ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κριτήρια Ασυμπτωτικής Ευστάθειας Χρονικώς Μεταβαλλομένων Συστημάτων με Χρήση Μεθόδων Προσέγγισης Δυναμικών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της

ΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΤΑΜΑΤΗ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &

Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π. (2004)

Αθήνα, Ιούλιος 2011

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων & Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

Κριτήρια Ασυμπτωτικής Ευστάθειας Χρονικώς Μεταβαλλομένων Συστημάτων με Χρήση Μεθόδων Προσέγγισης Δυναμικών

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της

ΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΤΑΜΑΤΗ

Διπλωματούχου Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π. (2004)

Συμβουλευτική Επιτροπή: Ι.Τσινιάς (Επιβλέπων)
Δ.Κραββαρίτης
Κ.Κυριάκη

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 11$^{\eta}$ Ιουλίου 2011.

Ι.Τσινιάς	Δ.Κραββαρίτης	Κ.Κυριάκη
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.
Επιβλέπων	Μέλος Τριμελούς	Μέλος Τριμελούς

Γ.Καλογερόπουλος	Κ.Κράβαρης	Κ.Κυριακόπουλος	Ι.Καραφύλλης
Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής	Επ. Καθηγητής
Ε.Κ.Π.Α.	Παν. Πατρών	Ε.Μ.Π	Πολυτ. Κρήτης

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΣΤΑΜΑΤΗ

Στους γονείς μου

Γιώργο και Έλβα

Ευχαριστίες

Καταρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ι.Τσινιά για την εμπιστοσύνη, την υπομονή και την συνεχή του στήριξη στην διατριβή μου. Η τεράστια εμπειρία του, ήταν περισσότερο από πολύτιμη για μένα.

Επίσης οι ευχαριστίες μου μεγάλες:

Στους καθηγητές του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ, κα Κ. Κυριάκη και κ. Δ. Κραββαρίτη, μέλη της επιβλέπουσας τριμελούς επιτροπής, που συνέβαλαν καθοριστικά με την βοήθεια και την συμπαράστασή τους στην διατριβή μου. Καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής κ.κ. Γ.Καλογερόπουλο Καθηγητή Τμήματος Μαθηματικών ΕΚΠΑ, Κ.Κράβαρη Καθηγητή Χημικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Πατρών, Κ.Κυριακόπουλο Καθηγητή Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ και Ι.Καραφύλλη Επικ. Καθηγητή Μηχανικών Περιβάλλοντος Πολυτεχνείου Κρήτης, για τις χρήσιμες υποδείξεις τους.

Στον Τομέα Μαθηματικών για την υποτροφία του Ιδρύματος Παπακυριακόπουλου με την οποία με εμπιστεύθηκαν και με τίμησαν ιδιαιτέρως.

Σε όλα τα μέλη της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών ΕΜΠ, για τους νέους ορίζοντες που άνοιξαν στη ζωή μου από την πρώτη στιγμή της δημιουργίας της σχολής στην προπτυχιακή, μεταπτυχιακή

έως και την διδακτορική πορεία μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλη την οικογένεια μου και ιδιαιτέρως τον πατέρα μου, που με την αγάπη και την κατανόηση τους όλα αυτά τα χρόνια στήριξαν και διευκόλυναν αυτήν την δύσκολη διαδρομή μου.

Αγγελική Σταμάτη

Ιούλιος, 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσης διατριβής είναι η εξαγωγή ικανών συνθηκών για τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια μέσω προσεγγιστικών μεθόδων για μη-γραμμικά χρονικώς μεταβαλλόμενα, παραμετρικά συστήματα της μορφής:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

όπου το ε παίζει το ρόλο της παραμέτρου.

Τα αποτελέσματα της διατριβής αποτελούν γενικεύσεις γνωστών εργασιών από την υπάρχουσα βιβλιογραφία. Παραθέτουμε στη συνέχεια μερικά αποτελέσματα από τις εργασίες [2],[3],[8],[11],[21] και [30]. Συγκεκριμένα στην [2] των Aeyels και Peuteman θεωρούνται συστήματα της μορφής:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{1.2}$$

όπου το 0 είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή ισχύει ότι $f(0, \cdot) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}^+$. Η βασική υπόθεση που επιβάλλεται στην [2], είναι η ακόλουθη: Για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y|,\ \forall (x, y) \in \mathcal{K},\ \forall t \geq 0 \tag{1.3}$$

Η συνθήκη (1.3) πληρούται αν για παράδειγμα, η f είναι C^1 και η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι φραγμένη ως προς τον χρόνο. Σημειώνουμε ότι η τελευταία απαίτηση αναιρείται στα βασικά αποτελέσματα των Κεφαλαίων 2,3 και 4.

Ένα βασικό αποτέλεσμα της [2] είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1([2])
Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *Συνθήκη 1: Υπάρχουν συναρτήσεις* $a(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *και* $\beta(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *κλάσεως* $\mathcal{K}$*, δηλαδή, είναι γνησίως αύξουσες, συνεχείς και μηδενίζονται στο μηδέν, έτσι ώστε:*

$$\alpha(||x||) \leq V(t,x) \leq \beta(||x||), \ \forall t \geq 0, \ x \text{ κοντά στο μηδέν.}$$

- *Συνθήκη 2: Υπάρχει σταθερά* $T > 0$ *και μία συνάρτηση* $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *κλάσεως* $\mathcal{K}$*, έτσι ώστε*

$$V(t+T, x(t+T)) - V(t,x) \leq -\gamma(||x||) < 0 \ \forall t \geq 0, \ x \text{ κοντά στο μηδέν}$$

Τότε το σημείο ισορροπίας του (1.2) *είναι ομοιόμορφα ασυμπτωτικά ευσταθές.*

Στο Κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας, γενικεύεται το παραπάνω αποτέλεσμα (Πρόταση 2.1). Η γενίκευση συνίσταται κυρίως στην αναίρεση της υπόθεσης (1.3) και αντικατάσταση με ασθενέστερη υπόθεση.

Στο Κεφάλαιο 2 και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 2.3 γενικεύουμε την εργασία [3] των D. Aeyels και J. Peuteman. Παραθέτουμε το βασικό αποτέλεσμα της [3] του οποίου η απόδειξη βασίζεται στο προαναφερθέν Θεώρημα 1:

Θεώρημα 2([3],[21]) *Θεωρούμε το "slow" time-varying σύστημα*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x),\ \varepsilon > 0,\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \tag{1.4}$$

όπου υποθέτουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ *είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή* $f(t, 0) = 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$. *Τότε, υπάρχει σταθερά* $\varepsilon_1 > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *το σύστημα* (1.4) *να έχει εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας στο* $x = 0$, *αν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

- *Συνθήκη 1: Υποθέτουμε ότι υπάρχει το "averaged" δυναμικό* $f_{av}(x)$ *του* $f(t, x)$, *δηλαδή:*

  $$f_{av}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s, x)ds. \tag{1.5}$$

  και το αντίστοιχο averaged σύστημα:

  $$\dot{x} = f_{av}(x) \tag{1.6}$$

  είναι εκθετικά ευσταθές στο μηδέν, δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $K > 0$ *και* $\ell > 0$ *έτσι ώστε:*

  $$|x(t, t_0, x_0)| \leq Ke^{-\ell(t-t_0)}|x_0|\ \forall t \geq t_0,\ x_0 \text{ κοντά στο μηδέν}.$$

  όπου $x(t, t_0, x_0)$ *αποτελεί την λύση του averaged συστήματος* (1.6) *την χρονική στιγμή* t *με αρχική συνθήκη* $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

- *Συνθήκη 2: Το δυναμικό του συστήματος* (1.6) *είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμο κοντά στο μηδέν.*

- *Συνθήκη 3: Υπάρχει μία συνεχής, φθίνουσα και φραγμένη συνάρτηση* $\sigma(\cdot) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *με*

$$\sigma(T) \to 0 \text{ καθώς το } T \to +\infty$$

και

$$\left| f_{av}(x) - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(s, x) ds \right| \leq k\sigma(T),$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ κοντά στο μηδέν και } \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

όπου k θετική σταθερά.

Μία σημαντική συμβολή της διατριβής βρίσκεται στο Κεφάλαιο 3, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο 3.1, όπου γενικεύουμε το Θεώρημα Αντίστροφης Εκθετικής Ευστάθειας Lyapunov, όπως αυτό παρουσιάζεται Παράγραφο 3.6 της αναφοράς [21](Θεώρημα 3.12). Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.12 γενικεύουμε στην συνέχεια τα αποτελέσματα της εργασίας [30] που εδραιώνουν ασυμπτωτική ευστάθεια χρησιμοποιώντας μία μέθοδο προσέγγισης δυναμικών. Για πληρότητα αναφέρουμε το ακριβές αποτέλεσμα της αναφοράς [30] που εστιάζει στην ασυμπτωτική ευστάθεια των λεγόμενων "γρήγορα"- χρονικώς μεταβαλλομένων συστημάτων:

$$\dot{x}(t) = f(t, at, x), \ a > 0, \ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

Οι βασικές υποθέσεις της εργασίας [30] είναι οι ακόλουθες: Η f είναι συνεχής ως προς την πρώτη και την δεύτερη μεταβλητή για κάθε σταθερό $x \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον η f είναι τοπικά Lipschitz ως προς x, δηλαδή υποθέτουμε ότι για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t, s, x) - f(t, s, y)| \leq M|x - y|, \ \forall (x, y) \in \mathcal{K}, \ \forall t, s \geq 0 \tag{1.8}$$

Για την ακριβή διατύπωση του βασικού αποτελέσματος της [30], χρειαζόμαστε πρώτα να αναφέρουμε τις παρακάτω συνθήκες:

- *Συνθήκη 1. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις* $\bar{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *με* $\bar{f}(\cdot, 0) = 0$ *και* $N(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *με την τελευταία να είναι συνεχής, έτσι ώστε για κάθε* $\eta \geq \eta_1$*, για κάθε* x *κοντά στο μηδέν και για κάθε* $\tau \in \mathbb{R}^+$*, ισχύουν τα παρακάτω:*

$$\left| \int_{\tau-1/\eta}^{\tau+1/\eta} \big(f(t, \eta^2 t, x) - \bar{f}(t, x) \big)\, dt \right| \leq N(\eta)|x| \tag{1.9a}$$

  με

$$\lim_{\eta\to\infty} \eta N(\eta) = 0. \tag{1.9b}$$

- *Συνθήκη 2. Το σύστημα*

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x(t)) \tag{1.10}$$

  είναι τοπικά εκθετικά ευσταθές στο μηδέν, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $K > 0$ *και* $\ell > 0$ *έτσι ώστε*

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq K|x_0|e^{-\ell(t-t_0)},\ \forall t \geq t_0,\ \forall t \geq t_0 \text{ και } x_0 \text{ κοντά στο μηδέν} \tag{1.11}$$

  όπου $x(t, t_0, x_0)$ είναι η λύση του (1.11) με $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

- *Συνθήκη 3. Η* $\bar{f}$ *ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:*

  – *Η* $\bar{f}(t, x)$ *είναι συνεχής ως προς* t *και τρεις φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς* x *για κάθε* x *κοντά στο μηδέν,*

  – *υπάρχουν σταθερές* $M_1 > 0, M_2 > 0$ *και* $M_3 > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* x *κοντά στο μηδέν, για κάθε και* $\forall i, j, l, m \in \{1, ..., n\}$ *ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες*

$$\left|\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j}(t,x)\right| \leq M_1,$$

$$\left|\frac{\partial^2 \bar{f}_i}{\partial x_j x_l}(t,x)\right| \leq M_2, \ \left|\frac{\partial^3 \bar{f}_i}{\partial x_j x_l x_m}(t,x)\right| \leq M_3,$$

$$\textit{για κάθε } t \in \mathbb{R}^+ \tag{1.12}$$

Θεώρημα 3([30]) *Αν ισχύουν οι Συνθήκες 1-3, τότε υπάρχει σταθερά* $a_1 > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $a > a_1$*, το σημείο ισορροπίας* $x = 0$ *του συστήματος* (1.7) *είναι τοπικά εκθετικά ευσταθές.*

Στο βασικό αποτέλεσμα (Πρόταση 3.2) της παρούσης διατριβής βεβαιώνεται ότι ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3 στην [30] ισχύει κάτω από ασθενέστερες συνθήκες και κυρίως χωρίς την βαριά υπόθεση (1.12) του φραξίματος των δυναμικών.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με συστήματα διακριτού χρόνου. Συγκεκριμένα στην Παράγραφο 4.2, αποδεικνύουμε το διακριτό ανάλογο των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 της διατριβής. Στη συνέχεια, στην Παράγραφο 4.3, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.2 σε ένα σημαντικό πρόβλημα σχεδίασης ελέγχου, την "Σταθεροποίηση μέσω Ανάδρασης" γενικεύοντας κάποια αποτελέσματα της [40]. Στην 4.4 γενικεύουμε ένα γνωστό αποτέλεσμα των αναφορών [8] και [11] το οποίο αφορά διακριτά συστήματα της μορφής

$$x(k+1) = x(k) + \varepsilon f(k, x(k), \varepsilon) \tag{1.13}$$

όπου $x \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N},\ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Η βασική υπόθεση στις [8] και [11] είναι ότι υπάρχει το όριο:

$$f_{av}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=s+1}^{s+T} f(k,x,0) \tag{1.14}$$

ομοιόμορφα ως προς s και για x κοντά στο μηδέν. Το αντίστοιχο averaged σύστημα ορίζεται ως εξής:

$$x_{av}(k+1) = x_{av}(k) + \varepsilon f_{av}(x_{av}(k)) \tag{1.15}$$

Το βασικό αποτέλεσμα των [8] και [11] είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 4([8],[11]) *Θεωρούμε το σύστημα* (1.13) *και το averaged σύστημα* (1.15) *όπου έχουμε υποθέσει ότι οι* f, f_{av}*, έχουν συνεχή και φραγμένη παράγωγο ως προς* x*. Αν το* $x = 0$ *είναι είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το averaged σύστημα* (1.15)*, τότε υπάρχει* $\varepsilon_2,\ 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ *τέτοιο ώστε το* $x = 0$ *είναι εκθετικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το αρχικό σύστημα* (1.13)*.*

Στην Πρόταση 4.5 της διατριβής το παραπάνω αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4 γενικεύεται. Οι αντίστοιχες ικανές συνθήκες για ευστάθεια που εδραιώνονται είναι σημαντικά ασθενέστερες από τις επιβαλλόμενες στις προαναφερθείσες [8],[11] και [30], αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2

Συστήματα Συνεχούς Χρόνου-**Averaging**

2.1 Εισαγωγικές έννοιες για συστήματα συνεχούς χρόνου

Η διαδικασία του "averaging" εντάσσεται στην μεθοδολογία προσέγγισης δυναμικών και αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για την εξασφάλιση διαφόρων ειδών ευστάθειας χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων, συμπεριλαμβανομένου της τοπικής και ολικής εκθετικής ευστάθειας, πρακτικής ημι-ολικής ευστάθειας και ευστάθειας εισόδου-καταστάσεως. (βλ.[2],[3],[21],[25],[27],[28],[29],[30],[36],[37] και σχετικές αναφορές εντός αυτών).

Σε όλες τις προαναφερθείσες εργασίες η βασική προϋπόθεση είναι ότι τα δυναμικά του συστήματος είναι φραγμένα ως προς τον χρόνο ικανοποιώντας δηλαδή τη λεγόμενη Φραγμένη ως προς τον Χρόνο, (Bounded In Time)(BIT) υπόθεση. Η υπόθεση αυτή έχει υιοθετηθεί στην πλειοψηφία των υπαρχόντων εργασιών στην βιβλιογραφία με θέμα την ευστάθεια, την ασυμπτωτική ευστάθεια χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων, καθώς επίσης σε προβλήματα σχεδιασμού όπως η σταθεροποίηση με χρήση ανάδρασης, σχεδιασμός παρατηρητή και tracking control.

Ωστόσο, η προϋπόθεση BIT είναι εξαιρετικά περιοριστική για ένα πλήθος προβλημάτων σχετιζόμενα με την σταθεροποίηση συστημάτων ελέγχου, ακόμα και για την περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων. Αναφέρουμε ενδεικτικά τα προβλήματα εύρεσης ικανών συνθηκών για Ασυμπτωτική Ευστάθεια μίας δοθείσης μη-φραγμένης τροχιάς ενός μη γραμμικού συστήματος, καθώς επίσης και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν μερική Ασυμπτωτική Ευστάθεια ενός σύνθετου μη γραμμικού συστήματος (βλ.[43] και σχετικές αναφορές).

Παράδειγμα 2.1

Ας θεωρήσουμε το διασυνδεδεμένο σύστημα

$$\dot{x} = f_1(x, y)$$

$$\dot{y} = f_2(y)$$

όπου $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ με $f_1(0, \cdot) = 0$. Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια του $0 \in \mathbb{R}^n$ ως προς το x. Αν συμβολίσουμε με $y(t, y_0)$ την λύση του δεύτερου υποσυστήματος με $y(0, y_0) = y_0$ και θεωρήσουμε ότι ορίζεται για κάθε $t \geq 0$. Τότε, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αναχθεί στην εξασφάλιση της εύρωστης ασυμπτωτικής ευστάθειας του $0 \in \mathbb{R}^n$ ενός χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος με σταθερές διαταραχές

$$\dot{x} = f_1(x, y(t, y_0)),$$

με το $y_0 \in \mathbb{R}^m$ να αποτελεί την διαταραχή. Είναι αξιοσημείωτο να αναφερθεί ότι εφόσον δεν έχει επιβληθεί καμία υπόθεση για τη λύση του δεύτερου υποσυστήματος να είναι φραγμένη, τα δυναμικά του παραπάνω ανηγμένου χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος είναι εν γένει μη-BIT.

Τέλος, είναι σημαντικό να αναφέρουμε τις πρόσφατες συνεισφορές [15],[18],[20] και [25] καθώς και τις σχετικές αναφορές που περιλαμβάνονται σε αυτές τις εργασίες, όπου χρησιμοποιούνται μη γραμμικοί, μη φραγμένοι ως προς τον χρόνο ελεγκτές για την επιλυσιμότητα προβλημάτων σχεδιασμού, όπως σταθεροποίηση με χρήση ανάδρασης και κατασκευή παρατηρητών.

Συμβολισμοί:

Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς.

- Για $x \in \mathbb{R}^n$ το $|x|$ συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα και το x^T του x.

- Για δοσμένο πίνακα $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε την νόρμα του με

$$|A| := \sup\{|Ax|,\ x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\}.$$

- Με $S[0, R]$ συμβολίζουμε την σφαίρα ακτίνας $R > 0$ με κέντρο το μηδέν $0 \in \mathbb{R}^n$.

- Με $\mathcal{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο που περιλαμβάνει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ και με $\mathcal{K}$ το σύνολο που περιέχει όλες τις $\phi \in \mathcal{N}$, οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες και ικανοποιούν $\phi(0) = 0$.

- Με $\mathcal{K}_\infty$ συμβολίζουμε το υποσύνολο του $\mathcal{K}$ που αποτελείται από όλες τις $\phi \in \mathcal{K}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\phi(t) \to \infty$, καθώς το $t \to \infty$.

- Για δοθέν $D \subset \mathbb{R}^m$, το U_D αποτελεί το σύνολο των ουσιωδώς φραγμένων απεικονίσεων $d : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ που παίρνει τιμές στο D.

- Τέλος, για κάθε δοθέν ζεύγος απεικονίσεων $d_1, d_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ χρόνου $\tau > 0$, συμβολίζουμε την αλληλουχία τους d ως ακολούθως:

$$d(t) := (d_1 d_2)_T(t) := \begin{cases} d_1(t) \ \sigma.\pi., & 0 \leq t < \tau \\ d_2(t-\tau) \ \sigma.\pi., & t \geq \tau \end{cases}$$

Στο παρόν κεφάλαιο, χωρίς την παρουσία της υπόθεσης BIT, παρουσιάζονται τοπικά αποτελέσματα που εξασφαλίζουν ασυμπτωτική ευστάθεια, η οποία εν γένει, δεν είναι ομοιόμορφη ως προς τον χρόνο. Τα βασικά αποτελέσματα του αυτού κεφαλαίου, αποτελούν γενικεύσεις των εργασιών [2],[3],[28],[20] και [30] που αφορούν την τοπική εύρωστη ασυμπτωτική ευστάθεια χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων της μορφής

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, d(\varepsilon t)), \ (t, x, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times D, \ \varepsilon > 0 \tag{2.1}$$

κάτω από την παρουσία μίας συνθήκης averaging, με το $d(\cdot) \in D \subset \mathbb{R}^m$ να αποτελεί την διαταραχή. Το αποτέλεσμα averaging του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί μία επέκταση των ήδη γνωστών αποτελεσμάτων στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, των οποίων τα δυναμικά ικανοποιούν την BIT ιδιότητα και μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την *εκθετική ασυμπτωτική ευστάθεια* για το σύστημα (2.1) εκμεταλλευόμενοι την εκθετική ασυμπτωτική ευστάθεια του αντίστοιχου *averaged* συστήματος. Αρχικά, στην Πρόταση 2.1, εξάγουμε μία συνθήκη για *τοπική* 'Εύρωστη' ευστάθεια, η οποία αφορά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα με διαταραχές:

$$\dot{x} = f(t, x, d), \ (t, x, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times D \tag{2.2}$$

χωρίς την υπόθεση BIT. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα συνιστά μία γενίκευση μίας πολύ γνωστής συνθήκης η οποία είναι απόρροια των [2],[3],[29] για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, των οποίων τα δυναμικά δεν είναι φραγμένα ως προς τον χρόνο. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.1 προκύπτει στην Πρόταση 2.2 μία γενίκευση αποτελεσμάτων averaging που απαντώνται στα [2] και [28] για την περίπτωση (2.1).

Στη συνέχεια παρέχουμε τους ακριβείς ορισμούς της BIT υπόθεσης, όπως επίσης, γενικές έννοιες της Εύρωστης, ευστάθειας, τοπικής Εύρωστης, Α-συμπτωτικής Ευστάθειας, Εύρωστης, Εκθετικής Ευστάθειας και Ομοιόμορφα Εύρωστης Εκθετικής Ευστάθειας για το (2.2) ως προς ένα δοσμένο υποσύνολο $U \subset U_D$.

BIT Υπόθεση:

Λέμε ότι το (2.2) ικανοποιεί την BIT υπόθεση, αν για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ και $E_2 \subset D$, υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$|f(t,x,d)| \leq M, \forall (t,x,d) \in \mathbb{R}^+ \times E_1 \times E_2.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα δυναμικά $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ του (2.2) είναι συνεχή και το μηδέν είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή,

$$f(\cdot, 0, \cdot) = 0 \tag{2.3}$$

Έστω U ένα υποσύνολο ελέγχου του U_D, δηλαδή, υποθέτουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\forall d_1, d_2 \in U, \tau > 0 \Rightarrow (d_1 d_2)_\tau \in U \tag{2.4}$$

Ορισμός 2.1 ***Εύρωστη Ευστάθεια(Robust Stability)(RS):***

Λέμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι Εύρωστα Ευσταθές (RS) για το (2.2) ως προς το U, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και δοθέν φραγμένο $I \subset \mathbb{R}^+$ υπάρχει μία σταθερά $\delta = \delta(\varepsilon, I)$ για την οποία

$$|x(t,t_0,x_0,d(t))| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq t_0,\ t_0 \in I,\ |x_0| \leq \delta, d \in U \tag{2.5}$$

όπου $x(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0, d(\cdot))$ *αποτελεί την λύση του* (2.2) *με* $x(t_0) = x_0$, *που αντιστοιχεί στο* $d \in U$.

Ορισμός 2.2 ***Εύρωστη Έλξη(Robust Attractivity)(RA):***
Λέμε ότι το μηδέν $0 \in \mathbb{R}^n$ *είναι Εύρωστος Ελκυστής (RA) για το* (2.2) *ως προς το* U, *αν υπάρχει σταθερά* $\rho > 0$ *για την οποία για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και δοθέν φραγμένο* $I \subset \mathbb{R}^+$, *υπάρχει χρόνος* $T = T(\varepsilon, I)$ *τέτοιος ώστε*

$$|x(t,t_0,x_0,d(t))| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq t_0 + T, t_0 \in I, |x_0| \leq \rho, d \in U \tag{2.6}$$

δεδομένου ότι η λύση $x(t,t_0,x_0,d(t))$ *ορίζεται για κάθε* $t \geq t_0$.

Ορισμός 2.3 ***Εύρωστη Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Robust Asymptotic Stability)(RAS):***
Λέμε ότι το (2.2) *είναι Εύρωστα Ασυμπτωτικά Ευσταθές (RAS) ως προς το* U, *αν είναι RS ως προς το* U *και το μηδέν* $0 \in \mathbb{R}^n$ *εύρωστος ελκυστής ως προς το* U.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι προηγούμενες έννοιες ευστάθειας, έλξης και ασυμπτωτικής ευστάθειας, είναι εν γένει *μη ομοιόμορφες ως προς τις αρχικές τιμές του χρόνου.* Παρόμοιες έννοιες έχουν χρησιμοποιηθεί σε αρκετές πρόσφατες εργασίες με θέμα την σταθεροποίηση ανάδρασης και σχετικών προβλημάτων σε χρονικά μεταβαλλόμενα συστημάτα; βλ. π.χ. [4]-[8],[26],[27].

Ορισμός 2.4 ***Ομοιόμορφη Εύρωστη Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Uniform Robust Asymptotic Stability)(URAS):***
Λέμε ότι το (2.2) *είναι Ομοιόμορφα RAS (URAS) ως προς το* U, *αν είναι RAS*

ως προς το U και επιπλέον ισχύουν οι (2.5) και (2.6) για κάθε $t_0 \geq 0$ και για δ και T εξαρτώμενα μόνο από το ε.

Ορισμός 2.5 ***Εκθετική-Εύρωστη Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Exponential Robust Asymptotic Stability)(expo-RAS):***
Λέμε ότι το (2.2) είναι Εκθετικά RAS (expo-RAS) ως προς το U, αν υπάρχει σταθερά $\ell > 0$ τέτοια ώστε για κάθε δοθέν φραγμένο $I \subset \mathbb{R}^+$, υπάρχει σταθερά $C = C(I) > 0$ τέτοια ώστε

$$|x(t, t_0, x_0, d(t))| \leq C\,|x_0| \exp(-\ell(t - t_0)),$$

$$\forall t \geq t_0,\ t_0 \in I, d \in U,\ x_0 \text{ κοντά στο μηδέν} \tag{2.7}$$

Ορισμός 2.6 ***Εκθετική-Ομοιόμορφη Εύρωστη Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Exponential Uniform Robust Asymptotic Stability)(expo-URAS):***
Λέμε ότι το σύστημα (2.2) είναι Εκθετικά URAS (expo-URAS) ως προς το U, αν ικανοποιείται η (2.7) για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}^+$ και κάποια σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη από τις αρχικές τιμές του χρόνου.

Τέλος, στην περίπτωση των συστημάτων χωρίς διαταραχές, υιοθετούμε για λόγους απλότητας τους συνήθεις ορισμούς της Ασυμπτωτικής Ευστάθειας, "Asymptotic Stability" (AS), Ομοιόμορφης Ασυμπτωτικής Ευστάθειας, "Uniform Asymptotic Stability" (UAS), Εκθετικής Ασυμπτωτικής Ευστάθειας, "Exponential Asymptotic Stability" (expo-AS), και εκθετικής ομοιόμορφης ασυμπτωτικής ευστάθειας, "Exponential Uniform Asymptotic Stability" (expo-UAS), αντί για την RAS, URAS, expo-RAS και expo-URAS, αντίστοιχα.

2.2 Ένα νέο κριτήριο για τοπική Εύρωστη Ασυμπτωτική Ευστάθεια σε συστήματα συνεχούς χρόνου

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι η επέκταση των [2],[3],[30] για τη γενική περίπτωση (2.2) στην οποία έχουμε υποθέσει ότι η $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ότι είναι C^0, για δοσμένα $(t, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$, η $f(t, \cdot, d) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1 και ικανοποιείται η (2.3). Δεν έχει επιβληθεί καμία υπόθεση για την ύπαρξη φράγματος ως προς τον χρόνο t.

Συγκεκριμένα, οι υποθέσεις είναι οι ακόλουθες. Υπάρχει σταθερά $R > 0$ για την οποία ισχύουν τα κάτωθι:

A1. Υπάρχει συνάρτηση $L \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x, d)\right| \leq L(t), \forall (t, x, d) \ \in \mathbb{R}^+ \times S[0, R] \times D \tag{2.8}$$

A2. Υπάρχουν σταθερά $m > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{t_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$ τέτοια ώστε

$$t_i \to \infty \tag{2.9a}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds \leq m, \ \forall i = 1, 2, ... \tag{2.9b}$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι ικανοποιείται μία από τις παρακάτω υποθέσεις:

A3. Υπάρχει:

- σύνολο $U \subset U_D$ το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση (2.4),
- συναρτήσεις $V : \mathbb{R}^+ \times S[0,R] \to \mathbb{R}^+$, $a \in \mathcal{K}_\infty$ και $r \in \mathcal{K}$
- και ακολουθία $\{\sigma_i \geq 0, i = 0,1,2,...\}$ έτσι ώστε

$$a(|x|) \leq V(t,x),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R]; V(\cdot,0) = 0 \tag{2.10a}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i = \infty \tag{2.10b}$$

$$V(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - V(t_i, x(t_i)) \leq -\sigma_i r(V(t_i, x(t_i))) \tag{2.10c}$$

για όλους τους θετικούς ακεραίους i μακριά από το μηδέν και για κάθε $d \in U$, δεδομένου ότι για τη λύση $x(s) = x(s, t_i, x(t_i), d(s))$ του (2.2) ισχύει:

$$x(s) \in S[0,R] \text{ για κάθε } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

Εναλλακτικά της A3, μπορούμε να υποθέσουμε την ακόλουθη:

A′3. Υπάρχει:

- σύνολο $U \subset U_D$ που ικανοποιεί την (2.4),
- συναρτήσεις $V : \mathbb{R}^+ \times S[0,R] \to \mathbb{R}^+$ και $a \in \mathcal{K}_\infty$
- και ακολουθία $\{\sigma_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...\}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι (2.10a),(2.10b) και η (2.10c) να ικανοποιείται με $r(s) \equiv s$, αντίστοιχα:

$$V(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - V(t_i, x(t_i)) \leq -\sigma_i V(t_i, x(t_i)) \tag{2.11}$$

για όλους τους θετικούς ακεραίους i μακριά από το μηδέν και για κάθε $d \in U$, δεδομένου ότι για τη λύση $x(s)$ του (2.2) ισχύει ότι

$$x(s) \in S[0, R] \;\; \text{για κάθε } s \in [t_i, t_{i+1}].$$

Η ακόλουθη πρόταση γενικεύει τα αντίστοιχα αποτελέσματα στις εργασίες [1],[2],[19] για συστήματα της μορφής (2.2) των οποίων τα δυναμικά ικανοποιούν την BIT υπόθεση:

Πρόταση 2.1 ***(Ένα νέο κριτήριο για Ασυμπτωτική Ευστάθεια)***

(i)

- *Οι Προϋποθέσεις A1,A2 και A3(A΄3), μας εξασφαλίζουν ότι το σύστημα* (2.2) *είναι* ***RAS*** *ως προς το* U.
- *Αν επιπροσθέτως των A1,A2 και A΄3, υποθέσουμε ότι ισχύουν τα εξής:*

$$\sigma_i \geq \sigma, \;\; \textit{για κάποιες σταθερές} \;\; \sigma > 0 \tag{2.12a}$$

$$a_0 |x|^2 \leq V(t,x) \leq b_0 |x|^2, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R]$$
$$\textit{για κάποιες σταθερές } a_0, b_0 > 0 \tag{2.12b}$$

$$\textit{η ακολουθία } \{t_{i+1} - t_i, i = 0,1,2,...\} \textit{ είναι φραγμένη} \tag{2.12c}$$

τότε το σύστημα (2.2) *είναι* ***expo-RAS*** *ως προς το* U.

(ii)

- *Αν ισχύουν οι Α1, Α2 και Α΄3, και επιπλέον υποθέσουμε ότι ισχύει η* (2.12a), *καθώς επίσης οι ακόλουθες ιδιότητες:*

$$\forall T > 0 \Rightarrow \exists m = m(T) > 0 : \int_t^{t+T} L(s)ds \le m,\ \forall t \ge 0; \tag{2.13}$$

  και επίσης, υπάρχουν συναρτήσεις $a, b \in \mathcal{K}_\infty$ *τέτοιες ώστε*

$$a(|x|) \le V(t,x) \le b(|x|),\ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R] \tag{2.14}$$

  τότε το σύστημα (2.2) *είναι* ***URAS*** *ως προς το* U.

- *Αν επιπροσθέτως των υποθέσεων του ισχυρισμού* (ii) *ισχύουν οι* (2.12b),(2.12c), *τότε το* (2.2) *είναι* ***expo-URAS*** *ως προς το* U.

Απόδειξη:

(**i**) **A1,A2,A3** $\Rightarrow$ **RAS**:

Αρχικώς θα δείξουμε ότι οι υποθέσεις Α1, Α2 και Α3 συνεπάγονται ότι το (2.2) είναι RAS ως προς το U. Επικαλούμενοι τις σχέσεις (2.2),(2.3) και (2.8) προκύπτει ότι κάθε τροχιά $x(\cdot) = x(\cdot, \tau_0, x_0, d(\tau))$ του (2.2) ικανοποιεί τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} f(s, x(s), d(s))ds \Rightarrow \\ |x(\tau)| &\le |x_0| + \int_{\tau_0}^{\tau} |f(s, x(s), d(s))|ds \\ &= |x_0| + \int_{\tau_0}^{\tau} |f(s, x(s), d(s)) - f(s, 0, d(s))|ds \Rightarrow \\ |x(\tau)| &\le |x_0| + \int_{\tau_0}^{\tau} L(s)\,|x(s)|\,ds,\ \tau \ge \tau_0, d \in U, x_0 = x(\tau_0) \end{aligned} \tag{2.15}$$

έτσι, από την Ανίσωση Gronwall προκύπτει ότι

$$|x(\tau)| \leq |x_0| \exp\left(\int_{\tau_0}^{\tau} L(s)ds\right), \tau \geq \tau_0, d \in U, \tag{2.16}$$

$$\text{δεδομένου ότι } x(s) \in S[0,R] \ \text{ για κάθε } \ s \in [\tau_0, \tau]$$

Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία $\{t_i\}$ όπως ορίσθηκε στην Α2. Αν ορίσουμε

$$M := \exp m,$$

από τις (2.9b) και (2.16) έπεται ότι:

$$|x(t)| \leq \exp{(m)}|x(s)| = M \ |x(s)|,$$

$$t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}, d \in U, \tag{2.17}$$

$$\text{δεδομένου ότι } x(t) \in S[0,R] \text{ για κάθε } \ t \in [s, t_{i+1}], \ i = 0, 1, 2, ...$$

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ισχύ της RAS θα δείξουμε ότι το σύστημα (2.2) ικανοποιεί ταυτοχρόνως τις (2.5) και (2.6). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (2.10c) ικανοποιείται για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έστω I φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^+$, έστω $\tau_0 \in I$ και έστω

$$k_0 = k_0(\tau_0) \geq 0$$

ο θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$\tau_0 \in [t_{k_0}, t_{k_0+1}).$$

Αν λάβουμε υπόψιν τις (2.16) και (2.17), για κάθε δοθέν $\varepsilon \in (0, R)$, μπορεί να βρεθεί μία σταθερά $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/2)$ (ανεξάρτητη του I) για την οποία

$$x(t, \tau_0, S[0, \varepsilon_1], U) \subset S[0, \varepsilon], \forall t \in [\tau_0, t_{k_0+1}]; \tag{2.18a}$$

$$x(t,t_i,S[0,\varepsilon_1],U)\subset S[0,\varepsilon],\forall t\in[t_i,t_{i+1}], \tag{2.18b}$$

$$i=k_0+1,k_0+2,...,\tau_0\in I$$

όπου για λόγους απλότητας υιοθετήσαμε τους συμβολισμούς:

$$x(t,\tau,S[0,\varepsilon],U)$$

$$=\{x\in\mathbb{R}^n: x=x(t,\tau,\omega,d(t)),\ \omega=x(\tau)\in S[0,\varepsilon],d\in U\}\,,\quad t\geq\tau.$$

$$x_i:=x(t_i),i=k_0+1,k_0+2,...;$$

με $x_0:=x(\tau_0),\tau_0\in I$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι παρακάτω Ισχυρισμοί 1, 2 είναι αληθείς:

Υπάρχει σταθερά $R'\in(0,R]$ τέτοια ώστε

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $\xi>0$ και ακέραιο

$$j\in\{k_0+1,k_0+2,...\}$$

ισχύει η συνεπαγωγή:

$$V(t_j,x_j)\leq\xi\Rightarrow V(t_i,x_i)\leq\xi \tag{2.19}$$

$$\text{για κάθε } i=j+1,j+2,...,\ x_0=x(\tau_0)\in S[0,R']\ \text{ και } \tau_0\in I.$$

Ισχυρισμός 2:

$$V(t_i,x_i)\to 0 \text{ καθώς το } i\to\infty,$$

ομοιόμορφα ως προς $x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R']$ και $\tau_0 \in I$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1:

Χρησιμοποιώντας τις (2.18a) και (2.18b) μπορούμε να βρούμε θετική σταθερά $R' \leq R$ τέτοια ώστε

$$x(t, t_i, S[0, R'], U) \subset S[0, R],$$

$$\forall t \in [\tau_0, t_{k_0+1}] \cup [t_i, t_{i+1}], i = k_0 + 1, k_0 + 2, ..., \tau_0 \in I \qquad (2.20)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι (2.10a) και (2.10c), οι οποίες σε συνδυασμό με την (2.20) συνεπάγονται:

$$V(t_{i+1}, x_{i+1}) \leq V(t_i, x_i), \ i = k_0 + 1, k_0 + 2, ... \qquad (2.21)$$

Από την (2.21) έπεται ότι

- για $i = k_0 + 1 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+2}, x_{k_0+2}) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1})$$

- για $i = k_0 + 2 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+3}, x_{k_0+3}) \leq V(t_{k_0+2}, x_{k_0+2})$$

- και με επαγωγή προκύπτει ότι

$$V(t_i, x_i) \leq V(t_j, x_j), \ \forall i = j + 1, j + 2, ...$$

Από την τελευταία έπεται ότι για κάθε $\xi > 0$ ισχύει η επιθυμητή (2.19).

$\diamond$

Απόδειξη Ισχυρισμού 2:

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού 2 χρησιμοποιούμε την (2.10c) από την οποία έπεται ότι

•για $i := k_0 + 1 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2})) \leq V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})) - \sigma_{k_0+1} r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right)$$

•για $i := k_0 + 2 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+3}, x(t_{k_0+3})) \leq V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2})) - \sigma_{k_0+2} r\left(V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2}))\right)$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων μας δίνει

$$V(t_{k_0+3}, x(t_{k_0+3})) \leq V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})) - \sigma_{k_0+1} r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right)$$

$$-\sigma_{k_0+2} r\left(V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2}))\right)$$

$$= V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})) - \sum_{\nu=0}^{\nu=1} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1+\nu}, x(t_{k_0+1+\nu}))\right)$$

• Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για

$$i = k_0 + 3, k_0 + 4, ..., k_0 + n$$

προκύπτει επαγωγικά ότι

$$V(t_{k_0+n}, x(t_{k_0+n})) \leq V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))$$

$$- \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1+\nu}, x(t_{k_0+1+\nu}))\right), n \geq 2$$

και από την τελευταία για $i := k_0 + n,\ n \geq 2$ έπεται ότι

$$V(t_i, x(t_i)) \leq V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})) - \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1+\nu}, x(t_{k_0+1+\nu}))\right) \right) \tag{2.22}$$

$$\forall \tau_0 \in I, x_0 = x(\tau_0) \in S[0,R], i = k_0+2, k_0+3, ...$$

δεδομένου ότι $x(t) \in S[0,R]$ για κάθε $t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = k_0{+}2, k_0{+}3, ..., \tau_0 \in I$.

Από τον Ισχυρισμό 1 έπεται ότι

$$V(t_i, x_i) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1})$$

$$\forall \tau_0 \in I, x_0 = x(\tau_0) \in S[0,R], i = k_0+2, k_0+3, ...$$

δεδομένου ότι $x(t) \in S[0,R]$ για κάθε $t \in [t_i, t_{i+1}], i = k_0{+}2, k_0{+}3, ..., \tau_0 \in I$ και επειδή γνωρίζουμε από την A3 ότι η $r(\cdot)$ είναι γνησίως αύξουσα και η $\sigma_i \geq 0$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
r\left(V(t_i, x(t_i))\right) &\leq r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right) \Rightarrow \\
\sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_i, x(t_i))\right) &\leq \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right) \Rightarrow \\
\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_i, x(t_i))\right) &\leq \sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right) \Rightarrow \\
- \sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} r\left(V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))\right) &\leq -\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} \right) r\left(V(t_i, x(t_i))\right)
\end{aligned}$$

Η (2.22) μέσω της τελευταίας συνεπάγεται ότι

$$V(t_i, x_i) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}) - \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} \right) r(V(t_i, x_i)),$$

$$\forall \tau_0 \in I, x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R], i = k_0 + 2, k_0 + 3, ...$$

δεδομένου ότι $x(t) \in S[0, R]$ για κάθε $t \in [t_i, t_{i+1}], i = k_0+2, k_0+3, ..., \tau_0 \in I$. Η τελευταία μέσω της (2.20) συνεπάγεται:

$$V(t_i, x_i) + \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu} \right) r(V(t_i, x_i)) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}) \tag{2.23}$$

δεδομένου ότι $x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R']$ και $\tau_0 \in I$.

Ο Ισχυρισμός 1, σε συνδυασμό με την (2.23), τις υποθέσεις (2.10a), (2.10b) και το γεγονός ότι το I είναι φραγμένο, συνεπάγονται τον Ισχυρισμό 2. $\diamond$

Στην συνέχεια επικαλούμενοι τον Ισχυρισμό 2 έχουμε ότι για κάθε ζεύγος σταθερών

$$\varepsilon \in (0, R') \text{ και } \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon),$$

για τις οποίες ικανοποιούνται οι (2.18a) και (2.18b), μπορεί να προσδιορισθεί θετικός ακέραιος

$$k = k(\varepsilon_1, I) \geq k_0 + 1$$

τέτοιος ώστε να ισχύουν οι

$$t_k \geq \tau_0 + T, \tau_0 \in I \text{ για κάποια } T = T(\varepsilon_1, I); \tag{2.24a}$$

$$V(t_i, x_i) \leq a(\tfrac{\varepsilon_1}{2}),$$

$$\forall x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R'],\ i = k, k+1, k+2, ..., \tau_0 \in I \tag{2.24b}$$

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να δείξουμε την Εύρωστη Ευστάθεια και Εύρωστη Έλξη για το (2.2):

Εύρωστη Ευστάθεια(RS):

Για κάθε δοθέν σύνολο I, όπως προαναφέρθηκε, θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, R)$ υπάρχει σταθερά $\delta = \delta(\varepsilon, I) > 0$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.5). Πράγματι, αν επικαλεστούμε την (2.17) και το γεγονός ότι το I είναι φραγμένο, μπορούμε να βρούμε σταθερά

$$0 < \delta = \delta(\varepsilon, I) < \varepsilon_1$$

τέτοια ώστε

$$x(s, \tau_0, S[0, \delta], U) \ \in \ S[0, \varepsilon_1], \ \ \forall s \in [\tau_0, t_k], \tau_0 \in I \tag{2.25}$$

Από τις (2.24a),(2.24b) και (2.25) προκύπτει ότι

$$V(t_i, x(t_i, \tau_0, S[0, \delta], U)) \leq a(\tfrac{\varepsilon_1}{2}), \ \forall \tau_0 \in I, i = k, k+1, k+2, ... \tag{2.26}$$

ή, ισοδύναμα από την (2.10a):

$$|x(t_i, \tau_0, S[0, \delta], U)| \leq \tfrac{\varepsilon_1}{2}, \forall \tau_0 \in I, \ i = k, k+1, k+2, ... \tag{2.27}$$

Για $t \in [\tau_0, t_k]$, προκύπτει από την (2.26) ότι

$$x(t, \tau_0, S[0, \delta], U) \subset S[0, \varepsilon_1] \subset S[0, \varepsilon] \tag{2.28}$$

Η (2.28) σε συνδυασμό με την (2.4),(2.18a),(2.18b) και (2.27) συνεπάγονται ότι για $t > t_{k_0+1}$:

$$x(t,\tau_0,S[0,\delta],U) = x(t,t_k,x(t_k,\tau_0,S[0,\delta],U),U)$$

$$\subset x(t,t_k,S[0,\varepsilon_1],U) \subset S[0,\varepsilon]$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω δείξαμε ότι ικανοποιείται η ιδιότητα (2.5) της Εύρωστης Ευστάθειας, δηλαδή, έχουμε:

$$x(t,\tau_0,S[0,\delta],U) \subset S[0,\varepsilon], \;\; \forall t \geq \tau_0, \tau_0 \in I \tag{2.29}$$

Εύρωστη Έλξη(RA):

Θεωρούμε πάλι ένα φραγμένο υποσύνολο I του $\mathbb{R}^+$. Δείχνουμε ότι υπάρχει σταθερά

$$0 < \rho \leq R$$

τέτοια ώστε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $T = T(\varepsilon, I) > 0$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.6), δεδομένου ότι η λύση $x(t,\tau_0,x_0,d(t))$ υπάρχει για κάθε $t \geq \tau_0 \in I$ και $d \in U$. Πράγματι, λόγω της ισχύος της ευστάθειας, έπεται ότι για κάθε

$$0 < \xi \leq R$$

και δοθέν φραγμένο $I \subset \mathbb{R}^+$, υπάρχει γνησίως θετική σταθερά

$$\rho = \rho(\xi, I) < \xi$$

για την οποία ισχύει ότι

$$|x(t,\tau_0,x_0,U)| \leq \xi, \;\; \forall t \geq \tau_0, \; \tau_0 \in I, |x_0| \; \leq \rho \tag{2.30}$$

Η τελευταία εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης για κάθε $t \geq \tau_0 \in I$. Επιλέγουμε σταθερά $\varepsilon \in (0, \rho)$. Τότε υπάρχει σταθερά $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ για την οποία ικανοποιείται η (2.17). Επίσης αν επικαλεστούμε τους Ισχυρισμούς 1 και 2, έπεται η ύπαρξη ακεραίου $k \geq 1$ έτσι ώστε

$$|x(t_i, \tau_0, S[0, \rho], U)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2},\ i = k, k+1, k+2, \ldots, \tau_0 \in I.$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (2.17) και (2.30) συνεπάγεται, όπως αντίστοιχα στην απόδειξη της ευστάθειας, ότι

$$x(s, \tau_0, S[0, \rho], U) \subset S[0, \varepsilon],\ \ \forall s \geq t_k, \tau_0 \in I \tag{2.31}$$

Η (2.31) εξασφαλίζει την ισχύ της RA και κατά συνέπεια την RAS ως προς το U.

A1,A2,A΄3$\Rightarrow$ RAS:

Παρεμφερής διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί και στην απόδειξη της RAS ως προς το U υπό την υπόθεση της A΄3 αντί της A3. Έως την εδραίωση της (2.20) η απόδειξη παραμένει ίδια. Η απόδειξη διαφοροποιείται στους Ισχυρισμούς 1 και 2 οι οποίοι πλέον δεν αποτελούν συνέπεια των (2.18a), (2.18b) και A3 αλλά είναι συνέπεια των (2.18a), (2.18b) και A΄3. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε τους Ισχυρισμούς 1 και 2 ως ακολούθως:

Απόδειξη Ισχυρισμού 1 (χρησιμοποιώντας την A΄3):

Από τις (2.10a),(2.11) και (2.20) έπεται και πάλι ότι ισχύει η (2.21). Η υπόλοιπη απόδειξη του Ισχυρισμού 1 μέσω της A΄3 ταυτίζεται με την απόδειξη του Ισχυρισμού 1 μέσω της A3. $\diamond$

Απόδειξη Ισχυρισμού 2 (χρησιμοποιώντας την A΄3):

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού 2 χρησιμοποιούμε την (2.20) από την οποία έπεται ότι

•για $i := k_0 + 1 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2})) \leq V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})) - \sigma_{k_0+1} V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))$$

$$= (1 - \sigma_{k_0+1})\, V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1})$$

•για $i := k_0 + 2 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+3}, x(t_{k_0+3})) \leq V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2})) - \sigma_{k_0+2} V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2}))$$

$$= (1 - \sigma_{k_0+2})\, V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2}))$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων μας δίνει

$$V(t_{k_0+3}, x(t_{k_0+3})) \leq (1 - \sigma_{k_0+1})\,(1 - \sigma_{k_0+2})\, V(t_{k_0+2}, x(t_{k_0+2})))$$

•Προκύπτει επαγωγικά για $i = k_0 + n$ ότι

$$V(t_{k_0+n}, x(t_{k_0+n})) \leq \left(\prod_{\nu=0}^{\nu=n-2} (1 - \sigma_{k_0+1+\nu}) \right) V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})),\ n \geq 2$$

άρα

$$V(t_i, x(t_i)) \leq \left(\prod_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} (1 - \sigma_{k_0+1+\nu}) \right) V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1}))$$

και, αν εκμεταλλευτούμε την ανισότητα $1 - x \leq e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ προκύπτει η ακόλουθη:

$$V(t_i, x_i) \leq \exp\left(-\sum_{\nu=0}^{\nu=i-k_0-2} \sigma_{k_0+1+\nu}\right) V(t_{k_0+1}, x(t_{k_0+1})),$$
$$i = k_0+2, k_0+3, ... \quad (2.32)$$

$$\forall \tau_0 \in I, x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R], i = k_0+2, k_0+3, ...$$

δεδομένου ότι $x(t) \in S[0, R]$ για κάθε $t \in [t_i, t_{i+1}], i = k_0+2, k_0+3, ..., \tau_0 \in I$.

Αν υπολογίσουμε την οριακή τιμή της (2.32) καθώς το $i \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την (2.10b) καταλήγουμε στην ζητούμενη (2.23).

Από αυτό το σημείο και έπειτα, η απόδειξη της RAS με την υπόθεση A-΄3(αντί της A3), ταυτίζεται με την διαδικασία που ακολουθήσαμε από την σχέση (2.24a) έως την (2.31).

A1,A2,A'3,(2.12a)**,**(2.12b)**,**(2.12c)$\Rightarrow$ **expo-RAS:**

Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι, επιπροσθέτως των υποθέσεων A1, A2 και A΄3, ικανοποιούνται οι συνθήκες (2.12a), (2.12b) και (2.12c). Στην προκειμένη περίπτωση, προκύπτει από την (2.12a) και την (2.32) ότι

$$V(t_i, x_i) \leq \exp(-(i - k_0 - 1)\sigma) V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}), \quad (2.33)$$
$$i = k_0+2, k_0+3, ...$$

Από την (2.33) έπεται ότι

$$V(t_i, x_i) \leq \exp(-\sigma) V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}), \quad (2.34)$$

$$i = k_0 + 2, k_0 + 3, ...$$

και αν ορίσουμε

$$\ell := \frac{\sigma}{\sup\{t_{i+1} - t_i, i = 0, 1, 2, ...\}},$$

από την (2.34) προκύπτει ότι

$$V(t_i, x_i) \leq \exp(-\ell \sup\{t_{i+1} - t_i, i = 0, 1, 2, ...\}) V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}), \qquad (2.35)$$

$$i = k_0 + 2, k_0 + 3, ...$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\sup\{t_{i+1} - t_i\} \geq t_i - t_{k_0+1}, \ \forall i = k_0 + 2, k_0 + 3, ...$$

η οποία σε συνδυασμό με την (2.35) συνεπάγεται ότι

$$V(t_i, x_i) \leq \exp(-\ell (t_i - t_{k_0+1})) V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1}), \qquad (2.36)$$

$$i = k_0 + 2, k_0 + 3, ...$$

Αν επικαλεστούμε την (2.12b) τότε από την (2.36) προκύπτει:

$$a_0 |x(t_i)|^2 \leq \exp(-\ell (t_i - t_{k_0+1})) b_0 |x_{k_0+1}|^2 \Rightarrow$$
$$|x(t_i)|^2 \leq \frac{a_0}{b_0} \exp(-\ell (t_i - t_{k_0+1})) |x_{k_0+1}|^2 \Rightarrow$$
$$|x(t_i)| \leq \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \exp(-\frac{\ell}{2}(t_i - t_{k_0+1}) |x(k_0 + 1)|$$

Τέλος, αν επικαλεστούμε την (2.12c) και ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία την ίδια διαδικασία την οποία εφαρμόσαμε προηγουμένως, μπορεί εύκολα να επαληθευτεί η ισχύς της (2.7) με το ℓ όπως ορίστηκε παραπάνω και για κάποια σταθερά $C = C(I) > 0$, για να καταλήξουμε ότι πράγματι το (2.2) είναι expo-RAS ως προς το U.

$\mathbf{(ii)A1}, \mathbf{A2}, \mathbf{A'3}, (2.12a\ ), (2.13), (2.14) \Rightarrow$ **URAS:**

Χρησιμοποιώντας την(2.16) σε συνδυασμό με την (2.13) έχουμε ότι

$$|x(t)| \leq M|x(s)|,\ \forall t \geq s \geq 0 \tag{2.37}$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι ισχύει η URAS δείχνουμε ότι το (2.1) ικανοποιεί τις (2.5) και (2.6) για κάθε $\tau_0 \geq 0$ και για δ και T εξαρτώμενα μόνο από το T. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η (2.11) ισχύει για όλα τα θετικά ακέραια i. Έστω $k_0 \geq 0$ ο θετικός ακέραιος για τον οποίο $\tau_0 \in [t_{k_0}, t_{k_0+1})$. Λόγω της (2.13) και της (2.37),για κάθε δοθέν $\varepsilon \in (0, R)$, μπορεί να βρεθεί μία σταθερά $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon/2)$ για την οποία

$$x(t, \tau_0, S[0, \varepsilon_1], U) \subset S[0, \varepsilon], \forall t \in [\tau_0, t_{k_0+1}]; \tag{2.38a}$$

$$x(t, t_i, S[0, \varepsilon_1], U) \subset S[0, \varepsilon], \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \tag{2.38b}$$

$$i = k_0 + 1, k_0 + 2, ..., \tau_0 \geq 0$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι ακόλουθοι Ισχυρισμοί 3, 4 είναι αληθείς:

Ισχυρισμός 3:

Υπάρχει σταθερά $R' \in (0, R]$ τέτοια ώστε για κάθε $\xi > 0$ και ακέραιο

$$j \in \{k_0 + 1, k_0 + 2, ...\}$$

ισχύει ότι

$$V(t_j, x_j) \leq \xi \Rightarrow V(t_i, x_i) \leq \xi$$

για κάθε $i = j+1, j+2, ...,\ x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R']$ και $\tau_0 \geq 0$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 3:

Χρησιμοποιώντας τις (2.38a) και (2.38b) μπορούμε να βρούμε θετική σταθερά $R' \leq R$ τέτοια ώστε

$$x(t, t_i, S[0, R'], U) \subset S[0, R],$$

$$\forall t \in [\tau_0, t_{k_0+1}] \cup [t_i, t_{i+1}], i = k_0+1, k_0+2, ..., \tau_0 \geq 0 \tag{2.39}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι (2.11) και (2.14), οι οποίες σε συνδυασμό με την (2.39) συνεπάγονται:

$$V(t_{i+1}, x_{i+1}) \leq V(t_i, x_i),\ i = k_0+1, k_0+2, ... \tag{2.40}$$

Από την (2.40) έπεται ότι

- για $i = k_0 + 1 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+2}, x_{k_0+2}) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1})$$

- για $i = k_0 + 2 \Rightarrow$

$$V(t_{k_0+3}, x_{k_0+3}) \leq V(t_{k_0+2}, x_{k_0+2})$$

- και χρησιμοποιώντας επαγωγή

$$V(t_i, x_i) \leq V(t_j, x_j), \ \forall i = j+1, j+2, ...$$

Από την τελευταία έπεται ότι για κάθε $\xi > 0$ ισχύει ότι

$$V(t_j, x_j) \leq \xi \Rightarrow V(t_i, x_i) \leq \xi$$

$$\text{για κάθε } i = j+1, j+2, ..., \ x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R'] \ \text{ και } \tau_0 \geq 0.$$

Έτσι δείξαμε τον Ισχυρισμό 3. ◇

Ισχυρισμός 4:

$$V(t_i, x_i) \to 0 \text{ καθώς το } i \to \infty,$$

$$\text{ομοιόμορφα ως προς } \ x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R'] \text{ και } \tau_0 \geq 0.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού 4:

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού 4 θα χρησιμοποιήσουμε την (2.11) από την οποία έπεται ότι ισχύει η (2.31). Από τον Ισχυρισμό 3 έπεται ότι

$$V(t_i, x_i) \leq V(t_{k_0+1}, x_{k_0+1})$$

$$\forall \tau_0 \geq 0, , x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R], i = k_0+2, k_0+3, ...$$

δεδομένου ότι $x(t) \in S[0, R]$ για κάθε $t \in [t_i, t_{i+1}], i = k_0+2, k_0+3, ..., \tau_0 \geq 0$.

Η τελευταία σε συνδυασμό με την (2.31) και τις υποθέσεις (2.10a) και (2.10b), συνεπάγονται τον Ισχυρισμό 4. ◇

Στην συνέχεια γνωρίζουμε από τον Ισχυρισμό 4 ότι για κάθε ζεύγος σταθερών

$$\varepsilon \in (0, R') \text{ και } \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon),$$

για τις οποίες ικανοποιούνται οι (2.38a) και (2.38b), μπορεί να προσδιοριστεί θετικός ακέραιος

$$k = k(\varepsilon_1) \geq k_0 + 1$$

τέτοιος ώστε ισχύουν οι κάτωθι:

$$t_k \geq \tau_0 + T,\ \ \tau_0 \geq 0 \text{ για κάποια } T = T(\varepsilon_1); \tag{2.41a}$$

$$V(t_i, x_i) \leq a(\tfrac{\varepsilon_1}{2}),$$
$$\forall x_0 = x(\tau_0) \in S[0, R'], i = k, k+1, k+2, ..., \tau_0 \geq 0 \tag{2.41b}$$

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να δείξουμε την ομοιόμορφα εύρωστη ευστάθεια και την ομοιόμορφη έλξη για το (2.2):

Ομοιόμορφη Ευστάθεια:

Δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, R)$ υπάρχει σταθερά $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ για την οποία η (2.5) ικανοποιείται με το δ ανεξάρτητο του διαστήματος I. Όντως, αν επικαλεστούμε την (2.37), μπορούμε να βρούμε σταθερά

$$0 < \delta = \delta(\varepsilon) < \varepsilon_1$$

τέτοια ώστε

$$x(s,\tau_0,S[0,\delta],U)\ \in\ S[0,\varepsilon_1],\ \ \forall s\in[\tau_0,t_k],\tau_0\geq 0 \tag{2.42}$$

Από την (2.41b) και (2.42) προκύπτει ότι

$$V(t_i,x(t_i,\tau_0,S[0,\delta],U))\leq a(\tfrac{\varepsilon_1}{2}),\ \forall\tau_0\geq 0,\ i=k,k+1,k+2,... \tag{2.43}$$

ή, ισοδύναμα από την (2.14):

$$|x(t_i,\tau_0,S[0,\delta],U)|\leq \tfrac{\varepsilon_1}{2},\forall\tau_0\geq 0,\ i=k,k+1,k+2,... \tag{2.44}$$

Για $t\in[\tau_0,t_k]$, προκύπτει από την (2.42) ότι

$$x(t,\tau_0,S[0,\delta],U)\subset S[0,\varepsilon_1]\subset S[0,\varepsilon]$$

καθώς επίσης η τελευταία σε συνδυασμό με την (2.4), (2.38a), (2.38b) και (2.44) συνεπάγεται ότι για $t>t_{k_0+1}$:

$$x(t,\tau_0,S[0,\delta],U)=x(t,t_k,x(t_k,\tau_0,S[0,\delta],U),U)$$

$$\subset x(t,t_k,S[0,\varepsilon_1],U)\subset S[0,\varepsilon]$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω δείξαμε ότι ικανοποιείται η ιδιότητα της ομοιόμορφης ευστάθειας, δηλαδή, έχουμε:

$$x(t,\tau_0,S[0,\delta],U)\subset S[0,\varepsilon],\ \ \forall t\geq\tau_0,\geq 0 \tag{2.45}$$

Ομοιόμορφη Έλξη:

Δείχνουμε ότι υπάρχει σταθερά $\rho\in(0,R)$ τέτοια ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$

υπάρχει χρόνος $T = T(\varepsilon)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η (2.6) για κάθε $\tau_0 \geq 0$ με δ, T εξαρτώμενα μόνο από το ε, δεδομένου ότι η λύση $x(t, \tau_0, x_0, d(t))$ υπάρχει για κάθε $t \geq \tau_0 \geq 0$ και $d \in U$. Όντως, λόγω της ισχύος της RS, έπεται ότι για κάθε $0 < \xi \leq R$ και δοθέν φραγμένο $I \subset \mathbb{R}^+$, υπάρχει γνησίως θετική σταθερά $\rho = \rho(\xi) < \xi$ για την οποία ισχύει ότι

$$|x(t, \tau_0, x_0, U)| \leq \xi, \quad \forall t \geq \tau_0, \; \tau_0 \geq 0, |x_0| \; \leq \rho \tag{2.46}$$

η τελευταία εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης για κάθε $t \geq \tau_0 \geq 0$. Επιλέγουμε τυχαία σταθερά $\varepsilon \in (0, \rho)$. Τότε μπορούμε να βρούμε σταθερά $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ για την οποία να ικανοποιείται η (2.37) . Επίσης,οι Ισχυρισμοί 3 και 4, εξασφαλίζουν την ύπαρξη ακεραίου $k \geq 1$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$|x(t_i, \tau_0, S[0, \rho], U)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}, \; i = k, k+1, k+2, \ldots, \tau_0 \geq 0.$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (2.37) και (2.46) συνεπάγεται, όπως αντίστοιχα στην απόδειξη της RS, ότι

$$x(s, \tau_0, S[0, \rho], U) \subset S[0, \varepsilon], \quad \forall s \geq t_k, \tau_0 \geq 0 \tag{2.47}$$

Η (2.47) εξασφαλίζει την ισχύ της RA και κατά συνέπεια την URAS ως προς το U, δεδομένου ότι η A'3 ισχύει.

$\mathbf{A1}, \mathbf{A2}, \mathbf{A'3}, (2.12a\ ), (2.12b\ ), (2.12c\ ), (2.13), (2.14) \Rightarrow$ **expo-URAS:**

Η expo-URAS αποτελεί άμεση συνέπεια των παραπάνω, δεδομένου ότι ισχύουν οι επιπλέον υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1. $\square$

2.3 Averaging

Σκοπός αυτής της παραγράφου, είναι να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της παραγράφου 2.1 για να μας προκύψει μία καινούργια ικανή συνθήκη averaging για expo-RAS για τα συστήματα (2.1).

Κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις. Υποθέτουμε ότι

- το σύνολο D είναι συμπαγές,
- $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι C^0, για σταθερό $t \in \mathbb{R}^+$
- η απεικόνιση $f(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1,
- ικανοποιείται η (2.3)
- υπάρχει σταθερά $R > 0$ τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

B1. Υπάρχει συνάρτηση $L \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,d)\right| \leq L(t), \ \left|\frac{\partial f}{\partial d}(t,x,d)\right| \leq L(t)\left|x\right|, \\ \forall (t,x,d) \ \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R] \times D \tag{2.48}$$

B2. Υπάρχει C^1 απεικόνιση $f_{av}(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ με

$$f_{av}(0,\cdot) = 0,$$

τέτοια ώστε για κάθε $\xi > 0$, υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία

$$\{t_i \geq 0, i = 0,1,2,...\}$$

που ικανοποιεί τις (2.9a) και (2.12c) καθώς και μία ακολουθία

$$\{c_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$$

τέτοια ώστε

$$c_i \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds \leq m, \ \forall i = 0, 1, 2, ... \tag{2.49a}$$

$$\left| f_{av}(x,d) - \frac{1}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x,d)ds \right| \leq |x| \, \xi,$$

$$\forall \text{ θετικό ακέραιο } i \text{ μακρυά από το μηδέν}, |x| \ \leq R, d \in D \tag{2.49b}$$

και επιπλέον υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\underline{\lim} \frac{1}{i} \sum_{\nu=0}^{i} c_\nu \geq c \tag{2.49c}$$

B3. Για την απεικόνιση f_{av} που εισάγαμε στην B2 υποθέτουμε ότι το σύστημα:

$$\dot{x} = f_{av}(x,d) \tag{2.50}$$

είναι expo-URAS ως προς το U_D.

Πρόταση 2.2 ***Averaging για Συστήματα Συνεχούς Χρόνου (i)***

- *Υποθέτουμε ότι το σύστημα* (2.1) *ικανοποιεί τις B1-B3. Τότε για κάθε ζεύγος σταθερών* $\varepsilon > 0$ *και* $\mu > 0$, *αν θεωρήσουμε το σύνολο*

$$U := \{d_\varepsilon(t) := d(\varepsilon t) : d \in U_D \text{ απολύτως συνεχής}$$
$$\text{με} \left|\dot{d}(t)\right| \leq \mu, \ \text{σ.π. } t \geq 0\} \tag{2.51}$$

τότε ικανοποιούνται οι Υποθέσεις A1, A2 και A΄3 για το σύστημα (2.1) *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *κοντά στο μηδέν με το* U *όπως ορίστηκε παραπάνω· επιπλέον, αν ικανοποιείται η* (2.12*b*)*, τότε, από τον πρώτο ισχυρισμό της Πρότασης 2.1(i), για κάθε* $\varepsilon > 0$ *κοντά στο μηδέν, το αντίστοιχο σύστημα* (2.1) *είναι **RAS** ως προς το* U.

- *Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *με*

$$c_i \geq c, \forall i = 0, 1, 2, ... \tag{2.52}$$

τότε ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1(i), συνεπώς, για $\varepsilon > 0$ *κοντά στο μηδέν, το* (2.1) *είναι **expo-RAS** ως προς το* U.

(ii) *Αν επιπλέον από τις προηγούμενες υποθέσεις, δεχθούμε ότι η απεικόνιση* $L(\cdot)$ *ικανοποιεί την* (2.13)*, τότε για κάθε ζεύγος σταθερών* $\varepsilon > 0$ *και* $\mu > 0$*, αν θεωρήσουμε το σύνολο* U *όπως ορίστηκε στην* (2.51)*, όλες οι επιπλέον υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1(ii) ικανοποιούνται για* $\varepsilon > 0$ *κοντά στο μηδέν, έτσι, το αντίστοιχο σύστημα* (2.1) *είναι **expo-URAS** ως προς το* U.

Σχόλιο 2.1

- Πρέπει να σημειώσουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (2.49a), (2.49b), αν υποθέσουμε ότι

$$t_{i+1} - t_i = T(\text{σταθερό}), i = 0, 1, 2, ...$$

και ισχύει η παρακάτω:

$$\left| f_{av}(x,d) - \frac{1}{\int_t^{t+T} L(s)\, ds} \int_t^{t+T} f(s,x,d) ds \right| \leq |x|\, \sigma(T),$$
$$\forall t, T > 0, |x| \ \leq R, d \in D \tag{2.53}$$

για κάποια φθίνουσα

$$\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

με

$$\sigma(t) \to 0 \ \textit{καθώς το} \ t \to \infty.$$

Συνεπώς η Πρόταση 2.2(ii), πράγματι γενικεύει πολύ γνωστά αποτελέσματα averaging στην υπάρχουσα βιβλιογραφία για συστήματα χωρίς διαταραχές και με φραγμένα δυναμικά ως προς τον χρόνο (βλέπε π.χ., [3],[6],[30] και Θεώρημα 1.2 στην εισαγωγή της διατριβής) εξασφαλίζοντας έτσι την εκθετική ευστάθεια του (2.1), κάτω από την προϋποθέσεις (2.13) και (2.53) με

$$L(t) = l \ \textit{για κάθε} \ t \geq 0$$

για κάποιο σταθερό $l > 0$; όπου για λόγους απλότητας μπορούμε να δεχτούμε ότι $l = 1$. Σημειώνεται ότι σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}=t_i+T} L(s) ds = T, \ \forall i = 0, 1, 2, ...$$

καθώς επίσης και ότι η συνθήκη (2.53) ταυτίζεται με την γνώριμη συνθήκη averaging που έχει υιοθετηθεί στην βιβλιογραφία.

- Οι ικανές συνθήκες που επεβλήθησαν στην Πρόταση 2.2 μπορούν να γίνουν λιγότερο επιβαρυντικές, υποθέτοντας ότι υπάρχουν απεικονίσεις

$$L_i \in \mathcal{N}, i = 1, 2, 3$$

για τις οποίες οι (2.10b) και (2.48) ικανοποιούνται με

$$L := L_1 \textit{ και } L := L_2,$$

αντίστοιχα, και οι (2.49a), (2.49b) και (2.49c) ικανοποιούνται με

$$L := L_3.$$

Απόδειξη Πρότασης 2.2:

B1,B2,B3⇒ RAS:

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο U όπως και ορίστηκε στην (2.51) ικανοποιεί την ιδιότητα (2.4). Στη συνέχεια εξασφαλίζουμε ότι για $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν το σύστημα (2.1) είναι RAS ως προς το U, αν όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2(ii) ικανοποιούνται. Λόγω της (2.3) και της πρώτης ανισότητας της (2.48), κάθε τροχιά $x(t) = x(t, t_0, x_0, d_\varepsilon(t))$, $d_\varepsilon \in U$ του (2.1) ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), d(\varepsilon s))ds \Rightarrow \\ |x(t)| &\le |x_0| + \varepsilon \int_{t_0}^{t} |f(s, x, d(\varepsilon s))|ds \Rightarrow \\ |x(t)| &\le |x_0| + \varepsilon \int_{t_0}^{t} |f(s, x, d(\varepsilon s)) - f(s, 0, d(\varepsilon))|ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|x(t)| \le |x_0| \exp\left(\varepsilon \int_{t_0}^{t} L(s)ds\right),\ t \ge t_0,\ d \in U_D,\ \varepsilon \ge 0 \quad (2.54)$$

δεδομένου ότι $x(s) \in S[0, R]$ για κάθε $s \in [t_0, t]$.

Επίσης, από τις (2.3) και (2.48) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
x(t)-x_0 &= \varepsilon\int_{t_0}^{t} f(s,x(s),d(\varepsilon s))ds \Rightarrow \\
|x(t)-x_0| &\leq \varepsilon\int_{t_0}^{t} |f(s,x(s),d(\varepsilon s))|\,ds \Rightarrow \\
|x(t)-x_0| &\leq \varepsilon\int_{t_0}^{t} |f(s,x(s),d(\varepsilon s))-f(s,0,d(\varepsilon s))|\,ds \Rightarrow \\
|x(t)-x_0| &\leq \varepsilon\int_{t_0}^{t} L(s)\,|x(s)|\,ds \Rightarrow \\
|x(t)-x_0| &\leq \varepsilon\int_{t_0}^{t} L(s)\,|x(s)-x_0+x_0|\,ds \Rightarrow \\
|x(t)-x_0| &\leq \varepsilon\int_{t_0}^{t} L(s)\,|x(s)-x_0|\,ds+\varepsilon\,|x_0|\int_{t_0}^{t} L(s)ds
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι $x(s)\in S[0,R]$ για κάθε $s\in[t_0,t]$. Από την τελευταία και την ανισότητα Gronwall προκύπτει ότι για κάθε $T>0$ έχουμε:

$$|x(t)-x_0|\leq\left(\varepsilon\,|x_0|\int_{t_0}^{t} L(s)ds\right)\exp\left(\varepsilon\int_{t_0}^{t} L(s)ds\right) \tag{2.55}$$

$$\forall t\ \in\ [t_0,t_0+T],\ d_\varepsilon\in U,\ \text{δεδομένου ότι } x(t)\ \in\ S[0,R]$$

$$\text{για κάθε } t\ \in[t_0,t_0+T]$$

Στη συνέχεια, επικαλούμαστε την Υπόθεση B3, η οποία, σε συνδυασμό με μία τοπική εκδοχή του Αντιστρόφου Θεωρήματος Lyapunov που έχει αναπτυχθεί στο [24] (βλέπε επίσης[38]) που αφορούν την εύρωστη εκθετική ευστάθεια, συνεπάγεται την ύπαρξη μίας C^∞ συνάρτησης $V:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ και σταθερών $C_i>0, i=1,2,3,4,5$ έτσι ώστε

$$C_1\,|x|^2\leq V(x)\leq C_2\,|x|^2 \tag{2.56a}$$

$$DV(x)f_{av}(x,d)\leq -C_3\,|x|^2 \tag{2.56b}$$

$$|DV(x)| \le C_4 |x| \tag{2.56c}$$

$$|D^2V(x)| \le C_5 \tag{2.56d}$$

για κάθε $d \in D$ και x κοντά στο μηδέν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι (2.56a), (2.56b), (2.56c) και (2.56d) ισχύουν για κάθε $x \in S[0, R]$.

Σύμφωνα με την Υπόθεση B2, μπορεί να βρεθεί ακολουθία

$$\{t_i \ge 0, i = 0, 1, 2, ...\}$$

τέτοια ώστε οι (2.49a) και (2.49b)να ικανοποιούνται με

$$\xi := \frac{C_3}{2C_4} \tag{2.57}$$

Η παραπάνω ακολουθία $\{t_i\}$, η υπόθεση (2.49a), σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις (2.54) και (2.55) συνεπάγονται ότι για τυχαία επιλεγμένο $\varepsilon_0 > 0$ υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε για όλα τα θετικά $\varepsilon \le \varepsilon_0$, να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες για τις τροχιές του (2.1):

$$|x(s)| \le K |x(t_i)| \tag{2.58a}$$

$$|x(s) - x(t_i)| \le \varepsilon K |x(t_i)| \tag{2.58b}$$

$$\forall s \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2..., \ d_\varepsilon \in U,$$

δεδομένου ότι $x(s) \ \in \ S[0, R] \ f$ για κάθε $s \in [t_i, t_{i+1}]$.

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι όλες οι υποθέσεις του πρώτου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1(i) ικανοποιούνται για επαρκώς μικρό

$\varepsilon > 0$, με την $V(\cdot)$ όπως δίνεται στις (2.56a), (2.56b), (2.56c) και (2.56d) και την ανωτέρω ακολουθία $\{t_i\}$, συνεπώς το (2.1) είναι RAS ως προς το σύνολο U όπως αυτό ορίστηκε στην (2.51). Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, οι τροχιές του συστήματος (2.1) ικανοποιούν την (2.11) με το ξ δοσμένο από την (2.57). Όντως, έχουμε:

$$\begin{aligned} V(x(t_{i+1})) - V(x(t_i)) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{V}(x(s))ds \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} DV(x(s))\dot{x}(s)ds \\ &= \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} DV(x(s))f(s, x(s), d(\varepsilon s))ds \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$V(x(t_{i+1})) - V(x(t_i)) = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.59}$$

με

$$I_1 := \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[DV(x(s))f(s, x(s), d(\varepsilon s)) - DV(x(t_i))f(s, x(t_i), d(\varepsilon t_i))\right] ds \tag{2.60a}$$

$$\begin{aligned} I_2 := \varepsilon\, DV(x(t_i)) \Bigg[&\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(t_i), d(\varepsilon t_i))ds \\ &- \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) f_{av}(x(t_i), d(\varepsilon t_i))\Bigg] \end{aligned} \tag{2.60b}$$

$$I_3 := \varepsilon \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) DV(x(t_i))f_{av}(x(t_i), d(\varepsilon t_i)) \tag{2.60c}$$

Οι (2.49b),(2.56b) και (2.56c) σε συνδυασμό με την (2.57) συνεπάγονται για τις (2.60b) και (2.60c):

$$
\begin{aligned}
I_2+I_3 &\le \varepsilon\,|DV(x(t_i))| \\
&\times \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x(t_i),d(\varepsilon t_i))ds - \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) f_{av}(x(t_i),d(\varepsilon t_i))\right| \\
&+ \varepsilon\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) DV(x(t_i)) f_{av}(x(t_i),d(\varepsilon t_i))
\end{aligned}
$$

$$
\le \varepsilon C_4|x(t_i)|\left[\frac{C_3}{2C_4}|x(t_i)|\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right] - \varepsilon C_3\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right)|x(t_i)|^2
$$

$$
= -\frac{1}{2}\varepsilon C_3\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right)|x(t_i)|^2, \tag{2.61}
$$

$\forall i \ge 0$ *μακρυά από το μηδέν δεδομένου ότι* $x(s) \in S[0,R]$ *για κάθε* $s \in [t_i, t_{i+1}]$.

Στη συνέχεια για να εκτιμήσουμε την (2.60a), εργαζόμαστε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[DV(x(s))f(s,x(s),d(\varepsilon s)) - DV(x(t_i))f(s,x(s),d(\varepsilon s))\right] ds \\
&+ \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[DV(x(t_i))f(s,x(s),d(\varepsilon s)) - DV(x(t_i))f(s,x(t_i),d(\varepsilon s))\right] ds \\
&+ \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[DV(x(t_i))f(s,x(t_i),d(\varepsilon s)) - DV(x(t_i))f(s,x(t_i),d(\varepsilon t_i))\right] ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[DV(x(s)) - DV(x(t_i))\right]\; f(s,x(s),d(\varepsilon s))ds \\
&+ \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} DV(x(t_i))\left[f(s,x(s),d(\varepsilon s)) - f(s,x(t_i),d(\varepsilon s))\right] ds \\
&+ \varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}} DV(x(t_i))\left[f(s,x(t_i),d(\varepsilon s)) - f(s,x(t_i),d(\varepsilon t_i))\right] ds
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} |DV(x(s)) - DV(x(t_i))| \ \ |f(s, x(s), d(\varepsilon s))ds| \\
&+ \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} |DV(x(t_i))| \, |f(s, x(s), d(\varepsilon s)) - f(s, x(t_i), d(\varepsilon s))| \, ds \\
&+ \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} |DV(x(t_i))| \, |f(s, x(t_i), d(\varepsilon s)) - f(s, x(t_i), d(\varepsilon t_i))| \, ds
\end{aligned}$$

Η τελευταία, συνεπάγεται μέσω των (2.3),(2.48),(2.56c),(2.58a) και (2.58b):

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} c_5 \varepsilon K |x(t_i)| \ \ |f(s, x(s), d(\varepsilon s)) - f(s, 0, d(\varepsilon s))| \, ds \\
&+ \varepsilon C_4 |x(t_i)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) \, |x(s) - x(t_i)| \, ds \\
&+ \varepsilon C_4 |x(t_i)| \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) |x(t_i)| \, |d(\varepsilon s) - d(\varepsilon t_i)| \, ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^2 K C_5 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) |x(s)| ds \right) |x(t_i)| \\
&+ \varepsilon^2 K C_4 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) ds \right) |x(t_i)|^2 \\
&+ \varepsilon C_4 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) \, |d(\varepsilon s) - d(\varepsilon t_i)| \, ds \right) |x(t_i)|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^2 K^2 C_5 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) ds \right) |x(t_i)|^2 \\
&+ \varepsilon^2 K C_4 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) ds \right) |x(t_i)|^2 \\
&+ \varepsilon C_4 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) \, |d(\varepsilon s) - d(\varepsilon t_i)| \right) |x(t_i)|^2
\end{aligned}$$

Από την τελευταία και την (2.49a) προκύπτει:

$$I_1 \leq \varepsilon^2 C_5 K^2 m \left|x(t_i)\right|^2 + \varepsilon^2 C_4 K m \left|x(t_i)\right|^{\ 2}$$

$$+\varepsilon C_4 m \sup\left\{\left|d(\varepsilon s) - d(\varepsilon t_i)\right|, t_i \leq s \leq t_{i+1}\right\} \left|x(t_i)\right|^{\ 2} \qquad (2.62)$$

Αν επικαλεστούμε την (2.51), η (2.62) συνεπάγεται

$$I_1 \leq \varepsilon^2 C_5 K^2 m \left|x(t_i)\right|^2 + \varepsilon^2 C_4 K m \left|x(t_i)\right|^{\ 2} + \varepsilon^2 C_4 K m \mu |s - t_i| |x(t_i)|^2$$

$$= \varepsilon^2 \left(C_5 K^2 m + \ C_4 K m + \ C_4 m \mu |s - t_i|\right) |x(t_i)|^2 \qquad (2.63)$$

Οι (2.63) και (2.12c), εξασφαλίζουν την ύπαρξη σταθεράς $\theta > 0$ τέτοιας ώστε:

$$I_1 \leq \varepsilon^2 \theta \left|x(t_i)\right|^2,$$

$$\forall i \geq 0, \text{ μακρυά από το μηδέν}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), d_\varepsilon \in U \qquad (2.64)$$

δεδομένου ότι $x(s) = x(s, t_i, x(t_i), d_\varepsilon(s)) \ \in \ S[0, R]$ για κάθε $s \in [t_i, t_{i+1}]$.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (2.60a),(2.60b),(2.60c),(2.61) και (2.64) προκύπτει ότι

$$V(x(t_{i+1})) - V(x(t_i)) \leq -\frac{1}{2}\varepsilon C_3 \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s) ds\right) \left|x(t_i)\right|^2 + \varepsilon^2 \theta \left|x(t_i)\right|^2,$$

$$\forall i \geq 0, \text{ μακρυά από το μηδέν}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), d_\varepsilon \in U \qquad (2.65)$$

δεδομένου ότι $x(s) = x(s, t_i, x(t_i), d_\varepsilon(s)) \ \in \ S[0, R]$ για κάθε $s \in [t_i, t_{i+1}]$.

και λόγω της (2.56a) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & V(x(t_{i+1})) - V(x(t_i)) \\ \leq & -\frac{C_3}{2C2}\varepsilon\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right)V(x(t_i)) + \varepsilon^2\theta\frac{1}{C_1}V(x(t_i)) \\ = & \left(-\frac{C_3}{2C2}\varepsilon\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) + \varepsilon^2\theta\frac{1}{C_1}\right)V(x(t_i)) \end{aligned}$$

άρα:

$$\begin{gathered} V(x(t_{i+1})) - V(x(t_i)) \leq -\sigma_i V(x(t_i)); \\ \sigma_i := -\frac{1}{C_1}\varepsilon^2\theta + \frac{\varepsilon C_3}{2C_2}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds\right) \\ \text{για } i \geq 0 \text{ μακρυά από το μηδέν.} \end{gathered} \tag{2.66}$$

Λόγω της ($2.49a$) έχουμε για την σ_i που ορίσαμε στην (2.66), ότι

$$\sigma_i \geq -\frac{1}{C_1}\varepsilon^2\theta + \frac{\varepsilon C_3}{2C_2}c_i > 0 \tag{2.67}$$

για όλα τα θετικά ακέραια i μακρυά από το μηδέν και για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$.

Η (2.67) συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\nu=i}\sigma_\nu &\geq \sum_{\nu=0}^{\nu=i}\left(-\frac{1}{C_1}\varepsilon^2\theta + \frac{\varepsilon C_3}{2C_2}c_\nu\right) \\ &\geq -\frac{i+1}{C_1}\varepsilon^2\theta + \frac{\varepsilon C_3}{2C_2}\sum_{\nu=0}^{\nu=i}c_\nu \\ &= i\left(-\frac{i+1}{iC_1}\varepsilon^2\theta + \frac{\varepsilon C_3}{2C_2}\left(\frac{1}{i}\sum_{\nu=0}^{\nu=i}c_\nu\right)\right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Από την (2.68) και επικαλούμενοι την υπόθεση ($2.49c$) μπορούμε να προσδιορίσουμε μία σταθερά $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$ για την οποία ικανοποιείται η ($2.10b$). Συμπεραίνουμε, λαμβάνοντας επίσης υπόψιν τις (2.50) και (2.63), ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις A1, A2 και A΄3, καθώς επίσης και η ($2.12b$), για το σύστημα (2.1), έτσι, σύμφωνα με τον πρώτο ισχυρισμό της Πρότασης 2.1(i), το σύστημα (2.1) είναι RAS για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ ως προς το U.

B1, B2, B3, (2.52) $\Rightarrow$**expo-RAS:**

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε τον δεύτερο ισχυρισμό της Πρότασης 2.2(i). Όντως, αν εκτός από τις B1, B2 και B3, υποθέσουμε ότι για κάθε επιλογή $\{t_i\}$ για την οποία ικανοποιούνται οι (2.49a), (2.49b) και ισχύει η ιδιότητα (2.52). Τότε λόγω της (2.65), για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$ και για όλα τα $i = 0, 1, 2, ...$ ισχύει ότι

$$\sigma_i \geq \sigma$$

για κάποια σταθερά $\sigma > 0$ και εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι επίσης ικανοποιούνται οι υπόλοιπες υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1(i). Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, το αντίστοιχο σύστημα είναι (2.1) expo-RAS ως προς το U.

B1,B2,B3,(2.13)**,**(2.52)$\Rightarrow$**expo-URAS:**

Τέλος, οι επιπλέον υποθέσεις της Πρότασης 2.1(ii) εξασφαλίζουν την ύπαρξη μίας σταθεράς $\varepsilon^* > 0$ για την οποία το σύστημα (2.1) ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.1(ii) για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$, έτσι, το σύστημα (2.1) είναι expo-URAS ως προς το U. □

Το παρακάτω αποτελεί άμεση συνέπεια του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.2(i):

Πόρισμα 2.1

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $L \in \mathcal{K}_\infty$ *που ικανοποιεί την* (2.48)*, και* *έστω ότι* $\{t_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$ *μία γνησίως αύξουσα ακολουθία με*

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} L(s)ds = 1,\ \forall i = 0, 1, 2, ... \tag{2.69}$$

της οποίας η ύπαρξη εξασφαλίζεται από την υπόθεση ότι η L *είναι κλάσεως* K_∞. *Επίσης υποθέτουμε ότι για την παραπάνω ακολουθία* $\{t_i\}$ *υπάρχει μία* C^1 *απεικόνιση* $f_{av}(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *με* $f_{av}(0,\cdot) = 0$ *που ικανοποιεί την Β3 και μία ακολουθία* $\{\xi_i \geq 0\}$ *έτσι ώστε*

$$\xi_i \to 0 \tag{2.70a}$$

$$\left| f_{av}(x,d) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,x,d)ds \right| \leq |x|\,\xi_i, \tag{2.70b}$$

$$i = 0, 1, 2, ..., |x|\ \leq R, d \in D$$

για κάποια σταθερά $R > 0$. *Τότε για κάθε σταθερά* $\mu > 0$ *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *κοντά στο μηδέν το σύστημα* (2.1) *είναι* ***expo-RAS*** *ως προς το* U *όπως το τελευταίο ορίστηκε από την* (2.51).

Απόδειξη Πορίσματος 2.1:

Η (2.69) σε συνδυασμό με την υπόθεση $L \in \mathcal{K}_\infty$ συνεπάγεται ότι ισχύει η (2.9a) και επιπλέον

$$t_{i+1} - t_i \to 0.$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με τις (2.70a) και (2.70b) συνεπάγεται ότι όλες οι οι υποθέσεις του δεύτερου ισχυρισμού της Πρότασης 2.2(ii) ικανοποιούνται, κατά συνέπεια το σύστημα (2.1) είναι **expo-RAS** ως προς το U. □

2.4 Εφαρμογές -Παραδείγματα

Το ακόλουθο παράδειγμα εξετάζει την απλούστερη περίπτωση γραμμικών χρονικά-μεταβαλλόμενων συστημάτων. Οι παρακάτω ισχυρισμοί αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του αντίστοιχου ισχυρισμού της Πρότασης 2.2

Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό χρονικά-μεταβαλλόμενο σύστημα χωρίς διαταραχές:

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x, \ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \ \varepsilon > 0 \tag{2.71}$$

όπου ο πίνακας $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συνεχής και υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία

$$\{t_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$$

η οποία ικανοποιεί την ($2.9a$) τέτοια ώστε

$$c_i \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |A(s)|\, ds \leq m, \ \forall i \geq 0 \tag{2.72}$$

για κάποια σταθερά $m > 0$ και ακολουθία

$$\{c_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$$

η οποία ικανοποιεί την ($2.49c$) και υπάρχει ένας σταθερός πίνακας $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, που είναι Hurwitz, τέτοιος ώστε

$$\lim_{i\to\infty} \left| \frac{1}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |A(s)|\, ds} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)ds - A_0 \right| = 0 \tag{2.73}$$

Τότε μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι όλες οι υποθέσεις του πρώτου ισχυρισμού της Πρότασης 2.2(i) ισχύουν με

$$L := |A|$$

και

$$f_{av} := A_0 x,$$

έτσι, το (2.71) είναι **AS** για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$.

Αν επιπλέον ισχύει η (2.52), τότε από τον δεύτερο ισχυρισμό της Πρότασης 2.2(i) έπεται ότι το (2.71) είναι **expo-AS** για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$.

Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (2.52), η απεικόνιση $L := |A|$ ικανοποιεί την (2.13) και, αντί της (2.73), υποθέσουμε ότι για κάθε $\xi > 0$ μπορεί να βρεθεί μία ακολουθία

$$\{t_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$$

η οποία ικανοποιεί ταυτόχρονα την (2.9a) και την (2.12c) με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε

$$\left| \frac{1}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} |A(s)|\, ds} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) ds - A_0 \right| \leq \xi,$$

$$\forall i \geq 0 \text{ , μακρυά από το μηδέν,}$$

για κάποιον σταθερό, πραγματικό πίνακα Hurwitz A_0. Τότε όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 2.2(ii) ισχύουν με

$$L := |A|$$

και

$$f_{av} := A_0 x,$$

συνεπώς συμπεραίνουμε ότι το (2.71) είναι **expo-UAS** για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$.

Παράδειγμα 2.2

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.2 για να δείξουμε την τοπική **RAS** για την κίνηση ενός εκκρεμούς με απόσβεση και χρονικά μεταβαλλόμενη τριβή $\xi(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\xi(t)+d}{m}x_2 \end{aligned} \tag{2.74a}$$

όπου m, ℓ και g παίζουν τον ρόλο της μάζας, του μήκους και της επιτάχυνσης της βαρύτητας, αντίστοιχα, υπό την επίδραση μίας χρονικά μεταβαλλόμενης τριβής $\xi(\cdot)$ η οποία επηρεάζεται από μία 'διαταραχή' $d(\cdot)$, που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\dot{d} = g(d) \tag{2.74b}$$

για κάποια C^1 συνάρτηση g με $g(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση $M \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε κάθε λύση της (2.74b) ικανοποιεί:

$$|d(t)| \leq M(|d(0)|), \forall d(0) \in \mathbb{R}, t \geq 0 \tag{2.75}$$

Επίσης υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ακολουθία

$$\{t_i, \quad i = 0, 1, 2, ...\} \text{ με } t_i \to \infty$$

τέτοια ώστε να ισχύει η (2.12c) και σταθερές $\rho, \sigma > 0$ έτσι ώστε:

$$\lim \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \xi(s) ds = \rho \ \mu\epsilon \ \sigma < t_{i+1} - t_i \tag{2.76}$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπό την ισχύ της (2.76), υπάρχει μία σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$ το σύστημα (2.74a) να είναι **expo-RAS** ως προς το σύνολο:

$$\bar{U} := \{d_\varepsilon(t) := d(\varepsilon t), t \geq 0 : d(\cdot) \text{ να ικανοποιεί την } (2.74b\ ) \text{ με } |d(0)| \leq \delta\} \tag{2.77}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η ιδιότητα ικανοποιείται για κάθε ζεύγος σταθερών $\ell, m > 0$ και επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$ για το παραμετρικοποιημένο σύστημα

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{\frac{\ell}{\varepsilon^2}} \sin x_1 - \frac{\xi(t) + d_\varepsilon}{\frac{m}{\varepsilon}} x_2,$$

ή ισοδύναμα θέτοντας

$$x_1 := x_1;$$

$$x_2 := \frac{x_2}{\varepsilon},$$

για το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell} \sin x_1 - \frac{\xi(t) + d_\varepsilon}{m} x_2 \end{bmatrix}, \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.78}$$

δεδομένου ότι το $\xi(\cdot)$ στην (2.78) ικανοποιεί την (2.76) για κάποιο $\rho > 0$. Όντως, έστω ότι

$$f_{av}(x,d) := \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho}x_2 \\ -\frac{g}{\ell\rho}\sin x_1 - \frac{1}{m}x_2 - \frac{d}{m\rho}x_2 \end{bmatrix}, \tag{2.79}$$

Προφανώς τότε, λόγω της (2.76) και της (2.79), οι συνθήκες (2.49a), (2.49b) και (2.49c) ισχύουν με $L := \xi$. Επίσης λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ρ είναι αυστηρά θετικό και, εφαρμόζοντας κλασική διαδικασία γραμμικοποίησης, μπορούμε να καθορίσουμε ένα ζεύγος σταθερών $d_2 > 0 > d_1$ τέτοιες ώστε το (2.50), με $f_{av}(\cdot,\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (2.79), να είναι **expo-URAS** ως προς το U_D, όπου $D := [d_1, d_2]$.

Τέλος, σημειώνεται ότι η (2.48) ισχύει αν

$$L(t) := \max\left\{\sqrt{1 + 2\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi(t)+d}{m}\right)^2}, d \in D\right\} \tag{2.80}$$

για κάθε $d \in D$ και x κοντά στο μηδέν. Επίσης μπορεί εύκολα να επαληθευτεί μέσω των (2.12c), (2.76) και (2.80), ότι η (2.9b) ισχύει με την $L(\cdot)$ όπως ορίστηκε προηγουμένως. Προκύπτει τελικά από τον δεύτερο ισχυρισμό της Πρότασης 2.2(i) και τον δεύτερο ισχυρισμό του Σχολίου 2.1 ότι για κάθε σταθερά $\ell > 0$ το σύστημα (2.78) είναι **expo-RAS** ως προς το U, όπως το τελευταίο που ορίστηκε από την (2.51) για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$. Αυτό, λόγω της (2.74b) και της (2.75), έπεται ότι για επαρκώς μικρές σταθερές $\varepsilon, \delta > 0$ το σύστημα (2.78) είναι **expo-RAS** ως προς το $\bar{U}$ όπως δόθηκε από την (2.77). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού μας όσον αφορά την **expo-RAS** για το αρχικό σύστημα (2.74a). □

Κεφάλαιο 3

Συστήματα Συνεχούς Χρόνου-Partial averaging

3.1 Χρήσιμες εισαγωγικές έννοιες

Στο παρόν κεφάλαιο γενικεύεται η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 2 και αποδεικνύεται ένα αποτέλεσμα που αφορά την τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια χρονικά-μεταβαλλομένων συστημάτων της μορφής:

$$\dot{x} = f(t, a(t,\eta), x),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n,\ a(\cdot,\cdot) \in \mathbb{R}^m, \tag{3.1a}$$

$$f(\cdot,\cdot,0) = 0 \tag{3.1b}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου (Πρόταση 3.2) παρέχει ικανές συνθήκες για τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια για το σύστημα (3.1) αποτελώντας έτσι μία γενίκευση του Θεωρήματος 2 στο [30] για την συγκεκριμένη περίπτωση των γρήγορα χρονικά-μεταβαλλόμενων συστημάτων, δηλαδή για την περίπτωση (3.1) όπου το η είναι επαρκώς μεγάλο, $m = 1$, η απεικόνιση a έχει την μορφή:

$$a(t,\eta) = \eta^2 t \tag{3.2}$$

και με την επιπλέον υπόθεση ότι τα δυναμικά είναι φραγμένα ως προς τον χρόνο. Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου βασίζεται σε ένα νέο αποτέλεσμα αντίστροφης ευστάθειας που αποδεικνύεται στην επόμενη παράγραφο (Πρόταση 3.1) που αφορά χρονικά-μεταβαλλόμενα συστήματα:

$$\dot{x} = F(t,x) \tag{3.3a}$$

$$F(\cdot,0) = 0 \tag{3.3b}$$

των οποίων τα δυναμικά είναι εν γένει μη φραγμένα ως προς τον χρόνο.

3.2 Ένα αντίστροφο Θεώρημα Ευστάθειας

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να επεκτείνουμε ένα αρκετά γνωστό αποτέλεσμα αντίστροφης ευστάθειας που αφορά την εκθετική ευστάθεια (βλ. Θεώρημα 3.12 στην [21]) για συστήματα (3.3) κάτω από την έλλειψη της υπόθεσης του φραξίματος των δυναμικών $F(\cdot,\cdot)$ ως προς τον χρόνο. Προκειμένου να δώσουμε την ακριβή υπόθεση που επιβάλλεται για το $F(\cdot,\cdot)$, είναι βολικό να εισαγάγουμε την ακόλουθη υποκλάση της $\mathcal{N}$.

Ορισμός 3.1 *$\mathcal{BN}$-κλάση*

Λέμε ότι η συνάρτηση $L \in \mathcal{N}$ είναι κλάσεως $\mathcal{BN}$, αν ικανοποιείται η (2.13), ισοδύναμα, αν υπάρχει μία συνάρτηση $M \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$\int_t^{t+\delta} L(s)ds \leq M(\delta),\ \forall t \geq 0,\ \delta \geq 0. \tag{3.4}$$

Σχόλιο 3.1

Μία πιο αυστηρή εκδοχή της (3.4) χρησιμοποιείται στην [33].

Παράδειγμα 3.1

Έστω $L \in \mathcal{N}$ που ικανοποιεί την

$$\int_0^{\infty} L^k(s)ds \leq c < +\infty$$

για κάποια $k \geq 1$ και $c > 0$. Τότε εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\int_t^{t+\delta} L(s)ds \leq \left(\int_t^{t+\delta} L^k(s)ds\right)^{\frac{1}{k}} \delta^{\frac{k-1}{k}} \leq c^{\frac{1}{k}} \delta^{\frac{k-1}{k}},\ \forall t, \delta \geq 0$$

Προκύπτει ότι ικανοποιείται η (3.4) με

$$M(s) := c^{\frac{1}{k}} s^{\frac{k-1}{k}},$$

συνεπώς $L \in \mathcal{BN}$.

Για την περίπτωση (3.3) υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $R > 0$ έτσι ώστε τα δυναμικά $F : \mathbb{R}^+ \times S[0, R] \to \mathbb{R}^n$ του (3.1) να είναι C^2 και κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

A1. Υπάρχει μία συνάρτηση $L(\cdot) \in \mathcal{BN}$ τέτοια ώστε

$$\max\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right|, \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)\right|\right\} \leq L(t),\ \forall t \geq 0,\ x \in S[0, R]. \tag{3.5}$$

A2. Το μηδέν είναι expo-UAS για το (3.3); συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ισχύει η (2.7) (χωρίς την παρουσία των διαταραχών d) για κάθε $x \in S[0, R]$.

Πρόταση 3.1

Θεωρούμε το σύστημα (3.3) *και υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι A1 και A2. Τότε υπάρχουν:*

- *σταθερές* $c_i > 0,\ i = 1, ..., 6,\ c > 0,\ R_0 \in (0, R]$
- *και μία* C^2 *συνάρτηση* $V : \mathbb{R}^+ \times S[0, R_0] \to \mathbb{R}$,

που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$c_1|x|^2 \leq V(t,x) \leq c_2|x|^2, \tag{3.6a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} F(t,x) \leq -c_3|x|^2, \tag{3.6b}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \leq c_4|x|, \tag{3.6c}$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\right| \leq c_5(c + L(t))|x|, \tag{3.6d}$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| \leq c_6, \tag{3.6e}$$

$$\forall t \geq 0,\ x \in S[0, R_0]$$

όπου το $L(\cdot)$ *που εμφανίζεται στην* (3.6*d*) *ορίζεται στο δεξί μέλος της* (3.5).

Απόδειξη:

Για λόγους ευκολίας χωρίζουμε την απόδειξη σε δύο τμήματα:

Απόδειξη των (3.6*a*)-(3.6*b*):

Η απόδειξη γενικεύει την προσέγγιση που υιοθετήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.12 στην αναφορά [21]. Για λόγους ευκολίας συμβολίζουμε

$$\phi(\cdot) = \phi(\cdot, t, x)$$

την λύση του (3.3) με $\phi(t,t,x)=x$. Σύμφωνα με την (2.7) υποθέτουμε ότι

$$|\phi(\tau,t,x)| \leq k|x|\exp(-\ell(\tau-t)),$$
$$\forall \tau \geq t \geq 0,\ x \in S[0,R] \tag{3.7}$$

για κάποια σταθερά $R>0$; χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η σταθερά R που χρησιμοποιείται στην (3.7) είναι η ίδια με αυτήν στην (3.5). Από την (3.7) προκύπτει ότι

$$\phi(\tau,t,x) \in S[0,R],\ \textit{για κάθε}\ \tau \geq t \geq 0,\ x \in S[0,R_0]$$
$$\textit{για κάποια}\ 0 < R_0 \leq \min\{1,R\}. \tag{3.8}$$

Έστω

$$V(t,x) := \int_t^{t+\delta} |\phi(r,t,x)|^2\, dr, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R_0] \tag{3.9a}$$

για κάποια σταθερά

$$\delta := \frac{1}{2\ell}\log(2k^2+1) \tag{3.9b}$$

Από τις (3.7),(3.9a) και (3.9b) έχουμε:

$$V(t,x) \leq \frac{1-e^{-2\ell\delta}}{2\ell}k^2|x|^2,\ x \in S[0,R_0]. \tag{3.10}$$

Στη συνέχεια, εκτιμούμε ένα κάτω φράγμα για την $V(\cdot,\cdot)$. Από τις (3.3),(3.5) και (3.8) παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}|\phi(\tau,t,x)|^2 \geq -2L(t)|\phi(\tau,t,x)|^2 \tag{3.11}$$

και η τελευταία σε συνδυασμό με την (3.7) συνεπάγονται:

$$|x|^2 e^{-2\int_t^\tau L(r)dr} \leq |\phi(\tau,t,x)|^2,\ \forall \tau \in [t,t+\delta],\ t \geq 0,\ x \in S[0,R_0] \tag{3.12}$$

Από τις (3.4) και (3.12) έχουμε:

$$e^{-2M(\delta)}|x|^2 \leq |\phi(\tau,t,x)|^2, \ \forall \tau \in [t,t+\delta], \ t \geq 0, \ \ x \in S[0,R_0] \tag{3.13}$$

έτσι, από τις ($3.9a$) και (3.13) έπεται ότι

$$V(t,x) \geq \delta e^{-2M(\delta)}|x|^2 \tag{3.14}$$

Από τις (3.10) και (3.14), προκύπτει ότι η ($3.6a$) ικανοποιείται με

$$c_1 = \delta e^{-2M(\delta)} \ \textit{και} \ c_2 = \frac{k^2}{2\ell}(1 - e^{-2\ell\delta}).$$

Η επιθυμητή ($3.6b$) επίσης προκύπτει, επαναλαμβάνοντας τους ίδιους ισχυρισμούς με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.12 στην [21]. Συγκεκριμένα, από την ($3.9a$) έχουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}F(t,x) = |\phi(t+\delta,t,x)|^2 - |x|^2$$

συνεπώς από τις (3.7) και ($3.9b$) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}F(t,x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2, \ \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times S[0,R_0]$$

άρα, η ($3.6b$) ικανοποιείται με $c_3 = 1/2$.

Απόδειξη των ($3.6c$)-($3.6d$)*:*

Αρχικά, θεωρούμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης του (3.1):

$$\phi(\tau,t,x) = x + \int_t^\tau F(r,\phi(r,t,x))dr \tag{3.15}$$

Από την (3.15) και τις υποθέσεις ομαλότητας για την $F(\cdot,\cdot)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau,t,x) = I + \int_t^\tau \frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\frac{\partial \phi}{\partial x}(r,t,x)dr \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau,t,x) = -F(t,x) + \int_t^\tau \frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,t,x)dr \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\tau,t,x) = \int_t^\tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\frac{\partial \phi}{\partial x}(r,t,x)\right)dr \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t}(\tau,t,x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \int_t^\tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,t,x)\right)dr \tag{3.19}$$

Από τις (3.5),(3.8) και (3.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau,t,x)\right| &\leq 1 + \int_t^\tau \left|\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(r,t,x)\right|dr \\ &\leq 1 + \int_t^\tau L(r)\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(r,t,x)\right|dr\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Gronwall προκύπτει ότι:

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau,t,x)\right| \leq \exp\left(\int_t^\tau L(r)dr\right) \tag{3.20}$$

ως εκ τούτου, επικαλούμενοι την (3.4) βρίσκουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(\tau,t,x)\right| \leq \exp\left(M(\delta)\right),\ \forall \tau \in [t,t+\delta],\ t \geq 0,\quad x \in S[0,R_0] \tag{3.21}$$

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για την (3.17). Από τις (3.3),(3.5),(3.8) και (3.17) παίρνουμε ότι:

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(\tau,t,x)\right| \leq L(t)|x| + \int_t^\tau \left|\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(r,t,x)\right|dr$$

$$\leq L(t)|x| + \int_t^\tau L(r)\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(r,t,x)\right| dr$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Gronwall έπεται:

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(\tau,t,x)\right| \leq L(t)\exp\left(\int_t^\tau L(r)dr\right)|x| \tag{3.22}$$

Από τις (3.4) και (3.22) βρίσκουμε:

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(\tau,t,x)\right| \leq L(t)\exp\left(M(\delta)\right)|x|,\ \forall\tau\in[t,t+\delta],\ t\geq 0,\quad x\in S[0,R_0] \tag{3.23}$$

Προκειμένου να βρούμε ένα άνω φράγμα για το (3.18), λαμβάνουμε υπόψιν τις (3.5),(3.8),(3.18),(3.20) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\tau,t,x)\right| &\leq \int_t^\tau \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(r,t,x)\right|^2 dr\\ &+ \int_t^\tau \left|\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(r,t,x)\right| dr\\ &\leq \int_t^\tau L(r)\exp\left(\int_t^r 2L(s)ds\right)dr\\ &+ \int_t^\tau \left(L(r)\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(r,t,x)\right|\right)dr\end{aligned} \tag{3.24}$$

Έπεται από τις (3.4) και (3.24) ότι

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\tau,t,x)\right| \leq M(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right) + \int_t^\tau L(r)\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(r,t,x)\right| dr,\ \forall\tau\in[t,t+\delta]$$

Κατά συνέπεια χρησιμοποιώντας την ανισότητα Gronwall και την (3.4) βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(\tau,t,x)\right| &\leq M(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right)\left(\int_t^\tau L(r)dr\right) \\
&\leq M^2(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right),\ \forall\tau\in[t,t+\delta], \\
&\quad t\geq 0,\quad x\in S[0,R_0] \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Ομοίως, εκμεταλλευόμενοι τις (3.4),(3.5),(3.8),(3.19),(3.21) και (3.23) έχουμε:

$$
\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}(\tau,t,x)\right|
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| + \int_t^\tau \left|\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}(r,t,x)\right|\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}(r,t,x)\right| dr \\
+\ & \int_t^\tau \left|\frac{\partial F}{\partial x}(r,\phi(r,t,x))\right|\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}(r,t,x)\right| dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & L(t)+L(t)M(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right)|x| \\
+\ & \int_t^\tau L(r)\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}(r,t,x)\right| dr, \\
\forall\ & \tau\in[t,t+\delta],\ t\geq 0,\quad x\in S[0,R_0] \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

συνεπώς, από τις (3.4),(3.26) και την ανισότητα Gronwall προκύπτει ότι:

$$
\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}(\tau,t,x)\right| \leq L(t)\left(1+M(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right)|x|\right)\exp\left(M(\delta)\right),
$$

$$
\forall\tau\in[t,t+\delta],\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times S[0,R_0] \qquad (3.27)
$$

Είμαστε πλέον σε θέση να δείξουμε τις (3.6c)-(3.6e). Επικαλλούμενοι την (3.9a) παίρνουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) = 2\int_t^{t+\delta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^T (r,t,x)\phi(r,t,x)\right)^T dr \tag{3.28}$$

συνεπώς από τις (3.7) και (3.21) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)\right| &\leq 2k\exp\left(M(\delta)\right)\left(\int_t^{t+\delta}\exp\left(-\ell(r-t)\right)dr\right)|x| \\
&\leq \frac{2k}{\ell}\exp\left(M(\delta)\right)\left(1-\exp\left(-\ell\delta\right)\right)|x|, \\
&\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}^+\times S[0,R_0]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

άρα ισχύει η (3.6c) με

$$c_4 = \frac{2k}{\ell}\exp\left(M(\delta)\right)\left(1-\exp\left(-\ell\delta\right)\right).$$

Ομοίως, από την (3.28) εκτιμούμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}(t,x) &= 2\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^T (t+\delta,t,x)\phi(t+\delta,t,x)\right)^T - 2x^T x \\
&+2\int_t^{t+\delta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^T (r,t,x)\phi(r,t,x)\right)^T dr
\end{aligned}$$

και η τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.7),(3.21),(3.23) και (3.27) συνεπάγονται:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}(t,x)\right| &\leq 2k\exp(M(\delta))\exp\left(-\ell\delta\right)|x| + 2|x|^2 \\
&+ L(t)\frac{2k}{\ell}\left[1+M(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right)|x|\right]\exp\left(M(\delta)\right) \\
&\times \left(1-\exp\left(-\ell\delta\right)\right)|x| \\
&+ L(t)2\delta\exp\left(2M(\delta)\right)|x|
\end{aligned}$$

το οποίο βεβαιώνει ότι ικανοποιείται η (3.6d) για κάποιες σταθερές $c_5, c > 0$. Τέλος, επικαλούμενοι ξανά την (3.28) προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) = 2\int_t^{t+\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}^T(r,t,x)\phi(r,t,x)\right)^T dr$$

και η τελευταία σε συνδυασμό με τις (3.7),(3.8),(3.21) και (3.25) συνεπάγεται:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq \frac{2k}{\ell} M^2(\delta)\exp\left(2M(\delta)\right)\left(1-\exp\left(-\ell\delta\right)\right)R_0 + 2\delta\exp(M(\delta))$$

συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι επίσης ικανοποιείται η (3.6e) για κάποιο $c_6 > 0$.□

Σχόλιο 3.2

Από τις (3.6d), (3.6e) και χρησιμοποιώντας του Θεώρημα Μέσης Τιμής μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στις ακόλουθες ανισότητες:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial V}{\partial x}(t,y)\right| \leq c_6|x-y|; \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial V}{\partial t}(t,y)\right| &\leq c_5\left(c+L(t)\right)\left(|x|+|y-x|\right)|x-y| \\ &\leq c_5(c+L(t))\left(|x|\ |y-x| + |y-x|^2\right)\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\forall t \geq 0,\ (x,y) \in S[0,R_0]$$

Επιπλέον, για τη ίδια $L(\cdot)$ που εισήχθη προηγουμένως στην (3.5), προκύπτει από την (3.6d) ότι

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial V}{\partial x}(s,x)\right| \leq c_5\left|\int_s^t (c+L(r))\,dr\right||x|$$

$$\forall t,s \geq 0,\ x \in S[0,R_0] \tag{3.32}$$

3.3 Μία ικανή συνθήκη για Ασυμπτωτική Ευστάθεια

Σε αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του εξάγαμε στην Παράγραφο 3.1 για να πάρουμε μία ικανή συνθήκη τύπου averaging εκθετικής ευστάθειας για το σύστημα (3.1). Το αντίστοιχο αποτέλεσμα αποτελεί επέκταση του θεωρήματος 3 στην [30]. Υποθέτουμε ότι

- οι $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ είναι C^0

- για κάθε σταθερό $(t, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ η απεικόνιση $f(t, a(t, \eta), \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1.

Επίσης κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

B1. Υπάρχει απεικόνιση $K(\cdot) \in \mathcal{BN}$ και μία σταθερά $R > 0$ τέτοια ώστε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, a(t, \eta), x)\right| \leq K(t),\ \forall (t, \eta, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times S[0, R] \tag{3.33}$$

B2. Υπάρχουν:

- απεικονίσεις $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ κλάσεως C^2 και $L(\cdot) \in \mathcal{BN}$ που ικανοποιούν τις Α1 και Α2 της παραγράφου 3.2,

- μία σταθερά $\eta_1 > 0$,

- μία απεικόνιση $\tau(\cdot, \cdot) : [\eta_1, \infty) \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ με

$$\tau(\eta, k) < \tau(\eta, k+1),\ \forall (\eta, k) \in [\eta_1, \infty) \times \mathbb{N}$$

- και συναρτήσεις $M(\cdot) \in \mathcal{N}, N(\cdot,\cdot) \in \mathcal{NN}$(δηλαδή, για κάθε σταθερό $s \geq 0$, τόσο οι $N(\cdot, s)$ και $N(s,\cdot)$ είναι κλάσεως $\mathcal{N}$) τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\tau(\eta, k) \to \infty \text{ καθώς } k \to \infty, \text{ για κάθε } \eta \in [\eta_1, \infty) \tag{3.34a}$$

$$\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k) \to 0 \text{ καθώς } \eta \to \infty,$$

$$\text{ομοιόμορφα ως προς } k \in \mathbb{N} \tag{3.34b}$$

$$\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} max\,\{K(r), L(r)\}\, dr \leq M(\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k)),$$

$$\forall (\eta, k) \in [\eta_1, \infty) \times \mathbb{N} \tag{3.34c}$$

$$\overline{\lim_{s \to 0}} \frac{M(s)}{s} < \infty \tag{3.34d}$$

$$\left| \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} (F(r, x) - f(r, a(r, \eta), x))\, dr \right| \leq N(\eta, k)|x|,$$

$$\forall (\eta, k) \in [\eta_1, \infty) \times \mathbb{N},\ x \in S[0, R] \tag{3.34e}$$

$$\lim_{\eta \to \infty} \frac{N(\eta, k)}{\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k)} = 0, \text{ ομοιόμορφα ως προς } k \in \mathbb{N} \tag{3.34f}$$

με το $L(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην (3.5).

Σχόλιο 3.3

(i) Παρατηρούμε ότι, εφόσον $K, L \in \mathcal{BN}$, τότε ικανοποιείται η (3.34c) για κάποια $m \in \mathcal{N}$, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1; η επιπλέον απαίτηση εδώ είναι η συνάρτηση M να ικανοποιεί την (3.34d).

(ii) Προφανώς, αν οι K, L είναι φραγμένες, όπως επιβλήθηκε στο [30], τότε ικανοποιούνται οι (3.34c) και (3.34d) με

$$M(s) \equiv M_0 s$$

για κάποια σταθερά $M_0 > 0$. Οι υπόλοιπες υποθέσεις (3.34e) και (3.34f) είναι επίσης ασθενέστερες από αυτές που επεβλήθησαν στην Θεώρημα 3 του [30].

Πρόταση 3.2

(i) *Ας υποθέσουμε ότι ικανοποιούνται οι B1 και B2. Τότε υπάρχει σταθερά* $\eta_0 \geq \eta_1$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\eta \geq \eta_0$ *το σύστημα* (3.1) *είναι AS.*

(ii) *Αν, επιπροσθέτως των B1 και B2, υποθέσουμε ότι για κάθε* $\eta \geq \eta_1$ *ισχύει η ακόλουθη:*

$$\inf\{\tau(k+1,\eta) - \tau(k,\eta),\ k \in \mathbb{N}\} > 0; \tag{3.35}$$

τότε για κάθε επαρκώς μεγάλο $\eta > 0$, *το* (3.1) *είναι UAS*; *αν, επιπλέον για κάθε* $\eta \geq \eta_1$ *ισχύει ότι*

$$\sup\{\tau(k+1,\eta) - \tau(k,\eta),\ k \in \mathbb{N}\} < \infty,\ \textit{για κάθε}\ \eta \geq \eta_1 \tag{3.36}$$

τότε το (3.1) *είναι expo-UAS.*

Απόδειξη:

Η απόδειξη του ισχυρισμού (i) βασίζεται στην Πρόταση 3.1 της προηγούμενης παραγράφου και στην Πρόταση 1 του [41]. Για δοθέν $\eta > 0$ και αρχικά

$(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ ας συμβολίσουμε με $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ την αντίστοιχη τροχιά του (3.1) με $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(r, a(r,\eta), x(r))dr, \; t \geq t_0$$

ως εκ τούτου, από τις (3.1),(3.33) και την ανισότητα Gronwall παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(r, a(r,\eta), x(r))dr - f(r, a(r,\eta), 0) \right| \Rightarrow \\ |x(t)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r, a(r,\eta), x(r)) \right| |x(r)| dr \\ &\leq |x_0| \exp\left(\int_{t_0}^{t} K(r)dr \right), \; \forall t \geq t_0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\textit{δεδομένου ότι } x(s) \in S[0, R], \; \textit{για κάθε } s \in [t_0, t].$$

Επίσης, από τις (3.1) και (3.33) παίρνουμε:

$$|x(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} K(r)|x(r) - x_0|dr + \left(\int_{t_0}^{t} K(r)dr \right) |x_0| \tag{3.38}$$

άρα, για κάθε $T > 0$ από την ανισότητα Gronwall και την (3.38) έπεται:

$$|x(t) - x_0| \leq \left(\int_{t_0}^{t} K(r)dr \right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} K(r)dr \right) |x_0|, \; \forall t \in [t_0, t_0 + T] \tag{3.39}$$

$$\textit{δεδομένου ότι } x(t) \in S[0, R], \; \textit{για κάθε } t \in [t_0, t_0 + T]$$

Ορίζουμε:

$$\ell(\eta, k) := \exp m(\eta, k), \; k \in \mathbb{N}; \tag{3.40a}$$

$$m(\eta, k) := M(\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k)) \tag{3.40b}$$

Από τις (3.34c),(3.37),(3.39)-(3.40b) προκύπτει ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες για τις τροχιές του (3.1):

$$|x(r)| \leq \ell(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))| \tag{3.41a}$$

$$|x(r) - x(\tau(\eta, k))| \leq \ell(\eta, k)m(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|, \tag{3.41b}$$

$$\forall r \in [\tau(\eta, k), \tau(\eta, k+1)],$$

δεδομένου ότι

$$x(r) \in S[0, R],\ \forall r \in [\tau(\eta, k), \tau(\eta, k+1)] \tag{3.42}$$

Στη συνέχεια επικαλούμαστε τις υποθέσεις A1 και A2 για το σύστημα (3.3), το οποίο σύμφωνα με την Πρόταση 2.1, εγγυάται την ύπαρξη:

- σταθερών $c_i > 0,\ i = 1, ..., 6,\ c > 0,\ R_0 \in (0, R]$
- και μίας C^2 συνάρτησης $V(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^+ \times S[0, R_0] \to \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί τις (3.6a)-(3.6e).

Ας υποθέσουμε στην συνέχεια χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $R_0 = R$, με την τελευταία να ορίζεται στις B1 και B2.

Ισχυρισμός: Όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 2.1 στο Κεφάλαιο 2 που αφορούν ασυμπτωτική ευστάθεια ικανοποιούνται για επαρκώς μεγάλο $\eta > 0$, με την V όπως ορίστηκε παραπάνω.

Όντως, ορίζουμε

$$\begin{aligned} \Delta V(\eta, k) \ &:= \ V(\tau(\eta, k+1), x(\tau(\eta, k+1))) - V(\tau(\eta, k), x(\tau(\eta, k))), \\ &\quad (\eta, k) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Η (3.43) γράφεται:

$$
\begin{aligned}
\Delta V(\eta,k) &= \Xi_1(\eta,k)+\Xi_2(\eta,k)+\Xi_3(\eta,k); && (3.44a)\\
\Xi_1(\eta,k) &:= \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(r))-\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(\tau(\eta,k)))\right]dr && (3.44b)\\
\Xi_2(\eta,k) &:= \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(\tau(\eta,k)))\right.\\
&+ \left.\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))f(r,a(r,\eta),x(\tau(\eta,k)))\right]dr && (3.44c)\\
\Xi_3(\eta,k) &:= \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(r))f(r,a(r,\eta),x(r))\right.\\
&- \left.\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))f(r,a(r,\eta),x(\tau(\eta,k)))\right]dr && (3.44d)
\end{aligned}
$$

Στη συνέχεια εκτιμούμε άνω φράγματα για τις απεικονίσεις Ξ_1, Ξ_2 και Ξ_3.

Εκτίμηση του Ξ_1:

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.31),(3.34c),(3.41b) και (3.44b) παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το Ξ_1:

$$
\begin{aligned}
\Xi_1(\eta,k) &\le \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}\left|\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(r))-\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(\tau(\eta,k)))\right|dr\\
&\le c_5\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}(c+L(r))\left(|x(\tau(\eta,k))|\,|x(r)-x(\tau(\eta,k))|\right.\\
&+ \left.|x(r)-x(\tau(\eta,k))|^2\right)dr\\
&\le c_5\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}(c+L(r))\left(\ell(\eta,k)m(\eta,k)\,|x(\tau(\eta,k))|^2\right.\\
&+ \left.\ell^2(\eta,k)m^2(\eta,k)\,|x(\tau(\eta,k))|^2\right)dr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_5\left(\ell(\eta,k)m(\eta,k)+\ell^2(\eta,k)m^2(\eta,k)\right)\\
&\times \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}(c+L(r))dr\right)|x(\tau(\eta,k))|^2\\
&\leq \left(c_5\ell(\eta,k)m(\eta,k)+c_5\ell^2(\eta,k)m^2(\eta,k)\right)\\
&\times \left(c\left(\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k)\right)+m(\eta,k)\right)|x(\tau(\eta,k))|^2\\
&= \left(\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k)\right)\\
&\times \left(c_5c\ell(\eta,k)m(\eta,k)+c_5c\ell^2(\eta,k)m^2(\eta,k)\right)|x(\tau(\eta,k))|^2\\
&+ \left(c_5\ell(\eta,k)m^2(\eta,k)+c_5\ell^2(\eta,k)m^3(\eta,k)\right)|x(\tau(\eta,k))|^2\\
&\qquad \textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Εκτίμηση του Ξ_2:

Στη συνέχεια, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για το Ξ_2. Έτσι έχουμε για κάθε $(\eta,k)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{N}$:

$$\Xi_2(\eta,k) := I_1+I_2; \qquad (3.46a)$$

$$I_1 := \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}\left[\frac{\partial V}{\partial t}(r,x(\tau(\eta,k)))+\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))F(r,x(\tau(\eta,k)))\right]dr \qquad (3.46b)$$

$$
\begin{aligned}
I_2 := \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)}&\left[\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))f(r,a(r,\eta),x(\tau(\eta,k)))\right.\\
&\left.-\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))F(r,x(\tau(\eta,k)))\right]dr \qquad (3.46c)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την (3.6b) έχουμε για το I_1 ότι:

$$I_1 \leq -c_3(\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k))|x(\tau(\eta,k))|^2,$$

$$\text{δεδομένου ότι ικανοποιείται η (3.42)} \tag{3.47}$$

και επικαλούμενοι τις (3.1),(3.3),(3.5),(3.6c),(3.32),(3.33),(3.34e) και (3.46c) και παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση για το I_2:

$$\begin{aligned}
I_2 \;:=\; & \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left[\frac{\partial V}{\partial x}(r, x(\tau(\eta,k))) - \frac{\partial V}{\partial x}(\tau(\eta,k), x(\tau(\eta,k)))\right] \\
\times \; & [F(r, x(\tau(\eta,k))) - f(r, a(r,\eta), x(\tau(\eta,k)))]\, dr \\
+ \; & \frac{\partial V}{\partial x}(\tau(\eta,k), x(\tau(\eta,k))) \\
\times \; & \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} [-f(r, a(r,\eta), x(\tau(\eta,k))) + F(r, x(\tau(\eta,k)))]\, dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \; & \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left|\frac{\partial V}{\partial x}(r, x(\tau(\eta,k))) - \frac{\partial V}{\partial x}(\tau(\eta,k), x(\tau(\eta,k)))\right| \\
\times \; & (|F(r, x(\tau(\eta,k)))| + |f(r, a(r,\eta), x(\tau(\eta,k)))|)\, dr \\
+ \; & \left|\frac{\partial V}{\partial x}(\tau(\eta,k), x(\tau(\eta,k)))\right| \\
\times \; & \left|\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} [f(r, a(r,\eta), x(\tau(\eta,k))) - F(r, x(\tau(\eta,k)))]\, dr\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq \; & c_5 \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{r} (c + L(s))ds\right)(K(r) + L(r))\, dr\right) |x(\tau(\eta,k))|^2 \\
+ \; & c_4 N(\eta,k) |x(\tau(\eta,k))|^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Σε αυτό το σημείο λόγω της (3.34c) έχουμε

$$\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{r} (c + L(s))ds\right)(K(r) + L(r))\, dr$$

$$\leq \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} (K(r) + L(r))dr \right) \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} (c + L(r))dr \right)$$

$$\leq 2m(\eta, k) \left(c \left(\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k) \right) + m(\eta, k) \right), \qquad (3.49)$$

$$\forall r \in [\tau(\eta, k), \tau(\eta, k+1)]$$

ως εκ τούτου, λόγω των (3.48) και (3.49) προκύπτει:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq (\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k))\, 2c_5 cm(\eta, k)|x(\tau(\eta, k)|^2 \\ &+ 2c_5 m^2(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|^2 + c_4 N(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|^2, \end{aligned}$$

$$\textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \qquad (3.50)$$

Συνδυάζοντας τις (3.46a)-(3.46c),(3.47) και (3.50) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \Xi_2(\eta, k) &\leq -c_3(\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k))|x(\tau(\eta, k)|^2 \\ &+ (\tau(\eta, k+1) - \tau(\eta, k))\, 2c_5 cm(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|^2 \\ &+ 2c_5 m^2(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|^2 + c_4 N(\eta, k)|x(\tau(\eta, k))|^2, \end{aligned}$$

$$\textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \qquad (3.51)$$

Εκτίμηση της Ξ_3:

Στη συνέχεια επικαλούμενοι τις (3.1),(3.6c),(3.30),(3.33),(3.34c),(3.41a)

και (3.41b) παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το Ξ_3:

$$\begin{aligned}
\Xi_3(\eta,k) &= \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left[\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(r)) - \frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))\right] f(r,a(r,\eta),x(r))dr \\
&+ \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k))) \\
&\times \left[f(r,a(r,\eta),x(r)) - f(r,a(r,\eta),x(\tau(\eta,k)))\right] dr \\
&\le \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left|\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(r)) - \frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))\right| \left|f(r,a(r,\eta),x(r))\right| dr \\
&+ \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} \left|\frac{\partial V}{\partial x}(r,x(\tau(\eta,k)))\right| \\
&\times \left|f(r,a(r,\eta),x(r)) - f(r,a(r,\eta),x(\tau(\eta,k)))\right| dr \\
&\le c_6 \int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} K(r)\left|x(r) - x(\tau(\eta,k))\right| |x(r)| dr \\
&+ c_4 \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} K(r)\left|x(r) - x(\tau(\eta,k))\right| dr\right) |x(\tau(\eta,k))| \\
&\le c_6 \ell^2(\eta,k) m(\eta,k) \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} K(r)dr\right) |x(\tau(\eta,k))|^2 \\
&+ c_4 \ell(\eta,k) m(\eta,k) \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} K(r)dr\right) |x(\tau(\eta,k))|^2 \\
&\le \left(c_4\ell(\eta,k) + c_6\ell^2(\eta,k)\right) m(\eta,k) \left(\int_{\tau(\eta,k)}^{\tau(\eta,k+1)} K(r)dr\right) |x(\tau(\eta,k))|^2 \\
&\le \left(c_4\ell(\eta,k) + c_6\ell^2(\eta,k)\right) m^2(\eta,k) |x(\tau(\eta,k))|^2 \\
&\qquad \textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Εκτίμηση της $\Delta V(\eta,k)$:

Λόγω των (3.44a)-(3.44d),(3.45),(3.51) και (3.52) παίρνουμε:

$$\Delta V(\eta,k) \quad \leq \quad (\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k))\,(-c_3+C(\eta,k))\,|x(\tau(\eta,k))|^2\,;$$

$$\begin{aligned} C(\eta,k) \;&:=\; (c_5c\ell(\eta,k)+2c_5c)\,m(\eta,k) \\ &+\; c_5c\ell^2(\eta,k)m^2(\eta,k) \\ &+\; \left(c_5\ell(\eta,k)+2c_5+c_4\ell(\eta,k)+c_6\ell^2(\eta,k)\right)\frac{m^2(\eta,k)}{\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k))} \\ &+\; c_5\ell^2(\eta,k)\frac{m^3(\eta,k)}{\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k)}+c_4\frac{N(\eta,k)}{\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k)} \\ &\qquad \textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \end{aligned} \tag{3.53}$$

Από τις (3.34b),(3.34d),(3.34f),(3.40a),(3.40b) και (3.53) προκύπτει ότι:

$$\lim_{\eta\to\infty} C(\eta,k)=0,\ \textit{ομοιόμορφα ως προς}\ \ k\in\mathbb{N} \tag{3.54}$$

Συνεπώς η (3.53) σε συνδυασμό με την (3.54) συνεπάγονται την ύπαρξη μίας σταθεράς $\eta_0>0$ τέτοιας ώστε για κάθε $\eta\geq\eta_0$:

$$\Delta V(\eta,k)\leq -\frac{c_3}{2}\,(\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k))\ \ |x(\tau(\eta,k))|^2 \tag{3.55}$$
$$\textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42)$$

ως εκ τούτου, από τις (3.6a),(3.55) και (3.43) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &V(\tau(\eta,k+1),x(\tau(\eta,k+1)))-V(\tau(\eta,k),x(\tau(\eta,k))) \\ &\leq -\frac{c_3}{c_2}\,(\tau(\eta,k+1)-\tau(\eta,k))\,V(\tau(\eta,k),x(\tau(\eta,k))),\ \ k\in\mathbb{N} \\ &\qquad \textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \end{aligned} \tag{3.56}$$

Για κάθε σταθερό $\eta \in (\eta_0, \infty)$ ορίζουμε

$$t_k := \tau(\eta, k),\ \ k \in \mathbb{N} \tag{3.57}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (3.56) και (3.57) έπεται:

$$V(t_{k+1}, x(t_{k+1})) - V(t_k, x(t_k)) \leq -\frac{c_3}{c_2}\,(t_{k+1} - t_k)\,V(t_k, x(t_k)),\ \ k \in \mathbb{N}$$

$$\textit{δεδομένου ότι ικανοποιείται η } (3.42) \tag{3.58}$$

Συμπεραίνουμε από τις (3.6a),(3.34a) και (3.58) ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις της Πρότασης 2.1(i), του προηγούμενου κεφαλαίου για το (3.1) για κάθε $\eta > 0$ επαρκώς μεγάλο, έτσι, το αντίστοιχο σύστημα (3.1) είναι AS.

Η απόδειξη του ισχυρισμού (ii) είναι επίσης άμεση συνέπεια της (3.57) και του ισχυρισμού (ii) της Πρότασης 2.1 στο κεφάλαιο 2, αντιστοίχως. Λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. □

Παράδειγμα 3.2

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση των γραμμικών παραμετρικοποιημένων συστημάτων:

$$\dot{x} = (A(t) + B(t, \eta))\,x,\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \eta > 0 \tag{3.59}$$

με τον πίνακα $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι C^1, τον πίνακα $B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ να είναι C^0 και υποθέτουμε ότι το σύστημα

$$\dot{x} = A(t)x \text{ είναι (ολικά) expo-UAS} \tag{3.60}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c_i >, \ i = 1, 2$ και συναρτήσεις $K(\cdot) \in \mathcal{BN}$ και $M(\cdot) \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
|A(t)| + |B(t,\eta)| &\leq K(t), \ \forall t \geq 0, \ \eta > 0 \ \text{ μακρυά από το μηδέν} && (3.61a)\\
\int_t^{t+\delta} K(s)ds &\leq M(\delta), \ \forall t \geq 0, \ \delta \geq 0 && (3.61b)\\
c_1\delta &\geq M(\delta), \ \delta \geq 0 \ \text{ κοντά στο μηδέν} && (3.61c)\\
\left| \int_{\frac{k}{\eta}}^{\frac{k+1}{\eta}} B(s,\eta)ds \right| &\leq \frac{c_2}{\eta^2}, \ k = 1, 2, ..., \ \eta > 0 \ \text{ μακρυά από το μηδέν} && (3.61d)
\end{aligned}$$

Υπό την ισχύ των (3.60) και (3.61a)-(3.61d) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες της Πρότασης 3.1(ii) με

$$\begin{aligned}
f &:= (A(t) + B(t,\eta))\, x,\\
F &:= A(t)x,\\
\tau(\eta,k) &:= \frac{k}{\eta}\\
N(\eta,k) &:= \frac{c_2}{\eta^2},\\
L &:= K
\end{aligned}$$

όπως η τελευταία ορίζεται στην (3.61a) και M όπως ορίζεται στις (3.61b) και (3.61c). Για λόγους πληρότητας, σημειώνουμε ότι για την γραμμική περίπτωση

$$\dot{x} = A(t)x,$$

οι υποθέσεις (3.60) και (3.61a)-(3.61b) εξασφαλίζουν, σύμφωνα με την αποδεικτική διαδικασία της Πρότασης 3.1 και τον ορισμό (3.9a), την ύπαρξη ενός C^1 συμμετρικού πίνακα $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιου ώστε η απεικόνιση

$$V(t,x) := x'P(t)x$$

ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες (3.6a)-(3.6e) της Πρότασης 3.1 για κάθε $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Συμπεραίνουμε ότι για $\eta > 0$ επαρκώς μεγάλο, το σύστημα (3.59) είναι expo-UAS; συγκεκριμένα, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας (3.60) και (3.61a)-(3.61b) και εφαρμόζοντας μία στοιχειώδη ολική επέκταση της προσέγγισης που ακολουθήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 3.2, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το (3.59) είναι *ολικά* expo-UAS για $\eta > 0$ μακρυά από το μηδέν.

Σχόλιο 3.4

Αξίζει να προσέξει κανείς ότι η (3.61d) ικανοποιείται για την ειδική περίπτωση:

$$B(t,\eta) := B_0(\eta^2 t) \tag{3.62}$$

για κάποιες συνεχείς $B_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, όπου έχουμε υποθέσει ότι υπάρχουν σταθερές $c_2, \rho > 0$ τέτοιες ώστε

$$\left| \int_t^{t+T} B_0(s)ds \right| \leq c_2,\ \forall t \geq 0, \tau \geq \rho \tag{3.63}$$

Όντως, από τις (3.62) και (3.63) έχουμε:

$$\left| \int_{\frac{k}{\eta}}^{\frac{k+1}{\eta}} B(s,\eta)ds \right| = \frac{1}{\eta^2} \left| \int_{\eta k}^{\eta k+\eta} B_0(s)ds \right| \leq \frac{c_2}{\eta^2},$$
$$\forall k = 1, 2, \ldots \ \textit{και}\ \eta > \rho$$

Τέλος, πρέπει σημειώνεται ότι το συμπέρασμα της (ολικής) expo-UAS για την περίπτωση (3.60) και (3.62) είναι επίσης συνέπεια του Θεωρήματος 3 στην

[30], δεδομένου ότι ισχύει η (3.63) και, αντί για τις (3.61b)-(3.61c), υποθέσουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι η $K(\cdot)$ που αναφέρεται στην (3.61a) είναι φραγμένη.

Κεφάλαιο 4

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

4.1 Εισαγωγικές έννοιες για Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Στο παρόν κεφάλαιο παρέχονται ικανές συνθήκες για τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια και σταθεροποίηση ανάδρασης στην περίπτωση των διακριτών συστημάτων με χρονικά εξαρτώμενα δυναμικά παρουσιάζοντας τα αποτελέσματα της εργασίας [35]. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύουν τα ήδη υπάρχοντα στην βιβλιογραφία αποτελέσματα (βλ.[2],[5],[8],[11] και [40]). Οι Προτάσεις 4.1 και 4.2 αποτελούν τα βασικά αποτελέσματα και εδραιώνουν ικανές συνθήκες τύπου "Lyapunov" για ασυμπτωτική ευστάθεια για τα συστήματα:

$$x(n+1) = f(n, x(n)),\ (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα αποτελούν, μερικώς, τα διακριτά ανάλογα των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 2. Πρέπει ωστόσο να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι τόσο οι Προτάσεις 4.1, 4.2 όσο και το "averaging" αποτέλεσμα της Πρότασης 4.3 στην Παράγραφο 4.4, βασίζονται σε ασθενέστερες υποθέσεις από τις διακριτώς ανάλογες συνθήκες που έχουν επιβληθεί σε συνεχή συστήματα (βλ. [2],[3],[30],[41] και σχετικές αναφορές εντός). Το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.1 εφαρμόζεται στις Παραγράφους 4.3 και 4.4 με σκοπό την εδραίωση ικανών συνθηκών για την επιλυσιμότητα του προβλήματος σταθεροποίησης ανάδρασης σε συστήματα ελέγχου της μορφής:

$$x(n+1) = F(n, x(n), u(n)),\ (n, x, u) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{4.2}$$

και για την εξαγωγή μίας ικανής συνθήκης για τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια για την περίπτωση:

$$x(n+1) = x(n) + \varepsilon f(\varepsilon, n, x(n)),\ (\varepsilon, n, x)\ \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n,\ \varepsilon > 0 \tag{4.3}$$

Στη συνέχεια παρέχονται οι έννοιες της ευστάθειας, τοπικής ασυμπτωτικής ευστάθειας και τοπικής εκθετικής ευστάθειας για την περίπτωση (4.1). Σε ό,τι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο ισορροπίας, δηλαδή,

$$f(\cdot, 0) = 0.$$

Ορισμός 4.1 ***Ευστάθεια(Stability):***

Λέμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ *είναι Ευσταθές ως προς το* (4.1), *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και δοθέν φραγμένο* $I \subset \mathbb{N}$ *υπάρχει σταθερά* $\delta = \delta(\varepsilon, I) > 0$ *τέτοια ώστε*

$$|x(n_0)| \leq \delta \Rightarrow |x(n)| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ n_0 \in I \tag{4.4}$$

όπου $x(n) = x(n, n_0, x_0), n = n_0, n_0+1, n_0+2, ...$ *αποτελεί την λύση του* (4.1) *που ξεκινάει από το* $x_0 := x(n_0)$ *την χρονική στιγμή* n_0.

Ορισμός 4.2 ***Έλξη(Attractivity):***

Λέμε ότι το $0 \in \mathbb{R}^n$ *είναι Ελκυστής για το* (4.1), *αν υπάρχει μία σταθερά* $\rho > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και δοθέν φραγμένο* $I \subset \mathbb{N}$, *μπορεί να βρεθεί χρονική στιγμή* $\tau = \tau(\varepsilon, I) \in \mathbb{N}$ *με*

$$|x(n_0)| \leq \rho \Rightarrow |x(n)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 + \tau, n_0 \in I \tag{4.5}$$

Ορισμός 4.3 ***Ασυμπτωτική Ευστάθεια(Asymptotic Stability)(AS):***

Λέμε ότι το (4.1) *είναι Ασυμπτωτικά Ευσταθές (AS) (στο μηδέν* $0 \in \mathbb{R}^n$*), αν το μηδέν είναι ευσταθές και ελκυστής.*

Ορισμός 4.4 ***Ομοιόμορφη Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Uniform Asymptotic Stability)(UAS):***

Λέμε ότι το (4.1) *είναι Ομοιόμορφα Ασυμπτωτικά Ευσταθές (UAS), αν ισχύουν ταυτόχρονα οι* (4.4) *και* (4.5) *για κάθε* $n_0 \in \mathbb{N}$ *και για* δ *και* τ *εξαρτώμενα μόνο από το* ε.

Ορισμός 4.5 ***Εκθετική Ασυμπτωτική Ευστάθεια (Exponential Asymptotic Stability)(expo-AS):***

Λέμε ότι το (4.1) *είναι Εκθετικά-AS (expo-AS), αν υπάρχει μία σταθερά* $\lambda > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε δοθέν φραγμένο* $I \subset \mathbb{N}$, *μπορούν να βρεθούν σταθερές* $C = C(I) > 0, n_0 \in I$ *έτσι ώστε*

$$|x(n)| \leq C|x(n_0)| \exp\left(-\lambda(n - n_0)\right),$$
$$\forall n \geq n_0, \ n_0 \in I, \ x(n_0) \text{ κοντά στο μηδέν} \tag{4.6}$$

Ορισμός 4.6 ***Ομοιόμορφα Εκθετική Ασυμπτωτικής Ευστάθειας (Exponential Uniform Asymptottic Stability)(expo-UAS):***

Λέμε ότι το (4.1) είναι Ομοιόμορφα expo-AS (expo-UAS), αν ισχύει η (4.6) για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ και για κάποια σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη των αρχικών τιμών n_0 του χρόνου.

4.2 Βασικό αποτέλεσμα Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να επιτευχθεί μία επέκταση του κυρίως αποτελέσματος του [41] για συστήματα διακριτού χρόνου της μορφής (4.1). Υποθέτουμε την ύπαρξη μίας σταθεράς $R > 0$ για την οποία ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

A1. Υπάρχει συνάρτηση $L \in \mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$|f(n,x)| \leq L(n)|x| \ \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times S[0,R]; \tag{4.7}$$

επιπλέον, ικανοποιείται μία από τις ακόλουθες συνθήκες A2 ή A′2:
A2. Υπάρχουν συναρτήσεις:

- $V : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathcal{K}_\infty$, $c \in \mathcal{N}$, $r \in \mathcal{K}$,
- ακολουθία

$$\{\sigma_i \geq 0, \ i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

- συνάρτηση $m_0 \in \mathcal{N}$ και μία σταθερά $m > 0$, τέτοια ώστε:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i = \infty \tag{4.8a}$$

$$a(|x|) \leq V(n,x) \leq b(|x|)c(n), \ \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times S[0,R] \qquad (4.8b)$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα για την λύση

$$x(\cdot) = x(\cdot, \ell_0, x_0), \ (\ell_0, x_0) \in \mathbb{N} \times S[0,R], \ x_0 = x(\ell_0)$$

του συστήματος (4.1):

$$V(n_{i+1}, x(n_{i+1})) - V(n_i, x(n_i)) \leq -\sigma_i r(V(n_i, x(n_i))),$$

$$n_i = n_i(\ell_0, x_0), \ x_0 \in S[0,R] \ for \ i \in \mathbb{N}_0 \ \textit{μακρυά από το μηδέν},$$

$$\textit{δεδομένου ότι} \ x(\nu) \in S[0,R], \nu = n_i, n_i+1, n_i+2, ..., n_{i+1} \qquad (4.8c)$$

για κάποια γνησίως αύξουσα ακολουθία

$$\{n_i = n_i(\ell_0, x_0), \ i \in \mathbb{N}_0\}$$

με $n_0 = n_0(\ell_0, x_0) \geq \ell_0$, έτσι ώστε

$$n_i \to \infty \ \textit{καθώς το} \ i \to \infty \qquad (4.9a)$$

$$\sum_{\nu=n_i(\ell_0,x_0)}^{\nu=n_{i+1}(\ell_0,x_0)} L(\nu) \leq m, \ \forall i \in \mathbb{N}_0, \ \ell_0 \in \mathbb{N}, x_0 \in S[0,R] \qquad (4.9b)$$

$$\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_0(\ell_0,x_0)} L(\nu) \leq m_0(\ell_0), \forall \ell_0 \in \mathbb{N}, x_0 \in S[0,R] \qquad (4.9c)$$

$$c(n_0(\ell_0, x_0)) \leq m_0(\ell_0) \qquad (4.9d)$$

Α΄2. Υπάρχουν συναρτήσεις:

- $V : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $a, b \in \mathcal{K}_\infty$, $c \in \mathcal{N}, r \in \mathcal{K}$,
- ακολουθία

$$\{\sigma_i \in \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{N}_0\},$$

- συνάρτηση $m_0 \in \mathcal{N}$ και μία σταθερά $m > 0$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι (4.8a) και (4.8b) και επιπλέον

$$V(n_{i+1}, x(n_{i+1})) - V(n_i, x(n_i)) \leq -\sigma_i V(n_i, x(n_i))$$

$$\text{δεδομένου ότι } x(\nu) \in S[0, R], \nu = n_i, n_i + 1, n_i + 2, ..., n_{i+1} \tag{4.10}$$

για κάποια γνησίως αύξουσα ακολουθία

$$\{n_i = n_i(\ell_0, x_0) \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}_0\}$$

με $n_0 \geq \ell_0$ έτσι ώστε να ισχύουν οι (4.9a), (4.9b), (4.9c) και (4.9d).

Πρόταση 4.1

(i) Κάτω από τις προϋποθέσεις A1 και A2(A΄2) το σύστημα (4.1) *είναι **AS**.*

(ii) Αν, εκτός από τις A1 και A΄2, υποθέσουμε επιπλέον ότι:

$$\sigma_i \geq \sigma \ \text{ για κάποια σταθερά } \sigma > 0 \tag{4.11}$$

$$a_0|x|^2 \leq V(n, x) \leq b_0|x|^2 \ \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times S[0, R],$$

$$\text{για κάποιες σταθερές } a_0, b_0 > 0 \tag{4.12}$$

και υπάρχει ένας ακέραιος $N > 0$ τέτοιος ώστε

$$n_{i+1}(\ell_0, x_0) - n_i(\ell_0, x_0) \leq N,\ \forall i \in \mathbb{N}_0,\ \ell_0 \in \mathbb{N},\ x_0 \in S[0, R] \tag{4.13}$$

τότε το σύστημα (4.1) *είναι **expo-AS**.*

(iii) Αν, εκτός από τα A1 και A2(A΄2), υποθέσουμε επιπλέον ότι ισχύει η

(4.11) *και υπάρχουν συναρτήσεις* $a, b \in \mathcal{K}_\infty$ *και μία σταθερά* $m_0 > 0$ *έτσι ώστε*

$$a(|x|) \leq V(n,x) \leq b(|x|), \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times S[0,R] \tag{4.14}$$

$$\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_0(\ell_0,x_0)} L(\nu) \leq m_0, \forall \ell_0 \in \mathbb{N},\ x_0 \in S[0,R],\ x_0 = x(\ell_0) \tag{4.15}$$

τότε το σύστημα (4.1) *είναι* ***UAS***.

(iv) Αν, ισχύουν οι υποθέσεις A1,A΄2,(4.11),(4.12),(4.13) *και* (4.15)*, τότε το σύστημα* (4.1) *είναι* ***expo-UAS***.

Σχόλιο 4.1

Προφανώς, η (4.9d) δεν απαιτείται στους ισχυρισμούς $(ii), (iii)$ και (iv) της Πρότασης 4.1.

Απόδειξη Πρότασης 4.1:

(i) A1,A2⇒AS:

Τμήματα της απόδειξης αυτού του συμπεράσματος, αποτελούν επεκτάσεις της προσέγγισης που υιοθετήθηκε στο Κεφάλαιο 2. Συμβολίζουμε με

$$x(\ell) = x(\ell, \ell_0, x_0),\ \ell = \ell_0, \ell_0 + 1, \ell_0 + 2, ...$$

την τροχιά του συστήματος (4.1) με $x_0 = x(\ell_0)$. Επικαλούμενοι την (4.7) έχουμε:

- Για $n = \ell_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(\ell_0+1) &= f(\ell_0, x(\ell_0)) \Rightarrow \\ |x(\ell_0+1)| &= |f(\ell_0, x(\ell_0)) + f(\ell_0, 0)| \Rightarrow \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\ell_0, x(\ell_0))\right| |x_0| \\ &\leq L(\ell_0)|x_0| \end{aligned}$$

$\textit{δεδομένου ότι } x(\nu) \in S[0, R],\ \nu = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_0$

- Για $n = \ell_0 + 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(\ell_0+2) &= f(\ell_0+1, x(\ell_0+1)) \Rightarrow \\ |x(\ell_0+2)| &= |f(\ell_0+1, x(\ell_0+1)) + f(\ell_0+1, 0)| \Rightarrow \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\ell_0+1, x(\ell_0+1))\right| |x(\ell_0+1)| \\ &\leq L(\ell_0+1)|x(\ell_0+1)| \\ &\leq L(\ell_0+1)L(\ell_0)|x(\ell_0)| \\ &= \left(\prod_{\nu=\ell_0}^{\nu=\ell_0+1} L(\nu)\right) |x_0| \end{aligned}$$

$\textit{δεδομένου ότι } x(\nu) \in S[0, R],\ \nu = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_0$

- Με επαγωγή, για $n = \ell - 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(\ell) &= f(\ell-1, x(\ell-1)) \\ |x(\ell)| &= |f(\ell-1, x(\ell-1)) - f(\ell-1, 0)| \Rightarrow \\ &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\ell-1, x(\ell-1))\right| |x(\ell-1)| \\ &\leq L(\ell-1)|x(\ell-1)| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\prod_{\nu=\ell_0}^{\nu=\ell} L(\nu)\right) |x_0| \leq \exp\left(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=\ell} L(\nu)\right) |x_0|, \end{aligned}$$

$$\textit{δεδομένου ότι } x(\nu) \in S[0,R],\ \nu = \ell_0, \ell_0+1, ..., \ell \tag{4.16}$$

Έστω I φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και, για $\ell_0 \in I$ και $x_0 \in S[0,R]$, θεωρούμε την ακολουθία

$$\{n_i = n_i(\ell_0, x_0), i \in \mathbb{N}_0\}$$

που ικανοποιεί τις (4.8c), (4.9a)-(4.9d) με $\ell_0 \le n_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $\ell_0 < n_0$ και ότι η (4.8c) ισχύει για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$. Από την (4.9c) και (4.16) προκύπτει ότι

$$\begin{gathered}
|x(\ell)| \le \exp\left(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_0(\ell_0,x_0)} L(\nu)\right)|x_0| \\
\le \exp\left(m_0(\ell_0)\right)|x_0|, \\
\textit{για κάθε } \ell = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_0, \\
\textit{δεδομένου ότι } x(\nu) \in S[0,R],\ \nu = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_0
\end{gathered} \tag{4.17}$$

Αντιστοίχως, αν συμβολίσουμε με

$$M := \exp m,$$

οι (4.9b) και (4.16) συνεπάγονται ότι

$$\begin{gathered}
|x(n)| \le M|x(n_i)|, \forall n \in [n_i, n_{i+1}], \\
\textit{δεδομένου ότι } x(n) \in S[0,R], \\
\textit{για κάθε ακέραιο } n \in [n_i, n_{i+1}],\ i \in \mathbb{N}_0,\ x_0 = x(\ell_0) \in S[0,R]
\end{gathered} \tag{4.18}$$

Εκμεταλλευόμενοι και τις δύο ανισότητες στις (4.17) και (4.18) αντιστοίχως και λαμβάνοντας υπόψιν ότι το I είναι φραγμένο, έχουμε ότι για κάθε δοθέν $\varepsilon \in (0,R]$, μπορεί να βρεθεί μία σταθερά $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon]$, ανεξάρτητη του I, τέτοια ώστε η λύση $x(\cdot) = x(\cdot, \ell_0, x_0)$ του (4.1) να ικανοποιεί τις:

$$|x(\ell_0)| \le \varepsilon_1 \Rightarrow |x(n)| \le \varepsilon,\ \forall n = \ell_0, \ell_0 + 1, ..., n_0; \tag{4.19a}$$

$$|x(n_i)| \le \varepsilon_1 \Rightarrow |x(n)| \le \varepsilon, \forall n = n_i, n_i + 1, ..., n_{i+1}, i \in \mathbb{N}_0,\ \ell_0 \in I \tag{4.19b}$$

Για λόγους ευκολίας, συμβολίζουμε στην συνέχεια:

$$x(n, \ell, S[0, \varepsilon]) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(n, \ell, w),\ w = x(\ell) \in S[0, R]\},$$

$$n = \ell, \ell + 1, \ell + 2, ...$$

Δείχνουμε ότι υπάρχει σταθερά $R' \in (0, R]$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες :

$$a(|x(n_{i+1})|) \le V(n_{i+1}, x(n_{i+1})) \le V(n_i, x(n_i)) \le b(|x(n_i)|)c(n_i),$$

$$i \in \mathbb{N}_0,\ \ell_0 \in I,\ x_0 = x(\ell_0) \in S[0, R'],\ \ell_0 < n_0 \tag{4.20a}$$

$$V(n_{i+1}, x(n_{i+1})) - V(n_i, x(n_i)) \le -\sigma_i r(V(n_i, x(n_i))),$$

$$n_i = n_i(\ell_0, x_0),\ x_0 \in S[0, R']\ \textit{για}\ i \in \mathbb{N}_0,\ \ell_0 < n_0 \tag{4.20b}$$

Πράγματι, εκμεταλλευόμενοι τις ($4.19a$) και ($4.19b$), μπορεί να βρεθεί μία θετική σταθερά $R' \le R$ με

$$x(n, \ell_0, S[0, R']) \subset S[0, R], n = \ell_0, \ell_0 + 1, ..., n_0;$$

$$x(n, n_i, S[0, R']) \subset S[0, R], n = n_i, n_i + 1, n_i + 2, ..., n_{i+1}, i \in \mathbb{N}_0. \tag{4.21}$$

Από τις (4.8b),(4.8c) και (4.21) προκύπτει η ζητούμενη (4.20a) και (4.20b). Από την (4.20b) παίρνουμε:

$$V(n_{i+1}, x(n_{i+1}) \leq V(n_i, x(n_i)) - \sigma_i r\left(V(n_i, x(n_i))\right)$$

Έτσι, για $i = 0 \Rightarrow$

$$V(n_1, x(n_1))) \leq V(n_0, x(n_0)) - \sigma_0 r\left(V(n_0, x(n_0))\right)$$

Ομοίως, για $i = 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} V(n_2, x(n_2))) &\leq V(n_1, x(n_1)) - \sigma_1 r\left(V(n_1, x(n_1))\right) \\ &\leq V(n_0, x(n_0)) - \sigma_0 r\left(V(n_0, x(n_0))\right) - \sigma_1 r\left(V(n_1, x(n_1))\right) \\ &= V(n_0, x(n_0)) - \sum_{\nu=0}^{\nu=1} \sigma_\nu \left(V(n_\nu, x(n_\nu))\right) \end{aligned}$$

και με επαγωγή προκύπτει ότι

$$V(n_i, x(n_i)) \leq V(n_0, x(n_0)) - \sum_{\nu=0}^{\nu=i-1} \sigma_\nu r\left(V(n_\nu, x(n_\nu))\right) \tag{4.22}$$

Επίσης από την (4.20a) ισχύει ότι

$$V(n_{i+1}, x(n_{i+1}) \leq V(n_i, x(n_i) \leq ... \leq V(n_1, x(n_1)) \leq V(n_0, x(n_0))$$

και από την A2 έχουμε ότι η $r \in \mathcal{K}$, συνεπώς

$$-r\left(V(n_0,x(n_0))\right) \le -r\left(V(n_1,x(n_1))\right) \le ... \le r\left(V(n_i-1,x(n_i-1))\right)$$

$$\le -r\left(V(n_i,x(n_i)\right)$$

Έτσι από την τελευταία έπεται ότι

$$\begin{aligned}
& -\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1} \sigma_\nu r\left(V(n_\nu,x(n_\nu))\right) \\
= & -\sigma_0 r\left(V(n_0,x(n_0))\right) - \sigma_1 r\left(V(n_1,x(n_1))\right) - ... - \sigma_{i-1} r\left(V(n_i-1,x(n_i-1))\right) \\
\le & -\sigma_0 r\left(V(n_i,x(n_i))\right) - \sigma_1 r\left(V(n_i,x(n_i))\right) - ... - \sigma_{i-1} r\left(V(n_i,x(n_i))\right) \\
= & -\left(\sigma_0+\sigma_1+...+\sigma_{i-1}\right) r\left(V(n_i,x(n_i))\right) \\
= & -\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1}\sigma_\nu\right) r\left(V(n_i,x(n_i))\right) \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

Από τον συνδυασμό των (4.22) και (4.23) έχουμε ότι

$$V(n_i,x(n_i)) \le V(n_0,x(n_0)) - \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1}\sigma_\nu\right) r\left(V(n_i,x(n_i))\right),$$

$$\forall i\in\mathbb{N}_0\ , x(n_0)\in S[0,R'],\ \ell_0\in I,\ i\in\mathbb{N}_0,\ \ell_0<n_0.$$

Η τελευταία σε συνδυασμό με την (4.8b),(4.9d),(4.17) και (4.20a) συνεπάγονται:

$$a(|x(n_i)|) + \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1}\sigma_\nu\right) r(a(|x(n_i)|))$$

$$\le V(n_i,x(n_i)) + \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1}\sigma_\nu\right) r(V(n_i,x(n_i)))$$

$$\le V(n_0,x(n_0)) \le b\left(\exp(m_0(\ell_0))\,|x_0|\right) m_0(\ell_0), \forall\ i\ \in\mathbb{N}_0,$$

$$x_0 = x(\ell_0) \in S[0, R'],\ \ell_0 \in I,\ \ell_0 < n_0. \tag{4.24}$$

Από τις (4.8a),(4.9a),(4.24) και το γεγονός ότι το I είναι φραγμένο έπεται:

$$x(n_i) \to 0 \text{ καθώς το } n_i \to \infty,$$

$$\text{ομοιόμορφα ως προς } x_0 \in S[0, R'] \text{ και } \ell_0 \in I. \tag{4.25}$$

Από την (4.25) προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, R']$ και $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$, για τα οποία ισχύουν οι (4.19a) και (4.19b), μπορούν να βρεθούν ένα ζεύγος θετικών ακεραίων

$$k = k(\varepsilon_1, I) \text{ και } \tau = \tau(\varepsilon_1, I)$$

έτσι ώστε

$$n_k \geq \ell_0 + \tau, \tag{4.26a}$$

$$|x(n_i)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}, \forall i = k, k+1, k+2, ...,\ x_0 \in S[0, R'],\ \ell_0 \in I \tag{4.26b}$$

Σε αυτό το σημείο είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι ισχύει η ευστάθεια και η έλξη του συστήματος (4.1) στο μηδέν:

Ευστάθεια:

Έστω $\varepsilon, \varepsilon_1, k, \tau, R$ και R' όπως ορίστηκαν παραπάνω. Έστω $I \subset \mathbb{N}$ δοθέν φραγμένο σύνολο. Δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, R)$ υπάρχει μία σταθερά

$$0 < \delta := \delta(\varepsilon, I) < \varepsilon_1$$

τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (4.4). Από τις (4.1),(4.7),(4.9b),(4.9c) και (4.21) παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
|x(n)| &\leq \exp\left(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n} L(\nu)\right)|x_0| \\
&\leq \exp\left(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_k(\ell_0,x_0)} L(\nu)\right)|x_0| \\
&\leq \exp\left(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_0(\ell_0,x_0)} L(\nu) + \sum_{\nu=n_0(\ell_0,x_0)}^{\nu=n_k(\ell_0,x_0)} L(\nu)\right)|x_0| \\
&\leq (\exp(m_0(\ell_0)+m))|x_0|,
\end{aligned}
$$

$$
\forall n = \ell_0, \ell_0+1, \ell_0+2, ..., n_k,\ \ell_0 \in I,\ x_0 \in S[0, R'] \tag{4.27}
$$

Συνεπώς, λόγω της (4.27) και του ότι το I είναι φραγμένο, έπεται η ύπαρξη γνησίως θετικής σταθεράς

$$
\delta := \delta(\varepsilon, I) < \varepsilon_1
$$

τέτοιας ώστε

$$
x(n, \ell_0, S[0,\delta]) \in S[0, \varepsilon_1],\ \ \forall\, n = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_k,\ \ \ell_0 \in I \tag{4.28}
$$

Επίσης από τις (4.26a) και (4.26b) έχουμε ότι:

$$
|x(n_i, \ell_0, S[0,\delta])| \leq \frac{\varepsilon_1}{2},\ \forall\, i = k, k+1, k+2, ...,\ \ \ell_0 \in I \tag{4.29}
$$

Έτσι, από την (4.28) έπεται:

$$
x(n, \ell_0, S[0,\delta]) \subset S[0, \varepsilon_1] \subset S[0, \varepsilon],\ n = \ell_0, \ell_0+1, ..., n_k. \tag{4.30}
$$

Η (4.30) σε συνδυασμό με την (4.29) συνεπάγεται ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n = n_k, n_k + 1, n_k + 2, \ldots$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} x(n, \ell_0, S[0,\delta]) &= x(n, n_k, x(n_k, \ell_0, S[0,\delta])) \\ &\subset x(n, n_k, S[0,\varepsilon_1]) \subset S[0,\varepsilon] \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$\begin{gathered} x(n, \ell_0, S[0,\delta]) \subset S[0,\varepsilon], \\ \forall n = \ell_0, \ell_0 + 1, \ell_0 + 2, \ldots, \quad \ell_0 \in I \subset \mathbb{N} \end{gathered} \tag{4.31}$$

έτσι η τελευταία δείχνει την ισχύ της (4.4).

Έλξη:

Δείχνουμε ότι για κάθε δοθέν φραγμένο υποσύνολο I του $\mathbb{N}$ υπάρχει μία σταθερά

$$0 < \rho \leq R$$

τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να μπορεί να ορισθεί ένας θετικός ακέραιος $\tau = \tau(\varepsilon, I)$ έτσι ώστε να ισχύει η (4.5). Λόγω της ευστάθειας που δείχθηκε παραπάνω, για κάθε

$$0 < \xi \leq R$$

υπάρχει μία γνησίως θετική σταθερά

$$\rho = \rho(\xi, I) < \xi$$

και μία σταθερά $\varepsilon \in (0, \rho)$ έτσι ώστε

$$|x(n, \ell_0, x_0)| \leq \xi, \quad \forall n = \ell_0, \ell_0 + 1, \ldots, \; \ell_0 \in I, \; |x_0| \leq \rho.$$

Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί μια σταθερά $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι (4.19a) και (4.19b) και επικαλούμενοι την (4.25) υπάρχει ένας ακέραιος $k \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$|x(n_i, \ell_0, S[0, \rho])| \leq \varepsilon_1/2, \ i = k, k+1, k+2, ..., \quad \ell_0 \in I. \tag{4.32}$$

Συνδυάζοντας την (4.32) με τις (4.19a),(4.19b) και (4.31) μπορούμε να δείξουμε, όπως και στην περίπτωση της απόδειξης της ευστάθειας ότι

$$x(\nu, \ell_0, S[0, \rho]) \subset S[0, \varepsilon], \ \forall \nu \geq \ell_0, \ \ell_0 \in I.$$

Συνεπώς, αποδείχθηκε η έλξη. Συμπεραίνουμε ότι κάτω υπό τις υποθέσεις A1 και A2 το σύστημα (4.1) είναι AS.

A1,A′2⇒AS:

Προκειμένου να αποδείξουμε την ισχύ της AS, υπό την παρουσία της $A'2$, χρησιμοποιούμε όμοια διαδικασία. Για λόγους πληρότητας πρέπει να αναφέρουμε ότι αυτό που διαφέρει εδώ, είναι ότι, αντί της εκτίμησης (4.24), προκύπτει, λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.8b),(4.9c),(4.9d),(4.10) και (4.17), ότι υπάρχει σταθερά $R' \in (0, R]$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
a(|x(n_i)|) &\leq V(n_i, x(n_i)) \leq V(n_0, x(n_0)) \exp\left(-\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1} \sigma_\nu\right) \\
&\leq b\left(\exp(\sum_{\nu=\ell_0}^{\nu=n_0} L(\nu)|)\,|x_0|\right) c(n_0) \exp\left(-\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1} \sigma_\nu\right) \\
&\leq b\left(\exp\left(m_0(\ell_0)\right)|x_0|\right) m_0(\ell_0) \exp\left(-\sum_{\nu=0}^{\nu=i-1} \sigma_\nu\right),
\end{aligned}$$

$$i \in \mathbb{N},\ x_0 = x(\ell_0) \in S[0, R'],\ \ell_0 \in I,\ \ell_0 < n_0. \tag{4.33}$$

(ii) A1,A′2,$(4.11), (4.12), (4.13) \Rightarrow$ **expo-AS:**

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι εκτός από τις συνθήκες A1 και A′2 ισχύουν επιπλέον οι (4.11),(4.12) και (4.13). Τότε λόγω των (4.17) και (4.33) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_0 \left|x(n_i)\right|^2 &\leq V(n_i, x(n_i)) \leq V(n_0, x(n_0)) \exp\left(-(i-1)\sigma\right) \\ &\leq V(n_0, x(n_0)) \exp\left(-i\lambda(n_i - n_0 + \lambda N)\right) \\ &\leq b_0 \left|x(n_0)\right|^2 \exp\left(-\lambda(n_i - n_0 + \lambda N)\right) \\ &\leq b_0 \exp(2m(\ell_0) + \lambda N) \exp\left(-\lambda(n_i - n_0)\right) |x_0|^2, \end{aligned}$$

$$i \in \mathbb{N}_0,\ x_0 = x(\ell_0) \in S[0, R'],\ \ell_0 \in I,\ \ell_0 < n_0 \tag{4.34}$$

για κάποια σταθερά $R' \in (0, R]$ και μία γνησίως θετική σταθερά $\lambda \leq \sigma/N$, όπου το N είναι κάποιο στην (4.13). Η επιθυμητή (4.6) αποτελεί άμεση συνέπεια των (4.18) και (4.34). Λεπτομέρειες αφήνονται για τον αναγνώστη. Οι αποδείξεις των ισχυρισμών (iii) και (iv) είναι παρόμοιες με αυτές που εδόθησαν στο Κεφάλαιο 2 και παραλείπονται. □

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.1 μπορεί να επεκταθεί στην περίπτωση των συστημάτων (4.1), των οποίων τα δυναμικά είναι εν γένει μη φραγμένα ως προς τον χρόνο, όπως φαίνεται ακολούθως:

Πρόταση 4.2

(i) Ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα των Ισχυρισμών (i) και (iii) της Πρότασης 4.1, κάτω από τις ίδιες υποθέσεις και αντικαθιστώντας την (4.9b) από την ασθενέστερη υπόθεση ότι υπάρχει συνάρτηση $\xi \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε

$$|x(n)| \leq \xi(|x(n_i)|),\ \forall n \in [n_i(\ell_0, x_0), n_{i+1}(\ell_0, x_0)] \tag{4.35}$$

δεδομένου ότι $x(n) \in S[0, R]$ *για όλους τους θετικούς ακέραιους*

$$n = n_i, n_i + 1, ..., n_{i+1},\ i \in \mathbb{N}_0,\ x_0 = x(\ell_0),$$

όπου $x(\cdot)$ *αποτελεί την λύση του* (4.1) *που ξεκινάει την* $x(n_i)$ *την χρονική στιγμή* n_i.

(ii) Ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα των Ισχυρισμών (ii) και (iv) της Πρότασης 4.1, κάτω από τις ίδιες υποθέσεις και αντικαθιστώντας την (4.9b) από την ασθενέστερη υπόθεση ότι υπάρχει μία σταθερά $\Xi > 0$ *τέτοια ώστε*

$$|x(n)| \leq \Xi|x(n_i)|,\ \forall n \in [n_i(\ell_0, x_0), n_{i+1}(\ell_0, x_0)] \tag{4.36}$$

δεδομένου ότι $x(n) \in S[0, R]$ *για όλους τους θετικούς ακέραιους*

$$n = n_i, n_i + 1, ..., n_{i+1},\ i \in \mathbb{N}_0,\ x_0 = x(\ell_0).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη της Πρότασης 4.2 είναι ουσιαστικά η ίδια με το τμήμα της απόδειξης της Πρότασης 4.1, που προκύπτει από την (4.18) και μετά, με κάποιες στοιχειώδεις τροποποιήσεις. □

Σχόλιο 4.2

Πρέπει να δοθεί έμφαση σε αυτό το σημείο, ότι κάτω από ισχυρότερες υποθέσεις, όλα τα αποτελέσματα των Προτάσεων 4.1 και 4.2 παίρνουν ολικό χαρακτήρα, δηλαδή, εκτός από την (4.4), η συνθήκη της έλξης (4.5) ικανοποιείται με $\rho = +\infty$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι η (4.7), καθώς επίσης και οι υπόλοιπες υποθέσεις των Προτάσεων 4.1 και 4.2 ικανοποιούνται με $R = +\infty$.

Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε την γραμμική περίπτωση

$$x(n+1) = A(n)x(n),\ (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \tag{4.37}$$

με $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, και υποθέτουμε την ύπαρξη σταθεράς $\Xi > 0$, μίας γνησίως αύξουσας ακολουθίας

$$\{N_i, i \in \mathbb{N}_0\} \text{ με } N_i \to \infty,$$

και μίας συνάρτησης $\mu \in \mathcal{K}$ έτσι ώστε

$$N_{i+1} - N_i \leq \mu(N_i); \tag{4.38a}$$

$$|A(n)A(n-1)A(n-2)...A(N_i+1)A(N_i)| \leq \Xi,$$

$$\forall n \in [N_i, N_{i+1}], \forall i \in \mathbb{N}_0 \tag{4.38b}$$

και επιπλέον υπάρχει ακολουθία

$$\{\sigma_i \geq 0,\ i \in \mathbb{N}_0\}$$

τέτοια ώστε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i = \infty \tag{4.39a}$$

$$|A(N_{i+1})A(N_{i+1}-1)A(N_{i+1}-2)...A(N_i)| \leq 1 - \sigma_i,$$

$$i \in \mathbb{N} \quad \text{μακρυά από το μηδέν} \tag{4.39b}$$

Από τις (4.37),(4.38a),(4.39a) και (4.39b) μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι οι A1,(4.8a),(4.9a),(4.9c),(4.10) και (4.12) ικανοποιούνται με

$$R = \infty, V = |x|^2,$$

κατάλληλες σταθερές m_0, m και σταθερό $L := L(\cdot)$ και, λόγω της (4.38b), αντί της (4.9b), ισχύει η (4.36). Συγκεκριμένα, για κάθε δοθέν $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\ell_0 \in \mathbb{N}$, κάθε όρος n_i της ακολουθίας που περιέχεται στην A2 εξαρτάται από την αρχική τιμή του χρόνου ℓ_0; ειδικότερα, ορίζεται ως εξής:

$$n_0 := N_{\bar{k}} := \min\{N_k,\ k \in \mathbb{N}_0 \text{ έτσι ώστε } N_k \geq \ell_0\}$$
$$n_i := N_{\bar{k}+i},\ i \in \mathbb{N}$$

Η επιθυμητή (4.9c) αποτελεί συνέπεια της (4.38a). Συμπεραίνουμε, σύμφωνα με τον τρίτο Ισχυρισμό της Πρότασης 4.1 ότι το σύστημα (4.37) είναι UAS. Ειδικότερα, μπορούμε να δείξουμε ότι, σύμφωνα με το Σχόλιο 4.2, το (4.37) είναι *ολικά* UAS, δηλαδή, εκτός από την ευστάθεια, ο ισχυρισμός (4.5) ικανοποιείται με $\rho = +\infty$ και για κάποιο $\tau \in \mathbb{N}$ ανεξάρτητο του I.

4.3 Εφαρμογή στην Σταθεροποίηση με χρήση Ανάδρασης (Feedback Stabilization)

Αυτή η παράγραφος είναι αφιερωμένη σε ορισμένες εφαρμογές της Πρότασης 4.1 στο πρόβλημα της σταθεροποίησης με χρήση ανάδρασης για τα συστήματα (4.2). Για λόγους ευκολίας, θεωρούμε την περίπτωση μίας εισόδου και υποθέτουμε ότι το σύστημα (4.2) λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(n, x(n), u(n)) \\ &:= f(n, x(n)) + u(n)g(n, x(n)) + h(n, x(n), u(n)) \end{aligned} \tag{4.40}$$

με $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ να ικανοποιούν τις

$$|g(n,x)| \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \textit{ κοντά στο μηδέν} \tag{4.41a}$$

$$|h(n,x,u)| \le C\,|u|^2\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}\ \textit{κοντά στο μηδέν} \qquad (4.41b)$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Επιπλέον, κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

H1.Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, αν συμβολίσουμε με

$$\|v\| := \langle v,\ v\rangle^{1/2}\,,$$

τότε

$$\|f(n,x)\| \le \|x\|\,, \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}^n\ \textit{ κοντά στο μηδέν} \qquad (4.42)$$

H2.Υπάρχει ένας ακέραιος $N > 1$ και μία συνάρτηση $\varsigma \in \mathcal{K}$ τέτοια ώστε για κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{N}$ και μη μηδενικό $x \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο

$$\langle f(n,x), g(n,x)\rangle = 0$$

υπάρχει ένας ακέραιος

$$k : n < k \le n + N$$

έτσι ώστε

$$\langle f(i, f(i-1, ..., f(n,x), ...)), g(i, f(i-1, ..., f(n,x), ...))\rangle = 0,$$

$$i = n+1, n+2, ..., k-1 \qquad (4.43a)$$

$$|\langle f(k, f(k-1, ..., f(n,x), ...)), g(k, f(k-1, ..., f(n,x), ...))\rangle|^2 \ge \varsigma(|x|) \qquad (4.43b)$$

Η ακόλουθη Πρόταση γενικεύει την Πρόταση 2.4 της εργασίας [40] :

Πρόταση 4.3

Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις υπάρχει μία σταθερά $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε η απεικόνιση

$$u = u(n, x) := -\varepsilon \langle f(n, x), g(n, x)\rangle \tag{4.44}$$

επιτυγχάνει (ομοιόμορφα ως προς τον χρόνο) τοπική ασυμπτωτική σταθεροποίηση του (4.40)*, δηλαδή, το κλειστό σύστημα* (4.40) *με την* (4.44) *είναι UAS.*

Απόδειξη:

Θεωρούμε το κλειστό σύστημα δυναμικών

$$E(n, x) := f(n, x) + ug(n, x) + h(n, x, u)|_{u=-\varepsilon\langle f(n,x),g(n,x)\rangle} \tag{4.45}$$

Έστω $x_0 \neq 0$ και $\ell_0 \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την αύξουσα ακολουθία

$$\{n_i = n_i(\ell_0, x_0), i \in \mathbb{N}_0\}$$

$$\text{με } n_0 := \ell_0$$

και

$$n_{i+1} - n_i \leq N,\ i \in \mathbb{N}_0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο μηδέν, ισχύουν μία εκ των (4.46) και (4.47):

$$|\langle f(n_i, x), g(n_i, x)\rangle|^2 \geq \varsigma(|x|) \text{ και } n_{i+1} = n_i + 1 \tag{4.46}$$

$$\langle f(n_i,x), g(n_i,x)\rangle = 0;$$

$$\langle f(k, f(k-1,...,f(n_i,x),...)), g(k, f(k-1,...,f(n_i,x),...))\rangle = 0,$$

$$k = n_i+1, n_i+2, ..., n_{i+1}-1 \qquad (4.47a)$$

$$\langle f(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...,)), g(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...))\rangle$$

$$\geq \varsigma(|x|) \qquad (4.47b)$$

Η ύπαρξη της ακολουθίας n_i παραπάνω εξασφαλίζεται από την υπόθεση H2. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι (4.47a) και (4.47b) ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.41b),(4.42),(4.44),(4.45) και (4.47a), προκύπτει:

$$\|E(n_i,x)\|^2 = \|f(n_i,x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

και με επαγωγή:

$$\|E(k, E(k-1,...,E(n_i,x),...))\|^2$$

$$= \|f(k, f(k-1,...,f(n_i,x),...))\|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\textit{για} \;\; k = n_i+1,...,n_{i+1}-1, \;\; x \;\; \textit{κοντά στο μηδέν}. \qquad (4.48)$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.41a), (4.41b) και (4.47b) προκύπτει πως υπάρχει σταθερά $\rho > 0$ έτσι ώστε:

$$\|E(n_{i+1}, E(n_{i+1}-1,...,E(n_i,x),...))\|^2$$

$$= \|f(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...))\|^2$$

$$-\varepsilon R \left|\langle f(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...)), g(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...))\rangle\right|^2$$
$$\times \left(2-\varepsilon|g(n_{i+1}, f(n_{i+1}-1,...,f(n_i,x),...))|^2+\varepsilon\rho\right) \qquad (4.49)$$

για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν και για x κοντά στο μηδέν. Από τις (4.41a),(4.42),(4.47b) και (4.49) προκύπτει ότι υπάρχει μία σταθερά $\bar{C} > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\left\|E(n_{i+1}, E(n_{i+1}-1,...,E(n_i,x),...))\right\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 - \varepsilon\bar{C}\zeta(|x|), \; x \textit{ κοντά στο μηδέν} \end{aligned} \qquad (4.50)$$

και για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.41a),(4.41b), (4.42),(4.44) και (4.45) μπορεί να βρεθεί μία σταθερά $L > 0$ έτσι ώστε

$$|E(n,x)| \leq L\,|x|$$

για x και $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν. Μπορούμε τώρα να συμπεράνουμε ότι όλες οι συνθήκες (4.7),(4.11)-(4.13) ικανοποιούνται με σταθερό $L(\cdot) = L$ και με $V = \|x\|^2$, $r(s) = \varepsilon\bar{C}\zeta(s)$, $\sigma_i = \sigma := 1$ και $m_0 = m = LN$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1(iii) το αντίστοιχο κλειστό σύστημα $x(n+1) = E(n, x(n))$ είναι UAS. □

Μία άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση προκύπτει για τα συστήματα ελέγχου (4.2), των οποίων τα δυναμικά είναι γραμμικά ως προς την είσοδο u, όπου ξανά, για λόγους ευκολίας θεωρούμε την περίπτωση της μίας -εισόδου:

$$x(n+1) = F(n, x(n), u(n)) := f(n, x(n)) + u(n)g(n, x(n)) \qquad (4.51)$$

με τις $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$|f(n,x)| \le C\,|x| \;\; \textit{και} \;\; |g(n,x)| \le C,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x \ \textit{κοντά στο μηδέν} \tag{4.52}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

H.Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, μία συνάρτηση $r \in \mathcal{K}$ και ένας ακέραιος $N > 1$ τέτοια ώστε, αν συμβολίσουμε με

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2},$$

τότε για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο μηδέν και ακέραιο $n \in \mathbb{N}$, ικανοποιείται μία από τις παρακάτω:

• $g(n,x) = 0$

και υπάρχει ένας ακέραιος

$$k : n < k \le n + N$$

έτσι ώστε

$$g(i, f(i-1, ..., f(n,x), ...)) = 0;\ i = n+1, n+2, ..., k-1 \tag{4.53a}$$

$$g(k, f(k-1, ..., f(n,x), ...)) \neq 0 \tag{4.53b}$$

• $g(n,x) \neq 0$

και

$$\|f(n,x)\|^2 - \frac{\langle f(n,x), g(n,x) \rangle^2}{\|g(n,x)\|^2} \le \|x\|^2 - r(|x|) \tag{4.54}$$

Πρόταση 4.4

Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις ο νόμος ανάδρασης:

$$u = u(n,x) := \begin{cases} = 0, & \textit{αν είτε } g(n,x) = 0 \textit{ ή } x = 0 \\ \\ = -\frac{\langle f(n,x), g(n,x)\rangle}{\|g(n,x)\|^2}, & \textit{αν } g(n,x) \neq 0 \end{cases} \quad ; \tag{4.55}$$

εξασφαλίζει(ομοιόμορφα ως προς τον χρόνο) τοπική ασυμπτωτική ευστάθεια για το σύστημα (4.51).

Απόδειξη:

Η απόδειξη είναι παρεμφερής με αυτήν που δόθηκε στην Πρόταση 4.3. Για λόγους πληρότητας, σημειώνουμε ότι το σύστημα κλειστού-βρόγχου (4.51) με την (4.55) ικανοποιεί τις (4.7),(5.9)-(4.13) για κάποιο $L(\cdot) = L,\ V = \|x\|^2$ και $m_0 = m = LN$, όπου N, ρ και $r(\cdot)$ όπως εδόθησαν στην Υπόθεση Η. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1(iii) το κλειστό σύστημα (4.51) και (4.55) είναι UAS. Λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. □

4.4 Averaging

Σε αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της παραγράφου 4.1 προκειμένου να πάρουμε μία ικανή συνθήκη τύπου-averaging για τοπική α-συμπτωτική ευστάθεια για τα συστήματα (4.3). Στη συνέχεια κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

B1. Θεωρούμε ότι το μηδέν είναι σημείο ισορροπίας:

$$f(\varepsilon, n, 0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0 \tag{4.56a}$$

και υπάρχει μία σταθερά $R > 0$ και μία συνάρτηση $L \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε

$$|f(\varepsilon, n, x_1) - f(\varepsilon, n, x_2)| \leq L(n)\,|x_1 - x_2|\,,$$

$$\forall (n, x_i) \in \mathbb{N} \times S[0, R],\ i = 1, 2,\ \varepsilon > 0 \textit{ κοντά στο μηδέν} \qquad (4.56b)$$

B2. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές $m, c > 0$, μία απεικόνιση

$$f_{av}(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ με } f_{av}(0) = 0,$$

ακολουθίες:

$$\{N_i \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N}_0\} \ \ \textit{και}\ \{c_i \in \mathbb{R}^+,\ i \in \mathbb{N}_0\},$$

με την πρώτη να είναι γνησίως αύξουσα, και μία ακολουθία συναρτήσεων

$$\{T_i = T_i(x) : \mathbb{R}^n \to N,\ i \in \mathbb{N}_0\}$$

έτσι ώστε

$$N_i \to \infty \text{ ας } i \to \infty \qquad (4.57a)$$

$$\sum_{\nu=N_i}^{\nu=N_{i+1}} L(\nu) \leq m,\ \forall i \in \mathbb{N}_0 \qquad (4.57b)$$

$$c_i \leq T_i(x) \leq m,\ \forall i \in \mathbb{N}, x \in S[0, R] \qquad (4.57c)$$

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{j=i} c_j \geq c \qquad (4.57d)$$

και έτσι ώστε για κάθε σταθερά $\xi > 0$ να υπάρχει ένας ακέραιος $\bar{n} \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$\left| f_{av}(x) - \tfrac{1}{T_i(x)} \sum_{\nu=N_i}^{\nu=N_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x) \right| \leq |x|\xi,$$

$$\textit{για κάθε}\ \ i \in \mathbb{N},\ \ i \geq \bar{n},\ \ x \in S[0, R] \textit{ και } \varepsilon > 0 \textit{ κοντά στο μηδέν.} \quad (4.57e)$$

B3. Για την απεικόνιση f_{av} που εισήχθη στην B2 υποθέτουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση

$$V(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$

και θετικές σταθερές $C_i,\ i = 0, 1, 2, 3, 4$ τέτοιες ώστε για κάθε $x, y \ \in S[0, R]$ και $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν ισχύουν τα ακόλουθα:

$$|f_{av}(x)| \leq C_0|x|, \tag{4.58a}$$

$$C_1|x|^2 \leq V(x) \leq C_2|x|^2, \tag{4.58b}$$

$$V(x) - V(y) \leq C_3|x - y| \left(|x| + |y|\right), \tag{4.58c}$$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0^+} \frac{V(x + \varepsilon f_{av}(x)) - V(x)}{\varepsilon} \leq -C_4|x|^2, \tag{4.58d}$$

Σχόλιο 4.3

(i) Η συνθήκη B3 ικανοποιείται, αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι η f_{av} είναι C^1 και το $\dot{x} = f_{av}(x)$ είναι εκθετικά ευσταθές στο μηδέν (βλ.[21]).

(ii) Η συνθήκη (4.57e) είναι ασθενέστερη εκδοχή από την γνώριμη υπόθεση averaging που χρησιμοποιείται σε υπάρχουσες εργασίες στην βιβλιογραφία (βλ.[5],[8],[11]).

Πρόταση 4.5

(i) Για το σύστημα (4.3), υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι B1-B3. Τότε οι υποθέσεις A1 και A΄2 ικανοποιούνται για το σύστημα (4.3) για $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, έτσι, από την Πρόταση 4.1(i), για κάθε $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, το αντίστοιχο σύστημα (4.3) είναι AS;

(ii) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $c > 0$ και ένας ακέραιος N με

$$c_i \geq c, \forall i \in \mathbb{N} \tag{4.59}$$

$$N_{i+1} - N_i \leq N,\ \forall i \in \mathbb{N}_0 \tag{4.60}$$

τότϵ όλϵς οι υποθέσϵις της Πρότασης 4.1(iv) ικανοποιούνται, συνϵπώς, για $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, το σύστημα (4.3) ϵίναι expo-UAS.

Απόδειξη:

(i) $\mathbf{B1}, \mathbf{B2}, \mathbf{B3} \Rightarrow \mathbf{AS}$:

Αποδεικνύουμε ότι για $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, όλες οι υποθέσεις του πρώτου ισχυρισμού της Πρότασης 4.1(i) ικανοποιούνται για το (4.3). Για κάθε αρχικό $\ell_0 \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ακολουθία:

$$\{n_i = n_i(\ell_0), i \in \mathbb{N}\}\ \mu\epsilon$$

$$n_0 = n_0(\ell_0) := N_{\bar{k}} = \min\{N_k, k \in \mathbb{N}_0 :\ N_k \geq \ell_0\},$$

$$n_i := N_{\bar{k}+i},\ i \in \mathbb{N}_0. \tag{4.61}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε στην συνέχεια ότι

$$n_{i+1} > n_i + 1,\ \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Λόγω της (4.3), (4.56a) και (4.56b) για την τροχιά $x(n) = x(n, n_i, x(n_i))$ του (4.3) ισχύουν:

- Για $n := n_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(n_i+1) &= x(n_i) + \varepsilon f(n_i, x(n_i)) \Rightarrow \\ |x(n_i+1)| &= |x(n_i) + \varepsilon \left(f(n_i, x(n_i)) - f(n_i, 0) \right))| \Rightarrow \\ &\leq |x(n_i)|(1 + \varepsilon L(n_i)) \end{aligned}$$

- Για $n := n_i + 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(n_i+2) &= x(n_i) + 1 + \varepsilon f(n_i+1, x(n_i+1)) \Rightarrow \\ |x(n_i+2)| &= |x(n_i+1) + \varepsilon \left(f(n_i+1, x(n_i+1)) - f(n_i+1, 0) \right))| \Rightarrow \\ &\leq |x(n_i)|(1 + \varepsilon L(n_i+1))(1 + \varepsilon L(n_i)) \end{aligned}$$

- και με επαγωγή και λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.56a),(4.56b),(4.57b) και (4.61) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |x(n)| &\leq \left(\prod_{\nu=n_i}^{\nu=n-1} (1 + \varepsilon L(\nu)) \right) |x(n_i)| \\ &\leq \exp\left(\varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1} L(\nu) \right) |x(n_i)| \\ &\leq \exp(\varepsilon m) \, |x(n_i)| \end{aligned}$$

συνεπώς για $n = n_i + 1, n_i + 2, ..., n_{i+1}$ ισχύει ότι

$$|x(n)| \leq K \, |x(n_i)| \, , \; K := \exp(\varepsilon m) \, , \; \varepsilon > 0 \textit{ κοντά στο μηδέν} \tag{4.62a}$$

δεδομένου ότι

$$x(\nu) \; \in \; S[0, R] \textit{ για κάθε } \nu = n_i, n_i + 1, ..., n_{i+1}, \; i \in \mathbb{N}_0. \tag{4.62b}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι:

$$|x(n)-x(n_i)| \leq \varepsilon Km|x(n_i)|,$$

$$\forall\ n=n_i,n_i+1,...,n_{i+1},\ \varepsilon>0 \text{ κοντά στο μηδέν} \tag{4.63}$$

δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b). Πράγματι, λόγω των (4.3),(4.56a) και (4.56b), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
x(n+1)-x(n) &= \varepsilon f(n,x(n)) \Rightarrow \\
|x(n+1)-x(n)| &= \varepsilon\,|f(n,x(n))-f(n,0)| \\
&\leq \varepsilon L(n)|x(n)|, \forall n:\ n_i \leq n \leq n_{i+1},
\end{aligned}$$

$$\text{δεδομένου ότι } x(n) \in\ S[0,R] \text{ για } n: n_i \leq n \leq n_{i+1}.$$

Τότε έχουμε ακολούθως, λαμβάνοντας υπόψιν την (4.57b) και την τελευταία, ότι:

$$|x(n)-x(n_i)|$$

$$\leq |x(n)-x(n-1)|+|x(n-1)-x(n-2)|+....+|x(n_i+2)-x(n_i+1)|$$

$$+|x(n_i+1)-x(n_i)|$$

$$=\varepsilon\,|f(n-1,x(n-1))|+\varepsilon\,|f(n-2,x(n-2))|+...+\varepsilon\,|f(n_i+1,x(n_1+1))|$$

$$+\varepsilon\,|f(n_i,x(n_i))|$$

$$\leq \varepsilon L(n-1)|x(n-1)|+\varepsilon L(n-2)|x(n-2)|+...+\varepsilon L(n_i+1)|x(n_i+1)|+\varepsilon L(n_i)|x(n_i)|$$

$$\leq \varepsilon\left(L(n-1)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)+L(n-2)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-2}L(\nu)\right)+...\right.$$

$$\left.+L(n_i+1)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_i+1}L(\nu)\right)+L(n_i)\right)|x(n_i)|$$

$$\leq \varepsilon\left(L(n-1)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)+L(n-2)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)+...\right.$$

$$\left.+L(n_i+1)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)+L(n_i)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)\right)|x(n_i)|$$

$$\leq \varepsilon\left(\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)\exp\left(\varepsilon\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n-1}L(\nu)\right)|x(n_i)|$$

$$\textit{για}\ n=n_i+1,n_i+2,...,n_{i+1} \tag{4.64}$$

Από τις (4.57b),(4.61) και (4.64) παίρνουμε την (4.63), η οποία σε συνδυασμό με τις (4.56a),(4.56b),(4.62a) και (4.62b), συνεπάγονται:

$$\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}|f(\varepsilon,\nu,x(\nu))| \leq \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}L(\nu)|x(\nu)|\leq mK\,|x(n_i)| \tag{4.65a}$$

$$\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}|f(\varepsilon,\nu,x(n_i))| \leq \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}L(\nu)|x(n_i)|\leq m\,|x(n_i)| \tag{4.65b}$$

$$\left|\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}\left(f(\varepsilon,\nu,x(\nu))-f(\varepsilon,\nu,x(n_i))\right)\right|$$

$$\leq \varepsilon mK\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1}L(\nu)|x(n_i)|\leq \varepsilon m^2K|x(n_i)| \tag{4.65c}$$

δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b). Τώρα, ορίζουμε:

$$\xi := \frac{C_4}{2C_3(1+\varepsilon m)(1+\varepsilon m C_0)} \tag{4.66}$$

και υποθέτουμε ότι η (4.57e) ισχύει για αυτό το ξ και $N_i := n_i$. Είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι όλες οι υποθέσεις του πρώτου ισχυρισμού της Πρότασης 4.1(i) ικανοποιούνται για επαρκώς μικρό $\varepsilon > 0$, με $V(\cdot)$ όπως ορίστηκε στην B3. Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν οι τροχιές του συστήματος (4.3) ικανοποιούν την (4.10). Πράγματι, εκτιμούμε:

$$V(x(n_{i+1})) - V(x(n_i)) \leq \ \Xi_1(\varepsilon, i) + \Xi_2(\varepsilon, i) + \Xi_3(\varepsilon, i), \ i \in \mathbb{N}_0; \tag{4.67a}$$

$$\Xi_1(\varepsilon, i) := V(x(n_{i+1})) - V\left(x(n_i) + \varepsilon\left(\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i))\right)\right), \tag{4.67b}$$

$$\Xi_2(\varepsilon, i) := V\left(x(n_i) + \varepsilon\left(\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i))\right)\right) - V\left(x(n_i) + \varepsilon T_i f_{av}(x(n_i))\right), \tag{4.67c}$$

$$\Xi_3(\varepsilon, i) := V\left(x(n_i) + \varepsilon T_i f_{av}(x(n_i))\right) - V(x(n_i)) \tag{4.67d}$$

Αρχικά εκτιμούμε ένα άνω φράγμα για την $|\Xi_1(\varepsilon, i)|$. Από την (4.58c) παίρνουμε:

$$|\Xi_1(\varepsilon, i)| \leq C_3 \left| x(n_{i+1}) - \left(x(n_i) + \varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i))\right)\right|$$

$$\times \left(|x(n_{i+1})| + \left| x(n_i) + \varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i)) \right| \right) \tag{4.68}$$

Επίσης για τα συστήματα (4.3) έχουμε ότι

- Για $n = n_i \Rightarrow$

$$x(n_i + 1) = x(n_i) + \varepsilon f(\varepsilon, n_i, x(n_i))$$

- Για $n = n_i + 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x(n_i + 2) &= x(n_i + 1) + \varepsilon f(\varepsilon, n_i + 1, x(n_i + 1)) \\ &= x(n_i) + \varepsilon f(\varepsilon, n_i, x(n_i)) + \varepsilon f(\varepsilon, n_i + 1, x(n_i + 1)) \\ &= x(n_i) + \varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_i+1} f(\varepsilon, \nu, x(\nu)) \end{aligned}$$

- και με επαγωγή

$$x(n_{i+1}) = x(n_i) + \varepsilon \left(\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(\nu)) \right) \tag{4.69}$$

Από τις (4.56b),(4.63),(4.65a)-(4.65c),(4.68) και (4.69) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} |\Xi_1(\varepsilon, i)| &\leq \varepsilon C_3 \left| \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} (f(\varepsilon, \nu, x(\nu)) - f(\varepsilon, \nu, x(n_i))) \right| \\ &\times \left(\left| x(n_i) + \varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(\nu)) \right| + \left| x(n_i) + \varepsilon \sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i)) \right| \right) \\ &\leq \varepsilon^2 C_3 m^3 K \left[(1 + \varepsilon m K) + (1 + \varepsilon m) \right] |x(n_i)|^2 \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται την ύπαρξη μίας σταθεράς $\vartheta > 0$ τέτοιας ώστε

$$|\Xi_1(\varepsilon, i)| \leq \varepsilon^2 \vartheta |x(n_i)|^2,$$

$$\text{για κάθε } i \in \mathbb{N}_0 \text{ μακρυά από το μηδέν,} \tag{4.70}$$

δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b).

Ομοίως, βρίσκουμε ένα άνω φράγμα για την (4.67c). Λόγω των (4.57b),(4.57c), (4.57e),(4.58a),(4.58c), (4.61) και (4.65b) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} |\Xi_2(\varepsilon, i)| &\leq \varepsilon C_3 T_i(x(n_i))\xi|x(n_i)| \\ &\times \left(\left| x(n_i) + \varepsilon \left(\sum_{\nu=n_i}^{\nu=n_{i+1}-1} f(\varepsilon, \nu, x(n_i)) \right) \right| + |x(n_i) + \varepsilon T_i(x(n_i)) f_{av}(x(n_i))| \right) \\ &\leq \varepsilon T_i(x(n_i)) C_3 \xi \left[(1+\varepsilon m) + (1+\varepsilon m C_0) \right] |x(n_i)|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon T_i(x(n_i)) C_4 |x(n_i)|^2 \end{aligned} \tag{4.71}$$

δεδομένου ότι η (4.62b) ισχύει για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$. Τέλος, προκειμένου να πάρουμε μία άνω εκτίμηση για την (4.67d), επικαλούμαστε την (4.57c) και (4.58d), οι οποίες συνεπάγονται ότι

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0^+}} \frac{V\left(x(n_i) + \varepsilon T_i(x(n_i)) f_{av}(x(n_i))\right) - V(x(n_i))}{\varepsilon T_i(x(n_i))} \leq -C_4 |x(n_i)|^2$$

άρα

$$\Xi_3(\varepsilon, i) \leq -\varepsilon T_i(x(n_i)) C_4 |x(n_i)|^2 \tag{4.72}$$

για $\varepsilon > 0$ κοντά στο μηδέν, δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b). Συμπεραίνουμε από τις (4.70), (4.71) και (4.72) ότι

$$V(x(n_{i+1})) - V(x(n_i)) \leq \varepsilon^2 \vartheta |x(n_i)|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon T_i(x(n_i)) C_4 |x(n_i)|^2,$$

$$\varepsilon > 0 \text{ κοντά στο μηδέν}, \ i \in \mathbb{N}_0 \text{ μακρυά απο το μηδέν} \tag{4.73}$$

δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b).

Ακολούθως έχουμε λαμβάνοντας υπόψιν τις (4.57c), (4.58b) και (4.73):

$$V(x(n_{i+1})) - V(x(n_i)) \leq -\sigma_i V(x(n_i)); \tag{4.74a}$$

$$\sigma_i := -\varepsilon^2 \frac{\vartheta}{C_1} + \varepsilon \frac{C_4}{2C_2} c_i \tag{4.74b}$$

δεδομένου ότι ισχύει η (4.62b), για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ μακρυά από το μηδέν, το οποίο αποδεικνύει την ισχύ της (4.10).

Έχουμε επίσης από τον ορισμό της (4.74b) ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{j=i} \sigma_j &= \sum_{j=0}^{j=i} \left(-\varepsilon^2 \frac{\vartheta}{C_1} + \varepsilon \frac{C_4}{2C_2} c_j \right) \\
&= -i\varepsilon^2 \frac{\vartheta}{C_1} + \varepsilon \frac{C_4}{2C_2} \sum_{j=0}^{j=i} c_j \\
&\geq -(i+1)\varepsilon^2 \frac{\vartheta}{C_1} + \varepsilon \frac{C_4}{2C_2} \sum_{j=0}^{j=i} c_j \\
&= i \left(-\frac{i+1}{i} \varepsilon^2 \frac{\vartheta}{C_1} + \varepsilon \frac{C_4}{2C_2} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{j=i} c_j \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

το οποίο λόγω της (4.57d) εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας σταθεράς $\varepsilon^* > 0$ επαρκώς μικρής, έτσι ώστε να ισχύει και η (4.8a). Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι υπόλοιπες υποθέσεις των A1 και A′2 επίσης ικανοποιούνται, άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1(i), το (4.3) είναι AS για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. Η απόδειξη του ισχυρισμού (ii) είναι παρεμφερής με την διαδικασία παραπάνω, κάνοντας κάποιες επιπλέον στοιχειώδεις τροποποιήσεις, και για αυτό τον λόγο αφήνεται στον αναγνώστη. □

Βιβλιογραφία

[1] D.Aeyels, *Asymptotic stability of nonautonomous systems by Liapunov's direct method.* Systems Control Lett., 1995, 25, 273-280.

[2] D.Aeyels and J.Peuteman, *A new asymptotic stability criterion for nonlinear time-variant differential equations*, IEEE Trans. on Automatic Control, 1998, 43, 968-971.

[3] D.Aeyels and J.Peuteman, *On exponential stability of nonlinear time-varying differential equations*, Automatica 1999, 35, 1091-1100.

[4] D. Aeyels and R. Sepulchre, *On the convergence of a time-variant linear differential equation arising in identification*, Kybernetika 1998, 30, 715-723.

[5] B.D.O.Anderson, R.R.Bitmead, C.R.Johnson, Jr,P.V.Kokotovic, R.L.Kosut, I.M.Y.Mareels, L.Praly and B.D.Riedle, *Stability of Adaptive Systems: Passivity and Averaging Analysis,* MIT Press, Cambridge, MA, 1986.

[6] D.Angeli and D.Nesic, *A trajectory-based approach for the stability robustness of nonlinear systems with inputs*, Math.Control Signals Systems, 2002, 15, 336-355.

[7] V.I.Arnold *Ordinary Differential Equations* The MIT Press 1978.

[8] E.W. Bai, L.C.Fu, and S.S.Sastry, *Averaging Analysis for Discrete Time Sampled Data Adaptive Systems,* IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1988, 35, 137-146.

[9] M. Bodson, S. Sastry, B. D. O. Anderson, I. Mareels and R. R. Bitmead, *Nonlinear averaging theorems, and the determination of parameter convergence rates in adaptive control,* Systems and Control Letters, 1986, 7, 145-157.

[10] F.Brauer and J.A.Nohel *The qualitative theory of ordinary differential equations: An introduction* Dover 1989.

[11] L.C.Fu, E.W.Bai, and S.S.Sastry, *Averaging Analysis for discrete time sampled data adaptive Systems,* Proceedings of 25th Conference on Decision and Control, Athens, Greece, December 1985.

[12] E.I.Grotli, A.Chaillet, E.Panteley and J.T.Gravdahl, *Robustness of ISS systems to inputs with limited moving average, with application to spacecraft formations,* Int. J. Robust Nonlinear Control, 2000, 00, 1-6.

[13] A.Halanay and V Râsvan *Stability and Stable Oscillations in Discrete Time Systems* Gordon and Breach Science Publishers.

[14] W.M.Haddad and V.Chellaboina *Nonlinear Dynamical Systems and Control,* Princeton University Press 2008.

[15] I.Karafyllis, C.Kravaris, *Non-uniform in time estimation of dynamical systems*, Systems and Control Lett., 2008.

[16] I.Karafyllis, J.Tsinias, *ISS property for time-varying systems and application to partial-static feedback stabilization and asymptotic tracking,* IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, 49, 2179-2184.

[17] I.Karafyllis, J.Tsinias, *A converse Lyapunov theorem for nonuniform in time global asymptotic stability and its application to feedback stabilization*, SIAM J. Control Opt., 2003, 42, 936-965.

[18] I.Karafyllis, J.Tsinias, *Non–uniform in time stabilization for linear systems and tracking control for nonholonomic systems in chained form*, Int.J.of Control, 2003, 76, 15, 1536–1546.

[19] I.Karafyllis, J.Tsinias, *Non–uniform in time input to state stability and the small gain theorem,* IEEE Trans. on Automatic Control, 2004, 49, 196-216.

[20] I.Karafyllis, J.Tsinias, *Control Lyapunov functions and stabilization by means of continuous time-varying feedback*, ESAIM-COCV, 2008, 3, 599-625.

[21] H.K.Khalil, *Nonlinear Systems*, 2nd Edition, Prentice-Hall, Cliffs, NJ, 1996.

[22] R.L.Kosut, B.D.O.Anderson, and I.Mareels, *Stability theory for adaptive systems: Methods of averaging and persistency of excitation,* Research paper (Feb. 1985).

[23] L.C.Fu, M.Bodson and S.Sastry, *New stability theorems for averaging and their application to the convergence analysis of adaptive identification and control schemes,* Memorandum no. UCB/ERL M85/21, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley (March 1985).

[24] Y.Lin, E.D.Sontag and Y.Wang, *A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability*, SIAM J. Control Opt., 1996, 34, 124-160.

[25] F.Mazenc, M.Malisoff and M.S.Queiroz, *Further results on strict Lyapunov functions for rapidly time-varying nonlinear systems*, Automatica, 2006, 42,1663-1671.

[26] F.Mazenc and M.Malisoff, *Further results on Lyapunov functions for slowly time-varying systems*, Math. Control Signals Systems 2007, 19, 1-21.

[27] K.S.Narendra and A. M.Annaswamy, *Persistent excitation in adaptive systems*, Int. J. Control, 1987, 45 127-160.

[28] D.Nešič and A. R. Teel, *Input - to - state stability for nonlinear time-varying systems via averaging*, Math. Control Signals Systems 2001,14, 257-280.

[29] J.Peuteman and D.Aeyels, *Averaging Results and the study of uniform asymptotic stability of homogeneous differential equations that are not fast time varying*, SIAM J.Control Opt., 1999, 38, 997-1010.

[30] J.Peuteman and D.Aeyels, *Exponential stability of nonlinear time varying differential equations and partial averaging*, Math. Control Signals Systems, 2002, 15, 42-70.

[31] J. Peuteman and D. Aeyels, Exponential stability of partially slowly time-varying nonlinear systems, Math. Control Signals Systems, 2002, 15, 202-228.

[32] S.Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control,* Springer New York 1999.

[33] V.Solo, *On the stability of slowly time-varying linear systems,* MAth. Control Signals Systems, 1994, 7, 331-350.

[34] A.Stamati and J.Tsinias, *A Sufficient Condition for Asymptotic Stability for a Class of Time-Varying Parameterized Systems*, submitted to Systems and Control Letters

[35] A.Stamati and J.Tsinias, *Sufficient Conditions for Local Asymptotic Stability and Stabilization for Discrete-Time Varying Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, 2011, 56, 643-649.

[36] A.R.Teel and D.Nešič, *Averaging with disturbances and closeness of solutions*, Systems and Control Lett., 2000, 40, 317-323.

[37] A.R.Teel, J.Peuteman, D.Aeyels, *Semi-global practical asymptotic stability and averaging, Systems and Control Letters*, 1999, 37, 329-334.

[38] J.Tsinias, *A converse Lyapunov theorem for non-uniform in time, global exponential robust stability*, Systems and Control Lett., 2001, 44, 373-384.

[39] J.Tsinias, *Time-varying observers for a class of nonlinear systems*, Systems and Control Lett., 2008. 57, 1037-1047.

[40] J.Tsinias, *Stabilizability of Discrete-Time Nonlinear Systems,* IMA J. of Math. Control and Inf., 1989, 135-150.

[41] J.Tsinias, A.Stamati, *Local Asymptotic Stability via Averaging for Time-Varying Systems with Unbounded Dynamics with respect to time,* IEEE Trans. on Automatic Control, 2009, 54, 1374-1381.

[42] M.Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1993.

[43] V.I.Vorotnikov, *Partial Stability and Control,* Birkhauser, 1998.