

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**



**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

## **Μέθοδοι Αριθμητικού Υπολογισμού Δυναμικής Απόκρισης Γραμμικών και Μη Γραμμικών Συστημάτων**

**Αντώνης Ι. Γιαννακού**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ :**  
**Μιχαήλ Φραγκιαδάκης**  
**Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ**

**ΑΘΗΝΑ**  
**ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018**



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η διαδρομή μέχρι τον τερματισμό της παρούσας διπλωματικής δεν ήταν εύκολη και για το λόγο αυτό αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με βοήθησαν να φτάσω στον προορισμό μου.

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Μιχάλη Φραγκιαδάκη, Επίκουρο Καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την εξαιρετική συνεργασία, επίβλεψη και καθοδήγηση που μου παρείχε. Χάρης σε αυτόν, μου δόθηκε η δυνατότητα να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον αντικείμενο, ακολουθώντας πάντα τις διδακτικές του συμβουλές καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ από καρδιάς στην οικογένεια μου, για τη συμβολή τους με κάθε δυνατό τρόπο στην επιτυχή ολοκλήρωση της παρούσας μελέτης αλλά και για την υποστήριξη και ενθάρρυνση στις δύσκολες στιγμές κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Χωρίς την συμπαράστασή τους δεν θα βρισκόμουν σε αυτήν τη θέση.

*Αντώνης Ι. Γιαννακού*  
*Αθήνα, Νοέμβριος 2018*





## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο προσδιορισμός της δυναμικής απόκρισης ενός συστήματος αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα για την επιστήμη της Δυναμικής των Κατασκευών. Αυτό επιτυγχάνεται διατυπώνοντας και επιλύοντας ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης ή όταν το σύστημα αποκρίνεται πέραν του ελαστικού του ορίου, η αναλυτική λύση των εξισώσεων δεν είναι εφικτή και για την επίλυση τους θα πρέπει να κάνουμε χρήση μιας αριθμητικής μεθόδου χρονικών βημάτων. Πολλές προσπάθειες και έρευνες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια για την εξεύρεση αποτελεσματικών μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχοληθήκαμε με τέσσερις αριθμητικές μεθόδους: Κεντρικών διαφορών, Newmark, Hilber-Hughes-Taylor και Bathe. Οι μέθοδοι αυτοί προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB και εφαρμόστηκαν σε πέντε συνολικά παραδείγματα, τρία γραμμικά και δύο μη γραμμικά, με σκοπό τη σύγκριση των μεθόδων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Επιπλέον προγραμματίστηκε η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών και ο αλγόριθμος παραγωγής διανυσμάτων Ritz εξαρτώμενων από δύναμη για μείωση των βαθμών ελευθερίας, με τους οποίους επιλύθηκαν τα γραμμικά προβλήματα.

Οι διάφορες μέθοδοι παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την ευστάθεια, την ακρίβεια και τη ταχύτητα. Επομένως είναι πολύ βασικό να γίνει επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου, η οποία με βάση τις παραμέτρους που θα επιλεχθούν αν απαιτούνται και του χρονικού βήματος, θα εξασφαλίζει ευστάθεια, επαρκή ακρίβεια και λογικό χρόνο επίλυσης.

Μετά την εφαρμογή σε πέντε διαφορετικά παραδείγματα φαίνεται ξεκάθαρα το πλεονέκτημα των μεθόδων που εισάγουν αριθμητική απόσβεση για συστήματα με πολύ εύκαμπτα και πολύ δύσκαμπτα μέλη αφού αποκλείουν τη συμβολή των ανώτερων ιδιομορφών οι οποίες εισάγουν πολύ μεγάλα σφάλματα στη λύση. Επίσης φαίνεται η υπεροχή των μεθόδων που είναι άνευ συνθηκών ευσταθείς όσον αφορά τον μειωμένο υπολογιστικό χρόνο, όπως επίσης και των μεθόδων μείωσης των βαθμών ελευθερίας.



## ABSTRACT

Determining the dynamic response of a system, is considered to be a fundamental problem in Structural Dynamics. In order to achieve that, a system of differential equations of second order need to be formed and solved. Analytical solution of this equations is not possible if the excitation of the system is due to complex ground acceleration or if the system is nonlinear. Such problems can be tackled by numerical time-stepping methods for integration of differential equations. A large amount of research has been performed over the years to identify effective time integration schemes for both linear and nonlinear analyses of structures.

In this diploma thesis, we examined four numerical time-stepping methods: Central difference, Newmark, Hilber-Hughes-Taylor and Bathe method. In order to investigate and compare the performance of this methods, we programed them in MATLAB programming language and we studied five numerical examples, three linear and two nonlinear. Moreover we programed the mode superposition method and the algorithm for generating force dependent Ritz vectors and reducing the number of degrees of freedom. With this two methods we solved the linear examples.

Each method has different stability and accuracy properties. Also the computational efficiency varies for each one of them. To ensure reliable results and best performance for different problems, it is crucial to choose the most appropriate method and setting suitable time step size and its parameters if needed.

After applying the above time integration methods in the solution of five examples, we conclude that methods providing numerical damping has an advantage when the system contains very flexible and quite stiff parts because the artificial high frequency response is damped out and not included as errors in the solution. Furthermore using an implicit method which is unconditionally stable or reducing the degrees of freedom of a linear problem, we need far less computational effort with remarkable accuracy.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>17</b>
1.1	ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ . . . . .	17
1.2	ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ . . . . .	17
1.3	ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ . . . . .	18
<b>2</b>	<b>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ</b>	<b>19</b>
2.1	ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ . . . . .	19
2.2	ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ . . . . .	19
2.2.1	ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ . . . . .	20
2.3	ΜΕΘΟΔΟΣ RAYLEIGH-RITZ ΓΙΑ ΜΕΙΩΣΗ ΤΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ . . . . .	21
2.3.1	ΜΕΙΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ . . . . .	21
2.3.2	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ RITZ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΔΥΝΑΜΗ . . . . .	22
2.3.3	ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ RITZ . . . . .	24
2.4	ΜΟΡΦΩΣΗ ΚΛΑΣΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ . . . . .	24
2.4.1	ΑΠΟΣΒΕΣΗ RAYLEIGH . . . . .	25
2.4.2	ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ . . . . .	27
<b>3</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ</b>	<b>29</b>
3.1	ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ . . . . .	29
3.2	ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	30
3.2.1	ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ . . . . .	30
3.2.2	ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK . . . . .	32
3.2.3	ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER - HUGHES - TAYLOR . . . . .	35
3.2.4	ΜΕΘΟΔΟΣ Κ. J. BATHE . . . . .	38
3.3	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	40
3.3.1	ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ . . . . .	40
3.3.2	ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ NEWTON-RAPHSON . . . . .	40
3.3.3	ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK . . . . .	43

3.3.4	ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER - HUGHES - TAYLOR . . . . .	46
<b>4</b>	<b>ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ</b>	<b>49</b>
4.1	ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ . . . . .	49
4.2	ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ . . . . .	52
4.3	ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	55
<b>5</b>	<b>ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ</b>	<b>57</b>
5.1	ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ . . . . .	57
5.2	ΟΚΤΑΩΡΟΦΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΝΝΕΑ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ . . . . .	60
5.2.1	ΣΕΙΣΜΟΣ ΜΑΝJΙL, ΙRΑΝ 20/6/1990 . . . . .	61
5.2.2	ΣΕΙΣΜΟΣ ΡΑΚFΙΕLΔ 06/28/66 . . . . .	65
5.2.3	ΣΕΙΣΜΟΣ ΛΟΜΑ ΡΙΕΤΑ 10/18/89 . . . . .	69
5.3	ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΙΚΟΣΙ ΔΥΟ ΟΡΟΦΩΝ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ . . . . .	72
5.3.1	ΣΕΙΣΜΟΣ ΜΑΝJΙL, ΙRΑΝ 20/6/1990 . . . . .	74
5.3.2	ΣΕΙΣΜΟΣ ΡΑΚFΙΕLΔ 06/28/66 . . . . .	78
5.3.3	ΣΕΙΣΜΟΣ ΛΟΜΑ ΡΙΕΤΑ 10/18/89 . . . . .	81
5.4	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΠΕΝΤΕ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ . . . . .	84
5.5	ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΕΚΑΤΟ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ . . . . .	87
<b>6</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	<b>93</b>
<b>7</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	<b>95</b>
<b>8</b>	<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>97</b>

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

2.1	Μεταβολή των ιδιομορφικών λόγων απόσβεσης με την ιδιοσυχνότητα. Απόσβεση Rayleigh (συνεχής γραμμή). Οι διακεκομμένες γραμμές αφορούν απόσβεση ανάλογη της μάζας (φθίνουσα καμπύλη) και απόσβεση ανάλογη της δυσκαμψίας (γραμμικά αυξανόμενη καμπύλη). . . . .	27
3.1	Μέθοδοι μέσης και γραμμικής επιτάχυνσης . . . . .	34
3.2	Επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson: (α) επιβαλλόμενες και εσωτερικές δυνάμεις, (β) υπολειπόμενη δύναμη . . . . .	42
3.3	Τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson: (α) επιβαλλόμενες και εσωτερικές δυνάμεις, (β) υπολειπόμενη δύναμη. . . . .	43
4.1	Αστοχία της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης για το επιλεγμένο χρονικό βήμα $\Delta t$ . . . . .	49
4.2	Φασματική ακτίνα του μητρώου μεγέθυνσης για τις μεθόδους ( $\zeta = 0$ ) σε συνάρτηση με το λόγο $\Delta t/T$ . . . . .	52
4.3	Λύση της ελεύθερης ταλάντωσης με αριθμητικές μεθόδους και θεωρητική λύση. . . . .	53
4.4	Ορισμός των AD (εξασθένηση εύρους) και PE (επιμήκυνση περιόδου). . . .	53
4.5	Επιμήκυνση της περιόδου συναρτήσεως του $\Delta t/T_n$ . . . . .	54
4.6	Εξασθένηση του εύρους συναρτήσεως του $\Delta t/T_n$ . . . . .	54
5.1	Μοντέλο του συστήματος με τρεις βαθμούς ελευθερίας και χαρακτηριστικά: $k_1 = 10^7$ , $k_2 = 1$ , $m_1 = 0$ , $m_2 = 1$ , $m_3 = 1$ , $\omega_p = 1.2$ . . . . .	57
5.2	Μετατόπιση του κόμβου 2. . . . .	58
5.3	Μετατόπιση του κόμβου 3. . . . .	58
5.4	Ταχύτητα του κόμβου 2. . . . .	58
5.5	Ταχύτητα του κόμβου 3. . . . .	58
5.6	Επιτάχυνση του κόμβου 2. . . . .	59
5.7	Επιτάχυνση του κόμβου 3. . . . .	59
5.8	Δύναμη αντίδρασης στον κόμβο 1. . . . .	59
5.9	ΟΚΤΑΩΡΟΦΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΝΝΕΑ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ. . . . .	61
5.10	Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	62

5.11 Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.005$ s).	62
5.12 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$ s).	62
5.13 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$ s).	63
5.14 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	63
5.15 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	63
5.16 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	64
5.17 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	64
5.18 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ .	65
5.19 Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.01$ s).	66
5.20 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$ s).	66
5.21 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	66
5.22 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	67
5.23 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	67
5.24 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	67
5.25 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ .	68
5.26 Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.005$ s).	69
5.27 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$ s).	69
5.28 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$ s).	70
5.29 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$ s).	70
5.30 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$ s).	70
5.31 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$ s).	71
5.32 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ .	72
5.33 ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΙΚΟΣΙ ΔΥΟ ΟΡΟΦΩΝ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ.	74
5.34 Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.01$ s).	75
5.35 Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.005$ s).	75
5.36 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$ s).	75
5.37 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$ s).	76
5.38 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	76
5.39 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s).	76
5.40 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	77
5.41 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s).	77



5.42 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ . . . . .	78
5.43 Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά $x$ ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	79
5.44 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	79
5.45 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	79
5.46 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	80
5.47 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	80
5.48 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$ s). . . . .	80
5.49 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ . . . . .	81
5.50 Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά $x$ ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	82
5.51 Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	82
5.52 Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	82
5.53 Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	83
5.54 Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	83
5.55 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$ s). . . . .	83
5.56 Χρόνοι επίλυσης για διάφορα $\Delta t$ . . . . .	84
5.57 ΠΕΝΤΑΩΡΟΦΟ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ. . . . .	85
5.58 Ελαστοπλαστική σχέση τέμνουσας-drift ορόφου . . . . .	85
5.59 Απόκριση οροφής ( $ah=0.05$ ). . . . .	86
5.60 Απόκριση οροφής ( $ah=0.2$ και $ah=0$ ). . . . .	86
5.61 Απόκριση οροφής ( $ah=-0.05$ και $ah=-0.2$ ). . . . .	87
5.62 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 100 ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ. . . . .	87
5.63 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και $ah=0.05$ . . . . .	88
5.64 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και $ah=0.05$ . . . . .	88
5.65 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 2g και $ah=0.05$ . . . . .	89
5.66 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 2g και $ah=0.05$ . . . . .	89
5.67 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και $ah=0.2$ . . . . .	90
5.68 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και $ah=0.2$ . . . . .	90
5.69 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 2g και $ah=0.2$ . . . . .	90
5.70 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 2g και $ah=0.2$ . . . . .	91
5.71 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και $ah=0$ . . . . .	91
5.72 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και $ah=0$ . . . . .	91

5.73 Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για $2g$ και $ah=0$ . . . . .	92
5.74 Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για $2g$ και $ah=0$ . . . . .	92

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1	ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	33
3.2	ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	36
3.3	ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER-HUGHES-TAYLOR: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	37
3.4	ΜΕΘΟΔΟΣ Κ. J. BATHE: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	39
3.5	ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	41
3.6	ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	45
3.7	ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER-HUGHES-TAYLOR: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ . . . . .	48
5.1	ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΥΨΗ ΦΟΡΕΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΡΟΦΟ . . . . .	73



## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο προσδιορισμός της δυναμικής απόκρισης ενός συστήματος αποτελεί ένα θεμελιώδες πρόβλημα για την επιστήμη της Δυναμικής των Κατασκευών. Με τη δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας (time history analysis) μιας κατασκευής, εξασφαλίζουμε την απόκριση της για κάθε χρονική στιγμή. Το μαθηματικό πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε αποτελείται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού, διατυπωμένες σε μια μητρική σχέση. Πολλές προσπάθειες και έρευνες έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια για την εξεύρεση αποτελεσματικών μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης. Εφόσον οι εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις στην περίπτωση σεισμικής διέγερσης, δεν περιγράφονται από μια κλειστή μαθηματική συνάρτηση ή όταν το σύστημα αποκρίνεται πέραν του ελαστικού του ορίου, η αριθμητική επίλυση τέτοιων διαφορικών εξισώσεων φαίνεται να είναι η μόνη επιλογή.

Για πολύ μεγάλες κατασκευές με πολύ μεγάλο πλήθος βαθμών ελευθερίας, η δυναμική ανάλυση χρονοϊστορίας τους, μπορεί να καταστεί μια εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία, με τεράστιες απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ και υπολογιστικούς πόρους. Πρακτικά, επειδή το υπολογιστικό υλικό πολλές φορές δεν είναι διαθέσιμο, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων μεγάλης κλίμακας μπορεί να είναι από πολύ δύσκολη έως ανέφικτη. Έτσι σήμερα επικεντρωνόμαστε σε αυτές τις αριθμητικές μεθόδους οι οποίες μας εξασφαλίζουν όχι μόνο ικανοποιητική ακρίβεια και ευστάθεια αλλά και τους μικρότερους χρόνους επίλυσης του προβλήματος.

Οι μέθοδοι αυτές, έχουν εφαρμογή τόσο για γραμμική (ελαστική) ανάλυση των κατασκευών όσο και για μη γραμμική (μετελαστική). Γραμμική συμπεριφορά έχει μια κατασκευή όταν η σχέση μεταξύ των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων και της απόκρισης είναι γραμμική. Εάν δηλαδή η εφαρμογή φορτίου  $\mathbf{P}$  μας δίνει μετατοπίσεις  $\mathbf{u}$ , τότε η εφαρμογή φορτίου  $\lambda\mathbf{P}$  θα μας δώσει μετατοπίσεις  $\lambda\mathbf{u}$ . Αντίστοιχα, μη γραμμική συμπεριφορά έχει μια κατασκευή όταν η σχέση μεταξύ των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων και της απόκρισης είναι μη γραμμική, δηλαδή  $\lambda\mathbf{P} \neq \lambda\mathbf{u}$  ή πιο απλά όταν το μητρώο δυσκαμψίας  $\mathbf{K}$  δίνεται σαν συνάρτηση των μετατοπίσεων:  $\mathbf{K} = f(\mathbf{u})$ .

### 1.2 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι οι αριθμητικές μέθοδοι με τις οποίες γίνεται η ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης μιας κατασκευής και υπολογίζεται η απόκριση της. Οι διάφορες μέθοδοι παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την ευστάθεια, ακρίβεια και ταχύτητα. Οι μέθοδοι αυτοί προγραμματίστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού MATLAB και εφαρμόστηκαν σε πέντε παραδείγματα με σκοπό τη σύγκριση των μεθόδων και εξαγωγή συμπερασμάτων. Επιπλέον προγραμματίστηκε η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών και ο αλγόριθμος παραγωγής διανυσμάτων Ritz εξαρτώμενων

από δύναμη για μείωση των βαθμών ελευθερίας, με τους οποίους επιλύθηκαν δύο προβλήματα.

### 1.3 ΔΙΑΡΘΡΩΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία, έχει την ακόλουθη δομή:

- Στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνεται η μητρική εξίσωση κίνησης, παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών και η μέθοδος Rayleigh-Ritz για μείωση των βαθμών ελευθερίας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο μέθοδοι για μόρφωση κλασικού μητρώου απόσβεσης.
- Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται αναλυτικά οι μέθοδοι χρονικών βημάτων για γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα, με τις οποίες ασχοληθήκαμε στην παρούσα εργασία.
- Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται οι έννοιες ευστάθεια και ακρίβεια των μεθόδων.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται πέντε παραδείγματα στα όποια εφαρμόσαμε τις μεθόδους και γίνεται σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων.
- Στο Κεφάλαιο 6 πραγματοποιείται η σύνοψη των συμπερασμάτων και των βασικότερων σημείων της εργασίας.
- Στο Παράρτημα παρατίθενται τμήματα του κώδικα που γράφτηκαν σε λογισμικό MATLAB, μέσω του οποίου υλοποιήθηκε ο προγραμματισμός των μεθόδων.

## 2. ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

### 2.1 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η εξίσωση κίνησης ενός δυναμικού προβλήματος, διατυπώνεται αθροίζοντας τις ελαστικές δυνάμεις  $\mathbf{F}_E$  της εξίσωσης ισορροπίας για το στατικό πρόβλημα, με τις δυνάμεις αδράνειας  $\mathbf{F}_I$  και απόσβεσης  $\mathbf{F}_D$ , έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή το άθροισμα αυτό να ισούται με τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις  $\mathbf{P}$ , δηλαδή:

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{P}(t) \quad (2.1.1)$$

Συμβολίζοντας με  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}$  τα διανύσματα των μετατοπίσεων, ταχυτήτων και επιταχύνσεων αντίστοιχα, η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (2.1.2)$$

όπου  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$  είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας.

Στην περίπτωση που η κατασκευή διεγείρεται σεισμικά με μια χρονοϊστορία επιταχύνσεων  $\ddot{u}_g(t)$  στη βάση της, τότε τα εξωτερικά επιβαλλόμενα φορτία είναι ανάλογα της μάζας και υπολογίζονται ως:

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \quad (2.1.3)$$

όπου  $\mathbf{r}$  είναι το διάνυσμα κατεύθυνσης της σεισμικής διέγερσης, με τα στοιχεία του να ισούνται με 1 εάν ο βαθμός ελευθερίας είναι στην ίδια κατεύθυνση με αυτή του σεισμού και με 0 σε διαφορετική περίπτωση.

### 2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Η ιδιομορφική ανάλυση ή μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών, χρησιμοποιείται πολύ συχνά για γραμμική ελαστική ανάλυση. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε ένα πρόβλημα  $N$  βαθμών ελευθερίας με  $N$  συζευμένες εξισώσεις κίνησης, να μετασχηματιστεί σε  $N$  ασύζευκτα μονοβάθμια προβλήματα, τα οποία μπορούν να επιλυθούν το καθένα ξεχωριστά και με επαλληλία των λύσεων των μονοβάθμιων να έχουμε τη λύση του αρχικού συζευμένου προβλήματος. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι με τη χρήση μερικών μόνο ιδιομορφών, μπορούμε να έχουμε πολύ καλά αποτελέσματα στην απόκριση του συστήματος, αφού η συμβολή στην απόκριση των υπόλοιπων ιδιομορφών είναι αμελητέα. Αυτό επιταχύνει κατά μεγάλο βαθμό τη διαδικασία δυναμικής ανάλυσης, ενώ το πλήθος των ιδιομορφών που απαιτούνται ώστε να έχουμε επαρκώς ακριβή αποτελέσματα, εξαρτάται από το είδος της φόρτισης και άλλα χαρακτηριστικά της κατασκευής όπως η δυσκαμψία και η απόσβεση.

### 2.2.1 ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Το διάνυσμα μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$  ενός συστήματος πολλών βαθμών ελευθερίας, μπορεί να αναπτυχθεί συναρτήσει ιδιομορφικών συνιστωσών. Έτσι, η δυναμική απόκριση ενός συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως το άθροισμα:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.2.1)$$

Με τη χρήση της πιο πάνω εξίσωσης, μπορούμε τις συζευγμένες εξισώσεις που προκύπτουν από τη μητρική εξίσωση κίνησης (2.1.2) ως προς τις φυσικές συντεταγμένες, να τις μετασχηματίσουμε σε ένα σύστημα ασύζευκτων εξισώσεων ως προς τις ιδιομορφικές συντεταγμένες  $q_n(t)$ . Αντικαθιστώντας την Εξ. (2.2.1) στην Εξ. (2.1.2) παίρνουμε:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \quad (2.2.2)$$

την οποία πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με  $\Phi^T$  και λαμβάνουμε:

$$\mathbf{M}_n\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_n\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_n\mathbf{q} = \mathbf{p}_n(t) \quad (2.2.3)$$

όπου:

$$\mathbf{M}_n = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad \mathbf{C}_n = \Phi^T \mathbf{C} \Phi \quad \mathbf{K}_n = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad \mathbf{p}_n(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (2.2.4)$$

Τα μητρώα  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  και  $\mathbf{C}$  (κλασική απόσβεση) ικανοποιούν τις συνθήκες ορθογωνικότητας. Άρα ισχύει:

$$\Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_m = \begin{cases} M_n & \text{για } n = m \\ 0 & \text{για } n \neq m \end{cases} \quad (2.2.5)$$

$$\Phi_n^T \mathbf{K} \Phi_m = \begin{cases} K_n & \text{για } n = m \\ 0 & \text{για } n \neq m \end{cases} \quad (2.2.6)$$

$$\Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_m = \begin{cases} C_n & \text{για } n = m \\ 0 & \text{για } n \neq m \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Τα μητρώα  $\mathbf{M}_n$ ,  $\mathbf{K}_n$  και  $\mathbf{C}_n$  είναι διαγώνια μητρώα με το  $n$ -οστό διαγώνιο στοιχείο τους ίσο με  $M_n$ ,  $K_n$  και  $C_n$  αντίστοιχα, ενώ με αντικατάσταση της Εξ. (2.1.3) στην Εξ. (2.2.4) έχουμε:

$$\mathbf{p}_n(t) = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \quad (2.2.8)$$

Οι συζευγμένες εξισώσεις που προκύπτουν από τη μητρική εξίσωση κίνησης (2.1.2) ως προς τις φυσικές συντεταγμένες, είναι ισοδύναμες με τις εξής εξισώσεις στις ιδιομορφικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} M_1\ddot{q}_1 + C_1\dot{q}_1 + K_1q_1 &= p_1(t) \\ M_2\ddot{q}_2 + C_2\dot{q}_2 + K_2q_2 &= p_2(t) \\ &\dots \\ M_n\ddot{q}_n + C_n\dot{q}_n + K_nq_n &= p_n(t) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$



Διαιρώντας με  $M_n$  και αντικαθιστώντας με  $C_n = 2\zeta_n M_n \omega_n$  και  $K_n = \omega_n^2 M_n$ , η  $n$ -οστή εξίσωση απλοποιείται σε:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\frac{p_n(t)}{M_n} \quad (2.2.10)$$

## 2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ RAYLEIGH-RITZ ΓΙΑ ΜΕΙΩΣΗ ΤΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

### 2.3.1 ΜΕΙΩΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ

Στη μέθοδο Rayleigh-Ritz, οι μετατοπίσεις εκφράζονται ως επαλληλία ενός αριθμού γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων σχήματος  $\psi_j$ , που ικανοποιούν τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται διανύσματα Ritz. Το διάνυσμα μετατοπίσεων γράφεται ως ακολούθως:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^J z_j(t) \psi_j = \mathbf{\Psi} \mathbf{z}(t) \quad (2.3.1)$$

όπου  $\mathbf{z}(t)$  είναι το διάνυσμα των  $J$  γενικευμένων συντεταγμένων και οι στήλες του μητρώου  $\mathbf{\Psi}$  διαστάσεων  $N \times J$ , είναι τα διανύσματα Ritz  $\psi_j$ .

Η μητρική εξίσωση κίνησης για ένα σύστημα με  $N$  βαθμούς ελευθερίας που υποβάλλεται στις εξωτερικές δυνάμεις  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t)$  είναι:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{s}p(t) \quad (2.3.2)$$

όπου το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  εκφράζει τη χωρική κατανομή των εξωτερικών δυνάμεων και δε μεταβάλλεται με το χρόνο και  $p(t)$  η συνάρτηση χρονοϊστορίας της φόρτισης.

Με αντικατάσταση του διανύσματος μετατοπίσεων όπως προκύπτει από το μετασχηματισμό Ritz της Εξ. (2.3.1) στην Εξ. (2.3.2) παίρνουμε:

$$\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\mathbf{\Psi}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{\Psi}\mathbf{z} = \mathbf{s}p(t) \quad (2.3.3)$$

την οποία πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με  $\mathbf{\Psi}^T$  και λαμβάνουμε:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{L}}p(t) \quad (2.3.4)$$

όπου:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Psi} \quad \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} \quad \tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{s} \quad (2.3.5)$$

Η εξίσωση (2.3.4) είναι ένα σύστημα  $J$  διαφορικών εξισώσεων στις  $J$  γενικευμένες συντεταγμένες  $z_j(t)$ .

Τα διανύσματα Ritz γενικά δεν πληρούν τις συνθήκες ορθογωνικότητας, επομένως τα μητρώα της Εξ. (2.3.5) δεν είναι διαγώνια, κάτι που καθιστά τις εξισώσεις της σχέσης (2.3.4) πεπλεγμένες.

Με τη μέθοδο Rayleigh-Ritz, όπως παρατηρούμε και από τις πιο πάνω εξισώσεις, είναι εφικτή η μείωση του πλήθους των εξισώσεων (2.3.2) που περιγράφουν την κίνηση του συστήματος, από  $N$  εξισώσεις στις φυσικές συντεταγμένες, σε  $J$  εξισώσεις στις γενικευμένες συντεταγμένες. Αυτό μπορεί να προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα, αφού το πρόβλημα απλοποιείται σε μεγάλο βαθμό ειδικά όταν το  $J$  είναι αρκετά μικρότερο από το  $N$ , και οι προσεγγιστικές μετατοπίσεις εμπίπτουν εντός ικανοποιητικών ορίων.

### 2.3.2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ RITZ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΔΥΝΑΜΗ

Στη μέθοδο Rayleigh-Ritz είναι πολύ σημαντικό τα διανύσματα να επιλεγούν σωστά, αφού η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται από την ακρίβεια με την οποία προσεγγίζουν τις ιδιομορφές ταλάντωσης οι γραμμικοί συνδυασμοί των επιλεγμένων διανυσμάτων Ritz. Παρακάτω παρουσιάζεται ένας υπολογιστικός αλγόριθμος για την παραγωγή ορθοκανονικών διανυσμάτων Ritz εξαρτώμενων από δύναμη, μιας κατασκευής η οποία υποβάλλεται σε εξωτερική δυναμική φόρτιση της μορφής:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{s}p(t) \quad (2.3.6)$$

Όταν το δυναμικό φορτίο είναι οι αδρανειακές δυνάμεις λόγω εδαφικής επιτάχυνσης, το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  τίθεται ίσο με  $\mathbf{M}\mathbf{r}$  όπου  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα κατεύθυνσης.

Το πρώτο διάνυσμα Ritz  $\psi_1$  ορίζεται ως το διάνυσμα στατικών μετατοπίσεων που προκαλεί η φόρτιση με το διάνυσμα  $\mathbf{s}$  και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{s} \quad (2.3.7)$$

το οποίο κανονικοποιείται ώστε να είναι ορθοκανονικό ως προς την μάζα:

$$\psi_1 = \frac{\mathbf{y}_1}{(\mathbf{y}_1^T \mathbf{M} \mathbf{y}_1)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.8)$$

Ο προσδιορισμός του δεύτερου διανύσματος Ritz  $\psi_2$  γίνεται από το διάνυσμα  $\mathbf{y}_2$ , το οποίο προκύπτει ως το διάνυσμα στατικών μετατοπίσεων που προκαλεί η φόρτιση με τις αδρανειακές δυνάμεις που σχετίζονται με το πρώτο διάνυσμα Ritz  $\psi_1$ :

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\psi_1 \quad (2.3.9)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{y}_2$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{y}_2 = \hat{\psi}_2 + a_{12}\psi_1 \quad (2.3.10)$$

όπου το  $\hat{\psi}_2$  είναι ένα καθαρό διάνυσμα, ορθογωνικό προς το  $\psi_1$  και άρα γραμμικώς ανεξάρτητο από αυτό και  $a_{12}\psi_1$  είναι η συνιστώσα του προηγούμενου διανύσματος που εμπεριέχεται στο  $\mathbf{y}_2$ . Για τον προσδιορισμό του συντελεστή  $a_{12}$ , πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την Εξ. (2.3.10) με  $\psi_1^T \mathbf{M}$  και προκύπτει:

$$\psi_1^T \mathbf{M} \mathbf{y}_2 = \psi_1^T \mathbf{M} \hat{\psi}_2 + a_{12}(\psi_1^T \mathbf{M} \psi_1) \quad (2.3.11)$$

Επειδή όμως  $\psi_1^T \mathbf{M} \hat{\psi}_2 = 0$  από τον ορισμό του  $\hat{\psi}_2$  και  $\psi_1^T \mathbf{M} \psi_1 = 1$  επειδή το  $\psi_1$  είναι ορθοκανονικό ως προς τη μάζα, έτσι:

$$a_{12} = \psi_1^T \mathbf{M} \mathbf{y}_2 \quad (2.3.12)$$

Επιλύουμε την Εξ. (2.3.10) ως προς το καθαρό διάνυσμα  $\hat{\psi}_2$ :

$$\hat{\psi}_2 = \mathbf{y}_2 - a_{12} \psi_1 \quad (2.3.13)$$

Τέλος, για να πάρουμε το δεύτερο διάνυσμα Ritz, αντικαθιστούμε στην πιο πάνω σχέση τον συντελεστή  $a_{12}$  και κανονικοποιούμε το διάνυσμα  $\hat{\psi}_2$  ώστε να είναι ορθοκανονικό ως προς τη μάζα και έχουμε:

$$\psi_2 = \frac{\hat{\psi}_2}{(\hat{\psi}_2^T \mathbf{M} \hat{\psi}_2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.14)$$

Η πιο πάνω διαδικασία για την παραγωγή του δεύτερου διανύσματος Ritz  $\psi_2$ , μπορεί να επαναληφθεί μέχρι να λάβουμε όσα διανύσματα Ritz επιθυμούμε. Ο προσδιορισμός του  $n$ -ιστού διανύσματος Ritz  $\psi_n$  γίνεται από το διάνυσμα  $\mathbf{y}_n$ , το οποίο προκύπτει ως το διάνυσμα στατικών μετατοπίσεων που προκαλεί η φόρτιση με τις αδρανειακές δυνάμεις που σχετίζονται με το προηγούμενο ( $n-1$ ) διάνυσμα Ritz  $\psi_{n-1}$ :

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \psi_{n-1} \quad (2.3.15)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{y}_n$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\mathbf{y}_n = \hat{\psi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn} \psi_j \quad (2.3.16)$$

όπου το  $\hat{\psi}_n$  είναι ένα καθαρό διάνυσμα, ορθογωνικό προς, και άρα γραμμικώς ανεξάρτητο από όλα τα προηγούμενα διανύσματα και  $a_{jn} \psi_j$  είναι οι συνιστώσες των προηγούμενων διανυσμάτων που εμπεριέχονται στο  $\mathbf{y}_n$ . Για τον προσδιορισμό του συντελεστή  $a_{in}$ , πολλαπλασιάζουμε από αριστερά την Εξ. (2.3.16) με  $\psi_i^T \mathbf{M}$  και προκύπτει:

$$\psi_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_n = \psi_i^T \mathbf{M} \hat{\psi}_n + \sum_{j=1}^{n-1} a_{jn} (\psi_i^T \mathbf{M} \psi_j) \quad (2.3.17)$$

Επειδή όμως  $\psi_i^T \mathbf{M} \hat{\psi}_n = 0$  από τον ορισμό του  $\hat{\psi}_n$ ,  $\psi_i^T \mathbf{M} \psi_j = 0$  για  $i \neq j$  και  $\psi_i^T \mathbf{M} \psi_i = 1$  επειδή όλα τα προηγούμενα διανύσματα είναι ορθοκανονικά ως προς τη μάζα, έτσι:

$$a_{in} = \psi_i^T \mathbf{M} \mathbf{y}_n \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.3.18)$$

Επιλύουμε την Εξ. (2.3.16) ως προς το καθαρό διάνυσμα  $\hat{\psi}_n$ :

$$\hat{\psi}_n = \mathbf{y}_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \psi_i \quad (2.3.19)$$

Τέλος, με γνωστά τα  $a_{in}$  από την Εξ (2.3.18), για να πάρουμε το  $n$ -ιστό διάνυσμα Ritz  $\psi_n$ , κανονικοποιούμε το διάνυσμα  $\hat{\psi}_n$  ώστε να είναι ορθοκανονικό ως προς την μάζα και έχουμε:

$$\psi_n = \frac{\hat{\psi}_n}{(\hat{\psi}_n^T \mathbf{M} \hat{\psi}_n)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.20)$$

### 2.3.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ RITZ

Έχοντας το μητρώο  $\Psi$  με τα διανύσματα Ritz, διατυπώνουμε την εξίσωση κίνησης στις  $J$  γενικευμένες συντεταγμένες (2.3.4), όπου  $J$  το πλήθος των διανυσμάτων Ritz που επιλέξαμε και ισούται με το πλήθος του μειωμένου συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, οι εξισώσεις αυτές είναι συζευγμένες αφού τα μητρώα της Εξ. (2.3.5) δεν είναι διαγώνια, με εξαίρεση την περίπτωση χρήσης διανυσμάτων Ritz εξαρτώμενα από δύναμη, στην οποία το  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ , το μοναδιαίο μητρώο. Η επίλυση του συστήματος μπορεί να γίνει με κάποια αριθμητική μέθοδο χρονικών βημάτων (Κεφάλαιο 3) και θα έχουμε το διάνυσμα  $\mathbf{z}(t)$  στις γενικευμένες συντεταγμένες για κάθε χρονική στιγμή. Το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  των μετατοπίσεων στις φυσικές συντεταγμένες προσδιορίζεται από την Εξ. (2.3.1).

Η μέθοδος προσφέρεται τόσο για συστήματα με κλασική απόσβεση, όσο και για συστήματα με μη κλασική απόσβεση. Για συστήματα όμως με κλασική απόσβεση μπορούμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές ιδιομορφές  $\check{\phi}_n$  με βάση τα διανύσματα Ritz και να τις χρησιμοποιήσουμε όπως ακριβώς θα χρησιμοποιούσαμε τις ακριβείς ιδιομορφές στην κλασική ιδιομορφική ανάλυση του συστήματος. Σε κάθε περίπτωση, το πλήθος των διανυσμάτων Ritz που χρησιμοποιούμε, πρέπει να είναι επαρκές ούτως ώστε να παίρνουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

## 2.4 ΜΟΡΦΩΣΗ ΚΛΑΣΙΚΟΥ ΜΗΤΡΩΟΥ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Κλασική απόσβεση έχουμε όταν το μητρώο απόσβεσης ικανοποιεί τη σχέση ορθογωνιότητας ως προς τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης, δηλαδή ισχύει η Εξ. (2.2.7), με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται η απόζευξη των εξισώσεων κίνησης και στην περίπτωση που έχουμε απόσβεση. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η απόσβεση επηρεάζει ξεχωριστά κάθε ιδιομορφή με δεδομένο λόγο απόσβεσης. Η κλασική απόσβεση είναι μία κατάλληλη προσομοίωση αν παρόμοιοι μηχανισμοί απόσβεσης κατανέμονται σε όλη την κατασκευή όπως ένα πολυώροφο κτίριο με παρόμοιο δομικό σύστημα και δομικά υλικά καθ' ύψος. Μη κλασική απόσβεση έχουμε όταν το μητρώο απόσβεσης δεν ικανοποιεί τη σχέση ορθογωνιότητας ως προς τις ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης και άρα δεν είναι εφικτή η απόζευξη των εξισώσεων κίνησης. Αν ένα σύστημα αποτελείται από δύο ή περισσότερα μέρη με αρκετά διαφορετικά επίπεδα απόσβεσης τότε είναι πιο κατάλληλη η προσομοίωση του συστήματος με μη κλασική απόσβεση.

Όταν η εξίσωση κίνησης επιλύεται με τη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών, δεν απαιτείται η γνώση του μητρώου απόσβεσης αφού η απόσβεση εφαρμόζεται σε κάθε ιδιομορφή ξεχωριστά, επιλέγοντας κατάλληλους ιδιομορφικούς λόγους απόσβεσης (π.χ  $\zeta_n = 5\%$ ). Στην περίπτωση όμως που η κλασική ιδιομορφική ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί, τότε το μητρώο απόσβεσης πρέπει να καθορισθεί πλήρως. Τέτοιες περιπτώσεις είναι όταν έχουμε κατασκευές με μη κλασική απόσβεση και όταν αναλύουμε μη γραμμικά συστήματα. Επίσης αν επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης της μητρωικής εξίσωσης κίνησης σαν μέθοδο επίλυσης τότε και σε αυτή την

περίπτωση η μόρφωση του μητρώου απόσβεσης είναι επιβεβλημένη.

### 2.4.1 ΑΠΟΣΒΕΣΗ RAYLEIGH

Το μητρώο απόσβεσης μπορεί να ληφθεί ανάλογο προς το μητρώο μάζας ή δυσκαμψίας ή σαν γραμμικός συνδυασμός των δύο μητρώων. Η ανάλογη της δυσκαμψίας απόσβεση ερμηνεύεται διαισθητικά με την προσομοίωση της απώλειας ενέργειας λόγω της παραμόρφωσης των ορόφων, ενώ η ανάλογη της μάζας απόσβεση είναι δύσκολο να δικαιολογηθεί φυσικά:

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} \quad (2.4.1)$$

ή

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{K} \quad (2.4.2)$$

όπου  $a_0$  και  $a_1$  σταθερές. Έτσι οι ιδιομορφές της ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση είναι ορθογωνικές και ως προς το μητρώο απόσβεσης.

Επομένως το μητρώο απόσβεσης που είναι ανάλογο είτε προς το μητρώο μάζας, είτε προς το μητρώο δυσκαμψίας είναι κλασικό μητρώο απόσβεσης.

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (2.4.1) με  $\Phi_n^T$  από αριστερά και με  $\Phi_m$  από δεξιά και έχουμε:

$$\Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_m = a_0 \Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_m = \begin{cases} a_0 M_n & \text{για } n = m \\ 0 & \text{για } n \neq m \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Άρα:

$$C_n = a_0 M_n \quad (2.4.4)$$

και επειδή:

$$C_n = 2\zeta_n M_n \omega_n \quad (2.4.5)$$

βρίσκουμε τη σταθερά  $a_0$ :

$$a_0 = 2\zeta_n \omega_n \quad (2.4.6)$$

Με την πιο πάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά  $a_0$  αφού πρώτα καθορίσουμε το λόγο απόσβεσης  $\zeta_n$  σε οποιαδήποτε ιδιομορφή και έπειτα υπολογίζουμε το μητρώο απόσβεσης από την Εξ. (2.4.1) το οποίο είναι ανάλογο προς το μητρώο μάζας και εξασφαλίζει λόγο απόσβεσης  $\zeta_n$  στη  $n$ -οστή ιδιομορφή. Ο λόγος απόσβεσης για οποιαδήποτε άλλη ιδιομορφή, π.χ για τη  $m$ -οστή ιδιομορφή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\zeta_m = \frac{a_0}{2\omega_m} \quad (2.4.7)$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να υπολογίσουμε μητρώο απόσβεσης ανάλογο προς το μητρώο δυσκαμψίας.

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (2.4.2) με  $\Phi_n^T$  από αριστερά και με  $\Phi_m$  από δεξιά και έχουμε:

$$\Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_m = a_1 \Phi_n^T \mathbf{K} \Phi_m = \begin{cases} a_1 \omega_n^2 M_n & \text{για } n = m \\ 0 & \text{για } n \neq m \end{cases} \quad (2.4.8)$$

αφού:

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad (2.4.9)$$

Άρα:

$$C_n = a_1 \omega_n^2 M_n \quad (2.4.10)$$

και επειδή ισχύει η σχέση (2.4.5) βρίσκουμε τη σταθερά  $a_1$

$$a_1 = \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \quad (2.4.11)$$

Με την πιο πάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά  $a_1$  αφού πρώτα καθορίσουμε το λόγο απόσβεσης  $\zeta_n$  σε οποιαδήποτε ιδιομορφή και έπειτα υπολογίζουμε το μητρώο απόσβεσης από την Εξ. (2.4.2) το οποίο είναι ανάλογο προς το μητρώο δυσκαμψίας και εξασφαλίζει λόγο απόσβεσης  $\zeta_n$  στη  $n$ -οστή ιδιομορφή. Ο λόγος απόσβεσης για οποιαδήποτε άλλη ιδιομορφή, π.χ για τη  $m$ -οστή ιδιομορφή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\zeta_m = \frac{a_1 \omega_m}{2} \quad (2.4.12)$$

Σύμφωνα με την απόσβεση Rayleigh, το μητρώο απόσβεσης θεωρείται σαν γραμμικός συνδυασμός των μητρώων μάζας και δυσκαμψίας.

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (2.4.13)$$

Το μητρώο  $\mathbf{C}$  ικανοποιεί τη συνθήκη ορθογωνικότητας (2.2.7). Οι σταθερές  $a_0$  και  $a_1$  μπορούν να προσδιοριστούν ώστε δύο ιδιομορφές να έχουν δεδομένο λόγο απόσβεσης. Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.4.5), (2.4.3) και (2.4.8) έχουμε:

$$\Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_n = 2\zeta_n M_n \omega_n = a_0 M_n + a_1 \omega_n^2 M_n \quad (2.4.14)$$

$$\Phi_m^T \mathbf{C} \Phi_m = 2\zeta_m M_m \omega_m = a_0 M_m + a_1 \omega_m^2 M_m \quad (2.4.15)$$

οι οποίες παρέχουν το εξής γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{Bmatrix} \zeta_n \\ \zeta_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_n & \omega_n \\ 1/\omega_m & \omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (2.4.16)$$

Με την επίλυση του πιο πάνω συστήματος, προσδιορίζουμε τις σταθερές  $a_0$  και  $a_1$ . Αν θεωρήσουμε ότι οι δύο ιδιομορφές έχουν τον ίδιο λόγο απόσβεσης, δηλαδή  $\zeta_n = \zeta_m = \zeta$  τότε:

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_n \omega_m}{\omega_n + \omega_m} \quad (2.4.17)$$

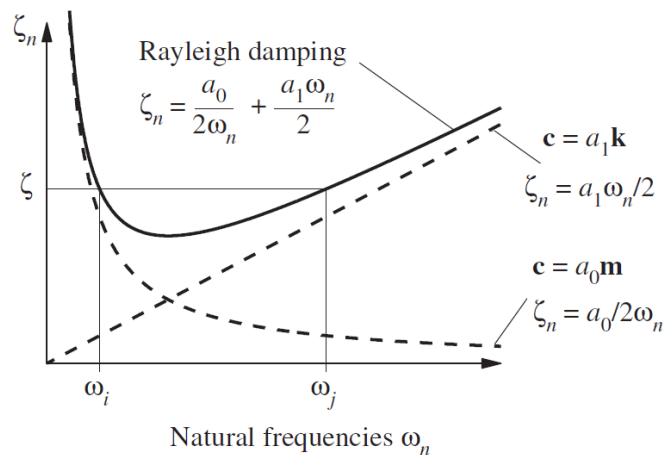
και:

$$a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_n + \omega_m} \quad (2.4.18)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μητρώο απόσβεσης από την Εξ. (2.4.13) και ο λόγος απόσβεσης για οποιαδήποτε άλλη ιδιομορφή, π.χ για την  $k$ -οστή ιδιομορφή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\zeta_k = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_k} + \frac{a_1}{2} \omega_k \quad (2.4.19)$$

η μεταβολή του οποίου φαίνεται στο Σχ. 2.1.



Σχήμα 2.1: Μεταβολή των ιδιομορφικών λόγων απόσβεσης με την ιδιοσυχνότητα. Απόσβεση Rayleigh (συνεχής γραμμή). Οι διακεκομμένες γραμμές αφορούν απόσβεση ανάλογη της μάζας (φθίνουσα καμπύλη) και απόσβεση ανάλογη της δυσκαμψίας (γραμμικά αυξανόμενη καμπύλη).

Η επιλογή των δύο ιδιομορφών με καθορισμένους λόγους απόσβεσης που θα χρησιμοποιηθούν, πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζουν λογικές τιμές για τους λόγους απόσβεσης όλων των ιδιομορφών που συνεισφέρουν σημαντικά στην απόκριση. Παρατηρούμε στο Σχ. 2.1 ότι επιλέγοντας απόσβεση Rayleigh με λόγο απόσβεσης  $\zeta$  για τις ιδιομορφές  $i$  και  $j$ , οι ιδιομορφές για τις οποίες ισχύει  $\omega_i < \omega < \omega_j$ , θα έχουν λόγο απόσβεσης μικρότερο από το  $\zeta$ , ενώ για τις ιδιομορφές με  $\omega > \omega_j$ , ο λόγος απόσβεσης θα αυξάνει μονοτονικά με τη συχνότητα και οι αντίστοιχες ιδιομορφικές αποκρίσεις ουσιαστικά θα εξαλείφονται λόγω της μεγάλης απόσβεσης.

#### 2.4.2 ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟΥΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ

Εναλλακτικά της απόσβεσης Rayleigh, μπορούμε να μορφώσουμε ένα κλασικό μητρώο απόσβεσης επιλέγοντας κατάλληλους ιδιομορφικούς λόγους απόσβεσης για όλες τις ιδιομορφές.

Αφού πρόκειται για κλασική απόσβεση, επομένως ισχύει η συνθήκη της ορθογωνικότητας:

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{C}_n \quad (2.4.20)$$

όπου το  $\mathbf{C}_n$  είναι ένα διαγώνιο μητρώο με το  $n$ -οστό διαγώνιο στοιχείο ίσο με τη γενικευμένη ιδιομορφική απόσβεση:

$$C_n = 2\zeta_n M_n \omega_n$$

Επιλύοντας την Εξ. (2.4.20) ως προς το  $\mathbf{C}$  που ψάχνουμε έχουμε:

$$\mathbf{C} = \Phi^{-T} \mathbf{C}_n \Phi^{-1} \quad (2.4.21)$$

Ξεκινώντας από τη σχέση ορθογωνικότητας των ιδιομορφών για το μητρώο μάζας:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}_n \quad (2.4.22)$$

δείχνουμε ότι:

$$\Phi^{-1} = \mathbf{M}_n^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \quad \Phi^{-T} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{M}_n^{-1} \quad (2.4.23)$$

όπου το  $\mathbf{M}_n^{-1}$  είναι ένα διαγώνιο μητρώο με το  $n$ -οστό διαγώνιο στοιχείο ίσο με  $1/M_n$ . Αντικαθιστώντας τις σχέσεις της Εξ. (2.4.23) στην Εξ. (2.4.21) έχουμε:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \Phi \mathbf{M}_n^{-1} \mathbf{C}_n \mathbf{M}_n^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \quad (2.4.24)$$

η οποία μπορεί να εκφρασθεί ως:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left( \sum_{n=1}^N \frac{2\zeta_n \omega_n}{M_n} \Phi_n^T \Phi_n \right) \mathbf{M} \quad (2.4.25)$$

Ο  $n$ -οστός όρος του πιο πάνω αθροίσματος εκφράζει τη συνεισφορά της  $n$ -οστής ιδιομορφής με λόγο απόσβεσης  $\zeta_n$  στο μητρώο απόσβεσης  $\mathbf{C}$ . Εάν κάποιες ιδιομορφές δεν έχουν απόσβεση, τότε στο πιο πάνω άθροισμα οι αντίστοιχοι λόγοι απόσβεσης έχουν μηδενική τιμή και επομένως αυτές οι ιδιομορφές δεν συνεισφέρουν στη δημιουργία του μητρώου απόσβεσης.



### 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ

#### 3.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ

Η μητρική εξίσωση κίνησης (2.1.2) αποτελεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Η επίλυση αυτού του συστήματος θα μας δώσει το διάνυσμα μετατοπίσεων  $\mathbf{u}(t)$  συναρτήσει του χρόνου. Η επίλυση γίνεται είτε με άμεση αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης όπως θα δούμε παρακάτω, είτε με τη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2.2. Οι προϋποθέσεις για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Κεφαλαίου 2.2 είναι α) το σύστημα να είναι γραμμικό και β) το μητρώο αποσβέσεως να είναι αναλογικό (κλασσική απόσβεση) ούτως ώστε να επιτυγχάνεται η απόζευξη των εξισώσεων κίνησης. Στην ειδική περίπτωση που η διέγερση είναι μια απλή συνάρτηση, οι ασύζευκτες ιδιομορφικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή (αναλυτική λύση). Στα πραγματικά προβλήματα στη σεισμική μηχανική, η αναλυτική λύση των εξισώσεων δεν είναι εφικτή αφού διέγερση αποτελεί η σύνθετη εδαφική σεισμική κίνηση και μεταβάλλεται αυθαίρετα με τον χρόνο. Έτσι ακόμη και αν επιτύχουμε απόζευξη των εξισώσεων κίνησης με τη μέθοδο του Κεφαλαίου 2.2, για την επίλυση τους θα πρέπει να κάνουμε χρήση μιας αριθμητικής μεθόδου χρονικών βημάτων.

Η άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης (2.1.2) γίνεται με τις αριθμητικές μεθόδους χρονικών βημάτων. Ο όρος "άμεση" αναφέρεται στο γεγονός ότι η επίλυση γίνεται χωρίς πριν να προηγηθεί κάποιος μετασχηματισμός της εξίσωσης. Σκοπός των μεθόδων είναι η αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από την εξίσωση κίνησης (2.1.2) με γνωστές τις αρχικές συνθήκες  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$  και  $\dot{\mathbf{u}}_0 = \dot{\mathbf{u}}(0)$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και επομένως ο προσδιορισμός του διανύσματος των μετατοπίσεων  $\mathbf{u}(t)$  σε συνάρτηση με το χρόνο. Αυτό γίνεται βήμα προς βήμα. Η κλίμακα του χρόνου διαιρείται σε μια σειρά χρονικών βημάτων, συνήθως σταθερής διάρκειας  $\Delta t$ . Η διέγερση δίνεται σε διακριτές χρονικές στιγμές  $t_i = i\Delta t$  για  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Έχοντας το διάνυσμα της διέγερσης  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(t_i)$  τη χρονική στιγμή  $t_i$ , οι μέθοδοι προσδιορίζουν την απόκριση στις ίδιες χρονικές στιγμές δηλαδή τα διανύσματα  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}(t_i)$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_i = \ddot{\mathbf{u}}(t_i)$

Γνωρίζοντας την απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t_i$  που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}\mathbf{u}_i = \mathbf{P}_i \quad (3.1.1)$$

μπορούμε με αυτές τις μεθόδους να προσδιορίσουμε την απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ , δηλαδή τα διανύσματα  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  που ικανοποιούν την Εξ. (2.1.2) τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.1.2)$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τη διαδικασία των χρονικών βημάτων για  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , παίρνουμε την επιθυμητή απόκριση του συστήματος για όλες τις χρονικές στιγμές  $t_i$ .

Η ανάπτυξη αυτών των μεθόδων βασίζεται σε δύο παραδοχές. Η πρώτη παραδοχή είναι

ότι η διαφορική εξίσωση κίνησης ικανοποιείται μόνο σε διακεκριμένες χρονικές στιγμές  $t_i$  που απέχουν μεταξύ τους κατά  $\Delta t$ , σε αντίθεση με τις αναλυτικές λύσεις στις οποίες η εξίσωση κίνησης ικανοποιείται για τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ . Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η ισορροπία όλων των δυνάμεων, αδράνειας, απόσβεσης, ελαστικών και εξωτερικών, εξασφαλίζεται μόνο τις χρονικές στιγμές  $t_i$  μέσα στο χρονικό διάστημα που αναζητούμε την λύση. Η δεύτερη παραδοχή πάνω στην οποία βασίζονται οι μέθοδοι άμεσης αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι ότι η μεταβολή των μετακινήσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων σε κάθε χρονικό διάστημα, γίνεται σύμφωνα με κάποιο γνωστό νόμο. Όπως θα δούμε και στο Κεφάλαιο 4, η ευστάθεια, η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα (υπολογιστικό κόστος) της κάθε μεθόδου, εξαρτώνται από την παραδοχή για το πώς μεταβάλλονται αυτά τα μεγέθη κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος αλλά και από το μέγεθος του χρονικού διαστήματος  $\Delta t$  που επιλέγουμε πριν την εκκίνηση της διαδικασίας.

Για τον προσδιορισμό των τριών άγνωστων διανυσμάτων  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ , η αριθμητική διαδικασία απαιτεί τρεις μητρικές εξισώσεις. Οι δύο προέρχονται από την δεύτερη παραδοχή που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο και παράγονται είτε από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είτε από μια υπόθεση για τη μεταβολή της απόκρισης μέσα σε κάθε χρονικό βήμα. Η τρίτη εξίσωση είναι η εξίσωση κίνησης (2.1.2) σε μια χρονική στιγμή. Οι μέθοδοι διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη χρονική στιγμή που διατυπώνεται η Εξ. (2.1.2) σε σχέση με το βήμα που βρισκόμαστε. Ρητή (explicit) καλείται μια μέθοδος η οποία για τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ , χρησιμοποιεί την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_i$  (3.1.1). Έτσι η απόκριση στο βήμα  $i + 1$  είναι συνάρτηση της απόκρισης στο βήμα  $i$ . Πεπλεγμένη (implicit) καλείται μια μέθοδος η οποία για τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος την χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ , χρησιμοποιεί την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  (3.1.2). Έτσι η απόκριση στο βήμα  $i + 1$  είναι συνάρτηση της απόκρισης στο βήμα  $i$  αλλά και στο βήμα  $i + 1$ .

Στην περίπτωση μη γραμμική ανάλυσης, οι ελαστικές δυνάμεις  $\mathbf{K}\mathbf{u}$  στην εξίσωση κίνησης (2.1.2) σημειώνονται ως  $\mathbf{F}_s$ , όπου  $\mathbf{F}_s$  οι δυνάμεις αντίστασης οι οποίες εξαρτώνται από τη μετατόπιση και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή που διατυπώνεται η εξίσωση. Επομένως η εξίσωση ισορροπίας για ένα πρόβλημα δυναμικής μη γραμμικής ανάλυσης για τη χρονική στιγμή  $t_i$  γράφεται:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{F}_{s,i} = \mathbf{P}_i \quad (3.1.3)$$

ενώ για τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  είναι:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{F}_{s,i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.1.4)$$

## 3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

### 3.2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η μέθοδος κεντρικών διαφορών είναι μια ρητή μέθοδος και βασίζεται σε μία προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών των παραγώγων ως προς το χρόνο της μετατόπισης, δηλαδή

της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Οι τιμές του διανύσματος  $\mathbf{u}(t)$  στις χρονικές στιγμές  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$  και  $\mathbf{u}(t - \Delta t)$  μπορούν να προσεγγισθούν με τη χρήση του τύπου του Taylor:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{6} \Delta t^3 \dddot{\mathbf{u}}(t) + \dots \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{u}(t - \Delta t) = \mathbf{u}(t) - \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{1}{6} \Delta t^3 \dddot{\mathbf{u}}(t) + \dots \quad (3.2.2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.2.1) και (3.2.2) έχουμε:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t) = 2\Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{2}{6} \Delta t^3 \dddot{\mathbf{u}}(t) + \dots \quad (3.2.3)$$

Αν το  $\Delta t$  είναι μικρό, μπορούν να παραλειφθούν οι όροι με παράγοντες  $\Delta t^3, \Delta t^5, \dots$  από τη σχέση (3.2.3) και η επίλυση της ως προς  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  μας δίνει την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου τη χρονική στιγμή  $t$ :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (3.2.4)$$

Έπειτα, αθροίζοντας τις σχέσεις (3.2.1) και (3.2.2) κατά μέλη και παραλείποντας τους όρους με παράγοντες  $\Delta t^4, \Delta t^6, \dots$  η επίλυση της ως προς  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  μας δίνει την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου τη χρονική στιγμή  $t$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) \approx \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (3.2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}_{i+1}$  και  $\mathbf{u}(t - \Delta t) = \mathbf{u}_{i-1}$ , μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις (3.2.4) και (3.2.5) ως:

$$\dot{\mathbf{u}}_i \approx \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t} \quad (3.2.6)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_i \approx \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2.7)$$

οι οποίες αποτελούν τις προσεγγίσεις των παραγώγων του διανύσματος  $\mathbf{u}_i$  με τις κεντρικές διαφορές και αφού τις αντικαταστήσουμε στη εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_i$  (Εξ. 3.1.1) λαμβάνουμε:

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_i - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_i - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} \quad (3.2.8)$$

ή

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_i \quad (3.2.9)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \quad (3.2.10)$$

και:

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_i - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} \quad (3.2.11)$$

Το άγνωστο διάνυσμα  $\mathbf{u}_{i+1}$  τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  υπολογίζεται από την εξίσωση 3.2.9, δηλαδή από την κατάσταση ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t_i$  (Εξ. 3.1.1), χωρίς χρήση της κατάστασης ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Επομένως η μέθοδος κεντρικών διαφορών είναι ρητή.

Στο πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας, δηλαδή για τον προσδιορισμό του διανύσματος  $\mathbf{u}_1$ , θέτοντας  $i = 0$  στην Εξ. (3.2.11), παρατηρούμε ότι απαιτείται το διάνυσμα  $\mathbf{u}_{-1}$ . Για τον προσδιορισμό του διανύσματος  $\mathbf{u}_{-1}$ , θέτουμε στις εξισώσεις (3.2.6) και (3.2.7)  $i = 0$  και παίρνουμε:

$$\dot{\mathbf{u}}_0 \approx \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.2.12)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 \approx \frac{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{-1}}{\Delta t^2} \quad (3.2.13)$$

Επιλύοντας την Εξ. (3.2.12) ως προς  $\mathbf{u}_1$  και αντικαθιστώντας την στην Εξ. (3.2.13) έχουμε:

$$\mathbf{u}_{-1} \approx \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0 \quad (3.2.14)$$

Τα διανύσματα αρχικών μετατοπίσεων  $\mathbf{u}_0$  και αρχικών ταχυτήτων  $\dot{\mathbf{u}}_0$  δίνονται, ενώ από την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{K} \mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_0 \quad (3.2.15)$$

προκύπτει το διάνυσμα αρχικών επιταχύνσεων.

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K} \mathbf{u}_0) \quad (3.2.16)$$

Ο πίνακας 3.1 συνοψίζει τη διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

### 3.2.2 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK

Η οικογένεια των μεθόδων χρονικών βημάτων που ανέπτυξε ο Newmark, βασίζονται στις εξισώσεις:

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma)] \ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}] \Delta t \quad (3.2.17)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + [(0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_i + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{i+1}] \Delta t^2 \quad (3.2.18)$$

Σε κάθε χρονικό βήμα, η μεταβολή της επιτάχυνσης ορίζεται μέσω των παραμέτρων  $\beta$  και  $\gamma$ . Οι παράμετροι αυτοί προσδιορίζουν ακόμη τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας και της ακρίβειας της μεθόδου. Τυπικές τιμές των παραμέτρων είναι  $\gamma = 1/2$  και  $1/6 \leq \beta \leq 1/4$ . Γενικότερα η επιλογή των παραμέτρων μπορεί να γίνει ώστε να ισχύει  $\gamma \geq 1/2$  και  $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$ .

Πίνακας 3.1: ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 1. Αρχικοί υπολογισμοί:

$$1.1 \quad \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$$

$$1.2 \quad \mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0$$

$$1.3 \quad \hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}$$

$$1.4 \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}$$

$$1.5 \quad \mathbf{B} = \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}$$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

$$2.1 \quad \hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{B}\mathbf{u}_i - \mathbf{A}\mathbf{u}_{i-1}$$

$$2.2 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_i$$

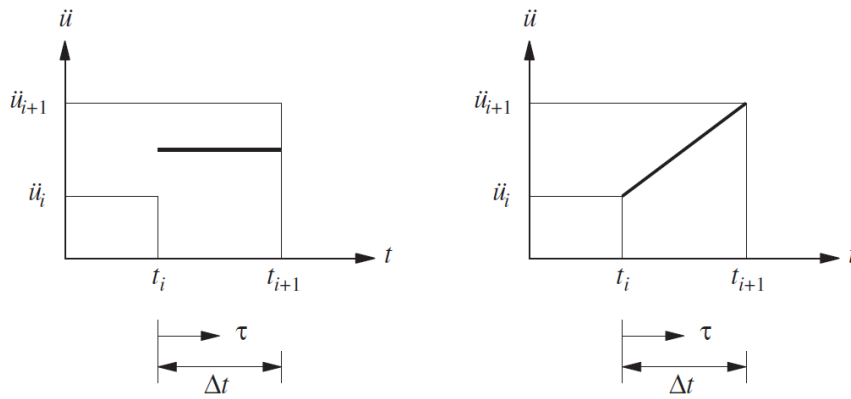
$$2.3 \quad \text{Αν απαιτείται: } \dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Δύο ειδικές περιπτώσεις της μεθόδου Newmark είναι οι μέθοδοι της μέσης και της γραμμικής επιτάχυνσης. Στη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης γίνεται η υπόθεση ότι η μεταβολή της επιτάχυνσης σε ένα χρονικό βήμα είναι σταθερή και ίση με τη μέση, ενώ στη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης η επιτάχυνση σε ένα χρονικό βήμα υποθέτουμε ότι μεταβάλλεται γραμμικά. Οι εξισώσεις του Newmark (3.2.17) και (3.2.18) για  $\gamma = 1/2$  και  $\beta = 1/4$  είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν με την υπόθεση σταθερής μέσης επιτάχυνσης (κανόνας τραπεζίου), ενώ για  $\gamma = 1/2$  και  $\beta = 1/6$  είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν με την υπόθεση γραμμικής μεταβολής της επιτάχυνσης. Με γνωστά τα διανύσματα  $\mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  τη χρονική στιγμή  $i$ , μπορούμε συνδυάζοντας τις εξισώσεις του Newmark (3.2.17) και (3.2.18), με την εξίσωση ισορροπίας (3.1.2) στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, να υπολογίσουμε τα διανύσματα  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Λόγω του ότι το άγνωστο διάνυσμα επιταχύνσεων  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  εμφανίζεται στο δεξί μέλος των εξισώσεων του Newmark, απαιτούνται επαναλήψεις για τον υπολογισμό των διανυσμάτων  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ . Όπως θα δούμε παρακάτω, χρησιμοποιώντας αυξητικές ποσότητες για τα διανύσματα και επαναδιατυπώνοντας τις εξισώσεις του Newmark, μπορούμε να αποφύγουμε την επανάληψη.

Χρησιμοποιούμε τις εξής αυξητικές ποσότητες:

$$\Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i \quad (3.2.19)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \dot{\mathbf{u}}_{i+1} - \dot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.20)$$



Σχήμα 3.1: Μέθοδοι μέσης και γραμμικής επιτάχυνσης

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} - \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.21)$$

$$\Delta \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i \quad (3.2.22)$$

Οι Εξ. (3.2.17) και (3.2.18) μπορούν να γραφούν ξανά ως:

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.23)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i + \beta \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.24)$$

Η Εξ. (3.2.24) λύνεται:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.25)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (3.2.25) στην Εξ. (3.2.23) έχουμε:

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.26)$$

Ακολούθως διατυπώνουμε την αυξητική εξίσωση της κίνησης, η οποία προκύπτει αφαιρώντας την Εξ. (3.1.1) από την Εξ. (3.1.2):

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C} \Delta \dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{P}_i \quad (3.2.27)$$

Στην αυξητική εξίσωση κίνησης (3.2.27) αντικαθιστούμε τις Εξ. (3.2.25) και (3.2.26) και έχουμε:

$$\hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u}_i = \Delta \hat{\mathbf{P}}_i \quad (3.2.28)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (3.2.29)$$

και:

$$\Delta \hat{\mathbf{P}}_i = \Delta \mathbf{P}_i + \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{u}}_i + \left[ \frac{1}{2\beta} \mathbf{M} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.30)$$

Με γνωστές τις ιδιότητες του συστήματος, δηλαδή τα μητρώα  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$ , τις παραμέτρους του αλγορίθμου  $\gamma$  και  $\beta$  και τα διανύσματα  $\dot{\mathbf{u}}_i$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  στην αρχή του χρονικού βήματος, υπολογίζουμε τα  $\hat{\mathbf{K}}$  και  $\Delta\hat{\mathbf{P}}_i$  και ακολούθως το διάνυσμα αυξητικών μετατοπίσεων  $\Delta\mathbf{u}_i$  από τη σχέση:

$$\Delta\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\Delta\hat{\mathbf{P}}_i \quad (3.2.31)$$

Τα  $\Delta\dot{\mathbf{u}}_i$  και  $\Delta\ddot{\mathbf{u}}_i$  μπορούν να υπολογιστούν από τις Εξ. (3.2.26) και (3.2.25) αντίστοιχα και τα διανύσματα  $\mathbf{u}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.2.19), (3.2.20) και (3.2.21) για τις αυξητικές ποσότητες.

Τα διανύσματα αρχικών μετατοπίσεων  $\mathbf{u}_0$  και αρχικών ταχυτήτων  $\dot{\mathbf{u}}_0$  δίνονται, ενώ από την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  (3.2.15):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{K}\mathbf{u}_0 = \mathbf{P}_0$$

προκύπτει το διάνυσμα αρχικών επιταχύνσεων που χρειαζόμαστε για την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$$

Κατά τη διατύπωση της αυξητικής εξίσωσης κίνησης (3.2.27), έγινε χρήση της συνθήκης ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $i + 1$  (Εξ. 3.1.2). Επομένως η μέθοδος αυτή, αποτελεί μια πεπλεγμένη μέθοδο.

Ο πίνακας 3.2 συνοψίζει τη διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

### 3.2.3 ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER - HUGHES - TAYLOR

Η μέθοδος Hilber-Hughes-Taylor (HHT) βασίζεται στις εξισώσεις του Newmark (3.2.17) και (3.2.18):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}_i + [(1 - \gamma)]\ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}]\Delta t \\ \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i + [(\frac{1}{2} - \beta)]\ddot{\mathbf{u}}_i + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}]\Delta t^2 \end{aligned}$$

με τη διαφορά ότι η εξίσωση κίνησης στο τέλος του χρονικού βήματος διατυπώνεται ως εξής:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + (1 + a)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} - a\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + (1 + a)\mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} - a\mathbf{K}\mathbf{u}_i = (1 + a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i \quad (3.2.32)$$

όπου:

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \quad \gamma = \frac{1 - 2a}{2} \quad \beta = \frac{(1 - a)^2}{4} \quad (3.2.33)$$

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $a$ , τόσο περισσότερη αριθμητική απόσβεση εισάγεται στη λύση. Όταν το  $a = 0$  τότε έχουμε τη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης-τραπέζιου, η οποία δεν παρέχει αριθμητική απόσβεση.

Πίνακας 3.2: ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Επιλογή παραμέτρων:

Τυπικές τιμές:  $\gamma = \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$

(1) Μέθοδος μέσης επιτάχυνσης:  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$

(2) Μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης:  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$

1. Αρχικοί υπολογισμοί:

$$1.1 \quad \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$$

$$1.2 \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}$$

$$1.3 \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{C}$$

$$1.4 \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2\beta}\mathbf{M} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C}$$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

$$2.1 \quad \Delta\hat{\mathbf{P}}_i = \Delta\mathbf{P}_i + \mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.2 \quad \Delta\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\Delta\hat{\mathbf{P}}_i$$

$$2.3 \quad \Delta\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\mathbf{u}_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.4 \quad \Delta\ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{u}_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.5 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta\mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta\dot{\mathbf{u}}_i, \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{u}}_i + \Delta\ddot{\mathbf{u}}_i$$

Με τη χρήση των πιο πάνω εξισώσεων, οι εξισώσεις χρονικών βημάτων γίνονται:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_i \quad (3.2.34)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{K}} = (1+a)\mathbf{K} + \frac{(1+a)\gamma}{\Delta t\beta}\mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2\beta}\mathbf{M} \quad (3.2.35)$$

και:

$$\hat{\mathbf{P}}_i = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i + \mathbf{A}\mathbf{u}_i + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{u}}_i \quad (3.2.36)$$



όπου:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma(1+a)}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + a \mathbf{K} \quad (3.2.37)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t \beta} \mathbf{M} + \left( \frac{\gamma(1+a)}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C} \quad (3.2.38)$$

$$\mathbf{D} = \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + (1+a)\Delta t \left[ (\gamma - 1) + \gamma \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) - 1 \right] \mathbf{C} \quad (3.2.39)$$

Με γνωστές τις ιδιότητες του συστήματος, δηλαδή τα μητρώα  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$ , τα διανύσματα  $\mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  στην αρχή του χρονικού βήματος, υπολογίζουμε τα  $\hat{\mathbf{K}}$  και  $\hat{\mathbf{P}}_i$ . Από την Εξ. (3.2.34) βρίσκουμε το διάνυσμα μετατοπίσεων  $\mathbf{u}_{i+1}$  τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Ακολουθώντας υπολογίζουμε τα διανύσματα  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  από τις σχέσεις του Newmark (3.2.17) και (3.2.18).

Ο πίνακας 3.3 συνοψίζει τη διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Πίνακας 3.3: ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER-HUGHES-TAYLOR: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

*Επιλογή παραμέτρου  $\alpha$ :*

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0 \quad \gamma = \frac{1-2\alpha}{2} \quad \beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$$

1. Αρχικοί υπολογισμοί:

$$1.1 \quad \hat{\mathbf{K}} = (1+a)\mathbf{K} + \frac{(1+a)\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M}$$

$$1.2 \quad \mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma(1+a)}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + a \mathbf{K}$$

$$1.3 \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t \beta} \mathbf{M} + \left( \frac{\gamma(1+a)}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C}$$

$$1.4 \quad \mathbf{D} = \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + (1+a)\Delta t \left[ (\gamma - 1) + \gamma \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) - 1 \right] \mathbf{C}$$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

$$2.1 \quad \hat{\mathbf{P}}_i = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i + \mathbf{A}\mathbf{u}_i + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.2 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_i$$

$$2.3 \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i) \frac{1}{\Delta t^2 \beta} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.4 \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}]\Delta t$$

### 3.2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ Κ. J. BATHE

Στη μέθοδο αυτή που προτείνει ο Bathe, το χρονικό βήμα  $\Delta t$ , υποδιαιρείται σε δύο ίσα μικρότερα βήματα. Η αριθμητική ολοκλήρωση για το πρώτο μισό του βήματος γίνεται με τον κανόνα του τραπεζίου, δηλαδή με τη μέθοδο Newmark για  $\gamma = 1/2$  και  $\beta = 1/4$  που παρουσιάστηκε στην ενότητα (3.2.2), ενώ για το δεύτερο μισό του βήματος χρησιμοποιείται η προς τα πίσω μέθοδος Euler τριών σημείων. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο είναι:

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{u}}_i + \left[\frac{\Delta t}{4}\right](\ddot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.2.40)$$

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_i + \left[\frac{\Delta t}{4}\right](\dot{\mathbf{u}}_i + \dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}) \quad (3.2.41)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}_i - \frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{3}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+1} \quad (3.2.42)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{3}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} \quad (3.2.43)$$

Επιπλέον των πιο πάνω εξισώσεων, χρησιμοποιούμε την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t + \Delta t/2$  η οποία είναι:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{P}_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.2.44)$$

αλλά και την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t + \Delta t$  (Εξ. 3.1.2):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1}$$

Με τη χρήση των εξισώσεων (3.2.40) μέχρι (3.2.44) και (3.1.2), οι εξισώσεις χρονικών βημάτων γίνονται:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{P}}_1 \quad (3.2.45)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_2 \quad (3.2.46)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \frac{16}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{4}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3.2.47)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_2 = \frac{9}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3.2.48)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}\left(\frac{16}{\Delta t^2}\mathbf{u}_i + \frac{8}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i\right) + \mathbf{C}\left(\frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i\right) \quad (3.2.49)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{M}\left(\frac{12}{\Delta t^2}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{3}{\Delta t^2}\mathbf{u}_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i\right) + \mathbf{C}\left(\frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}_i\right) \quad (3.2.50)$$

Τα μεγέθη  $\hat{\mathbf{K}}$  και  $\hat{\mathbf{P}}$  ονομάζονται ισοδύναμη ακαμψία και ισοδύναμο φορτίο αντίστοιχα. Με γνωστές τις ιδιότητες του συστήματος, δηλαδή τα μητρώα  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  και  $\mathbf{K}$ , τα διανύσματα  $\mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_i$  στην αρχή του χρονικού βήματος, υπολογίζουμε τα  $\hat{\mathbf{K}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{K}}_2$  και  $\hat{\mathbf{P}}_1$ . Από την Εξ. (3.2.45) βρίσκουμε το διάνυσμα μετατοπίσεων για το πρώτο μισό του βήματος  $\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}$ . Έπειτα με την Εξ. (3.2.41) βρίσκουμε το διάνυσμα ταχυτήτων για το πρώτο μισό του βήματος

$\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}$  και υπολογίζουμε το  $\hat{\mathbf{P}}_2$ . Από την Εξ. (3.2.46) βρίσκουμε το διάνυσμα μετατοπίσεων για το δεύτερο μισό του βήματος  $\mathbf{u}_{i+1}$ . Με τις εξισώσεις (3.2.42), (3.2.40) και (3.2.43) βρίσκουμε τα διανύσματα  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}}$  και  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ .

Για επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι εφικτό και επιθυμητό να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο μητρώο ισοδύναμης ακαμψίας στις σχέσεις (3.2.45) και (3.2.46). Αυτό επιτυγχάνεται όταν υποδιαιρέσουμε το χρονικό βήμα τη χρονική στιγμή  $t + (2 - \sqrt{2})\Delta t$  και η Εξ. (3.2.44) αντικαθίσταται από την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t + (2 - \sqrt{2})\Delta t$ . Έτσι η δημιουργία και αντιστροφή του ισοδύναμου μητρώου ακαμψίας, απαιτείται μόνο μια φορά σε κάθε χρονικό βήμα, κάτι που μειώνει το υπολογιστικό κόστος.

Πίνακας 3.4: ΜΕΘΟΔΟΣ Κ. J. ΒΑΤΗΕ: ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Αρχικοί υπολογισμοί:

$$1.1 \quad \ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$$

$$1.2 \quad \hat{\mathbf{K}}_1 = \frac{16}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{4}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}$$

$$1.3 \quad \hat{\mathbf{K}}_2 = \frac{9}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}$$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

$$2.1 \quad \hat{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_{i+\frac{1}{2}} + \mathbf{M}\left(\frac{16}{\Delta t^2}\mathbf{u}_i + \frac{8}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i\right) + \mathbf{C}\left(\frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i\right)$$

$$2.2 \quad \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{\mathbf{K}}_1^{-1}\hat{\mathbf{P}}_1$$

$$2.3 \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta t}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_i) - \dot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.4 \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{4}{\Delta t}(\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{u}}_i) - \ddot{\mathbf{u}}_i$$

$$2.5 \quad \hat{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{M}\left(\frac{12}{\Delta t^2}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{3}{\Delta t^2}\mathbf{u}_i + \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i\right) + \mathbf{C}\left(\frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}_i\right)$$

$$2.6 \quad \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{K}}_2^{-1}\hat{\mathbf{P}}_2$$

$$2.7 \quad \dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}_i - \frac{4}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{3}{\Delta t}\mathbf{u}_{i+1}$$

$$2.8 \quad \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \frac{4}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{3}{\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$$

### 3.3 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

#### 3.3.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Η μέθοδος κεντρικών διαφορών μπορεί πολύ εύκολα να τροποποιηθεί και να έχει εφαρμογή και στα μη γραμμικά συστήματα. Έχοντας τις προσεγγίσεις των παραγώγων του διανύσματος  $\mathbf{u}_i$  με τις κεντρικές διαφορές, τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση κίνησης για τη χρονική στιγμή  $t_i$  όπως έχει διατυπωθεί για τα μη γραμμικά συστήματα (Εξ. 3.1.3) και λαμβάνουμε:

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{P}_i + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_i - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{F}_{s,i} \quad (3.3.1)$$

ή:

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{P}}_i \quad (3.3.2)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \quad (3.3.3)$$

και:

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i - \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{i-1} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_i - \mathbf{F}_{s,i} \quad (3.3.4)$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις, εάν συγκριθούν με τις αντίστοιχες για τα γραμμικά συστήματα, διαφέρουν μόνο στον ορισμό του ισοδύναμου φορτίου  $\hat{\mathbf{P}}$ . Οι δυνάμεις αντίστασης  $\mathbf{F}_{s,i}$ , εμφανίζονται ρητώς, αφού εξαρτώνται μόνο από την απόκριση τη χρονική στιγμή  $t_i$  και όχι από την άγνωστη απόκριση τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ .

Ο πίνακας 3.1 συνοψίζει τη διαδικασία που της μεθόδου των κεντρικών διαφορών για μη γραμμικά συστήματα όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

#### 3.3.2 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ NEWTON-RAPHSON

Τα μη γραμμικά προβλήματα δεν μπορούν να επιλυθούν επιβάλλοντας το διάνυσμα εξωτερικών δυνάμεων  $\mathbf{P}$  στην κατασκευή σε ένα μόνο βήμα. Στα στατικά προβλήματα η επιβολή γίνεται σταδιακά και χωρίζοντας το τελικό φορτίο σε μικρότερες αυξητικές ποσότητες  $\Delta \mathbf{P}$ . Στα δυναμικά προβλήματα το  $\Delta \mathbf{P}$  είναι η διαφορά των εξωτερικών φορτίων μεταξύ δύο συνεχόμενων χρονικών βημάτων. Οι επαναλήψεις Newton-Raphson γίνονται σε κάθε χρονικό βήμα για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα μετατοπίσεων  $\mathbf{u}_{i+1}$ , με γνωστή την κατάσταση του συστήματος στο προηγούμενο βήμα δηλαδή τα  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{F}_i$  και  $\mathbf{K}_i$  αλλά και τη μη γραμμική σχέση που ισχύει για το σύστημα που αναλύουμε, μεταξύ των δυνάμεων αντίστασης και μετατοπίσεων  $\mathbf{F}_s(\mathbf{u})$ .

Για ένα μη γραμμικό στατικό πρόβλημα η εξίσωση προς επίλυση είναι:

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{P} \quad (3.3.5)$$

Πίνακας 3.5: ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΕΝΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## 1. Αρχικοί υπολογισμοί:

1.1 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,0}$

1.2  $\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{F}_{s,0})$

1.3  $\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0$

1.4  $\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}$

1.5  $\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}$

1.6  $\mathbf{B} = -\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

2.1  $\hat{\mathbf{P}}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{B}\mathbf{u}_i - \mathbf{A}\mathbf{u}_{i-1} - \mathbf{F}_{s,i}$

2.2  $\mathbf{u}_{i+1} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_i$

2.3 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,i+1}$

2.4 Αν απαιτείται:  $\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{2\Delta t}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathbf{u}_{i+1} - 2\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta t^2}$

Μετά από  $j$  επαναλήψεις έχουμε μια εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος μετατοπίσεων που τη συμβολίζουμε με  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$ . Στην επόμενη επανάληψη θα έχουμε μια νέα βελτιωμένη εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος μετατοπίσεων που συμβολίζεται με  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)}$ . Για να το πετύχουμε αυτό, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor το διάνυσμα  $\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j+1)}$  συναρτήσει του  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  και παραλείποντας τους όρους που είναι μεγαλύτεροι του δευτέρου βαθμού έχουμε:

$$\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j+1)} \approx \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} + \frac{\partial \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}^{(j)}} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.3.6)$$

ή

$$\mathbf{K}_T^{(j)} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} = \mathbf{R}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.7)$$

όπου  $\partial \mathbf{F}_s / \partial \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{K}_T^{(j)}$  το εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας στο  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$ ,  $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  και  $\mathbf{R}_{i+1}^{(j)}$  το διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων. Επιλύοντας τη γραμμική εξίσωση (3.3.7), παίρνουμε το  $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  και η νέα βελτιωμένη εκτίμηση των μετατοπίσεων είναι:

$$\mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} + \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.8)$$

Τη νέα αυτή εκτίμηση τη χρησιμοποιούμε για να βρούμε το νέο διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων  $\mathbf{R}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j+1)}$ . Για το διάνυσμα επιπρόσθετων μετατοπίσεων  $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)}$  λόγω των υπολειπόμενων δυνάμεων επιλύουμε τη σχέση:

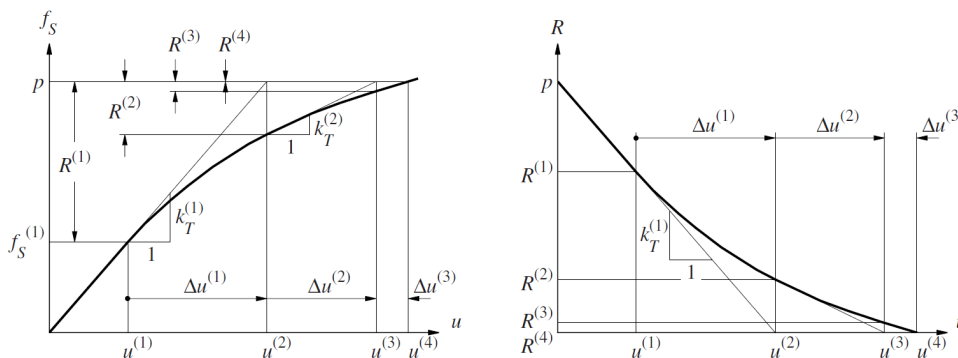
$$\mathbf{K}_T^{(j+1)} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{R}_{i+1}^{(j+1)} \quad (3.3.9)$$

Η διαδικασία αυτή γνωστή ως μέθοδος Newton-Raphson επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο σύγκλισης. Ένα πολύ συνηθισμένο κριτήριο είναι ο έλεγχος του μέτρου του διανύσματος υπολειπόμενων δυνάμεων  $\mathbf{R}_{i+1}^{(j)}$  να είναι επαρκώς μικρό:

$$\frac{\|\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{F}_i^{(j)}\|}{\|\mathbf{P}_{i+1}\|} < tol \quad (3.3.10)$$

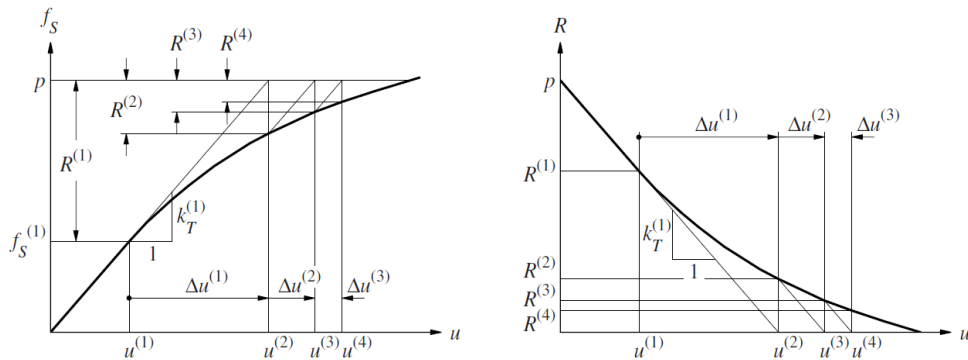
όπου  $10^{-5} \leq tol \leq 10^{-3}$ .

Στο σχήμα 3.2 παρουσιάζεται σχηματικά η διαδικασία για ένα μονοβάθμιο σύστημα.



Σχήμα 3.2: Επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson: (α) επιβαλλόμενες και εσωτερικές δυνάμεις, (β) υπολειπόμενη δύναμη

Η πιο πάνω διαδικασία απαιτεί σε κάθε διορθωτική επανάληψη, να μορφώνεται ξανά το εφαπτομενικό μητρώο δυσκαμψίας και να αντιστρέφεται κάτι που αυξάνει το υπολογιστικό κόστος. Μια εναλλακτική διαδικασία είναι να χρησιμοποιείται το μητρώο δυσκαμψίας στην αρχή του χρονικού βήματος για όλες τις διορθωτικές επαναλήψεις που γίνονται μέσα στο βήμα. Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή σαν τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson και παρουσιάζεται σχηματικά στο σχήμα 3.3. Η επιλογή του μητρώου δυσκαμψίας επηρεάζει μόνο το ρυθμό με τον οποίο θα συγκλίνει η μέθοδος και όχι την ακρίβεια της μεθόδου. Επειδή δεν αντιστρέφεται το μητρώο δυσκαμψίας σε κάθε διορθωτική επανάληψη, εξοικονομείται χρόνος. Όμως σε κάθε επανάληψη οι υπολειπόμενες δυνάμεις είναι μεγαλύτερες κάτι που σημαίνει ότι απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις μέχρι να συγκλίνει η διαδικασία και άρα δεν είναι γνωστό από την αρχή εάν θα απαιτεί μικρότερο χρόνο.



Σχήμα 3.3: Τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson: (α) επιβαλλόμενες και εσωτερικές δυνάμεις, (β) υπολειπόμενη δύναμη.

### 3.3.3 ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK

Η μέθοδος Newmark μπορεί να επεκταθεί και να εφαρμοστεί και στα μη γραμμικά συστήματα. Όπως είδαμε για τα γραμμικά συστήματα, η μέθοδος αυτή είναι πεπλεγμένη αφού προσδιορίζει την απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Έτσι και για τα μη γραμμικά συστήματα, η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  (Εξ. 3.1.4). Οι δυνάμεις αντίστασης  $\mathbf{F}_{s,i+1}$  εξαρτώνται από τις άγνωστες μετακινήσεις  $\mathbf{u}_{i+1}$  και επομένως αποτελούν μια πεπλεγμένη μη γραμμική συνάρτηση. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να γίνονται διορθωτικές επαναλήψεις Newton-Raphson για κάθε χρονικό βήμα.

Η εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  (3.1.4) είναι:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{F}_{s,i+1} = \mathbf{P}_{i+1}$$

Αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης με  $\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}$ , η κατασκευή βρίσκεται σε ισοροπία αν:

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.3.11)$$

Η πιο πάνω εξίσωση για τη δυναμική ανάλυση είναι ανάλογη της Εξ. (3.3.5) για τη στατική ανάλυση όπου:

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \mathbf{F}_{s,i+1} \quad (3.3.12)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το διάνυσμα  $\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j+1)}$  συναρτήσει του  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  και παραλείποντας τους όρους που είναι μεγαλύτεροι του δευτέρου βαθμού έχουμε μια εξίσωση ανάλογη της Εξ. (3.3.6):

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j+1)} \approx \widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j)} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{P}_{i+1} \quad (3.3.13)$$

όπου:

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.14)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.3.12) στο γνωστό  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  έχουμε:

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \quad (3.3.15)$$

Από τις εξισώσεις (3.2.20) και (3.2.25) έχουμε το  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$$

και από τις εξισώσεις (3.2.21) και (3.2.26) έχουμε το  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} \equiv \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (3.3.16)$$

Η εξίσωση (3.3.13) μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{P}_{i+1} - \widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j)} \equiv \widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.17)$$

Αντικαθιστώντας τα  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  στην Εξ. (3.3.12) και συνδυάζοντας τα με το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.3.17), προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} = & \mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} - \left[ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \right] (\mathbf{u}_{i+1}^j - \mathbf{u}_i) + \left[ \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} \right] \dot{\mathbf{u}}_i \\ & + \left[ \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} \right] \ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Η γραμμική εξίσωση (3.3.17) για τη j-οστή επανάληψη στη δυναμική ανάλυση είναι σε παρόμοια μορφή με την αντίστοιχη εξίσωση (3.3.7) για στατική ανάλυση. Η διαφορά των δύο εξισώσεων είναι ότι για τη δυναμική ανάλυση, έχουν συμπεριληφθεί οι όροι που προκύπτουν λόγω απόσβεσης και αδράνειας τόσο στο ενεργό μητρώο δυσκαμψίας  $\widehat{\mathbf{K}}_T$  όσο και στο διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων  $\widehat{\mathbf{R}}$ . Με κάθε νέα εκτίμηση του  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$ , ο δεύτερος και τρίτος όρος της Εξ. (3.3.18) ανανεώνονται και έτσι υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων. Αφού βρούμε το νέο ενεργό μητρώο δυσκαμψίας  $\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)}$ , προχωρούμε με τον υπολογισμό του διανύσματος επιπρόσθετων μετατοπίσεων  $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$ .

Συνήθης πρακτική είναι να χρησιμοποιείται η τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson, δηλαδή το ενεργό μητρώο δυσκαμψίας  $\widehat{\mathbf{K}}_T$  να ανανεώνεται μόνο στην αρχή του χρονικού βήματος. Αυτό γίνεται γιατί από την Εξ. (3.3.16) παρατηρούμε ότι η μη γραμμικότητα του  $\widehat{\mathbf{K}}_T$  προκύπτει μόνο από τη μη γραμμικότητα του πραγματικού μητρώου δυσκαμψίας  $\mathbf{K}_T$  αφού οι όροι λόγω αδράνειας και απόσβεσης δεν μεταβάλλονται και πολλές φορές είναι αρκετά μεγάλοι.

Ο πίνακας 3.6 συνοψίζει τη διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.



Πίνακας 3.6: ΜΕΘΟΔΟΣ NEWMARK: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Επιλογή παραμέτρων:

Τυπικές τιμές:  $\gamma = \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$

(1) Μέθοδος μέσης επιτάχυνσης:  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$

(2) Μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης:  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$

1. Αρχικοί υπολογισμοί:

1.1 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,0}$  και  $\mathbf{K}_{T,0}$

1.2  $\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$

1.3  $\mathbf{A}_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}, \quad \mathbf{A}_2 = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M}$  και  
 $\mathbf{A}_3 = \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{C} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M}$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

2.1 Για  $j = 1, \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{u}_i, \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} = \mathbf{F}_{s,i}, \mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} = \mathbf{K}_{T,i}$

2.2  $\hat{\mathbf{P}}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{A}_1\mathbf{u}_i + \mathbf{A}_2\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_3\ddot{\mathbf{u}}_i$

3. Για κάθε επανάληψη  $j$ :

3.1  $\hat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} = \hat{\mathbf{P}}_{i+1} - \mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} - \mathbf{A}_1\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$

3.2 Έλεγχος σύγκλισης. Εάν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, πηγαίνει στο βήμα 4.

3.3  $\hat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} = \mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} + \mathbf{A}_1$

3.4  $\Delta\mathbf{u}^{(j)} = \text{inv}\hat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)}\hat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)}$

3.5  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} + \Delta\mathbf{u}^{(j)}$

3.6 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j+1)}$  και  $\mathbf{K}_{T,i+1}^{(j+1)}$

4. Υπολογισμός διανυσμάτων ταχυτήτων και επιταχύνσεων:

4.1  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_i$

4.2  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_i$

### 3.3.4 ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER - HUGHES - TAYLOR

Όπως η μέθοδος Newmark επεκτάθηκε για να έχει εφαρμογή και στα μη γραμμικά συστήματα, έτσι και η μέθοδος Hilber-Hughes-Taylor (HHT) μπορεί με αντίστοιχο τρόπο να τροποποιηθεί. Όπως είδαμε για τα γραμμικά συστήματα, η μέθοδος αυτή είναι πεπλεγμένη αφού προσδιορίζει την απόκριση του συστήματος τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Έτσι και για τα μη γραμμικά συστήματα, η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$ . Οι δυνάμεις αντίστασης  $\mathbf{F}_{s,i+1}$  εξαρτώνται από τις άγνωστες μετακινήσεις  $\mathbf{u}_{i+1}$  και επομένως αποτελούν μια πεπλεγμένη μη γραμμική συνάρτηση. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να γίνονται διορθωτικές επαναλήψεις Newton-Raphson για κάθε χρονικό βήμα.

Η εξίσωση κίνησης τη χρονική στιγμή  $t_{i+1}$  (3.2.32) τροποποιείται ως εξής:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + (1+a)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} - a\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + (1+a)\mathbf{F}_{s,i+1} - a\mathbf{F}_{s,i} = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i \quad (3.3.19)$$

όπου:

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \quad \gamma = \frac{1-2a}{2} \quad \beta = \frac{(1-a)^2}{4} \quad (3.3.20)$$

Όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $a$ , τόσο περισσότερη αριθμητική απόσβεση εισάγεται στη λύση. Όταν το  $a = 0$  τότε έχουμε τη μέθοδο μέσης επιτάχυνσης-τραπεζίου, η οποία δεν παρέχει αριθμητική απόσβεση.

Αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.3.19) με  $\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}$ , η κατασκευή βρίσκεται σε ισορροπία αν:

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1} = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i \quad (3.3.21)$$

Η πιο πάνω εξίσωση για τη δυναμική ανάλυση είναι ανάλογη της Εξ. (3.3.5) για τη στατική ανάλυση όπου:

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + (1+a)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{i+1} - a\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_i + (1+a)\mathbf{F}_{s,i+1} - a\mathbf{F}_{s,i} \quad (3.3.22)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το διάνυσμα  $\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j+1)}$  συναρτήσει του  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  και παραλείποντας τους όρους που είναι μεγαλύτεροι του δευτέρου βαθμού έχουμε μια εξίσωση ανάλογη της Εξ. (3.3.6):

$$\widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j+1)} \approx \widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j)} + \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i \quad (3.3.23)$$

όπου:

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.24)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3.3.22) στο γνωστό  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$  έχουμε:

$$\frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + (1+a)\mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} + (1+a) \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} \quad (3.3.25)$$

Από τις εξισώσεις στο βήμα 2.3 και 2.4 του πίνακα 3.3 έχουμε τα διανύσματα  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$ . Παραγωγίζοντας προκύπτει:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$$

και:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} \equiv \frac{\partial \widehat{\mathbf{F}}_s}{\partial \mathbf{u}_{i+1}} = (1+a)\mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} + \frac{\gamma(1+a)}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (3.3.26)$$

Η Εξ. (3.3.23) μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} \Delta \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i - \widehat{\mathbf{F}}_{s,i+1}^{(j)} \equiv \widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} \quad (3.3.27)$$

Αντικαθιστώντας τα  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$  και  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1}$  στην Εξ. (3.3.22) και συνδυάζοντας τα με το δεξί μέλος της Εξ. (3.3.27), προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} = & (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i - (1+a)\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} + a\mathbf{F}_{s,i}^{(j)} - \left[ \frac{(1+a)}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \right] (\mathbf{u}_{i+1}^j - \mathbf{u}_i) \\ & + \left[ \left( \frac{(1+a)}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} \right] \dot{\mathbf{u}}_i + \left[ (1+a)\Delta t \left( \frac{1}{2\beta} - 2 + \gamma \right) \mathbf{C} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} \right] \ddot{\mathbf{u}}_i \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Η γραμμική Εξ. (3.3.27) για τη j-οστή επανάληψη στη δυναμική ανάλυση είναι σε παρόμοια μορφή με την αντίστοιχη Εξ. (3.3.7) για στατική ανάλυση. Η διαφορά των δύο εξισώσεων είναι ότι για τη δυναμική ανάλυση, έχουν συμπεριληφθεί οι όροι που προκύπτουν λόγω απόσβεσης και αδράνειας τόσο στο ενεργό μητρώο δυσκαμψίας  $\widehat{\mathbf{K}}_T$  όσο και στο διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων  $\widehat{\mathbf{R}}$ . Με κάθε νέα εκτίμηση του  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$ , ο τρίτος και ο πέμπτος όρος της Εξ. (3.3.18) ανανεώνονται και έτσι υπολογίζουμε το νέο διάνυσμα υπολειπόμενων δυνάμεων. Αφού βρούμε το νέο ενεργό μητρώο δυσκαμψίας  $\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)}$ , προχωρούμε με τον υπολογισμό του διανύσματος επιπρόσθετων μετατοπίσεων  $\Delta \mathbf{u}^{(j)}$ .

Ο πίνακας 3.7 συνοψίζει τη διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω όπως την εφαρμόσαμε στον ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Πίνακας 3.7: ΜΕΘΟΔΟΣ HILBER-HUGHES-TAYLOR: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Επιλογή παραμέτρου  $a$ :

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq 0 \quad \gamma = \frac{1-2a}{2} \quad \beta = \frac{(1-a)^2}{4}$$

1. Αρχικοί υπολογισμοί:

1.1 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,0}$  και  $\mathbf{K}_{T,0}$

1.2  $\ddot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$

1.3  $\mathbf{A}_1 = \frac{(1+a)}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}, \quad \mathbf{A}_2 = \left(\frac{(1+a)}{\beta} - 1\right)\mathbf{C} + \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M}$

$\mathbf{A}_3 = (1+a)\Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 2 + \gamma\right)\mathbf{C} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M}$

2. Για κάθε χρονικό βήμα  $i$ :

2.1 Για  $j = 1$ ,  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j)} = \mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} = \mathbf{F}_{s,i}$ ,  $\mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} = \mathbf{K}_{T,i}$

2.2  $\widehat{\mathbf{P}}_{i+1} = (1+a)\mathbf{P}_{i+1} - a\mathbf{P}_i + \mathbf{A}_1\mathbf{u}_i + \mathbf{A}_2\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{A}_3\ddot{\mathbf{u}}_i$

3. Για κάθε επανάληψη  $j$ :

3.1  $\widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)} = \widehat{\mathbf{P}}_{i+1} - (1+a)\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j)} + a\mathbf{F}_{s,i}^{(j)} - \mathbf{A}_1\mathbf{u}_{i+1}^{(j)}$

3.2 Έλεγχος σύγκλισης. Εάν ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, πηγαίνει στο βήμα 4.

3.3  $\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} = \mathbf{K}_{T,i+1}^{(j)} + \mathbf{A}_1$

3.4  $\Delta\mathbf{u}^{(j)} = \text{inv}\widehat{\mathbf{K}}_{T,i+1}^{(j)} \widehat{\mathbf{R}}_{i+1}^{(j)}$

3.5  $\mathbf{u}_{i+1}^{(j+1)} = \mathbf{u}_{i+1}^{(j)} + \Delta\mathbf{u}^{(j)}$

3.6 Προσδιορισμός  $\mathbf{F}_{s,i+1}^{(j+1)}$  και  $\mathbf{K}_{T,i+1}^{(j+1)}$

4. Υπολογισμός διανυσμάτων ταχυτήτων και επιταχύνσεων:

4.1  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} = (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i - \Delta t\dot{\mathbf{u}}_i) \frac{1}{\Delta t^2\beta} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}_i$

4.2  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} = \dot{\mathbf{u}}_i + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_i + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}]\Delta t$

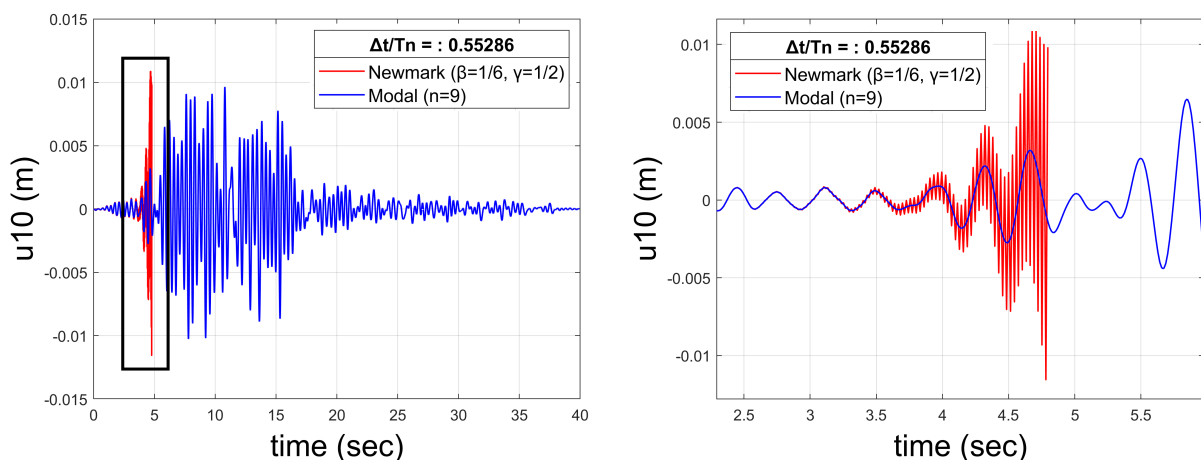
## 4. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

### 4.1 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Με τον όρο ευστάθεια μιας αριθμητικής μεθόδου εννοούμε ότι για δεδομένο χρονικό βήμα  $\Delta t$ , παραμέτρων του προβλήματος αλλά και του αλγορίθμου, η μέθοδος μας παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα για όλη τη διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης και δεν αστοχεί ανεξέλεγκτα σε κάποιο σημείο (Σχ. 4.1). Για να έχουμε ευστάθεια πρέπει οι φυσικές αρχικές συνθήκες για τις εξισώσεις να μην μεγαθύνονται τεχνητά και επομένως να οδηγούν σε αποτελέσματα χωρίς νόημα ακόμη και για τις χαμηλότερες ιδιομορφές. Πρέπει επίσης το σφάλμα που εισάγεται σε κάποιο βήμα που μπορεί να οφείλεται σε στρογγυλοποιήσεις, να μειώνεται στο αμέσως επόμενο του έτσι ώστε η λύση να παραμένει φραγμένη. Η ευστάθεια εξασφαλίζεται με την κατάλληλη επιλογή χρονικού βήματος έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η ακριβής ολοκλήρωση μέχρι και για την υψηλότερη ιδιομορφή που ο λόγος  $\Delta t/T$  γίνεται μέγιστος.

Από πλευράς ευστάθειας, οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- άνευ συνθηκών ευσταθείς: Ονομάζονται οι μέθοδοι που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις για οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες και ανεξαρτήτως του λόγου  $\Delta t/T$ , ειδικά όταν ο λόγος είναι μεγάλος.
- υπό συνθήκες ευσταθείς: Ονομάζονται οι μέθοδοι που οδηγούν σε φραγμένες λύσεις μόνο όταν ο λόγος  $\Delta t/T$  είναι μικρότερος ή ίσος από κάποια τιμή που ορίζεται ως όριο ευστάθειας.



Σχήμα 4.1: Αστοχία της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης για το επιλεγμένο χρονικό βήμα  $\Delta t$ .

Η άμεση αριθμητική ολοκλήρωση της μητρωικής εξίσωσης κίνησης είναι ισοδύναμη με την αριθμητική ολοκλήρωση όλων των εξισώσεων στις ιδιομορφικές συντεταγμένες, εφόσον χρησιμοποιηθεί η ίδια μέθοδος και το ίδιο χρονικό βήμα. Έτσι για τη μελέτη ευστάθειας μιας μεθόδου, χρησιμοποιείται η εξίσωση κίνησης για τη  $n$ -οστή ιδιομορφή που προκύπτει από το μετασχηματισμό σε ιδιομορφικές συντεταγμένες (Εξ. 2.2.10), διατυπωμένη την κατάλληλη χρονική στιγμή ( $t_i$  ή  $t_{i+1}$ ) ανάλογα με τη μέθοδο που μελετούμε, μαζί με τις δύο εξισώσεις της μεθόδου για μονοβάθμιο σύστημα. Έτσι η ευστάθεια εκφράζεται συναρτήσει του χρονικού βήματος  $\Delta t$ , της ιδιοπεριόδου ταλάντωσης  $T_n$  και του λόγου απόσβεσης  $\zeta_n$  της  $n$ -οστής ιδιομορφής αλλά και των παραμέτρων του αλγόριθμου αν υπάρχουν. Για παράδειγμα για τη μέθοδο Newmark οι εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{i+1} + 2\zeta_n\omega_n\dot{u}_{i+1} + \omega_n^2u_{i+1} &= f_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + [(1 - \gamma)\ddot{u}_i + \gamma\ddot{u}_{i+1}]\Delta t \\ u_{i+1} &= u_i + \Delta t\dot{u}_i + [(0.5 - \beta)\ddot{u}_i + \beta\ddot{u}_{i+1}]\Delta t^2 \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Με τη χρήση αυτών των τριών εξισώσεων, μορφώνουμε την παρακάτω μητρωική σχέση της μεθόδου:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_i + \mathbf{B}f_{i+1} \quad (4.1.2)$$

όπου  $\mathbf{X}_{i+1} = \{u_{i+1} \quad \dot{u}_{i+1} \quad \ddot{u}_{i+1}\}^T$ ,  $\mathbf{X}_i = \{u_i \quad \dot{u}_i \quad \ddot{u}_i\}^T$ ,  $\mathbf{A}$  το μητρώο μεγεθύνσεως και  $\mathbf{B}$  το διάνυσμα για τις δυνάμεις στο βήμα  $i + 1$ . Το μητρώο  $\mathbf{A}$  και το διάνυσμα  $\mathbf{B}$  εκφράζονται συναρτήσει  $\Delta t$ ,  $\omega_n$ ,  $\zeta_n$  και των παραμέτρων του αλγόριθμου αν υπάρχουν. Η σχέση αυτή μας δίνει τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση για κάποια χρονική στιγμή γνωρίζοντας αυτά τα μεγέθη στο προηγούμενο βήμα. Εάν την εφαρμόσουμε διαδοχικά για  $i = 0, 1, \dots, i - 1$  λαμβάνουμε:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}^i\mathbf{X}_0 + (\mathbf{A}^{i-1}f_1 + \mathbf{A}^{i-2}f_2 + \dots + \mathbf{A}^0f_i)\mathbf{B} \quad (4.1.3)$$

Επομένως για να είναι ευσταθής μια μέθοδος, πρέπει η σχέση  $\mathbf{A}^i$  να είναι φραγμένη, δηλαδή  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{A}^i = 0$ , κάτι που ισχύει όταν το μέτρο όλων των ιδιοτιμών του μητρώου  $\mathbf{A}$  είναι ίσο ή μικρότερο του ένα. Η φασματική ακτίνα του μητρώου  $\mathbf{A}$  ορίζεται ως  $\rho(\mathbf{A}) = \max \{|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|\}$  και η συνθήκη ευστάθειας μιας αριθμητικής μεθόδου είναι:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1 \quad (4.1.4)$$

Εφαρμόζοντας την πιο πάνω διαδικασία προκύπτει ότι η μέθοδος κεντρικών διαφορών θα καταρρεύσει, δίνοντας αποτελέσματα χωρίς νόημα εάν το χρονικό βήμα δεν είναι αρκετά μικρό. Απαίτηση για ευστάθεια της μεθόδου είναι:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi} \quad (4.1.5)$$

όπου  $T_n$  η μικρότερη ιδιοπερίοδος του συστήματος.

Αντίστοιχα για την οικογένεια των μεθόδων του Newmark έχουμε ευστάθεια όταν:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad (4.1.6)$$

Για  $\gamma = 1/2$  και  $\beta = 1/4$ , δηλαδή για τη μέθοδο σταθερής μέσης επιτάχυνσης (κανόνας τραπέζιου) η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \infty \quad (4.1.7)$$

και επομένως η μέθοδος μέσης επιτάχυνσης είναι άνευ συνθηκών ευσταθής. Για  $\gamma = 1/2$  και  $\beta = 1/6$ , δηλαδή για τη μέθοδο γραμμικής επιτάχυνσης, η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551 \quad (4.1.8)$$

και επομένως η μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης είναι υπό συνθήκες ευσταθής. Γενικότερα για τη μέθοδο του Newmark όταν  $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$  και  $\gamma \geq 1/2$ , η μέθοδος είναι άνευ συνθηκών ευσταθής, ενώ όταν  $\gamma > 1/2$  και  $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$  η μέθοδος εισάγει αριθμητική απόσβεση στη λύση.

Από τη διερεύνηση για τις μεθόδους Hilber-Hughes-Taylor και Bathe η συνθήκη είναι:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \infty \quad (4.1.9)$$

και επομένως οι μέθοδοι αυτοί είναι άνευ συνθηκών ευσταθείς.

Στο σχήμα 4.2 όπου φαίνεται η φασματική ακτίνα για την κάθε μέθοδο σε συνάρτηση με το λόγο  $\Delta t/T$ , παρατηρούμε ότι στη μέθοδο των κεντρικών διαφορών για  $\Delta t/T_n \geq 1/\pi$  που είναι το όριο ευστάθειας της μεθόδου, το  $\rho(\mathbf{A})$  αυξάνεται απότομα και γίνεται μεγαλύτερο από το ένα κάτι που σημαίνει ότι εισάγεται σφάλμα απότομα και άρα πολύ γρήγορα η μέθοδος αστοχεί. Για τις υπόλοιπες μεθόδους ισχύει  $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$  και επομένως όλες παρέχουν ευστάθεια, ανεξάρτητα από το λόγο  $\Delta t/T$ .

Στην περίπτωση ανάλυσης μη γραμμικών συστημάτων, η ευστάθεια των μεθόδων εξαρτάται και από το βαθμό μη γραμμικότητας  $\delta_{i+1}$ , ο οποίος ορίζεται ως ο λόγος της δυσκαμψίας στο τέλος του βήματος  $i + 1$  προς την αρχική δυσκαμψία:

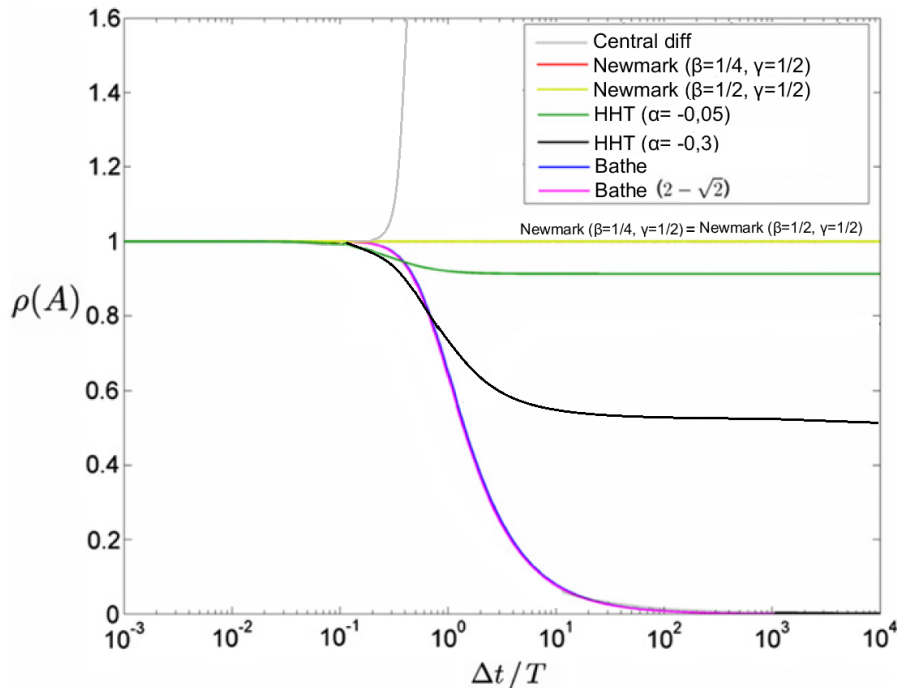
$$\delta_{i+1} = \frac{k_{i+1}}{k_0} \quad (4.1.10)$$

Η διαδικασία που περιγράφεται πιο πάνω για τη μελέτη ευστάθειας, εφαρμόζεται και στα μη γραμμικά συστήματα με τη διαφορά ότι η εξίσωση κίνησης του μονοβάθμιου (4.1.1.α) γίνεται:

$$\ddot{u}_{i+1} + 2\zeta_n \omega_n \dot{u}_{i+1} + \frac{k_{i+1} u_{i+1}}{m} = f_{i+1} \quad (4.1.11)$$

Ενδεικτικά για τη μέθοδο κεντρικών διαφορών και για ένα μονοβάθμιο σύστημα υπάρχει ευστάθεια εάν ισχύει σε κάθε χρονικό βήμα:

$$\frac{\Delta t}{T_0} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{\delta_{i+1}}} \quad (4.1.12)$$



Σχήμα 4.2: Φασματική ακτίνα του μητρώου μεγέθυνσης για τις μεθόδους ( $\zeta = 0$ ) σε συνάρτηση με το λόγο  $\Delta t/T$ .

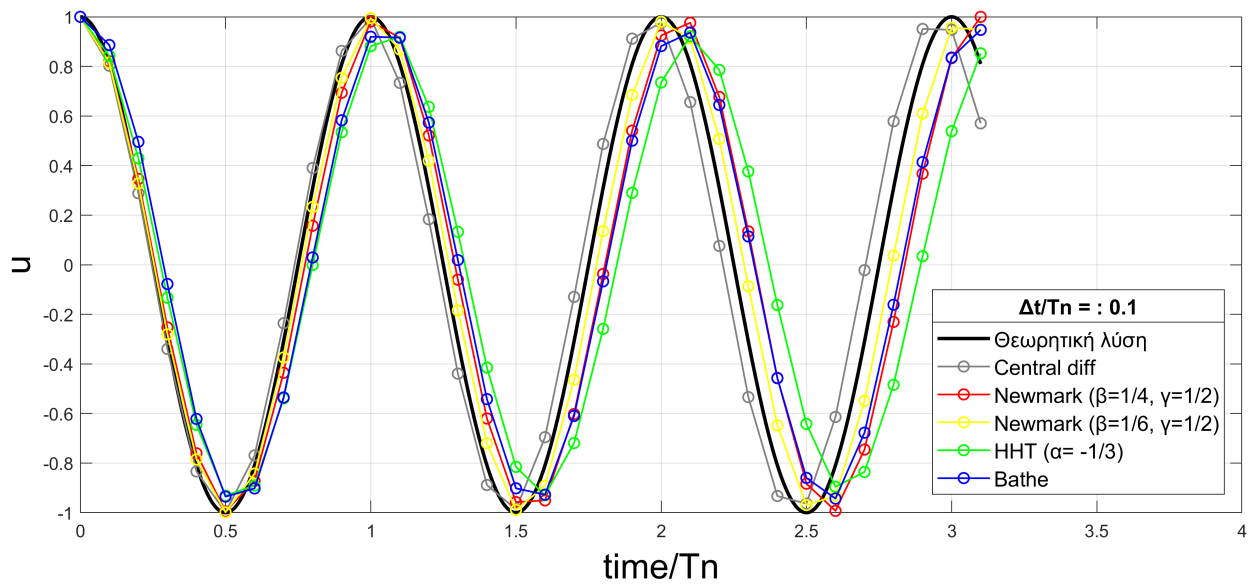
## 4.2 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Η επιλογή της αριθμητικής μεθόδου που θα χρησιμοποιηθεί σε μια πρακτική εφαρμογή, γίνεται με γνώμονα το υπολογιστικό κόστος το οποίο καθορίζεται από το πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για την ολοκλήρωση. Στην περίπτωση επιλογής της μεθόδου των κεντρικών διαφορών, το χρονικό βήμα και επομένως το πλήθος των βημάτων για δεδομένη διάρκεια, καθορίζεται από τη συνθήκη ευστάθειας της μεθόδου (Εξ. 4.1.5). Στην περίπτωση όμως επιλογής μιας μεθόδου που είναι ευσταθής άνευ συνθηκών, η επιλογή του χρονικού βήματος πρέπει να γίνει με γνώμονα την ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα των λαμβανόμενων αποτελεσμάτων.

Ένα τρόπος ελέγχου της ακρίβειας μιας μεθόδου, είναι η σύγκριση της ακριβούς λύσης της εξίσωσης της ελεύθερης ταλάντωσης με αυτή που λαμβάνουμε με την αριθμητική μέθοδο. Στο σχήμα 4.3 φαίνεται η λύση της εξίσωσης  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$  με αρχικές συνθήκες  $u_0 = 1$  και  $\dot{u} = 0$  με τις αριθμητικές μεθόδους και η θεωρητική λύση  $u(t) = \cos(\omega t)$ .

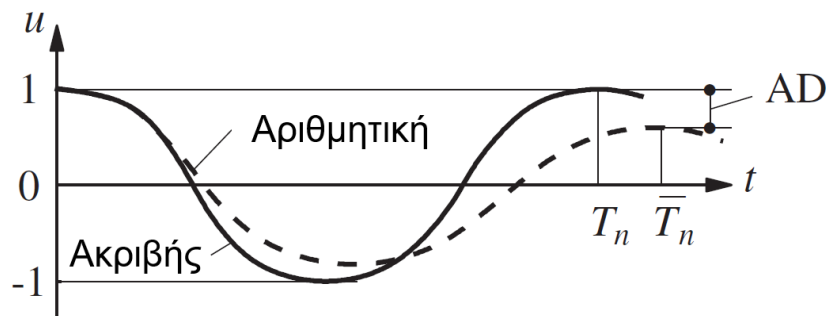
Το σχήμα 4.3 δείχνει ότι κάποιες αριθμητικές μέθοδοι μπορεί να προβλέψουν ότι το εύρος της μετατόπισης εξασθενεί με το χρόνο, αν και το σύστημα δεν έχει απόσβεση και ότι η ιδιοπερίοδος επιμηκύνεται ή βραχύνεται. Ειδικά για τη μέθοδο Hilber-Hughes-Taylor επιλέχθηκε συντελεστής  $a = -1/3$ , ώστε η μέθοδος να εισάγει τη μέγιστη αριθμητική απόσβεση στη λύση.





Σχήμα 4.3: Λύση της ελεύθερης ταλάντωσης με αριθμητικές μεθόδους και θεωρητική λύση.

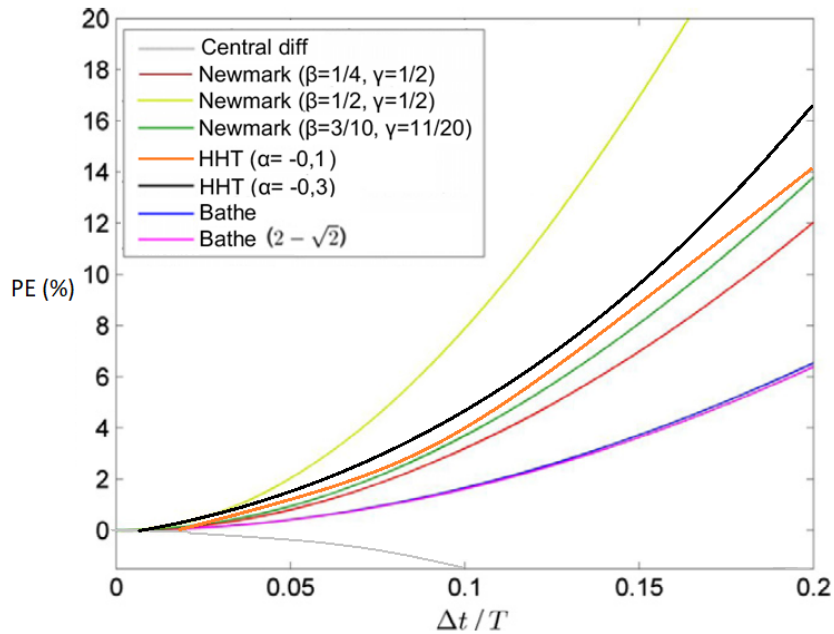
Ως μέτρο σχετικής ακρίβειας ορίζεται η σχετική επιμήκυνση της περιόδου (PE, period elongation) όπου  $PE = (\bar{T}_n - T_n)/T_n$  και η εξασθένηση του εύρους ταλάντωσης (AD, amplitude decay) σε χρόνο μιας περιόδου. Οι ορισμοί των μεγεθών αυτών φαίνονται στο σχήμα 4.4.



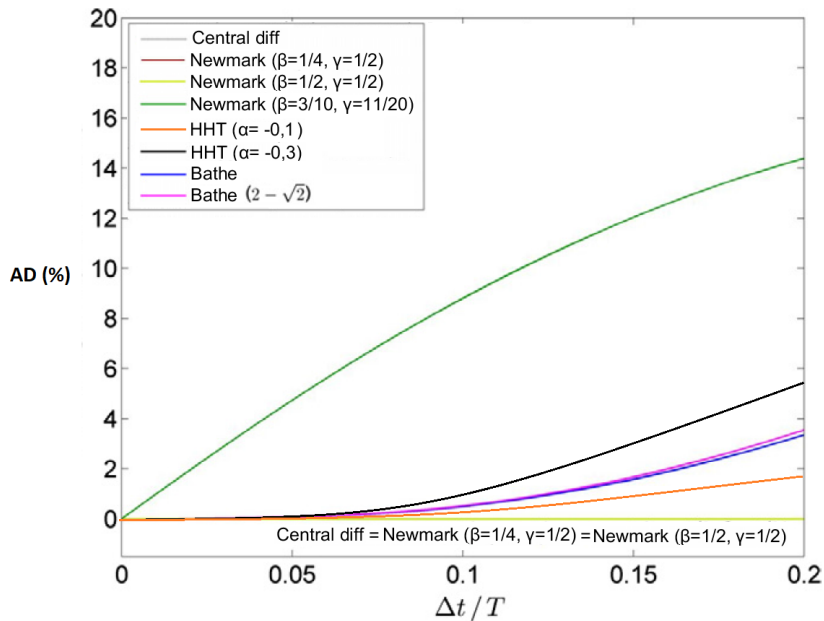
Σχήμα 4.4: Ορισμός των AD (εξασθένηση εύρους) και PE (επιμήκυνση περιόδου).

Στο σχήμα 4.5 και 4.6 παρουσιάζεται η σχετική επιμήκυνση της περιόδου και η εξασθένηση του εύρους αντίστοιχα, για τις διάφορες μεθόδους, συναρτήσει του  $\Delta t/T_n$ . Παρατηρώντας τα σχήματα συμπεραίνουμε ότι όλες οι μέθοδοι παρέχουν ακρίβεια όταν ισχύει  $\Delta t/T_n \leq 0.01$ . Ωστόσο όσο ο λόγος αυτός ξεκινά να αυξάνεται, οι διάφορες μέθοδοι παρουσιάζουν διαφορετικά χαρακτηριστικά ως προς την ακρίβεια. Η μέθοδος κεντρικών διαφορών και η μέθοδος Newmark με συγκεκριμένες παραμέτρους, δεν προβλέπουν εξασθένηση του εύρους της ταλάντωσης ενώ οι υπόλοιπες μέθοδοι προβλέπουν, κάτι που σημαίνει ότι οι μέθοδοι αυτοί εισάγουν αριθμητική απόσβεση στο σύστημα. Η μέθοδος του Bathe δίνει

τη μικρότερη επιμήκυνση περιόδου και για  $\Delta t/T_n \leq 0.1$  εισάγει πολύ μικρή αριθμητική απόσβεση, κάτι που σημαίνει ότι παρέχει υψηλή ακρίβεια για την συγκεκριμένη τιμή του λόγου  $\Delta t/T_n$ .



Σχήμα 4.5: Επιμήκυνση της περιόδου συναρτήσει του  $\Delta t/T_n$ .



Σχήμα 4.6: Εξασθένηση του εύρους συναρτήσει του  $\Delta t/T_n$ .

### 4.3 ΕΠΙΛΟΓΗ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΠΟΛΥΒΑΘΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ο σκοπός της επίλυσης της μητρωικής εξίσωσης κίνησης με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων, είναι να έχουμε μια καλή προσέγγιση της ακριβούς δυναμικής απόκρισης της κατασκευής που μελετούμε. Για να το πετύχουμε αυτό, εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι όλες οι εξισώσεις της μορφής της Εξ. (2.2.10) θα πρέπει να ολοκληρωθούν με υψηλή ακρίβεια. Κατά την άμεση ολοκλήρωση, εφόσον το χρονικό βήμα που επιλέγεται στην αρχή χρησιμοποιείται για όλες τις εξισώσεις, η επιλογή του για σκοπούς ακρίβειας θα μπορούσε να πει κάποιος ότι πρέπει να γίνει σύμφωνα με τη μικρότερη ιδιοπερίοδο του συστήματος ( $n$ -οστή). Η επιλογή αυτή υποδηλώνει ότι το  $\Delta t/T$  για όλες τις χαμηλότερες ιδιομορφές είναι ακόμη μικρότερο εξασφαλίζοντας μια ακριβή λύση για όλες τις ιδιομορφές που περιλαμβάνονται. Αυτό θα μας οδηγήσει στην επιλογή ενός πολύ μικρού χρονικού βήματος κάτι που σημαίνει πολύ υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Λόγω του ότι για την ακριβή έκφραση της απόκρισης μιας κατασκευής αρκούν μόνο οι  $J$  πρώτοι όροι της Εξ. (2.2.1), η επιλογή του  $\Delta t$  μπορεί να γίνει με βάση τις απαιτήσεις ακρίβειας για τη  $J$ -οστή ιδιομορφή, για παράδειγμα  $\Delta t = T_j/10$ , όπου  $T_j$  η περίοδος της  $J$ -οστής ιδιομορφής. Αυτό σημαίνει ότι το  $\Delta t$  είναι  $T_j/T_n$  φορές μεγαλύτερο από αυτό που χρειάζεται για να εξασφαλίζει ακρίβεια μέχρι και τη  $n$ -οστή ιδιομορφή, κάτι που μπορεί να οδηγήσει ακόμη και σε 1000 φορές μεγαλύτερο βήμα. Βέβαια με αυτή την επιλογή  $\Delta t$ , η άμεση επίλυση της μητρωικής εξίσωσης κίνησης (2.1.2) δίνει τέτοιο  $u(t)$  ώστε οι όροι των μεγαλύτερων ιδιομορφών ( $J+1$  έως  $N$ ) στην Εξ (2.2.1) θα είναι ανακριβείς, κάτι που δεν μας απασχολεί αφού οι συνεισφορές των μεγαλύτερων ιδιομορφών είναι αμελητέες.

Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι η επιλογή με αυτόν τον τρόπο του χρονικού βήματος μπορεί να μας παρέχει ακριβή αποτελέσματα, εάν όμως γίνεται χρήση μιας μεθόδου που είναι υπό συνθήκες ευσταθής, μπορεί να μην είναι επαρκώς μικρό για να εξασφαλίζει την ευστάθεια της αριθμητικής διαδικασίας. Η ακρίβεια απαιτείται μόνο για τις  $J$  πρώτες ιδιομορφές, αλλά η ευστάθεια πρέπει να εξασφαλισθεί για όλες τις ιδιομορφές, διότι ακόμη και αν η απόκριση στις μεγαλύτερες ιδιομορφές είναι ασήμαντη, θα υπάρξει ανεξέλεγκτη αστοχία της μεθόδου αν οι απαιτήσεις ευστάθειας δεν ικανοποιούνται για όλες τις ιδιομορφές (Σχ. 4.1).

Υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι εισάγουν αριθμητική απόσβεση στη λύση, κάτι που αυξάνεται όσο αυξάνεται ο λόγος  $\Delta t/T$  (Σχ. 4.6). Αυτό αποτελεί πλεονέκτημα για τις μεθόδους διότι είναι επιθυμητό να αποκλείονται οι συμβολές απόκρισης ιδιομορφών ανώτερων από τις  $J$  σημαντικές ιδιομορφές λόγω του ότι αυτές οι ανώτερες ιδιομορφές και οι συχνότητες τους οι οποίες έχουν υπολογισθεί από μια εξιδανικευμένη προσομοίωση της κατασκευής, συνήθως δεν είναι ακριβείς σε σχέση με τις πραγματικές ιδιότητες της κατασκευής και πιθανών να εισάγουν πολύ μεγάλα σφάλματα στη λύση.

Η επιλογή του χρονικού βήματος πρέπει επίσης να γίνει λαμβάνοντας υπόψιν την εξωτερική διέγερση. Το χρονικό βήμα πρέπει να είναι αρκετά μικρό ώστε να αλλοιώνει στο ελάχιστο τη συνάρτηση διέγερσης. Για τη μελέτη της δυναμικής απόκρισης σε σεισμική κίνηση του εδάφους, το χρονικό βήμα δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από αυτό που απαιτείται για την αριθμητική περιγραφή της εξαιρετικά ακανόνιστης εδαφικής επιτάχυνσης.

Τυπικά το βήμα αυτό είναι  $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ .

Ένας πρακτικός τρόπος επιλογής του χρονικού βήματος είναι η επίλυση με κάποιο λογικό χρονικό βήμα και στη συνέχεια να επαναλάβουμε την επίλυση με ένα ελαφρώς μικρότερο χρονικό βήμα. Έπειτα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι δύο διαδοχικές λύσεις πρακτικά να συμπίπτουν.

## 5. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν για διάφορα συστήματα από τις εφαρμογές των μεθόδων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

### 5.1 ΓΡΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Στο παράδειγμα αυτό, ασχοληθήκαμε με ένα απλό γραμμικό σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας που φαίνεται στο σχήμα 5.1 και έχει την εξής μητρική εξίσωση κίνησης:

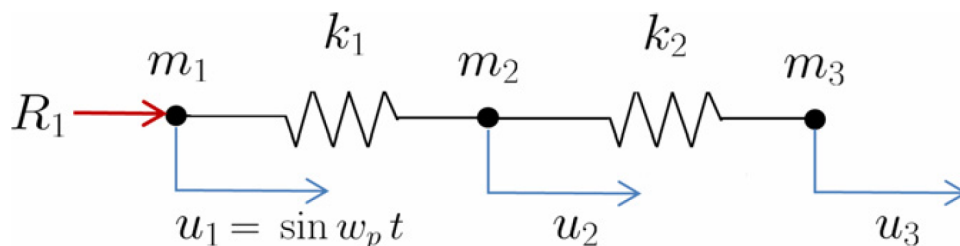
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

Το μοντέλο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:  $k_1 = 10^7$ ,  $k_2 = 1$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$  και επιβάλλουμε στον κόμβο 1 μια ημιτονοειδής μετακίνηση  $u_1 = \sin \omega_p t$  με κυκλική συχνότητα  $\omega_p = 1.2$ . Με γνωστή τη μετατόπιση του κόμβου 1, η Εξ. (5.1.1) μπορεί να γραφτεί ξανά, αφήνοντας μόνο τις άγνωστες μετατοπίσεις στον κόμβο 2 και 3 ως:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 u_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

Η αντίδραση  $R_1$  είναι:

$$R_1 = m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_1 u_2 \quad (5.1.3)$$

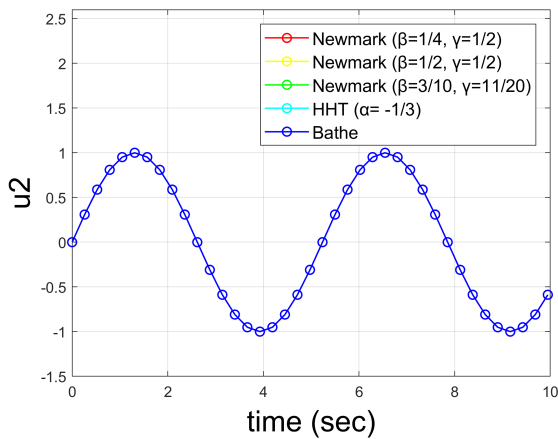


Σχήμα 5.1: Μοντέλο του συστήματος με τρεις βαθμούς ελευθερίας και χαρακτηριστικά:  $k_1 = 10^7$ ,  $k_2 = 1$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$ ,  $\omega_p = 1.2$ .

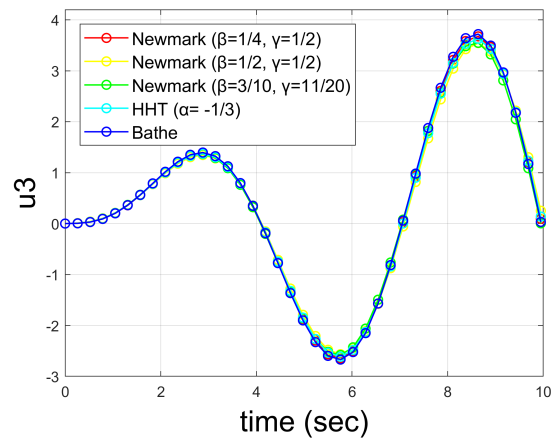
Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αναπαραστήσει τα πολύ δύσκαμπτα και πολύ εύκαμπτα μέλη ενός πολυπλοκότερου συστήματος. Το ελατήριο υψηλής δυσκαμψίας που βρίσκεται αριστερά μπορεί για παράδειγμα να αναπαραστήσει μία σχεδόν άκαμπτη σύνδεση ενώ το ελατήριο που βρίσκεται δεξιά αναπαριστά τα εύκαμπτα στοιχεία ενός μοντέλου. Πρακτικά οι υψηλές τιμές της δυσκαμψίας δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο φυσικό νόημα παρά να επιβάλουν δεσμεύσεις. Επομένως η απόκριση λόγω αυτών των μελών με υψηλή δυσκαμψία είναι επιθυμητό να μη συμπεριληφθεί στην απόκριση του συστήματος.

Το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις μετατοπίσεις και ταχύτητες στους κόμβους 2 και 3. Η επίλυση της Εξ. (5.1.2) γίνεται για 10 δευτερόλεπτα με χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.2618$  ώστε να προκύπτει  $\Delta t/T_p = 0.05$  όπου  $T_p = 5.236 \text{ sec}$  η περίοδος της επιβαλλόμενης μετατόπισης στον κόμβο 1. Οι ιδιοπερίοδοι του συστήματος είναι  $T_1 = 6.283 \text{ sec}$  και  $T_2 = 0.002 \text{ sec}$  και οι λόγοι του χρονικού βήματος προς τις ιδιοπεριόδους προκύπτουν  $\Delta t/T_1 = 0.0417$  και  $\Delta t/T_2 = 131.76$ .

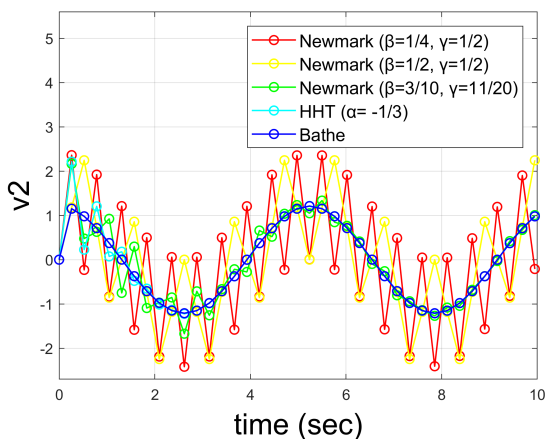
Στα σχήματα 5.2 μέχρι 5.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Newmark δεν μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα ειδικά για την επιτάχυνση στον κόμβο 2 και για την αντίδραση R1. Πιο συγκεκριμένα η μέθοδος σταθερής μέσης επιτάχυνσης ( $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ ) παρουσιάζει μεγάλα σφάλματα και πρακτικά αστοχία (σχήματα 5.6 και 5.8).



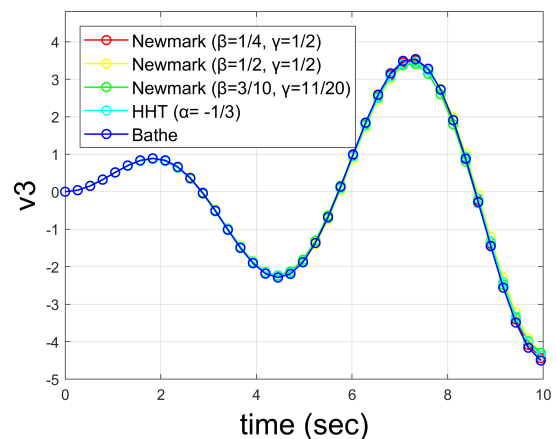
Σχήμα 5.2: Μετατόπιση του κόμβου 2.



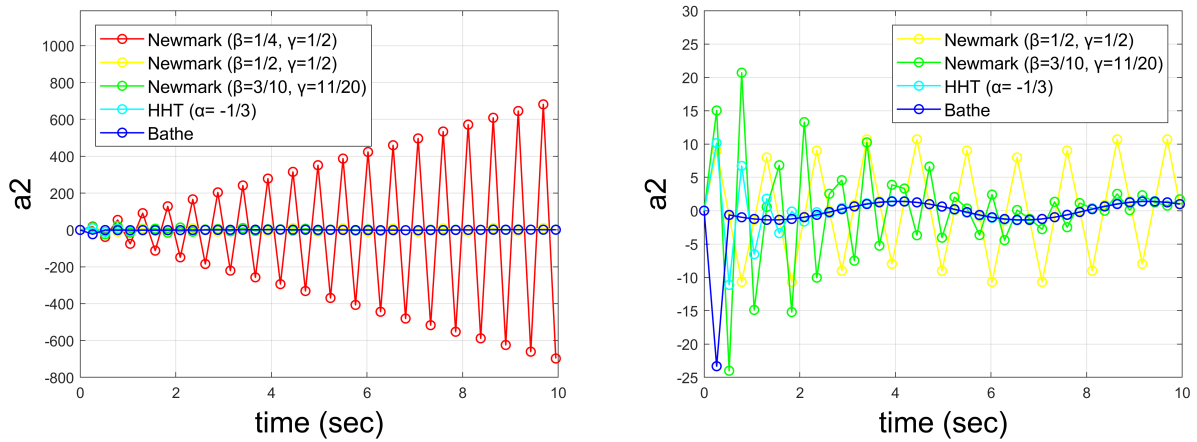
Σχήμα 5.3: Μετατόπιση του κόμβου 3.



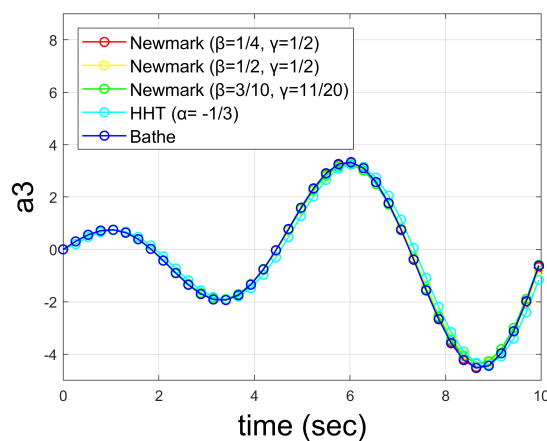
Σχήμα 5.4: Ταχύτητα του κόμβου 2.



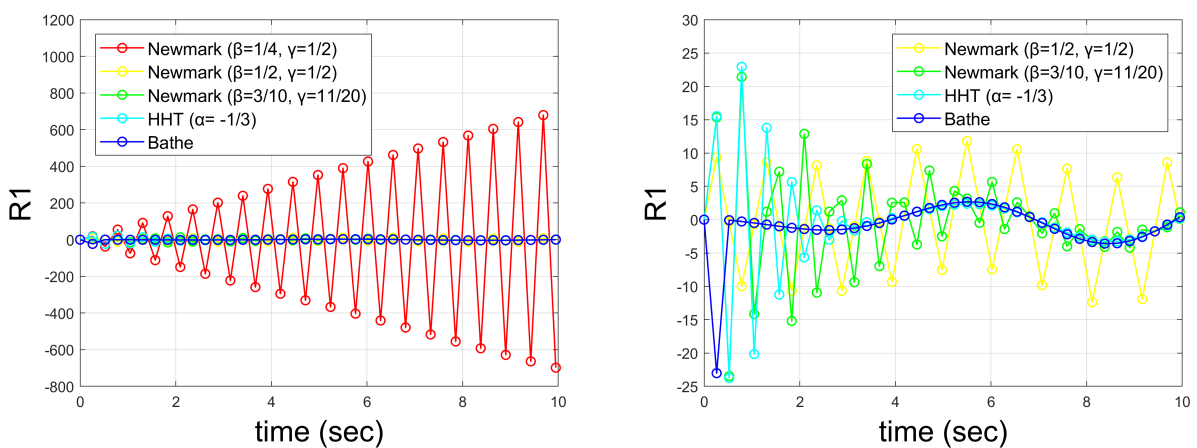
Σχήμα 5.5: Ταχύτητα του κόμβου 3.



Σχήμα 5.6: Επιτάχυνση του κόμβου 2.



Σχήμα 5.7: Επιτάχυνση του κόμβου 3.



Σχήμα 5.8: Δύναμη αντίδρασης στον κόμβο 1.

Η μέθοδος Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $a = -1/3$ ) και η μέθοδος Bathe μας δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα, με την πρώτη να χρειάζεται να παρέλθει κάποιος χρόνος μέχρι να συγκλίνει στην ακριβή λύση. Οι δύο αυτές μέθοδοι φαίνεται να "φιλτράρουν" αποτελεσματικά την απόκριση που οφείλεται στην ιψίσυχη ιδιομορφή η οποία είναι πλασματική λόγω μοντέλου. Αυτό συμβαίνει επειδή για το επιλεγμένο χρονικό βήμα ισχύει ότι  $\Delta t/T_2 = 131.76$  και επομένως πολύ μεγάλη εξασθένηση του εύρους για τη δεύτερη ιδιομορφή ενώ για την πρώτη ισχύει  $\Delta t/T_1 = 0.0417$  και επομένως μηδενική αριθμητική απόσβεση. Η μέθοδος Newmark με  $\beta = 3/10$  και  $\gamma = 11/20$ , ενώ παρέχει αριθμητική απόσβεση, χρειάζεται να παρέλθει αρκετός χρόνος μέχρι να συγκλίνει στην ακριβή λύση και λόγω του ότι για λογικές τιμές του λόγου  $\Delta t/T$ , η επιμήκυνση της περιόδου και η εξασθένηση του εύρους είναι αρκετά υψηλά, κάνει τις υπόλοιπες μεθόδους να υπερτερούν.

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ξεκάθαρα το πλεονέκτημα των μεθόδων που εισάγουν αριθμητική απόσβεση στη λύση και πιο συγκεκριμένα της μεθόδου Hilber-Hughes-Taylor και Bathe. Ειδικότερα η μέθοδος Bathe φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη για συστήματα με πολύ εύκαμπτα και πολύ δύσκαμπτα μέλη αφού έδωσε τα ακριβέστερα αποτελέσματα χωρίς να χρειαστεί να παρέλθει σημαντικός χρόνος. Επιπλέον πλεονέκτημα για τη μέθοδο αποτελεί το γεγονός ότι δεν χρειάζεται να γίνει η όποια επιλογή παραμέτρων που θα ρυθμίζουν τα χαρακτηριστικά της μεθόδου, πριν ξεκινήσει η αριθμητική ολοκλήρωση.

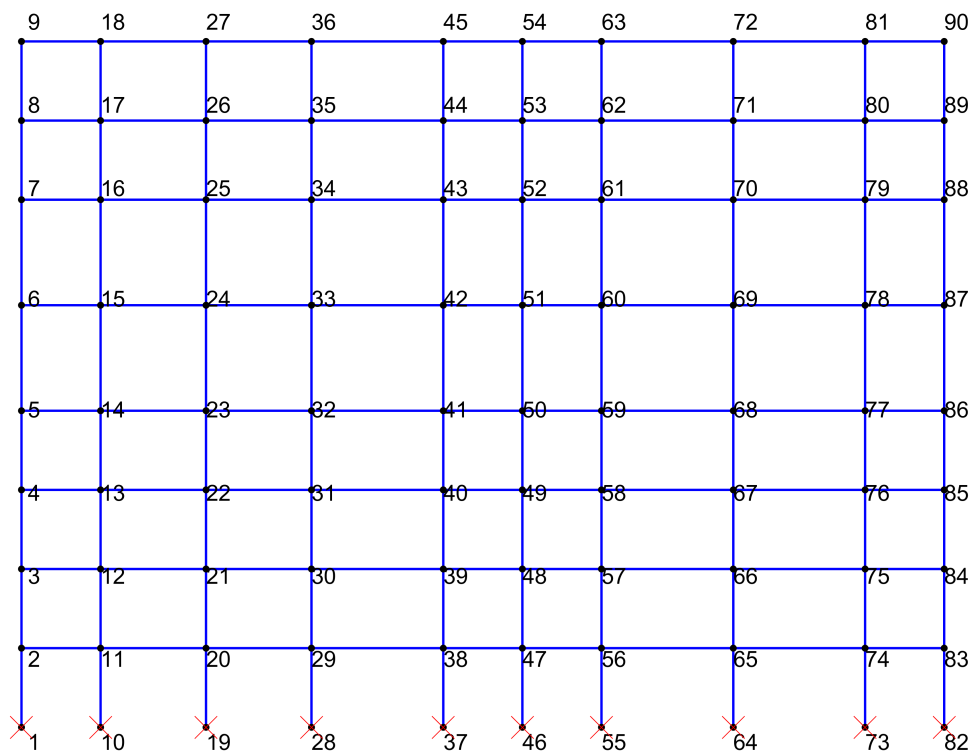
## 5.2 ΟΚΤΑΩΡΟΦΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΝΝΕΑ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ

Στο παράδειγμα αυτό, μελετήσαμε έναν οκταώροφο επίπεδο φορέα ύψους 26 μέτρων και εννέα ανοιγμάτων, ο οποίος φαίνεται στο σχήμα 5.9 μαζί με την αρίθμηση των κόμβων στους οποίους συγκεντρώνονται οι μάζες αφού έγινε η παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών. Κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, δύο μετατοπίσεις και μια στροφή. Όλοι οι κόμβοι στη βάση του φορέα είναι πακτωμένοι και όλα τα στοιχεία είναι από χάλυβα IPE 450. Σε κάθε όροφο επιβάλαμε γραμμικό φορτίο 30 kN/m. Οι συντεταγμένες των κόμβων σε μέτρα προκύπτουν από τον συνδυασμό των εξής X και Y: X = [0,3,7,11,16,19,22,27,32,35], Y = [0,3,6,9,12,16,20,23,26]. Το μητρώο απόσβεσης μορφώθηκε με βάση τους ιδιομορφικούς λόγους απόσβεσης και για  $\zeta = 5\%$  για όλες τις ιδιομορφές. Έτσι ακόμη και οι ανώτερες ιδιομορφές έχουν τον ίδιο λόγο απόσβεσης κάτι που δεν θα ίσχυε με απόσβεση Rayleigh και επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε εάν οι μέθοδοι με αριθμητική απόσβεση διαφοροποιούν τα αποτελέσματα σε σχέση με αυτές χωρίς αριθμητική απόσβεση.

Ο φορέας έχει ιδιοπεριόδους  $T_1 = 1.036 \text{ sec}$ ,  $T_2 = 0.35 \text{ sec}$  και  $T_{min} = 0.0123 \text{ sec}$ . Εάν επιθυμούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, η απαίτηση για ευστάθεια θα μας επέβαλε το χρονικό βήμα  $\Delta t$  να είναι τουλάχιστον ίσο με  $T_{min}/\pi = 0.0039 \text{ sec}$ , το οποίο είναι μικρότερο από το βήμα των καταγραφών και από αυτό που χρειάζεται για ικανοποιητική ακρίβεια όπως θα δούμε πιο κάτω. Η επίλυση έγινε για τρεις διαφορετικές σεισμικές καταγραφές, με μεθόδους άνευ συνθηκών ευσταθείς, με και χωρίς αριθμητική απόσβεση αλλά και με επαλληλία ιδιομορφών και με τη χρήση διανυσμάτων Ritz εξαρ-



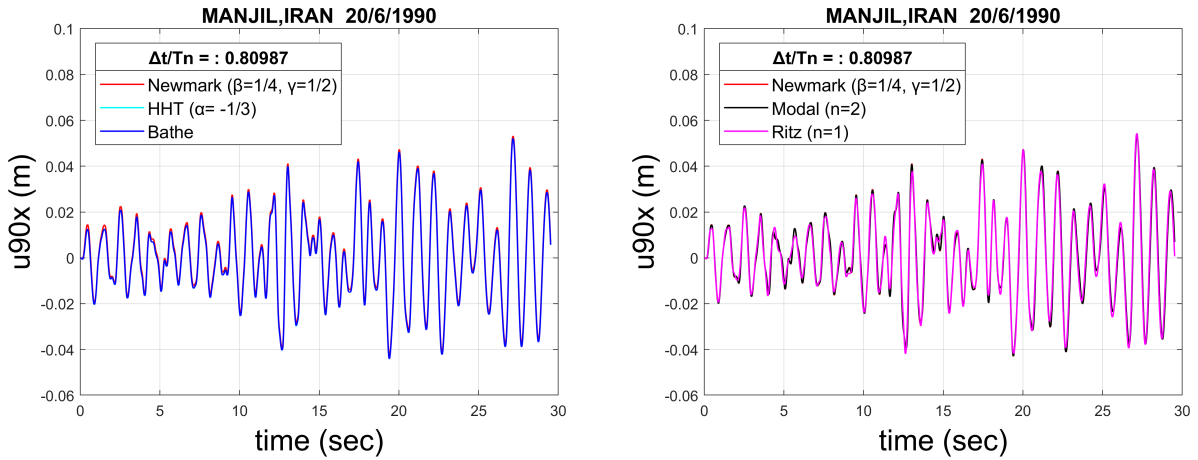
τώμενων από δύναμη. Για την επίλυση των εξισώσεων στις ιδιομορφικές συντεταγμένες αλλά και για την επίλυση του μειωμένου προβλήματος με τη χρήση διανυσμάτων Ritz, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο Newmark σταθερής μέσης επιτάχυνσης (κανόνας τραπεζίου). Για τη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών υπολογίσαμε ότι με τη συμβολή των δύο πρώτων ιδιομορφών από τις 160 στο σύνολο, η δρώσα ιδιομορφική μάζα είναι μεγαλύτερη από το 90% της συνολικής μάζας του φορέα.



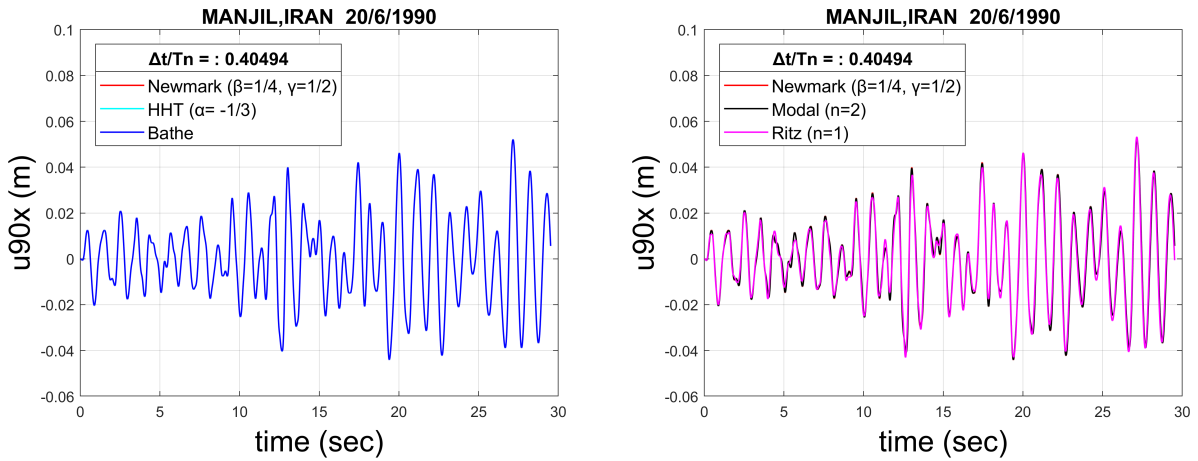
Σχήμα 5.9: ΟΚΤΑΩΡΟΦΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΝΝΕΑ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ.

### 5.2.1 ΣΕΙΣΜΟΣ ΜΑΝJIL, IRAN 20/6/1990

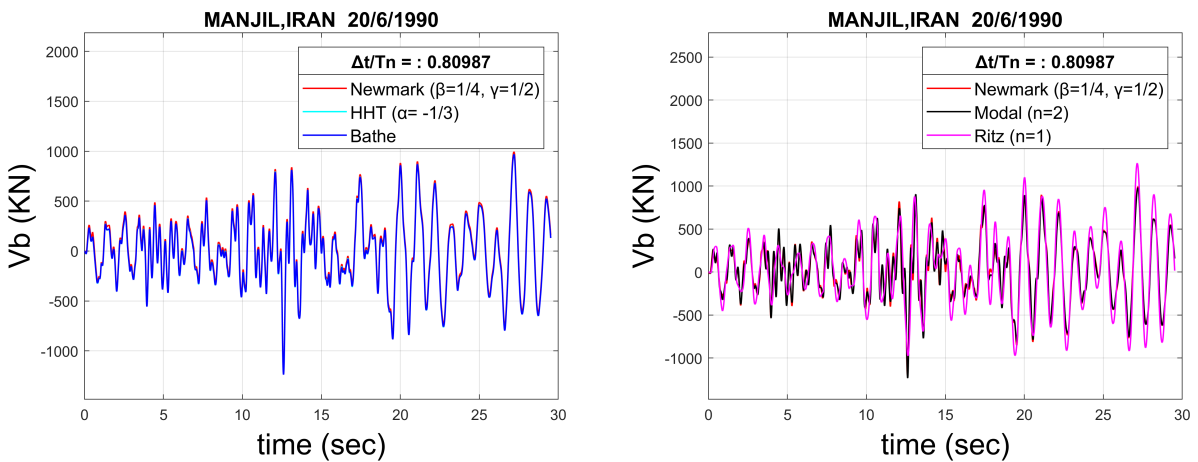
Η επίλυση αρχικά έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ ). Στο σχήμα 5.10 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της μετακίνησης κορυφής (κόμβος 90) κατά τη διεύθυνση  $x$  και στο σχήμα 5.12 η χρονοϊστορία της τέμνουσας βάσης. Έπειτα επαναλήφθηκε η επίλυση, χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα το μισό της καταγραφής ( $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ ). Στο σχήμα 5.11 παρουσιάζεται η χρονοϊστορία της μετακίνησης κορυφής (κόμβος 90) κατά τη διεύθυνση  $x$  και στο σχήμα 5.13 η χρονοϊστορία της τέμνουσας βάσης όπως προέκυψε για το επιλεγμένο χρονικό βήμα.



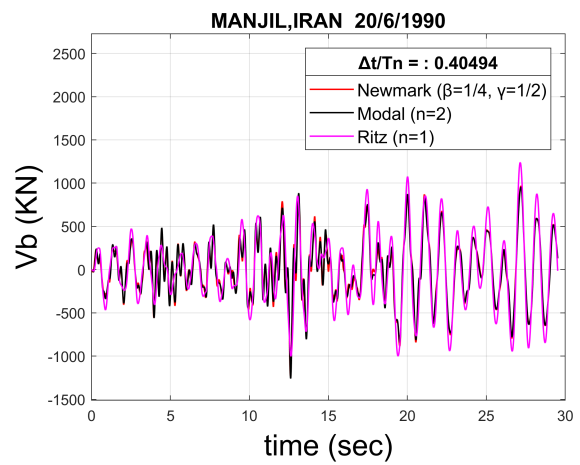
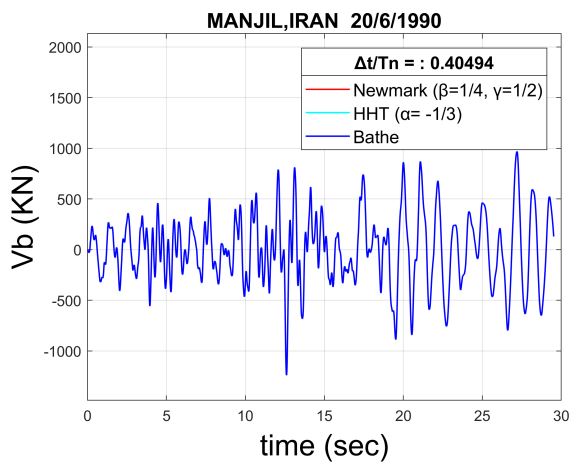
Σχήμα 5.10: Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.01$  s).



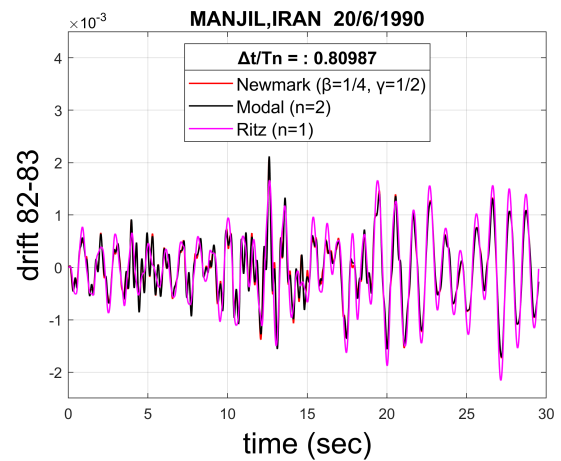
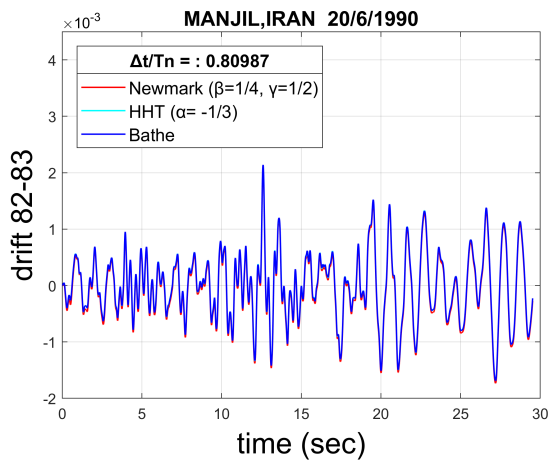
Σχήμα 5.11: Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.005$  s).



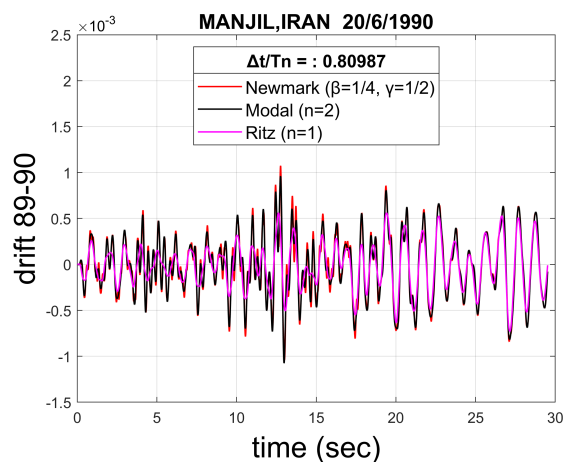
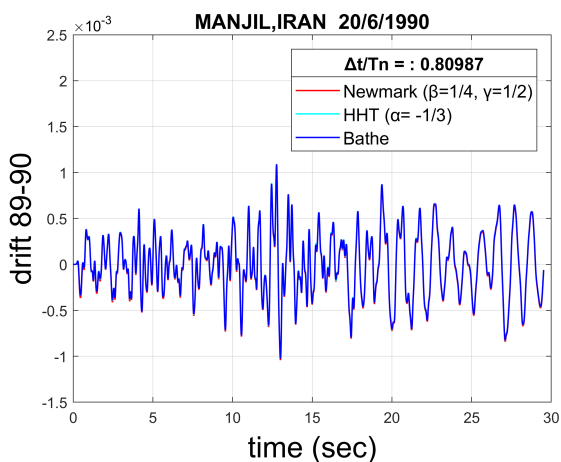
Σχήμα 5.12: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$  s).



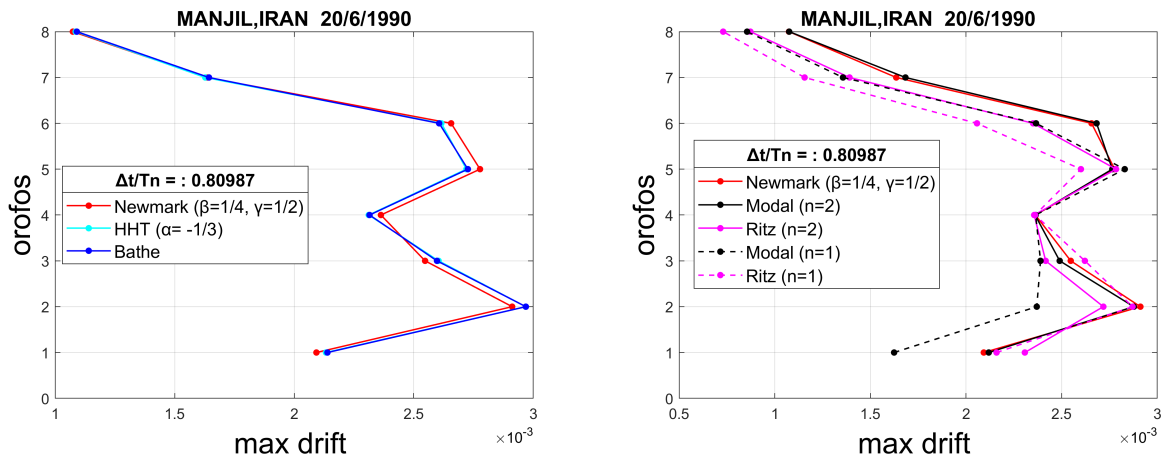
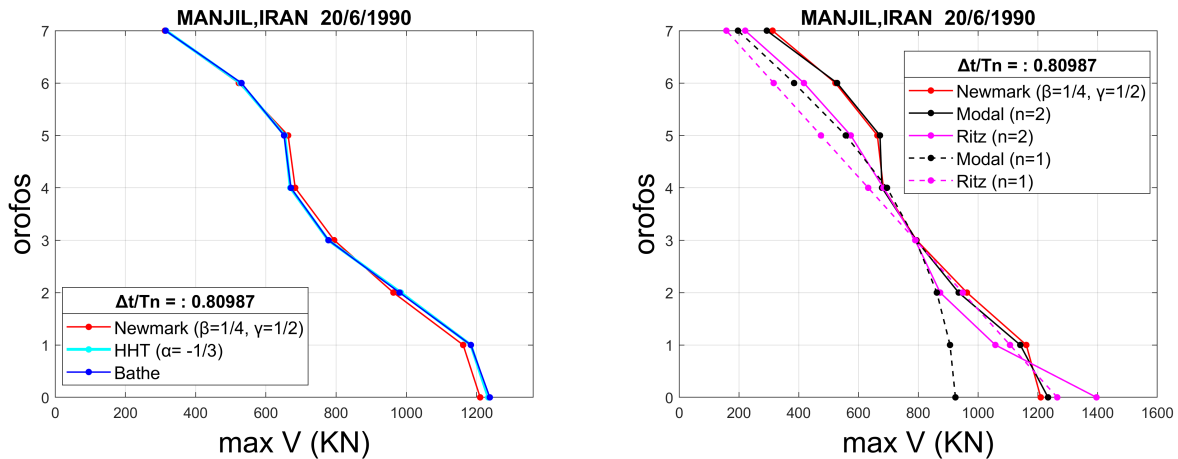
Σχήμα 5.13: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$  s).



Σχήμα 5.14: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).



Σχήμα 5.15: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).

Σχήμα 5.16: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).Σχήμα 5.17: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).

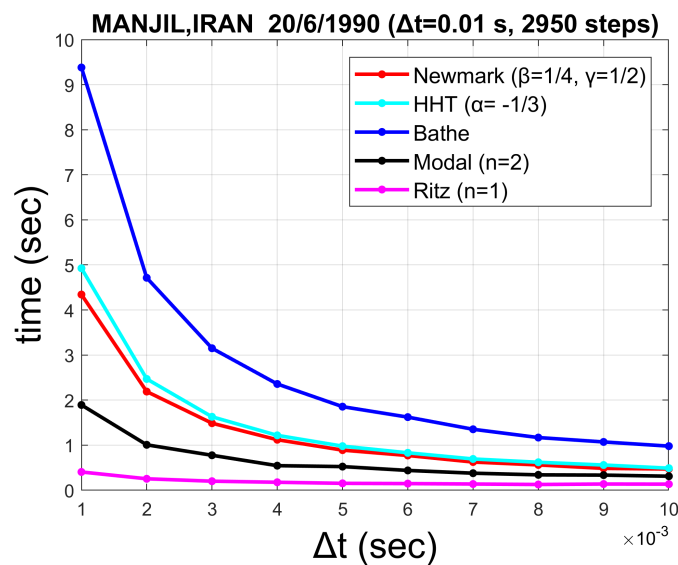
Στα σχήματα 5.14 και 5.15 παρουσιάζονται οι χρονοιστορίες των σχετικών μετακινήσεων-drift για τον πρώτο και τελευταίο όροφο. Στα σχήματα 5.16 και 5.17 παρουσιάζονται οι μέγιστες σχετικές μετακινήσεις-drift και μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο αντίστοιχα.

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $a = -1/3$ ), Bathe και επαλληλία ιδιομορφών με τη χρήση δύο ιδιομορφών, πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής. Η επίλυση με χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.005$  sec δεν διαφοροποιεί τα αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει ότι η εάν επιλέγαμε τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, η απαίτηση για ευστάθεια θα μας επέβαλε βήμα 2.5 φορές μικρότερο χρονικό βήμα από αυτό της καταγραφής το οποίο εξασφαλίζει και επαρκή ακρίβεια.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.16 και 5.17 με τη χρήση διανυσμάτων

Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα από την επίλυση με ένα διάνυσμα Ritz και μέχρι τον 4ο όροφο προσεγγίζει περισσότερο την ακριβή λύση (Newmark) σε σχέση με τη χρήση μιας ιδιομορφής, ενώ από τον 5ο όροφο και πάνω γίνεται το αντίστροφο, δηλαδή με τη χρήση μιας ιδιομορφής το αποτέλεσμα προσεγγίζει περισσότερο την ακριβή λύση (Newmark) σε σχέση με τη χρήση ενός διανύσματος Ritz. Τα αποτελέσματα όμως με τη χρήση δύο ιδιομορφών φαίνεται να είναι πολύ κοντά στα ακριβή ενώ αυτά με τη χρήση δύο διανυσμάτων Ritz παρουσιάζουν σημαντικές αποκλίσεις από τα ακριβή, με μεγαλύτερη διαφορά στη τιμή της μέγιστης τέμνουσας βάσης.

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.18.

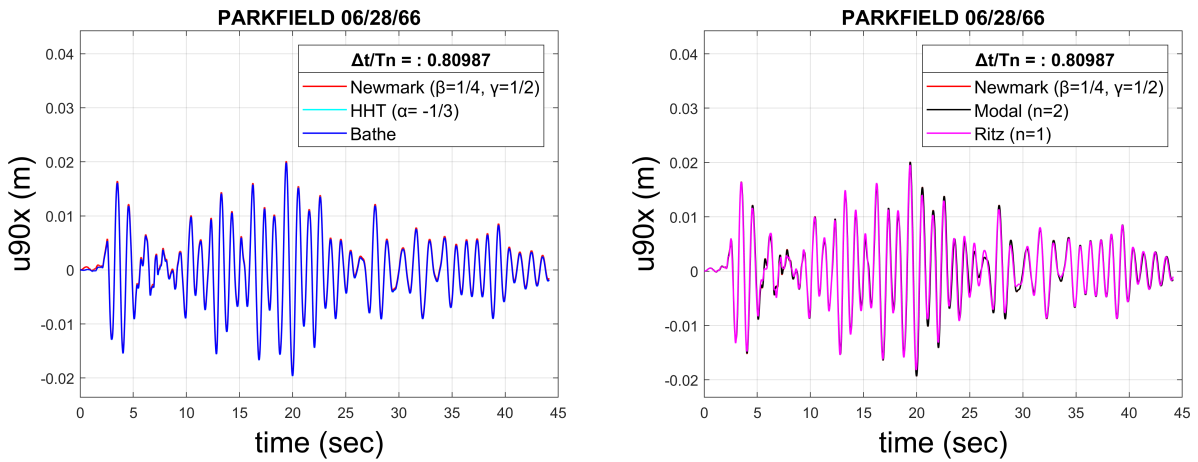


Σχήμα 5.18: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

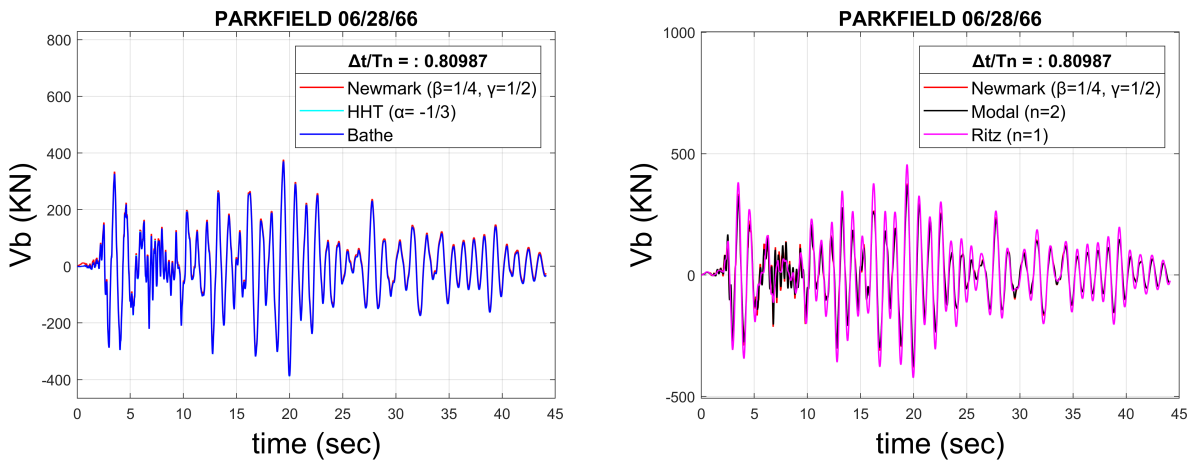
Παρατηρούμε ότι ο χρόνος για όλες τις μεθόδους, μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του χρονικού βήματος. Η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών μας δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια στο μικρότερο χρόνο εκτέλεσης. Η μέθοδος Bathe παρουσιάζει σημαντική διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης σε σχέση με τις άλλες αριθμητικές μεθόδους η οποία αποδόθηκε στο γεγονός ότι το χρονικό βήμα υποδιαιρείται και έτσι χρειάζεται η αντιστροφή δύο ενεργών μητρώων δυσκαμψίας και διπλάσιες αριθμητικές πράξεις.

## 5.2.2 ΣΕΙΣΜΟΣ PARKFIELD 06/28/66

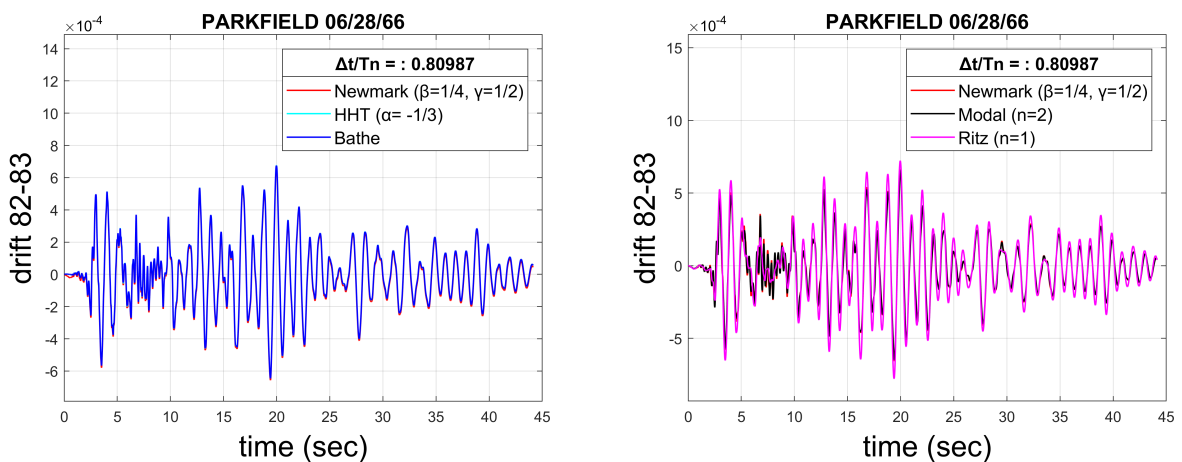
Η επίλυση έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ ). Στα σχήματα 5.19 μέχρι 5.24 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως με την προηγούμενη καταγραφή.



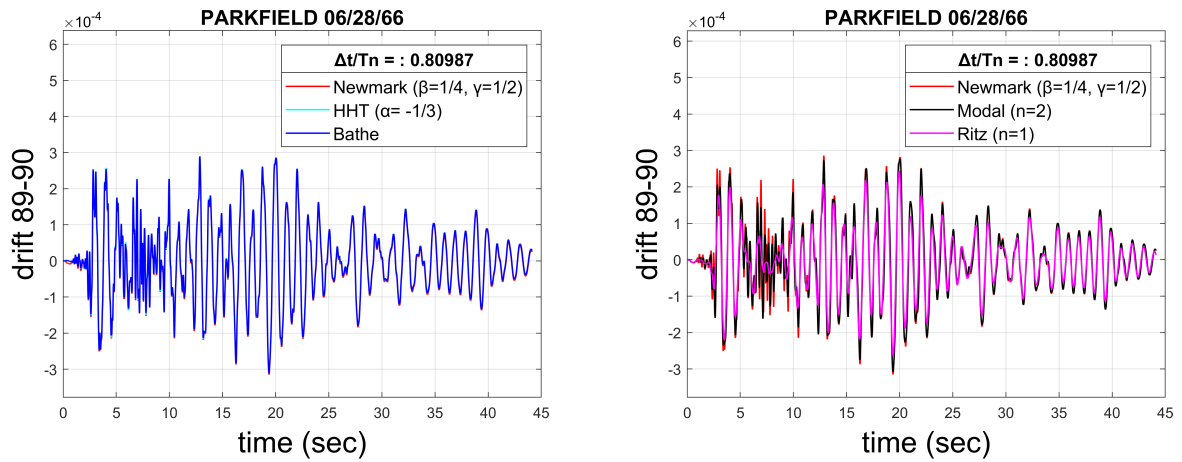
Σχήμα 5.19: Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.01$  s).



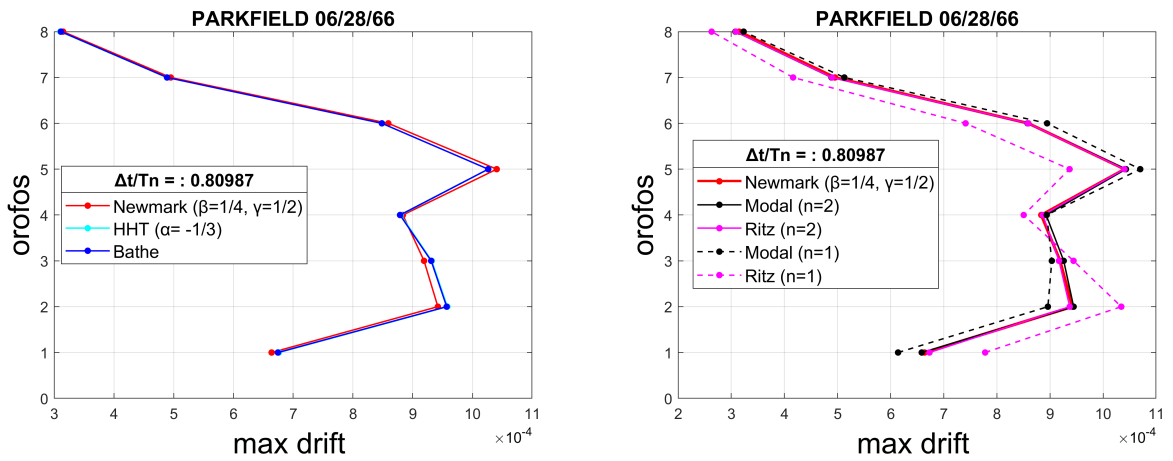
Σχήμα 5.20: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$  s).



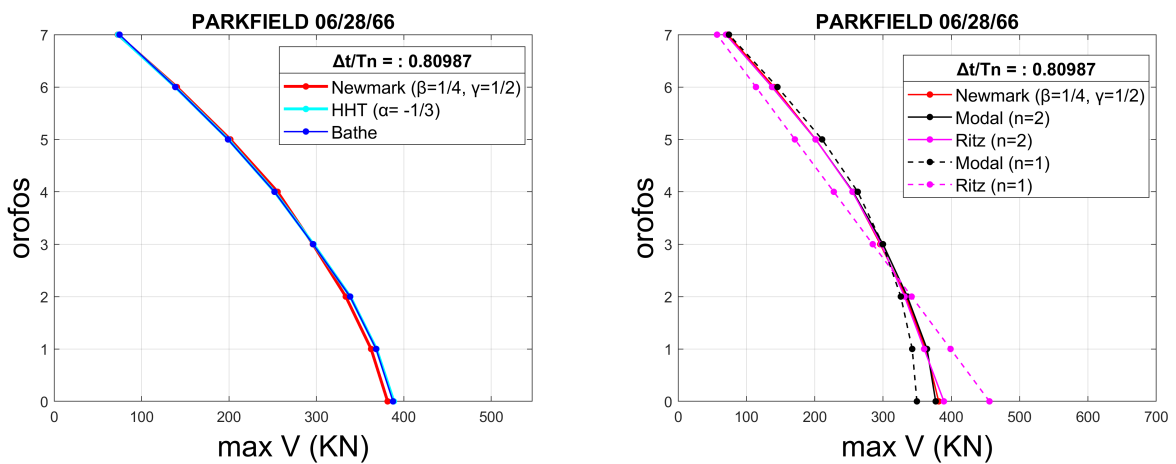
Σχήμα 5.21: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).



Σχήμα 5.22: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).



Σχήμα 5.23: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).

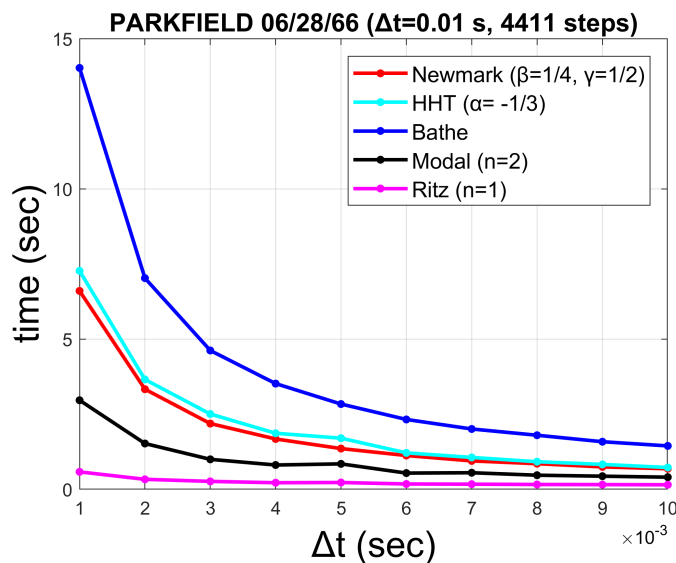


Σχήμα 5.24: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $\alpha = -1/3$ ), Bathe και επαλληλία ιδιομορφών με τη χρήση δύο ιδιομορφών, πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.23 και 5.24 με τη χρήση διανυσμάτων Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα από την επίλυση με τη χρήση μιας ιδιομορφής προσεγγίζει αρκετά την ακριβή λύση ενώ η επίλυση με ένα διάνυσμα Ritz παρουσιάζει σημαντικές διαφορές, με μεγαλύτερη διαφορά στη τιμή της μέγιστης τέμνουσας βάσης. Τα αποτελέσματα όμως με τη χρήση δύο ιδιομορφών και με τη χρήση δύο διανυσμάτων Ritz φαίνεται να είναι πολύ κοντά στα ακριβή.

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.25.



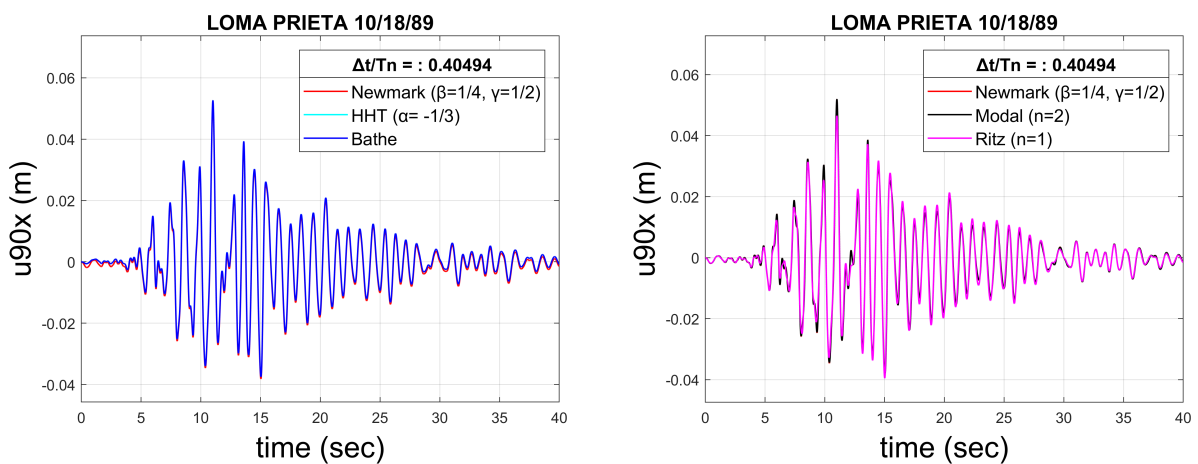
Σχήμα 5.25: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος για όλες τις μεθόδους, μειώνεται εκθετικά με τη μείωση του χρονικού βήματος. Η μέθοδος επαλληλίας των ιδιομορφών μας δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια στο μικρότερο χρόνο εκτέλεσης. Η μέθοδος Bathe παρουσιάζει σημαντική διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης σε σχέση με τις άλλες αριθμητικές μεθόδους η οποία αποδόθηκε στο γεγονός ότι το χρονικό βήμα υποδιαιρείται και έτσι χρειάζεται η αντιστροφή δύο ενεργών μητρώων δυσκαμψίας και διπλάσιες αριθμητικές πράξεις.

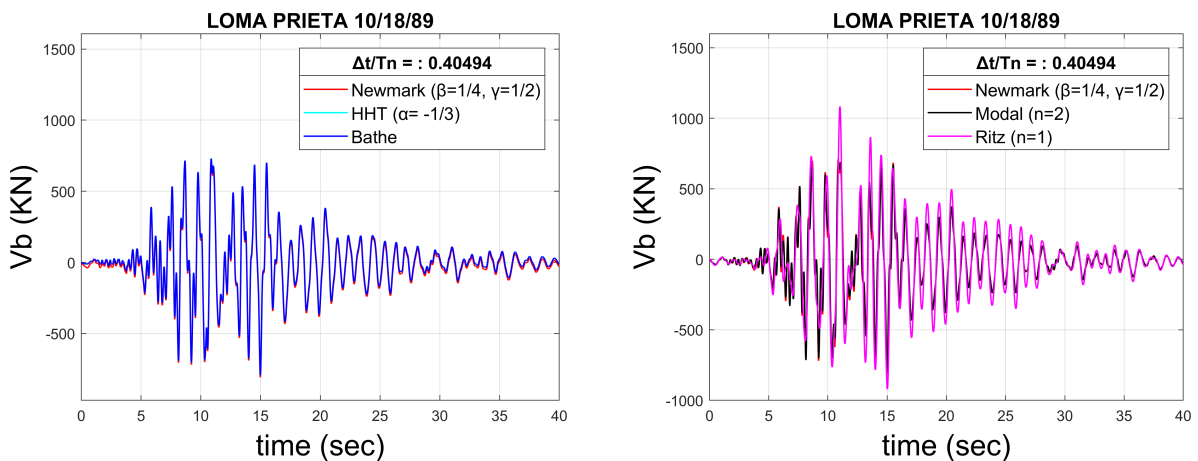


### 5.2.3 ΣΕΙΣΜΟΣ LOMA PRIETA 10/18/89

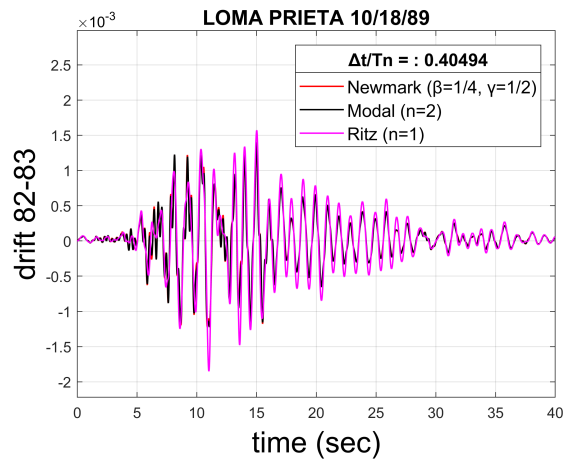
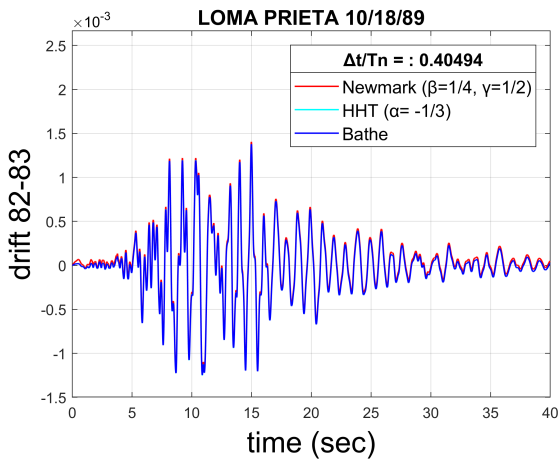
Η επίλυση έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ ). Στα σχήματα 5.26 μέχρι 5.31 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως με την προηγούμενη καταγραφή.



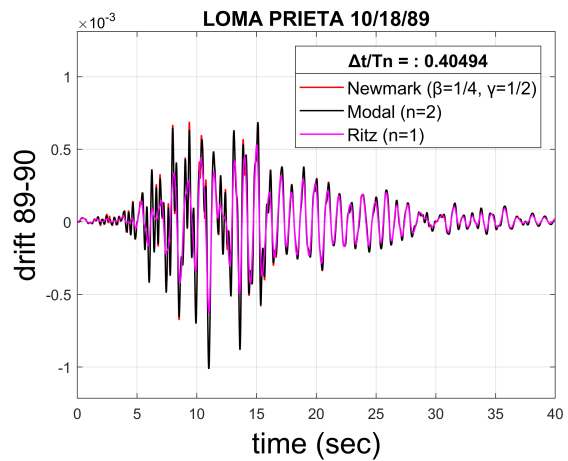
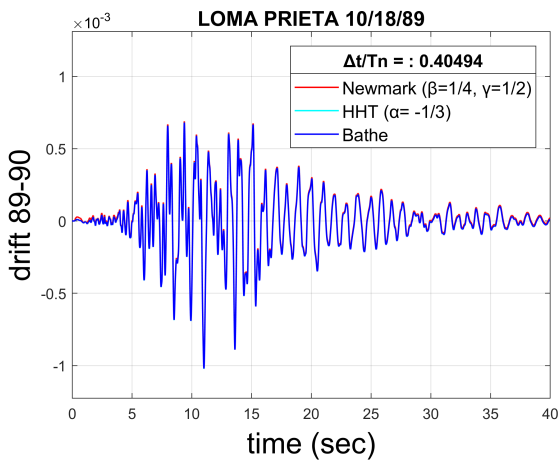
Σχήμα 5.26: Μετακίνηση του κόμβου 90 κατά x ( $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ ).



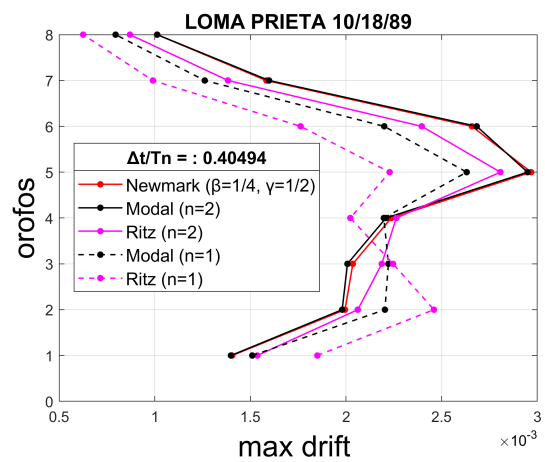
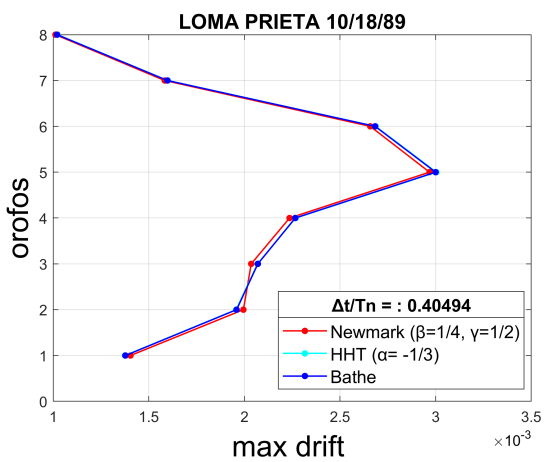
Σχήμα 5.27: Τέμνουσα βάση ( $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ ).



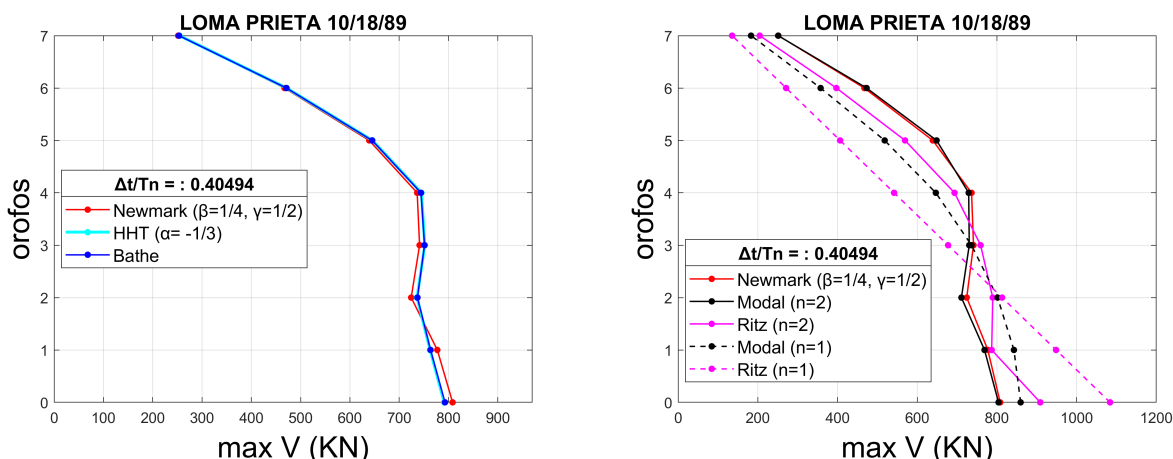
Σχήμα 5.28: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$  s).



Σχήμα 5.29: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$  s).



Σχήμα 5.30: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$  s).

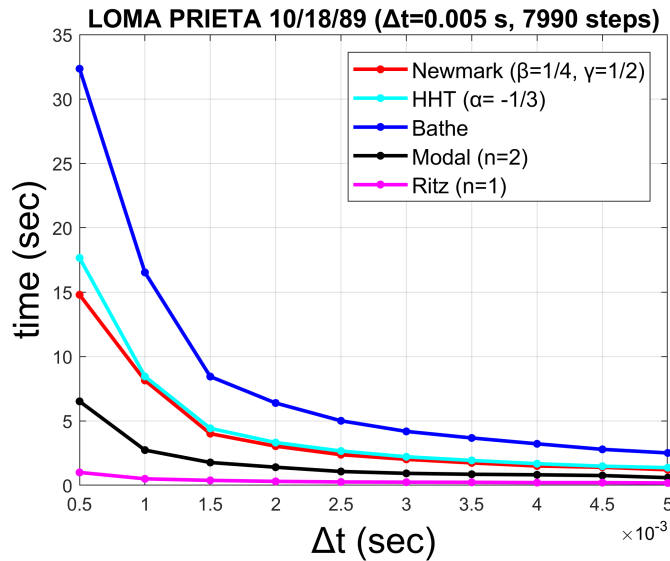


Σχήμα 5.31: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$  s).

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $a = -1/3$ ), Bathe και επαλληλία ιδιομορφών με τη χρήση δύο ιδιομορφών, πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής. Επίσης ο λόγος  $\Delta t/T$  είναι αρκετά μικρός και επομένως η αριθμητική απόσβεση είναι μικρή.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.30 και 5.31 με τη χρήση διανυσμάτων Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα από την επίλυση με τη χρήση μιας ιδιομορφής προσεγγίζει περισσότερο την ακριβή λύση σε σχέση με την επίλυση με ένα διάνυσμα Ritz η οποία παρουσιάζει σημαντικές διαφορές, με μεγαλύτερη διαφορά στη τιμή της μέγιστης τέμνουσας βάσης. Τα αποτελέσματα όμως με τη χρήση δύο ιδιομορφών φαίνεται να είναι πολύ κοντά στα ακριβή κάτι που δεν συμβαίνει με τα αποτελέσματα από την επίλυση με τη χρήση δύο διανυσμάτων Ritz.

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.32.



Σχήμα 5.32: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

### 5.3 ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΙΚΟΣΙ ΔΥΟ ΟΡΟΦΩΝ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ

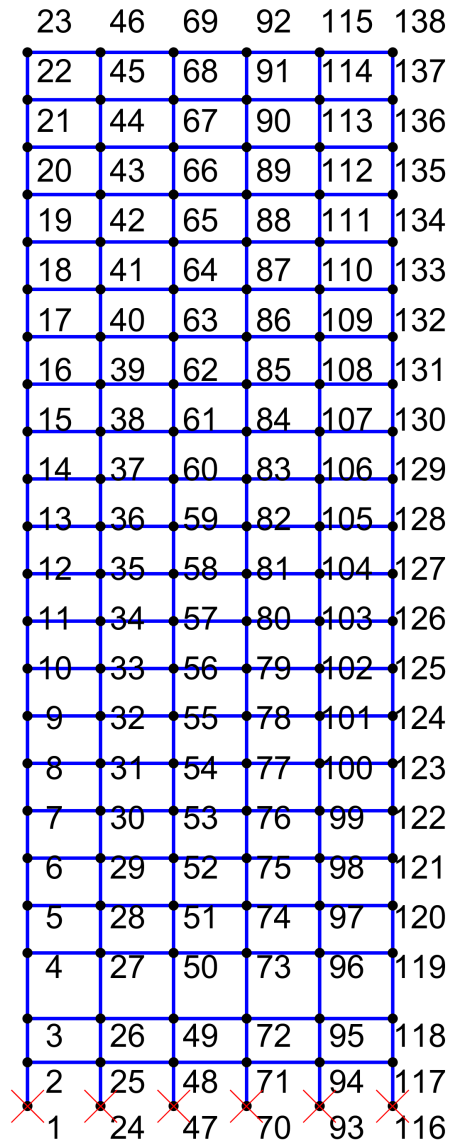
Στο παράδειγμα αυτό, μελετήσαμε έναν επίπεδο φορέα 22 ορόφων, ύψους 88.1 μέτρων και πέντε ανοιγμάτων, ο οποίος φαίνεται στο σχήμα 5.33 μαζί με την αριθμηση των κόμβων στους οποίους συγκεντρώνονται οι μάζες αφού έγινε η παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών. Κάθε κόμβος έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας, δύο μετατοπίσεις και μια στροφή. Όλοι οι κόμβοι στη βάση του φορέα είναι πακτωμένοι. Τα στοιχεία είναι από χάλυβα και οι διατομές σε κάθε όροφο φαίνονται στον πίνακα 5.1 όπου παρουσιάζονται και τα ύψη των ορόφων. Το μήκος των ανοιγμάτων είναι 6.1 μέτρα. Σε κάθε όροφο επιβάλαμε γραμμικό φορτίο 50 kN/m. Το μητρώο απόσβεσης μορφώθηκε με βάση τους ιδιομορφικούς λόγους απόσβεσης και για  $\zeta = 3\%$  για όλες τις ιδιομορφές. Έτσι ακόμη και οι ανώτερες ιδιομορφές έχουν τον ίδιο λόγο απόσβεσης κάτι που δεν θα ίσχυε με απόσβεση Rayleigh και επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε εάν οι μέθοδοι με αριθμητική απόσβεση διαφοροποιούν τα αποτελέσματα σε σχέση με αυτές χωρίς αριθμητική απόσβεση.

Ο φορέας έχει ιδιοπεριόδους  $T_1 = 2.739$  sec,  $T_2 = 0.931$  sec και  $T_{min} = 0.0081$  sec. Εάν επιθυμούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, η απαίτηση για ευστάθεια θα μας επέβαλε το χρονικό βήμα  $\Delta t$  να είναι τουλάχιστον ίσο με  $T_{min}/\pi = 0.0026$  sec, το οποίο είναι μικρότερο από το βήμα των καταγραφών και από αυτό που χρειάζεται για ικανοποιητική ακρίβεια όπως θα δούμε πιο κάτω. Η επίλυση έγινε για τρεις διαφορετικές σεισμικές καταγραφές, με μεθόδους άνευ συνθηκών ευσταθείς, με και χωρίς αριθμητική απόσβεση αλλά και με επαλληλία ιδιομορφών και με τη χρήση διανυσμάτων Ritz εξαρτώμενων από δύναμη. Για την επίλυση των εξισώσεων στις ιδιομορφικές συντεταγμένες αλλά και για την επίλυση του μειωμένου προβλήματος με τη χρήση διανυσμάτων Ritz, χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο Newmark σταθερής μέσης επιτάχυνσης (κανόνας τραπεζι-

ου). Για τη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών υπολογίσαμε ότι με τη συμβολή των δύο πρώτων ιδιομορφών απο τις 264 στο σύνολο, η δρώσα ιδιομορφική μάζα είναι μεγαλύτερη από το 90% της συνολικής μάζας του φορέα.

Πίνακας 5.1: ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΥΨΗ ΦΟΡΕΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΟΡΟΦΟ

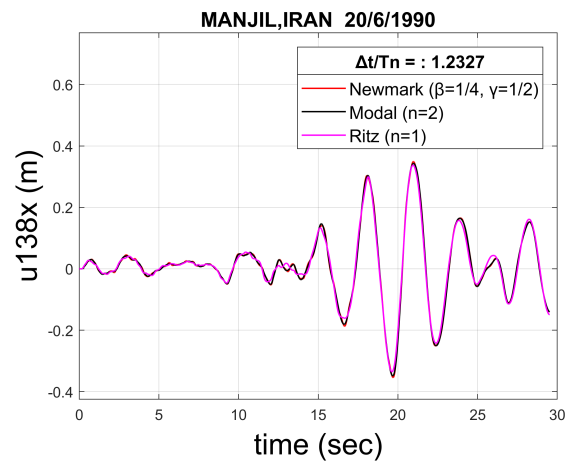
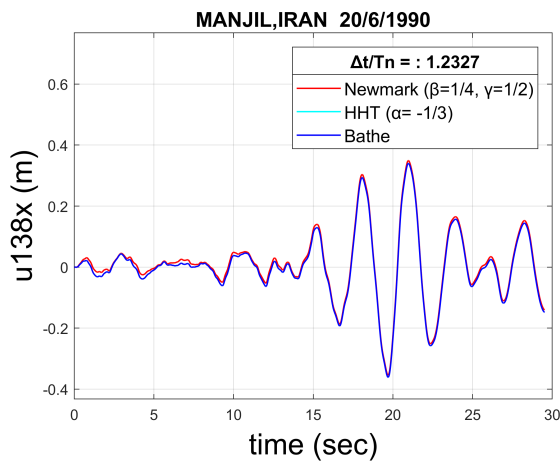
Όροφος	Ύψος (m)	Εξωτερικά υποστυλώματα (in)	Εσωτερικά υποστυλώματα	Δοκοί
22	88.1	15x15x0.5	w24x207	w18x46
21	84.1	15x15x0.5	w24x207	w24x55
20	80.2	15x15x0.75	w24x250	w27x84
19	76.2	15x15x0.75	w24x250	w30x108
18	72.2	15x15x1.0	w24x279	w30x108
17	68.3	15x15x1.0	w24x279	w33x118
16	64.3	15x15x1.0	w24x279	w33x118
15	60.4	15x15x1.0	w24x335	w33x118
14	56.4	15x15x1.0	w24x355	w36x135
13	52.4	15x15x1.0	w24x355	w36x135
12	48.5	15x15x1.25	w24x408	w36x135
11	44.5	15x15x1.25	w24x408	w36x135
10	40.5	15x15x1.25	w24x408	w36x135
9	36.6	15x15x1.25	w24x408	w36x135
8	32.6	15x15x1.25	w24x408	w36x135
7	28.7	15x15x1.25	w24x408	w36x135
6	24.7	15x15x2	w24x492	w36x135
5	20.7	15x15x2	w24x492	w33x118
4	16.8	15x15x2	w24x492	w33x118
3	12.8	15x15x2	w24x492	w33x118
2	7.3	15x15x2	w24x492	w33x118
1	3.7	15x15x2	w24x492	w14x22



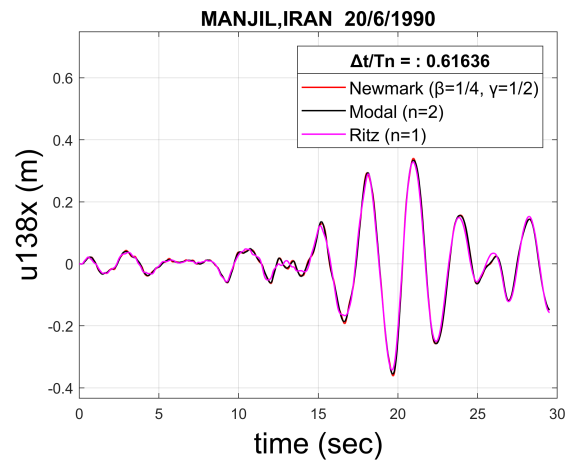
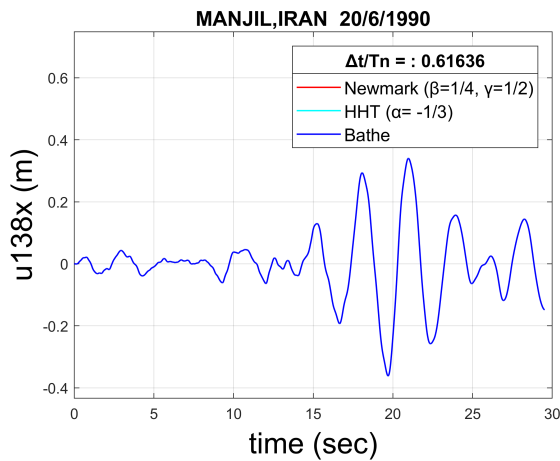
Σχήμα 5.33: ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΦΟΡΕΑΣ ΕΙΚΟΣΙ ΔΥΟ ΟΡΟΦΩΝ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΑΝΟΙΓΜΑΤΩΝ.

### 5.3.1 ΣΕΙΣΜΟΣ ΜΑΝJIL, IRAN 20/6/1990

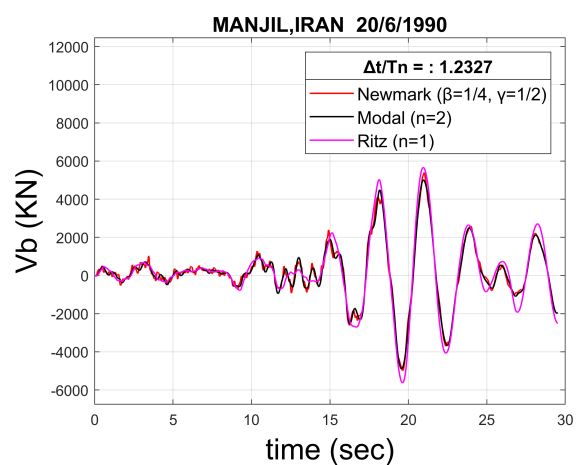
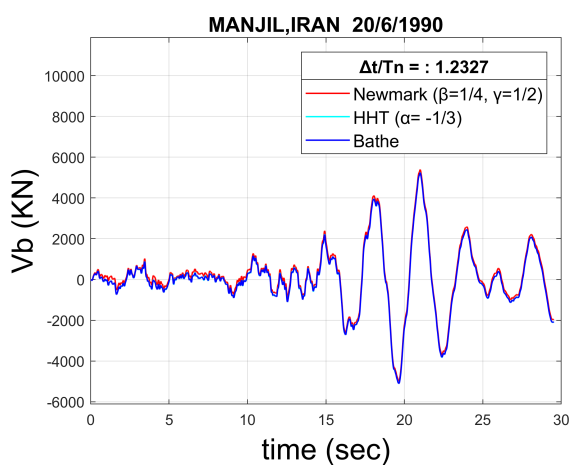
Η επίλυση αρχικά έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ ). Η επίλυση επαναλήφθηκε χρησιμοποιώντας για χρονικό βήμα το μισό της καταγραφής ( $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ ). Στα σχήματα 5.34 μέχρι 5.41 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα.



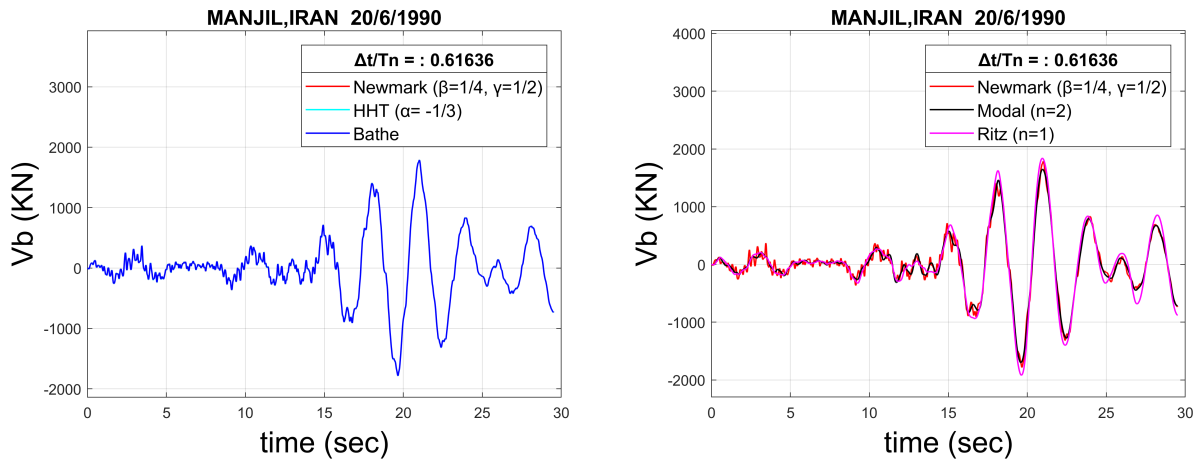
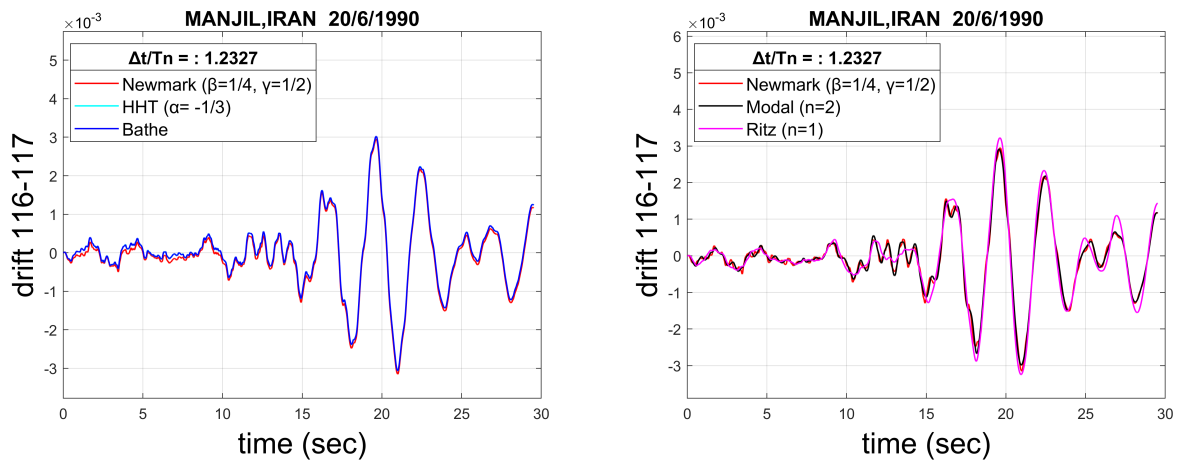
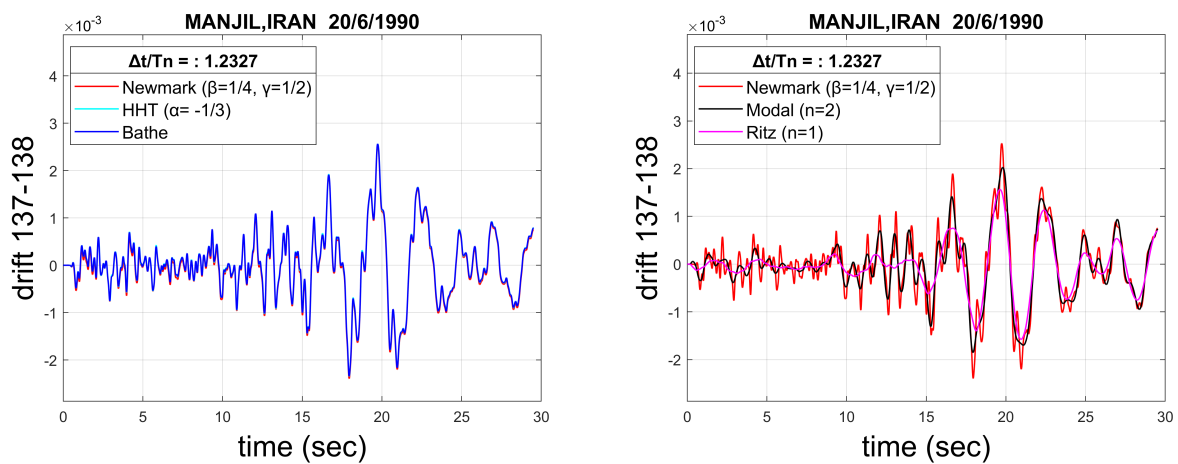
Σχήμα 5.34: Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.01$  s).



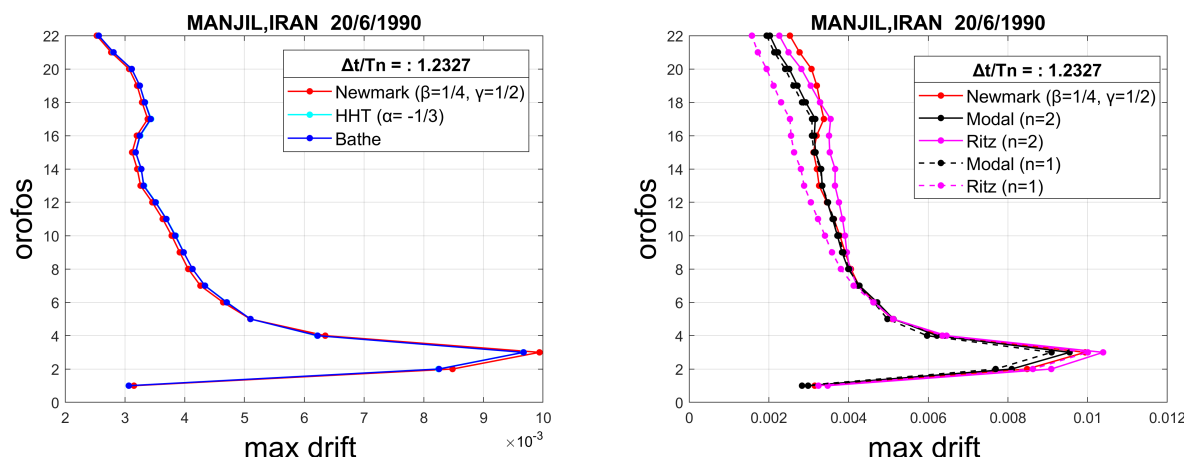
Σχήμα 5.35: Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.005$  s).



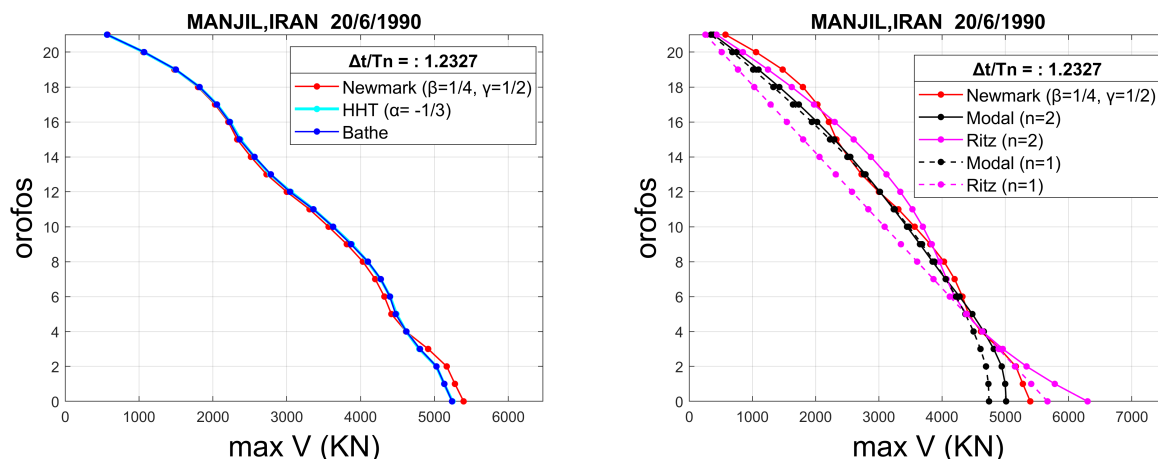
Σχήμα 5.36: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$  s).

Σχήμα 5.37: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$  s).Σχήμα 5.38: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).Σχήμα 5.39: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).





Σχήμα 5.40: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ).



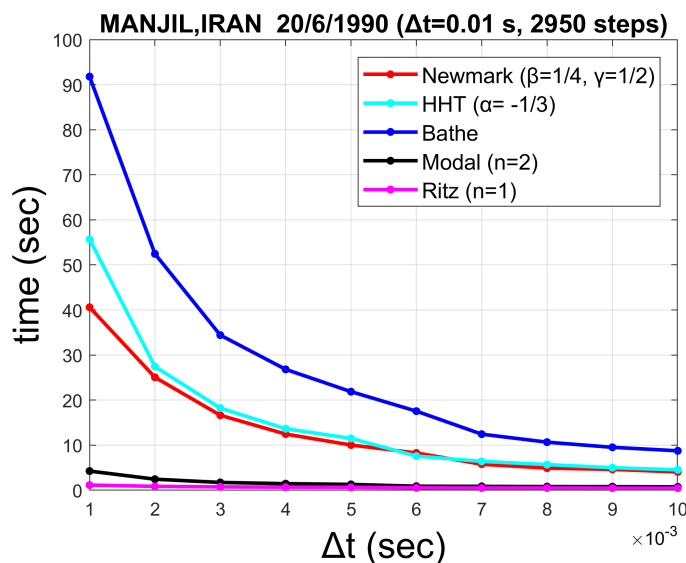
Σχήμα 5.41: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ ).

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $a = -1/3$ ) και Bathe πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής. Η μέθοδος Newmark προβλέπει ελαφρώς μεγαλύτερη μέγιστη τέμνουσα βάσης. Τα αποτελέσματα από την επίλυση με χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$  ταυτίζονται. Δεδομένου ότι η επίλυση με το βήμα της καταγραφής μας εξασφαλίζει επαρκή ακρίβεια, σημαίνει ότι εάν επιλέγαμε τη μέθοδο κεντρικών διαφορών, η απαίτηση για ευστάθεια θα μας επέβαλε βήμα 3.9 φορές μικρότερο χρονικό βήμα και επομένως υψηλότερο υπολογιστικό κόστος.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.40 και 5.41 με τη χρήση διανυσμάτων Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα από την επίλυση τόσο με δύο διάνυσμα Ritz όσο και με τη χρήση δύο ιδιομορφών παρουσιάζουν

αποκλίσεις από την ακριβή λύση (Newmark), ειδικά στις τιμές των μέγιστων τεμνουσών των ορόφων. Για μεγαλύτερη ακρίβεια φαίνεται να χρειάζονται τρεις ή και περισσότερες ιδιομορφές και διανύσματα Ritz.

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.42.

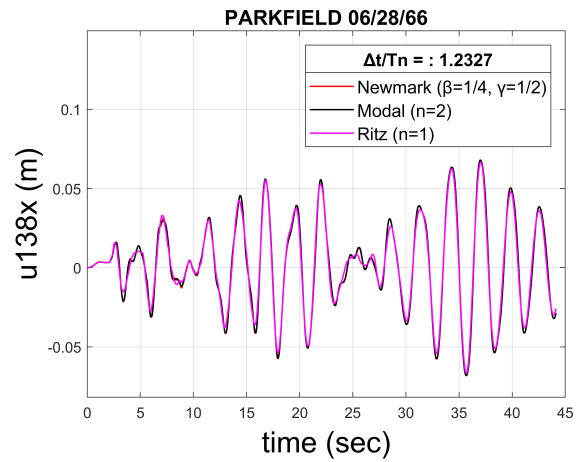
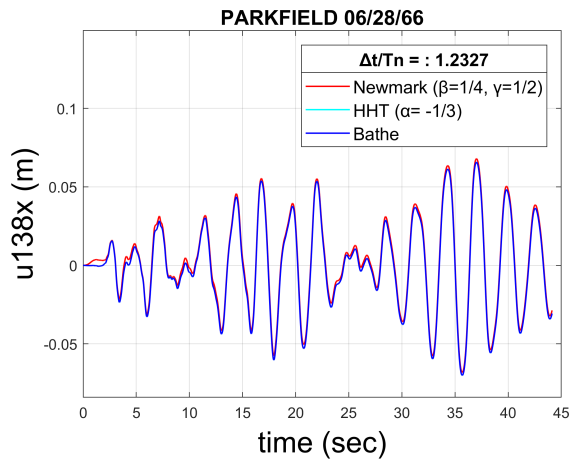


Σχήμα 5.42: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

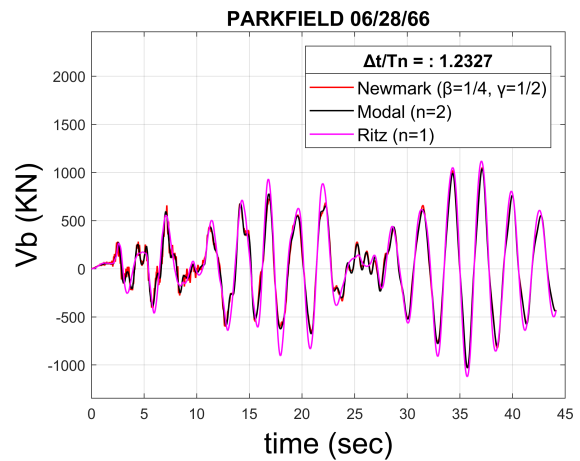
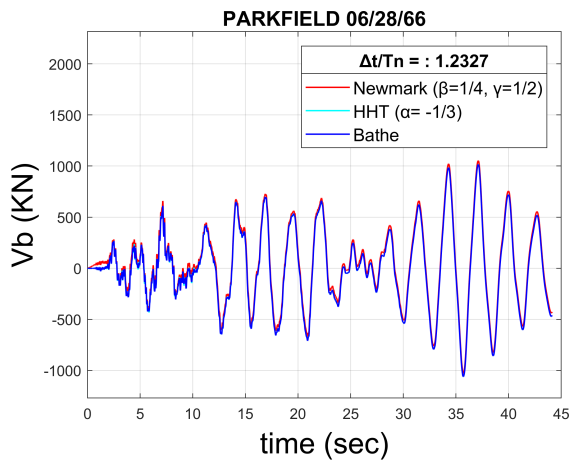
Παρατηρούμε ότι ο χρόνος για όλες τις μεθόδους, μειώνεται εκθετικά με τη μείωση του χρονικού βήματος. Η μέθοδος Newmark μας δίνει τη μεγαλύτερη ακρίβεια στο μικρότερο χρόνο εκτέλεσης. Η μέθοδος Bathe παρουσιάζει σημαντική διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης σε σχέση με τις άλλες αριθμητικές μεθόδους η οποία αποδόθηκε στο γεγονός ότι το χρονικό βήμα υποδιαιρείται και έτσι χρειάζεται η αντιστροφή δύο ενεργών μητρώων δυσκαμψίας και διπλάσιες αριθμητικές πράξεις.

### 5.3.2 ΣΕΙΣΜΟΣ PARKFIELD 06/28/66

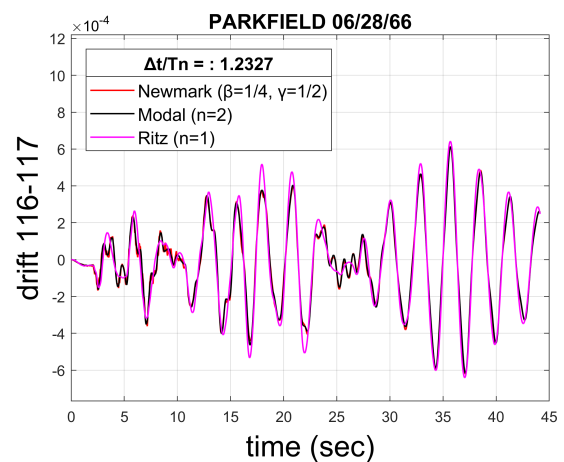
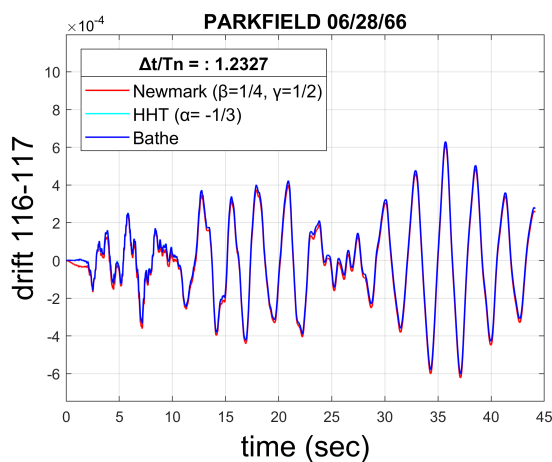
Η επίλυση έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ ). Στα σχήματα 5.43 μέχρι 5.48 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως με την προηγούμενη καταγραφή.



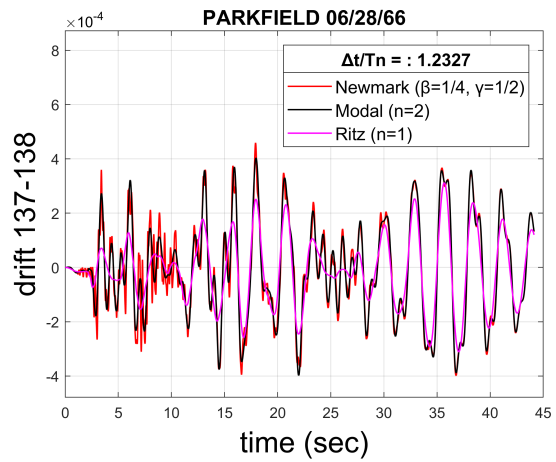
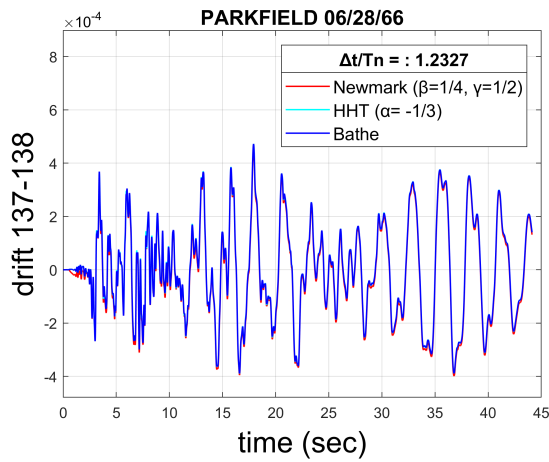
Σχήμα 5.43: Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.01$  s).



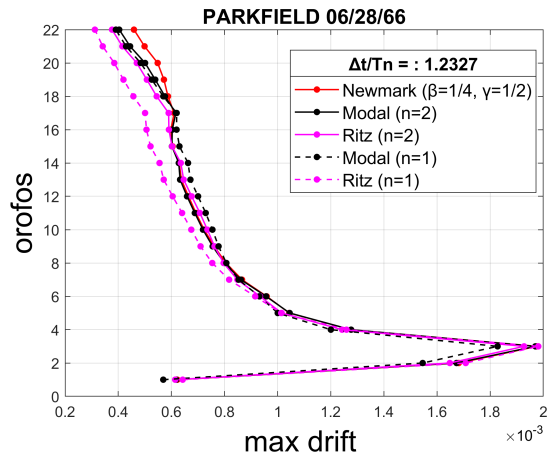
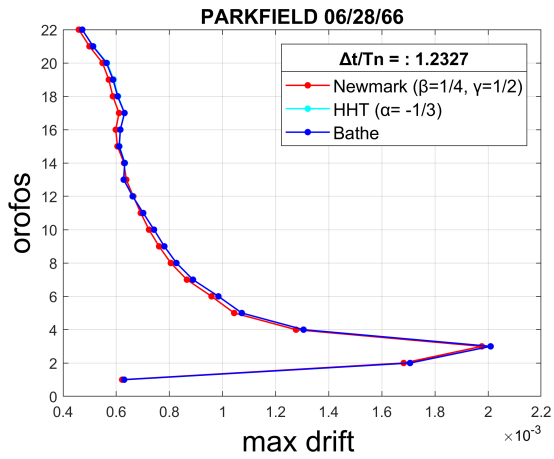
Σχήμα 5.44: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.01$  s).



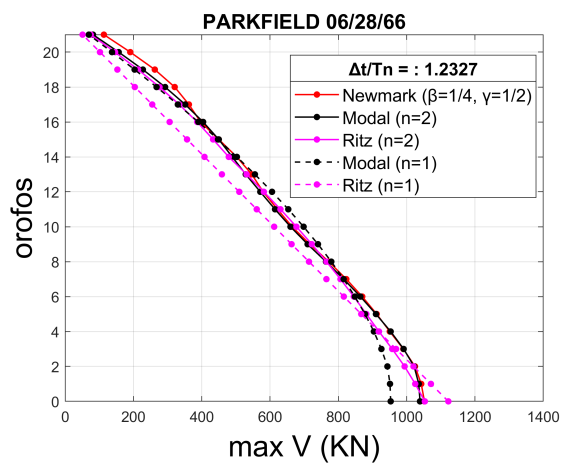
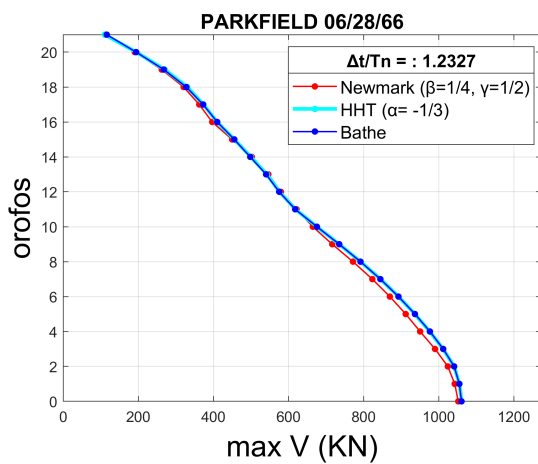
Σχήμα 5.45: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).



Σχήμα 5.46: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.01$  s).



Σχήμα 5.47: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).

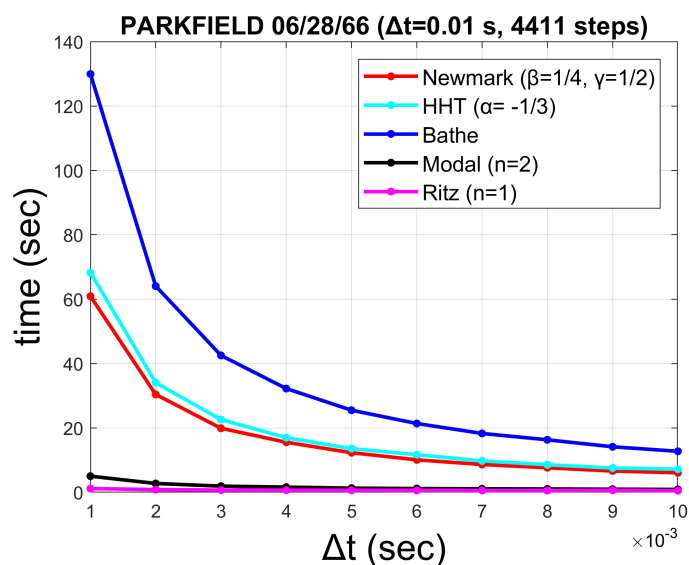


Σχήμα 5.48: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.01$  s).

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $\alpha = -1/3$ ) και Bathe πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής. Η μέθοδος Newmark προβλέπει ελαφρώς μικρότερες μέγιστες τέμνουσες.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.47 και 5.48 με τη χρήση διανυσμάτων Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα από την επίλυση τόσο με δύο διάνυσμα Ritz όσο και με τη χρήση δύο ιδιομορφών προσεγγίζει αρκετά το ακριβές.

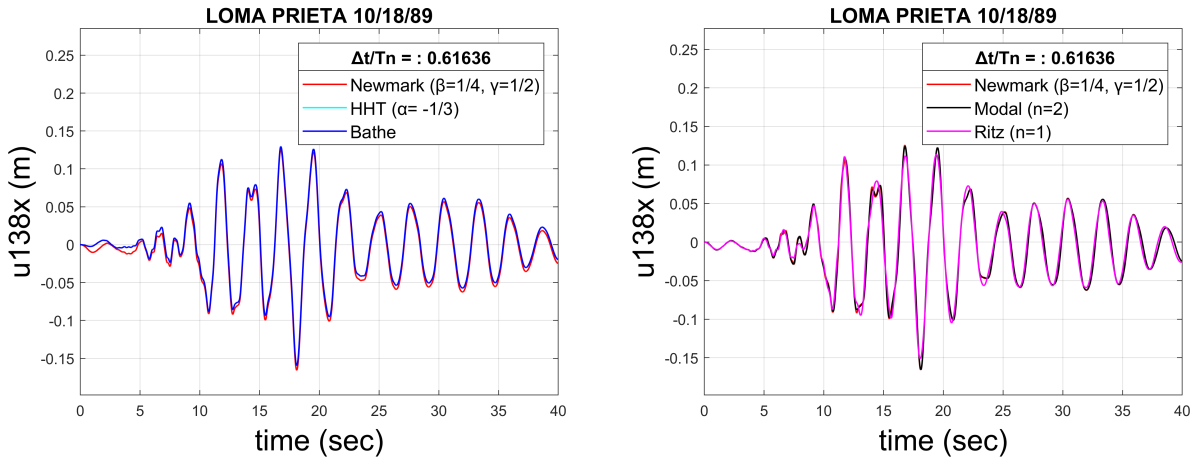
Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.42.



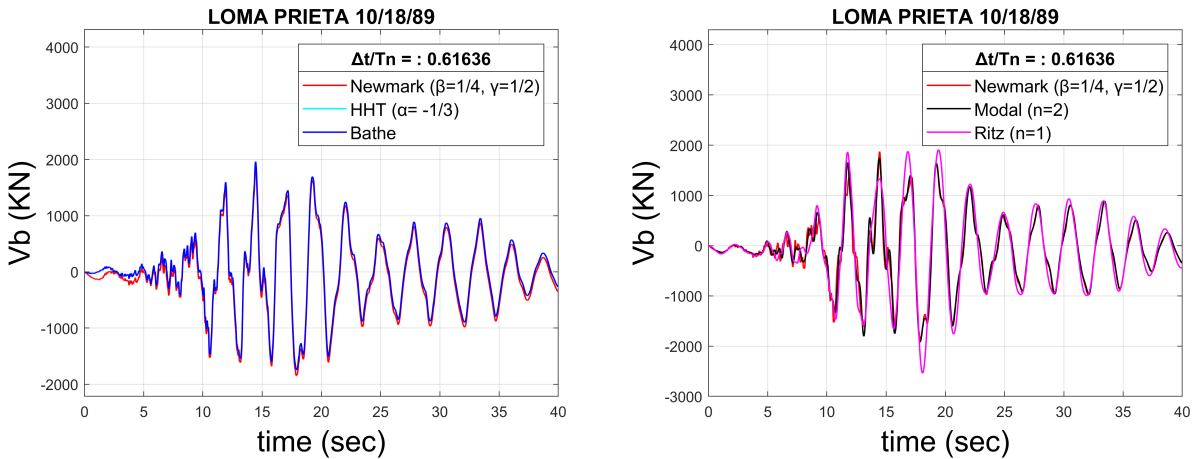
Σχήμα 5.49: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

### 5.3.3 ΣΕΙΣΜΟΣ LOMA PRIETA 10/18/89

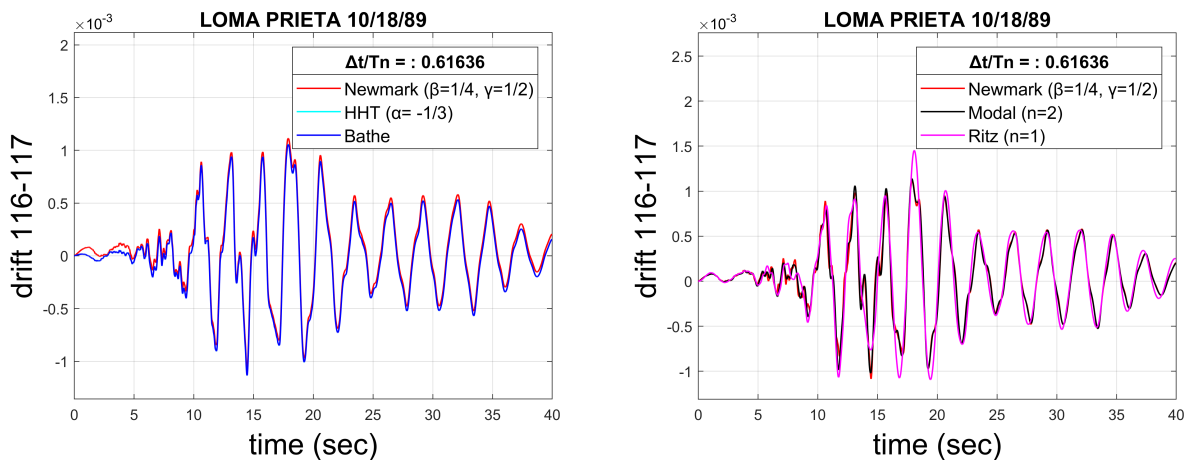
Η επίλυση έγινε χρησιμοποιώντας το χρονικό βήμα της καταγραφής ( $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$ ). Στα σχήματα 5.50 μέχρι 5.55 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως με την προηγούμενη καταγραφή.



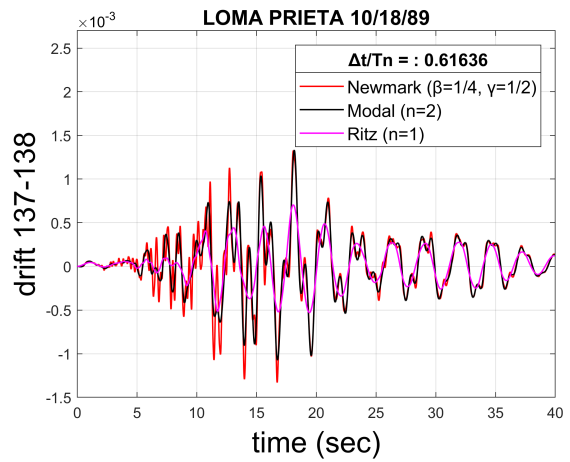
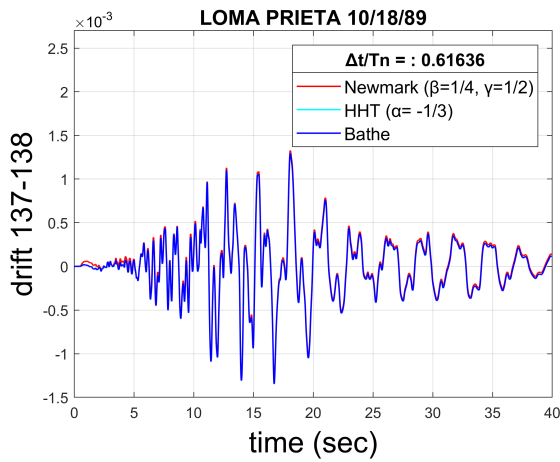
Σχήμα 5.50: Μετακίνηση του κόμβου 138 κατά x ( $\Delta t = 0.005$  s).



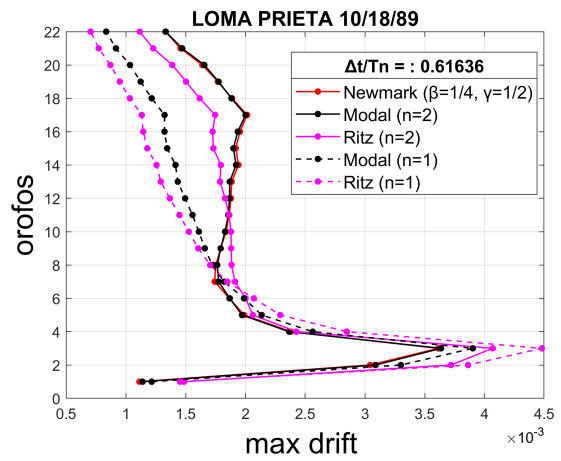
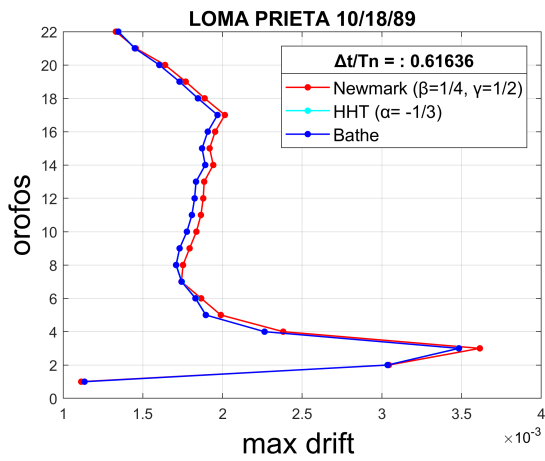
Σχήμα 5.51: Τέμνουσα βάσης ( $\Delta t = 0.005$  s).



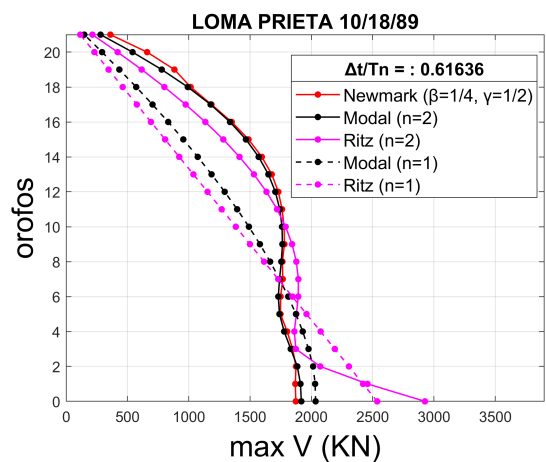
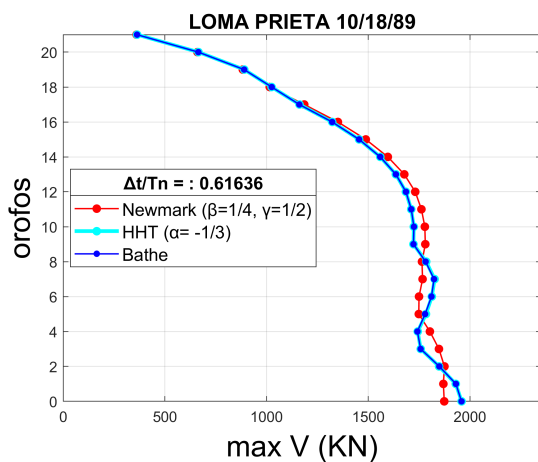
Σχήμα 5.52: Drift πρώτου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$  s).



Σχήμα 5.53: Drift τελευταίου ορόφου ( $\Delta t = 0.005$  s).



Σχήμα 5.54: Μέγιστα drift σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$  s).

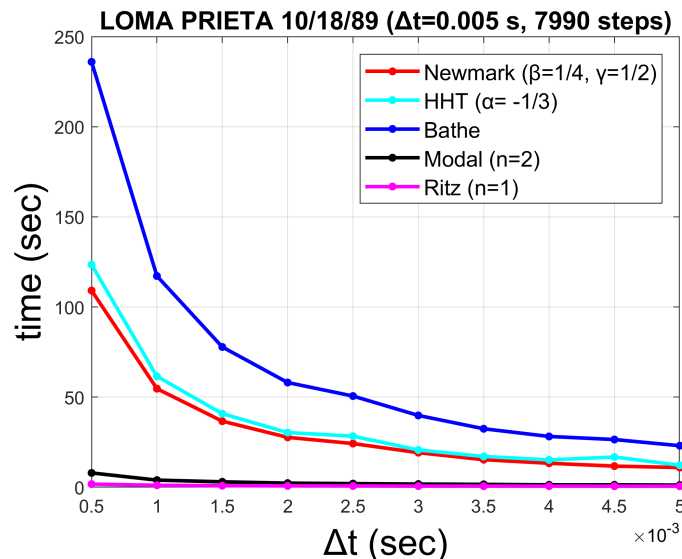


Σχήμα 5.55: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο ( $\Delta t = 0.005$  s).

Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις με τις μεθόδους: Newmark-κανόνας τραπεζίου, Hilber-Hughes-Taylor με μέγιστη αριθμητική απόσβεση ( $\alpha = -1/3$ ) και Bathe πρακτικά συμπίπτουν. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μην συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα σχήματα 5.54 και 5.55 με τη χρήση διανυσμάτων Ritz και με την επαλληλία ιδιομορφών, παρατηρούμε ότι η μέγιστη τέμνουσα βάσης με δύο διάνυσμα Ritz παρουσιάζει υψηλή απόκλιση από την ακριβή λύση ενώ με τη χρήση δύο ιδιομορφών τα αποτελέσματα πρακτικά συμπίπτουν με την ακριβή λύση.

Η επίλυση πραγματοποιήθηκε για όλες τις μεθόδους και για χρονικό βήμα  $\Delta t$  μέχρι και δέκα φορές μικρότερο από αυτό της καταγραφής, μετρώντας κάθε φορά το χρόνο εκτέλεσης. Οι χρόνοι φαίνονται στο σχήμα 5.42.

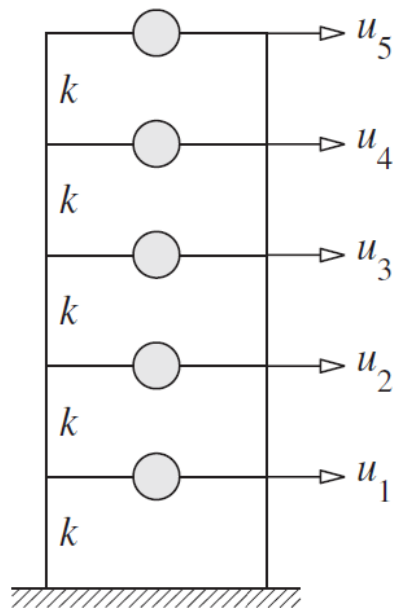


Σχήμα 5.56: Χρόνοι επίλυσης για διάφορα  $\Delta t$ .

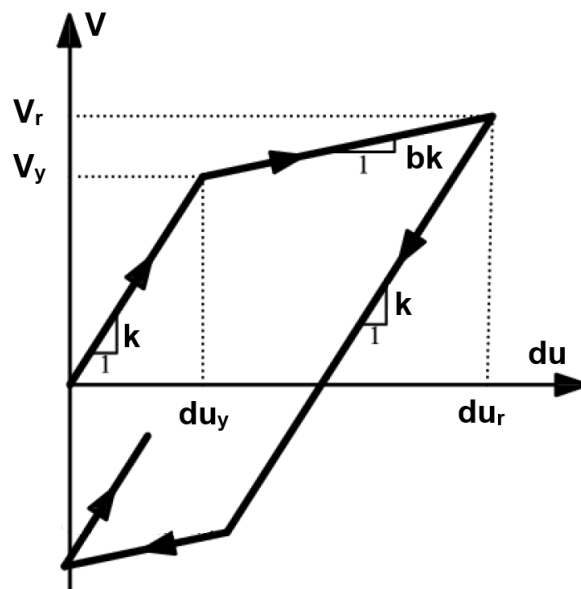
## 5.4 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΠΕΝΤΕ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Για να βεβαιωθούμε για τη σωστή κωδικοποίηση των μεθόδων για τα μη γραμμικά συστήματα, επιλύσαμε το πιο κάτω παράδειγμα, του οποίου τη λύση την είχαμε από τη βιβλιογραφία. Ο φορέας που φαίνεται στο σχήμα 5.57, υποβάλλεται σε ημιτονοειδή επιτάχυνση εδάφους  $\ddot{u}_g = 0.5g \sin 2\pi t$  για χρόνο  $t_d = 1 \text{ sec}$ . Ο κάθε όροφος έχει μάζα  $m = 45.34 \text{ Mg}$ , αρχική δυσκαμψία  $k = 17513 \text{ kN/m}$  και τέμνουσα διαρροής  $V_y = 556 \text{ kN}$  ενώ η ελαστοπλαστική σχέση τέμνουσας-drift ορόφου φαίνεται στο σχήμα 5.58 με κλίση μετελαστικού κλάδου  $ah = 0.05$ . Για όλες τις ιδιομορφές ο λόγος απόσβεσης θεωρήθηκε  $\zeta_n = 5\%$ . Ο φορέας έχει ιδιοπεριόδους  $T_1 = 1.123 \text{ sec}$ ,  $T_2 = 0.385 \text{ sec}$  και  $T_{min} = 0.167 \text{ sec}$ .





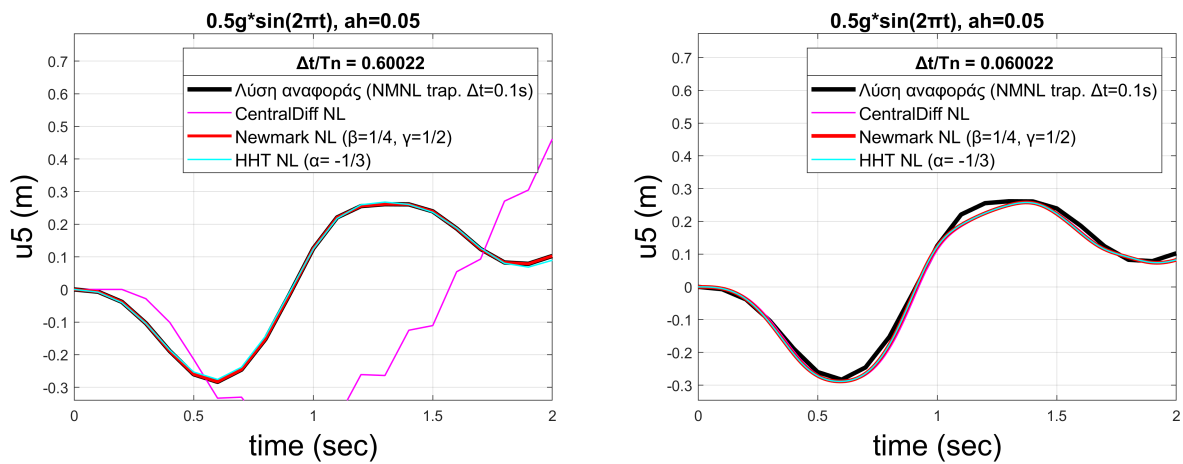
Σχήμα 5.57: ΠΕΝΤΑΩΡΟΦΟ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ.



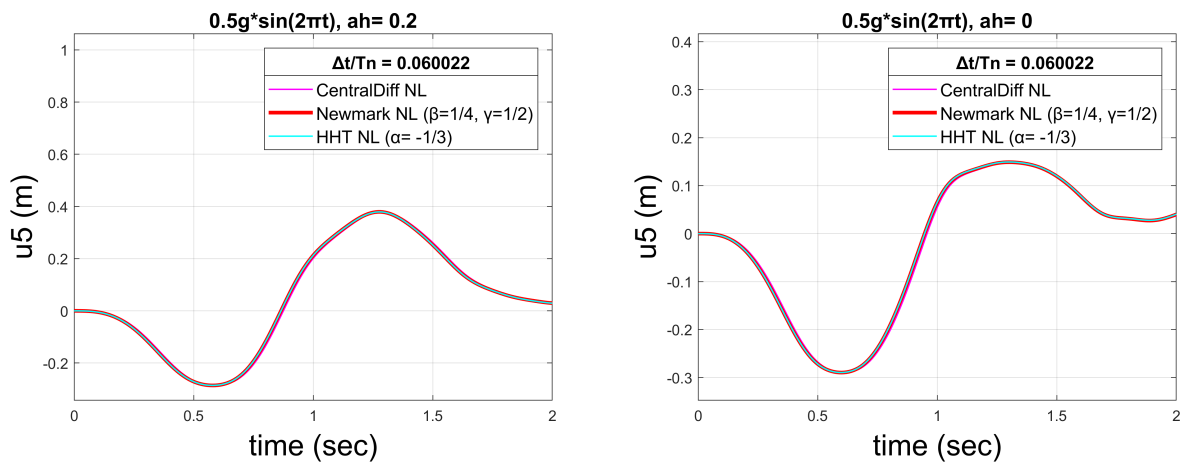
Σχήμα 5.58: Ελαστοπλαστική σχέση τέμνουσας-drift ορόφου

Η επίλυση έγινε για  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ , όσο δηλαδή ήταν και το βήμα της λύσης αναφοράς. Για το επιλεγμένο βήμα η μέθοδος κεντρικών διαφορών αστοχεί και γι' αυτό επαναλάβαμε την επίλυση για  $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ . Η απόκριση της οροφής φαίνεται στο σχήμα 5.59. Η επίλυση επαναλήφθηκε για κλίση του μετελαστικού κλάδου  $ah = 0.2$  και  $ah = 0$  με χρονικό βήμα

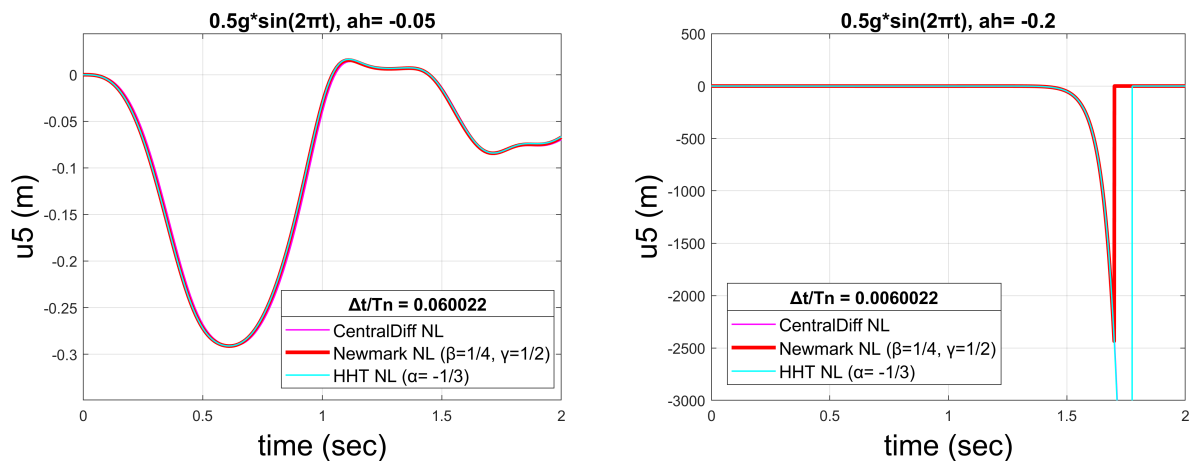
$\Delta t = 0.01 \text{ sec}$  ώστε να μην αστοχεί η μέθοδος κεντρικών διαφορών. Έπειτα προχωρήσαμε στην επίλυση με αρνητικές τιμές του  $ah$ . Συγκεκριμένα η επίλυση έγινε για  $ah = -0.05$  και  $ah = -0.2$ . Παρατηρούμε ότι για  $ah = -0.2$  υπάρχει αστοχία όλων των μεθόδων.



Σχήμα 5.59: Απόκριση οροφής ( $ah=0.05$ ).



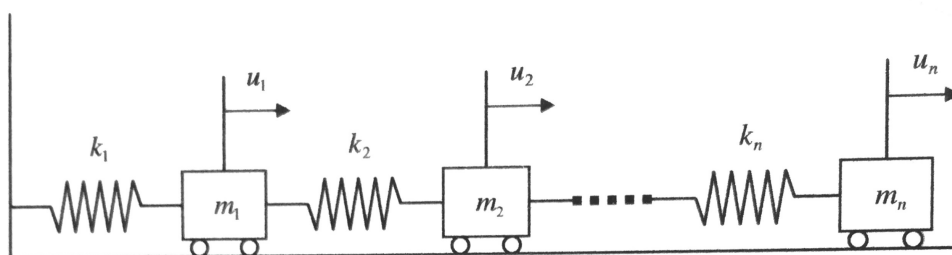
Σχήμα 5.60: Απόκριση οροφής ( $ah=0.2$  και  $ah=0$ ).



Σχήμα 5.61: Απόκριση οροφής ( $ah=-0.05$  και  $ah=-0.2$ ).

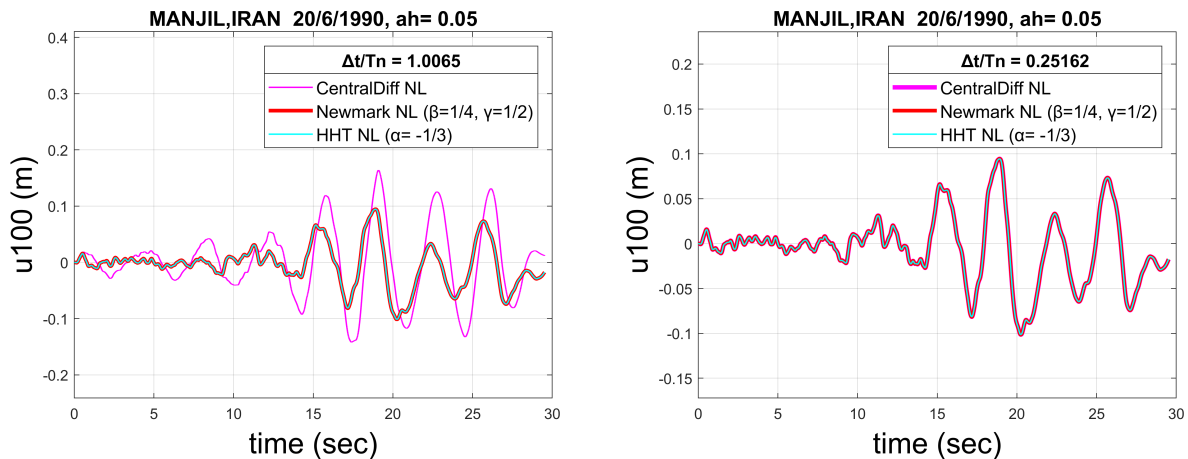
## 5.5 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΕΚΑΤΟ ΒΑΘΜΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Το μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα 5.62, αποτελεί το προσομοίωμα ενός διατμητικού πλαισίου 100 ορόφων με 1 βαθμό ελευθερίας (μετακίνηση) σε κάθε όροφο. Το μοντέλο για  $n = 100$  υποβάλλεται σε σεισμική επιτάχυνση εδάφους σύμφωνα με την καταγραφή του σεισμού MANJIL, IRAN 20/6/1990. Οι μάζες του μοντέλου είναι  $m_1 = m_2 = \dots m_n = 0.1 Mg$ , αρχική δυσκαμψία  $k_1 = k_2 = \dots k_n = 10000 kN/m$  και τέμνουσα διαρροής  $V_y = 1kN$  ενώ η ελαστοπλαστική σχέση τέμνουσας-drift ορόφου φαίνεται στο σχήμα 5.58. Για όλες τις ιδιομορφές ο λόγος απόσβεσης θεωρήθηκε  $\zeta_n = 5\%$ . Ο φορέας έχει ιδιοπεριόδους  $T_1 = 1.271 sec$ ,  $T_2 = 0.424 sec$  και  $T_{min} = 0.01 sec$ .

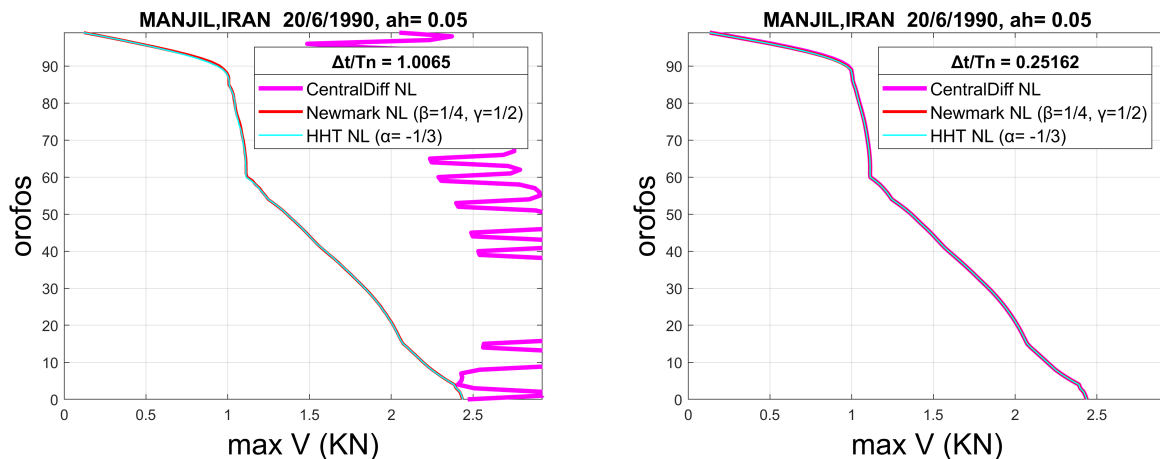


Σχήμα 5.62: ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 100 ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ.

Η επίλυση έγινε για  $\Delta t = 0.01 sec$ , όσο δηλαδή ήταν και το βήμα της καταγραφής,  $\Delta t = 0.005 sec$  και  $\Delta t = 0.0025 sec$ , για  $ah = 0.05$ ,  $ah = 0.2$  και  $ah = 0$  και για επιταχύνσεις όσο της καταγραφής και για τις διπλάσιες. Για  $\Delta t = 0.01 sec$ ,  $ah = 0.05$  και  $1g$ , η μέθοδος κεντρικών διαφορών αστοχεί και γι' αυτό επαναλάβαμε την επίλυση για  $\Delta t = 0.0025 sec$ . Η απόκριση της οροφής φαίνεται στο σχήμα 5.63 ενώ στο σχήμα 5.64 παρουσιάζονται οι μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο.



Σχήμα 5.63: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και  $ah=0.05$ .

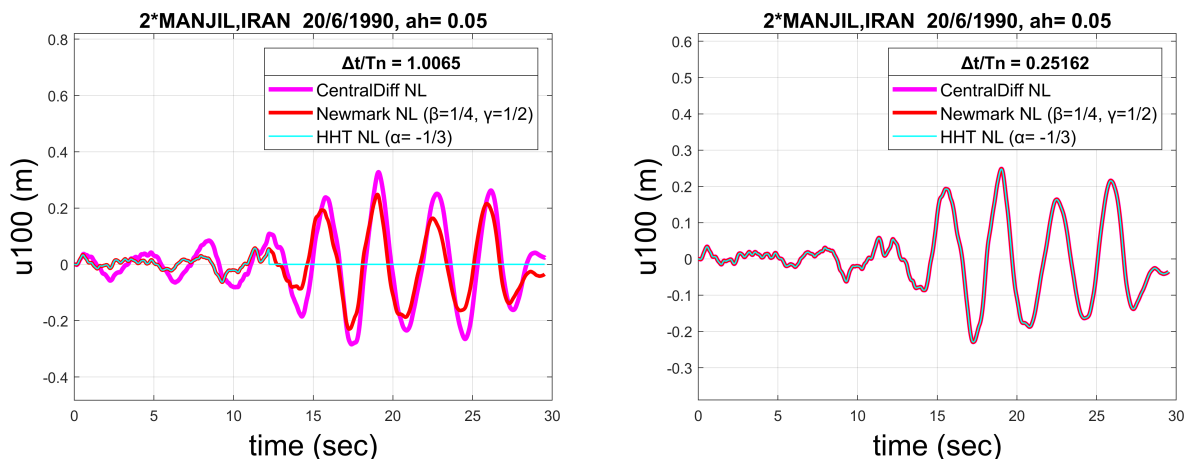


Σχήμα 5.64: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και  $ah=0.05$ .

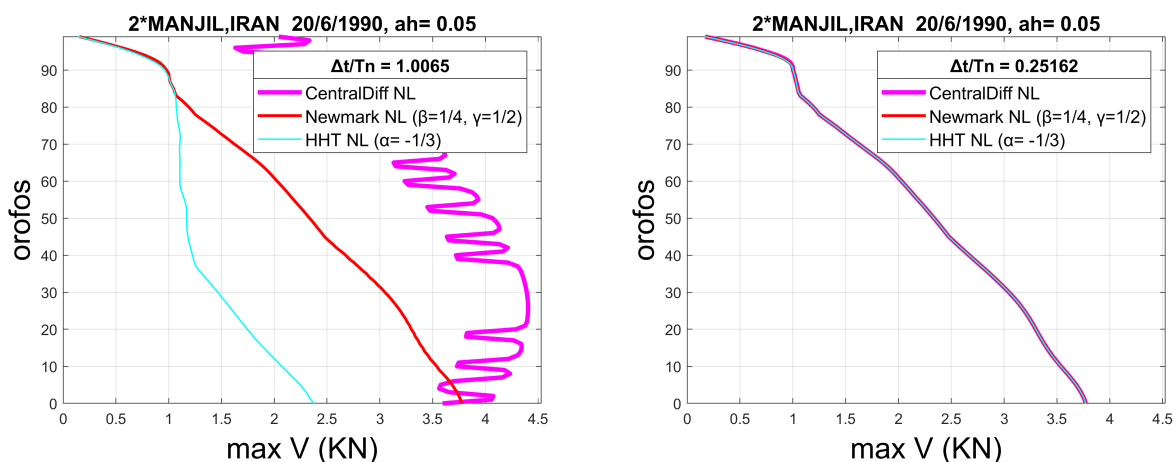
Παρατηρώντας τα πιο πάνω διαγράμματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι λύσεις όλων των μεθόδων για λόγο  $\Delta t/T = 0.25$  συμπίπτουν. Ωστόσο τα αποτελέσματα για τις μεθόδους Newmark και HHT και για  $\Delta t/T = 1$  δεν φαίνεται να διαφέρουν από αυτά που προκύπτουν για λόγο  $\Delta t/T = 0.25$  και επομένως οι μέθοδοι άνευ συνθηκών ευσταθής εξασφαλίζουν επαρκή ακρίβεια για πολύ μεγαλύτερο βήμα από αυτό που απαιτείται για ευστάθεια της μεθόδου κεντρικών διαφορών. Η επιβολή αριθμητικής απόσβεσης από τη μέθοδο HHT δεν διαφοροποιεί τα αποτελέσματα, αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μην συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής.

Επαναλαμβάνουμε την επίλυση για  $\Delta t = 0.01 \text{ sec}$ ,  $ah = 0.05$  και 2g. Η μέθοδος κεντρικών διαφορών αστοχεί κάτι που αναμέναμε. Επίσης αστοχεί η μέθοδος HHT αφού η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson δεν συγκλίνει μετά από 500 επαναλήψεις. Επαναλάβαμε την επίλυση για  $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$  για το οποίο δεν αστοχεί καμία μέθοδος. Η απόκριση της οροφής φαίνεται στο σχήμα 5.65 ενώ στο σχήμα 5.66 παρουσιάζονται οι

μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο.

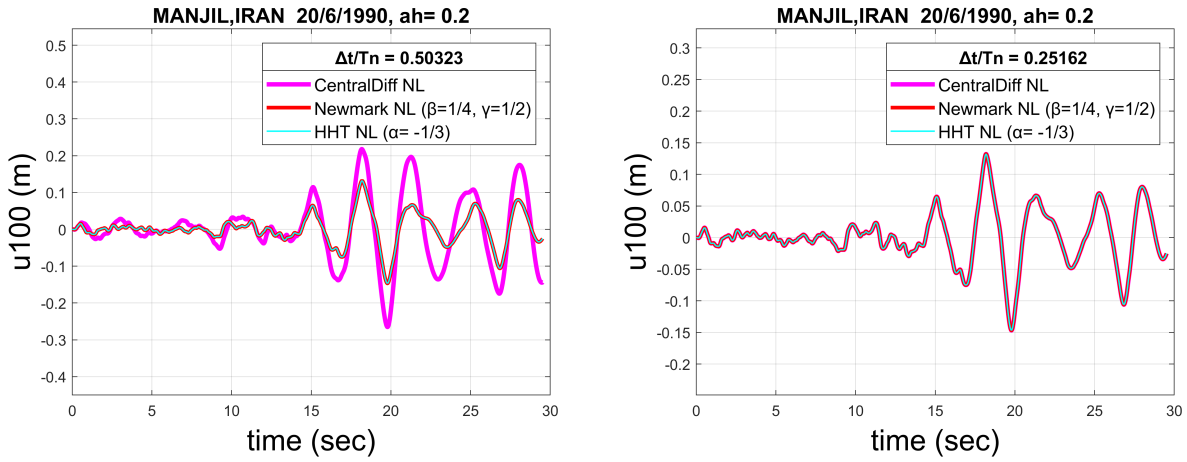


Σχήμα 5.65: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 2g και ah=0.05.

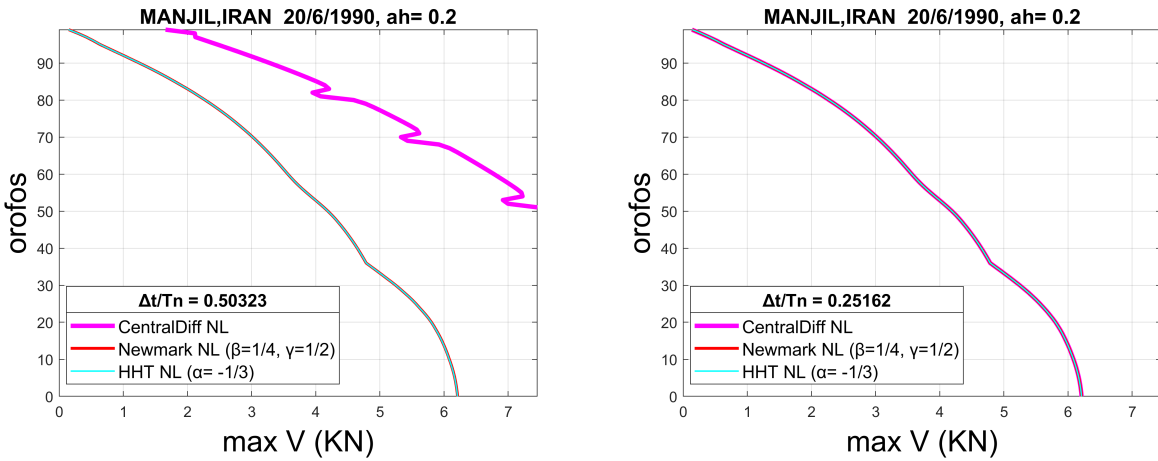


Σχήμα 5.66: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 2g και ah=0.05.

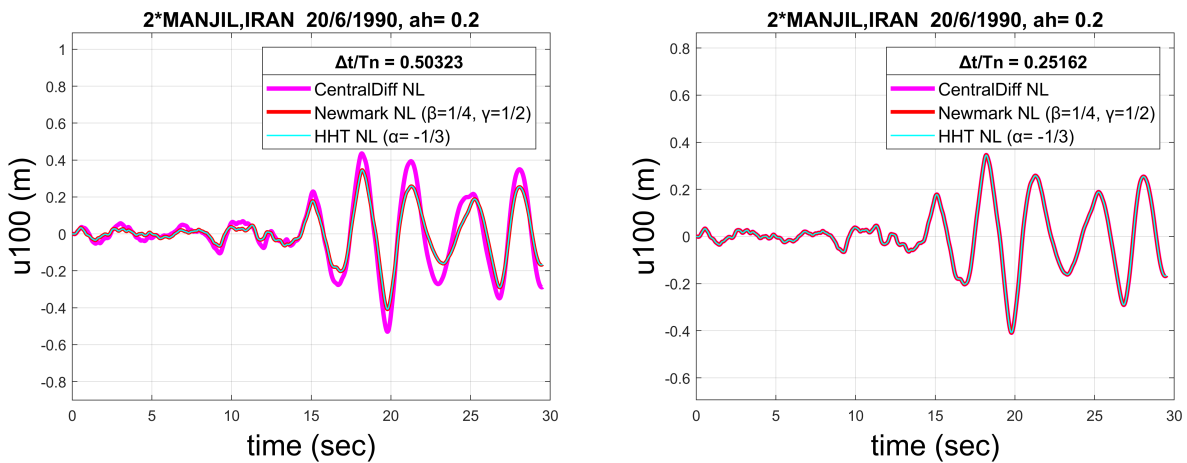
Για τις επόμενες επιλύσεις, επιλέχθηκε χρονικό βήμα  $\Delta t = 0.005 \text{ sec}$  και  $\Delta t = 0.0025 \text{ sec}$ . Η μέθοδος HHT δεν αστοχεί σε κανένα παράδειγμα ενώ η μέθοδος κεντρικών διαφορών αστοχεί όταν ο λόγος  $\Delta t/T$  είναι μικρότερος από το όριο ευστάθειας. Η μέθοδος Newmark φαίνεται συνολικά να υπερτερεί από τις δύο άλλες μεθόδους αφού δεν αστόχησε σε καμία περίπτωση και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για μεγάλο λόγο  $\Delta t/T$ .



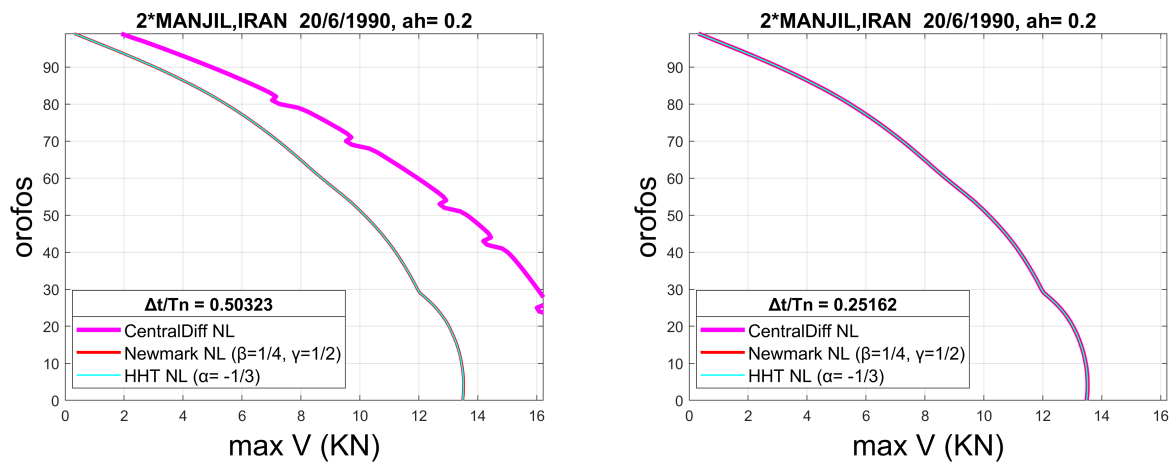
Σχήμα 5.67: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και ah=0.2.



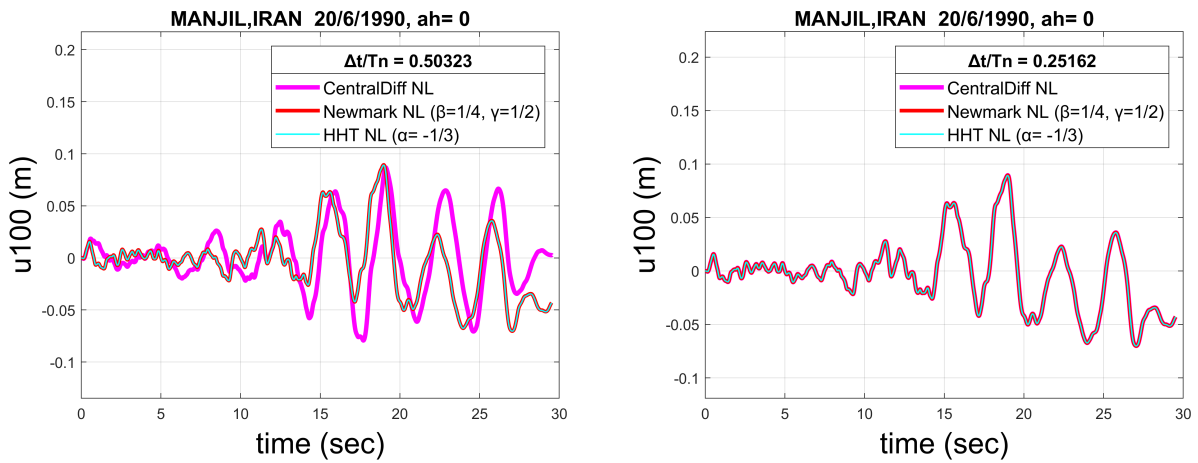
Σχήμα 5.68: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και ah=0.2.



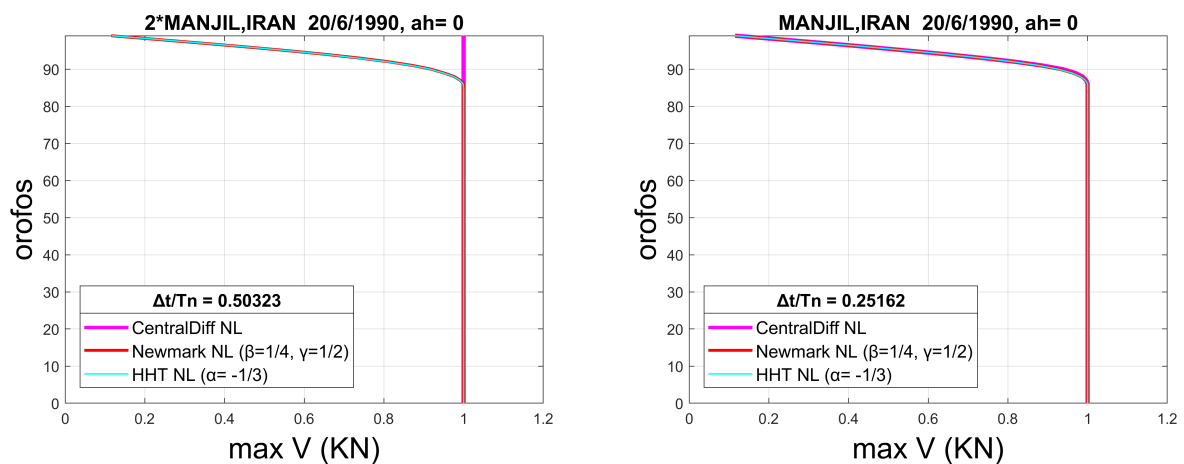
Σχήμα 5.69: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 2g και ah=0.2.



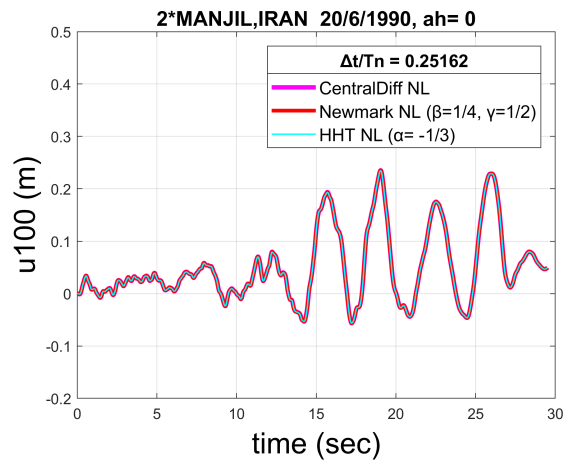
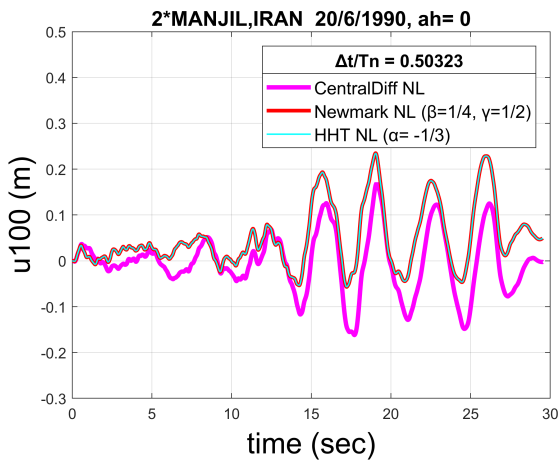
Σχήμα 5.70: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 2g και ah=0.2.



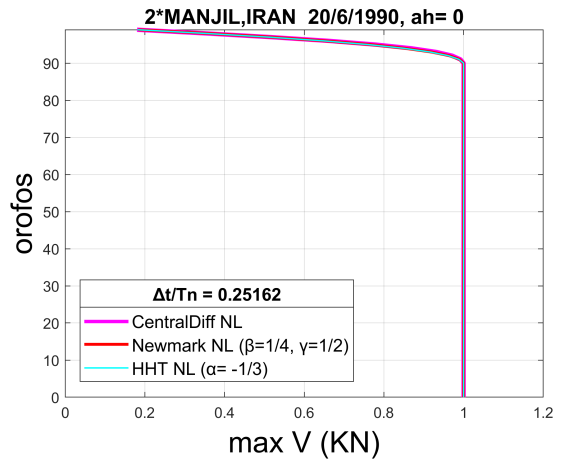
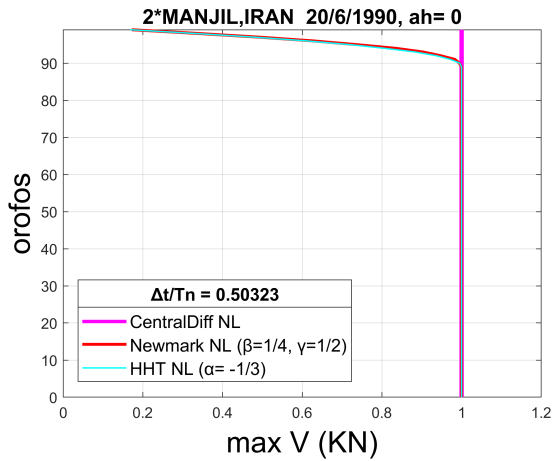
Σχήμα 5.71: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 1g και ah=0.



Σχήμα 5.72: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 1g και ah=0.



Σχήμα 5.73: Απόκριση 100-οστού βαθμού ελευθερίας για 2g και ah=0.



Σχήμα 5.74: Μέγιστες τέμνουσες σε κάθε όροφο για 2g και ah=0.



## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα σημαντικότερα αποτελέσματα και συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης σε πέντε παραδείγματα είναι:

- Για συστήματα τα οποία αποτελούνται από πολύ εύκαμπτα και πολύ δύσκαμπτα μέλη, η επίλυση με μεθόδους που εισάγουν αριθμητική απόσβεση στη λύση παρουσιάζουν σημαντικό πλεονέκτημα αφού με κατάλληλη επιλογή του χρονικού βήματος αποκλείουν τη συμβολή των ανώτερων ιδιομορφών οι οποίες εισάγουν πολύ μεγάλα σφάλματα στη λύση.
- Από τις μεθόδους που εισάγουν αριθμητική απόσβεση στη λύση, η μέθοδος Bathe φαίνεται να είναι η πιο κατάλληλη αφού έδωσε τα ακριβέστερα αποτελέσματα χωρίς να χρειαστεί να παρέλθει σημαντικός χρόνος.
- Η μέθοδος Newmark με  $\beta = 3/10$  και  $\gamma = 11/20$ , ενώ παρέχει αριθμητική απόσβεση, παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι η επιμήκυνση της περιόδου και η εξασθένηση του εύρους είναι αρκετά υψηλά και η αριθμητική απόσβεση επιβάλλεται σε όλες τις ιδιομορφές.
- Η μέθοδος Hilber-Hughes-Taylor αποτελεί βελτιωμένη τροποποίηση της μεθόδου Newmark σταθερής μέσης επιτάχυνσης, αφού μέσω της παραμέτρου  $a$  μπορούμε να εισάγουμε αριθμητική απόσβεση.
- Όσον αφορά την επιλογή παραμέτρων, μέθοδος Bathe έχει το πλεονέκτημα ότι παρουσιάζει επιθυμητά χαρακτηριστικά, χωρίς να χρειάζεται να επιλέξουμε παραμέτρους για τη μέθοδο πριν την έναρξη της αριθμητικής ολοκλήρωσης και έτσι εκμηδενίζεται η πιθανότητα επιλογής λάθος παραμέτρων που πιθανόν να οδηγήσουν σε μεγάλα σφάλματα στη λύση.
- Στην επίλυση διατμητικών πλαισίων με μικρότερη ιδιοπερίοδο  $T_{min} = 0.0081 \text{ sec}$ , η επιλογή χρονικού βήματος ίσο με αυτό της καταγραφής και η χρήση μιας μεθόδου που είναι άνευ συνθηκών ευσταθής, εξασφαλίζει επαρκή ακρίβεια και δεν χρειάζεται μικρότερο χρονικό βήμα. Οι μέθοδοι που επιβάλλουν αριθμητική απόσβεση δεν παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στα αποτελέσματα σε αυτά τα πλαίσια αφού οι ανώτερες ιδιομορφές στις οποίες επιβάλλεται απόσβεση φαίνεται να μη συμμετέχουν σημαντικά στην απόκριση της κατασκευής.
- Ο χρόνος για όλες τις μεθόδους, μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του χρονικού βήματος. Η μέθοδος Bathe παρουσιάζει σημαντική διαφορά στους χρόνους εκτέλεσης σε σχέση με τις άλλες αριθμητικές μεθόδους η οποία αποδόθηκε στο γεγονός ότι το χρονικό βήμα υποδιαιρείται και έτσι χρειάζεται η αντιστροφή δύο ενεργών μητρώων δυσκαμψίας και διπλάσιες αριθμητικές πράξεις.

- Η επίλυση με τη μέθοδο επαλληλίας των ιδιομορφών σε σχέση με την επίλυση με χρήση διανυσμάτων Ritz, παρέχει ακριβέστερα αποτελέσματα για ίδιο πλήθος ιδιομορφών και διανυσμάτων Ritz. Με τη χρήση δύο διανυσμάτων Ritz στην περίπτωση των διατμητικών πλαισίων, η μέγιστη τέμνουσα βάσης αποκλίνει σημαντικά.
- Η ευστάθεια των μεθόδων στα μη γραμμικά συστήματα εξαρτάται και από το στιγμιαίο βαθμό μη γραμμικότητας που αλλάζει σε κάθε βήμα, και δεν είναι γνωστός πριν να φτάσουμε στο βήμα.
- Το μέγεθος της εξωτερικής διέγερσης μπορεί να οδηγήσει σε αστοχία μια πεπλεγμένη μέθοδο, αφού η επαναληπτική διαδικασία Newton-Raphson μπορεί να μη συγκλίνει μετά από αρκετές επαναλήψεις.

## 7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bathe K.J. (1996). Finite element procedures, Prentice Hall, New York.
- Chopra A.K. (2011). Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering (4th Edition). Prentice-Hall: Upper Saddle River, N.J.
- Fragiadakis M. (2017). *Nonlinear Analysis of Frame Structures under Seismic Loading*, Lecture Notes, National Technical University of Athens.
- Κατσικαδέλης Ι. Θ. (2012). Δυναμική Ανάλυση Κατασκευών. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- Bathe K.J. and Gunwoo Noh (2012). “Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics”, *Computers and Structures*, Vol 98-99, pp 1-6
- Chang S.Y. (2010). “A new family of explicit methods for linear structural dynamics”, *Computers and Structures*, Vol 88, pp 755-772
- Hans M. Hilber, Thomas J. R. Hughes and Robert L. Taylor (1977). “Improved Numerical Dissipation For Time Integration Algorithms In Structural Dynamics”, *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol 5, pp 283-292
- Hong Xia and J. L. Humar (1992). “Frequency Dependent Ritz Vectors”, *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol 21, pp 215-231
- Wilson L.E. (2002). Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering (3rd Edition). Computers and Structures, Berkeley, California, USA
- Newmark, N. M. (1959). “A Method of Computation for Structural Dynamics”, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp. 67–94.
- Douglas A. Foutch and Seung-Yul Yun (2002). “Modeling of steel moment frames for seismic loads”, *Journal of the Construction Steel Research*, Vol. 58, pp. 529–564.
- Dan Negrut, Gisli Ottarsson, Rajiv Rampalli, Anthony Sajdak (2006). “On an Implementation of the Hilber-Hughes-Taylor Method in the Context of Index 3 Differential-Algebraic Equations of Multibody Dynamics (DETC2005-85096)”



## 8. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### dampingMatrix.m

```

1 function [Cmatrix,Tmin] = dampingMatrix(Dampcalc,Kglobal,...
2     massMatrix)
3
4 xiMatrix = Dampcalc.Parameters.xi;
5
6 ndof = length(massMatrix);
7
8 % simplironei to xiMatrix me to xi tis protis idiomorfis
9 if length(xiMatrix) < ndof
10     xiMatrix(length(xiMatrix)+1:ndof) = xiMatrix(1);
11 end
12
13 [fi,OMEGA] = eig(Kglobal,massMatrix); %to fi(:,i) einai to fi tis i
14     idiomorfis
15 omega = sqrt(diag(OMEGA));
16 T = 2*pi*omega.^-1;
17 [i1 i2] = sort(T,'descend'); T = T(i2);
18 fi(:,1:size(fi,2)) = fi(:,i2);
19 omega = sort(omega);
20 Tmin = min(T);
21
22 switch Dampcalc.Name
23
24     case 'rayleigh'
25
26         mode_n = Dampcalc.Parameters.modes(1);
27         mode_m = Dampcalc.Parameters.modes(2);
28
29         if or(T(mode_n),T(mode_m))==0
30             disp('*** CHOOSE 2 OTHER MODES FOR REYLEIGH DAMPING ***')
31             disp('*** SOLUTION FOR ZERO DAMPING MATRIX ***')
32             Cmatrix = zeros(ndof);
33         else
34             xinm = [xiMatrix(mode_n); xiMatrix(mode_m)];
35
36             A1 = 0.5*[omega(mode_n)^-1 omega(mode_n)
37                 omega(mode_m)^-1 omega(mode_m)];
38
39             alpha01 = A1\xinm;
40
41             Cmatrix = alpha01(1)* massMatrix + alpha01(2)* Kglobal;

```

```

42     end
43
44     case 'ModalDamp'
45
46         % Construct damping matrix achieving given xi values for each
           mode
47
48         %Equivalent Damping matrix
49         tii = zeros(ndof);
50         for i = 1:ndof
51             pp0 = fi(:,i);
52             Mn(i) = (pp0'*massMatrix)*pp0;
53
54             if ~T(i)==0
55                 tii = tii+( 2*xiMatrix(i)*omega(i)/Mn(i)) * pp0*pp0';
56             end
57         end
58         Cmatrix = (massMatrix*tii)*massMatrix;
59     end
60
61 end

```

### RitzVectors.m

```

1 function [Kper,Mper,Cper,Y] = RitzVectors(K,M,C,s,plRitz)
2
3 y(:,1) = K\s;
4 yy(:,1) = y(:,1)/sqrt(y(:,1)' * M*y(:,1));
5
6 for n1 = 2:plRitz
7     y(:,n1) = inv(K)*M*yy(:,n1-1);
8     for i = 1:n1-1
9         a(i,n1) = yy(:,i)'*M*y(:,n1);
10        yy2(:,i) = a(i,n1)*yy(:,i);
11    end
12    yyy(:,n1) = y(:,n1) - sum(yy2,2);
13    yy(:,n1) = yyy(:,n1)/sqrt((yyy(:,n1)'*M*yyy(:,n1)));
14
15 end
16
17 Y = yy; % Y (ndof,plRitz)
18 Kper = Y'*K*Y;
19 Mper = Y'*M*Y;
20 Cper = Y'*C*Y;
21
22 % provlima meiomenon idiotimon
23 [z,wpersq] = eig(Kper,Mper);

```

```

24 wper = sqrt(diag(wpersq));
25 [i1,i2] = sort(wper); wper = wper(i2);
26 z(:,1:size(z,2)) = z(:,i2);
27 fi_per = Y*z;
28
29 % akriivi apotelesmata
30 [fi,wsq] = eig(K,M);
31 w = sqrt(diag(wsq));

```

### mdofHilberHughesTaylorLinear.m

```

1 function [ut,uv,ua] = mdofHilberHughesTaylorLinear(aa,h,...
2                               nsteps,K,M,C,loadType,alpha,ndof,rv)
3
4 gma = (1-2*alpha)/2;
5 bita = (1-alpha)^2/4;
6
7 uv = zeros(ndof,nsteps);
8 ua = zeros(ndof,nsteps);
9 ut = zeros(ndof,nsteps);
10
11 if strcmp(loadType,'force')
12     R = aa;
13
14 elseif strcmp(loadType,'groundmotion')
15     for j = 1:nsteps
16         R(:,j) = -M*rv*aa(j);    %R(ndof,nsteps)
17     end
18 end
19
20 Keff = M/(h*h*bita) + (1+alpha)*C*gma/h/bita + (1+alpha)*K;
21 Keffinv = inv(Keff);
22
23 A = (M/h/h/bita + gma*(1+alpha)/h/bita*C + alpha*K);
24 B = (M/h/bita + (gma*(1+alpha)/bita-1)*C);
25 D = ((1/2/bita-1)*M + (1+alpha)*h*((gma-1) +gma*(1/2/bita-1))*C);
26
27 for i = 2:nsteps
28     F = (1+alpha)*R(:,i) - alpha*R(:,i-1);
29     Reff = F + A*ut(:,i-1) + B*uv(:,i-1) + D*ua(:,i-1);
30
31     ut(:,i) = Keffinv * Reff;
32     ua(:,i) = (ut(:,i)-ut(:,i-1)-h*uv(:,i-1))/h/h/bita...
33               - (1-2*bita)*ua(:,i-1)/2/bita;
34     uv(:,i) = uv(:,i-1) + h*((1-gma)*ua(:,i-1) + gma*ua(:,i));
35 end
36

```

```

37 ut = ut';
38 uv = uv';
39 ua = ua';
40 end

```

### mdofBatheLinear.m

```

1 function [ ut,uv,ua] = mdofBatheLinear(aa,dt,nsteps,K,...
2           M,C,loadType,ndof,rv)
3
4 K1 = (16/dt^2)*M + (4/dt)*C + K;
5 K2 = (9/dt^2)*M + (3/dt)*C + K;
6
7 uv = zeros(ndof,nsteps);
8 ua = zeros(ndof,nsteps);
9 ut = zeros(ndof,nsteps);
10
11 aa = [aa , 0];
12 for i = 1:nsteps
13     accbathe(2*i-1) = aa(i);
14     accbathe(2*i) = (aa(i)+aa(i+1))/2;
15 end
16 aa = accbathe;
17
18 if strcmp(loadType,'force')
19     R = aa;
20
21 elseif strcmp(loadType,'groundmotion')
22     for j = 1:nsteps*2
23         R(:,j) = -M*rv*aa(j);    %R(ndof,nsteps)
24     end
25 end
26
27 K1inv = inv(K1);
28 K2inv = inv(K2);
29
30 for i = 3:2:nsteps*2    % i=t+dt    i-1=t+dt/2    i-2=t
31
32     R1 = R(:,i-1) + M*((16/dt^2)*ut(:,i-2) + (8/dt)*uv(:,i-2)...
33         + ua(:,i-2)) + C*((4/dt)*ut(:,i-2)+uv(:,i-2));
34     ut(:,i-1) = K1inv*R1;
35
36     uv(:,i-1) = (ut(:,i-1)-ut(:,i-2)-uv(:,i-2)*(dt/4))*(4/dt);
37     R2 = R(:,i) + M*((12/dt^2)*ut(:,i-1)-(3/dt^2)*ut(:,i-2)...
38         + (4/dt)*uv(:,i-1) - uv(:,i-2)/dt) + C*((4/dt)*ut(:,i-1) - ut
39         (:,i-2)/dt);
39     ut(:,i) = K2inv*R2;

```



```

40
41     uv(:,i) = ut(:,i-2)/dt - (4/dt)*ut(:,i-1) + (3/dt)*ut(:,i);
42     ua(:,i-1) = (uv(:,i-1)-uv(:,i-2)-ua(:,i-2)*(dt/4))*(4/dt);
43     ua(:,i) = uv(:,i-2)/dt - (4/dt)*uv(:,i-1) + (3/dt)*uv(:,i);
44 end
45
46 uttmp = ut(:, [1:2:nsteps*2]);
47 uvtmp = uv(:, [1:2:nsteps*2]);
48 uatmp = ua(:, [1:2:nsteps*2]);
49
50 ut = uttmp';
51 uv = uvtmp';
52 ua = uatmp';
53 end

```

### mdofHilberHughesTaylorNONLinear.m

```

1 function [ut,uv,ua,Vs]=mdofHilberHughesTaylorNONLinear(k,M,C,...
2             dt,acc,nsteps,fy,ah,alpha)
3
4 ndof = length(k);
5
6 gma = (1-2*alpha)/2;
7 bita = (1-alpha)^2/4;
8
9 uv = zeros(ndof,nsteps);
10 ua = zeros(ndof,nsteps);
11 ut = zeros(ndof,nsteps);
12 fs = zeros(ndof,nsteps);
13
14 if exist('rv')==0
15     rv = ones(ndof,1);
16 end
17
18 for j = 1:nsteps
19     p(:,j) = -M*rv*acc(j);    %p (ndof,nsteps)
20 end
21
22 if nargin > 10 % impose initial conditions (if any)
23     ut(:,1) = ut0;
24     uv(:,1) = uv0;
25     ua(:,1) = ua0;
26 end
27
28 Du = zeros(ndof,1);
29 [fs(:,1),kt] = ForceDelta(fy,k,ah,ut(:,1),fs(:,1),Du);
30

```

```

31 ua(:,1) = M\(p(:,1)-C*uv(:,1)-fs(:,1));
32
33 A1 = C*((1+alpha)/bita/dt) + M*(1/bita/dt/dt);
34 A2 = C*((1+alpha)/bita-1) + M*(1/bita/dt);
35 A3 = C*dt*(1+alpha)*(1/2/bita-2+gma) + M*(1/2/bita-1);
36
37 for it = 1:nsteps-1
38
39     ut(:,it+1) = ut(:,it); fs(:,it+1) = fs(:,it);
40     peff(:,it+1) = (1+alpha)*p(:,it+1) - alpha*p(:,it)...
41                 + A1*ut(:,it) + A2*uv(:,it) + A3*ua(:,it);
42     Reff(:,it+1) = peff(:,it+1) - (1+alpha)*fs(:,it+1)...
43                 + alpha*fs(:,it) - A1*ut(:,it+1);
44
45     Du = 0;
46     iter = 0;
47     while norm(Reff(:,it+1))> 0.001
48
49         iter = iter + 1;
50
51         K = getK(kt);
52         Keff = (1+alpha)*K + A1;
53         du = Keff\Reff(:,it+1);
54         Du = Du + du;
55         ut(:,it+1) = ut(:,it+1) + du;
56
57         [fs(:,it+1),kt,V] = ForceDelta(fy,k,ah,ut(:,it),...
58                                     fs(:,it),Du);
59
60         Reff(:,it+1) = peff(:,it+1) - (1+alpha)...
61                     *fs(:,it+1) + alpha*fs(:,it) - A1*ut(:,it+1);
62
63         if iter==500
64             break
65         end
66
67     end
68
69     Dut = ut(:,it+1) - ut(:,it);
70
71     ua(:,it+1) = (1/bita/dt/dt)*Dut - (1/bita/dt)...
72                 *uv(:,it) - (1/2/bita-1)*ua(:,it);
73     uv(:,it+1) = uv(:,it) + ((1-gma)*ua(:,it)...
74                 + gma*ua(:,it+1))*dt;
75
76     Vs(it,:) = V;
77

```

```

78     disp(sprintf('increment: %0.5g, iteration: %0.5g',it,iter))
79
80     if iter==500
81         break
82     end
83 end
84 ut = ut';
85 uv = uv';
86 ua = ua';
87 end

```

### mdofNewmarkNONLinear.m

```

1  function [ut,uv,ua,Vs]=mdofNewmarkNONLinear(k,M,C,dt,acc,...
2      nsteps,fy,ah,bita,gma)
3
4  ndof = length(k);
5
6  uv=zeros(ndof,nsteps);
7  ua=zeros(ndof,nsteps);
8  ut=zeros(ndof,nsteps);
9  fs=zeros(ndof,nsteps);
10
11 if exist('rv')==0
12     rv=ones(ndof,1);
13 end
14
15 for j=1:nsteps
16     p(:,j)= -M*rv*acc(j);    %p (ndof,nsteps)
17 end
18
19 if nargin > 10 % impose initial conditions (if any)
20     ut(:,1) = ut0;
21     uv(:,1) = uv0;
22     ua(:,1) = ua0;
23 end
24
25 Du = zeros(ndof,1);
26 [fs(:,1),kt] = ForceDelta(fy,k,ah,ut(:,1),fs(:,1),Du);
27
28 ua(:,1)= M\(p(:,1)-C*uv(:,1)-fs(:,1));
29
30 A1 = C*(gma/bita/dt) + M*(1/bita/dt/dt);
31 A2 = C*(gma/bita-1) + M*(1/bita/dt);
32 A3 = C*dt*(gma/2/bita-1) + M*(1/2/bita-1);
33
34 for it = 1:nsteps-1

```

```

35
36     ut(:,it+1) = ut(:,it); fs(:,it+1) = fs(:,it);
37     peff(:,it+1)= p(:,it+1)+A1*ut(:,it)+A2*uv(:,it)+A3*ua(:,it);
38     Reff(:,it+1)= peff(:,it+1)-fs(:,it+1)-A1*ut(:,it+1);
39
40     Du = 0;
41     iter = 0;
42     while norm(Reff(:,it+1))> 0.001
43
44         iter = iter + 1;
45
46         K = getK(kt);
47         Keff = K + A1;
48         du = Keff\Reff(:,it+1);
49         Du = Du + du;
50         ut(:,it+1) = ut(:,it+1) + du;
51
52         [fs(:,it+1),kt,V] = ForceDelta(fy,k,ah,ut(:,it),...
53                                     fs(:,it),Du);
54
55         Reff(:,it+1) = peff(:,it+1) - fs(:,it+1) - A1*ut(:,it+1);
56
57         if iter==500
58             break
59         end
60     end
61
62     Dut = ut(:,it+1)-ut(:,it);
63     uv(:,it+1)= (gma/bita/dt)*Dut + (1-gma/bita)*uv(:,it)...
64                 + (1-gma/2/bita)*ua(:,it);
65     ua(:,it+1)= (1/bita/dt/dt)*Dut - (1/bita/dt)*uv(:,it)...
66                 - (1/2/bita-1)*ua(:,it);
67     Vs(it,:)=V;
68
69     disp(sprintf('increment: %0.5g, iteration: %0.5g',it,iter))
70     if iter==500
71         break
72     end;
73 end
74 ut=ut';
75 uv=uv';
76 ua=ua';
77 end

```