



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Κυματοδήγηση σε βαθμοελαστικά
μέσα διάδοσης με βιοϊατρικές
εφαρμογές

Μαρτίκος Ιωάννης

επιβλέπων καθηγητής
Χαραλαμπίδης Αντώνιος

8 Νοεμβρίου 2018

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου, κ. Χαραλαμπόπουλο Αντώνιο, καθηγητή της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, που όχι μόνο με υποστήριξε συστηματικά και με βοήθησε ουσιαστικά σε όλα τα στάδια της παρούσας εργασίας, αλλά και μου πρότεινε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την τριμελή επιτροπή που παρέστη κατά την επίσημη υποστήριξη της εργασίας μου. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια και τους φίλους μου για την αμέριστη στήριξη που μου παρείχαν καθόλη τη διάρκεια της φοίτησής μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι τάσεις, οι τροπές και ο αλληλοσυσχετισμός τους είναι τα θεμελιώδη στοιχεία της θεωρίας της ελαστικότητας. Με αυτά ξεκινάει και η παρούσα εργασία παρουσιάζοντας επίσης και κάποια βασικά και απαραίτητα εργαλεία, όπως οι εξισώσεις ισορροπίας και ο καταστατικός νόμος των ελαστικών υλικών. Η κλασική θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας αδυνατεί να περιγράψει τη μηχανική συμπεριφορά υλικών με μικροδομή. Ως εκ τούτου, παρουσιάζεται αναλυτικά η γενική θεωρία της βαθμοελαστικότητας που προτάθηκε από τον R.D. Mindlin το 1964. Ξεκινώντας με μια μετατροπή στο διάνυσμα της μετατόπισης ώστε να περιγράψει την παραμόρφωση του συνεχούς και εισάγοντας τόσο στη δυναμική όσο και στην κινητική ενέργεια όρους υψηλότερης τάξης, οι οποίοι συνδέουν τα αποτελέσματα της μικροδομής με τη μακροδομική συμπεριφορά του υλικού, εξάγονται τελικά οι εξισώσεις κίνησης, συναρτήσεων των τάσεων ή, με τη βοήθεια των καταστατικών εξισώσεων, συναρτήσεων των μετατοπίσεων. Έπειτα, υποθέτοντας επίπεδα κύματα ως λύσεις για τις ως άνω εξισώσεις, καταλήγουμε στις σχέσεις διασποράς, δηλαδή τις σχέσεις μεταξύ της συχνότητας και του κυματάρθμου. Θεωρώντας μεγάλα μήκη κύματος και την ίδια παραμόρφωση της μικρο και μακρο-δομής, εισάγουμε μία απλοποιημένη μορφή της γενικής θεωρίας η οποία μειώνει αισθητά τον αριθμό των ελαστικών παραμέτρων, είναι η λεγόμενη προσέγγιση μικρής συχνότητας, πολύ μεγάλου μήκους κύματος (Μορφή II). Έπειτα, προβαίνοντας σε κάποιες επιπλέον απλουστεύσεις, και θεωρώντας και πάλι επίπεδα κύματα, καταλήγουμε στις σχέσεις διασποράς των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται σε ένα άπειρα εκτεταμένο βαθμοελαστικό χώρο. Ο βασικός σκοπός της εργασίας ωστόσο, είναι η διάδοση οδηγούμενων κυμάτων σε μία ελεύθερη από τάσεις βαθμοελαστική πλάκα 2 διαστάσεων, η οποία προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό. Αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας στην πλάκα μηχανικές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές ενός οστού. Μέσω της μεθόδου των δυναμικών, δίνεται λύση στις απλουστευμένες εξισώσεις κίνησης και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες για την πλάκα, διαμορφώνουμε τις σχέσεις διασποράς των οδηγούμενων κυμάτων. Τέλος, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις διασποράς, τόσο των οδηγούμενων όσο και των χωρικών, εγκάρσιων και διαμήκων κυμάτων, δημιουργούμε τις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας των κυμάτων αυτών και τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες των κυμάτων της κλασικής ελαστικότητας προσπαθώντας να βγάλουμε αξιόπιστα συμπεράσματα για την επίδραση της μικροδομής στη διασπορά της ταχύτητας.

ABSTRACT

Strains, stresses and their correlation are the fundamental elements of the theory of elasticity. The present study commences exactly with the above as well as a handful of necessary tools, like the equations of equilibrium and the constitutive law of elastic materials. The classical theory of linear elasticity is unable to describe adequately the mechanical behaviour of materials with microstructure in which the stress state has to be defined in a non-local manner. Hence, the general theory of gradient elasticity proposed by R.D. Mindlin in 1964, is presented in detail. Utilizing the displacement vector to describe the deformation of the continuum and introducing in both, kinetic and potential energy, higher order terms which correlate microstructural effects with the macrostructural behaviour of the material, the equations of motion, with respect to displacements or stresses, are yielded. Then, the dispersion relations (ω vs. ζ) are obtained by assuming solutions of the form of plane waves for the aforementioned equations. Considering low frequencies and very long wave-lengths as well as the same deformation for the macro and micro structure, Mindlin introduced a simplified version of the general theory that drastically reduced the number of the elastic coefficients previously employed. It is the so called Form II approximation. Afterwards, implementing some further simplifications, and considering yet again, plane waves, the dispersion relations for the bulk waves, shear and longitudinal, propagating in an infinitely extended medium, are acquired. The main goal of the present study is the propagation of guided waves in a two dimensional and free of stresses gradient elastic plate mimicking a cortical bone. This is accomplished by enhancing the plate with mechanical properties typically used for a bone. Through the method of potentials, solution is given to the simplified equations of motion and by satisfying the boundary conditions, the dispersion relations for the guided waves propagating the plate, are also obtained. Finally, using those dispersion relations of both bulk and guided waves, the group velocity dispersion curves of the waves are created and compared with those derived from the classical theory of elasticity in an effort to extract reliable conclusions concerning the effect of microstructure in the velocity dispersion.

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Ελαστικότητας	5
1.1	Εισαγωγή	5
1.2	Τάσεις	5
1.3	Κύριες Τάσεις και Κατευθύνσεις	7
1.4	Εξισώσεις Ισορροπίας	8
1.5	Παραμόρφωση - Ο Τανυστής Τροπής	9
1.6	Βαθμίδα Διανυσματικού Πεδίου Μετατοπίσεων	11
1.7	Εξισώσεις Συμβιβαστού	12
1.8	Καταστατικός Νόμος Συμπεριφοράς του Υλικού	12
2	Μικροδομή στη Γραμμική Ελαστικότητα	15
2.1	Εισαγωγή	15
2.2	Κινηματική	16
2.3	Κινητική και Δυναμική Ενέργεια	18
2.4	Μεταβολική Εξίσωση της Κίνησης	19
2.5	Εξισώσεις Τάσεων και Συνοριακές Συνθήκες	22
2.6	Καταστατικές Εξισώσεις	23
2.7	Εξισώσεις Μετατοπίσεων	25
2.8	Μικρο-δονήσεις	26
2.9	Επίπεδα Κύματα, μεγάλα μήκη κύματος	28
2.10	Προσέγγιση μικρής συχνότητας - πολύ μεγάλου μήκους κύματος: Μορφή II Mindlin	33
3	Διάδοση κυμάτων και διασπορά της ταχύτητας	39
3.1	Εισαγωγή	39
3.2	Απλοποιημένη Μορφή II Βαθμοελαστικότητας και Διασπορά Κυμάτων	41
3.3	Κυματοδήγηση στην Κλασική Ελαστικότητα	47
3.3.1	Το πρόβλημα της Ελεύθερης Πλάκας	48
3.4	Κυματοδήγηση σε Βαθμοελαστική Ελεύθερη Πλάκα	53
3.5	Βιοϊατρική Εφαρμογή - Φλοιώδες Οστό	57

Κεφάλαιο 1

Θεωρία Ελαστικότητας

1.1 Εισαγωγή

Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αλλά και της φυσικής σημασίας των τάσεων και των τροπών, καθώς και των σχέσεων που τα συνδέουν, είναι βασική στη Μηχανική και την Επιστήμη των Κατασκευών. Το κεφάλαιο ξεκινάει με τον ορισμό της τάσης σε ένα παραμορφώσιμο στερεό σε ισορροπία από εξωτερικές φορτίσεις, μέσω της έννοιας του εκλυστή. Συνεχίζει με τις κύριες τάσεις και κατευθύνσεις, τις αναλλοίωτες και τέλος τις εξισώσεις ισορροπίας. Εισάγεται επίσης η έννοια της παραμόρφωσης, ο τανυστής της τροπής και της στροφής και επίσης οι εξισώσεις συμβιβαστού. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τις καταστατικές σχέσεις των ελαστικών υλικών.

1.2 Τάσεις

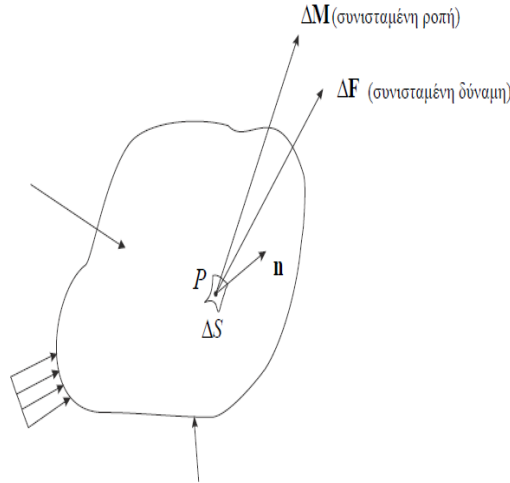
Θεωρείται ένα παραμορφώσιμο στερεό σε ισορροπία υπό εξωτερική φόρτιση. Τα φορτία που είναι διανεμημένα σε τμήματα της επιφάνειας του σώματος, όπως για παράδειγμα τα φορτία λόγω επαφής με άλλα σώματα, καλούνται *επιφανειακά* (surface forces). Οι φορτίσεις οι οποίες είναι διανεμημένες στα εσωτερικά στοιχεία του σώματος καλούνται *καθολικές* (body forces).

Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο επιφάνειας ΔS το οποίο βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του σώματος ή στην επιφάνεια. Ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} χαρακτηρίζει κάθε τέτοιο στοιχείο επιφάνειας. Οι συνισταμένες των ροπών και των δυνάμεων που ασκούνται στο ΔS συμβολίζονται αντίστοιχα με $\Delta \mathbf{F}$ και $\Delta \mathbf{M}$. Η έννοια της τάσης μας αποκαλύπτεται όταν η στοιχειώδης επιφάνεια ΔS τείνει στο μηδέν. Κάνουμε την υπόθεση ότι ο λόγος $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$ τείνει σε ένα συγκεκριμένο όριο ενώ ο λόγος $\Delta \mathbf{M}/\Delta S$ τείνει στο μηδέν.

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \mathbf{T}^{(n)} \quad (1.1)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta S} = 0 \quad (1.2)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{T}^{(n)}$ καλείται *ελκυστής* (traction) ή *διάνυσμα τάσεως* (stress vector) και παριστά τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στη θέση P που ασκείται σε ένα απειροστό στοιχείο επιφάνειας με καθορισμένο προσανατολισμό \mathbf{n} . Ωστόσο, ο ελκυστής δεν παρέχει πλη-



Σχήμα 1.1: [4] Ο ελκυστής

ροφόρηση για στοιχεία στην ίδια θέση με διαφορετικό όμως προσανατολισμό. Συνεπώς, αδυνατεί να περιγράψει πλήρως την τασική κατάσταση στη θέση P.

Ο νόμος του Νεύτωνα για τη δράση και αντίδραση γράφεται ως εξής: $-\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}^{(-n)}$. Αξίζει επίσης να σημειωθεί πως εάν υποτεθεί μη μηδενικό δεύτερο μέλος στην (1.1), τότε έχουμε πιο προχωρημένες θεωρίες Μηχανικής, με πιο γνωστή αυτήν των τάσεων ζεύγους (couple-stress theory).

Θεωρείται ένα απειροστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στη συγκεκριμένη θέση P. Οι ελκυστές $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$ και $\mathbf{T}^{(3)}$ δρουν στα επίπεδα του παραλληλεπιπέδου που είναι κάθετα στους άξονες x_1 , x_2 και x_3 αντίστοιχα.

Οι συνιστώσες του $\mathbf{T}^{(1)}$ παριστάνονται ως $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$, του $\mathbf{T}^{(2)}$ ως $(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$ και τέλος του $\mathbf{T}^{(3)}$ ως $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$. Να σημειωθεί πως το επίπεδο που ήταν κάθετο στο διάνυσμα \mathbf{n} , υποτίθεται ότι γενικώς είναι κεκλιμένο ως προς το σύστημα $x_1 x_2 x_3$.

Συνεπώς, τα σ_{ij} αποτελούν τις προβολές του ελκυστή $\mathbf{T}^{(i)}$ επάνω στους άξονες x_j , με τους δείκτες (i,j) να καλύπτουν το εύρος (1, 2, 3). Κάνοντας γραφή με χρήση δεικτών επομένως,

$$\mathbf{T}^{(1)} = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

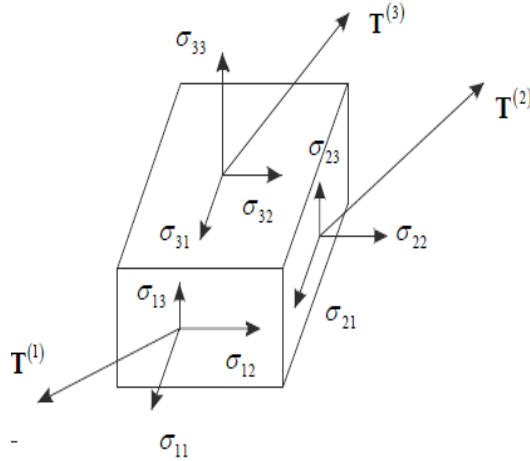
$$\mathbf{T}^{(2)} = \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{T}^{(3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (1.5)$$

Με χρήση της σύμβασης αθροίσεως (summation convention)

$$\mathbf{T}^{(i)} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_j \quad (1.6)$$

Οι εννέα ποσότητες σ_{ij} καλούνται τανυστής των τάσεων (stress tensor). Αποδεικνύεται ότι οι συνιστώσες του σ_{ij} υπακούουν στο νόμο μετασχηματισμού των τανυστών 2ας τάξεως $\sigma'_{ij} = a_{ij}a_{kl}\sigma_{kl}$ όπου $a_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως από τις εννέα ποσότητες του τανυστή των τάσεων μόνο οι έξι είναι ανεξάρτητες, καθόσον $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (συμμετρία τανυστή). Η συμμετρία αυτή αποδεικνύεται με την αρχή διατήρησης της στροφορμής. Οι τάσεις $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})$ καλούνται ορθές ενώ οι $(\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32})$ διατμητικές. Τέλος αποδεικνύεται ότι η τασική κατάσταση σε ένα σημείο P του σώματος περιγράφεται πλήρως με τον καθορισμό των συνιστωσών σ_{ij} .



Σχήμα 1.2: [4] Ο τανυστής των τάσεων

1.3 Κύριες Τάσεις και Κατευθύνσεις

Ο ελκυστής, όπως ορίστηκε, είναι η ένταση της συνισταμένης δύναμης που δρα σε στοιχειώδες τμήμα επιφάνειας με συγκεκριμένο προσανατολισμό. Στοιχεία επιφάνειας που διέρχονται από το ίδιο σημείο αλλά έχουν διαφορετικό προσανατολισμό, έχουν διαφορετικό ελκυστή. Θα αναζητήσουμε προσανατολισμούς (κατευθύνσεις για τις οποίες ο ελκυστής γίνεται παράλληλος προς το θεωρούμενο κάθετο (προς την επιφάνεια με φορά προς τα έξω) μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{v} . Θα αναζητήσουμε δηλαδή εκείνες τις κατευθύνσεις για τις οποίες οι διαμητρικές τάσεις μηδενίζονται και άρα υφίστανται μόνο ορθές τάσεις. Οι εν λόγω κατευθύνσεις καλούνται κύριες κατευθύνσεις και οι αντίστοιχες τάσεις, κύριες τάσεις.

Έστω λοιπόν $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ η ζητούμενη κύρια κατεύθυνση. Τότε θα πρέπει $\mathbf{T}^{(v)} = \sigma \mathbf{v}$, όπου σ βαθμωτό μέγεθος ή $T_i^{(v)} = \sigma v_i$. Από τη σχέση (1.6) έχουμε $T_i^{(v)} = \sigma_{ij} v_j$. Συνεπώς, η ζητούμενη κατεύθυνση θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sigma_{ij} v_j = \sigma v_i \quad (1.7)$$

Επειδή ισχύει ότι $v_j = \delta_{ij} v_i$ (μετάλλαξη δείκτη μέσω του δ_{ij} , όπου το δ_{ij} το σύμβολο του Kronecker, η (1.7) γίνεται:

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) v_j = 0 \quad (1.8)$$

η οποία αποτελεί ένα σύστημα τριών εξισώσεων γραμμικών και ομογενών ως προς τους αγνώστους (v_1, v_2, v_3) . Η λύση των εξισώσεων αυτών αποτελεί βεβαίως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών (eigenvalue problem). Εφόσον $|\mathbf{v}| = 1$ ή $(v_j v_j = 1$ ή $(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 = 1$), αποκλείεται η τετριμμένη λύση $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ και άρα θα υπάρχουν λύσεις όταν μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών δηλαδή $|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$, ή σε πλήρη γραφή

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

Η εξίσωση (1.9) καταλήγει στην τριτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση (γνωστή ως χαρακτηριστική εξίσωση)

$$\sigma^3 - I\sigma^2 + II\sigma - III = 0 \quad (1.10)$$

όπου οι ποσότητες (συντελεστές):

$$\begin{aligned} I &= \sigma_{ii} = tr(\sigma_{ij}) \\ II &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \frac{1}{2}(I^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\ III &= |\sigma_{ij}| \end{aligned}$$

είναι οι αναλλοίωτες (invariants) του τανυστή των τάσεων. Ο χαρακτηρισμός αυτός προκύπτει από την ανεξαρτησία των εν λόγω ποσοτήτων από το σύστημα συντεταγμένων.

Στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση, η εξίσωση (1.10) δίνει λύσεις κλειστού τύπου αλλά μεγάλης περιπλοκότητας, ενώ σε δισδιάστατες θεωρήσεις (επίπεδη ένταση/επίπεδη παραμόρφωση) υπάρχει αρκετή απλοποίηση. Οι κύριες τάσεις είναι μεγάλης σημασίας για τη Μηχανική καθώς η μέγιστη σε απόλυτη τιμή από τις κύριες τάσεις είναι και η μέγιστη συνιστώσα ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Όταν υπολογίσει κανείς τις κύριες τάσεις (ιδιοτιμές), οι κύριες κατευθύνσεις (ιδιοδιανύσματα \mathbf{v}^I , \mathbf{v}^{II} , \mathbf{v}^{III} των κύριων επιπέδων μπορούν να προσδιοριστούν με χρήση των σχέσεων (1.8) καθώς και της σχέσης $v_i v_i = 1$

1.4 Εξισώσεις Ισορροπίας

Σε ένα παραμορφώσιμο σώμα, οι τάσεις μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο. Όταν έχουμε συνεχή μεταβολή ενός πεδίου από σημείο σε σημείο ο πλέον κατάλληλος τρόπος περιγραφής του γίνεται μέσω διαφορικών εξισώσεων. Το συνηθέστερο μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται είναι το θεώρημα Green - Gauss μαζί με κάποιον φυσικό νόμο ισοζυγίου (δηλαδή αρχής διατηρήσεως).

Θεωρείται ένα τμήμα όγκου του σώματος V περικλειόμενο από την κλειστή επιφάνεια S . Η πυκνότητα των καθολικών δυνάμεων, δηλαδή οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου παριστάνονται ως \mathbf{f} , ενώ οι ελκυστές που είναι κατανεμημένοι πάνω στην επιφάνεια S παριστάνονται ως $\mathbf{T}^{(n)}$. Επειδή το μέσο βρίσκεται σε ισορροπία, θα πρέπει το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο θεωρούμενο όγκο του υλικού (όγκος ελέγχου) να μηδενίζεται. Θα πρέπει να ισχύει συνεπώς:

$$\int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T}^{(n)} dS = 0 \quad (1.11)$$

ή με χρήση δεικτών

$$\int_V f_i dV + \int_S T_i^{(n)} dS = 0 \quad (1.12)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση $T_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (1.12) προκύπτει:

$$\int_S T_i^{(n)} dS = \int_S \sigma_{ij} n_j dS \quad (1.13)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης των Green και Gauss (divergence theorem):

$$\int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad (1.14)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (1.13) και (1.14) στην (1.12) προκύπτει:

$$\int_V (f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}) dV = 0 \quad (1.15)$$

Επειδή κάθε στοιχείο του σώματος βρίσκεται σε ισορροπία, ο όγκος ολοκλήρωσης στην (1.15), αλλά και στις προηγούμενες σχέσεις, είναι αυθαίρετος. Επομένως, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην σχέση (1.15) θα πρέπει να μηδενίζεται. Συμπερασματικά, σε κάθε σημείο του σώματος θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.16)$$

ή σε πλήρη γραφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + f_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.5 Παραμόρφωση - Ο Τανυστής Τροπής

Η παραμόρφωση ενός σώματος εκφράζει την αλλαγή αποστάσεως μεταξύ γειτονικών στοιχείων του υλικού. Έστω ότι η θέση του σημείου P στην απαραμόρφωτη κατάσταση του σώματος (αρχική) προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες X_i , ενώ η θέση του σημείου p (στην οποία έχει μετακινηθεί το P) στην παραμορφωμένη κατάσταση του σώματος προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες x_i . Το μήκος του απειροστού ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει το σημείο $P(X_i)$ με το γειτονικό του $Q(X_i + dX_i)$ στην αρχική κατάσταση είναι το dL , ενώ το αντίστοιχο μήκος των σημείων $p(x_i)$ και $q(x_i + dx_i)$ στην παραμορφωμένη τελική κατάσταση είναι dl . Τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι:

$$dl^2 - dL^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i \quad (1.17)$$

Οι τελικές συντεταγμένες x_i του σημείου p είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις των αρχικών συντεταγμένων X_i και αντιστρόφως. Οι υποθέσεις αυτές εξασφαλίζουν την ομαλότητα με την οποία παραμορφώνεται το σώμα.

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial X_i}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.18)$$

Συνεπώς, η (1.17) γράφεται:

$$dl^2 - dL^2 = dx_i dx_i - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = (\delta_{jk} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}) dx_j dx_k \quad (1.19)$$

Στην τελευταία σχέση ορίζεται ο τανυστής της τροπής ως:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.20)$$

Η συνηθέστερη μορφή του τανυστή τροπής προκύπτει από τη θεώρηση του διανύσματος της μετατόπισης \mathbf{u} ως:

$$u_i = x_i - X_i \text{ και } \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1.21)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.21) στην (1.20) προκύπτει:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (1.22)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη γενική μορφή του τανυστή τροπής. Η μορφή αυτή περιέχει το μη γραμμικό όρο $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$. Εάν όμως οι βαθμίδες της μετατόπισης είναι μικρές ποσότητες σε σύγκριση με τη μονάδα ($|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}| \ll 1$) τότε τα γινόμενά τους μπορούν να αμεληθούν ως πολύ μικροί όροι. Έτσι, προκύπτει η γραμμικοποιημένη έκφραση του τανυστή τροπής:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.23)$$

Ο τανυστής αυτός ονομάζεται τανυστής μικρών ή απειροστών τροπών. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι στη γραμμικοποιημένη περίπτωση και με την επιπλέον υπόθεση $|u_i| \ll 1$ δεν χρειάζεται να γίνεται πλέον διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων X_i και x_i καθώς οι παράγωγοι των μετατοπίσεων σχεδόν συμπίπτουν.

Τέλος, σημειώνεται πως οι ποσότητες του τανυστή των τροπών συνιστούν τανυστή 2ας τάξεως. Αυτό βασίζεται στο γεγονός ότι η μετατόπιση είναι τανυστής 1ης τάξεως, δηλαδή διάνυσμα, και επομένως οι παράγωγοί της, από τις οποίες αποτελείται η τροπή, είναι τανυστές 2ας τάξεως.

Φυσικό Νόημα του Τανυστή Απειροστής Τροπής

Έστω μια ίνα υλικού (γραμμικό στοιχείο) dl παράλληλη προς τον άξονα x_1 . Τότε $dx_1 = dl$ και $dx_2 = dx_3 = 0$, έτσι ώστε η (1.19) να γίνει: $\frac{dl - dL}{dL} = 2\varepsilon_{11} \frac{dl^2}{dL(dl + dL)}$. Εισάγοντας τώρα στην προαναφερθείσα σχέση την περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων (αλλά όχι κατά ανάγκη και μικρών μετατοπίσεων), $dl \cong dL$ θα έχουμε: $\frac{dl - dL}{dL} \cong \varepsilon_{11}$. Συνεπώς, η ορθή τροπή ε_{11} έχει το φυσικό νόημα της κλασματικής επιμηκύνσεως μιας ίνας υλικού παράλληλα προς τον άξονα x_1 . Ομοίως εργαζόμαστε και για τις συνιστώσες ε_{22} και ε_{33} .

Όσον αφορά στις διατμητικές τροπές, η συνιστώσα ε_{12} είναι ίση με το ήμισυ της αλλαγής της γωνίας που σχημάτιζαν δυο ευθύγραμμα τμήματα στην απαραμόρφωτη κατάσταση, και τα οποία στην παραμορφωμένη πλέον κατάσταση είναι παράλληλα προς τους άξονες x_1, x_2 .

1.6 Βαθμίδα Διανυσματικού Πεδίου Μετατοπίσεων

Συμμετρικός καλείται ένας ταυιστής 2ας τάξεως αν ισχύει: $A_{(ij)} = A_{(ji)}$ ενώ αντισυμμετρικός όταν $A_{[ij]} = -A_{[ji]}$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα Διαχωρισμού, είναι πάντοτε δυνατό ένας ταυιστής A_{ij} να αναλυθεί *μονοσήμαντα* σε έναν συμμετρικό και έναν αντισυμμετρικό ταυιστή.

$$A_{ij} = A_{(ij)} + A_{[ij]}, \quad (1.24)$$

όπου

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$$

$$A_{[ji]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

Να σημειωθεί πως η συμμετρία ή αντισυμμετρία ενός ταυιστή διατηρείται σε ενδεχόμενη στροφή του συστήματος συντεταγμένων.

Με βάση τα προαναφερθέντα, ο ταυιστής που σχηματίζει η βαθμίδα-κλίση (gradient) του διανυσματικού πεδίου μετατοπίσεων $\nabla \mathbf{u} \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i u_j$, μπορεί να αναλυθεί σε έναν συμμετρικό και έναν αντισυμμετρικό ταυιστή.

$$\partial_i u_j = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.25)$$

όπου $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ είναι οι 6 ανεξάρτητες ποσότητες των τροπών,

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) & \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \partial_2 u_2 & \frac{1}{2}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) & \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) & \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Οι 3 ανεξάρτητες ποσότητες του ταυιστή των στροφών, $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$ περίξ των αξόνων x_i αποτελούν ένα διάνυσμα στροφών απολύτως στερεού σώματος που δεν συνεισφέρουν στην παραμόρφωση και ένταση του σώματος.

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2) & \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) & 0 & \frac{1}{2}(\partial_3 u_2 - \partial_2 u_3) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 u_3 - \partial_3 u_1) & \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

1.7 Εξισώσεις Συμβιβαστού

Έστω ότι είναι γνωστές οι 3 συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης u_i σε ένα σημείο του παραμορφώσιμου στερεού και ζητούνται οι 6 ανεξάρτητες συνιστώσες της τροπής ε_{ij} . Τότε, μέσω της σχέσης ορισμού της τροπής (1.23), άμεσα υπολογίζονται οι ζητούμενες συνιστώσες. Ας θεωρήσουμε τώρα το αντίστοιχο πρόβλημα όπου οι 6 ανεξάρτητες συνιστώσες ε_{ij} είναι γνωστές και ζητούνται οι 3 συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου της μετατόπισης. Το εν λόγω πρόβλημα είναι υπερ-ορισμένο. Συνεπώς, για να είναι οι λύσεις u_i , μονότιμες και συνεχείς συναρτήσεις θα πρέπει να πληρούνται πρόσθετες συνθήκες για τις τροπές ε_{ij} .

Στην περίπτωση της επίπεδης έντασης ($\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (1.28)$$

Στη γενική τρισδιάστατη περίπτωση έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (1.29)$$

Η ως άνω σχέση περιλαμβάνει 81 εξισώσεις, οι περισσότερες εκ των οποίων είναι ταυτοτικές. Στο τέλος μένουν μόνο 6 εξισώσεις. Το ότι δεν έμειναν 3 εξισώσεις (=6 ποσότητες ε_{ij} - 3 ποσότητες u_i) οφείλεται στο γεγονός ότι οι εν λόγω 6 εναπομείναντες εξισώσεις δεν είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και δείχνει ότι δεν υφίσταται πάντοτε αναλογία μεταξύ αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων αναφορικά με το συσχετισμό αριθμού αγνώστων και αριθμού εξισώσεων. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως είναι ευκολότερο να εργαστεί κανείς κατευθείαν με τις μετατοπίσεις και όχι με τις τροπές, όταν βρίσκεται στην τρισδιάστατη περίπτωση σε αντίθεση με τη δισδιάστατη στην οποία υπάρχει μία και μόνο εξίσωση συμβιβαστού, η (1.28), η οποία ικανοποιείται με ευκολία.

1.8 Καταστατικός Νόμος Συμπεριφοράς του Υλικού

Στο πρόβλημα του παραμορφώσιμου στερεού, όσον αφορά στις τάσεις, εμφανίζονται σε κάθε σημείο του σώματος 6 συναρτήσεις τάσεως σ_{ij} , ενώ διατίθενται μόνο οι 3 εξισώσεις ισορροπίας (1.16). Είναι λοιπόν σαφές πως χρειαζόμαστε επιπλέον πληροφορία για να λυθεί το πρόβλημα. Η επιπλέον αυτή πληροφορία δίδεται από τη μηχανική συμπεριφορά του υλικού με τη μορφή σχέσεων, των *καταστατικών εξισώσεων*.

Ο απλούστερος καταστατικός νόμος είναι ο νόμος του Hooke. Στη γενική του μορφή, ο νόμος αυτός μπορεί να ληφθεί από κατάλληλες ενεργειακές θεωρήσεις. Θεωρείται η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας U_0 ως βαθμωτή συνάρτηση των τροπών, $U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$.

Αναπτύσσοντας τη συνάρτηση αυτή σε σειρά Taylor περί τη θέση $\varepsilon_{ij} = 0$ και θέτοντας

$$E_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad E_{ijkm} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km}}, \quad E_{ijkmnp} = \frac{\partial^3 U_0}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{km} \partial \varepsilon_{np}} \quad \text{έχουμε:}$$

$$U_0 = E_0 + E_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} E_{ijkm} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} + \frac{1}{6} E_{ijkmnp} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{km} \varepsilon_{np} + \dots \quad (1.30)$$

όπου E_0 είναι σταθερά, ενώ οι υπόλοιπες ταυστικές ποσότητες E , εκφράζουν τη μηχανική συμπεριφορά του υλικού. Ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (1.30) εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας λόγω των παραμενουσών τάσεων (residual stresses), ενώ ο τρίτος την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας (strain energy density) λόγω γραμμικά-ελαστικών παραμορφώσεων, ενώ ο τέταρτος όρος εκφράζει τη μη-γραμμική απόκριση του υλικού.

Θεωρείται μία μεταβολή $\delta \varepsilon_{ij}$ της τροπής η οποία επιφέρει μία μεταβολή δU_0 της ενέργειας.

Τότε:

$$\delta U_0 = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (1.31)$$

Και καθώς $U_0 = U_0(\varepsilon_{ij})$,

$$\delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \quad (1.32)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις προκύπτει:

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \delta \varepsilon_{ij} = 0 \quad (1.33)$$

Επειδή όμως η μεταβολή είναι αυθαίρετη είναι προφανές ότι:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.34)$$

Και από την εξίσωση (1.30) έχουμε ότι:

$$\sigma_{ij} = E_{ij} + E_{ijkm} \varepsilon_{km} + \frac{1}{2} E_{ijkmnp} \varepsilon_{km} \varepsilon_{np} + \dots \quad (1.35)$$

Η σχέση (1.35) αποτελεί ένα γενικό ελαστικό καταστατικό νόμο στα πλαίσια της θεωρίας απειροστών τροπών και χωρίς ύπαρξη ιξωδοελαστικότητας, θερμικών εξαρτήσεων, και όρων βαθμίδας (όρων υψηλότερης τάξης που οφείλονται στη θεωρήση της μικροδομής του υλικού). Εάν αμελήσουμε, όπως και συνήθως γίνεται, τις παραμένουσες τάσεις και τη μη γραμμική συμπεριφορά των υλικών, τότε η εξίσωση (1.35) μπορεί να λάβει τη συνήθη γραμμική της μορφή (γενικευμένος νόμος του Hooke).

$$\sigma_{ij} = E_{ijkm} \varepsilon_{km} \quad (1.36)$$

όπου E_{ijkm} είναι το μητρώο των ελαστικών σταθερών με 81 σταθερές. Στη γενική τρισδιάστατη και ανισότροπη περίπτωση λόγω της συμμετρίας των ταυστών τάσεως και τροπής και λόγω της υπόθεσης της ύπαρξης συνάρτησης παραμορφωσιακής ενέργειας πρέπει να ισχύει: $E_{ijkm} = E_{ijmk} = E_{jikm} = E_{kmi j}$. Όλα τα παραπάνω μειώνουν τον αριθμό των ελαστικών σταθερών σε 21. Πρόσθετες μειώσεις προϋποθέτουν συμμετρίες των υλικών. Τα ισότροπα υλικά έχουν μόνο 2 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

Οι καταστατικές σχέσεις για γραμμική και ισότροπη ελαστικότητα γράφονται στην τρισδιάστατη μορφή τους ως εξής (σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3)

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (1.37)$$

ή

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (1.38)$$

όπου λ, μ είναι οι σταθερές του Lamé οι οποίες εκφράζονται συναρτήσει των μηχανικών σταθερών (E, ν), δηλαδή του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.39)$$

Κεφάλαιο 2

Μικροδομή στη Γραμμική Ελαστικότητα

2.1 Εισαγωγή

Το Κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τη θεωρία μικροδομής στη γραμμική ελαστικότητα του R. D. Mindlin. Διατυπώνεται μία γραμμική θεωρία ενός ελαστικού συνεχούς τριών διαστάσεων, το οποίο είναι εξοπλισμένο με τις ιδιότητες ενός κρυσταλλικού πλέγματος, ως αποτέλεσμα της υιοθέτησης στη θεωρία, της έννοιας της κυψελίδας της μικροδομής. Οι εξισώσεις που προκύπτουν, παράγουν τις σχέσεις διασποράς με ακουστικούς και οπτικούς κλάδους.

Η μονάδα της αντιπροσωπευτικής κυψελίδας της μικροδομής μπορεί να ερμηνευτεί και ως ένα μόριο ενός πολυμερούς, ένας κρυσταλλίτης ενός πολυκρυστάλλου, ή ένας κόκκος ενός κοκκώδους υλικού. Παιρνώντας από τις θεωρίες υψηλότερων τάξεων στις κλασικές, οι εξισώσεις φαίνεται να περιορίζονται, για μικρές συχνότητες και πολύ μεγάλα μήκη κύματος στα ισοτροπικά υλικά, σε εξισώσεις των οποίων η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας είναι συνάρτηση της τροπής και της βαθμίδας αυτής και η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας συνάρτηση της ταχύτητας και της βαθμίδας αυτής.

Αναλυτικότερα, στον παρόν κεφάλαιο, αρχικά ορίζουμε έννοιες γύρω από την Κινηματική. Ορίζεται το διάνυσμα της μετατόπισης, τροποποιημένο περιλαμβάνοντας συνιστώσες και του χωρικού αλλά και του υλικού συστήματος συντεταγμένων, και μέσω αυτού ορίζεται και το διάνυσμα της μικρο-μετατόπισης. Έπειτα ορίζονται οι βασικοί ταυιστές της θεωρίας, όπως αυτός της μικρο-παραμόρφωσης, της σχετικής παραμόρφωσης, και της βαθμίδας της μικρο-παραμόρφωσης. Ύστερα, παίρνουμε ένα ισοζύγιο ενέργειας (Αρχή του Hamilton), για τις ανεξάρτητες μεταβολές της μακρο-μετατόπισης και της μικρο-παραμόρφωσης μεταξύ δύο σταθερών σημείων τους και δύο χρονικών στιγμών. Μέσω της μεταβολής ενός χρονικού ολοκληρώματος των ολικών ενεργειών, δυναμικής και κινητικής, αλλά και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων, καταλήγουμε στη Μεταβολική Εξίσωση Κίνησης, η οποία με τη σειρά της μας δίνει, άμεσα, τις εξισώσεις κίνησης συναρτήσεως των τάσεων αλλά και τις συνοριακές συνθήκες αυτών. Θεωρώντας μία τετραγωνική μορφή της πυκνότητας της δυναμικής ενέργειας και προβαίνοντας σε υποθέσεις όπως η ισοτροπία, εξάγουμε τις καταστατικές εξισώσεις συναρτήσεως δεκαοχτώ ανεξάρτητων ελαστικών σταθερών. Αντικαθιστώντας τις τάσεις και τις τροπές με τις μακρο-μετατοπίσεις και τις μικρο-παραμορφώσεις στις καταστατικές εξισώσεις και έπειτα αντικαθιστώντας τις τελευταίες, στις εξισώσεις κίνησης, συναρτήσεως των τάσεων, που είχαμε προηγουμένως βρει, προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσεως των μακρο-μετατοπίσεων και των μικρο-παραμορφώσεων αυτήν τη φορά.

Θεωρώντας λύσεις για τις μικρο-παραμορφώσεις και μακρο-μετατοπίσεις της μορφής επίπεδων κυμάτων, προκύπτουν οι σχέσεις διασποράς των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων, για οπτικούς και ακουστικούς κλάδους. Τέλος, κάνουμε χρήση της λεγόμενης προσέγγισης μικρής συχνότητας, πολύ μεγάλου μήκους κύματος (μορφή II), η οποία απλουστεύει την παραπάνω γενική θεωρία. Ορίζοντας ως ίση τη μικρο και μακρο-παραμόρφωση και κάνοντας και πάλι χρήση της Αρχής του Hamilton, για την ανεξάρτητη μεταβολή της μακρο-μετατόπισης και μόνο αυτής, αυτή τη φορά, παράγουμε τις εξισώσεις κίνησης συναρτήσεϊ μόνο της μακρο-μετατόπισης και των χρονικών της παραγωγών.

2.2 Κινηματική

Θεωρούμε έναν όγκο ελέγχου V (material volume), ο οποίος οριοθετείται από μία επιφάνεια S , με X_i , $i = 1, 2, 3$ τις ορθογωνικές συνιστώσες του υλικού διανύσματος θέσης, μετρούμενες από ένα σταθερό αρχικό σημείο και x_i , οι συνιστώσες, στο ίδιο ορθογωνικό πλαίσιο, του χωρικού διανύσματος θέσης. Οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης ενός υλικού σωματιδίου ορίζονται ως [2]:

$$u_i \equiv x_i - X_i \quad (2.1)$$

Σε κάθε υλικό σωματίδιο θεωρείται ενσωματωμένος ένας μικρο-όγκος V' στον οποίο οι συντεταγμένες του υλικού και χωρικού διανύσματος θέσης είναι X'_i και x'_i αντίστοιχα, οι οποίες συντεταγμένες αναφέρονται σε άξονες παράλληλους με αυτούς των συντεταγμένων x_i με αρχικό σημείο σταθερό μέσα στο σωματίδιο: έτσι ώστε το αρχικό σημείο των συντεταγμένων x'_i να κινείται μαζί με τη μετατόπιση \mathbf{u} . Έτσι, ορίζεται η μικρο-μετατόπιση \mathbf{u}' με συντεταγμένες

$$u'_i \equiv x'_i - X'_i \quad (2.2)$$

Οι απόλυτες τιμές των των βαθμίδων και των δύο μετατοπίσεων θεωρούνται αρκετά μικρότερες σε σχέση με τη μονάδα:

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \right| \ll 1 \quad (2.3)$$

έτσι, ισχύει

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i u_j, \quad u_j = u_j(x_i, t) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \approx \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \equiv \partial'_i u'_j, \quad u'_j = u'_j(x_i, x'_i, t) \quad (2.5)$$

όπου t είναι ο χρόνος.

Ας υποθέσουμε ότι η μικρο-μετατόπιση μπορεί να εκφραστεί ως ένα άθροισμα ποσοτήτων συγκεκριμένων συναρτήσεων των x'_i και αυθαίρετων συναρτήσεων των x_i και t . Ως προσέγγιση κρατάμε τον έναν γραμμικό όρο των σειρών:

$$u'_j = x'_k \psi_{kj} \quad (2.6)$$

όπου ψ_{kj} είναι συνάρτηση των x_i και του t και μόνο. Η βαθμίδα της μετατόπισης στο μικρο-συνεχές είναι

$$\partial'_i u'_j = \psi_{ij} \quad (2.7)$$

δηλαδή, η μικρο-παραμόρφωση ψ_{ij} θεωρείται ότι είναι ομογενής στο μικρο-συνεχές V' και μη-ομογενής στο μακρο-συνεχές V . Σύμφωνα με την (2.3)₂, $|\psi_{ij}| \ll 1$.

Το συμμετρικό μέρος της ψ_{ij} είναι η μικρο-τροπή:

$$\psi_{(ij)} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{ij} + \psi_{ji}) \quad (2.8)$$

και το αντισυμμετρικό μέρος της είναι η μικρο-στροφή:

$$\psi_{[ij]} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{ij} - \psi_{ji}) \quad (2.9)$$

Η μακρο-παραμόρφωση θα είναι:

$$\partial_i u_j = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.10)$$

όπου ε_{ij} , η συνήθης τροπή, (από εδώ και στο εξής, μακρο-τροπή) είναι το συμμετρικό μέρος της

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (2.11)$$

και το αντισυμμετρικό, η μακρο-στροφή

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i) \quad (2.12)$$

Ορίζουμε επίσης, τη σχετική παραμόρφωση (η διαφορά της βαθμίδας της μακρο-μετατόπισης από τη μικρο-παραμόρφωση):

$$\gamma_{ij} \equiv \partial_i u_j - \psi_{ij} \quad (2.13)$$

και τη βαθμίδα της μικρο-παραμόρφωσης (η μακρο-βαθμίδα της μικρο-παραμόρφωσης):

$$\kappa_{ijk} \equiv \partial_i \psi_{jk} \quad (2.14)$$

Και οι τρεις ταυσιτές ε_{ij} , γ_{ij} , κ_{ijk} είναι ανεξάρτητοι από τις μικρο-συντεταγμένες x_i

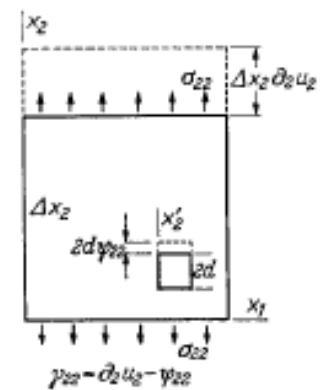
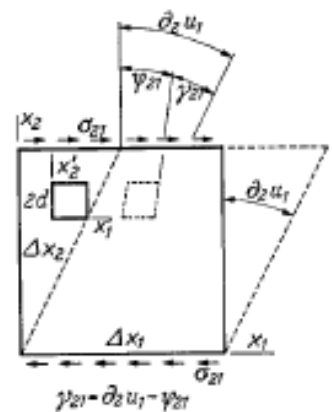
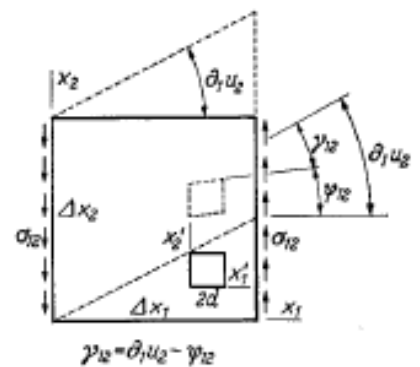
Οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης καθώς και τα στοιχεία του ταυστή της μικρο-παραμόρφωσης είναι μονότιμες συναρτήσεις των x_i , το οποίο μας οδηγεί στις εξισώσεις συμβιβαστού.

$$e_{mik} e_{nlj} \partial_i \partial_j \varepsilon_{kl} = 0 \quad (2.15)$$

$$e_{mij} \partial_i \kappa_{jkl} = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_i (\varepsilon_{jk} + \omega_{jk} - \gamma_{jk}) = \kappa_{ijk}$$

όπου e_{ijk} είναι το σύμβολο εναλλαγής.



Σχήμα 2.1: [2] Τυπικά παραδείγματα των σ_{ij} , $\partial_i u_j$, ψ_{ij} και γ_{ij} (2.17)

2.3 Κινητική και Δυναμική Ενέργεια

Ας θεωρήσουμε το μικρο-συνεχές (micro-medium) ως ένα παραλληλεπίπεδο με όγκο V' και άκρα με μήκη $2d_i$ και συννημίτονα κατεύθυνσης l_{ij} ως προς άξονες x_i' . Ορίζουμε τις x_i' να είναι οι πλάγιες καρτεσιανές συντεταγμένες παράλληλες στα άκρα d_i αντιστοίχως. Τότε:

$$x'_i = l_{ij} x''_j \quad (2.18)$$

$$V' = 8 ||l_{ij} l_{ik}||^{\frac{1}{2}} d_1 d_2 d_3 \quad (2.19)$$

$$dV' = 8 ||l_{ij} l_{ik}||^{\frac{1}{2}} dx''_1 dx''_2 dx''_3 \quad (2.20)$$

Θεωρούμε επίσης ρ_M ως τη μάζα της μακρο-ύλης ανά μονάδα μακρο-όγκου και ρ' τη μάζα της μικρο-ύλης ανά μονάδα μακρο-όγκου. Ορίζουμε ως πυκνότητα κινητικής ενέργειας (κινητική ενέργεια ανά μονάδα μακρο-όγκου):

$$T \equiv \frac{1}{2} \rho_M \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{V'} \int_{V'} \frac{1}{2} \rho' (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) dV' \quad (2.21)$$

όπου η τελεία υποδηλώνει παραγωγή ως προς το χρόνο. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.6), (2.18), (2.19), (2.20) στην (2.21) και κάνοντας την ολοκλήρωση προκύπτει

$$T \equiv \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d_{kl}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{lj} \quad (2.22)$$

όπου

$$\rho \equiv \rho_M + \rho' \quad (2.23)$$

$$d_{kl}^2 \equiv d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} l_{l3}) = d_{lk}^2 \quad (2.24)$$

όπου δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker. Στην περίπτωση ενός κύβου με άκρα με μήκη $2d$ παράλληλα στους άξονες των συντεταγμένων του χωρικού διανύσματος θέσης x_i'

$$l_{ij} = \delta_{ij}, \quad d_1 = d_2 = d_3 \equiv d \quad (2.25)$$

Τότε ο δεύτερος όρος της (2.22) γίνεται $\frac{1}{6} \rho' d^2 \dot{\psi}_{ij} \dot{\psi}_{ij}$. Εάν το υλικό αποτελείται εξ ολοκλήρου από κυψελίδες μικροδομής, $\rho_M = 0$. Έτσι, $\rho' = \rho$.

Για την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας (δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μακρο-όγκου) θεωρούμε μία συνάρτηση, W , των 42 μεταβλητών ε_{ij} , γ_{ij} , κ_{ijk}

$$W = W(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (2.26)$$

Οι υποθέσεις (2.6), (2.21) και (2.26) είναι το ελάχιστο το οποίο μας οδηγεί σε εξισώσεις που παράγουν τις επιθυμητές σχέσεις διασποράς για επίπεδα κύματα, συμπεριλαμβανόμενων των διαμήκων και εγκάρσιων ακουστικών και οπτικών κλάδων. Οι εν λόγω σχέσεις είναι ακριβώς ό,τι χρειάζεται κανείς.

Η κυψελίδα της μικροδομής θεωρείται ένα παραλληλεπίπεδο έτσι ώστε να προσομοιάζει την κυψελίδα της μικροδομής ενός κρυσταλλικού πλέγματος. Ωστόσο, μία άλλη μορφή απλά θα άλλαζε τον τανυστή d_{kl}^2 . Επίσης, όπως έχει ήδη αναφερθεί, η κυψελίδα της μικροδομής θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως ένα μόριο πολυμερούς, ένας κρυσταλλίτης ενός πολυκρυσταλλικού ή ένας κόκκος ενός κοκκώδους υλικού.

2.4 Μεταβολική Εξίσωση της Κίνησης

Γράφουμε την αρχή του Hamilton για τις ανεξάρτητες μεταβολές δu_i και $\delta \psi_{ij}$ μεταξύ σταθερών ορίων των u_i και ψ_{ij} στους χρόνους t_0 και t_1

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{T} - \mathcal{W}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{W}_1 dt = 0 \quad (2.27)$$

όπου \mathcal{T} και \mathcal{W} είναι η ολική κινητική και δυναμική ενέργεια αντίστοιχα

$$\mathcal{T} \equiv \int_V T dV, \quad \mathcal{W} \equiv \int_V W dV \quad (2.28)$$

και $\delta \mathcal{W}_1$ είναι η μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων.

Για τη μεταβολή σε μία συνάρτηση $F = \int_V f(x, y(x), \dot{y}(x)) dx$ γνωρίζουμε πως ισχύει

$$\delta F = F(y + \delta y) - F(y) \quad (2.29)$$

Θα πάρουμε πρώτα τη μεταβολή του ολοκληρώματος μόνο της ολικής κινητικής ενέργειας. Αντικαθιστώντας την (2.22) στην (2.28) και κάνοντας χρήση της σχέσης (2.29) έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T} dt &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j dV \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_j + \delta \dot{u}_j) (\dot{u}_j + \delta \dot{u}_j) dV - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j dV \end{aligned} \quad (2.30)$$

Εργαζόμαστε με το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_j + \delta \dot{u}_j) (\dot{u}_j + \delta \dot{u}_j) dV &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j + \frac{1}{2} \rho \delta \dot{u}_j \dot{u}_j \right) dV = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j dV \end{aligned}$$

αφού $\delta \dot{u}_j \delta \dot{u}_j$ θεωρείται αμελητέα ποσότητα.

Αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα στη σχέση (2.30) προκύπτει:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j dV \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j dV \quad (2.31)$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j dV = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \dot{u}_j \delta u_j dV - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \ddot{u}_j \delta u_j dV =$$

$$\left[\int_V dV \rho' \dot{u}_j \delta u_j \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \ddot{u}_j \delta u_j dV \quad (2.32)$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της σχέσης (2.32) μηδενίζεται καθώς γνωρίζουμε ότι $\delta u_j(t_0) = \delta u_j(t_1) = 0$

Καταλήγουμε λοιπόν

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F} dt = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V (\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d_{jl}^2 \ddot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk}) dV \quad (2.33)$$

Το δεύτερο μέλος της (2.33) προκύπτει ομοίως με το πρώτο.

Όσο για τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, πρώτα θα πρέπει να ορίσουμε [2]

$$\tau_{ij} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji}$$

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \quad (2.34)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}}$$

Τότε, έχουμε:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \delta \gamma_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}} \delta \kappa_{ijk}$$

$$= \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk}, \quad (2.35)$$

$$= \tau_{ij} \partial_i \delta u_j + \sigma_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) + \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk}$$

Πριν προχωρήσουμε περαιτέρω, και μέσω της σχέσης (2.10), ας αναλύσουμε τον όρο $\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$.

$$\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \tau_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \omega_{ij}) = \tau_{ij} \partial_i \delta u_j - \tau_{ij} \delta \omega_{ij}$$

Ο όρος $-\tau_{ij} \delta \omega_{ij}$ είναι ένα άθροισμα:

$$\tau_{11} \delta \omega_{11} + \tau_{22} \delta \omega_{22} + \tau_{33} \delta \omega_{33} +$$

$$\tau_{12} \delta \omega_{12} + \tau_{21} \delta \omega_{21} + \tau_{13} \delta \omega_{13} + \tau_{31} \delta \omega_{31} =$$

$$0 + 0 + 0 + \tau_{12} \delta \omega_{12} - \tau_{12} \delta \omega_{12} + \tau_{13} \delta \omega_{13} - \tau_{13} \delta \omega_{13} + \tau_{23} \delta \omega_{23} - \tau_{23} \delta \omega_{23} = 0$$

αφού η στροφή ω_{ij} , ως αντισυμμετρικός τανυστής ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με μηδέν αφού $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i)$. Επίσης $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Συνεπώς,

$$\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \tau_{ij} \partial_i \delta u_j$$

Πραγματοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση στους όρους της σχέσης (2.35) έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} \partial_i \delta u_j &= \partial_i (\tau_{ij} \delta u_j) - \partial_i \tau_{ij} \delta u_j \\ \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk} &= \partial_i (\mu_{ijk} \delta \psi_{jk}) - \partial_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} \\ \sigma_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) &= \partial_i (\sigma_{ij} \delta u_j) - \partial_i \sigma_{ij} \delta u_j - \sigma_{ij} \delta \psi_{ij} \end{aligned} \quad (2.36)$$

και ομαδοποιώντας τους όρους, τελικά η σχέση (2.35) γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta W &= \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk}, \\ &= \tau_{ij} \partial_i \delta u_j + \sigma_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) + \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk} \\ &= \partial_i [(\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j] - \partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j - \sigma_{ij} \delta \psi_{ij} + \partial_i (\mu_{ijk} \delta \psi_{jk}) - \partial_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης (επίσης γνωστό και ως θεώρημα του Gauss) σύμφωνα με το οποίο για ένα διάνυσμα α

$$\int_V \partial_i a_i dV = \int_V \nabla \cdot \alpha dV = \int_S n_i a_i dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \alpha dS$$

όπου \mathbf{n} είναι το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S .

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W} &= \int_V \delta W dV \\ &= - \int_V \partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dV - \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}) \delta \psi_{jk} dV \\ &\quad + \int_S n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dS + \int_S n_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} dS. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Η μορφή της (2.38) μας παρακινεί να υιοθετήσουμε την ακόλουθη σχέση για τη μεταβολή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων [2]:

$$\delta \mathcal{W}_1 = \int_V f_j \delta u_j dV + \int_V \Phi_{jk} \delta \psi_{jk} dV + \int_S t_j \delta u_j dS + \int_S T_{jk} \delta \psi_{jk} dS \quad (2.39)$$

Οι ορισμοί των u_j και ψ_{jk} , καθώς και το γεγονός ότι οι ολοκληρωτέες ποσότητες των ολοκληρωμάτων επιφάνειας και όγκου αντιπροσωπεύουν μεταβολές του έργου ανά μονάδα επιφάνειας και όγκου, παράγουν τη φυσική σημασία των συντελεστών των δu_j και $\delta \psi_{jk}$. Έτσι, f_i είναι η καθολική δύναμη ανά μονάδα όγκου και t_i είναι η επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (ελκυστής ή διάνυσμα τάσης). Το Φ_{jk} θα πρέπει να ερμηνευτεί ως το ζεύγος δυνάμεων ανά μονάδα όγκου και το T_{jk} το ζεύγος δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας. Οι διαγώνιοι όροι των Φ_{jk} και T_{jk} είναι ζεύγη δυνάμεων χωρίς ορμή και οι μη διαγώνιοι όροι είναι ζεύγη δυνάμεων με ορμή. Και στους δύο ταυιστές Φ_{jk} και T_{jk} , ο πρώτος δείκτης δίνει τη διεύθυνση του μοχλοβραχίονα μεταξύ των δυνάμεων ενώ ο δεύτερος δείκτης δίνει τη διεύθυνση των δυνάμεων.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.33), (2.38) και (2.39) στην (2.27) και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, καταλήγουμε στη *Μεταβολική Εξίσωση της Κίνησης*:

$$\begin{aligned}
& \int_V (\partial_i \tau_{ij} + \partial_i \sigma_{ij} + f_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV + \\
& + \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} - \frac{1}{3} \rho' d_{jl}^2 \ddot{\psi}_{lk}) \delta \psi_{jk} dV + \\
& + \int_S [t_j - n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij})] \delta u_j dS + \int_S (T_{jk} - n_i \mu_{ijk}) \delta \psi_{jk} dS = 0
\end{aligned} \tag{2.40}$$

2.5 Εξισώσεις Τάσεων και Συνοριακές Συνθήκες

Γνωρίζουμε ότι ο όγκος ολοκληρώσεως στη μεταβολική εξίσωση της κίνησης αλλά και στις υπόλοιπες σχέσεις, ήταν αυθαίρετος. Συνεπώς, άμεσα προκύπτουν οι δώδεκα εξισώσεις των τάσεων, δηλαδή οι εξισώσεις κίνησης, συναρτήσει των τάσεων:

$$\begin{aligned}
\partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) + f_j &= \rho \ddot{u}_j \\
\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} &= \frac{1}{3} \rho' d_{ij}^2 \ddot{\psi}_{lk}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

και οι δώδεκα συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
t_j &= n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \\
T_{jk} &= n_i \mu_{ijk}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Λόγω των σχέσεων (2.34) και (2.42) και της φυσικής σημασίας των ε_{ij} , γ_{ij} , κ_{ijk} , η κατάλληλη ορολογία για τον ταυστή τ_{ij} φαίνεται να είναι *τάση Cauchy*, *σχετική τάση* για τον ταυστή σ_{ij} και τέλος, *ζεύγος τάσεων* ή *διπλές τάσεις* για τον ταυστή μ_{ijk} . Οι 27 ποσότητες του μ_{ijk} , δηλαδή του ζεύγους τάσεων, ερμηνεύονται ως ζεύγη δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας. Ο πρώτος δείκτης του μ_{ijk} δηλώνει τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος του επιπέδου πάνω στο οποίο δρουν οι δυνάμεις. Ο δεύτερος και ο τρίτος δείκτης δηλώνει ό,τι και στην περίπτωση του T_{jk} . Παραδείγματα του μ_{ijk} δίνονται στο Σχήμα 2.2 στο τέλος της παρούσας ενότητας. Να σημειωθεί, πως στην παρούσα θεωρία η σχετική τάση σ_{ij} είναι ένας ασύμμετρος ταυστής, σε αντίθεση με την τάση Cauchy, τ_{ij} η οποία είναι συμμετρικός ταυστής.

Εάν διατηρούσαμε πρόσθετους όρους στο ανάπτυγμα της σειράς (2.6) της μικρο-μετατόπισης u'_j , τότε θα εμφανίζονταν τάσεις υψηλότερης τάξης. Μαζί με τις τάσεις που αντιστοιχούν σε ζεύγη (2) δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας, θα εμφανίζονταν και τάσεις που αντιστοιχούν σε ν-οστές (ν) δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας.

2.6 Καταστατικές Εξισώσεις

Για την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας θεωρούμε μια ομογενή, τετραγωνική συνάρτηση των 42 μεταβλητών ε_{ij} , γ_{ij} , κ_{ijk} [2]:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + \quad (2.43)$$

$$+ d_{ijklm} \gamma_{ij} \kappa_{klm} + f_{ijklm} \kappa_{ijk} \varepsilon_{lm} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl}.$$

Μόνο 903 από τους 1458 συντελεστές στη σχέση (2.43) είναι ανεξάρτητοι. Ο αριθμός των συντελεστών, οι σχέσεις μεταξύ τους και ο αριθμός των ανεξάρτητων συντελεστών δίδεται παρακάτω:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl} : \quad 9x9 - 60 = 21 \quad (2.44)$$

$$b_{ijkl} = b_{klij} : \quad 9x9 - 36 = 45$$

$$a_{ijklmn} = a_{lmnijk} : \quad 27x27 - 351 = 378 \quad (2.45)$$

$$d_{ijklm} : \quad 9x27 = 243$$

$$f_{ijklm} = f_{ijkml} : \quad 9x27 - 81 = 162 \quad (2.46)$$

$$g_{ijkl} = g_{ijlk} : \quad 9x9 - 27 = 54$$

Προσθέτοντας τα δεύτερα μέλη των εξισώσεων, το σύνολο των ανεξάρτητων συντελεστών είναι 903.

Από τις σχέσεις (2.43) και (2.34) προκύπτουν με άμεσο τρόπο οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \tau_{pq} &= c_{pqij} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk} \\ \sigma_{pq} &= g_{pqij} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{pqijk} \kappa_{ijk} \\ \mu_{pqr} &= f_{pqrij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpqr} \gamma_{ij} + a_{pqrjk} \kappa_{ijk} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Στην περίπτωση ισοτροπικών υλικών, ο αριθμός των ανεξάρτητων συντελεστών μειώνεται δραστικά. Αφού δεν υπάρχουν ισοτροπικοί τανυστές περιττής τάξης [2], οι τανυστές d_{ijklm} και f_{ijklm} εκλείπουν. Οι εναπομείναντες συντελεστές οφείλουν να είναι ομογενείς, γραμμικές συναρτήσεις γινομένων των δέλτα του Kronecker (δ). Έχουμε 3 ανεξάρτητα γινόμενα των δύο (δ) και 15 ανεξάρτητα γινόμενα των τριών (δ). Ως εκ τούτου:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk} \\ b_{ijkl} &= b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} \\ g_{ijkl} &= g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + g_3 \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} a_{ijklmn} &= a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + a_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + a_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\ & a_4 \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn} + a_5 \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{nl} + a_6 \delta_{jk} \delta_{in} \delta_{lm} + \\ & a_7 \delta_{ki} \delta_{jl} \delta_{mn} + a_8 \delta_{ki} \delta_{jm} \delta_{nl} + a_9 \delta_{ki} \delta_{jn} \delta_{lm} + \\ & a_{10} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + a_{11} \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{in} + a_{12} \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \\ & a_{13} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{14} \delta_{jl} \delta_{kn} \delta_{im} + a_{15} \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Οι σχέσεις (2.44), (2.45), (2.46) απαιτούν τις παρακάτω 6 σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 &\equiv \mu, & g_2 &= g_3 \\ a_1 = a_6 & & a_2 = a_9 & & a_5 = a_7 & & a_{11} = a_{12} \end{aligned}$$

Οι εναπομείναντες συντελεστές έτσι, από 24 είναι πια 18. Συμπερασματικά, η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας γίνεται:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \\ & + \frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + g_1 \gamma_{ii} \varepsilon_{jj} + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \varepsilon_{ij} + \\ & + a_1 \kappa_{iik} \kappa_{kjj} + a_2 \kappa_{iik} \kappa_{jkj} + \frac{1}{2} a_3 \kappa_{iik} \kappa_{jjk} + \frac{1}{2} a_4 \kappa_{ijj} \kappa_{ikk} + \\ & + a_5 \kappa_{ijj} \kappa_{kik} + \frac{1}{2} a_8 \kappa_{iji} \kappa_{kjk} + \frac{1}{2} a_{10} \kappa_{ijk} \kappa_{ijk} + a_{11} \kappa_{ijk} \kappa_{jki} + \\ & + \frac{1}{2} a_{13} \kappa_{ijk} \kappa_{ikj} + \frac{1}{2} a_{14} \kappa_{ijk} \kappa_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} \kappa_{ijk} \kappa_{kji} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Συνεπώς, οι καταστατικές εξισώσεις γίνονται:

$$\begin{aligned} \tau_{pq} &= \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2 \mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_2 (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}) \\ \sigma_{pq} &= g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2 g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_2 \gamma_{pq} + b_3 \gamma_{qp} \\ \mu_{pqr} &= a_1 (\kappa_{iip} \delta_{qr} + \kappa_{rii} \delta_{pq}) + a_2 (\kappa_{iiq} \delta_{pr} + \kappa_{iri} \delta_{pq}) + a_3 \kappa_{iir} \delta_{pq} + \\ & + a_4 \kappa_{pii} \delta_{pr} + a_5 (\kappa_{qii} \delta_{pr} + \kappa_{ipi} \delta_{pr}) + a_8 \kappa_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} \kappa_{pqr} + \\ & + a_{11} (\kappa_{rpq} + \kappa_{qrp}) + a_{13} \kappa_{prq} + a_{14} \kappa_{qpr} + a_{15} \kappa_{rqp}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Θα δείξουμε, με χρήση της σχέσης (2.50) και των σχέσεων (2.34) πώς προέκυψε η σχέση (2.51)₁

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right)}{\partial \varepsilon_{pq}}$$

Εάν $p \neq q \rightarrow$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right)}{\partial \varepsilon_{pq}} = 0$$

Εάν $p = q$, από παραγωγή γινομένου \rightarrow

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right)}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{jj} + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} = \lambda \varepsilon_{ii}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right)}{\partial \varepsilon_{pq}} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} \quad (2.52)$$

Ομοίως προκύπτουν και οι υπόλοιποι όροι της σχέσης (2.51)₁.

Στη σχέση (2.51)₂, ο όρος που αξίζει να αναλυθεί είναι ο $\frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji}$.

$$\frac{\partial(\frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji})}{\partial \gamma_{pq}} = \frac{\partial(\frac{1}{2} b_3 \gamma_{pq}^2)}{\partial \gamma_{pq}} = b_3 \gamma_{qp}$$

2.7 Εξισώσεις Μετατοπίσεων

Μπορούν να εξαχθούν 12 εξισώσεις κίνησης για τις 12 μεταβλητές της μετατόπισης u_i και της μικρο-παραμόρφωσης ψ_{ij} . Πρώτα θα αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (2.11), (2.13), (2.14) δηλαδή τις σχέσεις ορισμού των ε_{ij} , γ_{ij} και κ_{ijk} στις καταστατικές εξισώσεις (2.51) και έπειτα, τις τελευταίες στις εξισώσεις κίνησης συναρτήσεως των τάσεων (2.41).

Δεν είναι αναγκαίο να υποθέσουμε χωρικά ομογενείς ιδιότητες του υλικού. Στην πραγματικότητα, οι συντελεστές της ελαστικότητας αλλά και οι πυκνότητες μπορούν να θεωρηθούν περιοδικές συναρτήσεις των πλάγιων συντεταγμένων οι οποίες είναι παράλληλες στα άκρα της κυψελίδας της μικροδομής, με περίοδο $2d_i$. Το τελευταίο θα βοηθούσε στην αναπαράσταση της περιοδικής δομής του κρυσταλλικού πλέγματος. Ωστόσο, αυτό θα καθιστούσε τις εξισώσεις δύσχρηστες.

Η περίπτωση της ισοτροπίας είναι ιδιαίτερος εύκολη, και επίσης εμπεριέχει και πολλές από τις νέες ιδιότητες του μακρο-ομογενούς υλικού.

Στην περίπτωση της ισοτροπίας, οι καταστατικές εξισώσεις (2.51) ισχύουν όπως επίσης και οι σχέσεις (2.25). Τότε, για ένα μακρο-ομογενές, ισοτροπικό υλικό, οι εξισώσεις των u_i και ψ_{ij} είναι

$$\begin{aligned} & (\mu + 2g_2 + b_2) \partial_j \partial_j u_i + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) \partial_i \partial_j u_j - \\ & - (g_1 + b_1) \partial_i \psi_{jj} - (g_2 + b_2) \partial_j \psi_{ji} - (g_2 + b_3) \partial_j \psi_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_5) (\partial_k \partial_l \psi_{kl} \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi_{kk}) + (a_2 + a_{11}) (\partial_j \partial_k \psi_{ki} + \partial_i \partial_k \psi_{jk}) + \\ & + (a_3 + a_{14}) \partial_i \partial_k \psi_{kj} + a_4 \partial_k \partial_k \psi_{ll} \delta_{ij} + (a_8 + a_{15}) \partial_j \partial_k \psi_{ik} + \\ & + a_{10} \partial_k \partial_k \psi_{ij} + a_{13} \partial_k \partial_k \psi_{ji} + g_1 \partial_k u_k \delta_{ij} + g_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \\ & + b_1 (\partial_k u_k - \psi_{kk}) \delta_{ij} + b_2 (\partial_i u_j - \psi_{ij}) + b_3 (\partial_j u_i - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.8 Μικρο-δονήσεις

Ας θεωρήσουμε λύσεις των (2.53) και (2.54) της μορφής

$$u_i = f_i = \Phi_{ij} = 0, \quad \psi_{ij} = A_{ij} e^{i\omega t}, \quad (2.55)$$

όπου A_{ij} είναι σταθερές. Τότε οι εξισώσεις (2.53) ικανοποιούνται ταυτοτικά, ενώ οι (2.54) γίνονται:

$$b_1 \delta_{ij} A_{kk} + b_2 A_{ij} + b_3 A_{ji} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A_{ij}, \quad (2.56)$$

οι οποίες επιδέχονται τις ακόλουθες λύσεις:

διαστολικός ρυθμός:

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}; \quad A_{ij} = 0, \quad i \neq j;$$

για $i = j \rightarrow$

$$(3b_1 + b_2 + b_3) A = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A$$

για $i \neq j \rightarrow$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

Συνεπώς, λύνοντας ως προς ω προκύπτει:

$$\omega_d^2 = 3(3b_1 + b_2 + b_3) / \rho' d^2; \quad (2.57)$$

εγκάρσιοι ρυθμοί:

$$A_{ji} = A_{ij}, \quad i \neq j; \quad A_{ij} = 0, \quad i = j;$$

για $i = j \rightarrow$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

για $i \neq j \rightarrow$

$$A_{ij} (b_2 + b_3) = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A_{ij}$$

Συνεπώς, λύνοντας ως προς ω προκύπτει:

$$\omega_s^2 = 3(b_2 + b_3) / \rho' d^2; \quad (2.58)$$

ισοογκικοί εκτατικοί ρυθμοί:

$$A_{ii} = 0; \quad A_{ij} = 0, \quad i \neq j;$$

για $i = j \rightarrow$

$$b_2 A_{ii} + b_3 A_{ii} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A_{ii}$$

για $i \neq j \rightarrow$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

Συνεπώς, λύνοντας ως προς ω προκύπτει:

$$\omega_s^2 = 3(b_2 + b_3) / \rho' d^2; \quad (2.59)$$

περιστροφικοί ρυθμοί:

$$A_{ii} = -A_{ji},$$

για $i = j \rightarrow$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

για $i \neq j \rightarrow$

$$b_2 A_{ii} - b_3 A_{ii} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A_{ii}$$

Συνεπώς, λύνοντας ως προς ω προκύπτει:

$$\omega_r^2 = 3(b_2 - b_3) / \rho' d^2; \quad (2.60)$$

Το γεγονός ότι η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας είναι θετική ποσότητα απαιτεί:

$$3b_1 + b_2 + b_3 > 0, \quad b_2 + b_3 > 0, \quad b_2 - b_3 > 0.$$

Ως εκ τούτου, οι συχνότητες ω_a , ω_s και ω_r είναι πραγματικές συχνότητες. Θα πρέπει να αναμένουμε τα διαμήκη και εγκάρσια ακουστικά κύματα, στο τρισδιάστατο συνεχές με μικροδομή, να συνδυάζονται με τους μικρο-ρυθμούς για να σχηματίσουν οπτικούς κλάδους.

2.9 Επίπεδα Κύματα, μεγάλα μήκη κύματος

Επίπεδο είναι το κύμα του οποίου το μέτωπο κύματος (δηλαδή οι επιφάνειες σταθερής φάσης) είναι άπειρα επίπεδα παράλληλα μεταξύ τους.

Το διάνυσμα \vec{k} είναι το κάθετο διάνυσμα σε κάθε μέτωπο κύματος, ενώ το διάνυσμα \vec{r} είναι το διάνυσμα θέσης. Συνεπώς, το μέτωπο κύματος ενός επίπεδου κύματος αν $\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{r} = (x, y, z)$, είναι της μορφής:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = x a_1 + y a_2 + z a_3 - \omega t = C$$

δηλαδή επίπεδο, $\forall t$.

Ας θεωρήσουμε λύσεις των (2.53) και (2.54) με τις καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου f_i και τα ζεύγη καθολικών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου Φ_{ij} αμφοτέρα ίσα με το μηδέν και

$$u_i = u_i(x_1, t), \quad \psi_{ij} = \psi_{ij}(x_1, t) \quad (2.61)$$

Μέσω γραμμικών συνδυασμών, οι 12 εξισώσεις μπορούν να διευθετηθούν σε 3 ανεξάρτητες εξισώσεις και 3 ανεξάρτητα συστήματα 3 εξισώσεων το καθένα:

εγκάρσια οπτικά I:

$$(a_{10} + a_{13}) \partial_1 \partial_1 \psi_{(23)} - (b_2 + b_3) \psi_{(23)} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{(23)}; \quad (2.62)$$

εγκάρσια οπτικά II:

Ομοίως με την (2.62) εκτός από τον όρο $\psi_{(23)}$ ο οποίος αντικαθίστανται από τον $\psi_{22} - \psi_{33}$;

περιστροφικά οπτικά:

$$(a_{10} - a_{13}) \partial_1 \partial_1 \psi_{[23]} - (b_2 - b_3) \psi_{[23]} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{[23]}; \quad (2.63)$$

διαμήκες σύστημα:

$$\begin{aligned} k_{11} \partial_1 \partial_1 u_1 - k_{12} \partial_1 \psi_{11}^D - k_{13} \partial_1 \psi &= \rho \ddot{u}_1, \\ k_{21} \partial_1 u_1 + k_{22} \partial_1 \partial_1 \psi_{11}^D - k'_{22} \psi_{11}^D + k_{23} \partial_1 \partial_1 \psi &= \frac{1}{2} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{11}^D, \\ k_{31} \partial_1 u_1 + k_{32} \partial_1 \partial_1 \psi_{11}^D + k_{33} \partial_1 \partial_1 \psi - k'_{33} \psi &= \rho' d^2 \ddot{\psi}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

Ας εξηγήσουμε πώς προέκυψαν οι ως άνω σχέσεις, έστω η σχέση (2.64)₁. Η σχέση προέκυψε, θέτοντας $i = 1$ στη σχέση (2.53)

$$\begin{aligned}
& (\mu + 2g_2 + b_3) \partial_1 \partial_1 u_1 + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) \partial_1 \partial_1 u_1 - \\
& - (g_1 + b_1) \partial_1 (\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}) - (g_2 + b_2) \partial_1 \psi_{11} - (g_2 + b_3) \partial_1 \psi_{11} = \rho \ddot{u}_1 \implies \\
& (2\mu + 4g_2 + b_3 + \lambda + 2g_1 + b_1 + b_3) \partial_1 \partial_1 u_1 - (2g_2 + b_2 + b_3) \psi_{11}^D - \\
& (3g_1 + 2g_2 + 3b_1 + b_2 + b_3) \partial_1 \psi = \rho \ddot{u}_1 \implies \\
& k_{11} \partial_1 \partial_1 u_1 - k_{12} \partial_1 \psi_{11}^D - k_{13} \partial_1 \psi = \rho \ddot{u}_1
\end{aligned}$$

όπου $\psi = \frac{1}{3} \psi_{ii}$, $\psi_{11}^D = \psi_{11} - \psi$ και

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 2\mu + 4g_2 + b_2 + \lambda + 2g_1 + b_1 + b_3, \\
k_{22} &= 2a_2 + a_3 + a_8 + \frac{3}{2}a_{10} + 2a_{11} + \frac{3}{2}a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
k_{33} &= 6a_1 + 2a_2 + a_3 + 9a_4 + 6a_5 + a_8 + 3a_{10} + 2a_{11} + 3a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
k_{23} &= k_{32} = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_5 + a_8 + 2a_{11} + a_{14} + a_{15}, \\
k_{13} &= k_{31} = 3g_1 + 2g_2 + 3b_1 + b_2 + b_3, \\
k_{12} &= k_{21} = 2g_2 + b_2 + b_3, \\
k'_{22} &= \frac{3}{2}(b_2 + b_3), \\
k'_{33} &= 3(3b_1 + b_2 + b_3);
\end{aligned}$$

εγκάρσιο σύστημα I:

$$\begin{aligned}
& \bar{k}_{11} \partial_1 \partial_1 u_2 - \bar{k}_{12} \partial_1 \psi_{(12)} - \bar{k}_{13} \partial_1 \psi_{[12]} = \rho \ddot{u}_2, \\
& \bar{k}_{21} \partial_1 u_2 + \bar{k}_{22} \partial_1 \partial_1 \psi_{(12)} - \bar{k}'_{22} \psi_{(12)} + \bar{k}_{23} \partial_1 \partial_1 \psi_{[12]} = \frac{2}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{(12)}, \\
& \bar{k}_{31} \partial_1 u_2 + \bar{k}_{32} \partial_1 \partial_1 \psi_{(12)} + \bar{k}_{33} \partial_1 \partial_1 \psi_{[12]} - \bar{k}'_{33} \psi_{[12]} = \frac{2}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{[12]};
\end{aligned} \tag{2.65}$$

όπου,

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{11} &= \mu + 2g_2 + b_2, \\
\bar{k}_{22} &= 2a_2 + a_3 + a_8 + 2a_{10} + 2a_{11} + 2a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
\bar{k}_{33} &= -2a_2 + a_3 + a_8 + 2a_{10} - 2a_{11} - 2a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\
\bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = a_3 - a_8 + a_{14} - a_{15} \\
\bar{k}_{31} &= \bar{k}_{13} = b_2 - b_3, \\
\bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 2g_2 + b_2 + b_3, \\
\bar{k}'_{22} &= 2(b_2 + b_3), \\
\bar{k}'_{33} &= 2(b_2 - b_3);
\end{aligned} \tag{2.66}$$

εγκάρσιο σύστημα II:

Ομοίως με το εγκάρσιο σύστημα I, με τη διαφορά ότι τα $u_2, \psi_{(12)}$ και $\psi_{[12]}$ αντικαθίστανται από τα $u_3, \psi_{(13)}$ και $\psi_{[13]}$, αντίστοιχα.

Εάν τώρα, οι (2.61) εξειδικευτούν στα επίπεδα κύματα

$$u_i = A_i i e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]}, \quad \psi_{ij} = B_{ij} e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]} \quad (2.67)$$

Τότε προκύπτουν 4 σχέσεις διασποράς (ξ vs. ω):

εγκάρσια οπτικά κύματα (SO) (δύο φορές):

$$\frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 = b_2 + b_3 + (a_{10} + a_{13}) \xi^2; \quad (2.68)$$

Ας εξηγήσουμε πώς προκύπτει η σχέση (2.68). Έχουμε $\psi_{(23)} = B_{(23)} e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]} = (B_{23} + B_{32}) \frac{1}{2} e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]}$. Αντικαθιστώντας το $\psi_{(23)}$ στη σχέση (2.62) και πραγματοποιώντας τις παραγωγές, προκύπτει:

$$\begin{aligned} [(a_{10} + a_{13}) B_{(23)} (i\xi)^2 - (b_2 + b_3) B_{(23)}] e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]} = \\ \frac{1}{3} \rho' d^2 (-i\omega)^2 B_{(23)} e^{[i(\xi x_1 - \omega t)]} \implies \\ \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 = b_2 + b_3 + (a_{10} + a_{13}) \xi^2 \end{aligned}$$

περιστροφικά οπτικά κύματα (RO):

$$\frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 = b_2 - b_3 + (a_{10} - a_{13}) \xi^2; \quad (2.69)$$

Η σχέση (2.69) προκύπτει ομοίως με τη σχέση (2.68) με τη διαφορά πως αντί για $\psi_{(23)}$ έχουμε $\psi_{[23]}$ το οποίο και αντικαθίστανται στη σχέση (2.63) αυτήν τη φορά.

διαμήκη κύματα (LA, LO, LDO):

$$\left\| \begin{array}{ccc} k_{11} \xi^2 - \rho \omega^2 & k_{12} \xi & k_{13} \xi \\ k_{21} \xi & k_{22} \xi^2 + k'_{22} - \frac{1}{2} \rho' d^2 \omega^2 & k_{23} \xi^2 \\ k_{31} \xi & k_{32} \xi^2 & k_{33} \xi^2 + k'_{33} - \rho' d^2 \omega^2 \end{array} \right\| = 0 \quad (2.70)$$

εγκάρσια κύματα (TA, TO, TRO) (δύο φορές):

$$\begin{vmatrix} \bar{k}_{11} \xi^2 - \rho \omega^2 & \bar{k}_{12} \xi & \bar{k}_{13} \xi \\ \bar{k}_{21} \xi & \bar{k}_{22} \xi^2 + \bar{k}'_{22} - \frac{2}{3} \rho' d^2 \omega^2 & \bar{k}_{23} \xi^2 \\ \bar{k}_{31} \xi & \bar{k}_{32} \xi^2 & \bar{k}_{33} \xi^2 + \bar{k}'_{33} - \frac{2}{3} \rho' d^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.71)$$

Στις σχέσεις διασποράς (2.68) και (2.69) για τους μη συζευγμένους ρυθμούς δηλαδή, υπάρχουν συχνότητες αποκοπής ω_s και ω_ρ , αντίστοιχα, για τις οποίες η ταχύτητα ομάδας ($d\omega/d\xi$) είναι μηδέν. Η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας ως θετική ποσότητα απαιτεί:

$$a_{10} + a_{13} > 0, \quad a_{10} - a_{13} > 0 \quad (2.72)$$

Συνεπώς, οι συχνότητες αυξάνονται, από την τιμή αποκοπής, όσο αυξάνονται και οι πραγματικοί κυματαριθμοί. Κάτω από τις συχνότητες αποκοπής, οι κυματαριθμοί είναι καθαρά φανταστικοί αριθμοί με τιμές αποκοπής:

$$\xi = \pm i \left(\frac{b_2 + b_3}{a_{10} + a_{13}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \pm i \left(\frac{b_2 - b_3}{a_{10} - a_{13}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

αντίστοιχα, για μηδενική συχνότητα.

Η συμπεριφορά των ακουστικών κλάδων των (2.70) και (2.71), για μικρές συχνότητες, περιγράφεται από τα ω'_i , ω''_i , ω'''_i ($i = 1$ για τους διαμήκεις ακουστικούς κλάδους και $i = 2$ για τους εγκάρσιους): τις τιμές δηλαδή, για $\omega = 0$ και $\xi = 0$ της πρώτης, δεύτερης και τρίτης παραγώγου του ω ως προς ξ . Βρίσκουμε έτσι:

$$\omega'_i = \tilde{v}_i, \quad \omega''_i = 0, \quad \omega'''_i = 3 \tilde{v}_i (\tilde{l}_i^2 - h_i^2), \quad (2.74)$$

όπου

$$\tilde{v}_1^2 = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) / \rho, \quad \tilde{v}_2^2 = \tilde{\mu} / \rho, \quad (2.75)$$

$$(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) = \lambda + 2\mu - \frac{8g_2^2}{3(b_2 + b_3)} - \frac{(3g_1 + 2g_2)^2}{3(3b_1 + b_2 + b_3)}, \quad (2.76)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{2g_2^2}{b_2 + b_3}, \quad (2.77)$$

$$\tilde{l}_1^2 = 2(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5) / (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}), \quad \tilde{l}_2^2 = 2(\tilde{a}_3 + \tilde{a}_4) / \tilde{\mu}, \quad (2.78)$$

$$h_1^2 = \rho' d^2 [2a^2 + (a + \beta)^2] / 3\rho, \quad h_2^2 = \rho' d^2 (1 + \beta^2) / 6\rho, \quad (2.79)$$

$$\alpha = \frac{1}{b_2 + b_3} \left(g_1 - \frac{b_1(3g_1 + 2g_2)}{3b_1 + b_2 + b_3} \right), \quad \beta = 1 + \frac{2g_2}{b_2 + b_3}, \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 = & \frac{1}{2} [(1 + \beta)(3\alpha + \beta)\alpha_1 + (1 + 2\alpha\beta + \beta^2)\alpha_2 - \frac{1}{2}(1 + \beta)(1 - 2\alpha - \beta)\alpha_3 - \\ & - (1 - \beta)(3\alpha + \beta)\alpha_5 - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 + 2\alpha + \beta)\alpha_8 + 2\alpha\beta\alpha_{11} - \alpha(1 - \beta)\alpha_{14} + \\ & + \alpha(1 + \beta)\alpha_{15}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 = & \frac{1}{2} [-(1 - 2\alpha - \beta)(3\alpha + \beta)\alpha_1 - \frac{1}{2}[1 - (2\alpha + \beta)^2]\alpha_2 + \frac{1}{4}(1 - 2\alpha - \beta)^2\alpha_3 \\ & + (3\alpha + \beta)^2\alpha_4 + (3\alpha + \beta)(1 + 2\alpha + \beta)\alpha_5 + \frac{1}{4}(1 + 2\alpha + \beta)^2\alpha_8 + \\ & + \alpha(3\alpha + 2\beta)\alpha_{10} + 2\alpha(\alpha + \beta)\alpha_{11} + \alpha(3\alpha + 2\beta)\alpha_{13} + \alpha(1 + \alpha + \beta)\alpha_{14} - \\ & - \alpha(1 - \alpha - \beta)\alpha_{15}], \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_3 = \frac{1}{4} [-(1 - \beta^2)\alpha_2 + \frac{1}{2}(1 + \beta^2)\alpha_3 + \frac{1}{2}(1 - \beta)^2\alpha_8],$$

$$\tilde{a}_4 = \frac{1}{4} [(1 + \beta^2)\alpha_{10} + (1 - \beta^2)(\alpha_{11} - \alpha_{13}) + \frac{1}{2}(1 + \beta)^2\alpha_{14} + \frac{1}{2}(1 - \beta)^2\alpha_{15}],$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_5 = & \frac{1}{4} [-(1 - \beta^2)\alpha_{10} + (1 + 3\beta^2)\alpha_{11} + (1 + \beta^2)\alpha_{13} - \frac{1}{2}(1 + 2\beta - 3\beta^2)\alpha_{14} - \\ & - \frac{1}{2}(1 - 2\beta - 3\beta^2)\alpha_{15}], \end{aligned} \quad (2.81)$$

Η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας απαιτεί: $\tilde{\mu}, \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}, \tilde{l}_i^2 > 0$, ενώ $h_i^2 > 0$ από υπόθεση.

Μπορεί ναδειχθεί, πως οι ταχύτητες ομάδας \tilde{v}_i , είναι μικρότερες από εκείνες που θα υπολόγιζε κανείς από τις δυσκαμψίες λόγω τροπής $\lambda + 2\mu$ και μ . Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην ενδοτικότητα της κυψελίδας της μικροδομής και αναφέρεται επίσης και στη θεωρία κρυσταλλικών πλεγμάτων. Στο βαθμό που $\omega_i''' = 0$, οι ταχύτητες ομάδας, για μηδενική συχνότητα, είτε μεγιστοποιούνται ή ελαχιστοποιούνται. Το ποιά από τα δύο θα συμβαίνει εξαρτάται από την παράγωγο, δηλαδή η ω_i'''' ούσα θετική ή αρνητική, το οποίο με τη σειρά του εξαρτάται από το αν \tilde{l}^2 είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το h^2 . Τα \tilde{l}^2 και h^2 είναι θετικές ποσότητες οι οποίες είναι ιδιότητες του μήκους του υλικού και εξαρτώνται από τη δυσκαμψία, την πυκνότητα, αλλά και το μέγεθος της κυψελίδας της μικροδομής. Αν και το d είναι πιθανότητα μικρότερο από τα \tilde{l}_i , ο λόγος των πυκνοτήτων ρ'/ρ αλλά και οι λόγοι δυσκαμψίας a και β καθορίζουν αν μεγαλύτερο θα είναι το \tilde{l} ή το h . Ως εκ τούτου, όσο η συχνότητα ξεκινάει από το μηδέν και αυξάνεται, και οι δύο ταχύτητες ομάδες μπορούν να αυξηθούν ή να μειωθούν και οι δύο, ή η μία να αυξηθεί και η άλλη να μειωθεί - ανάλογα με τις ιδιότητες του υλικού.

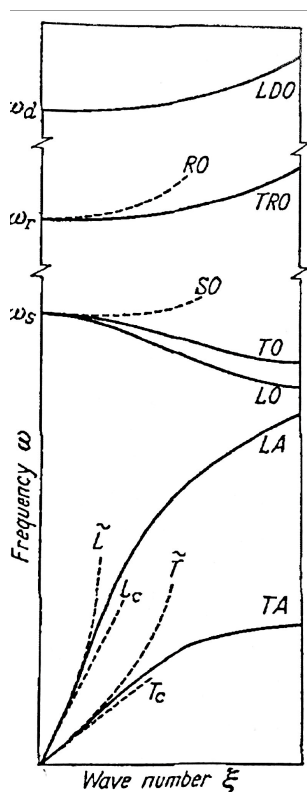


Fig. 3. Sketch of possible configuration of real branches of dispersion curves. **T** transverse; **L** longitudinal; **A** acoustic; **O** optical; **S** shear; **R** rotational; **D** dilatational; \tilde{T} , \tilde{L} low frequency approximation; T_c , L_c classical elasticity

Όσον αφορά στους οπτικούς κλάδους, στο διαμήκες σύστημα έχουν μεγάλο μήκος κύματος συχνότητες αποκοπής ω_s και ω_d ενώ οι αντίστοιχες ποσότητες για το εγκάρσιο σύστημα είναι ω_s και ω_r . Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα δύο συστήματα έχουν μία συχνότητα αποκοπής κοινή, την ω_s . Η ταχύτητα ομάδας και των τεσσάρων οπτικών κλάδων (LO, LDO, TO, SO) είναι μηδέν στις μεγάλοι μήκος κύματος συχνότητες αποκοπής.

2.10 Προσέγγιση μικρής συχνότητας - πολύ μεγάλου μήκους κύματος: Μορφή II Mindlin

Η ενότητα αυτή είναι αφιερωμένη στην εξαγωγή εξισώσεων κίνησης, πιο απλών από τις (2.53) και (2.54) αλλά και πιο περιορισμένων, από άποψη εφαρμογής, σε πολύ χαμηλότερες συχνότητες και πολύ μεγαλύτερα μήκη κύματος. Η εγκυρότητα των εξισώσεων κίνησης που θα εξάγουμε θα κριθεί από το εάν θα αποδώσουν τις ίδιες ακριβώς σχέσεις διασποράς με τις γενικές εξισώσεις κίνησης για $\omega \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$ για τους ακουστικούς κλάδους. Συνεπώς, στην περίπτωση της ισοτροπίας, οι τιμές των ω'_i , ω''_i , ω'''_i στις σχέσεις (2.74) πρέπει να αναπαραχθούν με απόλυτη ακρίβεια. Θα επικεντρωθούμε λοιπόν σε αυτήν την περίπτωση διότι είναι πολύ πιο απλή από την αντίστοιχη ανισοτροπική αλλά και επειδή οι σχέσεις (2.74) θα λειτουργήσουν ως επαλήθευση. Με παρατήρηση της σχέσης (2.74)₃ φαίνεται πως δεν είναι επιτρεπτό να παραμερίσουμε τις μικρο-ταχυτήτες ψ_{ij} . Η δράση τους εμπεριέχεται μέσα στους όρους h_i^2 και όπως έχει ήδη αναφερθεί, το h^2 μπορεί να είναι είτε μικρότερο ή μεγαλύτερο από το \tilde{l}^2 , ανάλογα με το λόγο δυσκαμψίας, πυκνότητας και τις διαστάσεις της κυψελίδας της μικροδομής. Συμπερασματικά, η παράλειψη των μικρο-ταχυτήτων ψ_{ij} θα αποκλείσει την αναπαράγωγή της συμπεριφοράς χαμηλής συχνότητας.

Έτσι, κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

$$\sigma_{(ij)} = 0, \quad (2.82)$$

$$b_2 - b_3 \rightarrow \infty, \quad \gamma_{[ij]} \rightarrow 0 \quad (2.83)$$

και συνεχίζουμε παραθέτοντας την επίδραση των ως άνω υποθέσεων στους υπόλοιπους όρους.

Οι ισοτροπικές καταστατικές εξισώσεις για την τάση Cauchy τ_{pq} και τη σχετική τάση σ_{pq} , με διαχωρισμό σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος είναι:

$$\begin{aligned} \tau_{pq} &= \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + 2g_2 \gamma_{(pq)}, \\ \sigma_{(pq)} &= g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + (b_2 + b_3) \gamma_{(pq)}, \\ \sigma_{[pq]} &= (b_2 - b_3) \gamma_{[pq]} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Τότε, λόγω των (2.83), το $\sigma_{[pq]}$ είναι απροσδιόριστο στη σχέση (2.84)₃ και με βάση τη (2.82) η σχέση (2.84)₂ μπορεί να λυθεί ως προς $\gamma_{(pq)}$ συναρτήσει των ε_{pq} :

$$\gamma_{(pq)} = -\alpha \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + (1 - \beta) \varepsilon_{pq}, \quad (2.85)$$

όπου α και β , δίνονται από τις σχέσεις (2.80).

Αναφορικά με τη βαθμίδα της μικρο-παραμόρφωσης κ_{ijk} , σημειώνουμε πρώτα ότι αφού

$$\gamma_{pq} = \partial_p u_q - \psi_{pq} \quad (2.86)$$

και το $\gamma_{[pq]}$ είναι μηδέν, αναλύοντας τους τανυστές της σχέσης (2.87) σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος, (θεώρημα διαχωρισμού), μας μένει μόνο

$$\psi_{[pq]} = \omega_{pq}, \quad \psi_{(pq)} = \varepsilon_{pq} - \gamma_{(pq)} \quad (2.87)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.85) για το $\gamma_{(pq)}$ έχουμε:

$$\psi_{(pq)} = \alpha \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + \beta \varepsilon_{pq}. \quad (2.88)$$

Αναλόγως, η βαθμίδα της μικρο-παραμόρφωσης $\kappa_{ijk} \equiv \partial_i \psi_{jk} = \partial_i \psi_{(jk)} + \partial_i \psi_{[jk]}$ μειώνεται

$$\kappa_{ijk} \rightarrow \alpha \tilde{\kappa}_{ill} \delta_{jk} + \frac{1}{2} (1 + \beta) \tilde{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{2} (1 - \beta) \tilde{\kappa}_{ikj}, \quad (2.89)$$

όπου,

$$\tilde{\kappa}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j u_k = \tilde{\kappa}_{jik} \quad (2.90)$$

Παρατηρούμε ότι το $\tilde{\kappa}_{ijk}$ που ορίσαμε, δηλαδή η δεύτερη βαθμίδα της μετατόπισης, παρουσιάζει συμμετρία μεταξύ πρώτου και δεύτερου δείκτη.

Συνεπώς, το μέρος της πυκνότητας της δυναμικής ενέργειας που είναι συνάρτηση του κ_{ijk} , γίνεται τώρα συνάρτηση του $\tilde{\kappa}_{ijk}$. Τα 18 στοιχεία του $\tilde{\kappa}_{ijk}$ μπορεί να διαταχθούν, με πολλούς τρόπους, σε τανυστές των οποίων τα στοιχεία είναι ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί των $\partial_i \partial_j u_k$; έτσι ώστε να είναι δυνατό να δημιουργηθούν διαφορετικές μορφές πυκνότητας της δυναμικής ενέργειας.

Κατά την αντικατάσταση των σχέσεων (2.83), (2.85), και (2.89) στην (2.50), βρίσκουμε τη μορφή I για την προσέγγιση μικρής συχνότητας, πολύ μεγάλου μήκους κύματος, της πυκνότητας της δυναμικής ενέργειας.

$$W \rightarrow \tilde{W} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{kjj} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\kappa}_{ijj} \tilde{\kappa}_{ikk} + \tilde{\alpha}_3 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{jjk} + \tilde{\alpha}_4 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\alpha}_5 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{kji}, \quad (2.91)$$

Όπως προαναφέρθηκε, οι 18 ποσότητες του $\partial_i \partial_j u_k$ μπορεί να διαταχθούν σε ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς οι οποίοι να σχηματίζουν τανυστές. Ένας τέτοιος συνδυασμός είναι και βαθμίδα της τροπής:

$$\hat{\kappa}_{ijk} \equiv \partial_i \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \hat{\kappa}_{ikj} \quad (2.92)$$

Παρατηρούμε ότι το $\hat{\kappa}_{ijk}$ που ορίσαμε, δηλαδή η βαθμίδα της τροπής, παρουσιάζει συμμετρία μεταξύ δεύτερου και τρίτου δείκτη. Αυτή είναι μία ειδοποιός διαφορά σε σχέση με τη δεύτερη βαθμίδα της μετατόπισης, της οποίας τη σημασία θα κατανοήσουμε πλήρως παρακάτω.

Η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας, για την προσέγγιση μικρής συχνότητας, πολύ μεγάλου μήκους κύματος, μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των ε_{ij} και $\hat{\kappa}_{ijk}$ θέτοντας

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} - \hat{\kappa}_{kij} \quad (2.93)$$

στην (2.91), με αποτέλεσμα:

$$W \rightarrow \hat{W} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \hat{\alpha}_1 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{kjj} + \hat{\alpha}_2 \hat{\kappa}_{ijj} \hat{\kappa}_{ikk} + \hat{\alpha}_3 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{jjk} + \hat{\alpha}_4 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\alpha}_5 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{kji}. \quad (2.94)$$

όπου,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= 2\tilde{\alpha}_1 - 4\tilde{\alpha}_3, & \hat{\alpha}_2 &= -\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3 \\ \hat{\alpha}_3 &= 4\tilde{\alpha}_3, & \hat{\alpha}_4 &= 3\tilde{\alpha}_4 - \tilde{\alpha}_5, & \hat{\alpha}_5 &= -2\tilde{\alpha}_4 + 2\tilde{\alpha}_5. \end{aligned} \quad (2.95)$$

όπου $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ δίνονται από τη σχέση (2.76) και $\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_5$ από τις σχέσεις (2.81). Η εμφάνιση αυτών των συντελεστών είναι μια πρώτη ένδειξη της εγκυρότητας της διαδικασίας.

Νέες τάσεις ορίζονται:

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji}, \quad (2.96)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj}, \quad (2.97)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και τη σχέση (2.94) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{pq} &= \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq}, \\ \hat{\mu}_{pqr} &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{r ii} + 2\delta_{qr} \hat{\kappa}_{i ip} + \delta_{rp} \hat{\kappa}_{q ii}) + 2\hat{\alpha}_2 \delta_{qr} \hat{\kappa}_{p ii} + \\ &+ \hat{\alpha}_3 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{i ir} + \delta_{pr} \hat{\kappa}_{i iq}) + 2\hat{\alpha}_4 \hat{\kappa}_{pqr} + \hat{\alpha}_5 (\hat{\kappa}_{rqp} + \hat{\kappa}_{qrp}). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Η Μεταβολική Εξίσωση της Κίνησης θα εξαχθεί όπως και στην ενότητα 2.4, από την αρχή του Hamilton για την ανεξάρτητη μεταβολή δu_i και μόνο, καθώς από τις σχέσεις (2.87)₁ και (2.88), ο ψ_{ij} δεν είναι πλέον ανεξάρτητος από τις μακρο-μετατοπίσεις u_i , όπως ήταν στην ενότητα 2.4.

Η μεταβολή της πυκνότητας της δυναμικής ενέργειας είναι:

$$\begin{aligned} \delta \hat{W} &= \hat{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk} = \hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k \\ &= \partial_j [(\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k] - \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Στην ενότητα 2.4 δείξαμε ότι $\tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \tau_{ij} \partial_i \delta u_j$. Προφανώς, η ίδια διαπίστωση ισχύει και στην παρούσα ενότητα καθώς για τον ταυυστή της τάσης εξακολουθεί να ισχύει: $\hat{\tau}_{ij} = \hat{\tau}_{ji}$, και ο ταυυστής της στροφής ω_{ij} παραμένει ο ίδιος.

Με παρόμοιο τρόπο, θα δείξουμε και ότι

$$\hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k$$

Μέσω της σχέσης (2.92) και της (2.10) έχουμε:

$$\hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk} = \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \delta \varepsilon_{jk} = \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k - \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \delta \omega_{jk}$$

Ο όρος $\hat{\mu}_{ijk} \partial_i \delta \omega_{jk}$ είναι ένα άθροισμα, το οποίο είναι μηδέν, λόγω της αντισυμμετρικότητας του ταυυστή στροφής δηλαδή, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ αλλά και της συμμετρίας δεύτερου και τρίτου όρου του ταυυστή $\hat{\mu}_{ijk}$, δηλαδή, $\hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu}_{ikj}$.

Η (2.99)₃ προκύπτει πραγματοποιώντας παραγοντικές ολοκληρώσεις στην (2.99)₂, και στη συνέχεια ομαδοποιώντας κατάλληλα τους όρους που προκύπτουν.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k &= \hat{\tau}_{jk} \partial_j \delta u_k + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k = \\ \partial_j (\hat{\tau}_{jk} \delta u_k) - \partial_j \hat{\tau}_{jk} \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k) - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k &= \\ \partial_j (\hat{\tau}_{jk} \delta u_k) - \partial_j \hat{\tau}_{jk} \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k) - \partial_j (\partial_i \hat{\mu}_{ijk} \delta u_k) + \partial_j \partial_i \hat{\mu}_{ijk} \delta u_k \end{aligned}$$

Μέσω του Θεωρήματος της απόκλισης, βρίσκουμε τη μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας,

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathcal{W}} &= \int_V \delta \hat{W} dV = \int_S n_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k dS - \\ &\quad - \int_V \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k dV + \int_S n_i \hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k dS. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Όσον αφορά στην κινητική ενέργεια, οι μικρο-ταχύτητες $\dot{\psi}_{ij}$ στη σχέση (2.22) πρέπει να αντικατασταθούν από μία γραμμική συνάρτηση βαθμίδων των μακρο-ταχυτήτων:

$$\dot{\psi}_{ij} \rightarrow h_{ijkl} \partial_k \dot{u}_l \quad (2.101)$$

όπου,

$$h_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.102)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (2.87)₁ και (2.88).

Τότε, η πυκνότητα της κινητικής ενέργειας (2.22) γίνεται:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n \partial_p \dot{u}_k, \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \partial_p [\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k] - \frac{1}{6} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k, \end{aligned} \quad (2.103)$$

όπου,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{pkmn}^2 &\equiv d_{jl}^2 h_{lqpk} h_{jqmn} = \tilde{d}_{mnpq}^2 \\ &= \frac{1}{2} d^2 [\delta_{pm} \delta_{kn} - \delta_{pn} \delta_{km} + 2\alpha (3\alpha + 2\beta) \delta_{pq} \delta_{mn} + \beta^2 (\delta_{pm} \delta_{kn} + \delta_{pn} \delta_{km})]. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Η Μεταβολική Εξίσωση της Κίνησης που προκύπτει μας οδηγεί με τη σειρά της στις Εξισώσεις Τάσεων και τις συνοριακές συνθήκες που τις συνοδεύουν.

$$\partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n) \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_k &= n_j \hat{\tau}_{jk} - n_i n_j D \hat{\mu}_{ijk} - (n_j D_i + n_i D_j) \hat{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \hat{\mu}_{ijk} + \\ &+ \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n), \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\hat{R}_k = n_i n_j \hat{\mu}_{ijk}. \quad (2.107)$$

όπου,

$$D \equiv n_i \partial_i, \quad , \quad D_j \equiv (\delta_{jl} - n_j n_l) \partial_l \quad (2.108)$$

Ανακαλώντας τη συμμετρία του τανυστή $\hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu}_{ikj}$, η ποσότητα στην παρένθεση στο αριστερό μέρος της σχέσης (2.105), είναι συμμετρική. Έτσι, η σχέση γίνεται πιο βολική για την εισαγωγή μίας τασικής συνάρτησης τύπου Airy.

Για να πάρουμε τις Εξισώσεις Μετατόπισεων, αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2.92)₂ και (2.11) στις σχέσεις (2.99) και τις τελευταίες στις (2.105).

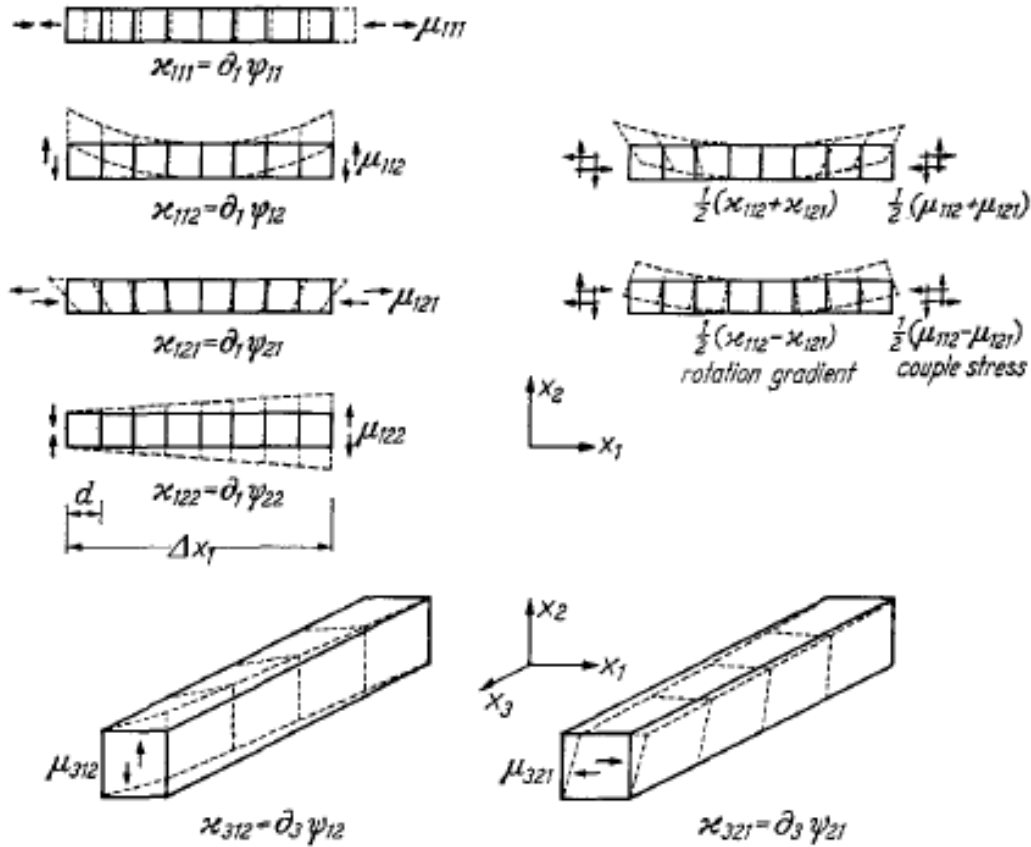
Αναλυτικότερα, στις καταστατικές εξισώσεις αντικαθιστούμε τη βαθμίδα της τροπής $\hat{\kappa}_{ijk}$ με το όρισμά της, και το τελευταίο, δηλαδή τις τροπές με το δικό τους όρισμα, τις μετατοπίσεις. Οι καταστατικές εξισώσεις που προκύπτουν συνεπώς, είναι συναρτήσεις μόνο της μετατόπισης. Αυτή είναι μία βασική διαφορά της μορφής II, με τη γενική θεωρία της μικροδομής. Οι καταστατικές εξισώσεις στην ενότητα 2.6 ήταν συνάρτηση τόσο της μετατόπισης όσο και της μικρο-παραμόρφωσης. Αυτό όμως δεν συμβαίνει στην προσέγγιση μικρής συχνότητας - πολύ μεγάλου μήκους κύματος καθώς, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι μικρο-παραμορφώσεις ψ_{ij} δεν είναι πια ανεξάρτητες από τις μακρο-μετατοπίσεις u_i .

Το επόμενο βήμα, είναι να αντικαταστήσουμε τις καταστατικές εξισώσεις στις εξισώσεις τάσεων, οι οποίες προέκυψαν από τη μεταβολική εξίσωση της κίνησης. Οι σχέσεις που θα προκύψουν είναι οι εξισώσεις των μετατόπισεων. Οι εξισώσεις αυτές, προφανώς, δεν θα είναι πια συναρτήσεις των μικρο-παραμορφώσεων, όπως ίσχυε στη γενική θεωρία, αλλά μόνο των μετατοπίσεων και των χρονικών παραγώγων τους.

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - \hat{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu}(1 - \hat{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} \\
 = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h_1^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h_2^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}})
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

όπου,

$$\hat{l}_1^2 = 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}), \quad \hat{l}_2^2 = (\hat{\alpha}_3 + 2\hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / 2\tilde{\mu}. \tag{2.110}$$



Σχήμα 2.2: [2] Τυπικά παραδείγματα των σ_{ij} , $\partial_i u_j$, ψ_{ij} και γ_{ij}

Κεφάλαιο 3

Διάδοση κυμάτων και διασπορά της ταχύτητας

3.1 Εισαγωγή

Τα οδηγούμενα κύματα είναι ιδιαίτερος κατάλληλα για το χαρακτηρισμό της κατάστασης ενός οστού, διότι διαδίδονται σε όλο το πάχος του φλοιώδους οστού και έτσι είναι πολύ ευαίσθητα τόσο σε μηχανικές όσο και σε γεωμετρικές ιδιότητες του μέσου. Αφού αλληλεπιδρούν συνεχώς με τα σύνορα του οστού ή γενικότερα, μέσου, διαδίδονται με διαφορετικούς ρυθμούς, με ταχύτητες οι οποίες εξαρτώνται από τη συχνότητα. Τα οδηγούμενα κύματα συνεισφέρουν στην αξιολόγηση της διαδικασίας επούλωσης ενός ραγίσματος, σε ασθένειες όπως η οστεοπόρωση κ.α.

Η μοντελοποίηση ωστόσο των υπερηχητικών οδηγούμενων κυμάτων στα μακρά ανθρώπινα οστά είναι ένα δύσκολο έργο. Σε όλη σχεδόν τη βιβλιογραφία μέχρι στιγμής, το οστό μιμείται ένα γραμμικά ελαστικό και ομογενές μέσο. Εάν ωστόσο θεωρήσουμε το οστό ως ένα γραμμικώς ελαστικό υλικό με μικροδομή τότε η συμπεριφορά του δεν μπορεί να περιγραφεί επαρκώς από την κλασική θεωρία της ελαστικότητας, διότι η τελευταία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με έννοιες όπως η ομοιογένεια και η τοπικότητα στις τάσεις.

Θεωρίες βαθμίδων υψηλότερης τάξης μπορεί να θεωρηθούν ως γενικεύσεις της γραμμικής θεωρίας της κλασικής ελαστικότητας, κατά τις οποίες το διάνυσμα της μετατόπισης αλλάζει και εισάγονται τόσο στην κινητική όσο και στη δυναμική ενέργεια, όροι υψηλότερης τάξης για να συσχετίσουν τις επιδράσεις της μικροδομής και τη μακροδομική συμπεριφορά του υλικού. Στο Κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούμε τη προσέγγιση μικρής συχνότητας (μορφή II), πολύ μεγάλου μήκους κύματος που αναλύσαμε προηγουμένως. Το κάνουμε αυτό διότι η εν λόγω προσέγγιση έχει ένα πολύ βασικό πλεονέκτημα σε σχέση με τη γενική θεωρία αλλά και με τις άλλες μορφές: οι ταυιστές που προκύπτουν είναι όλοι συμμετρικοί και συνεπώς πολύ ευκολότεροι στη χρήση από μαθηματικής πλευράς. Ύστερα, προβαίνουμε σε μία ακόμα απλούστευση, προσπαθώντας να μειώσουμε περαιτέρω τον αριθμό των ελαστικών σταθερών που έχουμε.

Αρχικά, ορίζεται η προαναφερθείσα, πλέον απλή μορφή της προσέγγισης II, και προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσεων των μετατοπίσεων και των χρονικών παραγώγων τους. Ύστερα, κατά τα γνωστά, θεωρούνται λύσεις της μορφής των επίπεδων κυμάτων και προκύπτουν οι σχέσεις διασποράς των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται σε ένα άπειρα επεκτάσιμο βαθμοελαστικό μέσο. Με βάση τις ταχύτητες ομάδας που προέκυψαν από τις σχέσεις διασποράς, έχουμε τη πρώτη γραφική παράσταση (f, c_g) για τους διάφορους συνδυασμούς των δύο μικρο-δομικών σταθερών που προέκυψαν από την απλουστευμένη

προσέγγιση II.

Έπειτα, αναλύουμε κάποια στοιχεία της διάδοσης κυμάτων στην κλασική ελαστικότητα, κυρίως διάδοσης οδηγούμενων κυμάτων σε μία πλάκα ελεύθερη από τάσεις έτσι ώστε μέσω των σχέσεων διασποράς να εξάγουμε τις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των ρυθμών των οδηγούμενων κυμάτων (Lamb modes). Στην επόμενη ενότητα, περνάμε και πάλι στη βαθμοελαστικότητα και πιο συγκεκριμένα, στην κυματοδήγηση σε μία βαθμοελαστική ελεύθερη από τάσεις πλάκα. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του διανυσματικού λογισμού στο πλαίσιο της μεθόδου των δυναμικών για το διάλυμα της μετατόπισης, και αντικαθιστώντας την στη βασική εξίσωση της κίνησης προκύπτουν διαφορικές εξισώσεις τετάρτου βαθμού των οποίων η λύση σε συνδυασμό με την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών, οδηγεί στις σχέσεις διασποράς. Τέλος, θεωρώντας μια πλάκα που προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό, δημιουργούμε τις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας και συγκρίνουμε τις περιπτώσεις της κλασικής ελαστικότητας, με αυτές της βαθμοελαστικότητας, τόσο των χωρικών όσο και των οδηγούμενων κυμάτων.

3.2 Απλοποιημένη Μορφή II Βαθμοελαστικότητας και Διασπορά Κυμάτων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο Mindlin στη Μορφή II της θεωρίας του για τη βαθμοελαστικότητα, θεώρησε την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας \hat{W} ως μία τετραγωνική συνάρτηση των τροπών ε_{ij} και των βαθμίδων των τροπών, $\hat{\kappa}_{ijk}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \hat{W} = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \hat{\alpha}_1 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{kjj} + \hat{\alpha}_2 \hat{\kappa}_{ijj} \hat{\kappa}_{ikk} + \hat{\alpha}_3 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{jjk} + \\ & + \hat{\alpha}_4 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\alpha}_5 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{kji} \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (3.2)$$

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \partial_i \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \hat{\kappa}_{ikj}$$

όπου $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ δίνονται από τη σχέση (2.76) και $\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_5$ από τις σχέσεις (2.95).

Επεκτείνοντας την έννοια της μη-τοπικότητας στην αδράνεια του συνεχούς με μικροδομή, ο Mindlin εισήγαγε για την ισοτροπική περίπτωση μία ενισχυμένη έκφραση για την πυκνότητα της κινητικής ενέργειας η οποία εκτός από τις ταχύτητες περιλαμβάνει και τις βαθμίδες των ταχυτήτων, δηλαδή,

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{6} \rho' d^2 \partial_i \dot{u}_j \partial_i \dot{u}_j, \quad (3.3)$$

όπου, $d^2 = \tilde{d}_{pkmn}^2$ είναι υλική σταθερά, ο συντελεστής της βαθμίδας της ταχύτητας.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, νέες τάσεις ορίζονται,

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji}, \quad (3.4)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj}, \quad (3.5)$$

Αντικαθιστώντας την πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας, σχέση (3.1) στις (3.4) και (3.5) προκύπτουν οι καταστατικές εξισώσεις:

$$\hat{\tau}_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2 \mu \varepsilon_{pq}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{pqr} = & \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{rii} + 2 \delta_{qr} \hat{\kappa}_{iip} + \delta_{rp} \hat{\kappa}_{qii}) + 2 \hat{\alpha}_2 \delta_{qr} \hat{\kappa}_{pii} + \\ & + \hat{\alpha}_3 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{iir} + \delta_{pr} \hat{\kappa}_{iiq}) + 2 \hat{\alpha}_4 \hat{\kappa}_{pqr} + \hat{\alpha}_5 (\hat{\kappa}_{rqp} + \hat{\kappa}_{qrp}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ορίζουμε επίσης και τον ολικό τανυστή της τάσης (total stress tensor),

$$\hat{\sigma}_{pq} = \hat{\tau}_{pq} - \partial_r \hat{\mu}_{rqp} = \hat{\sigma}_{qp}, \quad (3.8)$$

ο οποίος είναι συμμετρικός, καθώς τόσο η Cauchy τάση $\hat{\tau}_{pq}$ όσο και οι διπλές τάσεις $\hat{\mu}_{rpg}$ είναι συμμετρικοί τανυστές, σύμφωνα με τις σχέσεις (3.4) και (3.5).

Θεωρώντας ένα ισοτροπικό συνεχές με μικροδομή περιορισμένο από ένα λείο σύνορο, και εφαρμόζοντας το ισοζύγιο της αρχής του Hamilton για την ανεξάρτητη μεταβολή δu_i , παίρνουμε την εξίσωση των τάσεων

$$\partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' d^2 \partial_p \ddot{u}_k) \quad (3.9)$$

η οποία συνοδεύεται από τις κλασικές και μη κλασικές συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \hat{P}_k &= n_j \hat{\tau}_{jk} - n_i n_j D \hat{\mu}_{ijk} - (n_j D_i + n_i D_j) \hat{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \hat{\mu}_{ijk} + \frac{1}{3} \rho d^2 \partial_n \ddot{u}_n, \\ \hat{R}_k &= n_i n_j \hat{\mu}_{ijk}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Πριν προχωρήσουμε, θα κάνουμε μία μικρή παρένθεση για να αναφέρουμε ορισμένα χρήσιμα εργαλεία του διανυσματικού λογισμού [11].

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του λαπλασιανού τελεστή ∇^2

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi) \quad (3.11)$$

όπου, ψ είναι μία βαθμωτή ποσότητα, και

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (3.12)$$

όπου \mathbf{u} είναι ένα διάνυσμα.

Ταυτότητες των παραγώγων δεύτερης τάξης:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.13)$$

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (3.15)$$

Ταυτότητες των παραγώγων τρίτης τάξης:

Εάν πάρουμε την απόκλιση (divergence) της (3.13),

$$\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) = \nabla \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.16)$$

τότε, το $\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}))$ θα είναι μηδέν, λόγω της (3.15) αφού ο στροβιλισμός $\nabla \times \mathbf{u}$ είναι διάνυσμα.

Συνεπώς, η (3.16) θα γίνει

$$\nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) = \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.17)$$

Ωστόσο, από τη σχέση (3.11) και επειδή το $(\nabla \cdot \mathbf{u})$, είναι μία βαθμωτή ποσότητα, η (3.17) θα γίνει τελικώς

$$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})) = \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.18)$$

Αποδεικνύεται πως η παραπάνω σχέση ισχύει και για το στροβιλισμό, αντί της απόκλισης. Προκύπτει ομοίως παίρνοντας τον στροβιλισμό (curl) της (3.13):

$$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) \quad (3.19)$$

Η ταυτότητα (3.18) ισχύει και για 4ης τάξης παραγώγους, δηλαδή

$$\nabla^2(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) = \nabla(\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{u})) \quad (3.20)$$

Συνεχίζοντας από τις εξισώσεις των τάσεων και τις συνοριακές συνθήκες που τις συνοδεύουν, οι εξισώσεις των μετατόπισεων, όπως και στη σχέση (2.109) θα είναι:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(1 - \hat{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - \hat{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \\ = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Θα μετασχηματίσουμε το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.21) με χρήση της ταυτότητας (3.18)

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}) = \\ = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}) = \\ = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Συνεπώς, η σχέση (3.21) γίνεται

$$(\lambda + 2\mu)(1 - \hat{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - \hat{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \rho(\ddot{\mathbf{u}} - \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}) \quad (3.23)$$

όπου,

$$h^2 = d^2 / 3$$

και

$$\hat{l}_1^2 = 2(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + \hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / (\lambda + 2\mu), \quad \hat{l}_2^2 = (\hat{\alpha}_3 + 2\hat{\alpha}_4 + \hat{\alpha}_5) / 2\mu.$$

Στην πλέον απλή περίπτωση, όπου η πυκνότητα της δυναμικής ενέργειας \hat{W} ορίζεται ως

$$\hat{W} = \varepsilon_{ij} \tau_{ij} + g^2 \partial_i \varepsilon_{jk} \partial_i \tau_{jk}, \quad (3.24)$$

οι σταθερές $\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_5$ γίνονται $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_5 = 0$, $\hat{\alpha}_2 = \lambda g^2 / 2$, $\hat{\alpha}_4 = \mu g^2$, ενώ για τις σταθερές \hat{l}_1^2, \hat{l}_2^2 , θα ισχύει $\hat{l}_1^2 \equiv \hat{l}_2^2 = g^2$. Σύμφωνα με τις παραπάνω απλοποιήσεις, οι καταστατικές εξισώσεις (3.6), (3.7) και (3.8) θα γίνουν

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij}, \\ \mu_{ijk} &= g^2 \partial_i \tau_{jk}, \\ \sigma_{ij} &= \tau_{ij} - g^2 \nabla^2 \tau_{ij}\end{aligned}\tag{3.25}$$

και οι εξισώσεις των μετατόπισεων (3.23) θα γίνουν

$$(1 - g^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}})\tag{3.26}$$

όπου $g^2 \nabla^2 [\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}]$ και $\rho h^2 \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}$ είναι ο μικρο-δομικός και μικρο-αδρανειακός όρος αντίστοιχα.

Παίρνοντας την απόκλιση και το στροβιλισμό της εξίσωσης (3.26), είναι εύκολο να βρούμε τις εξισώσεις που διέπουν τη διάδοση των διαστολών και των περιστροφών αντίστοιχα,

Πρώτα εργαζόμαστε με το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.26) κάνοντας χρήση και πάλι της (3.18)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}) &= \rho (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla \cdot \nabla^2 \ddot{\mathbf{u}}) = \rho (\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} - h^2 \nabla^2 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}) \\ &= \rho (1 - h^2 \nabla^2) \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Στο αριστερό μέλος της (3.26) εργαζόμαστε ομοίως, δηλαδή

$$\begin{aligned}(1 - g^2 \nabla^2) [\mu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] &= \\ (1 - g^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u}] &= \\ (1 - g^2 \nabla^2) [\mu \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}] &= \\ (\lambda + 2\mu) (1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u}\end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση που διέπει τη διάδοση των διαστολών είναι

$$(\lambda + 2\mu) (1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho (1 - h^2 \nabla^2) \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}\tag{3.27}$$

Η εξίσωση που διέπει τη διάδοση των περιστροφών, προκύπτει ομοίως, με χρήση της ταυτότητας (3.19), και είναι

$$\mu (1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \times \mathbf{u} = \rho (1 - h^2 \nabla^2) \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}\tag{3.28}$$

Θεωρούμε επίπεδα κύματα της μορφής:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = A e^{i(\xi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(\xi \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.30)$$

όπου, A και \mathbf{A} αντιπροσωπεύουν τα πλάτη, \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης, $\hat{\mathbf{k}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα της κατεύθυνσης του γεγονότος, και ξ , ω αποτελούν τον κυματαριθμό και τη συχνότητα των κυμάτων που διαδίδονται, αντίστοιχα.

Ορίζοντας ως C_L και C_T , τις ταχύτητες φάσης των διαμήκων (L) και των εγκάρσιων (T) κυμάτων στην κλασική ελαστικότητα, αντίστοιχα, και έπειτα αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.29) και (3.30) στις (3.27) και (3.28) αντίστοιχα προκύπτουν οι σχέσεις διασποράς:

$$\omega^2 = C_L^2 \frac{\xi_L^2 (1 + g^2 \xi_L^2)}{1 + h^2 \xi_L^2}, \quad C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.31)$$

για τα διαμήκη κύματα και

$$\omega^2 = C_T^2 \frac{\xi_T^2 (1 + g^2 \xi_T^2)}{1 + h^2 \xi_T^2}, \quad C_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.32)$$

για τα εγκάρσια κύματα.

Ως εκ τούτου, από τις εξισώσεις (3.31) και (3.32) προκύπτουν και οι παρακάτω σχέσεις για τις ταχύτητες φάσεις V_L και V_T για τα διαμήκη και τα εγκάρσια κύματα αντίστοιχα.

$$V_L = \frac{\omega}{\xi_L} = C_L \sqrt{\frac{1 + g^2 \xi_L^2}{1 + h^2 \xi_L^2}} \quad (3.33)$$

$$V_T = \frac{\omega}{\xi_T} = C_T \sqrt{\frac{1 + g^2 \xi_T^2}{1 + h^2 \xi_T^2}} \quad (3.34)$$

Η κλασική ελαστικότητα, χαρακτηρίζεται από σταθερές ταχύτητες των διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων και έτσι, από διάδοση κυμάτων χωρίς διασπορά. Η βαθμοελαστική περίπτωση ωστόσο, χαρακτηρίζεται από ταχύτητες φάσης για τα εγκάρσια και τα διαμήκη κύματα, οι οποίες εξαρτώνται από τον κυματαριθμό ξ , γεγονός που υποδηλώνει διασπορά κυμάτων.

Η διασπορά οφείλεται εξ ολοκλήρου στην παρουσία των δύο μικρο-δομικών υλικών σταθερών g^2 και h^2 . Θέτοντας, $g = h = 0$ στις σχέσεις (3.33) και (3.34) προκύπτει άμεσα, $V_{L,T} = C_{L,T}$, η περίπτωση δηλαδή της κλασικής ελαστικότητας με σταθερές ταχύτητες και συνεπώς χωρίς διασπορά στη διάδοση των κυμάτων.

Λύνοντας τις εξισώσεις (3.31) και (3.32) ως προς τους κυματαριθμούς ξ_L και ξ_T αντίστοιχα

$$\xi_L = \sqrt{\frac{-(C_L^2 - \omega^2 h^2) + \sqrt{(C_L^2 - \omega^2 h^2)^2 + 4 C_L^2 g^2 \omega^2}}{2 C_L^2 g^2}} \quad (3.35)$$

$$\xi_T = \sqrt{\frac{-(C_T^2 - \omega^2 h^2) + \sqrt{(C_T^2 - \omega^2 h^2)^2 + 4 C_T^2 g^2 \omega^2}}{2 C_T^2 g^2}} \quad (3.36)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ενέργεια διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδας $V_{L,T}^g$ και όχι με την ταχύτητα φάσης $V_{L,T}$ [3], από προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$V_{L,T}^g = \frac{d\omega}{d\xi_{L,T}} = \sqrt{\frac{\xi_{L,T}^2 h^2 + 1}{\xi_{L,T}^4 C_{L,T}^2 g^2 + \xi_{L,T}^2 C_{L,T}^2}} \cdot \frac{2 \xi_{L,T} C_{L,T}^2 (\xi_{L,T}^4 g^2 h^2 + 2 \xi_{L,T}^2 g^2 + 1)}{(\xi_{L,T}^2 h^2 + 1)^2} \quad (3.37)$$

Στο σχήμα 3.3 βλέπουμε τις καμπύλες διασποράς που διέπουν την ταχύτητα ομάδας των διαμήκων (L) και των εγκάρσιων (T) κυμάτων που διαδίδονται σε ένα άπειρα εκτεταμένο βαθμωελαστικό μέσο, για διάφορους συνδυασμούς των μικρο-δομικών υλικών σταθερών g και h , ως συνάρτηση της συχνότητας ω , σύμφωνα με τη σχέση (3.37).

Όπως αναμέναμε, για $g = h = 0$ ή για $g = h$, δεν υπάρχει διασπορά και $V_{L,T}^g \equiv C_{L,T}$.

Για $h > g$ υπάρχει διασπορά, με $V_{L,T}^g < C_{L,T}$ και την ταχύτητα ομάδας $V_{L,T}^g$ να μειώνεται καθώς η συχνότητα αυξάνεται. Αυτό είναι, από άποψη φυσικής σημασίας, αποδεκτό και σε συμφωνία με τα αποτελέσματα θεωριών για τα κρυσταλλικά πλέγματα για το δισδιάστατο χώρο.

Για $h < g$, επίσης υπάρχει διασπορά, με $V_{L,T}^g > C_{L,T}$ και την ταχύτητα ομάδας $V_{L,T}^g$ να αυξάνεται καθώς η συχνότητα αυξάνεται. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης σύμφωνο με τα πειραματικά δεδομένα σε κοκκώδη υλικά όπως το μάρμαρο, η άμμος, το σκυρόδεμα και τα οστά [6].

3.3 Κυματοδότηση στην Κλασική Ελαστικότητα

Τα κύματα που συναντήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, τα οποία διαδίδονταν σε ένα άπειρα εκτεταμένο βαθμοελαστικό μέσο, ονομάζονται *χωρικά κύματα* (bulk waves). Διαδίδονται μέσα στο κύριο μέρος του υλικού, μακριά από τα σύνορά του. Εντοπίζονται συνεπώς στον κύριο όγκο του μέσου διάδοσης. Πολλές φορές ωστόσο, υπάρχει αλληλεπίδραση με το σύνορο, μέσω της ανάκλασης και της διάθλασης, με αποτέλεσμα να πραγματοποιούνται μετατροπές ρυθμών μεταξύ των εγκάρσιων και των διαμήκων κυμάτων. Επομένως, η λύση σε ένα πρόβλημα χωρικών κυμάτων πρέπει απλά και μόνο να ικανοποιεί τη σειρά των μερικών διαφορικών εξισώσεων που τα διέπουν.

Στα *οδηγούμενα κύματα* ωστόσο (guided waves), η λύση στο πρόβλημα θα πρέπει να ικανοποιεί και τη σειρά των μερικών διαφορικών εξισώσεων αλλά και φυσικές συνοριακές συνθήκες. Το γεγονός αυτό, κάνει το πρόβλημα με οδηγούμενα κύματα, δύσκολο, έως και αδύνατο ως προς την εύρεση μίας αναλυτικής λύσης. Μία άλλη σημαντική διαφορά των δύο ειδών κυμάτων, είναι ότι σε ένα πρόβλημα με χωρικά κύματα, υπάρχει πεπερασμένος αριθμός ρυθμών που μπορεί να εμφανιστούν, ενώ σε ένα πρόβλημα οδηγούμενων κυμάτων ο αριθμός των ρυθμών που μπορεί να εμφανιστούν είναι άπειρος. Αυτό συμβαίνει γιατί ένα πεπερασμένο σώμα, είναι σε θέση να υποστηρίξει άπειρο αριθμό διαφορετικών ρυθμών οδηγούμενων κυμάτων.

Πρέπει ωστόσο να σημειωθεί, πως παρόλο που τα οδηγούμενα κύματα και τα χωρικά κύματα διαφέρουν θεμελιωδώς, διέπονται από την ίδια σειρά μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Οι εξισώσεις των τάσεων στην κλασική ελαστικότητα, σε ένα μεταβλητό, ως προς το χρόνο, πρόβλημα είναι

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.38)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις, όπως και στην ενότητα 1.8, σχέση (1.37), θα είναι

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (3.39)$$

Απαλείφοντας τις τάσεις και τις τροπές παίρνουμε τις εξισώσεις των μετατοπίσεων, δηλαδή τις μερικές διαφορικές εξισώσεις για τις μετατοπίσεις.

$$\mu \partial_j \partial_j u_i + (\lambda + \mu) \partial_j \partial_i u_j + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.40)$$

ή σε διανυσματική γραφή

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.41)$$

Παρατηρούμε την αντιστοιχία των εξισώσεων (3.41) με τις αντίστοιχες στη βαθμοελαστικότητα εξισώσεις (3.26). Θέτοντας στην τελευταία σχέση, $g = h = 0$ και μηδενίζοντας και τις δυνάμεις \mathbf{f} προκύπτει η (3.41).

Οι εξισώσεις (3.41) είναι επαρκείς εάν το πεδίο ορισμού της λύσης είναι άπειρο. Σε αντίθετη περίπτωση, απαιτείται η ικανοποίηση συνοριακών συνθηκών για να έχουμε ένα καλά ορισμένο πρόβλημα.

3.3.1 Το πρόβλημα της Ελεύθερης Πλάκας

Η γεωμετρία του προβλήματος της ελεύθερης πλάκας φαίνεται στο Σχήμα (3.1) Οι εξισώσεις που διέπουν αυτό το πρόβλημα είναι οι (3.40) ή (3.41). Οι επιφάνειες που ορίζουν οι ευθείες $x_3 = -d/2 = -h$ και $x_3 = d/2 = h$ θεωρούνται ελεύθερες από επιφανειακές τάσεις.

Υπερηχητική διέγερση πραγματοποιείται σε κάποιο σημείο της πλάκας, και καθώς η υπερηχητική ενέργεια από την περιοχή της διέγερσης συναντά το άνω και το κάτω σύνορο, πραγματοποιούνται μετατροπές ρυθμών.

Αφού το κύμα ταξιδέψει μέσα στην πλάκα, οι υπερθέσεις προκαλούν τη δημιουργία κυματοπακέτων ή πιο σωστά ρυθμών κατευθυνόμενων κυμάτων μέσα στην πλάκα.

Ο ακριβής αριθμός των διαφορετικών ρυθμών που θα δημιουργηθούν μέσα στην πλάκα, εξαρτάται από τη γωνία εισόδου του κύματος και από τη ρυθμιζόμενη από εμάς συχνότητα.

Η συνηθέστερη προσέγγιση για την ακριβή λύση του εν λόγω προβλήματος είναι η μέθοδος



Σχήμα 3.1: [3] Γεωμετρία της ελεύθερης πλάκας

των δυναμικών. Το διανυσματικό πεδίο της μετατόπισης αναλύεται, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Διανυσματικού Λογισμού (Helmholtz decomposition). Η περίπτωση της επίπεδης έντασης δεν είναι η πιο γενική για το πρόβλημά μας, ωστόσο απλοποιεί σημαντικά τη διαδικασία επίλυσης. Συνεπώς, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις εκφράζονται ως εξής:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.42)$$

Για τη βαθμωτή συνάρτηση φ ισχύει $\varphi = \varphi(x_1, x_2, t)$ ενώ για το διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} ισχύει $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_1 = A_2 = 0, A_3 = \psi(x_1, x_2, t)$. Τότε, το διάνυσμα της μετατόπισης εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\varphi + \nabla \times (0, 0, \psi) \\ &= \hat{x}_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) + \hat{x}_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Αντικαθιστώντας την μετατόπιση στις εξισώσεις (3.40) προκύπτουν δύο μη συζευγμένες κυματικές εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.44)$$

για τα διαμήκη κύματα

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.45)$$

για τα εγκάρσια κύματα

Εάν οι μετατοπίσεις είναι

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad u_3 = 0 \quad (3.46)$$

Τότε, μέσω των καταστατικών εξισώσεων (3.39), οι τάσεις θα είναι

$$\sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Υποθέτουμε άπειρα επίπεδα αρμονικά κύματα ως λύσεις των (3.44) και (3.45) της μορφής:

$$\varphi = \Phi(x_2) \exp\{i(kx_1 - \omega t)\} \quad (3.48)$$

$$\psi = \Psi(x_2) \exp\{i(kx_1 - \omega t)\} \quad (3.49)$$

όπου k , ο κυμαριθμός.

Πρέπει να σημειωθεί, πως οι λύσεις αυτές, αντιπροσωπεύουν κύματα που ταξιδεύουν κατά την x_1 κατεύθυνση και στάσιμα κύματα στην x_2 κατεύθυνση. Αυτό είναι εμφανές από το γεγονός ότι ενώ για τις εξαρτήσεις από την κατεύθυνση x_1 υπάρχει ένας περίπλοκος εκθετικός όρος ο οποίος περιλαμβάνει και τη χρονική παράμετρο, για τις εξαρτήσεις από την κατεύθυνση x_2 υπάρχει μόνο μία άγνωστη συνάρτηση.

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *εγκάρσιος συντονισμός* και χρησιμοποιείται αρκετές φορές για την εύρεση της λύσης του προβλήματος.

Συμπερασματικά, οι λύσεις της μορφής (3.48) και (3.49) αντιπροσωπεύουν κύματα τα οποία ταξιδεύουν κατά την κατεύθυνση της πλάκας έχοντας όμως σταθερές (και έτσι άγνωστες) διανομές προς τις εγκάρσιες κατευθύνσεις.

Αντικαθιστώντας τις λύσεις (3.48) και (3.49) στις εξισώσεις (3.44) και (3.45) αντίστοιχα, προκύπτουν εξισώσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις (profiles), $\Phi(x_2)$ και $\Psi(x_2)$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx_2^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \right) \Phi = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx_2^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \right) \Psi = 0 \quad (3.51)$$

οι οποίες έχουν τις εξής λύσεις

$$\Phi(x_2) = A_1 \sin(p x_2) + A_2 \cos(p x_2) \quad (3.52)$$

$$\Psi(x_2) = B_1 \sin(q x_2) + B_2 \cos(q x_2) \quad (3.53)$$

όπου,

$$p^2 = \frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2 \quad q^2 = \frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \quad (3.54)$$

Μπορούμε, μέσω των σχέσεων (3.46) και (3.47) και των παραπάνω αποτελεσμάτων, να επαναπροσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις και τις τάσεις. Παραλείπουμε τον εκθετικό όρο σε όλες τις εκφράσεις για ευκολία

$$u_1 = \left[i k \Phi + \frac{d\Psi}{dx_2} \right], \quad u_2 = \left[\frac{d\Phi}{dx_2} + i k \Psi \right] \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \mu \left(2 i k \frac{d\Phi}{dx_2} + k^2 \Psi + \frac{d^2\Psi}{dx_2^2} \right), \\ \sigma_{22} &= \left[\lambda \left(-k^2 \Phi + \frac{d^2\Phi}{dx_2^2} \right) + 2 \mu \left(\frac{d^2\Phi}{dx_2^2} - i k \frac{d\Psi}{dx_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Εφόσον οι άγνωστες συναρτήσεις $\Phi(x_2)$ και $\Psi(x_2)$ περιέχουν όρους ημιτόνου (περιττή συνάρτηση) και συνημιτόνου (άρτια συνάρτηση) με μεταβλητή την x_2 κατεύθυνση, διαχωρίζουμε τη λύση σε δύο ζεύγη ρυθμών. Τους συμμετρικούς και τους αντισυμμετρικούς ρυθμούς.

Συγκεκριμένα, για μετατόπιση στην x_1 κατεύθυνση, η κίνηση θα είναι συμμετρική (ως προς το μέσο επίπεδο της πλάκας) εάν η μετατόπιση u_1 εμπεριέχει συνημίτονα ενώ αντισυμμετρική εάν εμπεριέχει ημίτονα. Για τη μετατόπιση στην x_2 κατεύθυνση ισχύει το αντίστροφο. Ως εκ τούτου, χωρίζουμε τους ρυθμούς της διάδοσης τους κύματος στην πλάκα σε δύο συστήματα.

Συμμετρικοί ρυθμοί

$$\begin{aligned} \Phi &= A_2 \cos(p x_2), \\ \Psi &= B_1 \sin(q x_2), \\ u_1 &= i k A_2 \cos(p x_2) + q B_1 \cos(q x_2), \\ u_2 &= -p A_2 \sin(p x_2) - i k B_1 \sin(q x_2), \\ \sigma_{21} &= \mu [-2 i k p A_2 \sin(p x_2) + (k^2 - q^2) B_1 \sin(q x_2)], \\ \sigma_{22} &= -\lambda (k^2 + p^2) A_2 \cos(p x_2) - 2 \mu [p^2 A_2 \cos(p x_2) - i k q B_1 \cos(q x_2)] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Αντισυμμετρικοί ρυθμοί

$$\begin{aligned}
 \Phi &= A_1 \sin(p x_2), \\
 \Psi &= B_2 \cos(q x_2), \\
 u_1 &= i k A_1 \sin(p x_2) - q B_2 \sin(q x_2), \\
 u_2 &= p A_1 \cos(p x_2) - i k B_2 \cos(q x_2), \\
 \sigma_{21} &= \mu [2 i k p A_1 \cos(p x_2) + (k^2 - q^2) B_2 \cos(q x_2)], \\
 \sigma_{22} &= -\lambda (k^2 + p^2) A_1 \sin(p x_2) - 2 \mu [p^2 A_1 \sin(p x_2) - i k q B_2 \sin(q x_2)]
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Για τους συμμετρικούς ρυθμούς, η δομή του κύματος σε όλο το πάχος της πλάκας είναι συμμετρική για τη μετατόπιση u_1 και αντισυμμετρική για τη u_2 . Από την άλλη, για τους αντισυμμετρικούς ρυθμούς, η δομή του κύματος σε όλο το πάχος της πλάκας είναι συμμετρική για τη μετατόπιση u_2 και έτσι, αντισυμμετρική για τη u_1 .

Πρέπει να σημειωθεί, πως ο διαχωρισμός αυτός, σε συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς ρυθμούς, είναι μάλλον η εξαίρεση και όχι ο κανόνας. Για παράδειγμα, στους κοίλους κυλίνδρους, η έλλειψη συμμετρίας στη δομή, δεν επιτρέπει έναν τέτοιο διαχωρισμό.

Οι κυματικοί ρυθμοί υπάρχουν και στις ανισότροπες πλάκες, όμως σε εκείνη την περίπτωση, ο διαχωρισμός των ρυθμών σε συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς είναι εφικτός μόνο εάν το κύμα διαδίδεται κατά την κατεύθυνση ενός άξονα συμμετρίας της πλάκας.

Τόσο οι σταθερές A_1, A_2, B_1, B_2 όσο και οι σχέσεις διασποράς, παραμένουν άγνωστα. Θα υπολογιστούν, εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη για τις δύο ελεύθερες από τάσεις επιφάνειες, η οποία για την περίπτωση της επίπεδης έντασης είναι η

$$\sigma_{21} = \sigma_{22} \equiv 0, \quad \text{για } x_2 = \pm d/2 = \pm h \tag{3.59}$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη, θα προκύψει ένα ομογενές σύστημα δύο εξισώσεων. Το ένα σύστημα θα έχει αγνώστους τα A_2, B_1 (συμμετρική περίπτωση) και το άλλο τα A_1, B_2 (αντισυμμετρική περίπτωση). Στο ομογενές σύστημα εξισώσεων, για ύπαρξη μη τετριμμένης λύσης, απαιτούμε η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών να είναι μηδέν.

$$\frac{(k^2 - q^2) \sin(q h)}{2 i k p (\sin(p h))} = \frac{-2 \mu i k q (\cos(q h))}{(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2 \mu p^2) \cos(p h)} \tag{3.60}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής: (αρχική σχέση διασποράς)

$$\frac{\tan(q h)}{\tan(p h)} = \frac{4 k^2 p q \mu}{(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2 \mu p^2) (k^2 - q^2)}$$

Ο παρονομαστής του δεξιού μέρους της ως άνω έκφρασης μετασχηματίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (3.54) και του ορισμού των ταχυτήτων των κυμάτων,

$$\lambda = c_L^2 \rho - 2 \mu$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
 \lambda k^2 + \lambda p^2 + 2 \mu p^2 &= \lambda (k^2 + p^2) + 2 \mu p^2 \\
 &= (c_L^2 \rho - 2 \mu) (k^2 + p^2) + 2 \mu p^2 \\
 &= \rho c_L^2 (k^2 + p^2) + 2 \mu k^2
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τις σχέσεις (3.54) καθώς και το ότι $c_T^2 = \mu / \rho$ έχουμε

$$\lambda k^2 + \lambda \rho^2 + 2 \mu \rho^2 = \rho \omega^2 - 2 \rho c_T^2 k^2$$

δηλαδή,

$$\rho c_T^2 \left[\left(\frac{\omega}{c_T} \right)^2 - 2 k^2 \right] = \rho c_T^2 (q^2 - k^2) = \mu (q^2 - k^2)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (αρχική σχέση διασποράς) προκύπτουν:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = \frac{-4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (3.61)$$

για τους συμμετρικούς ρυθμούς

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} \quad (3.62)$$

για τους αντισυμμετρικούς ρυθμούς

Για ένα δοσμένο ω και ένα παραγόμενο k , οι μετατοπίσεις u_1 και u_2 μπορούν να υπολογιστούν μέσω των σχέσεων (3.57) και (3.58). Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως σχέσεις διασποράς *Rayleigh–Lamb*, και λύνονται μόνο με αριθμητικές μεθόδους. Χρησιμοποιούνται για την εύρεση της ταχύτητας με την οποία ένα κύμα συγκεκριμένης συχνότητας διαδίδεται στην πλάκα.

3.4 Κυματοδήγηση σε Βαθμοελαστική Ελεύθερη Πλάκα

Ας θεωρήσουμε μία ελεύθερη δισδιάστατη πλάκα καθώς και ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $0x_1x_2$ με τον άξονα x_1 ως τον άξονα συμμετρίας της πλάκας. Υποθέτοντας συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατόπισης θα είναι:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, t) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Η εξίσωση (3.26) θα επιλυθεί με τη μέθοδο των δυναμικών, όπως ακριβώς κάναμε και για την εξίσωση των μετατοπίσεων (3.40), μόνο που εδώ βρισκόμαστε στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας. Το διανυσματικό πεδίο της μετατόπισης αναλύεται, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Διανυσματικού Λογισμού (Helmholtz decomposition, σε μία βαθμίδα βαθμωτής συνάρτησης και σε ένα στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου, η απόκλιση του οποίου ισούται με το μηδέν.

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.64)$$

Ομοίως με την περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, το διάνυσμα της μετατόπισης εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\varphi + \nabla \times (0, 0, \psi) \\ &= \hat{x}_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) + \hat{x}_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Παίρνοντας την απόκλιση της σχέσης (3.64) θα προκύψει:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3.66)$$

τότε από τις σχέσεις (3.11) και (3.15)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\varphi \quad (3.67)$$

Παίρνοντας και το στροβιλισμό της σχέσης (3.39) θα προκύψει:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla\varphi) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (3.68)$$

τότε από τις σχέσεις (3.14) και (3.13)

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.69)$$

Ωστόσο, από υπόθεση έχουμε ότι $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ συνεπώς,

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.70)$$

δηλαδή,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla^2 \psi \quad (3.71)$$

Αντικαθιστώντας την απόκλιση του διανύσματος της μετατόπισης, σχέση (3.67), στην εξίσωση που διέπει τη διάδοση των διαστολών, (3.27) προκύπτει:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= \rho(1 - h^2 \nabla^2) \nabla^2 \ddot{\varphi} \implies \\ \implies (\lambda + 2\mu)(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \varphi &= \rho(1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Και λόγω της σχέσης $C_L^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$, για την ταχύτητα φάσης των διαμήκων κυμάτων, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, έχουμε τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\implies (1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \varphi = \frac{1}{C_L^2} (1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\varphi} \quad (3.72)$$

Αντικαθιστώντας το στροβιλισμό του διανύσματος της μετατόπισης, σχέση (3.71), στην εξίσωση που διέπει τη διάδοση των περιστροφών, σχέση (3.28) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mu(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 \psi &= \rho(1 - h^2 \nabla^2) \nabla^2 \ddot{\psi} \implies \\ \implies \mu(1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi &= \rho(1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\psi} \end{aligned}$$

Επειδή η ταχύτητα φάσης των εγκάρσιων κυμάτων, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, είναι $C_T^2 = \mu / \rho$ έχουμε τη μερική διαφορική εξίσωση:

$$\implies (1 - g^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi = \frac{1}{C_T^2} (1 - h^2 \nabla^2) \ddot{\psi} \quad (3.73)$$

Παρατηρούμε ότι, εάν θέσουμε στις εξισώσεις (3.72) και (3.73), $g = h = 0$, δηλαδή αν εξαλείψουμε την παρουσία της μικροδομής, θα προκύψουν οι εξισώσεις (3.44) και (3.45), οι αντίστοιχες δηλαδή του προβλήματος της ελεύθερης πλάκας στην κλασική ελαστικότητα.

Όπως και στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, έτσι και τώρα υποθέτουμε άπειρα επίπεδα αρμονικά κύματα, ως λύσεις των (3.72) και (3.73) της μορφής:

$$\varphi = \Phi(x_2) \exp\{i(\xi x_1 - \omega t)\} \quad (3.74)$$

$$\psi = \Psi(x_2) \exp\{i(\xi x_1 - \omega t)\} \quad (3.75)$$

όπου ξ , ο κυματαριθμός.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στις εξισώσεις (3.72) και (3.73), προκύπτουν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$-g^2 \frac{d^4 \Phi}{dx_2^4} + \left(1 + 2\xi^2 g^2 - \frac{h^2 \omega^2}{C_L^2}\right) \frac{d^2 \Phi}{dx_2^2} + (K_L^2 - \xi^2 - g^2 \xi^4 + h^2 \xi^2 K_L^2) \Phi = 0 \quad (3.76)$$

$$-g^2 \frac{d^4 \Psi}{dx_2^4} + \left(1 + 2\xi^2 g^2 - \frac{h^2 \omega^2}{C_T^2}\right) \frac{d^2 \Psi}{dx_2^2} + (K_T^2 - \xi^2 - g^2 \xi^4 + h^2 \xi^2 K_T^2) \Psi = 0 \quad (3.77)$$

K_L και K_T είναι οι κυματαριθμοί κυμάτων που διαδίδονται σε άπειρα εκτεταμένο μέσο στην κλασική ελαστικότητα, δηλαδή $K_L = \frac{\omega^2}{C_L}$ και $K_T = \frac{\omega^2}{C_T^2}$, ενώ ξ είναι ο κυματαριθμός της οδηγούμενης διαταραχής στην πλάκα. Τέλος, και πάλι θα προβούμε στον παραλληλισμό στην αντίστοιχη περίπτωση της πλάκας στην κλασική ελαστικότητα, σημειώνοντας πως για $g = h = 0$, οι εξισώσεις (3.76) και (3.77) οδηγούν στις (3.50) και (3.51) αντίστοιχα.

Οι λύσεις των εξισώσεων (3.76) και (3.77) θα είναι δύο πραγματικοί και δύο φανταστικοί αριθμοί, και επιδέχονται τις εξής μορφές

$$\Phi(x_2) = Q \sin(p x_2) + R \cos(p x_2) + S \cosh(r_p x_2) + T \sinh(r_p x_2) \quad (3.78)$$

$$\Psi(x_2) = U \sin(q x_2) + V \cos(q x_2) + W \cosh(r_q x_2) + Z \sinh(r_q x_2) \quad (3.79)$$

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε αντί για τα υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα να είχαμε εκθετικούς όρους της μορφής

$$\exp\{r_{p,q} x_2\}, \quad \exp\{-r_{p,q} x_2\}$$

όπου

$$p, q = i \frac{\sqrt{1 + 2\xi^2 g^2 - K_{L,T}^2 h^2 - \sqrt{(1 + 2\xi^2 g^2 - K_{L,T}^2 h^2)^2 + 4g^2 (K_{L,T}^2 - \xi^2 - g^2 \xi^4 + h^2 K_{L,T}^2 \xi^2)}}}{g \sqrt{2}} \quad (3.80)$$

$$r_{p,q} = \frac{\sqrt{1 + 2\xi^2 g^2 - K_{L,T}^2 h^2 + \sqrt{(1 + 2\xi^2 g^2 - K_{L,T}^2 h^2)^2 + 4g^2 (K_{L,T}^2 - \xi^2 - g^2 \xi^4 + h^2 K_{L,T}^2 \xi^2)}}}{g \sqrt{2}} \quad (3.81)$$

Μπορούμε σύμφωνα με τη σχέση (3.65) και τις (3.74) και (3.75) να επαναπροσδιορίσουμε τις μετατοπίσεις. Παραλείπουμε τον εκθετικό όρο για ευκολία.

$$u_1 = \left[i k \Phi + \frac{d\Psi}{dx_2} \right], \quad u_2 = \left[\frac{d\Phi}{dx_2} + i k \Psi \right] \quad (3.82)$$

Μέσω των λύσεων (3.78) και (3.79) οι μετατοπίσεις αναλυτικά θα είναι

$$u_1 = i k Q \sin(p x_2) + i k R \cos(p x_2) + i k S \cosh(r_p x_2) + i k T \sinh(r_p x_2) + U q \cos(q x_2) - V q \sin(q x_2) + W r_q \sinh(r_q x_2) + Z r_q \cosh(r_q x_2) \quad (3.83)$$

$$u_2 = Q p \cos(p x_2) - R p \sin(p x_2) + S r_p \sinh(r_p x_2) + T r_p \cosh(r_p x_2) + i k U \sin(q x_2) + i k V \cos(q x_2) + i k W \cosh(r_q x_2) + i k Z \sinh(r_q x_2) \quad (3.84)$$

Όπως και στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, έτσι και εδώ, διαχωρίζουμε τη λύση σε δύο ζεύγη ρυθμών, συμμετρικούς και αντισυμμετρικούς. Αυτό διότι οι άγνωστες συναρτήσεις $\Phi(x_2)$ και $\Psi(x_2)$ περιέχουν όρους ημιτόνου (περιττή συνάρτηση) και συνημιτόνου (άρτια συνάρτηση).

Συγκεκριμένα, για μετατόπιση στην x_1 κατεύθυνση, η κίνηση θα είναι συμμετρική (ως προς

το μέσο επίπεδο της πλάκας) εάν η μετατόπιση u_1 εμπεριέχει συνημίτονα ενώ αντισυμμετρική εάν εμπεριέχει ημίτονα. Για τη μετατόπιση στον x_2 άξονα ισχύει το αντίστροφο. Ως εκ τούτου, χωρίζουμε τους ρυθμούς της διάδοσης τους κύματος στην πλάκα σε δύο συστήματα.

Συμμετρικοί ρυθμοί

Απαιτούμε η u_1 μετατόπιση να είναι συνάρτηση μόνο συνημιτόνων ή υπερβολικών συνημιτόνων. Συνεπώς μηδενίζουμε τους όρους ημιτόνου και υπερβολικού ημιτόνου δηλαδή ($Q = T = V = W = 0$)

$$\begin{aligned}\Phi &= R \cos(p x_2) + S \cosh(r_p x_2) \\ \Psi &= U \sin(q x_2) + Z \sinh(r_q x_2) \\ u_1 &= R \cos(p x_2) + S \cosh(r_p x_2) + U q \cos(q x_2) + Z r_q \cosh(r_q x_2) \\ u_2 &= -R p \sin(p x_2) + S r_p \sinh(r_p x_2) + i k U \sin(q x_2) + i k Z \sinh(r_q x_2)\end{aligned}\tag{3.85}$$

Αντισυμμετρικοί ρυθμοί

Απαιτούμε η u_1 μετατόπιση να είναι συνάρτηση μόνο ημιτόνων ή υπερβολικών ημιτόνων. Συνεπώς μηδενίζουμε τους όρους συνημιτόνου και υπερβολικού συνημιτόνου δηλαδή ($R = S = U = Z = 0$)

$$\begin{aligned}\Phi &= Q \sin(p x_2) + T \sinh(r_p x_2) \\ \Psi &= V \cos(q x_2) + W \cosh(r_q x_2) \\ u_1 &= i k Q \sin(p x_2) + i k T \sinh(r_p x_2) - V \sin(q x_2) + W \sinh(r_q x_2) \\ u_2 &= p Q \cos(p x_2) + r_p T \cosh(r_p x_2) + i k V \cos(q x_2) + i k W \cosh(r_q x_2)\end{aligned}\tag{3.86}$$

Οι σταθερές (Q, R, S, T, U, V, W, Z) είναι άγνωστα πλάτη τα οποία μπορούν να καθοριστούν από την ικανοποίηση των κλασικών και μη κλασικών συνοριακών συνθηκών του προβλήματος αντίστοιχα:

$$\mathbf{P}|_{x_2=d/2} = \mathbf{P}|_{x_2=-d/2} = 0\tag{3.87}$$

$$\mathbf{R}|_{x_2=d/2} = \mathbf{R}|_{x_2=-d/2} = 0\tag{3.88}$$

Από την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών θα προκύψουν δύο συστήματα τεσσάρων εξισώσεων: Το πρώτο για τους αγνώστους R, U, S, Z που αντιστοιχούν στους συμμετρικούς ρυθμούς και το δεύτερο για τους Q, T, V, W που αντιστοιχούν στους αντισυμμετρικούς ρυθμούς. Τα στοιχεία των οριζουσών για τα δύο συστήματα δίνονται στο παράρτημα στο τέλος της εργασίας. Για να έχει μη τετριμμένη λύση το κάθε ομογενές σύστημα, θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να ισούται με το μηδέν. Οι σχέσεις που θα προκύψουν μηδενίζοντας την κάθε ορίζουσα αποτελούν τις σχέσεις διασποράς της διάδοσης των συμμετρικών και των αντισυμμετρικών ρυθμών σε μία βαθμολογική πλάκα.

3.5 Βιοϊατρική Εφαρμογή - Φλοιώδες Οστό

Στην ενότητα αυτή, μία ελεύθερη από τάσεις 2D βαθμοελαστική πλάκα θεωρείται ότι έχει μηχανικές ιδιότητες παρόμοιες με τα οστά. Έχει Μέτρο ελαστικότητας $E = 14GPa$, λόγο Poisson $\nu_{bone} = 0.37$ και πυκνότητα $\rho_{bone} = 1500Kg/m^3$. Το πάχος της πλάκας είναι $4mm$, τιμή η οποία είναι συνήθης για φλοιώδη μακρά οστά όλων των ειδών στο ανθρώπινο σώμα. Οι ταχύτητες των χωρικών, διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων στην κλασική ελαστικότητα είναι $C_L = 4063m/s$ και $C_T = 1846m/s$, αντίστοιχα. [8]

Διερευνούμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις για το μικρο-αδρανειακό όρο h^2 . Στην πρώτη περίπτωση, στην οποία από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε ως περίπτωση_1, ο μικρο-αδρανειακός όρος θα ισούται με $h = 10^{-4}m$, ενώ στην περίπτωση_2, θα ισούται με $h = 10^{-5}m$. Και στις δύο περιπτώσεις, η τιμή του h είναι συγκρίσιμη με τη μικροδομή των οστών, η οποία κυμαίνεται από 10 έως 500 μm .

Όσον αφορά στο συντελεστή βαθμίδας g , υπάρχουν αξιόπιστα πειραματικά δεδομένα [9] τα οποία δείχνουν πως πρέπει να είναι της ίδιας τάξης με το μέγεθος του βασικού δομικού στοιχείου της μικροδομής, π.χ οι οστεΐτες στα οστά. Συμπερασματικά, για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις για το h που προαναφέραμε, θα θεωρήσουμε και τρεις υποπεριπτώσεις για την τιμή του g . Θα έχουμε δηλαδή συνολικά έξι διαφορετικές περιπτώσεις για τους διάφορους συνδυασμούς των δύο μικρο-δομικών υλικών σταθερών g και h . Στις πρώτες δύο υποπεριπτώσεις (case_a και case_b), το g θεωρείται μεγαλύτερο και μικρότερο αντίστοιχα, ενώ στην τρίτη υποπερίπτωση, η τιμή του g θα ισούται με την τιμή του h . Οι τιμές των g και h παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Σχήμα 3.2: Τιμές των g και h για κάθε υποπερίπτωση

Cases	Gradient coefficient g (m)	Intrinsic characteristic length h (m)
Case-1a	5×10^{-4}	10^{-4}
Case-1b	10^{-5}	10^{-4}
Case-1c	10^{-4}	10^{-4}
Case-2a	10^{-4}	10^{-5}
Case-2b	5×10^{-6}	10^{-5}
Case-2c	10^{-5}	10^{-5}

Παρουσιάζονται οι συμμετρικοί και οι αντισυμμετρικοί ρυθμοί που διαδίδονται στη βαθμοελαστική πλάκα που προσομοιάζει ένα οστό, σε γραφικές παραστάσεις (f, c_g) καμπύλων διασποράς της ταχύτητας ομάδας για τους διάφορους συνδυασμούς των h και g . Οι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί ρυθμοί που προέκυψαν από την απλοποιημένη μορφή II βαθμοελαστικότητας του *Mindlin*, θα αναφέρονται από εδώ και στο εξής ως g_Sn και g_An , αντίστοιχα, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ είναι ο αριθμός του ρυθμού. Οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των συμμετρικών και αντισυμμετρικών ρυθμών (Lamb modes) για την αντίστοιχη κλασική ελαστική περίπτωση, δηλαδή για την αντίστοιχη κλασικά ελαστική πλάκα, με τις ίδιες όμως γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες με τη βαθμοελαστική, επίσης παρουσιάζονται σε κάθε υποπερίπτωση με κόκκινες διακεκομμένες γραμμές, με σκοπό τη σύγκριση. Οι ρυθμοί αυτοί, θα αναφέρονται από εδώ και στο εξής ως Sn και An αντίστοιχα. Τέλος, με g_C_L και g_C_T θα αναφερόμαστε στις καμπύλες διασποράς των ταχυτήτων ομάδας των χωρικών, διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων αντίστοιχα. Είναι οι καμπύλες στο σχήμα [3.3], που προέκυψαν από τη σχέση (3.37) της ενότητας 3.2.

Στο σχήμα [3.4] παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς των ταχυτήτων ομάδας των συμμετρικών ρυθμών που παρήγαγε η θεωρία της βαθμοελαστικότητας, για την πρώτη περίπτωση, δηλαδή το h να ισούται με $10^{-4}m$, με υποπεριπτώσεις τις 1a, 1b, 1c, ανάλογα με το g . Στις γραφικές παραστάσεις των περιπτώσεων 1a και 1b παρατηρούμε ότι το χωρικό εγκάρσιο κύμα g_C_T είναι διασπαρμένο, όπως ακριβώς είχαμε παρατηρήσει και στο σχήμα [3.3].

Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση 1a, όπου $h = 10^{-4}m$ και $g > h$, η ταχύτητα ομάδας του χωρικού εγκάρσιου κύματος στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας, για μηδενική συχνότητα, ισούται με εκείνη του χωρικού εγκάρσιου κύματος στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας. Δηλαδή για $f = 0$ έχουμε $g_C_T = C_T = 1846m/s$.

Η ταχύτητα του χωρικού εγκάρσιου κύματος στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας, στο σχήμα απεικονίζεται με την οριζόντια διακεκομμένη ευθεία ($C_T = 1846m/s$). Είναι οριζόντια καθώς δεν παρουσιάζει διασπορά. Όσο η συχνότητα αυξάνεται, η καμπύλη διασποράς της ταχύτητας του g_C_T , αποκλίνει αισθητά από την ταχύτητα (C_T), παίρνοντας υψηλότερες τιμές.

Στην περίπτωση 1b, ($g < h$) η καμπύλη διασποράς του g_C_T παίρνει χαμηλότερες τιμές από την C_T καθώς η συχνότητα αυξάνεται. Η απόκλιση ωστόσο αρχίζει μετά τη συχνότητα $0.4 MHz$ και είναι λιγότερο έντονη σε σχέση με την περίπτωση 1a.

Τέλος, στην περίπτωση 1c, ($g = h$), η ταχύτητα ομάδας του χωρικού εγκάρσιου κύματος στη βαθμοελαστικότητα δεν παρουσιάζει διασπορά, όπως και αναμενόταν. Η τιμή της παραμένει σταθερή όσο αυξάνεται η συχνότητα και ίση με C_T . Η γραφική της παράσταση δηλαδή, είναι μία οριζόντια ευθεία και ταυτίζεται με αυτήν της ταχύτητας του χωρικού εγκάρσιου κύματος στην κλασική ελαστικότητα C_L .

Όσον αφορά στα οδηγούμενα κύματα των περιπτώσεων 1a, 1b και 1c, η διασπορά των ρυθμών στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας είναι πολύ διαφορετική από εκείνη των αντίστοιχων ρυθμών στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (Lamb modes). Η ταχύτητα ομάδας του ρυθμού χαμηλότερης τάξης g_S0 είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της κλασικής ελαστικότητας, αυτήν δηλαδή του ρυθμού $S0$, για πολύ μικρές συχνότητες (περίπου

μέχρι 0.13 MHz). Ωστόσο, όσο η συχνότητα αυξάνεται, η ταχύτητα ομάδας του ρυθμού g_{S0} αρχίζει και αποκλίνει από αυτήν του ρυθμού $S0$. Είναι γνωστό, ότι οι καμπύλες διασποράς των ταχυτήτων ομάδας των ρυθμών $S0$ και $A0$ (Lamb modes), συγκλίνουν ασυμπτωτικά στην ταχύτητα Rayleigh. Παρατηρούμε επίσης, πως η καμπύλη διασποράς του ρυθμού g_{S0} φαίνεται να πλησιάζει την καμπύλη διασποράς του χωρικού εγκάρσιου κύματος g_{CT} . Με βάση το ότι στην κλασική ελαστικότητα, η ταχύτητα Rayleigh είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του χωρικού εγκάρσιου κύματος ($c_R = 0.92c_T$ όπου c_R είναι η ταχύτητα Rayleigh), μπορούμε να πούμε πως η ταχύτητα ομάδας του ρυθμού g_{S0} συγκλίνει στην ταχύτητα ενός Rayleigh κύματος.

Η διασπορά της ταχύτητας των ρυθμών οδηγούμενων κυμάτων μεγαλύτερης τάξης είναι αξιωματικά διαφορετική από αυτήν της ταχύτητας των ρυθμών στην κλασική ελαστικότητα δηλαδή των Lamb modes. Πιο συγκεκριμένα, οι ρυθμοί g_{S1} και g_{S2} έχουν διαφορετικές συχνότητες αποκοπής (0.46 MHz και 0.51 MHz αντίστοιχα), και οι ταχύτητες ομάδας τους αυξάνονται πολύ γρήγορα με την αύξηση της συχνότητας και φαίνεται να συγκλίνουν στην ταχύτητα του g_{CT} . Αυτό είναι σε απόλυτη αντιστοιχία με την περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας καθώς και εκεί οι ταχύτητες ομάδας των ρυθμών Lamb μεγαλύτερης τάξης συγκλίνουν στην ταχύτητα του χωρικού εγκάρσιου κύματος (C_T). Πρόσθετοι ρυθμοί, όπως ο g_{S3} , αναμένονται να εμφανιστούν για μεγαλύτερες συχνότητες και πέραν αυτών που χρησιμοποιούμε στις γραφικές μας παραστάσεις.

Παρόμοια, στην περίπτωση $1b$ ($g < h$), οι καμπύλες διασποράς των οδηγούμενων κυμάτων επίσης διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες της κλασικής ελαστικότητας. Ο ρυθμός g_{S3} εμφανίζεται σε αυτήν την περίπτωση. Παρόμοια με ό,τι ισχύει για το χωρικό εγκάρσιο κύμα g_{CT} , οι ταχύτητες ομάδας των ρυθμών της βαθμοελαστικότητας παίρνουν χαμηλότερες τιμές από τις αντίστοιχες των Lamb modes της κλασικής ελαστικότητας, ωστόσο, η απόκλιση τους από αυτές είναι λιγότερο έντονη σε σχέση με την περίπτωση $1a$.

Στην περίπτωση $1b$, η σύγκλιση της ταχύτητας των ρυθμών των οδηγούμενων κυμάτων, τόσο της βαθμοελαστικότητας όσο και της κλασικής ελαστικότητας στην αντίστοιχη ταχύτητα των χωρικών εγκάρσιων κυμάτων g_{CT} και C_T , είναι πιο εμφανής.

Στην περίπτωση $1c$ ($g = h$), παρατηρούμε μικρές αποκλίσεις στις καμπύλες διασποράς των βαθμοελαστικών και κλασικών ρυθμών. Θεωρητικά, δεν θα έπρεπε να παρατηρούμε καμία διαφορά, ωστόσο παρατηρούμε λόγω των αριθμητικών σφαλμάτων.

Στο σχήμα [3.5], παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των αντισυμμετρικών ρυθμών που επίσης παρήγαγε η θεωρία της βαθμοελαστικότητας, και πάλι για τις περιπτώσεις $1a$, $1b$ και $1c$. Όπως και το χωρικό εγκάρσιο κύμα, και όπως αναμένεται και από το σχήμα [3.3], το χωρικό διαμήκες κύμα στην βαθμοελαστικότητα g_{CL} είναι διασπαρμένο. Η ταχύτητα ομάδας του χωρικού διαμήκους κύματος στην βαθμοελαστικότητα, η οποία θα αναφέρεται στο εξής ως g_{CL} , για πολύ χαμηλές συχνότητες, ισούται με την αντίστοιχη του χωρικού διαμήκους κύματος στην κλασική ελαστικότητα, C_L . Ωστόσο, για μεγαλύτερες συχνότητες, στην περίπτωση $1a$ ($g > h$), η ταχύτητα του g_{CL} γρήγορα αυξάνει σε σχέση με την ταχύτητα C_L , ενώ στην περίπτωση $1b$ ($g < h$), η ταχύτητα μειώνεται, όπως δηλαδή και η αντίστοιχη ταχύτητα του χωρικού εγκάρσιου κύματος. Στην περίπτωση $1c$ ($g = h$), όπως αναμενόταν, το g_{CL} δεν είναι παρουσιάζει διασπορά. Ισούται έτσι, για κάθε συχνότητα, με το C_L .

Όσον αφορά στις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των οδηγούμενων αντισυμμετρικών ρυθμών, παρόμοια συμπεράσματα με αυτά των συμμετρικών μπορούν να εξαχθούν. Πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωση 1a ($g > h$), οι ταχύτητες ομάδας των ρυθμών g_{A0} και g_{A1} πλησιάζουν τις αντίστοιχες των ρυθμών της κλασικής ελαστικότητας Lamb modes, $A0$ και $A1$ για πολύ μικρές συχνότητες, όσο η συχνότητα αυξάνεται ωστόσο, αυξάνονται πολύ σε σχέση με τους ρυθμούς της κλασικής ελαστικότητας. Ανάλογες τάσεις μπορεί να παρατηρηθούν και για τους ρυθμούς g_{A2} και g_{A3} . Οι ταχύτητες ομάδας των προαναφερθέντων ρυθμών συγκλίνουν στην ταχύτητα ομάδας του χωρικού εγκάρσιου κύματος στη βαθμοελαστικότητα, g_{CT} .

Στην περίπτωση 1b ($g < h$), οι ταχύτητες ομάδας των ρυθμών και πάλι επηρεάζονται από τη μικροδομή, είναι ωστόσο χαμηλότερα από τους Lamb ρυθμούς και η επίδραση είναι λιγότερο έντονη σε σχέση με την περίπτωση 1a.

Τέλος, στην περίπτωση 1c ($g = h$), οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας είναι και πάλι σχεδόν ταυτόσημες με αυτές των ρυθμών της κλασικής ελαστικότητας (Lamb modes).

Στα σχήματα [3.6] και [3.7], παρουσιάζονται οι καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας για την περίπτωση 2, δηλαδή για $h = 10^{-5}m$. Παρόμοια συμπεράσματα μπορεί να εξαχθούν για όλες τις περιπτώσεις 2a, 2b, 2c, με διαφορά ότι η επίδραση της μικροδομής είναι πιο μετριασμένη σε σχέση με την περίπτωση 1 ($h = 10^{-4}m$).

Συμπεράσματα

Η απλοποιημένη μορφή της θεωρίας της βαθμοελαστικότητας του Mindlin, έχει κερδίσει έδαφος την τελευταία δεκαετία αφού α) Σε αντίθεση με τη θεωρία ζεύγους τάσεων των αδελφών Cosserat ή τη μικροπολική ελαστικότητα, όλοι οι ταυιστές που παράγονται είναι *συμμετρικοί* και έτσι ευκολότεροι από μαθηματικής πλευράς και περισσότερο κατανοητοί από την πλευρά της φυσικής σημασίας, και β) για προβλήματα θραυστομηχανικής (πολύ σημαντικά στην περίπτωση των οστών), οι θεωρίες της βαθμοελαστικότητας οδηγούν σε πιο λογικά αποτελέσματα σε σχέση με τις θεωρίες ζεύγους τάσεων. Προβλέπουν φαινόμενα που σχετίζονται με ραγίσματα στα άκρα των σωμάτων αλλά και με τη διάδοση μιας ρωγμής.

Από τις γραφικές παραστάσεις και των έξι υποπεριπτώσεων για τους διάφορους συνδυασμούς των μικρο-δομικών σταθερών g και h , προκύπτει ότι οι τελευταίοι έχουν καθοριστικό ρόλο στις καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των οδηγούμενων κυμάτων. Πρέπει να τονιστεί ότι σε όλες τις υποπεριπτώσεις η σταθερά g επιλέχτηκε έτσι ώστε οι παραγόμενες καμπύλες διασποράς να είναι από φυσικής άποψης, αποδεκτές. Ένα σημαντικό, άμεσο συμπέρασμα που μπορεί να εξάγει κανείς από τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων διασποράς, συγκρίνοντας τις περιπτώσεις 1 και 2, ανεξαρτήτως συμμετρικών ή αντισυμμετρικών ρυθμών, είναι ότι όσο μικρότερες τιμές πάρουν οι δύο μικρο-δομικές σταθερές g και h τόσο μειώνεται η επίδραση της μικροδομής. Με άλλα λόγια, όσο μικρότερες τιμές πάρουν οι σταθερές αυτές, τόσο οι καμπύλες των ταχυτήτων ομάδας της βαθμοελαστικότητας πλησιάζουν τις αντίστοιχες της κλασικής ελαστικότητας. Οι τιμές $g = 10^{-3}m$ για την περίπτωση 1 και $g = 10^{-6}m$ για την περίπτωση 2, παραβλέφθηκαν επίτηδες· η τιμή $10^{-3}m$ οδηγεί σε πολύ γρήγορη αύξηση των ταχυτήτων ομάδας ακόμα και σε πολύ μικρές συχνότητες το οποίο θα ήταν μάλλον μη ανιχνεύσιμο στις γραφικές παραστάσεις. Η τιμή $10^{-6}m$ θα οδηγούσε σε πολύ μικρές αποκλίσεις μεταξύ των καμπύλων των δύο θεωριών, της κλασικής ελαστικότητας και της βαθμοελαστικότητας. Συνεπώς, λογικές εκτιμήσεις για τη σχέση των δύο

μικρο-δομικών σταθερών μεταξύ τους αλλά και για τον καθορισμό της τιμής τους μπορεί να γίνουν μόνο μέσα από τη σύγκριση των πειραματικών μετρήσεων με αυτές που προβλέπει η θεωρία. Είναι προφανές ότι η τιμή της g ποικίλει ανάλογα με τις μηχανικές ιδιότητες του εκάστοτε υλικού. Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα των γραφικών θα πρέπει να ερμηνευτούν σε συνδυασμό με τις μετρήσεις πραγματικών οστών έτσι ώστε να καταλήξουμε στον καταλληλότερο συνδυασμό των δύο μικρο-δομικών σταθερών που προσφέρει τις πιο ρεαλιστικές καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας.

Για διαφορετικές τιμές των g και h , για συχνότητες από 0.5 MHz (για κυματαριθμό $\approx 4mm$), μέχρι 1.5 MHz (για κυματαριθμό $\approx 2.7mm$), εύρος που είναι σύνηθες για υπερηχητικές μελέτες οστών, η διασπορά της ταχύτητας των ρυθμών οδηγούμενων κυμάτων της βαθμοελαστικότητας διαφέρει αξιοσημείωτα από αυτήν των αντίστοιχων ρυθμών της κλασικής ελαστικότητας (Lamb modes). Συνεπώς, η κλασική θεωρία ελαστικότητας για οδηγούμενα κύματα σε οστά παρουσιάζει περιορισμένη αξιοπιστία. Επίσης στην περίπτωση που οι μικρο-δομικές σταθερές έχουν διαφορετικές τιμές, η μικροδομή φαίνεται να είναι με-ίζονος σημασίας στη διάδοση των χωρικών διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων.

Στην περίπτωση που οι δύο μικρο-δομικές σταθερές γίνουν ίσες μεταξύ τους, ή με το μηδέν, τότε η θεωρία της βαθμοελαστικότητας παράγει καμπύλες διασποράς πανομοιότυπες με αυτές της κλασικής ελαστικότητας. Τυχόν διαφορές που παρουσιάζονται στις γραφικές παραστάσεις της παρούσας εργασίας, οφείλονται σε αριθμητικά σφάλματα κατά τη λύση των συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων.

Σε αντίθεση με την άποψη ότι οι μικροδομή παίζει ρόλο μόνο για υψηλές συχνότητες, φαίνεται πως η επίδραση της μικροδομής γίνεται αξιοσημείωτα αισθητή ακόμα και σε μεσαίες συχνότητες, από 0.7 - 1 MHz (για κυματαριθμούς από 2.8 mm μέχρι και 4 mm), οι οποίες είναι μέσα στο εύρος των μελετών των υπερηχητικών κυμάτων στα οστά. Η μικροδομή στα οστά είναι ένας πολύ σημαντικός παράγοντας ο οποίος πρέπει να λαμβάνεται υπόψη τόσο στις θεωρητικές όσο και στις υπολογιστικές μελέτες [5].

Παράρτημα

Τα στοιχεία της ορίζουσας του συστήματος των συμμετρικών ρυθμών είναι τα εξής [5]:

$$A_{11} = (4\mu p^3 + 2\lambda k^2 p + 2\lambda p^3) \sinh p h$$

$$A_{12} = \mu i k q^2 \sinh q h$$

$$A_{13} = (4\mu r_p^3 - 2\lambda k^2 r_p + 2\lambda r_p^3) \sinh r_p h$$

$$A_{14} = -4\mu i k r_q^2 \sinh r_q h$$

$$A_{21} = -4\mu i k p^2 \cosh p h$$

$$A_{22} = 2\mu(-q^3 + k^2 q) \cosh q h$$

$$A_{23} = 4\mu i k r_p^2 \cosh r_p h$$

$$A_{24} = 2\mu(r_q^3 + k^2 r_q) \cosh r_q h$$

$$A_{31} = \left(4\mu p i k + 4\mu p^3 i k g^2 + 2\lambda p^3 i k g^2 + 2\lambda p i k^3 g^2 + 8\mu p i k g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} \right) i k p \sinh p h$$

$$A_{32} = \left(2\mu q^2 - 2\mu k^2 + 2\mu q^4 g^2 + 4\mu k^2 g^2 q^2 - 2\mu k^4 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} q^2 \right) \sinh q h$$

$$A_{33} = \left(-4\mu r_p i k + 4\mu r_p^3 i k g^2 + 2\lambda r_p^3 i k g^2 - \lambda r_p i k^3 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} i k p \right) \sinh r_p h$$

$$A_{34} = \left(-2\mu r_q^2 + 2\mu r_q^4 g^2 - 2\mu k^4 g^2 - 2\mu k^2 - 4\mu k^2 r_q^2 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_q^2 \right) \sinh r_q h$$

$$A_{41} = (-4\mu p^2 - 2\lambda p^2 - 2\lambda k^2 - 2\lambda p^4 g^2 - 4\mu p^4 g^2 - 2\lambda k^4 g^2 - 4\lambda k^2 p^2 g^2 - 8\mu k^2 p^2 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} p^2) \cosh p h$$

$$A_{42} = \left(-4\mu q i k - 2\mu q^3 i k g^2 - 6\mu i k^3 q g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} i k q \right) \cosh q h$$

$$A_{43} = (4\mu r_p^2 + 2\lambda r_p^2 - 2\lambda k^2 - 2\lambda r_p^4 g^2 - 4\mu r_p^4 g^2 - 2\lambda k^4 g^2 + 4\lambda k^2 r_p^2 g^2 + 8\mu k^2 g^2 r_p^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_p^2) \cosh r_p h$$

$$A_{44} = \left(-4\mu r_q i k + 2\mu r_q^3 i k g^2 - 6\mu i k^3 r_q g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} i k r_q \right) \cosh r_q h$$

ενώ των αντισυμμετρικών θα είναι:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= (-4\mu p^3 - 2\lambda k^2 P - 2\lambda p^3) \cosh p h \\
B_{12} &= 4\mu i k q^2 \cosh q h \\
B_{13} &= -4\mu i k r_q^2 \cosh r_q h \\
B_{14} &= (4\mu r_q^3 - 2\lambda k^2 r_p + 2\lambda r_p^3) \cosh r_p h \\
B_{21} &= 4\mu i k p^2 \sinh p h \\
B_{22} &= -2\mu (q^3 - k^2 q) \sinh q h \\
B_{23} &= -2\mu (r_q^3 + k^2 r_s) \sinh r_s h \\
B_{24} &= -4\mu i k r_p^2 \sinh r_p h \\
B_{31} &= (4\mu p i k + 4\mu p^3 i k g^2 + 2\lambda p^3 i k g^2 + 2\lambda i k^3 p g^2 + 8\mu i k^3 p g^2) \cosh p h \\
B_{32} &= (-2\mu q^2 + 2\mu k^2 - 2\mu q^4 g^2 - 4\mu k^2 q^2 g^2 + 2\mu k^4 g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} q^2) \cosh q h \\
B_{33} &= (2\mu r_q^2 - 2\mu r_q^4 g^2 + 2\mu k^4 g^2 + 2\mu k^2 + 4\mu k^2 r_q^2 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} r_q^2) \cosh r_q h \\
B_{34} &= (4\mu r_p i k - 4\mu i k g^2 r_p^3 - 2\lambda r_p^3 i k g^2 + 2\lambda i k^3 r_p g^2 + 8\mu i k^3 r_p g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} i k r_p) \cosh r_p h \\
B_{41} &= (4\mu p^2 + 2\lambda p^2 + 2\lambda k^2 + 2\lambda p^4 g^2 + 4\mu p^4 g^2 + 2\lambda k^4 g^2 + \\
&\quad + 4\lambda k^2 p^2 g^2 + 8\mu k^2 p^2 g^2 - \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} p^2) \sinh p h \\
B_{42} &= \left(4\mu i k q - 2\mu i k q^3 g^2 - 6\mu i k^3 q g^2 + \frac{2\rho h^2 \omega^2}{3} i k q \right) \sinh q h \\
B_{43} &= \left(4\mu r_q i k - 2\mu r_q^3 g^2 i k + 6\mu i k^3 r_q g^2 - \frac{2\rho \omega^2 h^2}{3} i k r_q \right) \sinh r_q h \\
B_{44} &= (-4\mu r_p^2 - 2\lambda r_p^2 + 2\lambda k^2 + 2r_p^4 g^2 + 4\mu r_p^4 g^2 + 2\lambda k^4 g^2 - \\
&\quad - 4\lambda k^2 r_p^2 g^2 - 8\mu k^2 r_p^2 g^2 + \frac{2\rho \omega^2 h^2}{3} r_p^2) \sinh r_p h
\end{aligned}$$

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σχήμα [3.3]

Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των εγκάρσιων και διαμήκων κυμάτων σε άπειρα εκτεταμένο βαθμοελαστικό μέσο διάδοσης.

Σχήμα [3.4]

Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των συμμετρικών ρυθμών που διαδίδονται σε μία ελεύθερη από τάσεις πλάκα, η οποία προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας. Για τις παρακάτω περιπτώσεις

α) περίπτωση 1α: $g > h$ ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$)

β) περίπτωση 1b: $g < h$ ($g = 5 \times 10^{-5}$, $h = 10^{-4}$)

γ) περίπτωση 1c: $g = h$ ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$)

Σχήμα [3.5]

Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των αντισυμμετρικών ρυθμών που διαδίδονται σε μία ελεύθερη από τάσεις πλάκα, η οποία προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας. Για τις παρακάτω περιπτώσεις

α) περίπτωση 1α: $g > h$ ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$)

β) περίπτωση 1b: $g < h$ ($g = 5 \times 10^{-5}$, $h = 10^{-4}$)

γ) περίπτωση 1c: $g = h$ ($g = 5 \times 10^{-4}$, $h = 10^{-4}$)

Σχήμα [3.6]

Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των συμμετρικών ρυθμών που διαδίδονται σε μία ελεύθερη από τάσεις πλάκα, η οποία προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας. Για τις παρακάτω περιπτώσεις

α) περίπτωση 2α: $g > h$ ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-5}$)

β) περίπτωση 2b: $g < h$ ($g = 5 \times 10^{-6}$, $h = 10^{-5}$)

γ) περίπτωση 2c: $g = h$ ($g = 5 \times 10^{-5}$, $h = 10^{-5}$)

Σχήμα [3.7]

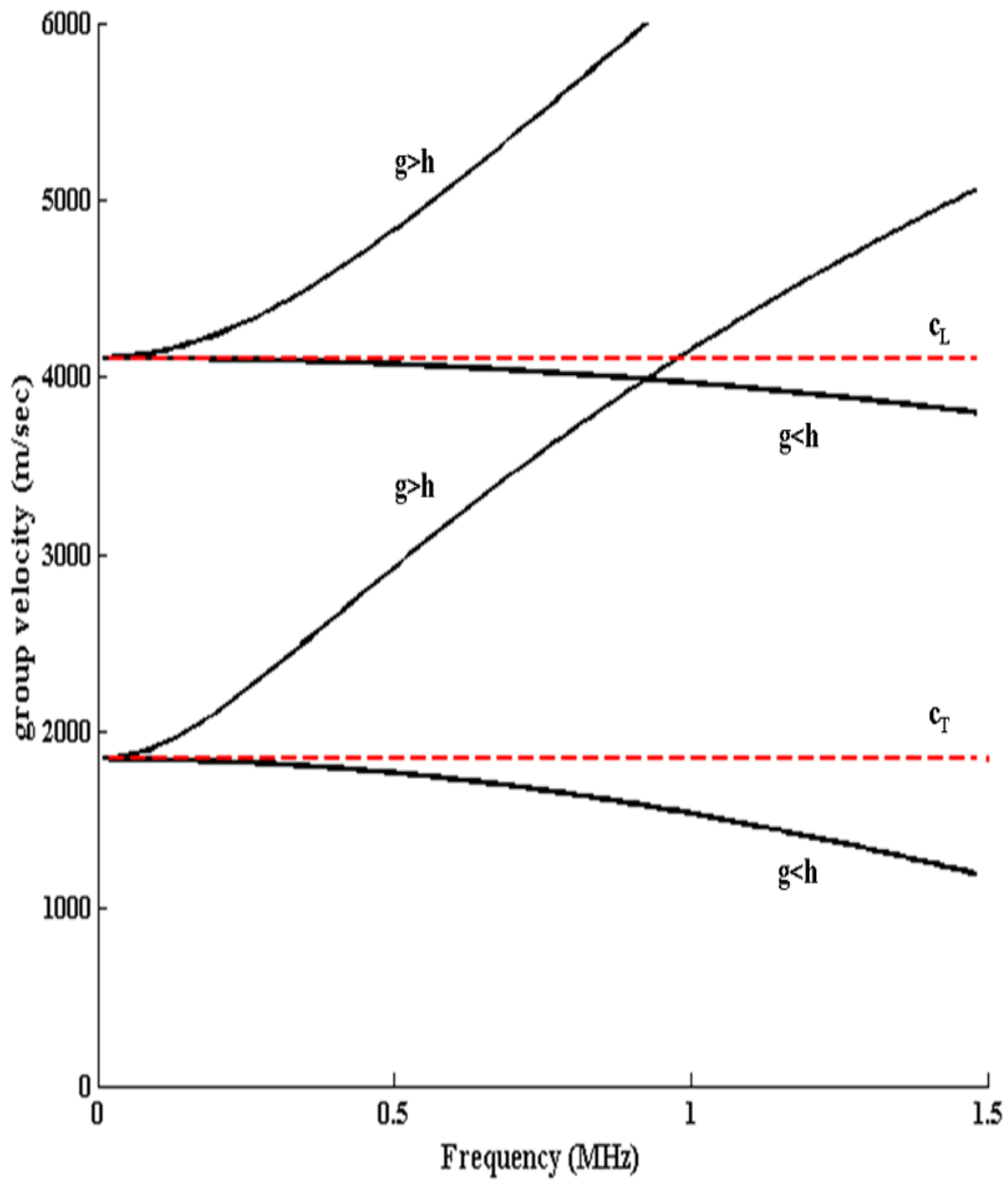
Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας ομάδας των αντισυμμετρικών ρυθμών που διαδίδονται σε ένα σε μία ελεύθερη από τάσεις πλάκα, η οποία προσομοιάζει ένα φλοιώδες οστό, στην περίπτωση της κλασικής ελαστικότητας (διακεκομμένες γραμμές) και στην περίπτωση της βαθμοελαστικότητας. Για τις παρακάτω περιπτώσεις

α) περίπτωση 2α: $g > h$ ($g = 10^{-4}$, $h = 10^{-5}$)

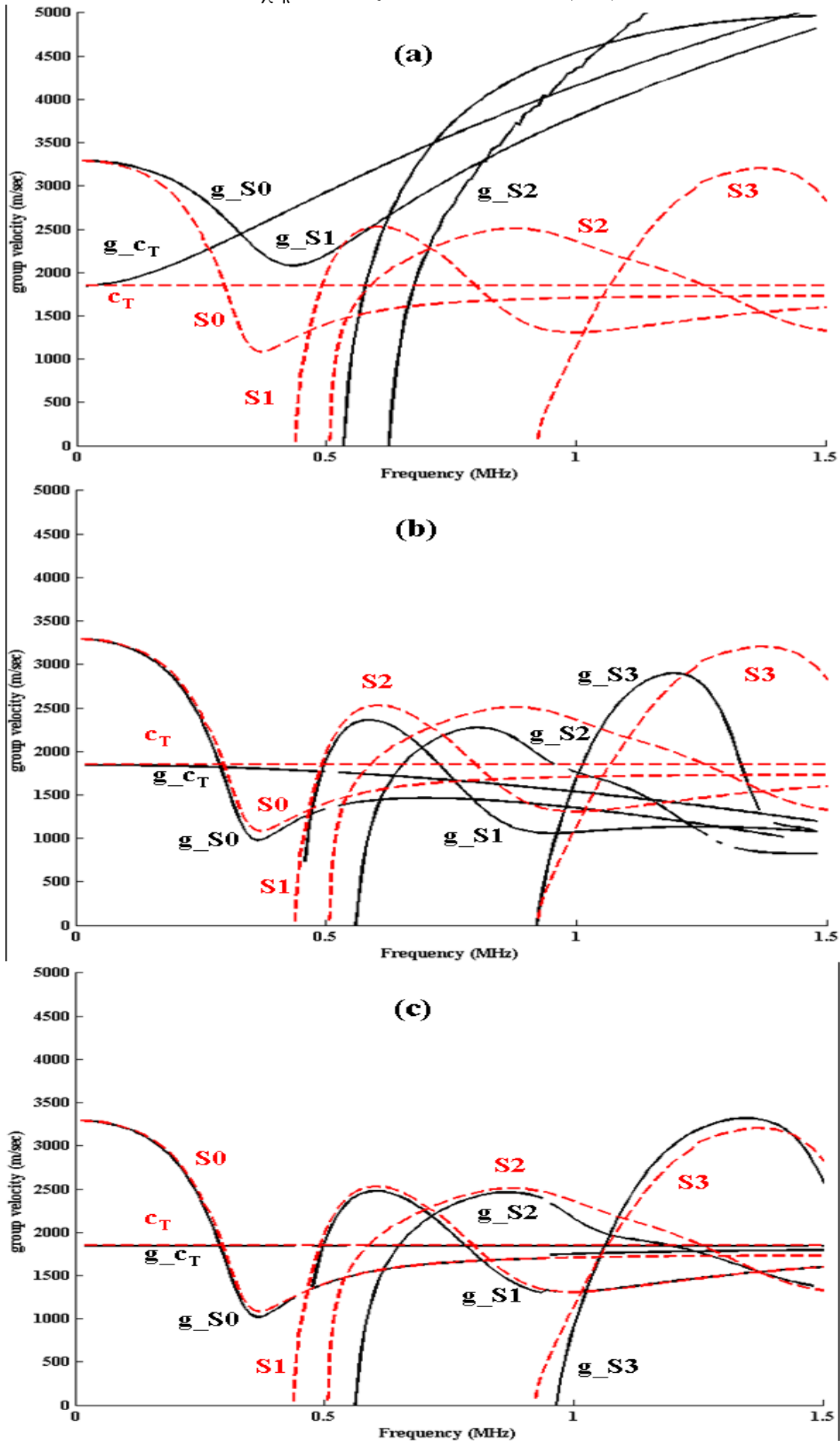
β) περίπτωση 2b: $g < h$ ($g = 5 \times 10^{-6}$, $h = 10^{-5}$)

γ) περίπτωση 2c: $g = h$ ($g = 5 \times 10^{-5}$, $h = 10^{-5}$)

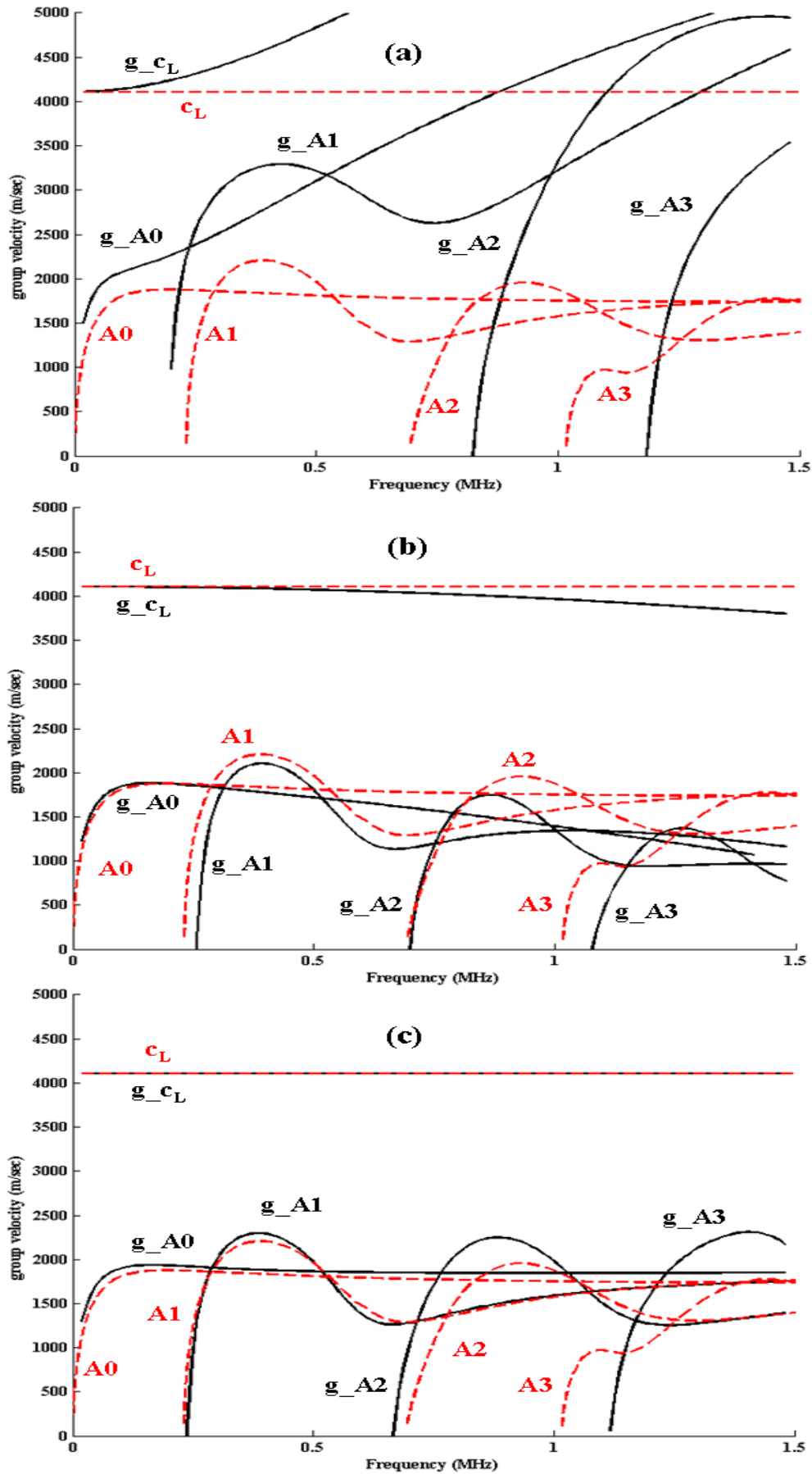
Σχήμα 3.3: [5] Καμπύλες διασποράς της ταχύτητας



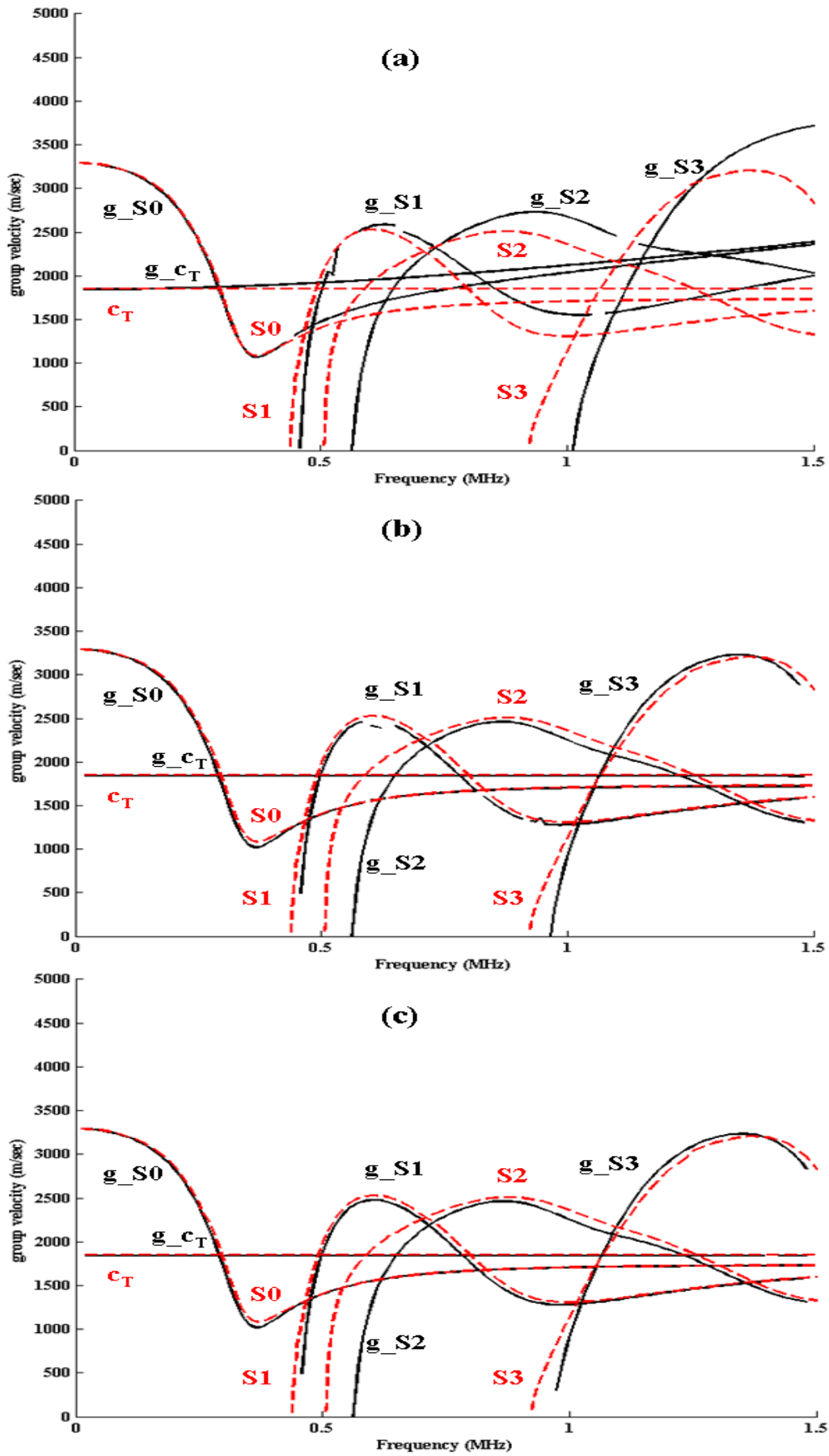
Σχήμα 3.4: symmetric cases 1a, 1b, 1c



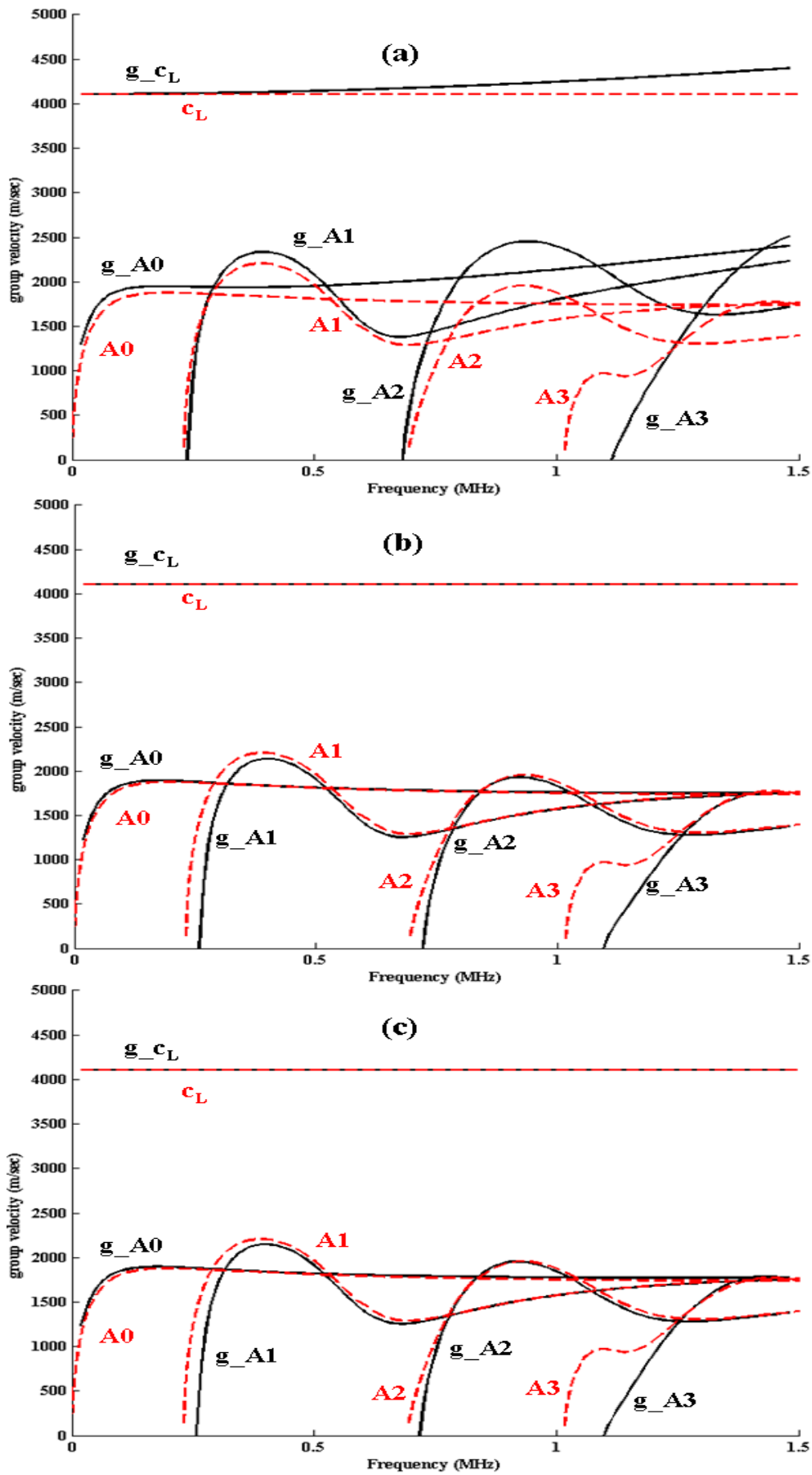
Σχήμα 3.5: antisymmetric cases 1a, 1b, 1c



Σχήμα 3.6: symmetric cases 2a, 2b, 2c



Σχήμα 3.7: antisymmetric cases 2a, 2b, 2c



Βιβλιογραφία

- [1] James R.Rice. *Solid Mechanics*. Harvard University, Cambridge, Ma 02138 USA, 2010
- [2] R.D. Mindlin. *Micro-Structure in Linear Elasticity*. 51-78, Columbia University, New York USA, 1964
- [3] J.L Rose. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014
- [4] Χαράλαμπος Γεωργιάδης *Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2013
- [5] Maria G. Vavva, Vasilios C. Protopappas, Leonidas N. Gergidia, Antonios Charalambopoulos, Dimitrios I. Fotiadis and Demos Polyzos. *Velocity Dispersion Curves of Guides Waves Propagating in a Free Gradient Elastic Plate: Application to Cortical Bone*.
- [6] V.I. Erofejev. *Wave Processes in Solids with Micro-Structure*. World Scientific, Singapore, 2003
- [7] J.F.C. Yang and R.S. Lakes. *Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending*. 91-98, J.Biomech 15(2), 1982
- [8] E. Bossy, M. Talmant and P. Laugier. *Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models*. 2314-2324, J.Acoust. Soc. Am. 115(5), 2004
- [9] E.C. Aifantis. *Strain gradient interpretation of size effects*. 299-314, Int.J. Fract. 95, 1999
- [10] List of Latex Mathematical Symbols.
https://oeis.org/wiki/List_of_LaTeX_mathematical_symbols
- [11] Vector Calculus.
https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_calculus_identities