ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ σε ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ

και την ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ»

ΤΙΤΛΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΕΠΩΝΥΜΟ ΟΝΟΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ : ΚΕΡΑΜΙΔΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: 09315011

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΚΟΛΛΙΑΣ ΗΡΑΚΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2018

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μια περιοχή της οικονομικής θεωρίας στην οποία ο βέλτιστος έλεγχος βρίσκει εφαρμογή είναι οι οικονομικές διακυμάνσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί μακροοικονομικές μεταβλητές όπως το ΑΕΠ είναι κυρίαρχες και συνεπώς η γνώση των μεταβολών τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές υπό την επίδραση των εξωγενών διαταραχών και της οικονομικής πολιτικής είναι ιδιαίτερα σημαντική . Στην παρούσα εργασία βασιζόμαστε στο άρθρο των Kendrick και Shoukry [Kendrick.D.A & Shoukry.G (2014). Quarterly Fiscal Policy Experiments with a Multiplier-Accelerator Model. Computational Economics 44(3) 269-293] το οποίο τροποποιούμε με σκοπό τη διατύπωση ενός υποδείγματος μεγαλύτερης τάξης. Η αύξηση της τάξης του συστήματος αλλάζει και τις ιδιότητές του. **Τονίζουμε ότι περιοριζόμαστε μόνο στη θεωρητική παρουσίαση του υποδείγματος αφήνοντας το εμπειρικό κομμάτι του υποδείγματος για μελλοντική εξέταση.** Το ερώτημα το οποίο τίθεται από τους Kendrick & Shoukry με αφορμή την οικονομική κρίση του 2008 είναι το εξής : Η αύξηση της συχνότητας της δημοσιονομικής πολιτικής από κοινού με τη νομισματική πολιτική μπορεί να οδηγήσει στην καλύτερη επίτευξη των στόχων της οικονομικής πολιτικής ; Άρα αυτό το οποίο μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε, επικεντρωνόμενοι πάντα στο θεωρητικό πλαίσιο, είναι αν η άσκηση της δημοσιονομικής πολιτικής με μεγαλύτερη συχνότητα πέραν του ετήσιου κρατικού προϋπολογισμού οδηγεί διαχρονικά στην μείωση των αποκλίσεων των πραγματικών τιμών μιας σειράς μακροοικονομικών μεταβλητών από τις επιθυμητές τους τιμές όπως αυτές ορίζονται από τον υπεύθυνο άσκησης της οικονομικής πολιτικής υπό την παρουσία εξωγενών διαταραχών στο οικονομικό ΣΑΕ. Οι βασικές σχέσεις του υποδείγματος είναι η ταυτότητα εισοδήματος (συνθήκη ισορροπίας της αγοράς αγαθών), μιας συνάρτηση κατανάλωσης , μια εξίσωση φόρων και μια συνάρτηση ιδιωτικών επενδύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΓΕΝΙΚΑ

1.1. Έννοιες

Σύστημα Αυτόματου Ελέγχου (ΣΑΕ) είναι ένα σύστημα του οποίου τα διάφορα μέρη είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους έτσι ώστε να συμπεριφέρονται αυτόματα κατά έναν προκαθορισμένο επιθυμητό τρόπο. Διακρίνουμε μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών ΣΑΕ όπως Φυσικά (μηχανικά, ηλεκτρικά, αεροδυναμικά), Οικονομίας, Μεταφοράς, Οικολογίας , Φυσιολογίας (ανοσοποιητικό, αναπνευστικό) κ.λπ. Αν η δυναμική συμπεριφορά ενός ΣΑΕ μπορεί να αναπαρασταθεί από μια εξίσωση, ή από ένα σύνολο εξισώσεων, τότε αυτή η εξίσωση (ή αυτό το σύνολο εξισώσεων) λέγεται μαθηματικό υπόδειγμα του ΣΑΕ.

Διακρίνουμε έτσι μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών ΣΑΕ όπως:

1. Ντετερμινιστικά
2. Στοχαστικά (αναπαριστάνονται από στοχαστικές ανελίξεις)
3. Χρονικά Συνεχή (αναπαριστάνονται από διαφορικές εξισώσεις)
4. Χρονικά Διακριτά (αναπαριστάνονται από εξισώσεις διαφορών)
5. Γραμμικά (αναπαριστάνονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών)
6. Μη Γραμμικά (αναπαριστάνονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών)
7. Υβριδικά (περιέχουν τόσο συνεχείς όσο και διακριτές μεταβλητές)
8. Χρονικά Διακριτά (αναπαριστάνονται από χρονικά αναλλοίωτες διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών)
9. Χρονικά Μεταβλητά (αναπαριστάνονται από χρονικά μεταβλητές διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών)
10. Πεπερασμένης Διάστασης
11. Απειροδιάστατα (αναπαριστάνονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις)
12. Ομογενή (ή αυτόνομα)
13. Μη ομογενή.

Τονίζουμε ότι από καθαρά μαθηματικής σκοπιάς ΣΑΕ είναι ένας τελεστής H από ένα διανυσματικό χώρο συναρτήσεων ο οποίος λέγεται χώρος των εισόδων σε έναν άλλο διανυσματικό χώρο συναρτήσεων ο οποίος λέγεται χώρος των εξόδων. Συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο των εισόδων ως U, όπου $U \subseteq \mathbb{R}$ (ή ευρύτερα $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$).

Αντίστοιχα συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο των εξόδων ως Y όπου $Y \subseteq \mathbb{R}$ (ή ευρύτερα $Y \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$). Φτιάχνουμε το ακόλουθο διάγραμμα βαθμίδας:

$$u \in U \rightarrow \boxed{\mathrm{H}} \rightarrow y \in Y$$

Άρα ένα ΣΑΕ μπορεί να θεωρηθεί ως κάποια διαδικασία της οποίας το αποτέλεσμα είναι ο μετασχηματισμός σημάτων. Επομένως ένα ΣΑΕ περιέχει ένα σήμα εισόδου και ένα σήμα εξόδου το οποίο σχετίζεται με το σήμα εισόδου μέσω του μετασχηματισμού του συστήματος. Τονίζουμε ότι σήμα καλούμε οποιαδήποτε συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων ελεύθερων μεταβλητών. Έτσι για παράδειγμα οι συναρτήσεις $x(t)=5t$ και $x(t_1,t_2)=3t_1+2t_2$ είναι σήματα.

1.2. Ιδιότητες συστημάτων.

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου μαζί με δύο αρχικές καταστάσεις και δύο εισόδους $\vec{x}_i(t_0)$ και $\vec{u}_i(t), t \geq t_0$, $i=1,2$, αντίστοιχα. Ορίζουμε τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Προσθετικότητα :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1(t_0)+\vec{x}_2(t_0) \\ \vec{u}_1(t)+\vec{u}_2(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{y}_1(t)+\vec{y}_2(t), t \geq t_0.$$

2. Ομογένεια

$$\left.\begin{array}{l} a\vec{x}(t_0) \\ a\vec{u}(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow a\vec{y}(t), t \geq t_0$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

Οι ιδιότητες της προσθετικότητας και της ομογένειας μπορούν να γραφούν από κοινού ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\vec{x}_1(t_0)+a_2\vec{x}_2(t_0) \\ a_1\vec{u}_1(t)+a_2\vec{u}_2(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow a_1\vec{y}_1(t)+a_2\vec{y}_2(t), t \geq t_0$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Οι ιδιότητες της προσθετικότητας και της ομογένειας από κοινού αποτελούν την αρχή τη υπέρθεσης. Ένα ΣΑΕ το οποίο ικανοποιεί τη συγκεκριμένη αρχή λέγεται γραμμικό. Ένα ΣΑΕ το οποίο δεν ικανοποιεί τη συγκεκριμένη αρχή λέγεται μη γραμμικό. Από καθαρά μαθηματικής σκοπιάς ένα μη γραμμικό ΣΑΕ αναπαριστάνεται από ένα μη γραμμικό τελεστή. Ένα γραμμικό ΣΑΕ αναπαριστάνεται από ένα γραμμικό τελεστή. Έστω τώρα μια αρχική κατάσταση $\vec{x}(t_0)$ και μια είσοδος $\vec{u}(t)$, $t \geq t_0$. Η συνάρτηση $\vec{y}(t), t \geq t_0$, συμβολίζει την έξοδο (ή απόκριση) του συστήματος. Αν το ΣΑΕ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}(t_0 + T) \\ \vec{u}(t - T), t \geq t_0 + T \end{array}\right\} \rightarrow \vec{y}(t - T), t \geq t_0 + T \ ,$$

δηλαδή αν οριζόντιες μετατοπίσεις της εισόδου μαζί με τη χρονική μετατόπιση της αρχικής κατάστασης συνεπάγονται τη μετατόπιση της κυματομορφής εξόδου με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, τότε το ΣΑΕ λέγεται χρονικά αναλλοίωτο. Διαφορετικά το ΣΑΕ λέγεται χρονικά μεταβλητό.

1.3. Δυναμικό Σύστημα.

Δυναμικό σύστημα λέγεται ένα σύστημα το οποίο μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο, υποκείμενο σε κάποιο νόμο κίνησης. Ένας νόμος κίνησης είναι μια διαδικασία "updating" η οποία μας πληροφορεί ποιά θα είναι η κατάσταση του συστήματος την επόμενη χρονική περίοδο αν γνωρίζουμε ποια είναι η κατάσταση του συστήματος τώρα.

Για παράδειγμα ο νόμος κίνησης

$$x_{n+1} = -2x_n, x_0 \text{ δοσμένο (αρχική κατάσταση)}$$

μας πληροφορεί ότι την χρονική περίοδο 1 η κατάσταση του συστήματος θα είναι η

$$x_1 = -2x_0 .$$

Αντίστοιχα ο νόμος κίνησης

$$\frac{dx}{dt} = -2x, x(t_0) = x_0$$

μας πληροφορεί ότι την χρονική περίοδο $t = 1$ η κατάσταση του συστήματος θα είναι η

$$x(1) = x_0 e^{-2(1-t_0)} .$$

Σημείωση: Η λύση του ΠΑΤ ή ΠΣΤ ενός σημείου $\frac{dx}{dt} = -2x, x(t_0) = x_0$, είναι η $x(t) = x_0 e^{-2(t-t_0)}$ στην οποία θέσαμε $t = 1$.

Αυστηρός ορισμός δυναμικού συστήματος:

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\vec{f} : X \to X$ μια απεικόνιση από το σύνολο X στον εαυτό του. Τότε το ζεύγος $(X, \vec{f})$ λέγεται δυναμικό σύστημα.

<u>Παράδειγμα 1</u> : Έστω το δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου

$$\dot{x} = -x + y$$

$$\dot{y} = -2x + y\,.$$

Τότε $X = \mathbb{R}^2$ και $\vec{f} = \langle -x + y, -2x + y \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Άρα γράφουμε το δυναμικό σύστημα ως

$$(X, \vec{f}) = (\mathbb{R}^2, \langle -x + y, -2x + y \rangle).$$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Έστω το δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου

$$x_{n+1} = -x_n + y_n$$

$$y_{n+1} = -2x_n + y_n\,.$$

Τότε $X = \mathbb{R}^2$ και $\vec{f} = \langle -x_n + y_n, -2x_n + y_n \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.Άρα γράφουμε το δυναμικό σύστημα ως

$$(\mathrm{X}, \vec{f}) = (\mathbb{R}^2, \langle -x_n + y_n, -2x_n + y_n \rangle).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΛΕΓΧΟΣ

2.1. Έννοιες

Η θεωρία συστημάτων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της θεωρίας ελέγχου. Η θεωρία ελέγχου είναι μια καλά αναπτυγμένη, ώριμη θεωρία η οποία ασχολείται με τη μελέτη των δυναμικών συστημάτων από τη σκοπιά του ελέγχου και της εκτίμησης. Με τον όρο "έλεγχος" εννοούμε ότι θέλουμε να επηρεάσουμε τη συμπεριφορά (ή έξοδο ή απόκριση) ενός δυναμικού συστήματος με κάποιο επιθυμητό τρόπο ο οποίος είναι προκαθορισμένος από το σχεδιαστή του συστήματος. Το βασικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας ελέγχου είναι οι υποπροσδιορισμένες διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών. Αυτές είναι εξισώσεις με μεγαλύτερο αριθμό μεταβλητών σε σχέση με τον αριθμό των ίδιων των εξισώσεων. Ένα παράδειγμα υποπροσδιορισμένης στατικής εξίσωσης είναι η $x+u=10$, $x,u \in \mathbb{Z}_{++} := \{1,2,3,....\}$. Αν η μεταβλητή u είναι η ελεύθερη μεταβλητή, δηλαδή αν μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $u \in \mathbb{Z}_{++}$, τότε μπορούμε να ελέγξουμε την τιμή της άλλης μεταβλητής $x \in \mathbb{Z}_{++}$ με κάποιον επιθυμητό τρόπο. Για παράδειγμα αν θέλουμε $x<5$, τότε αυτό μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας την ελεύθερη μεταβλητή u έτσι ώστε $u>5$. Η θεωρία ελέγχου ασχολείται με προβλήματα αυτού του είδους με τη διαφορά ότι στη θέση των υποπροσδιορισμένων στατικών εξισώσεων έχουμε υποπροσδιορισμένες διαφορικές εξισώσεις (ή εξισώσεις διαφορών) της μορφής :

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\vec{u}),\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,\ t \geq t_0. \quad (2.1)$$

Για τους σκοπούς μας εδώ θα ονομάζουμε ΣΑΕ ελέγχου μια εξίσωση της μορφής (2.1). Άρα με δεδομένη τη μεταβλητή ελέγχου $\vec{u}$ και την αρχική κατάσταση $\vec{x}(t_0)$, η κατάσταση $\vec{x}(t)$, $t \geq t_0$, του συστήματος προσδιορίζεται πλήρως κατά τρόπο μοναδικό. Αν $\vec{f}(\vec{x},\vec{u}) = A\vec{x} + B\vec{u}$, τότε το ΣΑΕ ελέγχου λέγεται γραμμικό. Έστω ότι στο προηγούμενο παράδειγμα της στατικής εξίσωσης $x+u=10$, $x,u \in \mathbb{Z}_{++}$, θέλουμε $x<5$ και επιπλέον θέλουμε αυτό να επιτευχθεί επιλέγοντας την μικρότερη τιμή της ελεύθερης μεταβλητής u. Τότε η λύση είναι $u=6$. Ο βέλτιστος έλεγχος ασχολείται με αυτό το είδος προβλημάτων με τη διαφορά ότι στη θέση μιας υποπροσδιορισμένης στατικής εξίσωσης έχουμε μια υποπροσδιορισμένη διαφορική εξίσωση ή εξίσωση διαφορών μαζί με ένα συναρτησιακό δείκτη απόδοσης ο οποίος μετράει τη " βελτιστότητα."

2.2. Το συναρτησιακό

Ενώ μια συνάρτηση απεικονίζει έναν αριθμό σε έναν άλλο αριθμό , το συναρτησιακό ή συναρτησοϊδές απεικονίζει μια συνάρτηση σε έναν αριθμό. Έστω το σύνολο $C[0,1]$ όλων των συνεχών συναρτήσεων επάνω στο κλειστό διάστημα $\left[0,1\right]$. Ορίζουμε το συναρτησιακό $\mathrm{T}: C\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{T}(f) = -\int_0^1 f(x)dx$.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \in C\left[0,1\right]$. Το συναρτησιακό $\mathrm{T}(f) = -\int_0^1 f(x)dx$ απεικονίζει την $f(x) = x^2$ στον αριθμό

$$\mathrm{T}(f) = -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1-0) = -\frac{1}{3}.$$

Έστω το σύνολο τ όλων των συναρτήσεων οι οποίες είναι συνεχείς επάνω στο κλειστό διάστημα $\left[0,1\right]$, έχουν συνεχή παράγωγο πρώτης τάξης επάνω στο ίδιο διάστημα και επιπλέον ικανοποιούν τη συνθήκη $f(1) = 0$. Ορίζουμε το συναρτησιακό $S: \tau \to \mathbb{R}$ με τύπο $S(f) = \int_0^1 xf'(x)dx$. Η $f(x) = x^2 - 1$ ανήκει στο σύνολο τ. Έχουμε επομένως τα ακόλουθα:

$$S(f) = \int_0^1 x(x^2-1)'dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι και

$$\mathrm{T}(x^2-1) = -\int_0^1 (x^2-1)dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1-0) + (1-0) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Εισάγεται ο ακόλουθος

Ορισμός 2.2.1: Δύο συναρτησιακά λέγονται ίσα αν η τιμή τους είναι η ίδια για κάθε συνάρτηση του προκαθορισμένου συνόλου συναρτήσεων. Εν προκειμένω τα συναρτησιακά S και T είναι ίσα. Πράγματι :

$$S(f) = \int_0^1 xf'(x)dx = xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx = T(f).$$

2.3. Τα χαρακτηριστικά προβλήματα του βέλτιστου ελέγχου

1. Προβλήματα ελάχιστου χρόνου :

Στόχος : Να μεταφέρουμε ένα ΣΑΕ από μια αυθαίρετη αρχική κατάσταση $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ σε ένα καθορισμένο υποσύνολο S του $(n+1)$-διάστατου χώρου κατάστασης-χρόνου σε ελάχιστο χρόνο.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 .$$

2. <u>Προβλήματα τελικού ελέγχου</u> :

Στόχος: Να ελαχιστοποιήσουμε την απόκλιση της τελικής κατάστασης ενός συστήματος από την επιθυμητή της τιμή $\vec{r}(t_f)$.

$$J = [\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)]^T S[\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)] = \left\|\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)\right\|_S^2 .$$

όπου $S = S^T \geq 0$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας βάρους.

3. <u>Προβλήματα ελάχιστης προσπάθειας ελέγχου:</u>

Στόχος : Να μεταφέρουμε ένα ΣΑΕ από μια αυθαίρετη αρχική κατάσταση $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ σε ένα καθορισμένο υποσύνολο S του $(n+1)$ -διάστατου χώρου κατάστασης-χρόνου με την ελάχιστη προσπάθεια ελέγχου.

$$J(\vec{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \vec{u}^T R(t)\vec{u}dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\|\vec{u}\right\|_{R(t)}^2 dt ,$$

όπου $R(t) > 0, t \in [t_0, t_f],$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας βάρους.

4. <u>Προβλήματα παρακολούθησης:</u>

Στόχος: Να διατηρήσουμε την κατάσταση $\vec{x}(t)$ του συστήματος όσο το δυνατό πιο κοντά στην επιθυμητή κατάσταση $\vec{r}(t)$ στο διάστημα $[t_0, t_f]$.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\vec{x}(t) - \vec{r}(t)]^T Q(t)[\vec{x}(t) - \vec{r}(t)]dt = \int_{t_0}^{t_f} \left\|\vec{x}(t) - \vec{r}(t)\right\|_{Q(t)}^2 dt$$

όπου $Q(t)$ είναι ένας πραγματικός συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας βάρους. Συχνά στα προβλήματα παρακολούθησης ενσωματώνουμε και το πρόβλημα ελάχιστης προσπάθειας ελέγχου οπότε το αντικειμενικό συναρτησιακό γράφεται

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\vec{x}(t) - \vec{r}(t)]^T Q(t)[\vec{x}(t) - \vec{r}(t)] + \vec{u}(t)^T R(t)\vec{u}(t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\| \vec{x}(t) - \vec{r}(t) \right\|_{Q(t)}^2 + \left\| \vec{u}(t) \right\|_{R(t)}^2 dt .$$

Αν ενσωματώσουμε και το πρόβλημα τελικού ελέγχου, τότε το αντικειμενικό συναρτησιακό γράφεται

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\vec{x}(t) - \vec{r}(t)]^T Q(t)[\vec{x}(t) - \vec{r}(t)] + \vec{u}(t)^T R(t)\vec{u}(t)dt + [\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)]^T S[\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\| \vec{x}(t) - \vec{r}(t) \right\|_{Q(t)}^2 + \left\| \vec{u}(t) \right\|_{R(t)}^2 dt + \left\| \vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f) \right\|_S^2 .$$

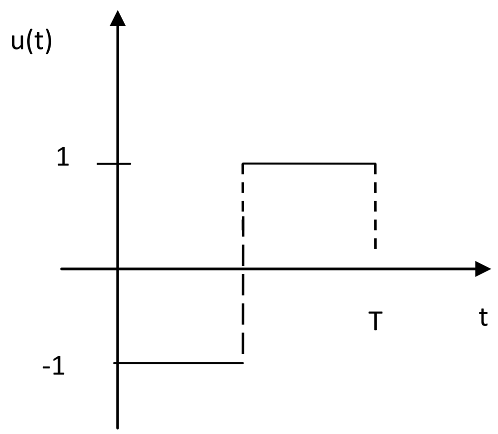
5. <u>Προβλήματα Ρύθμισης:</u>

Ένα πρόβλημα ρύθμισης είναι μια ειδική περίπτωση ενός προβλήματος παρακολούθησης το οποίο προκύπτει όταν όλες οι επιθυμητές τιμές των καταστάσεων είναι ίσες με το μηδέν ($\vec{r}(t) = \vec{0}$ για όλα τα $t \in [t_0, t_f]$).

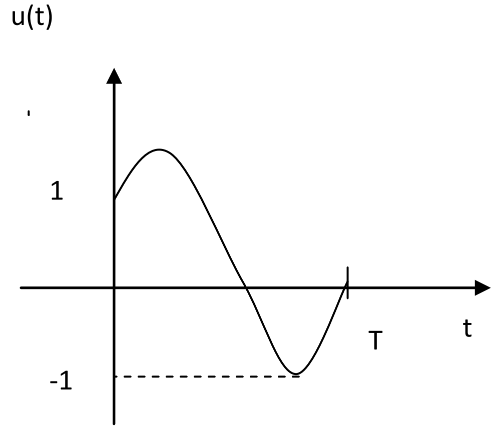
Ορισμός 2.2.2: Μια μεταβλητή ελέγχου $\vec{u}$ λέγεται αποδεκτή αν ικανοποιεί όλες τις συνθήκες του προβλήματος ελέγχου για όλα τα χρονικά σημεία $, t,$ τα οποία ανήκουν στο χρονικό ορίζοντα του προβλήματος.

Έστω για παράδειγμα ότι απαιτούμε η μεταβλητή ελέγχου $\vec{u}$ να είναι φραγμένη (άνω και κάτω) και συγκεκριμένα απαιτούμε $|\vec{u}(t)| \le 1, \forall 0 \le t \le T$, όπου το κλειστό διάστημα $[0,T]$ είναι ο χρονικός ορίζοντας του προβλήματος ελέγχου. Οι μεταβλητές ελέγχου των περιπτώσεων (α) και (γ) είναι αποδεκτές ενώ εκείνες των περιπτώσεων (β) και (δ) δεν είναι αποδεκτές.

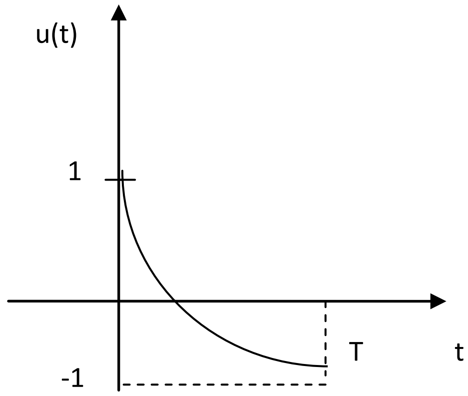
(α)



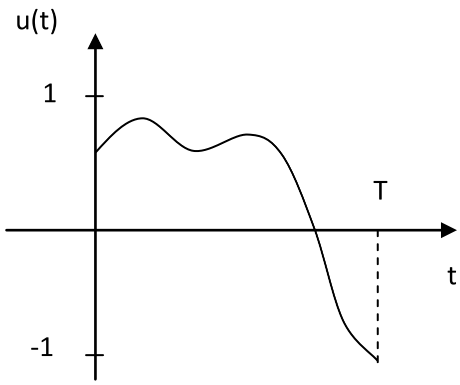
(β)



(γ)



(δ)



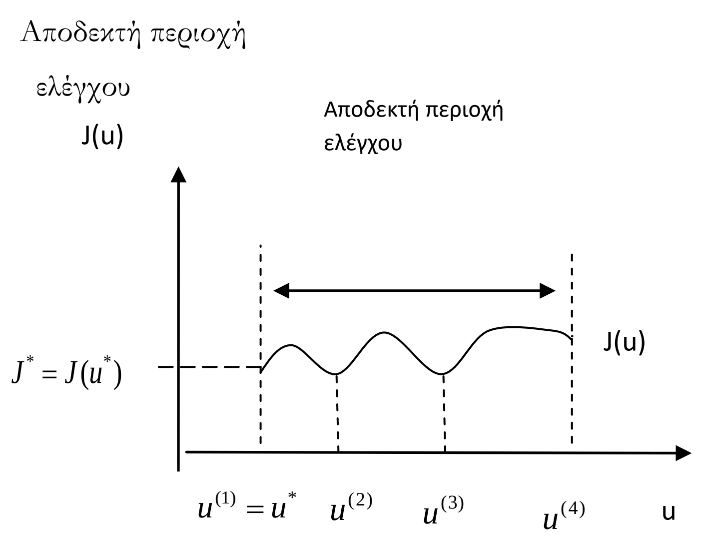
Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αποδεκτών μεταβλητών ελέγχου ως U όπου $U \subseteq \mathbb{R}$ (ή ευρύτερα $U \subseteq \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$). Άρα το σύνολο όλων των αποδεκτών μεταβλητών ελέγχου αποτελεί το χώρο των εισόδων.

Ορισμός 2.2.3: Μια κατάσταση λέγεται αποδεκτή αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του προβλήματος ελέγχου, σε κάθε χρονικό σημείο. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αποδεκτών καταστάσεων ως X, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ (ή ευρύτερα $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$).
Με βάση τα παραπάνω διατυπώνουμε το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου ως εξής :

Να βρεθεί μια αποδεκτή μεταβλητή ελέγχου $\vec{u}^*$ τέτοια ώστε το ΣΑΕ $\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x},\vec{u},t)$ να ακολουθεί μια αποδεκτή τροχιά $\vec{x}^*$ και το μέτρο απόδοσης $J(\vec{u}) = \phi(\vec{x}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\vec{u},t)dt$ να ελαχιστοποιείται ή να μεγιστοποιείται.
Η μεταβλητή ελέγχου $\vec{u}^*$ λέγεται βέλτιστη μεταβλητή ελέγχου και η τροχιά κατάστασης $\vec{x}^*$ λέγεται βέλτιστη τροχιά κατάστασης.
Τονίζουμε πως όταν λέμε ότι το μέτρο απόδοσης ελαχιστοποιείται εννοούμε απόλυτο ελάχιστο, δηλαδή

$$\phi(\vec{x}^*(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}^*,\vec{u}^*,t)dt \leq \phi(\vec{x}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x},\vec{u},t)dt,$$

για όλα τα $\vec{u} \in U$ τέτοια ώστε $\vec{x} \in X$. Αντίστοιχα όταν λέμε ότι το μέτρο απόδοσης μεγιστοποιείται.



Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου μπορεί να ερμηνευθεί ως μια επέκταση του προβλήματος μη γραμμικού προγραμματισμού (ΜΓΠ) σε άπειρο αριθμό μεταβλητών με έναν τρόπο ο οποίος είναι ανάλογος της συνάρτησης Lagrange η οποία υπεισέρχεται στο ΜΓΠ. Σχηματίζουμε έναν επαυξημένο δείκτη απόδοσης $\hat{J}(t_0, \vec{x}_0, \vec{u}, \vec{\lambda})$

όπου

$$\hat{J}(t_0, \vec{x}_0, \vec{u}, \vec{\lambda}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\vec{x}, \vec{u}, t) + \vec{\lambda}^T (\vec{a}(\vec{x}, \vec{u}, t) - \dot{\vec{x}}) dt + \phi(\vec{x}(t_f), t_f)$$

και $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ είναι η αρχική κατάσταση. Εδώ γράψαμε $\hat{J} = \hat{J}(t_0, \vec{x}_0, \vec{u}, \vec{\lambda})$ ο επαυξημένος δείκτης με δεδομένο ότι ο δείκτης απόδοσης $\hat{J}$ εξαρτάται από τα $t_0, \vec{x}_0$ (αρχικά δεδομένα) και αυτό γιατί η τροχιά κατάστασης $\vec{x}(t)$ εξαρτάται από τα $t_0, \vec{x}_0$. Στην περίπτωση του προβλήματος ΜΓΠ οι αναγκαίες συνθήκες βρίσκονται θέτοντας τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της Λαγκρανζιανής ίσες με το μηδέν. Στο πλαίσιο του βέλτιστου ελέγχου η αντίστοιχη συνθήκη είναι να θέσουμε την πρώτη μεταβολή (ή παράγωγο Gâteaux) του επαυξημένου δείκτη απόδοσης ίση με το μηδέν : $\delta \hat{J} = 0$. Άρα το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου αποτελεί ένα απειροδιάστατο πρόβλημα ΜΓΠ, όπου η τροχιά $\vec{u}(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ είναι η μεταβλητή βελτιστοποίησης. Λέμε ''απειροδιάστατο'' αφού επιλέγουμε υπεραριθμήσιμο πλήθος μεταβλητών $\vec{u}(t)$, μια για κάθε $t \in [t_0, t_f]$.

Θεωρούμε το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου ή δυναμικής βελτιστοποίησης

$$\max_{u(t)} J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt + S(x(t_f), t_f)$$

$$s.t. \dot{x} = f(x, u, t)$$

$$x(t_0) = x_0 .$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης λέγονται κανονικές Χαμιλτονιανές εξισώσεις.
Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Hamilton : $H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda f(x, u, t)$. Αποδεικνύεται ότι οι κανονικές Χαμιλτονιανές εξισώσεις είναι οι ακόλουθες εξισώσεις i-iii:

i. $\dot{x}^* = f(x^*, u^*, t), x^*(t_0) = x_0$

ii. $\dot{\lambda} = -H_x(x^*, u^*, \lambda, t), \lambda(t_f) = S_x(x^*(t_f), t_f)$

iii. $H(x^*, u^*, \lambda, t) \geq H(x^*, u, \lambda, t)$.

Μεθοδολογία :

Από την iii συνεπάγεται ότι μεγιστοποιούμε την Χαμιλτονιανή ως προς u . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :
(α) Αν η u είναι φραγμένη, τότε η βέλτιστη u η οποία μεγιστοποιεί τη Χαμιλτονιανή θα συμπίπτει με κάποιο συνοριακό σημείο.

β) Αν η u είναι ελεύθερη, τότε λύνουμε την εξίσωση $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}=0$.

Και στις δύο περιπτώσεις η βέλτιστη u θα είναι μια συνάρτηση των x^* και λ , δηλαδή $u^*=g(x^*,\lambda)$.

Αντικαθιστώντας τη $u^*=g(x^*,\lambda)$ στις i και ii προκύπτει ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων ως προς x^* και λ με συνοριακές συνθήκες $x^*(t_0)=x_0$ και $\lambda(t_f)=S_x(x^*(t_f),t_f)$. Λύνοντας το συγκεκριμένο πρόβλημα βρίσκουμε τα u^*,x^*, λ .

Παράδειγμα.

Να λυθεί το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου:

$$\max_u J=\int_0^1 -x dt \quad \text{s.t} \quad \dot{x}=u, u\in[-1,1], x(0)=1$$

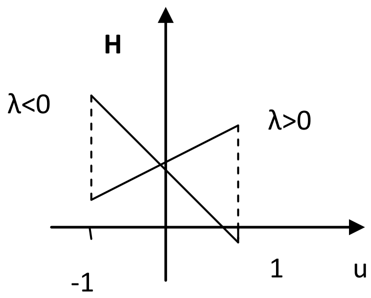
Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Hamilton:

$$H(x,u,\lambda)=-x+\lambda u .$$

Βρίσκουμε το βέλτιστο ελεγκτή $u\in[-1,1]$ ο οποίος μεγιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση , $\forall t\in[0,1]$, οπότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$-x^*+\lambda u^*\geq -x^*+\lambda u \Leftrightarrow \lambda u^*\geq \lambda u \text{ , άρα}$$

$$u^*=1 \text{ , αν } \lambda>0 \text{ και } u^*=\text{-}1 \text{ αν } \lambda<0 .$$



Από ii έχουμε:

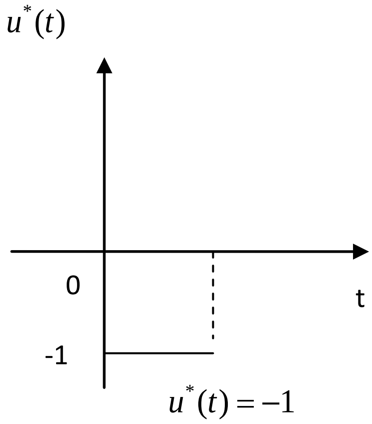
$\dot{\lambda} = -H_x = 1$ με τελική συνοριακή συνθήκη λ(1)=0.

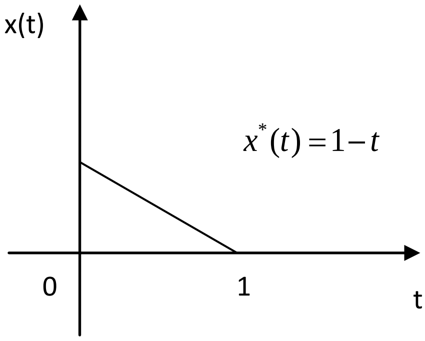
Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η $\lambda(t) = t + c_1$ όπου η αυθαίρετη σταθερά c_1 προσδιορίζεται από την τελική συνοριακή συνθήκη $\lambda(1) = 0$.

$$\lambda(1) = 1 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -1$$

Άρα βρίσκουμε την προσαρτημένη μεταβλητή λ με τύπο $\lambda(t) = t - 1 \leq 0, \forall t \in [0,1]$. Επομένως η βέλτιστη μεταβλητή ελέγχου u^* δίνεται από τον τύπο u^*=-1. Συνεπώς λύνουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) η ΠΣΤ ενός σημείου $\dot{x} = -1, x(0) = 1$. Η γενική λύση του ΠΑΤ είναι η $x(t) = -t + c_2$, όπου η αυθαίρετη σταθερά c_2 προσδιορίζεται από την αρχική κατάσταση x(0)=1:

$x(0) = c_2 = 1$, οπότε βρίσκουμε τη βέλτιστη μεταβλητή κατάσταση x με τύπο $x(t) = 1 - t$. Παρακάτω δείχνουμε τη βέλτιστη μεταβλητή ελέγχου και τη βέλτιστη μεταβλητή κατάστασης αντίστοιχα.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. Δυναμικό υπόδειγμα οικονομικών διακυμάνσεων

3.1 Εισαγωγή.

Η οικονομική κρίση του 2007-2008 , η οποία αναφέρεται επίσης ως η παγκόσμια οικονομική κρίση ή οικονομική κρίση του 2008 , ξέσπασε το 2007 και αρχικά επικεντρώθηκε γύρω από την αγορά των ενυπόθηκων στεγαστικών δανείων στις ΗΠΑ. Οι τράπεζες στις ΗΠΑ είχαν αναλάβει υπερβολικούς κινδύνους, εκδίδοντας σημαντικά μεγάλους όγκους στεγαστικών δανείων που απευθύνονταν σε δανειολήπτες με παραδοσιακά αδύναμη πιστοληπτική ικανότητα και δυσκολία στη διατήρηση των χρονοδιαγραμμάτων αποπληρωμής γεγονός το οποίο οφείλονταν εν μέρη σε επεισόδια ανεργίας, σε ιατρικές καταστάσεις έκτακτης ανάγκης κ.λπ. Η παροχή σημαντικών ποσών δανείων χαμηλού κινδύνου σε άτομα με χαμηλή πιστοληπτική ικανότητα διευκολύνθηκε από πολλούς παράγοντες. Αυτοί περιλάμβαναν μεταξύ άλλων τα χαμηλά επιτόκια τα οποία ήταν διαθέσιμα για αυτό το είδος δανείων, το υπερβολικά χαλαρό ρυθμιστικό πλαίσιο, τη δημιουργία νέων χρηματοπιστωτικών μέσων όπως οι τίτλοι οι οποίοι στηρίζονται σε ενυπόθηκα στεγαστικά δάνεια (MBS) τα οποία πωλούνται φαινομενικά ως τίτλοι χαμηλού κινδύνου, η ομοσπονδιακή νομοθεσία με στόχο να βοηθήσει τους Αμερικανούς χαμηλού και μεσαίου εισοδήματος να αποκτήσουν εύκολη πρόσβαση σε ενυπόθηκα στεγαστικά δάνεια, καθώς και την πληθώρα των δανείων με υψηλό ρίσκο λόγω της μεταβίβασης δανείων κακής ποιότητας σε οιονεί κυβερνητικές υπηρεσίες όπως η Fannie Mae και η Freddie Mac, που έδωσαν την αίσθηση μιας απεριόριστης εγγύησης για τα επισφαλή δάνεια από την ομοσπονδιακή κυβέρνηση των ΗΠΑ και δημιούργησαν ηθικό κίνδυνο.

Τα δάνεια χαμηλού κινδύνου συνδέονταν με κακή πιστοληπτική διαβάθμιση, γεγονός που συνεπαγόταν αυξημένο επίπεδο κινδύνου εκ μέρους χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων δανεισμού, για διάφορους λόγους, μεταξύ των οποίων ένα αδύναμο ιστορικό πληρωμών εκ μέρους των δανειοληπτών, έλλειψη περιουσιακών στοιχείων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως ασφάλεια ή χαμηλή ποιότητα τέτοιων περιουσιακών στοιχείων, περιορισμένη εμπειρία στην έκθεση / διαχείριση χρέους κλπ. Το μέγεθος της τρέχουσας χρηματοπιστωτικής κρίσης εξελίχθηκε γρήγορα σε παγκόσμια τραπεζική κρίση που κορυφώθηκε με την κατάρρευση της επενδυτικής τράπεζας Lehman Brothers τον Σεπτέμβριο του 2008. Σε μια αλυσίδα γεγονότων, οι τραπεζικές κρίσεις οδήγησαν σε μια επακόλουθη μαζική παγκόσμια οικονομική ύφεση, που ονομάστηκε Μεγάλη ύφεση, η οποία θεωρείται πλέον η χειρότερη οικονομική κρίση από τη Μεγάλη Ύφεση της δεκαετίας του 1930.

Η επακόλουθη παγκόσμια οικονομική κατάρρευση προκάλεσε ευρείας κλίμακας αντίδραση της νομισματικής και δημοσιονομικής πολιτικής τόσο στις Ηνωμένες Πολιτείες, όσο και στην Ευρωζώνη (Βλ.

[1], [2], [3]). Η τελευταία έπρεπε να ασχοληθεί, επιπλέον, με μια κρίση δημόσιου χρέους από το τέλος του 2009, που μέχρι σήμερα δεν έχει ακόμη επιλυθεί πλήρως. Συγκεκριμένα, αρκετά κράτη μέλη της ευρωζώνης, όπως η Πορτογαλία, η Ιρλανδία, η Ελλάδα, η Ισπανία και η Κύπρος, αντιμετώπισαν σημαντικές δυσκολίες στην αναχρηματοδότηση του δημόσιου χρέους τους, σε συνδυασμό με το πρόβλημα της διάσωσης των υπερχρεωμένων τραπεζών, έργο που θα ήταν αδύνατο να επιτευχθεί χωρίς τη βοήθεια από τρίτους, όπως η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (ΕΚΤ), το Διεθνές Νομισματικό Ταμείο (ΔΝΤ) και στη συνέχεια τη προσθήκη οικονομικής βοήθειας από άλλες χώρες της Ευρωζώνης μέσω της δημιουργίας μηχανισμών ειδικού σκοπού, όπως του Ευρωπαϊκού Μηχανισμού Χρηματοπιστωτικής Σταθερότητας (EFSF) τον Ευρωπαϊκό Μηχανισμό Σταθερότητας (ΕΜΣ).

Στις Ηνωμένες Πολιτείες, το Φεβρουάριο του 2008, το Κογκρέσο των ΗΠΑ ενέκρινε το νόμο για την οικονομική ενίσχυση του 2008, παρέχοντας 125 δισεκατομμύρια δολάρια σε ρευστότητα [4]. Ένα χρόνο αργότερα, το Φεβρουάριο του 2009, το Κογκρέσο πέρασε τον αμερικανικό νόμο περί ανάκτησης και επανεπένδυσης ύψους 787 δισεκατομμύρια δολάρια. [5]. Μεταξύ αυτών των δύο ημερομηνιών και χωρίς άλλα μέτρα δημοσιονομικής πολιτικής, το ποσοστό ανεργίας αυξήθηκε από 4,9% σε 8,3% (Υπουργείο Εργασίας των ΗΠΑ, Γραφείο Στατιστικής της Εργασίας). Αντίθετα, κατά την ίδια περίοδο η νομισματική πολιτική αναθεωρήθηκε σχεδόν σε μηνιαία βάση ή με ακόμη μεγαλύτερη συχνότητα.

Η απάντηση της Ομοσπονδιακής Επιτροπής Ανοικτής Αγοράς (FOMC), η οποία ξεκίνησε τον Αύγουστο του 2007, έλαβε τη μορφή πράξεων ρευστότητας - μειώνοντας το προεξοφλητικό επιτόκιο και παρατείνοντας τα μακροπρόθεσμα δάνεια σε τράπεζες - και έπειτα, τον Σεπτέμβριο του 2007 μειώνοντας τον στόχο για το ποσοστό των ομοσπονδιακών κεφαλαίων κατά 50 μονάδες βάσης (ή το ήμισυ της 1 εκατοστιαίας μονάδας). Καθώς εμφανίστηκαν περαιτέρω ενδείξεις οικονομικής αδυναμίας στους επόμενους μήνες, η επιτροπή, μέσω μιας σειράς νομισματικών παρεμβάσεων, μείωσε τον στόχο της για το ποσοστό των ομοσπονδιακών κεφαλαίων κατά 325 μονάδες βάσης, αφήνοντας το στόχο στο 2% μέχρι την άνοιξη του 2008. Τον Οκτώβριο του ίδιου έτους, η FOMC μείωσε το στόχο για το ποσοστό των ομοσπονδιακών κεφαλαίων κατά 100 μονάδες βάσης, ενώ το ήμισυ της εν λόγω χαλάρωσης έλαβε χώρα ως μέρος μιας πρωτοφανής συντονισμένης μείωσης των επιτοκίων από έξι κεντρικές τράπεζες, συμπεριλαμβανομένης της Τράπεζας της Αγγλίας, τράπεζες του Καναδά, της Σουηδίας, της Ελβετίας και της Κίνας. Στη συνάντηση της 16ης Δεκεμβρίου, η FOMC καθόρισε ένα στόχο για το ποσοστό των ομοσπονδιακών κεφαλαίων από 0 έως 25 μονάδες βάσης, ουσιαστικά το μηδενικό κατώτατο όριο (ZLB).

Στο τελευταίο μέρος του 2008 και στις αρχές του 2009, η Ομοσπονδιακή Τράπεζα έλαβε έκτακτα μέτρα για την παροχή ρευστότητας και τη στήριξη της λειτουργίας της πιστωτικής αγοράς, συμπεριλαμβανομένης της δημιουργίας ενός αριθμού πιστωτικών διευκολύνσεων έκτακτης ανάγκης και τη δημιουργία ή επέκταση συμφωνιών ανταλλαγής νομισμάτων με 14 κεντρικές τράπεζες σε όλο τον κόσμο. Από τα τέλη του 2008 και με στόχο για το ποσοστό του επιτοκίου να βρίσκεται κοντά στο μηδενικό κατώτατο όριο (ZLB), η Ομοσπονδιακή Τράπεζα των ΗΠΑ κατέφυγε σε μη συμβατικά μέτρα νομισματικής πολιτικής. Αυτά περιλαμβάνουν τη διεξαγωγή πολιτικής με τη χρήση εργαλείων επικοινωνίας και αγορών ενεργητικού μεγάλης κλίμακας (LSAP). Βλ [6].

Αυτά τα μέτρα λειτουργούν με δύο τρόπους: μέσω του καναλιού σηματοδότησης και μέσω του καναλιού ισορροπίας χαρτοφυλακίου. Στην πρώτη, η κεντρική τράπεζα μπορεί να χρησιμοποιήσει την επικοινωνία για να κατευθύνει τα επιτόκια και να αποκαταστήσει την εμπιστοσύνη στις χρηματοπιστωτικές αγορές, η τελευταία στηρίζεται στην υπόθεση της ατελούς υποκατάστασης των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων στον ισολογισμό του ιδιωτικού τομέα και υποθέτει ότι οι αγορές περιουσιακών στοιχείων και η παροχή ρευστότητας από την κεντρική τράπεζα μειώνουν τις οικονομικές αποδόσεις και βελτιώνουν τους όρους χρηματοδότησης [7]. Από το 2009 έως το 2014, η Ομοσπονδιακή Τράπεζα των ΗΠΑ πραγματοποίησε και στους τρεις γύρους ποσοτικής χαλάρωσης (QE) μέσω των μη αποστειρωμένων αγορών τίτλων που εξασφαλίζονται από το Δημόσιο και τα ενυπόθηκα στεγαστικά δάνεια (MBS). Ο τρίτος γύρος της QE ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2014, οπότε ο ισολογισμός της Fed ανήλθε σε 4,5 τρισεκατομμύρια δολάρια - πέντε φορές το μέγεθος της πριν από την κρίση.

Ενώ τόσο στις Ηνωμένες Πολιτείες όσο και στην ζώνη του Ευρώ η νομισματική πολιτική αναθεωρήθηκε σε μηνιαία βάση ή με ακόμη μεγαλύτερη συχνότητα, η δημοσιονομική πολιτική βασίστηκε κυρίως στον ετήσιο κύκλο του προϋπολογισμού. Με βάση το πρόσφατο έργο των συγγραφέων [8], θέτουμε την ακόλουθη ερώτηση: Θα μπορούσε η μετακίνηση από τις ετήσιες σε τριμηνιαίες αλλαγές της δημοσιονομικής πολιτικής να βελτιώσει την απόδοση της πολιτικής σταθεροποίησης και να οδηγήσει σε μειωμένη προς τα κάτω καθοδική αδράνεια της οικονομίας; Για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση, εξετάζουμε ένα μικρό μακροοικονομικό μοντέλο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξει τη σχετική απόδοση ετήσιων και τριμηνιαίων σεναρίων δημοσιονομικής πολιτικής. Το μοντέλο μας μοιάζει με αυτό των συγγραφέων [8] αλλά καθορίζεται μια διαφορετική δομή υστέρησης προκειμένου να προσδιοριστεί αν τα αποτελέσματα σταθεροποίησης επηρεάζονται από τη μορφή των υστερήσεων. Για το σκοπό αυτό, οι εξισώσεις κατανάλωσης και επένδυσης των Kendrick και Shoukry [8] τροποποιούνται.

3.2 Το υπόδειγμα

Το υπόδειγμα που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία αποτελείται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

1) Ταυτότητα εισοδήματος.
2) Μια συνάρτηση κατανάλωσης.
3) Εξίσωση φόρων.

4) Μια εξίσωση επένδυσης.

Υπάρχει επίσης μια σχέση καθυστέρησης μεταξύ των κυβερνητικών πιστώσεων από το Κογκρέσο και τη δαπάνη των συγκεκριμένων κεφαλαίων. Ξεκινάμε με την ταυτότητα εισοδήματος ενός υποδείγματος κλειστής οικονομίας:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \tag{1}$$

όπου $Y_t ; C_t ; I_t ; G_t$, υποδηλώνουν το εισόδημα, την κατανάλωση, τις επενδύσεις και τις κυβερνητικές δαπάνες σε κάθε χρονική στιγμή.

Στη συνέχεια, μια συνάρτηση κατανάλωσης με υστέρηση συνεισφοράς μιας περιόδου μέσω της ροπής για κατανάλωση και μιας υστερημένης συνεισφοράς δύο σταδίων μέσω της ροπής για εξοικονόμηση μπορεί να γραφεί ως

$$C_t = (1-s)Y_{t-1}^d + sY_{t-2}^d \tag{2}$$

όπου Y_{t-1}^d και Y_{t-2}^d υποδηλώνουν το διαθέσιμο εισόδημα σε περιόδους $t-1$ και $t-2$, αντίστοιχα, $0<(1-s)<1$ είναι η ροπή προς κατανάλωσης και $0<s<1$ είναι η ροπή για αποταμίευση. Το διαθέσιμο εισόδημα σε κάθε περίοδο ορίζεται ως :

$$Y_t^d := Y_t - T_t \tag{3}$$

όπου T_t είναι οι φόροι που καταβάλλονται μείον τις κρατικές μεταφορές που εισπράττουν οι καταναλωτές. Για λόγους απλότητας, θα το αγνοήσουμε και απλά θα το αναφέρουμε ως φόρους. Η συγκεκριμένη μορφή της εξίσωσης που εξετάζεται εδώ είναι

$$T_t = \tau Y_{t-1} \tag{4}$$

Όπου η παράμετρος $0<\tau<1$ αντιπροσωπεύει το σταθερό φορολογικό συντελεστή. Όπως και στην περίπτωση [18], αυτή η εξίσωση και άλλες στο μοντέλο εκτιμώνται με στοιχεία από την Ομοσπονδιακή Κεντρική Τράπεζα του Σαιντ Λουις από το τέταρτο τρίμηνο του 1954 (54-4) έως το δεύτερο τρίμηνο του 2007 (07-2) χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (OLS). Η μορφή της εκτιμώμενης συνάρτησης κατανάλωσης είναι :

$$C_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-3} \tag{5}$$

όπου

$$a_1 := 1 - s \tag{6}$$

$$a_2 := -\tau(1-s) + s \tag{7}$$

$$a_3 := -s\tau \tag{8}$$

και C_t είναι η πραγματική κατανάλωση σε τρισεκατομμύρια δολάρια, Y_{t-1} είναι το πραγματικό ΑΕΠ σε τρισεκατομμύρια δολάρια που υστερεί σε μια περίοδο, Y_{t-2} είναι το πραγματικό ΑΕΠ σε τρισεκατομμύρια δολάρια που υστερεί σε δύο περιόδους, και Y_{t-3} είναι το πραγματικό ΑΕΠ σε τρισεκατομμύρια δολάρια που υστερεί σε τρεις περιόδους.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την εξίσωση των ιδιωτικών επενδύσεων. Σύμφωνα με τους συγγραφείς οι επενδύσεις διαμορφώνονται ως εν μέρει αυτόνομες και ανεξάρτητες από τον επιχειρηματικό κύκλο, που υποδηλώνεται με γ_0 και εν μέρει προκαλείται, ανάλογα με τις μεταβολές στην κατανάλωση με συντελεστή επιτάχυνσης γ_2:

$$I_t = \gamma_0 + \gamma_1 R_{t-1} + \gamma_2 (C_t - C_{t-1}) \quad \gamma_2 > 0. \tag{9}$$

Επιπλέον, θεωρείται ότι εξαρτάται από το R_{t-1}, το ποσοστό των ομοσπονδιακών επιτοκίων σε ποσοστιαίες μονάδες παρουσιάζει καθυστέρηση μιας περιόδου όπως στην περίπτωση των Kendrick και Shoukry [8]. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5) στην εξίσωση (9) έχουμε την ακόλουθη σχέση για την ιδιωτική επένδυση :

$$I_t = \gamma_0 + \gamma_1 R_{t-1} + \gamma_2 a_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 a_2 \Delta Y_{t-2} + \gamma_2 a_3 \Delta Y_{t-3} \tag{10}$$

όπου Δ είναι ο ανάδρομος τελεστής ο οποίος ορίζεται ως:

$$\Delta Y_t := Y_t - Y_{t-1}. \tag{11}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5) και (10) στην εξίσωση εισοδήματος (1) και μεταβάλλοντας όλους τους όρους μία περίοδος προς τα εμπρός αποδίδει μια εξίσωση διαφορών τέταρτης τάξης ως προς το εισόδημα, δηλαδή:

$$Y_{t+1} = a_1(1+\gamma_2)Y_t + (a_2 - \gamma_2 a_1 + \gamma_2 a_2)Y_{t-1} +$$

$$+(a_3+\gamma_2 a_3-\gamma_2 a_2)Y_{t-2}-\gamma_2 a_3 Y_{t-3}+\gamma_0+\gamma_1 R_t+G_{t+1}. \qquad (12)$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τη σχέση μεταξύ των πιστώσεων του Κογκρέσου και τις δαπάνες των κυβερνήσεων:

$$G_{t+1}=\lambda_1 A_t+\lambda_2 A_{t-1}+\lambda_3 A_{t-2}+\lambda_4 A_{t-3} \qquad (13)$$

Όπου το A δηλώνει τις πιστώσεις από το Κογκρέσο και λ_i είναι το ποσοστό των πιστώσεων κατά την περίοδο $t-i$ που δαπανάται κατά την περίοδο t. Ως εκ τούτου, οι πιστώσεις του Κογκρέσου σε μια δεδομένη περίοδο έχουν ως αποτέλεσμα κυβερνητικές δαπάνες οι οποίες κατανέμονται σε τέσσερα τρίμηνα μετά το πέρασμα του λογαριασμού πιστώσεων. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (13) στην εξίσωση (12) έχουμε:

$$Y_{t+1}=a_1(1+\gamma_2)Y_t+(a_2-\gamma_2 a_1+\gamma_2 a_2)Y_{t-1}+(a_3+\gamma_2 a_3-\gamma_2 a_2)Y_{t-2}-$$

$$-\gamma_2 a_3 Y_{t-3}+\gamma_0+\gamma_1 R_t+\lambda_1 A_t+\lambda_2 A_{t-1}+\lambda_3 A_{t-2}+\lambda_4 A_{t-3}. \qquad (14)$$

Η εξίσωση κίνησης (δυναμική) για το δημόσιο χρέος, κατά την περίοδο που καλύπτεται από το μοντέλο, παίρνει τη μορφή

$$D_{t+1}=D_t+G_t-\tau Y_t \qquad (15)$$

Έτσι, το χρέος σε κάθε περίοδο ισούται με το χρέος της προηγούμενης περιόδου συν το ποσό του δημόσιου ελλείμματος, δηλαδή τη διαφορά μεταξύ των κυβερνητικών δαπανών και των εσόδων. Σε αυτό το σημείο το μοντέλο αποτελείται από επτά εξισώσεις κατάστασης.

$$TG_{t+1}=TG_t+G_t \qquad (16)$$

$$TT_{t+1}=TT_t+\tau Y_t \qquad (17)$$

$$TC_{t+1}=TC_t+C_t \qquad (18)$$

$$TI_{t+1}=TI_t+I_t \qquad (19)$$

Όπου $TG_t;TT_t;TC_t;TI_t$ οι συνολικές δημόσιες δαπάνες, τα συνολικά φορολογικά έσοδα, η συνολική ιδιωτική κατανάλωση και η συνολική ζήτηση ιδιωτικών επενδύσεων κατά τη διάρκεια της περιόδου. Σε αυτό το σημείο το μοντέλο αποτελείται από δέκα εξισώσεις του κράτους, δηλαδή τις εξισώσεις. (5), (10), (12) - (19) και την ακόλουθη εξίσωση για τις καθυστερημένες φορολογικές εισπράξεις κατά την περίοδο:

$$REL_{t+1} = \tau Y_t . \tag{20}$$

Το επόμενο βήμα είναι να μετατρέψουμε αυτές τις εξισώσεις με μορφή κατάστασης χώρου ως εξής:

$$\underline{x}_{t+1} = A\underline{x}_t + B\underline{u}_t + C\underline{z}_t \tag{21}$$

όπου οι μήτρες έχουν κατάλληλες διαστάσεις. Μπορούμε να γράψουμε την παραγωγή και τις κρατικές πιστώσεις στις περιόδους $t-1, t-2, t-3$ ως εξής :

$$Y_{t-1} = LY_t \tag{22}$$

$$Y_{t-2} = L^2 Y_t \tag{23}$$

$$Y_{t-3} = L^3 Y_t \tag{24}$$

$$A_{t-1} = LA_t \tag{25}$$

$$A_{t-2} = L^2 A_t . \tag{26}$$

ορίζουμε το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}_t$ ως εξής:

$$\underline{x}_t := \left\langle C_t, I_t, G_t, Y_t, D_t, REL_t, TG_t, TT_t, TC_t, TI_t, LY_t, L^2Y_t, L^3Y_t, LA_t, L^2A_t, L^3A_t \right\rangle . \tag{27}$$

Το διδιάστατο διάνυσμα εισόδου είναι:

$$\underline{u}_t := \left\langle A_t, R_t \right\rangle . \tag{28}$$

Οι πίνακες για τη μορφή χώρου κατάστασης του υποδείγματος δίνονται στο παράρτημα. Οι χρονολογικές σειρές του ΑΕΠ και της κατανάλωσης είναι ολοκληρωμένες και συγκεκριμένα είναι ολοκληρωμένες πρώτης τάξης. Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση εξισώσεων παλινδρόμησης με τη μέθοδο OLS μας δίνει εκτιμήσεις των συντελεστών και τιμές των γνωστών στατιστικών κριτηρίων t, F, R^2 οι οποίες μπορεί να φαίνονται ικανοποιητικές αλλά αυτό να μην είναι η πραγματικότητα, δηλαδή στον πληθυσμό τα αποτελέσματα τα οποία ισχύουν να είναι διαφορετικά. Παρακάτω παραθέτουμε τα αποτελέσματα από τον έλεγχο ύπαρξης μοναδιαίας ρίζας για την κατανάλωση και το ΑΕΠ αντίστοιχα.

Null Hypothesis: PCECC96 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		3.565037	1.0000
Test critical values:	1% level	-3.462095	
	5% level	-2.875398	
	10% level	-2.574234	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(PCECC96)

Method: Least Squares

Date: 05/23/18 Time: 18:45

Sample (adjusted): 1955Q4 2007Q1

Included observations: 206 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PCECC96(-1)	0.004069	0.001141	3.565037	0.0005
D(PCECC96(-1))	0.144053	0.069328	2.077850	0.0390
D(PCECC96(-2))	0.128558	0.069723	1.843842	0.0667
D(PCECC96(-3))	0.228110	0.069669	3.274205	0.0012
C	1.454381	4.137635	0.351500	0.7256

R-squared	0.403159	Mean dependent var	40.48956
Adjusted R-squared	0.391281	S.D. dependent var	34.14592
S.E. of regression	26.64079	Akaike info criterion	9.426736
Sum squared resid	142656.0	Schwarz criterion	9.507510

Log likelihood	-965.9538	Hannan-Quinn criter.	9.459404
F-statistic	33.94325	Durbin-Watson stat	1.962431
Prob(F-statistic)	0.000000		

Null Hypothesis: GDPC96 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		3.130023	1.0000
Test critical values:	1% level	-3.461938	
	5% level	-2.875330	
	10% level	-2.574198	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(GDPC96)

Method: Least Squares

Date: 05/23/18 Time: 17:40

Sample (adjusted): 1955Q3 2007Q1

Included observations: 207 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
GDPC96(-1)	0.003802	0.001215	3.130023	0.0020
D(GDPC96(-1))	0.222205	0.070076	3.170919	0.0018
D(GDPC96(-2))	0.177008	0.070069	2.526197	0.0123
C	7.006377	8.557437	0.818747	0.4139

R-squared	0.232040	Mean dependent var	57.96411

Adjusted R-squared	0.220691	S.D. dependent var	59.44694
S.E. of regression	52.47886	Akaike info criterion	10.77783
Sum squared resid	559068.2	Schwarz criterion	10.84223
Log likelihood	-1111.506	Hannan-Quinn criter.	10.80388
F-statistic	20.44558	Durbin-Watson stat	1.971921
Prob(F-statistic)	0.000000		

Παίρνοντας τις διαφορές πρώτης τάξης επάνω στο ΑΕΠ και την κατανάλωση, οι σειρές οι οποίες προκύπτουν είναι στάσιμες ή $I(0)$ όπως φαίνεται από τους ακόλουθους ελέγχους ADF επάνω στις πρώτες διαφορές του ΑΕΠ και της κατανάλωσης, αντίστοιχα.

Null Hypothesis: DGDPC96 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-6.203455	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.461938	
	5% level	-2.875330	
	10% level	-2.574198	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(DGDPC96)
Method: Least Squares
Date: 05/23/18 Time: 18:26
Sample (adjusted): 1955Q3 2007Q1
Included observations: 207 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DGDPC96(-1)	-0.469257	0.075644	-6.203455	0.0000

D(DGDPC96(-1))	-0.242070	0.068342	-3.542035	0.0005
C	27.15791	5.757648	4.716840	0.0000

R-squared	0.348336	Mean dependent var	-0.167121
Adjusted R-squared	0.341947	S.D. dependent var	66.07263
S.E. of regression	53.59843	Akaike info criterion	10.81530
Sum squared resid	586049.6	Schwarz criterion	10.86360
Log likelihood	-1116.384	Hannan-Quinn criter.	10.83484
F-statistic	54.52228	Durbin-Watson stat	2.001487
Prob(F-statistic)	0.000000		

Null Hypothesis: DPCECC96 has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.538091	0.0079
Test critical values:	1% level	-3.462095	
	5% level	-2.875398	
	10% level	-2.574234	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(DPCECC96)

Method: Least Squares

Date: 05/23/18 Time: 18:47

Sample (adjusted): 1955Q4 2007Q1

Included observations: 206 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.

DPCECC96(-1)	-0.247702	0.070010	-3.538091	0.0005
D(DPCECC96(-1))	-0.522464	0.078518	-6.654087	0.0000
D(DPCECC96(-2))	-0.312485	0.067398	-4.636414	0.0000
C	10.35672	3.393425	3.051997	0.0026
R-squared	0.398703	Mean dependent var	0.155937	
Adjusted R-squared	0.389773	S.D. dependent var	35.07822	
S.E. of regression	27.40206	Akaike info criterion	9.478340	
Sum squared resid	151676.4	Schwarz criterion	9.542959	
Log likelihood	-972.2690	Hannan-Quinn criter.	9.504474	
F-statistic	44.64687	Durbin-Watson stat	1.998046	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Συνεπώς παλινδρομούμε τις πρώτες διαφορές της κατανάλωσης επάνω στις διαφορές $\Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \Delta Y_{t-3}$ και βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα λαμβάνοντας υπόψη την διόρθωση των όρων σφάλματος για τυχόν ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας και αυτοσυσχέτισης και θέτοντας επιπλέον τ=0,16 (φορολογικός συντελεστής) και $\lambda_1 = 0.20$, $\lambda_2 = 0.25$, $\lambda_3 = 0.30$, $\lambda_4 = 0.25$:

Dependent Variable: DPCECC96
Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)
Date: 05/23/18 Time: 18:39
Sample (adjusted): 1955Q4 2007Q1
Included observations: 206 after adjustments
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 5.0000)
DPCECC96=C(1)*DGDPC961+C(2)*DGDPC962+C(3)*DGDPC963

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.232397	0.037526	6.192950	0.0000
C(2)	0.201807	0.039302	5.134746	0.0000
C(3)	0.133884	0.040851	3.277394	0.0012

R-squared	0.105823	Mean dependent var	40.48956
Adjusted R-squared	0.097014	S.D. dependent var	34.14592
S.E. of regression	32.44736	Akaike info criterion	9.811571
Sum squared resid	213724.7	Schwarz criterion	9.860036
Log likelihood	-1007.592	Hannan-Quinn criter.	9.831172
Durbin-Watson stat	1.587450		

Η χρονολογική σειρά της ιδιωτικής επενδυτικής ζήτησης είναι επίσης ολοκληρωμένη πρώτης τάξης το οποίο συνεπάγεται ότι πρέπει να θεωρήσουμε τις πρώτες διαφορές οι οποίες είναι στάσιμες όπως φαίνεται από τον ακόλουθο σχετικό έλεγχο ADF

Null Hypothesis: DGPDIC96 has a unit root			
Exogenous: Constant			
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=14)			
		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-12.04725	0.0000
Test critical values:	1% level	-3.461783	
	5% level	-2.875262	
	10% level	-2.574161	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.			

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(DGPDIC96)
Method: Least Squares
Date: 05/23/18 Time: 18:53
Sample (adjusted): 1955Q2 2007Q1

Included observations: 208 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
DGPDIC96(-1)	-0.828175	0.068744	-12.04725	0.0000
C	9.192709	2.810080	3.271334	0.0013
R-squared	0.413333	Mean dependent var		-0.256875
Adjusted R-squared	0.410485	S.D. dependent var		50.68608
S.E. of regression	38.91671	Akaike info criterion		10.17029
Sum squared resid	311989.1	Schwarz criterion		10.20239
Log likelihood	-1055.711	Hannan-Quinn criter.		10.18327
F-statistic	145.1361	Durbin-Watson stat		2.041453
Prob(F-statistic)	0.000000			

Συνεπώς θα παλινδρομήσουμε τη χρονοσειρά ΔI_t επάνω στις χρονοσειρές $R_{t-1}, \Delta Y_{t-1}, \Delta Y_{t-2}, \Delta Y_{t-3}$ παίρνοντας τα ακόλουθα αποτελέσματα με τη μέθοδο OLS και λαμβάνοντας υπόψη τη διόρθωση για τυχόν ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας και αυτοσυσχέτισης στον όρο σφάλματος.

Dependent Variable: DGPDIC96
Method: Least Squares (Gauss-Newton / Marquardt steps)
Date: 05/23/18 Time: 18:59
Sample (adjusted): 1955Q4 2007Q1
Included observations: 206 after adjustments
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 5.0000)
DGPDIC96=C(1)+C(2)*FEDFUNDS(-1)+C(3)*(GDPC96(-1)-GDPC96(-2))
+C(4)*(GDPC96(-2)-GDPC96(-3))+C(5)*(GDPC96(-3)-GDPC96(-4))

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	9.121378	5.354173	1.703602	0.0900
C(2)	-1.946028	0.740420	-2.628276	0.0092
C(3)	0.180961	0.060368	2.997658	0.0031

C(4)	0.089868	0.066576	1.349865	0.1786
C(5)	-0.042007	0.058787	-0.714561	0.4757

R-squared	0.150914	Mean dependent var	11.14275
Adjusted R-squared	0.134017	S.D. dependent var	39.59238
S.E. of regression	36.84397	Akaike info criterion	10.07523
Sum squared resid	272853.1	Schwarz criterion	10.15601
Log likelihood	-1032.749	Hannan-Quinn criter.	10.10790
F-statistic	8.931270	Durbin-Watson stat	2.212788
Prob(F-statistic)	0.000001	Wald F-statistic	9.457139
Prob(Wald F-statistic)	0.000001		

Άρα βρήκαμε την ακόλουθη εκτίμηση:

$$\Delta I_t = 9.121378 - 1.946028 R_{t-1} + 0.180961 \Delta Y_{t-1} + 0.089868 \Delta Y_{t-2} - 0.042007 \Delta Y_{t-3}$$

Το κριτήριο κόστους το οποίο θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε έχει την γενική μορφή

$$J = \frac{1}{2}(x_N - \tilde{x}_N)' W_N (x_N - \tilde{x}_N) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1}[(x_t - \tilde{x}_t)' W_t (x_t - \tilde{x}_t) + (u_t - \tilde{u}_t)' \Lambda_t (u_t - \tilde{u}_t)]$$

Όπου $W_t, t \in \{0,1,\ldots,N-1\}$ και W_N είναι πραγματικοί συμμετρικοί θετικά ημιορισμένοι πίνακες βάρους και Λ_t είναι ένας πραγματικός συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας βάρους. Η ελαχιστοποίηση του συγκεκριμένου κριτηρίου κόστους γίνεται ως προς το διάνυσμα των μεταβλητών ελέγχου $\underline{u}_t := \langle A_t, R_t \rangle$.
Το παραπάνω κριτήριο κόστους γράφεται σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$J = \frac{1}{2}\left(\left((\underline{x}_0 - \underline{y}_0)' \quad (\underline{x}_1 - \underline{y}_1)' \quad \cdots \quad (\underline{x}_N - \underline{y}_N)' \right) \begin{pmatrix} W_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & W_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 - \underline{y}_0 \\ \underline{x}_1 - \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_N - \underline{y}_N \end{pmatrix} + \left((\underline{u}_0 - \underline{m}_0)' \quad (\underline{u}_1 - \underline{m}_1)' \quad \cdots \quad (\underline{u}_{N-1} - \underline{m}_{N-1})' \right) \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_0 - \underline{m}_0 \\ \underline{u}_1 - \underline{m}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} - \underline{m}_{N-1} \end{pmatrix} \right)$$

όπου $\begin{pmatrix} W_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & W_N \end{pmatrix}$ *και* $\begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{N-1} \end{pmatrix}$

είναι block διαγώνιοι πίνακες. Ορίζουμε τα ακόλουθα:

$$H := \begin{pmatrix} W_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & W_N \end{pmatrix}, N := \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{N-1} \end{pmatrix}, \underline{\xi} := \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_N \end{pmatrix}, \underline{\phi} := \begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix}, \underline{k} := \begin{pmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_N \end{pmatrix}, \underline{r} := \begin{pmatrix} \underline{m}_0 \\ \underline{m}_1 \\ \vdots \\ \underline{m}_N \end{pmatrix}$$

Τότε το κριτήριο κόστους

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}(x_N - \tilde{x}_N)' W_N (x_N - \tilde{x}_N) + \frac{1}{2}\sum_{t=0}^{N-1}[(x_t - \tilde{x}_t)' W_t (x_t - \tilde{x}_t) + (u_t - \tilde{u}_t)' \Lambda_t (u_t - \tilde{u}_t)]$$

γράφεται

$$J(\underline{\phi}) = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\xi} - \underline{k}\right)' H \left(\underline{\xi} - \underline{k}\right) + \left(\underline{\phi} - \underline{r}\right)' N \left(\underline{\phi} - \underline{r}\right)\right]$$

Ζητάμε $\underline{\phi}$ το οποίο ελαχιστοποιεί το J υπό τον περιορισμό (21) ο οποίος γράφεται για όλες τις περιόδους $t \in \{0,1,\dots,N-1\}$ ως εξής:

$$\underline{x}_1 = A\underline{x}_0 + B\underline{u}_0 + C\underline{z}_0$$

$$\underline{x}_2 = A\underline{x}_1 + B\underline{u}_1 + C\underline{z}_1$$

.

.

.

$$\underline{x}_N = A\underline{x}_{N-1} + B\underline{u}_{N-1} + C\underline{z}_{N-1}.$$

Σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ A & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{u}_1 \\ \vdots \\ \underline{u}_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{z}_0 \\ \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_{N-1} \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα:

$$M := \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ A & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix}, S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C \end{pmatrix}, \underline{q} := \begin{pmatrix} \underline{z}_0 \\ \underline{z}_1 \\ \vdots \\ \underline{z}_{N-1} \end{pmatrix}$$

οπότε γράφουμε τους περιορισμούς σε συμπαγή μορφή:

$$(I-M)\underline{\xi} - Q\underline{\phi} = S\underline{q}\,.$$

Συνεπώς λύνουμε το τετραγωνικό πρόγραμμα:

$$\min_{\underline{\phi}} J(\underline{\phi}) = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\xi}-\underline{k}\right)' H\left(\underline{\xi}-\underline{k}\right) + \left(\underline{\phi}-\underline{r}\right)' N\left(\underline{\phi}-\underline{r}\right)\right]$$

$$s.t.(I-M)\underline{\xi} - Q\underline{\phi} = S\underline{q}\,.$$

Το επιθυμητό χρονικό μονοπάτι του ΑΕΠ προκύπτει εκτός δείγματος (εκτός περιόδου 54/4 έως 07/2) και έχει το χαρακτηριστικό ότι το επιθυμητό ΑΕΠ μεγεθύνεται κατά 1,5% ετησίως ξεκινώντας από τα 14 τρισεκατομμύρια δολάρια στο 3º τρίμηνο του 2007 και καταλήγοντας στα 16,49 τρισεκατομμύρια δολάρια στο 2º τρίμηνο του 2010.

Το επιθυμητό χρονικό μονοπάτι των κυβερνητικών δαπανών για αυτήν την περίοδο είναι 2,5 τρισεκατομμύρια δολάρια και το ίδιο ισχύει για τα ποσά τα οποία αποταμιεύει το κράτος (μεταβλητή ελέγχου A_t). Τέλος το επιθυμητό χρονικό μονοπάτι του επιτοκίου (μεταβλητή ελέγχου R_t) είναι σταθερό και ίσο με 1%.

Η «διαταραχή» του οικονομικού συστήματος (θετική ή αρνητική) για την περίοδο εκτός δείγματος ξεκινώντας από το 3º τρίμηνο του 2007 μέχρι το 1º τρίμηνο του 2010 προκύπτει απλά παίρνοντας τις πρώτες διαφορές πάνω στο ΑΕΠ για αυτήν την περίοδο οπότε βρίσκουμε

Quarter	**First difference**
07-3	**0.0743**
07-4	**0.0950**
08-1	**−0.0243**
08-2	**0.0199**

08-3	**−0.1355**
08-4	**−0.2298**
09-1	**−0.1610**
09-2	**−0.0226**
09-3	**0.0508**
09-4	**0.1582**
10-1	**0.1198**

Όσο αναφορά την επίλυση του παραπάνω προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού λέμε τα ακόλουθα:

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση Lagrange :

$$L(\vec{\varphi},\vec{\lambda}) = J(\vec{\varphi}) - \vec{\lambda}^t((I-M)\vec{\xi} - Q\vec{\varphi} - s\vec{q}) =$$

$$\frac{1}{2}[(\vec{\xi}-\vec{k})^t H(\vec{\xi}-\vec{k}) + (\vec{\varphi}-\vec{r})^t N(\vec{\varphi}-\vec{r})] - \vec{\lambda}^t((I-M)\vec{\xi} - Q\vec{\varphi} - s\vec{q})$$

Και βρίσκουμε τις Συνθήκες πρώτης τάξης :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = N(\vec{\varphi}-\vec{r}) + Q^t\vec{\lambda} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} = -(\mathrm{I}-\mathrm{M})\vec{\xi} + Q\vec{\varphi} + s\vec{q} = \vec{0}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τους τύπους

$$\frac{\partial \vec{\beta}^t \mathrm{A}\vec{\beta}}{\partial \vec{\beta}} = 2\mathrm{A}\vec{\beta}, (\mathrm{A}^t = \mathrm{A}\ ,\mathrm{A} = \text{συμμετρικός})$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}\vec{\beta}}{\partial \vec{\beta}} = \mathrm{A}^t.$$

Ισοδύναμα

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{N}(\vec{r}-\vec{\varphi}) = Q^t\vec{\lambda} \\ \\ (\mathrm{I}-\mathrm{M})\vec{\xi} = Q\vec{\varphi}+s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{r}-\vec{\varphi} = N^{-1}Q^t\vec{\lambda} \\ \\ (I-M)\vec{\xi} = Q\vec{\varphi}+s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\varphi} = \vec{r}-N^{-1}Q^t\vec{\lambda} \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q\vec{\varphi} = Q(\vec{r}-N^{-1}Q^t\vec{\lambda}) \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} = Q(\vec{r}-N^{-1}Q^t\vec{\lambda}) \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} = Q\vec{r}-QN^{-1}Q^t\vec{\lambda} \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} QN^{-1}Q^t\vec{\lambda} = Q\vec{r}-(I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\lambda} = (QN^{-1}Q^t)^{-1}(Q\vec{r}-(I-M)\vec{\xi}+s\vec{q}) \\ \\ Q\vec{\varphi} = (I-M)\vec{\xi}-s\vec{q} \end{array}\right\}$$

Άρα το $\vec{\varphi}$ το οποίο ελαχιστοποιεί το κριτήριο κόστους J είναι μία συνάρτηση του q, δηλαδή των διαταραχών .

$$\vec{\varphi} = \vec{r}-N^{-1}Q^t\vec{\lambda} = \vec{r}-N^{-1}Q^t(QN^{-1}Q^t)^{-1}[Q\vec{r}-(I-M)\vec{\xi}+s\vec{q}]$$

Συνθήκες β' τάξης :

Ο οριοθετημένος πίνακας Hess είναι ο ακόλουθος

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & -Q^t \\ -Q & N \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \mathrm{N} = \frac{\partial^2 L}{\partial\vec{\varphi}\partial\vec{\varphi}^t}$$

Για ελάχιστο θα πρέπει οι αντίστοιχες ηγετικές κύριες ελάσσονες του H (#ηγετικών κύριων ελάσονων = # ανεξάρτητων μεταβλητών - #ισοτικών περιορισμών) να έχουν κοινό πρόσημο $(-1)^{\#ισοτικων\_περιοσισμών}$

Παράρτημα. Πίνακες και διανύσματα της μορφής κατάστασης του υποδείγματος.

$$A=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \gamma_2\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2(\alpha_2-\alpha_1) & \gamma_2(\alpha_3-\alpha_2) & -\gamma_2\alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\
0 & 0 & 0 & \alpha_1(1+\gamma_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2-\gamma_2\alpha_1+\gamma_2\alpha_2 & \alpha_3+\gamma_2\alpha_3-\gamma_2\alpha_2 & -\gamma_2\alpha_3 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\
0 & 0 & 1 & -\tau & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \\ \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_0 \\ 0 \\ \gamma_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

.

Βιβλιογραφικές αναφορές :

[1] Rudebusch, G. D. (2009). The Fed's monetary policy response to the current crisis. *FRBSF economic Letter.*

[2] Thornton, D. L. (2012). The Federal Reserve's response to the financial crisis: what it did and what it should have done. *FRB of St. Louis Working Paper 2012-050A.*

[3] Loisel, O., & Mésonnier, J. S. (2009). Unconventional monetary policy measures in response to the crisis. *Current issues*, *1*.

[4] Wilson, D. (2008). Research on the effects of fiscal stimulus: symposium summary. *FRBSF Economic Letter*, *20*.

[5] Wilson, D. J. (2012). Fiscal spending jobs multipliers: Evidence from the 2009 american recovery and reinvestment act. *American Economic Journal: Economic Policy*, 251-282.

[6] d'Amico, S., English, W., López-Salido, D., & Nelson, E. (2012). The Federal Reserve's Large-scale Asset Purchase Programmes: Rationale and Effects. *The Economic Journal*, *122*(564).

[7] Cecioni, M., Ferrero, G., & Secchi, A. (2011). Unconventional monetary policy in theory and in practice.

[8] Kendrick, D. A., & Shoukry, G. (2014). Quarterly Fiscal Policy Experiments with a Multiplier-Accelerator Model. *Computational Economics*, *44*(3), 269-293.