ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Τετραγωνικές Μορφές

και

Εφαρμογές τους

Κωνσταντίνος Ν. Μπραζιτίκος

Τριμελής επιτροπή: Δ. Κοντοκώστας (Επιβλέπων καθηγητής)

Π. Ψαρράκος

Γ. Σμυρλής

Α. Φελλούρης (Επιβλέπων έως τη συνταξιοδότησή του)

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Τετραγωνικές Μορφές
και
Εφαρμογές τους

Κωνσταντίνος Ν. Μπραζιτίκος

Επιβλέπων:
Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)
Επιβλέπων έως τη συνταξιοδότησή του:
Φελλούρης Ανάργυρος (Καθηγητής)

Τριμελής επιτροπή:
Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)
Ψαρράκος Παναγιώτης (Καθηγητής)
Σμυρλής Γεώργιος (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

Περιεχόμενα

1 Περίληψη **5**

2 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ 7
2.1 Βασικοί Ορισμοί 7
2.2 Διαγωνοποίηση πίνακα 12
2.3 Διγραμμικές μορφές 15

3 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ **19**
3.1 Εισαγωγή 19
3.2 Ταξινόμηση τετραγωνικών μορφών 21
3.3 Ταξινόμηση ως προς ισοτιμία 25
3.4 Ορθογώνια ισοτιμία 28
3.5 Θετικά Ορισμένες Τετραγωνικές Μορφές 31

4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **37**
4.1 Κοινή Διαγωνοποίηση 37
4.2 Ταξινόμηση καμπύλων $2^{ου}$ βαθμού 40
4.3 Ταξινόμηση επιφανειών $2^{ου}$ βαθμού 46

5 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ **51**
5.1 Εισαγωγή 51
5.2 Ισοδυναμία 53
5.3 Διακρίνουσα 54

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους βοήθησαν και συνέβαλαν στην πραγματοποίηση αυτής της διπλωματικής εργασίας. Κατ΄ αρχάς, τον κύριο Α. Φελλούρη, ο οποίος με βοήθησε με την επιλογή του θέματος και την ουσιαστική επίβλεψή του, καθώς και με τα στενά περιθώρια των αιτήσεων για το εξωτερικό, διαβεβαιώνοντάς με εξαρχής ότι θα προλαβαίναμε τις διορίες.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Δ. Κοντοκώστα για την ανάληψη της επίβλεψης της διπλωματικής, μετά τη συνταξιοδότηση του κ. Φελλούρη. Η σχολαστική και ένθερμη ενασχόλησή του, οι καίριες παρατηρήσεις και διορθώσεις του έπαιξαν καταλυτικό ρόλο στην τήρηση ενός αυστηρού προγράμματος συγγραφής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμότατα την οικογένειά μου, όλους όσους περιλαμβάνει αυτή η λέξη, για τη συνεχή στήριξη και ενθάρρυνση που μου προσφέρουν και την πίστη που έχουν σε εμένα.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Κλεοπάτρα Αποστολοπούλου για τη φιλολογική επιμέλεια και τη συνολική βοήθεια με την εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα και ξεχωριστά τον αδερφό μου, Σιλουανό Μπραζιτίκο, για όλη τη βοήθεια που μου έχει προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια, διότι, πάρα τις τόσες υποχρεώσεις του, καταφέρνει πάντα και παρέχει λύσεις στα προβλήματά μου.

Κεφάλαιο 1

Περίληψη

Μέσω της συνεχούς ανάπτυξης των Μαθηματικών, καθώς και άλλων θετικών επιστημών, συχνά προκύπτει η ανάγκη για τη διευκόλυνση και την τυποποίηση των πιο συχνά εμφανιζόμενων εννοιών. Είναι εμφανές, λοιπόν, ότι η μελέτη τέτοιων εννοιών ενδείκνυται και είναι δόκιμη.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τις *τετραγωνικές μορφές*. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι είναι ανάμεσα στα βασικότερα και πιο σημαντικά αντικείμενα των μαθηματικών. Λόγω της χρησιμότητάς τους, καταλαμβάνουν εξέχοντα και κατά πολύ βοηθητικό ρόλο σε πολλούς τομείς, τόσο των Μαθηματικών ως αφηρημένης επιστήμης, όσο και τόσων άλλων θετικών επιστημών γενικότερα, με εφαρμογές τους σε τομείς όπως η Γεωμετρία, η Θεωρία Αριθμών και η Μηχανολογία.

Αρχικά, σε αυτήν την εργασία, θα δούμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία, κάποιες βασικές έννοιες που είναι αναγκαίες για να έχουμε μία στέρεη θεμελίωση των εννοιών που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Στη συνέχεια, θα κάνουμε μία εισαγωγή στις διγραμμικές απεικονίσεις και τις ιδιότητές τους, καθώς οι τετραγωνικές μορφές αποτελούν υποπερίπτωσή τους.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα εισαχθούμε πλέον στην έννοια των τετραγωνικών μορφών και θα δούμε πώς ταξινομούνται. Στη συνέχεια, θα δούμε πώς δημιουργείται μία κλάση ισοδυναμίας βάσει της ισοτιμίας πινάκων και τετραγωνικών μορφών.

Ο γενικότερος στόχος είναι κάθε φορά να μπορούμε να συνδέσουμε

έναν πίνακα με έναν διαγώνιο πίνακα, ώστε να μπορέσουμε να απλοποιήσουμε κατά πολύ τις σχέσεις που μας ενδιαφέρουν.

Έπειτα, προχωρούμε στο κεφάλαιο των Εφαρμογών, στο οποίο εισαγόμαστε με την κοινή διαγωνοποίηση. Πολύ συχνά σε κεφάλαια Φυσικής ή Μηχανικής εμφανίζεται η ανάγκη της ταυτόχρονης αναγωγής δύο τετραγωνικών μορφών σε διαγώνια μορφή.

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις τετραγωνικές μορφές στη γεωμετρία, για να ταξινομήσουμε καμπύλες και επιφάνειες δευτέρου βαθμού (κωνικές τομές, κωνικές επιφάνειες, επιφάνειες από περιστροφή).

Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο θα δούμε κάποιες από τις εφαρμογές που έχουν οι τετραγωνικές μορφές στη Θεωρία Αριθμών. Αν οι συντελεστές της τετραγωνικής μορφής είναι ακέραιοι προκύπτουν αρκετά ενδιαφέροντα προβλήματα και ιδιότητες, με τα οποία έχουν ασχοληθεί μεγάλοι μαθηματικοί κατά το παρελθόν.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικά Στοιχεία

2.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 2.1.1. *Μία ορθογώνια διάταξη* $m \times n$ *στοιχείων από το σώμα* K *σε* m *οριζόντιες σειρές, που ονομάζονται γραμμές, και* n *κατακόρυφες σειρές, που ονομάζονται στήλες, της μορφής*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

ονομάζεται πίνακας τύπου $m \times n$. *Θα συμβολίζουμε τον παραπάνω πίνακα με* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *ή και* $A = (a_{ij})$. *Ο αριθμός* a_{ij} *που βρίσκεται ταυτόχρονα στην* i*-γραμμή και την* j*-στήλη ονομάζεται* στοιχείο *του πίνακα και οι αριθμοί* m, n *ονομάζονται* διαστάσεις *του πίνακα.*

Ορισμός 2.1.2. *α) Ένας πίνακας* A*, τύπου* $m \times n$ *θα ονομάζεται* τετραγωνικός *αν είναι* $m = n$.

β) Τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ *ενός τετραγωνικού πίνακα* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *θα λέμε ότι ορίζουν την* κύρια διαγώνιο *του πίνακα.*

γ) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *θα ονομάζεται* διαγώνιος *αν όλα τα στοιχεία του που δε βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο είναι μηδέν, δηλαδή αν* $a_{ij} = 0$ *για κάθε* i, j *με* $i \neq j$.

δ) Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *θα ονομάζεται* τριγωνικός άνω (αντίστοιχα, κάτω) *αν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται κάτω (αντίστοιχα, πάνω) από την κύρια διαγώνιο είναι* 0, *δηλαδή αν είναι* $a_{ij} = 0$ *για* $i > j$ *(αντίστοιχα,* $i < j$*).*

Ορισμός 2.1.3. *Αν* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$, $B = (b_{ij}) \in M_{n\times l}(K)$, *ορίζουμε ως γινόμενο* AB *των παραπάνω πινάκων έναν πίνακα* C *τύπου* $m \times l$ *με γενικό στοιχείο*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

για $i = 1, \ldots, m$ *και* $j = 1, \ldots, l$, *που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των στοιχείων της* i*-γραμμής του πίνακα* A *με τα αντίστοιχα στοιχεία της* j*-στήλης του πίνακα* B *και, εν συνεχεία, άθροιση των γινομένων που προκύπτουν.*

Ορισμός 2.1.4. *Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα* A *τύπου* $n \times n$ *υπάρχει τετραγωνικός πίνακας* B *τύπου* $n \times n$ *τέτοιος ώστε:*

$$AB = BA = I_n, \tag{2.1.2}$$

ο πίνακας A *καλείται* αντιστρέψιμος *και ο πίνακας* B *είναι ο αντίστροφος πίνακας του* A. *Συνηθίζουμε να γράφουμε:* $B = A^{-1}$.

Ορισμός 2.1.5. *Έστω* $A = (a_{ij}) \in M_{mxn}$. *Ο πίνακας που προκύπτει από τον* A *με εναλλαγή μεταξύ των στοιχείων των γραμμών και των στηλών του λέγεται* ανάστροφος πίνακας (transpose matrix) *και συμβολίζεται με* A^T. *Ισχύει δηλαδή ότι:*

$$A^T = (a_{ji}) \in M_{mxn}. \tag{2.1.3}$$

Ορισμός 2.1.6. *Ένας τετραγωνικός πίνακας* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *λέγεται* συμμετρικός *αν*

$$A^T = A, \tag{2.1.4}$$

δηλαδή, αν $a_{ij} = a_{ji}$*, για κάθε* $i, j = 1, 2, \ldots, n$*.*

Ορισμός 2.1.7. *Ο τύπος του Leibniz για την* ορίζουσα *ενός* $n \times n$ *πίνακα* A *δίνεται από τον τύπο*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i} \right),$$

όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω από όλες τις μεταθέσεις σ *του συνόλου* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της ορίζουσας είναι

1) $\det(I_n) = 1$, όπου I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας.

2) $\det(A^T) = \det(A)$

3) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$.

4) Για τετραγωνικούς πίνακες A, B ίδιου μεγέθους ισχύει $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

5) $\det(cA) = c^n \det(A)$ για $c \in \mathbb{C}$ και A έναν $n \times n$ πίνακα.

Ορισμός 2.1.8. *Το υποσύνολο της άλγεβρας* $M_n(K)$ *που αποτελείται από όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες αποτελεί μη αβελιανή ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, η οποία συμβολίζεται με* $GL(n,K)$ *και λέγεται γενική γραμμική ομάδα, είναι δηλαδή*

$$GL(n,K) = \{A : A \in M_n(K) | \det A \neq 0\}. \tag{2.1.5}$$

Ορισμός 2.1.9. *α) Λέμε ότι ένας πίνακας* $A \in M_n$ *είναι* όμοιος *με τον πίνακα* $B \in M_n$*, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* P *τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$B = P^{-1}AP. \tag{2.1.6}$$

β) Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in M_{mxn}$ *είναι* ισοδύναμος *με τον πίνακα* $B \in M_{mxn}$*, αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες* $P \in GL(m,K)$ *και* $Q \in GL(n,K)$ *τέτοιοι ώστε να ισχύει*

$$B = P^{-1}AQ. \tag{2.1.7}$$

Παρατήρηση 2.1.10. *Αν θέσουμε* $S = P^{-1}$ *και* $T = Q^{-1}$ *η ισότητα* (2.1.6) *μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή*

$$B = SAS^{-1}, \tag{2.1.8}$$

ενώ η ισότητα (2.1.7) *μπορεί να γραφεί ως*

$$B = SAT^{-1}. \tag{2.1.9}$$

Παρατήρηση 2.1.11. *Μέσω του παραπάνω ορισμού* (2.1.9) *ορίζεται στο σύνολο* $M_n(K)$ *μία διμελής σχέση, την οποία θα ονομάσουμε* σχέση ομοιότητας*, ως εξής:*

$$A \sim B \Leftrightarrow B = P^{-1}AP, P \in GL(n,K), \tag{2.1.10}$$

και είναι ταυτόχρονα:

(i) ***αυτοπαθής:*** $[A = I^{-1}AI \Rightarrow A \sim A]$,

(ii) ***συμμετρική:*** $[A \sim B \Rightarrow B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A = S^{-1}BS \Rightarrow B \sim A]$,

(iii) ***μεταβατική:*** $[A \sim B \ \& \ B \sim C \Rightarrow B = P^{-1}AP \ \& \ C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow A \sim C]$.

Συνεπώς, η σχέση ομοιότητας είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_n(K)$.

Ορισμός 2.1.12. *Στο σύνολο* $M_n(K)$ *ορίζουμε τη* συνάρτηση *ίχνους* $\mathrm{tr} : M_n(K) \to K$

$$\mathrm{tr}\, A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}, \tag{2.1.11}$$

όπου $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. *Ο αριθμός* $\mathrm{tr}\, A$ *ονομάζεται* ίχνος του πίνακα A *και ισχύει ότι όμοιοι πίνακες έχουν ίσα ίχνη.*

Ορισμός 2.1.13. *Το στοιχείο* $\mathbf{x} \in K^n - \{0\}$ *ονομάζεται* ιδιοδιάνυσμα *ή* χαρακτηριστικό διάνυσμα *του πίνακα* $A \in M_n(K)$, *αν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{2.1.12}$$

για κάποιο $\lambda \in K$, *το οποίο τότε ονομάζεται* ιδιοτιμή *ή* χαρακτηριστική τιμή *του πίνακα* A.

Θεώρημα 2.1.14. *Ο αριθμός* $\lambda \in K$ *είναι ιδιοτιμή του πίνακα* $A \in M_n(K)$, *αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωση (ως προς* t*)*

$$\det(tI - A) = 0. \tag{2.1.13}$$

Ορισμός 2.1.15. *Ονομάζουμε την εξίσωση (ως προς* t*)*

$$\det(tI - A) = 0 \tag{2.1.14}$$

χαρακτηριστική εξίσωση *του πίνακα* A *και ονομάζουμε το πολυώνυμο*

$$\chi_A(t) := \det(tI - A) \tag{2.1.15}$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο *του πίνακα* A*.*

2.2 Διαγωνοποίηση πίνακα

Ορισμός 2.2.1. *Λέμε ότι ο τετραγωνικός πίνακας* $A \in M_n(K)$ *είναι* διαγωνοποιήσιμος *αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* $P \in GL(n, K)$ *τέτοιος, ώστε*

$$P^{-1}AP = D, \tag{2.2.1}$$

όπου ο D *είναι διαγώνιος πίνακας.*

Η ύπαρξη n γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων για τον $n \times n$ πίνακα A είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2. *Ο πίνακας* $A \in M_n(K)$ *είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας* A *έχει* n *γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Θεώρημα 2.2.3. *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(K)$ *έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα* K*, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας* P *τύπου* $n \times n$*, τέτοιος ώστε ο πίνακας* $P^{-1}AP$ *να είναι τριγωνικός.*

Θεώρημα 2.2.4. *Ονομάζουμε* συζυγή *ενός πίνακα* $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ *και συμβολίζουμε ως* $\overline{A}$ *τον πίνακα που προκύπτει θεωρώντας τους συζυγείς μιγαδικούς των στοιχείων του πίνακα* A. *Είναι, δηλαδή,*

$$\overline{A} = \overline{(a_{ij})} = (\overline{a_{ij}}).$$

Ορισμός 2.2.5. *Ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *λέγεται* ερμιτιανός, *αν ικανοποιεί την ισότητα*

$$\overline{A}^T = A, \tag{2.2.2}$$

ενώ ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ *λέγεται* συμμετρικός, *αν ισχύει*

$$A^T = A. \tag{2.2.3}$$

Καθώς οι δύο ορισμοί περιγράφουν την ίδια έννοια σε διαφορετικό σώμα, και στις δύο περιπτώσει ο πίνακας A *λέγεται* αυτοσυζυγής *και συμβολίζεται ως* A^*.

Οι αυτοσυζυγείς πίνακες έχουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες οι οποίες μας αφορούν, οπότε τις παραθέτουμε.

Θεώρημα 2.2.6. *α) Οι ιδιοτιμές ενός αυτοσυζυγούς πίνακα είναι πραγματικές.*

β) Δύο ιδιοδιανύσματα αυτοσυζυγούς πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

Ορισμός 2.2.7. *(α) Ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *λέγεται* ορθομοναδιαίος (unitary), *αν ικανοποιεί τις ισότητες* $AA^* = A^*A = I$ *ή ισοδύναμα αν ισχύει ότι*

$$A^* = A^{-1}. \tag{2.2.4}$$

(β) Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ *λέγεται* ορθογώνιος(orthogonal), *αν ικανοποιεί τις ισότητες* $AA^T = A^TA = I$ *ή ισοδύναμα αν ισχύει ότι*

$$A^T = A^{-1}. \tag{2.2.5}$$

Ορισμός 2.2.8. *Ο πίνακας* $A \in M_n(K), K = \mathbb{C}$ *(αντίστοιχα* $\mathbb{R}$*) λέγεται* κανονικός(normal)*, αν ικανοποιεί την ισότητα*

$$AA^* = A^*A \tag{2.2.6}$$

(και αντίστοιχα $AA^T = A^TA$*).*

Ορισμός 2.2.9. *Οι πίνακες* $A, B \in M_n(K), K = \mathbb{C}$ *(αντίστοιχα* $\mathbb{R}$*) λέγονται* ορθομοναδιαία όμοιοι (αντίστοιχα, ορθογώνια όμοιοι)*, αν υπάρχει ορθομοναδιαίος (αντίστοιχα ορθογώνιος) πίνακας* P *τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την ισότητα*

$$B = P^*AP = P^{-1}AP. \tag{2.2.7}$$

Θεώρημα 2.2.10. *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *είναι κανονικός, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας* P *τέτοιος ώστε*

$$P^*AP = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \tag{2.2.8}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A*.*

Θεώρημα 2.2.11. *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *είναι συμμετρικός, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* P *τέτοιος ώστε*

$$P^TAP = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \tag{2.2.9}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα* A*.*

2.3 Διγραμμικές μορφές

Ορισμός 2.3.1. *Έστω* V *διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα* $K = \mathbb{R}$ *ή* $K = \mathbb{C}$. *Ονομάζουμε* διγραμμική μορφή *ή* διγραμμική συνάρτηση *πάνω στο διανυσματικό χώρο* V *μία απεικόνιση της μορφής*

$$f : V \times V \to K,$$

η οποία για κάθε $\lambda, \mu \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, *ικανοποιεί τις συνθήκες:*

α) $f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$,

β) $f(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Ορισμός 2.3.2. *Θεωρούμε τη διγραμμική μορφή* $f : V \times V \to K$, *όπου* V *διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα* K. *Αν*

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

είναι μία βάση του V *και*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n,$$

με $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, *τότε*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση είναι φανερό ότι η διγραμμική μορφή f *ορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστές οι* n^2 *τιμές* $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Ο πίνακας $A := (f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) \in M_n(K)$ *λέγεται* πίνακας της f ως προς τη βάση e. *Μέσω του πίνακα* A *η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}. \tag{2.3.1}$$

Επειδή πολλές φορές είναι αναγκαία η εύρεση κατάλληλης βάσης του χώρου ώστε να απλοποιούνται οι σχέσεις που έχουμε για μία απεικόνιση, προκύπτει η ανάγκη αλλαγής βάσης και για τον αντίστοιχο πίνακα. Έτσι, λοιπόν, έχουμε ότι αν P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από μία βάση

$$\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$$

σε μία βάση

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\},$$

δηλαδή, αν ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\varepsilon} = P^T \boldsymbol{e} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}, \tag{2.3.2}$$

τότε για τον αντίστοιχο πίνακα A της διγραμμικής μορφής $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ θα έχουμε μια αντίστοιχη μετατροπή, όπως προκύπτει με απλή αντικατάσταση.
Έτσι, η διγραμμική μορφή $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ θα γίνει

$$f(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{x}}^T \hat{A} \hat{\mathbf{y}},$$

όπου

$$\hat{A} = P^T A P, \tag{2.3.3}$$

ο πίνακας της f ως προς τη νέα βάση.
Έτσι, οδηγούμαστε στον ορισμό της ακόλουθης σχέσης ισοδυναμίας.

Ορισμός 2.3.3. *Δύο πίνακες* $A, B \in M_n(K)$ *λέγονται* ισότιμοι (congruent) *αν υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* $P \in GL(n, K)$ *τέτοιος, ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$B = P^T A P. \tag{2.3.4}$$

Ορισμός 2.3.4. *Ο* βαθμός $\mathrm{rk}(A)$ *ενός πίνακα* $A \in M_{m\times n}(K)$ *είναι ο αριθμός που εκφράζει το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του πίνακα* A

Παρατήρηση 2.3.5. *Επειδή ο πίνακας* P *είναι αντιστρέψιμος, οι ισότιμοι πίνακες* $A, B \in M_n(K)$ *έχουν τον ίδιο βαθμό. Συνεπώς, οι πίνακες διγραμμικής απεικόνισης ως προς διάφορες βάσεις έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό, δηλαδή ο βαθμός του πίνακα διγραμμικής απεικόνισης είναι ένα αναλλοίωτο μέγεθος ως προς τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Έτσι, ορίζουμε κατά φυσιολογικό τρόπο το ακόλουθο.*

Ορισμός 2.3.6. *Ονομάζουμε* βαθμό *μιας διγραμμικής μορφής* f *πάνω στο διανυσματικό χώρο* V*, συμβολικά* $\mathrm{rk}(f)$*, τον βαθμό του πίνακά της ως προς τυχούσα βάση του* V*.*

Ορισμός 2.3.7. *Η διγραμμική μορφή* $f : V \times V \to K$ *λέγεται* συμμετρική *αν, για κάθε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*, ισχύει*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \tag{2.3.5}$$

Θεώρημα 2.3.8. *Η διγραμμική μορφή* $f : V \times V \to K$ *είναι συμμετρική αν και μόνο αν ο πίνακάς της ως προς μία βάση του διανυσματικού χώρου* V *είναι συμμετρικός.*

Απόδειξη. Έστω $A = (f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)) \in M_n(K)$ ο πίνακας της συμμετρικής διγραμμικής μορφής f ως προς τη βάση $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ του V. Επειδή

$$f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = f(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i),$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, θα ισχύει προφανώς ότι $A = A^T$, δηλαδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός.
Αντίστροφα, έστω μία διγραμμική μορφή f με πίνακα τον συμμετρικό πίνακα A (δηλαδή $A = A^T$) ως προς μία βάση του V. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συμμετρική. Πράγματι, επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύει:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ & \mathbf{x}^T A \mathbf{y} \ = \ (\mathbf{x}^T A \mathbf{y})^T \\ = \ & \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x} \ = \ \mathbf{y}^T A \mathbf{x} \\ = \ & f(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.3.9. *Ας θεωρήσουμε τους πίνακες της f ως προς δύο διαφορετικές βάσεις, έστω ότι ο ένας είναι ο A και ο άλλος ο B. Οι πίνακες A και B είναι ισότιμοι, καθώς υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P, τέτοιος ώστε να ισχύει $B = P^T A P$, ως πίνακας αλλαγής βάσης. Οπότε, θα έχουμε ότι*

$$B^T = (P^T A P)^T = P^T A^T P = P^T A P = B, \tag{2.3.6}$$

άρα ο πίνακας της f ως προς τυχούσα βάση του V είναι συμμετρικός.

Κεφάλαιο 3

Τετραγωνικές Μορφές

3.1 Εισαγωγή

Έχοντας ορίσει όλες τις απαραίτητες έννοιες και αφού παραθέσαμε όλες τις ιδιότητες που χρειαζόμαστε, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην κεντρική έννοια αυτής τις εργασίας.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω* V *διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα* $K = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$ *και* $f : V \times V \to K$, *μία συμμετρική διγραμμική μορφή*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

επί του V. *Τότε η απεικόνιση*

$$Q : V \to V, \ \ \mathbf{x} \to Q(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \tag{3.1.1}$$

λέγεται τετραγωνική μορφή *επί του* V *αντίστοιχη της* f.

Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των τετραγωνικών μορφών.

Θεώρημα 3.1.2. *Αν* $Q : V \to K$ *είναι μία τετραγωνική μορφή επί του διανυσματικού χώρου* V*, αντίστοιχη της συμμετρικής διγραμμικής μορφής* f*, τότε, για κάθε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *και* $\lambda \in K$*, ισχύουν*

α) $Q(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$,

β) $Q(-\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$,

γ) $Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x},\mathbf{y}) + Q(\mathbf{y})$,

δ) $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\Big[Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\Big]$.

Παράδειγμα 3.1.3. *Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^n$ *και την απεικόνιση*

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q(\mathbf{x}),$$

$$Q(\mathbf{x}) := 2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον πίνακα A*, ώστε να ισχύει*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*, οπότε η απεικόνιση* Q *είναι τετραγωνική μορφή επί του* $\mathbb{R}^n$*, αντίστοιχη της συμμετρικής διγραμμικής μορφής που έχει πίνακα τον* A *ως προς την κανονική βάση. Έτσι, για την τετραγωνική μορφή μπορούμε να γράψουμε*

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ &= 2x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2 Ταξινόμηση τετραγωνικών μορφών

Όπως στις συμμετρικές διγραμμικές μορφές, στην περίπτωση αλλαγής βάσης, είδαμε ότι αλλάζει και ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας, πολλαπλασιαζόμενος με τον πίνακα αλλαγής βάσης, στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και στην περίπτωση των τετραγωνικών μορφών.
Δηλαδή, η τετραγωνική μορφή

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

στο διανυσματικό χώρο V, μπορεί να γραφεί, ισοδύναμα, στη μορφή

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \hat{A} \mathbf{x},$$

όπου $\hat{A} = P^T A P$ ο νέος πίνακας της τετραγωνικής μορφής, μετά την αλλαγή βάσης.

Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ σημαντική, καθώς, επιλέγοντας κατάλληλη βάση στο χώρο V, μπορούμε να απλοποιήσουμε εύκολα και άμεσα κάθε τετραγωνική μορφή Q.

Έχουμε δει ότι για κάθε συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει ένας ορθογώνιος $P \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. Επειδή, όμως, ο P είναι ορθογώνιος, έχουμε ότι $P^{-1} = P^T$. Συνεπώς, αν $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ είναι μία τετραγωνική μορφή και $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$,

$$Q(\mathbf{x}) = (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y},$$

και ο $P^T AP$ είναι διαγωνίος, όπως προείπαμε, έστω

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Οπότε

$$y^T (P^T A P) y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή, που θα καλείται *διαγώνια τετραγωνική μορφή*, καθώς αντιστοιχεί σε διαγώνιο πίνακα.
Αφού ο P είναι αντιστρέψιμος, η τελευταία ισχύει για κάθε $y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, οπότε καταλήγουμε στο εξής

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε*

1. *Υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* $P \in M_n(\mathbb{R})$ *τέτοιος ώστε*

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. *Η τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ *με την αλλαγή μεταβλητών* $x = Py$ *είναι η*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Με τους συμβολισμούς του παραπάνω Θεωρήματος έχουμε ότι αν d είναι η διαγώνια τετραγωνική μορφή που προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητών, τότε η d εξαρτάται από τον πίνακα P. Εν τούτοις, θα δούμε ότι οι ποσότητες

$$\mathrm{rk}(d) = |\{\lambda_i | \lambda_i \neq 0\}|$$

και

$$\mathrm{sign}(d) = |\{\lambda_i | \lambda_i > 0\}| - |\{\lambda_i | \lambda_i < 0\}|$$

είναι αναλλοίωτες.

Θεώρημα 3.2.2. *[Sylvester] Θεωρούμε μια τετραγωνική μορφή* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$*, όπου* $\mathbf{x} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *και ο* A *είναι συμμετρικός. Αν*

$$d_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \quad d_2(z) = \mu_1 z_1^2 + \ldots + \mu_n z_n^2$$

είναι δύο διαγώνιες μορφές που αντιστοιχούν στην $Q(\mathbf{x})$*, τότε*

$$\mathrm{rk}(d_1) = \mathrm{rk}(d_2) \quad \textit{και} \quad \mathrm{sign}(d_1) = \mathrm{sign}(d_2).$$

Απόδειξη. Έστω ότι η d_1 προκύπτει από την $Q(\mathbf{x})$ με την αλλαγή μεταβλητών $\mathbf{x} = P_1 \mathbf{y}$ και η d_2 με την αλλαγή μεταβλητών $\mathbf{x} = P_2 \mathbf{z}$. Τότε έχουμε ότι

$$P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} := B$$

και

$$P_2^T A P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} := \Gamma.$$

Έχουμε ότι $\mathrm{rk}(d_1)$ είναι ο βαθμός του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

επομένως

$$\mathrm{rk}(d_1) = \mathrm{rk}(P_1^T A P_1) = \mathrm{rk}(A),$$

αφού ο P_1 είναι αντιστρέψιμος. Όμοια δείχνουμε ότι $\mathrm{rk}(d_2) = \mathrm{rk}(A)$, οπότε $\mathrm{rk}(d_1) = \mathrm{rk}(d_2)$.

Μένει να δείξουμε τώρα το δεύτερο σκέλος, δηλαδή ότι $\mathrm{sign}(d_1) = \mathrm{sign}(d_2)$. Γράφουμε τώρα $r = \mathrm{rk}(d_1) = \mathrm{rk}(d_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_t > 0 > \lambda_{t+1} \geq \ldots \geq \lambda_r,\ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

και

$$\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_s > 0 > \mu_{s+1} \geq \ldots \geq \mu_r,\ \mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = 0$$

και αρκεί να δείξουμε ότι $t = s$. Ας υποθέσουμε ότι $t \neq s$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $t > s$. Θεωρώντας τον αντιστρέψιμο πίνακα $P = P_1^{-1} P_2$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P.$$

Θεωρούμε τους υποχώρους V και W του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ που παράγονται από τα διανύσματα $e_1, \ldots, e_t$ και $Pe_{s+1}, \ldots, Pe_n$, όπου $e_1, \ldots, e_n$ είναι η κανονική

βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Αν $x = a_1e_1 + \ldots + a_te_t \neq 0$, τότε

$$\mathbf{x}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} x = \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_t a_t^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$ για κάθε $x \in V$ με $x \neq 0$. Επίσης ισχύει ότι

$$(Py)^T B(Py) = y^T P^T BPy = y^T \Gamma y$$

συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} < 0$ για κάθε $x \in W$. Αυτό σημαίνει ότι $V \cap W = \{0\}$, άρα

$$t + n - s = \dim V + \dim W = \dim(V + W) \leq n,$$

που δίνει ότι $t \leq s$, άτοπο. Άρα $s = t$. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας λέει, εν συντομία, το παρακάτω. Αν έχουμε μία τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ και $d(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ μια διαγώνια τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στην Q, τότε από το θεώρημα του Sylvester το πλήθος των μη μηδενικών λ_i δεν εξαρτάται από τη d. Πιο συγκεκριμένα, το πλήθος αυτό ισούται με τον βαθμό του πίνακα A. Λόγω αυτής της αντιστοιχίας, το πλήθος αυτό ονομάζεται *βαθμός της τετραγωνικής μορφής* Q και συμβολίζεται με $\mathrm{rk}(Q)$.

Επιπλέον, από το θεώρημα του Sylvester το πλήθος των θετικών λ_i καθώς και το πλήθος των αρνητικών λ_i δεν εξαρτάται από τη d. Επίσης, η διαφορά

$$|\{\lambda_i |\ \lambda_i > 0\}| - |\{\lambda_i |\ \lambda_i < 0\}|$$

ονομάζεται *υπογραφή* της Q και συμβολίζεται με $\mathrm{sign}(Q)$ ή $s(Q)$. Ο ακέραιος $|\{\lambda_i |\ \lambda_i > 0\}|$ ονομάζεται *δείκτης* της Q και συμβολίζεται με $i(Q)$. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτές οι ποσότητες είναι βασικές για να χαρακτηρίσουμε τους πίνακες που είναι ισότιμοι.

Παράδειγμα 3.2.3. *Για να βρούμε τον βαθμό, την υπογραφή και το δείκτη της τετραγωνικής μορφής*

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

του $\mathbb{R}^4$*, αρκεί να βρούμε τα πρόσημα των ιδιοτιμών του πίνακα που αντιστοιχεί στην* Q*. Αυτός είναι ο*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A *είναι οι* $-4, 0, 1, 1$*, άρα* $\mathrm{rk}(Q) = 3$*,* $i(Q) = 2$ *και* $s(Q) = 2 - 1 = 1$*.*

3.3 Ταξινόμηση ως προς ισοτιμία

Επειδή η σχέση της ισοτιμίας είναι αναγκαία στην ταξινόμηση τετραγωνικών μορφών, θυμίζουμε τον ορισμό που είχαμε δώσει στην (2.3.3).

Ορισμός 3.3.1. *Δύο πίνακες* $A, B \in M_n(K)$ *λέγονται* ισότιμοι (congruent) *αν υπάρχει αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας* $P \in GL(n, K)$ *τέτοιος, ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$B = P^T A P. \tag{3.3.1}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση που ορίζεται από την

$$A \sim B \iff P^T A P = B$$

είναι μία σχέση ισοδυναμίας, αφού $A \sim A$ με $P = I_n$. Αν $A \sim B$ τότε και $A = (P^{-1})^T B P^{-1}$, άρα $B \sim A$. Τέλος, αν $A \sim B$ και $B \sim C$ με $B = P^T A P$ και $C = Q^T B Q$ τότε

$$C = Q^T (P^T A P) Q = (PQ)^T A (PQ),$$

αφού $(PQ)^T = Q^T P^T$, οπότε $A \sim C$.

Παρατηρούμε ότι αν έχουμε την τετραγωνική μορφή

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_2^2,$$

αυτή με συμπλήρωση του τετραγώνου γίνεται ισότιμη με διαγώνια καθώς

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 7x_2^2.$$

Θα δούμε το παραπάνω γενικευμένο και διατυπωμένο για πίνακες. Καθώς σε κάθε τετραγωνική μορφή αντιστοιχεί ένας πίνακας, η αντιστοιχία είναι σαφής.

Θεώρημα 3.3.2. *α) Κάθε συμμετρικός πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *είναι ισότιμος με τον πίνακα*

$$\begin{pmatrix} I_i & & \\ & -I_{i-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $i = i(A)$ *είναι ο δείκτης του* A *και* $s = \mathrm{sign}(A)$ *είναι η υπογραφή του* A.

β) Θεωρούμε δύο συμμετρικούς πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. *Τότε οι* A, B *είναι ισότιμοι αν και μόνο αν*

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) \quad \textit{και} \quad \mathrm{sign}(A) = \mathrm{sign}(B).$$

Απόδειξη. Γράφουμε $r = \mathrm{rk}(A)$. Από το θεώρημα (3.2.1) έχουμε ότι υπάρχει πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.2}$$

Μάλιστα, μπορούμε στην (3.3.2) να υποθέσουμε ότι τα λ_i είναι διατεταγμένα ως

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_i > 0 \\ \lambda_{i+1} < 0, \ldots, \lambda_r < 0 \\ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τον διαγώνιο πίνακα B που στα πρώτα i διαγώνια στοιχεία του έχει ως στοιχεία τα $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ με $j = 1, 2, \ldots, i$. Στα διαγώνια στοιχεία $j = i+1, \ldots, r$ έχει ως στοιχεία τα $\frac{1}{\sqrt{-\lambda_j}}$ και στα εναπομείναντα διαγώνια στοιχεία έχει 1.
Τότε

$$\begin{aligned}(PB)^T A(PB) &= B^T(P^T AP)B \\ &= B^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} I_i & & \\ & -I_{i-s} & \\ & & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

οπότε το (α) αποδείχθηκε.

Για το (β), ας υποθέσουμε πρώτα ότι οι A, B είναι ισότιμοι. Τότε από το (α) και οι

$$\begin{pmatrix} I_i(A) & & \\ & -I_{i(A)-s(A)} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} I_i(B) & & \\ & -I_{i(B)-s(B)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ισότιμοι, άρα από το Θεώρημα Sylvester (3.2.2) θα έχουμε ότι $i(A) = i(B)$ και $i(A) - s(A) = i(B) - s(B)$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) \quad \text{και} \quad \mathrm{sign}(A) = \mathrm{sign}(B).$$

Αντίστροφα, αν $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ και $\mathrm{sign}(A) = \mathrm{sign}(B) = s$, από το (α) συμπεραίνουμε ότι οι A και B είναι ισότιμοι.

□

Ως ένα παράδειγμα του παραπάνω Θεωρήματος, έχουμε ότι κάθε 2×2 πραγματικός συμμετρικός πίνακας είναι ισότιμος με *ακριβώς έναν* από τους παρακάτω πίνακες.

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

3.4 Ορθογώνια ισοτιμία

Το επόμενο βήμα είναι να καταλάβουμε πώς συμπεριφέρονται οι συμμετρικοί πίνακες ως προς ορθογώνια ισοτιμία. Θα λέμε ότι δύο $n\times n$ πίνακες S,T είναι *ορθογώνια ισότιμοι* αν

$$T = A^*SA,$$

για έναν ορθογώνιο $n\times n$ πίνακα A. Δηλαδή, αυτή τη φορά εκτός από αντιστρέψιμος ο A έχει την ιδιότητα $A^{-1}=A^*$. Το αντίστοιχο Θεώρημα ταξινόμησης σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστό και ως *Spectral Theorem (Φασματικό θεώρημα).*

Θεώρημα 3.4.1. *(α) Κάθε συμμετρικός πίνακας $S\in M_n(\mathbb{R})$ είναι ορθογώνια ισότιμος με έναν διαγώνιο πίνακα και οι ιδιοτιμές του S είναι πραγματικοί αριθμοί.*

(β) Δύο συμμετρικοί $n\times n$ πίνακες S,T είναι ορθογώνια ισότιμοι αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές τους είναι ίδιες.

Πριν την απόδειξη θα χρειαστούμε τα ακόλουθα εργαλεία.
Ένας συμμετρικός $n\times n$ πίνακας S με στοιχεία s_{ij} επάγει τον ενδομορφισμό S που στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ στο

$$S(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}x_j\right)\in\mathbb{R}^n,$$

που είναι τέτοιος ώστε

$$\langle S(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{v}, S(\boldsymbol{w})\rangle,$$

για $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$.
Επιπλέον παρατηρούμε ότι δύο ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι ορθογώνια. Πράγματι,

$$\langle S(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2\rangle = \lambda_1\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$$

και

$$\langle \boldsymbol{v}_1, S(\boldsymbol{v}_2)\rangle = \lambda_2\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle.$$

Όμως

$$\langle S(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, S(\boldsymbol{v}_2)\rangle,$$

οπότε από τις παραπάνω θα έχουμε ότι $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$. Με άλλα λόγια, οι ιδιόχωροι είναι ορθογώνιοι, άρα ο πίνακας είναι ορθογώνια ισότιμος με έναν διαγώνιο πίνακα και το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές.
Ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε ότι $n = 2$. Μπορούμε από τον S να αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού και να υποθέσουμε ότι έχει τη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος έχει ιδιοτιμές τις $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, επομένως το ζητούμενο ισχύει. Ας δούμε τώρα την απόδειξη στη γενική περίπτωση.

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις για το Θεώρημα. Η πρώτη οφείλεται στον A. L. Cauchy.
Θεωρούμε μία μιγαδική ιδιοτιμή λ του S και έστω $\boldsymbol{v}$ ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα στον $\mathbb{C}^n$. Τότε το $\overline{\boldsymbol{v}}$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή την $\overline{\lambda}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\langle\ ,\ \rangle$ για την επέκταση στο $\mathbb{C}^n$ του βαθμωτού γινομένου ως διγραμμική μορφή. Τότε έχουμε

$$\langle S(\boldsymbol{v}), \overline{\boldsymbol{v}}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{v}}\rangle. \tag{3.4.1}$$

Όμως, από τις ιδιότητες που είδαμε παραπάνω, έχουμε ότι $\langle S(\boldsymbol{\nu}), \overline{\boldsymbol{\nu}} \rangle = \langle \boldsymbol{\nu}, S(\overline{\boldsymbol{\nu}}) \rangle$ και, επιπλέον,

$$\langle \boldsymbol{\nu}, S(\overline{\boldsymbol{\nu}}) \rangle = \langle \boldsymbol{\nu}, \overline{\lambda \boldsymbol{\nu}} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{\nu}, \overline{\boldsymbol{\nu}} \rangle. \tag{3.4.2}$$

Αφού $\boldsymbol{\nu} \neq 0$, έχουμε ότι $\langle \boldsymbol{\nu}, \overline{\boldsymbol{\nu}} \rangle \neq 0$ και άρα από τις (3.4.1) και (3.4.2) έχουμε $\lambda = \overline{\lambda}$.

□

Θα δώσουμε, τώρα, μια δεύτερη απόδειξη που οφείλεται στον J. L. Lagrange. Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P(X) = \det(XI_n - S).$$

Παρατηρούμε ότι από την πολλαπλασιαστική ιδιότητα της ορίζουσας ότι

$$P(X)P(-X) = \det(X^2 I_n - S^2).$$

Αφού ο S είναι συμμετρικός, όλα τα διαγώνια στοιχεία του S^2 είναι άθροισμα τετραγώνων και άρα μη αρνητικοί αριθμοί. Γράφουμε

$$P(X)P(-X) = (-X^2)^n + a_1(-X^2)^{n-1} + a_2(-X^2)^{n-2} + \ldots + a_n. \tag{3.4.3}$$

Από το Caley Hamilton, ο συντελεστής a_1 ισούται με το ίχνος του S^2, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του S, επομένως είναι μη αρνητικός. Γενικά το a_k είναι το άθροισμα των τετραγώνων των κύριων $k \times k$ υποοριζουσών του S και άρα όλοι είναι μη αρνητικοί. Θα δείξουμε ότι, για τον λόγο αυτό, το P δεν μπορεί να έχει μη πραγματική ρίζα.
Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι έχει μία ρίζα της μορφής $a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$, τότε αντικαθιστώντας τον πίνακα S με τον $S - aI_n$, αρκεί να δείξουμε ότι το ib δεν μπορεί να είναι ρίζα. Αντικαθιστώντας στην (3.4.3) έχουμε ότι

$$0 = (b^2)^n + a_1(b^2)^{n-1} + a_2(b^2)^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού ο b^2 και όλοι οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί και όχι όλοι μηδέν.

3.5 Θετικά Ορισμένες Τετραγωνικές Μορφές

Ορισμός 3.5.1. *Έστω η τετραγωνική μορφή*

$$Q : V \to \mathbb{R}, \ \mathbf{x} \to Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A \mathbf{x},$$

όπου V *διανυσματικός χώρος πάνω στο* $\mathbb{R}$ *και* A *ο αντίστοιχος συμμετρικός πίνακας της* Q.

α) Η τετραγωνική μορφή Q *λέγεται* θετικά ορισμένη *ή ο συμμετρικός πίνακας* A *λέγεται* θετικά ορισμένος, *αν ισχύει*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0,$$

για κάθε $\mathbf{x} \in V - \{0\}$, *ενώ αν ισχύει ότι*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0,$$

για κάθε $\mathbf{x} \in V - \{0\}$ *η* Q *λέγεται* θετικά ημιορισμένη *και, αντίστοιχα, ο πίνακας* A *λέγεται* θετικά ημιορισμένος.

β) Η τετραγωνική μορφή Q *λέγεται* αρνητικά ορισμένη *ή ο συμμετρικός πίνακας* A *λέγεται* αρνητικά ορισμένος, *αν ισχύει*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0,$$

για κάθε $\mathbf{x} \in V - \{0\}$, *ενώ αν ισχύει ότι*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0,$$

για κάθε $\mathbf{x} \in V - \{0\}$ *η* Q *λέγεται* αρνητικά ημιορισμένη *και, αντίστοιχα, ο πίνακας* A *λέγεται* αρνητικά ημιορισμένος.

Θεώρημα 3.5.2. *Μία τετραγωνική μορφή* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ *επί του πραγματικού διανυσματικού χώρου* V *είναι θετικά (αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι θετικές (αρνητικές).*

Σε περιπτώσεις όπου η διάσταση του πίνακα είναι σχετικά μεγάλη και ο καθορισμός των ιδιοτιμών του είναι χρονοβόρα διαδικασία, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω η τετραγωνική μορφή* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *επί του πραγματικού διανυσματικού χώρου* V*, όπου* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *ο πίνακάς της. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

α) Η τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x})$ *είναι θετικά ορισμένη αν και μόνο αν* $A_j > 0$*, για κάθε* $j = 1, 2, \ldots, n$ *όπου* A_j *είναι οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα* A*, που ορίζονται ως*

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A).$$

β) Η τετραγωνική μορφή $Q(x)$ *είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν ισχύει* $(-1)^j A_j > 0$*, για κάθε* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη. α) Έστω ότι η τετραγωνική μορφή $Q(x)$ είναι θετικά ορισμένη. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$P^T AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

οπότε θα είναι $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$. Όμως σύμφωνα με το Θεώρημα (..) όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι θετικές, οπότε θα ισχύει $\det(A) > 0$.

Θεωρούμε τώρα τον $r \times r$ υποπίνακα A_r του A που σχηματίζεται από την τομή των r πρώτων γραμμών και στηλών του A. Ο A_r είναι συμμετρικός και μπορεί να θεωρηθεί ως ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής $R : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij} x_i x_j,$$

η οποία προκύπτει από την Q αν θέσουμε $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Επειδή η Q είναι θετικά ορισμένη, έπεται ότι και ο περιορισμός της, δηλαδή η R θα είναι θετικά ορισμένη, οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι $\det(A_r) > 0$ για κάθε $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Αντίστροφα τώρα, θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει ότι $\det(A_r) > 0$ για κάθε $r = 1, 2, \ldots, n-1$, τότε η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη.

Πράγματι, έχουμε ότι $\det(A_1) = a_{11} > 0$, οπότε θεωρώντας το μετασχηματισμό

$$y_1 = \frac{a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n}{a_{11}}$$

$$y_i = x_i,$$

θα έχουμε ότι

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n}\left(a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right)y_iy_j. \tag{3.5.1}$$

Μετά από πράξεις, λαμβάνουμε ότι

$$\det(A_r) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{2r} - \frac{a_{21}a_{1r}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{r2} - \frac{a_{r1}a_{12}}{a_{11}} & \ldots & a_{rr} - \frac{a_{r1}a_{1r}}{a_{rr}} \end{vmatrix}. \tag{3.5.2}$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $\det(A_r) > 0$ για κάθε r, από την (3.5.2) θα έχουμε ότι όλες οι κύριες υποορίζουσες με $n-1$ μεταβλητές είναι θετικές, δηλαδή

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right)y_iy_j = \sum_{i,j=2}^{n}\left(a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\right)y_iy_j > 0. \tag{3.5.3}$$

Από τις σχέσεις (3.5.3) και (3.5.1), με επαγωγή, έπεται ότι και η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη.

β) Ισχύει ότι η $Q(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν η $-Q(x) = \mathbf{x}^T(-A)\mathbf{x}$ είναι θετικά ορισμένη. Από το (α) αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα $(-A)$ είναι όλες θετικές, δηλαδή αν και μόνο αν $(-1)^j A_j > 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Σημείωση. Η συνθήκη $A_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ δεν συνεπάγεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μη αρνητικές. Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

έχει $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$, ενώ οι ιδιοτιμές του είναι οι -1, 0 και 2. Ομοίως για την πρόταση (β) μπορούμε να κατασκευάσουμε ανάλογο αντιπαράδειγμα.

Θεώρημα 3.5.4 (Η αρχή minmax). *Έστω A ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του διατεταγμένες σε φθίνουσα τάξη. Αν $Q(x) = \mathbf{x}^T A x$ είναι η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή τότε για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:*

$$\lambda_k = \max_{\dim V = k} \min_{x \in S_V} q(x) = \min_{\dim W = n-k+1} \max_{x \in S_W} q(x),$$

όπου με S_V και S_W συμβολίζουμε τις μοναδιαίες σφαίρες των υποχώρων V και W του $\mathbb{R}^{n\times 1}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα καθώς η δεύτερη έπεται από την πρώτη αν αυτή εφαρμοστεί για τον πίνακα $-A$.
Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ιδιοδιανυσμάτων του A. Τότε, $Ax_i = \lambda_i x_i$, αφού τα $\lambda_i x$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές.

$$\begin{aligned} Q(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) &= (t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n)^T A(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \\ &= (t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n)^T(t_1\lambda_1x_1 + t_2\lambda_2x_2 + \ldots + t_n\lambda_nx_n) \\ &= \langle t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n, t_1\lambda_1x_1 + t_2\lambda_2x_2 + \ldots + t_n\lambda_nx_n\rangle \\ &= \sum t_it_j\lambda_j\langle x_i, x_j\rangle \\ &= \lambda_1t_1^2 + \ldots + \lambda_nt_n^2, \end{aligned}$$

για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. (Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι τα x_1,...,x_n είναι ορθοκανονική βάση, δηλαδή $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ αν $i \neq j$ και $\langle x_i, x_i \rangle = 1$.)

Θεωρούμε τώρα ένα φυσικό αριθμό k με $1 \leq k \leq n$ και έναν υπόχωρο V διάστασης k. Αν W_k είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, τότε αυτός έχει διάσταση $n-k+1$, οπότε

$$\dim V + \dim W_k = k + (n-k+1) = n+1 > n,$$

οπότε υπάρχει $y \in V \cap W_k$ με $|y| = 1$. Γραάφοντας

$$y = t_k x_k + \ldots + t_n x_n$$

με $t_k^2 + \ldots + t_n^2 = 1$, παίρνουμε ότι

$$Q(y) = \lambda_k t_k^2 + \ldots + \lambda_n t_n^2 \leq \lambda_k (t_k^2 + \ldots + t_n^2) = \lambda_k.$$

Έπεται ότι

$$\min_{x \in S_V} Q(x) \leq Q(y) \leq \lambda_k. \tag{3.5.4}$$

Από την άλλη έχουμε ότι αν V_k είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$, τότε για κάθε $x = t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k$ με $|x| = 1$, έχουμε ότι

$$Q(x) = \lambda_1 t_1^2 + \ldots + \lambda_k t_k^2 \geq \lambda_k (t_1^2 + \ldots + t_k^2) = \lambda_k,$$

οπότε

$$\min_{x \in S_{V_k}} Q(x) \geq \lambda_k \tag{3.5.5}$$

Από τις (3.5.4) και (3.5.5) έχουμε ότι η πρώτη ισότητα ισχύει. □

Σημείωση. Από τη δεύτερη ισότητα για $k = 1$ βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του A είναι η μέγιστη τιμή της $Q(x)$, όταν το x διατρέχει το σύνολο $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές

4.1 Κοινή Διαγωνοποίηση

Η κοινή διαγωνοποίηση πινάκων είναι σημαντική για τις θεωρητικές εφαρμογές, καθώς υπολογίζονται εύκολα οι δυνάμεις και πράξεις μεταξύ των πινάκων που διαγωνοποιούνται από κοινού, όπως επίσης και στις πρακτικές εφαρμογές. Σε πολλούς τομείς μηχανολογικών επιστημών είναι πολύ χρήσιμη, όπως για παράδειγμα, στη μελέτη κραδασμών και στις ταλαντώσεις. Επίσης, εμφανίζεται συχνά στις διαφορικές εξισώσεις, οπότε, όπως είναι λογικό, και σε κάθε εφαρμογή τους.

Ας δούμε πρώτα την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να διαγωνοποιείται κοινά ένα σύνολο πινάκων.

Θεώρημα 4.1.1. *Ένα σύνολο πινάκων θα λέμε ότι* δέχεται κοινή διαγωνοποίηση *αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας* P *έτσι ώστε ο* $P^{-1}AP$ *να είναι διαγώνιος για κάθε πίνακα* A *του συνόλου. Ένα σύνολο διαγωνοποιήσιμων πινάκων δέχεται κοινή διαγωνοποίηση αν και μόνο αν είναι μεταθετικό, δηλαδή για κάθε δύο πίνακες* A, B *του συνόλου ισχύει ότι*

$$AB = BA.$$

Σημειώνουμε ότι το σύνολο όλων των διαγωνοποιήσιμων $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{C}$ δεν δέχεται κοινή διαγωνοποίηση. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμοι, αλλά δεν δέχονται κοινή διαγωνοποίηση, επειδή δεν μετατίθενται.

Στο κομμάτι των τετραγωνικών μορφών, αρκεί να ασχοληθούμε με την κοινή διαγωνοποίηση συμμετρικών πινάκων. Ένα πρώτο θετικό αποτέλεσμα προς την κατεύθυνση αυτή είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω* A, M *δύο συμμετρικοί πίνακες ιδίων διαστάσεων και έστω ότι ο* M *είναι θετικά ορισμένος. Τότε υπάρχει* ιδιάζων(singular)*, δηλαδή μη αντιστρέψιμος πίνακας* C *τέτοιος ώστε*

$$C^T M C = I, \tag{4.1.1}$$

και

$$C^T A C = \Lambda, \tag{4.1.2}$$

όπου Λ *είναι ένας διαγώνιος πίνακας.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$M = R^T R, \tag{4.1.3}$$

για κάποιο αντιστρέψιμο πίνακα R. Τότε ο πίνακας

$$(R^{-1})^T A R^{-1} \tag{4.1.4}$$

είναι συμμετρικός, οπότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας B τέτοιος ώστε

$$B^{-1}(R^{-1})^T A R^{-1} B = \Lambda, \tag{4.1.5}$$

καθώς κάθε συμμετρικός πίνακας με πραγματικές τιμές διαγωνοποιείται από κάποιον ορθογώνιο πίνακα. Θεωρούμε

$$C = R^{-1} B. \tag{4.1.6}$$

Τότε $C^T = B^T(R^{-1})^T = B^{-1}(R^{-1})^T$, όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο B είναι ορθογώνιος. Οπότε καταλήξαμε στο ότι η σχέση (4.1.5) είναι ίδια με την σχέση (4.1.2). Για να αποδείξουμε το πρώτο σκέλος, θα χρησιμοποιήσουμε το ότι ο B είναι ορθογώνιος, άρα $B^T = B^{-1}$ και ότι $(R^{-1})^T = (R^T)^{-1}$ για να καταλήξουμε στο:

$$C^T M C = B^{-1}(R^T)^{-1} R^T R R^{-1} B = I. \tag{4.1.7}$$

Οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε. □

Ορισμός 4.1.3. *Γενικεύοντας τις έννοιες των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοτιμών πίνακα, ορίζουμε το* $\mathbf{x}$ *ως* γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα *ενός πίνακα* A *ως προς έναν πίνακα* B*, με* $A, B \in M_n(K)$ *που αντιστοιχεί στη* γενικευμένη ιδιοτιμή λ *αν ισχύει*

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι τα στοιχεία λ_j του διαγώνιου πίνακα Λ στο παραπάνω θεώρημα είναι γενικευμένες ιδιοτιμές του A ως προς τον M. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$A\mathbf{x} = \lambda M\mathbf{x}, x \neq 0. \tag{4.1.8}$$

Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να καθοριστούν από τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det(A - \lambda M) = 0. \tag{4.1.9}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα και από την απόδειξή του μπορούμε να συμπεράνουμε το παρακάτω:

Πόρισμα 4.1.4. *Έστω* A, M *δύο συμμετρικοί πίνακες ιδίων διαστάσεων και έστω ότι ο* M *είναι θετικά ορισμένος. Τότε όλες οι γενικευμένες ιδιοτιμές* (4.1.8) *του* A *ως προς τον* M *είναι πραγματικές και υπάρχει μία βάση ολόκληρου του χώρου που αποτελείται από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη. Θα αναφερθούμε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. Ο πίνακας $(R^{-1})^T A R^{-1}$ είναι συμμετρικός, συνεπώς όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και τα ιδιοδιανύσματα σχηματίζουν βάση του χώρου. Αυτά τα ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του B. Αν το $\boldsymbol{\nu}_j$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $(R^{-1})^T A R^{-1}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή την λ_j τότε

$$(R^{-1})^T A R^{-1} \boldsymbol{\nu}_j = \lambda_j \boldsymbol{\nu}_j. \tag{4.1.10}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον R^T παίρνουμε

$$A R^{-1} \boldsymbol{\nu}_j = \lambda_j R^T \boldsymbol{\nu}_j, \tag{4.1.11}$$

οπότε θέτοντας $\boldsymbol{\nu}_j = R\mathbf{u}_j$ καταλήγουμε στο

$$A R^{-1} R \mathbf{u}_j = \lambda_j R^T R \mathbf{u}_j \tag{4.1.12}$$

$$A \mathbf{u}_j = \lambda_j \mathbf{u}_j. \tag{4.1.13}$$

Επειδή ο R είναι αντιστρέψιμος, τα $\mathbf{u}_j$ αποτελούν βάση του χώρου. Προφανώς, αυτή η βάση δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι στήλες του C από το θεώρημα (4.1.2). Συνεπώς, η κοινή διαγωνοποίηση δύο πινάκων δεν αποτελεί διαδικασία δυσκολότερη από τη διαγωνοποίηση ενός πίνακα. Και στις δύο περιπτώσεις η μεθοδολογία παραμένει η ίδια: Λύνουμε τη γενικευμένη χαρακτηριστική εξίσωση και βρίσκουμε τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

4.2 Εφαρμογές στη Γεωμετρία - Ταξινόμηση καμπύλων 2ου βαθμού

Θα εξετάσουμε τώρα κάποιες εφαρμογές των τετραγωνικών μορφών στη Γεωμετρία. Με τη χρήση των τετραγωνικών μορφών απλοποιούνται πολλές εξισώσεις αναγκαίες για την ταξινόμηση καμπύλων 2ου βαθμού.

Ας ξεκινήσουμε από τις δύο διαστάσεις, ας θεωρήσουμε, λοιπόν, για παράδειγμα, την πλήρη εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο, καθώς οι συντελεστές $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ κινούνται στο σύνολο $\mathbb{R}$, και, τουλάχιστον ένα από τα a_{11}, a_{12}, a_{22} δεν είναι 0:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \tag{4.2.1}$$

Με τη βοήθεια πινάκων, θέτοντας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \tag{4.2.2}$$

η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται ως εξής:

$$\mathbf{r}^T A\mathbf{r} + 2B\mathbf{r} + c = 0, \tag{4.2.3}$$

με τον πίνακα A να είναι συμμετρικός.

Ορισμός 4.2.1. *Θα ονομάζουμε* αντίστοιχη τετραγωνική μορφή *της δευτεροβάθμιας εξίσωσης την παράσταση*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{4.2.4}$$

καθώς μπορεί να συμβολιστεί με την τετραγωνική μορφή

$$Q(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^T A\mathbf{r} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2. \tag{4.2.5}$$

Για να ταξινομήσουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως κωνική τομή, είναι αναγκαίο, αρχικά, να την απλοποιήσουμε και να την φέρουμε σε μορφή που να μπορούμε να την αναγνωρίσουμε.
Έτσι, σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε τους κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταφοράς και στροφής των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων ώστε οι κύριοι άξονες της καμπύλης να συμπέσουν πλέον με το σύστημα συντεταγμένων.
Ας δούμε αναλυτικότερα τους μετασχηματισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε, την παράλληλη μεταφορά και τη στροφή.
Κατά την παράλληλη μεταφορά θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{r}} + \mathbf{h} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}, \tag{4.2.6}$$

οπότε η αρχή των αξόνων μετακινείται από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο (j,k).
Με απλή αντικατάσταση και απλοποίηση της σχέσης (4.2.3) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\widetilde{\mathbf{r}}^T A\widetilde{\mathbf{r}} + 2(\mathbf{h}^T A + B)\widetilde{\mathbf{r}} + (\mathbf{h}^T A\mathbf{h} + 2B\mathbf{h} + c) = 0, \tag{4.2.7}$$

στην οποία πρέπει να κάνουμε διερεύνηση για το αν μηδενίζεται η παράσταση $\mathbf{h}^T A + B$, για τις διάφορες τιμές του $\mathbf{h}$.

Πρόταση 4.2.2. *Περίπτωση I): Αν το γραμμικό σύστημα* $\mathbf{h}^T A + B = 0$*, δηλαδή αν το*

$$A\mathbf{h} = -B^T$$

έχει λύση ως προς $\mathbf{h}$*. Αυτό σημαίνει ότι για τον βαθμό του πίνακα ισχύει η σχέση*

$$\mathrm{rk}(A|(-B^T)) = \mathrm{rk}(A). \tag{4.2.8}$$

Σε αυτή την περίπτωση, εξαιτίας του μηδενισμού, η σχέση (4.2.7) γίνεται

$$\widetilde{\mathbf{r}}^T A\widetilde{\mathbf{r}} + (\mathbf{h}^T A\mathbf{h} + 2B\mathbf{h} + c) = 0,$$

οπότε, ξανακάνοντας αντικατάσταση την σχέση που υποθέσαμε ότι ισχύει στην *Περίπτωση I*, παίρνουμε

$$\widetilde{\mathbf{r}}^T A\widetilde{\mathbf{r}} + (B\mathbf{h} + c) = 0 \tag{4.2.9}$$

Η παραπάνω παράσταση, ως συνάρτηση $f(\widetilde{\mathbf{r}})$, ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\widetilde{\mathbf{r}}) = f(-\widetilde{\mathbf{r}}),$$

άρα η αρχή $\widetilde{O}(j,k)$ είναι κέντρο συμμετρίας της καμπύλης.

Πρόταση 4.2.3. *Υποπερίπτωση α): Το σύστημα* $A\mathbf{h} = -B^T$ *έχει μοναδική λύση, έστω* $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} j & k \end{bmatrix}^T$*. Για τον βαθμό του πίνακα θα ισχύει*

$$\mathrm{rk}(A|(-B^T)) = \mathrm{rk}(A) = 2 \Leftrightarrow \det A \neq 0. \tag{4.2.10}$$

Αφού η καμπύλη έχει μοναδικό κέντρο συμμετρίας, μένει μόνο να εφαρμόσουμε μία στροφή ώστε να συμπέσουν οι άξονες που θα θεωρήσουμε με τους κύριους άξονες της καμπύλης.
Αυτό μπορούμε να το κάνουμε, καθώς ο πίνακας A είναι συμμετρικός και, επομένως, υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A, έτσι ώστε να είναι

$$\det P = 1, \quad P^T A P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

όπου λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του πίνακα A, με $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, αφού $\det A \neq 0$. Άρα, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$\widetilde{\mathbf{r}} = P\widehat{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{bmatrix},$$

ώστε να πετύχουμε την επιθυμητή στροφή, η τετραγωνική μορφή ανάγεται στην κανονική της μορφή

$$\widehat{\mathbf{r}}^T (P^T A P)\widehat{\mathbf{r}} \;=\; \widehat{\mathbf{r}}^T \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\widehat{\mathbf{r}}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση της καμπύλης γίνεται

$$\lambda_1 \widehat{x}^2 + \lambda_2 \widehat{y}^2 + l_0 = 0, \tag{4.2.11}$$

όπου $l_0 = B\mathbf{h} + c$, την οποία εύκολα μπορούμε να ταξινομήσουμε ως προς το είδος της καμπύλης:

α) Αν $\lambda_1\lambda_2 > 0$ και l_0 ετερόσημος των λ_1, λ_2, η καμπύλη είναι *έλλειψη (κύκλος αν $\lambda_1 = \lambda_2$).*

β) Αν $\lambda_1\lambda_2 < 0$ και $l_0 \neq 0$, η καμπύλη είναι *υπερβολή.*

γ) Αν $\lambda_1\lambda_2 < 0$ και $l_0 = 0$, η καμπύλη είναι *ένα ζεύγος ευθειών.*

Πρόταση 4.2.4. *Υποπερίπτωση β): Το σύστημα $A\mathbf{h} = -B^T$ έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων, έστω $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} j & k \end{bmatrix}^T$. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει για τον βαθμό του πίνακα ότι*

$$\operatorname{rk}(A|(-B^T)) = \operatorname{rk}(A) = 1. \tag{4.2.12}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρώντας μία από τις λύσεις $\mathbf{h}$ του συστήματος και εργαζόμενοι ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, καταλήγουμε σε μία εξίσωση της μορφής

$$\lambda_1\widehat{x}^2 + l_0 = 0, \tag{4.2.13}$$

αφού η δεύτερη ιδιοτιμή λ_2 του πίνακα A ισούται με 0. Έτσι, έχουμε

α) Αν $l_0\lambda_1 < 0$, η καμπύλη είναι *ζεύγος παραλλήλων ευθειών*.

β) Αν $l_0 = 0$, η καμπύλη είναι *δύο συμπίπτουσες ευθείες*.

Συνεχίζουμε, στην ανώτερη Περίπτωση II).

Πρόταση 4.2.5. *Περίπτωση II): Το γραμμικό σύστημα* $\mathbf{h}^T A + B = 0$, *δηλαδή το*

$$A\mathbf{h} = -B^T$$

δεν έχει λύση ως προς $\mathbf{h}$. *Αυτό σημαίνει ότι για τον βαθμό του πίνακα ισχύει η σχέση*

$$\mathrm{rk}(A|(-B^T)) \neq \mathrm{rk}(A) = 1. \tag{4.2.14}$$

Τότε, η δεδομένη καμπύλη δεν έχει κέντρο συμμετρίας, αφού δεν εξαλείφθηκαν οι πρωτοβάθμιοι όροι.
Στην περίπτωση αυτή εκτελούμε πρώτα το μετασχηματισμό στροφής

$$\mathbf{r} = P\widetilde{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix},$$

με τον P όπως προηγουμένως.
Έτσι, η εξίσωση (4.2.3) γίνεται:

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + 2l_1\widetilde{x} + 2l_2\widetilde{y} + c = 0, \tag{4.2.15}$$

έχοντας θέσει $BP = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως, καταλήγουμε στο ότι μία μόνο ιδιοτιμή του πίνακα A ισούται με 0. Έστω, λοιπόν, η $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = 0$, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + 2l_1\widetilde{x} + 2l_2\widetilde{y} + c = 0, \tag{4.2.16}$$

η οποία με κατάλληλο μετασχηματισμό παράλληλης μεταφοράς ανάγεται σε εξίσωση ως προς τους κύριους άξονές της.

- Αυτή η καμπύλη είναι, εμφανώς, μία *παραβολή*, και εδώ τελειώνει η διερεύνηση της εξίσωσης (4.2.3).

Παράδειγμα 4.2.6. *Θεωρούμε την καμπύλη*

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y - 18 = 0.$$

Θα βρούμε την εξίσωση ως προς τους κύριους άξονες καθώς και το είδος της.

Η εξίσωση της δεδομένης καμπύλης γράφεται ως:

$$r^T A r + 2Br + c = 0,$$

με

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = [1 \ \ -1], c = -18.$$

Επειδή

$$\det(A) = 5 \neq 0,$$

η καμπύλη έχει κέντρο συμμετρίας το οποίο προκύπτει από τη λύση ως προς h του συστήματος

$$Ah = -B^T.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $h = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή το $(-1, 1)$ είναι κέντρο συμμετρίας της καμπύλης. Άρα με το μετασχηματισμό παράλληλης μεταφορά $r = \widetilde{r} + h$, η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$\widetilde{r}^T A \widetilde{r} + (Bh + c) = 0,$$

που μετά τις πράξεις γράφεται ως

$$3\widetilde{x}^2 + 4\widetilde{x}\widetilde{y} + 3\widetilde{y}^2 - 20.$$

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $x_1 = (1,-1)$ και $x_2 = (1,1)$, τα οποία είναι ορθογώνια. Έτσι, με κανονικοποίηση λαμβάνουμε το ορθοκανονικό σύνολο

$$y_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ y_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

για τον οποίο ισχύει $\det(P) = 1$, οπότε ο P είναι πίνακας στροφής στο επίπεδο κατά γωνία θ, την οποία βρίσκουμε επειδή

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

οπότε πρέπει $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Επομένως, μετά το μετασχηματισμό στροφής $\tilde{r} = Pz$, με $z = (x, y)$, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

η οποία είναι εξίσωση έλλειψης ως προς τους κύριους άξονές της.

4.3 Ταξινόμηση επιφανειών 2ου βαθμού

Η μελέτη των επιφανειών στο χώρο αποτελεί φυσική γενίκευση των καμπύλων του επιπέδου. Έτσι, η διαδικασία είναι πολύ παρόμοια και τα αποτελέσματα της ταξινόμησης προκύπτουν με την ίδια διαδικασία διερεύνησης.

Αναλυτικότερα, όπως ακριβώς και στο επίπεδο, οι μετασχηματισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η παράλληλη μεταφορά και η στροφή αξόνων.

Στην παράλληλη μεταφορά θεωρούμε, όπως και προηγουμένως, τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{r} = \widetilde{\mathbf{r}} + \mathbf{h} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}, \tag{4.3.1}$$

ο οποίος στέλνει το σημείο $\mathbf{r}$ στο σημείο $\widetilde{\mathbf{r}}$.

Στη στροφή, το νέο σημείο $\widetilde{\mathbf{r}}$ προκύπτει από το αρχικό $\mathbf{r}$ με τη χρήση του μετασχηματισμού

$$\widetilde{\mathbf{r}} = P\mathbf{r} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

και, ισοδύναμα, για να βρούμε το $\mathbf{r}$, γνωρίζοντας το $\widetilde{\mathbf{r}}$, γράφουμε

$$\mathbf{r} = P^{-1}\,\widetilde{\mathbf{r}} = P^{T}\,\widetilde{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix} = P^{T} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix}. \tag{4.3.3}$$

Εκμεταλλευόμενοι, λοιπόν, τις τετραγωνικές μορφές, η γενική μορφή της εξίσωσης επιφάνειας δευτέρου βαθμού, γράφεται ως εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{r}^{T} A \mathbf{r} + 2B\mathbf{r} + c = 0, \tag{4.3.4}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ \text{και} \ B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \tag{4.3.5}$$

με τον πίνακα A να είναι συμμετρικός.

Εργαζόμενοι με την ίδια μεθοδολογία όπως και στις καμπύλες δευτέρου βαθμού, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επιφάνεια (4.3.4) έχει κέντρο συμμετρίας $H(j, k, l)$, με $\mathbf{OH} = \mathbf{h}$ όταν το σύστημα

$$A\mathbf{h} = -B^{T} \tag{4.3.6}$$

έχει λύσεις, δηλαδή όταν

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|(-B^T)). \tag{4.3.7}$$

Πρόταση 4.3.1. *Περίπτωση 1): Το γραμμικό σύστημα* $\mathbf{h}^T A + B = 0$*, δηλαδή το*

$$A\mathbf{h} = -B^T$$

έχει λύσεις ως προς $\mathbf{h}$*. Αυτό σημαίνει ότι για τον βαθμό του πίνακα ισχύει η σχέση*

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|(-B^T)). \tag{4.3.8}$$

Ο βαθμός του A *μπορεί να πάρει τρεις τιμές* $(1, 2, 3)$*, τις οποίες και θα διερευνήσουμε.*

Πρόταση 4.3.2. *Υποπερίπτωση 1) Αν έχουμε ότι*

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|(-B^T)) = 3. \tag{4.3.9}$$

Τότε το σύστημα (4.3.4) *έχει μοναδική λύση* $\mathbf{h}$*, οπότε η επιφάνεια έχει ένα κέντρο συμμετρίας.*

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της στροφής και της παράλληλης μεταφοράς, η εξίσωση γράφεται

$$\lambda_1\widehat{x}^2 + \lambda_2\widehat{y}^2 + \lambda_3\widehat{z}^2 + l_0 = 0, \tag{4.3.10}$$

με $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A και $l_0 = B\mathbf{h} + c$. Έτσι, προκύπτει ότι

α) Αν l_0 ετερόσημος των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, η επιφάνεια είναι *ελλειψοειδές*.

β) Αν l_0 ομόσημος με δύο εκ των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, η επιφάνεια είναι *δίχωνο υπερβολοειδές*.

γ) Αν l_0 ομόσημος με μια εκ των $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, η επιφάνεια είναι *μονόχωνο υπερβολοειδές*.

δ) Αν $l_0 = 0$ και οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ δεν είναι ομόσημες, η επιφάνεια είναι *ελλειπτικός κώνος*.

Πρόταση 4.3.3. *Υποπερίπτωση 2) Αν έχουμε ότι*

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|(-B^T)) = 2. \tag{4.3.11}$$

Τότε το σύστημα (4.3.4) *έχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων* $\mathbf{h}$*, οπότε η επιφάνεια έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας, που βρίσκονται σε μία ευθεία.*

Επιπλέον, $\det A = 0$, οπότε σε συνδυασμό με το ότι ρκ(A)=2, προκύπτει ότι μία μόνο από τις ιδιοτιμές είναι μηδέν και έστω ότι $\lambda_3 = 0$. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της στροφής και της παράλληλης μεταφοράς, η εξίσωση γράφεται

$$\lambda_1\widehat{x}^2 + \lambda_2\widehat{y}^2 + l_0 = 0, \tag{4.3.12}$$

με $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ και $l_0 = B\mathbf{h} + c$, όπου $\mathbf{h}$ είναι μία από τις λύσεις του συστήματος. Έτσι, προκύπτει ότι

α) Αν l_0 ετερόσημος των λ_1, λ_2, η επιφάνεια είναι *ελλειπτικός κύλινδρος*.

β) Αν $l_0 \neq 0$ και $\lambda_1\lambda_2 < 0$, η επιφάνεια είναι *υπερβολικός κύλινδρος*.

γ) Αν $l_0 = 0$ και $\lambda_1\lambda_2 < 0$, η επιφάνεια παριστάνει *τεμνόμενα επίπεδα*.

Πρόταση 4.3.4. *Υποπερίπτωση 3) Αν έχουμε ότι*

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|(-B^T)) = 1. \tag{4.3.13}$$

Τότε το σύστημα (4.3.4) *έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων* $\mathbf{h}$*, οπότε η επιφάνεια έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας, που βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο.*

Επιπλέον, δύο από τις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι μηδέν, έστω ότι $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς της στροφής και της παράλληλης μεταφοράς, η εξίσωση γράφεται

$$\lambda_1\widehat{x}^2 + l_0 = 0, \tag{4.3.14}$$

με $\lambda_1 \neq 0$ και $l_0 = B\mathbf{h} + c$. Έτσι, προκύπτει ότι

α) Αν $l_0\lambda_1 < 0$, η επιφάνεια παριστάνει *ζεύγος παράλληλων επιπέδων*.

β) Αν $l_0 = 0$, η επιφάνεια παριστάνει *δύο συμπίπτοντα επίπεδα*.

Πρόταση 4.3.5. *Περίπτωση II): Το γραμμικό σύστημα* $\mathbf{h}^T A + B = 0$, *δηλαδή το*

$$A\mathbf{h} = -B^T$$

δεν έχει λύση ως προς $\mathbf{h}$, *οπότε η επιφάνεια δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Θα είναι*

$$\mathrm{rk}(A) \neq \mathrm{rk}(A|(-B^T)). \tag{4.3.15}$$

Εκτελώντας πρώτα τον κατάλληλο μετασχηματισμό στροφής $\mathbf{r} = P\tilde{\mathbf{r}}$ και στη συνέχεια μία παράλληλη μεταφορά, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, καταλήγουμε στις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

Πρόταση 4.3.6. *Υποπερίπτωση 1) Αν έχουμε ότι* $\det A = 0$ *και μία μόνο από τις ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι μηδέν, έστω η* $\lambda_3 = 0$. *Θα ισχύει ότι*

$$\mathrm{rk}(A) = 2 \neq \mathrm{rk}(A|(-B^T)). \tag{4.3.16}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\lambda_1\hat{x}^2 + \lambda_2\hat{y}^2 + 2l\hat{z} = 0, \tag{4.3.17}$$

από την οποία προκύπτει ότι

α) Αν $\lambda_1\lambda_2 > 0$, η επιφάνεια είναι *ελλειπτικό παραβολοειδές*.

β) Αν $\lambda_1\lambda_2 < 0$, η επιφάνεια είναι *υπερβολικό παραβολοειδές*.

Πρόταση 4.3.7. *Υποπερίπτωση 2) Αν δύο ιδιοτιμές του πίνακα* A *είναι μηδέν, έστω η* $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Θα ισχύει ότι*

$$\mathrm{rk}(A) = 1 \neq \mathrm{rk}(A|(-B^T)). \tag{4.3.18}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\lambda_1\hat{x}^2 + 2l\hat{y}^2 + 2r\hat{z} = 0, \tag{4.3.19}$$

- με $lr = 0$ και $|l| + |r| > 0$, η οποία παριστάνει *παραβολικό κύλινδρο*.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές στη Θεωρία Αριθμών

5.1 Εισαγωγή

Όταν βρισκόμαστε στον δακτύλιο των ακεραίων, οι τετραγωνικές μορφές ονομάζονται *ακέραιες τετραγωνικές μορφές (integral quadratic forms)* και παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία αριθμών και την τοπολογία.
Μια ακέραια τετραγωνική μορφή έχει ακέραιους συντελεστές, όπως για παράδειγμα η $x^2 + xy + y^2$. Σύμφωνα με τον ισχύοντα ορισμό, επειδή τα στοιχεία της διαγωνίου του αντίστοιχου πίνακα της τετραγωνικής μορφής ισούνται με το μισό των συντελεστών του πολυωνύμου, είναι πιθανό ο συμμετρικός πίνακας να έχει στοιχεία ίσα με το μισό ακεραίου στις θέσεις που δε βρίσκονται στη διαγώνιο.
Για παράδειγμα, η τετραγωνική μορφή

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 4x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2^2$$

έχει αντίστοιχο πίνακα A τον

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{5.1.1}$$

Γενικά, μια ακέραια τετραγωνική μορφή είναι ένα ομογενές πολυώνυμο

$$ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathbb{Z}[x, y].$$

Το κλασικό πρόβλημα στις ακέραιες τετραγωνικές μορφές είναι το ακόλουθο: Αν δίνεται η τετραγωνική μορφή $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, ποιο είναι το σύνολο τιμών τιμών της; Δηλαδή, ποιο είναι το σύνολο $\{f(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$;

Ένα τέτοιο ερώτημα έθεσε πρώτος ο Διόφαντος για την τετραγωνική μορφή

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Με άλλα λόγια, ποιοι αριθμοί γράφονται ως άθροισμα δύο τετραγώνων; Η απάντηση σε αυτό το πρόβλημα είναι ότι οι αριθμοί που γράφονται ως άθροισμα δύο τετραγώνων είναι ακριβώς αυτοί που κάθε πρώτος παράγοντας της μορφής $4m + 3$ βρίσκεται σε άρτια δύναμη στην κανονική αναπαράσταση.

Μία τετραγωνική μορφή της οποίας το σύνολο τιμών διατρέχει όλο το $\mathbb{N}$ καλείται καθολική.
Ο J. L. Lagrange σε θεώρημά του απέδειξε ότι η

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

είναι καθολική.
Αργότερα, ο S. Ramanujan γενίκευσε το παραπάνω θεώρημα στο

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$$

και βρήκε 54 τετράδες αριθμών $\{a, b, c, d\}$ που η καθεμία από αυτές μπορεί να παράξει όλους τους φυσικούς.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ένα πρόσφατο θεώρημα που αποδεικνύει ότι μία ακέραια τετραγωνική μορφή είναι καθολική αν και μόνο αν μπορεί να αναπαραστήσει όλους τους ακεραίους μέχρι και το 290.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε το αν μπορούμε, σε κάθε περίπτωση, να δώσουμε μία περιγραφική απάντηση, όπως παραπάνω ή όχι.

5.2 Ισοδυναμία

Ορισμός 5.2.1. *Η* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *είναι η ομάδα όλων των* 2×2 *πινάκων με ακέραια στοιχεία και ορίζουσα ίση με* $+1$.

Αν $g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ και $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ είναι μια ακέραια τετραγωνική μορφή, ορίζουμε

$$f|_g(x,y) = f(px+qy, rx+sy) = f\left(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right),$$

όπου για ευκολία θα γράφουμε $f\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right)$ για την $f(x,y)$.

Πρόταση 5.2.2. *Ο παραπάνω τύπος ορίζει μία καλά ορισμένη δράση στην ομάδα των πινάκων* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *καθώς*

$$f|_{gh} = (f|_g)|_h.$$

Απόδειξη.

$$f|_{gh}(x,y) = f\left(gh\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right) = f|_g\left(h\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\right)\right) = (f|_g)|_h(x,y).$$

□

Πρόταση 5.2.3. *Έστω* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *και* $f(x,y)$ *μία τετραγωνική μορφή. Το σύνολο των ακεραίων* $f(x,y)$ *είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο των ακεραίων που αναπαριστάται από την* $f|_g(x,y)$.

Απόδειξη. Πράγματι αν $f(x_0,y_0) = n$ τότε επειδή $g^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, θα έχουμε $g^{-1}\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, άρα

$$f|_g\left(g^{-1}\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\right) = f(x_0,y_0) = n.$$

Επομένως κάθε ακέραιος που αναπαρίσταται από την f, αναπαρίσταται και από την $f|_g$. Αντίστροφα, αν $f|_g(x_0,y_0) = n$, τότε $f\left(g\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \end{pmatrix}\right) = n$, άρα η f αναπαριστά επίσης τον αριθμό n. □

Ορίζεται, λοιπόν, σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο όλων των ακέραιων τετραγωνικών μορφών και θα λέμε ότι η f είναι στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την f' αν υπάρχει $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ώστε $f|_g = f'$.

Στο εξής, για ευκολία, θα συμβολίζουμε κάποιες φορές την $ax^2 + bxy + cy^2$ με (a, b, c).

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2.4.

$$f(x, y) = 458x^2 + 214xy + 25y^2.$$

Με μια πρώτη ματιά το να βρούμε ποιους αριθμούς αναπαριστά η f μοιάζει δύσκολο, όμως υπολογίζοντας την $f(x, y)$ για μερικές μικρές τιμές βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} f(-1,-1) &= 17 \cdot 41 \\ f(-1,0) &= 2 \cdot 229 \\ f(0,-1) &= 5^2 \\ f(1,1) &= 269 \\ f(-1,2) &= 2 \cdot 5 \cdot 13 \\ f(-1,3) &= 41 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός είναι άθροισμα δύο τετραγώνων. Γράφοντας $g = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -17 & 13 \end{pmatrix}$*, έχουμε*

$$f|_g = 458(4x-3y)^2+214(4x-3y)(-17x+13y)+25(-17x+13y)^2 = \cdots = x^2+y^2.$$

Επομένως, από την Πρόταση 5.2.3, η f αναπαριστά κάθε αριθμό n αν και μόνο αν ο n είναι άρθοισμα δύο τετραγώνων.

5.3 Διακρίνουσα

Ορισμός 5.3.1. *Η* διακρίνουσα *της* $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ *είναι η*

$$\Delta(f) = b^2 - 4ac.$$

Παράδειγμα 5.3.2. $\Delta(x^2+y^2) = -4$ *και*

$$\Delta(458, 214, 25) = 214^2 - 4 \cdot 25 \cdot 458 = -4.$$

Τι σημαίνει για τις τετραγωνικές μορφές το ότι έχουν ίδια διακρίνουσα;

Πρόταση 5.3.3. *Αν η* f *και η* f' *είναι στην ίδια κλάση ισοδυναμίας,* $f \sim f'$*, τότε*

$$\Delta(f) = \Delta(f').$$

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, τετραγωνικές μορφές με την ίδια διακρίνουσα μπορεί να μην είναι ισοδύναμες. Για παράδειγμα οι $(1,0,6)$ και $(2,0,3)$ έχουν διακρίνουσα -24, αλλά δεν είναι ισοδύναμες αφού η $(1,0,6)$ αναπαριστά τον αριθμό 1, ενώ η $2x^2+3y^2$ όχι.

Πρόταση 5.3.4. *Το σύνολο από όλες τις διακρίνουσες κάποιας τετραγωνικής μορφής είναι ακριβώς το σύνολο των ακεραίων* d *ώστε*

$$d \equiv 0, 1 \pmod 4.$$

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$b^2 - 4ac \equiv b^2 \equiv 0, 1 \pmod 4.$$

Αντίστροφα, αν d είναι ακέραιος ώστε $d \equiv 0, 1 \pmod 4$, θέτουμε

$$c = \begin{cases} -d/4, & \text{αν } d \equiv 0 \pmod 4 \\ -(d-1)/4 & \text{αν } d \equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

και τότε $\Delta(1,0,c) = d$ στην πρώτη περίπτωση και $\Delta(1,1,c) = d$ στη δεύτερη περίπτωση, άρα πάντα υπάρχει τετραγωνική μορφή με διακρίνουσα d. □

Ο J. L. Lagrange απέδειξε ότι για κάθε D, υπάρχουν πεπερασμένες κλάσεις από ακέραιες τετραγωνικές μορφές με διακρίνουσα D. Το πλήθος τους ονομάζεται ο *αριθμός κλάσης* με διακρίνουσα D. Περιέγραψε επίσης έναν αλγόριθμο, που ονομάζεται *αναγωγή*, με τον οποίο κατασκευάζει έναν αντιπρόσωπο σε κάθε κλάση, του οποίου οι συντελεστές είναι, με μία έννοια, οι μικρότεροι δυνατοί.

Βιβλιογραφία

[1] Ανάργυρος Φελλούρης, Καθηγητής Ε.Μ.Π., *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Έκδοση δεύτερη, Αθήνα, 2009.

[2] Ν. Καδιανάκης, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π., Σ. Καρανάσιος Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π., *Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Έκδοση τέταρτη, Αθήνα, 2008.

[3] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Ι. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Α. Μελάς, Ο. Ταλέλλη, Καθηγητής Ε.Μ.Π., *Μία εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις ΣΟΦΙΑ, 2009.

[4] Etienne Ghys, Andrew Ranicki, *Signatures in algebra, topology and dynamics*, September 15, 2016

[5] A. Eremenko, *Simultaneous diagonalization of two quadratic forms and a generalized eigenvalue problem*, April 17, 2018

[6] William A. Stein, *Elementary Number Theory, Lecture Notes*, Harvard University, April 17, 2001