

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ



**Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**«Μοντελοποίηση Αεροναυπηγικών Κατασκευών  
Αποτελούμενες από Ινώδη- Μεταλλικά Πολύστρωτα  
Σύνθετα Υλικά (Fiber-Metal Laminates)»**

**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:**

**Δρ. Ευστάθιος Θεοτόκογλου**

**Δρ. Γεώργιος Μπικάκης**

**Καθηγητής ΕΜΠ**

**Διδάκτωρ Τομέα Μηχανικής ΕΜΠ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ:**

**Κωνσταντίνος Καλφούντζος**

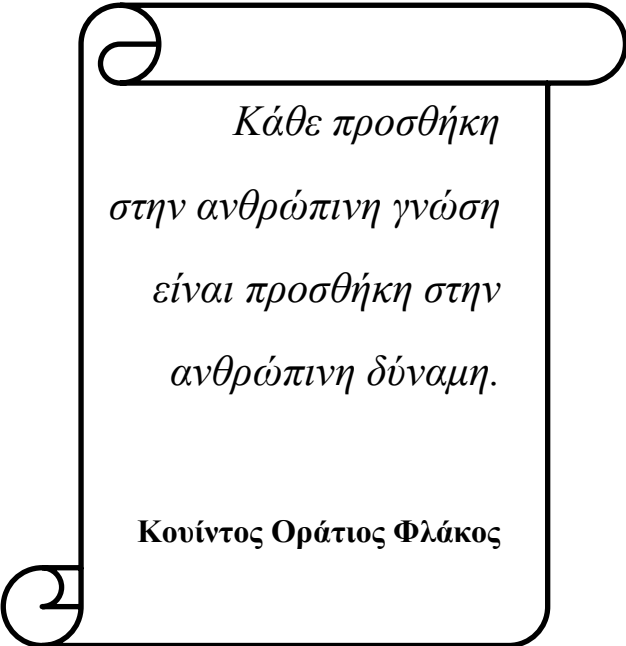
**ΑΘΗΝΑ 2018**

.....  
Κωνσταντίνος Καλφούντζος

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.



*Κάθε προσθήκη  
στην ανθρώπινη γνώση  
είναι προσθήκη στην  
ανθρώπινη δύναμη.*

**Κοκίνοτος Οράτιος Φλάκος**



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας Μεταπτυχιακής Εργασίας, η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια των ερευνητικών δραστηριοτήτων του Τομέα Μηχανικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για το Δ.Π.Μ.Σ. της Υπολογιστικής Μηχανικής, ήταν η στατική μελέτη λεπτών, απλώς εδρασμένων και περιστροφικά περιορισμένων πλακών ορθογώνιου σχήματος σε λυγισμό λόγω μονοαξονικής θλίψης και καθαρής διάτμησης. Αυτές οι πλάκες αποτελούνται από υλικό GLARE.

Το GLARE ανήκει στην κατηγορία των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων υλικών (Fiber Metal Laminates-FMLs), τα οποία αποτελούν υποκατηγορία των σύνθετων υλικών. Ειδικότερα, τα ινώδη μεταλλικά πολύστρωτα είναι υβριδικά σύνθετα υλικά και αποτελούνται από διαδοχικές εναλλασσόμενες στρώσεις μετάλλου και μονοκατευθυντικού ινώδους σύνθετου. Το αλουμίνιο είναι το πιο διαδεδομένο μέταλλο, ενώ χρησιμοποιούνται και χάλυβας, μαγνήσιο ή τιτάνιο. Υπάρχει απεριόριστη πληθώρα πιθανών συνδυασμών υβριδικών υλικών, ανάλογα με την εκάστοτε επιλογή των παραμέτρων σχεδίασης. Μερικές από αυτές τις παραμέτρους είναι το κλάσμα του όγκου του μετάλλου και ο προσανατολισμός των ινών της κάθε στρώσης σύνθετου υλικού. Το GLARE είναι το πιο επιτυχημένο από τα FMLs, μέχρι τώρα, και χρησιμοποιείται στην κατασκευή αεροδιαστημικών κατασκευών όπως στην άτρακτο του Airbus A380, σε τμήματα του Boeing 777 και σε περιβλήματα αεροπορικών κινητήρων.

Στη συγκεκριμένη εργασία, υπολογίζονται οι τιμές των βασικών μεγεθών λυγισμού χρησιμοποιώντας, αφενός, αναλυτικές σχέσεις και, αφετέρου, την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μέσω του εμπορικού προγράμματος ANSYS®. Οι τιμές που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους συγκρίνονται μεταξύ τους, με τη γενική σύγκλιση των αποτελεσμάτων να κρίνεται πολύ ικανοποιητική. Εκτός από την εν λόγω σύγκριση, παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν τα συγκεντρωτικά συγκριτικά διαγράμματα είτε της αναλυτικής είτε της αριθμητικής μεθόδου από τα οποία εξήχθησαν συμπεράσματα για την αντοχή σε λυγισμό των υπό μελέτη υλικών σε σχέση με τις διάφορες παραμέτρους σχεδίασης.

Αρχικά, στο κεφάλαιο της Εισαγωγής γίνεται μια γενική αναφορά στα σύνθετα υλικά και στις υποκατηγορίες τους. Αναλύεται το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών σε λυγισμό και πραγματοποιείται μία σύντομη ανασκόπηση των προηγούμενων ερευνών σε σχέση με το λυγισμό των σύνθετων υλικών και των FMLs.

Ξεκινώντας με την ερευνητική διαδικασία, υπολογίζονται τα κρίσιμα μεγέθη λυγισμού των ορθογώνιων πλακών αλουμινίου (Al 2024-T3) με βασική μεταβλητή παράμετρο τις διαστάσεις τους, μέσω της εφαρμογής αναλυτικών και προσεγγιστικών τύπων και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές οι οποίες υπολογίζονται μέσω της αριθμητικής επίλυσης. Όπως προαναφέρθηκε η σύγκλιση

των αποτελεσμάτων κρίνεται πολύ ικανοποιητική καθιστώντας επιτρεπτή την επέκταση της αριθμητικής διαδικασίας στα αμιγώς πολύστρωτα υλικά, αρχικά, και στα GLARE, στη συνέχεια. Σημειώνεται ότι οι συνθήκες στήριξης στη μονοαξονική θλίψη είναι απλή έδραση και περιορισμός των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας, όπως και στην καθαρή διάτμηση όπου προστίθεται, όμως, και η μικτή οριακή συνθήκη.

Ακολούθως, πραγματοποιείται σύγκριση της αναλυτικής με την αριθμητική μέθοδο για τα αμιγώς πολύστρωτα διαφορετικού προσανατολισμού ινών και τα GLARE υλικά σε μονοαξονική θλίψη με απλή έδραση, ενώ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μεθόδου για τις υπόλοιπες περιπτώσεις συννοριακών συνθηκών και φόρτισης. Μέσω της ανάλυσης των συγκεντρωτικών συγκριτικών διαγραμμάτων φάνηκε ότι την πιο καθοριστική επίδραση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού έχουν οι συνθήκες στήριξης, με το κλάσμα του όγκου του μετάλλου και τον προσανατολισμό των ινών του σύνθετου να επιδρούν με, επίσης, ουσιώδη τρόπο. Γενικά, ο περιορισμός των στροφών καθιστά τα GLARE πιο δύσκολα στο λυγισμό τους και όσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα του όγκου του μετάλλου, επίσης, τόσο δυσκολότερα λυγίζει το εν λόγω υλικό.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις πραγματοποιήθηκαν και για τις ιδιομορφές των λυγισμένων πλακών με διαφορετικά συμπεράσματα ανάλογα με τις συνθήκες φόρτισης, στήριξης και του προσανατολισμού των ινών. Τέλος, διερευνήθηκε η δυνατότητα εφαρμογής του νόμου των μιγμάτων στον υπολογισμό της κρίσιμης τάσης λυγισμού με ικανοποιητικά αποτελέσματα και μελετήθηκε η επίδραση του ποσοστού του όγκου των ινών του σύνθετου υλικού στα κρίσιμα μεγέθη λυγισμού.

## SUMMARY

The objective of this diploma thesis which was implemented within the National Technical University of Athens, Department of Mechanics research activities for Computational Mechanics, was the static study of thin simply supported and rotationally restrained plates in buckling under uniaxial compression and pure shear. These plates are orthogonal and consist of GLARE material.

GLARE belongs to Fiber Metal Laminates material category (FMLs) which are subcategory of composite materials. Namely, fiber-metal laminates are hybrid composite materials and consist of successive, alternative metal sheets and unidirectional fibrous composite layers. Aluminum is the most widely used metal, while steel, magnesium or titanium have been, also, employed in order to manufacture fiber metal laminates. The possible variations of hybrid laminated material systems are numerous since there are many design parameters. Some of these parameters are Metal Volume Fraction (MVF) and fiber orientation of each composite material lamina. GLARE is the most successful fiber-metal laminate up to now and is, currently, being used for the construction of primary aerospace structures, such as the fuselage of Airbus A380, cargo floors of Boeing 777 and aircraft engine cowlings.

At present, the values of critical buckling quantities are computed using analytical formulations and the finite element arithmetic method through commercial program ANSYS<sup>®</sup>. The values that come up from these two methods are compared between them and the general convergence of the results could be characterized very satisfying. Apart from this comparison, the aggregate comparative diagrams of the analytical or the arithmetical method, were presented and analyzed. Some important conclusions for the buckling strength of the materials studied were deduced, relevant to the design parameters.

Initially, the chapter of Introduction, generally, refers to the composite materials and their subcategories. The necessary theoretical background for the study of laminated composites in buckling is analyzed and a brief retrospect of previous studies and research about buckling of composite materials and FMLs is presented.

Beginning with the research, the critical buckling values of orthogonal aluminum (Al 2024-T3) plates are computed, having as basic variable parameter their dimensions, through the exploitation of analytical and approximate formulations, and are compared to the corresponding values computed through arithmetic method. As it was, previously, mentioned the results convergence is very satisfying, allowing the expansion of the arithmetic procedure at laminates and GLARE. It should be noted that the boundary conditions in uniaxial compression are simply support and all edges of the plate clamped, such as in pure shear, where, a mix of these two conditions is added.

Afterwards, a comparison between the analytical and arithmetical method for simply supported laminates of different fiber orientation and simply supported GLARE plates under uniaxial compression is carried out, while the diagrams of the results of the rest boundary conditions and loadings are presented. The comparative aggregate diagram analysis showed that the support members have the most crucial impact on buckling strength. Furthermore, the metal volume fraction and the fiber orientation effect, also, substantially. Generally, the rotationally constrained edges render GLARE plates harder to buckle and the increase at MVF causes the augmentation of buckling strength, for a specific material.

Corresponding observations were done for the mode shapes of buckled plates with different conclusions according to the boundary and loading conditions and the fiber orientation. Finally, the possibility of application of method of mixtures was investigated with satisfying results and the effect of fiber volume ratio of composite was studied on critical buckling values.



# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

<b>1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>15</b>
1.1	Σύνθετα υλικά	15
1.2	Κατηγορίες σύνθετων υλικών	15
1.3	Ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα (fiber-metal laminates/FMLs)	17
1.4	Πλεονεκτήματα των FMLs [3,4]	20
1.5	Υλικό GLARE (GLASS REINFORCED FML) [3,4]	22
1.5.1	Ονοματολογία και βασικοί τύποι του GLARE	24
1.5.2	Κατασκευή του GLARE	25
1.5.3	Μηχανικές ιδιότητες του GLARE	27
1.6	Λυγισμός πλακών από σύνθετο υλικό	34
1.6.1	Κλασική θεωρία πολύστρωτων (Classical lamination theory-CLT) [1]	37
1.6.2	Λυγισμός σύνθετων πολύστρωτων υλικών	41
1.7	Λυγισμός ινωδών-μεταλλικών πολύστρωτων (FMLs) υλικών	49
<b>2</b>	<b>ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ</b>	<b>55</b>
2.1	Αναλυτικός υπολογισμός φορτίου ελαστικού λυγισμού	55
2.2	Λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω θλίψης με απλή έδραση	57
2.2.1	Αναλυτικός υπολογισμός [59,pg 380]	57
2.2.2	Αριθμητική επίλυση [62]	59
2.2.3	Θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου των ιδιοτιμών	60
2.2.4	Έλεγχος σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου	69
2.2.5	Σύγκριση μεταξύ αναλυτικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου	70
2.3	Λυγισμός πλακών αλουμινίου σε θλίψη με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες στροφών κατά μήκος των πλευρών	73
2.4	Λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών και με μικτή οριακή συνθήκη	76
2.4.1	Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου- ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ 80	
2.4.2	Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου-ALL EDGES CLAMPED	82
2.4.3	Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου- ΜΙΚΤΗ ΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (TSLC)	84
<b>3</b>	<b>ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΥΛΙΚΟ</b>	<b>89</b>
3.1	Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω θλίψης με απλή έδραση	89
3.1.1	Αναλυτικός υπολογισμός [80, pg 72]	91

3.1.2	<i>Αριθμητική επίλυση [62]</i> .....	94
3.1.3	<i>Σύγκριση μεταξύ αναλυτικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου</i> .....	95
3.2	<i>Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω θλίψης με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών</i> .....	100
3.3	<i>Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό όλων των στροφών κατά μήκος των πλευρών και με μικτή οριακή συνθήκη</i> .....	103
3.3.1	<i>Λυγισμός λόγω διάτμησης σε cross-ply πολύστρωτο με απλή έδραση</i> .....	103
3.3.2	<i>Λυγισμός λόγω διάτμησης με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες στροφών κατά μήκος των πλευρών</i> .....	107
3.3.3	<i>Λυγισμός λόγω διάτμησης σε πολύστρωτα σύνθετα υλικά με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)</i> .....	109
<b>4</b>	<b>ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ GLARE</b> .....	<b>113</b>
4.1	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω θλίψης με απλή έδραση</i> .....	114
4.2	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω θλίψης με περιορισμό των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών</i> .....	126
4.3	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό των στροφών και με μικτή οριακή συνθήκη</i> .....	131
4.3.1	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με απλή έδραση</i> .....	131
4.3.2	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών</i> .....	140
4.3.3	<i>Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)</i> .....	144
<b>5</b>	<b>ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ</b> .....	<b>149</b>
5.1	<i>Συγκριτική ανάλυση διαγραμμάτων στην περίπτωση λυγισμού λόγω θλίψης</i> .....	149
5.2	<i>Συγκριτική ανάλυση ιδιομορφών στην περίπτωση του λυγισμού λόγω θλίψης</i> ....	160
5.2.1	<i>Ιδιομορφές λόγω θλίψης με απλή έδραση</i> .....	160
5.2.2	<i>Ιδιομορφές λόγω θλίψης με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών</i> .....	167
5.2.3	<i>Συμπεράσματα της ανάλυσης των ιδιομορφών για τη θλίψη</i> .....	171
5.3	<i>Συγκριτική ανάλυση διαγραμμάτων στη περίπτωση του λυγισμού λόγω διάτμησης</i> .....	173
5.4	<i>Συγκριτική ανάλυση ιδιομορφών στην περίπτωση λυγισμού λόγω διάτμησης</i> .....	181
<b>6</b>	<b>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ ΠΛΑΚΩΝ GLARE</b> .....	<b>187</b>
6.1	<i>Νόμος μιγμάτων σε λυγισμό λόγω θλίψης</i> .....	187
6.2	<i>Νόμος μιγμάτων σε λυγισμό λόγω διάτμησης</i> .....	196
<b>7</b>	<b>ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΥΠΟ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΕ ΠΛΑΚΕΣ GLARE ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΙΝΩΝ</b> .....	<b>205</b>
7.1	<i>Λυγισμός λόγω διάτμησης με απλή έδραση</i> .....	206
7.2	<i>Λυγισμός λόγω διάτμησης με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών</i> .....	210

<b>8</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....</b>	<b>213</b>
----------	---------------------------	------------

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα σύνθετα υλικά αποτελούν μία αποτελεσματική λύση στην αναζήτηση υλικών με ιδιαίτερα ασυνήθιστους συνδυασμούς ιδιοτήτων που απαιτούνται από τις σύγχρονες τεχνολογίες, οι οποίοι συνδυασμοί δεν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν από τα συμβατικά υλικά (μέταλλα, κεραμικά, πολυμερή, κράματα κτλ.). Αντίθετα, τα σύνθετα αποκτούν τις καλύτερες από τις ιδιότητες των συστατικών υλικών τους ή ακόμη και νέες, καθιστώντας τα ασυναγώνιστα. Τα ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα (Fiber Metal Laminates-FMLs) ή, αλλιώς, υβριδικά υλικά αποτελούν μία υποκατηγορία των σύνθετων υλικών. Η εφαρμογή τους πραγματοποιείται τις τελευταίες δεκαετίες και η ανάπτυξή τους είναι ραγδαία σε κάθε είδους σύγχρονη τεχνολογία.

Το σπουδαιότερο, ίσως, και πλέον αντιπροσωπευτικό υλικό της κατηγορίας των FMLs είναι το GLARE (GLASS REINFORCED), το οποίο απαρτίζεται από διαδοχικές εναλλασσόμενες στρώσεις λεπτών φύλλων αλουμινίου (συνήθως 2024-T3) και από, επίσης, λεπτές στρώσεις μονοκατευθυντικού σύνθετου υλικού (συνήθως εποξική μήτρα ενισχυμένη με ίνες γυαλιού τύπου S2-glass).

Το GLARE, σύμφωνα με έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, αποτελεί ένα εξαιρετικό κατασκευαστικό υλικό, το οποίο βρίσκει εφαρμογή, κυρίως, σε αεροναυπηγικές εφαρμογές με πολύ καλές ιδιότητες όπως αυξημένη διάρκεια ζωής σε κόπωση, εξαιρετική κρουστική συμπεριφορά, χαμηλή πυκνότητα, εξαιρετική ανθεκτικότητα στην υγρασία και σε διαβρωτικά περιβάλλοντα και αυξημένη αντοχή στη φλόγα και στις εκρήξεις.

Ο λυγισμός αποτελεί μία από τις βασικές μορφές καταπόνησης στην οποία είναι πολύ σημαντικό να είναι ανθεκτικά τέτοιου είδους προηγμένα δομικά υλικά τα οποία χρησιμοποιούνται σε αεροδιαστημικές και ναυπηγικές εφαρμογές, αφού, σχεδόν όλες συνδέονται με λεπτότοιχες σύνθετες κατασκευές όπως είναι οι πλάκες. Η διεκπεραιωθείσα μεταπτυχιακή εργασία επικεντρώνεται στη στατική μελέτη λεπτών απλώς εδρασμένων και περιστροφικά περιορισμένων πλακών ορθογώνιου σχήματος (κατασκευασμένες από εμπορικά διαθέσιμους τύπους GLARE), οι οποίες καταπονούνται σε λυγισμό λόγω μονοαξονικής θλίψης και καθαρής διάτμησης.

Η εν λόγω μελέτη της στατικής συμπεριφοράς σε λυγισμό πραγματοποιείται αφενός χρησιμοποιώντας αναλυτικές σχέσεις και αφετέρου μέσω της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (μέσω της χρήσης του εμπορικού προγράμματος ANSYS®). Οι τιμές των βασικών μεγεθών λυγισμού που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους συγκρίνονται μεταξύ τους, με τη γενική σύγκλιση των αποτελεσμάτων να κρίνεται πολύ ικανοποιητική. Εκτός από αυτή τη σύγκριση παρουσιάστηκαν συγκεντρωτικά τα συγκριτικά διαγράμματα των αποτελεσμάτων

είτε της αναλυτικής είτε της αριθμητικής μεθόδου και εξήχθησαν συμπεράσματα σε σχέση με τις διάφορες παραμέτρους σχεδίασης των GLARE υλικών.

Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εύρεσης δεδομένων σε σχέση με το λυγισμό των σύνθετων και, ειδικότερα, των υβριδικών υλικών λήφθηκαν υπόψη πολυάριθμες δημοσιεύσεις και μελέτες ερευνητών από διάφορα μέρη του κόσμου οι οποίοι έχουν εργαστεί σε ίδιο ή παρόμοιο αντικείμενο, μέσω συνεχούς και σχολαστικής ανασκόπησης της σχετικής αρθρογραφίας της τελευταίας εικοσαετίας.

Τα αποτελέσματα της εργασίας μπορούν να παράσχουν σε ερευνητές και μηχανικούς, οι οποίοι επικεντρώνονται στη συμπεριφορά σε λυγισμό των πλακών GLARE, μία χρήσιμη βοήθεια σε σχέση με την επίδραση των διαφορετικών τύπων του GLARE ή/και των διαφορετικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών των στρώσεων του σύνθετου υλικού στην αντοχή τους σε λυγισμό.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Δρ. Ευστάθιο Θεοτόκογλου για τις εύστοχες και καθοριστικές κατευθύνσεις που μου παρείχε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Θα ήθελα, ακόμη, να ευχαριστήσω, θερμά, τον Δρ. Γεώργιο Μπικάκη, για τις πολύ σημαντικές επιστημονικές γνώσεις και πληροφορίες που πρόθυμα μου παρείχε στην επικοινωνία μου μαζί του από την έναρξη της εργασίας και στη συνέχιση αυτής της επικοινωνίας καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησής της. Θα ήθελα να τον ευχαριστήσω, επίσης, για την αμέριστη βοήθεια, την αδιάλειπτη καθοδήγησή του και για την άπογη συνεργασία που είχαμε σε αυτούς τους έντεκα μήνες.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

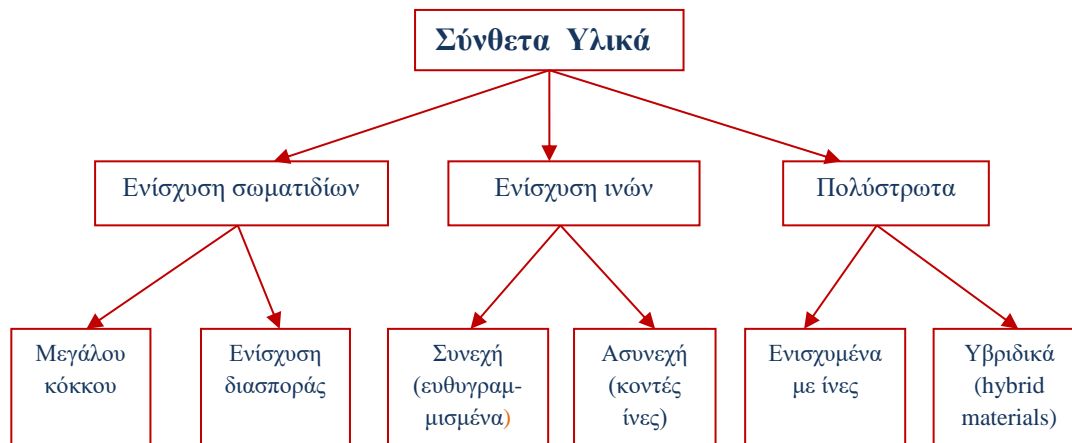
### 1.1 Σύνθετα υλικά

Η διαρκής ανάπτυξη της επιστήμης και της εφαρμογής των ευρημάτων της στις σύγχρονες τεχνολογικές κατασκευές δημιουργούν απαιτήσεις για διαρκή βελτίωση αυτών των κατασκευών και δυνατότητα εκτέλεσης πολλαπλών λειτουργιών ταυτόχρονα. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό απαιτείται τα δομικά συστατικά αυτών των κατασκευών, τα υλικά, δηλαδή, να διαθέτουν **εξαιρετικά ασυνήθιστους συνδυασμούς ιδιοτήτων**, οι οποίοι δε μπορούν να ικανοποιηθούν από τα συμβατικά μέταλλα ή κράματά τους, τα κεραμικά και τα πολυμερή υλικά. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα αισθητό στα υλικά που απαιτούνται στην **αεροδιαστημική**, στις μεταφορές και στη ναυπηγική. Για παράδειγμα οι μηχανικοί της αεροναυπηγικής βιομηχανίας αναζητούν διαρκώς υλικά τα οποία να διαθέτουν χαμηλή πυκνότητα μάζας, μεγάλη αντοχή, αυξημένη δυσκαμψία, καλή συμπεριφορά στην κρούση, αντοχή στην διάβρωση και στην κόπωση, ενώ δεν θα πρέπει να ξεπερνούν ένα δεδομένο οικονομικό κόστος [2]. Εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι αυτός είναι ένας εξαιρετικά δύσκολος συνδυασμός ιδιοτήτων αφού τα ανθεκτικά υλικά χαρακτηρίζονται από μεγάλη πυκνότητα, και η αύξηση της αντοχής ή της δυσκαμψίας προκαλεί μείωση της αντοχής στην κρούση [4].

Η παραπάνω ανάγκη οδήγησε στην δημιουργία, αρχικά, των **σύνθετων υλικών**. Η λέξη σύνθετο υποδηλώνει το συνδυασμό δύο ή περισσότερων υλικών σε μακροσκοπική κλίμακα για την παραγωγή ενός τρίτου χρήσιμου υλικού. Το βασικό πλεονέκτημα τους είναι ότι αν έχουν σχεδιαστεί σωστά **εμφανίζουν τις καλύτερες από τις ιδιότητες των συστατικών υλικών τους** ή ακόμη και κάποια ιδιότητα την οποία κανένα από τα συστατικά δεν διαθέτει [1]. Οι μηχανικοί έχουν συνδυάσει διαφορετικά υλικά, όπως μέταλλα, κεραμικά και πολυμερή με ιδιοφυή τρόπο, ώστε να προκύψει αυτή η νέα γενιά υλικών. Όσον αφορά στη δομή τους ένα μεγάλο ποσοστό των σύνθετων υλικών αποτελείται από δύο φάσεις. Η πρώτη είναι η μήτρα, η οποία είναι συνεχής και περιβάλλει την δεύτερη, η οποία είναι διεσπαρμένη φάση. Οι ιδιότητές τους, τέλος, αποτελούν συνάρτηση των ιδιοτήτων που διαθέτουν οι συνιστώσες φάσεις, της αναλογίας του όγκου της καθεμίας και της γεωμετρίας της διεσπαρμένης φάσης.

### 1.2 Κατηγορίες σύνθετων υλικών

Ένας εύκολος τρόπος κατάταξης των σύνθετων υλικών παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.1 παρακάτω και είναι τα ινώδη σύνθετα υλικά (fibrous composite), τα σύνθετα υλικά σωματιδίων (particulate composite) και τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά (laminated composite/laminates) [3].



Σχήμα 1.1: Σχηματική ταξινόμηση των σύνθετων υλικών [3]

#### ▪ Ινώδη σύνθετα υλικά (fibrous composites)

Τα σύνθετα υλικά αυτής της κατηγορίας αποτελούνται από τη μήτρα (matrix) μέσα στην οποία είναι τοποθετημένες οι ίνες από κάποιο διαφορετικό υλικό. Ο προσανατολισμός των ινών μπορεί να είναι τυχαίος ενώ οι ίνες μπορεί να είναι και πεπλεγμένες με συγκεκριμένο προσανατολισμό. Το υλικό από το οποίο αποτελείται η μήτρα είναι κάποιο πολυμερές το οποίο στηρίζει και προστατεύει τις ίνες, και ταυτόχρονα, συμβάλλει στη μεταφορά φορτίων μεταξύ σπασμένων ινών. **Το γυαλί, ο άνθρακας και ο γραφίτης είναι μερικά από τα υλικά από τα οποία αποτελούνται οι ίνες.** Συνήθως, αυτές έχουν αυξημένη αντοχή σε καταπόνηση εφελκυσμού στη διεύθυνση του μήκους τους και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις τελικές ιδιότητες του σύνθετου. [3]

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ίνες μεγάλου μήκους και μικρού πάχους διαθέτουν εξαιρετικά μεγαλύτερη δυσκαμψία και ανθεκτικότητα σε σύγκριση με ίνες του ίδιου υλικού όταν είναι σε συμβατική μορφή. Για παράδειγμα οι συνηθισμένες πλάκες γυαλιού έχουν αντοχή θραύσης περίπου 20 [MPa] σε αντίθεση με τις ίνες γυαλιού οι οποίες έχουν αντοχή θραύσης 2800-4800 [MPa] όταν είναι σε εμπορικά διαθέσιμη μορφή και περίπου 7000 [MPa] σε εργαστηριακό περιβάλλον [1]. Το παράδοξο αυτό οφείλεται στην τελειότερη κρυσταλλική δομή των ινών και στην ύπαρξη αυξημένων ατελειών στα υλικά με συμβατική μορφή, οι οποίες, τελικά, αποτελούν σημεία έναρξης ρωγμών.

#### ▪ Σύνθετα υλικά σωματιδίων (Particulate composites)

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα σύνθετα υλικά τα οποία αποτελούνται από σωματίδια τα οποία είναι διεσπαρμένα μέσα στη μήτρα διαφορετικού υλικού. Αυτά



τα σωματίδια μπορεί να είναι σφαιρίδια, νιφάδες (flakes) κτλ. Ο τύπος του υλικού τόσο της μήτρας όσο και των σωματιδίων μπορεί να είναι μεταλλικός, μη μεταλλικός και όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί αυτών των δύο [3].

- **Πολύστρωτα σύνθετα υλικά (laminated composites/ laminates)**

Τα πολύστρωτα αποτελούνται από δύο ή περισσότερες στρώσεις (laminates) υλικών, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους. Η κατασκευή τέτοιων υλικών αποσκοπεί στον καλύτερο δυνατό συνδυασμό των ιδιοτήτων των διαφορετικών στρώσεων, ώστε να προκύψει το τελικό σύνθετο υλικό με τις επιθυμητές ιδιότητες. Μία βασική υποκατηγορία πολύστρωτων σύνθετων υλικών **αποτελούν τα ενισχυμένα με ίνες πολύστρωτα σύνθετα υλικά (fiber-reinforced laminated composite materials)**, τα οποία αποτελούν αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας. Αυτά αποτελούνται από αλληπάλληλες στρώσεις σύνθετων υλικών κολλημένες μεταξύ τους. Η καθεμία από αυτές τις στρώσεις αποτελείται από ένα επίπεδο (μικρού πάχους) ινώδες σύνθετο υλικό με ίνες οι οποίες έχουν συγκεκριμένο προσανατολισμό και είναι διατεταγμένες κάθετα στη διεύθυνση του πάχους [3].

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν κατασκευαστεί υλικά τα οποία δεν ανήκουν σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες. Πρόκειται για τα γνωστά ως υβριδικά υλικά (hybrid materials) των οποίων η δομή αποτελείται από διαδοχικές μεταλλικές πλάκες εναλλασσόμενες με πλάκες σύνθετου υλικού. Αυτές οι στρώσεις είναι κολλημένες μεταξύ τους δημιουργώντας τελικά το υβριδικό υλικό. Τα υλικά τα οποία ανήκουν σε αυτή τη νέα κατηγορία ονομάζονται ινώδη μεταλλικά πολύστρωτα (fiber-metal laminates-FMLs), και η τυπική τους δομή φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 1.2



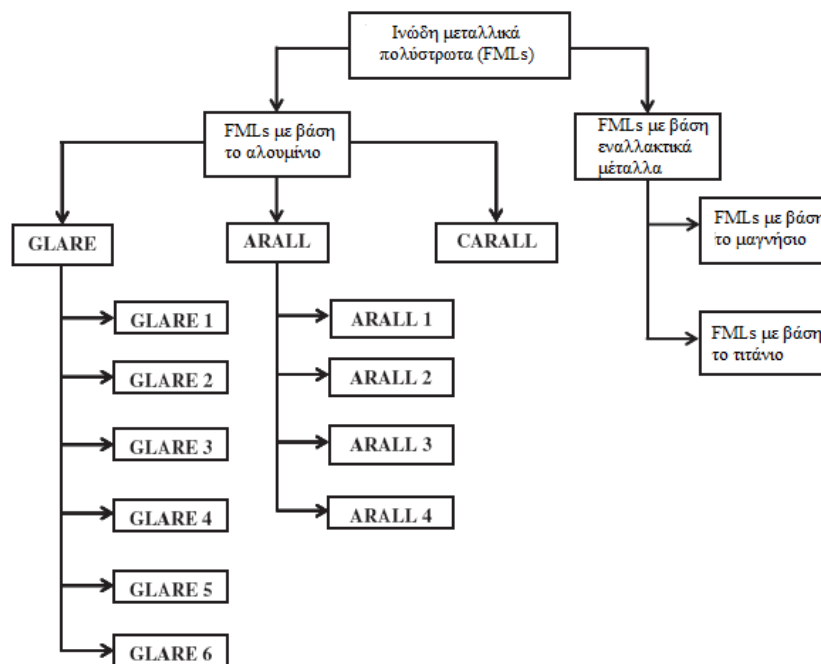
*Σχήμα 1. 2: Απεικόνιση της δομής των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων (FMLs)*

### **1.3 Ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα (fiber-metal laminates/FMLs)**

Η ιδέα της αξιοποίησης των δύο βασικότερων υλικών της αεροναυπηγικής βιομηχανίας, του αλουμινίου και των ινωδών σύνθετων γεννήθηκε στα τέλη της

δεκαετίας του '70, και είχε στόχο την δημιουργία ενός υλικού το οποίο δεν θα είχε τα μειονεκτήματα των δύο παραπάνω συστατικών του, όπως τη μειωμένη αντοχή σε κόπωση και κρούση του αλουμινίου και τη μικρή παραμένουσα αντοχή των ινωδών σύνθετων [67]. Εκείνη την περίοδο ανακαλύφθηκε, στην Ολλανδία και, ειδικότερα, στο Delft University of Technology, ότι ο ρυθμός διάδοσης της ρωγμής σε λεπτά φύλλα αλουμινίου κολλημένα μεταξύ τους είναι σημαντικά χαμηλότερος σε σύγκριση με τον ρυθμό διάδοσης σε παχύ συμπαγές μονολιθικό φύλλο αλουμινίου. Ειδικά όταν η ρωγμή ξεκινά από μία μεμονωμένη στρώση τα επιμέρους στρώματα λειτουργούν ως τροχοπέδη στη διάδοσή της και την απομονώνουν.

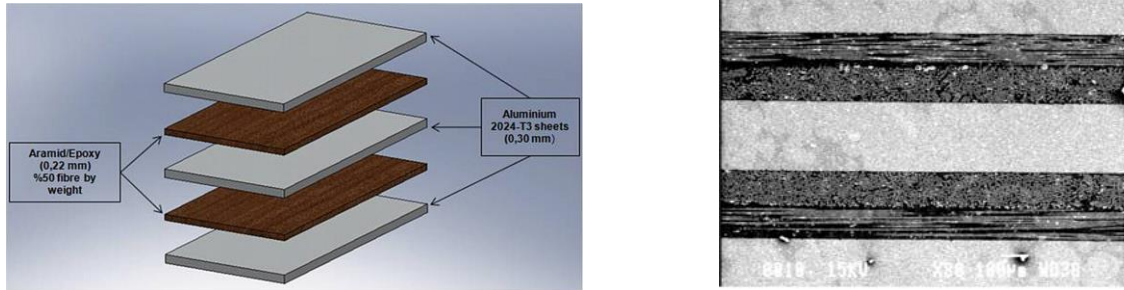
Τα ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα (FMLs) ταξινομούνται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3 παρακάτω [5], [6], [14], [68]. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα περισσότερο εμπορικά διαθέσιμα τέτοια υλικά είναι το ARALL 1, του οποίου οι ίνες είναι κατασκευασμένες από αραμιδίδιο και το GLARE 1 του οποίου οι ίνες βασίζονται σε υψηλής αντοχής γυαλί.



**Σχήμα 1.3:** Ταξινόμηση των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων (FMLs)[6]

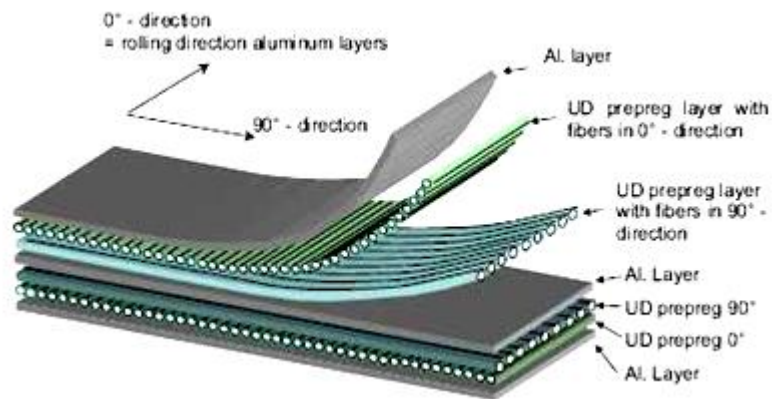
Στα τέλη της δεκαετίας του 1970 πραγματοποιήθηκαν αρκετές έρευνες από το τμήμα αεροναυπηγικής του Delft University of Technology με στόχο την βελτίωση της αντοχής σε κόπωση των κραμάτων αλουμινίου. Αυτό επιτεύχθηκε μέσω της εισαγωγής υψηλής αντοχής ινών αραμιδίου ανάμεσα σε στρώσεις φύλλων αλουμινίου. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας ήταν η δημιουργία του πρώτου ινώδους πολυστρωματικού υλικού του ARALL, το οποίο αποτελείται από διαδοχικές στρώσεις αλουμινίου (πάχους 0,2 έως 0,4 mm) εναλλασσόμενες με μονοαξονικές ή διαξονικές στρώσεις σύνθετου προεμποτισμένες με ίνες αραμιδίου [5]. Η βιομηχανία ALCOA το 1984 ξεκίνησε μία πιλοτική παραγωγή τεσσάρων διαφορετικών τύπων

τυποποιημένου ARALL [69]. Αρχικά τυποποιήθηκε ο τύπος ARALL 1 με στρώσεις αλουμινίου 7075 και στη συνέχεια ο τύπος ARALL 2 που χρησιμοποιούσε αλουμίνιο 2024 [70]. Στο Σχήμα 1.4 φαίνεται η χαρακτηριστική δομή του ARALL.



**Σχήμα 1. 4:** Σχηματική απεικόνιση της δομής του ARALL

Επόμενο υλικό χρονολογικά στην κατηγορία των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων είναι το CARALL (CARbon Reinforced ALuminum), το οποίο αναπτύχθηκε, επίσης στο DUT και οι ίνες αραμιδίου αντικαταστάθηκαν από ίνες άνθρακα, οι οποίες είναι πιο ανθεκτικές. Όσον αφορά στην αντοχή αυτού του νέου υλικού σε κόπωση, οι μελέτες που πραγματοποιήθηκαν έδειξαν ότι προκαλούνταν θραύση των ινών κατά την εκτέλεση ελέγχων κόπωσης με υψηλά επίπεδα εφαρμοζόμενων τάσεων γεγονός που δημιουργούσε χαμηλή αντοχή του υλικού σε κόπωση. Δύο ακόμη βασικά μειονεκτήματα του CARALL αφορούν στην περιορισμένη παραμόρφωση αστοχίας (0.5-2.0%) και στην γαλβανική διάβρωση που παρουσιάζεται μεταξύ των ινών του άνθρακα και του αλουμινίου σε περιβάλλον υγρασίας [4]. Την αμέσως επόμενη δεκαετία του 1990 πραγματοποιήθηκε μία επιτυχημένη προσπάθεια βελτίωσης του ARALL μέσω της αντικατάστασης των ινών αραμιδίου από ίνες γυαλιού. Κατ' αυτό τον τρόπο, δημιουργείται το υλικό GLARE (GLASS REinforced) και το 1991 ξεκινά η βιομηχανική παραγωγή του [7]. Παρακάτω φαίνεται η χαρακτηριστική δομή του GLARE (Σχήμα 1.5).



**Σχήμα 1. 5:** Χαρακτηριστική δομή του GLARE

## 1.4 Πλεονεκτήματα των FMLs [3,4]

Τα υλικά τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων χαρακτηρίζονται από κάποια σαφή πλεονεκτήματα έναντι των συμβατικών σύνθετων υλικών και των κραμάτων αλουμινίου [9]. Ειδικότερα, αυτά τα πλεονεκτήματα αναλύονται παρακάτω:

### α. Μηχανική συμπεριφορά

- Υψηλή αντοχή σε κόπωση. Επιτυγχάνεται χάρη στο φαινόμενο της **γεφύρωσης των ινών** (το οποίο θα αναλυθεί σε επόμενη παράγραφο) το οποίο περιορίζει το άνοιγμα της ρωγμής. Τα FMLs παρουσιάζουν εξαιρετική συμπεριφορά στην κόπωση [10],[11]

- Υψηλή αντοχή. Επειδή τα FMLs είναι υβριδικά υλικά που η δομή τους βασίζεται σε λεπτά φύλλα μετάλλου και σε λεπτές στρώσεις ινωδών πολυμερικών υλικών. Ο συνδυασμός των ανωτέρω προσδίδει στα FMLs **μεγάλη αντοχή** λόγω των μετάλλων και μεγάλη ακαμψία και αντοχή λόγω της ενίσχυσης των ινών. Τα FMLs αποτελούν δομικά υλικά με μεγάλη αντοχή [10],[71].

- Υψηλή αντοχή θραύσης. Σύμφωνα με μελέτες [72] έχει αποδειχτεί ότι τα FMLs διαθέτουν μεγαλύτερη αντοχή θραύσης σε σχέση με την αντίστοιχη των υλικών που τα αποτελούν. Βάσει λοιπόν αυτής της συμπεριφοράς, αλλά και του γεγονότος των χαμηλών ρυθμών διάδοσης ρωγμών λόγω κόπωσης, τα υλικά αυτά ανάγονται σε πολύ ελκυστική επιλογή για ένα μεγάλο εύρος δομικών κατασκευών.

- Υψηλή αντοχή σε κρούση. Σε αντίθεση με τα σύνθετα υλικά, η αντοχή σε αστοχία των FMLs είναι συγκρίσιμη με αυτή των συμβατικών κραμάτων αλουμινίου, (σε υψηλά επίπεδα κρουστικής ενέργειας παρατηρείται ο ίδιος τύπος βλάβης και παρόμοια πλαστική παραμόρφωση με αυτά). Η παραμόρφωση λόγω της κρούσης είναι ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα των FMLs, ειδικά όταν συγκρίνεται με διάφορα άλλα σύνθετα υλικά, καθώς η οπτική ένδειξη που υπάρχει, αυξάνει πάρα πολύ την ικανότητα σωστής επιθεώρησης και την δυνατότητα εντοπισμού της βλάβης. Έτσι η χρήση των FMLs επιτρέπει την χρήση επισκευαστικών κριτηρίων και τεχνικών [32],[33].

- Υψηλή ικανότητα απορρόφησης ενέργειας (δυσθραυστότητα). Μελέτες που έχουν γίνει [34],[35] έχουν αποδείξει ότι τα FMLs διαθέτουν μεγάλη ικανότητα απορρόφησης ενέργειας λόγω της τοπικής θραύσης των ινών, και της διατμητικής αστοχίας (αποκολλήσεις) ανάμεσα στις στρώσεις.

### β. Φυσικές ιδιότητες

- Χαμηλή πυκνότητα. Χάρη στην εποξική μήτρα και στα χαμηλής πυκνότητας φύλλα αλουμινίου, τα FMLs αποτελούν ένα **ελαφρύ δομικό υλικό** σε σύγκριση με άλλα συμβατικά υλικά [69].

#### γ. Ανθεκτικότητα

- Εξαιρετική αντίσταση στην υγρασία. Η απορρόφηση υγρασίας είναι βραδύτερη στα FMLs σε σχέση με τα λοιπά πολυμερικά σύνθετα υλικά, ακόμα και σε πολύ ακραίες συνθήκες λόγω των εξωτερικών στρώματων αλουμινίου που λειτουργούν ως φράγμα παρεμποδίζοντας την υγρασία να εισχωρήσει στο εσωτερικό του υλικού. Επιπλέον τα προεμποτισμένα στρώματα είναι ικανά να δράσουν ως εμπόδια στη υγρασία ανάμεσα στα λοιπά στρώματα αλουμινίου εντός του FML [11].

- Εξαιρετική αντίσταση σε διάβρωση. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η εξαιρετική άνθυγρη συμπεριφορά των FMLs, σε συνδυασμό με τη μεγάλη αντίσταση σε διάβρωση που διαθέτουν οι πολυμερικές προεμποτισμένες στρώσεις ινών, τα καθιστούν πολύ ανθεκτικά σε διαβρωτικά περιβάλλοντα [11],[32],[36],[69].

- Καθυστερήση στο ρυθμό υποβάθμισης υλικού. Τα FMLs έχουν εξαιρετική (όπως προαναφέρθηκε) αντοχή στην υγρασία, και στη διάβρωση, οπότε η υποβάθμιση των ιδιοτήτων του υλικού ως αποτέλεσμα των περιβαλλοντικών συνθηκών είναι πολύ βραδύτερη σε σχέση με την αντίστοιχη των μεταλλικών ή κλασσικών σύνθετων υλικών [10].

#### δ. Ασφάλεια

- Αντοχή στη φωτιά. Το υψηλό σημείο τήξης των ινών των FMLs, αποτρέπει την εισχώρηση της φωτιάς στα εσωτερικά στρώματα του υλικού π.χ. οι ίνες γυαλιού στα πολυστρωματικά υλικά GLARE μπορούν να αντέξουν σε θερμοκρασίες μέχρι τους 1100°C. Κατά συνέπεια, η αντοχή σε φλόγα των FMLs είναι κατά πολύ καλύτερη σε σχέση με τα μονολιθικά κράματα αλουμινίου, και εξαρτάται από το σημείο τήξης των ινών που το αποτελούν. Πλέον πολλά FMLs χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της ατράκτου διαφόρων αεροσκαφών. Με την πολύ καλή συμπεριφορά τους απέναντι στη φλόγα, τα FMLs παρέχουν για παράδειγμα τον απαιτούμενο χρόνο (90sec) για την ασφαλή εκκένωση του αεροσκάφους από τους επιβάτες [32],[37].

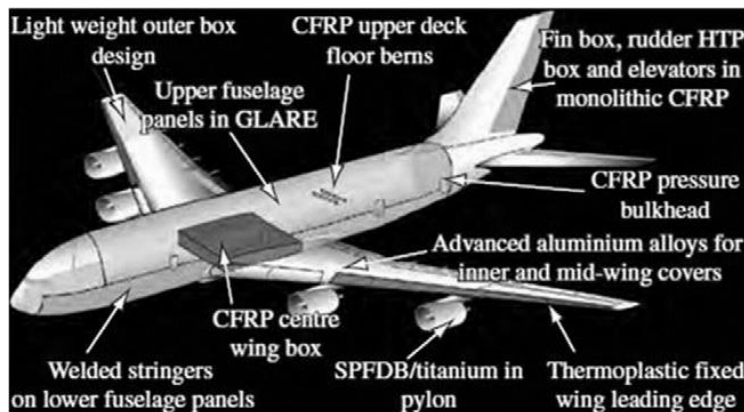
#### ε. Μειώνουν τα κόστη

- Η χρήση FMLs σε μια κατασκευή παρέχει δραστική μείωση του βάρους αυτής σε σχέση με τη χρήση συμβατικών μεταλλικών κραμάτων. Επιπλέον, ο αριθμός των εξαρτημάτων που απαιτούνται για να συνθέσουν μία κατασκευή μπορεί να είναι πολύ λιγότερος σε σύγκριση με αυτών που θα απαιτούνταν αν η κατασκευή αποτελούνταν από συμβατικά μεταλλικά υλικά. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μείωση των εξόδων παραγωγής, που σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να αντισταθμίσει την υψηλή αρχική τιμή που έχουν επί του παρόντος τα FMLs.

- Χάρη στην υψηλή αντοχή σε κόπωση των FMLs, οι κατασκευές που είναι φτιαγμένες από αυτά χρειάζονται λιγότερες επισκευές, ενώ τα διαστήματα

επιθεώρησης και οι κύκλοι συντήρησης αμβλύνονται. Αυτά τα πλεονεκτήματα μειώνουν δραστικά τα έξοδα συντήρησης [69].

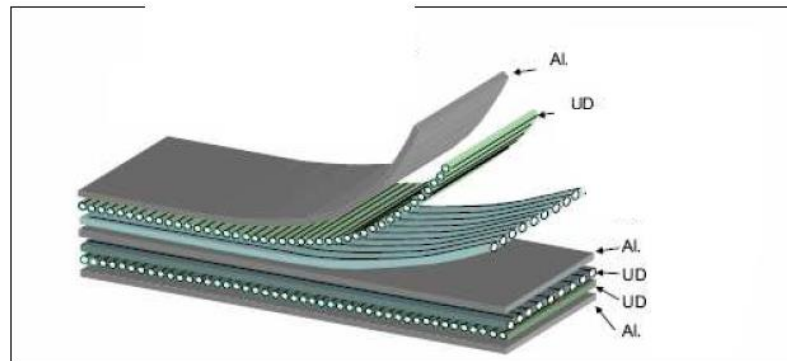
Κατόπιν των ανωτέρω καθίσταται σαφές ότι τα FMLs είναι κατάλληλα για χρήση σε πληθώρα εφαρμογών, και, ειδικά, σε αεροναυπηγικές κατασκευές. Ένας μεγάλος αριθμός βιομηχανιών έχουν επενδύσει στην αντικατάσταση των παραδοσιακών κραμάτων αλουμινίου με FMLs [10]. Σε σύγχρονα αεροσκάφη συναντώνται σε πολλές εφαρμογές υλικά όπως το ARALL και το GLARE, π.χ. στο Airbus A380 [71]. Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζονται τα μέρη του Airbus A380 στα οποία χρησιμοποιούνται FMLs [70],[38].



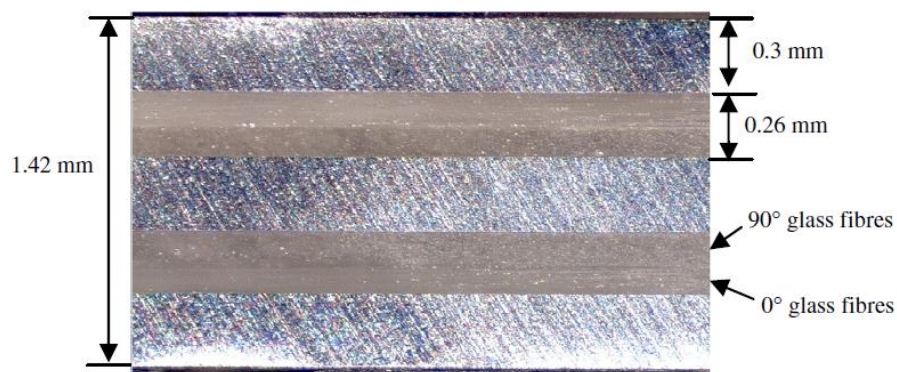
Σχήμα 1. 6: Τμήματα του Airbus A380 κατασκευασμένα από FML υλικό

## 1.5 Υλικό GLARE (GLASS REinforced FML) [3,4]

Το GLARE όπως έχει ήδη αναφερθεί, αποτελείται από διαδοχικές εναλλασσόμενες στρώσεις λεπτών πλακών αλουμινίου (Al) και λεπτών στρώσεων σύνθετου υλικού [3]. Το **αλουμίνιο** είναι, συνήθως, κράματος **2024-T3**. Οι στρώσεις του σύνθετου υλικού είναι ενισχυμένες κατά τη μία κατεύθυνση (UD) η κάθε μία με **ίνες γυαλιού**, συνήθως τύπου S2-glass. Η μήτρα αποτελείται από εποξική ρητίνη. Οι στρώσεις αλουμινίου και σύνθετου υλικού είναι κολλημένες μεταξύ τους με ειδική κόλλα σχηματίζοντας έτσι το πολύστρωτο υλικό. Στα σχήματα 1.7 και 1.8 απεικονίζεται η τυπική δομή ενός πολύστρωτου GLARE το οποίο αποτελείται από τρεις στρώσεις αλουμινίου (γκρι χρώμα-Σχήμα 1.7) και τέσσερις στρώσεις σύνθετου υλικού (πράσινο και μπλε χρώμα-Σχήμα 1.7). Το GLARE δύναται να προκύψει σε πλήθος συνδυασμών ανάλογα με τον αριθμό στρώσεων αλουμινίου και στρώσεων σύνθετου υλικού, τον προσανατολισμό των ινών, αλλά και των παχών των στρώσεων. Οι ιδιότητες του τελικού πολύστρωτου GLARE εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από όλες αυτές τις παραμέτρους.



**Σχήμα 1. 7:** Σχηματική απεικόνιση της δομής του GLARE [3]



**Σχήμα 1. 8:** Διαστρωμάτωση του Glare 3

Καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των μηχανικών ιδιοτήτων του GLARE διαδραματίζουν οι μηχανικές ιδιότητες των υλικών που το αποτελούν, δηλαδή του αλουμινίου και του ενισχυμένου με ίνες γυαλιού, σύνθετου υλικού. Το αλουμίνιο είναι ελαφρύ κράμα και προσφέρεται για διαμόρφωση με πλαστική παραμόρφωση χάρη στην κρυσταλλική δομή κυβικού εδροκεντρωμένου τύπου που διαθέτει. Έτσι, μπορεί να παραχθεί σε μορφή πλακών για διάφορες χρήσεις. Στον Πίνακα 1.1 αναγράφονται οι βασικές μηχανικές ιδιότητες του κράματος αλουμινίου 2024-T3 [55]. Το σύνθετο υλικό είναι, επίσης, ελαφρύ και οι ενισχυτικές ίνες γυαλιού που διαθέτει προσφέρουν στο GLARE υψηλή αντοχή κατά τη διεύθυνσή τους και συμβάλλουν στη βελτίωση σημαντικών μηχανικών ιδιοτήτων του όπως η αντοχή σε κόπωση και κρούση. Στον Πίνακα 1.2 αναγράφονται οι βασικές μηχανικές ιδιότητες στρώσης σύνθετου υλικού με μήτρα εποξικής ρητίνης και ίνες S2-glass UD [55].

**Πίνακας 1. 1:** Στατικές μηχανικές ιδιότητες αλουμινίου 2024 T3 [55]

Parameter	Notation	2024 T3 Aluminium alloy
Density [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho$	2770

Poisson's ratio	$\nu$	0,33
Young's modulus [GPa]	E	73,084
Static yield limit [MPa]	A	369
Strain hardening modulus [MPa]	B	684
Strain hardening exponent	n	0,73
Strain rate coefficient	C	0,0083

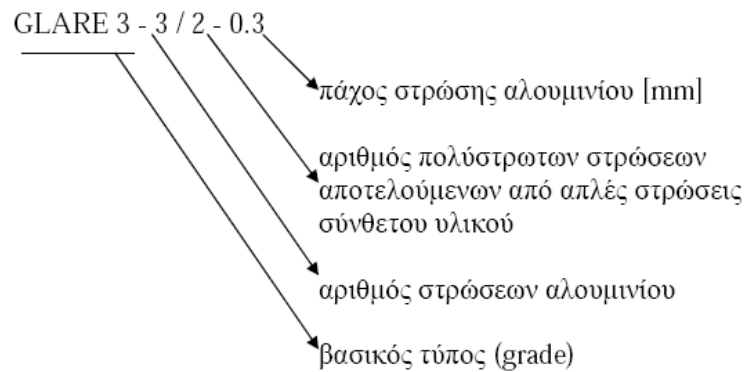
**Πίνακας 1. 2:** Οι ιδιότητες των στρώσεων του σύνθετου ινώδους μονοκατευθυντικού υλικού (Unidirectional S2 Glass/epoxy prepreg layers) [55]

Parameter	Notation	UD S2-glass epoxy prepreg
Density [ $\text{kg/m}^3$ ]	$\rho$	2000
Poisson's ratio	PRBA ( $\nu_{21}$ )	0,0575
	PRCA ( $\nu_{31}$ )	0,0575
	PRCB ( $\nu_{32}$ )	0,33
Young's modulus [GPa]	EA ( $E_1$ )	54
	EB ( $E_2$ )	9,4
	EC ( $E_3$ )	9,4
Shear modulus [GPa]	GAB ( $G_{12}$ )	5,6
	GBC ( $G_{23}$ )	5,6
	GCA ( $G_{31}$ )	5,6
Shear strength [MPa]	SC	76
Longitudinal tensile strength [MPa]	XT	1900
Transverse tensile strength [MPa]	YT	57
Transverse compressive strength [MPa]	YC	285

### 1.5.1 Ονοματολογία και βασικοί τύποι του GLARE

Δεδομένου ότι το GLARE είναι δυνατό να κατασκευασθεί σε πολλές εκδοχές, με διαφορετικό αριθμό στρώσεων αλουμινίου, διαφορετικό κράμα αλουμινίου, διαφορετικό αριθμό στρώσεων σύνθετου υλικού, διαφορετικό τύπο γυάλινων ενισχυτικών ινών, διαφορετικό προσανατολισμό των ενισχυτικών ινών και διαφορετικό πάχος στρώσεων, έχει καθιερωθεί ένα σύστημα ονοματολογίας με το οποίο ορίζονται οι βασικότερες από τις παραμέτρους αυτές. Για παράδειγμα, αν το πολύστρωτο GLARE του Σχήματος 1.9 έχει πάχος κάθε στρώσης αλουμινίου 0,3 mm, τότε αυτό ονομάζεται GLARE 3 - 3 / 2 - 0,3.





**Σχήμα 1. 9:** Ονοματολογία του GLARE [3]

Παραδείγματα :

α. GLARE 3 - 3 / 2 – 0,3 έχει την παρακάτω αλληλουχία στρώσεων:  
 [2024-T3 / 0° glass / 90° glass / 2024-T3 / 90° glass / 0° glass / 2024-T3]

β. GLARE 5 - 3 / 2 – 0,292 έχει την παρακάτω αλληλουχία στρώσεων:  
 [2024-T3 / 0° glass / 90° glass / 90° glass / 0° glass / 2024-T3 / 0° glass / 90° glass / 90° glass / 0° glass / 2024-T3 ]

### 1.5.2 Κατασκευή του GLARE

Το πολυστρωματικό GLARE μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να αξιοποιηθεί σε ένα μεγάλο εύρος διαφορετικών εφαρμογών, μεταβάλλοντας ορισμένους παράγοντες, όπως το σύστημα ίνας/ρητίνης, τον τύπο του κράματος, το πάχος του κράματος, την ακολουθία των διαστρωματώσεων, τον προσανατολισμό των προεμποτισμένων ινών, και τη τεχνική κατεργασίας των επιφανειών [40]. Η πυκνότητα του GLARE εξαρτάται από το σχετικό πάχος των φύλλων αλουμινίου, καθώς και από το ογκομετρικό ποσοστό των ινών στο υλικό. Σε όλες τις περιπτώσεις η πυκνότητά του είναι το λιγότερο 8% μικρότερη από την αντίστοιχη πυκνότητα του κράματος αλουμινίου.

Το GLARE κατασκευάζεται με συγκόλληση απλών φύλλων μετάλλου (unclad) με προεμποτισμένες ίνες γυαλιού, χρησιμοποιώντας πίεση, ή με ποιοτικότερο τρόπο εντός θαλάμου autoclave. Προτού πραγματοποιηθεί το στάδιο της συγκόλλησης, έχει προηγηθεί το βασικής σημασίας ενδιάμεσο στάδιο της ειδικής κατεργασίας των επιφανειών των φύλλων του αλουμινίου, έτσι ώστε να αυξηθεί η ποιότητα της συμπαγούς ενώσεως με τις προεμποτισμένες ίνες. Η συγκεκριμένη διαδικασία περιλαμβάνει καθαρισμό σε αλκαλικό διάλυμα, εμβάπτιση σε χρωμικό-σουλφορικό οξύ, ανοδίωση σε χρωμικό οξύ, και επικάλυψη με BR-127, το οποίο αποτελεί ένα τροποποιημένο εποξικό-φαινολικό συστατικό επίστρωσης με αντιδιαβρωτικές ιδιότητες [67], [40]. Το σύστημα συγκόλλησης κατά το οποίο οι ίνες επικολλούνται στα φύλλα αλουμινίου, σχηματίζοντας ένα συμπαγές νέο

πολύστρωτο σώμα, είναι ζωτικής σημασίας για την ποιότητα και την απόδοση του τελικού προϊόντος.

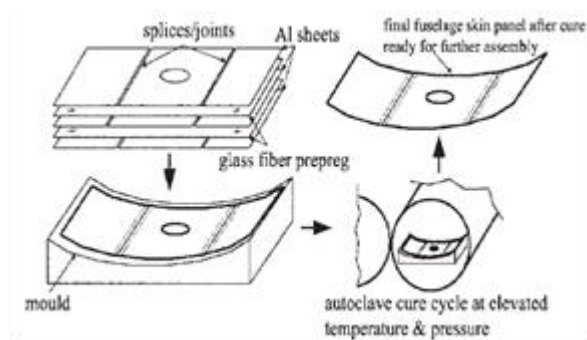
Οι στρώσεις αλουμινίου έχουν πάχος, το οποίο κυμαίνεται από 0,2mm έως 0,5mm για κράματα αλουμινίου 2024-T3 και από 0,3 mm έως 0,4 mm για κράματα αλουμινίου 7475-T761 [48]. Το πάχος κάθε απλής στρώσης σύνθετου υλικού εξαρτάται από τη διαδικασία παραγωγής με συνήθη τιμή 0,13 mm. Εκτός από το συνήθη τύπο S2-glass, οι ενισχυτικές ίνες γυαλιού μπορεί να είναι και τύπου R-glass. Στον Πίνακα 1.3 αναγράφονται κατασκευαστικές λεπτομέρειες για τους έξι (6) βασικούς τύπους GLARE που είναι διαθέσιμοι στο εμπόριο [48], [49]. Στους βασικούς τύπους GLARE, όλες οι στρώσεις αλουμινίου διατάσσονται έτσι ώστε οι διευθύνσεις έλασης να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. **Ο προσανατολισμός 0° συμπίπτει με τη διεύθυνση έλασης.** Όλοι αυτοί οι βασικοί τύποι GLARE έχουν συμμετρική αλληλουχία στρώσεων, εκτός από το GLARE 3 και το GLARE 6 όταν αυτά αποτελούνται από άρτιο αριθμό στρώσεων αλουμινίου.

**Πίνακας 1. 3: Βασικοί τύποι GLARE [3]**

Βασικός τύπος GLARE	Έκδοχή	Κράμα αλουμινίου	Προσανατολισμός ινών κάθε στρώσης	Πλεονεκτήματα
GLARE 1		7475-T761	0°/0°	αντοχή σε κόπωση, υψηλή τάση διαρροής, αντοχή σε 0°
GLARE 2	GLARE 2A	2024-T3	0°/0°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 0°
	GLARE 2B	2024-T3	90°/90°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 90°
GLARE 3		2024-T3	0°/90°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε κρούση
GLARE 4	GLARE 4A	2024-T3	0°/90°/0°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 0°
	GLARE 4B	2024-T3	90°/0°/90°	αντοχή σε κόπωση, αντοχή σε 90°
GLARE 5		2024-T3	0°/90°/90°/0°	αντοχή σε κρούση
GLARE 6	GLARE 6A	2024-T3	45°/-45°	αντοχή σε διάτμηση, καλές ιδιότητες εκτός αξόνων
	GLARE 6B	2024-T3	-45°/45°	αντοχή σε διάτμηση, καλές ιδιότητες εκτός αξόνων

Το GLARE μπορεί να παραχθεί είτε σε ημιτελή κατάσταση, με τη μορφή, δηλαδή, φύλλων πολυστρωματικού υλικού, είτε στην τελική σχηματοποιημένη μορφή της κατασκευής, εφόσον η διαδικασία σκλήρυνσης-ωρίμανσης της όλης

κατασκευής έχει πραγματοποιηθεί εντός του θαλάμου autoclave (π.χ. μεγάλα πάνελ με μεγάλες καμπυλότητες, που φέρουν πάνω τους και δευτερεύουσες κατασκευές όπως αρμοκαλύπτρες, ενισχύσεις ακαμψίας κτλ). Επιπλέον η κατασκευή του GLARE με τη μέθοδο των αρμών (spliced laminates) [67], επιτρέπει την παραγωγή πολύ μεγάλων σε διαστάσεις πάνελ, σε σύγκριση με τις συμβατικές κατασκευές αλουμινίου [43], ενώ ο μόνος περιορισμός για το μέγεθος της κατασκευής, ουσιαστικά, αποτελεί το μέγεθος του θαλάμου autoclave στον οποίο θα πρέπει να χωράει η υπόψη κατασκευή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.10.



**Σχήμα 1. 10:** Κατασκευή πάνελ μεγάλων διαστάσεων με τη μέθοδο των αρμών

### 1.5.3 Μηχανικές ιδιότητες του GLARE

#### Συμπεριφορά σε εφελκυσμό[40]

Τυπικά, το πολυστρωματικό υλικό GLARE παρουσιάζει μία ανελαστική συμπεριφορά σε εφελκυστική καταπόνηση λόγω της πλαστικοποίησης που συμβαίνει στα στρώματα του αλουμινίου. Η χαρακτηριστική συμπεριφορά διαφόρων τύπων GLARE σε εφελκυστική, εγκάρσια και διαμήκη καταπόνηση (που αποτυπώνεται από τα μεγέθη: μέτρο ελαστικότητας, τάση διαρροής, τάση θραύσης και παραμόρφωση θραύσης) καθώς και η σύγκρισή τους με την αντίστοιχη συμπεριφορά των αλουμινίων 2024-T3 και 7075-T76 φαίνεται στον Πίνακα 1.4. Το μέτρο ελαστικότητας όλων των τύπων GLARE προκύπτει να είναι μικρότερο σε σχέση με το μονολιθικό κράμα αλουμινίου εξαιτίας του χαμηλότερου μέτρου ελαστικότητας των προεμποτισμένων ινών. Είναι προφανές ότι οι τύποι GLARE με όλες τις ίνες προσανατολισμένες σε μία κατεύθυνση, παρουσιάζουν ισχυρή εξάρτηση των ιδιοτήτων τους σε συνάρτηση με τον προσανατολισμό. Η χρήση των διασταυρούμενων προεμποτισμένων ινών ανάμεσα στα φύλλα αλουμινίου δημιουργούν πολυστρωματικά με όμοιες ιδιότητες σε όλες τις κατευθύνσεις. Ως εκ τούτου η **αντοχή σε εφελκυσμό ενός πολυστρωματικού GLARE με σταυρωτές στρώσεις ινών (π.χ. το GLARE 3) είναι μακράν ανώτερη εν συγκρίσει με την αντίστοιχη αντοχή του κράματος αλουμινίου, σε οποιαδήποτε κατεύθυνση.**

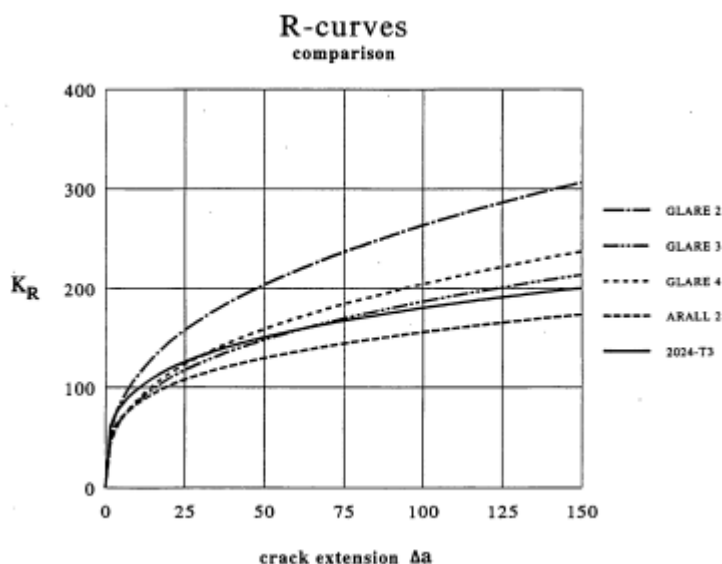
**Πίνακας 1. 4:** Εφελκυστικές ιδιότητες πολυστρωματικών GLARE και κραμάτων αλουμινίου

Στρώσεις	Τάση θραύσης (MPa)		Τάση διαρροής (MPa)		Μέτρο Young (GPa)		Παραμόρφωση θραύσης (%)	
	διαμήκης	εγκάρσια	διαμήκης	εγκάρσια	διαμήκη	εγκάρσια	διαμήκης	εγκάρσια
<b>GLARE 1</b>								
3/2	1,282	352	545	333	65	50	4.2	7.7
2/1	1,077	436	525	342	66	54	4.2	7.7
<b>GLARE 2</b>								
3/2	1,214	317	360	228	66	50	4.7	10.8
2/1	992	331	347	244	67	55	4.7	10.8
<b>GLARE 3</b>								
3/2	717	716	305	283	58	58	4.7	4.7
2/1	662	653	315	287	60	60	4.7	4.7
<b>GLARE 4</b>								
3/2	1,027	607	352	255	57	50	4.7	4.7
2/1	843	554	321	250	60	54	4.7	4.7
<b>GLARE 5</b>								
2/1	683	681	297	275	59	59	4.7	4.7
2024-T3	455	448	359	324	72	72	19	19
7075-T76	545	545	476	476	69	69	13	13

Ο μηχανισμός αστοχίας ενός υλικού GLARE είναι αρκετά περίπλοκος καθώς εμπλέκονται και ενυπάρχουν, ταυτόχρονα, πολλαπλοί τύποι θραύσης κατά τη διαδικασία της αστοχίας, όπως ρωγμές στην μήτρα, αποκόλληση ανάμεσα στις ίνες και στη μήτρα, θραύση ινών, αστοχία λόγω διάτμησης στη διεπιφάνεια ινών μήτρας, και εσωτερική αποκόλληση ανάμεσα στις στρώσεις των προεμποτισμένων ινών. Κατά τη διάρκεια διαμήκους εφελκυστικής καταπόνησης, συνήθως, παρατηρείται θραύση ινών, και αστοχία λόγω διάτμησης στη διεπιφάνεια ινών μήτρας. Αντίστοιχα, σε εγκάρσια εφελκυστική καταπόνηση, συνήθως, παρατηρείται αστοχία της μήτρας, και αποκόλληση της διεπιφάνειας ανάμεσα στις ίνες και στη μήτρα.

#### Συμπεριφορά στη θραύση του GLARE

Η συμπεριφορά διαφόρων τύπων του GLARE στην αντίσταση ανάπτυξης και διάδοσης των ρωγμών υπό κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας έχει μελετηθεί σε μεγάλο εύρος προωγματομένων δοκιμών με κεντρικές ρωγμές [44,56]. Στο Σχήμα 1.11 φαίνεται η αντοχή στη θραύση όπως καθορίζεται από τις καμπύλες αντίστασης στην ανάπτυξη ρωγμών (μέθοδος R-curve) [56]. Τα αποτελέσματα δείχνουν σαφή ανωτερότητα του GLARE όσον αφορά στη συμπεριφορά σε θραύση σε σχέση με το κράμα αλουμινίου 2024-T3.

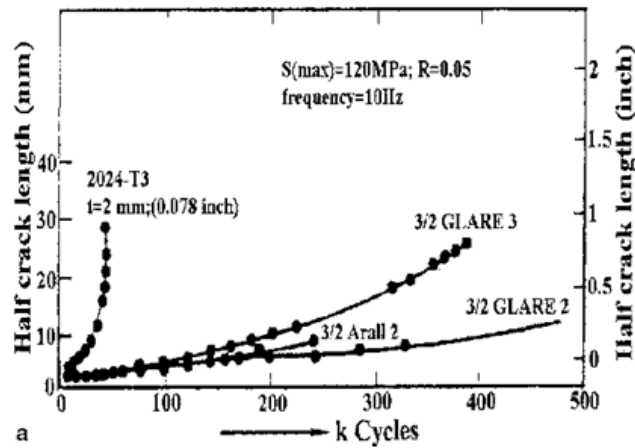


**Σχήμα 1. 11:** Καμπύλες αντίστασης στην ανάπτυξη των ρωγμών (R-curves)

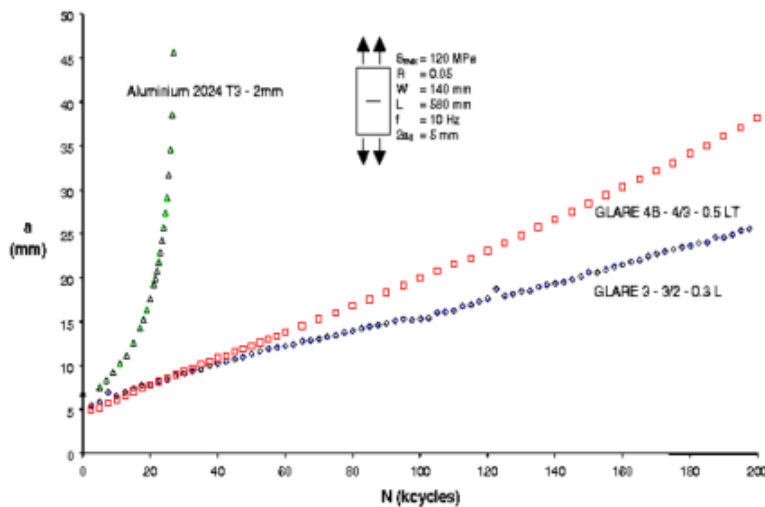
#### Συμπεριφορά του GLARE στο φαινόμενο της κόπωσης

Οι ιδιότητες του GLARE στο φαινόμενο της κόπωσης έχουν, εκτενώς, διερευνηθεί και μελετηθεί από διάφορους επιστήμονες [45,46,47,48]. Γενικά το GLARE παρουσιάζει εξαιρετική συμπεριφορά σε φορτία κόπωσης. Στο Σχήμα 1.12 συγκρίνεται η διάδοση ρωγμής σε δοκίμια GLARE 2 - 3 / 2 και GLARE 3 - 3 / 2 - 0.3 με τη διάδοση ρωγμής σε αλουμίνιο κράματος 2024-T3 [40]. Αντίστοιχα, στο Σχήμα 1.13 συγκρίνεται η διάδοση ρωγμής σε δοκίμια GLARE 4B - 4 / 3 -0.5 και GLARE 3 - 3 / 2 - 0.3 με τη διάδοση ρωγμής σε αλουμίνιο κράματος 2024-T3 [50], [51]. Είναι ευδιάκριτο ότι σε αντίθεση με το αλουμίνιο στο οποίο ο ρυθμός διάδοσης ρωγμής αυξάνει απότομα με την αύξηση του μήκους της ρωγμής, στο GLARE παραμένει σχεδόν, σταθερός. Είναι χαρακτηριστικό ότι **το GLARE παρουσιάζει από 10 μέχρι 100 φορές μικρότερους ρυθμούς διάδοσης ρωγμής σε σύγκριση με το αλουμίνιο**. Αυτό οδηγεί τελικά σε πολύ μεγαλύτερη διάρκεια ζωής σε κόπωση. Ο κατακόρυφος άξονας στα Σχήματα 1.12 και 1.13 αντιστοιχεί στο μισό του μήκους της ρωγμής [mm] και ο οριζόντιος στον αριθμό εναλλαγών φόρτισης [χιλιάδες κύκλους φόρτισης]. Παρατηρείται ότι για το ίδιο μήκος ρωγμής απαιτείται πολύ μεγαλύτερος αριθμός εναλλαγών φόρτισης στα δοκίμια GLARE συγκριτικά με το

δοκίμιο του αλουμινίου. Επίσης, οι ρυθμοί διάδοσης ρωγμής στα δοκίμια GLARE, δηλαδή, οι κλίσεις των πειραματικών καμπυλών είναι σημαντικά μικρότερες από το ρυθμό διάδοσης ρωγμής στο αλουμίνιο.



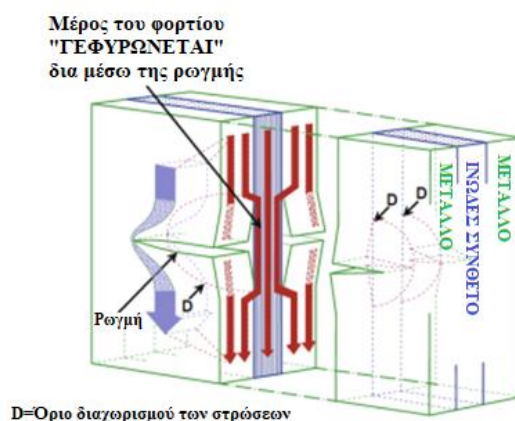
Σχήμα 1. 12: Διάδοση ρωγμής λόγω κόπωσης σε GLARE και Al



Σχήμα 1. 13: Διάδοση ρωγμής λόγω κόπωσης σε δοκίμια GLARE και Al

Η μείωση του ρυθμού διάδοσης των ρωγμών στο GLARE οφείλεται στην ύπαρξη των ινών στις στρώσεις του σύνθετου υλικού. Οι ίνες δεν επηρεάζονται από φορτία κόπωσης σε αντίθεση με τις μεταλλικές στρώσεις αλουμινίου στις οποίες εκκινούν και διαδίδονται οι ρωγμές. Παραμένοντας άθικτες, μεταφέρουν φορτίο στην περιοχή της ρωγμής παρακάμπτοντάς την όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.14, ενώ, ταυτόχρονα, περιορίζουν το άνοιγμα της ρωγμής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **ινώδης γεφύρωση (fiber bridging)** και προκαλεί τη μείωση του ρυθμού διάδοσης των ρωγμών [48], [50], [51].

Επιπλέον, όμως, με τη γεφύρωση των ινών, καθώς η ρωγμή διαδίδεται στο GLARE, παρουσιάζεται αποχωρισμός μεταξύ των στρώσεων αλουμινίου και των στρώσεων του σύνθετου υλικού κατά μήκος της ρωγμής. Αυτό προκαλείται εξαιτίας των διατμητικών τάσεων που προκύπτουν από τη μεταφορά φορτίου από το αλουμίνιο στο σύνθετο υλικό. Η συμπεριφορά του GLARE σε κόπωση μπορεί να αλλάξει εφόσον μεταβληθεί η αντίσταση στον αποχωρισμό των στρώσεων, η οποία εξαρτάται από το σύνθετο υλικό και την κόλλα που χρησιμοποιείται για τη σύνδεση των στρώσεων. Αύξηση της αντίστασης αυτής συνεπάγεται καλύτερη ινώδη γεφύρωση η οποία οδηγεί σε χαμηλότερο ρυθμό διάδοσης των ρωγμών στις μεταλλικές στρώσεις. Υπερβολική όμως αύξηση της αντίστασης στον αποχωρισμό των στρώσεων προκαλεί πολύ υψηλές τάσεις στις στρώσεις του σύνθετου υλικού με αποτέλεσμα τη θραύση των ινών.



**Σχήμα 1. 14:** Το φαινόμενο της γεφύρωσης των ινών στο GLARE

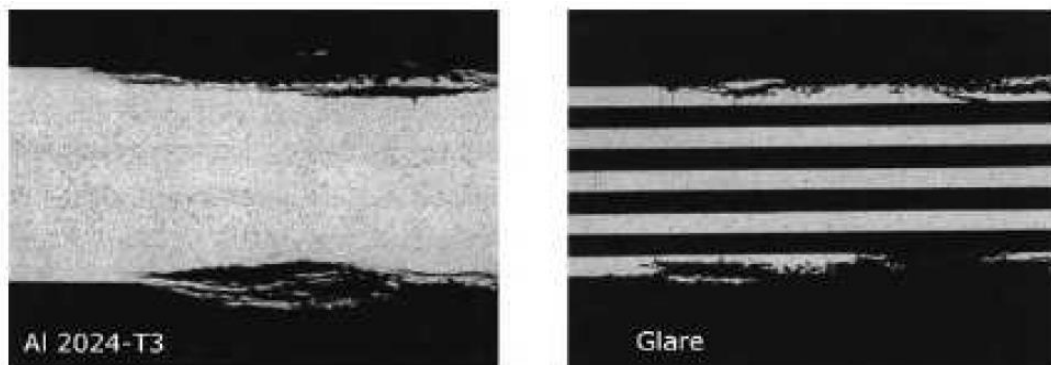
### Συμπεριφορά του GLARE στις περιβαλλοντικές συνθήκες

Στα υλικά GLARE υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία που διερευνά την αντοχή τους και ειδικότερα την υποβάθμιση της δομικής τους ακεραιότητας σε περιβαλλοντικές συνθήκες, όσον αφορά στην απορρόφηση υγρασίας, και στην αντίσταση σε διάβρωση [52], [53], [54]. Όπως συμβαίνει σε όλα τα ινώδη πολυμερή σύνθετα, οι στρώσεις των προεμποτισμένων ινών γυαλιού που χρησιμοποιούνται στη δομή του GLARE είναι, επίσης, ευπαθείς στην απορρόφηση υγρασίας, ενώ καταλυτικό ρόλο σε αυτήν κατέχουν η θερμοκρασία και η ατμοσφαιρική υγρασία. Παρόλα αυτά, όμως, η ύπαρξη των εξωτερικών (αλλά και των ενδιάμεσων) φύλλων αλουμινίου διαδραματίζουν έναν ισχυρό ανασταλτικό ρόλο που περιορίζει δραστικά την εισχώρηση και την απορρόφηση, εν γένει, της υγρασίας από το σύνθετο υλικό.

Η ύπαρξη υγρασίας εντός των στρώσεων προεμποτισμένων ινών γυαλιού αυξάνει, σημαντικά, την ευκολία αποκόλλησης των στρωμάτων των προεμποτισμένων ινών με τα φύλλα του μετάλλου. Οι επιπτώσεις γίνονται περισσότερο δυσμενείς στην περίπτωση αποσταγμένου νερού ή στην περίπτωση

υδατικού διαλύματος άλατος, απ' ότι στον ατμοσφαιρικό αέρα που φέρει υψηλή συγκέντρωση υγρασίας, ενώ η δριμύτητα των επιπτώσεων αυξάνεται περαιτέρω με την άνοδο της θερμοκρασίας [53]. Συνεπώς, ιδιότητες όπως ο χαμηλός ρυθμός ανάπτυξης και διάδοσης των ρωγμών, ή όπως η υψηλή παραμένουσα αντοχή, υποβαθμίζονται ραγδαία.

Γενικά, **το πολυστρωματικό GLARE διαθέτει εξαιρετική αντίσταση στη διάβρωση**, καθώς όλα τα φύλλα αλουμινίου που συμμετέχουν στη δομή του, έχουν υποστεί ανοδίωση, και έχουν ασταρωθεί με ειδική επίστρωση αντιδιαβρωτικού συστατικού, πριν το στάδιο της επικόλλησης των στρώσεων. Η διάβρωση εντός του πάχους του GLARE αναστέλλεται λόγω της παρουσίας των ενδιάμεσων στρωμάτων ινών-εποξικής ρητίνης που, ουσιαστικά, δρα ως αδιαπέραστο εμπόδιο στη διάδοση της διάβρωσης.



*Σχήμα 1. 15: Σύγκριση διάβρωσης των Al 2024-T3 & GLARE*

Διάφορα πειράματα επιταχυνόμενης διάβρωσης που πραγματοποιήθηκαν σε δοκίμια υλικού GLARE, απέδειξαν ότι το φαινόμενο της διάβρωσης εντοπίζεται μόνο στα εξωτερικά φύλλα αλουμινίου (0.4mm πάχους). Η αντίσταση στη διάδοση της διάβρωσης του υλικού GLARE με λεπτά φύλλα αλουμινίου κράματος 2024-T3, βρέθηκε να είναι ανώτερη της αντίστοιχης με δεκαπλάσιου πάχους πάνελ (4mm πάχους) του ίδιου κράματος 2024-T3 [54], όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.15. Προβλήματα λόγω του φαινομένου της διάβρωσης υπό εντατική καταπόνηση δεν παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια σχετικών πειραμάτων που πραγματοποιήθηκαν σε δοκίμια GLARE.

#### Αντοχή του GLARE στη φλόγα

**Η αντίσταση του GLARE στην φλόγα είναι κατά πολύ ανώτερη σε σχέση με την αντίστοιχη που έχει το μονολιθικό αλουμίνιο [51].** Ο χρόνος έναρξης της τήξης των σημερινών ατράκτων των αεροσκαφών που είναι κατασκευασμένες από αλουμίνιο, προβλέπεται να είναι 20-30 sec σε περίπτωση εξωτερικής πυρκαγιάς από κηροζίνη. Συνεπώς, οι επιβάτες πρόκειται να εκτεθούν σε αυτές τις θερμοκρασίες καθώς σύμφωνα με τις αρχές αξιοπλοϊμότητας των αεροσκαφών ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για την διαφυγή των επιβατών είναι 90sec.



Το GLARE έχει αποδειχτεί ότι δύναται να αντέξει σε αντίστοιχο θερμοκρασιακό περιβάλλον για πολύ μεγαλύτερους χρόνους. Οι ίνες γυαλιού που έχουν πολύ υψηλή θερμοκρασία τήξης προστατεύουν το δεύτερο στρώμα αλουμινίου για ένα σημαντικό χρονικό διάστημα, προσφέροντας στο παράδειγμα του αεροσκάφους τον αναγκαίο χρόνο στους επιβάτες για ασφαλή διαφυγή. Στα ενισχυμένα με ίνες γυαλιού σύνθετα υλικά, παρόλο που η μήτρα λιώνει ή καίγεται, οι ίνες παραμένουν άθικτες ακόμα και σε θερμοκρασίες 1100°C δημιουργώντας ένα φράγμα πυρός.

Η εξαιρετική αντοχή του GLARE σε φλόγα οφείλεται στον αποχωρισμό μεταξύ των στρώσεων που συμβαίνει λόγω της θερμότητας. Ο αποχωρισμός συμβάλλει στη σημαντική βελτίωση της θερμικής μόνωσης μεταξύ των στρώσεων. Κατά συνέπεια, ενώ η εξωτερική στρώση αλουμινίου λιώνει άμεσα, οι μεταλλικές στρώσεις πίσω από τις πρώτες στρώσεις σύνθετου υλικού (οι οποίες αποτελούν φράγμα πυρός λόγω των γυάλινων ινών τους) δεν λιώνουν και η θερμοκρασία στην πλευρά του GLARE που δεν φλέγεται παραμένει σε ανεκτά επίπεδα. Αυτή η συμπεριφορά του GLARE σε φλόγα εμποδίζει ταυτόχρονα και τη δομική κατάρρευση των κατασκευών σε συνθήκες πυρκαγιάς [3]. Παραδείγματα θερμικής καταπόνησης σε θερμοκρασίες των 1170°C σε δοκίμια GLARE φαίνονται στις εικόνες του Σχήματος 1.16 [47].



Σχήμα 1.16(α): Δοκίμιο GLARE πριν το τεστ



Σχήμα 1.16(β): Δοκίμιο GLARE μετά το τεστ



Σχήμα 1.16(γ): Λεπτομέρεια αποκόλλησης των στρώσεων GLARE μετά το τεστ.

Η εξαιρετική πυρίμαχη συμπεριφορά του GLARE σε συνδυασμό με την υψηλή αντοχή του σε κρούσεις του προσδίδουν **μεγάλη αντοχή σε φορτία λόγω εκρήξεων**

(blast loading) όπου σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα αναπτύσσονται ταυτόχρονα υψηλές θερμοκρασίες και μεγάλοι ρυθμοί μεταβολής των παραμορφώσεων. Μία από τις εφαρμογές που αξιοποιούν, κατάλληλα, τις συγκεκριμένες αυτές ιδιότητες του GLARE είναι η κατασκευή του αεροπορικού κοντέϊνερ ECOS-3 που φαίνεται στο Σχήμα 1.17 από την εταιρία Galaxy Scientific Corporation, το οποίο ολοκλήρωσε επιτυχώς τα τεστ εκρηκτικών της FAA (ομοσπονδιακή αρχή αξιοπλοϊμότητας της Αμερικής) το 1995, και έκτοτε έχει βγει σε παραγωγή για εμπορική χρήση σε επιβατικά αεροσκάφη.



*Σχήμα 1. 17: Το ECOS-3 πριν και μετά τα τεστ εκρηκτικών*

#### Αντοχή του GLARE στην κρούση

**Η αντοχή του GLARE καθώς και γενικά των FMLs στις κρούσεις** παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς **έχει αποδειχτεί ότι είναι πολύ ανώτερη σε σχέση με την αντίστοιχη των απλών σύνθετων υλικών** [6], [8], [12]. Όσον αφορά στο πολυστρωματικό GLARE το αρχικό ενδιαφέρον των επιστημόνων για την χρήση του επικεντρώνονταν στις πολύ βελτιωμένες ιδιότητες που αφορούν στην κόπωση, τελευταία, όμως, η χρήση του έχει επεκταθεί ραγδαία στην πολύ καλή συμπεριφορά του σε κρούση [7], σε σχέση με το μονολιθικό αλουμίνιο ίδιου βάρους. Αντίστοιχα προτερήματα του GLARE σχετικά με την κρουστική του αντοχή έχουν δημοσιευτεί από τους Hoo Fat [57] και αφορούν στις κρούσεις υψηλών ταχυτήτων. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε 15% αύξηση της βαλλιστικής αντοχής σε σύγκριση με την αντίστοιχη του κράματος αλουμινίου 2024 της ίδιας έκτασης πυκνότητας. Η υπόψη βελτιωμένη απόδοση αναμένεται να είναι ακόμα μεγαλύτερη σε FMLs θερμοπλαστικής βάσης σε κρούσεις υψηλών ταχυτήτων [58].

## **1.6 Λυγισμός πλακών από σύνθετο υλικό**

Ήδη από την δεκαετία του 1980 οι πολυστρωτες σύνθετες πλάκες χρησιμοποιούνταν, συχνά, σε δομικές εφαρμογές εξαιτίας των πλεονεκτημάτων που έχουν αναφερθεί σε προηγούμενη υποενότητα όπως η υψηλή ειδική αντοχή (αντοχή

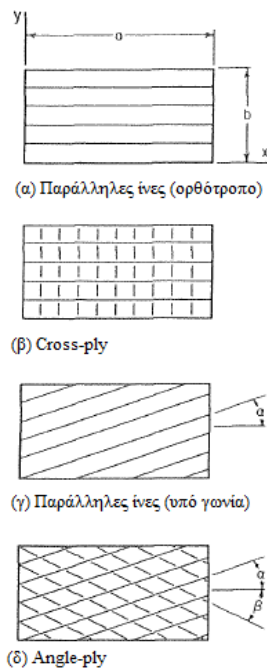
θραύσης ανά μονάδα μάζας) και η αυξημένη ειδική ακαμψία (ακαμψία ανά μονάδα μάζας). Όπως σε κάθε περίπτωση πλάκας η ύπαρξη συνεπίπεδων φορτίσεων μπορεί να προκαλέσει λυγισμό. Επομένως, **η ακριβής γνώση των κρίσιμων φορτίων λυγισμού και των ιδιομορφών τους**, όπως επίσης και η επακόλουθη μετά τον λυγισμό συμπεριφορά **είναι ουσιώδης** για μία αξιόπιστη χαμηλού βάρους δομική σχεδίαση [73].

Οι **πολύστρωτες** σύνθετες **πλάκες** αποτελούνται από στρώσεις ή στρώματα (plies ή laminates) και, συνήθως, κάθε στρώση αποτελείται από παράλληλες ίνες (όπως γυαλιού, βορονίου, γραφίτη κ.α.) τοποθετημένες σε μία μήτρα (εποξικής ρητίνης, μετάλλου κ.α.). Οι στρώσεις συνδέονται μεταξύ τους με μία ειδική κολλητική στρώση, το πάχος της οποίας είναι δυνατόν να είναι αμελητέο ή όχι σε σύγκριση με το πάχος της στρώσης. Στις περισσότερες θεωρητικές αναλύσεις φορτίων λυγισμού θεωρείται ότι η πλάκα αποτελείται εξολοκλήρου από στρώσεις οι οποίες έχουν ενωθεί ιδανικά κατά μήκος των οριακών επιπέδων και αγνοούνται οι επιδράσεις της χαμηλότερης ακαμψίας των κολλητικών στρώσεων. Κάθε στρώση σύνθετου υλικού μπορεί, μεμονωμένα, να θεωρηθεί ότι αποτελείται από ορθότροπο υλικό έχοντας τους κύριους άξονες παράλληλα και κάθετα στις ίνες. [73]

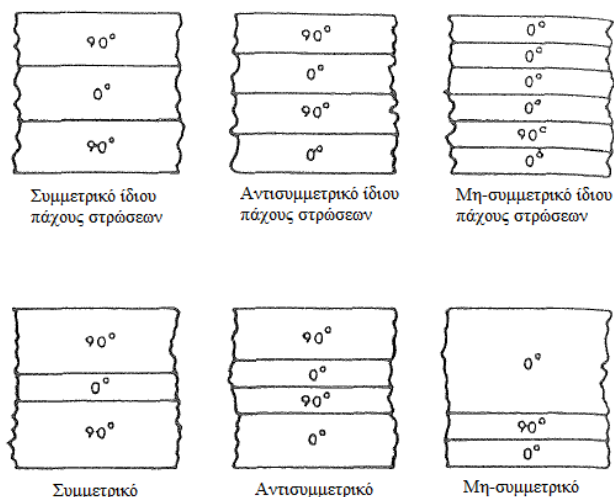
Εύλογα αντιλαμβάνεται κανείς ότι **υπάρχει μεγάλη ποικιλία** όσον αφορά **στο σχηματισμό πλακών εξαιτίας της δυνατότητας διαφορετικής ευθυγράμμισης των ινών** μιας στρώσης με τα σύνορα της πλάκας και με τις γειτονικές στρώσεις. Μερικά τέτοια παραδείγματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.18 όπου κάθε φορά φαίνεται η κάτοψη μιας αντιπροσωπευτικής ορθογώνιας πλάκας. Σχηματίζεται, επίσης, ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με τους άξονες  $x$  και  $y$  να έχουν ληφθεί στις άκρες της πλάκας, ενώ το πάχος της ( $t$ ) μετράται στην κατεύθυνση  $z$ . Να σημειωθεί ότι αυτή η σύμβαση αξόνων θα διατηρηθεί σε όλη την έκταση της παρούσας εργασίας.

Η διεύθυνση των ινών γίνεται εμφανής από τις εσωτερικές παράλληλες γραμμές. Στο Σχήμα 1.18 (α) φαίνεται μία πλάκα η οποία αποτελείται από μία ή περισσότερες στρώσεις και όλες αυτές οι στρώσεις έχουν τις ίνες στη διεύθυνση  $x$ . Στην εικόνα 1.18 (β) του ίδιου Σχήματος φαίνεται μια κοινή διαμόρφωση πλάκας (crossply), η οποία έχει δύο ή περισσότερες στρώσεις με τις ίνες είτε παράλληλα είτε κάθετα μεταξύ τους. Στο Σχήμα 1.18 (γ) παρουσιάζεται μία πλάκα με τυχαία διεύθυνση ινών. Αν και μία τέτοια πλάκα αποτελείται από ορθότροπο υλικό και οι άξονες θα μπορούσαν να επιλεγούν ευθυγραμμισμένοι στη διεύθυνση των ινών, τα ασύμμετρα όρια που δημιουργούνται καθιστούν δύσκολη τη μαθηματική ανάλυση. Σε ορισμένες περιπτώσεις όπως στο Σχήμα 1.18 (α) όπου ο προσανατολισμός των ινών είναι  $0^\circ$ , και στο Σχήμα 1.18 (β) η διαμόρφωση ονομάζεται «ειδικά ορθότροπη πλάκα» («specially orthotropic plate»). Τέλος, στο Σχήμα 1.18 (δ) απεικονίζεται μία διαμόρφωση στρώσεων όπου οι ίνες έχουν τυχαίο προσανατολισμό σε σχέση με τα όρια της πλάκας αλλά και μεταξύ τους. Αυτός ο σχηματισμός πλάκας ονομάζεται angle ply.[73]

Περαιτέρω συνδυασμοί αλληλουχίας στρώσεων μπορούν να επιτευχθούν όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.19 για πλάκες crossply [16]. Στο Σχήμα 1.19 οι στρώσεις οι οποίες έχουν ίνες παράλληλα και κάθετα στον άξονα  $x$  φαίνονται με  $0^\circ$  και  $90^\circ$ , αντίστοιχα. Οι πλάκες, οι οποίες έχουν ίσου πάχους στρώσεις, αποτελούνται από πανομοιότυπα υλικά με ευθυγράμμιση ινών σε εναλλακτική ακολουθία συνηθίζεται να λέγονται σαν πλάκες με κανονική (regular) ακολουθία τοποθέτησης αυτών των στρώσεων. Επίσης, αν ο προσανατολισμός των ινών σε κάθε απόσταση  $+z$  από το μέσο επίπεδο της πλάκας είναι ίδιος με τον προσανατολισμό στην αντίστοιχη απόσταση  $-z$  η πλάκα είναι συμμετρική (ως προς το μέσο επίπεδο). Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι αντισυμμετρική ή γενικότερα μη συμμετρική. Οι παραπάνω πλάκες είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν μέσω της **κλασικής θεωρίας των πολύστρωτων (classical lamination theory)**.



*Σχήμα 1. 18: Πολύστρωτα σύνθετα υλικά με διαφορετικό προσανατολισμό ινών*



Σχήμα 1.19: Παραδείγματα συμμετρικών, αντισυμμετρικών και μη συμμετρικών cross-ply πολύστρωτων

### 1.6.1 Κλασική θεωρία πολύστρωτων (Classical lamination theory-CLT) [1]

Η κλασική θεωρία πολύστρωτων αποτελείται από μία συλλογή υποθέσεων τάσης και παραμόρφωσης της Μηχανικής των Υλικών. Με τη χρήση αυτής της θεωρίας δίνεται η δυνατότητα της **απευθείας μετάβασης από το βασικό δομικό συστατικό, την στρώση (laminae) στην τελική δομή, δηλαδή το πολύστρωτο (laminate)**. Η συνολική διαδικασία βασίζεται στην εύρεση αποδοτικών και επαρκούς ακρίβειας απλοποιητικών παραδοχών οι οποίες επιτρέπουν τη μετάβαση από ένα περίπλοκο πρόβλημα ελαστικότητας στις τρεις διαστάσεις σε ένα επιλύσιμο δύο διαστάσεων πρόβλημα της μηχανικής του παραμορφώσιμου στερεού.

Καταρχάς, οι σχέσεις τάσης-τροπής στις κύριες κατευθύνσεις για μία στρώση ενός ορθότροπου υλικού σε επίπεδη τάση είναι:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Όπου  $E_1$ : το μέτρο ελαστικότητας του υλικού παράλληλα στη διεύθυνση των ινών

$E_2$ : το μέτρο ελαστικότητας του υλικού κάθετα στη διεύθυνση των ινών

$\nu_{12}$ : ο λόγος Poisson στο επίπεδο 1-2

$\nu_{21}$ : ο λόγος Poisson στο επίπεδο 2-1

$G_{12}$ : το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο 1-2

Αντίστοιχα, σε ένα γενικά ορθότροπο υλικό σε οποιοδήποτε σύστημα αξόνων με γωνία  $\theta$  ως προς τις πλευρές της πλάκας ισχύει:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

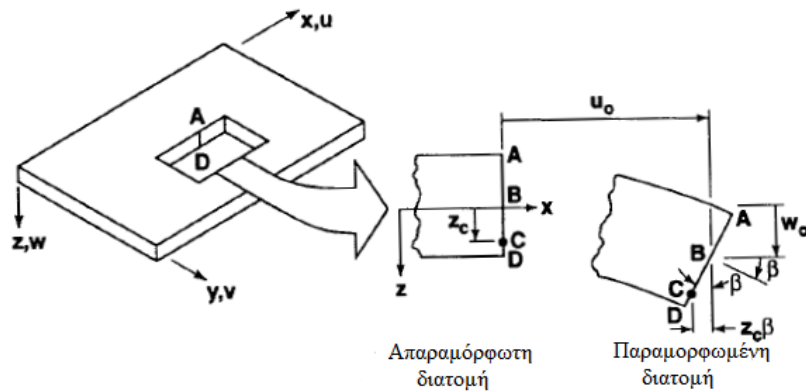
Όπου οι τιμές του μητρώου ακαμψίας υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Η γνώση της διαφοροποίησης της τάσης και της τροπής κατά το πάχος του πολύστρωτου είναι πολύ σημαντική για τον ορισμό των τιμών εκτατικής και καμπτικής δυσκαμψίας (αναλύονται παρακάτω). Οπότε, γίνεται η υπόθεση ότι το πολύστρωτο αποτελείται από ιδανικά συνδεδεμένες στρώσεις όπως έχει προαναφερθεί. Η επιπρόσθετη παραδοχή ότι οι δεσμοί είναι απειροστά λεπτοί και διατμητικά μη παραμορφώσιμοι γίνεται ώστε οι παραμορφώσεις να είναι συνεχείς κατά μήκος των ορίων των στρώσεων και καμία στρώση να μη μπορεί να ολισθήσει σε σχέση με κάποια άλλη. Επομένως, **το πολύστρωτο ενεργεί ως μία συνολική στρώση με εξαιρετικά ειδικές ιδιότητες.**

Αν το πολύστρωτο είναι μικρού πάχους μία γραμμή αρχικά ευθεία και κάθετη ως προς τη μέση επιφάνεια του πολύστρωτου υποτίθεται ότι παραμένει ευθεία και κάθετη στη μέση επιφάνεια και μετά την παραμόρφωση. Αυτή η απαίτηση ισοδυναμεί με το να μη λαμβάνονται υπόψη οι διατμητικές παραμορφώσεις σε επίπεδα κάθετα στη μέση επιφάνεια, δηλαδή  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  όπου  $z$  είναι η διεύθυνση κάθετη στη μέση επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.20. Επιπρόσθετα, οι κατακόρυφες γραμμές υποτίθεται ότι έχουν σταθερό μήκος ώστε η ανηγμένη παραμόρφωση κάθετα στη μέση επιφάνεια να θεωρείται, επίσης, αμελητέα ( $\epsilon_z = 0$ ).

Όλες οι ανωτέρω υποθέσεις μίας στρώσης οι οποίες αποτελούν τα συστατικά του πολύστρωτου είναι γνωστές ως υπόθεση Kirchhoff για πλάκες.



Σχήμα 1. 20: Γεωμετρία της παραμόρφωσης στο επίπεδο x-z

Με τη βοήθεια αυτών των παραδοχών και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις τάσεων-τροπών, μετά από μαθηματικούς υπολογισμούς προκύπτει ότι οι συνολικές δυνάμεις και ροπές ανά μονάδα μήκους ορίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (1.5)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-l/2}^{l/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k z dz$$

Όπου  $z_k$  και  $z_{k-1}$  ορίζονται από τη βασική γεωμετρία του πολύστρωτου του Σχήματος 1.21. Όπως φαίνεται η απόσταση  $z$  είναι θετική προς τα κάτω. Επομένως,  $z_k$  και  $z_{k-1}$  είναι η απόσταση από το κάτω και πάνω μέρος της  $k^{\text{th}}$  στρώσης, αντίστοιχα. Τελικά, αυτές οι ροπές και δυνάμεις δεν εξαρτώνται από το  $z$  αλλά από τις τιμές των  $x$  και  $y$ , τις συντεταγμένες, δηλαδή, του σημείου στη μέση επιφάνεια.



Σχήμα 1. 21: Γεωμετρία ενός πολύστρωτου N-στρώσεων

Τελικά προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Όπου:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

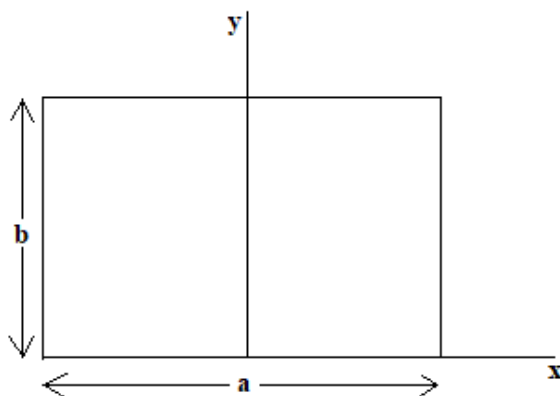
Στις παραπάνω εξισώσεις τα  $A_{ij}$  είναι οι τιμές της εφελκυστικής δυσκαμψίας (extensional stiffnesses), τα  $B_{ij}$  είναι οι τιμές της σύζευξης κάμψης-εφελκυσμού (bending-extension stiffnesses) και τα  $D_{ij}$  είναι οι τιμές της καμπτικής δυσκαμψίας (bending stiffnesses). Η ύπαρξη των  $B_{ij}$  υπονοεί τη σύζευξη μεταξύ κάμψης και εφελκυσμού. Κατά συνέπεια, είναι αδύνατο να εφελκυσθεί μία στρώση η οποία έχει όρους  $B_{ij}$  χωρίς την ίδια στιγμή να καμφθεί ή να στραφεί. Δηλαδή, μία εφελκυστική φόρτιση έχει ως αποτέλεσμα όχι μόνο εφελκυστικές παραμορφώσεις αλλά και καμπτικές ή/και στρεπτικές.



### 1.6.2 Λυγισμός σύνθετων πολύστρωτων υλικών

Όσον αφορά στην έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί σε σχέση με το λυγισμό σύνθετων πλακών έχουν δοθεί λύσεις τόσο με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων όσο και με αναλυτικές μεθόδους, και έχει αποδειχθεί, γενικά, ότι έχουν καλή σύγκλιση μεταξύ τους. Συνήθως, η κλασική θεωρία πολύστρωτων πλακών φαίνεται να υπερεκτιμά τα φορτία λυγισμού [17]. Ο Reddy et al.[17] χρησιμοποίησαν και σύγκριναν διαφορετικές θεωρίες για τον υπολογισμό των κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Η βασικότερη από αυτές είναι η κλασική θεωρία πολύστρωτων πλακών (Classical Plate Theory-CPT), η οποία στηρίζεται σε μια σειρά από παραδοχές όπως προαναφέρθηκε, της υπόθεσης Kirchhoff. Σε αυτή την υπόθεση αλλά χωρίς να λαμβάνονται υπόψη κάθε φορά μερικές από αυτές τις παραδοχές βασίζονται και οι εναλλακτικές θεωρίες της διατμητικής παραμόρφωσης.

Τέτοια είναι η **θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης πρώτης τάξης** (First-Order Shear-Deformation Theory/FSDT), στην οποία δεν ισχύει η παραδοχή ότι οι κάθετες γραμμές στη μέση επιφάνεια πριν την παραμόρφωση παραμένουν κάθετες και μετά την παραμόρφωση. Επόμενη είναι η **θεωρία διατμητικής παραμόρφωσης υψηλότερης τάξης** (Higher-Order Shear-Deformation Theory/HSDT) όπου δε λαμβάνεται υπόψη η παραπάνω παραδοχή όπως και στην FSDT και επιπρόσθετα δε λαμβάνεται υπόψη ότι οι ευθείες γραμμές κάθετες στη μέση επιφάνεια πριν την παραμόρφωση παραμένουν ευθείες και μετά την παραμόρφωση. Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεθόδους με ακριβείς λύσεις και μέσω λύσεων πεπερασμένων στοιχείων συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα για διαφορετικές συνθήκες στήριξης όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 1.5. Οι συνοριακές συνθήκες που φαίνονται στον πίνακα είναι: SS (απλή έδραση-simply supported), C (περιστροφικά περιορισμένη-clamped), F (ελεύθερη- free) και περιγράφονται ως εξής: SSFC (απλώς εδρασμένη στις πλευρές  $y=0$  και  $y=b$ , ελεύθερη στην πλευρά  $x=a/2$  και clamped στην πλευρά  $x=-a/2$ ) (Σχήμα 1.22). Αντίστοιχα, περιγράφονται και οι υπόλοιπες.



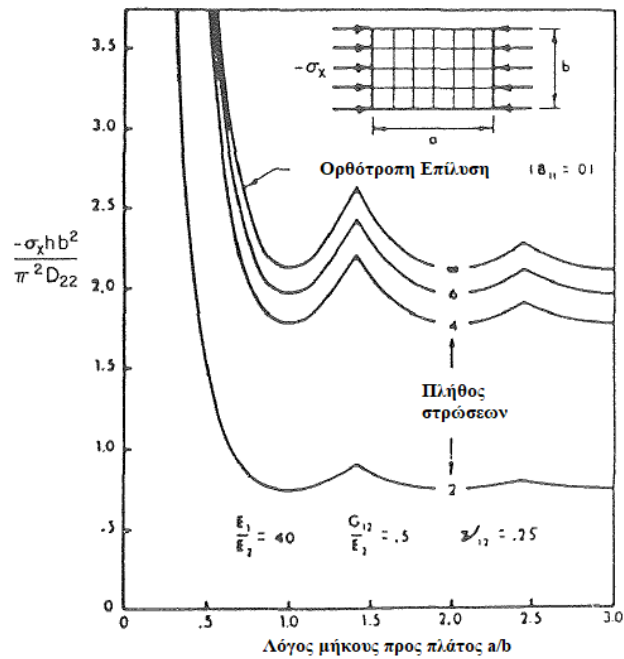
Σχήμα 1. 22: Διαστάσεις ορθογώνιας πλάκας πάχους  $t$  από σύνθετο υλικό.

**Πίνακας 1. 5:** Επίδραση της αναλογίας του πλάτους της πλάκας προς το πάχος ( $b/t$ ) στο αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού αντισυμμετρικών τετράγωνων πλακών *cross ply* με διάφορες συνοριακές συνθήκες [17]

Πλήθος Στρώσεων	$b/t$	Θεωρία	Τύπος Επίλυσης	SSFF	SSFS	SSFC	SSSS	SSSC	SSCC
2	5	HSDT	Exact	3.905	4.283	4.908	8.769	10.754	11.490
			FEM	3.979	4.375	5.022	8.985	11.241	12.318
2	5	FSDT	Exact	3.682	4.054	4.632	8.277	9.309	9.757
			FEM	3.719	4.094	4.667	8.328	9.650	9.949
2	5	CPT	Exact	5.425	6.003	6.968	12.957	21.116	31.280
			FEM	5.616	6.292	7.203	14.520	23.869	37.106
2	10	HSDT	Exact	4.940	5.442	6.274	11.562	17.133	21.464
			FEM	5.090	5.621	6.487	12.011	18.257	24.262
2	10	FSDT	Exact	4.851	5.351	6.166	11.353	16.437	20.067
			FEM	4.916	5.420	6.234	11.485	18.338	21.916
2	10	CPT	Exact	5.425	6.003	6.968	12.957	21.116	31.280
			FEM	5.616	6.292	7.203	14.520	23.869	37.106
10	5	HSDT	Exact	6.780	7.050	8.221	12.109	12.607	13.254
			FEM	6.802	7.089	8.278	12.224	12.800	13.659
10	5	FSDT	Exact	6.750	7.020	8.143	11.494	11.495	11.628
			FEM	6.791	7.064	8.174	11.172	11.181	11.216
10	5	CPT	Exact	16.426	17.023	19.389	35.232	59.288	89.770
			FEM	16.457	17.141	19.422	36.384	60.406	90.833
10	10	HSDT	Exact	12.077	12.506	14.351	25.423	32.885	35.376
			FEM	12.248	12.699	14.568	25.828	33.662	36.657
10	10	FSDT	Exact	12.092	12.524	14.358	25.450	32.614	34.837
			FEM	12.226	12.661	14.480	25.647	33.970	36.129
10	10	CPT	Exact	16.426	17.023	19.389	35.232	59.288	89.770
			FEM	16.457	17.141	19.422	36.384	60.406	90.833

Η βασική παρατήρηση στον ανωτέρω πίνακα αφορά στο γεγονός ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός των πλευρών στις οποίες η συνθήκη στήριξης είναι περιστροφικά περιορισμένη (*clamped*) αυξάνεται και το αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Επίσης, όπως είναι αναμενόμενο για μεγαλύτερο πλήθος στρώσεων του πολύστρωτου το αδιάστατο φορτίο λυγισμού είναι αυξημένο.

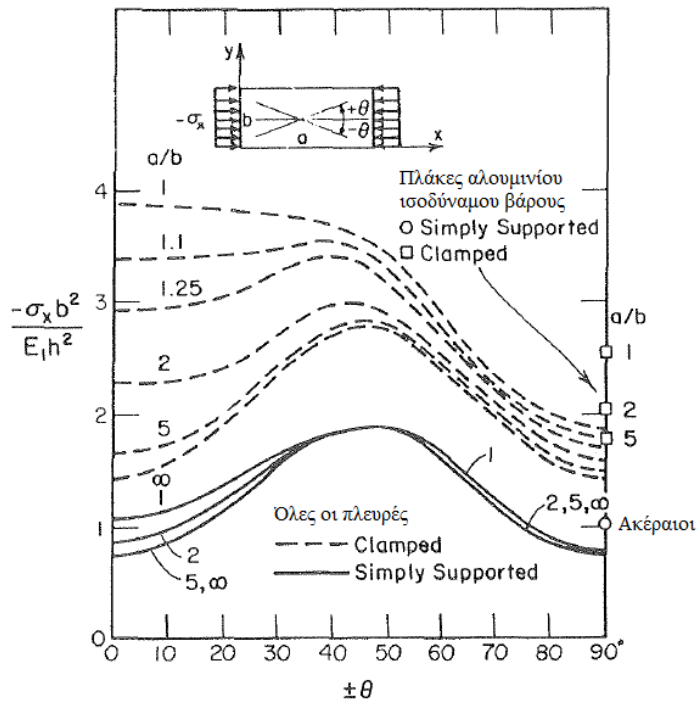
Στο διάγραμμα του Σχήματος 1.23 στην περίπτωση της θλίψης για πλάκες με τις πλευρές τους να μην είναι ελαστικά περιορισμένες (απλή στήριξη), η αύξηση του πλήθους των στρώσεων επιφέρει αύξηση του αδιαστατοποιημένου κρίσιμου φορτίου λυγισμού άρα και αύξηση στην κρίσιμη τάση ( $\sigma_x$ ) [16]. Ο Leissa [73] αναφέρει ότι οι ανισότροπες πλάκες με προσανατολισμό ινών  $\pm\theta$  περίπου  $45^\circ$  μεγιστοποιούν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για θλίψη όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1.24.



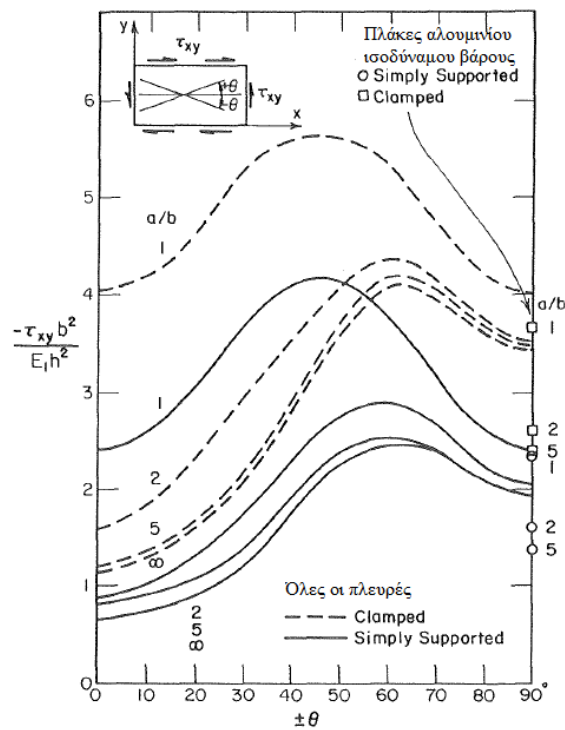
**Σχήμα 1. 23:** Σύγκριση του αδιάστατου κρίσιμου φορτίου λυγισμού για μεταβλητό πλήθος στρώσεων συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για αντισυμμετρικές και cross-ply πολύστρωτες πλάκες σε θλίψη με απλή έδραση. [16]

Οι Housner και Stein [18] εφάρμοσαν μία ενεργειακή μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για να πάρουν τα αποτελέσματα του Σχήματος 1.24 στο οποίο απεικονίζεται μία αδιάστατη παράμετρος κρίσιμου φορτίου λυγισμού συναρτήσει της γωνίας ( $\pm\theta$ ) και του λόγου  $a/b$  για μονοαξονική θλίψη με δύο διαφορετικές συνθήκες στήριξης από το οποίο προκύπτουν δύο βασικές παρατηρήσεις. Η πρώτη αφορά στις συνθήκες στήριξης με την **απλή έδραση να εμφανίζει μικρότερο αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού** σε σχέση με την clamped οριακή συνθήκη και η δεύτερη αφορά στην αύξηση του λόγου  $a/b$  και την επακόλουθη μείωση του αδιάστατου φορτίου λυγισμού. Επίσης, παρατηρείται η προαναφερθείσα παρατήρηση για τον προσανατολισμό των ινών και την μεγιστοποίηση της κρίσιμης τάσης λυγισμού για τιμές περίπου  $45^\circ$ .

Στην περίπτωση της διάτμησης του Σχήματος 1.25 η τιμή της γωνίας του προσανατολισμού για τον οποίο μεγιστοποιείται η αδιάστατη παράμετρος του κρίσιμου φορτίου λυγισμού είναι μεγαλύτερη από  $45^\circ$  ειδικά όσο αυξάνει η τιμή του λόγου  $a/b$ .

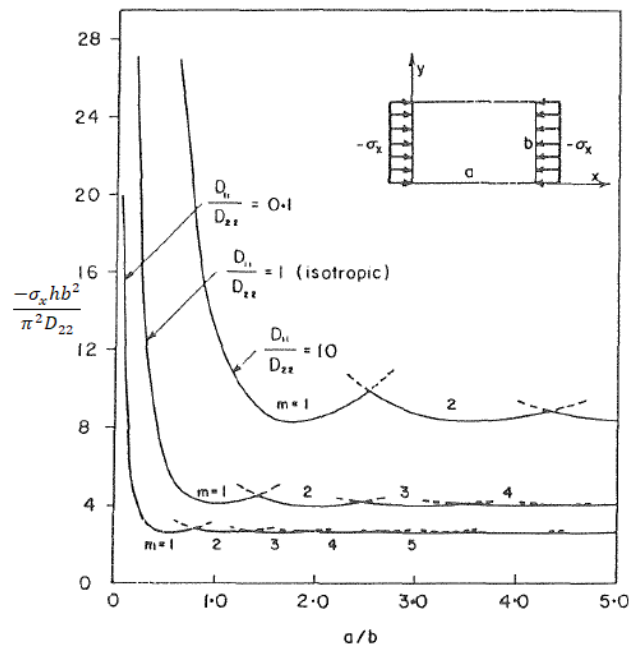


Σχήμα 1. 24: Διάγραμμα μονοαξονικής θλίψης σε σύνθετο angle-ply πολύστρωτο γραφίτη-εποξικής ρητίνης [18].

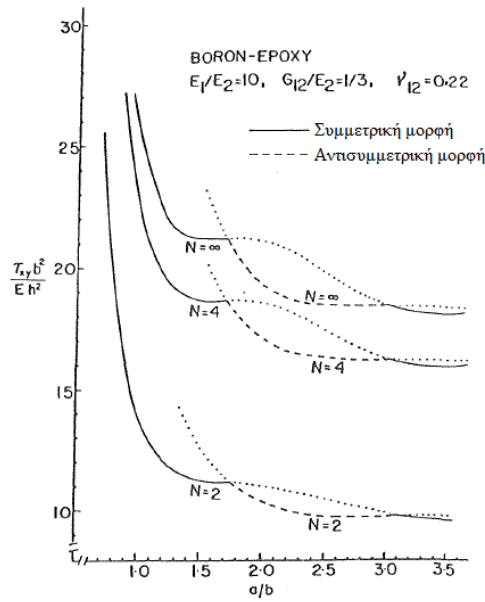


Σχήμα 1. 25: Παράμετρος κρίσιμης τάσης λυγισμού για διάτμηση σε angle-ply πλάκες γραφίτη-εποξικής ρητίνης [73].

Στην ειδική περίπτωση της καθαρής θλίψης σύνθετων πλακών η αδιάστατη παράμετρος λυγισμού φαίνεται στο Σχήμα 1.26 συναρτήσει του λόγου μήκος προς πλάτος της πλάκας ( $a/b$ ) για διάφορους λόγους  $D_{11}/D_{22}$  και για  $(D_{12}+2D_{66})/D_{22}=1$ . Ο αριθμός  $m$  δηλώνει το πλήθος των ημικυμάτων εξαιτίας του λυγισμού στην διεύθυνση της φόρτισης ( $x$ -άξονας). Σε κάθε περίπτωση το πλήθος των ημικυμάτων στην  $y$ -διεύθυνση είναι  $n=1$ . Για λόγο  $D_{11}/D_{22}=1$  [19] φαίνεται η καμπύλη για ισότροπο υλικό. Μία πολύστρωτη πλάκα η οποία είναι πιο άκαμπτη στη διεύθυνση της φόρτισης ( $D_{11}/D_{22}=10$ ) εμφανίζει μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού και οι ιδιομορφές της αποτελούνται από λιγότερα ημικύματα. Αντίστοιχα, αν οι ίνες είναι τοποθετημένες κάθετα στη διεύθυνση της φόρτισης το φορτίο λυγισμού είναι χαμηλότερο και το πλήθος των ημικυμάτων αυξημένο. Η τελευταία αυτή παρατήρηση ερμηνεύεται και από μία ενεργειακή σκοπιά για την πλάκα η οποία όταν λυγίζεται ελαχιστοποιεί την συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος και απαιτείται, σχετικά, λίγη ενέργεια για να παραμορφωθεί κάθετα στη διεύθυνση των ινών [73].



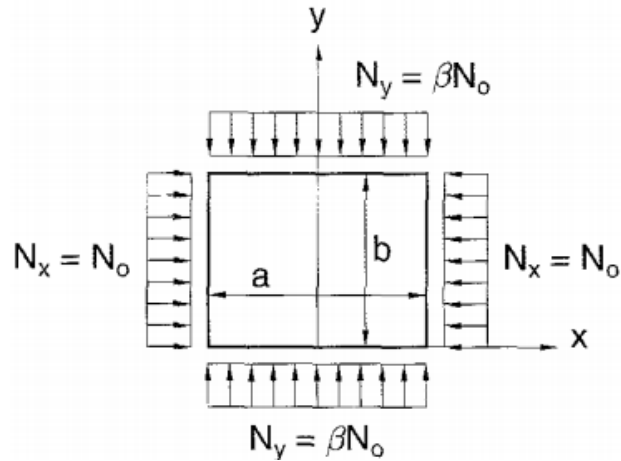
**Σχήμα 1. 26:** Αδιάστατη παράμετρος λυγισμού για μονοαξονική θλίψη σε απλώς εδρασμένες πλάκες για διάφορους λόγους  $D_{11}/D_{22}$  [19]



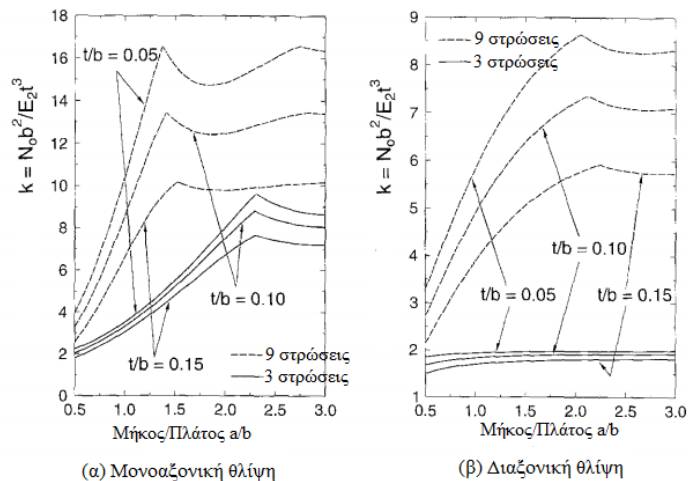
**Σχήμα 1. 27:** Αδιάστατη παράμετρος λυγισμού λόγω διατμητικής φόρτισης για αντισυμμετρικές crossply πλάκες απλώς εδρασμένες [73]

Σύνθετες πολύστρωτες πλάκες υποκείμενες σε καθαρά διατμητική φόρτιση ( $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = \text{σταθερή}$ ) αναλύθηκαν από μερικούς ερευνητές μέσω προσεγγιστικών μεθόδων [20-22]. Αποδείχθηκε ότι όπως και σε ισότροπες πλάκες οι ιδιομορφές λυγισμού χωρίζονται σε συμμετρικές και μη συμμετρικές, με την κρίσιμη ιδιομορφή (αυτή που αντιστοιχεί, δηλαδή, στο χαμηλότερο φορτίο λυγισμού) να αλλάζει από τη μία κατηγορία στην άλλη καθώς το  $a/b$  μεταβάλλεται. Χαρακτηριστική τέτοια καμπύλη φαίνεται στο Σχήμα 1.27.

Οι Xiang et al. [23] χρησιμοποιώντας αναλυτική μέθοδο μελέτησαν συμμετρικές cross-ply πολύστρωτες πλάκες, οι οποίες υπόκεινται σε διαξονική θλιπτική φόρτιση όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1.28. Οι συννοριακές συνθήκες ορίζονται με τις δύο απέναντι πλευρές να είναι απλώς εδρασμένες (simply supported), η μία πλευρά είναι ελεύθερη (free) και η τέταρτη πλευρά να είναι είτε απλώς εδρασμένη είτε περιστροφικά περιορισμένη (clamped). Υπολόγισαν, επίσης, τον συντελεστή λυγισμού  $k$  ο οποίος ορίστηκε ως:  $k = N_o b^2 / (E_2 t^3)$  πραγματοποιώντας παραμετρική μελέτη, όπως φαίνεται και στα ακόλουθα διαγράμματα του Σχήματος 1.29, για μονοαξονική θλίψη (ο συντελεστής φόρτισης  $\beta=0$ ) και για ομοιόμορφη διαξονική θλίψη (ο συντελεστής φόρτισης  $\beta=1$ ).



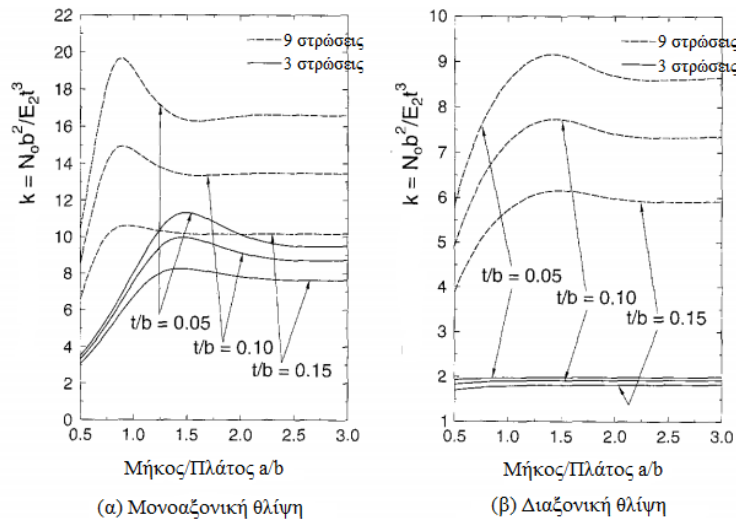
Σχήμα 1. 28: Διαξονική θλίψη πολύστρωτης και ορθογώνιας cross-ply πλάκας πάχους  $t$  [23].



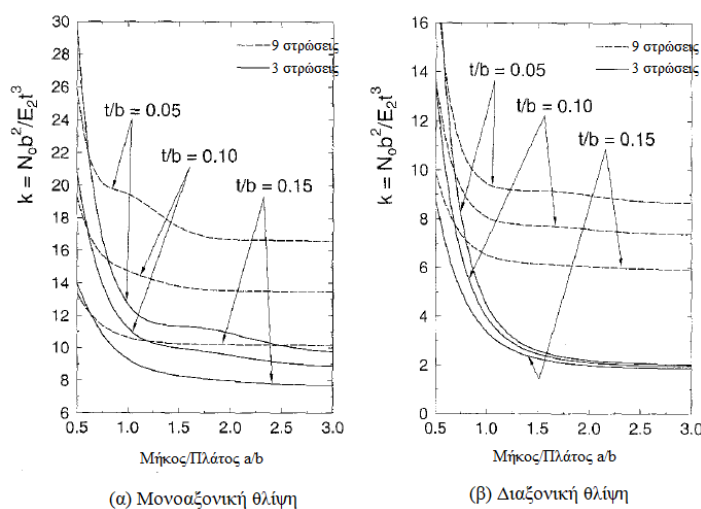
Σχήμα 1. 29: Ο συντελεστής λυγισμού  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για συμμετρικά cross-ply πολύστρωτα με τις δύο απέναντι πλευρές απλώς εδρασμένες και τις δύο άλλες ελεύθερες [23].

Από το παραπάνω Σχήμα 1.29 διαπιστώνεται ότι οι πολύστρωτες πλάκες με περισσότερες στρώσεις (9) λυγίζουν δυσκολότερα σε σύγκριση με τις πλάκες 3 στρώσεων στην δεδομένη περίπτωση οριακών συνθηκών. Φαίνεται, επίσης, ότι η αύξηση του λόγου  $a/b$  οδηγεί σε αύξηση του συντελεστή λυγισμού όπως έχει οριστεί από τον Xiang et al. [23] μέχρι ενός διαφορετικού λόγου για κάθε περίπτωση φόρτισης όπου αλλάζει η μορφή λυγισμού και προκαλείται μείωση του συντελεστή. Ακόμη μία παράμετρος η οποία λαμβάνεται υπόψη στα σχετικά διαγράμματα είναι ο λόγος του πάχους προς το πλάτος της πλάκας ( $t/b$ ) και όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο λόγος τόσο μικρότερος προκύπτει ο ζητούμενος συντελεστής λυγισμού.

Αντίστοιχες παρατηρήσεις πραγματοποιούνται και στο Σχήμα 1.30 (μονοαξονική θλίψη  $\beta=0$ , διαξονική θλίψη  $\beta=1$ ) όπου υπάρχουν διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Η διαφορά στις συνοριακές συνθήκες έγκειται σε μία από τις πλευρές όπου αντί για ελεύθερη στήριξη είναι απλώς εδρασμένη. Παρατηρώντας τα δύο παρακάτω διαγράμματα φαίνεται ότι για δεδομένη τιμή του λόγου  $a/b$ , για δεδομένο λόγο πάχους προς πλάτος ( $t/b$ ) και για δεδομένο αριθμό στρώσεων η πλάκα με την απλώς εδρασμένη τέταρτη πλευρά έχει μεγαλύτερες τιμές συντελεστή  $k$  σε σύγκριση με την αντίστοιχη πλάκα με την ελεύθερη τέταρτη πλευρά.



**Σχήμα 1. 30:** Ο συντελεστής λυγισμού  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για συμμετρικά cross-ply πολύστρωτα με τις δύο απέναντι πλευρές απλώς εδρασμένες, την άλλη ελεύθερη και την τέταρτη απλώς εδρασμένη [23]



**Σχήμα 1. 31:** Ο συντελεστής λυγισμού  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για συμμετρικά cross-ply πολύστρωτα με τις δύο απέναντι πλευρές απλώς εδρασμένες, την άλλη ελεύθερη και την τέταρτη περιστροφικά περιορισμένη [23]



Τέλος, στο Σχήμα 1.31 φαίνονται τα διαγράμματα όπου η τέταρτη πλευρά είναι περιορισμένη ως προς τις στροφές (clamped). Σε αυτή την περίπτωση είναι εντελώς διαφορετική η μορφή των καμπύλων και είναι εμφανείς οι αυξημένες τιμές του συντελεστή  $k$  για την κάθε περίπτωση. Το γεγονός του περιορισμού, δηλαδή, όλων των στροφών κατά μήκος μίας πλευράς οδηγεί στην αύξηση των τιμών του αδιάστατου συντελεστή λυγισμού.

## 1.7 Λυγισμός ινωδών-μεταλλικών πολύστρωτων (FMLs) υλικών

Αν και για τη γενική μελέτη των ινωδών-μεταλλικών πολύστρωτων υλικών (Fiber-Metal Laminates/FMLs) υπάρχει εκτενής διαθέσιμη βιβλιογραφία, για λυγισμό τέτοιων υλικών δεν έχει πραγματοποιηθεί αντίστοιχα εκτενή έρευνα. Ωστόσο, το γεγονός της βελτιωμένης αντοχής σε θραύση και εξαιτίας αυτής της ιδιότητας η δυνατότητα χρησιμοποίησης τμημάτων από FML υλικό χαμηλότερου πάχους, καθιστούν το λυγισμό καθοριστικό παράγοντα στην ικανότητα μεταφοράς φορτίων αυτών των λεπτότοιχων διατομών. Η ακριβής πρόβλεψη του κρίσιμου φορτίου σε λυγισμό είναι περίπλοκη εξαιτίας της ύπαρξης τοπικών παραμορφώσεων και διαφορετικών ιδιομορφών [24].

Ο Mania et al. [24-27,30] ασχολήθηκαν με τη μελέτη σε λυγισμό στηλών λεπτότοιχων διατομών από FML υλικό και ανέλυσαν τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν με αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους, ενώ έγινε σύγκριση και με πειραματικές μετρήσεις. Αποδείχθηκε ότι **οι διαφορές μεταξύ των πειραματικών προβλέψεων και αυτών που προέκυψαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι αμελητέες**, ενώ οι αντίστοιχες διαφορές μεταξύ αναλυτικών και αριθμητικών προβλέψεων ήταν μεγαλύτερες χωρίς, ωστόσο, να κλονίζεται η επαρκής σύγκλιση. Κατά το λυγισμό η παρουσία του αλουμινίου κυριαρχεί στη λεπτότοιχη διατομή από FML υλικό. Γενικά, **παρατηρείται μία μείωση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού σε σύγκριση με το ομογενές και ισότροπο αλουμίνιο**, η οποία, όμως, εξισορροπείται από τη βελτίωση της κόπωσης και της αντοχής θραύσης. Αναφέρουν, ακόμη, ότι η ευαισθησία των λεπτότοιχων τμημάτων στις αρχικές δομικές ατέλειες επηρεάζει την συμπεριφορά σε λυγισμό της πειραματικής μεθόδου και οδηγεί σε χαμηλότερα φορτία λυγισμού σε σύγκριση με τις θεωρητικές τιμές. Η πηγή αυτών των αναπόφευκτων ατελειών εντοπίζεται στην διαδικασία κατασκευής των FML panels. Όσον αφορά στη διαφοροποίηση της αλληλουχίας των στρώσεων και του προσανατολισμού των ινών παρατηρήθηκαν μεταβολές στις διαφορετικές μοντελοποιήσεις στις τιμές των φορτίων λυγισμού χωρίς να ισχύει το ίδιο για τις ιδιομορφές, οι οποίες ήταν ίδιες.

Όσον αφορά στην αστοχία των ινωδών μεταλλικών πολύστρωτων η αποκόλληση μεταξύ των στρώσεων εξαιτίας του λυγισμού αποτελεί βασικό παράγοντα πρόκλησής

της. Ειδικότερα, όταν μια πλάκα φορτίζεται είναι πιθανή η αποκόλληση μίας στρώσης. Αυτή η στρώση υπόκειται σε θλιπτικές ή διατμητικές φορτίσεις με αποτέλεσμα να υφίσταται τοπικό λυγισμό. Οι παραμορφώσεις εκτός επιπέδου που δέχεται προκαλούν υψηλές τάσεις μεταξύ των στρώσεων. Η αύξηση αυτών των τάσεων οδηγεί στην υπέρβαση του ορίου διαρροής, προκαλώντας την επέκταση της περιοχής όπου παρατηρείται αποκόλληση μεταξύ των στρώσεων, η οποία με τη σειρά της οδηγεί σε μείωση της ακαμψίας μετά το λυγισμό και, τελικά, στην αστοχία της πλάκας [28]. Το παραπάνω σενάριο, ωστόσο, δεν έχει παρατηρηθεί σε εργαστηριακά πειράματα με πλάκες με μία αρχική αποκόλληση των στρώσεων σε μονοαξονική θλίψη. Η διατμητική φόρτιση είναι αυτή που καθιστά ευάλωτη τη πλάκα σε αστοχία εξαιτίας αποκόλλησης των στρώσεων. Όπως απέδειξαν, όμως, οι Remmers και de Borst [28], **ακόμη και κατά τη διάτμηση** οι τάσεις που απαιτούνται ώστε να συμβεί αυτού του είδους η αστοχία είναι πολύ μακριά από το εύρος των τάσεων που εφαρμόζονται είτε στις αεροδιαστημικές εφαρμογές είτε, γενικότερα, στη μηχανολογία.

Ο Rengui Bi et al. [29] κατέστρωσαν μία ελαστο-πλαστική εξίσωση ώστε να μελετήσουν τη συμπεριφορά σε λυγισμό και μετά τον αρχικό λυγισμό των FML υλικών με βάση την ελαστο-πλαστική παραμόρφωση των στρώσεων μετάλλου. Αυτό κατέστη εφικτό με αναλυτική μέθοδο και μέσω της χρήσης της κλασικής μη γραμμικής θεωρίας πλακών οδηγήθηκαν στη δημιουργία της μη γραμμικής εξίσωσης ισορροπίας των FML υλικών με μία αρχική παραμόρφωση. Οι εν λόγω εξισώσεις επιλύθηκαν με πεπερασμένες διαφορές και επαναληπτική μέθοδο. Εκτός, όμως, από την αναλυτική επίλυση ασχολήθηκαν και με τη μελέτη των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από αριθμητική μέθοδο σε υλικά GLARE, συγκρίνοντας τη συμπεριφορά σε λυγισμό μεταξύ ελαστικών και ελαστο-πλαστικών FML σε μονοαξονική θλίψη. Από αυτή τη σύγκριση αποδεικνύεται ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι μεγαλύτερο στο ελαστικό FML καθιστώντας την ελαστο-πλαστική ανάλυση αναγκαία. Ακόμη, όσο πιο λεπτή είναι μία πλάκα τόσο πιθανότερο είναι να υποστεί λυγισμό όσο βρίσκεται στο ελαστικό στάδιο. Στην ίδια μελέτη πραγματοποιήθηκε και έρευνα για διαξονική θλίψη και βρέθηκε ότι το φορτίο λυγισμού είναι μισό σε σύγκριση με τη μονοαξονική.

Σε πρόσφατη έρευνα οι Mania και York [30] ασχολήθηκαν με τη βελτίωση της αντοχής σε λυγισμό σε στήλες ανοιχτής λεπτότοιχης διατομής μέσω της χρήσης λεπτών στρώσεων (thin-ply) σύνθετου υλικού αντί για συμβατικού πάχους στρώσεις. Τα αποτελέσματα προήλθαν από αναλυτική και αριθμητική μέθοδο και από επαλήθευση με πειραματικές τιμές (Πίνακας 1.6). Ειδικότερα, **τα σύνθετα πολύστρωτα υλικά μπορούν να αποκτήσουν τις επιθυμητές μηχανικές ιδιότητες για κάθε εφαρμογή μέσω κατάλληλης τροποποίησης των καμπτικών ακαμψιών ( $D_{ij}$ )**. Αυτό καθίσταται εφικτό με τη σωστή αλληλουχία των στρώσεων σύνθετου υλικού με διαφορετικό προσανατολισμό ινών και τη σωστή επιλογή υλικού και πάχους της κάθε στρώσης, με αποτέλεσμα, τελικά, να βελτιώνονται οι επιθυμητές για κάθε εφαρμογή μηχανικές ιδιότητες μία εκ των οποίων είναι και η αντοχή σε

λυγισμό. Μέσω της χρήσης αυτών των λεπτών στρώσεων (thin-plies) επεκτείνεται ο σχεδιαστικός χώρος, αφού αυξάνεται ο αριθμός των πιθανών συνδυασμών στρώσεων για δεδομένο πάχος και βελτιώνονται, επομένως, οι πιθανότητες απόκτησης ιδανικής αλληλουχίας τοποθέτησης των στρώσεων.

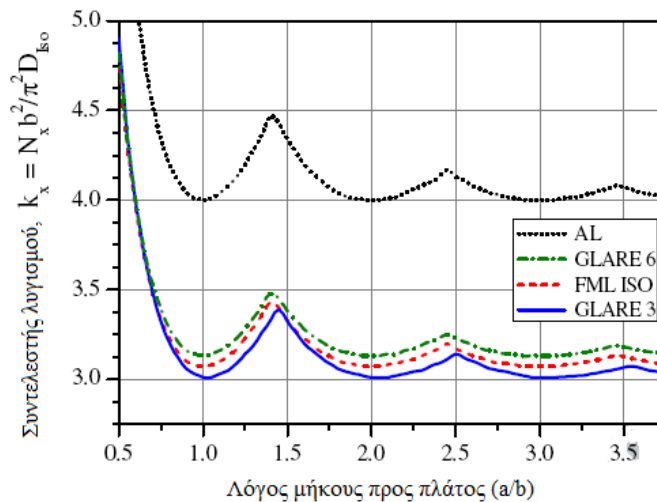
Οι λεπτές στρώσεις σύνθετου υλικού (thin plies) έχουν μέχρι και 15 φορές χαμηλότερη μάζα ανά μονάδα επιφάνειας σε σύγκριση με τις κλασικές στρώσεις, οδηγώντας στη δημιουργία χαμηλότερων διεπιφανειακών τάσεων. Αυτό το χαρακτηριστικό οδηγεί στη βελτίωση βασικών ιδιοτήτων όπως η αντοχή θραύσης και η αντοχή μετά από κρούση, εξαιτίας της βελτιωμένης αντοχής σε αποκόλληση μεταξύ των στρώσεων και του καλύτερου ελέγχου της διάδοσης των ρωγμών. Ο μειωμένος ρυθμός διάδοσης των ρωγμών σχετίζεται με τον αυξημένο αριθμό στρώσεων διαφορετικού προσανατολισμού ινών σε όλο το πάχος του πολύστρωτου. Τέλος, οι λεπτές στρώσεις οδηγούν στο σχηματισμό μιας πιο ομοιογενούς μικροδομής και βελτιωμένης μονοαξονικής θλιπτικής αντοχής και, επομένως, δεν παρατηρείται κάποιου είδους θραύση στο υλικό πριν την τελική αστοχία [30].

Από τα Σχήματα 1.32, 1.33 και 1.34 φαίνεται η μείωση της αντοχής σε λυγισμό των FML πλακών σε σύγκριση με το μονολιθικό αλουμίνιο. Αυτή η μείωση, ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε εξισορροπείται στις σύγχρονες εφαρμογές από την εξοικονόμηση βάρους. Από τα Σχήματα 1.32 και 1.33, καταρχάς, φαίνεται ότι όταν το σύνθετο υλικό στην FML ορθογώνια πλάκα αποτελείται από carbon/epoxy η μείωση της αντοχής σε λυγισμό σε σύγκριση με το R-glass/epoxy είναι σημαντικά χαμηλότερη, γεγονός που αποδίδεται στην μικρότερη διαφοροποίηση του μέτρου ελαστικότητας και της καμπτικής ακαμψίας του σύνθετου με το αλουμίνιο [30]. Αντίστοιχα, από τα Σχήματα 1.33 και 1.34 υποδεικνύεται ότι η μείωση της αντοχής σε λυγισμό είναι ακόμα χαμηλότερη για τα FMLs των οποίων οι στρώσεις του σύνθετου αποτελούνται από λεπτές στρώσεις (thin-plies) και όχι από συμβατικές.

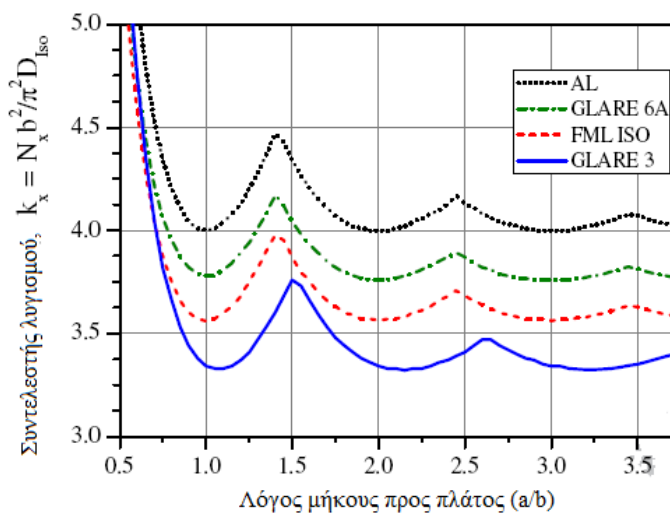
*Πίνακας 1. 6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού από στήλες FML διατομών. Σύγκριση μεταξύ πειραματικών τιμών (exp), τιμών από αριθμητική λύση (FEM) και τιμών από αναλυτική λύση (ANM Koiter) [30]*

FML No	Διαμόρφωση	Φορτίο λυγισμού [kN]		
		Πειραματικό	FEM	ANM Koiter
1	Al/0/90/Al/90/0/Al	31.434	30.189	28.568
2	Al/90/0/Al/0/90/Al	-	29.871	28.408
3	Al/45/0/Al/0/45/Al	32.634	31.399	29.786
4	Al/0/45/Al/45/0/Al	-	30.588	29.015
5	Al/0/0/Al/0/0/Al	29.836	30.310	28.630
6	Al/25/0/Al/0/25/Al	-	30.745	29.334
7	Al/0/25/Al/25/0/Al	29.856	30.977	28.859
8	Al/Al/Al/Al/Al/Al/Al	-	40.472	38.510

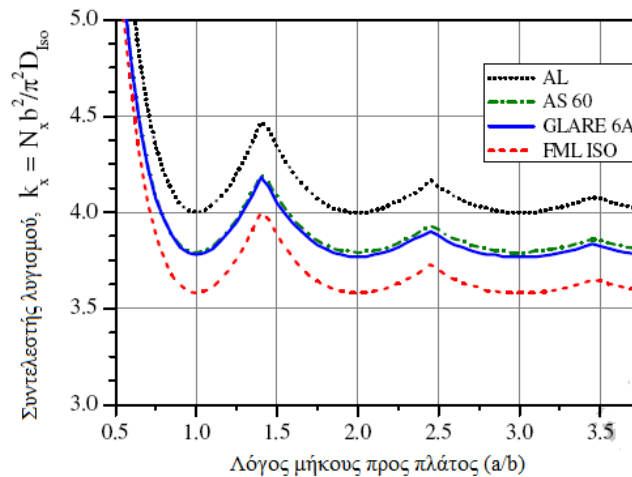
9	Al/ISO/ISO/Al/ISO/ISO/Al	-	30.805	31.380
10	Al/45/-45/Al/45/-45/Al	-	31.752	30.208



**Σχήμα 1. 32:** Συντελεστής λυγισμού λόγω θλίψης σε *standard FML* ορθογώνιες πλάκες με αλουμίνιο και *R-Glass/epoxy*: *GLARE 3* [Al/0/90/Al/90/0/Al]<sub>T</sub> και *GLARE 6A* [Al/45/-45/Al/-45/45/Al]<sub>T</sub> [30]



**Σχήμα 1. 33:** Συντελεστής λυγισμού λόγω θλίψης σε *standard FML* ορθογώνιες πλάκες με αλουμίνιο και *carbon/epoxy*: (α) *GLARE 3* [Al/0/90/Al/90/0/Al]<sub>T</sub> και *GLARE 6A* [Al/45/-45/Al/-45/45/Al]<sub>T</sub>. Το *FML<sub>iso</sub>* αναπαριστά μία *standard FML* ορθογώνια πλάκα με τις στρώσεις σύνθετου να αποτελούνται από ισότροπο υλικό *carbon/epoxy* [30]



**Σχήμα 1. 34:** Καμπύλες συντελεστή λυγισμού για NORTH PLY FML ορθογώνιες πλάκες (thin plied laminates) αλουμινίου και carbon/epoxy: GLARE 3  $[Al/\pm 45_2/-45_2/45_2/\pm 45_2/Al/\pm 45_2/-45_2/45_2/\pm 45_2/Al]_T$  (AS60) και GLARE 6A  $[Al/45_{12}/-45_{12}/Al/-45_{12}/45_{12}/Al]_T$

#### Ανάλυση μετά τον αρχικό λυγισμό και ατέλειες [27]

Προκειμένου να καθοριστεί η κρίσιμη τιμή της φόρτισης λυγισμού για μια δεδομένη πλάκα εφαρμόζεται μία γραμμική ανάλυση διακλάδωσης (linear, bifurcation buckling analysis). Ωστόσο, **οι πλάκες, γενικά, μπορούν να μεταφέρουν αξιόλογα επιπρόσθετα φορτία μετά τον αρχικό λυγισμό τους και πριν αγγίξουν το φορτίο θραύσης.** Σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή αυτή μπορεί να είναι αρκετές φορές όσο το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, αν και το χαρακτηριστικό αυτό εμφανίζεται πιο έντονα σε ισότροπα και ομογενή υλικά σε σύγκριση με τις σύνθετες πλάκες. Η θεωρητική ανάλυση για τη συμπεριφορά των πλακών μετά τον αρχικό λυγισμό είναι μη γραμμική. Η αρχική μη-γραμμικότητα οφείλεται στις επιπρόσθετες συνεπίπεδες παραμορφώσεις. Επιπρόσθετες γεωμετρικές ή υλικές μη γραμμικότητες μπορούν να δημιουργηθούν εξαιτίας μεγαλύτερων εγκάρσιων παραμορφώσεων μετά το λυγισμό, αν και αυτές δε λαμβάνονται, τυπικά, υπόψη σε θεωρητικές αναλύσεις μετά τον αρχικό λυγισμό. Μια τέτοιου είδους ανάλυση δεν αποτελεί, ωστόσο, αντικείμενο της παρούσας μελέτης και αναφέρεται για λόγους πληρότητας.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>

### 2 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν **αναλυτικές λύσεις** και **εμπειρικές εκφράσεις** της ελαστικής αντοχής σε λυγισμό μίας πλάκας και οι τιμές που θα προκύψουν από αυτές θα συγκριθούν με τις αντίστοιχες τιμές της επίλυσης με τη **μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων**. Η τελευταία αξιοποιήθηκε μέσω του εμπορικού προγράμματος ANSYS<sup>®</sup> και δημιουργήθηκαν 62 διαφορετικά μοντέλα για την ολοκλήρωση της μελέτης σε λυγισμό των πλακών αλουμινίου. Καταρχάς, οι φορτίσεις μπορούν να διακριθούν σε συνεπίπεδες (in-plane loads) και σε εκτός επιπέδου (out of plane loads). Στις συνεπίπεδες ανήκουν η διαμήκης και η εγκάρσια αξονική θλίψη ή εφελκυσμός, η διάτμηση και η διαμήκης κάμψη. Ως εκτός επιπέδου φορτίσεις ορίζονται οι εγκάρσιες πιέσεις όπως οι αεροδυναμικές δυνάμεις. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο λυγισμός δεν προκαλείται σε πλάκες εξαιτίας εφελκυσμού ή εκτός επιπέδου δράσεις, μόνο, αλλά μέσω της εφαρμογής θλιπτικών ή διατμητικών φορτίων [59]. Ένα από τα βασικά θέματα τα οποία πραγματεύεται η παρούσα εργασία αποτελεί ο λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω θλίψης και διάτμησης με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

#### 2.1 Αναλυτικός υπολογισμός φορτίου ελαστικού λυγισμού

Οι προσεγγίσεις αναλυτικού υπολογισμού του ελαστικού φορτίου λυγισμού των ισότροπων πλακών μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο τύπους [59], [63]. Στον πρώτο τύπο αναζητείται το σημείο διακλάδωσης στο οποίο η πλάκα ξεκινά να λυγίζει επειδή ο επίπεδος σχηματισμός ισορροπίας γίνεται ασταθής. Η συνάρτηση σχήματος της παραμόρφωσης **w (βέλος)** θα πρέπει να ικανοποιεί, ταυτόχρονα, τις συνοριακές συνθήκες και τη γενική διαρμονική εξίσωση και μπορεί να εκφραστεί προσεγγιστικά:

$$w = a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) + \dots + a_i f_i(x, y) + \dots \quad (2.1)$$

Όπου  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές

$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_i(x, y), \dots$  είναι οι συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

Υποτίθεται ότι η πλάκα είναι ελεύθερη να κινηθεί προς το εσωτερικό της υπό αυτές τις συνεπίπεδες φορτίσεις και, επομένως, δεν υπάρχει ανηγμένη παραμόρφωση στο μέσο επίπεδό της. Υπό αυτές τις συνθήκες η ενέργεια παραμόρφωσης θα είναι μόνο εξαιτίας της κάμψης:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.2)$$

Όπου  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  = καμπτική δυσκαμψία της πλάκας

$E$  = το μέτρο ελαστικότητας (Young's modulus)

$\nu$  = ο λόγος Poisson

$t$  = το πάχος της πλάκας

Το έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.3)$$

Όπου  $N_x$  = το εφαρμοζόμενο θλιπτικό φορτίο στη x διεύθυνση

$N_y$  = το εφαρμοζόμενο θλιπτικό φορτίο στην y διεύθυνση

$N_{xy}$  = η εφαρμοζόμενη διατμητική φόρτιση στο επίπεδο xy

Η αρχή των δυνατών έργων απαιτεί ότι:

$$W = U \quad (2.4)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την συνάρτηση παραμόρφωσης (2.1) στην αρχή των δυνατών έργων (2.4) θα προκύψει το ζητούμενο φορτίο ελαστικού λυγισμού της πλάκας. Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης υπολογισμού του εν λόγω φορτίου με βάση τον πρώτο τύπο προσέγγισης μπορεί να δοθεί και με τη μέθοδο των μεταβολών [63,pg 351].

Στον δεύτερο τύπο προσέγγισης αναζητείται το σημείο λυγισμού μέσω της διερεύνησης της συμπεριφοράς της πλάκας μετά τον αρχικό λυγισμό. Θεωρείται, δηλαδή, ότι η πλάκα λυγίζει ελαφρώς υπό την επίδραση δυνάμεων στο μέσο επίπεδό της και, ακολούθως, υπολογίζεται το μέγεθος αυτών των δυνάμεων ώστε να παραμένει η πλάκα σε αυτό το ελαφρώς λυγισμένο σχήμα. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης των ακόλουθων εξισώσεων ισορροπίας και συμβιβαστού:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - t \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p}{t} \right] = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Όπου  $F$  είναι η τασική συνάρτηση Airy

$p$  η εγκάρσια πίεση

Με την τασική συνάρτηση Airy  $F$  και την παραμόρφωση της πλάκας  $w$  γνωστές, μπορούν να υπολογιστούν οι τάσεις στο μέσο της πλάκας με τις γνωστές από τη θεωρία της ελαστικότητας σχέσεις:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = \frac{N_{xy}}{t} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

Οπότε το σημείο λυγισμού μπορεί να υπολογιστεί μέσω της (2.7) όταν η παραμόρφωση της πλάκας είναι μηδενική, ακριβώς πριν ξεκινήσει να λυγίζει.



## 2.2 Λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω θλίψης με απλή έδραση

### 2.2.1 Αναλυτικός υπολογισμός [59,pg 380]

Αγνοώντας τους περιστροφικούς περιορισμούς οι οποίοι προκύπτουν εξαιτίας των στρεπτικών ακαμψιών των μελών στήριξης στα άκρα της πλάκας, οι συνθήκες στήριξης γίνονται **απλής έδρασης (simply supported)**. Αυτή είναι και η περίπτωση που μας ενδιαφέρει στα πλαίσια εκπόνησης της παρούσας έρευνας και αφορά, γενικά, στις περιπτώσεις εκείνες όπου η στρεπτική ακαμψία των μελών στήριξης είναι αμελητέα σε σύγκριση με την καμπτική δυσκαμψία της πλάκας. Όταν ασκείται **μονοαξονική θλίψη** ( $N_x = -\sigma_x t$  και  $p = N_y = N_{xy} = 0$ ) σε μία πλάκα μήκους  $a$  και πλάτους  $b$  (Σχήμα 2.1) **το παραμορφωμένο σχήμα της πλάκας** μπορεί να εκφραστεί στην ακόλουθη μορφή:

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.8)$$

Όπου  $C_{mn}$ : σταθερές τιμές

$m$ : το πλήθος των ημικυμάτων (half-waves) στη διαμήκη διεύθυνση της πλάκας

$n$ : το πλήθος των ημικυμάτων στην εγκάρσια διεύθυνση της πλάκας

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.2) προκύπτει η ενέργεια παραμόρφωσης της πλάκας:

$$U = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_m \sum_n C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.9)$$

Επίσης, το έργο των συνεπίπεδων θλιπτικών τάσεων προκύπτει μέσω της σχέσης (2.3) με  $N_y = N_{xy} = 0$  ως εξής:

$$W = \frac{\pi^2 b \sigma_x t}{8a} \sum_m \sum_n C_{mn}^2 m^2 \quad (2.10)$$

Από την (2.4) η τιμή ισοροπίας της  $\sigma_x$  είναι:

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 \alpha^2 D \sum_m \sum_n C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{t \sum_m \sum_n C_{mn}^2 m^2} \quad (2.11)$$

Οι τιμές του όρου  $C_{mn}$  οι οποίες δίνουν την ελάχιστη τιμή του  $\sigma_x$  μπορούν να καθοριστούν από το γεγονός ότι μία έκφραση της μορφής  $(c_1 + c_2 + c_3 + \dots) / (d_1 + d_2 + d_3 + \dots)$  έχει κάποια ενδιάμεση τιμή μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης των κλασμάτων  $c_1/d_1, c_2/d_2, c_3/d_3, \dots$ . Επομένως, υπάρχει ένα κλάσμα  $c_j/d_j$  το οποίο είναι μικρότερο από οποιοδήποτε άλλο κλάσμα  $c_i/d_i$  και, επίσης, μικρότερο από οποιοδήποτε άλλο άθροισμα ή μερικό άθροισμα των κλασμάτων της ανωτέρω μορφής. Άρα, η ελάχιστη τιμή της  $\sigma_x$  η οποία αντιστοιχεί στην κρίσιμη

τάση λυγισμού αποκτάται λαμβάνοντας μόνο έναν όρο της (2.8), για παράδειγμα  $C_{mn}$ , και ο οποίος απαλείφεται οπότε:

$$\sigma_x = \frac{\pi^2 \alpha^2 D (\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2}{tm^2} \quad (2.12)$$

Οι παράμετροι  $m$  και  $n$  υποδεικνύουν τον αριθμό των ημικυμάτων στην κάθε διεύθυνση του λυγισμένου σχήματος. Θα πρέπει και οι δύο να είναι ακέραιοι και εύκολα φαίνεται ότι η τιμή του  $n$  η οποία δίνει τη χαμηλότερη τιμή του  $\sigma_x$  είναι  $n=1$ . Επομένως, η πλάκα θα λυγίσει σε ένα μόνο ημικύμα εγκαρσίως και η προκύπτουσα τάση λυγισμού είναι:

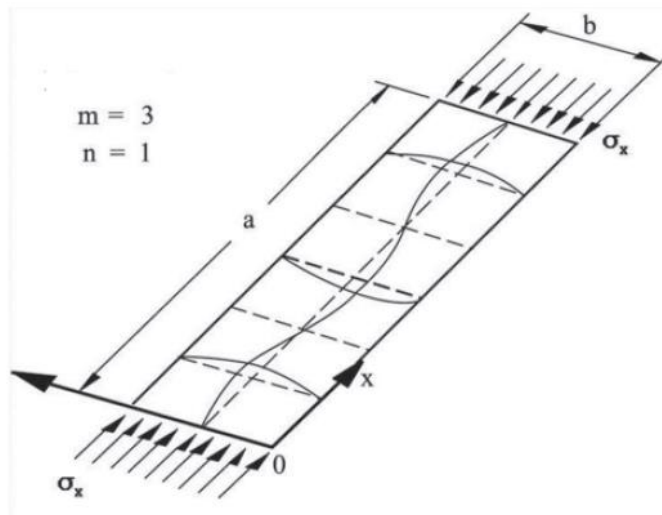
$$\sigma_x = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} [m + \frac{1}{m} (\frac{a}{b})^2]^2 \quad (2.13)$$

Ωστόσο, η τάση λυγισμού υπό την επίδραση μίας μόνο φόρτισης γράφεται σε μία πιο γενική μορφή σε όρους του συντελεστή λυγισμού  $k$  και του πλάτους της  $b$  ως εξής:

$$\sigma_x = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} (\frac{t}{b})^2 \quad (2.14)$$

Η έκφραση του συντελεστή λυγισμού εξαρτάται τόσο από τον τύπο των συνοριακών συνθηκών όσο και από τον τύπο της φόρτισης. Από τις (2.13) και (2.14) προκύπτει ότι για μία απλώς εδρασμένη ισότροπη πλάκα η οποία καταπονείται σε μονοαξονική θλίψη στην  $x$ -διεύθυνση είναι:

$$k = (\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb})^2 \quad (2.15)$$



**Σχήμα 2. 1:** Λυγισμένο σχήμα μιας μακριάς πλάκας με  $m=3$  ημικύματα στη διαμήκη διεύθυνση και  $n=1$  στην εγκάρσια [59]

Συγκρίνοντας πλάκες κοινού δομικού χάλυβα ( $E \approx 200$  [GPa]) και αλουμινίου ( $E \approx 70$  [GPa]) ίδιων διαστάσεων  $a$  και  $b$  είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι για

το ίδιο βάρος η πλάκα αλουμινίου θα έχει τρεις φορές μεγαλύτερο πάχος από την πλάκα χάλυβα (συγκρίνοντας τις πυκνότητές τους). Αφού το μέτρο ελαστικότητας του αλουμινίου είναι, περίπου, το 1/3 του μέτρου ελαστικότητας του χάλυβα, από τη σχέση (2.14) προκύπτει ότι η κρίσιμη τάση λυγισμού του αλουμινίου θα είναι περίπου τρεις φορές μεγαλύτερη και το κρίσιμο φορτίο περίπου εννιά φορές μεγαλύτερο από την πλάκα χάλυβα ίδιου βάρους [63]. Από αυτή τη σύγκριση φαίνεται πόσο σημαντική είναι η χρήση ελαφριών κραμάτων αλουμινίου σε τέτοιες κατασκευές, όπως οι αεροπορικές, όπου το βάρος αποτελεί πρωταρχική παράμετρο σχεδίασης.

### 2.2.2 Αριθμητική επίλυση [62]

Τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από τους παραπάνω αναλυτικούς υπολογισμούς συγκρίθηκαν με τις τιμές της αριθμητικής επίλυσης. Ειδικότερα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μέσω του εμπορικού λογισμικού ANSYS® [62]. Η διαδικασία της μοντελοποίησης ξεκινά με την εισαγωγή των διαστάσεων της πλάκας αλουμινίου. Για την τετράγωνη πλάκα οι διαστάσεις είναι:

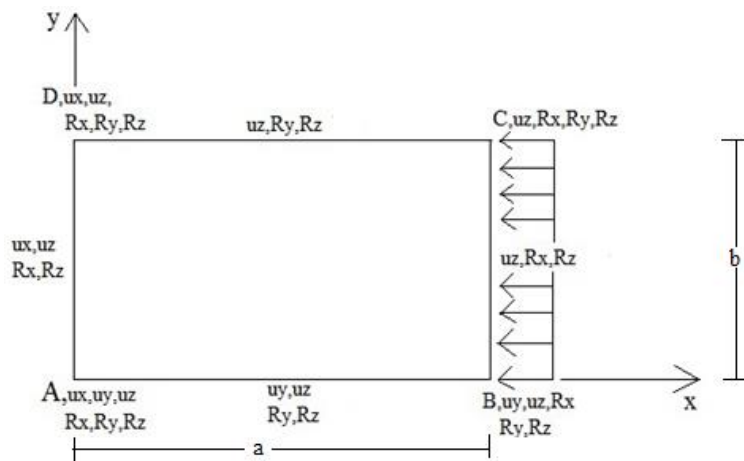
$$\text{Μήκος } a=0,2\text{m} \quad \text{πλάτος } b=0,2\text{m} \quad \text{και πάχος } t=0,002\text{m}$$

Στη συνέχεια ακολουθεί η επιλογή του υλικού το οποίο θα μοντελοποιηθεί σε γραμμικό ελαστικό λυγισμό και ο καθορισμός των μηχανικών του ιδιοτήτων. Οι μηχανικές ιδιότητες του αλουμινίου που επιλέχθηκε φαίνονται στον Πίνακα 1.1 του προηγούμενου κεφαλαίου και υπενθυμίζονται οι βασικές: μέτρο ελαστικότητας  $E=73,084$  [GPa] και λόγος Poisson  $\nu=0,33$ . Επόμενο βήμα είναι η διακριτοποίηση της πλάκας η οποία πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας στοιχεία κελύφους **3D Shell 4node 181**. Το εν λόγω στοιχείο είναι κατάλληλο για μοντελοποίηση δομικών κατασκευών λεπτού έως μέτριου πάχους όπως είναι και όλα τα υλικά τα οποία μελετήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Χρησιμοποιείται για μελέτη προβλημάτων κάμψης και λυγισμού και δίνει καλά αποτελέσματα παραμόρφωσης ενώ έχει χαμηλό υπολογιστικό κόστος [62]. Το σχήμα των επιλεγθέντων στοιχείων είναι τετραγωνικό με σταθερό μήκος πλευράς ( $d=0,002\text{m}$ ), οπότε και για την τετράγωνη πλάκα προέκυψαν 10000 πεπερασμένα στοιχεία.

Η μελέτη που πραγματοποιήθηκε θέτει ως μεταβλητή τη διάσταση της πλάκας και, συγκεκριμένα, το λόγο μήκους προς πλάτος (aspect ratio  $a/b$ ). Το πάχος  $b$  διατηρούνταν σταθερό και μεταβαλλόταν το μήκος  $a$ , για να προκύψουν, τελικά, τα διάφορα μοντέλα διαφορετικού λόγου  $a/b$ . Σε όλα αυτά τα μοντέλα διατηρούνταν, επίσης, σταθερό το μήκος της πλευράς του κάθε πεπερασμένου στοιχείου ( $d$ ) με αποτέλεσμα να μεταβάλλεται το πλήθος των στοιχείων για το καθένα. Με αυτό τον τρόπο και αξιοποιώντας την ανάλυση λυγισμού με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS®, η οποία αναλύεται σε επόμενη υποενότητα, προέκυπτε το ζητούμενο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και, άρα, η κρίσιμη

τάση ( $\sigma_x=N_x/t$ ) για κάθε πλάκα. Προέκυπταν, επίσης, και οι ιδιομορφές (mode shapes) οι οποίες αντιστοιχούν στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού και υποδεικνύουν το λυγισμένο σχήμα της πλάκας. Τελικά, με τη χρήση της σχέσης (2.14) υπολογίζεται και ο συντελεστής λυγισμού  $k$ .

Όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες της απλής έδρασης οι οποίες εφαρμόστηκαν στην πλάκα αλουμινίου φαίνονται στο Σχήμα 2.2 παρακάτω [61, pg 380], ενώ φαίνεται και η επιβολή του κατανεμημένου μοναδιαίου φορτίου που προκαλεί τον λυγισμό. Πρόκειται για τις οριακές συνθήκες στους 4 γωνιακούς κόμβους (A,B,C,D) και στις 4 πλευρές της πλάκας (AB,BC,CD,DA). Ο συμβολισμός  $u$  συνοδευόμενος από ένα άξονα ( $u_x$ ) εκφράζει μηδενική μετατόπιση της πλευράς ή του κόμβου ως προς το συγκεκριμένο άξονα του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Αντίστοιχα, ο συμβολισμός  $R$  σε συνδυασμό με ένα άξονα ( $R_x$ ) υποδηλώνει περιορισμό στροφής της πλευράς ή του κόμβου ως προς τον εν λόγω άξονα.



**Σχήμα 2. 2:** Οι συνοριακές συνθήκες της απλής έδρασης και η φόρτιση της μονοαξονικής θλίψης σε πλάκα πάχους  $t$

### 2.2.3 Θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου των ιδιοτιμών

Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου των ιδιοτιμών αφορά στο γεγονός ότι ο λυγισμός αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση προβλήματος ιδιοτιμών, όπως θα γίνει αντιληπτό και στη συνέχεια αυτής της ενότητας. Στόχος, λοιπόν, της επίλυσης αυτού του προβλήματος είναι ο υπολογισμός των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του υπό μελέτη συστήματος. Καταρχάς, στη γραμμική άλγεβρα ένα ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) ή, αλλιώς, ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα ενός γραμμικού μετασχηματισμού είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, το οποίο μεταβάλλεται κατά ένα βαθμωτό μέγεθος όταν αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός εφαρμόζεται σε αυτό. Ειδικότερα, αν  $T$  είναι

ένας γραμμικός μετασχηματισμός ενός διανυσματικού χώρου  $V$  ενός πεδίου  $F$  και  $\mathbf{v}$  είναι ένα διάνυσμα στον  $V$  το οποίο δεν είναι το μηδενικό, τότε το  $\mathbf{v}$  αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του  $T$  αν  $T(\mathbf{v})$  είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του  $\mathbf{v}$ . Η προαναφερθείσα συνθήκη γράφεται με τη μορφή σχέσης ως εξής [79]:

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad (2.16)$$

Όπου  $\lambda$  είναι ένα βαθμωτό μέγεθος του πεδίου  $F$ , και ορίζεται ως ιδιοτιμή, χαρακτηριστική τιμή ή χαρακτηριστική ρίζα σχετιζόμενη με το ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}$ . Αν ο διανυσματικός χώρος  $V$  είναι πεπερασμένων διαστάσεων τότε ο γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να παρασταθεί ως ένα τετραγωνικό μητρώο  $A$  και το διάνυσμα  $\mathbf{v}$  ως ένα διάνυσμα στήλης, καθιστώντας την ανωτέρω σχέση σαν πολλαπλασιασμό πινάκων στο αριστερό μέρος και σαν πολλαπλασιασμό ενός βαθμωτού μεγέθους με διάνυσμα στο δεξί μέρος:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (2.17)$$

Παρατηρείται ότι υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ του  $n \times n$  τετραγωνικού μητρώου και του γραμμικού μετασχηματισμού, οπότε είναι ισοδύναμο να ορίζονται ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα στη μητρική γραφή ή στη μορφή γραμμικών μετασχηματισμών. Με τη γεωμετρική έννοια του όρου ένα ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχίζεται σε μία πραγματική μη μηδενική ιδιοτιμή είναι τοποθετημένο πάνω σε μία διεύθυνση στην οποία επιμηκύνεται και η ιδιοτιμή αποτελεί τον παράγοντα επιμήκυνσης.

### 2.2.3.1 Η βασική ιδέα του προβλήματος των ιδιοτιμών [74]

Η ανάλυση ενός μηχανικού συστήματος απαιτεί την εξιδανίκευση του (idealization) σε μία μορφή η οποία μπορεί να επιλυθεί, το σχηματισμό του μαθηματικού μοντέλου, την επίλυση του μοντέλου και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Γενικά, υπάρχουν δύο κατηγορίες μαθηματικών μοντέλων: τα μοντέλα συγκεντρωμένων παραμέτρων (διακριτό σύστημα) και τα βασισμένα στη μηχανική του συνεχούς μέσου μοντέλα (συνεχές σύστημα). Στα πρώτα η απόκριση του συστήματος περιγράφεται απευθείας από την επίλυση ενός πεπερασμένου αριθμού μεταβλητών κατάστασης, ενώ στα μοντέλα τα οποία βασίζονται στη μηχανική του συνεχούς, ο σχηματισμός των κυρίαρχων εξισώσεων επιτυγχάνεται μέσω διαφορικών εξισώσεων. Η ακριβής λύση αυτών των διαφορικών εξισώσεων, η οποία ικανοποιεί όλες τις συνοριακές συνθήκες, είναι εφικτή για σχετικά απλά μαθηματικά μοντέλα, ενώ στη γενική περίπτωση εφαρμόζονται αριθμητικές διαδικασίες στις οποίες το μαθηματικό μοντέλο του συνεχούς συστήματος διακριτοποιείται και, τελικά, επιλύεται όπως το μαθηματικό μοντέλο ενός διακριτού [74,pg 78].

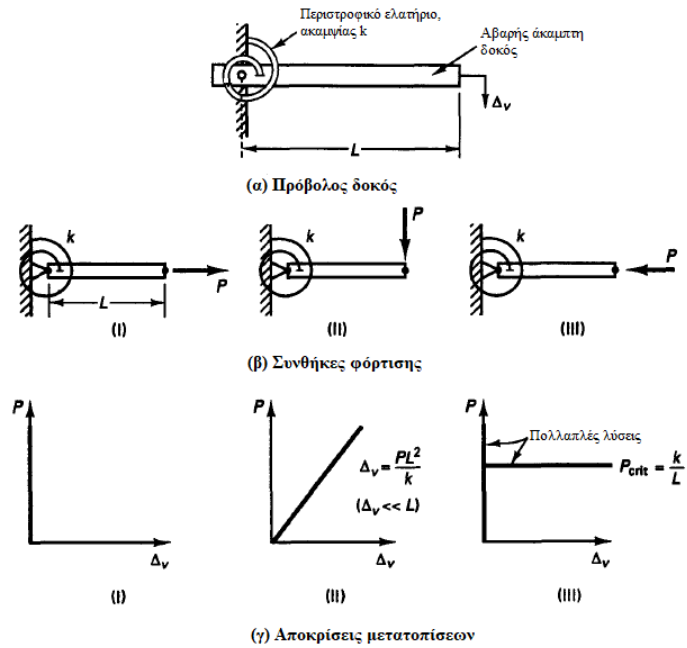
Η επίλυση ενός μαθηματικού μοντέλου συγκεντρωμένων παραμέτρων πραγματοποιείται στα ακόλουθα βήματα:

1. *Εξιδανίκευση του συστήματος*: το σύστημα εξιδανικεύεται ως ένα συγκρότημα στοιχείων.

2. *Ισορροπία στοιχείου*: οι απαιτήσεις ισορροπίας του κάθε στοιχείου ορίζονται σε όρους των μεταβλητών κατάστασης.
3. *Αλληλουχία στοιχείων*: ορίζονται οι απαιτήσεις αλληλοσύνδεσης των στοιχείων ώστε να δομηθεί μια ομάδα ταυτόχρονων εξισώσεων για τις άγνωστες μεταβλητές κατάστασης.
4. *Υπολογισμός της απόκρισης*: επιλύονται οι ταυτόχρονες εξισώσεις για τις μεταβλητές κατάστασης και χρησιμοποιώντας τις απαιτήσεις ισορροπίας των στοιχείων, υπολογίζεται η απόκριση του κάθε στοιχείου.

Αυτά, λοιπόν, είναι τα βήματα επίλυσης των διαφόρων προβλημάτων που τίθενται. Τα εν λόγω προβλήματα διακρίνονται στα σταθερής κατάστασης (η απόκριση του συστήματος δε μεταβάλλεται με το χρόνο), στα προβλήματα διάδοσης (η απόκριση του συστήματος μεταβάλλεται με το χρόνο) και στα προβλήματα ιδιοτιμών.

Η βασική διαφορά μεταξύ των παραπάνω προβλημάτων αφορά στο γεγονός ότι στα προβλήματα διάδοσης και σταθερής κατάστασης υπάρχει μία μοναδική λύση της απόκρισης του συστήματος. Αντίθετα, **ένα κύριο χαρακτηριστικό των προβλημάτων ιδιοτιμών είναι ότι δεν υπάρχει μοναδική λύση στην απόκριση του συστήματος και το αντικείμενο της ανάλυσης είναι ο υπολογισμός των διάφορων πιθανών λύσεων.** Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι τα προβλήματα ιδιοτιμών μπορούν να είναι τόσο σταθερής κατάστασης όσο και δυναμικής ανάλυσης. Η παρούσα έρευνα πραγματεύεται ένα πρόβλημα σταθερής κατάστασης αυτό του γραμμικού λογισμού. Σε ένα τέτοιο, λοιπόν, πρόβλημα είναι αναγκαία η διερεύνηση της φυσικής ευστάθειας του υπό μελέτη συστήματος. Ειδικότερα, το ερώτημα που δημιουργείται και οδηγεί σε ένα τέτοιου είδους πρόβλημα είναι: υποθέτοντας ότι η λύση σταθερής κατάστασης του συστήματος είναι γνωστή, υπάρχει κάποια άλλη λύση στην οποία το σύστημα θα μπορούσε να διακλαδωθεί αν διαταρασσόταν ελαφρώς από τη θέση ισορροπίας του; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα εξαρτάται από το υπό μελέτη σύστημα και τα ασκούμενα σε αυτό φορτία.



Σχήμα 2. 3: Η βασική ιδέα του προβλήματος των ιδιοτιμών

Η βασική ιδέα του προβλήματος των ιδιοτιμών γίνεται αντιληπτή με την παράθεση του παραδείγματος του Σχήματος 2.3. Θεωρείται μία πρόβολος δοκός άκαμπτη και αμελητέου βάρους με ένα περιστροφικό ελατήριο σταθεράς  $k$ . Εφόσον η δοκός είναι άκαμπτη το σύστημα θα είναι ενός βαθμού ελευθερίας, ο οποίος συμβολίζεται με  $\Delta_v$  (μεταβλητή κατάστασης). Στην κατάσταση φόρτισης I η δοκός υπόκειται σε διαμήκη εφελκυστική φόρτιση  $P$  και η ροπή στο ελατήριο είναι μηδενική ( $\Delta_v=0$ ). Ακολούθως, στην εντατική κατάσταση II και υποθέτοντας μικρές μετατοπίσεις θα ισχύει:  $\Delta_v=PL^2/k$ , ενώ στην κατάσταση φόρτισης III θα είναι όπως και στην I:  $\Delta_v=0$ .

Επόμενο βήμα στο απλουστευμένο αυτό παράδειγμα αποτελεί η εξέταση της ευστάθειας του συστήματος υπό αυτές τις συνθήκες φόρτισης. Για να πραγματοποιηθεί αυτό διαταράσσουμε την κατασκευή από τη θέση ισορροπίας της και ελέγχουμε αν είναι εφικτή μία επιπρόσθετη θέση ισορροπίας. Όσον αφορά στις περιπτώσεις I και II, και υποθέτοντας ότι το  $\Delta_v$  είναι θετικό αλλά μικρού μεγέθους, παρατηρούμε ότι στην εντατική κατάσταση I η μικρή μετατόπιση  $\Delta_v$  δε μπορεί να διατηρηθεί και στην εντατική κατάσταση II η επίδραση της εισαγωγής της  $\Delta_v$  στην ανάλυση είναι αμελητέα. Αντίθετα, στην περίπτωση III θεωρώντας  $\Delta_v>0$ , προκειμένου να καταστεί εφικτή μία διαμόρφωση ισορροπίας θα πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη εξίσωση ισορροπίας:  $P\Delta_v=k\Delta_v/L$ . Όμως, εφόσον  $P=k/L$  η εξίσωση θα ικανοποιείται για κάθε  $\Delta_v$ . Επομένως, το κρίσιμο φορτίο στο οποίο μία θέση ισορροπίας επιπρόσθετη στην οριζόντια γίνεται εφικτή είναι:  $P_{crit}=k/L$ . Τελικά:

$P < P_{crit}$  μόνο η οριζόντια θέση της δοκού είναι εφικτή (ευσταθής ισορροπία)

$P = P_{crit}$  η οριζόντια και η παραμορφωμένη θέση ισορροπίας της δοκού είναι εφικτές

$P > P_{crit}$  ασταθής ισορροπία

Η ανάλυση του παραδείγματος υποδεικνύει ότι κύριο αντικείμενο του σχηματισμού και της επίλυσης ενός προβλήματος ιδιοτιμών αποτελεί η πρόβλεψη αν μικρές διακυμάνσεις, οι οποίες επιβάλλονται στη δοθείσα θέση ισορροπίας τείνουν να προκαλούν ουσιώδη αύξηση σε βασικές μεταβλητές κατάστασης. Το επίπεδο της φόρτισης στο οποίο παρατηρείται αυτή η κατάσταση αντιστοιχεί στο κρίσιμο φορτίο του συστήματος. Τέλος, η λύση των ιδιοτιμών βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή σε καταστάσεις τύπου «δοκού-στήλης» κατασκευών οι οποίες αποτελούνται από δοκούς, πλάκες ή κελύφη. Τέτοιες κατασκευές μελετούνται και στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, με το λυγισμό πλακών να αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση ενός προβλήματος ιδιοτιμών.

### 2.2.3.2 Μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος των ιδιοτιμών

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα χαρακτηρίζονται από μία πληθώρα ιδιοτήτων, όπως το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Όλες αυτές οι ιδιότητες είναι σημαντικές και λαμβάνονται υπόψη στην επίλυση πολύπλοκων ιδιοσυστημάτων και στην καθιέρωση αντίστοιχων τεχνικών επίλυσης [74,pg 51].

Όπως έχει προαναφερθεί το απλούστερο πρόβλημα ιδιοτιμών είναι αυτό το οποίο περιγράφεται στη Σχέση (2.17) και είναι της μορφής [74,pg 887]:

$$K\varphi = \lambda\varphi \quad (2.18)$$

όπου  $K$  είναι το μητρώο ακαμψίας ενός πεπερασμένου στοιχείου ή ενός συγκροτήματος στοιχείων

Ο  $K$  είναι θετικά ορισμένος ή θετικά ημι-ορισμένος και είναι τετραγωνικός  $n \times n$ . Η λύση του προβλήματος για  $p$  ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων ( $p \leq n$ ) μπορεί να γραφεί ως:

$$K\Phi = \Phi\Lambda \quad (2.19)$$

όπου:  $\Phi$  είναι ένα  $(p \times n)$  μητρώο με τις στήλες του ίσες με τα  $p$  ιδιοδιανύσματα

$\Lambda$  ένα διαγώνιο μητρώο  $(p \times p)$  στο οποίο περιέχονται οι αντίστοιχες ιδιοτιμές

Ένα ακόμη πιο γενικό πρόβλημα είναι αυτό της ανάλυσης των ταλαντώσεων το οποίο περιγράφεται από τη Σχέση:

$$K\varphi = \lambda M\varphi \quad (2.20)$$

Όπου  $K$  και  $M$  είναι τα μητρώα ακαμψίας και μάζας, αντίστοιχα, για το συγκρότημα των πεπερασμένων στοιχείων.

Γενικά, έχει πραγματοποιηθεί ιδιαίτερη προσπάθεια στην κατασκευή αποδοτικών αλγορίθμων οι οποίοι χρησιμοποιούν προσεγγιστικές τεχνικές επίλυσης για τον υπολογισμό των απαιτούμενων ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του προβλήματος (2.18). Αυτό συμβαίνει επειδή, στην πραγματικότητα, η ακριβής



επίλυση του ιδιοσυστήματος μπορεί να έχει απαγορευτικά υψηλό κόστος όταν η τάξη του είναι αυξημένη. Έχουν αναπτυχθεί, επομένως, αυτές οι προσεγγιστικές τεχνικές ώστε να υπολογίζονται οι χαμηλότερες ιδιοτιμές με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τέτοιες είναι η στατική συμπύκνωση (static condensation), στην οποία εξαλείφονται οι βαθμοί ελευθερίας εκείνοι που δεν απαιτείται να εμφανίζονται στο καθολικό συγκρότημα πεπερασμένων στοιχείων και η ανάλυση Rayleigh-Ritz.

Οι μέθοδοι επίλυσης θα μπορούσαν να κατηγοριοποιηθούν σε τέσσερις ομάδες ανάλογα με το ποια είναι η βασική ιδιότητα, η οποία χρησιμοποιείται ως βάση στον αλγόριθμο επίλυσης. Οι επαναληπτικές μέθοδοι συγκροτούν την πρώτη ομάδα και η βασική τους ιδιότητα είναι ότι  $K\varphi_i = \lambda_i M\varphi_i$ . Οι μέθοδοι μετασχηματισμού συγκροτούν τη δεύτερη ομάδα έχοντας ως βασικές ιδιότητες:  $\Phi^T K \Phi = \Lambda$  και  $\Phi^T M \Phi = I$ . Οι μέθοδοι επίλυσης της τρίτης ομάδας είναι επαναληπτικές πολυωνυμικές τεχνικές, οι οποίες λειτουργούν με βάση το γεγονός ότι:  $\rho(\lambda_i) = 0$  όπου  $\rho(\lambda) = \det(K - \lambda M)$ . Τέλος, οι μέθοδοι επίλυσης της τέταρτης ομάδας χρησιμοποιούν την ιδιότητα της αλληλουχίας του Sturm των χαρακτηριστικών πολυωνύμων ( $\rho^{(r)}(\lambda^{(r)})$ ) όπου:

$$\rho^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}), \quad r = 1, \dots, n - 1 \quad (2.21)$$

Αναγκαίο κρίνεται να σημειωθεί ότι όλες οι μέθοδοι επίλυσης είναι επαναληπτικής φύσης επειδή, βασικά, η επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\rho(\lambda)$ , το οποίο είναι βαθμού ίσου με την τάξη του μητρώου K και M.

#### Η μέθοδος επίλυσης του προβλήματος του γραμμικού λυγισμού [75]

Σε μία γραμμική στατική ανάλυση, μία κατασκευή θεωρείται ότι είναι σε μία κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Καθώς το φορτίο αποσύρεται η κατασκευή θεωρείται ότι επιστρέφει στην αρχική της κατάσταση. Ωστόσο, κάτω από δεδομένους συνδυασμούς φορτίσεων **η κατασκευή γίνεται ασταθής**. Όταν αυτό συμβεί **η δομή συνεχίζει να παραμορφώνεται χωρίς να υπάρχει αύξηση στο μέγεθος της φόρτισης**, όπως ακριβώς παρατηρήθηκε στο διάγραμμα γ). III του Σχήματος 2.3. Σε αυτή την περίπτωση η δομή έχει υποστεί λυγισμό, ή έχει γίνει ασταθής. Επομένως, ο όρος αστάθεια, συχνά, χρησιμοποιείται, εναλλακτικά, με τον όρο λυγισμό.

Στην περίπτωση η οποία αφορά και στον υπολογισμό των ζητούμενων κρίσιμων φορτίων λυγισμού της παρούσας εργασίας, σε αυτή, δηλαδή, της ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων, το πρόβλημα του γραμμικού λυγισμού τίθεται περιλαμβάνοντας την επίδραση του μητρώου διαφορικής ακαμψίας (differential stiffness) στο μητρώο γραμμικής ακαμψίας. Τα στοιχεία του μητρώου διαφορικής ακαμψίας προέρχονται από τους όρους υψηλότερης τάξης των σχέσεων τάσης-παραμόρφωσης

Ειδικότερα, ο όρος «διαφορική ακαμψία» βρίσκει εφαρμογή στους γραμμικούς όρους των εξισώσεων της κίνησης ενός ελαστικού σώματος οι οποίοι προκύπτουν όταν λαμβάνονται υπόψη, ταυτόχρονα, μεγάλες μη γραμμικές κινήσεις και τα

εφαρμοζόμενα φορτία. Η θεωρία της διαφορικής ακαμψίας δεν είναι ακριβής και εμπεριέχει υποθέσεις οι οποίες μεταβάλλονται ανάλογα με την πρακτική εφαρμογή. Η προσέγγιση η οποία παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα βασίζεται στις γνωστές εξισώσεις Lagrange της κίνησης ενός συστήματος πεπερασμένου αριθμού βαθμών ελευθερίας [76].

Προκειμένου να γίνει κατανοητός ο όρος της διαφορικής ακαμψίας υποτίθεται ένα σύστημα πεπερασμένου αριθμού βαθμών ελευθερίας  $q_r$ , με μία ομάδα ελατηρίων με δυναμική ενέργεια  $V$  και μερικές φορτίσεις  $P_a$ , οι οποίες προκαλούν μετατοπίσεις  $u_a$ . Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος γράφονται [76]:

$$\frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

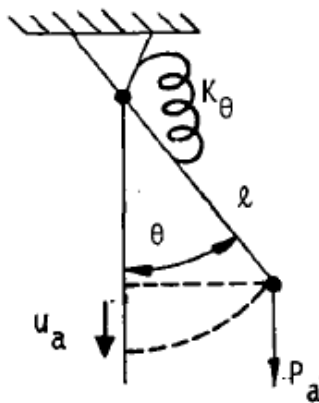
$$Q_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} = \sum_{\alpha} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial q_r} P_{\alpha} \quad (2.23)$$

Όπου:  $Q_r$  είναι η γενικευμένη φόρτιση

$W$  είναι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων

Η δυναμική ενέργεια υποτίθεται ότι είναι μία τετραγωνική συνάρτηση των βαθμών ελευθερίας σύμφωνα με τη θεωρία της διαφορικής ακαμψίας:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} q_i q_j \quad (2.24)$$



Σχήμα 2.4: Αβαρής, άκαμπτη δοκός με περιστροφικό ελατήριο

Σαν απλό παράδειγμα (Σχήμα 2.4) η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$V = \frac{1}{2} k_{\theta} \theta^2 \quad (2.25)$$

Η μετατόπιση στο σημείο εφαρμογής και στην κατεύθυνση του εφαρμοζόμενου φορτίου είναι  $u_a = l(\cos\theta - 1)$ , οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις ανωτέρω εξισώσεις θα είναι:

$$k_{\theta} \theta = -P_{\alpha} l \sin\theta \quad (2.26)$$

Ο όρος δεξιά στην εξίσωση (1.18) γραμμικοποιείται οπότε:

$$(K_{\theta} + P_{\alpha} l) \theta = 0 \quad (2.27)$$

Ο όρος  $P_{\alpha I}$  αποτελεί τον όρο της διαφορικής ακαμψίας στο απλουστευμένο παράδειγμα του Σχήματος 2.4. Σε ένα πρακτικό πρόβλημα με αρκετούς βαθμούς ελευθερίας είναι δύσκολο να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι της Εξίσωσης (2.22) γιατί, κυρίως, τα σημεία εφαρμογής των φορτίσεων είναι απομακρυσμένα από τους βαθμούς ελευθερίας. Το πρόβλημα απλοποιείται αντικαθιστώντας τα εφαρμοζόμενα φορτία με μία στατικά ισοδύναμη ομάδα φορτίων τα οποία ασκούνται απευθείας στα δομικά στοιχεία όπως στα διαγράμματα ελεύθερων σωμάτων.

Επιγραμματικά τα βήματα ώστε να συμπεριληφθεί η διαφορική ακαμψία σε ένα πρόβλημα είναι:

1. **Επίλυση του γραμμικού, στατικού προβλήματος** της κατασκευής, απουσία της διαφορικής ακαμψίας και υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων του στοιχείου.
2. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του βήματος 1 **υπολογισμός των μητρών διαφορικής ακαμψίας** για το κάθε στοιχείο και σχηματισμός του μητρώου διαφορικής ακαμψίας στην τελική του μορφή  $[K_{aa}^d]$ .
3. Στα προβλήματα λυγισμού, **εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων** για  $[K_{aa} + \lambda K_{aa}^d]\{u\} = 0$ . Οι ιδιοτιμές αποτελούν παράγοντες με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα εφαρμοζόμενα φορτία ώστε να προκαλέσουν λυγισμό.

Στα προγράμματα των πεπερασμένων στοιχείων όπως το ANSYS [62] και το NASTRAN χρησιμοποιούνται δύο κύριες μέθοδοι εξαγωγής των πραγματικών ιδιοτιμών: η μέθοδος της μείωσης (τριδιαγωνιοποίηση) και η **επαναληπτική (Lanczos) μέθοδος**. Η πρώτη εφαρμόζεται για τον υπολογισμό των ιδιομορφών στην ανάλυση της ταλάντωσης συντηρητικών συστημάτων, ενώ η δεύτερη τόσο για προβλήματα ταλάντωσης όσο και για προβλήματα λυγισμού.

Η βασική ιδέα του Lanczos [78] σχετιζόταν με μία διαδικασία μετασχηματισμού του μητρώου σε τριδιαγώνια μορφή. Ωστόσο, ο αλγόριθμος Lanczos παραλείπει την τριδιαγωνιοποίηση και παρέχει προσεγγιστικά ιδιοζεύγη (ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων) του αρχικού μητρώου. Πρόκειται για μία σύνθετη μέθοδο της οποίας η ανάλυση δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας έρευνας και θα παρατεθεί, απλώς, ο βασικός της αλγόριθμος.

### 2.2.3.3 Βασικός αλγόριθμος της μεθόδου εξαγωγής ιδιοτιμών Lanczos [77]

Υπενθυμίζεται ότι στόχος του εν λόγω αλγορίθμου είναι ο υπολογισμός του ιδιοζεύγους (ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος) του προβλήματος ιδιοτιμών όπως περιγράφεται στη σχέση:  $Ax = \lambda x$ .

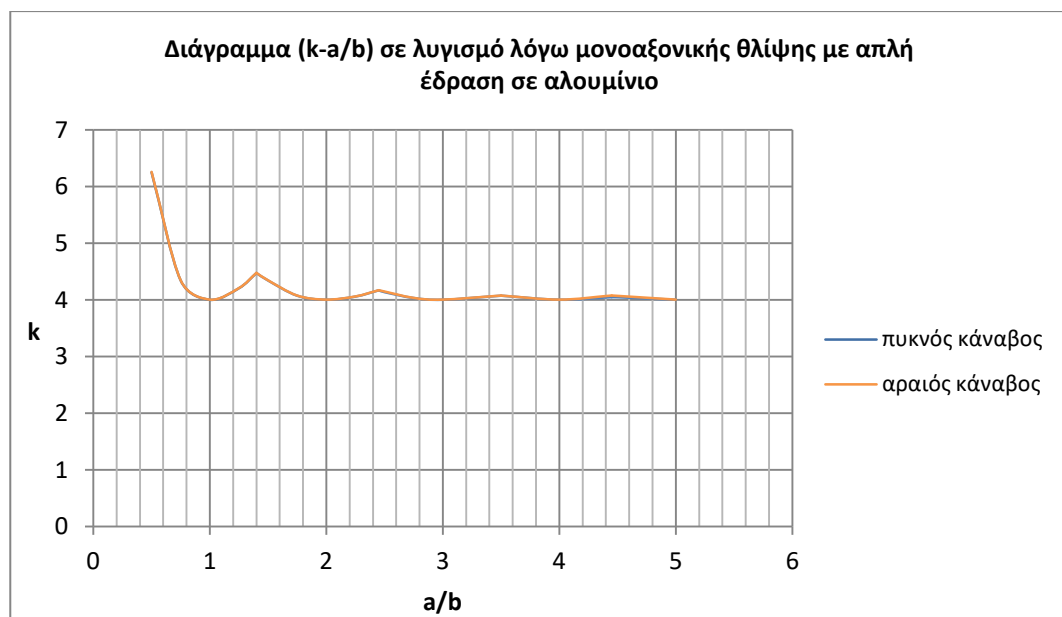
1. Αρχικοποίηση
  - α. Ένα αρχικό διάνυσμα  $q_1$  με  $\|q_1\| = 1$
  - β. Αρχικοποίηση της βαθμωτής παραμέτρου  $\beta_1 = 0$  και του διανύσματος  $q_0 = 0$
2. Επανάληψη



βρίσκεται στη νόρμα του υπολοίπου του ιδοζεύγους  $\|Ay-\theta y\|$ , η οποία φαίνεται να απαιτεί τον πλήρη υπολογισμό ενός υποψήφιου ιδοζεύγους. Όμως στην πραγματικότητα η ζητούμενη νόρμα του υπολοίπου μπορεί να υπολογιστεί μέσω της (2.28) παρατηρώντας ότι:  $Ay-\theta y=\beta_{j+1}q_{j+1}s_j$  όπου  $s_j$  είναι το  $j$ -th στοιχείο του ιδιοδιανύσματος  $s$ . Άρα η νόρμα του υπολοίπου δίνεται από το γινόμενο  $\beta_{j+1}s_j$  και δεν απαιτείται ο πλήρης υπολογισμός του ιδιοδιανύσματος  $y$ . Το  $y$  υπολογίζεται μόνο μία φορά στο τέλος της επαναληπτικής διαδικασίας.

#### 2.2.4 Έλεγχος σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου

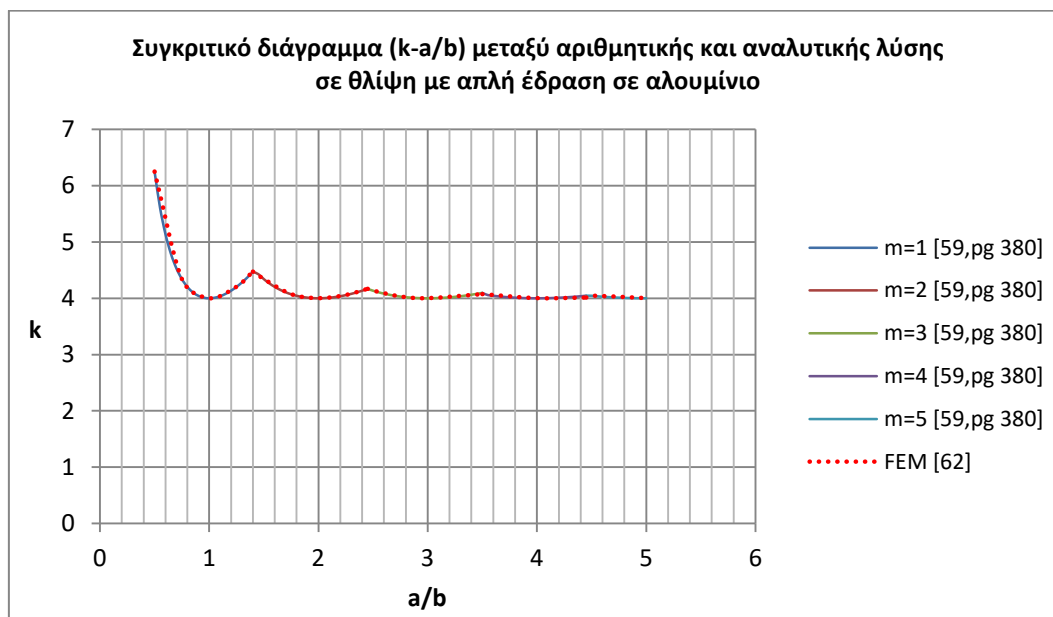
Προτού γίνει η παράθεση των διαγραμμάτων που έχουν προκύψει από τη σύγκριση των αναλυτικών τιμών με τις τιμές της αριθμητικής επίλυσης θα πραγματοποιηθεί έλεγχος σύγκλισης των αποτελεσμάτων του ANSYS® ειδικά για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου πάχους 1,875mm. Οι γραφικές παραστάσεις οι οποίες θα συγκριθούν θα είναι του συντελεστή λυγισμού  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$ . Θα συγκριθεί, δηλαδή, ο πυκνός κánaβος της διακριτοποίησης που περιγράφηκε ανωτέρω με έναν αραιό, ο οποίος δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας μεγαλύτερο σταθερό μήκος πλευράς ( $d=0,004m$ ) πεπερασμένου στοιχείου και αποτελείται από 2500 τέτοια στην τετράγωνη πλάκα αλουμινίου ( $a/b=1$ ). Όπως διαπιστώνεται από το ακόλουθο Σχήμα 2.5 η σύγκλιση είναι εξαιρετική με τις δύο γραφικές παραστάσεις, σχεδόν, να ταυτίζονται. Αντίστοιχος έλεγχος σύγκλισης έχει υλοποιηθεί σε όλες τις περιπτώσεις λυγισμού που εξετάστηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, με πολύ καλή σύγκλιση των αποτελεσμάτων.



**Σχήμα 2. 5:** Συγκριτικό διάγραμμα ελέγχου σύγκλισης θλίψης με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου για δύο διαφορετικές διακριτοποιήσεις

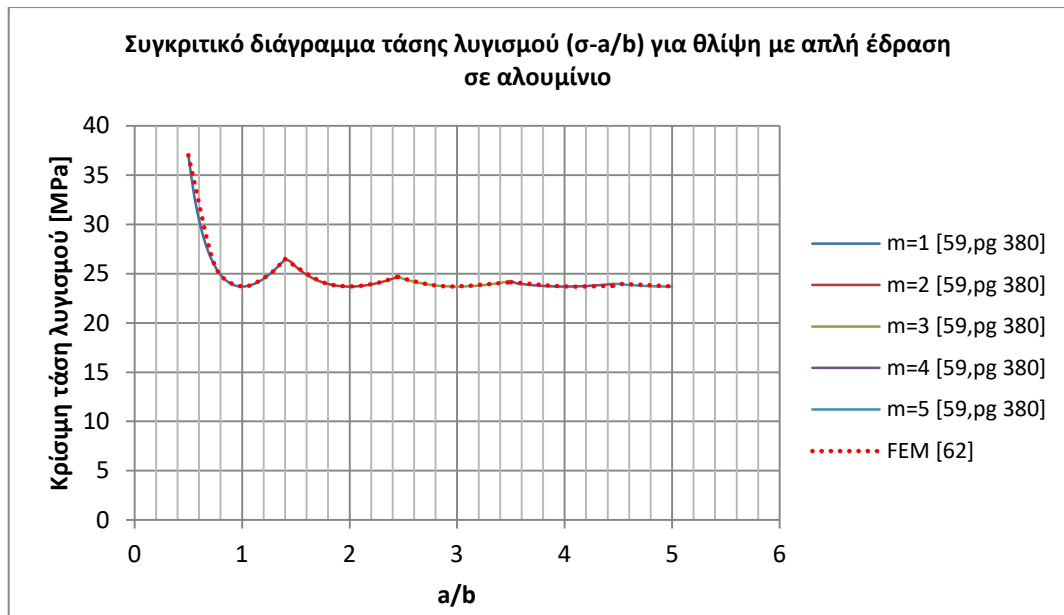
## 2.2.5 Σύγκριση μεταξύ αναλυτικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου

Μετά τον υπολογισμό των αναλυτικών τιμών και των τιμών από το ANSYS® [62] είναι εφικτή η κατασκευή του συγκριτικού διαγράμματος, στο οποίο περιέχονται οι γραφικές παραστάσεις για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου πάχους 0,001875m. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.6 η σύγκλιση των δύο μεθόδων είναι εξαιρετική. Η απόκλιση μεταξύ των τιμών είναι αμελητέα.



**Σχήμα 2. 6:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής λύσης για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου για διαφορετικό πλήθος ημικυμάτων ( $m=1, 2, \dots, 5$ )

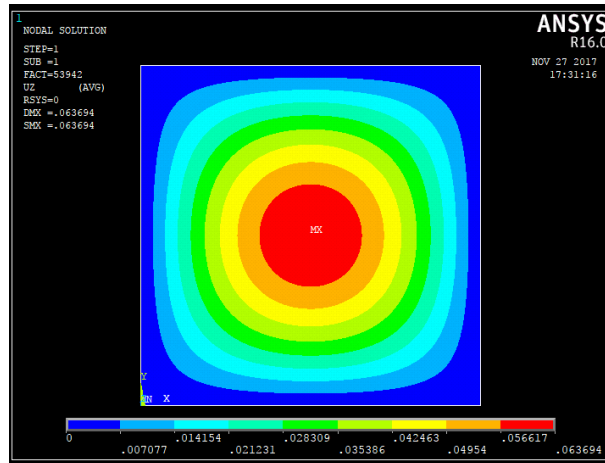
Στη συνέχεια (Σχήμα 2.7) παρατίθεται και το συγκριτικό διάγραμμα της κρίσιμης τάσης λυγισμού συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για την απλώς εδρασμένη πλάκα αλουμινίου σε θλίψη. Η σύγκλιση είναι, επίσης, εξαιρετική όπως αναμενόταν.



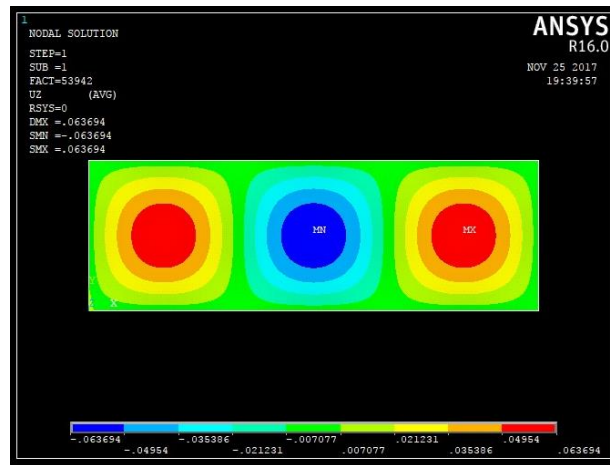
**Σχήμα 2. 7:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού για απλώς εδρασμένη πλάκα αλουμινίου πάχους  $t=0,001875m$

### Ιδιομορφές

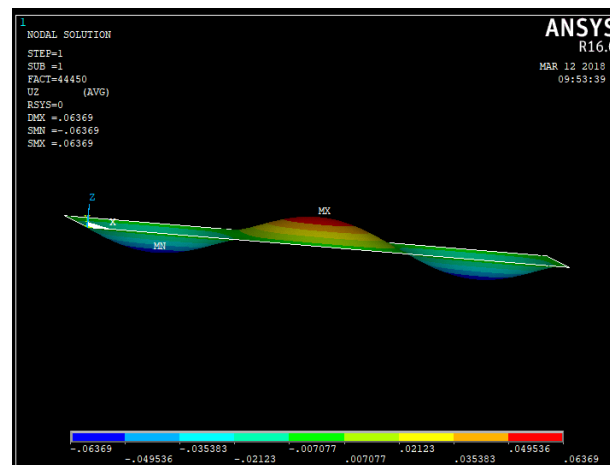
Όπως προαναφέρθηκε, με την ολοκλήρωση της μοντελοποίησης είναι δυνατή η εμφάνιση των ιδιομορφών λυγισμού, όπου φαίνεται η **μορφή της λυγισμένης πλάκας**, ο αριθμός των ημικυμάτων που δημιουργούνται και οι τιμές της βύθισης αυτών των ημικυμάτων. Στο Σχήμα 2.8 φαίνεται η ιδιομορφή της τετράγωνης πλάκας αλουμινίου, όπου δημιουργήθηκε ένα ( $m=1$ ) ημικόμα (half wave), κάτι που διαπιστώνεται και από την αναλυτική λύση του Σχήματος 2.6. Αντίστοιχα στο Σχήμα 2.9 φαίνεται ο σχηματισμός τριών ( $m=3$ ) ημικυμάτων για πλάκα αλουμινίου με λόγο  $a/b=3$  σε θλίψη με απλή έδραση και στο Σχήμα 2.10 φαίνεται σε πλάγια όψη η ίδια πλάκα. Σημειώνεται ότι γίνεται πάντα και έλεγχος σύγκλισης των ιδιομορφών, δηλαδή, σύγκριση των ιδιομορφών που αντιστοιχούν σε αραιό και πυκνό κάρναβο, έτσι ώστε να διαπιστώνεται η σύγκλιση τους. Μία παρατήρηση η οποία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί, επίσης, αφορά στις γραμμές μηδενικής παραμόρφωσης της πλάκας (nodal lines), οι οποίες είναι κάθετες στα διαμήκη σύνορά της, όπως έχει αναφερθεί και στην σχετική βιβλιογραφία [1].



Σχήμα 2. 8: Η ιδιομορφή για λυγισμό πλάκας αλουμινίου ( $a/b=1$ ) πάχους  $t=1,875mm$  σε θλίψη με απλή έδραση



Σχήμα 2. 9: Η ιδιομορφή για λυγισμό πλάκας αλουμινίου ( $a/b=3$ ) πάχους  $t=1,875mm$  σε θλίψη με απλή έδραση



Σχήμα 2. 10: Το λυγισμένο σχήμα της πλάκας αλουμινίου ( $a/b=3$ ) σε θλίψη με απλή έδραση



Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι **οι ιδιομορφές λαμβάνουν μία χαρακτηριστική μορφή** και δημιουργούνται ημικύματα διαφορετικού πλήθους ανάλογα με τις διαστάσεις της πλάκας. Από το Σχήμα 2.9, συγκεκριμένα, διαπιστώνεται και η δημιουργία ημικυμάτων των οποίων το μήκος είναι περίπου ίσο με το πλάτος της πλάκας (b), όπως έχει παρατηρηθεί από την αναλυτική μελέτη του Timoshenko [63]. Δηλαδή η λυγισμένη πλάκα υποδιαιρείται, προσεγγιστικά, σε τετράγωνα.

### 2.3 Λυγισμός πλακών αλουμινίου σε θλίψη με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες στρωφών κατά μήκος των πλευρών

Η επόμενη συνοριακή συνθήκη η οποία εφαρμόζεται στη μελέτη σε λυγισμό πλακών από κράμα αλουμινίου 2024-T3 είναι **ο περιορισμός των ελευθεριών όλων των στρωφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας (all edges clamped)**. Στόχος είναι η κατασκευή και σύγκριση των γραφικών παραστάσεων του συντελεστή λυγισμού (buckling coefficient)  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$  μεταξύ τιμών αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου. Και σε αυτή την περίπτωση οι αναλυτικές τιμές προκύπτουν μέσω της γενικής για λυγισμό ισότροπων υλικών σχέσης (2.14) με τη διαφορά να εντοπίζεται στο συντελεστή  $k$  ο οποίος υπολογίζεται με διαφορετικό τρόπο ως εξής [59, pg 387]:

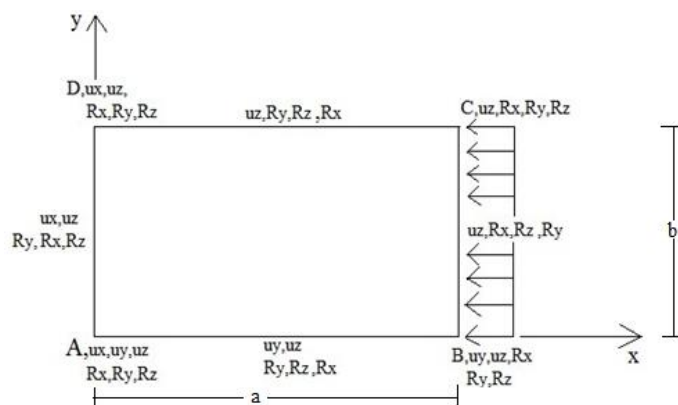
$$k = \left\{ \begin{array}{ll} -1,23\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 7,9\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 17,65\left(\frac{a}{b}\right) + 21,35 & \text{όταν } 1 \leq \frac{a}{b} \leq 2 \\ 0,2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1,62\left(\frac{a}{b}\right) + 10,35 & \text{όταν } 2 \leq \frac{a}{b} \leq 3 \\ -0,062\left(\frac{a}{b}\right) + 7,476 & \text{όταν } 3 \leq \frac{a}{b} \leq 8 \\ 6,98 & \text{όταν } 8 \leq \frac{a}{b} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Ωστόσο, αναλυτικές τιμές για το πρόβλημα της εύρεσης του συντελεστή λυγισμού στην καθαρή θλίψη ισότροπης περιστροφικά περιορισμένης πλάκας έχουν δοθεί και από τον Timoshenko [63, pg 387] και θα γίνει και με αυτές σύγκριση με τις τιμές της αριθμητικής μεθόδου (Πίνακας 2.1).

**Πίνακας 2. 1:** Αναλυτικές τιμές για την περίπτωση περιστροφικά περιορισμένης πλάκας [63,pg 387]

<b>a/b</b>	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4
<b>k</b>	11,69	10,07	9,25	8,33	8,11	7,88	7,68	7,57	7,44	7,37	7,35	7,27	7,24	7,23

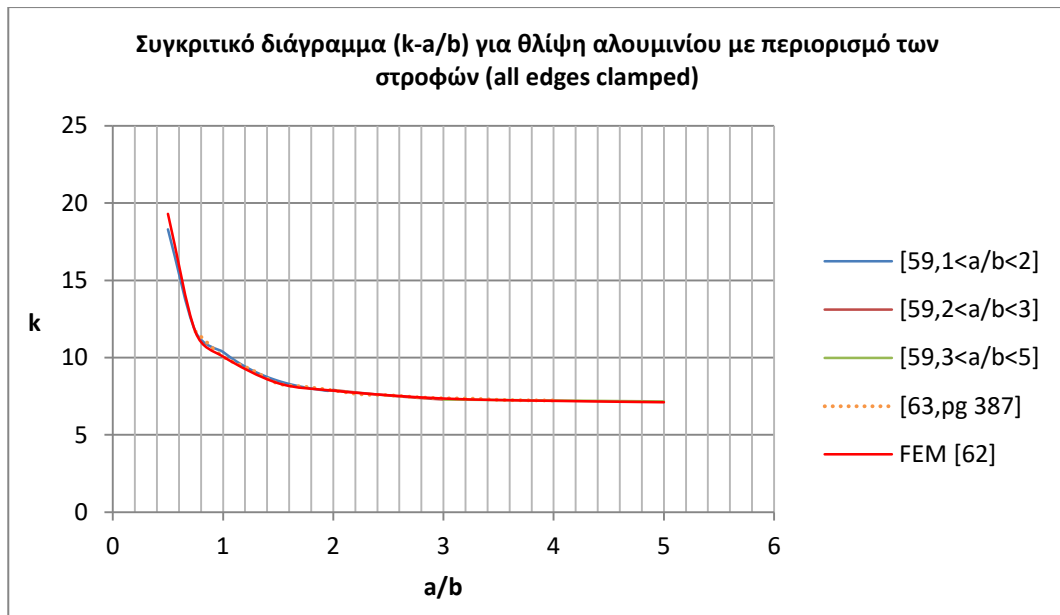
Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι όμοια με αυτή που πραγματοποιήθηκε στην περίπτωση της απλής έδρασης και περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 2.2.2 (σελ 50) της παρούσας εργασίας. Επιγραμματικά αναφέρεται ότι οι διαστάσεις της τετράγωνης πλάκας είναι: μήκος  $a=0,2\text{m}$ , πλάτος  $b=0,2\text{m}$  και πάχος  $t=0,001875\text{m}$ . Διακριτοποιήθηκε χρησιμοποιώντας στοιχεία κελύφους (Shell 4node 181) με σταθερό μήκος πλευράς ( $d=0,002\text{m}$ ) με την τετράγωνη πλάκα να αποτελείται από 10000 πεπερασμένα στοιχεία. Η διαφορά στην περίπτωση των περιορισμένων στρωφών (all edges clamped) είναι οι συνοριακές συνθήκες. Αυτές είναι ίδιες με την απλώς εδρασμένη πλάκα και επιπρόσθετα έχουν περιοριστεί όλες οι στρωφές κατά μήκος όλων των πλευρών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11.



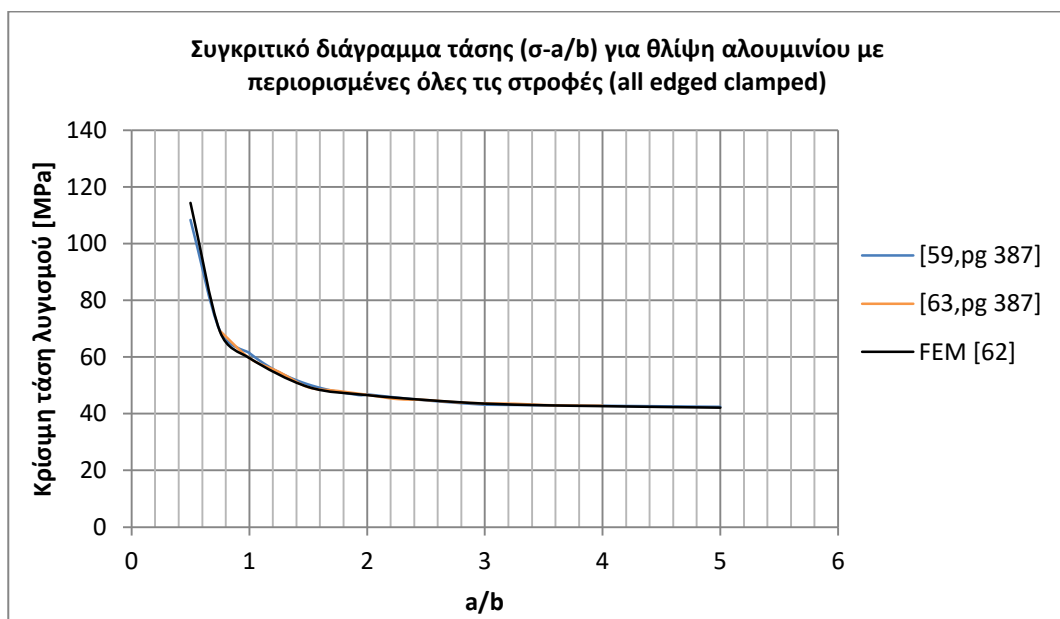
**Σχήμα 2. 11:** Οι συνοριακές συνθήκες της πλάκας με περιορισμένες τις στρωφές κατά μήκος των πλευρών σε μονοαξονική θλίψη

#### Σύγκριση αναλυτικών τιμών με τιμές από αριθμητική μέθοδο

Στα Σχήματα 2.12 και 2.13, παρακάτω, φαίνεται η σύγκριση των τιμών της αναλυτικής με την αριθμητική μέθοδο [62] και με τις αναλυτικές τιμές του Πίνακα 2.1 για την περίπτωση του λυγισμού λόγω μονοαξονικής θλίψης σε πλάκα αλουμινίου πάχους  $t=1,875\text{mm}$  με περιστροφικά περιορισμένες πλευρές. Διαπιστώνεται και σε αυτή την περίπτωση η εξαιρετική σύγκλιση με τις γραφικές παραστάσεις να αποκλίνουν ελάχιστα.



**Σχήμα 2. 12:** Συγκριτικό διάγραμμα του συντελεστή λυγισμού  $k$ - $a/b$  μεταξύ αναλυτικών τιμών και των τιμών που προέκυψαν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων [62]

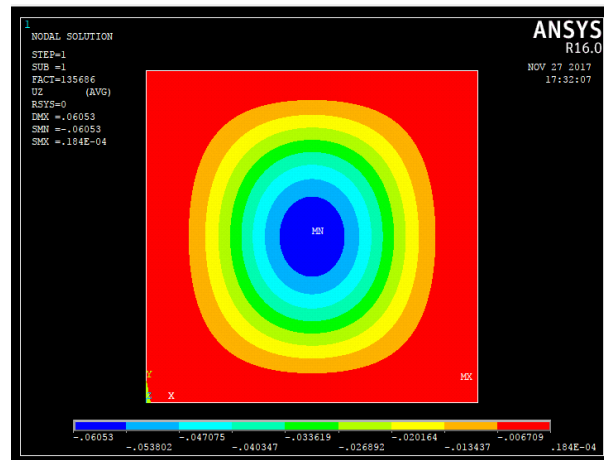


**Σχήμα 2. 13:** Συγκριτικό διάγραμμα της κρίσιμης τάσης λυγισμού μεταξύ αναλυτικών τιμών και τιμών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων [62] για θλίψη πλάκας αλουμινίου πάχους  $t=1,875\text{mm}$

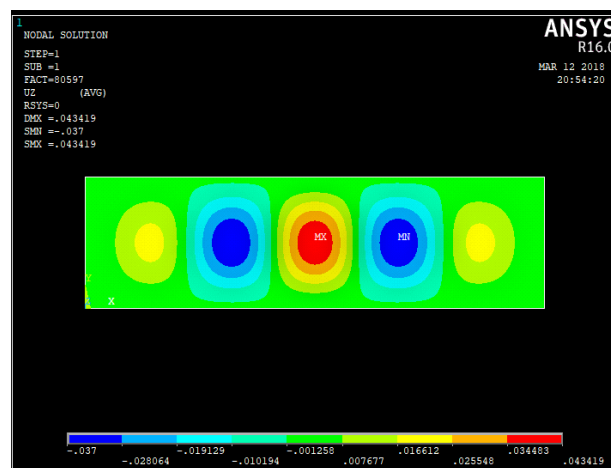
### Ιδιομορφές

Παρατίθενται παρακάτω και οι ιδιομορφές για την περίπτωση της θλίψης με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος των πλευρών (Σχήματα 2.14 και 2.15). Η βασική διαφορά με τις αντίστοιχες της απλή έδρασης αφορά στην

εκκίνηση του ημι-κύματος η οποία γίνεται πιο απομακρυσμένα από το σύνορο εξαιτίας αυτού του περιστροφικού περιορισμού.



Σχήμα 2. 14: Ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου σε θλίψη με περιορισμένες τις στρώφες κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=1$ )



Σχήμα 2. 15: Ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου σε θλίψη με περιορισμένες τις στρώφες κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=3,5$ )

## 2.4 Λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό των στρώφών κατά μήκος των πλευρών και με μικτή οριακή συνθήκη

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί ο λυγισμός πλακών αλουμινίου λόγω διατμητικής φόρτισης με απλή έδραση (simply supported) αρχικά, και με περιορισμό όλων των στρώφών κατά μήκος των πλευρών (all edges clamped) στη συνέχεια. Θα πραγματοποιηθεί σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης με

διαδικασία αντίστοιχη με αυτή που υλοποιήθηκε στη περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης για τον συντελεστή λυγισμού  $k$ .

Το αλουμίνιο είναι το 2024-T3 με τις ιδιότητες του όπως περιγράφονται στον Πίνακα 1.1 ( $E=73,084$  [GPa] και  $\nu=0,33$ ). Ο συντελεστής λυγισμού  $k$  στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης (pure shear) υπολογίζεται από προσεγγιστικούς τύπους, οι οποίοι δίνονται από τους Hughes [59, pg 388] και Timoshenko [63, pg 383], και μέσω του γενικού τύπου της σχέσης (2.14) ( $\sigma_x = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$ ) εύκολα υπολογίζεται και η κρίσιμη τάση λυγισμού:

$$k = 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 5,34 \quad \text{για } \frac{a}{b} \geq 1 \text{ απλή έδραση} \quad (2.31)$$

$$k = 5,4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 0,6\left(\frac{b}{a}\right) + 9 \quad \text{για } \frac{a}{b} \geq 1 \text{ all edges clamped} \quad (2.32)$$

Στην ίδια σχετική βιβλιογραφία, ωστόσο, [63, pg 382] δίνονται και ακριβείς τιμές του συντελεστή  $k$  για την περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση και με όλες τις ελευθερίες των στροφών περιορισμένες (all edges clamped) που μελετούμε, όπως φαίνεται και από τους παρακάτω Πίνακες 2.2 και 2.3:

**Πίνακας 2. 2:** Οι ακριβείς τιμές του συντελεστή  $k$  [63, pg 382] για συγκεκριμένους λόγους μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης με απλή έδραση

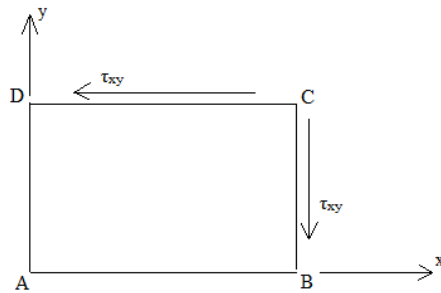
<b>a/b</b>	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2	2,5	3	4
<b>k</b>	9,34	8	7,3	7,1	7	6,8	6,6	6,1	5,9	5,7

**Πίνακας 2. 3:** Οι ακριβείς τιμές του συντελεστή  $k$  [63, pg 385] για συγκεκριμένους λόγους μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης με περιορισμό των στροφών (all edges clamped)

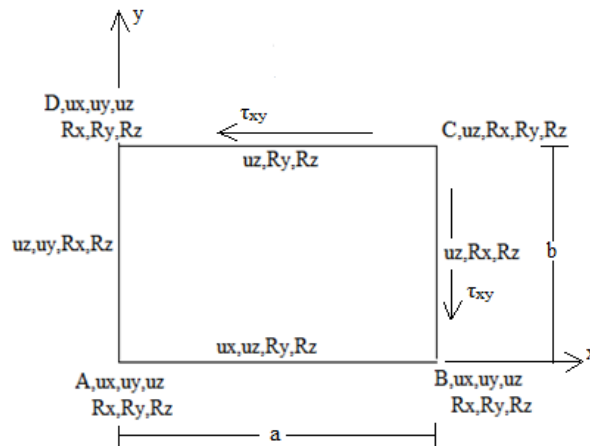
<b>a/b</b>	1	1,5	2	2,5	10
<b>k</b>	14,71	11,5	10,34	10,85	8,99

Προκειμένου να εξαχθούν τα αποτελέσματα του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62] και να συγκριθούν με τις αντίστοιχες αναλυτικές τιμές έγινε μοντελοποίηση του προβλήματος για πλάκες αλουμινίου πάχους  $t=0,001875\text{m}$  με διαφορετικούς λόγους μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) με διαδικασία όπως αυτή περιγράφηκε στην ενότητα 2.2.2. Η τετράγωνη πλάκα διακριτοποιήθηκε με 10000 πεπερασμένα στοιχεία (Shell 181) και αξιοποιήθηκε η γραμμική ελαστική ανάλυση ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του υπολογιστικού προγράμματος. Η

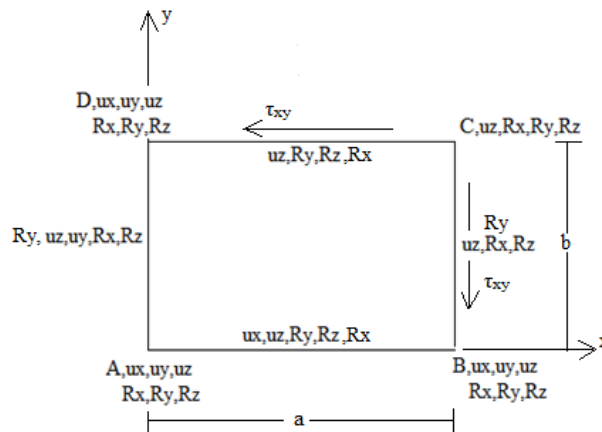
βασική διαφορά στη μοντελοποίηση σε σύγκριση με την περίπτωση της θλίψης έγκειται στην επιβολή της φόρτισης, η οποία πλέον, είναι καθαρά διατμητική (Σχήμα 2.16) και στις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες διαφοροποιούνται τόσο για την απλή έδραση όσο και για τον περιορισμό των στροφών. Οι συνθήκες στήριξης φαίνονται αναλυτικά στα παρακάτω Σχήματα 2.17 και 2.18. Υπενθυμίζεται ότι οι συμβολισμοί  $u$  και  $R$  εκφράζουν περιορισμό μετατόπισης και στροφής αντίστοιχα, ως προς τον άξονα από τον οποίο συνοδεύονται. Δηλαδή το  $R_x$  υποδηλώνει περιορισμό στροφής για την πλευρά ή τον κόμβο ως προς τον άξονα  $x$ .



**Σχήμα 2. 16:** Σχηματική αναπαράσταση της φόρτισης για καθαρή διάτμηση



**Σχήμα 2. 17:** Οι συνοριακές συνθήκες σε πλάκα μικρού πάχους για διάτμηση με απλή έδραση



**Σχήμα 2. 18:** Οι συνοριακές συνθήκες σε πλάκα μικρού πάχους για διάτμηση με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών

Έλεγχος σύγκλισης της αριθμητικής μεθόδου

Πραγματοποιήθηκε έλεγχος σύγκλισης των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από το ANSYS με έναν αραιό κানাβο. Υλοποιήθηκε, δηλαδή παρόμοια διαδικασία μοντελοποίησης με διαφορετική διακριτοποίηση. Χρησιμοποιήθηκε διαφορετικό πλήθος πεπερασμένων στοιχείων αφού επιλέχθηκε σταθερό μήκος πλευράς του κάθε στοιχείου  $d=0,004\text{m}$  (2500 στοιχεία για την τετράγωνη πλάκα). Όπως φαίνεται από το Σχήμα 2.19 όπου οι δύο διαφορετικές γραφικές παραστάσεις, σχεδόν, ταυτίζονται η σύγκλιση είναι εξαιρετική.



**Σχήμα 2. 19:** Συγκριτικό διάγραμμα διάτμησης με απλή έδραση για διακριτοποιήσεις με διαφορετικό πλήθος στοιχείων

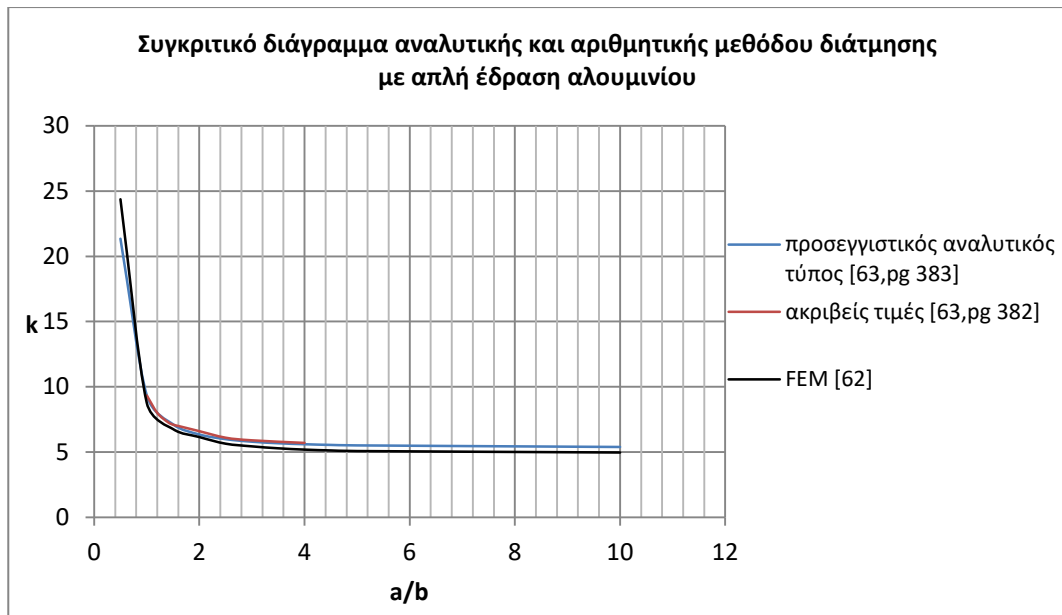
#### 2.4.1 Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου-ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ

Με την ολοκλήρωση της διαδικασίας της μοντελοποίησης προέκυψαν οι ζητούμενες τιμές από το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων [62] και συγκρίθηκαν με τις αναλυτικές τιμές του προσεγγιστικού τύπου (2.31) και με τις ακριβείς τιμές του Πίνακα 2.2. Φαίνεται από τον Πίνακα 2.4 ότι **η σύγκλιση είναι πολύ καλή** με την απόκλιση να κυμαίνεται στο 7% και τις γραφικές παραστάσεις να είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη (Σχήματα 2.20 και 2.21).

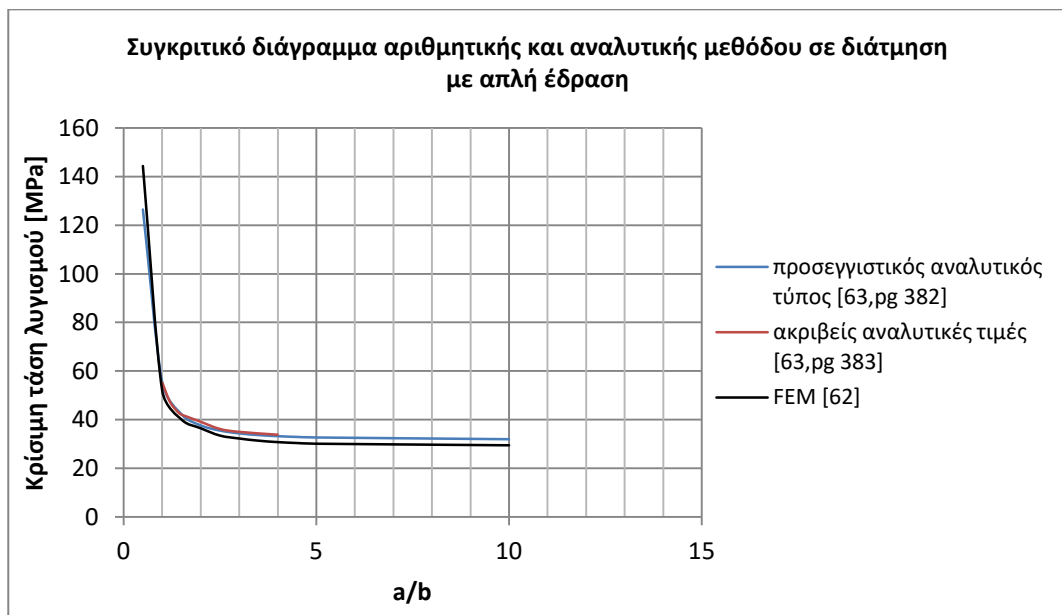
*Πίνακας 2. 4: Οι τιμές του συντελεστή k από το Ansys σε σύγκριση με τις τιμές του προσεγγιστικού αναλυτικού τύπου για διάτμηση με απλή έδραση*

a/b	Κρίσιμη τάση (Ansys [62])	Συντελεστής λυγισμού k (Ansys [62])	Συντελεστής λυγισμού k [63, pg 383]	% Απόκλιση των τιμών του k μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου
<b>0,5</b>	144,36	24,37	21,35	12,4
<b>1</b>	51,99	8,78	9,35	6,5
<b>1,5</b>	40	6,76	7,13	5,4
<b>2</b>	36,4	6,15	6,35	3,2
<b>2,5</b>	33,4	5,64	5,99	6,2
<b>3</b>	32,2	5,44	5,79	6,6
<b>3,5</b>	31,3	5,29	5,68	7,4
<b>4</b>	30,7	5,19	5,6	7,9
<b>4,5</b>	30,4	5,12	5,55	8,2
<b>5</b>	30	5,08	5,51	8,5
<b>10</b>	29,41	4,97	5,39	8,5





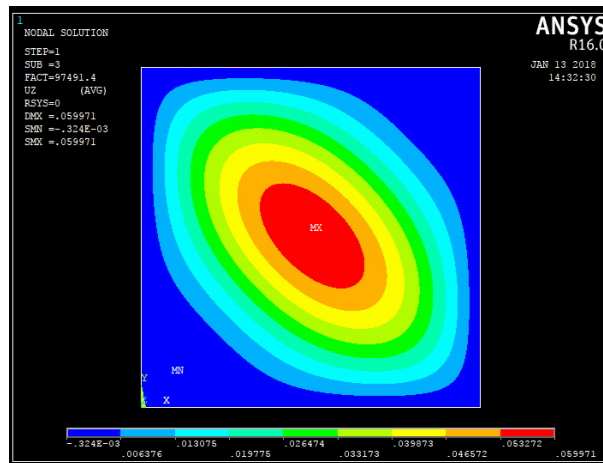
**Σχήμα 2. 20:** Συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ τιμών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και αναλυτικών τιμών (προσεγγιστικές και ακριβείς) για διάτμηση με απλή έδραση αλουμινίου



**Σχήμα 2. 21:** Συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ τιμών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και αναλυτικών τιμών (προσεγγιστικές και ακριβείς) για διάτμηση με απλή έδραση αλουμινίου

### Ιδιομορφές

Στα Σχήμα 2.22 παρουσιάζεται η ιδιομορφή για την περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου. Φαίνεται η **χαρακτηριστική μορφή** η οποία είναι διαφορετική σε σύγκριση με την αντίστοιχη της μονοαξονικής θλίψης.



Σχήμα 2. 22: Ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου σε διάτμηση με απλή έδραση ( $a/b=1$ )

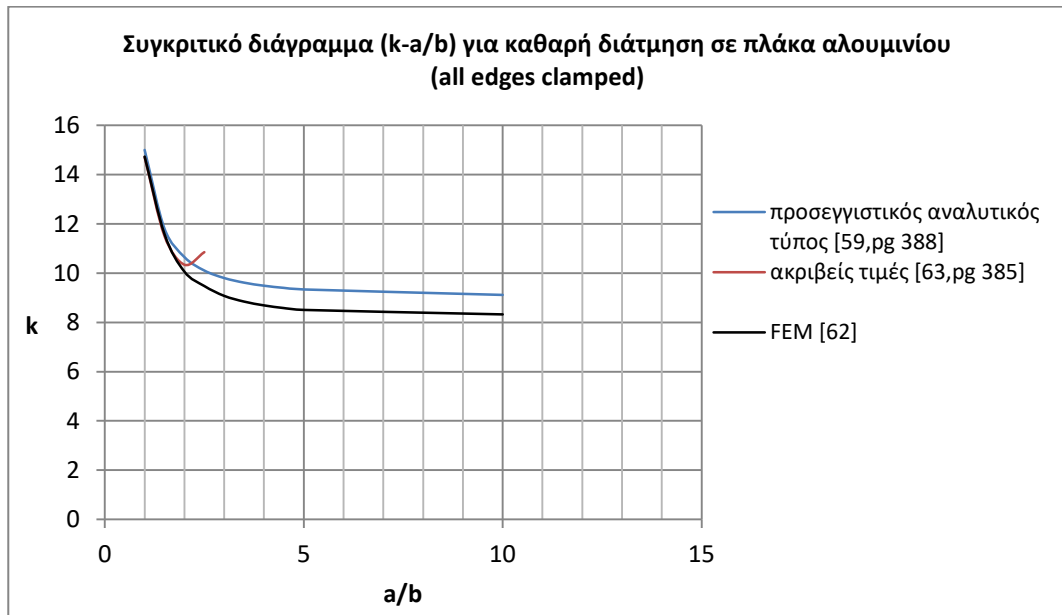
#### 2.4.2 Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου- ALL EDGES CLAMPED

Προχωρώντας με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στη περίπτωση της διάτμησης με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος των πλευρών προκύπτει ο Πίνακας 2.5, από τον οποίο διαπιστώνεται η, επίσης, **πολύ καλή σύγκλιση** των τιμών του ANSYS με τις αντίστοιχες αναλυτικές. Η ποσοστιαία απόκλιση είναι περίπου 7%. Τέλος, παρατίθενται και τα σχετικά συγκριτικά διαγράμματα των Σχημάτων 2.23 και 2.24, στο οποίο επιβεβαιώνεται η καλή σύγκλιση μέσω της κοντινής σχετικής θέσης των γραφικών παραστάσεων.

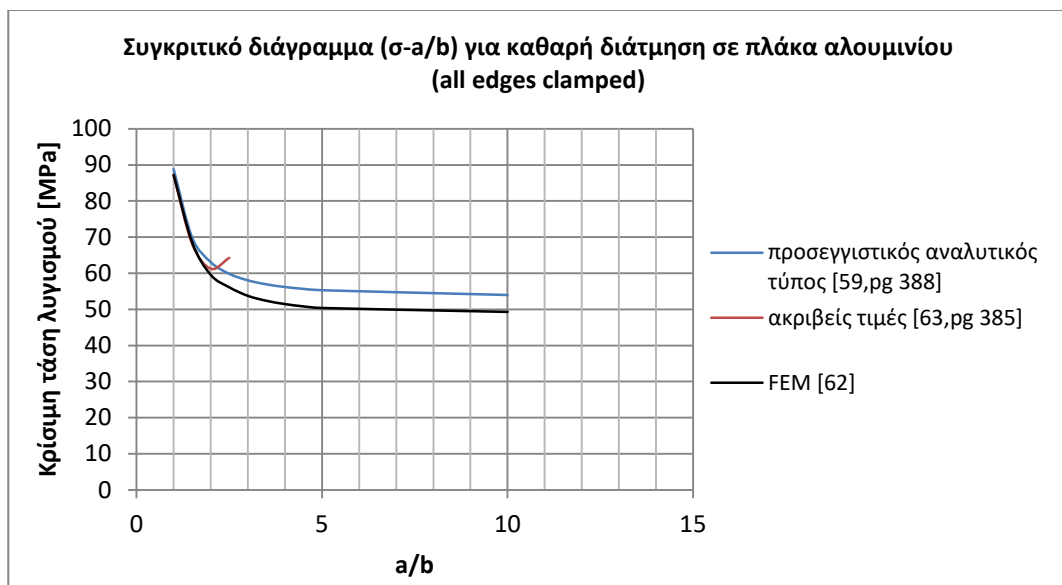
**Πίνακας 2. 5:** Οι τιμές του συντελεστή  $k$  από το ANSYS σε σύγκριση με τις τιμές του προσεγγιστικού αναλυτικού τύπου για διάτμηση με περιορισμό στροφών

a/b	Κρίσιμη τάση (Ansys [62])	Συντελεστής λυγισμού $k$ (Ansys [62])	Συντελεστής λυγισμού $k$ [63, pg 383]	% Απόκλιση των τιμών του $k$ μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου
1	87237333,33	14,7	15	1,8
1,5	68572266,67	11,6	11,8	1,9
2	59564800	10,1	10,7	5,9
2,5	56114133,33	9,5	10,1	6,6
3	53748800	9,1	9,8	7,9
3,5	52376000	8,8	9,6	8,7
4	51465066,67	8,7	9,5	9,2
4,5	50816533,33	8,6	9,4	9,6
5	50371733,33	8,5	9,3	9,8

10	49298666,67	8,3	9,1	9,5
----	-------------	-----	-----	-----



**Σχήμα 2. 23:** Συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ τιμών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και αναλυτικών τιμών (προσεγγιστικές και ακριβείς) για διάτμηση με περιορισμό στροφών

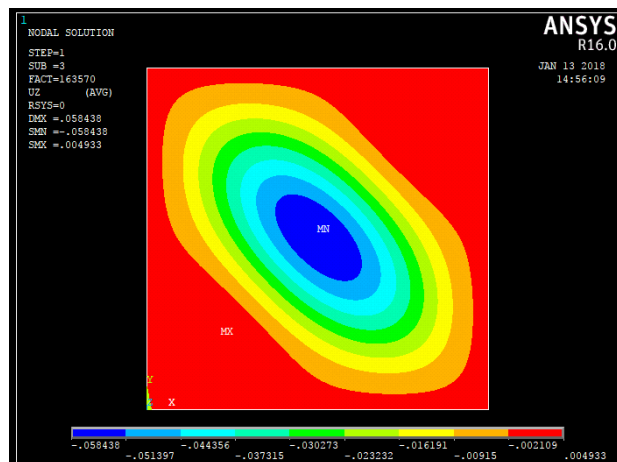


**Σχήμα 2. 24:** Συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ τιμών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και αναλυτικών τιμών (προσεγγιστικές και ακριβείς) για διάτμηση με περιορισμό στροφών

### Ιδιομορφές

Τέλος, παρουσιάζεται και η ιδιομορφή για διάτμηση με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας αλουμινίου (Σχήμα 2.25), όπου διαπιστώνεται

όπως και στην περίπτωση της θλίψης η δημιουργία ημικυμάτων πιο απομακρυσμένων από τα σύνορα της πλάκας σε σύγκριση με την απλή έδραση.



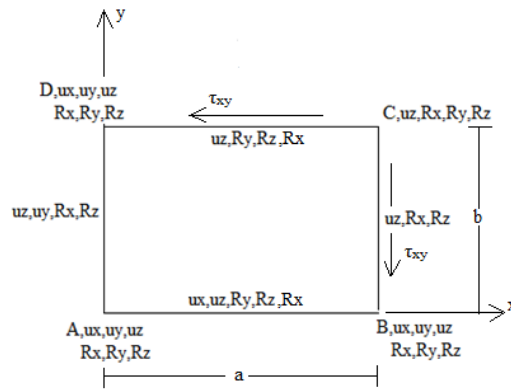
*Σχήμα 2. 25: Ιδιομορφή για διάτμηση με περιορισμένες όλες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών σε πλάκα αλουμινίου ( $a/b=1$ )*

### 2.4.3 Σύγκριση μεταξύ προσεγγιστικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου-ΜΙΚΤΗ ΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (TSLC)

Ως **μικτή οριακή συνθήκη** χαρακτηρίζεται αυτή η οποία συνδυάζει την απλή έδραση με τον περιορισμό των στροφών σε μία ορθογώνια πλάκα. Ειδικότερα, οι εγκάρσιες (transverse) πλευρές ( $x=0$  και  $x=a$ ) είναι απλώς εδρασμένες και οι δύο απέναντι διαμήκεις (longitudinal,  $y=0$  και  $y=b$ ) έχουν περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών (TSLC: Transverse edges Simply supported and Longitudinal edges Clamped) [5,pg 388]. Και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η γενική σχέση (2.14) υπολογισμού της κρίσιμης τάσης λυγισμού, ενώ ο συντελεστής  $k$  δίνεται από την αναλυτική σχέση:

$$k = 2,4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1,08\left(\frac{b}{a}\right) + 9 \quad \frac{a}{b} \geq 1 \quad (2.33)$$

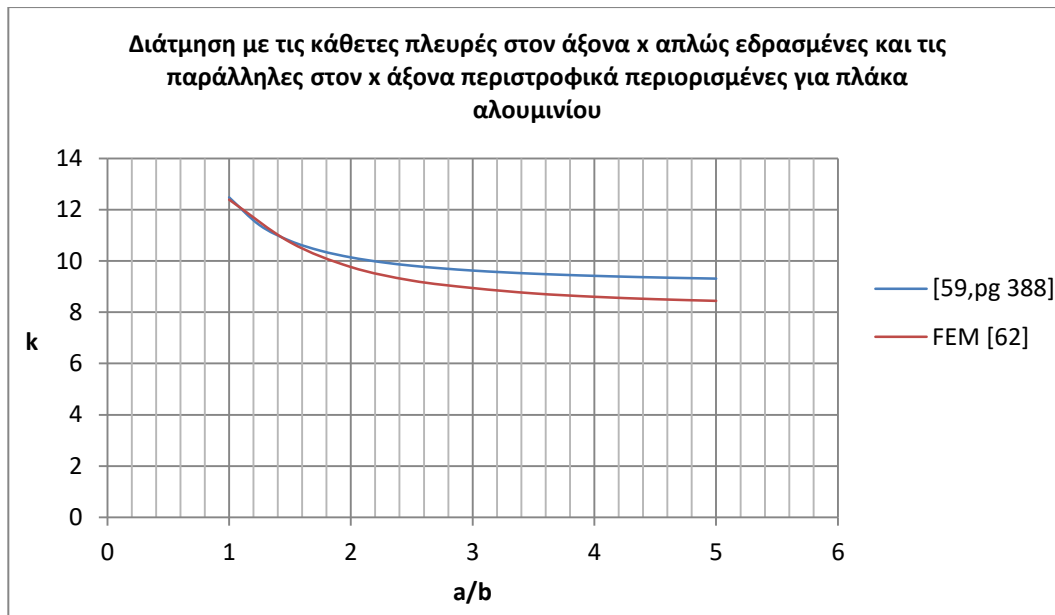
Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι πανομοιότυπη με την αντίστοιχη που υλοποιήθηκε για τις δύο προηγούμενες συνθήκες στήριξης (απλή έδραση και περιορισμός όλων των στροφών) και η μοναδική διαφορά εντοπίζεται στον καθορισμό των συνοριακών συνθηκών (Σχήμα 2.26). Προκύπτουν, με αυτό τον τρόπο, τόσο οι τιμές από το ANSYS<sup>®</sup> όσο και οι αναλυτικές τιμές, οπότε και γίνεται η ζητούμενη σύγκριση (Πίνακας 2.6). Φαίνεται ότι **η σύγκλιση είναι καλή** με την απόκλιση να κυμαίνεται στο 5%, κάτι που διαπιστώνεται και από τα σχετικά διαγράμματα των Σχημάτων 2.27 και 2.28.



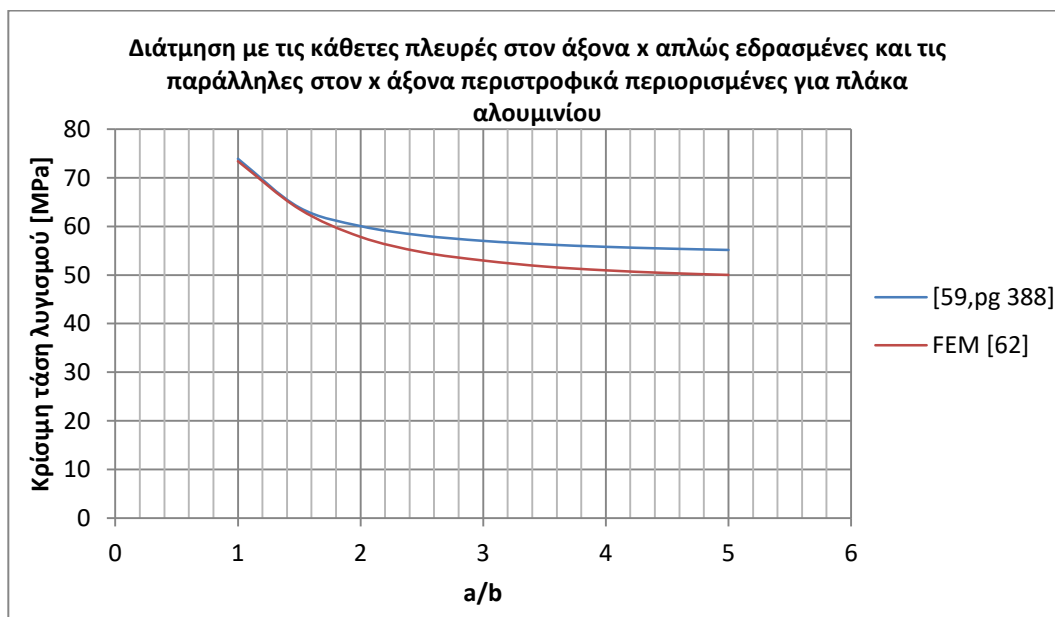
**Σχήμα 2. 26:** Συνοριακές συνθήκες μικτής οριακής συνθήκης, όπου οι εγκάρσιες πλευρές είναι απλώς εδρασμένες και οι διαμήκειες έχουν περιορισμένες όλες τις στροφές

**Πίνακας 2. 6:** Σύγκριση των αναλυτικών τιμών και των τιμών που προέκυψαν με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων

a/b	Κρίσιμη τάση ANSYS (MPa) [62]	Συντελεστής λυγισμού k ANSYS [62]	Συντελεστής λυγισμού k [59,pg 388]	% Απόκλιση των τιμών του k μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου
1	73,4	12,39	12,48	0,69
1,5	63,57	10,73	10,79	0,49
2	57,83	9,76	10,14	3,7
2,5	54,7	9,24	9,82	5,9
3	52,98	8,94	9,63	7
3,5	51,74	8,74	9,5	8
4	50,95	8,6	9,42	8,7
4,5	50,4	8,5	9,36	9
5	50	8,44	9,31	9,3



**Σχήμα 2. 27:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για μικτή συνοριακή συνθήκη σε πλάκα αλουμινίου

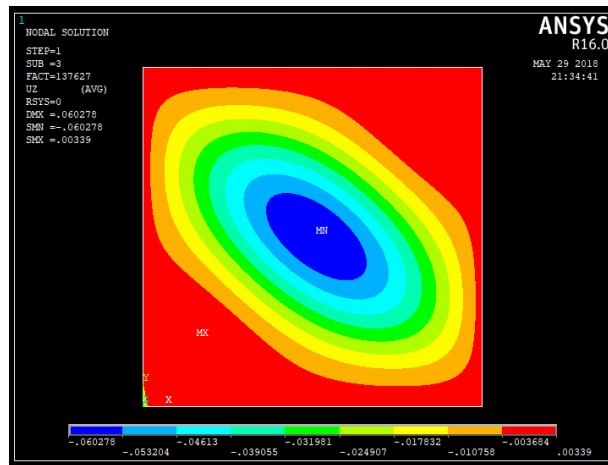


**Σχήμα 2. 28:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma$ - $a/b$ ) αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για μικτή συνοριακή συνθήκη σε πλάκα αλουμινίου

### Ιδιομορφές

Από την εικόνα της ιδιομορφής του Σχήματος 2.29 φαίνεται το λυγισμένο σχήμα της πλάκας αλουμινίου. Και σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται η

απομάκρυνση του ημικύματος από τα περιστροφικά περιορισμένα σύνορα της πλάκας.



*Σχήμα 2. 29: Η ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου  $a/b=1$  σε θλίψη με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)*





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

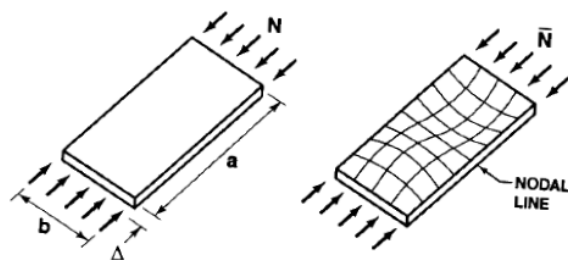
### 3 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΟ ΥΛΙΚΟ

Στόχος αυτού του κεφαλαίου εκτός από τη σύγκριση μεταξύ των τιμών που προέκυψαν από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και των τιμών που προέκυψαν από την αναλυτική λύση είναι και η παρουσίαση των τιμών της αριθμητικής μεθόδου όταν απουσιάζουν οι αναλυτικές τιμές. Τα υλικά στα οποία θα πραγματοποιηθεί η εν λόγω μελέτη είναι σύνθετα πολύστρωτα υλικά και απαιτήθηκε η δημιουργία 198 μοντελοποιήσεων στο πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS<sup>®</sup> για να προκύψουν τα απαραίτητα δεδομένα. Τα πολύστρωτα είναι υλικά τα οποία αποτελούνται από στρώσεις σύνθετου υλικού οι οποίες είναι κολλημένες μεταξύ τους με ειδική κόλλα, όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη υποενότητα (1.6). Αυτές οι στρώσεις είναι ενισχυμένες κατά τη μία διεύθυνση (unidirectional) με ίνες γυαλιού, τύπου S2-glass, ενώ η μήτρα αποτελείται από εποξική ρητίνη. Οι μηχανικές τους ιδιότητες φαίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 1.2 του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

#### 3.1 Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω θλίψης με απλή έδραση

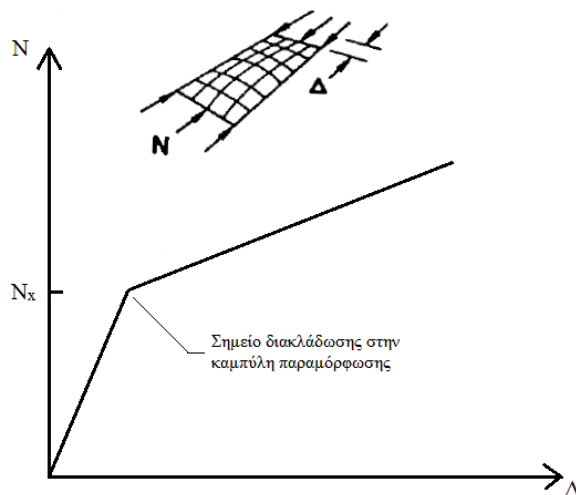
Στο γενικό πρόβλημα του λυγισμού πολύστρωτων ορθογώνιων **ειδικά ορθότροπων (specially orthotropic) πλακών**, οι οποίες είναι απλώς εδρασμένες κατά μήκος των πλευρών τους και υπόκεινται σε σταθερή συνεπίπεδη φόρτιση στην x-διεύθυνση έχει δοθεί αναλυτική λύση [1]. Ως ειδικά ορθότροπα πολύστρωτα χαρακτηρίζονται αυτά τα οποία αποτελούνται είτε από μία στρώση ειδικά ορθότροπου υλικού είτε από πολλαπλές ειδικά ορθότροπες στρώσεις οι οποίες είναι συμμετρικά τοποθετημένες σε σχέση με τη μέση επιφάνεια του πολύστρωτου. Οι ακαμψίες (έχουν περιγραφεί στην ενότητα 1.6.1 του 1<sup>ου</sup> κεφαλαίου) αποτελούνται μόνο από τα  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{66}$  και τα  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{66}$ . Δεν υπάρχει, δηλαδή, ούτε σύζευξη διάτμησης-έκτασης ή κάμψης-στρέψης ούτε κάμψης-έκτασης.

Όπως είναι γνωστό, όταν μία στήλη λυγίζει αναπτύσσεται μία εγκάρσια παραμόρφωση κατά μήκος της. Όταν λυγίζει μία πλάκα η εγκάρσια παραμόρφωση στο επίπεδό της έχει μία κυματοειδή μορφή τριών διαστάσεων. Ειδικότερα, αυτή η τρισδιάστατη μορφή αποτελείται από πολλαπλά ημιτονοειδή κύματα στη διεύθυνση της φόρτισης όπως φαίνεται και στο παράδειγμα του Σχήματος 3.1 με δύο ημικύματα (half-waves). Φαίνεται, επίσης, και ότι η ουδέτερη γραμμή (nodal line) στο μέσο της πλάκας παραμένει ακίνητη κατά το λυγισμό.

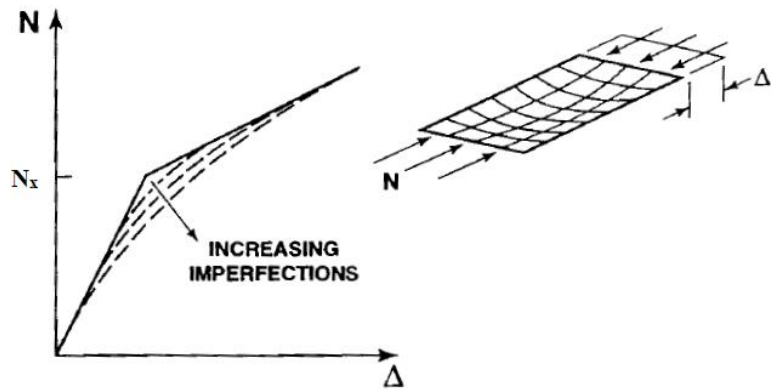


**Σχήμα 3. 1:** Τυπικό λυγισμένο σχήμα απλώς εδρασμένης πλάκας [1]

Η συμπεριφορά τάσης-παραμόρφωσης σε πλάκες οι οποίες υπόκεινται σε μονοαξονική θλίψη είναι περισσότερο πολύπλοκη από την αντίστοιχη των στηλών. Αρχικά, καθώς αυξάνεται το φορτίο, απλώς μειώνεται το μήκος της πλάκας ενώ παραμένει επίπεδη. Ακολούθως, λυγίζει στο κρίσιμο φορτίο  $N_x$  όπου η καμπύλη της παραμόρφωσης διακλαδώνεται μεταβαίνοντας από το επίπεδο στο λυγισμένο σχήμα (Σχήμα 3.2). Μετά το λυγισμό η πλάκα μπορεί να υποστηρίξει επιπρόσθετη φόρτιση αλλά με μειωμένη ακαμψία, όπως διαπιστώνεται και από τη μείωση της κλίσης της γραφικής παράστασης. Επομένως, **το φορτίο λυγισμού για την πλάκα είναι, απλά, μία διαφοροποίηση στη συμπεριφορά τάσης-παραμόρφωσης**. Αντίθετα, στο δομικό στοιχείο στήλης το φορτίο λυγισμού αποτελεί το μέγιστο φορτίο, αφού δε μπορεί να υποστηρίξει επιπρόσθετο φορτίο μετά το λυγισμό της. Αξίζει να αναφερθεί ότι η απότομη αλλαγή της κλίσης της ευθείας του Σχήματος 3.3 παρατηρείται για τέλεια επίπεδες πλάκες πριν τη φόρτιση, ενώ όσο αυξάνονται οι αρχικές ατέλειες της πλάκας τόσο εξομαλύνεται αυτή η απότομη αλλαγή κλίσης.



**Σχήμα 3. 2:** Καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης για μονοαξονική θλίψη απλώς εδρασμένης πλάκας [1]



Σχήμα 3. 3: Λυγισμός πλακών με αυξανόμενες αρχικές ατέλειες [1]

### 3.1.1 Αναλυτικός υπολογισμός [80, pg 72]

Όταν μία πλάκα υποβάλλεται σε συνεπίπεδη (in-plane) θλιπτική φόρτιση  $N_x < 0$  και αυτή η φόρτιση είναι επαρκώς μικρή τότε η ισορροπία της πλάκας είναι ευσταθής. Η πλάκα παραμένει επίπεδη μέχρι να αγγίξει ένα δεδομένο φορτίο. Σε αυτό το φορτίο, το οποίο καλείται, όπως προαναφέρθηκε, φορτίο λυγισμού η ευσταθής κατάσταση της πλάκας διαταράσσεται και η πλάκα αναζητά έναν εναλλακτικό σχηματισμό ισορροπίας συνοδευόμενο από μία αλλαγή και στη συμπεριφορά φορτίου-παραμόρφωσης. Το φαινόμενο αυτό της αλλαγής της διαμόρφωσης ισορροπίας στο ίδιο φορτίο χωρίς δραστικές αλλαγές στην παραμόρφωση ονομάζεται διακλάδωση (bifurcation). Συνήθως, η καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης των λυγισμένων πλακών είναι διγραμμική (Σχήμα 3.2). **Το μέγεθος του φορτίου λυγισμού εξαρτάται, όπως θα αποδειχθεί και σε αυτή την ενότητα, από τη γεωμετρία, τις ιδιότητες του υλικού και την ιδιομορφή λυγισμού.** Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, τη μέθοδο Navier θα υπολογιστεί αναλυτικά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού απλώς εδρασμένων ειδικά ορθότροπων πλακών.

Υποτίθεται ότι η μοναδική φόρτιση είναι η μονοαξονική θλίψη στη x-διεύθυνση με  $N_x = N_0$ . Η διαφορική εξίσωση η οποία αναφέρεται στην παραμόρφωση λυγισμού w δίνεται από τη σχέση (1.37):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

Η συνάρτηση παραμόρφωσης w (βέλος) η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στην περίπτωση της απλής έδρασης είναι όπως και στην περίπτωση των ισότροπων υλικών μία συνάρτηση της μορφής:

$$w(x, y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.2)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την (3.2) στην (3.1) προκύπτει ότι:

$$N_o = \pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \left( \frac{a}{m} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

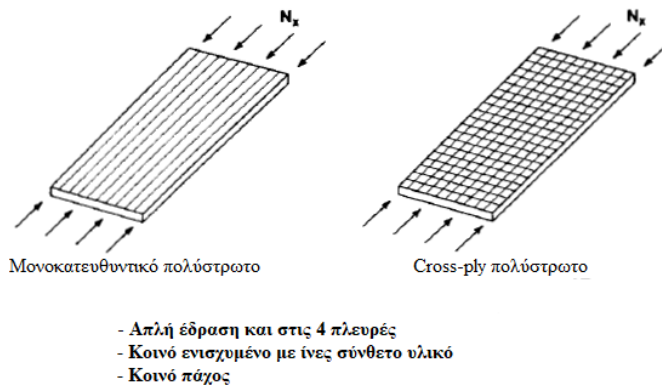
Και η μικρότερη τιμή του φορτίου (κρίσιμο φορτίο λυγισμού) παρατηρείται για ένα ημικόμα στην εγκάρσια διεύθυνση της πλάκας ( $n=1$ ), όπως ακριβώς και στην περίπτωση των ισότροπων πλακών και, άρα:

$$N_o = N_x = \pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{1}{b^2} + D_{22} \frac{1}{b^4} \left( \frac{a}{m} \right)^2 \right] \quad (3.4)$$

Όσον αφορά στον υπολογισμό του συντελεστή λυγισμού  $k$  η σχέση από την οποία υπολογίζεται είναι η εξής [64, Appendix 2]:

$$k = \frac{N_x b^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (3.5)$$

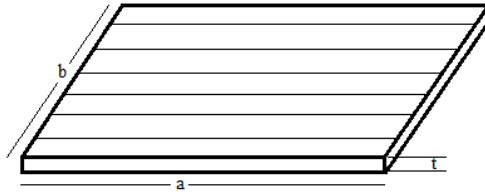
Παρατηρώντας τις πολύστρωτες ορθογώνιες πλάκες του Σχήματος 3.4, οι οποίες είναι απλώς εδρασμένες, είναι κατασκευασμένες από το ίδιο ινώδες σύνθετο υλικό και έχουν ίδιο πάχος, δημιουργείται εύλογα το ερώτημα ποια έχει μεγαλύτερο φορτίο λυγισμού. Η πλάκα με τις μονοκατευθυντικές ίνες στη διεύθυνση της φόρτισης ή η πλάκα με την cross-ply διάταξη; Αρκετοί θα περίμεναν ότι η πρώτη περίπτωση θα λύγιζε δυσκολότερα βασιζόμενοι στην κύρια εξάρτηση του φορτίου λυγισμού από την καμπτική αντίσταση στη διεύθυνση της φόρτισης. Ωστόσο, όπως φαίνεται και από την εξίσωση (3.4) το φορτίο λυγισμού της πλάκας εξαρτάται και από τις τέσσερις καμπτικές ακαμψίες ( $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{22}$  και  $D_{66}$ ). Επομένως, δεν θα αποτελούσε έκπληξη αν η cross-ply πλάκα είχε μεγαλύτερο φορτίο λυγισμού, κάτι που διαπιστώνεται και από τα διαγράμματα που ακολουθούν.



**Σχήμα 3. 4:** Ποια πλάκα έχει μεγαλύτερο φορτίο λυγισμού;

Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά τα οποία θα μελετηθούν σε λυγισμό στα πλαίσια της παρούσας εργασίας είναι **πολύστρωτες πλάκες 15 στρώσεων** σταθερού πάχους  $t=1,875$  mm (Σχήμα 3.5) με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών. Συγκεκριμένα, θα εξεταστούν τρεις διαφορετικοί προσανατολισμοί ινών όπως παρουσιάζονται στα

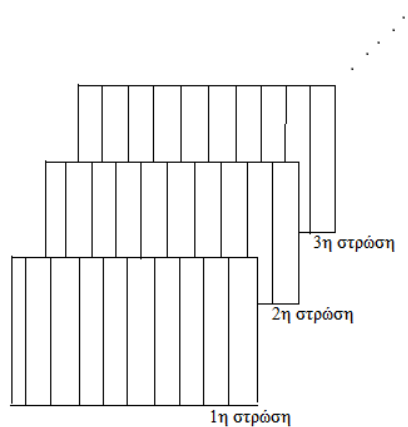
Σχήματα 3.6, 3.7 και 3.8 παρακάτω. Όπως και στην ανάλυση του αλουμινίου θα συγκριθούν οι τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της τάσης λυγισμού από την αναλυτική λύση και τη λύση των πεπερασμένων στοιχείων και θα κατασκευαστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα συναρτήσεως του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ).



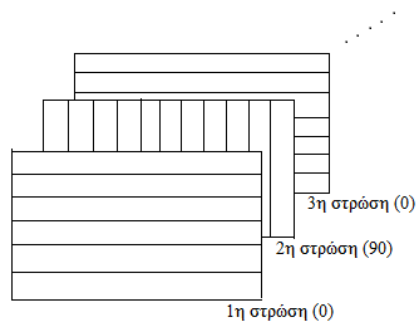
**Σχήμα 3. 5:** Πολύστρωτη πλάκα που αποτελείται από 15 στρώσεις S2 glass/epoxy. Μήκος:  $a$ , Πλάτος:  $b$ , Πάχος:  $t$



**Σχήμα 3. 6:** Σχηματική αναπαράσταση του προσανατολισμού των στρώσεων για πολύστρωτο σύνθετο S2 glass/epoxy 0/0/0/...



**Σχήμα 3. 7:** Σχηματική αναπαράσταση του προσανατολισμού των στρώσεων για πολύστρωτο σύνθετο S2 glass/epoxy 90/90/90/...



**Σχήμα 3. 8:** Σχηματική αναπαράσταση του προσανατολισμού των στρώσεων για πολύστρωτο σύνθετο S2 glass/epoxy 0/90/0/... (cross-ply)

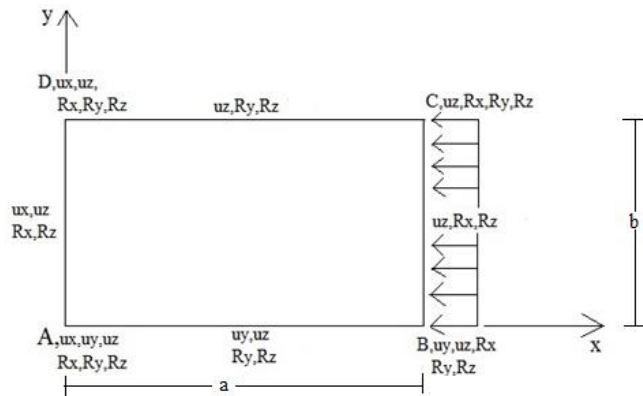
### 3.1.2 Αριθμητική επίλυση [62]

Η διαδικασία της μοντελοποίησης μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62] ξεκινά με τον καθορισμό του τύπου των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν. Επιλέχθηκε το στοιχείο κελύφους Shell 181 4node, το οποίο είναι ιδανικό σε εφαρμογές οι οποίες αποτελούνται από στρώσεις. Είναι κατάλληλο, ειδικά, για τα πολύστρωτα υλικά καθώς επιτρέπει τον ορισμό του πάχους, των μηχανικών ιδιοτήτων και του προσανατολισμού των ινών σε ανεξάρτητες στρώσεις [27]. Στη συνέχεια ακολουθεί η επιλογή του υλικού το οποίο αποτελεί και το δομικό συστατικό του πολύστρωτου. Πρόκειται για ορθότροπο υλικό και καθορίζονται οι μηχανικές του ιδιότητες (Πίνακας 1.2) ενώ καθορίζεται το πλήθος των στρώσεων, το πάχος και ο προσανατολισμός των ινών της κάθε στρώσης. Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκαν σε όλα τα μοντέλα 15 στρώσεις σύνθετου υλικού S2-glass/epoxy σταθερού πάχους  $t_{\text{lamina}}=0,125\text{mm}$  η καθεμία δημιουργώντας το πολύστρωτο με συνολικό πάχος  $t=1,875\text{mm}$ , όπως προαναφέρθηκε.

Επόμενο βήμα στη μοντελοποίηση είναι ο καθορισμός των διαστάσεων μήκους (a) και πλάτους (b) της πλάκας ( $a=b=0,2\text{m}$  για τετράγωνη πλάκα) και ακολουθεί η διακριτοποίηση μέσω τετραγωνικών πεπερασμένων στοιχείων σταθερού μήκους πλευράς  $d=0,002\text{m}$ . Οπότε για την τετράγωνη πλάκα δημιουργήθηκαν 10000 στοιχεία. Για να προκύψουν οι απαιτούμενες τιμές και να κατασκευαστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα κατά την εισαγωγή των διαστάσεων διατηρούνταν σταθερό το πλάτος  $b=0,2\text{m}$  και μεταβαλλόταν το μήκος a, ώστε να προκύψουν, τελικά, μοντέλα διαφορετικού λόγου a/b.

Ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών σε συνδυασμό με την επιβολή της μοναδιαίας θλιπτικής φόρτισης είναι ένα βήμα υποχρεωτικό στην επίλυση του μοντέλου και για την περίπτωση του λυγισμού πολύστρωτων σύνθετων υλικών λόγω θλίψης με απλή έδραση οι συνοριακές συνθήκες φαίνονται στο Σχήμα 3.9 (είναι ίδιες με τις αντίστοιχες για θλίψη με απλή έδραση αλουμινίου). Με αυτό τον τρόπο και εφαρμόζοντας τη λειτουργία της ανάλυσης με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS<sup>®</sup> προκύπτει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για κάθε

πλάκα. Εύκολα υπολογίζεται η μέση τάση λυγισμού και ο συντελεστής  $k$  μέσω της σχέσης (3.5).



**Σχήμα 3. 9:** Συνοριακές συνθήκες θλίψης με απλή έδραση σε πολύστρωτη σύνθετη πλάκα πάχους  $t$

### 3.1.3 Σύγκριση μεταξύ αναλυτικών τιμών και τιμών αριθμητικής μεθόδου

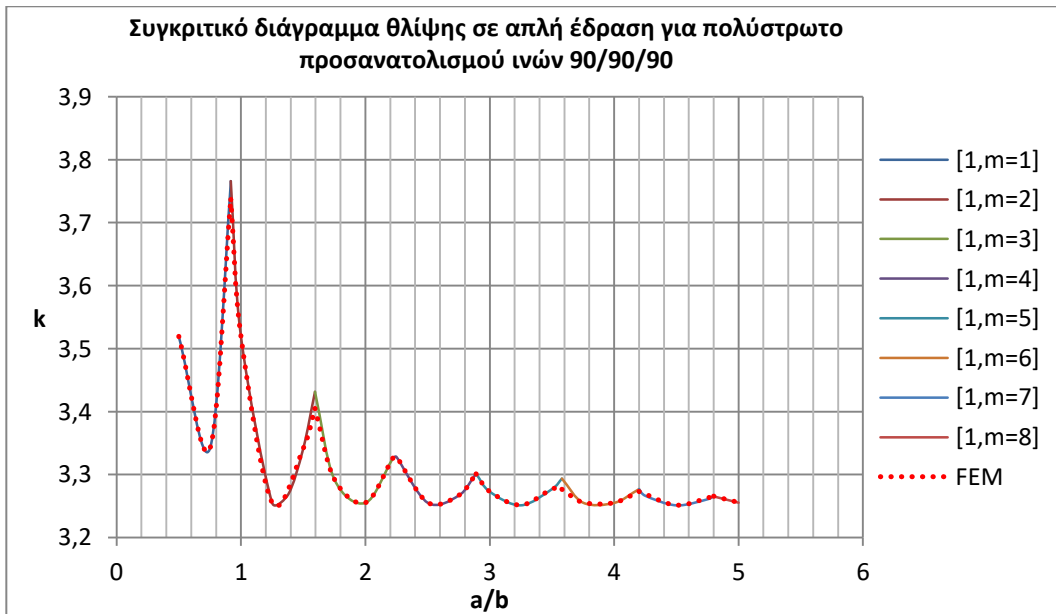
Μετά τον υπολογισμό των αναλυτικών τιμών μέσω της παραπάνω σχέσης (3.4) και την ολοκλήρωση της μοντελοποίησης κατασκευάστηκαν τα συγκριτικά διαγράμματα και υπολογίστηκε η σύγκλιση των τιμών των δύο διαφορετικών μεθόδων. Όπως φαίνεται και από τα Σχήματα 3.10-3.15 οι γραφικές παραστάσεις, σχεδόν, ταυτίζονται υποδεικνύοντας την **εξαιρετική σύγκλιση** της αναλυτικής και της αριθμητικής μεθόδου και για τους τρεις προσανατολισμούς ινών.



**Σχήμα 3. 10:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής-αριθμητικής λύσης ( $k$ - $a/b$ ) πολύστρωτου προσανατολισμού 0/0/0 για θλίψη με απλή έδραση

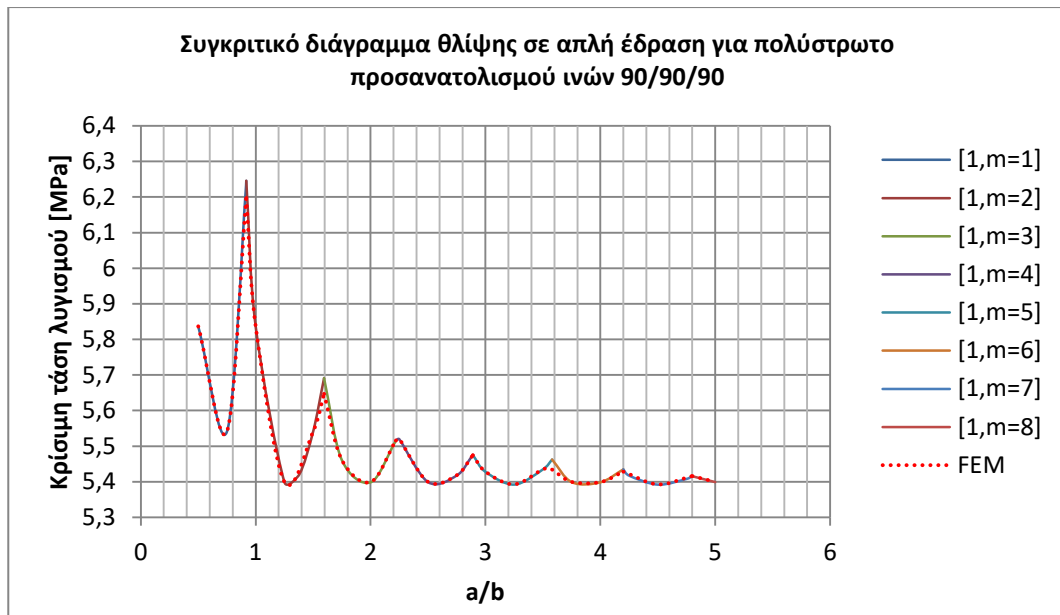


Σχήμα 3. 11: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού αναλυτικής-αριθμητικής λύσης πολύστρωτου S2-glass/epoxy προσανατολισμού 0/0/0 για θλίψη με απλή έδραση

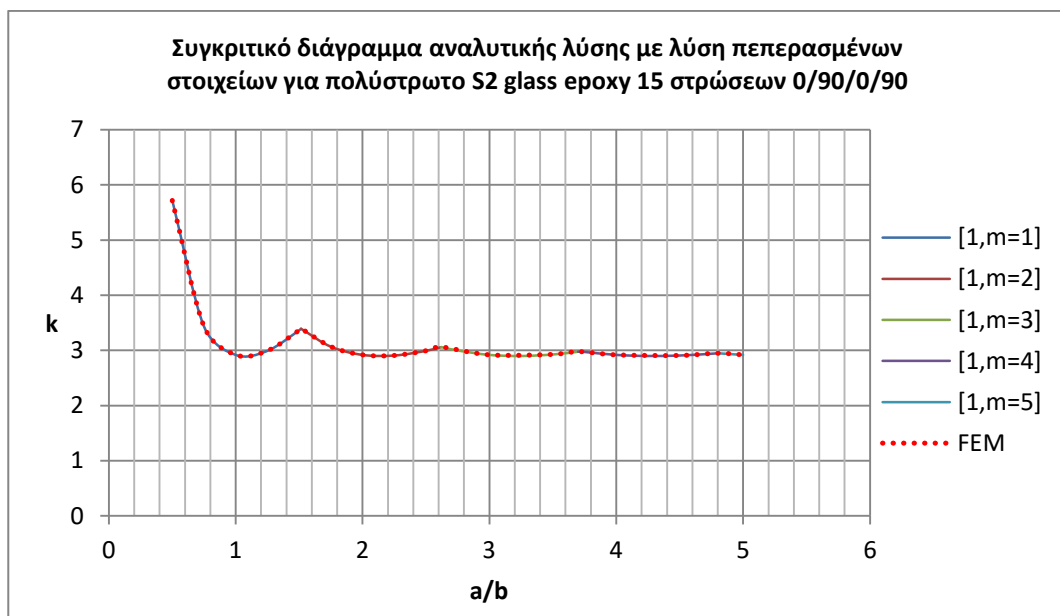


Σχήμα 3. 12: Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) αναλυτικής-αριθμητικής λύσης για θλίψη με απλή έδραση σε πολύστρωτο 90/90/90

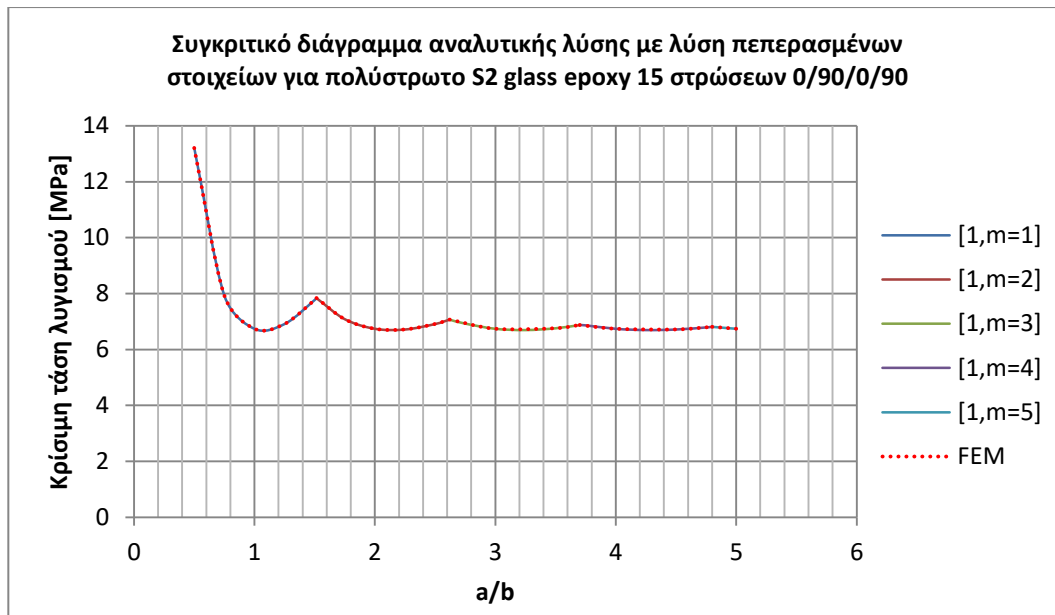




**Σχήμα 3. 13:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma$ - $a/b$ ) αναλυτικής-αριθμητικής λύσης για θλίψη με απλή έδραση σε πολύστρωτο 90/90/90



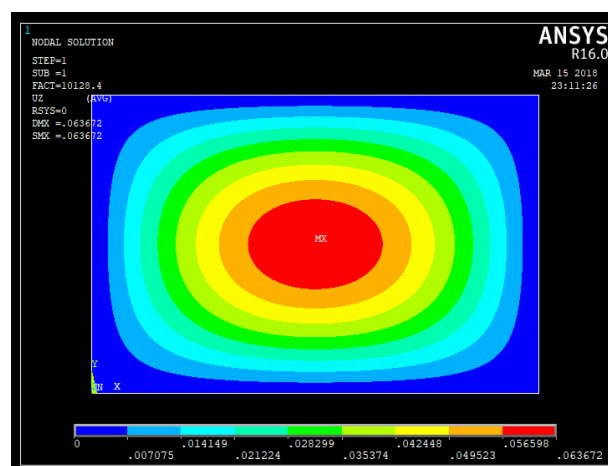
**Σχήμα 3. 14:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) αναλυτικής-αριθμητικής λύσης για θλίψη με απλή έδραση σε πολύστρωτο 0/90/0



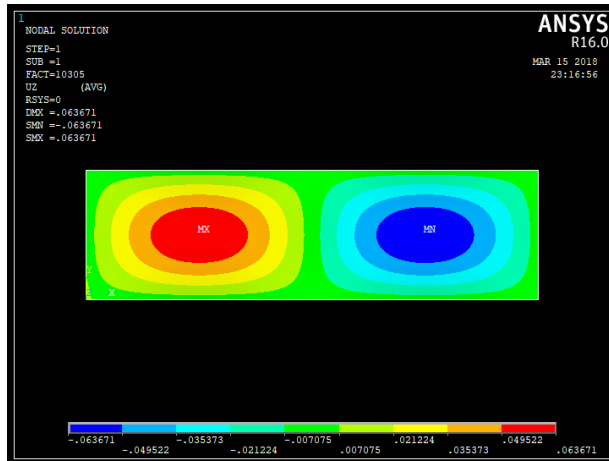
**Σχήμα 3. 15:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού ( $\sigma$ - $a/b$ ) αναλυτικής-αριθμητικής λύσης για θλίψη με απλή έδραση σε πολύστρωτο 0/90/0

### Ιδιομορφές

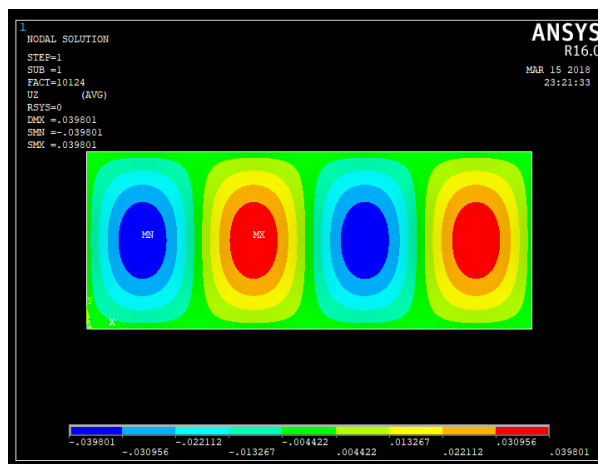
Στη συνέχεια θα παρατεθούν ορισμένες εικόνες των ιδιομορφών των πολύστρωτων πλακών οι οποίες μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση (Σχήματα 3.16-3.19). Το πλήθος των ημικυμάτων είναι σε συμφωνία με τα παραπάνω διαγράμματα, όπως ήταν αναμενόμενο, ενώ και οι γραμμές μηδενικής παραμόρφωσης (nodal lines) είναι κάθετες στα διαμήκη σύνορα της πλάκας.



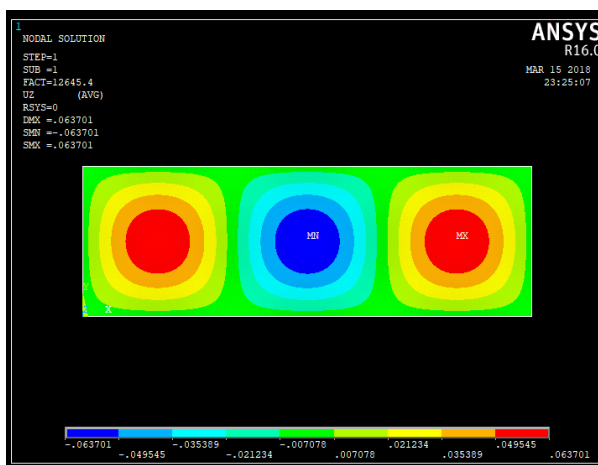
**Σχήμα 3. 16:** Ιδιομορφή πολύστρωτου S2-glass/epoxy 0/0/0 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=1,5$ ) με δημιουργία ενός ημικύματος ( $m=1$ )



Σχήμα 3. 17: Ιδιομορφή πολύστρωτου S2-glass/epoxy 0/0/0 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=3,5$ ) με δημιουργία δύο ημικυμάτων ( $m=2$ )



Σχήμα 3. 18: Ιδιομορφή πολύστρωτου S2-glass/epoxy 90/90/90 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=2,5$ ) με δημιουργία τεσσάρων ημικυμάτων ( $m=4$ )

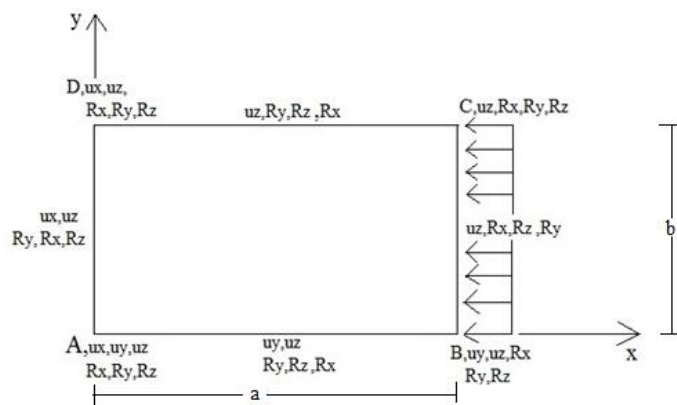


Σχήμα 3. 19: Ιδιομορφή cross-ply πολύστρωτου S2-glass/epoxy 0/90/0 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=3$ ) με δημιουργία τριών ημικυμάτων ( $m=3$ )

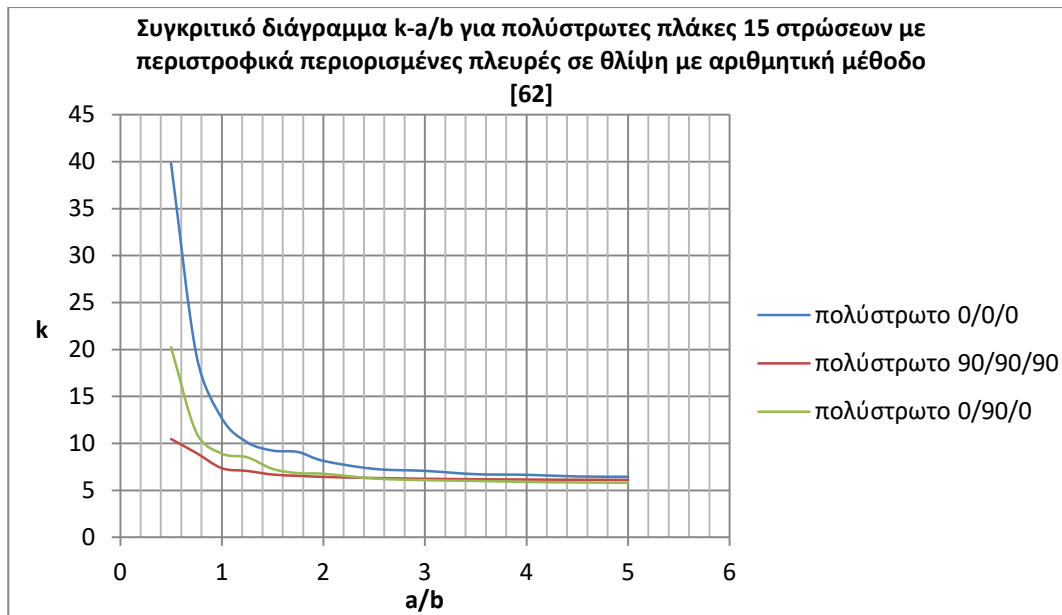
### 3.2 Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω θλίψης με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών

Στην περίπτωση των περιορισμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών στις πολύστρωτες πλάκες δεν υπάρχει αναλυτική λύση και θα παρατεθούν τα διαγράμματα του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης μόνο για αποτελέσματα που προέκυψαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία της μοντελοποίησης είναι όμοια με αυτή που πραγματοποιήθηκε στην περίπτωση της απλής έδρασης και αναλύθηκε σε προηγούμενη υποενότητα (3.1.1). Η τετράγωνη πλάκα διακριτοποιείται με 10000 πεπερασμένα στοιχεία κελύφους και προκύπτουν διαφορετικά μοντέλα ίδιου πλάτους ( $b=0,2\text{m}$ ) και διαφορετικού μήκους ( $a$ ). Η διαφορά των δύο μοντελοποιήσεων εντοπίζεται στις συνοριακές συνθήκες. Αυτές είναι ίδιες και έχουν περιοριστεί επιπρόσθετα όλες οι στρόφες κατά μήκος των πλευρών (Σχήμα 3.20).

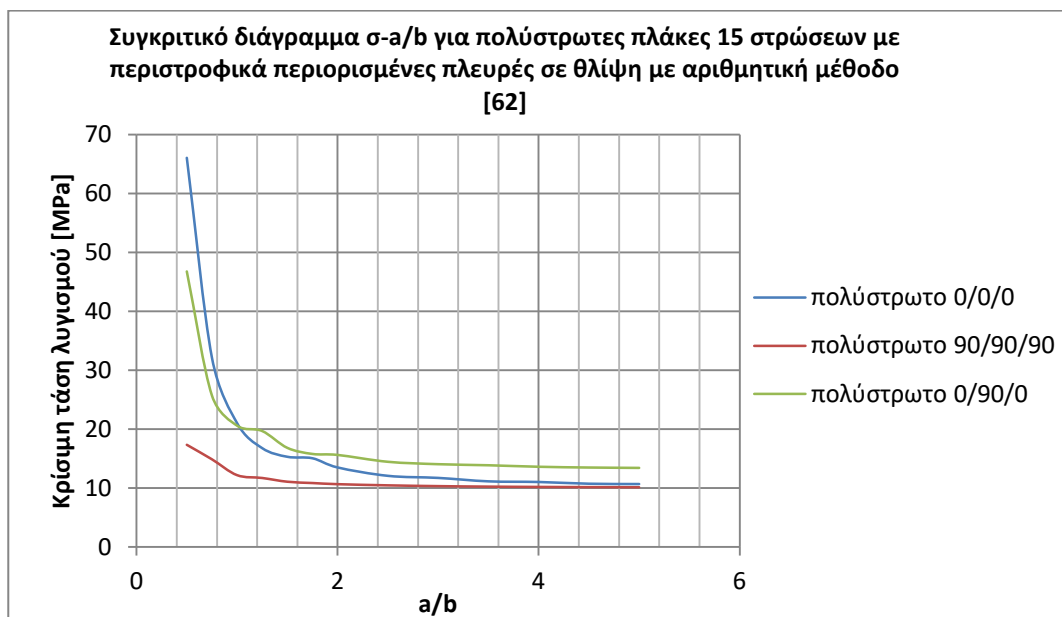
Στα παρακάτω συγκεντρωτικά διαγράμματα των Σχημάτων 3.21 και 3.22 φαίνονται οι τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού συναρτήσει του λόγου μήκους προς πλάτος της πλάκας ( $a/b$ ) για θλίψη με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος των πλευρών στα πολύστρωτα σύνθετα υλικά με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών. Από το διάγραμμα της τάσης φαίνεται ότι πιο ανθεκτικό σε λυγισμό λόγω θλίψης με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών είναι το cross-ply πολύστρωτο για  $a/b \geq 1$ .



**Σχήμα 3. 20:** Συνοριακές συνθήκες θλίψης με περιορισμένες τις στρόφες κατά μήκος των πλευρών (*all edges clamped*)



**Σχήμα 3. 21:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k-a/b$ ) πολύστρωτων πλακών διαφορετικού προσανατολισμού ινών σε θλίψη με περιορισμένες τις στρώσεις κατά μήκος των πλευρών

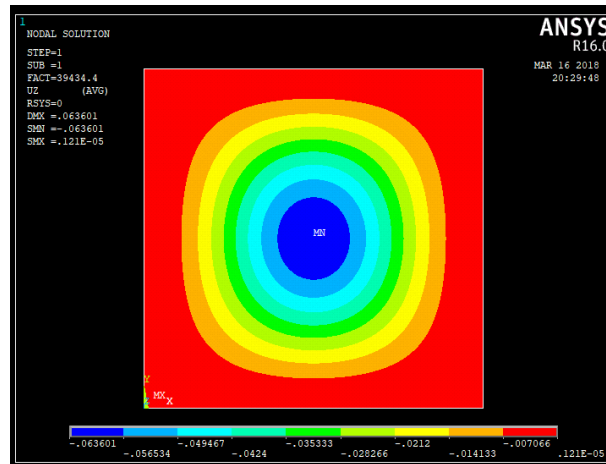


**Σχήμα 3. 22:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού πολύστρωτων πλακών διαφορετικού προσανατολισμού ινών σε θλίψη με περιορισμένες τις στρώσεις κατά μήκος των πλευρών

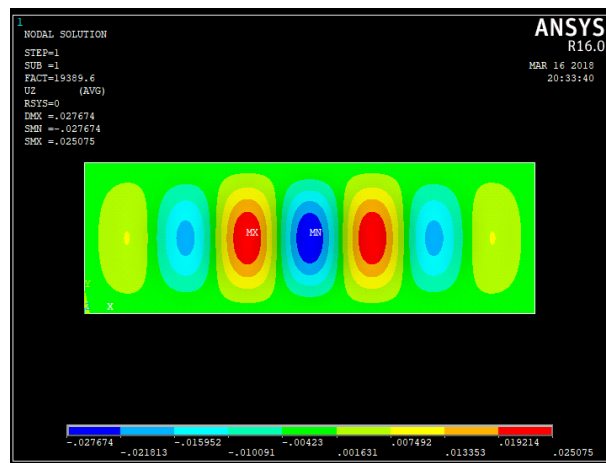
### Ιδιομορφές

Από τις ιδιομορφές των Σχημάτων 3.23-3.25 επιβεβαιώνεται η παρατήρηση των πλακών αλουμινίου για την συνοριακή συνθήκη του περιορισμού των στρώσεων και την εκκίνηση των ημικυμάτων πιο απομακρυσμένα από τα σύνορα της πλάκας σε

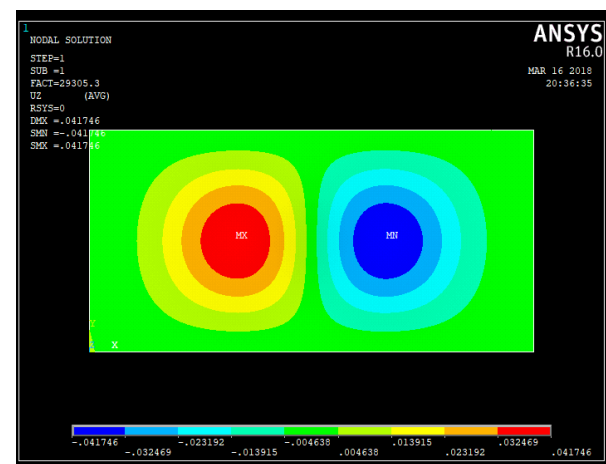
σύγκριση με την απλή έδραση. Δημιουργούνται λυγισμένα σχήματα διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων ανάλογα με τον λόγο  $a/b$  και τον προσανατολισμό των ινών.



*Σχήμα 3. 23: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 0/0/0 σε θλίψη με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=1$ )*



*Σχήμα 3. 24: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 90/90/90 σε θλίψη με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=3$ ) με σχηματισμό 7 ημικυμάτων ( $m=7$ )*



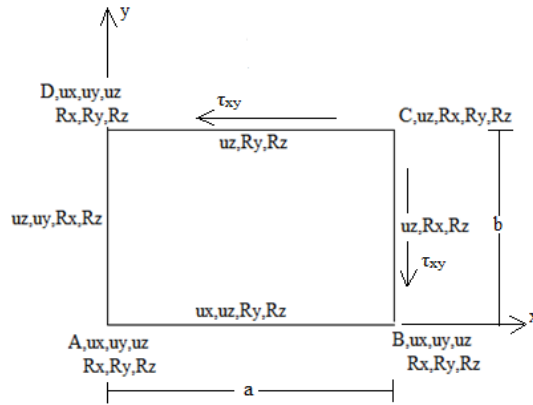
*Σχήμα 3. 25: Ιδιομορφή πολύστρωτης cross-ply πλάκας σε θλίψη με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=2$ ) με σχηματισμό 2 ημικυμάτων ( $m=2$ )*

### 3.3 Λυγισμός πολύστρωτων πλακών λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό όλων των στροφών κατά μήκος των πλευρών και με μικτή οριακή συνθήκη

Τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά μελετήθηκαν και ως προς τη συμπεριφορά τους σε λυγισμό λόγω διατμητικής φόρτισης με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Στη περίπτωση της απλής έδρασης οι τιμές του συντελεστή  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού της αριθμητικής μεθόδου για το cross-ply πολύστρωτο συγκρίνονται με αντίστοιχες προσεγγιστικές, ενώ στις περιορισμένες στρόφες κατά μήκος των πλευρών και στη μικτή οριακή συνθήκη παρουσιάζονται τα διαγράμματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος, θα παρατεθούν και εικόνες των ιδιομορφών των πολύστρωτων πλακών οι οποίες μοντελοποιήθηκαν κατά τη μελέτη της διάτμησης, όπου φαίνεται η μορφή του λυγισμένου σχήματος της κάθε πλάκας και ο σχηματισμός των ημικυμάτων.

#### 3.3.1 Λυγισμός λόγω διάτμησης σε cross-ply πολύστρωτο με απλή έδραση

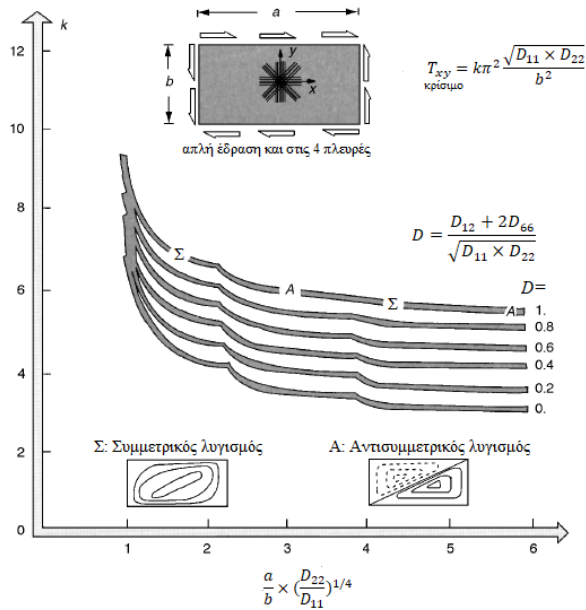
Οι τιμές της αριθμητικής μεθόδου προέκυψαν μέσω της διαδικασίας μοντελοποίησης των πολύστρωτων πλακών με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων [62]. Οι πλάκες αποτελούνται από 15 ορθότροπες στρώσεις ινώδους σύνθετου υλικού S2-glass/epoxy [55] πάχους  $t_{lamina}=0,125\text{mm}$  η καθεμία. Το συνολικό, επομένως, πάχος των πολύστρωτων είναι  $t=1,875\text{mm}$ . Τα αριθμητικά μοντέλα διακριτοποιήθηκαν με στοιχεία Shell 181 4-node, τα οποία είναι ιδανικά για ανάλυση δομικών κατασκευών αποτελούμενες από στρώσεις, αφού επιτρέπουν τον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων, του πάχους και του προσανατολισμού των ινών ξεχωριστά σε κάθε στρώση. Το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων δεν διαφέρει από αυτό των υπόλοιπων μοντελοποιήσεων. Η τετράγωνη πλάκα ( $a/b=1$ ) αποτελείται από 10000 στοιχεία και το μήκος πλευράς αυτών των τετραγωνικών στοιχείων παραμένει σταθερό, οπότε η πλάκα με  $a/b=2$  αποτελείται από 20000 στοιχεία. Αξιοποιώντας την ανάλυση λυγισμού με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS<sup>®</sup> εξήχθησαν τα απαιτούμενα φορτία λυγισμού και μέσω της σχέσης (3.5) ( $k = \frac{N_x b^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}$ ) προέκυψαν και οι τιμές του συντελεστή  $k$ . Οι συνθήκες στήριξης είναι ίδιες με αυτές που εφαρμόστηκαν στη μελέτη του αλουμινίου και φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 3.26.



**Σχήμα 3. 26:** Οι συνοριακές συνθήκες της πολύστρωτης πλάκας σε διάτμηση με απλή έδραση

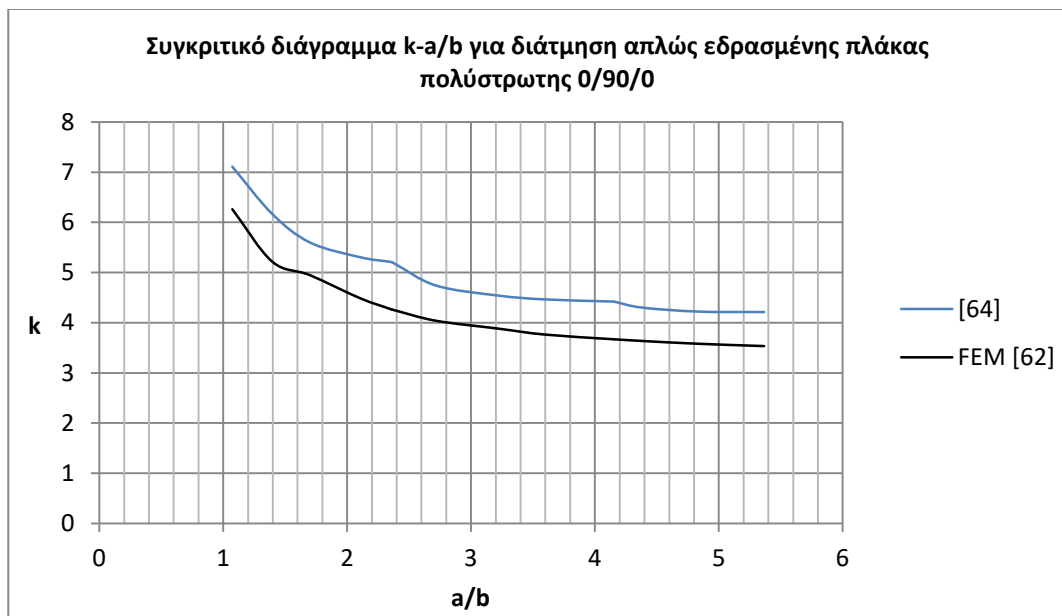
Τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης συγκρίθηκαν με προσεγγιστικές τιμές στην περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση. Αυτές οι τιμές εξήχθησαν από τη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.27 [64, Appendix 2]. Κάθε ορθότροπο υλικό είτε είναι πολύστρωτο είτε είναι glare έχει διαφορετικές τιμές  $D_{ij}$  όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Οπότε, σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα υπολογίζεται κάθε φορά η τιμή του  $D$ , η οποία είναι συνάρτηση των  $D_{ij}$  και προκύπτουν, με αυτό τον τρόπο, οι ζητούμενες τιμές του συντελεστή  $k$ . Ακόμη μία παρατήρηση που πρέπει να γίνει σε σχέση με το συγκεκριμένο διάγραμμα αφορά στις τιμές του οριζόντιου άξονα όπου δεν είναι οι τιμές του λόγου  $a/b$  όπως ήταν σε όλα τα διαγράμματα της παρούσας μελέτης μέχρι τώρα. Ο λόγος μήκους προς πλάτος της πλάκας ( $a/b$ ) εξακολουθεί να εμπεριέχεται σε συνδυασμό, όμως, με έναν αδιάστατο όρο  $(\frac{D_{22}}{D_{11}})^{1/4}$  ο οποίος είναι διαφορετικός για κάθε υλικό, με αποτέλεσμα οι τιμές του άξονα  $x$  να διαφοροποιούνται ανάλογα με το υλικό.



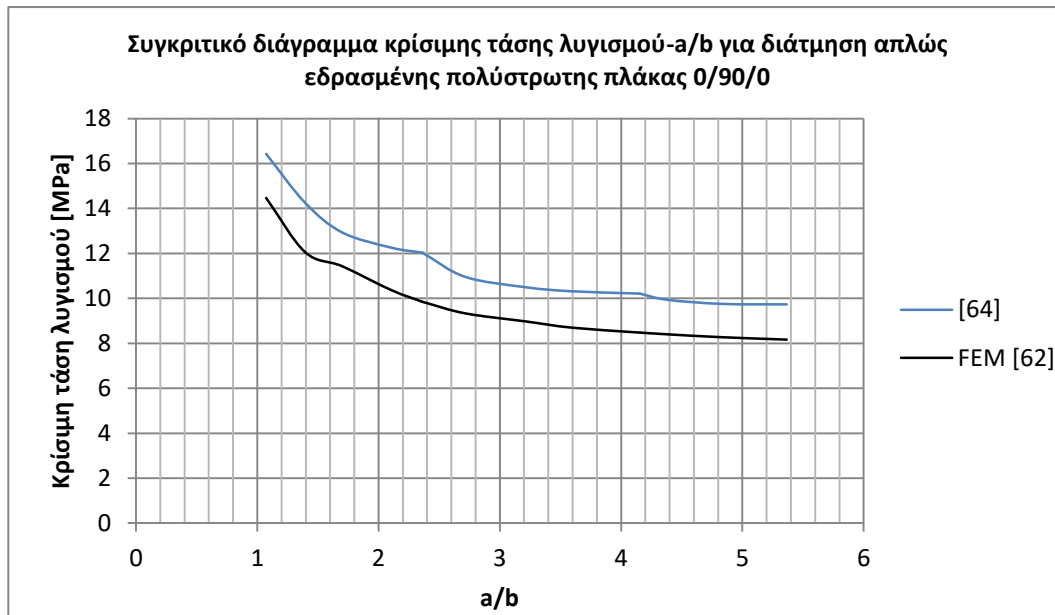


**Σχήμα 3. 27:** Διάγραμμα προσεγγιστικών τιμών του συντελεστή λυγισμού  $k$  σε ειδικά ορθότροπα υλικά για διάτμηση με απλή έδραση για διαφορετικές τιμές του  $D$  [64]

Λαμβάνοντας υπόψη όσα προαναφέρθηκαν για την περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση σε cross-ply πολύστρωτο είναι εφικτή η κατασκευή του συγκριτικού διαγράμματος της αριθμητικής με τη αναλυτική λύση. Από τα Σχήματα 3.28 και 3.29 διαπιστώνεται ότι **η σύγκλιση είναι ικανοποιητική** με την απόκλιση να κυμαίνεται στο 17%.



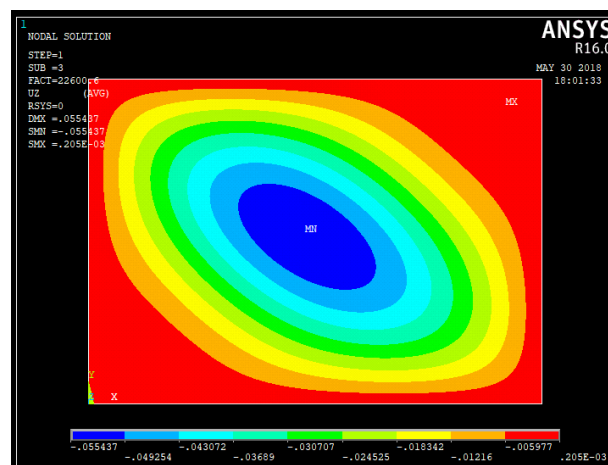
**Σχήμα 3. 28:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  μεταξύ προσεγγιστικής και αριθμητικής λύσης για cross-ply πολύστρωτο



Σχήμα 3. 29: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού μεταξύ προσεγγιστικής και αριθμητικής λύσης για cross-ply πολύστρωτο

### Ιδιομορφές

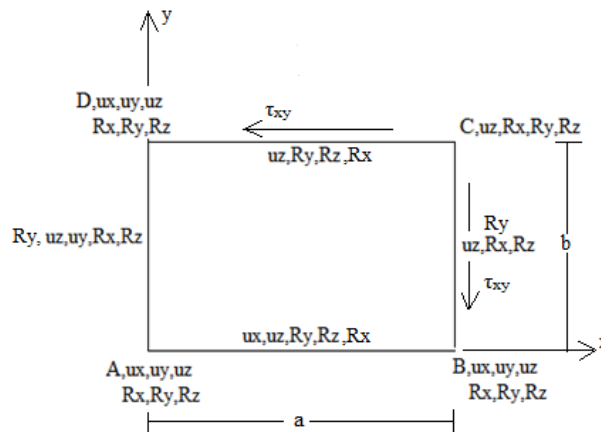
Οι ιδιομορφές στη περίπτωση του λυγισμού λόγω διάτμησης με απλή έδραση σε πολύστρωτες πλάκες λαμβάνουν την χαρακτηριστική μορφή που παρατηρήθηκε και στην ίδια περίπτωση φόρτισης για πλάκες αλουμινίου. Στο Σχήμα 3.30 φαίνεται η ιδιομορφή για cross-ply πολύστρωτη πλάκα με λόγο μήκους προς πλάτος  $a/b=1,395$  και η δημιουργία ενός ημικύματος.



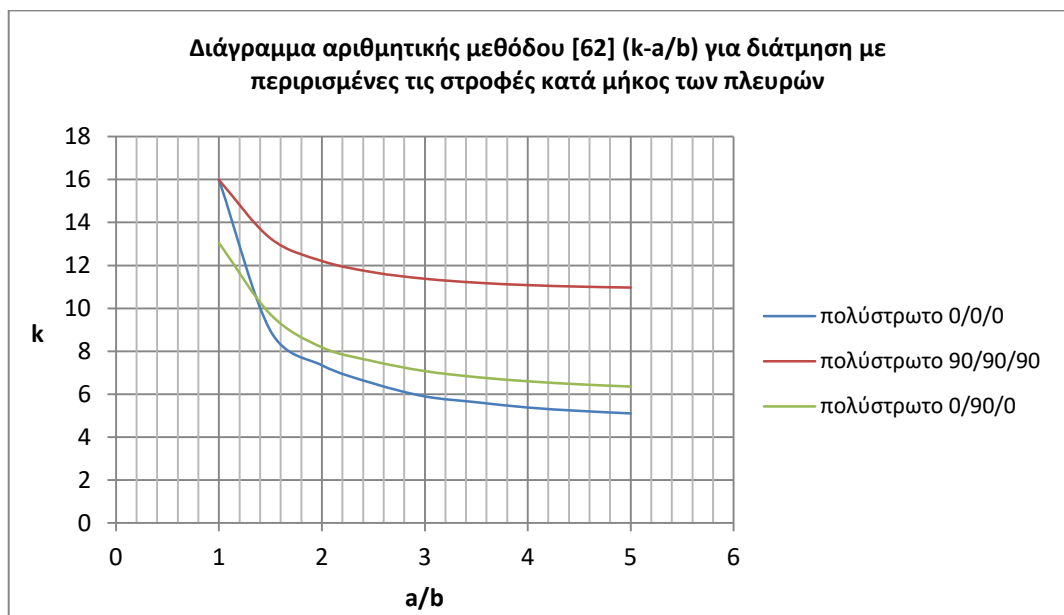
Σχήμα 3. 30: Ιδιομορφή λυγισμένου σχήματος πολύστρωτης cross-ply πλάκας σε διάτμηση με απλή έδραση ( $a/b=1,395$ )

### 3.3.2 Λυγισμός λόγω διάτμησης με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες στρωφών κατά μήκος των πλευρών

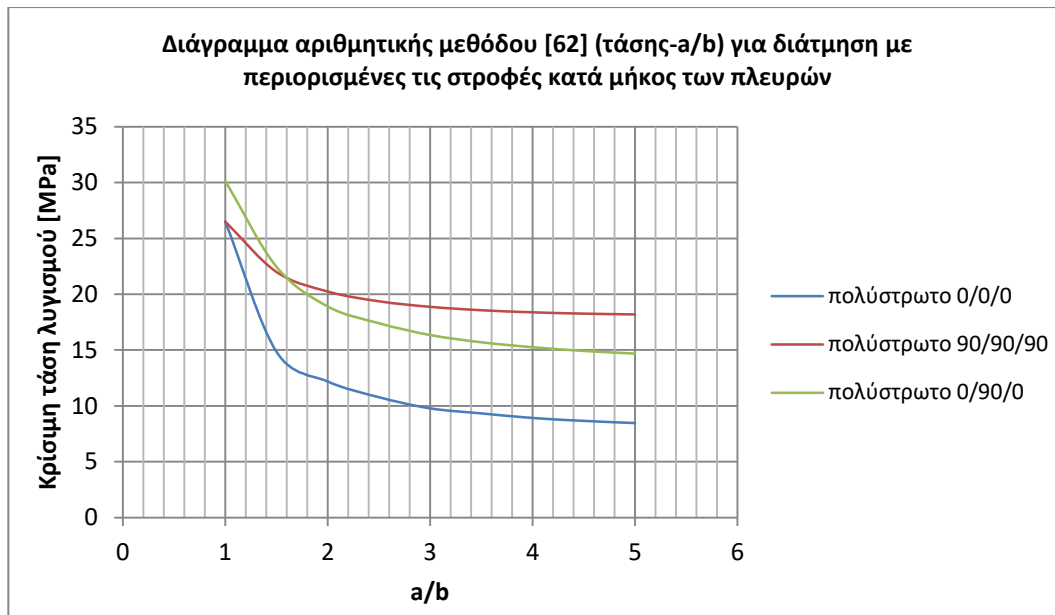
Σε αυτή την περίπτωση οριακών συνθηκών δεν υπάρχει ακριβής αναλυτική λύση και θα παρατεθούν οι γραφικές παραστάσεις των τιμών που έχουν προκύψει από την αριθμητική μέθοδο μέσω του ANSYS®. Η διαδικασία μοντελοποίησης διαφοροποιείται μόνο στις οριακές συνθήκες (Σχήμα 3.31).



Σχήμα 3. 31: Συνοριακές συνθήκες διάτμησης με περιορισμό όλων των στρωφών κατά μήκος των πλευρών σε πολύστρωτη πλάκα



Σχήμα 3. 32: Συγκριτικό διάγραμμα πολύστρωτων για διάτμηση με περιορισμένες τις ελευθερίες των στρωφών (all edges clamped)

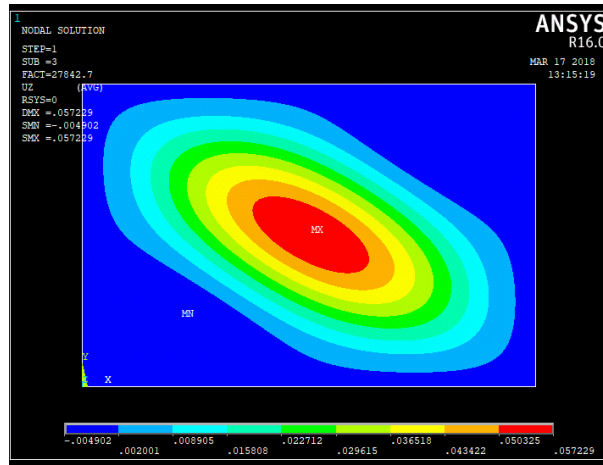


**Σχήμα 3. 33:** Συγκριτικό διάγραμμα πολυστρωτων για διάτμηση με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών (*all edges clamped*)

Από τα παραπάνω γραφήματα των Σχημάτων 3.32 και 3.33 φαίνεται η σχετική θέση των καμπύλων του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης των πολυστρωτων υλικών με διαφορετικό προσανατολισμό ινών. Ειδικότερα, από το διάγραμμα της τάσης διαπιστώνεται ότι το πιο ανθεκτικό πολυστρωτο σε λυγισμό λόγω διατμητικής φόρτισης με τις πλευρές περιστροφικά περιορισμένες είναι αυτό με προσανατολισμό ινών 90/90/90 για  $a/b \geq 1,6$ . Αντίστοιχα, το λιγότερο ανθεκτικό πολυστρωτο είναι αυτό με 0/0/0 προσανατολισμό και εμφανώς χαμηλότερη τάση λυγισμού από τα άλλα δύο.

### Ιδιομορφές

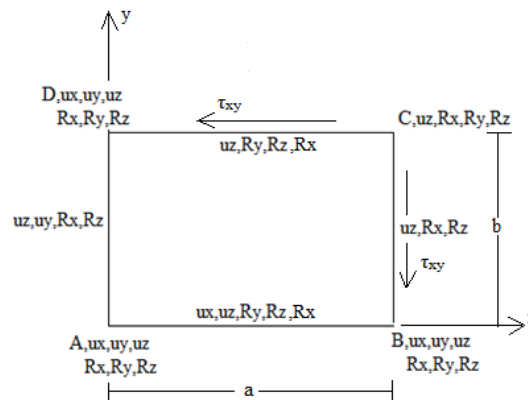
Προχωρώντας και στην παρουσίαση των προκύπτουσων ιδιομορφών των πολυστρωτων πλακών που μοντελοποιήθηκαν σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών φαίνεται η δημιουργία του χαρακτηριστικού λυγισμένου σχήματος στο παρακάτω Σχήμα 3.34, όπου απεικονίζεται η πολυστρωτη πλάκα 0/0/0 λόγω  $a/b=1,5$ .



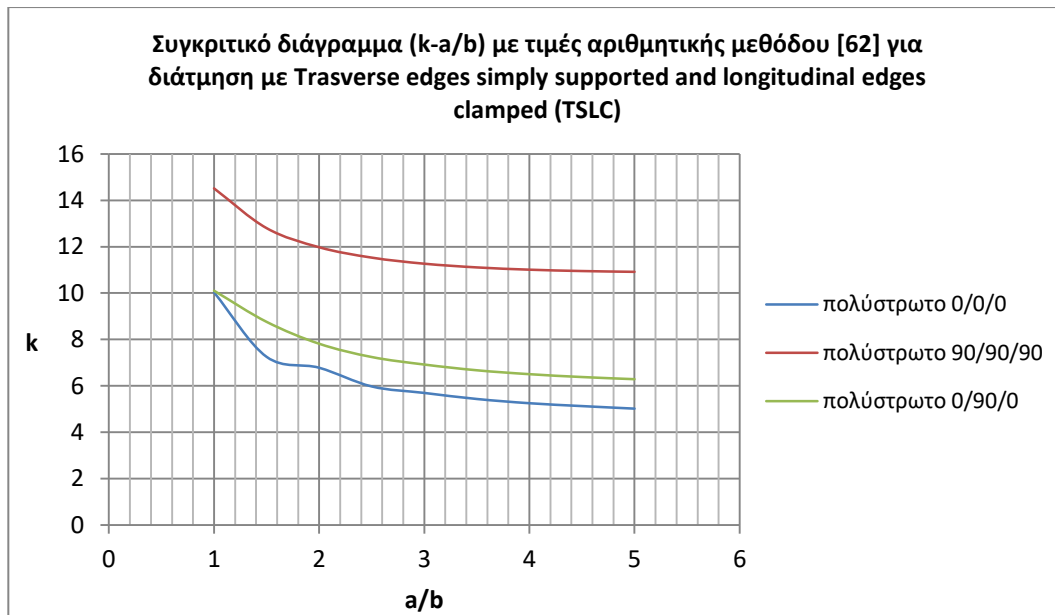
*Σχήμα 3. 34: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 0/0/0 ( $a/b=1,5$ ) λόγω διάτμησης με περιορισμό στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών*

### 3.3.3 Λυγισμός λόγω διάτμησης σε πολύστρωτα σύνθετα υλικά με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)

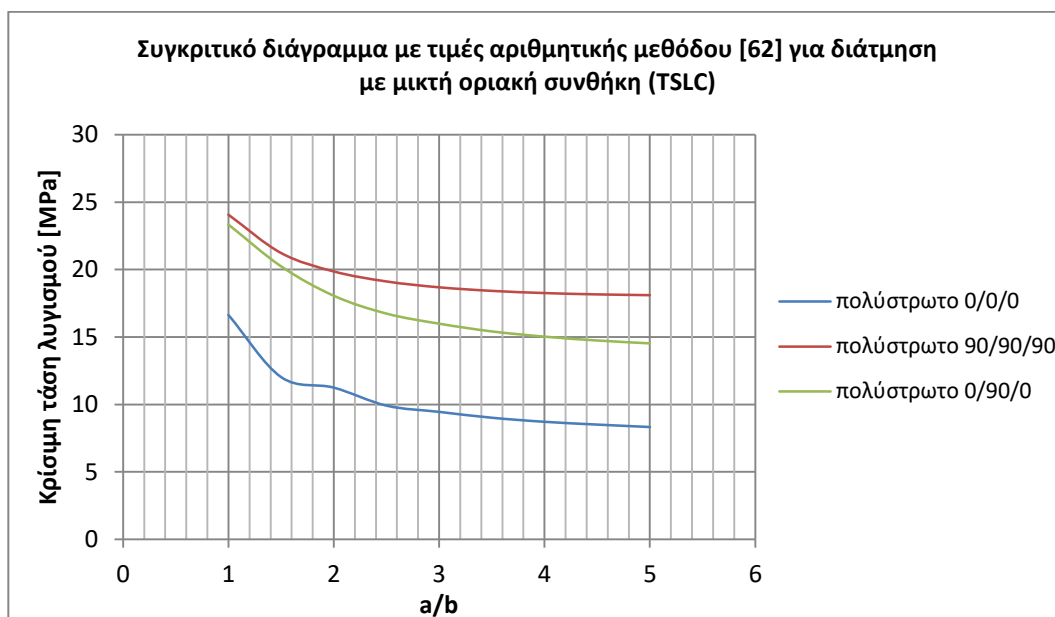
Ολοκληρώνοντας τη μελέτη σε λυγισμό των πολύστρωτων υλικών θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τη μοντελοποίηση σε διάτμηση με τις εγκάρσιες πλευρές απλώς εδρασμένες και τις διαμήκειες να έχουν περιορισμένες τις στροφές. Η διαδικασία αυτής της μοντελοποίησης διαφέρει μόνο στην επιβολή των μικτών συνοριακών συνθηκών. Αυτές περιγράφονται αναλυτικά στο Σχήμα 3.35.



*Σχήμα 3. 35: Μικτή συνοριακή συνθήκη διάτμησης με περιορισμό όλων των στροφών κατά μήκος των διαμήκων πλευρών (AB και CD) και απλή έδραση κατά μήκος των εγκάρσιων (AD και BC)*



**Σχήμα 3. 36:** Συγκριτικό διάγραμμα πολύστρωτων με τιμές που προέκυψαν από το ANSYS για διάτμηση με μικτή οριακή συνθήκη

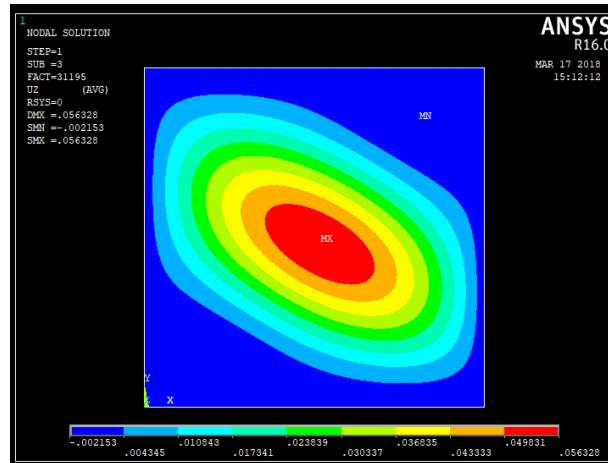


**Σχήμα 3. 37:** Συγκριτικό διάγραμμα πολύστρωτων με τιμές που προέκυψαν από το ANSYS για διάτμηση με μικτή οριακή συνθήκη

Παρατηρώντας τα παραπάνω συγκριτικά διαγράμματα (Σχήματα 3.36 και 3.37) για διάτμηση με μικτή οριακή συνθήκη και, ειδικότερα, το διάγραμμα της κρίσιμης τάσης λυγισμού διαπιστώνεται ότι και σε αυτή την περίπτωση το πιο ανθεκτικό σε λυγισμό είναι το πολύστρωτο 90/90/90 και το λιγότερο ανθεκτικό είναι το 0/0/0.

#### Ιδιομορφές

Τέλος, παρατίθεται και η ιδιομορφή της πολύστρωτης πλάκας 0/0/0 λόγω  $a/b=1$  με το χαρακτηριστικό για την περίπτωση της μικτής οριακής συνθήκης ημικύμα (Σχήμα 3.38).



*Σχήμα 3. 38: Ιδιομορφή λυγισμένου σχήματος για πολύστρωτη πλάκα 0/0/0 σε διάτμηση με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) με  $a/b=1$*





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### 4 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΠΛΑΚΩΝ GLARE

Το βασικό υλικό το οποίο μελετήθηκε στα πλαίσια της παρούσας έρευνας είναι το GLARE και διάφοροι τύποι του. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθεί η συμπεριφορά αυτών των GLARE υλικών σε λυγισμό λόγω θλίψης και διάτμησης με διαφορετικές συνθήκες στήριξης. Ειδικότερα, θα πραγματοποιηθεί σύγκριση μεταξύ των τιμών της αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για την περίπτωση της θλίψης με απλή έδραση (simply supported), σύγκριση μεταξύ των τιμών της αριθμητικής επίλυσης και προσεγγιστικών τιμών για την περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση, ενώ θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης στα ίδια υλικά για καταπόνηση θλίψης και διάτμησης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών της κάθε πλάκας (all edges clamped) και με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) στην περίπτωση της διάτμησης. Πραγματοποιήθηκαν, συνολικά, 574 διαφορετικές μοντελοποιήσεις μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62] ώστε να προκύψουν τα απαραίτητα αποτελέσματα. Το πάχος των πλακών GLARE όπως στο αλουμίνιο και στα πολύστρωτα διατηρήθηκε σταθερό και ίσο με  $t=1,875\text{mm}$ . Επίσης σταθερό ήταν και το πάχος της κάθε μεμονωμένης στρώσης σύνθετου υλικού ( $t_{\text{lamina}}=0,125\text{mm}$ ), ενώ μεταβλητή παράμετρος ήταν το πάχος των στρώσεων αλουμινίου σε κάθε υλικό. Επιγραμματικά, θα αναφερθούν τα υλικά GLARE τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης και λόγω διάτμησης (Πίνακας 4.1).

*Πίνακας 4. 1: Υλικά GLARE τα οποία μελετήθηκαν σε λυγισμό για κάθε περίπτωση καταπόνησης*

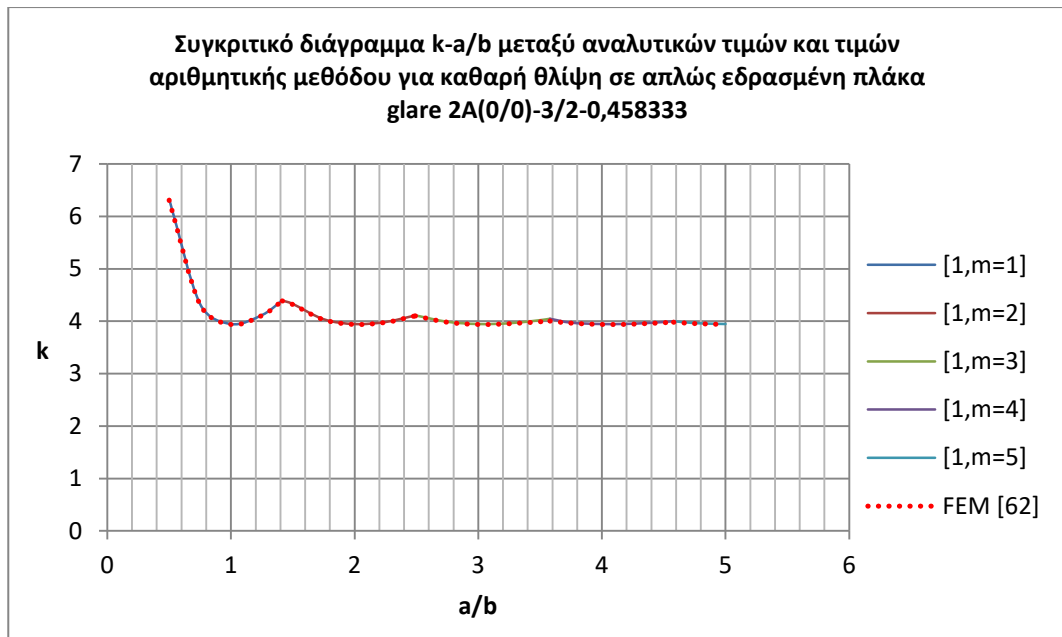
ΘΛΙΨΗ	ΔΙΑΤΜΗΣΗ
Glare 2A(0/0)-3/2-0,458333	Glare 2A(90/90)-3/2-0,458333
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125	Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125
Glare 2A(90/90)-3/2-0,458333	Glare 3(0/90 90/0)-3/2-0,458333
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	Glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375
Glare 2A(45/45)-4/3-0,28125	Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667
Glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667	Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667	Glare 6(45/-45 -45/45)-3/2-0,458333
Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667	

Να σημειωθεί ότι στην παραπάνω ονοματολογία του Πίνακα 4.1 αμέσως μετά την αναγραφή του τύπου του glare και μέσα σε παρένθεση φαίνεται η αλληλουχία του προσανατολισμού των ινών των στρώσεων του σύνθετου υλικού. Το glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667, δηλαδή, θα αποτελείται από 3 στρώσεις αλουμινίου πάχους 0,291667mm και από 2 πολύστρωτες στρώσεις σύνθετου με προσανατολισμό ινών 0/0/0/0 η καθεμία.

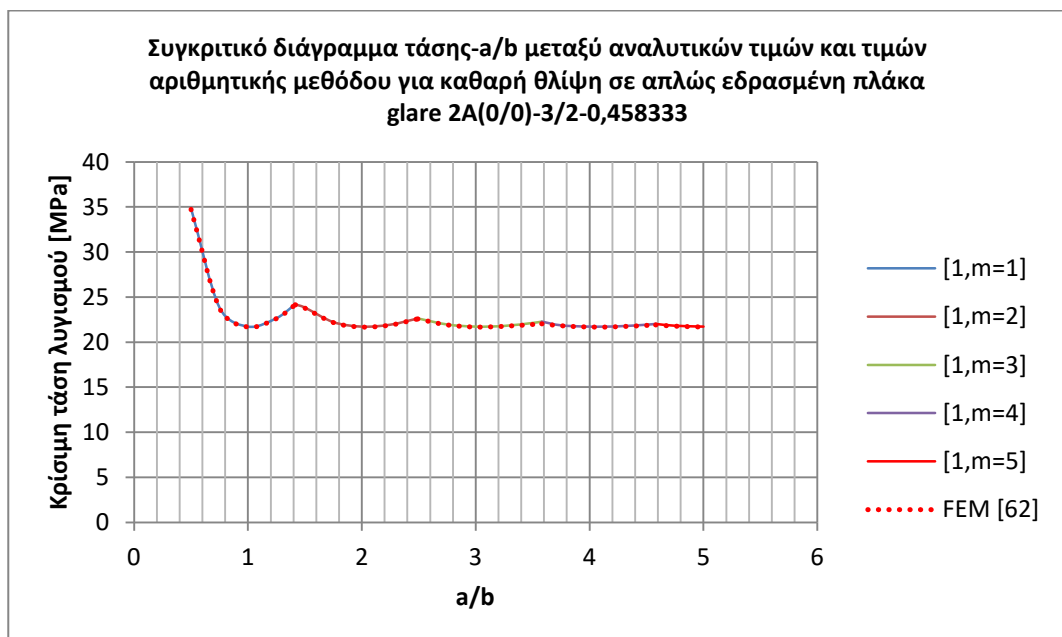
#### 4.1 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω θλίψης με απλή έδραση

Σε αυτή την ενότητα θα παρατεθούν τα διαγράμματα των τιμών του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού συναρτήσει του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) για λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση. Θα πραγματοποιηθεί σύγκριση των τιμών της αναλυτικής λύσης [1, pg 304] με τις αντίστοιχες της αριθμητικής μεθόδου [62]. Ξεκινώντας με τα αναλυτικά αποτελέσματα, αυτά προέκυψαν μέσω της χρήσης της σχέσης (3.4), η οποία υπολογίζει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $N_x$  με τη δημιουργία ενός ημικύματος ( $n=1$ ) στην κάθετη διεύθυνση της φόρτισης για ειδικά ορθότροπες (specially orthotropic) ορθογώνιες πλάκες, ενώ μέσω της σχέσης (3.5) υπολογίζεται, εύκολα, και ο συντελεστής λυγισμού  $k$ .

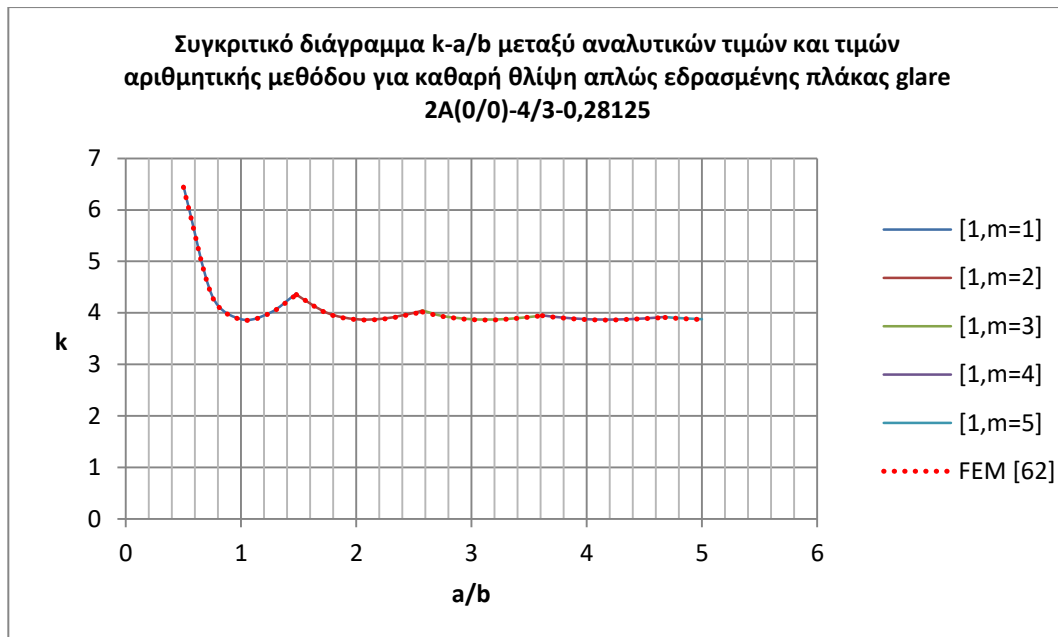
Όσον αφορά στις τιμές της αριθμητικής μεθόδου προέκυψαν μέσω της αξιοποίησης της ανάλυσης με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS® σε πολλαπλές μοντελοποιήσεις. Η διαδικασία υλοποίησης των εν λόγω μοντελοποιήσεων δεν θα αναλυθεί αφού είναι πανομοιότυπη με την αντίστοιχη που πραγματοποιήθηκε στη μελέτη σε λυγισμό των πολύστρωτων λόγω θλίψης με απλή έδραση και αναλύθηκε στην υποενότητα 3.1.1 του προηγούμενου κεφαλαίου. Οι πλάκες διακριτοποιήθηκαν με ίδιο αριθμό στοιχείων κελύφους για τις ίδιες διαστάσεις τόσο πάχους όσο και του λόγου  $a/b$ . Επίσης ίδια ήταν η επιβαλλόμενη φόρτιση και οι συνοριακές συνθήκες (Σχήμα 3.9), ενώ η μοναδική διαφοροποίηση, όπως εύλογα αντιλαμβάνεται κανείς αφορά στον καθορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων και του πάχους της κάθε στρώσης ώστε να προκύπτει το ζητούμενο κάθε φορά υλικό GLARE. Στα διαγράμματα των Σχημάτων 4.1-4.14 που ακολουθούν φαίνονται τα συγκριτικά αποτελέσματα και **η εξαιρετική σύγκλιση των δύο μεθόδων** στην περίπτωση της θλίψης με απλή έδραση.



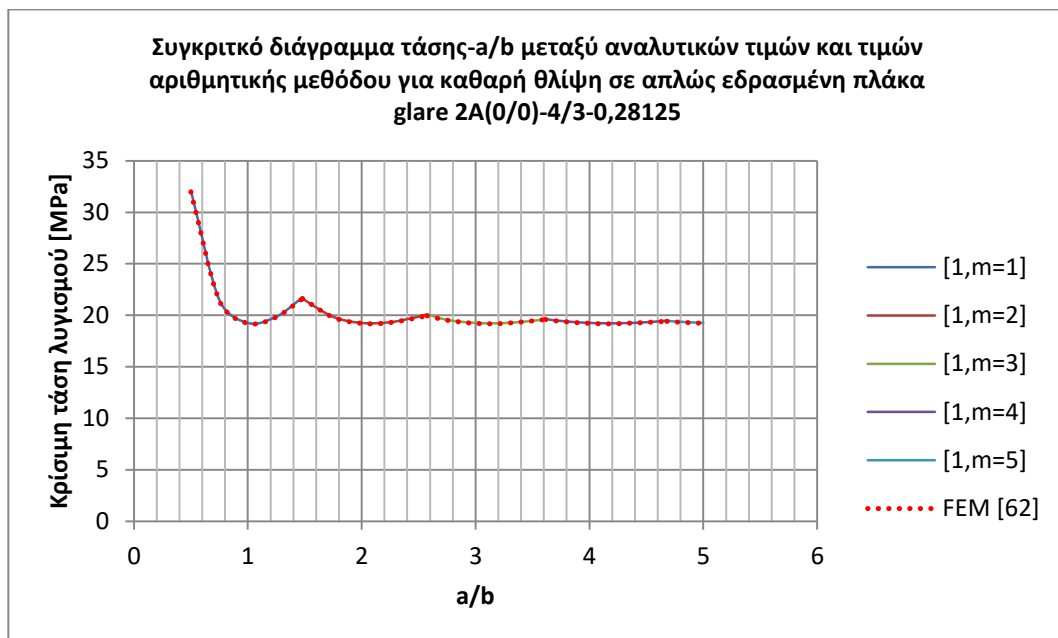
**Σχήμα 4. 1:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(0/0)-3/2-0,458333



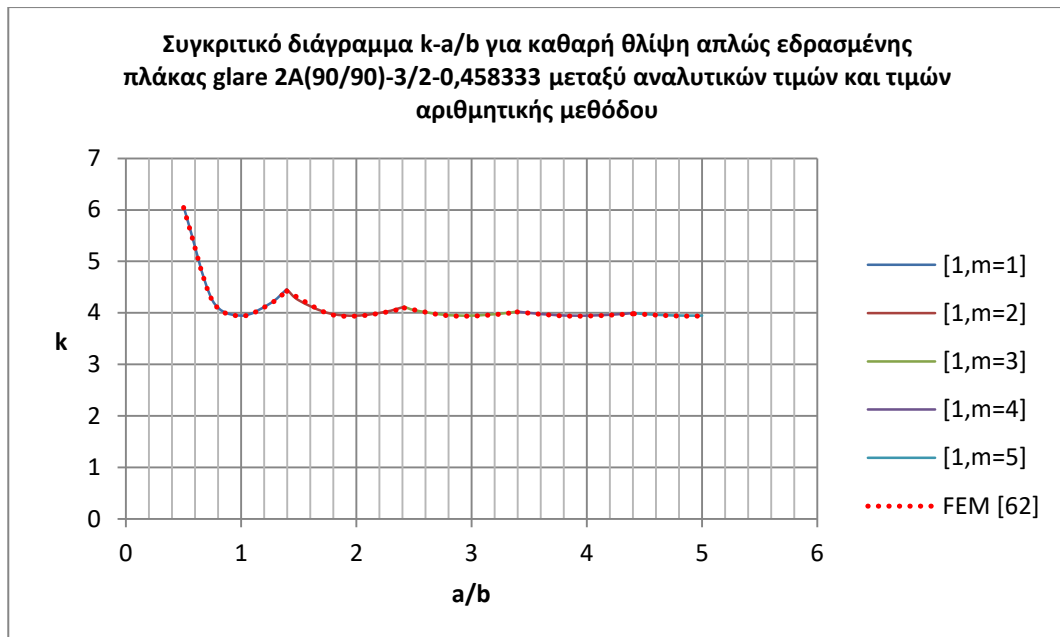
**Σχήμα 4. 2:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(0/0)-3/2-0,458333



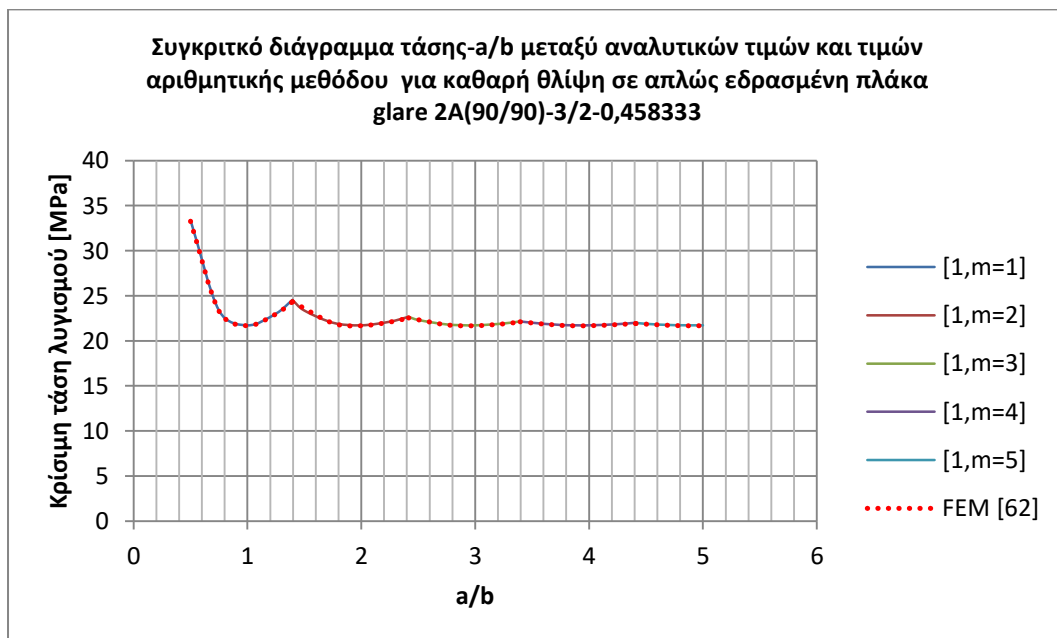
*Σχήμα 4. 3: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(0/0)-4/3-0,28125*



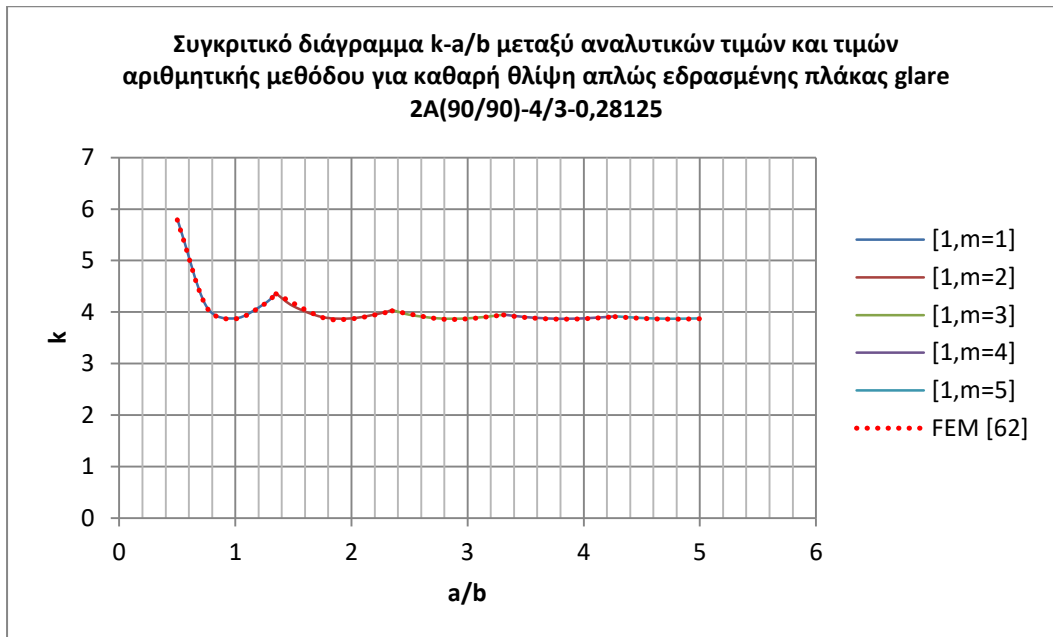
*Σχήμα 4. 4: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(0/0)-4/3-0,28125*



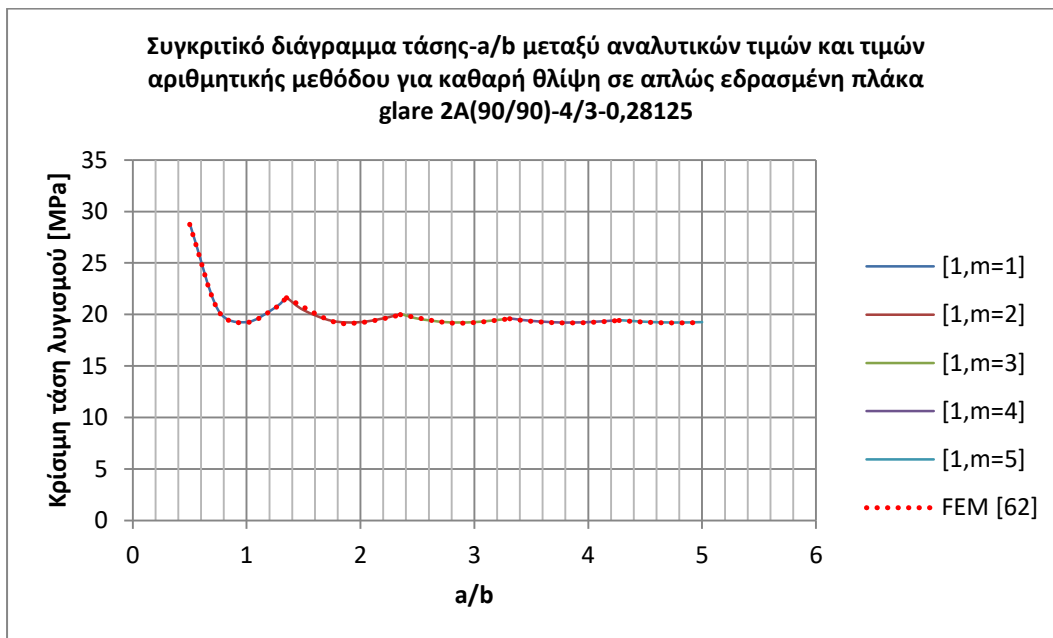
*Σχήμα 4. 5: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(90/90)-3/2-0,458333*



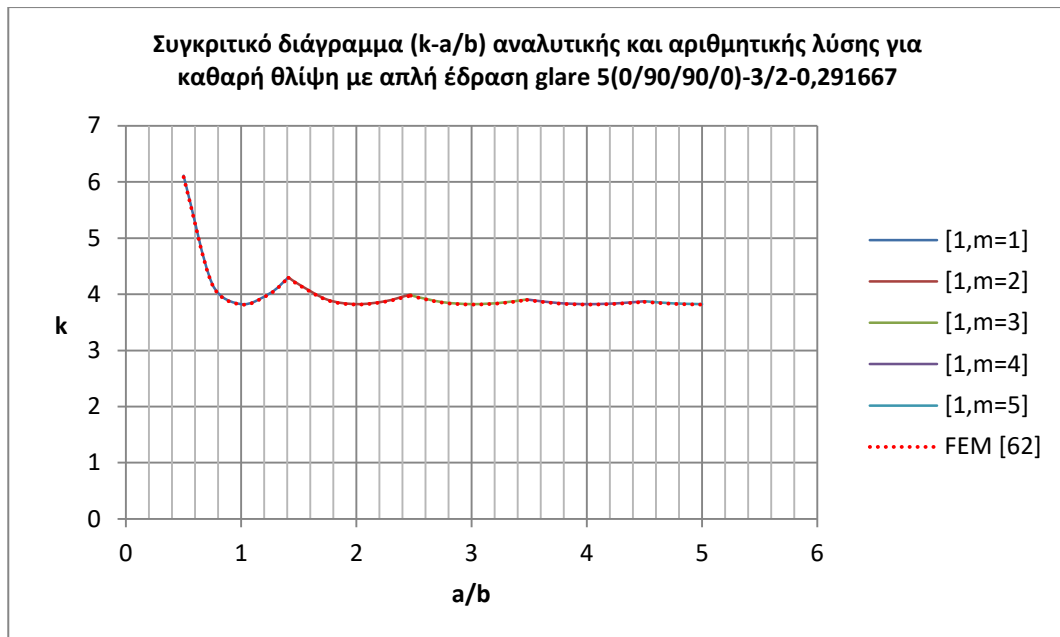
*Σχήμα 4. 6: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(90/90)-3/2-0,458333*



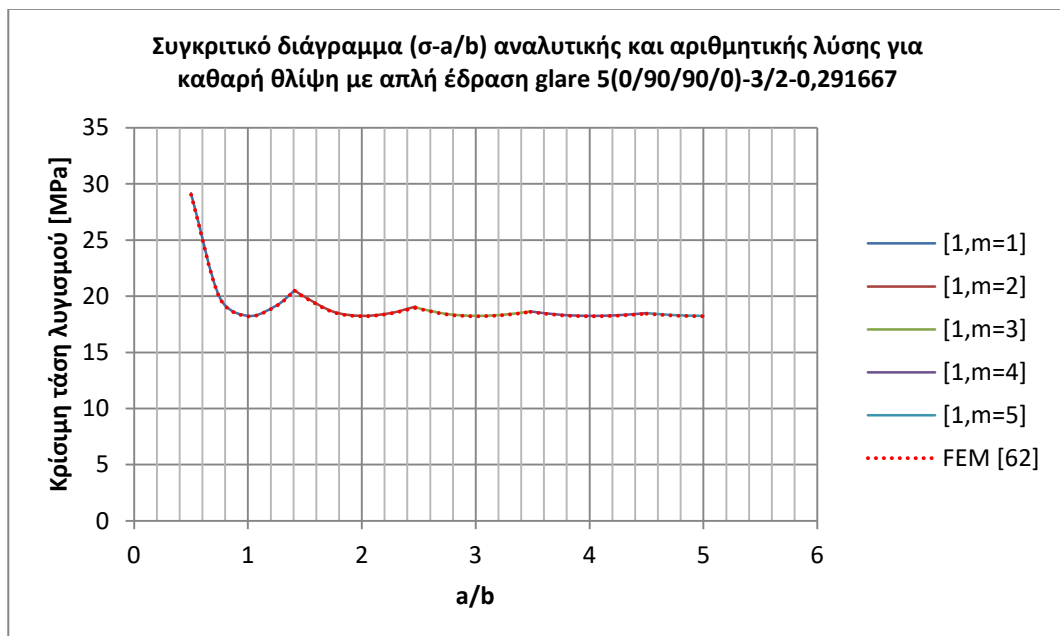
*Σχήμα 4. 7: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



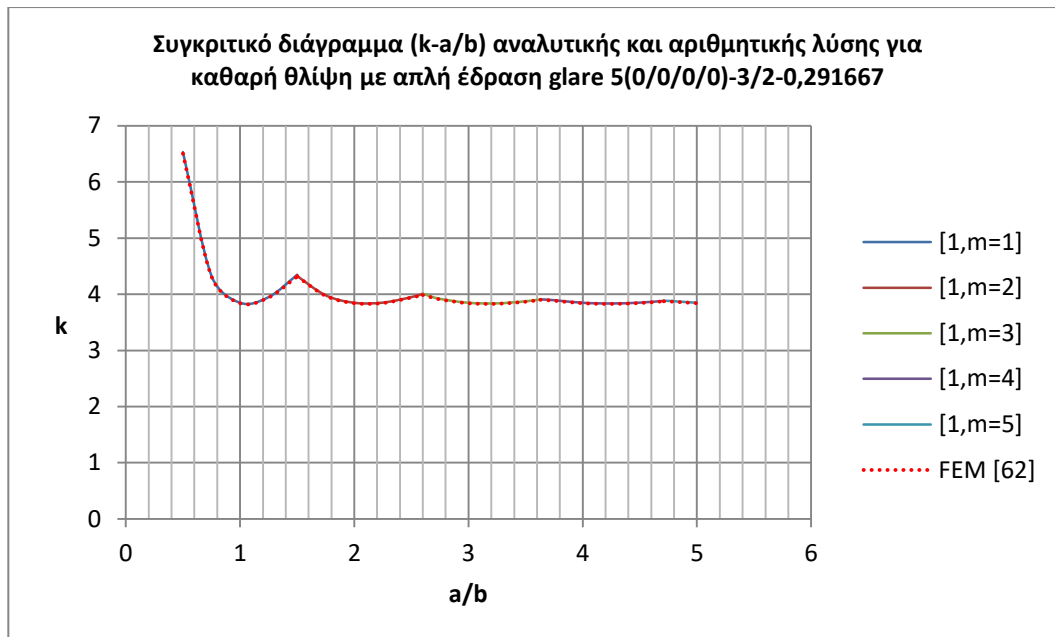
*Σχήμα 4. 8: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



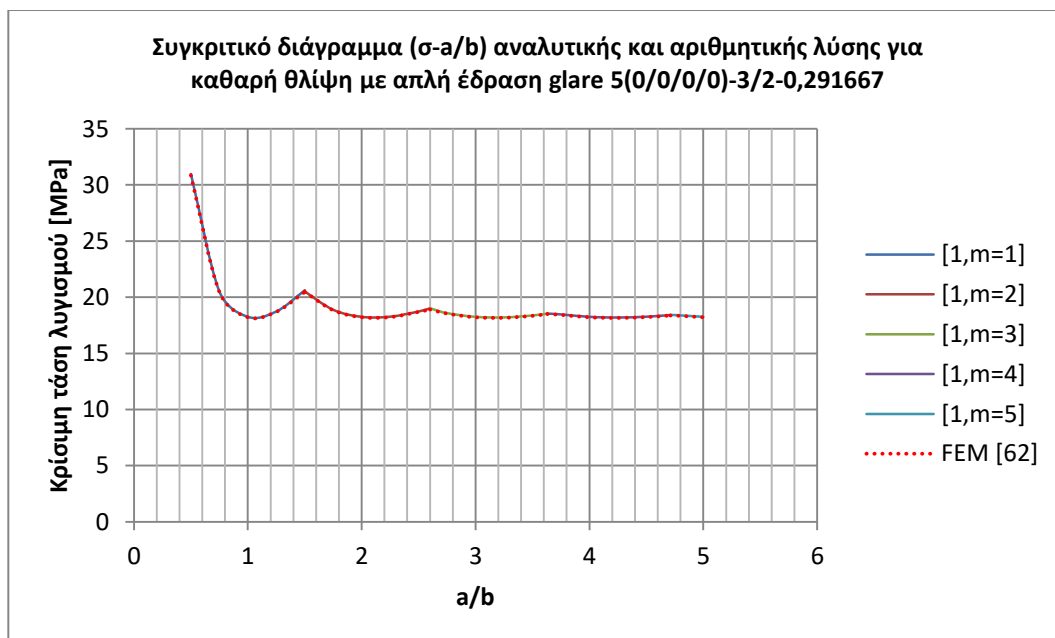
*Σχήμα 4. 9: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667*



*Σχήμα 4. 10: Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667*

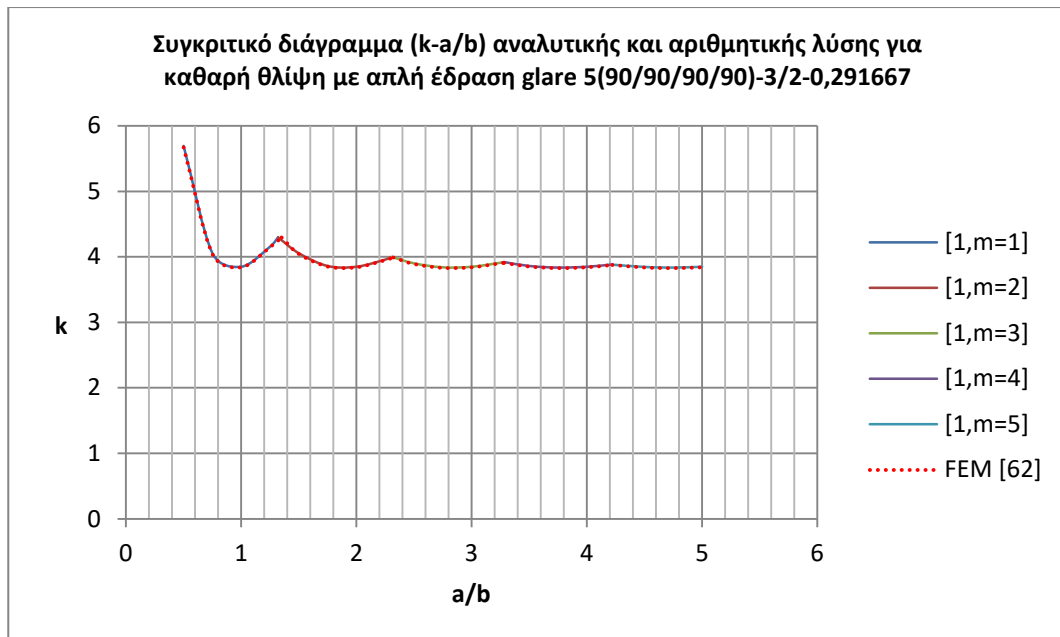


**Σχήμα 4. 11:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667

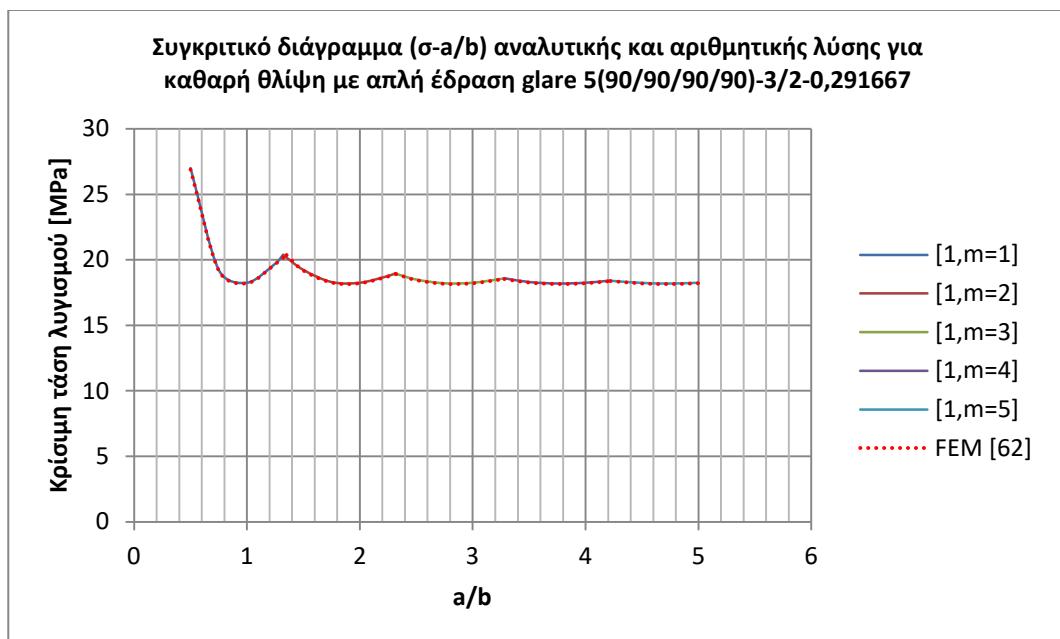


**Σχήμα 4. 12:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667





**Σχήμα 4. 13:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667

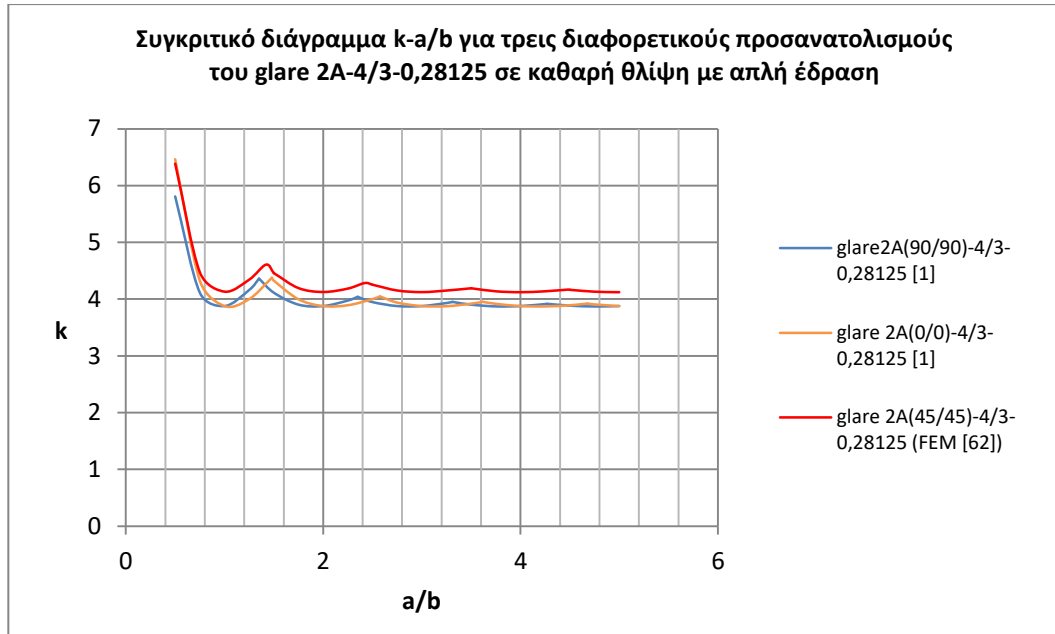


**Σχήμα 4. 14:** Συγκριτικό διάγραμμα αναλυτικής και αριθμητικής μεθόδου για θλίψη με απλή έδραση σε πλάκα glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667

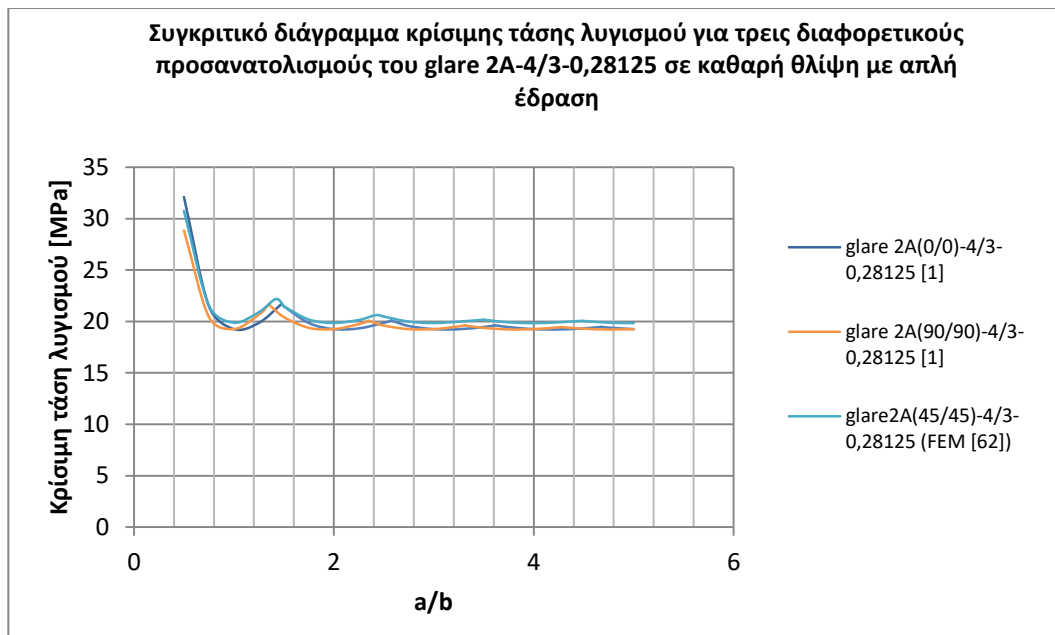
#### Θλίψη με απλή έδραση σε glare προσανατολισμού ινών 45°

Τα υλικά με προσανατολισμό ινών 45° δεν ανήκουν στην κατηγορία των ειδικά ορθότροπων υλικών (specially orthotropic) και, επομένως, δεν υπάρχει αναλυτική λύση γι' αυτά. Θα παρατεθούν οι γραφικές παραστάσεις τους από τα αποτελέσματα της αριθμητικής μοντελοποίησης και, ειδικότερα, σε σύγκριση με τις αναλυτικές

τιμές των glare ίδιου τύπου και διαφορετικού προσανατολισμού ινών. Στα Σχήματα 4.15 και 4.16 φαίνονται οι τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης του glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 σε σύγκριση με των glare 2A(0/0)-4/3-0,28125 και glare 2A(90/90)-4/3-0,28125. Από το διάγραμμα της τάσης φαίνεται ότι ο προσανατολισμός των 45° είναι ο πιο ανθεκτικός σε λυγισμό για πλάκες με  $a/b \geq 1$ .

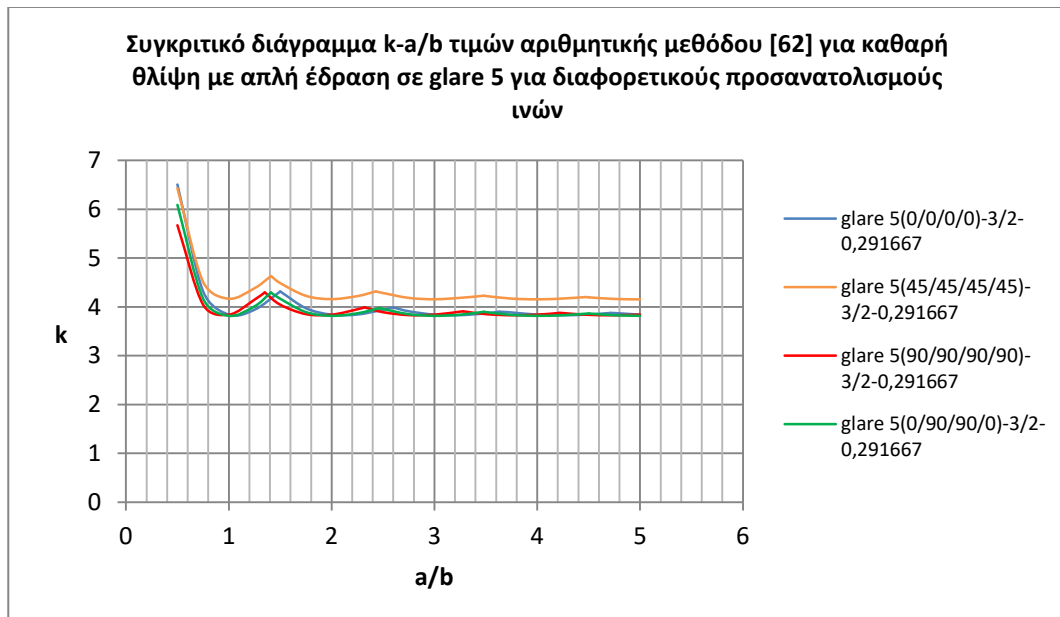


Σχήμα 4. 15: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού για glare 2A-4/3-0,28125 με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών σε θλίψη με απλή έδραση

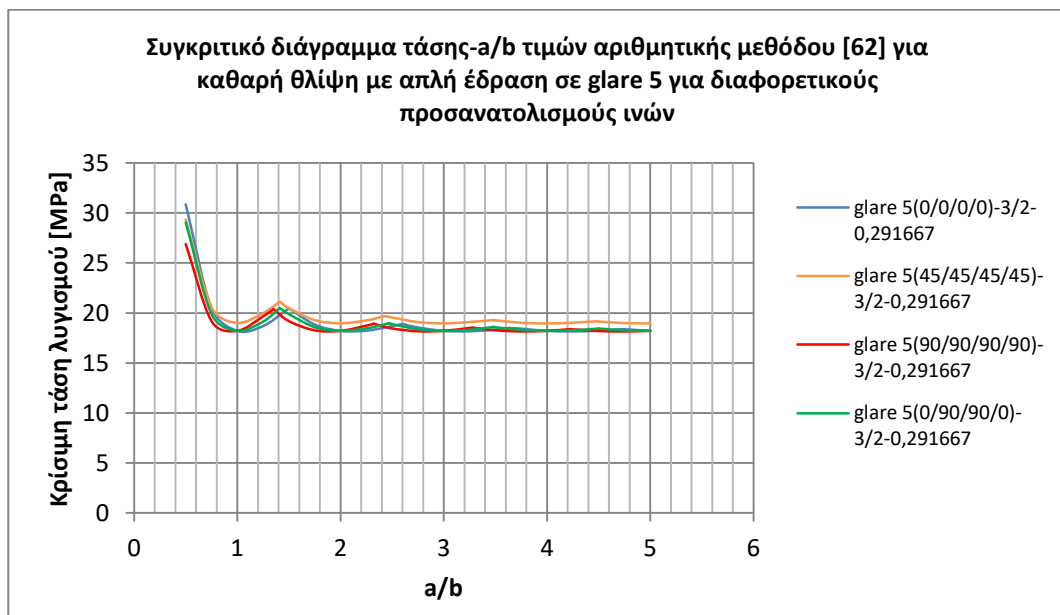


Σχήμα 4. 16: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού για glare 2A-4/3-0,28125 με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών σε θλίψη με απλή έδραση

Αντίστοιχες παρατηρήσεις γίνονται και για τα glare 5 όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.17 και 4.18, με το glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 να μην είναι ειδικά ορθότροπο οπότε δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά οι συντελεστές λυγισμού του και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου. Από το διάγραμμα τάσης παρατηρείται και σε αυτή την περίπτωση ότι ο προσανατολισμός των 45° είναι ο πιο ανθεκτικός σε λυγισμό.



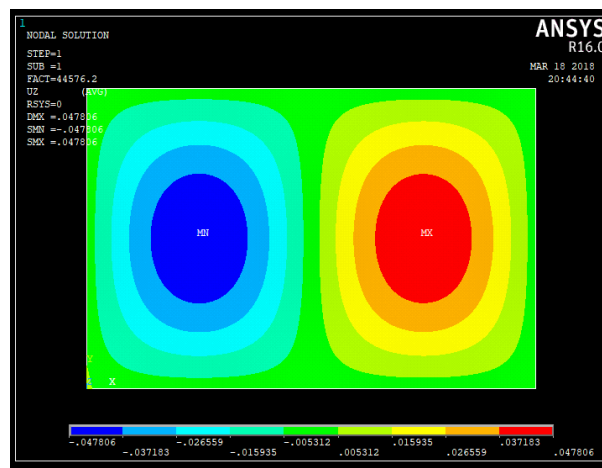
**Σχήμα 4. 17:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού για glare 5-3/2-0,291667 με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών σε θλίψη με απλή έδραση



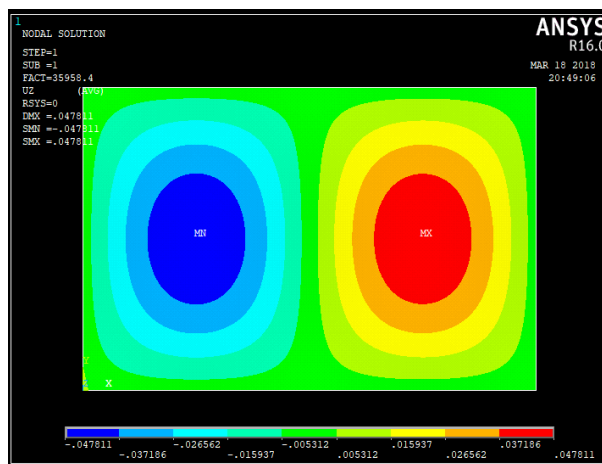
**Σχήμα 4. 18:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού για glare 5-3/2-0,291667 με διαφορετικούς προσανατολισμούς ινών σε θλίψη με απλή έδραση

## Ιδιομορφές

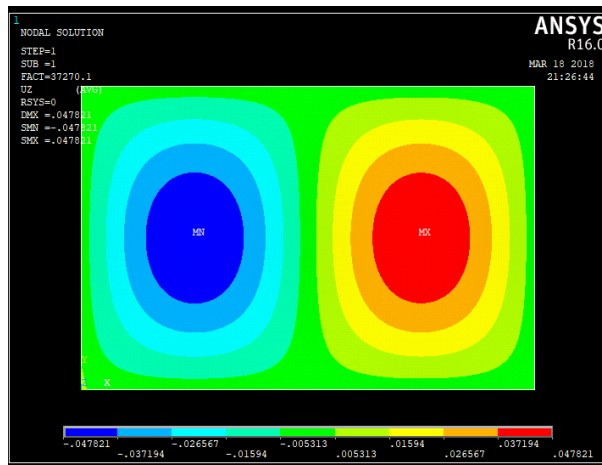
Κλείνοντας με τη μελέτη σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση σε υλικά GLARE θα παρουσιαστούν ιδιομορφές ορισμένων από τα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν. Από τα Σχήματα 4.19-4.23 φαίνεται ότι όσον αφορά στα ειδικά ορθότροπα υλικά GLARE, αυτά, δηλαδή, με προσανατολισμό ινών  $0^\circ$  ή  $90^\circ$  το σχήμα των ιδιομορφών είναι παρόμοιο και διαφέρουν ως προς το πλήθος των ημικυμάτων ανάλογα με τις διαστάσεις της κάθε πλάκας. Αντίστοιχη παρατήρηση γίνεται και στις πλάκες προσανατολισμού  $45^\circ$  όπου και αυτές αποκτούν παρόμοιο χαρακτηριστικό λυγισμένο σχήμα (Σχήμα 4.24 και 4.25). Ειδικότερα, σε αυτή την περίπτωση τα ημικύματα έχουν στραφεί κατά μία μικρή γωνία  $\varphi (\approx 10^\circ)$  ως προς το κέντρο τους σε σύγκριση με τα ημικύματα των ειδικά ορθότροπων υλικών. Τέλος, και σε αυτή την περίπτωση οι γραμμές μηδενικής παραμόρφωσης είναι κάθετες στα διαμήκη σύνορα της πλάκας όπως αναφέρεται και στη σχετική βιβλιογραφία [1].



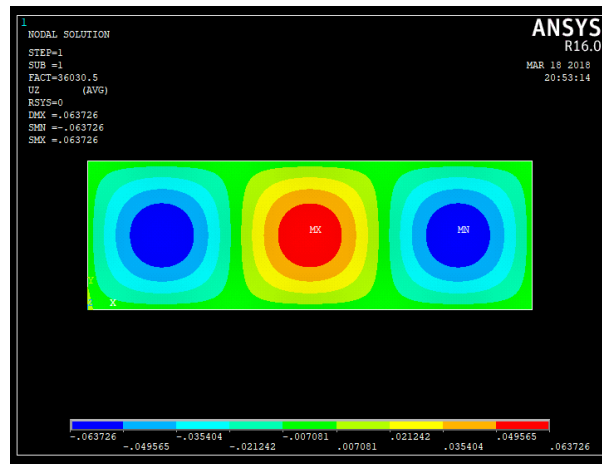
Σχήμα 4. 19: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(0/0)-3/2-0,458333 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=1,5$ )



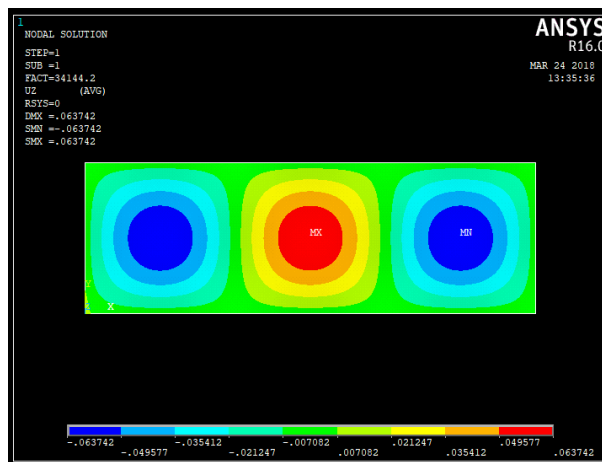
Σχήμα 4. 20: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=1,5$ )



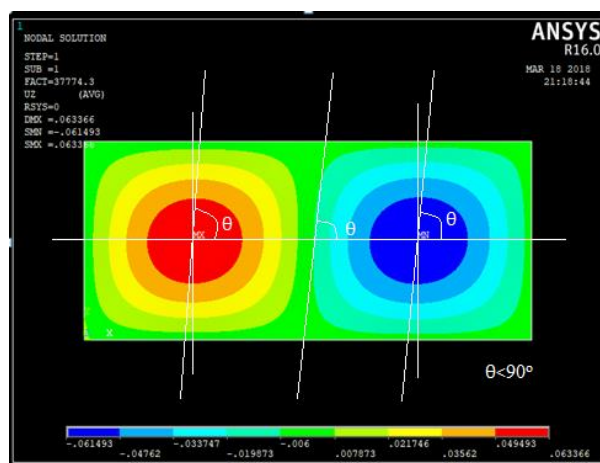
Σχήμα 4. 21: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=1,5$ )



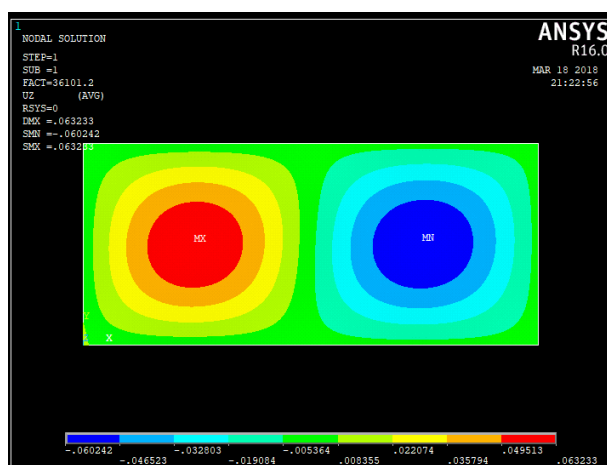
Σχήμα 4. 22: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=3$ )



Σχήμα 4. 23: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=3$ )



Σχήμα 4. 24: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=2,25$ )



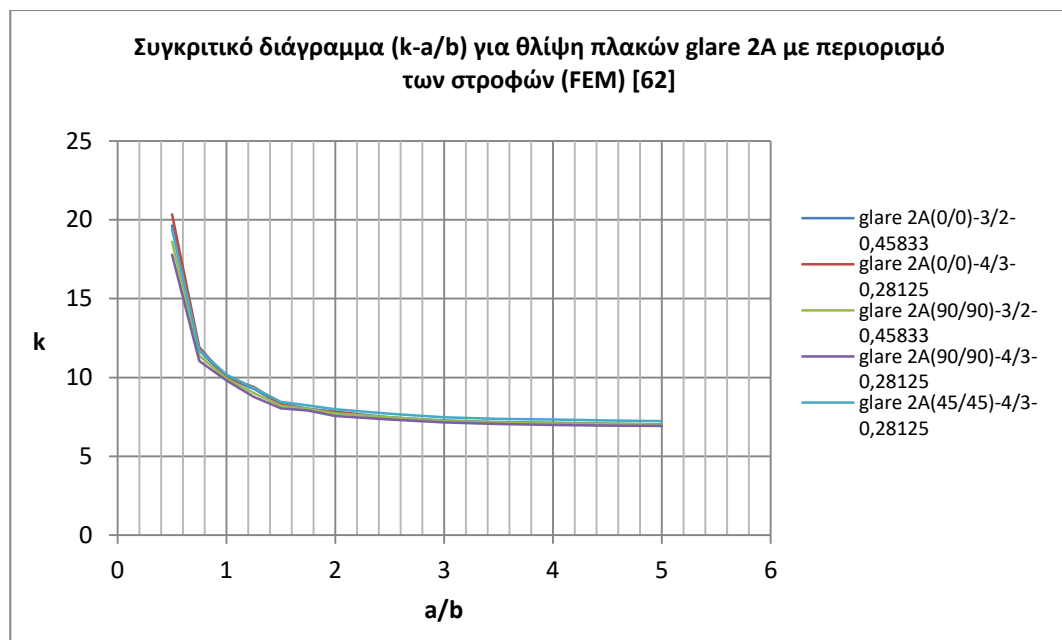
Σχήμα 4. 25: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 σε θλίψη με απλή έδραση ( $a/b=2,25$ )

## 4.2 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών

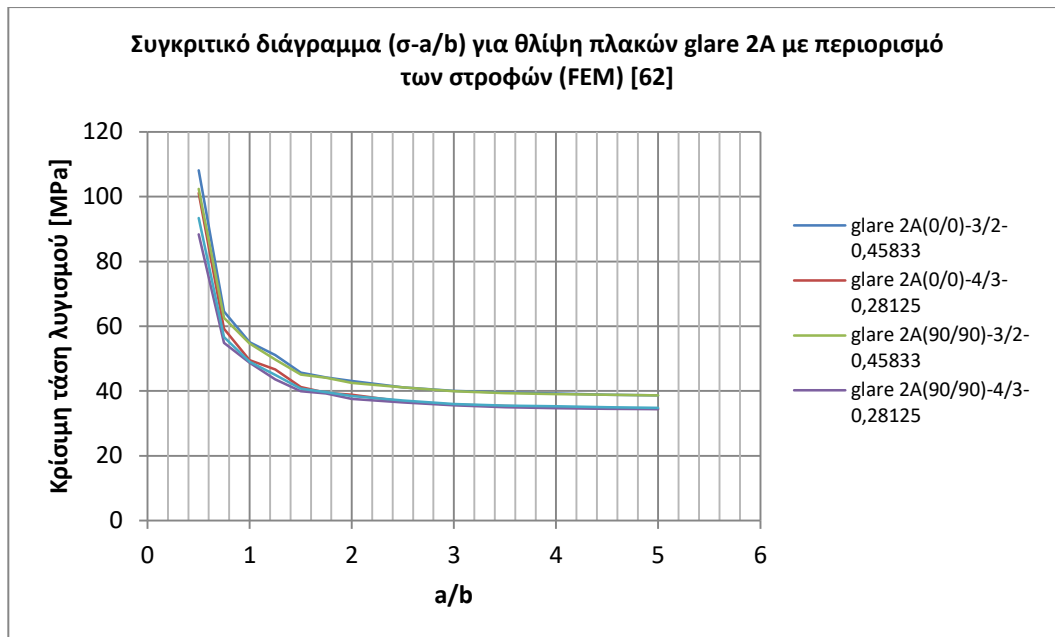
Τα ίδια υλικά GLARE του Πίνακα 4.1 τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση (simply supported) μοντελοποιήθηκαν και σε λυγισμό λόγω θλίψης με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες των στρωφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας (all edges clamped). Σε αυτή την ενότητα και με δεδομένη την απουσία της αναλυτικής λύσης για αυτή την περίπτωση θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου και, ειδικότερα, οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν. Οι πλάκες GLARE μοντελοποιήθηκαν όπως ακριβώς αναλύθηκε

στην ενότητα 3.2.2 με την τετράγωνη πλάκα ( $a/b=1$ ) να διακριτοποιείται με 10000 πεπερασμένα στοιχεία κελύφους [62] και την ορθογώνια πλάκα διπλάσιου μήκους ( $a/b=2$ ) με 20000 πεπερασμένα στοιχεία ίδιου τύπου. Οι συνοριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν φαίνονται αναλυτικά στο Σχήμα 3.20 και, τελικά, μέσω της αξιοποίησης της ανάλυσης με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS<sup>®</sup> προέκυπτε το ζητούμενο κρίσιμο φορτίο λυγισμού κάθε μοντέλου και, επομένως, η τάση λυγισμού και ο συντελεστής  $k$  μέσω της σχέσης (3.5). Θα παρουσιαστούν, επίσης, και οι ιδιομορφές ορισμένων μοντελοποιήσεων, όπου φαίνεται ξεκάθαρα με τη χρήση διαγραμμάτων contour το λυγισμένο σχήμα της περιστροφικά περιορισμένης πλάκας σε θλίψη και ο σχηματισμός των ημικυμάτων στη διεύθυνση της φόρτισης ανάλογα με τον τύπο του GLARE, τον προσανατολισμό των ινών του σύνθετου υλικού και τις διαστάσεις της πλάκας ( $a/b$ ).

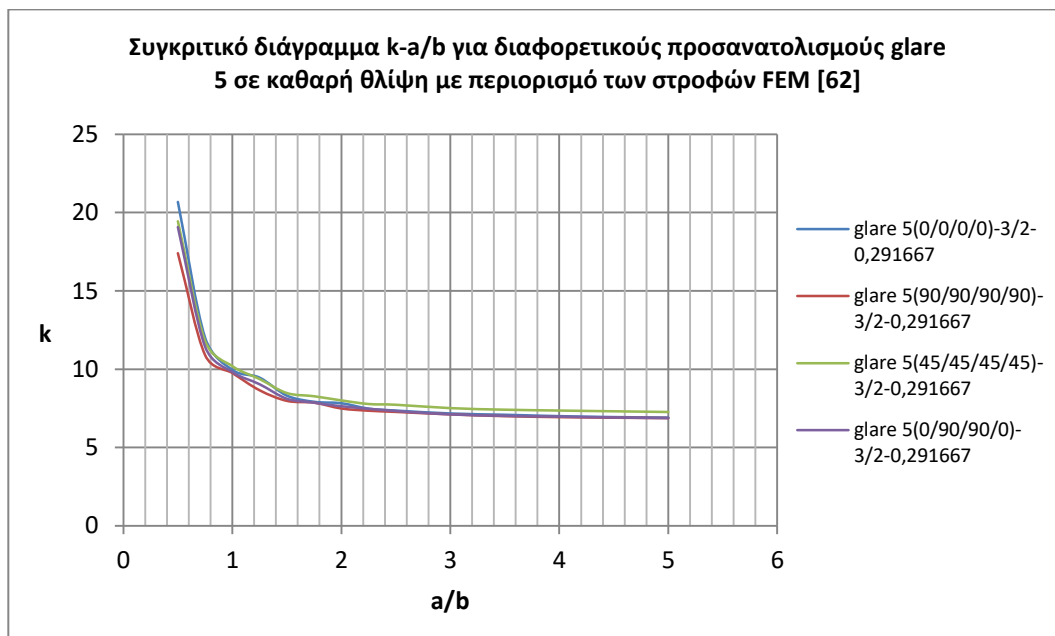
Στα παρακάτω Σχήματα 4.26-4.29 φαίνονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του λυγισμού πλακών glare 2A και glare 5, συγκεντρωτικά για την κάθε ομάδα, λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών.



**Σχήμα 4. 26:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  μεταξύ υλικών glare 2A σε θλίψη με περιορισμό των στρωφών

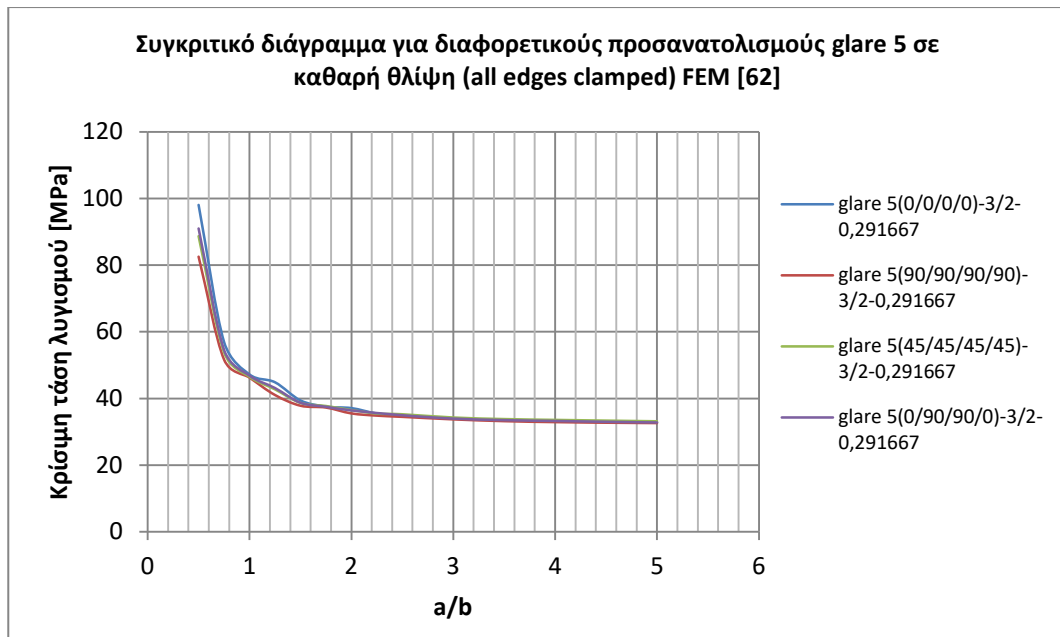


*Σχήμα 4. 27: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  μεταξύ υλικών glare 2A σε θλίψη με περιορισμό των στρωφών*



*Σχήμα 4. 28: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού μεταξύ glare 5 διαφορετικού προσανατολισμού ινών σε θλίψη με περιορισμό στρωφών*

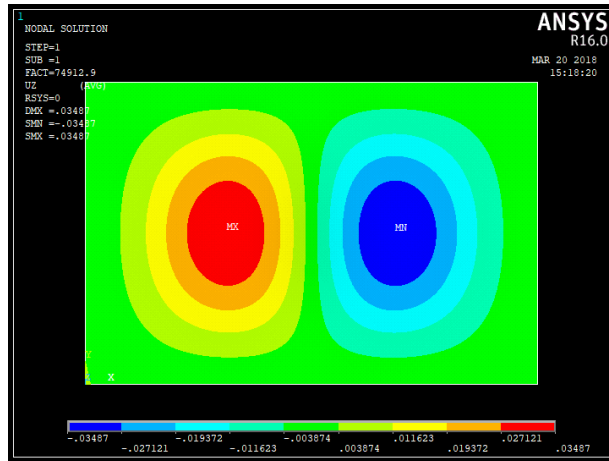




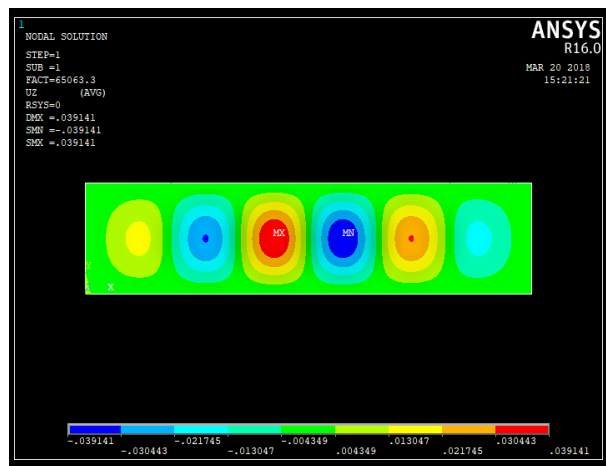
**Σχήμα 4. 29:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού μεταξύ glare 5 διαφορετικού προσανατολισμού ινών σε θλίψη με περιορισμό στρωφών

#### Ιδιομορφές

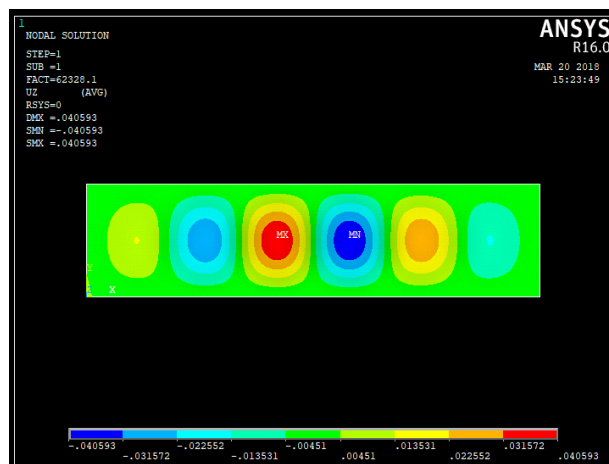
Στα Σχήματα 4.30-4.33 παρουσιάζονται ορισμένες από τις ιδιομορφές των λυγισμένων λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών πλακών GLARE. Μία βασική παρατήρηση, η οποία μπορεί να γίνει αφορά στο γεγονός ότι όλες οι ιδιομορφές των ειδικά ορθότροπων πλακών (προσανατολισμός ινών  $0^\circ$  ή  $90^\circ$ ) αποκτούν το ίδιο χαρακτηριστικό σχήμα και διαφέρουν ως προς το πλήθος των ημικυμάτων, όπως παρατηρήθηκε και στην περίπτωση της απλής έδρασης. Στον περιορισμό των στρωφών, ωστόσο, αυτό το χαρακτηριστικό σχήμα είναι διαφορετικό. Τέλος, στο Σχήμα 4.33 παρουσιάζεται το λυγισμένο σχήμα του glare 5 με προσανατολισμό ινών  $45^\circ$  το οποίο δεν είναι specially orthotropic και φαίνεται η διαφοροποίηση στον σχηματισμό των half-waves, τα οποία έχουν στραφεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην απλή έδραση.



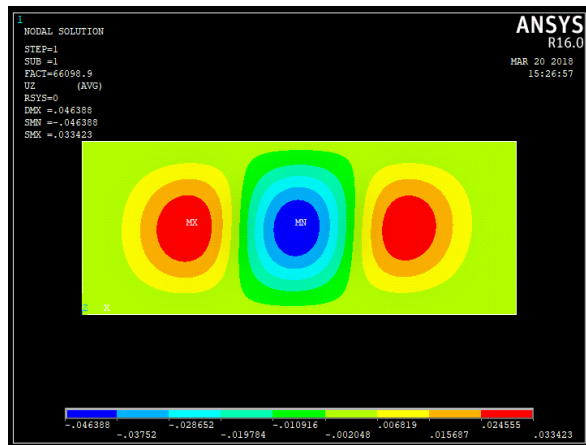
Σχήμα 4. 30: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 λυγισμού λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=1,5$ )



Σχήμα 4. 31: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 λυγισμού λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=4$ )



Σχήμα 4. 32: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 λυγισμού λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών ( $a/b=4$ )



*Σχήμα 4. 33: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 λυγισμού λόγω θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών (a/b=2,5)*

### 4.3 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με απλή έδραση, με περιορισμό των στρωφών και με μικτή οριακή συνθήκη

Η μελέτη των υλικών GLARE σε λυγισμό, όπως αυτά περιγράφονται στον Πίνακα 4.1 συνεχίζεται με τη διατμητική φόρτιση με διάφορες συνθήκες στήριξης. Ειδικότερα, στην περίπτωση της απλής έδρασης (simply supported) εκτός από την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μοντελοποίησης θα πραγματοποιηθεί και σύγκριση με προσεγγιστικές τιμές [64]. Και σε αυτή την ενότητα, τέλος, θα παρατεθούν μερικές από τις ιδιομορφές των πλακών οι οποίες μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω διάτμησης.

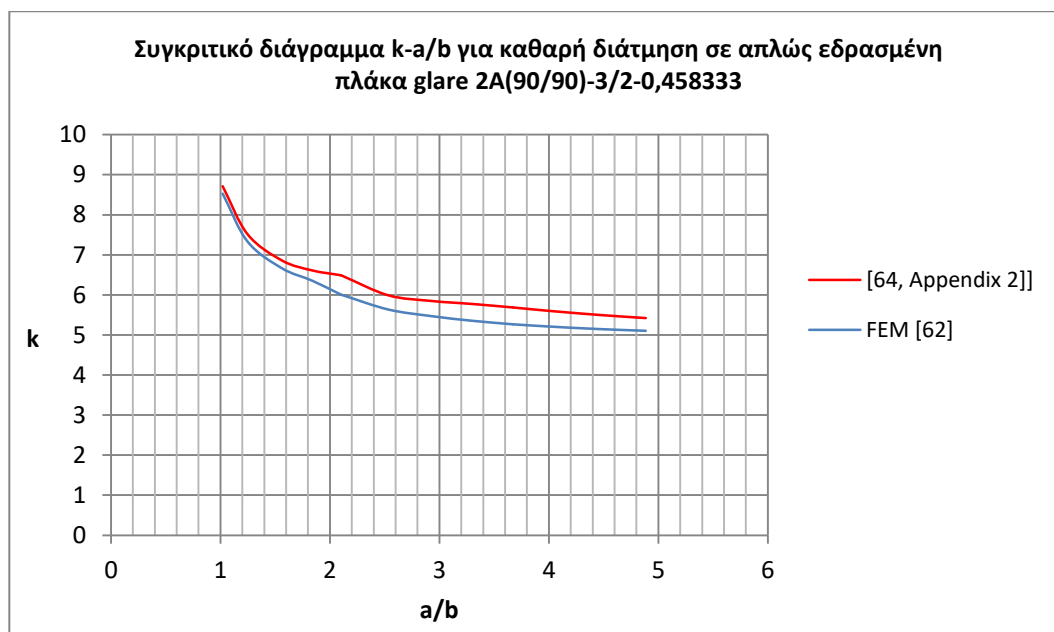
#### 4.3.1 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με απλή έδραση

Κάθε υλικό glare έχει διαφορετικές τιμές καμπτικής ακαμψίας ( $D_{ij}$ ), ανάλογα με το ποσοστό μετάλλου στον συνολικό του όγκο (MVF-Metal Volume Fracture), το πάχος της κάθε στρώσης, τον τύπο του σύνθετου υλικού από το οποίο αποτελούνται οι σύνθετες στρώσεις και τον προσανατολισμό των μονοκατευθυντικών ινών (Unidirectional fibers). Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις τιμές και αξιοποιώντας την σχέση (4.1) προκύπτουν, τελικά, οι προσεγγιστικές τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$  για την περίπτωση της διάτμησης με απλή έδραση μέσω της γραφικής παράστασης του Σχήματος 3.27 [64].

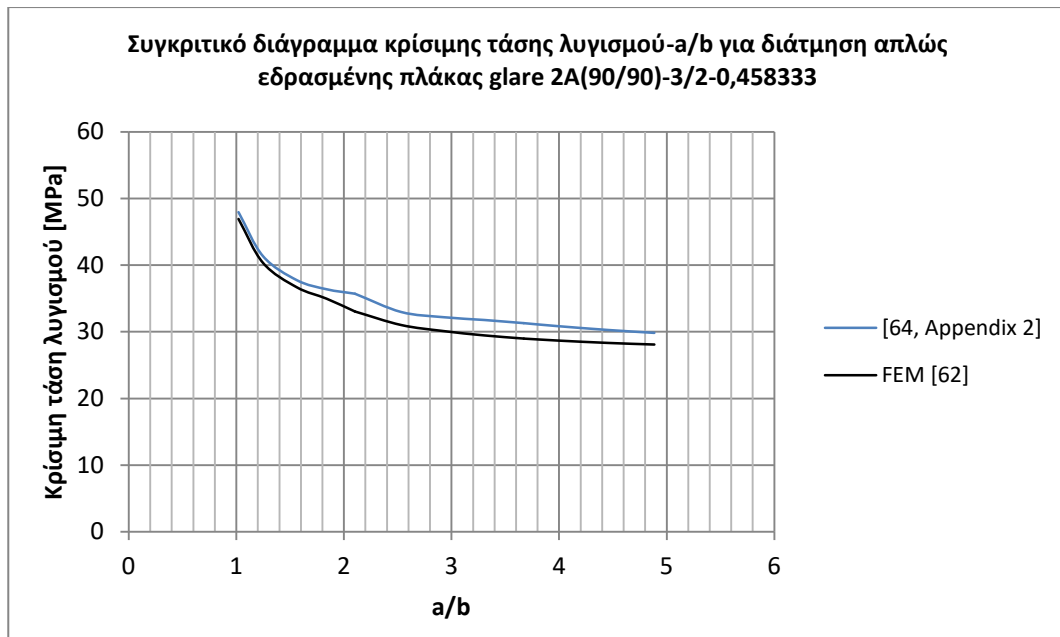
$$D = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}} \quad (4.1)$$

Με αυτό τον τρόπο είναι εφικτή η σύγκριση των προσεγγιστικών τιμών με τις τιμές της αριθμητικής μοντελοποίησης μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62]. Η διαδικασία της μοντελοποίησης έχει αναλυθεί εκτενώς σε προηγούμενα κεφάλαια και δεν διαφέρει από την αντίστοιχη που πραγματοποιήθηκε στην διάτμηση των πολυστρωτων υλικών (ενότητα 3.2.2). Το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων ήταν 10000 για πλάκα με λόγο μήκους προς πλάτος  $a/b=1$ , ενώ οι συνοριακές συνθήκες σε συνδυασμό με την επιβαλλόμενη διατμητική φόρτιση φαίνονται στο Σχήμα 3.26. Ξεκινώντας τη σύγκριση με το glare 2A(90/90)-3/2-0,458333 διαπιστώνεται η **πολύ καλή σύγκλιση**, με την απόκλιση να κυμαίνεται στο 5%, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.34 και 4.35 τόσο για τον συντελεστή  $k$  όσο και για την τάση λυγισμού. Επίσης πολύ καλή είναι η σύγκλιση για το glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 των Σχημάτων 4.36 και 4.37 με την απόκλιση να υπολογίζεται ίση με 3%.

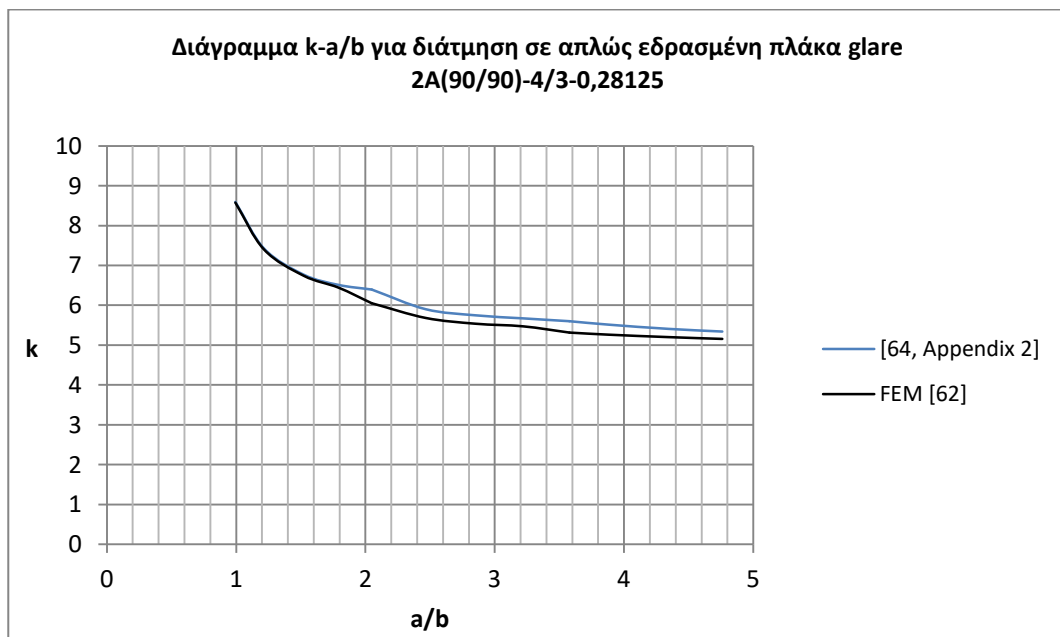
Στα επόμενα Σχήματα 4.38, 4.39 και 4.40, 4.41 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της αριθμητικής επίλυσης και των προσεγγιστικών τιμών για τα glare 3(0/90-90/0)-3/2-0,458333 και glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375 αντίστοιχα. Η σύγκλιση είναι καλή και η τιμή της απόκλισης είναι περίπου 8% για το glare 3 και 6% για το glare 4B. Συνεχίζοντας με τα glare 5 και ειδικότερα με τον προσανατολισμό 90° (glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667, Σχήμα 4.42 και 4.43) η απόκλιση είναι αμελητέα (1,5%), ενώ στο cross-ply (glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667, Σχήμα 4.44 και 4.45) η απόκλιση είναι 7% καθιστώντας πολύ καλή τη σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των προσεγγιστικών τιμών. Τέλος, στα Σχήματα 4.46-4.47 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του συντελεστή  $k$  και της κρίσιμης τάσης για τα μη ειδικά ορθότροπα υλικά glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 και glare 6(45/-45 -45/45)-3/2-0,458333.



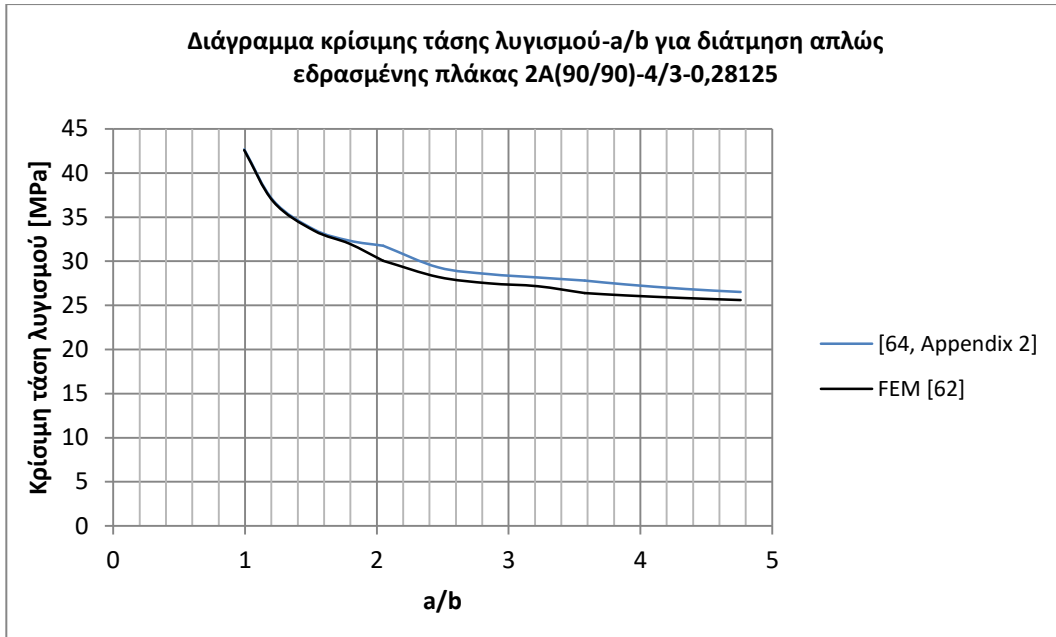
**Σχήμα 4. 34:** Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-3/2-0,458333



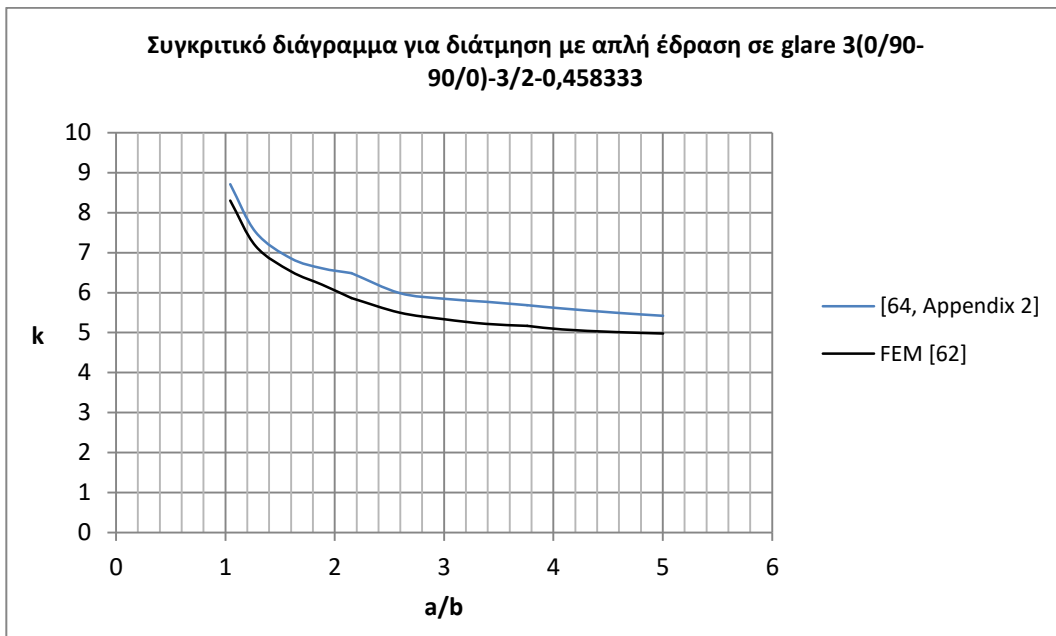
*Σχήμα 4. 35: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-3/2-0,458333*



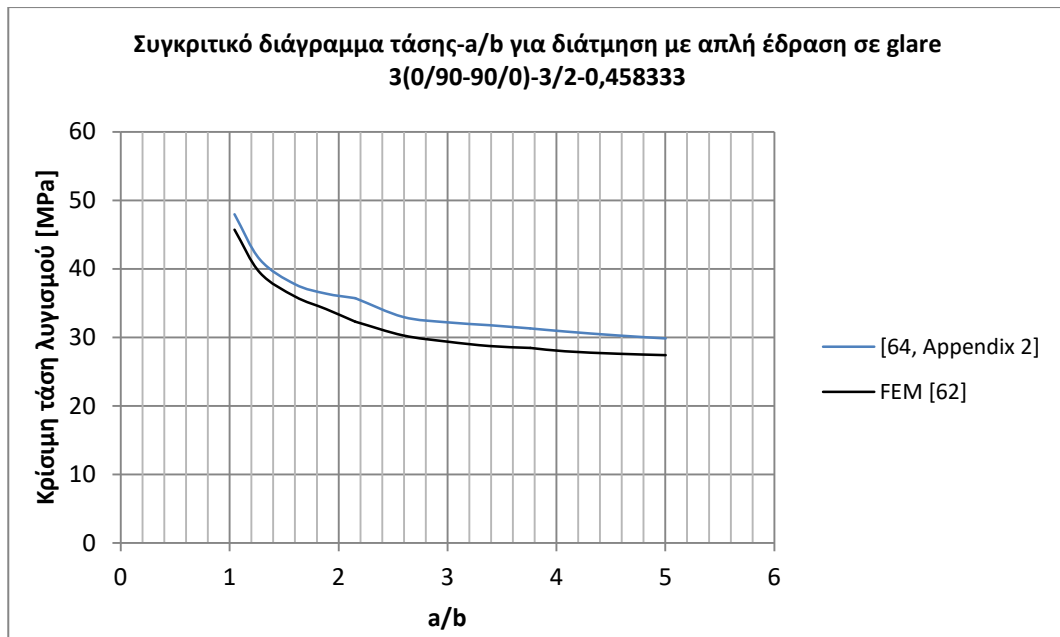
*Σχήμα 4. 36: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



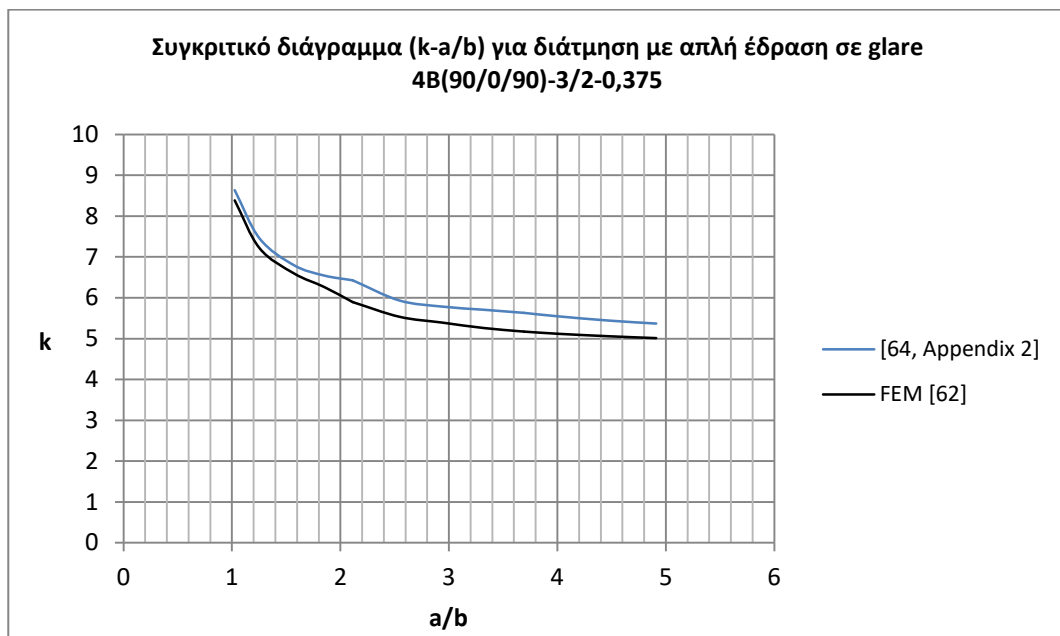
*Σχήμα 4. 37: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



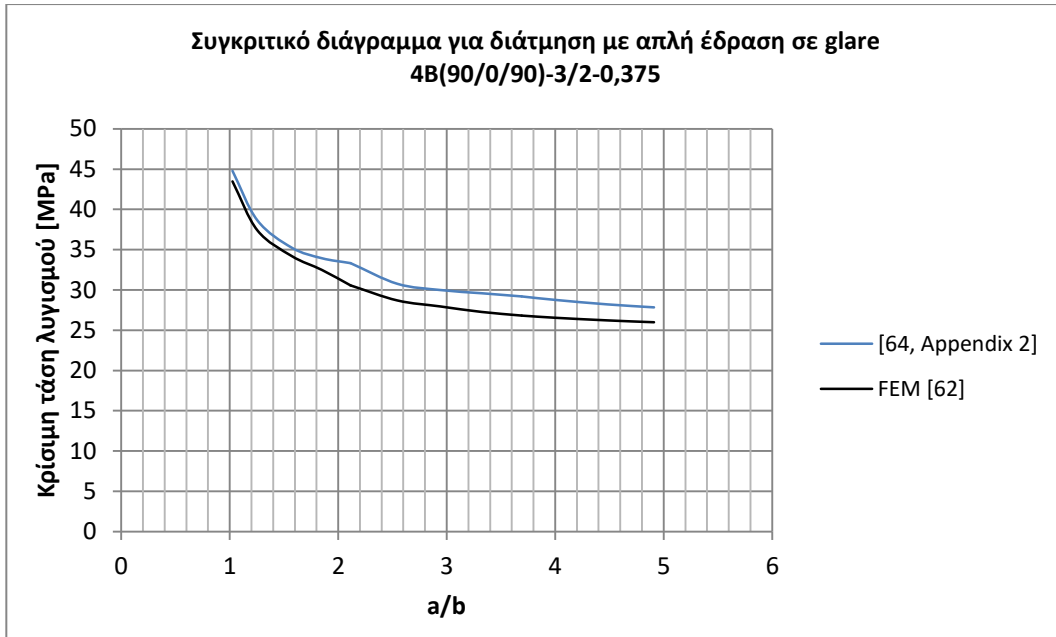
*Σχήμα 4. 38: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 3(0/90-90/0)-3/2-0,458333*



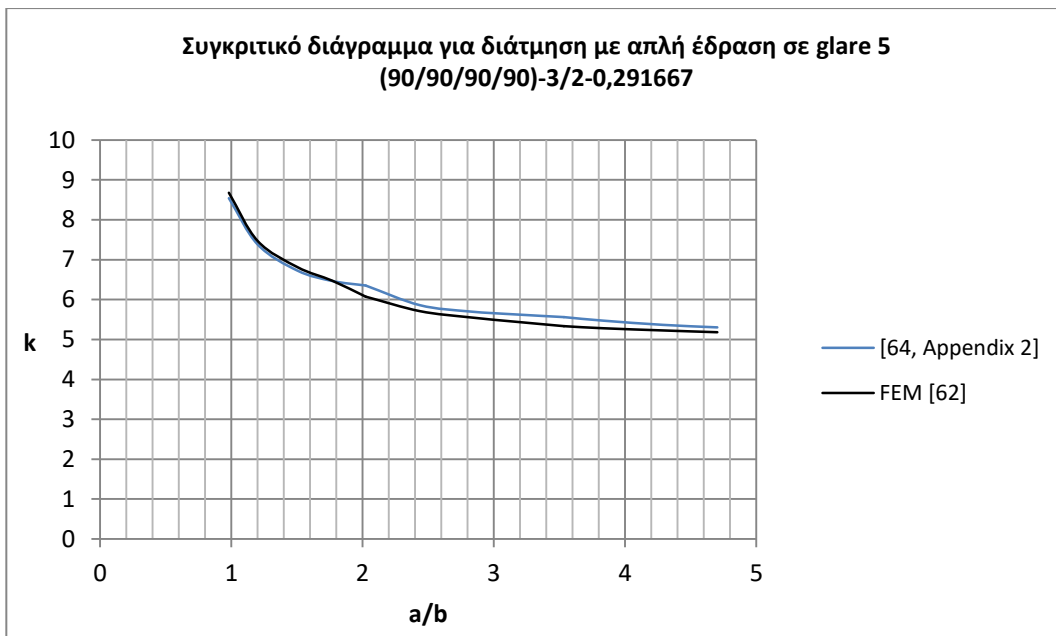
*Σχήμα 4. 39: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 3(0/90- 90/0)-3/2-0,458333*



*Σχήμα 4. 40: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375*

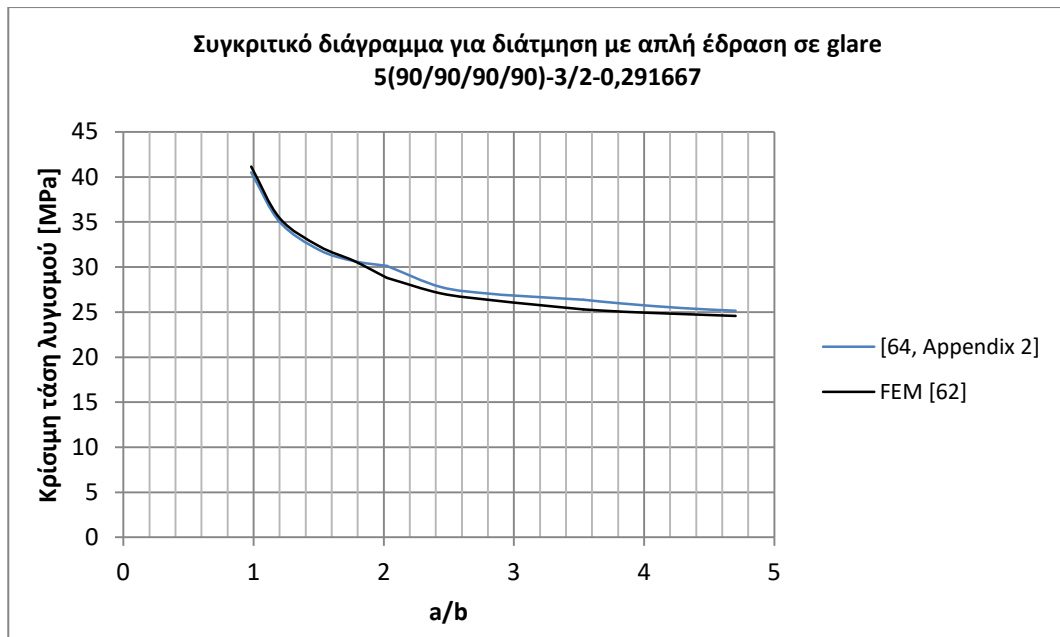


*Σχήμα 4. 41: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375*

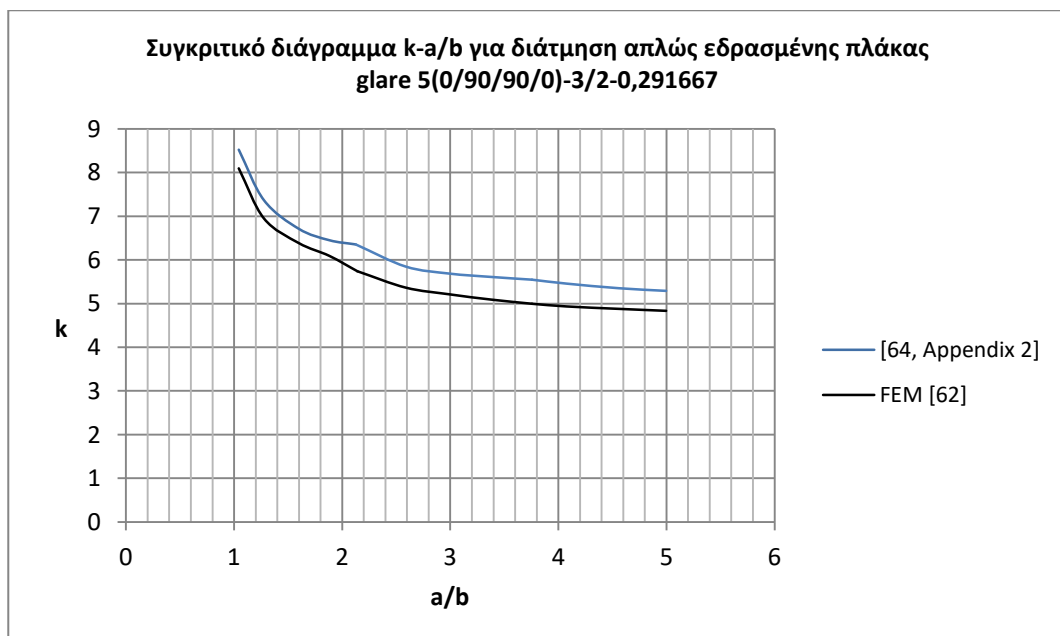


*Σχήμα 4. 42: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667*

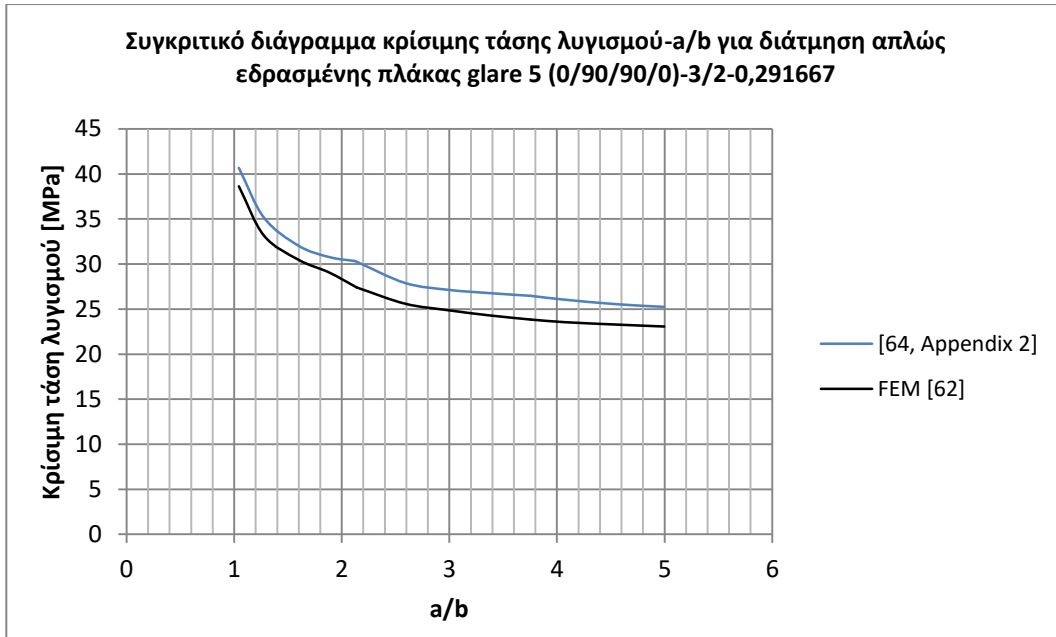




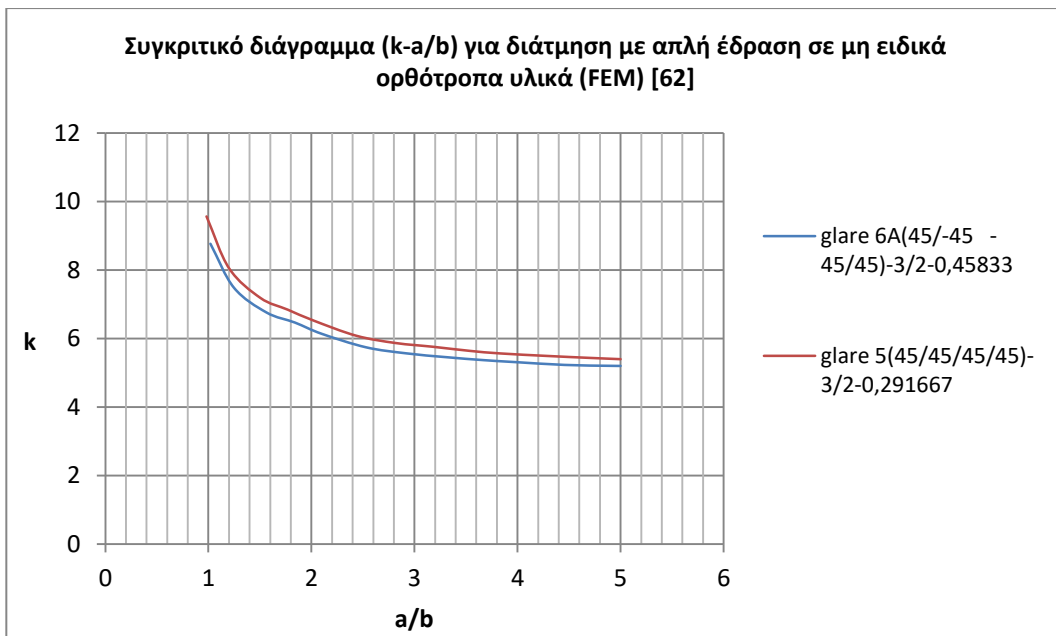
**Σχήμα 4. 43:** Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και αναλυτικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667



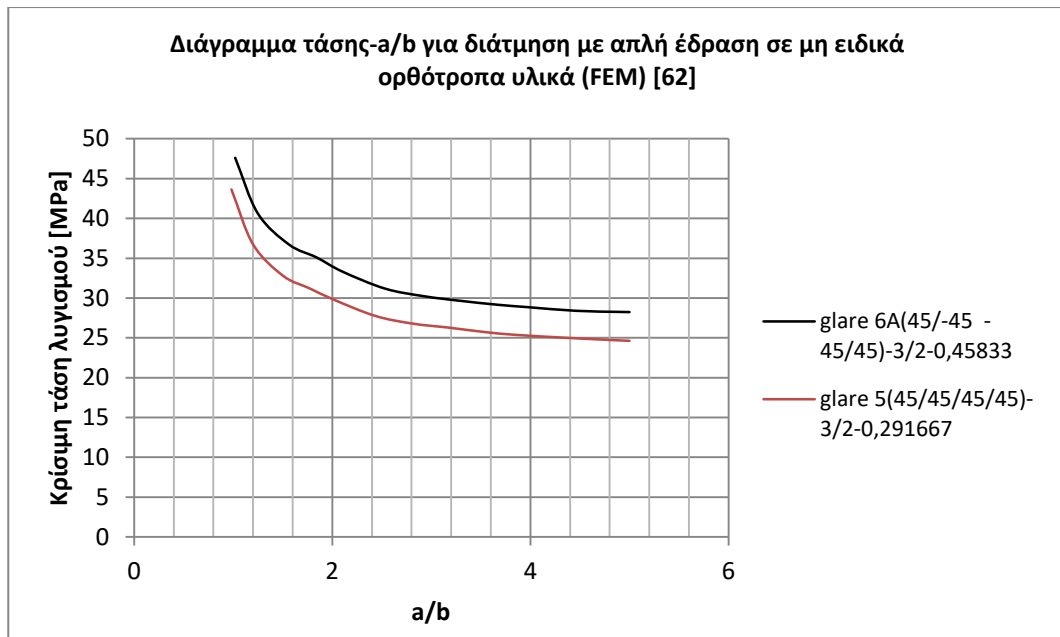
**Σχήμα 4. 44:** Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667



*Σχήμα 4. 45: Συγκριτικό διάγραμμα αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667*



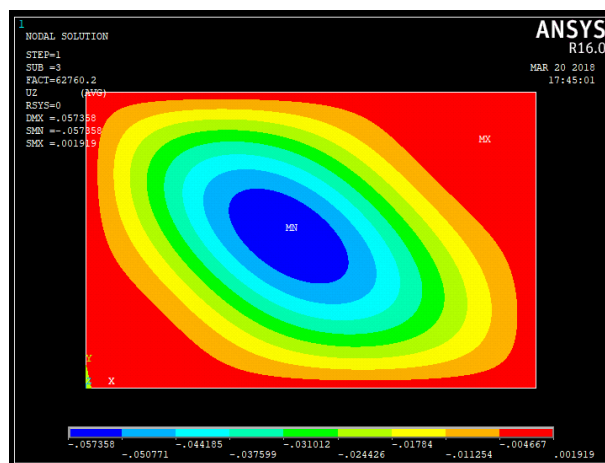
*Σχήμα 4. 46: Η γραφική παράσταση του συντελεστή λυγισμού  $k$  για διάτμηση με απλή έδραση σε μη ειδικά ορθότροπα υλικά*



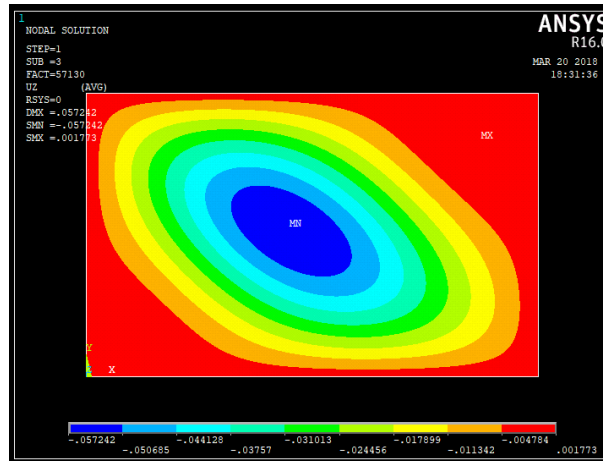
*Σχήμα 4. 47: Η γραφική παράσταση της κρίσιμης τάσης λυγισμού για διάτμηση με απλή έδραση σε μη ειδικά ορθότροπα υλικά*

#### Ιδιομορφές

Από την παρατήρηση των ιδιομορφών των παρακάτω Σχημάτων 4.48 και 4.49 διαπιστώνεται η προαναφερθείσα και στην περίπτωση της θλίψης παρατήρησης για την δημιουργία όμοιων λυγισμένων σχημάτων σε υλικά glare διαφορετικού τύπου με ίδιες διαστάσεις. Ωστόσο, στην περίπτωση της διάτμησης τα ημικύματα έχουν εντελώς διαφορετική μορφή σε σύγκριση με αυτά της θλίψης όπως θα αναλυθεί, εκτενέστερα, και στο επόμενο κεφάλαιο.



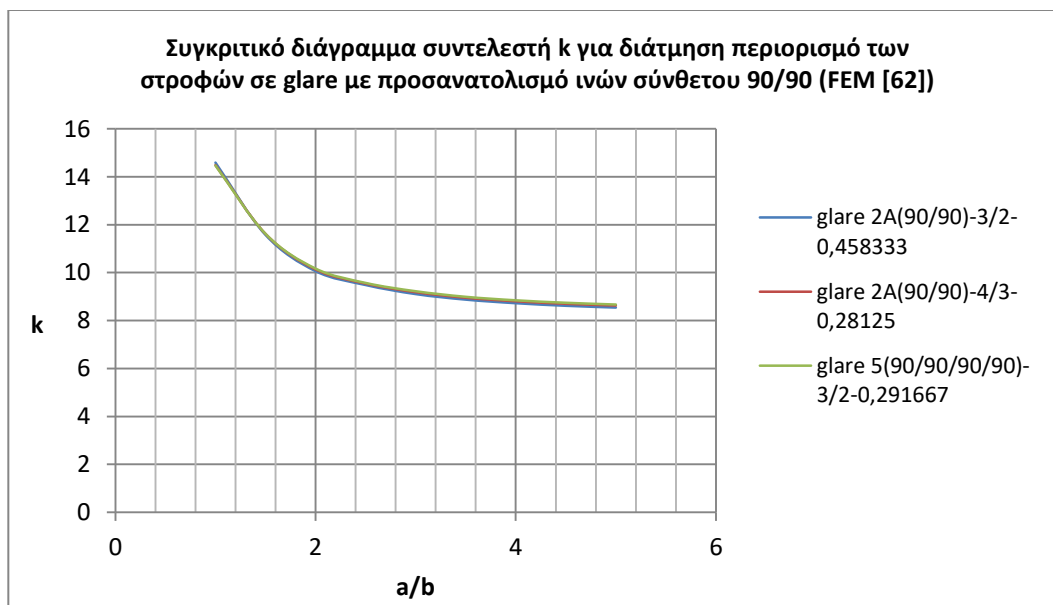
*Σχήμα 4. 48: Η ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-3/2-0,458333 σε διάτμηση με απλή έδραση (a/b=1,523)*



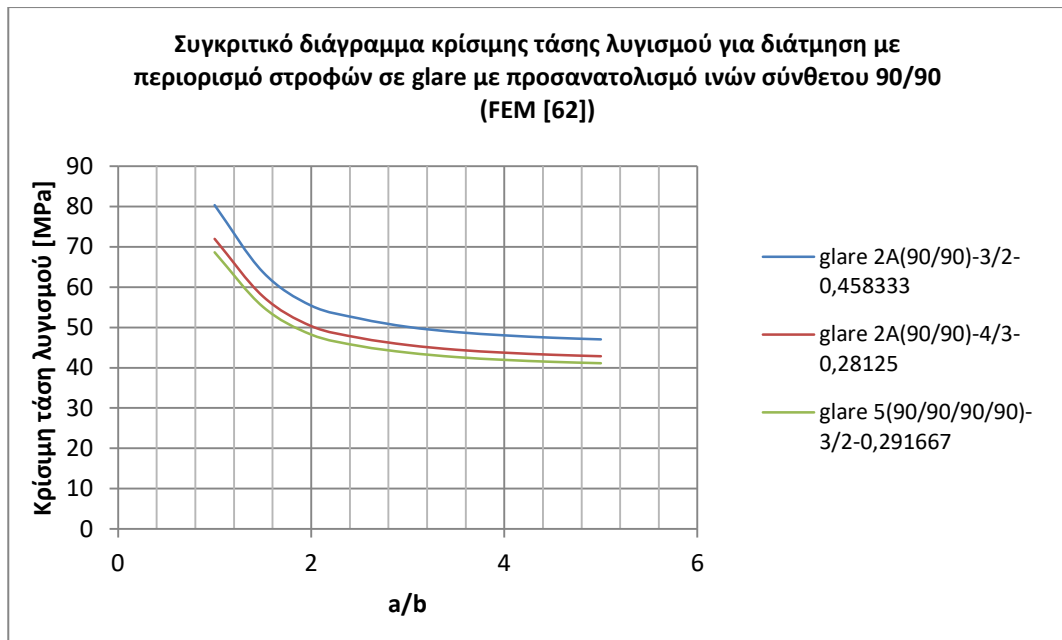
Σχήμα 4. 49: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 σε διάτμηση με απλή έδραση ( $a/b=1,598$ )

#### 4.3.2 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών

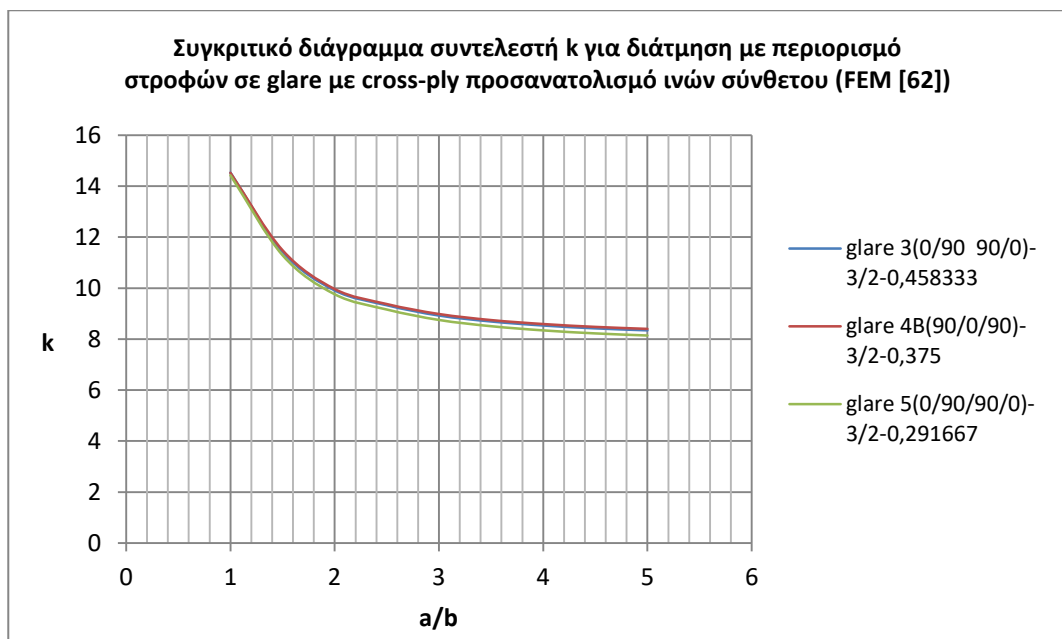
Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των κρίσιμων μεγεθών λυγισμού των υλικών GLARE όπως φαίνονται στον Πίνακα 4.1 λόγω διάτμησης με περιορισμό των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών της πλάκας. Τα αποτελέσματα έχουν προκύψει μέσω του ANSYS® και η διαδικασία μοντελοποίησης περιγράφεται αναλυτικά στην ενότητα 3.2.2, ενώ οι συνοριακές συνθήκες φαίνονται στο Σχήμα 3.31. Στα παρακάτω Σχήματα 4.50-4.55 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης σε συγκριτικά διαγράμματα ομαδοποιημένα βάσει του προσανατολισμού των ινών.



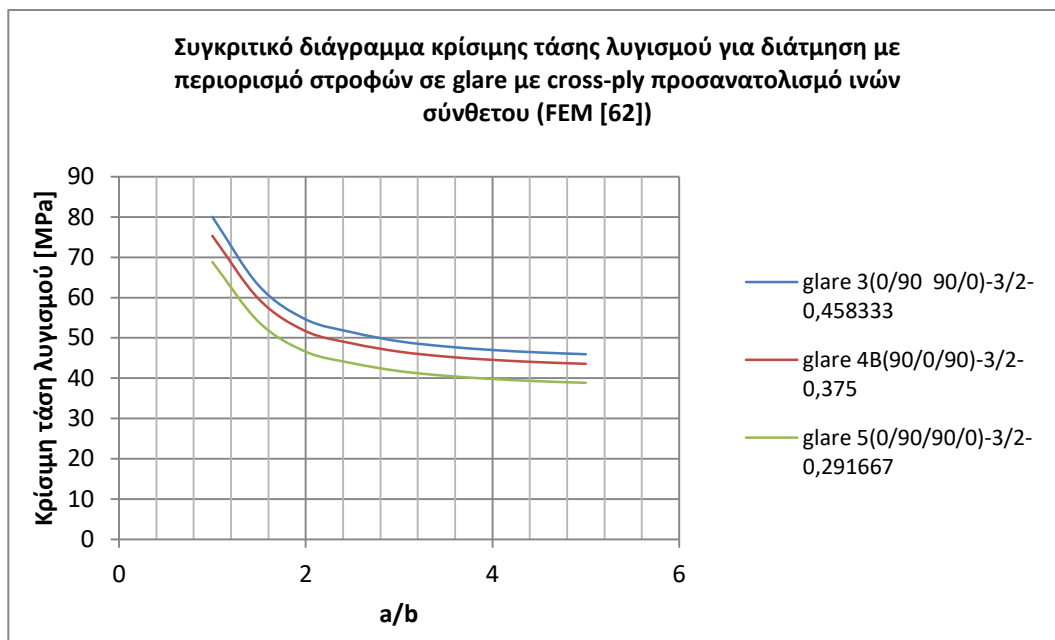
Σχήμα 4. 50: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare προσανατολισμού ινών σύνθετου  $90^\circ$  για διάτμηση με περιορισμό στροφών



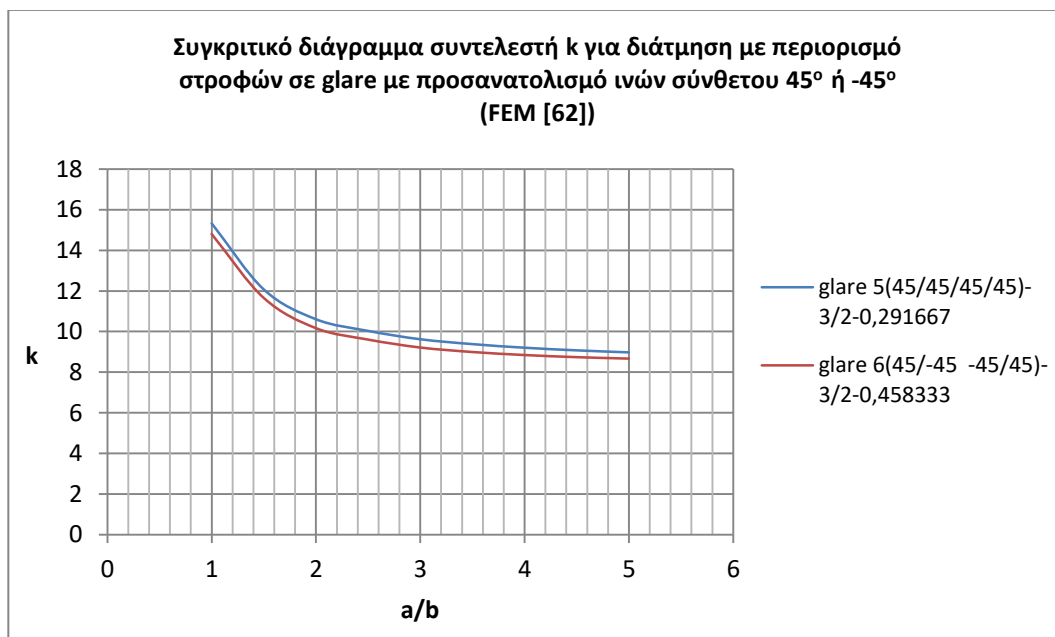
*Σχήμα 4. 51: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare προσανατολισμού ινών σύνθετου 90° για διάτμηση με περιορισμό στροφών*



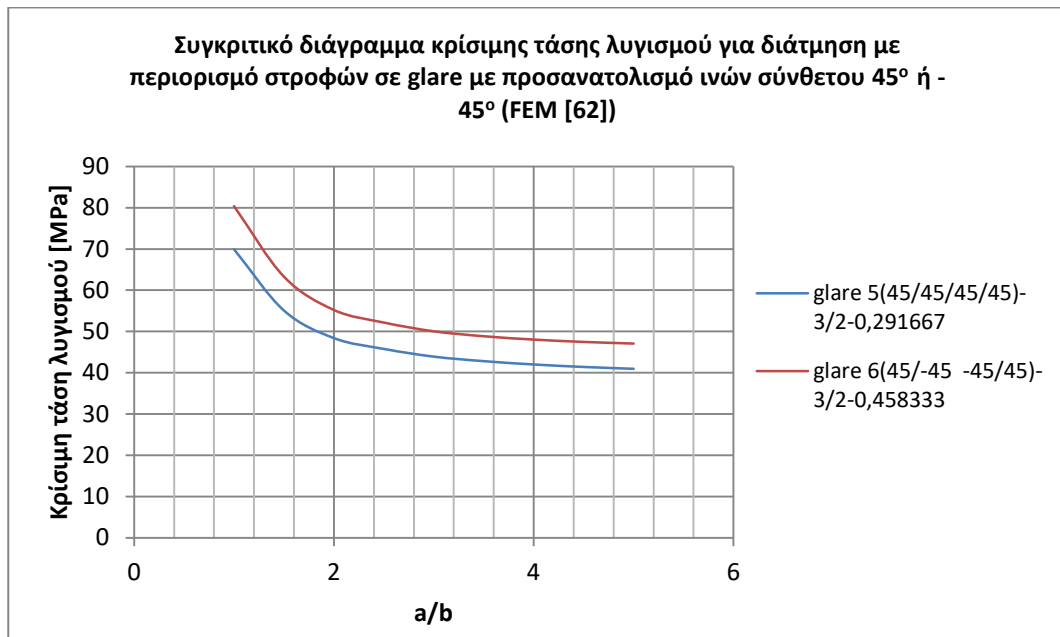
*Σχήμα 4. 52: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare με cross-ply προσανατολισμό ινών σύνθετου για διάτμηση με περιορισμό στροφών*



*Σχήμα 4. 53: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare με cross-ply προσανατολισμό ινών σύνθετου για διάτμηση με περιορισμό στροφών*



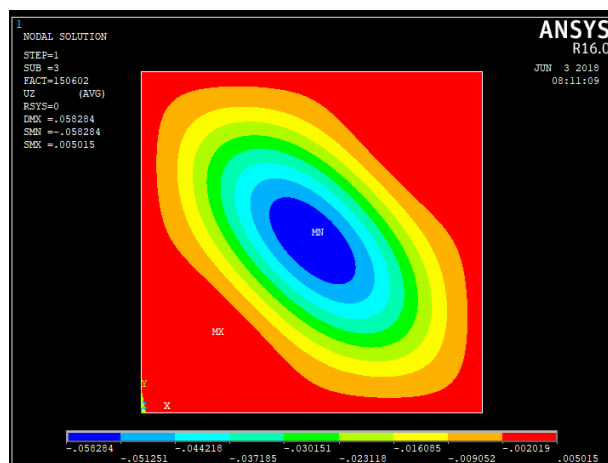
*Σχήμα 4. 54: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare προσανατολισμού ινών σύνθετου 45° ή -45° για διάτμηση με περιορισμό στροφών*



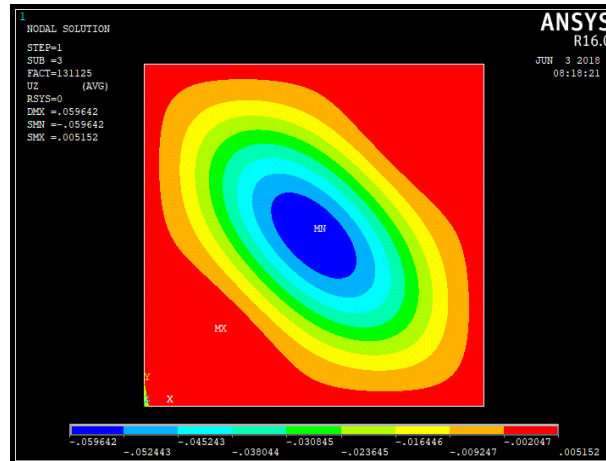
*Σχήμα 4. 55: Συγκριτικό διάγραμμα υλικών glare προσανατολισμού ινών σύνθετου 45° ή -45° για διάτμηση με περιορισμό στροφών*

### Ιδιομορφές

Από τις εικόνες των ιδιομορφών των παρακάτω Σχημάτων 4.56 και 4.57 παρατηρείται η ομοιότητα των λυγισμένων σχημάτων μεταξύ διαφορετικών glare ίδιου λόγου  $a/b$ . Το λυγισμένο σχήμα είναι όμοιο με το αντίστοιχο της απλής έδρασης με τη διαφορά ότι ο περιορισμός των στροφών απομακρύνει τη δημιουργία του ημικύματος από τα σύνορα της πλάκας.



*Σχήμα 4. 56: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-3/2-0,458333 σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών ( $a/b=1$ )*

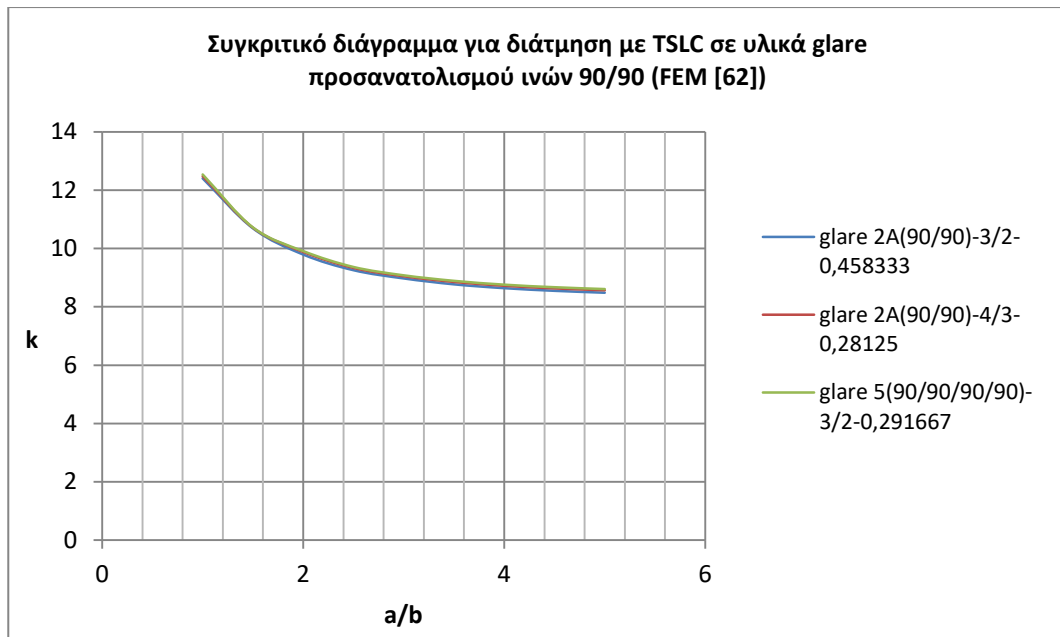


*Σχήμα 4. 57: Ιδιομορφή πλάκας glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών ( $a/b=1$ )*

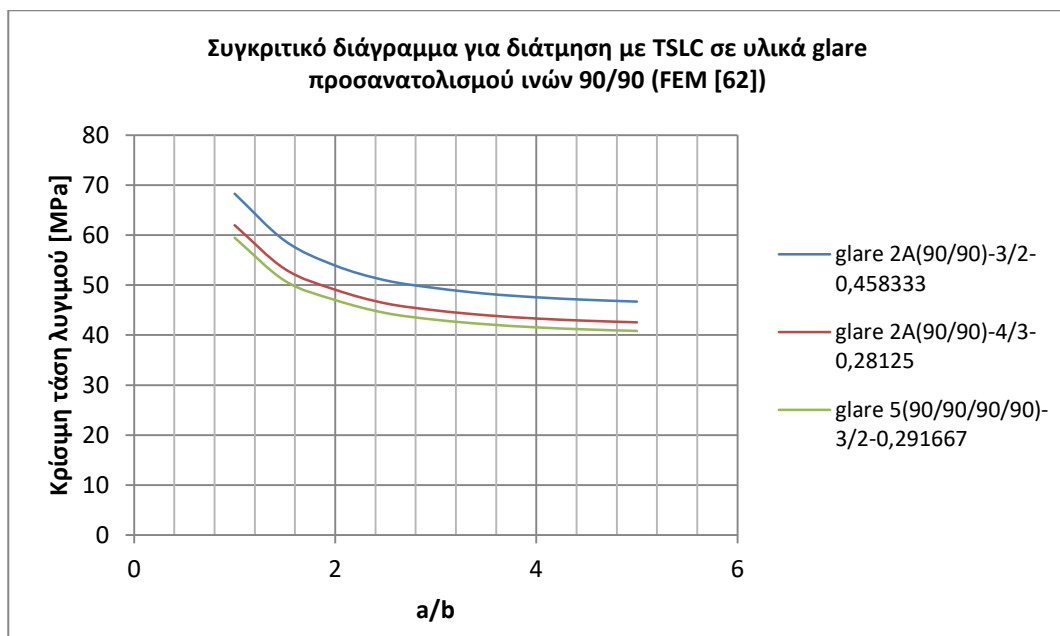
### 4.3.3 Λυγισμός πλακών GLARE λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη, η οποία μελετήθηκε στην περίπτωση της διάτμησης GLARE υλικών είναι η μικτή οριακή συνθήκη και, ειδικότερα, οι απλώς εδρασμένες εγκάρσιες ως προς το μήκος της πλάκας πλευρές και οι περιστροφικά περιορισμένες διαμήκεις πλευρές (Transverse edges Simply supported and Longitudinal edges Clamped-TSLC, Σχήμα 3.35). Θα πραγματοποιηθεί παρουσίαση των γραφικών παραστάσεων των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μοντελοποίησης για τα υλικά GLARE του Πίνακα 4.1 ομαδοποιημένα σύμφωνα με τον προσανατολισμό των ινών. Στα Σχήματα 4.58 και 4.59 φαίνονται οι τιμές του συντελεστή  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού για τα υλικά glare τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε διάτμηση με TSLC και έχουν προσανατολισμό  $90^\circ$ . Στα επόμενα Σχήματα 4.60 και 4.61 παρουσιάζονται τα glare με cross-ply προσανατολισμό ινών και, τέλος, στα 4.62 και 4.63 τα glare προσανατολισμού  $45^\circ$  ή  $-45^\circ$ . Από τα συγκριτικά διαγράμματα της κρίσιμης τάσης διαπιστώνεται ότι πιο ανθεκτικά σε λυγισμό και για τους τρεις προσανατολισμούς είναι τα υλικά με το μεγαλύτερο ποσοστό όγκου αλουμινίου (MVF), όπως θα περιγραφεί αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο.

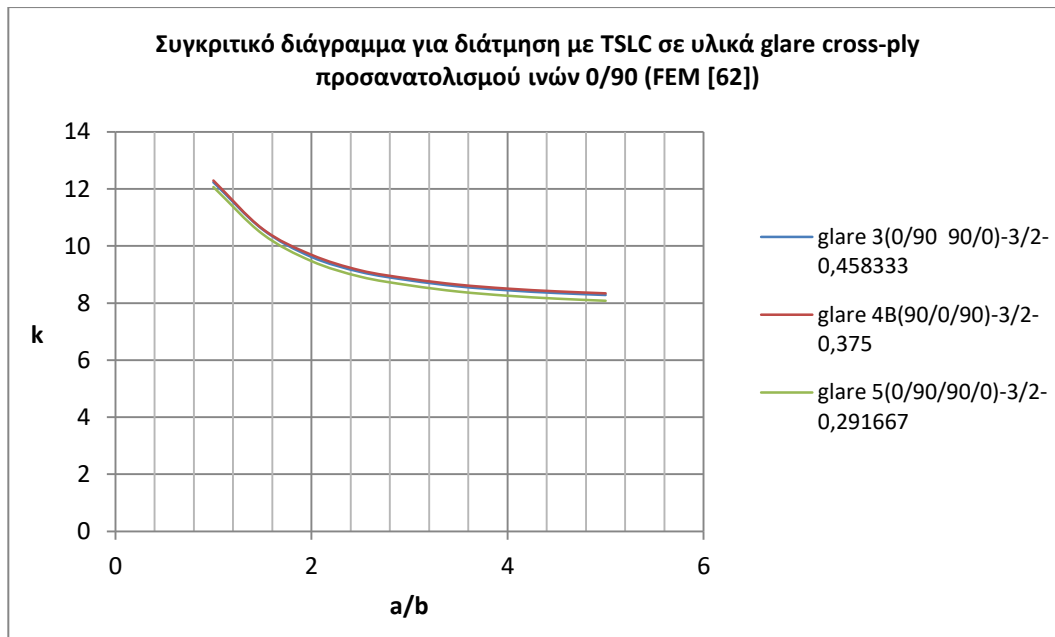




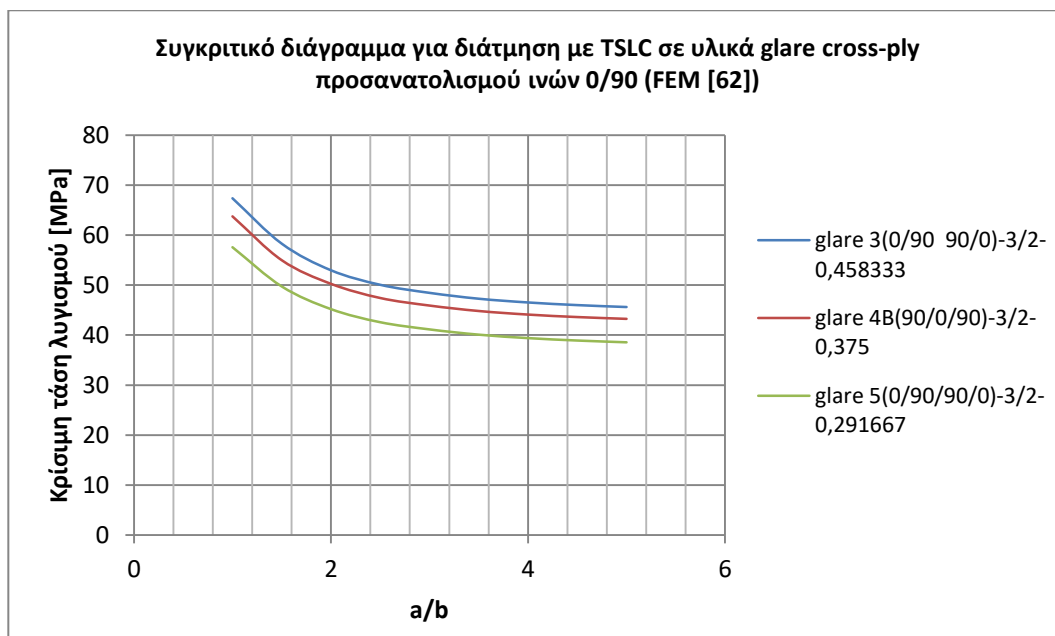
**Σχήμα 4. 58:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με προσανατολισμό  $90^\circ$



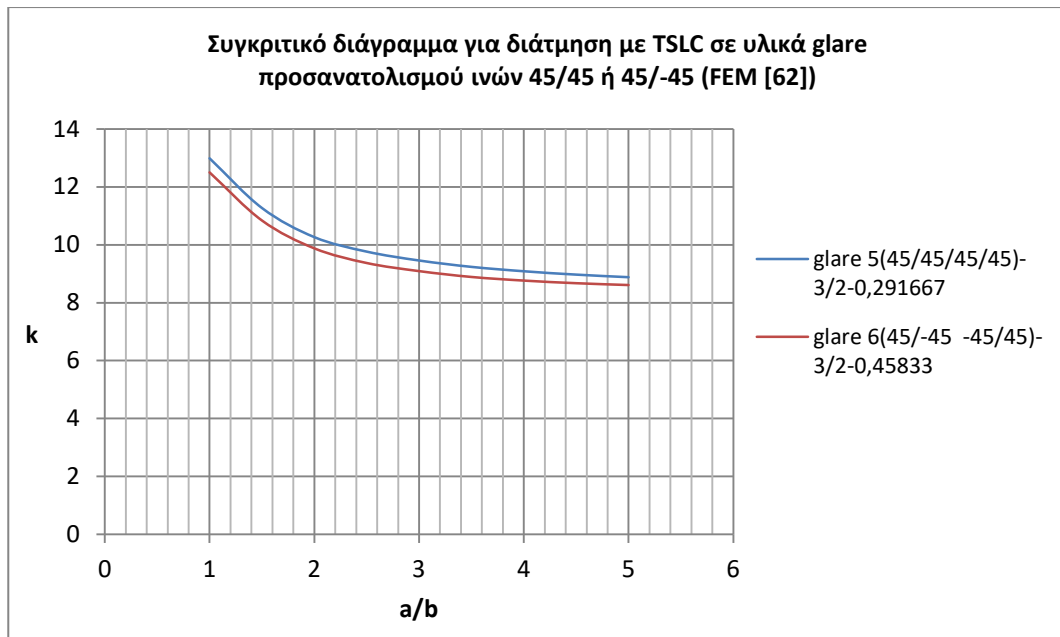
**Σχήμα 4. 59:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με προσανατολισμό  $90^\circ$



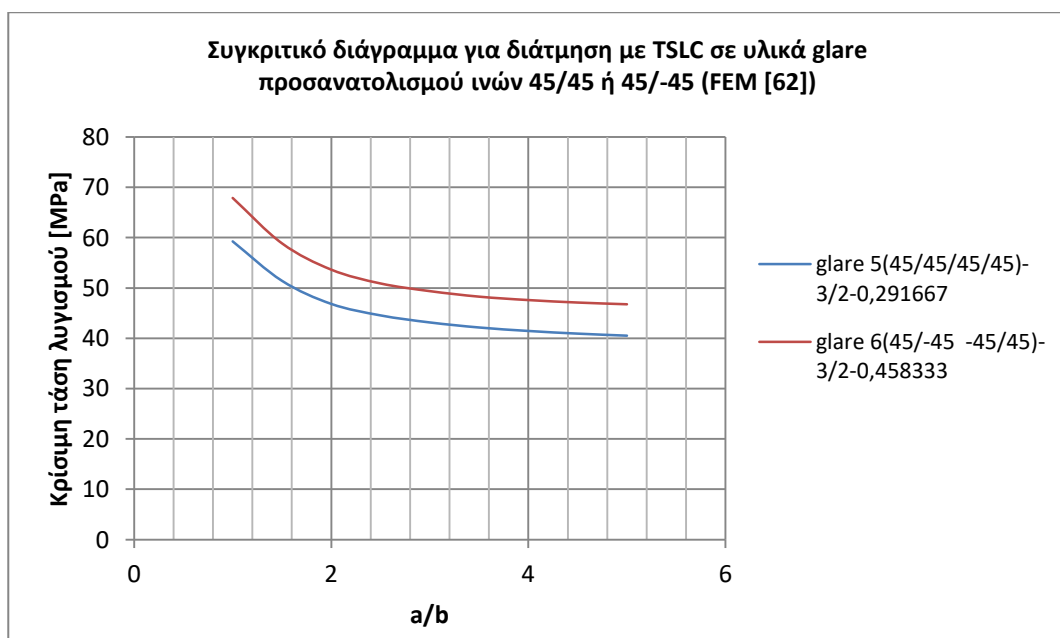
**Σχήμα 4. 60:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με cross-ply προσανατολισμό ινών



**Σχήμα 4. 61:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με cross-ply προσανατολισμό ινών



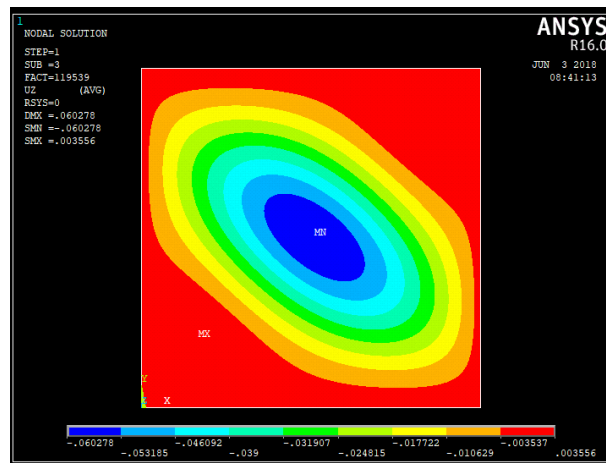
*Σχήμα 4. 62: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με προσανατολισμό  $45^\circ$  ή  $-45^\circ$*



*Σχήμα 4. 63: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε υλικά glare με προσανατολισμό  $45^\circ$  ή  $-45^\circ$*

## Ιδιομορφές

Στο Σχήμα 4.64, τέλος, φαίνεται η ιδιομορφή της πλάκας glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375. Και σε αυτή την περίπτωση συνοριακής συνθήκης το λυγισμένο σχήμα αποκτά παρόμοια χαρακτηριστική μορφή, ενώ φαίνεται ότι στα σύνορα της πλάκας τα οποία είναι περιστροφικά περιορισμένα η δημιουργία του ημικύματος πραγματοποιείται πιο απομακρυσμένα σε σύγκριση τα απλώς εδρασμένα.



**Σχήμα 4. 64:** Ιδιομορφή πλάκας glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375 σε λυγισμό με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) ( $a/b=1$ )

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5<sup>ο</sup>

### 5 ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Εφόσον έχει ολοκληρωθεί η μελέτη σε λυγισμό σε πλάκες αλουμινίου, σε πολύστρωτες πλάκες και σε πλάκες GLARE με το πρόγραμμα των πεπερασμένων στοιχείων [62] και έχει πραγματοποιηθεί σύγκριση με αναλυτικές λύσεις για όσες περιπτώσεις υλικών υπήρχαν τέτοιες, μπορεί να γίνει **συγκριτική ανάλυση** μεταξύ αυτών των περιπτώσεων λυγισμού. Ειδικότερα, θα πραγματοποιηθεί σύγκριση για όσα υλικά μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης και, ξεχωριστά, για όσα υλικά μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω διάτμησης. Αρχικά, θα παρατεθούν τα **συγκεντρωτικά συγκριτικά διαγράμματα** του συντελεστή  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού για την κάθε περίπτωση και θα μελετηθεί η επίδραση της αύξησης του μήκους της κάθε πλάκας και, κατά συνέπεια, του λόγου  $a/b$ , η επίδραση του ποσοστού του όγκου του αλουμινίου (Metal Volume Fracture-MVF), του προσανατολισμού των ινών του σύνθετου υλικού και των συνοριακών συνθηκών στις τιμές αυτών των δύο χαρακτηριστικών μεγεθών λυγισμού.

Αντίστοιχη διαδικασία θα πραγματοποιηθεί και για τις **ιδιομορφές** που προκύπτουν από κάθε μοντελοποίηση. Θα παρουσιαστούν οι πιο χαρακτηριστικές για το κάθε υλικό και για κάθε οριακή συνθήκη και θα γίνει συγκριτική ανάλυση μεταξύ τους. Θα αναζητηθούν, δηλαδή, οι παράμετροι εκείνες οι οποίες έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στον καθορισμό της μορφής του λυγισμένου σχήματος, στη δημιουργία των χαρακτηριστικών ημικυμάτων (half-waves) και στον καθορισμό του πλήθους τους.

#### 5.1 Συγκριτική ανάλυση διαγραμμάτων στην περίπτωση λυγισμού λόγω θλίψης

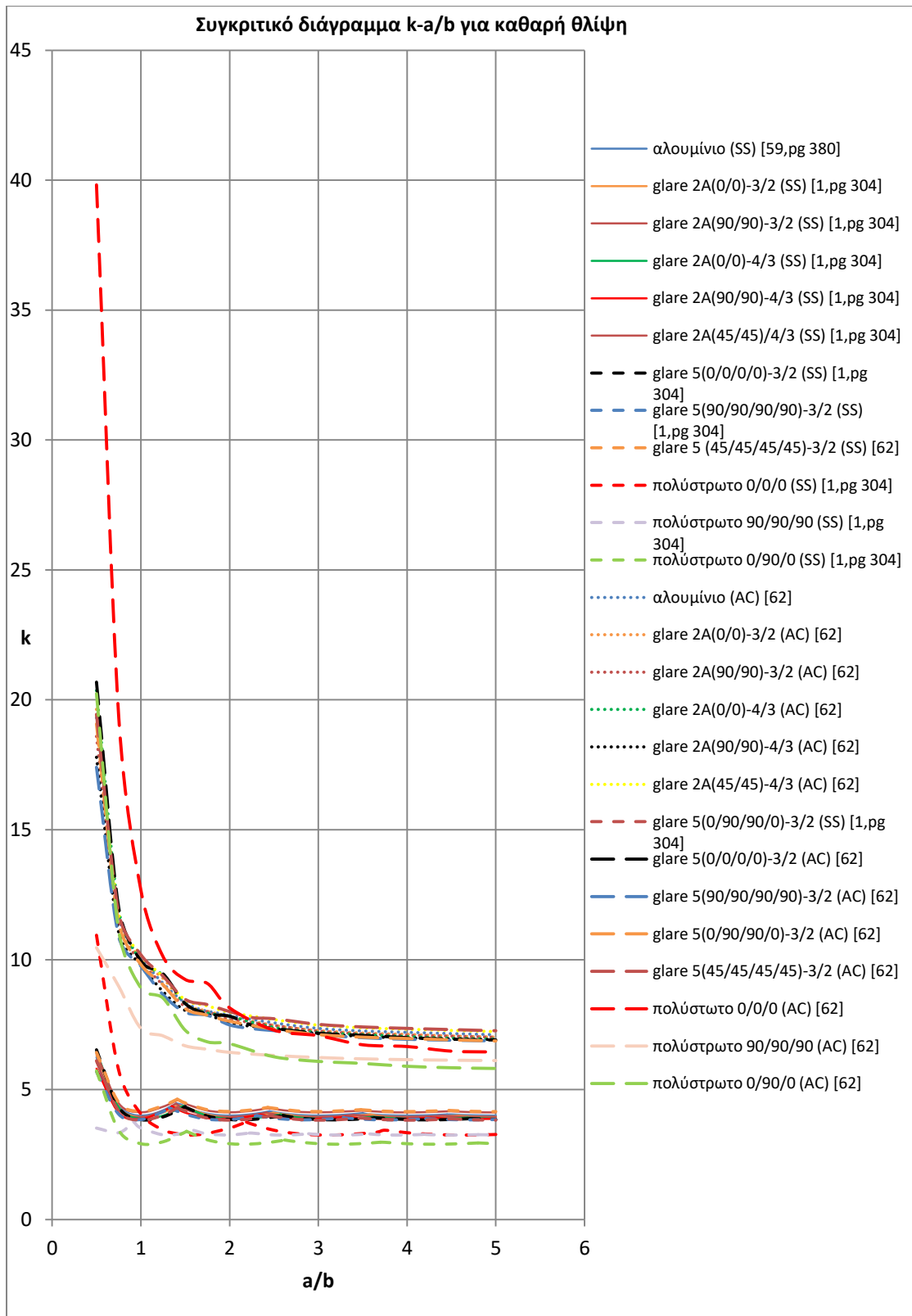
Καταρχάς, στον Πίνακα 5.1 υπενθυμίζονται συγκεντρωτικά τα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης είτε με απλή έδραση (simply supported) είτε με περιορισμένες όλες τις ελευθερίες των στροφών (all edges clamped).

*Πίνακας 5. 1: Συγκεντρωτική κατάσταση υλικών τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης*

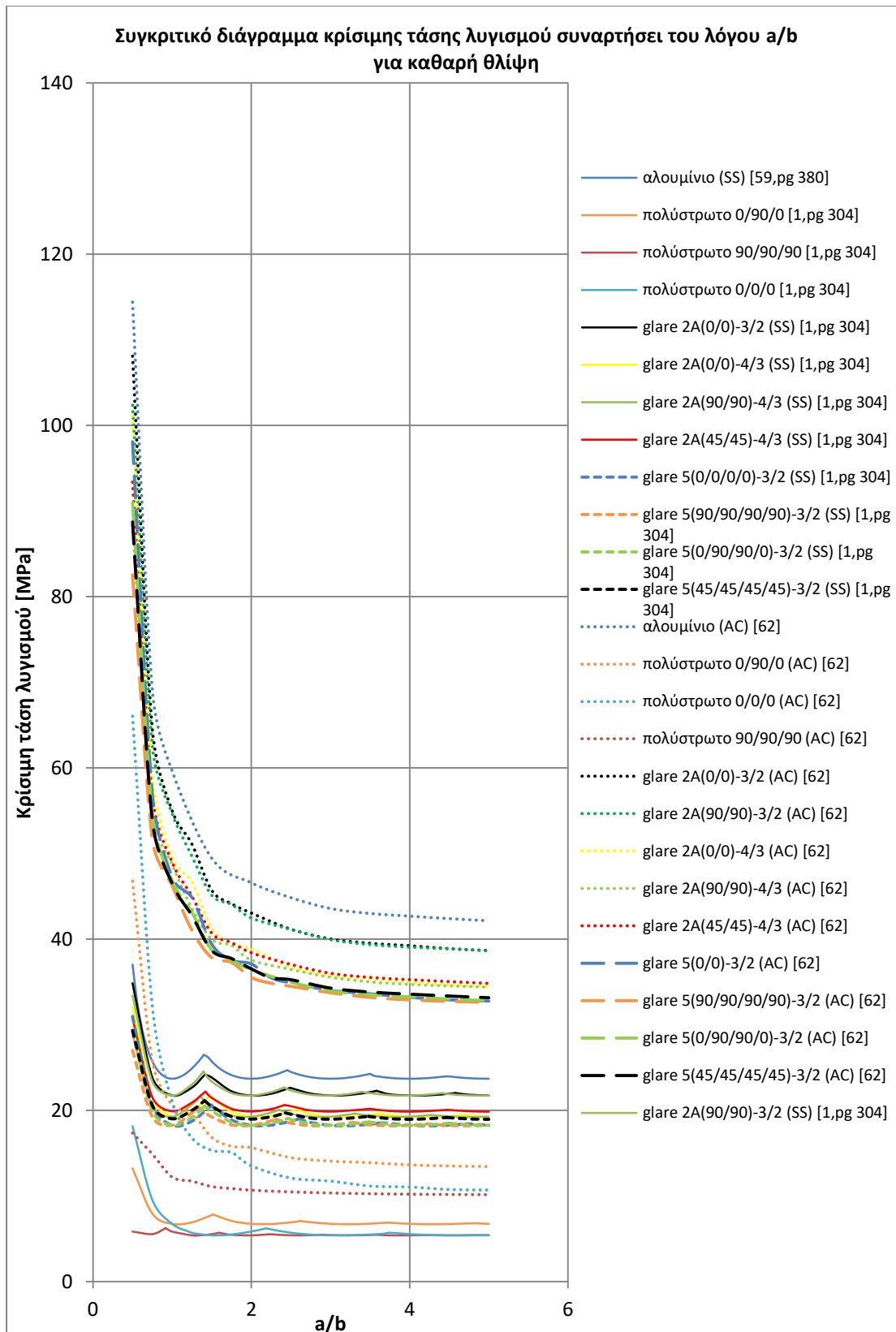
ΥΛΙΚΑ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΛΟΓΩ ΘΛΙΨΗΣ
1. Αλουμίνιο (2024 T3 Aluminium alloy)

2. Πολύστρωτο σύνθετο 15 στρώσεων 0/0/0
3. Πολύστρωτο σύνθετο 15 στρώσεων 90/90/90
4. Πολύστρωτο σύνθετο 15 στρώσεων 0/90/0
5. Glare 2A(0/0)-3/2-0,458333
6. Glare 2A(90/90)-3/2-0,458333
7. Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125
8. Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125
9. Glare 2A(45/45)-4/3-0,28125
10. Glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667
11. Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667
12. Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667
13. Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667

Στα Σχήματα 5.1 και 5.2 γίνεται συγκεντρωτική συγκριτική παρουσίαση των παραπάνω υλικών και είναι δυνατή η εξαγωγή κάποιων βασικών συμπερασμάτων. Η πιο βασική παρατήρηση σχετίζεται με την άμεση **επίδραση των συνοριακών συνθηκών** τόσο στο συντελεστή  $k$  όσο και στην κρίσιμη τάση λυγισμού. Φαίνεται ξεκάθαρα ότι ο περιορισμός των στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών της πλάκας (all edges clamped) ενός υλικού οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή  $k$  και της κρίσιμης τάσης σε σύγκριση με την απλή έδραση (simply supported) στο ίδιο υλικό και με τις ίδιες διαστάσεις. Φαίνεται, δηλαδή, ότι για όλα τα υλικά του Πίνακα 5.1 η καμπύλη των περιορισμένων στρωφών είναι πιο «ψηλά» από την αντίστοιχη καμπύλη της απλής έδρασης στα σχετικά διαγράμματα. Αυτή η επίδραση του περιορισμού των στρωφών στην αντοχή σε λυγισμό έναντι της απλής έδρασης είχε παρατηρηθεί και από τους Reddy et al. [17].



**Σχήμα 5. 1:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  όλων των υλικών τα οποία μελετήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης (SS: simply supported, AC: all edges clamped)

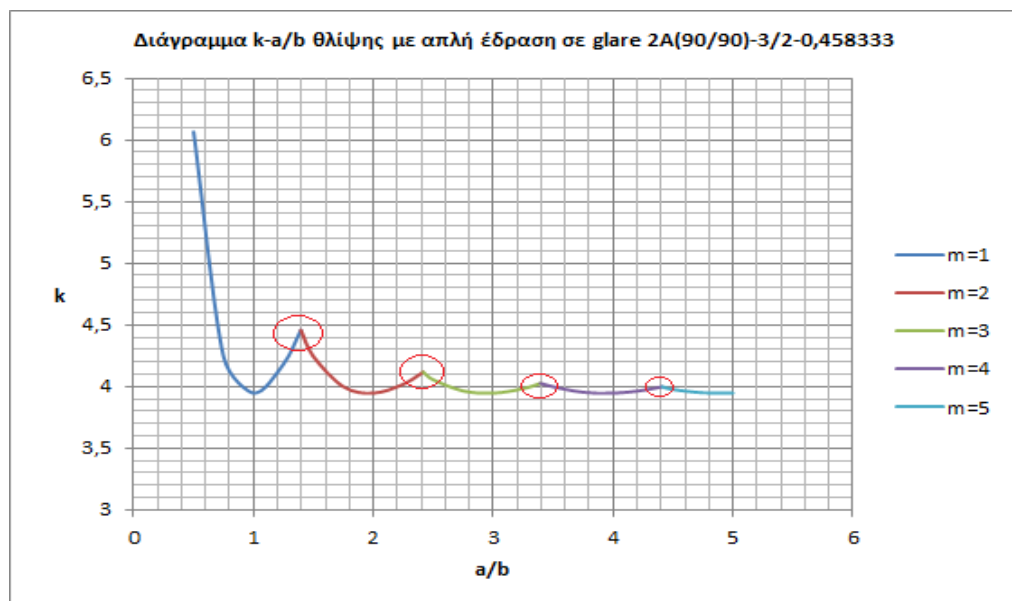


**Σχήμα 5. 2:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού για όλα τα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης (SS: simply supported, AC: all edges clamped)



Επίσης, ξεκάθαρα φαίνεται από τα συγκεντρωτικά διαγράμματα η άμεση επίδραση των **διαστάσεων της πλάκας** στη συμπεριφορά όλων των υλικών σε λυγισμό και, ειδικότερα, ο λόγος μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ), ο οποίος αποτελεί τη βασική παράμετρο μελέτης όλων των μοντελοποιήσεων. Είναι εμφανές ότι είναι διαφορετική η επίδραση της αύξησης του λόγου  $a/b$  στην περίπτωση της απλής έδρασης σε σχέση με την περίπτωση των περιορισμένων στρωφών, αφού οι γραφικές παραστάσεις έχουν διαφορετική μορφή. Στην πρώτη περίπτωση η κάθε καμπύλη αποτελείται από επιμέρους κοίλα τμήματα κάθε ένα από τα οποία εκφράζει διαφορετικό πλήθος ημικυμάτων στην διεύθυνση της φόρτισης με αύξουσα διάταξη. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.3 τα σημεία των τοπικών μέγιστων είναι τα σημεία αλλαγής του πλήθους των ημικυμάτων και η αύξηση του λόγου  $a/b$  οδηγεί σε σταδιακή μείωση της τιμής του συντελεστή για κάθε τοπικό μέγιστο ώσπου για  $a/b \geq 4$  πλέον όσο και να αυξηθεί ο λόγος δεν επηρεάζεται ουσιαστικά η τιμή του κρίσιμου μεγέθους. Αντίθετα στον περιορισμό των στρωφών η μορφή της γραφικής παράστασης είναι απλούστερη, χωρίς να υποδεικνύεται ο αριθμός των ημικυμάτων. Όλες οι καμπύλες των περιστροφικά περιορισμένων υλικών των Σχημάτων 5.1 και 5.2 είναι γνησίως φθίνουσες, ενώ υπάρχει ένας λόγος  $a/b$  για τον οποίο οποιαδήποτε περαιτέρω αύξηση επηρεάζει με τρόπο αμελητέο την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Η τιμή αυτού του λόγου είναι  $a/b \approx 4$ .

Μία παρατήρηση η οποία θα μπορούσε να γίνει σε σχέση με το συγκεντρωτικό διάγραμμα 5.1 αφορά στη μορφή των καμπύλων απλής έδρασης. Ειδικότερα, φαίνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των GLARE υλικών ομοιάζουν περισσότερο στην αντίστοιχη του αλουμινίου και λιγότερο σε αυτή των πολύστρωτων. Το αλουμίνιο, δηλαδή, κυριαρχεί στα glare ακόμη και σε εκείνα τα οποία



**Σχήμα 5. 3:** Τοπικά μέγιστα στην καμπύλη λυγισμού λόγω θλίψης με απλή έδραση

Οι επόμενες παράμετροι οι οποίες επιδρούν στα κρίσιμα μεγέθη λυγισμού θα εξακολουθούν να αναφέρονται χωριστά για την απλή έδραση και τις περιορισμένες στροφές. Η επόμενη, λοιπόν, βασική παράμετρος είναι **το κλάσμα του όγκου του αλουμινίου (Metal Volume Fracture-MVF)**. Είναι εμφανής η επίδρασή του στις γραφικές παραστάσεις της τάσης, με το αλουμίνιο (MVF=100%) να έχει την υψηλότερη κρίσιμη τάση λυγισμού τόσο στην περίπτωση των περιορισμένων στροφών, όσο και στην απλή έδραση, παρατήρηση η οποία πραγματοποιήθηκε και από τους Mania και York [30]. Αντίστοιχα, η ομάδα των πολύστρωτων υλικών με μηδενικό ποσοστό αλουμινίου έχει τη μικρότερη τάση λυγισμού, επίσης, και στις δύο συνθήκες στήριξης. Στην κατηγορία των GLARE υλικών οι πλάκες μπορούν να ομαδοποιηθούν βάσει του ποσοστού του όγκου αλουμινίου, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 5.2. Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.2 φαίνεται ότι και για τον περιορισμό των στροφών και για την απλή έδραση τα glare με το μεγαλύτερο MVF για λόγο  $a/b \geq 1$  (glare 2A με 3 στρώσεις αλουμινίου, MVF=73,33%) έχουν μεγαλύτερη κρίσιμη τάση, στη συνέχεια είναι τα glare 2A με 4 στρώσεις αλουμινίου (MVF=60%) και, τέλος, τα glare 5 (MVF=46,67%) είναι αυτά με τη χαμηλότερη. Μοναδική εξαίρεση αυτής της παρατήρησης αποτελούν τα glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667 και glare 2A(0/0)-4/3-0,28125, όπου φαίνεται ότι η καμπύλη του δεύτερου δεν είναι ξεκάθαρα πάνω από την αντίστοιχη του πρώτου αν και το glare 2A-4/3 έχει μεγαλύτερο MVF. Με αυτό τον τρόπο καθίσταται εμφανής ο επόμενος σημαντικός παράγοντα επίδρασης της κρίσιμης τάσης και του συντελεστή λυγισμού, ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού. Τελικά, το συμπέρασμα που προκύπτει για το ποσοστό MVF είναι ότι και στις δύο οριακές συνθήκες τα υλικά ίδιου προσανατολισμού ινών με μεγαλύτερο ποσοστό αλουμινίου θα λυγίζουν δυσκολότερα, θα έχουν, δηλαδή, μεγαλύτερη τιμή κρίσιμης τάσης λυγισμού.

Συνεχίζοντας με τη μελέτη των συγκριτικών διαγραμμάτων θα αναλυθεί η προαναφερθείσα επίδραση του **προσανατολισμού των μονοκατευθυντικών ινών** του σύνθετου υλικού τόσο για κάθε περίπτωση συνοριακής συνθήκης όσο και για κάθε ομάδα υλικών ξεχωριστά όπως έχουν διακριθεί σε σχέση με το MVF στον Πίνακα 5.2. Από το διάγραμμα του Σχήματος 5.2 φαίνεται ότι υλικά ίδιου κατ' όγκου ποσοστού αλουμινίου στο εσωτερικό τους και τα οποία μοντελοποιούνται με ίδια συνθήκη στήριξης έχουν σημαντική διαφοροποίηση στην κρίσιμη τάση τους, γεγονός που υποδεικνύει την επίδραση του εν λόγω παράγοντα σχεδίασης. Καταρχάς, όσον αφορά στα πολύστρωτα υλικά στα οποία αυτή η διαφοροποίηση είναι περισσότερο αισθητή λόγω της απουσίας του αλουμινίου παρατηρείται ότι και στην απλή έδραση και στον περιορισμό των στροφών το πιο ανθεκτικό σε λυγισμό είναι αυτό με cross-ply προσανατολισμό, για λόγους  $a/b \geq 1$ . Αντιθέτως, ο λιγότερο ανθεκτικός προσανατολισμός στο ίδιο εύρος λόγων στην πάκτωση των στροφών είναι οι  $90^\circ$ . Σε πολύστρωτες πλάκες μικρού μήκους ( $a/b \leq 1$ ) όπως θα περίμενε κανείς λυγίζουν δυσκολότερα αυτές με προσανατολισμό ινών παράλληλα στη διεύθυνση της φόρτισης (0/0/0), ανεξάρτητα από την συνθήκη στήριξης.

**Πίνακας 5. 2:** Φθίνουσα κατάταξη των υλικών τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω θλίψης σε σχέση με την αναλογία του όγκου τους σε αλουμίνιο

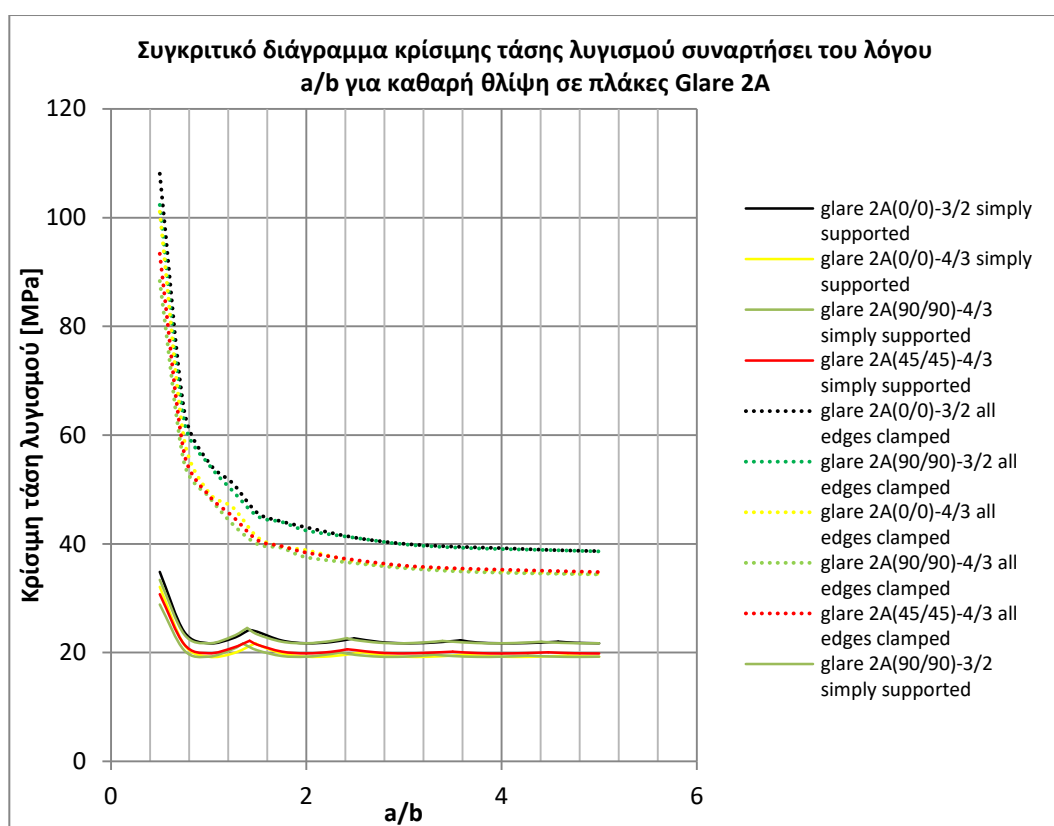
<b>ΥΛΙΚΟ</b>	<b>MVF ΑΛΟΥΜΙΝΙΟΥ (%)</b>
Αλουμίνιο	100
Glare 2A(0/0)-3/2-0,458333 Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	73,3
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125 Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 Glare 2A(45/45)-4/3-0,28125	60
Glare 5(0/0/0/0)-0,291667 Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667 Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667	46,67
Πολύστρωτο 0/0/0 Πολύστρωτο 90/90/90 Πολύστρωτο 0/90/0	0

Αντίστοιχες παρατηρήσεις σχετικά με την επίδραση του προσανατολισμού των ινών πραγματοποιούνται και για τα glare. Ξεκινώντας με την πάκτωση των στρωφών κατά μήκος των πλευρών φαίνεται ότι τόσο στα glare 2A με 3 στρώσεις αλουμινίου όσο και στα glare 2A με 4 στρώσεις αλουμινίου για  $a/b \leq 1,5$  ο προσανατολισμός των  $0^\circ$  έχει μεγαλύτερη τάση λυγισμού. Για μεγαλύτερους λόγους δεν υπάρχει αξιόλογη διαφοροποίηση μεταξύ των  $0^\circ$  και των  $90^\circ$ , ενώ ο προσανατολισμός των  $45^\circ$  με βάση τον οποίο μοντελοποιήθηκε το glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 εμφανίζει μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού για λόγους  $a/b \geq 2,5$ . Στην απλή έδραση οι παρατηρήσεις είναι όμοιες, με τα glare με διάταξη ινών σε γωνία  $0^\circ$  να έχουν μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τα υπόλοιπα για  $a/b \leq 1$  και το glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 να είναι το πιο ανθεκτικό σε λυγισμό για λόγους  $a/b$  μεγαλύτερους της μονάδας. Το γεγονός ότι τα ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα προσανατολισμού ινών  $45^\circ$  είναι πιο ανθεκτικά σε θλίψη έναντι των υπολοίπων προσανατολισμών, για λόγους  $a/b > 2$ , παρατηρήθηκε και από τους Housner και Stein [18] όπως φαίνεται και από το Σχήμα 1.24.

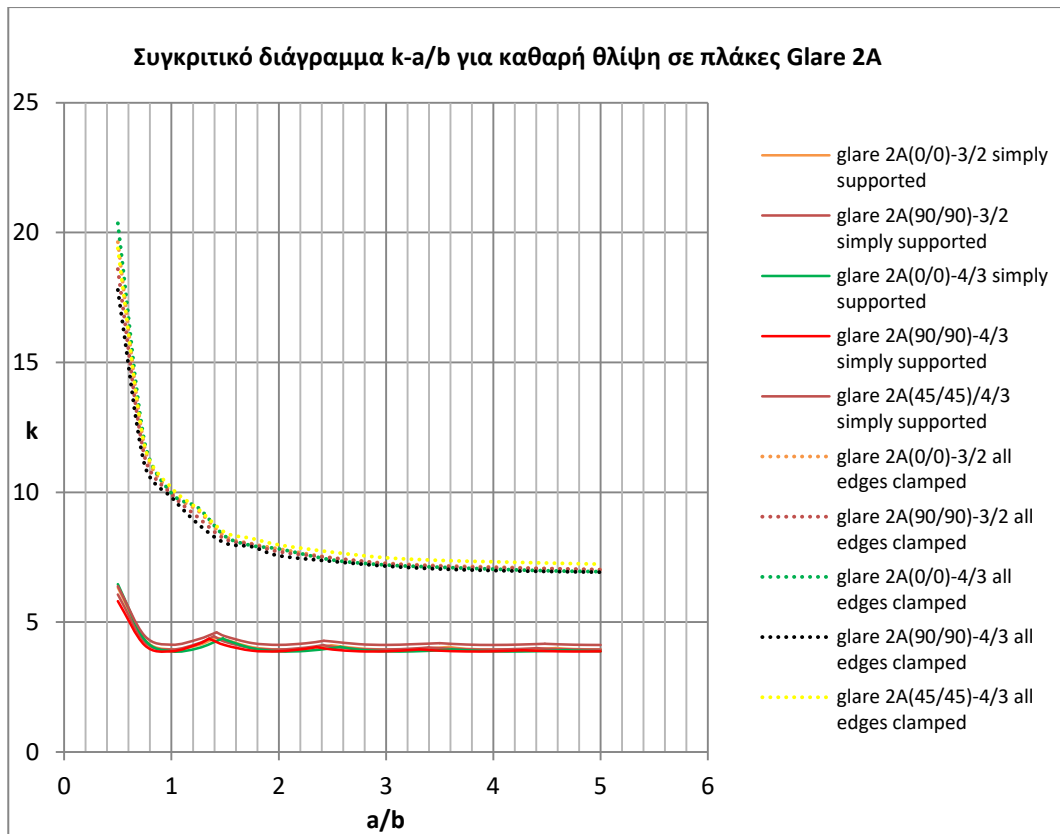
Σε αυτό το σημείο αναγκαίο κρίνεται να σημειωθεί ότι δεν πραγματοποιούνται αντίστοιχες ποσοτικές παρατηρήσεις για τις τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$ , επειδή δεν έχουν άμεση πρακτική αξία. Το γεγονός αυτό οφείλεται στον τρόπο υπολογισμού του. Παρατηρώντας τη σχέση (3.5) φαίνεται ότι ο συντελεστής  $k$  μπορεί να είναι ανάλογος του κρίσιμου φορτίου και, άρα, της τάσης λυγισμού εξαρτάται, όμως, από την ποσότητα  $\sqrt{D_{11}D_{22}}$ , η οποία είναι διαφορετική για κάθε υλικό. Η άμεση ποσοτική σύγκριση, επομένως, των τιμών του  $k$  για διαφορετικά υλικά δεν αποτελεί

αξιόπιστο κριτήριο για την κατανοήση της συμπεριφοράς σε λυγισμό μεταξύ διαφορετικών υλικών.

Η παραπάνω παρατήρηση σχετικά με τον συντελεστή λυγισμού  $k$  είναι πιο ευδιάκριτη και από το συγκριτικό διάγραμμα μεταξύ των υλικών glare 2A των Σχημάτων 5.4 και 5.5 αλλά και από όλα τα διαγράμματα του προηγούμενου κεφαλαίου. Διαπιστώνεται, δηλαδή, ότι η γραφική παράσταση της τάσης είναι πανομοιότυπη ως προς τη μορφή με την αντίστοιχη του συντελεστή λυγισμού για το κάθε υλικό, όπως θα ανέμενε κανείς λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους υπολογισμού. Όταν, ωστόσο παρατίθενται συγκεντρωτικά οι γραφικές παραστάσεις για διαφορετικά υλικά η σχετική τους θέση είναι διαφορετική εξαιτίας της επίδρασης του όρου  $\sqrt{D_{11}D_{22}}$ .

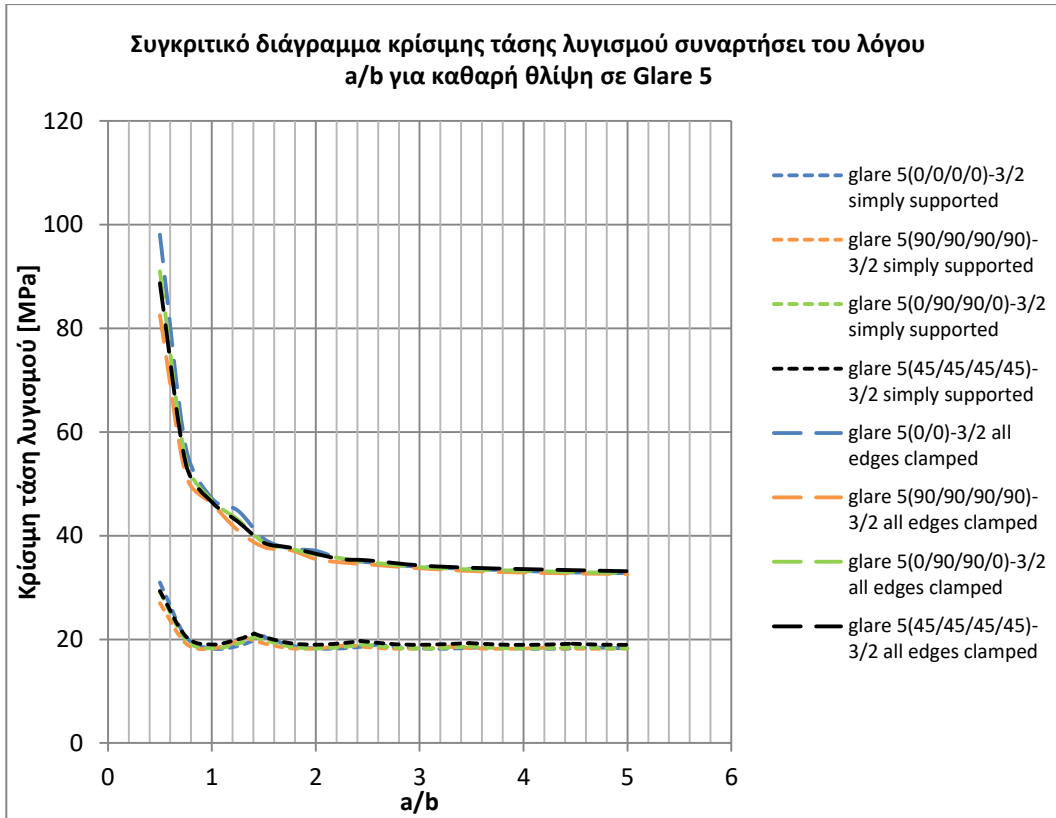


*Σχήμα 5. 4: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού σε Glare 2A για την περίπτωση της θλίψης*

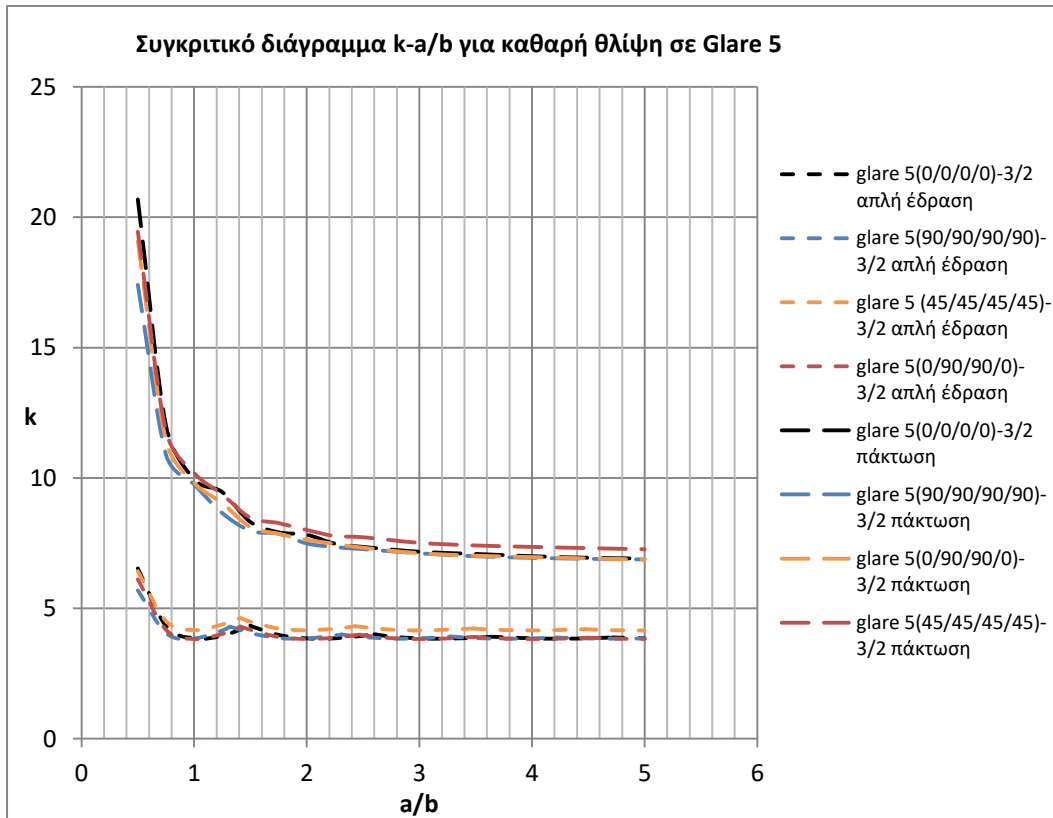


**Σχήμα 5. 5:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  για θλίψη πλακών Glare 2A

Η επίδραση του προσανατολισμού των ινών δεν διαφοροποιείται ούτε στην περίπτωση των υλικών glare 5. Από τα παρακάτω Σχήματα 5.5 και 5.6 και, ειδικότερα, από το διάγραμμα της τάσης φαίνεται ότι τόσο στην απλή έδραση όσο και στην περίπτωση των περιορισμένων στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών για λόγους μικρότερους της μονάδας ο προσανατολισμός των  $0^\circ$  δημιουργεί πιο ανθεκτικά σε λυγισμό glare 5. Για  $a/b \geq 1$  για την απλή έδραση και για  $a/b \geq 2,5$  για την πάκτωση των στρωφών ο προσανατολισμός των  $45^\circ$  έχει μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού, ενώ οι υπόλοιποι προσανατολισμοί ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$  και cross-ply) δεν εμφανίζουν ουσιαστική διαφοροποίηση. Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί ότι για λόγους  $a/b \leq 1$  στην περίπτωση της απλής έδρασης και για  $a/b \leq 3$  στην περίπτωση των περιορισμένων στρωφών, ο προσανατολισμός με την χαμηλότερη τάση λυγισμού μεταξύ των υλικών glare 5 είναι οι  $90^\circ$ .



*Σχήμα 5. 6: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού θλίψης υλικών Glare 5*



*Σχήμα 5. 7: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  θλίψης υλικών Glare 5*

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΘΛΙΨΗΣ

Μετά από την ανάλυση των αποτελεσμάτων των διαγραμμάτων και από τις παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν προέκυψε ότι οι κύριοι παράγοντες επιρροής των τιμών της κρίσιμης τάσης λυγισμού και του συντελεστή λυγισμού  $k$  είναι οι συνοριακές συνθήκες, ο λόγος  $a/b$ , το κλάσμα του όγκου του αλουμινίου (MVF) και ο προσανατολισμός των ινών των στρώσεων του σύνθετου υλικού. Με βάση τα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας εργασίας παρατηρήθηκε ότι την σημαντικότερη επίδραση τόσο για την κρίσιμη τάση όσο και για τον συντελεστή λυγισμού είχαν οι συνοριακές συνθήκες και οι διαστάσεις της πλάκας. Ειδικά όσον αφορά στον τελευταίο παράγοντα, παρατηρείται και στις δύο συνθήκες στήριξης ότι περεταίρω αύξηση του λόγου ( $a/b \geq 4$ ) δεν επηρεάζει με ουσιαστικό τρόπο το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, με τις τιμές του να σταθεροποιούνται. Τα βασικά συμπεράσματα από τη μελέτη λυγισμού ορθογώνιων πλακών λόγω καθαρής μονοαξονικής θλίψης είναι:

1. Ο περιορισμός των ελευθεριών των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού και του συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση για κάθε υλικό.
2. Η αναλογία του αλουμινίου κατ' όγκο (MVF) για κάθε οριακή συνθήκη και για κάθε προσανατολισμό των μονοκατευθυντικών ινών των στρώσεων του σύνθετου υλικού επιδρά ανάλογα στην κρίσιμη τάση λυγισμού. Όσο μεγαλύτερο το MVF τόσο μεγαλύτερη η κρίσιμη τάση για δεδομένη συνθήκη στήριξης και δεδομένο προσανατολισμό ινών.
3. Για μικρούς λόγους μήκους προς πλάτος (για λόγους  $a/b$  μικρότερους της μονάδας) τα υλικά ίσου MVF των οποίων ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού είναι  $0^\circ$  έχουν αυξημένη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς τόσο στην περίπτωση της απλής έδρασης όσο και στην περίπτωση των δεσμευμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών.
4. Για μικρούς λόγους μήκους προς πλάτος (για λόγους  $a/b$  μικρότερους της μονάδας) τα υλικά ίσου MVF των οποίων ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού είναι  $90^\circ$  έχουν μειωμένη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς τόσο στην περίπτωση της απλής έδρασης όσο και στην περίπτωση των δεσμευμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών.
5. Για μεγαλύτερους λόγους μήκους προς πλάτος ( $a/b \geq 2,5$ ) τα υλικά ίσου MVF των οποίων οι στρώσεις του σύνθετου έχουν προσανατολισμό ινών  $45^\circ$  έχουν μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους

προσανατολισμούς τόσο στην απλή έδραση όσο και στον περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας.

6. Για μεγαλύτερους λόγους  $a/b$  ( $a/b \geq 2,5$ ) δεν υπάρχει αξιόλογη διαφορά μεταξύ των υλικών ίσου MVF με προσανατολισμό ινών  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ή cross-ply στις τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού στην περίπτωση της απλής έδρασης.
7. Η αύξηση του λόγου  $a/b$  πέρα από μία κρίσιμη τιμή (περίπου 4) δεν επιφέρει ουσιαστική διαφοροποίηση σε καμία από τις τιμές της τάσης και του συντελεστή λυγισμού  $k$ , για όλες τις συνθήκες στήριξης.

## 5.2 Συγκριτική ανάλυση ιδιομορφών στην περίπτωση του λυγισμού λόγω θλίψης

### 5.2.1 Ιδιομορφές λόγω θλίψης με απλή έδραση

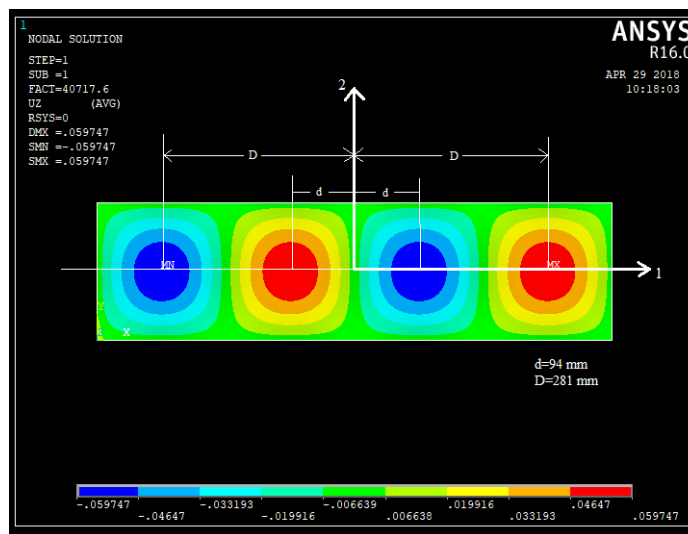
Από τη μελέτη των ιδιομορφών των υλικών τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω μονοαξονικής θλίψης μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62] εξάχθηκαν κάποια συμπεράσματα. **Η σημαντικότερη παράμετρος**, η οποία επηρεάζει άμεσα το σχήμα των λυγισμένων πλακών **είναι οι συνοριακές συνθήκες**. Για κάθε μία από αυτές προκύπτουν χαρακτηριστικές ιδιομορφές για διάφορους λόγους μήκους προς πλάτος της κάθε πλάκας ( $a/b$ ). Οι διαστάσεις της κάθε πλάκας (λόγος  $a/b$ ) επηρεάζουν τον σχηματισμό των ιδιομορφών και αποτελούν καθοριστικό παράγοντα για το πλήθος των ημικυμάτων που δημιουργούνται σε κάθε οριακή συνθήκη. Όσον αφορά στην απλή έδραση ο τύπος του υλικού, το ποσοστό του όγκου του αλουμινίου (MVF), και ο προσανατολισμός των ινών δεν φαίνεται να επηρεάζουν αυτό το χαρακτηριστικό σχήμα των ιδιομορφών και, ειδικότερα, τη μορφή των ημικυμάτων, παρά μόνο το πλήθος των τελευταίων στα ειδικά ορθότροπα υλικά. Αντίθετα, στα μη ειδικά ορθότροπα υλικά τα οποία μοντελοποιούνται σε θλίψη με απλή έδραση (αυτά με προσανατολισμό ινών  $45^\circ$ ) η μορφή των ημικυμάτων αποκτά διαφορετικό σχήμα.

Καταρχάς, παρατηρώντας τα παρακάτω Σχήματα 5.8-5.10 αλλά και τα Σχήματα 4.19-4.23 του προηγούμενου Κεφαλαίου επιβεβαιώνεται η παρατήρηση σχετικά με τη δημιουργία όμοιων ιδιομορφών σε ειδικά ορθότροπα υλικά (με προσανατολισμό ινών  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ή cross-ply) διαφορετικού τύπου τα οποία καταπονούνται σε θλίψη με απλή έδραση. Φαίνεται, δηλαδή, ο σχηματισμός ημικυμάτων τα οποία έχουν την ίδια χαρακτηριστική μορφή και η διαφοροποίησή τους έγκειται στην τιμή της βύθισης και στο πλήθος τους ανάλογα με το υλικό και τις διαστάσεις του. Να σημειωθεί ότι αυτή η χαρακτηριστική μορφή σχετίζεται με την ύπαρξη συμμετρίας των ημικυμάτων ως προς τους άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους, όπως φαίνεται στο πρώτο ημικύμα του Σχήματος 5.9, ενώ η βύθιση είναι κατά απόλυτη τιμή ίση για όλα τα ημικύματα. Εμφανής είναι, επίσης, και η

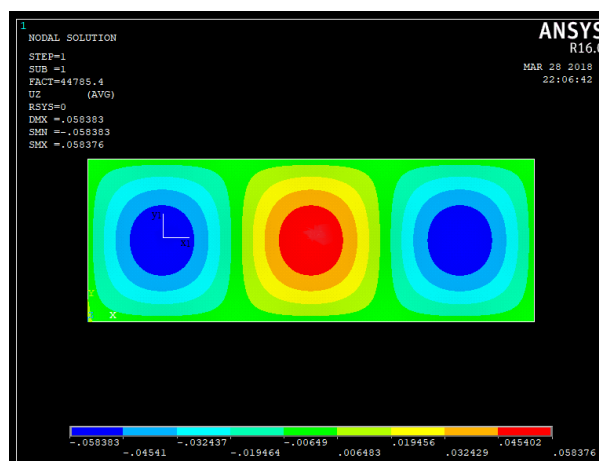


ύπαρξη αντι-συμμετρίας της λυγισμένης πλάκας σε σχέση με τον εγκάρσιο άξονα 2 και συμμετρίας σε σχέση με τον διαμήκη άξονα 1 του ορθοκανονικού συστήματος αξόνων το οποίο διέρχεται από το κέντρο βάρους της, όπως αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.8. Αντίθετα, όταν το πλήθος των ημικυμάτων είναι περιττό (Σχήμα 5.9) παρατηρείται η ύπαρξη συμμετρίας ως προς τον άξονα 2.

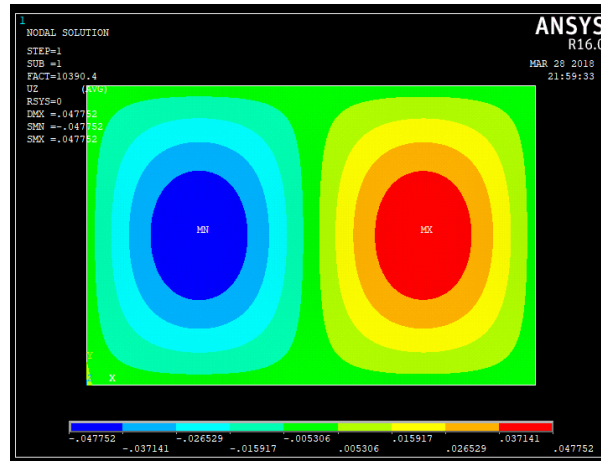
Στα Σχήματα 4.24 του 4<sup>ου</sup> Κεφαλαίου και 5.11 παρουσιάζονται οι ιδιομορφές σε πλάκες μη ειδικά ορθότροπες και καθίσταται φανερή η διαφοροποίηση στο σχηματισμό των ημικυμάτων. Δεν υπάρχει, πλέον, η συμμετρία ως προς τους άξονες που διέρχονται από το κέντρο τους, ενώ αποκτούν μία διαφορετική χαρακτηριστική μορφή σαν να έχουν στραφεί με μία μικρή γωνία. Χάνεται, τέλος η συμμετρία της πλάκας για περιττό πλήθος half-waves και η αντισυμμετρία για άρτιο πλήθος.



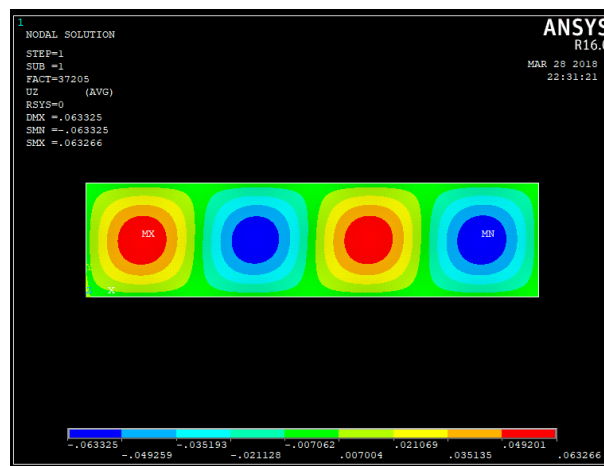
Σχήμα 5. 8: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-3/2-0,458333 σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση ( $a/b=3,75$ )



Σχήμα 5. 9: Ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου πάχους 1,875mm σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση ( $a/b=2,75$ )



*Σχήμα 5. 10: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 90/90/90 σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση ( $a/b=1,5$ )*

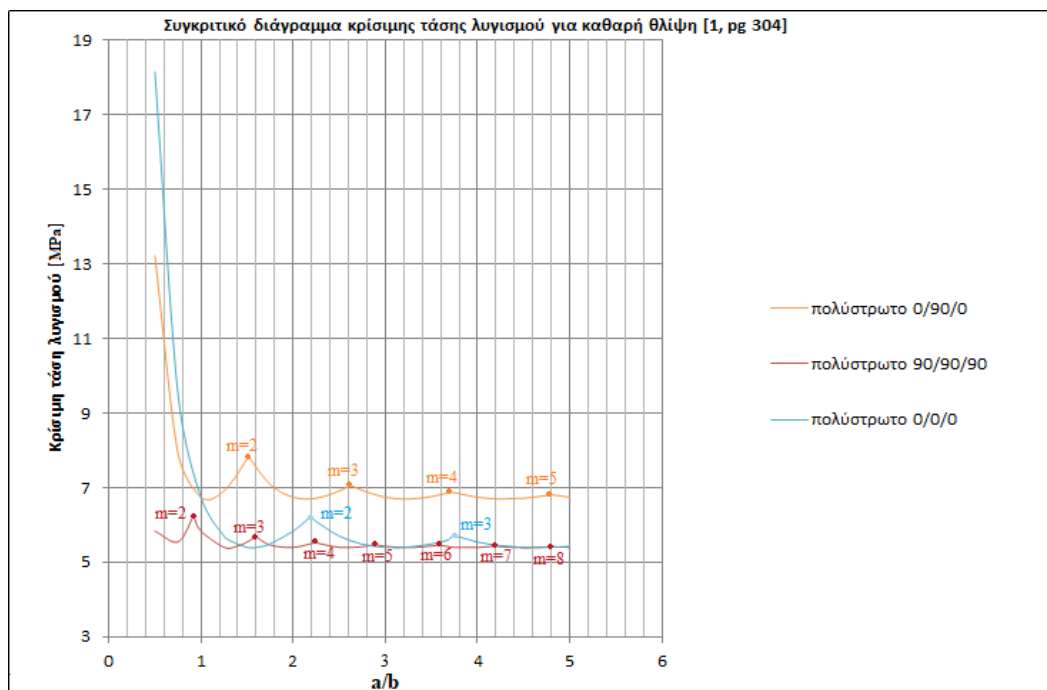


*Σχήμα 5. 11: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 σε λυγισμό λόγω θλίψης με απλή έδραση ( $a/b=4$ )*

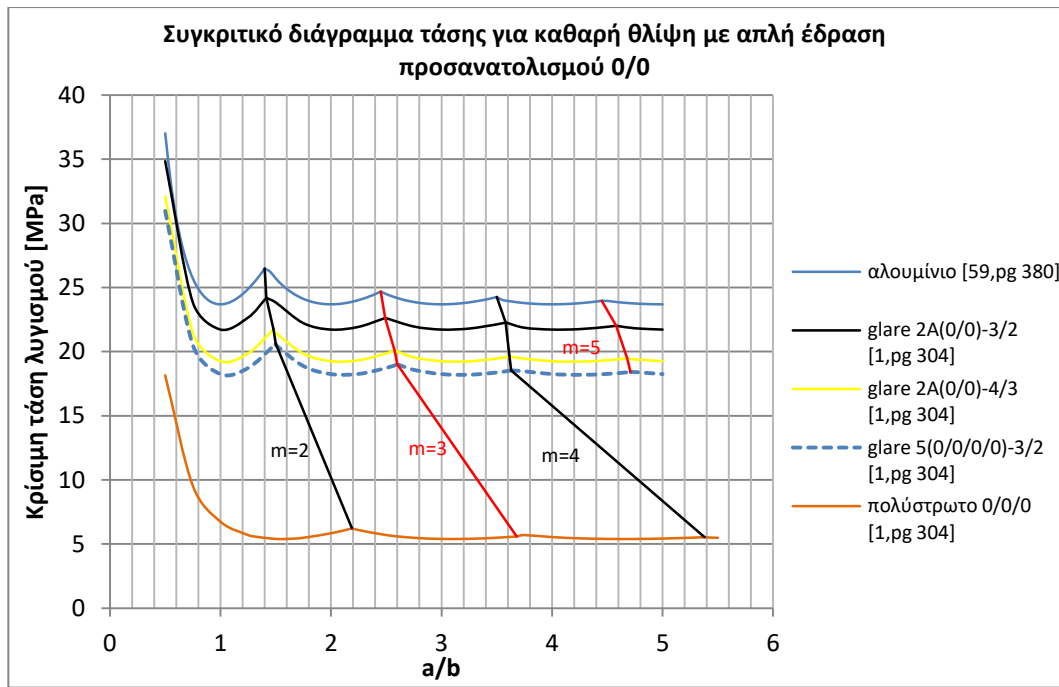
Το γεγονός ότι ο προσανατολισμός των ινών επιδρά στις προκύπτουσες ιδιομορφές και, ειδικότερα, στο πλήθος των ημικυμάτων είναι ξεκάθαρο και στην περίπτωση του λυγισμού λόγω θλίψης με απλή έδραση διαπιστώνεται εύκολα από τα διαγράμματα που έχουν κατασκευασθεί. Η ομάδα των υλικών στην οποία αυτή η παρατήρηση γίνεται περισσότερο αισθητή είναι τα πολύστρωτα υλικά όπου παρατηρήθηκε σημαντική διαφορά στο εν λόγω πλήθος μεταξύ του προσανατολισμού των  $90^\circ$  και των  $0^\circ$  για ίδιες τιμές του λόγου  $a/b$  (Σχήμα 5.12). Παρατηρώντας τις γραφικές παραστάσεις των πολύστρωτων, για τιμή του λόγου  $a/b=5$  η οποία αποτελεί τη μέγιστη τιμή στα πλαίσια της παρούσας έρευνας έχουν δημιουργηθεί  $m=3$  ημικύματα για τις  $0^\circ$ ,  $m=8$  για τις  $90^\circ$  και  $m=5$  για τον cross-ply προσανατολισμό. Προκύπτει, επομένως, ότι για τις ίδιες διαστάσεις σε μία πολύστρωτη πλάκα το πλήθος των ημικυμάτων των  $90^\circ$  θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο σε σύγκριση με το cross-ply, και, αντίστοιχα, το πλήθος των ημικυμάτων του cross-

ply θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο σε σύγκριση με το πλήθος των  $0^\circ$ . Λαμβάνοντας υπόψη το συγκεντρωτικό συγκριτικό διάγραμμα αυτή η παρατήρηση μπορεί να επεκταθεί με αντίστοιχο τρόπο και στα υλικά glare. Θα γίνει φανερή η επίδραση της αύξησης του MVF σε συνάρτηση με τον προσανατολισμό των ινών του σύνθετου υλικού στον καθορισμό του πλήθους των ημικυμάτων.

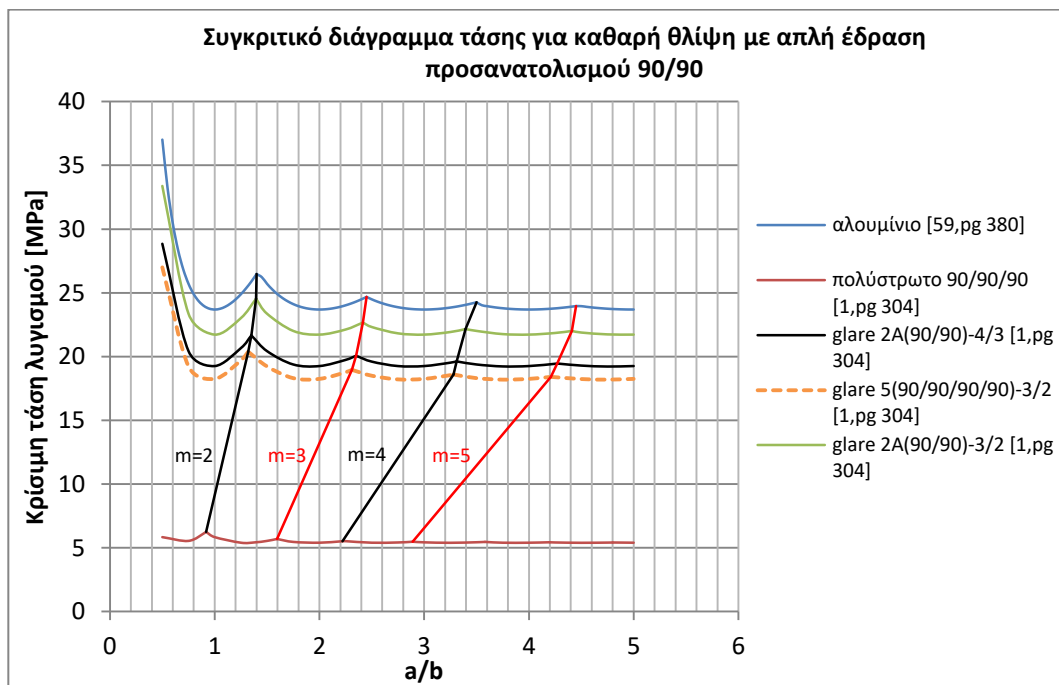
Ξεκινώντας με τον προσανατολισμό των  $0^\circ$  από το Σχήμα 5.13 φαίνεται ότι με την αύξηση του MVF τα σημεία αλλαγής του πλήθους των ημικυμάτων, σταδιακά, μετατοπίζονται προς τα αριστερά μέχρι το αλουμίνιο, για το οποίο ισχύει:  $MVF=100\%$ . Επομένως, η αύξηση της αναλογίας του αλουμινίου στον όγκο των ειδικά ορθότροπων υλικών με προσανατολισμό ινών  $0^\circ$  οδηγεί σε λυγισμένες πλάκες με μεγαλύτερο ή ίδιο πλήθος ημικυμάτων για ίδιες διαστάσεις a/b, όταν αυτές λυγίζουν σε θλίψη με απλή έδραση.



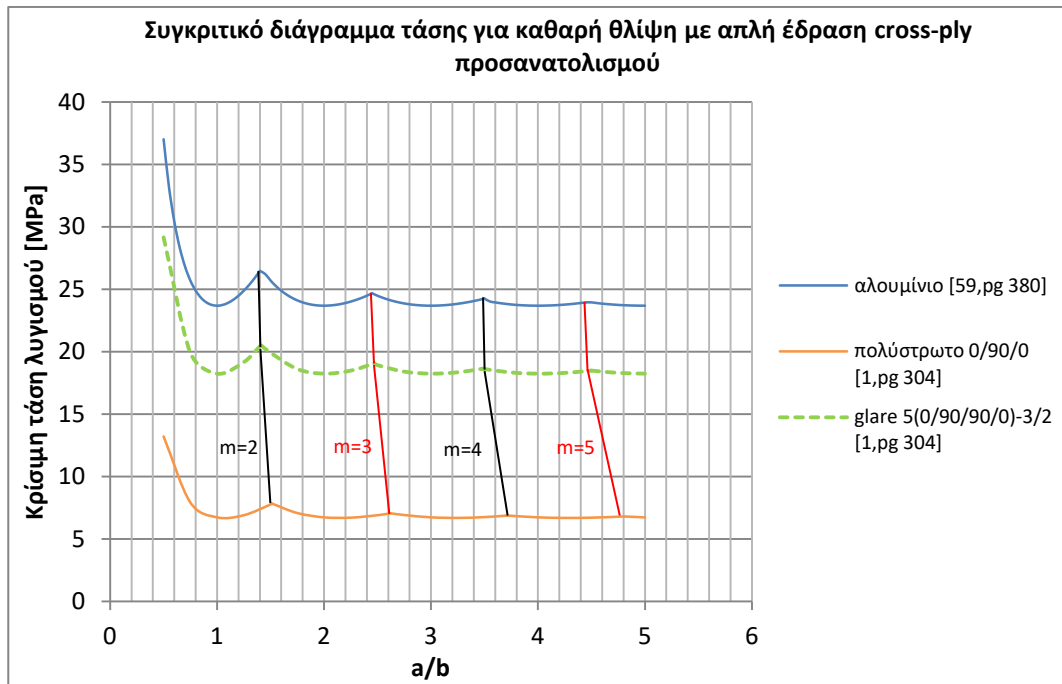
Σχήμα 5. 12: Γραφικές παραστάσεις των πολύστρωτων υλικών για θλίψη με απλή έδραση



*Σχήμα 5. 13: Συγκριτικό διάγραμμα θλίψης με απλή έδραση σε υλικά με προσανατολισμό ινών 0°*



*Σχήμα 5. 14: Συγκριτικό διάγραμμα θλίψης με απλή έδραση σε υλικά με προσανατολισμό ινών 90°*



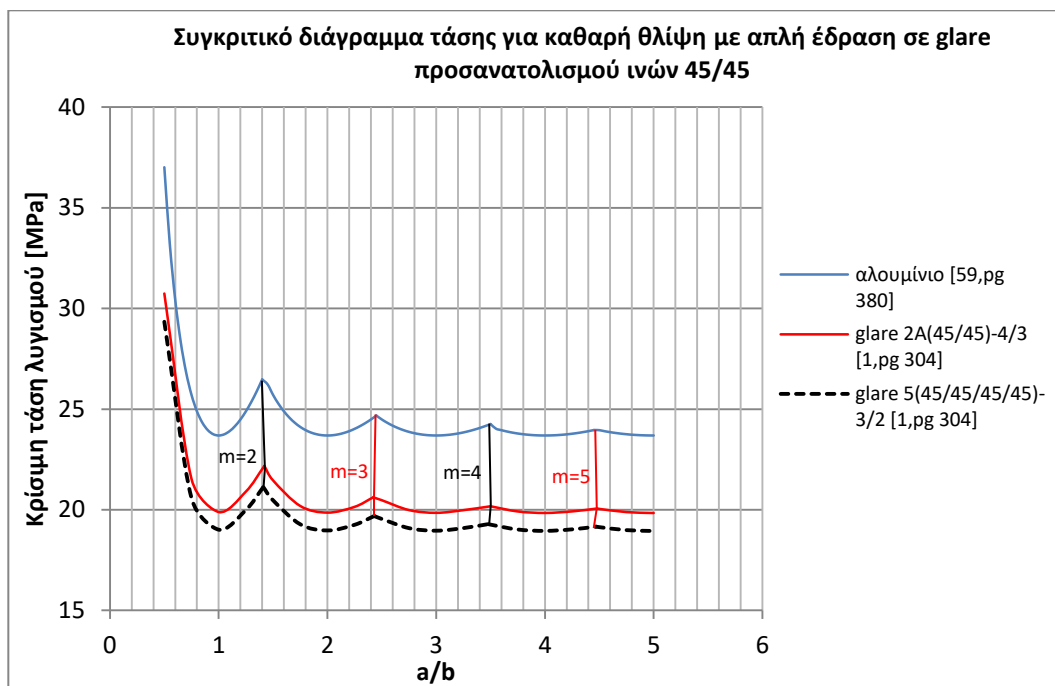
**Σχήμα 5. 15:** Συγκριτικό διάγραμμα θλίψης με απλή έδραση σε υλικά με cross-ply προσανατολισμό ινών

Αντίστοιχα, για τα υλικά με προσανατολισμό ινών  $90^\circ$  όπως διαπιστώνεται ξεκάθαρα από το Σχήμα 5.14, λαμβάνοντας ως σημεία έναρξης τα σημεία αλλαγής του πλήθους των ημικυμάτων του υλικού με το χαμηλότερο MVF (πολύστρωτο 90/90/90), η αύξηση της κατ' όγκου αναλογίας του αλουμινίου οδηγεί στη μετατόπιση αυτών των σημείων αλλαγής προς τα δεξιά, σε μεγαλύτερους, δηλαδή, λόγους  $a/b$ . Κατά συνέπεια, για ειδικά ορθότροπες απλώς εδρασμένες πλάκες προσανατολισμού  $90^\circ$  οι οποίες καταπονούνται σε θλίψη η αύξηση του MVF έχει ως αποτέλεσμα το λυγισμό τους με ημικύματα μικρότερου ή ίσου πλήθους όταν αυτές έχουν ίδιες διαστάσεις. Τέλος, στο Σχήμα 5.15 φαίνεται η επίδραση του MVF στις ιδιομορφές των υλικών με cross-ply προσανατολισμό. Σε αυτή την περίπτωση δεν επηρεάζονται σημαντικά τα σημεία αλλαγής του πλήθους αφού η διαφορά στο πλήθος των ημικυμάτων μεταξύ του πολύστρωτου και του αλουμινίου είναι αμελητέα.

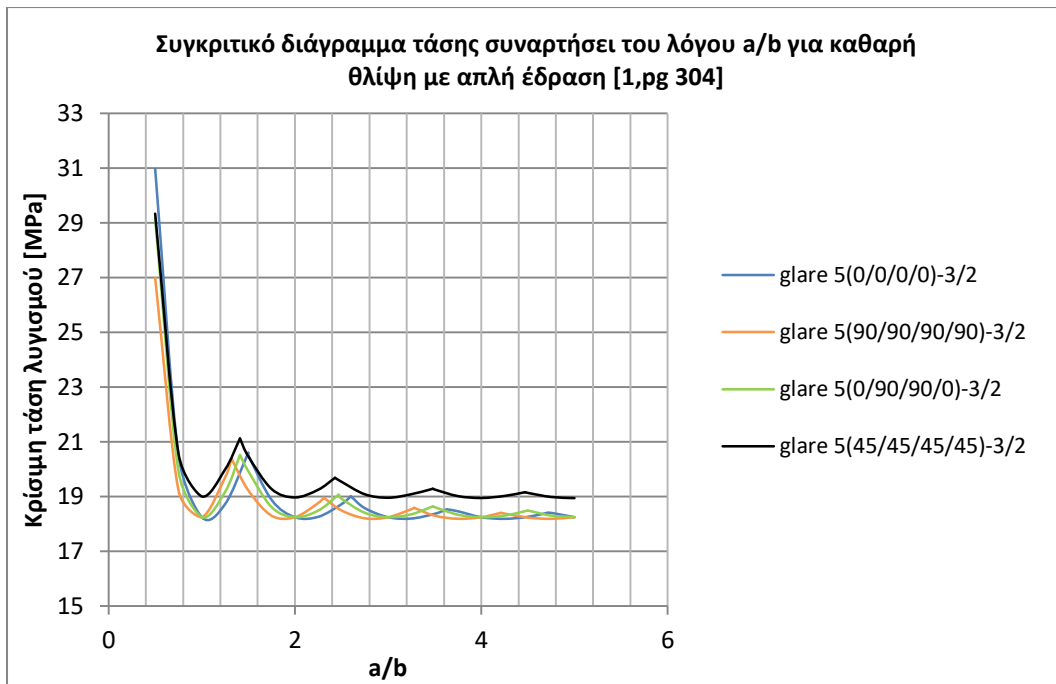
Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω παρατηρήσεις σχετικά με την επίδραση του προσανατολισμού των ινών στη δημιουργία των ιδιομορφών, τελικά προκύπτει ότι υπάρχει μία σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ των  $90^\circ$  και των  $0^\circ$  στο πλήθος των ημικυμάτων που δημιουργούνται για πλάκες ίδιου MVF και ίδιων διαστάσεων, κάτι που διαπιστώνεται ξεκάθαρα στα πολύστρωτα υλικά. Συμπεριλαμβάνοντας και τα υλικά glare σε αυτή την παρατήρηση προκύπτει ότι, ξεκινώντας από μηδενικό MVF, η αύξηση του ποσοστού του αλουμινίου οδηγεί τους λόγους  $a/b$  στους οποίους

παρατηρείται αλλαγή του πλήθους των ημικυμάτων να συγκλίνουν με τους λόγους  $a/b$  όπου αλλάζει το πλήθος για το αλουμίνιο. Η παρατήρηση αυτή ισχύει για όλους τους ειδικά ορθότροπους προσανατολισμούς (0/0, 90/90 και 0/90). Όσον αφορά στα μη ειδικά ορθότροπα υλικά, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.16 η διαφοροποίηση στο πλήθος των ημικυμάτων είναι αμελητέα σε σύγκριση με το αλουμίνιο, οπότε η αύξηση του MVF δεν επηρεάζει ουσιωδώς τις ιδιομορφές τους.

Τέλος, στο Σχήμα 5.17 όπου παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του glare 5-3/2-0,291667 για όλους τους προσανατολισμούς ινών οι οποίοι μελετήθηκαν στη περίπτωση της θλίψης με απλή έδραση, διαπιστώνεται ότι οι λόγοι  $a/b$  όπου παρατηρείται αλλαγή του πλήθους των ημικυμάτων για τον crossply προσανατολισμό και τις  $45^\circ$ , σχεδόν, ταυτίζονται. Οι λόγοι  $a/b$  για τις  $90^\circ$  είναι μικρότεροι και, αντίστοιχα, για τις  $0^\circ$  είναι μεγαλύτεροι.



**Σχήμα 5. 16:** Συγκριτικό διάγραμμα θλίψης με απλή έδραση σε υλικά με προσανατολισμό ινών  $45^\circ$



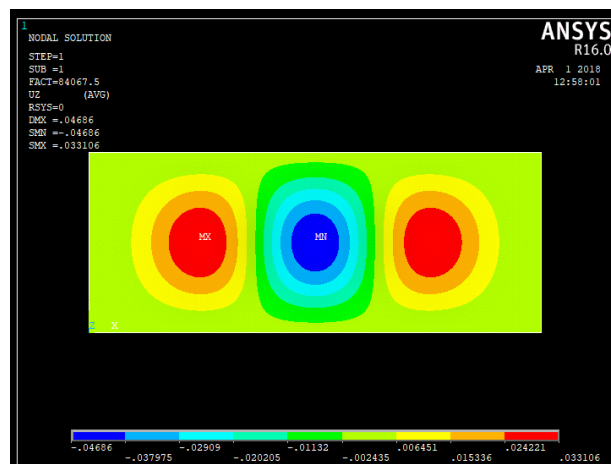
*Σχήμα 5. 17: Συγκριτικό διάγραμμα διαφορετικών προσανατολισμών ινών για θλίψη με απλή έδραση σε glare 5-3/2-0,291667*

### 5.2.2 Ιδιομορφές λόγω θλίψης με περιορισμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών

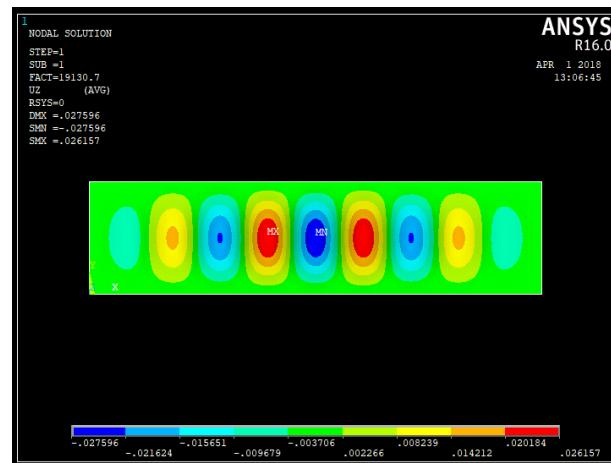
Η μελέτη των ιδιομορφών των πλακών οι οποίες μοντελοποιήθηκαν σε μονοαξονική θλίψη ολοκληρώνεται με την περίπτωση των περιορισμένων στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών. Αξιοποιώντας την ανάλυση με τη μέθοδο των ιδιοτιμών (eigenvalue buckling analysis) του ANSYS<sup>®</sup> προκύπτουν εύκολα οι ιδιομορφές μέσω των οποίων καθίσταται εμφανής η διαφοροποίηση σε σύγκριση με τις αντίστοιχες της απλής έδρασης. Από τα Σχήματα 4.30-4.33 και 5.18-5.22 φαίνεται η διαφορετική μορφή των ημικυμάτων καθώς χάνουν το συμμετρικό τους σχήμα ως προς το σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο τους. Ειδικότερα, από τα Σχήματα 5.9 και 5.18 διαπιστώνεται, άμεσα, η επίδραση των δεσμευμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών με τα ημικύματα να αναπτύσσονται πιο απομακρυσμένα από τα σύνορα της πλάκας. Ακόμη μια διαφοροποίηση σχετίζεται με την τιμή της βύθισης των ημικυμάτων κατά μήκος της πλάκας. Στην περίπτωση των περιορισμένων στροφών **τα ημικύματα δεν έχουν ίση κατ' απόλυτη τιμή βύθιση**. Αντίθετα, η βύθιση αυξάνεται κατά μήκος και μέχρι το μέσο της πλάκας και στη συνέχεια μειώνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο καθιστώντας τη συμμετρική όταν το πλήθος των half-waves είναι περιττό (Σχήμα 5.18) και αντισυμμετρική όταν είναι άρτιο (Σχήμα 5.19).

Ο προσανατολισμός των ινών εξακολουθεί να επιδρά με παρόμοιο τρόπο στις ιδιομορφές των υλικών και στη δέσμευση των στροφών. Στα Σχήματα 5.19 και 5.21

φαίνονται λυγισμένες πολύστρωτες πλάκες με  $a/b=4$  και η πλάκα 90/90/90 έχει  $m=9$  ημικύματα, ενώ η πλάκα 0/0/0 έχει  $m=4$  ημικύματα. Αντίστοιχη παρατήρηση πραγματοποιείται και για το glare 2A-4/3-0,28125, όπου όταν ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού είναι  $0^\circ$  δημιουργούνται  $m=5$  half-waves (Σχήμα 5.21) και όταν είναι  $90^\circ$  δημιουργούνται  $m=6$  (Σχήμα 4.40). Επομένως, προκύπτει ότι ο προσανατολισμός των  $90^\circ$  σε υλικά τα οποία έχουν ίδιες διαστάσεις (λόγο  $a/b$ ) και ίδιο MVF δημιουργεί είτε περισσότερα είτε ίσα ημικύματα σε σύγκριση με τον προσανατολισμό των  $0^\circ$ , όπως αποδείχθηκε, άλλωστε, και από τη συγκριτική ανάλυση των διαγραμμάτων της προηγούμενης υποενότητας.

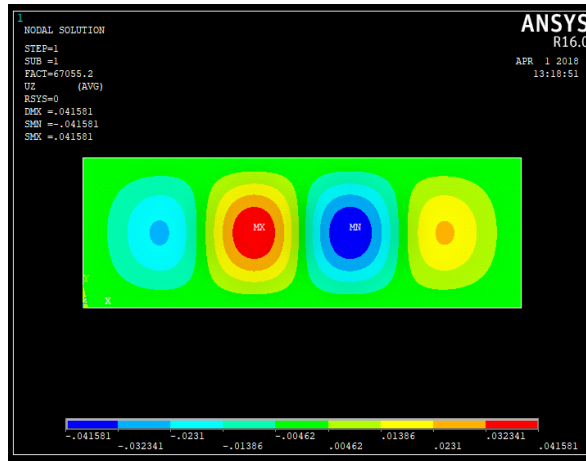


Σχήμα 5. 18: Ιδιομορφή πλάκας αλουμινίου πάχους 1,875mm σε θλίψη με περιορισμό των στρωφών ( $a/b=2,5$ )

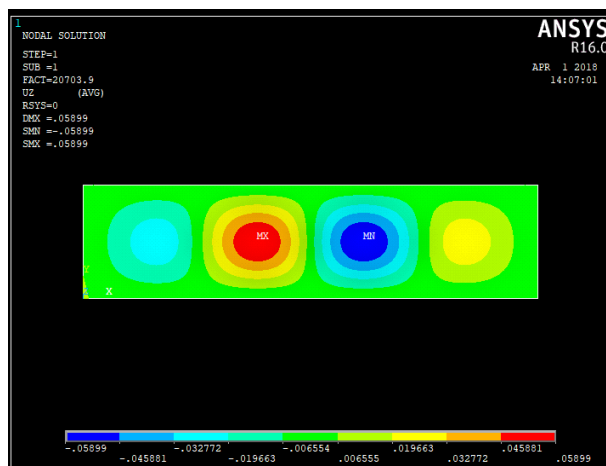


Σχήμα 5. 19: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 90/90/90 σε θλίψη με περιορισμό των στρωφών ( $a/b=4$ )

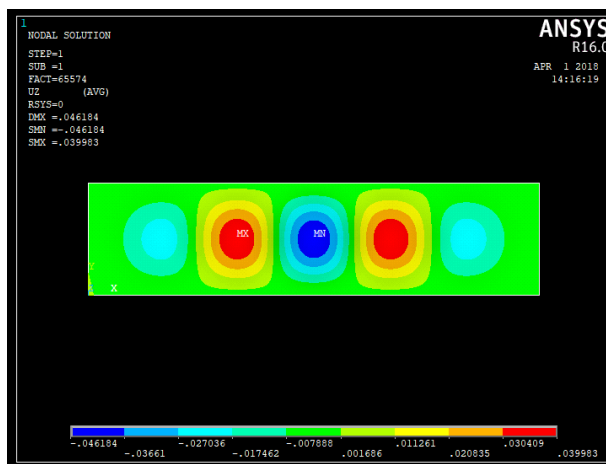




Σχήμα 5. 20: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(0/0)-4/3-0,28125 σε θλίψη με περιορισμό των στροφών ( $a/b=3$ )



Σχήμα 5. 21: Ιδιομορφή πολύστρωτης πλάκας 0/0/0 σε θλίψη με περιορισμό των στροφών ( $a/b=4$ )



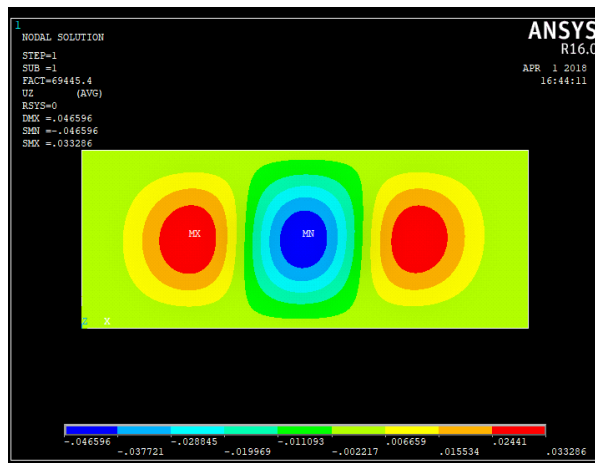
Σχήμα 5. 22: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(0/0)-4/3-0,28125 σε θλίψη με περιορισμό των στροφών ( $a/b=4$ )

Η διαφοροποίηση της δημιουργίας λυγισμένων σχημάτων με διαφορετικό πλήθος ημικυμάτων για πλάκες με ίδιο MVF, ίδιες διαστάσεις και ίδιο προσανατολισμό ινών παρατηρείται και μεταξύ των δύο συνοριακών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι **η πάκτωση των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών μίας πλάκας τείνει να δημιουργεί ημικύματα μεγαλύτερου πλήθους σε σύγκριση με την απλή έδραση**. Ειδικότερα, το πλήθος σε όλες τις περιπτώσεις για την δέσμευση των στροφών ήταν είτε μεγαλύτερο είτε ίσο με αυτό της απλής έδρασης, όπως φαίνεται και από τα στοιχεία του Πίνακα 5.3. Με γκρι γέμισμα έχουν επισημανθεί οι γραμμές του πίνακα στις οποίες η δέσμευση των στροφών οδήγησε σε περισσότερα ημικύματα απ' ότι η απλή έδραση. Το πλήθος των half-waves των απλώς εδρασμένων πλακών προκύπτει είτε μέσω των ιδιομορφών του ANSYS® είτε άμεσα μέσω των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων των Σχημάτων 5.13-5.16, ενώ για τις περιστροφικά περιορισμένες πλάκες προκύπτει, αποκλειστικά, μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62].

**Πίνακας 5. 3:** Σύγκριση του πλήθους των ημικυμάτων για όμοιες πλάκες με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες

ΥΛΙΚΟ	a/b	ΠΛΗΘΟΣ ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ (m)- ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΡΟΦΩΝ [62]	ΠΛΗΘΟΣ ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ (m)- ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ (Σχήμα 5.2)
Glare 2A(0/0)-3/2-0,45833	1,5	2 (Σχήμα 4.38)	2
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	1,5	2 (Σχήμα 4.39)	2
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	4	6 (Σχήμα 4.40)	4
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	4	6 (Σχήμα 4.41)	4
Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667	2,5	3 (Σχήμα 4.42)	3
Αλουμίνιο	2,5	3 (Σχήμα 5.17)	3
Πολύστρωτο 90/90/90	4	9 (Σχήμα 5.18)	6
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125	3	4 (Σχήμα 5.19)	3
Πολύστρωτο 0/0/0	4	4 (Σχήμα 5.20)	3
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125	4	5 (Σχήμα 5.21)	4

Τέλος, από τα Σχήματα 4.33 και 5.23 όπου παρουσιάζονται οι ιδιομορφές των μη ειδικά ορθότροπων υλικών, τα οποία καταπονούνται σε θλίψη με περιορισμό των στροφών διαπιστώνεται όπως και στην απλή έδραση ότι τα ημικύματα αποκτούν ένα διαφορετικό στραμμένο σχήμα με αποτέλεσμα να χάνεται είτε η συμμετρία είτε η αντισυμμετρία της πλάκας ως προς το σύστημα αξόνων που διέρχεται από το κέντρο βάρους της. Παρ' όλα αυτά ο προσανατολισμός των 45° οδηγεί στη δημιουργία επίσης χαρακτηριστικών ιδιομορφών ακόμη και σε διαφορετικά υλικά.



Σχήμα 5. 23: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(45/45)-4/3-0,28125 σε θλίψη με περιορισμό των στροφών ( $a/b=2,5$ )

### 5.2.3 Συμπεράσματα της ανάλυσης των ιδιομορφών για τη θλίψη

Από την διαδικασία ανάλυσης των ιδιομορφών των πλακών οι οποίες μοντελοποιήθηκαν στα πλαίσια της παρούσας έρευνας σε λυγισμό λόγω μονοαξονικής θλίψης με απλή έδραση (simply supported) και με δέσμευση των στροφών κατά μήκος των πλευρών (all edges clamped) προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Η σημαντικότερη παράμετρος, η οποία επηρεάζει τις ιδιομορφές για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης είναι οι συνοριακές συνθήκες. Τόσο η απλή έδραση όσο και ο περιορισμός των στροφών οδηγούν στη δημιουργία λυγισμένων πλακών χαρακτηριστικού σχήματος η κάθε μία, οι οποίες, ωστόσο, διαφέρουν μεταξύ τους.
2. Η αύξηση του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) σε μία πλάκα η οποία καταπονείται σε θλίψη οδηγεί στη δημιουργία λυγισμένου σχήματος μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων.
3. Οι απλώς εδρασμένες ειδικά ορθότροπες πλάκες (specially orthotropic), οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Τα ημικύματα είναι συμμετρικά ως προς τους δύο άξονες του παράλληλου με τις πλευρές της πλάκας συστήματος συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο τους και έχουν ίση κατά απόλυτη τιμή βύθιση. Επίσης, οι απλώς εδρασμένες ειδικά ορθότροπες πλάκες είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα παράλληλο στις διαμήκεις πλευρές τους, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους τους. Είναι συμμετρικές ως προς τον παράλληλο στις εγκάρσιες πλευρές άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ίδιο σημείο, όταν το πλήθος των half waves είναι περιττό και αντι-συμμετρικές ως προς τον ίδιο άξονα όταν το πλήθος των ημικυμάτων είναι περιττό.

4. Οι απλώς εδρασμένες μη ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή, αποτελούμενη από ημικύματα ίδιου σχήματος και διαφορετικού πλήθους για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Τα ημικύματα αυτά έχουν ίση κατά απόλυτη τιμή βύθιση.
5. Ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού επιδρά στο πλήθος των ημικυμάτων που δημιουργούνται, όταν οι πλάκες καταπονούνται σε θλίψη και στις δύο οριακές συνθήκες. Ο προσανατολισμός των  $90^\circ$  δημιουργεί περισσότερα ή ίσα ημικύματα σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς για πλάκες ίδιων διαστάσεων. Ο cross-ply προσανατολισμός και αυτός των  $45^\circ$  οδηγεί στη δημιουργία περισσότερων ή ίσων ημικυμάτων σε σύγκριση με τον προσανατολισμό των  $0^\circ$ .
6. Η αύξηση της κατ' όγκου αναλογίας αλουμινίου (MVF) στα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε θλίψη με απλή έδραση οδηγεί τις τιμές των λόγων  $a/b$  στις οποίες παρατηρείται αλλαγή του πλήθους των ημικυμάτων να συγκλίνουν στις αντίστοιχες τιμές των λόγων  $a/b$  του αλουμινίου. Συγκεκριμένα, οι τιμές των λόγων  $a/b$  αλλαγής του πλήθους των ημικυμάτων για το αλουμίνιο (MVF=100%) είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές των υλικών, τα οποία έχουν προσανατολισμό ινών  $90^\circ$  και μικρότερες από τις τιμές των υλικών προσανατολισμού  $0^\circ$ . Στα υλικά προσανατολισμού  $90^\circ$  η αύξηση του MVF οδηγεί στην αύξηση των τιμών των λόγων  $a/b$  στις οποίες προστίθενται ημικύματα στις ιδιομορφές, μέχρι να φτάσουν τις αντίστοιχες τιμές του αλουμινίου. Αντίθετα, στα υλικά των  $0^\circ$  η αύξηση του MVF οδηγεί στη μείωση αυτών των λόγων  $a/b$  ώστε, σταδιακά, προσεγγίζονται οι αντίστοιχες τιμές του αλουμινίου.
7. Οι ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων, για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Σε αντίθεση με την απλή έδραση η δέσμευση των στροφών φαίνεται να οδηγεί στην ανάπτυξη ημικυμάτων πιο απομακρυσμένων από το σύνορο, με αποτέλεσμα να μην έχουν ίση κατ' απόλυτη τιμή βύθιση. Η βύθιση αυξάνεται κατά μήκος και μέχρι το μέσο της πλάκας και, στη συνέχεια, μειώνεται με τον ίδιο τρόπο.
8. Οι ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα παράλληλο στις διαμήκειες πλευρές τους, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους τους. Είναι συμμετρικές ως προς τον παράλληλο στις εγκάρσιες πλευρές άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ίδιο σημείο, όταν το πλήθος των half waves είναι περιττό και αντι-συμμετρικές ως προς τον ίδιο άξονα όταν το πλήθος των ημικυμάτων είναι περιττό.

9. Οι μη ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες θλίβονται έχοντας δεσμευμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών τους αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων. Η τιμή της βύθισης των ημικυμάτων αυξάνεται κατά μήκος και μέχρι το μέσο της πλάκας και, στη συνέχεια, μειώνεται.
10. Η δέσμευση των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας οδηγεί στη δημιουργία ιδιομορφών αποτελούμενων από μεγαλύτερο ή ίσο πλήθος ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση σε όμοιες πλάκες.

### 5.3 Συγκριτική ανάλυση διαγραμμάτων στη περίπτωση του λυγισμού λόγω διάτμησης

Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθούν τα διαγράμματα τα οποία προέκυψαν από τη μοντελοποίηση σε λυγισμό πλακών λόγω διάτμησης με διαφορετικές συνθήκες στήριξης. Αυτές είναι η απλή έδραση (simply supported), ο περιορισμός των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών της πλάκας (all edges clamped) και η μικτή οριακή συνθήκη, η οποία, περιγραφικά, θα αναφέρεται ως TSLC (Transverse edges Simply supported and Longitudinal edges Clamped) [59,pg 388]. Στην τελευταία συνθήκη στήριξης, όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι διαμήκεις πλευρές της πλάκας έχουν δεσμευμένες ελευθερίες στροφών και οι εγκάρσιες είναι απλώς εδρασμένες. Στον Πίνακα 5.4 αναφέρονται τα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω διάτμησης και ταξινομούνται σε φθίνουσα διάταξη με κριτήριο το ποσοστό του όγκου του αλουμινίου (MVF) και υπενθυμίζεται ότι το πάχος όλων αυτών ήταν σταθερό και ίσο με  $t=1,875\text{mm}$ .

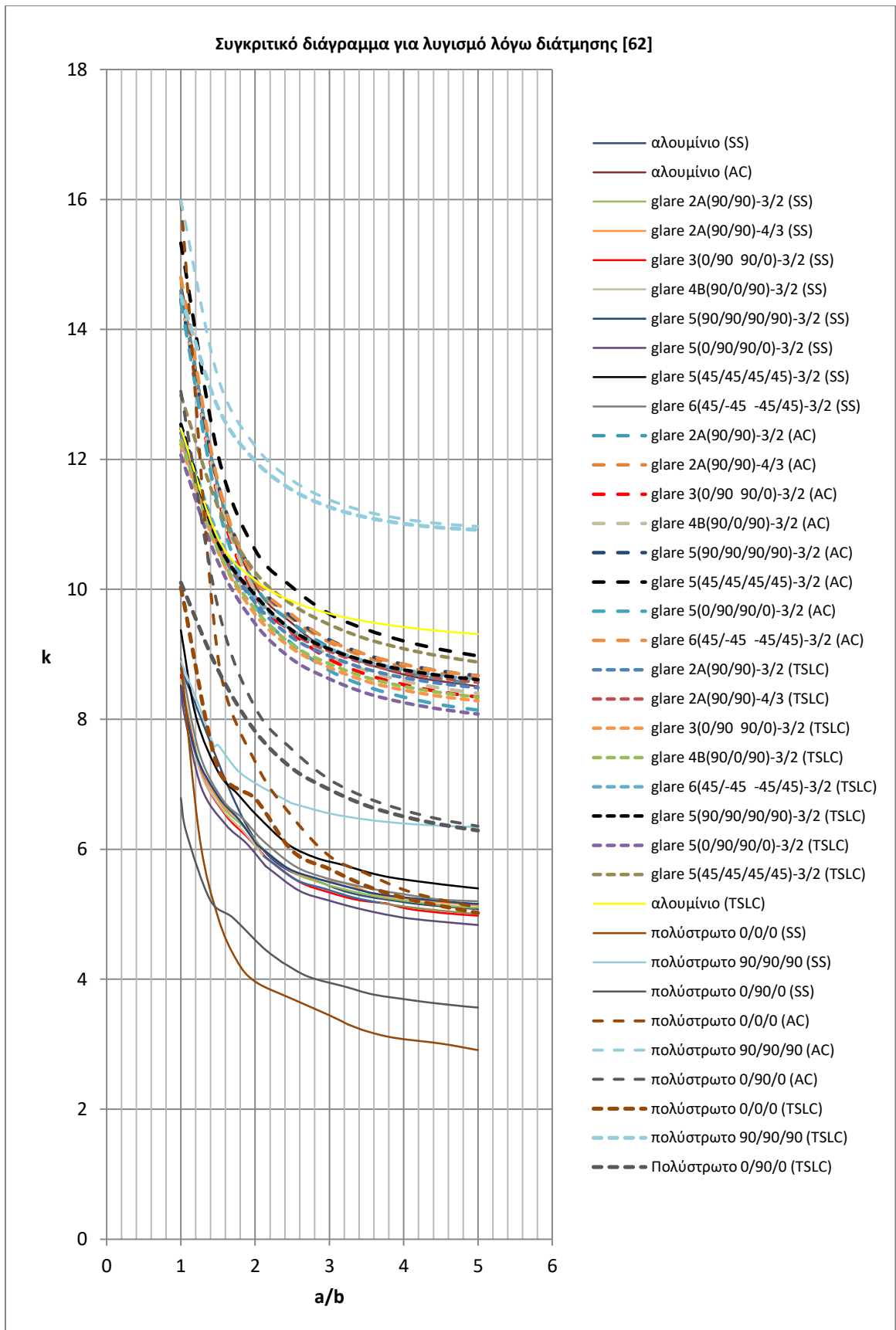
**Πίνακας 5. 4:** Υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω διάτμησης σε φθίνουσα διάταξη βάσει του ποσοστού MVF

ΥΛΙΚΑ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΛΟΓΩ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ	MVF (%)
Αλουμίνιο	100
Glare 2A(90/90)-3/2-0,458333 Glare 3(0/90 90/0)-3/2-0,458333 Glare 6(45/-45 -45/45)-3/2-0,458333	73,33
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 Glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375	60
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667 Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 Glare 5(45/45/45/45)-3/2-0,291667	46,67

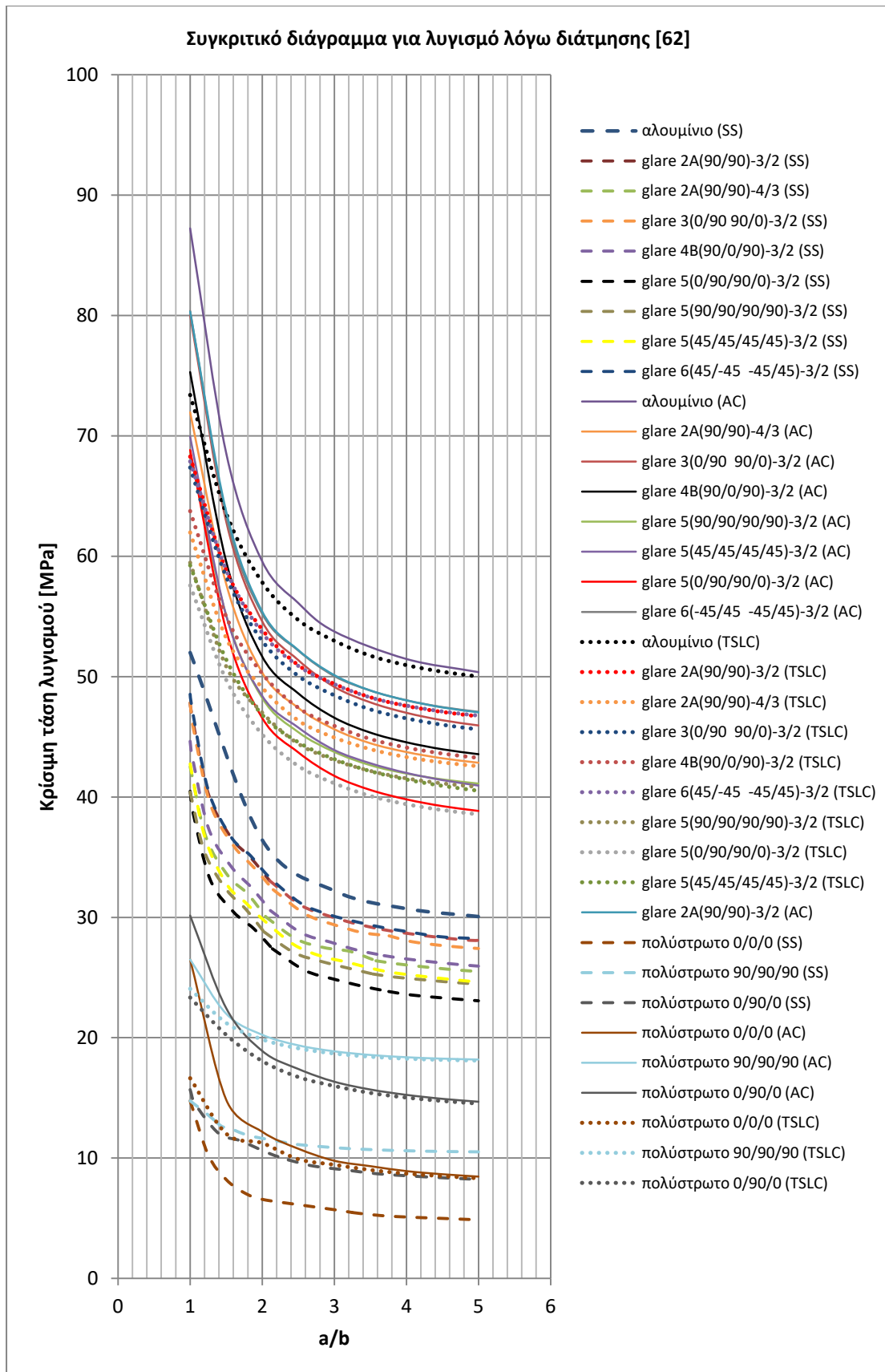
Πολύστρωτο 0/0/0 Πολύστρωτο 90/90/90 Πολύστρωτο 0/90/0	0
--	---

Στα παρακάτω συγκριτικά διαγράμματα των Σχημάτων 5.24 και 5.25 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι γραφικές παραστάσεις του συντελεστή λυγισμού  $k$  και της κρίσιμης τάσης λυγισμού, αντίστοιχα, για όλες τις μοντελοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν, στα πλαίσια της παρούσας έρευνας, με εφαρμογή διατμητικής φόρτισης. Καταρχάς, η βασική παρατήρηση, η οποία πραγματοποιείται άμεσα σχετίζεται με την επίδραση του λόγου  $a/b$  στις τιμές των κρίσιμων μεγεθών. Φαίνεται ότι **όλες οι καμπύλες είναι γνησίως φθίνουσες** με την κρίσιμη τάση και τον συντελεστή  $k$  να αποκτούν υψηλές τιμές για  $a/b \approx 1$  και να μειώνονται για μεγαλύτερους λόγους  $a/b$ . Επίσης, όπως και στην περίπτωση της θλίψης, είναι εμφανής η καθοριστική επίδραση των συνοριακών συνθηκών. Ειδικότερα, για κάθε υλικό οι τιμές τόσο της τάσης όσο και του συντελεστή  $k$  είναι μεγαλύτερες στην περίπτωση της δέσμευσης των ελευθεριών των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών και της TSLC συνοριακής συνθήκης σε σύγκριση με την απλή έδραση. Όσον αφορά στις δύο πρώτες συνθήκες στήριξης, δεν μπορεί να εξαχθεί κάποιο άμεσο γενικό συμπέρασμα για αυτή που οδηγεί σε μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού και θα πρέπει να εξεταστούν με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σε επόμενα διαγράμματα.

Επόμενος βασικός παράγοντας, ο οποίος επιδρά στην κρίσιμη τάση λυγισμού, είναι **η αναλογία του όγκου του αλουμινίου (MVF)**. Ειδικότερα, **όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές της τάσης** για την κάθε οριακή συνθήκη όπως διαπιστώνεται ξεκάθαρα από τα αντίστοιχα διαγράμματα των Σχημάτων 5.26, 5.27 και 5.28.

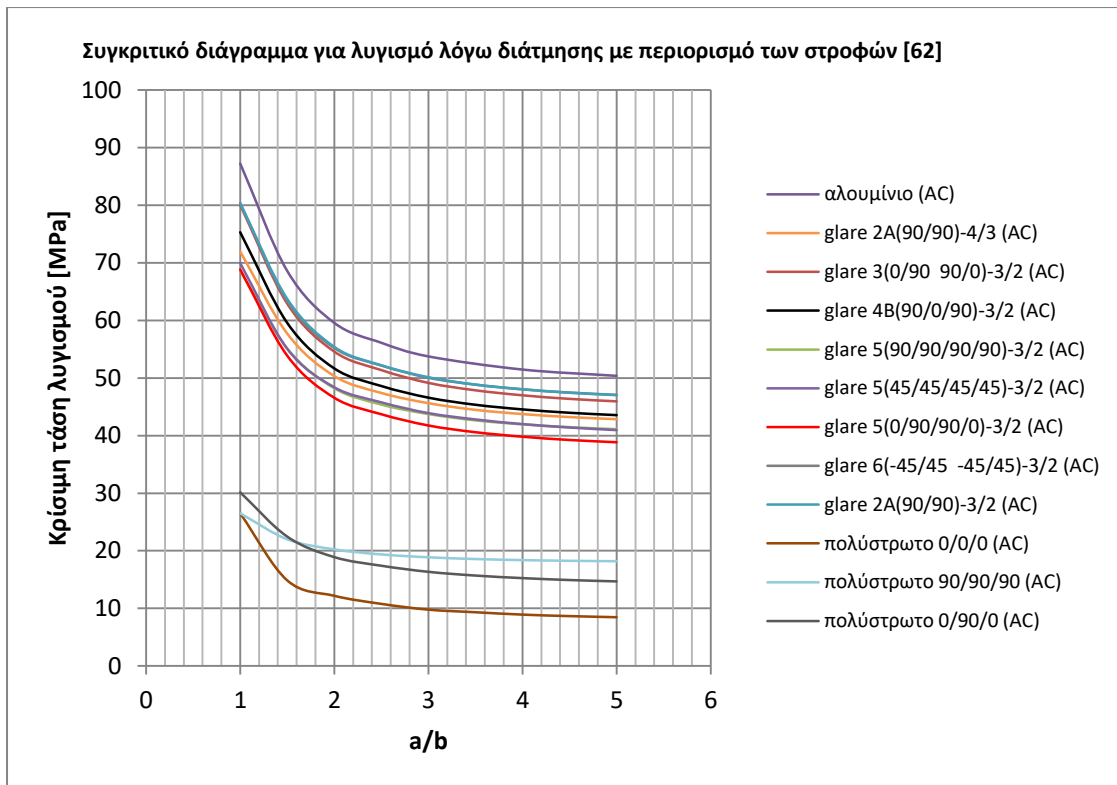


**Σχήμα 5. 24:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή  $k$  σε λυγισμό λόγω διάτμησης (SS: Simply Supported, AC: All edges Clamped, TSLC: Transverse edges Simply supported and Longitudinal edges Clamped)

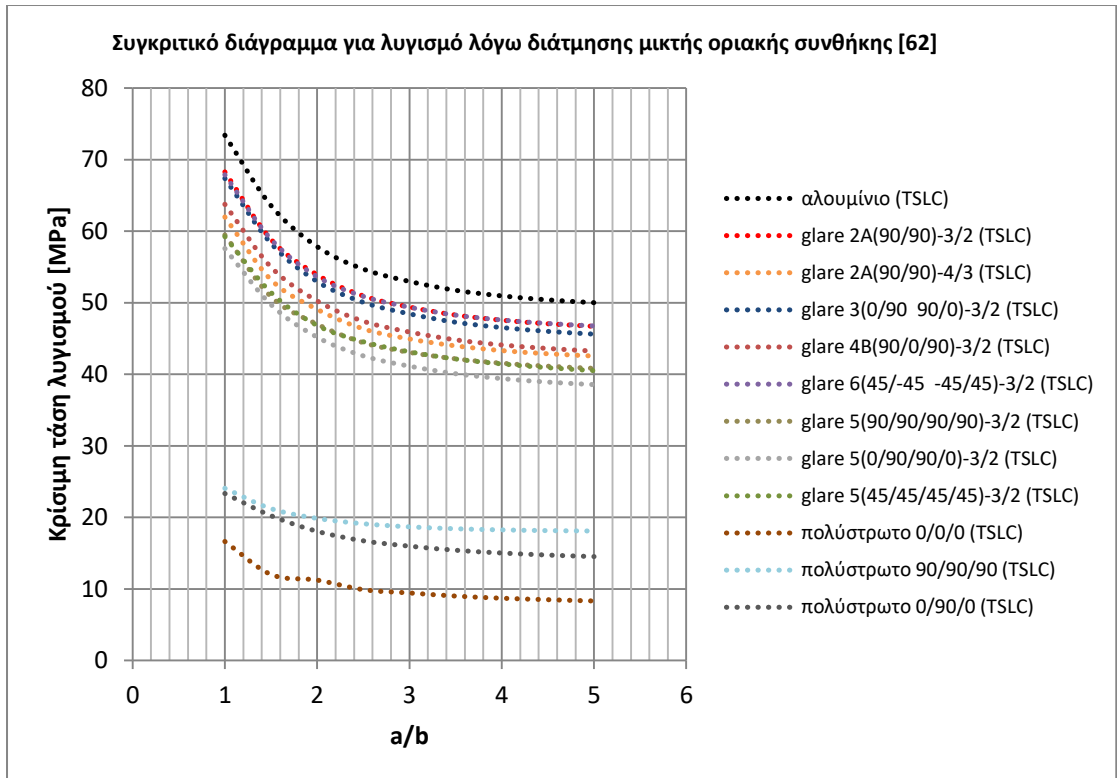


**Σχήμα 5. 25:** Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης (SS: Simply Supported, AC: All edges Clamped, TSLC: Transverse edges Simply supported and Longitudinal edges Clamped)

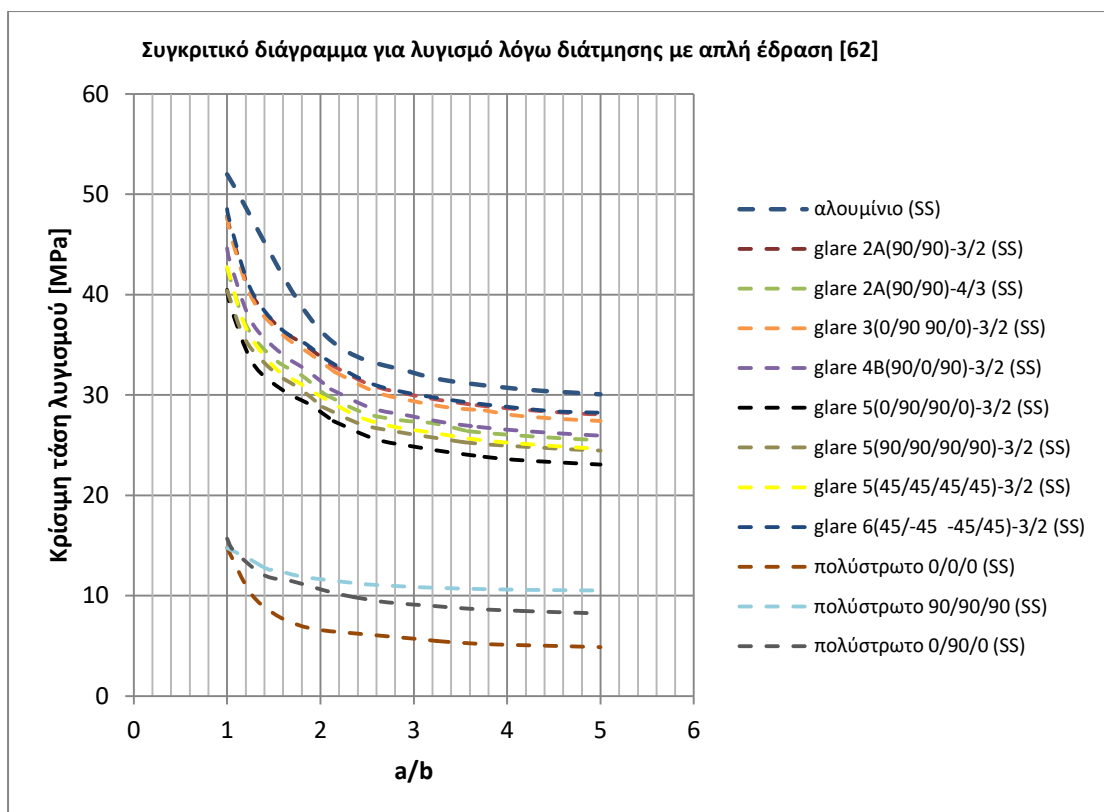




*Σχήμα 5. 26: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης για περιορισμό των στροφών*



*Σχήμα 5. 27: Συγκριτικό διάγραμμα κρίσιμης τάσης λυγισμού λόγω διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC)*



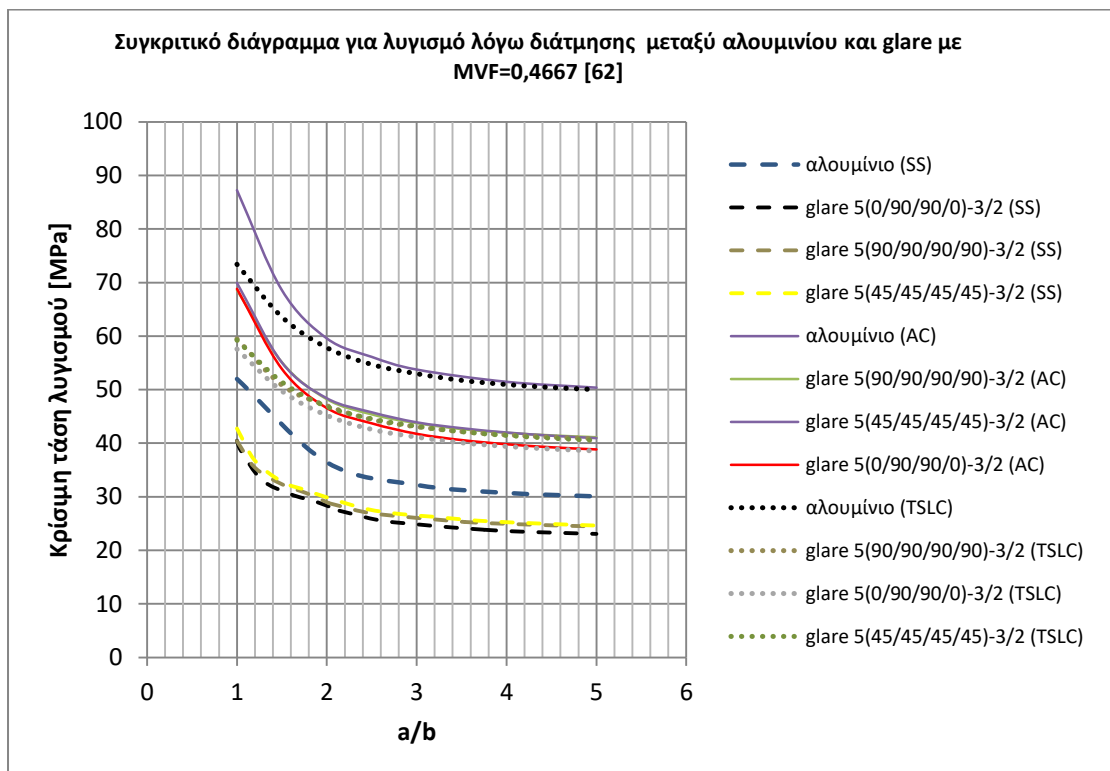
**Σχήμα 5. 28:** Συγκριτικό διάγραμμα λόγω διάτμησης με απλή έδραση

Ακόμη μία παράμετρος η οποία επηρεάζει την κρίσιμη τάση λυγισμού είναι ο **προσανατολισμός των ινών** του σύνθετου υλικού και προκειμένου να μελετηθεί διεξοδικότερα θα αναλυθούν χωριστά τα διαγράμματα ομαδοποιημένα με κριτήριο την αναλογία του αλουμινίου στον όγκο των υλικών. Ξεκινώντας με τα πολύστρωτα υλικά τα οποία δεν έχουν αλουμίνιο στη σύνθεσή τους ( $MVF=0$ ), στην περίπτωση της δέσμευσης των στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών (Σχήμα 5.26), φαίνεται ότι για λόγους  $a/b \leq 1,5$  ο cross-ply προσανατολισμός είναι αυτός με τη μεγαλύτερη τάση λυγισμού και για μεγαλύτερους λόγους ( $a/b \geq 1,5$ ), πιο ανθεκτικός σε λυγισμό γίνεται ο προσανατολισμός των  $90^\circ$ . Οι  $0^\circ$  έχουν τη μικρότερη τάση λυγισμού σε όλο το φάσμα των λόγων  $a/b$  και για όλες τις συνθήκες στήριξης. Στην περίπτωση της μικτής οριακής συνθήκης (TSLC) από το Σχήμα 5.27 παρατηρείται ότι για όλες τις τιμές των λόγων  $a/b$  πιο ανθεκτικός είναι ο προσανατολισμός των  $90^\circ$  και επόμενος είναι ο cross-ply. Τέλος, στην απλή έδραση (Σχήμα 5.28) για  $a/b \leq 1,2$  ο προσανατολισμός  $0/90/0$  έχει μεγαλύτερη τάση λυγισμού και για  $a/b \geq 1,2$  ο προσανατολισμός των  $90^\circ$ .

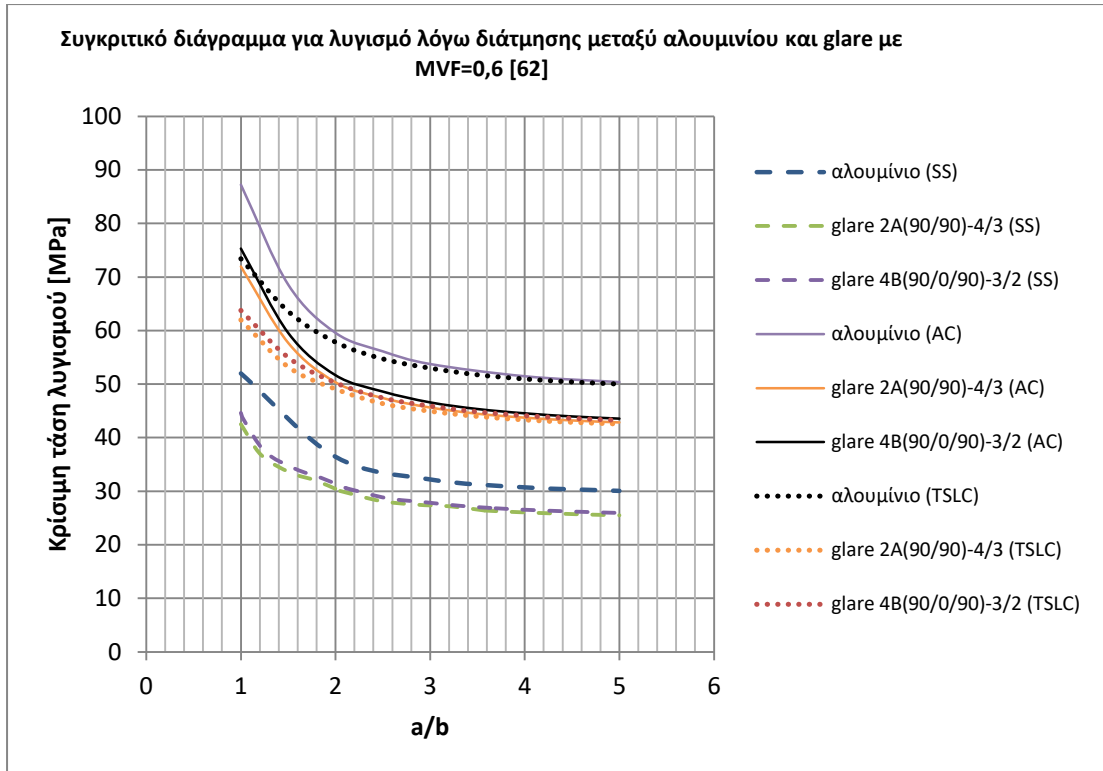
Συνεχίζοντας τη μελέτη της επίδρασης του προσανατολισμού των ινών στην κρίσιμη τάση λυγισμού παρατηρούνται οι γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 5.29 του αλουμινίου και των υλικών glare 5, τα οποία έχουν το χαμηλότερο MVF. Διαπιστώνεται ότι και για τις τρεις οριακές συνθήκες ο cross-ply προσανατολισμός του glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667 έχει τη χαμηλότερη τάση σε σύγκριση με τους προσανατολισμούς των  $90^\circ$  και των  $45^\circ$ . Οι δύο τελευταίοι δεν εμφανίζουν

σημαντική διαφοροποίηση στην μικτή οριακή συνθήκη και στη δέσμευση όλων των στρωφών, ενώ στην απλή έδραση οι  $45^\circ$  είναι πιο ανθεκτικές σε λυγισμό. Στο Σχήμα 5.30 παρουσιάζονται οι καμπύλες των υλικών glare με  $MVF=0,6$ . Και σε αυτή την περίπτωση ο προσανατολισμός των  $90^\circ$  (glare 2A(90/90)-4/3-0,28125) έχει μεγαλύτερη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τον cross-ply του glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375 σε όλο το φάσμα των λόγων a/b. Τέλος, στο Σχήμα 5.31 συγκρίνονται οι γραφικές παραστάσεις των υλικών glare με  $MVF=0,733$ . Για όλες τις συνθήκες στήριξης ο cross-ply προσανατολισμός του glare 3(0/90 90/0)-3/2-0,458333 έχει τη χαμηλότερη τάση λυγισμού και δεν υπάρχει ουσιαστική διάκριση μεταξύ των  $90^\circ$  και  $45^\circ$  (glare 2A(90/90)-3/20,458333 και glare 6(45/-45 -45/45)-3/2-0,458333).

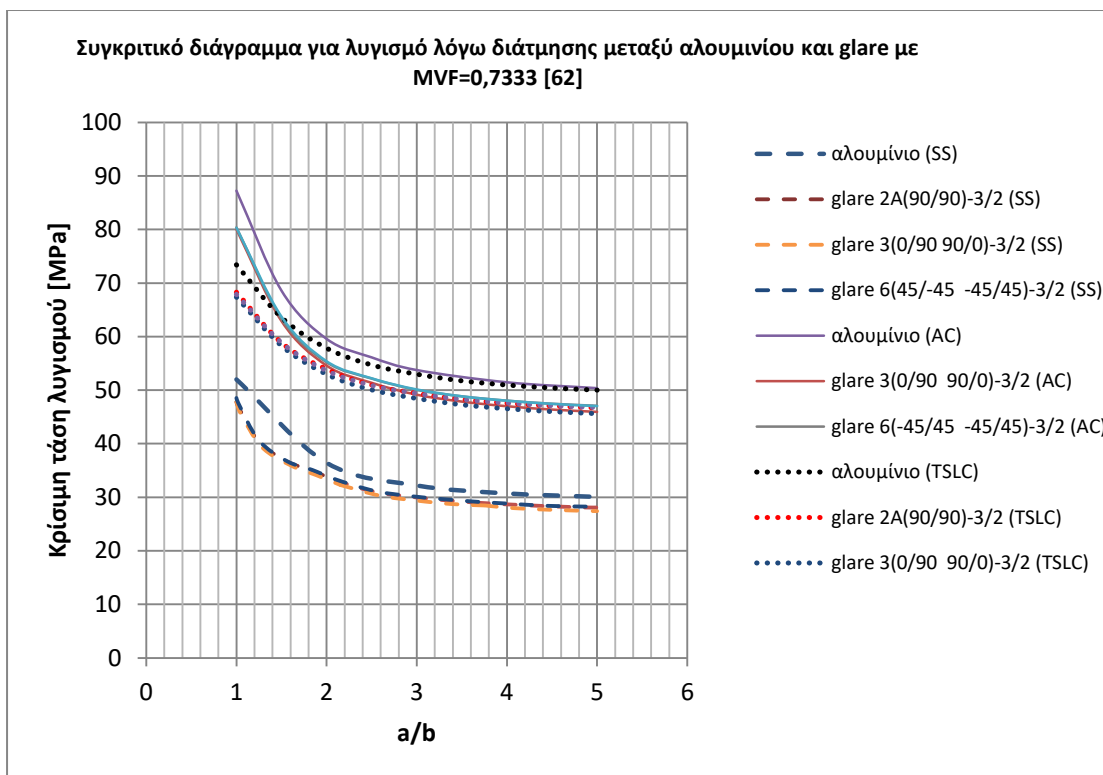
Μία γενική παρατήρηση, η οποία πραγματοποιείται από τα Σχήματα 5.29, 5.30 και 5.31 αφορά στη σύγκριση των γραφικών παραστάσεων μεταξύ της πάκτωσης όλων των στρωφών και της μικτής οριακής συνθήκης. Φαίνεται ότι για όλες τις περιπτώσεις των υλικών η καμπύλη της πάκτωσης είναι «πάνω» από την αντίστοιχη της μικτής συνθήκης με τη διαφορά τους να μειώνεται όσο αυξάνει ο λόγος a/b. Για υλικά ίδιου τύπου ο περιορισμός των στρωφών κατά μήκος των πλευρών είναι πιο ανθεκτικός σε λυγισμό σε σύγκριση με την μικτή οριακή συνθήκη.



**Σχήμα 5. 29:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης για λυγισμό λόγω διάτμησης μεταξύ αλουμινίου και υλικών glare με  $MVF=0,4667$



*Σχήμα 5. 30: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης για λυγισμό λόγω διάτμησης μεταξύ αλουμινίου και υλικών glare με  $MVF=0,6$*



*Σχήμα 5. 31: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης για λυγισμό λόγω διάτμησης μεταξύ αλουμινίου και υλικών glare με  $MVF=0,7333$*

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

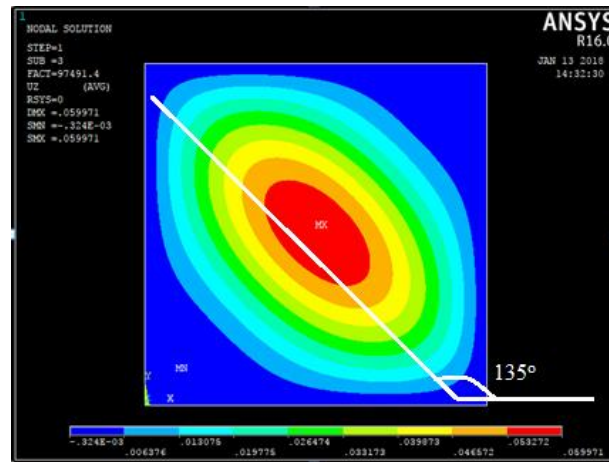
Από την ανάλυση των διαγραμμάτων που πραγματοποιήθηκε σε αυτή την ενότητα για την περίπτωση της καθαρής διάτμησης (pure shear) με απλή έδραση, με περιορισμό των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών και με μικτή οριακή συνθήκη προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από την μοντελοποίηση όλων των υλικών και για όλες τις συνθήκες στήριξης ήταν γεννσιώς φθίνουσες. Η αύξηση του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) οδήγησε σε μείωση τόσο του συντελεστή λυγισμού  $k$  όσο και της κρίσιμης τάσης λυγισμού.
2. Η δέσμευση των ελευθεριών των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών (all edges clamped) οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές κρίσιμης τάσης λυγισμού και συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση (simply supported) και τη μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) για το κάθε υλικό.
3. Η μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές κρίσιμης τάσης λυγισμού και συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση (simply supported) για το κάθε υλικό.
4. Η αναλογία του όγκου του αλουμινίου (MVF) λειτουργεί με τρόπο ανάλογο στην κρίσιμη τάση λυγισμού για υλικά τα οποία μοντελοποιούνται σε διάτμηση με ίδιες οριακές συνθήκες. Όσο μεγαλύτερο το MVF τόσο μεγαλύτερη η τάση λυγισμού για τα απλώς εδρασμένα υλικά. Αντίστοιχα για τα περιστροφικά περιορισμένα και για τα υλικά τα οποία μοντελοποιούνται με μικτή οριακή συνθήκη.
5. Από τη μελέτη των πολύστρωτων υλικών με διαφορετικό προσανατολισμό ινών προκύπτει ότι ο πιο ανθεκτικός προσανατολισμός σε λυγισμό λόγω καθαρής διάτμησης είναι ο 90/90/90 και ο λιγότερο ανθεκτικός ο 0/0/0.
6. Για τα υλικά glare με ίσο MVF ο cross-ply προσανατολισμός ινών είναι λιγότερο ανθεκτικός σε λυγισμό λόγω διάτμησης σε σύγκριση με τους προσανατολισμούς των 90° και των 45°.

### **5.4 Συγκριτική ανάλυση ιδιομορφών στην περίπτωση λυγισμού λόγω διάτμησης**

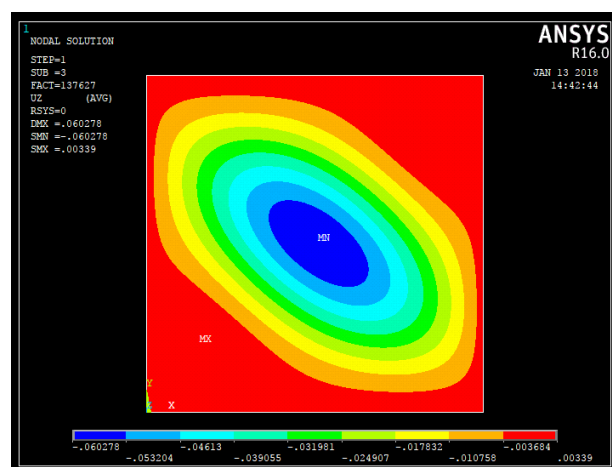
Ένα γενικό συμπέρασμα το οποίο προκύπτει από τη μελέτη των ιδιομορφών στην περίπτωση της διάτμησης αφορά στη δημιουργία χαρακτηριστικών ημικυμάτων τα οποία **σχηματίζουν με τον οριζόντιο άξονα x γωνία 135°** όπως φαίνεται τόσο από το Σχήμα 5.32 όσο και από όλα τα επόμενα Σχήματα που θα ακολουθήσουν. Σε όλες τις συνθήκες στήριξης τα ημικύματα έχουν αυτό τον προσανατολισμό, ο οποίος

σχετίζεται άμεσα με τη διατμητική φόρτιση και τη διεύθυνσή της όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 3.26 του 3<sup>ου</sup> Κεφαλαίου.

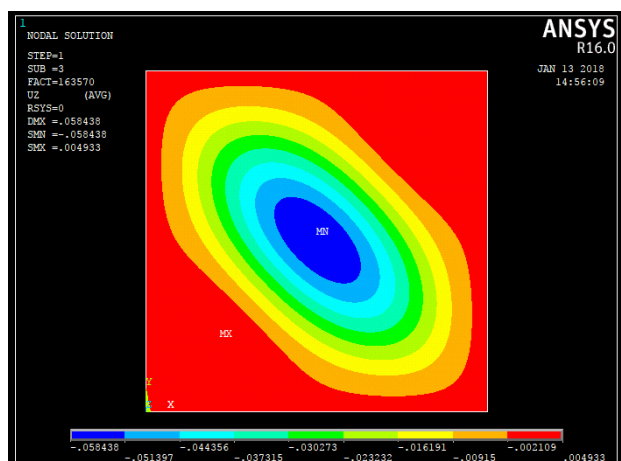


**Σχήμα 5. 32:** Ιδιομορφή για διάτμηση με απλή έδραση σε πλάκα αλουμινίου όπου φαίνεται ο προσανατολισμός των ημικυμάτων ( $a/b=1$ )

Η κυρίαρχη παράμετρος, η οποία επιδρά στις ιδιομορφές των υλικών που μοντελοποιήθηκαν είναι οι συνθήκες στήριξης, τόσο ως προς τη μορφή των ημικυμάτων όσο και ως προς το πλήθος τους. Ειδικότερα, στη περίπτωση της μικτής οριακής συνθήκης (TSLC) τα ημικύματα είναι πιο απομακρυσμένα από τα σύνορα/πλευρές της πλάκας στις οποίες είναι δεσμευμένες όλες οι ελευθερίες στροφών σε σύγκριση με τα σύνορα/πλευρές οι οποίες έχουν ελευθερία περιστροφής (Σχήμα 5.33). Πρόκειται για τις δύο παράλληλες πλευρές στον άξονα x. Αυτή η παρατήρηση πραγματοποιήθηκε, αντίστοιχα, και για την περίπτωση της πάκτωσης των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών όπου τα ημικύματα είναι πιο απομακρυσμένα από όλες τις πλευρές της πλάκας σε σύγκριση με την απλή έδραση (Σχήμα 5.34).

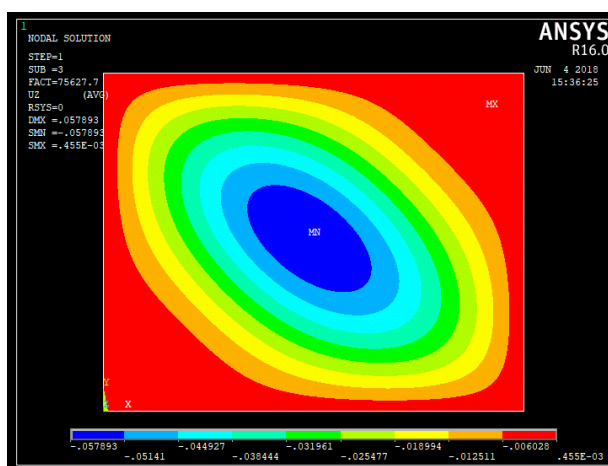


**Σχήμα 5. 33:** Ιδιομορφή διάτμησης με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) σε πλάκα αλουμινίου ( $a/b=1$ )



*Σχήμα 5. 34: Ιδιομορφή για διάτμηση με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών σε αλουμίνιο ( $a/b=1$ )*

Όσον αφορά στην επίδραση των ιδιομορφών στο πλήθος των σχηματιζόμενων κάθε φορά ημικυμάτων προκύπτει ότι **η δέσμευση όλων των στροφών και η μικτή οριακή συνθήκη τείνουν να δημιουργούν ιδιομορφές μεγαλύτερου πλήθους ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση**. Πιο συγκεκριμένα, για πλάκες ίδιου υλικού και ίδιων διαστάσεων ο περιορισμός των στροφών και η μικτή συνθήκη στήριξης (TSLC) δημιουργούν λογισμένα σχήματα αποτελούμενα από περισσότερα ή ίσα ημικύματα σε σύγκριση με την απλή έδραση. Η παρατήρηση επιβεβαιώνεται με λεπτομέρεια από τα στοιχεία του Πίνακα 5.5, όπου με έντονη γραφή (**bold**) έχουν σημειωθεί οι περιπτώσεις όπου είτε η μικτή συνθήκη είτε η πάκτωση των στροφών έχουν μεγαλύτερο πλήθος ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση.



*Σχήμα 5. 35: Ιδιομορφή πλάκας glare 2A(90/90)-3/2-0,45833 σε διάτμηση με απλή έδραση ( $a/b=1,248$ )*

*Πίνακας 5. 5: Σύγκριση του πλήθους των ημικυμάτων λόγω λογισμού σε διάτμηση μεταξύ των συνθηκών στήριξης [62]*

		ΛΟΓΩ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ		
ΥΛΙΚΟ	a/b	Απλή έδραση	Μικτή οριακή συνθήκη	Περιορισμός στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών
Αλουμίνιο	1	1	1	1
	2	2	3	3
	3	2	3	3
	4	3	4	4
	5	4	4	4
Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	1	1	1	1
	1,5	1	2	2
	2,5	2	3	3
	4,5	3	4	4
Glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375	1	1	1	1
	2,5	2	3	3
	3	2	3	3
	4,5	3	4	4

Τελειώνοντας με τη μελέτη των ιδιομορφών που προκύπτουν εξαιτίας του λυγισμού των υλικών λόγω διάτμησης, δεν θα μπορούσε να **αγνοηθεί η επίδραση του προσανατολισμού των ινών**. Από τον Πίνακα 5.6 είναι εμφανές, για τα πολύστρωτα υλικά, ότι πραγματοποιείται αντίστοιχη παρατήρηση με την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Ο προσανατολισμός των 90°, δηλαδή, οδηγεί στη δημιουργία περισσότερων ή ίσων ημικυμάτων σε πλάκες ίδιων διαστάσεων σε σύγκριση με τον cross-ply προσανατολισμό και των 0° για όλες τις συνθήκες στήριξης, και, αντίστοιχα, ο cross-ply προσανατολισμός δημιουργεί περισσότερα ή ίσα ημικύματα με τον προσανατολισμό των 0°.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 5.7 επιβεβαιώνεται αυτή η παρατήρηση και στα glare υλικά, ενώ επιβεβαιώνεται, ταυτόχρονα, και το γεγονός της δημιουργίας περισσότερων ή ίσων ημικυμάτων των συνοριακών συνθηκών με περιορισμό των στροφών σε σχέση με την απλή έδραση.

**Πίνακας 5. 6:** Σύγκριση του πλήθους των ημικυμάτων λόγω λυγισμού σε διάτμηση μεταξύ του προσανατολισμού των ινών για πολύστρωτα υλικά

		ΠΛΗΘΟΣ ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΛΥΓΙΣΜΟ ΛΟΓΩ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ		
ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΟ	a/b	Απλή έδραση	Μικτή οριακή συνθήκη	Περιορισμός στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών
0/0/0	2	1	2	1
0/90/0	2	2	2	2
90/90/90	2	3	4	3



0/0/0	5	3	4	3
0/90/0	5	4	5	5
90/90/90	5	4	6	6

*Πίνακας 5. 7: Σύγκριση του πλήθους των ημικυμάτων λόγω λυγισμού σε διάτμηση μεταξύ του προσανατολισμού των ινών για το glare 5-3/2-0,291667*

ΠΑΛΗΘΟΣ ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΛΥΓΙΣΜΟ ΛΟΓΩ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ				
Glare 5-3/2-0,291667	a/b	Απλή έδραση	Μικτή οριακή συνθήκη	Περιορισμός στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών
90/90/90/90	3	3	3	3
0/90/90/0	3	2	3	3
45/45/45/45	3	2	3	3
90/90/90/90	5	4	5	5
0/90/90/0	5	4	4	4
45/45/45/45	5	4	4	4

#### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΗ

Από την ανάλυση των ιδιομορφών των υλικών τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε λυγισμό λόγω διάτμησης με απλή έδραση (simply supported), με περιορισμό των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών (all edges clamped) και με μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Όλες οι ιδιομορφές που δημιουργήθηκαν έχουν παρόμοια χαρακτηριστική μορφή. Τα ημικύματα (half-waves) δημιουργούνται και αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο σχηματίζοντας γωνία 135° με τον άξονα x, και διαφοροποιούνται ως προς το πλήθος.
2. Ο περιορισμός των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών και η μικτή οριακή συνθήκη οδηγούν στη δημιουργία ιδιομορφών μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση για πλάκες ίδιου υλικού και ίδιων διαστάσεων.
3. Ο προσανατολισμός των 90° οδηγεί στη δημιουργία ιδιομορφών μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς για πλάκες ίδιου υλικού και ίδιων διαστάσεων.

4. Η δημιουργία και η ανάπτυξη των ημικυμάτων πραγματοποιείται πιο απομακρυσμένα από τα περιστροφικά περιορισμένα σύνορα τόσο στην περίπτωση της δέσμευσης όλων των στρωφών όσο και στην περίπτωση της μικτής οριακής συνθήκης σε σύγκριση με τα μη περιστροφικά περιορισμένα σύνορα της μικτής συνθήκης και της απλής έδρασης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6<sup>ο</sup>

### 6 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΛΥΓΙΣΜΟ ΠΛΑΚΩΝ GLARE

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνηθεί η δυνατότητα εφαρμογής του νόμου των μιγμάτων στα εξεταζόμενα προβλήματα λυγισμού μέσω της σύγκρισης με την αναλυτική και την αριθμητική επίλυση, οι οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί στα προηγούμενα κεφάλαια για τον υπολογισμό των κρίσιμων μεγεθών λυγισμού. Η μέθοδος του νόμου των μιγμάτων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων ενός υλικού το οποίο αποτελείται από δύο ή περισσότερα συστατικά υλικά με την εκάστοτε μηχανική ιδιότητα να υπολογίζεται ως συνάρτηση του ποσοστού του κάθε επιμέρους υλικού.

#### 6.1 Νόμος μιγμάτων σε λυγισμό λόγω θλίψης

Όπως έχει αναλυθεί διεξοδικά σε προηγούμενο κεφάλαιο τα συστατικά των glare υλικών είναι το αλουμίνιο και το πολύστρωτο διαφορετικού κάθε φορά προσανατολισμού ινών. Μπορεί, εύκολα, να υπολογιστεί το κλάσμα του όγκου του αλουμινίου ( $MVF_{alum}$ ) ή του πολύστρωτου για κάθε glare, οπότε **μέσω του νόμου μιγμάτων** προκύπτει:

$$\begin{aligned}\sigma_{cr} &= \sigma_{cr,al}MVF_{alum} + \sigma_{cr,lam}V_{lam} \\ \sigma_{cr} &= \sigma_{cr,al}MVF_{alum} + \sigma_{cr,lam}(1 - MVF_{alum}) \\ \sigma_{cr} &= \sigma_{cr,al}(1 - V_{lam}) + \sigma_{cr,lam}V_{lam}\end{aligned}\quad (6.1)$$

Όπου  $\sigma_{cr}$ : η κρίσιμη τάση λυγισμού του glare

$\sigma_{cr,al}$ : η κρίσιμη τάση λυγισμού του αλουμινίου

$\sigma_{cr,lam}$ : η κρίσιμη τάση λυγισμού του πολύστρωτου (laminate)

$MVF_{alum}$ : το κλάσμα του όγκου του αλουμινίου που περιέχεται στο glare

$V_{lam}$ : το κλάσμα του όγκου του πολύστρωτου (laminate) που περιέχεται στο glare

Οι παραπάνω σχέσεις (6.1) είναι ισοδύναμες δεδομένου ότι το άθροισμα του κλάσματος του όγκου του πολύστρωτου και του αλουμινίου ισούται με τη μονάδα. Στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης με απλή έδραση χρησιμοποιούνται οι αναλυτικές τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού για το αλουμίνιο και για το πολύστρωτο, ενώ στην περίπτωση της θλίψης με περιορισμό των στρωφών κατά μήκος των πλευρών χρησιμοποιούνται οι τιμές της αριθμητικής επίλυσης. Η **απόκλιση** των τιμών της κρίσιμης τάσης λυγισμού, οι οποίες υπολογίστηκαν μέσω

του νόμου μιγμάτων σε σύγκριση είτε με της αναλυτικές είτε με της τιμές του προγράμματος των πεπερασμένων στοιχείων **κρίνεται ικανοποιητική** όπως φαίνεται αναλυτικά για την κάθε περίπτωση υλικού στον Πίνακα 6.1.

**Πίνακας 6. 1:** Μέση απόκλιση των τιμών της κρίσιμης τάσης λυγισμού του νόμου μιγμάτων σε σχέση με τις τιμές που προέκυψαν από την αναλυτική και αριθμητική επίλυση για την μονοαξονική θλίψη

<b>ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΘΛΙΨΗ</b>	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΑΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ <b>ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ</b> ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕΣΩ ΝΟΜΟΥ ΜΙΓΜΑΤΩΝ (%)	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΑΣΗΣ ΓΙΑ <b>ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΣΤΡΟΦΩΝ</b> ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕΣΩ ΝΟΜΟΥ ΜΙΓΜΑΤΩΝ (%)
Glare 2A(0/0)-3/2-0,45833	12	12,5
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125	12,2	14,5
Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	11	13
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	12,5	14
Glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667	23	20
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667	24,8	23
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	24	17,3

Εκτός από την κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίστηκαν και οι αντίστοιχες τιμές του συντελεστή λυγισμού  $k$ . Αυτό πραγματοποιήθηκε μέσω της Σχέσης (6.2). Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας ως βάση τη σχέση του νόμου των μιγμάτων (6.1) και αντικαθιστώντας τις τιμές των τάσεων από τις σχέσεις (2.14) και (3.5) των προηγούμενων κεφαλαίων, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του συντελεστή λυγισμού  $k$  ως εξής:

$$k_{glare} = \frac{k_{alum} D_{alum}}{\sqrt{D_{11}^{glare} D_{22}^{glare}}} MVF_{alum} + \frac{k_{comp} \sqrt{D_{11}^{comp} D_{22}^{comp}}}{\sqrt{D_{11}^{glare} D_{22}^{glare}}} (1 - MVF_{alum}) \quad (6.2)$$

Όπου  $MVF_{alum}$ : το κλάσμα του όγκου του αλουμινίου που περιέχεται στο glare

$k_{alum}$ : ο συντελεστής λυγισμού  $k$  του αλουμινίου, είτε από αναλυτική είτε από αριθμητική επίλυση

$k_{comp}$ : ο συντελεστής λυγισμού  $k$  του πολύστρωτου, είτε από αναλυτική είτε από αριθμητική επίλυση

$D_{alum}$ : η καμπτική δυσκαμψία της ορθότροπης πλάκας αλουμινίου (σχέση (2.3))

$D_{ij}^{glare}$ : οι τιμές της καμπτικής δυσκαμψίας του ορθότροπου glare (σχέση (1.7))

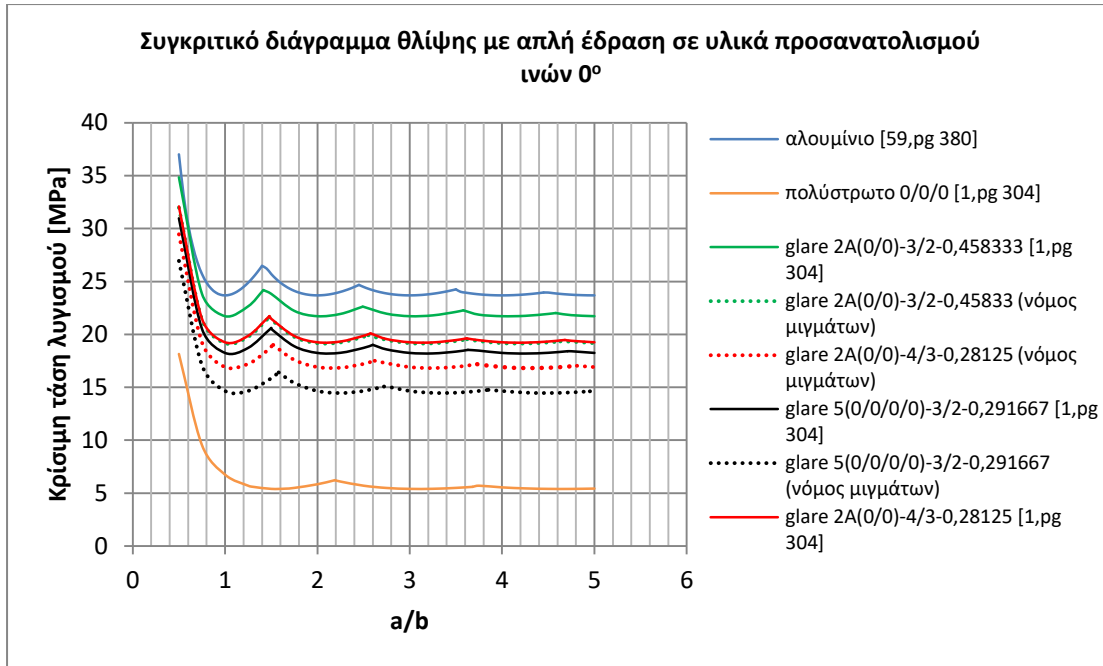
$D_{ij}^{comp}$ : οι τιμές της καμπτικής δυσκαμψίας του ορθότροπου πολύστρωτου

Στα παρακάτω Σχήματα 6.1 έως 6.12 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου του νόμου των μιγμάτων μέσω των γραφικών παραστάσεων για το κάθε υλικό, τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε μονοαξονική θλίψη με απλή έδραση και με περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών. Σε κάθε ένα από αυτά τα συγκριτικά διαγράμματα εκτός από τις ζητούμενες καμπύλες των glare παρουσιάζονται και οι καμπύλες των συστατικών τους στοιχείων, δηλαδή, του αλουμινίου και του εκάστοτε πολύστρωτου. Όσον αφορά στην **απόκλιση** των τιμών του συντελεστή λυγισμού  $k$  μεταξύ αυτών οι οποίες υπολογίστηκαν με τη σχέση (6.2) και αυτών που προέκυψαν από την αναλυτική ή αριθμητική επίλυση φαίνονται στον Πίνακα 6.2 και **κρίνεται, επίσης ικανοποιητική.**

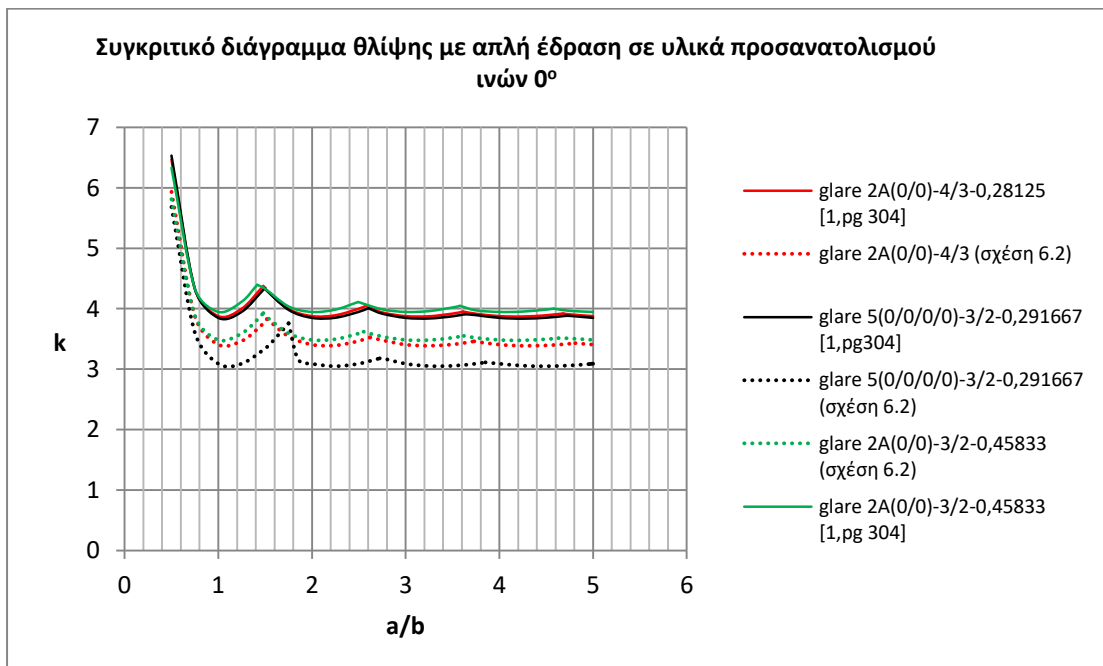
Η παρατήρηση η οποία πραγματοποιείται σε όλα τα συγκριτικά διαγράμματα που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα αφορά στο γεγονός ότι η εκτίμηση των κρίσιμων μεγεθών μέσω της μεθόδου του νόμου των μιγμάτων οδηγεί σε μικρότερες τιμές σε σύγκριση με τις υπόλοιπες μεθόδους για το κάθε υλικό. Η αναλυτική ή αριθμητική καμπύλη, δηλαδή, είναι «πάνω» από την αντίστοιχη του νόμου μιγμάτων για όλα τα υλικά, τόσο στην περίπτωση της τάσης όσο και του συντελεστή  $k$  (βλέπε Σχέση 6.2). Επομένως, **οι υπολογισμοί που πραγματοποιούνται στα πλαίσια αυτού του κεφαλαίου είναι πιο συντηρητικοί και, άρα, ασφαλείς.**

***Πίνακας 6. 2:** Μέση απόκλιση των τιμών του συντελεστή λυγισμού  $k$  οι οποίες υπολογίστηκαν μέσω της σχέσης (6.2) σε σχέση με τις τιμές που προέκυψαν από την αναλυτική και αριθμητική επίλυση για την μονοαξονική θλίψη*

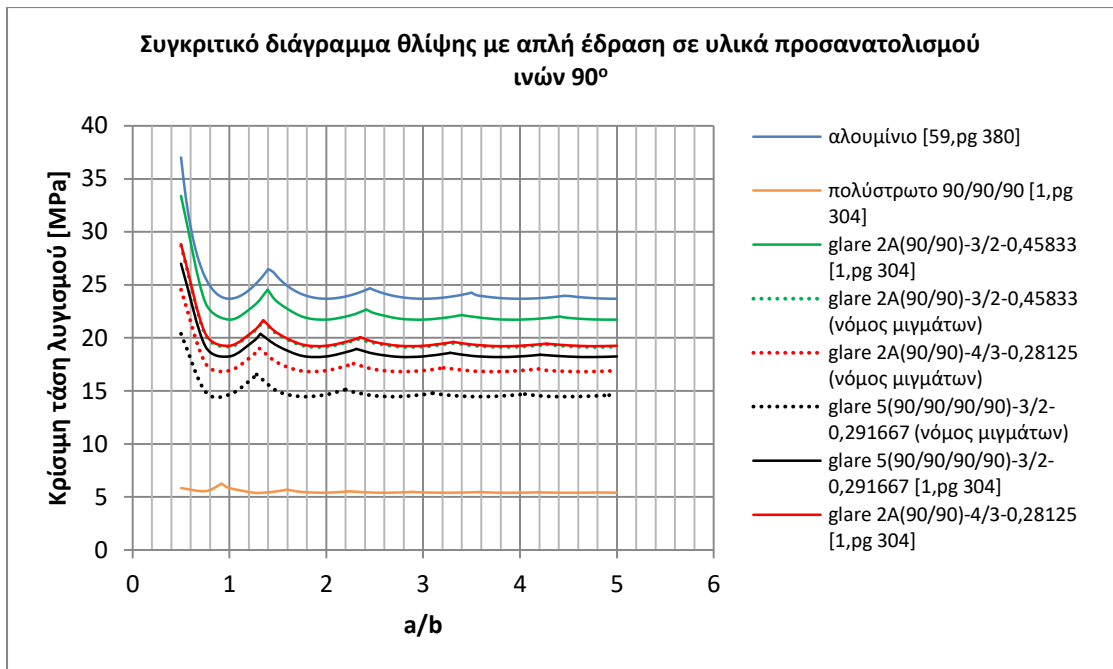
<b>ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΘΛΙΨΗ</b>	<b>ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ <math>k</math> ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.2) (%)</b>	<b>ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ <math>k</math> ΓΙΑ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ ΤΩΝ ΣΤΡΟΦΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.2) (%)</b>
Glare 2A(0/0)-3/2-0,45833	12	12,5
Glare 2A(0/0)-4/3-0,28125	12,2	14,5
Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	11	13
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	12,5	14
Glare 5(0/0/0/0)-3/2-0,291667	23	20
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667	24,8	23
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	24	17,3



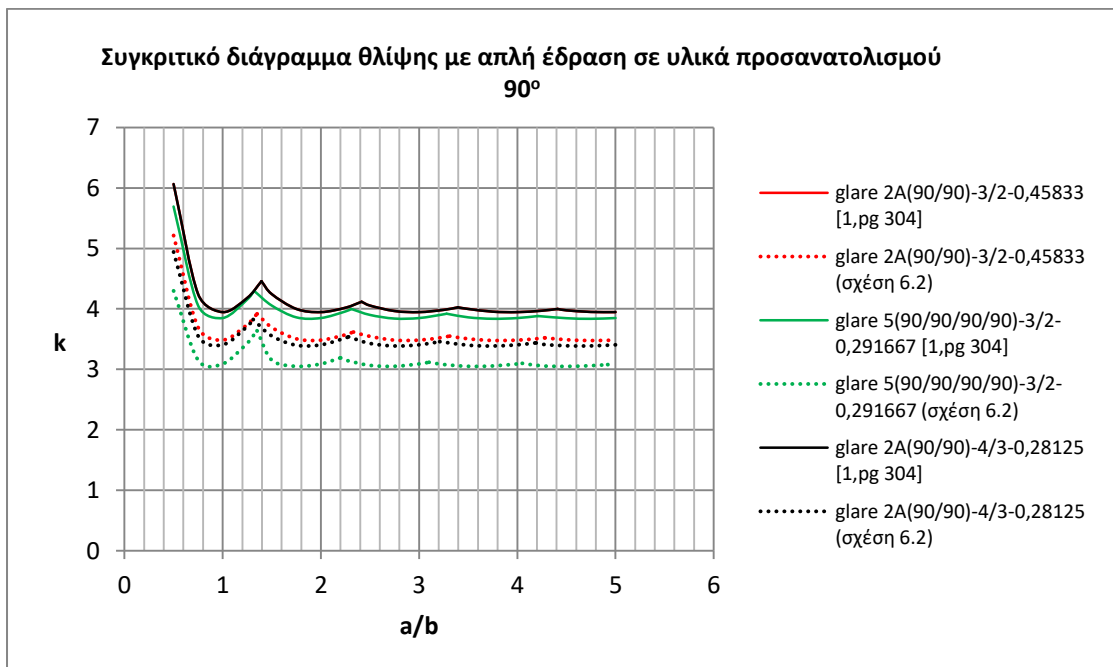
*Σχήμα 6. 1: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 0° σε θλίψη με απλή έδραση*



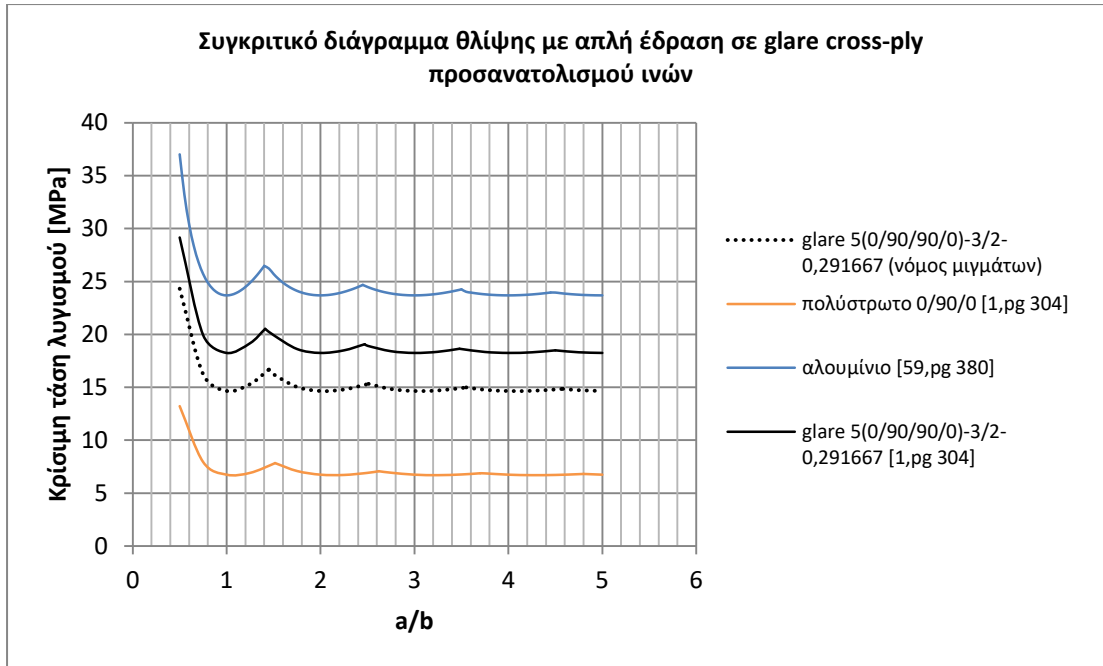
*Σχήμα 6. 2: Συγκριτικό διάγραμμα (k-a/b) μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 0° σε θλίψη με απλή έδραση*



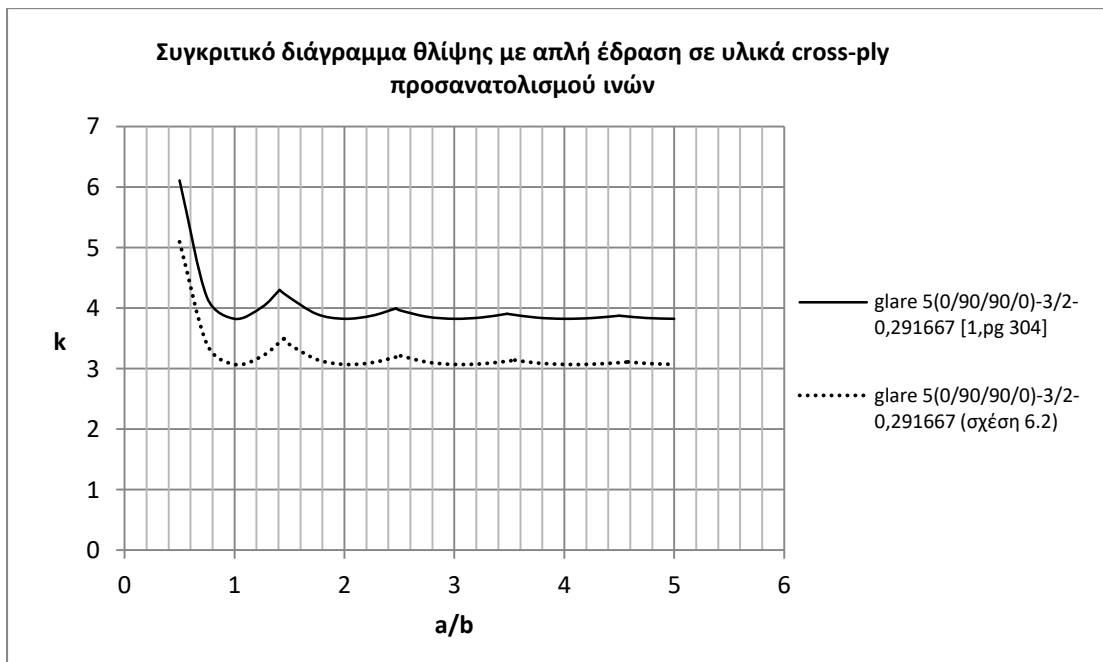
*Σχήμα 6. 3: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 90° σε θλίψη με απλή έδραση*



*Σχήμα 6. 4: Συγκριτικό διάγραμμα (k-a/b) μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 90° σε θλίψη με απλή έδραση*

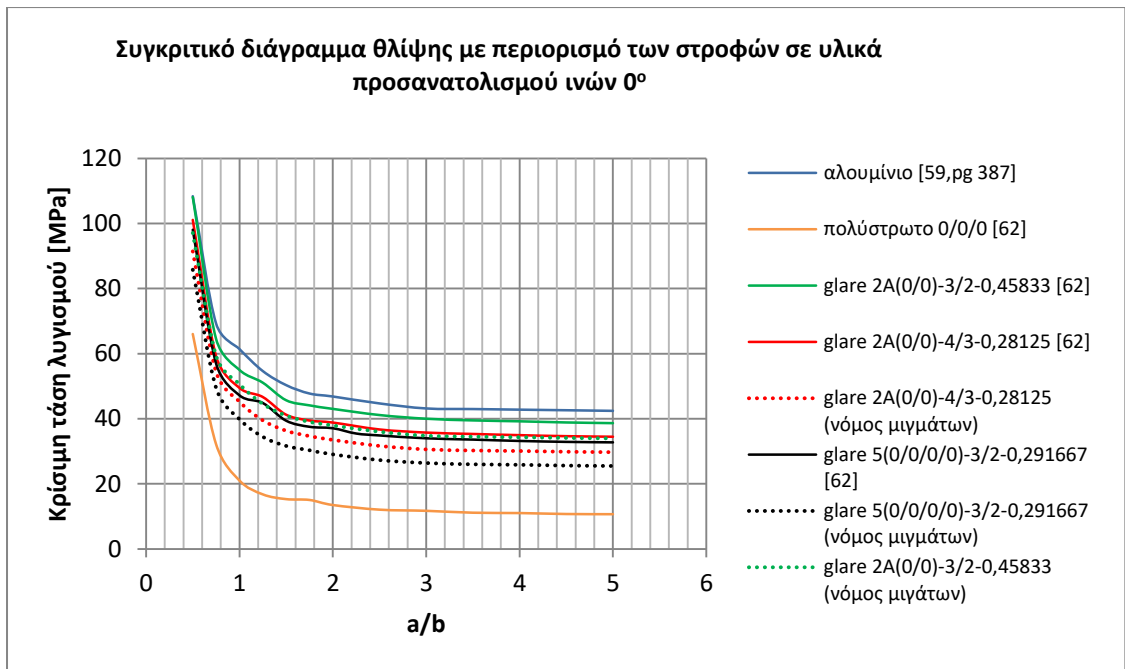


**Σχήμα 6. 5:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για cross-ply προσανατολισμό ινών σε θλίψη με απλή έδραση



**Σχήμα 6. 6:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k-a/b$ ) μεταξύ των αναλυτικών γραφικών παραστάσεων και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για cross-ply προσανατολισμό ινών σε θλίψη με απλή έδραση

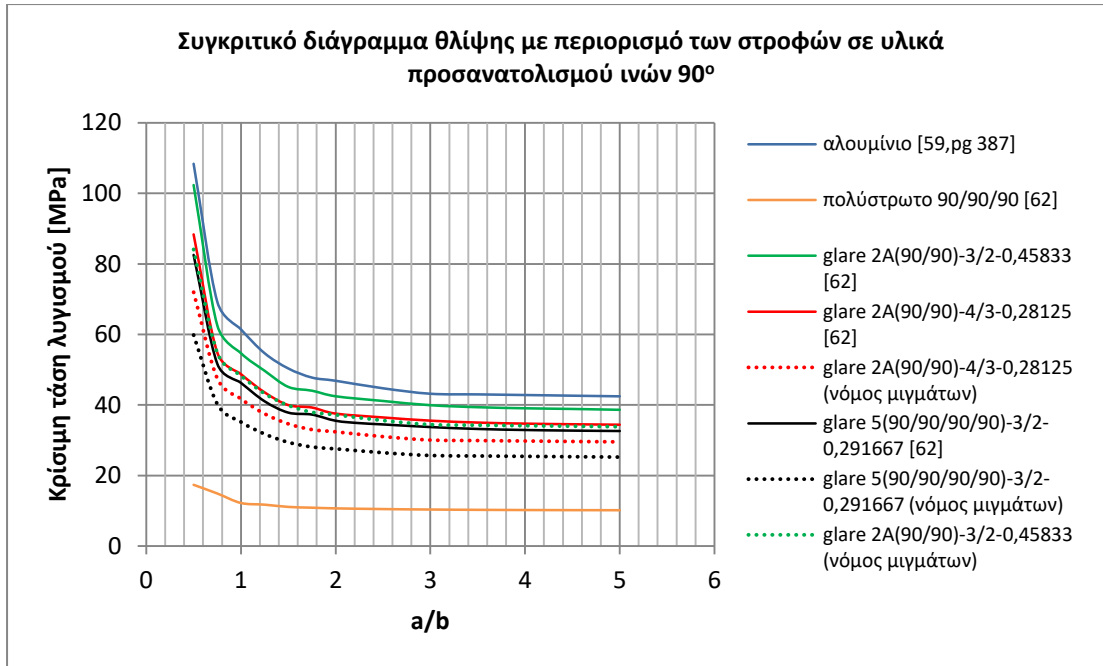




*Σχήμα 6. 7: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 0° σε θλίψη με περιορισμό των στροφών*



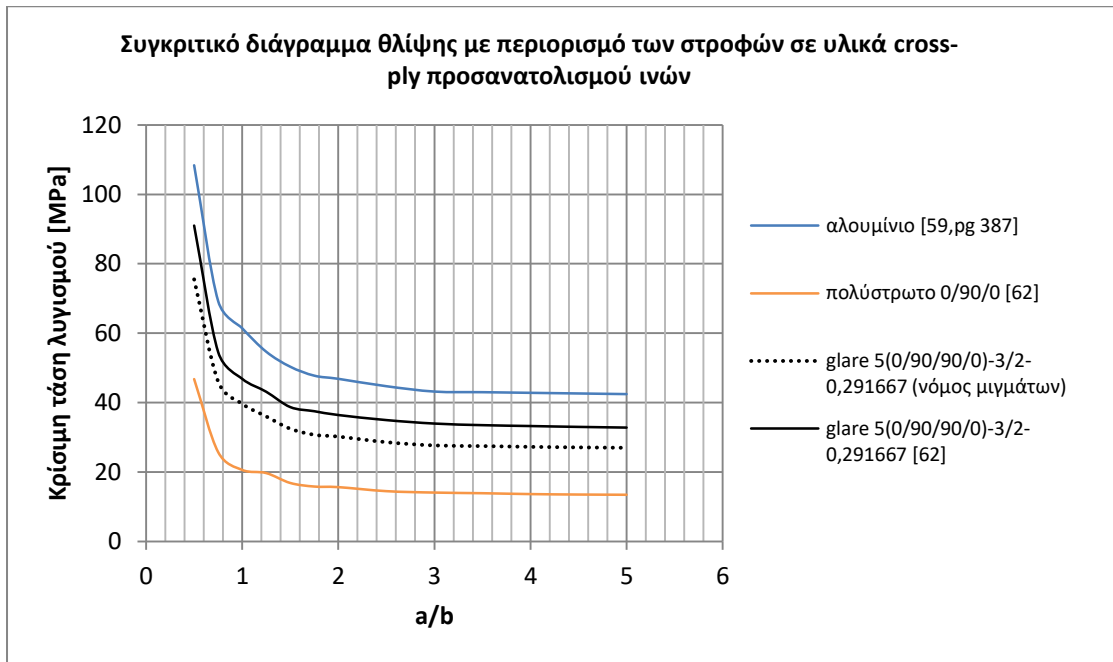
*Σχήμα 6. 8: Συγκριτικό διάγραμμα (k-a/b) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 0° σε θλίψη με περιορισμό των στροφών*



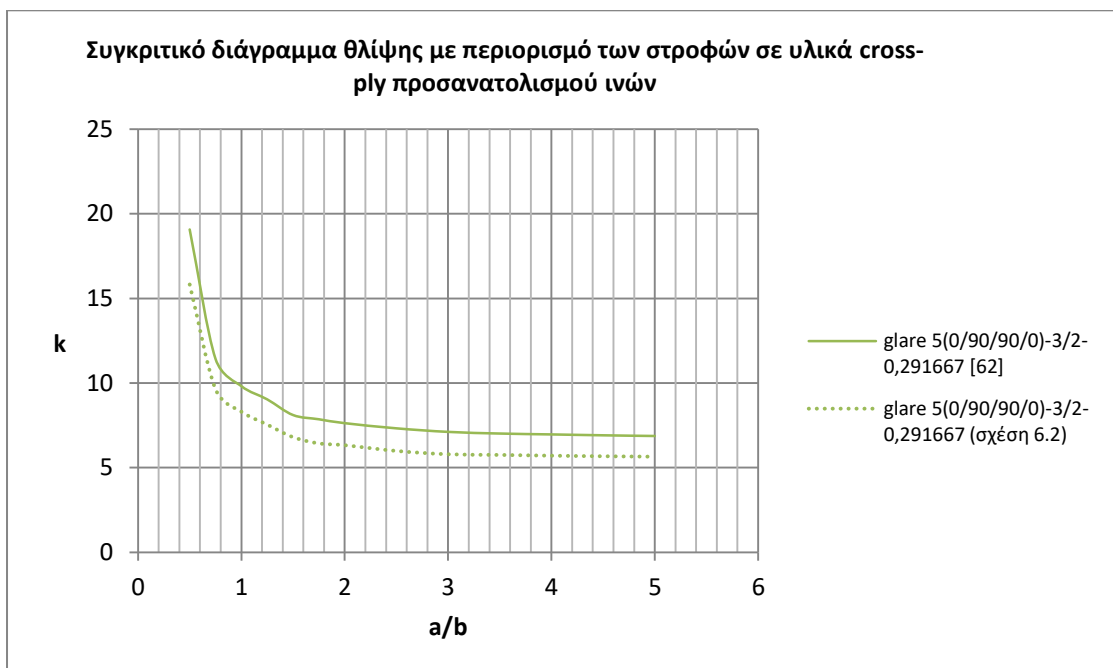
**Σχήμα 6. 9:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 90° σε θλίψη με περιορισμό των στροφών



**Σχήμα 6. 10:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 90° σε θλίψη με περιορισμό των στροφών



**Σχήμα 6. 11:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης των υλικών με cross-ply προσανατολισμό ινών μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής λύσης και του νόμου μιγμάτων για θλίψη με περιορισμό των στροφών



**Σχήμα 6. 12:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) των υλικών με cross-ply προσανατολισμό ινών μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής λύσης και της σχέσης (6.2) για θλίψη με περιορισμό των στροφών

## 6.2 Νόμος μιγμάτων σε λυγισμό λόγω διάτμησης

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από τον υπολογισμό μέσω του νόμου των μιγμάτων των κρίσιμων μεγεθών λυγισμού (τάσης και  $k$ ) στην περίπτωση της διατμητικής φόρτισης με διαφορετικές συνθήκες στήριξης. Ο τρόπος εφαρμογής αυτής της μεθόδου δεν διαφοροποιείται σε σύγκριση με τη μονοαξονική θλίψη και χρησιμοποιούνται οι ίδιες σχέσεις (6.1) και (6.2) για την κρίσιμη τάση και τον συντελεστή λυγισμού  $k$ , αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην διάτμηση όλες οι τιμές του αλουμινίου και των πολύστρωτων που χρησιμοποιήθηκαν στην εφαρμογή του νόμου των μιγμάτων ήταν αυτές που προέκυψαν μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων [62].

**Πίνακας 6. 3:** Μέση απόκλιση των τιμών της τάσης μεταξύ της αριθμητικής επίλυσης και της μεθόδου του νόμου των μιγμάτων στην καθαρή διάτμηση

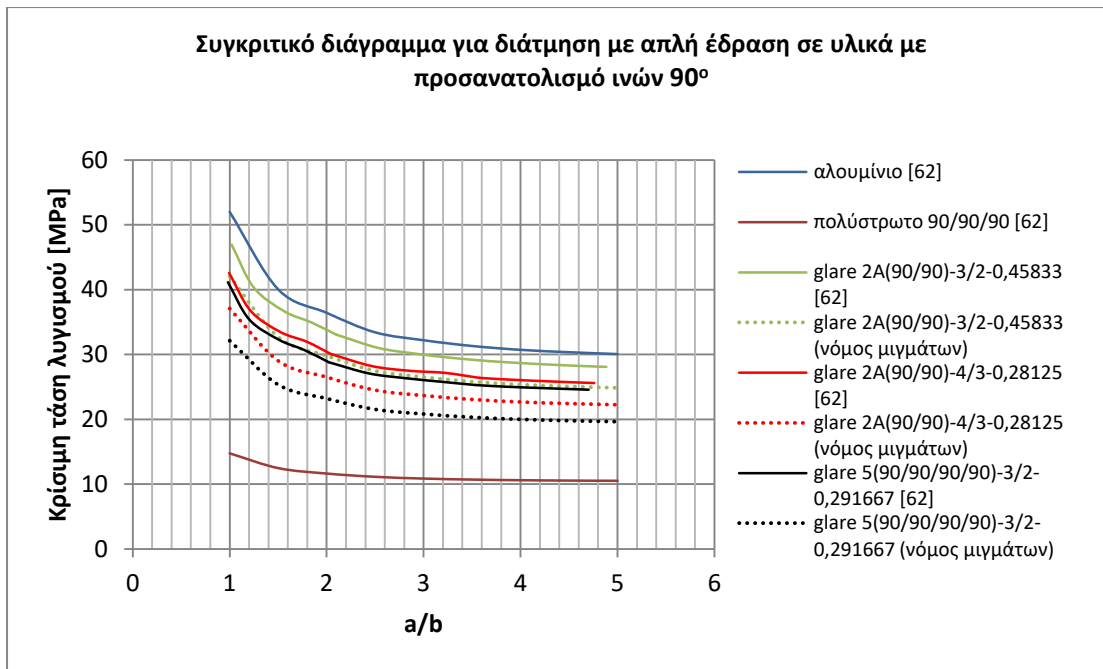
<b>ΚΑΘΑΡΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ</b>	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΜΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ (%)	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΜΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΡΟΦΩΝ (%)	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΡΙΣΙΜΗΣ ΤΑΣΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΜΙΓΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΜΙΚΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (TSLC) (%)
Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	11	11	11
Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	13	12	12
Glare 3(0/90 90/0)-3/2-0,45833	11	11	11
Glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375	16	16	16
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667	20	20	19
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	19	18	19

**Πίνακας 6. 4:** Μέση απόκλιση των τιμών του συντελεστή λυγισμού  $k$  μεταξύ της αριθμητικής επίλυσης και της σχέση 2 (6.2) στην καθαρή διάτμηση

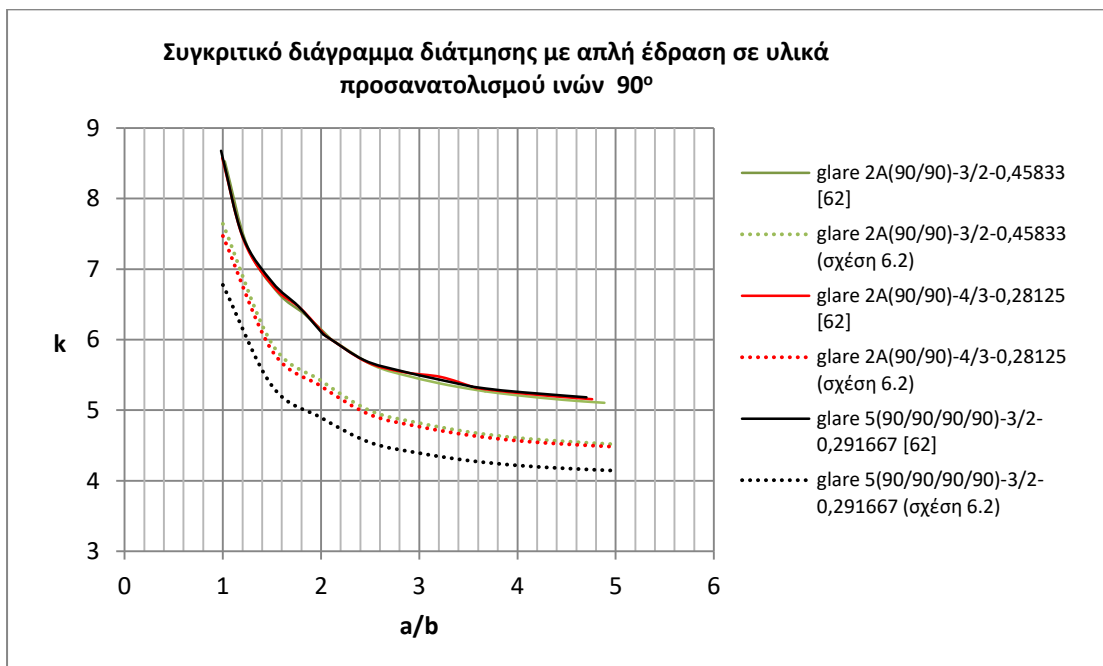
<b>ΚΑΘΑΡΗ ΔΙΑΤΜΗΣΗ</b>	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ $k$ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.2) ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΑΠΛΗ ΕΔΡΑΣΗ (%)	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ $k$ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.2) ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΤΡΟΦΩΝ (%)	ΜΕΣΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ $k$ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ (6.2) ΚΑΙ ΑΥΤΩΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ-ΜΙΚΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ (TSLC) (%)
Glare 2A(90/90)-3/2-0,45833	11	11	11

Glare 2A(90/90)-4/3-0,28125	12	12	13
Glare 3(0/90 90/0)-3/2-0,45833	11	10	11
Glare 4B(90/0/90)-3/2-0,375	15	16	16
Glare 5(90/90/90/90)-3/2-0,291667	20	19,5	19
Glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667	18	19	19

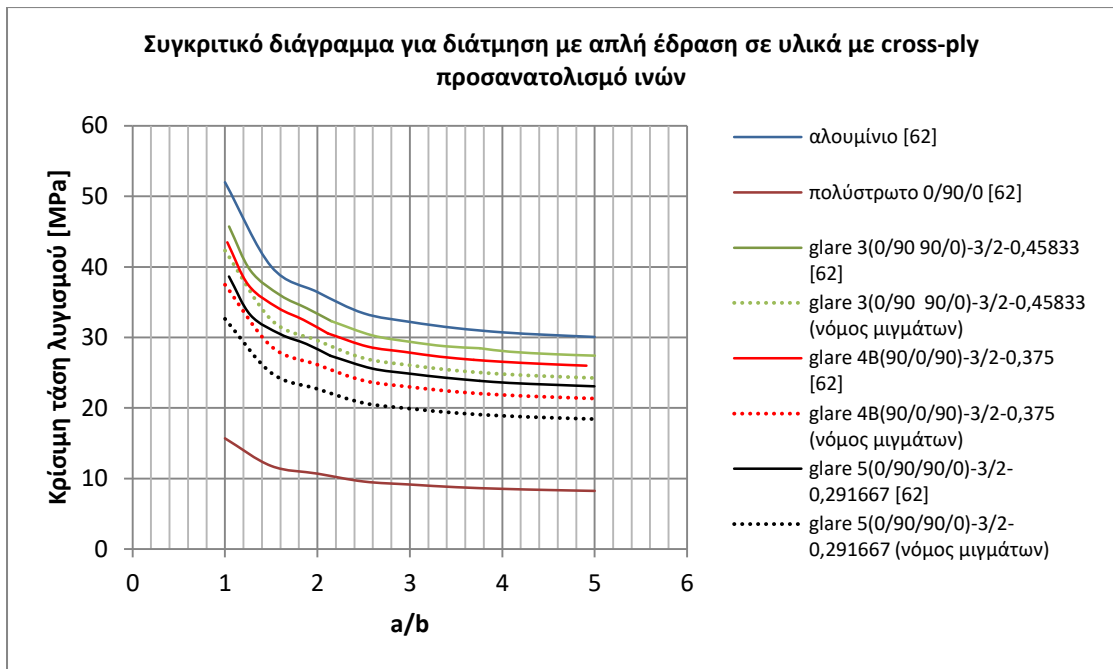
Στους παραπάνω Πίνακες 6.3 και 6.4 διαπιστώνεται ότι η μέση απόκλιση των τιμών του νόμου των μιγμάτων και της σχέσης (6.2), αντίστοιχα, σε σύγκριση με τις τιμές της αριθμητικής επίλυσης είναι ικανοποιητική και στην περίπτωση της διάτμησης, καθώς δεν ξεπερνά το 20% για κανένα υλικό σε καμία από τις συνθήκες στήριξης. Τέλος, στα Σχήματα 6.13-6.24 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις του νόμου των μιγμάτων και της σχέσης (6.2) σε σύγκριση με τις αντίστοιχες της αριθμητικής επίλυσης ομαδοποιημένες ανάλογα με τη συνθήκη στήριξης και τον προσανατολισμό των ινών. Παρατηρείται, επίσης, ότι σε όλα τα διαγράμματα οι καμπύλες της αριθμητικής μεθόδου είναι «πάνω» από τις αντίστοιχες του νόμου των μιγμάτων και της σχέσης (6.2) υποδεικνύοντας ότι αυτές οι μέθοδοι οδηγούν σε εκτίμηση τιμών χαμηλότερων από τις τιμές που υπολογίζονται μέσω των πεπερασμένων στοιχείων, καθιστώντας τους εν λόγω υπολογισμούς πιο συντηρητικούς και, επομένως, ασφαλείς.



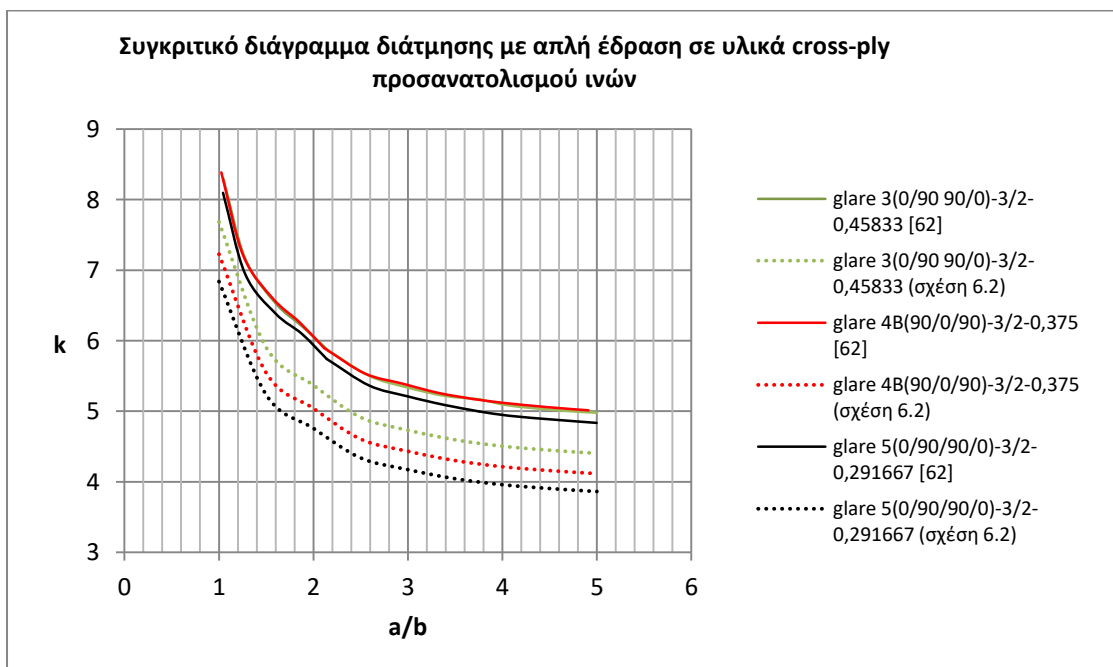
*Σχήμα 6. 13: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με απλή έδραση*



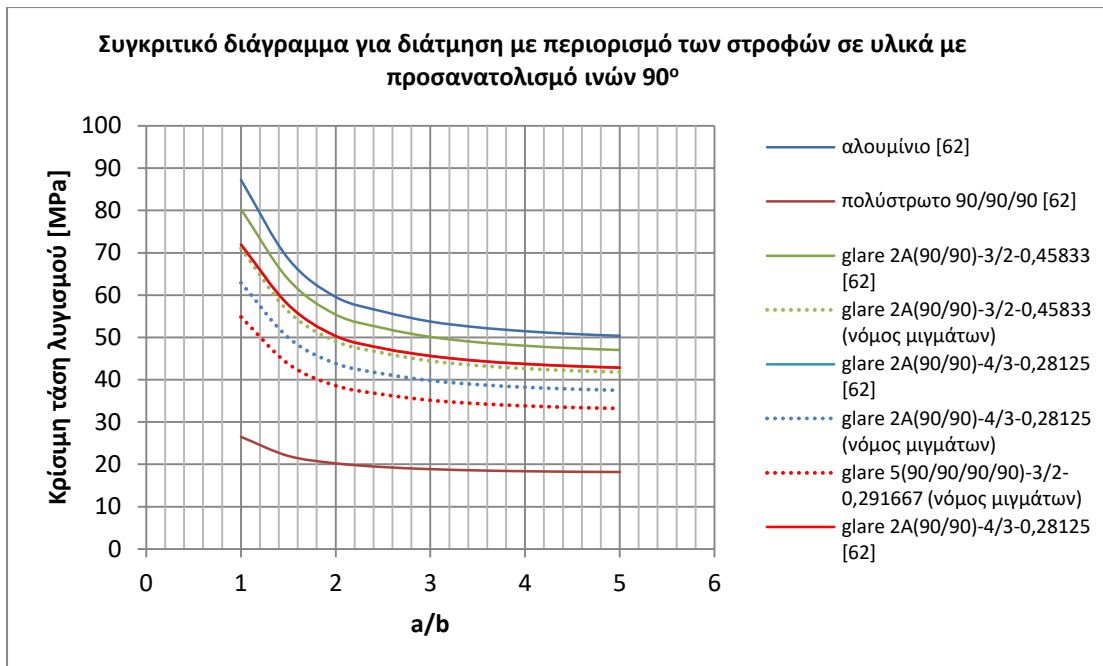
*Σχήμα 6. 14: Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με απλή έδραση*



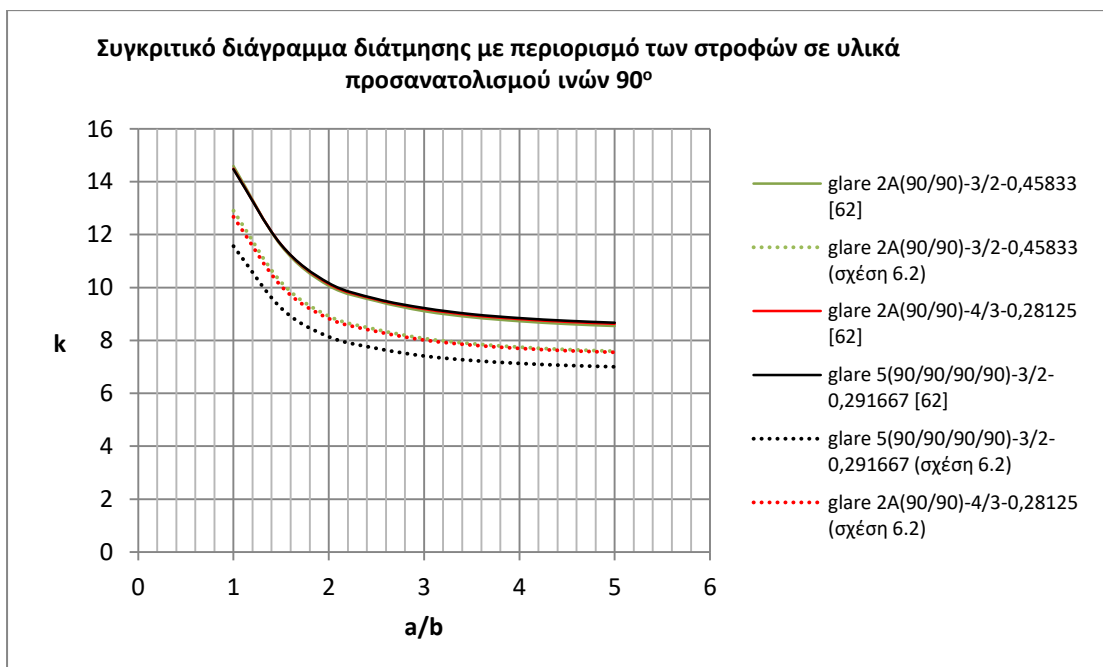
*Σχήμα 6. 15: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με απλή έδραση*



*Σχήμα 6. 16: Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με απλή έδραση*

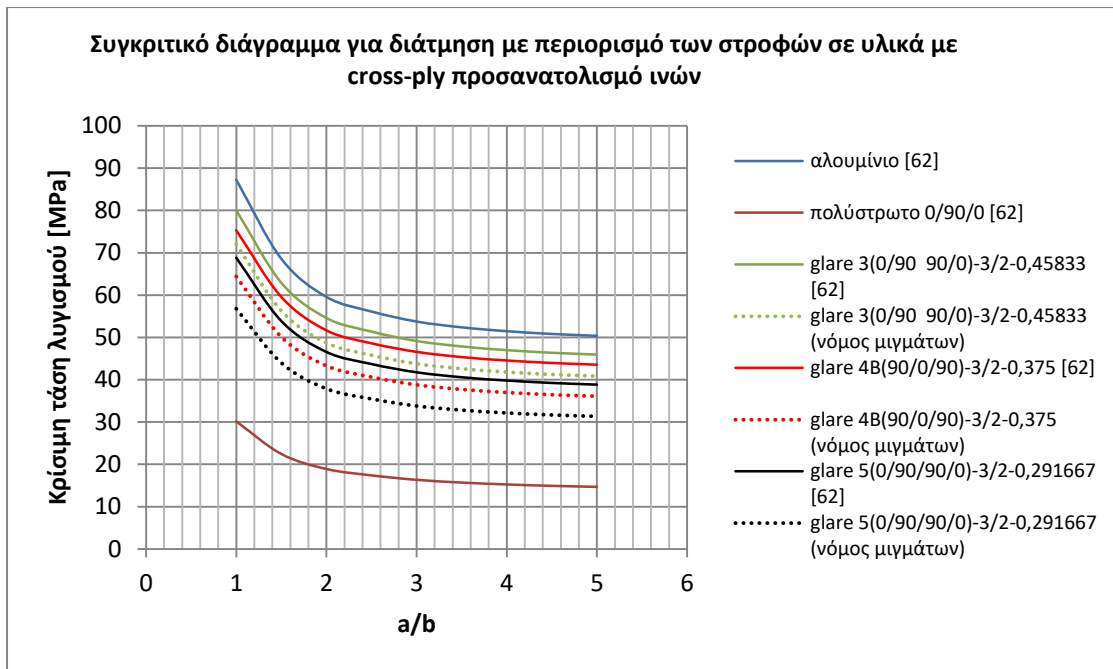


*Σχήμα 6. 17: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών*

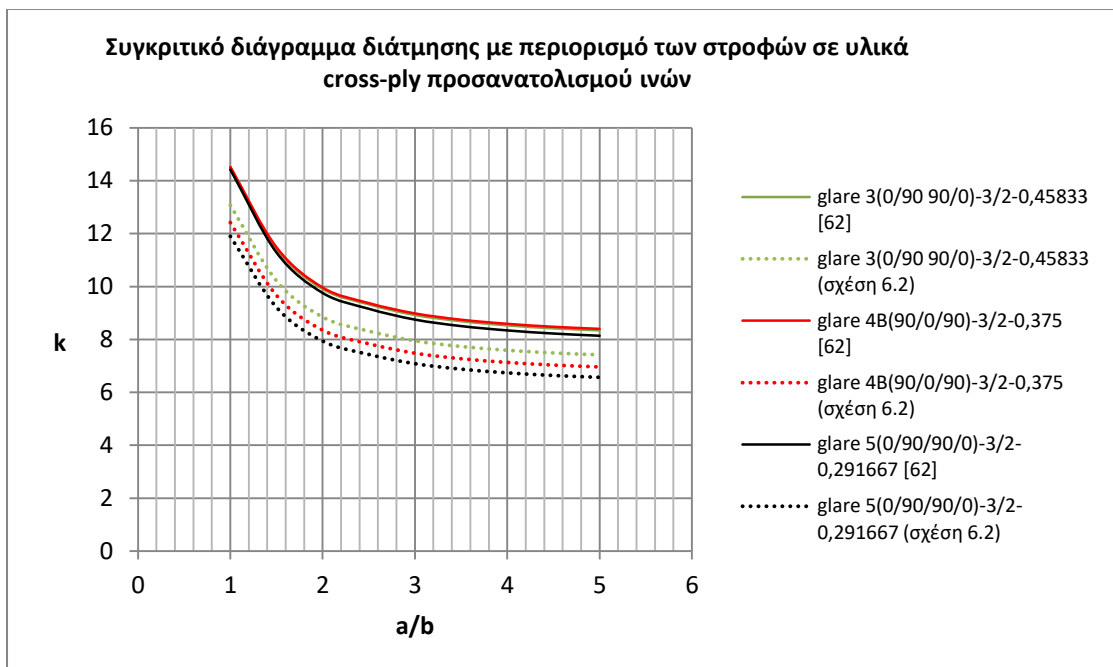


*Σχήμα 6. 18: Συγκριτικό διάγραμμα (k-a/b) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών*

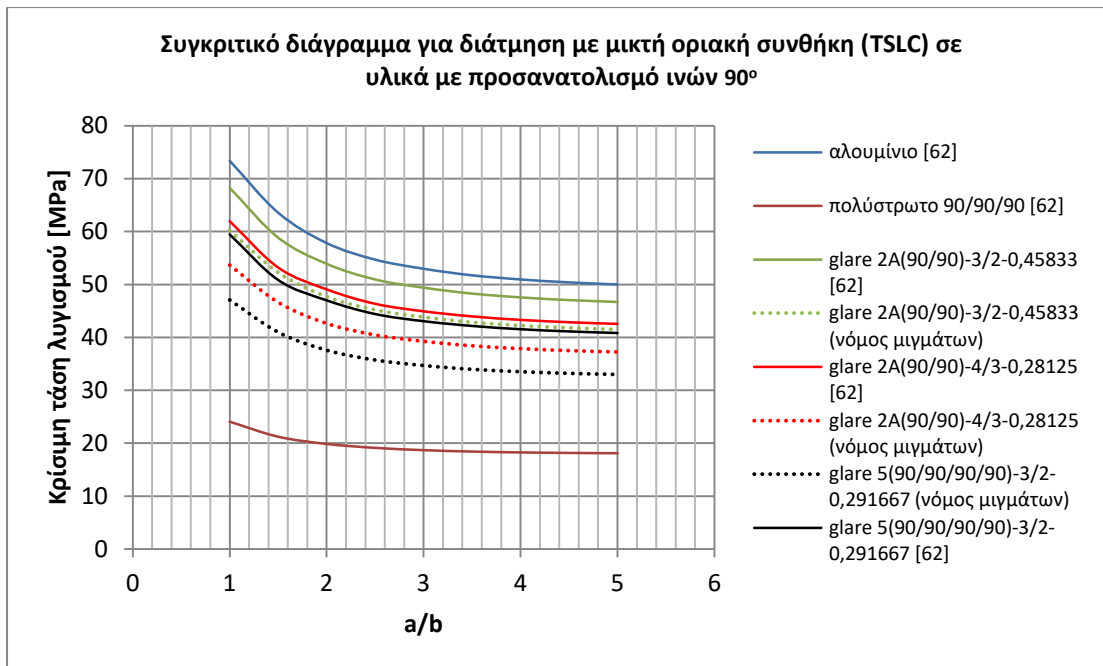




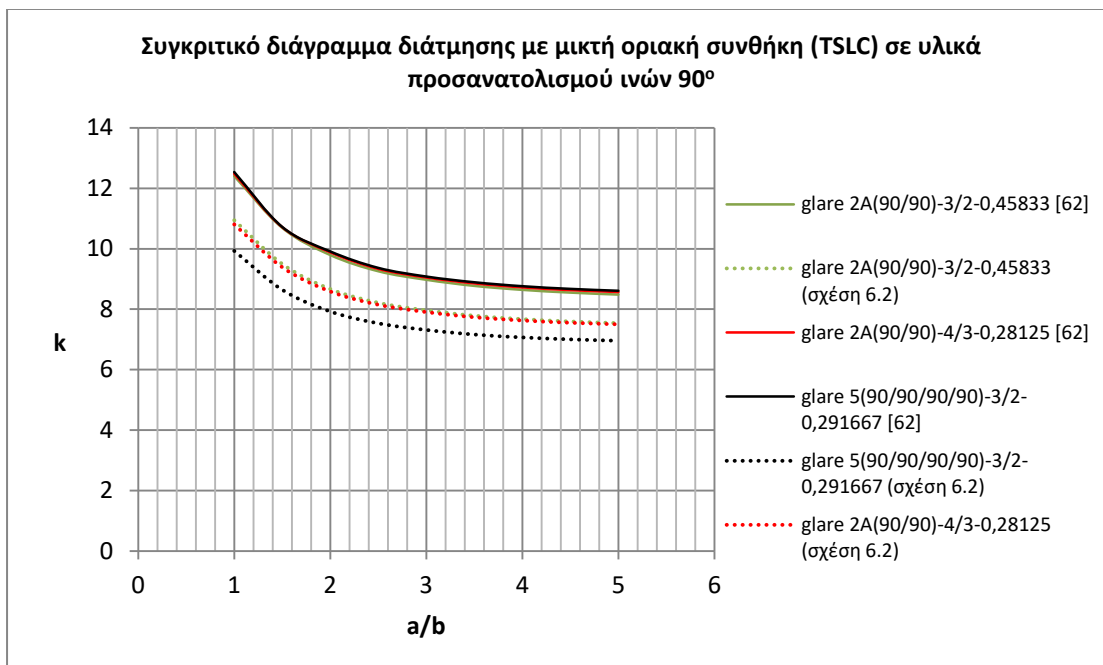
**Σχήμα 6. 19:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών



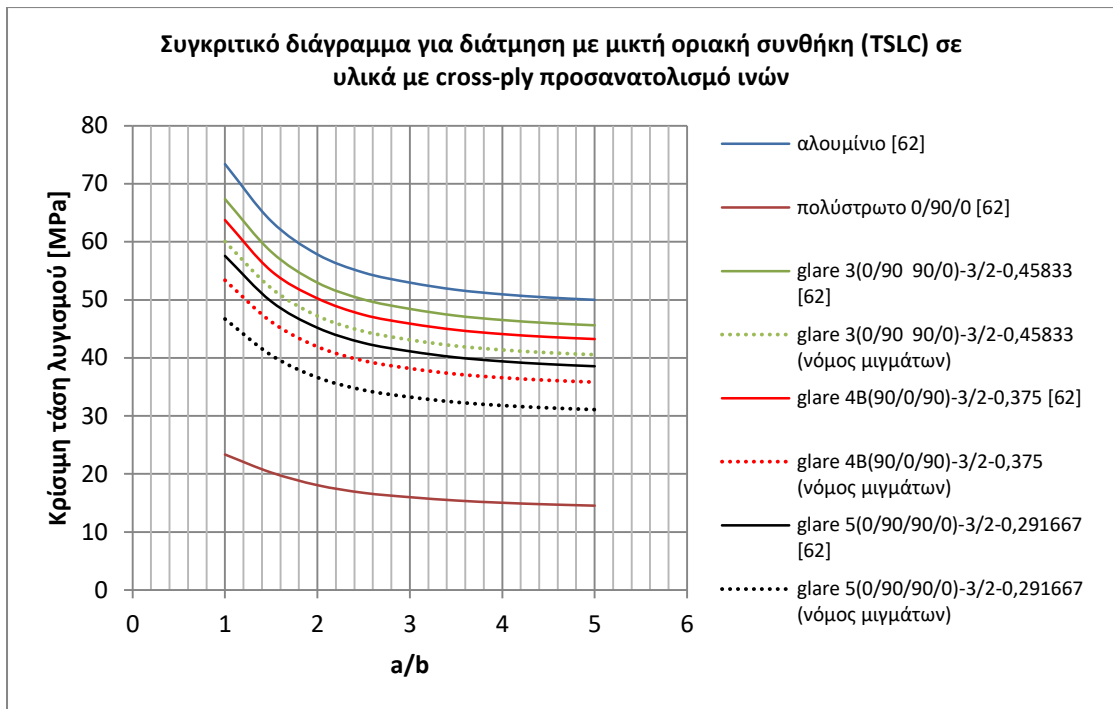
**Σχήμα 6. 20:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με περιορισμό των στροφών



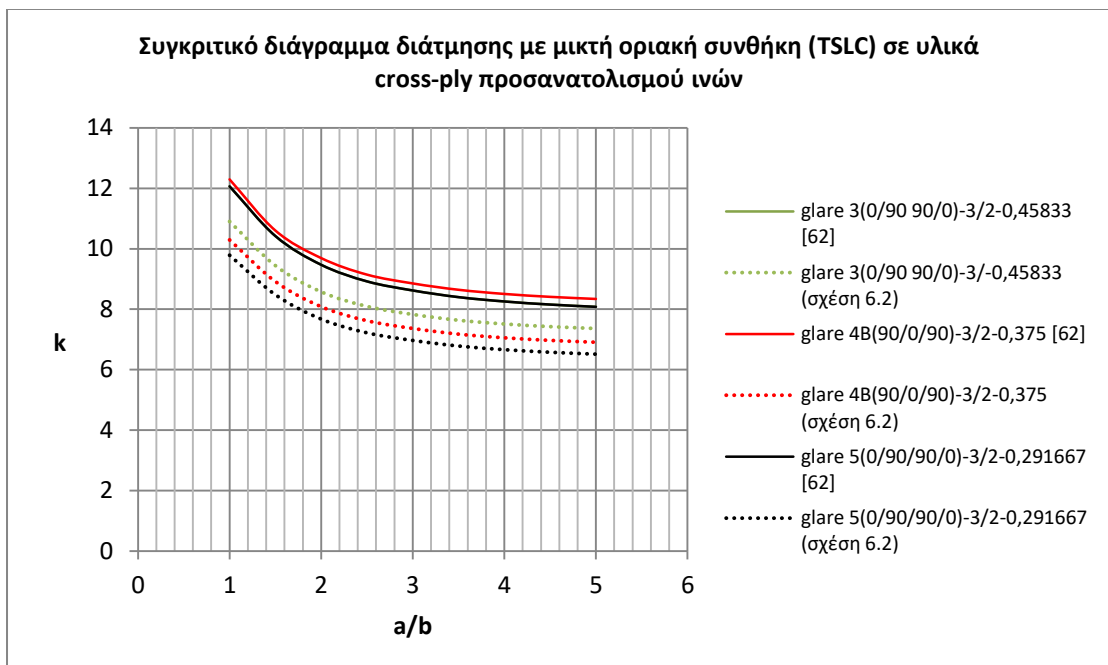
**Σχήμα 6. 21:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με μικτή συνθήκη στήριξης



**Σχήμα 6. 22:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για προσανατολισμό ινών 90° σε διάτμηση με μικτή συνθήκη στήριξης



**Σχήμα 6. 23:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων του νόμου μιγμάτων για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με μικτή συνθήκη στήριξης



**Σχήμα 6. 24:** Συγκριτικό διάγραμμα ( $k$ - $a/b$ ) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της αριθμητικής επίλυσης και των αντίστοιχων της σχέσης (6.2) για cross-ply προσανατολισμό ινών σε διάτμηση με μικτή συνθήκη στήριξης



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7<sup>ο</sup>

### 7 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΥΠΟ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΣΕ ΠΛΑΚΕΣ GLARE ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΤ' ΟΓΚΟ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΙΝΩΝ

Η διαδικασία υπολογισμού των ιδιοτήτων ενός σύνθετου υλικού είναι περίπλοκη και πραγματοποιείται μέσω σύνθετων προσεγγιστικών μεθόδων είτε μέσω της μηχανικής των υλικών είτε μέσω της θεωρίας της ελαστικότητας. Οι Halpin και Tsai [1,pg 151] ανέπτυξαν μία διαδικασία παρεμβολής, η οποία αποτελεί μία προσεγγιστική αναπαράσταση των περισσότερο περίπλοκων αποτελεσμάτων της μικρομηχανικής, **προκειμένου να προσδιοριστούν οι μηχανικές ιδιότητες ενός ινώδους σύνθετου συναρτήσει του ποσοστού του όγκου των ινών του ( $V_f$ )**. Αρχικά, αυτή η μέθοδος επιτρέπει την άμεση εφαρμογή της στην εκάστοτε διαδικασία σχεδιασμού, αφού είναι απλή και, ταυτόχρονα, καθιστά εφικτή την γενίκευση των περιορισμένων αποτελεσμάτων της μικρομηχανικής. Αναγκαίο κρίνεται να σημειωθεί ότι η εν λόγω διαδικασία είναι αρκετά ακριβής όταν το ποσοστό  $V_f$  των ινών δεν προσεγγίζει τη μονάδα, ενώ συνοψίζεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (7.1)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (7.2)$$

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (7.3)$$

Όπου  $E_1$ : το μέτρο ελαστικότητας (Young's modulus) του σύνθετου υλικού στη διεύθυνση των ινών

$E_f$ : το μέτρο ελαστικότητας των ινών

$E_m$ : το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας (εποξικής ρητίνης)

$\nu_{12}$ : ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού στο επίπεδο 1-2

$\nu_f$ : ο λόγος Poisson των ινών

$\nu_m$ : ο λόγος Poisson της μήτρας

$V_f$ : το ποσοστό του όγκου των ινών στο σύνθετο

$V_m$ : το ποσοστό του όγκου της μήτρας στο σύνθετο

$M$ : κάποια εκ των ιδιοτήτων του σύνθετου  $E_2$ ,  $G_{12}$  ή  $\nu_{23}$  (composite material modulus)

$M_f$ : κάποια εκ των ιδιοτήτων των ινών  $E_f$ ,  $G_f$  ή  $\nu_f$  (corresponding fiber modulus)

$M_m$ : κάποια εκ των ιδιοτήτων της μήτρας  $E_m$ ,  $G_m$  ή  $\nu_m$  (corresponding matrix modulus)

Επίσης δίνεται ότι:

$$\eta = \frac{\left(\frac{M_f}{M_m}\right) - 1}{\left(\frac{M_f}{M_m}\right) + \xi} \quad (7.4)$$

Και  $\xi$ : αποτελεί μέτρο ενίσχυσης των ινών του σύνθετου υλικού το οποίο εξαρτάται από τη γεωμετρία της ίνας, τη γεωμετρία βάσει της οποίας είναι τοποθετημένες οι ίνες μέσα στη μήτρα και τις συνθήκες φόρτισης

Μετά από αναζήτηση στη βιβλιογραφία [1,pg 152] επιλέχθηκε  $\xi=2$  για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου κάθετα στη διεύθυνση των ινών ( $E_2$ ) και για τον υπολογισμό του μέτρου διάτμησης  $G_{12}$  το  $\xi$  υπολογίζεται από τη σχέση (7.5):

$$\xi = 1 + 40V_f^{10} \quad (7.5)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \text{ ή ισοδύναμα } \nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (7.6)$$

Τέλος, ο λόγος Poisson  $\nu_{23}$  υπολογίζεται μέσω της σχέσης (7.6) η οποία ισχύει για ισότροπα υλικά και για το επίπεδο ισοτροπίας των ορθότροπων υλικών [1,pg 67] (επίπεδο 2-3).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα διαγράμματα της κρίσιμης τάσης λυγισμού και του συντελεστή  $k$  συναρτήσει του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) της κάθε πλάκας για την περίπτωση της καθαρά διατμητικής καταπόνησης σε πλάκες GLARE μεταβλητής κατ' όγκου αναλογίας ινών ( $V_f$ ). Τα υλικά στα οποία πραγματοποιήθηκε η εν λόγω μελέτη είναι τα glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 και glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667.

## 7.1 Λυγισμός λόγω διάτμησης με απλή έδραση

Η μεταβολή της κατ' όγκο αναλογίας ινών ( $V_f$ ) του σύνθετου υλικού προκαλεί αλλαγή στις μηχανικές του ιδιότητες, όπως υποδεικνύεται, άμεσα, από τις σχέσεις (7.1)-(7.6). Επομένως, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι όσον αφορά στη διαδικασία της μοντελοποίησης με το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων [62] η μοναδική διαφοροποίηση σε σύγκριση με την αντίστοιχη διαδικασία που πραγματοποιήθηκε στις ενότητες 4.1 και 4.2 του 4<sup>ου</sup> Κεφαλαίου είναι ο ποσοτικός ορισμός των μηχανικών ιδιοτήτων του σύνθετου. Ολοκληρώνοντας αυτή τη

διαδικασία, λοιπόν, κατασκευάστηκαν τα ζητούμενα συγκριτικά διαγράμματα για την περίπτωση τόσο της απλής έδρασης, τα οποία θα παρουσιαστούν σε αυτή την ενότητα όσο και για τις περιορισμένες στροφές τα οποία θα παρουσιαστούν στην επόμενη.

Το σύνθετο υλικό το οποίο επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί αποτελείται από ίνες γυαλιού τύπου S-glass και εποξική ρητίνη FM94. Οι ιδιότητες αυτών των συστατικών περιγράφονται στους Πίνακες 7.1 και 7.2, αντίστοιχα, ενώ οι ιδιότητες του σύνθετου περιγράφονται στον Πίνακα 7.3. Οι τελευταίες προέκυψαν μέσω της χρήσης των σχέσεων (7.1)-(7.6).

**Πίνακας 7. 1:** Μηχανικές ιδιότητες των ινών γυαλιού τύπου S-glass [66,pg 375]

<b>ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ S-GLASS</b>	
Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας, $E_{1f}$ (GPa)	86
Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, $E_{2f}$ (GPa)	86
Διάμηκες μέτρο διάτμησης, $G_{12f}$ (GPa)	35
Εγκάρσιο μέτρο διάτμησης, $G_{23f}$ (GPa)	35
Λόγος Poisson, $\nu_{12f}$	0,23

**Πίνακας 7. 2:** Μηχανικές ιδιότητες της εποξικής ρητίνης FM94 [65]

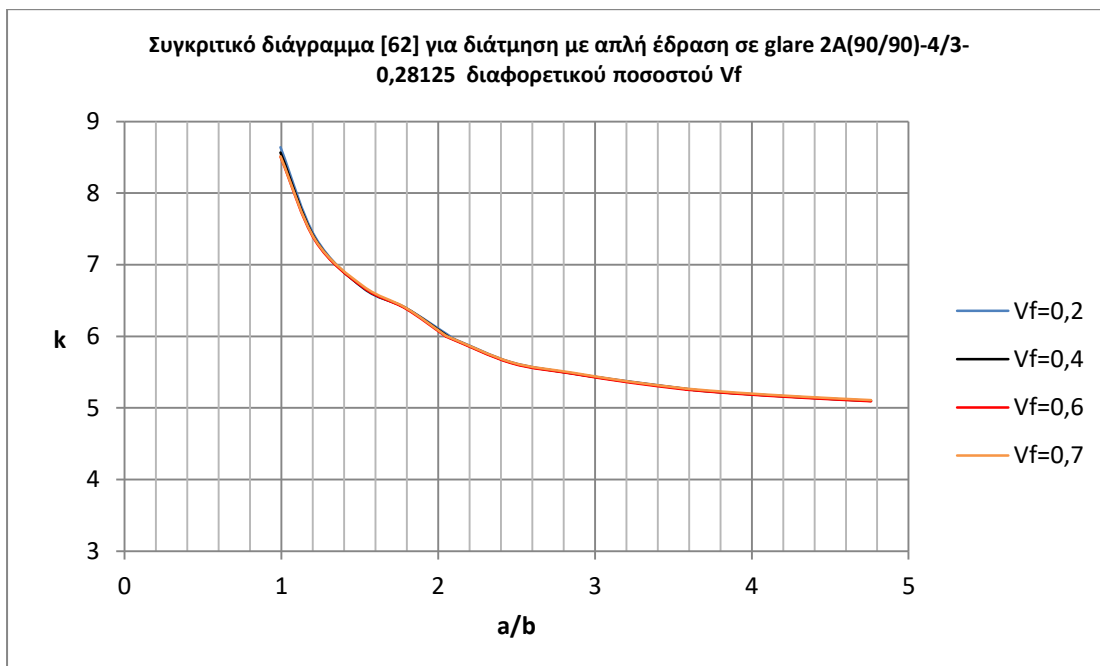
<b>ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΗΤΙΝΗΣ FM94</b>	
Μέτρο ελαστικότητας, $E$ (GPa)	2,19
Λόγος Poisson, $\nu$	0,33
Πυκνότητα μάζας ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	1280
Συντελεστής θερμικής διαστολής ( $1\times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )	35

**Πίνακας 7. 3:** Μηχανικές ιδιότητες του σύνθετου S-glass/epoxy FM94 ανάλογα με το ποσοστό του όγκου των ινών ( $V_f$ )

<b>ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΕΤΟΥ S-GLASS/EPOXY FM94</b>	<b><math>V_f</math></b>			
	<b>0,2</b>	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	<b>0,7</b>
Διάμηκες μέτρο ελαστικότητας, $E_1$ (GPa)	18,95	35,71	52,48	60,86
Εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, $E_2=E_3$ (GPa)	3,69	6,1	10,43	14,34
Μέτρο διάτμησης, $G_{12}=G_{13}$ (GPa)	1,21	1,84	3,26	5,63
Μέτρο διάτμησης, $G_{23}$ (GPa)	1,21	1,84	3,26	5,63
Λόγος Poisson, $\nu_{12}=\nu_{13}$	0,31	0,29	0,29	0,26
Λόγος Poisson, $\nu_{23}$	0,52	0,65	0,59	0,27

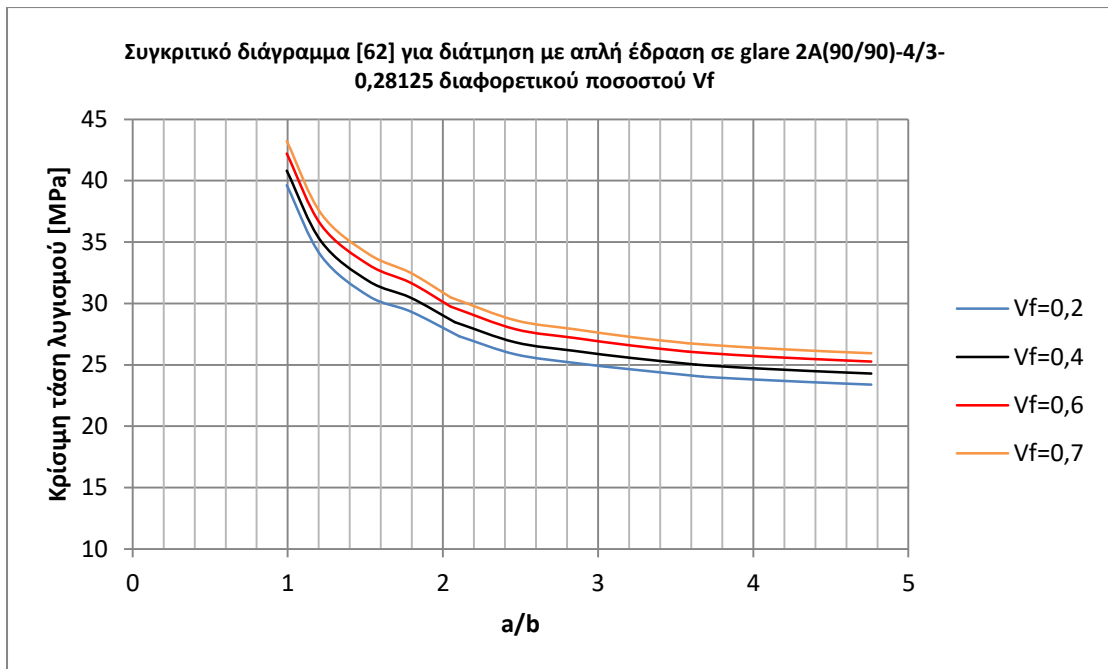
Στα παρακάτω Σχήματα 7.1 και 7.3 στα οποία απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις του συντελεστή λυγισμού  $k$  συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για τα glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 και glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667, αντίστοιχα, για διαφορετικά ποσοστά όγκου ινών ( $V_f$ ) διαπιστώνεται ότι αυτές, σχεδόν, ταυτίζονται. Επομένως, **η μεταβολή της κατ' όγκο αναλογίας των ινών του σύνθετου υλικού δεν προκαλεί ουσιαστική μεταβολή στον συντελεστή λυγισμού  $k$ .**

Παρατηρώντας, στη συνέχεια τα διαγράμματα των Σχημάτων 7.2 και 7.4, στα οποία περιέχονται οι καμπύλες της κρίσιμης τάσης λυγισμού συναρτήσει του λόγου  $a/b$  για διαφορετικά  $V_f$ , διαπιστώνεται ότι αυτές είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά σε σχέση με την κατ' όγκον αναλογία. Ειδικότερα, **όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του  $V_f$  τόσο μεγαλύτερη είναι η τάση λυγισμού.** Η παρατήρηση αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί αναμενόμενη, καθώς όσο περισσότερες ίνες είναι τοποθετημένες στο σύνθετο τόσο πιο δύσκαμπτο γίνεται αυτό και θα περίμενε κανείς να λυγίζει δυσκολότερα.

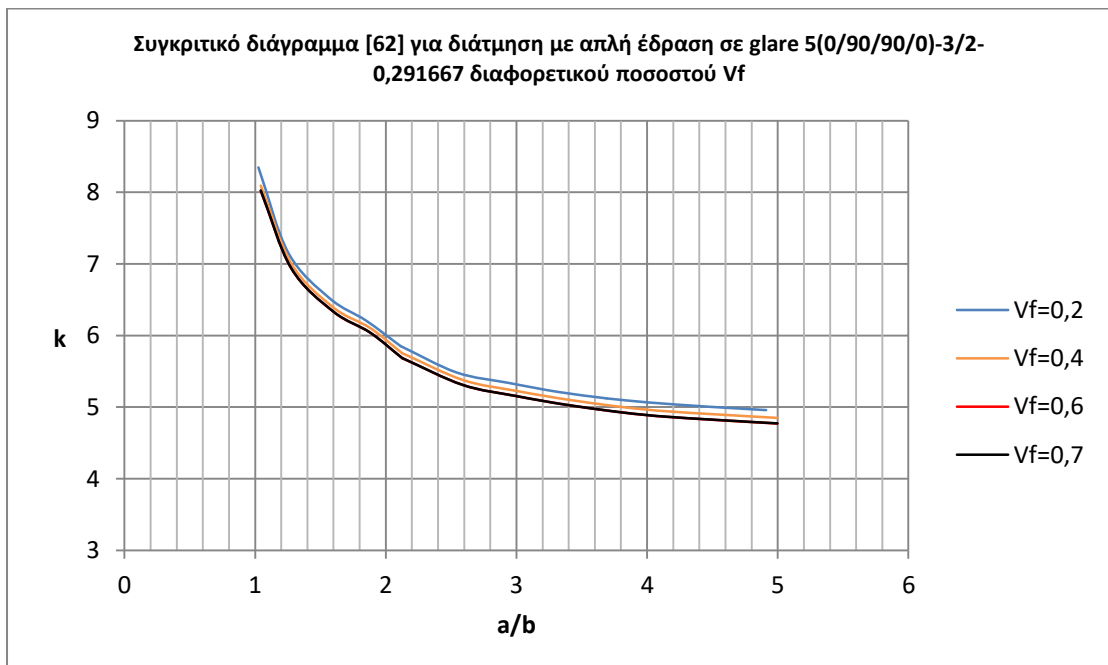


**Σχήμα 7. 1:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125

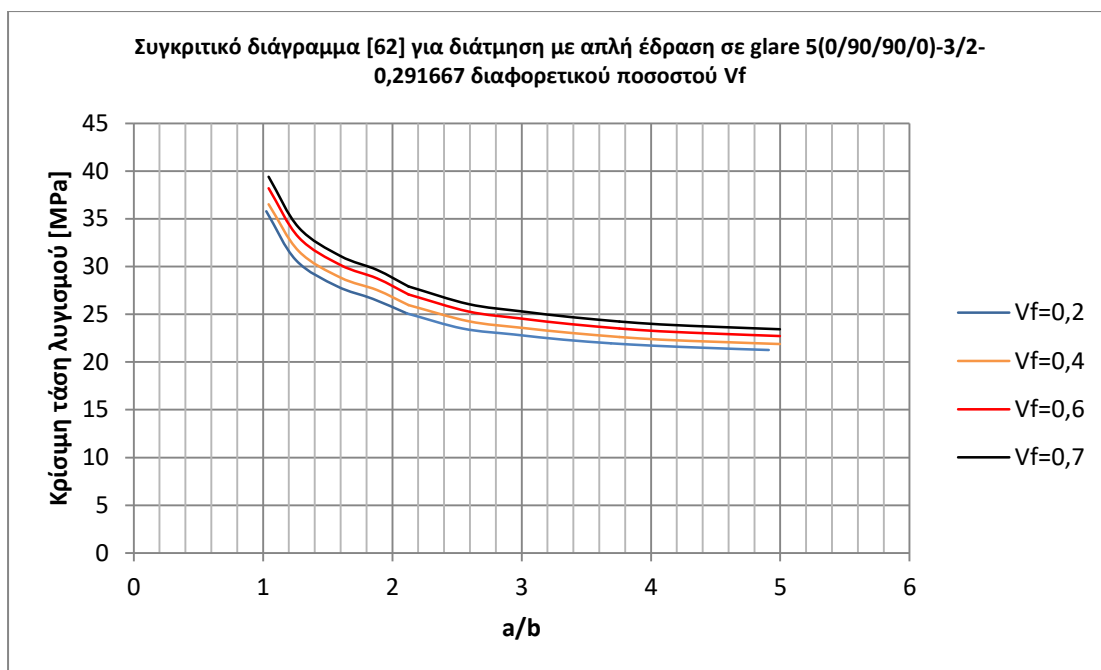




**Σχήμα 7. 2:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125



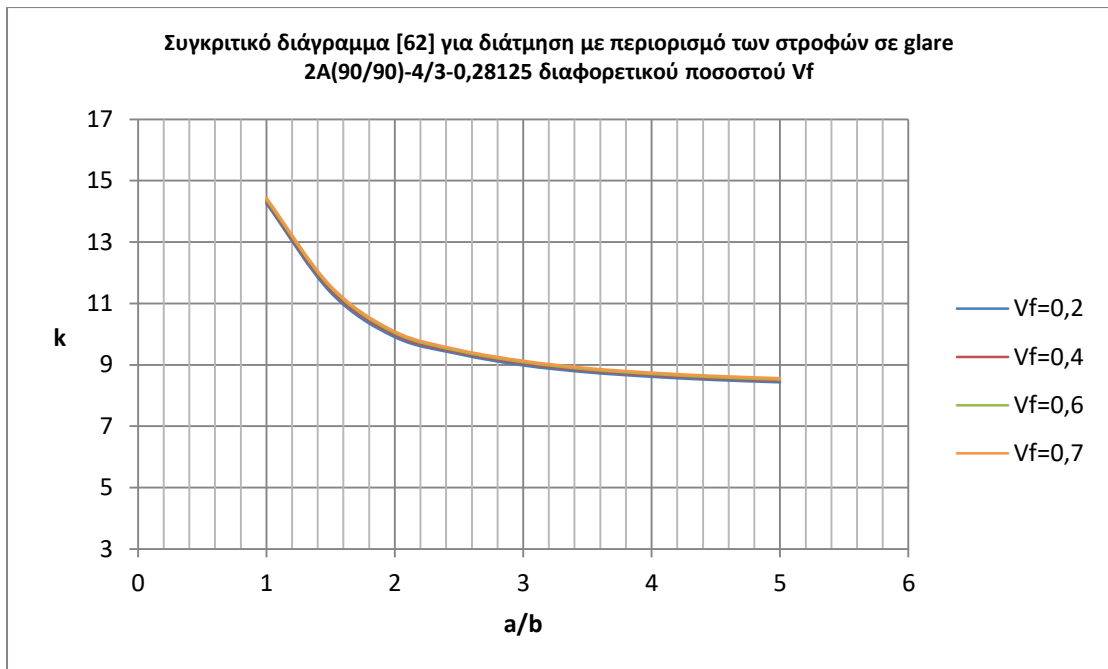
**Σχήμα 7. 3:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667



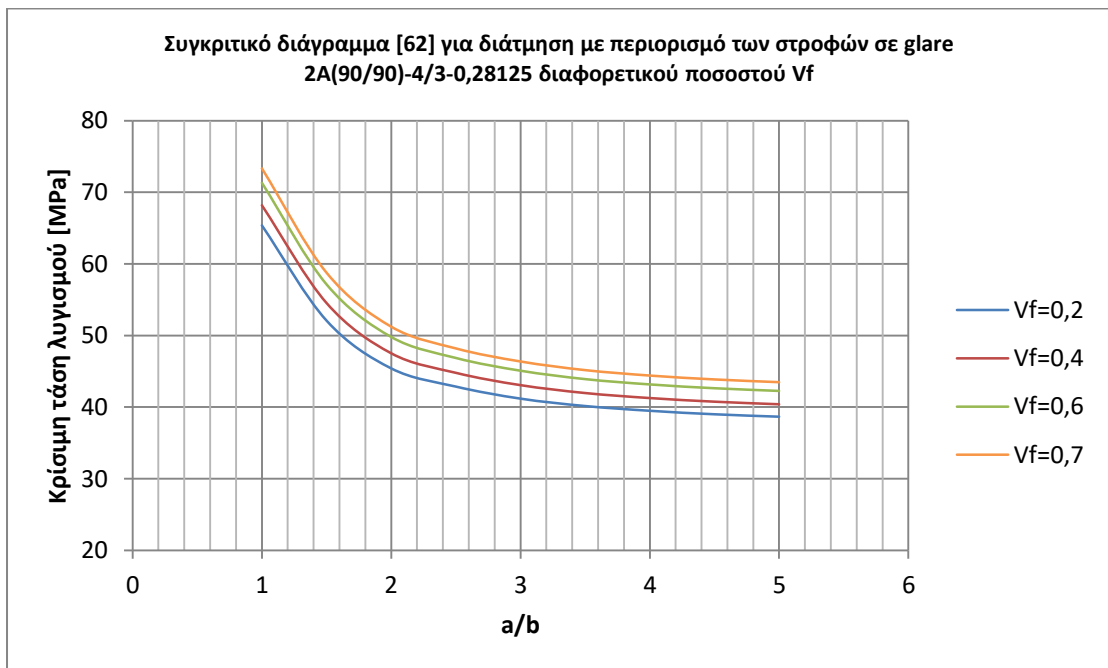
**Σχήμα 7. 4:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με απλή έδραση σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667

## 7.2 Λυγισμός λόγω διάτμησης με περιορισμένες τις ελευθερίες των στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών

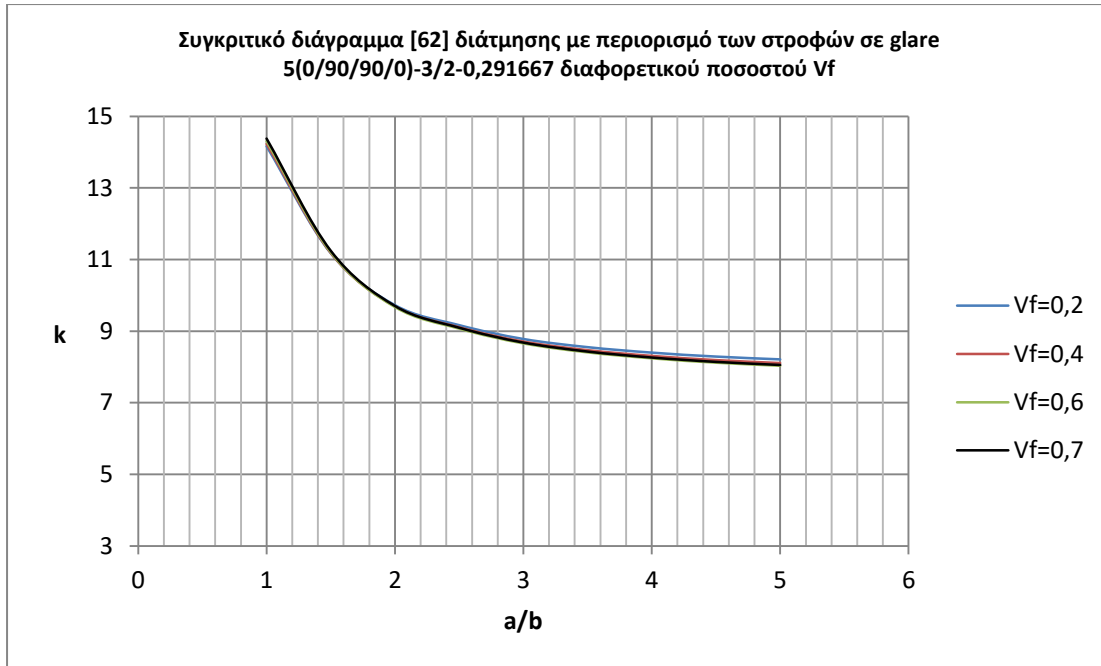
Και στην περίπτωση του λυγισμού λόγω διατμητικής καταπόνησης με περιορισμένες τις στρώφες κατά μήκος όλων των πλευρών οι παρατηρήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τα συγκριτικά διαγράμματα είναι όμοιες με αυτές της απλής έδρασης. Στα Σχήματα 7.5 και 7.7, όπου απεικονίζονται οι καμπύλες του συντελεστή λυγισμού  $k$  για διαφορετικά ποσοστά  $V_f$ , φαίνεται ότι **δεν επιδρά η μεταβολή του ποσοστού κατ' όγκο των ινών** του σύνθετου στο εν λόγω κρίσιμο μέγεθος σε κανένα εκ των glare 2A(90/90)-4/3-0,28125 και glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667. Αντίθετα, στα Σχήματα 7.6 και 7.8 διαπιστώνεται, εύκολα, ότι **η αύξηση του ποσοστού των ινών ( $V_f$ ) στο σύνθετο επιφέρει αύξηση στην κρίσιμη τάση λυγισμού** της πλάκας glare, καθιστώντας το πιο ανθεκτικό σε λυγισμό.



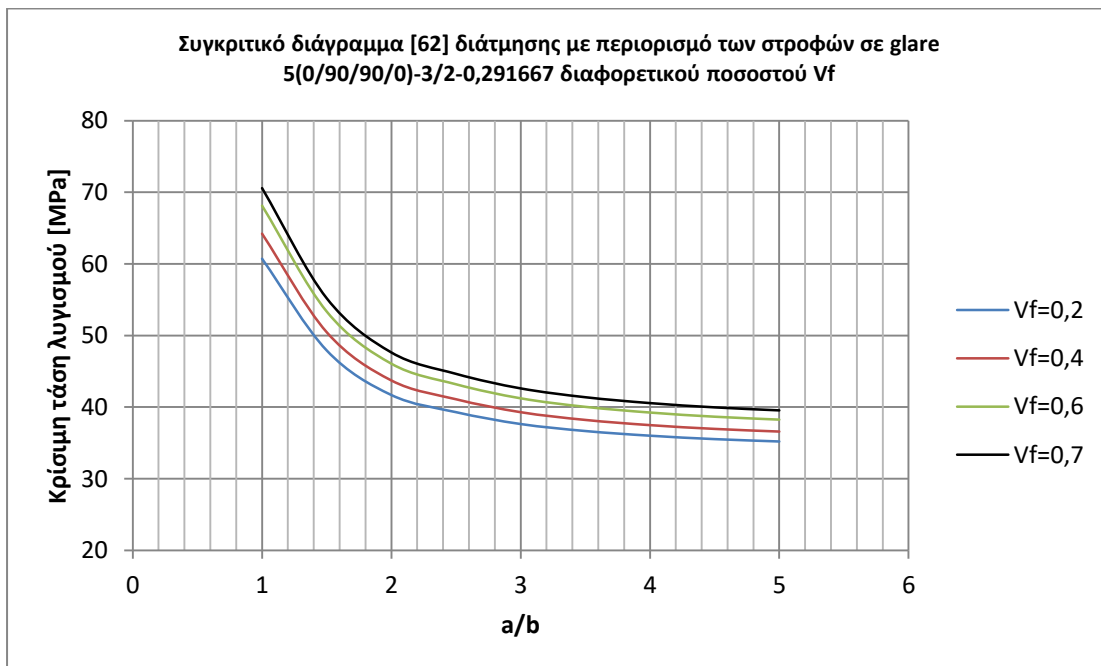
***Σχήμα 7. 5:** Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού  $k$  για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με περιορισμένες τις στροφές σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



***Σχήμα 7. 6:** Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με περιορισμένες τις στροφές σε glare 2A(90/90)-4/3-0,28125*



*Σχήμα 7. 7: Συγκριτικό διάγραμμα συντελεστή λυγισμού k για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με περιορισμένες τις στροφές σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667*



*Σχήμα 7. 8: Συγκριτικό διάγραμμα τάσης λυγισμού για μεταβλητό κατ' όγκο ποσοστό ινών ( $V_f$ ) για διάτμηση με περιορισμένες τις στροφές σε glare 5(0/90/90/0)-3/2-0,291667*

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8<sup>ο</sup>

### 8 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το τελευταίο Κεφάλαιο της Μεταπτυχιακής εργασίας θα παρατεθούν, συγκεντρωτικά, τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν από τη μελέτη της μοντελοποίησης πλακών οι οποίες αποτελούν τμήματα αεροναυπηγικών κατασκευών και αποτελούνται από ινώδη-μεταλλικά πολύστρωτα σύνθετα υλικά και, ειδικότερα, GLARE. Τα εν λόγω συμπεράσματα είναι:

1. Ο περιορισμός των ελευθεριών των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών στη μονοαξονική θλίψη οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού και του συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση για κάθε υλικό.
2. Η αναλογία του αλουμινίου κατ' όγκο (MVF) για κάθε οριακή συνθήκη και για κάθε προσανατολισμό των μονοκατευθυντικών ινών των στρώσεων του σύνθετου υλικού, στη μονοαξονική θλίψη, επιδρά ανάλογα στην κρίσιμη τάση λυγισμού. Όσο μεγαλύτερο το MVF τόσο μεγαλύτερη η κρίσιμη τάση για δεδομένη συνθήκη στήριξης και δεδομένο προσανατολισμό ινών.
3. Στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης, για μικρούς λόγους μήκους προς πλάτος (για λόγους  $a/b$  μικρότερους της μονάδας) τα υλικά ίσου MVF των οποίων ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού είναι  $0^\circ$  έχουν αυξημένη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς τόσο στην περίπτωση της απλής έδρασης όσο και στην περίπτωση των δεσμευμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών.
4. Στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης, για μικρούς λόγους μήκους προς πλάτος (για λόγους  $a/b$  μικρότερους της μονάδας) τα υλικά ίσου MVF των οποίων ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού είναι  $90^\circ$  έχουν μειωμένη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς τόσο στην περίπτωση της απλής έδρασης όσο και στην περίπτωση των δεσμευμένων στροφών κατά μήκος των πλευρών.
5. Στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης, για μεγαλύτερους λόγους μήκους προς πλάτος ( $a/b \geq 2,5$ ) τα υλικά ίσου MVF των οποίων οι στρώσεις του σύνθετου έχουν προσανατολισμό ινών  $45^\circ$  έχουν μεγαλύτερη κρίσιμη τάση λυγισμού σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς τόσο στην απλή έδραση όσο και στον περιορισμό των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας.
6. Για μεγαλύτερους λόγους  $a/b$  ( $a/b \geq 2,5$ ) δεν υπάρχει αξιόλογη διαφορά μεταξύ των υλικών ίσου MVF με προσανατολισμό ινών  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ή cross-ply

στις τιμές της κρίσιμης τάσης λυγισμού στην περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης με απλή έδραση.

7. Η αύξηση του λόγου  $a/b$  πέρα από μία κρίσιμη τιμή (περίπου 4) δεν επιφέρει ουσιαστική διαφοροποίηση σε καμία από τις τιμές της τάσης και του συντελεστή λυγισμού  $k$ , για όλες τις περιπτώσεις φόρτισης και συνοριακών συνθηκών.
8. Η σημαντικότερη παράμετρος, η οποία επηρεάζει τις ιδιομορφές για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης είναι οι συνοριακές συνθήκες. Τόσο η απλή έδραση όσο και ο περιορισμός των στροφών οδηγούν στη δημιουργία λυγισμένων πλακών χαρακτηριστικού σχήματος η κάθε μία, οι οποίες, ωστόσο, διαφέρουν μεταξύ τους.
9. Η αύξηση του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) σε μία πλάκα η οποία καταπονείται σε μονοαξονική θλίψη οδηγεί στη δημιουργία λυγισμένου σχήματος μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων.
10. Οι απλώς εδρασμένες ειδικά ορθότροπες πλάκες (specially orthotropic), οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Τα ημικύματα είναι συμμετρικά ως προς τους δύο άξονες του παράλληλου με τις πλευρές της πλάκας συστήματος συντεταγμένων που διέρχεται από το κέντρο τους και έχουν ίση κατά απόλυτη τιμή βύθιση. Επίσης, οι απλώς εδρασμένες ειδικά ορθότροπες πλάκες είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα παράλληλο στις διαμήκεις πλευρές τους, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους τους. Είναι συμμετρικές ως προς τον παράλληλο στις εγκάρσιες πλευρές άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ίδιο σημείο, όταν το πλήθος των half waves είναι περιττό και αντι-συμμετρικές ως προς τον ίδιο άξονα όταν το πλήθος των ημικυμάτων είναι περιττό.
11. Οι απλώς εδρασμένες μη ειδικά ορθότροπες πλάκες (προσανατολισμός ινών  $45^\circ$ ), οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή, αποτελούμενη από ημικύματα ίδιου σχήματος και διαφορετικού πλήθους για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Τα ημικύματα αυτά έχουν ίση κατά απόλυτη τιμή βύθιση.
12. Ο προσανατολισμός των ινών του σύνθετου υλικού επιδρά στο πλήθος των ημικυμάτων που δημιουργούνται, όταν οι πλάκες καταπονούνται σε θλίψη και στις δύο οριακές συνθήκες. Ο προσανατολισμός των  $90^\circ$  δημιουργεί περισσότερα ή ίσα ημικύματα σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς για πλάκες ίδιων διαστάσεων. Ο cross-ply προσανατολισμός και αυτός των  $45^\circ$  οδηγεί στη δημιουργία περισσότερων ή ίσων ημικυμάτων σε σύγκριση με τον προσανατολισμό των  $0^\circ$ .
13. Η αύξηση της κατ' όγκου αναλογίας αλουμινίου (MVF) στα υλικά τα οποία μοντελοποιήθηκαν σε θλίψη με απλή έδραση οδηγεί τις τιμές των λόγων  $a/b$  στις οποίες παρατηρείται αλλαγή του πλήθους των ημικυμάτων να συγκλίνουν στις αντίστοιχες τιμές των λόγων  $a/b$  του αλουμινίου.

Συγκεκριμένα, οι τιμές των λόγων  $a/b$  αλλαγής του πλήθους των ημικυμάτων για το αλουμίνιο ( $MVF=100\%$ ) είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές των υλικών, τα οποία έχουν προσανατολισμό  $90^\circ$  και μικρότερες από τις τιμές των υλικών προσανατολισμού  $0^\circ$ . Στα υλικά προσανατολισμού  $90^\circ$  η αύξηση του  $MVF$  οδηγεί στην αύξηση των τιμών των λόγων  $a/b$  στις οποίες προστίθενται ημικύματα στις ιδιομορφές, μέχρι να φτάσουν τις αντίστοιχες τιμές του αλουμινίου. Αντίθετα, στα υλικά των  $0^\circ$  η αύξηση του  $MVF$  οδηγεί στη μείωση αυτών των λόγων  $a/b$  ώστε, σταδιακά, προσεγγίζονται οι αντίστοιχες τιμές του αλουμινίου.

14. Οι ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων, για οποιοδήποτε λόγο  $a/b$ . Σε αντίθεση με την απλή έδραση η δέσμευση των στροφών φαίνεται να οδηγεί στην ανάπτυξη ημικυμάτων πιο απομακρυσμένων από το σύνορο, με αποτέλεσμα να μην έχουν ίση κατ' απόλυτη τιμή βύθιση. Η βύθιση αυξάνεται κατά μήκος και μέχρι το μέσο της πλάκας και, στη συνέχεια, μειώνεται με τον ίδιο τρόπο.
15. Οι ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες καταπονούνται σε μονοαξονική θλίψη με περιορισμένες τις ελευθερίες των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών είναι συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα παράλληλο στις διαμήκεις πλευρές τους, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο βάρους τους. Είναι συμμετρικές ως προς τον παράλληλο στις εγκάρσιες πλευρές άξονα, ο οποίος διέρχεται από το ίδιο σημείο, όταν το πλήθος των half waves είναι περιττό και αντι-συμμετρικές ως προς τον ίδιο άξονα όταν το πλήθος των ημικυμάτων είναι περιττό.
16. Οι μη ειδικά ορθότροπες πλάκες, οι οποίες θλίβονται έχοντας δεσμευμένες τις στροφές κατά μήκος των πλευρών τους αποκτούν χαρακτηριστική ιδιομορφή διαφορετικού πλήθους ημικυμάτων. Η τιμή της βύθισης των ημικυμάτων αυξάνεται κατά μήκος και μέχρι το μέσο της πλάκας και, στη συνέχεια, μειώνεται.
17. Στη μονοαξονική θλίψη, η δέσμευση των στροφών κατά μήκος των πλευρών της πλάκας οδηγεί στη δημιουργία ιδιομορφών αποτελούμενων από μεγαλύτερο ή ίσο πλήθος ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση σε όμοιες πλάκες.
18. Οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από την μοντελοποίηση όλων των υλικών στην καθαρή διάτμηση και για όλες τις συνθήκες στήριξης ήταν γνησίως φθίνουσες. Η αύξηση του λόγου μήκους προς πλάτος ( $a/b$ ) οδήγησε σε μείωση τόσο του συντελεστή λυγισμού  $k$  όσο και της κρίσιμης τάσης λυγισμού.
19. Η δέσμευση των ελευθεριών των στροφών κατά μήκος όλων των πλευρών (all edges clamped) οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές κρίσιμης τάσης λυγισμού και συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση (simply

- supported) και τη μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) για το κάθε υλικό, στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης.
20. Στην καθαρή διάτμηση, η μικτή οριακή συνθήκη (TSLC) οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές κρίσιμης τάσης λυγισμού και συντελεστή λυγισμού  $k$  σε σύγκριση με την απλή έδραση (simply supported) για το κάθε υλικό.
  21. Η αναλογία του όγκου του αλουμινίου (MVF) λειτουργεί με τρόπο ανάλογο στην κρίσιμη τάση λυγισμού για υλικά τα οποία μοντελοποιούνται σε διάτμηση με ίδιες οριακές συνθήκες. Όσο μεγαλύτερο το MVF τόσο μεγαλύτερη η τάση λυγισμού για τα απλώς εδρασμένα υλικά. Αντίστοιχα, για τα περιστροφικά περιορισμένα και για τα υλικά τα οποία μοντελοποιούνται με μικτή οριακή συνθήκη.
  22. Από τη μελέτη των πολύστρωτων υλικών με διαφορετικό προσανατολισμό ινών προκύπτει ότι ο πιο ανθεκτικός προσανατολισμός σε λυγισμό λόγω καθαρής διάτμησης είναι ο 90/90/90 και ο λιγότερο ανθεκτικός ο 0/0/0.
  23. Για τα υλικά GLARE ίσου MVF ο cross-ply προσανατολισμός ινών είναι λιγότερο ανθεκτικός σε λυγισμό λόγω διάτμησης σε σύγκριση με τους προσανατολισμούς των 90° και των 45°.
  24. Όλες οι ιδιομορφές που δημιουργήθηκαν στην καθαρή διάτμηση έχουν παρόμοια χαρακτηριστική μορφή. Τα ημικύματα (half-waves) δημιουργούνται και αναπτύσσονται με τον ίδιο τρόπο σχηματίζοντας γωνία 135° με τον άξονα  $x$ , και διαφοροποιούνται ως προς το πλήθος.
  25. Στην καθαρή διάτμηση, ο περιορισμός των στρωφών κατά μήκος όλων των πλευρών και η μικτή οριακή συνθήκη οδηγούν στη δημιουργία ιδιομορφών μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων σε σύγκριση με την απλή έδραση για πλάκες ίδιου υλικού και ίδιων διαστάσεων.
  26. Ο προσανατολισμός των 90° οδηγεί στη δημιουργία ιδιομορφών μεγαλύτερου ή ίσου πλήθους ημικυμάτων σε σύγκριση με τους υπόλοιπους προσανατολισμούς για πλάκες ίδιου υλικού και ίδιων διαστάσεων, οι οποίες καταπονούνται σε διάτμηση.
  27. Η δημιουργία και η ανάπτυξη των ημικυμάτων πραγματοποιείται πιο απομακρυσμένα από τα περιστροφικά περιορισμένα σύνορα τόσο στην περίπτωση της δέσμησης όλων των στρωφών όσο και στην περίπτωση της μικτής οριακής συνθήκης σε σύγκριση με τα μη περιστροφικά περιορισμένα σύνορα της μικτής συνθήκης και της απλής έδρασης, σε πλάκες οι οποίες καταπονούνται σε διάτμηση.
  28. Η μέθοδος του νόμου των μιγμάτων παρουσιάζει ικανοποιητική σύγκλιση με την αριθμητική μέθοδο σε όλες τις περιπτώσεις φόρτισης και συνθηκών στήριξης. Επιπρόσθετα, οι τιμές που προκύπτουν από τη μέθοδο του νόμου των μιγμάτων είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες της αριθμητικής μεθόδου καθιστώντας τους εν λόγω υπολογισμούς πιο συντηρητικούς και, άρα, ασφαλείς.



29. Η μεταβολή της κατ' όγκου αναλογίας των ινών του σύνθετου υλικού στο GLARE δεν προκαλεί ουσιαστική μεταβολή στον συντελεστή λυγισμού  $k$  στα υλικά τα οποία καταπονούνται σε διάτμηση με απλή έδραση ή με περιορισμό των στροφών.
30. Η μεταβολή της κατ' όγκο αναλογίας των ινών του σύνθετου υλικού στο GLARE επιδρά ανάλογα στην κρίσιμη τάση λυγισμού στα υλικά τα οποία καταπονούνται σε διάτμηση είτε με απλή έδραση είτε με περιορισμό των στροφών. Όσο μεγαλύτερη η εν λόγω κατ' όγκο αναλογία τόσο μεγαλύτερη και η κρίσιμη τάση λυγισμού.

Όσον αφορά, τέλος, στην περαιτέρω διερεύνηση της μελέτης σε λυγισμό λόγω θλίψης και διάτμησης ορθογώνιων FML πλακών θα μπορούσε να μελετηθεί η μη γραμμική ανελαστική συμπεριφορά σε λυγισμό καθώς και η συμπεριφορά των πλακών μετά τον αρχικό λυγισμό τους. Σημαντική, επίσης, κρίνεται η μελέτη των πλακών μέχρι την τελική τους αστοχία εξαιτίας του λυγισμού και η ανάλυση της εν λόγω διαδικασίας και των σχετικών μηχανισμών. Κάτι τέτοιο αποκτά ιδιαίτερη σημασία όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο αφού οι πλάκες, σε αντίθεση με τις στήλες, μπορούν να αντέξουν αρκετά μεγάλη επιπρόσθετη φόρτιση μετά τον αρχικό λυγισμό τους και πριν αστοχήσουν. Η διεξαγωγή πειραμάτων αποτελεί μία ακόμη πρόταση περαιτέρω έρευνας ώστε να διαπιστωθεί η σύγκλιση με τα αριθμητική και αναλυτικά αποτελέσματα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Robert M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, Second edition, 1999
2. William D. Callister, JR., *Material Science and Engineering: An Introduction*, ed.2008
3. Γ. Σ. Μπικάκης, Διδακτορική Διατριβή, *Συμβολή στην μελέτη της αντοχής μηχανολογικών κατασκευών από σύγχρονα πολύστρωτα υλικά*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2010
4. Ε. Καραϊσκος, Μεταπτυχιακή Εργασία, *Μελέτη της κρουστικής απόκρισης πλακών αποτελούμενων από σύγχρονα πολύστρωτα υλικά*, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015
5. George SE Bikakis, *Finite element and analytical modeling to predict the frictional oblique indentation response of GLARE fiber-metal laminates*, Journal of reinforced Plastics and Composites 0(0) 1-11, 2017
6. George J. Tsamasphyros, George S. Bikakis, *Analytical modeling to predict the low velocity impact response of circular GLARE fiber-metal laminates*, Aerospace Science and Technology 29 (2013) 28-36
7. George SE Bikakis, Evangelos Karaiskos and Emilios P. Sideridis, *Low velocity impact response of fiber-metal laminates consisting of different standard GLARE grades*, Journal of reinforced Plastics and Composites 0(0) 1-12, 2016
8. George SE Bikakis, Alexander Savaidis, *FEM simulation of simply supported GLARE plates under lateral indentation loading and unloading*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics (2016)
9. Chang PY, Yeh PC, Yang JM. *Fatigue crack initiation in hybrid boron/glass/aluminum fiber metal laminates*, Material Science Engineering 2008;A 496:273–80
10. Alderliesten RC, Benedictus R. *Fiber/metal composite technology for future primary aircraft structures*. In: *48th Aiaa/Asme/Asce/Ahs/Asc structures, structural dynamics, and materials conference 15th*; April 23–26, 2007; Honolulu, Hawaii; 2007. p. 1–12.
11. Vlot A. *Impact loading on fibre metal laminates*. Int J Impact Eng 1996;18(3):291–307.
12. George SE Bikakis, *FEM analysis and analytical formulas to predict the indentation response of circular simply supported GLARE plates*, Journal of Composite Materials 0(0) 1-10, 2014
13. George S. Bikakis, A. Savaidis, *Impact of different boundary conditions on the response of glare fiber-metal laminates under lateral indentation*, Advanced Composite Letters 25(2):29-36, 2016

14. George SE Bikakis, *Simulation of the dynamic response of GLARE plates subjected to low velocity impact using a linearized spring-mass model*, Aerospace Science and Technology, 2017
15. R. J. Mania, *Comparative static buckling study of FML thin-walled profiles*, ECCM16-16<sup>TH</sup> European Conference on Composite Materials, Seville, Spain, 22-26
16. Jones, R M, *Buckling and vibration of unsymmetrically laminated cross-ply rectangular plates*, AIAA J 11(12) 1973, 1626-1632
17. J.N. Reddy, A.A. Khdeirt, *Buckling and Vibration of Laminated Composite Plates Using Various Plate Theories*, AIAA Journal, Vol.27, No.12,1808-1817
18. J.M. Housner, M. Stein, *Numerical analysis and parametric studies of the buckling of composite orthotropic compression and shear panels*, Technical note NASA TN D-7996, Oct 1975
19. Timoshenko & Gere, *Theory of elastic stability*, International Student Edition Second Edition, Mc Graw Hill,1961
20. Whitney J.M., *Shear buckling of unsymmetrical cross-ply plates*, J Composite Material 3, 1969, p 359-363
21. Hui D., *Shear buckling of anti-symmetric cross-ply rectangular plates*, Fibre Science Technology 21, 1984, p 327-340
22. Hirano Y., *Stability optimization of laminated composite plates*, Tokyo University Japan, Institute of Space and Aeronautics Science, ISAS-579 45(4), also NASA CR-163456
23. Y. Xiang, K.M. Liew, S. Kitipornchai, *Exact buckling solutions for composite laminates: proper free edge conditions under in-plane loadings*, Acta Mechanica 117, 115-128 (1996)
24. R. J. Mania, Z. Kolakowski, J. Bienias, P. Jakubczak, K. Majerski, *Comparative study of FML profiles buckling and post-buckling behavior under axial loading*, Composite Structures 134 (2015) 216-225
25. D. Banat, R. J. Mania, *Comparison of failure criteria application for FML column buckling strength analysis*, Composite structures (2016)
26. D. Banat, R. J. Mania, *Failure assessment of thin-walled FML profiles during buckling and post-buckling response*, Composite Part B 112 (2017) 278-289
27. D. Banat, Z. Kolakowski, R. J. Mania, *Investigations of FML profile buckling and post-buckling behavior under axial compression*, Thin-Walled Structures 107 (2016) 335-344
28. J. J. C. Remmers, R. de Borst, *Delamination buckling of Fiber Metal Lamination under Compressive and shear Loadings*, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Con 22-25 April 2002, Denver, Colorado
29. Rengui Bi, Yiming Fu, Yanping Tian, Chao, Jiang, *Buckling and Postbuckling Analysis of Elasto-plastic Fiber Metal Laminates*, Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 27, No. 1, February, 2014

30. R. Mania, C. B. York, *Buckling Strength Improvements for Fiber Metal Laminates using thin-ply tailoring*, Composite Structures (2016)
31. J. L. Verolme, *The initial buckling behavior of flat and curved Fiber Metal Laminate panels*, Delft University of Technology, Faculty of Aero. Eng. Report LR-785, 1995
32. Vogelesang LB, Vlot A., *Development of fibre metal laminates for advanced aerospace structures*, Journal of Materials Processing Technology 2000;103:1-5
33. Vogelesang B, Gunnink JW, Roebroeks GHJ, *Toward the supportable and durable aircraft fuselage structure*. In: Grandage JM, Jost GS, editors. Proceedings of the 18th symposium of the International Committee on aeronautical fatigue, 1995 May 3-5, Melbourne, Australia; 1995 p. 257-272
34. Cortes P., Cantwell WJ., *The prediction of tensile failure in titanium-based thermoplastic fibre-metal laminates*. Composite Science Technology 2006; 66: 2306-16
35. Cortes P, Cantwell WJ., *Fracture properties of a fiber-metal laminate based on magnesium alloy*. Journal of Materials Science 2004; 39: 1081-3
36. Alderliesten R. *On the development of hybrid materials concepts for aircraft structures*, Recent Patents Engineering 2009; 3: 25-38
37. Roebroeks GHJ. *Fibre-metal laminates recent developments and applications*. Fatigue 1994; 16(1): 33-42
38. Yehia A, Bahei-El-Din A, Amany G, Botrous B, *Analysis of progressive fiber debonding in elastic laminates*. International Journal of Solids Structure 2003; 40: 7035-53
39. F. D. Moriniere, R. C. Alderliesten, R. Benedictus. *Low velocity Impact energy partition in GLARE*. Mechanics of Materials 66(2013) 59-68
40. Guocai Wu and J-M Yang, *The Mechanical Behavior of GLARE Laminates for Aircraft Structures*. Failure in Structural Materials, 2005
41. R. Alderliesten, *Fatigue crack propagation and delamination growth in GLARE*, DUP Science, Delft, The Netherlands, 2005
42. T.J. de Vries, *Blunt and sharp notch behavior of GLARE laminates*, DUP Science, Delft, The Netherlands, 2001
43. C.A.J.R. Vermeeren et al., *GLARE Design Aspects and Philosophies*, Applied Composite Materials, 10(2003), pp. 257-276
44. J. Macheret and R.J. Bucci, *A crack growth resistance curve approach to fiber/metal laminate fracture toughness evaluation*, Engineering Fracture Mechanics, 45(6) (1993), pp. 729-739
45. M. Papakyriacou, S. E. Stanzl-Tschegg, H. R. Mayer, J. Schijve, *Fatigue crack growth behavior of fiber-metal laminate GLARE-1 and metal laminate 7475 with different blunt notches*, Fatigue & Fracture Engineering Materials Structure, 20 (11) (1997), pp. 1573

46. M. Papakyriacou, S. E. Stanzl-Tschegg, H.R. Mayer, J. Schijve, *Fatigue crack growth in GLARE. Role of glass fibers*, Proc. of 10th European Conference Fracture, Vol 2 (West Midlands, UK: Warley, 1999), pp. 1193-1199)
47. J. R. Yeh, *Fracture crack growth In fiber-metal laminates*, International Journal of Solid Structures, 32 (14) (1995), pp. 2063-2075
48. R. Alderliesten, *Fatigue crack propagation and delamination growth in GLARE*, DUP Science, Delft, The Netherlands, 2005
49. T.J. de Vries, *Blunt and sharp notch behavior of GLARE laminates*, DUP Science, Delft, The Netherlands, 2001
50. J.J. Homan, *Fatigue initiation in fibre metal laminates*, International Journal of Fatigue, 28 (4), 366-374, 2006
51. R.C. Alderliesten, J.J. Homan, *Fatigue and damage tolerance issues of GLARE in aircraft structures*, International Journal of Fatigue 28 (10), 1116-1123, 2006
52. T. Beumler et al., *Enviromental influence on GLARE riveted joints*, Proceedings of the 46th International SAMPE Symposium
53. M.F.H.C. Boertien, *Strength of GLARE after exposure to moisture*, Thesis report, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology
54. B. Borgonje and M.S. Ypma, *Long term behavior of GLARE*, Applied Composite Materials, 10 (2003)
55. A. Seyed Yaghoubi, B. Liaw, *Effect of lay-up orientation on ballistic impact behaviors of GLARE 5 FML beams*, International Journal of Impact Engineering 54 (2013) 138-148
56. C.A.J.R. Vermeeren, *Residual Strength Predictions for Fiber Metal Laminates: The R curve Approach*, Report LR-717
57. Hoo Fatt MS, Lin C, Revilock Jr DM, Hopkins DA, *Ballistic Impact of Glare fiber metal laminates*, Composite Structures 2003; 61: 73e88
58. Compston P, Cantwell WJ, Jones C, Jones N, *Impact perforation resistance and fracture mechanisms of a thermoplastic based fiber-metal laminate*
59. Owen F. Hughes, Jeom Kee Paik with Dominique Beghin, John B. Caldwell, Hans G. Payer and Thomas E. Schellin, *Ship structural analysis and design*, Published by The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 2010
60. Πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS
61. Constantine Christoforos Spyrakos, John Raftoyiannis, *Linear and Nonlinear Finite Element Analyses in Engineering Practice*, Algor Publishing Division, 1997
62. Πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ANSYS
63. Timoshenko & Gere, *Theory of elastic stability*, International Student Edition Second Edition, Mc Graw Hill, 1961
64. Daniel Gay, Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai, *Composite Materials Design and Applications*, CRC Press 2003

65. Ahmad S.M. Al-Azzawi, Luiz F. Kawashita, Carol A. Featherston, *Buckling and Post-buckling Behavior of Glare Laminates Containing Splices and Doublers. Part 2: Numerical Modelling*, Composite Structures (2017)
66. Isaac M. Daniel, Ori Ishai, *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University Press, 2006
67. Tamer Sinmazelik, Egemen, Onur Hoban, *A review: Fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods*
68. Gin Boay Chai, Periyasamy Manikandan, *Low velocity impact response of fibre-metal laminates-A review*, Composite Structures 107(2014) 363-381
69. Asundi A., Choi Alta YN., *Fiber metal laminates: an advanced material for future aircraft*, J. Material Process Technology 63(1997) 384-94
70. Botelho EC, Silva RA, Pardini LC, Rezende MC. *A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures*. Material Res 2006;9(3);247-56
71. Beumler T, Pellenkoff F, Tillich A, Wohlers W, Smart C. *Airbus costumer benefit from fiber metal laminates*. Airbus Deutschland GmbH; 2006 May, Ref. no: L53pr0605135-Issue 1. p. 1–18.
72. Castrodeza EM, Bastian FL, Perez JEI. *Critical fracture toughness,  $J_c$  and  $D5c$ , of unidirectional fibre–metal laminates*. Thin-Walled Struct 2003;4:1089–101
73. Arthur Leissa, *A review of laminated composite plate buckling*, Applied Mechanics Revised vol 40, no 5, May 1987
74. Klaus-Jurgen Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey (1996)
75. Siemens, *NX Nastran User's Guide*, 2014 Siemens Product Lifecycle Management Software
76. Richard Mac Neal, *The Nastran Theoretical Manual*, National Aeronautics and Space Administration, Washington (1972)
77. Siemens, *NX Nastran Numerical Method User's Guide*, 2014 Siemens Product Lifecycle Management Software
78. Lanczos C., *An iteration method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, Journal of the Research of the National Bureau of Standards, Volume 45, 1950, pp. 255-282
79. William H. Press, Saul Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd Edition, Cambridge University, 2007
80. J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2004