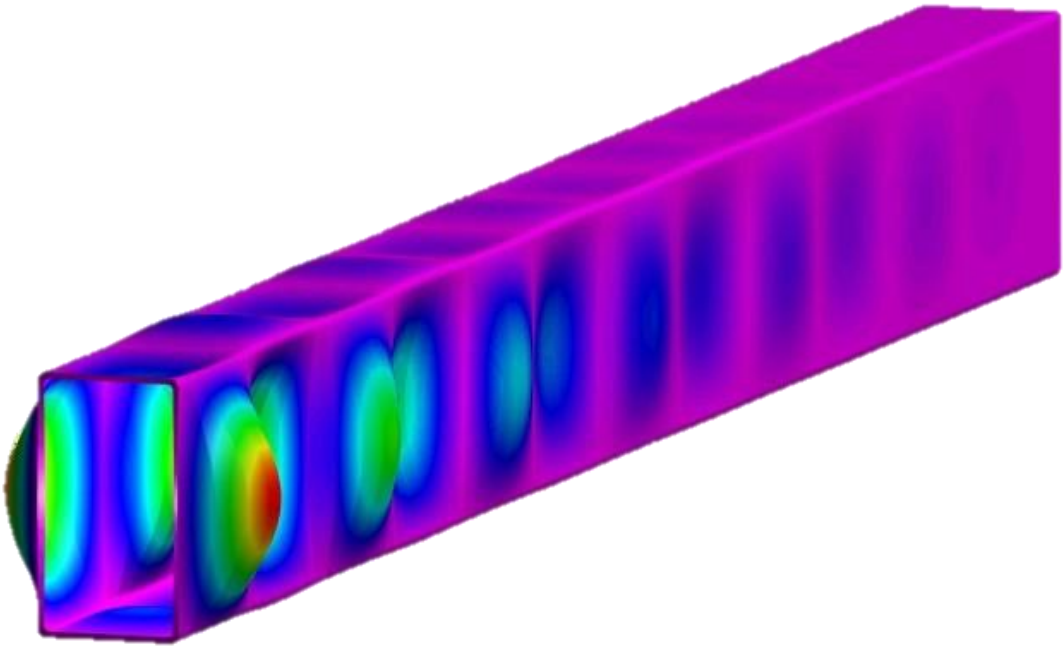
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Τομέας Δομοστατικής
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

Τοπικός Λυγισμός Δοκών με Χρήση Θεωριών Ανώτερης Τάξης



Διπλωματική Εργασία

Φλωράκης Γεώργιος

Επιβλέπων: Καθηγητής Ευάγγελος Σαπουντζάκης
Συνεπιβλέπουσα: Υποψήφια Διδάκτωρ Αμαλία Αργυρίδη

Αθήνα, Νοέμβριος 2018

Γεώργιος Φλωράκης (2018)

Τοπικός λυγισμός λυγισμός δοκών με χρήση θεωριών ανώτερης τάξης

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

George Florakis (2018)

Local buckling analysis of beams according to higher order theories

Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research, National Technical University of Athens, Greece

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας την διπλωματική μου εργασία και τον κύκλο των προπτυχιακών σπουδών μου θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συνέβαλαν στην προσπάθειά μου.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της εργασίας μου, καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, κ. Ευάγγελο Σαπουνζτάκη, για την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος θέματος, αλλά και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά την εκπόνησή του.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να εκφράσω προς την υποψήφια διδάκτωρ Αμαλία Αργυρίδη, για την άριστη συνεργασίας μας, αλλά και για τις γνώσεις και συμβουλές που μου προσέφερε σε κάθε στάδιο της εργασίας, πάντα με προθυμία και ενθουσιασμό.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την αμέριστη συμπαράσταση και υποστήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

στην οικογένειά μου

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τοπικός λυγισμός δοκών με χρήση θεωριών ανώτερης τάξης

Γεώργιος Φλωράκης

Επιβλέπων: Καθηγητής Ευάγγελος Σαπουντζάκης
Συνεπιβλέπουσα: Υποψήφια Διδάκτωρ Αμαλία Αργυρίδη
Νοέμβριος 2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στις περισσότερες περιπτώσεις ανάλυσης κατασκευών με χρήση στοιχείων δοκού, χρησιμοποιείται η θεωρία δοκού Euler – Bernoulli, ενώ στην περίπτωση που η επίδραση της διατμητικής παραμόρφωσης δεν μπορεί να αμεληθεί, εφαρμόζεται η θεωρία δοκού Timoshenko. Ωστόσο και οι δύο αυτές θεωρίες βασίζονται στις παραδοχές ότι οι διατομές παραμένουν επίπεδες (δεν υπάρχει εκτός επιπέδου παραμόρφωση) και ότι το σχήμα της διατομής δεν αλλάζει κατά την παραμόρφωση (δεν υπάρχει εντός επιπέδου παραμόρφωση). Προκειμένου να ληφθούν υπόψη φαινόμενα στρέβλωσης στα πλαίσια της θεωρίας δοκού, η μη ομοιόμορφη στρέβλωση πρέπει να συμπεριληφθεί στην ανάλυση, καταργώντας την παραδοχή περί επιπεδότητας της διατομής. Η ροή διατμητικών τάσεων σε συνδυασμό με την ανομοιόμορφη στρέβλωση, οδηγεί επίσης σε εντός επιπέδου παραμόρφωση της διατομής, καταργώντας και την παραδοχή περί διατήρησης του σχημάτός της μετά την παραμόρφωση. Για τον σκοπό αυτό, στην παρούσα διπλωματική, μια θεωρία δοκού ανώτερης τάξης εφαρμόζεται, συγκεκριμένα για την ανάλυση τοπικού λυγισμού δοκών ομογενούς διατομής, λαμβάνοντας υπόψη τα φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, σύμφωνα με την αξονική, διατμητική, καμπτική και στρεπτική συμπεριφορά τους. Η ανάλυση γίνεται σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων, γίνεται ανάλυση σε επίπεδο διατομής, βασιζόμενη στο σχήμα διαδοχικής ισορροπίας και έτσι καθορίζονται οι πιθανές μορφές της εντός (διαστρέβλωση) και εκτός (στρέβλωση) επιπέδου παραμόρφωσης της διατομής. Στο δεύτερο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, οι προκύπτουσες μορφές συμπεριλαμβάνονται στην ανάλυση λυγισμού πολλαπλασιαζόμενες με αντίστοιχες ανεξάρτητες παραμέτρους εκφράζοντας την συμμετοχή τους στην τελική παραμόρφωση της δοκού. Οι τέσσερις μετατοπίσεις στερεού σώματος της διατομής μαζί με τις προαναφερθείσες ανεξάρτητες παραμέτρους αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας της δοκού. Οι εξισώσεις κάθε πεπερασμένου στοιχείου μορφώνονται σε αντιστοιχία με αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις υπολογίζονται για μεταλλικά μέλη επιρρεπή σε φαινόμενα τοπικού λυγισμού σύνφωνα με τον EC3 και συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από τις θεωρίες δοκού Euler-Bernoulli και Timoshenko. Επίσης συγκρίνοται και με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αναλύσεις τρισιδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, προκειμένου να αποδειχθεί η αποτελεσματικότητα και η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS

Local buckling analysis of beams according to higher order theories

George Florakis

Supervisor: Professor Evangelos Sapountzakis
Co-supervisor: Amalia Argyridi, Ph.D. Candidate
November 2018

ABSTRACT

In most cases in the analysis of beam-like structures, Euler – Bernoulli beam theory assumptions are adopted, while in the case of non-negligible shear deformation effect, these assumptions are relaxed by using Timoshenko beam theory. However, both theories maintain the assumptions that plane cross-sections remain plane (no out-of-plane deformation) and that their shape does not change after deformation (no in-plane deformation). In order to take into account warping effects in the context of a beam theory, the inclusion of non-uniform warping is necessary, relaxing the assumption of plane cross-section. The shear flow associated with non-uniform warping leads also to in-plane deformation of the cross-section, relaxing the assumption that the cross-section shape does not change after deformation. For this purpose, in this thesis, a higher order beam theory is employed for local buckling analysis of beams of homogeneous cross-section, taking into account warping and distortional phenomena due to axial, shear, flexural, and torsional behavior. The analysis consists of two stages. In the first stage, where the Boundary Element Method is employed, a cross sectional analysis is performed based on the so-called sequential equilibrium scheme establishing the possible in-plane (distortion) and out-of-plane (warping) deformation patterns of the cross- section. In the second stage, where the Finite Element Method is employed, the extracted deformation patterns are included in the buckling analysis multiplied by respective independent parameters expressing their contribution to the beam deformation. The four rigid body displacements of the cross-section together with the aforementioned independent parameters consist the degrees of freedom of the beam. The finite element equations are formulated with respect to the aforementioned degrees of freedom. The buckling loads and modeshapes are calculated for steel profiles vulnerable to local buckling according to EC3 and are compared with those resuling from Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. They are also compared with 3d solid analysis results demonstrating the efficiency and accuracy of the proposed method.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

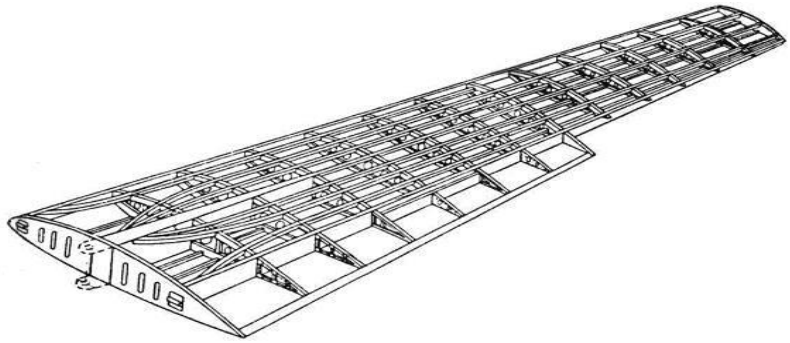
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά Στοιχεία

Η συντριπτική πλειοψηφία των κατασκευών που περιλαμβάνουν από έργα πολιτικού μηχανικού (κτίρια, γέφυρες, κλπ.) έως εφαρμογές ναυπηγικής και αεροναυπηγικής (σκελετοί πλοίων, πτερύγια αεροσκαφών, κλπ.) σχεδιάζεται περιλαμβάνοντας δομικά στοιχεία που ονομάζονται *δοκοί*. Με τον όρο *στοιχείο δοκού* αναφερόμαστε στα δομικά μέλη των οποίων η μία διάσταση (διαμήκης διάσταση) είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες (εγκάρσιες διαστάσεις), οι οποίες ορίζουν και το επίπεδο της διατομής. Η ιδιαίτερη αυτή γεωμετρική διαμόρφωση επιτρέπει την προσομοίωση των μελών αυτών ως μονοδιάστατα στοιχεία.

Σχήμα 1.1-1: Δικτύωμα γέφυρας

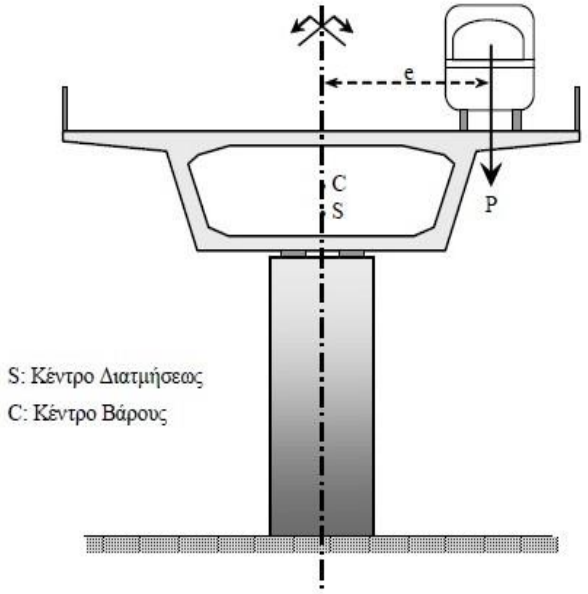


Σχήμα 1.1-2: Πτερύγιο αεροσκάφους

Με την πάροδο των ετών σημαντικές ερευνητικές προσπάθειες έχουν διεξαχθεί σχετικά με την ανάλυση δοκών, οι οποίες έχουν καταστήσει δυνατή την κατανόηση των βασικών μηχανισμών αντίστασης των ραβδωτών φορέων στις εξωτερικά επιβαλλόμενες δράσεις. Παρ'όλα αυτά, εκτός από τους πρωτογενείς μηχανισμούς ανάληψης εξωτερικών δράσεων (εφελκυσμός-θλίψη, κάμψη, διάτμηση και στρέψη), ανώτερα φαινόμενα όπως η *ανομοιόμορφη στρέψη, η διατμητική υστέρηση* και η *διαστρέβλωση* (παραμορφωσιμότητα της διατομής – distortion) δεν έχουν μέχρι στιγμής μελετηθεί διεξοδικά. Το γεγονός αυτό αντικατοπτρίζεται και στους κατασκευαστικούς κανονισμούς για το σχεδιασμό τεχνικών έργων (π.χ. EC). Οι σχετικές οδηγίες δεν προτείνουν συγκεκριμένες μεθοδολογίες προσομοίωσης για τα προαναφερθέντα φαινόμενα, ενώ η προτεινόμενη ανάλυση περιορίζεται στα όρια της γραμμικής ελαστικής συμπεριφοράς. Τα φαινόνενα αυτά περιγράφονται αναλυτικότερα στις επόμενες ενότητες.

1.1.1 Ανομοιόμορφη Στρέψη

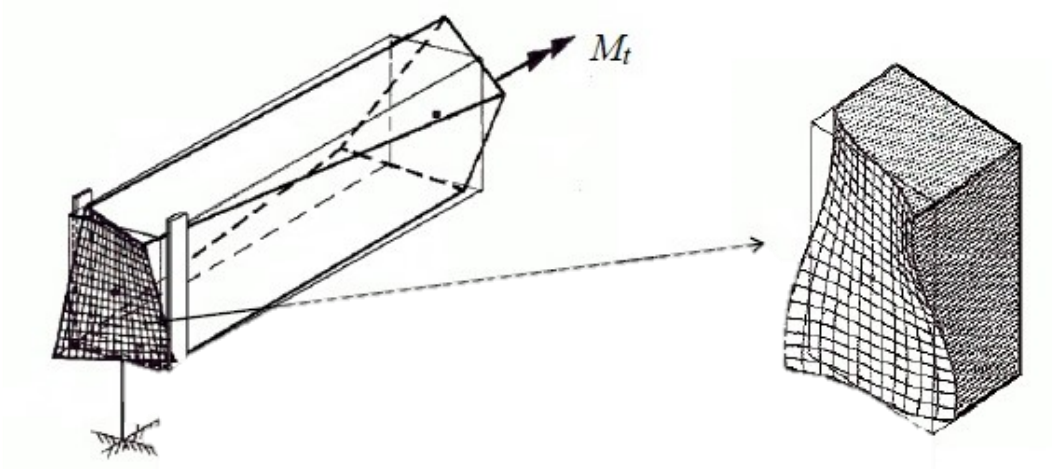
Στρέψη δοκού καλείται η φόρτιση εκείνη κατά την οποία ένα ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε μια διατομή, έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονά της και το ελεύθερο διάνυσμα της ροπής *Mt* του ζεύγους να έχει τη διεύθυνση του άξονά της. Η στρέψη στα ραβδωτά στοιχεία φορέων εμφανίζεται στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το επίπεδο της εξωτερικής φόρτισης δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης *S* (Σχήμα 1.1.1-1), με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις προκαλώντας στρέβλωση των διατομών τους.



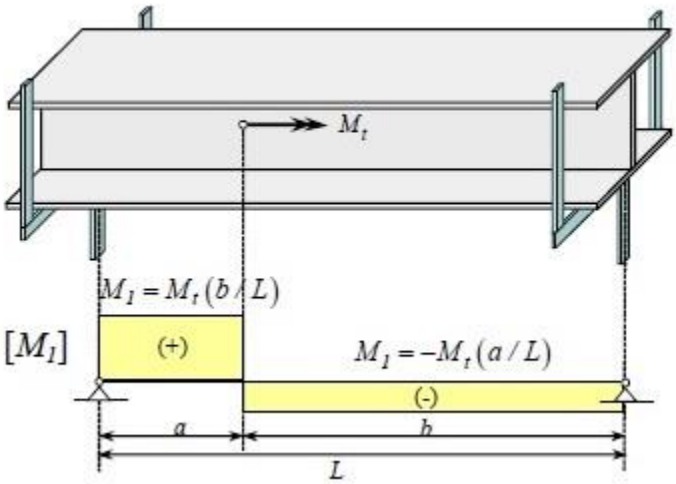
Σχήμα 1.1.1-1: Ράβδος κιβωτοειδούς μορφής υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διάτμησης φόρτιση

Η στρέψη στις δοκούς χωρίζεται σε ομοιόμορφη (ανεμπόδιστη στρέψη Saint Venant) διότι η στρέβλωση της διατομής μπορεί να αναπτυχθεί ανεμπόδιστα και σε ανομοιόμορφη (παρεμποδιζόμενη) με δυνάμεις στρέβλωσης (Σχήμα 1.1.1-2 και Σχήμα 1.1.1-3). Η ανομοιόμορφη στρέψη αναπτύσσεται στην περίπτωση στρεπτικά καταπονούμενης δοκού, κατά την οποία οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση παρεμποδίζονται λόγω φόρτισης ή συνθηκών στήριξης (παρεμποδιζόμενη στρέβλωση διατομής από μετωπική εγκάρσια νεύρωση), με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ορθές τάσεις οι οποίες είναι ανάλογες της στρέβλωσης και συνεπώς μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονά της.

Το πεδίο εφαρμογής ομοιόμορφης στρέψης είναι αρκετά περιορισμένο καθώς επιβάλλει περιορισμούς τόσο στις συνθήκες στήριξης της δοκού όσο και στη φόρτισή της, η οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε η στρεπτική ροπή M_t να είναι σταθερή σε κάθε διατομή της. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί εύκολα στην αναγκαιότητα διερεύνησης και ένταξης του φαινομένου της ανομοιόμορφης στρέψης στις σύγχρονες μεθόδους ανάλυσης των κατασκευών.



Σχήμα 1.1.1-2: Ανεμπόδιστη στρέβλωση δοκού



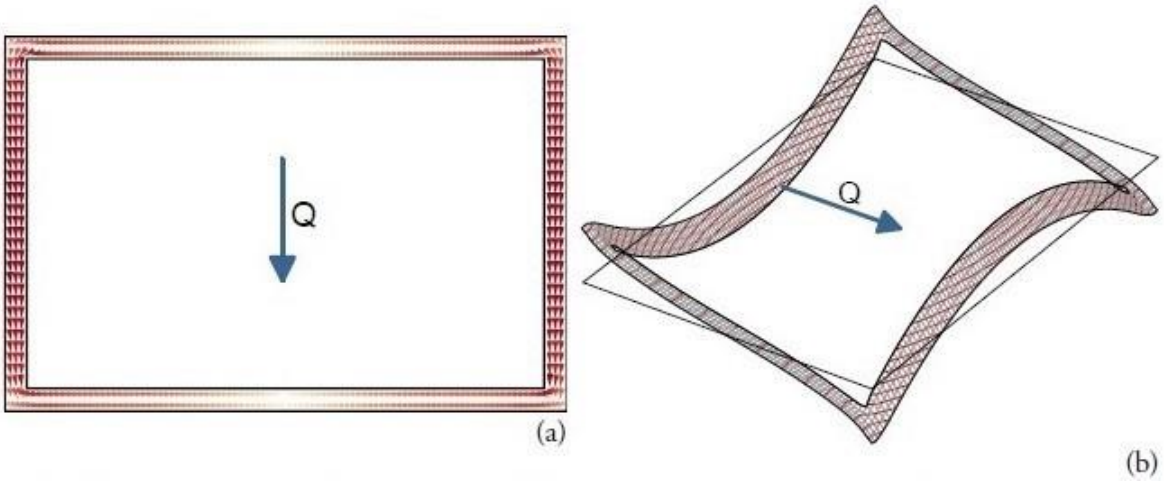
Σχήμα 1.1.1-3: Παρεμποδιζόμενη στρέβλωση δοκού

1.1.2 Διατμητική Υστέρηση

Η *διατμητική υστέρηση* κατά την καμπτική/διατμητική καταπόνηση δοκών αποτελεί ένα σημαντικό φαινόμενο, το οποίο έχει παρατηρηθεί πριν αρκετές δεκαετίες σε κιβωτιοειδείς και πτυχωτούς φορείς. Η παρουσία διατμητικών δυνάμεων (κάμψη με τέμνουσα) στις διατομές της δοκού οδηγούν στην ανάπτυξη διατμητικών τάσεων και παραμορφώσεων στο επίπεδο της διατομής. Η εν γένει ανομοιόμορφη κατανομή των παραμορφώσεων αυτών οδηγεί στην απώλεια επιπεδότητας της διατομής (Σχήμα 1.1.2-1). Στην περίπτωση που η αναπτυσσόμενη τέμνουσα δεν είναι σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού, αυτή η στρέβλωση γίνεται ανομοιόμορφη με αποτέλεσμα η κατανομή των ορθών τάσεων που καταπονούν τη διατομή να αποκλίνει σημαντικά από τη γνωστή τριγωνική κατανομή που προκύπτει από τις κλασικές θεωρίες κάμψης δοκού. Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν επίσης να γίνουν και για το πρόβλημα της στρέψης όπου *στρεπτική διατμητική υστέρηση* μπορεί επίσης να αναπτυχθεί οδηγώντας στην τροποποίηση της αρχικής κατανομής ορθών τάσεων (λόγω πρωτογενούς στρεπτικής στρέβλωσης) μέσω ανάπτυξης δευτερογενούς στρέβλωσης.

Στα πλαίσια των σύγχρονων κανονισμών για κατασκευές Πολιτικού Μηχανικού, η επιρροή του ως άνω φαινομένου συνιστάται να λαμβάνεται υπόψη μέσω της απλοποιητικής θεώρησης του «*ισοδύναμου πλάτους*» (Eurocode 3 part 1.5, Eurocode 4 parts 1.1, 2). Παρ' όλα αυτά, η απλοποιητική αυτή προσέγγιση, ενδέχεται να μην αποδίδει σωστά την πραγματική συμπεριφορά του φορέα, καθώς η επιρροή της διατμητικής υστέρησης εν γένει δεν είναι σταθερή σε όλο το μήκος της δοκού, ενώ εξαρτάται από τη μορφή της διατομής καθώς και από τη μορφή της εξωτερικής φόρτισης.

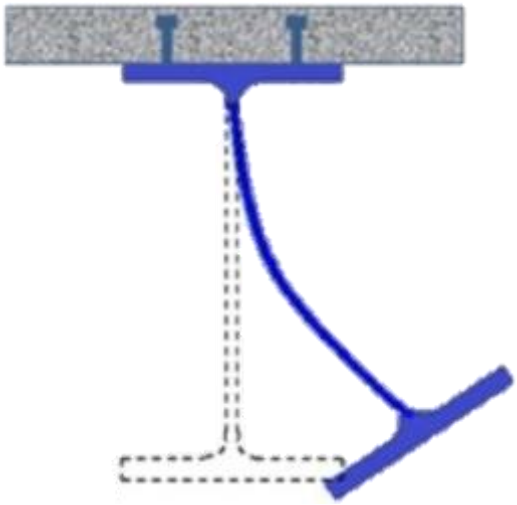
Αρκετές ερευνητικές προσπάθειες έχουν γίνει για την ανάλυση του φαινομένου της διατμητικής υστέρησης. Πρόσφατα έχουν χρησιμοποιηθεί πιο εξελιγμένα προσομοιώματα που βασίζονται στη χρήση κελυφωτών ή τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Lee et al. 2002, Sanguanmanasak et al. 2007, Gupta et al. 2010). Παρ' όλα αυτά, είναι γεγονός ότι τα παραπάνω προσομοιώματα αυξάνουν σημαντικά την πολυπλοκότητα της ανάλυσης και τις υπολογιστικές απαιτήσεις.



Σχήμα 1.1.2-1: Κατανομή διατμητικών τάσεων σε κοίλη ορθογωνική διατομή λόγω της τέμνουσας Q (a) και η αντίστοιχη αναπτυσσόμενη στρέβλωση (b)

1.1.3 Διαστρέβλωση

Το φαινόμενο *διαστρέβλωσης* (distortion) αναφέρεται στην μεταβολή του σχήματος της διατομής της δοκού (Σχήμα 1.1.3-1) και αρχικά μελετήθηκε σε δοκούς κιβωτιοειδούς διατομής που υποβάλλονται σε στρεπτική φόρτιση. Η παραμόρφωση της διατομής είναι αξιοσημείωτη, σε λεπτότοιχες διατομές όπου η εγκάρσια στιβαρότητα των τοιχωμάτων δεν είναι σημαντική. Στην μελετητική πρακτική, συνήθως γίνονται προσπάθειες για την μείωση της επιρροής του ως άνω φαινομένου στη συνολική απόκριση του φορέα με την τοποθέτηση διαφραγμάτων σε τακτά διαστήματα κατά μήκος των μελών. Εκτός του γεγονότος ότι η αναστολή του φαινομένου δεν είναι πάντα εφικτή, η τοποθέτηση διαφραγμάτων ενδέχεται να είναι υπεύθυνη για την ανάπτυξη πρόσθετης έντασης λόγω παρεμπόδισης των παραμορφώσεων.

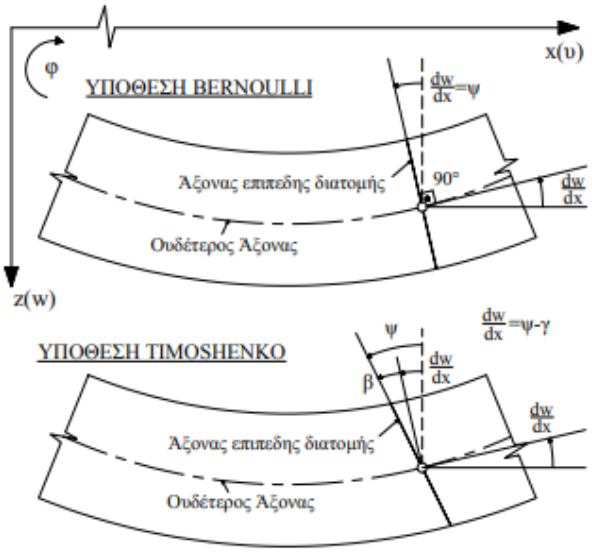


Σχήμα 1.1.3-1: Διαστρέβλωση κορμού σύμμικτης δοκού

Οι ως άνω διαπιστώσεις ενισχύονται και από τις σύγχρονες τάσεις σχεδιασμού. Η επιδίωξη πιο οικονομικών αλλά και αισθητικά αναβαθμισμένων κατασκευών συχνά οδηγεί στην μόρφωση λυγηρών και γεωμετρικά πολύπλοκων φορέων, οι οποίοι είναι ιδιαιτέρως ευαίσθητοι στα παραπάνω φαινόμενα. Σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. προεντεταμένες δοκοί, μέλη ευαίσθητα σε κόπωση και ερπυσμό, φορείς όπου η διαρροή δεν είναι επιθυμητή, σύμμικτες δοκοί, δοκοί από υλικά με μικρή αντοχή σε διάτμηση, κλπ.) ο ακριβής προσδιορισμός της εντατικής κατάστασης μέσα στο εύρος της ελαστικής συμπεριφοράς είναι θεμελιώδους σημασίας για τον ορθό σχεδιασμό των μελών.

1.2 Κλασικές Θεωρίες Δοκού και Θεωρίες Δοκού Ανώτερης Τάξης

Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων ανάλυσης φορέων με τη χρήση στοιχείων δοκού, υιοθετείται η παραδοχή της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli σύμφωνα με την οποία οι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες και κάθετες ως προς τον διαμήκη άξονα μετά την κάμψη τους. Αυτή η παραδοχή υποδηλώνει ότι όλες οι διατμητικές τάσεις είναι μηδέν. Όταν η διατμητική παραμόρφωση δεν είναι αμελητέα τότε χρησιμοποιείται η θεωρία δοκού που είναι γνωστή ως θεωρία Timoshenko κατά την οποία πάλι οι διατομές, υπό κάμψη, παραμένουν επίπεδες με την διαφορά ότι καταργείται η καθετότητά τους ως προς τον διαμήκη άξονα (Σχήμα 1.2-1). Σημειώνεται ότι και στις δυο θεωρήσεις που αναφέρθηκαν το σχήμα της διατομής δεν αλλάζει μετά την παραμόρφωση (δεν υπάρχει εντός επιπέδου παραμόρφωση). Οι θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko είναι οι κλασικές θεωρίες κάμψης δοκού.



Σχήμα 1.2-1: Κλασικές Θεωρίες Δοκού Κάμψης

Διατηρώντας αυτές τις παραδοχές η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας παραμένει απλή. Παρόλα αυτά, δεν είναι δυνατό να ληφθούν υπόψη τα φαινόμενα της ανομοιόμορφης στρέβλωσης, διατμητικής υστέρησης και διαστρέβλωσης που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Για αυτό το λόγο οι λεγόμενες *Θεωρίες Δοκού Ανώτερης Τάξης (Higher Order Beam Thoeries-HOBT)* έχουν αναπτυχθεί λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω φαινόμενα, των οποίων η μελέτη είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την αναβάθμιση και βελτιστοποίηση των σύγχρονων τάσεων σχεδιασμού.

Οι *Θεωρίες Δοκού Ανώτερης Τάξης* εμφανίζουν και πολλά πλεονεκτήματα συγκρινόμενες με προσομοιώματα τρισδιάστατης ελαστικότητας, κυριότερα εκ των οποίων είναι:

i. έχουν σημαντικά μικρότερες υπολογιστικές απαιτήσεις και είναι πρακτικά στη χρήση τους
ii. βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση και διευρεύνηση των δομικών φαινομένων, τα οποία μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα
iii. λόγω της εύκολης παραμετροποίησης όλων των απαραίτητων δεδομένων, είναι καταλληλότερα για παραμετρικές αναλύσεις σε σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις, οι οποίες στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτούν την κατασκευή πολλαπλών προσομοιωμάτων
iv. παρέχουν αποτελέσματα υψηλότατης ακρίβειας, με μικρό υπολογιστικό κόστος, αφού απαιτούν σαφώς λιγότερους βαθμούς ελευθερίας σε σχέση με τις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων
v. έχουν εφαρμογή ακόμα και σε διατομές τυχαίας μορφής
vi. δίνουν τη δυνατότητα εύκολης προσομοίωσης των στηρίξεων και των εξωτερικών φορτίσεων.

1.3 Αντικείμενο παρούσας εργασίας

Η επεξήγηση των εννοιών και των φαινομένων που περιγράφηκαν στις προηγούμενες ενότητες είναι απαραίτητη για την κατανόηση του αντικειμένου της παρούσας διπλωματικής, το οποίο είναι η μελέτη τοπικού λυγισμού λεπτότοιχων ράβδων με χρήση Θεωρίας Δοκού Ανώτερης Τάξης (HOBT).

Επιλέχθηκε να γίνει μελέτη των συγκεκριμένων μελών διότι η χρήση ραβδωτών φορέων με λεπτότοιχες διατομές συναντάται όλο και συχνότερα σε όλων των ειδών τις μεταλλικές κατασκευές τόσο για λόγους λειτουργικούς όσο και για οικονομικούς αλλά και αισθητικούς. Η αναβάθμιση και βελτιστοποίηση των κατασκευών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση της ακριβούς συμπεριφοράς τους. Για το λόγο αυτό στην ανάλυση τους γενικά, θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται τα φαινόμενα ανώτερης τάξης (ανομοιόμορφη στρέβλωση, διατμητική υστέρηση, διαστρέβλωση) αλλά και να εξετάζονται εντατικές και παραμορφωσιακές καταστάσεις στις οποίες αυτά είναι περισσότερο επιρρεπή. Μια από αυτές τις καταστάσεις είναι ο τοπικός λυγισμός, ο οποίος σε περιπτώσεις θλιπτικής και καμπτικής τους καταπόνησης είναι κρίσιμος λόγω της λεπτότητας των τοιχωμάτων τους.

Στην παρούσα εργασία συγκεκριμένα εξετάζονται προβλήματα δοκών ομογενούς διατομής και λαμβάνονται υπόψιν τα φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που προκαλούνται από αξονική, διατμητική, καμπτική και στρεπτική φόρτιση. Οι δοκοί υποβάλλονται σε αξονική και καμπτική καταπόνηση και δεσμεύονται με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Η ανάλυση χωρίζεται σε δύο στάδια.

Στο πρώτο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method-BEM), πραγματοποιείται ανάλυση στο επίπεδο της διατομής και παράγονται συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης. Οι συναρτήσεις αυτές προκύπτουν από την επίλυση

ισάριθμων δισδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών και μέσω της διατύπωσης ενός επαναληπτικού σχήματος ισορροπίας στο χωρίο της διατομής. Το σχήμα αυτό παράγεται χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας της θεωρίας τρισδιάστατης ελαστικότητας. Οι λύσεις αυτού του επαναληπτικού σχήματος δίνουν τις πιθανές μορφές της εντός και εκτός επιπέδου παραμόρφωσης.

Στο δεύτερο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method) οι συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που έχουν προκύψει πολλαπλασιάζονται με αντίστοιχες ανεξάρτητες παραμέτρους έτσι ώστε οι μορφές παραμόρφωσης που προαναφέρθηκαν, να συμπεριλήφθούν στην ανάλυση λυγισμού και να συμμετάσχουν στην κατά μήκος παραμόρφωση των δοκών. Οι τέσσερις μετατοπίσεις στερεού σώματος (οριζόντιες μετατοπίσεις κατά x,y,z και στροφή πέρι τον διαμήκη άξονα) μαζί με τις ανεξάρτητες παραμέτρους αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας της κάθε δοκού.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν μέσω της χρήσης προσομοιωμάτων Στερεών Πεπερασμένων Στοιχείων (Solid Finite Element Method-Solid FEM) προκειμένου να διερευνηθεί και να διαπιστωθεί η αποτελεσματικότητα και η ακρίβεια της εξεταζόμενης μεθόδου.

1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Το υπόλοιπο της διπλωματικής εργασίας είναι διαρθρωμένο σε τέσσερα κεφάλαια.

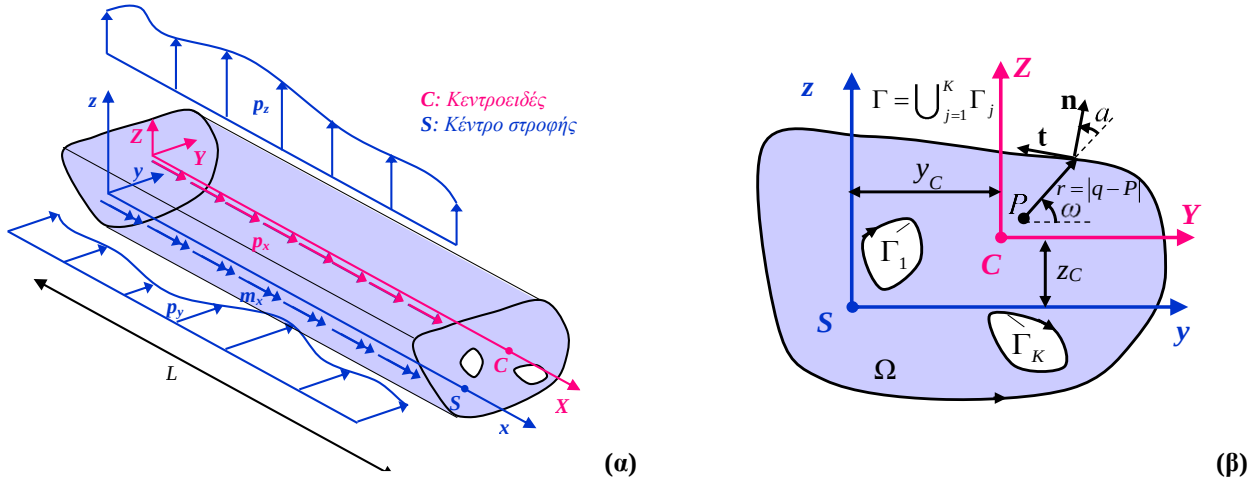
- Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται περιγραφή του εξεταζόμενου προβλήματος, το οποίο είναι βασισμένο στη θεωρία δοκού ανώτερης τάξης. Γίνεται αναλυτική περιγραφή του πεδίου των μετακινήσεων και των τάσεων που διέπουν το πρόβλημα και αξιοποιώντας στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας και της αρχής δυνατών έργων γίνεται υπολογισμός των καμπτικών, στρεπτικών και αξονικών μορφών παραμόρφωσης.
- Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθείται για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος και τον τελικό υπολογισμό των μητρώων στιβαρότητας των στοιχείων καθώς επίσης και των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης της διατομής.
- Στο Κεφάλαιο 4 παρατίθενται οι αριθμητικές εφαρμογές που εξετάστηκαν. Στο πλαίσιο των αριθμητικών εφαρμογών έγινε χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, της θεωρίας δοκού Timoshenko, της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli ενώ έγινε και χρήση της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Κατόπιν έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων της κάθε μεθόδου.
- Στο Κεφάλαιο 5 παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις αριθμητικές εφαρμογές του κεφαλαίου 4 και κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Συνιστώσες μετατοπίσεων γραμμικής ανάλυσης

Θεωρείται πρισματική ράβδος μήκους L (Σχήμα 2α), διατομής τυχόντος σχήματος και εμβαδού A. Η διατομή αποτελείται από ομογενές υλικό με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο Poisson ν και καταλαμβάνει το δισδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο Ω που ανήκει στο επίπεδο y,z (Σχήμα 2.1-1) του οποίου το σύνορο συμβολίζεται ως Γ_j (j = 1, 2 ,…, K). Οι καμπύλες που χαρακτηρίζουν το σύνορο Γ είναι τμηματικά συνεχείς, δηλαδή μπορεί να έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Στο Σχήμα 2β, το $CXYZ$ είναι το κύριο καμπτικό σύστημα το οποίο διέρχεται από το κεντροειδές της διατομής C, ενώ με y_c, z_c συμβολίζονται οι συντεταγμένες του σε σχέση με το σύστημα αξόνων $Sxyz$ το οποίο διέρχεται από το κέντρο στρέψης (κέντρο διάτμησης εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής) S της διατομής με άξονες παράλληλους ως προς τους αντίστοιχους $CXYZ$. Ισχύει ότι $Y = y - y_c$ και $Z = z - z_c$.



Σχήμα 2.1-1: Πρισματική δοκός υπό φόρτιση (α), ομογενούς διατομής τυχαίου σχήματος που καταλαμβάνει το δισδιάστατο χωρίο Ω (β)

Η δοκός μπορεί να στηρίζεται με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες και υποβάλλεται σε συνδυασμένη δράση από τυχαία κατανεμημένο ή συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο $p_x(X)$ κατά τη διεύθυνση του άξονα *X*, εγκάρσιο φορτίο $p_y(x)$ και $p_z(x)$ κατά τις διευθύνσεις *y*, *z*, αντίστοιχα, στρεπτική ροπή $m_x(x)$ κατά τη διεύθυνση *x*, καμπτικές ροπές $m_Y^P(x)$, $m_Z^P(x)$ κατά τις διευθύνσεις Y , Z, αντίστοιχα, καθώς επίσης και καμπτικές $m_{\varphi_Y^S}(x)$, $m_{\varphi_Z^S}(x)$, πρωτογενείς και δευτερογενείς στρεπτικές $m_{\varphi_x^P}(x)$, $m_{\varphi_x^S}(x)$, και αξονικές ροπές στρέβλωσης $m_{\varphi_u^P}(\mathrm{x})$, $m_{\varphi_u^S}(\mathrm{x})$ και ανώτερης τάξης ροπές $m_{Du}^P(x)$, $m_{Du}^S(x)$, $m_{DY}^P(x)$, $m_{DY}^S(x)$, $m_{DZ}^P(x)$, $m_{DZ}^S(x)$, $m_{Dx}^P(x)$, $m_{Dx}^S(x)$ οι οποίες από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται ως ροπές διαστρέβλωσης. Το πεδίο των μετατοπίσεων θεωρείται ότι αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα των μετατοπίσεων στερεού σώματος και το τμήμα των μετατοπίσεων λόγω των φαινομένων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης. Υπό τα προαναφερθέντα φορτία και θεωρώντας ότι συμβαίνει κάποιο φαινόμενο που προκαλεί αστάθεια στη δοκό, το πεδίο μετατοπίσεων της δοκού ως προς το σύστημα αξόνων *Sxyz* τη στιγμή έναρξης του φαινομένου του λυγισμού δίνεται ως

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z) = {} & \overbrace{u(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{\eta_u^P(x)\phi_u^P(y,z) + \eta_Y^P(x)\phi_Y^P(y,z) + \eta_Z^P(x)\phi_Z^P(y,z) + \eta_x^P(x)\phi_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Στρέβλωση}} + \\ & + \overbrace{\eta_u^S(x)\phi_u^S(y,z) + \eta_Y^S(x)\phi_Y^S(y,z) + \eta_Z^S(x)\phi_Z^S(y,z) + \eta_x^S(x)\phi_x^S(y,z)}^{\text{Δευτερογενής Στρέβλωση}}\end{aligned} \tag{1α}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(x,y,z) = {} & \overbrace{v(x) - z\cdot\theta_x(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)v_u^P(y,z) + z_Y^P(x)v_Y^P(y,z) + z_Z^P(x)v_Z^P(y,z) + z_x^P(x)v_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}} + \\ & + \overbrace{z_u^S(x)v_u^S(y,z) + z_Y^S(x)v_Y^S(y,z) + z_Z^S(x)v_Z^S(y,z) + z_x^S(x)v_x^S(y,z)}^{\text{Δευτερογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}}\end{aligned} \tag{1β}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}(x,y,z) = {} & \overbrace{w(x) + y\cdot\theta_x(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)w_u^P(y,z) + z_Y^P(x)w_Y^P(y,z) + z_Z^P(x)w_Z^P(y,z) + z_x^P(x)w_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}} \\ & + \overbrace{z_u^S(x)w_u^S(y,z) + z_Y^S(x)w_Y^S(y,z) + z_Z^S(x)w_Z^S(y,z) + z_x^S(x)w_x^S(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}}\end{aligned} \tag{1γ}$$

όπου

$$\phi_Y^P(y,z) = -Z \qquad (1\delta)$$

$$\phi_Z^P(y,z) = -Y \qquad (1\varepsilon)$$

$$\eta_Y^P = -\theta_Y(x) \qquad (1\sigma\tau)$$

$$\eta_Z^P = \theta_Z(x) \qquad (1\zeta)$$

και

• $\bar{u}(x,y,z)$, $\bar{v}(x,y,z)$, $\bar{w}(x,y,z)$ είναι η αξονική και οι εγκάρσιες συνιστώσες μετατόπισης ως προς το σύστημα αξόνων *Sxyz*. Ως $u(x)$ υποδηλώνεται η «μέση» αξονική μετατόπιση της διατομής, $v(x)$, $w(x)$ είναι οι συνιστώσες μετατόπισης του κέντρου διάτμησης *S* κατά τους άξονες *y, z* αντίστοιχα, ενώ $\theta_x(x)$ είναι η γωνία στροφής περί τον διαμήκη άξονα *x*.

• $\eta_i^j(x)$ (*i* = *u* ,*Y, Z, x* και *j* = *P, S*) είναι οι ανεξάρτητες παράμετροι *στρέβλωσης*, μέσω των οποίων περιγράφεται η ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς (*j* = *P*) ή δευτερογενούς (*j* = *S*) *στρέβλωσης* η οποία οφείλεται σε αξονική φόρτιση (*i* = *u*) ή σε κάμψη περί τον άξονα *Y* (*i* = *Y*) ή *Z* (*i* = *Z*) ή στρέψη περί τον άξονα *x* (*i* = *x*).

• $z_i^j(x)$ (*i* = *u, Y, Z, x* και *j* = *P, S*) είναι οι ανεξάρτητες παράμετροι *διαστρέβλωσης*, μέσω των οποίων περιγράφεται η ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς (*j* = *P*) ή δευτερογενούς (*j* = *S*) *διαστρέβλωσης* η οποία οφείλεται σε αξονική φόρτιση (*i* = *u*) ή σε κάμψη περί τον άξονα *Y* (*i* = *Y*) ή *Z* (*i* = *Z*) ή στρέψη περί τον άξονα *x* (*i* = *x*).

• $\phi_i^j(y,z)$ (*i* = *u* ,*Y, Z, x* και *j* = *P, S*) είναι οι πρωτογενείς (*j* = *P*) ή δευτερογενείς (*j* = *S*) ανεξάρτητες συναρτήσεις *στρέβλωσης*, οι οποίες σχετίζονται με την αξονική φόρτιση (*i* = *u*) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες *Y* (*i* = *Y*) ή Z (*i* = *Z*) ή στρέψη περί τον άξονα x (*i* = *x*).

• $v_i^j(y,z)$ (i = u ,Y, Z, x και j = P, S) είναι οι πρωτογενείς (j = P) ή δευτερογενείς (j = S) συνιστώσες συναρτήσεων *διαστρέβλωσης* κατά τον άξονα Y που σχετίζονται με την αξονική φόρτιση (i = u) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες Y (i = Y) ή Z (i = Z) ή στρέψη περί τον άξονα x (i = x).

• $w_i^j(y,z)$ (i = u ,Y, Z, x και j = P, S) ορίζονται οι πρωτογενείς (j = P) ή δευτερογενείς (j = S) συνιστώσες των συναρτήσεων *διαστρέβλωσης* κατά τον άξονα Z που σχετίζονται με την αξονική φόρτιση (i = u) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες Y (i = Y) ή Z (i = Z) ή στρέψη περί τον άξονα x (i = x).

Σημειώνεται ότι οι παράμετροι $\eta_Y^P(x)$ και $\eta_Z^P(x)$ σχετίζονται με τις αντίστοιχες καμπτικές στροφές $\theta_Y(x)$, $\theta_Z(x)$ λόγω κάμψης περί των αξόνων Y, Z , σύμφωνα με τις Εξισώσεις (1στ-ζ). Παρά το γεγονός ότι οι παράμετροι $\eta_Y^P(x)$ και $\eta_Z^P(x)$ είναι κατά βάση στροφές στερεού σώματος, αναφέρονται ως πρωτογενείς ανεξάρτητες παράμετροι *στρέβλωσης* για λόγους γενικότητας, επειδή αντιστοιχούν στις παραμέτρους z_Y^P και z_Z^P που είναι οι πρωτογενείς παράμετροι διαστρέβλωσης που εισάγονται προκειμένου να περιγράψουν την ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς καμπτικής διαστρέβλωσης λόγω κάμψης περί των αξόνων Y, Z, αντίστοιχα.

Από τα παραπάνω κατασκευάζονται τα μητρώα $\mathbf{D}^{lin}$ και $\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$ τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια του Κεφαλαίου.

Το μητρώο $\mathbf{D}^{lin}$ περιέχει τις συναρτήσεις των συντεταγμένων της διατομής, τις συναρτήσεις στρέβλωσης και τις συνιστώσες των συναρτήσεων διαστρέβλωσης:

$$\mathbf{D}^{lin} = \mathbf{D}^{lin}\left(y,z,\varphi_i^j,v_i^j,w_i^j\right) \text{ όπου } i = u,Y,Z,x \text{ και } j = P,S \qquad (2\alpha)$$

Το μητρώο $\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$ περιέχει το διάνυσμα των μετατοπίσεων:

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = \left[u(x),\ v(x),\ w(x),\theta_x(x),\eta_u^P(x)\ \eta_Y^P(x),\ \eta_Z^P(x),\ \eta_x^P(x),\ \eta_u^S(x),\ \eta_Y^S(x),\ \eta_Z^S(x),\ \eta_x^S(x)\right.$$
$$\left.,\ z_u^P(x),\ z_Y^P(x),\ z_Z^P(x),\ z_x^P(x),\ z_u^S(x),z_Y^S(x),\ z_Z^S(x),\ z_x^S(x)\right]^{\mathrm{T}}) \qquad (2\beta)$$

2.2 Συνιστώσες μετατοπίσεων μη γραμμικής ανάλυσης

Στη μη γραμμική ανάλυση, όσον αφορά το πεδίο μετατοπίσεων, ισχύουν όσα διατυπώθηκαν στην προηγούμενη Ενότητα (2.1) με κάποιες διαφοροποιήσεις οι οποίες εντοπίζονται:

i) στο τμήμα της πρωτογενούς στρέβλωσης της μετατόπισης $\bar{u}(x,y,z)$

ii) στο τμήμα της κίνησης του στερεού σώματος της μετατόπισης $\bar{v}(x,y,z)$

iii) στο τμήμα της κίνησης του στερεού σώματος της μετατόπισης $\bar{w}(x,y,z)$

Οι αναλυτικές σχέσεις δίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z) = & \overbrace{u(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{\eta_u^P(x)\phi_u^P(y,z) + \bar{\eta}_Y^P(x)\phi_Y^P(y,z) + \bar{\eta}_Z^P(x)\phi_Z^P(y,z) + \eta_x^P(x)\phi_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Στρέβλωση}} + \\ & + \overbrace{\eta_u^S(x)\phi_u^S(y,z) + \eta_Y^S(x)\phi_Y^S(y,z) + \eta_Z^S(x)\phi_Z^S(y,z) + \eta_x^S(x)\phi_x^S(y,z)}^{\text{Δευτερογενής Στρέβλωση}}\end{aligned} \tag{3α}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(x,y,z) = & \overbrace{v(x) - z\cdot\sin(\theta_x(x)) - y\cdot(1-\cos(\theta_x(x)))}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)v_u^P(y,z) + z_Y^P(x)v_Y^P(y,z) + z_Z^P(x)v_Z^P(y,z) + z_x^P(x)v_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}} + \\ & + \overbrace{z_u^S(x)v_u^S(y,z) + z_Y^S(x)v_Y^S(y,z) + z_Z^S(x)v_Z^S(y,z) + z_x^S(x)v_x^S(y,z)}^{\text{Δευτερογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}}\end{aligned} \tag{3β}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}(x,y,z) = & \overbrace{w(x) + y\cdot\sin(\theta_x(x)) - z\cdot(1-\cos(\theta_x(x)))}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)w_u^P(y,z) + z_Y^P(x)w_Y^P(y,z) + z_Z^P(x)w_Z^P(y,z) + z_x^P(x)w_x^P(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}} \\ & + \overbrace{z_u^S(x)w_u^S(y,z) + z_Y^S(x)w_Y^S(y,z) + z_Z^S(x)w_Z^S(y,z) + z_x^S(x)w_x^S(y,z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}}\end{aligned} \tag{3γ}$$

όπου

$$\bar{\eta}_Y^P(x) = -\eta_Z^P(x)\cdot\sin(\theta_x(x)) + \eta_Y^P(x)\cdot\cos(\theta_x(x)) \tag{3δ}$$

$$\bar{\eta}_Z^P(x) = \eta_Z^P(x)\cdot\cos(\theta_x(x)) + \eta_Y^P(x)\cdot\sin(\theta_x(x)) \tag{3ε}$$

Όπως είναι λογικό τροποποιούνται και τα μητρώα $\mathbf{D}^{lin}$ και $\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$ αφού τώρα περιέχουν μη γραμμικούς όρους.

2.3 Βαθμοί ελευθερίας και μορφές παραμόρφωσης

Σύμφωνα με το σχήμα διαδοχικής ισορροπίας, σε κάθε στάδιο ισορροπίας προστίθενται τέσσερις μορφές παραμόρφωσης (μια λόγω αξονικής φόρτισης, μια λόγω κάμψης περί τον άξονα *Y*, μια λόγω κάμψης περί τον άξονα *Z*, και μια λόγω στρέψης περί τον άξονα *x*), καθεμία εκ των οποίων περιλαμβάνει μία συνάρτηση στρέβλωσης και μια συνάρτηση διαστρέβλωσης. Επομένως, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας (degrees of freedom “dofs”) κάθε κόμβου διαμορφώνεται ως εξής:

$$N_{dofs} = \overset{\substack{\text{Στερεό Σώμα}\\ \text{Dofs}}}{4} + \overset{\substack{\text{Στρέβλωση \&}\\ \text{Διαστρέβλωση}}}{2} \cdot \left(\overset{\substack{\text{Μορφές}\\ \text{Παραμόρφωσης}}}{4} \cdot N_{stages} \right) \tag{4α}$$

όπου N_{stages} είναι ο αριθμός των διαδοχικών σταδίων ισορροπίας (τάξεις) που συμμετέχουν στο μοντέλο. Ο αριθμός των μορφών παραμόρφωσης (modes) όπως προκύπτει από τον τύπο (4α) δίνεται από την σχέση:

$$N_{\text{modes}} = \overset{\substack{\text{Στερεό Σώμα}\\ \text{Dofs}}}{4} + \overset{\substack{\text{Μορφές}\\ \text{Παραμόρφωσης}}}{4} \cdot N_{stages} \tag{4β}$$

Το πεδίο μετατοπίσεων που περιλαμβάνει μέχρι και δευτερογενείς μορφές παραμόρφωσης και εκφράζεται μέσω της σχέσης (1), αντιστοιχεί σε $N_{stages} = 2$, $N_{\text{modes}} = 12$ και $N_{dofs} = 20$. Στην περίπτωση όπου λαμβάνονται υπόψιν μέχρι και τριτογενείς μορφές παραμόρφωσης θα είναι $N_{stages} = 3$, $N_{\text{modes}} = 16$ και $N_{dofs} = 28$ κ.ο.κ . Όταν λοιπόν τα στάδια αυξάνεται κατά 1, οι μορφές παραμόρφωσης αυξάνονται κατά 4 και οι βαθμοί ελευθερίας κατά 8.

2.4 Συνιστώσες γραμμικών παραμορφώσεων και τάσεων

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1α)-(1γ) στις γνωστές σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας για μικρές μετατοπίσεις, προκύπτουν οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης ως:

$$\varepsilon_{xx}^{lin} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \tag{5α}$$

$$\varepsilon_{yy}^{lin} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \tag{5β}$$

$$\varepsilon_{zz}^{lin} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \tag{5γ}$$

$$\gamma_{xy}^{lin} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \tag{5δ}$$

$$\gamma_{xz}^{lin} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{5ε}$$

$$\gamma_{yz}^{lin} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \tag{5στ}$$

και η γραμμική συνισταμένη παραμόρφωση λαμβάνεται ως:

$$\underset{6\times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}^{lin}} = \underset{6\times 2N_{dofs}}{\mathbf{D}^{lin}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}} \tag{6α}$$

όπου

$$\underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}} = \begin{bmatrix} \underset{N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}} \\ \underset{N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{,x}} \end{bmatrix} \tag{6β}$$

και $\boldsymbol{\varepsilon}^{lin} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{lin} & \varepsilon_{yy}^{lin} & \varepsilon_{zz}^{lin} & \varepsilon_{xy}^{lin} & \varepsilon_{xz}^{lin} & \varepsilon_{yz}^{lin} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι το διάνυσμα των γραμμικών παραμορφώσεων το οποίο έχει γραφτεί ως γινόμενο δύο πινάκων, του πίνακα $\mathbf{D}^{lin}$ (Εξίσωση 2α) και του $\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$ (Εξίσωση 2β) μαζί με τις παραγώγους του ως προς τη μεταβλητή *x*. Ο συμβολισμός $(\cdot)_{,i}$ υποδηλώνει παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή i.

Επίσης λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων σύμφωνα με τον νόμο του Hook (μικρές παραμορφώσεις) και εφαρμόζοντας τον τανυστή τάσεων Cauchy, οι συνιστώσες των γραμμικών τάσεων ορίζονται σε όρους γραμμικών παραμορφώσεων ως

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{lin} \\ \sigma_{yy}^{lin} \\ \sigma_{zz}^{lin} \\ \sigma_{xy}^{lin} \\ \sigma_{xz}^{lin} \\ \sigma_{yz}^{lin} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{lin} \\ \varepsilon_{yy}^{lin} \\ \varepsilon_{zz}^{lin} \\ \gamma_{xy}^{lin} \\ \gamma_{xz}^{lin} \\ \gamma_{yz}^{lin} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

ή

$$\underset{6\times1}{\boldsymbol{\sigma}^{lin}} = \underset{6\times6}{\mathbf{K}_{Material}} \cdot \underset{6\times1}{\boldsymbol{\varepsilon}^{lin}} \tag{8}$$

όπου $\mu = E/\left(2\left(1+\nu\right)\right)$ και $\lambda = \nu E/\left(\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)\right)$ είναι το μέτρο διάτμησης και ο συντελεστής Lamé του υλικού, αντίστοιχα. Μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης (6α) στην εξίσωση (8) το διάνυσμα τάσεων μπορεί να γραφεί ως:

$$\underset{6\times1}{\boldsymbol{\sigma}^{lin}} = \underset{6\times6}{\mathbf{K}_{Material}} \cdot \underset{6\times2N_{dofs}}{\mathbf{D}^{lin}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times1}{\mathbf{d}_{tot}} \tag{9}$$

2.5 Συνιστώσες μη γραμμικών παραμορφώσεων και τάσεων

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1α)-(1γ) στις ακόλουθες μη-γραμμικές (Green) σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2\right] \tag{10α}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)^2\right] \tag{10β}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)^2\right] \tag{10γ}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{10δ}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{10ε}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \qquad (10\sigma\tau)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν πως

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 << \frac{\partial \bar{u}}{\partial x},\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 << \frac{\partial \bar{v}}{\partial y},\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 << \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) << \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y},\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) << \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) << \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

δηλαδή ότι οι όροι $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2, \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2, \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right),$ και $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$, αγνοούνται καθώς θεωρούνται πολύ μικροί σε σχέση με τους γραμμικούς και τους υπόλοιπους μη-γραμμικούς όρους, η μη γραμμική συνισταμένη παραμόρφωση προκύπτει ως:

$$\underset{6\times 1}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{6\times N_{Erows}}{\mathbf{D}} \cdot \underset{N_{Erows}\times 1}{\mathbf{E}} \qquad (11)$$

όπου $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ είναι το διάνυσμα μη γραμμικών παραμορφώσεων το οποίο έχει γραφεί ως γινόμενο δύο πινάκων. Ο ένας πίνακας ($\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(y, z, \varphi_i^j, v_i^j, w_i^j\right)$ όπου $i = u, Y, Z, x$ και $j = P, S$), περιέχει τις συναρτήσεις των συντεταγμένων της διατομής, τις συναρτήσεις στρέβλωσης και τις συνιστώσες των συναρτήσεων διαστρέβλωσης. Ο άλλος πίνακας ($\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(\mathbf{d}, \mathbf{d}_{,x}\right)$) περιέχει το διάνυσμα των μη γραμμικών μετατοπίσεων και των παραγώγων του. Ως N_{Erows} ορίζεται ο αριθμός των σειρών του πίνακα $\mathbf{E}$.

2.6 Αρχή Δυνατών Έργων

Σύμφωνα με την Αρχή Δυνατών Έργων

$$\delta U = \delta W \qquad (12)$$

ή

$$\delta U^{lin} + \delta U^{G} = \delta W \qquad (13)$$

όπου ως δU και δW συμβολίζονται τα δυνατά έργα των εσωτερικών και των εξωτερικών δράσεων της δοκού, αντίστοιχα. Ως δU^{lin} και δU^{G} συμβολίζεται το γραμμικό και το μη-γραμμικό (το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας θα προκύψει από αυτό) μέρος του δυνατού έργου των εσωτερικών δράσεων, αντίστοιχα.

2.6.1 Δυνατό Έργο του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων της δοκού δίνεται ως:

$$\delta U^{lin} = \int_V \left(\sigma_{xx}^{lin} \delta\varepsilon_{xx}^{lin} + \sigma_{yy}^{lin} \delta\varepsilon_{yy}^{lin} + \sigma_{zz}^{lin} \delta\varepsilon_{zz}^{lin} + \sigma_{xy}^{lin} \delta\gamma_{xy}^{lin} + \sigma_{xz}^{lin} \delta\gamma_{xz}^{lin} + \sigma_{yz}^{lin} \delta\gamma_{yz}^{lin} \right) dV = \int_V \left(\underset{1\times 6}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{lin\,\mathrm{T}}} \cdot \underset{6\times 1}{\boldsymbol{\sigma}^{lin}} \right) dV \qquad (14)$$

όπου V ο όγκος της δοκού. Το $\delta(\bullet)$ υποδηλώνει δυνατές ποσότητες. Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (6α) και (9) στην Εξίσωση (14), η έκφραση του δυνατού έργου του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta U^{lin} = \int_0^L \underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_{lin}^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}} \, dx \qquad (15\alpha)$$

όπου

$$\underset{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_{lin}^{gc}} = \int_\Omega \underset{2N_{dofs}\times 6}{\mathbf{D}^{lin\,\mathrm{T}}} \cdot \underset{6\times 6}{\mathbf{K}_{Material}} \cdot \underset{6\times 2N_{dofs}}{\mathbf{D}^{lin}} \, d\Omega \qquad (15\beta)$$

Ο πίνακας $\mathbf{K}_{lin}^{gc}$ περιέχει τις γραμμικές γεωμετρικές σταθερές της διατομής της ράβδου.

2.6.2 Δυνατό Έργο του μη γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων της δοκού που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του γεωμετρικού μητρώου στιβαρότητας δίνεται ως εξής:

$$\delta U^{G} = \int_V \left(\sigma_{xx}^{lin} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{lin} \delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^{lin} \delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}^{lin} \delta\gamma_{xy} + \sigma_{xz}^{lin} \delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}^{lin} \delta\gamma_{yz} \right) dV = \int_V \left(\underset{1\times 6}{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{6\times 1}{\boldsymbol{\sigma}^{lin}} \right) dV \qquad (16)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (9) και (11) στην Εξίσωση (16) η έκφραση του δυνατού έργου του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta U^G = \int_0^L \underset{1\times N_{Erows}}{\delta \mathbf{E}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}^0}\, dx = \int_0^L \underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{Erows}}{\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}}\right)^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}^0}\, dx \tag{17α}$$

όπου

$$\underset{1\times N_{Erows}}{\delta \mathbf{E}^{\mathrm{T}}} = \underset{1\times N_{Erows}}{\left(\underset{N_{Erows}\times N_{dofs}}{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}}} \cdot \underset{N_{dofs}\times 1}{\delta \mathbf{d}} + \underset{N_{Erows}\times N_{dofs}}{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{,x}}} \cdot \underset{N_{dofs}\times 1}{\delta \mathbf{d}_{,x}} \right)^{\mathrm{T}}} = \left(\underset{1\times N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{dofs}\times N_{Erows}}{\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}}\right)^{\mathrm{T}}} + \underset{1\times N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{,x}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{dofs}\times N_{Erows}}{\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{,x}}\right)^{\mathrm{T}}} \right) = \underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{Erows}}{\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}}\right)^{\mathrm{T}}} \tag{17β}$$

$$\underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} = \int_\Omega \underset{N_{Erows}\times 6}{\mathbf{D}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{6\times 6}{\mathbf{K}_{Material}} \cdot \underset{6\times 2N_{dofs}}{\mathbf{D}^{lin}}\, d\Omega \tag{17γ}$$

Ο πίνακας $\mathbf{K}_G^{gc}$ περιέχει τις μη-γραμμικές γεωμετρικές σταθερές της διατομής της δοκού. Οι όροι των γραμμικών τάσεων της Εξίσωσης (16) θεωρούνται αμετάβλητοι ως προς τις συνιστώσες του διανύσματος μετακίνησης $\mathbf{d}_{tot}$. Για αυτό το λόγο το $\mathbf{d}_{tot}$ που προέρχεται από τις γραμμικές τάσεις της Εξίσωσης (17α) συμβολίζεται με $\mathbf{d}^0_{tot}$.

2.6.3 Δυνατό Έργο των εξωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δράσεων την δοκού δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_F \left(t_x \delta \bar{u} + t_y \delta \bar{v} + t_z \delta \bar{w} \right) dF = \int_F \left(\underset{1\times 3}{\delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}} \right) dF = \int_F \left(\underset{1\times 3}{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{,x}} \delta \mathbf{d}_{,x} \right)^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}} \right) dF \\ &= \int_F \left(\underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 3}{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}} \right) dF \end{aligned} \tag{18}$$

όπου $\mathbf{t}^{\mathrm{T}} = [t_x \ t_y \ t_z]$ είναι το διάνυσμα που εφαρμόζεται στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού, η οποία ορίζεται ως F. Μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις το δυνατό έργο των εξωτερικών δράσεων μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\delta W = &\int_0^L \left(\sum_{j=1}^{K} \int_{\Gamma_j} \left(\underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 3}{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)_j^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}_j} \right) ds \right) dx \\ &+ \int_{\Omega^0} \left(\underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}\Big|_{x=0}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 3}{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{x=0}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}\Big|_{x=0}} \right) d\Omega^0 + \int_{\Omega^L} \left(\underset{1\times 2N_{dofs}}{\delta \mathbf{d}_{tot}^{\mathrm{T}}\Big|_{x=L}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 3}{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^{\mathrm{T}}\Bigg|_{x=L}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}\Big|_{x=L}} \right) d\Omega^L\end{aligned} \tag{19}$$

όπου με Ω^0 και Ω^L συμβολίζεται η παράπλευρη επιφάνεια των ακραίων διατομών της δοκού (x=0, L).

2.7 Καμπτικές και στρεπτικές μορφές

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης $\phi_i^j(y,z)$ ($i = Y, Z, x$ και $j = P, S, etc.$) και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης $v_i^j(y,z)$ και $w_i^j(y,z)$ ($i = Y, Z, x$ και $j = P, S$) για καμπτικές ($i = Y, Z$) και στρεπτικές ($i = x$) μορφές παραμόρφωσεις, οι οποίες αναφέρθηκαν στην Ενότητα 2.1 και 2.2, επιτυγχάνεται με την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών, το οποίο μορφώνεται αξιοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες βάσει του λεγόμενου σχήματος διαδοχικής ισορροπίας, όπως παρουσιάζεται στην αναφορά [23]. Το προαναφερθέν πρόβλημα επιλύεται χρησιμοποιώντας τη Μεθόδο Συνοριακών Στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να υπολογιστούν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, η τοπική ισορροπία ικανοποιείται διαδοχικά μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, οι οποίες εξισορροπούν τα μη-εξισορροπημένα υπόλοιπα τάσεων. Τα υπόλοιπα τάσεων οφείλονται στις λεγόμενες δράσεις των άκρων (end-effects) της δοκού, όταν παύει να ισχύει η Αρχή του Saint-Venant σύμφωνα με την οποία ο πιθανός περιορισμός κοντά στην στήριξη της εξεταζόμενης πρισματικής ράβδου δεν επηρεάζει την λύση μακριά από αυτήν. Η υπολογιστική διαδικασία περιγράφεται αναλυτικά στην αναφορά [23].

2.8 Αξονικές μορφές

Σε αυτήν την ενότητα διατυπώνεται αναλυτικά η διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης των αξονικών μορφών καθώς στην αναφορά [23] δεν λαμβάνονται υπόψιν οι μορφές αυτές.

2.8.1 Προσέγγιση μέσω του προβλήματος ιδιοτιμών

Η ανάλυση της διατομής εδώ γίνεται μέσω της διατύπωσης ενός προβλήματος ιδιοτιμών. Οι εξισώσεις που παράγονται χρησιμοποιούνται επίσης και στην επόμενη ενότητα προκειμένου να κατασκευασθεί ένα σχήμα διαδοχικής ισορροπίας που εφαρμόζεται στην παρούσα διπλωματική ως μια εναλλακτίκη προσέγγιση για την ανάλυση της διατομής.

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης $\phi_u^j\left(y,z\right)$ ($j=P,S,etc.$) και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης $v_u^j\left(y,z\right)$ και $w_u^j\left(y,z\right)$ ($j=P,S$) για τις αξονικές μορφές, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην Ενότητα 2.1 και 2.2, επιτυγχάνεται με την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών, το οποίο μορφώνεται αξιοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν βάσει του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Βάσει του [23] αξιοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας προκύπτει το ακόλουθο δισδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης:

$$\nabla^2 V+\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left[\left(\nabla\cdot\underset{2\times1}{\mathbf{U}}\right)_{,y}+\Phi_{,y}\right]=c^2\left(-V\right) \tag{20α}$$

$$\nabla^2 W+\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left[\left(\nabla\cdot\underset{2\times1}{\mathbf{U}}\right)_{,z}+\Phi_{,z}\right]=c^2\left(-W\right) \tag{20β}$$

$$\mu\left(V_{,n}+V_{,y}n_y+W_{,y}n_z\right)+\lambda\left(V_{,y}+W_{,z}\right)n_y=-\lambda\Phi n_y \tag{20γ}$$

$$\mu\left(W_{,n}+V_{,z}n_y+W_{,z}n_z\right)+\lambda\left(V_{,y}+W_{,z}\right)n_z=-\lambda\Phi n_z \tag{20δ}$$

$$\nabla^2\Phi=c^2\left(-\frac{2}{1-\bar{\nu}}\Phi-\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\nabla\cdot\underset{2\times1}{\mathbf{U}}\right) \tag{20ε}$$

$$\Phi_{,n}=c^2\left(-Vn_y-Wn_z\right) \tag{20στ}$$

όπου $\Phi = \Phi(y,z)$ είναι μία συνάρτηση στρέβλωσης, $V = V(y,z)$, $W = W(y,z)$ είναι οι συνιστώσες της εντός επιπέδου μορφής παραμόρφωσης $\mathbf{U} = \mathbf{U}(y,z)$ κατά τους άξονες y, z, αντίστοιχα, c είναι μία σταθερά που σχετίζεται με το μήκος διάδοσης των τοπικών φαινομένων, n_y, n_z είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του εξωτερικού κάθετου διανύσματος $\mathbf{n}$ της διατομής ως προς τους άξονες y, z και $\bar{\nu} = \nu/(1-\nu)$ είναι το ενεργό μέτρο Poisson. Το σύμβολο $(\ )_{,i}$ δηλώνει παραγώγιση ως προς i. Ως $\nabla = (\ )_{,y}\,\mathbf{i}_y + (\ )_{,z}\,\mathbf{i}_z$ ορίζεται ο διδιάστατος διαφορικός τελεστής των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης. Εφαρμόζοντας μια κατάλληλη διακριτοποίηση της διατομής, το συζευγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών των Εξισώσεων (18) οδηγεί στη μόρφωση ενός γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής

$$\underset{N\times N}{\mathbf{A}}\ \underset{N\times 1}{\mathbf{W}_i^{dis}} = c_i^2\ \underset{N\times N}{\mathbf{B}}\ \underset{N\times 1}{\mathbf{W}_i^{dis}} \tag{21}$$

όπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι γνωστοί πίκανες συντελεστών οι οποίοι εξαρτώνται από την διακριτοποίηση, ενώ c^2, $\mathbf{W}_i^{dis} = \left[\mathbf{\Phi}_i^{dis} \quad \mathbf{U}_i^{dis}\right]^{\mathrm{T}}$ είναι η γενικευμένη ιδιοτιμή και το ιδιοδιάνυσμα των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντίστοιχα. Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών (Εξίσωση 21) παράγει ένα σύνολο N ιδιοτιμών c_i^2 μαζί με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{W}_i^{dis}$ $(i = 1,\ldots,N)$ τα οποία αποτελούν μια βάση των μορφών παραμόρφωσης της διατομής οι οποίες είναι κατάλληλες για την ανάλυση διαστρέβλωσης των δοκών.

2.8.2 Σχήμα διαδοχικής ισορροπίας

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη υποενότητα παρέχει ένα σύνολο εκμεταλλεύσιμων μορφών παραμόρφωσης, ωστόσο έχει το ακόλουθο μειωνέκτημα. Το αποκτηθέν σύνολο μορφών εμπεριέχει αξονικές, καμπτικές και στρεπτικές μορφές κατά σειρά σημαντικότητας, χωρίς ωστόσο κάποια διάκριση μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, μια προσπάθεια διατήρησης του αριθμού των αγνώστων όσο το δυνατόν χαμηλότερα θα απαιτούσε μια διερεύνηση από τον αναλυτή, προκειμένου να εντοπίσει τις σχετικά σημαντικές μορφές (δηλαδή αυτές με τις μικρότερες ιδιοτιμές). Εναλλακτικά, αν είναι επιθυμητή μία αυτοματοποιημένη επιλογή μορφών, ένας σχετικά μεγάλος προκαθορισμένος αριθμός μορφών θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί για να διασφαλιστεί ότι όλοι οι μηχανισμοί (αξονικοί, καμπτικοί, στρεπτικοί) αναπαρίστανται ορθά από τις χρησιμοποιούμενες μορφές.

Επομένως, όπως προτείνεται στο [23] , η παραπάνω αδυναμία παρακάμπτεται μέσω της εκμετάλλευσης της έννοιας του λεγόμενου σχήματος διαδοχικής ισορροπίας. Η έννοια αυτή υιοθετείται στο παρόν κεφάλαιο προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός των αξονικών μορφών. Πιο συγκεκριμένα, στην τελευταία ανάλυση, προκειμένου να υπολογισθούν οι συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, γίνεται μια προσπάθεια ακολουθιακής ικανοποίησης της ισορροπίας μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, προκειμένου να εξισορροπηθούν τα μη-εξισορροπημένα υπόλοιπα τάσεων. Υπό το πρίσμα αυτό η i-οστη μορφή παραμόρφωσης $\mathbf{W}_i$ αναλύεται ως

$$\underset{3\times1}{\mathbf{W}_i} = \underset{3\times1}{\mathbf{w}_{i-1}} + \underset{3\times1}{\mathbf{w}_i} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \underset{2\times1}{\mathbf{U}_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \underset{2\times1}{\mathbf{u}_{i-1}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \underset{2\times1}{\mathbf{u}_i} \end{Bmatrix} \tag{22}$$

Θεωρώντας πως $\mathbf{w}_{i-1}$ είναι μια ήδη προσδιορισμένη συνιστώσα της αξονικής μορφής, για τον υπολογισμό της i-οστής αξονικής μορφής διαστρέβλωσης οι εξισώσεις (20α-δ) γράφονται ως

$$\nabla^2 \tilde{V}_i + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left(\nabla \cdot \underset{2\times1}{\tilde{\mathbf{U}}_i} \right)_{,y} = -\frac{1}{\mu} \left(b_y \right)_{i-1} \tag{23α}$$

$$\left(t_y \right)_i = -\lambda \varphi_{i-1} n_y \tag{23β}$$

$$\nabla^2 \tilde{W}_i + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left(\nabla \cdot \underset{2\times1}{\tilde{\mathbf{U}}_i} \right)_{,z} = -\frac{1}{\mu} \left(b_z \right)_{i-1} \tag{23γ}$$

$$\left(t_z \right)_i = -\lambda \varphi_{i-1} n_z \tag{23δ}$$

όπου

$$\left(b_y \right)_{i-1} = \mu \left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1,y} + v_{i-1} \right) \tag{23ε}$$

$$\left(b_z \right)_{i-1} = \mu \left(\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1,z} + w_{i-1} \right) \tag{23στ}$$

$$\left(t_y \right)_i = \mu \left(\tilde{V}_{i,n} + \tilde{V}_{i,y} n_y + \tilde{W}_{i,y} n_z \right) + \lambda \left(\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z} \right) n_y \tag{23ζ}$$

$$\left(t_z\right)_i = \mu\left(\tilde{W}_{i,n} + \tilde{V}_{i,z} n_y + \tilde{W}_{i,z} n_z\right) + \lambda\left(\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z}\right) n_z \tag{23η}$$

Ενώ για τον υπολογισμό της i-οστής αξονικής μορφής στρέβλωσης οι εξισώσεις (20ε-στ) γράφονται ως

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_i = f_i \tag{24α}$$

$$\tilde{\Phi}_{i,n} = -\tilde{V}_i n_y - \tilde{W}_i n_z \tag{24β}$$

όπου

$$f_i = -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1} - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{U}}_i} \tag{24γ}$$

κρατώντας υπόψιν ότι έχει τεθεί

$$\underset{3\times 1}{\mathbf{W}_i} = c_i^2 \underset{3\times 1}{\tilde{\mathbf{W}}_i} \tag{25}$$

Στο σημείο αυτό υπογραμμίζεται πως οι όροι του $\mathbf{w}_i$ στο δεξί μέρος των Εξισώσεων (23,24) θεωρούνται υπολειπόμενοι όροι και έχουν παραληφθεί προκειμένου να υπάρχει ισορροπία στο επόμενο στάδιο $i+1$. Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί επαναληπτικά μέχρις ότου το σφάλμα που προκύπτει από τους υπολοιπόμενους όρους $\mathbf{w}_i$ να ελαχιστοποιηθεί. Σημειώνεται επίσης πως η i-οστή μορφή $\tilde{\mathbf{W}}_i$ η οποία υπολογίζεται μέσω των Εξισώσεων (23,24) εκτιμάται ως προς τη σταθερά c_i^2 η οποία υπολογίζεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη ορθογωνιότητας

$$\left\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \right\rangle = \int_\Omega \varphi_{i-1} \varphi_i \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{26}$$

όπως και στην αναφορά [23].

Αυτή η συνθήκη καθιστά τις συναρτήσεις στρέβλωσης δυνατές να παράγουν μη-συζευγμένες κανονικές κατανομές τάσεων. Επομένως κάνοντας χρήση της ακόλουθης εξίσωσης

$$c_i^2\tilde{\Phi}_i = \Phi_i \Leftrightarrow c_i^2\tilde{\Phi}_i = \varphi_{i-1} + \varphi_i \tag{27}$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της επί φ_{i-1}, ολοκληρώνοντας καταλλήλως πάνω στην επιφάνεια της διατομής και λαμβάνοντας υπόψιν την Εξίσωση (26), προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό της c_i^2

$$c_i^2 = \frac{\int_\Omega \varphi_{i-1}\varphi_{i-1}\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \varphi_{i-1}\tilde{\Phi}_i\mathrm{d}\Omega} \tag{28}$$

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τις Εξιςώσεις (23,24), ο υπολογισμός της i-οστής αξονικής μορφής στρέβλωσης και διαστρέβλωσης αποτελείται από τρία στάδια, θεωρώντας πως η $\mathbf{w}_{i-1}$ είναι μια ήδη προσδιορισμένη συνιστώσα της αξονικής μορφής.

Στο πρώτο στάδιο επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό της i-οστής αξονικής μορφής διαστρέβλωσης (Εξίσωση 23) και έτσι υπολογίζεται η $\tilde{\mathbf{U}}_i$. Στο δεύτερο στάδιο, γνωρίζοντας τις τιμές των φ_{i-1} και $\tilde{\mathbf{U}}_i$, επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό της i-οστής αξονικής μορφής στρέβλωσης (Εξίσωση 24) και έτσι υπολογίζεται η συνάρτηση $\tilde{\Phi}_i$. Τέλος, στο τρίτο στάδιο, εφαρμόζονται οι Εξισώσεις (28), (25),(22), με αυτή τη σειρά, προκειμένου να υπολογιστούν τα c_i^2, $\mathbf{W}_i$ και $\mathbf{w}_i$, αντίστοιχα.

Στο αντίστοιχο πρόβλημα που παρουσιάζεται στην αναφορά [23] για τον υπολογισμό της i-οστής καμπτικής και στρεπτικής μορφής στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, τα πρώτα δύο στάδια εκτελούνται με αντίστροφη σειρά απ'οτι στην παρούσα εργασία και ως αποτέλεσμα οι αντίστοιχες εξισώσεις διαφέρουν δεόντως. Αυτό συμβαίνει επειδή στην αναφορά [23], για $i=1$ ισχύει $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ για κάμψη περί τον άξονα *y*, $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ για κάμψη περί τον άξονα *z*, και $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}0 & -y & z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ για στρέψη περί τον άξονα *x*, δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{w}_0$ αντιστοιχεί σε μορφή διαστρέβλωσης στερεού σώματος. Έτσι το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της πρώτης μορφής στρέβλωσης. Αντίθετα, για το αξονικό πρόβλημα για $i=1$ ισχύει $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, δηλαδή αυτό το διάνυσμα $\mathbf{w}_0$ αντιστοιχεί σε μορφή στρέβλωσης στερεού σώματος. Έτσι το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της αξονικής μορφής διαστρέβλωσης.

Όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο 2.1, όλες οι υπολογισμένες αξονικές συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης πολλαπλασιάζονται με ανεξάρτητες παραμέτρους που ελέγχουν την έντασή τους. Επόμενως οι συναρτήσεις περιγράφουν βασικά το μοτίβο της παραμόρφωσης της διατομής. Συνεπώς η μέγιστη τιμή τους είναι άνευ σημασίας ενώ δεν είναι απαραίτητη η διατήρηση της σύζευξης των μορφών διαστρέβλωσης. Στην παρούσα μελέτη, σε μια προσπάθεια μείωσης των συζεύξεων της καθολικής ανάλυσης, μετά τον υπολογισμό του διανύσματος $\mathbf{u}_i$ και πριν τον υπολογισμό του διανύσματος $\mathbf{u}_{i+1}$ προστείθεται μία επιπλεόν διαδικασία ορθογωνοποίησης, προκειμένου τα φ_i και $\mathbf{u}_i$ για τον αξονικό μηχανισμό να είναι ορθογώνια στα φ_j και $\mathbf{u}_j$, αντίστοιχα, για $1 \le j \le i-1$. Η ορθογωνοποίηση αυτή αποτελείται από τον υπολογισμό των κατάλληλων σταθερων α_k, β_k έτσι ώστε

$$\varphi_i = \hat{\varphi}_i + \alpha_\kappa \varphi_j \qquad \kappa = \sum_{n=1}^{i-2} n + j \qquad \forall j \in [1, i-1] \tag{29α,β}$$

$$\int_\Omega \varphi_i \varphi_j \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{29γ}$$

και

$$\underset{2\times1}{\mathbf{u}_i} = \underset{2\times1}{\hat{\mathbf{u}}_i} + \beta_\kappa \underset{2\times1}{\mathbf{u}_j} \qquad \kappa = \sum_{n=1}^{i-2} n + j \qquad \forall j \in [1, i-1] \tag{30α,β}$$

$$\int_\Omega \underset{2\times1}{\mathbf{u}_i} \underset{2\times1}{\mathbf{u}_j} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{30γ}$$

όπου τα σύμβολα $\hat{\varphi}_i$ και $\hat{\mathbf{u}}_i$ έχουν χρησιμοποιηθεί προκειμένου να δηλώσουν τις μορφές πριν την ορθογωνοποίηση τους. Επομένως, πολλαπλασιάζοντας τις Εξισώσεις (29α) και (30α) με φ_j και $\mathbf{u}_j$, αντίστοιχα, ολοκληρώνοντας καταλλήλως πάνω στην επιφάνεια της διατομής και λαμβάνοντας υπόψιν τις Εξισώσεις (29γ) και (30γ), οι σταθερές α_k, β_k υπολογίζονται ως

$$\alpha_\kappa = -\frac{\int_\Omega \hat{\varphi}_i \varphi_j \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \varphi_j \varphi_j \mathrm{d}\Omega} \tag{31}$$

$$\beta_\kappa = -\frac{\int_\Omega \underset{2\times1}{\hat{\mathbf{u}}_i}\,\underset{2\times1}{\mathbf{u}_j}\,\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \underset{2\times1}{\mathbf{u}_j}\,\underset{2\times1}{\mathbf{u}_j}\,\mathrm{d}\Omega} \tag{32}$$

Αξίζει να σημειωθεί πως αυτή η διαδικασία ορθογωνοποίησης που παρουσιάζεται εδώ (Εξισώσεις 29-32) εφαρμόζεται επίσης και στις καμπτικές και στρεπτικές μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης και διαφέρει από αυτήν που παρουσιάζεται στην αναφορά [23] για τους μηχανισμούς αυτούς.

2.8.3 Ύπαρξη λύσης

Το φυσικό νόημα των συνθηκών για την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα της Εξισώσεων (20) (δισδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης) είναι η εξάλειψη του δυνατού έργου των διαστρεβλωτικών και στρεβλωτικών τάσεων πάνω στις παραμορφώσεις του στερεού σώματος.

$$\delta U_{Distortion} = 0 \tag{33α}$$

$$\delta U_{Warping} = 0 \tag{33β}$$

Σύμφωνα με την αναφορά [23] το τμήμα των τάσεων που αφορά τη διαστρέβλωση είναι:

$$\sigma_{xx}^d = \lambda a_{,x}\left(V_{,y} + W_{,z}\right) \tag{34α}$$

$$\sigma_{yy}^d = a_{,x}\left[(2\mu + \lambda)V_{,y} + \lambda W_{,z}\right] \tag{34β}$$

$$\sigma_{zz}^d = a_{,x}\left[\lambda V_{,y} + (2\mu + \lambda)W_{,z}\right] \tag{34γ}$$

$$\sigma_{xy}^d = \mu a_{,xx} V \tag{34δ}$$

$$\sigma_{xz}^d = \mu a_{,xx} W \tag{34ε}$$

$$\sigma_{yz}^d = \mu a_{,x}\left(W_{,y} + V_{,z}\right) \tag{34στ}$$

όπου η παράμετρος $a = a(x)$ δηλώνει την «ένταση» της παραμόρφωσης κατά μήκος της ράβδου, ενώ το τμήμα των τάσεων που αφορά τη στρέβλωση είναι:

$$\sigma_{xx}^{w} = (2\mu + \lambda) a_{,x} \Phi \tag{35α}$$

$$\sigma_{yy}^{w} = \lambda a_{,x} \Phi \tag{35β}$$

$$\sigma_{zz}^{w} = \lambda a_{,x} \Phi \tag{35γ}$$

$$\sigma_{xy}^{w} = \lambda a \Phi_{,y} \tag{35δ}$$

$$\sigma_{xz}^{w} = \lambda a \Phi_{,z} \tag{35ε}$$

$$\sigma_{yz}^{w} = 0 \tag{35στ}$$

και το τμήμα των παραμορφώσεων του στερεού σώματος είναι:

$$\varepsilon_{xx}^{RB} = u_{,x} \tag{36α}$$

$$\varepsilon_{yy}^{RB} = 0 \tag{36β}$$

$$\varepsilon_{zz}^{RB} = 0 \tag{36γ}$$

$$\gamma_{xy}^{RB} = v_{,x} - z\theta_{x,x} \tag{36δ}$$

$$\gamma_{xz}^{RB} = w_{,x} + y\theta_{x,x} \tag{36ε}$$

$$\gamma_{yz}^{RB} = 0 \tag{36στ}$$

Το δυνατό έργο των τάσεων διαστρέβλωσης πάνω στις δυνατές παραμορφώσεις του στερεού σώματος είναι:

$$\delta U_{Distortion} = \int_V \left(\sigma_{xx}^{d} \delta\varepsilon_{xx}^{RB} + \sigma_{yy}^{d} \delta\varepsilon_{yy}^{RB} + \sigma_{zz}^{d} \delta\varepsilon_{zz}^{RB} + \sigma_{xy}^{d} \delta\gamma_{xy}^{RB} + \sigma_{xz}^{d} \delta\gamma_{xz}^{RB} + \sigma_{yz}^{d} \delta\gamma_{yz}^{RB} \right) dV \tag{37}$$

ή μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (34) και (36)

$$\delta U_{Distortion} = \int_V \left[\lambda a_{,x} \left(V_{,y} + W_{,z} \right) \delta u_{,x} + 0 + 0 + \mu a_{,xx} V \left(\delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x} \right) + \mu a_{,xx} W \left(\delta w_{,x} + y \delta \theta_{x,x} \right) + 0 \right] dV \tag{38}$$

και συνδυάζοντας τις εξισώσεις (33α) και (38) προκύπτει ότι

$$\int_V \left[\lambda a_{,x} \left(V_{,y} + W_{,z} \right) \delta u_{,x} + \mu a_{,xx} V \delta v_{,x} + \mu a_{,xx} W \delta w_{,x} + \mu a_{,xx} (-Vz + yW) \delta \theta_{x,x} \right] dV = 0 \tag{39}$$

Υποθέτοντας πως $a_{,x}, a_{,xx}, \mu, \lambda \neq 0$ λαμβάνεται ότι:

$$\int_\Omega \left(V_{,y} + W_{,z} \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{40α}$$

$$\int_\Omega V \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{40β}$$

$$\int_\Omega W \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{40γ}$$

$$\int_\Omega \left(-Vz + yW \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{40δ}$$

Το δυνατό έργο των στρεβλωτικών τάσεων πάνω στις δυνατές παραμορφώσεις του στερεού σώματος είναι:

$$\delta U_{Warping} = \int_V \left(\sigma_{xx}^{w} \delta \varepsilon_{xx}^{RB} + \sigma_{yy}^{w} \delta \varepsilon_{yy}^{RB} + \sigma_{zz}^{w} \delta \varepsilon_{zz}^{RB} + \sigma_{xy}^{w} \delta \gamma_{xy}^{RB} + \sigma_{xz}^{w} \delta \gamma_{xz}^{RB} + \sigma_{yz}^{w} \delta \gamma_{yz}^{RB} \right) dV \tag{41}$$

ή μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (35) και (36) προκύπτει ότι

$$\delta U_{Warping} = \int_V \left[(2\mu+\lambda) a_{,x} \Phi \delta u_{,x} + 0 + 0 + \lambda a \Phi_{,y} \left(\delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x} \right) + \lambda a \Phi_{,z} \left(\delta w_{,x} + y \delta \theta_{x,x} \right) + 0 \right] dV \tag{42}$$

και συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (33β) και (42) προκύπτει ότι

$$\int_V \left[(2\mu+\lambda) a_{,x} \Phi \delta u_{,x} + \lambda a \Phi_{,y} \delta v_{,x} + \lambda a \Phi_{,z} \delta w_{,x} + \lambda a \left(-z\Phi_{,y} + y\Phi_{,z} \right) \delta \theta_{x,x} \right] dV = 0 \tag{43}$$

Υποθέτωντας πως $a_{,x}, a_{,xx}, \mu, \lambda \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\int_\Omega \Phi \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{44α}$$

$$\int_\Omega \Phi_{,y} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{44β}$$

$$\int_\Omega \Phi_{,z} \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{44γ}$$

$$\int_\Omega \left(-z\Phi_{,y} + y\Phi_{,z} \right) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{44δ}$$

Οι Εξισώσεις (40) και (44) αποτελούν τις συνθήκες ύπαρξης λύσης του δισδιάστατου προβλήματος συνοριακών τιμών της Εξίσωσης (20). Προκειμένου να εφαρμοστούν αυτές οι συνθήκες γίνονται οι παρακάτω θεωρήσεις αναφορικά με τις συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης

$$\Phi = \hat{\Phi} + C^{\Phi} + C^{\Phi,y} \cdot Y + C^{\Phi,z} \cdot Z + C^{\Phi_x} \cdot \left(\varphi_x^P - \frac{Y}{A} \int_\Omega \varphi_{x,y}^P \mathrm{d}\Omega - \frac{Z}{A} \int_\Omega \varphi_{x,z}^P \mathrm{d}\Omega \right) \tag{45α}$$

$$V = \hat{V} + C^V - C^t \cdot Z + C^u \cdot Y \tag{45β}$$

$$W = \hat{W} + C^W + C^t \cdot Y + C^u \cdot Z \tag{45γ}$$

όπου $\hat{\Phi}$, $\hat{V}$, $\hat{W}$ είναι η συνάρτηση στρέβλωσης και οι συνιστώσες των συναρτήσεων διαστρέβλωσης, αντίστοιχα, πριν την ικανοποίηση των Εξισώσεων (40) και (44), ενώ C^{Φ}, $C^{\Phi,y}$,

$C^{\Phi,z}$, C^{Φ_x}, C^V, C^W, C^t, C^u είναι κάποιες σταθερές που ορίζονται προκειμένου να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις (40) και (44). Υπό το πρίσμα του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας οι Εξισώσεις (45) γράφονται ως:

$$\tilde{\Phi}_i = \hat{\Phi}_i + C_i^{\Phi} + C_i^{\Phi,y} \cdot Y + C_i^{\Phi,z} \cdot Z + C_i^{\Phi_x} \cdot \left(\varphi_x^P - \frac{Y}{A}\int_\Omega \varphi_{x,y}^P \mathrm{d}\Omega - \frac{Z}{A}\int_\Omega \varphi_{x,z}^P \mathrm{d}\Omega \right) \tag{46α}$$

$$\tilde{V}_i = \hat{V}_i + C_i^V - C_i^t \cdot Z + C_i^u \cdot Y \tag{46β}$$

$$\tilde{W}_i = \hat{W}_i + C_i^W + C_i^t \cdot Y + C_i^u \cdot Z \tag{46γ}$$

Στην συνέχεια ακολουθεί μια διασικασία προσδιορισμού των σταθερών $C_i^{\Phi}, C_i^{\Phi,y}$, $C_i^{\Phi,z}$, $C_i^{\Phi_x}$, C_i^V, C_i^W, C_i^t, C_i^u της παραπάνω σχέσης (Εξίσωση (46)).

→<u>Πρόβλημα διαστρέβλωσης</u>-Προσδιορισμός των $C_i^{\Phi,y}$, $C_i^{\Phi,z}$, $C_i^{\Phi_x}$, C_i^V, C_i^W, C_i^t

Προκειμένου η Εξίσωση (23) να έχει λύση (πρόβλημα διαστρέβλωσης), σύμφωνα με την αναφορά [25], θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\int_\Omega \left(\mathrm{b}_y\right)_{i-1} \mathrm{d}\Omega = -\int_\Gamma \left(t_y\right)_i \mathrm{ds} \tag{47α}$$

$$\int_\Omega \left(\mathrm{b}_z\right)_{i-1} \mathrm{d}\Omega = -\int_\Gamma \left(t_z\right)_i \mathrm{ds} \tag{47β}$$

$$\int_\Omega \left(yb_z - zb_y\right)_{i-1} \mathrm{d}\Omega = -\int_\Gamma \left(yt_z - zt_y\right)_i \mathrm{ds} \tag{47γ}$$

•Προσδιορισμός των $C_i^{\Phi,y}, C_i^V$

Έπειτα από αντικατάσταση των Εξισώσεων (23β και ε) στην εξίσωση (47α) λαμβάνεται η σχέση

$$\mu\int_{\Omega} v_{i-1}\mathrm{d}\Omega = \left(-\mu\frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}}+\lambda\right)\int_{\Omega}\varphi_{i-1,y}\mathrm{d}\Omega \tag{48}$$

Για $i=1$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, η Εξίσωση (48) δίνει ως αποτέλεσμα $0=0$, επομένως ικανοποιείται. Για $i\geq 2$ λαμβάνεται $\int_{\Omega}\varphi_{i-1,y}\mathrm{d}\Omega=0$ και $\int_{\Omega} v_{i-1}\mathrm{d}\Omega=0$ ή έχοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ καθώς και τις Εξισώσεις (22) και (25), λαμβάνεται $\int_{\Omega}\tilde{\Phi}_{i,y}\mathrm{d}\Omega=0$ και $\int_{\Omega}\tilde{V}_i\mathrm{d}\Omega=0$ για $i\geq 1$. Μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (46α και β) στις τελευταίες εκφράσεις, αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C_i^{\Phi,y}=-\frac{1}{A}\int_{\Omega}\hat{\Phi}_{i,y}\mathrm{d}\Omega \text{ και } C_i^{V}=-\frac{1}{\mathrm{A}}\int_{\Omega}\hat{V}_i\mathrm{d}\Omega \ \forall i\geq 1 \tag{49}$$

•Προσδιορισμός των $C_i^{\Phi,z}, C_i^{W}$

Έπειτα από αντικατάσταση των Εξισώσεων (23δ και στ) στην Εξίσωση (47β) λαμβάνεται η σχέση

$$\mu\int_{\Omega} w_{i-1}\mathrm{d}\Omega = \left(-\mu\frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}}+\lambda\right)\int_{\Omega}\varphi_{i-1,z}\mathrm{d}\Omega \tag{50}$$

Για $i=1$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, η Εξίσωση (50) δίνει ως αποτέλεσμα $0=0$, επομένως ικανοποιείται. Για $i\geq 2$ λαμβάνεται $\int_{\Omega}\varphi_{i-1,z}\mathrm{d}\Omega=0$ και $\int_{\Omega} w_{i-1}\mathrm{d}\Omega=0$ ή έχοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ καθώς και τις Εξισώσεις (22) και (25), λαμβάνεται $\int_{\Omega}\tilde{\Phi}_{i,z}\mathrm{d}\Omega=0$ και $\int_{\Omega}\tilde{W}_i\mathrm{d}\Omega=0$ για $i\geq 1$. Μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (46α και γ) στις τελευταίες έκφρασεις, αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C_i^{\Phi,z} = -\frac{1}{A}\int_\Omega \widehat{\Phi}_{i,z}\mathrm{d}\Omega \text{ και } C_i^W = -\frac{1}{\mathrm{A}}\int_\Omega \widehat{W}_i\mathrm{d}\Omega \ \forall i \geq 1 \tag{51}$$

•Προσδιορισμός των $C_i^{\Phi,z}, C_i^t$

Μετά την αντικατάσταση των Εξισώσεων (23β,δ,ε και στ) στην εξίσωση (47γ) λαμβάνεται η σχέση

$$\int_\Omega \left(yw_{i-1} - zv_{i-1}\right)\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \left(y\varphi_{i-1,z} - z\varphi_{i-1,y}\right)\mathrm{d}\Omega \tag{52}$$

Για $i=1$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, η Εξίσωση (52) δίνει ως αποτέλεσμα $0=0$, επομένως ικανοποιείται. Για $i \geq 2$ λαμβάνεται $\int_\Omega \left(y\varphi_{i-1,z} - z\varphi_{i-1,y}\right)\mathrm{d}\Omega$=0 και $\int_\Omega \left(yw_{i-1} - zv_{i-1}\right)\mathrm{d}\Omega = 0$ ή έχοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ καθώς και τις Εξισώσεις (23) και (25) λαμβάνεται $\int_\Omega \left(y\tilde{\Phi}_{i,z} - z\tilde{\Phi}_{i,y}\right)\mathrm{d}\Omega$=0 και $\int_\Omega \left(y\tilde{W}_i - z\tilde{V}_i\right)\mathrm{d}\Omega = 0$ για $i \geq 1$. Μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (46α) και (46β,γ) στις τελευταίες εκφράσεις, αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C_i^{\Phi_x} = -\frac{\int_\Omega \left(Y\cdot\widehat{\Phi}_{i,z} - Z\cdot\widehat{\Phi}_{i,y}\right)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \left(Y\cdot\varphi_{x,z}^P - Z\cdot\varphi_{x,y}^P\right)\mathrm{d}\Omega} \text{ και } C_i^t = -\frac{\int_\Omega \left(-Z\cdot\widehat{V}_i + Y\cdot\widehat{W}_i\right)\mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \left(Y^2 + Z^2\right)\mathrm{d}\Omega} \ \forall i \geq 1 \tag{53α,β}$$

→<u>Πρόβλημα στρέβλωσης</u>-Προσδιορισμός των C_i^Φ, C_i^u

Προκειμένου η Εξίσωση (24) να έχει λύση (πρόβλημα στρέβλωσης), σύμφωνα με την αναφορά [25], θα πρέπει να ισχύει

$$\int_\Omega f_i\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \tilde{\Phi}_{i,n}\mathrm{ds} \tag{54}$$

Προκειμένου να ικανοποιείται αυτή η απαίτηση, με τη βοήθεια της σταθεράς $Coeff\,(i)$ η Εξίσωση (24γ) τροποποιείται σε

$$f_i = -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \cdot Coeff\,(i) \cdot \varphi_{i-1} - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{U}}_i} \tag{55}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (24β) και (55) στην Εξίσωση (54) προκύπτει

$$Coeff\,(i) \cdot \int_{\Omega} \varphi_{i-1} \mathrm{d}\Omega = -\bar{\nu} \int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{U}}_i}\, \mathrm{d}\Omega \tag{56}$$

Για $i=1$ και έχοντας υπόψιν ότι $\tilde{V}_1 = -\nu Y$, $\tilde{W}_1 = -\nu Z$ και $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (λεπτομέρειες στην Ενότητα 2.6.4), λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$Coeff\,(1) = -\bar{\nu}\, \frac{\int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{U}}_1}\, \mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega} \varphi_0 \mathrm{d}\Omega} \Rightarrow Coeff\,(1) = \frac{2\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}^{\,2} \tag{57}$$

Για $i \geq 2$ λαμβάνεται $Coeff\,(i) = 1$, $\int_{\Omega} \varphi_{i-1} \mathrm{d}\Omega = 0$ και $\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \mathrm{d}\Omega = 0 \int_{\Omega} \left(y w_{i-1} - z v_{i-1} \right) \mathrm{d}\Omega = 0$ ή έχοντας υπόψιν ότι $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, τις Εξισώσεις (22) και (25) και κάνοντας την υπόθεση, οτι για λόγους απλότητας, τελικά θα θεωρηθεί $\varphi_1 = \Phi_1$, λαμβάνεται $\int_{\Omega} \tilde{\Phi}_i \mathrm{d}\Omega = 0$ για $i \geq 1$ και $\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \mathrm{d}\Omega = 0$ για $i \geq 2$. Μετά από αντικατάσταση των Εξισώσεων (46α) και (46β,γ) στις τελευταίες εκφράσεις, αντίστοιχα, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$C_i^{\Phi} = -\frac{1}{\mathrm{A}} \int_{\Omega} \widehat{\Phi}_i \mathrm{d}\Omega \;\; \forall i \geq 1 \;\; \text{και} \;\; C_i^{u} = -\frac{1}{2\mathrm{A}} \int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{2\times 1}{\widehat{\mathbf{U}}_i}\, \mathrm{d}\Omega \;\; \forall i \geq 2 \tag{58}$$

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω εξίσωσεις που οδηγούν στον υπολογισμό των C_i^{Φ}, $C_i^{\Phi,y}$, $C_i^{\Phi,z}$, $C_i^{\Phi_x}$, C_i^{V}, C_i^{W}, C_i^{t}, C_i^{u} είναι σε συμφωνία με τις Εξισώσεις (40), (44), το οποίο επιβεβαιώνει την αρχική τοποθέτηση αυτής της Ενότητας, δηλαδή ότι το φυσικό νόημα των συνθηκών ύπαρξης λύσης είναι η εξάλειψη του δυνατού έργου των τάσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης πάνω στις δυνατές ανηγμένες παραμορφώσεις του στερεού σώματος.

2.8.4 Επισημάνσεις επί των αξονικών μορφών στρέβλωσης και διαστρέβλωσης

Για $i=1$ και υποθέτοντας ότι $\mathbf{w}_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως), το οποίο υποδεικνύει μια μετατόπιση του στερεού σώματος της διατομής κατά τον άξονα *x*, το πρόβλημα της διαστρέβλωσης της Εξίσωσης (23) μπορεί να γραφεί ως:

$$\nabla^2\tilde{V}_1+\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\nabla\cdot\underset{2\times1}{\tilde{\mathbf{U}}_1}\right)_{,y}=0 \tag{59α}$$

$$\left(t_y\right)_1=-\lambda n_y \tag{59β}$$

$$\nabla^2\tilde{W}_1+\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\nabla\cdot\underset{2\times1}{\tilde{\mathbf{U}}_1}\right)_{,z}=0 \tag{59γ}$$

$$\left(t_z\right)_1=-\lambda n_z \tag{59δ}$$

όπου

$$\left(t_y\right)_1=\mu\left(\tilde{V}_{1,n}+\tilde{V}_{1,y}n_y+\tilde{W}_{1,y}n_z\right)+\lambda\left(\tilde{V}_{1,y}+\tilde{W}_{1,z}\right)n_y \tag{59ε}$$

$$\left(t_z\right)_1=\mu\left(\tilde{W}_{1,n}+\tilde{V}_{1,z}n_y+\tilde{W}_{1,z}n_z\right)+\lambda\left(\tilde{V}_{1,y}+\tilde{W}_{1,z}\right)n_z \tag{59στ}$$

Το παραπάνω πρόβλημα διδιάστατης ελαστικότητας (Εξίσωση (59)) ικανοποιείται από τη λύση $\tilde{V}_1=-vY$, $\tilde{W}_1=-vZ$ που συμμορφώνεται με όλες τις σχετικές απαιτήσεις της Ενότητας 2.6.3. Αυτή η λύση παρουσιάζει ομοιόμορφη πλευρική συρρίκνωση της διατομής η οποία οφείλεται σε

αξονική ένταση (μετατόπιση στερεού σώματος $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$) λόγω του φαινομένου Poisson. Αντικαθιστώντας τα $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\tilde{V}_1 = -\nu Y$ and $\tilde{W}_1 = -\nu Z$ στις εξισώσεις (24a,b), (55) και (57) προκύπτει:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_1 = 2\nu \tag{60α}$$

$$\tilde{\Phi}_{1,n} = \nu \left(Y n_y + Z n_z \right) \tag{60β}$$

Το παραπάνω πρόβλημα Poisson (Εξίσωση (60)) ικανοποιείται από τη λύση $\tilde{\Phi}_1 = \frac{\nu}{2}\left(Y^2 + Z^2 - \frac{I_p}{A} \right)$, η οποία συμμορφώνεται με όλες τις σχετικές απαιτήσεις της Ενότητας 2.6.3, όπου $I_p = \int_\Omega \left(Y^2 + Z^2 \right) \mathrm{d}\Omega$. Βάσει της προαναφερθείσας υπόθεσης (της Ενότητας 2.6.3), ότι για λόγους απλοποίησης τελικά λαμβάνεται $\varphi_1 = \Phi_1$, το οποίο ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι $\varphi_0 = 0$, από την Εξίσωση (28) προκύπτει ότι $c_1^2 = 0$, επομένως τίθεται $c_1^2 = 1$. Έχοντας καθορίσει το $\tilde{\mathbf{W}}_1$ και εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (25) και (22) προκύπτει:

$$\underset{3\times 1}{\mathbf{w}_1} = \begin{Bmatrix} \frac{\nu}{2}\left(Y^2 + Z^2 - \frac{I_p}{A} \right) \\ -\nu Y \\ -\nu Z \end{Bmatrix} \tag{61}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως οι φ_1, v_1 και w_1 $\left(\varphi_i, v_i, w_i,\ i = 1 \right)$ της Ενότητας 2.8 αντιστοιχούν στις φ_u^P, v_u^P και w_u^P των προηγουμένων Ενοτήτων, αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

3.1 Συναρτήσεις σχήματος και επικόμβιες μετατοπίσεις

Σύμφωνα με την προτεινόμενη ανάλυση, το πρόβλημα τοπικού λυγισμού δοκών ομογενούς διατομής λαμβάνοντας υπόψιν φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που προκαλούνται από αξονική φόρτιση, διάτμηση, κάμψη και στρέψη λύνεται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method-FEM) [26]. Βάσει της μεθόδου αυτής, οι συνιστώσες των μετατοπίσεων $d_i(x)$ για $i = 1...N_{dofs}$ (του διανύσματος μετατόπισης $\mathbf{d}$) εκφράζονται μέσω μίας συνάρτησης επικόμβιων μετατοπίσεων και συναρτήσεων σχήματος.

Έστω ότι χρησιμοποιείται ένα στοιχείο (element) τριών κόμβων ($N_{nodes} = 3$), οι οποίοι βρίσκονται στις θέσεις $x = 0$, $x = L/2$ και $x = L$, όπου ως L ορίζεται το μήκος του στοιχείου και έστω ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο αριστερό του άκρο. Ως αποτέλεσμα, οι προαναφερθείσες συνιστώσες μετατόπισης εκφράζονται σε όρους επικόμβιων μετατοπίσεων ως

$$d_i(x) = f_1(x) \cdot d_{i1} + f_2(x) \cdot d_{i2} + f_2(x) \cdot d_{i3} \tag{62α}$$

όπου d_{i1}, d_{i2}, d_{i3} είναι οι επικόμβιες μετατοπίσεις της d_i συνιστσώσας μετατόπισης στους κόμβους 1($x = 0$), 2($x = L/2$) και 3($x = L$), αντίστοιχα, ενώ οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται από τις εκφράσεις

$$f_1(x) = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \tag{62β}$$

$$f_2(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \tag{62γ}$$

$$f_3(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \tag{62δ}$$

οι οποίες έχουν υπολογιστεί προκειμένου να εξασφαλίζεται ότι $d_i = d_{i1}$ στη θέση $x = 0$, $d_i = d_{i2}$ στη θέση $x = L/2$ και $d_i = d_{i3}$ στη θέση $x = L$. Επομένως, το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων, για μέχρι δευτερογενείς μορφές παραμόρφωσης, ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathbf{q} = \Big[& u_1 \;\; v_1 \;\; w_1 \;\; \theta_{x1} \;\; \eta_{u1}^P \;\; \eta_{Y1}^P \;\; \eta_{Z1}^P \;\; \eta_{x1}^P \;\; \eta_{u1}^S \;\; \eta_{Y1}^S \;\; \eta_{Z1}^S \;\; \eta_{x1}^S \;\; z_{u1}^P \;\; z_{Y1}^P \;\; z_{Z1}^P \;\; z_{x1}^P \;\; z_{u1}^S \;\; z_{Y1}^S \;\; z_{Z1}^S \;\; z_{x1}^S \;\vdots \\ & u_2 \;\; v_2 \;\; w_2 \;\; \theta_{x2} \;\; \eta_{u2}^P \;\; \eta_{Y2}^P \;\; \eta_{Z2}^P \;\; \eta_{x2}^P \;\; \eta_{u2}^S \;\; \eta_{Y2}^S \;\; \eta_{Z2}^S \;\; \eta_{x2}^S \;\; z_{u2}^P \;\; z_{Y2}^P \;\; z_{Z2}^P \;\; z_{x2}^P \;\; z_{u2}^S \;\; z_{Y2}^S \;\; z_{Z2}^S \;\; z_{x2}^S \;\vdots \\ & u_3 \;\; v_3 \;\; w_3 \;\; \theta_{x3} \;\; \eta_{u3}^P \;\; \eta_{Y3}^P \;\; \eta_{Z3}^P \;\; \eta_{x3}^P \;\; \eta_{u3}^S \;\; \eta_{Y3}^S \;\; \eta_{Z3}^S \;\; \eta_{x3}^S \;\; z_{u3}^P \;\; z_{Y3}^P \;\; z_{Z3}^P \;\; z_{x3}^P \;\; z_{u3}^S \;\; z_{Y3}^S \;\; z_{Z3}^S \;\; z_{x3}^S \Big]^T\end{aligned} \tag{63}$$

ή

$$\begin{aligned}\mathbf{q} = \Big[& q_1 \;\; q_2 \;\; q_3 \;\; q_4 \;\; q_5 \;\; q_6 \;\; q_7 \;\; q_8 \;\; q_9 \;\; q_{10} \;\; q_{11} \;\; q_{12} \;\; q_{13} \;\; q_{14} \;\; q_{15} \;\; q_{16} \;\; q_{17} \;\; q_{18} \;\; q_{19} \;\; q_{20} \;\vdots \\ & q_{21} \;\; q_{22} \;\; q_{23} \;\; q_{24} \;\; q_{25} \;\; q_{26} \;\; q_{27} \;\; q_{28} \;\; q_{29} \;\; q_{30} \;\; q_{31} \;\; q_{32} \;\; q_{33} \;\; q_{34} \;\; q_{35} \;\; q_{36} \;\; q_{37} \;\; q_{38} \;\; q_{39} \;\; q_{40} \;\vdots \\ & q_{41} \;\; q_{42} \;\; q_{43} \;\; q_{44} \;\; q_{45} \;\; q_{46} \;\; q_{47} \;\; q_{48} \;\; q_{49} \;\; q_{50} \;\; q_{51} \;\; q_{52} \;\; q_{53} \;\; q_{54} \;\; q_{55} \;\; q_{56} \;\; q_{57} \;\; q_{58} \;\; q_{59} \;\; q_{60} \Big]^T\end{aligned} \tag{64}$$

και το διάνυσμα της μετατόπισης μπορεί να γραφεί ως

$$\underset{N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}} = \underset{N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}} \tag{65α}$$

όπου

$$\underset{N_{dofs}xN_{stiffness}}{\mathbf{f}} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc} f_1(x) & 0 & \cdots & 0 & f_2(x) & 0 & \cdots & 0 & f_3(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1(x) & \cdots & 0 & 0 & f_2(x) & \cdots & 0 & 0 & f_3(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1(x) & 0 & 0 & \cdots & f_2(x) & 0 & 0 & \cdots & f_3(x) \\ & \underset{N_{dofs}xN_{dofs}}{} & & & & \underset{N_{dofs}xN_{dofs}}{} & & & & \underset{N_{dofs}xN_{dofs}}{} & & \end{array}\right] \tag{65β}$$

$$N_{stiffness} = N_{dofs} \times N_{nodes} \tag{65γ}$$

3.2 Αρχή δυνατών έργων

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (13), (15α), (17α), (19) και αντικαθιστώντας στην Εξίσωση (65α) η αρχή δυνατών έργων μπορεί να γραφεί ως

$$\underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{lin}} + \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{G}} = \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}} \tag{66}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \neq 0$

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{lin}} + \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{G}} = \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}} \tag{67}$$

όπου $\mathbf{f}_s^{lin}$, $\mathbf{f}_s^{G}$ και $\mathbf{P}$ είναι το γραμμικό και το μη-γραμμικό μέρος των ελαστικών δυνάμεων και το διάνυσμα φόρτισης, αντίστοιχα.

3.3 Γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (65α) στην Εξίσωση (15α) η έκφραση του δυνατού έργου του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta U^{lin} = \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \left(\int_0^L \underset{N_{stiffness}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{f}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_{lin}^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} dx \right) \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}} \tag{68α}$$

όπου

$$\underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} = \begin{bmatrix} \underset{N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}} \\ \underset{N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{,x}} \end{bmatrix} \tag{68β}$$

Επομένως οι αναπτυσσόμενες γραμμικές ελαστικές δυνάμεις εκτιμώνται ως

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{lin}} = \left(\int_0^L \underset{N_{stiffness}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{f}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_{lin}^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} dx \right) \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}} \tag{69}$$

3.4 Μη γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (65α) στην Εξίσωση (17α) η έκφραση του δυνατού έργου του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta U^G = \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \int_0^L \underset{N_{stiffness}\times N_{Erows}}{\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} dx \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}^0} \tag{70α}$$

όπου

$$\underset{N_{Erows}\times N_{stiffness}}{\mathbf{Z}} = \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{d}_{tot}}} \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} \tag{70β}$$

Επομένως οι αναπτυσσόμενες μη γραμμικές ελαστικές δυνάμεις εκτιμώνται ως

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^G} = \int_0^L \underset{N_{stiffness}\times N_{Erows}}{\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} dx \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}^0} \tag{71}$$

3.5 Διάνυσμα φόρτισης

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (65α) στην Εξίσωση (19) η έκφραση του δυνατού έργου των εξωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta W = \underbrace{\underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \int_0^L \left(\sum_{j=1}^{K} \int_{\Gamma_j} \left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}_j^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}_j} \right) ds \right) dx}_{\text{Lateral Surface}} + \underbrace{\underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \int_{\Omega^0} \left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\Big|_{x=0}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}\Big|_{x=0}} \right) d\Omega^0}_{\text{Left end } (x=0)} + \underbrace{\underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \int_{\Omega^L} \left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\Big|_{x=L}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}\Big|_{x=L}} \right) d\Omega^L}_{\text{Right end } (x=L)} \tag{72α}$$

όπου

$$\underset{3\times N_{stiffness}}{\mathbf{H}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \underset{3\times 2N_{dofs}}{\mathbf{d}_{tot}}} \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} = \underset{3\times 2N_{dofs}}{\mathbf{H}_u}\left(y,z,\varphi_i^j,v_i^j,w_i^j\right) \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} \text{, όπου } i=u,Y,Z,x \text{ και } j=P,S \tag{72β}$$

ή

$$\delta W = \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \int_0^L \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{p}}\, dx + \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_0} + \underset{1\times N_{stiffness}}{\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}} \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_L} \tag{73α}$$

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^{K}\left(\int_{\Gamma_j}\left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}_j^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}_j}\right) ds\right) \tag{73β}$$

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_0} = \int_{\Omega^0}\left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}}\right)\Bigg|_{x=0} d\Omega^0 \tag{73γ}$$

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_L} = \int_{\Omega^L}\left(\underset{N_{stiffness}\times 3}{\mathbf{H}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{3\times 1}{\mathbf{t}}\right)\Bigg|_{x=L} d\Omega^L \tag{73δ}$$

όπου $\mathbf{p}$ είναι το κατανεμημένο διάνυσμα φόρτισης στο μήκος της ράβδου, ενώ $\mathbf{P}_0$ και $\mathbf{P}_L$ είναι τα συγκεντρωμένα φορτία που εφαρμόζονται στο αριστερό ($x=0$) και στο δεξί ($x=L$) άκρο της ράβδου, αντίστοιχα. Επομένως το διάνυσμα φόρτισης εκτιμάται ως

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}} = \int_0^L \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{p}}\, dx + \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_0} + \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}_L} \tag{74}$$

3.6 Μητρώο στιβαρότητας στοιχείου

Η Εξίσωση (67), που πρέπει να επιλυθεί, μπορεί να γραφεί ως

$$\underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{lin}} + \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{f}_s^{G}} - \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{P}} = \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{0}} \tag{75}$$

ή

$$\underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\delta\mathbf{q}} = \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{0}} \tag{76}$$

όπου $\mathbf{K}$ είναι το ολικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου το οποίο υπολογίζεται μέσω της έκφρασης

$$\underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}} = \underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\frac{\partial \mathbf{f}_s^{lin}}{\partial \mathbf{q}}} + \underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\frac{\partial \mathbf{f}_s^{G}}{\partial \mathbf{q}}} \tag{77}$$

Μετά με την αντικατάσταση των εξισώσεων (69) και (71) το μητρώο στιβαρότητας λαμβάνεται ως

$$\underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}} = \underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}_{lin}} + \underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}_{G}} \tag{78α}$$

όπου

$$\underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}_{lin}} = \int_0^L \underset{N_{stiffness}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{f}_{tot}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_{lin}^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}}\, dx \tag{78β}$$

$$\underset{N_{stiffness}\times N_{stiffness}}{\mathbf{K}_{G}} = \int_0^L \sum_{i=1}^{N_{Erows}} \underset{1\times 1}{\mathbf{K}\mathbf{d}^0(i)} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{f}_{tot}^{\mathrm{T}}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}}} \left(\underset{2N_{dofs}\times 1}{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}}^{\mathrm{T}}(:,i)} \right)}_{2N_{dofs}\times 2N_{dofs}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}}\, dx \tag{78γ}$$

$$\underset{N_{Erows}\times 1}{\mathbf{K}\mathbf{d}^0} = \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times 1}{\mathbf{d}_{tot}^0} = \underset{N_{Erows}\times 2N_{dofs}}{\mathbf{K}_G^{gc}} \cdot \underset{2N_{dofs}\times N_{stiffness}}{\mathbf{f}_{tot}} \cdot \underset{N_{stiffness}\times 1}{\mathbf{q}^0} \tag{78δ}$$

3.7 Ολικό μητρώο στιβαρότητας και κριτήριο λυγισμού

Διαχωρίζοντας τη δοκό σε N_e στοιχεία, εφαρμόζοντας στην Εξίσωση (76) την μέθοδο άμεσης στιβαρότητας και λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες της δοκού, το ολικό σύστημα εξισώσεων της δοκού μορφώνεται ως

$$\left(\mathbf{K}_{lin}^{tot} + \lambda \cdot \mathbf{K}_{G}^{tot}\right)\delta\mathbf{q}^{tot} = \mathbf{0} \tag{79}$$

Το φορτίο λυγισμού υπολογίζεται μέσω της λύσης του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών της Εξίσωσης (79) όπου $\mathbf{K}_{lin}^{tot}$ είναι το γραμμικό μητρώο στιβαρότητας και $\mathbf{K}_{G}^{tot}$ είναι το ολικό γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας όλης της δοκού. Προκειμένου να προσεγγιστεί το γεωμετιρκό μητρώο στιβαρότητας πρώτα επιχειρείται η εύρεση μιας γραμμικής στατικής λύσης προκειμένου να υπολογιστεί το επικόμβιο διάνυσμα μετατοπίσεων της δοκού που συμβολίζεται με $\mathbf{q}_0^{tot}$ και για το οποίο ισχύει

$$\mathbf{q}_0^{tot} = \mathbf{K}_{lin}^{tot-1} \cdot \mathbf{P}^{tot} \tag{80}$$

όπου $\mathbf{P}^{tot}$ είναι το ολικό διάνυσμα φόρτισης ολόκληρης της ράβδου. Στην συνέχεια το $\mathbf{q}^0$ (το οποίο είναι μέρος του $\mathbf{q}_0^{tot}$) αντικαθίσταται στις Εξισώσεις (78γ,δ), για κάθε στοιχείο, προκειμένου να υπολογιστεί το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας κάθε στοιχείου και τελικά προκύπτει το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας όλης της ράβδου, όπως αναφέρεται παραπάνω. Οι ιδιοτιμές λ αντιπροσωπεύουν τον συντελεστή του φορτίου που πολλαπλασιάζει το $\mathbf{P}^{tot}$ και οδηγεί τη δοκό σε λυγισμό. Επομένως το διάνυσμα φόρτισης που προκαλεί λυγισμό (φορτίο λυγισμού) έχει τη μορφή

$$\mathbf{P}_{cr} = \lambda \cdot \mathbf{P}^{tot} \tag{81}$$

και τα ιδιοδιανύσματα $\delta\mathbf{q}^{tot}$ είναι οι αντίστοιχες εικόνες παραμόρφωσης.

3.8 Υπολογιμός αξονικών συναρτήσεων διαστρέβλωσης

Η επίλυση του προβλήματος των Εξισώσεων (23α-δ), οι οποίες αποτελούν ένα πρόβλημα διδιάστατης ελαστικότητας υποβαλλόμενο σε γενικευμένες δυνάμεις (23ε-η), μπορεί να επιλυθεί με χρήση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method-BEM) για τον τελεστή Navier [27-28] κατ'αναλογία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στην αναφορά [23] για τις καμπτικές και στρεπτικές μορφές διαστρέβλωσης. Η διαφορά στην παρούσα εργασία έγκειται στην ολοκληρωτική παράσταση της λύσης η οποία λαμβάνεται ως

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P)\tilde{\mathbf{U}}_i(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\mathbf{U}^*(r)\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}(Q)\,d\Omega+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\left[\mathbf{U}^*(r)\tilde{\mathbf{t}}_i(q)-\mathbf{T}^*(r)\tilde{\mathbf{U}}_i(q)\right]ds \qquad (82\alpha)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}=\mathbf{u}_{i-1}+\frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\nabla\varphi_{i-1} \qquad (82\beta)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_i=-\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\varphi_{i-1}\mathbf{n} \qquad (82\gamma)$$

$$\mathbf{U}^*(P,Q)=\begin{bmatrix}U^*_{\xi y} & U^*_{\eta y}\\ U^*_{\xi z} & U^*_{\eta z}\end{bmatrix} \qquad (82\delta)$$

$$U^*_{\xi y}=-\frac{1}{2}\left[(3-\bar{\nu})\ln(r)-(1+\bar{\nu})r_{,y}^2+\frac{7-\bar{\nu}}{2}\right] \qquad (82\varepsilon)$$

$$U^*_{\eta y}=U^*_{\xi z}=\frac{1}{2}(1+\bar{\nu})r_{,y}r_{,z} \qquad (82\sigma\tau)$$

$$U^*_{\eta z}=-\frac{1}{2}\left[(3-\bar{\nu})\ln(r)-(1+\bar{\nu})r_{,y}^2+\frac{7-\bar{\nu}}{2}\right] \qquad (82\zeta)$$

$$\mathbf{T}^*(P,Q)=\begin{bmatrix}T^*_{\xi y} & T^*_{\eta y}\\ T^*_{\xi z} & T^*_{\eta z}\end{bmatrix} \qquad (82\eta)$$

$$T^*_{ij}=-\frac{1+\bar{\nu}}{r}\left(\frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}+2r_{,y}^2\right)r_{,n} \qquad (82\theta)$$

$$T^*_{\eta y} = -\frac{1+\bar{\nu}}{r}\left(2r_{,y}r_{,z}r_{,n} + \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}r_{,t}\right) \tag{82ι}$$

$$T^*_{\xi z} = -\frac{1+\bar{\nu}}{r}\left(2r_{,y}r_{,z}r_{,n} - \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}}r_{,t}\right) \tag{82κ}$$

$$T^*_{\xi y} = -\frac{1+\bar{\nu}}{r}\left(\frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} + 2r_{,z}^2\right)r_{,n} \tag{82λ}$$

και $r(P,Q) = |Q-P| = \sqrt{(\xi-y)^2 + (\eta-z)^2}$. Το $Q(\xi,\eta)$ είναι ένα σημείο το οποίο βρίσκεται είτε επί του χωρίου Ω της διατομής είτε επί του συνόρου (τότε συμβολίζεται με q) και το οποίο μεταβάλλεται κατά την ολοκλήρωση και τη παραγώγιση. Το $P(y,z)$ είναι και αυτό ένα σημείο το οποίο βρίσκεται είτε στο Ω είτε στο σύνορο (p) και το οποίο διατηρείται σταθερό. Το U^*_{ij} παριστάνει τις συνιστώσες των μετατοπίσεων κατά v και w στο επίπεδο της διατομής και ο πρώτος δείκτης (i) παριστάνει τη διεύθυνση της συνιστώσας της μετατοπίσεως ενώ ο δεύτερος τη διεύθυνσης του φορτίου. Τα ίδια ισχύουν για το T^*_{ij} το οποίο παριστάνει τις συνιστώσες της ολικής τάσεως. Ισχύει επίσης $\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{I}$, $(1/2)\mathbf{I}$ ή $\mathbf{0}$ ανάλογα από το αν το σημείο *P* βρίσκεται στο χωρίο Ω, στο σύνορο Γ ($P \equiv p$) ή εκτός του Ω, αντίστοιχα.

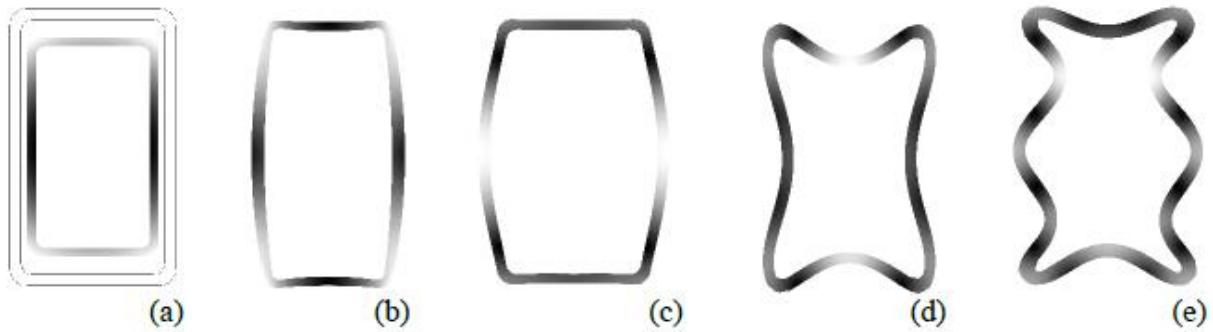
3.9 Υπολογιμός αξονικών συναρτήσεων στρέβλωσης

Έχοντας καθορίσει τις $\tilde{V}_i$, $\tilde{W}_i$ και τις παραγώγους τους ως προς τις μεταβλητές y, z η επίλυση του προβλήματος των Εξισώσεων (24) για την αξονική μορφή στρέβλωσης, επιτυγχάνεται με χρήση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων στο πλαίσιο της μεθόδου των υποφορέων [27-28], κατ'αναλογία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στην αναφορά [23] για τις καμπτικές και στρεπτικές μορφές. Η διαφορά στην παρούσα εργασία έγκειται στην ολοκληρωτική παράσταση της λύσης η οποία λαμβάνεται ως

$$\begin{aligned}\varepsilon(P)\tilde{\Phi}_i(P) = &-\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \ln(r)\left[\frac{2}{1-\bar{\nu}}\varphi_{i-1}(Q) + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\nabla\cdot\underset{2\times1}{\tilde{\mathbf{U}}_i}(Q)\right]d\Omega - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[-\frac{r_{,n}}{r}\tilde{\Phi}_i(q) + \ln(r)\tilde{\Phi}_{i,n}(q)\right]ds\end{aligned} \tag{83}$$

Όπου $\boldsymbol{\varepsilon}(P)=\mathbf{I}$, $(1/2)\mathbf{I}$ ή $\mathbf{0}$ ανάλογα από το αν το σημείο P βρίσκεται στο χωρίο Ω, στο σύνορο Γ ($P \equiv p$) ή εκτός του Ω, αντίστοιχα. Για τα $r(P,Q)=|Q-P|=\sqrt{(\xi-y)^2+(\eta-z)^2}$,$Q(\xi,\eta)$ και $P(y,z)$ ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.8.

Στην συνέχεια στα Σχήματα 2 και 3 δίνονται οι 5 πρώτες αξονικές μορφές διαστρέβλωσης (Σχήμα 3-1) και στρέβλωσης (Σχήμα 3-2), για την πρότυπη μεταλλική διατομή RHS50030020. Η διακριτοποίηση της διατομής έγινε χρησιμοποιώντας 794 γραμμικά, ασυνεχή συνοριακά στοιχεία-16 Gauss Points και 574 τετράπλευρα εσωτερικά στοιχεία-3x3 Gauss Points.



Σχήμα 3-1: 1η (a), 2η (b), 3η (c), 4η (d), 5η (e) μορφή διαστρέβλωσης της RHS50030020

Σχήμα 3-2: 1η (a), 2η (b), 3η (c), 4η (d), 5η (e) μορφή στρέβλωσης της RHS50030020

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Στις ακόλουθες αριθμητικές εφαρμογές εξετάζονται συνολικά 38 διαφορετικά μοντέλα δοκών με πρότυπες μεταλλικές διατομές (ανοιχτού και κλειστού τύπου) οι οποίες θεωρούνται λεπτότοιχες και επομένως είναι ευαίσθητες σε τοπικά φαινόμενα. Σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 (EN1993-1-1, §6.2.6, σχέση (6.22)), διατομές χωρίς ενδιάμεσες ενισχύσεις θεωρούνται λεπτότοιχες όταν ικανοποιείται το ακόλουθο κριτήριο:

$$\frac{h_w}{t_w} > \frac{72\varepsilon}{\eta}$$

όπου ε = 0.81 για χάλυβα ποιότητας S355 και η = 1.0 (συντηρητικότερη θεώρηση έναντι της τιμής η = 1.20) και επομένως εντάσσονται στην κατηγορίας 4 όταν υπόκεινται σε θλίψη.

Συγκεκριμένα το φαινόμενο που εξετάζεται είναι ο τοπικός λυγισμός και για αυτό οι δοκοί υποβάλλονται σε δυο ειδών φορτίσεις:

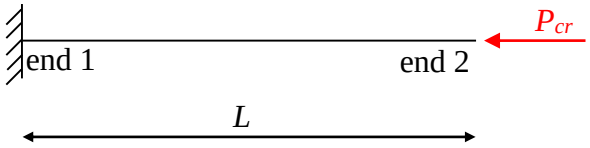
- Αξονική φόρτιση- Ενότητα 4.2
- Καθαρή κάμψη-Ενότητα 4.3

Σκοπός των εφαρμογών αυτών είναι να προσδιορισθεί για κάθε μοντέλο δοκού το κρίσιμο φορτίο και η παραμορφωμένη εικόνα όπως προκύπτουν εφαρμόζοντας τις Θεωρίες Δοκού Ανώτερης Τάξης (High Order Beam Thories-HOBT) και να συγκριθούν με το κρίσιμα φορτία και τις εικόνες παραμόρφωσεις όπως προκύπτουν από την εφαρμογή της Μεθόδου Τρισδιάστατων Πεπερασμένων Στοιχείων (Solid Finite Elment Method-Solid FEM), της Θεωρίας Δοκού Euler-Bernoulli (Euler-Bernoulli Beam Theory-EBBT) και της Θεωρίας Δοκού Timoshenko (Timoshenko Beam Theory-TBT).

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι επειδή οι δοκοί που εξετάζονται έχουν μεγάλο μήκος σε σχέση με το ύψος τους (λόγος ύψους διατομής / μήκος δοκού = 1/10) για να εμφανισθεί τοπικός λυγισμός τοποθετούνται κατά μήκος τους πλευρικές εξασφαλίσεις και στρεπτικές δεσμεύσεις προκειμένου να αποφευγχθεί ο καθολικός λυγισμός που είναι λογικό να επικρατεί σε δοκούς με μεγάλη διαμήκη διάσταση.

4.2 Αξονική καταπόνηση

Στην πρώτη ομάδα αριθμητικών εφαρμογών εξετάζονται δοκοί στατικού συστήματος προβόλου στις οποίες επιβάλλεται θλιπτική δύναμη στο ελεύθερο άκρο τους (Σχημα 4.2-1). Οι δοκοί έχουν πρότυπες μεταλλικές διατομές (*S355*, $E=2.1\cdot10^8 kN/m^2$, $\mu=8.08\cdot10^7 kN/m^2$, $\nu=0.3$), κλειστού τύπου προερχόμενες από τη σειρά RHS και ανοιχτού τύπου προερχόμενες από τις σειρές HEA, HEB, IPE.



Σχήμα 4.2-1: Αξονική καταπόνηση δοκού

Συγκεκριμένα εξετάζονται:

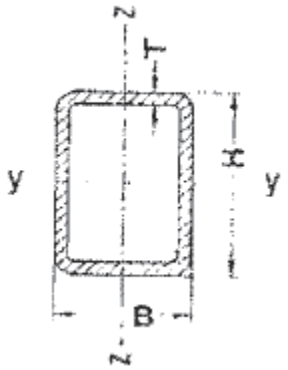
- 9 μοντέλα δοκών διατομής RHS χωρίς διάφραγμα
- 9 μοντέλα δοκών διατομής RHS με διάφραγμα στο άκρο τους
- 5 μοντέλα δοκών διατομής HEA με διάφραγμα στο άκρο τους
- 4 μοντέλα δοκών διατομής HEB με διάφραγμα στο άκρο τους
- 3 μοντέλα δοκών διατομής IPE με διάφραγμα στο άκρο τους

4.2.1 Αριθμητική εφαρμογή 1-Δοκοί διατομής RHS χωρίς διάφραγμα

Στην παρούσα αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται δοκοί με προφίλ διατομών RHS260x180x6.3, RHS300x200x6.3, RHS300x200x8, RHS350x250x8, RHS400x200x8, RHS400x200x10, RHS450x250x8, RHS450x250x10 και RHS500x300x12.5. Οι διαμήκεις διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε ο λόγος του μήκους της δοκού προς τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση της διατομής να είναι ίσος με 10.

Στο ελεύθερο άκρο κάθε δοκού, στο μέσο της εξωτερικής παρειάς του άνω τοιχώματος, έχει τοποθετηθεί μια πλευρική εξασφάλιση προκειμένου να εμφανισθεί τοπικός λυγισμος υπό την επίδραση της εξωτερικής φόρτισης.

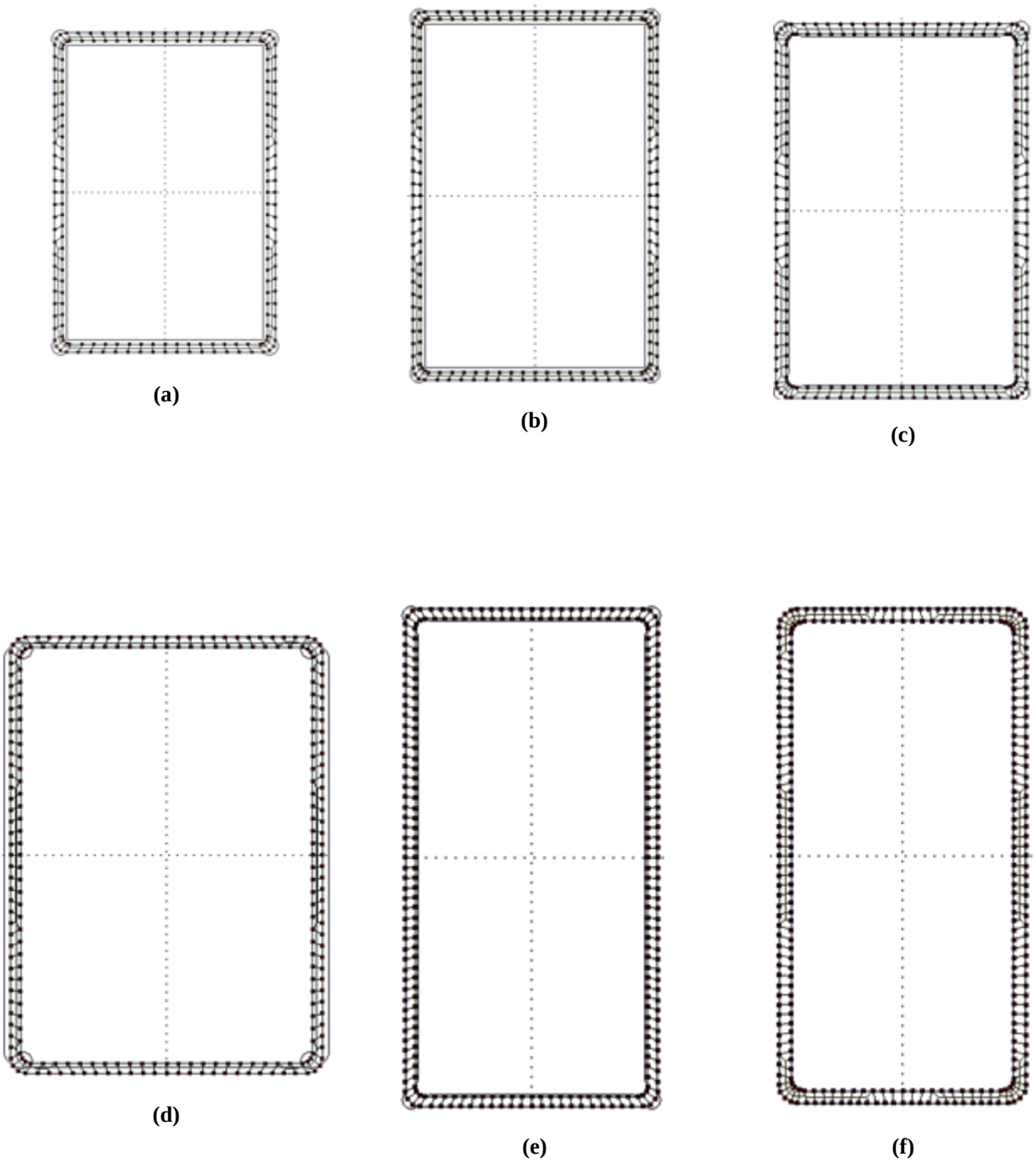
Τα γεωμετρικά στοιχεία των εξεταζόμενων διατομών, η εγκάρσια και κατά μήκος διακριτοποίηση των δοκών σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης και η διακριτοποίηση κατά την εφαρμογή των μεθόδων τρσδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Euler-Bernoulli και Timoshenko δίνονται στους επόμενους Πίνακες και Σχήματα.



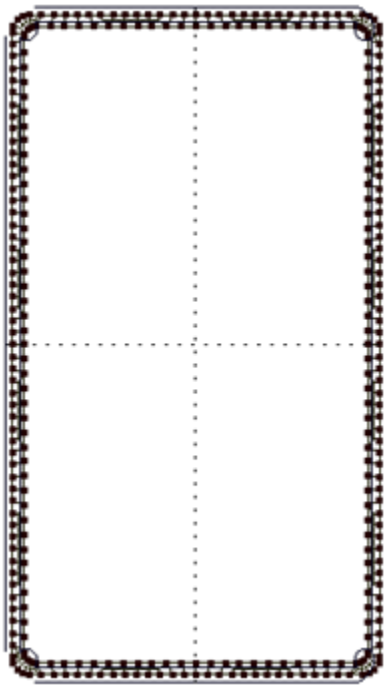
Σχήμα 4.2.1-1: Διαστάσεις διατομής RHS

Πίνακας 4.2.1-1: Γεωμετρικά στοιχεία διατομών RHS που εξετάσθηκαν

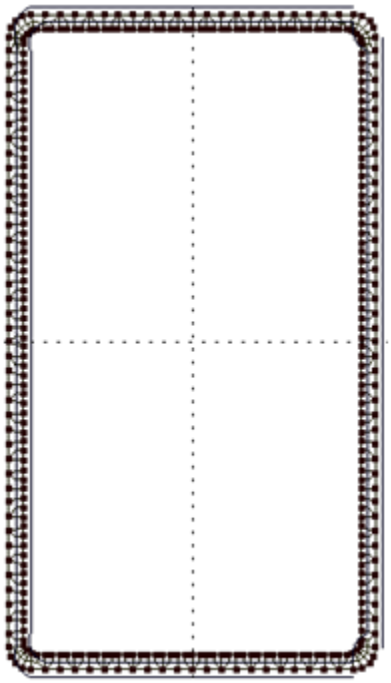
Τύπος	H (mm)	B (mm)	T (mm)	A (cm^2)	I_y (cm^4)	I_z (cm^4)
RHS 260x180x6.3	260	180	6.3	53.4	5166	2929
RHS 300x200x6.3	300	200	6.3	61	7829	4193
RHS 300x200x8	300	200	8	76.8	9717	5184
RHS 350x250x8	350	250	8	92.8	16449	9798
RHS 400x200x8	400	200	8	92.8	19562	6660
RHS 400x200x10	400	200	10	115	23914	8084
RHS 450x250x8	450	250	8	109	30082	12142
RHS 450x250x10	450	250	10	135	36895	14819
RHS 500x300x12.5	500	300	12.5	192	65813	29780



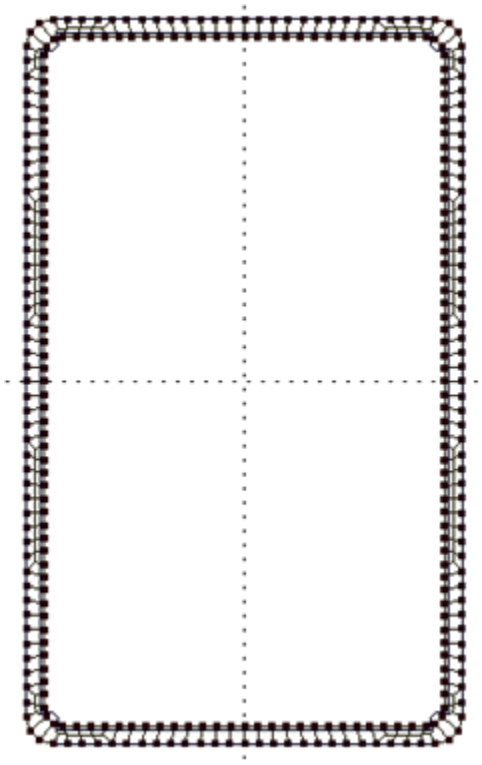
Σχήμα 4.2.1-2: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για τη διατομή RHS260x180x6.3 (a), RHS300x200x6.3 (b), RHS300x200x8 (c), RHS350x250x8 (d), RHS400x200x8 (e), RHS400x200x10 (f)



(a)

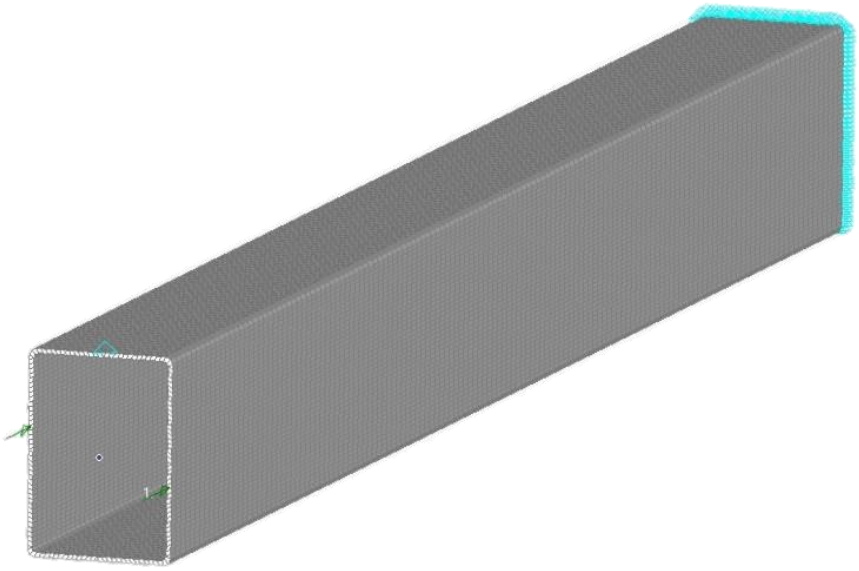


(b)



(c)

Σχήμα 4.2.1-3: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για τη διατομή RHS450x250x8 (a), RHS450x250x10 (b), RHS500x300x12.5 (c)



Σχήμα 4.2.1-4: Στατικό μοντέλο και διακριτοποίηση της δοκού διατομής RHS350x250x8 μήκους 3.5m μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM)

Πίνακας 4.2.1-2:Διακριτοποίηση δοκού διατομής RHS κατά την ανάλυση με χρήση θεωρίας ανώτερης τάξης

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση			
	Εγκάρσια			Διαμήκης
	Συνοριακά Στοιχεία	Τετραεδρικά Στοιχεία		Στοιχεία Δοκού
		Στοιχεία	Gauss Points	
RHS 260x180x6.3-2.6m	940	172	2x2	52
RHS 300x200x6.3-3m	1060	192	2x2	60
RHS 300x200x8-3m	1100	204	2x2	60
RHS 350x250x8-3.5m	1008	180	2x2	70
RHS 400x200x8-4m	888	148	2x2	80
RHS 400x200x10-4m	924	260	2x2	80
RHS 450x250x8-4.5m	960	288	2x2	90
RHS 450x250x10-4.5m	740	373	2x2	90
RHS 500x300x12.5-5m	960	232	2x2	100

Πίνακας 4.2.1-3: Διακριτοποίηση δοκού διατομής RHS κατά την ανάλυση με χρήση μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση				
	Solid FEM			Στοιχεία Θεωρίας Timoshenko	Στοιχεία Θεωρίας Euler-Bernoulli
	Τετραεδρικά Στοιχεία Διατομής	Διαμήκη Στοιχεία	Πεπερασμένα Στοχεία		
RHS 260x180x6.3-2.6m	58	104	6032	260	260
RHS 300x200x6.3-3m	96	120	11520	300	300
RHS 300x200x8-3m	64	120	7680	300	300
RHS 350x250x8-3.5m	148	140	20720	350	350
RHS 400x200x8-4m	190	160	30400	400	400
RHS 400x200x10-4m	158	160	25280	400	400
RHS 450x250x8-4.5m	170	180	30600	450	450
RHS 450x250x10-4.5m	171	180	30780	450	450
RHS500x300x12.5-5m	168	200	33600	500	500

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τους δυο τελευταίους Πίνακες τοποθετήθηκαν:

- 20 διαμήκη στοιχεία / μετρό μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης
- 40 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων
- 100 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko.

Στην συνέχεια δίνονται Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίο λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και της θεωρίας Timoshenko. Σημειώνεται ότι η θεωρία δοκού ανώτερης τάξης εφαρμόσθηκε για μέχρι 52 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (28μορφές).

Πίνακας 4.2.1-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής RHS χωρίς διάφραγμα

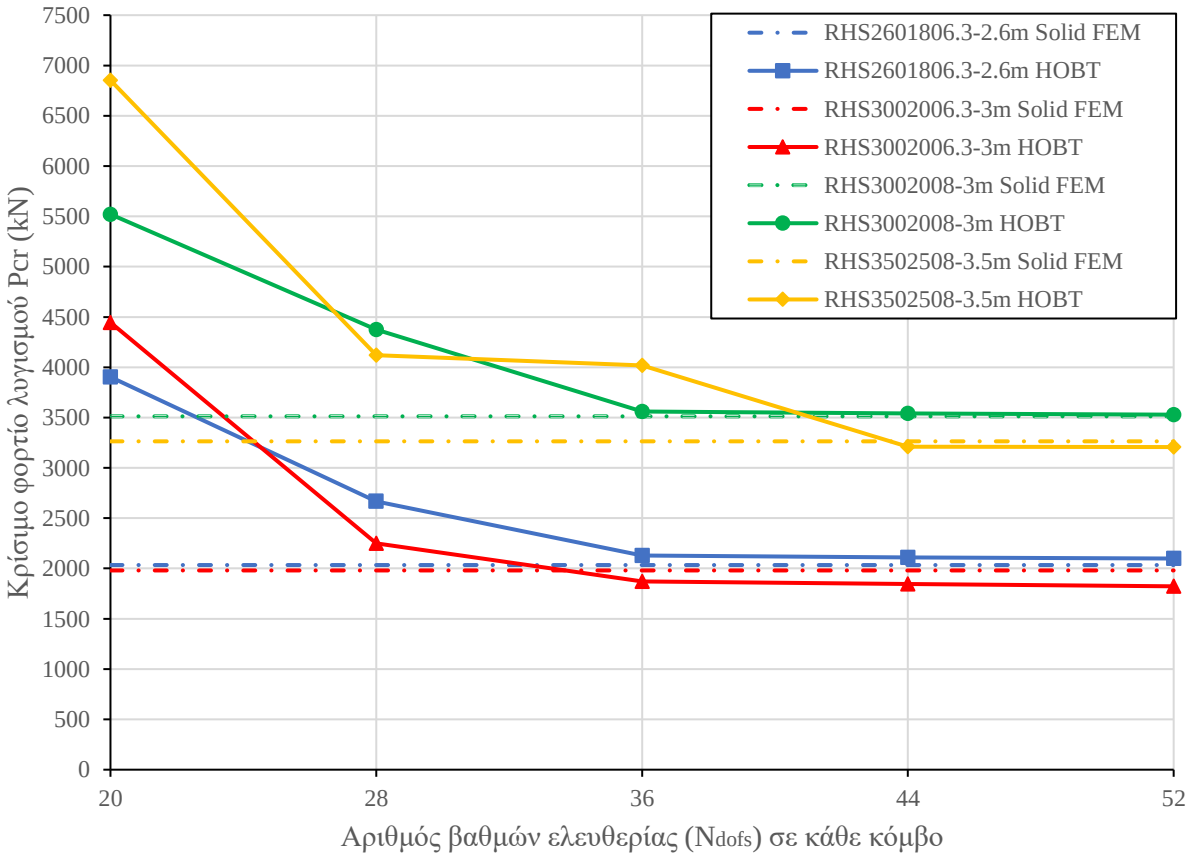
Διατομή-Μήκος Δοκού	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Solid FEM	
RHS 260x180x6.3-2.6m	2098.75	2034.12	3.18%
RHS 300x200x6.3-3m	1822.67	1980.33	8.65%
RHS 300x200x8-3m	3528.86	3512.07	0.48%
RHS 350x250x8-3.5m	3206.72	3263.9	1.78%
RHS 400x200x8-4m	2397.95	2523.68	5.24%
RHS 400x200x10-4m	4720.3	4821.98	2.15%
RHS 450x250x8-4.5m	2305.05	2393.13	3.82%
RHS 450x250x10-4.5m	4567.85	4540.74	0.6%
RHS 500x300x12.5-5m	7613.59	7820.03	2.71%

Πίνακας 4.2.1-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής RHS χωρίς διάφραγμα

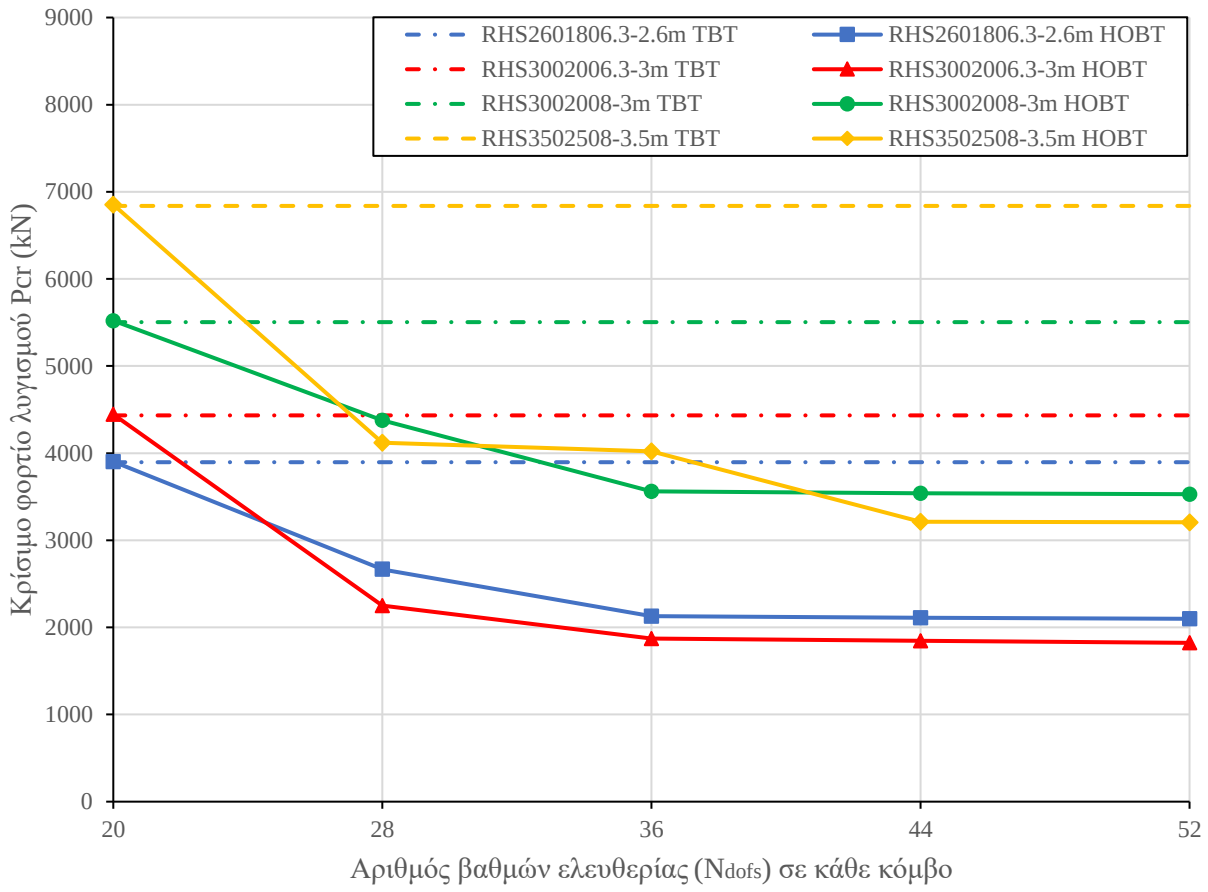
Διατομή-Μήκος Δοκού	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Θεωρία Timoshenko	
RHS 260x180x6.3-2.6m	2098.75	3896.08	85.64%
RHS 300x200x6.3-3m	1822.67	4433.39	143.24%
RHS 300x200x8-3m	3528.86	5503.74	68.89%
RHS 350x250x8-3.5m	3206.72	6837.91	113.24%
RHS 400x200x8-4m	2397.95	6254.04	160.81%
RHS 400x200x10-4m	4720.3	764.51	517.43%
RHS 450x250x8-4.5m	2305.05	7585.26	229.07%
RHS 450x250x10-4.5m	4567.85	9311.75	103.85%
RHS 500x300x12.5-5m	7613.59	13432.52	76.43%

Πίνακας 4.2.1-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS χωρίς διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

RHS 260x180x6.3-2.6m / Solid FEM Pcr=2034.12kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	3903.06	2666.68	2127.92	2109.36	2098.76
Απόκλιση		91.88%	31.1%	4.61%	3.7%	3.18%
RHS 300x200x6.3-3m / Solid FEM Pcr=1980.33kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	4445.53	2248.75	1871.9	1845.58	1822.67
Απόκλιση		124.48%	13.55%	5.79%	7.3%	8.65%
RHS 300x200x8-3m / Solid FEM Pcr=3512.07kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	5520.93	4375.76	3561.73	3540.82	3528.86
Απόκλιση		57.2%	24.59%	1.41%	0.82%	0.48%
RHS 350x250x8-3.5m / Solid FEM Pcr=3263.9kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	6853.09	4118.83	4019.46	3210.8	3206.72
Απόκλιση		109.97%	26.19%	23.15%	1.65%	1.78%



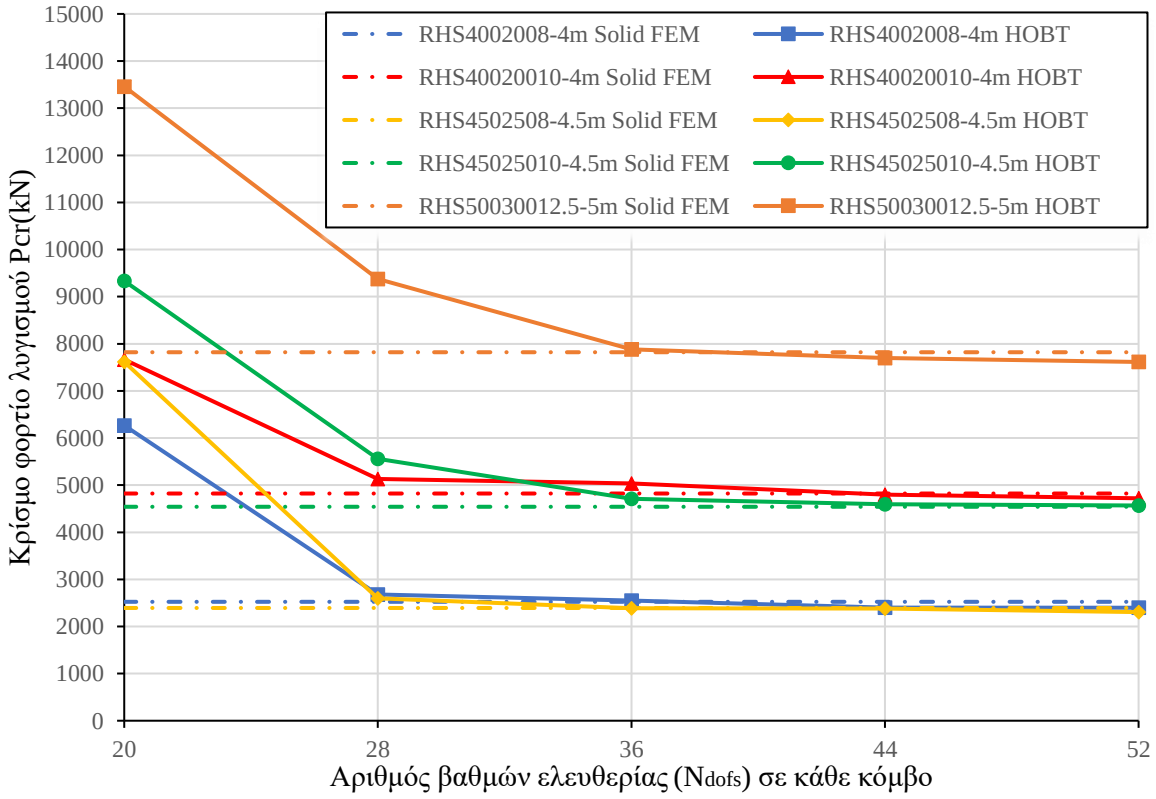
Σχήμα 4.2.1-5: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.1-6



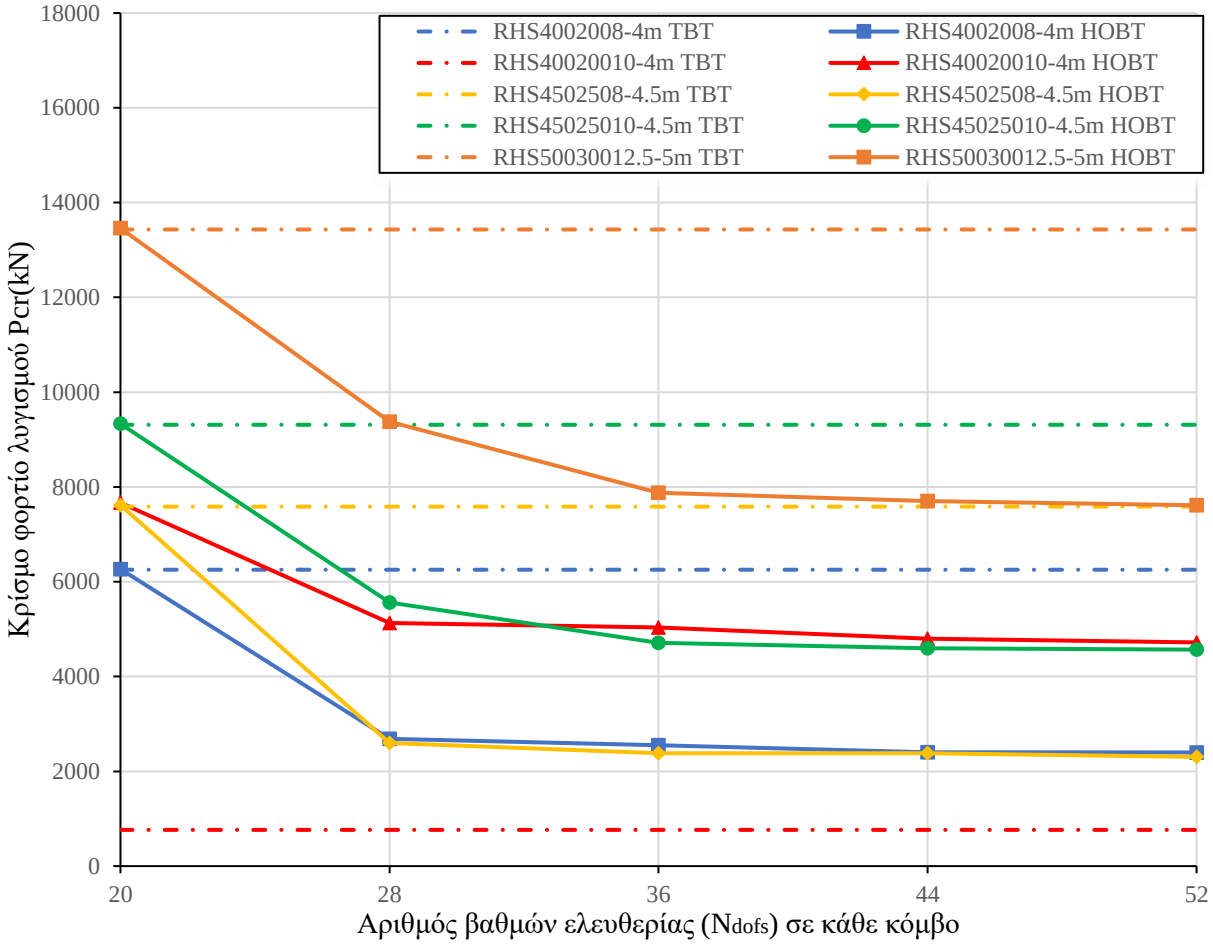
Σχήμα 4.2.1-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS χωρίς διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

Πίνακας 4.2.1-7: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS χωρίς διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

RHS 400x200x8-4m / Solid FEM Pcr=2523.68kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	6266.56	2682.24	2550.63	2400.31	2397.95
Απόκλιση		148.31%	6.28%	1.07%	5.14%	5.24%
RHS 400x200x10-4m / Solid FEM Pcr=4821.98kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	7666.18	5128.2	5035.64	4795.91	4720.3
Απόκλιση		58.98%	6.35%	4.43%	0.54%	2.15%
RHS 450x250x8-4.5m / Solid FEM Pcr=2393.13kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	7616.62	2598.36	2384.7	2379.22	2305.05
Απόκλιση		218.27%	8.58%	0.35%	0.58%	3.82%
RHS 450x250x10-4.5m / Solid FEM Pcr=4540.74kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	9333.99	5561.81	4710.1	4594.21	4567.85
Απόκλιση		105.56%	22.49%	3.73%	1.18%	0.6%
RHS 500x300x12.5-5m / Solid FEM Pcr=7820.03kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	13459.99	9377.63	7878.61	7700.32	7613.59
Απόκλιση		72.12%	19.92%	0.75%	1.55%	2.71%

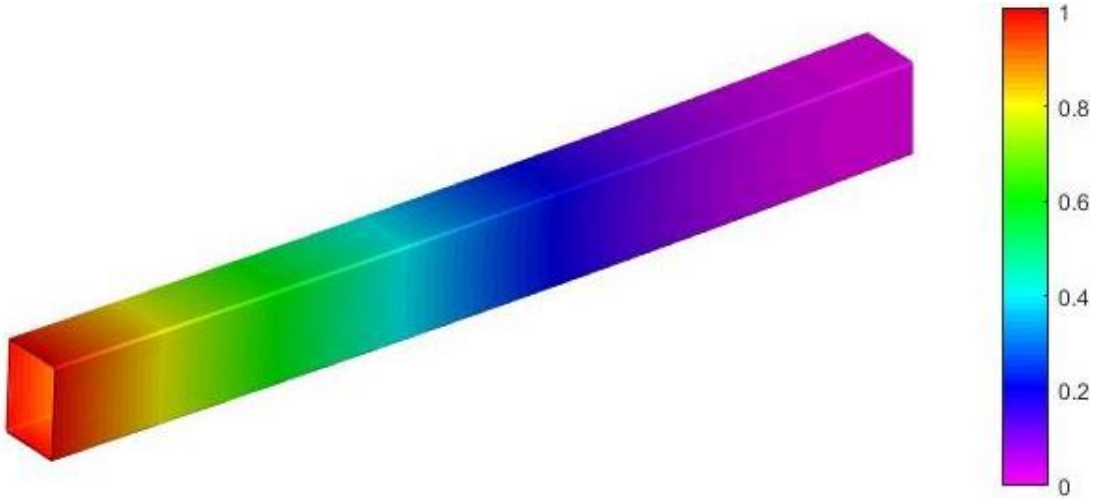


Σχήμα 4.2.1-7: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.1-7

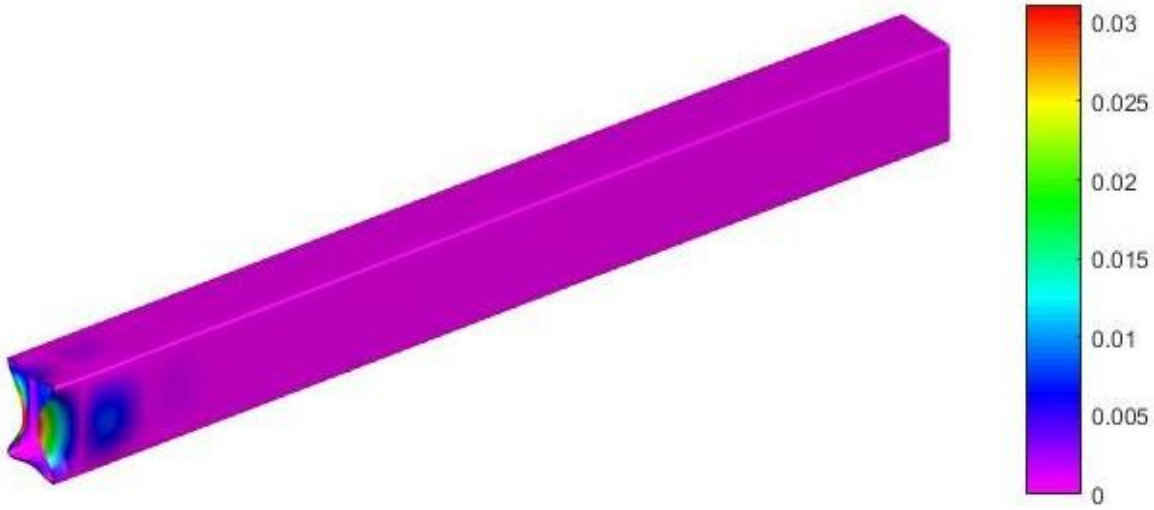


Σχήμα 4.2.1-8: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS χωρίς διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

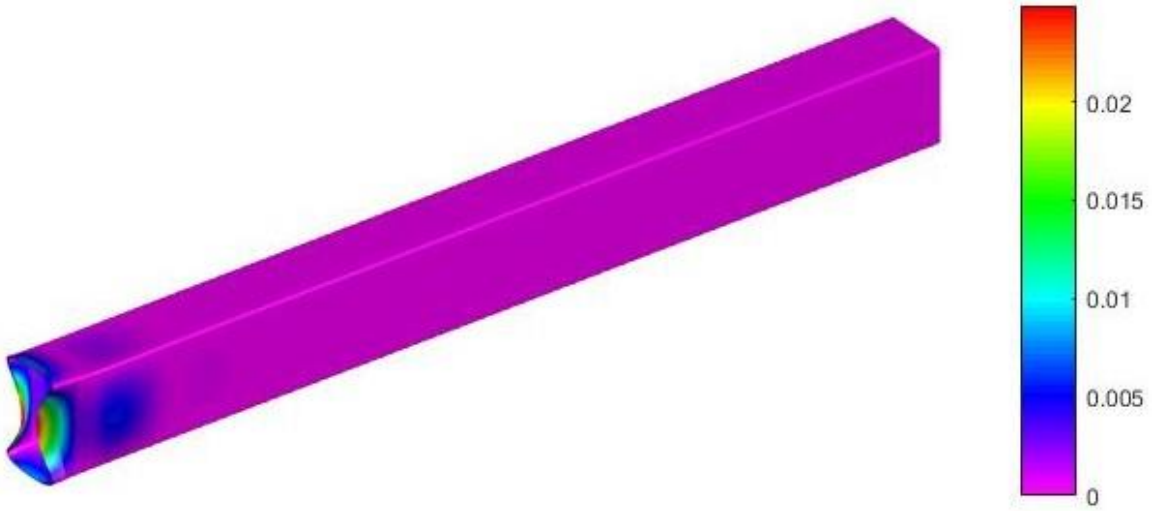
Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής RHS350x250x8 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και τη θεωρία Timoshenko.



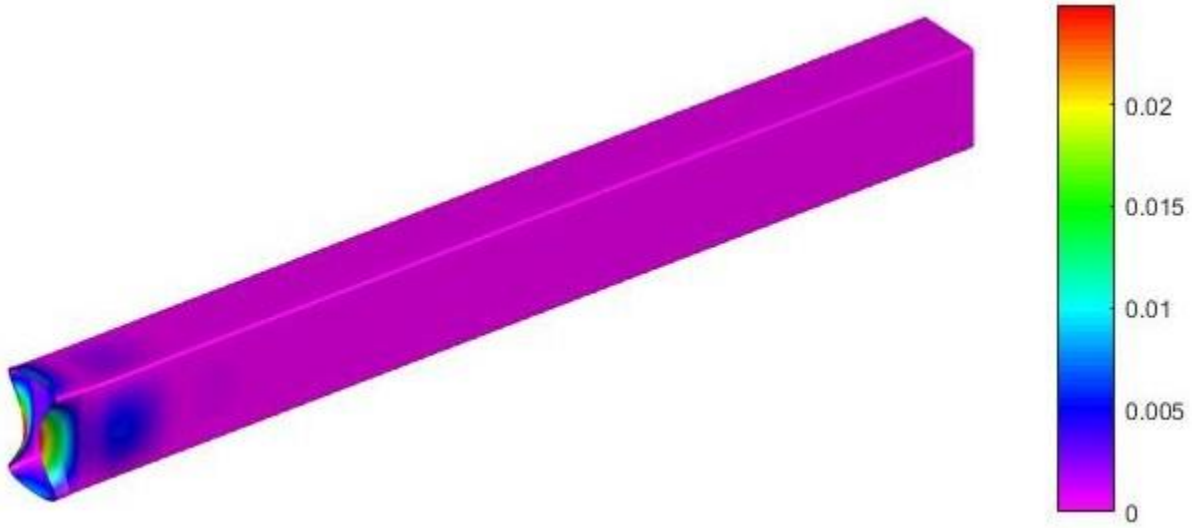
(α)



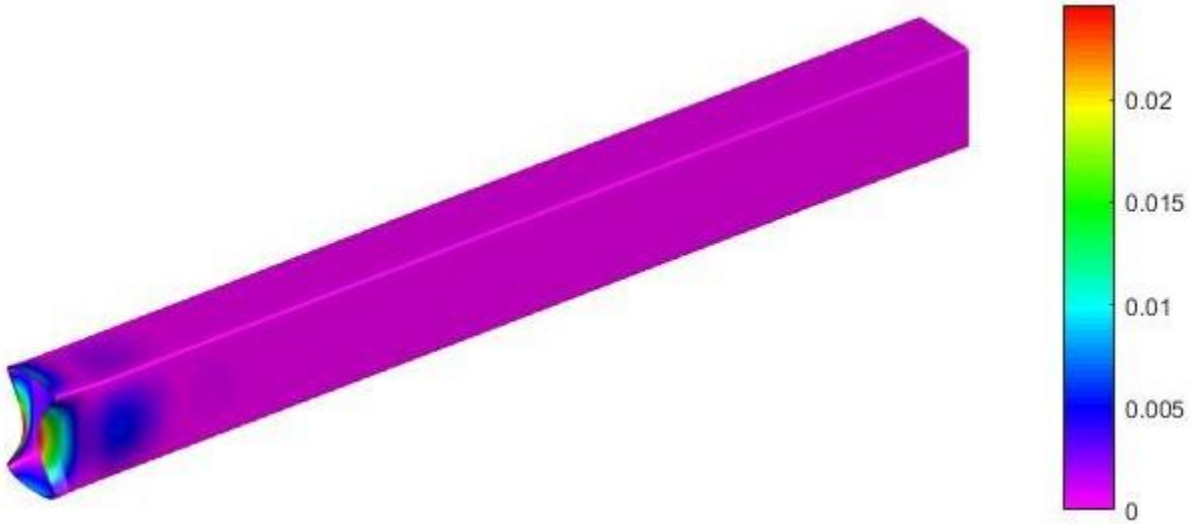
(β)



(γ)

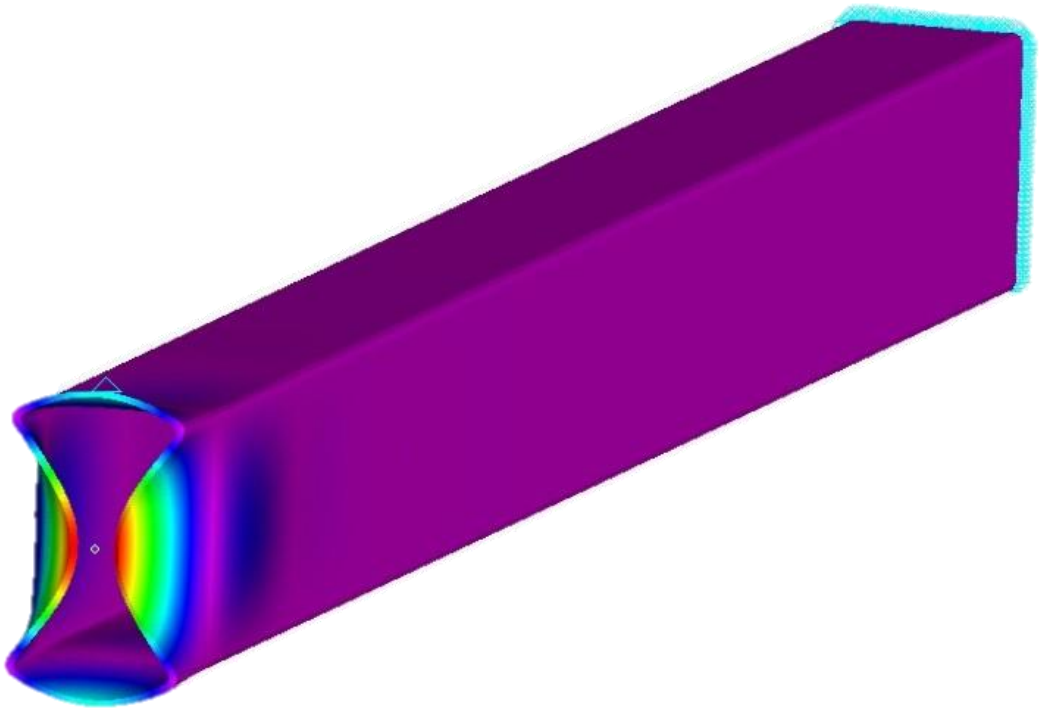


(δ)

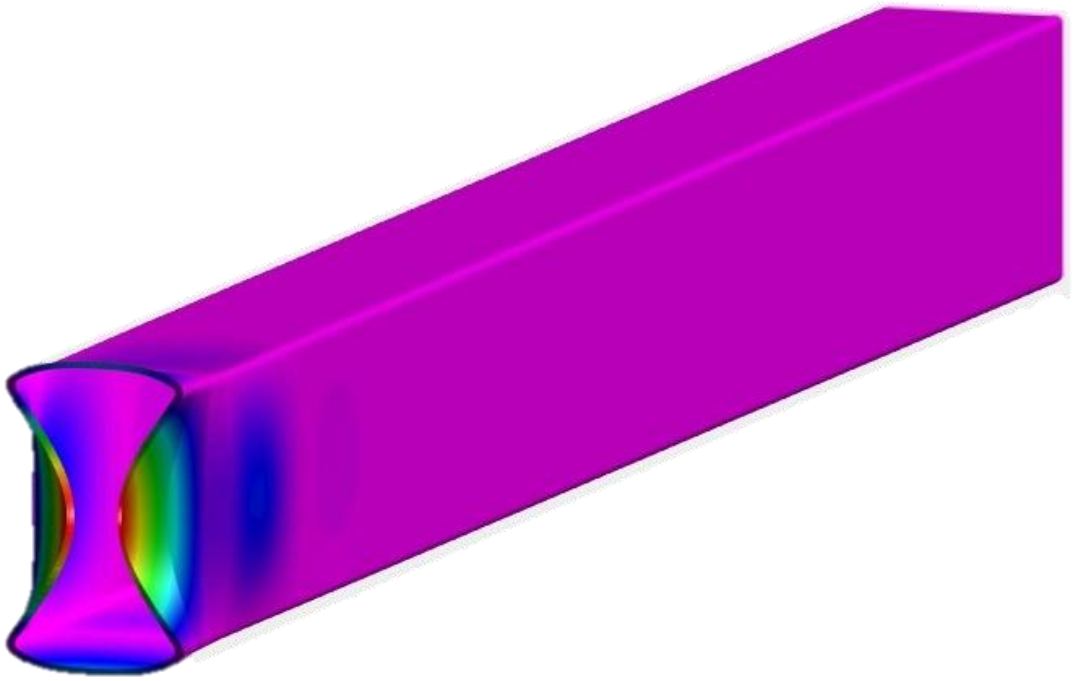


(ε)

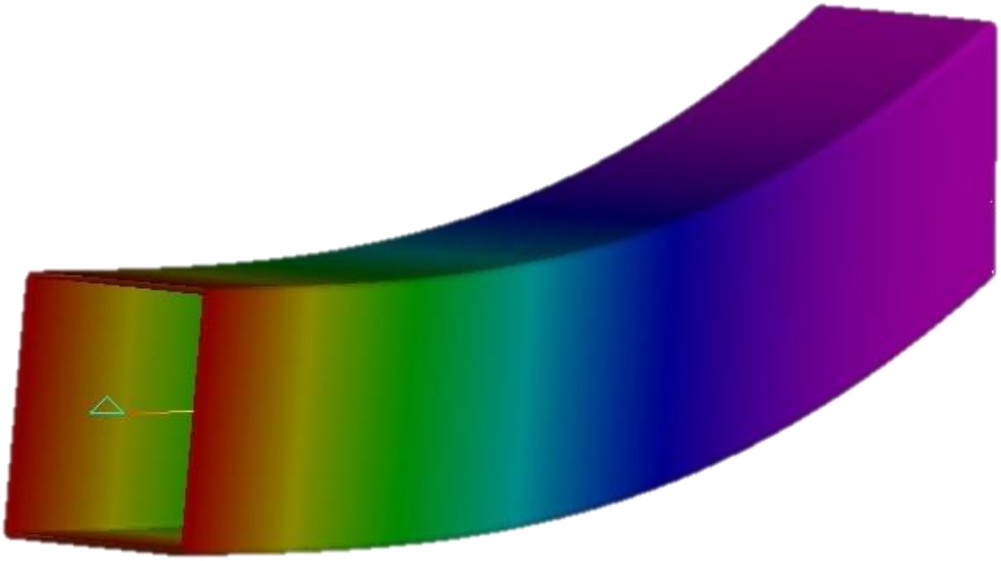
Σχήμα 4.2.1-9: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS350x250x8 μήκους 3.5m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)



Σχήμα 4.2.1-10: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS350x250x8 μήκους 3.5m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 4.2.1-11: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS350x250x8 μήκους 3.5m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο



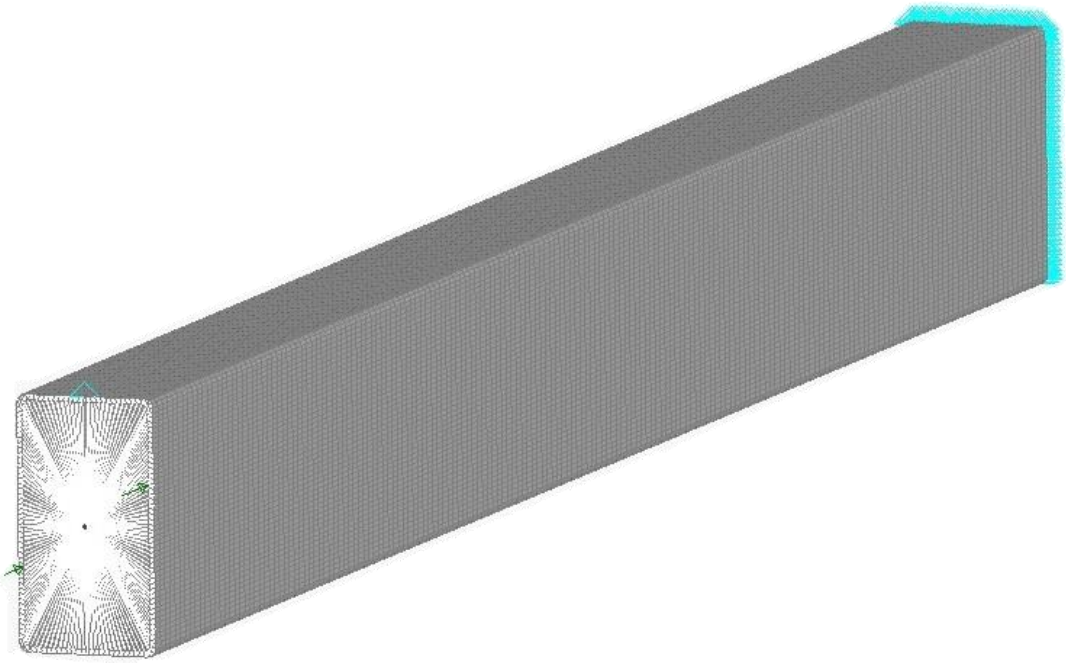
Σχήμα 4.2.1-12: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS350x250x8 μήκους 3.5m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko

Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 1

- Όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελυθερίας το φορτίο λυγισμού συγκλίνει προς προς κάποια συγκεκριμένη τιμή
- Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας (52 β.ε. ανά κόμβο) το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης συγκλίνει ικανοποιητικά με αυτό που υπολογίζεται μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο κάποια μοντέλα έχουν μεγαλύτερη σύγκλιση για λιγότερο από 52 βαθμούς ελευθερίας.
- Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού όπως προκύπτει μέσω της ανάλυσης με 20 β.ε. ανά κόμβο σχεδόν ταυτίζεται με εκείνο που δίνει η θεωρία Timoshenko.
- Η μορφή της παραμόρφωσης που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης αναπαριστά με μεγάλη ακρίβεια τις παραμορφώσεις που οφείλονται σε τοπικά φαινόμενα και ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.
- Κυρίαρχο ρόλο στη μορφή της παραμόρφωσης των στοιχείων έχει το φαινόμενο της διαστρέβλωσης. Κατ’επέκταση, οι κλασσικές θεωρίες δοκού Timoshenko & Euler-Bernoulli, στις οποίες υπάρχει η παραδοχή περί διατήρησης της επιπεδότητας της διατομής, αδυνατούν να προσεγγίσουν την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και την μορφή παραμόρφωσης της δοκού.
- Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται σημαντικά με την αύξηση του πάχους των τοιχωμάτων της διατομής.

4.2.2 Αριθμητική εφαρμογή 2-Δοκοί διατομής RHS με διάφραγμα

Σε αυτήν την εφαρμογή τα μοντέλα δοκών που εξετάζονται είναι ακριβώς ίδια με της αριθμητικής εφαρμογής 1 (ίδιες διατομές, ίδιες διακριτοποιήσεις, ίδιες δεσμεύσεις, ίδια μήκη) με τη μόνη διαφορά ότι στο ελεύθερο άκρο τους υπάρχει διάφραγμα. Έτσι στην ακραία διατομή δεσμεύονται οι εντός επιπέδου μετατοπίσεις και οι βαθμοί ελευθερίας που συνδέονται με τη διαστρέβλωσή της μηδενίζονται. Ακόμα σημειώνεται ότι στις δοκούς διατομής RHSx300x200x8 και RHS400x200x10 η πλευρική εξασφαλιση στην άκρη επιλέχθηκε να δεσμεύει πέρα από την πλευρική μετατόπιση και την κατακόρυφη γιατί τα συγκεκριμένα μοντέλα διαφορετικά έδιναν καθολικό λυγισμό.



Σχήμα 4.2.2-1: Στατικό μοντέλο δοκού διατομής RHS450x250x10 μήκους 4.5m με διάφραγμα όπως προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία

Στην συνέχεια δίνονται κάποιοι Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίο λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης (HOBT), της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) και της θεωρίας Timoshenko (TBT). Σημειώνεται ότι η θεωρία δοκού ανώτερης τάξης εφαρμόσθηκε για μέχρι 52 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (28μορφές).

Πίνακας 4.2.2-1: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής RHS με διάφραγμα

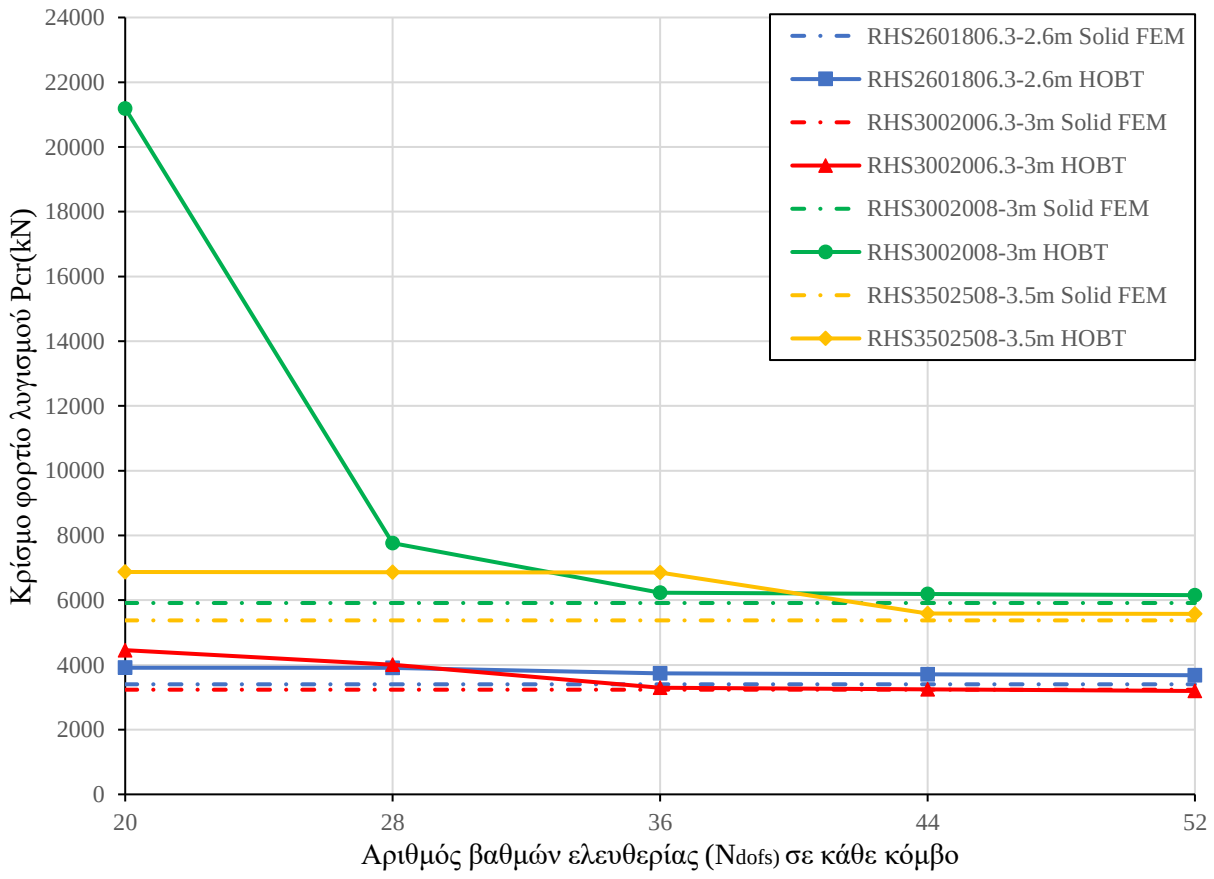
Διατομή-Μήκος Δοκού	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Solid FEM	
RHS 260x180x6.3-2.6m	3680.38	3400.71	8.22%
RHS 300x200x6.3-3m	3193.5	3233.67	1.26%
RHS 300x200x8-3m	6154.74	5911.37	4.12%
RHS 350x250x8-3.5m	5575.76	5374.64	3.74%
RHS 400x200x8-4m	4146.36	4223.85	1.87%
RHS 400x200x10-4m	8392.99	8137.45	3.14%
RHS 450x250x8-4.5m	4017.44	3963.2	1.37%
RHS 450x250x10-4.5m	7974.13	7606	4.84%
RHS 500x300x12.5-5m	13295.91	13239.45	0.43%

Πίνακας 4.2.2-2: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής RHS με διάφραγμα

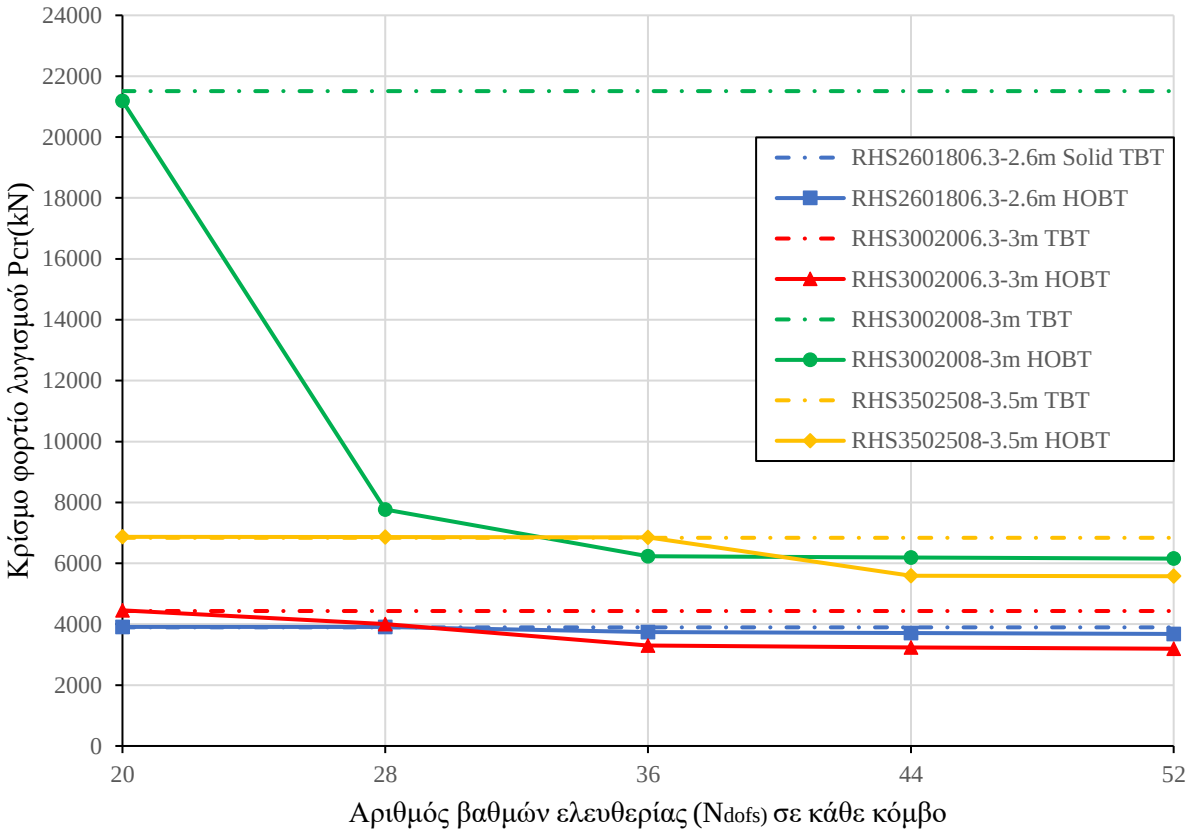
Διατομή-Μήκος Δοκού	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Θεωρία Δοκού Timoshenko	
RHS 260x180x6.3-2.6m	3680.38	3896.08	5.86%
RHS 300x200x6.3-3m	3193.5	4433.39	38.83%
RHS 300x200x8-3m	6154.74	21510.19	249.49%
RHS 350x250x8-3.5m	5575.76	6837.91	22.64%
RHS 400x200x8-4m	4146.36	6254.04	50.83%
RHS 400x200x10-4m	8392.99	1940.31	332.56%
RHS 450x250x8-4.5m	4017.44	7585.26	88.81%
RHS 450x250x10-4.5m	7974.13	9311.75	16.77%
RHS 500x300x12.5-5m	13295.91	13432.52	10.27%

Πίνακας 4.2.2-3: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS με διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

RHS 260x180x6.3-2.6m / Solid FEM Pcr=3400.71kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	3911.57	3909.69	3741.53	3708.28	3680.38
Απόκλιση		15.02%	14.97%	10.02%	9.04%	8.22%
RHS 300x200x6.3-3m / Solid FEM Pcr=3233.76kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	4455.16	4003.81	3295.53	3241	3193.5
Απόκλιση		37.77%	23.81%	1.91%	0.22%	1.26%
RHS 300x200x8-3m / Solid FEM Pcr=5911.37kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	21191.09	7762.2	6230.12	6188.63	6154.74
Απόκλιση		258.48%	31.31%	5.39%	4.69%	4.12%
RHS 350x250x8-3.5m / Solid FEM Pcr=5374.64kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	6869.77	6862.5	6855.44	5589.29	5575.76
Απόκλιση		27.82%	27.68%	27.55%	3.99%	3.74%



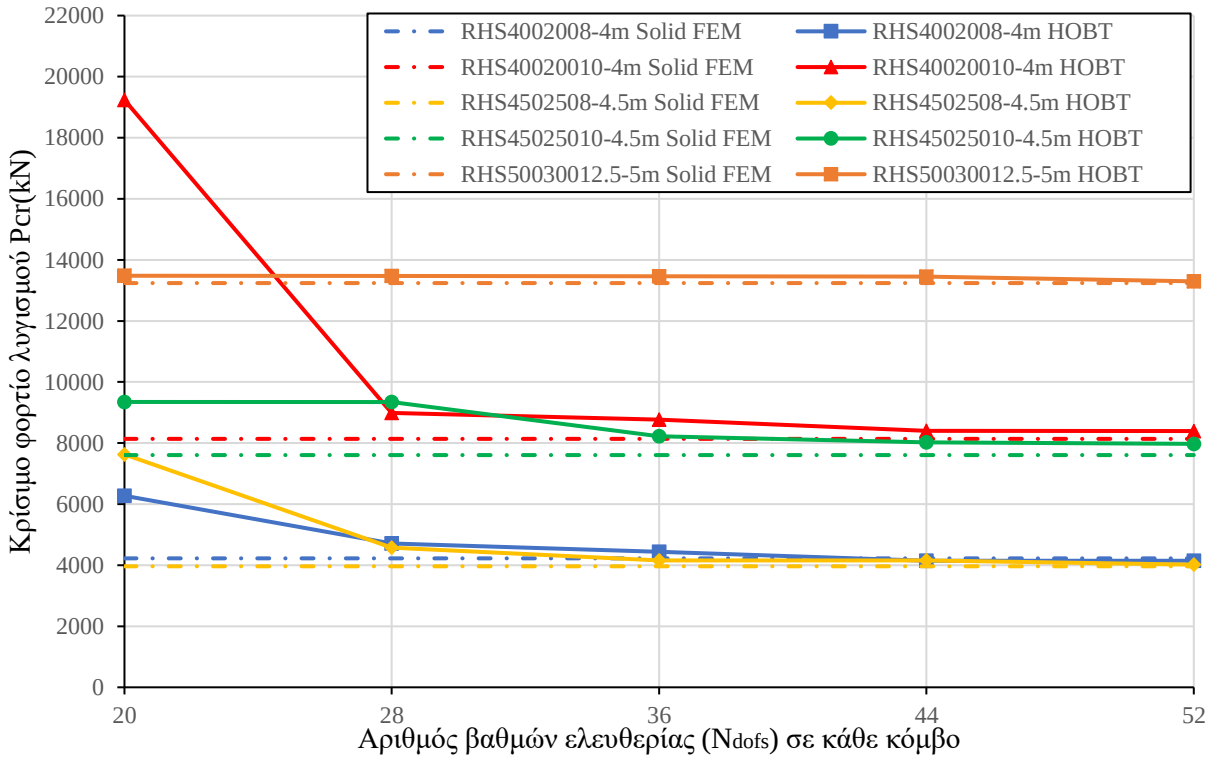
Σχήμα 4.2.2-2: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.2-3



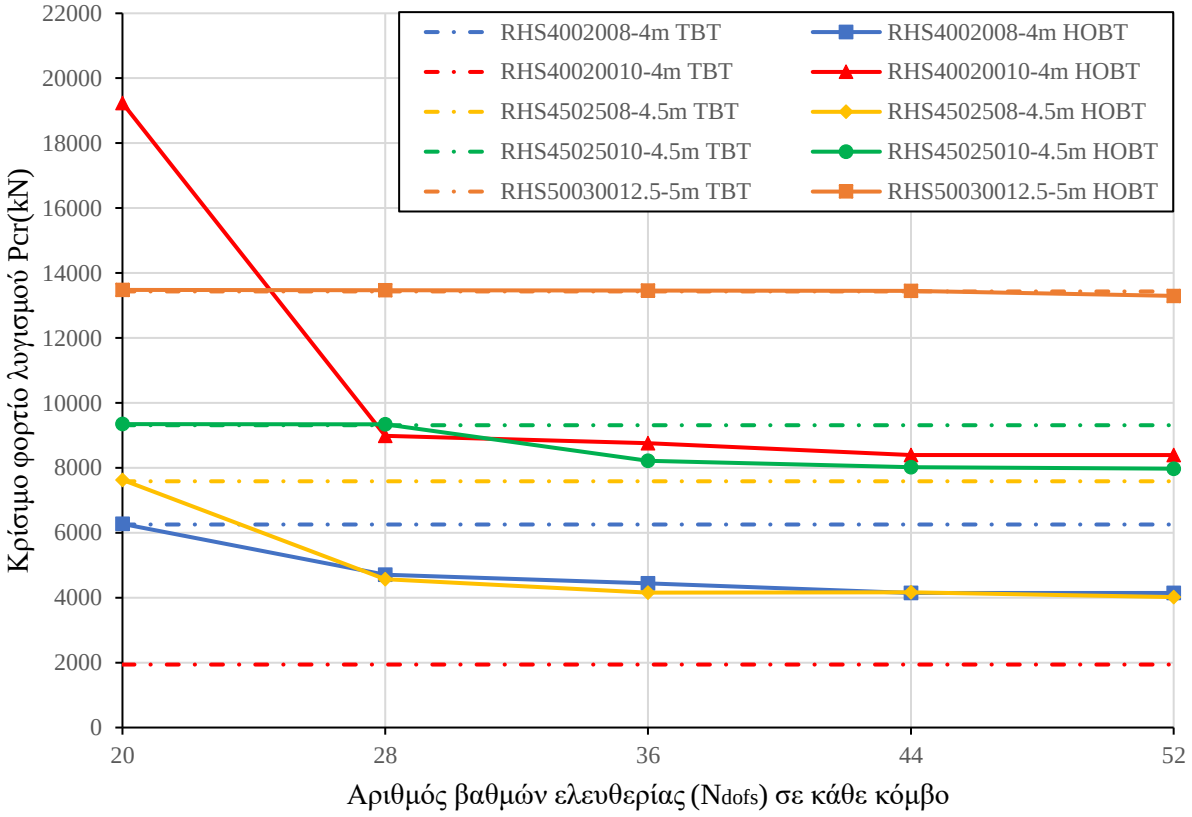
Σχήμα 4.2.2-3: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS με διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

Πίνακας 4.2.2-4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS με διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

RHS 400x200x8-4m / Solid FEM Pcr=4223.85kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	6273.18	4709.97	4440.51	4144.87	4146.36
Απόκλιση		48.52%	11.51%	5.13%	1.91%	1.87%
RHS 400x200x10-4m / Solid FEM Pcr=8137.45kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	19235.57	8988.89	8763.14	8397.5	8392.99
Απόκλιση		136.38%	10.46%	7.69%	3.2%	3.14%
RHS 450x250x8-4.5m / Solid FEM Pcr=3963.2kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	7627.74	4571.93	4157.46	4160.25	4017.44
Απόκλιση		92.46%	15.36%	4.9%	4.97%	1.37%
RHS 450x250x10-4.5m / Solid FEM Pcr=7606kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	9346.14	9340.4	8220.65	8020.88	7974.13
Απόκλιση		22.88%	22.8%	8.08%	5.45%	4.84%
RHS 500x300x12.5-5m / Solid FEM Pcr=13239.45kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	13479.51	13468.67	13464.68	13453.11	13295.91
Απόκλιση		1.81%	1.73%	1.7%	1.61%	0.43%

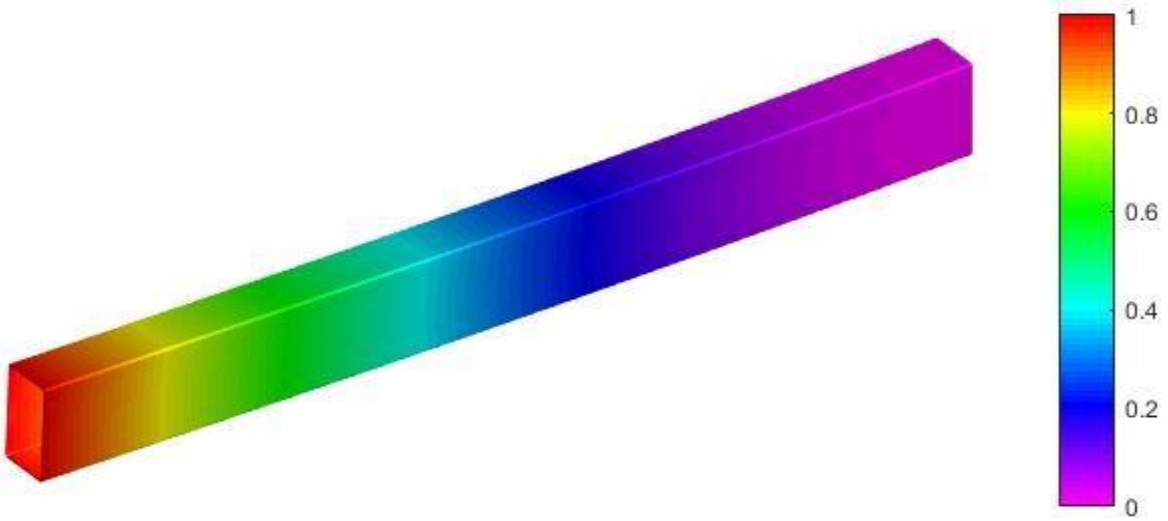


Σχήμα 4.2.2-4: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.2-4

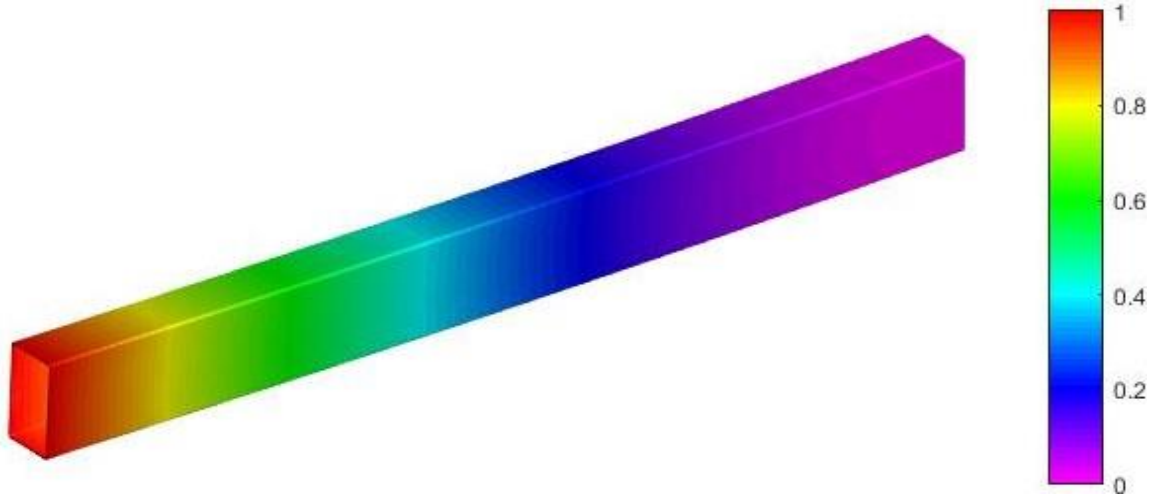


Σχήμα 4.2.2-5: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS με διάφραγμα όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

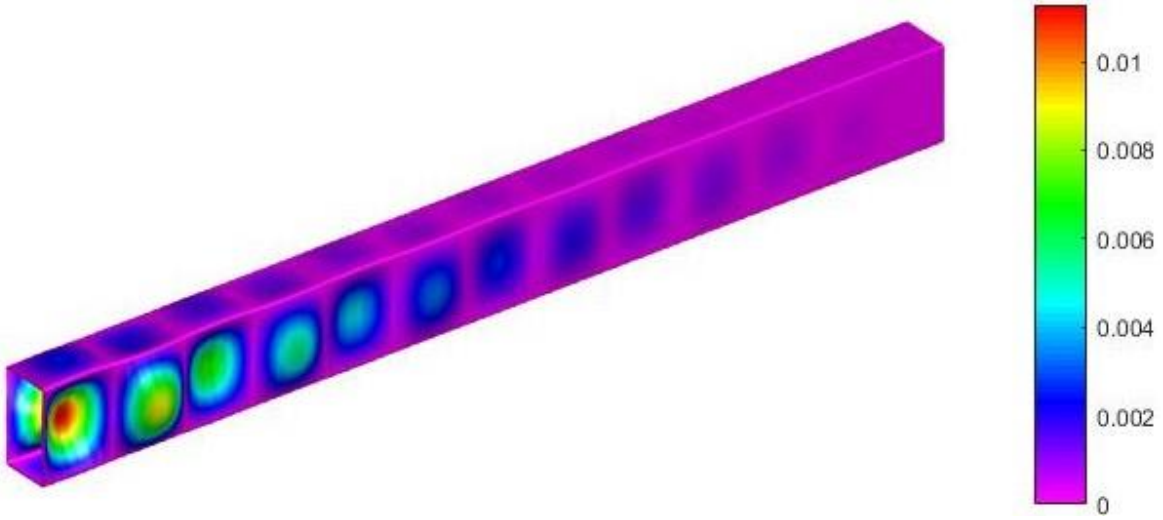
Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής RHS450x250x10 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και τη θεωρία Timoshenko.



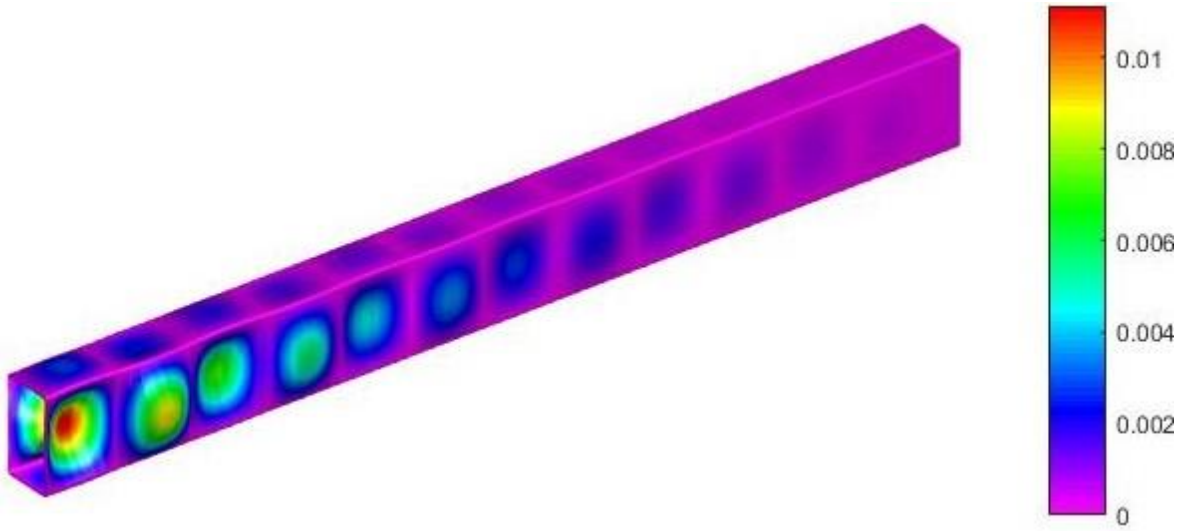
(α)



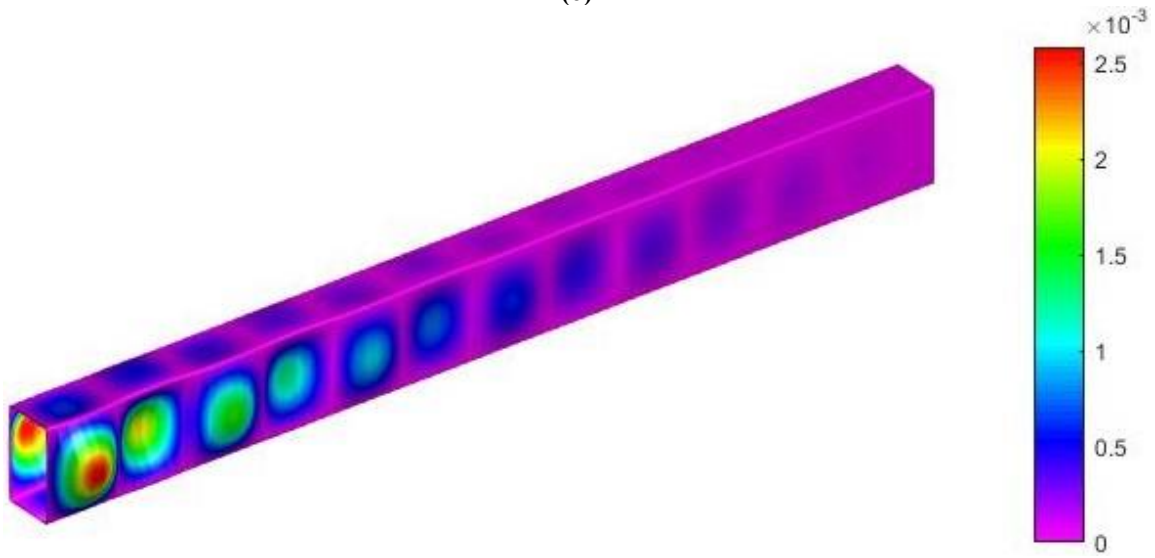
(β)



(γ)

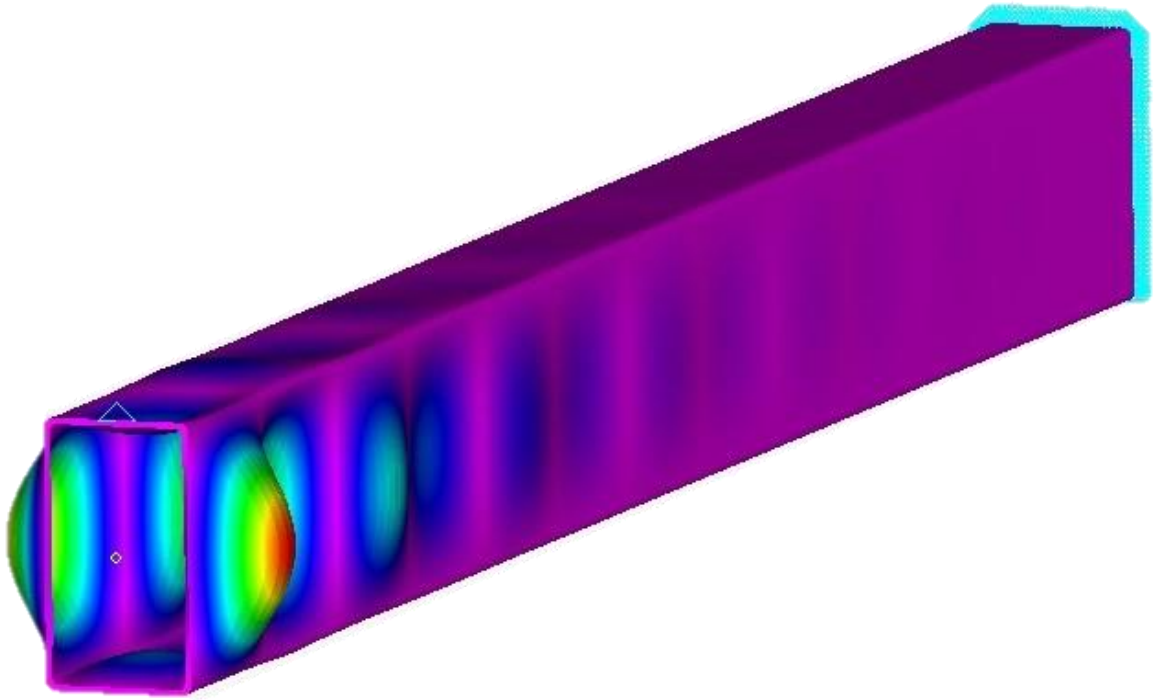


(δ)

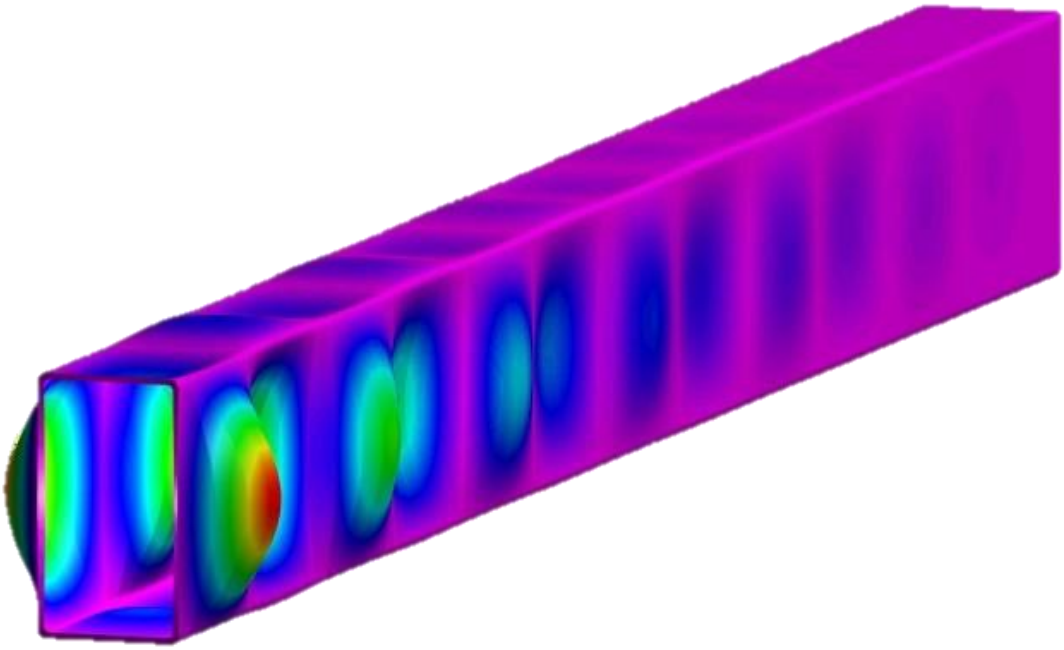


(ε)

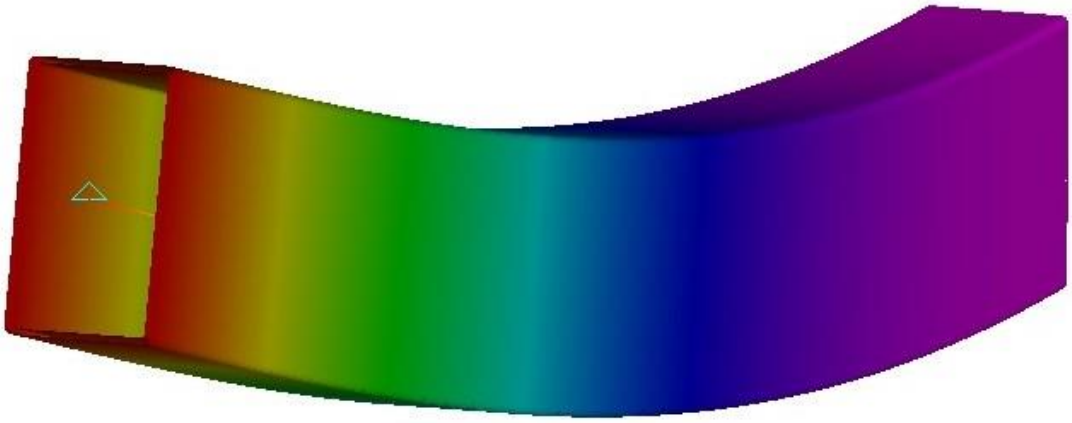
Σχήμα 4.2.2-6: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS450x250x10 μήκους 4.5m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)



Σχήμα 4.2.2-7: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS450x250x10 μήκους 4m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 4.2.2-8: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS450x250x10 μήκους 4.5m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο



Σχήμα 4.2.2-9: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS450x250x10 μήκους 4.5m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko

Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 2

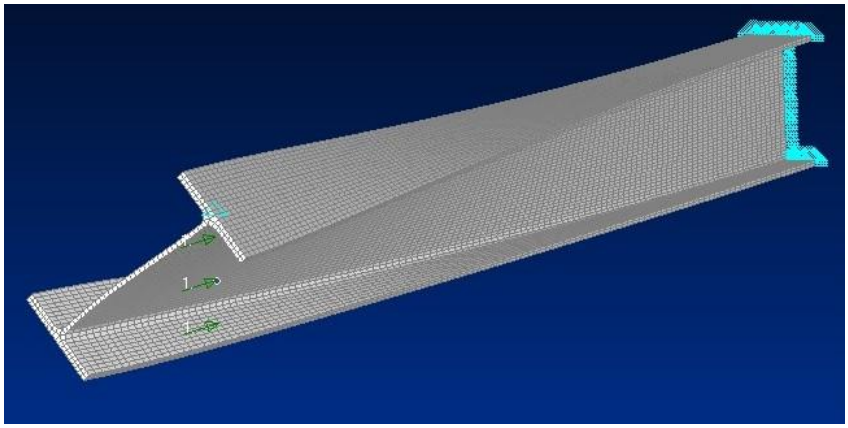
Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην αριθμητική εφαρμογή 1 και επιπλέον:

- Υπάρχει σημαντική αύξηση του φορτίου λυγισμού της τάξης του 60-70% στα μοντέλα με διάφραγμα σε σύγκριση με εκείνα χωρίς διάφραγμα.
- Η θεωρία Timoshenko αδυνατεί να κάνει διάκριση ανάμεσα σε μοντέλα με και χωρίς διάφραγμα (παρόλο που όπως αποδείχθηκε έχουν σημαντικές αλλαγές και στο φορτίο λυγισμού και στις παραμορφώσεις) καθώς βασίζεται στην παραδοχή περί διατήρησης της επιπεδότητας της διατομής.

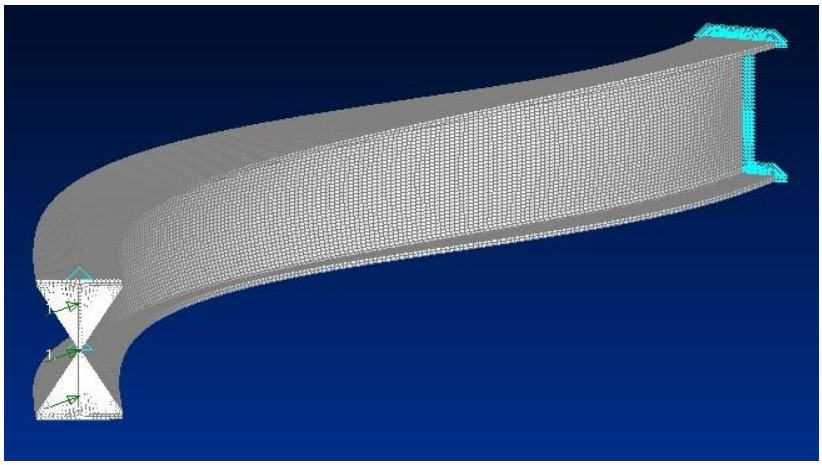
4.2.3 Αριθμητική εφαρμογή 3-Δοκοί διατομής HEA

Στην παρούσα αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται δοκοί με προφίλ διατομών HEA600, HEA700, HEA800, HEA900, HEA1000. Οι διαμήκεις διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε ο λόγος του μήκους της δοκού προς τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση της διατομής να είναι ίσος με 10.

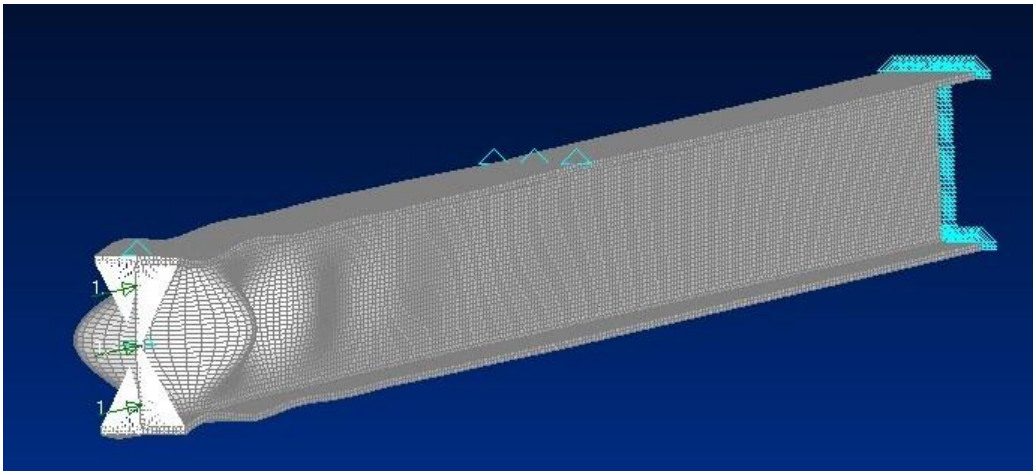
Στην αρχή των αναλύσεων για την μόρφωση του στατικού προσομοιώματος τοποθετήθηκε μια πλευρική εξασφάλιση στο ελεύθερο άκρο κάθε δοκού, στο μέσο της εξωτερικής παρειάς του άνω πέλματος (όπως και στις δοκούς RHS χωρίς διάφραγμα) και η παραμορφωμένη εικόνα που προέκυψε δίνεται στο Σχήμα 4.2.3-1. Στην συνέχεια για να περιοριστεί η στροφή της δοκού γύρω από τη δέσμευση τοποθετήθηκε διάφραγμα στην ακραία διατομή και επιπλέον τοποθετήθηκε μια στήριξη στο μέσο του διαφράγματος που δέσμευε την στρεπτική στροφή πέρι τον διαμήκη άξονα της δοκού. Αλλά και αυτή η διαμόρφωση δεν ήταν αρκετή για την εμφάνιση τοπικών φαινομένων (Σχήμα 4.2.3-2). Αποφασίστηκε λοιπόν πέρα από την ακραία διατομή να αρχίσουν να τοποθετούνται πλευρικές και στρεπτικές (ως προς το διαμήκη άξονα) δεσμεύσεις σε διάφορα σημεία κατά μήκος της δοκού μέχρι να εμφανισθεί τοπικός λυγισμός (Σχημα 4.2.3-3).



Σχήμα 4.2.3-1: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού HEA600-6m με πλευρική εξασφαλιση στο ελεύθερο άκρο



Σχήμα 4.2.3-2: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού HEA600-6m με επιπλέον διάφραγμα και δέσεμευση στρεπτικής στροφής στο ελεύθερο άκρο



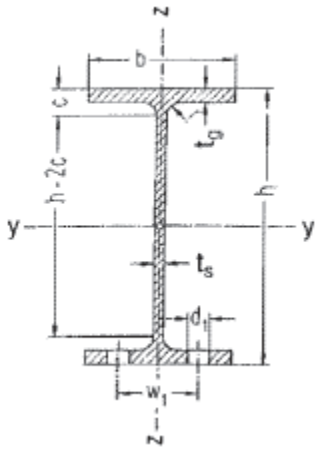
Σχήμα 4.2.3-3: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού HEA600-6m με επιπλέον ενδιάμεσες πλευρικές και στρεπτικές δεσμεύσεις

Η δέσμευση της στρεπτικής στροφής στα ενδιάμεσα σημεία της δοκού κατά την ανάλυση μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Σχήμα 4.2.3-3) γίνεται ως εξής:
→ Τοποθετούνται δυο στηρίξεις στα ακραία σημεία της εξωτερικής παρειάς του άνω πέλματος οι οποίες δεσμεύουν την κατακόρυφη μετατόπιση. Αυτός ο τρόπος θεωρείται ισοδύναμος με τη δέσμευση τηε στρεπτικής στροφής περί τον διαμήκη άξονα.

Για κάθε μοντέλο χρειάσθηκε να τοποθετηθεί διαφορετικός αριθμός δεσμεύσεων λόγω του διαφορετικού προφίλ διατομής και του διαφορετικού τους μήκους. Έτσι πέρα από τη διαμόρφωση της ακραία διατομής (όπως περιγράφηκε παραπάνω) που είναι για όλα τα μοντέλα ίδια τοποθετήθηκαν πλευρικές και στρεπτικές δεσμεύσεις:

- Στα L/2 της δοκού διατομής HEA600 με L=6m
- Στα L/4, L/2 της δοκού διατομής HEA700 με L=7m
- Στα L/4, L/2 της δοκού διατομής HEA800 με L=8m
- Στα 2L/8, 3L/8, 4L/8 της δοκού διατμομής HEA900 με L=9m
- Στα 2L/8, 3L/8, 4L/8 της δοκού διατμομής HEA1000 με L=10m

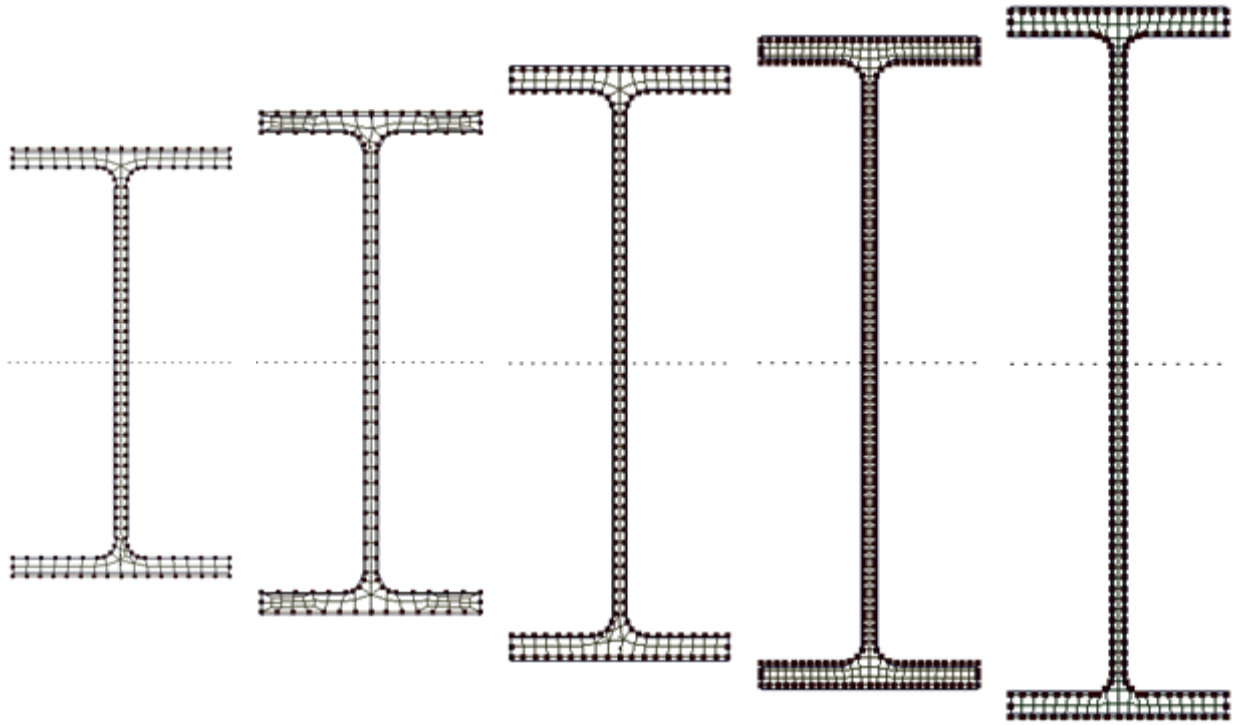
Τα γεωμετρικά στοιχεία των εξεταζόμενων διατομών, η εγκάρσια και κατά μήκος διακριτοποίηση των δοκών σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης και η διακριτοποίηση κατά την εφαρμογή των μεθόδων τρσδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Euler-Bernoulli και Timoshenko δίνονται στους επόμενους Πίνακες και Σχήματα.



Σχήμα 4.2.3-4: Διαστάσεις διατομής HEA, HEB, IPE

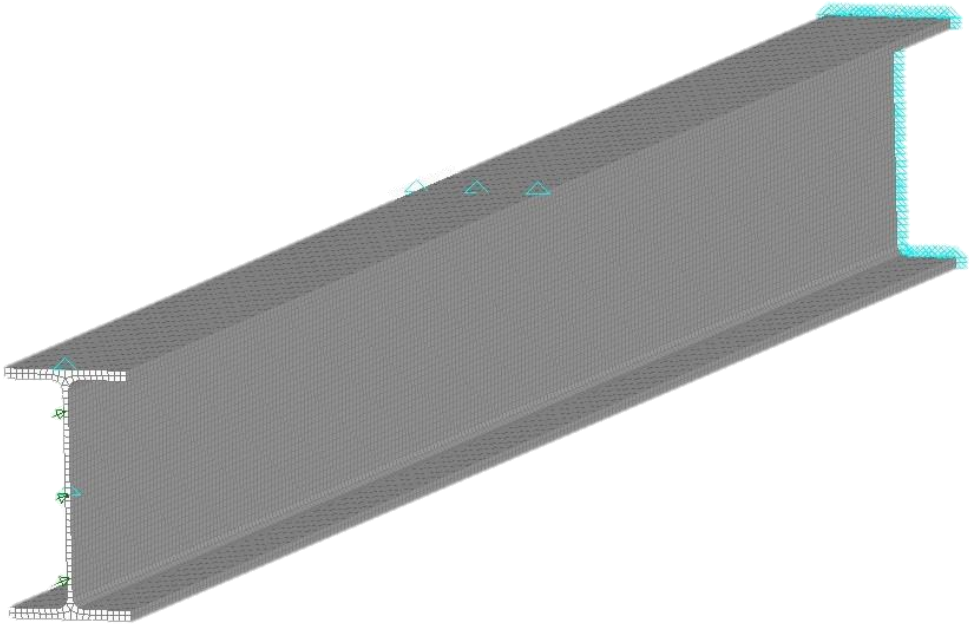
Πίνακας 4.2.3-1: Γεωμετρικά στοιχεία διατομών HEA που εξετάσθηκαν

Τύπος	h (mm)	b (mm)	t_s (mm)	t_g (cm^2)	r (mm)	h-2c (mm)	A (cm^2)	I_y (cm^4)	I_z (cm^4)
HEA600	590	300	13	25	27	486	226	141200	11270
HEA700	690	300	14.5	27	27	582	260	215300	12180
HEA800	790	300	15	28	30	674	286	303400	12640
HEA900	890	300	16	30	30	770	321	422100	13550
HEA1000	990	300	16.5	31	30	868	347	553800	14000



(a) (b) (c) (d) (e)

Σχήμα 4.2.3-5: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για τη διατομή HEA600 (a), HEA700 (b), HEA800 (c), HEA900 (d), (e) HEA1000



Σχήμα 4.2.3-6: Στατικό μοντέλο και διακριτοποίηση της δοκού διατομής HEA600 μήκους 6m μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) (το διάφραγμα παραλείπεται από το σχήμα για καλύτερη ευκρίνεια)

Πίνακας 4.2.3-2:Διακριτοποίηση δοκού διατομής HEA κατά την ανάλυση με χρήση θεωρίας ανώτερης τάξης

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση			
	Εγκάρσια			Διαμήκης
	Συνοριακά Στοιχεία	Τετραεδρικά Στοιχεία		Στοιχεία Δοκού
		Στοιχεία	Gauss Points	
HEA600-6m	1036	144	2x2	120
HEA700-7m	1024	165	2x2	140
HEA800-8m	1032	168	2x2	160
HEA900-9m	1072	312	2x2	180*
HEA1000-10m	1248	204	3x3	200**

***Για τους 52 βαθμούς ελευθερίας η δοκός κατά μήκος χωρίσθηκε σε 50 στοιχεία.**
**** Για τους 44 και 52 βαθμούς ελευθερίας η δοκός κατά μήκος χωρίσθηκε σε 150 στοιχεία.**

Πίνακας 4.2.3-3: Διακριτοποίηση δοκού διατομής RHS κατά την ανάλυση με χρήση μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση				
	Solid FEM			Στοιχεία Θεωρίας Timoshenko	Στοιχεία Θεωρίας Euler-Bernoulli
	Τετραεδρικά Στοιχεία Διατομής	Διαμήκη Στοιχεία	Πεπερασμένα Στοχεία		
HEA600-6m	116	240	27840	400	400
HEA700-7m	131	280	36680	400	400
HEA800-8m	138	320	44160	400	400
HEA900-9m	101	360	36360	400	400
HEA1000-10m	105	400	42000	400	400

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τους δυο τελευταίους Πίνακες τοποθετήθηκαν:

- 20 διαμήκη στοιχεία / μετρό μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης
- 40 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων
- 400 διαμήκη στοιχεία για όλες τις δοκούς ανεξάρτητα του μήκους τους κατά την εφαρμογή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko.

Ωστόσο για μερικά από τα μοντέλα με πάνω από 150 διαμήκη στοιχεία (Πίνακας 4.2.3-2) το πρόγραμμα που έχει υλοποιηθεί για την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης δεν έδινε σωστά αποτελέσματα καθώς στην ανάλυση εμφανίζνοταν ill-conditioned μητρώα (μητρώα "κακής συνθήκης"). Προκειμένου λοιπόν να ολοκληρωθεί σωστά η ανάλυση στα συγκεκριμένα μοντέλα μειώθηκε ο αριθμός των στοιχείων κατά μήκος.

Αυτά τα μητρώα που ανήκουν στο πεδίο της αριθμητικής ανάλυσης, προέκυψαν και σε επόμενες αριθμητικές εφαρμογές στις οποίες εξετάζονται διατομές ανοιχτού τύπου και στις οποίες εμπλέκονται μοντέλα με πολλά διαμήκη στοιχεία και στις οποίες γίνεται ανάλυση με πάνω από 36 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο. Περισσότερα για τον τρόπο αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος αναφέρονται στα σχόλια στο τέλος αυτής της αριθμητικής εφαρμογής.

Στην συνέχεια δίνονται Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίο λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και της θεωρίας Timoshenko. Σημειώνεται ότι η θεωρία δοκού ανώτερης τάξης εφαρμόσθηκε για μέχρι 52 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο (28μορφές).

Πίνακας 4.2.3-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής HEA

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Solid FEM	
HEA600-6m	18858.28	17710.29	6.48%
HEA700-7m	19500.9*	17774.15	9.71%
HEA800-8m	16164.36	15623.47	3.46%
HEA900-9m	16137.83	15568.53	3.66%
HEA1000-10m	14617.31	13964.04	4.68%

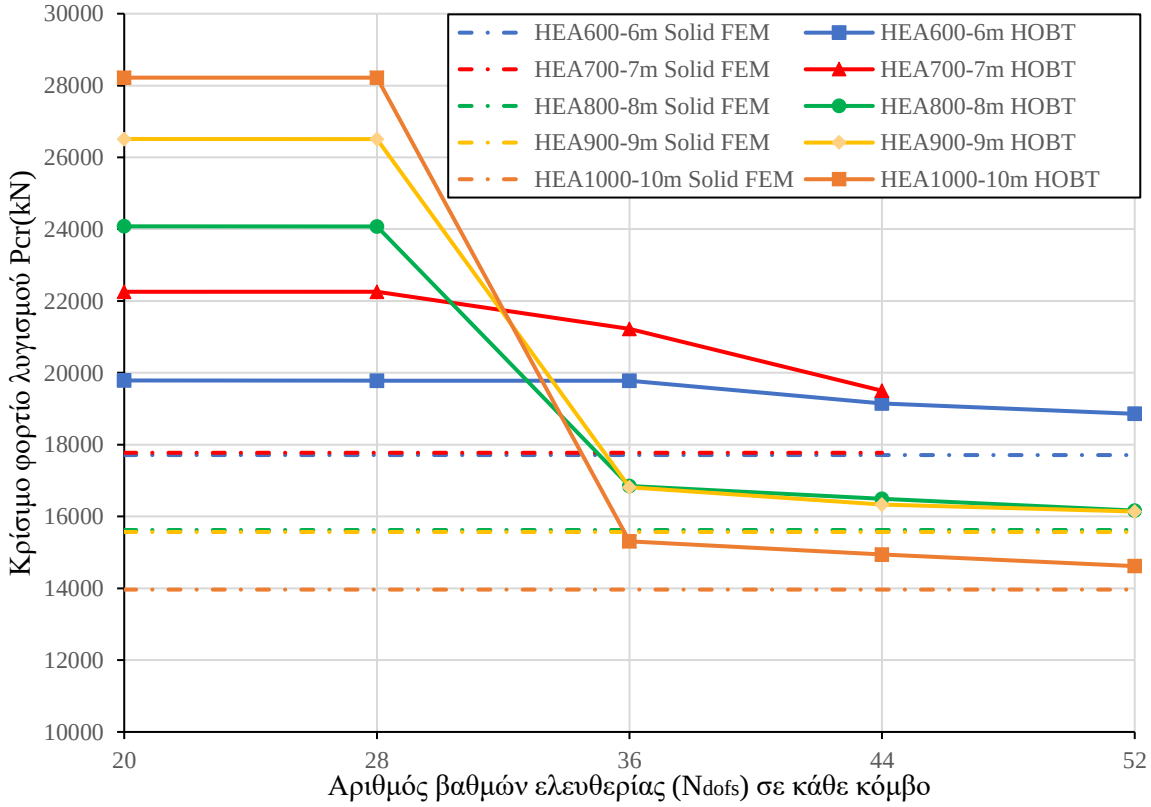
*** Για 44 βαθμούς ελευθερίας**

Πίνακας 4.2.3-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής HEA

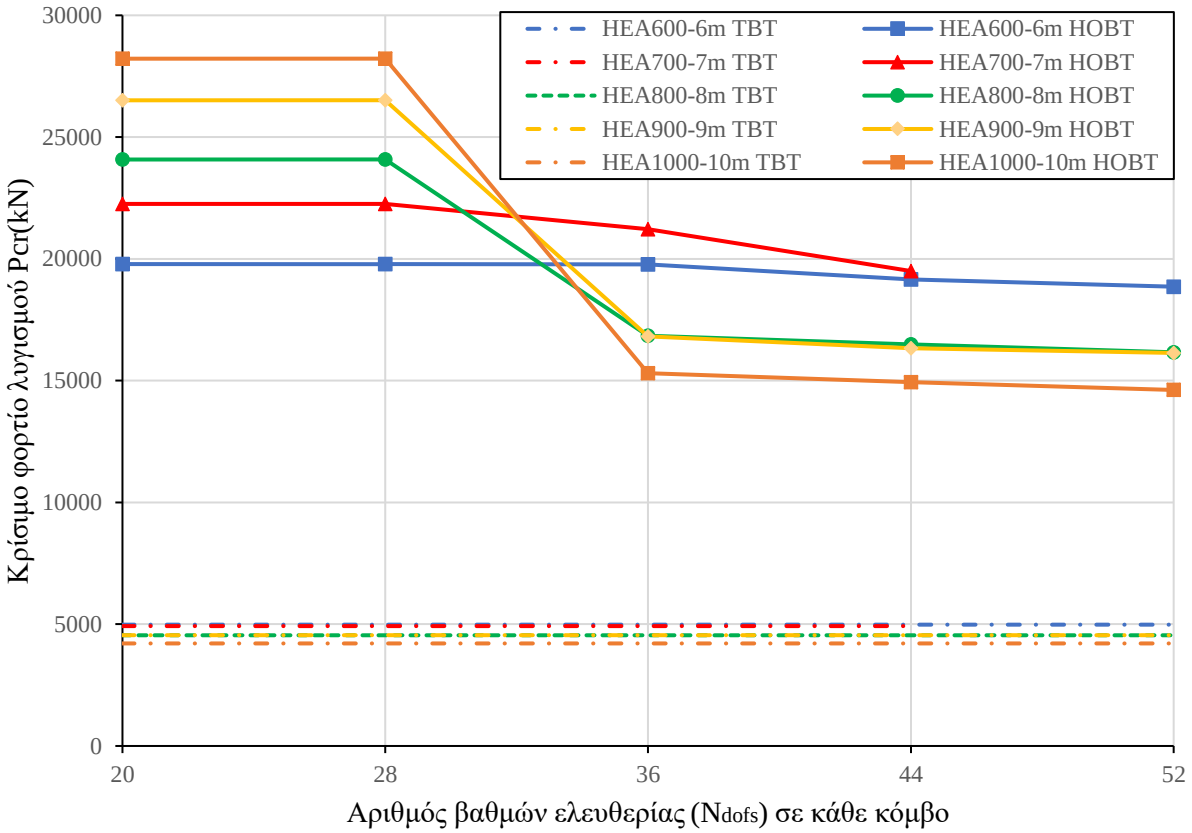
Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Θεωρία Δοκού Timoshenko	
HEA600-6m	18858.28	4981.54	278.56%
HEA700-7m	19500.9	4922.31	296.17%
HEA800-8m	16164.36	4544.91	255.66%
HEA900-9m	16137.83	4548.13	254.82%
HEA1000-10m	12617.31	4210.4	199.67%

Πίνακας 4.2.3-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής HEA όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

HEA600-6m / Solid FEM Pcr=17710.29kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	19786.5	19782.65	19777.33	19151	18858.28
Απόκλιση		11.72%	11.7%	11.67%	8.13%	6.48%
HEA700-7m / Solid FEM Pcr=17774.15kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	22256.56	22253.12	21223.27	19500.9	-
Απόκλιση		25.22%	25.2%	19.41%	9.71%	-
HEA800-8m / Solid FEM Pcr=15623.47kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	24079.64	24078.66	16844.61	16493.36	16164.36
Απόκλιση		54.12%	54.12%	7.82%	5.57%	3.46%
HEA900-9m / Solid FEM Pcr=15568.53kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	26511.04	26509.28	16812.34	16382.37	16137.83
Απόκλιση		70.29%	70.27%	7.99%	4.88%	3.66%
HEA1000-10m / Solid FEM Pcr=13964.04kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	28219.5	28217.12	15310.98	14939	14617.31
Απόκλιση		102.09%	102.07%	9.65%	6.98%	4.68%

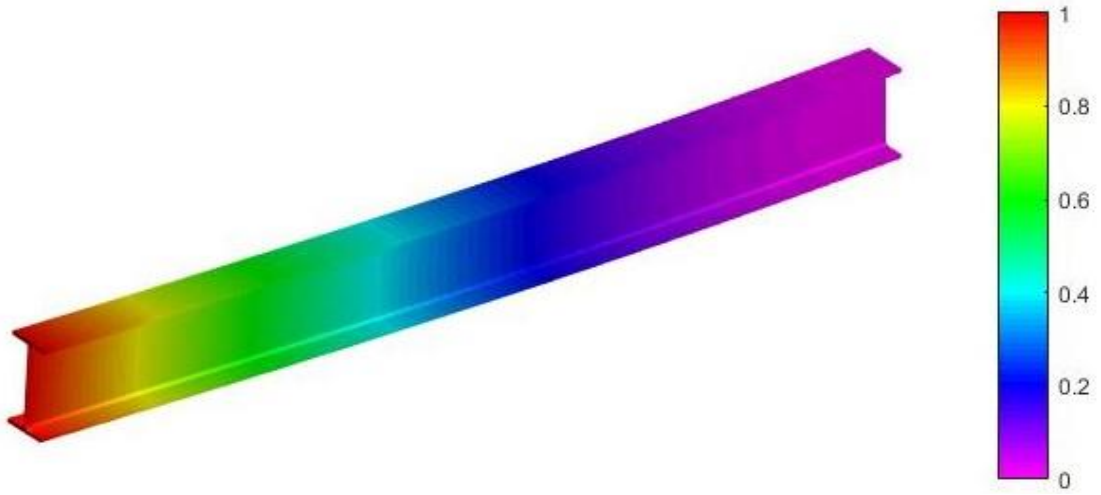


Σχήμα 4.2.3-7: Διαγραμματική απεικόνιση του πίνακα

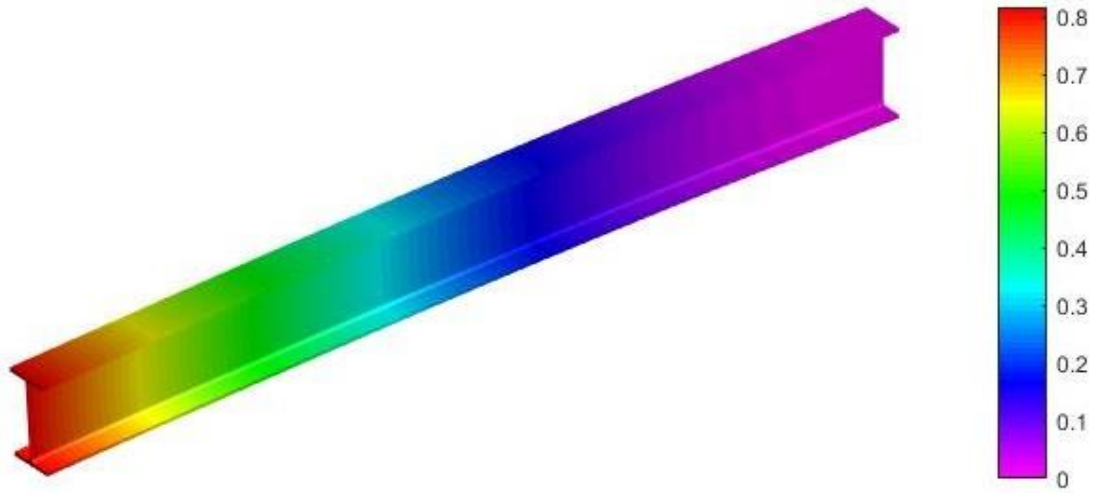


Σχήμα 4.2.3-8: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής HEA όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

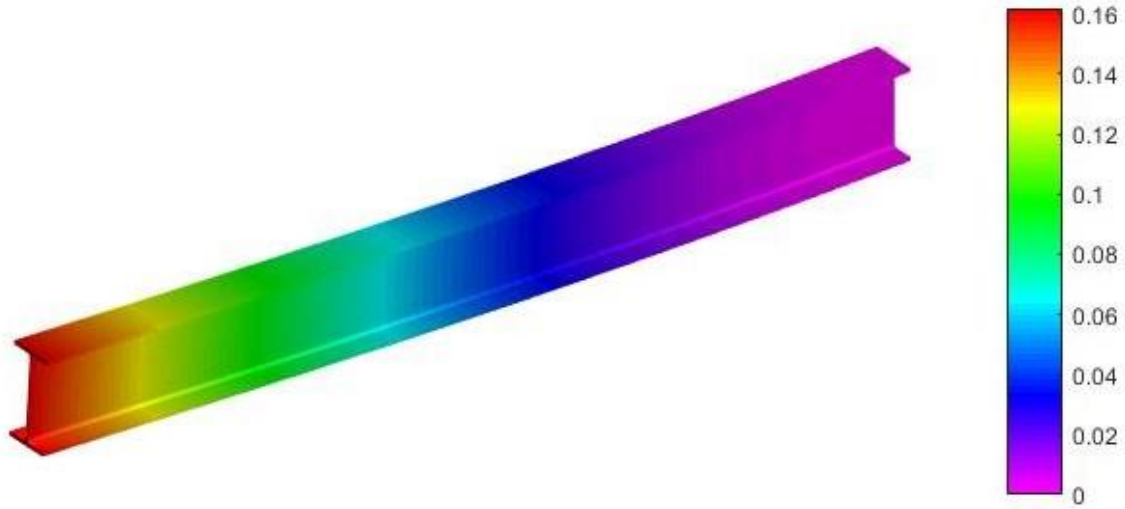
Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής HEA600 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και τη θεωρία Timoshenko.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0

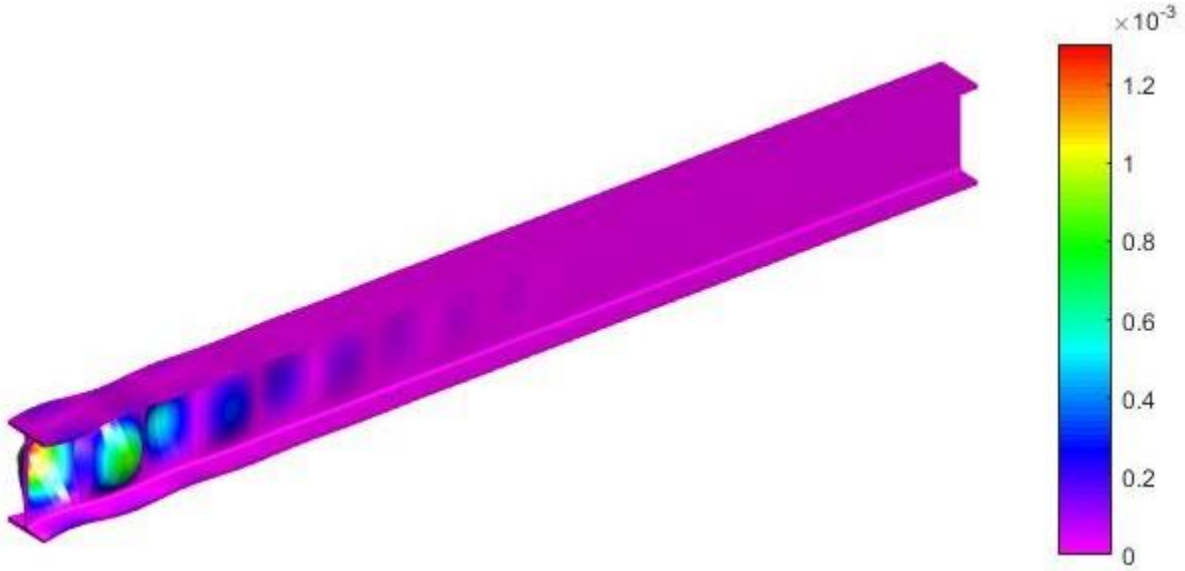
(α)


0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

(β)


0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0

(γ)

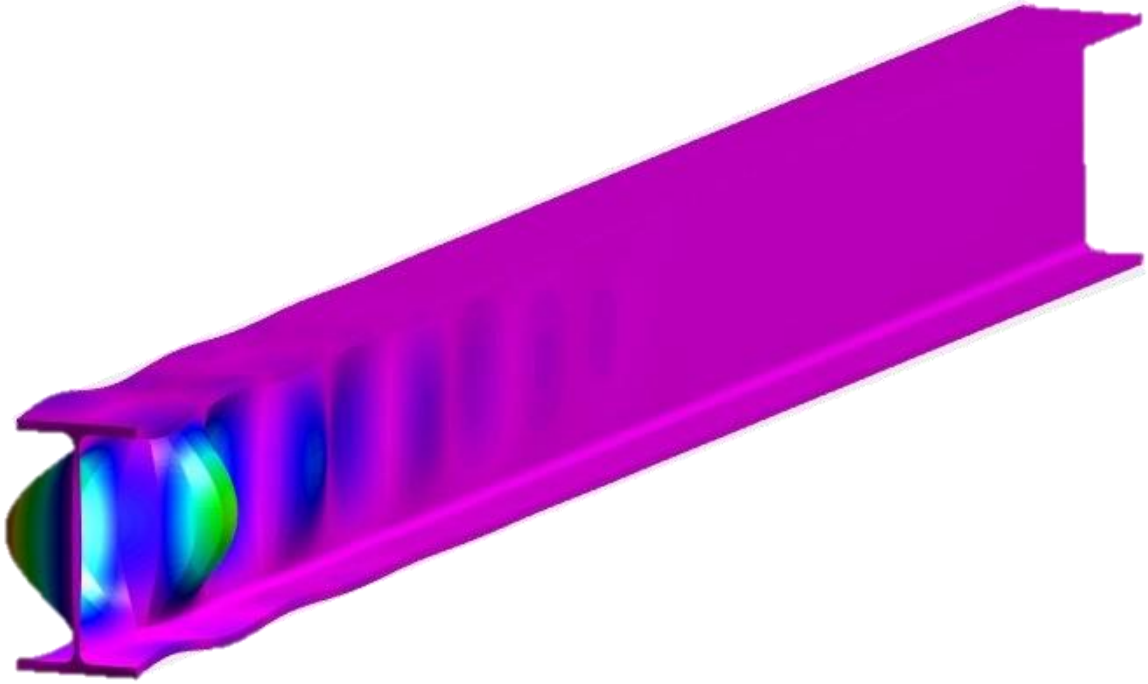


(δ)

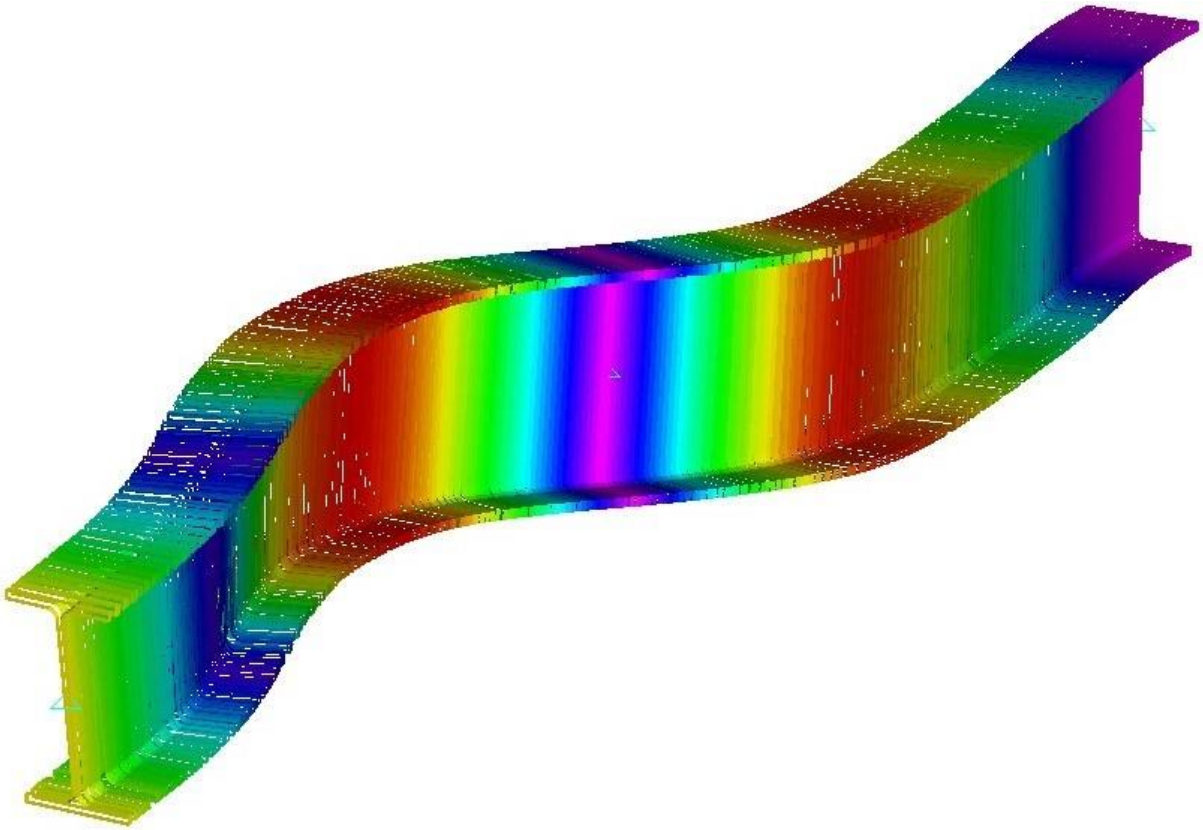
(ε)

Σχήμα 4.2.3-9: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEA600 μήκους 6m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)

Σχήμα 4.2.3-10: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEA600 μήκους 6m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 4.2.3-11: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEA600 μήκους 6m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο



Σχήμα 4.2.3-12: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEA600 μήκους 6m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko

Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 3

- Όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελυθερίας το φορτίο λυγισμού συγκλίνει προς προς κάποια συγκεκριμένη τιμή
- Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης συγκλίνει ικανοποιητικά με αυτό που υπολογίζεται μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.
- Η μορφή της παραμόρφωσης που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης αναπαριστά με μεγάλη ακρίβεια τις παραμορφώσεις που οφείλονται σε τοπικά φαινόμενα και ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.
- Κυρίαρχο ρόλο στη μορφή της παραμόρφωσης των στοιχείων έχει το φαινόμενο της διαστρέβλωσης. Κατ'επέκταση, οι κλασσικές θεωρίες δοκού Timoshenko & Euler-Bernoulli, στις οποίες υπάρχει η παραδοχή περί διατήρησης της επιπεδότητας της διατομής, αδυνατούν να προσεγγίσουν την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και την μορφή παραμόρφωσης της δοκού.
- Παρόλο που τα μοντέλα δεν έχουν το ίδιο μήκος γίνεται αντιληπτό ότι αυτά με διατομές με μεγαλύτερο ύψος κορμού έχουν μικρότερο κρίσιμο φορτίο λυγισμού.
- Τα ill conditioned μητρώα που προέκυψαν όπως αναφέρεται παραπάνω κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, προέρχονται κατά πάσα πιθανότητα από την ανάλυση της διατομής όπου δεν έχουν υπολογισθεί σωστά οι συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης και συνεπώς τα μητρώα γεωμετρικών σταθερών τα οποία εισάγονται στη διαμήκη ανάλυση. Είναι ένα πρόβλημα που εμφανίσθηκε σε μοντέλα με διατομή ανοιχτού τύπου, με πολλά διαμήκη στοιχεία (πάνω από 150) κατά την ανάλυση με πάνω από 36 βαθμούς ελευθερίας. Για την αποφυγή αυτών μητρώων δοκίμάστηκαν κάποιες αλλαγές (ξεχωριστά) στις παραμέτρους της ανάλυσης όπως:
    - Επιφανειική ολοκλήρωση στο επίπεδο της διατομής με 1x1 και 3x3 Gauss Points αντί για 2x2
    - Αλλαγή στην ολοκλήρωση των συνοριακών στοιχείων. Δοκιμάστηκαν σταθερά αντί για γραμμικά συνοριακά στοιχεία και αναλυτική ολοκλήρωση αντί για ολοκλήρωση κατά Gauss.
    - Μείωση των διαμήκη στοιχείων

Από τα παραπάνω μόνο με την τελευταία αλλαγή διορθώθηκε το πρόβλημα. Για παράδειγμα η δοκός διατομής HEA900 κατά την ανάλυση με 52 β.ε. ανά κόμβο χωρίσθηκε σε 50 διαμήκη στοιχεία, από 180 που είχε χωρισθεί στους προηγούμενους β.ε. και έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

4.2.4 Αριθμητική εφαρμογή 4-Δοκοί διατομής HEB

Στην παρούσα αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται δοκοί με προφίλ διατομών HEB700, HEB800, HEB900, HEB1000. Οι διαμήκεις διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε ο λόγος του μήκους της δοκού προς τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση της διατομής να είναι ίσος με 10.

Τα στατικά προσομοιώματα έχουν μορφωθεί με την ίδια λογική που μορφώθηκαν στην αριθμητική εφαρμογή 3 που εξετάζονται πάλι δοκοί με διατομές ανοιχτού τύπου. Συγκεκριμένα σε κάθε μοντέλο στο ελεύθερο άκρο της δοκού έχουν τοποθετηθεί διάφραγμα μαζί με πλευρική και στρεπτική δέσμευση και τόσες πλευρικες και στρεπτικές εξασφαλίσεις κατά μήκος της δοκού όσες χρειάζονται για να εμφανισθούν τοπικά φαινόμενα.

Για κάθε μοντέλο χρειάσθηκε να τοποθετηθεί διαφορετικός αριθμός δεσμεύσεων λόγω του διαφορετικού προφίλ διατομής και του διαφορετικού τους μήκους. Έτσι πέρα από τη διαμόρφωση της ακραία διατομής που είναι για όλα τα μοντέλα ίδια τοποθετήθηκαν πλευρικές και στρεπτικές δεσμεύσεις:

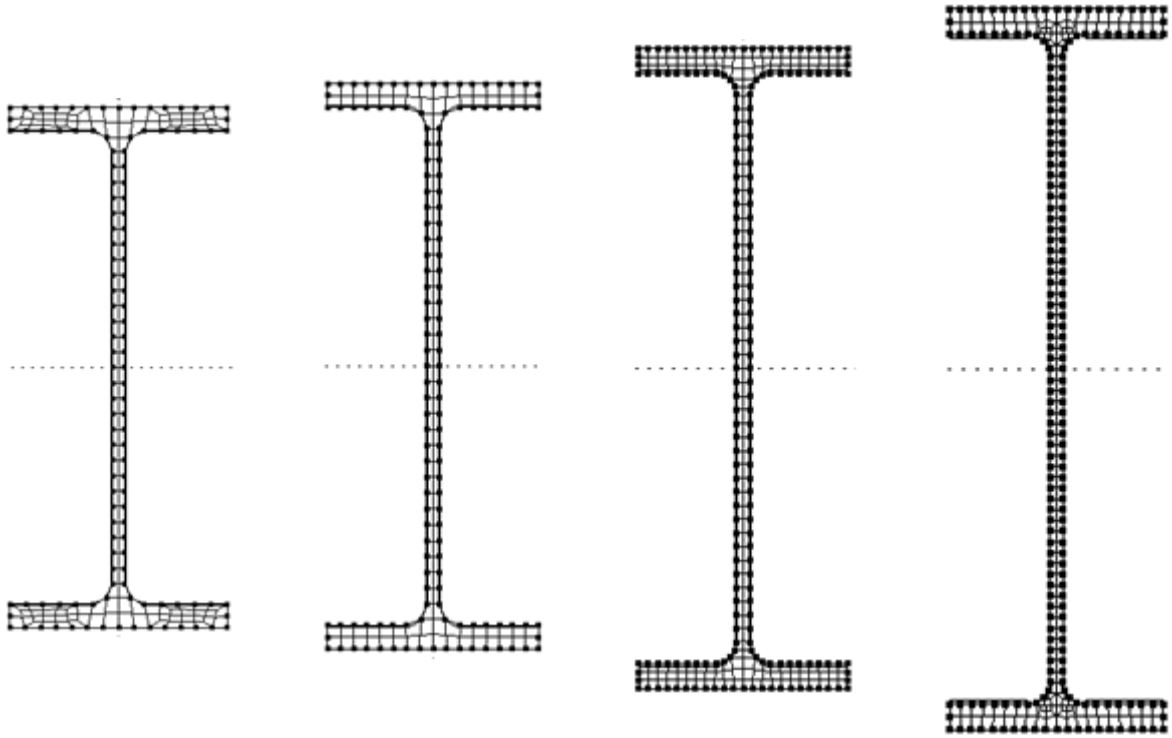
- Στα L/16, 2L/16, 3L/16, 4L/16, 5L/16, 6L/16, 7L/16, 8L/16, 10L/16 της δοκού διατομής HEB700 με L=7m
- Στα L/16, 2L/16, 3L/16, 4L/16, 5L/16, 6L/16, 7L/16, 8L/16, 10L/16 της δοκού διατομής HEB800 με L=8m
- Στα L/16, 2L/16, 3L/16, 4L/16, 5L/16, 6L/16, 7L/16, 8L/16, 9L/16, 10L/16 της δοκού διατομής HEB900 με L=9m
- Στα L/16, 2L/16, 3L/16, 4L/16, 5L/16, 6L/16, 7L/16, 8L/16, 9L/16, 10L/16 της δοκού διατομής διατμομής HEA900 με L=9m

Τα γεωμετρικά στοιχεία των εξεταζόμενων διατομών, η εγκάρσια και κατά μήκος διακριτοποίηση των δοκών σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης και η διακριτοποίηση κατά την εφαρμογή των μεθόδων τρσδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Euler-Bernoulli και Timoshenko δίνονται στους επόμενους Πίνακες και Σχήματα.

Πίνακας 4.2.4-1: Γεωμετρικά στοιχεία διατομών HEB που εξετάσθηκαν

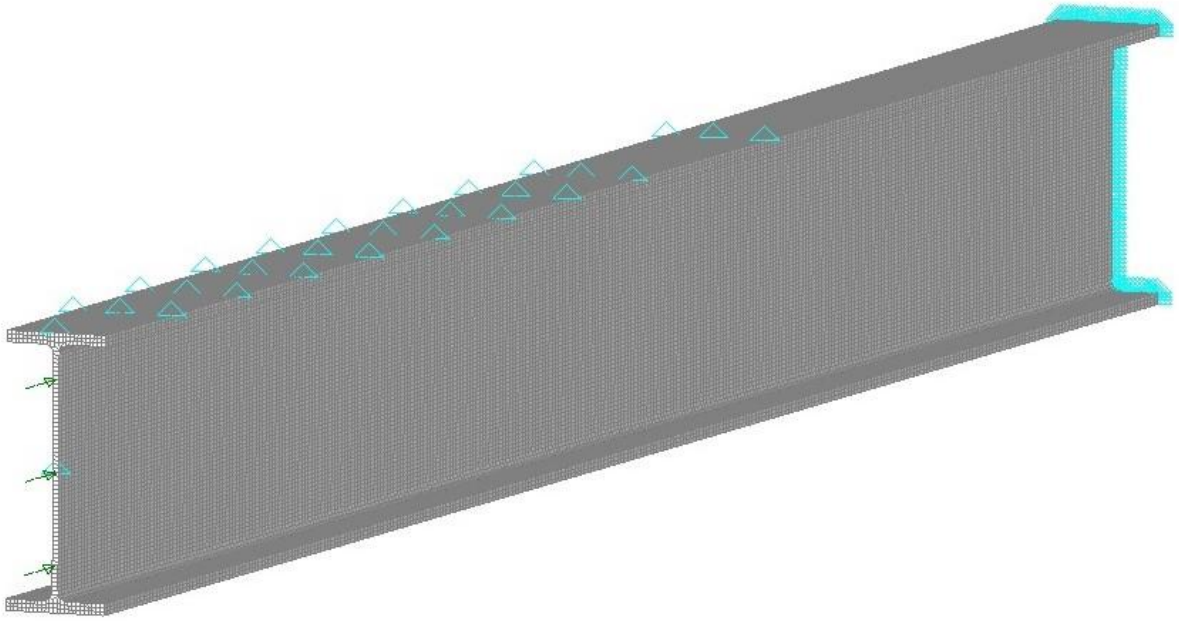
Τύπος	h (mm)	b (mm)	t_s (mm)	t_g (cm^2)	r (mm)	h-2c (mm)	A (cm^2)	I_y (cm^4)	I_z (cm^4)
HEB700	700	300	17	32	27	582	306	256900	14400
HEB800	800	300	17.5	33	30	674	334	359100	14900
HEB900	900	300	18.5	35	30	770	371	494100	15820
HEB1000	1000	300	19	36	30	868	400	644700	16280

Διαστάσεις σύμφωνα με το Σχήμα 4.2.3-4



(a) (b) (c) (d)

Σχήμα 4.2.4-1: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για τη διατομή HEB700 (a), HEB800 (b), HEB900 (c), HEB1000 (d)



Σχήμα 4.2.4-2: Στατικό μοντέλο και διακριτοποίηση της δοκού διατομής HEB800 μήκους 8m μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) (το διάφραγμα παραλείπεται από το σχήμα για καλύτερη ευκρίνεια)

Πίνακας 4.2.4-2:Διακριτοποίηση δοκού διατομής HEB κατά την ανάλυση με χρήση θεωρίας ανώτερης τάξης

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση			
	Εγκάρσια			Διαμήκης
	Συνοριακά Στοιχεία	Τετραεδρικά Στοιχεία		Στοιχεία Δοκού
		Στοιχεία	Gauss Points	
HEB700-7m	1080	164	2x2	140
HEB800-8m	1056	128	2x2	160
HEB900-9m	920	220	2x2	180*
HEB1000-10m	1248	232	2x2	200*

***Για τους 44 και τους 52 βαθμούς ελευθερίας η δοκός κατά μήκος χωρίσθηκε σε 150 στοιχεία.**

Πίνακας 4.2.4-3: Διακριτοποίηση δοκού διατομής HEB κατά την ανάλυση με χρήση μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση				
	Solid FEM			Στοιχεία Θεωρίας Timoshenko	Στοιχεία Θεωρίας Euler-Bernoulli
	Τετραεδρικά Στοιχεία Διατομής	Διαμήκη Στοιχεία	Πεπερασμένα Στοχεία		
HEB700-7m	141	140	19740	400	400
HEB800-8m	210	160	33600	400	400
HEB900-9m	362	180	65160	400	400
HEB1000-10m	105	200	21000	400	400

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τους δυο τελευταίους Πίνακες τοποθετήθηκαν:

- 20 διαμήκη στοιχεία / μετρό μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης
- 40 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων
- 400 διαμήκη στοιχεία για όλες τις δοκούς ανεξάρτητα του μήκους τους κατά την εφαρμογή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko.

Όπου οι δοκοί χωρίσθηκαν σε διαμήκη στοιχεία λιγότερα από τα αναγραφόμενα στον Πίνακα 4.2.4-2 (σημεία με *) είναι για να μην προκύπτουν και σε αυτήν την αριθμητική εφαρμογή ill conditioned μητρώα κατά την ανάλυση.

Στην συνέχεια δίνονται Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίο λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και της θεωρίας Timoshenko.

Πίνακας 4.2.4-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού Pcr όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής HEB

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	HOBT		Solid FEM	Απόκλιση
	N_{dofs}	Pcr(kN)	Pcr(kN)	
HEB700-7m	52	26685.14	28055.66	5.14%
HEB800-8m	76	26655.37*	24460.57	8.97%
HEB900-9m	76	25182.87*	23228.36	8.41%
HEB1000-10m	52	21499.46	21367.85	0.62%

***Για τους 60, 68 και 76 βαθμούς ελευθερίας η δοκός χωρίσθηκε σε 50 στοιχεία κατά μήκος**

Πίνακας 4.2.4-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής HEB

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	HOBT		TBT	Απόκλιση
	N_{dofs}	Pcr(kN)	Pcr(kN)	
HEB700-7m	52	26685.14	7798.09	242.2%
HEB800-8m	76	26655.37	7048.08	278.19%
HEB900-9m	76	25182.87	6908.12	264.54%
HEB1000-10m	52	21499.46	6325.45	239.89%

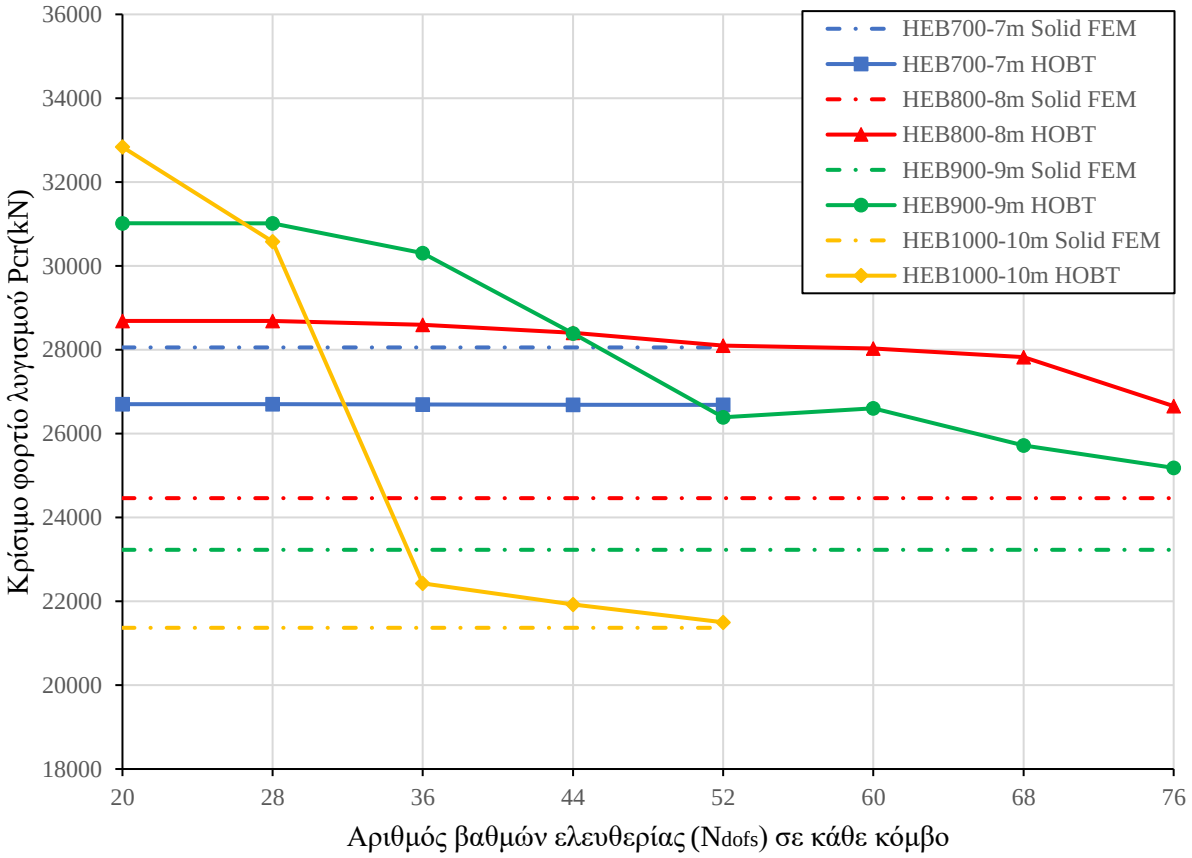
Πίνακας 4.2.4-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής HEB όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

HEB700-7m / Solid FEM Pcr=28055.66kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	26702.08	26699.43	26693.36	26685.56	26685.14
Απόκλιση		5.07%	5.08%	5.1%	5.13%	5.14%

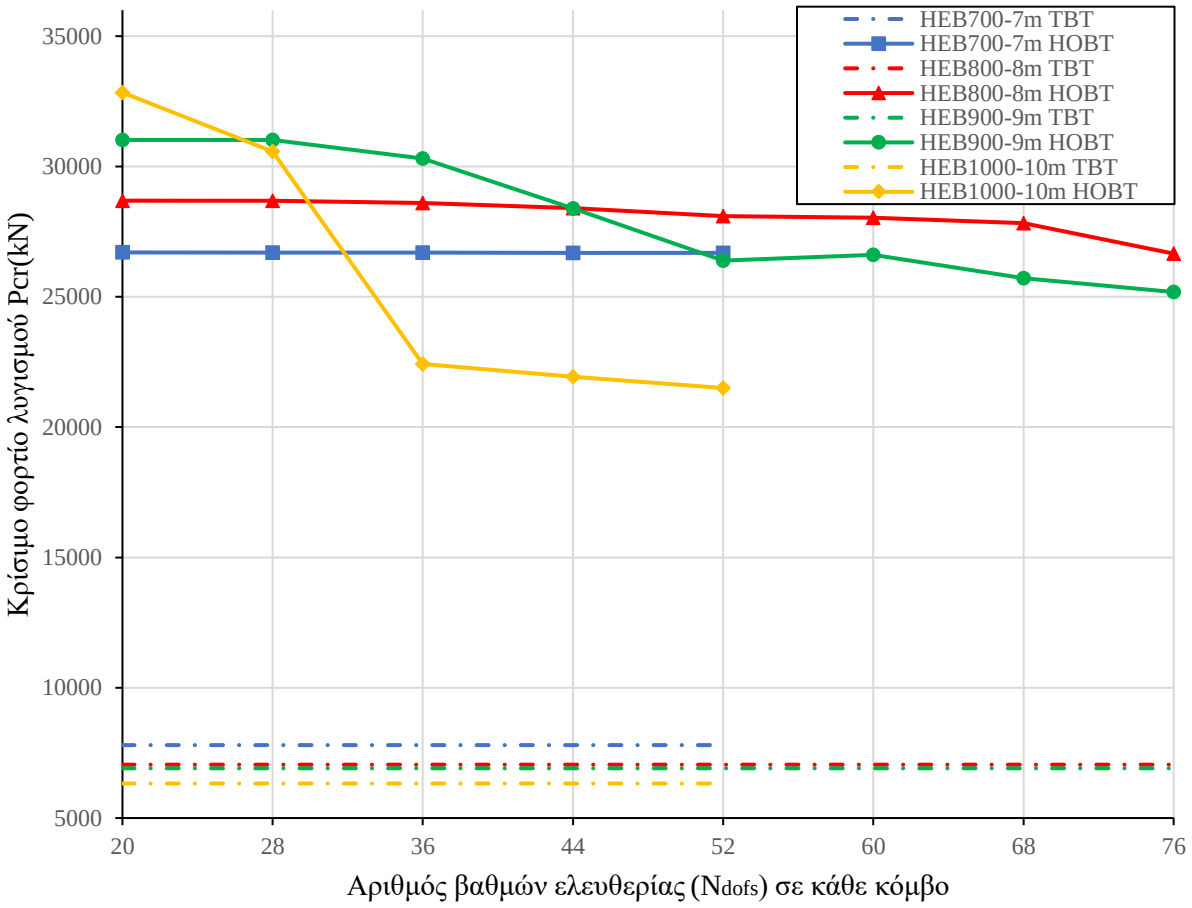
HEB800-8m / Solid FEM Pcr=24460.57kN									
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52	60	68	76
	Pcr (kN)	28687.6	28686.6	28598	28407	28096.1	28034	27825.5	26655.4
Απόκλιση		17.28%	17.28%	16.91%	16.13%	14.86%	14.61%	13.76%	8.97%

HEB900-9m / Solid FEM Pcr=23228.36kN									
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52	60	68	76
	Pcr (kN)	31017.8	31017	30307.5	28391.5	26392.8	26605.8	25718	25182.9
Απόκλιση		33.53%	33.53%	30.48%	22.23%	13.62%	14.54%	10.72%	8.41%

HEB1000-10m / Solid FEM Pcr=21367.85kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	32836.56	30581.63	22427.26	21927.92	21499.46
Απόκλιση		53.67%	43.12%	4.96%	2.62%	0.62%

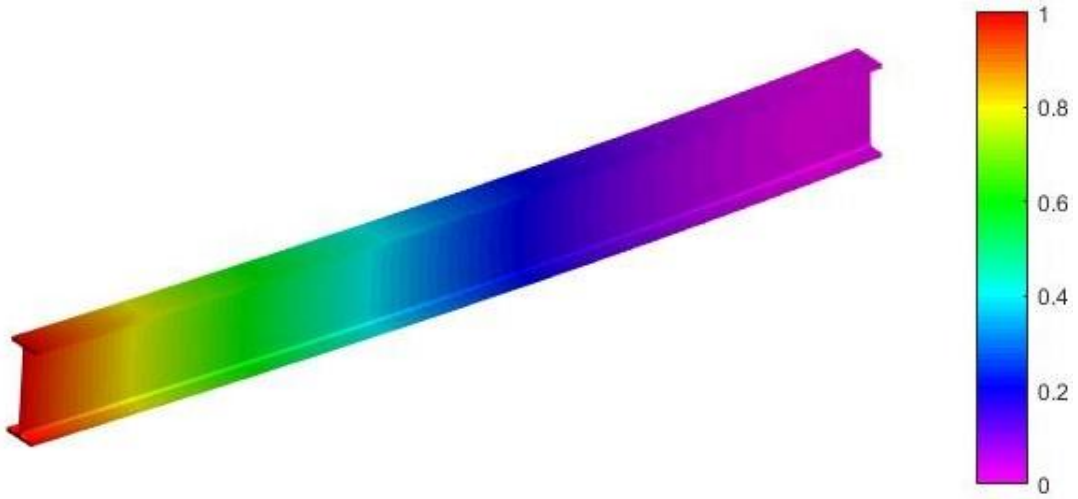


Σχήμα 4.2.4-3: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.4-6

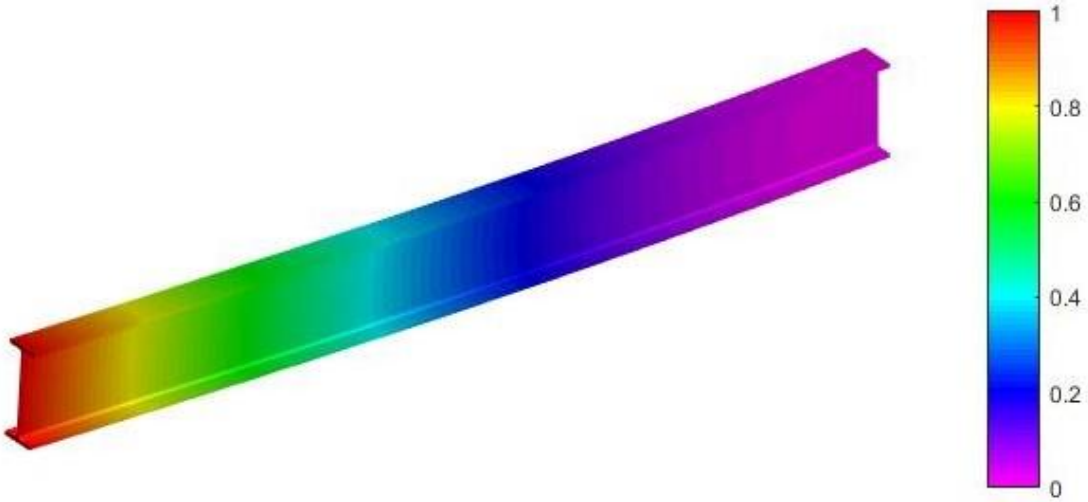


Σχήμα 4.2.4-4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής HEB όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

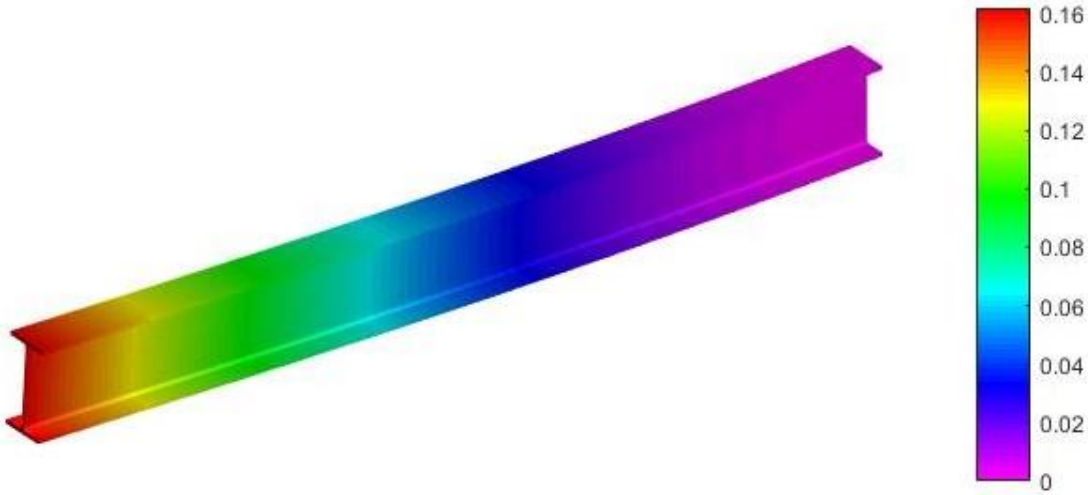
Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής HEB800 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και τη θεωρία Timoshenko.



(α)

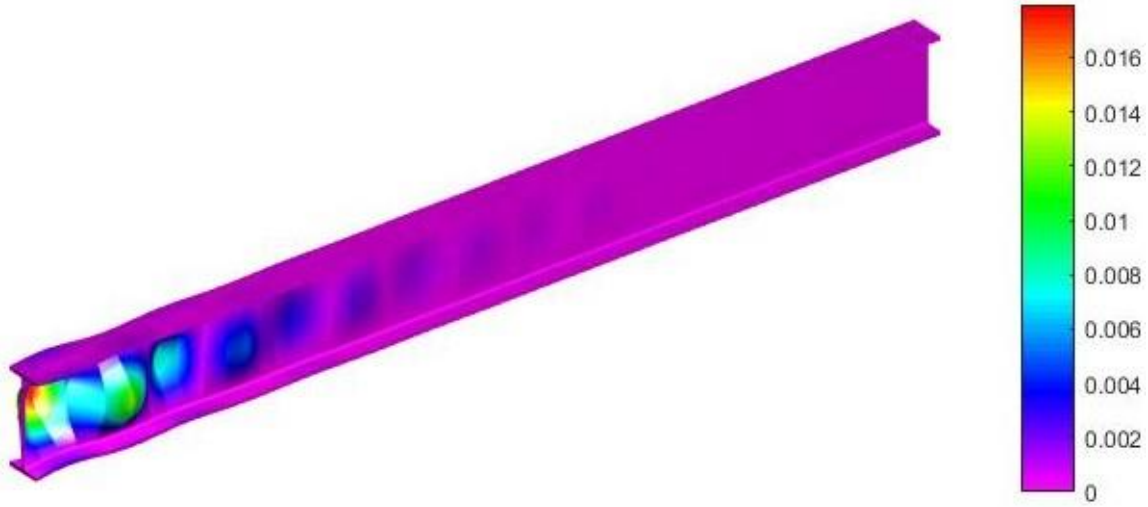


(β)



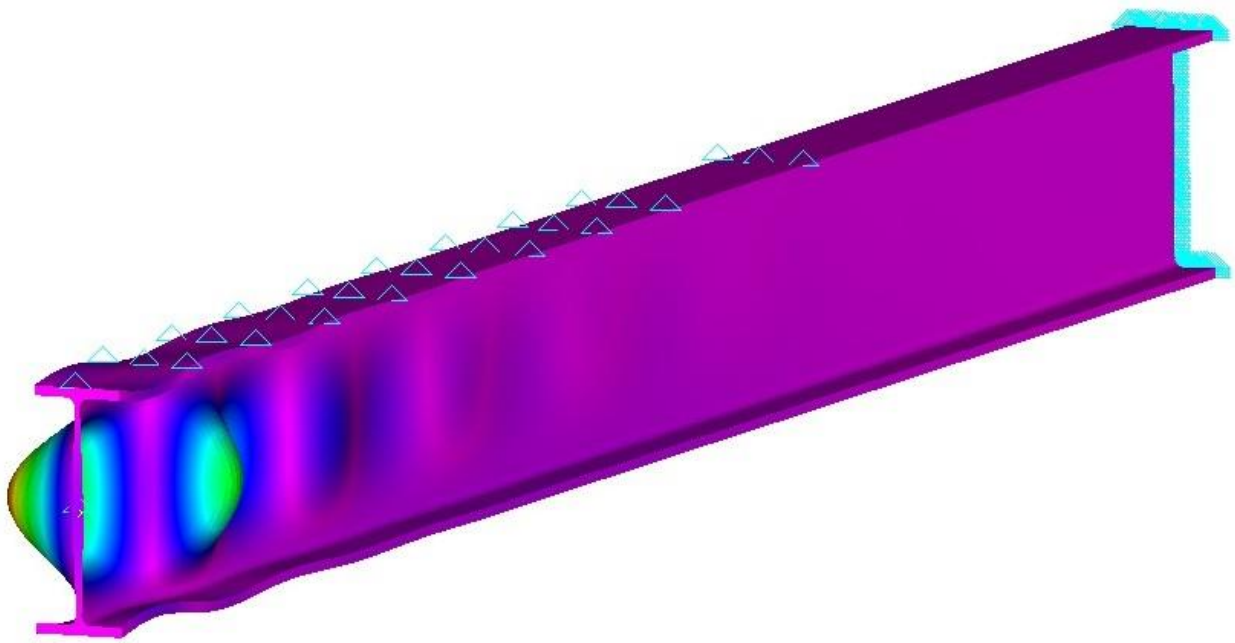
(γ)

(δ)

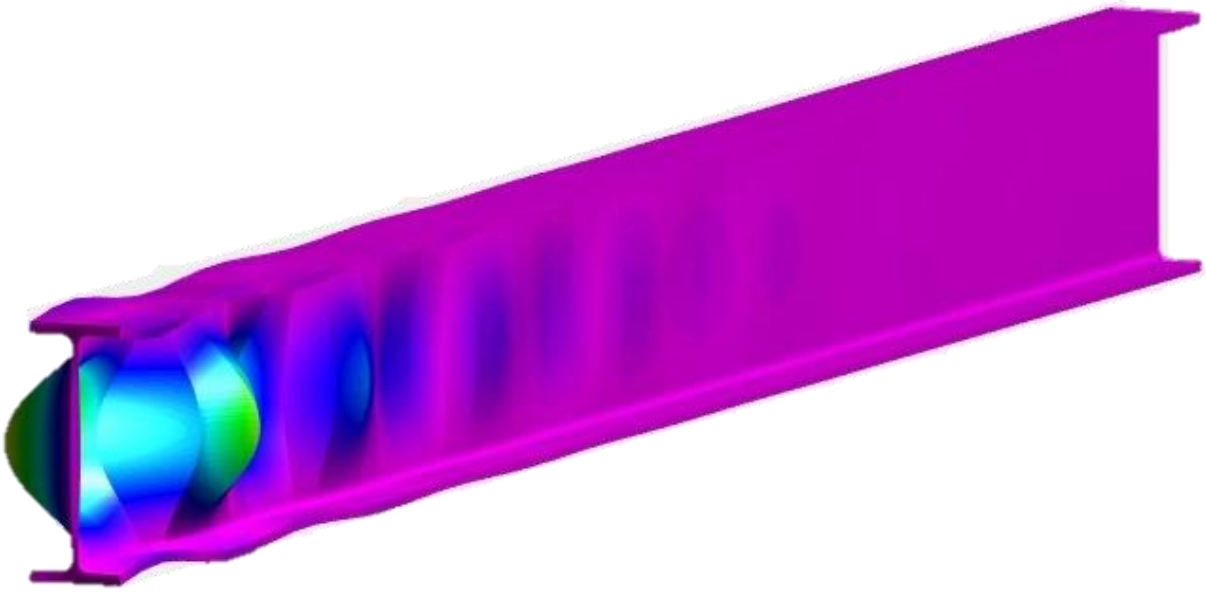


(ε)

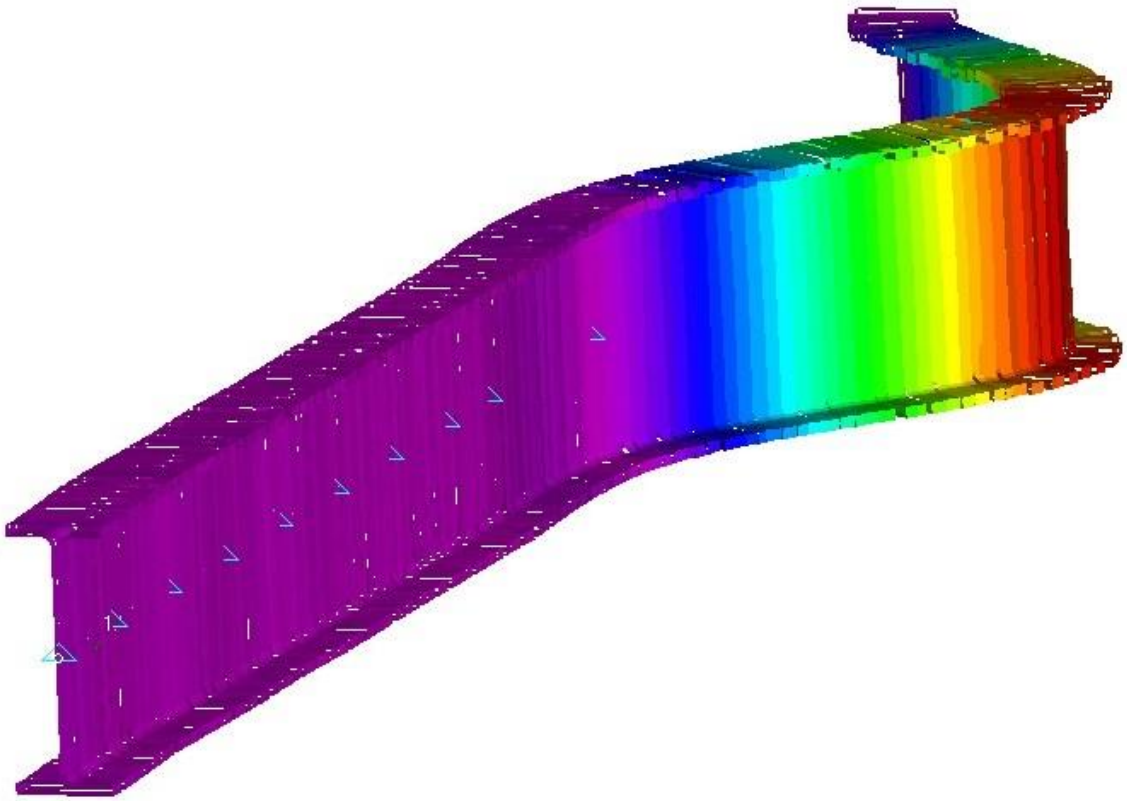
Σχήμα 4.2.4-5: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEB800 μήκους 8m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)



Σχήμα 4.2.4-6: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEB800 μήκους 8m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 4.2.4-7: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEB800 μήκους 8m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο



Σχήμα 4.2.4-8: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής HEB800 μήκους 8m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko

Σχόλια επί της εφαρμογής 4

Ισχύουν όσα ειπώθηκαν στην αριθμητική εφαρμογή 3 και επιπλέον:

- Για την εμφάνιση τοπικού λυγισμού στις δοκούς διατομής HEB χρειάστηκε να τοποθετηθούν τοπικές εξασφαλίσεις σε περισσότερα σημεία κατά μήκος της δοκού σε σύκγριση με τις δοκούς διατομής HEA. Αυτό οφείλεται στο μεγαλύτερο πάχος κορμού των διατομών HEB στον οποίο δημιουργούνται και τα τοπικά φαινόμενα. Αυτή η διαφορά στο πάχος εξηγεί και την αύξηση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κατά 50-60% στις δοκούς διατομής HEB σε σχέση με τις HEA.
- Στα 2 από τα 4 μοντέλα που εξετάσθηκαν με τη θεωρία δοκού ανώτερης τάξης χρειάστηκε η ανάλυση να γίνει για μέχρι 76 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο προκειμένου το φορτίο λυγισμού να έχει απόκλιση μικρότερη από 10% από εκείνο που προκύπτει μέσω ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία.

4.2.5 Αριθμητική εφαρμογή 5-Δοκοί διατομής IPE

Στην παρούσα και τελευταία αριθμητική εφαρμογή αξονικής καταπόνησης εξετάζονται δοκοί με προφίλ διατομών IPE500, IPE550, IPE600. Οι διαμήκεις διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε ο λόγος του μήκους της δοκού προς τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση της διατομής να είναι ίσος με 10.

Τα στατικά προσομοιώματα έχουν μορφωθεί με την ίδια λογική που μορφώθηκαν στην αριθμητική εφαρμογή 3 και 4 που εξετάζονται πάλι δοκοί με διατομές ανοιχτού τύπου. Συγκεκριμένα σε κάθε μοντέλο στο ελεύθερο άκρο της δοκού έχουν τοποθετηθεί διάφραγμα μαζί με πλευρική και στρεπτική δέσμευση και τόσες πλευρικες και στρεπτικές εξασφαλίσεις κατά μήκος της δοκού όσες χρειάζονται για να εμφανισθούν τοπικά φαινόμενα.

Για κάθε μοντέλο χρειάσθηκε να τοποθετηθεί διαφορετικός αριθμός δεσμεύσεων λόγω του διαφορετικού προφίλ διατομής και του διαφορετικού τους μήκους. Έτσι πέρα από τη διαμόρφωση της ακραίας διατομής που είναι για όλα τα μοντέλα ίδια τοποθετήθηκαν πλευρικές και στρεπτικές δεσμεύσεις:

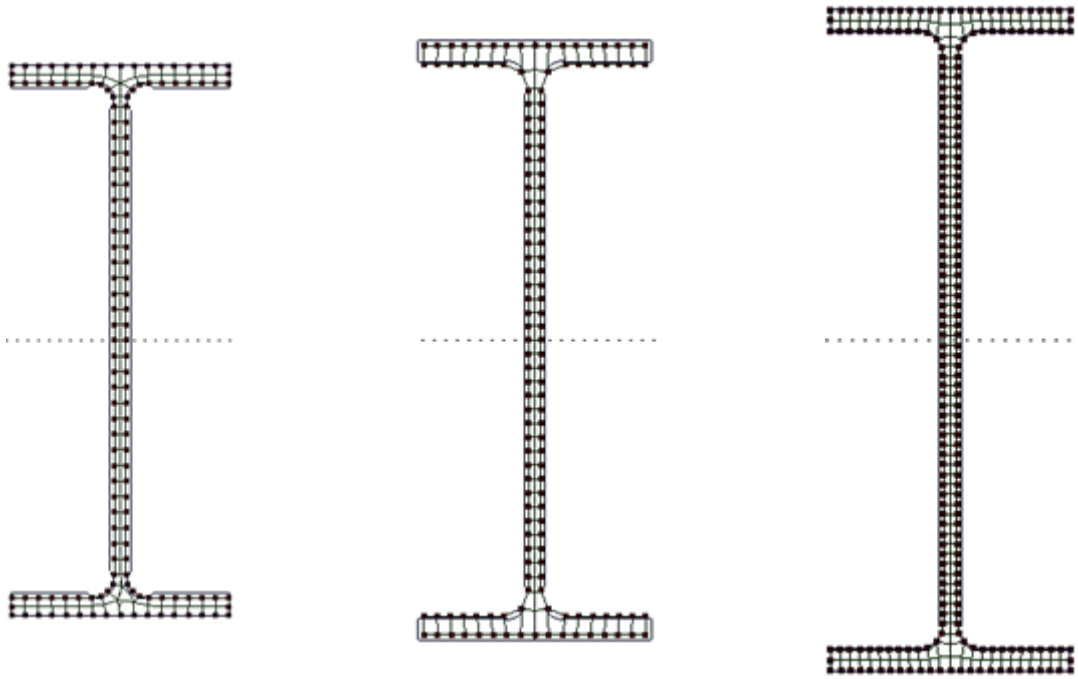
- Στα L/8, 2L/8, 3L/8, 4L/8 της δοκού διατομής IPE500 με L=5m
- Στα L/8, 2L/8, 3L/8, 4L/8, 5L/8 της δοκού διατομής IPE550 με L=5.5m
- Στα 2L/16, 4L/16, 5L/16, 6L/16, 7L/16, 8L/16, 10L/16 της δοκού διατομής IPE600 με L=6m

Τα γεωμετρικά στοιχεία των εξεταζόμενων διατομών, η εγκάρσια και κατά μήκος διακριτοποίηση των δοκών σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης και η διακριτοποίηση κατά την εφαρμογή των μεθόδων τρσδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Euler-Bernoulli και Timoshenko δίνονται στους επόμενους Πίνακες και Σχήματα.

Πίνακας 4.2.5-1: Γεωμετρικά στοιχεία διατομών IPE που εξετάσθηκαν

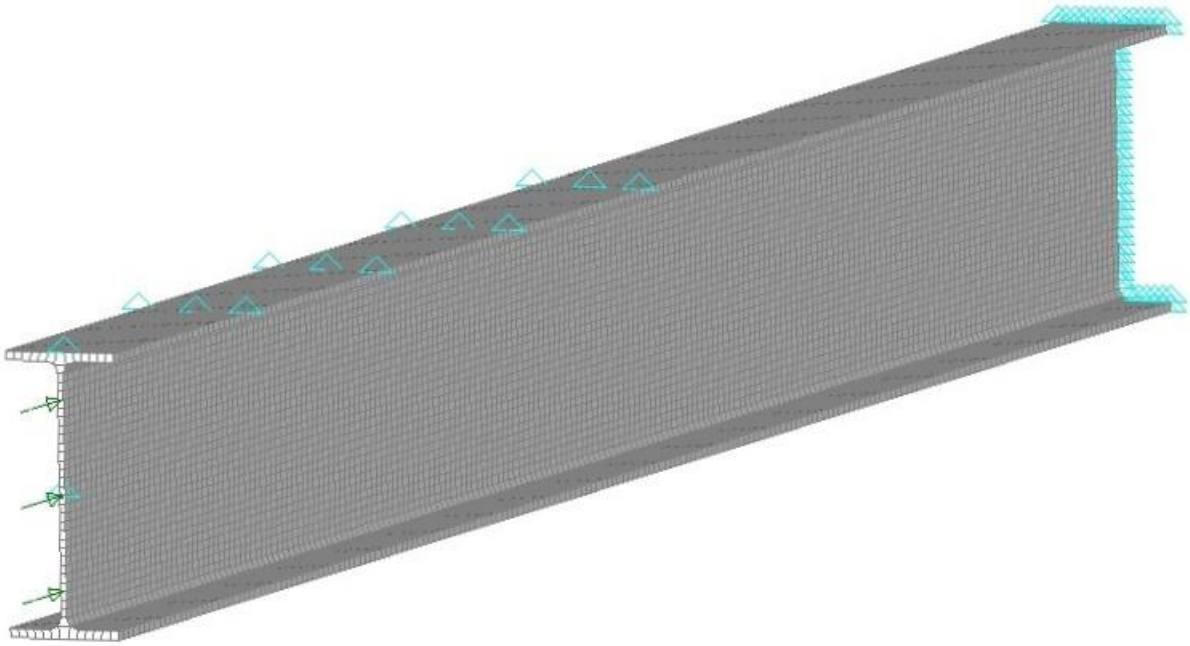
Τύπος	h (mm)	b (mm)	t_s (mm)	t_g (cm^2)	r (mm)	h-2c (mm)	A (cm^2)	I_y (cm^4)	I_z (cm^4)
IPE500	500	200	10.2	16	21	426	116	48200	2140
IPE550	550	210	11.1	17.2	24	467	134	67120	2670
IPE600	600	220	12	19	24	514	156	92080	3390

Διαστάσεις σύμφωνα με το Σχήμα 4.2.3-4



(a) (b) (c)

Σχήμα 4.2.5-1: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για τη διατομή IPE500 (a), IPE550 (b), IPE600 (c)



Σχήμα 4.2.5-2: Στατικό μοντέλο και διακριτοποίηση της δοκού διατομής IPE500 μήκους 5m μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) (το διάφραγμα παραλείπεται από το σχήμα για καλύτερη ευκρίνεια)

Πίνακας 4.2.5-2:Διακριτοποίηση δοκού διατομής IPE κατά την ανάλυση με χρήση θεωρίας ανώτερης τάξης

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση			
	Εγκάρσια			Διαμήκης
	Συνοριακά Στοιχεία	Τετραεδρικά Στοιχεία		Στοιχεία Δοκού
		Στοιχεία	Gauss Points	
IPE500-5m	980	133	2x2	100
IPE550-5.5m	1064	152	2x2	110
IPE600-6m	1110	218	2x2	120

Πίνακας 4.2.5-3: Διακριτοποίηση δοκού διατομής IPE κατά την ανάλυση με χρήση μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση				
	Solid FEM			Στοιχεία Θεωρίας Timoshenko	Στοιχεία Θεωρίας Euler-Bernoulli
	Τετραεδρικά Στοιχεία Διατομής	Διαμήκη Στοιχεία	Πεπερασμένα Στοχεία		
IPE500-5m	56	200	11200	400	400
IPE550-5.5m	153	220	33660	400	400
IPE600-6m	41	240	9840	400	400

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τους δυο τελευταίους Πίνακες τοποθετήθηκαν:

- 20 διαμήκη στοιχεία / μετρό μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης
- 40 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων
- 400 διαμήκη στοιχεία για όλες τις δοκούς ανεξάρτητα του μήκους τους κατά την εφαρμογή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko.

Στην συνέχεια δίνονται Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων και της θεωρίας Timoshenko.

Πίνακας 4.2.5-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού Pcr όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής IPE

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	HOBT		Solid FEM	Απόκλιση
	Ndofs	Pcr(kN)	Pcr(kN)	
IPE500-5m	52	7569.14	7150.75	5.85%
IPE550-5.5m	44	8387.78	7887.78	6.34%
IPE600-6m	76	10716	10110.9	5.98%

Πίνακας 4.2.5-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής IPE

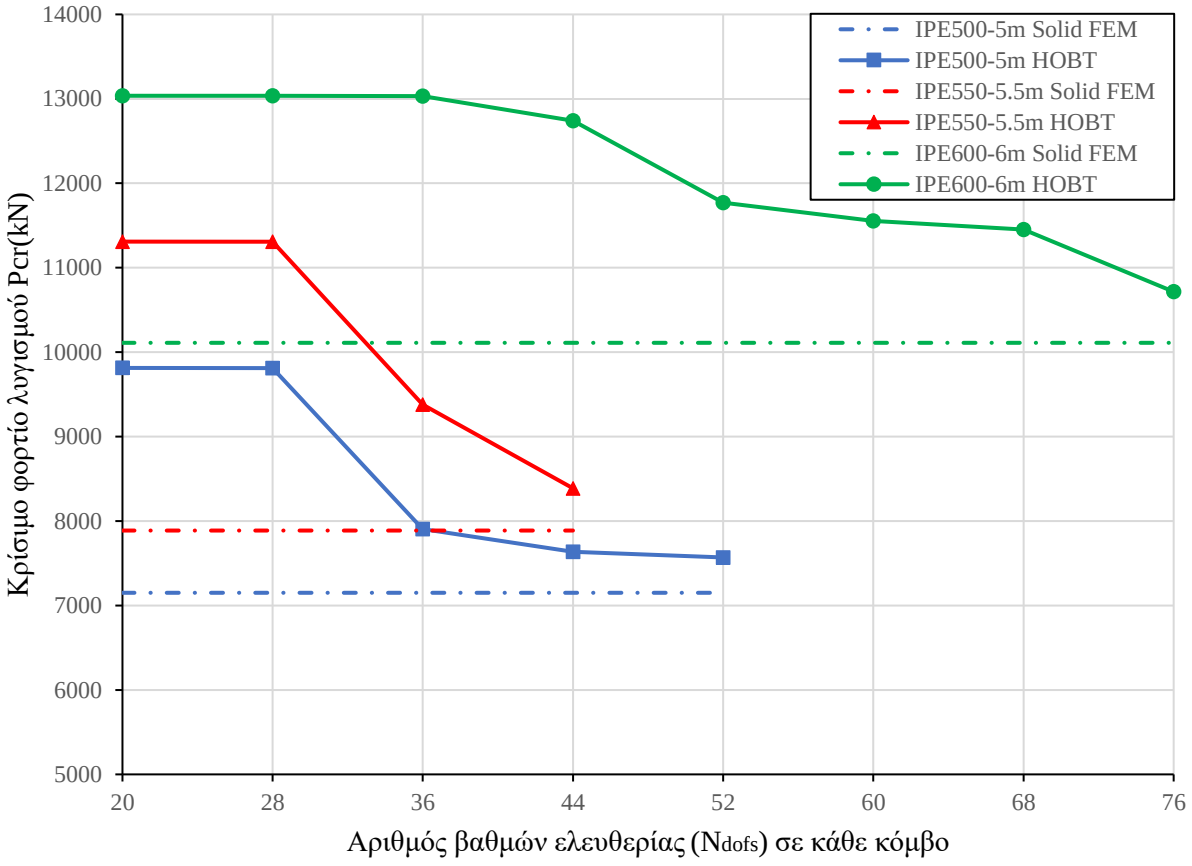
Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	HOBT		TBT	Απόκλιση
	Ndofs	Pcr(kN)	Pcr(kN)	
IPE500-5m	52	7569.14	1670.937	352.99%
IPE550-5.5m	44	8387.78	1930.15	334.57%
IPE600-6m	76	10716	2208.98	385.11%

Πίνακας 4.2.5-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής IPE όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

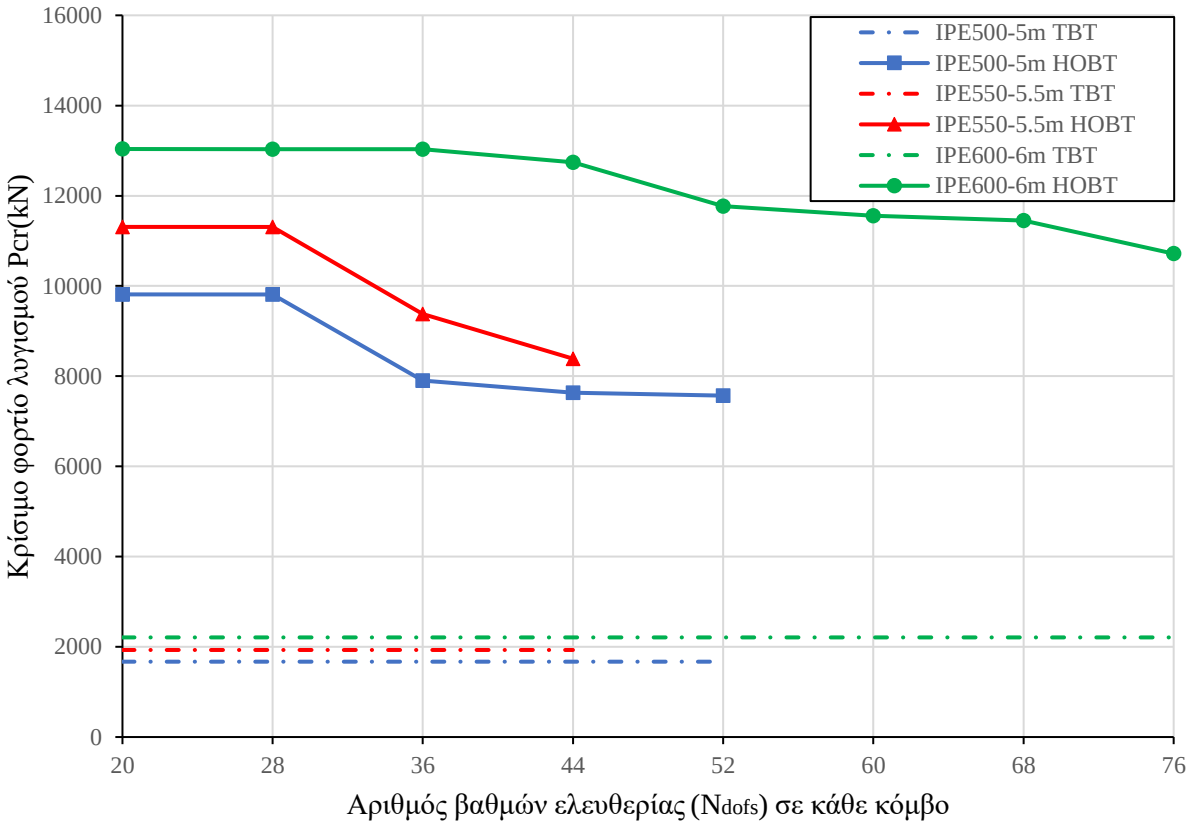
IPE500-5m / Solid FEM Pcr=7150.75kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	9813.44	9812.92	7906.59	7636.16	7569.14
Απόκλιση		37.24%	37.23%	10.57%	6.79%	5.85%

IPE550-5.5m / Solid FEM Pcr=7887.78kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	11309.44	11308.62	9380.45	8387.78	-
Απόκλιση		43.38%	43.27%	18.92%	6.34%	-

IPE600-6m / Solid FEM Pcr=10110.9kN									
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52	60	68	76
	Pcr(kN)	13036.4	13035.3	13030.5	12741.2	11772	11554.2	11452.1	10716
Απόκλιση		28.93%	28.92%	28.88%	26.01%	16.43%	14.27%	13.26%	5.98%

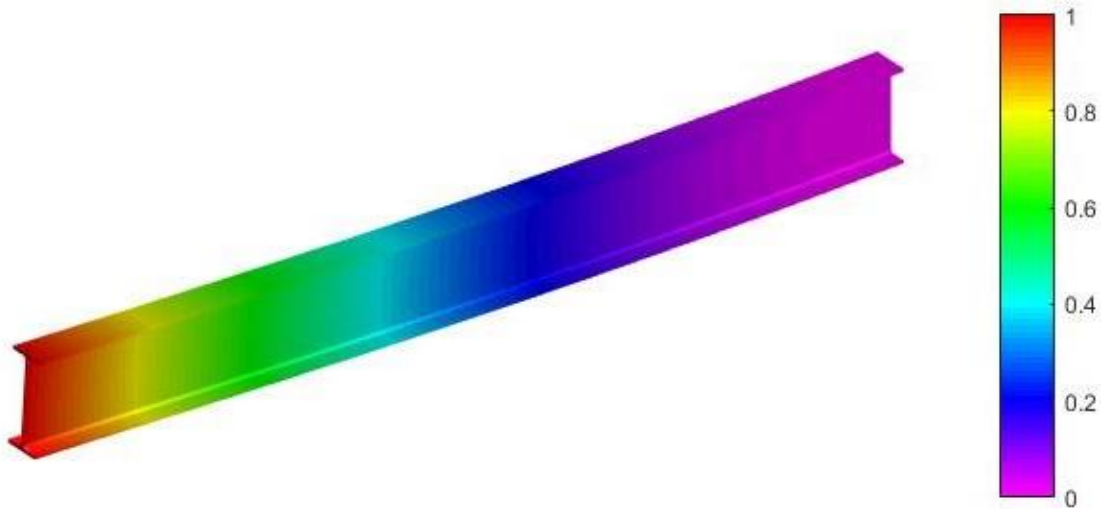


Σχήμα 4.2.5-3: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακα 4.2.5-6

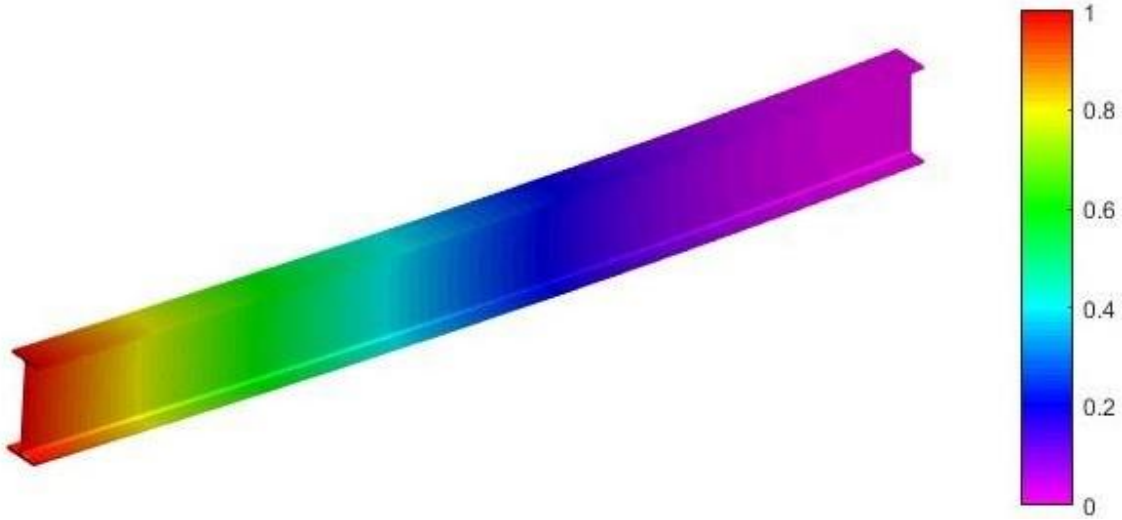


Σχήμα 4.2.5-4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των δοκών διατομής IPE όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)

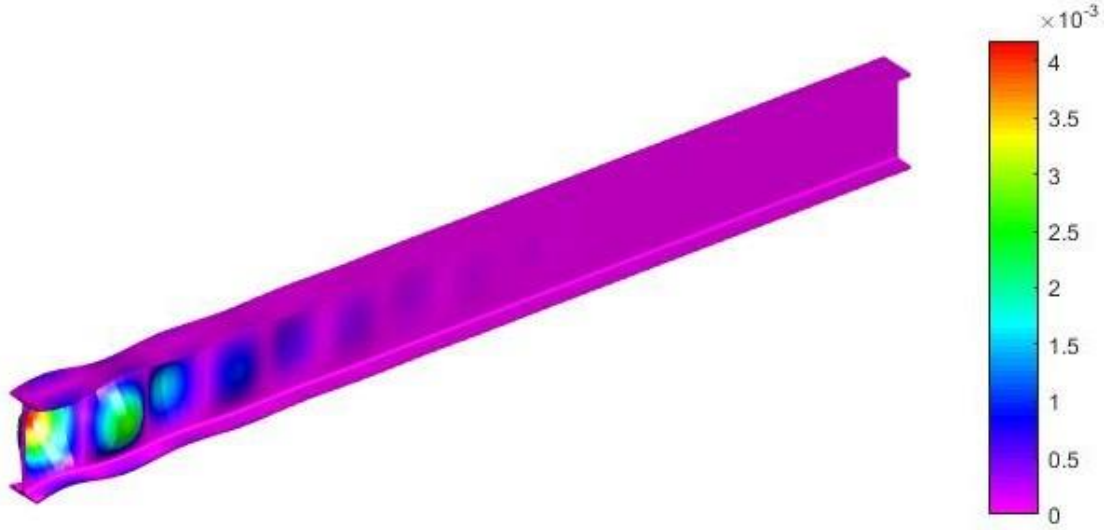
Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής IPE500 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



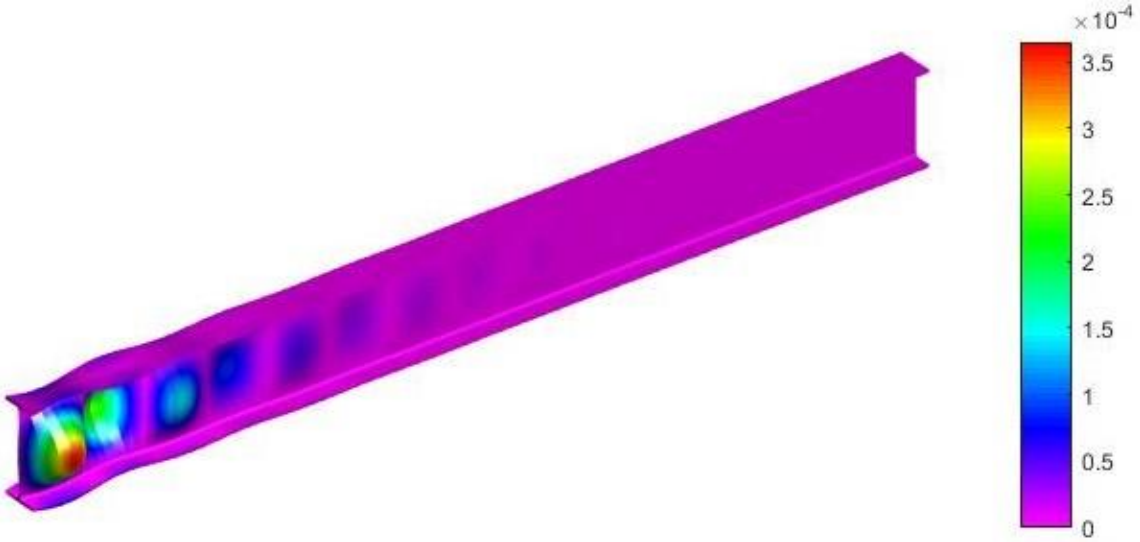
(α)



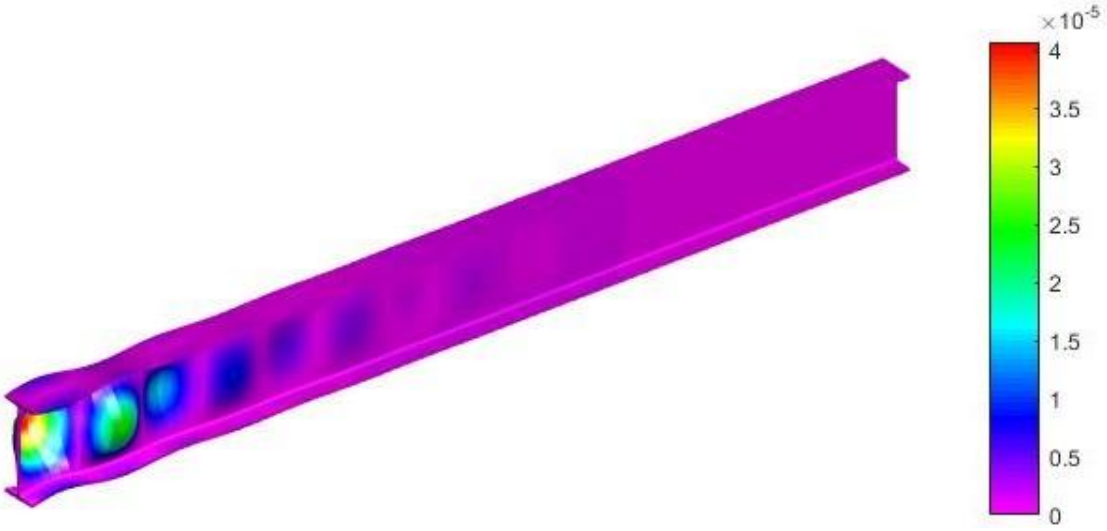
(β)



(γ)

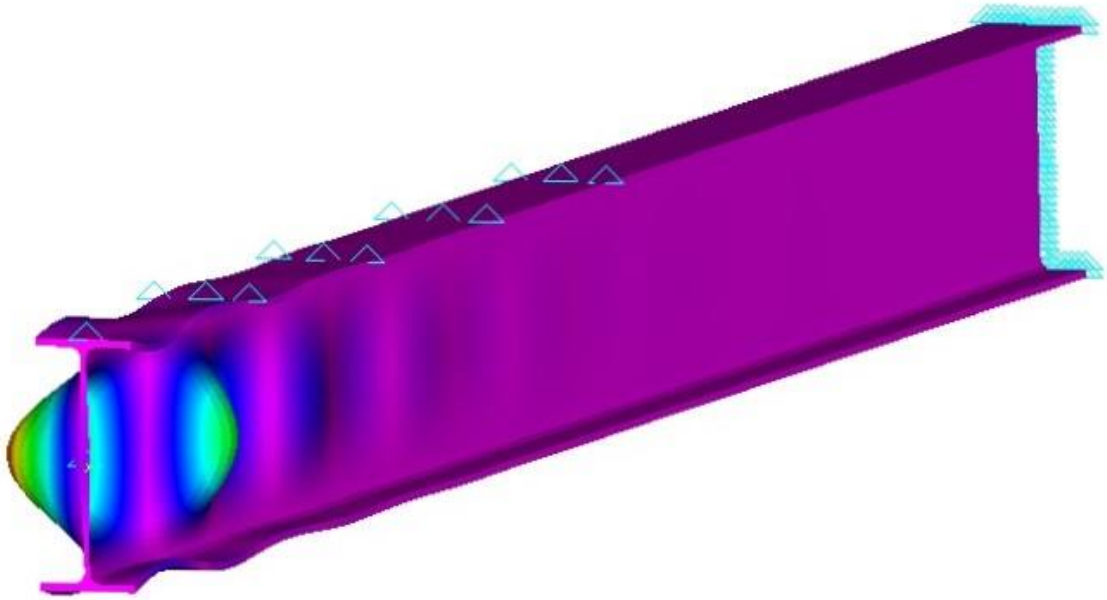


(δ)

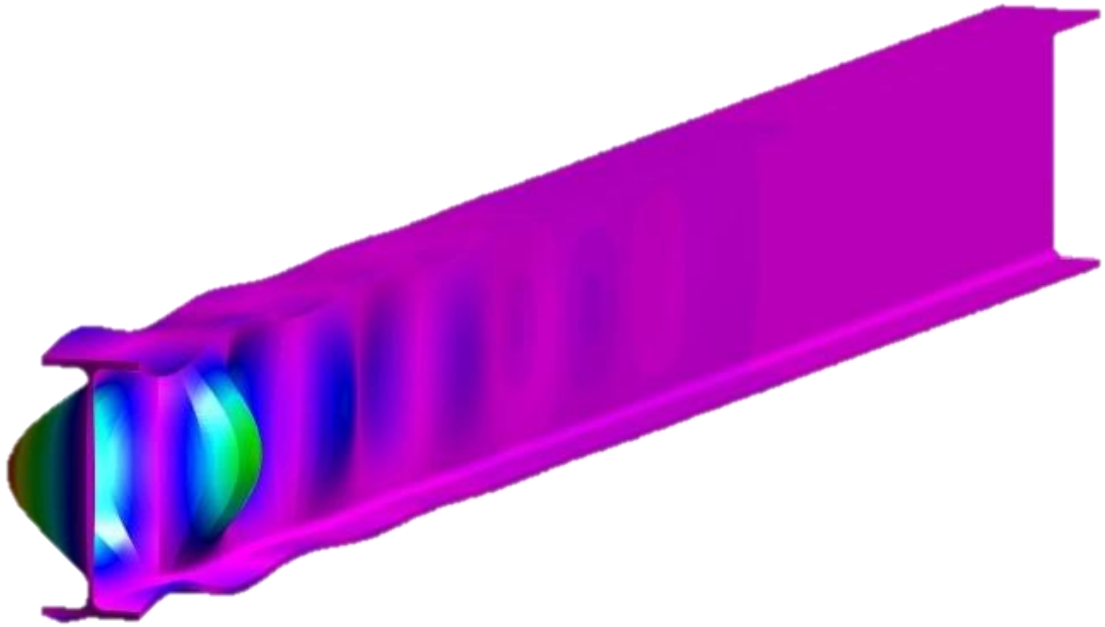


(ε)

Σχήμα 4.2.5-5: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής IPE500 μήκους 5m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)



Σχήμα 4.2.5-6: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής IPE500 μήκους 5m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία

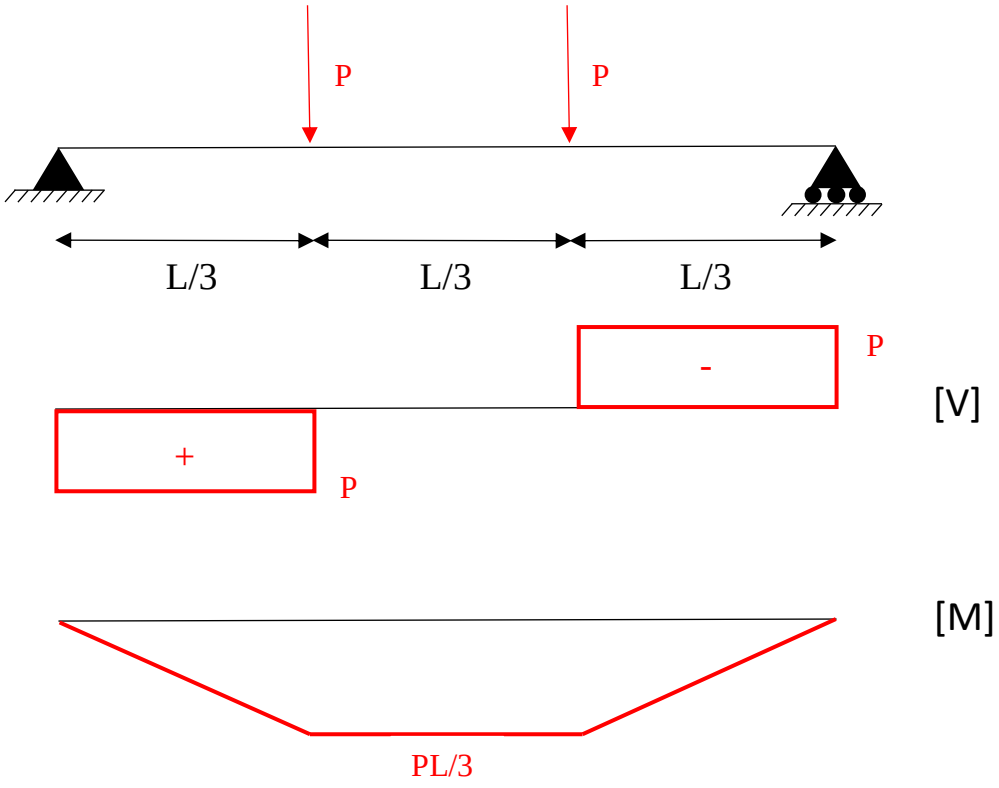


Σχήμα 4.2.5-7: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής IPE500 μήκους 5m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο

Όσα σχόλια έγιναν στις 2 προηγούμενες αριθμητικές εφαρμογές δοκών διατομής ανοιχτού τύπου ισχύουν και στην συγκεκριμένη αριθμητική εφαρμογη.

4.3 Καθαρή κάμψη

Στη δεύτερη ομάδα αριθμητικών εφαρμογών εξετάζονται αμφιέριστες δοκοί στατικού συστήματος όπως δίνεται στο Σχήμα 4.3-1. Ο λόγος που επιλέχθηκε να εξετασθεί αυτό το σύστημα έναντι της αμφιέρειστης δοκού με συγκεντρωμένο φορτίο στη μέση, είναι διότι στο μεσαίο κατά μήκος τμήμα της δοκού του εξεταζόμενου μοντέλου δεν υπάρχει αλληλεπίδραση εντατικών μεγεθών (καμπτική ροπή με τέμνουσα, καμπτική ροπή με αξονική). Θεωρείται λοιπόν ότι αυτό το τμήμα καταπονείται από καθαρή κάμψη.



Σχήμα 4.3-1: Στατικό σύστημα δοκού και εντατικά μεγέθη που αναπτύσσονται

Εξετάζονται 8 μοντέλα δοκών με πρότυπες μεταλλικές διατομές (*S355*, $E=2.1\cdot10^8 kN/m^2$, $\mu=8.08\cdot10^7 kN/m^2$, $\nu=0.3$), κλειστού τύπου προερχόμενες από τη σειρά RHS.

4.3.1 Αριθμητική εφαρμογή 6-Δοκοί διατομής RHS

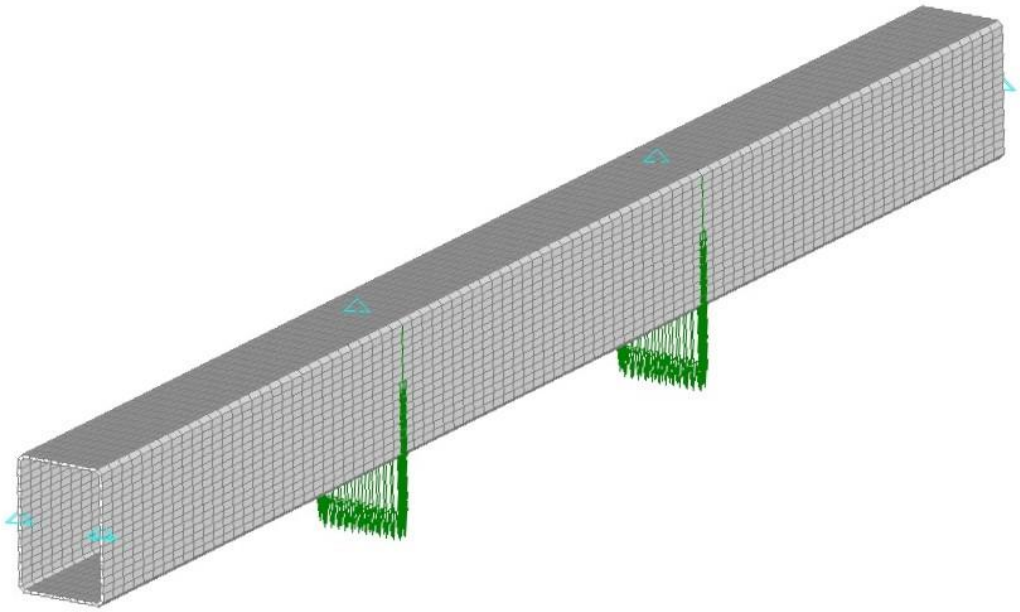
Στην παρούσα αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται δοκοί με προφίλ διατομών RHS260x180x6.3, RHS300x200x6.3, RHS300x200x8, RHS350x250x8, RHS400x200x8, RHS400x200x10, RHS450x250x10 και RHS500x300x12.5. Οι διαμήκεις διαστάσεις των μοντέλων επιλέχθηκαν έτσι ώστε ο λόγος του μήκους της δοκού προς τη μέγιστη εγκάρσια διάσταση της διατομής να είναι περίπου ίσος με 10.

Σε κάθε δοκό σε απόσταση L/3 από τις στηρίξεις (όπου L το συνολικό μήκος της δοκού) έχουν τοποθετηθεί πλευρικές εξασφαλίσεις προκειμένου υπό την επίδραση της εξωτερικής φόρτισης, να εμφανισθούν τοπικά φαινόμενα αποτρέποντας τον πλευρικό-στρεπτοκαμπτικό λυγισμό. Οι εξασφαλίσεις αυτές τοποθετήθηκαν στο μέσο της εξωτερικής παρειάς του άνω τοιχώματος της διατομής.

Η μόρφωση των ακραίων στηρίξεων της αμφιέρειστης δοκού κατά την ανάλυση μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων έγινε ως εξής:

- Η αριστερή (σύμφωνα με το Σχήμα 4.3-1) στήριξη (άρθρωση) μορφώθηκε τοποθετόντας στηρίξεις σε όλους τους κόμβους στο μέσο της ακραίας διατομής οι οποίες δεσμεύουν την διαμήκη, πλευρική και κατακόρυφη μετακίνηση.
- Η δεξιά (σύμφωνα με το Σχήμα 4.3-1) στήριξη (κύλιση) μορφώθηκε τοποθετόντας στηρίξεις σε όλους τους κόμβους στο μέσο της ακραίας διατομής οι οποίες δεσμεύουν την πλευρική και κατακόρυφη μετακίνηση αφήνοντας ελεύθερη την διαμήκη μετακίνηση.
- Οι στροφές περί τους άξονες x,y,z παρέμειναν ελεύθερες σε όλους τους παραπάνω κόμβους.

Τα παραπάνω δίνονται στο Σχήμα 4.3.1-1.



Σχήμα 4.3.1-1: Στατικό μοντέλο και διακριτοποίηση της δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM)

Τα γεωμετρικά στοιχεία των εξεταζόμενων διατομών δίνονται στον Πίνακα 4.2.1-1 και τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εγκάρσια ανάλυση μέσω της θεωρίας ανώτερης τάξης είναι ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην εφαρμογή της αξονικής καταπόνησης (Σχήμα 4.2.1-2 και Σχήμα 4.2.1-3).

Η διακριτοποίηση των δοκών σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης και η διακριτοποίηση κατά την εφαρμογή των μεθόδων τρσδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Euler-Bernoulli και Timoshenko δίνονται στους επόμενους Πίνακες.

Πίνακας 4.3.1-1:Διακριτοποίηση δοκού διατομής RHS κατά την ανάλυση με χρήση θεωρίας ανώτερης τάξης

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση			
	Εγκάρσια			Διαμήκης
	Συνοριακά Στοιχεία	Τετραεδρικά Στοιχεία		Στοιχεία Δοκού
		Στοιχεία	Gauss Points	
RHS 260x180x6.3-3m	940	172	2x2	90
RHS 300x200x6.3-3m	1060	192	2x2	90
RHS 300x200x8-3m	1100	204	2x2	90
RHS 350x250x8-3m	1008	180	2x2	90*
RHS 400x200x8-4.5m	888	148	2x2	135
RHS 400x200x10-4.5m	924	260	2x2	135
RHS 450x250x8-4.5m	960	288	2x2	135
RHS 450x250x10-4.5m	740	373	2x2	135
RHS 500x300x12.5-4.5m	960	232	2x2	135

***Για τους 60, 68 και 76 βαθμούς ελευθερίας η δοκός χωρίσθηκε σε 60 στοιχεία**

Ο λόγος για τον οποίο η δοκός διατομής RHS350x250x8 χωρίσθηκε σε λιγότερα διαμήκη στοιχεία από αυτά που αναγράφονται στον παραπάνω Πίνακα για τους 60, 68 και 76 βαθμούς ελευθερίας, είναι επειδή και σε αυτήν την εφαρμογή κατά τη διαμήκη ανάλυση προκύπτουν ill conditioned μητρώα.

Πίνακας 4.3.1-2: Διακριτοποίηση δοκού διατομής RHS κατά την ανάλυση με χρήση μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Διακριτοποίηση				
	Solid FEM			Στοιχεία Θεωρίας Timoshenko	Στοιχεία Θεωρίας Euler-Bernoulli
	Τετραεδρικά Στοιχεία Διατομής	Διαμήκη Στοιχεία	Πεπερασμένα Στοχεία		
RHS 260x180x6.3-3m	58	90	5220	300	300
RHS 300x200x6.3-3m	96	90	8640	300	300
RHS 300x200x8-3m	64	90	5760	300	300
RHS 350x250x8-3m	148	90	13320	300	300
RHS 400x200x8-4.5m	190	135	25650	450	450
RHS 400x200x10-4.5m	158	135	21330	450	450
RHS 450x250x10-4.5m	171	135	23085	450	450
RHS500x300x12.5-4.5m	168	135	22680	450	450

Όπως γίνεται αντιληπτό και από τους δυο τελευταίους Πίνακες τοποθετήθηκαν:

- 30 διαμήκη στοιχεία / μετρό μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης
- 30 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων
- 100 διαμήκη στοιχεία / μέτρο μήκους της δοκού κατά την εφαρμογή των θεωριών Euler-Bernoulli και Timoshenko.

Στην συνέχεια δίνονται Πίνακες και Διαγράμματα στα οποία γίνεται σύγκριση του κρίσμου φορτίο λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας ανώτερης τάξης, της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων της θεωρίας Timoshenko και της θεωρίας Euler-Bernoulli.

Τέλος δίνονται οι παραμορφωμένες εικόνες της δοκού διατομής RHS260x180x6.3 όπως προκύπτουν από τη χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 52) και συγκρίνονται με τις παραμορφωμένες εικόνες όπως προκύπτουν από τη μέθοδο τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων τη θεωρία Timoshenko και τη θεωρία Euler-Bernoulli.

Πίνακας 4.3.1-3: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (Solid FEM) για δοκούς διατομής RHS

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Solid FEM	
RHS 260x180x6.3-3m	678.69	721.74	6.34%
RHS 300x200x6.3-3m	747.81	712.91	4.9%
RHS 300x200x8-3m	1472.87	1469.06	0.26%
RHS 350x250x8-3m	1220.81*	1256.61	2.93%
RHS 400x200x8-4.5m	1274.12	1225.62	3.96%
RHS 400x200x10-4.5m	2427.38	2347.99	3.38%
RHS 450x250x10-4.5m	2231.11	2178.09	2.43%
RHS 500x300x12.5-4.5m	4036.61	3778.4	6.83%

***Για 76 βαθμούς ελευθερίας και 60 στοιχεία κατά μήκος**

Πίνακας 4.3.1-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Timoshenko (TBT) για δοκούς διατομής RHS

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Θεωρία Δοκού Timoshenko	
RHS 260x180x6.3-3m	678.69	15789.69	2226.5%
RHS 300x200x6.3-3m	747.81	21718.71	2804.31%
RHS 300x200x8-3m	1472.87	27109.78	1840.61%
RHS 350x250x8-3m	1220.81	45795.09	3651.21%
RHS 400x200x8-4.5m	1274.12	22000.15	1626.69%
RHS 400x200x10-4.5m	2427.38	22077.07	809.5%
RHS 450x250x10-4.5m	2231.11	37200.68	1567.36%
RHS 500x300x12.5-4.5m	4036.61	69563.99	2292.21%

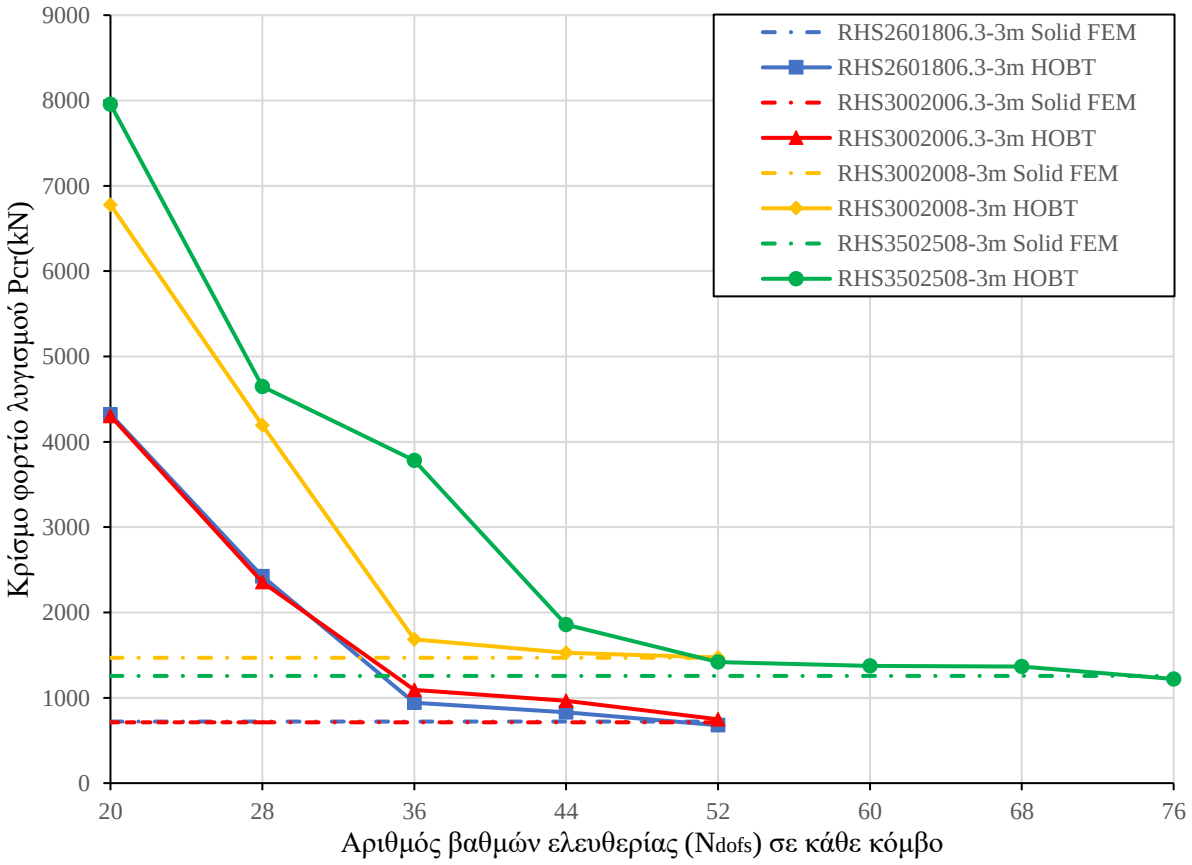
Πίνακας 4.3.1-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίο λυγισμού όπως προέκυψε από την εφαρμογή της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και της θεωρίας Euler-Bernoulli (EBBT) για δοκούς διατομής RHS

Διατομή-Μήκος Δοκού (m)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού (kN)		Απόκλιση
	HOBT(N_{dofs}=52)	Θεωρία Δοκού Euler-Bernoulli	
RHS 260x180x6.3-3m	678.69	19293.73	2742.79%
RHS 300x200x6.3-3m	747.81	27861.58	3625.76%
RHS 300x200x8-3m	1472.87	34610.74	2249.88%
RHS 350x250x8-3m	1220.81	63824.14	5128.02%
RHS 400x200x8-4.5m	1274.12	26921.03	2012.91%
RHS 400x200x10-4.5m	2427.38	25945.37	968.86%
RHS 450x250x10-4.5m	2231.11	46165.52	1969.17%
RHS 500x300x12.5-4.5m	4036.61	90998.63	2154.33%

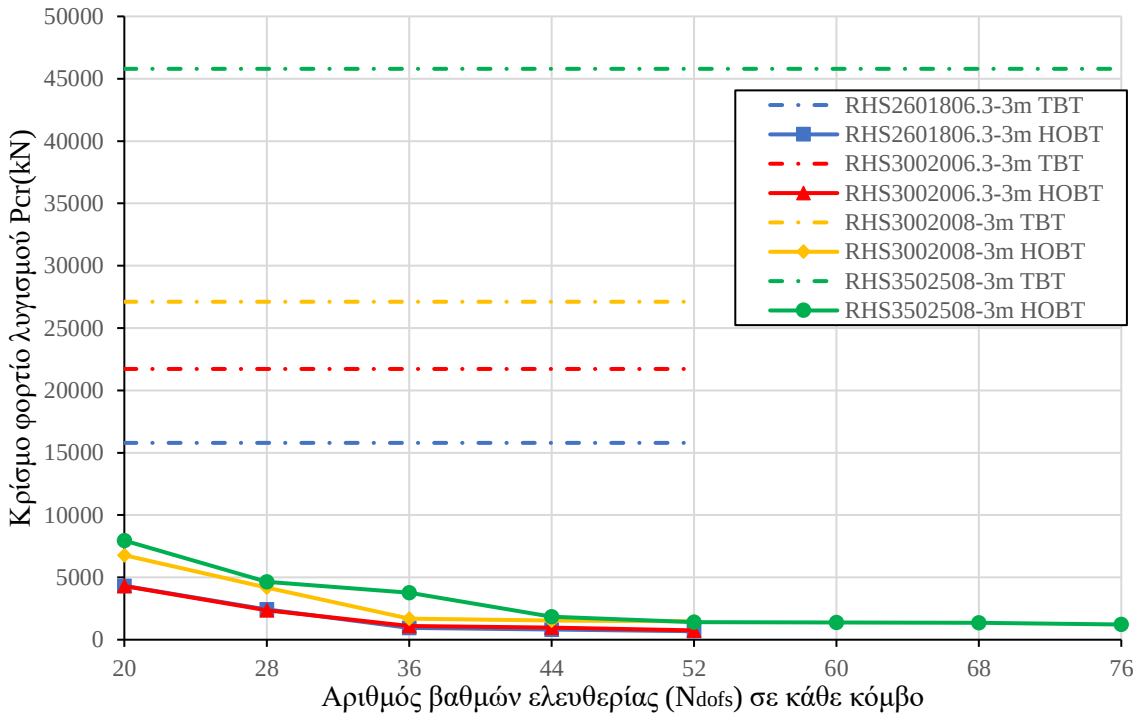
Πίνακας 4.3.1-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

RHS 260x180x6.3-3m / Solid FEM Pcr=721.74kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	4321.84	2422.65	943.55	828.91	678.69
Απόκλιση		498.81%	235.67%	30.73%	14.85%	6.34%
RHS 300x200x6.3-3m / Solid FEM Pcr=712.91kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	4304.27	2357.14	1091.56	964.38	747.81
Απόκλιση		503.76%	230.64%	53.11%	35.27%	4.90%
RHS 300x200x8-3m / Solid FEM Pcr=1469.06kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	6779.47	4193.33	1684.68	1528.98	1472.87
Απόκλιση		361.48%	185.44%	14.68%	4.08%	0.26%

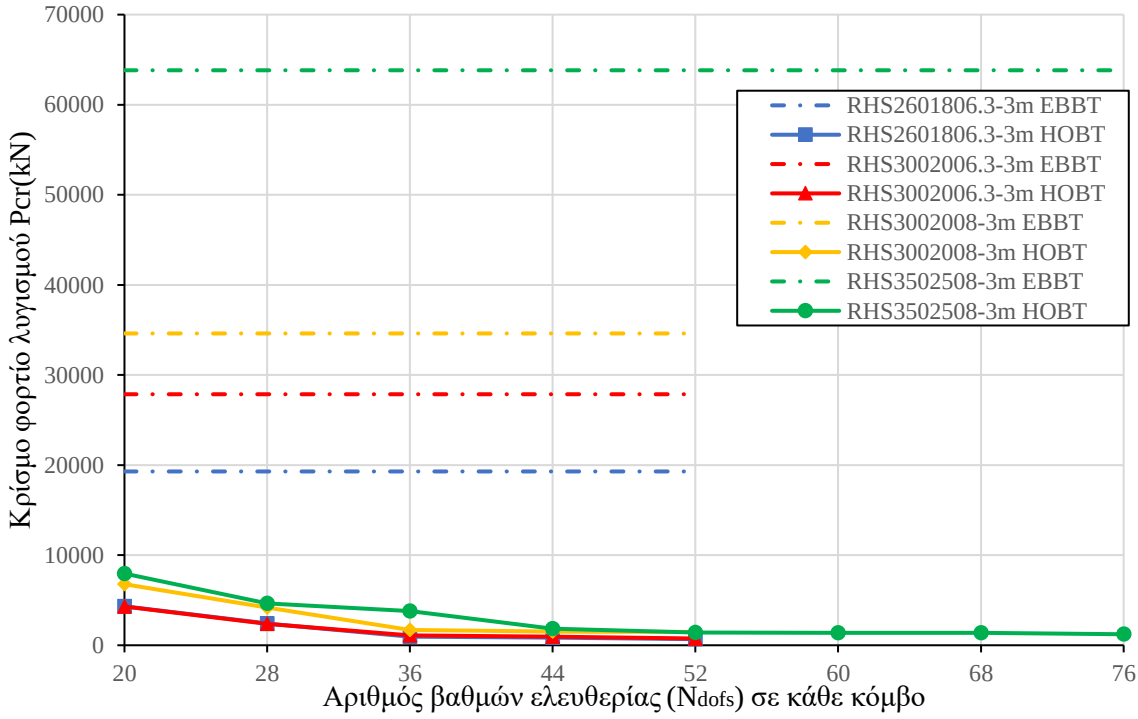
RHS 350x250x8-3m / Solid FEM Pcr=1256.61kN									
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52	60	68	76
	Pcr(kN)	7956.22	4648.68	3780.01	1855.9	1419.24	1375.22	1365.53	1220.81
Απόκλιση		533.2%	269.9%	200.8%	47.69%	12.94%	9.44%	8.67%	2.93%



Σχήμα 4.3.1-2: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακας 4.3.1-6



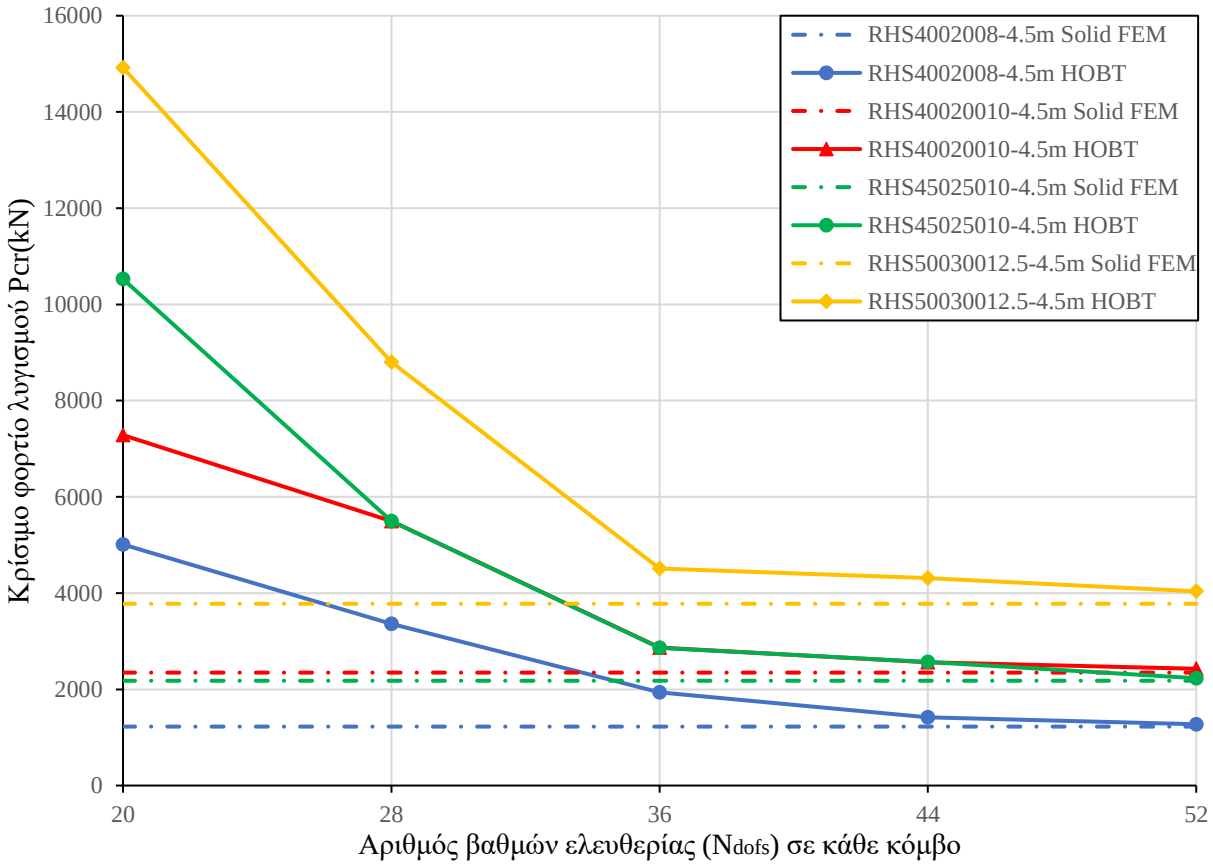
Σχήμα 4.3.1-3: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)



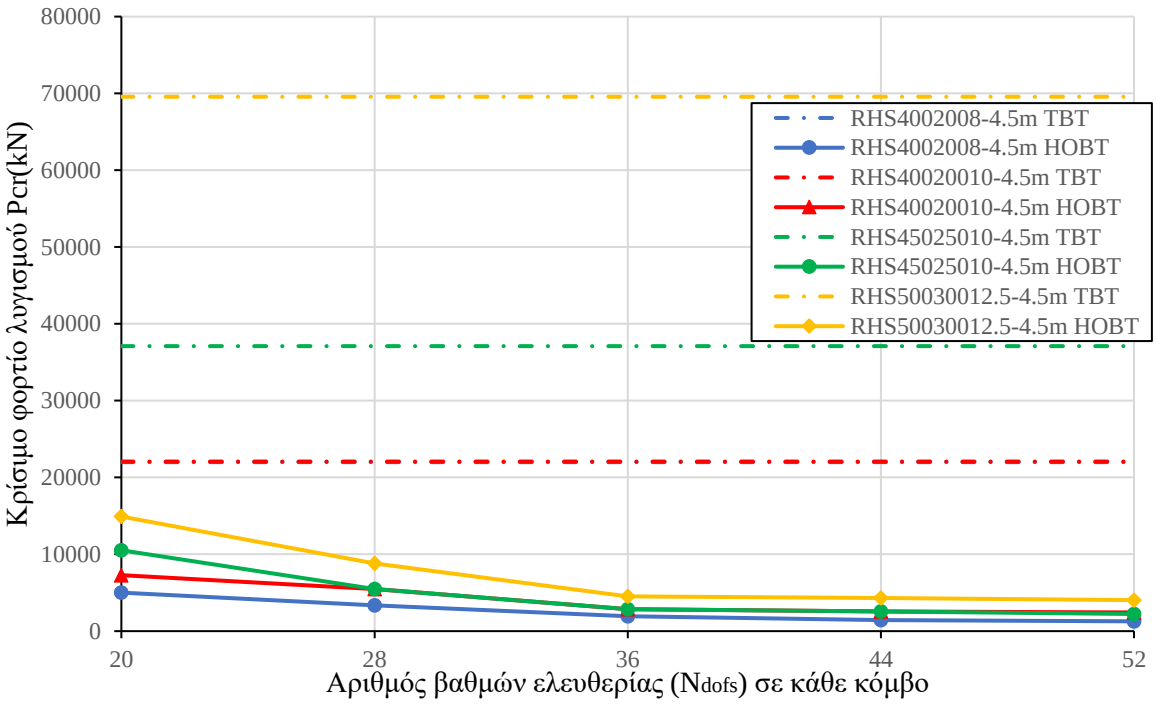
Σχήμα 4.3.1-4: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των τεσσάρων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Euler-Bernoulli (EBBT)

Πίνακας 4.3.1-7: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr των Solid FEM

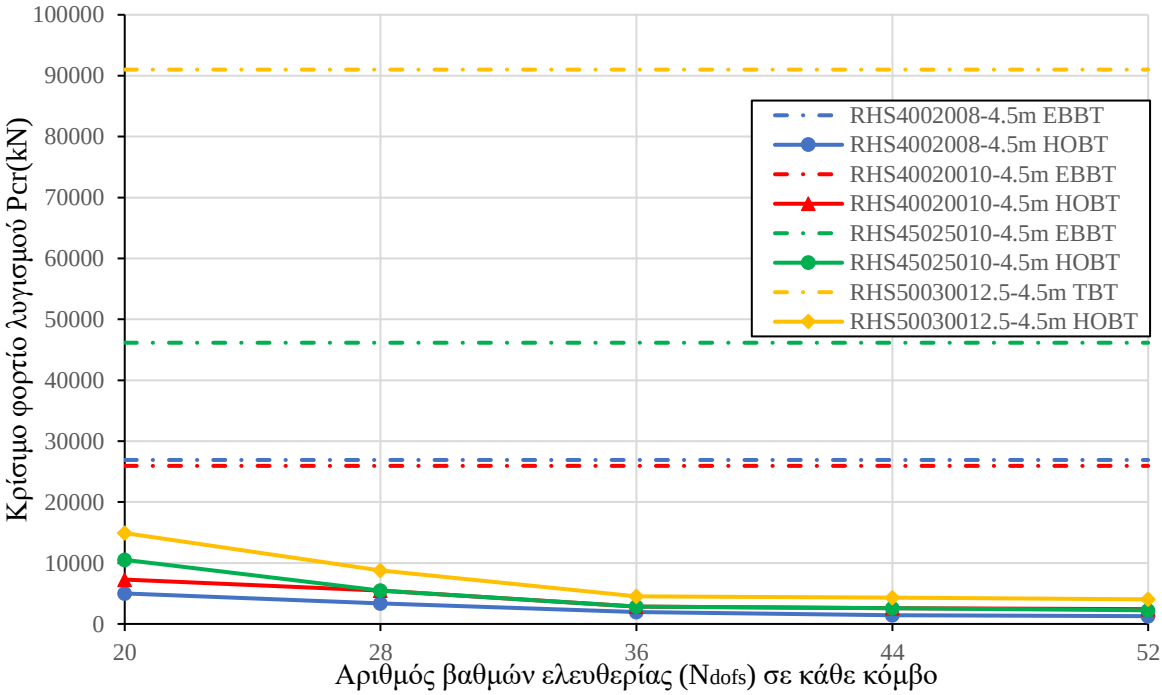
RHS 400x200x8-4.5m / Solid FEM Pcr=1225.62kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	5010.41	3361.22	1939.52	1420.72	1274.12
Απόκλιση		308.81%	174.25%	58.25%	15.92%	3.96%
RHS 400x200x10-4.5m / Solid FEM Pcr=2347.99kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	7283.87	5494.67	2868.97	2564.69	2427.38
Απόκλιση		210.22%	134.02%	22.19%	9.23%	3.38%
RHS 450x250x10-4.5m / Solid FEM Pcr=2178.09kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr	10526.69	5492.38	2862.6	2571.31	2231.11
Απόκλιση		383.3%	152.16%	31.43%	18.05%	2.43%
RHS 500x300x12.5-4.5m / Solid FEM Pcr=3778.4kN						
HOBT	**Ndofs**	20	28	36	44	52
	Pcr (kN)	14918.49	8801.37	4508.07	4308.97	4036.61
Απόκλιση		294.84%	132.94%	19.31%	14.04%	6.83%



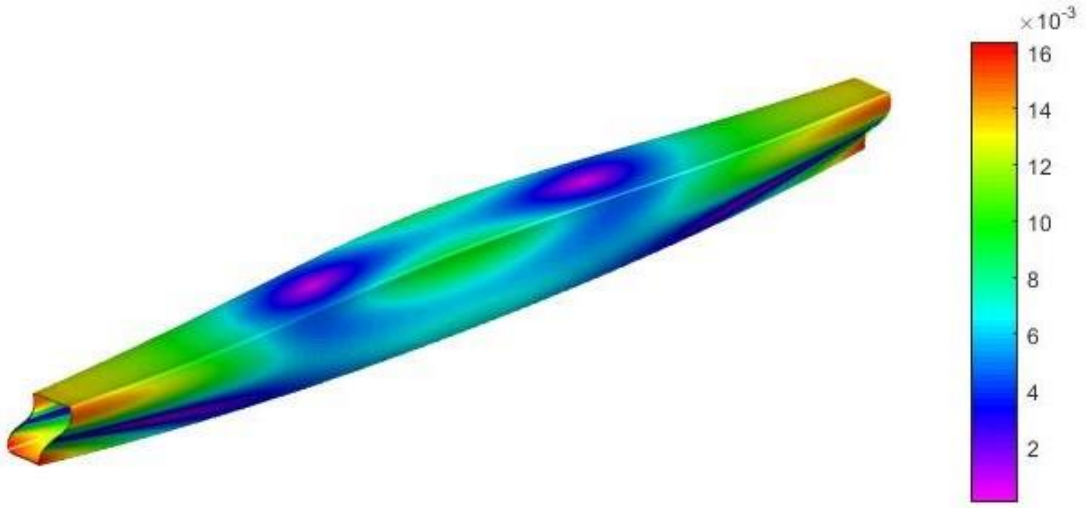
Σχήμα 4.3.1-5: Διαγραμματική απεικόνιση του Πίνακας 4.3.1-7



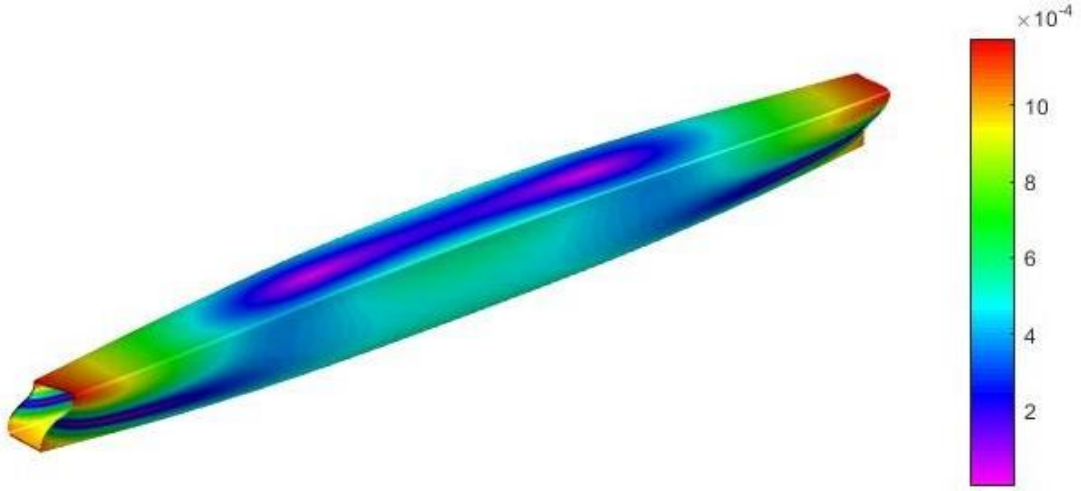
Σχήμα 4.3.1-6: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμύς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Timoshenko (TBT)



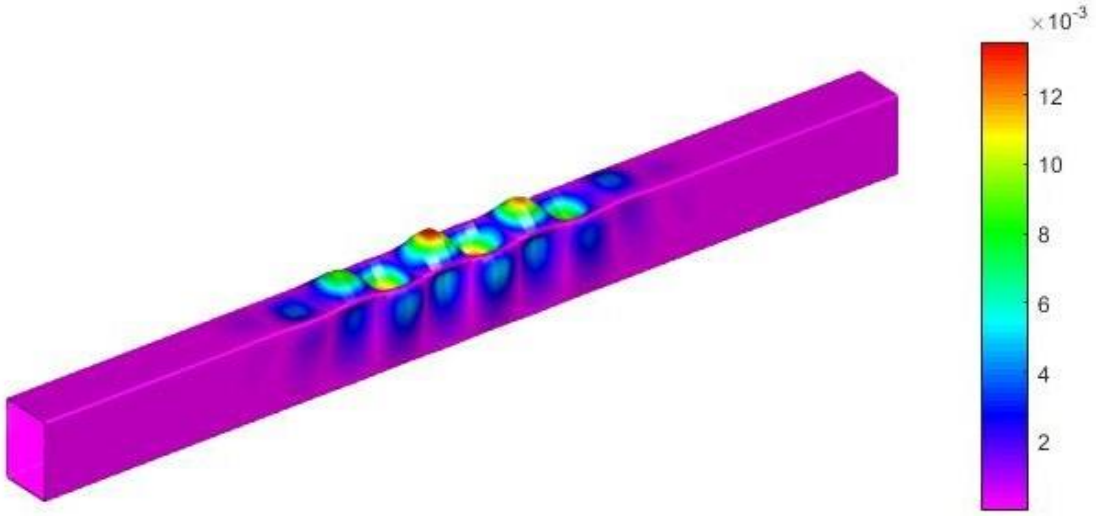
Σχήμα 4.3.1-7: Κρίσιμα φορτία λυγισμού Pcr των υπολοίπων δοκών διατομής RHS όπως προέκυψαν από την χρήση της HOBT για τους διάφορους βαθμούς ελευθερίας Ndofs και σύγκρισή τους με τα Pcr της θεωρίας Euler-Bernoulli (EBBT)



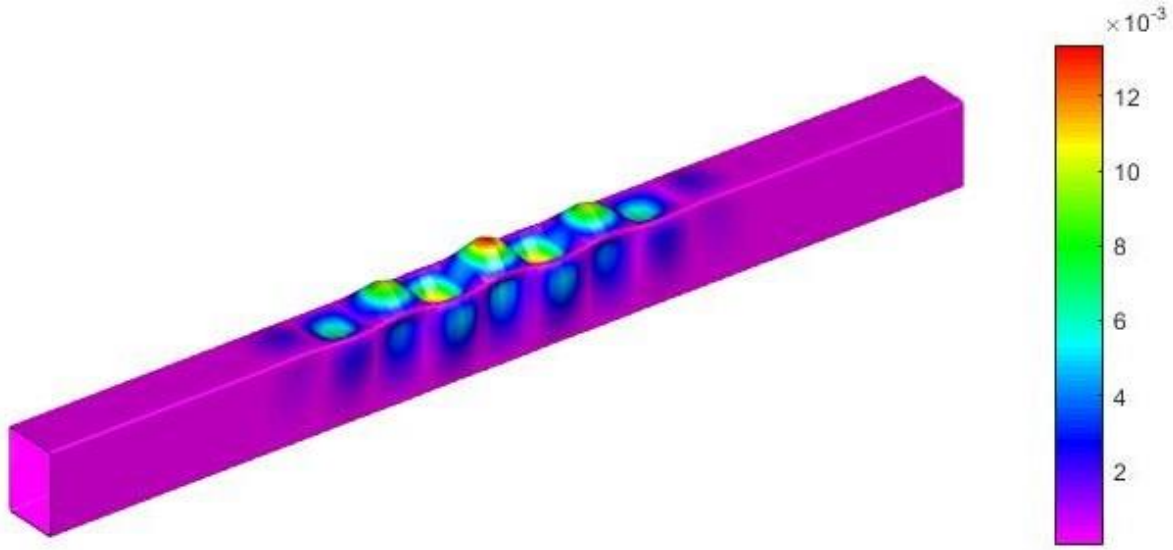
(α)



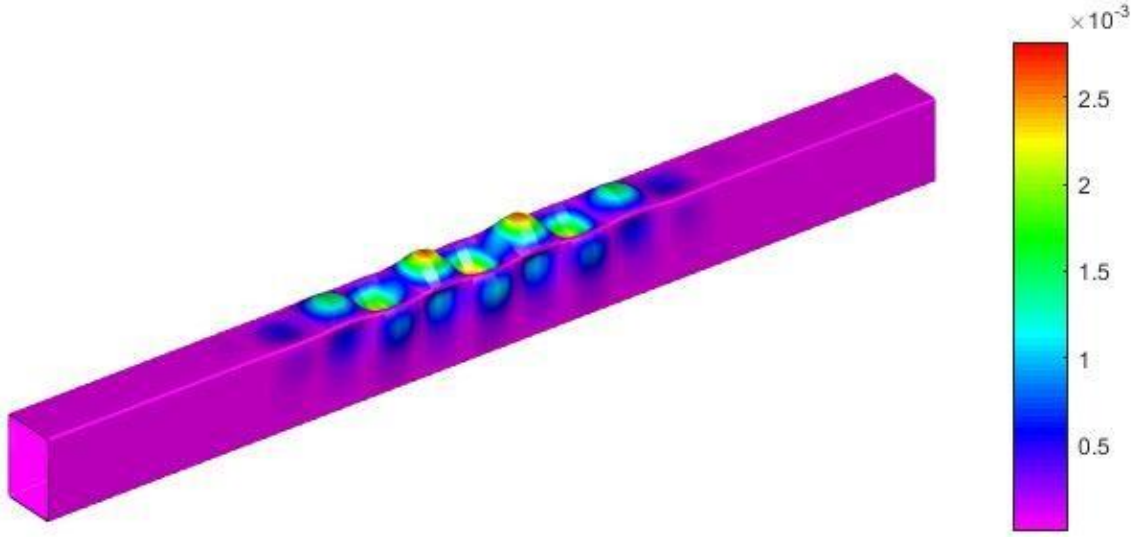
(β)



(γ)

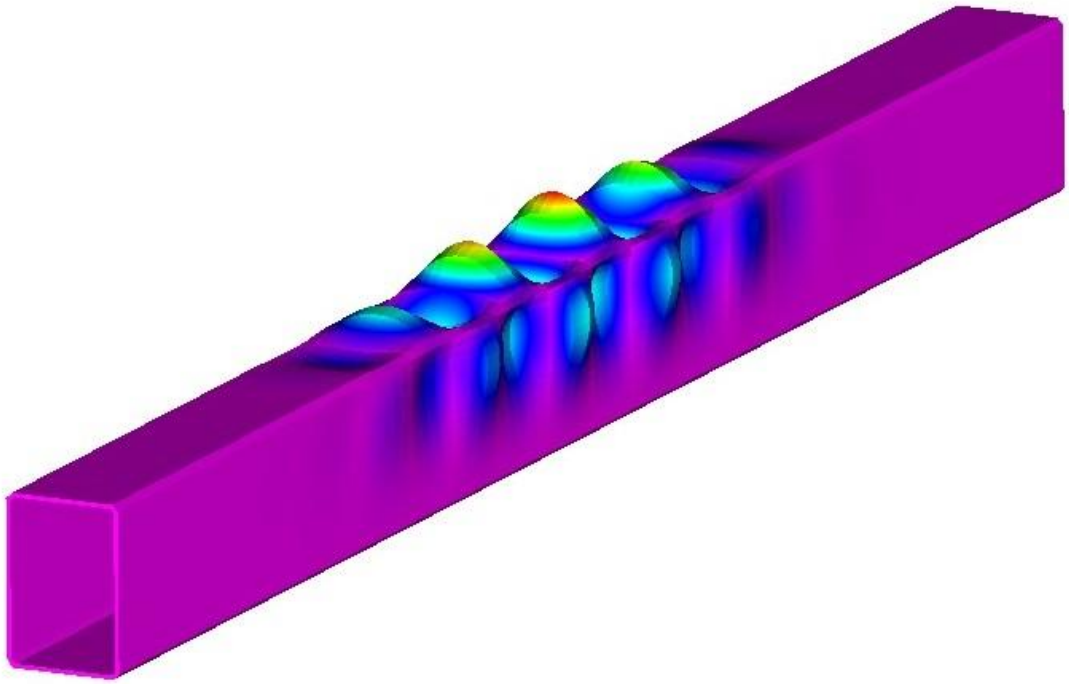


(δ)

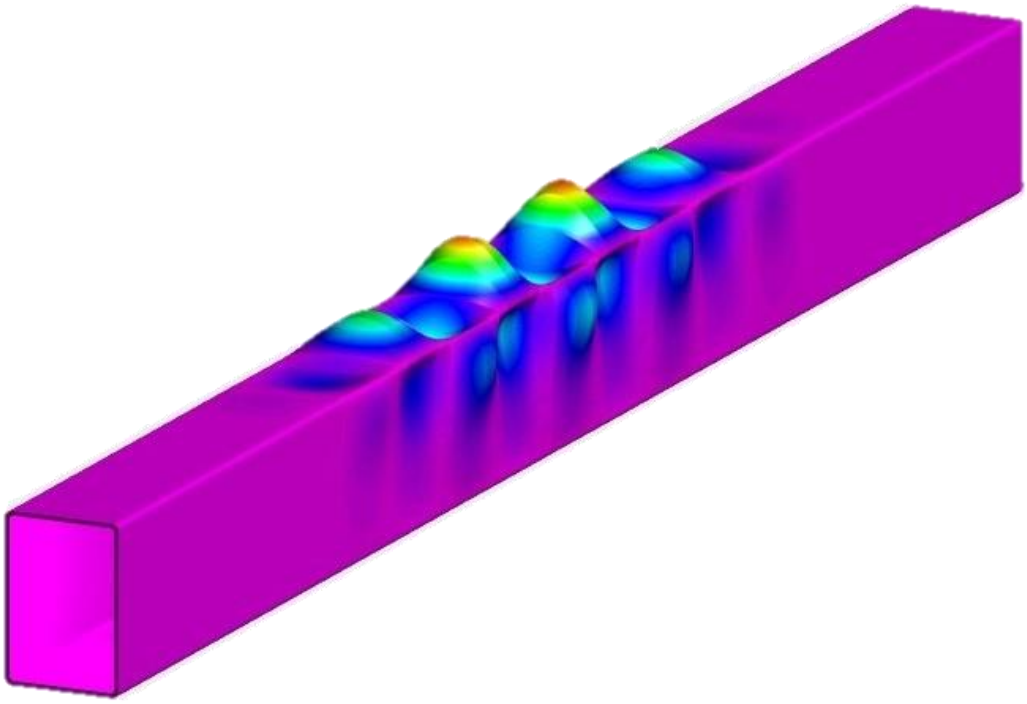


(ε)

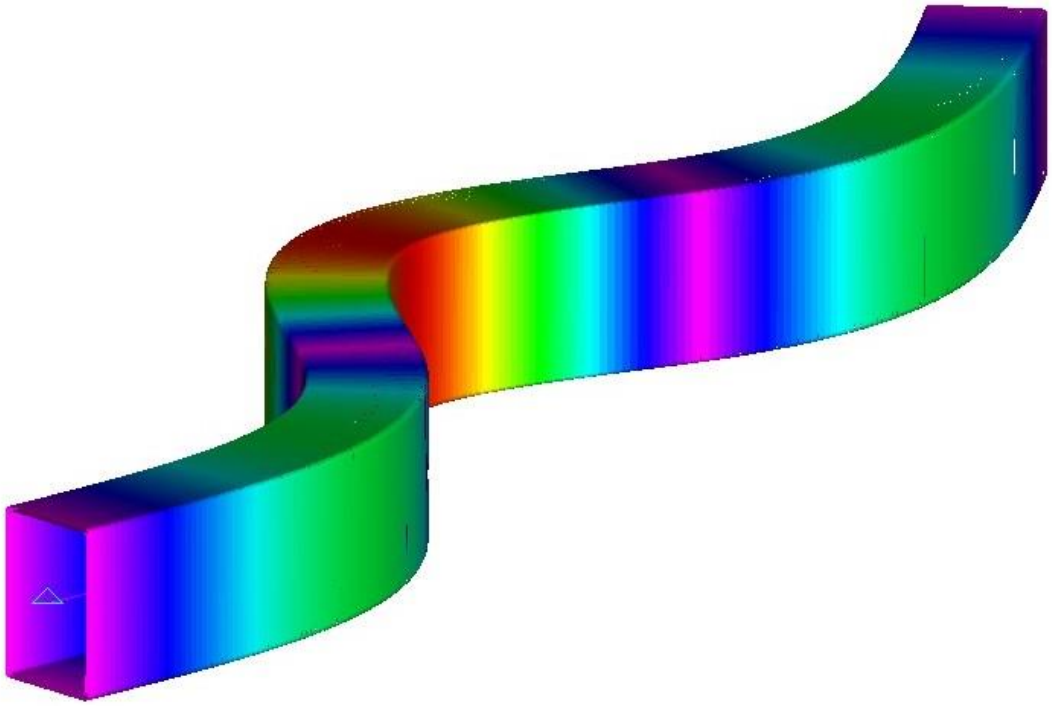
Σχήμα 4.3.1-8: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο, 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε)



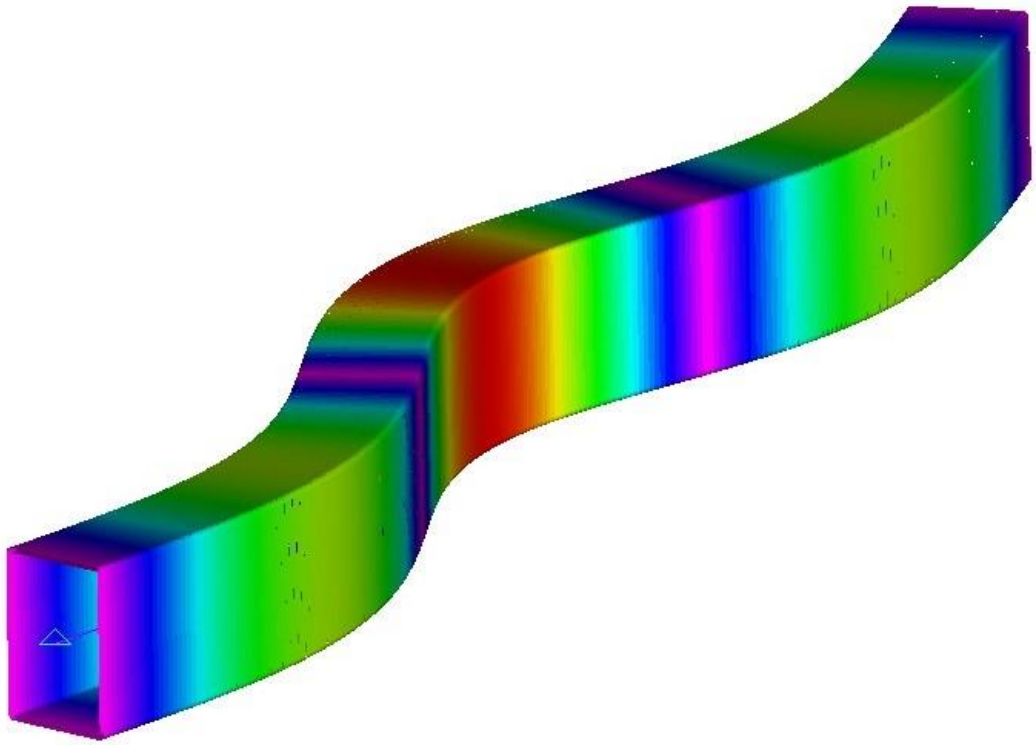
Σχήμα 4.3.1-9: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m όπως αυτή προκύπτει μέσω της ανάλυσης με τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία



Σχήμα 4.3.1-10: Παραμαρφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m όπως αυτή προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για 52 β.ε. ανά κόμβο



Σχήμα 4.3.1-11: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko



Σχήμα 4.3.1-12: Παραμορφωμένη εικόνα δοκού διατομής RHS260x180x6.3 μήκους 3m όπως αύτη προκύπτει με χρήση της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli

Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 6

- Όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελυθερίας το φορτίο λυγισμού συγκλίνει προς προς κάποια συγκεκριμένη τιμή
- Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας (52 β.ε. ανά κόμβο) το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης συγκλίνει ικανοποιητικά με αυτό που υπολογίζεται μέσω της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο για τη δοκό διατομής RHS350x250x8 χρειάσθηκε ανάλυση για παραπάνω βαθμούς ελευθερίας (μέχρι 76 β.ε. ανά κόμβο) για την επίτευξη απόλισης μικρότερης από 10%.
- Η μορφή της παραμόρφωσης που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης αναπαριστά με μεγάλη ακρίβεια τις παραμορφώσεις που οφείλονται σε τοπικά φαινόμενα και ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.
- Κυρίαρχο ρόλο στη μορφή της παραμόρφωσης των στοιχείων έχει το φαινόμενο της διαστρέβλωσης. Κατ’επέκταση, οι κλασσικές θεωρίες δοκού Timoshenko & Euler-Bernoulli, στις οποίες υπάρχει η παραδοχή περί διατήρησης της επιπεδότητας της διατομής, αδυνατούν να προσεγγίσουν την τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και την μορφή παραμόρφωσης της δοκού.
- Για την ανάλυση της δοκού RHS350x250x8 μήκους 3m με χρήση της θεωρίας ανώτερης τάξης χρειάσθηκε και σε αυτήν την αριθμητική εφαρμογή να μειωθούν τα διαμήκη στοιχεία για τους 60, 68, 76 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο για την αποφυγή των ill conditioned μητρώων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας επιλύεται μια σειρά αριθμητικών εφαρμογών με χρήση εξελιγμένων θεωριών δοκού. Τα κύρια συμπεράσματα που προέκυψαν από τις παραπάνω αναλύσεις είναι τα εξής:

i. Τα τοπικά φαινόμενα έχουν σημαντική επίδραση τόσο στη μορφή της παραμόρφωσης όσο και στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της διατομής. Αυτό επιβεβαιώνεται τόσο από τις αναλύσεις με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, όσο και από τις αναλύσεις με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Για αυτό το λόγο φαινόμενα όπως η διαστρέβλωση θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στους κατασκευαστικούς κανονισμούς για το σχεδιασμό τεχνικών έργων.

ii. Οι αναπτυχθείσες θεωρίες δοκού ανώτερης τάξης είναι κατάλληλες για την αυτοματοποιημένη ανάλυση ραβδωτών μελών σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων όσον αφορά το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και τις εικόνες παραμόρφωσης των μοντέλων που εξετάσθηκαν είναι αξιοσημείωτη, όπως προκύπτει μέσω συγκρίσεων με λεπτομερέστερα προσομοιώματα τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

iii. Λόγω των παραδοχών τους, οι κλασσικές θεωρίες δοκού Timoshenko και Euler-Bernoulli δεν επιτρέπουν την ακριβή περιγραφή της συμπεριφοράς λεπτότοιχων στοιχείων τα οποία υπόκεινται σε λυγισμό. Ως συνέπεια, τα αποτελέσματα που εξάγονται από τις αναλύσεις μέσω αυτών των θεωριών έχουν μεγάλη απόκλιση από εκείνα που προκύπτουν μέσω των αναλύσεων με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

iv. Η απουσία διαφραγμάτων ενδέχεται να οδηγεί σε σημαντικά τροποποιημένη συμπεριφορά στα στοιχεία δοκού, λόγω της παραμόρφωσης της διατομής. Η διαφορετική αυτή συμπεριφορά δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη στις κλασσικές θεωρίες δοκού.

Τέλος προτείνονται κάποιες πιθανές κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας με ιδιαίτερο επιστημονικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Πιο συγκεκριμένα προτείνεται:

i. Εφαρμογή των θεωριών ανώτερης τάξης για τον έλεγχο τοπικού μη γραμμικού λυγισμού δοκών
ii. Επέκταση της ανάλυσης ούτως ώστε να μελετηθεί η μη γραμμική συμπεριφορά των υλικών
iii. Επέκταση των θεωριών στην δυναμική ανάλυση
iv. Επέκταση της τεχνικής προσομοίωσης μετάδοσης στρέβλωσης/παραμόρφωσης προκειμένου να περιλαμβάνονται ασυνεχείς συνδέσεις (πχ. μέλη διαφορετικής διατομής, έκκεντρα συνδεδεμένα μέλη, κλπ.)
v. Διερεύνηση της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος της διατομής για την δημιουργία μιας μεθόδου ανάλυσης η οποία δεν θα επηρεάζεται αισθητά από την διακριτοποίηση της διατομής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] E. Reissner, Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4 (3), 268 – 278, 1946.

[2] R. Schardt, Lateral Torsional and Distortional Buckling of Channel- and Hat-Sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 31 (2-3), 243-265, 1994b.

[3] I.S. Sohal, W.F. Chen, Local and post-buckling behavior of tubular beam-columns. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 114 (5), 1073–1090, 1988.

[4] D. Henriques, R. Gonçalves, D. Camotim, GBT-based finite element to assess the buckling behaviour of steel-concrete composite beams. *Thin-Walled Structures*, 107, 207–220, 2016.

[5] J. Davies, P. Leach, D. Heinz, Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31 (2-3), 221–241, 1994.

[6] R. Gonçalves, D. Camotim, GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures*, 82 (17–19), 1473–1484, 2004.

[7] P.B. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, On the local and global buckling behaviour of angle, t-section and cruciform thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 48 (10-11), 786–797, 2010

[8] R. Gonçalves, D. Camotim, Elastic buckling of uniformly compressed thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures*, 71, 35–45, 2013.

[9] R. Gonçalves, D. Camotim, Buckling behaviour of thin-walled regular polygonal tubes subjected to bending or torsion. *Thin-Walled Structures*, 73, 185–197, 2013.

[10] C. Basaglia, D. Camotim, R. Goncalves, A. Graca, GBT-based assessment of the buckling behaviour of cold-formed steel purlins restrained by sheeting. *Thin-Walled Structures*, 72, 217–229, 2013.

[11] S. Ádány, B.W. Schafer, Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Derivation. *Thin-Walled Structures*, 44 (5), 563-584, 2006a.

[12] S. Ádány, B.W. Schafer, Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Application and Examples. *Thin-Walled Structures*, 44 (5), 585-600, 2006b.

[13] M. Bradford, R. Johnson, Inelastic buckling of composite bridge girders near internal supports. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2-Research and Theory*, 83, 143–159, 1987.

[14] S.A. Karamanos, J.L. Tassoulas, Tubular members. I: Stability analysis and preliminary results. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 (1), 64–71, 1996.

[15] S.A. Karamanos, J.L. Tassoulas, Tubular members II: local buckling and experimental verification. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 (1), 72–78, 1996.

[16] S.A. Karamanos, Bending instabilities of elastic tubes, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (8), 2059-2085, 2002.

[17] S. Houliara, S.A. Karamanos, Buckling and post-buckling of long pressurised elastic thin-walled tubes under in-plane bending. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 41 (4), 491-511, 2006.

[18] T. Aoki, Y. Migita, Y. Fukumoto, Local buckling strength of closed polygon folded section columns. *J Constr Steel Res*, 20 (4), 259–70, 1991.

[19] W. H. Wittrick, A unified approach to the initial buckling of stiffened panels in compression. *Aeronautical Quarterly*, 19 (3), 265-283, 1968.

[20] C.E. Kurt, R.C. Johnson, Cross sectional imperfections and columns stability. *Journal of the Structural Division*, 104 (12), 1869-1883, 1978.

[21] N. Koseko, T. Aoki, Y. Fukumoto, The local buckling strength of the octagonal section steel columns. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, 330, 27-36, 1983.

[22] E.J. Sapountzakis, J.A. Dourakopoulos, Flexural – Torsional Buckling Analysis of Composite Beams by BEM Including Shear Deformation Effect. *Mechanics Research Communications*, 35 (8), 497-516, 2008.

[23] I.C. Dikaros, E.J. Sapountzakis, Distortional Analysis of Beams of Arbitrary Cross Section by BEM. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 143 (10): 04017118, DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001340, 2017.

[24] Z.P. Bažant, L. Cedolin, Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, 2010.

[25] J.T. Katsikadelis, Boundary Elements. Theory and Applications. *Symeon Publications*, Athens, 1999.

[26] W. Weaver, P.R. Johnston, Finite Elements for Structural Analysis, *Prentice Hall*, New Jersey, 1984.

[27] J.T. Katsikadelis, The Analog Equation Method. A Boundary – only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies. *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38, 2002.

[28] G. Beer, I. Smith, C. Duenser, The boundary element method with programming — For engineers and scientists. *Springer*, New York, 2008.

[29] Ansys Mechanical APDL Release 15.0 UP20131014.

[30] MSC/NASTRAN for Windows, Finite Element Modelling and Post Processing System, Help System Index, Version 4.0, USA, 1999.

[31] A. K. Agyridi, E. J. Sapountzakis, E. I. Tsalamegka, Higher order beam theory in local buckling analysis of beams – Application in standard steel profiles, *Proceedings of the Eighth International Conference of Thin-Walled Structures, Lisbon, Portugal, 2018*