Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Ασυμπτωτικές Δομές σε Χώρους Banach και Εφαρμογές

Γεωργίου Αλέξανδρος

Επιβλέπων :
Σπυρίδων Αργυρός
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

Περίληψη

Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζουμε υλικό από την ερευνητική εργασία *Joint Spreading Models and Uniform Approximation of Bounded Operators* [AGLM] και συγκεκριμένα εξετάζουμε την ακόλουθη ιδιότητα για χώρους Banach. Ένας χώρος Banach X ικανοποιεί την ιδιότητα της *Ομοιόμορφης Προσέγγισης σε Μεγάλους Υποχώρους* (UALS) αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για $A \in \mathcal{L}(X)$, $W \subset \mathcal{L}(X)$ με W κυρτό, συμπαγές και τέτοιο ώστε για κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάθε $x \in X$ υπάρχει $B \in W$ με $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, να υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης και ένας $B \in W$ ώστε $\|(A - B)|_Y\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < C\varepsilon$. Αποδεικνύεται ότι μία κλάση χώρων η οποία περιλαμβάνει τους κλασσικούς χώρους ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$, και τον $C(K)$ όπου K είναι αριθμήσιμο συμπαγές, ικανοποιεί την ιδιότητα. Αντιθέτως κάθε $L_p[0,1]$, για $1 \leq p \leq \infty$ και $p \neq 2$, δεν ικανοποιεί την UALS και το ίδιο ισχύει για τον $C(K)$ όταν το K είναι ένας υπεραριθμήσιμος συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος. Οι αναγκαίες συνθήκες που απαιτούμε για να ικανοποιεί ένας χώρος την UALS βασίζονται στα joint spreading model, μια πολυδιάστατη επέκταση της κλασσικής έννοιας του spreading model, τα οποία παρουσιάζουμε μαζί με άλλα εργαλεία της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων Banach στην πρώτη ενότητα του κειμένου.

Abstract

In this text we present material from the research paper *Joint Spreading Models and Uniform Approximation of Bounded Operators* [AGLM] and in particular we study the following property for Banach spaces. A Banach space X satisfies the *Uniform Approximation on Large Subspaces* property (UALS) if there is $C > 0$ such that for $A \in \mathcal{L}(X)$, $W \subset \mathcal{L}(X)$ with W convex, compact and such that for some $\varepsilon > 0$ and for every $x \in X$ there is a $B \in W$ with $\|A(x) - B(x)\| < \varepsilon\|x\|$, there exists a subspace Y of X of finite codimension and a $B \in W$ such that $\|(A-B)|_Y\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < C\varepsilon$. We prove that a class of Banach spaces including the classical spaces ℓ_p, for $1 \leq p < \infty$, and $C(K)$ for K a countable compact space, satisfy the property. On the other hand every $L_p[0,1]$, for $1 \leq p \leq \infty$ with $p \neq 2$, fails the property and the same holds for $C(K)$, when K is an uncountable compactum. Our sufficient conditions for a space to satisfy UALS are based on joint spreading models, a multidimensional extension of the classical concept of spreading models, which we present in the first section of this text in addition to other tools used in the asymptotic study of Banach spaces.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η ιδιότητα της Ομοιόμορφης Προσέγγισης σε Μεγάλους Υποχώρους (UALS), μελετήθηκε για πρώτη φορά στο [AGLM] και αποτελεί μία ειδική περίπτωση του ακόλουθου γενικού ερωτήματος. Κάτω από ποιές συνθήκες η ε-κατά σημείο προσέγγιση μίας συνάρτησης f από τα στοιχεία μίας οικογένειας συναρτήσεων W, συνεπάγεται ότι υπάρχει $g \in W$ το οποίο ε'-προσεγγίζει ομοιόμορφα την f. Ένα γνωστό απότελεσμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι η ακόλουθη συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach. Αν X είναι ένας χώρος Banach, θεωρώντας τον X σαν υπόχωρο του X^{**} μέσω της κανονικής εμφύτευσης, τότε για $x_0 \in X$, W ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X και $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x^* \in X^*$ να υπάρχει $x \in W$ τέτοιο ώστε $|x^*(x_0) - x^*(x)| \leq \varepsilon \|x^*\|$, ισχύει ότι για κάθε $\varepsilon' > \varepsilon$ υπάρχει $y_0 \in W$ με $\|x_0 - y_0\| \leq \varepsilon'$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει, είναι κατά πόσο το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται στο χώρο των φραγμένων τελεστών $\mathcal{L}(X)$ του X και η ιδιότητα UALS είναι μια προσπάθεια να δωθεί μία απάντηση. Παρατηρήστε ότι στον ορισμό της UALS υπάρχουν δύο σημαντικές διαφορές από το εν λόγω ερώτημα. Πρώτον, το σύνολο W είναι νόρμ συμπαγές και αυτό είναι απαραίτητο καθώς οι νορμαρισμένοι τελεστές τάξης ένα, ε-κατά σημείο προσεγγίζουν τον ταυτοτικό τελεστή, για κάθε $\varepsilon > 0$. Επιπλέον, η ομοιόμορφη προσέγγιση γίνεται σε έναν υπόχωρο πεπερασμένης συνδιάστασης. Αυτό είναι αναγκαίο, κάθως ένα παράδειγμα του W. B. Johnson δείχνει ότι για κάθε χώρο Banach X με $\dim X \geq 2$ υπάρχει $C > 0$, $A \in \mathcal{L}(X)$ και ένα κυρτό συμπαγές $W \subset \mathcal{L}(X)$ ώστε για κάθε x που ανήκει στη μοναδιαία μπάλα του X, υπάρχει ένας $B \in W$ με $\|A(x) - B(x)\| = 0$, ενώ η απόσταση του A από το W είναι μεγαλύτερη ίση του C. Υπάρχουν δύο κλάσεις χώρων Banach που ικανοποιούν την ιδιότητα UALS. Η πρώτη κλάση περιλαμβάνει χώρους με πολύ λίγους τελεστές και συγκεκριμένα όλους τους χώρους με την ιδιότητα scalar-plus-compact. Η δεύτερη κλάση περιλαμβάνει χώρους με ισχυρή ασυμπτωτική ομοιογένεια, κάτι το οποίο περιγράφεται από την ομοιόμορφη μοναδικότητα των l-joint spreading model, μία πολυδιάσταση επέκταση των κλασσικών spreading model από το [BS].

Η πρώτη ενότητα του κειμένου αφορά ακολουθιακές ασυμπτωτικές δομές σε χώρους Banach. Ξεκινάμε με την κλασσική έννοια των spreading model των A. Brunel και L. Sucheston [BS] και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα joint spreading model από το [AGLM]. Τέλος, ακολουθούν τα asymptotic model από το [HO]. Η μελέτη χώρων Banach με μοναδική ασυμπτωτική δομή, ως προς αυτές τις έννοιες, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα της δεύτερης ενότητας. Έτσι, το τελευταίο μέρος της ενότητας αφιερώνεται στη μελέτη χώρων οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς κάποιες οικογένειες ακολουθιών. Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι $\ell_p(\Gamma)$, για $1 \leq p < \infty$, ο $c_0(\Gamma)$ και κάθε Asymptotic ℓ_p χώρος υπό την έννοια του [MMT]. Ένα ακόμη τέτοιο παράδειγμα απότελεί ο χώρος James Tree και συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι κάθε l-joint spreading model που παράγεται από νορμαρισμένες ασθενώς μηδενικές ακολουθίες στον $\mathcal{JT}$ είναι $\sqrt{2}$-ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_2, και αυτή η σταθερά είναι η καλύτερη δυνατη [HB], [Be]. Η απόδειξη αποτελεί μία παραλλαγή του γνωστού αποτελέσματος των I. Ameniya και T. Ito ότι κάθε νορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία στον $\mathcal{JT}$ έχει υπακολουθία ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_2. Η ενότητα όμως, έχει ως αφετηρία τη μελέτη πεπερασμένων οικογενειών από ακολουθίες σε ένα χώρο Banach, όπως αυτή παρουσιάζεται στο [AGLM], η οποία έχει ως αφορμή τον ορισμό των πλέγμα spreading ακολουθιών, μία έννοια που συνδέεται στενά με τα joint spreading model. Συγκεκριμένα, εξετάζεται το ακόλουθο πρόβλημα. Κάτω από ποιές συνθήκες, πεπερασμένες το πλήθος ακολουθίες από Schauder (unconditional) βασικές ακολουθίες περιέχουν υπακολουθίες οι οποίες να σχηματίζουν μία από κοινού Schauder (unconditional) βασική ακολουθία, ως προς κάποια αρίθμηση. Στη περίπτωση των Schauder βασικών ακολουθιών ισχύει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός.

Θεώρημα I. Έστω $(e_j^1)_j, \dots, (e_j^l)_j$ είναι ημινορμαρισμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X ώστε κάθε μία είναι είτε ασθενώς μηδενική είτε ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1 ή μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy. Έστω $I \subset [l]$ τέτοιο ώστε η $(e_j^i)_j$ να είναι μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy με $w^*\text{-}\lim_j e_j^i = e_i^{**}$, για κάθε $i \in I$, και έστω $F = \operatorname{span}\{e_i^{**}\}_{i \in I}$. Τότε υπάρχουν $M_1, \dots, M_l$ άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, ώστε η ακολουθία $((e_j^i)_{j \in M_i})_{i=1}^l$ να είναι Schauder βασική, ως προς κάποια αρίθμηση, αν και μόνο αν $X \cap F = \{0\}$.

Για unconditional ακολουθίες αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα II. Έστω $(e_j^i)_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$ είναι μία πλέγμα spreading ακολουθία ώστε κάθε $(e_j^i)_j$ να είναι unconditional. Τότε η $(e_j^i)_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$ είναι επίσης unconditional.

Μία παραλλαγή του κλασσικού παραδείγματος των B. Maurey και H. P. Rosenthal [MR], δείχνει ότι η συνθήκη του σχηματίζουν οι ακολουθίες μία πλέγμα spreading ακολουθία είναι πράγματι απαραίτητη στο παραπάνω θεώρημα. Τα αποτελέσματα αυτά καθώς και η έννοια των πλέγμα spreading ακολουθιών χρησιμοποιούνται για να οριστούν τα joint spreading model και να αποδειχθούν βασικές ιδιότητές τους.

Η δεύτερη ενότητα αφιερώνεται στη μελέτη χώρων Banach που ικανοποιούν την ιδιότητα UALS. Στο πρώτο μέρος, εξετάζεται η ιδιότητα για χώρους με πολύ λίγους τελεστές και συγκεκριμένα για χώρους με την ιδιότητα scalar-plus-compact [AH], [Ar *et al.*], για τους οποίους αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Θεώρημα III. Κάθε χώρος Banach με την ιδιότητα scalar-plus-compact ικανοποιεί τη UALS.

Το βασικό αποτελέσμα για τη UALS αφορά χώρους οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς οικογένειες Schauder βασικών ακολουθιών οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Έτσι, παρουσιάζεται η έννοια των difference-including οικογενειών και αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα IV. Έστω X είναι ένας χώρος Banach και έστω ότι για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X υπάρχει μια difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από Schauder βασικές ακολουθίες στον Z. Αν υπάρχει μια ομοιόμορφη σταθερά $K \geq 1$ ώστε κάθε Z να δέχεται ένα K-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_Z$ τότε ο X ικανοποιεί την ιδιότητα UALS.

Ένα βασικό συστατικό της απόδειξης είναι το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Kakutani για πλειότιμες απεικονίσεις [BK], [Ka]. Αυτό το επιχείρημα είχε εμφανιστεί στην εργασία των W. T. Gowers και B. Maurey, συγκεκριμένα στο Λήμμα 9 [GM], και ήταν η αφορμή για να οριστεί η ιδιότητα UALS. Σαν συνέπεια του θεωρήματος, οι ακόλουθοι χώροι και όλοι οι υπόχωροί τους ικανοποιούν την UALS. Ο χώρος $\ell_p(\Gamma)$, για $1 \leq p < \infty$, και ο $c_0(\Gamma)$ για ένα άπειρο σύνολο Γ, ο χώρος James Tree και κάθε Asymptotic ℓ_p χώρος, για $1 \leq p \leq \infty$. Ακόμη, η ιδιότητα UALS συμπεριφέρεται καλά ως προς τη δυικότητα, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα V. Έστω X να είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach, ο οποίος έχει μία πεπερασμένης διάστασης διάσπαση. Τότε ο X ικανοποιεί τη UALS αν και μόνο αν την ικανοποιεί ο X^*.

Θεώρημα VI. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach ο οποίος έχει μία πεπερασμένης διάστασης διάσπαση. Αν υπάρχει $K > 0$, ώστε για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X^* να υπάρχει μία difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από νορμαρισμένες ακολουθίες στον X^* ως προς την οποία ο Z δέχεται ένα K-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model, τότε ο X ικανοποιεί την UALS

Ως συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος, κάθε $\mathscr{L}_\infty$ χώρος ο οποίος έχει διαχωρίσιμο συζυγή καθώς και τα πηλίκα αυτών με πεπερασμένης διάστασης διάσπαση, ικανοποιούν την UALS. Επομένως, ο χώρος $C(K)$ για κάθε K αριθμήσιμο και συμπαγές ικανοποιεί την ιδιότητα. Παρουσιάζουμε επίσης ένα παράδειγμα αυτοπαθούς χώρου ο οποίος δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό spreading model αλλά δεν ικανοποιεί την UALS. Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι αν ένας χώρος δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model, αυτό δεν συνεπάγεται κατ΄ ανάγκη ότι δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model και ότι η υπόθεση στα θεωρήματα IV και VI, για ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model δεν μπορεί να αντικατασταθεί από spreading model. Τέλος, αποδεικνύεται ότι οι χώροι L_p, για $1 \leq p \leq \infty$ και $p \neq 2$, και ο χώρος $C(K)$ για K υπεραριθμήσιμο συμπαγές μετρικοποιήσιμο, δεν ικανοποιούν την ιδιότητα.

Σημειογραφία

Με $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών και χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα, όπως $L, M, N, \ldots$ (αντ. πεζά γράμματα όπως $s, t, u, \ldots$) για να συμβολίζουμε τα απείρα (αντ. πεπερασμένα) υποσύνολα του. Για κάθε άπειρο υποσύνολο L του $\mathbb{N}$, με $[L]^\infty$ (αντ. $[L]^{<\infty}$) συμβολίζουμε το σύνολο όλων των άπειρων (αντ. πεπερασμένων) υποσυνόλων του L. Για κάθε $s \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, με $\#s$ συμβολίζουμε την πληθικότητα του s. Για $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $k \in \mathbb{N}$, το $[L]^k$ (αντ. $[L]^{\leq k}$) είναι το σύνολο όλων των $s \in [L]^{<\infty}$ με $\#s = k$ (αντ. $\#s \leq k$). Για κάθε $s, t \in [\mathbb{N}]^{<\infty}$, γράφουμε $s < t$ αν είτε τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι κενό είτε $\max s < \min t$. Ακόμη, για $\emptyset \neq s \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε $n < s$ αν $n < \min s$. Για $n \in \mathbb{N}$, συμβολίζουμε με $[n]$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Ταυτίζουμε τις γνησίως αύξουσες ακολουθίες στο $\mathbb{N}$ με την εικόνα τους, δηλαδή βλέπουμε κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{N}$ ως ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και αντίστροφα κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ως την ακολουθία που προκύπτει από τη φυσιολογική διάταξη των στοιχείων του κατά αύξοντα τρόπο. Επομένως, για ένα άπειρο υποσύνολο $L = \{l_1 < l_2 < \ldots\}$ του $\mathbb{N}$ και $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $L(i) = l_i$, και όμοια για ένα πεπερασμένο υποσύνολο $s = \{n_1 < \ldots < n_k\}$ του $\mathbb{N}$ και $1 \leq i \leq k$, θέτουμε $s(i) = n_i$.

Τέλος, ακολουθούμε την καθιερωμένη σημειογραφία και ορολογία της θεωρίας χώρων Banach, την οποία μπορεί να βρεί ο αναγνώστης στο [LT].

1 Ασυμπτωτικές Δομές σε Χώρους Banach

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε εργαλεία της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων Banach, με αφετηρία την κλασσική έννοια των spreading model των A. Brunel και L. Sucheston [BS]. Στη συνέχεια περνάμε στα l-joint spreading model από το [AGLM] και τέλος τα asymptotic model [HO]. Η μελέτη χώρων Banach με μοναδική ασυμπτωτική δομή, ως προς αυτές τις έννοιες, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όπως προκύπτει και από τα αποτελέσματα της επόμενης ενότητας.

1.1 Πεπερασμένες Οικογένειες απο Ακολουθίες

Με αφορμή τον ορισμό των πλέγμα spreading ακολουθιών, παρουσιάζονται στο [AGLM] τα παρακάτω αποτελέσματα που σχετίζονται με την από κοινού συμπεριφορά πεπερασμένων οικογενειών απο ακολουθίες σε χώρους Banach. Συγκέκριμενα δίνεται απάντηση στο εξής πρόβλημα. Σε ποιές περιπτώσεις πεπερασμένες το πλήθος Schauder βασικές ακολουθίες περιέχουν υπακολουθίες οι οποίες να σχηματίζουν μία απο κοινού Schauder βασική ακολουθία ως προς κάποια αρίθμηση. Όπως προκύπτει τελικά, η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με τα w^*-όρια των ακολουθιών αυτών. Ακόμη, μελετάται το αντίστοιχο πρόβλημα στην περίπτωση unconditional ακολουθίων, το οποίο έχει μάλιστα καταφατική απάντηση μόνο όταν αυτές σχηματίζουν μία πλέγμα spreading ακολουθία και όπως επιβεβαιώνεται με μία παραλλαγή του κλασσικού παραδείγματος των B. Maurey και H. P. Rosenthal [MR]. Τόσο οι έννοιες των πλέγμα οικογένειων και πλέγμα spreading ακολουθιών όσο και τα υπόλοιπα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε σε αυτό το πρώτο μέρος, θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια για να οριστούν τα joint spreading model και να αποδειχθούν ιδιότητες τους.

1.1.1 Πλέγμα Spreading Ακολουθίες

Η έννοια της πλέγμα οικογένειας από υποσυνόλα των φυσικών αριθμών εμφανίστηκε πρώτη φορά στο [AKT] όπου χρησιμοποιήθηκε για να οριστούν τα spreading model υψηλότερης τάξης. Μέσω αυτών των οικογενειών εισάγεται στο [AGLM] η έννοια των πλέγμα spreading ακολουθιών, την οποία παρουσιάζουμε στη συνέχεια. Αυτές είναι πεπερασμένες οικογένειες από ακολουθίες σε ένα χώρο Banach οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ένα «spreading» τρόπο ο οποίος περιγράφεται από τις πλέγμα οικογένειες.

Ορισμός 1.1. Έστω $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $\mathcal{F}$ να είναι είτε το $[M]^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ είτε το $[M]^\infty$. Μια *πλέγμα* (αντ. *γνήσια πλέγμα*) *οικογένεια στο* $\mathcal{F}$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία $(s_i)_{i=1}^l$ στο $\mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα.

α) $s_{i_1}(j_1) < s_{i_2}(j_2)$ για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$ είτε $j_1 < j_2 \in \mathbb{N}$ και κάθε $1 \leq i_1, i_2 \leq l$.

β) $s_{i_1}(j) \leq s_{i_2}(j)$ (αντ. $s_{i_1}(j) < s_{i_2}(j)$) για κάθε $1 \leq i_1 < i_2 \leq l$ και κάθε $1 \leq j \leq k$ είτε $j \in \mathbb{N}$.

Για $l \in \mathbb{N}$, το σύνολο των πλέγμα οικογενειών $(s_i)_{i=1}^l$ στο $\mathcal{F}$ θα συμβολίζεται ως $Plm_l(\mathcal{F})$ και αυτό των γνήσια πλέγμα ως $S\text{-}Plm_l(\mathcal{F})$.

Το ακόλουθο είναι μία συνέπεια του θεωρήματος Ramsey [Ra].

Θεώρημα 1.2 ([AKT])**.** Έστω M ένα άπειρο υποσύνολο των φυσικών αριθμών και $k, l \in \mathbb{N}$. Για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $S\text{-}Plm_l([M]^k) = \cup_{i=1}^n P_i$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ και $1 \leq i_0 \leq n$ ώστε $S\text{-}Plm_l([L]^k) \subset P_{i_0}$.

Παρατήρηση 1.3. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^\infty)$. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να αριθμήσουμε το σύνολο $\{(i, s_i(j))\}_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$, με ένα φυσιολογικό τρόπο ως προς την έννοια της πλέγμα οικογένειας, μέσω της λεξικογραφικής αρίθμησης στο $\mathbb{N} \times [l]$. Επιπλέον αν $(x_j^1)_j, \ldots, (x_j^l)_j$ είναι ακολουθίες σε κάποιο σύνολο, μπορούμε να θεωρήσουμε την από κοινού ακολουθία $(x_{s_i(j)}^i)_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$ να είναι αριθμημένη κατά τον ίδιο τρόπο και στο εξής θα ονομάζουμε την αρίθμηση αυτή ως *πλέγμα αρίθμηση*.

Ορισμός 1.4. Έστω $k, l \in \mathbb{N}$, $\pi = [l] \times [k]$, $s = (s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^k)$ και $(e_j^i)_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$ να είναι μία ακολουθία σε ένα γραμμικό χώρο E.

α) Η *πλέγμα μετατόπιση του* π ως προς την s ορίζεται ως το σύνολο

$$s(\pi) = \{(i, s_i(j)) : (i, j) \in \pi\}$$

και για $A \subset \pi$, η πλέγμα μετατόπιση του A ως προς την οικογένεια s ορίζεται ως το σύνολο $s(A) = \{(i, s_i(j)) : (i, j) \in A\}$.

β) Αν $x = \sum_{(i,j)\in F} a_{ij} e_j^i$ με $F \subset \pi$, τότε η *πλέγμα μετατόπιση* του x ως προς την s ορίζεται ως το διάνυσμα

$$s(x) = \sum_{(i,j)\in F} a_{ij} e_{s_i(j)}^i.$$

Παρατήρηση 1.5. Μία ακολουθία $(e_j)_j$ σε ένα χώρο Banach καλείται *spreading* αν ισχύει ότι $\|\sum_{j=1}^k a_j e_j\| = \|\sum_{j=1}^k a_j e_{n_j}\|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $n_1 < \ldots < n_k$ και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Χρησιμοποιώντας την έννοια των πλέγμα μετατοπίσεων ο παραπάνω ορισμός μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής : Μία ακολουθία $(e_j)_j$ σε ένα χώρο Banach καλείται spreading αν για κάθε $x \in \operatorname{span}\{e_j\}_j$ ισχύει ότι $\|x\| = \|s(x)\|$ για όλες τις πλέγμα μετατοπίσεις $s(x)$ του x.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την έννοια των πλέγμα spreading ακολουθιών, μία πολυδιάστατη γενίκευση των κλασσικών spreading ακολουθίων, όπως γίνεται εμφανές από την παραπάνω αναδιατύπωση.

Ορισμός 1.6. Μία ακολουθία $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ σε ένα χώρο Banach καλείται *πλέγμα spreading* αν για κάθε $x \in \operatorname{span}\{e_j^i\}_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ ισχύει ότι $\|x\| = \|s(x)\|$ για όλες τις πλέγμα μετατοπίσεις $s(x)$ του x.

Παρατηρήσεις 1.7. Έστω $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ είναι μία πλέγμα spreading ακολουθία.

α) Για κάθε $I \subset [l]$ η ακολουθία $(e_j^i)_{i\in I,j\in\mathbb{N}}$ είναι πλέγμα spreading και συγκεκριμένα η ακολουθία $(e_j^i)_j$ είναι spreading για κάθε $1 \leq i \leq l$.

β) Αν κάθε ακολουθία $(e_j^i)_j$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε το σύνολο $\{e_n^i\}_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

γ) Για κάθε $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^\infty)$, οι ακολουθίες $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ και $(e_{s_i(j)}^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ είναι ισομετρικές μέσω της φυσιολογικής απεικόνισης $T(e_j^i) = e_{s_i(j)}^i$.

δ) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $x \in \operatorname{span}\{e_j^i\}_{i=1,j=1}^{l,k}$ και κάθε $s_n = (s_i^n)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^k)$, για $n \in \mathbb{N}$, ώστε $s_l^m(k) < s_1^n(1)$ για κάθε $m < n$, ισχύει ότι η ακολουθία $x_n = s_n(x)$ είναι spreading.

1.1.2 Schauder Βασικές Ακολουθίες

Το πρόβλημα μελετάται αρχικά για μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθίες δίνοντας ένα πλήρη χαρακτηρισμό στην περίπτωση αυτή. Έπειτα θεωρούμε ακολουθίες οι οποίες είναι ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1 όπου με τη χρήση υπερφίλτρων στο σύνολο των φυσικών αριθμών αποδεικνύεται ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα. Τέλος, συμπεριλαμβάνοντας τις ασθενώς μηδενικές ακολουθίες και συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, δίνεται απάντηση στο πρόβλημα στην γενική του πλέον περίπτωση.

Λήμμα 1.8. Έστω $(x_j)_j$ είναι μία νορμαρισμένη ακολουθία σε ένα χώρο Banach X και $x_1^*, \ldots, x_k^* \in X^*$ με $\lim_j x_i^*(x_j) = 0$, για κάθε $1 \leq i \leq k$. Τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\operatorname{dist}(x_j, \cap_{i=1}^k \ker x_i^*) < \delta$, για κάθε $j \geq j_0$.

Απόδειξη. Έστω $Y = \operatorname{span}\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ και έστω F να είναι ένα μεγιστικό $\delta/4$-διαχωρισμένο υποσύνολο της S_Y. Από την υπόθεση, υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x_j) < \delta/4$, για κάθε $f \in F$ και $j \geq j_0$. Έστω ότι υπάρχει $j \geq j_0$ με $\operatorname{dist}(x_j, \cap_{i=1}^k \ker x_i^*) \geq \delta$, τότε μπορούμε να βρούμε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x^*(x_j) \geq \delta$ και $\cap_{i=1}^k \ker x_i^* \subset \ker x^*$. Δηλαδή $x^* \in Y$ και άρα υπάρχει $f \in F$ με $\|x^* - f\| < \delta/4$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x^*(x_j) \geq \delta$ και $f(x_j) < \delta/4$. □

Η επομένη πρόταση αποτελεί μία παραλλαγή της μεθόδου του Mazur [LT, Θεώρημα 1.α.5] για την εύρεση Schauder βασικών ακολουθιών σε απειροδιάστατους χώρους Banach.

Πρόταση 1.9. Έστω $(e_j^1)_j, \dots, (e_j^l)_j$ είναι νορμαρισμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X. Έστω ακόμη $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F της S_E, όπου E είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_j^i\}_{i=1, j\in\mathbb{N}}^l$, να υπάρχει $F^* \subset E^*$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $x \in F$, υπάρχει $x^* \in F^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x) \geq \varepsilon$.

β) Για κάθε $1 \leq i \leq l$, υπάρχει $L_i \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $\lim_{j\in L_i} x^*(e_j^i) = 0$, για κάθε $x^* \in F^*$.

Τότε υπάρχουν $M_1, \dots, M_l \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε οι ακολουθίες $(e_j^1)_{j\in M_1}, \dots, (e_j^l)_{j\in M_l}$ να σχηματίζουν από κοινού Schauder βασική ακολουθία, ως προς μία κατάλληλη αρίθμηση.

Απόδειξη. Έστω $(\varepsilon_j)_j$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{j=1}^\infty \varepsilon_j < \varepsilon/3$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια Schauder βασική ακολουθία $(x_j)_j$ με $x_j = e_{n_j}^{i_j}$, όπου $i_j = (j \mod l) + 1$ και $n_{j+1} > n_j$. Παρατηρήστε τότε ότι τα σύνολα $M_i = \{n_j : i_j = i\}$ συνθέτουν μία πλέγμα οικογένεια στο $[\mathbb{N}]^\infty$ και η ακολουθία $((e_j^i)_{j\in M_i})_{i=1}^l$ είναι Schauder βασική ως προς την πλέγμα αρίθμηση.

Θέτουμε $x_1 = y_1 = e_1^1$ και $F_1^* = S_{X^*}$ και υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $x_1, \dots, x_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Έστω $X_k = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ και F_{k+1} να είναι ένα μεγιστικό $\varepsilon_{k+1}/2$-διαχωρισμένο υποσύνολο της S_{X_k}. Περνώντας σε ένα υποσύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο F_{k+1}^* στο E^* που ικανοποιεί τα α) και β) για το F_{k+1}. Τότε, από το β) και το Λήμμα 1.8, υπάρχει $n_{j+1} > n_j$ με $\operatorname{dist}(x_{j+1}, \cap\{\ker x^* : x^* \in F_{j+1}^*\}) < \varepsilon_{j+1}/2$ και επιλέγουμε $y_{j+1} \in \cap\{\ker x^* : x^* \in \cup_{i=1}^{j+1} F_i^*\}$ με $\|x_{j+1} - y_{j+1}\| < \varepsilon_{j+1}$.

Έστω $j_1 < j_2 \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_{j_2} \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει $x^* \in \operatorname{span} F_{j_1+1}^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $x^*(\sum_{j=1}^{j_1} a_j y_j) \geq (\varepsilon - \varepsilon_{j_1+1})\|\sum_{j=1}^{j_1} a_j y_j\|$. Επιπλέον έχουμε ότι $x^*(\sum_{i=n+1}^m a_i y_i) = 0$ και άρα $\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| \leq (\varepsilon - \varepsilon_{n+1})^{-1}\|\sum_{i=1}^m a_i y_i\|$. Επομένως η ακολουθία $(y_j)_j$ είναι Schauder βασική με σταθερά μικρότερη ίση από $3/2\varepsilon$, και αφού $\sum_{j=1}^\infty \|x_j - y_j\| < \varepsilon/3$, καταλήγουμε ότι η $(x_j)_j$ είναι επίσης Schauder βασική. □

Το παρακάτω λήμμα αποτελεί άμεση συνέπεια της αρχής της τοπικής αυτοπάθειας [LR], ωστόσο παρουσιάζεται με μια διαφορετική απόδειξη.

Λήμμα 1.10. Έστω X ένας χώρος Banach και F ένας γραμμικός υπόχωρος του X^{**} πεπερασμένης διάστασης με $X \cap F = \{0\}$. Θέτουμε $\varepsilon = \operatorname{dist}(S_X, F)$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ και $x \in X$ με $\|x\| = 1$, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leq 1 + \delta$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \geq \varepsilon$ και $x^{**}(x^*) = 0$, για κάθε $x^{**} \in F$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$ και $Y = \text{span}\{F \cup \{x\}\}$. Τότε, από την υπόθεση, υπάρχει $x^{***} \in S_{Y^*}$ τέτοιο ώστε $x^{***}(x) \geq \varepsilon$ και $x^{***}(x^*) = 0$, για κάθε $x^{**} \in F$. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I : Y \to X^{**}$ της οποίας η συζυγής $I^* : X^{***} \to Y^*$ είναι w^*-w^*-συνεχής. Αφού η B_{X^*} είναι ένα w^*-πυκνό υποσύνολο της $B_{X^{***}}$ και ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης, έπεται ότι το $I^*(B_{X^*})$ είναι νόρμ πυκνό στη B_{Y^*} και επομένως για κάθε $\delta > 0$, έχουμε ότι $B_{Y^*} \subset I^*((1+\delta)B_{X^*})$, το οποίο αποδεικνύει και το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.11. Μία ακολουθία $(x_j)_j$ σε ένα χώρο Banach X καλείται *μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy*, αν υπάρχει $x^{**} \in X^{**} \setminus X$ με $w^*\text{-}\lim_j x_j = x^{**}$.

Στη περίπτωση μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθιών, οι οποίες δεν είναι κατ΄ ανάγκη Schauder βασικές, έχουμε ως συνέπεια των παραπάνω τον ακόλουθο χαρακτηρισμό στο πρόβλημα.

Πρόταση 1.12. Έστω $(e_j^1)_j, \ldots, (e_j^l)_j$ είναι νορμαρισμένες μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X και $F = \text{span}\{e_i^{**}\}_{i=1}^l$, όπου $w^*\text{-}\lim_j e_j^i = e_i^{**}$. Τότε υπάρχει $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([N]^\infty)$ ώστε η ακολουθία $(e^i_{s_i(j)})_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ να είναι Schauder βασική, ως προς την πλέγμα αρίθμηση, αν και μόνο αν $X \cap F = \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω $x = \sum_{i=1}^l a_i e_i^{**} \in X$ με $x \neq 0$ και $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^\infty)$ ώστε η $(e^i_{s_i(j)})_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ να είναι Schauder βασική ως προς την πλέγμα αρίθμηση. Τότε η ακολουθία $x_j = \sum_{i=1}^l a_i e^i_{s_i(j)}$ είναι Schauder βασική με $w\text{-}\lim_j x_j = x$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \neq 0$.

Έστω ότι $X \cap F = \{0\}$ και $\varepsilon = \text{dist}(S_X, F)$. Τότε για κάθε $x \in S_X$, από το Λήμμα 1.10, υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $x^*(x) \geq \varepsilon$ και $x^{**}(x^*) = 0$, για κάθε $x^{**} \in F$. Δηλαδή $\lim_j x^*(e_j^i) = 0$, για κάθε $1 \leq i \leq l$, και άρα από την Πρόταση 1.9 προκύπτει το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα μιας πλέγμα spreading ακολουθίας η οποία αποτελείται από δύο μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθίες και η οποία δεν είναι Schauder βασική.

Ορισμός 1.13 ([J1])**.** Ορίζουμε την ακόλουθη νόρμα στον $c_{00}(\mathbb{N})$:

$$\|x\|_{\mathcal{J}} = \sup \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j\in I_i} x(j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

όπου το supremum είναι ως προς όλες τις πεπερασμένες συλλογές $I_1, \ldots, I_n$ από ξένα ανα δύο διαστήματα των φυσικών αριθμών. Ο χώρος του James, συμβολίζεται ως $\mathcal{J}$, είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{J}}$.

Παράδειγμα 1.14. Η συνήθης βάση $(e_j)_j$ του $\mathcal{J}$ είναι μία μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθία. Θεωρούμε τις ακολουθίες $e^1_j = e_{2j} + e_1$ και $e^2_j = e_{2j+1} - e_1$ και συμβολίζουμε τα w^*-όριά τους ως e^{**}_1 και e^{**}_2 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(e^i_j)^2_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ είναι πλέγμα spreading και επιπλέον αφού $e_1 \in \mathcal{J} \cap \mathrm{span}\{e^{**}_1, e^{**}_2\}$ και η απεικόνιση $T(e^i_j) = e^i_{s_i(j)}$ είναι ισομετρία, για κάθε $(s_i)^2_{i=1} \in Plm_l([\mathbb{N}]^\infty)$, τότε με τα ίδια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.12 προκύπτει ότι η $(e^i_j)^2_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Schauder βασική.

Περνάμε τώρα στη μελέτη πεπερασμένων οικογενειών από ακολουθίες που είναι ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1. Ως γνωστόν η Stone-Čech συμπαγοποίηση του $\mathbb{N}$ συμβολίζεται ως $\beta\mathbb{N}$ και είναι το σύνολο όλων των υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$. Από την ταύτιση αυτή προκύπτει ότι ο δυϊκός του $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι ισομετρικός με το $\mathcal{M}(\beta\mathbb{N})$, το σύνολο όλων των κανονικών μέτρων στο $\beta\mathbb{N}$.

Για $f \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ και p ένα υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$, η εκτίμηση του μέτρου Dirac δ_p στη συνάρτηση f δίνεται ως $\delta_p(f) = \lim_p f(j)$, όπου $\lim_p f(j)$ είναι το μοναδικό όριο της $(f(j))_j$ ως προς το υπερφίλτρο p. Παρατηρήστε επίσης ότι αν η $T : \ell_1 \to X$ είναι μια ισομορφική εμφύτευση του ℓ_1 στον X, τότε $T^{**} : \mathcal{M}(\beta\mathbb{N}) \to X^{**}$ και για κάθε υπερφίλτρο $p \in \beta\mathbb{N}$ και κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει ότι $T^{**}\delta_p(x^*) = \lim_p x^*(Te_n)$, όπου $(e_n)_n$ η συνήθης βάση του ℓ_1. Για εκτενέστερη ανάλυση στη θεωρία των υπερφίλτρων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [CN].

Λήμμα 1.15. Έστω X είναι χώρος Banach και $T : \ell_1 \to X$ να είναι μια ισομορφική εμφύτευση. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^*_1, \dots, x^*_k \in X^*$ και p να είναι ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ ώστε $T^{**}\delta_p(x^*_i) = \alpha$, για κάθε $1 \leq i \leq k$. Υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\in M} x^*_i(Te_n) = \alpha$, για κάθε $1 \leq i \leq k$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T^{**}\delta_p(x^*_i) = \lim_p x^*_i(Te_n)$ και επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $M_n = \{m \in \mathbb{N} : |x^*_i(Te_m) - \alpha| < 1/n, \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq l\}$ ανήκει στο p και δεν είναι πεπερασμένο, αφού το p είναι μη τετριμμένο. Έστω M να είναι μια διαγωνοποίηση του $(M_n)_n$, δηλαδή $M(n) \in M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(Te_n)_{n\in M}$ είναι η ζητούμενη υπακολουθία. □

Λήμμα 1.16. Έστω X είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και F ένας γραμμικός υπόχωρος του X^{**} πεπερασμένης διάστασης με $X \cap F = \{0\}$. Έστω ακόμη $(e^1_n)_n, \dots, (e^l_n)_n$ είναι ακολουθίες στον X, ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1 και $T_i : \ell_1 \to X$ να είναι η αντίστοιχη εμφύτευση. Υπάρχουν μη τετριμμένα υπερφίλτρα $p_1, \dots, p_l$ στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε

α) Το σύνολο $F \cup \{T^{**}_i \delta_{p_i}\}^l_{i=1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

β) $X \cap \mathrm{span}\{F \cup \{T^{**}_i \delta_{p_i}\}^l_{i=1}\} = \{0\}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι η πληθικότητα του $\beta\mathbb{N}$ είναι $2^{\mathfrak{c}}$ ενώ αυτή κάθε διαχωρίσιμου χώρου Banach είναι μικρότερη ίση από $\mathfrak{c}$. Επομένως, η οικογένεια $\{\delta_p : p \in \beta\mathbb{N}\}$ είναι ισοδύναμη με τη βάση του $\ell_1(2^{\mathfrak{c}})$ και αρα γραμμικά ανεξάρτητη. Το ίδιο ισχύει για σταθερό $1 \leq i \leq l$ και την οικογένεια $\{T_i^{**}\delta_p : p \in \beta\mathbb{N}\}$, καθώς η απεικόνιση T_i^{**} είναι ισομορφισμός. Θεωρούμε το γραμμικό χώρο X^{**}/X και έστω Q να είναι η φυσιολογική απεικόνιση πηλίκο $Q : X^{**} \to X^{**}/X$.

<u>*Ισχυρισμός*</u> : Για κάθε $1 \leq i \leq l$, υπάρχει ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο A_i του $\beta\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η οικογένεια $\{QT_i^{**}\delta_p : p \in A_i\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Αν όχι, θα υπήρχε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο A_i του $\beta\mathbb{N}$ ώστε η $\{QT_i^{**}\delta_p : p \in A_i\}$ να είναι μια μεγιστική γραμμικά ανεξάρτητη υποοικογένεια της $\{QT_i^{**}\delta_p : p \in \beta\mathbb{N}\}$, για κάποιο $1 \leq i \leq l$. Τότε ισχύει ότι $\{T_i^{**}\delta_p : p \in \beta\mathbb{N}\} \subset \mathrm{span}\{X \cup \{T_i^{**}\delta_p : p \in A_i\}\}$, το οποίο είναι άτοπο αφού η αλγεβρική διάσταση του X είναι μικρότερη ίση από $\mathfrak{c}$.

Αφού $X \cap F = \{0\}$, έπεται ότι η απεικόνιση $Q|_F$ είναι ισομορφισμός και επαγωγικά μπορούμε να επιλέξουμε, για κάθε $1 \leq i \leq l$, ένα υπερφίλτρο p_i στο $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $p_i \in A_i$ και $QT_i^{**}\delta_{p_i} \notin \mathrm{span}\{Q[F] \cup \{QT_j^{**}\delta_{p_j}\}_{j<i}\}$. Για $i = 1$, υπάρχει $p_1 \in A_1$ με $QT_1^{**}\delta_{p_1} \notin Q[F]$, καθώς ο F έχει πεπερασμένη διάσταση και το A_1 είναι υπεραριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $p_1, \ldots, p_i$ για κάποιο $i < l$, τότε με τα ίδια επιχειρήματα όπως παραπάνω, υπάρχει $p_{i+1} \in A_{i+1}$ με $QT_{i+1}^{**}\delta_{p_{i+1}} \notin \mathrm{span}\{Q[F] \cup \{QT_j^{**}\delta_{p_j}\}_{j\leq i}\}$, και αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική κατασκευή. Παρατηρήστε ότι τα υπερφίλτρα $p_1, \ldots, p_l$ είναι μη τετριμμένα αφού $T^{**}\delta_{p_i} \notin X$, για κάθε $1 \leq i \leq l$. □

Πόρισμα 1.16.1. Έστω $(e_n^1)_n, \ldots, (e_n^l)_n$ είναι ακολουθίες σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach X, ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1 και T_i να είναι η αντίστοιχη εμφύτευση. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq l$ και $1 \leq j \leq k$ υπάρχει ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο p_{ij} στο $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

α) Το σύνολο $\{T_i^{**}\delta_{p_{ij}}\}_{i=1,j=1}^{l,k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

β) $X \cap \mathrm{span}\{T_i^{**}\delta_{p_{ij}}\}_{i=1,j=1}^{l,k} = \{0\}$.

Το επόμενο λήμμα είναι μια άμεση συνέπεια του παραπάνω πορίσματος και θα χρησιμοποιηθεί στην επόμενη υποενότητα.

Λήμμα 1.17. Έστω $(e_n^1)_n, \ldots, (e_n^l)_n$ είναι ακολουθίες σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Banach X, ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1 και T_i να είναι η αντίστοιχη εμφύτευση. Υπάρχουν $x_1^* \ldots, x_l^* \in X^*$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $1 \leq i \leq l$, υπάρχει $M_i \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\lim_{n \in M_i} x_i^*(e_n^i) = 1$.

β) Για κάθε $1 \leq i, j \leq l$, υπάρχει $M_j^i \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\lim_{n \in M_j^i} x_i^*(e_n^j) = 0$.

Απόδειξη. Από το πόρισμα 1.16.1, υπάρχουν $p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_l$ μη τετριμμένα υπερφίλτρα στο $\mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $\{T_i^{**}\delta_{p_i}\}_{i=1}^l \cup \{T_i^{**}\delta_{q_i}\}_{i=1}^l$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Τότε για κάθε $1 \leq i \leq l$ επιλέγουμε $x_i^{***} \in X^{***}$ ώστε $x_i^{***}(T_j^{**}\delta_{p_j}) = \delta_{ij}$ και $x_i^{***}(T_j^{**}\delta_{q_j}) = 0$, για κάθε $1 \leq j \leq l$. Από την αρχή της τοπικής αυτοπάθειας υπάρχει $x_i^* \in X^*$ ώστε $T_j^{**}\delta_{p_j}(x_i^*) = \delta_{ij}$ και $T_j^{**}\delta_{q_j}(x_i^*) = 0$, για κάθε $1 \leq j \leq l$. Τέλος, εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.15 παίρνουμε τις ζητούμενες υπακολουθίες. □

Όπως προκύπτει από το θεώρημα του Rosenthal [Ro] και τη θεωρία των Schauder βάσεων, κάθε Schauder βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach περιέχει υπακολουθία που είναι είτε ασθενώς μηδενική είτε ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1 ή μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy. Επομένως στη συνέχεια δίνουμε τον τελικό χαρακτηρισμό για το πρόβλημα, στη γενική του πλέον περίπτωση, για ακολουθίες όπου κάθε μία ικανοποιεί μία (ακριβώς) από τις παραπάνω ιδιότητες και οι οποίες δεν είναι κατ΄ ανάγκη Schauder βασικές.

Θεώρημα 1.18. Έστω $(e_n^1)_n, \ldots, (e_n^l)_n$ είναι ημινορμαρισμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X ώστε κάθε μία είναι είτε ασθενώς μηδενική είτε ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1 ή μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy. Έστω $I \subset [l]$ τέτοιο ώστε η $(e_n^i)_n$ να είναι μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy με $w^*\text{-}\lim e_n^i = e_i^{**}$, για κάθε $i \in I$, και έστω $F = \operatorname{span}\{e_i^{**}\}_{i \in I}$. Τότε υπάρχει $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([N]^\infty)$ ώστε η ακολουθία $(e_{s_i(n)}^i)_{i=1, n \in \mathbb{N}}^l$ να είναι Schauder βασική, ως προς την πλέγμα αρίθμηση, αν και μόνο αν $X \cap F = \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω $J \subset [l]$ ώστε η $(e_n^i)_n$ να είναι ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1, για κάθε $i \in J$, και συμβολίζουμε με T_i την αντίστοιχη εμφύτευση και με E την κλειστή γραμμική θήκη του $\{e_n^i\}_{i \in J, n \in \mathbb{N}}$. Τότε από το λήμμα 1.16 προκύπτει ότι για κάθε $i \in J$ υπάρχει ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο p_i στο $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $E \cap Y = \{0\}$, όπου $Y = \operatorname{span}\{F \cup \{T_i^{**}\delta_{p_i}\}_{i \in J}\}$. Για $\varepsilon = d(S_E, Y)$ έπεται, από το Λήμμα 1.10, ότι για κάθε $x \in E$ με $\|x\| = 1$ και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x^* \in E^*$ με $\|x^*\| \leq 1 + \delta$ ώστε $x^*(x) \geq \varepsilon$ και $x^{**}(x^*) = 0$, για κάθε $x^{**} \in Y$. Επομένως $\lim x^*(e_n^i) = 0$, για κάθε $i \in I$ και επιπλέον από το Λήμμα 1.15, για κάθε $i \in J$, υπάρχει $M_i \in [\mathbb{N}]^\infty$ με $\lim_{n \in M_i} x^*(e_n^i) = 0$. Τέλος, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.9 προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Αν θεωρήσουμε επιπλέον για τις αρχικές ακολουθίες ότι αυτές σχηματίζουν μία πλέγμα spreading ακολουθία, τότε καταλήγουμε άμεσα ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει χωρίς να περάσουμε σε υπακολουθίες αυτών.

Πόρισμα 1.18.1. Έστω $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι μια πλέγμα spreading ακολουθία σε ένα χώρο Banach X και $I \subset [l]$ τέτοιο ώστε η $(e_n^i)_n$ είναι μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy με $w^*\text{-}\lim e_n^i = e_i^{**}$, για κάθε $i \in I$, και έστω $F = \operatorname{span}\{e_i^{**}\}_{i\in I}$. Τότε η ακολουθία $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι Schauder βασική, ως προς τη λεξικογραφική αρίθμηση στο $[\mathbb{N}] \times \{1,\dots,l\}$, αν και μόνο αν $X \cap F = \{0\}$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.18 προκύπτει ότι υπάρχει $(s_i)_{i=1}^l \in Plm_l([\mathbb{N}]^\infty)$ τέτοια ώστε η ακολουθία $(e_{s_i(n)}^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι Schauder βασική αν και μόνο αν $X \cap F = \{0\}$, και αφού η απεικόνιση $T(e_n^i) = e_{s_i(n)}^i$ είναι ισομετρία, τότε το ίδιο ισχύει για την $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$. □

1.1.3 Unconditional Ακολουθίες

Είναι γνωστό [BL, Πρόταση 1.4.2] ότι κάθε ασθενώς μηδενική spreading ακολουθία είναι unconditional και όπως αποδεικνύουμε στη συνέχεια, αυτό γενικεύεται φυσιολογικά στην περίπτωση των πλέγμα spreading ακολουθιών. Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας που αφορούν ακολουθίες ισοδύναμες με τη βάση του ℓ_1, δείχνουμε τελικά ότι κάθε πλέγμα spreading ακολουθία από unconditional ακολουθίες είναι και η ίδια unconditional. Επιπέον, αποδεικνύεται ότι η υπόθεση του να είναι πλέγμα spreading είναι πράγματι αναγκαία.

Πρόταση 1.19. Έστω $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι μια πλέγμα spreading ακολουθία σε ένα χώρο Banach, ώστε η $(e_n^i)_n$ να είναι ασθενώς μηδενική, για κάθε $1 \le i \le l$. Τότε η ακολουθία $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι unconditional.

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $\pi = [l] \times [k]$ και $x = \sum_{(i,j)\in\pi} a_{ij} e_j^i$. Αφού κάθε $(e_n^i)_n$ είναι ασθενώς μηδενική, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $(i_0, j_0) \in \pi$ υπάρχουν $s_1(x), \dots, s_m(x)$ πλέγμα μετατοπίσεις του x καθώς και ένας κυρτός συνδυασμός $\sum_{t=1}^m \lambda_t s_t(x)$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) $s_{t_1}(e_j^i) = s_{t_2}(e_j^i)$ για κάθε $(i,j) \in \pi' = \pi \setminus \{(i_0, j_0)\}$ και $1 \le t_1, t_2, \le m$.

β) $\|\sum_{t=1}^n \lambda_t s_t(e_{j_0}^{i_0})\| < \varepsilon \|x\| / a_{i_0 j_0}$.

γ) $\sum_{t=1}^m \lambda_t s_t(x) = \sum_{(i,j)\in\pi'} a_{ij} s_1(e_j^i) + \sum_{t=1}^n \lambda_t a_{i_0 j_0} s_t(e_{j_0}^{i_0})$.

Αφού η $(e_n^i)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι πλέγμα spreading έχουμε ότι $\|s_t(x)\| = \|x\|$ για κάθε $1 \le t \le m$ και $\|\sum_{(i,j)\in\pi'} a_{ij} s_1(e_j^i)\| = \|\sum_{(i,j)\in\pi'} a_{ij} e_j^i\|$ και άρα

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in\pi'} a_{ij} e_j^i \Big\| \le (1+\varepsilon) \Big\| \sum_{(i,j)\in\pi} a_{ij} e_j^i \Big\|.$$

Τέλος, συνεχίζοντας επαγωγικά, δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $F \subset \pi$ ισχύει ότι

$$\Big\| \sum_{(i,j)\in F} a_{ij} e^i_j \Big\| \leq (1+\varepsilon) \Big\| \sum_{(i,j)\in \pi} a_{ij} e^i_j \Big\|.$$

$\square$

Πρόταση 1.20. Έστω $(e^i_n)^l_{i=1,n\in\mathbb{N}}$ είναι μια πλέγμα spreading ακολουθία σε ένα χώρο Banach. Αν κάθε $(e^i_n)_n$ είναι ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1, τότε το ίδιο ισχύει για την $(e^i_n)^l_{i=1,n\in\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon, \delta > 0$ και $x = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l a_{ij} e^i_j$ με $\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l |a_{ij}| = 1$. Τότε είτε για το x ή για το $-x$ υπάρχει $1 \leq i_0 \leq l$ ώστε $\sum_{j\in J^+_{i_0}} a_{i_0 j} \geq 1/2l$, όπου $J^+_{i_0} = \{j : a_{i_0 j} > 0\}$, και από το Λήμμα 1.17 για κάθε $1 \leq i, j \leq l$ υπάρχει $x_i \in X^*$ και M_i, M^i_j στο $[\mathbb{N}]^\infty$ τέτοια ώστε $\lim_{n\in M_i} x^*_i(e^i_n) = 1$ και $\lim_{n\in M^i_j} x^*_i(e^j_n) = 0$. Θέτουμε $M = \max\{\|x^*_i\| : i = 1, \ldots, l\}$ και επιλέγουμε $(s_i)^l_{i=1} \in Plm_l([\mathbb{N}]^k)$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) $s_{i_0}(j) \in M_{i_0}$ και $x^*(e^i_{s_{i_0}(j)}) > 1 - \varepsilon$, για κάθε $j \in J^+_{i_0}$.

β) $s_{i_0}(j) \in M^{i_0}_{i_0}$, για κάθε $j \in J^-_{i_0} = \{j : a_{i_0 j} < 0\}$.

γ) $s_j \subset M^{i_0}_j$, για κάθε $1 \leq j \leq l$ με $j \neq i_0$.

δ) $x^*_{i_0}(\sum_{j=1}^k \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^l a_{ij} e^i_{s_i(j)} + \sum_{j\in J^-_{i_0}} a_{i_0 j} e^{i_0}_{s_{i_0}(j)}) < \delta$.

Επομένως $x^*_{i_0}(x) \geq \frac{1-\varepsilon}{2l} - \delta$ και άρα $\|x\| \geq \frac{1-\varepsilon}{2lM} - \delta$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω προτάσεις, δίνεται το τελικό αποτέλεσμα στο πρόβλημα για πλέγμα spreading ακολουθίες.

Θεώρημα 1.21. Έστω $(e^i_n)^l_{i=1,n\in\mathbb{N}}$ είναι πλέγμα spreading ακολουθία ώστε κάθε $(e^i_n)_n$ να είναι unconditional. Τότε η ακολουθία $(e^i_n)^l_{i=1,n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης unconditional.

Απόδειξη. Έστω $I \subset [l]$ έτσι ώστε η $(e^i_n)_n$ να είναι ασθενώς μηδενική για κάθε $i \in I$ και $J = [l] \setminus I$. Θέτουμε E_0 να είναι η κλειστή γραμμική θήκη του $\{e^i_n\}_{i\in I, n\in\mathbb{N}}$ και E_1 αυτή του $\{e^i_n\}_{i\in J, n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $x \in E_0 + E_1$ με $x = \sum_{j=1}^k (\sum_{i\in I} a_{ij} e^i_j + \sum_{i\in J} b_{ij} e^i_j)$, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά στην απόδειξη της Πρότασης 1.19, προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\Big\| \sum_{j=1}^k \sum_{i\in J} b_{ij} e^i_j \Big\| \leq (1+\varepsilon) \Big\| \sum_{j=1}^k \Big(\sum_{i\in I} a_{ij} e^i_j + \sum_{i\in J} b_{ij} e^i_j \Big) \Big\|$$

Επομένως $E_0+E_1 = E_0 \oplus E_1$ και αφού οι ακολουθίες $(e_n^i)_{i\in I, n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^i)_{i\in J, n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, όπως προκύπτει από τις δύο προηγούμενες προτάσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την ένωσή τους. $\square$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μια παραλλαγή του κλασσικού παραδείγματος των Maurey-Rosenthal [MR]. Όπως δείξαμε, από την ισχυρή υπόθεση του να είναι πλέγμα spreading μία ακολουθία από unconditional ακολουθίες προκύπτει ότι και η ίδια είναι unconditional. Ο σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι να δείξει ότι αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αναγκαία.

Πρόταση 1.22. Έστω N_1, N_2 να είναι μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε δύο άπειρα σύνολα. Υπάρχει ένα χώρος Banach X με μια Schauder βάση $(e_n)_n$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Οι ακολουθίες $(e_n)_{n\in N_1}$ και $(e_n)_{n\in N_2}$ είναι unconditional.

β) Για κάθε $M \subset \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε τα $M \cap N_1$ και $M \cap N_2$ είναι άπειρα σύνολα, η ακολουθία $(e_n)_{n\in M}$ δεν είναι unconditional.

Ξεκινάμε επιλέγοντας μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(\mu_i)_i$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j>i}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\mu_j}} \leq \frac{1}{2}$$

και συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$, τη συλλογή όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $(E_k)_{k=1}^n$ από διαδοχικά πεπερασμένα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Επιλέγουμε ακόμη μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\sigma : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ με την ιδιότητα ότι $\sigma((E_k)_{k=1}^n) > \max\{\#E_k\}_{k=1}^n$, για κάθε $(E_k)_{k=1}^n \in \mathcal{P}$, και τέλος θεωρούμε μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε δύο άπειρα σύνολα N_1 και N_2.

Ορισμός 1.23. Μια ακολουθία $(E_k^i)_{i=1,k=1}^{2,n}$ από πεπερασμένα μη κένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ καλείται *ειδική ακολουθία* αν ισχύουν τα ακόλουθα.

α) $E_k^1 \subset N_1$ και $E_k^2 \subset N_2$, για κάθε $1 \leq k \leq n$.

β) $E_k^1 < E_k^2$, για κάθε $1 \leq k \leq n$.

γ) $E_k^2 < E_{k+1}^1$, για κάθε $1 \leq k < n$.

δ) $\#E_1^1 = \#E_1^2 = \mu_{j_1}$, για κάποιο $j_1 \in \mathbb{N}$.

ε) $\#E_{k_0}^1 = \#E_{k_0}^2 = \mu_{j_{k_0}}$, όπου $j_{k_0} = \sigma((E_k^i)_{i=1,k=1}^{2,k_0-1})$, για κάθε $1 < k_0 \leq n$.

Παρατήρηση 1.24. Έστω $(E_k^i)_{i=1,k=1}^{2,n}$ και $(F_k^i)_{i=1,k=1}^{2,m}$ είναι ειδικές ακολουθίες και έστω $k_0 = \min\{k : \#E_k^1 \neq \#F_k^1\}$. Αφού η σ είναι αμφιμονοσήμαντη, παρατηρήστε ότι αν $k_0 > 1$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Αν $k_0 > 2$ τότε $E^1_k = F^1_k$ και $E^2_k = F^2_k$, για κάθε $1 \leq k < k_0 - 1$.

β) $\#E^1_{k_0-1} = \#F^1_{k_0-1}$ και $E^1_{k_0-1} \neq F^1_{k_0-1}$ ή $E^2_{k_0-1} \neq F^2_{k_0-1}$.

γ) $\#E^1_k \neq \#F^1_k$, για κάθε $k_0 \leq k \leq \min\{n, m\}$.

Έστω $(e^*_i)_i$ και $(e_i)_i$ να συμβολίζουν τη συνήθη βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ και για $f, x \in c_{00}(\mathbb{N})$ με $f = \sum_{i=1}^n a_i e^*_i$ και $x = \sum_{i=1}^m b_i e_i$ θέτουμε $f(x) = \sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} a_i b_i$. Τέλος, για $f, g \in c_{00}(\mathbb{N})$ με $f = \sum_{k=1}^n a_{i_k} e^*_{i_k}$ και $g = \sum_{k=1}^n b_{j_k} e^*_{j_k}$, όπου $a_{i_k}, b_{j_k} \neq 0$, θα λέμε ότι τα f και g είναι *συνεπή* αν $\mathrm{sgn}(a_{i_k}) = \mathrm{sgn}(b_{j_k})$, για κάθε $1 \leq k \leq n$.

Ορισμός 1.25. Θεωρούμε τα ακόλουθα υποσύνολα του $c_{00}(\mathbb{N})$

$$W_0 = \{0\} \cup \{\pm e^*_i : i \in \mathbb{N}\},$$

$$W_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \sum_{i \in E} \varepsilon_i e^*_i : E \subset \mathbb{N}_1 \text{ ή } E \subset N_2, \#E = \mu_j, \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \text{ για } i \in E \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n f^i_k : f^i_k \in W_0 \cup W_1, (\mathrm{supp}(f^i_k))_{i=1,k=1}^{2,n} \text{ είναι ειδική ακολουθία}, \right.$$
$$\left. f^1_k \text{ και } f^2_k \text{ είναι συνεπή για κάθε } 1 \leq k \leq n \right\}$$

και θέτουμε $W = \{P_E(f) : f \in W_0 \cup W_1 \cup W_2, E \text{ ιντεραλ οφ } \mathbb{N}\}$. Ορίζουμε μια νόρμα στον $c_{00}(\mathbb{N})$ ως $\|x\| = \sup\{f(x) : f \in W\}$ και έστω $X^{(2)}_{MR}$ να συμβολίζει την πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς τη νόρμα αυτή.

Παρατήρηση 1.26. Για κάθε $f = \sum_{i=1}^n a_i e^*_i$ στο W και $1 \leq k < l \leq n$ έπεται ότι το $\sum_{i=k}^l a_i e^*_i$ ανήκει επίσης στο W. Δηλαδή, η ακολουθία $(e_i)_i$ είναι μια νορμαρισμένη και διμονότονη Schauder βάση του $X^{(2)}_{MR}$.

Παρατήρηση 1.27. Για κάθε $f = \sum_{i=1}^n a_i e^*_i$ στο W και κάθε επιλογή προσήμων $(\varepsilon_i)_{i \in N_1}$ (ή $(\varepsilon_i)_{i \in N_2}$) έπεται ότι υπάρχει $(b_i)_{i=1}^n$ ώστε $b_i = \varepsilon_i a_i$ για κάθε $i \in N_1 \cap \{1, \ldots, n\}$ (ή $i \in N_2 \cap \{1, \ldots, n\}$) και το $g = \sum_{i=1}^n b_i e^*_i$ να ανήκει στο W. Επομένως, οι ακολουθίες $(e_i)_{i \in N_1}$ και $(e_i)_{i \in N_2}$ είναι 1-unconditional.

Ορισμός 1.28. Αν $x = \frac{1}{\sqrt{\mu_\ell}} \sum_{i \in E} \varepsilon_i e_i$ ανήκει στον $X^{(2)}_{MR}$ με $\#E = \mu_\ell$ και $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, τότε ορίζουμε το *βάρος* ενός τέτοιου διανύσματος x ως την ποσότητα $w(x) = \mu_\ell$.

Επιπλέον, για κάθε συναρτησιακό $f = \frac{1}{\sqrt{\mu_\ell}} \sum_{i \in E} \varepsilon_i e^*_i$ στο W με $\#E = \mu_\ell$ και $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, ορίζουμε αντίστοιχα το *βάρος* του ως $w(f) = \mu_\ell$.

Λήμμα 1.29. Έστω $x_1 < \ldots < x_n$ διανύσματα στον $X_{MR}^{(2)}$ με αύξοντα βάρη και $f_1 < \ldots < f_m$ συναρτησιακά στο W με αύξοντα βάρη. Αν ισχύει ότι $w(x_i) \neq w(f_j)$ για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$, τότε έχουμε ότι $|\sum_{i=1}^m f_j(\sum_{i=1}^n x_i)| \leq \frac{1}{2}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι για x, f με βάρη $w(x) = \mu_\ell$ και $w(f) = \mu_k$ ώστε $\mu_\ell \neq \mu_k$, ισχύει ότι $|f(x)| \leq \frac{\min\{\sqrt{\mu_\ell}, \sqrt{\mu_k}\}}{\max\{\sqrt{\mu_\ell}, \sqrt{\mu_k}\}}$ και επομένως $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{\mu_\ell}}{\sqrt{\mu_k}}$ αν $\mu_\ell < \mu_k$ και $|f(x)| \leq \frac{\sqrt{\mu_k}}{\sqrt{\mu_\ell}}$ αν $\mu_k < \mu_\ell$. Έστω $w(x_i) = \mu_{\ell_i}$ και $w(f_j) = \mu_{k_j}$. Τότε για κάθε ζεύγος (i,j) έχουμε ότι $|f_j(x_i)| \leq \min\left\{\frac{\sqrt{\mu_{\ell_i}}}{\sqrt{\mu_{k_j}}}, \frac{\sqrt{\mu_{k_j}}}{\sqrt{\mu_{\ell_i}}}\right\}$ και αφού κάθε ζεύγος $(\mu_{\ell_i}, \mu_{k_j})$ εμφανίζεται μόνο μία φορά, ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |f_j(x_i)| \leq \sum_{j=1}^\infty \sum_{j>i} \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\mu_j}} \leq \frac{1}{2}.$$

□

Πρόταση 1.30. Έστω $(E_k^i)_{i=1,k=1}^{2,n}$ μια ειδική ακολουθία και για $1 \leq k \leq n$ και $i = 1, 2$, ορίζουμε $x_k^i = (1/\sqrt{\#E_k^i}) \sum_{i \in E_k^i} e_i$. Τότε $\| \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n x_k^i \| \geq 2n$ ενώ $\| \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n (-1)^i x_k^i \| \leq 5$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mu_{j_k} = \#E_k^1$, για $1 \leq k \leq n$. Το πρώτο μέρος προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το $f = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n (1/\sqrt{\#E_k^i}) \sum_{j \in E_k^i} e_j^*$ ανήκει στο W. Θέτουμε $y = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n (-1)^i x_k^i$ και έστω $g = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{\mu_{j_k}}} \sum_{j \in F_k^i} e_j^*$ στο W_2 και $k_0 = \min\{k : \#E_k^1 \neq \#F_k^1\}$. Αν $k_0 = 1$, τότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι $|g(y)| \leq \frac{1}{2}$. Διαφορετικά, από την Παρατήρηση 1.24 και το Λήμμα 1.29 ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Αν $k_0 > 2$, τότε $g_k^1(y) = -g_k^2(y)$, για κάθε $1 \leq k < k_0 - 1$.

β) $|g_{k_0-1}^i(y)| \leq 1$ και $\sum_{k=k_0}^m |g_k^i(y)| \leq \frac{1}{2}$, για $i = 1, 2$.

Επομένως $|g(y)| \leq 3$. Τέλος, στη γενική περίπτωση όπου $g \in W$, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα καταλήγουμε ότι $|g(y)| \leq 5$. □

Πρόταση 1.31. Έστω $M \subset \mathbb{N}$ ώστε $M \cap N_1$ και $M \cap N_2$ είναι άπειρα σύνολα. Τότε η ακολουθία $(e_i)_{i \in M}$ δεν είναι unconditional.

Απόδειξη. Επιλέγουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια ειδική ακολουθία $(E_k^i)_{i=1,k=1}^{2,n}$ τέτοια ώστε $E_k^1 \subset M \cap N_1$ και $E_k^2 \subset M \cap N_2$, για κάθε $1 \leq k \leq n$, και εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.30 καταλήγουμε ότι

$$\sup\left\{\Big\|\sum_{i \in M} \varepsilon_i a_i e_i\Big\| : \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \Big\|\sum_{i \in M} \varepsilon_i a_i e_i\Big\| \leq 1\right\} \geq \frac{2n}{5}.$$

Καθώς το n είναι αυθαίρετο, έπεται ότι η $(e_i)_{i\in M}$ δεν είναι unconditional. $\square$

Το επόμενο ερώτημα παραμένει όμως ανοικτό.

Ερώτημα 1. Έστω $(e_n^1)_n$ και $(e_n^2)_n$ είναι spreading και unconditional ακολουθίες σε ένα χώρο Banach. Υπάρχουν M, L άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ ώστε η ακολουθία $\{e_n^1\}_{n\in M} \cup \{e_n^2\}_{n\in L}$ να είναι unconditional ;

Παρά το γεγονός ότι οι ακολουθίες $(e_n)_{n\in N_1}$ και $(e_n)_{n\in N_2}$ στην Πρόταση 1.31 δεν περιέχουν υπακολουθίες οι οποίες να είναι από κοινού unconditional, το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε όμως block υπακολουθίες οι οποίες να σχηματίζουν μια unconditional ακολουθία.

Πρόταση 1.32. Έστω $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ είναι unconditional ακολουθίες σε ένα χώρο Banach. Τότε υπάρχουν block υπακολουθίες $(z_n)_n$ και $(w_n)_n$ των $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ αντίστοιχα ώστε $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι unconditional.

Απόδειξη. Αν υπάρχουν δύο υπακολουθίες $(x_n)_{n\in M_1}$ και $(y_n)_{n\in M_2}$ τέτοιες ώστε $\mathrm{dist}(S_Z, S_Y) > 0$, όπου $Z = \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in M_1}$ και $Y = \mathrm{span}\{y_n\}_{n\in M_2}$, τότε ο γραμμικός υπόχωρος $Y + Z$ είναι κλειστός. Επομένως από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος προκύπτει ότι $Y + Z = Y \oplus Z$ και άρα η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in M_1} \cup \{y_n\}_{n\in M_2}$ είναι unconditional.

Διαφορετικά, επιλέγουμε επαγωγικά $(z_n)_n$ και $(w_n)_n$ οι οποίες είναι block των $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ αντίστοιχα με $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - w_n\| < \infty$. Παρατηρήστε τότε ότι η ακολουθία $\{z_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{w_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional. $\square$

Παρατήρηση 1.33. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση είναι κατά πόσο ένας χώρος ο οποίος παράγεται από δύο unconditional ακολουθίες έχει την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία του περιέχει μία unconditional υπακολουθία. Η απάντηση είναι αρνητική και αυτό έπεται από το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach με μία Schauder βάση $(x_n)_n$, Y ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και $(d_n)_n$ ένα πυκνό υποσύνολο της B_Y. Τότε οι ακολουθίες $(x_n)_n$ και $y_n = x_n + d_n/2^n$ είναι ισοδύναμες και παράγουν το χώρο $X \oplus Y$. Επομένως αν η $(x_n)_n$ είναι unconditional και ο Y δεν περιέχει unconditional ακολουθίες έπεται το ζητούμενο.

1.2 Ακολουθιακές Ασυμπτωτικές Δομές

1.2.1 Spreading Model

Η έννοια των spreading model που εισήχθει από τους Brunel και Sucheston, αποτελεί ένα από τα πολύ σημαντικά εργαλεία στην ασυμπτωτική μελέτη χώρων Banach. Συγκεκριμένα τα spreading model χρησιμοποιούνται με σκοπό να αναδείξουν μία κανονική δομή που περιέχει κάθε φραγμένη ακολουθία ενός χώρου Banach, υπό μία ασυμπτωτική έννοια.

Ορισμός 1.34. Έστω $(x_j)_j$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach $(X, \|\cdot\|)$ και (e_j) μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach $(E, \|\cdot\|_*)$. Θα λέμε ότι η $(x_j)_j$ *παράγει* την ακολουθία (e_j) *σαν spreading model* αν υπάρχει μια μηδενική ακολουθία $(\delta_j)_j$ θετικών πραγματικών αριθμών ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(a_j)_{j=1}^k \in [-1, 1]$ και κάθε $s \in S\text{-}Plm_1([\mathbb{N}]^k)$ με $k \leq s_1(1)$ να ισχύει ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^k a_j x_{s(j)} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^k a_j e_j \Big\|_* \right| < \delta_k.$$

Ως συνέπεια του θεωρήματος Ramsey [Ra], έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 1.35. Έστω $(x_j)_j$ να είναι μία φραγμένη ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε $\big| \|s(x)\| - \|t(x)\| \big| < \varepsilon$, για κάθε $x \in \text{span}\{e_j\}_{j=1}^k$ και $s, t \in S\text{-}Plm_1([L]^k)$.

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει το βασικό αποτέλεσμα των Brunel και Sucheston στο [BS].

Θεώρημα 1.36. Κάθε φραγμένη ακολουθία σε ένα χώρο Banach, περιέχει υπακολουθία η οποία παράγει ένα spreading model.

Πρόταση 1.37. Έστω $(x_j)_j$ είναι μια νορμαρισμένη ακολουθία σε ένα χώρο Banach που παράγει ένα spreading model $(e_j)_j$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Η $(e_j)_j$ είναι spreading.

β) Αν η $(x_j)_j$ είναι Schauder βασική, τότε το ίδιο ισχύει για την $(e_j)_j$.

γ) Αν η $(x_j)_j$ είναι ασθενώς μηδενική, τότε η $(e_j)_j$ είναι unconditional.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων καθώς και μία εκτενέστερη ανάλυση των spreading model παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [BL].

1.2.2 Joint Spreading Model

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια την έννοια των l-joint spreading model από το [AGLM] η οποία αποτελεί πολυδιάστατη γενίκευση των κλασσικών spreading model. Περιγράφει την από κοινού ασυμπτωτική συμπεριφορά μίας πεπερασμένης οικογένειας από ακολουθίες σε ένα χώρο Banach. Όπως γίνεται εμφανές και στο [AM1], σε ορισμένους χώρους αυτή η συμπεριφορά μπορεί να είναι ουσιαστικά πιο πλούσια από αυτή των spreading model. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι τα spreading model έχουν συνδεθεί με τη μελέτη των γραμμικών φραγμένων τελεστών σε ένα χώρο Banach [AM2] και στην επόμενη ενότητα γίνεται σαφές ότι τα joint spreading model δεν αποτελούν εξαίρεση.

Ορισμός 1.38. Έστω $(x^1_j)_j,\ldots,(x^l_j)_j$ είναι ακολουθίες σε ένα χώρο Banach $(X,\|\cdot\|)$ και $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach $(E,\|\cdot\|_*)$.

Έστω $M\in[\mathbb{N}]^*$. Θα λέμε ότι η $(x^i_j)^l_{i=1,j\in M}$ *παράγει* την ακολουθία $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ σαν *l-joint spreading model* αν υπάρχει μια μηδενική ακολουθία $(\delta_j)_j$ θετικών αριθμών ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}$, $(a_{ij})^{l,k}_{i=1,j=1}\subset[-1,1]$ και κάθε γνήσια πλέγμα οικογένεια $(s_i)^l_{i=1}\in S\text{-}Plm_l([M]^k)$ με $M(k)\le s_1(1)$ να ισχύει ότι

$$\left|\Big\|\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^l a_{ij}x^i_{s_i(j)}\Big\|-\Big\|\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^l a_{ij}e^i_j\Big\|_*\right|<\delta_k.$$

Θα λέμε επίσης ότι η $(x^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ *δέχεται* την ακολουθία $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ σαν l-joint spreading model αν υπάρχει $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x^i_j)^l_{i=1,j\in M}$ να παράγει την $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ως l-joint spreading model.

Τέλος, για $A\subset X$ θα λέμε ότι το A δέχεται την ακολουθία $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ως l-joint spreading model αν υπάρχει μια οικογένεια $(x^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ακολουθιών στο A η οποία δέχεται την $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ως l-joint spreading model.

Παρατηρήστε ότι για $l=1$, ο προηγούμενος ορισμός συμπίπτει με αυτόν των Brunel-Sucheston spreading model.

Παρατηρήσεις 1.39. Έστω $(x^1_j)_j,\ldots,(x^l_j)_j$ είναι Schauder βασικές ακολουθίες σε ένα χώρο Banach $(X,\|\cdot\|)$. Έστω επίσης $M\in[\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x^i_j)^l_{i=1,j\in M}$ 2παράγει την $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ως l-joint spreading model.

α) Για κάθε $1\le i\le l$, η ακολουθία $(e^i_j)_j$ είναι το κλασσικό spreading model που δέχεται η $(x^i_j)_j$.

β) Η ακολουθία $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ είναι πλέγμα spreading. Παρά το γεγονός ότι τα l-joint spreading model ορίζονται μέσω γνήσια πλέγμα οικογενειών, οι ακολουθίες αυτές συμπεριφέρονται με έναν spreading τρόπο ο οποίος περιγράφεται από πλέγμα οικογένειες.

γ) Για κάθε $M'\in[M]^\infty$ η $((x^i_j)_{j\in M'})^l_{i=1}$ παράγει την ακολουθία $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ ως l-joint spreading model.

δ) Για κάθε μηδενική ακολουθία $(\delta_j)_j$ υπάρχει $M'\in[M]^\infty$ ώστε η οικογένεια $((x^i_j)_{j\in M'})^l_{i=1}$ να παράγει την $(e^i_j)^l_{i=1,j\in\mathbb{N}}$ σαν l-joint spreading model ως προς την $(\delta_j)_j$.

ε) Αν η $|||\cdot|||$ είναι μια ισοδύναμη νόρμα της $\|\cdot\|$ στον X, τότε κάθε l-joint spreading model που δέχεται ο $(X,\|\cdot\|)$ είναι ισοδύναμο με ένα l-joint spreading model που δέχεται ο $(X,|||\cdot|||)$.

Στη συνέχεια αποδεικνύεται το παρακάτω αποτέλεσμα τύπου Brunel-Sucheston στην περίπτωση των l-joint spreading model.

Θεώρημα 1.40. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και X να είναι ένας χώρος Banach. Κάθε οικογένεια που αποτελείται από l το πλήθος φραγμένες ακολουθίες στον X δέχεται ένα l-joint spreading model.

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο επόμενο συνδυαστικό λήμμα.

Λήμμα 1.41. Έστω $(x_j^1)_j, \dots, (x_j^l)_j$ είναι φραγμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach και $(\delta_j)_j$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία. Για κάθε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ υπάρχει $L \in [M]^\infty$ ώστε

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{s_i(j)} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{t_i(j)} \Big\| \right| < \delta_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k} \subset [-1,1]$ και $(s_i)_{i=1}^l, (t_i)_{i=1}^l \in S\text{-}Plm_l([L]^k)$ με $L(k) \leq s_1(1), t_1(1)$.

Απόδειξη. Έστω $C > 0$ με $\|x_j^i\| < C$, για κάθε $i = 1, \dots, l$ και $j \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $L_0 = M$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(L_k)_{k \geq 0}$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k}$ και $(s_i)_{i=1}^l, (t_i)_{i=1}^l \in S\text{-}Plm_l([L_k]^k)$ να ισχύει ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{s_i(j)} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{t_i(j)} \Big\| \right| < \delta_k.$$

Έστω ότι έχουμε επιλέξει τα $L_0, \dots, L_{k-1}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Έστω A να είναι ένα μεγιστικό $\frac{\delta_k}{4klC}$-διαχωρισμένο υποσύνολο του $[-1,1]$ και B μια διαμέριση του $[0, lC]$ από πεπερασμένα διαστήματα με μήκος μικρότερο ίσο από $\frac{\delta_k}{4}$. Θέτουμε $\mathcal{F} = \{f : A^{kl} \to B\}$ και για $f \in \mathcal{F}$

$$P_f = \Big\{ (s_i)_{i=1}^l \in S\text{-}Plm_l([L_{k-1}]^k) : \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{s_i(j)} \Big\| \in f(a), \\ \text{για κάθε } \; a = ((a_{ij})_{j=1}^k)_{i=1}^l \in A^{kl} \Big\}.$$

Παρατηρήστε ότι $S\text{-}Plm_l([L_{k-1}]^k) = \cup_{f \in \mathcal{F}} P_f$ και άρα από το Θεώρημα 1.2 υπάρχει $L_k \in [\mathbb{N}]^\infty$ και $f \in \mathcal{F}$ ώστε $S\text{-}Plm_l([L_k]^k) \subset P_f$. Επομένως για κάθε $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k} \subset A$ και $(s_i)_{i=1}^l, (t_i)_{i=1}^l \in S\text{-}Plm_l([L_k]^k)$ ισχύει ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{s_i(j)} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{t_i(j)} \Big\| \right| < \frac{\delta_k}{4}.$$

Αφού το A είναι ένα μεγιστικό διαχωρισμένο υποσύνολο του $[-1,1]$, έπεται άμεσα ότι το L_k ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη και άρα επιλέγοντας το L να είναι ένα διαγώνιο σύνολο της $(L_k)_{k\geq 0}$ ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.40. Έστω $(x_j^1)_j, \dots, (x_j^l)_j$ να είναι Schauder βασικές ακολουθίες στον X. Παρατηρήστε ότι από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k} \in [-1,1]$ και κάθε ακολουθία $((s_i^n)_{i=1}^l)_{n\in\mathbb{N}}$ από γνήσια πλέγμα οικογένειες στο $[L]^k$ με $s_1^n(1) \to \infty$, να ισχύει ότι η ακολουθία $(\|\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l a_{ij} x^i_{s_i^n(j)}\|)_n$ είναι Cauchy και επίσης ότι το όριό της είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της $((s_i^n)_{i=1}^l)_{n\in\mathbb{N}}$.

Έστω $(e_j)_j$ η συνήθης βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ και για κάθε $i = 1, \dots, l$ και $j \in \mathbb{N}$, θέτουμε $e_j^i = e_{r(i,j)}$ όπου $r(i,j) = (j-1)l + ij$. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση, ορίζουμε μια ημινόρμα $\|\cdot\|_*$ στον c_{00} ως εξής :

$$\Big\|\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l a_{ij} e_j^i\Big\|_* = \lim_n \Big\|\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l a_{ij} x^i_{s_i^n(j)}\Big\|$$

όπου $((s_i^n)_{i=1}^l)_n \subset Plm_l([L]^k)$ με $s_1^n(1) \to \infty$ και $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k} \in [-1,1]$. Αφού κάθε $(x_j^i)_j$ είναι μια Schauder βασική ακολουθία στον X και άρα δεν περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία, μια μετατροπή της Πρότασης 1.B.2 του [BL] δίνει ότι η $\|\cdot\|_*$ είναι νόρμα. Έστω E να είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς τη νόρμα αυτή και παρατηρήστε τότε ότι η οικογένεια $((x_j^i)_{j\in L})_{i=1}^l$ παράγει την ακολουθία $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ σαν l-joint spreading model. $\square$

Οι δύο επόμενες προτάσεις είναι συνέπειες του ορισμού των l-joint spreading model και των αποτελεσμάτων για πεπερασμένες οικογένειες ακολουθιών που παρουσιάσαμε στο πρώτο μέρος αυτής της ενότητας.

Αντίθετα με τα spreading model, δεν ισχύει πάντα ότι ένα l-joint spreading model το οποίο παράγεται από Schauder βασικές ακολουθίες είναι και το ίδιο Schauder βασική.

Πρόταση 1.42. Έστω $(x_j^1)_j, \dots, (x_j^l)_j$ είναι Schauder βασικές ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X έτσι ώστε κάθε μία να είναι είτε ασθενώς μηδενική είτε ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_1 ή μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy και η οικογένεια $((x_j^i)_{j\in\mathbb{N}})_{i=1}^l$ να παράγει την ακολουθία $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ ως l-joint spreading model. Έστω ακόμη $I \subset [l]$ τέτοιο ώστε η $(x_j^i)_j$ να είναι μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy με $w^*\text{-}\lim_j x_j^i = x_i^{**}$, για κάθε $i \in I$, και $F = \mathrm{span}\{x_i^{**}\}_{i\in I}$. Αν $X \cap F = \{0\}$, τότε η $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ είναι Schauder βασική ακολουθία ως προς την πλέγμα αρίθμηση.

Το παράδειγμα που ακολουθεί αποδεικνύει ότι αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν είναι πάντα αληθές, δηλαδή η ακολουθία $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ μπορεί να είναι Schauder βασική ενώ $X \cap F \neq \{0\}$.

Παράδειγμα 1.43. Ορίζουμε μια $\|\cdot\|$ ημινόρμα στον $c_{00}(\mathbb{N})$ η οποία δίνεται ως $\|x\| = \sup \sum_{i=1}^n \sum_{j\in I_i} x(j)$ όπου το supremum είναι ως προς όλες τις πεπερασμένες συλλογές $I_1, \dots, I_n$ από διαδοχικά διαστήματα των φυσικών αριθμών με $n \leq \min I_1$ και έστω X να είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathbb{N})$ ως προς τη νόρμα αυτή. Τότε η συνήθης βάση $(e_j)_j$ του X είναι μια μη τετριμμένα ασθενώς-Cauchy ακολουθία η οποία παράγει spreading model ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_1. Θεωρούμε τις ακολουθίες $e_j^1 = e_{2j-1} - e_1$ και $e_j^2 = e_{2j} + e_1$. Παρατηρήστε ότι όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.12, αυτές δεν έχουν υπακολουθίες οι οποίες σχηματίζουν μια από κοινού Schauder βασική ακολουθία όμως η $((e_j^i)_j)_{i=1}^2$ παράγει ένα l-joint spreading model ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_1.

Είναι γνωστό ότι τα spreading model που παράγονται από ασθενώς μηδενικές ακολουθίες είναι unconditional. Αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση των joint spreading model που παράγονται από ασθενώς μηδενικές ακολουθίες.

Πρόταση 1.44. Έστω $(x_j^1)_j, \dots, (x_j^l)_j$ είναι νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X οι οποίες δέχονται την $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ σαν l-joint spreading model. Τότε η $(e_j^i)_{i=1,j\in\mathbb{N}}^l$ είναι 1-suppression unconditional και άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $(s_i)_{i=1}^l \in S\text{-}Plm_l([\mathbb{N}]^k)$ με $n \leq s_1(1)$, η ακολουθία $(x_{s_i(j)}^i)_{i=1,j=1}^{l,k}$ είναι $(1+\varepsilon)$-suppression unconditional.

Παρατήρηση 1.45. Οι έννοιες των πλέγμα spreading ακολουθιών και των l-joint spreading model επεκτείνονται φυσιολογικά, με ένα διαγώνιο επιχείρημα, ώστε να περιγράφουν μία από κοινού συμπεριφορά για άπειρες αριθμήσιμες το πλήθος ακολουθίες.

1.2.3 Asymptotic Model

Η έννοια των asymptotic model [HO] περιγράφει την από κοινού ασυμπτωτική συμπεριφορά μίας οικογένειας από άπειρες αριθμήσιμες το πλήθος ακολουθίες σε ένα χώρο Banach. Σε αντίθεση με τα spreading model και τα joint spreading model δεν συνδέονται κατ΄ ανάγκη με κάποια κανονική δομή των ακολουθιών.

Ορισμός 1.46. Έστω $(x_j^i)_j$, για $i \in \mathbb{N}$, να είναι ακολουθίες σε ένα χώρο Banach $(X, \|\cdot\|)$ και $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach $(E, \|\cdot\|_*)$. Θα λέμε ότι η οικογένεια $((x_j^i)_{j\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}}$ παράγει την $(e_j)_j$ σαν asymptotic model αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \leq n_1 < \dots < n_k$ ισχύει ότι $\left| \| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_j}^j \| - \| \sum_{j=1}^k a_j e_j \|_* \right| < \varepsilon$, για όλες τις επιλογές $a_1, \dots, a_k$.

Θεώρημα 1.47. Έστω $(x^i_j)_j$, για $i \in \mathbb{N}$, να είναι νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες σε ένα χώρο Banach. Τότε υπάρχει $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η οικογένεια $((x^i_j)_{j\in M})_{i\in\mathbb{N}}$ να παράγει ένα asymptotic model.

Παρατήρηση 1.48. Τα spreading model και τα joint spreading model, είναι ακολουθίες οι οποίες έχουν μία κανονική δομή είτε ως spreading ακολουθίες είτε ως πλέγμα spreading αντίστοιχα. Αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση των asymptotic model, καθώς οποιαδήποτε ακολουθία σε ένα χώρο Banach μπορεί να παραχθεί ως ένα asymptotic model.

Παρατήρηση 1.49. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach, $\mathscr{F}$ μία οικογένεια από νορμαρισμένες ακολουθίες στον X και θέτουμε

α) $SM(X, \mathscr{F})$ να είναι το σύνολο των spreading model τα οποία παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}$,

β) $JSM(X, \mathscr{F})$ να είναι το σύνολο των joint spreading model τα οποία παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ και

γ) $AM(X, \mathscr{F})$ να είναι το αντίστοιχο σύνολο των asymptotic model.

Τότε ισχύει ότι $SM(X, \mathscr{F}) \subset JSM(X, \mathscr{F}) \subset AM(X, \mathscr{F})$.

1.3 Χώροι με Μοναδική Ασυμπτωτική Δομή

Παρουσιάζουμε παραδείγματα χώρων Banach που δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς κάποια οικογένεια ακολουθιών. Ξεκινάμε στο πρώτο μέρος με τους κλασσικούς χώρους $\ell_p(\mathbb{N})$ και $c_0(\mathbb{N})$, και στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ιδιότητα αυτή για τους Asymptotic ℓ_p χώρους, υπό την έννοια του [MMT], και το χώρο James Tree.

Ορισμός 1.50. Έστω $\mathscr{F}$ μία οικογένεια από νορμαρισμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X.

α) Θα λέμε ότι ο χώρος X δέχεται *μοναδικό l-joint spreading model* ως προς την $\mathscr{F}$ αν για κάθε $l \in \mathbb{N}$, κάθε δύο l-joint spreading model που παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ είναι ισοδύναμα.

β) Θα λέμε ότι ο χώρος X δέχεται *ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model* ως προς την $\mathscr{F}$ αν υπάρχει $K > 0$ ώστε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ κάθε δύο l-joint spreading model που παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ να είναι K-ισοδύναμα.

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να διατυπωθεί, τελείως ανάλογα, στην περίπτωση των spreading model και των asymptotic model.

Παρατήρηση 1.51. Παρά το γεγονός ότι η έννοια των asymptotic model διαφέρει από αυτή των joint spreading model, όπως παρατήρησε ο B. Sari, ένας χώρος Banach δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό asymptotic model ως προς μία οικογένεια ακολουθιών αν και μόνο αν δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς την ίδια οικογένεια. Προφανώς, κάτι τέτοιο συνεπάγεται επίσης ότι ο χώρος δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model.

Παρατηρήσεις 1.52. Έστω $\mathscr{F}$ να είναι μια οικογένεια από νορμαρισμένες ακολουθίες σε ένα χώρο Banach X ώστε για κάποιο $l \in \mathbb{N}$ να υπάρχει σταθερά $K_l > 0$ ώστε κάθε δύο l-joint spreading model που παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ να είναι K_l-ισοδύναμα.

α) Για κάθε $l' < l$, υπάρχει $K_{l'} \leq K_l$ ώστε κάθε δύο l'-joint spreading model που παράγονται από στοιχεία της $\mathcal{F}$ να ειναι $K_{l'}$-ισοδύναμα.

β) Ο χώρος X μπορεί να μην δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathcal{F}$. Παραδείγματα τέτοιων χώρων βρίσκονται στο [AM1], καθώς και ο χώρος που περιγράφεται στον Ορισμό 2.23.

Η ακόλουθη πρόταση αφορά χώρους οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς οικογένειες ακολουθιών οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Τα joint spreading model σε τέτοιους χώρους είναι unconditional και μερικές φορές είναι ακόμη και ισοδύναμα με τη συνήθη βάση κάποιου ℓ_p ή του c_0. Οικογένειες ακολουθιών που ικανοποιούν τέτοιες ιδιότητες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μελέτη της ιδιότητας UALS.

Πρόταση 1.53. Έστω X είναι ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται ένα K-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς μία οικογένεια $\mathscr{F}$ από νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

α) Αν $(x_j)_j \in \mathscr{F}$, τότε κάθε υπακολουθία της $(x_j)_j$ ανήκει στην $\mathscr{F}$.

β) Αν $(x_j)_j \in \mathscr{F}$, τότε υπάρχει $L = \{l_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η ακολουθία $z_i = \|x_{l_{2i-1}} - x_{l_{2i}}\|^{-1}(x_{l_{2i-1}} - x_{l_{2i}})$ να ανήκει στην $\mathscr{F}$.

γ) Αν $(x_j)_j \in \mathscr{F}$ και $(\lambda_i)_{i=1}^m$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία βαθμωτών, που δεν είναι όλα μηδέν, υπάρχει $L = \{l_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε αν

$$z_n = \Big\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{l_{m(n-1)+i}} \Big\|^{-1} \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{l_{m(n-1)+i}} \Big),$$

για $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $(z_i)_i$ ανήκει στην $\mathscr{F}$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

α΄) Αν η $\mathscr{F}$ ικανοποιεί την ιδιότητα α) τότε κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ είναι spreading ως προς την πλέγμα αρίθμηση και επιπλέον είναι K-ισοδύναμη με το spreading model που παράγει οποιαδήποτε ακολουθία της $\mathscr{F}$.

β΄) Αν η $\mathscr{F}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες α) και β) τότε κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ είναι K-suppression unconditional.

γ΄) Αν η $\mathscr{F}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες α) και γ) τότε κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ είναι K-ισοδύναμο με τη βάση κάποιου ℓ_p ή του c_0.

Απόδειξη. Το α΄) προκύπτει από το γεγονός ότι αν $(x_j)_j \in \mathscr{F}$ και η οποία παράγει κάποιο spreading model $(e_i)_i$, τότε αν $(s_i)_{i=1}^l$, η οικογένεια $((x_{s_i(j)})_j)_{i=1}^l$ παράγει ένα l- joint spreading model ισομετρικό με την $(e_j)_j$. Επομένως, καταλήγουμε ότι κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}$ είναι K-ισοδύναμο με το $(e_j)_j$.

Για το β΄) αρκεί, από το α΄), να δείξουμε ότι κάθε spreading model που δέχεται ένα στοιχείο της $\mathscr{F}$ έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Έστω $(x_j)_j \in \mathscr{F}$ και η οποία μπορεί από το α) να υποτεθεί οτι παράγει κάποιο spreading model $(e_j)_j$. Εφαρμόζοντας το β) για τη $(x_j)_j$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα στοιχείο στην $\mathscr{F}$ που παράγει ως spreading model την ακολουθία $(\|e_{2j-1}-e_{2j}\|^{-1}(e_{2j-1}-e_{2j}))_j$, το οποίο από την [BL, Πρόταση 4.3] είναι 1-suppression unconditional. Παρατηρήστε ότι κάθε ακολουθία η οποία είναι K-ισοδύναμη με μία 1-suppression unconditional ακολουθία είναι η ίδια K-suppression unconditional.

Έστω ότι ισχύουν τα α) και γ). Τότε παρατηρήστε ότι ισχύει το β) και άρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια ακολουθία $(x_j)_j \in \mathscr{F}$ η οποία παράγει ένα spreading model που είναι 1-suppression unconditional. Από την [MMT, Παράγραφος 1.6.3], ως μία άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Krivine [Kr] [L], για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν βαθμωτά $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ώστε κάθε m το πλήθος όροι της ακολουθία $(z_n)_n$ που προκύπτει είναι $(1+\varepsilon)$-ισοδύναμα με τη συνήθη βάση του ℓ_p^m, για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$. Επομένως υπάρχει σταθερά K ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $1 \leq p_m \leq \infty$ τέτοιο ώστε οι πρώτοι m το πλήθος όροι καθενός spreading model που παράγεται από στοιχείο της $\mathscr{F}$ να είναι K-ισοδύναμοι με τη συνήθη βάση του ℓ_{p_m}. Επιλέγοντας ένα οριακό σημείο της $(p_m)_m$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Συμβολισμός. Για ένα χώρο Banach X, θα συμβολίζουμε με $\mathscr{F}(X)$ το σύνολο των νορμαρισμένων Schauder βασικών ακολουθιών στον X, με $\mathscr{F}_0(X)$ το υποσύνολο του που αποτελείται από τις ακολουθίες που είναι ασθενώς μηδενικές και με $\mathscr{F}_C(X)$ το σύνολο των νορμαρισμένων C-Schauder βασικών ακολουθιών στον X. Τέλος, αν ο χώρος X έχει Schauder βάση θα συμβολίζουμε με $\mathscr{F}_b(X)$ το σύνολο των νορμαρισμένων block ακολουθιών στον X.

1.3.1 Κλασσικοί Χώροι Banach

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε παραδείγματα χώρων που δέχονται ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model, ξεκινώντας με τους κλασσικούς χώρους ακολουθιών $\ell_p(\mathbb{N})$ και $c_0(\mathbb{N})$.

Πρόταση 1.54. Οι παρακάτω χώροι Banach δέχονται ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model και το οποίο είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση τους.

α) Οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$, για $1 < p < \infty$, ως προς την $\mathscr{F}(\ell_p)$.

β) Ο χώρος $\ell_1(\mathbb{N})$ ως προς την $\mathscr{F}_b(\ell_1)$, αλλά όχι ως προς την $\mathscr{F}(\ell_1)$.

γ) Ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ ως προς την $\mathscr{F}_0(c_0)$, αλλά όχι ως προς την $\mathscr{F}(c_0)$.

Παρατηρήστε ότι το ίδιο ισχύει άμεσα για τους χώρους $\ell_p(\Gamma)$ για $1 \leq p < \infty$ και το χώρο $c_0(\Gamma)$, για κάθε άπειρο σύνολο Γ.

Παρατήρηση 1.55. Για $C \geq 1$, ο $\ell_1(\mathbb{N})$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_C(\ell_1)$. Πράγματι, έστω $(x_n)_n$ να είναι μια C-Schauder ακολουθία στον ℓ_1. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(x_n)_n$ έχει ένα κατά σημείο όριο x_0 στον ℓ_1. Επιπλέον, αν θέσουμε $z_n = x_n - x_0$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το όριο $\lim_n \|z_n\| = \lambda$ υπάρχει. Έπεται τότε ότι $\|x_0\| + \lambda = 1$ και $0 < \lambda \leq 1$. Μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(\lambda^{-1} z_n)_{n \geq n_0}$ είναι $(1 + 1/n_0)$-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1. Καταλήγουμε έτσι ότι για κάθε $M \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} M(1-\lambda) = M\|x_0\| \leq \lim_k \Big\| \sum_{n=1}^{M} x_{n+k} \Big\| &\leq C \lim_k \Big\| \sum_{n=1}^{M} x_{n+k} - \sum_{n=M+1}^{2M} x_{n+k} \Big\| \\ &= C \lim_k \Big\| \sum_{n=1}^{M} z_{n+k} - \sum_{n=M+1}^{2M} z_{n+k} \Big\| = C2M\lambda. \end{aligned}$$

Επομένως, $\lambda \geq 1/(2C+1)$ και άρα αν $(x_n^i)_n$, $1 \leq i \leq l$ είναι μια οικογένεια από C-Schauder βασικές ακολουθίες τότε περνόντας σε υπακολουθίες ώστε η $(x_n^i)_n$ να συγκλίνει κατά σημείο σε κάποιο x_0^i, για $1 \leq i \leq l$, και αν θέσουμε

$(z_n^i)_n = (x_n^i - x_0^i)$, για $1 \leq i \leq l$, τότε οι ακολουθίες αυτεές είναι κατά σημείο μηδενικές και φραγμένες από κάτω από $1/(2C+1)$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, περνώντας σε κατάλληλες υπακολουθίες, $(x_n^i)_n$, $1 \leq i \leq m$, είναι από κοινού $(2C+1+\varepsilon)$-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1.

Παρατήρηση 1.56. Παρά το γεγονός ότι για κάθε $C \geq 1$, ο $\ell_1(\mathbb{N})$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_C(\ell_1)$, αυτό δεν ισχύει για χώρους με την ιδιότητα Schur. Για παράδειγμα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη νόρμα $\|x\|_n = \max\{\|x\|_{\ell_2}, n^{-1}\|x\|_{\ell_1}\}$ στον $\ell_1(\mathbb{N})$. Τότε ο χώρος $X = (\sum_n \oplus X_n)_{\ell_1}$, όπου $X_n = (\ell_1, \|\cdot\|_n)$, έχει την ιδιότητα Schur. Παρά το γεγονός ότι κάθε spreading model του X είναι ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_1, αυτό δε συμβαίνει με ομοιόμορφη σταθερά.

1.3.2 Asymptotic ℓ_p Χώροι

Ένα ακόμη παράδειγμα χώρων που δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model είναι οι asymptotic ℓ_p χώροι. Ξεκινάμε με τον ορισμό τους.

Ορισμός 1.57 ([MT]). Ένας χώρος Banach X με μια νορμαρισμένη Schauder βάση καλείται *asymptotic* ℓ_p (αντ. *asymptotic* c_0) αν υπάρχει $C > 0$ ώστε κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(x_i)_{i=1}^n$ νορμαρισμένων διανυσμάτων στον X με $n < \operatorname{supp}(x_1) < \cdots < \operatorname{supp}(x_n)$ να είναι C-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p^n (αντ. c_0^n), για $1 \leq p < \infty$.

Τα κλασσικά παραδείγματα asymptotic ℓ_p χώρων είναι ο αρχικός χώρος του Tsirelson [T] και τα p-convexification αυτού [FJ]. Η επόμενη πρόταση είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού και του ότι ένας asymptotic ℓ_p χώρος, για $1 < p < \infty$, είναι αυτοπαθής.

Πρόταση 1.58. Κάθε asymptotic ℓ_p ή c_0 χώρος X δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την οικογένεια $\mathscr{F}_b(X)$. Επιπλέον, κάθε asymptotic ℓ_p χώρος X, για $1 < p < \infty$, δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}(X)$.

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω ορισμός των asymptotic ℓ_p χώρων στο [MT] εξαρτάται από τη Schauder βάση του X και όχι μόνο από το χώρο X. Μία άλλη εκδόχη αυτού του ορισμού, βρίσκεται στο [MMT, Υποενότητα 1.7] και βασίζεται σε ένα παιχνίδι δυο παικτών (S) και (V). Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού, ο παίκτης (S) επιλέγει έναν κλειστό υπόχωρο Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης και στη συνέχεια ο παίκτης (V) επιλέγει ένα νορμαρισμένο διάνυσμα $y \in Y$. Ένας χώρος Banach X καλείται *Asymptotic* ℓ_p αν υπάρχει σταθερά C ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο παίκτης (S) έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι $G(p, n, C)$, δηλαδή να αναγκάσει σε n το πλήθος γύρους τον παίκτη (V) να επιλέξει μια ακολουθία

$(y_i)_{i=1}^n$ η οποία είναι C-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p^n (ή του c_0^n για $p=\infty$). Ας σημειωθεί ότι η αρχική διατύπωση της ιδιότητας αυτής διαφέρει από το παραπάνω. Η ισοδυναμία του αρχικού ορισμού με αυτή την πιο εύχρηστη εκδοχή που παρουσιάζουμε έπεται από το [MMT, Υποενότητα 1.5].

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι για ένα διαχωρίσιμο Asymptotic ℓ_p χώρο X, για $1 \le p \le \infty$, υπάρχει μια συγκεκριμένη οικογένεια ακολουθιών που περιγράφεται στην Πρόταση 1.60, ως προς την οποία ο X δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model. Αυτή η οικογένεια έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες τις οποίες δεν έχει η $\mathscr{F}_0(X)$ όταν ο X περιέχει τον ℓ_1 και αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμοποιεί στην επόμενη ενότητα για να αποδειχθεί ότι ένας Asymptotic ℓ_1 χώρος ικανοποιεί την ιδιότητα UALS. Ξεκινάμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.59. Έστω X είναι ένας διαχωρίσιμος C-Asymptotic ℓ_p χώρος, για $1 \le p \le \infty$. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη συλλογή $\mathscr{Y}$ από πεπερασμένης συνδιάστασης υποχώρους του X τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, ο παίκτης (S) έχει νικητήρια στρατηγική στο παιχνίδι $G(p, n, C+\varepsilon)$ επιλέγοντας υποχώρους από την $\mathscr{Y}$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ας αναλάβουμε τον ρόλο του παίκτη (V) αφήνοντας τον παίκτη (S) να ακολουθήσει μια νικητήρια στρατηγική σε ένα πλήθος αποτελεσμάτων του $G(p,n,C)$. Συγκεκριμένα, θα περιγράψουμε μια συλλογή διανυσμάτων του X της μορφής $\{x_F^n : \emptyset \neq F \in [\mathbb{N}]^{\le n}\}$ καθώς και μία συλλογή υποχώρων πεπερασμένης συνδιάστασης της μορφής $\{Y_F^n : F \in [\mathbb{N}]^{\le n-1}\}$ ώστε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $F \in [\mathbb{N}]^{\le n-1}$ η κλειστότητα του $\{x_{F\cup\{i\}}^n : i > \max(F)\}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του Y_F^n (όπου $\max(\emptyset) = 0$).

β) Για κάθε $\{k_1, \ldots, k_m\}$ στο $[\mathbb{N}]^{\le n}$ έχουμε ότι

$$\left(Y_\emptyset^n, x_{\{k_1\}}^n\right), \ \left(Y_{\{k_1\}}^n, x_{\{k_1,k_2\}}^n\right), \ldots, \left(Y_{\{k_1,\ldots,k_{m-1}\}}^n, x_{\{k_1,\ldots,k_m\}}^n\right)$$

είναι το αποτέλεσμα του παιχνιδιού $G(p,n,C)$ μετά από m γύρους όπου ο (S) έχει ακολουθήσει νικητήρια στρατηγική.

Ο παίκτης (S) ξεκινάει και επιλέγει έναν υπόχωρο $Y_\emptyset^n$. Ως ο παίκτης (V) επιλέγουμε ένα πυκνό υποσύνολο $\{x_{\{i\}}^n : i \in \mathbb{N}\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του $Y_\emptyset^n$. Αν για κάποιο $1 \le m < n$ έχουμε επιλέξει $\{x_F^n : \emptyset \neq F \in [\mathbb{N}]^{\le m}\}$ και $\{Y_F^n : F \in [\mathbb{N}]^{\le m-1}\}$ τότε ολοκληρώνουμε το επαγωγικό βήμα ως εξής : Για κάθε $F = \{k_1 < \cdots < k_m\}$, από το β), ο (S) συνεχίζει να ακολουθεί μια νικητήρια στρατηγική και επιλέγει έναν υπόχωρο Y πεπερασμένης συνδιάστασης ώστε για κάθε $y \in S_Y$ η ακολουθία $(x_{k_i}^n)_{i=1}^m{}^\frown(y)$ είναι C-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση ℓ_p^{m+1}. Θέτουμε $Y_F^n = Y$ και τότε για κάθε $i > \max(F)$

επιλέγουμε ένα νορμαρισμένο διάνυσμα $x^n_{F\cup\{i\}}$ στον Y^n_F τέτοιο ώστε το σύνολο $\{x^n_{F\cup\{i\}} : i > \max(F)\}$ να είναι πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα του Y^n_F.

Θέτουμε $\mathscr{Y} = \{Y^n_F : n \in \mathbb{N}, F \in [\mathbb{N}]^{\leq n-1}\}$ και σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Θα περιγράψουμε τώρα μια νικητήρια στρατηγική του παίκτη (S) στο παιχνίδι $G(p, n, C+\varepsilon)$, επιλέγοντας υποχώρους από την $\mathscr{Y}$. Ο παίκτης (S) ξεκινάει και επιλέγει τον υπόχωρο $Y_1 = Y^n_\emptyset$ και στη συνέχεια ο (V) ένα αυθαίρετο νορμαρισμένο διάνυσμα y_1 από τον Y_1. Πρίν ξεκινήσει ο επόμενος γύρος, ο παίκτης (S) επιλέγει επίσης $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|y_1 - x^n_{k_1}\| < \varepsilon/n$. Έστω $(Y_1, y_1), \dots (Y_m, y_m)$ να είναι το αποτέλεσμα του παίγνιδιού μετά από m γύρους, για $1 \leq m < n$, και ενώ ο παίκτης (S) έχει επιλέξει επίσης $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\|y_i - x^n_{k_i}\| < \varepsilon/n$, για $1 \leq i \leq m$. Στο επόμενο γύρο, ο παίκτης (S) επιλέγει τον υπόχωρο $Y_{m+1} = Y^n_{\{k_1,\dots,k_m\}}$ και $k_{m+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $\|y_{m+1} - x^n_{k_{m+1}}\| < \varepsilon/n$, όπου y_{m+1} είναι το διάνυσμα που επέλεξε ο (V) από τον Y_{m+1}. Επομένως αν $(Y_1, y_1), \dots, (Y_n, y_n)$ είναι η τελική έκβαση του παιχνιδιού, παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(x^n_{k_i})^n_{i=1}$ είναι C-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^n_p και ότι $\|y_i - x^n_{k_i}\| < \varepsilon/n$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Άρα η $(y_i)^n_{i=1}$ είναι $(C+\varepsilon)$-ισοδύναμη με τη βάση του ℓ^n_p. □

Πρόταση 1.60. Έστω X είναι ένας διαχωρίσιμος C-Asymptotic ℓ_p χώρος, για $1 \leq p \leq \infty$. Τότε υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\mathscr{A}$ του X^* ώστε αν

$$\mathscr{F}_{0,\mathscr{A}} = \Big\{(x_n)_n : \ \|x_n\| = 1 \text{ και } \lim_n f(x_n) = 0 \text{ για κάθε } f \in \mathscr{A}\Big\}$$

τότε ο X δέχεται τον ℓ_p σαν ένα C^2-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την οικογένεια $\mathscr{F}_{0,\mathscr{A}}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{Y}$ όπως στο Λήμμα 1.59. Για κάθε $Y \in \mathscr{Y}$ επιλέγουμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο $f^Y_1, \dots, f^Y_{k_Y}$ του X^* ώστε $Y = \cap^{k_Y}_{i=1}\ker(f^Y_i)$ και θέτουμε $\mathscr{A} = \cup_{Y\in\mathscr{Y}}\{f^Y_1, \dots, f^Y_{k_Y}\}$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι το ζητούμενο σύνολο. Πράγματι, έστω $l \in \mathbb{N}$ και $(x^1_n)_n, \dots, (x^l_n)_n$ να είναι στοιχεία της $\mathscr{F}_{0,\mathscr{A}}$ που παράγουν ένα l-joint spreading model $(e^i_n)^l_{i=1,n}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι η $(e^i_j)^{l,k}_{i=1,j=1}$ είναι C-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ^{lk}_p. Θέτουμε $m = lk$, σταθεροποιούμε ένα $\varepsilon > 0$ και, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.8, επιλέγουμε επαγωγικά νορμαρισμένα διανύσματα $y_1, \dots, y_m$ και $(s_i)^l_{i=1}$ στην $S\text{-}Plm_l([\mathbb{N}]^k)$ τέτοια ώστε

α) $(Y_1, y_1), \dots, (Y_m, y_m)$ είναι η έκβαση του $G(m, p, C+\varepsilon)$.

β) $Y_1, \dots, Y_m \in \mathscr{Y}$.

γ) Για $1 \leq i \leq l$ και $1 \leq j \leq k$, αν $n(i,j) = (i-1)k + j$ τότε έχουμε ότι $\|y_{n(i,j)} - x^i_{s_i(j)}\| \leq \varepsilon/m$.

Έπεται τότε για κάθε επιλογή βαθμωτών $(a_{ij})_{i=1,j=1}^{l,k}$, με $|a_{ij}| \le 1$, ότι

$$\left| \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} x^i_{s_i(j)} \Big\| - \Big\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij} y_{n(i,j)} \Big\| \right| < \varepsilon.$$

Αφού $(y_i)_{i=1}^m$ είναι $(C+\varepsilon)$-ισοδύναμη με τη βάση του ℓ_p^m προκύπτει το ζητούμενο. □

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης. Στη γενική περίπτωση, όλοι οι Asymptotic ℓ_p χώροι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς την οικογένεια των ασθενώς μηδενικών Schauder βασικών ακολουθιών.

Πόρισμα 1.60.1. Κάθε Asymptotic ℓ_p χώρος X, για $1 \le p \le \infty$, δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_0(X)$ και επιπλέον, κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία αυτής της οικογένειας είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_p (ή του c_0 για $p = \infty$).

1.3.3 James Tree

Δείχνουμε, ως τελευταίο παράδειγμα αυτής της ενότητας, ότι ο χώρος James Tree $\mathcal{JT}$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς την οικογένεια $\mathscr{F}_0(JT)$ κάτι που δεν ισχύει τις οικογένειες $\mathscr{F}(JT)$ ή $\mathscr{F}_b(JT)$.

Συμβολισμός. Έστω $\mathscr{D}$ να είναι το *δυαδικό δέντρο*, δηλαδή $\mathscr{D} = \{0,1\}^{<\infty}$, εφοδιασμένο με τη φυσιολογική του διάταξη. Θα συμβολίζουμε με S τα τμήματα του $\mathscr{D}$ και με B τα κλαδιά του. Για $m < n$, με $Q_{[m,n]}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{s \in \mathscr{D} : m \le |s| \le n\}$. Θέτουμε $c_{00}(\mathscr{D})$ να είναι ο διανυσματικός χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών $x : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$. Για ένα τμήμα S συμβολίζουμε με S^* το γραμμικό συναρτησιακό στον $c_{00}(\mathscr{D})$ που ορίζεται ως $S^*(x) = \sum_{s \in S} x(s)$.

Ορισμός 1.61 ([J2])**.** Στον $c_{00}(\mathscr{D})$ ορίζουμε την ακόλουθη νόρμα

$$\|x\|_{\mathcal{JT}} = \sup \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{s \in S_i} x(s) \Big)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλες τις πεπερασμένες συλλογές $S_1, \dots, S_n$ από ανά δύο ξένα τμήματα. Ο χώρος *James Tree*, συμβολίζεται $\mathcal{JT}$, είναι η πλήρωση του $c_{00}(\mathscr{D})$ ως προς την παραπάνω νόρμα.

Παρατηρήσεις 1.62. Παρατηρήστε τα ακόλουθα.

α) Το παρακάτω σύνολο είναι norming για τον $\mathcal{JT}$.

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i S_i^* : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 1, \{S_i\}_{i=1}^{n} \text{ ξένα ανά δύο τμήματα} \right\}.$$

Δηλαδή $\|x\| = \sup\{f(x) : f \in W\}$, για κάθε $x \in \mathcal{JT}$.

β) Έστω $\varepsilon > 0$, $x \in \mathcal{JT}$ με $\|x\| = 1$ και $\{S_i\}_{i \in I}$ να είναι ανά δύο ξένα τμήματα τέτοια ώστε $|S_i^*(x)| \geq \varepsilon$, για κάθε $i \in I$. Τότε $\#I \leq 1/\varepsilon^2$.

γ) Έστω $S_1, \ldots, S_n$ είναι ανά δύο ξένα τμήματα και $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} b_i S_i^* \Big\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα για τον χώρο James Tree.

Θεώρημα 1.63. Ο χώρος $\mathcal{JT}$ δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_0(\mathcal{JT})$ και κάθε l-joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}_0(\mathcal{JT})$ είναι $\sqrt{2}$-ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_2.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι παραλλαγή του γνωστού αποτελέσματος των I. Ameniya και T. Ito [AI], ότι κάθε νορμαρισμένη ασθενώς μηδενική ακολουθία στον $\mathcal{JT}$ περιέχει υπακολουθία η οποία είναι 2-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2. Από αυτό έπεται ότι κάθε spreading model που παράγεται από μία ασθενώς μηδενική ακολουθία είναι 2-ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_2. Η προσέγγιση που ακολουθείται παρακάτω δίνει ότι κάθε joint spreading model που παράγεται από στοιχεία της $\mathscr{F}_0(\mathcal{JT})$ είναι ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του ℓ_2 με σταθερά ισοδυναμίας ίση με $\sqrt{2}$, όπου όπως αναφέρεται στο [HB], [Be] είναι η καλύτερη δυνατή.

Ως συνέπεια του ότι ο χώρος του James, τον οποίο περιγράφουμε στον Ορισμό 1.13, εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\mathcal{JT}$ έπεται ότι και ο $\mathcal{J}$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_0(\mathcal{J})$.

Χωρίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος σε διάφορα επιμέρους λήμματα ξεκινώντας με το ακόλουθο αποτέλεσμα τύπου Ramsey.

Ορισμός 1.64. Έστω $(Q_{[p_n,q_n]})_n$ με $Q_{[p_n,q_n]} < Q_{[p_m,q_m]}$, για $n < m$, και $(F_n)_n$ μία ακολουθία απο πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathcal{JT}$. Η $(F_n)_n$ θα καλείται *ασθενώς μηδενική level block οικογένεια* ως προς την $(Q_{[p_n,q_n]})_n$ αν ισχύουν τα ακόλουθα.

α) $\mathrm{supp}(x) \subset Q_{[p_n,q_n]}$ και $\|x\| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in F_n$.

β) Η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι ασθενώς μηδενική για κάθε επιλογή $x_n \in F_n$.

Λήμμα 1.65. Έστω $(F_n)_n$ είναι μία ασθενώς μηδενική level block οικογένεια με $\sup_n \#F_n < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε αρχικό τμήμα S να υπάρχει το πολύ ένα $n \in L$ με την ιδιότητα ότι $|S^*(x)| \geq \varepsilon$, για κάποιο $x \in F_n$.

Απόδειξη. Αν όχι, από το Θεώρημα του Ραμσεψ [Ra], μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος $m < n$ στο L να υπάρχει ένα αρχικό τμήμα $S_{m,n}$ και $x \in F_m$, $y \in F_n$ τέτοια ώστε $|S^*_{m,n}(x)| \geq \varepsilon$ ανδ $|S^*_{m,n}(y)| \geq \varepsilon$.

Ισχυρισμός : Θέτουμε $\mu = \max_n \#F_n/\varepsilon^2$. Τότε, για κάθε $n \in L$, ισχύει ότι $\#\{S_{m,n}|_{[0,p_n]} : m \in L, m < n\} \leq \mu$, όπου για ένα τμήμα S και $p, q \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε $S|_{[p,q]} = S \cap Q_{[p,q]}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Αν $\#\{S_{m,n}|_{[0,p_n]} : m \in L, m < n\} > \mu$ για κάποιο $n \in L$, τότε από την αρχή του περιστερώνα, μπορούμε να βρούμε ένα $x \in F_n$ και ένα $F \subset \{1, \dots, n-1\}$ με $\#F > 1/\varepsilon^2$ τέτοια ώστε $|S_{m,n}(x)| \geq \varepsilon$ και τα τμήματα $S_{m,n}|_{[p_n,q_n]}$ να είναι ανά δύο ξένα, για $m \in F$. Αυτό είναι άτοπο λόγω του β) της Παρατήρησης 1.62.

Επομένως για $n \in L$, έστω $\{S_{m,n}|_{[0,p_n]} : m \in L, m < n\} = \{S^n_1, \dots, S^n_{\mu(n)}\}$ με $\mu(n) \leq \mu$ και θέτουμε $L^n_i = \{m \in L : m < n \text{ και } S_{m,n}|_{[0,p_n]} = S^n_i\}$, για $1 \leq i \leq \mu(n)$ και $L^n_i = \emptyset$, για $\mu(n) < i \leq \mu$. Παρατηρήστε τότε ότι $\{m \in L : m < n\} = \cup_{i=1}^{\mu} L^n_i$, για κάθε $n \in L$. Περνώντας σε περαιτέρω υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq \mu$ η $(L^n_i)_{n \in L}$ συγκλίνει κατά σημείο σε κάποιο σύνολο L_i. Είναι τότε άμεσο ότι $L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$ και άρα κάποιο L_{i_0} είναι ένα άπειρο υποσύνολο του L ώστε για κάθε $n \in L_{i_0}$ να υπάρχει ένα αρχικό τμήμα S_n τέτοιο ώστε για κάθε $m < n$ στο L_{i_0} να ισχύει ότι $|S^*_n(x_m)| \geq \varepsilon$, για κάποιο $x_m \in F_m$. Τότε υπάρχει $M \in [L_{i_0}]^\infty$ και μία ακολουθία $(x_n)_{n \in M}$ με $x_n \in F_n$, ώστε η $(S_n)_{n \in M}$ να συγκλίνει κατά σημείο σε ένα κλαδί B και $|S^*_m(x_n)| \geq \varepsilon$, για κάθε $m > n$ στο M. Επομένως $|B(x_n)| \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in M$, το οποίο είναι άτοπο λόγω του β) στον Ορισμό 1.64. □

Λήμμα 1.66. Έστω $\varepsilon > 0$ και $(F_n)_n$ είναι μία ασθενώς μηδενική level block οικογένεια ως πρός τη $(Q_{[p_n,q_n]})_n$ και έστω ότι $\sup_n \#F_n < \infty$. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_k$ στο $\mathbb{N}$ και μια φθίνουσα ακολουθία $(\varepsilon_k)_k$ από θετικούς αριθμούς ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα

α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε αρχικό τμήμα S υπάρχει το πολύ ένα $k' > k$ ώστε $|S^*(x)| \geq \varepsilon_k$, για κάποιο $x \in F_{n_{k'}}$.

β) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{q_{n_k}} \sum_{i=k}^{\infty} (i+1)\varepsilon_i < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $(\delta_n)_n$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \varepsilon$. Θα κατασκευάσουμε τις $(n_k)_k$ και $(\varepsilon_k)_k$ επαγωγικά ως εξής : Θέτουμε $n_1 = 1$ και $L_1 = \mathbb{N}$ και επιλέγουμε ε_1 τέτοιο ώστε $2^{q_1} 2\varepsilon_1 < \delta_1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $n_1, \ldots, n_k$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Τότε από το Λήμμα 1.65 υπάρχει ένα $L_k \in [L_{k-1}]^{\infty}$ ώστε για κάθε αρχικό τμήμα S υπάρχει το πολύ ένα $n \in L_k$ με $|S^*(x)| \geq \varepsilon_k$, για κάποιο $x \in F_n$. Επιλέγουμε $n_{k+1} \in L_k$ με $n_{k+1} > n_k$ και $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ ώστε

α′) $2^{q_{n_{k+1}}}(k+2)\varepsilon_{k+1} < \delta_{k+1}$ και

β′) $2^{q_{n_m}} \sum_{i=m}^{k+1} (i+1)\varepsilon_i < \delta_m$, για κάθε $m \leq k$.

Έπεται τότε άμεσα ότι οι $(n_k)_k$ και $(\varepsilon_k)_k$ ικανοποιούν το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.67. Έστω $\varepsilon > 0$ και $(\varepsilon_n)_n$ να είναι μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Έστω επίσης $(F_n)_n$ μία ασθενώς μηδενική level block οικογένεια ως προς την $(Q_{[p_n,q_n]})_n$ με $\sup_n \#F_n < \infty$ και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε αρχικό τμήμα S υπάρχει το πολύ ένα $m > n$ τέτοιο ώστε $|S^*(x)| \geq \varepsilon_n$, για κάποιο $x \in F_m$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{q_n} \sum_{i=n}^{\infty} (i+1)\varepsilon_i < \varepsilon$.

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $x_1, \ldots, x_n$ με $x_i \in F_i$ και $a_1, \ldots, a_n$ βαθμωτών, έχουμε ότι

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \leq (\sqrt{2} + \varepsilon)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν $(x_n)_n$ είναι ακολουθία ώστε $x_n \in F_n$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε τμήμα S με $|M(x_{n-1})| < |\min S| \leq |M(x_n)|$, όπου για $x \in c_{00}(\mathscr{D})$ είναι $M(x) = \max \operatorname{supp}(x)$, τα επόμενα ισχύουν λόγω του α).

α′) $\#\{i > n : |S^*(x_i)| \geq \varepsilon_n\} \leq 1$.

β′) $\#\{i > n : \varepsilon_{k-1} > |S^*(x_i)| \geq \varepsilon_k\} \leq k$, για κάθε $k > n$.

Για κάθε $1 \leq i \leq n$, υπάρχουν ανα δύο ξένα τμήματα $S^i_1, \ldots, S^i_{m_i}$ τέτοια ώστε $S^i_j \subset Q_{[p_i,q_i]}$ και $\sum_{j=1}^{m_i}(S^{i*}_j(x_i))^2 = \|x_i\|$ και άρα

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big\| \geq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^{m_i}\big(S^{i*}_j(x_i)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Έστω $S_1, \ldots, S_m$ ανα δύο ξένα τμήματα και $b_1, \ldots, b_m$ πραγματικοί αριθμοί με $\sum_{j=1}^m b_j^2 \leq 1$. Δοθέντος $1 \leq j \leq m$, θα συμβολίζουμε με $i_{j,1}$ το μοναδικό $1 \leq i \leq n$ τέτοιο ώστε $|M(x_{i_{j,1}-1})| < |\min S_j| \leq |M(x_{i_{j,1}})|$ και επίσης με $i_{j,2}$ το μοναδικό, αν υπάρχει, $i_{j,1} < i \leq n$ τέτοιο ώστε $|S^*_j(x_{i_{j,2}})| \geq \varepsilon_{i_{j,1}}$. Θέτουμε $S_{j,k} = S_j \cap Q_{[p_{i_{j,k}}, q_{i_{j,k}}]}$, για $k = 1, 2$, και $S_{j,3} = S_j \setminus (S_{j,1} \cup S_{j,2})$ καθώς επίσης και $J_i = \{j : i_{j,1} = i \text{ or } i_{j,2} = i\}$, για $1 \leq i \leq n$. Παρατηρήστε ότι, από το α′), κάθε j εμφανίζεται στο J_i το πολύ για δύο i και άρα $\sum_{i=1}^n \sum_{j\in J_i} b_j^2 \leq 2\sum_{j=1}^m b_j^2$. Επομένως υπολογίζουμε :

$$\Big|\sum_{j=1}^m b_j S^*_{j,1}\Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big) + \sum_{j=1}^m b_j S^*_{j,2}\Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j\in J_i} b_j S^*_j(x_i)\Big|$$
$$\leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^n\big(\sum_{j\in J_i} b_j S^*_j(x_i)\big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{j\in J_i} b_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Τέλος, θέτουμε $G_i = \{j : |M(x_{i-1})| < |\min S_j| \leq |M(x_i)|\}$ και έχουμε ότι $\{1, \ldots, m\} = \cup_{i=1}^n G_i$. Παρατηρήστε ότι $\#G_i \leq 2^{q_i}$ και επιπλέον $|S^*_{j,3}(\sum_{k=1}^n x_k)| < \sum_{k=i}^\infty (k+1)\varepsilon_k$, για κάθε $j \in G_i$. Τότε, από τα β) και β′), έπεται ότι $\sum_{j=1}^m |S^*_{j,3}(\sum_{i=1}^n x_i)| < \varepsilon$ και άρα καταλήγουμε

$$\Big|\sum_{j=1}^m b_j S^*_{j,3}\Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m b_j S^*_{j,3}(x_i)\Big| < \varepsilon\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.63. Έστω $(x^1_n)_n, \ldots, (x^l_n)_n \in \mathscr{F}_0(JT)$ ώστε η $((x^i_n)_n)_{i=1}^l$ να παράγει την ακολουθία $(e^i_n)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ σαν joint spreading model και με ένα κλασσικό επιχείρημα τύπου sliding hump μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι κάθε ακολουθία $(x^i_n)_n$ είναι block. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η οικογένεια $(F_n)_{n\in L}$, με $F_n = \{x^1_n, \ldots, x^l_n\}$, να είναι μία ασθενώς μηδενική level block οικογένεια στο $\mathcal{JT}$ που ικανοποιεί τα α) και β) του Λήμματος 1.67 και αφού η $((x^i_n)_{n\in L})_{i=1}^l$ παράγει επίσης το $(e^i_n)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ σαν l-joint spreading model, καταληγουμε ότι η $(e^i_n)_{i=1,n\in\mathbb{N}}^l$ είναι $\sqrt{2}$-ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2 και άρα κάθε δύο l-joint spreading model, που παράγονται από στοιχεία της $\mathscr{F}_0(\mathcal{JT})$, είναι 2-ισοδύναμα. □

1.3.4 Παρατηρήσεις

Τέλος, παρουσιάζουμε κάποια φυσιολογικά ερωτήματα που σχετίζονται με τη μοναδική ασυμπτωτική δομή χώρων Banach και πιο συγκεκριμένα το κατά πόσο υπάρχουν υπόχωροι τέτοιων χώρων με πιο ισχυρή ασυμπτωτική δομή.

Είναι σαφές ότι υπάρχουν χώροι οι οποίοι δέχονται μοναδικό spreading model ως προς κάποια οικογένεια, αλλά αυτό δεν συμβαίνει ομοιόμορφα. Το επόμενο ερώτημα αφορά το κατά πόσο μπορούμε να ανακαλύψουμε την ιδιότητα αυτή σε κάποιο υπόχωρο του χώρου όταν το μοναδικό spreading model είναι ισοδύναμο με κάποιο ℓ_p ή το c_0.

Ερώτημα 2. Έστω X είναι ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται κάποιον ℓ_p ή το c_0 ως μοναδικό spreading model. Υπάρχει κάποιος υπόχωρος του X, ο οποίος να δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό spreading model ;

Όπως προκύπτει από την [AOST, Πρόταση 3.2], στην περίπτωση του $c_0(\mathbb{N})$ ισχύει η ακόλουθη ενδιαφέρουσα ιδιότητα.

Θεώρημα 1.68. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται ένα μοναδικό spreading model ισοδύναμο με τη συνήθη βάση του c_0. Τότε ο X δέχεται τον c_0 σαν ομοιόμορφα μοναδικό spreading model.

Αντιθέτως στην περίπτωση των ℓ_p, για $1 \leq p < \infty$, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα από το [AM1].

Θεώρημα 1.69. Για κάθε $1 \leq p < \infty$, υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος Banach ο οποίος δέχεται ένα μοναδικό spreading model ισοδύναμο με τη βάση του ℓ_p ενώ κανενάς απειροδιάστατος υπόχωρός του δε δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό spreading model.

Όπως αναφέραμε ήδη, υπάρχουν παραδείγματα χώρων οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model και αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση των l-joint spreading model ή ισοδύναμα των asymptotic model.

Ερώτημα 3. Έστω X ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται κάποιον ℓ_p ή το c_0 σαν ομοιόμορφα μοναδικό spreading model. Υπάρχει υπόχωρος του X ο οποίος να δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ;

Η απάντηση δίνεται στο παρακάτω θεώρημα από το [AM1].

Θεώρημα 1.70. Για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, υπάρχει ένας αυτοπαθής χώρος Banach ο οποίος δέχεται τον ℓ_p, ή τον c_0 αν $p = \infty$, σαν ομοιόμορφα μοναδικό spreading model ενώ κανένας υπόχωρος του δεν δέχεται ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model.

Τέλος, κλείνουμε με το ακόλουθο ερώτημα.

Ερώτημα 4. Έστω X είναι ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται κάποιον ℓ_p ή το c_0 ως ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model. Υπάρχει υπόχωρος του X ο οποίος να είναι Asymptotic ℓ_p ή c_0 ;

Πάλι στην περίπτωση του c_0, έχουμε καταφατική απάντηση όταν ο χώρος δεν περιέχει τον ℓ_1, ενώ το πρόβλημα παραμένει ανοικτό για τους ℓ_p.

Θεώρημα 1.71 ([FOSZ])**.** Έστω X ένας χώρος Banach που δεν περιέχει τον ℓ_1 και κάθε asymptotic model του το οποίο παράγεται από ασθενώς μηδενικές ακολουθίες είναι ισοδύναμο με τη βάση του c_0. Τότε ο X είναι Asymptotic c_0.

2 Ομοιόμορφη Προσέγγιση σε Μεγάλους Υποχώρους

Η τελευταία αυτή ενότητα αφιερώνεται στη μελέτης της ιδιότητας UALS για ορισμένες κλάσεις χώρων Banach. Αρχικά, θεωρούμε χώρους με πολύ λίγους τελεστές και συγκεκριμένα χώρους με την ιδιότητα scalar-plus-compact ενώ στη συνέχεια, εξετάζουμε την ιδιότητα για χώρους οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς συγκεκριμένες οικογένειες από Schauder βασικές ακολουθίες. Η τρίτη υποενότητα μελετάει τη συμπεριφορά της UALS ως προς την έννοια της δυικότητας ενός χώρου Banach. Παρουσιάζουμε παραδείγματα χώρων, όπως όλοι οι Asymptotic ℓ_p χώροι και ο $C(K)$ για K αριθμήσιμο συμπαγές, που ικανοποιούν την UALS, ενώ δείχνουμε ότι αυτό δεν ισχύει, για παράδειγμα, για τους $L_p[0,1]$, για $1 \leq p \leq \infty$ και $p \neq 2$. Τέλος, κλείνουμε με κάποιες παρατηρήσεις και ανοικτά προβλήματα.

Ορισμός 2.1. Θα λέμε ότι ένας χώρος Banach X ικανοποιεί την ιδιότητας της *Ομοιόμορφης Προσέγγισης σε Μεγάλους Υποχώρους* (*UALS*) αν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Για κάθε κυρτό συμπαγές υποσύνολο W του $\mathcal{L}(X)$, κάθε $A \in \mathcal{L}(X)$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $B \in W$ με $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης και ένας $B \in W$ ώστε να ισχύει ότι $\|(A-B)|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq C\varepsilon$.

Ορισμός 2.2. Ένα χώρος Banach X θα καλείται *UALS-κορεσμένος* αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε κυρτό συμπαγές υποσύνολο W του $\mathcal{L}(X)$, κάθε $A \in \mathcal{L}(X)$ και $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει $B \in W$ με $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon$, ισχύει ότι για κάθε υπόχωρο Y του X υπάρχει ένας περαιτέρω υπόχωρος Z ώστε $\|(A-B)|_Z\|_{\mathcal{L}(Z,X)} \leq C\varepsilon$, για κάποιο $B \in W$.

2.1 Συμπαγείς Τελεστές

Θεωρούμε αρχικά χώρους με πολύ λίγους τελεστές και αποδεικνύουμε ότι όλοι οι χώροι Banach με την ιδιότητα scalar-plus-compact ικανοποιούν την UALS και είναι μάλιστα UALS-κορεσμένοι. Επομένως, από το βασικό αποτέλεσμα του [Ar *et al.*] προκύπτει ότι μια μεγάλη κλάση χώρων, που περιλαμβάνει όλους τους υπεραυτοπαθείς χώρους, εμφυτεύονται σε κάποιο χώρο ο οποίος ικανοποιεί την ιδιότητα. Ξεκινάμε με την ακόλουθη παραλλαγή του θεωρήματος του Mazur [LT, Θεώρημα 1.α.5].

Λήμμα 2.3. Έστω X ένας χώρος Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ και έστω $\varepsilon > 0$ ώστε $\|T|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} > \varepsilon$, για κάθε υπόχωρο Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης.

Τότε υπάρχει μια νορμαρισμένη ακολουθία $(x_n)_n$ στον X ώστε η $(Tx_n)_n$ να είναι Schauder βασική.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$, επιλέγουμε $x_1 \in S_X$ με $\|Tx_1\| \geq \varepsilon$ και υποθέτουμε ότι τα $x_1, \ldots, x_n$ έχουν επιλεγεί για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω G ένα πεπερασμένο υποσύνολο του X^* ώστε για κάθε $x \in \operatorname{span}\{Tx_1, \ldots, Tx_n\}$ να ισχύει ότι $\|x\| \leq (1+\delta)\max\{g(x) : g \in G\}$ και επιλέγουμε x_{n+1} από τη μοναδιαία σφαίρα του $\bigcap_{g \in G} \ker T^* g$ με $\|Tx_{n+1}\| \geq \varepsilon$. Έπεται τότε άμεσα ότι η $(Tx_n)_n$ είναι μία Schauder βασική ακολουθία. □

Συμβολισμός. Για ένα χώρο Banach X θα συμβολίζουμε με $\mathcal{K}(X)$ το ιδεώδες των συμπαγών τελεστών της άλγεβρας $\mathcal{L}(X)$.

Πρόταση 2.4. Έστω X είναι ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{K}(X)$. Τότε $\inf \|T|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0$, όπου το infimum είναι ως προς όλους τους υποχώρους Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης.

Απόδειξη. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει, τότε από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι η $T[B_X]$ περιέχει μία Schauder βασική ακολουθία και αυτό είναι άτοπο καθώς ο τελεστής T είναι συμπαγής. □

Πόρισμα 2.4.1. Έστω X είναι ένας χώρος Banach, W ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{K}(X)$ και $A \in \mathcal{L}(X)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $B \in W$ με $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης τέτοιος ώστε $\|(A-B)|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \varepsilon + \delta$, για κάθε $B \in W$.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $\{B_i\}_{i=1}^n$ ένα μεγιστικό δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του W. Από την Πρόταση 2.4, υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης τέτοιος ώστε $\|B_i|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < \delta$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Παρατηρήστε ότι $\|B|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq 2\delta$, για κάθε $B \in W$. Επιπλέον, για κάθε $x \in S_Y$ υπάρχει $B \in W$ ώστε $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon$ και άρα $\|A(x)\| < \varepsilon + 2\delta$, δηλαδή $\|A|_Y\| \leq \varepsilon + 2\delta$. Επομένως $\|(A-B)|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \varepsilon + 4\delta$, για κάθε $B \in W$. □

Θεώρημα 2.5. Κάθε χώρος Banach με την ιδιότητα scalar-plus-compact ικανοποιεί την UALS.

Απόδειξη. Έστω W, A, ε όπως στον Ορισμό 2.1 όπου $A = \lambda_A I + K_A$ με $K_A \in \mathcal{K}(X)$. Έστω $\delta > 0$ και $\{B_i\}_{i=1}^n$ ένα μεγιστικό δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του W με $B_i = \lambda_i I + K_i$ και $K_i \in \mathcal{K}(X)$, για $i = 1, \ldots, n$. Από την Πρόταση 2.4 υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης τέτοιος ώστε $\|K_A|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \delta$ και $\|K_i|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \delta$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Έστω τώρα $x \in Y$ με $\|x\| = 1$ και $B \in W$ με $B = \lambda_B I + K_B$ και $\|A(x) - B(x)\| \leq \varepsilon$. Τότε $|\lambda_A - \lambda_B| \leq \varepsilon + 3\delta$ και άρα για κάθε $y \in B_Y$, ισχύει ότι $\|A(y) - B(y)\| \leq \varepsilon + 6\delta$, το οποίο αποδεικνύει και το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.6. Έστω X είναι ένας χώρος Banach ώστε για κάθε $A \in \mathcal{L}(X)$ υπάρχει ένας αυστηρά ιδιάζοντας τελεστής S και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $A = \lambda I + S$. Τότε ο X είναι UALS-κορεσμένος.

Απόδειξη. Έστω W, A, ε όπως στον Ορισμό 2.2, με $A = \lambda_A I + S_A$ όπου ο S_A είναι αυστηρά ιδιάζοντας. Έστω $\delta > 0$ και $\{B_i\}_{i=1}^n$ ένα μεγιστικό δ-διαχωρισμένο υποσύνολο του W με $B_i = \lambda_i I + S_i$ όπου ο S_i είναι αυστηρά ιδιάζοντας, για $1 \leq i \leq n$. Είναι γνωστό ότι για κάθε απειροδιάστατο υπόχωρο του X υπάρχει ένας περαιτέρω υπόχωρος Y ώστε οι $S_A|_Y$ και $S_i|_Y$, για $1 \leq i \leq n$, να είναι συμπαγείς τελεστές. Εφαρμόζοντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά της προηγούμενης απόδειξης έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

2.2 Χώροι με Ομοιόμορφη Ασυμπτωτική Δομή

Μελετάμε χώρους οι οποίοι δέχονται ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model ως προς οικογένειες ακολουθιών οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες, τις οποίες περιγράφουμε στον επόμενο ορισμό, και αποδεικνύουμε ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, οι χώροι αυτοί ικανοποιούν την ιδιότητα UALS. Τέτοιοι χώροι είναι, για παράδειγμα, όλοι οι Asymptotic ℓ_p χώροι. Αξίζει να συγκρίνουμε τα παραδείγματα τέτοιων χώρων, με αυτά της επόμενης υποενότητας από χώρους που δεν ικανοποιούν την ιδιότητα και να σημειώσουμε ότι το γεγονός αυτό στηρίζεται στην ύπαρξη ποικιλόμορφων πλέγμα spreading ακολουθιών στους χώρους αυτούς. Οι οικογένειες ακολουθιών στις οποίες περιορίζουμε τη μελέτη μας είναι πολύ πλούσιες, καθώς κάθε ακολουθία έχει μία υπακολουθία της οποίας οι διαδοχικές διαφορές βρίσκονται στην οικογένεια και επίσης είναι κλειστές στις υπακολουθίες. Επιπλέον αν ένας χώρος δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model ως προς μια τέτοια οικογένεια, τότε αυτό είναι unconditional και στις περισσότερες περιπτώσεις ισοδύναμο με τη βάση κάποιου ℓ_p ή του c_0.

Ορισμός 2.7. Έστω X είναι ένας χώρος Banach. Μια οικογένεια $\mathscr{F}$ από νορμαρισμένες ακολουθίες στον X θα καλείται *difference-including* όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.

α) Για κάθε $(x_n)_n$ στην $\mathscr{F}$, κάθε υπακολουθία της $(x_n)_n$ ανήκει στην $\mathscr{F}$.

β) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στον X χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία, υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε $M = \{m_k : k \in \mathbb{N}\} \in [L]^\infty$, η ακολουθία $z_k = \|x_{m_{2k-1}} - x_{m_{2k}}\|^{-1}(x_{m_{2k-1}} - x_{m_{2k}})$ ανήκει στο $\mathscr{F}$.

Παρατήρηση 2.8. Μία difference-including οικογένεια προφανώς ικανοποιεί τα α) και β) στην Πρόταση 1.53. Μία τέτοια οικογένεια είναι για παράδειγμα :

α) $\mathscr{F}(X)$, η οικογένεια όλων των νορμαρισμένων Schauder βασικών ακολουθιών στον X.

β) $\mathscr{F}_{(1+\varepsilon)}(X)$, η οικογένεια όλων των $(1+\varepsilon)$-Schauder βασικών ακολουθιών στον X, για κάποιο σταθερό $\varepsilon > 0$.

γ) Η οικογένεια $\mathscr{F}_{0,\mathscr{A}}(X)$ για ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\mathscr{A}$ του X^*, όπου

$$\mathscr{F}_{0,\mathscr{A}}(X) = \Big\{(x_n)_n : \ \|x_n\| = 1 \text{ και } \lim_n f(x_n) = 0 \text{ για κάθε } f \in \mathscr{A}\Big\}$$

δ) $\tilde{\mathscr{F}}_b(X) = \mathscr{F}_{0,(e_n^*)_n}$ αν ο X έχει μια Schauder βάση $(e_n)_n$, όπου $(e_n^*)_n$ είναι τα διορθογώνια συναρτησιακά της βάσης. Παρατηρήστε ότι ένα χώρος Banach X δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_b(X)$ αν και μόνο αν συμβαίνει το ίδιο ως προς την $\tilde{\mathscr{F}}_b(X)$.

ε) Η οικογένεια $\mathscr{F}_0(X)$, αν ο X δεν περιέχει τον ℓ_1.

στ) $\mathscr{F}_{\mathrm{su}}(X)$, η οικογένεια των νορμαρισμένων Schauder βασικών ακολουθιών οι οποίες παράγουν ένα 1-suppression unconditional spreading model.

Θεώρημα 2.9. Έστω X είναι ένας χώρος Banach και έστω ότι για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X υπάρχει μια difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από Schauder βασικές ακολουθίες στον Z. Αν υπάρχει μια ομοιόμορφη σταθερά $K \geq 1$ ώστε κάθε Z να δέχεται ένα K-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_Z$ τότε ο X ικανοποιεί την ιδιότητα UALS.

Παρατήρηση 2.10. Παρατηρήστε ότι αν ο X είναι ένας χώρος Banach και $\mathscr{F}$ είναι μία difference-including οικογένεια από νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες στον X ως προς τις οποίες δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model, τότε μπορούμε για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X να θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathscr{F}_Z = \{(x_n)_n \in \mathscr{F} : x_i \in Z \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}\}$.

Αναβάλλουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.9 για να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε πρώτα τα πορίσματά του.

Πόρισμα 2.10.1. Στις παρακάτω περιπτώσεις, ο χώρος X και κάθε υπόχωρός του ικανοποιούν τη UALS.

α) Αν ο X είναι ένας αυθαίρετος χώρος Banach ο οποίος δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}(X)$.

β) Αν ο X είναι ένας αυθαίρετος χώρος Banach ο οποίος για κάποιο $\varepsilon > 0$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την οικογένεια $\mathscr{F}_{(1+\varepsilon)}(X)$.

γ) Αν ο X δεν περιέχει τον ℓ_1 και δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_0(X)$.

δ) Αν ο X έχει μία Schauder βάση και δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_b(X)$.

Απόδειξη. Κάθε μία από τις περιπτώσεις προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.9. Η πρώτη, η δεύτερη και η τρίτη περίπτωση προκύπτουν από το γεγονός ότι οι οικογένειες $\mathscr{F}(X)$, $\mathscr{F}_{(1+\varepsilon)}$ και $\widetilde{\mathscr{F}}_b(X) = \mathscr{F}_{0,(e_i^*)_i}$ είναι difference-including. Στη τρίτη περίπτωση, όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Rosenthal [Ro], η οικογένεια $\mathscr{F}_0(X)$ είναι επίσης difference-including. $\square$

Πόρισμα 2.10.2. Οι παρακάτω χώροι Banach και όλοι οι υπόχωροί τους ικανοποιούν τη UALS.

α) Ο χώρος $\ell_p(\Gamma)$, για $1 \leq p < \infty$ και Γ άπειρο σύνολο.

β) Ο χώρος $c_0(\Gamma)$, για Γ ένα άπειρο σύνολο.

γ) Ο χώρος James Tree $\mathcal{JT}$ και ο χώρος του James $\mathcal{J}$.

δ) Κάθε Asymptotic ℓ_p χώρος, για $1 \leq p \leq \infty$.

Απόδειξη. Η περίπτωση του $\ell_p(\Gamma)$ έπεται από το α) του Πορίσματος 2.10.1 για $1 < p < \infty$ και από το β) για $p = 1$, ενώ του $c_0(\Gamma)$ και του $\mathcal{JT}$ από το γ). Επιπλέον στην τελευταία περίπτωση, αν $1 < p \leq \infty$ και ο X είναι ένας Asymptotic ℓ_p χώρος τότε δεν περιέχει τον ℓ_1 και δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την οικογένεια $\mathscr{F}_0(X)$ και άρα το ζητούμενο έπεται επίσης από το γ). Τέλος, αν ο X είναι ένας C-Asymptotic ℓ_1 χώρος, από το Θεώρημα 1.60 επιλέγουμε για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $\mathscr{A}_Z$ του Z^* ώστε ο Z να δέχεται ένα C^2-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_Z = \mathscr{F}_{0,\mathscr{A}_Z}$. $\square$

Χωρίζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.9 στα επόμενα λήμματα.

Λήμμα 2.11. Έστω X είναι ένας χώρος Banach ο οποίος δέχεται ένα K-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς μία difference-including οικογένεια $\mathscr{F}$ από νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες. Τότε για κάθε $D > 2K^2$ και οποιαδήποτε επιλογή από ακολουθίες $(z_n^i)_n$, $(y_n^i)_n$, για $1 \leq i \leq l$, στο $\mathscr{F}$ υπάρχει $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε για κάθε επιλογή βαθμωτών $a_1, \ldots, a_l$, $\theta_1, \ldots, \theta_l$ και $n_1 < \cdots < n_l$ στο L να ισχύει ότι

$$\min_{1\leq i\leq l} |\theta_i| \frac{1}{D} \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i z_{n_i}^i \Big\| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i \theta_i y_{n_i}^i \Big\| \leq \max_{1\leq i\leq l} |\theta_i| D \Big\| \sum_{i=1}^{l} a_i z_{n_i}^i \Big\|. \quad (1)$$

Απόδειξη. Έστω $C > K$ και $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε οι οικογένειες $((z^i_n)_{n\in L})_{i=1}^l$ και $((y^i_n)_{n\in L})_{i=1}^l$ να παράγουν κάποια l-joint spreading model τα οποία είναι K-ισοδύναμα μεταξύ τους. Τότε, περνώντας σε ένα περαιτέρω άπειρο υποσύνολο του L έχουμε ότι για κάθε $n_1 < \cdots < n_l$ στο L, οι ακολουθίες $(z^i_{n_i})_{i=1}^l$ και $(y^i_{n_i})_{i=1}^l$ είναι C-ισοδύναμες και κάθε μία είναι C-suppression unconditional. Επομένως, για κάθε επιλογή βαθμωτών $a_1, \ldots, a_l$ και $\theta_1, \ldots, \theta_l$ ισχύει ότι

$$\Big\| \sum_{i=1}^l a_i \theta_i y^i_{n_i} \Big\| \geq \frac{1}{2C} \min_{1\leq i\leq l} |\theta_i| \Big\| \sum_{i=1}^l a_i y^i_{n_i} \Big\| \geq \frac{1}{2C^2} \min_{1\leq i\leq l} |\theta_i| \Big\| \sum_{i=1}^l a_i z^i_{n_i} \Big\|.$$

Η άλλη ανισότητα προκύπτει με παρόμοια επιχειρήματα και επομένως καταλήγουμε ότι για κάθε $D > 2K^2$ ικανοποιείται το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μία ακόμη παραλλαγή του θεωρήματος του Mazur [LT, Θεώρημα 1.α.5].

Λήμμα 2.12. Έστω X να είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach. Έστω επίσης $T_{ij} \in \mathcal{L}(X)$, για $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m_i$, και έστω $c > 0$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε Y υπόχωρο του X πεπερασμένης συνδιάστασης να υπάρχει $x_i \in S_Y$ με $\|T_{ij} x_i\| > c$, για κάθε $1 \leq j \leq m_i$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια νορμαρισμένη ακολουθία $(x^i_k)_k$, για $i = 1, \ldots, n$, στο X ώστε αν θέσουμε $Z_k = \mathrm{span}\{\{x^i_k\}_{i=1}^n \cup \{T_{ij} x^i_k\}_{i=1,j=1}^{n,m_i}\}$, για $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει ότι

α) Η $(Z_k)_k$ είναι μία πεπερασμένης διάστασης διάσπαση του $Z = \overline{\mathrm{span}} \cup_k Z_k$, με σταθερά προβολής το πολύ $1 + \varepsilon$.

β) $\|T_{ij}(x^i_k)\| > c$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m_i$, και $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{I\} \cup \{T_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,m_i}$ και για κάθε $1 \leq i \leq n$, επιλέγουμε ένα νορμαρισμένο διάνυσμα x^i_1 στον X με $\|T_{ij} x^i_1\| > c$, για κάθε $j = 1, \ldots, m_i$. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιλέξει $(x^i_k)_{k=1}^d$ για κάποιο $d \in \mathbb{N}$ και κάθε $1 \leq i \leq n$, ώστε οι υπόχωροι $(Z_k)_{k=1}^d$ να ικανοποιούν το α) για το χώρο που πάραγουν και το β) για κάθε $1 \leq k \leq d$. Επιλέγουμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο G της S_{X^*} ώστε για κάθε x στη γραμμική θήκη του $\cup_{k=1}^d Z_k$ να ισχύει ότι $\|x\| \leq (1+\varepsilon) \max\{g(x) : g \in G\}$ και θέτουμε $F = \cup_{T\in\mathcal{A}} \{T^* g : g \in G\}$. Τέλος, για $i = 1, \ldots, n$, επιλέγουμε x^i_{d+1} στη μοναδιαία σφαίρα του $\cap_{f\in F} \ker f$ ώστε $\|T_{ij} x^i_{d+1}\| > c$, για κάθε $1 \leq j \leq m_i$. Έπεται τότε ότι οι ακολουθίες που κατασκευάστηκαν ικανοποιούν το ζητούμενο. □

Λήμμα 2.13. Έστω X είναι ένας χώρος Banach και υποθέτουμε ότι για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X έχουμε μια difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες στο Z. Έστω $T_1, \ldots, T_l \in \mathcal{L}(X)$ και έστω ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε υπόχωρο Y του X

πεπερασμένης συνδιάστασης και κάθε $i = 1, \dots, l$ να ισχύει $\|T_i|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \geq c$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάποιο $0 < \delta < c$ και $i = 1, \dots, l$ υπάρχουν $T_{i1}, \dots, T_{im_i} \in \mathcal{L}(X)$ με $\|T_{ij} - T_i\| \leq \delta$, για $j = 1, \dots, m_i$. Τότε, αν $\tilde{c} = c - \delta$, υπάρχει ένα διαχωρίσιμος υπόχωρος Z του X και νορμαρισμένες ακολουθίες $(z_k^i)_k$, $i = 1, \dots, l$ στην $\mathscr{F}_Z$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $n_1 < \cdots < n_l$, η $(z_{n_i}^i)_{i=1}^l$ είναι (9/8)-Schauder βασική.

β) $\|T_{ij} z_k^i\| > \tilde{c}/3$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$ και $k \in \mathbb{N}$.

γ) Η ακολουθία $y_k^{ij} = \|T_{ij} z_k^i\|^{-1} T_{ij} z_k^i$ ανήκει στην $\mathscr{F}_Z$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, m_i$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι για κάθε πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρο Y του X μπορούμε να επιλέξουμε για κάθε $1 \leq i \leq l$ ένα $x_i \in B_Y$ τέτοιο ώστε $\|T_i x_i\| > c - (c - \delta)/4$ και άρα $\|T_{ij} x_i\| > 3(c - \delta)/4 = 3\tilde{c}/4$, για κάθε $1 \leq j \leq m_i$. Από το Λήμμα 2.12 υπάρχουν νορμαρισμένες ακολουθίες $(x_k^i)_k$, ώστε $\|T_{ij} x_k^i\| > 3\tilde{c}/4$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$, και $j = 1, \dots, m_i$ και η ακολουθία $(Z_k)_k$ όπως ορίζεται στο Λήμμα 2.12 είναι ΠΔΔ με σταθερά 9/8. Έστω $Z = \overline{\operatorname{span}} \cup_k Z_k$. Επιλέγουμε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ τέτοιο ώστε οι ακολουθίες $z_k^i = \|x_{m_{2k-1}}^i - x_{m_{2k}}^i\|^{-1} (x_{m_{2k-1}}^i - x_{m_{2k}}^i)$ και $(\|T_{ij} z_k^i\|^{-1} T_{ij} z_k^i)_k$ ανήκουν στην $\mathscr{F}_Z$ για $i = 1, \dots, n$ και $j = 1, \dots, m_i$. Από το γεγονός ότι η $(T_{ij} x_k^i)_k$ είναι 9/8-Schauder βασική, έχουμε ότι

$$\|T_{ij} z_k^i\| = \frac{1}{\|x_{m_{2k-1}}^i - x_{m_{2k}}^i\|} \|T_{ij} x_{m_{2k-1}}^i - T_{ij} x_{m_{2k}}^i\| \geq \frac{1}{2} \frac{1}{9/8} \|T_{ij} x_{m_{2k-1}}^i\| > \frac{3\tilde{c}/4}{9/4}.$$

Το α) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η $(Z_k)_k$ είναι πεπερασμένης διάστασης διάσπαση (ΠΔΔ) με σταθέρα 9/8 και το ότι η ακολουθία $(z_{n_i}^i)_{i=1}^l$ είναι block. □

Ο S. Kakutani[Ka] απέδειξε το ανάλογο του ακόλουθο θεωρήματος στην περίπτωση χώρων πεπερασμένης διάστασης, το οποίο είναι γνωστό και ως το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Kakutani. Παρουσιάζουμε την απειροδιάστατη εκδοχή του, από τους H. F. Bohnenblust και Σ. Καρλιν [BK], όπου όπως αναφέρθηκε ήδη αποτελεί το κύριο συστατικό στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.9. Θυμίζουμε ότι μία πλειότιμη απεικόνιση $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων έχει *κλειστό γράφημα* αν για οποιεσδήποτε ακολουθίες $(x_n)_n \in X$ με $\lim x_n = x$ και $(y_n)_n \in Y$ με $y_n \in \phi(x_n)$ και $\lim y_n = y$ ισχύει ότι $y \in \phi(x)$.

Θεώρημα 2.14. *Έστω X είναι ένας χώρος Banach, K ένα μη κενό κυρτό συμπαγές υποσύνολο του X και έστω μια πλειότιμη απεικόνιση $\phi : K \twoheadrightarrow K$ με κλειστό γράφημα και μη κενές κυρτές τιμές. Τότε η ϕ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \in \phi(x)$.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.9. Έστω $D > 2K^2$, δηλαδή μια σταθερά για την οποία το συμπέρασμα του Λήμματος 2.11 ισχύει για κάθε οικογένεια $\mathscr{F}_Z$. Θέτουμε $C = 7D$ και έστω A, W, ε όπως στον Ορισμό 2.1. Ισχυριζόμαστε τότε ότι υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης και $T \in W$ ώστε $\|(A-T)|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < C\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει και θέτουμε $c = C\varepsilon$, $\delta = c/2$, και $\tilde{c} = c - \delta = C/2$. Επιλέγουμε ένα μεγιστικό δ-διαχωρισμένο υποσύνολο $(T_i)_{i=1}^l$ του W, και θέτουμε $\eta = \varepsilon/(27l)$ και για κάθε $i = 1, \ldots, l$ επιλέγουμε ένα η-μεγιστικό υποσύνολο $(T_{ij})_{j=1}^{m_i}$ της $B_W(T_i, \delta) = \{T \in W : \|T_i - T\| \leq \delta\}$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.13 για τους τελεστές $A - T_i$ και $A - T_{ij}$ για $i = 1, \ldots, l$ και $j = 1, \ldots, m_i$ βρίσκουμε ένα διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X, νορμαρισμένες $9/8$-βασικές ακολουθίες $(z_k^i)_k$ στο $\mathscr{F}_Z$ ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, l$ και $j = 1, \ldots, m_i$ η ακολουθία $y_k^{ij} = \|(A - T_{ij})z_k^i\|^{-1}(A - T_{ij})z_k^i$ ανήκει στην $\mathscr{F}_Z$ και $\|(A - T_{ij})z_k^i\| \geq \tilde{c}/3$. Εφαρμόζουμε διαδοχικά το Λήμμα 2.11 για να βρούμε $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η (1) να ισχύει για τις $(z_k^i)_{k\in L}$ και $(y_k^{ij_i})_{k\in L}$, για κάθε $i = 1, \ldots, l$ και $1 \leq j_i \leq m_i$.

Έστω $k_1 < \cdots < k_l$ στο L και θεωρούμε μια διαμέριση της μονάδας $f_1, \ldots, f_l$ του W ως προς τα $T_1, \ldots, T_l$. Δηλαδή, η $f_i : W \to [0, 1]$ είναι συνεχής, $\sum_{i=1}^l f_i(T) = 1$ για κάθε $T \in W$ και $f_i(T_j) = \delta_{ij}$, για $1 \leq i, j \leq l$. Ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $x : W \to X$ με

$$x(T) = \frac{\sum_{i=1}^l f_i(T) z_{n_i}^i}{\left\|\sum_{i=1}^l f_i(T) z_{n_i}^i\right\|}.$$

Έστω $T \in W$ και αν $I_T = \{i = 1, \ldots, l : \text{με } \|T - T_i\| \leq \delta\}$, για $i \in I_T$ επιλέγουμε $1 \leq j_i \leq m_i$ ώστε $\|T - T_{ij_i}\| \leq \eta$. Αφού η $(z_{n_i}^i)_i$ είναι $(9/8)$-Schauder βασική, έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^l f_i(T) z_{n_i}^i\Big\| \geq \frac{4}{9l}\sum_{i=1}^l \big|f_i(T)\big| = \frac{4}{9l}. \tag{2}$$

Τότε, ισχύει το ακόλουθο.

$$\begin{aligned}
\|(A-T)\,x(T)\| &= \frac{1}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) z_{n_i}^i\right\|}\Big\|\sum_{i\in I_T} f_i(T)\,(A-T)\,z_{n_i}^i\Big\| \\
&\geq \frac{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T)\,(A - T_{ij_i})\,z_{n_i}^i\right\|}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) z_{n_i}^i\right\|} - \frac{\sum_{i\in I_T} |f_i(T)|\,\|T - T_{ij_i}\|}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) z_{n_i}^i\right\|} \\
&\geq \frac{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T)\,(A - T_{ij_i})\,z_{n_i}^i\right\|}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) x_{n_i}^i\right\|} - \eta\frac{\sum_{i\in I_T} |f_i(T)|}{4/(9l)\sum_{i\in I_T} |f_i(T)|} \quad (\text{από } (2)) \\
&= \frac{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T)\,\left\|(A - T_{ij_i})\,z_{n_i}^i\right\|\,y_{n_i}^{ij}\right\|}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) x_{n_i}^i\right\|} - \frac{9l\eta}{4}
\end{aligned}$$

$$\geq \min_{1\leq i\leq l} \left\|(A - T_{ij_i})\, z^i_{n_i}\right\| \frac{1}{D} \frac{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) x^i_{n_i}\right\|}{\left\|\sum_{i\in I_T} f_i(T) x^i_{n_i}\right\|} - \frac{9l\eta}{4} \text{ (από (1))}$$
$$\geq \frac{\tilde{c}}{3D} - \frac{9l\eta}{4} = \frac{7D}{6D}\varepsilon - \frac{1}{12}\varepsilon = \frac{13}{12}\varepsilon. \tag{3}$$

Ορίζουμε τώρα την πλειότιμη απεικόνιση $\phi : W \twoheadrightarrow W$ με

$$\phi(T) = \{S \in W : \|(A - S)\, x(T)\| \leq \varepsilon\}.$$

Από την υπόθεση, οι τιμές της ϕ είναι μη κενές και προκύπτει εύκολα ότι είναι κλειστές και κυρτές καθώς και το ότι η ϕ έχει κλειστό γράφημα. Επομένως, από το Θεώρημα 2.14, υπάρχει $T \in W$ με $T \in \phi(T)$, δηλαδή $\|(A - T)x(T)\| \leq \varepsilon$ το οποίο είναι άτοπο λόγω της (3). □

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι αν ο X είναι ένας χώρος Banach με μία shrinking ΠΔΔ $(X_n)_n$ ο οποίος ικανοποιεί την UALS, τότε οι πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωροι Y του X στους οποίους επιτυγχάνονται οι ομοιόμορφες προσεγγίσεις, μπορεί να υποτεθούν ότι είναι ουρές, δηλαδή υπόχωροι της μορφής $Y = \operatorname{span} \cup_{n\geq n_0} X_n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 2.15. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach με μία shrinking ΠΔΔ $(X_n)_n$ και Y ένας πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρος του X. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας υπόχωρος ουρά Z του X ώστε $B_Z \subset B_Y + \varepsilon B_X$.

Απόδειξη. Έστω $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ ώστε $X = Y \oplus \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και $x^*_1, \ldots, x^*_n \in X^*$ ώστε $x^*_i(x_j) = \delta_{ij}$, για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Παρατηρήστε ότι $Y = \cap_{i=1}^n \ker x^*_i$. Αφού η $(X_n)_n$ είναι shrinking, μπορούμε να επιλέξουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέοιο ώστε $\|x^*_i - P^*_{n_0}(x^*_i)\| < \varepsilon/l\|x_i\|$, για $1 \leq i \leq n$, και θέτουμε $Z = \operatorname{span} \cup_{n>n_0} X_n$. Έστω $z \in B_Z$ και $x = \sum_{i=1}^l x^*_i(z)x_i/\varepsilon$. Τότε $|x^*_i(z)| < \varepsilon/l\|x_i\|$ και $x^*_i(x) = x^*_i(z)/\varepsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq n$. Επομένως $\|x\| < 1$ και το $z - \varepsilon x$ ανήκει στον $\cap_{i=1}^n \ker x^*_i$, από όπου έπεται ότι $z \in B_Y + 2\varepsilon B_X$. □

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η υπόθεση του να έχει ο χώρος shrinking ΠΠΔ στο παραπάνω λήμμα είναι πράγματι απαραίτητη. Θυμηθείτε ότι η βάση του ℓ_1 δεν είναι shrinking.

Παράδειγμα 2.16. Έστω $(e_n)_n$ να είναι η συνήθης βάση του ℓ_1 και θεωρούμε τον τελεστή $A : \ell_1 \to \ell_1$ με

$$A\big((x_n)_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} e_2$$

και για $z \in \ell_1$, τους τελεστές $B_z^+, B_z^- : \ell_1 \to \ell_1$ με

$$B_z^+\big((x_n)_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z \quad \text{και} \quad B_z^-\big((x_n)_n\big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}\Big) z$$

και θέτουμε $W = \mathrm{co}\big\{B_z^\pm : z \in \mathrm{span}\{e_1, e_2\} \text{ ανδ } \|z\| \leq 1\big\}$.

Έστω $x \in \ell_1$ με $\|x\| \leq 1$ και $A(x) = a_1 e_1 + a_2 e_2$, όπου $a_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1}$ και $a_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}$. Έστω ότι $A(x) \neq 0$ και θέτουμε $a = \max\{|a_1 + a_2|, |a_1 - a_2|\}$. Παρατηρήστε ότι $a = |a_1| + |a_2|$. Αν $a = |a_1 + a_2|$, θέτοντας $z = \frac{1}{a_1 + a_2} A(x)$, έχουμε ότι $\|z\| = 1$ και $B_z^+(x) = A(x)$. Αν $a = |a_1 - a_2|$, τότε ισχύει το ίδιο για $z = \frac{1}{a_1 - a_2} A(x)$. Επομένως καταλήγουμε ότι για κάθε $x \in \ell_1$ με $\|x\| \leq 1$, υπάρχει $B \in W$ ώστε $\|(A - B)x\| = 0$.

Έστω $B \in W$ και $n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένας κυρτός συνδυασμος στο W ώστε $B = \sum_{i=1}^n a_i B_{y_i}^+ + \sum_{i=1}^m b_i B_{z_i}^-$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $B(e_{2k-1}) = \sum_{i=1}^n a_i y_i + \sum_{i=1}^m b_i z_i$ και $B(e_{2k}) = \sum_{i=1}^n a_i y_i - \sum_{i=1}^m b_i z_i$ και επομένως ισχύει ότι

$$\Big\|(A - B)\frac{e_{2k-1} + e_{2k}}{2}\Big\| = \Big\|\frac{e_1 + e_2}{2} - \sum_{i=1}^n a_i y_i\Big\| \geq 1 - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Όμοια, $\|(A - B)\frac{e_{2k-1} - e_{2k}}{2}\| \geq \sum_{i=1}^n a_i$ και άρα για κάθε $k_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 \leq 2k_0 - 1$ είτε $\|(A - B)\frac{e_{2k_0-1} + e_{2k_0}}{2}\| \geq 1/2$, είτε $\|(A - B)\frac{e_{2k_0-1} - e_{2k_0}}{2}\| \geq 1/2$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $\|(A - B)|_{\mathrm{span}\{e_n : n \geq n_0\}}\| \geq 1/2$ ενώ για κάθε $x \in B_{\ell_1}$ υπάρχει $B \in W$ τέτοιος ώστε $\|A(x) - B(x)\| = 0$.

2.3 Δυικότητα

Παρουσιάζουμε τα παρακάτω αποτελέσματα που συνδέουν την ιδιότητα UALS με την έννοια της δυικότητας των χώρων Banach. Συγκεκριμένα, για αυτοπαθείς χώρους X με ΠΠΔ δείχνουμε ότι ο X ικανοποιεί την UALS αν και μόνο αν την ικανοποιεί ο X^*. Επιπλέον, δείχνουμε ότι αν ένας χώρος X έχει ΠΔΔ και ο X^* δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς κάποια difference-including οικογένεια τότε ο X ικανοποιεί επίσης τη UALS. Αυτό μας επιτρέπει να αποδείξουμε έμμεσα ότι χώροι όπως οι $\mathscr{L}_\infty$ με διαχωρίσιμο συζυγή ικανοποιούν τη UALS.

Πρόταση 2.17. Έστω X είναι ένας χώρος Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ και W είναι ένα κυρτό και WOT-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{L}(X)$. Αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ το W ε-κατά σημείο προσεγγίζει τον A τότε το σύνολο $W^* = \{T^* : T \in W\}$ ε-κατά σημείο προσεγγίζει τον A^*, δηλαδή για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει $T^* \in W^*$ τέτοιος ώστε $\|A^*(x^*) - T^*(x^*)\| \leq \varepsilon \|x^*\|$.

Απόδειξη. Αν όχι, τότε υπάρχουν $x^* \in S_{X^*}$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε αν $W^*x^* = \{T^*x^* : T \in W\}$ τότε $\operatorname{dist}(A^*x^*, W^*x^*) \geq \varepsilon + \delta$. Αφού το W^*x^* είναι κυρτό και w^*-συμπαγές, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x \in S_X$ ώστε $x(A^*x^*) + (\varepsilon + \delta/2) \leq \inf_{T \in W} x(T^*x^*)$, δηλαδή

$$\|Ax - Tx\| \geq x^*(Tx - Ax) \geq \varepsilon + \delta/2$$

για κάθε $T \in W$. □

Παρατήρηση 2.18. Η συμπάγεια του συνόλου W είναι απαραίτητη στην Πρόταση 2.17. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε στον ℓ_1, A να είναι ο ταυτοτικός τελεστής και W η κλειστή κυρτή θήκη των προβολών σε πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ ως προς τη συνήθη βάση.

Διατυπώνουμε τώρα τα ακόλουθα δύο βασικά αποτελέσματα τα οποία θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 2.19. *Έστω X να είναι ένας αυτοπαθής χώρος Banach με ΠΠΔ. Ο X ικανοποιεί τη UALS αν και μόνο αν την ικανοποιεί ο X^*.*

Θεώρημα 2.20. *Έστω X να είναι ένας χώρος Banach με ΠΠΔ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ομοιόμορφη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X^* υπάρχει μια difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από νορμαρισμένες ακολουθίες στον X^* ώστε ο Z να δέχεται ένα C-ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model ως προς την $\mathscr{F}_Z$. Τότε ο X ικανοποιεί τη UALS.*

Από τα αποτελέσματα στα [H], [HS], [LS], και [S] προκύπτει ότι αν ο X είναι ένας απειροδιάστατος $\mathscr{L}_\infty$ χώρος με διαχωρίσιμο συζυγή, τότε ο X^* είναι ισόμορφος με τον $\ell_1(\mathbb{N})$. Αυτό ισχύει επίσης αν και μόνο αν ο $\ell_1(\mathbb{N})$ δεν εμφυτεύεται στον X. Αποδεικνύεται επίσης στο [FOS], ότι κάθε χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή εμφυτεύεται σε ένα $\mathscr{L}_\infty$ χώρο με διαχωρίσιμο συζυγή.

Πόρισμα 2.20.1. *Κάθε $\mathscr{L}_\infty$ χώρος με διαχωρίσιμο συζυγή ικανοποιεί την UALS και συγκεκριμένα ισχύουν τα ακόλουθα.*

α) *Κάθε καθολικά αδιάσπαστος $\mathscr{L}_\infty$ χώρος ικανοποιεί την UALS.*

β) *Κάθε χώρος Banach με διαχωρίσιμο συζυγή εμφυτεύεται σε ένα χώρο που ικανοποιεί την UALS.*

γ) *Για κάθε αριθμήσιμο συμπαγή K, ο χώρος $C(K)$ ικανοποιεί την UALS.*

Πόρισμα 2.20.2. *Αν ο X είναι ένας χώρος Banach ώστε ο X^* να είναι Asymptotic ℓ_p χώρος, για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$, τότε κάθε πηλίκο του X με μία ΠΔΔ ικανοποιεί την UALS.*

Λήμμα 2.21. Έστω X ένας χώρος Banach, $R : X \to X$ ένας γραμμικός τελεστής πεπερασμένης τάξης και $Q = I - R$. Αν $T \in \mathcal{L}(X)$, τότε υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X πεπερασμένης συνδιάστασης ώστε $\|T|_Y\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \|QT\|$.

Απόδειξη. Αφού ο RT είναι πεπερασμένης τάξης ο $Y = \ker RT$ είναι πεπερασμένης συνδιάστασης και $\|T|_Y\| \leq \|RT|_Y\| + \|QT|_Y\| \leq \|QT\|$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.19. Είναι προφανώς αρκετό να αποδείξουμε τη μία κατεύθυνση. Υποθέτουμε ότι ο X^* ικανοποιεί τη UALS με σταθερά $C > 0$ και έστω A, W, ε όπως στον Ορισμό 2.1. Από την Πρόταση 2.17 έχουμε ότι το σύνολο $W^* = \{T^* : T \in W\}$ ε-κατά σημείο προσεγγίζει τον A^* και άρα υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος Z του X^* πεπερασμένης συνδιάστασης τέτοιος ώστε $\|(T^* - A^*)|_Z\| \leq C\varepsilon$. Από το Λήμμα 2.15, και ίσως με ένα επιπλέον σφάλμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο Z είναι μια ουρά της βάσης με αντίστοιχη προβολή Q_n^* και άρα

$$\|Q_n(T - A)\| = \|(T^* - A^*)Q_n^*\| \leq C\|Q_n\|\varepsilon.$$

Από το Λήμμα 2.21, υπάρχει Y υπόχωρος του X πεπερασμένης συνδιάστασης ώστε $\|(T - A)|_Y\| \leq \|Q_n(T - A)\|$ και επομένως $\|(T - A)|_Y\| \leq C\|Q_n\|\varepsilon$. □

Λήμμα 2.22. Έστω X να είναι ένας χώρος Banach με μία διμονότονη ΠΔΔ με προβολές $(P_n)_n$ και έστω $(Q_n)_n$ να είναι οι προβολές των ουρών, δηλαδή $Q_n = I - P_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε διαχωρίσιμο υπόχωρο Z του X^* έχουμε μια difference-including οικογένεια $\mathscr{F}_Z$ από νορμαρισμένες Schauder βασικές ακολουθίες στον Z. Έστω $T_1, \ldots, T_l \in \mathcal{L}(X)$ και $c > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $i = 1, \ldots, l$ να ισχύει ότι $\|T_i^* Q_n^*\| \geq c$. Υποθέτουμε ακόμη ότι για κάποιο $0 < \delta < c$ και κάθε $i = 1, \ldots, l$ ισχύει ότι $T_{i1}, \ldots, T_{im_i} \in \mathcal{L}(X)$ με $\|T_{ij} - T_i\| \leq \delta$ για $j = 1, \ldots, m_i$. Τότε, αν $\tilde{c} = c - \delta$, υπάρχει ένας διαχωρίσιμος υπόχωρος Z του X^* και νορμαρισμένες ακολουθίες $(z_k^i)_k$, $i = 1, \ldots, l$ στην $\mathscr{F}_Z$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Για κάθε $n_1 < \cdots < n_l$ η ακολουθία $(z_{n_i}^i)_{i=1}^l$ είναι (9/8)-Schauder βασική.

β) $\|T_{ij}^* z_k^i\| > \tilde{c}/3$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m_i$ και $k \in \mathbb{N}$.

γ) Αν $y_k^{ij} = \|T_{ij}^* z_k^i\|^{-1} T_{ij}^* z_k^i$, τότε η ακολουθία $(y_k^{ij})_k$ ανήκει στην $\mathscr{F}_Z$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, m_i$.

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, \ldots, l$, επιλέγουμε μια νορμαρισμένη ακολουθία $(x_n^{i*})_n$ ώστε $\|T_i^* Q_n^* x_n^{i*}\| \geq c - (c - \delta)/4$. Αφού η ΠΔΔ είναι διμονότονη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\min \operatorname{supp}(x_n^{i*}) > n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq i \leq l$ και ότι $\|T_i^* x_n^{i*}\| \geq c - (c - \delta)/4$. Επομένως οι ακολουθίες $(x_n^{i*})_n$ και $(T^* x_n^{i*})_n$, για $1 \leq i \leq l$ είναι ασθενώς μηδενικές. Με παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά στις αποδείξεις των Λημμάτων 2.12 και 2.13 προκύπτει το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.20. Θεωρούμε μια ισοδύναμη νόρμα στον X ώστε η ΠΔΔ του να είναι διμονότονη. Έστω $D > 2K^2$, μία σταθερά για την οποία ισχύουν τα συμπεράσματα του Λήμματος 2.11 για όλες τις οικογένειες $\mathscr{F}_Z$ της υπόθεσης. Θέτουμε $C = 14D$. Θα δείξουμε ότι ο X ικανοποιεί τη UALS με σταθερά C. Έστω A, W, ε όπως στον Ορισμό 2.1. Αρκεί να βρούμε $T \in W$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|(T^* - A^*)Q^*_{n_0}\| < C\varepsilon$. Πράγματι, τότε θα έχουμε ότι $\|Q_{n_0}(A - T)\| = \|(T^* - A^*)Q^*_{n_0}\| < C\varepsilon$ και από το Λήμμα 2.21 η απόδειξη θα έχει ολοκληρωθεί. Αν υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει τότε ακολουθόντας βήμα προς βήμα την απόδειξη του Θεωρήματος 2.9, αντικαθιστώντας μόνο το Λήμμα 2.13 με το 2.22, καταλήγουμε στο ζητούμενο άτοπο. □

2.4 Χώροι χωρίς τη UALS

Παρουσιάζουμε ένα αρχέτυπο παράδειγμα ενός αυτοπαθούς χώρου Banach $\mathcal{X}$ ο οποίος δεν ικανοποιεί την ιδιότητα UALS. Ο $\mathcal{X}$ δέχεται ένα μοναδικό spreading model ισομετρικό με τον ℓ_2 αλλά όχι ένα ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model. Με παρόμοια επιχειρήματα, με αυτά που αποδεινκύεται ότι ο $\mathcal{X}$ δεν ικανοποιεί την UALS, δείχνουμε επίσης ότι το ίδιο συμβαίνει για τους κλασσικούς χώρους $L_p[0,1]$, $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ και τον $C(K)$ για ένα υπεραριθμήσιμο συμπαγή μετρικοποιήσιμο χώρο K.

Ορισμός 2.23. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $X_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_1}$ και $Y_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_\infty}$ και έστω $\mathcal{X} = (\sum \oplus X_n \oplus Y_n)_{\ell_2}$.

Για ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{X}$ γράφουμε $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ να είναι $x_n \in X_n$ και $y_n \in Y_n$ και $x_n = \sum_{j=1}^{n} x_{n(j)}$, $y_n = \sum_{j=1}^{2n} y_{n(j)}$ να συμβολίζουν τις συντεταγμένες κάθε x_n και y_n ως προς τη φυσιολογική διάσπαση των X_n και Y_n αντίστοιχα. Υπό αυτό το συμβολισμό υπολογίζουμε τη νόρμα του x ως εξής :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{2n} \|x_{n(j)}\| \right)^2 + \left(\max_{1 \leq j \leq 2n} \|y_{n(j)}\| \right)^2 \right).$$

Θεωρώντας την ορθοκανονική βάση κάθε ℓ_2-συνιστώσας του X_n καθώς και του Y_n και μια ένωση πάνω από όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για $j = 1, \ldots, 2n$ προκύπτει μία 1-unconditional βάση για το χώρο $\mathcal{X}$. Επομένως, όταν λέμε ότι η $(x_k)_k$ είναι μία block ακολουθία στον $\mathcal{X}$, θα εννοείται ότι αυτό συμβαίνει ως πρός κάποια επιλεγμένη αρίθμηση της προαναφερθείσας βάσης.

Πρόταση 2.24. Ο χώρος $\mathcal{X}$ δεν ικανοποιεί την UALS.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{X}$ ικανοποιεί τη UALS με σταθερά $C > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$ με $C/n < \frac{1}{2}$. Για $G \subset \{1, \ldots, 2n\}$, θεωρούμε τον τελεστή

$I_G : X_n \to Y_n$ με $I_G(\sum_{i=1}^{2n} x_i) = \sum_{i\in G} x_i$ και θέτουμε $A_n = I_{\{1,\dots,2n\}}$ και $W_n = \mathrm{co}\{I_G : \#G = n\}$. Έστω $x \in X_n$ με $x = \sum_{i=1}^{2n} x_i$ και $\|x\| = 1$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{2n} \|x_i\| = 1$, και σ να είναι μία μετάθεση του $\{1,\dots,2n\}$ ώστε $\|x_{\sigma(1)}\| \geq \ldots \geq \|x_{\sigma(2n)}\|$. Παρατηρήστε τότε ότι $\|x_{\sigma(n+1)}\| \leq \frac{1}{n+1}$ και επομένως $\|A_n(x) - I_G(x)\| \leq \frac{1}{n+1}$, για $G = \{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}$.

Η βάση $(e_n)_n$ του $\mathcal{X}$ είναι shrinking, αφού ο $\mathcal{X}$ είναι αυτοπαθής, και άρα από το Λήμμα 2.15 υπάρχει ένας υπόχωρος $Y = \mathrm{span}\{e_n : n \geq n_0\}$ του X ώστε $\|(A_n - B)|_Y\| < C/n$, για κάποιον $B \in W$. Τότε ο B είναι ένας κυρτός συνδυασμός $B = \sum_{i=1}^k \lambda_i I_{G_i}$ στο W και έχουμε ότι $\int \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{G_i} = \frac{1}{2}$, όπου το ολοκλήρωμα είναι ως προς το αριθμητικό μέτρο πιθανότητας στο $\{1,\dots,2n\}$ και επομένως υπάρχει $1 \leq j \leq 2n$, τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{G_i}(j) \leq \frac{1}{2}$. Επιλέγουμε ένα $x \in X_{n(j)}$ με $\|x\| = 1$ και $\mathrm{supp}(x) \geq n_0$. Τότε παρατηρήστε ότι ισχύει ότι $\|A_n(x) - B(x)\| \geq 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{G_i}(j)$ και άρα $\|(A_n - B)|_Y\| \geq \frac{1}{2}$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως ο $\mathcal{X}$ δεν ικανοποιεί την UALS. $\square$

Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ένα πρώτο παράδειγμα χώρου ο οποίος δεν ικανοποιεί την ιδιότητα UALS. Όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model το οποίο δεν ισχύει στην περίπτωση των l-joint spreading model του. Ξεκινάμε με τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 2.25. Έστω $(x^k)_k$ μια block ακολουθία στον $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε $x^k = \sum_{n=n_0}^{n_1} x_n^k + y_n^k$ και υποθέτουμε ότι $\|x_{n(j)}^{k_1}\| = \|x_{n(j)}^{k_2}\|$ και $\|y_{n(j)}^{k_1}\| = \|y_{n(j)}^{k_2}\|$ για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq n_1$ και $1 \leq j \leq 2n$. Θέτουμε $\varepsilon = \|x^k\|$, για $k \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x^k\| = \varepsilon(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2)^{\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη. Έστω $k_0 \in \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $n_0 \leq n \leq n_1$, αφού η $(x^k)_k$ είναι block, ισχύει ότι

$$\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x_{n(j)}^k\Big\| = \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \|x_{n(j)}^k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x_{n(j)}^{k_0}\| \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x_n^k\Big\| = \sum_{j=1}^{2n} \Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x_{n(j)}^k\Big\| = \|x_n^{k_0}\| \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

και όμοια

$$\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k y_n^k\Big\| = \max_{1\leq j\leq 2n} \Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k y_{n(j)}^k\Big\| = \|y_n^{k_0}\| \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Τέλος, από τις (4) και (5), καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x^k\Big\|^2 &= \sum_{n=n_0}^{n_1}\left(\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x_n^k\Big\|^2 + \Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k y_n^k\Big\|^2\right)\\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \sum_{n=n_0}^{n_1}\left(\big\|x_n^{k_0}\big\|^2 + \big\|y_n^{k_0}\big\|^2\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \big\|x^{k_0}\big\|^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

□

Λήμμα 2.26. Έστω $(n_k)_{k\geq 0}$ μια αύξουσα ακολουθία φυσικών και $(x^k)_k$ μία block ακολουθία στον $\mathcal{X}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα.

α) Υπάρχει $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1 \leq \|x^k\| \leq c_2$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

β) $x^k = \sum_{n=n_0}^{n_1}(x_n^k + y_n^k) + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}(x_n^k + y_n^k)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

γ) $\|x_{n(j)}^{k_1}\| = \|x_{n(j)}^{k_2}\|$ και $\|y_{n(j)}^{k_1}\| = \|y_{n(j)}^{k_2}\|$, για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq n_1$ και $1 \leq j \leq 2n$.

Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$c_1\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x^k\Big\| \leq c_2\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Από την (6), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x^k\Big\|^2 &= \sum_{n=n_0}^{n_1}\left(\Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k x_n^k\Big\|^2 + \Big\|\sum_{k=1}^m \lambda_k y_n^k\Big\|^2\right) + \sum_{k=1}^m \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\left(\big\|\lambda_k x_n^k\big\|^2 + \big\|\lambda_k y_n^k\big\|^2\right)\\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \sum_{n=n_0}^{n_1}\left(\big\|x_n^k\big\|^2 + \big\|y_n^k\big\|^2\right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\left(\big\|x_n^k\big\|^2 + \big\|y_n^k\big\|^2\right)\\
&= \sum_{k=1}^m \lambda_k^2\left(\sum_{n=n_0}^{n_1}\left(\big\|x_n^k\big\|^2 + \big\|y_n^k\big\|^2\right) + \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}}\left(\big\|x_n^k\big\|^2 + \big\|y_n^k\big\|^2\right)\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \big\|x^k\big\|^2
\end{aligned}$$

από το οποίο και α), προκύπτει ότι ισχύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.27. Έστω $(x^k)_k$ είναι μια νορμαρισμένη block ακολουθία στον $\mathcal{X}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, η $(x^k)_k$ έχει μια υπακολουθία $(x^{k_i})_i$ ώστε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x^{k_i}\Big\| \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα σύνολο $L \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε $\lim_{k\in L} \|x^k_{n(j)}\| = a_{n,j}$ και $\lim_{k\in L} \|y^k_{n(j)}\| = b_{n,j}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leq j \leq 2n$. Έστω $\lim_{k\in L} \|x^k_n\| = a_n$ και $\lim_{k\in L} \|y^k_n\| = b_n$ και αφού $\sum_{n=1}^\infty \|x^k_n\|^2 + \|y^k_n\|^2 \leq 1$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 + b_n^2 \leq 1$.

Έστω $(\varepsilon_i)_i$ και $(\delta_i)_i$ είναι ακολουθίες θετικών αριθμών ώστε $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i < \varepsilon$ και $\sum_{i=1}^\infty \delta_i < \varepsilon$. Τότε επιλέγουμε επαγωγικά $(n_i)_i \subset \mathbb{N}$ και $(k_i)_i \subset L$ αύξουσες ακολουθίες ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

α) $n_i > \max\{n : x^{k_{i-1}}_n \neq 0 \text{ ή } y^{k_{i-1}}_n \neq 0\}$, όταν $i > 1$.

β) $\sum_{n>n_i} a_n^2 + b_n^2 < \varepsilon_i$.

γ) $\sum_{n=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{2n} \big|\|x^{k_i}_{n(j)}\| - a_{n,j}\big|^2 + \big|\|y^{k_i}_{n(j)}\| - b_{n,j}\big|^2 < \delta_i$.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, από το γ), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x^{k_i}_{n(j)}\| = a_{n,j}$ και $\|y^{k_i}_{n(j)}\| = b_{n,j}$, για κάθε $1 \leq n \leq n_i$ και $1 \leq j \leq 2n$, με ένα σφάλμα δ_i, και από το Λήμμα 2.25 προκύπτει ότι

$$\Big\|\sum_{i=2}^m \sum_{j=i}^m \lambda_j \sum_{n=n_{i-1}+1}^{n_i} (x^{k_j}_n + y^{k_j}_n)\Big\| \leq \Big(\sum_{i=2}^m \varepsilon_{i-1} \sum_{j=i}^m \lambda_j^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=2}^m \delta_i \sum_{j=i}^m \lambda_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.26, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x^{k_i}\Big\| &\geq \Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i\Big(\sum_{n=1}^{n_1} (x^{k_i}_n + y^{k_i}_n) + \sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} (x^{k_i}_n + y^{k_i}_n)\Big)\Big\| - 2\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sqrt{1-4\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x^{k_i}\Big\| &\leq \Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i\Big(\sum_{n=1}^{n_1} (x^{k_i}_n + y^{k_i}_n) + \sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} (x^{k_i}_n + y^{k_i}_n)\Big)\Big\| + 2\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{1+4\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.27.1. Κάθε spreading model που παράγεται από βασική ακολουθία στον $\mathcal{X}$ είναι ισομετρικό με τον ℓ_2 και άρα ο $\mathcal{X}$ δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό spreading model ως προς την $\mathscr{F}(X)$.

Παρατήρηση 2.28. Με παρόμοια επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε l-joint spreading model που παράγεται από μία βασική ακολουθία στον $\mathcal{X}$, είναι ισομορφικό με τον ℓ_2 αλλά αυτό δεν συμβαίνει με ομοιόμορφη σταθερά και όπως δείξαμε ήδη ο $\mathcal{X}$ δεν ικανοποιεί την UALS. Αυτό αναδεικνύει μια ισχυρή σχέση μεταξύ της ιδιότητας UALS και χώρων με ομοιόμορφα μοναδικό joint spreading model, η οποία δεν υπάρχει με χώρους οι οποίοι δέχονται ομοιόμορφα μοναδικό spreading model.

Όπως αναφέρθηκε στην τρίτη ενότητα, ο χώρος από το [AM1] είναι ένα ακόμη παράδειγμα χώρου που έχει ομοιόμορφα μοναδικό spreading model αλλα όχι l-joint spreading model. Αυτός ο χώρος, ωστόσο, ικανοποιεί την ισχυρότερη ιδιότητα ότι κάθε ένας από τους υποχώρους του δεν δέχεται ένα ομοιόμορφα μοναδικό l-joint spreading model, αντιθέτως με το χώρο $\mathcal{X}$ ο οποίος περιέχει τον ℓ_2.

Με αφορμή τον ορισμό του χώρου $\mathcal{X}$, τροποποιούμε τα παραπάνω επιχειρήματα για να αποδείξουμε ότι οι $L_p[0,1]$, για $1 \leq p \leq \infty$, καθώς και ο $C(K)$ για ένα υπεραριθμήσιμο συμπαγή και μετρικοποιήσιμο χώρο K δεν ικανοποιούν την UALS.

Πρόταση 2.29. Για κάθε $1 < p < q < \infty$, οι χώροι $(\sum \oplus \ell_p)_{\ell_q}$ και $(\sum \oplus \ell_q)_{\ell_p}$ δεν ικανοποιούν την UALS.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $X_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_p)_{\ell_p}$ και $Y_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_p)_{\ell_p}$ και $X = (\sum X_n \oplus Y_n)_{\ell_q}$. Υποθέτουμε ότι ο X ικανοποιεί τη UALS με σταθερά $C > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$ με $C/n^r < \frac{1}{2}$, όπου $r = (q-p)/pq$.

Για κάθε $G \subset \{1, \dots, 2n\}$, θεωρούμε το τελεστή $I_G : X_n \to Y_n$ με $I_G(\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i) = \sum_{i \in G} a_i x_i$ και θέτουμε $A_n = I_{\{1,\dots,2n\}}$ καθώς επίσης και $W_n = \mathrm{co}\{I_G : \#G = n\}$. Έστω $x \in X_n$ με $x = \sum_{i=1}^{2n} x_i$ και $\sum_{i=1}^{2n} \|x_i\|^p = 1$ και έστω σ μία μετάθεση του $\{1, \dots, 2n\}$ ώστε $\|x_{\sigma(1)}\|^p \geq \dots \geq \|x_{\sigma(2n)}\|^p$. Επομένως για $G = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ έχουμε ότι $\|A_n(x) - I_G(x)\| < 1/n^r$ και με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην Πρόταση 2.24, καταλήγουμε σε άτοπο. Η περίπτωση του $(\sum \oplus \ell_q)_{\ell_p}$ είναι παρόμοια. $\square$

Παρατήρηση 2.30. Είναι άμεσο ότι αν ένας απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος ενός χώρου Banach X δεν ικανοποιεί την UALS, τότε το ίδιο ισχύει για τον X.

Πρόταση 2.31. Ο χώρος $L_p[0,1]$, για $1 < p < \infty$ με $p \neq 2$, δεν ικανοποιεί την UALS.

Απόδειξη. Όπως προκύπτει από την ανισότητα του Khintchine ο ℓ_2 εμφυτεύεται ισομετρικά ως συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_p[0,1]$, για κάθε $1 < p < \infty$. Αν $p > 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_2}$ και $Y_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_p}$, ενώ αν $p < 2$ θέτουμε $X_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_p}$ και $Y_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_2}$. Τότε με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά στην Πρόταση 2.24 έπεται ότι ο χώρος $(\sum \oplus X_n \oplus Y_n)_{\ell_p}$ δεν ικανοποιεί τη UALS και αφού είναι συμπληρωματικός στον $L_p[0,1] = (\sum \oplus L_p[0,1])_{\ell_p}$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 2.32. Ο χώρος $L_1[0,1]$ δεν ικανοποιεί την UALS.

Απόδειξη. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι ο $L_1[0,1]$ ικανοποιεί την ιδιότητα UALS με σταθερά $C > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$ με $C/n < \frac{1}{7}$. Θέτουμε $X_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_1)_{\ell_1}$ και $Y_n = (\sum_{i=1}^{2n} \oplus \ell_2)_{\ell_2}$. Αφού ο ℓ_1 είναι ισομετρικός με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του $L_1[0,1]$, το ίδιο ισχύει και για τον $(\sum \oplus X_n)_{\ell_1}$. Επιπλέον, από την ανισότητα του Khintchine προκύπτει ότι ο ℓ_2 εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_1[0,1]$ και άρα το ίδιο ισχύει και για τον $(\sum \oplus Y_n)_{\ell_2}$.

Για κάθε $G \subset \{1,\dots,2n\}$, θεωρούμε τον τελεστή $I_G : X_n \to Y_n$ με $I_G(\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i) = \sum_{i\in G} a_i x_i$ και θέτουμε $A_n = I_{\{1,\dots,2n\}}$ καθώς επίσης και $W_n = \mathrm{co}\{I_G : \#G = n\}$. Όπως προηγουμένως, για κάθε $x \in X_n$ με $\|x\| \le 1$ υπάρχει $G \subset \{1,\dots,2n\}$ ώστε $\|A_n(x) - I_G(x)\| < 1/n$. Έστω $B = \sum_{i=1}^k \lambda_i I_{G_i}$ στο W_n και Y να είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης του $L_1[0,1]$ ώστε $\|(A_n - B)|_Y\| < C/n$ και επιλέγουμε, όπως στην Πρόταση 2.24, ένα $1 \le j \le 2n$ με $\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{G_i}(j) \le \frac{1}{2}$. Έστω $x_1^*, \dots, x_l^* \in L_\infty[0,1]$ τέτοια ώστε $Y = \cap_{i=1}^l \ker x_i^*$. Συμβολίζουμε ως $(e_m)_m$ τη βάση του $X_{n(j)}$ και επιλέγουμε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x_i^*(e_m))_{m\in M}$ να συγκλίνει, για κάθε $1 \le i \le l$. Από το Λήμμα 1.8 επιλέγουμε $m_1, m_2 \in M$ ώστε $d(x, Y) < \frac{1}{8}$, για $x = (e_{m_1} - e_{m_2})/2$. Τότε $\|A_n(x) - B(x)\| \ge \frac{1}{4}$ και άρα $\|(A_n - B)|_Y\| \ge \frac{1}{7}$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Πρόταση 2.33. Ο χώρος $L_\infty[0,1]$ δεν ικανοποιεί την UALS.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}[0,1]$ των Borel υποσυνόλων του $[0,1]$ είναι ομοιομορφική με αυτή του $[0,1]^{2n}$ και επομένως ο $L_\infty[0,1]$ είναι ισομετρικός με τον $L_\infty[0,1]^{2n}$. Για $1 \le i \le 2n$, συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_i$ τη σ-άλγεβρα που παράγεται από το $\{B \in \prod_{i=1}^{2n} \mathcal{B}[0,1] : B_j = [0,1] \text{ φορ } j > i\}$ και για $f \in L_\infty[0,1]^{2n}$ θέτουμε $E_i(f) = E[f|\mathcal{B}_i]$ και θεωρούμε τους τελεστές $\Delta_i : L_\infty[0,1]^{2n} \to L_2([0,1]^i, \otimes_{j\le i}\lambda)$ με $\Delta_i(f) = E_i(f) - E_{i-1}(f)$, όπου $E_0(f) = 0$ και λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.

Έστω $\Delta_G : L_\infty[0,1]^{2n} \to (\sum_{i=1}^{2n} \oplus L_2([0,1]^i, \otimes_{j\le i}\lambda))_\infty$ με $\Delta_G = \sum_{i\in G} \Delta_i$, για $G \subset \{1,\dots,2n\}$, και θέτουμε $A_n = \Delta_{\{1,\dots,2n\}}$ και $W_n = \mathrm{co}\{\Delta_G : \#G = n\}$. Παρατηρήστε ότι ο $(\sum_{i=1}^{2n} \oplus L_2([0,1]^i, \otimes_{j\le i}\lambda))_\infty$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_\infty[0,1]^{2n}$ και άρα $\Delta_G : L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1]$. Έστω $f \in L_\infty[0,1]^{2n}$, τότε το $(E_i(f))_{i=1}^{2n}$ είναι ένα martingale, αφού η $\mathcal{B}_i$ είναι υποάλγεβρα της $\mathcal{B}_j$, για κάθε $1 \le i < j \le 2n$. Τότε για τις martingale διαφορές $(\Delta_i(f))_{i=1}^{2n}$, από την ανισότητα Burkholder [B], υπάρχει $c_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left(\int_0^1 \sum_{i=1}^{2n} \Delta_i(f)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2\|f\|_2. \tag{7}$$

Ισχυρισμός 1 : Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και $f \in L_\infty[0,1]^{2n}$, να υπάρχει ένας $B \in W_n$ ώστε $\|(A_n - B)f\| \leq \varepsilon\|f\|$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $c_2/\sqrt{n_0} < \varepsilon$. Έστω $n \geq n_0$ και $f \in L_\infty[0,1]^{2n}$ με $\|f\| = 1$. Τότε, παρατηρήστε ότι έπεται άμεσα από την (7) ότι $\#\{i : \|\Delta_i(f)\|_2 > c_2/\sqrt{n+1}\} \leq n$. Έστω σ μία μετάθεση του $\{1,\ldots,2n\}$ ώστε $\|\Delta_{\sigma(1)}(f)\|_2 \geq \ldots \geq \|\Delta_{\sigma(2n)}(f)\|_2$. Επομένως για $G = \{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}$, καταληγουμε ότι $\|(A_n - \Delta_G)f\| < c_2/\sqrt{n}$, και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Ισχυρισμός 2 : Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε υπόχωρο Y του $L_\infty[0,1]^{2n}$ πεπερασμένης συνδιάστασης και $B \in W_n$, έχουμε ότι $\|(A - B)|_Y\| \geq 1/7$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Υπάρχουν $x_1^*,\ldots,x_l^* \in (L_\infty[0,1]^{2n})^*$ τέτοια ώστε $Y = \cap_{i=1}^l \ker x_i^*$ και ο B είναι ένας κυρτός συνδυασμός $B = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Delta_{G_i}$ στο W_n. Τότε όπως στην Πρόταση 2.24, επιλέγουμε $1 \leq j \leq 2n$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{G_i}(j) \leq \frac{1}{2}$. Έστω $(R_m)_m$ να είναι το σύστημα Rademacher και θεωρούμε μια φυσιολογική επέκτασή του, $(\tilde{R}_m)_m$, στον $L_\infty[0,1]^{2n}$ ώστε $\tilde{R}_m(t_1,\ldots,t_{2n}) = R_m(t_j)$. Επιλέγουμε $M \in [\mathbb{N}]^\infty$ ώστε η $(x_i^*(\tilde{R}_m))_{m\in M}$ να συγκλίνει, για κάθε $1 \leq i \leq l$, και από το Λήμμα 1.8 υπάρχουν $m_1, m_2 \in M$ με $d(f,Y) < 1/8$, για $f = (\tilde{R}_{m_1} - \tilde{R}_{m_2})/2$. Ως γνωστόν η $(\tilde{R}_m)_m$ είναι ισόμορφη με τη συνήθη βάση του ℓ_1 στην L_∞-νόρμα και ΄ρα $\|f\|_\infty = 1$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $m \in M$ έχουμε ότι $\Delta_i(\tilde{R}_m) = \delta_{ij}\tilde{R}_m$ και $\|\tilde{R}_m\|_2 = 1$ και αφού η $(R_m)_m$ ορθγώνια ότι $\|\tilde{R}_{m_1} - \tilde{R}_{m_2}\|_2 = (\|\tilde{R}_{m_1}\|^2 + \|\tilde{R}_{m_2}\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Επομένως $\|(A_n - B)f\| \geq 1/4$ και άρα καταλήγουμε ότι $\|(A_n - B)|_Y\| \geq 1/7$, καθώς $d(f,Y) < 1/8$.

Υποθέτουμε ότι ο $L_\infty[0,1]$ ικανοποιεί τη UALS με σταθερά $C > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$ με $C\varepsilon < 1/7$. Από τον πρώτο ισχυρισμό υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $f \in L_\infty[0,1]^{2n}$ με $\|f\| \leq 1$ υπάρχει $B \in W_n$ με $\|(A_n - B)f\| < \varepsilon$. Επομένως υπάρχει ένας υπόχωρος Y του $L_\infty[0,1]^{2n}$ πεπερασμένης συνδιάστασης και ένας $B \in W_n$ ώστε $\|(A - B)|_Y\| < C\varepsilon$ και αυτό είναι άτοπο από τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $C\varepsilon < 1/7$. □

Πρόταση 2.34. Έστω K είναι ένας υπεραριθμήσιμος συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος. Τότε ο $C(K)$ δεν ικανοποιεί τη UALS.

Απόδειξη. Θέτουμε $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ και από το θεώρημα του Milutin [M] έχουμε ότι ο χώρος $C(K)$ είναι ισομορφικός με τον $C(\Omega)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε μια διαμέριση του $\mathbb{N}$ σε άπειρα σύνολα $N_1, \ldots, N_{2n}$ και θέτουμε $\Omega_i = \{-1,1\}^{N_i}$, για $1 \le i \le 2n$. Προφανώς ο $C(\Omega)$ είναι ισομετρικός με τον $C(\prod_{i=1}^{2n} \Omega_i)$.

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην προηγούμενη απόδειξη, για κάθε $1 \le i \le 2n$, ορίζουμε $E_i, \Delta_i : C(\prod_{i=1}^{2n} \Omega_i) \to L_2(\prod_{j \le i} \Omega_j, \otimes_{j \le i} \mu_j)$, όπου με μ_j συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας Haar στο Ω_j. Επιπλέον, θεωρούμε τον τελεστή $\Delta_G : C(\prod_{i=1}^{2n} \Omega_i) \to (\sum_{i=1}^{2n} L_2(\prod_{j \le i} \Omega_j, \otimes_{j \le i} \mu_j))_\infty$ με $\Delta_G = \sum_{i \in G} \Delta_i$, για $G \subset \{1, \ldots, 2n\}$. Παρατηρήστε ότι ο $(\sum_{i=1}^{2n} L_2(\prod_{j \le i} \Omega_j, \otimes_{j \le i} \mu_j))_\infty$ είναι ισομετρικός με έναν υπόχωρο του $C(\Omega)$ και άρα $\Delta_G : C(\Omega) \to C(\Omega)$. Θέτουμε επίσης $A_n = \Delta_{\{1,\ldots,2n\}}$ και $W_n = \mathrm{co}\{\Delta_G : \#G = n\}$.

Η οικογένεια $(\pi_n)_n$ των προβολών του Ω επί των συντεταγμένων του, αντιστοιχεί στο σύστημα Rademacher στον $L_\infty[0,1]$. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι ο $C(\Omega)$ ικανοποιεί την UALS, καταλήγουμε σε άτοπο εφαρμόζοντας τα αντίστοιχα επιχειρήματα της Πρότασης 2.33. □

2.5 Παρατηρήσεις

Αυτή η τελευταία υποενότητας περιέχει κάποιες τελικές παρατηρήσεις και ανοικτά προβλήματα που σχετίζονται με την ιδιότητα UALS. Ξεκινάμε με το επόμενο παράδειγμα, το οποίο υποδείχτηκε από τον W. B. Johnson το οποίο δείχνει ότι στον ορισμό της UALS δε θα μπορούσαμε να αναμένουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση να συμβαίνει σε όλο το χώρο.

Παράδειγμα 2.35. Έστω $\|\cdot\|$ να είναι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^2$ και για $x, x^* \in \mathbb{R}^2$ θεωρούμε τον τελεστή $x^* \otimes x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $x^* \otimes x(y) = x^*(y)x$ και θέτουμε

$$W = \mathrm{co}\{x^* \otimes x : x, x^* \in \mathbb{R}^2 \ \text{ και } \ \|x\|, \|x^*\| \le 1\}$$

Έστω $y \in \mathbb{R}^2$ με $\|y\| \le 1$ και $x^* \in \mathbb{R}^2$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(y) = \|y\|$. Τότε για $x = y/\|y\|$, έχουμε ότι $x^* \otimes x \in W$ και $\|x^* \otimes x(y) - I(y)\| = 0$, όπου με I συμβολίζεται ο ταυτοτικος τελεστής.

Για κάθε $B \in W$, υπάρχει ένας κυρτός συνδυασμός $\sum_{i=1}^5 a_i B_i$ στο W ώστε $B = \sum_{i=1}^5 a_i B_i$. Τότε $a_{i_0} \ge 1/5$, για κάποιο $1 \le i_0 \le 5$, και για $x \in \ker B_{i_0}$ με $\|x\| = 1$ έχουμε ότι $\|x - \sum_{i=1}^4 a_i B_i(x)\| \ge 1 - \sum_{i=1}^4 a_i$ και άρα $\|I - B\| \ge 1/5$ για κάθε $B \in W$.

Αυτό το παράδειγμα επεκτείνεται σε κάθε χώρο Banach με διάσταση μεγαλύτερη ίση του δύο, με τον ακόλουθο τρόπο.

Πρόταση 2.36. Έστω X είναι ένας χώρος Banach με $\dim X \ge 2$. Υπάρχει $C > 0$ και ένα κυρτό συμπαγές υποσύνολο W του $\mathcal{L}(X)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in B_X$ υπάρχει ένας $B \in W$ ώστε $\|x - B(x)\| = 0$ ενώ $\|I - B\| \ge C$, για κάθε $B \in W$.

Απόδειξη. Έστω e_1, e_2 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον X, συμβολίζουμε με Y τη γραμμική τους θήκη και έστω Z υπόχωρος του X με $X = Y \oplus Z$. Θέτουμε

$$W = \mathrm{co}\{x^* \otimes x|_Y + I|_Z : x, x^* \in Y \ \text{ και } \ \|x\|, \|x^*\| \leq 1\}$$

και τότε με παρόμοια επιχειρήματα όπως στο παραπάνω παράδειγμα καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 2.37. Όπως υπόδειξε ο Ι. Γάσπαρης, στην περίπτωση του $c_0(\mathbb{N})$ η UALS μπορεί να αποδειχθεί χωρίς χρήση του θεωρήματος του Kakutani αλλά έπεται από το ακόλουθο γεγονός. Έστω $T \in \mathcal{L}(c_0)$ και $(x_n^i)_n$, $1 \leq i \leq l$, να είναι νορμαρισμένες block ακολουθίες ώστε για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\|T(x_n^1)\| \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μια επιλογή $n_1 < \ldots < n_l$ ώστε $\|T(\sum_{i=1}^l x_{n_i}^i)\| > \varepsilon - \delta$. Έστω $T_1, \ldots, T_l \in \mathcal{L}(c_0)$ και $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in B_{c_0}$ υπάρχει $1 \leq i \leq l$ τέτοιο ώστε $\|T_i(x)\| \leq \varepsilon$. Τότε για κάθε $\varepsilon' > \varepsilon$ υπάρχουν ένα $1 \leq i \leq l$ και ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|T_i|_{\mathrm{span}\{e_n : n \geq n_0\}}\| \leq \varepsilon'$. Αν όχι, μπορούμε να επιλέξουμε για κα΄θε $i = 1, \ldots, l$ μια νορμαρισμένη block ακολουθία $(x_n^i)_n$ με $\|T_i(x_n^i)\| \geq \varepsilon'$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας ταυτόχρονα την παραπάνω παρατήρηση, για τους τελεστές $T_1, \ldots, T_l$, μπορούμε να επιλέξουμε $n_1 < \ldots < n_l$ ώστε $\|T_i(\sum_{i=1}^l x_{n_i}^i)\| > \varepsilon$, για κάθε $i = 1, \ldots, l$ και αυτό είναι άτοπο.

Παρατήρηση 2.38. Υπάρχουν χώροι Banach οι οποίοι ικανοποιούν την ιδιότητα UALS ενώ αυτό δεν συμβαίνει για όλους τους υποχώρους τους. Όπως είδαμε ήδη, κάθε $L_p[0,1]$ για $1 < p < \infty$ και $p \neq 2$, δεν ικανοποιεί τη UALS ενώ από το β) του Πορίσματος 2.20.1 προκύπτει ότι εμφυτεύεται σε ένα χώρο ο οποίος την ικανοποιεί.

Ένα ανοικτό ερώτημα παρόμοιου περιεχομένου με την παραπάνω παρατήρηση είναι το ακόλουθο. Παρατηρήστε ότι όλοι οι χώροι στην προηγούμενη υποενότητα που δεν ικανοποιούσαν την ιδιότητα UALS περιέχουν υποχώρους που την ικανοποιούν.

Πρόβλημα 2.39. Υπάρχει χώρος Banach που κανένας υπόχωρός του να μην ικανοποιεί την ιδιότητα UALS ;

Βιβλιογραφία.

[AI] I. Ameniya and T. Ito, *Weakly null sequences in James spaces on trees*, Kodai Math. J. 4 (1981), 418–425.

[AOST] G. Androulakis, E. Odell, Th. Schlumprecht, and N. Tomczak-Jaegermann, *On the Structure of the Spreading Models of a Banach Space*, Canad. J. Math. Vol. 57 (4), 2005, 673–707.

[Ar *et al.*] S. A. Argyros, D. Freeman, R. Haydon, E. Odell, Th. Raikoftsalis, Th. Schlumprecht and D. Zisimopoulou, *Embedding uniformly convex spaces into spaces with very few operators*, Journal of Functional Analysis 262 (2012), 825–849.

[AGLM] S. A. Argyros, A. Georgiou, A.-R. Lagos and P. Motakis, *Joint Spreading Models and Uniform Approximation of Bounded Operators.* https://arxiv.org/abs/1712.07638

[AH] S. A. Argyros and R. G. Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$ space that solves the scalar-plus-compact-problem*, Acta Math. 206 (1) (2011), 1–54.

[AKT] S. A. Argyros, V. Kanellopoulos and K. Tyros, *Finite order spreading models*, Advances in Mathematics 234 (2013), 574–617.

[AM2] S. A. Argyros and P. Motakis, *A dual method of constructing hereditarily indecomposable Banach spaces*, Positivity 20 (2016),625–662.

[AM1] S. A. Argyros and P. Motakis, *On certain spaces with a unique spreading model*, in preparation.

[BL] B. Beauzamy and J.T. Lapresté, *Modèles étalés des espaces de Banach*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, iv+210 pp.

[Be] G. Berg, *On James spaces*, Ph.D. Thesis, The University of Texas, Austin, Texas, 1996.

[BK] H. F. Bohnenblust and S. Karlin, *On a theorem of Ville*, Contributions to the Theory of Games, Annals of Mathematics Studies, no. 24, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950, pp. 155–160.

[BS] A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory 7 (1974), no. 4, 294–299.

[B] D. L. Burkholder, *Distribution Function Inequalities for Martingales*, Annals of Probability 1 (1973), 19–42.

[CN] W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer (1974).

[FJ] T. Figiel and W. B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p*, Compositio Math. 29 (1974), 179–190.

[FOSZ] D. Freeman, E. Odell, B. Sari and B. Zheng, *On Spreading Sequences and Asymptotic Structures*, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), 6933–6953.

[FOS] D. Freeman, E. Odell and Th. Schlumprecht, *The universality of ℓ_1 as a dual space*, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 149-186.

[GM] W. T. Gowers and B. Maurey, *Banach Spaces with Small Spaces of Operators*, Mathematische Annalen 307 (1997), no. 4, 543–568.

[H] J. Hagler, *Some more Banach spaces which contain L^1*, Studia Math., **46** (1973), 35-42.

[HS] J. Hagler and C. Stegall, *Banach spaces whose duals contain complemented subspaces isomorphic to $(C[0,1])^*$*, J. Funct. Anal., **13** (1973), 233-251.

[HO] L. Halbeisen and E. Odell, *On asymptotic models in Banach spaces*, Israel J. Math. 139, (2004), 253–291.

[HB] F. Helga and B. Gamboa de Buen, *Spreading sequences in JT*, Studia Mathematica 125.1 (1997), 57–66.

[J1] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52 (1950), 518–527.

[J2] R. C. James, *A separable somewhat reflexive Banach space with non-separable dual*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 738–743.

[Ka] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. 8 (1941), no. 3, 457–459.

[Kr] J. L. Krivine, *Sous espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Ann. of Math. 104 (1976), 1-29

[L] H. Lemberg, *Nouvelle démonstration d'un théorème de J. L. Krivine sur la finie représentation de ℓ^p dans un espace de Banach*, Israel J. Math. 39 (1981), 341–348.

[LS] D. Lewis and C. Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $\ell_1(\Gamma)$, J. Functional Analysis **12** (1973), 177-187.

[LR] J. Lindenstrauss and H. P. Rosenthal, *The $\mathscr{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), 325–249.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I: sequence spaces*, Springer Verlag (1977).

[MMT] B. Maurey, V. D. Milman, and N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic infinite-dimensional theory of Banach spaces*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992-1994), 149-175, Oper. Theory Adv. Appl., **77**, Birkhäuser, Basel, 1995.

[MR] B. Maurey and H. P. Rosenthal, *Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence*, Studia Math. 61 (1977), 77–98.

[MT] V. D. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic ℓ_p spaces and bounded distortion*, Banach spaces (Mérida, 1992) Contemp. Math., vol. 144, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 173-195.

[M] A. A. Milutin, *Isomorphisms of spaces of continuous functions on compacts of power continuum*, Tieoria Func. (Kharov), 2 (1966), 150–156 (Russian).

[Ra] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30, (1929), 264–286.

[Ro] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing ℓ^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.

[S] C. Stegall, *Banach spaces whose duals contain $\ell_1(\Gamma)$ with applications to the study of dual $L_1(\mu)$ spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 463-477.

[T] B. S. Tsirelson, *Not every Banach space contains ℓ^p or c_0*, Funct. Anal. Appl. 8 (1974), 138–141.