



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αλγόριθμοι για Δίκαια και Σταθερά
Ταιριάσματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΤΖΙΑΒΕΛΗ

Επιβλέπων: Νεκτάριος Κοζύρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
Αθήνα, Ιούλιος 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Υπολογιστικών Συστημάτων

Αλγόριθμοι για Δίκαια και Σταθερά Ταιριάσματα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΤΖΙΑΒΕΛΗ

Επιβλέπων: Νεκτάριος Κοζύρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20η Ιουλίου 2018.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Νεκτάριος Κοζύρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Γκούμας
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Παπασπύρου
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2018

(Υπογραφή)

.....
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΤΖΙΑΒΕΛΗΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2018 – All rights reserved



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Υπολογιστικών Συστημάτων

Copyright ©–All rights reserved Νικόλαος Τζιαβέλης, 2018.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νεκτάριο Κοζύρη για την ευκαιρία που μου έδωσε να διεκπεραιώσω αυτή τη διπλωματική εργασία στο Εργαστήριο Υπολογιστικών Συστημάτων το οποίο διευθύνει. Ένα ισάξια μεγάλο ευχαριστώ στον καθηγητή κ. Παναγιώτη Καρρά για τον ενθουσιασμό, την εμπιστοσύνη και την υπομονή κατά τη διάρκεια της συνεργασίας μας, αλλά και για τη συνεισφορά του, αν και εκτός του ιδρύματος, στο σχηματισμό της ερευνητικής μου ταυτότητας. Ευχαριστώ ακόμη ιδιαίτερα την Κατερίνα Δόκα και το Γιάννη Γιαννακόπουλο για την καθοδήγηση και στήριξή τους κάθε φορά που τη χρειαζόμουν. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου κ. Γεώργιο Γκούμα και κ. Νικόλαο Παπασπύρου για αυτά που κέρδισα μέσω των μαθημάτων τους, στα οποία αφιερώνονται με όρεξη και αγάπη.

Τέλος, ολοκληρώνοντας τη φοιτητική μου πορεία στο ΕΜΠ, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για όσα μου έχει προσφέρει και να αφιερώσω αυτή την εργασία στην Αγάπη που ήταν πάντα δίπλα μου αυτά τα χρόνια, ωθώντας με να γίνομαι συνεχώς καλύτερος.

Περίληψη

Το πρόβλημα του σταθερού γάμου (ή σταθερού ταιριάσματος) ζητά την εύρεση ενός τέλειου διμερούς ταιριάσματος σε μία αγορά δύο πλευρών (π.χ. αιτούντες εργασία και εργοδότες), όπου κάθε ενδιαφερόμενος κατατάσσει πλήρως τα μέλη της άλλης πλευράς βάσει των προτιμήσεών του. Το ταιρίασμα αυτό θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από *σταθερότητα*, υπό την έννοια ότι κανένα ζευγάρι παικτών δε θα εγκατέλειπαν αμφότεροι τα ταιρία τους επειδή προτιμούν να είναι μαζί. Οι Gale και Shapley που διατύπωσαν το πρόβλημα, έδωσαν έναν αλγόριθμο ο οποίος βρίσκει πάντα μία τέτοια σταθερή λύση σε πολυωνυμικό χρόνο. Όμως, ο αλγόριθμος αυτός μεροληπτεί υπέρ της μίας πλευράς, δίνοντάς της τα καλύτερα δυνατά ζευγάρια όσον αφορά τις προτιμήσεις, ενώ στην άλλη δίνει τα χειρότερα δυνατά. Είναι λοιπόν εύλογο να αναζητήσουμε άλλες λύσεις, οι οποίες θα είναι υπό κάποια έννοια πιο *δίκαιες*. Παρ' όλα αυτά, η βελτιστοποίηση μετρικών που αντικατοπτρίζουν τη δικαιοσύνη σε αυτό το πρόβλημα είναι NP-hard.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, θα κάνουμε μία εκτενή μελέτη όλων των αλγορίθμων που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία και ευελπιστούν να δώσουν δίκαια και σταθερά ταιριάσματα. Προσαρμόζοντας και συνδυάζοντας τους με νέους, θα σχεδιάσουμε αλγορίθμους που ξεπερνούν τους υπάρχοντες σε απόδοση, κλιμακωσιμότητα και δικαιοσύνη. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει μία διεξοδική πειραματική αξιολόγηση πάνω σε διάφορες κατανομές προτιμήσεων, στην οποία θα αντιπαραβάλλουμε όλους τους διαφορετικούς αλγορίθμους και μηχανισμούς, εντοπίζοντας τις υπερέχουσες στρατηγικές.

Λέξεις Κλειδιά

σταθερός γάμος, διμερές ταιρίασμα, λίστες προτιμήσεων, κατανομές προτιμήσεων, σταθερότητα, μετρικές δικαιοσύνης.

Abstract

The *stable marriage* (or *stable matching*) problem calls for finding a perfect bipartite matching among agents in a two-sided market (e.g., job applicants and employers), where stakeholders have ranked preferences for those on the other side. The solution must be *stable*, meaning that no pair of agents would rather exchange their assigned matches for each other. Gale and Shapley who introduced the problem, proposed an algorithm that yields a stable solution for any instance in polynomial time. However, this algorithm favors one side over the other, assigning an *optimal* match, in terms of preference, to each agent on the one side, and a *pessimal* one to each on the other side. It is, thus, reasonable to ask for other solutions that would be *equitable* under some notion of fairness. Unfortunately, optimizing reasonable measures of fairness among the two sides is NP-hard.

In this diploma thesis, we present a detailed study of all proposed algorithms that hope to yield fair and stable matchings. By tuning and combining them with novel ones, we design algorithms that outperform previous works in efficiency, scalability and equity. Then, we conduct a thorough experimental evaluation with diverse preference distributions, juxtaposing all algorithms and mechanisms, and single out the winning strategies.

Keywords

stable marriage, bipartite matching, preference lists, preference distributions, stability, fairness metrics.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Περίληψη	3
Abstract	5
Περιεχόμενα	8
Κατάλογος Σχημάτων	9
Κατάλογος Πινάκων	11
1 Εισαγωγή	13
1.1 Συνεισφορά	14
1.2 Οργάνωση της διπλωματικής	15
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	17
2.1 Το πρόβλημα του σταθερού γάμου	17
2.2 Ο αλγόριθμος Deferred Acceptance	18
2.3 Η δικτυωτή δομή του προβλήματος	20
2.4 Ορίζοντας τη δικαιοσύνη	23
3 Επισκόπηση σχετικών εργασιών	27
3.1 Αλγόριθμοι που ικανοποιούν blocking pairs	28
3.2 Αλγόριθμοι που εκτελούν προτάσεις	29
3.3 Αλγόριθμοι που εκμεταλλεύονται το lattice	31
3.4 Άλλοι αλγόριθμοι	32
3.5 Σύνοψη	33
4 Strongly-Deferred Acceptance	35
4.1 Ορισμός	35
4.2 Ιδιότητες	36
4.3 Αξιοποιώντας την SDA	38
4.3.1 Τερματισμός	38

4.3.2	Αλγόριθμος	40
5	Μία υβριδική προσέγγιση	43
5.1	Βελτίωση του local search	43
5.2	Υβριδικοί αλγόριθμοι	44
6	Πειραματική Μελέτη	47
6.1	Ανάλυση	48
6.1.1	Σύγκλιση Μηχανισμών	48
6.1.2	Ρύθμιση παραμέτρου του POWERBALANCE	49
6.1.3	Αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα του POWERBALANCE	50
6.1.4	Παράμετρος πιθανότητας του BILS	52
6.2	Αξιολόγηση Απόδοσης	53
6.2.1	Σύγκριση χωρίς μεθόδους local search	55
6.2.2	Σύγκριση με μεθόδους local search	56
6.2.3	Σύγκριση με τον APPROX	59
6.3	Εφαρμογή στην Ανάθεση Φοιτητών σε Σχολές	59
7	Επίλογος	63
7.1	Σύνοψη και συμπεράσματα	63
7.2	Μελλοντικές επεκτάσεις	63
	Βιβλιογραφία	64

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Διάγραμμα Hasse του lattice που σχηματίζουν οι λύσεις του στιγμιότυπου 2.1	21
2.2	Το rotation poset του στιγμιότυπου 2.1	22
5.1	HYBRIDMULTISEARCH	45
6.1	Σύγκλιση DA vs SDA	48
6.2	Βέλτιστη παράμετρος του POWERBALANCE	50
6.3	Αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα του POWERBALANCE	51
6.4	Μελέτη πιθανότητας του BILS	53
6.5	Σύγκριση απόδοσης χωρίς μεθόδους local search	54
6.6	Σύγκριση απόδοσης συμπεριλαμβανομένων των μεθόδων local search	57
6.7	Απόδοση του προσεγγιστικού αλγορίθμου	58
6.8	Ταίριασμα Φοιτητών με Σχολές	61

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Στιγμιότυπο σταθερού γάμου μεγέθους 8	17
3.1	Σχετικοί αλγόριθμοι με ισχύουσες (✓) ή μη (✗) ιδιότητες και πολυπλοκότητα.	33

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Μία διαδικασία ταιριάσματος μεταξύ δύο πλευρών μίας αγοράς μπορεί να καθορίσει το ποιος εργαζόμενος θα πάρει ποια θέση εργασίας [44, 46, 35] ή ποιος μαθητής θα πάει σε ποιο σχολείο [50]. Οι Gale και Shapley [18] πρότειναν ένα απλό μοντέλο για την επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, όπου ο κάθε παίκτης κατατάσσει πλήρως τα μέλη της άλλης πλευράς με φθίνουσα σειρά προτίμησης, δημιουργώντας τη λίστα προτιμήσεών του. Στη συνέχεια, η μία πλευρά (π.χ. οι άντρες) αναλαμβάνουν τον ενεργό ρόλο των προτεινόντων (*proposers*) που στέλνουν προτάσεις (προσφορές) στην παθητική πλευρά των αποδεκτών (*receivers*). Οι receivers κρατούν κάθε στιγμή χωρίς δέσμευση την καλύτερη πρόταση που έχουν δεχτεί, αναβάλλοντας τις τελικές αποδοχές μέχρι το τέλος του αλγορίθμου όπου κανείς δε θα θέλει πια να κάνει προτάσεις. Αν οι δύο πλευρές έχουν τον ίδιο αριθμό ατόμων n τότε ο αλγόριθμος Gale-Shapley ή αλγόριθμος Αναβεβλημένης Αποδοχής (*Deferred Acceptance*) [45] βρίσκει πάντα ένα τέλειο ταιρίασμα σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$. Το ταιρίασμα αυτό είναι σταθερό υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι παικτών που θα προτιμούσαν να έχουν ταιριαστεί (ή παντρευτεί) μαζί αντί για τα ταιρία που τους ανατέθηκαν. Ο αλγόριθμος Deferred Acceptance (εν συντομία DA) έχει επηρεάσει σημαντικά το σχεδιασμό αγορών σε όλο τον κόσμο, τόσο με την εφαρμογή του σε πρακτικά συστήματα, όσο και μέσω των θεωρητικών ερωτήσεων που εγείρει [45]. Οι Roth και Shapley μοιράστηκαν το βραβείο "Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel" για τη δουλειά τους πάνω στη "θεωρία των σταθερών καταμερισμών και την πρακτική του σχεδιασμού αγορών", αντανακλώντας τη συνεισφορά του Shapley στον DA αλγόριθμο μεταξύ άλλων πρωτοποριών και της εφαρμογής από τον Roth αυτών των αποτελεσμάτων πάνω σε πραγματικές αγορές, οι οποίες σχετίζονται με την ανάθεση νέων γιατρών σε νοσοκομεία, μαθητών σε σχολεία και ασθενών που πάσχουν από νεφρική ανεπάρκεια σε δωρητές οργάνων [37].

Παρ' όλα αυτά, ο DA αλγόριθμος επιστρέφει μία βέλτιστη λύση για την ενεργή πλευρά, καθώς κάθε μέλος της παίρνει το καλύτερο δυνατό ζευγάρι που θα μπορούσε να πάρει σε οποιοδήποτε σταθερό ταιρίασμα, και αντιστρόφως τα μέλη της παθητικής πλευράς παίρνουν το χειρότερο δυνατό [18]. Επομένως, αναλόγως με το ποια πλευρά κάνει τις προτάσεις, μπορούμε εύκολα να βρούμε δύο «ακραίες» λύσεις, οι οποίες μπορεί ακόμη και να ταυτίζονται σε κάποια στιγμιότυπα, όμως στη γενική περίπτωση τα πιθανά σταθερά ταιριάσματα που βρίσκονται «α-

νάμεσα» σε αυτές μπορεί να αυξάνονται με εκθετικό ρυθμό [32, 33]. Ανακύπτει λοιπόν φυσικά η ερώτηση για το πώς θα ορίσουμε και θα βρούμε το «καλύτερο» σταθερό ταίριασμα.

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν κεντρικά συστήματα για την εισαγωγή φοιτητών σε ιδρύματα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπως στην Κίνα [37] ή γενικότερα σχήματα όπου ενδιαφερόμενοι αιτούνται για εκπαιδευτικά προγράμματα και κατατάσσονται με κάποιο τρόπο για την αποδοχή τους [11]. Τέτοια μπορεί να συναντήσει κανείς στην Ελλάδα, στη Γερμανία [12], στην Ουγγαρία [10], στην Ισπανία [41], στην Τουρκία [8, 11, 5] και σε κάποιες γειτονίες των ΗΠΑ όσον αφορά την ανάθεση μαθητών σε σχολεία [1, 3, 2]. Στην Ουγγαρία από το 1985 έως το 2007 ο αλγόριθμος βασιζόταν στον DA μηχανισμό με τα πανεπιστήμια ως προτείνοντες [9], θέτοντας αργότερα τους υποψήφιους ως προτείνοντες [10]. Μία παρόμοια αλλαγή συνέβη και στο US National Resident Matching Program [47]. Ταυτόχρονα, το πρόβλημα του σταθερού γάμου χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της ανάθεσης εικονικών μηχανών σε πελάτες σε σύγχρονες υποδομές υπολογιστικού νέφους [53, 34, 29], όπου επιδιώκεται ο συμβιβασμός των συμφερόντων του παρόχου και των πελατών. Αντί λοιπόν να πρέπει να αποφασίσουμε μεταξύ των δύο «ακραίων» λύσεων, μπορεί να είναι προς όφελος όλων να βρεθούν σταθερά ταιριάσματα τα οποία να είναι ικανοποιητικά και «δίκαια» και για τις δύο πλευρές. Όμως, το να βρεθεί μία τέτοια βέλτιστη λύση είναι NP-hard, σύμφωνα με τους συνήθεις ορισμούς της δικαιοσύνης [28, 17]. Ως αποτέλεσμα, έχουν προταθεί διάφοροι αλγόριθμοι που μπορούν να χωριστούν συνοπτικά στις εξής κατηγορίες:

1. Ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος με υψηλή πολυωνυμική πολυπλοκότητα [27].
2. Αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου που ελαχιστοποιούν κόστη τα οποία στοχεύουν στην ευημερία των παικτών αλλά δεν αντικατοπτρίζουν επαρκώς τη δικαιοσύνη [21, 25, 16].
3. Αλγόριθμοι που είναι διαδικαστικά δίκαιοι, δηλαδή καταλήγουν σε ένα αποτέλεσμα χωρίς να επωφελούν ρητά τη μία πλευρά [15, 20, 14].
4. Πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης (*local search*) που στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση κάποιου συγκεκριμένου κόστους [52, 51].

Δυστυχώς, οι δουλειές αυτές έχουν παρουσιαστεί σχετικά ανεξάρτητα η μία από την άλλη και η σύγκρισή τους σε πειραματικό επίπεδο με δεδομένα που να ανταποκρίνονται σε όγκο στην πραγματικότητα είναι μέχρι στιγμής λιγοστή. Ως αποτέλεσμα, δεν είναι σαφές ποιος αλγόριθμος είναι καλύτερος όσον αφορά την ποιότητα της λύσης, όπως μετράται από κάποια μετρική δικαιοσύνης, την αποδοτικότητα ως προς το χρόνο και την κλιμακωσιμότητα.

1.1 Συνεισφορά

Η συνεισφορά της διπλωματικής συνοψίζεται ως εξής:

- Παρουσιάζουμε μία αναλυτική μελέτη και σύγκριση όλων των σχετικών εργασιών που έχουν ενδεχομένως παρουσιαστεί χωριστά η μία από την άλλη.

- Αναπτύσσουμε μία παραλλαγή της DA διαδικασίας, την οποία ονομάζουμε *Strongly Deferred Acceptance* (SDA), για την οποία δείχνουμε μία σειρά από ιδιότητες, μεταξύ των οποίων η εγγυημένη σύγκλιση σε σταθερή λύση.
- Εκμεταλλευόμενοι την SDA, σχεδιάζουμε έναν απλό και γρήγορο αλγόριθμο προτάσεων, τον POWERBALANCE, που δίνει καλύτερα αποτελέσματα από αυτούς που είναι απλώς διαδικαστικά δίκαιοι.
- Συνδυάζοντας τον POWERBALANCE με την local search τακτική, φτιάχνουμε υβριδικές προσεγγίσεις, που υπερέχουν σε ποιότητα λύσεων, ενώ διατηρούν την πολυπλοκότητα χαμηλή.
- Διεξάγουμε μία εκτενή πειραματική αξιολόγηση πάνω σε διαφορετικές κατανομές προτιμήσεων και σε στιγμιότυπα μεγάλου μεγέθους.

1.2 Οργάνωση της διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική οργανώνεται με τον ακόλουθο τρόπο: Στο Κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τυπικά το πρόβλημα και θα δώσουμε όλες τις απαραίτητες έννοιες και ορισμούς. Στο Κεφάλαιο 3 θα κάνουμε μία επισκόπηση όλων των σχετικών εργασιών που πραγματεύονται το πρόβλημα και προσπαθούν να δώσουν μία δίκαιη λύση. Στο Κεφάλαιο 4 θα εισάγουμε ένα νέο μηχανισμό προτάσεων, τον οποίο θα ονομάσουμε Strongly Deferred Acceptance και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές του, προτείνοντας τελικά ένα νέο αλγόριθμο προτάσεων. Στο Κεφάλαιο 5 θα δούμε πώς μια διαδικασία προτάσεων μπορεί να συνδυαστεί με την τεχνική του local search. Τέλος, το Κεφάλαιο 6 θα περιέχει την πειραματική μας μελέτη και θα κλείσουμε με τον επίλογο στο Κεφάλαιο 7.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

2.1 Το πρόβλημα του σταθερού γάμου

Ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος του σταθερού γάμου (*stable marriage problem*) μεγέθους n αποτελείται από ένα σύνολο $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ αντρών και ένα σύνολο $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ γυναικών, όπου το κάθε άτομο (ή παίκτης) έχει μία λίστα προτιμήσεων μήκους n , η οποία κατατάσσει πλήρως και ολικώς τα μέλη της άλλης πλευράς, ξεκινώντας από τον πιο επιθυμητό και καταλήγοντας στον λιγότερο επιθυμητό. Αν ℓ_{q_i} είναι η λίστα προτιμήσεων του παίκτη q_i , τότε $\ell_{q_i}[k] = p_j$ σημαίνει ότι ο q_i κατατάσσει τον παίκτη p_j στη θέση k . Εναλλακτικά, γράφουμε $pr_{q_i}(p_j) = k$. Αν μία γυναίκα w προτιμά τον άντρα m_1 από τον άντρα m_2 , δηλαδή $pr_w(m_1) < pr_w(m_2)$, τότε θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $m_1 \succ_w m_2$. Αντιστοίχως για τις προτιμήσεις των αντρών. Η είσοδος λοιπόν αποτελείται από $2n^2$ ακεραίους που είναι το συνολικό μήκος των λιστών προτιμήσεων. Στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε ένα παράδειγμα μίας τέτοιας εισόδου με μέγεθος $n = 8$.

Λίστες προτιμήσεων αντρών	Λίστες προτιμήσεων γυναικών
Άντρας 1:[5, 7, 1, 2, 6, 8, 4, 3]	Γυναίκα 1:[5, 3, 7, 6, 1, 2, 8, 4]
Άντρας 2:[2, 3, 7, 5, 4, 1, 8, 6]	Γυναίκα 2:[8, 6, 3, 5, 7, 2, 1, 4]
Άντρας 3:[8, 5, 1, 4, 6, 2, 3, 7]	Γυναίκα 3:[1, 5, 6, 2, 4, 8, 7, 3]
Άντρας 4:[3, 2, 7, 4, 1, 6, 8, 5]	Γυναίκα 4:[8, 7, 3, 2, 4, 1, 5, 6]
Άντρας 5:[7, 2, 5, 1, 3, 6, 8, 4]	Γυναίκα 5:[6, 4, 7, 3, 8, 1, 2, 5]
Άντρας 6:[1, 6, 7, 5, 8, 4, 2, 3]	Γυναίκα 6:[2, 8, 5, 4, 6, 3, 7, 1]
Άντρας 7:[2, 5, 7, 6, 3, 4, 8, 1]	Γυναίκα 7:[7, 5, 2, 1, 8, 6, 4, 3]
Άντρας 8:[3, 8, 4, 5, 7, 2, 6, 1]	Γυναίκα 8:[7, 4, 1, 5, 2, 3, 6, 8]

Πίνακας 2.1: Στιγμιότυπο σταθερού γάμου μεγέθους 8

Ένα (τέλειο) *ταίριασμα* M στο I είναι ένα σύνολο από διαζευγμένα (disjoint) ζευγάρια αντρών-γυναικών. Αν μία γυναίκα w κι ένας άντρας m είναι ταιριασμένοι (ή παντρεμένοι) στο M , γράφουμε $M(w) = m$ και $M(m) = w$ ή αλλιώς $(m, w) \in M$. Μία γυναίκα w κι ένας άντρας m σχηματίζουν ένα *blocking pair* για το ταίριασμα M όταν ισχύουν οι ακόλουθες

προϋποθέσεις:

1. $(m, w) \notin M$
2. $w \succ_m M(m)$
3. $m \succ_w M(w)$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι m και w μπλοκάρουν το M . Ένα ταίριασμα M είναι σταθερό όταν δεν υπάρχει κανένα blocking pair στο M , σε αντίθετη περίπτωση είναι ασταθές. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη ενός blocking pair παραβιάζει την ισορροπία του ταϊριασματος M αφού οι παίκτες που μπλοκάρουν το M έχουν κίνητρο να αφήσουν τα ζευγάρια τους και να δημιουργήσουν ένα άλλο ταίριασμα στο οποίο θα είναι ταϊριασμένοι μαζί. Το πρόβλημα του σταθερού γάμου ζητά να βρεθεί ένα τέλειο σταθερό ταίριασμα για ένα δεδομένο στιγμιότυπο I .

Στα επόμενα, θα μας φανεί χρήσιμος και ο ακόλουθος ορισμός, ο οποίος χαρακτηρίζει τα blocking pairs:

Ορισμός 2.1. Ένα blocking pair θα καλείται *dominated* από την οπτική των αντρών αν υπάρχει ένα άλλο blocking pair (m, w') τέτοιο ώστε $w' \succ_m w$. Σε αντίθετη περίπτωση θα ονομάζεται *undominated* (από την οπτική των αντρών).

Αντίστοιχα ορίζεται η ίδια έννοια και για τις γυναίκες.

2.2 Ο αλγόριθμος Deferred Acceptance

Ο αλγόριθμος Deferred Acceptance (DA) [18] βάζει τη μία από τις δύο πλευρές σε πλεονεκτική θέση δίνοντας της τον ενεργό ρόλο των proposers και λειτουργεί με μία ακολουθία προτάσεων. Ας υποθέσουμε ότι ο ρόλος αυτός δίνεται στους άντρες M . Οι άντρες διατηρούν ένα δείκτη κ στη λίστα προτιμήσεών τους, ο οποίος υποδεικνύει σε ποια θέση θα γίνει η επόμενη πρόταση και φυσικά αρχικοποιείται στο 0 για όλους. Σε κάθε γύρο, κάθε άντρας m που δεν έχει ακόμη ταίρι κάνει μία πρόταση στη γυναίκα που βρίσκεται στην επόμενη θέση της λίστας προτιμήσεών του, δηλαδή στην $w = \ell_m[\kappa_m]$. Οι γυναίκες έχουν τον παθητικό ρόλο των receivers και ανταποκρίνονται στις προτάσεις, κρατώντας κάθε στιγμή την καλύτερη πρόταση που έχουν δεχθεί. Συνεπώς μία γυναίκα r θα δεχθεί την πρόταση από έναν άντρα p , σχηματίζοντας το ζεύγος (p, r) κάτω από την ακόλουθη συνθήκη:

$$\text{accept}(r, p) = \text{single}(r) \vee p \succ_r \mu(r) \quad (2.1)$$

όπου φυσικά μ είναι το ταίριασμα που έχει δημιουργηθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Μία αποδοχή μπορεί να σημαίνει ότι κάποιος άντρας που είχε βρει ταίρι πλέον θα είναι αταίριαστος (*single*), άρα θα συνεχίσει κανονικά τις προτάσεις του. Αν μία πρόταση απορριφθεί τότε ο p που την έκανε θα προχωρήσει το δείκτη κ_p στην επόμενη θέση ώστε να προτείνει εκεί στον επόμενο γύρο.

Algorithm 1 Deferred Acceptance**Input:** \mathcal{M}, \mathcal{W} **Output:** stable matching μ

```

1:  $\mu = \emptyset$  ▷ Initialize
2: for all  $m \in \mathcal{M}$  do
3:    $\kappa_m = 0$ 
4: while  $\exists p \in \mathcal{M} : \mu(p) = \emptyset$  do ▷ Locate single man
5:   PROPOSE( $p, \mu$ )
6: return  $\mu$ 

```

Algorithm 2 DA-Proposal

```

1: procedure PROPOSE( $p, \mu$ ) ▷ proposer  $p$ , matching  $\mu$ 
2:    $r = \ell_p[\kappa_p]$  ▷  $p$  wants to propose to  $r$ 
3:   if accept( $r, p$ ) then
4:     if  $\mu(r) \neq \emptyset$  then ▷ break up  $r$  if married
5:        $q = \mu(r)$ 
6:        $\mu = \mu \setminus \{\langle q, r \rangle\}$ 
7:        $\mu = \mu \cup \{\langle p, r \rangle\}$  ▷ match  $p$  and  $r$ 
8:     else
9:        $\kappa_p = \kappa_p + 1$  ▷  $r$  rejects  $p$ 

```

Παρακάτω φαίνεται ο ψευδοκώδικας του αλγορίθμου, ο οποίος χρησιμοποιεί τη διαδικασία της πρότασης (DA-Proposal) ως βασικό δομικό στοιχείο:

Ο DA αλγόριθμος τερματίζει σε $\mathcal{O}(n^2)$ βήματα [22], λόγω των ιδιοτήτων μονοτονικότητάς του. Ο αριθμός των ζευγών είναι μη-φθίνων, καθώς νέα ζεύγη μπορούν να σχηματιστούν, όμως υπάρχοντα γίνεται να χαλάσουν μόνο αν μια γυναίκα ανταλλάξει ένα σύζυγο για κάποιον άλλο. Σε τέτοια περίπτωση, η προτίμηση (ή ικανοποίηση) για το ταίρι της αυξάνεται. Οπότε, οι προτιμήσεις των γυναικών για τα ταίρια τους μπορούν μόνο να αυξηθούν, ενώ αυτές των αντρών μπορούν μόνο να μειωθούν. Στη χειρότερη περίπτωση, ο αλγόριθμος θα τερματίσει όταν οι άντρες εξαντλήσουν τις λίστες προτιμήσεών τους, οι οποίες είναι $\mathcal{O}(n^2)$ σε μήκος.

Η πλευρά που προτείνει στον DA αλγόριθμο επωφελείται σε βάρος της άλλης πλευράς, παίρνοντας το βέλτιστο γι' αυτήν σταθερό ταίριασμα. Αν θέσουμε ως proposers τους άντρες, τότε προκύπτει η Male-Optimal λύση, ενώ αν proposers είναι οι γυναίκες, θα πάρουμε την Female-Optimal λύση, όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα [22]:

Θεώρημα 2.1. Όλες οι δυνατές εκτελέσεις του DA αλγορίθμου δίνουν το ίδιο σταθερό ταίριασμα ως αποτέλεσμα και σε αυτό, κάθε άντρας παίρνει το καλύτερο ταίρι που θα μπορούσε να πάρει σε οποιοδήποτε σταθερό ταίριασμα. Σε αυτή την Male-Optimal λύση, κάθε γυναίκα παίρνει το χειρότερο ταίρι που θα μπορούσε να πάρει σε οποιοδήποτε σταθερό ταίριασμα.

Αυτή η άνιση μεταχείριση των δύο πλευρών είναι που έχει παρακινήσει την αναζήτηση για άλλα σταθερά ταίριασμα, που θα είναι πιο δίκαια για τις δύο πλευρές.

2.3 Η δικτυωτή δομή του προβλήματος

Το σύνολο των λύσεων ενός στιγμιότυπου του προβλήματος του σταθερού γάμου παρουσιάζει μία ενδιαφέρουσα δομή, την οποία θα εξερευνήσουμε σε αυτή την ενότητα. Πρώτα δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς:

Ορισμός 2.2. Μία σχέση \leq πάνω σε ένα σύνολο \mathcal{A} είναι σχέση μερικής διάταξης αν και μόνο αν είναι:

- ανακλαστική: $\forall a \in \mathcal{A}, a \leq a$,
- αντισυμμετρική: αν $a \leq b$ και $b \leq a$ τότε $a = b$,
- μεταβατική: αν $a \leq b$ και $b \leq c$ τότε $a \leq c$.

Ορισμός 2.3. Το στοιχείο $a \in \mathcal{A}$ είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα κάτω φράγμα) του συνόλου $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ αν για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει $b \leq a$ (αντίστοιχα $a \leq b$).

Ορισμός 2.4. Το στοιχείο $a \in \mathcal{A}$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα (αντίστοιχα μέγιστο κάτω φράγμα) του συνόλου $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ αν για κάθε b που είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα κάτω φράγμα) του \mathcal{B} ισχύει $a \leq b$ (αντίστοιχα $b \leq a$).

Ορισμός 2.5. Ένα σύνολο \mathcal{A} το οποίο διατάσσεται μερικώς από μία σχέση \leq είναι lattice (δικτυωτό) αν κάθε ζεύγος στοιχείων έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα.

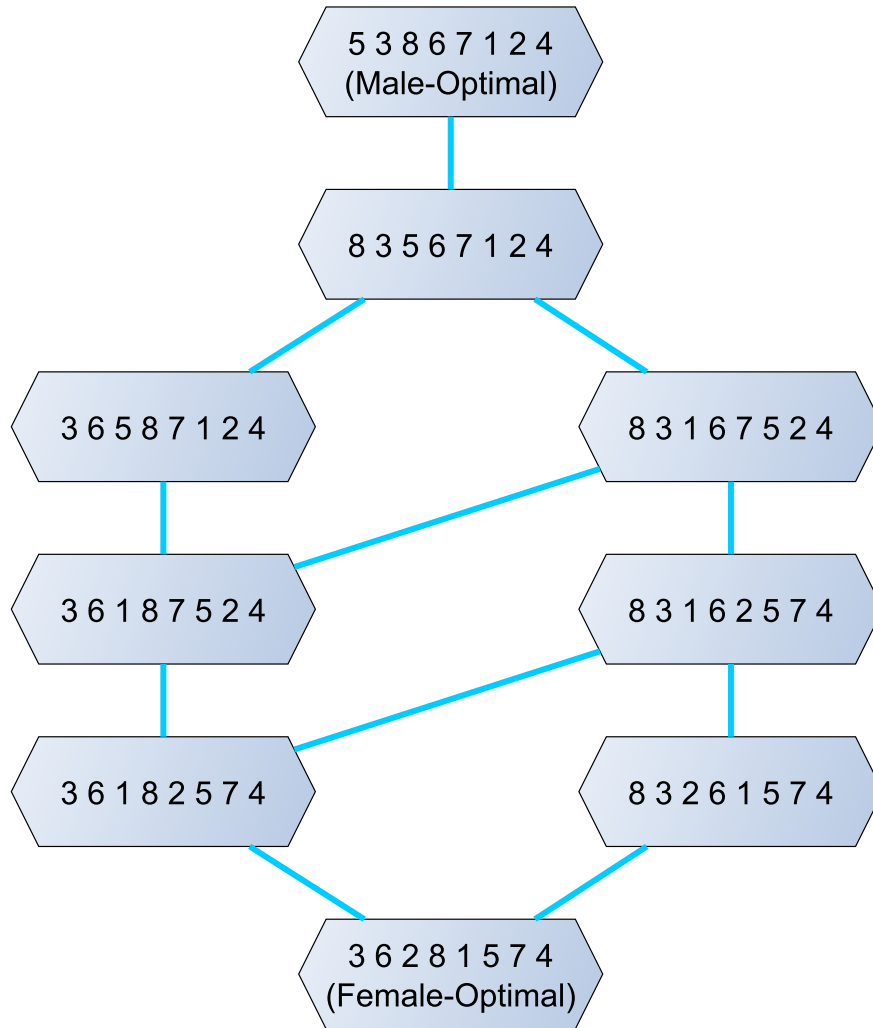
Στο πλαίσιο του προβλήματος του σταθερού γάμου, ορίζεται μία σχέση μερικής διάταξης πάνω στο σύνολο των σταθερών ταιριασμάτων ενός στιγμιότυπου:

Ορισμός 2.6. Έστω M και M' δύο σταθερά ταιριάσματα. Λέμε ότι το M κυριαρχεί (*dominates*) το M' από την οπτική των αντρών, αν κάθε άντρας παίρνει στο M ένα ταίρι που είναι τουλάχιστον τόσο καλό όσο το ταίρι του στο M' .¹

Είναι γνωστό ότι το σύνολο των σταθερών ταιριασμάτων σχηματίζει ένα δικτυωτό (*lattice*) κάτω από αυτή τη σχέση κυριαρχίας (*dominance*) [32, 33], όπου τα μοναδικά μέγιστα και ελάχιστα στοιχεία είναι οι Male-Optimal και Female-Optimal λύσεις που είναι οι δύο πιθανές έξοδοι του DA αλγορίθμου. Στο Σχήμα 2.1 δείχνουμε ένα παράδειγμα Hasse διαγράμματος που αναπαριστά το lattice που προκύπτει από το στιγμιότυπο του Πίνακα 2.1. Κάθε σταθερό ταιριασμα απεικονίζεται τοποθετώντας τη γυναίκα του άντρα i στην i -στη θέση.

Ένας τρόπος να διασχίσουμε το lattice είναι μέσω διαδικασιών *breakmarriage* [39] οι οποίες μπορούν να μετασχηματίσουν ένα σταθερό ταιριασμα M σε ένα άλλο. Ξεκινώντας από το M , χωρίζουμε έναν άντρα m από τη γυναίκα του w . Τότε ο m προχωράει με τρόπο ίδιο με τον DA αλγόριθμο, προτείνοντας στη γυναίκα που είναι αμέσως μετά της w στη λίστα προτιμήσεών του, πυροδοτώντας μία αλυσίδα προτάσεων που τερματίζει είτε με κάποιον άντρα να απορρίπτεται από όλες τις γυναίκες (που συνεπάγεται αδιέξοδο) είτε σε ένα νέο σταθερό ταιριασμα M' . Καθ' όλη τη διάρκεια του *breakmarriage* μόνο ένας άντρας κάθε στιγμή είναι

¹Φυσικά, μπορεί να οριστεί και η αντίστροφη σχέση (από την οπτική των γυναικών).



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα Hasse του lattice που σχηματίζουν οι λύσεις του στιγμιότυπου 2.1

αταίριαστος και εκτελεί προτάσεις. Το M' είναι πάντα χειρότερο για τους άντρες αν εφαρμοστεί με αυτό τον τρόπο, δηλαδή το M κυριαρχεί από την οπτική των αντρών το M' . Φυσικά, το αντίστροφο θα συμβεί αν εφαρμόσουμε `breakmarriage` σε κάποια γυναίκα.

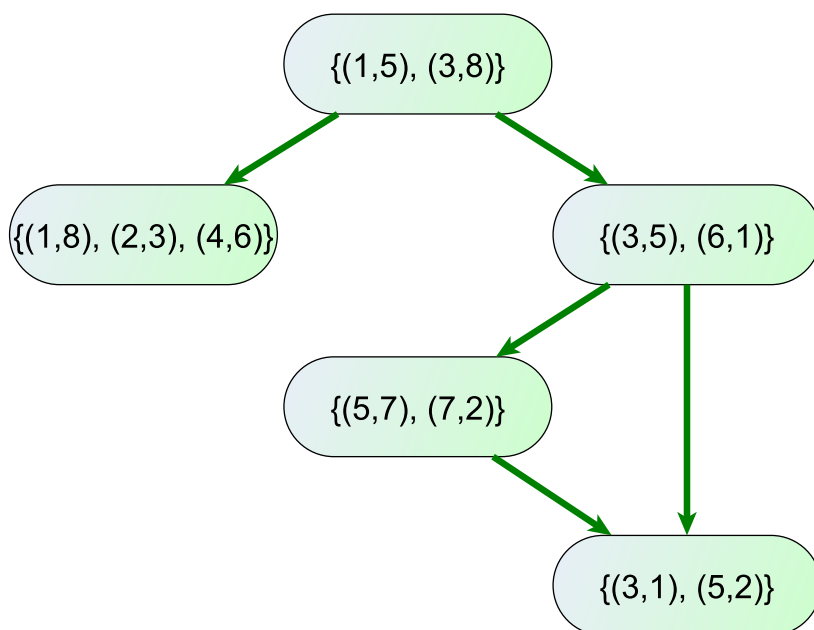
Κάθε `breakmarriage` αντιστοιχεί σε μία ή περισσότερες περιστροφές (*rotations*) μία έννοια που προτάθηκε πρώτη φορά στο [24]. Διαισθητικά, ένα rotation είναι μία κυκλικά διατεταγμένη ακολουθία ζευγαριών που μπορούν δυνητικά να ανταλλάξουν ταίρια χωρίς να επηρεαστεί η σταθερότητα.

Ορισμός 2.7. Έστω ένα σταθερό ταίριασμα M και το *Female-Optimal* σταθερό ταίριασμα M_z . Τότε, αν για κάποιον άντρα m , $M(m) \neq M_z(m)$ ορίζουμε ως $next_M(m)$ την πρώτη γυναίκα μετά την $M(m)$ στη λίστα προτιμήσεων του m που προτιμά τον m από το ζευγάρι της στο M .

Ορισμός 2.8. Έστω M ένα σταθερό ταίριασμα. Μία περιστροφή (rotation) εκτεθειμένη (exposed) στο M είναι μία κυκλική ακολουθία από ζευγάρια $\rho = (m_0, w_0), (m_1, w_1), \dots, (m_{r-1}, w_{r-1})$ τέτοια ώστε $M(m_i) = w_i$ και $next_M(m_i) = w_{i+1(mod r)}$, για κάθε $i, 0 \leq i \leq r - 1$.

Αν από κάποιο M στο οποίο εκτίθεται η περιστροφή $\rho = (m_0, w_0), (m_1, w_1), \dots, (m_{r-1}, w_{r-1})$ δώσουμε σε κάθε άντρα $m_i, 0 \leq i \leq r - 1$ τη γυναίκα $w_{i+1(mod r)}$ και αφήσουμε όλα τα άλλα ζευγάρια ως έχουν τότε το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι ένα σταθερό ταίριασμα [24]. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται εξάλειψη (elimination) της περιστροφής. Καταλαβαίνουμε τώρα πως οι ακμές του lattice, π.χ. στο Σχήμα 2.1 αντιστοιχούν ακριβώς στις περιστροφές. Οι παρακάτω ιδιότητες των περιστροφών θα μας φανούν χρήσιμες:

- Σε ένα δεδομένο στιγμιότυπο κανένα ζευγάρι (m, w) δεν μπορεί να ανήκει σε δύο διαφορετικές περιστροφές [24]. Συνεπώς το συνολικό τους μήκος είναι $\mathcal{O}(n^2)$.
- Όλες οι περιστροφές μπορούν να βρεθούν σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$ μέσω διαδοχικών break-marriage στους άντρες, ξεκινώντας από την Male-Optimal λύση και φτάνοντας στην Female-Optimal. Μέσα σε αυτό το μονοπάτι θα συναντήσουμε υποχρεωτικά όλες τις περιστροφές [21].
- Οι περιστροφές που θα βρούμε αν ακολουθήσουμε την από πάνω διαδικασία πάντα επωφελούν τις γυναίκες, δηλαδή αν μας πάνε από ένα M σε ένα M' τότε το M κυριαρχεί το M' από την οπτική των αντρών. Αντιστρέφοντας τη διαδικασία των περιστροφών, μπορούμε να πάρουμε τις αντίστροφες που επωφελούν τους άντρες.



Σχήμα 2.2: Το rotation poset του στιγμιότυπου 2.1

Επιπλέον, μία σχέση προτεραιότητας (*precedence*) \prec πάνω στο σύνολο των περιστροφών καθορίζει τη σειρά με την οποία οι περιστροφές είναι δυνατόν να εξαλειφθούν. Το σύνολο των περιστροφών μαζί με αυτή τη σχέση είναι γνωστό ως *rotation poset* και η κατασκευή του μπορεί να γίνει και αυτή σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$ [22]. Το *rotation poset* προσφέρει μία βολική αναπαράσταση του συνόλου των σταθερών ταιριασμάτων, αφού στο [24] αποδεικνύεται η ισοδυναμία των σταθερών ταιριασμάτων με τα κλειστά υποσύνολα \mathcal{S} του *rotation poset*, δηλαδή αυτών για τα οποία ισχύει η ιδιότητα $\rho \in \mathcal{S}, \delta \prec \rho \Rightarrow \delta \in \mathcal{S}$. Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζουμε το *rotation poset* του παραδείγματός μας.

2.4 Ορίζοντας τη δικαιοσύνη

Όπως είδαμε, ο DA αλγόριθμος μεροληπτεί υπέρ της μίας από τις δύο πλευρές, δίνοντας μας έναυσμα να αναζητήσουμε για λύσεις οι οποίες να είναι κατά κάποιο τρόπο "δίκαιες". Η δικαιοσύνη θα πρέπει να μετράται ως κάποιο κόστος, ώστε να μπορούμε να συγκρίνουμε διαφορετικές λύσεις ως προς την ποιότητα. Παρουσιάζουμε, λοιπόν, όλα τα κόστη που έχουν προταθεί ως μέτρα δικαιοσύνης:

Regret Cost

Ο Knuth [32, 33] περιγράφει, δίνοντας εύσημα στον Selkow, έναν $\mathcal{O}(n^4)$ αλγόριθμο, ο οποίος βρίσκει το σταθερό ταιριασμα που ελαχιστοποιεί ένα μέτρο δικαιοσύνη που φροντίζει για την ικανοποίηση του παίκτη που θα πάρει τη χειρότερη προτίμηση από όλους τους άλλους, το *Regret Cost* $r(M)$:

Ορισμός 2.9 (Regret Cost).

$$r(M) = \max_{(m,w) \in M} \max\{pr_m(w), pr_w(m)\} \quad (2.2)$$

Εκμεταλλευόμενος τη δικτυωτή δομή του προβλήματος, Ο Gusfield [21] έδωσε έναν $\mathcal{O}(n^2)$ αλγόριθμο που λύνει το ίδιο πρόβλημα, μέσω διαδικασιών *breakmarriage* [39]. Όμως, ένα σταθερό ταιριασμα ελάχιστου Regret Cost (ή Minimum-Regret Stable Matching), παρ' όλο που ικανοποιεί τον λιγότερο χαρούμενο μέλος, δε βλέπει τη μεγάλη εικόνα - ακόμη κι όταν υπάρχουν πολλά σταθερά ταιριάσματα μπορεί να συμπίπτει με το Male-Optimal ή το Female-Optimal [23].

Egalitarian Cost

Για να δούμε αυτή τη μεγάλη εικόνα, είναι χρήσιμο να ορίσουμε το συμβολισμό δύο ποσοτήτων: των αθροισμάτων των προτιμήσεων τόσο των γυναικών, όσο και των αντρών για τα ταιρία τους σε ένα σταθερό ταιριασμα M :

Ορισμός 2.10.

$$\varphi_m = \sum_{(m,w) \in M} pr_m(w) \quad \varphi_w = \sum_{(m,w) \in M} pr_w(m) \quad (2.3)$$

Δεδομένου ενός ζεύγους $(m, w) \in M$, ο m «ζηλεύει» όλους τους άντρες που είναι ταιριασμένοι με γυναίκες w' , τέτοιες ώστε $w' \succ_m w$ και φυσικά το αντίστοιχο ισχύει για τις γυναίκες. Οπότε, οι ποσότητες \wp_m και \wp_w εκφράζουν το άθροισμα των καταστάσεων «ζήλειας» της αγοράς [42].

Οι Gusfield και Irving [22] πρότειναν το *Egalitarian Cost* $c(M)$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.11 (Egalitarian Cost).

$$Eg(M) = \wp_m + \wp_w \quad (2.4)$$

Το σταθερό ταιρίασμα ελάχιστου Egalitarian Cost (ή Egalitarian Stable Matching) ελαχιστοποιεί το συνολικό αριθμό των καταστάσεων «ζήλειας» της αγοράς. Μπορεί να βρεθεί σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$ [25, 16], μέσω ενός υπολογισμού μέγιστης ροής πάνω στο rotation poset.

Sex-Equality Cost

Ένα Egalitarian Stable Matching μπορεί να επιτρέψει στη μία πλευρά να τα πάει πολύ καλύτερα από την άλλη. Πράγματι, είναι εύκολο να κατασκευάσει κανείς στιγμιότυπα τα οποία έχουν πολλές λύσεις, όμως το μοναδικό Egalitarian Stable Matching ταυτίζεται με το Male-Optimal ή το Female-Optimal [23]. Σαν αντιπρόταση, οι Gusfield και Irving [22] εισήγαγαν το *Sex-Equality Cost*, το οποίο μετράει τη διαφορά μεταξύ των αθροισμάτων προτιμήσεων για τα ταιρία των δύο πλευρών:

Ορισμός 2.12 (Sex-Equality Cost).

$$SEq(M) = |\wp_m - \wp_w| \quad (2.5)$$

Ο Knuth δίνει ένα στιγμιότυπο μεγέθους $n = 4$, το οποίο επιδέχεται 10 σταθερά ταιριάσματα, όλα με Egalitarian Cost 20. Ο Romero-Medina επισημαίνει ότι αυτές οι 10 λύσεις έχουν διαφορετικές τιμές όσον αφορά το Sex-Equality Cost, με τιμές που καλύπτουν το σύνολο $\{0, 4, 8, 12\}$. Προφανώς, σε αυτή την περίπτωση, το πιο «δίκαιο» σταθερό ταιρίασμα είναι αυτό με μηδενικό *SEq* που εξισορροπεί πλήρως τα αποτελέσματα για τις δύο πλευρές, ενώ η ελαχιστοποίηση του Egalitarian Cost βλέπουμε ότι αποτυγχάνει να αποφύγει τη μεροληψία υπέρ της μίας πλευράς.

Το σταθερό ταιρίασμα ελάχιστου Sex-Equality Cost (ή Sex-Equal Stable Matching) είναι αυτό στο οποίο ο αριθμός των καταστάσεων «ζήλειας» της μίας πλευράς είναι όσο πιο κοντά γίνεται σε αυτόν της άλλης πλευράς [42]. Η ελαχιστοποίηση αυτού του κόστους είναι NP-hard, όπως μπορεί ναδειχθεί με μία αναγωγή από το πρόβλημα του partially ordered knapsack [28], ή και από το πρόβλημα της κλίμακας (clique) [38]. Μάλιστα το πρόβλημα παραμένει NP-hard ακόμη κι αν όλες οι λίστες προτιμήσεων είναι ατελείς κι έχουν μήκος το πολύ τρία, είναι όμως επιλύσιμο σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$ αν οι λίστες της μίας μόνο πλευράς έχουν μήκος το πολύ δύο [38] (χωρίς κάποιο περιορισμό στην άλλη πλευρά). Οι Iwama et al. [27] έδωσαν έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο με πολυπλοκότητα $\mathcal{O}\left(n^{3+\frac{1}{\epsilon}}\right)$, ο οποίος για κάποιο σταθερό $\epsilon > 0$,

επιστρέφει μία λύση M τέτοια ώστε $SEq(M) \leq \epsilon\Delta$, με το Δ να είναι το χαμηλότερο Sex-Equality Cost μεταξύ των δύο πιθανών εξόδων του DA αλγορίθμου. Σε περίπτωση που δεν υπάρχει λύση με τέτοιο κόστος, επιστρέφει «Όχι». Αυτή βέβαια η εγγύηση είναι πολύ πιο αδύναμη από μία εγγύηση σε σχέση με τη βέλτιστη λύση. Θα επανέλθουμε σε αυτή τη συζήτηση στην πειραματική μας μελέτη.

Balance Cost

Ενώ το Sex-Equality Cost καταφέρνει να αντικατοπτρίσει την έννοια της δικαιοσύνης, υπό την έννοια ότι οι δύο πλευρές θα μείνουν όσο γίνεται το ίδιο ευχαριστημένες, μπορεί να αποτυγχάνει στο να αποτυπώσει τον ορθολογισμό. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μετρική, ένα σταθερό ταίριασμα στο οποίο οι δύο πλευρές έρχονται όσο πιο κοντά γίνεται όσον αφορά τη συνολική τους ευχαρίστηση θα προτιμηθεί σε σχέση με ένα άλλο στο οποίο και οι δύο πλευρές τα πάνε καλύτερα, αλλά σε αυξημένη απόσταση η μία από την άλλη. Ο Feder όρισε το Balanced Stable Matching ως αυτό που ελαχιστοποιεί το *Balance Cost*:

Ορισμός 2.13 (Balance Cost).

$$Bal(M) = \max\{\wp_m, \wp_w\} \quad (2.6)$$

Το να ελαχιστοποιηθεί αυτό το κόστος είναι επίσης NP-hard [17]. Ο Manlove [37] κατασκευάζει ένα στιγμιότυπο στο οποίο κανένα Balanced Stable Matching δεν έχει ελάχιστο Sex-Equality Cost και αντιστρόφως. Ο $\mathcal{O}(n^3)$ αλγόριθμος του [16] για το Egalitarian Stable Matching δρα μόναχα ως $(2 - \frac{1}{n})$ εγγύηση προσέγγισης. Διαισθητικά, ένα *Balanced Stable Matching* ελαχιστοποιεί τη δυσαρέσκεια (ή τον αριθμό των καταστάσεων «ζήλειας») για την πιο δυσαρεστημένη από τις δύο πλευρές [38]. Επομένως, φροντίζει για τη συνολική ευημερία με έναν ορθολογικό τρόπο.

Σημειώνουμε ότι τα τρία κόστη συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$Bal(M) = \frac{Eg(M) + SEq(M)}{2} \quad (2.7)$$

Οπότε το Balanced Stable Matching λαμβάνει υπ' όψιν του τόσο την αμεροληψία, η οποία εκφράζεται μέσω του Sex-Equality Cost, όσο και τη συνολική ευημερία που εκφράζεται από το Egalitarian Cost.

Κεφάλαιο 3

Επισκόπηση σχετικών εργασιών

Δεδομένης της δυσκολίας του προβλήματος, η μέχρι τώρα έρευνα έχει επικεντρωθεί στο να δώσει προσεγγιστικές, αλλά κυρίως ευριστικές λύσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο, περιέχεται μία αναλυτική παρουσίαση και σύγκριση όλων αυτών των αλγορίθμων, χωρίζοντας τους ανάλογα με το βασικό μηχανισμό που χρησιμοποιούν. Θα τους εξετάσουμε υπό το πρίσμα επτά βασικών ιδιοτήτων:

1. Η **Βάση** υποδεικνύει ποιος είναι ο κεντρικός μηχανισμός τον οποίο χρησιμοποιεί ένας αλγόριθμος για να φτάσει σε σταθερό ταίριασμα.
2. **Σταθερότητα** είναι η ιδιότητα ενός αλγορίθμου στο να φτάνει πάντα σε σταθερή λύση εφόσον τερματίσει. Όλοι οι αλγόριθμοι που θα εξετάσουμε έχουν αυτή την ιδιότητα, εκτός από τον ZIGZAG.
3. Ο **Συντονισμός** δείχνει το αν ένας αλγόριθμος χρειάζεται ένα κεντρικό σύστημα που να εκτελεί τον υπολογισμό ή να συγχρονίζει τους παίχτες. Οι μόνοι που δε χαρακτηρίζονται από αυτή την ιδιότητα είναι οι ανοργάνωτοι μηχανισμοί αγορών [48, 4, 36].
4. **Οικουμενικότητα** σημαίνει ότι ξεκινώντας από μία «κενή» αρχική κατάσταση, υπάρχει μία ακολουθία αποφάσεων που αν παρθούν από τον αλγόριθμο, τότε μπορεί να φτάσει σε οποιαδήποτε σταθερή λύση. Η ιδιότητα αυτή ορίζεται και για τους ντετερμινιστικούς αλγορίθμους, υπό την έννοια της οικουμενικότητας του μηχανισμού που χρησιμοποιούν.
5. **Τερματισμός** είναι η ιδιότητα ότι ο αλγόριθμος πάντα συγκλίνει σε πεπερασμένο χρόνο.
6. Ο **Ντετερμινισμός** αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο ο αλγόριθμος γεννά την ακολουθία των κινήσεων του. Όσοι χρησιμοποιούν τυχαιότητα, δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.
7. Η **Πολυπλοκότητα** είναι ένα φράγμα για το χρόνο εκτέλεσης στη χειρότερη περίπτωση.

3.1 Αλγόριθμοι που ικανοποιούν blocking pairs

Μία προσέγγιση για να φτάσει κανείς σε ένα σταθερό ταίριασμα είναι να ξεκινήσει από ένα ταίριασμα το οποίο πιθανώς να μην είναι σταθερό και σε κάθε βήμα να κάνει ένα βήμα προς τη σταθερότητα, *ικανοποιώντας* ένα blocking pair, δηλαδή μία αιτία αστάθειας. Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να ικανοποιηθεί ένα blocking pair (m, w) όταν εντοπιστεί. Στην περίπτωση των *b-interchanges* [49], ο m ταιριάζεται με την w και τα πρώην ταίρια τους, έστω w' και m' ταιριάζονται μεταξύ τους, εντάσσοντας το ζευγάρι (m', w') στο νέο ταίριασμα που δημιουργείται. Στην περίπτωση των blocking pair eliminations, τα πρώην ταίρια w' και m' μένουν αταίριαστα (*Single*) [48]. Ένας Single παίκτης σχηματίζει blocking pair με κάθε άλλο παίκτη της άλλης πλευράς αφού θα προτιμούσε να είναι μαζί με οποιονδήποτε παρά να είναι μόνος του.

BetterRD

Οι Roth και Vande Vate [48] εξέτασαν μία τυχαία διαδικασία που ξεκινά από ένα αυθαίρετο (ακόμη και ημιτελές ή κενό) ταίριασμα και επαναληπτικά επιλέγει ένα τυχαίο blocking pair και το ικανοποιεί μέσω blocking pair eliminations, τερματίζοντας όταν δεν υπάρχει πλέον άλλο blocking pair. Καλούμε αυτή την τυχαία διαδικασία *Random better Response Dynamics* (BETTERRD), όπως στο [4].

Η BETTERRD αποδεικνύεται ότι συγκλίνει σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα 1 ανεξαρτήτως από το ταίριασμα που ξεκινά [48], όμως μπορεί να χρειαστεί εκθετικό χρόνο $2^{\Omega(n)}$ [4]. Επιπλέον, χαρακτηρίζεται από οικουμενικότητα, αφού αν ξεκινήσει από το κενό ταίριασμα, μπορεί να φτάσει σε οποιαδήποτε λύση με θετική πιθανότητα [48] και δε χρειάζεται συντονισμό για να λειτουργήσει.

BestRD

Οι Ackermann et al. επεκτείνουν τη μελέτη του [48] στην περίπτωση του *Random Best Response Dynamics* (BESTRD), η οποία διαφέρει ως προς τον τρόπο επιλογής των blocking pairs. Αρχικά, ορίζει τη μία πλευρά από τις δύο ως ενεργή και σε κάθε βήμα επιλέγει τυχαία έναν παίκτη της x που συμμετέχει τουλάχιστον σε ένα blocking pair και ικανοποιεί το blocking pair που προτιμά περισσότερο ο x , δηλαδή αυτό που είναι undominated. Η ικανοποίηση του blocking pair γίνεται με blocking pair eliminations όπως προηγουμένως.

Πρόκειται και πάλι για μία αποκεντρωμένη διαδικασία που δε χρειάζεται συντονισμό και διατηρεί την εγγύηση τερματισμού σε πεπερασμένο χρόνο, καθώς και το εκθετικό φράγμα [4]. Όμως, λαμβάνοντας υπ' όψιν μόνο τα undominated blocking pairs της μίας και μόνο πλευράς δε διατηρεί την οικουμενικότητα, αφού ξεκινώντας από το κενό ταίριασμα, εκφυλίζεται στον DA αλγόριθμο και τερματίζει σε $\mathcal{O}(n^2)$ [4].

ROM

Ο Ma [36] μελετά μία παραλλαγή η οποία ξεκινά πάντα από το κενό ταίριασμα και κάνει undominated blocking pair eliminations σε ένα επαναληπτικά αυξανόμενο υποσύνολο των παικτών. Αν φανταστούμε ένα κλειστό δωμάτιο που περιέχει τους ενεργούς παίκτες, σε κάθε γύρο εισέρχεται ένας νέος παίκτης, ο οποίος ξεκινά μία αλυσίδα από εξαλείψεις blocking pairs μέχρι να επέλθει η σταθερότητα μέσα στο δωμάτιο. Ονομάζουμε αυτό τον αποκεντρωμένο αλγόριθμο *Random Order Mechanism* (ROM) ακολουθώντας τη σύμβαση των [36, 30, 13].

Ο αλγόριθμος αυτός χρειάζεται $\mathcal{O}(n^2)$ κάθε φορά που εισέρχεται ένας νέος παίκτης και συγκλίνει πάντα σε χρόνο $\mathcal{O}(n^3)$ [13]. Ο Ma [36] αποδεικνύει ότι ο ROM δε διαθέτει οικουμενικότητα, ενώ η Cheng δείχνει ότι το να αποφασιστεί αν μία λύση μπορεί να βρεθεί από τον ROM είναι NP-complete.

SML2

Οι Gelain et al. προτείνουν τον SML2, μία διαδικασία τοπικής αναζήτησης (local search) για την ικανοποίηση των blocking pairs μέσω b-interchanges, η οποία σε κάθε βήμα εξετάζει τα πιθανά ταίριασμα που προκύπτουν αν ικανοποιηθεί κάθε ένα από τα υνδομινατεδ βλοςκινγ παιρς και μεταβαίνει σε αυτό που περιέχει τα λιγότερα blocking pairs. Με αυτό τον τρόπο, προσπαθεί να φτάσει σε σταθερότητα πιο γρήγορα, ενώ για να αποφύγει τα τοπικά ελάχιστα κάνει τυχαίες κινήσεις με μία μικρή πιθανότητα.

Στο [49] αποδεικνύεται με αντιπαράδειγμα ότι η χρήση b-interchanges αντί για blocking pair eliminations μπορεί να οδηγήσει σε καταστάσεις μη-τερματισμού, υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει καμία ακολουθία κινήσεων που να οδηγεί σε σταθερότητα. Συνεπώς, ο SML2 ενδέχεται να μην τερματίζει και φυσικά στερείται οικουμενικότητας.

3.2 Αλγόριθμοι που εκτελούν προτάσεις

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι να κρατήσει κανείς την ιδέα των προτάσεων του DA αλγορίθμου και να αντιμετωπίσει τη μεροληψία του επιτρέποντας και στις δύο πλευρές να κάνουν προτάσεις. Έτσι, στήνοντας ένα πιο δίκαιο παιχνίδι προτάσεων, το αποτέλεσμα θα είναι και αυτό «διαδικαστικά δίκαιο» αφού θα έχει προκύψει από μία διαδικασία που μεταχειρίζεται τις δύο πλευρές με ίσο τρόπο. Το κεντρικό ζήτημα σε αυτές τις εργασίες είναι αυτό του τερματισμού, καθώς αν προτείνουν και οι δύο πλευρές χάνονται οι μονοτονικές ιδιότητες που έχει ο DA αλγόριθμος και μπορεί να υποπέσουμε σε κύκλους προτάσεων.

EROM

Ο EROM [43, 30] ορίζει μία τυχαία σειρά των παικτών ως προτείνοντες (proposers) και τους αφήνει να εκτελούν προτάσεις, οι οποίες γίνονται αποδεκτές με αυξανόμενη δεκτικότητα: στον γύρο k , μόνο προτάσεις που αξιολογούνται το πολύ έως k μπορούν τόσο να εκτελεστούν, όσο και να γίνουν αποδεκτές.

Ο εγγυημένος τερματισμός του EROM βασίζεται στον κανόνα ότι όταν ένας παίκτης χάνει το ταίρι του, ορίζεται ως ο επόμενος proposer. Έτσι, στον τελευταίο γύρο, όπου $k = n$ και δεν υπάρχει περιορισμός στις προτάσεις, κάθε proposer στην τυχαία σειρά θα προκαλέσει μία αλυσίδα προτάσεων η οποία πάντα θα τερματίζει με δύο αταίριαστους (single) παίκτες να παντρεύονται μεταξύ τους. Ως συνέπεια, ο αριθμός ζευγαριών αυξάνει μονοτονικά. Κάθε τέτοια αλυσίδα μπορεί να προκαλέσει έως $\mathcal{O}(nk)$ προτάσεις στο γύρο k για κάθε proposer, δίνοντας $\mathcal{O}(n^4)$ συνολική πολυπλοκότητα. Ταυτόχρονα, ο EROM δε χαρακτηρίζεται από οικουμενικότητα αφού έχει πρόσβαση μόνο σε ένα υποδικτυωτό sublattice των σταθερών ταιριασμάτων [43].

Swing/Swing⁺⁺

Ο SWING [15] επαναλαμβάνει προτάσεις για όλους τους παίκτες σε κάθε γύρο, ξεκινώντας από την πρώτη προτίμηση κάθε φορά. Οι άντρες προτείνουν στους μονούς γύρους και οι γυναίκες στους ζυγούς σε μία προσπάθεια να υπάρχει δικαιοσύνη, όμως αυτή η τακτική μπορεί να οδηγεί σε κύκλους, ενώ κάθε γύρος απαιτεί $\mathcal{O}(n^2)$ προτάσεις. Ο SWING⁺⁺ [40] προσπαθεί να αποφύγει αυτούς τους κύκλους με περισσότερους υπολογισμούς, όμως ούτε κι εκείνος καταφέρνει να δώσει μία εγγύηση τερματισμού. Οι αλγόριθμοι αυτοί επιπλέον δεν έχουν κάποια εγγύηση περί οικουμενικότητας.

ESMA

Ο μηχανισμός προτάσεων του ESMA [20] βελτιώνει κάποιες από τις αδυναμίες του SWING, αποφεύγοντας την επανάληψη προτάσεων από την αρχή κάθε λίστας, με αποτέλεσμα να ρίξει το χρονικό κόστος κάθε γύρου σε $\mathcal{O}(n^2)$. Έτσι, αυτός ο αλγόριθμος είναι πολύ πιο αποδοτικός από τον SWING και επιπλέον οι πειραματικές μελέτες δείχνουν ότι τερματίζει σε όλα τα στιγμιότυπα, χρησιμοποιώντας μία ψευδο-τυχαία συνάρτηση επιλογής της πλευράς που προτείνει έτσι ώστε να αποφεύγει τους κύκλους. Και πάλι όμως, του λείπει μία τυπική απόδειξη τερματισμού και η πολυπλοκότητα του είναι μη φραγμένη. Η οικουμενικότητά του παραμένει ανοιχτή, όπως και του SWING.

DACC

Με τον όρο *Deferred Acceptance with Compensation Chains* (DACC) [14] αναφερόμαστε σε μία οικογένεια αλγορίθμων, στους οποίους ο μηχανισμός προτάσεων είναι παρόμοιος με αυτόν του ESMA. Ως μέρος της εισόδου, δέχεται τη σειρά με την οποία οι παίκτες θα προτείνουν, επομένως ορίζεται ένας αλγόριθμος για κάθε τέτοια πιθανή σειρά. Επιπλέον, διαθέτει ένα μηχανισμό που ονομάζεται *Compensation Chains* (Αλυσίδες Αποζημίωσης), ο οποίος είναι ανάλογος με αυτόν που συναντήσαμε και στον EROM. Σύμφωνα με αυτόν, οι παίκτες που έχουν «εξαπατηθεί» (δηλαδή εγκαταλειφθεί από ένα ταίρι που τους είχε προτείνει) πρέπει να αποζημιωθούν και άρα κάνουν στη συνέχεια προτάσεις μέχρι να βρουν ένα νέο σύζυγο.

Ο Dworczak δείχνει ότι ο DACC τερματίζει σε πεπερασμένο χρόνο χάρη στα Compensation Chains ανεξαρτήτως της ακολουθίας των proposers δεδομένου βέβαια ότι αυτή περιέχει

κάθε παίκτη άπειρες φορές. Επιπλέον, αποδεικνύει ότι οποιαδήποτε λύση μπορεί να βρεθεί ρυθμίζοντας κατάλληλα αυτή την ακολουθία, εδραιώνοντας την οικουμενικότητα του αλγορίθμου. Όσον αφορά την πολυπλοκότητα, δεν είναι γνωστό κάποιο φράγμα.

3.3 Αλγόριθμοι που εκμεταλλεύονται το lattice

Κάποιοι άλλοι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τη δικτυωτή δομή του προβλήματος που περιγράψαμε στην ενότητα 2.3 για να δώσουν πολυωνυμικούς αλγορίθμους για τη βελτιστοποίηση κάποιων από τις μετρικές δικαιοσύνης (ενότητα 2.4). Για να το πετύχουν αυτό, χρησιμοποιούν είτε τις διαδικασίες breakmarriage [39], είτε την ιδέα των rotations [24] για να μετασχηματίσουν μία ήδη σταθερή λύση σε κάποια άλλη συγγενική της. Εφόσον η υποκείμενη δομή του lattice δίνει πρόσβαση σε όλες τις σταθερές λύσεις, θεωρούμε ότι όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι χαρακτηρίζονται από οικουμενικότητα.

Approx

Δεδομένης της δυσκολίας εύρεσης του Sex-Equal Stable Matching [28], οι Iwama et al. [27] πρότειναν έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο τον οποίο ονομάζουμε APPROX, ο οποίος προσπαθεί να βρει πάνω στο rotation poset το κατάλληλο κλειστό υποσύνολο από rotations που θα αντιστοιχεί σε ένα σταθερό ταίριασμα M , τέτοιο ώστε $SEq(M) \leq \varepsilon \Delta$. Σε αυτή την εγγύηση που δίνει ο αλγόριθμος, το ε είναι ένα κλάσμα που δίνεται ως είσοδος σαν παράμετρος προσέγγισης, ενώ το Δ είναι δεδομένο για κάθε στιγμιότυπο και αντιστοιχεί στο χαμηλότερο Sex-Equality Cost μεταξύ των δύο πιθανών εξόδων του DA αλγορίθμου. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι να ξεκινάει από την DA λύση που βγάζει το κόστος Δ και να κάνει ελεγχόμενα άλματα στο Sex-Equality Cost επιλέγοντας επαναληπτικά rotations που η επιλογή τους δεν μπορεί να παραβιάσει τη θεωρητική εγγύηση. Για τα rotations τα οποία κρίνονται ως «μεγάλα», δηλαδή επιφέρουν μία αλλαγή στο Sex-Equality Cost που θα μπορούσε δυνητικά να παραβιάσει την εγγύηση, ο αλγόριθμος εξετάζει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς με τους οποίους μπορούν να επιλεγθούν. Αν δεν υπάρχει κανένα σταθερό ταίριασμα M που να ικανοποιεί τη συνθήκη $SEq(M) \leq \varepsilon \Delta$, ο αλγόριθμος θα απαντήσει «Όχι». Η πολυπλοκότητα του αποδεικνύεται ότι είναι $\mathcal{O}\left(n^{3+\frac{1}{\varepsilon}}\right)$.

BiLS

Ένας πρόσφατος αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης (local search), ο BiLS [51], ξεκινά από τις δύο λύσεις του DA αλγορίθμου και διασχίζει το lattice με διαδικασίες breakmarriage, κάνοντας αναζήτηση διπλής κατεύθυνσης (bidirectional). Σε κάθε βήμα, μεταβαίνει είτε στο καλύτερο γειτονικό σταθερό ταίριασμα όπως υποδεικνύεται από μία συνάρτηση κόστους, είτε και σε ένα τυχαίο με μία μικρή πιθανότητα. Τερματίζει όταν οι δύο αναζητήσεις συναντηθούν μεταξύ τους όσον αφορά τις τιμές του κόστους, στην οποία περίπτωση δίνει την καλύτερη λύση που έχει βρει μέχρι εκείνη τη στιγμή. Για να βρει κάθε φορά όλα τα γειτονικά σταθερά ταίριασματα χρειάζεται χρόνος $\mathcal{O}(n^3)$, ενώ κάθε μία από τις δύο αναζητήσεις που κάνει

σχηματίζει ένα μονοπάτι στο lattice που μπορεί να έχει μήκος που φράσσεται από το $\mathcal{O}(n^2)$, δίνοντας $\mathcal{O}(n^5)$ συνολική πολυπλοκότητα.

MinRegret

Το Minimum-Regret Stable Matching μπορεί να βρεθεί σε μόλις $\mathcal{O}(n^2)$ χρόνο όπως έδειξε ο Gusfield [21]. Ξεκινώντας από τη Male-Optimal λύση και κάνοντας επαναληπτικά breakmarriage στο ταίρι της γυναίκας με τη χειρότερη προτίμηση, τότε μπορούμε να βρούμε το σταθερό ταίριασμα με το ελάχιστο Regret Cost, αν αυτό οφείλεται σε κάποια γυναίκα. Επαναλαμβάνοντας την αντίστροφη διαδικασία βρίσκουμε και το αντίστοιχο για τους άντρες και μεταξύ των δύο κρατάμε αυτό με το ελάχιστο κόστος.

MinEgalitarian

Ο αλγόριθμος που βρίσκει το Egalitarian Stable Matching οφείλεται στους Gufield και Irving [25] και αξιοποιεί το rotation poset. Αναθέτοντας τα κατάλληλα βάρη στις ακμές μεταξύ των rotations και προσθέτοντας μία πηγή και μία καταβόθρα, δείχνουν ότι ένας υπολογισμός μέγιστης ροής είναι ικανός να ελαχιστοποιήσει το Egalitarian Cost σε χρόνο $\mathcal{O}(n^4)$. Αργότερα, ο Feder σε μία πολύ πιο γενική προσέγγιση έδειξε ότι αυτό το φράγμα μπορεί να βελτιωθεί σε $\mathcal{O}(n^3)$.

3.4 Άλλοι αλγόριθμοι

Lotto

Ο αλγόριθμος *Employment by Lotto* (ή απλά LOTTO) [6] είναι μία προσαρμογή του *Random Serial Dictatorship* (RSD) μηχανισμού [30, 31] για την περίπτωση των σταθερών ταιριασμάτων. Επαναληπτικά αφαιρεί από τις λίστες ζεύγη παικτών τα οποία δε θα μπορούσαν να είναι μαζί σε κανένα σταθερό ταίριασμα και δίνει αμετάκλητα σε έναν τυχαίο παίκτη την πρώτη εναπομείνουσα προτίμηση του, συρρικνώνοντας περαιτέρω τις επιλογές των υπολοίπων στα παρακάτω βήματα.

Ο LOTTO πάντα τερματίζει όταν εξετάσει n παίκτες με πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n^2)$ ώστε να διασχίσει όλες τις λίστες. Δε διαθέτει οικουμενικότητα αφού σε κάθε βήμα μειώνει τον αριθμό των πλέον προσβάσιμων λύσεων για χάρη του (ευνοημένου) παίκτη που επιλέγεται και ο οποίος θα πρέπει να πάρει την καλύτερη προτίμηση που θα μπορούσε να έχει στα εναπομείναντα σταθερά ταιριάσματα. Ο μηχανισμός έχει λοιπόν πρόσβαση μόνο στις λύσεις που τουλάχιστον ένας παίκτης παίρνει το καλύτερο ταίρι που είναι δυνατόν να του ανατεθεί σε σταθερή λύση [6, 31]. Σε αντίθεση με τον ROM, το να αποφασιστεί αν ο LOTTO μπορεί να βρει μία συγκεκριμένη λύση είναι πρόβλημα πολυωνυμικού χρόνου [13], όπως μπορεί να φανεί από την ανάλυση του (RSD) στο [7].

ZigZag

Ο αλγόριθμος ZIGZAG [54] χρησιμοποιεί μία διαφορετική δομή για να λύσει το πρόβλημα, ένα πίνακα γάμων (marriage table), στον οποίο ένα ζευγάρι (m, w) τοποθετείται στην θέση (i, j) αν $pr_m(w) = i$ και $pr_w(m) = j$. Σε αυτή την αναπαράσταση, ζευγάρια κοντά στο $(0, 0)$ έχουν υψηλή συνολική ικανοποίηση (Egalitarian Cost), ενώ ζευγάρια κοντά στη διαγώνιο συνεισφέρουν στην ισότητα (Sex-Equality Cost). Επομένως, ο αλγόριθμός τους σκανάρει αυτό τον πίνακα και επιλέγει ζευγάρια ώστε να κρατήσει αυτά τα κόστη χαμηλά.

Ο ZIGZAG δίνει ένα ταίριασμα το οποίο δεν είναι απαραίτητα σταθερό, αλλά μπορεί να περιέχει και blocking pairs. Είναι η μόνη δουλειά που εξετάζουμε που δεν ικανοποιεί αυτή τη βασική συνθήκη και την αναφέρουμε κυρίως για λόγους πληρότητας. Η πολυπλοκότητα του ZIGZAG είναι $\mathcal{O}(n^2)$, ενώ μία παραλλαγή του που προσπαθεί να κρατήσει χαμηλά τον αριθμό των blocking pairs χρειάζεται $\mathcal{O}(n^3)$. Το ζήτημα της οικουμενικότητας αυτής της προσέγγισης δεν εξετάζεται από τους συγγραφείς.

3.5 Σύνοψη

Ο πίνακας 3.1 συγκεντρώνει τις ιδιότητες που συζητήθηκαν για όλους τους αλγορίθμους, κάνοντας πιο εύκολη τη μεταξύ τους σύγκριση. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε αλγορίθμους που θα συνδυάζουν όλα τα θετικά στοιχεία των υπάρχοντων, δηλαδή σταθερότητα, οικουμενικότητα και τερματισμό σε πολυωνυμικό χρόνο χαμηλής τάξης.

Αλγόριθμος	Βάση	Σταθερότητα	Συντονισμός	Οικουμενικότητα	Τερματισμός	Ντετερμινισμός	Πολυπλοκότητα
ZIGZAG [54]	σκανάρισμα πίνακα	✗	✓	✗	✓	✓	$\mathcal{O}(n^2)$
APPROX [27]	lattice	✓	✓	✓	✓	✓	$\mathcal{O}\left(n^{3+\frac{1}{\epsilon}}\right)$
BiLS [51]	lattice	✓	✓	✓	✓	✗	$\mathcal{O}(n^5)$
MINREGRET [21]	lattice	✓	✓	✓	✓	✓	$\mathcal{O}(n^2)$
MINEGALITARIAN [25, 16]	lattice	✓	✓	✓	✓	✓	$\mathcal{O}(n^3)$
BETTERRD [48]	ικανοποίηση blocking pairs	✓	✗	✓	✓	✗	$2^{\Omega(n)}$
BESTRD [4]	ικανοποίηση blocking pairs	✓	✗	✗	✓	✗	$2^{\Omega(n)}$
ROM [36]	ικανοποίηση blocking pairs	✓	✗	✗	✓	✗	$\mathcal{O}(n^3)$
SML2 [19]	ικανοποίηση blocking pairs	✓	✓	✗	✗	✗	NA
LOTTO [6]	random serial dictatorship	✓	✓	✗	✓	✗	$\mathcal{O}(n^2)$
EROM [43]	προτάσεις	✓	✓	✗	✓	✗	$\mathcal{O}(n^4)$
SWING [15]	προτάσεις	✓	✓	✗	✗	✓	NA
SWING++ [40]	προτάσεις	✓	✓	✗	✗	✓	NA
ESMA [20]	προτάσεις	✓	✓	✗	✗	✓	NA
DACC [14]	προτάσεις	✓	✓	✓	✓	NA	NA

Πίνακας 3.1: Σχετικοί αλγόριθμοι με ισχύουσες (✓) ή μη (✗) ιδιότητες και πολυπλοκότητα.

Κεφάλαιο 4

Strongly-Deferred Acceptance

4.1 Ορισμός

Ας επανεξετάσουμε τη συνθήκη αποδοχής μίας πρότασης του DA αλγορίθμου (ενότητα 2.2). Όταν κάποιος παίκτης που δεν έχει ταίρι (Single) δεχτεί μία οποιαδήποτε πρόταση, τότε αποδέχεται παθητικά. Μόνο ένας παίκτης που είναι ήδη παντρεμένος έχει το δικαίωμα να αρνηθεί. Σε μία προσπάθεια επέκτασης του μηχανισμού προτάσεων και στις δύο πλευρές, εργασίες όπως οι [20, 14] διατηρούν την ίδια συνθήκη αποδοχής - οι Single παίκτες πάντα αποδέχονται τις προτάσεις ανεξαρτήτως της κατάστασης στην οποία βρίσκονται. Επιπλέον, επιτρέπουν σε αυτούς τους παίκτες να συνεχίσουν να εκτελούν τις δικές τους προτάσεις μέχρι μία από αυτές να συμπέσει με το ταίρι που τους έχει ήδη ανατεθεί, στην οποία περίπτωση φτάνουν σε μία κατάσταση ικανοποίησης. Παρ' όλα αυτά, η σταθερότητα της τελικής κατάστασης διατηρείται ακόμη κι αν οι Single παίκτες ήταν πιο επιλεκτικοί, αξιολογώντας δηλαδή τις προτάσεις που δέχονται βάσει του που έχουν φτάσει οι ίδιοι στη λίστα τους κάνοντας προτάσεις. Ονομάζουμε αυτή την παραλλαγή του DA μηχανισμού *Strongly Deferred Acceptance* (SDA).

Σύμφωνα με την SDA, κάθε παίκτης διατηρεί ένα δείκτη κ στη λίστα του, ο οποίος αρχικοποιείται στο 0 και έχει διπλή σημασία. Από τη μία δείχνει ποια πρόκειται να είναι η επόμενη πρόταση ενός αταίριαστου παίκτη και από την άλλη ποιες προτάσεις ένας παίκτης (ακόμη και παντρεμένος) είναι διατεθειμένος να δεχθεί.

Η συνθήκη αποδοχής στην SDA είναι λοιπόν:

$$\text{accept_sda}(q, p) = p \succ_q \ell_q[\kappa_q] \quad (4.1)$$

Με άλλα λόγια, στην αρχή όλοι οι παίκτες αποδέχονται ως συζύγους μόνο τις πρώτες προτιμήσεις τους, ενώ καθώς αρχίζουν να εκτελούν προτάσεις και πιθανώς να απορρίπτονται, το κ τους αυξάνει και πλέον αποδέχονται προτάσεις από παίκτες που βρίσκονται μέχρι και τη θέση κ της λίστας προτιμήσεών τους. Η αποδοχή μίας πρότασης ενδέχεται να μειώσει το κ του αποδέκτη (receiver), αν αυτή προέρχεται από έναν προτείνοντα (proposer) που αξιολογείται σε χαμηλότερη θέση της λίστας προτιμήσεων (υψηλότερη προτίμηση). Δηλαδή αν ο q αποδεχτεί την πρόταση του p , τότε θέτει $\kappa_q = pr_q[p]$. Απ' την άλλη, η απόρριψη μίας πρότασης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του δείκτη κ του proposer κατά ένα.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τον ψευδοκώδικα για τη διαδικασία των προτάσεων στην SDA:

Algorithm 3 SDA-Proposal

```

1: procedure PROPOSE_SDA( $p, \mu$ )                                ▷ proposer  $p$ , matching  $\mu$ 
2:   if ( $\mu(p) = \emptyset \wedge \kappa_p < n$ ) then
3:      $q = \ell[\kappa_p]$                                              ▷  $p$  wants to propose to  $q$ 
4:     if accept_sda( $q, p$ ) then
5:       if  $\mu(q) \neq \emptyset$  then                               ▷ break up  $q$  if married
6:          $r = \mu(q)$ 
7:          $\mu = \mu \setminus \{(q, r)\}$ 
8:          $\mu = \mu \cup \{(p, q)\}$                                 ▷ match  $p$  and  $q$ 
9:          $\kappa_q = pr_q[p]$ 
10:    else
11:       $\kappa_p = \kappa_p + 1$                                        ▷  $q$  rejects  $p$ 

```

Μία διαδικασία που χρησιμοποιεί το μηχανισμό προτάσεων της SDA *τερματίζει* όταν κάνει όλους τους παίχτες αδρανείς, δηλαδή σε μία κατάσταση όπου δεν έχουν άλλες προτάσεις να κάνουν.

Ορισμός 4.14. Ένας παίκτης x καλείται *αδρανής* όταν $\mu(x) \neq \emptyset$ ή $\kappa_x = n$.

4.2 Ιδιότητες

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες του SDA μηχανισμού. Ας δώσουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 4.15. Στην SDA αρχική κατάσταση είναι η κατάσταση στην οποία όλοι οι παίχτες είναι *αταίριαστοι*, δηλαδή $\mu = \emptyset$ και πρόκειται να προτείνουν στις πρώτες προτιμήσεις τους, δηλαδή $\kappa_x = 0, \forall x \in \mathcal{M} \cup \mathcal{W}$.

Ορισμός 4.16. Δεδομένου ενός σταθερού ταιριάσματος M , χαρακτηρίζουμε τη θέση κάθε παίκτη p , όπως αυτή υποδεικνύεται από την τιμή του κ_p , σε σχέση με το M :

- Αν $\kappa_p < pr_p[M(p)]$, ο p είναι σε *M -overrated* θέση, δηλαδή έτοιμος να προτείνει σε κάποιον που αξιολογείται πάνω από το ταίρι του στο M .
- Αν $\kappa_p = pr_p[M(p)]$, ο p είναι σε *M -pivotal* θέση, δηλαδή έτοιμος να προτείνει στο ταίρι του στο M .
- Αν $\kappa_p > pr_p[M(p)]$, ο p είναι σε *M -underrated* θέση, δηλαδή έτοιμος να προτείνει σε κάποιον που αξιολογείται κάτω από το ταίρι του στο M .

Σημειώνεται ότι ένας *M -underrated* παίκτης θα πρέπει να έχει ήδη προτείνει στο ταίρι του στο M και η πρότασή του να έχει απορριφθεί. Οι παραπάνω όροι θα μας φανούν χρήσιμοι στην ακόλουθη ανάλυση:

Λήμμα 4.1. Δεδομένου οποιουδήποτε ζεύγους (p, q) , δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $\kappa_p > pr_p[q]$ και $\kappa_q > pr_q[p]$ κάτω από την SDA.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τόσο ο p όσο και ο q βρίσκονται σε τέτοια κατάσταση. Τότε ο ένας από τους δυο, έστω ο p , θα πρέπει ξεπέρασε την προτίμηση του άλλου, του q , όσο ο q βρισκόταν ήδη σε τέτοια κατάσταση. Επομένως, ο q θα πρέπει να απέρριψε μία πρόταση του p όσο ίσχυε $\kappa_q > pr_q[p]$. Αυτό δε γίνεται να συμβεί, αφού ο q θα πρέπει να ήταν ή Single ή παντρεμένος στη θέση κ_q , και στις δύο περιπτώσεις όμως θα έπρεπε να είχε αποδεχτεί την πρόταση του p , αφού $p \succ_q \ell_q[\kappa_q]$. \square

Μπορούμε να συμπεράνουμε τις παρακάτω άμεσες συνέπειες για το μηχανισμό, οι οποίες μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί:

Συμπέρασμα 4.1. Δεδομένου ενός ζεύγους $(p, q) \in M$, όπου το M είναι ένα σταθερό ταίριασμα, οι p και q δεν μπορούν να βρίσκονται και οι δύο σε M -underrated κάτω από την SDA.

Συμπέρασμα 4.2. Έστω O , P και U τα σύνολα των M -overrated, M -pivotal και M -underrated παικτών σε σχέση με κάποιο σταθερό ταίριασμα M . Τότε στην SDA θα πρέπει πάντα $|U| \leq |O \cup P|$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1 μπορούμε να δείξουμε τη σταθερότητα του μηχανισμού.

Θεώρημα 4.2 (Σταθερότητα). Όταν η SDA τερματίζει, το αποτέλεσμα είναι σταθερό.

Απόδειξη. Έστω ότι το τελικό ταίριασμα στο οποίο η SDA τερματίζει περιέχει ένα blocking pair (x, y) . Συμπεραίνουμε ότι στον x έχει δοθεί μία προτίμηση χειρότερη από τον y , δηλαδή $y \succ_x M(x)$, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο αν $\kappa_x > pr_x[y]$ κατά τον τερματισμό. Συμμετρικά, θα πρέπει επίσης $\kappa_y > pr_y[x]$ κατά τον τερματισμό, παραβιάζοντας το Λήμμα 4.1. Επιπλέον πρέπει ναδειχτεί ότι κανένας παίκτης δε μπορεί να μείνει αταίριαστος. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει ένας Single παίκτης στη μία πλευρά. Τότε, λόγω της αρχής του περιστέρωνα, θα πρέπει να υπάρχει κι ένας Single παίκτης q στην άλλη πλευρά. Εφόσον η διαδικασία έχει τερματίσει, τόσο ο p όσο και ο q έχουν εξαντλήσει τις προτάσεις τους, δηλαδή $\kappa_p = \kappa_q = n$, το οποίο είναι και πάλι αδύνατο λόγω του Λήμματος 4.1. Άρα ο τερματισμός της SDA οδηγεί πάντα σε ένα σταθερό αποτέλεσμα. \square

Συνεχίζουμε σε ένα δρόμο προς την οικουμενικότητα της SDA:

Λήμμα 4.2. Στην SDA και για κάθε σταθερό ταίριασμα M , ένας M -overrated παίκτης p μπορεί να δημιουργήσει ζευγάρι με έναν άλλο παίκτη q μόνο αν ο q είναι M -underrated.

Απόδειξη. Αν δύο M -overrated παίκτες p και q , δημιούργησαν ένα ζευγάρι, τότε θα πρέπει ο δείκτης του καθενός τους να βρίσκεται στη θέση του άλλου, δηλαδή $p = \ell_q[\kappa_q]$ και $q = \ell_p[\kappa_p]$. Αν είναι και οι δύο M -overrated, τότε $q \succ_p M(p)$ και $p \succ_q M(q)$. Αυτό σημαίνει ότι το (p, q) θα ήταν blocking pair στο M και το M δε θα μπορούσε να είναι σταθερό ταίριασμα.

Παρομοίως, αν ο q είναι M -pivotal, τότε $p = \ell_q[\kappa_q] = M(q)$ και συμμετρικά θα είχαμε $q = M(p)$, δηλαδή ο p θα έπρεπε να είναι παντρεμένος με το ταίρι του στο M και άρα δεν μπορεί να είναι M -overrated. Συνεπώς, ένας M -overrated παίκτης p μπορεί να παντρευτεί μόνο έναν M -underrated παίκτη q . \square

Θεώρημα 4.3 (Οικουμενικότητα). *Ξεκινώντας από την αρχική κατάσταση, η SDA μπορεί να φτάσει σε κάθε σταθερό ταίριασμα M .*

Απόδειξη. Ας είναι το M οποιοδήποτε σταθερό ταίριασμα. Στην αρχική κατάσταση κανένας παίκτης δεν μπορεί να είναι M -underrated, αφού είτε πρόκειται να προτείνει στο ταίρι του στο M είτε σε κάποιον καλύτερο. Η ακολουθία προτάσεων ώστε να φτάσουμε στο M έχει ως εξής:

1. Κάθε άντρας p προτείνει μέχρι $\kappa_p = pr_p[M(p)]$.
2. Πριν οι άντρες προτείνουν στις M -συζύγους τους, κάθε γυναίκα q προτείνει μέχρι $\kappa_q = pr_q[M(q)]$.
3. Κάθε άντρας p προτείνει μία φορά στη γυναίκα $M(p)$.

Λόγω του Λήμματος 4.2, οι προτάσεις των βημάτων (1) και (2) αναγκαστικά θα απορριφθούν, επομένως όλοι οι παίκτες διασχίζουν τις λίστες τους μέχρι να γίνουν M -pivotal, στην οποία περίπτωση το βήμα (3) μας δίνει το ταίριασμα M . \square

4.3 Αξιοποιώντας την SDA

Θα προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε έναν απλό σε λογική αλγόριθμο βασισμένο πάνω στο μηχανισμό προτάσεων της SDA που να μη χρειάζεται πολύπλοκες μαθηματικές δομές, στο πνεύμα των [15, 20, 14]. Πρώτα, θα βγάλουμε από τη μέση το πρόβλημα του τερματισμού που έχει απασχολήσει αυτές τις προηγούμενες εργασίες.

4.3.1 Τερματισμός

Θα περιγράψουμε μία τερματική διαδικασία, η οποία θα μπορεί να επιβάλλει τη σύγκλιση σε σταθερότητα οποιαδήποτε στιγμή. Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί είναι με το να εξαντλεί τις προτάσεις της μίας από τις δύο πλευρές και στη συνέχεια να αφήνει την άλλη πλευρά να ολοκληρώσει το ταίριασμα. Αυτό το ονομάζουμε Compromise της πρώτης πλευράς και όπως θα δούμε οδηγεί πάντα σε τερματισμό. Ο ψευδοκώδικας δίνεται παρακάτω στον Αλγόριθμο 4.

Για να καταλάβουμε τις επιπτώσεις αυτής της διαδικασίας, θα μας φανεί χρήσιμος ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 4.17. *Ένα σταθερό ταίριασμα μ είναι προσιτό από την πλευρά M αν και μόνο αν όλοι οι άντρες είναι M -overrated ή M -pivotal. Ισοδύναμα, λέμε ότι είναι προσιτό από την πλευρά W αν και μόνο αν όλες οι γυναίκες είναι M -overrated ή M -pivotal.*

Algorithm 4 Termination by Compromise

```

1: function COMPROMISE( $\mathcal{C}, \mu$ ) ▷ side  $\mathcal{C}$ , matching  $\mu$ 
2:   if ( $\mathcal{C} == \mathcal{M}$ ) then
3:      $\mathcal{F} = \mathcal{W}$ 
4:   else
5:      $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ 
6:   while ( $\exists x \in \mathcal{C} : \mu(x) = \emptyset \wedge \kappa_x < n$ ) do
7:     for all  $x \in \mathcal{C}$  do
8:       PROPOSE_SDA( $x, \mu$ )
9:   while ( $\exists x \in \mathcal{F} : \mu(x) = \emptyset \wedge \kappa_x < n$ ) do
10:    for all  $f \in \mathcal{F}$  do
11:      PROPOSE_SDA( $x, \mu$ )
12:   return  $\mu$ 

```

Σημειώνεται ότι μία πλευρά καλείται αδρανής στην περίπτωση που όλα τα μέλη της είναι αδρανή.

Θεώρημα 4.4. Στην SDA, αν η μία πλευρά είναι αδρανής, ας πούμε η \mathcal{C} , και η άλλη πλευρά, ας πούμε η \mathcal{F} , εξαντλήσει όλες τις προτάσεις της, τότε οδηγούμαστε σε ένα σταθερό ταίριασμα M . Επιπλέον, το M είναι βέλτιστο για την \mathcal{F} μεταξύ όλων των σταθερών ταιριασμάτων που ήταν προσιτά για την \mathcal{F} , υπό την έννοια ότι δεν υπάρχει κάποιο σταθερό ταίριασμα M' που να ήταν προσιτό για την \mathcal{F} και κάποιος παίκτης $f \in \mathcal{F}$ να το προτιμά.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{M}$ και $\mathcal{C} = \mathcal{W}$. Έστω ότι δύο παίκτες παραμένουν αταίριαστοι μετά το τέλος όλων των προτάσεων, η $x \in \mathcal{W}$ και ο $y \in \mathcal{M}$. Τότε αφού η x είναι αδρανής, $\kappa_x = n$. Εφόσον μόνο οι άντρες προτείνουν, οι δείκτες κ των γυναικών μπορούν μόνο να μειωθούν, αφού δρουν αποκλειστικά ως αποδέκτες. Άρα, θα πρέπει $\kappa_x = n$ καθ' όλη τη διάρκεια των προτάσεων. Λόγω του Λήμματος 4.1, ο y θα πρέπει να ξεκίνησε με $\kappa_y < pr_y[x]$ άρα κάποια στιγμή πρότεινε στην x και απορρίφθηκε, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως, όλοι οι παίκτες πρέπει να είναι ταιριασμένοι στο τέλος και σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2 το αποτέλεσμα είναι σταθερό.

Θα αποδείξουμε τώρα τη βελτιστότητα. Ας υποθέσουμε ότι αυτή είναι η πρώτη φορά στην ακολουθία προτάσεων που κάποιος άντρας m απορρίπτεται από κάποια γυναίκα w , τέτοια ώστε το ζευγάρι (m, w) ανήκει στο σταθερό ταίριασμα M' το οποίο είναι προσιτό για τους άντρες. Αυτή η απόρριψη μπορεί μόνο να συμβεί εάν η w είναι παντρεμένη με τον m_1 , τον οποίο προτιμά από τον m , δηλαδή $m_1 \succ_w m$. Επομένως, ο m_1 δεν μπορεί να προτιμά την w από την $M'(m_1)$ διότι το (m_1, w) θα ήταν blocking pair στο M' . Συμπεραίνουμε ότι $M'(m_1) \succ_{m_1} w$ και επειδή το M' είναι προσιτό από τους άντρες, ο m_1 θα πρέπει ήδη να έχει απορριφθεί από την $M'(m_1)$, παραβιάζοντας την αρχική μας υπόθεση. \square

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί η τερματική διαδικασία του Αλγορίθμου 4 είναι με το να εξαναγκάζει την πλευρά \mathcal{C} να γίνει αδρανής στο πρώτο while και

στη συνέχεια κάνοντας χρήση του θεωρήματος 4.4 επιβάλλει τον τερματισμό.

Συμπέρασμα 4.3 (Τερματισμός). *Η διαδικασία COMPROMISE του Αλγορίθμου 4 οδηγεί από οποιαδήποτε κατάσταση σε ένα σταθερό ταίριασμα.*

Η διαδικασία 4 δεν είναι μία δίκαιη διαδικασία, αφού συμπεριφέρεται με πολύ διαφορετικό τρόπο στις δύο πλευρές και τελικά, αυστηρά επωφελείται η πλευρά \mathcal{F} . Οι επαναλαμβανόμενες προτάσεις της πλευράς \mathcal{C} που την καθιστούν αδρανή βελτιώνουν τη θέση της \mathcal{F} , αφού μπορούν μόνο να μειώσουν τις τιμές των δεικτών κ της \mathcal{F} . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα περισσότερα σταθερά ταίριασματα να είναι προσιτά στην \mathcal{F} όταν οι προτάσεις του πρώτου βήματος τελειώσουν. Στη συνέχεια, το Θεώρημα 4.4 μας δείχνει ότι η \mathcal{F} θα πάρει τελικά το καλύτερο σταθερό ταίριασμα από όλα όσα είναι προσιτά από αυτήν. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι στην ειδική περίπτωση που η COMPROMISE καλείται από την αρχική κατάσταση, θα πάρουμε ως αποτέλεσμα είτε την Male-Optimal, είτε την Female-Optimal λύση, αφού όλα τα σταθερά ταίριασματα είναι προσιτά από την πλευρά \mathcal{F} .

Πλέον, δε χρειαζόμαστε επιπλέον μέτρα, όπως Compensation Chains [14] ή ψευδο-τυχαιότητα για να αποφύγουμε πιθανούς κύκλους προτάσεων, μπορούμε απλώς να χρησιμοποιήσουμε την τερματική διαδικασία COMPROMISE για να εξασφαλίσουμε τον τερματισμό. Κάτι τέτοιο δε θα μπορούσε να γίνει σε διαδικασίες που χρησιμοποιούν τη συνθήκη αποδοχής του DA αλγορίθμου [20, 14] (στο εξής θα τις αποκαλούμε DA διαδικασίες). Η κρίσιμη διαφορά είναι ότι στην SDA όταν μία πλευρά γίνει αδρανής τότε κανένας παίκτης αυτής της πλευράς δεν μπορεί να εγκαταλειφθεί από το ταίρι του. Αντίθετα, στην DA οι παίκτες θα αποδεχτούν μία πρόταση παρ' όλο που δεν έχουν ήδη εξερευνήσει καλύτερες επιλογές, μπαίνοντας σε μία κατάσταση «δυσαρέσκειας». Επομένως, ακόμη κι αν η μία πλευρά γίνει αδρανής, οποιοδήποτε μέλος της μπορεί να εγκαταλειφθεί από ένα «δυσαρεστημένο» ταίρι [20]. Συμπεραίνουμε ότι η DA δεν μπορεί να εγγυηθεί τον τερματισμό με τον ίδιο τρόπο όπως η SDA.

4.3.2 Αλγόριθμος

Θα περιγράψουμε τώρα έναν αλγόριθμο ο οποίος θα κάνει χρήση της τερματικής διαδικασίας που περιγράψαμε. Όπως είδαμε, αυτή δεν είναι μία δίκαιη διαδικασία και αν τη χρησιμοποιήσουμε πολύ νωρίς, τότε το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα είναι πολύ άδικο για τη μία πλευρά. Άρα θα καθυστερήσουμε τη χρήση της για έναν αριθμό γύρων στους οποίους θα γίνει μία προσπάθεια οι προτάσεις να γίνουν με όσο πιο δίκαιο τρόπο γίνεται. Τελικά όμως, η διαδικασία COMPROMISE είναι αυτή που θα μας εξασφαλίσει τον τερματισμό σε φραγμένο πολυωνυμικό χρόνο.

Στην πρώτη φάση του αλγορίθμου θέλουμε λοιπόν οι προτάσεις να γίνουν με τρόπο τέτοιο ώστε οι δύο πλευρές να διατηρούνται σε σχετική ισορροπία. Ένας δείκτης για το ποια πλευρά έχει το προβάδισμα είναι οι δείκτες κ , αφού τελικά όταν επέλθει σταθερότητα, αυτοί είναι που υποδεικνύουν και το τελικό αποτέλεσμα. Άρα, σε κάθε γύρο μπορούμε να μετράμε το πόσο δυνατή είναι η κάθε πλευρά και να αναθέτουμε το ρόλο των proposers αναλόγως. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι στην SDA η πράξη της πρότασης δεν επωφελεί τον proposer, αφού ενδέχεται να του αυξήσει το κ ή να μειώσει το κ (δηλαδή να βελτιώσει τη θέση) κάποιου παίκτη της

άλλης πλευράς. Αυτό μπορεί να μη συμφωνεί με τη διαίσθηση που έχουμε ως τώρα, δεδομένου ότι στον DA αλγόριθμο η πλευρά που προτείνει παίρνει ένα βέλτιστο αποτέλεσμα, όμως αυτό συμβαίνει μονάχα επειδή η άλλη πλευρά δεν προτείνει ποτέ. Όταν και οι δύο πλευρές προτείνουν, αυτή που δέχεται προτάσεις έχει πλεονέκτημα έναντι αυτής που τις κάνει. Συνεπώς, είναι πιο δίκαιο να αναθέσουμε τον ρόλο των proposers σε κάθε γύρο στην πλευρά που κρίνεται πιο αδύναμη (σύμφωνα με τις τιμές των δεικτών κ).

Ο Αλγόριθμος 5, ο POWERBALANCE, εφαρμόζει αυτή την τακτική. Πρώτα εκτελεί μία σειρά από προτάσεις σε γύρους, όπου σε κάθε γύρο προτείνει η δυνατή πλευρά. Αν ο αριθμός αυτών των γύρων ξεπεράσει μία παράμετρο *limit* η οποία δίνεται ως είσοδος στον αλγόριθμο, τότε ο POWERBALANCE εξαναγκάζει τον τερματισμό χρησιμοποιώντας την COMPROMISE. Εφόσον έχουμε δει ότι στη διαδικασία αυτή βγαίνει κερδισμένη η πλευρά \mathcal{F} θα μπορούσαμε να βάζουμε πάντα ως \mathcal{F} την πιο δυνατή πλευρά. Αντίθετα, εδώ δοκιμάζουμε και τις δύο πλευρές και συγκρίνουμε τα δύο αποτελέσματα βάσει κάποιου κόστους που ορίζουμε (γραμμή 13). Έτσι, ο POWERBALANCE μπορεί να προσαρμοστεί για τη βελτιστοποίηση κάποιου συγκεκριμένου κόστους.

Η πολυπλοκότητα της COMPROMISE είναι $\mathcal{O}(n^2)$ αφού στη χειρότερη περίπτωση θα διασχίσουμε από μία φορά τις λίστες τόσο των αντρών όσο και των γυναικών. Η πρώτη φάση θα διαρκέσει το πολύ *limit* γύρους στους οποίους διενεργούνται το πολύ n προτάσεις, κάνοντας την πολυπλοκότητα του POWERBALANCE $\mathcal{O}(\text{limit} * n + n^2)$.

Algorithm 5 PowerBalance

Input: $\mathcal{M}, \mathcal{W}, limit$ **Output:** stable matching μ

```

1:  $\mu = \emptyset$ 
2:  $Rounds = 0$ 
3: for all  $x \in \mathcal{M} \cup \mathcal{F}$  do
4:    $\kappa_x = 0$ 
5: while ( $|\mu| < n$ ) do
6:    $Rounds ++$ 
7:    $P = \text{STRONGSIDE}(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ 
8:   for all  $p \in P$  do
9:      $\text{PROPOSE\_SDA}(p, \mu)$ 
10:  if ( $Rounds > limit$ ) then
11:     $\mu_1 = \text{COMPROMISE}(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ 
12:     $\mu_2 = \text{COMPROMISE}(\mathcal{W}, \mathcal{M})$ 
13:    if ( $\mu_1.cost \leq \mu_2.cost$ ) then
14:       $\mu = \mu_1$ 
15:    else
16:       $\mu = \mu_2$ 
17:  return  $\mu$ 
18: function  $\text{STRONGSIDE}(\mathcal{M}, \mathcal{W})$ 
19:  if ( $\sum_{m \in \mathcal{M}} \kappa_m \leq \sum_{w \in \mathcal{W}} \kappa_w$ ) then
20:    return  $\mathcal{M}$ 
21:  else
22:    return  $\mathcal{W}$ 

```

Κεφάλαιο 5

Μία υβριδική προσέγγιση

Οι αλγόριθμοι που έχουμε εξετάσει μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: (i) αυτούς που προχωράνε από το ένα σταθερό ταίριασμα στο άλλο και καταλήγουν σε κάποιο που θεωρείται ευνοϊκό και (ii) αυτούς που σταδιακά μετατρέπουν μία κατάσταση αστάθειας σε μία που είναι σταθερή μέσω προτάσεων, εξαλείψεων blocking pairs ή random serial dictatorship. Οι αλγόριθμοι του τύπου (i) υπόσχονται καλύτερης ποιότητας λύσεις, με το τίμημα της υψηλής πολυπλοκότητας, ενώ αυτοί του τύπου (ii) ενδέχεται να χαρακτηρίζονται από υψηλότερη απόδοση, χωρίς να εξασφαλίζουν το ίδιο καλή ποιότητα.

Ανακύπτει λοιπόν η ερώτηση: μπορούμε να έχουμε και τα δύο, δηλαδή να πετύχουμε και αποδοτικότητα και ποιότητα; Εικάζουμε ότι αυτό μπορεί να συμβεί με το να κάνουμε κάποιες γρήγορες κινήσεις τύπου (i) ώστε να φτάσουμε σε ένα σταθερό ταίριασμα και μετά να το βελτιώσουμε με λίγες κινήσεις τύπου (ii). Σε αυτή την ενότητα προτείνουμε λοιπόν τέτοιους υβριδικούς αλγορίθμους που στην αρχή λειτουργούν με προτάσεις τύπου SDA, ακολουθούμενες από μία διαδικασία τοπικής αναζήτησης στο ίδιο πνεύμα με το [51].

5.1 Βελτίωση του local search

Η μέθοδος τοπικής αναζήτησης του BILS [51] βασίζεται σε διαδικασίες *breakmarriage* (βλ. Ενότητα 2.3), οι οποίες χρειάζονται χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$ προκειμένου να δώσουν μία νέα λύση από μία υπάρχουσα. Συνεπώς, ο BILS ξοδεύει $\mathcal{O}(n^3)$ σε κάθε βήμα της αναζήτησης ώστε να αξιολογήσει όλες τις γειτονικές λύσεις που προκύπτουν, εφαρμόζοντας *breakmarriage* σε κάθε έναν από τους n παίκτες. Το χρονικό αυτό κόστος θα μπορούσε να μειωθεί αν χρησιμοποιούσαμε *περιστροφές (rotations)* (βλ. Ενότητα 2.3) αντί για *breakmarriage* στη διαδικασία του local search, δηλαδή αν κάναμε την αναζήτηση πάνω στο rotation poset.

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε όλες τις περιστροφές σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$ [22] πριν αρχίσουμε την αναζήτηση και το συνολικό τους μήκος είναι και αυτό $\mathcal{O}(n^2)$ [24]. Άρα, σε κάθε βήμα για να μεταβούμε από ένα σταθερό ταίριασμα M σε άλλα γειτονικά, μπορούμε να ελέγχουμε σειριακά τις περιστροφές για το αν είναι εκτεθειμένες (exposed) στο M σύμφωνα με τις συνθήκες του ορισμού 2.7 και στην περίπτωση που είναι, να τις εξαλείψουμε (eliminate). Αυτό προϋποθέτει έναν $\mathcal{O}(n^2)$ υπολογισμό των τιμών $next_M$

για όλους τους παίχτες στην αρχή του κάθε βήματος. Με αυτή την αλλαγή, κάθε βήμα του local search θα κοστίζει $\mathcal{O}(n^2)$ αντί για το $\mathcal{O}(n^3)$ του [51].

Επιπρόσθετα, για τον τερματισμό της διαδικασίας στο [51] αναφέρεται ότι θα πρέπει οι δύο αναζητήσεις να «συναντηθούν» υπό την έννοια της σύμπτωσης των τιμών κόστους τους. Κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο για τα κόστη sex-equality και balance όπου οι αναζητήσεις αρκεί να τερματιστούν όταν φτάσουν σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους τους. Εφαρμόζοντας breakmarriage μόνο στη μία πλευρά (π.χ. στους άντρες) ή ισοδύναμα εξαλείφοντας περιστροφές που επωφελούν τις γυναίκες, είναι εύκολο να δει κανείς ότι όταν φτάσουμε σε τοπικό ελάχιστο του Sex-Equality Cost δεν πρόκειται να δούμε περαιτέρω βελτίωση όσο κι αν συνεχίσουμε. Αυτό συμβαίνει επειδή το τοπικό ελάχιστο μπορεί να βρίσκεται μόνο εκεί που η μειονεκτούσα πλευρά (με το υψηλότερο άθροισμα προτιμήσεων) αρχίζει να ξεπερνάει την άλλη. Το ίδιο ισχύει και για το Balance Cost.

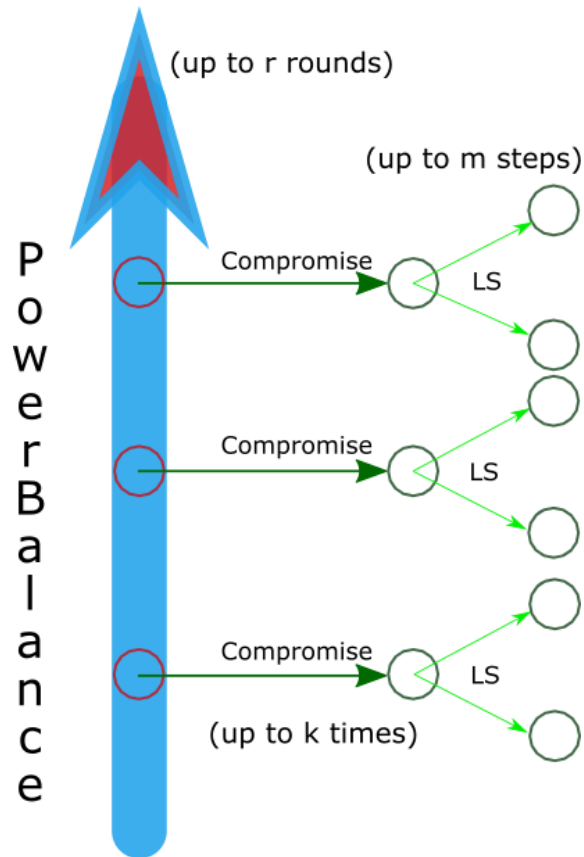
Στα επόμενα, εφαρμόζουμε αυτές τις βελτιώσεις στον BiLS και στους άλλους αλγόριθμους local search που εξετάζουμε.

5.2 Υβριδικοί αλγόριθμοι

Όταν ο POWERBALANCE τερματίσει ήδη έχουμε ένα σταθερό ταίριασμα, το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως σημείο εκκίνησης του local search. Μάλιστα, μπορούμε να ελέγξουμε το πόσο γρήγορα θα πάρουμε αυτό το ταίριασμα ρυθμίζοντας κατάλληλα την παράμετρο *limit*, δηλαδή τους γύρους προτάσεων πριν εξαναγκάσουμε τον τερματισμό. Η πρώτη μας προσπάθεια, λοιπόν, ο αλγόριθμος HYBRID προσθέτει ένα επιπλέον στάδιο local search στον POWERBALANCE με σκοπό να βρεθεί μία καλύτερη γειτονική λύση στο lattice των σταθερών ταιριασμάτων. Ο BiLS ξεκινάει από μία ακραία θέση στο lattice και ακόμη και στη βελτιωμένη εκδοχή του μπορεί να χρειαστεί $\mathcal{O}(n^2)$ βήματα για να διασχίσει ένα μονοπάτι στο lattice, δίνοντας $\mathcal{O}(n^4)$ συνολική πολυπλοκότητα στη χειρότερη περίπτωση. Αντίθετα, ο HYBRID πιστεύουμε ότι θα χρειαστεί λίγα μόνο βήματα για να φτάσει σε τοπικό ελάχιστο, εφόσον ξεκινάει από μία λύση που είναι η έξοδος του POWERBALANCE και άρα ήδη θα είναι αρκετά δίκαιη. Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε ένα όριο m βημάτων στη δεύτερη φάση και ρυθμίζοντας το κατάλληλα να πάρουμε πολύ χαμηλότερη πολυπλοκότητα από τον BiLS. Το αν αυτός ο αλγόριθμος θα είναι τελικά πιο γρήγορος από τον BiLS θα εξαρτηθεί από το αν ο POWERBALANCE μπορεί να τερματίσει πιο γρήγορα απ' ό,τι ο BiLS φτάνει σε μία ενδιάμεση λύση στο lattice και από το αν το προκύπτον σταθερό ταίριασμα από τον POWERBALANCE είναι κοντά σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους.

Σε μία διαφορετική βελτίωση, μπορούμε να εξαναγκάσουμε τον τερματισμό του POWERBALANCE σε διαφορετικούς γύρους ώστε να πάρουμε διαφορετικά σταθερά ταιριάσματα ως αρχικά σημεία του local search. Προκειμένου να είναι όσο το δυνατόν διαφορετικά, τοποθετούμε τους τερματικούς γύρους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ του πρώτου γύρου και του τελευταίου γύρου. Επιπλέον, δε χρειάζεται να αποφασίσουμε μεταξύ των δύο διαφορετικών ταιριασμάτων που προκύπτουν από τη χρήση της Compromise, και τα δύο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκκινήσουμε από αυτά μία τοπική αναζήτηση. Ονομάζουμε αυτό τον αλγόριθμο HY-

BRIDMULTISEARCH (HMS) και η πολυπλοκότητα του είναι $\mathcal{O}(rn + kmn^2)$ όπου r είναι ο μέγιστος γύρος προτάσεων του POWERBALANCE, k είναι ο αριθμός των διαφορετικών local search που θα διεξαχθούν και m είναι ο μέγιστος αριθμός από βήματα local search που επιτρέπουμε. Μία γραφική αναπαράσταση για το πως λειτουργεί ο HYBRIDMULTISEARCH φαίνεται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1: HYBRIDMULTISEARCH

Κεφάλαιο 6

Πειραματική Μελέτη

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε μία εκτενή πειραματική μελέτη με σκοπό (i) τη ρύθμιση παραμέτρων διάφορων αλγορίθμων και την περαιτέρω κατανόηση του τρόπου λειτουργίας τους, (ii) την άμεση σύγκριση τους σε μία ποικιλία στιγμιοτύπων που φτάνουν σε αρκετά μεγάλα μεγέθη και (iii) την εφαρμογή τους σε ένα σενάριο βασισμένο στην πραγματικότητα. Θα σταθούμε κυρίως σε τρεις μετρικές, το Balance Cost και το Sex-Equality Cost που πιστεύουμε ότι είναι τα πιο απτά μέτρα της δικαιοσύνης στο πρόβλημα που μελετάμε και στο χρόνο σύγκλισης/τερματισμού.

Στα δύο πρώτα μέρη, θα χρησιμοποιήσουμε συνθετικές λίστες προτιμήσεων, οι οποίες παράγονται ώστε να έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά:

- Στην *Uniform(U)* κατανομή, οι προτιμήσεις παράγονται εντελώς τυχαία, δηλαδή κάθε λίστα είναι μία τυχαία μετάθεση των παικτών.
- Στην *Discrete(D)* κατανομή, ένα ποσοστό των παικτών εντάσσονται στο *Hot Set* και είναι πάντα πιο επιθυμητοί από τους υπόλοιπους που ανήκουν στο *Cold Set*. Σε κάθε λίστα, η κατάταξη των παικτών που ανήκουν σε ένα από τα δύο σύνολα είναι τυχαία.
- Στην *Gauss(G)* κατανομή, ξεκινάμε από μία αρχική κατάταξη των παικτών που είναι κοινή για όλους και κάθε παίκτης προσθέτει Γκαουσιανό θόρυβο στις προτιμήσεις ώστε να δημιουργήσει τη λίστα του. Μετράμε την πόλωση της κατανομής σαν ποσοστό του n . Όσο πιο μεγάλη η πόλωση, τόσο λιγότερος ο θόρυβος και τόσο περισσότερο μοιάζουν οι λίστες διαφορετικών παικτών μεταξύ τους.

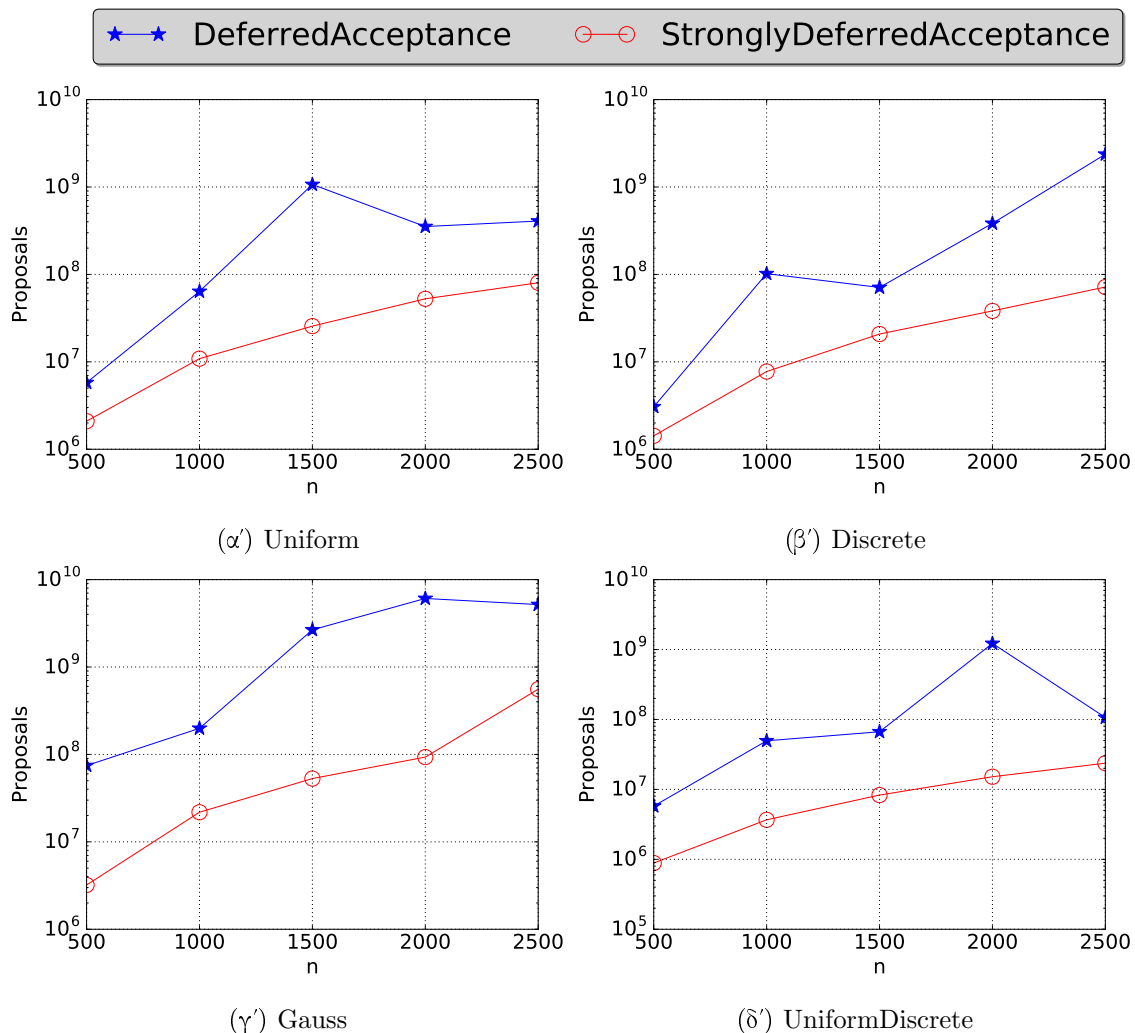
Επιπλέον, θα χρησιμοποιήσουμε μία κατανομή με ασυμμετρία, στην οποία οι λίστες προτιμήσεων των αντρών θα ακολουθούν το *Uniform* μοντέλο, ενώ αυτές των γυναικών θα ακολουθούν το *Discrete*. Θα αναφερόμαστε σε αυτή την ασύμμετρη κατανομή ως *Uniform-Discrete(UD)*.

Ρυθμίζουμε σε όλες τις *Discrete(D)* περιπτώσεις το *Hot Set* να περιλαμβάνει το 40% των παικτών και την πόλωση των *Gauss* κατανομών στο 40% του n . Σε όλα τα πειράματα χρησιμοποιούμε περισσότερα από ένα στιγμιότυπα και παρουσιάζουμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Όλοι οι αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν στην γλώσσα Java και τα πειράματα εκτελέστηκαν σε έναν Intel Xeon X5650 CPU @ 2.67GHz με 28GB RAM.

6.1 Ανάλυση

6.1.1 Σύγκλιση Μηχανισμών

Έχουμε ήδη συζητήσει το πλεονέκτημα που έχει η SDA έναντι της DA όσον αφορά τη δυνατότητα σχεδιασμού μίας τερματικής διαδικασίας (ενότητα 4.3.1). Τώρα θα κάνουμε μία πειραματική σύγκριση των δύο σε σχέση με την αποδοτικότητα σύγκλισής τους. Υποθέτουμε δηλαδή μία αγορά χωρίς κεντρική οργάνωση, όπου οι παίκτες εκτελούν προτάσεις με τυχαία σειρά και μετράμε τον αριθμό των προτάσεων που απαιτούνται μέχρι να φτάσουμε σε σταθερότητα. Όπως γνωρίζουμε, πάντα υπάρχει ένα μονοπάτι προς τη σταθερότητα, τόσο για την DA [14], όσο και για την SDA (π.χ. μέσω της COMPROMISE, Συμπέρασμα 4.3), όμως μία φυσική ερώτηση που ανακύπτει είναι πόσο γρήγορα φτάνει ο κάθε μηχανισμός σε σταθερότητα αν εφαρμοστεί σε μία αποκεντρωμένη αγορά.



Σχήμα 6.1: Σύγκλιση DA vs SDA

Για τα πειράματα αυτά χρησιμοποιούμε 150 στιγμιότυπα ανά μέγεθος και χρησιμοποιούμε μεγέθη έως $n = 2500$. Το Σχήμα 6.1 δείχνει τα αποτελέσματα. Η SDA χρειάζεται σημαντικά μικρότερο αριθμό από προτάσεις για να τερματίσει σε όλες τις κατανομές προτιμήσεων και η διαφορά μπορεί να φτάσει ακόμη και τις δύο τάξεις μεγέθους. Άρα, συνολικά μπορεί να οδηγήσει μία αποκεντρωμένη αγορά σε ισορροπία πολύ πιο αποδοτικά. Ακόμη, βλέπουμε ότι η συμπεριφορά της SDA είναι πιο φυσιολογική (και άρα πιο προβλέψιμη): καθώς αυξάνεται το n , ο αριθμός των προτάσεων αυξάνεται πιο ομαλά σε σχέση με την DA, που σε κάποιες περιπτώσεις κάνει απότομα άλματα και στη συνέχεια μειώνεται.

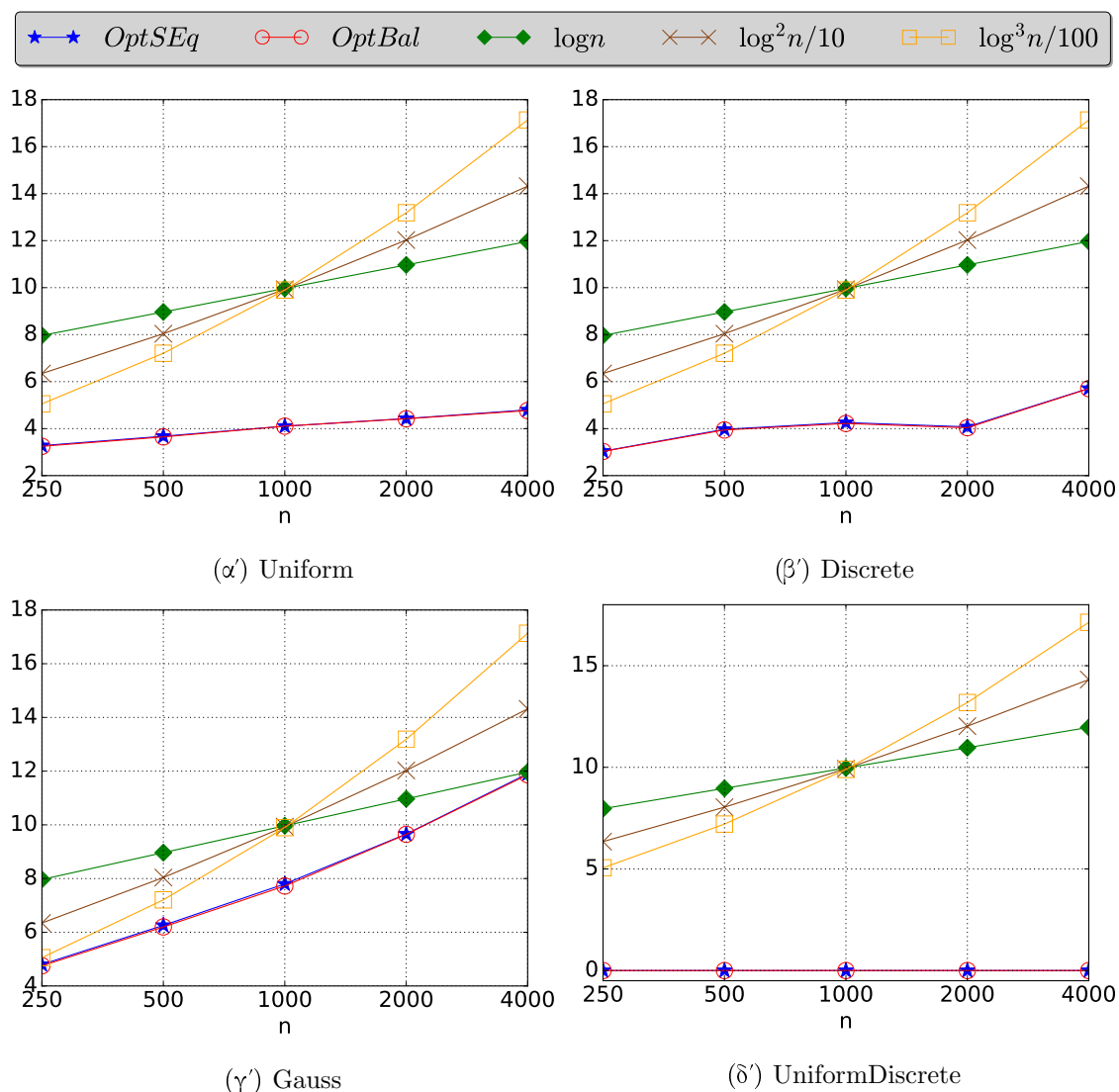
6.1.2 Ρύθμιση παραμέτρου του PowerBalance

Ο POWERBALANCE δέχεται ως είσοδο μία παράμετρο *limit*, η οποία καθορίζει το μέγιστο αριθμό γύρων από προτάσεις που εκτελεί, για $limit * \mathcal{O}(n)$ συνολικές προτάσεις, πριν εξαναγκάσει τον τερματισμό σε $\mathcal{O}(n^2)$ βήματα. Προκειμένου να έχουμε ένα πιο δίκαιο τελικό αποτέλεσμα, θα πρέπει να αποφύγουμε να επιβάλλουμε τον τερματισμό πολύ νωρίς, αφού η τερματική διαδικασία είναι εγγενώς άδικη (Θεώρημα 4.4). Από την άλλη, αν περιμένουμε πολύ ενδέχεται να χάσουμε σε αποδοτικότητα, κυρίως σε στιγμιότυπα όπου επαναλαμβάνονται κυκλικά οι ίδιες προτάσεις κατά την πρώτη φάση. Το ακόλουθο πείραμα θα μας βοηθήσει να βρούμε κάποιες τιμές της παραμέτρου που θα εξυπηρετούν τους σκοπούς μας και να καταλάβουμε πως θα πρέπει να αλλάζει η τιμή της παραμέτρου συναρτήσει του n .

Για κάθε μέγεθος n και για κάθε κατανομή, γεννούμε 100 στιγμιότυπα. Για κάθε τέτοιο στιγμιότυπο, δοκιμάζουμε ένα μεγάλο αριθμό από παραμέτρους *limit* προκειμένου να βρούμε τη μικρότερη δυνατή τιμή η οποία είναι αρκετή για να έχουμε το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα όσον αφορά τα δύο κόστη που αντικατοπτρίζουν τη δικαιοσύνη: το Sex-Equality Cost (SEq) και το Balance Cost (Bal). Το Σχήμα 6.2 μας δείχνει τους μέσους όρους αυτών των τιμών αφού αυτή έχουν διαιρεθεί δια του n , συγκρινόμενοι με λογαριθμικές συναρτήσεις του n για κάθε κατανομή προτιμήσεων.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι βέλτιστες τιμές για τα *SEq* και *Bal* επιτυγχάνονται με την ίδια τιμή του *limit*. Στις Uniform και Discrete κατανομές (Σχήματα 6.2α', 6.2β'), παρατηρούμε μία μικρή μόνο αύξηση καθώς αυξάνεται το n . Η περίπτωση Gauss (Σχήμα 6.2γ') είναι πιο ενδιαφέρουσα, καθώς βλέπουμε ότι η επαρκής τιμή του *limit* για να έχουμε ένα βέλτιστο αποτέλεσμα μεγαλώνει με ένα ρυθμό παρόμοιο της $\log^2(n)$. Στην UniformDiscrete (Σχήμα 6.2δ'), το να καθυστερούμε τον τερματισμό είναι ανούσιο: η χρήση της Compromise στην αρχή της εκτέλεσης δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα και στα δύο κόστη.

Συνεπώς, θέτουμε την παράμετρο *limit* του POWERBALANCE αλγορίθμου σε $\Theta(\log^2(n))$, κάνοντας τη συνολική του πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n^2 \log^2(n))$. Προκειμένου να διατηρήσουμε την ίδια ασυμπτωτική πολυπλοκότητα και στους υβριδικούς αλγορίθμους που κάνουν local search μετά τη διαδικασία των προτάσεων, θέτουμε επίσης την παράμετρο m του HYBRID σε $\Theta(\log^2(n))$, ενώ τις m και k του HYBRIDMULTISEARCH σε $\Theta(\log(n))$.



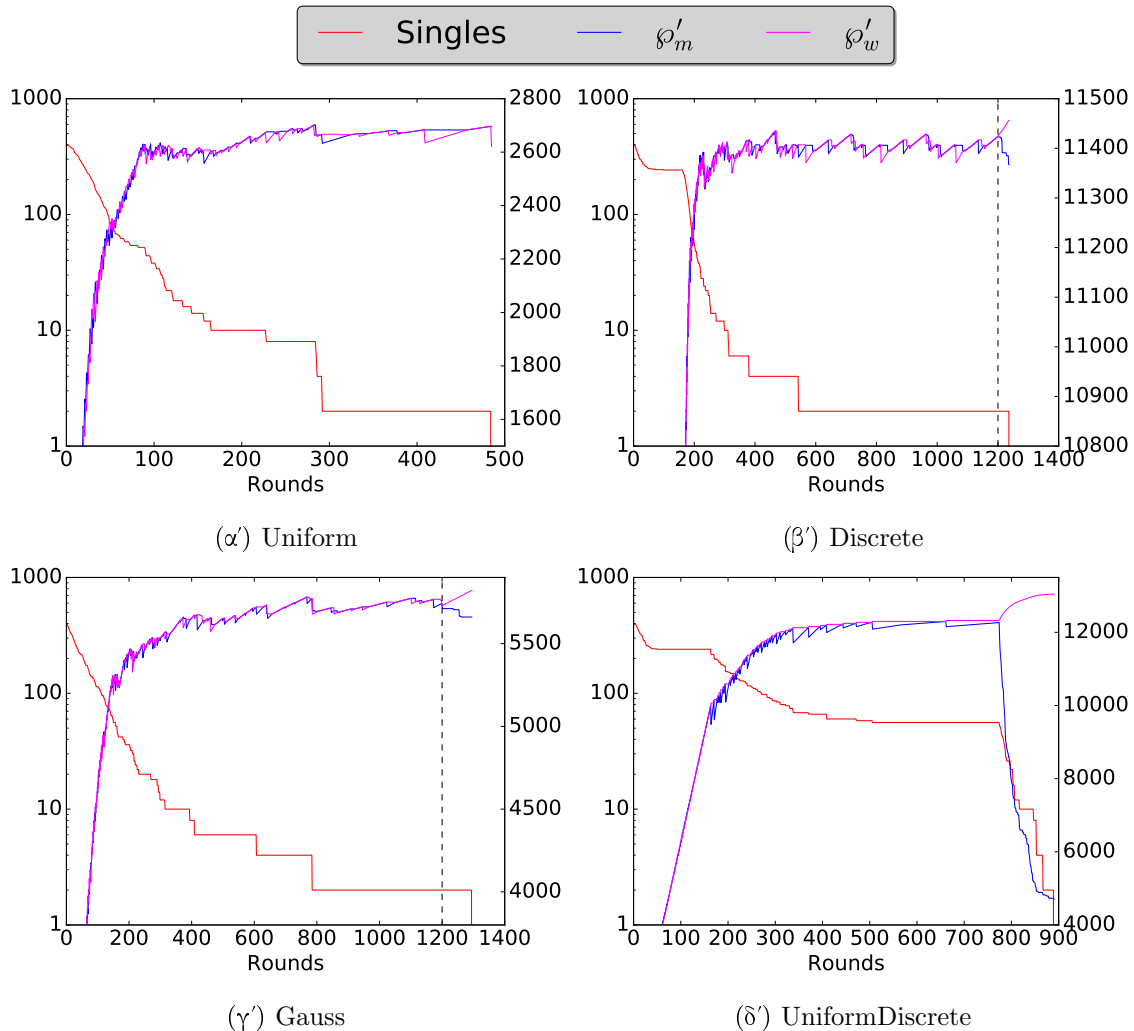
Σχήμα 6.2: Βέλτιστη παράμετρος του POWERBALANCE

6.1.3 Αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα του PowerBalance

Διεξάγουμε τώρα ένα πείραμα το οποίο παρακολουθεί κάποιες μετρικές κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου POWERBALANCE, με σκοπό να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί, αλλά και για να καταλάβουμε τα χαρακτηριστικά των διαφορετικών κατανομών δεδομένων που χρησιμοποιούμε.

Για ένα σταθερό μέγεθος $n = 200$ παικτών ανά πλευρά, τρέχουμε τον POWERBALANCE σε 30 διαφορετικά στιγμιότυπα ανά κατανομή και εντοπίζουμε αυτό του οποίου το αποτέλεσμα αντιστοιχεί στο *median* Sex-Equality Cost από τα 30. Κατ' αυτό τον τρόπο, περιμένουμε ότι το στιγμιότυπο που διαλέγουμε θα είναι αντιπροσωπευτικό για την κάθε κατανομή προτιμήσεων. Σε κάθε γύρο προτάσεων μετράμε τον αριθμό των Singles, δηλαδή των αταίριαστων ατόμων και τα αθροίσματα των κ δεικτών τόσο για τους άντρες (ρ'_m) όσο και για τις γυναίκες (ρ'_w), τα οποία υποδεικνύουν τη «δύναμη» της κάθε πλευράς. Επίσης, τα αθροίσματα αυτά είναι

που καθορίζουν το ποιά πλευρά θα προτείνει στον επόμενο γύρο. Το Σχήμα 6.3 δείχνει τα αποτελέσματά μας, όπου οι αριστεροί κάθετοι άξονες δείχνουν την κλίμακα των Singles, ενώ οι δεξιοί την κλίμακα για τα αθροίσματα ϕ'_m και ϕ'_w . Μία μαύρη κατακόρυφη και διακεκομμένη γραμμή, όπου υπάρχει, οριοθετεί το γύρο 1200 στον οποίο υπερβαίνεται το όριο των γύρων της πρώτης φάσης του αλγορίθμου και αρχίζει να τρέχει η τερματική διαδικασία COMPROMISE.



Σχήμα 6.3: Αντιπροσωπευτικά στιγμιότυπα του POWERBALANCE

Όπως είναι αναμενόμενο, ο αριθμός των Singles μειώνεται μονοτονικά με την πάροδο των γύρων. Στις τρεις συμμετρικές περιπτώσεις (Σχήματα 6.3α', 6.3β', 6.3γ') πέφτει αρκετά γρήγορα από τους πρώτους κιόλας γύρους και υπάρχει μία δυσκολία στο να ολοκληρωθεί το ταίριασμα όταν έχουν μείνει πλέον λίγοι Singles, κάθε ένας από τους οποίους μπορεί να σπάσει ένα υπάρχον ζευγάρι, δημιουργώντας έναν νέο Single παίκτη, αφήνοντας το πλήθος των Singles σταθερό για πολλούς γύρους. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η Uniform τερματίζει χωρίς την COMPROMISE διατηρώντας τις δύο πλευρές σε μία αρκετά καλή ισορροπία. Η Discrete έχει μία δυσκολία στο να ρίξει του Singles μέχρι το γύρο 180 όπου οι παίκτες πλέον διασχίζουν και την Cold περιοχή των λιστών τους και είναι πιο δεκτικοί σε προτάσεις.

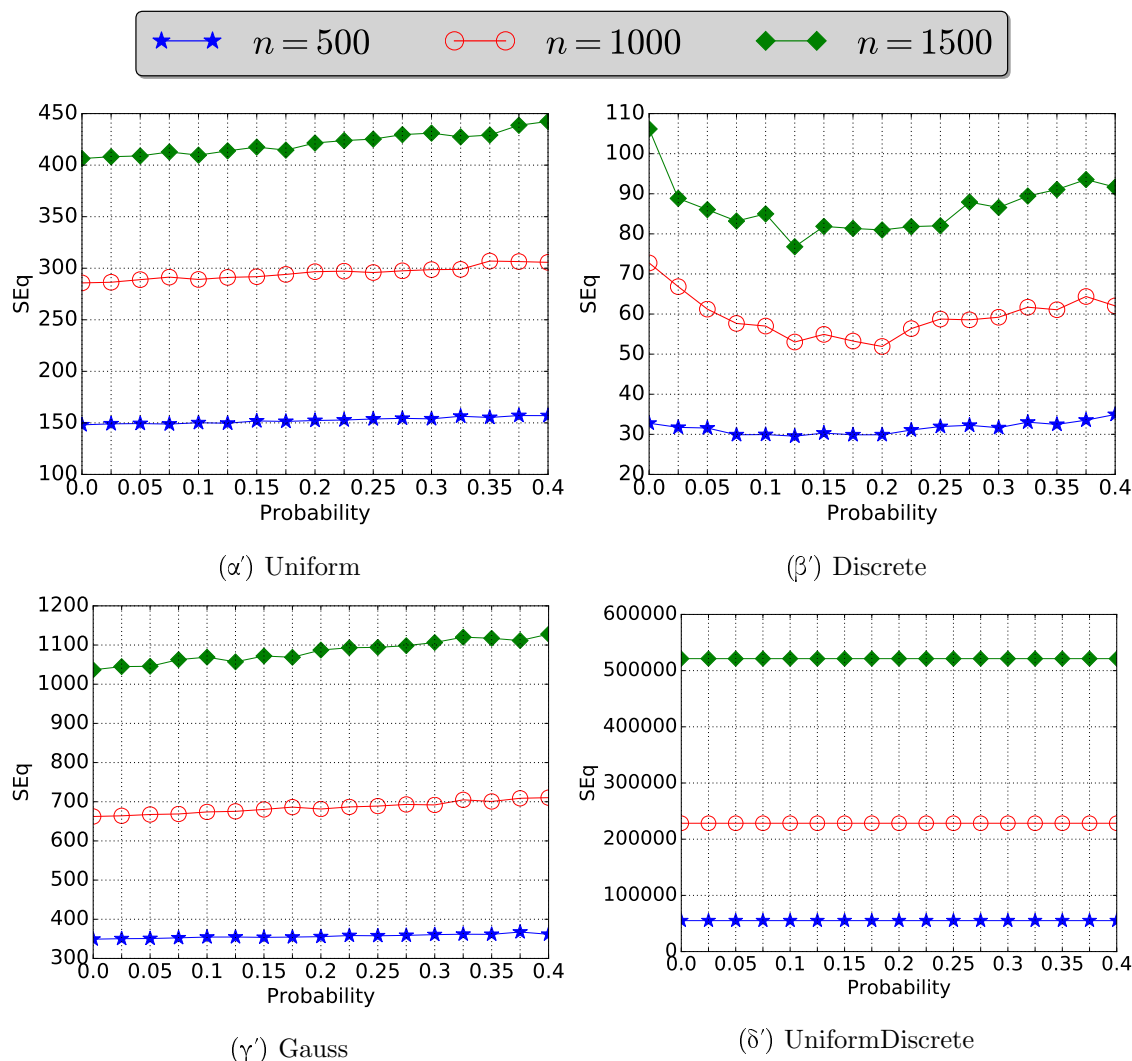
Στη συνέχεια όταν μείνουν λίγοι ενεργοί παίκτες κάνει κύκλους, οπότε ο τερματισμός εξαναγκάζεται στο γύρο 1200 με ένα τελικό αποτέλεσμα που επωφελεί τους άντρες. Η Gauss δεν κάνει κύκλους και μοιάζει στη συμπεριφορά με την Uniform, όμως χρειάζεται πολύ χρόνο για να συγχλίνει, οπότε και πάλι βλέπουμε τον εξαναγκασμένο τερματισμό. Από την άλλη, στην UniformDiscrete (Σχήμα 6.3δ'), οι Singles δεν πέφτουν με τον ίδιο ταχύ ρυθμό στους πρώτους γύρους, δηλαδή υπάρχει μία δυσκολία στο να φτιαχτούν ζευγάρια. Αυτό οφείλεται στο ότι οι γυναίκες αργούν να μπουν στην Cold περιοχή και να προτείνουν στους λιγότερο επιθυμητούς άντρες, αλλά κυρίως να αποδεχθούν προτάσεις από αυτούς. Όταν τελικά αυτό συμβαίνει, οι γυναίκες μένουν δυσαρεστημένες σε αντίθεση με τους άντρες, το 40% των οποίων είναι πολύ επιθυμητοί από το σύνολο των γυναικών και άρα θα πάρουν κάποια από τις πρώτες προτιμήσεις τους. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι σε αυτή την ασύμμετρη κατανομή, θα πρέπει να επωφεληθούμε τις γυναίκες όσο είναι δυνατόν και όχι να φερθούμε δίκαια (με διαδικαστική δικαιοσύνη) προκειμένου να έχουμε ένα δίκαιο τελικό αποτέλεσμα.

6.1.4 Παράμετρος πιθανότητας του BiLS

Οι Viet et al. [51] αναφέρουν ότι το local search διπλής κατεύθυνσης που προτείνουν θα ήταν καλό να κάνει κάποιες τυχαίες κινήσεις με μία μικρή πιθανότητα p αντί για τις συνηθισμένες κινήσεις προς τον καλύτερη γειτονική λύση. Στα πειράματά τους, θέτουν αυτοί την πιθανότητα σε $p = 0.05$, όμως δε μελετάται η επίδραση που έχει αυτή η παράμετρος, ούτε αιτιολογείται με κάποιο τρόπο η επιλογή της. Αφιερώνουμε αυτή την πειραματική ενότητα στο να εξακριβώσουμε τι αντίκτυπο έχουν οι τυχαίες κινήσεις στην ποιότητα των αποτελεσμάτων για τη βελτιωμένη εκδοχή μας του BiLS. Θα χρησιμοποιήσουμε το Sex-Equality Cost ως μέτρο σύγκρισης σε τρία διαφορετικά μεγέθη και για ένα εύρος διαφορετικών τιμών της πιθανότητας p . Το Σχήμα 6.4 δείχνει τα αποτελέσματα ως μέσους όρους από 2000 στιγμιότυπα ανά μέγεθος.

Παρατηρούμε μία βελτίωση στο Sex-Equality Cost στην Discrete κατανομή (Σχήμα 6.4β') η οποία κορυφώνεται περίπου στην τιμή $p = 0.125$ και μετά μία σταθεροποίηση έως το $p = 0.2$. Ακόμη και σε μεγάλες όμως τιμές της πιθανότητας ($0.2 \leq p \leq 0.4$), είναι εντυπωσιακό ότι η ποιότητα δε χαλάει δραματικά, αλλά ο BiLS καταφέρνει να βρει μία αρκετά δίκαιη λύση. Όσον αφορά τις Uniform και Gauss κατανομές (Σχήματα 6.4α', 6.4γ'), δεν υπάρχει κάποιο όφελος αν εισάγουμε τυχαιότητα και μάλιστα η ποιότητα των λύσεων πέφτει ελαφρώς στο διάστημα $[0, 0.125]$. Στην περίπτωση της UniformDiscrete (Σχήμα 6.4δ'), ο BiLS καταφέρνει πάντα να βρίσκει τη βέλτιστη λύση, η οποία είναι η Female-Optimal.

Συμπερασματικά, το να θέσουμε την πιθανότητα p σε 0.125 φαίνεται να βοηθάει ιδιαίτερα κάποιες περιπτώσεις, ενώ παράλληλα δεν έχει σοβαρές επιπτώσεις σε άλλες. Από εδώ και στο εξής στην πειραματική μας μελέτη θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την τιμή.

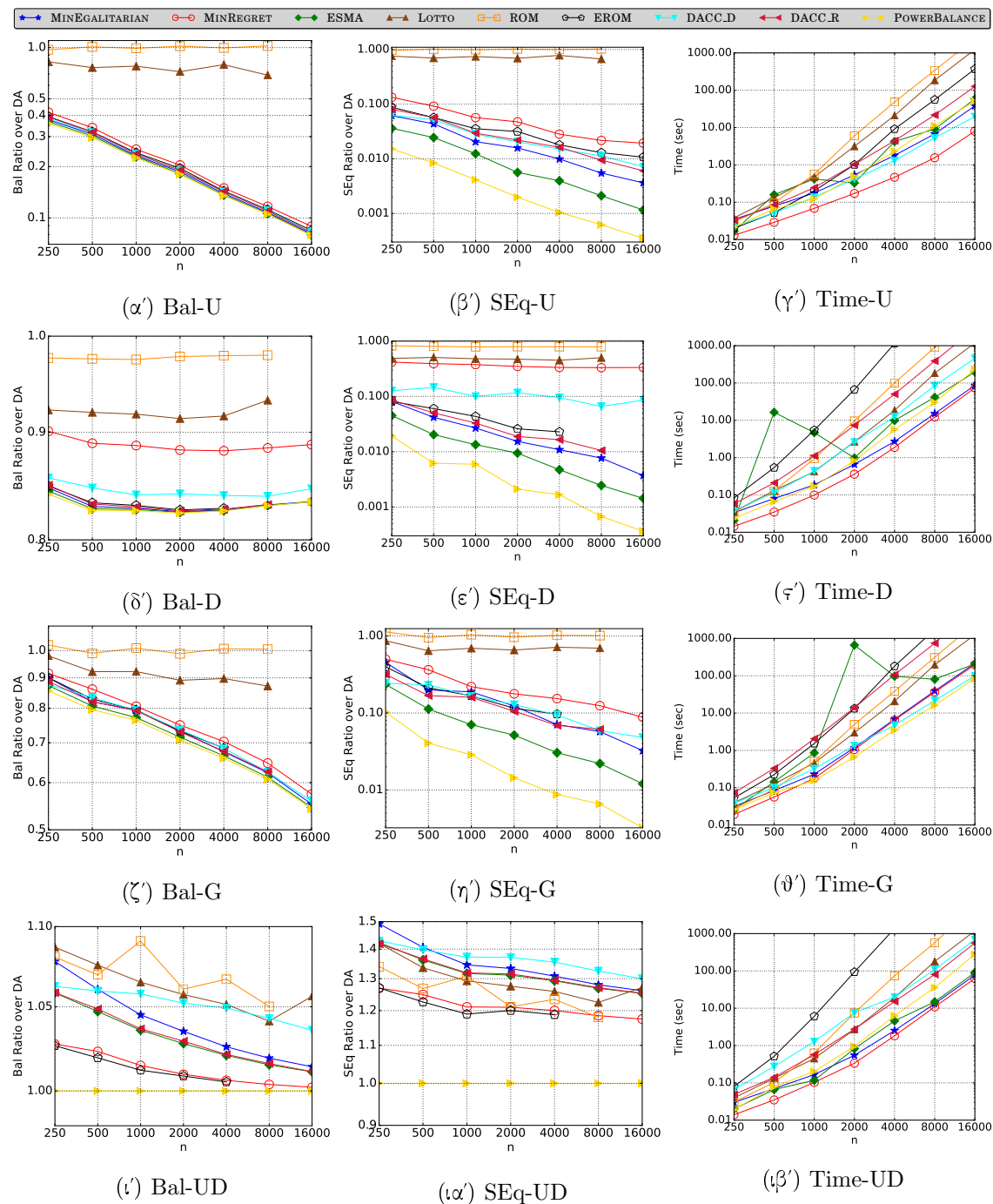


Σχήμα 6.4: Μελέτη πιθανότητας του BILS

6.2 Αξιολόγηση Απόδοσης

Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε την απόδοση των αλγορίθμων που παρουσιάσαμε και αναλύσαμε. Η σύγκριση θα λάβει χώρα σε τρεις φάσεις χάρin καλύτερης οπτικοποίησης και παρουσίασης των αποτελεσμάτων. Πρώτα, θα συγκρίνουμε αλγορίθμους από τη βιβλιογραφία που βελτιστοποιούν άλλες μετρικές από αυτές που εξετάζουμε (Egalitarian Cost, Regret Cost) μαζί με αυτούς που εκτελούν προτάσεις και με τις δύο πλευρές σε μία προσπάθεια να είναι «διαδικαστικά δίκαιοι», καταλήγοντας στην υπεροχή του POWERBALANCE έναντι τους. Στη συνέχεια, θα συγκρίνουμε αυτούς που χρησιμοποιούν local search στοχεύοντας σε κάποιο συγκεκριμένο κόστος, με τον POWERBALANCE ο οποίος θα έχει ανακηρυχθεί ως ο νικητής της πρώτης σύγκρισης. Τέλος, θα συγκρίνουμε τους καλύτερους σε ποιότητα αλγορίθμους με τον APPROX και θα φτάσουμε στα τελικά μας συμπεράσματα.

Για να διευκολύνουμε την ταυτόχρονη σύγκριση σε διαφορετικά μεγέθη n , θα κανονικοποιήσουμε τα αποτελέσματα του Sex-Equality Cost (SEq) και του Balance Cost (Bal), διαιρώντας τα με την αντίστοιχη καλύτερη τιμή που μπορεί να επιτύχει ο DA αλγόριθμος (είτε την Male-Optimal, είτε την Female-Optimal). Αυτός ο λόγος ε θα διευκολύνει και τη σύγκριση με τον APPROX αφού αποτελεί και την εγγύηση προσέγγισής του.



Σχήμα 6.5: Σύγκριση απόδοσης χωρίς μεθόδους local search

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν local search, δηλαδή ο BiLS, ο HYBRID και ο HYBRIDMULTISEARCH του Κεφαλαίου 5 χρησιμοποιούν μία συνάρτηση κόστους για να οδηγήσει την αναζήτησή τους. Και ο POWERBALANCE όμως κάνει κάτι τέτοιο στο τελευταίο του βήμα: όταν φτάσει στο τελευταίο του βήμα πρέπει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο λύσεις βάσει κάποιου κόστους. Επομένως, υλοποιούμε διαφορετικές εκδόσεις των αλγορίθμων για τα διαφορετικά κόστη. Για παράδειγμα, ένα διάγραμμα που θα δείχνει το SEq θα περιέχει την υλοποίηση του BiLS που βελτιστοποιεί το SEq κόστος. Σε όλες τις περιπτώσεις, ο χρόνος εκτέλεσης των δύο παραλλαγών είναι παρόμοιος, οπότε δείχνουμε το χειρότερο από τους δύο.

Δεδομένης της ανάλυσης της Ενότητας 6.1, θέτουμε την παράμετρο πιθανότητας του BiLS σε 0.125 και την παράμετρο $limit$ του POWERBALANCE σε $\log^2 n/10$. Για την περίπτωση του DACC, εφόσον το [14] δεν προτείνει κάποια συγκεκριμένη σειρά για τις προτάσεις, υλοποιούμε δύο διαφορετικές παραλλαγές: μία με τυχειότητα (DACC_R) που επιλέγει τον επόμενο proposer τυχαία με ομοιόμορφο τρόπο και μία ντετερμινιστική (DACC_D) η οποία χρησιμοποιεί την ίδια ευριστική στρατηγική με τον POWERBALANCE, δηλαδή συγκρίνει τα αθροίσματα s'_m και (s'_w) των δύο πλευρών και βάζει όλα τα μέλη της «δυνατής» πλευράς να προτείνουν από μία φορά σε κάθε γύρο.

Συμπεριλαμβανόμε σε αυτή τη μελέτη όλους τους αλγορίθμους που είδαμε στις Ενότητες 3 και 4 εκτός από τους ακόλουθους:

- τον ZIGZAG λόγω της έλλειψης σταθερότητας,
- τους SML2, BETTERRD και BESTRD αφού δεν κλιμακώνουν στα μεγέθη που εξετάζουμε,
- τους SWING και SWING⁺⁺, οι οποίοι είναι παρόμοιοι και στο [20] δείχνεται πειραματικά η κατωτερότητά τους σε σχέση με τον ESMA.

6.2.1 Σύγκριση χωρίς μεθόδους local search

Πρώτα συγκρίνουμε τους αλγορίθμους που δε χρησιμοποιούν local search, χρησιμοποιώντας μεγέθη που κλιμακώνονται εκθετικά μέχρι $n = 16000$ με 50 στιγμιότυπα ανά μέγεθος για όλες τις κατανομές. Στα πολύ μεγάλα μεγέθη, κόβουμε την εκτέλεση όσων ξεπερνούν το χρονικό όριο των 1000 sec και παράλληλα δε φαίνεται να δίνουν καλά αποτελέσματα. Το Σχήμα 6.5 συγκεντρώνει τα αποτελέσματά μας.

Παρατηρούμε ότι ο POWERBALANCE είναι ο αδιαμφισβήτητος νικητής σε αυτή τη σύγκριση, έχοντας τα καλύτερα κόστη και χαμηλούς χρόνους εκτέλεσης και στις 4 κατανομές προτιμήσεων. Ο ESMA καταφέρνει να έχει και αυτός ικανοποιητική ποιότητα λύσεων, όμως η συμπεριφορά του είναι αρκετά ασταθής όσον αφορά το χρόνο (Σχήματα 6.5ε', 6.5θ'). Αυτό είναι φυσικά αποτέλεσμα της απουσίας κάποιου φράγματος στο χρόνο εκτέλεσης. Οι MINREGRET και MINEGALITARIAN είναι ανάμεσα στους ταχύτερους, όμως τελικά δεν καταφέρνουν να δώσουν λύσεις που να είναι αρκετά δίκαιες για τις δύο πλευρές, χάνοντας σε ποιότητα. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το να ελαχιστοποιήσει κανείς άλλα παρεμφερή μέτρα δικαιοσύνης δε δίνει πάντα καλό sex equality και balance. Παρατηρούμε βέβαια ότι ο MINEGALITARIAN τα

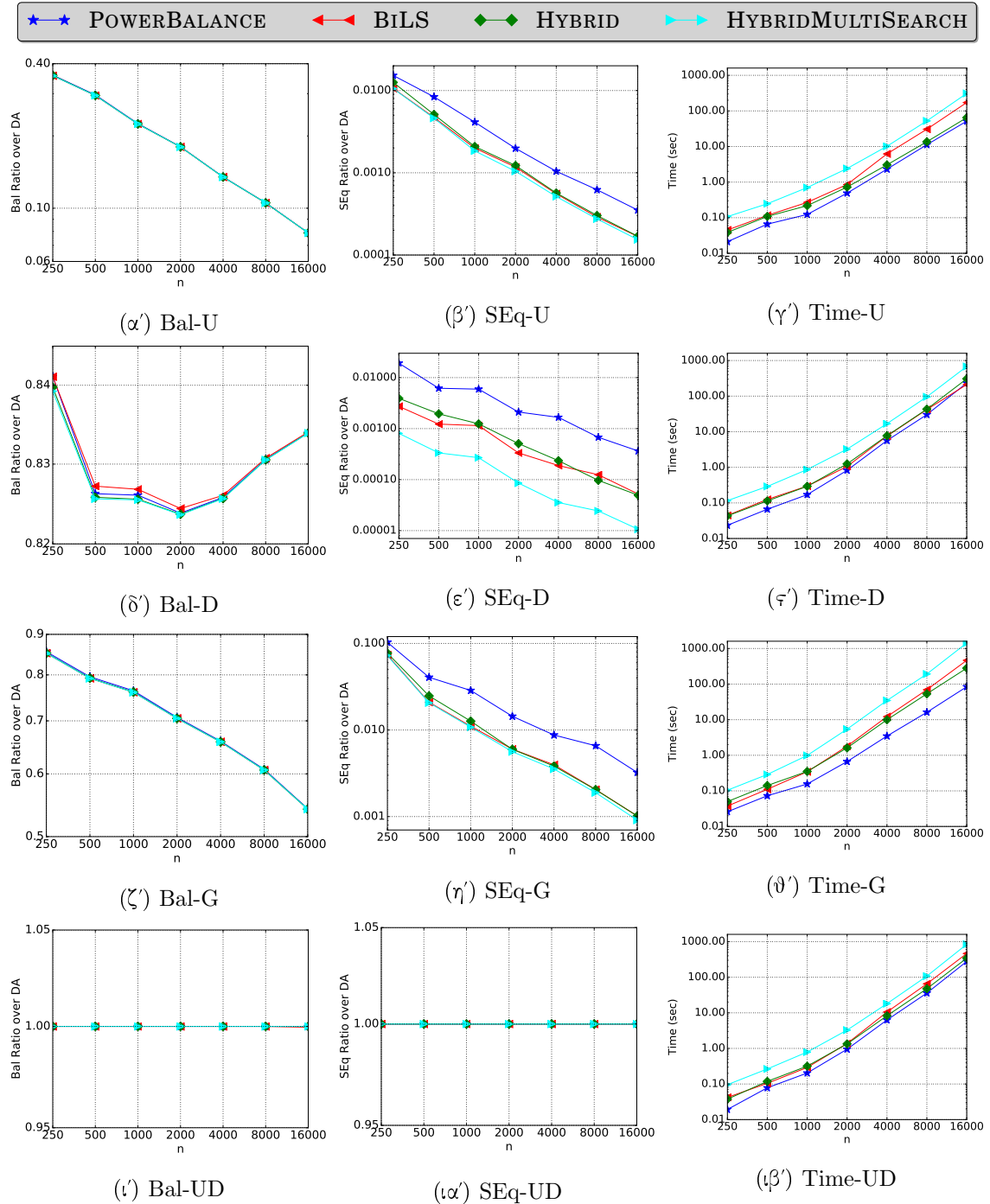
πάει καλύτερα από τον MINREGRET σε όλες τις κατανομές εκτός της ασυμμετρικής (Σχήματα 6.5ι', 6.5ια'). Οι DACC_R και DACC_D έχουν παρόμοια απόδοση, με τον DACC_R να έχει ένα πλεονέκτημα στο balance (Σχήματα 6.5δ', 6.5ι') και στο sex-equality (Σχήματα 6.5ε', 6.5ια'). Συμπεραίνουμε ότι η τακτική που ακολουθήσαμε για την επιλογή των proposers στον DACC_D δεν τον βοηθάει όσον αφορά την ποιότητα, πιθανώς λόγω της κυρίαρχης τακτικής των Compensation Chains. Όμως, η τυχαιότητα της φύσης του DACC_R κάνει πιο δύσκολο τον τερματισμό, με αποτέλεσμα να μην κλιμακώνει στα πιο μεγάλα μεγέθη (Σχήματα 6.5ε', 6.5θ'). Σε όλες τις περιπτώσεις ο DACC αποδεικνύεται χειρότερος από τον ESMA, το οποίο μας δείχνει ότι τα Compensation Chains έχουν αρνητική επίδραση στην ποιότητα. Οι LOTTO και ROM γενικά δε βγάζουν καλά αποτελέσματα. Ο EROM, έχοντας υψηλή πολυπλοκότητα, τερματίζει σε λογικούς χρόνους στην Uniform κατανομή (Σχήμα 6.5γ'), όμως δυσκολεύεται σε πιο περίεργες κατανομές, όπως η Discrete (Σχήμα 6.5ε'). Όσον αφορά την ποιότητα, βγάζει παρόμοια αποτελέσματα με τον DACC_R με τη μερική εξαίρεση της UniformDiscrete (Σχήματα 6.5ι', 6.5ια'). Η εγγενής ασυμμετρία των δύο πλευρών στην UniformDiscrete κατανομή, όπως έχουμε ήδη δει, επιβάλλει να μεροληπτήσουμε υπέρ της μίας πλευράς προκειμένου να έχουμε δικαιοσύνη «τελικής κατάστασης» (end-state fairness). Συνεπώς, αλγόριθμοι που τυφλά εφαρμόζουν μία μορφή «διαδικαστικής δικαιοσύνης» δεν τα καταφέρνουν, σε αντίθεση με αυτούς που προσαρμόζονται στις περιστάσεις (όπως ο POWERBALANCE).

6.2.2 Σύγκριση με μεθόδους local search

Δεδομένου ότι ο POWERBALANCE υπερέρχει τόσο σε δικαιοσύνη όσο και σε κλιμακωσιμότητα, θα τον συγκρίνουμε τώρα με αυτούς που κάνουν τοπική αναζήτηση (local search) πάνω στο roatation poset που περιέχει όλες τις λύσεις. Θα μελετήσουμε και πάλι μεγέθη μέχρι $n = 16000$ με 50 στιγμιότυπα ανά μέγεθος και κατανομή. Αντιπαραβάλλουμε τον POWERBALANCE με τη βελτιωμένη εκδοχή του BILS, με τον HYBRID που συνδυάζει προτάσεις και local search και τον HYBRIDMULTISEARCH που κάνει πολλές αναζητήσεις από διαφορετικά αρχικά σημεία. Το Σχήμα 6.6 περιέχει όλα τα αποτελέσματα.

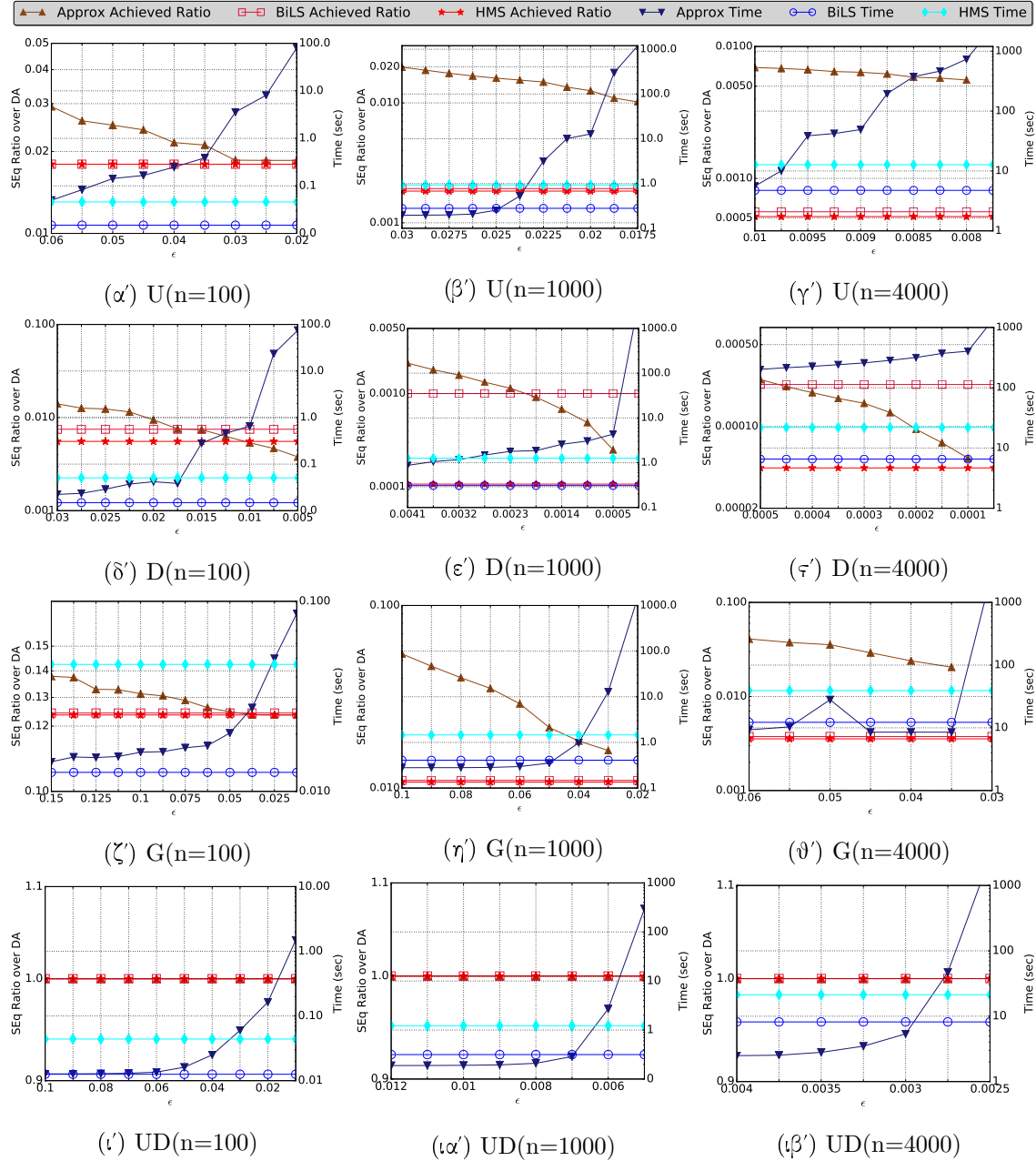
Παρ' όλο που ο POWERBALANCE είναι ο πιο γρήγορος, μένει πίσω όσον αφορά το sex-equality (Σχήματα 6.6β', 6.6ε', 6.6η'). Ο BILS πετυχαίνει καλή ποιότητα, όχι όμως στη Discrete κατανομή ως προς το balance (Σχήμα 6.6δ') που τον ξεπερνάει ακόμη και ο POWERBALANCE και ως προς το sex-equality που ο HYBRIDMULTISEARCH αποδεικνύεται πολύ ανώτερος. Κάνοντας λιγότερα βήματα τοπικής αναζήτησης, ο HYBRID είναι ελαφρώς πιο γρήγορος από τον BILS και πετυχαίνει καλύτερο balance (Σχήμα 6.6δ'). Όσον αφορά το sex-equality, είναι σε κάποιες περιπτώσεις συγκρίσιμος με τον BILS (Σχήμα 6.6ε') ή λίγο χειρότερος (Σχήμα 6.6β'). Ο HYBRIDMULTISEARCH έχει την καλύτερη ποιότητα, με την πιο εντυπωσιακή διαφορά στην Discrete (Σχήμα 6.6ε') και παρ' όλο που χρειάζεται τον περισσότερο χρόνο, έχει κλιμακωσιμότητα λόγω της χαμηλής πολυπλοκότητάς του. Έτσι, σε κάποιες περιπτώσεις, η καμπύλη χρόνου του BILS φαίνεται να έχει μεγαλύτερη κλίση και αναμένουμε ότι μπορεί να τον ξεπεράσει σε μεγαλύτερα n (Σχήμα 6.6γ'). Είναι αξιοσημείωτο ότι όλοι αυτοί οι αλγόριθμοι έχουν εγκαταλείψει τη «διαδικαστική δικαιοσύνη» και στοχεύουν συγκεκριμένα

σε μία συνάρτηση κόστους. Έτσι, όλοι καταφέρνουν να εντοπίσουν τη λύση με την υψηλή ποιότητα στην ασυμμετρική κατανομή UniformDiscrete (Σχήματα 6.6ί, 6.6ια'). Λόγω αυτής της σύμπτωσης των αποτελεσμάτων, υποθέτουμε ότι αυτή θα είναι και η βέλτιστη λύση τόσο ως προς το balance όσο και ως προς το sex-equality.



Σχήμα 6.6: Σύγκριση απόδοσης συμπεριλαμβανομένων των μεθόδων local search

Συνολικά, συμπεραίνουμε ότι ο POWERBALANCE είναι η πιο γρήγορη επιλογή μας και προσφέρει εκτός από ικανοποιητική ποιότητα λύσεων, απλότητα στη λογική χωρίς να απαιτεί συμπληρωματικές δομές όπως το rotation poset και ευκολία στην υλοποίηση. Από την άλλη, ο HYBRIDMULTISEARCH πετυχαίνει την καλύτερη ποιότητα.



Σχήμα 6.7: Απόδοση του προσεγγιστικού αλγορίθμου

6.2.3 Σύγκριση με τον Approx

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την απόδοση του APPROX, ο οποίος ήταν στα προηγούμενα διαγράμματα δύσκολο να συμπεριληφθεί λόγω της παραμέτρου ε που δέχεται ως είσοδο. Όπως γνωρίζουμε το ε δίνει μία εγγύηση προσέγγισης ως προς την καλύτερη έξοδο του DA αλγορίθμου, αλλά και αυξάνει την πολυπλοκότητα. Το γεγονός ότι η εγγύηση προσέγγισης δεν είναι ως προς τη βέλτιστη λύση, τον καθιστά δύσκολο να χρησιμοποιηθεί στην πράξη, αφού απαιτεί σε κάποιο βαθμό γνώση του που περίπου βρίσκεται περίπου ο λόγος της βέλτιστης λύσης. Ζητώντας ένα ε πολύ κοντά σε αυτή την τιμή θα έχει ως αποτέλεσμα πολύ υψηλό χρόνο εκτέλεσης, ενώ ένα μεγάλο σχετικά ε θα κρατήσει το χρόνο σε χαμηλά επίπεδα, δίνοντας όμως μία επουσιώδη εγγύηση προσέγγισης.

Για κάθε μέγεθος και κατανομή που εξετάζουμε, γεννούμε 50 στιγμιότυπα και εξερευνούμε ένα εύρος από τιμές του ε ώστε να βρούμε αυτές που θα δώσουν ανταγωνιστικά αποτελέσματα. Στην υλοποίηση του APPROX, αν για κάποιο στιγμιότυπο το ζητούμενο κόστος είναι χαμηλότερο από το βέλτιστο, τότε αντί η έξοδος να είναι «Όχι», τη ρυθμίζουμε ώστε να είναι η καλύτερη λύση που έχει βρεθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Το Σχήμα 6.7 παρουσιάζει τα αποτελέσματα έναντι των BiLS και HYBRIDMULTISEARCH. Οι άξονες στα αριστερά δείχνουν του λόγους του SEq , ενώ αυτοί στα δεξιά δείχνουν τις τιμές για τους χρόνους εκτέλεσης.

Στις Uniform και Gauss, ο BiLS και ο HYBRIDMULTISEARCH αποδεικνύονται πολύ ανώτεροι του APPROX, αφού οι λόγοι κόστους που επιτυγχάνονται από τους δύο αυτούς αλγορίθμους επιβαρύνουν πολύ το χρόνο εκτέλεσης του τελευταίου. Το φαινόμενο αυτό γίνεται ακόμη πιο έντονο με την αύξηση του n (Σχήματα 6.7γ', 6.7θ'). Στην Discrete αντίθετα, τα πάει αρκετά καλά, ξεπερνώντας το λόγο του BiLS, με αρκετά αυξημένο βέβαια χρόνο εκτέλεσης, χωρίς να καταφέρνει να πιάσει τους λόγους του HYBRIDMULTISEARCH μέσα σε κάποιο λογικό χρόνο (Σχήματα 6.7ε', 6.7ϕ'). Όλοι οι αλγόριθμοι βρίσκουν την καλύτερη λύση στην UniformDiscrete κατανομή, όμως ο APPROX μπορεί να χρειαστεί πολύ χρόνο αν επιλέξουμε ένα ατυχές ε .

6.3 Εφαρμογή στην Ανάθεση Φοιτητών σε Σχολές

Η ανάθεση υποψηφίων σε εκπαιδευτικά ιδρύματα είναι μία συνηθισμένη εφαρμογή του προβλήματος του σταθερού γάμου. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση της ανάθεσης φοιτητών σε σχολές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης θεωρώντας ένα σύστημα στο οποίο οι φοιτητές δηλώνουν τις προτιμήσεις τους για τις σχολές και αντίστοιχα κατατάσσονται από τις σχολές βάσει κάποιων εξετάσεων. Αυτό αντιστοιχεί βέβαια στον τρόπο λειτουργίας του Ελληνικού συστήματος, κάτι ανάλογο όμως συναντάμε και σε άλλες χώρες όπως η Ουγγαρία, η Ιρλανδία, η Ισπανία και η Τουρκία [11]. Θα τρέξουμε λοιπόν τους αλγορίθμους που μελετάμε σε δεδομένα τα οποία βασίζονται σε μία τέτοια πραγματική περίπτωση. Σημειώνεται ότι αυτή η μελέτη έχει νόημα μόνο όταν υπάρχουν περισσότερα από ένα σταθερά ταιριάσματα, κάτι που δε συμβαίνει αν όλες οι σχολές βαθμολογούν τους υποψήφιους με κοινό τρόπο. Επίσης, τίθεται το ερώτημα του γιατί να ζητάει κανείς από ένα τέτοιο σύστημα ισότητα των δύο πλευρών και να μην επωφε-

λήσει τα μέγιστα τους υποψήφιους, δίνοντάς τους το βέλτιστο γι' αυτούς σταθερό ταίριασμα χρησιμοποιώντας τον DA αλγόριθμο. Σε μία τέτοια περίπτωση, στο ελληνικό σύστημα θα λέγαμε πως οι «βάσεις εισαγωγής», δηλαδή οι βαθμολογίες των τελευταίων εισαχθέντων σε κάθε σχολή, θα ήταν οι ελάχιστες δυνατές και οι υποψήφιοι θα εισάγονταν στην καλύτερη γι' αυτούς (βάσει των προτιμήσεών τους) σχολή που θα ήταν ποτέ δυνατόν μεταξύ όλων των σταθερών ταιριασμάτων. Αξίζει εδώ να αναλογιστούμε το τι θα σήμαινε το αντίστροφο, δηλαδή το βέλτιστο σταθερό ταίριασμα για τις σχολές. Το ταίριασμα αυτό θα μεγιστοποιούσε τις «βάσεις εισαγωγής», δηλαδή οι φοιτητές που θα εισάγονταν στις σχολές θα είχαν την υψηλότερη δυνατή βαθμολογία. Με άλλα λόγια, θα δινόταν η μέγιστη βαρύτητα στην καταλληλότητα των υποψηφίων να ασχοληθούν με το αντικείμενο της σχολής. Για παράδειγμα, μία σχολή πληροφορικής θα προτιμούσε οι φοιτητές που θα εισαχθούν τελικά σε αυτή να έχουν καλή βαθμολογία στο μάθημα του προγραμματισμού. Φυσικά, αυτό είναι κάτι που πιθανώς θα επωφελούσε τους ίδιους τους φοιτητές μακροπρόθεσμα και θα ανέβαζε συνολικά το επίπεδο της σχολής. Οπότε, η δικαιοσύνη σε αυτό το πρόβλημα έχει την έννοια της εξισορρόπησης των δύο αυτών (πιθανώς αντικρουόμενων) στόχων. Το ποια πολιτική βέβαια πρέπει να εφαρμοστεί στην πράξη είναι εκτός των ενδιαφερόντων αυτής της εργασίας.

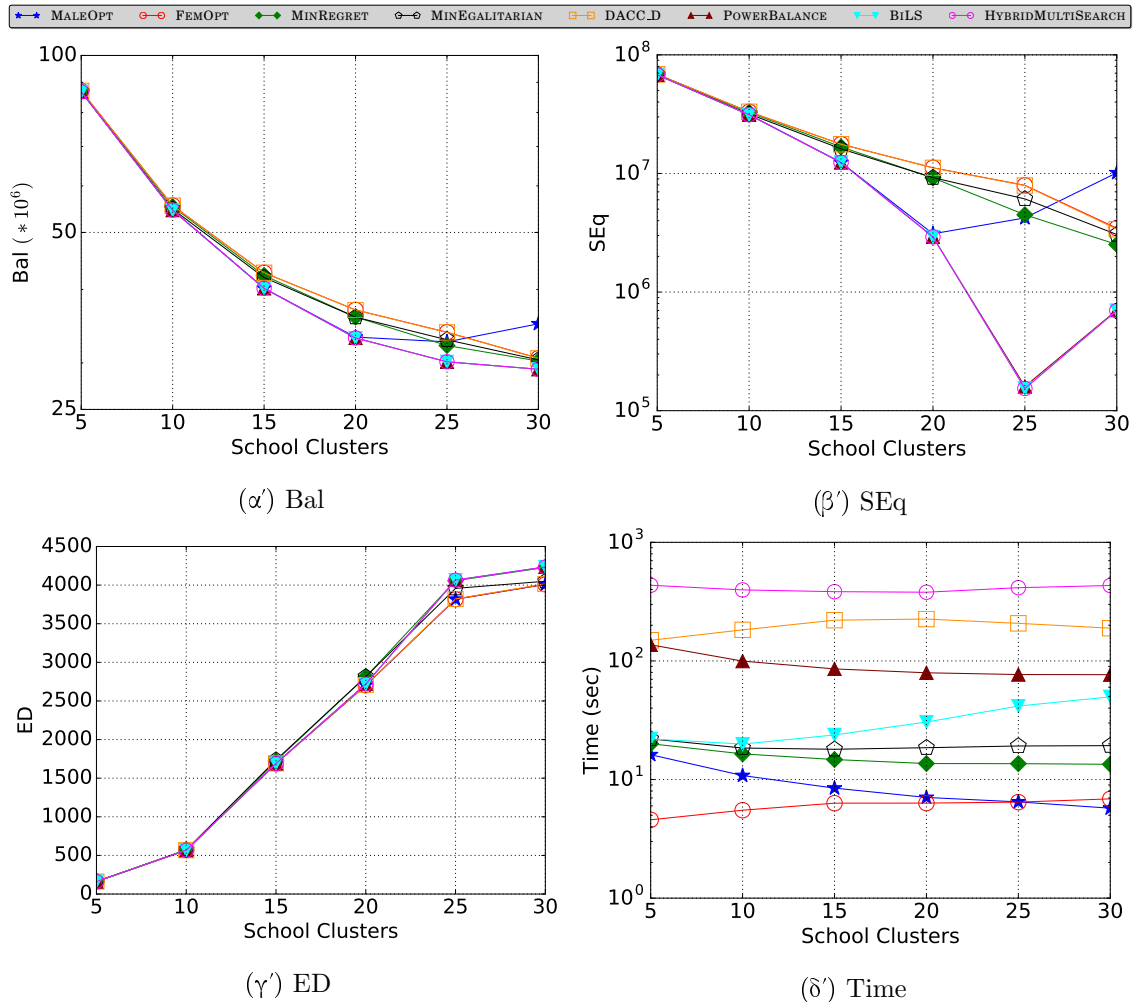
Θα χρησιμοποιήσουμε στατιστικά τα οποία δημοσιεύονται από το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων¹ για τη διαδικασία ταιριάσματος που έλαβε χώρα το 2017 μετά τη διεξαγωγή των πανελληνίων εξετάσεων. Στη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, κάθε υποψήφιος κάνει γνωστές τις προτιμήσεις του και κάθε σχολή τον κατατάσσει ανάλογα με τη βαθμολογία του στις εξετάσεις με πιθανώς διαφορετικά βάρη σε κάθε μάθημα (π.χ. οι ιατρικές σχολές δίνουν βαρύτητα στη βιολογία, ενώ πολυτεχνικές σχολές στα μαθηματικά). Το μοντέλο μας υποθέτει έναν αριθμό από διαφορετικές συστάδες (*clusters*) σχολών (οι οποίες αντιστοιχούν στα επιστημονικά πεδία), ώστε όλες οι θέσεις σε όλες τις σχολές ενός cluster μοιράζονται την ίδια ακριβώς λίστα προτιμήσεων, όπως και στην πραγματικότητα. Διανέμουμε 20000 θέσεις στις σχολές βάσει των πραγματικών δεδομένων και μετράμε τη δημοτικότητα κάθε σχολής, δηλαδή το συνολικό αριθμό φορών που εμφανίστηκε ως πρώτη προτίμηση. Στη συνέχεια χωρίζουμε τις σχολές στα clusters και επιλέγουμε τις προτιμήσεις για υποψήφιους μέσα στα clusters τυχαία και ομοιόμορφα. Κάθε υποψήφιος αναθέτει βάρη στις σχολές βάσει της δημοτικότητας τους, ενώ δίνει μεγαλύτερα βάρη σε σχολές του προσανατολισμού του, ο οποίος ορίζεται να είναι το cluster στο οποίο ανήκει η σχολή πρώτης προτίμησής του. Αυτά τα βάρη στη συνέχεια χρησιμοποιούνται ως πιθανότητες με τις οποίες μία σχολή επιλέγεται να είναι η επόμενη προτίμηση, στην οποία περίπτωση όλες οι θέσεις της προστίθενται σειριακά στη λίστα.

Το Σχήμα 6.8 δείχνει τα αποτελέσματα. Ενδιαφερόμαστε για την επίδραση που έχει ένας αυξανόμενος αριθμός από clusters (μέχρι 30), μετρώντας μέσους όρους από 30 στιγμιότυπα σε κάθε περίπτωση. Εκτός από τις συνηθισμένες μετρικές, απεικονίζουμε και μία μετρική ποικιλίας, το συνολικό edit distance μίας λύσης M από τις δύο ακραίες λύσεις, ορίζοντας το ως:

¹ Διαθέσιμα στην ιστοσελίδα <https://www.minedu.gov.gr/news/29720-24-08-17-statistika-protimiseonstis-panelladikes-eksetaseis-2017>

$$ED(M) = edit_distance(M, male_optimal) + edit_distance(S, female_optimal) \quad (6.1)$$

, όπου μετράμε απόσταση 1 για κάθε υποψήφιο που μπαίνει σε διαφορετική σχολή στα δύο συγκρινόμενα ταιριάσματα. Λόγω του μεγάλου μεγέθους των στιγμιοτύπων, τρέχουμε μόνο τους πιο κλιμακώσιμους από τους αλγόριθμους που έχουμε εξετάσει.



Σχήμα 6.8: Ταίριασμα Φοιτητών με Σχολές

Όταν ο αριθμός των clusters είναι μικρός, οι προτιμήσεις των σχολών μοιάζουν πολύ μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να υπάρχουν λίγα μόνο σταθερά ταιριάσματα. Με 15 clusters οι λύσεις αρχίζουν να διαφοροποιούνται και οι αλγόριθμοι που δε στοχεύουν στη δικαιοσύνη δεν επιστρέφουν καλά αποτελέσματα. Η Male-Optimal λύση, δηλαδή η βέλτιστη για τις σχολές, παραμένει ανάμεσα στις καλύτερες όσο βρισκόμαστε στην περιοχή κάτω των 20 clusters, υποδεικνύοντας ότι οι σχολές είναι πιο δύσκολο να ικανοποιηθούν λόγω των ίδιων λιστών προτίμησης μέσα στα clusters. Όμως, καθώς ο αριθμός των clusters αυξάνεται, ο POWERBALANCE, ο BiLS και ο HYBRIDMULTISEARCH βρίσκουν πιο δίκαιες λύσεις από τις δύο εξόδους του DA αλγορίθμου, με τον POWERBALANCE και τον BiLS να είναι πιο γρήγοροι.

Βλέπουμε ότι με έναν αυξανόμενο αριθμό από clusters η σύγκλιση του POWERBALANCE διευκολύνεται και ο χρόνος εκτέλεσής του πέφτει, ενώ αυτός του BiLS αυξάνεται αφού πρέπει να διασχίσει περισσότερες υποψήφιες λύσεις. Τέλος, το Σχήμα 6.8γ' δείχνει ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των clusters, οι διάφορες λύσεις διαφοροποιούνται όλο και περισσότερο από τις δύο ακραίες.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

7.1 Σύνοψη και συμπεράσματα

Εξετάσαμε από μία πειραματική σκοπιά το NP-hard πρόβλημα της εύρεσης ενός σταθερού και δίκαιου ταιριάσματος σε μία αγορά δύο πλευρών, όπως θα αντιμετωπιζόταν από μία κεντρική αρχή που διατηρεί τις προτιμήσεις τους και ενδιαφέρεται να ικανοποιήσει τα συμφέροντα και των δύο. Μελετήσαμε διάφορους μηχανισμούς αγορών και ευριστικούς αλγόριθμους και προτείναμε τρόπους με τους οποίους αυτοί μπορούν να βελτιωθούν και να συνδυάσουν τα πιο δυνατά τους σημεία. Καταλήξαμε στο ότι ένας μηχανισμός προτάσεων με μία λίγο διαφορετικό τρόπο λειτουργίας από το συνηθισμένο, ακολουθούμενη από λίγα βήματα local search μεταξύ άλλων σταθερών λύσεων μπορεί να δώσει τόσο χρονική αποδοτικότητα όσο και υψηλή ποιότητα όσον αφορά κριτήρια δικαιοσύνης. Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να είναι χρήσιμα σε δημόσιους ή ιδιωτικούς οργανισμούς που λύνουν προβλήματα ταιριασμάτων αν ενδιαφέρονται για αμεροληψία και δικαιοσύνη.

7.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

Μία πιθανή επέκταση της παρούσας εργασίας είναι μία ανάλογη μελέτη διαφορετικών εκδοχών του προβλήματος του σταθερού γάμου ώστε να μοντελοποιεί με πιο ακριβή τρόπο πραγματικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, η περίπτωση που οι λίστες προτιμήσεων δεν είναι πλήρεις, δηλαδή υπάρχουν μη αποδεκτά ζεύγη ή η περίπτωση που επιτρέπονται ισοπαλίες στις λίστες ή ακόμη και τα δύο ταυτόχρονα. Ένα ακόμη βήμα στο να έρθει το μοντέλο πιο κοντά σε πρακτικές εφαρμογές θα ήταν να θεωρήσουμε ότι οι προτιμήσεις παράγονται από συναρτήσεις (πιθανώς μονότονες) πάνω σε χαρακτηριστικά (attributes) των παικτών της απέναντι πλευράς.

Άλλες πιθανές προεκτάσεις είναι μία πιο γενική κατάσταση με βάρη όπου οι προτιμήσεις θα έχουν scores και τα διάφορα κόσθη ορίζονται με ανάλογο τρόπο (βλ. [22]:«Optimal Stable Marriage») ή το αρκετά διαφορετικό πρόβλημα των stable roommates όπου το ταιρίασμα πλέον δεν είναι διμερές. Μία επισκόπηση αυτών (και άλλων) προβλημάτων γίνεται στο [26].

Βιβλιογραφία

- [1] A. Abdulkadiroğlu and T. Sönmez. School choice: A mechanism design approach. *American economic review*, 93(3):729–747, 2003.
- [2] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, and A. Roth. The new york city high school match. *American Economic Review*, 95(2):364–367, 2005.
- [3] A. Abdulkadiroğlu, P. A. Pathak, A. E. Roth, and T. Sönmez. The boston public school match. *American Economic Review*, 95(2):368–371, 2005.
- [4] H. Ackermann, P. W. Goldberg, V. S. Mirrokni, H. Röglin, and B. Vöcking. Uncoordinated two-sided matching markets. *SIAM J. Comput.*, 40(1):92–106, 2011.
- [5] K. C. Ágoston, P. Biró, and I. McBride. Integer programming methods for special college admissions problems. *J. Comb. Optim.*, 32(4):1371–1399, 2016.
- [6] B. Aldershof, O. M. Carducci, and D. C. Lorenc. Refined inequalities for stable marriage. *Constraints*, 4(3):281–292, 1999.
- [7] H. Aziz, F. Brandt, and M. Brill. The computational complexity of random serial dictatorship. *Economics Letters*, 121(3):341 – 345, 2013.
- [8] M. Balinski and T. Sönmez. A tale of two mechanisms: Student placement. *Journal of Economic Theory*, 84(1):73–94, 1999.
- [9] P. Biró. Higher education admission in Hungary by a score-limit algorithm. In *The 18th International Conference on Game Theory at Stony Brook University*, 2007.
- [10] P. Biró. Student admissions in Hungary as Gale and Shapley envisaged. Technical Report TR-2008-291, University of Glasgow, 2008.
- [11] P. Biró and S. Kiselgof. College admissions with stable score-limits. *CEJOR*, 23(4):727–741, 2015.
- [12] S. Braun, N. Dwenger, and D. Kübler. Telling the truth may not pay off: An empirical study of centralized university admissions in germany. *The B.E. Journal of Economic Analysis & Policy*, 10(1):1–38, 2010.

- [13] C. T. Cheng. On the stable matchings that can be reached when the agents go marching in one by one. *SIAM J. Discrete Math.*, 30(4):2047–2063, 2016.
- [14] P. Dworzak. Deferred acceptance with compensation chains. In *ACM EC*, pages 65–66, 2016.
- [15] P. Everaere, M. Morge, and G. Picard. Minimal concession strategy for reaching fair, optimal and stable marriages. In *AAMAS*, 2013.
- [16] T. Feder. A new fixed point approach for stable networks and stable marriages. *Journal of Computer and System Sciences*, 45(2):233–284, 1992.
- [17] T. Feder. *Stable networks and product graphs*, volume 555. American Mathematical Soc., 1995.
- [18] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
- [19] M. Gelain, M. S. Pini, F. Rossi, K. B. Venable, and T. Walsh. Local search approaches in stable matching problems. *Algorithms*, 6(4):591–617, 2013.
- [20] I. Giannakopoulos, P. Karras, D. Tsoumakos, K. Doka, and N. Koziris. An equitable solution to the stable marriage problem. In *ICTAI*, pages 989–996, 2015.
- [21] D. Gusfield. Three fast algorithms for four problems in stable marriage. *SIAM Journal on Computing*, 16(1):111–128, 1987.
- [22] D. Gusfield and R. W. Irving. *The Stable marriage problem - structure and algorithms*. MIT Press, 1989.
- [23] R. W. Irving. Optimal stable marriage. In M.-Y. Kao, editor, *Encyclopedia of Algorithms*, pages 1470–1473. 2016.
- [24] R. W. Irving and P. Leather. The complexity of counting stable marriages. *SIAM Journal on Computing*, 15(3):655–667, 1986.
- [25] R. W. Irving, P. Leather, and D. Gusfield. An efficient algorithm for the “optimal” stable marriage. *Journal of the ACM*, 34(3):532–543, 1987.
- [26] K. Iwama and S. Miyazaki. A survey of the stable marriage problem and its variants. In *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society (icks 2008)*, pages 131–136, Jan 2008.
- [27] K. Iwama, S. Miyazaki, and H. Yanagisawa. Approximation algorithms for the sex-equal stable marriage problem. *ACM Trans. on Algorithms*, 7(1), 2010.
- [28] A. Kato. Complexity of the sex-equal stable marriage problem. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):1–19, 1993.

- [29] A. Kella and G. Belalem. Vm live migration algorithm based on stable matching model to improve energy consumption and quality of service. In *CLOSER*, pages 118–128, 2014.
- [30] B. Klaus and F. Klijn. Procedurally fair and stable matching. *Economic Theory*, 27(2):431–447, Feb 2006.
- [31] B. Klaus and F. Klijn. Employment by lotto revisited. *IGTR*, 11(2):181–198, 2009.
- [32] D. E. Knuth. *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires : introduction à l'analyse mathématique des algorithmes*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal, 1976.
- [33] D. E. Knuth. *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems : an introduction to the mathematical analysis of algorithms*. CRM proceedings & lecture notes. American Mathematical Society, 1997.
- [34] N. Korasidis, I. Giannakopoulos, K. Doka, D. Tsoumakos, and N. Koziris. Fair, fast and frugal large-scale matchmaking for vm placement. In *International Workshop of Algorithmic Aspects of Cloud Computing*, pages 131–145. Springer, 2016.
- [35] J. Liebowitz and J. Simien. Computational efficiencies for multi-agents: a look at a multi-agent system for sailor assignment. *Electronic Government*, 2(4):384–402, 2005.
- [36] J. Ma. On randomized matching mechanisms. *Economic Theory*, 8(2):377–381, 1996.
- [37] D. F. Manlove. *Algorithmics of Matching Under Preferences*. World Scientific, 2013.
- [38] E. McDermid and R. W. Irving. Sex-equal stable matchings: Complexity and exact algorithms. *Algorithmica*, 68(3):545–570, 2014.
- [39] D. G. McVitie and L. B. Wilson. The stable marriage problem. *Communications of the ACM*, 14(7):486–490, 1971.
- [40] É. Piette, M. Morge, and G. Picard. Swing⁺⁺: Méthode multi-agents pour la résolution du problème des mariages stables. In *Septième journées francophones Modèles Formels de l'Interaction (MFI'13)*, 2013.
- [41] A. Romero-Medina. Implementation of stable solutions in a restricted matching market. *Review of Economic Design*, 3(2):137–147, 1998.
- [42] A. Romero-Medina. 'Sex-equal' stable matchings. *Theory and Decision*, 50(3):197–212, 2001.
- [43] A. Romero-Medina. Equitable selection in bilateral matching markets. *Theory and Decision*, 58(3):305–324, 2005.

- [44] A. E. Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92(6):991–1016, 1984.
- [45] A. E. Roth. Deferred acceptance algorithms: History, theory, practice, and open questions. Working Paper 13225, National Bureau of Economic Research, July 2007.
- [46] A. E. Roth. What have we learned from market design? *The Economic Journal*, 118(527):285–310, 2008.
- [47] A. E. Roth and E. Peranson. The redesign of the matching market for american physicians: Some engineering aspects of economic design. *The American Economic Review*, 89(4):748–80, 1999.
- [48] A. E. Roth and J. H. Vande Vate. Random paths to stability in two-sided matching. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1475–1480, 1990.
- [49] A. Tamura. Transformation from arbitrary matchings to stable matchings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 62(2):310 – 323, 1993.
- [50] C.-P. Teo, J. Sethuraman, and W.-P. Tan. Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications. *Management Science*, 47(9):1252–1267, 2001.
- [51] H. H. Viet, L. H. Trang, S. Lee, and T. Chung. A bidirectional local search for the stable marriage problem. In *ACOMP*, pages 18–24, 2016.
- [52] H. H. Viet, L. H. Trang, S. Lee, and T. Chung. An empirical local search for the stable marriage problem. In *PRICAI*, pages 556–564, 2016.
- [53] H. Xu and B. Li. Anchor: A versatile and efficient framework for resource management in the cloud. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 24(6):1066–1076, 2013.
- [54] B. Zavidovique, N. Suvonvorn, and G. Seetharaman. A novel representation and algorithms for (quasi) stable marriages. In *ICINCO*, pages 63–70, 2005.

