

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΤΟΜΕΑΣ ΙΙ: ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ, ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΚΑΙ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

**“Στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος γραμμικών συστημάτων με  
περιορισμούς στις μεταβλητές εισόδου”**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Διαμαντή Αικατερίνη**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χ. Σαρίμβεης**

**Αθήνα, Ιούλιος 2011**

Στη γιαγιά μου Αικατερίνη,  
για να είναι περήφανη για μένα.

## Ευχαριστίες

---

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, ολοκληρώνεται και η διαδρομή μου ως φοιτήτρια στη σχολή Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Ελπίζω, η προσφορά μου αυτή, να συνεισέφερε έστω και στο ελάχιστο, στον επιστημονικό τομέα της αυτόματης ρύθμισης και να αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για όσους ασχοληθούν μετά από εμένα, με το αντικείμενο του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ειλικρινά, τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Χαράλαμπο Σαρίμβεη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα θέμα, που καλύπτει πλήρως τα ενδιαφέροντά μου. Η πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, καθώς και η αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα, ήταν καθοριστικοί παράγοντες για την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τον Διδάκτορα κύριο Φίλιππο Δογάνη για τις χρήσιμες συμβουλές του, σχετικά με την μετέπειτα πορεία μου στον επιστημονικό χώρο.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές μου για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους, την υποστήριξή τους και την βοήθεια πολλών από αυτών σε τεχνικές δυσκολίες που προέκυψαν κατά την πορεία της εργασίας.

Το πιο μεγάλο ευχαριστώ, όμως, ανήκει δικαιοματικά στους γονείς μου, Βασίλειο και Γαλάτεια, και τον αδερφό μου Αθανάσιο, για την αγάπη τους και την αδιάκοπη, κάθε είδους, υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου. Πολλά από τα πράγματα που έκανα, δεν θα τα είχα καταφέρει χωρίς την παρουσία τους στη ζωή μου!

Κατερίνα Διαμαντή

Αθήνα, Ιούλιος 2011

# Περιεχόμενα

---

## Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup> : Εισαγωγή

1.1 Σύνομη ιστορική Αναδρομή .....	8
1.2 Διάρθρωση της εργασίας .....	12

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup> : Προβλεπτικός Έλεγχος

2.1 Εισαγωγή .....	15
2.2 Η θεωρία του προβλεπτικού Έλεγχου .....	17
2.3 Πλεονεκτήματα του ελέγχου κυλιόμενου ορίζοντα (RHC) .....	19
2.4 Πεδία εφαρμογών του Προβλεπτικού Ελέγχου .....	20

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> : Στοχαστικός Προβλεπτικός Έλεγχος

3.1 Εισαγωγή .....	22
3.2 Στοχαστικός Προβλεπτικός Έλεγχος με περιορισμούς στις μεταβλητές εκ χειρισμού ....	23

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup> : Μελέτη μεθοδολογίας προβλεπτικού ελέγχου με περιορισμούς στις μεταβλητές εκ χειρισμού

4.1. Εισαγωγή .....	25
4.2. Ορισμός του προβλήματος που θα μελετηθεί .....	27
4.3 Εύρεση λύσης με περιορισμούς στις μεταβλητές εισόδου .....	29
4.4 Ανάλυση ευστάθειας .....	36

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>: Υλοποίηση της μεθοδολογίας σε περιβάλλον Matlab

5.1 Εισαγωγή .....	38
5.2. Βασικές έννοιες του YALMIP .....	39
5.2.1 Διεργασίες επίλυσης (Solvers) .....	40
5.3 Επίλυση τετραγωνικών προβλημάτων (Quadratic Programming, QP) .....	41
5.3.1 Solver BPMPD .....	41
5.3.2 Μέθοδοι εσωτερικού σημείου .....	42
5.4 Εφαρμογή της μεθοδολογίας στο πρόβλημα .....	43
5.4.1 Αριθμητικά δεδομένα .....	43
5.4.2 Περιορισμοί .....	44
5.4.3 Επίλυση του προβλήματος .....	47
5.4.4 Επαναληπτική διαδικασία .....	47

## Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup>: Αποτελέσματα

6.1 Αποτελέσματα .....	49
------------------------	----

## Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>: Παράδειγμα – Εφαρμογή στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου στη θέρμανση ενός κτιρίου

7.1 Εισαγωγή .....	53
7.2 Διαδικασία μοντελοποίησης .....	54
7.3 Το κτίριο ελέγχου .....	56
7.4 Διαμόρφωση του μοντέλου .....	57
7.5 Στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος για την θέρμανση κτιρίου.....	65

## Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup>: Συμπεράσματα

8.1 Συμπεράσματα .....	69
------------------------	----

## Κεφάλαιο 9<sup>ο</sup>: Βιβλιογραφία

9.1 Βιβλιογραφία .....	71
9.2 Ηλεκτρονική βιβλιογραφία .....	73

Παράρτημα .....	74
-----------------	----

# Κεφάλαιο 1<sup>ο</sup>

## Εισαγωγή

---

## 1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η ανάπτυξη της ιδέας του σύγχρονου ελέγχου εντοπίζεται αρχικά στο έργο του Kalman στις αρχές του 1960, ο οποίος επιδίωξε να καθορίσει, πότε ένα γραμμικό σύστημα ελέγχου μπορεί να θεωρηθεί βέλτιστο. Ο Kalman ασχολήθηκε με τον σχεδιασμό ενός **γραμμικού τετραγωνικού ρυθμιστή** (Linear Quadratic Regulator, **LQR**), ικανού να ελαχιστοποιήσει μία τετραγωνική αντικειμενική συνάρτηση. Η, υπό έλεγχο διεργασία, μπορεί να περιγραφεί από ένα διακριτού χρόνου, ντετερμινιστικό, γραμμικό, σταθερού χώρου μοντέλο:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\y_k &= Cx_k + \xi_k\end{aligned}$$

Το διάνυσμα  $u$  αντιπροσωπεύει τα δεδομένα εισόδου, ή τις μεταβλητές εκ χειρισμού, το διάνυσμα  $y$  περιγράφει τα μετρούμενα δεδομένα εξόδου και το διάνυσμα  $x$  αντιπροσωπεύει τις μεταβλητές κατάστασης. Το διάνυσμα  $w$  που περιγράφει τις διαταραχές του συστήματος και το διάνυσμα  $\xi$  που αποτελεί το μετρούμενο θόρυβο, είναι ανεξάρτητα διανύσματα κατανομής Gauss με μηδενική μέση τιμή. Η αρχική κατάσταση  $x_0$  θεωρείται κατανομής Gauss, με μη μηδενική μέση τιμή.

Οι παραπάνω εξισώσεις παρέχουν μία σχηματική αναπαράσταση του μοντέλου σταθερού χώρου. Το διάνυσμα κατάστασης ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ούτως ώστε γνωρίζοντας την τιμή του την χρονική στιγμή  $k$  και τα μελλοντικά δεδομένα, να επιτρέπει σε κάποιον να προβλέψει πώς η διεργασία θα εξελιχθεί στο μέλλον. Η σημασία του έργου του Kalman βασίζεται στο γεγονός ότι, αυτό το γενικό μοντέλο της διαδικασίας βρήκε μεγάλη εφαρμογή.

Η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποίησης  $\varphi$ , περιλαμβάνει τις προβλεπόμενες τιμές των μεταβλητών κατάστασης που εξαρτώνται από την αρχική κατάσταση και επίσης περιλαμβάνει τις τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού. Όλοι οι όροι είναι τετραγωνικοί και οι παράμετροι βαθμονόμησης είναι οι πίνακες  $Q$  και  $R$ :

$$\varphi = \mathbb{E}(J) \quad J = \sum_{j=1}^{\infty} (\|x_{k+j}\|_Q^2 + \|u_{k+j}\|_R^2)$$

Οι νόρμες μέσα στην αντικειμενική συνάρτηση προσδιορίζονται όπως ακολούθως:

$$\|x\|_Q^2 = x^T Q x$$

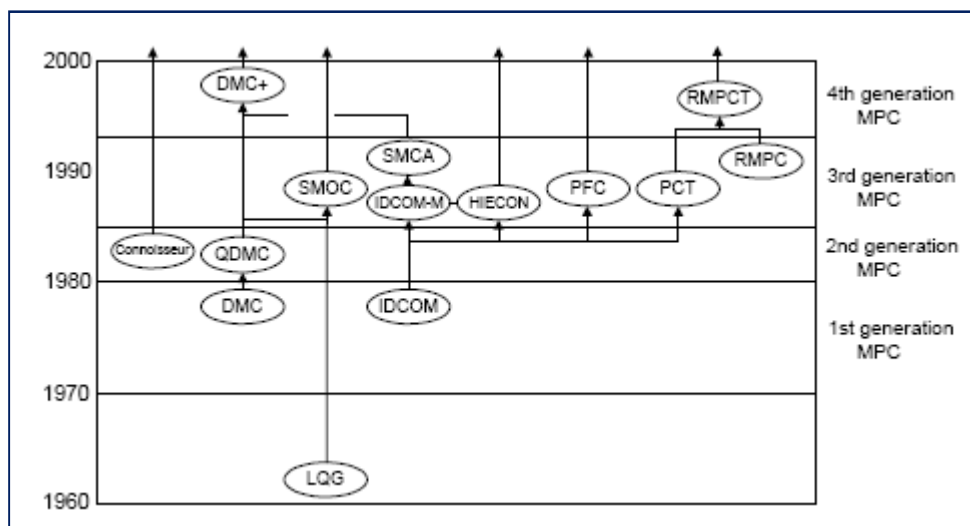


Σε αυτήν την συγκεκριμένη διατύπωση υπονοείται η υπόθεση, πως όλες οι μεταβλητές έχουν εκφρασθεί σε όρους απόκλισης από την επιθυμητή σταθερή κατάσταση. Βρέθηκε πως η λύση σε αυτό το πρόβλημα, γνωστή και ως Γραμμικός τετραγωνικός Γκαουσιανός ρυθμιστής (**LQG**), εμπεριέχει δύο ξεχωριστά βήματα. Η τιμή της μεταβλητής εξόδου  $y_k$  χρησιμοποιείται αρχικά για να βρεθεί μία βέλτιστη εκτίμηση του  $x_{k/k}$ :

$$x_{k/k-1} = Ax_{k-1/k-1} + Bu_{k-1}$$

$$x_{k/k} = x_{k/k-1} + K_f(y_k - Cx_{k/k-1})$$

Έπειτα, υπολογίζεται η βέλτιστη τιμή  $u_k$ , χρησιμοποιώντας έναν βέλτιστο αναλογικό ρυθμιστή:  $u_k = -K_c x_{k/k}$



**Εικόνα 1.1: Γενεαλογική προσέγγιση γραμμικών αλγορίθμων MPC**

Η χρήση του συμβόλου  $x_{i/j}$  αναφέρεται στην εκτίμηση κατά τη χρονική στιγμή  $i$  δοθέντων πληροφοριών μέχρι και την τιμή  $j$ .

Ουσιαστικά, αναπτύχθηκε μία διπλή θεωρία προκειμένου να εκτιμηθούν οι μεταβλητές κατάστασης από τα δεδομένα του θορύβου και τα μετρούμενα δεδομένα εξόδου, χρησιμοποιώντας αυτό που είναι ευρέως γνωστό ως φίλτρο του Kalman. ο συνδυασμός του ρυθμιστή LQR και του φίλτρου του Kalman αποτελεί τον λεγόμενο γραμμικό τετραγωνικό Γκαουσιανό Ρυθμιστή (LQG). (Βιβλ.[7])

Ο πίνακας  $K_f$  ( ή αλλιώς «φίλτρο του Kalman») υπολογίζεται από την επίλυση μιας εξίσωσης Ricatti. Ο πίνακας  $K_c$  μπορεί να βρεθεί από την κατασκευή μιας διπλής εξίσωσης Ricatti, έτσι ώστε οι ίδιες αριθμητικές τεχνικές και το ίδιο λογισμικό να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τους δύο υπολογισμούς.

Ο μη πεπερασμένος προβλεπτικός ορίζοντας του αλγόριθμου LQG, προσδίδει στον αλγόριθμο ισχυρές σταθεροποιητικές ιδιότητες. Στην περίπτωση ενός ιδανικού μοντέλου, έχει αποδειχθεί πως σταθεροποιεί οποιοδήποτε ρυθμισμό και σταθεροποιήσιμο γραμμικό σύστημα, εφόσον ο πίνακας Q είναι θετικά ημιορισμένος και ο πίνακας R είναι θετικά ορισμένος.

Πολύ σύντομα, ακολούθησαν αρκετές επεκτάσεις της θεωρίας, προκειμένου να χειριστούν θέματα όπως, η ρύθμιση δεδομένων εξόδου, η επίτευξη offset-free ρύθμισης και ο υπολογισμός των στόχων σταθερής κατάστασης. Ωστόσο, περιορισμοί κατά την είσοδο της διεργασίας, την σταθερή κατάσταση και την έξοδο, δεν ήταν εφικτό να αντιμετωπιστούν κατά την εξέλιξη της θεωρίας LQG.

Η μεθοδολογία LQG σύντομα χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων ελέγχου, σε ευρεία κλίμακα εφαρμογών. Η περιοχή των εφαρμογών όπου η θεωρία LQG είχε περισσότερο άμεσο αντίκτυπο, όπως η βιομηχανία του διαστήματος, χαρακτηρίζεται από φυσικά συστήματα για τα οποία είναι τεχνικά και οικονομικά εφικτή η ανάπτυξη αξιόπιστων θεμελιωδών μοντέλων. Όμως, ο αντίκτυπος που είχε στην εξέλιξη των τεχνολογιών ρύθμισης στη βιομηχανία δεν ήταν ο αναμενόμενος. Οι σημαντικότεροι λόγοι που ευθύνονται για αυτό ήταν οι εξής, όπως παρουσιάζονται στις βιβλιογραφικές πηγές [8] και [9]:

- περιορισμοί
- μη γραμμικές διεργασίες
- αβεβαιότητα μοντέλου
- Πρακτικοί λόγοι εφαρμογής (άνθρωποι, μόρφωση, κ.α.)

Είναι γνωστό, για παράδειγμα, ότι οι βιομηχανικές μονάδες λειτουργούν στα όρια των φυσικών περιορισμών, με στόχο την βελτιστοποίηση του κέρδους. Συνεπώς, ένα επιτυχημένο σύστημα βιομηχανικού έλεγχου θα πρέπει να διατηρεί το σύστημα όσο το δυνατόν πιο κοντά στους περιορισμούς που έχει θέσει, χωρίς να τους παραβιάζει. Επιπρόσθετα, οι βιομηχανικές μονάδες είναι συχνά σύνθετα, μη γραμμικά, πολυμεταβλητά συστήματα, των οποίων η δυναμική συμπεριφορά μεταβάλλεται με τον χρόνο, εξαιτίας φαινομένων όπως αλλαγή στις συνθήκες λειτουργίας ή γήρανση του καταλύτη.

Οι ανάγκες αυτές οδήγησαν στην ανάπτυξη μιας διαφορετικής φιλοσοφίας για τη ρύθμιση των βιομηχανικών συστημάτων, σύμφωνα με την οποία η δυναμική βελτιστοποίηση ενός προβλήματος επιλύεται on line σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή. Οι είσοδοι της διεργασίας υπολογίζονται ούτως ώστε να βελτιστοποιείται η μελλοντική συμπεριφορά του συστήματος, σε ένα μελλοντικό χρονικό διάστημα, τον ορίζοντα πρόβλεψης. Στην γενική περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε αντικειμενική συνάρτηση. Η δυναμική του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από ένα δυναμικό μοντέλο, το οποίο μπορεί, καταρχήν, να πάρει οποιαδήποτε μαθηματική μορφή. Οι περιορισμοί που αφορούν τις εισόδους και εξόδους της διεργασίας συμπεριλαμβάνονται απευθείας στη διαμόρφωση του προβλήματος ώστε στο μέλλον να προλαμβάνεται και να εμποδίζεται η παραβίασή τους. Η πρώτη ενέργεια από την βέλτιστη σειρά ενεργειών εισάγεται στο σύστημα και το πρόβλημα επιλύεται ξανά στην επόμενη διακριτή χρονική στιγμή, χρησιμοποιώντας τα ενημερωμένα μεγέθη της κατάστασης του συστήματος. Για την περαιτέρω ανάπτυξη της τεχνολογίας, προτάθηκαν μέθοδοι αναγνώρισης συστημάτων που επιτρέπουν την εύκολη και γρήγορη ανάπτυξη εμπειρικών δυναμικών μοντέλων μέσω ανάλυσης και επεξεργασίας δεδομένων. Αυτή η νέα τεχνολογία αναφέρεται ως τεχνολογία προβλεπτικού ελέγχου (**Model Predictive Control, MPC**). Ένας τύπος προβλεπτικού ελέγχου ιδιαίτερα γνωστός και εφαρμόσιμος είναι ο λεγόμενος «**Έλεγχος Κυλιόμενου Ορίζοντα**» (**Receding Horizon Control, RHC**).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ιδέα της ρύθμισης ενός συστήματος, η οποία επιλύει μία αλληλουχία από προβλήματα βελτιστοποίησης ανοικτού βρόχου δεν ήταν καινούρια. Για παράδειγμα, ο Proboi (1963) περιέγραψε ένα ρυθμιστή μετακινούμενου ορίζοντα ενώ, οι Lee και Markus (1967) προέβλεψαν τη χρήση του σύγχρονου ρυθμιστή **MPC** στην εργασία τους περί βέλτιστου ελέγχου το 1967, η οποία βρίσκεται στην Βιβλιογραφία [9].

Στα χρόνια που ακολούθησαν ο Προβλεπτικός έλεγχος μοντέλου επεκτάθηκε σε διάφορα άλλα προβλήματα ρύθμισης, με υψηλότερες συχνότητες υπολογισμού της ρυθμιστικής δράσης, χάρη στους όλο και πιο γρήγορους επεξεργαστές αλλά και τις βελτιώσεις στους αλγόριθμους βελτιστοποίησης. Μελετήθηκε ακόμη η ευρωστία του Προβλεπτικού ελέγχου προκειμένου να ληφθούν υπόψη οι αβεβαιότητες στις βιομηχανικές εγκαταστάσεις. Αυτό οδήγησε τα τελευταία χρόνια στην ανάπτυξη του λεγόμενου **στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου (Stochastic MPC)** ο οποίος λαμβάνει υπόψη του τις αβεβαιότητες που υπεισέρχονται στο μοντέλο. Αυτό σημαίνει πως ο στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος ουσιαστικά αποτελεί μια ειδική περίπτωση του εύρωστου προβλεπτικού ελέγχου MPC.

Στην πραγματικότητα, ο στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος MPC διαφοροποιείται σε δύο σημεία από τις τυπικές μεθόδους MPC, εκφράζοντας έτσι τη στοχαστική πτυχή του προβλήματος:

- Αντί της αντικειμενικής συνάρτησης αυτής καθεαυτής, χρησιμοποιείται η προσδοκώμενη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Κάθε περιορισμός ικανοποιείται με μια δεδομένη πιθανότητα..

Το κύριο πλεονέκτημα του στοχαστικού MPC είναι ότι προσφέρει ένα πλαίσιο για την προσαρμογή των παραμέτρων ελέγχου σε συνάρτηση με το μοντέλο και την αβεβαιότητα που εμπεριέχει. Κατά την διάρκεια δοκιμών πεδίου, φάνηκε ότι η χρήση της προσδοκώμενης τιμής, ελαττώνει την ευαισθησία της αντικειμενικής συνάρτησης στις διακυμάνσεις των παραμέτρων.(Βιβλ.[15])

Ο στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος θα αποτελέσει το κύριο αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας

## 1.2 Διάρθρωση της εργασίας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται συνοπτικά τα περιεχόμενα του κάθε κεφαλαίου που απαρτίζουν την παρούσα διπλωματική εργασία. Συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 2 γίνεται εκτενής παρουσίαση του Προβλεπτικού ελέγχου, καθώς επίσης και της βασικής δομής λειτουργίας του Μοντέλου Προβλεπτικού Ελέγχου. Στην συνέχεια, αναφέρονται ενδεικτικά τα σημαντικότερα και σπουδαιότερα πλεονεκτήματα του Ελέγχου Κυλιόμενου Ορίζοντα RHC, ενώ ακολουθεί μία συνοπτική αναφορά σε μερικές ενδεικτικές εφαρμογές του MPC.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η θεωρία του Στοχαστικού Προβλεπτικού Ελέγχου (Stochastic MPC) και τα βασικότερα σημεία διαφοροποίησης του από το κλασικό προβλεπτικό Έλεγχο. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον Στοχαστικό προβλεπτικό Έλεγχο με οριοθετημένα δεδομένα εισόδου, καθώς αποτελεί και την βάση για την μετέπειτα υλοποίηση του υπολογιστικού μέρους της εργασίας.

Στο κεφάλαιο 4 γίνεται η ανάπτυξη της μεθοδολογίας Προβλεπτικού ελέγχου με περιορισμούς στις μεταβλητές εκ χειρισμού (εισόδου) όπου πλέον ορίζεται λεπτομερώς το τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης που θα επιλυθεί στην συνέχεια, παρουσιάζονται οι βασικές υποθέσεις και παραδοχές ενώ μελετάται και η επιλυσιμότητα του προβλήματος.

Κατόπιν, παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού διαφόρων πινάκων που θα χρησιμοποιηθούν κατά την προσομοίωση. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάλυση ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου.

Στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται εισαγωγή στις βασικές αρχές του υπολογιστικού εργαλείου YALMIP, με βάση το οποίο έγινε η προσομοίωση σε περιβάλλον Matlab, ενώ γίνεται αναφορά και στον solver που χρησιμοποιήθηκε. Έπειτα, υλοποιείται η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό πρόβλημα.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος και μετά το πέρας της επαναληπτικής διαδικασίας, με την μορφή διαγραμμάτων του Matlab.

Στο κεφάλαιο 7, προκειμένου να υπογραμμιστεί η πρακτική εφαρμογή του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα μοντελοποίησης της δυναμικής και ρύθμισης ενός συστήματος θέρμανσης ενός κτιρίου. Γίνεται αναλυτική περιγραφή του παραδείγματος, ενώ τελικά καταγράφονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης του μοντέλου και εξάγονται μερικά ουσιώδη και χρήσιμα συμπεράσματα για την μεθοδολογία στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου που αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε.

Τέλος, στο κεφάλαιο 8 διατυπώνονται τα βασικά συμπεράσματα που εξήχθησαν από την ανάπτυξη, υλοποίηση και εφαρμογή της μεθοδολογίας του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου.

# Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

## Προβλεπτικός έλεγχος

---

## 2.1 Εισαγωγή

Ο Προβλεπτικός έλεγχος (Model Predictive Control, MPC) αποτελεί μία εξελιγμένη μέθοδο ρύθμισης συστημάτων, η οποία χρησιμοποιείται σε βιομηχανίες διεργασιών, όπως οι χημικές εγκαταστάσεις και τα διυλιστήρια πετρελαίου, ήδη από το 1980. (Βιβλ. [11])

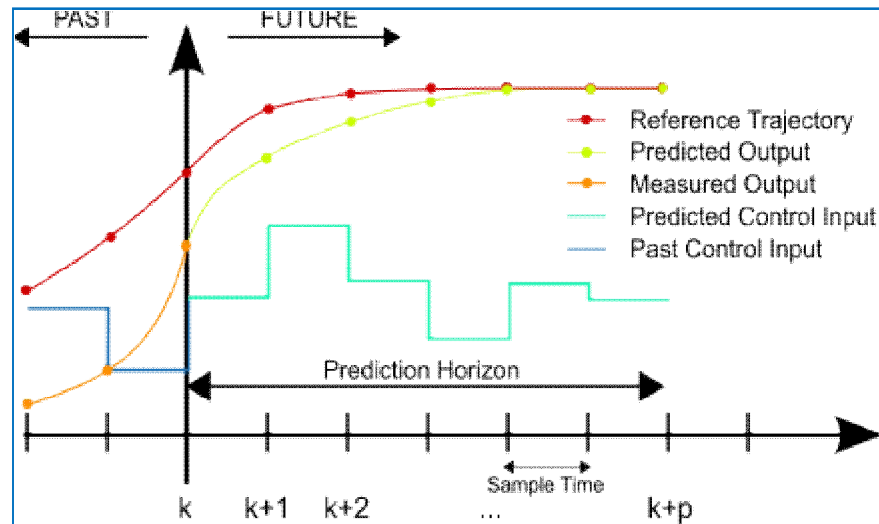
Από τότε και μέχρι σήμερα, οι μεθοδολογίες MPC έχουν προσελκύσει το έντονο ενδιαφέρον της ακαδημαϊκής κοινότητας, αλλά ταυτόχρονα έχουν τύχει ευρείας αποδοχής και εφαρμογής στη βιομηχανία. Παρά το γεγονός ότι οι πρώτες εφαρμογές τους περιορίζονταν στην βιομηχανία πετρελαίου, σήμερα οι ρυθμιστές προβλεπτικού μοντέλου έχουν επεκταθεί στην χημική βιομηχανία, την αυτοκινητοβιομηχανία αλλά και την αεροπορική βιομηχανία.

Στην πραγματικότητα, ο προβλεπτικός έλεγχος είναι ένα σύνολο τεχνικών ελέγχου με κοινό χαρακτηριστικό τη χρήση μαθηματικών μοντέλων των συστημάτων, προκειμένου να προβλεφθούν μελλοντικές τους συμπεριφορές και να επιλεγεί η καταλληλότερη κίνηση ελέγχου σύμφωνα με κάποιο κριτήριο βελτιστοποίησης. Οι ρυθμιστές του Προβλεπτικού ελέγχου στηρίζονται σε δυναμικά μοντέλα της διεργασίας, πολύ συχνά γραμμικά, εμπειρικά μοντέλα που προσδιορίζονται από ένα σύστημα αναγνώρισης.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στον προβλεπτικό έλεγχο, σκοπεύουν, ως επί το πλείστον, να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά σύνθετων δυναμικών συστημάτων. Η πολυπλοκότητα ενός συστήματος προβλεπτικού ελέγχου δεν είναι, συχνά, απαραίτητη για να παρέχει επαρκή έλεγχο σε απλά συστήματα, όταν αυτά ρυθμίζονται ικανοποιητικά από τους κλασικούς PID ρυθμιστές. Οι κλασικοί PID ρυθμιστές όμως αδυνατούν να αντεπεξέλθουν σε χαρακτηριστικά όπως, οι μεγάλες χρονικές καθυστερήσεις και οι, υψηλής τάξης, δυναμικές.

Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται στον προβλεπτικό έλεγχο προβλέπουν τις αλλαγές στις εξαρτημένες μεταβλητές του συστήματος, που οφείλονται σε μεταβολές στις ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές που δεν μπορούν να ρυθμιστούν από τους ρυθμιστές θεωρούνται ως διαταραχές. Ο Προβλεπτικός έλεγχος χρησιμοποιεί τα τρέχοντα χαρακτηριστικά της διεργασίας, την τρέχουσα δυναμική κατάσταση της διεργασίας, τα διαθέσιμα δυναμικά μοντέλα, καθώς και τους στόχους και τα όρια των ρυθμιζόμενων μεταβλητών, για να υπολογίσει μελλοντικές τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού, σε έναν μελλοντικό ορίζοντα (ορίζοντα πρόβλεψης). Αυτές οι τιμές υπολογίζονται, προκειμένου να διατηρήσουν τις εξαρτημένες μεταβλητές κοντά στους στόχους που έχουν τεθεί, ενώ ταυτόχρονα ικανοποιούν τους περιορισμούς του συστήματος. Ο Προβλεπτικός έλεγχος εφαρμόζει, συνήθως, μόνο την πρώτη ρυθμιστική δράση και επαναλαμβάνει εκ νέου τους υπολογισμούς στην επόμενη διακριτή χρονική στιγμή.

Στο ακόλουθο σχήμα αναπαρίσταται η βασική ιδέα του προβλεπτικού ελέγχου (MPC) που περιγράφηκε προηγουμένως:



**Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση της βασικής ιδέας του προβλεπτικού ελέγχου**

Ενώ πολλές πραγματικές διεργασίες δεν είναι γραμμικές, μπορούν συχνά να θεωρηθούν γραμμικές σε ένα μικρό εύρος λειτουργίας. Γραμμικές προσεγγίσεις του Προβλεπτικού ελέγχου χρησιμοποιούνται στην πλειονότητα των εφαρμογών, με το μηχανισμό ανατροφοδότησης του Προβλεπτικού ελέγχου (feedback policy) να αντισταθμίζει τα σφάλματα της πρόβλεψης, εξαιτίας της δομικής αναντιστοιχίας ανάμεσα στο μοντέλο και την διαδικασία. Στους ρυθμιστές Προβλεπτικού ελέγχου που αποτελούνται μόνο από γραμμικά μοντέλα, η αρχή της επαλληλίας της γραμμικής άλγεβρας, επιτρέπει οι επιδράσεις των αλλαγών στις πολλαπλές ανεξάρτητες μεταβλητές να προστίθενται, προκειμένου να προβλεφθεί η απόκριση των εξαρτημένων μεταβλητών.

Όταν τα γραμμικά μοντέλα δεν είναι επαρκώς ακριβή, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις. Ανάμεσα σε αυτές ο *μη γραμμικός Προβλεπτικός έλεγχος (Non linear MPC)* χρησιμοποιεί απευθείας ένα μη γραμμικό μοντέλο για την πρόβλεψη της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος. Το μη γραμμικό μοντέλο ενδέχεται να έχει τη μορφή εμπειρικής προσαρμογής δεδομένων (π.χ. τεχνικά νευρωνικά δίκτυα) ή να είναι υψηλής ακρίβειας δυναμικό μοντέλο βασισμένο στα θεμελιώδη ισοζύγια μάζας και ενέργειας.



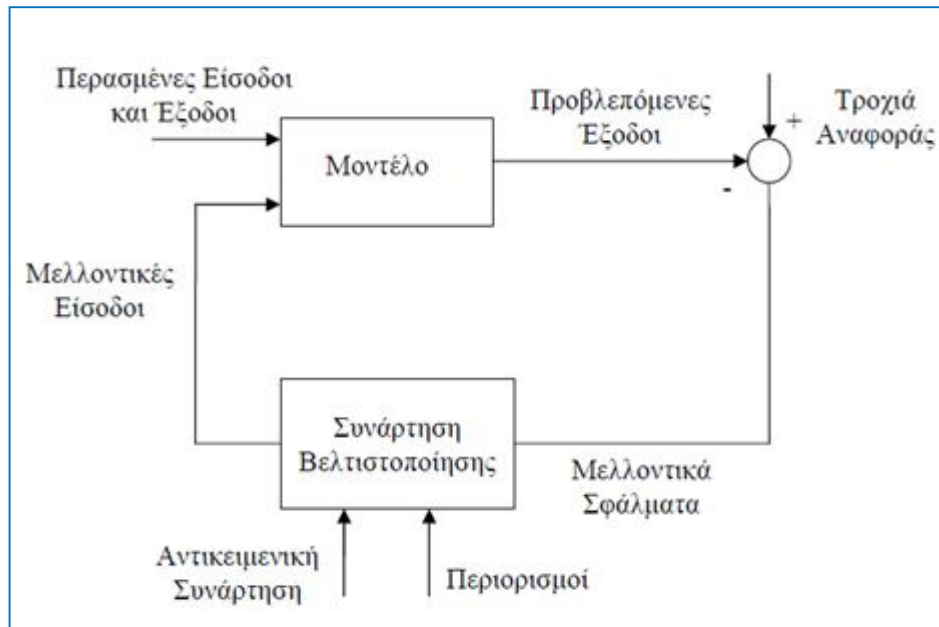
## 2.2 Η θεωρία του Προβλεπτικού ελέγχου

Ο Προβλεπτικός έλεγχος βασίζεται στην χρήση ενός μοντέλου για την πρόβλεψη των μεταβλητών εξόδου της διεργασίας, σε ένα πεπερασμένο μελλοντικό ορίζοντα. Σκοπός του μοντέλου αυτού είναι η διαμόρφωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, που ελαχιστοποιεί μία κατάλληλα επιλεγμένη αντικειμενική συνάρτηση.

Η μεθοδολογία ρύθμισης προβλεπτικού μοντέλου, MPC χαρακτηρίζεται από την παρακάτω στρατηγική, δεδομένης της διαθεσιμότητας ενός δυναμικού μοντέλου διακριτού χρόνου:

1. Σε χρόνο  $t$ , λαμβάνονται τιμές της τρέχουσας κατάστασης του συστήματος και καταστρώνεται μία στρατηγική ελαχιστοποίησης κόστους (μέσω ενός αλγόριθμου ελαχιστοποίησης) για ένα σχετικά βραχύχρονο διάστημα στο μέλλον:  $(t, t+T)$ . Πιο ειδικά, ένας on-line ή on-the-fly υπολογισμός χρησιμοποιείται για να διερευνήσει τις σταθερές διαταραχές που πηγάζουν από την τρέχουσα κατάσταση και ως αποτέλεσμα, να προσδιορίσει μία στρατηγική ρύθμισης με το ελάχιστο, δυνατό, κόστος μέχρι τον χρόνο  $t+T$ .
2. Εφόσον η βέλτιστη αλληλουχία μελλοντικών ρυθμιστικών κινήσεων προσδιοριστεί, μόνο η πρώτη τιμή του διανύσματος των μεταβλητών εκ χειρισμού  $u_{(t|t)}$  εφαρμόζεται τελικά στο σύστημα, ενώ οι υπόλοιπες τιμές απορρίπτονται, διότι στην επόμενη χρονική στιγμή οι τιμές του διανύσματος των μεταβλητών εξόδου  $y_{(t+1)}$  είναι ήδη γνωστές και το βήμα 1 επαναλαμβάνεται με τη νέα αυτή τιμή, ενώ όλη η υπόλοιπη διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου την επόμενη χρονική στιγμή, αξιοποιώντας όλες τις νεώτερες πληροφορίες για την διεργασία. Αυτή είναι, άλλωστε, η βασική αρχή της μετατόπισης του χρονικού ορίζοντα, στην οποία βασίζεται κατά μεγάλο μέρος η ρύθμιση προβλεπτικού μοντέλου.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η βασική δομή ενός Μοντέλου Προβλεπτικού Ελέγχου:



**Σχήμα 2.2: Η βασική δομή του MPC**

Ο ορίζοντας πρόβλεψης εξακολουθεί να μετατοπίζεται προς τα εμπρός και για αυτόν τον λόγο ο Προβλεπτικός έλεγχος είναι επίσης γνωστός με το όνομα «**Έλεγχος Κυλιόμενου Ορίζοντα**» (**Receding Horizon Control, RHC**).

### 2.3 Πλεονεκτήματα του Ελέγχου Κυλιόμενου Οριζοντα, RHC

Ο RHC έχει τύχει ευρείας αποδοχής στη χημική βιομηχανία και συνεχώς αυξάνεται η χρήση του σε συστήματα ελέγχου διεργασιών. Αυτό οφείλεται στην πληθώρα πλεονεκτημάτων που διαθέτει έναντι άλλων υπάρχοντων συστημάτων ελέγχου, όπως τα ακόλουθα, τα οποία παρουσιάζονται αναλυτικά στη βιβλιογραφία [3]:

- Είναι εφαρμόσιμο σε ευρεία κλίμακα συστημάτων. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως προς τον πεπερασμένο ορίζοντα, στον οποίο βασίζεται ο RHC, μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μεγάλο εύρος συστημάτων, συμπεριλαμβανομένων μη γραμμικών συστημάτων και συστημάτων με χρόνο-καθυστέρηση. Υπάρχουν επίσης, αναλυτικές καθώς και αριθμητικές λύσεις για τέτοια συστήματα.
- Αποτελεί συστηματική προσέγγιση για τη ρύθμιση κλειστού βρόχου. Ενώ οι βέλτιστοι ρυθμιστές για γραμμικά συστήματα με περιορισμούς εισόδου και εξόδου, ή μη γραμμικά συστήματα είναι συνήθως ρυθμιστές ανοιχτού βρόχου, ο RHC πάντα χρησιμοποιείται για ρύθμιση κλειστού βρόχου, χάρη στους επαναλαμβανόμενους υπολογισμούς του και την εφαρμογή μόνο του πρώτου βήματος.
- Λαμβάνει υπόψη τους περιορισμούς του συστήματος στον υπολογισμό της ρυθμιστικής δράσης. Για γραμμικά συστήματα με περιορισμούς εισόδου και κατάστασης μπορεί εύκολα και αποτελεσματικά να επιλυθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας τον τετραγωνικό προγραμματισμό(QP) και τον ημι-ορισμένο προγραμματισμό (Semidefinite). Εγγυάται την ευστάθεια του συστήματος τόσο για γραμμικά όσο και για μη γραμμικά συστήματα με περιορισμούς εισόδου και κατάστασης.
- Αξιοποιεί το μελλοντικό σήμα αναφοράς για έναν πεπερασμένο ορίζοντα, το οποίο είναι γνωστό σε αρκετές περιπτώσεις. Στη ρύθμιση άπειρου οριζοντα δεν είναι δυνατή η θεώρηση μιας μελλοντικής αλλαγής της επιθυμητής τιμής κατά τον υπολογισμό της ρυθμιστικής δράσης.
- Έχει καλές ιδιότητες όσον αφορά τα γραμμικά συστήματα. Είναι ευρέως γνωστό πως ο βέλτιστος έλεγχος σταθερής κατάστασης όπως οι έλεγχοι LQ, LQG και  $H_\infty$  διαθέτουν καλές ιδιότητες, όπως εγγυημένη ευστάθεια, ορισμένη ευρωστία. Ο RHC διαθέτει επίσης αυτές τις ιδιότητες και επιπρόσθετα, υπάρχουν πολλές σχεδιαστικές παράμετροι, όπως οι τελικοί σταθμισμένοι πίνακες και ο ορίζοντας πρόβλεψης, οι οποίες μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα για καλύτερη απόδοση.
- Μεγάλο εύρος βιομηχανικών εφαρμογών. Χάρη στα παραπάνω πλεονεκτήματα, υπάρχει πληθώρα βιομηχανικών εφαρμογών που στηρίζονται στον RHC, ειδικότερα στις βιομηχανικές διεργασίες. Αυτό συμβαίνει επειδή οι βιομηχανικές διεργασίες έχουν περιορισμούς στις εισόδους ελέγχου και απαιτούν οι καταστάσεις να παραμένουν σε συγκεκριμένες περιοχές, τις οποίες μπορούν να χειριστούν αποδοτικά με τον RHC. Στην

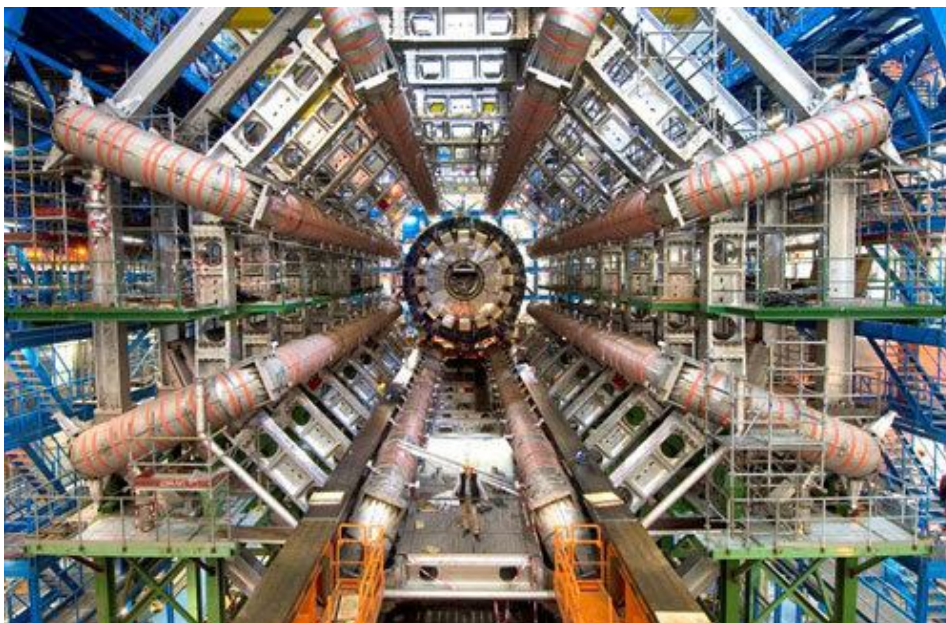
πραγματικότητα, η πιο επικερδής λειτουργία επιτυγχάνεται συχνά όταν το σύστημα βρίσκεται κοντά σε έναν περιορισμό. Για αυτόν τον λόγο, ο τρόπος που θα χειριστούμε τους περιορισμούς είναι ιδιαίτερος σημαντικός. Οι συμβατικοί ρυθμιστές συμπεριφέρονται συντηρητικά, δηλαδή λειτουργούν μακριά από το βέλτιστο σημείο, προκειμένου να ικανοποιούν τους περιορισμούς.

## 2.4 Πεδία εφαρμογών του Προβλεπτικού ελέγχου

Η πρώτη γενιά συστημάτων MPC αναπτύχθηκε ιδιαίτερα από τα βιομηχανικά επαγγέλματα την δεκαετία του 1970 για τις πετροχημικές βιομηχανίες αλλά γρήγορα γνώρισε ευρεία επιτυχία, καθώς αντιμετώπισε τους περιορισμούς και τα πολύ-μεταβλητά συστήματα με μεγάλη αποδοτικότητα. Μία προσαρμοσμένη μεθοδολογία MPC γνωστή και ως Γενικευμένος Προβλεπτικός Έλεγχος (Generalized Predictive Control, GPC) εμφανίστηκε το 1987. Ο συνολικός αριθμός των βιομηχανικών εφαρμογών του MPC ξεπέρασε τις 4600 μέχρι το τέλος του 1999, σύμφωνα με έρευνα του 2003.

Αντιπροσωπευτικές εφαρμογές που έχουν χρησιμοποιήσει MPC είναι, ο έλεγχος πτήσης αεροσκάφους, οι ατμογεννήτριες και οι λέβητες παροχών, η καταλυτική διάσπαση πετροχημικών, οι αντιδραστήρες πυρόλυσης υδρογονανθράκων, οι βιομηχανίες χάρτου, οι αποστακτικές στήλες κ.α., για τις οποίες γίνεται εκτενής αναφορά στην βιβλιογραφία [10]

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα είναι η χρήση του MPC για τη ρύθμιση της θερμοκρασίας του υπεραγώγιμου μαγνήτη του επιταχυντή Large Hadron Collider στο CERN. Αντίστοιχα, ο GPC έχει εφαρμοστεί κατά τον αερολαστικό έλεγχο των πτυσσόμενων πτερύγων ενός αεροσκάφους.



Εικόνα 2.1: Επιταχυντής Large Hadron Collider στο Cern

# Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup> Στοχαστικός Προβλεπτικός Έλεγχος

---

### 3.1 Εισαγωγή

Σε πολλές εφαρμογές εμπλέκεται στα μοντέλα η έννοια της «αβεβαιότητας», είτε εξαιτίας κάποιων εξωτερικών στοχαστικών διαταραχών, είτε λόγω των σφαλμάτων κατά τη μοντελοποίηση της διεργασίας. Η αβεβαιότητα συνήθως συναντάται στην βιβλιογραφία με τον σχηματισμό ενός εύρωστου προβλήματος MPC, αν υποτεθεί ότι η αβεβαιότητα περιορίζεται και υιοθετώντας την προσέγγιση της χειρότερης δυνατής περίπτωσης. Αν και έχει σημειωθεί κάποια σημαντική πρόοδος σε αυτόν τον τομέα, αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά συχνά πολύ συντηρητική.

Εντούτοις, θα πρέπει να εξεταστεί και η πιθανότητα κατά την οποία η αβεβαιότητα αυτή δεν μπορεί να περιοριστεί ή η περίπτωση κατά την οποία η αβεβαιότητα δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Σε αυτή την περίπτωση μία λιγότερο συντηρητική προσέγγιση θα μπορούσε να λάβει υπόψη της αυτά τα ενδεχόμενα, εντοπίζοντας κατάλληλες κατανομές για τις αβεβαιότητες και διατυπώνοντας ένα **στοχαστικό πρόβλημα MPC** σε επέκταση του υπάρχοντος. (Ηλεκτρ. Βιβλ. [11])

Ορισμένα σημεία τα οποία οφείλει να λάβει κανείς υπόψη του για την διατύπωση ενός στοχαστικού προβλήματος είναι τα ακόλουθα:

- Περιορισμοί

Στην περίπτωση που υπάρχουν στοχαστικές διαταραχές χωρίς όρια, το να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί με πιθανότητα ένα, είναι αδύνατο, καθώς οποιαδήποτε χρονική στιγμή το σύστημα μπορεί να αντιμετωπίζει μία πολύ μεγάλη διαταραχή, η οποία το εξαναγκάζει να υπερβεί τους περιορισμούς του. Επομένως, είναι σημαντικό να αντικαθίστανται οι αυστηροί περιορισμοί (hard constraints) με λιγότερο αυστηρούς, πιθανοτικούς περιορισμούς (soft, probabilistic), διασφαλίζοντας ότι αυτοί ικανοποιούνται, με μεγάλη πιθανότητα. Μία εναλλακτική λύση για την αντιμετώπιση των περιορισμών είναι η απαίτηση να ικανοποιούνται κατά μέσο όρο (η προσδοκώμενη τιμή τους), από τη λύση του προβλήματος

- Συνάρτηση κόστους

Για τη συνάρτηση κόστους, η προσδοκώμενη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να αντικαταστήσει την ντετερμινιστική εκδοχή της συνάρτησης. Αναλόγως με την εφαρμογή, εναλλακτικές και δυσκολότερες διατυπώσεις μπορεί να εφαρμοστούν.

### 3.2 Στοχαστικός Προβλεπτικός έλεγχος με περιορισμούς στις μεταβλητές εκ χειρισμού

Σε πολλά συστήματα ρύθμισης, οι μεταβλητές εισόδου δεν μπορούν να είναι αυθαίρετα μεγάλες και πρέπει να υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς, εφόσον οι συσκευές εισόδου είναι βαλβίδες, αντλίες, κινητήρες κ.α. Επίσης, οι τιμές των καταστάσεων (states) οφείλουν να είναι οριοθετημένες σε κάποιες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, σε μια εργοστασιακή δραστηριότητα, η θερμοκρασία ή η πίεση, ως μεταβλητές κατάστασης, πρέπει να βρίσκονται εντός συγκεκριμένων ορίων για λόγους ασφάλειας.

Παρόλο που οι περιορισμοί στην διεργασία μπορούν να γίνουν λιγότερο αυστηροί, (πιθανοτικοί περιορισμοί που αναφέρθηκαν προηγούμενα) για τις μεταβλητές κατάστασης, εντούτοις, εξακολουθούν και υφίστανται αυστηροί περιορισμοί στις μεταβλητές εκ χειρισμού. Αυτό το χαρακτηριστικό θα πρέπει να ληφθεί υπόψη κατά το στάδιο της σύνθεσης του νόμου ελέγχου, το οποίο οδηγεί σε σημαντικές δυσκολίες στις τεχνικές σχεδιασμού ενός ρυθμιστή εξαιτίας των αναπόφευκτων μη γραμμικοτήτων που εμπλέκονται, όπως επισημαίνεται και στην βιβλιογραφική πηγή [6]

Στόχος είναι ο προσδιορισμός μίας κυρτής και εφικτής λύσης, σε ένα στοχαστικό γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα (LQ) πεπερασμένου ορίζοντα, με ενδεχόμενο πρόσθετο θόρυβο χωρίς περιορισμούς και αυστηρούς περιορισμούς, σχετικά με την πολιτική ελέγχου. Από τη διαμόρφωση όμως και την επίλυση του παραπάνω στοχαστικού προβλήματος δεν μπορεί να αποκλειστεί η περίπτωση, στην οποία η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης οδηγεί σε τιμές των μεταβλητών κατάστασης που είναι εκτός των επιθυμητών ορίων. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος της παραβίασης των περιορισμών στον στοχαστικό MPC χρησιμοποιούνται στρατηγικές ανάκτησης. Μία τέτοια στρατηγική ενεργοποιείται κάθε φορά που παραβιάζονται οι περιορισμοί και απενεργοποιείται όποτε το σύστημα επιστρέφει σε ασφαλή δεδομένα. Γενικά, μία τέτοια στρατηγική ανάκτησης θα πρέπει να οδηγεί το σύστημα γρήγορα σε ασφαλή λειτουργία, ενώ ταυτόχρονα ανταποκρίνεται και στους υπόλοιπους στόχους του προβλήματος.

Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>  
Μελέτη μεθοδολογίας  
Προβλεπτικού Ελέγχου  
με περιορισμούς στις  
μεταβλητές εκ χειρισμού

---



Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται λεπτομερώς μια μεθοδολογία στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου που προτάθηκε πρόσφατα από τους P. Hokayem, D. Chatterjee, and J. Lygeros. Στα επόμενα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας, η μεθοδολογία θα υλοποιηθεί σε περιβάλλον MATLAB και θα παρουσιαστούν εφαρμογές της.

## 4.1 Εισαγωγή

Ο ντετερμινιστικός έλεγχος σε περιπτώσεις αβεβαιότητας βασίζεται σε εύρωστες μεθόδους ελέγχου που χρησιμοποιούν την ανάλυση της χειρότερης περίπτωσης, με την παραδοχή ότι ο θόρυβος υποστηρίζεται συμπαγώς. Ένα στοχαστικό μοντέλο των διαταραχών, είναι μία φυσική εναλλακτική προσέγγιση. Η συντηρητική προσέγγιση της περίπτωσης χειρότερης ανάλυσης μπορεί να καταστρατηγηθεί, καθώς δεν είναι δυνατή η επιβολή ορίων στο μέγεθος του θορύβου. Ταυτόχρονα, είναι μεγάλης σημασίας η θεώρηση αυστηρών περιορισμών στις μεταβλητές εκ χειρισμού, καθώς σχετίζονται με φυσικούς περιορισμούς του συστήματος που δεν είναι δυνατόν να παραβιαστούν (για παράδειγμα, τα όρια λειτουργίας μιας αντλίας).

Στο στοχαστικό λοιπόν προβλεπτικό έλεγχο με περιορισμούς στις μεταβλητές εκ χειρισμού, ανακύπτουν τα ακόλουθα ερωτήματα:

- I. Δοθέντος ενός γραμμικού συστήματος το οποίο επηρεάζεται από (πιθανώς μη οριοθετημένο) στοχαστικό θόρυβο, κατά πόσο είναι εφικτό το να ρυθμιστεί εφαρμόζοντας προβλεπτικό τύπο με περιορισμούς στις μεταβλητές εισόδου;
- II. Είναι το σχετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύσιμο;
- III. Υπό ποιες συνθήκες είναι εγγυημένη η ευστάθεια ενός συστήματος κλειστού βρόχου (με μια κατάλληλη στοχαστική έννοια);
- IV. Η ευστάθεια διατηρείται σε μια εφαρμογή προβλεπτικού ελέγχου κυλιόμενου ορίζοντα;

Στην ντετερμινιστική προσέγγιση, υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφικών πηγών που διευθετούν ζητήματα σχετικά με την επιλυσιμότητα και την ευστάθεια του προβλεπτικού ελέγχου κυλιόμενου ορίζοντα, όπως η βιβλιογραφία [4]. Ωστόσο, λιγότερες αναφορές υπάρχουν για την στοχαστική περίπτωση, μία εκ των οποίων βρίσκεται στην Βιβλιογραφική πηγή [1].

Όσον αφορά την συγκεκριμένη εργασία, δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στα γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα ρυθμιζόμενα συστήματα με αφφινικά, στοχαστικά δεδομένα διαταραχής. Η προσέγγιση που ακολουθείται έχει τρία κύρια χαρακτηριστικά.

Πρώτον, για το υπο-πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου, πεπερασμένου ορίζοντα, υιοθετείται μία πολιτική ανατροφοδότησης η οποία είναι αφφινική σε συγκεκριμένες φραγμένες μη γραμμικές συναρτήσεις των παρελθόντων δεδομένων θορύβου.

Δεύτερον, αντί για την συνήθη τάση που ακολουθείται, να προστίθενται περιορισμοί στις μεταβλητές εισόδους, χρησιμοποιείται μια νέα προσέγγιση, η οποία βασίζεται στον κορεσμό των χρησιμοποιούμενων μετρήσεων θορύβου κατά πρώτον και έπειτα την βελτιστοποίηση ως προς τις ενισχύσεις ανατροφοδότησης, διασφαλίζοντας ότι οι αυστηροί περιορισμοί των εισόδων θα ικανοποιούνται εκ κατασκευής. Η επίδραση του θορύβου εμφανίζεται στο πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου πεπερασμένου ορίζοντα με τη μορφή συγκεκριμένων πινάκων συνδιακύμανσης, οι οποίοι μάλιστα υπολογίζονται off-line.

Τρίτον, οι συναρτήσεις κορεσμού διασφαλίζουν την επιλυσιμότητα του προβλήματος βελτιστοποίησης, ενώ παράλληλα εξασφαλίζουν την ικανοποίηση των περιορισμών στις μεταβλητές εισόδου. Ως τέτοιοι, μπορούν να επιλεγθούν από μία μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων κορεσμού, όπως οι κανονικές σιγμοειδείς συναρτήσεις και οι τμηματικά αφφινικές προσεγγίσεις τους, κ.α.

Άρα και η επιλυσιμότητα του βασικού προβλήματος βελτιστοποίησης πεπερασμένου ορίζοντα διασφαλίζεται, μπορεί να εφαρμοστεί ένα μοντέλο στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου (MPC), στο οποίο το πρόβλημα βελτιστοποίησης είτε επιλύεται σε κάθε βήμα και εφαρμόζεται μόνο το πρώτο διάνυσμα της ακολουθίας των  $N$  διανυσμάτων εισόδου (με  $N$  να συμβολίζεται το μήκος του ορίζοντα) είτε επιλύεται κάθε  $N$  βήματα και εφαρμόζεται ολόκληρη η ακολουθία των  $N$  διανυσμάτων εισόδου.

### Σημείωση\*

Στο εξής θα συμβολίζεται με  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών, με  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  και  $\mathbb{R} \geq 0$  είναι το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Έστω  $1_A(\cdot)$  δείχνει την συνάρτηση δείκτη για ένα σύνολο  $A$  και  $I_{n \times n}$  και  $0_{n \times m}$  συμβολίζουν τον  $n$ -διάστατο μοναδιαίο πίνακα και τον  $n \times m$  μηδενικό πίνακα, αντίστοιχα. Επίσης, με  $\mathbb{E}_{x_0}(\cdot)$  συμβολίζεται η προσδοκώμενη τιμή δοθέντος του  $x_0$ , και με  $tr(\cdot)$  το ίχνος ενός πίνακα. Για έναν δεδομένο συμμετρικό  $n$  διαστάσεων πίνακα  $M$  με πραγματικά στοιχεία, το  $\{\lambda_i(M) | i = 1, \dots, n\}$  είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $M$  και  $\lambda_{max}(M) := \max_i \lambda_i(M)$  και  $\lambda_{min}(M) := \min_i \lambda_i(M)$ . Έστω ότι το σύμβολο  $\|\cdot\|$  αποτελεί την κλασική ευκλείδεια νόρμα και ότι με  $\|\cdot\|_p$  συμβολίζεται η συνήθης  $l_p$  νόρμα. Τελικά, οι πίνακες μέσης τιμής και συνδιακύμανσης ενός διανύσματος  $v$ , συμβολίζονται με  $\mu_v$  και  $\Sigma v$ , αντίστοιχα.

## 4.2 Ορισμός του προβλήματος που θα μελετηθεί

Ας θεωρήσουμε το γενικό αφφινικό στοχαστικό δυναμικό μοντέλο διακριτού χρόνου με την ακόλουθη μορφή:

$$x_{t+1} = A x_t + B u_t + F w_t + r, \quad t \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1)$$

όπου :  $x_t \in \mathbb{R}^n$  είναι οι μεταβλητές κατάστασης,

$u_t \in \mathbb{R}^m$  είναι οι μεταβλητές εκ χειρισμού (δεδομένα εισόδου),

$w_t \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα διάνυσμα εισόδου στοχαστικού θορύβου,

$A, B, F$  θεωρούνται γνωστοί πίνακες,

$r \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα γνωστό σταθερό διάνυσμα.

Υποθέτουμε ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι γνωστή και ίση με  $x_0$  και επίσης, ότι σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , το διάνυσμα  $x_t$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Επιπλέον, θα υποθέσουμε ότι τα διανύσματα του θορύβου  $w_t$ , είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ομοιόμορφα καταναμημένα (i.i.d.) ενώ για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , το διάνυσμα εισόδου δεσμεύεται από κάποιους περιορισμούς. Δηλαδή:

$$u_t \in \mathbb{U} := \{u \in \mathbb{R}^m / \|u\|_\infty \leq Umax\} \quad \forall t \in \mathbb{N}_0 \quad (4.2)$$

όπου  $Umax > 0$  είναι ένα δεδομένο άνω φράγμα.

Σημειώνεται πως το μοντέλο που δίνεται από την σχέση (4.1) σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που δίνονται από την σχέση (4.2) μπορούν να χειριστούν ένα ευρύ φάσμα κυρτών πολυτοπικών περιορισμών. Συγκεκριμένα, κάθε σύστημα της μορφής:

$$x_{t+1} = A x_t + \hat{B} v_t + F \hat{w}_t + \hat{r}, \quad (4.3)$$

με περιορισμούς εισόδου  $v_t \in \mathbb{V}$ , οι οποίοι μπορούν να μετασχηματιστούν στη μορφή (4.2) με έναν αφφινικό μετασχηματισμό  $v_t = S u_t + l$  υπόκειται στην προσέγγισή μας, θέτοντας  $B = \hat{B}S$  και  $r = \hat{B}l + \hat{r}$  στην εξίσωση (4.1). Τονίζεται ακόμα, πως το σύνολο  $\mathbb{V}$  δεν πρέπει απαραίτητα να είναι ένα υπερ-κυβικό σύνολο ή ακόμα, να περιέχει το αρχικό σύνολο. Μπορούμε επιπρόσθετα να υποθέσουμε ότι το  $w_t$  στην εξίσωση (4.1) είναι ένα διάνυσμα μηδενικής μέσης τιμής χωρίς βλάβη της γενικότητας. Δοθέντος ενός συστήματος της μορφής (4.3) όπου  $\hat{w}_t$  είναι ένα διάνυσμα μη μηδενικής μέσης τιμής, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με ένα αντίστοιχο σύστημα της μορφής (4.1) με μηδενική μέση τιμή στο οποίο:  $w_t = \hat{w}_t - \mathbb{E}[\hat{w}_t]$  θέτοντας:  $r = \hat{r} + F\mathbb{E}[\hat{w}_t]$ .

Ορίζουμε έναν ορίζοντα πρόβλεψης  $N \in \mathbb{N}$  και εξετάζουμε την ακόλουθη συνάρτηση κόστους σε χρόνο  $t$ :

$$V_t := \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{N-1} (x_{t+k}^T Q_k x_{t+k} + u_{t+k}^T R_k u_{t+k}) + x_{t+N}^T Q_N x_{t+N}] \quad (4.4)$$

όπου  $Q_t > 0$  και  $R_t > 0$  είναι κάποιοι δοθέντες συμμετρικοί πίνακες κατάλληλων διαστάσεων. Κάθε χρονική στιγμή  $t$ , αυτό που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι η ελαχιστοποίηση της σχέσης (4.4) κατά την τάξη των αιτιωδών στρατηγικών ανατροφοδότησης των καταστάσεων  $\Pi$  που προσδιορίζονται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_t \\ u_{t+1} \\ \vdots \\ u_{t+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_t(x_t) \\ \pi_{t+1}(x_t, x_{t+1}) \\ \vdots \\ \pi_{t+N-1}(x_t, x_{t+1}, x_{t+N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

για ορισμένες μετρούμενες συναρτήσεις  $\pi_{t:t+N-1} := \{\pi_t, \dots, \pi_{t+N-1}\} \in \Pi$ , ενώ ικανοποιούνται οι περιορισμοί της σχέσης (4.2). Η διαδικασία της ρύθμισης κυλιόμενου ορίζοντα (RHC) για έναν δεδομένο ορίζοντα ελέγχου  $N_c \in \{1, \dots, N\}$  μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

- a) σε χρόνο  $t$  καθορίζεται μία αποδεκτή, βέλτιστη στρατηγική ελέγχου, έστω  $\pi_{t:t+N_c-1}^* \in \Pi$ , η οποία ελαχιστοποιεί την  $N$ -επίπεδη συνάρτηση κόστους (4.4) ξεκινώντας από χρόνο  $t$ , δεδομένης αρχικής κατάστασης  $x_t$
- b) εφαρμόζονται τα πρώτα  $N_c$  στοιχεία  $\pi_{t:t+N_c-1}^*$  της μεθοδολογίας  $\pi_{t:t+N-1}$
- c) αυξάνεται το  $t$  σε  $t+N_c$  και επαναλαμβάνεται η διαδικασία από το βήμα (a).

Σύμφωνα με την εισαγωγή του κεφαλαίου, μπορούμε να επιλέξουμε  $N_c$  ίσο με 1 ή  $N$ . Εφόσον, τόσο το σύστημα (4.1), όσο και η συνάρτηση κόστους (4.4) είναι αμετάβλητα ως προς το χρόνο, αρκεί να θεωρήσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της συνάρτησης κόστους για χρόνο  $t = 0$ . Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, θεωρούμε το εξής πρόβλημα:

$$\min_{\pi \in \Pi} \{V_0 \text{ μοντέλο (4.1), περιορισμοί (4.2)}\} \quad (4.6)$$

Εάν κάτι τέτοιο είναι εφικτό, όσον αφορά τους περιορισμούς (4.2), τότε από το πρόβλημα (4.6) προκύπτει μία βέλτιστη ακολουθία, νόμων ελέγχου ανατροφοδότησης:  $\pi^* = \{u_0, \dots, u_{N-1}^*\}$ .

Η εξέλιξη του συστήματος (4.1) σε έναν ενιαίο ορίζοντα βελτιστοποίησης  $N$  μπορεί να περιγραφεί σε συμπαγή μορφή, ως εξής:

$$\bar{x} = \bar{A} x_0 + \bar{B} \bar{u} + \bar{D} \bar{F} \bar{w} + \bar{D} \bar{r} \quad (4.7)$$

$$\text{όπου } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ A \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} & \cdots & \cdots & 0_{n \times m} \\ B & \ddots & & \vdots \\ AB & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0_{n \times m} \\ A^{N-1}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & \cdots & \cdots & 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} & \ddots & & \vdots \\ A & I_{n \times n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0_{n \times n} \\ A^{N-1} & \cdots & A & I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad \text{και } \bar{F} := \text{diag}\{F, \dots, F\}$$

$$\text{όπου για τα δεδομένα εισόδου ισχύει: } \bar{u} \in \bar{U} := \{\xi \in \mathbb{R}^{Nm} \mid \|\xi\|_\infty \leq Umax\} \quad (4.8)$$

Με βάση τον συμπαγή συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω, το πρόβλημα βελτιστοποίησης της σχέσης (4.6) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:

$$\min_{\pi \in \Pi} \{\mathbb{E}_{x_0}[\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + \bar{u}^T \bar{R} \bar{u}] \mid \text{μοντέλο (4.7), περιορισμοί (4.8)}\} \quad (4.9)$$

$$\text{όπου } \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_0 & \cdots & 0_{n \times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n \times n} & \cdots & Q_N \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{bmatrix} R_0 & \cdots & 0_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{m \times m} & \cdots & R_{N-1} \end{bmatrix}$$

Η επίλυση του προβλήματος (4.9) είναι δύσκολο να επιτευχθεί γενικά. Προκειμένου να βρεθεί μία βέλτιστη λύση στο πρόβλημα (4.9) είναι απαραίτητη η επίλυση των εξισώσεων δυναμικού προγραμματισμού. Κάτι τέτοιο, γενικά, απαιτεί τη χρήση ορισμένων τεχνικών πλέγματος, ανάγοντας τη λύση του προβλήματος σε μία εξαιρετικά δύσκολη υπολογιστική διαδικασία. Μία διαφορετική προσέγγιση, είναι να περιορίσουμε την προσοχή μας σε συγκεκριμένες κλάσεις στρατηγικών ανατροφοδότησης. Το γεγονός αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα τον προσδιορισμό μιας υπο-βέλτιστης λύσης στο πρόβλημα, αλλά όπως θα φανεί στη συνέχεια θα προκύψει ένα επιλύσιμο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

### 4.3 Εύρεση λύσης με περιορισμούς στις μεταβλητές εισόδου

Από την υπόθεση ότι οι μεταβλητές κατάστασης είναι παρατηρήσιμες χωρίς σφάλμα, μπορεί κανείς να ανασχηματίσει την ακολουθία θορύβου από την αλληλουχία των παρατηρούμενων καταστάσεων και εισόδων από τον τύπο:

$$F w_t = x_{t+1} - A x_t - B u_t - r, \quad t \in \mathbb{N}_0 \quad (4.10)$$

Υπό το πρίσμα της παρούσας σχέσης, θα θεωρήσουμε πολιτική ανατροφοδότησης της μορφής:

$$u_t = \sum_{i=0}^{t-1} G_{t,i} F w_i + d_t \quad (4.11)$$

όπου, το κέρδος της ανατροφοδότησης  $G_{t,i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και οι αφφινικοί όροι  $d_t \in \mathbb{R}^m$  πρέπει να επιλεγθούν βάση του στόχου ελέγχου  $V_0$ , τηρουμένων, συγχρόνως, των περιορισμών (4.2). Επομένως, από τον τρόπο που ορίστηκαν προκύπτει πως οι τιμές των  $u$  σε χρόνο  $t$  εξαρτώνται από τις τιμές των  $w$  μέχρι την χρονική στιγμή  $t-1$ . Με χρήση των (4.10) και (4.11) βλέπουμε ότι το διάνυσμα  $u_t$  είναι συνάρτηση των παρατηρούμενων καταστάσεων ως τη στιγμή  $t$ . Αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία [18] ότι υπάρχει ένα-προς-ένα (μη γραμμική) αντιστοίχιση ανάμεσα στις πολιτικές ελέγχου της μορφής (4.11) και την κατηγορία των αφφινικών καταστάσεων των πολιτικών ανατροφοδότησης. Αυτό σημαίνει ότι εφόσον κάποιος ενδιαφέρεται για την αφφινική πολιτική ανατροφοδότησης της κατάστασης, η παραμετροποίηση (4.10) δεν συνιστά βλάβη της γενικότητας. Φυσικά, αυτή η επιλογή είναι υπο-βέλτιστη, αλλά εγγυάται την επιλυσιμότητα μιας ευρείας κατηγορίας βέλτιστων προβλημάτων ελέγχου. Σε συμπαγή συμβολισμό, η ακολουθία ελέγχου μέχρι την χρονική στιγμή  $N - 1$  δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{u} = \bar{G} \bar{F} \bar{w} + \bar{d} \quad (4.12)$$

όπου:  $\bar{d} := [d_0^T \ d_1^T \ \dots \ d_{N-1}^T]^T$  και

$$\bar{G} := \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & & & & \\ G_{1,0} & 0_{m \times n} & & & \\ \vdots & & & & \\ G_{N-1,0} & \dots & G_{N-1,N-2} & 0_{m \times n} & \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Επειδή τα στοιχεία του διανύσματος θορύβου  $\bar{w}$  δεν τα θεωρούμε φραγμένα, δεν μπορεί να υπάρξει εγγύηση ότι οι μεταβλητές εκ χειρισμού (4.12) θα ικανοποιούν τους περιορισμούς (4.8). Αυτό είναι ένα υπαρκτό πρόβλημα στις πρακτικές εφαρμογές και παραδοσιακά παρακάμπτεται, στηριζόμενοι στην υπόθεση ότι τα δεδομένα θορύβου βρίσκονται σε ένα συμπαγές σύνολο και σχεδιάζοντας στην συνέχεια έναν ρυθμιστή για την χειρότερη δυνατή περίπτωση. Στην συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε έναν ρυθμιστή:

$$\bar{u} = \bar{G}\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) + \bar{d} \quad (4.14)$$

αντί για την σχέση (4.12), όπου με  $\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) = [\varphi_0(Fw_0)^T, \dots, \varphi_{N-1}(Fw_{N-1})^T]^T$ ,

$\varphi_i(Fw_i)$  συμβολίζουμε το διάνυσμα  $[\varphi_i^1(F_1w_i), \dots, \varphi_i^N(F_nw_i)]^T$ , όπου  $F_j$  είναι η  $j$ -η στήλη του πίνακα  $F$  και  $\varphi_i^j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κάθε συνάρτηση με  $\sup_{s \in \mathbb{R}} |\varphi_i^j(s)| \leq \varphi \max \leq Umax$ .

Με άλλα λόγια, επιλέγεται η φραγή των μεγεθών που πήραμε από το διάνυσμα εισόδου του θορύβου, πριν τα εισάγουμε στο διάνυσμα ελέγχου. Με αυτή τη μέθοδο δεν θεωρούμε ότι η κατανομή του θορύβου περιορίζεται σε μία συμπαγή περιοχή, το οποίο αποτελεί πλεονέκτημα σε σχέση με άλλες προσεγγίσεις. Επιπλέον, η επιλογή των συναρτήσεων κορεσμού των προς ανάλυση στοιχείων  $\varphi_i^j(\cdot)$  παραμένει ανοιχτή. Ως εκ τούτου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κανονικές, κατά διαστήματα γραμμικές και σιγμοειδείς συναρτήσεις κορεσμού.

### Παρατήρηση 1

Η επιλογή μας να φράξουμε τις μετρήσεις από το διάνυσμα θορύβου καθιστά το πρόβλημα βελτιστοποίησης επιλύσιμο, σε αντίθεση με το να υπολογίσουμε ολόκληρο το διάνυσμα  $\bar{u}$  και έπειτα να το φράξουμε. Δηλαδή η προσέγγιση  $\bar{u} = \bar{\varphi}(\bar{G}\bar{F}\bar{w} + \bar{d})$  για κάποια  $\bar{\varphi}$  με άνω όριο κάθε στοιχείου τους το  $Umax$ , οδηγεί σε πρόβλημα βελτιστοποίησης που δεν επιδέχεται λύση.

### Παρατήρηση 2

Η επιλογή των μεταβλητών εκ χειρισμού στις σχέσεις (4.12) και (4.14) διαφέρει στο γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση εξαρτώνται γραμμικά από τα προγενέστερα δεδομένα θορύβου  $\bar{w}$ , ενώ στη δεύτερη αποτελούν μη γραμμική ανατροφοδότηση, εξαιτίας της επίδρασης της συνάρτησης  $\bar{\varphi}(\cdot)$  πάνω στα δεδομένα θορύβου.

### Πρόταση 3

Υποθέτουμε ότι  $\mathbb{E}[\|\bar{w}\|^2] < \infty$  και  $\mathbb{E}_{x_0}[\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})] = 0$  για όλα τα  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Επομένως το πρόβλημα (4.9), με τα δεδομένα εισόδου (4.14) είναι ένα κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης σε σχέση με τις μεταβλητές απόφασης  $(\bar{G}, \bar{d})$  και ισοδυναμεί με το ακόλουθο **τετραγωνικό πρόγραμμα**:

$$\begin{aligned} \min_{(\bar{G}, \bar{d})} & b^T \bar{d} + \bar{d}^T M_1 \bar{d} + tr(\bar{G}^T M_1 \bar{G} \Lambda_1 + M_2 \bar{G} \Lambda_2) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \max_{i=1, \dots, Nm} (|\bar{d}_i| + \|\bar{G}_i\|_1 \varphi_{\max}) \leq U_{\max} \\ \bar{G} \text{ όπως ορίζεται στην (4.13)} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου  $G_i$  είναι η  $i$ -η στήλη του πίνακα  $G$ ,

$$b^T = 2(\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{F}\bar{\mu}_{\bar{w}} + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q}\bar{B}, \quad M_1 = \bar{R} + \bar{B}^T \bar{Q}\bar{B}, \quad M_2 = 2\bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q}\bar{B}$$

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\mathbb{E}[\varphi_0(Fw_0)[\varphi_0(Fw_0)^T], \dots, \mathbb{E}[\varphi_{N-1}(Fw_{N-1})[\varphi_{N-1}(Fw_{N-1})^T]]\}$$

$$\Lambda_2 = \text{diag}\{\mathbb{E}[\varphi_0(Fw_0)w_0^T], \dots, \mathbb{E}[\varphi_{N-1}(Fw_{N-1})w_{N-1}^T]\}$$

### Απόδειξη

Μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτό ότι η παράσταση  $\bar{x}^T \bar{Q}\bar{x} + \bar{u}^T R\bar{u}$  είναι κυρτή και μη φθίνουσα, καθώς επίσης ότι τα  $\bar{x}$  και  $\bar{u}$  είναι αφθινικές συναρτήσεις των σχεδιαστικών παραμέτρων  $(\eta, \theta)$  για κάθε αντιληπτό θόρυβο  $\bar{w}$ . Ως εκ τούτου, το μοντέλο  $V_0$  είναι κυρτό στα  $(\eta, \theta)$ , αφού η προσδοκώμενη τιμή μιας κυρτής συνάρτησης διατηρεί την κυρτότητα. Επιπρόσθετα, οι περιορισμοί της σχέσης (4.15) είναι γραμμικοί και άρα επίσης, κυρτοί.

Αρχικά ας θεωρήσουμε την συνάρτηση κόστους, όπως αυτή δίνεται από την σχέση του προβλήματος (4.9). Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω ιδιότητες (Βιβλ.[5]) που αφορούν την συνάρτηση  $\mathbb{E}[\cdot]$  και τους ανάστροφους πίνακες:

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \quad (4.a)$$

$$\mathbb{E}[XY] = \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \quad (4.b)$$

$$\mathbb{E}[X^T A X] = [\mathbb{E}[X]]^T A [\mathbb{E}[X]] + tr(AC) \quad (4.g)$$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (4.d)$$

όπου:  $C$  (ή  $\Sigma$ ) είναι ο πίνακας της συνδιακύμανσης (covariance) του  $X$ , και  $tr$  το ίχνος (trace) του πίνακα  $A\Sigma$ .



Όσον αφορά τον πίνακα  $\bar{Q}$  ισχύει ότι:  $\bar{Q} = \bar{Q}^T$  εφόσον πρόκειται για τετραγωνικό συμμετρικό πίνακα. Επίσης, ισχύουν:  $\bar{x} = \bar{A}x_0 + \bar{B}\bar{u} + \bar{D}\bar{F}\bar{w} + \bar{D}\bar{r}$  και  $\bar{u} = \bar{G}\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) + \bar{d}$ .

Μετά την αντικατάσταση των εξισώσεων του συστήματος, προκύπτει:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_0}[\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}] &= \mathbb{E}_{x_0}[\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x}] + \mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}^T R \bar{u}] = \\ &= \mathbb{E}_{x_0}[(\bar{A}x_0 + \bar{B}\bar{u} + \bar{D}\bar{F}\bar{w} + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} (\bar{A}x_0 + \bar{B}\bar{u} + \bar{D}\bar{F}\bar{w} + \bar{D}\bar{r})] \\ &+ \mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}^T R \bar{u}] = (\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} (\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r}) + 2(\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} \bar{D} \bar{F} \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}] \\ &+ 2(\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} \bar{B} \mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}] + 2\mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{u}] + \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{D} \bar{F} \bar{w}] \\ &+ \mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}^T (\bar{R} + \bar{B}^T \bar{Q} \bar{B}) \bar{u}]\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι εφόσον  $\mathbb{E}_{x_0}[\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})] = 0$  ισχύει ότι  $\mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}] = \bar{d}$ . Αναλόγως λοιπόν, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των  $b$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  και  $\Lambda_2$ , έχουμε:

$$\mathbb{E}_{x_0}[\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}] = b^T \bar{d} + tr(M_2 \bar{G} \Lambda_2) + c + \mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}^T M_1 \bar{u}] \quad (4.17)$$

όπου  $c = (\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} (\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r}) + tr(\bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{D} \bar{F} \Sigma_{\bar{w}}) + 2(\bar{A}x_0 + \bar{D}\bar{r})^T \bar{Q} \bar{D} \bar{F} \mu_{\bar{w}}$  είναι μία σταθερά η οποία παραλείπεται, καθώς δεν επιδρά στην βελτιστοποίηση του προβλήματος.

Προκειμένου να προκύψει το παραπάνω συμπέρασμα, χρησιμοποιήσαμε το εξής ενδιαμέσο βήμα, το οποίο προέκυψε με αντικατάσταση της σχέσης (4.14) στην σχέση (4.17) και αντικατάσταση της τιμής του  $\Lambda_2$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{u}] &= \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} (\bar{G}\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) + \bar{d})] \\ &= \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{G} \bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})] + \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{d}] \\ &= tr(\bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{G} \bar{w}^T \bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})) + \mu_{\bar{w}}^T \bar{F}^T \bar{D}^T \bar{Q} \bar{B} \bar{d}\end{aligned}$$

όπου:  $\mu_{\bar{w}} = \mathbb{E}_{x_0}[\bar{w}]$

Χρησιμοποιώντας και πάλι την υπόθεση του ότι  $\mathbb{E}_{x_0}[\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})] = 0$ , την τιμή του  $\Lambda_1$ , καθώς και τις ιδιότητες (4.α), (4.δ), συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{x_0}[\bar{u}^T M_1 \bar{u}] &= \mathbb{E}_{x_0}[(\bar{G}\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) + \bar{d})^T M_1 (\bar{G}\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) + \bar{d})] \\ &= \mathbb{E}_{x_0}[(\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}))^T \bar{G}^T M_1 \bar{G} \bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})] + \bar{d}^T M_1 \bar{d} \\ &= tr(\bar{G}^T M_1 \bar{G} \mathbb{E}_{x_0}[(\bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w}) \bar{\varphi}(\bar{F}\bar{w})^T)]) + \bar{d}^T M_1 \bar{d} = tr(\bar{G}^T M_1 \bar{G} \Lambda_1) + \bar{d}^T M_1 \bar{d}\end{aligned}$$

Τελικά, συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.17) και (4.18), έχουμε σαν αποτέλεσμα τη συνάρτηση κόστους στο πρόβλημα (4.15) η οποία είναι κυρτή:

$$\mathbb{E}_{x_0}[\bar{x}^T \bar{Q} \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}] = b^T \bar{d} + \bar{d}^T M_1 \bar{d} + tr(\bar{G}^T M_1 \bar{G} \Lambda_1 + M_2 \bar{G} \Lambda_2)$$

Όσον αφορά τους περιορισμούς στο πρόβλημα 4.(9), τα προτεινόμενα δεδομένα εισόδου ελέγχου (4.14), ικανοποιούν τους περιορισμούς που τέθηκαν στη σχέση (4.8) όσο ικανοποιείται η ακόλουθη προϋπόθεση:

$$\|\bar{d} + \bar{G}\bar{\varphi}(\bar{w})\|_{\infty} \leq Umax, \quad \forall \bar{\varphi}(\bar{w}) \text{ τέτοιο ώστε } \|\bar{\varphi}(\bar{w})\|_{\infty} \leq \varphi max$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη προϋπόθεση:

$$\forall i = 1, \dots, Nm, \quad |\bar{d}_i + \bar{G}_i\bar{\varphi}(\bar{w})| \leq Umax \quad \forall \bar{\varphi}(\bar{w}) \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει } \|\bar{\varphi}(\bar{w})\|_{\infty} \leq \varphi max$$

Δεδομένου ότι αυτές οι προϋποθέσεις πρέπει να ισχύουν για κάθε επιτρεπόμενη τιμή της συνάρτησης  $\bar{\varphi}(\bar{w})$ , είναι δυνατόν να εξαλείψουμε την εξάρτηση των περιορισμών από την  $\bar{\varphi}(\bar{w})$ , μέσω του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\max_{\|\bar{\varphi}(\bar{w})\|_{\infty} \leq \varphi max} |\bar{d}_i + \bar{G}_i\bar{\varphi}(\bar{w})| \leq Umax \quad \forall i = 1, \dots, Nm$$

Ευθέως λοιπόν τώρα μπορεί ναδειχθεί ότι με τη χρήση των ανισοτήτων του Holder [17] συνεπάγεται:  $\max_{\|\bar{\varphi}(\bar{w})\|_{\infty} \leq \varphi max} |\bar{d}_i + \bar{G}_i\bar{\varphi}(\bar{w})| = |\bar{d}_i| + \|\bar{G}_i\|_1 \varphi max$  από όπου προκύπτει εύκολα το αποτέλεσμα θεωρώντας ένα συνολικό μέγιστο για όλα τα  $i$ .

#### Παρατήρηση 4

Το πρόβλημα (4.15) είναι ένα τετραγωνικό πρόγραμμα με παραμέτρους βελτιστοποίησης  $\theta := (\bar{G}, \bar{d})$  και η λύση του επιτυγχάνεται αποτελεσματικά μέσω πρότυπων υπολογιστικών πακέτων όπως το YALMIP. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει συνοπτική παρουσίαση του YALMIP και επεξήγηση του τρόπου υλοποίησης της μεθοδολογίας.

#### Υπολογισμός των $\Lambda_1$ και $\Lambda_2$

Ένα σημαντικό βήμα για την επίλυση του προβλήματος (4.15) είναι ο υπολογισμός των πινάκων  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$ . Στην γενική περίπτωση αυτοί οι πίνακες μπορούν να υπολογιστούν off-line είτε αναλυτικά, είτε με την κλασική ολοκλήρωση Monte Carlo.

#### Πρόταση 5

Για  $\sigma^2 > 0$ , έχουμε:

1.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}\sigma - \text{perfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \exp \left( \frac{1}{4\sigma^2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \text{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \right) \exp \left( \frac{1}{4\sigma^2} \right) \right)$
2.  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( -\exp \left( \frac{1}{4\sigma^2} \right) * (\text{besselk} \left( 0, \frac{1}{4\sigma^2} \right) - \text{besselk} \left( 1, \frac{1}{4\sigma^2} \right)) / 4 \right)$

όπου:  $\text{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , αντιπροσωπεύει την πρότυπη συνάρτηση σφάλματος

$\operatorname{erfc}(z) := 1 - \operatorname{erf}(z)$ , αντιστοιχεί στην συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος για  $z \in \mathbb{R}$

$\operatorname{besselk}(a, x)$ , αντιστοιχεί στην τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους.

Προκειμένου να βρεθεί η αναλυτική λύση των πιο πάνω ολοκληρωμάτων 1. και 2. πραγματοποιήθηκε ο υπολογισμός τους χωριστά από το υπόλοιπο πρόβλημα, σε υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Στη συνέχεια υπολογίστηκε μέσω του ίδιου προγράμματος Matlab και η αριθμητική λύση των δύο ολοκληρωμάτων, βάση των αριθμητικών δεδομένων του προβλήματος, με σκοπό την αντικατάσταση των τιμών των  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  στο πρόβλημα βελτιστοποίησης και εύρεση της τελικής λύσης.

### Παράδειγμα 6

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα (4.6) με Γκαουσιανό θόρυβο και σιγμοειδή όρια στις μεταβλητές εκ χειρισμού. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία του θορύβου  $(w_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανομημένων τυχαίων Γκαουσιανών διανυσμάτων, μέσης τιμής 0 και διακύμανσης  $\Sigma$ . Ας θεωρήσουμε ακόμα, πως τα στοιχεία των  $w_t$  είναι αμοιβαία ανεξάρτητα, κάτι το οποίο δηλώνει εμμέσως ότι το  $\Sigma$  είναι διαγώνιος πίνακας  $\operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\}$ . Υποθέτουμε επιπλέον, πως ο πίνακας  $F$  είναι ίσος με  $F = I$  και ότι η συνάρτηση  $\varphi$  είναι μία πρότυπη σιγμοειδής συνάρτηση, δηλαδή

$\varphi(t) = t/\sqrt{1+t^2}$ . Στη συνέχεια από την **πρόταση 5**, έχουμε ότι: για  $i = 1, \dots, n$  και  $j = 0, \dots, N-1$ ,  $\mathbb{E}[\varphi(w_j^i)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma_i} - \operatorname{perfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_i}}\right) \exp\left(\frac{1}{4\sigma_i^2}\right) \right)$ . Αυτό αποδεικνύει ότι ο πίνακας  $\Lambda_1$  στην προϋπόθεση 3 είναι ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα  $\operatorname{diag}\{\Sigma', \dots, \Sigma'\}$ , όπου

$$\Sigma' := \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma_1} - \operatorname{perfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_1}}\right) \exp\left(\frac{1}{4\sigma_1^2}\right) \right), \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma_n} - \operatorname{perfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma_n}}\right) \exp\left(\frac{1}{4\sigma_n^2}\right) \right) \right\}$$

Ομοίως, εφόσον:

$$\mathbb{E}[\varphi(w_j^i)w_j^i] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \left( -\exp\left(\frac{1}{4\sigma_i^2}\right) * \left( \operatorname{besselk}\left(0, \frac{1}{4\sigma_i^2}\right) - \operatorname{besselk}\left(1, \frac{1}{4\sigma_i^2}\right) \right) / 4 \right),$$

ο πίνακας  $\Lambda_2$  στην προϋπόθεση 3 είναι ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα  $\operatorname{diag}\{\Sigma'', \dots, \Sigma''\}$ , όπου :

$$\Sigma'' := \operatorname{diag}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \left( -\exp\left(\frac{1}{4\sigma_1^2}\right) * \frac{\operatorname{besselk}\left(0, \frac{1}{4\sigma_1^2}\right) - \operatorname{besselk}\left(1, \frac{1}{4\sigma_1^2}\right)}{4} \right), \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} \left( -\exp\left(\frac{1}{4\sigma_n^2}\right) * \left( \operatorname{besselk}\left(0, \frac{1}{4\sigma_n^2}\right) - \operatorname{besselk}\left(1, \frac{1}{4\sigma_n^2}\right) \right) / 4 \right) \right\}$$

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, δοθέντος του συστήματος (4.1), της στρατηγικής ελέγχου (4.11) και του τύπου του θορύβου, όπως περιγράφηκε νωρίτερα, οι πίνακες  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  που εξάγονται ως αποτέλεσμα, ολοκληρώνουν το σύνολο των υποθέσεων της **Πρότασης 3**. Το πρόβλημα (4.6) είναι πλέον έτοιμο για επίλυση ως τετραγωνικό πρόβλημα.

#### 4.4 Ανάλυση ευστάθειας

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι σταθερός κατά Schur, δηλαδή  $|\lambda_i(A)| < 1 \quad \forall i$ . Αναλόγως, και εφόσον ο έλεγχος είναι φραγμένος και τα δεδομένα θορύβου έχουν φραγμένη διακύμανση, είναι διαισθητικά προφανές ότι το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές υπό κάποια έννοια. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η κατάσταση του συστήματος παραμένει ομοιόμορφα τετραγωνικά φραγμένη υπό τον έλεγχο της μεθοδολογίας του κυλιόμενου ορίζοντα. Ειδικότερα για την περίπτωση  $N_c=1$ , η εφαρμογή του MPC ανταποκρίνεται στις μεταβλητές εισόδου της σχέσης (4.14) και το πρόβλημα βελτιστοποίησης της σχέσης (4.15) αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

Δοθέντος ενός σταθερού ορίζοντα βελτιστοποίησης  $N$ , ορίζεται ο αρχικός χρόνος  $t$ , γίνεται ο υπολογισμός των βέλτιστων παραμέτρων ελέγχου  $(\bar{G}^*, \bar{d}^*)$ , με χρήση του προγράμματος (4.15) και εφαρμόζεται το πρώτο βέλτιστο στοιχείο εισόδου του ελέγχου:  $\pi_{(0|t)}^* = u_{(0|t)}^* = d_{(0|t)}^*$ , αυξάνοντας το χρόνο  $t$  σε  $t+1$  και επαναλαμβάνοντας την διαδικασία. Φυσικά, η βέλτιστη ενίσχυση εξαρτάται εμμέσως και από την τρέχουσα δοθείσα αρχική κατάσταση:  $d_{(0|t)}^* = d_{(0|t)}^*(x_t)$ , η οποία με την σειρά της δημιουργεί μία σταθερή βέλτιστη πολιτική μη πεπερασμένου ορίζοντα, που δίνεται από την σχέση  $\pi^{MPC} := (\pi_{(0|0)}^*, \pi_{(0|1)}^*, \dots) = (d_{(0|0)}^*, d_{(0|1)}^*, \dots)$ .

Το σύστημα κλειστού βρόχου δίνεται, έτσι, από την σχέση :

$$x_{t+1} = A x_t + B d_{(0|t)}^* + F w_t + r, \quad t \in \mathbb{N}_0 \quad (4.18)$$

#### Πρόταση 7

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι σταθερός κατά Schur και ισχύουν ακόμα, οι υποθέσεις της Πρότασης 3. Χρησιμοποιώντας τους κλασικούς όρους Foster – Lyapunov και χρησιμοποιώντας την πολιτική  $\pi^{MPC}$ , αποδεικνύεται ότι το σύστημα κλειστού βρόχου της σχέσης (4.18) ικανοποιεί την σχέση:  $\sup_{t \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}_{x_0} \|x_t\|^2 < \infty$

Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βρίσκεται στις βιβλιογραφικές πηγές [2] και [16], ενώ παραλείπεται για λόγους συντομίας.

# Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

## Υλοποίηση της μεθοδολογίας σε περιβάλλον Matlab

---

Η υλοποίηση της μεθοδολογίας του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλον Matlab με την βοήθεια του υπολογιστικού εργαλείου YALMIP, το οποίο αποτελεί πρόσθετο πακέτο εντολών. Στη συνέχεια, ακολουθεί συνοπτική αναφορά στο YALMIP και την χρήση του, καθώς επίσης και στον solver BPMPD, που χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να γίνει δυνατή η εύρεση λύσης στο πρόβλημα.

## 5.1 Εισαγωγή

Δύο από τα πλέον σημαντικά μαθηματικά εργαλεία, που εισήχθησαν στην θεωρία και τα συστήματα ελέγχου τις τελευταίες δεκαετίες είναι, ο ημι-ορισμένος προγραμματισμός (semidefinite programming, SDP) και οι γραμμικές ανισότητες πινάκων (linear matrix inequalities, LMI). Ο ημι-ορισμένος προγραμματισμός αντιμετωπίζει ένα μεγάλο πλήθος προβλημάτων ελέγχου, που κυμαίνονται από την, παλαιότερη των 100 χρόνων, κλασική θεωρία του Lyapunov για γραμμικά συστήματα, τις μοντέρνες θεωρίες ελέγχου από την δεκαετία του 60, βασισμένες στην αλγεβρική εξίσωση του Riccati, μέχρι τις πιο πρόσφατες εξελίξεις όπως την θεωρία  $H^\infty$  την δεκαετία του 80. Κυρίως όμως, τα LMIs και SDP έχουν οδηγήσει σε πολλά νέα αποτελέσματα, σε θέματα που αφορούν την ανάλυση ευστάθειας, την ευρωστία μοντέλων στοχαστικού ελέγχου, την ρύθμιση τμηματικών αφφινικών συστημάτων και την αναγνώριση εύρωστων συστημάτων.

Αντίστοιχα με την θεώρηση ότι ένα πρόβλημα ρύθμισης μπορεί να επιλυθεί αν και εφόσον μπορεί να γραφτεί στη μορφή της εξίσωσης Riccati, όπως στην περίπτωση του γραμμικού τετραγωνικού ελέγχου, τώρα γίνεται η θεώρηση πως ένα πρόβλημα με λύση που εμμέσως περιγράφεται από SDP, μπορεί να θεωρηθεί ως επιλύσιμο, ακόμα και αν δεν υπάρχει αναλυτική, κλειστής μορφής, έκφραση της λύσης.

Αναγνωρίστηκε στα μέσα της δεκαετίας του 90 ότι τα αντικείμενα SDP αποτελούν κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης τα οποία μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά σε πολυωνυμικό χρόνο. Ως εκ τούτου, ένα δεδομένο πρόβλημα στο οποίο έγινε χρήση SDP, όχι μόνο επιλύεται αλλά και με σχετική αποτελεσματικότητα.

Η πληθώρα εφαρμογών των SDP οδήγησε σε μία έντονη αναζήτηση και εξέλιξη λογισμικών για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης. Στις μέρες μας υπάρχουν περίπου 10, διαθέσιμοι στο κοινό, solvers οι περισσότεροι εκ των οποίων διανέμονται δωρεάν και είναι εύκολα προσπελάσιμοι μέσω του διαδικτύου. Παρόλα αυτά, αυτοί οι solvers τυπικά, λαμβάνουν την περιγραφή του προβλήματος σε μία πολύ συμπαγή μορφή, καθιστώντας την άμεση χρήση των solvers χρονοβόρα και επιρρεπή σε σφάλματα. Προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο, χρειάστηκε να αναπτυχθούν νέες γλώσσες μοντελοποίησης. (Βιβλ.[13])

## 5.2 Βασικές έννοιες του YALMIP

Το YALMIP αποτελεί μια νέα, έξυπνη και ευέλικτη, γλώσσα μοντελοποίησης, για προηγμένα μοντέλα και επίλυση κυρτών και μη κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Διατίθεται ως εργαλειοθήκη του Matlab, χωρίς ωστόσο να ανήκει στην ίδια εταιρεία παραγωγής.

Αρχικά το YALMIP αναπτύχθηκε προκειμένου να μοντελοποιήσει τα αντικείμενα SDPs και στη συνέχεια να τα επιλύσει σε περιβάλλον εξωτερικών solvers. Η ταχεία προτυποποίηση ενός αλγορίθμου βασισμένου σε SDP μπορεί να επιτευχθεί σε μερικά λεπτά χρησιμοποιώντας τυπικές εντολές του Matlab, καθιστώντας τους περισσότερους χρήστες ικανούς να μοντελοποιήσουν και να επιλύσουν το δικό τους πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ενώ αρχικά προοριζόταν για αντικείμενα SDP και LMIs, τα τελευταία χρόνια έχει εξελιχθεί σημαντικά. Η σύγχρονη έκδοση του YALMIP, υποστηρίζει ένα μεγάλο εύρος κατηγοριών προβλημάτων βελτιστοποίησης, χαρακτηριστικά παραδείγματα των οποίων είναι τα γραμμικά προβλήματα προγραμματισμού (LP), τα προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού (QP), τα προβλήματα κωνικού προγραμματισμού δεύτερης τάξης (SOCP), τα προβλήματα ημι-ορισμένου προγραμματισμού, τα προβλήματα μικτού ακέραιου κωνικού προγραμματισμού, τα γεωμετρικά, τα τοπικά και συνολικά πολυωνυμικά, τα ημι-ορισμένα προγράμματα με β-γραμμικές ανισότητες πινάκων (BMI), τα πολύ-παραμετρικά γραμμικά και τετραγωνικά προγράμματα και ακόμα τα προβλήματα εύρωστου προγραμματισμού. Το YALMIP, επιπρόσθετα, περιλαμβάνει μοντέλα για στιγμιαίο προγραμματισμό και προγραμματισμό αθροίσματος τετραγώνων και μη κυρτή βελτιστοποίηση. Ένας μεγάλος αριθμός solvers (εμπορικοί αλλά και δωρεάν) συνδέονται με το YALMIP, το οποίο αυτόματα χρησιμοποιεί τον κατάλληλο που μπορεί να βρει. Μπορεί επίσης, να συνδυαστεί η χρήση του YALMIP με την εργαλειοθήκη MPT, προκειμένου να επιλυθούν ορισμένα πολύ-παραμετρικά προγράμματα. (Βιβλ.[12])

Το YALMIP αυτόματα **εντοπίζει το είδος του προβλήματος** που καλείται να επιλύσει και επιλέγει τον κατάλληλο solver βασισμένο στην συγκεκριμένη ανάλυση προβλήματος. Εάν δεν βρεθεί κάποιος κατάλληλος solver διαθέσιμος, τότε το YALMIP προσπαθεί να μετατρέψει το πρόβλημα έτσι ώστε να είναι δυνατόν να επιλυθεί. Για παράδειγμα, αν ο χρήστης ορίζει περιορισμούς second order cone, αλλά κανένας solver τέτοιου είδους δεν είναι διαθέσιμος, τότε το YALMIP μετατρέπει τους περιορισμούς σε LMIs και λύνει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε εγκατεστημένο SDP solver.

Το βασικό **κίνητρο** για να χρησιμοποιήσει κανείς το YALMIP είναι η γρήγορη ανάπτυξη αλγορίθμων, ενώ η γλώσσα γραφής των εντολών αντιστοιχεί σε κανονική γλώσσα σύνταξης σε περιβάλλον Matlab. Επομένως, το YALMIP αποτελεί ένα εξαιρετικά εύχρηστο και απλό εργαλείο, κατάλληλο να το χρησιμοποιήσει οποιοσδήποτε είναι εξοικειωμένος με το Matlab.

Ένα ακόμα **πλεονέκτημα** που διαθέτει το YALMIP, είναι το γεγονός ότι βρίσκει εφαρμογή σε πληθώρα περιπτώσεων μοντελοποίησης, επιτρέποντας στον χρήστη να επικεντρωθεί στο μοντέλο υψηλού επιπέδου, ενώ το YALMIP φροντίζει για την μοντελοποίηση χαμηλού επιπέδου, ώστε να διασφαλιστούν όσο το δυνατόν πιο αποτελεσματικά και αριθμητικά περισσότερα μοντέλα. (Βιβλ.[12] και Ηλεκτρ. Βιβλ.[III])

### 5.2.1 Διεργασίες επίλυσης (Solvers)

Όσον αφορά τους solvers που χρησιμοποιούνται στο YALMIP, μία από τις κεντρικές ιδέες, είναι να επικεντρωθεί ο χρήστης, στη γλώσσα και το υψηλότερο επίπεδο των αλγορίθμων, ενώ στηρίζεται σε εξωτερικούς solvers για την επίλυση των πραγματικών υπολογισμών. Ωστόσο, το YALMIP εφαρμόζει, επίσης, εσωτερικούς αλγορίθμους για καθολική βελτιστοποίηση, μικτό ακέραιο προγραμματισμό, πολυ-παραμετρικό προγραμματισμό, προγραμματισμό αθροίσματος τετραγώνων και εύρωστο προγραμματισμό. Αυτοί οι αλγόριθμοι, τυπικά βασίζονται σε χαμηλού επιπέδου γραφή γλώσσας, διαθέσιμη στο YALMIP και επιλύουν υπο-προβλήματα χρησιμοποιώντας τους εξωτερικούς solvers. (Ηλεκτρ. Βιβλ.[III])

Το YALMIP έχει σημειώσει τεράστια εξέλιξη από την πρώτη του δημόσια εμφάνιση, στις αρχές του 2001, όμως ακόμα εξακολουθεί να εξελίσσεται. Ο στόχος είναι να απλοποιηθεί όλη αυτή η διαδικασία της βελτιστοποίησης, ως εργαλείο της μηχανικής, φέρνοντας νέους solvers και νέες μεθόδους στο περιβάλλον Matlab του απλού χρήστη, προσφέροντας τελικά ένα γενικό πλαίσιο για τον έλεγχο σχετικό βελτιστοποιήσεων στο περιβάλλον του Matlab.



### 5.3 Επίλυση τετραγωνικών προβλημάτων (Quadratic Programming, QP)

Όσο αφορά την επίλυση προβλημάτων τετραγωνικού προγραμματισμού (Quadratic Programming, QP) υπάρχουν δύο πιθανές προσεγγίσεις που αποφέρουν τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα: οι **μέθοδοι Ενεργού συνόλου (Active Set)** και οι πιο πρόσφατες **μέθοδοι Εσωτερικού σημείου (Interior Point)**. Μπορεί κανείς να υποθέσει πως οι πιο σύγχρονες μέθοδοι συνιστούν και την καλύτερη δυνατή επιλογή, όμως ο Wright αντιτείνει πως για τον προβλεπτικό έλεγχο το θέμα είναι ακόμα υπό συζήτηση.

Στη συνέχεια γίνεται μία σύντομη αναφορά στις μεθόδους εσωτερικού σημείου (Interior Point methods), δεδομένου ότι ο solver που χρησιμοποιήθηκε στην εν λόγω άσκηση ανήκει σε αυτή την κατηγορία.

#### 5.3.1 Solver BPMPD

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα που επιλύεται στα πλαίσια αυτής της εργασίας, χρησιμοποιήθηκε ο solver BPMPD, ο οποίος χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο στην επίλυση τετραγωνικών προβλημάτων. Ανήκει στην κατηγορία των *solvers εσωτερικού σημείου (interior point solver)* και αποτελεί σύγχρονη εφαρμογή του πρωτογενούς διπλού, εσωτερικού σημείου αλγορίθμου για γραμμικά και κυρτά προβλήματα τετραγωνικού προγραμματισμού.

Τα κύρια χαρακτηριστικά του πακέτου είναι, ο εξαιρετικά ευέλικτος χειρισμός του (συμπεριλαμβανομένων των τοπικών ελαχίστων συστημάτων και της επαυξημένης διαμόρφωσης του συστήματος), γρήγορη και εύρωστη εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας (βασισμένη σε εξάλειψη της μορφής supernodal) και προηγμένες τεχνικές πριν από την επίλυση.

Ακολούθως γίνεται μία συνοπτική αναφορά στις μεθόδους εσωτερικού σημείου, με σκοπό να γίνει ευκολότερη η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο επιλύεται το πρόβλημα βάσει του συγκεκριμένου solver.

### 5.3.2 Μέθοδοι εσωτερικού σημείου (Interior point methods)

Τα τελευταία, περίπου, 20 χρόνια έχει αναδειχθεί μία ανταγωνιστική οικογένεια αλγορίθμων για την επίλυση κυρτών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Αυτές είναι οι λεγόμενες μέθοδοι εσωτερικού σημείου. Ήρθαν για πρώτη φορά στο προσκήνιο, με τον αλγόριθμο του Karmarkar's για επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού (LP), που αποτέλεσε την πρώτη σοβαρή ανταγωνιστική φιλοσοφία στους αλγορίθμους *Simplex* και η οποία ήταν ενδεχομένως, εντυπωσιακά ταχύτερη στην επίλυση μεγάλων προβλημάτων. Από τότε και μέχρι σήμερα, η μεγάλη ανάπτυξη που γνώρισαν αυτές οι μέθοδοι, οδήγησαν στη δημιουργία νέων εκδόσεων, ιδιαίτερα αποτελεσματικών για επίλυση προβλημάτων QP.

Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι η υπολογιστική τους πολυπλοκότητα (αριθμός επαναλήψεων, χρόνος ολοκλήρωσης, κ.α.) δεν είναι χειρότερη από πολυωνυμική, όσον αφορά κάποιες παραμέτρους, όπως για παράδειγμα ο αριθμός των περιορισμών ή ο αριθμός των μεταβλητών, λαμβάνοντας υπόψη ότι η πολυπλοκότητα άλλων γνωστών προσεγγίσεων, συμπεριλαμβανομένων και των μεθόδων Active Set, μπορεί να είναι, στην χειρότερη περίπτωση, εκθετική σε αυτές τις παραμέτρους. Σημειώνεται ακόμα, πως η διαθεσιμότητα των μεθόδων εσωτερικού σημείου για πιο γενικά κυρτά προβλήματα βελτιστοποίησης, έχει οδηγήσει σε έντονο ενδιαφέρον για τις γραμμικές ανισότητες πινάκων (LMI's) με σκοπό την επίλυση συστημάτων ρύθμισης αλλά και άλλων συστημάτων.

Σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν, ενώ οι κύριες επαναλήψεις των μεθόδων Active Set ερευνούν ανάμεσα στα σημεία στα όρια της εφικτής περιοχής, οι μέθοδοι εσωτερικού σημείου ερευνούν σε σημεία στο εσωτερικό αυτής της περιοχής. Το μειονέκτημα των μεθοδολογιών αυτών είναι ότι απαιτείται να προσδιοριστεί ένα αρχικό εφικτό σημείο. Οι επαναλήψεις, σε πιο σύγχρονες εκδόσεις των μεθόδων βασίζονται σε τεχνικές πρόβλεψης διόρθωσης που συνδυάζουν την εφαρμογή των μεθόδων αποσύζευξης Cholesky και Newton σε αραιούς συμμετρικούς πίνακες που διαμορφώνονται κατάλληλα βάσει των δεδομένων του προβλήματος

## 5.4 Εφαρμογή της μεθοδολογίας στο πρόβλημα

### 5.4.1 Αριθμητικά δεδομένα

Με βάση τις εξισώσεις του μοντέλου, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, διαμορφώνουμε το ακόλουθο σύστημα, με τις ακόλουθες τιμές των πινάκων:

$$\bar{x} = \bar{A} x_0 + \bar{B} \bar{u} + \bar{D} \bar{F} \bar{w} + \bar{D} \bar{r} \quad (5.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.01 \\ 0.3 & 0.3 & 0.06 \\ 0.09 & 0.02 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad F = I_{3 \times 3} \quad r = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

Το  $x_0$  αποτελεί την αρχική κατάσταση του συστήματος. Η προσομοίωση του συστήματος γίνεται, ξεκινώντας από 50 διαφορετικές αρχικές καταστάσεις, οι οποίες όλες δειγματοληπτούνται, σύμφωνα με μία ομοιόμορφη κατανομή  $[-50,50]^3$ .

Τα δεδομένα εισόδου του θορύβου,  $w$ , θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανεμημένα (i.i.d.), σύμφωνα με την κανονική κατανομή, με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:  $w \sim N(0, 4I_{3 \times 3})$ , δηλαδή μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης ίσης με 4.

Η συνάρτηση κορεσμού των δεδομένων θορύβου,  $\varphi$ , είναι της μορφής που αναλύθηκε στο **Παράδειγμα 6**, με  $\varphi_{max}=1$  και ως όριο των δεδομένων που προέρχονται από την συνάρτηση κορεσμού, ορίζεται το  $U_{max}=10$ . Οι πίνακες της βελτιστοποίησης επιλέγονται να είναι οι εξής:

$$Q_i = 3I_{3 \times 3} \quad \text{και} \quad R_i = 2I_{1 \times 1}$$

ενώ ως ορίζοντα πρόβλεψης επιλέγεται η τιμή:  $N = 6$ .

Οι πίνακες της βελτιστοποίησης  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$  υπολογίστηκαν με την βοήθεια των ολοκληρωμάτων (1) και (2) αντίστοιχα, της **Πρότασης 5**, ξεχωριστά από το υπόλοιπο πρόβλημα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του Matlab:

```
int (f, a, b)
```

για το εκάστοτε δεδομένο ολοκλήρωμα  $f$  και τα αντίστοιχα όρια  $a$  και  $b$ .

Οι τιμές που προκύπτουν μετά την λύση των ολοκληρωμάτων είναι:

$$\Lambda_1 = 0.2809 \quad \text{και} \quad \Lambda_2 = 0.6902$$

Με δεδομένες πλέον αυτές τις τιμές, κατασκευάζονται στη συνέχεια οι αντίστοιχοι πίνακες στην συμπαγή τους μορφή, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, με την βοήθεια κατάλληλων εντολών του Matlab.

Κατόπιν υπολογίζονται τα μεγέθη:  $b^T$ ,  $M_1$  και  $M_2$ , από τις αντίστοιχες εξισώσεις.

#### 5.4.2 Περιορισμοί

Έπειτα, θα πρέπει να οριστούν οι περιορισμοί του προβλήματος οι οποίοι προκειμένου να εισαχθούν μετέπειτα στο YALMIP θα πρέπει να γραφτούν σε γραμμική μορφή.

Για να γίνει αυτό το βήμα, αρχικά ορίζουμε τους πίνακες:  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$  οι οποίοι αποτελούν τους πίνακες απόφασης της βελτιστοποίησης. Χρησιμοποιώντας το YALMIP, οι πίνακες  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$ , ορίζονται ως **Sdpvar** αντικείμενα, δηλαδή ως συμβολικές μεταβλητές απόφασης, με κατάλληλες διαστάσεις, οι τιμές των οποίων μεταβάλλονται, στην διάρκεια επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης, έτσι ώστε να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\bar{G}, \bar{d})} b^T \bar{d} + \bar{d}^T M_1 \bar{d} + \text{tr}(\bar{G}^T M_1 \bar{G} \Lambda_1 + M_2 \bar{G} \Lambda_2) \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \max_{i=1, \dots, Nm} (|\bar{d}_i| + \|\bar{G}_i\|_1 \varphi_{\max}) \leq U_{\max} \\ \bar{G} \text{ όπως ορίζεται στην (13)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Επομένως, οι πίνακες  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$  γράφονται στο YALMIP με τη μορφή:

```
dbar=sdpvar(3,1)    Gbar=sdpvar(6,18)
```

Για να εισάγουμε περιορισμούς στο περιβάλλον του YALMIP χρησιμοποιούμε την εντολή 'set'. Η εντολή αυτή έχει σκοπό να καθορίσει τους περιορισμούς, δηλαδή να προσδώσει στα στοιχεία που υπόκεινται στους περιορισμούς κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα, αλλά και να τους συγκεντρώσει όλους μαζί σε μία μεταβλητή. Οι περιορισμοί μπορούν να είναι διαφόρων ειδών, όπως για παράδειγμα ισότητες στοιχείων, ανισότητες, περιορισμοί σε επίπεδο στοιχείου (element-wise) κ.α.

Οι περιορισμοί που αντιμετωπίζουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα αφορούν:

1. τη δομή του πίνακα  $\bar{G}$ , ο οποίος εξ ορισμού, πρέπει σε συγκεκριμένες του θέσεις να έχει μηδενικά στοιχεία (περιορισμοί ισότητας με το 0) και
2. την γραμμική αναπαράσταση της απόλυτης τιμής του πίνακα  $\bar{d}$ ,  $|\bar{d}_i|$  και της πρώτης νόρμας του πίνακα  $\bar{G}$ ,  $\|\bar{G}_i\|_1$ , με σκοπό να αποφύγουμε τους μη γραμμικούς τελεστές όπως είναι η απόλυτη τιμή, `abs`, και η νόρμα πίνακα, `norm`.

Όσον αφορά τον πρώτο περιορισμό, η σχέση αυτή γράφεται πολύ εύκολα με χρήση της εντολής `set` και απόδοση της εντολής αυτής στην μεταβλητή `K`. Δηλαδή για το μεν πρώτο στοιχείο του πίνακα  $\bar{G}$ , γράφουμε:

```
K=set(Gbar(1,:)==0)
```

και στην συνέχεια προσθέτουμε και τους υπόλοιπους περιορισμούς, που αφορούν τον πίνακα  $\bar{G}$ .

Ως προς την δεύτερη κατηγορία περιορισμών θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

Θεωρούμε πως τα στοιχεία του πίνακα  $\bar{d}$  κατά γραμμή, φράσσονται από τα στοιχεία  $e(i)$ . Για παράδειγμα ως προς το πρώτο στοιχείο του πίνακα  $\bar{d}$ , ισχύει:  $-e(1) \leq \bar{d}_1 \leq e(1)$ , όπου  $e(1) \geq 0$ . Ομοίως και για τα υπόλοιπα.

Αντίστοιχα για τον πίνακα  $\bar{G}$ , τα στοιχεία του οποίου φράσσονται επίσης, κατά γραμμές από τα στοιχεία  $h(i)$ . Για παράδειγμα ως προς το πρώτο στοιχείο του πίνακα  $\bar{G}$ , , ισχύει:  $-h(1,1) \leq \bar{G}(1,1) \leq h(1,1)$ , όπου  $h(1,1) \geq 0$ . Ομοίως και για τα υπόλοιπα.

Αν θεωρήσουμε τα  $e(i)$  και  $h(i,j)$  ως αντικείμενα *sdpvar* στο YALMIP, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την απόλυτη τιμή και την νόρμα πίνακα ως συνάρτηση των  $e(i)$  και  $h(i,j)$ , μετατρέποντας με αυτόν τον τρόπο τους μη γραμμικούς τελεστές `abs` και `norm`, σε γραμμικούς, διευκολύνοντας την επίλυση του προβλήματος από το YALMIP. Επομένως, με χρήση της εντολής `set` ως προς τα  $e(i)$  και  $h(i,j)$  ορίζουμε τις παραπάνω ανισότητες για όλα τα στοιχεία των  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$ .

Άρα, η ανισότητα του προβλήματος:  $\max_{i=1, \dots, Nm} (|\bar{d}_i| + \|\bar{G}_i\|_1 \varphi_{max}) \leq U_{max}$  (όπου  $\bar{G}_i$  η  $i$ -η γραμμή του  $\bar{G}$ ) μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε γραμμική μορφή χρησιμοποιώντας τα  $e(i)$  και  $h(i,j)$  και θεωρώντας την ανισότητα για κάθε  $i = 1 \dots 6$ . Για παράδειγμα, για  $i=1$  γράφεται ο εξής περιορισμός:

$$T = \text{set}(e(1) + \text{sum}(h(1,:)) * \varphi_{max} \leq U_{max}$$

Ομοίως προκύπτουν και οι υπόλοιποι απαιτούμενοι περιορισμοί που συνθέτουν το πλαίσιο εφαρμογής του συγκεκριμένου προβλήματος. Τελικά, όλοι οι περιορισμοί προστίθενται και αποδίδονται σε μία μεταβλητή,  $T$ .

### 5.4.3 Επίλυση του προβλήματος

Εφόσον, οι περιορισμοί του προβλήματος έχουν συγκεντρωθεί σε μία μεταβλητή, απαιτείται μόνο η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης με την βοήθεια της εντολής 'solvesdp' του YALMIP.

Αρχικά χρησιμοποιήθηκε ως solver, απευθείας από το YALMIP, ο **QUADPROG**, ο οποίος ανήκει στην κατηγορία των solvers τετραγωνικού προγραμματισμού. Εν τούτοις η λύση του προβλήματος δεν ήταν εφικτή. Γι αυτό το λόγο, έγινε χρήση του, επίσης τετραγωνικού solver, **BPMPD**, χάρη στον οποίο επιλύθηκε επιτυχώς το πρόβλημα βελτιστοποίησης.

### 5.4.4 Επαναληπτική διαδικασία

Από την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, προέκυψαν οι πίνακες  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$ , τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν τους περιορισμούς που τέθηκαν νωρίτερα. Με βάση την σχέση,  $\bar{u} = \bar{G}\bar{F}\bar{w} + \bar{d}$  (4.12), που αναφέρθηκε παραπάνω, και με δεδομένα τα  $x_0$  και  $\omega_0$  (από κανονική κατανομή), δίνονται τιμές στις εισόδους ελέγχου,  $\bar{u}$ .

Έπειτα, με βάση την σχέση  $x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + Fw_t + r$  (4.1) αποδίδεται τιμή στο  $x$ , για την χρονική στιγμή  $t = 1$ . Επομένως προκύπτει μια νέα τιμή του διανύσματος των μεταβλητών κατάστασης και υπολογίζεται εκ νέου το  $b^T$ . Η αντικειμενική συνάρτηση επιλύεται και πάλι με τα νέα δεδομένα από όπου προκύπτουν δύο νέοι πίνακες  $\bar{d}$  και  $\bar{G}$ . Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να ολοκληρωθεί η προσομοίωση.

# Κεφάλαιο 6<sup>ο</sup> Αποτελέσματα

---

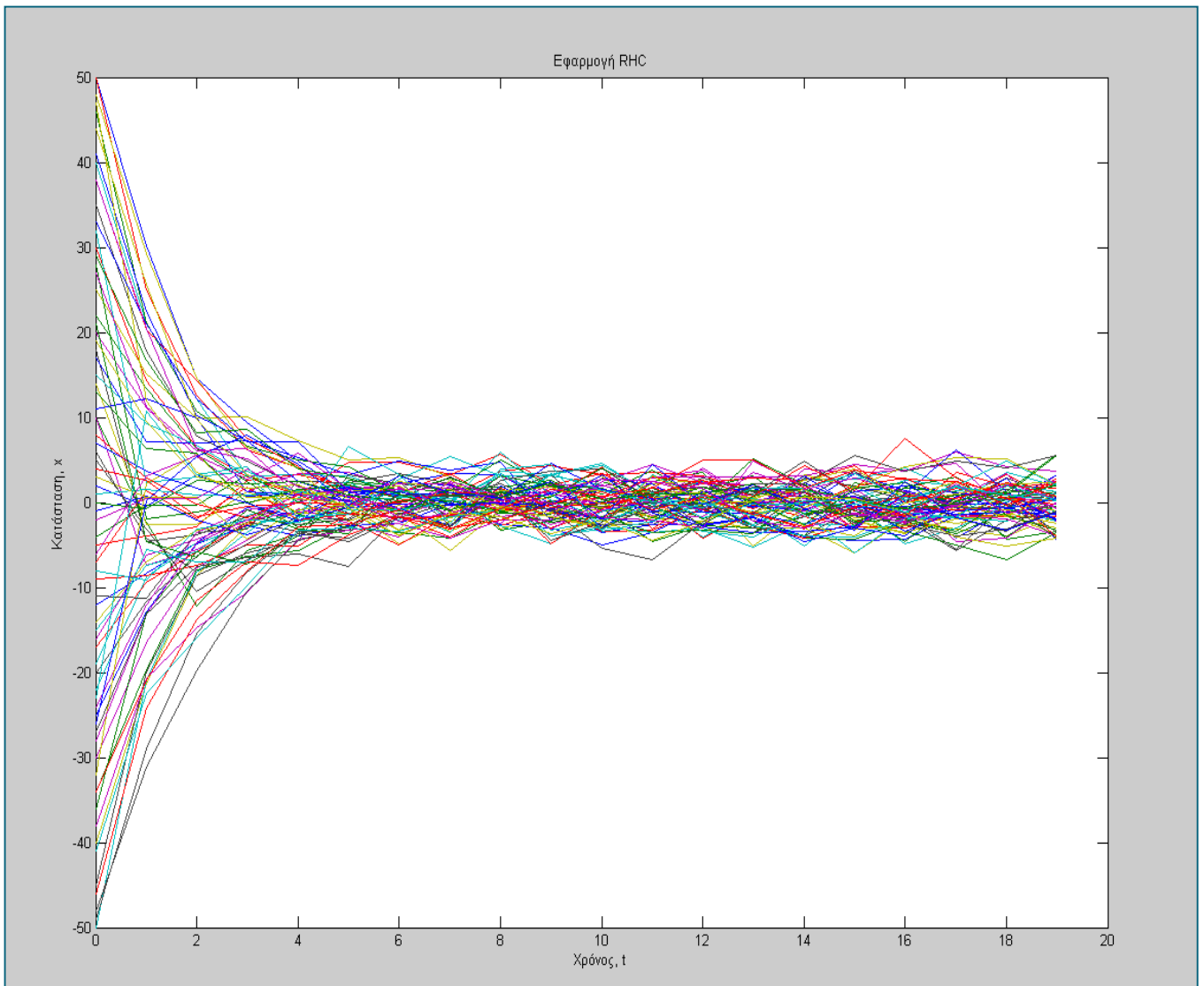


## 6.1 Αποτελέσματα

Η μέθοδος στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου εφαρμόστηκε αρχικά στο σύστημα που παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.4.1. Η μέθοδος επαναλήφθηκε για 25 διαφορετικές, τυχαίες, αρχικές καταστάσεις  $x_0$  που κατανέμονται ομοιόμορφα στον χώρο  $[-50,50]^3$ . και για έναν χρονικό ορίζοντα πλήρους εξέλιξης της κατάστασης,  $t = 19$  βημάτων.

Τα αποτελέσματα εφαρμογής του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου για το μοντέλο που αναπτύχθηκε, φαίνονται στα ακόλουθα διαγράμματα:  $x(t) - t$  και  $u(t) - t$ .

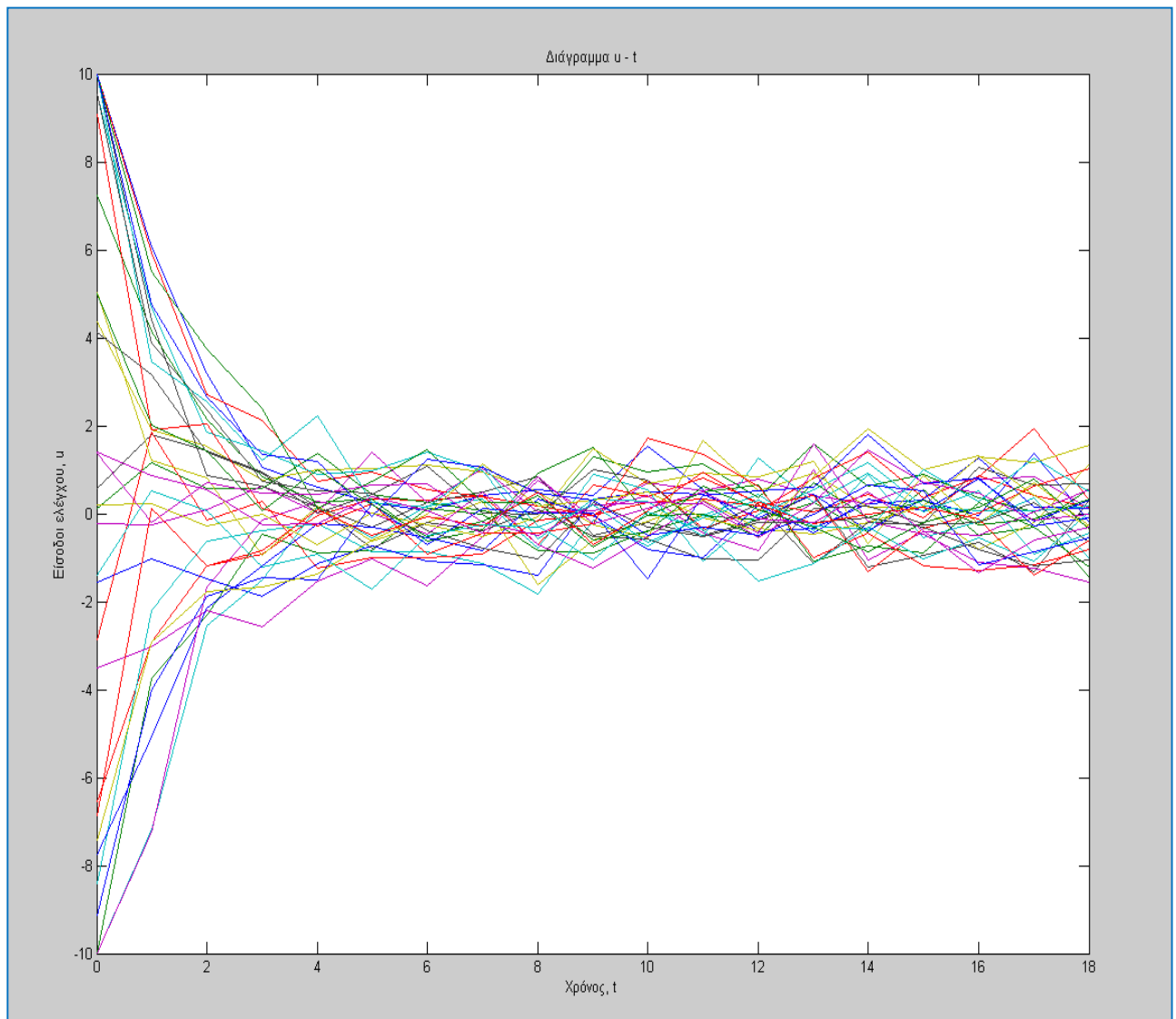
## Διάγραμμα $x(t) - t$



**Διάγραμμα 6.1: Απόκριση του συστήματος με τη μέθοδο στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου. Στο διάγραμμα απεικονίζονται όλες οι καταστάσεις  $x_1, x_2, x_3$  με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά, για τις διάφορες αρχικές τιμές**

Από το παραπάνω διάγραμμα, φαίνεται ξεκάθαρα πως ανεξαρτήτως της αρχικής τιμής του  $x_0$ , το πρόγραμμα συγκλίνει αρκετά γρήγορα προς το μηδέν ενώ παράλληλα, παρουσιάζει στενά όρια διακύμανσης κατά την εξέλιξη της προσομοίωσης.

## Διάγραμμα $u(t) - t$



**Διάγραμμα 6.2: Απεικόνιση των μεταβλητών εκ χειρισμού με τη μέθοδο στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου. Στο διάγραμμα απεικονίζονται όλες οι είσοδοι  $u$  με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά, για τις διάφορες αρχικές καταστάσεις του συστήματος**

Από το διάγραμμα 6.2 προκύπτει φανερά το συμπέρασμα, πως ανεξαρτήτως αρχικής τιμής των μεταβλητών κατάστασης, η δυναμική τους συμπεριφορά τείνει προς το επιθυμητό σημείο 0 και επίσης, τα όρια της διακύμανσης είναι αρκετά στενά και περιορισμένα, κατά την εξέλιξη της προσομοίωσης.

# Κεφάλαιο 7<sup>ο</sup>

## Παράδειγμα – Εφαρμογή στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου στη θέρμανση ενός κτιρίου

---

Προκειμένου να αξιολογηθεί η χρήση του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου σε πρακτικές εφαρμογές, χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο αυτό μοντέλο της βιβλιογραφίας που περιγράφει τη δυναμική ενός συστήματος θέρμανσης ενός κτιρίου. Το μοντέλο παρουσιάστηκε στη διδακτορική διατριβή του Klaus Kaas Andersen, που βρίσκεται στην βιβλιογραφική πηγή [14].

## 7.1 Εισαγωγή

Η ανάπτυξη κάποιου μοντέλου με σκοπό τη μοντελοποίηση της δυναμικής της θέρμανσης ενός κτιρίου είναι διαδικασία που μπορεί να χρησιμεύσει ώστε να μειωθεί η κατανάλωση ενέργειας και να βελτιωθεί η θερμική άνεση. Μπορεί για παράδειγμα να χρησιμεύσει ως χρήσιμο εργαλείο στην επιλογή μονωτικών υλικών, την ανάλυση στρατηγικών ελέγχου ή τον σχεδιασμό κατάλληλου συστήματος θέρμανσης. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο προσεγγίσεις για την ανάπτυξη δυναμικών μοντέλων. Η παραδοσιακή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιηθεί η γνώση των φυσικών χαρακτηριστικών του κτιρίου και μοντέλα των επιμέρους διεργασιών και μέσω αυτών να αναπτυχθεί ένα ντετερμινιστικό μοντέλο. Εναλλακτικά, μπορεί να εφαρμοστεί μία στατιστική μέθοδος η οποία να βασίζεται στα δεδομένα που συλλέγονται κατά τη διάρκεια λειτουργίας του κτιρίου, χωρίς όμως να αποκλείεται η χρησιμοποίηση θεμελιωδών εξισώσεων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί μοντέλο που αναπτύχθηκε χρησιμοποιώντας τη δεύτερη προσέγγιση για την εκτίμηση των παραμέτρων, με βάση δεδομένα απόδοσης κτιρίου, διακριτού χρόνου. Επομένως, αρχικά το μοντέλο διατυπώνεται σε συνεχή χρόνο, με όρους στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, γεγονός που εγγυάται ότι οι παράμετροι του μοντέλου έχουν άμεση φυσική ερμηνεία. Στη συνέχεια, το μοντέλο μετατρέπεται με κατάλληλο τρόπο σε διακριτή μορφή.

Η προσοχή επικεντρώνεται στην μοντελοποίηση της θερμικής δυναμικής της εσωτερικής θερμοκρασίας του αέρα, σε κατοικημένο κτίριο, όταν δεχθεί ποικίλα θερμικά ερεθίσματα, όπως ηλιακή ακτινοβολία και θερμότητα από τα καλοριφέρ. Το κτίριο θεωρείται ως κτίριο χαμηλής ενεργειακής κατανάλωσης, από όπου προκύπτουν και τα διάφορα δεδομένα απόδοσης με βάση ένα ήδη σχεδιασμένο πείραμα.

## 7.2 Διαδικασία μοντελοποίησης

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστεί η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την ανάπτυξη του μοντέλου της θερμικής δυναμικής ενός κτιρίου ελέγχου. Η διαδικασία μοντελοποίησης αποτελείται από τρία στάδια όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 7.1, προσδιορισμός της δομής, εκτίμηση των παραμέτρων και αξιολόγηση.

Το πρώτο βήμα της μοντελοποίησης είναι η επιλογή της δομής του μοντέλου. Τόσο πληροφορίες από την φυσική, όσο και πληροφορίες από τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ενός κατάλληλου μοντέλου παραμετροποίησης. Για να γίνει η προτυποποίηση, χρησιμοποιούνται γνωστές θερμοδυναμικές σχέσεις και μορφοποιούνται σε όρους συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$dX_t = f(X_t, U_t, \theta, t)dt \quad (7.1)$$

όπου:  $X_t \in \mathbb{R}^{n_x}$  είναι ένα διάνυσμα των καταστάσεων του συστήματος ενώ το διάνυσμα  $U_t \in \mathbb{R}^u$  περιέχει τις μεταβλητές εισόδου και το διάνυσμα  $\theta \in \mathbb{R}^{n_p}$  είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων. Το μονοδιάστατο μοντέλο της παραπάνω εξίσωσης παρέχει μία ντετερμινιστική περιγραφή της χρονικής εξέλιξης των καταστάσεων του συστήματος. Είναι προφανές ότι οποιαδήποτε περιγραφή της σχέσης αυτής αποδίδει μόνο μία γενική εκτίμηση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την δεδομένη σχέση ως το θεμέλιο λίθο μιας περιγραφής της πραγματικής διακύμανσης των καταστάσεων, εισάγεται στην εξίσωση αυτή ένας στοχαστικός όρος, οδηγώντας στο ακόλουθο σύστημα στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης:

$$dX_t = f(X_t, U_t, \theta, t)dt + G(\theta, t)dW_t \quad (7.2)$$

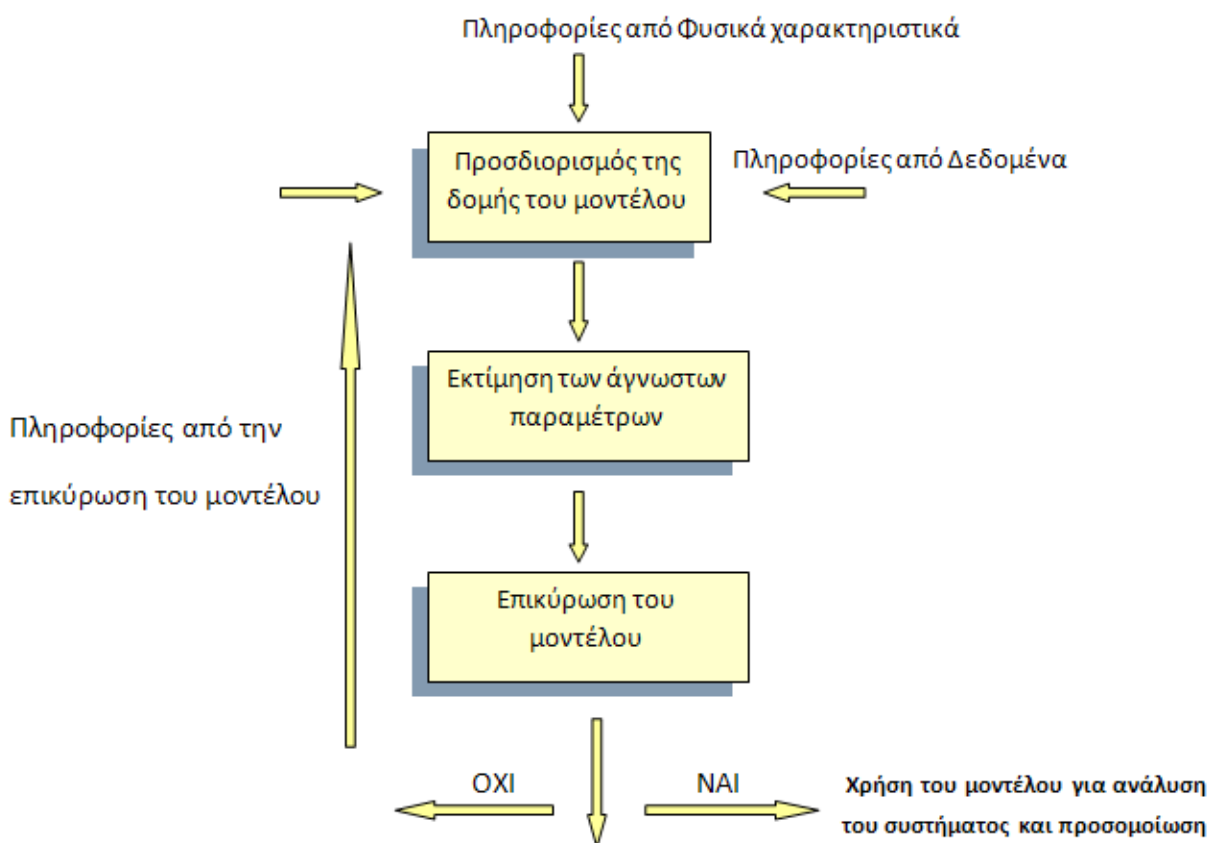
όπου:  $W_t$  είναι μία τυπική διαδικασία Wiener και  $G(\theta, t)$

Οι λόγοι για τους οποίους είναι απαραίτητη η εισαγωγή του στοχαστικού όρου είναι οι εξής:

- Σφάλματα κατά την διαδικασία μοντελοποίησης. Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση αυτή, ενδέχεται να είναι μία προσέγγιση του πραγματικού συστήματος.
- Μη αναγνωρισμένες και μη μοντελοποιημένες μεταβλητές εισόδου (διαταραχές) μπορεί να επηρεάζουν την εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος.
- Μετρήσεις των δεδομένων εξόδου μπορεί να αλλοιώνονται από τον θόρυβο.

Το διάνυσμα παραμέτρων  $\theta$  εμπεριέχει τα ισοδύναμα θερμικά στοιχεία, δηλαδή χωρητικότητες, αντιστάσεις που αν δεν είναι γνωστές εκτιμώνται βάσει δεδομένων με στατιστικές μεθοδολογίες όπως ελάχιστα τετράγωνα και maximum likelihood.

Για την αξιολόγηση του μοντέλου, αν οι παράμετροι του μοντέλου έχουν άμεση φυσική ερμηνεία, το εκτιμώμενο διάνυσμα παραμέτρων  $\theta$ , οφείλει να είναι βρίσκεται κοντά στην αναμενόμενη τιμή του. Συγχρόνως, το μοντέλο θα πρέπει να είναι σε θέση να προβλέψει τη μελλοντική δυναμική συμπεριφορά του συστήματος με ακρίβεια. Γι αυτό το λόγο, εφαρμόζονται ποικίλα στατιστικά τεστ που βασίζονται στην εφαρμογή του μοντέλου σε δεδομένα που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξή του. Οι πληροφορίες που προκύπτουν από την αξιολόγηση του μοντέλου, συνιστούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την βελτίωση της απόδοσης του μοντέλου. Εάν η αξιολόγηση υποδεικνύει την ανεπαρκή απόδοση του μοντέλου, τότε η διαδικασία της αξιολόγησης μπορούν να υποδείξει πώς να γίνουν βελτιώσεις στη δομή του μοντέλου.

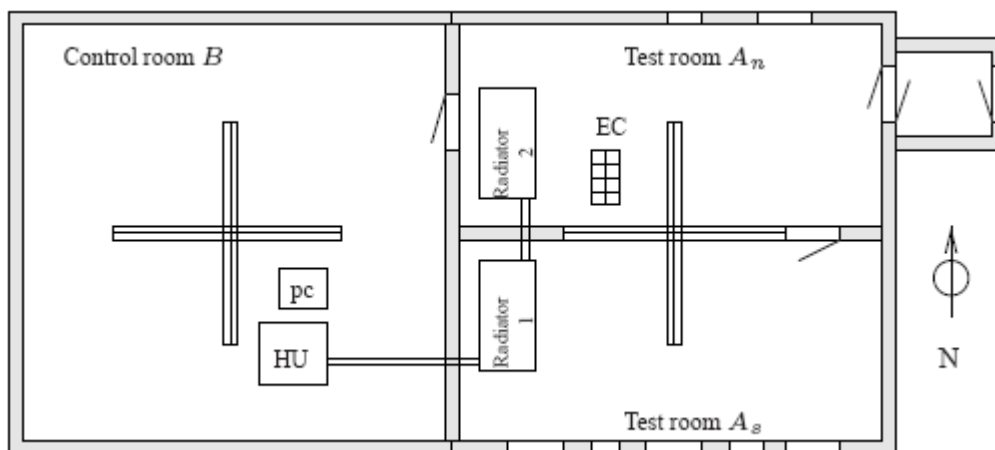


**Σχήμα 7.1: Διαδικασία μοντελοποίησης**

### 7.3 Το κτίριο ελέγχου

Στην ενότητα αυτή γίνεται μία συνοπτική περιγραφή του κτιρίου ελέγχου και του συστήματος θέρμανσης του. Σκοπός είναι να δοθεί έμφαση στα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του κτιρίου και την επίδραση του συστήματος θέρμανσης. Αυτή η πληροφορία χρησιμοποιείται στην επιλογή της δομής ενός μοντέλου για την δυναμική της θέρμανσης στο κτίριο ελέγχου.

Το κτίριο ελέγχου βρίσκεται στο πολυτεχνείο της Δανίας (DTU), στην Κοπεγχάγη και χτίστηκε το 1980. Ο όρος 'χαμηλής ενέργειας', αναφέρεται στην ονομαστική θερμική κατανάλωση, η οποία είναι περίπου 2.5 KW σε  $-12^{\circ}\text{C}$  εξωτερικά και  $20^{\circ}\text{C}$  εσωτερικά. Το κτίριο ελέγχου είναι ένα μονόροφο, ενιαίο κτίριο με μη εξαεριζόμενο χώρο και ένα μέρος της σκεπής του στεγάσει γραφείο. Το ισόγειο αποτελεί μία περιοχή 120 m<sup>2</sup> και είναι χωρισμένη σε τρία διαμερίσματα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 7.1:



**Εικόνα 7.1: Απεικόνιση του κτιρίου ελέγχου και του εσωτερικού του**

Τα δωμάτια A<sub>s</sub> και A<sub>n</sub> χρησιμοποιούνται ως ζώνες ελέγχου (δωμάτια δοκιμών). Τα δωμάτια είναι σχεδόν συμμετρικά και καθένα έχει εμβαδό 30 m<sup>2</sup>. Το δωμάτιο A<sub>s</sub> έχει παράθυρα συνολικού εμβαδού 3.6 m<sup>2</sup> που βλέπουν το νότο, ενώ το δωμάτιο A<sub>n</sub> έχει παράθυρα συνολικού εμβαδού 1.9 m<sup>2</sup> που βλέπουν το βορρά. Το δωμάτιο B έχει εμβαδό 60 m<sup>2</sup> και χρησιμοποιείται ως ζώνη ρύθμισης. Περιέχει μέρος του εξοπλισμού του πειράματος. Όλα τα παράθυρα στο δωμάτιο ρύθμισης είναι προστατευμένα από την ηλιακή ακτινοβολία. Η οροφή και οι εξωτερικοί τοίχοι του κτιρίου είναι ελαφριές κατασκευές τύπου 'sandwich', βασισμένες σε δέσμη ινοσανίδων, μονωμένων με 300 mm ορυκτοβάμβακα, ενώ οι τοίχοι που χωρίζουν τους τοίχους είναι επίσης μονωμένοι με 95 mm ορυκτοβάμβακα. Το δάπεδο κάθε δωματίου είναι μία στρωματοειδής κατασκευή και γίνεται χρήση μονωτικού υλικού. Για την παροχή θέρμανσης, χρησιμοποιείται ένα κεντρικό σύστημα θέρμανσης με νερό, το οποίο αποτελείται από μία μονάδα θέρμανσης, HU, τοποθετημένη στο δωμάτιο B και ένα καλοριφέρ σε κάθε δωμάτιο ελέγχου. Τα δύο καλοριφέρ είναι πανομοιότυπα με ονομαστική ισχύ 395W. Η ροή σε κάθε καλοριφέρ, ρυθμίζεται από θερμοστατική βαλβίδα. Μία επιπρόσθετη παροχή



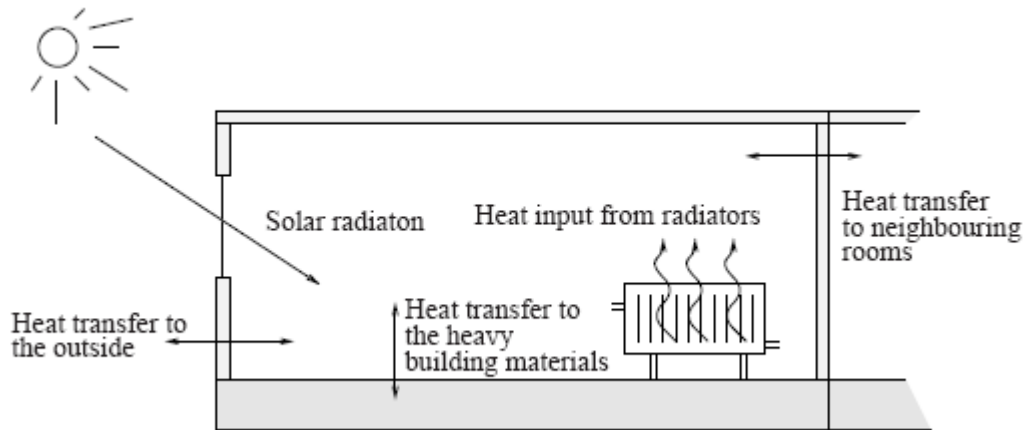
θέρμανσης τοποθετείται στο δωμάτιο An και συμβολίζεται ως EC. Η μονάδα EC είναι τηλεχειριζόμενη, δηλαδή ένα on/off σήμα 0-5 V ρυθμίζει μία ηλεκτρική on/off θερμική ισχύ εισόδου 0-150W. Η ιδέα της μονάδας EC είναι να αντισταθμίσει την αραιή ηλιακή ακτινοβολία του βορειότερου δωματίου του κτιρίου ελέγχου. Το σύστημα συλλογής δεδομένων πραγματοποιεί μετρήσεις πίεσης, ροής, θερμοκρασίας και αποτελείται από μετατροπέα εξοπλισμού και υπολογιστή, ο οποίος αποθηκεύει τα μετρούμενα μεγέθη.

#### 7.4 Διαμόρφωση του μοντέλου

Η ανάπτυξη του μοντέλου για τις μεταβολές των θερμοκρασιών στα δωμάτια δοκιμών θα πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τα ακόλουθα σημαντικά στοιχεία:

- το μοντέλο θα πρέπει να μπορεί να περιγράψει όλες τις δυναμικές που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στο πείραμα, συμπεριλαμβανομένων και των επιδράσεων της ηλιακής ακτινοβολίας και της ισχύος των καλοριφέρ.
- το μοντέλο θα πρέπει να διαμορφωθεί σε συνεχή χρόνο ώστε να έχει παραμέτρους οι οποίες έχουν φυσική ερμηνεία.
- η τάξη του μοντέλου θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

Ο στόχος είναι να προσδιοριστεί ένα σύνολο εξισώσεων που να περιγράφουν την θερμική δυναμική του αέρα δωματίου και των βαριών θερμικών κατασκευών, που στην δεδομένη περίπτωση είναι το δάπεδο. Άρα λοιπόν, κάθε δωμάτιο δοκιμής χωρίζεται σε δυο διαφορετικές, νοητές, θερμικές ζώνες, τον αέρα και το δάπεδο. Οι εξισώσεις θέρμανσης για κάθε ζώνη βασίζονται στον αντίστοιχο τρόπο μεταφοράς θερμότητας, δηλαδή αγωγή, συναγωγή ή ακτινοβολία, ο οποίος έχει και την μεγαλύτερη επίδραση στην θερμική δυναμική στο κτίριο ελέγχου. Ακόμα, γίνεται η υπόθεση ότι οι πιο σημαντικοί τρόποι μεταφοράς θερμότητας που επιδρούν στην θερμοκρασία του αέρα δωματίου είναι οι εξής: η εισροή θερμότητας από ηλιακή ακτινοβολία, η μονάδα EU, τα καλοριφέρ και η θερμότητα αγωγής που μεταφέρεται μέσω των τοίχων και του δαπέδου κάθε δωματίου δοκιμής, όπως αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 7.2:



**Εικόνα 7.2: Μεταφορά θερμότητας στο κτίριο ελέγχου. Τα βέλη συμβολίζουν την μεταφορά θερμότητας που αποτελεί την σημαντικότερη συνεισφορά στη θερμική δυναμική του κτιρίου.**

Ομοίως, οι πιο σημαντικοί τρόποι μεταφοράς θερμότητας που επιδρούν άμεσα στην θερμοκρασία του δαπέδου είναι η μεταφορά θερμότητας από ηλιακή ακτινοβολία και η αγωγή θερμότητας από τον αέρα του δωματίου. Λαμβάνοντας υπόψη τις προσεγγίσεις του μοντέλου, αμελώντας δηλαδή, επιπλέον μεταφορά θερμότητας, η θερμική δυναμική μπορεί να εκφραστεί ως ένα σύστημα συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων:

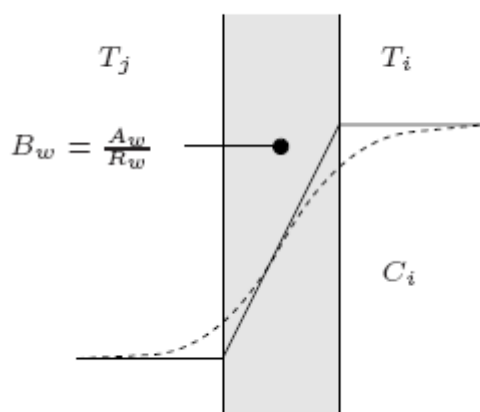
$$\frac{d(\text{Αποθηκευμένη θερμότητα})}{dt} = \sum \text{Ισχύς}_{\varepsilon\iota\sigma} - \sum \text{Ισχύς}_{\varepsilon\xi} \quad (7.3)$$

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = \sum \Phi_{\varepsilon\iota\sigma} - \sum \Phi_{\varepsilon\xi} \quad (7.4)$$

όπου: το  $C$  ( $J/K^\circ C$ ) δηλώνει την θερμοχωρητικότητα, το  $T$  ( $^\circ C$ ) την θερμοκρασία και  $\Phi$  ( $W$ ) την μεταφορά θερμότητας που εκτιμάται ότι επηρεάζει την θερμική δυναμική. Για να προκύψει μια παραμετροποίηση για το  $\Phi$ , εφαρμόζονται γνωστές ντετερμινιστικές εκφράσεις για μεταφορά θερμότητας με αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία. Η θερμότητα που μεταφέρεται λόγω αγωγής διαμέσου των τοίχων και του δαπέδου, μοντελοποιείται με μια απλή διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού:

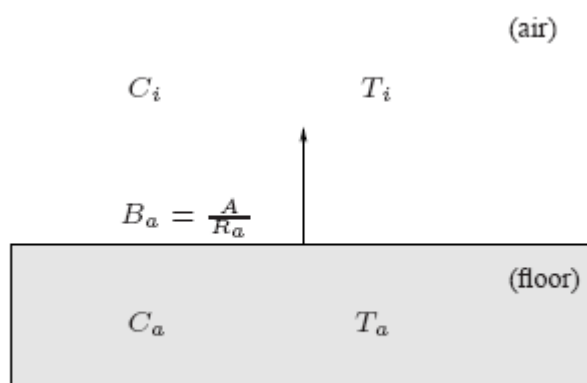
$$C \frac{dT_i}{dt} = \Phi_\omega = B_\omega (T_j - T_i) \quad (7.5)$$

όπου: το  $B_\omega (W/^\circ C)$  είναι η θερμική αγωγιμότητα για συγκεκριμένο τοίχο ή δάπεδο  $\omega$ , και  $T_i$  και  $T_j (^\circ C)$  είναι οι θερμοκρασίες σε κάθε πλευρά του τοίχου ή του πατώματος. Όταν χρησιμοποιείται η παραπάνω εξίσωση γίνεται η υπόθεση ότι η μεταφορά θερμότητας γίνεται σε μία διάσταση. Η υποτιθέμενη θερμότητας αγωγής σχεδιάζεται στο ακόλουθο σχήμα:



**Σχήμα 7.2: Προσεγγιστικό μοντέλο για την μεταφορά θερμότητας λόγω αγωγής μέσω ενός τοίχου**

Η θερμότητα που μεταφέρεται λόγω αγωγής ανάμεσα στον αέρα και το δάπεδο σχεδιάζεται στο Σχήμα 7.3 που ακολουθεί:



**Σχήμα 7.3: Μεταφορά θερμότητας λόγω αγωγής μεταξύ του αέρα και του δαπέδου**

Σημειώνεται ότι μόνο η θερμοχωρητικότητα του δαπέδου και του αέρα εντάσσονται στη μοντελοποίηση. Επομένως, οι θερμοχωρητικότητες των τοίχων συμπεριλαμβάνονται στην θερμοχωρητικότητα του αέρα.

Για να μοντελοποιηθεί η εκπεμπόμενη ισχύς από την ηλιακή ακτινοβολία,  $\Phi_s(W)$ , χρησιμοποιείται η εξής σχέση:

$$\Phi_s = IA_e \quad (7.6)$$

όπου:  $A_e$  ( $m^2$ ) υποδηλώνει μία ενεργή περιοχή παραθύρων και  $I$  ( $W/m^2$ ) είναι η μετρούμενη ηλιακή ακτινοβολία. Στην παραπάνω εξίσωση αναμένεται το  $A_e$  για το κτίριο που ελέγχεται, να είναι περίπου το 60% του μεγέθους των μετρούμενων παραθύρων, εφόσον μόνο ένα κλάσμα, και όχι το σύνολο, της ηλιακής ακτινοβολίας μεταφέρεται στο εσωτερικό του κτιρίου ελέγχου.

Το υπόλοιπο τμήμα της ακτινοβολίας ανακλάται ή/και απορροφάται από το παράθυρο.

Επιπρόσθετα, γίνεται η παραδοχή ότι τόσο η θερμοκρασία του αέρα όσο και του δαπέδου επηρεάζονται από το καλοριφέρ, δηλαδή ένα κλάσμα  $p$  της ηλιακής ακτινοβολίας  $\Phi_s$ , μεταδίδεται απευθείας στο πάτωμα, ενώ το υπόλοιπο μέρος,  $(1-p)$ , θα θερμάνει απευθείας τον αέρα. Ως εκ τούτου, τα δεδομένα εισόδου από την ηλιακή ακτινοβολία μοντελοποιούνται ως εξής:

$$\Phi_{s,αέρα} = (1 - p)IA_e \quad \Phi_{s,δάπεδο} = pIA_e \quad (7.7)$$

Τώρα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι παραπάνω εξισώσεις προκειμένου να περιγράψουν την θερμική δυναμική της θερμοκρασίας του αέρα και του δαπέδου σε ένα δωμάτιο, αντίστοιχα:

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{\text{τοιχων}} B_\omega (T_j - T_i) + B_\alpha (T_\alpha - T_i) + (1 - p)\Phi_s + \Phi_r + \Phi_{EC} \quad (7.8)$$

$$C_\alpha \frac{dT_\alpha}{dt} = B_\alpha (T_\alpha - T_i) + p\Phi_s \quad (7.9)$$

Στην εξίσωση (7.8) η ισχύς από τα καλοριφέρ δηλώνεται ως  $\Phi_r$ . Η εκροή θερμότητας από την μονάδα ΕΥ, είναι γνωστή και δεν περιέχεται στην μοντελοποίηση. Ακολούθως, παρουσιάζονται διαφορετικά μοντέλα για το  $\Phi_r$ . Ένα απλό μοντέλο Albrechtsen (1992) δίνεται από την εξής σχέση:

$$\Phi_r = c_p \rho q (T_f - T_r) \quad (7.10)$$

όπου:  $c_p$  ( $W/K$ ) είναι η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού στο καλοριφέρ,  $\rho$  ( $Kg/m^3$ ) είναι η πυκνότητα του νερού,  $q$  ( $m^3/s$ ) είναι η ροή και  $T_f$  και  $T_r$  ( $^{\circ}C$ ) είναι οι θερμοκρασίες της πρόσθετης και της επιστρεφόμενης ποσότητας νερού. Η εξίσωση (7.10) δηλώνει απλώς ότι, η ισχύς από τα καλοριφέρ είναι ίση με την μεταβολή της ενέργειας του νερού, καθώς αυτό ρέει μέσα στο καλοριφέρ. Ένα άλλο απλό μοντέλο δίνεται επίσης, από την σχέση:

$$\frac{dQ}{dt} = c T_d \quad \text{όπου} \quad T_d = \frac{T_f + T_r}{2} - T_i \quad (7.11)$$

όπου:  $c$  είναι μία σταθερά.

Η εξίσωση (7.11) φέρεται να είναι χρήσιμη σε καταστάσεις όπου η ροή δεν είναι τόσο διαφορετική (Benonysson – 1991).

Εάν είναι σημαντικό να μοντελοποιηθούν οι δυναμικές των καλοριφέρ επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί η ακόλουθη εξίσωση πρώτης τάξης:

$$C_r \frac{dT_{καλ}}{dt} = c_p \rho q (T_f - T_r) - B_r (T_{καλ} - T_l)^n \quad (7.12)$$

όπου:  $T_{καλ}$  είναι η μέση θερμοκρασία της επιφάνειας του καλοριφέρ, και  $n$  είναι ο εκθέτης που αντιστοιχεί στο καλοριφέρ.

Όταν χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (7.10) και (7.11) για να δημιουργήσουμε το μοντέλο της ισχύος του καλοριφέρ, κάθε δωμάτιο δοκιμής μοντελοποιείται με δύο διαφορετικές διαφορικές εξισώσεις, όπως στις εξισώσεις (7.8) και (7.9).

Όταν, αντίστοιχα χρησιμοποιείται η εξίσωση (7.12) αυτό συνεπάγεται τρεις εξισώσεις για κάθε δωμάτιο. Έτσι, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του καλοριφέρ μέσω των εξισώσεων (7.10) και (7.11), μπορεί να σχηματιστεί ένα μοντέλο για την θερμική δυναμική του κτιρίου ελέγχου, ως εξής:

$$C_{i,s} \frac{dT_{i,s}}{dt} = B_{u,s}(T_{u,s} - T_{i,s}) + B_b(T_b - T_{i,s}) + B_n(T_{i,n} - T_{i,s}) + B_{a,s}(T_{a,s} - T_{i,s}) + \Phi_{r,s} + A_{e,s}(1 - p_s)I_s \quad (7.13)$$

$$C_{a,s} \frac{dT_{a,s}}{dt} = B_{a,s}(T_{i,s} - T_{a,s}) + p_s A_{e,s} I_s \quad (7.14)$$

$$C_{i,n} \frac{dT_{i,n}}{dt} = B_{u,n}(T_{u,n} - T_{i,n}) + B_b(T_b - T_{i,n}) + B_n(T_{i,s} - T_{i,n}) \quad (7.15)$$

$$+ B_{a,n}(T_{a,n} - T_{i,n}) + \Phi_{r,n} + \Phi_{EC} + A_{e,n}(1 - p_n)I_n$$

$$C_{a,n} \frac{dT_{a,n}}{dt} = B_{a,n}(T_{i,n} - T_{a,n}) + p_n A_{e,n} I_n \quad (7.16)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (7.13)-(7.16), είναι προφανώς μια προσέγγιση του πραγματικού συστήματος. Σύμφωνα με την παραπάνω συζήτηση, το σύστημα μορφοποιείται σε όρους στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, αποδίδοντας την γραμμική περιγραφή του χώρου κατάστασης:

$$dX = AXdt + BUdt + dW \quad (7.17)$$

Οι πίνακες που αναγράφονται στις εξισώσεις (7.13) - (7.16) αντιστοιχούν στην ακόλουθη μορφή. Η ονοματολογία των συμβόλων όλων των στοιχείων τους βρίσκεται στο παράρτημα, ενώ οι τιμές των παραμέτρων του μοντέλου βρίσκονται στον Πίνακα 7.1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-(B_{u,s}+B_b+B_n+B_{a,s})}{C_{i,s}} & \frac{B_{a,s}}{C_{i,s}} & \frac{B_n}{C_{i,s}} & 0 \\ \frac{B_{a,s}}{C_{a,s}} & \frac{-B_{a,s}}{C_{a,s}} & 0 & 0 \\ \frac{B_n}{C_{i,n}} & 0 & \frac{-(B_{u,n}+B_b+B_n+B_{a,n})}{C_{i,n}} & \frac{B_{a,n}}{C_{i,n}} \\ 0 & 0 & \frac{B_{a,n}}{C_{a,n}} & \frac{-B_{a,n}}{C_{a,n}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{B_{u,s}}{C_{i,s}} & \frac{B_b}{C_{i,s}} & \frac{1}{C_{i,s}} & \frac{A_{e,s}(1-p_s)}{C_{i,s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_s A_{e,s}}{C_{a,s}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_b}{C_{i,n}} & 0 & 0 & \frac{B_{u,n}}{C_{i,n}} & \frac{1}{C_{i,n}} & \frac{1}{C_{i,n}} & \frac{(1-p_n)A_{e,n}}{C_{i,n}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_n A_{e,n}}{C_{a,n}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} T_{i,s} \\ T_{a,s} \\ T_{i,n} \\ T_{a,n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} T_{u,s} \\ T_b \\ \Phi_{r,s} \\ I_s \\ T_{u,n} \\ \Phi_{r,n} \\ \Phi_{EC} \\ I_n \end{bmatrix} \quad d\mathbf{W} = \begin{bmatrix} d\omega_1 \\ d\omega_2 \\ d\omega_3 \\ d\omega_4 \end{bmatrix}$$

Σύμβολο	Εκτιμώμενη τιμή	Μονάδα μέτρησης
$B_{u,s}$	12.65	$kJ/(Kh)$
$B_b$	32.39	$kJ/(Kh)$
$B_n$	38.95	$kJ/(Kh)$
$B_{a,s}$	542.18	$kJ/(Kh)$
$B_{u,n}$	28.35	$kJ/(Kh)$
$B_{a,n}$	624.34	$kJ/(Kh)$
$C_{i,s}$	421.28	$kJ/K$
$C_{a,s}$	1531.85	$kJ/K$
$C_{i,n}$	810.19	$kJ/K$
$C_{a,n}$	3314.74	$kJ/K$
$A_{e,s}$	1.67	$m^2$

**Πίνακας 7.1: Εκτιμήσεις παραμέτρων του μοντέλου**

Κατά την διαδικασία επεξεργασίας των δεδομένων και μοντελοποίησης, διαπιστώθηκε ότι η διάχυση της ηλιακής ακτινοβολίας στην βόρεια πλευρά του κτιρίου ελέγχου δεν επηρεάζει, αισθητά, την θερμική δυναμική στο βόρειο δωμάτιο ελέγχου. Αντίθετα, η ηλιακή ακτινοβολία στη νότια πλευρά του κτιρίου ελέγχου έχει σοβαρό αντίκτυπο στην θερμική δυναμική του νότιου δωματίου ελέγχου. Μόνο η θερμοκρασία του αέρα επηρεάζεται απευθείας από την ηλιακή ακτινοβολία, γεγονός που σημαίνει ότι το εκτιμώμενο κλάσμα  $p$  είναι μηδέν.

Επομένως, εισάγοντας όλα τα δεδομένα που είναι διαθέσιμα, στο αρχικό μοντέλο που μελετήθηκε, το οποίο υπέστη τις κατάλληλες ρυθμίσεις προκειμένου να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του συγκεκριμένου παραδείγματος, γίνεται η τελική προσομοίωση του συστήματος.



## 7.5 Στοχαστικός Προβλεπτικός Έλεγχος για τη θέρμανση κτιρίου

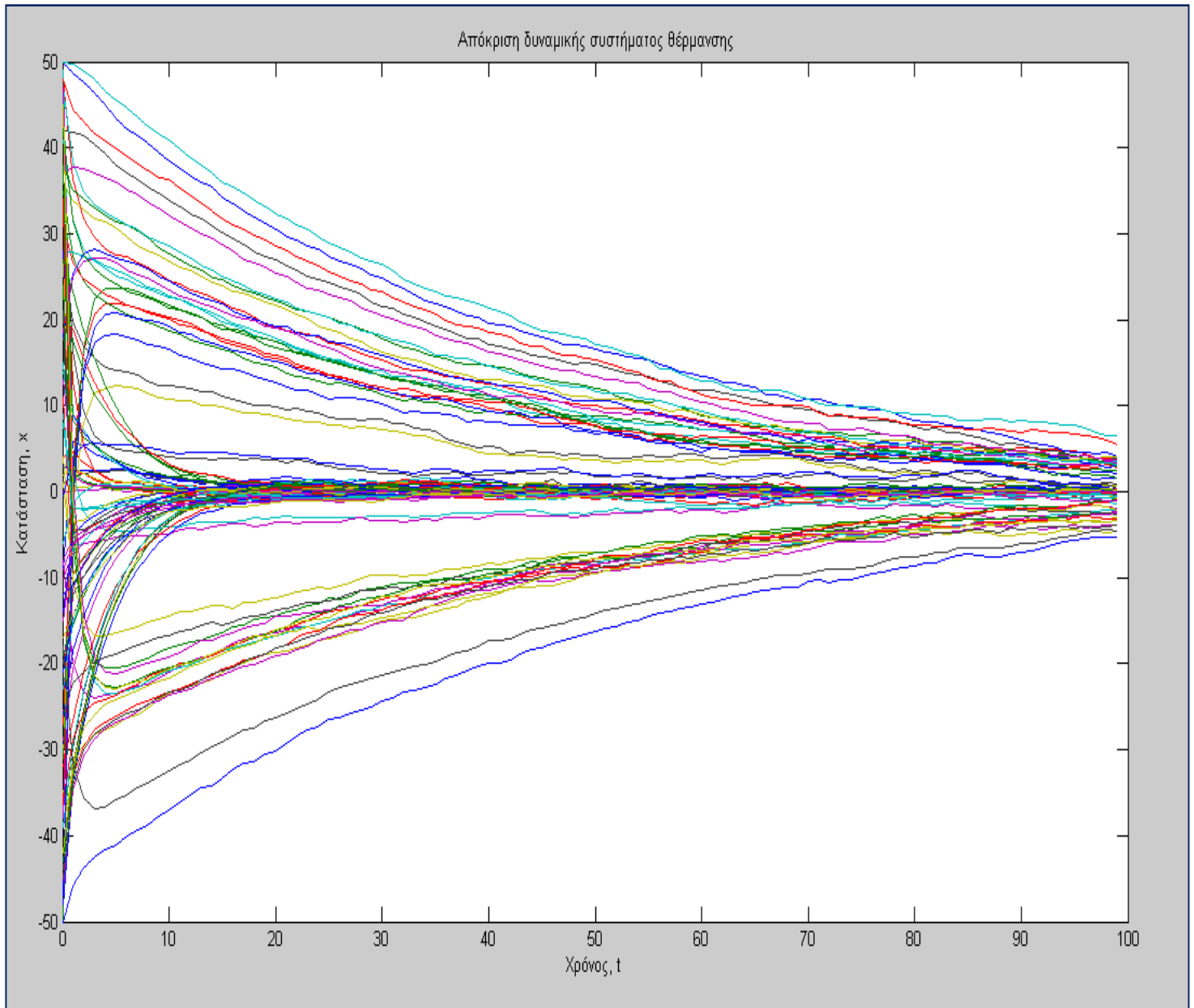
Το μοντέλο που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα δεν βρίσκεται στη μορφή που απαιτείται για την εφαρμογή της μεθοδολογίας στοχαστικού προβλεπτικού μοντέλου, αφού οι διαφορικές εξισώσεις είναι συνεχούς χρόνου. Το μοντέλο διακριτοποιήθηκε χρησιμοποιώντας χρόνο δειγματοληψίας ίσο με μία μονάδα και έτσι προέκυψε μοντέλο διακριτού χρόνου, με τέσσερις μεταβλητές κατάστασης και 8 μεταβλητές εκ χειρισμού που είναι οι εξής:

Μεταβλητές κατάστασης	Μεταβλητές εκ χειρισμού	
$T_{i,s}$	$T_b$	$T_{u,n}$
$T_{a,s}$	$T_{u,s}$	$\Phi_{r,n}$
$T_{i,n}$	$\Phi_{r,s}$	$\Phi_{EC}$
$T_{a,n}$	$I_s$	$I_n$

Η επαναληπτική διαδικασία, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, υλοποιείται για 25 διαφορετικές, τυχαίες, αρχικές καταστάσεις  $x$  που κατανέμονται ομοιόμορφα στον χώρο  $[-50,50]^4$ , και για έναν χρονικό ορίζοντα πλήρους εξέλιξης της κατάστασης,  $t = 100$  βημάτων.

Τα αποτελέσματα εφαρμογής του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου, φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα  $x(t) - t$ :

## Διάγραμμα $x(t) - t$



**Διάγραμμα 7.1:** Απόκριση του συστήματος θέρμανσης με βάση τον αλγόριθμο στοχαστικού προβλεπτικού μοντέλου. Στο διάγραμμα απεικονίζονται όλες οι καταστάσεις εις  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες, με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά, για τις διάφορες αρχικές καταστάσεις

Παρατηρείται ολοφάνερα πως ανεξαρτήτως αρχικής τιμής, το πρόγραμμα συγκλίνει αρκετά γρήγορα προς τις επιθυμητές τιμές και παρουσιάζει στενά όρια διακύμανσης κατά την εξέλιξη της προσομοίωσης γεγονός που έχει θετικά αποτελέσματα όσον αφορά την ενεργειακή συμπεριφορά του κτιρίου.

Μπορεί επομένως, να εξαχθεί το συμπέρασμα πως το μοντέλο του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου με περιορισμούς στις μεταβλητές εισόδου, που αναπτύχθηκε νωρίτερα βρίσκει άμεση εφαρμογή σε ποικίλα, ενεργειακά και όχι μόνο, προβλήματα, δίνοντας πολύ καλά και αξιόπιστα αποτελέσματα, επιφέροντας σημαντικές, ποιοτικές αλλαγές στα τεχνικά προβλήματα μηχανικής που καλείται να επιλύσει.

# Κεφάλαιο 8<sup>ο</sup>

## Συμπεράσματα

---

## 8.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία έγινε μία αναλυτική παρουσίαση της μεθοδολογίας του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου, καθώς επίσης και της βασικής δομής του, του τρόπου εφαρμογής του σε διάφορες κατηγορίες προβλημάτων και των βασικών πλεονεκτημάτων του έναντι άλλων υπάρχοντων τεχνικών ελέγχου.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε εκτενώς, το πρόβλημα του στοχαστικού προβλεπτικού ελέγχου ενός συστήματος διακριτού χρόνου, που πιθανώς να περιλαμβάνει μη φραγμένο θόρυβο, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να ικανοποιεί αυστηρούς περιορισμούς για τις μεταβλητές εισόδου. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε μία μη γραμμική μεθοδολογία ανατροφοδότησης σε σχέση με τον μετρούμενο, τυχαίο θόρυβο και αποδείχθηκε πως το μαθηματικό πρόβλημα που προέκυψε, είχε μία προσιτή, κυρτή λύση. Αρκετοί από τους πίνακες που συμμετέχουν στη διαμόρφωση του προβλήματος, υπολογίστηκαν ξεχωριστά από το υπόλοιπο πρόγραμμα βελτιστοποίησης, όπως για παράδειγμα οι πίνακες  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$ .

Το πρόβλημα διαμορφώθηκε τελικά ως πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού, και υλοποιήθηκε στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab, με την βοήθεια του υπολογιστικού εργαλείου YALMIP.

Προκειμένου να αξιολογηθεί η χρησιμότητα της μεθοδολογίας, έγινε εφαρμογή σε ένα στοχαστικό δυναμικό σύστημα θέρμανσης κτιρίου. Ουσιαστικά πρόκειται για μια εφαρμογή της μεθοδολογίας στην ενεργειακή διαχείριση ενός κτιρίου, με σκοπό τον αξιόπιστο έλεγχο του συστήματος θέρμανσης του κτιρίου, ώστε να μειωθεί η κατανάλωση ενέργειας και να βελτιωθεί η θερμική άνεση.

Ο στοχαστικός προβλεπτικός έλεγχος είναι μια επέκταση της μεθοδολογίας του προβλεπτικού ελέγχου που έχει ιδιαίτερη σημασία για συστήματα που παρουσιάζουν σημαντικές αβεβαιότητες (όπως για παράδειγμα συστήματα ανανεώσιμων πηγών ενέργειας). Η επέκταση αυτή παρουσιάστηκε μόλις τα τελευταία χρόνια και βεβαίως, υπάρχουν πολλά ανοικτά ζητήματα, τόσο ως προς τη θεωρητική υποδομή, όσο και στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, σε μη γραμμικά συστήματα, υπάρχουν ερωτήματα σχετικά με την ευστάθεια, την απόδοση και το υπολογιστικό κόστος για την επίλυση του προβλήματος που διαμορφώνεται. Τα επόμενα χρόνια αναμένεται αλματώδης ανάπτυξη της επιστημονικής αυτής περιοχής, μια που λόγω της δικτύωσης των συστημάτων και τις εφαρμογές καινούριων τεχνολογιών, τα συστήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι σύγχρονες τεχνικές αυτόματης ρύθμισης γίνονται ολοένα και πιο πολύπλοκα.

# Κεφάλαιο 9<sup>ο</sup> Βιβλιογραφία

---

## 9.1 Βιβλιογραφία

1. P. Hokayem, D. Chatterjee, J. Lygeros, “*On Stochastic receding horizon control with bounded control inputs*”, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009
2. P. Hokayem, D. Chatterjee, J. Lygeros, “*On stochastic model predictive control with bounded control inputs*,” Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009, <http://arxiv.org/abs/0902.3944>, 2009
3. W.H.Kwon and S.Han , “*Receding Horizon control - Model predictive control for state models*”, Springer
4. J.M.Maciejowski, “*Predictive Control with constraints*”, Prentice Hall, 2001
5. S. Skogestad, I. Postlethwaite, “*Multivariable feedback control - Analysis and design*”, 2<sup>nd</sup> edition, 1996 by John Wiley & Sons, West Sussex, England
6. Karl J.Astrom , “*Introduction to stochastic control theory*”, Dover Publications, Inc. 2006, Mineola, New York
7. S. Joe Qin, Thomas A. Badgwell, “*A survey of industrial model predictive control technology*”, Control Engineering Practice 11 (2003) 733–764
8. Tao Zheng, “*Model Predictive control*”, Published by Sciyo, 2010, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia
9. Debadatta Patra, Debasish Jena, Sunil Kumar Mohanty, “*Model Predictive Cotrol*”, Thesis of Department of electronics and communication engineering national institute of technology, Rourkela, 2007

10. George Papalambrou, "*Optimal Control of Marine Propulsion Diesel Engine During Transient Loading Operation: Application for Smoke Opacity Reduction through Manifold Air Injection Avoiding Compressor Surge*", Doctoral Thesis, School of Naval Architecture and Marine Engineering, National Technical University of Athens, September 2008
11. Manfred Morari, Jay H. Lee, "*Model Predictive Control: Past, present and Future*", Joint 6<sup>th</sup> International Symposium on Process Systems Engineering (PSE'97) and 30<sup>th</sup> European Symposium on Computer Aided Process Engineering (ESCAPE 7), May 25-29 1997, Trondheim, Norway
12. Johan Lofberg, "*YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*", Automatic Control Laboratory, ETHZ, CH-8092 Zurich, Switzerland
13. Johan Lofberg, "*Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP*", Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden
14. Klaus Kaae Andersen, "*Stochastic Modeling of energy systems*", Department of Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, DK-2800 Kgs. Lyngby, Denmark
15. Tom Coen and Josse De Baerdemaeker, "*Stochastic MPC*", Department BioSyst-MeBioS, Katholieke Universiteit Leuven, Kasteelpark Arenberg 30, B-3001 Leuven, Belgium
16. D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, P. O. M. Scokaert, "*Constrained model predictive control: Stability and optimality*", Survey Paper, vol. 36, no. 6, pp. 789–814, Jun 2000
17. D. G. Luenberger, "*Optimization by Vector Space Methods*", J. Wiley & Sons, 1969
18. P. J. Goulart, E. C. Kerrigan, and J. M. Maciejowski, "*Optimization over state feedback policies for robust control with constraints*," Automatica, vol. 42, no. 4, pp. 523–533, 2006



## 9.2 Ηλεκτρονική Βιβλιογραφία

- I. [http://en.wikipedia.org/wiki/Model\\_predictive\\_control](http://en.wikipedia.org/wiki/Model_predictive_control)
- II. <http://control.ee.ethz.ch/~smpc/>
- III. <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>
- IV. <http://www.pserc.cornell.edu/bpmpd/>
- V. [http://www.math.uoa.gr/pps-epeaek2/Pliroforiki/112/gl\\_pr/matlab\\_notes.pdf](http://www.math.uoa.gr/pps-epeaek2/Pliroforiki/112/gl_pr/matlab_notes.pdf)
- VI. [http://www.stanford.edu/~wfsharp/mia/mat/mia\\_mat3.htm](http://www.stanford.edu/~wfsharp/mia/mat/mia_mat3.htm)
- VII. <http://phdtheses.ekt.gr/eadd/browse?type=subject>
- VIII. <http://www3.imperial.ac.uk/portal/pls/portallive/docs/1/50918.PDF>
- IX. [http://users.ox.ac.uk/~engs0169/pdf/cannon\\_ifac08a.pdf](http://users.ox.ac.uk/~engs0169/pdf/cannon_ifac08a.pdf)
- X. [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0806/0806.3008v3.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0806/0806.3008v3.pdf)



# Παράρτημα

---

## Ονοματολογία Συμβόλων

Σύμβολο	Ερμηνεία
$T_{i,s}$	Θερμοκρασία αέρα στο δωμάτιο $A_s$
$T_{a,s}$	Θερμοκρασία δαπέδου στο δωμάτιο $A_s$
$T_{i,n}$	Θερμοκρασία αέρα στο δωμάτιο $A_n$
$T_{a,n}$	Θερμοκρασία δαπέδου στο δωμάτιο $A_n$
$T_b$	Θερμοκρασία αέρα δωματίου B
$T_{u,s}$	Εξωτερική θερμοκρασία αέρα στην νότια πλευρά
$T_{u,n}$	Εξωτερική θερμοκρασία αέρα στην βόρεια πλευρά
$I_s$	Ηλιακή ακτινοβολία στη νότια πλευρά
$I_n$	Ηλιακή ακτινοβολία στη βόρεια πλευρά
$\Phi_{r,s}$	Ισχύς καλοριφέρ στο δωμάτιο $A_s$
$\Phi_{r,n}$	Ισχύς καλοριφέρ στο δωμάτιο $A_n$
$\Phi_{EC}$	Ισχύς από την μονάδα EU στο δωμάτιο $A_n$
$A_{e,s}$	Ενεργός επιφάνεια παραθύρων με νότιο προσανατολισμό
$A_{e,n}$	Ενεργός επιφάνεια παραθύρων με βόρειο προσανατολισμό
$B_{u,s}$	Συντελεστής αγωγιμότητας δωματίου $A_s$ προς το εξωτερικό
$B_{u,n}$	Συντελεστής αγωγιμότητας δωματίου $A_n$ προς το εξωτερικό
$B_b$	Συντελεστής αγωγιμότητας δωματίων $A_s$ και $A_n$ προς το δωμάτιο B
$B_n$	Συντελεστής αγωγιμότητας δωματίου $A_s$ προς το δωμάτιο $A_n$
$B_{a,s}$	Συντελεστής αγωγιμότητας από τον αέρα στο δάπεδο για το δωμάτιο $A_s$
$B_{a,n}$	Συντελεστής αγωγιμότητας από τον αέρα στο δάπεδο για το δωμάτιο $A_n$
$C_{i,s}$	Θερμοχωρητικότητα του αέρα για το δωμάτιο $A_s$
$C_{a,s}$	Θερμοχωρητικότητα δαπέδου για το δωμάτιο $A_s$

$C_{i,n}$	Θερμοχωρητικότητα του αέρα για το δωμάτιο $A_n$
$C_{a,n}$	Θερμοχωρητικότητα δαπέδου για το δωμάτιο $A_n$
$p_s$	Κλάσμα ηλιακής ακτινοβολίας που μεταφέρεται στο δάπεδο για το δωμάτιο $A_s$
$p_n$	Κλάσμα ηλιακής ακτινοβολίας που μεταφέρεται στο δάπεδο για το δωμάτιο $A_n$

**Πίνακας Π.1: Ονοματολογία συμβόλων κεφαλαίου 7**