρου.

Έτσι τελικά προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\boxed{\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz' = C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|)} \quad (1.5.6)$$

Η σχέση 1.5.6 είναι η εξίσωση Hallen για γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (delta function generator) για τον ακριβή πυρήνα.

Η σταθερά C προσδιορίζεται από τον μηδενισμό του ρεύματος στα άκρα της κεραίας λόγω της Αρχής Διατήρησης του Φορτίου:

$$I(\pm h) = 0 \quad (1.5.7)$$

Από την Αρχή της Επαλληλίας, η λύση της εξίσωσης Hallen μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που θα ικανοποιούν αντίστοιχα τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(1)}(z') \cdot dz' = \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad (1.5.8)$$

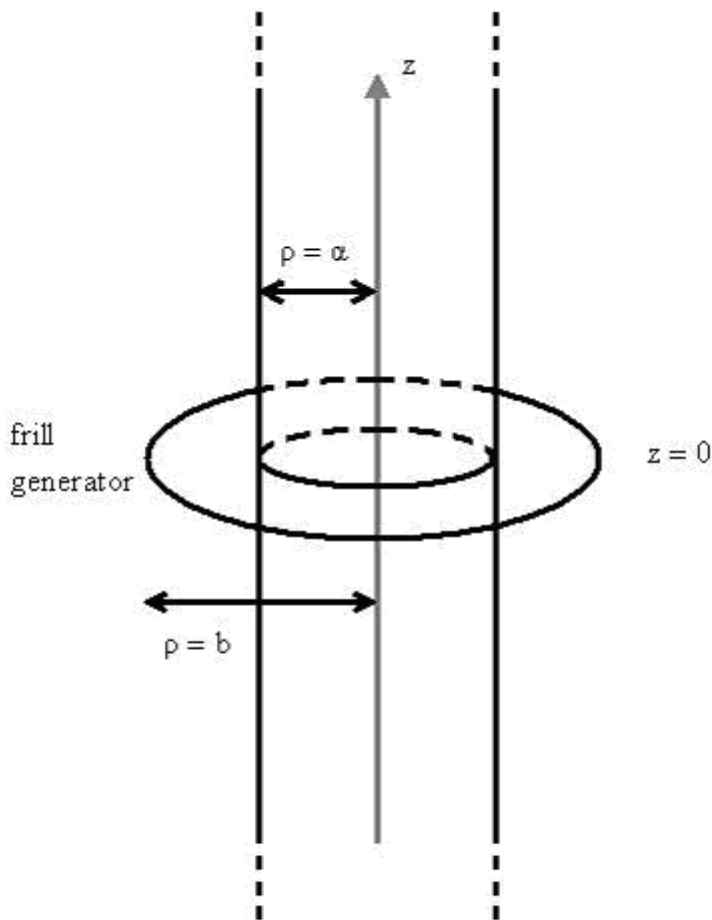
$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z) \quad (1.5.9)$$

Τότε, η λύση της εξίσωσης Hallen που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη (1.5.7), δίνεται από την σχέση:

$$I_z^t = I^{(1)}(z) + C \cdot I^{(2)}(z) \quad C = -\frac{I^{(1)}(h)}{I^{(2)}(h)} \quad (1.5.10)$$

1.6 Γεννήτρια μαγνητικών κροσσών ή frill generator

Για την συγκεκριμένη μοντελοποίηση της πηγής βασιζόμαστε στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 1.6.1 Μοντελοποίηση τροφοδοσίας FG

Για να χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο [8], το διάκενο τροφοδοσίας αντικαθίσταται από μία πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος \vec{M} , κυκλικής διεύθυνσης, που υπάρχει πάνω σε έναν δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα a , που συνήθως είναι η ακτίνα της κεραίας, και εξωτερική ακτίνα b . Καθώς η κεραία συνήθως τροφοδοτείται από γραμμές μεταφοράς, η εξωτερική ακτίνα b του δακτυλίου της

γεννήτριας βρίσκεται χρησιμοποιώντας την έκφραση για την χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής μεταφοράς, δηλαδή:

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln(b/\alpha)}{2 \cdot \pi}$$

Στο δακτυλιοειδές άνοιγμα της γεννήτριας μαγνητικών κροσσών, το ηλεκτρικό πεδίο E_ρ προκύπτει από την πεδιακή κατανομή του τρόπου TEM της ομοαξονικής γραμμής. Επομένως:

$$E_\rho = \frac{V}{2 \cdot \rho \cdot \ln(b/\alpha)} \quad \alpha \leq \rho \leq b$$

Κατά συνέπεια η αντίστοιχη ισοδύναμη πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος M_ϕ της γεννήτριας μαγνητικών κροσσών που αντιπροσωπεύει το άνοιγμα, θα είναι:

$$M_\phi = -2 \cdot \vec{n} \times E_\rho \Rightarrow M_\phi = -\frac{V}{\rho \cdot \ln(b/\alpha)} \quad \alpha \leq \rho \leq b$$

Η γεννήτρια μαγνητικών κροσσών δημιουργεί στην επιφάνεια του διπόλου πεδία, που μπορούν να προσεγγιστούν από εκείνα που βρέθηκαν κατά μήκος του άξονα (δηλαδή για $\rho = 0$). Με αυτή την προσέγγιση, λαμβάνουμε την ακόλουθη απλή σχέση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_z^i(\rho = 0, -h \leq z \leq h) = -\frac{V}{2 \cdot \ln(b/\alpha)} \cdot \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right] \quad (1.6.1)$$

$$R_1 = \sqrt{z^2 + \alpha^2}$$

$$R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.6.1) στην σχέση (1.3.7) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες:

$$k = 2\pi/\lambda \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \quad \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

έχουμε:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K_{ex}(z, z') \cdot dz' = \frac{i \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(b/\alpha)} \cdot \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right] \quad (1.6.2)$$

$$-h \leq z \leq h$$

$$K_{exact}(z, z') = F(z - z') = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot a \cdot d\phi' = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}}}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2}} \cdot d\phi'$$

Η σχέση 1.6.2 είναι η εξίσωση Pocklington για γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (frill generator) για τον ακριβή πυρήνα.

1.7 Η ακριβής εξίσωση του Hallen για γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (FG)

Για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου **frill generator**, προκειμένου να καταλήξουμε στην εξίσωση του Hallen, ξεκινάμε, όπως και στην περίπτωση του DFG, από την αντίστοιχη εξίσωση του Pocklington, δηλαδή:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K_{ex}(z, z') \cdot dz' = \frac{i \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(b/\alpha)} \cdot \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right] \quad (1.7.1)$$

Για την συνέχεια της παραγράφου θέτουμε:

$$F_{frill} = \int_{-h}^h I_z(z') \cdot K_{ex}(z, z') \cdot dz' \quad (1.7.2)$$

$$g(z) = \frac{i \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(b/\alpha)} \cdot \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right] \quad (1.7.3)$$

Άρα έχουμε:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot F_{frill}(z) = g(z) \quad (1.7.4)$$

Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, δεδομένου μάλιστα ότι η συνάρτηση $F_{frill}(z)$ είναι άρτια, θα ισούται προφανώς με το αντίστοιχο τμήμα της εξίσωσης για τροφοδοσία τύπου DFG. Πράγματι η τροφοδοσία αφορά αποκλειστικά το δεύτερο μέλος της σχετικής διαφορικής εξίσωσης και άρα ο ένας όρος της τελικής λύσης θα είναι και πάλι ο $C_{frill} \cdot \cos(k \cdot z)$ όπου C_{frill} αυθαίρετη μιγαδική σταθερά. Όσον αφορά την μερική λύση της διαφορικής, αυτή με γνώμονα τις θεμελιακές γνώσεις για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανεξάρτητα από την μορφή του δευτέρου μέλους θα είναι η:

$$F_{partial-frill}(z) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \quad (1.7.5)$$

Η εύρεση της παραπάνω μερικής λύσης έγινε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier. Ακολουθεί μία σύντομη απόδειξη για το γεγονός ότι όντως η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης:

Η πρώτη παράγωγος σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης ολοκληρωμάτων θα είναι η:

$$\frac{\partial F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z} = \frac{1}{k} \cdot g(z) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) + \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z-t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z} = \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z-t)) \cdot dt$$

Η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο:

$$\frac{\partial^2 F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z^2} = \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z-t)) \cdot dt = g(z) \cdot \cos(k \cdot (z-t)) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z^2} = g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt$$

Αν αντικαταστήσουμε στην πλήρη διαφορική εξίσωση θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2 F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{partial-frill}}(z) = g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt + k^2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 F_{\text{partial-frill}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{partial-frill}}(z) = g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt + k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 F_{\text{p,frill}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{p,frill}}(z) = g(z)$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F_{\text{partial-frill}}(z)$ επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (1.7.2) και κατά συνέπεια όντως αποτελεί μερική λύση της διαφορικής. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η γενική λύση είναι η $C_{\text{frill}} \cdot \cos(k \cdot z)$, όπου C_{frill} αυθαίρετη μιγαδική σταθερά, προκύπτει ότι:

$$F_{\text{frill}}(z) = C_{\text{frill}} \cdot \cos(k \cdot z) + F_{\text{partial-frill}}(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{frill}}(z) = C_{\text{frill}} \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt$$

Επομένως, λόγω της (1.7.2) μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z(z') \cdot dz' = C \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \quad (1.7.6)$$

Η σχέση 1.7.6 είναι η εξίσωση Hallen για γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (frill generator) για τον ακριβή πυρήνα.

Η σταθερά C προσδιορίζεται από τον μηδενισμό του ρεύματος στα άκρα της κεραίας λόγω της Αρχής Διατήρησης του Φορτίου:

$$I(\pm h) = 0 \quad (1.7.7)$$

Από την Αρχή της Επαλληλίας, η λύση της εξίσωσης Hallen μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που θα ικανοποιούν αντίστοιχα τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(1)}(z') \cdot dz' = \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \quad (1.7.8)$$

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z) \quad (1.7.9)$$

Τότε, η λύση της εξίσωσης Hallen που ικανοποιεί την οριακή συνθήκη (1.7.7), δίνεται από την σχέση:

$$I_z' = I^{(1)}(z) + C \cdot I^{(2)}(z) \quad C = -\frac{I^{(1)}(h)}{I^{(2)}(h)} \quad (1.7.10)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων Hallen

2.1 Μέθοδος των Ροπών (Moment Method - MoM)

Με τις εξισώσεις (1.5.6) και (1.7.6) του Hallen και ιδίως με τις (1.5.8), (1.5.9), (1.5.10) και (1.7.8), (1.7.9), (1.7.10) έχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Fredholm [5].

$$\int_h^h g(z, z') J(z') dz' = f(z) \quad -h < z < h \quad (2.1.1)$$

με πυρήνα $g(z, z')$, άγνωστο το $J(z')$ ($|z'| < h$), και γνωστό το $f(z)$. Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν περιγράφουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων, και συγκεκριμένα μία οικογένεια μεθόδων που ονομάζεται **Μέθοδος των Ροπών** (Moment Method - MoM). Η εν λόγω μέθοδος έχει τρία βήματα:

MoM Βήμα 1: Αναπτύσσουμε τον άγνωστο $J(z')$ σε πεπερασμένο άθροισμα $2N+1$ συναρτήσεων βάσης (basis functions) $u_{-N}(z'), u_{-(N-1)}(z'), \dots, u_N(z')$ με άγνωστους συντελεστές J_n .

$$J(z') \cong \sum_{n=-N}^N J_n u_n(z') \quad (2.1.2)$$

Οι συναρτήσεις βάσης είναι γνωστές. Στην σχέση (2.1.2) γράφουμε \cong και όχι $=$ διότι η λύση $J(z')$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.1.1) γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης. Επιλέξαμε περιττό $(2N+1)$ αριθμό συναρτήσεων βάσης για ευκολία. Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει και άρτιο αριθμό.

ΜοΜ Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την προσέγγιση (2.1.2) στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.1). Λαμβάνουμε:

$$\sum_{n=-N}^N J_n \int_{-h}^h g(z, z') u_n(z') dz' \cong f(z), \quad -h < z < h \quad (2.1.3)$$

στην οποία γράψαμε \cong διότι γενικά, δεν υπάρχουν αριθμοί J_n που να ικανοποιούν την (2.1.3) για όλα τα z με $|z| < h$.

ΜοΜ Βήμα 3: Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (2.1.3) με $2N+1$ άλλες συναρτήσεις δοκιμής (testing functions) $w_{-N}(z), w_{-(N-1)}(z), \dots, w_N(z)$, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε την (2.1.3) με $w_l^*(z)$, όπου το $*$ δηλώνει συζυγή, και ολοκληρώνουμε από $z = -h$ έως $z = h$. Λαμβάνουμε:

$$\sum_{n=-N}^N J_n \int_{-h}^h w_l^*(z) \left[\int_{-h}^h g(z, z') u_n(z') dz' \right] dz = \int_{-h}^h w_l^*(z) f(z) dz \quad (2.1.4)$$

$l = -N, -(N-1), \dots, N$

που γράφονται και ως

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} J_n = B_l, \quad l = -N, -(N-1), \dots, N \quad (2.1.5)$$

$$A_{ln} = \int_{-h}^h w_l^*(z) \left[\int_{-h}^h g(z, z') u_n(z') dz' \right] dz, \quad -N \leq l, n \leq N \quad (2.1.6)$$

$$B_l = \int_{-h}^h w_l^*(z) f(z) dz, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (2.1.7)$$

Οι συναρτήσεις δοκιμής είναι και αυτές γνωστές. Οι εξισώσεις (2.1.4) ή (2.1.5), (2.1.6) και (2.1.7) είναι σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα J_n .

Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στη επίλυση του $(2N+1) \times (2N+1)$ συστήματος (2.1.5), όπου οι μιγαδικοί αριθμοί A_m και B_l υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα των σχέσεων (2.1.6) και (2.1.7) αντιστοίχως.

Οι MoM είναι οικογένεια μεθόδων διότι υπάρχουν πολλές επιλογές των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν, αφ' ενός παλμικές συναρτήσεις βάσης και δοκιμής (GMPF) αφ' ετέρου τριγωνικές συναρτήσεις βάσεις με δέλτα συναρτήσεις δοκιμής (PMTF). Οι δύο αυτές συγκεκριμένες μέθοδοι ροπών περιγράφονται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

2.2 Μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (Galerkin Method Pulse Functions - GMPF)

Η Μέθοδος **Galerkin** είναι η ειδική περίπτωση των MoM κατά την οποία οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής είναι ίδιες, δηλαδή: $w_l(z) = u_l(z)$.

Στην περίπτωση που μοντελοποιούμε την πηγή με **delta function generator** ισχύουν οι σχέσεις (1.5.8) και (1.5.9):

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(1)}(z') \cdot dz' = \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_o} \cdot \sin(k \cdot |z|)$$

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z)$$

Προκειμένου να βρούμε μία αριθμητική λύση για την εξίσωση (1.5.6) εφαρμόζουμε την GMPF στις δύο παραπάνω εξισώσεις, οπότε έχουμε [1]:

$$I^{(1)}(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(1)}(z)u_n(z) \quad (2.2.1)$$

$$I^{(2)}(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(2)}(z)u_n(z) \quad (2.2.2)$$

όπου οι παλμικές συναρτήσεις $u_n(z)$ ορίζονται από τον εξής τύπο:

$$u_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } (n - \frac{1}{2}) \cdot z_0 < z < (n + \frac{1}{2}) \cdot z_0 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Το πλάτος του παλμού z_0 συνδέεται με το πλήθος των παλμών $2N + 1$ σύμφωνα με την σχέση:

$$(2N + 1) \cdot z_0 = 2h \quad (2.2.4)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.2.1) και (2.2.2) στις εξισώσεις (1.5.8) και (1.5.9) αντιστοίχως, πολλαπλασιάζοντας με $u_l(z)$ και ολοκληρώνοντας από $z = -h$ έως $z = h$, καταλήγουμε στα δύο ακόλουθα συστήματα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)} \quad (2.2.5)$$

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)} \quad (2.2.6)$$

$$l = 0, \pm 1, \dots, \pm N$$

Στις σχέσεις (2.2.5) και (2.2.6) οι συντελεστές A_{ln} είναι διπλά ολοκληρώματα που εξαρτώνται μόνο από την απόλυτη τιμή της διαφοράς $|l-n|$ και όχι από τα l και n ξεχωριστά. Συνεπώς, αντικαθιστούμε τους $A_{ln} = A_{nl}$ από τους A_{l-n} . Εξάλλου, τα διπλά αυτά ολοκληρώματα μπορούν να μετατραπούν σε απλά, έτσι ώστε:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K_{exact}(z + l \cdot z_0) + K_{exact}(z - l \cdot z_0)] dz \quad (2.2.7)$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 2N$$

Οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ υπολογίζονται αναλυτικά από τα εξής απλά ολοκληρώματα [2, εξ.(A.3)]:

$$B_l^{(1)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \frac{i \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) dz = \begin{cases} \frac{i \cdot 2 \cdot V}{\zeta_0 \cdot k} \cdot \sin^2\left(\frac{k \cdot z_0}{4}\right), & \text{αν } l = 0 \\ \frac{i \cdot V}{\zeta_0 \cdot k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot z_0}{2}\right) \cdot \sin(k \cdot z_0 \cdot |l|), & \text{αν } l \neq 0 \end{cases}$$

$$B_l^{(2)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \cos(k \cdot z) dz = \frac{2}{k} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot z_0}{2}\right) \cdot \cos(k \cdot z_0 \cdot l)$$

Αφού υπολογιστούν τα $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$, για να προσδιορίσουμε την σταθερά C της εξίσωσης (1.5.6), χρησιμοποιούμε την σχέση (1.5.10). Άρα έχουμε:

$$C \cong -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}} \quad (2.2.8)$$

Η τελική αριθμητική λύση της εξίσωσης Hallen δίνεται από τον τύπο:

$$I(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n \cdot u_n(z) = \sum_{n=-N}^N [I_n^{(1)} + C \cdot I_n^{(2)}] \cdot u_n(z) \quad (2.2.9)$$

Στην περίπτωση που μοντελοποιούμε την πηγή με **frill generator** ισχύουν οι σχέσεις (1.7.8) και (1.7.9):

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(1)}(z') \cdot dz' = \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt$$

$$\int_{-h}^h K(z-z') \cdot I_z^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z)$$

Στη συνέχεια ακολουθούμε τα ίδια βήματα όπως και στην περίπτωση της delta function generator, προκειμένου να βρούμε μία αριθμητική λύση για την εξίσωση (1.7.6).

Η μόνη διαφορά σε σχέση με την άλλη μοντελοποίηση έγκειται στους συντελεστές $B_l^{(1)}$ [9, εξ.(11)]:

$$B_l^{(1)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \left(\frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \right) dz$$

Για να υπολογίσουμε τους παραπάνω συντελεστές με την βοήθεια του προγράμματος **MATLAB**, πραγματοποιούμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$t = t \cdot z$ Έτσι, το διάστημα ολοκλήρωσης για την μεταβλητή t γίνεται $[0,1]$,

και $dt = z \cdot dt$ Άρα:

$$B_l^{(1)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \left(\frac{1}{k} \cdot \int_0^1 g(t \cdot z) \cdot \sin(k \cdot (z-t \cdot z)) \cdot z \cdot dt \right) dz$$

Ομοίως με προηγουμένως, η τελική αριθμητική λύση της εξίσωσης Hallen είναι:

$$I(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n \cdot u_n(z) = \sum_{n=-N}^N \left[I_n^{(1)} + C \cdot I_n^{(2)} \right] \cdot u_n(z) \quad (2.2.10)$$

2.3 Τεχνική σημειακής ισότητας (Point-Matching technique or collocation technique) με τριγωνικές συναρτήσεις (Triangular Functions)-PMTF

Στη μέθοδο αυτή [10] αναπτύσσουμε τον άγνωστο $I(z)$ σε ένα πεπερασμένο άθροισμα $2N-1$ συναρτήσεων βάσης $g_n(z)$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$I(z) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot g_n(z) = I_{-N+1} \cdot g_{-N+1}(z) + I_{-N+2} \cdot g_{-N+2}(z) + \dots + I_0 \cdot g_0(z) + \dots + I_{N-1} \cdot g_{N-1}(z) \quad (2.3.1)$$

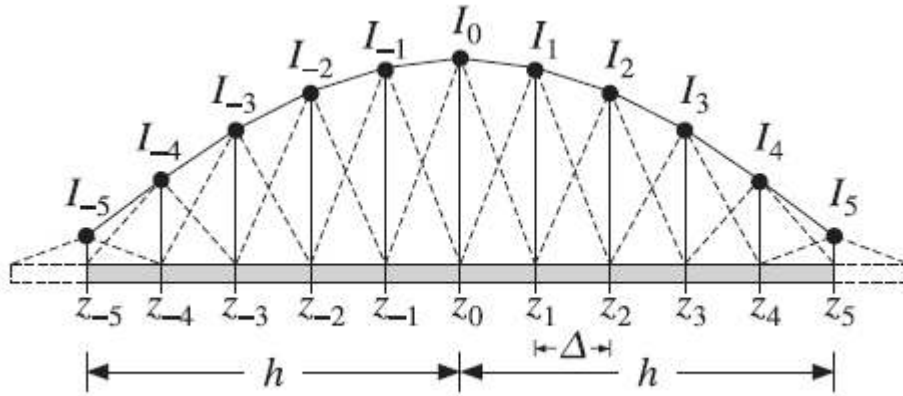
Οι άγνωστοι στην παραπάνω εξίσωση είναι οι συντελεστές I_n και στην (2.3.1) γράφουμε \cong και όχι $=$ διότι η λύση $I(z)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης.

Οι συναρτήσεις βάσης $g_n(z)$ που επιλέγουμε εδώ είναι οι τριγωνικές που ορίζονται ως:

$$t(z) = \begin{cases} \frac{z_0 - |z|}{z_0}, & -z_0 \leq z \leq z_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad z_0 = \frac{h}{N} \quad (2.3.2)$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $t(z-l \cdot z_0)$ είναι το $((l-1) \cdot z_0, (l+1) \cdot z_0)$, για $|l| \leq N-1$.

Οι συναρτήσεις αυτές σχεδιάζονται παρακάτω μαζί με το γράφημα που προκύπτει από γραμμικό συνδυασμό αυτών:



Σχήμα 2.3.1: Τριγωνικές συναρτήσεις βάσης και γραμμικός συνδυασμός αυτών (εδώ $N=5$ και $M=11$)

Αντικαθιστώντας την έκφραση (2.3.2) στην εξίσωση του Hallen για **delta function generator** (1.5.6) λαμβάνουμε :

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \cdot \int_{-h}^h K(z-z') \cdot t(z'-n \cdot z_0) dz' \cong \frac{i}{2 \cdot \zeta_0} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |z|) + C \cdot \cos(k \cdot z), -h < z < h \quad (2.3.3)$$

Αν επιβάλλουμε την ισότητα στα $2N+1$ σημεία κατακερματισμού του σωληνοειδούς διπόλου, $z=l \cdot z_0$ (δηλαδή και στα τερματικά και στα εσωτερικά σημεία) με $|l| \leq N$ τότε αναφερόμαστε σε μια τεχνική - παραλλαγή αντιστοίχισης σημείων (**point matching**) και δημιουργείται το σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} D_{ln} \cdot I_n = z_0 \cdot \frac{i}{2 \cdot \zeta_0} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l \cdot z_0|) + z_0 \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0) \quad (2.3.4)$$

$$|l| \leq N$$

όπου οι συντελεστές D_{ln} δίνονται από τη σχέση:

$$D_{ln} = z_0 \cdot \int_{-h}^h K(l \cdot z_0 - z') \cdot t(z' - n \cdot z_0) dz' \quad (2.3.5)$$

$$|l| \leq N \quad \text{και} \quad |n| \leq N-1$$

Γι' αυτές τις τιμές των l και n , θα αποδείξουμε ότι $D_{ln} = A_{l-n}$, όπου:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K(z + l \cdot z_0) + K(z - l \cdot z_0)] \cdot dz \quad (2.3.6)$$

Από τον ορισμό των τριγωνικών συναρτήσεων, και επειδή ο ακριβής πυρήνας $K_{exact}(z)$ είναι άρτια συνάρτηση του z , έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{ln} &= z_0 \cdot \int_{-h}^h K(l \cdot z_0 - z') \cdot t(z' - n \cdot z_0) dz' = z_0 \cdot \int_{-h}^h K(z' - l \cdot z_0) \cdot t(z' - n \cdot z_0) dz' = \\ &= z_0 \cdot \int_{(n-1) \cdot z_0}^{(n+1) \cdot z_0} K(z' - l \cdot z_0) \cdot \frac{z_0 - |z' - n \cdot z_0|}{z_0} dz' \end{aligned}$$

Αν επιχειρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = z' - n \cdot z_0 \Rightarrow dz' = dz$ τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned} D_{ln} &= \int_{-z_0}^{z_0} K(z + (n-l) \cdot z_0) \cdot (z_0 - |z|) \cdot dz = \int_0^{z_0} K(z + (n-l) \cdot z_0) \cdot (z_0 - |z|) \cdot dz + \\ &+ \int_{-z_0}^0 K(z + (n-l) \cdot z_0) \cdot (z_0 - |z|) \cdot dz = \\ &= \int_0^{z_0} K(z + (n-l) \cdot z_0) \cdot (z_0 - z) \cdot dz + \int_0^{z_0} K(-z + (n-l) \cdot z_0) \cdot (z_0 - z) \cdot dz = \\ &= \int_0^{z_0} (K(z + (n-l) \cdot z_0) + K(z - (n-l) \cdot z_0)) \cdot (z_0 - |z|) \cdot dz \end{aligned}$$

Έτσι, $D_{in} = D_{nl}$ και οι D_{in} εξαρτώνται μόνο από την διαφορά $l-n$, δηλαδή:

$$D = A_{l-n}$$

$$A_l = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K(z + l \cdot z_0) + K(z - l \cdot z_0)] \cdot dz, \quad |l| \leq N$$

Συνεπώς, το σύστημα εξισώσεων (2.3.4) γίνεται:

$$\boxed{\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n = \underbrace{\frac{i \cdot z_0}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_0)}_{B_l^{(1)}} + \underbrace{z_0 \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0)}_{B_l^{(2)}}} \quad (2.3.7)$$

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K(z + l \cdot z_0) + K(z - l \cdot z_0)] \cdot dz$$

$$|l| \leq N$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με τα δύο συστήματα Toeplitz:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n^{(1)} = \frac{i \cdot z_0}{2 \cdot \zeta_o} \cdot V \cdot \sin(k \cdot |l| \cdot z_0) = B_l^{(1)} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} \cdot I_n^{(2)} = z_0 \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0) = B_l^{(2)} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$$

Ας σημειώσουμε ότι υπάρχουν και οι επιπλέον συντελεστές A_{2N} και A_{-2N} .

Όπως και στην περίπτωση της GMPF, οι άγνωστοι συντελεστές I_n δίνονται από την σχέση:

$$I_n = I_n^{(1)} + C \cdot I_n^{(2)}$$

$$C \cong -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}} \quad (2.3.8)$$

2.4 Σταθερά C του δεξιού μέλους της εξίσωσης Hallen: Βελτίωση

Στην παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε έναν βελτιωμένο τύπο για την σταθερά C , ο οποίος απορρέει από την γνώση της συμπεριφοράς του ρεύματος κοντά στα άκρα της κεραίας [1].

Οι ποσότητες $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ συμπεριφέρονται όπως η ποσότητα $(h^2 - z^2)^{-1/2}$, καθώς το $z \rightarrow \pm h$, ενώ το συνολικό ρεύμα μηδενίζεται όπως η ποσότητα $(h^2 - z^2)^{1/2}$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι οι ενδιάμεσες λύσεις $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Η συμπεριφορά αυτή δημιουργεί μία μικρή δυσκολία στην εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου, εάν η σταθερά C προσδιοριστεί από την σχέση (2.3.8). Καθώς η ποσότητα N μεγαλώνει, η C (και μαζί της η συνολική αριθμητική λύση) συγκλίνει μάλλον αργά. Η σύγκλιση μπορεί ελαφρώς να επιταχυνθεί, σημειώνοντας ότι $I_{exact}(z) = O(\sqrt{h-z})$, καθώς $z \rightarrow h$, γεγονός που συνεπάγεται ότι $\lim_{z_0 \rightarrow 0} [I(h-z_0/2)/I(h-3z_0/2)] = 1/\sqrt{3}$. Έτσι, αντί της σχέσης (2.3.8), υπολογίζουμε την σταθερά C από τον ακόλουθο τύπο [1, εξ.(17)]:

$$C \cong -\frac{\sqrt{3}I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}}{\sqrt{3}I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}} \quad (2.4.1)$$

Για όλη την υπόλοιπη εργασία θα χρησιμοποιηθούν οι εξής συμβολισμοί:

$Y_a = G_a + i \cdot B_a$ είναι η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας **στο κέντρο της** ($z = 0$ - **driving point**) και G_a , B_a το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αυτής, **χωρίς** την βελτίωση της σταθεράς δεξιού μέλους C . Δηλαδή:

$$Y_a = \frac{I_0}{V} \quad G_a = \text{Re}(Y_a) \quad B_a = \text{Im}(Y_a) \quad C \cong -\frac{I_N^{(1)}}{I_N^{(2)}}$$

$Y_b = G_b + i \cdot B_b$ είναι η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας **στο κέντρο της** ($z = 0$ - **driving point**) και G_b , B_b το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αυτής, με την βελτίωση της σταθεράς δεξιού μέλους C . Δηλαδή:

$$Y_b = \frac{I_0}{V} \quad G_b = \text{Re}(Y_b) \quad B_b = \text{Im}(Y_b) \quad C \cong -\frac{\sqrt{3}I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}}{\sqrt{3}I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}}$$

2.5 Αριθμητικά αποτελέσματα για μοντελοποίηση DFG με GMPF

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την G_b , για μοντελοποίηση **DFG** με **GMPF**. Ο αριθμός N επιλέχθηκε, κατόπιν δοκιμών, να είναι $N = 400$, αφού για $N > 400$ τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν αξιόλογη μεταβολή. Ο συμβολισμός $xe-00y$ σημαίνει $x \cdot 10^{-y}$.

h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	8.948857288795925e-005	1.045375795032341e-004	1.529566078882772e-004	6.871755999159823e-004
0.11	1.345714887508706e-004	1.567970675154033e-004	2.279532623891283e-004	9.940148977113797e-004
0.12	2.008151039255025e-004	2.335467629215979e-004	3.379379088774172e-004	1.435665660346979e-003
0.13	2.991004902385297e-004	3.474215003711006e-004	5.010589078918082e-004	2.075466474980523e-003
0.14	4.471487666968884e-004	5.190130949936696e-004	7.468592942754190e-004	3.005149951646967e-003
0.15	6.748165139175039e-004	7.829901707369520e-004	1.124748206017473e-003	4.347453572242911e-003
0.16	1.034237896617564e-003	1.199670571207723e-003	1.719187960847390e-003	6.233713028460450e-003
0.17	1.619536020050975e-003	1.876892648305403e-003	2.675177294617713e-003	8.710447047416917e-003
0.18	2.603786889902419e-003	3.008326003461603e-003	4.229903898567713e-003	1.153277479321750e-002
0.19	4.294068985699059e-003	4.917864875269120e-003	6.693749161059138e-003	1.398827903649791e-002
0.20	7.118871030478507e-003	7.977810823095153e-003	1.013670143131504e-002	1.520574070990878e-002
0.21	1.107249440366619e-002	1.188465710182762e-002	1.348494037331652e-002	1.491336909750681e-002
0.22	1.415909127180778e-002	1.438735554336443e-002	1.455849711390242e-002	1.360341779362909e-002

0.23	1.371442767052972e-002	1.350380076453219e-002	1.298795746853900e-002	1.193984740057834e-002
0.24	1.098847810331275e-002	1.082255927246576e-002	1.050182276879501e-002	1.033725865430467e-002
0.25	8.308408332431655e-003	8.292811528022298e-003	8.297227897693731e-003	8.954798522773299e-003
0.26	6.343641963132192e-003	6.423174071573922e-003	6.632217397547203e-003	7.815381369412589e-003
0.27	4.991065298831724e-003	5.114467078061083e-003	5.422663003382637e-003	6.890963750812149e-003
0.28	4.053954965814998e-003	4.193286368480410e-003	4.540631305278649e-003	6.142081016621932e-003
0.29	3.387487048654198e-003	3.529434244835083e-003	3.885653421977240e-003	5.532176292352303e-003
0.30	2.899197024326478e-003	3.037833178797626e-003	3.388534915189449e-003	5.031312687766037e-003
0.31	2.531250039228201e-003	2.664181420061625e-003	3.003008670381384e-003	4.616112896520573e-003
0.32	2.246948705777606e-003	2.373441373924595e-003	2.698031623493152e-003	4.268644476357593e-003
0.33	2.022419281227848e-003	2.142503148593487e-003	2.452452226467448e-003	3.975208726524973e-003
0.34	1.841702477815104e-003	1.955741531527875e-003	2.251576701146238e-003	3.725314860628329e-003
0.35	1.693845386499695e-003	1.802331020214674e-003	2.084991061472541e-003	3.510883028287341e-003
0.36	1.571146238154354e-003	1.674598840149783e-003	1.945171507818258e-003	3.325646969679926e-003
0.37	1.468069444675913e-003	1.566993235741767e-003	1.826585110242694e-003	3.164712810687808e-003
0.38	1.380558152699044e-003	1.475422431705970e-003	1.725097622846336e-003	3.024234683489050e-003
0.39	1.305588140071005e-003	1.396821606599368e-003	1.637576480843687e-003	2.901176228517168e-003
0.40	1.240871831944849e-003	1.328863280357972e-003	1.561620018987796e-003	2.793134980219239e-003
0.41	1.184657946091777e-003	1.269759943387613e-003	1.495369858905846e-003	2.698213007240798e-003
0.42	1.135593482613584e-003	1.218127336399192e-003	1.437379173780409e-003	2.614921963416529e-003
0.43	1.092627293177559e-003	1.172888496439304e-003	1.386519267441887e-003	2.542114217019754e-003
0.44	1.054942030164719e-003	1.133205835834727e-003	1.341913017775793e-003	2.478934297688750e-003
0.45	1.021905958035973e-003	1.098432990732613e-003	1.302887655975861e-003	2.424786817095218e-003
0.46	9.930390824357000e-004	1.068081042231342e-003	1.268941934080489e-003	2.379318503598479e-003
0.47	9.679899994873814e-004	1.041795609807362e-003	1.239724491455562e-003	2.342413216456153e-003
0.48	9.465211965540107e-004	1.019342628065694e-003	1.215021491765263e-003	2.314199913873227e-003
0.49	9.285015007265004e-004	1.000601586759401e-003	1.194752580615259e-003	2.295074667527524e-003
0.50	9.139051416839577e-004	9.855658057653827e-004	1.178975065937047e-003	2.285739070324100e-003
0.51	9.028175976407913e-004	9.743500582953226e-004	1.167897078329481e-003	2.287258912653569e-003

0.52	8.954491392076142e-004	9.672066644447298e-004	1.161901458686720e-003	2.301148967489662e-003
0.53	8.921578996657627e-004	9.645521865503210e-004	1.161583406206867e-003	2.329492313420780e-003
0.54	8.934855442094428e-004	9.670082470825919e-004	1.167806725458644e-003	2.375106028121033e-003
0.55	9.002104270182666e-004	9.754620273242204e-004	1.181786174641293e-003	2.441769414677274e-003
0.56	9.134258976806881e-004	9.911551168643824e-004	1.205207468630637e-003	2.534535971456536e-003
0.57	9.346557808461156e-004	1.015814268158338e-003	1.240402775565659e-003	2.660154943105644e-003
0.58	9.660260724645356e-004	1.051845431253526e-003	1.290609413724153e-003	2.827628938115809e-003
0.59	1.010523394745257e-003	1.102625155740819e-003	1.360355016518723e-003	3.048921368187512e-003
0.60	1.072389850424158e-003	1.172944310140843e-003	1.456036804537589e-003	3.339778619884696e-003
0.61	1.157735894427504e-003	1.269693359523207e-003	1.586799717297592e-003	3.720495831609149e-003
0.62	1.275506241036437e-003	1.402933988863546e-003	1.765870504978854e-003	4.216127665754967e-003
0.63	1.439020760770784e-003	1.587587418940300e-003	2.012563571236350e-003	4.854948729211026e-003
0.64	1.668442699959257e-003	1.846083007228076e-003	2.355183304594513e-003	5.662724957964778e-003
0.65	1.994674170723222e-003	2.212385072080750e-003	2.834787039695003e-003	6.648871053524933e-003
0.66	2.465135335571536e-003	2.737519484657248e-003	3.508519879825523e-003	7.781103753599424e-003
0.67	3.150710619049842e-003	3.494785960506621e-003	4.446982901287210e-003	8.953896007484275e-003
0.68	4.147442517465422e-003	4.575292211743833e-003	5.709024375035949e-003	9.977984006088724e-003
0.69	5.547169800545815e-003	6.043110397623821e-003	7.260990563987808e-003	1.063325170512618e-002
0.70	7.312029111569855e-003	7.791156704472811e-003	8.831766793033926e-003	1.078179459400645e-002
0.71	9.020686796220957e-003	9.327225923769287e-003	9.873574460099763e-003	1.044774761504124e-002
0.72	9.855724146806341e-003	9.910251293279583e-003	9.933443486262367e-003	9.783082314575158e-003
0.73	9.385865826073455e-003	9.304210822914698e-003	9.116201961587750e-003	8.967136983341711e-003
0.74	8.092726834916793e-003	8.025708811607742e-003	7.907395695412855e-003	8.135057209388336e-003
0.75	6.670522717411796e-003	6.671428397038819e-003	6.705714163023411e-003	7.362366545022810e-003
0.76	5.460711693659383e-003	5.519928366901710e-003	5.681294685693047e-003	6.679686806209444e-003
0.77	4.523385338272784e-003	4.618705459650841e-003	4.860979927701522e-003	6.091884679928251e-003
0.78	3.816842743073986e-003	3.931014925703916e-003	4.217746028994973e-003	5.591805612490737e-003
0.79	3.283984113249073e-003	3.406351040600815e-003	3.714087819858210e-003	5.168045919036345e-003
0.80	2.877282218871663e-003	3.001841360219437e-003	3.316733950627887e-003	4.808728922321304e-003

0.81	2.561856459694902e-003	2.685410867564315e-003	2.999679024282571e-003	4.503075560984121e-003
0.82	2.313076365879961e-003	2.434025096549613e-003	2.743506223742634e-003	4.241891229697118e-003
0.83	2.113665270866371e-003	2.231292908606617e-003	2.533926764504518e-003	4.017572187010370e-003
0.84	1.951424352801965e-003	2.065499013950256e-003	2.360430449890740e-003	3.823928520961673e-003
0.85	1.817634502126549e-003	1.928183165711858e-003	2.215238993122465e-003	3.655959671949449e-003
0.86	1.705974478261992e-003	1.813157925010689e-003	2.092543487588462e-003	3.509639436035213e-003
0.87	1.611794624479589e-003	1.715838120000889e-003	1.987961851964644e-003	3.381730523787413e-003
0.88	1.531627328468259e-003	1.632782632308311e-003	1.898155309525066e-003	3.269632588656399e-003
0.89	1.462853895539304e-003	1.561378996474942e-003	1.820556856870275e-003	3.171261230725388e-003
0.90	1.403475181773300e-003	1.499624140005352e-003	1.753177997819004e-003	3.084953490103454e-003

2.6 Αριθμητικά αποτελέσματα για μοντελοποίηση DFG με PMTF

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την G_b , για μοντελοποίηση **DFG** με **PMTF**. Ο αριθμός N επιλέχθηκε, κατόπιν δοκιμών, να είναι $N = 400$, αφού για $N > 400$ τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν αξιόλογη μεταβολή. Ο συμβολισμός $xe-00y$ σημαίνει $x \cdot 10^{-y}$.

h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	8.995274421947429e-005	1.050759036903939e-004	1.537301048541382e-004	6.903705309749493e-004
0.11	1.353195393435376e-004	1.576638999427070e-004	2.291961196888363e-004	9.990562125905289e-004
0.12	2.020189258938133e-004	2.349414092102595e-004	3.399358265032191e-004	1.443609394006095e-003
0.13	3.010480635873440e-004	3.496782713335470e-004	5.042916269531952e-004	2.087965680340119e-003
0.14	4.503369959260204e-004	5.227091132745205e-004	7.521532773593384e-004	3.024698169646282e-003
0.15	6.801317027263970e-004	7.891535761899356e-004	1.133563103576823e-003	4.377450969959891e-003
0.16	1.043316772991463e-003	1.210190852649409e-003	1.734147201351337e-003	6.277626389581344e-003
0.17	1.635493290975393e-003	1.895319972025794e-003	2.700961395458193e-003	8.768501862028755e-003
0.18	2.632590670479507e-003	3.041253505034586e-003	4.274196258540004e-003	1.159555035120883e-002

0.19	4.346314278204731e-003	4.976064405052503e-003	6.765269680554427e-003	1.403436251798463e-002
0.20	7.206682829935974e-003	8.069801144263526e-003	1.022974828048454e-002	1.521602355056250e-002
0.21	1.117932908008208e-002	1.198239038053584e-002	1.355074810516995e-002	1.488886855129346e-002
0.22	1.419892817559112e-002	1.440869634788475e-002	1.454482391712538e-002	1.355979831665982e-002
0.23	1.365366505359476e-002	1.343907785309479e-002	1.292063463782295e-002	1.189167124239739e-002
0.24	1.090032841260628e-002	1.073896917708618e-002	1.042864043953782e-002	1.029224722689487e-002
0.25	8.235887910636511e-003	8.224255120539398e-003	8.237090946506518e-003	8.915589745799757e-003
0.26	6.291190612624553e-003	6.372814738861511e-003	6.586468954669473e-003	7.782165857991963e-003
0.27	4.953649322657803e-003	5.077935528123185e-003	5.388214921560107e-003	6.863047992626704e-003
0.28	4.026726088818466e-003	4.166314777658968e-003	4.514357245368285e-003	6.118581444517832e-003
0.29	3.367105911689558e-003	3.509007040293053e-003	3.865211751747374e-003	5.512273892339523e-003
0.30	2.883507728859318e-003	3.021958685849008e-003	3.372295780631074e-003	5.014322669724271e-003
0.31	2.518861675020015e-003	2.651550241051344e-003	2.989852353968286e-003	4.601485943582685e-003
0.32	2.236946574191446e-003	2.363179039891769e-003	2.687182604234966e-003	4.255947082642442e-003
0.33	2.014186710402392e-003	2.134012601663761e-003	2.443364783071499e-003	3.964100361181712e-003
0.34	1.834813014100289e-003	1.948605536514449e-003	2.243859761653288e-003	3.715527760432136e-003
0.35	1.687996957045054e-003	1.796251444107414e-003	2.078359238982663e-003	3.502205921538528e-003
0.36	1.566120154212978e-003	1.669358263937184e-003	1.939412965688938e-003	3.317912494062159e-003
0.37	1.463704289898960e-003	1.562430196089682e-003	1.821540187005598e-003	3.157787975456569e-003
0.38	1.376732770487507e-003	1.471415120785939e-003	1.720644392755094e-003	3.018013714430768e-003
0.39	1.302210310534696e-003	1.393276928236788e-003	1.633620849675691e-003	2.895575242558693e-003
0.40	1.237870590838232e-003	1.325709372602651e-003	1.558088837914873e-003	2.788088063480144e-003
0.41	1.181978290808019e-003	1.266940995431495e-003	1.492206086905974e-003	2.693669383138601e-003
0.42	1.133192681179672e-003	1.215599960395441e-003	1.434538462048381e-003	2.610844029540617e-003
0.43	1.090472298302972e-003	1.170619181043249e-003	1.383967557619966e-003	2.538476303382334e-003
0.44	1.053007678671937e-003	1.131169176195535e-003	1.339624888042603e-003	2.475722059521612e-003
0.45	1.020173750451557e-003	1.096610498786154e-003	1.300845244687396e-003	2.421997228015593e-003
0.46	9.914964139353627e-004	1.066460415056581e-003	1.267134338172532e-003	2.376960464898338e-003
0.47	9.666297674382432e-004	1.040370387071055e-003	1.238147588185492e-003	2.340508850911234e-003

0.48	9.453417516403581e-004	1.018112211756178e-003	1.213678175986028e-003	2.312786673588792e-003
0.49	9.275069451887321e-004	9.995716344683725e-004	1.193653452352397e-003	2.294208462102391e-003
0.50	9.131060154174515e-004	9.847490487153656e-004	1.178139651024718e-003	2.285498723040245e-003
0.51	9.022320367491290e-004	9.737676434790775e-004	1.167355725722428e-003	2.287752390444343e-003
0.52	8.951046494454093e-004	9.668901847029030e-004	1.161698141907845e-003	2.302522020628196e-003
0.53	8.920939694937662e-004	9.645466548007173e-004	1.161779778114753e-003	2.331940422317069e-003
0.54	8.937574450446348e-004	9.673764092357956e-004	1.168487958282006e-003	2.378890907180339e-003
0.55	9.008947377098258e-004	9.762906217218110e-004	1.183069397988378e-003	2.447241777276837e-003
0.56	9.146285894876584e-004	9.925640243402369e-004	1.207254056729299e-003	2.542166787064450e-003
0.57	9.365241813609165e-004	1.017970036619143e-003	1.243436428512784e-003	2.670577873435403e-003
0.58	9.687668175582592e-004	1.054981538606776e-003	1.294943082795957e-003	2.841696577730764e-003
0.59	1.014429794017022e-003	1.107072827145686e-003	1.366431486502241e-003	3.067776154838968e-003
0.60	1.077884309660126e-003	1.179180119477122e-003	1.464490524756211e-003	3.364932961458390e-003
0.61	1.165436795988093e-003	1.278413848084451e-003	1.598551688495501e-003	3.753898744016206e-003
0.62	1.286334997705842e-003	1.415174024110569e-003	1.782273792645865e-003	4.260154388241627e-003
0.63	1.454374973779423e-003	1.604908813604439e-003	2.035622568644919e-003	4.912165753288735e-003
0.64	1.690476010373420e-003	1.870871694509340e-003	2.387866044918677e-003	5.735145162943467e-003
0.65	2.026736336579153e-003	2.248296588553443e-003	2.881402335329912e-003	6.736297831639111e-003
0.66	2.512399805081765e-003	2.790047759005743e-003	3.574930901592002e-003	7.878421734270965e-003
0.67	3.220793057412687e-003	3.571595715139053e-003	4.539796821823843e-003	9.048507208470450e-003
0.68	4.249855920821454e-003	4.684767371655144e-003	5.831455506335594e-003	1.005089818465335e-002
0.69	5.687602885472801e-003	6.186739487544741e-003	7.402041337082282e-003	1.066690246692893e-002
0.70	7.473941349044401e-003	7.944591048271608e-003	8.953061187118876e-003	1.077028754414099e-002
0.71	9.142504947097603e-003	9.427079669959270e-003	9.921629638640813e-003	1.039942697505308e-002
0.72	9.865496501707203e-003	9.900757247567824e-003	9.889743999422862e-003	9.713430377207549e-003
0.73	9.290158810010305e-003	9.204792474772666e-003	9.014515840240078e-003	8.890358062579640e-003
0.74	7.958468558918339e-003	7.896954355081158e-003	7.791836712951488e-003	8.060379019677358e-003
0.75	6.545772354654780e-003	6.553004391767284e-003	6.601042833068958e-003	7.294345306676418e-003
0.76	5.360276595835012e-003	5.423851371819361e-003	5.594829373687446e-003	6.619834553471032e-003

0.77	4.446285996187249e-003	4.544056263961810e-003	4.791973026962877e-003	6.040112123507322e-003
0.78	3.758123138432074e-003	3.873471404109513e-003	4.163096569703023e-003	5.547333104626965e-003
0.79	3.238877981003438e-003	3.361670460804930e-003	3.670606829318917e-003	5.129887103120717e-003
0.80	2.842114532089448e-003	2.966683155686513e-003	3.281787803494973e-003	4.775915788906608e-003
0.81	2.533977260431143e-003	2.657321472598383e-003	2.971249427774374e-003	4.474747187192095e-003
0.82	2.290609095076036e-003	2.411239582940187e-003	2.720087285690499e-003	4.217317189345531e-003
0.83	2.095279108063488e-003	2.212542962975472e-003	2.514402076130337e-003	3.996147633553012e-003
0.84	1.936166243054461e-003	2.049866158829974e-003	2.343969841349159e-003	3.805158920641671e-003
0.85	1.804812935751978e-003	1.914994669047459e-003	2.201220570428747e-003	3.639443365207154e-003
0.86	1.695080653469825e-003	1.801914838949774e-003	2.080497112830786e-003	3.495051417783783e-003
0.87	1.602449048961087e-003	1.706165790284482e-003	1.977528770238531e-003	3.368808601041673e-003
0.88	1.523543409554275e-003	1.624396526306078e-003	1.889059392899029e-003	3.258166094592998e-003
0.89	1.455812861017592e-003	1.554060918379195e-003	1.812584068873057e-003	3.161082089420680e-003
0.90	1.397308613152431e-003	1.493205521798596e-003	1.746161660685900e-003	3.075929313793227e-003

2.7 Αριθμητικά αποτελέσματα για μοντελοποίηση FG με GMPF

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την G_b και για την B_b , για μοντελοποίηση FG με GMPF. Ο λόγος $b/a = 3$. Ο αριθμός N επιλέχθηκε, κατόπιν δοκιμών, να είναι $N = 400$, αφού για $N > 400$ τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν αξιόλογη μεταβολή. Ο συμβολισμός $xe-00y$ σημαίνει $x \cdot 10^{-y}$.

Για την G_b :

h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	8.964563631940541e-005	1.047823797077158e-004	1.536356821660887e-004	7.074177202122901e-004
0.11	1.347584073009856e-004	1.570876071408136e-004	2.287536276085021e-004	1.016993222522333e-003
0.12	2.010372948012576e-004	2.338913230536397e-004	3.388812965466833e-004	1.461750138657667e-003

0.13	2.993648093526834e-004	3.478305353784078e-004	5.021724481497589e-004	2.104986241861672e-003
0.14	4.474639767631770e-004	5.194998963686114e-004	7.481767506136182e-004	3.038266319006324e-003
0.15	6.751938616794470e-004	7.835716201516037e-004	1.126310727251641e-003	4.383884637718208e-003
0.16	1.034691670303776e-003	1.200367664400511e-003	1.721042468401044e-003	6.272211846511392e-003
0.17	1.620083500536993e-003	1.877729572769116e-003	2.677366770611631e-003	8.748034819579300e-003
0.18	2.604445524457159e-003	3.009323642862753e-003	4.232433469119811e-003	1.156424622998921e-002
0.19	4.294843507696991e-003	4.919016100723113e-003	6.696491077044271e-003	1.400736513184307e-002
0.20	7.119710614766061e-003	7.979008684191503e-003	1.013920784538428e-002	1.520850308268926e-002
0.21	1.107320112689746e-002	1.188557649267669e-002	1.348637368343284e-002	1.490067970229837e-002
0.22	1.415932637339666e-002	1.438755417947081e-002	1.455825049764981e-002	1.357950272236550e-002
0.23	1.371408664730788e-002	1.350323320721862e-002	1.298632976455227e-002	1.190928620536557e-002
0.24	1.098780238192871e-002	1.082157047203549e-002	1.049949989484882e-002	1.030343942118628e-002
0.25	8.307627228391349e-003	8.291690476100488e-003	8.294685529983342e-003	8.919812345359471e-003
0.26	6.342861535122541e-003	6.422054588988179e-003	6.629680367603274e-003	7.780396613979878e-003
0.27	4.990321529855089e-003	5.113396431034123e-003	5.420218424708576e-003	6.856587390806056e-003
0.28	4.053256045079405e-003	4.192276311494263e-003	4.538305207959131e-003	6.108601263666418e-003
0.29	3.386831513142497e-003	3.528483576901910e-003	3.883447028971258e-003	5.499706664749922e-003
0.30	2.898580543441395e-003	3.036936552443611e-003	3.386440226233271e-003	4.999873525865881e-003
0.31	2.530667835505883e-003	2.663332641343216e-003	3.001014945319436e-003	4.585676631563615e-003
0.32	2.246396362289589e-003	2.372634575572640e-003	2.696128000427510e-003	4.239160576102864e-003
0.33	2.021892957184123e-003	2.141733146670446e-003	2.450628704176088e-003	3.946617350067462e-003
0.34	1.841198913011845e-003	1.955003874116457e-003	2.249824432161532e-003	3.697554238167092e-003
0.35	1.693361837847699e-003	1.801621927668788e-003	2.083302361923097e-003	3.483893342942495e-003
0.36	1.570680401878798e-003	1.673915115301011e-003	1.943539759962273e-003	3.299372287162221e-003
0.37	1.467619383181443e-003	1.566332173896663e-003	1.825004633549723e-003	3.139101924024219e-003
0.38	1.380122231714186e-003	1.474781740646034e-003	1.723563545339748e-003	2.999241363212403e-003
0.39	1.305164976679412e-003	1.396199338994023e-003	1.636084622863920e-003	2.876759157477073e-003
0.40	1.240460252358359e-003	1.328257777999835e-003	1.560166792879903e-003	2.769257532305149e-003
0.41	1.184256951610145e-003	1.269169791718780e-003	1.493952184512696e-003	2.674842960858943e-003

0.42	1.135202222269044e-003	1.217551327641089e-003	1.435994408227120e-003	2.592031201121784e-003
0.43	1.092245041779886e-003	1.172325599796774e-003	1.385165147329409e-003	2.519678439992607e-003
0.44	1.054568170705685e-003	1.132655173490613e-003	1.340587611965181e-003	2.456932770701445e-003
0.45	1.021539967627731e-003	1.097893818593456e-003	1.301589327369331e-003	2.403202152213408e-003
0.46	9.926805211435727e-004	1.067552734606820e-003	1.267669309086510e-003	2.358136486804969e-003
0.47	9.676385015738433e-004	1.041277647400286e-003	1.238476436103774e-003	2.321622679261982e-003
0.48	9.461764637701007e-004	1.018834588801854e-003	1.213797093689482e-003	2.293792650941604e-003
0.49	9.281632973949217e-004	1.000103139128032e-003	1.193551136363990e-003	2.275045400826381e-003
0.50	9.135732914040845e-004	9.850767044559184e-004	1.177796073286779e-003	2.266085459879375e-003
0.51	9.024919815265927e-004	9.738701420256643e-004	1.166740233485905e-003	2.267981613118595e-003
0.52	8.951296956443155e-004	9.667358559798335e-004	1.160766658466298e-003	2.282251727820997e-003
0.53	8.918446256479602e-004	9.640904950166923e-004	1.160470755502541e-003	2.310982112916503e-003
0.54	8.931784984054853e-004	9.665557727983647e-004	1.166716550514300e-003	2.356993234053243e-003
0.55	8.999097347993928e-004	9.750189694920481e-004	1.180719042880629e-003	2.424067931646606e-003
0.56	9.131317584604410e-004	9.907217846166680e-004	1.204164215982464e-003	2.517263324594535e-003
0.57	9.343684781967385e-004	1.015391095591155e-003	1.239384542324834e-003	2.643332186480462e-003
0.58	9.657459876042649e-004	1.051432997216917e-003	1.289617689811908e-003	2.811280188659829e-003
0.59	1.010251024085109e-003	1.102224209181684e-003	1.359391696153438e-003	3.033072605085284e-003
0.60	1.072125827834549e-003	1.172555801533469e-003	1.455104247910651e-003	3.324455113864045e-003
0.61	1.157481018488363e-003	1.269318477897831e-003	1.585900810889383e-003	3.705717117744679e-003
0.62	1.275261506158429e-003	1.402574201021053e-003	1.765008698253182e-003	4.201898304769179e-003
0.63	1.438787387253066e-003	1.587244499971174e-003	2.011742835998396e-003	4.841242325145351e-003
0.64	1.668222148111756e-003	1.845759033050880e-003	2.354407893421317e-003	5.649458666889668e-003
0.65	1.994468099324155e-003	2.212082300642296e-003	2.834060769430331e-003	6.635870148118773e-003
0.66	2.464945404072868e-003	2.737239949676390e-003	3.507844363630031e-003	7.768064792545723e-003
0.67	3.150537891125111e-003	3.494530378428629e-003	4.446353648979570e-003	8.940375920019804e-003
0.68	4.147285933923567e-003	4.575057406766983e-003	5.708423312636836e-003	9.963459273025678e-003
0.69	5.547022830133712e-003	6.042884201852315e-003	7.260375291889494e-003	1.061726660402750e-002
0.70	7.311874380790164e-003	7.790911248839225e-003	8.831065597456807e-003	1.076412906841452e-002

0.71	9.020493880757641e-003	9.326918539029018e-003	9.872708352419247e-003	1.042847904500533e-002
0.72	9.855463519129607e-003	9.909847423765371e-003	9.932375719876372e-003	9.762502339684166e-003
0.73	9.385533417591858e-003	9.303711789583486e-003	9.114960253696656e-003	8.945610763451819e-003
0.74	8.092343785203304e-003	8.025144562284491e-003	7.906040292923480e-003	8.112919682154040e-003
0.75	6.670113895078452e-003	6.670830881215215e-003	6.704300007253048e-003	7.339879842938523e-003
0.76	5.460293949854962e-003	5.519319049563840e-003	5.679858449729580e-003	6.657038173330539e-003
0.77	4.522967667515820e-003	4.618096036633443e-003	4.859542587430748e-003	6.069200588496805e-003
0.78	3.816429338812276e-003	3.930411041700966e-003	4.216318508288414e-003	5.569168302405773e-003
0.79	3.283576672656081e-003	3.405755102993333e-003	3.712675314351423e-003	5.145507204044430e-003
0.80	2.876881229019835e-003	3.001254152892448e-003	3.315338562600306e-003	4.786320326037085e-003
0.81	2.561461849123550e-003	2.684832394786080e-003	2.998301240505869e-003	4.480815323757841e-003
0.82	2.312687823665461e-003	2.433455009860910e-003	2.742145718527993e-003	4.219789011538400e-003
0.83	2.113282400464986e-003	2.230730719759494e-003	2.532582830757380e-003	3.995632180836248e-003
0.84	1.951046744826357e-003	2.064944199621469e-003	2.359102228715806e-003	3.802151502342044e-003
0.85	1.817261767362634e-003	1.927635217509164e-003	2.213925594620698e-003	3.634344347381737e-003
0.86	1.705606261214100e-003	1.812616371815961e-003	2.091244052779681e-003	3.488183331107814e-003
0.87	1.611430607453777e-003	1.715302536371571e-003	1.986675582791026e-003	3.360430569788399e-003
0.88	1.531267231223815e-003	1.632252640017374e-003	1.896881481676053e-003	3.248485511515831e-003
0.89	1.462497473009521e-003	1.560854262822977e-003	1.819294823500664e-003	3.150263810306169e-003
0.90	1.403122221113744e-003	1.499104374795559e-003	1.751927188643908e-003	3.064102734663642e-003

Για την B_b :

h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	-3.059310525176124e-003	-3.241341389398806e-003	-3.710724212843870e-003	-5.926370908090070e-003
0.11	-3.409210719331442e-003	-3.614073935229333e-003	-4.145233405572655e-003	-6.687493885093608e-003
0.12	-3.803164189637533e-003	-4.034048183654028e-003	-4.635410316065788e-003	-7.527104217245966e-003
0.13	-4.254725292670553e-003	-4.515637348323964e-003	-5.197406749662533e-003	-8.444873415416020e-003
0.14	-4.781584145109864e-003	-5.077349274132142e-003	-5.850948452314393e-003	-9.416159071310621e-003

0.15	-5.406649220714095e-003	-5.742531106896236e-003	-6.618295623429573e-003	-1.036158540274943e-002
0.16	-6.158059650938364e-003	-6.538202407746945e-003	-7.518217701332985e-003	-1.109385749505386e-002
0.17	-7.064156179328372e-003	-7.486555639312726e-003	-8.544504794762313e-003	-1.125819543150039e-002
0.18	-8.129509163405118e-003	-8.571242533952391e-003	-9.600397766991328e-003	-1.036961525738067e-002
0.19	-9.246816518218005e-003	-9.625573986257085e-003	-1.033013508827292e-002	-8.140894881837472e-003
0.20	-9.931412300634856e-003	-1.003950081516350e-002	-9.856386105413537e-003	-4.975216056401745e-003
0.21	-8.881028420681848e-003	-8.457471819345159e-003	-7.076807455906284e-003	-1.847085177298286e-003
0.22	-4.816146421250530e-003	-4.110221897976339e-003	-2.561760902815269e-003	5.001298497167963e-004
0.23	2.328104802977427e-004	5.859287226695133e-004	1.210729836271555e-003	1.930568821274342e-003
0.24	3.182488926132956e-003	3.184138985760765e-003	3.126113582368581e-003	2.652772980535065e-003
0.25	4.101807885615781e-003	3.992034335343300e-003	3.726852821899207e-003	2.921141404635829e-003
0.26	4.070938921781885e-003	3.959514620618352e-003	3.69455855548138e-003	2.925067443947021e-003
0.27	3.711895838637396e-003	3.623951793708735e-003	3.410026375500421e-003	2.783640813858566e-003
0.28	3.273888271277347e-003	3.208383618770054e-003	3.044755451507304e-003	2.566610613302478e-003
0.29	2.844659280600863e-003	2.795441424848557e-003	2.669757096380354e-003	2.313522570016859e-003
0.30	2.451026566579026e-003	2.412366611889172e-003	2.312303240714516e-003	2.046367533455508e-003
0.31	2.097808238070612e-003	2.065376465301706e-003	1.981177704680076e-003	1.777116691192347e-003
0.32	1.782326881466796e-003	1.753049387801843e-003	1.677522316870427e-003	1.512046768158640e-003
0.33	1.499784224745810e-003	1.471520014042280e-003	1.399486889077297e-003	1.254197366946641e-003
0.34	1.245210252273884e-003	1.216471287545874e-003	1.144222993613479e-003	1.004768739553379e-003
0.35	1.014110920393561e-003	9.838569970137085e-004	9.087247254964206e-004	7.639210051470658e-004
0.36	8.026226719196825e-004	7.701189338887992e-004	6.901629235714149e-004	5.312334041112816e-004
0.37	6.074876565131805e-004	5.722071902574827e-004	4.859964248128917e-004	3.059686033246561e-004
0.38	4.259724787816024e-004	3.875297288259453e-004	2.939869571054520e-004	8.722397237538853e-005
0.39	2.557775971187269e-004	2.138824927524561e-004	1.121747631234367e-004	-1.259834077447309e-004
0.40	9.495410693986014e-005	4.938005409852310e-005	-6.115939066008032e-005	-3.346710158153882e-004
0.41	-5.816748948087155e-005	-1.076063186290360e-004	-2.275346067184124e-004	-5.398687093388023e-004
0.42	-2.050365801776054e-004	-2.585017069201445e-004	-3.883081211720956e-004	-7.426108519685180e-004
0.43	-3.469314526060804e-004	-4.045723492772685e-004	-5.447099917832744e-004	-9.439373040792947e-004
0.44	-4.850000251860098e-004	-5.469635667562770e-004	-6.978741531964991e-004	-1.144900074411956e-003

0.45	-6.202942236916041e-004	-6.867323028808543e-004	-8.488663859572566e-004	-1.346573766158189e-003
0.46	-7.537997051652179e-004	-8.248757016528358e-004	-9.987099868645460e-004	-1.550068740934821e-003
0.47	-8.864624111675681e-004	-9.623570235148135e-004	-1.148410014560887e-003	-1.756546367816317e-003
0.48	-1.019213260033002e-003	-1.100130091284540e-003	-1.298977016774341e-003	-1.967235924032018e-003
0.49	-1.152992180995143e-003	-1.239163393974460e-003	-1.451451172761688e-003	-2.183452698264594e-003
0.50	-1.288772657027007e-003	-1.380464968088499e-003	-1.606927829786218e-003	-2.406616588102306e-003
0.51	-1.427587979809939e-003	-1.525109228299583e-003	-1.766585483692647e-003	-2.638269874618314e-003
0.52	-1.570560531907372e-003	-1.674267034757898e-003	-1.931717346841613e-003	-2.880091689520710e-003
0.53	-1.718935599991346e-003	-1.829240460561194e-003	-2.103767740104611e-003	-3.133904575600902e-003
0.54	-1.874121486465060e-003	-1.991503947341177e-003	-2.284374584292980e-003	-3.401664791077714e-003
0.55	-2.037738006538305e-003	-2.162753769158502e-003	-2.475419126952511e-003	-3.685421414063297e-003
0.56	-2.211675772184120e-003	-2.344967859740327e-003	-2.679083456300622e-003	-3.987217759338602e-003
0.57	-2.398168807049505e-003	-2.540477842007390e-003	-2.897914757929057e-003	-4.30888529243119e-003
0.58	-2.599882595730589e-003	-2.752053945115906e-003	-3.134891458570609e-003	-4.651671536812004e-003
0.59	-2.820017667227046e-003	-2.983000066347552e-003	-3.393477814674974e-003	-5.015494642549467e-003
0.60	-3.062422951328169e-003	-3.237247501355493e-003	-3.677634662987877e-003	-5.397705061682107e-003
0.61	-3.331698058117902e-003	-3.519414916480007e-003	-3.991713154178557e-003	-5.790872402218261e-003
0.62	-3.633226672378496e-003	-3.834753100516244e-003	-4.340069871026971e-003	-6.179145423372680e-003
0.63	-3.972994399736795e-003	-4.188779216171204e-003	-4.726051395845790e-003	-6.532625104076174e-003
0.64	-4.356831982189892e-003	-4.586142030029172e-003	-5.149592563794818e-003	-6.799819030959987e-003
0.65	-4.788219536866618e-003	-5.027656978000002e-003	-5.601852565969808e-003	-6.900604974540365e-003
0.66	-5.262610264982045e-003	-5.503120892360244e-003	-6.053842730935874e-003	-6.727787753268408e-003
0.67	-5.753680114299260e-003	-5.974910816450869e-003	-6.434311031402366e-003	-6.172783835104151e-003
0.68	-6.182589273320924e-003	-6.344097115135450e-003	-6.594671569654668e-003	-5.186957514947807e-003
0.69	-6.360852999260758e-003	-6.396262759291431e-003	-6.282835314632106e-003	-3.852351839836150e-003
0.70	-5.935666041342031e-003	-5.778003238947940e-003	-5.218083589916057e-003	-2.386240947727006e-003
0.71	-4.517508301587427e-003	-4.193555646077713e-003	-3.378695366494659e-003	-1.041331494608656e-003
0.72	-2.212187278059684e-003	-1.901463726789103e-003	-1.253265488075988e-003	1.499371838785662e-005
0.73	1.035052212998082e-004	2.451238106082538e-004	4.920672906909300e-004	7.391800778668955e-004
0.74	1.646341948117355e-003	1.632766458840536e-003	1.564403609776022e-003	1.171946107085214e-003

0.75	2.358731974009544e-003	2.272135016676263e-003	2.059316778243742e-003	1.384084078780698e-003
0.76	2.536073077243774e-003	2.432620359973794e-003	2.185608061477738e-003	1.443281888658569e-003
0.77	2.442172459646443e-003	2.344983863378835e-003	2.110768500743642e-003	1.402294288161385e-003
0.78	2.230914910511360e-003	2.145851593699243e-003	1.937643329917574e-003	1.298356312610582e-003
0.79	1.979009349103725e-003	1.905380233985786e-003	1.722638107035293e-003	1.156376151551075e-003
0.80	1.721792305829158e-003	1.657083669683648e-003	1.494916858165219e-003	9.924976665323698e-004
0.81	1.474367843178838e-003	1.415962374033382e-003	1.268850575193653e-003	8.169583541984540e-004
0.82	1.242308739671582e-003	1.187990405706555e-003	1.051032826262351e-003	6.361206125469442e-004
0.83	1.026814958216004e-003	9.748403215630126e-004	8.440385973563266e-004	4.538372589013955e-004
0.84	8.271643118880378e-004	7.762008728871195e-004	6.484038146177026e-004	2.723450854560891e-004
0.85	6.418691366219401e-004	5.909076512630679e-004	4.636625498379459e-004	9.284221091710896e-005
0.86	4.692150151202501e-004	4.174897480943521e-004	2.888885847773576e-004	-8.414091823216729e-005
0.87	3.075029625931357e-004	2.544277613426797e-004	1.229755359898100e-004	-2.585037005056867e-004
0.88	1.551490189310360e-004	1.002685553583348e-004	-3.522169197547800e-005	-4.304232615709857e-004
0.89	1.071576667787777e-005	-4.633092757839953e-005	-1.868193294743419e-004	-6.002576143902259e-004
0.90	-1.270878522130488e-004	-1.865945279637322e-004	-3.328765438369533e-004	-7.684846552135753e-004

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μέθοδοι επιτάχυνσης σύγκλισης (Convergence Acceleration Methods – CAM)

3.1 Περιγραφή των μεθόδων

Όταν προσπαθούμε να λύσουμε τις εξισώσεις Hallen αριθμητικά, μία πολύ σημαντική παράμετρος, είναι ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης. Στην πράξη, η παράμετρος αυτή, επιλέγεται εκ των προτέρων εμπειρικά, συνήθως βάσει του αριθμού των σημείων ανά μήκος κύματος, ή αλλιώς βάσει της ποσότητας z_0/λ . Για μικρά προβλήματα, είναι συχνά εφικτό να αυξάνουμε την παράμετρο, έως ότου η αριθμητική λύση να θεωρείται ότι έχει συγκλίνει σε μία ικανοποιητική τελική τιμή. Αυτή η διαδικασία μπορεί να αποφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια, ωστόσο η σύγκλιση ενδέχεται να παραμένει αργή. Στην παρούσα παράγραφο, θα περιγράψουμε διάφορες τεχνικές **παρεκβολής**, που στόχο έχουν την επιτάχυνση της σύγκλισης.

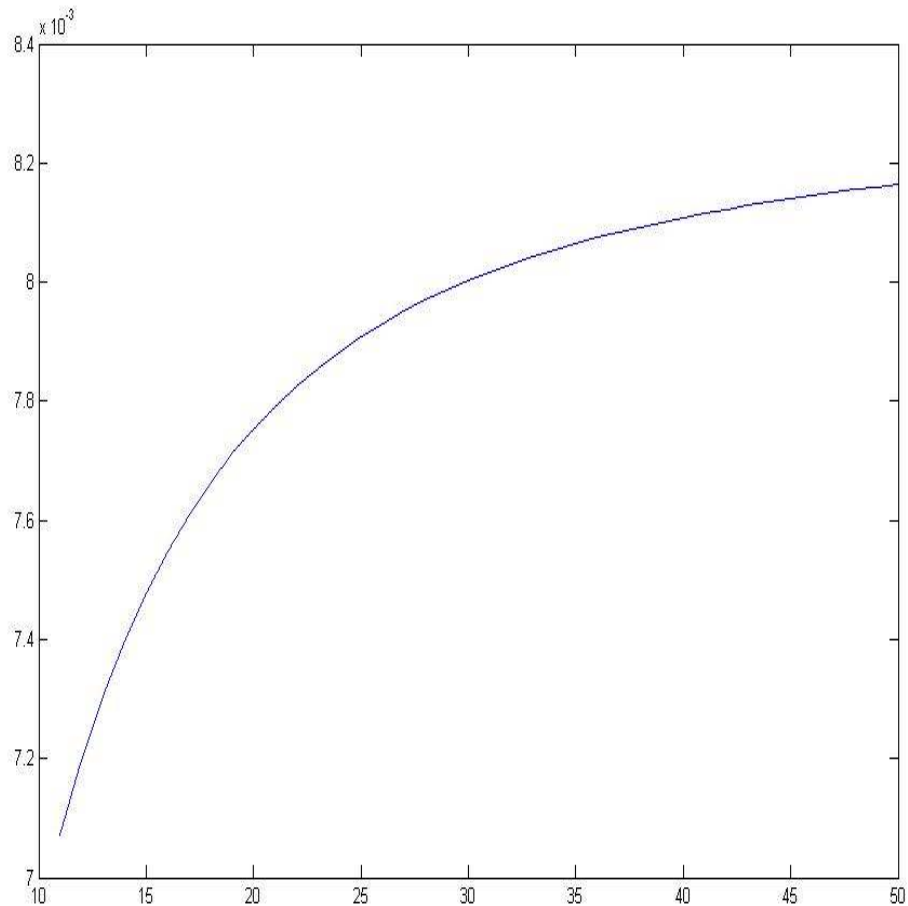
Γενικά με τον όρο **παρεκβολή**, εννοούμε την διαδικασία εκείνη, κατά την οποία υπολογίζουμε την τιμή μίας συνάρτησης σε ένα σημείο που είναι μεγαλύτερο (ή μικρότερο) από όλα τα σημεία, στα οποία η τιμή της συνάρτησης είναι γνωστή. Ειδικότερα, εμείς ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό του ορίου s στο οποίο καταλήγει μία συγκλίνουσα ακολουθία s_N . Με άλλα λόγια, αναζητούμε μία νέα ακολουθία t_N , η οποία συγκλίνει γρηγορότερα στο s , απ' ότι η s_N . Η t_N πρέπει να πληροί τρεις προϋποθέσεις:

- a) Να είναι συγκλίνουσα
- b) Να συγκλίνει στο ίδιο όριο με την s_N (δηλαδή το s)
- c) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{t_N - s}{s_N - s} = 0$ [2, εξ.(1)]

Μια συγκεκριμένη **CAM**, καθορίζεται από έναν κανόνα μετασχηματισμού, ο οποίος μπορεί να είναι είτε γραμμικός είτε μη γραμμικός. Ένας πολύ γνωστός μη γραμμικός μετασχηματισμός είναι [11], λόγου χάρη, αυτός του Shanks $e_k(s_N)$ ($k=1,2,\dots$). Για $k=1$ η e_1 είναι η Δ^2 μέθοδος του Aitkens. Στον

ηλεκτρομαγνητισμό, η έννοια της **παρεκβολής** είναι ευρέως διαδεδομένη. Ο ίδιος ο Maxwell [12], είχε χρησιμοποιήσει σε εργασίες του τον μετασχηματισμό του Shanks για $k = 2$ ($e_2(s_N)$). Πιο πρόσφατα, οι **CAM** έχουν βρει εκτεταμένη εφαρμογή, στον υπολογισμό συναρτήσεων Green [13] και ουρών ολοκληρωτέων παραστάσεων τύπου Sommerfeld [14].

Προκειμένου να αποφανθούμε για το ποιες από όλες τις **CAM** είναι οι κατάλληλες στην δικιά μας περίπτωση, παρατηρήσαμε ότι οι ακολουθίες $G_b(N)$ και $B_b(N)$, είναι μονότονες και μοιάζουν να ανήκουν στην κλάση των **λογαριθμικών ακολουθιών**:



**Ακολουθία $G_b(N)$ από $N = 11$ έως $N = 50$ για $h/\lambda = 0.25$ και $a/\lambda = 0.006$
(Η ακολουθία προφανώς μοιάζει με λογαριθμική)**

Η λογαριθμική ακολουθία έχει την γενική μορφή [2, εξ.(4)]:

$$S_N = S + \gamma N^{-\mu}, \quad \mu > 0 \quad (3.1.1)$$

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιήθηκαν οι τρεις παρακάτω μέθοδοι [2, εξ.(5,7,8)]:

- 1) $T_{N+2}^5 = G_{N+1} - 2\Delta G_N \Delta G_{N+1} / \Delta^2 G_N$ (Wynn's [15] ρ-algorithm)
- 2) $T_{N+1}^7 = \Delta(G_N / f_N) / \Delta(1 / f_N), f_N = N\Delta G_{N-1}$ (Levin's [16] u-transform)
- 3) $T_{N+2}^8 = G_N - N(\Delta G_N)^2 / [(N+1)\Delta G_{N+1} - N\Delta G_N]$ ([11], Theorem 3.7)

Και για τις τρεις μεθόδους ισχύουν οι εξής συμβολισμοί:

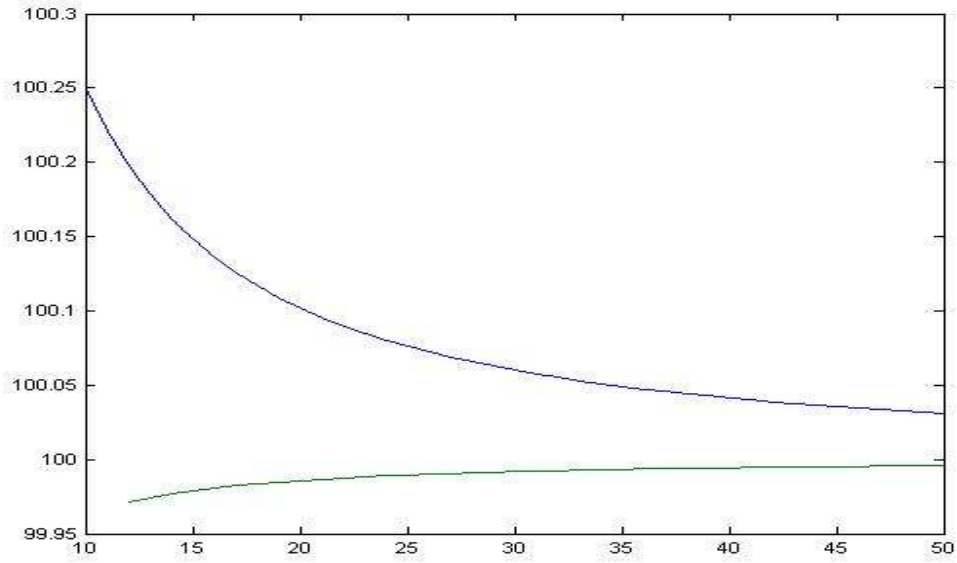
$$\Delta_{s_N} = s_{N+1} - s_N$$

$$\Delta_{s_N}^2 = \Delta_{s_{N+1}} - \Delta_{s_N}$$

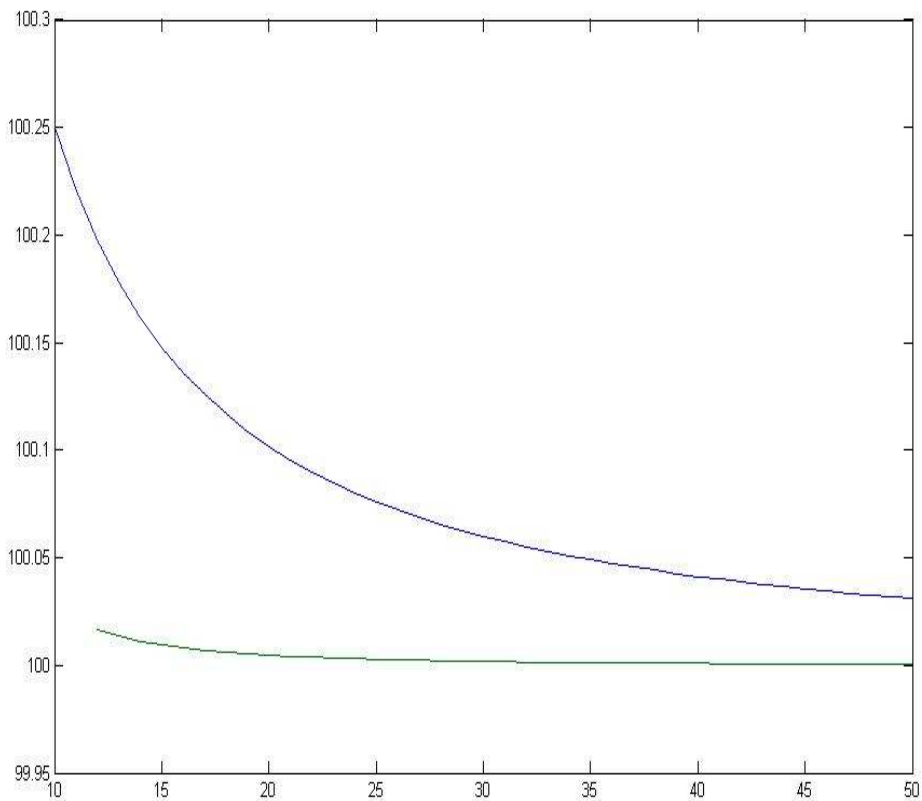
Επίσης, η επιλογή του δείκτη k σε κάθε μέθοδο T_k , έγινε με βάση τον πιο μεγάλο δείκτη k των τιμών G_k , οι οποίες είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό του T_k . Για παράδειγμα, για την μέθοδο T^5 επιλέξαμε $k = N+2$, αφού για τον υπολογισμό του T_{N+2}^5 , απαιτούνται οι τιμές G_N, G_{N+1}, G_{N+2} . Αντίθετα, για τον υπολογισμό του T_{N+1}^7 , απαιτούνται οι τιμές G_{N-1}, G_N, G_{N+1} .

Στη συνέχεια επιλέξαμε μία τυχαία λογαριθμική ακολουθία, σύμφωνα με τον τύπο (3.1.1), πάνω στην οποία εφαρμόσαμε τις τρεις παραπάνω **CAM**:

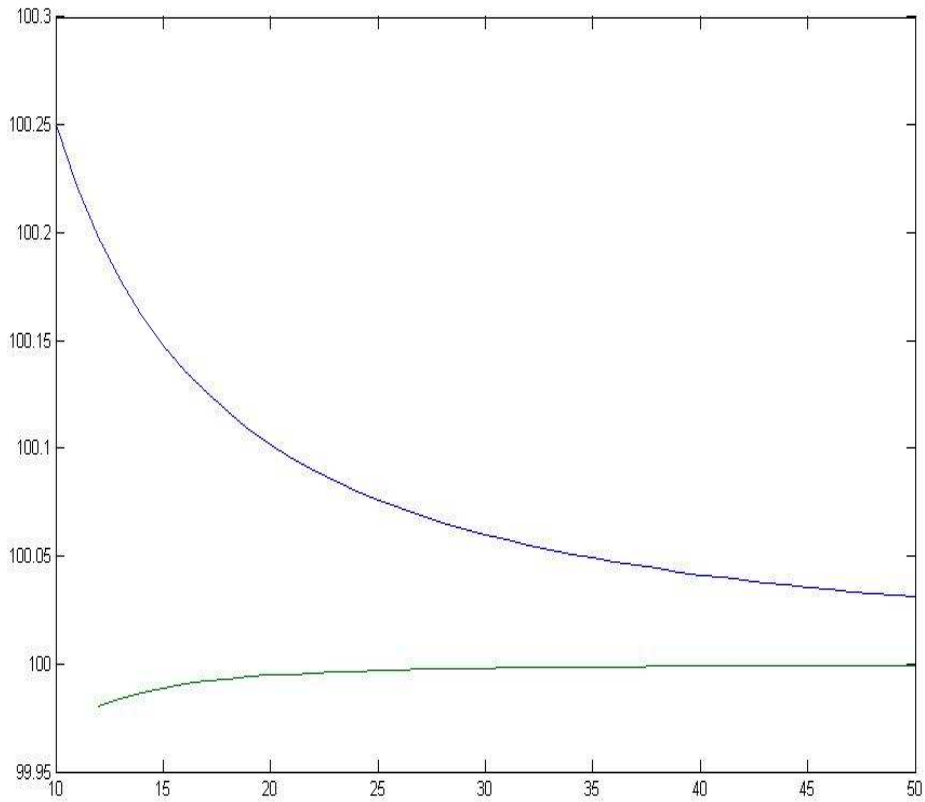
$$S_N = 100 + 5 \cdot N^{-1.3}$$



Η μπλε (πάνω) γραμμή δείχνει την ακολουθία S_N από $N = 10$ έως $N = 50$. Η πράσινη (κάτω) γραμμή δείχνει την ακολουθία T_N^5 από $N = 12$ έως $N = 50$. (Η τιμή T_{12}^5 υπολογίζεται από τις τιμές S_{10}, S_{11}, S_{12}).



Η μπλε (πάνω) γραμμή δείχνει την ακολουθία S_N από $N = 10$ έως $N = 50$. Η πράσινη (κάτω) γραμμή δείχνει την ακολουθία T_N^7 από $N = 12$ έως $N = 50$. (Η τιμή T_{12}^7 υπολογίζεται από τις τιμές S_{10}, S_{11}, S_{12}).



Η μπλε (πάνω) γραμμή δείχνει την ακολουθία S_N από $N = 10$ έως $N = 50$. Η πράσινη (κάτω) γραμμή δείχνει την ακολουθία T_N^8 από $N = 12$ έως $N = 50$. (Η τιμή T_{12}^8 υπολογίζεται από τις τιμές S_{10}, S_{11}, S_{12}).

Παρατηρώντας και τα τρία γραφήματα, βλέπουμε ότι οι ακολουθίες T_N^5, T_N^7, T_N^8 **συγκλίνουν στο ίδιο όριο** ($s = 100$) με την ακολουθία S_N , **αλλά πολύ πιο γρήγορα**, συνεπώς και οι τρεις τους πληρούν τις προϋποθέσεις που τέθηκαν, στην αρχή της παραγράφου, για την ακολουθία t_N .

Δοκιμάστηκαν επίσης (αλλά όχι διεξοδικά) και οι παρακάτω **CAM** [2, εξ.(6), εξ.(9)] και έδωσαν παρόμοια αποτελέσματα:

- 1) $T_{N+3}^6 = G_{N+1} + \Delta G_{N+1} \Delta(1/\Delta G_{N+1}) / \Delta^2(1/\Delta G_N)$
(Brezinski's [17] Θ -algorithm)
- 2) $T_{4N}^9 = G_{4N} - (G_{4N} - G_{2N})^2 / (G_{4N} - 2G_{2N} + G_N)$ (Δ^2 method)

3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα για μοντελοποίηση DFG

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για την G_b ($z = 0$ - **driving point**), για μοντελοποίηση **DFG**, όπως αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων T^5 , T^7 και T^8 , στις τιμές της G_b που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2, τόσο για **GMPF** όσο και για **PMTF**. Όλες οι τιμές είναι σε **mSiemens**.

Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά μόνο το $h/\lambda = 0.25$, και εξηγεί την όλη διαδικασία που ακολουθήσαμε:

$h/\lambda = 0.25$	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
N=398 GMPF	8.308326382325253	8.292734640945541	8.297161295662941	8.954755935380525
N=399 GMPF	8.308367462340987	8.292773182500542	8.297194680949603	8.954777282422980
N=400 GMPF	8.308408332431655	8.292811528022298	8.297227897693731	8.954798522773299
N=398 PMTF	8.235444178935960	8.223836133955583	8.236724065519877	8.915350949326075
N=399 PMTF	8.235666599790642	8.224046150945083	8.236907964176903	8.915470645759049
N=400 PMTF	8.235887910636511	8.224255120539398	8.237090946506518	8.915589745799757
T^5 N=400 GMPF	8.324363112525999	8.307851196787029	8.310353976680295	8.963276852811022
T^7 N=400 GMPF	8.323986452101178	8.307562616641595	8.310196409003464	8.963259028334303
T^8 N=400 GMPF	8.324063275223916	8.307635689581374	8.310261120702267	8.963301667474508

T^5 N=400 PMTF	8.324358053306077	8.307848646264888	8.310353774599556	8.963277603917387
T^7 N=400 PMTF	8.324303652620600	8.307854363553609	8.310424155498626	8.963325782228681
T^8 N=400 PMTF	8.324749911622305	8.308276600123711	8.310794870838040	8.963567110221660
ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ (mSiemens)	8.324 - 8.325	8.308	8.310 - 8.311	8.963 - 8.964

Το διάστημα τελικής τιμής (8.324 – 8.325) προέκυψε από τις εξής έξι ακολουθίες: T_N^5 GMPF, T_N^7 GMPF, T_N^8 GMPF, T_N^5 PMTF, T_N^7 PMTF, T_N^8 PMTF, για $N = 400$. Με τον ίδιο τρόπο προέκυψαν όλα τα διαστήματα τελικής τιμής, που παρουσιάζονται στην εργασία.

Ο επόμενος πίνακας είναι συγκεντρωτικός και παρουσιάζει τα αντίστοιχα αποτελέσματα για όλα τα h/λ που μετρήθηκαν:

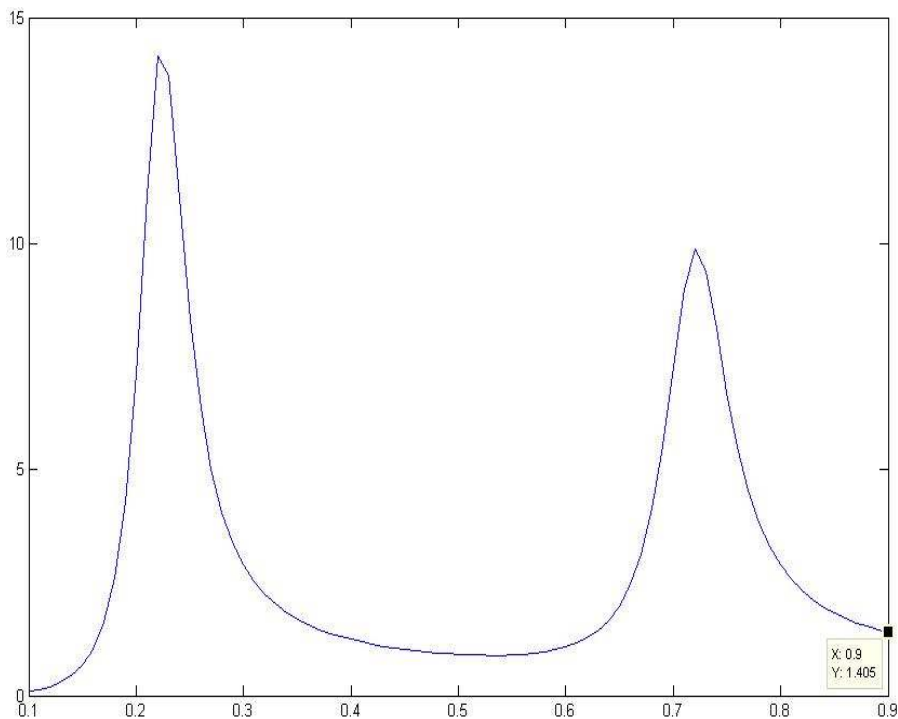
h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	0.089	0.104	0.153	0.686 - 0.687
0.11	0.134	0.157	0.228	0.993
0.12	0.201	0.233	0.338	1.434
0.13	0.299	0.347	0.500	2.073
0.14	0.446	0.518	0.746	3.001
0.15	0.674	0.782	1.123	4.341
0.16	1.032	1.197 - 1.198	1.716	6.224 - 6.225
0.17	1.616	1.873	2.670	8.698
0.18	2.598	3.001 - 3.002	4.220 - 4.221	11.519
0.19	4.283 - 4.284	4.905 - 4.906	6.678 - 6.679	13.978
0.20	7.100 - 7.101	7.958 - 7.959	10.116 - 10.117	15.202 - 15.203
0.21	11.049 - 11.050	11.863 - 11.864	13.469 - 13.471	14.918 - 14.919
0.22	14.147 - 14.150	14.379 - 14.382	14.560 - 14.561	13.612 - 13.613
0.23	13.726 - 13.727	13.516 - 13.518	13.002	11.950
0.24	11.007 - 11.008	10.840 - 10.841	10.518	10.347
0.25	8.324 - 8.325	8.308	8.310 - 8.311	8.963 - 8.964
0.26	6.355 - 6.356	6.434 - 6.435	6.642 - 6.643	7.823
0.27	4.999 - 5.000	5.122 - 5.123	5.430	6.897
0.28	4.060	4.199	4.546 - 4.547	6.147
0.29	3.392	3.534	3.890	5.536 - 5.537

0.30	2.903	3.041	3.392	5.035
0.31	2.534	2.667	3.006	4.619
0.32	2.249	2.376	2.700	4.271
0.33	2.024	2.144	2.454	3.978
0.34	1.843	1.957	2.253	3.727 - 3.728
0.35	1.695	1.804	2.086	3.513
0.36	1.572	1.676	1.946	3.327
0.37	1.469	1.568	1.828	3.166
0.38	1.381	1.476	1.726	3.026
0.39	1.306	1.398	1.638	2.902
0.40	1.242	1.330	1.562	2.794
0.41	1.185	1.270	1.496	2.699
0.42	1.136	1.219	1.438	2.616
0.43	1.093	1.173	1.387	2.543
0.44	1.055	1.134	1.342	2.480
0.45	1.022	1.099	1.303	2.425
0.46	0.993	1.068	1.269	2.380
0.47	0.968	1.042	1.240	2.343
0.48	0.947	1.020	1.215	2.315
0.49	0.929	1.001	1.195	2.295
0.50	0.914	0.986	1.179	2.286
0.51	0.903	0.974	1.168	2.287 - 2.288
0.52	0.896	0.967	1.162	2.301
0.53	0.892	0.965	1.162	2.329
0.54	0.893	0.967	1.168	2.374
0.55	0.900	0.975	1.182	2.441
0.56	0.913	0.991	1.205	2.533
0.57	0.934	1.015	1.240	2.658
0.58	0.965 - 0.966	1.051	1.290	2.825
0.59	1.010	1.102	1.359	3.045
0.60	1.071	1.172	1.454	3.334 - 3.335
0.61	1.156	1.268	1.584 - 1.585	3.713 - 3.714
0.62	1.273 - 1.274	1.400 - 1.401	1.762 - 1.763	4.207 - 4.208
0.63	1.436	1.584	2.008	4.843 - 4.844
0.64	1.664 - 1.665	1.841 - 1.842	2.348 - 2.349	5.647 - 5.648
0.65	1.988 - 1.989	2.205 - 2.206	2.825 - 2.826	6.630 - 6.631
0.66	2.455 - 2.457	2.726 - 2.728	3.494 - 3.496	7.760 - 7.761
0.67	3.135 - 3.139	3.478 - 3.481	4.427 - 4.430	8.932 - 8.933
0.68	4.125 - 4.129	4.551 - 4.556	5.682 - 5.686	9.960 - 9.962
0.69	5.516 - 5.522	6.011 - 6.016	7.230 - 7.232	10.622 - 10.625
0.70	7.275 - 7.279	7.756 - 7.759	8.802 - 8.805	10.782 - 10.784
0.71	8.988 - 8.994	9.298 - 9.305	9.853 - 9.862	10.456 - 10.458
0.72	9.851 - 9.883	9.910 - 9.913	9.938 - 9.942	9.797 - 9.798
0.73	9.400 - 9.407	9.320 - 9.326	9.135 - 9.138	8.983 - 8.984
0.74	8.119 - 8.123	8.052 - 8.054	7.932 - 7.933	8.151 - 8.152
0.75	6.697 - 6.699	6.696 - 6.698	6.728 - 6.729	7.377 - 7.378
0.76	5.482 - 5.484	5.540 - 5.542	5.700 - 5.701	6.693
0.77	4.540 - 4.541	4.635 - 4.636	4.876 - 4.877	6.103 - 6.104

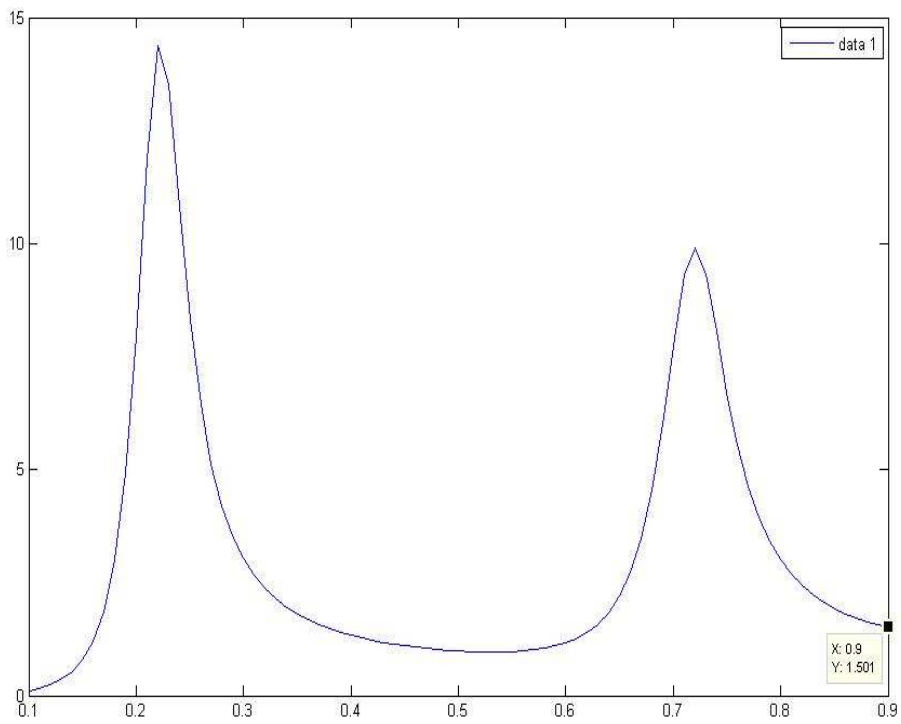
0.78	3.829 - 3.831	3.943 - 3.944	4.229 - 4.230	5.601 - 5.602
0.79	3.294 - 3.295	3.416 - 3.417	3.723 - 3.724	5.176 - 5.177
0.80	2.885 - 2.886	3.009 - 3.010	3.324 - 3.325	4.816
0.81	2.568	2.691 - 2.692	3.006	4.509 - 4.510
0.82	2.318	2.439	2.749	4.247 - 4.248
0.83	2.118	2.235 - 2.236	2.538	4.022 - 4.023
0.84	1.955	2.069	2.364	3.828
0.85	1.820 - 1.821	1.931	2.218	3.660
0.86	1.708 - 1.709	1.816	2.095	3.513
0.87	1.614	1.718	1.990	3.385
0.88	1.533 - 1.534	1.635	1.900	3.272
0.89	1.464 - 1.465	1.563	1.822	3.173 - 3.174
0.90	1.405	1.501	1.755	3.087

Τελικές τιμές για G_b , με μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης, σε mSiemens.

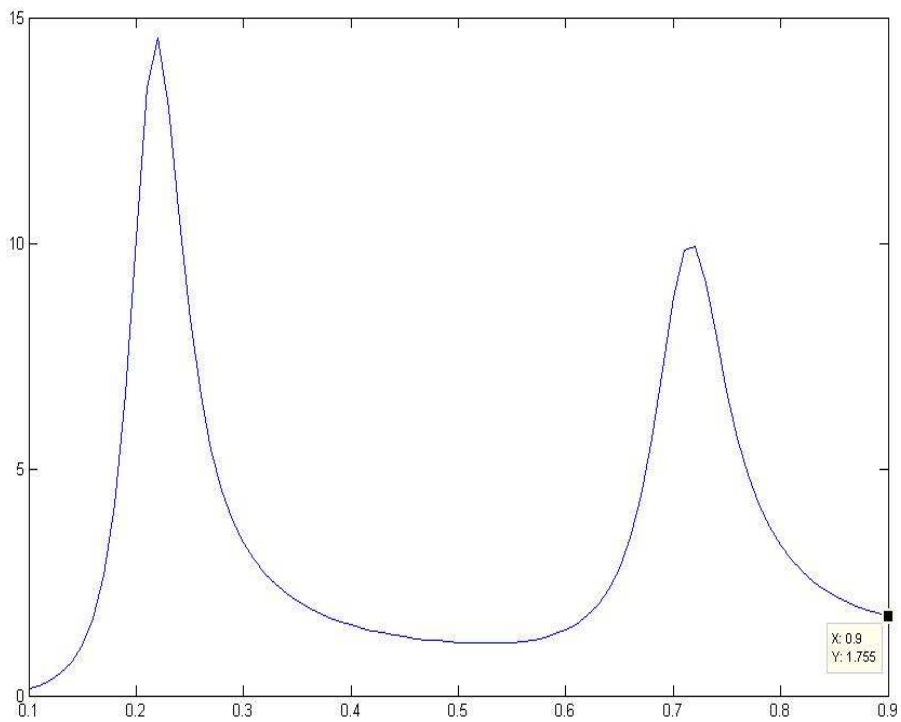
Ακολουθούν τα διαγράμματα για τα τέσσερα διαφορετικά a/λ που μετρήθηκαν, συναρτήσει των h/λ :



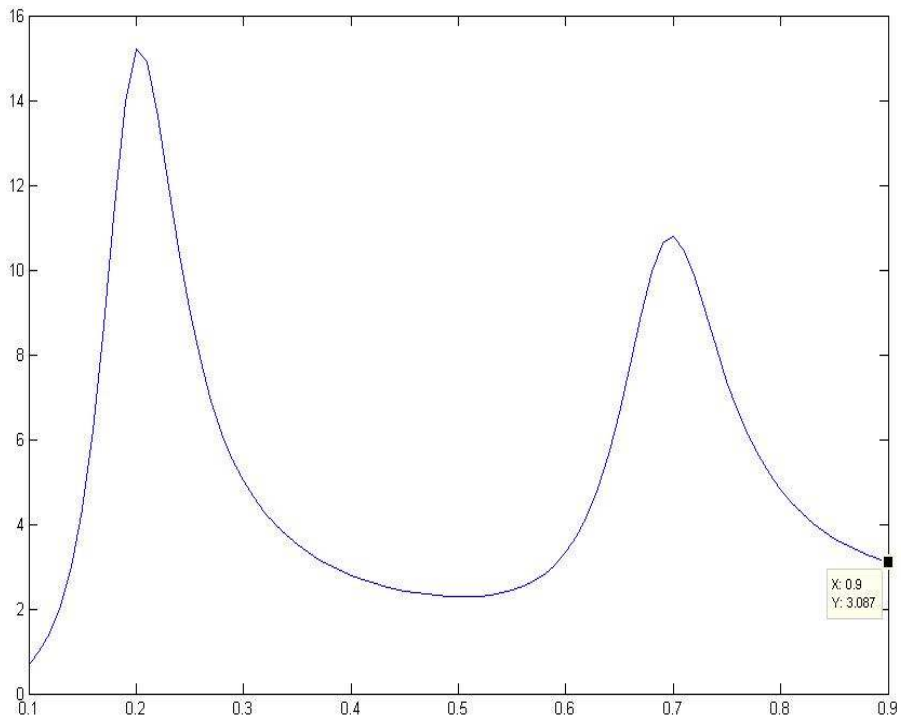
G_b με CAM για $a/\lambda = 0.006$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



G_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



G_b με CAM για $a/\lambda = 0.01$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



G_b με CAM για $a/\lambda = 0.03$ και h/λ από 0.1 έως 0.9

3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα για μοντελοποίηση FG

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για τις G_b , B_b ($z=0$ - **driving point**), για μοντελοποίηση **FG**, όπως αυτά προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων T^5 , T^7 και T^8 , στις τιμές των G_b , B_b που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2, για **GMPF**. Ο λόγος $b/a = 3$. Όλες οι τιμές είναι σε **mSiemens**.

Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά μόνο το $h/\lambda = 0.25$, και εξηγεί την όλη διαδικασία που ακολουθήσαμε:

Για την G_b :

$h/\lambda = 0.25$	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
G_b N=398 GMPF	8.307545276933340	8.291613587321903	8.294618925077291	8.919769739269523
G_b N=399 GMPF	8.307586357629019	8.291652129732473	8.294652311808096	8.919791095689311
G_b N=400 GMPF	8.307627228391349	8.291690476100488	8.294685529983342	8.919812345359471
T^5 N=400 GMPF	8.323581904421036	8.306730095396607	8.307811726708112	8.928293549349715
T^7 N=400 GMPF	8.323204903897546	8.306441154594640	8.307653723610942	8.928274873917171
T^8 N=400 GMPF	8.323281723145330	8.306514223717844	8.307718431564798	8.928317519006209
ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ (mSiemens)	8.323 - 8.324	8.306 - 8.307	8.308	8,928

Αντίστοιχα για την B_b :

$h/\lambda = 0.25$	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
B_b N=398 GMPF	4.101817455410120	3.992042785770917	3.726859271700489	2.921145380767186
B_b N=399 GMPF	4.101812658813858	3.992038550237601	3.726856038892668	2.921143387619078
B_b N=400 GMPF	4.101807885615781	3.992034335343300	3.726852821899207	2.921141404635829
T^5 N=400 GMPF	4.099855660618296	3.990308591258791	3.725540788481065	2.920365732205142
T^7 N=400 GMPF	4.099810513120210	3.990266672499400	3.725514411199171	2.920382579828582
T^8 N=400 GMPF	4.099800192854180	3.990257528752230	3.725507516124960	2.920378830488791
ΤΕΛΙΚΗ ΤΙΜΗ (mSiemens)	4.100	3.990	3.726	2.920

Ο επόμενοι πίνακες είναι συγκεντρωτικοί και παρουσιάζουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα για όλα τα h/λ που μετρήθηκαν:

h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	0.090	0.105	0.153	0.707
0.11	0.135	0.157	0.228	1.016
0.12	0.201	0.234	0.338	1.460
0.13	0.299	0.347	0.501	2.102
0.14	0.447	0.519	0.747	3.034
0.15	0.674	0.782	1.124	4.377
0.16	1.033	1.198	1.718	6.263
0.17	1.617	1.874	2.672	8.736
0.18	2.598	3.002	4.223	11.551
0.19	4.284	4.906 - 4.907	6.681	13.997
0.20	7.101	7.959	10.119	15.206
0.21	11.050	11.864 - 11.865	13.472	14.906

0.22	14.150	14.382 - 14.383	14.561	13.589
0.23	13.727	13.517	13.001	11.920
0.24	11.007	10.839 - 10.840	10.515	10.313
0.25	8.323 - 8.324	8.306 - 8.307	8.308	8,928
0.26	6.354	6.433	6.640	7.788
0.27	4.998 - 4.999	5.121	5.428	6.863
0.28	4.059	4.198	4.544	6.114
0.29	3.391	3.533	3.888	5.504
0.30	2.902	3.040	3.390	5.004
0.31	2.533	2.666	3.004	4.589
0.32	2.249	2.375	2.698 - 2.699	4.242
0.33	2.024	2.144	2.453	3.949
0.34	1.843	1.957	2.251 - 2.252	3.700
0.35	1.695	1.803	2.085	3.486
0.36	1.572	1.675	1.945	3.301
0.37	1.469	1.567	1.826	3.141
0.38	1.381	1.476	1.725	3.001
0.39	1.306	1.397	1.637	2.878
0.40	1.241	1.329	1.561	2.770
0.41	1.185	1.270	1.495	2.676
0.42	1.136	1.218	1.437	2.593
0.43	1.093	1.173	1.386	2.520
0.44	1.055	1.133	1.341	2.458
0.45	1.022	1.098	1.302	2.404
0.46	0.993	1.068	1.268	2.359
0.47	0.968	1.042	1.239	2.322
0.48	0.946	1.019	1.214	2.294
0.49	0.928	1.000	1.194	2.275
0.50	0.914	0.985	1.178	2.266
0.51	0.903	0.974	1.167	2.268 - 2.269
0.52	0.895	0.967	1.161	2.282
0.53	0.892	0.964	1.160	2.310
0.54	0.893	0.966	1.167	2.356
0.55	0.900	0.975	1.180	2.423
0.56	0.913	0.990	1.204	2.516
0.57	0.934	1.015	1.239	2.641
0.58	0.965	1.051	1.289	2.808
0.59	1.009	1.101	1.358	3.029
0.60	1.071	1.171	1.453	3.319
0.61	1.156	1.267 - 1.268	1.583	3.699
0.62	1.273	1.400	1.761 - 1.762	4.193
0.63	1.435 - 1.436	1.583 - 1.584	2.007	4.829
0.64	1.663 - 1.664	1.840 - 1.841	2.347 - 2.348	5.634
0.65	1.987 - 1.988	2.204 - 2.205	2.824	6.617
0.66	2.455	2.726 - 2.727	3.493 - 3.494	7.747
0.67	3.135 - 3.136	3.478 - 3.479	4.426 - 4.427	8.920
0.68	4.125 - 4.126	4.551 - 4.553	5.682 - 5.683	9.947
0.69	5.516 - 5.518	6.011 - 6.013	7.229 - 7.231	10.609

0.70	7.275 - 7.278	7.756 - 7.759	8.803 - 8.805	10.766 - 10.767
0.71	8.991 - 8.994	9.303 - 9.305	9.861	10.438 - 10.439
0.72	9.851 - 9.852	9.910 - 9.912	9.940 - 9.941	9.777
0.73	9.404 - 9.406	9.323 - 9.325	9.136 - 9.137	8.962
0.74	8.120 - 8.123	8.052 - 8.054	7.930 - 7.931	8.129
0.75	6.696 - 6.699	6.696 - 6.698	6.727 - 6.728	7.355
0.76	5.481 - 5.484	5.540 - 5.541	5.698 - 5.699	6.670
0.77	4.539 - 4.541	4.634 - 4.635	4.874 - 4.875	6.080
0.78	3.829 - 3.830	3.943 - 3.944	4.228 - 4.229	5.579
0.79	3.293 - 3.294	3.415 - 3.416	3.722	5.154
0.80	2.884 - 2.885	3.009	3.323	4.793 - 4.794
0.81	2.567 - 2.568	2.691	3.004 - 3.005	4.487
0.82	2.317 - 2.318	2.438 - 2.439	2.747	4.225
0.83	2.117 - 2.118	2.235	2.537	4.000
0.84	1.954 - 1.955	2.068 - 2.069	2.363	3.806
0.85	1.820	1.930 - 1.931	2.217	3.638
0.86	1.708	1.815	2.094	3.491
0.87	1.613 - 1.614	1.717 - 1.718	1.989	3.363
0.88	1.533	1.634	1.899	3.251
0.89	1.464	1.562 - 1.563	1.821	3.152 - 3.153
0.90	1.404 - 1.405	1.500 - 1.501	1.753 - 1.754	3.066

Τελικές τιμές για G_b , με μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης, σε mSiemens.

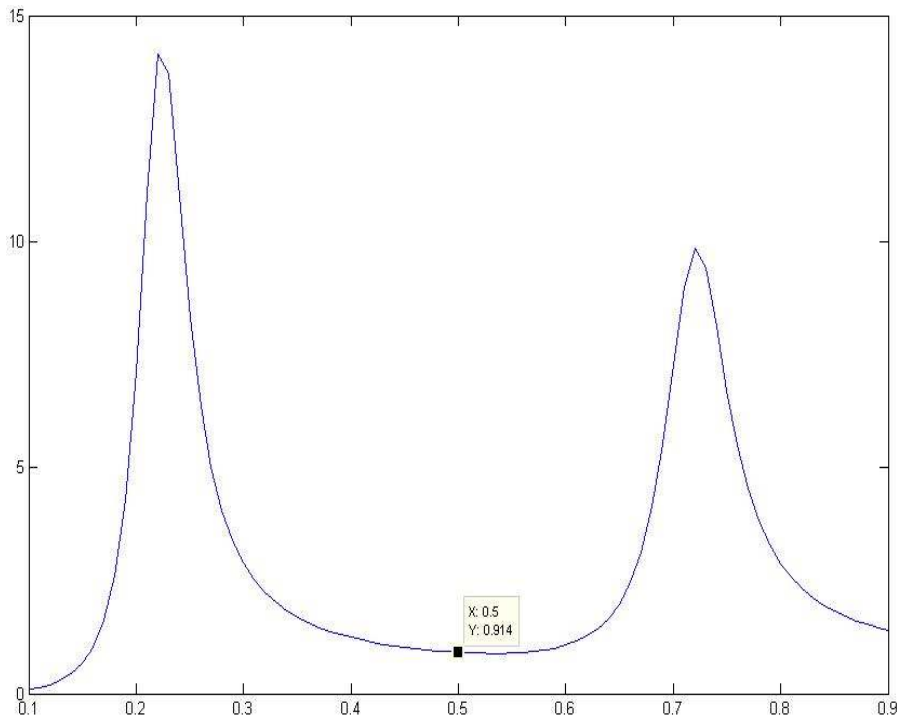
h/λ	$a/\lambda = 0.006$	$a/\lambda = 0.007022$	$a/\lambda = 0.01$	$a/\lambda = 0.03$
0.10	-3.058	-3.240	-3.710	-5.924
0.11	-3.408	-3.613	-4.144	-6.685
0.12	-3.802	-4.033	-4.634	-7.524
0.13	-4.253	-4.514	-5.195	-8.442
0.14	-4.779	-5.075	-5.848	-9.412
0.15	-5.404	-5.740	-6.615	-10.358
0.16	-(6.154 - 6.155)	-6.534	-7.514	-11.092
0.17	-7.060	-7.482	-8.540	-11.259
0.18	-8.124	-8.566	-9.596	-10.377
0.19	-(9.241 - 9.242)	-9.621	-10.328	-8.155
0.20	-9.931	-10.041	-9.864	-4.993
0.21	-8.895	-8.475	-7.099	-1.863
0.22	-4.847	-(4.140 - 4.141)	-2.589	0.489
0.23	0.206 - 0.207	0.562 - 0.563	1.193	1.924
0.24	3.171	3.174	3.119	2.650
0.25	4.100	3.990	3.726	2.920
0.26	4.073	3.961	3.696	2.926
0.27	3.715	3.627	3.413	2.785
0.28	3.277	3.212	3.048	2.568
0.29	2.848	2.799	2.673	2.316

0.30	2.454	2.415 - 2.416	2.315	2.049
0.31	2.101	2.068	1.984	1.779
0.32	1.785	1.756	1.680	1.514
0.33	1.502	1.474	1.402	1.256
0.34	1.248	1.219	1.147	1.007
0.35	1.016 - 1.017	0.986	0.911	0.766
0.36	0.805	0.772	0.692	0.533 - 0.534
0.37	0.610	0.574	0.488	0.308
0.38	0.428	0.389 - 0.390	0.296	0.089
0.39	0.258	0.216	0.114	-0.124
0.40	0.097	0.051 - 0.052	-0.059	-0.332
0.41	-0.056	-(0.105 - 0.106)	-(0.225 - 0.226)	-0.538
0.42	-0.203	-(0.256 - 0.257)	-0.386	-0.740
0.43	-0.345	-(0.402 - 0.403)	-0.543	-0.942
0.44	-0.483	-0.545	-0.696	-(1.142 - 1.143)
0.45	-0.618	-0.685	-0.847	-1.344
0.46	-0.752	-0.823	-(0.996 - 0.997)	-(1.547 - 1.548)
0.47	-0.884	-0.960	-1.146	-1.754
0.48	-1.017	-1.098	-1.297	-1.964
0.49	-1.151	-1.237	-1.449	-(2.180 - 2.181)
0.50	-(1.286 - 1.287)	-1.378	-(1.604 - 1.605)	-(2.403 - 2.404)
0.51	-1.425	-(1.522 - 1.523)	-1.764	-2.635
0.52	-1.568	-(1.671 - 1.672)	-1.929	-(2.876 - 2.877)
0.53	-1.716	-(1.826 - 1.827)	-2.101	-3.130
0.54	-1.871	-(1.988 - 1.989)	-2.281	-(3.397 - 3.398)
0.55	-(2.034 - 2.035)	-(2.159 - 2.160)	-2.472	-3.681
0.56	-2.208	-(2.341 - 2.342)	-(2.675 - 2.676)	-(3.982 - 3.983)
0.57	-(2.394 - 2.395)	-2.537	-2.894	-4.304
0.58	-2.596	-2.748	-(3.130 - 3.131)	-4.646
0.59	-(2.815 - 2.816)	-(2.978 - 2.979)	-3.389	-(5.009 - 5.010)
0.60	-(3.057 - 3.058)	-(3.232 - 3.233)	-(3.672 - 3.673)	-5.391
0.61	-3.326	-(3.513 - 3.514)	-3.986	-5.784
0.62	-3.627	-(3.828 - 3.829)	-(4.333 - 4.334)	-6.173
0.63	-(3.965 - 3.966)	-(4.181 - 4.182)	-(4.718 - 4.719)	-6.527
0.64	-(4.348 - 4.349)	-(4.578 - 4.579)	-(5.141 - 5.142)	-6.796
0.65	-(4.779 - 4.780)	-(5.018 - 5.019)	-(5.593 - 5.594)	-6.900
0.66	-(5.252 - 5.253)	-(5.493 - 5.494)	-(6.045 - 6.046)	-(6.733 - 6.734)
0.67	-(5.743 - 5.744)	-(5.965 - 5.966)	-6.428	-(6.186 - 6.187)
0.68	-(6.174 - 6.175)	-(6.338 - 6.339)	-6.594	-(5.208 - 5.209)
0.69	-6.360	-(6.399 - 6.400)	-6.294	-3.879
0.70	-(5.950 - 5.951)	-(5.797 - 5.798)	-(5.245 - 5.246)	-2.413
0.71	-(4.552 - 4.555)	-(4.230 - 4.233)	-(3.418 - 3.419)	-1.065
0.72	-(2.258 - 2.262)	-(1.945 - 1.948)	-(1.292 - 1.293)	-0.002
0.73	0.063 - 0.066	0.209 - 0.211	0.464 - 0.465	0.728
0.74	1.624 - 1.626	1.613 - 1.614	1.549 - 1.550	1.166
0.75	2.351 - 2.352	2.266	2.054	1.382
0.76	2.537	2.433 - 2.434	2.186	1.443
0.77	2.447	2.349 - 2.350	2.114	1.404

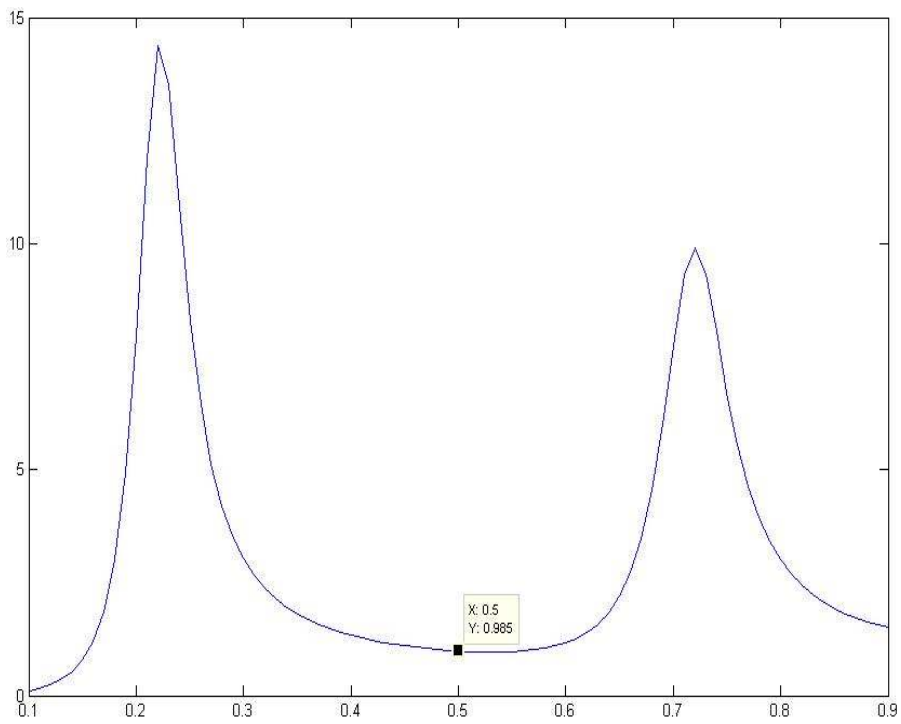
0.78	2.237 - 2.238	2.151 - 2.152	1.942 - 1.943	1.301
0.79	1.986	1.911 - 1.912	1.728	1.160
0.80	1.728 - 1.729	1.663 - 1.664	1.500 - 1.501	0.996
0.81	1.481 - 1.482	1.422 - 1.423	1.274 - 1.275	0.821
0.82	1.248 - 1.249	1.194 - 1.195	1.056 - 1.057	0.640
0.83	1.033 - 1.034	0.980 - 0.981	0.849 - 0.850	0.458
0.84	0.833 - 0.834	0.782	0.653 - 0.654	0.276 - 0.277
0.85	0.647 - 0.648	0.596 - 0.597	0.468 - 0.469	0.097
0.86	0.475	0.423	0.293 - 0.294	-0.080
0.87	0.313 - 0.314	0.259 - 0.260	0.127 - 0.128	-0.254
0.88	0.160 - 0.161	0.105 - 0.106	-(0.030 - 0.031)	-0.426
0.89	0.016 - 0.017	-(0.041 - 0.042)	-(0.182 - 0.183)	-0.596
0.90	-(0.121 - 0.122)	-(0.181 - 0.182)	-(0.328 - 0.329)	-0.764

Τελικές τιμές για B_b , με μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης, σε mSiemens. Η αναπαράσταση, παραδείγματος χάρι, « -(0.121 - 0.122) » σημαίνει ότι η $B_b < 0$ και $0.121 \leq |B_b| \leq 0.122$.

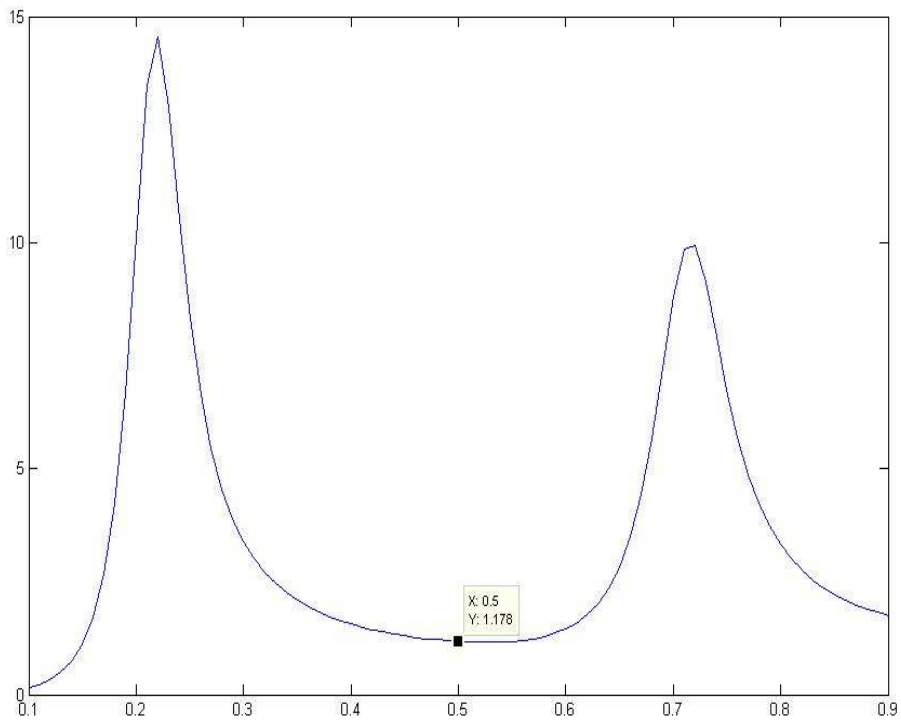
Ακολουθούν τα διαγράμματα για τα τέσσερα διαφορετικά a/λ που μετρήθηκαν, συναρτήσει των h/λ :



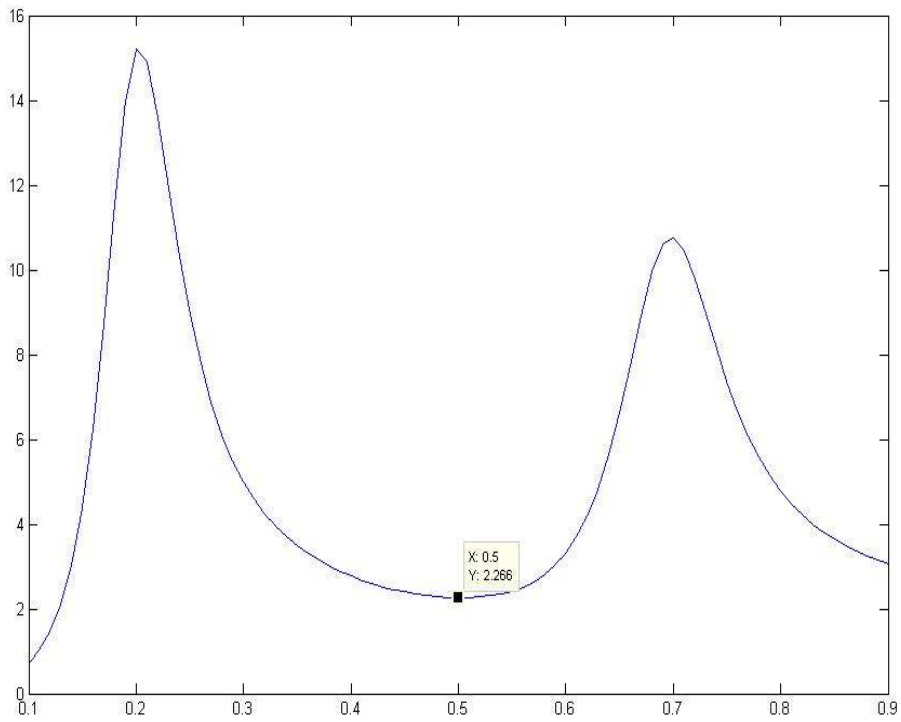
G_b με CAM για $a/\lambda = 0.006$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



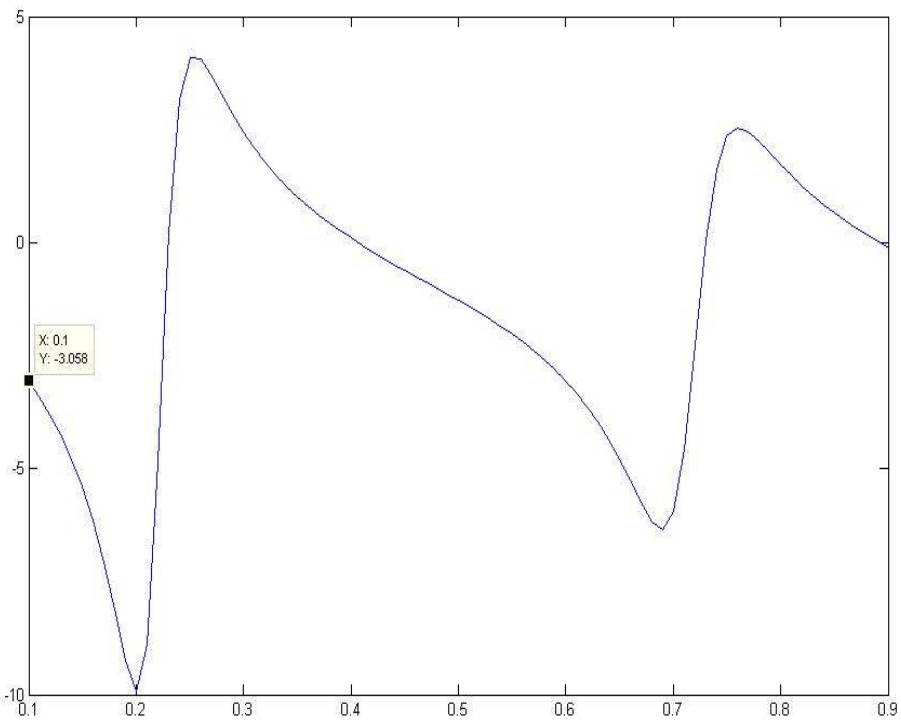
G_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



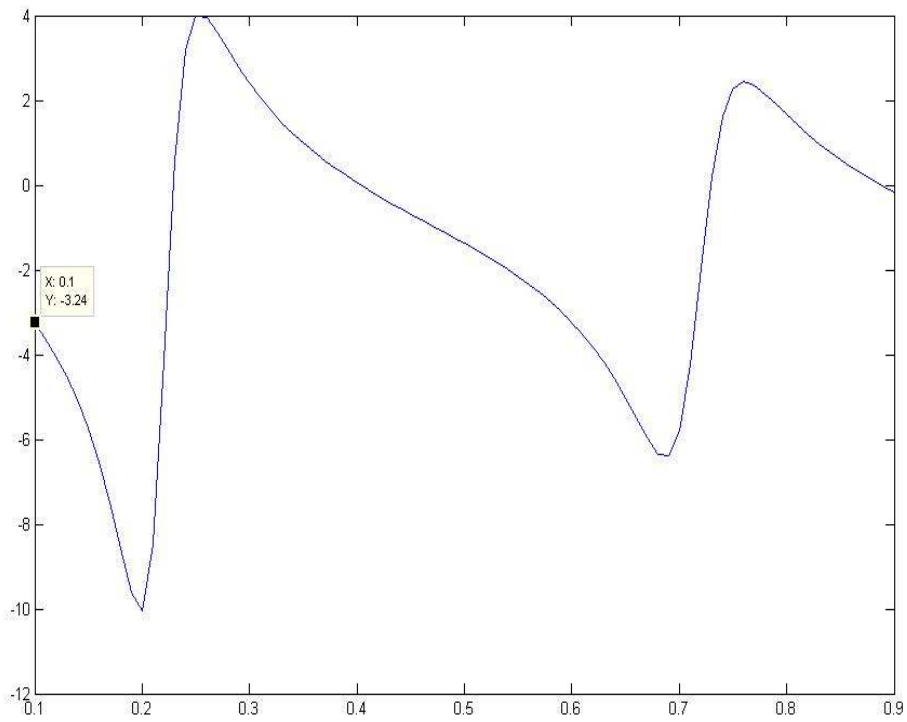
G_b με CAM για $a/\lambda = 0.01$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



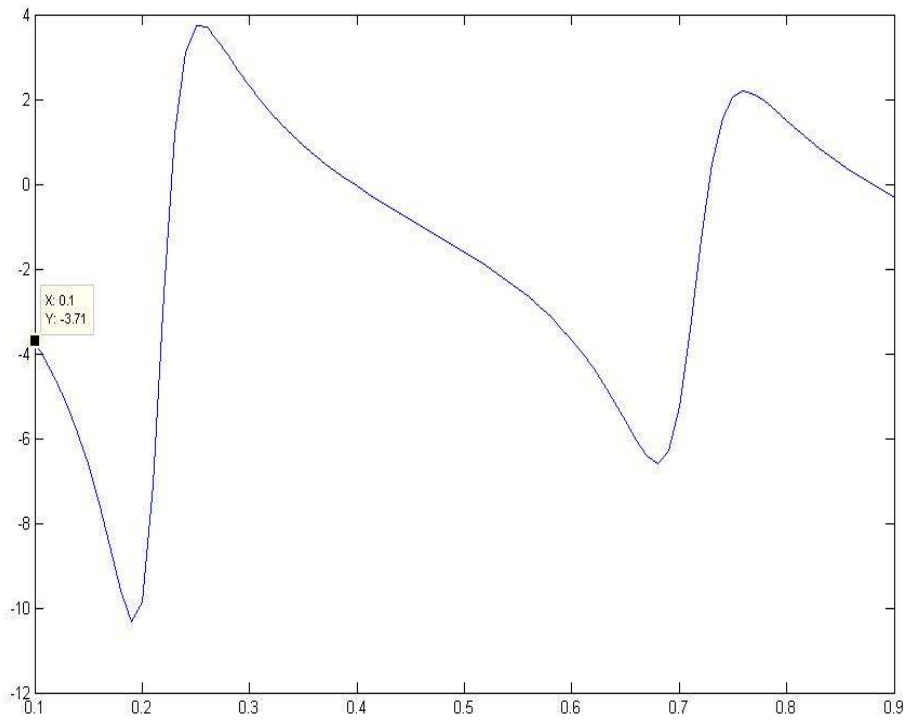
G_b με CAM για $a/\lambda = 0.03$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



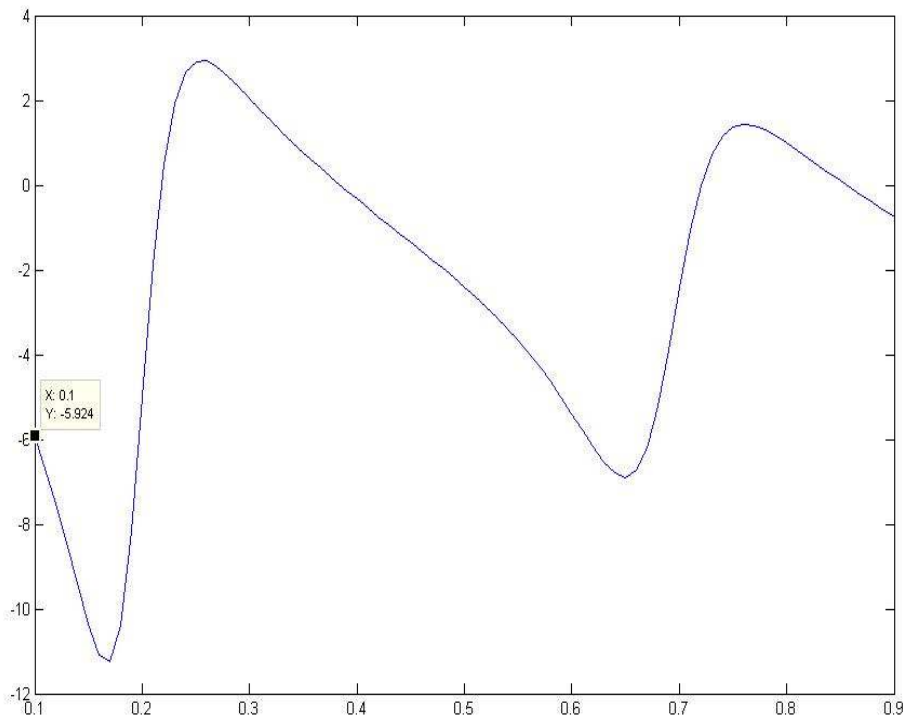
B_b με CAM για $a/\lambda = 0.006$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



B_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



B_b με CAM για $a/\lambda = 0.01$ και h/λ από 0.1 έως 0.9



B_b με CAM για $a/\lambda = 0.03$ και h/λ από 0.1 έως 0.9

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Σύγκριση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, με εκείνα που προέκυψαν πειραματικά από τον **Richard B. Mack** [4] το 1963. Η μοντελοποίηση που προσεγγίζει καλύτερα το πείραμα του **Mack** είναι η **frill generator** (με $b/a = 3$, $a/\lambda = 0.007022$), συνεπώς αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την σύγκριση. Στο πείραμα αυτό η κεραία είχε ένα ημισφαιρικό καπάκι, ύψους $h_{καπ} \leq a/\lambda = 0.007022$ (4.1).

Άρα, θα ισχύει η παρακάτω σχέση αβεβαιότητας, όσον αφορά τα h/λ :

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{πειραματικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} + h_{καπ} \Rightarrow (4.1)$$

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{πειραματικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} + a/\lambda \Rightarrow$$

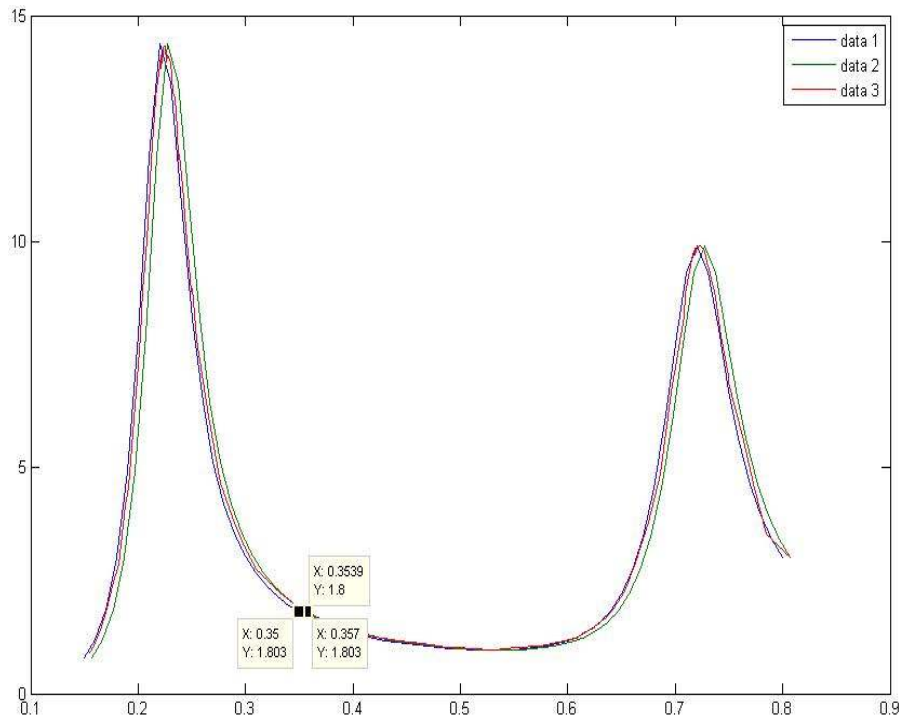
$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{πειραματικο}} \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} + 0.007022$$

Η αβεβαιότητα αυτή φαίνεται καλύτερα στο πρώτο διάγραμμα που ακολουθεί, όπου για ίδια τιμή του $G(\approx 1.80)$, έχουμε:

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} = 0.35 \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{πειραματικο}} = 0.3539 \leq \left(\frac{h}{\lambda}\right)_{\text{θεωρητικο}} + 0.007022 \approx 0.357$$

Σε όλο το υπόλοιπο κεφάλαιο, θα χρησιμοποιηθούν, όπου χρειάζεται, οι σχετικοί συμβολισμοί που υπάρχουν στην εργασία του **Mack**.

Ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα για την G :



Η πιο αριστερά (μπλε – data 1) γραμμή δείχνει τις τιμές της G_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 (υποθέτοντας την μη ύπαρξη καπακιού. Αντίστοιχα, η πιο δεξιά (πράσινη – data 2) γραμμή δείχνει τις ίδιες τιμές G_b (υποθέτοντας την ύπαρξη καπακιού με $h_{καπ} = a/\lambda = 0.007022$). Τέλος, ανάμεσά τους βρίσκεται η (κόκκινη – data 3) γραμμή που δείχνει τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές G_{11} , όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία του Mack.

Στην περίπτωση της B , ο Mack αναφέρει στην εργασία του, ότι πρέπει να χρησιμοποιηθεί διόρθωση τερματικής ζώνης (« terminal-zone correction ») Y_T , ώστε η μοντελοποίηση **delta function generator** να προσεγγίζει καλύτερα το πείραμα του, δηλαδή:

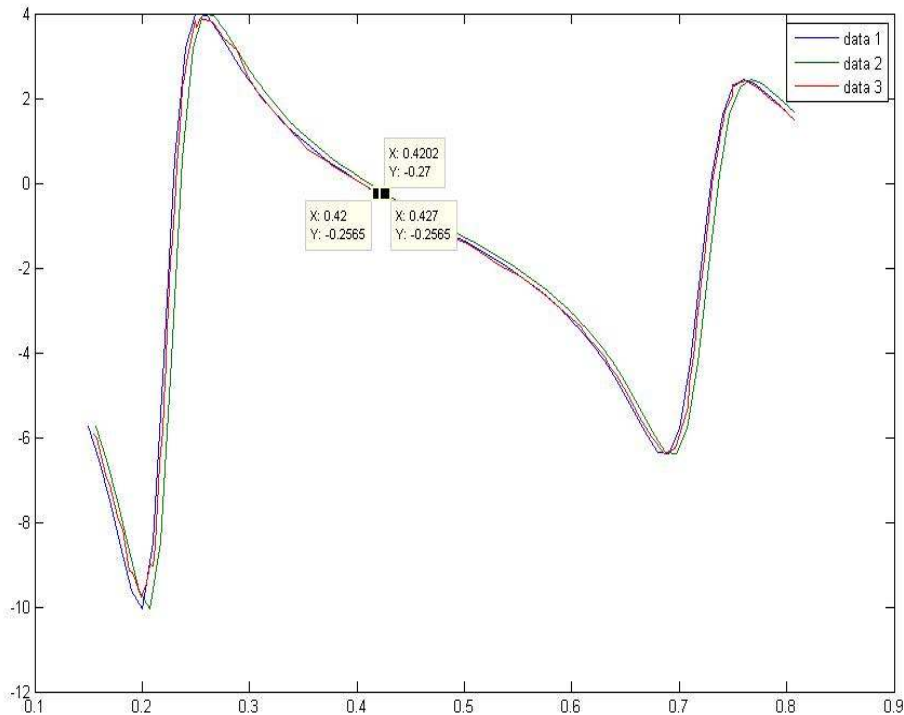
$$Y_{in} = \frac{1}{2}[Y_a - j\omega C_T], \quad Y_T = -j\omega C_T = 0.572 \text{ millimhos},$$

όπου Y_{in} είναι η πραγματική αγωγιμότητα εισόδου του ισοδύναμου διπόλου.

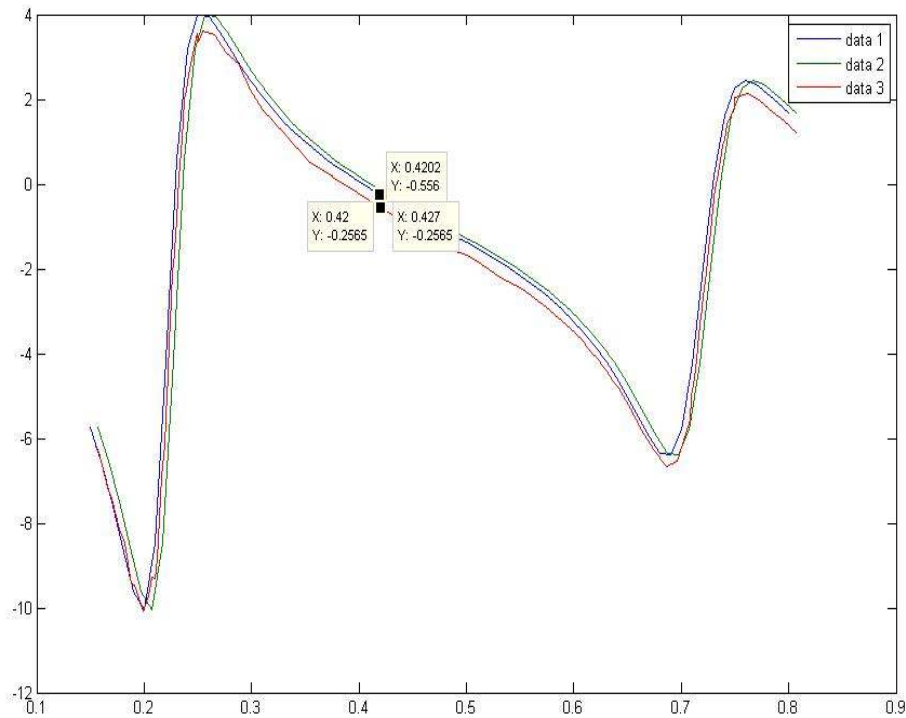
Συνεπώς, θα ισχύει η σχέση: $B_{11} = B_{SA}/2 - 0.286$

Ωστόσο, επειδή η μοντελοποίηση **frill generator** λαμβάνει υπ' όψιν της αυτή την διόρθωση, θα ήταν πιο σωστό τα θεωρητικά αποτελέσματα να συγκριθούν με τις τιμές $B_{SA}/2$ (χωρίς διόρθωση) και όχι με τις τιμές B_{11} (με διόρθωση). Άλλοι ερευνητές, όπως ο Branko D. Porovic [18], χρησιμοποιούν στις εργασίες τους τις τιμές B_{11} (με διόρθωση).

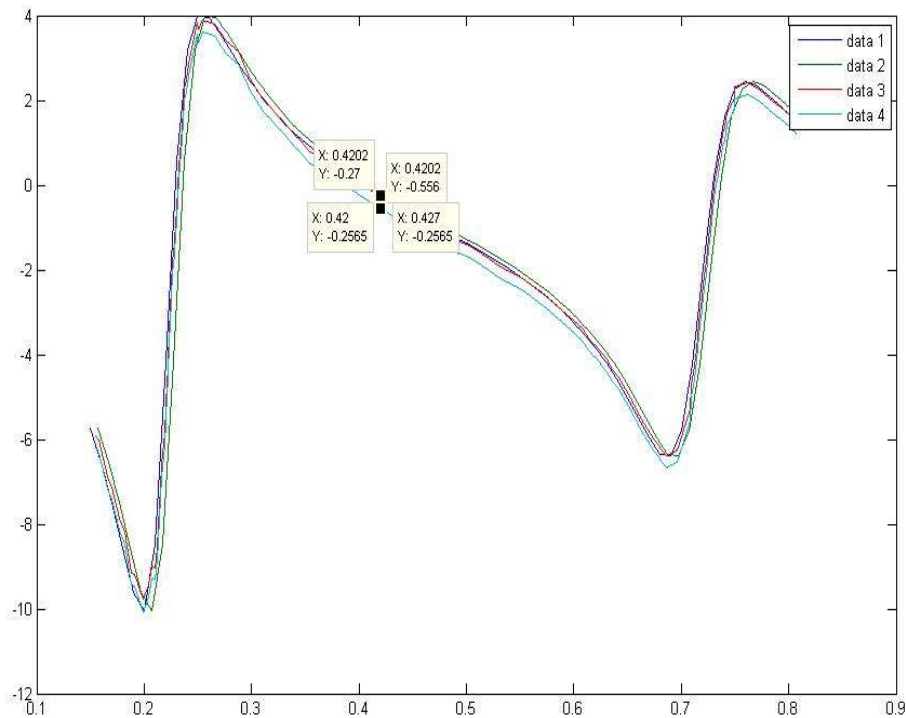
Ακολουθούν τα συγκριτικά διαγράμματα για την B :



Η πιο αριστερά (μπλε – data 1) γραμμή δείχνει τις τιμές της B_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 (υποθέτοντας την μη ύπαρξη καπακιού. Αντίστοιχα, η πιο δεξιά (πράσινη – data 2) γραμμή δείχνει τις ίδιες τιμές B_b (υποθέτοντας την ύπαρξη καπακιού με $h_{καπ} = a/\lambda = 0.007022$). Τέλος, ανάμεσά τους βρίσκεται η (κόκκινη – data 3) γραμμή που δείχνει τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές $B_{SA}/2$, όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία του Mack (δηλαδή χωρίς διόρθωση).

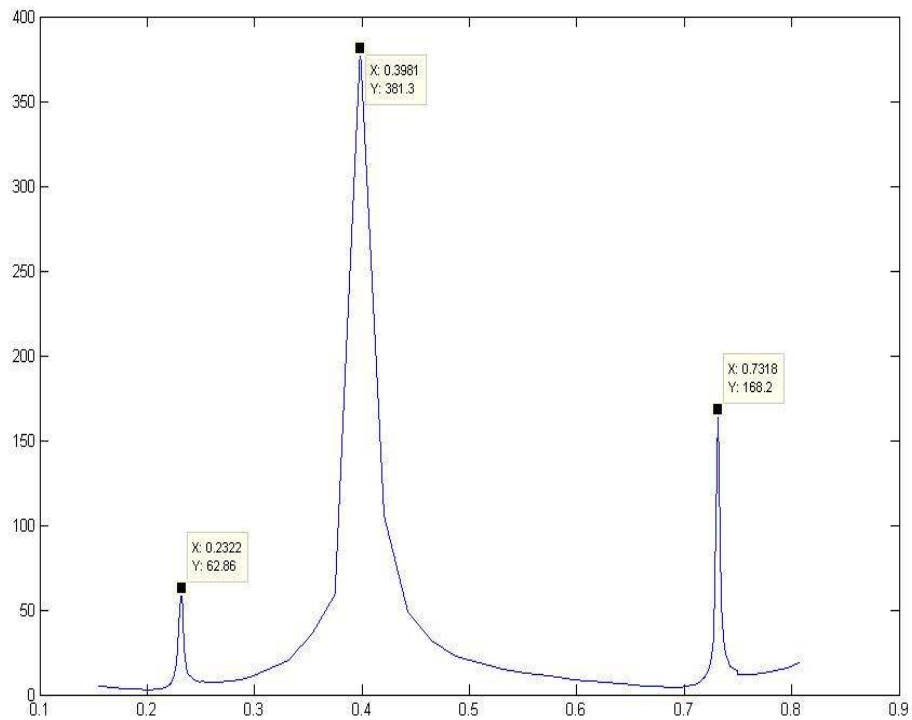


Η πιο αριστερά (μπλε – data 1) γραμμή δείχνει τις τιμές της B_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 (υποθέτοντας την μη ύπαρξη καπακιού. Αντίστοιχα, η πιο δεξιά (πράσινη – data 2) γραμμή δείχνει τις ίδιες τιμές B_b (υποθέτοντας την ύπαρξη καπακιού με $h_{καπ} = a/\lambda = 0.007022$). Τέλος, η (κόκκινη – data 3) γραμμή δείχνει τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές B_{11} , όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία του Mack (δηλαδή με διόρθωση).



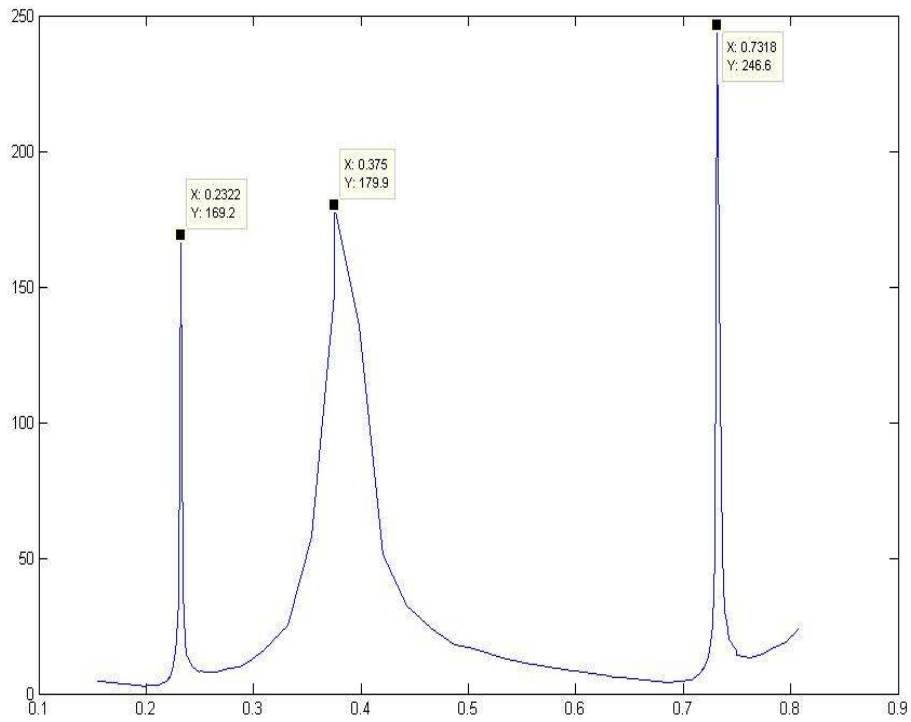
Η πιο αριστερά (μπλε – data 1) γραμμή δείχνει τις τιμές της B_b με CAM για $a/\lambda = 0.007022$, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3 (υποθέτοντας την μη ύπαρξη καπακιού. Αντίστοιχα, η πιο δεξιά (πράσινη – data 2) γραμμή δείχνει τις ίδιες τιμές B_b (υποθέτοντας την ύπαρξη καπακιού με $h_{καπ} = a/\lambda = 0.007022$). Ανάμεσά τους βρίσκεται η (κόκκινη – data 3) γραμμή που δείχνει τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές $B_{SA}/2$, όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία του Mack (δηλαδή χωρίς διόρθωση). Τέλος, η (γαλάζια – data 4) γραμμή δείχνει τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές B_{11} , όπως αυτές αναφέρονται στην εργασία του Mack (δηλαδή με διόρθωση).

Τα διαγράμματα που ακολουθούν, παριστάνουν την ποσοστιαία διαφορά, ανάμεσα στις δύο διαφορετικές εκτιμήσεις, όσον αφορά την πειραματική τιμή της B (με ή χωρίς διόρθωση).



$$\frac{\left| \frac{B_{SA}}{2} - B_{11} \right|}{\frac{B_{SA}}{2}} \cdot 100\%$$

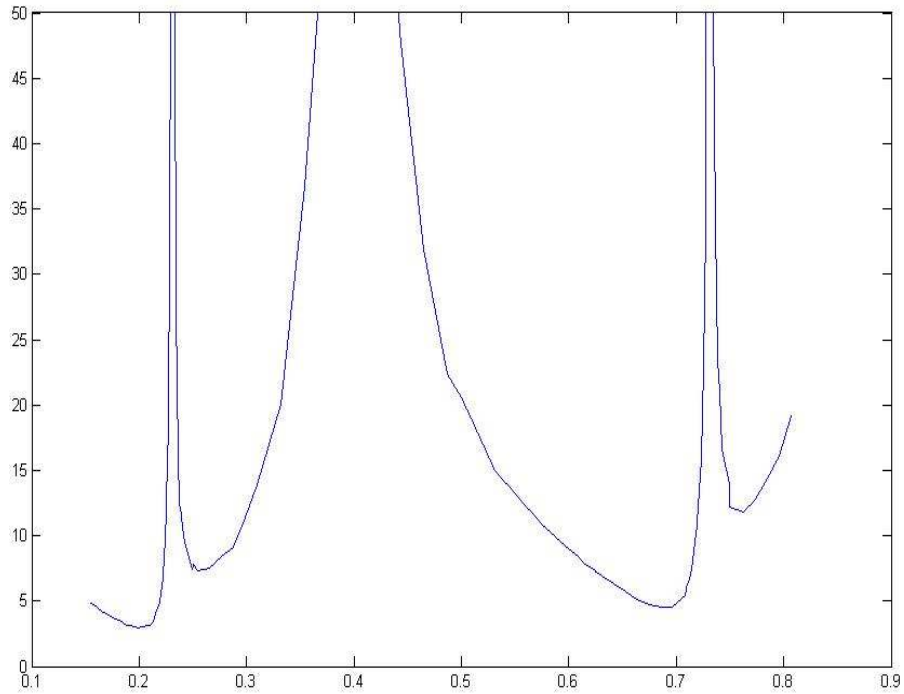
Όπως αναμέναμε, οι μέγιστες αποκλίσεις βρίσκονται στα $\frac{h}{\lambda}$ εκείνα, στα οποία $B = 0$.



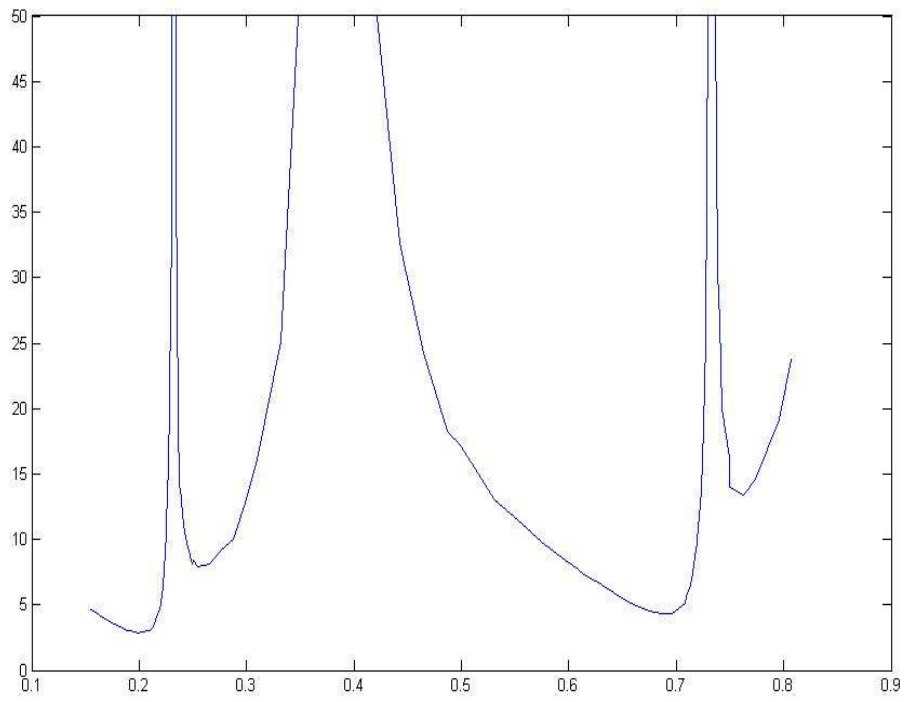
$$\frac{\left| B_{11} - \frac{B_{SA}}{2} \right|}{B_{11}} \cdot 100\%$$

Όπως αναμέναμε, οι μέγιστες αποκλίσεις βρίσκονται στα $\frac{h}{\lambda}$ εκείνα, στα οποία $B = 0$.

Τα διαγράμματα που ακολουθούν παριστάνουν τις ίδιες ποσοστιαίες διαφορές, οριοθετημένες στο 50%.



$$\frac{\left| B_{SA}/2 - B_{11} \right|}{B_{SA}/2} \cdot 100\% \leq 50\%$$



$$\frac{|B_{11} - B_{SA}/2|}{B_{11}} \cdot 100\% \leq 50\%$$

Κεφάλαιο 5: Προγράμματα Matlab

5.1 Πρόγραμμα για τον υπολογισμό της G_b , για μοντελοποίηση DFG με GMPF

Προκειμένου να υπολογίσουμε την G_b στο ($z=0$ - **driving point**) καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **Gb** στο **command mode**:

```
function f=Gb(V,k,h,a,N)
b=pinakasB1(V,k,h,a,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=(b(2*N)-sqrt(3)*b(2*N+1))./(sqrt(3)*d(2*N+1)-d(2*N));
f=real(b(N+1)+c*d(N+1));
```

Η συνάρτηση **Gb** έχει τα εξής ορίσματα:

1. Την διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα $V=1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$
3. Τον λόγο $\frac{h}{\lambda}$
4. Τον λόγο $\frac{a}{\lambda}$
5. Το N

Δηλαδή, ένα παράδειγμα κλήσης της είναι το `Gb(1,2*pi,0.10,0.006,400)`, που δίνει αποτέλεσμα:

ans =

8.948857288795925e-005

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της δεύτερης γραμμής και δεύτερης στήλης του αντίστοιχου πίνακα, που υπάρχει στο κεφάλαιο 2.

Η συνάρτηση **Gb** καλεί τις συναρτήσεις **pinakasB1** και **pinakasB2**, που είναι οι εξής:

```
function f=pinakasB1(V,k,h,a,N)
b=deximelos1pinakas(V,k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
```

```
function f=pinakasB2(k,h,a,N)
b=deximelos2pinakas(k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
```

όπου:

```
function g=deximelos1pinakas(V,k,h,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
for l=-N:N
g(N+1+1)=(i*V)/(376.73*k)*sin(k*z0/2)*sin(k*z0*abs(l));
g(N+1)=(i*2*V)/(376.73*k)*(sin(k*z0/4))*(sin(k*z0/4));
end
```

(συντελεστές $B_l^{(1)}$)

```
function f=deximelos2pinakas(k,h,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
for l=-N:N
f(N+1+1)=(2/k)*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*1);
end
```

(συντελεστές $B_l^{(2)}$)

κΩ:

```
function f=makeAltoeplitz(k,h,a,N)
for x=0:2*(N)
    g(x+1)=olokliromaAexact(k,a,h,x,N);
end
for d=0:2*(N)
    for e=0:2*(N)
        f(d+1,e+1)=g(1+abs(d-e));
    end
end
```

μΕ:

```
function f=olokliromaAexact(k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
[f,errbnd]=quadgk(@(z)olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N),0,z0,'RelTol',1e-13,'AbsTol',0);
```

(συντελεστές $A_l = A_{-l}$)

όπου:

```
function f=olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=(z0-z).*(syn(z,k,a,h,l,N)+meion(z,k,a,h,l,N));
```

μΕ:

```
function f=syn(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=exactkernel(z+1*z0,k,a);

function f=meion(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=exactkernel(z-1*z0,k,a);
```

και:

```
function f=exactkernel(z,k,a)
g=(quadv(@(theta) (exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2))./
sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
f=g./(8*pi^2);
```

5.2 Πρόγραμμα για τον υπολογισμό της G_b , για μοντελοποίηση DFG με PMTF

Προκειμένου να υπολογίσουμε την G_b στο ($z=0$ - **driving point**) καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **Gb** στο **command mode**:

```
function f=Gb(V,k,h,a,N)
b=pinakasB1(V,k,h,a,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=(b(2*N)-sqrt(3)*b(2*N+1))./(sqrt(3)*d(2*N+1)-d(2*N));
f=real(b(N+1)+c*d(N+1));
```

Η συνάρτηση **Gb** έχει τα εξής ορίσματα:

1. Την διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα $V=1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$
3. Τον λόγο $\frac{h}{\lambda}$
4. Τον λόγο $\frac{a}{\lambda}$
5. Το N

Δηλαδή, ένα παράδειγμα κλήσης της είναι το $G_b(1, 2*\pi, 0.10, 0.006, 400)$, που δίνει αποτέλεσμα:

```
ans =
```

```
8.995274421947429e-005
```

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της δεύτερης γραμμής και δεύτερης στήλης του αντίστοιχου πίνακα, που υπάρχει στο κεφάλαιο 2.

Η συνάρτηση **Gb** καλεί τις συναρτήσεις **pinakasB1** και **pinakasB2**, που είναι οι εξής:

```
function f=pinakasB1(V,k,h,a,N)
b=deximelos1pinakas(V,k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
```

```
function f=pinakasB2(k,h,a,N)
b=deximelos2pinakas(k,h,N);
b=b(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*b;
```

όπου:

```
function g=deximelos1pinakas(V,k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
g(N+1+1)=z0*(i*V/(2*376.73)).*(sin(k*abs(l*z0)));
end
```

(συντελεστές $B_l^{(1)}$)

```

function f=deximelos2pinakas(k,h,N)
z0=h/N;
for l=-N:N
f(N+l+1)=z0*cos(k*(l*z0));
end

```

(συντελεστές $B_l^{(2)}$)

και:

```

function f=makeAltoeplitz(k,h,a,N)
for x=0:2*(N)
g(x+1)=olokliromaAlexact(k,a,h,x,N);
end
for d=0:2*(N)
for e=0:2*(N)
f(d+1,e+1)=g(1+abs(d-e));
end
end
end

```

με:

```

function f=olokliromaAlexact(k,a,h,l,N)
z0=h/N;
[f,errbnd]=quadgk(@(z)olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N),0,z0,'RelTol',1e-13,'AbsTol',0);

```

(συντελεστές $A_l = A_{-l}$)

όπου:

```

function f=olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N)
z0=h/N;
f=(z0-z).*(syn(z,k,a,h,l,N)+meion(z,k,a,h,l,N));

```

με:

```
function f=syn(z,k,a,h,l,N)
z0=h/N;
f=exactkernel(z+l*z0,k,a);
```

```
function f=meion(z,k,a,h,l,N)
z0=h/N;
f=exactkernel(z-l*z0,k,a);
```

και:

```
function f=exactkernel(z,k,a)
g=(quadv(@(theta)(exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2))./
sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2)), -pi, pi, 1.e-8));
f=g./(8*pi^2);
```

5.3 Πρόγραμμα για τον υπολογισμό των G_b, B_b , για μοντελοποίηση FG με GMPF

Προκειμένου να υπολογίσουμε την G_b στο ($z=0$ - **driving point**) καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **Gb** στο **command mode**:

```
function f=Gb(V,k,h,a,b,N)
q=pinakasB1(V,k,h,a,b,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=(q(2*N)-sqrt(3)*q(2*N+1))./(sqrt(3)*d(2*N+1)-d(2*N));
f=real(q(N+1)+c*d(N+1));
```

Η συνάρτηση **Gb** έχει τα εξής ορίσματα:

1. Την διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα $V = 1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$
3. Τον λόγο h/λ
4. Τον λόγο a/λ
5. Τον λόγο b/λ
6. Το N

Δηλαδή, ένα παράδειγμα κλήσης της είναι το `Gb(1, 2*pi, 0.10, 0.006, 0.018, 400)`, που δίνει αποτέλεσμα:

`ans =`

`8.964563631940541e-005`

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της δεύτερης γραμμής και δεύτερης στήλης του αντίστοιχου πίνακα, που υπάρχει στο κεφάλαιο 2.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την B_b στο ($z = 0$ - **driving point**) καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **Bb** στο **command mode**:

```
function f=Bb(V,k,h,a,b,N)
q=pinakasB1(V,k,h,a,b,N);
d=pinakasB2(k,h,a,N);
c=(q(2*N)-sqrt(3)*q(2*N+1))/(sqrt(3)*d(2*N+1)-d(2*N));
f=imag(q(N+1)+c*d(N+1));
```

Η συνάρτηση **Bb** έχει τα εξής ορίσματα:

1. Την διαφορά δυναμικού V στο κέντρο του διπόλου (πάντα $V = 1$)
2. Τον κυματαριθμό $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$
3. Τον λόγο $\frac{h}{\lambda}$
4. Τον λόγο $\frac{a}{\lambda}$
5. Τον λόγο $\frac{b}{\lambda}$
6. Το N

Δηλαδή, ένα παράδειγμα κλήσης της είναι το `Bb(1, 2*pi, 0.10, 0.006, 0.018, 400)`, που δίνει αποτέλεσμα:

`ans =`

`-3.059310525176124e-003`

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της δεύτερης γραμμής και δεύτερης στήλης του αντίστοιχου πίνακα, που υπάρχει στο κεφάλαιο 2.

Οι συναρτήσεις **Gb**, **Bb** καλούν τις συναρτήσεις **pinakasB1** και **pinakasB2**, που είναι οι εξής:

```
function f=pinakasB1(V,k,h,a,b,N)
q=deximelos1pinakas(V,k,h,a,b,N);
q=q(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*q;
```

```
function f=pinakasB2(k,h,a,N)
q=deximelos2pinakas(k,h,N);
q=q(:);
f=inv(makeAltoeplitz(k,h,a,N))*q;
```

όπου:

```
function f=deximelos1pinakas(V,k,h,a,b,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
for l=-N:N
f(N+1+1)=quadgk(@(y)olokliroma(y,V,k,a,b),(1-
0.5)*z0,(1+0.5)*z0);
end
```

```
function f=olokliroma(y,V,k,a,b)
f=(quadv(@(x)(i*V/(2*376.73*log(b/a))*sin(k*(y-
x.*y)).*y.*(exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+a^2))./sqrt((x.*y).^2+a^2)-
exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+b^2))./sqrt((x.*y).^2+b^2))),0,1,1.e-
16));
```

(συντελεστές $B_l^{(1)}$)

```
function f=deximelos2pinakas(k,h,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
for l=-N:N
f(N+1+1)=(2/k)*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*l);
end
```

(συντελεστές $B_l^{(2)}$)

και:

```
function f=makeAltoeplitz(k,h,a,N)
for x=0:2*(N)
g(x+1)=olokliromaAlexact(k,a,h,x,N);
end
for d=0:2*(N)
for e=0:2*(N)
f(d+1,e+1)=g(1+abs(d-e));
end
end
```

με:

```
function f=olokliromaAexact(k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
[f,errbnd]=quadgk(@(z)olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N),0,z0,'RelTol',1e-13,'AbsTol',0);
```

(συντελεστές $A_l = A_{-l}$)

όπου:

```
function f=olokliroteosAl(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=(z0-z).*(syn(z,k,a,h,l,N)+meion(z,k,a,h,l,N));
```

με:

```
function f=syn(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=exactkernel(z+1*z0,k,a);
```

```
function f=meion(z,k,a,h,l,N)
z0=(2*h)/(2*N+1);
f=exactkernel(z-1*z0,k,a);
```

και:

```
function f=exactkernel(z,k,a)
g=(quadv(@(theta)(exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(theta/2)).^2)),-pi,pi,1.e-8));
f=g./(8*pi^2);
```

5.4 Προγράμματα για την υλοποίηση των μεθόδων επιτάχυνσης σύγκλισης

Στην παράγραφο αυτή, θα εξηγηθεί αναλυτικά το πώς εξάγονται τα αποτελέσματα, που απεικονίζονται στην δεύτερη στήλη του πρώτου πίνακα, που υπάρχει στην παράγραφο 3.3.

Αρχικά, καλούμε τρεις φορές στο **command mode** την συνάρτηση **Gb** που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 5.3, (για $N = 398,399,400$ αντιστοίχως):

```
Gb(1,2*pi,0.25,0.006,0.018,398)
```

```
ans =
```

```
8.307545276933340e-003
```

```
Gb(1,2*pi,0.25,0.006,0.018,399)
```

```
ans =
```

```
8.307586357629019e-003
```

```
Gb(1,2*pi,0.25,0.006,0.018,400)
```

```
ans =
```

```
8.307627228391349e-003
```


Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή $T^5(400)$, καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **T5** στο **command mode**,

```
function f=T5(a,b,c)
f=b-((2*(b-a)*(c-b))/((c-b)-(b-a)));
```

δίνοντας σαν ορίσματα, τις τρεις παραπάνω τιμές, με την σειρά που υπολογίστηκαν:

```
T5(8.307545276933340e-003,8.307586357629019e-
003,8.307627228391349e-003)
```

```
ans =
```

```
8.323581904421036e-003
```

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή $T^7(400)$, καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **T7** στο **command mode**,

```
function f=T7(a,b,c,N)
f=(c/((N+1)*(c-b))-b/(N*(b-a)))/(1/((N+1)*(c-b))-1/(N*(b-a)));
```

δίνοντας σαν ορίσματα, τις τρεις παραπάνω τιμές, με την σειρά που υπολογίστηκαν και το N που αντιστοιχεί στην ενδιάμεση τιμή, δηλαδή εδώ $N = 399$:

```
T7(8.307545276933340e-003,8.307586357629019e-
003,8.307627228391349e-003,399)
```

```
ans =
```

```
8.323204903897546e-003
```

Προκειμένου να υπολογίσουμε την τιμή $T^8(400)$, καλούμε την παρακάτω συνάρτηση **T8** στο **command mode**,

```
function f=T8(a,b,c,N)
f=a-N*(b-a)^2/((N+1)*(c-b)-N*(b-a));
```

δίνοντας σαν ορίσματα, τις τρεις παραπάνω τιμές, με την σειρά που υπολογίστηκαν και το N που αντιστοιχεί στην πρώτη τιμή, δηλαδή εδώ $N = 398$:

```
T8(8.307545276933340e-003,8.307586357629019e-
003,8.307627228391349e-003,398)
```

```
ans =
```

```
8.323281723145330e-003
```

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο υπολογίστηκαν όλες οι τιμές $T^5(400)$, $T^7(400)$, $T^8(400)$, που παρουσιάστηκαν στην εργασία.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallen's equation,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 49, no. 3, pp. 383—392, March 2001.
- [2] G. Fikioris, “An application of convergence acceleration methods,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, no. 12, pp. 1758—1760, Dec. 1999.
- [3] Oscar P. Bruno and Michael C. Haslam, “Regularity Theory and Superalgebraic Solvers for Wire Antenna Problems.” *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 29, No. 4, pp. 1375-1402, 2007.
- [4] Richard B. Mack “A study of circular arrays”, vol. 2, Technical Report No. 382, Cruft Laboratory, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, May 1, 1963.
- [5] Γ. Φικιώρης, Σημειώσεις μαθήματος “Ασύρματες Ζεύξεις και Διάδοση”, 8^ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ, Φεβρουάριος 2011.
- [6] Χ. Καυγάλη και Π. Κωττή, Κεραίες-Ασύματες Ζεύξεις. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας, 2005.
- [7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1972.
- [8] C.A. Balanis, “*Antenna Theory: Analysis and design*”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1997.
- [9] G. Fikioris, J. Lionas, and C. G. Lioutas, "The use of the frill generator in thin-wire integral equations", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 51, no. 8, pp. 1847—1854, August 2003.
- [10] Sophocles J. Orphanides, *Electromagnetic Waves and Antennas*, published online in <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>, 2008.
- [11] C. Brezinski and M. Redivo Zaglia, *Extrapolation Methods: Theory and Practice*. New York: Elsevier, 1991.
- [12] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed. Oxford: Clarendon, 1891. (New York: Dover, 1954, vol. 2, ch. XVI, reprint).
- [13] N. Kinayman and M. I. Aksun, “Comparative study of acceleration techniques for integrals and series in electromagnetic problems”, *Radio Sci.*, vol. 30, no. 6, pp. 1713–1722, Nov./Dec. 1995.

- [14] K. A. Michalski, "Extrapolation methods for Sommerfeld integral tails", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 46, pp. 1405–1418, Oct. 1998.
- [15] P. Wynn, "On a procrustean technique for the numerical transformation of slowly convergent sequences and series", Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 52, pp. 663–671, 1956.
- [16] D. Levin, "Development of nonlinear transformations for improving convergence of sequences", Int. J. Comput. Math., vol. 3, sec. B, pp. 371–388, 1973.
- [17] C. Brezinski, "Acceleration de suites a convergence logarithmique", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 273 A, pp. 727–730, 1971.
- [18] Branko D. Popovic et al, "Analysis and synthesis of wire-antennas", Vol. 2, Research Studies Press, 1982.