

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

***Monte-Carlo μέθοδοι Αποτίμησης
Παραγώγων Αμερικανικού Τύπου***

ΜΙΧΑΗΛ ΧΡΙΣΤΟΣ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

***Monte-Carlo μέθοδοι Αποτίμησης
Παραγώγων Αμερικανικού Τύπου***

ΜΙΧΑΗΛ ΧΡΙΣΤΟΣ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τομέας Μαθηματικών

Αθήνα, Ιούλιος 2011

Εισηγητής και επιβλέπων καθηγητής

Σπηλιώτης Ι.

Αναπληρωτής Καθηγητής Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Εξεταστική Επιτροπή

Σπηλιώτης Ι. (επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Ηρώων Πολυτεχνείου 9, TK 15780, Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα	Κοκολάκης Γ. (μέλος) Καθηγητής Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Ηρώων Πολυτεχνείου 9, TK 15780, Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα	Λουλάκης Μ. (μέλος) Επίκουρος Καθηγητής Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Ηρώων Πολυτεχνείου 9, TK 15780, Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, Αθήνα, Ελλάδα
---	---	--

Στην οικογένεια μου,
Σωτήρη, Ιωάννα και Παναγιώτα

Περιεχόμενα

Πρόλογος

1. Options	1
1.1 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα (Options).....	1
1.1.1 Τελικές αποδόσεις.....	2
1.1.2 Ασφάλιστρα (premium)	3
1.1.3 Αρχή no-arbitrage.....	3
1.1.4 Volatility	4
1.2 Φράγματα της αξίας ενός option.....	4
1.2.1 Χρονική αξία χρήματος.....	5
1.2.2 Φράγματα στην αξία των options	6
1.2.3 Άνω όρια της αξίας put και call options.....	7
1.2.4 Κάτω όρια της αξίας put και call options.....	8
1.2.5 Ισότητα αξίας American call και European call options.....	9
1.2.6 Put-call parity.....	10
2. Στοχαστικός Λογισμός.....	13
2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί.....	13
2.2 Μια πρώτη εισαγωγή στα American options.....	16
2.3 Χρόνοι διακοπής.....	17
2.4 Snell Envelope και διάσπαση των supermartingales.....	18
2.4.1 Snell envelope	18
2.4.2 Διάσπαση των supermartingales.....	19
2.5 Κίνηση Brown.....	20
2.5.1 Ιστορική Αναδρομή.....	20

2.5.2 Μαθηματική περιγραφή κίνησης Brown	21
2.5.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown.....	24
3. Μοντέλο Black-Scholes	27
3.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα(Ολοκλήρωμα Ito).....	27
3.1.1 Εισαγωγή	27
3.1.2. Ορισμός Στοχαστικού Ολοκληρώματος	28
3.1.3 Ito Formula.....	31
3.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις	32
3.2.1 Ορισμός και Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης.....	32
3.2.2 Γραμμικές ΣΔΕ	33
3.2.3 Μοντέλο Black-Scholes.....	35
3.2.3 Αποτίμηση European call και put option (Αναλυτική).....	36
3.2.4 Αποτίμηση American put option(ΜΔΕ).....	39
3.3 Μέθοδος αποτίμησης Cox-Ross-Rubenstein.....	40
3.3.1 Διωνυμικό μοντέλο	40
3.3.2 Μέθοδος Cox-Ross-Rubenstein.....	42
4.Μέθοδοι Προσομοίωσης.....	45
4.1 Monte Carlo	45
4.1.1 Εισαγωγή	45
4.1.2 Προσομοίωση με Monte Carlo	46
4.1.3 Παραγωγή τυχαίων αριθμών	48
4.1.4 Έλεγχος Σφάλματος (Error Control).....	52
4.1.5 Τεχνικές ελάττωσης διασποράς	54
4.2 Προσομοίωση κίνησης Brown και Γεωμετρικής κίνησης Brown.....	56
4.2.1 Προσομοίωση κίνησης Brown.....	56
4.2.2 Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown	60
4.3 Αποτίμηση American Call options με Monte Carlo.....	63
4.3.1 Εισαγωγή	63

4.3.2 Αποτίμηση European option.....	63
4.3.3 Αξία European(American) call option σε σχέση με άλλα μεγέθη.....	65
4.4 Αποτίμηση American put options με LSM-Monte Carlo.....	69
4.4.1 Εισαγωγικά	69
4.4.2 Επίδειξη μεθόδου με ένα αριθμητικό παράδειγμα.....	70
4.4.3 Αλγόριθμος LSM Monte Carlo.....	78
4.4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων LSM Monte Carlo με άλλες μεθόδους.....	83
4.4.5 Αξία American Put Option σε σχέση με άλλα μεγέθη.....	87
4.4.6 Αποτίμηση προτερήματος πρόωρης εξάσκησης	91
Παράρτημα.....	95
Βιβλιογραφία.....	105

Πρόλογος

Η εργασία αυτή γράφτηκε στα πλαίσια της πενταετούς φοίτησης μου στη σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (ΣΕΜΦΕ) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου της Ελλάδας. Στόχος ήταν η όσο το δυνατό καλύτερη κατανόηση ζητημάτων που αφορούν τον κλάδο των Στοχαστικών μαθηματικών και τις εφαρμογές του στα χρηματοοικονομικά. Υπό την καθοδήγηση και επίβλεψη του αναπληρωτή καθηγητή του ΕΜΠ κ. Σπηλιώτη Ιωάννη, επιλέξαμε να μελετήσω την αποτίμηση παραγώγων αμερικάνικου τύπου, με τουλάχιστο μια σύγχρονη μέθοδο προσομοίωσης, τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Squares Method Monte-Carlo).

Έτσι λοιπόν, στο 1^ο Κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά παράγωγα (options) μελετώντας βασικές έννοιες όπως η απόδοση, τα ασφάλιστρα, οι αποδόσεις, τα χαρακτηριστικά των παραγώγων και άλλα. Γίνεται επίσης μια πρώτη εισαγωγή στα American call/put options μελετώντας την αποτίμηση τους σε σχέση με τα αντίστοιχα European. Τέλος, επισημαίνεται το ότι ένα American call option δύναται να αποτιμηθεί σαν ένα European call option αλλά και η γνωστή σχέση put-call-parity, που συνδέει την αξία ενός call και put option.

Το 2^ο Κεφάλαιο αναφέρεται σε κάποια πρώτα στοιχεία του Στοχαστικού Λογισμού. Συγκεκριμένα, δίνονται αρκετοί απαραίτητοι ορισμοί (martingales, stopping-time, filtration κ.ά) ενώ ιδιαίτερη έμφαση δίνεται και στο ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο θα δουλεύουμε, αφού υποθέσουμε μια no-arbitrage και complete αγορά. Έτσι λοιπόν, στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται και μια πρώτη εισαγωγή στα American options και τη μελέτη κάποιων ιδιοτήτων και αποτελεσμάτων που χρησιμοποιούμε για την αποτίμηση τους. Στο τελευταίο μέρος του 2^{ου} Κεφαλαίου, εισάγεται η άκρως σημαντική έννοια της κίνησης Brown και της γεωμετρικής κίνησης Brown, παραθέτοντας ορισμούς και ιδιότητές τους.

Το 3^ο Κεφάλαιο αποσκοπεί στην αποτίμηση παραγώγων, στα πλαίσια του γνωστού μοντέλου Black-Scholes. Για να γίνει αυτό, επιχειρείται μια εν τάχει εισαγωγή σε έννοιες όπως Στοχαστικό Ολοκλήρωμα, Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις και Ito-Formula. Σημειώνεται όμως ότι απαιτείται περεταίρω μελέτη των πιο πάνω μιας και προαπαιτείται κάποια γνώση στο θέμα ΣΔΕ, στο επίπεδο τουλάχιστο του

μαθήματος 9^{ου} εξαμήνου της σχολής ΣΕΜΦΕ «Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά». Δίνονται επίσης οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις που προκύπτουν, με τη λύση των οποίων μπορεί να γίνει αποτίμηση των European και American put/call options. Τέλος, παρουσιάζεται μια άλλη απλή μέθοδος αποτίμησης, η μέθοδος Cox-Ross-Rubenstein, με μια σύντομη εφαρμογή σε ένα American Put.

Στο τελευταίο και σημαντικότερο μέρος της εργασίας, επιχειρείται μια εισαγωγή στη γενικότερη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo και προσομοιώνονται τροχιές της κίνησης Brown και της γεωμετρικής κίνησης Brown. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται η μέθοδος για την αποτίμηση American Call options και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά της αναλυτικής λύσης. Μελετείται επίσης η συμπεριφορά στην αξία των American call options, αλλάζοντας κάποιες άλλες παραμέτρους της αγοράς ή του μοντέλου. Έπειτα, παρουσιάζεται η μέθοδος προσομοίωσης Ελαχίστων Τετραγώνων (LSM Monte Carlo) επιλέγοντας να γίνει μια αριθμητική επίδειξη με ένα απλό παράδειγμα American Put option. Γίνεται μια ανάπτυξη του αλγόριθμου της μεθόδου, για να οδηγηθούμε στο αριθμητικό μέρος της εργασίας που περιλαμβάνει αποτίμηση παραγώγων με τη μέθοδο LSM Monte Carlo και σύγκρισης των αποτελεσμάτων με δύο άλλες μεθόδους. Τέλος, στο Παράρτημα της εργασίας μπορεί κάποιος να βρει όλους τους κώδικες προγραμμάτων που γράφτηκαν για τους σκοπούς της εργασίας αυτής στο μαθηματικό πακέτο H/Y MATLAB[®].

Η απουσία πλούσιας ελληνικής βιβλιογραφίας γύρω από το θέμα και το πρόβλημα απόδοσης ξενόγλωσσων όρων στα Ελληνικά, ήταν κάποια από τις δυσκολίες που είχα να αντιμετωπίσω κατά την εκπόνηση της εργασίας μου. Δράττομαι λοιπόν τις ευκαιρίας για να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Σπηλιώτη, ο οποίος όχι μόνο έψαξε και βρήκε υλικό και με καθοδήγησε τους τελευταίους 6 μήνες, αλλά με τις συμβουλές και γνώσεις του γύρω από το θέμα, έγινε η αιτία να ασχοληθώ και να αγαπήσω αυτό τον εφαρμοσμένο κλάδο των Μαθηματικών.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω και στα δύο άλλα μέλη της κριτικής μου επιτροπής, τον κ. Κοκολάκη, καθηγητή της ΣΕΜΦΕ του ΕΜΠ και τον κ. Λουλάκη, επίκουρο καθηγητή της ίδιας σχολής, για το χρόνο και ενδιαφέρον που αφιέρωσαν .

Τέλος, θα ήταν παράλειψη μου να μην ευχαριστήσω όλους όσους μου στάθηκαν και με έκαναν να θέλω να μαθαίνω μέχρι τώρα στη ζωή μου. Γονείς, συγγενείς, συμφοιτητές, φίλοι και καθηγητές είναι κάποιοι από αυτούς και μακάρι κάποτε να τους κάνω περήφανους για το χρόνο και κόπο που ξόδεψαν ούτως ώστε να μπορέσω να ανοίξω τα φτερά μου.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

Abstract

In the present diploma thesis for graduating from the Applied Mathematics and Physic Sciences school of the National Technical University of Athens, American style options and a modern way of pricing them, namely the Least Squares Monte-Carlo method are studied and implemented. American call and American put options are thoroughly examined in this work, using at least two ways of pricing them.

In the 1st Chapter, some financial terms are introduced, such as options, premium and payoffs. In addition, I present some rational boundaries for option values which lead to some important result. More specifically, we prove that an American call option is examined as a European call option and we also get the famous put-call-parity, which connects the value of any call and put option.

Later, in the 2nd Chapter, there is an introduction to Stochastic Calculus. Definitions such as martingales, stopping time and filtration are introduced a great emphasis is given on the results of the existence of an equivalent martingale probability measure in no-arbitrage and complete markets. Also, there is a brief introduction to American options pricing with discrimination of time (Bermudan options). Lastly, we present the Brownian motion and the geometric Brownian motion giving some of their characteristics.

In Chapter 3, the Black-Scholes equation is shown and solved for European and American call/put options. It also deals with a simple method of pricing options, the Cox-Ross-Rubenstein method and there is an example using it for pricing an American Put.

The Chapter 4 deals with simulation methods for pricing options in general and then more specifically using the Least Squares Method. The method is described and applied, illustrating some numerical results taken while pricing American Put options. LSM method is also compared to two other methods for pricing American put options, the Finite Difference and the Cox-Ross-Rubenstein. The implementation of the various algorithms used for pricing the options, was made with the MATLAB software.

1. Εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά

1.1 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα (Options)

Τα χρηματοοικονομικά *Παράγωγα (options)* ανήκουν μαζί με τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) στην οικογένεια Δικαιωμάτων Προαίρεσης και χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα “*call options*” και τα “*put options*”. Ένα ***call option*** είναι ένα συμβόλαιο που δίνει το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, στον *κάτοχο* (holder) να αγοράσει ένα προσυμφωνημένο τίτλο, που καλείται και *υποκείμενος τίτλος* (π.χ. μετοχή, ομόλογο), μέχρι και μιας προσυμφωνημένη *ημερομηνία λήξης* του συμβολαίου έναντι μιας προκαθορισμένης *τιμής εξάσκησης*, γνωστής ως *strike price*. Σε αντίθεση με το *call option*, ο κάτοχος ενός ***put option*** αποκτά το δικαίωμα πώλησης του τίτλου αντί της αγοράς του, ξανά κάτω από προσυμφωνημένες συνθήκες.

Από τη στιγμή που ο κάτοχος έχει το δικαίωμα και δεν υποχρεούται να αγοράσει ή να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο, αυτός θα κληθεί να πάρει μια απόφαση για το κατά πόσο του συμφέρει να το κάνει ή όχι σύμφωνα με τα δεδομένα της αγοράς και το δικό του κέρδος. Για αυτό και θα λέμε ότι ένα *option επιλέγεται να εξασκηθεί*, όταν ο κάτοχος του επιλέγει τελικά να αγοράσει ή να πωλήσει τον υποκείμενο τίτλο.

Από τη στιγμή που το παράγωγο είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών, εκτός από τον κάτοχο χρειάζεται και ένας *εκδότης (writer)*. Σε αντίθεση με τον κάτοχο, ο εκδότης υποχρεούται σύμφωνα με το συμβόλαιο του παραγωγού να πωλήσει τον τίτλο σε περίπτωση που ο κάτοχος αποφασίσει να τον αγοράσει. Γενικά, το παιχνίδι που παίζεται μεταξύ των δύο έχει μηδενικό άθροισμα κερδών, υπό την έννοια ότι ο ένας κερδίζει από την απώλεια του άλλου.

Ορισμός 1.1.1: Καλείται *Ευρωπαϊκού Τύπου παράγωγο (European type option)* το χρηματοοικονομικό παράγωγο εκείνο που μπορεί να εξασκηθεί μόνο σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία κατά την οποία λήγει το συμβόλαιο. Η ημερομηνία αυτή θα καλείται *ημερομηνία λήξης ή εξάσκησης (expiration date)*

Ορισμός 1.1.2: Καλείται *Αμερικάνικου τύπου παράγωγο (American type option)* το χρηματοοικονομικό παράγωγο εκείνο που επιτρέπει στον κάτοχο να το εξασκήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή αυτός επιλέξει πριν την ημερομηνία λήξης.

Ορισμός 1.1.3: Καλείται *Bermudan type option* το χρηματοοικονομικό παράγωγο εκείνο το οποίο επιτρέπει στον κάτοχο του να το εξασκήσει οποιαδήποτε χρονική στιγμή t αυτός επιλέξει πριν την ημερομηνία λήξης, μέσα όμως από ένα πεπερασμένο προσυμφωνημένο σύνολο δυνατών χρονικών στιγμών εξάσκησης $\{t_i, i=1,2,\dots,K\}$.

Παρατήρηση 1.1.1: Οι ονομασίες Ευρωπαϊκού, Αμερικάνικου και Bermudan δεν έχουν να κάνουν με κάποια γεωγραφική διαφορά ή κάποια περιοχή προέλευσης

Παρατήρηση 1.1.2: Πέραν των δύο πιο διαδεδομένων τύπων options, του Ευρωπαϊκού και του Αμερικάνικου, υπάρχουν αρκετές άλλες κατηγορίες όπως τα Asian options, lookback options, barrier options κ.ά. Εντούτοις, στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με European και American που σε κάποια σημεία συμπεριφέρονται σαν Bermudan options.

1.1.1 Τελικές αποδόσεις

Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου call option, με τιμή εξάσκησης X και έστω ότι με S_T θα συμβολίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή της ημερομηνίας λήξης αυτού T . Είναι προφανές πως αν $S_T > X$, ο κάτοχος του call option θα επιλέξει να το εξασκήσει αφού θα μπορεί να αγοράσει τον τίτλο που αξίζει S_T νομισματικές μονάδες με μόνο X νομισματικές μονάδες. Οπότε, η απόδοση που παίρνει ο κάτοχος από αυτή τη συναλλαγή θα είναι $S_T - X$. Όμως, αν $S_T \leq X$, τότε ο κάτοχος δεν θα επιλέξει να εξασκήσει το option καθώς θα του ήταν πιο συμφέρον να αγοράσει τον τίτλο με την τιμή του στην αγορά αντί έναντι X . Οπότε ο κάτοχος ενός European call έχει αποδόσεις ίσες με:

$$\max(S_T - X, 0). \quad (1.1.1)$$

Ακολουθώντας παρόμοια λογική, οι τελικές αποδόσεις ενός κατόχου European put αυτή τη φορά θα είναι:

$$\max(X - S_T, 0) \quad (1.1.2)$$

αφού ο κάτοχος θα επιλέξει να ασκήσει το put option μόνο όταν $S_T < X$. Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι οι αποδόσεις δεν μπορεί να είναι αρνητικές.

Προς το παρόν περιοριζόμαστε στο να δώσουμε τις αποδόσεις των δύο αυτών απλών European type options. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στα αντίστοιχα American call/put options.

1.1.2 Ασφάλιστρα (premium)

Από τη στιγμή που ο εκδότης του option έχει μόνο πιθανές απώλειες στο μέλλον, απαιτείται η προκαταβολή ενός αντιτίμου σαν *ασφάλιστρο (premium)* από τον κάτοχο, τη στιγμή που επισυνάπτεται η συμφωνία. Με κατάλληλη επιλογή αυτού του ασφάλιστρου το παιχνίδι γίνεται δίκαιο, υπό την έννοια ότι μοιράζεται το ρίσκο μεταξύ των δύο πλευρών. Από μια άλλη οπτική γωνιά, κάποιος μπορεί να δει τα options σαν ένα παιχνίδι που επιφέρει μη αρνητικό κέρδος όμως απαιτεί την καταβολή ενός ποσού, του premium, για να μπορείς να το παίξεις.

Οπότε, δύο σημαντικά ζητήματα που προκύπτουν από τα πιο πάνω, είναι ποια είναι η δίκαιη τιμή ενός premium ή αλλιώς πόσο αξίζει(κοστίζει) το option για να το αγοράσει ένας κάτοχος και κατά δεύτερο λόγο σε περίπτωση ενός American option, η αναζήτηση της βέλτιστης στρατηγικής και εύρεσης της πιο συμφέρουσας χρονικής στιγμής άσκησης του δικαιώματος πριν τη λήξη του.

1.1.3 Αρχή no-arbitrage

Ξεκινώντας με ένα ορισμό, θα περιγράψουμε ένα κύριο χαρακτηριστικό των αγορών με λόγια. Αργότερα θα δούμε πως η αρχή no-arbitrage εκφράζεται και μαθηματικά.

Ορισμός 1.1.3: Καλούμε *αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική (self-financing strategy)* την κατοχή ενός χαρτοφυλακίου/πορτοφολίου(portfolio) με συνδυασμούς από options, μετοχές, ομόλογα, καταθέσεις ή οτιδήποτε άλλο χρεόγραφο(security) εις τρόπον ώστε να μην απαιτείται οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρηματοδότηση ή απόσυρση πέραν από το αρχικό κεφάλαιο που επενδύθηκε. Το κόστος απόκτησης επιπλέον μονάδων κάποιου security στο πορτφόλιο θα χρηματοδοτείται πλήρως από πώληση κάποιων άλλων μέσα στο ίδιο πορτφόλιο.

Ένα από τα πιο κύρια χαρακτηριστικά της θεωρίας αποτίμησης παραγώγων είναι η απουσία ευκαιριών arbitrage, γνωστή και ως *no-arbitrage principle*. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, στην αγορά δεν μπορούν να υπάρξουν αυτοδιαχειριζόμενες στρατηγικές συναλλαγών που να απαιτούν μηδενικό αρχικό κεφάλαιο και να έχουν πιθανότητα άνιση του μηδέν να έχουν θετική απόδοση. Με πιο απλά λόγια, δεν μπορεί να υπάρξει στρατηγική που να αποδίδει κέρδος χωρίς ρίσκο. Θα δούμε σε πολλά σημεία στη συνέχεια της εργασίας πως η αρχή αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική και έχει διευκολύνει κατά πολύ τη μαθηματική εξέταση της συμπεριφοράς των παραγώγων.

1.1.4 Volatility

Η αξία ενός option οφείλει να ανταποκρίνεται στην κλίμακα μεταβολών του υποκείμενου τίτλου. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ένα call option κοντά στην τιμή εξάσκησης του με προσυμφωνημένη τιμή εξάσκησης $X=100$. Αν υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι $S_{\text{Current}}=97$, τότε η αξία του option θα πρέπει να είναι κοντά στο μηδέν, καθώς είναι πιο πιθανό ο υποκείμενος τίτλος να μην ξεπεράσει το 100 μέσα σε μικρό χρονικό διάστημα. Εντούτοις, αν το $S_{\text{Current}}=102$ τότε το option θα άξιζε περίπου 2. Επομένως, η αξία του option δείχνει να είναι περισσότερο volatile από αυτή του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή η συναλλαγή ενός option οδηγεί σε περισσότερες αξία της τιμής ανά νομισματική αξία της επένδυσης από ότι η συναλλαγή ενός υποκείμενου τίτλου.

Αυτή η ιδιότητα, περιγράφεται μέσα από μια μεταβλητή που καλείται *μεταβλητότητα* ή *volatility* (σ ή ν) και είναι ένα από τα χαρακτηριστικά που απαιτούνται για την αποτίμηση και μελέτη ενός option. Ο τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας γίνεται με στατιστικές μεθόδους, παρατηρώντας το παρελθόν ενός τίτλου, με αριθμητικές μεθόδους ή με στοχαστικούς, προσπαθώντας να προβλέψουμε τη μελλοντική μεταβλητότητα (stochastic volatility).

1.2 Φράγματα της αξίας ενός option

Είναι χρήσιμο να αναφερθούν κάποια φράγματα της αποτίμησης ενός option τα οποία θα μας οδηγήσουν σε κάποιες χρήσιμες σχέσεις όσο αφορά τα European και American options. Καθώς η απόδοση μερισμάτων (dividends) από τις εταιρείες στους κατόχους μετοχών είναι ένας παράγοντας που επηρεάζει κατά πολύ τις

σχέσεις των options με τους υποκείμενους τίτλους, από το σημείο αυτό και μετά θα θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν μερίσματα στην αγορά.

Τα φράγματα αυτά είναι πολύ χρήσιμα κατά την αποτίμηση των American options, καθώς όπως θα φανεί πολύ αργότερα στην εργασία, αποτελούν ένα κριτήριο πρόωρης εξάσκησης του δικαιώματος. Επίσης, τα φράγματα θα μας οδηγήσουν σε μια πολύ σημαντική σχέση η οποία συνδέει την αξία ενός call και ενός put option (put-call parity relations).

Συμβολισμοί: Με “r” θα συμβολίζεται το σταθερό¹ επιτόκιο ανατοκισμού το οποίο αναφέρεται σε χρόνια (συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία σαν risk-less rate), άρα και ο χρόνος θα μετριέται σε χρόνια. Με “C” (“P”) θα συμβολίζεται η αξία ενός call (put) American option αντίστοιχα ενώ με “c” (“p”) ενός call (put) European option. Με “T” θα συμβολίζεται η εναπομένουσα διάρκεια ζωής του παραγώγου. Αν δηλαδή βρισκόμαστε στη στιγμή t=0, η εναπομένουσα διάρκεια ζωής T θα είναι η ημερομηνία λήξης του συμβολαίου ενώ όταν αναφερόμαστε σε ένα t>0, θα είναι η διαφορά μεταξύ του t και της ημερομηνίας λήξης (πχ αν έχουμε ημερομηνία λήξης 2 χρόνια και βρισκόμαστε στο χρόνο t=0.5, θα έχουμε T=1.5). Για απλότητα θα θεωρούμε ότι η στιγμή επισύναψης της συμφωνίας είναι η στιγμή t=0.

1.2.1 Χρονική αξία χρήματος

Έστω $\beta(T)$ η τρέχουσα αξία ενός κουπονιού (κάποιας εγγύησης που προβλέπει μια συγκεκριμένη απόδοση χωρίς ρίσκο μετά από κάποιο χρόνο) του οποίου η αξία τη στιγμή T θα είναι ίση με 1. Σε αγορά με σταθερό ετήσιο επιτόκιο χωρίς ρίσκο r, η αξία του κουπονιού τη στιγμή 0 θα είναι:

$$\beta(T) = 1 \cdot e^{-rT} \quad (1.2.1)$$

Σε περίπτωση μη σταθερού επιτοκίου $r(t)$ τότε $\beta(T) = 1 \cdot e^{-\int_0^T r(u)du}$
(1.2.2)

Αυτό που υπονοούν τα πιο πάνω είναι πως η σημερινή αξία μιας (1) νομισματικής μονάδας σήμερα, αξίζει περισσότερο από μια νομισματική αξία στο μέλλον (στιγμή T), καθώς η σημερινή μονάδα θα μπορούσε να κατατεθεί παίρνοντας επιτόκιο $r(t)$

¹ Στα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν στην εργασία αυτή το επιτόκιο θεωρείται σταθερό. Βελτιωμένα μοντέλα που προτάθηκαν χρησιμοποίησαν χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο και

και να αξίζει e^{-rt} μετά από T χρόνο. Θα λέμε ότι κάποια ποσότητα είναι επικαιροποιημένη ή είναι *discounted value*, όταν αυτή πολλαπλασιαστεί με το $\beta(T)$ της εκάστοτε αγοράς.

1.2.2 Φράγματα στην αξία των options

Με το συμβολισμό $c(S;T;X)$ θα εννοούμε την αξία ενός European call option με τα χαρακτηριστικά: έχει υπολειπόμενη διάρκεια ζωής T , τιμή υποκείμενου τίτλου S και τιμή εξάσκησης X .

Σαν πρώτες προφανείς ανισότητες, δίνονται οι:

$$C, c, P, p \geq 0 \quad (1.2.3)$$

Για $T=0$ έχουμε αποδόσεις:

$$C(S;T=0;X) = c(S;0;X) = \max(S-X, 0) \quad (1.2.4)$$

$$P(S;0;X) = p(S;0;X) = \max(X-S, 0) \quad (1.2.5)$$

Επομένως από τις πιο πάνω και λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα American option μπορεί να ασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη, συμπεριλαμβανομένου και $T=0$,

$$C(S;T;X) \geq \max(S-X, 0) \quad (1.2.6)$$

$$P(S;T;X) \geq \max(X-S, 0) \quad (1.2.7)$$

Από τη στιγμή που ένα option Αμερικάνικου τύπου μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή πριν τη λήξη του, ενώ ένα Ευρωπαϊκού μόνο κατά τη λήξη του, το American option πρέπει να αξίζει τουλάχιστο όσο το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό δίνοντας:

$$C(S;T;X) \geq c(S;T;X) \quad (1.2.8)$$

$$P(S;T;X) \geq p(S;T;X) \quad (1.2.9)$$

Τιμές για διαφορετικές ημερομηνίες λήξης: Αν θεωρήσουμε δύο American options με διαφορετικές ημερομηνίες λήξης T_1 και T_2 ($T_1 > T_2$), αυτό με τη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής αναμένεται να αξίζει περισσότερο από αυτό με την πιο μικρή, μιας και θα έχει το επιπλέον δικαίωμα να εξασκηθεί αφού το μικρό συμβόλαιο έχει λήξει. Επομένως,

$$C(S; T_1; X) > c(S; T_2; X) \quad , T_1 > T_2 \quad (1.2.10)$$

$$P(S; T_1; X) > p(S; T_2; X) \quad , T_1 > T_2 \quad (1.2.11)$$

Τιμές για διαφορετικές τιμές εξάσκησης (strike prices): Είτε πρόκειται για European είτε για American call options, αυτό με το μεγαλύτερο strike price έχει λιγότερες πιθανότητες να εξασκηθεί με θετική απόδοση και ακόμα και αν αυτό συμφέρει να εξασκηθεί θα έχει μικρότερα κέρδη από το option με μικρό strike price. Οπότε,

$$C(S; T; X_1) > c(S; T; X_2) \quad , X_2 > X_1 \quad (1.2.12)$$

$$c(S; T; X_1) > c(S; T; X_2) \quad , X_2 > X_1 \quad (1.2.13)$$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς,

$$p(S; T; X_2) > p(S; T; X_1) \quad , X_2 > X_1 \quad (1.2.14)$$

$$P(S; T; X_2) > P(S; T; X_1) \quad , X_2 > X_1 \quad (1.2.15)$$

Τιμές για διαφορετικές αρχικές τιμές υποκείμενου τίτλου: Στην περίπτωση ενός call option, όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ψηλή τότε είναι πιο πιθανό να εξασκηθεί το option. Παρόμοια, στην περίπτωση ενός put option, είναι πιο πιθανό να μην εξασκηθεί όταν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι ψηλή.

$$c(S_2; T; X) > c(S_1; T; X) \quad , S_2 > S_1 \quad (1.2.16)$$

$$C(S_2; T; X) > C(S_1; T; X) \quad , S_2 > S_1 \quad (1.2.17)$$

$$p(S_2; T; X) < p(S_1; T; X) \quad , S_2 > S_1 \quad (1.2.18)$$

$$P(S_2; T; X) < P(S_1; T; X) \quad , S_2 > S_1 \quad (1.2.19)$$

1.2.3 Άνω όρια της αξίας put και call options

Ξεκινώντας, θα θεωρήσουμε την τετριμμένη περίπτωση που ένα American call option έχει άπειρη ημερομηνία λήξης και μηδενική τιμή εξάσκησης. Τότε ουσιαστικά το $C(S, \infty, 0)$ ταυτίζεται με τον υποκείμενο τίτλο, με τη διαφορά ότι υπολείπεται κάποια επιπλέον δικαιώματα που έχει ο κάτοχος ενός τίτλου, όπως για παράδειγμα το δικαίωμα ψήφου ή τα μερίσματα. Επομένως $S \geq C(S, \infty, 0)$ και σε συνδυασμό με την (6),(8) προκύπτει:

$$S \geq C(S, \infty, 0) \geq C(S, T, X) \geq c(S, T, X) \quad (1.2.20)$$

Είναι λοιπόν προφανές και αναμενόμενο, ότι οι αξίες των American call options και των European call options φράσσονται από πάνω από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για την εξαγωγή άνω ορίου ενός put option, θεωρούμε $S=0$ στη συνθήκη (18) και παίρνουμε:

$$0 = C(0;T;X) = c(0;T;X) \quad (1.2.21)$$

Η τιμή ενός American put ισούται με την τιμή εξάσκησης X όταν η αξία του υποκείμενου τίτλου είναι μηδενική, διαφορετικά είναι φραγμένη από την τιμή εξάσκησης. Συνδυάζοντας αυτό με τη σχέση (7) προκύπτει ότι:

$$X \geq P(S,T,X) \geq p(S,T,X) \quad (1.2.22)$$

1.2.4 Κάτω όρια της αξίας put και call options

Για την εύρεση κάτω ορίων θα χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος πολύ διαδεδομένη στον κλάδο των χρηματοοικονομικών. Στη μέθοδο χρησιμοποιούνται δύο χαρτοφυλάκια τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε και εξετάζονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις αξίας των δύο χαρτοφυλακίων στο μέλλον. Αν κάποιο από τα δύο έχει σε όλες τις περιπτώσεις μεγαλύτερη αξία από το άλλο, τότε προκύπτει η ανισότητα που συνδέει τα δύο χαρτοφυλάκια.

Πρόταση: Σε αγορά με επιτόκιο ίσο με $r(t)$ και υποκείμενο τίτλο χωρίς μερίσματα.

Αν $\beta(T) = 1 \cdot e^{-\int_0^T r(u)du}$ τότε ισχύει:

$$c(S;T;X) + X\beta(T) \geq S \quad (1.2.23)$$

Απόδειξη:

Έστω χαρτοφυλάκιο $\Phi 1$ το οποίο περιέχει ένα European call option και ένα κουπόνι το οποίο θα έχει αξία X τη στιγμή T . Έστω επίσης χαρτοφυλάκιο $\Phi 2$ που περιέχει 1 υποκείμενο τίτλο. Δίνονται πιο κάτω οι αξίες (V) των δύο χαρτοφυλακίων για τις δύο πιθανές τελικές καταστάσεις $S_T < X$ και $S_T \geq X$

Αξία κατά τη στιγμή t	$S_T < X$	$S_T \geq X$
$\Phi 1$	X	$(S_T - X) + X = S_T$
$\Phi 2$	S_T	S_T
Αποτέλεσμα σύγκρισης	$V(\Phi 1) > V(\Phi 2)$	$V(\Phi 1) = V(\Phi 2)$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι $X\beta(T)$ είναι η επικαιροποιημένη αξία του κουπονιού τη στιγμή 0 ώστε αυτό να αξίζει X τη στιγμή T , προκύπτει η ζητούμενη σχέση



Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.1.23), (1.2.4) και (1.2.20) καταλήγουμε στα άνω και κάτω φράγματα ενός European ή American call option, τα οποία αποτυπώνονται με την πιο κάτω σημαντική ανισότητα:

$$S \geq c(S;T;X) \geq \max(S - X\beta(T), 0) \quad (1.2.24)(\alpha)$$

$$S \geq C(S;T;X) \geq \max(S - X\beta(T), 0) \quad (1.2.24)(\beta)$$

1.2.5 Ισότητα αξίας American call και European call options

Οι πιο πάνω ανισότητες αποδείχτηκαν για να προκύψει ένα πολύ σημαντικό πόρισμα, που αφορά την αντιμετώπιση ενός American call option σαν European call option.

Πράγματι, σε συνθήκες αγοράς που δεν υπάρχουν μερίσματα (dividends), οποιαδήποτε στιγμή και να εξασκηθεί ένα American call option, η απόδοση του είναι ίση με $\max(S - X, 0)$. Όμως, αφού $\beta(T) = 1 \cdot e^{-\int_0^T r(u)du} \leq 1$, άρα $X\beta(T) \leq X$, έπεται ότι $\max(S - X, 0) \leq \max(S - X\beta(T), 0)$, $0 \leq t \leq T$, το οποίο σύμφωνα με την (2.2β) είναι το κάτω φράγμα της αξίας ενός American Call Option.

Πόρισμα 1.1: Υπό συνθήκες αγοράς χωρίς μερίσματα (dividends), είναι συμφέρον για ένα American Call option να εξασκηθεί στην ημερομηνία λήξης του και όχι πρόωρα.

Παρατήρηση 1.2.1: Το Πόρισμα 1.1 αναφέρεται μόνο σε συνθήκες μηδενικών μερισμάτων. Από εδώ και πέρα στην εργασία αυτή θα αναφερόμαστε μόνο σε τέτοιες αγορές. Σε άλλες μορφές αγορών, υπάρχουν δυνατότητες συνεχών ή διακριτών μερισμάτων, στις οποίες οι συνθήκες και εξισώσεις που διέπουν την αξία των options αλλάζουν. Συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις μερισμάτων μπορεί να είναι προτιμητέο να εξασκηθεί ένα American call option πρόωρα.

Παρατήρηση 1.2.2: Ισοδύναμα με το Πόρισμα 1.1 θα μπορούσαμε να πούμε πως το American call option αξιολογείται σαν ένα European call option. Αυτό μας λύνει τα χέρια γιατί η μελέτη των European options είναι πολύ πιο εύκολη και υπάρχουν γνωστοί «κλειστοί» τύποι υπολογισμού της τιμής τους.

Παρατήρηση 1.2.3: Σε αντίθεση με το American call, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά όταν πρόκειται για American put. Θα δούμε ότι το American put δεν ανάγεται σε κάποια πιο απλή περίπτωση και πως η αξία του εκτιμάται με προσεγγιστικούς τρόπους ή με προσομοίωση(simulation).

1.2.6 Put-call parity

Υπάρχει μια γνωστή και χρήσιμη εξίσωση που συνδέει τις τιμές ενός put και ενός call European option, γνωστή και ως *put-call parity*.

Πρόταση 1.2.1: Σε αγορά χωρίς μερίσματα και ετήσιο επιτόκιο $r(t)$, αν $\beta(T) = e^{-\int_0^T r(u)du}$ τότε ισχύει η πιο κάτω ισότητα(put-call parity):

$$p = (c - S) + X\beta(T) \quad (1.2.25)$$

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σύγκρισης δύο χαρτοφυλακίων. Έστω χαρτοφυλάκιο $\Phi 1$ που περιέχει 1 European Call, ρευστό ποσό ίσο με $X\beta(T)$ και πώληση ενός υποκείμενου τίτλου². Έστω χαρτοφυλάκιο $\Phi 2$ που περιέχει 1 European put. Κατά τη λήξη τη στιγμή t και τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν αξία ίση με $\max(X - S_t, 0)$. Αφού και τα δύο είναι ευρωπαϊκού τύπου και μπορούν να

² Η πράξη αυτή είναι γνωστή και σαν short-selling. Προϋποθέτει πως το χαρτοφυλάκιο κατείχε από πριν 1 υποκείμενο τίτλο και τον πουλάει. Στην πραγματικότητα, κάποιος μπορεί να δανειστεί 1 τίτλο, να τον πωλήσει και να τον ξαναγοράσει στην μελλοντική του τιμή και να τον επιστρέψει στον ιδιοκτήτη

εξασκηθούν μόνο στη λήξη τους, τότε και τα δύο χαρτοφυλάκια έχουν την ίδια αξία καθόλα τη διάρκεια ζωής των options. ■

Η σχέση put-call parity ισχύει μόνο για European options, καθώς η επιπλέον ιδιότητα και ιδιομορφία των American options ότι μπορούν να εξασκηθούν και πρόωρα αλλάζει τα δεδομένα. Παρόλα αυτά, αφού από τις (1.2.8) και (1.2.9) έχουμε ότι $C > c$ και $P > p$, μπορούμε να βρούμε ένα πάνω όριο της διαφοράς C-P, αφού η put-call parity γίνεται:

$$C - P < S - X\beta(T) \quad (1.2.26)$$

Αποδεικνύεται εύκολα επίσης ότι $c + X > P + S$ (Μέθοδο χαρτοφυλακίων) και αφού από Πρόρισμα 1.1 $C = c$, προκύπτει ότι

$$S - X < C - P \quad (1.2.27)$$

Συνδυάζοντας τις (1.2.26) και (1.2.27) προκύπτουν τα όρια της διαφοράς στην τιμή ενός American call και American put:

$$S - X < C - P < S - X\beta(T) \quad (1.2.28)$$

2. Στοχαστικός Λογισμός

2.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ορισμός 2.1.1: Έστω ένα μη κενό σύνολο δεικτών, $T \neq \emptyset$. Θα καλείται *στοχαστική ανέλιξη* στο T μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$ ορισμένων σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και τιμές στο \mathbb{R}^m . Όταν $T = \mathbb{N}$ η σ.α καλείται *διακριτού χρόνου* ενώ αν T είναι ένα συνεχές διάστημα του \mathbb{R} *συνεχούς χρόνου*. Επίσης, για τυχών δοσμένο $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^m$ ονομάζεται ω -*τροχιά* της σ.α $\{X_t, t \in T\}$. Πολλές φορές θα συμβολίζεται μια σ.α με X εννοώντας ότι $X = \{X_t, t \in T\}$.

Ορισμός 2.1.2: Έστω $T = [0, \infty)$ και μια σ.α $X = \{X_t, t \in T\}$ με τιμές στο \mathbb{R}^m , ορισμένης σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) . Θα καλούμε τη σ.α X *συνεχή* όταν υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ με $P(N) = 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\forall \omega \in \Omega \setminus N$ η ω -τροχιά είναι συνεχής στο T , ή αλλιώς ότι $X(\omega) \in C(T, \mathbb{R}^m) \forall \omega \in \Omega \setminus N$.

Ορισμός 2.1.3: Θα λέμε ότι ένας χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) είναι *εφοδιασμένος με μια διύλιση (filtration) $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$* όταν $\forall t \in T$, η \mathcal{F}_t είναι σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Ω , με $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ και με την επιπλέον ιδιότητα πως για $t_1, t_2 \in T$ με $t_1 < t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.

Παρατήρηση: Όσο προχωρά ο χρόνος, αυξάνεται και η πληροφορία που έχουμε, σαν αποτέλεσμα της όλο και λεπτότερης διαμέρισης του Ω .

Ορισμός 2.1.4: Έστω σ.α. $X = \{X_t, t \in T\}$ ορισμένη στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) που είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Θα λέμε πως η σ.α X είναι *προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$* αν $\forall t \in T$ η τ.μ X_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη.

Ορισμός 2.1.5: Μια σ.α. $X = \{X_t, t \in T\}$ με τιμές στο \mathbb{R} και ορισμένη στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) που είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, θα λέμε ότι είναι ένα \mathcal{F}_t -*submartingale* (αντ. \mathcal{F}_t -*supermartingale*) αν και μόνο αν ισχύουν:

1. Η τ.μ X_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη $\forall t \in T$
2. $E(|X_t|) < \infty \forall t \in T$
3. $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ (αντ. $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$) P -σβ, $\forall s, t \in T$ με $s < t$.

Μια σ.α $X=\{X_t, t \in T\}$ θα είναι ένα \mathcal{F}_t -**martingale** αν είναι ταυτόχρονα supermartingale και submartingale

Ορισμός 2.1.6: Θα λέμε ότι μια σ.α $X=\{X_t, t \in T\}$ έχει την *Μαρκοβιανή ιδιότητα*, όταν δοθείσης της τιμής της X_s , οι τιμές των X_t , για $t > s$, εξαρτώνται μόνο από την τιμή X_s και όχι των προηγούμενων της $X_u, u < s$.

Ορισμός 2.1.7: Μια αγορά καλείται *viable* ή *with no-arbitrage* αν δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage(κέρδη χωρίς ρίσκο).

Θεώρημα 2.1: Μια αγορά είναι *no-arbitrage* αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο μέτρο πιθανότητας P^* ισοδύναμο³ με το P τέτοιο ώστε οι επικαιροποιημένες τιμές (discounted values) των υποκειμένων τίτλων είναι P^* -martingales.

Ορισμός 2.1.8: Μια συνάρτηση απόδοσης που κάποιου option καλείται *attainable* αν υπάρχει επιτρεπτή στρατηγική (αυτοχρηματοδοτούμενη με $V_t(\varphi) \geq 0 \forall t \in T$, όπου V η αξία της στρατηγικής) αξίας ίσης με την απόδοση τη στιγμή t .

(Για παράδειγμα αναφέρουμε πως η συνάρτηση απόδοσης ενός European Call option είναι η $h(S_T) = (S_T - K)^+$, όπου K η τιμή εξάσκησης και T η ημερομηνία λήξης του option)

Ορισμός 2.1.9: Μια αγορά θα καλείται *πλήρης(complete)* αν κάθε option της είναι attainable.

Θεώρημα 2.2: Μια no-arbitrage αγορά είναι complete, αν και μόνο αν υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας P^* ισοδύναμο του P , κάτω από το οποίο οι discounted τιμές των υποκειμένων τίτλων είναι *martingales*.

Παρατήρηση 2.2.1: Στα European type options ισχύει ότι η discounted αποτίμηση είναι martingale, κάτι που δεν ισχύει γενικά και στα άλλα options. Γενικότερα ισχύει πως η discounted αξία των options υπό το μέτρο P^* είναι ένα local-martingale. Όσο αφορά τα American options όμως, κάτω από το μοναδικό μέτρο πιθανότητας P^* ισοδύναμο του P , η discounted αποτίμηση του είναι ένα *supermartingale*.

Παρατήρηση 2.2.2: Το πιο πάνω θεώρημα 2.2 θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα αφού θα υποθέσουμε μια no arbitrage και complete αγορά καθόλη την εργασία αυτή.

³ Δύο μέτρα πιθανότητας P_1 και P_2 είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A, P_1(A)=0 \Leftrightarrow P_2(A)=0$

Επομένως, η εύρεση ενός και μόνο μέτρου P^* με την ικανότητα να κάνει martingales της επικαιροποιημένες τιμές των υποκείμενων τίτλων, είναι αρκετή αφού εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της ύπαρξης του. Επίσης, ο λόγος που υποθέτουμε πλήρη αγορά, δεν έχει κάποια οικονομική εξήγηση αλλά από μαθηματικής πλευράς κάνει πιο εύκολη την μελέτη των options και επέτρεψε την ανάπτυξη σχετικά απλών μοντέλων παρατήρησης και εκτίμησης κάποιων options.

Πόρισμα 2.1: Σε μια no-arbitrage και complete αγορά, που επομένως έχει ένα μέτρο P^* μοναδικό, κάτω από το οποίο οι επικαιροποιημένες τιμές των χρηματοοικονομικών υποκείμενων τίτλων είναι martingales, επιλέγουμε ένα είδος European option με απόδοση που δίνεται από την τ.μ Y . Η Y είναι \mathcal{F}_T -μετρήσιμη, μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και έστω φ μια στρατηγική αντιστάθμισης του option(υπάρχει λόγω υποθέσεων). Αν V είναι η αξία(value) αυτής της στρατηγικής, τότε:

$$V_T(\varphi) = Y. \quad (2.1.1)$$

Η σ.α $(V_t^*) = (\beta(T) V_t)_{0 \leq t \leq T}$ είναι P^* -martingale (από υπόθεση) και επομένως:

$$V_0(\varphi) = E^* \left(\frac{Y}{\beta(T)} \right) \quad (2.1.2)$$

Ακόμη πιο γενικά,

$$V_t(\varphi) = \beta(t) E^* \left(\frac{Y}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right), t=0,1,\dots,T \quad (2.1.3)$$

Όπως γίνεται δηλαδή αντιληπτό, η στρατηγική αντιστάθμισης ενός European option με απόδοση την τ.μ Y είναι οποιαδήποτε στιγμή γνωστή σε μια no-arbitrage και complete αγορά. Είναι επίσης απολύτως φυσιολογικό να καλούμε $V_t(\varphi)$ την τιμή του option κατά τη στιγμή t . Αν δηλαδή στον εκδότη του option καταβληθεί το ποσό $V_0(\varphi) = E^* \left(\frac{Y}{\beta(T)} \right)$ σαν **premium**, αυτός μπορεί να αντισταθμίσει τέλεια(perfectly hedge) το option που έκδωσε, και να έχει μηδενικές απώλειες οποιαδήποτε στιγμή. Η θεώρησης της ποσότητας $V_0(\varphi)$ όπως πιο πάνω, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας ορισμός του premium και ταυτόχρονα αποτελεί τη γενική φιλοσοφία υπολογισμού του στις μεθόδους που θα αναπτυχθούν.

Παρατήρηση 2.2.3: Το αξιοσημείωτο της όλης αυτής προσέγγισης, είναι πως κατά την αποτίμηση ενός option σε no-arbitrage και complete αγορά, δεν μας χρειάστηκε η γνώση του πραγματικού μέτρου πιθανότητας P , αφού αυτό αντικαταστάθηκε με

το P^* . Με λίγα λόγια, μας είναι αρκετό να καθορίσουμε την διύλιση που είναι εφοδιασμένος ο χώρος με τον τρόπο που εξελίσσεται η πληροφορία. Ακολουθώντας, δεν χρειάζεται να εκτιμήσουμε την πραγματική πιθανότητα να συμβεί κάποιο ενδεχόμενο (με στατιστικές μεθόδους και παρατήρηση του παρελθόντος) αλλά αρκούμαστε στη χρήση του μέτρου P^* για να μελετήσουμε το option.

2.2 Μια πρώτη εισαγωγή στα American options

Για να αποκτήσουμε μια καλύτερη αντίληψη των πιο πάνω και για να μελετήσουμε ένα πιο σύνθετο είδος option από το European, όπως είναι το American. Θα προσπαθήσουμε σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια πρώτη εισαγωγή στα American options με την απλή περίπτωση διακριτού χρόνου, δηλαδή $T=0,1,2,\dots,T$. Ισοδύναμα, το χρονικά διακριτοποιημένο American option παρατηρούμε ότι συμπίπτει με ένα Bermudan option με προσυμφωνημένο σύνολο στιγμών εξάσκησης το T .

Από τη στιγμή που ένα American option μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μεταξύ 0 και T, ορίζουμε μια θετική σ.α $(Z_t)_{t \in T}$ προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, όπου Z_t είναι η απόδοση από την εξάσκηση του option τη στιγμή t. Ας υποθέσουμε επίσης πως το American option είναι ένα put option, η τιμή εξάσκησης του οποίου είναι K με λήξη τη στιγμή T και πως με S_t συμβολίζουμε την τιμή του υποκείμενου τίτλου (έστω μια μετοχή). Τότε,

$$Z_t = (K - S_t)^+ \quad (2.2.1)$$

Για να αποτιμήσουμε το option βρίσκοντας την αξία της σ.α $(U_t)_{t \in T}$ που σχετίζεται με την πιο πάνω $(Z_t)_{t \in T}$ θα κάνουμε μια οπισθοδρομική διαδικασία ξεκινώντας από τη στιγμή T και κινούμενη προς τη στιγμή 0. Προφανώς τη στιγμή T θα ισχύει ότι $U_T = Z_T$. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι πόσα αξίζει το American put option κατά τη χρονική στιγμή T-1. Παίρνουμε τις δύο πιθανές περιπτώσεις. Στην πρώτη ο κάτοχος εξασκεί το option και παίρνει Z_{T-1} ενώ στη δεύτερη δεν το εξασκεί και προτιμά να το κάνει τη στιγμή T και να πάρει Z_T . Επομένως, ο εκδότης πρέπει τη στιγμή T-1 να πάρει το maximum μεταξύ Z_{T-1} και του απαραίτητου ποσού που χρειάζεται τη στιγμή T-1 για να αποδώσει Z_T τη στιγμή T. Επομένως,

$$U_{T-1} = \max(Z_{T-1}, \beta(T-1)E^*(\beta^{-1}(T) Z_T | \mathcal{F}_{T-1})) \quad (2.2.2)$$

Υποθέτουμε επίσης ότι το επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με r , και ότι $\beta(t) = (1+r)^{-t}$, για $t \in T$. (2.2.3)

Από τις (2.2.2) και (2.2.3) καταλήγουμε στον πιο κάτω αναδρομικό τύπο που δίνει την αξία ενός American put option οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t=1,2,\dots,T$:

$$U_{t-1} = \max(Z_{t-1}, \frac{1}{1+r}E^*(U_t | \mathcal{F}_{t-1})) \quad (2.2.4)$$

Πόρισμα 2.2: Από το Θεώρημα 2.2 και την Παρατήρηση 2.2.1, η ακολουθία $(U_t^*)_{t \in T}$ είναι ένα P^* -supermartingale, όπου U_t^* η discounted U_t .

Πρόταση 2.1: Η ακολουθία $(U_t^*)_{t \in T}$ είναι το μικρότερο P^* -supermartingale που κυριαρχεί της ακολουθίας $(Z_t^*)_{t \in T}$.

Απόδειξη:

Από την εξίσωση $U_{t-1}^* = \max(Z_{t-1}^*, E^*(U_t^* | \mathcal{F}_{t-1}))$ έπεται πως η $(U_t^*)_{t \in T}$ κυριαρχεί της $(Z_t^*)_{t \in T}$.

Έστω ένα άλλο supermartingale $(Q_t^*)_{t \in T}$ που κυριαρχεί της $(Z_t^*)_{t \in T}$. Τότε $Q_T^* > U_T^*$ και αν $Q_t^* > U_t^* \forall t$, έχουμε:

$$Q_{t-1}^* \geq E^*(Q_t^* | \mathcal{F}_{t-1}) \geq E^*(U_t^* | \mathcal{F}_{t-1})$$

Και επομένως: $Q_{t-1}^* \geq \max(Z_{t-1}^*, E^*(U_t^* | \mathcal{F}_{t-1})) \geq E^*(U_t^* | \mathcal{F}_{t-1}) = U_{t-1}^*$.

Με backward επαγωγή καταλήγουμε λοιπόν πως (Q_t) κυριαρχεί της (U_t^*) , άρα η $(U_t^*)_{t \in T}$ είναι το μικρότερο P^* -supermartingale που κυριαρχεί της ακολουθίας $(Z_t^*)_{t \in T}$.

■

2.3 Χρόνοι διακοπής

Ένας αγοραστής κάποιου American option, όπως αναφέρθηκε και πιο πριν, μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα του οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου. Καθοριστικό ρόλο στην απόφαση του αν θα εξασκήσει ή όχι τη στιγμή t παίζει η πληροφορία που έχει διαθέσιμη μέχρι αυτή τη στιγμή. Σε ένα μοντέλο πάνω σε ένα χώρο με διύλιση $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \in T\}, P)$, η στιγμή εξάσκησης περιγράφεται από τυχαίες μεταβλητές που καλούνται χρόνοι διακοπής.

Σαν μια πρώτη ερμηνεία, αν E είναι ένα κλειστό υποσύνολο (π.χ του \mathbb{R}^2) μπορούμε να δούμε την τ.μ $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται ως

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0: X_t(\omega) \in E\}, & \text{αν } \{t \geq 0: X_t(\omega) \in E\} \neq \emptyset \\ \infty & , \text{αν } \{t \geq 0: X_t(\omega) \in E\} = \emptyset \end{cases}$$

Η πιο πάνω συνάρτηση μπορεί να ονομαστεί και χρόνος πρώτης επιτυχίας του E από τη σ.α $X = \{X_t, t \in [0, \infty)\}$ με μια προφανή ερμηνεία: για $\omega \in \Omega$, $\tau(\omega)$ είναι η πρώτη χρονική στιγμή επιτυχίας του E , με το σύστημα να ακολουθεί την ω -τροχιά

$$t \mapsto X_t(\omega).$$

Ορισμός 2.3.1 Μια τυχαία μεταβλητή τ με τιμές στο \mathbf{T} καλείται *χρόνος διακοπής* αν και μόνο αν $\forall t \in T$ ισχύει:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in T$$

Πρόταση 2.3.1 Έστω $\{X_t, t \in T\}$ σ.α που να είναι \mathcal{F}_t -submartingale (αντ. Martingale) με δεξιά συνεχείς τροχιές και έστω τ ένας χρόνος διακοπής πάνω στην $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Τότε ισχύουν:

A) Η σ.α $\{X_{t \wedge \tau}, t \in T\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -submartingale (αντ. Martingale)

B) Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει $E[X_t | \mathcal{F}_{t \wedge \tau}] \geq X_{t \wedge \tau}$ (αντ. Ισότητα)

2.4 Snell Envelope και διάσπαση των supermartingales

2.4.1 Snell envelope

Ας θεωρήσουμε μια προσαρμοσμένη $(S_t)_{t \in T}$ και μέσω αυτής ορίσουμε την $(Z_t)_{t \in T}$ ως ακολούθως:

$$U_T = Z_T \quad \text{και}$$

$$U_t = \max(Z_t, E(Z_{t+1} | \mathcal{F}_t)) \quad \forall t \leq T-1 \quad (2.4.1)$$

Η μελέτη της πιο πάνω ακολουθίας έγινε αρχικά όταν οι προσπάθειες μελέτης των American options ξεκίνησαν. Έχουμε ήδη αποδείξει στην Πρόταση 2.1 ότι η $(U_t)_{t \in T}$ είναι το μικρότερο supermartingale που κυριαρχεί της $(Z_t)_{t \in T}$. Εξαιτίας της σημασίας του, αποδόθηκε όνομα στην πιο πάνω ακολουθία που ορίζεται από την (2.4.1) και καλείται *Snell Envelope*.

Εξ ορισμού, $Z_t \geq S_t$ (με ισότητα για $t=T$) και στην περίπτωση αυστηρής ανισότητας έχουμε ότι $U_t = E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$. Αυτό σημαίνει ότι αν σταματήσουμε κατάλληλα την $(U_t)_{t \in T}$ μπορούμε να πετύχουμε ένα martingale, κάτι που φαίνεται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.4.1 Η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται ως:

$$v_0 = \inf\{t \geq 0 \mid U_t = Z_t\} \quad (2.4.2)$$

είναι ένας χρόνος διακοπής και η σταματημένη σ.α $(U_{t \wedge v_0})_{t \in T}$ είναι martingale.

Γίνεται πολύ φυσιολογικό τώρα να αναζητήσουμε ένα βέλτιστο χρόνο διακοπής για μια $(Z_t)_{t \in T}$.

Ορισμός 2.4.1: Αν με $\mathcal{T}_{t,N}$ καλούμε το σύνολο των χρόνων διακοπής με τιμές στο

$\{t, t+1, \dots, T\}$, θα καλούμε βέλτιστο χρόνο διακοπής v μιας $(Z_t)_{t \in T}$, το χρόνο διακοπής εκείνο για τον οποίο ισχύει ότι:

$$E(Z_v | F_0) = \sup_{v \in \mathcal{T}_{0,N}} E(Z_v | F_0)$$

Θεώρημα 2.3: Ένας χρόνος διακοπής v είναι βέλτιστος χρόνος διακοπής μιας $(Z_t)_{t \in T}$ αν και μόνο αν ισχύουν τα παρακάτω:

- 1) $Z_v = U_v$
- 2) Και $(U_{t \wedge v})_{t \in T}$ είναι ένα martingale

,όπου $U_t = E(Z_{v^t} | F_t)$ με $v^t = \inf\{j \geq t \mid U_j = Z_j\}$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με χρόνους διακοπής και λεπτομερείς αποδείξεις μπορεί κάποιος να ανατρέξει στο Introduction to Stochastic Calculus Applied to finance, D.Lamberton and B.Lapeyre.

2.4.2 Διάσπαση των supermartingales

Μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των supermartingales, είναι η ικανότητα τους να μπορούμε να τα διασπάσουμε. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται η ακόλουθη διάσπαση ενός supermartingale:

Πρόταση 2.2: (Doob-Meyer decomposition) Κάθε supermartingale $(U_t)_{t \in T}$ έχει μια μοναδική διάσπαση που δίνεται από:

$$U_t = M_t - A_t \quad ,$$

Όπου η σ.α $(M_t)_{t \in T}$ είναι ένα martingale και η $(A_t)_{t \in T}$ μη-φθίνουσα προβλέψιμη και ολοκληρώσιμη ανέλιξη που εξαφανίζεται στο 0.

Όλα τα πιο πάνω έρχονται να δέσουν μεταξύ τους μεταξύ τους με την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.3: Έστω $(U_t)_{t \in T}$ το Snell-envelope μιας προσαρμοσμένης $(S_t)_{t \in T}$. Ο μεγαλύτερος βέλτιστος χρόνος διακοπής για την $(S_t)_{t \in T}$ μπορεί να δοθεί και από:

$$v_{\max} = \begin{cases} N & , \quad A_N = 0 \\ \inf\{t, A_{t+1} \neq 0\} & , \quad A_N \neq 0 \end{cases}$$

Όπου (A_t) η σ.α που προκύπτει από την διάσπαση του $(U_t)_{t \in T}$ (της Πρόταση 2.2).

Παρατήρηση: Η χρήση του Snell-envelope και της διάσπασης ενός supermartingale είναι ευρεία όσο αφορά μεθόδους αποτίμησης και αντιστάθμισης των American put options αλλά και της εύρεσης βέλτιστης ημερομηνίας εξάσκησης.

2.5 Κίνηση Brown

2.5.1 Ιστορική Αναδρομή

Την πρώτη φορά που συναντά κάποιος την έννοια της Κίνησης Brown, είναι όταν το 1828, ο βοτανολόγος Robert Brown προσπάθησε να παρατηρήσει την κίνηση που εκτελούν μικρά σωματίδια γύρης μέσα σε κάποιο υγρό. Η τυχαία πορεία που ακολουθούσαν τα μικρά αυτά σωματίδια ήταν κάτι το περίεργο καθώς υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, το σωματίδιο ακολουθούσε κάθε φορά και διαφορετική τροχιά μέσα στο υγρό. Επομένως, εισήγαγε την έννοια της κίνησης Brown σαν ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο με σκοπό την περιγραφή και ανάλυση της κίνησης μικρών σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό. Εύστοχα θεωρήθηκε το όλο πείραμα σαν ένα πείραμα τύχης, καθώς δύο ίδια σωματίδια διαγράφουν διαφορετικές τροχιές υπό

τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Ακολούθησε ο Albert Einstein το 1905 να εξηγήσει πλήρως τη φύση της κίνησης αυτής και την εξάρτησή της από τις συγκρούσεις των σωματιδίων με τα μόρια του υγρού.

Εντούτοις, είχε προλάβει το 1900 ο Louis Bachelier να μελετήσει εκτενώς την κίνηση Brown και να έχει μια πρωτοπόρα ιδέα να την αξιοποιήσει σε κάτι εντελώς διαφορετικό, στην μοντελοποίηση της τιμής μιας μετοχής. Με λίγα λόγια, ο Bachelier αντιστοίχησε τις αντιδράσεις της τιμής μιας μετοχής που οφείλονται σε μια σειρά από παράγοντες και πληροφορίες στην αγορά, με αυτή ενός σωματιδίου που οφείλεται στην επίδραση του με το υγρό.

Αυτή η «μαγική ικανότητα» που έδειχνε να έχει η κίνηση Brown, οδήγησε σε περαιτέρω μελέτη της ούτως ώστε να έρθει η μαθηματική θεμελίωση της ως μιας *στοχαστικής ανέλιξης* από τους Norbert Wiener (1923) και Paul Levy (1948). Προς τιμή τους μάλιστα, η στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει την κίνηση Brown καλείται και Wiener-Levy σ.α. Η ανέλιξη Wiener-Levy έχει πολλές και χρήσιμες ιδιότητες γι' αυτό και θεωρείται ο θεμελιώδης λίθος όλων των άλλων στοχαστικών ανεξίτηλων που ακολούθησαν. Στα μειονεκτήματά της το ότι δεν αποτελεί και το πλέον ρεαλιστικό μοντέλο αλλά συνεχίζει να είναι ένα από τα πιο εύχρηστα εργαλεία στη μοντελοποίηση πολλών φαινομένων σε διάφορους κλάδους, όπως τα χρηματοοικονομικά, βιολογία, ρευστομηχανική, τηλεπικοινωνίες και άλλα.

2.5.2 Μαθηματική περιγραφή κίνησης Brown

Έστω ο χώρος πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) , εφοδιασμένος με τη δύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Ορισμός 2.5.1 Θα καλούμε τυπική μονοδιάστατη \mathcal{F}_t -κίνηση Brown μια στοχαστική ανέλιξη $B = \{B_t, t \geq 0\}$ με τιμές στο \mathbb{R} , η οποία ικανοποιεί τις πιο κάτω απαιτήσεις:

1. Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει πως η B_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη
2. Η σ.α $\{B_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές
3. $B_0 = 0$ P-σ.β.
4. Για $0 \leq s \leq t$ η τ.μ $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας \mathcal{F}_s
5. Για $0 \leq s \leq t$ η τ.μ $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$

Παρατήρηση 1: Σαν επέκταση της μονοδιάστατης τυπικής κίνησης Brown, μπορούμε να ορίσουμε την n-διάστατη κίνηση Brown σαν την σ.α $\{B_t, t \geq 0\}$ με τιμές στο \mathbb{R}^n , που έχει την κάθε συνιστώσα της σαν τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

Παρατήρηση 2: Η απαίτηση 3. του ορισμού είναι τεχνικής φύσεως και απλά υποδηλώνει ότι η τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown ξεκινά από το 0.

Παρατήρηση 3: Προκύπτει από την 4. πως η κίνηση Brown είναι μια σ.α ανεξάρτητη προσαυξήσεων, που σημαίνει ότι αν $0=t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$, τότε οι τ.μ $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$, $i=1,2,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ιδιότητες τυπικής μονοδιάστατης κίνησης Brown

- A. $E(B_t - B_s) = 0$
- B. $V(B_t - B_s) = E[(B_t - B_s)^2] = t - s$
- C. $B_t \sim N(0, t)$
- D. $\frac{B_t - B_s}{\sqrt{t - s}} \sim N(0, 1)$, $\forall t, s : 0 \leq s \leq t$

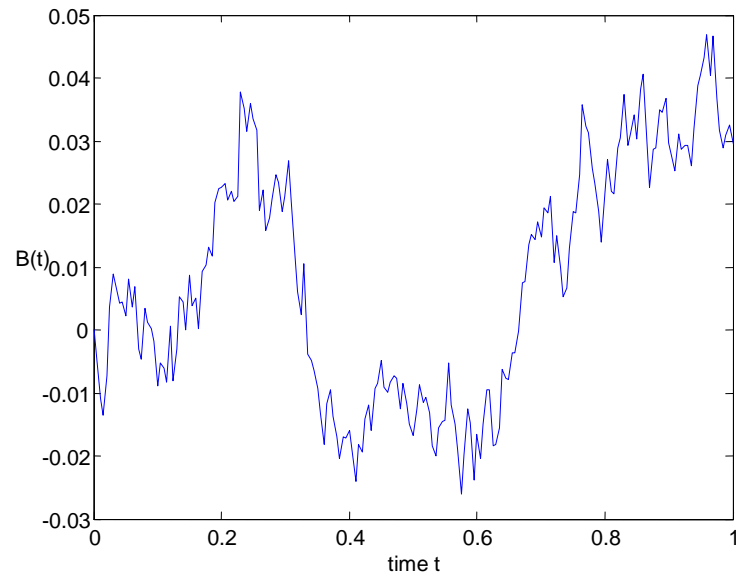
Ορισμός 2.5.2 Η στοχαστική ανάλιξη $\{X_t, t \geq 0\}$ θα καλείται κίνηση Brown με παράμετρο μ (drift parameter) και σ ή ν (volatility parameter) αν ισχύουν:

1. Για κάθε $t \geq 0$ ισχύει πως η X_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη
2. Η σ.α $\{X_t, t \geq 0\}$ έχει συνεχείς τροχιές
3. Η τ.μ $X_t - X_s$ είναι ανεξάρτητη από τις X_u , για $0 \leq u \leq s$
4. Για $0 \leq s \leq t$ η τ.μ $X_t - X_s \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ (Για $\mu=0$, $\sigma=1$, $X_0=0$ έχουμε την τυπική κίνηση Brown)

Ως παράδειγμα, δίνουμε μια κίνηση Brown παραμέτρων μ , σ και αρχικής θέσης $c \in \mathbb{R}$ την σ.α $\{X_t = c + \mu t + \sigma B_t\}$, όπου $\{B_t, t \geq 0\}$ μια τυπική κίνηση Brown.

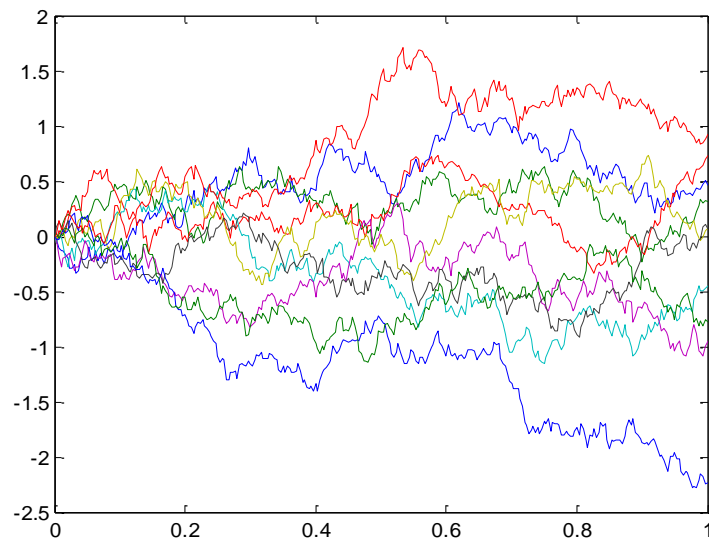
Παρατήρηση 4: Η κίνηση Brown έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ικανοποιεί τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και είναι συνεχές martingale.

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια τυχαία τροχιά μιας κίνησης Brown (για διακριτό χρόνο):



Εικόνα 1: Μια τροχιά κίνησης Brown που ξεκινά από το 0

Με τα ίδια ακριβώς δεδομένα, δεν παίρνω την ίδια κίνηση Brown κάθε φορά αλλά διαφορετικές, όπως αυτό φαίνεται και από το σχήμα που ακολουθεί, στο οποίο προσομοιώθηκαν 10 διαφορετικές κινήσεις Brown:



Εικόνα 2: 10 κινήσεις Brown

2.5.3 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Όπως αναφέρθηκε στην ιστορική αναδρομή, ο Louis Bachelier το 1900 προσπάθησε να αξιοποιήσει την κίνηση Brown για να περιγράψει τις τιμές αγαθών ή μετοχών $\{S_t, t \geq 0\}$, όπου με S_t συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής τη στιγμή t . Όμως, παρατήρησε ότι η κίνηση Brown εκ φύσεως της δεν είναι κατάλληλη για ένα τέτοιο μεγάλο βήμα.

Δύο ήταν τα μεγάλα μειονεκτήματα της κίνησης Brown. Πρώτα, το ότι αυτή η ανέλιξη μπορούσε να παίρνει αρνητικές τιμές, κάτι εντελώς μη ρεαλιστικό όταν πρόκειται για τιμές μετοχών. Δεύτερο σημαντικό της μειονέκτημα, το ότι οι αυξομειώσεις στην τιμή της μετοχής ήταν ανεξάρτητες από την ίδια την τιμή της. Συγκεκριμένα, με το μοντέλο της κίνησης Brown εξισώναμε τις πιθανότητες μια μετοχή αξίας 1000 να γίνει 1050(1000+50) μια επόμενη χρονική στιγμή με το να γίνει μια μετοχή αξίας 70 σε 120(70+50) την επόμενη χρονική στιγμή. Κάτι τέτοιο δεν δείχνει λογικό και αυτό οδήγησε στην αναζήτηση μιας καλύτερης στοχαστικής ανέλιξης.

Ένα απλό μοντέλο που κατάφερε να περιγράψει την ανέλιξη των τιμών στο χρόνο, είναι η Γεωμετρική κίνηση Brown. Αν και πιο σύνθετα και ακριβή μοντέλα ανακαλύφθηκαν αργότερα, η Γεωμετρική κίνηση Brown αποτελεί μέχρι και σήμερα ένα αποδεκτό μοντέλο, που εξαιτίας της απλότητας του αποτελεί τη βάση μελέτης και πρόβλεψης σε πολλούς κλάδους.

Μαθηματική περιγραφή Γεωμετρικής κίνησης Brown

Ορισμός 2.5.3: Έστω $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ μια κίνηση Brown με drift parameter $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και volatility parameter σ . Μια σ.α. $S = \{S_t, t \geq 0\}$ θα καλείται Γεωμετρική κίνηση Brown αν $S_t = e^{Y_t}$. Ισοδύναμα, μια στοχαστική ανέλιξη S_t είναι Γεωμετρική κίνηση Brown, αν $\ln(S_t)$ είναι μια κίνηση Brown με αρχική τιμή $\ln(S_0)$.

Όπως συνηθίζεται να λέγεται στον κλάδο της Θεωρίας Πιθανοτήτων, μια Γεωμετρική κίνηση Brown είναι μια λογαριθμοποιημένη κίνηση Brown.

Παρατήρηση 1: Αργότερα, όταν θα οριστεί το Στοχαστικό Ολοκλήρωμα και οι Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, θα καλούμε Γεωμετρική κίνηση Brown παραμέτρων μ, σ τη λύση της πιο κάτω γραμμικής ΣΔΕ:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

όπου $\{B_t, t \geq 0\}$ μια τυπική κίνηση Brown.

Παρατήρηση 2: Η λύση της πιο πάνω ΣΔΕ είναι της μορφής:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right], \quad t \geq 0 \quad (2.5.1)$$

Από την (2.5.1) προκύπτει ότι:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma dB_t \quad (2.5.2)$$

Έχουμε δηλαδή ότι η S_t είναι πράγματι Γεωμετρική κίνηση Brown καθώς η $\ln(S_t)$ είναι μια κίνηση Brown που ξεκινά από το $\ln(S_0)$, έχει drift parameter $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ και volatility parameter σ .

Παρατήρηση 3: Αν η σ.α $S = \{S_t, t \geq 0\}$ ακολουθεί Γεωμετρική κίνηση Brown, τότε η τ.μ S_t ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή:

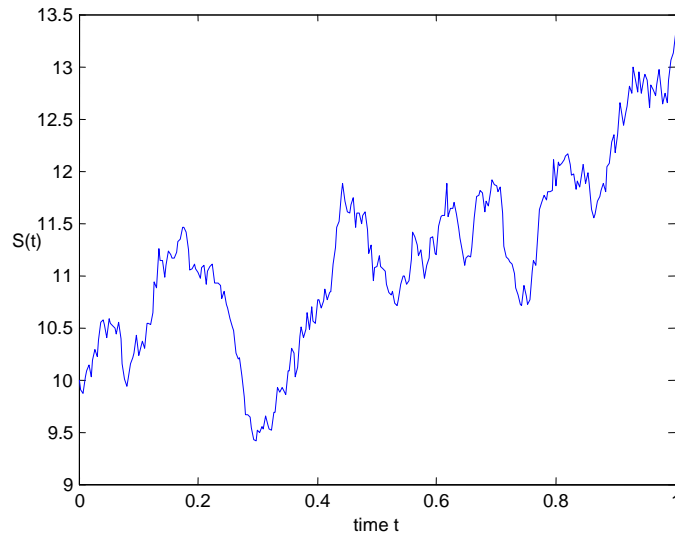
$$\ln(S_t) \sim N(\ln(S_0) + \mu t, \sigma^2 t)$$

Παρατήρηση 4: Με τις ιδιότητες μιας ΣΔΕ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$, $t \geq 0$, είναι \mathcal{F}_t -martingale, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$A) \quad E(S_t) = S_0 e^{\mu t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5.3)$$

$$B) \quad V(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5.4)$$

Στο σχήματα που ακολουθεί δίνεται ένα παράδειγμα τροχιάς μιας Γεωμετρικής κίνησης Brown με παραμέτρους $S_0=10$, $\mu=0.2$, $\sigma=0.3$ και $T=1$ (με διαμέριση του χρόνου σε 300 βήματα).



Εικόνα 3: Γεωμετρική κίνηση Brown

Όπως και στην περίπτωση της κίνησης Brown, με τις ίδιες παραμέτρους κάθε φορά θα παίρνουμε και διαφορετική Γεωμετρική κίνηση Brown. Όμως, εξαιτίας του εκθετικού, η Γεωμετρική κίνηση Brown είναι πάντοτε θετική, κάνοντας έτσι το μοντέλο πιο ρεαλιστικό.

Επίσης, οι ποσοστιαίες μεταβολές για $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$:

$$\frac{St_2 - St_1}{St_1}, \quad \frac{St_3 - St_2}{St_2}, \quad \dots, \quad \frac{St_n - St_{n-1}}{St_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες των απολύτων μεταβολών $St_i - St_{i-1}$, $i=1, \dots, n$ γεγονός που διόρθωσε και το δεύτερο μεγάλο μειονέκτημα της κίνησης Brown.

3. Μοντέλο Black-Scholes

3.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα(Ολοκλήρωμα Ito)

3.1.1 Εισαγωγή

Σε αντίθεση με το τι παρατηρούσαμε στην κίνηση Brown όταν αυτή πρωτοπαρουσιάστηκε σαν μια απλή κίνηση κάποιου σωματιδίου στο υγρό, η πραγματικότητα ήταν πιο περίπλοκη. Δεν υπήρχε μια απλή κίνηση Brown $B = \{B_t, t \geq 0\}$ αλλά μια $\sigma B_t, t \geq 0$, όπου $\sigma > 0$. Το σ στην πραγματικότητα, είναι ένας συντελεστής που καθορίζεται από τις συνθήκες, όπως τη θερμοκρασία, τη μάζα του σωματιδίου κλπ. Για $\sigma=1$ έχουμε την απλή κίνηση Brown.

Επιπλέον όμως, το πρόβλημα γίνεται πιο απαιτητικό αν το ίδιο το υγρό κινείται και μάλιστα με την πιθανότητα να έχει διαφορετικές ταχύτητες σε κάθε θέση. Έστω λοιπόν με $b(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{R}^3$ ταχύτητα του υγρού σε κάθε σημείο του τρισδιάστατου χώρου.

Αν X_t η θέση του σωματιδίου τη στιγμή t , θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβολή της θέσης στο χρονικό διάστημα $[t, t+\Delta t]$, δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι για μικρό Δt η ταχύτητα δεν αλλάζει και θα είναι ίδια με τη στιγμή t , να μελετήσουμε το πιο κάτω:

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(X_t)\Delta t + [\sigma(X_t)B_{t+\Delta t} - \sigma(X_t)B_t]$$

(χρησιμοποιήσαμε ότι Ταχύτητα*Χρόνος=Διάστημα)

Επομένως, μπορούμε να διακρίνουμε τη μεταβολή στη θέση στη μεταβολή που οφείλεται λόγω της κίνησης του υγρού ($b(X_t)\Delta t$) και αυτή λόγω κίνησης Brown ($\sigma(X_t)B_{t+\Delta t} - \sigma(X_t)B_t$). Ισοδύναμα, συμβολίζουμε ως ακολούθως:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \quad (3.1.1)$$

ή σε ολοκληρωτική μορφή :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \quad (3.1.2)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στη σχέση (3.1.2) το οποίο ολοκληρώνεται ως προς μια κίνηση Brown, καλείται Στοχαστικό Ολοκλήρωμα ή Ito-Ολοκλήρωμα ενώ η στοχαστική ανέλιξη $X_t, t \geq 0$ που ορίζεται όπως πιο πάνω καλείται Ito-ανέλιξη.

3.1.2. Ορισμός Στοχαστικού Ολοκληρώματος

Από το σημείο αυτό και μετά, θα εννοείται ότι δουλεύουμε σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) εφοδιασμένο με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ και με την προϋπόθεση πως $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t$, όπου $\mathcal{N} := \{\Lambda \subset \Omega : \exists N \in \mathcal{F} \text{ με } P(N) = 0 \text{ και } \Lambda \subset N\}$.

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε για μια σ.α $f(t, \omega), t \in [\alpha, \beta], \omega \in \Omega$ μια σ.α σαν αποτέλεσμα του $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dB_t$.

Ορισμός 3.1.1: Η κλάση $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ είναι το σύνολο των στοχαστικών ανελίξεων f που ικανοποιούν τα πιο κάτω:

- 1) Η f είναι $\mathcal{B}_{[\alpha, \beta]} \otimes \mathcal{F}$ -μετρήσιμη
- 2) Η f είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη
- 3) $\int_{[\alpha, \beta]} E[f^2(t, \cdot)]dm(t) < \infty \Leftrightarrow E\left[\int_{\alpha}^{\beta} f^2(t, \cdot)dt\right] < \infty$

Ορισμός 3.1.2: Θα καλούμε $\mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ το σύνολο των στοχαστικών ανελίξεων f με $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ για τις οποίες υπάρχει διαμέριση $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ και τυχαίες μεταβλητές f_0, f_1, \dots, f_{n-1} τέτοιες ώστε:

- 1) $f(t, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(\omega)I_{[t_i, t_{i+1})}(t) + f_{n-1}(\omega)I_{\{\beta\}}(t)$
- 2) $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$

Ορισμός 3.1.3: Αν μια σ.α $f \in \mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ τότε συμβολίζουμε:

$$\int_a^\beta f(t)dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad (3.1.3)$$

Ορισμός 3.1.4: Για μια $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ ορίζουμε $\|f\| := \sqrt{\int_a^\beta E[f^2(t, \cdot)]dt} = \sqrt{E[\int_a^\beta f^2(t, \cdot)dt]}$

Με τη νόρμα $\|\cdot\|$ ο χώρος $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ γίνεται χώρος Banach(πλήρης).

Θεώρημα 3.1: Ο $\mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$ με τη νόρμα $\|\cdot\|$. Δηλαδή, για τυχόν $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ υπάρχει ακολουθία $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ εις τρόπον ώστε

$$\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Ισοδύναμα, } E[\int_a^\beta (f(t, \cdot) - f_n(t, \cdot))^2 dt] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Χρήσιμο είναι και το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1: Αν $f \in \mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ τότε $\|\int_a^\beta f(t)dB_t\|_{L^2(\Omega, dp)} = \|f\|$, όπου

$$L^2(\Omega, dp) = \{x: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : E(x^2) < +\infty\} \text{ και } \|x\|_{L^2(\Omega, dp)} = \sqrt{\int_\Omega x^2 dp}.$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι για να δώσουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος με βάση τα προηγούμενα.

Ορισμός 3.1.5 (Στοχαστικό Ολοκλήρωμα): Έστω $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$. Τότε υπάρχει

$\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^0(\alpha, \beta)$ με $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Αν συμβολίσουμε $I_n = \int_a^\beta f_n(t)dB_t$ τότε

λόγω της πληρότητας του χώρου υπάρχει $I \in L^2(\Omega, dp) : E|I_n - I|^2 \rightarrow 0$, ισοδύναμα $I_n \xrightarrow{L^2} I$. Θα καλούμε Στοχαστικό Ολοκλήρωμα(Ito-ολοκλήρωμα) το:

$$I := \int_a^\beta f(t)dB_t$$

Από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος, προκύπτουν και κάποιες χρήσιμες ιδιότητές του, από τις οποίες δίνονται οι πιο χρήσιμες:

Ιδιότητες στοχαστικού ολοκληρώματος για $f \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$

- 1) $E[\int_a^\beta f(t)dB_t] = 0$
- 2) $E(|\int_a^\beta f(t)dB_t|^2) = E\int_a^\beta f^2(t, \cdot)dt$ ή ισοδύναμα $\|I\| = \|f\|$ [Ισομετρία Ito]
- 3) $\int_a^\beta (\lambda f(t) + \mu g(t))dB_t = \lambda \int_a^\beta f(t)dB_t + \mu \int_a^\beta g(t)dB_t$, $g \in \mathcal{L}(\alpha, \beta)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- 4) $\int_a^\beta f(t)dB_t = \int_a^\gamma f(t)dB_t + \int_\gamma^\beta f(t)dB_t$
- 5) Η σ.α $X_t = \int_0^t f(t)dB_t, p - \sigma. \beta$, είναι martingale.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα επεκτείνεται και σε μια κλάση $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ με $\mathcal{L}(\alpha, \beta) \subset \mathbf{P}(\alpha, \beta)$

και με την κλάση $\mathbf{P}(\alpha, \beta)$ να διαφέρει ως προς την 3^η ιδιότητα της $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, αφού αυτή

$$\text{γίνεται } P(\int_a^\beta f^2(t, \cdot) < \infty) = 1.$$

Όταν αναφερόμαστε σε στοχαστικό ολοκλήρωμα μιας $f \in \mathbf{P}(\alpha, \beta)$, οι ιδιότητες του Στοχαστικού Ολοκληρώματος που αναφέραμε πιο πριν αλλάζουν ή δεν ισχύουν. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες (1) και (2) δεν ισχύουν ενώ η (5) ισχύει αναφέρει ότι η $X_t = \int_a^t f(t)dB_t, p - \sigma. \beta$ είναι Local-martingale αντί martingale που είχαμε στην κλάση $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

Ορισμός 3.1.6: Αν $f \in \mathbf{P}(\alpha, \beta)$ και $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ένας χρόνος διακοπής, τότε:

$$\int_0^{t \wedge \tau} f(s)dB_s := \int_0^t f(s)I_{\{\tau \geq s\}}dB_s$$

3.1.3 Ito Formula

Όπως και στην κατά Riemann-ολοκλήρωση, η επίλυση των στοχαστικών ολοκληρωμάτων με τη χρήση του ορισμού τους είναι μια επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία. Η Ito-formula, είναι μια σχέση η οποία απλοποίησε κατά πολύ την επίλυση των στοχαστικών ολοκληρωμάτων και έχει δεσπόζουσα θέση στο Στοχαστικό Λογισμό.

Πρόταση 3.1(Ito-Formula): Έστω μια ανέλιξη Ito $X_t = \xi + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s$, $t \in [0, T]$ (ή $t \geq 0$) και $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$, δηλαδή $f(t, x)$ με $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$ συνεχής.

Τότε,

$$f(t, X_t) = f(0, \xi) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + a(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} b^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \right] dt + \int_0^t b(s) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dB_s$$

P-σ.β, $\forall t \in [0, T]$.

Παράδειγμα:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το Σ.Ο $\int_0^t B_s^2 dB_s$. Θέτουμε $g(t, x) = x^2$.

Υπολογίζουμε την $G(t, x)$: $\frac{\partial G}{\partial x}(t, x) = g(t, x)$. Δηλαδή, $G(t, x) = \frac{1}{3} x^3 \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$.

Για τη σ.α Ito $B_t = 0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dB_s$ αν εφαρμόσουμε τη Formula Ito προκύπτει:

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s ds, \text{ που είναι και η λύση του Σ.Ο}$$

■

Στο σημείο αυτό, είναι χρήσιμο να παραπέμψουμε τον αναγνώστη στο [17], για εκτενέστερη μελέτη όσον έχουμε πει. Πολύ σημαντική είναι και η φυσική γενίκευση των πιο πάνω σε περισσότερες διαστάσεις και θεωρείται πως ο αναγνώστης γνωρίζει να διαχειρίζεται στοχαστικά ολοκληρώματα και Ito-formula σε μεγαλύτερες διαστάσεις από εδώ και πέρα.

Ένα πολύ σημαντικό πόρισμα της 2-διάστατης formula-Ito είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα(By parts Integration formula): Αν $X_t^1 = \xi_1 + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t b_1(s)dB_s$ μια μονοδιάστατη ανέλιξη Ito και $X_t^2 = \xi_2 + \int_0^t a_2(s)ds + \int_0^t b_2(s)dB_s$ μια άλλη με την ίδια όμως κίνηση Brown, τότε φτιάχνοντας τη 2-διάστατη ανέλιξη:

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} a_1(s) \\ a_2(s) \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix} dB_s \quad \text{και παίρνοντας για } f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

εφαρμόζουμε τη formula Ito για 2 διαστάσεις και προκύπτει το παρακάτω:

$$X_t^1 X_t^2 = \xi_1 \xi_2 + \int_0^t (a_1(s)X_s^2 + a_2(s)X_s^1 + b_1(s)b_2(s))ds + \int_0^t (b_1(s)X_s^2 + b_2(s)X_s^1)dB_s \quad (3.1.4)$$

3.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

3.2.1 Ορισμός και Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης

Η λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, είναι μια στοχαστική ανέλιξη. Η διαφορά τους με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, είναι ότι το Ω δεν εμπλέκεται στη μερική διαφορική εξίσωση και ότι το Ω δεν έχει δομή, επομένως εκεί η ανάλυση γίνεται μόνο ως προς το χρόνο t .

Ορισμός 3.2.7(Πολυδιάστατη ΣΔΕ): Έστω μια n -διάστατη κίνηση Brown $B = \{B_t, t \geq 0\}$.

Έστω επίσης $T > 0$ και $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ δηλαδή της μορφής:

$$b(t, x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} b_1(t, \underline{x}) \\ b_2(t, \underline{x}) \\ \vdots \\ b_m(t, \underline{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m). \quad \text{Έστω και}$$

$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ πίνακας συναρτήσεων. Τότε καλούμε *Γενική Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση* την:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (3.2.1)$$

Ορισμός 3.2.8: Θα καλούμε *ισχυρή λύση* της ΣΔΕ στο $[0, T]$ την σ.α $X = \{X_t, t \geq 0\}$ που ικανοποιεί:

- Την (3.2.1)
- Έχει συνεχείς τροχιές
- Είναι \mathcal{F}_t -προσαρμοσμένη
- $P(X_0 = \xi) = 1$
- $P\left(\int_0^T |b(s, X_s)| ds + \int_0^T |\sigma(s, X_s)|^2 ds < \infty\right) = 1$ (Εξασφαλίζει τουλάχιστο την στοχαστική ολοκληρωσιμότητα με $\sigma(s, X_s) \in \mathbf{P}(0, T)$)

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε κάποιες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η ΣΔΕ ούτως ώστε αυτή να έχει λύση και προχωρώντας ένα βήμα παρακάτω, να είναι μοναδική αυτή η λύση. Το παρακάτω Θεώρημα μας δίνει ένα κριτήριο για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.

Θεώρημα Ito: Υποθέτουμε μια ΣΔΕ όπως την (3.2.1) και ότι $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n > 0$ τ.ω να ισχύουν:

1. $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k_n |x - y|,$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^m : |x| \leq n, |y| \leq n, t \in [0, T]$
2. $|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2), \forall x, y \in \mathbb{R}^m$ (Growth Condition)

Τότε και υπάρχει και είναι μοναδική η λύση $X = \{X_t, t \geq 0\}$

3.2.2 Γραμμικές ΣΔΕ

Αν και υπάρχουν στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις πολλών μορφών, αυτή που μας ενδιαφέρει και θα ασχοληθούμε είναι αυτή του μοντέλου Black-Scholes, η οποία είναι μια χωρικά γραμμική, δηλαδή ως προς x , ΣΔΕ.

Ορισμός 3.2.8: Θα καλούμε Γραμμική ΣΔΕ τη ΣΔΕ της μορφής:

$$X_t = X_0 + \int_0^t [b_1(s)X_s + b_2(s)]ds + \int_0^t [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)]dB_s \quad (3.2.2)$$

Επομένως, είναι μια ΣΔΕ με $b(t, x) = b_1(t)x + b_2(t)$ και $\sigma(t, x) = \sigma_1(t)x + \sigma_2(t)$, $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.2: Μια γραμμική ΣΔΕ έχει μοναδική λύση $X = \{X_t, t \geq 0\}$.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ito.

Πράγματι, $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq (|b_1(s)| + |\sigma_1(s)|) |x - y|$ και αν το $\sup_{0 \leq s \leq T} (|b_1(s)| + |\sigma_1(s)|) = k < \infty$ (1) ισχύει η πρώτη συνθήκη.

Για την απόδειξη της 2^{ης} προϋπόθεσης, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση:

$$\text{Αν } \sup_{0 \leq s \leq T} (|b_1(s)| + |\sigma_1(s)|) = k < \infty \Rightarrow \sup_{0 \leq s \leq T} (|b_1(s)|^2 + |\sigma_1(s)|^2) = \mu < \infty$$

Αν λοιπόν $\sup_{0 \leq s \leq T} (|b_2(s)| + |\sigma_2(s)|) = k_1 < \infty$ (2), συνδυάζοντας τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} b^2(s, x) + \sigma^2(s, x) &\leq 2(b_1^2(s) + \sigma_1^2(s))x^2 + 2(b_2^2(s) + \sigma_2^2(s)) \\ &\leq 2kx^2 + 2k_1 \\ [l = \max(k, k_1)] &\leq 2lx^2 + 2l \\ &= 2l(1 + x^2) \quad (\text{Growth Condition}) \\ &= L(1 + x^2) \end{aligned}$$

\Rightarrow Υπάρχει και είναι και μοναδική η λύση της γραμμικής ΣΔΕ

■

Επίλυση Γραμμικών ΣΔΕ

Έστω $X_t = X_0 + \int_0^t [b_1(s)X_s + b_2(s)]ds + \int_0^t [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)]dB_s$ (1) μια γραμμική ΣΔΕ.

Για να την επιλύσουμε ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

$$\text{Θέτουμε } Y_t := \int_0^t [b_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)]ds + \int_0^t \sigma_1(s)dB_s .$$

Για την σ.α Y_t και για $f(x) = e^{-x}$ εφαρμόζουμε την formula Ito για να υπολογίσουμε την ανέλιξη Ito: $F_t = e^{-Y_t}$. Προκύπτει λοιπόν πως

$$F_t = e^{-Y_t} = 1 + \int_0^t [-b_1(s) + \sigma_1^2(s)]F_s ds + \int_0^t (-\sigma_1(s))F_s dB_s \quad (2)$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) σύμφωνα με By parts Integration formula (3.1.4) παίρνουμε μετά από απλές πράξεις τη λύση μιας γραμμικής ΣΔΕ, η οποία είναι:

$$X_t = e^{Y_t} [X_0 + \int_0^t [b_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)]F_s ds + \int_0^t \sigma_2(s)F_s dB_s] \quad (3.2.3)$$

Η λύση (3.2.3) όπως αποδείχτηκε στην Πρόταση 3.2.1, είναι μοναδική.

3.2.3 Μοντέλο Black-Scholes

Στο Κεφάλαιο 2 έχουμε ήδη αναφερθεί στη Γεωμετρική κίνηση Brown και τη δεσπόζουσα θέση που έχει στη στοχαστική ανάλυση. Η γεωμετρική λοιπόν κίνηση Brown δεν είναι τίποτα άλλο από τη λύση μιας συγκεκριμένης γραμμικής ΣΔΕ, γνωστής και ως μοντέλο Black-Scholes.

Ορισμός 3.2.9: Ονομάζουμε *μοντέλο Black-Scholes* την ακόλουθη γραμμική ΣΔΕ:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad x > 0, \sigma > 0. \\ X_0 &= x \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Ισοδύναμα, σε ολοκληρωτική μορφή η πιο πάνω ΣΔΕ γράφεται σαν

$$X_t = x + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \quad (3.2.5) \quad \text{και έχει σαν λύση τη σ.α}$$

$X_t = X_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]$, $t \geq 0$ (3.2.6) η οποία καλείται και Γεωμετρική κίνηση Brown.

Παρατήρηση: Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της λύσης του μοντέλου Black-Scholes, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(x \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma dB_t]) \\ &= x e^{\mu t} E(e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}) \\ &= \underbrace{e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}}_{\text{martingale}} x e^{\mu t} \end{aligned}$$

Ισοδύναμο Martingale μέτρο πιθανότητας Q (ή P*)

Έχουμε ήδη αναφερθεί στην αξία του ισοδύναμου μέτρου πιθανότητας Q, το οποίο προκύπτει από τις υποθέσεις no-arbitrage και complete αγοράς. Το μοντέλο Black-Scholes πληρώνει την αγορά οπότε ας δούμε πώς ορίζεται το ισοδύναμο μέτρο αυτό.

Έστω $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$, όπου μ, σ οι συντελεστές του μοντέλου Black-Scholes και r το επιτόκιο. Κατασκευάζουμε τη σ.α $Z_t = e^{-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}$, $t \geq 0$. Γνωρίζουμε ότι η σ.α $\{Z_t, t \geq 0\}$ είναι ένα \mathcal{F}_t -martingale. Επομένως, η σχέση:

$$Q(A) := \int_A Z_T dP, \quad A \in \mathcal{F}_T$$

ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στον (Ω, \mathcal{F}_T) . Μάλιστα, είναι το ισοδύναμο martingale μέτρο πιθανότητας του P.

3.2.3 Αποτίμηση European call και put option (Αναλυτική)

Θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από την κατοχή ενός option αξίας V και την πώληση Δ τίτλων στην υποκείμενη αξία. Προς το παρόν, το option μπορεί να είναι European ή American type. Η αξία λοιπόν του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$\Pi = V - \Delta \cdot S \quad (3.2.7)$$

Υποθέτουμε ότι η αξία του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχής) ακολουθεί το μοντέλο Black-Scholes, είναι δηλαδή μια γεωμετρική κίνηση Brown:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Χρησιμοποιώντας τη formula Ito, αποδεικνύεται ότι:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta \cdot S) \right] dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \quad (3.2.8)$$

Υποθέτουμε ότι $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ και προκύπτει:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right] dt. \quad (3.2.9)$$

Έστω ότι το δικαίωμα είναι European type και δουλεύουμε υπό το μέτρο που εξασφαλίζει no-arbitrage. Τότε, αποκλείονται οι περιπτώσεις

$$d\Pi - r\Pi dt > 0, d\Pi - r\Pi dt < 0 \text{ και επομένως ισχύει η ισότητα } d\Pi - r\Pi dt = 0.$$

Προκύπτει λοιπόν για τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου η ΜΔΕ γνωστή και σαν

Εξίσωση Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.2.10)$$

Η αποτίμηση ενός European call option, βρίσκεται από τη λύση της ακόλουθης ΜΔΕ:

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc, \quad 0 < S < \infty, T > 0 \quad (3.2.11)$$

$$c(S, 0) = \max(S - X, 0)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$c(0, T) = 0$$

$$c(S, T) \sim S - Xe^{-rT} \text{ καθώς } S \rightarrow \infty$$

,όπου c η τιμή του European Call option, S η αξία του υποκείμενου τίτλου(μετοχής), X η τιμή εξάσκησης, T η ημερομηνία λήξης και r το επιτόκιο.

Επομένως, για να αποτιμήσουμε ένα European Call option προκύπτει ο παρακάτω Αναλυτικός τύπος:

Για $d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ και $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$, η αποτίμηση ενός European Call option τη στιγμή $t=0$, είναι ίση με:

$$\boxed{c(S, T) = S_0\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2)} \quad (3.2.12)$$

Υπενθυμίζεται για ακόμα μια φορά πως δουλεύουμε σε ένα χώρο πιθανότητας χωρίς ρίσκα (risk neutral) χάρη στο ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q .

Σαν μια ερμηνεία της πιο πάνω σχέσης (3.2.12) για την αποτίμηση του European call, η πιθανότητα $\Phi(d_2)$ είναι η πιθανότητα το call να είναι in-the-money ($S \geq X$) τη στιγμή λήξης T του option και επομένως $X\Phi(d_2)$ μπορεί να ερμηνευτεί σαν η αναμενόμενη πληρωμή που κάνει ο κάτοχος κατά την εξάσκηση τη στιγμή T όταν επιλέγει να αγοράσει τον τίτλο. Επίσης, $Se^{rT}\Phi(d_1)$ είναι η αναμενόμενη τιμή του υποκείμενου τίτλου τη στιγμή λήξης δεδομένου ότι το call είναι in-the-money. Επομένως, το αναμενόμενο κέρδος κατά τη στιγμή T θα είναι η διαφορά των δύο, δηλαδή $Se^{rT}\Phi(d_1) - X\Phi(d_2)$ και αν σε αυτό το κέρδος εφαρμόσουμε discount, δηλαδή πολλαπλασιάσουμε με e^{-rT} , για να το επικαιροποιήσουμε στη στιγμή 0 , προκύπτει η σχέση (3.2.8).

Για το European Put option η λογική δεν διαφέρει. Αλλάζει φυσικά η τ.μ. απόδοσης αφού για το put είναι $h(S) = \max(X - S, 0)$, αλλάζουν λοιπόν και οι συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS \frac{\partial p}{\partial S} - rp &= 0 \\ p(S, 0) &= \max(X - S, 0) \text{ (αρχική συνθήκη)} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} p(0, T) &= Xe^{-rT} \\ p(S_T, T) &= 0 \end{aligned}$$

Η αναλυτική λύση δίνεται από τα ακόλουθα:

Αν:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ και } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \text{ τότε}$$

$$\boxed{p(S, T) = Xe^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)} \quad (3.2.14)$$

3.2.4 Αποτίμηση American put option(ΜΔΕ)

Το χαρακτηριστικό των American type options, ότι μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή πριν την ημερομηνία λήξης, είναι πάρα πολύ σημαντική για τον τρόπο που θα αποτιμηθούν. Πάμε πίσω στη σχέση (3.2.3.4) και έχουμε ότι:

$$d\Pi - r\Pi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right] dt .$$

Τώρα όμως, σε αντίθεση με τα δικαιώματα European type, μπορούμε να αποκλείσουμε μόνο μια ανισότητα, την $d\Pi - r\Pi dt > 0$ για τους ίδιους λόγους που την αποκλείσαμε και πιο πριν (no-arbitrage). Όμως, η άλλη ανισότητα $d\Pi - r\Pi dt < 0$ θα αποκλειστεί ανάλογα με το αν είναι βέλτιστο ή όχι να εξασκηθεί το δικαίωμα.

Αποδεικνύεται σε πιο εξειδικευμένα βιβλία, μεταξύ των οποίων τα [4] και [7], ότι στην περίπτωση American option με συνάρτηση απόδοσης $h(S)$ ικανοποιούνται τα πιο κάτω:

$$V(S, t) \geq h(S) \quad (3.2.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (3.2.16)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) (V - h) = 0 \quad (3.2.17)$$

$$V(S, T) = h(S) \quad (3.2.18)$$

Για την αποτίμηση δηλαδή ενός American type option, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της $V(S, t)$ που ικανοποιεί τις (3.2.15-18).

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $t \rightarrow \tau = T - t$ (3.2.19) μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο ακόλουθο:

$$V(S, \tau) \geq h(S) \quad (3.2.20)$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0 \quad (3.2.21)$$

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)(V - h) = 0 \quad (3.2.22)$$

$$V(S, 0) = h(S) \quad (3.2.23)$$

Για την αποτίμηση λοιπόν ενός American Put option, αρκεί στις πιο πάνω συνθήκες να θέσουμε τη συνάρτηση απόδοσης του American put, $h(S) = V(S, T) = \max(X - S, 0)$.

Παρατήρηση: Το πιο πάνω πρόβλημα, λύνεται με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών(Finite Difference). Συνήθως προτιμάται η μέθοδος Crank-Nicolson γιατί είναι μια ευσταθής μέθοδος [5].

3.3 Μέθοδος αποτίμησης Cox-Ross-Rubenstein

3.3.1 Διωνυμικό μοντέλο

Η μέθοδος αποτίμησης παραγώγων με διωνυμικό μοντέλο, είναι ίσως η πιο διαδεδομένη μέθοδος λόγω της απλότητας της. Επιλέξαμε να αναπτύξουμε τη μέθοδο σε αυτό ακριβώς το σημείο, ούτως ώστε να τύχει μιας σύγκρισης με το μοντέλο Black-Scholes.

Ξεκινούμε με το μονοβηματικό διωνυμικό μοντέλο, στο οποίο υποθέτουμε ότι η τιμή μιας μετοχής τη στιγμή $t=0$ είναι S_0 και ότι μετά από χρόνο Δt μπορεί να γίνει ίση με $S_0 u$ με πιθανότητα p ή $S_0 d$ με πιθανότητα $1-p$. Αν συμβεί το πρώτο ενδεχόμενο, θα συμβολίζουμε την απόδοση του option με f_u ενώ αν συμβεί το δεύτερο με f_d . Η μέθοδος υπενθυμίζεται ότι αποσκοπεί στο να εκτιμήσει την αξία f του παραγώγου τη στιγμή $t=0$.

Σε αυτό το σημείο εμφανίζεται ξανά η αρχή no-arbitrage η οποία θα μας επιτρέψει να αναπτύξουμε τη μέθοδο. Έστω τη στιγμή $t=0$ ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει την αγορά Δ μετοχών και την πώληση ενός παραγώγου. Η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με $S_0u\Delta - f_u$ (3.3.1) αν η τιμή της μετοχής έγινε S_0u ή $S_0d\Delta - f_d$ (3.3.2) αν έγινε S_0d . Για να κάνουμε το χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου, πρέπει αυτές οι δύο αξίες να ισούνται, από τις οποίες και προκύπτει ότι:

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (3.3.3)$$

Κάνοντας χρήση της αρχής no-arbitrage, για την πιο πάνω τιμή του Δ θα πρέπει η απόδοση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με την απόδοση του επιτοκίου r . Άρα η αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή δt θα είναι:

$$e^{r\delta t}(S_0\Delta - f) \quad (3.3.4)$$

Συνδυάζοντας τι 3.3.1, 3.3.2 και 3.3.3 προκύπτει ότι:

$$f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-r\delta t} \quad (3.3.5)$$

Αντικαθιστώντας το Δ που δίνεται από την 3.3.3 προκύπτει:

$$f = e^{-r\delta t}[qf_u + (1-q)f_d] \quad (3.3.6)$$

$$\text{Όπου, } q = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \quad (3.3.7)$$

Παρατηρώντας τα πιο πάνω, βλέπουμε πως δεν χρειαστήκαμε πουθενά τις πιθανότητες $p, 1-p$ παρά μόνο μεταβήκαμε σε ένα νέο μέτρο πιθανότητας $q, 1-q$. Με αυτό το νέο μέτρο, η αναμενόμενη τιμή της τιμής της μετοχής θα είναι:

$$E(S_{\delta t}) = qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{r\delta t} \quad (3.3.8)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως όπως και στο μοντέλο Black-Scholes έτσι και στο διωνυμικό μοντέλο δουλεύουμε κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο με το αρχικό, στο οποίο όμως η αγορά γίνεται risk-neutral, αφού η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ισούται με την απόδοση του επιτοκίου.

3.3.2 Μέθοδος Cox-Ross-Rubenstein

Όπως είδαμε πιο πριν, για να εκτιμήσουμε την αξία ενός οption χρειαζόμαστε τρεις παραμέτρους, τις u, d και p . Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να επιλέξουμε αυτές τις παραμέτρους ούτως ώστε να είναι συμβατό το μοντέλο μας με το μοντέλο Black-Scholes.

Αναζητούμε τρεις εξισώσεις και τις δύο τις παίρνουμε από την εξίσωση των αναμενόμενων τιμών και των διασπορών της μετοχής τη στιγμή δt που δίνονται από τα δύο μοντέλα. Συγκεκριμένα:

$$qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{r\delta t} \quad (\text{Εξίσωση μέσων τιμών}) \quad (3.3.9)$$

$$qu^2 + (1-q)d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\delta t} \quad (\text{Εξίσωση διασπορών}) \quad (3.3.10)$$

Αναζητούμε μια τρίτη εξίσωση και αυτή θα μας τη δώσει η μέθοδος Cox-Ross-Rubenstein (Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που θεωρούν διαφορετική 3^η εξίσωση).

Σύμφωνα λοιπόν με την προσέγγιση Cox-Ross-Rubenstein, η τρίτη σχέση που θα πρέπει να πάρουμε είναι η:

$$ud = 1 \quad (3.3.11)$$

Με κατάλληλη διαδικασία επίλυσης του συστήματος παίρνουμε ότι προσεγγιστικά,

$$\begin{aligned} u &\approx 1 + \sigma\sqrt{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta t \\ d &\approx 1 - \sigma\sqrt{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\delta t \\ q &\approx \frac{1}{2} + \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\delta t} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Ορισμένες φορές μάλιστα, η διαδικασία απλοποιείται ακόμη περισσότερο θεωρώντας:

$$\begin{aligned} u &\approx e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \\ d &\approx \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \\ q &\approx \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Αφού εκτιμήσαμε λοιπόν τις παραμέτρους του μοντέλου, γίνεται απαραίτητο να γενικεύσουμε το απλό διωνυμικό μοντέλο σε ένα πολυβηματικό μοντέλο. Αν είχαμε δύο επόμενες χρονικές στιγμές $t=1$ και $t=2$, κατά τη στιγμή 2 θα μπορούσαμε να είχαμε τιμή μετοχής ίση με $S_{0uu}, S_{0ud} = S_{0du}$ ή S_{0dd} με αντίστοιχες αξίες του option τις $f_{uu}, f_{ud} = f_{du}$ ή f_{dd} .

Θεωρούμε τώρα ένα European type option το οποίο και θέλουμε να αποτιμήσουμε με τη μέθοδο Cox-Ross-Rubenstein με 3 χρονικά βήματα $t=0,1,2$. Ξεκινώντας από το τέλος του δέντρου και πηγαίνοντας προς την αρχή, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-r\delta t} (qf_{uu} + (1-q)f_{ud}) \\ f_d &= e^{-r\delta t} (qf_{ud} + (1-q)f_{dd}) \\ f &= e^{-r\delta t} (qf_u + (1-q)f_d) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Στις τιμές των παραμέτρων χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.3.13) οπότε προκύπτει η σχέση:

$$f = e^{-2r\delta t} [q^2 f_{uu} + 2q(1-q)f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}] \quad (3.3.15)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ερμηνεύοντας τη σχέση (3.3.15), οι ποσότητες $q^2, 2q(1-q), (1-q)^2$ εκφράζουν τις πιθανότητες εμφάνισης των ενδεχομένων $S_{0uu}, S_{0ud}, S_{0dd}$ αντίστοιχα στο risk-neutral world. Επομένως, η αποτίμηση του παραγώγου γίνεται παίρνοντας τις σταθμισμένες αποδόσεις και κάνοντας τους discount, μεταφέροντας τις 2 στιγμές πίσω στο $t=0$.

Γενικεύοντας τη διαδικασία για N χρονικές περιόδους, υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή $t_n := n\delta t$, $n=0,1,\dots,N$. Θα συμβολίζουμε με $S_{n,j}$ την τιμή της μετοχής στον κόμβο (n,j) , οπότε έχουμε:

$$S_{n,j} = S_0 u^j d^{n-j}, \quad n=0,1,\dots,N \quad j=0,1,\dots,n \quad (3.3.16)$$

Αφού έχουμε να αποτιμήσουμε European type option, η αξία του παραγώγου στους τελικούς κόμβους (N,j) θα είναι ίση με την απόδοση του $f_{N,j}$, $j=0,1,\dots,N$ και σε κάποιο άλλο κόμβο με (n,j) με $n < N$ θα είναι:

$$f_{n,j}^{european} = e^{-r\delta t} (qf_{n+1,j+1}^{european} + (1-q)f_{n+1,j}^{european}) \quad (3.3.17)$$

Προχωρώντας από το τέλος στην αρχή, προκύπτει πως:

$$f_{n,j}^{european} = f_{0,0}^{european} = e^{-rN\delta t} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} q^j (1-q)^{N-j} f_{N,j}^{european} \quad (3.3.18)$$

Αν τώρα το παράγωγο είναι American type option, η διαδικασία διαφέρει στο ότι για τη αποτίμηση της αξίας $f_{n,j}$ για $n < N$, αυτή θα δίνεται τώρα από τη σχέση:

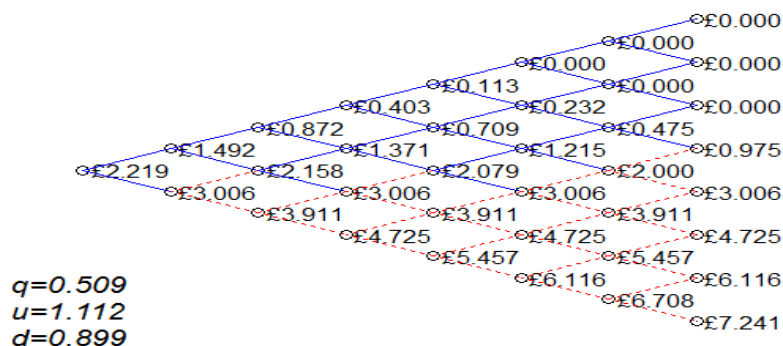
$$f_{n,j}^{american} = \max\{e^{-r\delta t}(qf_{n+1,j+1} + (1-q)f_{n+1,j}), h(S_{n,j})\} \quad (3.3.19)$$

όπου $h(S_{n,j})$ η απόδοση του κόμβου (n,j) με πρόωρη εξάσκηση.

Παρατηρούμε λοιπόν πως γίνεται μια σύγκριση μεταξύ της αναμενόμενης απόδοσης με συνέχιση κατοχής του American option, με την απόδοση από άμεση πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος και επιλέγεται σαν αξία του option η μεγαλύτερη των δύο.

Παράδειγμα: Έστω ένα American Put option το οποίο θέλουμε να αποτιμήσουμε με τη μέθοδο Cox-Ross-Rubenstein για 8 χρονικές στιγμές. Τα χαρακτηριστικά του option είναι: $S_0 = 10$, $K = 12$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$.

Αφού είναι American Put, έπεται πως $h(S_{n,j}) = \max(K - S_{n,j}, 0)$. Παίρνουμε το πιο κάτω δεντροδιάγραμμα στο οποίο απεικονίζεται η αξία του option σε κάθε κόμβο:



Τη χρονική στιγμή $t=0$ έχουμε ότι η αποτίμηση του American put είναι $P_0 = 2.219$



4. Μέθοδοι Προσομοίωσης

4.1 Monte Carlo

4.1.1 Εισαγωγή

Η μελέτη διαφόρων στοχαστικών φαινομένων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους, όπως είδαμε και πιο πριν. Συγκεκριμένα, υπάρχουν αναλυτικές μέθοδοι κατά τις οποίες γίνεται μια μαθηματική μοντελοποίηση ενός στοχαστικού φαινομένου και η συμπεριφορά του μοντέλου είναι υπολογίσιμη για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων. Σημαντικό όμως μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν είναι εφικτή πάντοτε και δουλεύει μόνο σε απλά σχετικά μοντέλα. Πέραν των αναλυτικών μεθόδων, είδαμε πως η αριθμητική ανάλυση είναι ένα ακόμα πολύ χρήσιμο εργαλείο, επιτρέποντας να προσεγγίσουμε με κατάλληλες μεθόδους τη λύση μας. Είναι ίσως το πιο δυνατό εργαλείο στη μελέτη στοχαστικών φαινομένων και η εφαρμογή του έγινε σε πολύ σύνθετα μοντέλα.

Πέρα όμως των πιο δύο αυτών τρόπων προσέγγισης στοχαστικών φαινομένων, υπάρχει ένας τρίτος, οι μέθοδοι προσομοίωσης, οι οποίες αναπαριστούν μέσω ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή το φαινόμενο και καταγράφουν την εξέλιξη του, καθώς και διάφορα χαρακτηριστικά του που θέλουμε να μελετήσουμε.

Στην ουσία, μια μέθοδος προσομοίωσης είναι ένας πειραματικός τρόπος μελέτης ενός φαινομένου και η παρακολούθηση της εξέλιξης του στο χρόνο καθώς πραγματοποιείται το φαινόμενο αρκετές φορές. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των πραγματοποιήσεων του φαινομένου τόσο πιο καλά θα είναι και τα αποτελέσματα της μεθόδου. Με την εξέλιξη του ηλεκτρονικού υπολογιστή, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια «εικονική πραγματικότητα» μέσα στον Η/Υ μας στον οποίο θα ζει το φαινόμενο προς παρατήρηση, όσες φορές εμείς το ζητήσουμε, από δεκάδες μέχρι εκατομμύρια. Όταν ένα φαινόμενο χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, όπως για παράδειγμα η κίνηση μιας μετοχής ή μετεωρολογικά

φαινόμενα, τότε η προσομοίωση καλείται στοχαστική προσομοίωση ή αλλιώς **Monte Carlo simulation**.

4.1.2 Προσομοίωση με Monte Carlo

Η Monte Carlo προσομοίωση πήρε το όνομά της από το διάσημο καζίνο στο Μονακό και η αρχική χρήση της ήταν για την εκτίμηση πιθανότητας νίκης σε παιχνίδια τύχης. Σήμερα όμως οι εφαρμογές της είναι πολύ περισσότερες καθώς χρησιμοποιείται στα Χρηματοοικονομικά, Οικονομικά, Φυσική και πολλούς άλλους κλάδους. Το μεγαλύτερο ίσως πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δίνει λύση σε δισεπίλυτα προβλήματα και μάλιστα γρήγορα, φτηνά και με μεγάλη ακρίβεια.

Στην ουσία, η Monte Carlo προσομοίωση είναι μια αριθμητική διαδικασία που εκτιμά την αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής. Κατά τη διαδικασία αυτή, παράγονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, των οποίων γνωρίζουμε την κατανομή και χρησιμοποιώντας το Νόμο Μεγάλων Αριθμών εκτιμούμε την τυχαία μεταβλητή παίρνοντας το μέσο όρο των μεταβλητών που παράξαμε.

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα $\theta = E(Y)$, όπου Y μια τ.μ που παίρνουμε σαν αποτέλεσμα της προσομοίωσης. Έστω $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ και X μια τ.μ (π.χ έστω $X = S_T$). Τότε $Y = h(\underline{X})$, όπου $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ με X_1, X_2, \dots, X_N τα αντίτυπα της τ.μ X που παράξαμε. Ισοδύναμα δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν τη μέθοδο Monte Carlo τη διαδικασία εύρεσης της μέσης τιμής της τ.μ Y που παράξαμε. Από το νόμο των Μεγάλων αριθμών, αν εκτελέσουμε το ίδιο πείραμα πολλές φορές, το θ θα είναι οριακά ίσο με τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων από τα πειράματα

Πρόταση 4.1: Έστω $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ με X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. Τότε οι τ.μ $Y_k = h(X_k)$, $k=1, \dots, N$ είναι και αυτές ανεξάρτητες και ισόνομες και ισχύει ότι:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \xrightarrow{\sigma, \beta} E(Y) \quad \text{ή} \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h(X_i) \xrightarrow{\sigma, \beta} E(h(X))$$

Άρα το $\theta = E(Y)$ προσεγγίζεται από το $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$ το οποίο είναι τ.μ και αποτελεί την εκτιμήτρια του θ .

Ο γενικός αλγόριθμος της Monte Carlo προσομοίωσης είναι ο εξής:

Βήμα 1: Παράγουμε N ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ X_1, X_2, \dots, X_N

Βήμα 2: Κατασκευάζουμε, πάλι ανεξάρτητες και ισόνομες, τ.μ Y_1, Y_2, \dots, Y_N

Βήμα 3: Υπολογίζουμε την εκτιμήτρια της ποσότητας θ :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \quad (4.1.1)$$

Παρατήρηση 1: Η εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της ποσότητας θ
(Ισοδύναμα $E(\hat{\theta}) = \theta$)

Παρατήρηση 2: Η τάξη σφάλματος της μεθόδου είναι $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Η τάξη σφάλματος της μεθόδου είναι ένα από τα πιο βασικά της μειονεκτήματα.

Παρατήρηση 3: (Διάστημα Εμπιστοσύνης) Η σημειακή εκτίμηση $\hat{\theta}$, αν και πολύ κοντά στο θ , περιέχει ένα σφάλμα και χρειαζόμαστε κάποιο τρόπο να γνωρίζουμε την ακρίβεια της εκτίμησης ή το σφάλμα της. Έτσι, τα αποτελέσματα μιας Monte Carlo προσομοίωσης δίνονται συνήθως σαν ένα διάστημα εμπιστοσύνης, δηλώνοντας ότι το αποτέλεσμα βρίσκεται με κάποια βεβαιότητα (π.χ 95%) μεταξύ δύο τιμών.

Θεωρούμε ότι:

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma / \sqrt{N}} \sim N(0,1) \quad (4.1.2)$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$P\left(-z_{1-a/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma / \sqrt{N}} \leq z_{1-a/2}\right) = 1 - a \quad (4.1.3)$$

Όπου $z_{1-a/2}$ είναι το $1-a/2$ ποσοστιαίο σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Η σχέση (4.1.3) μετατρέπεται σε:

$$P\left(\hat{\theta} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2} \leq \theta \leq \hat{\theta} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \quad (4.1.4)$$

Από την πιο πάνω σχέση προκύπτει το $1-\alpha$ διάστημα εμπιστοσύνης(δ.ε) του θ το οποίο δίνεται από το πιο κάτω:

$$(L(Y), U(Y)) = \left(\hat{\theta} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2}, \hat{\theta} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2}\right) \quad (4.1.5)$$

Παρατήρηση 4: (Διασπορά) Γίνεται προφανές ότι χρειαζόμαστε μια εκτιμήτρια της διασποράς $\sigma^2 \equiv V(Y)$ που υπεισέρχεται στο δ.ε. Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια είναι η παρακάτω:

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_N)^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N Y_i^2 - N\bar{Y}_N^2\right) \quad (4.1.6)$$

4.1.3 Παραγωγή τυχαίων αριθμών

Ένα από τα πιο κρίσιμα και ουσιαστικά ζητήματα κατά την Monte Carlo προσομοίωση είναι η διαδικασία παραγωγής τυχαίων αριθμών.

Με τον όρο τυχαίος αριθμός εννοούμε το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης μιας πεπερασμένης ακολουθίας X_1, X_2, \dots, X_N ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών άγνωστης κατανομής. Όπως είναι φυσικό, το να παράγουμε μια πάρα πολύ μεγάλη ακολουθία τυχαίων αριθμών είναι κάτι πολύ δύσκολο για αυτό το λόγο θα χρησιμοποιούμε **ψευδοτυχαίους αριθμούς**.

Ορισμός 4.1.1: Με τον όρο **ψευδοτυχαίοι αριθμοί**, εννοούμε αριθμούς που παράγονται κατά ντετερμινιστικό τρόπο, μοιάζουν όμως να είναι τυχαία δείγματα μιας γνωστής κατανομής.

Είναι δηλαδή οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί μια προσέγγιση των τυχαίων αριθμών και χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των πραγματοποιήσεων τυχαίων μεταβλητών από γνωστές κατανομές.

Ορισμός 4.1.2: Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$ αποτελεί τυχαίο δείγμα πληθυσμού με συνάρτηση κατανομής(σ.κ) F , αν υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_N με σ.κ F , ανεξάρτητες μεταξύ τους και τέτοιες ώστε να ισχύει ότι $X_1 = \chi_1, X_2 = \chi_2, \dots, X_N = \chi_N$.

Παρατήρηση: Στο εξής, όταν αναφερόμαστε με τον όρο «τυχαίοι αριθμοί» θα εννοούμε στην ουσία «ψευδοτυχαίοι αριθμοί».

Ορισμός 4.1.3: Θα καλείται αλγόριθμος παραγωγής ψευδοτυχαίων δειγμάτων(Random Number Generator), τη διαδικασία που ορίζεται και ορίζει τα πιο κάτω:

- Ένα πεπερασμένο σύνολο αριθμών X
- Ένα $\chi_0 \in X$, που καλείται και πηγή
- Μια συνάρτηση $T: X \rightarrow X$
- Μια συνάρτηση $G: X \rightarrow \{0,1,\dots,M\}$
- Ο αναδρομικός τύπος παραγωγής αριθμών:
$$\chi_l = T(\chi_{l-1}) \text{ και } i_l = G(\chi_l), \text{ όπου } l=1,2,\dots,k \in X$$

Παράδειγμα: Ένας τέτοιος αλγόριθμος θα μπορούσε να είναι ο εξής:

$X = \{0,1,\dots,m-1\}$, $\chi_0 \in X$ τυχαίο, $G = \text{id}$, $i_l = \chi_l$ και $\chi_l = (\alpha \chi_{l-1} + c) \bmod m$, $c > 0$.

Τους πιο πάνω αλγόριθμους παραγωγής ψευδοτυχαίων δειγμάτων, μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε δείγματα Ομοιόμορφης Κατανομής στο $[0,1]$, αν πάρουμε μια $G': X \rightarrow [0,1]$ όπου $G'(\chi) = G(\chi)/M$.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε δείγματα άλλων κατανομών με βάση ένα δείγμα $(U_i)_{i \geq 1} \sim U[0,1]$.

Μέθοδος Αντιστροφής

Η σχετικά απλή αυτή μέθοδος χρησιμοποιεί την πιο κάτω πρόταση:

Πρόταση 4.2: Έστω X με σ.κ F . Ορίζουμε σαν $F^{-1}(u) = \inf\{x: F(x) \geq u\}$.

Τότε, αν έχουμε μια τ.μ $U \sim U[0,1]$, ισχύει ότι $X = F^{-1}(U) \sim F$.

Απόδειξη:

Από τον ορισμό μιας συνάρτησης κατανομής, $F^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow F(x) \geq u$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad P(X = F^{-1}(u) \leq x) &= P(F^{-1}(u) \leq x) \\ &= P(u \leq F(x)) \\ &\stackrel{\text{ομ.κατ}}{=} F(x) \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα: Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο δείγμα εκθετικής κατανομής με παράμετρο λ , $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{και} \quad F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u).$$

Αν $u \sim U[0,1]$ γνωρίζουμε ότι και το $(1-u) \sim U[0,1]$.

Επομένως το $X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) \sim \text{Exp}(\lambda)$ από την Πρόταση 4.1.1.

■

Μέθοδος Αποδοχής-Απόρριψης

Θεωρούμε μια συνάρτηση $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, από την οποία δημιουργούμε εύκολα δείγματα μιας κατανομής (π.χ δείγματα εκθετικής μέσω ομοιόμορφης).

Στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε δείγματα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) f .

Αλγόριθμος μεθόδου: Αν $\exists c > 1 : f(x) \leq cg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

Βήμα 1: Έστω δείγματα X με σ.π.π g και $U \sim U[0,1]$

Βήμα 2: Εάν $U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}$, επέστρεψε το x . Διαφορετικά, ξανά στο Βήμα 1.

Πρόταση 4.3: Έστω Y το αποτέλεσμα του πιο πάνω αλγορίθμου. Τότε το Y έχει σ.π.π f και ο αλγόριθμος χρειάζεται περίπου c εκτελέσεις για να προκύψει το τ .

Απόδειξη:

$Y \sim [X | U \leq \frac{f(x)}{cg(x)}]$. Τότε αν A ένα μπορελιανό σύνολο, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, θα ισχύουν:

$$\begin{aligned}
 P(Y \in A) &= P(X \in A | u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}) \\
 &= \frac{P(X \in A \cap u \leq \frac{f(x)}{cg(x)})}{P(u \leq \frac{f(x)}{cg(x)})} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Όμως προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 P(X \in A \cap u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}) &= \int_{\mathbb{R}^d} P(X \in A \cap u \leq \frac{f(x)}{cg(x)} | X = x) g(x) dX \\
 &= \int_A P(u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}) g(x) dX \\
 &\stackrel{\text{ομ. κατανομή}}{=} \int_A \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dX \\
 &= \frac{1}{c \int_A f(x) dx} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Παρόμοια προκύπτει και πως } P(u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}) = \frac{1}{c} \quad (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή η Y έχει σ.π.π f .

■

Μέθοδος Box-Muller

Η μέθοδος αυτή κατασκευάζει τυχαία δείγματα που ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Αλγόριθμος μεθόδου:

Βήμα 1: Έστω δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $U_1, U_2 \sim U[0,1]$

Βήμα 2: Θέτουμε $\theta=2\pi U_2$ και $p = \sqrt{-2\ln(u_1)}$

Βήμα 3: $X_1=r\cos\theta$ και $X_2=r\sin\theta$

Τότε τα X_1 και X_2 ακολουθούν Κανονική κατανομή $N(0,1)$ και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

4.1.4 Έλεγχος Σφάλματος (Error Control)

Ας συμβολίσουμε με $I[f;X]$ την πραγματική τιμή που αναζητούμε μέσω της προσομοίωσης και $I_{MC}[f;X]$ το αποτέλεσμα που προκύπτει μετά από την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo.

Ήδη δείξαμε και γνωρίζουμε ότι αν X_1, X_2, \dots ανεξάρτητα δείγματα της X , ισχύει λόγω του *Νόμου Μεγάλων Αριθμών* πως:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_i) = I[f;X]. \quad (4.1.7)$$

Ορισμός 4.1.4: Καλούμε *εκτιμητή M-δείγματος* την ποσότητα $\varepsilon_{MC} = |I[f;X] - I_{MC}[f;X]|$,

όπου $I_{MC}[f;X] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_i)$.

Ο εκτιμητής I_{MC} είναι αμερόληπτος και εύκολα παρατηρούμε ότι $E(\varepsilon_{MC})=0$. Δεν έχει νόημα δηλαδή να εκτιμούμε την ίδια την ποσότητα ε_{MC} αλλά τις ακόλουθες:

- $MSE = E(\varepsilon_{MC}^2)$
- $RMSE = \sqrt{E(\varepsilon_{MC}^2)}$

Θεώρημα 4.1.1: Έστω $\sigma = \sigma(f;X) < \infty$ η τυπική απόκλιση. Τότε ισχύουν τα πιο κάτω:

I. $RMSE = \sqrt{E(\varepsilon_{MC}^2)} = \frac{\sigma}{\sqrt{M}} \quad (4.1.8)$

II. Η ε_{MC} είναι κανονικά κατανομημένη, δηλαδή:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P\left(\frac{a\sigma}{\sqrt{M}} \leq \varepsilon_{MC} \leq \frac{b\sigma}{\sqrt{M}}\right) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad [\text{Από ΚΟΘ}]$$

III. Ο πιο κάτω εκτιμητής είναι αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς:

$$\bar{\sigma}_{MC}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (f(X_i) - I_{MC})^2 \quad (4.1.9)$$

Απόδειξη (I)

Αφού $E(\varepsilon_{MC}) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{MC}^2) &= \text{Var}(\varepsilon_{MC}) \\ &= \text{Var}(I - I_{MC}) \\ &\stackrel{\text{Var}(I)=0}{=} \text{Var}\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_i)\right) \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \text{Var}(f(X_i)) \\ &\stackrel{\text{ανεξάρτητα, ισόνομα}}{=} \frac{1}{M^2} M \text{Var}(f(X)) \\ &= \frac{\sigma^2}{M} \end{aligned}$$

■

Σύμφωνα με τη σχέση (4.1) για τα διαστήματα εμπιστοσύνης, έχουμε ότι

$$(L(Y), U(Y)) = \left(I_{MC} - \frac{\sigma}{\sqrt{M}} z_{1-a/2}, I_{MC} + \frac{\sigma}{\sqrt{M}} z_{1-a/2} \right)$$

Ενδεικτικά, $z_{1-a/2} \approx 1.96$ για 95% δ.ε και $z_{1-a/2} \approx 2.58$ για 99% δ.ε.

Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν στον έλεγχο σφάλματος (error control), είναι αν μπορούμε να διαλέξουμε ένα M τέτοιο ώστε η πιθανότητα:

$$P(|\varepsilon_{MC}| \geq \varepsilon) < \delta, \delta, \varepsilon > 0. \text{ Όμως,}$$

$$P(|\varepsilon_{MC}| \geq \varepsilon) = 1 - P(|\varepsilon_{MC}| \leq \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\sqrt{M}}{\sigma}}{=} 1 - P\left(-\frac{\tilde{\varepsilon}\sigma}{\sqrt{M}} \leq \varepsilon_{MC} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}\sigma}{\sqrt{M}}\right) \\ &= 1 - \Phi(\tilde{\varepsilon}) + \Phi(-\tilde{\varepsilon}) \\ &= 2 - 2\Phi(\tilde{\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\text{Αν } \delta = 2 - 2\Phi(\tilde{\varepsilon}) \Rightarrow M = [\Phi^{-1}(\frac{2-\delta}{2})]^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (4.1.10) \quad \text{είναι ο αριθμός των}$$

επαναλήψεων κατά τη Monte Carlo προσομοίωση που εκτιμώ ότι είναι απαραίτητες για να περιορίσω το σφάλμα μου σε τάξη μικρότερη του ε .

Παρατήρηση 1: Ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου Monte Carlo είναι $\frac{1}{2}$.

Παρατήρηση 2: Από τη σχέση $\text{RMSE} = \sqrt{E(\varepsilon_{MC}^2)} = \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ προκύπτει ότι αν θέλω να

βελτιώσω την ακρίβεια της μεθόδου, έστω μείωση του RMSE κατά $1/10$, θα πρέπει να πάρω πολλά περισσότερα δείγματα, 100πλάσια στην προκειμένη περίπτωση.

4.1.5 Τεχνικές ελάττωσης διασποράς

Πέραν της αύξησης του μεγέθους δείγματος M , θα μπορούσαμε να πετύχουμε πιο ακριβείς μεθόδους αν μειώναμε την ποσότητα σ . Για αυτό το σκοπό, αναπτύχθηκαν αρκετοί μέθοδοι βελτίωσης μιας (απλής) Monte Carlo προσομοίωσης που σκοπό έχουν τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου που απαιτείται για την προσομοίωση αλλά και του σφάλματος RMSE.

Μια από τις μεθόδους είναι η μέθοδος **Αντιθετικών Μεταβλητών (Antithetic Variates)**. Η μέθοδος στηρίζεται στις πιο κάτω παρατηρήσεις:

Παρατηρήσεις: 1) Αν $U \sim U[0,1] \Rightarrow$ και $1-U \sim U[0,1]$. Άρα κατασκευάζοντας ένα τυχαίο δείγμα, μπορούμε εύκολα να το χρησιμοποιήσουμε για την παραγωγή ενός δεύτερου

2) Επίσης, αν $X \sim N(0,1)$, τότε και $(-X) \sim N(0,1)$ παίρνοντας πάλι δύο δείγματα με την κατασκευή μόνο ενός.

3) Και στις δύο περιπτώσεις, έχουμε ότι $Ef(X) = Ef(-X)$

Έστω λοιπόν ένας απλός ντετερμινιστικός μετασχηματισμός, τέτοιος ώστε $X \stackrel{d}{=} \tilde{X}$, όπου \tilde{X} η μετασχηματισμένη τ.μ. Τότε θα ισχύει πως $Ef(X) = Ef(\tilde{X})$

Ορισμός 4.1.5: Ορίζουμε τον εκτιμητή με μέθοδο Monte Carlo αντιθετικών μεταβλητών τον παρακάτω:

$$I_M^{AV} [f; X] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{f(X_i) + f(\tilde{X}_i)}{2} \right) \quad (4.1.11)$$

Πρόταση 4.4: Το MSE με την μέθοδο αντιθετικών μεταβλητών είναι μικρότερο του αντίστοιχου με απλή Monte Carlo προσομοίωση αν και μόνο αν $Cov(f(X_i), f(\tilde{X}_i)) \leq 0$.

Απόδειξη:

$$MSE(I_M^{AV}) \leq MSE(I_{2M})$$

$$\Leftrightarrow \frac{Var\left(\frac{f(X_i) + f(\tilde{X}_i)}{2}\right)}{M} \leq \frac{Var(f(X_i))}{2M}$$

$$\Leftrightarrow 2Varf(X_i) + 2Cov(f(X_i); f(\tilde{X}_i)) \leq \frac{Var(f(X_i))}{2}$$

$$\Leftrightarrow Cov(f(X_i); f(\tilde{X}_i)) \leq 0$$

■

Παρατηρήσεις:

- i. Οι τ.μ X και $-X$ καλούνται αντιθετικές γιατί είναι αρνητικά συσχετισμένες μεταξύ τους
- ii. Αν $Z \sim N(\mu, \sigma)$ τότε σαν αντιθετική μεταβλητή παίρνουμε την $\tilde{Z} = 2\mu - Z$
- iii. Πέραν της μεθόδου Αντιθετικών Μεταβλητών, μια άλλη πολύ διαδεδομένη τεχνική ελάττωσης διασποράς είναι αυτή των Μεταβλητών Ελέγχου **[3]**, **[21]**.

4.2 Προσομοίωση κίνησης Brown και Γεωμετρικής κίνησης Brown

Στην καρδιά μιας προσομοίωσης βρίσκεται η κίνηση Brown και η γεωμετρική κίνηση Brown. Η αξία τους αλλά και οι ιδιότητες τους έχουν αναπτυχθεί σε προηγούμενα κεφάλαια για αυτό το λόγο θα μπορούμε κατευθείαν στην προσομοίωση τους.

4.2.1 Προσομοίωση κίνησης Brown

Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως το να προσομοιώσουμε μια τροχιά της κίνησης Brown όπως αυτή διαγράφεται σε συνεχή χρόνο στο διάστημα $[0, T]$, είναι μια πολύ απαιτητική διαδικασία που θα απαιτούσε άπειρο το πλήθος τυχαίες μεταβλητές. Έτσι, το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με τη διακριτοποίηση της κίνησης Brown.

Ορισμός 0.0.1: Έστω κίνηση Brown $\{B_t, t \in [0, T]\}$ και μια διαμέριση του χρόνου $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$. Η πεπερασμένη ακολουθία που παράγεται, $B = \{B_{t_0}, B_{t_1}, \dots, B_{t_n}\}$ καλείται *διακριτοποιημένη κίνηση Brown* (Discretized Brownian Motion).

Είναι προφανές ότι $B_{t_0} \equiv B_0 = 0$ αφού η κίνηση Brown ξεκινά από μηδενική αρχική θέση. Επίσης, είναι λογικό ότι όσο μεγαλύτερο είναι το n , δηλαδή όσο πιο λεπτά διαμερίσουμε το $[0, T]$, τόσο μικρότερο θα είναι το καλούμενο *σφάλμα διακριτοποίησης*, το οποίο δημιουργείται γιατί διακριτοποιήσαμε την κίνηση Brown. Το σφάλμα διακριτοποίησης μαζί με το σφάλμα αποκοπής, ανήκουν στην κατηγορία *αριθμητικών σφαλμάτων* ενώ υπάρχει ακόμα μια κατηγορία σφαλμάτων που καλείται *στατιστικά σφάλματα*.

Από τη μία, τα αριθμητικά σφάλματα οφείλονται στη χρήση των αριθμητικών μεθόδων και υπολογιστικών μέσων, ενώ τα στατιστικά σφάλματα στην αδυναμία της ίδιας της μεθόδου που χρησιμοποιούμε.

Προχωρώντας με την προσομοίωση, θεωρούμε ισομήκη διαμέριση του $[0, T]$. Τότε,

το βήμα διαμέρισης $h = dt = \frac{T}{n}$ ενώ το κάθε σημείο μπορεί να αναπαραστεί ως

$$t_j = jh, j=0, 1, \dots, n.$$

Οι προσαυξήσεις $\{dB_{t_j} = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n\}$ της κίνησης Brown έχουν τις πιο κάτω σημαντικές ιδιότητες:

1. Είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, μιας και η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική ανέλιξη ανεξάρτητη προσαυξήσεων
2. Ισχύει πως $dB_{t_j} \sim N(0, t_j - t_{j-1}) \Leftrightarrow dB_{t_j} \sim N(0, dt), j = 1, 2, \dots, n$. Επομένως προκύπτει πως $\frac{dB_{t_j}}{\sqrt{dt}} \sim N(0, 1) \Rightarrow dB_{t_j} \sim \sqrt{dt}N(0, 1), j = 1, 2, \dots, n$.

Επομένως, για να προσομοιώσουμε τις προσαυξήσεις $\{dB_{t_j} = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, j = 1, 2, \dots, n\}$ πρέπει πρώτα να κατασκευάσουμε n το πλήθος ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με $Z_j \sim N(0, 1)$ και ακολούθως:

$$dB_{t_j} = \sqrt{dt}Z_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad (4.2.1)$$

Αφού έχουμε προσομοιώσει της προσαυξήσεις της κίνησης Brown, το επόμενο βήμα είναι να προσομοιώσουμε την ίδια την κίνηση. Η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

- $B_{t_0} \equiv B_0 = 0$
- $B_{t_1} = B_{t_0} + (B_{t_1} - B_{t_0})$ όπου τώρα $B_{t_1} - B_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$ και είναι ανεξάρτητη της B_{t_0} .

Δηλαδή, $B_{t_1} = B_{t_0} + dB_{t_1} \Rightarrow B_{t_1} = dB_{t_1} \Rightarrow \boxed{B_{t_1} = \sqrt{dt}Z_1}$, όπου $Z_1 \sim N(0, 1)$

- $B_{t_2} = B_{t_1} + (B_{t_2} - B_{t_1})$ όπου και πάλι $B_{t_2} - B_{t_1} \sim N(0, t_2 - t_1)$ και είναι ανεξάρτητη της B_{t_1} .

Έχουμε, $B_{t_2} = B_{t_1} + dB_{t_2} \Rightarrow \boxed{B_{t_2} = B_{t_1} + \sqrt{dt}Z_2}$, με $Z_2 \sim N(0, 1)$

Γενικεύοντας, η διαδικασία προσομοίωσης είναι η ακόλουθη:

$B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ με την τ.μ $B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \sim N(0, t_j - t_{j-1})$ και να είναι ανεξάρτητη της $B_{t_{j-1}}$ λόγω ανεξάρτητων προσαυξήσεων. Οπότε έχουμε:

$$B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + dB_{t_j} \Rightarrow \boxed{B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + \sqrt{dt}Z_j}, j=1, 2, \dots, n \text{ και } Z_j \sim N(0, 1). \quad (4.2.2)$$

Είναι λοιπόν κατανοητό γιατί η θεωρία παραγωγής τυχαίων(ψευδοτυχαίων) αριθμών ήταν απαραίτητη προτού προσομοιώσουμε οτιδήποτε. Στην ουσία λοιπόν,

ξεκινώντας από $B_{t_0} \equiv B_0 = 0$ παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό τον οποίο καλούμε B_{t_1} που όμως $B_{t_1} \sim N(0, t_1)$. Για να το πετύχουμε αυτό, έχουμε ήδη παράξει μια τ.μ Z_1 της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$ και απλά την πολλαπλασιάσαμε με \sqrt{dt} . Η διαδικασία συνεχίζεται παρόμοια με την παραγωγή και άλλων τυχαίων αριθμών dB_{t_j} , οι οποίοι παίζουν το ρόλο των προσαυξήσεων στη διακριτοποιημένη κίνηση Brown.

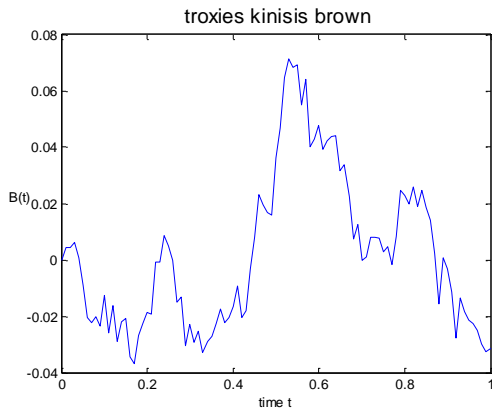
Συνοπτικός Αλγόριθμος προσομοίωσης κίνησης Brown

- 1) $t_0 = 0$ και $B_{t_0} \equiv B_0 = 0$
- 2) Παραγωγή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $Z_j \sim N(0,1)$, $j=1,2,\dots,n$
- 3) $B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + \sqrt{dt}Z_j$, $j=1,2,\dots,n$

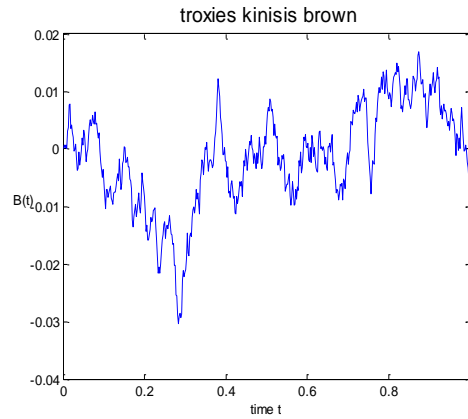
Παρατήρηση: Μια σημαντική λεπτομέρεια είναι πως παρόλο που οι προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αυτό δεν συμβαίνει και με τις B_1, B_2, \dots, B_n . Όλες τους ακολουθούν κανονική κατανομή, με διαφορετική παράμετρο, αλλά δεν είναι ανεξάρτητες. Είναι προφανές μιας και η κατασκευή της τ.μ B_j έγινε δεδομένης της τιμής της τ.μ B_{j-1} . Αν προσομοιώναμε ανεξάρτητες μεταξύ τους τ.μ B_j και B_{j-1} στην ουσία θα προσομοιώναμε δύο διαφορετικές τροχιές της κίνησης Brown.

Εφαρμογή προσομοίωσης κίνησης Brown

Για την προσομοίωση της κίνησης Brown αλλά και για τις υπόλοιπες προσομοιώσεις που ακολουθούν, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα μαθηματικά πακέτα ηλεκτρονικού υπολογιστή που κυκλοφορούν στην αγορά. Επέλεξα να χρησιμοποιήσω το MATLAB, η λογική όμως παραμένει ίδια σε όλα τα πακέτα. Οι κώδικες όλων των προσομοιώσεων δίνονται στο παράρτημα της διπλωματικής.



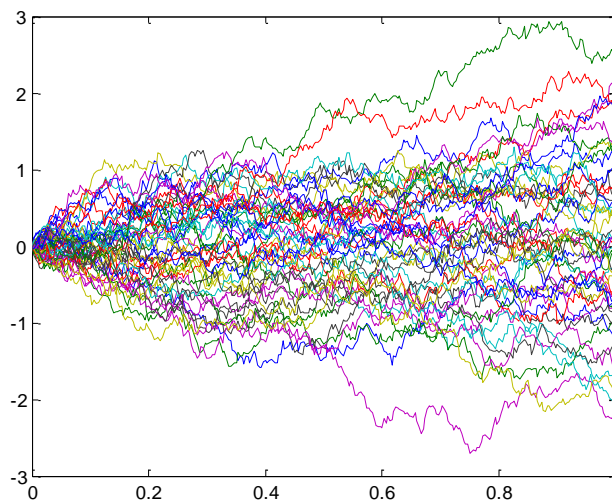
Εικόνα 4: Τροχιά Brown (n=100)



Εικόνα 5: Τροχιά Brown (n=500)

Στις δύο πιο πάνω εικόνες, βλέπουμε δύο διακριτοποιημένες τροχιές κίνησης Brown, η μια με διακριτοποίηση $n=100$ (Εικόνα 4) και η άλλη με $n=500$ (Εικόνα 5)

Στην Εικόνα 6 που ακολουθεί, παρατηρούμε ότι με τις ίδιες ακριβώς συνθήκες ($n=300$) παίρνουμε εντελώς διαφορετικές τροχιές κίνησης Brown κάθε φορά, όπως περιμέναμε. Συγκεκριμένα, με κατάλληλο κώδικα, φαίνονται πιο κάτω 50 διαφορετικές τροχιές κίνησης Brown για $n=300$:



Εικόνα 4: 50 τροχιές κίνησης Brown (n=300)

4.2.2 Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown

Όπως δείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η σ.α $\{S_t, t \in [0, T]\}$ είναι μια Γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους μ, σ , αν ικανοποιεί την πιο κάτω γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (4.2.3)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι ισχύει:

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right], t \geq 0 \quad (4.2.4)$$

Όπως και πριν στην περίπτωση της προσομοίωσης κίνησης Brown, έτσι και τώρα πρέπει να διακριτοποιήσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown. Έστω λοιπόν διαμέριση του χρόνου $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ από την οποία παράγεται η πεπερασμένη ακολουθία $S = \{S_{t_0}, S_{t_1}, \dots, S_{t_n}\}$.

Ξανά θεωρούμε για λόγους απλότητας ότι τα σημεία της διαμέρισης είναι ισάπεχοντα και έχουμε βήμα διαμέρισης $h = dt = \frac{T}{n}$. Άρα, $t_j = jh, j=0,1,\dots,n$.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να προσομοιώσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown και θα αναπτύξουμε και τους δύο. Ο πρώτος τρόπος προσομοιώνει πρώτα μια κίνηση Brown και στη συνέχεια τη χρησιμοποιεί στην (4.3) για να προσομοιώσει και τη γεωμετρική κίνηση Brown, ενώ ο δεύτερος τρόπος είναι ένας αναδρομικός τύπος που δεν προϋποθέτει την προσομοίωση κίνησης Brown.

Α' Αλγόριθμος προσομοίωσης γεωμετρικής κίνησης Brown

- 1) $t_0 = 0, B_{t_0} \equiv B_0 = 0$ και $S_0 = S_{\text{αρχικό}}$
- 2) Παραγωγή ανεξάρτητων τ.μ $Z_j \sim N(0, 1), j=1,2,\dots,n$
- 3) Για $j=1,2,\dots,n$

$$B_{t_j} = B_{t_{j-1}} + \sqrt{dt} Z_j$$

$$S_j = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_j + \sigma B_j\right]$$

Παρατήρηση: Στον αλγόριθμο που δίνεται πιο πάνω, η διαμέριση του $[0, T]$ είναι ίδια τόσο για την κίνηση Brown B τόσο και για τη γεωμετρική κίνηση Brown S . Κάτι

τέτοιο δεν είναι απαραίτητη μιας και μια λεπτότερη διαμέριση της B από ότι της S θα ήταν επίσης αποδεκτή(όχι όμως το αντίθετο).

Για τον δεύτερο τρόπο προσομοίωσης της γεωμετρικής κίνησης Brown, αρκεί να παρατηρήσουμε το εξής:

$$\begin{aligned} \frac{S_j}{S_{j-1}} &= \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma(B_j - B_{j-1})\right] \\ &= \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_j\right], j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $dB_j = \sqrt{dt}Z_j$, $j=1,2,\dots,n$ και οι Z_j ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές της τυποποιημένης κανονικής κατανομής $N(0,1)$.

Επομένως προκύπτει η ακόλουθη αναδρομική σχέση που προσδιορίζει τη ζητούμενη ακολουθία S:

$$S_j = S_{j-1} \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}Z_j\right] \quad (4.2.6)$$

Β' Αλγόριθμος προσομοίωσης γεωμετρικής κίνησης Brown

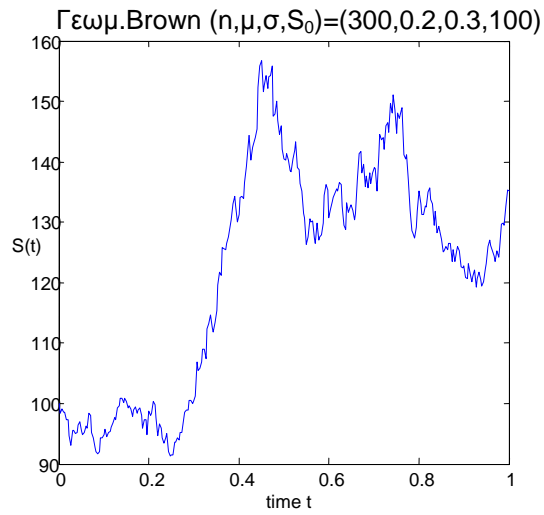
- 1) $t_0 = 0, B_{t_0} \equiv B_0 = 0$ και $S_0 = S_{\text{αρχικό}}$
- 2) Παραγωγή ανεξάρτητων τ.μ $Z_j \sim N(0,1)$, $j=1,2,\dots,n$
- 3) Για $j=1,2,\dots,n$:

$$S_j = S_{j-1} \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}Z_j\right]$$

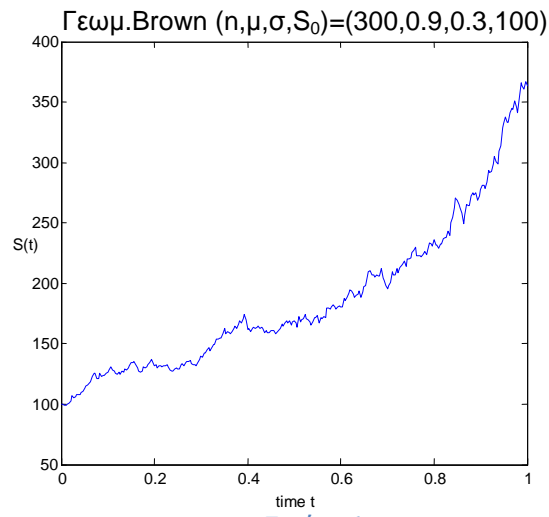
Παρατήρηση: Με το δεύτερο αλγόριθμο η προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι πιο γρήγορη, καθώς αποφεύγεται η προσομοίωση μιας Brown.

Εφαρμογή προσομοίωσης γεωμετρικής κίνησης Brown

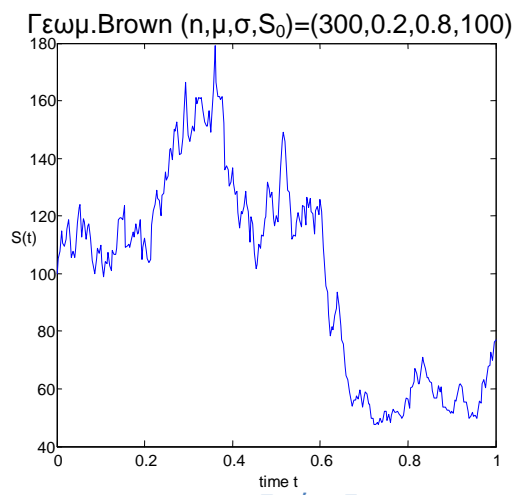
Η προσομοίωση γεωμετρικών κινήσεων Brown παρουσιάζει ελαφρώς μεγαλύτερο ενδιαφέρον καθώς μπορούμε να αλλάζουμε κάθε φορά τις παραμέτρους μ, σ και n .



Εικόνα 5



Εικόνα 6



Εικόνα 7

4.3 Αποτίμηση American Call options με Monte Carlo

4.3.1 Εισαγωγή

Έχουμε αποδείξει ότι υπό συνθήκες αγοράς χωρίς οποιαδήποτε μερίσματα (dividends), η περίπτωση ενός American Call option ανάγεται σε ένα European Call option. Με πιο απλά λόγια, βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης ενός American Call προβλέπει εξάσκηση του κατά την τελική στιγμή T , κάτι που το ανάγει σε ένα απλό European Call.

Επίσης όμως, έχουμε δει στο Κεφάλαιο 3, πως η αποτίμηση ενός European Call option μπορεί να γίνει και με αναλυτικό τρόπο. Επομένως έχει αρκετό ενδιαφέρον να μελετήσουμε τα αποτελέσματα της μεθόδου προσομοίωσης με την αναλυτική λύση του προβλήματος, έχοντας έτσι ένα μέτρο αξιολόγησης της μεθόδου. Ενδιαφέρον έχει και η μελέτη των European Call options (ισοδύναμα American Call options) και τη συμπεριφορά τους υπό διαφορετικές συνθήκες (πχ καθώς αυξάνεται το volatility, μειώνεται η τιμή εξάσκησης κλπ).

4.3.2 Αποτίμηση European option

Κατά την αποτίμηση ενός European Call option, η ποσότητα X είναι στην ουσία η τ.μ S_T , η οποία δηλώνει την τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά τη στιγμή ωρίμανσης, την τελική στιγμή δηλαδή T . Είναι γνωστό πως η στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει την πορεία του υποκείμενου τίτλου, $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$, είναι μια Γεωμετρική κίνηση Brown.

Γίνεται λοιπόν προφανές, πως για την αποτίμηση ενός European option, θα πρέπει πρώτα να προσομοιώσουμε τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown με μια από τις δύο μεθόδους που αναπτύχθηκαν στην Παράγραφο 4.2.2 και ακολούθως να εξάγουμε από αυτές την τ.μ S_T πολύ απλά (παίρνοντας μόνο την τελική τιμή κάθε φορά).

Δίνεται γενικά η διαδικασία αποτίμησης στα πιο κάτω βήματα:

- 1) Παράγουμε M το πλήθος αντίτυπα της τυχαίας μεταβλητής S_T , παίρνοντας έτσι: $S_T^1, S_T^2, \dots, S_T^M$.
- 2) Εκτιμούμε κάθε φορά την αντίστοιχη απόδοση του δικαιώματος: $h(S_T^1), h(S_T^2), \dots, h(S_T^M)$ όπου $h(S_T) = \max(S_T - X, 0)$.
- 3) Υπολογίζουμε την εκτιμήτρια παίρνοντας το μέσω όρο των discounted αποδόσεων δηλαδή:

$$\hat{C}_0 = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(S_T^i) \quad (4.3.1)$$

- 4) Υπολογισμός διαστήματος εμπιστοσύνης σύμφωνα με τη σχέση

$$(L(Y), U(Y)) = \left(\hat{C}_0 - \frac{s}{\sqrt{M}} z_{1-a/2}, \hat{C}_0 + \frac{s}{\sqrt{M}} z_{1-a/2} \right) \quad (4.3.2)$$

$$\text{,όπου } \hat{s}^2 \equiv \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (h(S_T^i) - \bar{h}(S_T))^2 = \frac{1}{M-1} \left(\sum_{i=1}^M h(S_T^i)^2 - M\bar{h}^2(S_T) \right) \quad (4.3.3)$$

$$\text{και } \bar{h}(S_T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(S_T^i) \quad (4.3.4)$$

Παράδειγμα: Έστω ένα American Call option ($h = \max(S_T - X, 0)$) με τα πιο κάτω στοιχεία:

Ετήσιο risk-less επιτόκιο $r=0.2$

Volatility $\sigma=0.4$

Αρχική τιμή υποκείμενου τίτλου $S_0=10$

Τιμή εξάσκησης δικαιώματος $K=12$

Χρόνος λήξης δικαιώματος σε $T=1$ (12 μήνες)

Εφαρμόζουμε την Monte Carlo μέθοδο με $M=100000$ επαναλήψεις και διαμέριση του χρόνου $n=300$ και παίρνουμε τα παρακάτω:

$$\hat{C}_0 = 1.6555, 95\% \text{ δ.ε } (1.6368, 1.6742)$$

Με την αναλυτική μέθοδο, η αποτίμηση του πιο πάνω δικαιώματος θα έδινε:

$C_0 - analytical = 1.6604$ και η απόκλιση $|C_0 - analytical - \hat{C}_0| = 0.0049$



4.3.3 Αξία European(American) call option σε σχέση με άλλα μεγέθη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε πως αλλάζει η τιμή του American call option καθώς αλλάζουν κάποια από τα δεδομένα της Monte Carlo προσομοίωσης.

Αριθμός τροχιών

Πρώτα, ας εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των τροχιών γεωμετρικών κινήσεων Brown (M).

Για $n=300$, $r=0.1$, $\sigma=0.2$, $S_0=10$, $K=12$ και $T=1$ εκτελούμε το πείραμα αλλάζοντας κάθε φορά τον αριθμό τροχιών M. Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

Πίνακας 4.3.1

(Αναλυτική λύση: $C_0 - analytical = 0.4708$)

Αριθμός Τροχιών (M)	Αποτέλεσμα Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0)	95% δ.ε	Απόκλιση από αναλυτική μέθοδο ($ C_0 - analytical - \hat{C}_0 $)
10	0.3583	(-0.3207 , 1.0372)	0.1126
100	0.5783	(0.3447 , 0.8119)	0.1075
1000	0.4119	(0.3592 , 0.4647)	0.0589
10000	0.4617	(0.4416 , 0.4818)	0.0091
100000	0.4687	(0.4623 , 0.4751)	0.0021
1000000	0.4715	(0.4695 , 0.4735)	$6.65 \cdot 10^{-4}$

Είναι εμφανές από τον Πίνακα 4.3.1 πως η Monte Carlo προσομοίωση του American/European call option προσεγγίζει πολύ καλά τη θεωρητική τιμή. Επίσης,

όπως ήταν αναμενόμενο, όσο πιο μεγάλο είναι το δείγμα το τροχιών γεωμετρικών κινήσεων που παράγουμε, τόσο πιο ακριβής είναι και η λύση.

Volatility

Προχωρώντας, με παρόμοια λογική, μπορούμε να δούμε το ρόλο του volatility στην αποτίμηση ενός European/American call option. Για τον έλεγχο αυτό θεωρούμε τα πιο κάτω δεδομένα:

$$n=300, r=0.1, S_0=10, K=12 \text{ και } T=1$$

Για κάθε πείραμα παίρνουμε δείγμα 10^6 τροχιών και για να βγάλουμε ακόμα πιο ασφαλή συμπεράσματα κρατήσαμε την ίδια ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών σε όλα τα πειράματα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Πίνακας 4.3.2

Volatility (σ)	Αποτέλεσμα Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0)	95% δ.ε	Αναλυτική Τιμή ($C_0 - analytical$)
0.1	0.1204	(0.1197 , 0.1210)	0.1201
0.2	0.4716	(0.4696 , 0.4736)	0.4708
0.3	0.8572	(0.8536 , 0.8607)	0.8606
0.5	1.6656	(1.6583 , 1.6729)	1.6570
0.7	2.4430	(2.4310 , 2.4551)	2.4439
0.9	3.2179	(3.1995 , 3.2363)	3.2070

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που δίνονται στον Πίνακα 4.3.2, φαίνεται πως όσο μεγαλύτερο είναι το volatility του υποκείμενου τίτλου τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του δικαιώματος. Αυτή η θετική σχέση μεταξύ των δύο είναι αναμενόμενη και εξηγείται με πολύ απλούς συλλογισμούς. Στην ουσία, το volatility εκφράζει τη μεταβλητότητα στην τιμή ενός υποκείμενου τίτλου και συγκεκριμένα αν ένας τίτλος έχει μεγάλο volatility τότε παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή του. Επομένως, αν σκεφτούμε μια μετοχή σαν υποκείμενο τίτλο, αν αυτή έχει μεγάλο volatility έχει και μεγάλη πιθανότητα να αποκτήσει μεγάλη απόκλιση στην τιμή της στο μέλλον, είτε αυτή είναι υψηλή είτε χαμηλή.

Εντούτοις, αν στο μέλλον η μετοχή έχει πολύ χαμηλή τιμή θα έχει την ίδια κατάληξη με το αν έχει λίγο χαμηλότερη τιμή από την τιμή εξάσκησης K : δεν θα εξασκηθεί από τον κάτοχο του δικαιώματος. Έτσι, αφού οι ζημιές του κατόχου περιορίζονται στο ασφάλιστρο το ίδιο θα κάνουν και τα κέρδη του πωλητή τα οποία και αυτά με τη σειρά τους θα είναι μόνο το ασφάλιστρο. Σε περίπτωση όμως που λόγω του ψηλού volatility η τιμή της μετοχής πάρει ένα πολύ μεγάλο νούμερο, η απόδοση του δικαιώματος και η ζημιά του πωλητή γίνονται πάρα πολύ μεγάλες.

Έτσι λοιπόν, μπορούμε να δούμε το volatility σαν ένα χαρακτηριστικό που δρα εις βάρος του πωλητή του δικαιώματος και αυτός με τη σειρά του ζητά πιο ψηλά ασφάλιστρα για ψηλά volatilities ώστε να αντισταθμίσει τον κίνδυνο.

Ημερομηνία Λήξης του Δικαιώματος

Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση της ημερομηνίας λήξης T του American/European call option στην αξία του. Για να το κάνουμε αυτό, κρατούμε σταθερά τα πιο κάτω δεδομένα:

$$n=300, r=0.1, \sigma=0.2, S_0=10, K=12$$

Εκτελούμε το πείραμα για 10^6 τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown κάθε φορά. Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω:

Πίνακας 4.3.2

Ημερομηνία λήξης -σε έτη (T)	Αποτέλεσμα Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0)	Αναλυτική Τιμή ($C_0 - analytical$)
0.25	0.0273	0.0268
0.5	0,1499	0.1419
0.75	0,3011	0.2979
1	0,4750	0.4708
2	1,2097	1.2046

Παρατηρούμε λοιπόν πως όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια ζωής του American/European call option τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του, δηλαδή τα

ασφάλιστρα έχουν θετική σχέση με την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Αυτό το φαινόμενο ίσως έχει να κάνει με την ανικανότητα μας να προβλέψουμε εξίσου επιτυχώς μακροπρόθεσμα την πορεία του υποκείμενου τίτλου σε σχέση με ένα χρονικά πιο μικρό ορίζοντα. Επομένως, όσο πιο μακροπρόθεσμο (μεγάλη ημερομηνία λήξης) είναι το δικαίωμα τόσο πιο ανασφαλές είναι για τον πωλητή, ο οποίος αντισταθμίζει αυτό τον κίνδυνο με μεγαλύτερο ασφάλιστρο.

Τιμή Εξάσκησης(Strike price)

Θα εξετάσουμε τώρα την επίδραση της τιμής εξάσκησης X του American/European call option στην αξία του. Για να το κάνουμε αυτό, κρατούμε σταθερά τα πιο κάτω δεδομένα:

$$n=300, r=0.1, \sigma=0.2, S_0=10 \text{ και } T=1$$

Εκτελούμε το πείραμα για 10^6 τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown κάθε φορά. Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω:

Πίνακας 4.3.3

Τιμή Εξάσκησης (X)	Αποτέλεσμα Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0)	Αναλυτική Τιμή ($C_0 - analytical$)
9	1.9979	1.9989
10	1.3288	1.3270
12	0.4705	0.4708
14	0.1301	0.1305
16	0.0299	0.0301

Από τα αποτελέσματα που φαίνονται στον Πίνακα 4.3.3 προκύπτει το αναμενόμενο. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή εξάσκησης τόσο μικρότερη είναι η αξία του παραγώγου. Λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι το αναμενόμενο, καθώς αναφερόμαστε σε παράγωγα τύπου call, για τα οποία η απόδοση είναι $\max(S_T - X, 0)$. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το X , τόσο λιγότερες είναι οι πιθανότητες για τον κάτοχο του δικαιώματος να αποκομίσει κέρδος ή ακόμα και αν έχει κέρδος αυτό θα είναι μικρότερο από ένα αντίστοιχο call option με μικρότερη τιμή εξάσκησης.

4.4 Αποτίμηση American put options με LSM-Monte Carlo

4.4.1 Εισαγωγικά

Η αποτίμηση των American options, με εξαίρεση το απλό American Call, είναι γενικά μια δύσκολη διαδικασία που προβλημάτισε πολύ τη μαθηματική κοινότητα. Η δυσκολία των American options που οφείλεται στην ιδιαιτερότητα τους να επιτρέπουν στον κάτοχο να το ασκήσει όποτε θέλει μεταξύ $[0, T]$ και όχι μόνο κατά τη λήξη του συμβολαίου, οφείλει να αντιμετωπιστεί διαφορετικά από ότι ένα European Option. Η πολυπλοκότητα του προβλήματος καθιστούσε αδύνατη την προσομοίωση των American options μέχρι περίπου το 1992, όπου ξεκίνησαν να ανακαλύπτονται κάποιες μέθοδοι προσομοίωσής τους. Η γενικότερη ιδέα, είναι η δημιουργία ενός κανόνα εύρεσης χρόνου διακοπής, συγκρίνοντας την απόδοση του παραγώγου αν το ασκούσαμε με την αναμενόμενη απόδοση με το αν δεν το ασκούσαμε. Όλα αυτά φυσικά βασίζονταν στις τιμές προσομοιωμένων τροχιών υποκείμενου τίτλου.

Από τις διάφορες μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί, επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε την «Προσομοίωση με μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων» (Simulation with Least Squares Method” ή αλλιώς **LSM Monte Carlo**. Ο λόγος που διαλέξαμε αυτή τη μέθοδο, είναι λόγω των μεγάλων δυνατοτήτων της με σχετική ευκολία, αφού μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ήδη American options στα οποία ούτε καν οι Αριθμητικές μέθοδοι δεν μπορούν να αξιοποιηθούν(π.χ American option σε υποκείμενο τίτλο που ακολουθεί σ.α με jump-difusions) και είναι τόσο εύχρηστη που δείχνει να μπορεί να αποτιμήσει σχεδόν όλα τα American type options.

Ο αλγόριθμος προσομοίωσης LSM Monte Carlo στηρίζεται σε κάποιους γενικότερους αλγόριθμους προσομοίωσης που προϋπήρξαν, όπως των Black and Scholes(1973), Merton(1973), Cox, Ingersoll and Ross(1985) και άλλους.

Για να κατανοήσουμε τη φιλοσοφία αυτής της μεθόδου, υπενθυμίζεται πως οποιαδήποτε χρονική στιγμή στο $[0, T]$, ο κάτοχος του American option συγκρίνει την **απόδοση από άμεση εξάσκηση(immediate payoff)** και την **αναμενόμενη απόδοση από συνέχιση(expected payoff from continuation)** και εξασκεί αν η

άμεση εξάσκηση έχει μεγαλύτερη απόδοση από την αναμενόμενη αν συνεχίσει. Είναι ένα δίλημμα δηλαδή για το κατά πόσο συνεχίζει να κατέχει το παράγωγο ή το εξασκεί. Επομένως, η βέλτιστη στρατηγική καθορίζεται πλήρως από την υπό συνθήκη απόδοση του παραγώγου αν συνεχίσουμε να το κρατούμε «ζωντανό». Η μέθοδος λοιπόν αυτή, χρησιμοποιεί προσομοίωση και μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμά κάθε φορά την αναμενόμενη απόδοση. Ακόμη πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος κατασκευάζει μια Συνάρτηση Αναμενόμενων Αποδόσεων, η οποία υπολογίζει την αναμενόμενη απόδοση από συνέχιση κατοχής του option, βασισμένη στην πληροφορία που έχουμε μέχρι τον κόμβο που βρισκόμαστε.

Η ευκολία της μεθόδου κατά την εφαρμογή της σε μαθηματικό πακέτο στον ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι προφανής, καθώς χρειάζεται μόνο μια απλή μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Οι εφαρμογές της πέραν από τα American put options είναι διάφορες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αποτίμηση American-Bermuda-Asian options, swaps, πολυμεταβλητά American options και πολλά άλλα.

4.4.2 Επίδειξη μεθόδου με ένα αριθμητικό παράδειγμα

Προτού προχωρήσουμε στην μαθηματική απόδειξη της μεθόδου, είναι χρήσιμο να επιδειχτεί ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της LSM Monte Carlo όπως επέλεξαν να κάνουν και ο Francis A. Longstaff και Eduardo S. Schwartz σε μια εργασία τους.

Κατά την ημερομηνία λήξης του παραγώγου, επιλέγει ο κάτοχος να το εξασκήσει μόνο αν το παράγωγο αποφέρει κέρδη, ή αλλιώς όπως καλείται, το παράγωγο είναι **in-the-money**. Πριν την ημερομηνία λήξης, όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, ο κάτοχος κάνει μια σύγκριση μεταξύ δύο αποδόσεων: αυτής από άμεση εξάσκηση και της αναμενόμενης από συνέχιση. Αφού ξέρουμε την απόδοση από άμεση εξάσκηση αναζητούμε μόνο μια εκτίμηση της απόδοσης αν συνεχίσουμε να κρατούμε το παράγωγο. Αυτό θα το πετύχουμε με παλινδρόμηση πάνω σε μια βάση συναρτήσεων, υπολογίζοντας της σταθερές.

Θεωρούμε ένα American Put option σε μια αγορά χωρίς μερίσματα. Έστω επίσης ότι η τιμή εξάσκησης $K=1.10$ και ότι υπάρχουν μόνο 3 χρονικές στιγμές κατά τις οποίες μπορεί να εξασκηθεί το παράγωγο ($t=1, t=2, t=3$) με τη στιγμή 3 να είναι η ημερομηνία λήξης. Έστω επίσης ετήσιο επιτόκιο 0.06 και ότι αρχική τιμή του

υποκείμενου τίτλου είναι 1. Προσομοιώνουμε 8 διαφορετικές τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown και έχουμε τα πιο κάτω αποτελέσματα:

Πίνακας 4.4.1

Τιμές μετοχής για 8 διαφορετικές τροχιές				
Τροχιά	t=0	t=1	t=2	t=3
1	1	1.09	1.08	1.34
2	1	1.16	1.26	1.54
3	1	1.22	1.07	1.03
4	1	0.93	0.97	0.92
5	1	1.11	1.56	1.52
6	1	0.76	0.77	0.90
7	1	0.92	0.84	1.01
8	1	0.88	1.22	1.34

Θα υπολογίσουμε ενδιάμεσα κάποιους πίνακες απαραίτητους για τη μέθοδο. Με γκρίζο φόντο βάλουμε τις τιμές για τις οποίες το American Put είναι in-the-money κατά την ημερομηνία λήξης.

Αν λοιπόν ο κάτοχος του τίτλου επιλέξει να μην εξασκήσει το American put πριν τη λήξη του και αποφασίσει να το φυλάξει μέχρι τη στιγμή t=3, οι αποδόσεις θα είναι οι ακόλουθες(δεδομένου ότι ο κάτοχος εξασκήσει το δικαίωμα μόνο για in-the-money περιπτώσεις, όπως επιβάλλει η βέλτιστη στρατηγική):

Πίνακας 4.4.2

Αποδόσεις για t=3 (Cash-flow matrix t=3)	
Τροχιά	t=3
1	0
2	0
3	0.7
4	0.18
5	0
6	0.20
7	0.09
8	0

Παρατήρηση: Οι πιο πάνω αποδόσεις ταυτίζονται με τις αποδόσεις που θα είχε ο κάτοχος ενός αντίστοιχου European Put option.

Συνεχίζοντας, αν το put είναι in-the-money κατά τη στιγμή 2, ο κάτοχος θα πρέπει να αποφασίσει αν θα το εξασκήσει άμεσα ή αν θα πρέπει να συνεχίσει να κατέχει το παράγωγο μέχρι τη στιγμή 3. Κοιτάζοντας ξανά τον Πίνακα 4.4.1 εντοπίζουμε τις τροχιές για τις οποίες το put είναι in-the-money τη στιγμή 2 και βρίσουμε ότι είναι οι τροχιές 1,3,4,6 και 7. Για τις υπόλοιπες τροχιές που είναι out-of-the-money δεν υπάρχει κάποιο δίλημμα καθώς ο κάτοχος θα επιλέξει σίγουρα να περιμένει μέχρι τη στιγμή 3, με την ελπίδα να έχει κάποιο κέρδος τότε.

Ας συμβολίσουμε με X την τιμή της μετοχής τη στιγμή 2 για τις πέντε τροχιές που ήταν in-the-money και Y τις αντίστοιχες επικαιροποιημένες αποδόσεις (discount μιας χρονικής στιγμής) κατά τη στιγμή 3 αν ο κάτοχος αποφασίσει να συνεχίσει την κατοχή του put.

Οι τιμές των διανυσμάτων Y και X φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Πίνακας 4.4.3

Παλινδρόμηση τη στιγμή 2		
Τροχιά	Y	X
1	0x0.94176	1.08
3	0.7x0.94176	1.07
4	0.18x0.94176	0.97
6	0.20x94176	0.77
7	0.09x0.94176	0.84

Για να εκτιμήσουμε την αναμενόμενη απόδοση από τη συνέχιση κατοχής του put option μετά τη στιγμή 2, δεδομένης της τιμής της μετοχής κατά τη στιγμή 2, κάνουμε παλινδρόμηση του Y με μια σταθερά, το X και το X². Προκύπτει λοιπόν το ακόλουθο:

$$E[Y | X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2.$$

Σαν παρατήρηση, αναφέρουμε ότι η επιλογή του X και X² για βάση συναρτήσεων είναι η πιο απλή και αυτή θα μπορούσε να γίνει πιο σύνθετη σε άλλες περιπτώσεις. Αφού λοιπόν έχουμε τη συνάρτηση που ζητούσαμε από την αρχή, μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε την αξία άμεσης εξάσκησης τη στιγμή 2 με αυτή από συνέχιση κατοχής του put, παίρνοντας τα πιο κάτω:

Πίνακας 4.4.4

Απόφαση για πρόωρη εξάσκηση κατά τη στιγμή 2		
Τροχιά	Άμεση Εξάσκηση στιγμή 2 (K-S _{t=2})	Συνέχιση κατοχής του put
1	0.2	0.369
3	0.3	0.461
4	0.13	0.1176
6	0.33	0.1520
7	0.26	0.1565

Οι τιμές στην πρώτη στήλη προέκυψαν από $K - S_{t=2} = 1.10 - S_{t=2}$ ενώ στη δεύτερη στήλη από την αντικατάσταση του X στη σχέση $E[Y | X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$.

Παρατηρώντας τον πιο πάνω πίνακα, βλέπουμε ότι είναι βέλτιστο να εξασκήσουμε το American Put τη στιγμή 2 μόνο στις τροχιές 4,6 και 7. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον πιο κάτω πίνακα, που δείχνει την απόδοση που παίρνει ο κάτοχος του put αν επιλέξει τη βέλτιστη στρατηγική κατά τη στιγμή 2 και 3:

Πίνακας 4.4.5

Πίνακας Αποδόσεων κατά τη στιγμή 2				
Τροχιά	t=0	t=1	t=2	t=3
1	-	-	0	0
2	-	-	0	0
3	-	-	0	0.07
4	-	-	0.13	0
5	-	-	0	0
6	-	-	0.33	0
7	-	-	0.26	0
8	-	-	0	0

Όπως παρατηρούμε και είναι λογικό, όταν ο κάτοχος επιλέξει πρόωρη εξάσκηση κατά τη στιγμή 2, η απόδοση της στιγμής 3 γίνεται 0 αφού δεν υπάρχει πλέον το put option. Κάπου εδώ το πρώτο βήμα τελείωσε και η επαναληπτική μέθοδος προχωρά στην αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή.

Παρατηρούμε ξανά τον Πίνακα 4.4.1 με τις προσομοιωμένες τιμές της μετοχής και εντοπίζουμε τις τροχιές εκείνες για τις οποίες τη στιγμή 1 το put είναι in-the-money(1,4,6,7 και 8).

Για τις πιο πάνω τροχιές, προσδιορίζουμε το Y και πάλι με επικαιροποίηση. Είναι σημαντικό ότι χρησιμοποιούμε τις αποδόσεις που δεν έτυχαν επικαιροποίησης στα προηγούμενα βήματα. Οι αποδόσεις που αποκτούνται κατά τη στιγμή 2 παίρνουν discount μιας περιόδου ενώ αυτές τις στιγμής 3 discount 2 περιόδων.

Ξανά, το X θα είναι η τιμή τις μετοχής κατά τη στιγμή 1 για τις τροχιές εκείνες που το put είναι in-the-money. Παίρνουμε έτσι τις πιο κάτω τιμές για τα X, Y :

Πίνακας 4.4.6

Παλινδρόμηση τη στιγμή 1		
Τροχιά	Y	X
1	0×0.94176	1.09
4	0.13×0.94176	0.93
6	0.33×0.94176	0.76
7	0.26×0.94176	0.92
8	0×0.94176	0.88

Πάλι προχωρούμε με μια ανάλυση παλινδρόμησης του Y σε σχέση με μια σταθερά, το X και το X^2 για να πάρουμε την πιο κάτω σχέση:

$$E[Y | X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$$

Αντικαθιστώντας τα X στην πιο πάνω σχέση υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση από συνέχιση κατοχή του put πέραν της στιγμής 1. Έτσι λοιπόν παίρνουμε τον πιο κάτω πίνακα, από τον οποίο βλέπουμε πως είναι συμφέρον να εξασκήσουμε τη στιγμή 1 για τις τροχιές 4,6,7 και 8 και όχι για την 1.

Πίνακας 4.4.7

Απόφαση για πρόωρη εξάσκηση κατά τη στιγμή 1		
Τροχιά	Άμεση Εξάσκηση στιγμή 1 ($K-S_{t=1}$)	Συνέχιση κατοχής του put
1	0.01	0.0139
4	0.17	0.1092
6	0.34	0.2866
7	0.18	0.1175
8	0.22	0.1533

Έχουμε έτσι προσδιορίσει τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει ο κάτοχος του American Put για να βελτιστοποιήσει τα κέρδη του και μπορούμε να επισυνάψουμε τον κανόνα απόφασης χρόνου-διακοπής του put στον πιο κάτω πίνακα, που υποδηλώνει ποια χρονική στιγμή το put option πρέπει να εξασκηθεί:

Πίνακας 4.4.8

Κανόνας χρόνου-διακοπής			
Τροχιά	t=1	t=2	t=3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Έχοντας τώρα υπολογίσει τη στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει ο κάτοχος του American put, οδηγούμαστε τον τελευταίο πίνακα της διαδικασίας, ο οποίος

καλείται Cash Flow Matrix και περιέχει συγκεντρωτικά τις βέλτιστες αποδόσεις σύμφωνα με την στρατηγική που φαίνεται στον Πίνακα 4.8:

Πίνακας 4.4.9

Πίνακας αποδόσεων βέλτιστης στρατηγικής (Cash Flow Matrix)			
Τροχιά	t=1	t=2	t=3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0.07
4	0.17	0	0
5	0	0	0
6	0.34	0	0
7	0.18	0	0
8	0.22	0	0

Για το τελευταίο βήμα της μεθόδου LSM Monte Carlo, παίρνουμε τις πιο πάνω αποδόσεις και τις επικαιροποιούμε, σύμφωνα με τη στιγμή που πραγματοποιούνται, μεταφέρουμε δηλαδή τον πίνακα αποδόσεων στη χρονική στιγμή 0 (για την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε την αξία του American Put). Ακολούθως, παίρνουμε τον μέσο τους όρο και το αποτέλεσμα είναι η εκτίμηση της αξίας του American Option.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, προκύπτει ότι $\hat{C}_0 = 0.1144$.

Για να κατανοήσουμε πόσο σημαντικό είναι στα American Put Options να εξετάζουμε την πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος, αν το αντιμετωπίζαμε σαν ένα European Put Option (εξάσκηση μόνο τη στιγμή 3) και παίρναμε την αποτίμηση στη στιγμή 0, θα παίρναμε ότι $\hat{C}_0^{european} = 0.0564$ που είναι σχεδόν το μισό της εκτίμησης που κάναμε πιο πριν, αξιοποιώντας την πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος.

4.4.3 Αλγόριθμος LSM Monte Carlo

Υποθέτουμε χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) που είναι εφοδιασμένος με μια διύλιση $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ και χρονικό διάστημα $T=[0, T]$ με $T < \infty$. Θεωρούμε επίσης από την Αρχή no-arbitrage ότι υπάρχει ένα ισοδύναμο martingale μέτρο Q με το οποίο θα δουλεύουμε υπονοώντας το από εδώ και πέρα. Σκοπός μας είναι η αποτίμηση ενός American type παραγώγου γενικά (π.χ American put, American-Bermudan-Asian option, Bermudan Max Call), κάτι που εφαρμόζεται στη συνέχεια για American Put option.

Περιοριζόμαστε στα παράγωγα εκείνα που οι συναρτήσεις απόδοσης τους είναι στοιχεία του χώρου Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ (σύνολο τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τ.μ f πάνω στο Ω με τιμές στο \mathbb{R} , δηλαδή με $\int_{\Omega} |f|^2 dP < \infty$). Η μέθοδος χρησιμοποιεί

πορίσματα του Snell Envelope, για αυτό παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 2 για υπενθύμιση. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε ότι η αξία ενός American option ισούται με τη μεγιστοποιημένη αξία των discounted αποδόσεων του option, όπου το μέγιστο το παίρνουμε πάνω σε όλους τους δυνατούς χρόνους διακοπής που μπορούν να υπάρξουν στη δεδομένη διύλιση του χώρου.

Στο σημείο αυτό εισάγουμε τον συμβολισμό $C(\omega, s; t, T)$ για να υποδηλώνουμε την τροχιά της απόδοσης, δεδομένου ότι το option δεν έχει εξασκηθεί μέχρι ή και τη στιγμή t και ότι ο κάτοχος ακολουθεί πιστά τη βέλτιστη στρατηγική από τη στιγμή t και μετά (μέχρι την T). Η συνάρτηση αυτή είναι κάτι ανάλογο των ενδιάμεσων πινάκων αποδόσεων που παράξαμε στο αριθμητικό παράδειγμα που προηγήθηκε.

Έστω επίσης μια διαμέριση του χρόνου σε K χρονικές στιγμές, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K = T$. Αν και στην πράξη τα American options είναι σε συνεχή χρόνο, η μέθοδος δουλεύει μόνο σε διακριτό χρόνο, οπότε μπορούμε να πάρουμε ένα επαρκώς μεγάλο K για να προσεγγίσουμε όσο το δυνατό καλύτερα το συνεχή χρόνο.

Κατά την ημερομηνία λήξης ο κάτοχος επιλέγει να εξασκήσει το δικαίωμά του αν αυτό είναι in-the-money (απόδοση μεγαλύτερη ή ίση του 0), διαφορετικά το αφήνει να λήξει. Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν την ημερομηνία λήξης όμως, ο κάτοχος του option καλείται να αποφασίσει μεταξύ της πρόωρης εξάσκησης ή της συνέχισης κατοχής του option. Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος εξασκεί το δικαίωμα του αν η απόδοση του είναι μεγαλύτερη ή ίση από την αναμενόμενη απόδοση με μη εξάσκηση.

Τη στιγμή k με $k < K$, η απόδοση από την άμεση εξάσκηση είναι γνωστή στον κάτοχο ανάλογα με το είδος του οption. Η αρχή no-arbitrage υπονοεί όμως ότι η αξία της συνέχειας κατοχής του οption δίνεται από την εκτίμηση των discounted αποδόσεων $C(\omega, s; t, T)$, δουλεύοντας πάντα κάτω από το μέτρο Q .

Η αξία από τη συνέχιση είναι $F(\omega, t_k)$ και δίνεται ως ακολούθως:

$$F(\omega, t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^K \exp\left(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds\right) C(\omega, s; t, T) \mid F_{t_k} \right] \quad (4.4.1)$$

όπου το πιθανός στοχαστικό $r(\omega, t)$ είναι το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού.

Έτσι λοιπόν, το LSM Monte Carlo εκτιμά με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, παλινδρόμηση, τη δεσμευμένη (έχουμε πληροφορία στη σ -άλγεωβρα F_{t_k}) αναμενόμενη απόδοση ξεκινώντας ανάποδα, δηλαδή πρώτα για t_{K-1} , μετά για t_{K-2} , συνεχίζοντας μέχρι t_1 . Ο λόγος που δουλεύουμε ανάποδα είναι γιατί το $C(\omega, s; t_i, T)$ μπορεί να διαφοροποιηθεί από την απόφαση της στιγμής t_{i+1} και το $C(\omega, s; t_{i+1}, T)$, αφού μπορεί να είναι βέλτιστο να σταματήσουμε τη στιγμή t_{i+1} και όχι πιο μετά, αλλάζοντας έτσι τις αποδόσεις σε κάποιες τροχιές.

Αφού ο L^2 είναι ένας χώρος Hilbert, έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (όχι μοναδική) και η αναμενόμενη απόδοση μπορεί να παρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι X είναι η αξία του υποκείμενου τίτλου του οption και ότι X ακολουθεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Οπότε, μια πιθανή επιλογή συναρτήσεων βάσης θα μπορούσαν να είναι τα καλούμενα **Laguerre polynomials** που δίνονται όπως πιο κάτω:

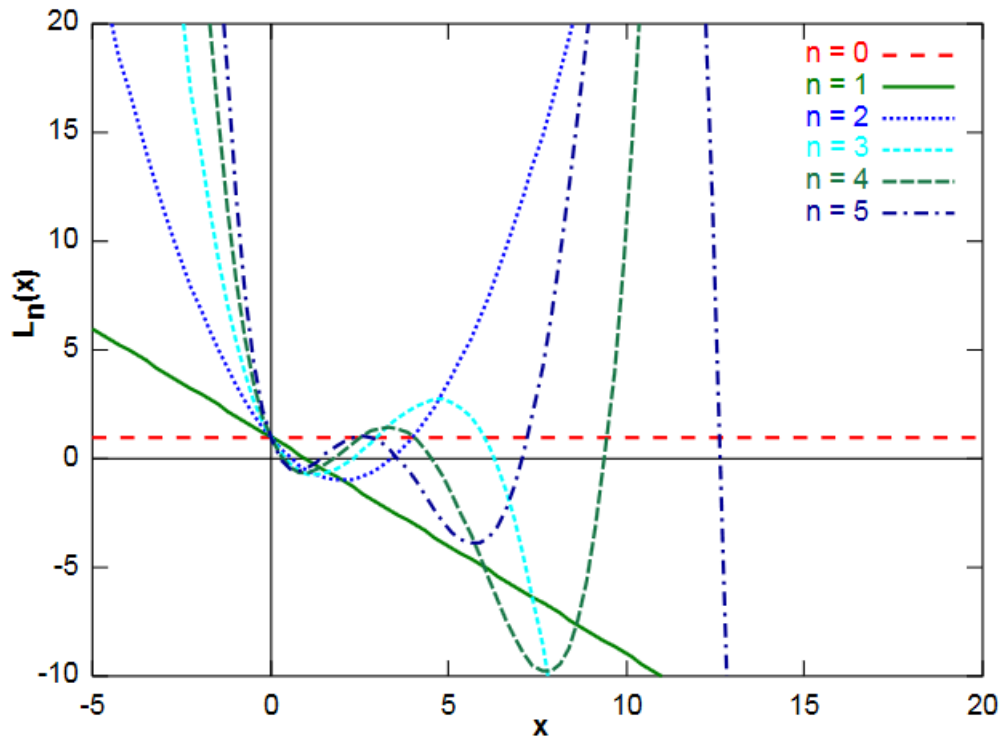
$$L_0(X) = 1 \quad (4.4.2)$$

$$L_1(X) = (1 - X) \quad (4.4.3)$$

$$L_2(X) = (1 - 2X + \frac{1}{2} X^2) \quad (4.4.4)$$

⋮

$$L_n(X) = \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}) \quad (4.4.5)$$



Εικόνα: Τα πρώτα 6 πολυώνυμα Laguerre

Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $F(\omega, t_{k-1})$ σαν:

$$F(\omega, t_{k-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(X) \quad (4.4.6)$$

όπου a_j σταθεροί συντελεστές. Πέραν από τα Laguerre polynomials, σαν βάση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα Hermite, Legendre, Chebyshev, Gegenbauer και Jacobi polynomials. [Abramowitz and Stegun (1970)]

Στην πραγματικότητα όμως, για την εκτίμηση του $F(\omega, t_{k-1})$ εμείς θα χρησιμοποιούμε $M < \infty$ συναρτήσεις βάσης και ονομάζουμε αυτή την προσέγγιση σαν $F_M(\omega, t_{k-1})$. Αφού λοιπόν αποφασίζουμε για πόσες και ποιες συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε για βάση, εκτελούμε μια παλινδρόμηση των discounted αποδόσεων $C(\omega, s; t_{k-1}, T)$, για να υπολογίσουμε της σταθερές του μοντέλου, μόνο όμως για τις τροχιές εκείνες που είναι in-the-money. Με το να χρησιμοποιούμε μόνο τις τροχιές που είναι in-the-money εξασφαλίζουμε το ότι απαιτούνται λιγότερες συναρτήσεις βάσης.

Το αποτέλεσμα της παλινδρόμησης, $\hat{F}_M(\omega, t_{k-1})$ αποδεικνύεται ότι συγκλίνει κατά πιθανότητα στο $F_M(\omega, t_{k-1})$ καθώς ο αριθμός N των in-the-money τροχιών συγκλίνει στο άπειρο.

Αφού υπολογιστεί η συνάρτηση αναμενόμενων αποδόσεων για τη στιγμή t_{k-1} , μπορούμε τώρα να αποφασίσουμε κατά πόσο είναι βέλτιστο να εξασκήσουμε πρόωρα τη στιγμή t_{k-1} για μια in-the-money τροχιά συγκρίνοντας την απόδοση αυτής της κίνησης με το αποτέλεσμα $\hat{F}_M(\omega, t_{k-1})$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε in-the-money τροχιά.

Αμέσως μετά, μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό του $C(\omega, s; t_{k-2}, T)$. Η επαναληπτική αυτή διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να προσδιοριστούν οι βέλτιστες αποφάσεις εξάσκησης σε όλες τις χρονικές στιγμές.

Στο τελευταίο βήμα της μεθόδου, μπορούμε να αποτιμήσουμε το American Option ξεκινώντας από τη στιγμή 0 και προχωρώντας για κάθε μονοπάτι ξεχωριστά μέχρι να βρούμε τον πρώτο χρόνο διακοπής, να πάρουμε την discounted απόδοση στο χρόνο 0 (back to time zero). Η αποτιμημένη αξία του option, είναι η μέση τιμή όλων των πιο πάνω discounted αποδόσεων.

Σύγκλιση Μεθόδου

Η πιο κάτω πρόταση μας δίνει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα για τη σύγκλιση του αλγορίθμου LSM Monte Carlo

Πρόταση 4.5: Για οποιαδήποτε επιλογή M, K και διανύσματος $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^{M \times (K-1)}$ που αναπαριστά τις σταθερές του μοντέλου για τις M βάσεις συναρτήσεων στις $K-1$ στιγμές πιθανής πρόωρης εξάσκησης και για $LSM(\omega; M; K)$ που ισούται με την απόδοση που προκύπτει από τον κανόνα εξάσκησης της LSM Monte Carlo, ισχύει η πιο κάτω ανισότητα:

$$V(X) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N LSM(\omega_i; M; K) \quad (4.4.7)$$

Σαν πόρισμα από την πιο πάνω πρόταση, προκύπτει πως η μέθοδος LSM Monte Carlo δημιουργεί ένα κανόνα διακοπής (stopping rule) για οποιοδήποτε American type option. Υπενθυμίζουμε ότι από τα πορίσματα του Snell Envelope, η αποτίμηση

κάποιου American option γίνεται με την εύρεση ενός βέλτιστου χρόνου διακοπής που μεγιστοποιεί την αξία του option. Επομένως, ο χρόνος διακοπής της μεθόδου LSM Monte Carlo θα αποφέρει αποτίμηση πάντα μικρότερη ή ίση από αυτή που υποδεικνύει ο βέλτιστος χρόνος διακοπής $\hat{V}_{LSM}(X) \leq V_{opt}(X)$. (4.4.8)

Η πιο πάνω παρατήρηση γίνεται ακόμη πιο χρήσιμη καθώς μας παρέχει ένα κριτήριο επιλογής του αριθμού M των συναρτήσεων βάσης που χρειάζεται να πάρουμε. Συγκεκριμένα, μπορούμε να αυξάνουμε το M μέχρι η αποτίμηση της LSM Monte Carlo να μην αυξάνεται πλέον αρκετά, υπονοώντας ότι είμαστε κοντά στο άνω φράγμα της και επομένως την επιθυμητή εκτίμηση.

Παρατήρηση 1: Όπως επιβάλλει η μέθοδος LSM Monte Carlo, χρειάζονται να γίνουν παλινδρομίσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων. Η τεχνική που χρησιμοποιείται κατά την παλινδρόμηση εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως για παράδειγμα η παρατήρηση ετεροσκεδαστικότητας των υπολοίπων. Εντούτοις στα American Put options αλλά και στα περισσότερα American type options, μια απλή παλινδρόμηση είναι αρκετή. Επίσης, παρατηρείται γενικά ότι το R^2 της παλινδρόμησης είναι γενικά χαμηλό. Ένα χαμηλό R^2 υποδεικνύει πως το volatility μη προβλεπόμενων αποδόσεων είναι μεγάλο σε σχέση με το volatility των αναμενόμενων αποδόσεων. Επομένως είναι φυσικό να αναμένουμε μικρό R^2 όταν οι μη αναμενόμενες αποδόσεις έχουν μεγάλο volatility. Γενικά όμως, η μέθοδος βασίζεται σε ροπές πρώτης τάξης αντί δεύτερης, οπότε ο δείκτης R^2 από την παλινδρόμηση δεν παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ποιότητα της προσέγγισης της αξίας ενός American option.

Παρατήρηση 2: Μετά από πολλές αριθμητικές δοκιμές, αποδείχτηκε πως σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως το American Put option, δεν παίζει μεγάλη σημασία η επιλογή των συναρτήσεων βάσης αφού τα αποτελέσματα είναι σχεδόν τα ίδια. Ιδιαίτερα στα American puts, μπορούμε να πάρουμε σαν βάση το $\{1, S, S^2\}$ ή τα πρώτα τρία πολυώνυμα Laguerre, τα πρώτα τρία Hermite polynomials ή τρεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και να έχουμε τα ίδια αποτελέσματα.

Παρατήρηση 3: Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι πως δεν χρειάζεται να πάρουμε μεγάλο πλήθος συναρτήσεων βάσης για να έχουμε καλά αποτελέσματα. Μια βάση αποτελούμενη από δύο ή τρία στοιχεία εμπειρικά δείχνει να είναι αρκετή για να φτάσουμε σε αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας.

Παρατήρηση 4: Για να πάρουμε ένα αποτέλεσμα επιθυμητής ακρίβειας δεν παίζει ρόλο το πόσες συναρτήσεις βάσης θα πάρουμε αφού μπορούμε να πετύχουμε όση ακρίβεια (ε) θέλουμε για N αρκετά μεγάλο για οποιοδήποτε πλήθος βάσης, κάτι που φαίνεται στην πιο κάτω σχέση:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\left|V(X) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N LSM(\omega_i; M; K)\right| > \varepsilon\right] = 0 \quad (4.4.9)$$

4.4.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων LSM Monte Carlo με άλλες μεθόδους

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την αξιοπιστία αυτής της μεθόδου, θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά της με δύο άλλες μεθόδους αποτίμησης των American Put options. Στη μέθοδο LSM Monte Carlo θα χρησιμοποιούμε σαν συναρτήσεις βάσεις τα πρώτα 3 πολυώνυμα Laguerre και οι εκτιμήσεις είναι ο μέσος όρος 5 επαναλήψεων του ολικού πειράματος, το καθένα με προσομοίωση 10000 τροχιών. Το ετήσιο επιτόκιο το κρατήσαμε σταθερό $r=0.06$. Τα αποτελέσματα των άλλων δύο μεθόδων με τα οποία θα συγκρίνουμε αναφέρονται στις εξής δύο μεθόδους αποτίμησης:

1) Τη μέθοδο Πεπερασμένων διαφορών(Finite Difference) Crank-Nicolson

Θα χρησιμοποιήσουμε την αριθμητική αυτή μέθοδο που προσεγγίζει τη λύση της πιο κάτω Μερικής Διαφορικής εξίσωσης, που περιγράφει τα American Put options:

$$\left(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\right)P_{SS} + rSP_S - rP + P_T = 0$$

$$P(S, T) = \max(0, K - S_T)$$

Στη μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε: 5000 βήματα στη διαμέριση χρόνου και 10000 στη διαμέριση των τιμών.

2) Τη μέθοδο Cox-Ross-Rubenstein (δεντροδιάγραμμα)

Η μέθοδος αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 και θα χρησιμοποιήσουμε 500 βήματα στη διαμέριση χρόνου.

Σε αντίθεση με τα American call options, τα put δεν έχουν κάποια αναλυτική λύση για να μπορούμε να υπολογίσουμε την ακρίβειά τους. Εντούτοις, οι δύο πιο πάνω

μέθοδοι που θα χρησιμοποιήσουμε για σύγκριση θεωρούνται δύο από τις πιο αξιόπιστες μεθόδους αποτίμησης American Put, για αυτό μπορούμε να οδηγηθούμε σε ασφαλή συμπεράσματα ως προς την ακρίβεια της μεθόδου.

Προκύπτουν τα πιο κάτω:

Πίνακας 4.4.10

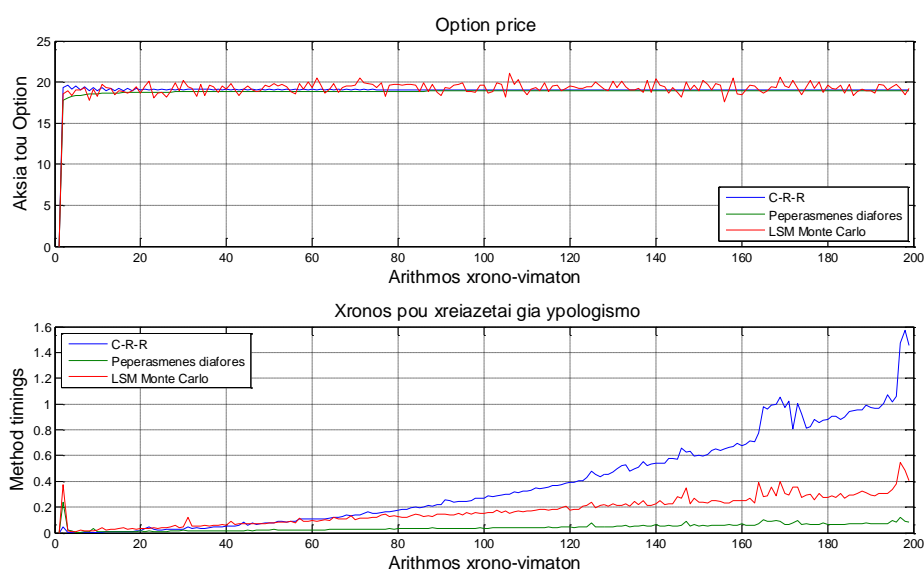
S_0	K	σ	T	Αποτίμηση με LSM Monte Carlo	95% διάστημα εμπιστοσύνης	Αποτίμηση με Πεπερασμένες Διαφορές	Αποτίμηση με Cox-Ross-Rubenstein
10	12	0.2	1	2.0042	1.9977 2.0106	1.9981	2.0027
10	12	0.2	0.75	1.9994	1.9955 2.0033	1.9916	2.0
10	12	0.5	1	2.9576	2.9168 2.9985	2.9510	2.9541
25	28	0.3	1	4.1278	4.0683 4.1873	4.1269	4.1323
25	30	0.3	1	5.5632	5.5030 5.6234	5.5636	5.5725
25	30	0.7	1	9.2734	9.1411 9.4057	9.2802	9.3306
35	38	0.2	1	3.7588	3.7052 3.8124	3.7522	3.7339
35	38	0.4	1	6.3606	6.2525 6.4686	6.3700	6.3592
35	38	0.4	2	7.7055	7.5712 7.8399	7.7266	7.7441
38	40	0.2	1	3.2361	3.1803 3.2918	3.2424	3.2571
38	40	0.4	1	6.1335	6.0237 6.2433	6.1421	6.1572
38	40	0.4	2	7.6211	7.4913 7.7509	7.6517	7.6734
45	45	0.2	1	2.6125	2.5521 2.6728	2.6392	2.6088
45	44	0.2	1	2.1869	2.1305 2.2434	2.1990	2.1736
45	43	0.2	1	1.8019	1.7504 1.8535	1.8102	1.7890
100	105	0.2	1	8.4489	8.3022 8.5957	8.4071	8.4178
100	110	0.4	1	18.9786	18.6597 19.2975	18.9479	19.0520

Όπως παρατηρούμε από τον Πίνακα αποτελεσμάτων 4.4.10, οι διαφορές μεταξύ των τριών μεθόδων είναι πολύ μικρές. Τα αποτελέσματα της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών και Cox-Ross-Rubenstein ανήκουν όπως παρατηρούμε στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης που εκτιμήσαμε με την προσομοίωση LSM Monte Carlo, κάτι που αποδεικνύει την ακρίβεια της μεθόδου. Η διαφορά μεταξύ της LSM Monte Carlo και της μεθόδου Πεπερασμένων Διαφορών είναι της τάξης του 0.01. Επιπλέον, παρατηρούμε πως οι διαφορές είναι τόσο θετικές όσο και αρνητικές. Μπορούμε λοιπόν τελικά να αποδεχτούμε τη μέθοδο LSM Monte Carlo σαν μια αξιόπιστη μέθοδο αποτίμησης American Put Options.

Υπολογιστικός χρόνος:

Θα συγκρίνουμε τώρα τον Υπολογιστικό Χρόνο που χρειάζεται κάθε μία από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την αποτίμηση ενός American put option.

- Για τα εξής δεδομένα: $S_0 = 100$, $K = 110$, $r = 0.06$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, 10000 τροχιές(=διαμέριση των τιμών στη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών) παρατηρούμε τα πιο κάτω:



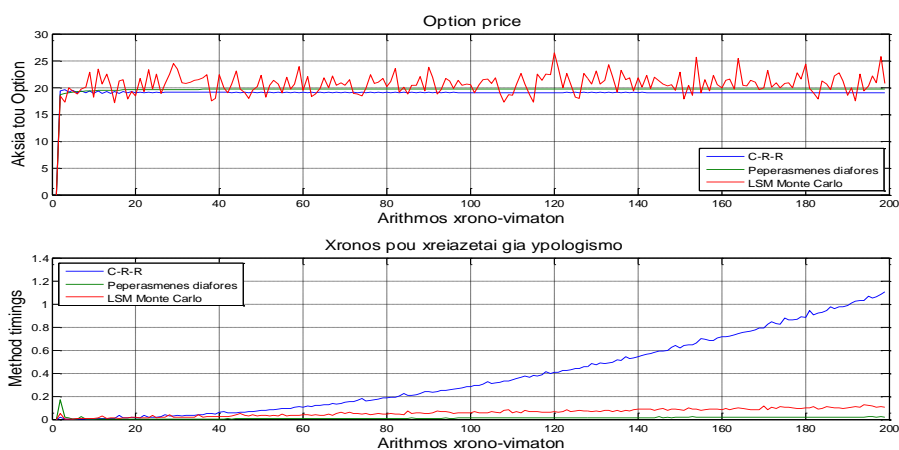
Εικόνα 8: Υπολογιστικός χρόνος των 3 μεθόδων

Στον οριζόντια άξονα και των δύο γραφικών παραστάσεων, παρουσιάζεται ο αριθμός διαμέρισης του $[0,T]$, παίρνοντας διαμερίσεις $N=3,4,\dots,200$. Κάποια πρώτα συμπεράσματα από την Εικόνα 12 είναι πως και οι τρεις μέθοδοι έχουν μια πρώτη «έγκυρη» εκτίμηση για την αποτίμηση του American Put option για διαμέριση του

χρόνου μεγαλύτερη του 5. Επίσης, για όλες τις υπόλοιπες διαμερίσεις χρόνου, οι εκτιμήσεις των τριών μεθόδων είναι αρκετά κοντά, με τη μέθοδο LSM Monte Carlo να παρουσιάζει συνεχή αυξομείωση στην αποτίμηση ενώ τις μεθόδους Πεπερασμένων διαφορών και Cox-Ross-Rubenstein να έχουν μια πιο σταθεροποιημένη εκτίμηση όσο και αν κάνουμε λεπτότερη τη διαμέριση του χρόνου. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στις δύο αυτές μεθόδους, μια διαμέριση του χρόνου σε 100 περίπου βήματα είναι αρκετά ικανοποιητική.

Από τη δεύτερη γραφική παράσταση η οποία παρουσιάζει τον Υπολογιστικό Χρόνο που χρειάζεται η κάθε μέθοδος για να εκτιμήσει την αξία του American put σε σχέση με τον αριθμό χρονο-βημάτων, παρατηρούμε πως η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών χρειάζεται το λιγότερο υπολογιστικό χρόνο. Ακολουθεί η LSM Monte Carlo και τελικώς πιο χρονοβόρα μέθοδος είναι η Cox-Ross-Rubenstein. Επομένως, η προσομοίωση μπορεί να θεωρηθεί μια ικανοποιητικά γρήγορη διαδικασία αφού για εκτίμηση με 10000 επαναλήψεις και διαμέριση χρόνου μικρότερη των 200 χρονο-βημάτων, δεν χρειάζεται περισσότερο από 0.5 second.

- Αν εκτελέσουμε το ίδιο ακριβώς πείραμα με $M=100$ όμως επαναλήψεις παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα:

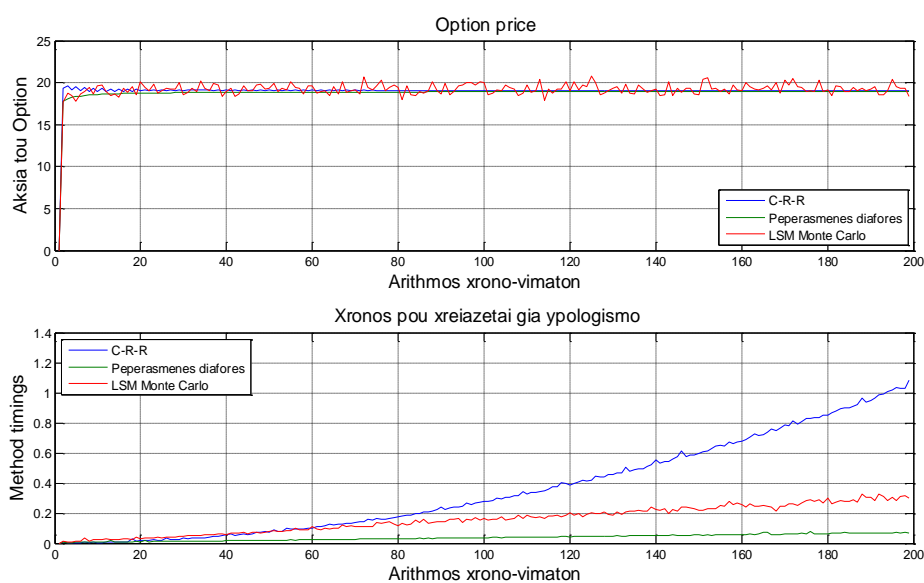


Εικόνα 9: Υπολογιστικός χρόνος των 3 μεθόδων

Παρατηρούμε ότι ο Υπολογιστικός Χρόνος της LSM Monte Carlo μειώθηκε πάρα πολύ(μικρότερος του 0.12 second) αλλά υπάρχει μεγάλη διακύμανση στο αποτέλεσμα της μεθόδου. Ο αριθμός των χρονο-βημάτων δείχνει να παίζει σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα και μάλιστα χωρίς κάποιο ιδιαίτερο τρόπο. Για

παράδειγμα, για διαμέριση χρόνου $N=120$ έχουμε εκτίμηση της αξίας του Put option σχεδόν 27 ενώ για $N=125$ 19, κάτι που υποδεικνύει πως οι μεταβολές μπορεί να είναι πολύ απότομες. Επομένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αυτή την περίπτωση, η επιλογή 100 μόνο τροχιών είναι λανθασμένη καθώς μπορεί να οδηγήσει σε αποτέλεσμα με μεγάλα σφάλματα(σε σχέση πάντοτε με τις άλλες 2 μεθόδους).

- Το πιο πάνω πείραμα για $M=1000$ επαναλήψεις:



Εικόνα 10: Υπολογιστικός χρόνος των 3 μεθόδων

Παρατηρούμε μια αισθητά μικρότερη διακύμανση των αποτελεσμάτων της LSM Monte Carlo γύρω από τη λύση των άλλων δύο μεθόδων. Για ακόμη μια φορά, η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών έχει το μικρότερο Υπολογιστικό Χρόνο ενώ αυτός της LSM Monte Carlo είναι αρκετά ικανοποιητικός (<0.35 second).

4.4.5 Αξία American Put Option σε σχέση με άλλα μεγέθη

Αντίστοιχα με την μελέτη της συμπεριφοράς της αξίας ενός American Call option σε σχέση με διάφορα μεγέθη που κάναμε στην ενότητα 4.3.3, θα εξετάσουμε τώρα τις μεταβολές της αξίας ενός American Put option όταν αλλάζουν κάποια άλλα μεγέθη.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε πως αλλάζει η τιμή του American call option καθώς αλλάζουν κάποια από τα δεδομένα της Monte Carlo προσομοίωσης.

Αριθμός τροχιών Μεθόδου LSM Monte Carlo

Εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου LSM Monte Carlo καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των τροχιών γεωμετρικών κινήσεων Brown (M).

Για $N=300$, $r=0.06$, $\sigma=0.2$, $S_0=10$, $K=12$ και $T=1$ εκτελούμε το πείραμα αλλάζοντας κάθε φορά τον αριθμό τροχιών M. Τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

Πίνακας 4.3.1

(Λύση με μέθοδο Πεπερασμένων διαφορών για $N=300$ και διαμέριση των τιμών ίση με $M=10000$, παίρνουμε $C_0^{FD} = 1.9970$)

Πίνακας 4.4.11

Αριθμός Τροχιών (M)	Αποτέλεσμα LSM Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0^{LSM})	95% δ.ε	Απόκλιση από λύση με Πεπερασμένες Διαφορές $ C_0^{FD} - \hat{C}_0^{LSM} $
10	2.8851	2.4887 3.2815	0.8881
100	2.2320	2.0610 2.4029	0.235
1000	2.0313	2.0034 2.0593	0.0343
10000	2.0012	1.9930 2.0093	0.0042

Όπως ήταν λοιπόν αναμενόμενο, η μέθοδος συγκλίνει με μεγαλύτερη ακρίβεια όσο αυξάνουμε το δείγμα τροχιών που χρησιμοποιούμε. Στις 1000 προσομοιώσεις τροχιών, πετύχαμε ακρίβεια μικρότερη του 0.05 ενώ στις 10000 τροχιές η ακρίβεια ήταν πάρα πολύ μικρή, σχεδόν αμελητέα.

Volatility

Για να εξετάσουμε τη σχέση της αξίας του American Put option με το volatility του υποκείμενου τίτλου, θα εκτελούμε τη μέθοδο LSM Monte Carlo για $M=10000$ τροχιές και διαμέριση χρόνου ίση με $N=300$ κάθε φορά. Τα υπόλοιπα δεδομένα θα είναι:

$$r=0.1, S_0=10, K=12 \text{ και } T=1$$

Για να βγάλουμε ακόμα πιο ασφαλή συμπεράσματα κρατήσαμε την ίδια ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών σε όλα τα πειράματα. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Πίνακας 4.4.12

Volatility (σ)	Αποτέλεσμα LSM Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0^{LSM})	95% δ.ε
0.1	1.9975	1.9964 1.9987
0.2	2.0078	1.9998 2.0159
0.3	2.2128	2.1888 2.2367
0.5	2.9221	2.8818 2.9624
0.7	3.6900	3.6383 3.7416
0.9	4.4707	4.4093 4.5321

Παρατηρώντας τον Πίνακα 4.3.22, βλέπουμε πως όσο μεγαλύτερο είναι το volatility του υποκείμενου τίτλου τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του δικαιώματος. Αυτή η θετική σχέση μεταξύ των δύο είναι αναμενόμενη και παρόμοιο φαινόμενο παρουσίασε και η περίπτωση του American Call. Η εξήγηση είναι η ίδια που δόθηκε και στο call option, αφού το volatility εκφράζει τη μεταβλητότητα στην τιμή ενός υποκείμενου τίτλου πράγμα που σημαίνει πως αν ένας τίτλος έχει μεγάλο volatility τότε παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις στην τιμή του. Επομένως, αν σκεφτούμε μια μετοχή σαν υποκείμενο τίτλο, αν αυτή έχει μεγάλο volatility έχει και μεγάλη πιθανότητα να αποκτήσει μεγάλη απόκλιση στην τιμή της στο μέλλον, είτε αυτή είναι υψηλή είτε χαμηλή. Αυτή λοιπόν η αβεβαιότητα στο πόσο μεγάλες θα είναι οι διακυμάνσεις της μετοχής στο μέλλον, που μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλα κέρδη του κατόχου του put, όχι σε μεγάλες ζημιές αφού αυτές δεν θα ξεπερνούν το ασφάλιστρο, οδηγούν σε όλο και μεγαλύτερη αποτίμηση του put option όσο μεγαλώνει το volatility της μετοχής.

Ημερομηνία Λήξης του Δικαιώματος

Θα εξετάσουμε την επίδραση της ημερομηνίας λήξης T του American put option στην αξία του. Για να το κάνουμε αυτό, κρατούμε σταθερά τα πιο κάτω δεδομένα:

$$N=300, r=0.08, \sigma=0.4, S_0=10, K=12$$

Εκτελούμε τη μέθοδο LSM Monte Carlo για 10^6 τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown κάθε φορά, κάθε φορά οι ίδιες για να έχουμε συγκρίσιμα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω:

Πίνακας 4.4.13

Ημερομηνία λήξης -σε έτη (T)	Αποτέλεσμα LSM Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0^{LSM})	95% δ.ε
0.25	2.0972	2.0781 2.1162
0.5	2.2348	2.2100 2.2596
0.75	2.4001	2.3711 2.4292
1	2.4888	2.4569 2.5207
2	2.8034	2.7648 2.8420

Όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια ζωής του American put option τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του, δηλαδή τα ασφάλιστρα έχουν θετική σχέση με την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρήσαμε και στα American Call options.. Επομένως, όσο πιο μακροπρόθεσμο(μεγάλη ημερομηνία λήξης) είναι το δικαίωμα τόσο πιο ανασφαλές είναι για τον πωλητή, ο οποίος αντισταθμίζει αυτό τον κίνδυνο με μεγαλύτερο ασφάλιστρο.

Τιμή Εξάσκησης(Strike price)

Ας εξετάσουμε τώρα την επίδραση της τιμής εξάσκησης X του American put option στην αξία του. Για να το κάνουμε αυτό, κρατούμε σταθερά τα πιο κάτω δεδομένα:

$$N=300, r=0.1, \sigma=0.2, S_0=10 \text{ και } T=1$$

Εκτελούμε το πείραμα για 10000 τροχιές γεωμετρικής κίνησης Brown κάθε φορά. Τα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω

Πίνακας 4.4.14

Τιμή Εξάσκησης (X)	Αποτέλεσμα LSM Monte Carlo προσομοίωσης (\hat{C}_0^{LSM})	95% δ.ε
9	0.1703	0.1633 0.1772
10	0.4856	0.4742 0.4970
12	1.9971	1.9948 1.9995
14	3.9964	3.9941 3.9987
16	5.9952	5.9930 5.9975

Παρατηρούμε από τον Πίνακα 4.3.14 πως όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή εξάσκησης τόσο μεγαλύτερη είναι και η αξία του παραγώγου. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση των δύο ποσοτήτων στα American Call options στα οποία είχαμε αρνητική σχέση. Ο λόγος είναι απλός και οφείλεται στο ότι στα American put options η απόδοση είναι $\max(X - S_T, 0)$. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το X, τόσο περισσότερες είναι οι πιθανότητες για τον κάτοχο του δικαιώματος να αποκομίσει κέρδος και μάλιστα μεγαλύτερο από τον κάτοχο παρόμοιου τίτλου με μικρότερο strike price.

4.4.6 Αποτίμηση προτερήματος πρόωρης εξάσκησης

Όπως έχει αναφερθεί και πρωτύτερα στην εργασία, τα American type options είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία options λόγω της ξεχωριστής φύσης τους. Πιο συγκεκριμένα, η ιδιότητα τους να μπορούν να εξασκηθούν στις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές στο $[0, T]$, προσφέρουν ένα επιπλέον προτέρημα στον κάτοχο του τίτλου. Αποδείξαμε όμως πως στην περίπτωση του American Call option υπό συνθήκες αγοράς χωρίς μερίσματα, ο κάτοχος του τίτλου δεν χρησιμοποιεί αυτό του το προτέρημα καθώς αντιμετωπίζει το option σαν ένα European type option.

Αντίθετα, ο κάτοχος του American Put option αναζητεί τη βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης, η οποία μπορεί να του καθορίζει να εξασκήσει το option πρόωρα. Αποκτά νόημα λοιπόν να εκτιμήσουμε το όφελος που προκύπτει από την πρόωρη εξάσκηση του American Put option και αυτό θα προσπαθήσουμε σε αυτή την ενότητα.

Ορισμός: Καλούμε *αξία προτερήματος πρόωρης εξάσκησης* τη διαφορά μεταξύ της αξίας ενός European Put option και του αντίστοιχου American Put Option. Συμβολίζουμε:

$$\Pi_{\pi,\varepsilon} = C_0^{Am.put} - C_0^{Eu.put} \quad (4.4.10)$$

,όπου: $C_0^{Am.put}$ η αξία του American put option και $C_0^{Eu.put}$.

Παρατήρηση 1: Η ποσότητα $\Pi_{\pi,\varepsilon}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από 0 [Βλέπε σχέση (1.2.9) της Παραγράφου 1.2.1]

Παρατήρηση 2: Υπενθυμίζουμε πως για την αποτίμηση ενός European Put option, μπορούμε είτε να το αποτιμήσουμε με αναλυτικό τύπο είτε να αποτιμήσουμε το αντίστοιχο European Call option και να χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τη σχέση Put-Call-Parity[$p=(c-S)+X\beta(T)$].

Πίνακας 4.4.15

(Για $r=0.06$)

S_0	K	σ	T	Αποτίμηση σαν American Put ($\hat{C}_0^{Am.put}$)	Αποτίμηση σαν European Put option ($C_0^{Eu.put}$)	Αξία προτερήματος πρώρης εξάσκησης ($\hat{\Pi}_{\pi,\varepsilon}$)
10	12	0.2	1	2.0042	1.6521	0.3510
10	12	0.2	0.75	1.9994	1.6973	0.3021
10	12	0.5	1	2.9576	2.8144	0.1432
25	28	0.3	1	4.1278	3.7951	0.3327
25	30	0.3	1	5.5632	5.0592	0.5040
25	30	0.7	1	9.2734	9.0194	0.254
35	38	0.2	1	3.7588	3.2302	0.5286
35	38	0.4	1	6.3606	6.0126	0.348
35	38	0.4	2	7.7055	7.0182	0.6873
38	40	0.2	1	3.2361	2.8519	0.3842
38	40	0.4	1	6.1335	5.8343	0.2992
38	40	0.4	2	7.6211	6.9788	0.6423
45	45	0.2	1	2.6125	2.3247	0.2878
45	44	0.2	1	2.1869	1.9489	0.2380
45	43	0.2	1	1.8019	1.6137	0.1882
100	105	0.2	1	8.4489	7.3762	1.0727
100	110	0.4	1	18.9786	17.9958	0.9828

Παράρτημα

Στο παράρτημα δίνονται οι κώδικες όλων των μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα διπλωματική εργασία. Έχει χρησιμοποιηθεί μόνο το μαθηματικό πακέτο MATLAB και όποιες βιβλιοθήκες πιθανώς χρειάστηκαν υπάρχουν στην επίσημη σελίδα του.

1) Προσομοίωση κίνησης Brown

```
function brown(n)
%Simulation kinisis Brown sto [0,T]

T=1;
dt=T/n;
t=[0:dt:T];

Z=sqrt(dt)*randn(1,n);

B(1)=0;
for j=1:n
    B(j+1)=B(j)+(sqrt(dt)*Z(j) );
end

plot(t,B)
xlabel('time t','fontsize',10), ylabel('B(t)','fontsize',10,'rotation',0);
title('troxies kinisis brown','fontsize',15);
```

2) Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown (Α' Τρόπος)

```
function[ST] = geometricbrown1(n,m,v,So,T)
%Simulation of Geometric Brown Motion(me kataskevi brown)
%n+1 : diamerisi tou [0,1]
%m : drift
%v : volatility
%Szero : arxiki timi

Z=zeros(1,n);
B=zeros(1,n);
S=zeros(1,n);
t=zeros(1,n+1);

T=1;
dt=T/n;
t=[0:dt:1];

Z=randn(1,n);

dB=sqrt(dt)*Z;
B=cumsum(dB);

S=So * exp( (m-0.5*v*v)*t + v*[0 B]);

ST=S(n+1); %epistrefei tin teliki timi
```

3) Προσομοίωση Γεωμετρικής κίνησης Brown (Β' Τρόπος)

```
function geometricbrown(n,m,v,Szero)
%Simulation of Geometric Brownian Motion
%n+1 : διαμερισί του [0,1]
%m : drift
%v : volatility
%Szero : αρχική τιμή

T=1;
dt=1/n;
t=[0:dt:T];

Z=randn(1,n);

B(1)=0;
S(1)=Szero;

for j=1:n
    B(j+1)=B(j)+(sqrt(dt) * Z(j));
    S(j+1)=Szero * exp(m-0.5*(v^2)*t(j+1) + v*B(j+1));
end

plot(t,S,'k')
xlabel('time t','fontsize',10), ylabel('S(t)','fontsize',10,'rotation',0);
title('Geometric Brownian Motion','fontsize',15);
```

4) Προσομοίωση n το πλήθος κινήσεων Brown

```
function brown_n(N,n)
% n-Brown motions

T=1;
dt=T/n;
t=[0:dt:1];

dW=sqrt(dt)*randn(N,n);
W=cumsum(dW,2);

a=zeros(N,1);

plot(t, [a W])
```

5) Αποτίμηση European Call και European put

```
function [X]=European_theoritiki(So,K,r,v,t,T,type)

%Pricing of European Call or Put with analytical formula
%So=arxiki timi
%K=strike price
%r=epitokio
%v=volatility
%t=simerinos xronos
%T=xronos mexri liksi simvoleou
%type=0 an einai call || 1 an put

Time=T-t;
dt=v*sqrt(Time);
df=r+0.5*v^2;

d1=(log(So/K) + df*Time)/dt;
d2=d1-dt;

%Simeia gia CALL

nd1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
nd2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));

%Simeia gia PUT

nnd1=0.5*(1+erf((-d1)/sqrt(2)));
nnd2=0.5*(1+erf((-d2)/sqrt(2)));

if type==0 %Apotimisi tou call
    Callprice=So*nd1-K*exp(-r*Time)*nd2;
    X=Callprice;
else %Apotimisi tou put
    Putprice=K*exp(-r*Time)*nnd2-So*nnd1;
    X=Putprice;
end
```

6) Monte Carlo simulation για European Call options

```
function montecarlo(N,n,So,K,r,v,T)
%Monte carlo method for pricing gia european call options
%N=arithmos troxion
%n=diamerisi xronou [0,1]
%So=arxiki timi
%K=strike price
%r=epitokio
%v=volatility
%T=imerominia liksis

q=zeros(1,N);
c=zeros(1,N);
euro_call=zeros(1,N);

for i=1:N
    q(i)=gbrownian_ST(n,r,v,So,T);

    c(i)=exp(-r*T)*max(0,q(i)-K); %discounted apodoseis
end

euro_call=mean(c) %mesi timi

width=1.96*std(c)/sqrt(N);
confidence_interval=[euro_call-width, euro_call+width] % 95% diastima empist.

theoretical_value=European_theoritiki(So,K,r,v,0,T)

apoklisi=abs(theoretical_value-euro_call)
```

7) Αποτίμηση American Put option με μέθοδο δεντροδιαγράμματος Cox-Ross-Rubenstein

```
function [Price] = Cox_ross_rubenstein(S0,K,r,T,v,N,type)

% Pricing an American Call or Put with Cox-Ross-Rubenstein tree
%
% S0=Αρχική τιμή
% K=Strike Price
% r=Επιτόκιο
% T=Χρόνος λήξης
% v=Volatility
% N=Διαμερίσεις του χρόνου (πρέπει μεγαλύτερη του 2)
% type=True (default) αν είναι American put, false για American call

if nargin < 7,
    type = true;
end

dt = T/N;

u = exp(v*sqrt(dt)); d = 1/u;    %σταθερές μοντελού
a = exp(r*dt); p = (a-d)/(u-d);

% Δημιουργία τελικών κομμών
S{N+1} = S0*u^N*d^(0:2:2*N);
if type
    % Put option
    P{N+1} = max(K-S{N+1},0);
else
    P{N+1} = max(S{N+1}-K,0);
end
Time{N+1} = T*ones(1,N+1);

% Κινούμεστε πίσω στο χρόνο και υπολογίζουμε την αναμενόμενη απόδοση στους
% προηγούμενους κομμούς. Συγκρίσι με την απόδοση από άμεση εξασκίση και
% επιλογή άμεσης εξασκίσης αν έχει μεγαλύτερη απόδοση

for ii = N:-1:1
    Q = zeros(1,ii);
    V = zeros(1,ii);
    for jj = 1:ii
        % Τιμή μετοχής στον κομμό
        V(jj) = S0*u^(ii-1)*d^(2*(jj-1));

        % Αναμενόμενη απόδοση αν συνεχίσουμε να κατέχουμε τον τίτλο
        E = p*P{ii+1}(jj)/a+(1-p)*P{ii+1}(jj+1)/a;

        % Αποτίμηση αν εξασκίσουμε πρόωρα το option
        if type
```

```

    % Put option
    I = max(K-V(jj),0);
else
    I = max(V(jj)-K,0);
end

% Sygkrisi dyo epilogon kai teliki aksia ston komvo
Q(jj) = max(E,I);
end
S{ii} = V;
P{ii} = Q;
Time{ii} = ii*dt*ones(size(S{ii}));
end

Price = P{1};

```

8) Αποτίμηση American Put option με μέθοδο Ελαχίστων τετραγώνων(LSM Monte Carlo)

```

function [Price,CF,S,t] = LSM_montecarlo(S0,K,r,T,v,N,M)

% The Least Squares Simulation Method
% S0=Αρχικη τιμη ypokeimenou titlou
% K=Τιμη eksaskisis
% r=Επιτοκιο
% T=Ημερομηνια liksis
% v Volatility ypokeimenou titlou
% N Αριθμος χρονικον stigmon sth diamerisi xronou
% M Αριθμος troxion pou prosomoionontai

dt = T/N;

t = 0:dt:T;
t = repmat(t',1,M);

R = exp((r-v^2/2)*dt+v*sqrt(dt)*randn(N,M));%simulation troxion
S = cumprod([S0*ones(1,M); R]);

ExTime = (M+1)*ones(N,1);

% Algorithmos
CF = zeros(size(S)); % Pinakas apodoseon(cash flow)

CF(end,:) = max(K-S(end,:),0); % apodosi mono an einai in-the-money

```

```

for ii = size(S)-1:-1:2

    Idx = find(S(ii,:) < K); % Evresi troxion in the money ti stigmi ii
    X = S(ii,Idx)'; X1 = X/S0; %meiosi arithmitikon sfalmaton diairontas me So
    Y = CF(ii+1,Idx)*exp(-r*dt); % Discounted cashflow

    %R = [ ones(size(X1)) X1 X1.^2]; %an epileksoume sinartiseis vasis 1,X,X^2
    R = [ ones(size(X1)) (1-X1) (1-2*X1-(1/2)*X1.^2)]; %sinartiseis vasis(Laguerre
polynomials)

    a = R\Y; % Grammiki palindromisi kai ypologismos statheron
    C = R*a; % Anamenomenes apodoseis

    Jdx = max(K-X,0) > C; % elegxos an proori eksaskisi kaliteri apo sinexeia
    nIdx = setdiff((1:M),Idx(Jdx));
    CF(ii,Idx(Jdx)) = max(K-X(Jdx),0);
    ExTime(Idx(Jdx)) = ii; %veltistos xronos diakopis
    CF(ii,nIdx) = exp(-r*dt)*CF(ii+1,nIdx); %discount stin apodosi ston veltisto xrono
diakopis
end

Price = mean(CF(2,:))*exp(-r*dt); %mesi timi pano se oles tis troxies,me ekptosi sto
t=0
width=1.96*std(CF(2,:))/sqrt(M);
confidence_interval=[Price-width, Price+width] % 95% diastima empistosinis
end

```


7) Σύγκριση Ταχύτητας Σύγκλισης μεταξύ των μεθόδων LSM Monte Carlo, Πεπερασμένων Διαφορών(Finite Difference) και Cox-Ross-Rubenstein

```
% Sygkrisi 3 methodon apotimisis American PUT
% LSM, Peperasmenon Diaforon, Cox-Ross-Rubenstein

S0 = 100; K = 110; r = 0.06; T = 1; v = 0.4;

Timings = zeros(198,3);

Results = zeros(198,3);

M = 1000; % Arithmos troxion || Diamerisis ton timon(xreiazetai stis FD)
for N = 3:200 %Aksonas ton X, dokimazoume gia diafores diameriseis xronou
    tic;
    Results(N-1,1) = Cox_ross_rubenstein(S0,K,r,T,v,N);
    Timings(N-1,1) = toc;
    tic;
    Results(N-1,2) = Finite_Difference_Solver(S0,K,r,T,v,N,M); % Vivliothiki Matlab
    Timings(N-1,2) = toc;
    tic;
    Results(N-1,3) = LSM_montecarlo(S0,K,r,T,v,N,M);
    Timings(N-1,3) = toc;
end

% Sxediasi ton apotelesmaton
subplot(2,1,1);
plot(Results);
grid
title('Option price','fontsize',14);
xlabel('Arithmos xrono-vimaton','fontsize',14);
ylabel('Aksia tou Option','fontsize',14);
legend('C-R-R','Peperasmenes diafores','LSM Monte Carlo','location','SE');

subplot(2,1,2);
plot(Timings);
grid
title('Xronos pou xreiazetai gia ypologismo','fontsize',14);
xlabel('Arithmos xrono-vimaton','fontsize',14);
ylabel('Method timings','fontsize',14);
legend('C-R-R','Peperasmenes diafores','LSM Monte Carlo','location','NW');
```


Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [1] Benninga S. (2000). Financial Modeling – Uses Excel (Second edition). The MIT Press
- [2] Black F. and Scholes M. (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy
- [3] Christian Bayer (July 2010). Computational Finance. Lecture notes
- [4] Cox J.C and S.A Ross (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. Journal of Economic Theory, vol.20
- [5] D.Lamberton and Bernard Lapeyre (1996). Introduction to stochastic calculus applied to Finance (Translated by Nicolas Rabeau and Francois Mantion). Chapman & Hall
- [6] Duffy D. (2004). Financial Instrument Pricing using C++. John Wiley & Sons Ltd
- [7] Francis A. Longstaff and Eduardo S. Schwartz (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. The Society for Financial Studies
- [8] Geske R. and Johnson H.E (1984). The American put option valued analytically. Journal of Finance, vol.39
- [9] Karatzas I. – Shreve S.E. Brownian motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag 1991
- [10] Karatzas I. (1998). On the Pricing of American Options. Applied Mathematics and Optimization, 17, 37-60
- [11] Oksendal B. Stochastic Differential Equations, 5th edition., Springer 2000
- [12] Robert A. Jarrow (1988). Finance Theory. Prentice-Hall International Editions
- [13] Rogers L.C.G. (2002). Monte Carlo Valuation of American Options. Mathematican Finance, Vol.12, No. 3
- [14] Sean Dineen (2005). Probability Theory in Finance: A mathematical guide to the Black-Scholes formula. American Mathematican Society
- [15] Wilmott P. (2001). Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance. John Wiley & Sons, LTD

- [16] Yue-Kuen Kwok (1998). Mathematical models of financial derivatives.
Springer Finance

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

- [17] Ιω. Σπηλιώτης (2004). Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις, με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ
- [18] Κοκολάκης Γ. και Σπηλιώτης Ι. (1999). Εισαγωγή στη Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική, 3^η Έκδοση. Εκδόσεις Συμεών
- [19] Παπαγεωργίου Γ.Σ, Τσίτουρας Χ.Γ. και Φαμέλης Ι.Θ (2003). Εισαγωγή και Εφαρμογές στο Mathematica & Matlab. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- [20] Πολύκαρπος Παπαδόπουλος (2006). Διπλωματική Εργασία: Αριθμητικές Μέθοδοι Αποτίμησης Παραγώγων. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
- [21] Φελλούρης Γ. (2004). Διπλωματική Εργασία: Monte Carlo Προσομοίωση & Εφαρμογές στην Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα

