ΟΨΕΙΣ ΤΟΥ ΡΕΑΛΙΣΜΟΥ ΣΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΡΟΒΑΤΣΟΣ ΠΑΝΤΕΛΕΗΜΩΝ

Α.Μ. 09103161

Επιβλέπων:

ΘΕΟΛΟΓΟΥ ΚΩΣΤΑΣ

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ Α.Κ.Ε.Δ.

ΟΨΕΙΣ ΤΟΥ ΡΕΑΛΙΣΜΟΥ ΣΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ Α.Κ.Ε.Δ.

ΡΟΒΑΤΣΟΣ ΠΑΝΤΕΛΕΗΜΩΝ

Α.Μ. 09103161

Επιβλέπων:

ΚΩΣΤΑΣ ΘΕΟΛΟΓΟΥ, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επιτροπή:

ΠΕΤΡΟΣ ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δρ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΣΤΕΛΙΟΣ (Ε.ΔΙ.Π. Ε.Μ.Π.)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη 6

Εισαγωγή Πρόγραμμα θεμελίωσης των Μαθηματικών 19ου – 20ου αι 8

Σκοπός της εργασίας και τρόπος διάρθρωσης 9

1. Ο ιντουισιονισμός του Brouwer

1.1 Ο Brouwer και ο Φορμαλισμός..10

1.2 Αντίδραση του Brouwer στο φορμαλισμό και κριτική 14

1.3 Αποτέλεσμα της αντιπαράθεσης, αρχή του Ιντουισιονισμού 17

1.4 Βασικές έννοιες και προέλευση Ιντουισιονισμού 19

1.5 Η πρώτη πράξη, οντολογική και γνωσιοθεωρητική συνιστώσα 22

1.6 Η δεύτερη πράξη, ελεύθερες ακολουθίες και δημιουργικό υποκείμενο 26

1.7 Αρχή των δύο σθενών, και αρχή ελεγξιμότητας 28

1.8 Συμπέρασμα 31

1.9 Ανασύνταξη του Ρεαλισμού μετά από την κριτική του Brouwer 32

2. Πρόγραμμα Hilbert (*Ρεαλισμός Ι*)

2.1 Περατοκρατισμός, σύγκλιση προς τον Ιντουισιονισμό και απομάκρυνση από τον Φορμαλισμό 34

2.2 Ο Hilbert και το άπειρο..37

2.3 Προτάσεις Hilbert και διατύπωση θεωρήματος ……………………………………………..39

2.4 Περιγραφή του προγράμματος Hilbert …………………………………………………………41

2.5 Ο Von Neumann για τις κατασκευαστικές μεθόδους και τον περατοκρατισμό ...43

2.6 Οι έρευνες του Gödel δημιουργούν πρόβλημα στο πρόγραμμα Hilbert ……….….45

2.7 Ο Weyl για το πρόγραμμα Hilbert ……………………………………………………………….46

2.8 Σύνολα ………………………………………………………………………………………………………47

2.9 Η σημασία της Θεωρίας Συνόλων για τα μαθηματικά ……………………………………52

2.10 Το σύνολο κατά Cantor ……………………………………………………………………………53

Gödel και Wang *(Ρεαλισμός ΙΙ)*

2.11 Η θεωρία συνόλων ως θεωρία βάσης ………………………………………………………….54

2.12 O Gödel και η ανάγκη για εισαγωγή δύο κριτηρίων αληθείας ………………….……55

2.13 Η μαθηματική εποπτεία για τον Gödel …………………………………………………….58

2.14 Δυσαναλογία αισθητηριακής αντίληψης και μαθηματικής εποπτείας, ασθενής Θέση ……………………………………………………………………………………………………..59

2.15 Ο Wang και οι απόψεις του για το σχηματισμό συνόλων, συλλογών και κριτηρίων αληθείας ……………………………………………………………………………….60

2.16 Ο Wang ακολουθεί διαφορετικό δρόμο από εκείνον που χάραξε ο Gödel ……..62

2.17 Αποτέλεσμα της απόστασης των δύο θεωριών …………………………………………..63

2.18 Ο Wang φέρει στην επιφάνεια το πρόβλημα των δύο τάσεων του ρεαλισμού .64

3. Ο Ρεαλισμός των επιγόνων *(Ρεαλισμός ΙΙΙ)*

3.1 Ο Benacerraf, πως εκθειάζει τους Hilbert, Gödel και πως ορίζει τις δύο δικές του συνιστώσες……………………………………………………………………………………………65

3.2 Η κριτική του Benacerraf στις απόψεις των Hilbert, Gödel και η αιτιακή θεωρία της γνώσης ……………………………………………………………………………………………….66

3.3 Οι αντιδράσεις στην επιχειρηματολογία του Benacerraf ………………………………….68

3.4 Ο Quine, ο Νατουραλισμός και μια συνολική κριτική του ύστερου λογικού εμπειρισμού……………………………………………………………………………………………69

3.5 Προσέγγιση Resnik, ο λογισμός των αφηρημένων σχεδίων ………………………………72

3.6 Προσέγγιση Kitcher ……………………………………………………………………………….72

3.7 Ο εμπειρισμός του Mill και οι απόψεις του ……………………………………………………73

3.8 Διαφορά προσέγγισης ανάμεσα σε Mill και Kitcher ………………………………………75

Ρεαλισμός IV

3.9 Η αρχή της ολότητας και η αρχή της αναλογίας του Bernays …………………………….76

3.10 Δυσαναλογία ανάμεσα στην υλική και τη μαθηματική πραγματικότητα …………77

3.11 Το έργο του Tarski και η κατασκευή τεχνιτών γλωσσών από τον Frege …………..79

3.12 Το δόγμα του νοήματος του Wittgenstein ……………………………………………………80

3.13 Το επιχείρημα Dummett …………………………………………………………………………….81

3.14 Ο μεταφυσικός ρεαλισμός, το αδιέξοδο και ο αντιρεαλισμός του Dummett …..82

3.15 Το πραγματικό πρόβλημα του ρεαλισμού κατά Dummett ……………………………..83

4. Ο Σημασιολογικός Ρεαλισμός

4.1 Η ανάγκη δημιουργίας του σημασιολογικού ρεαλισμού, η διαφορά του με τον αντιρεαλισμό του Dummett και τον ιντουισιονισμό ……………………………………..84

4.2 Προσέγγιση της διάστασης κλασικών-ιντουισιονιστικών μαθηματικών σε λογική και φιλοσοφική βάση …………………………………………………………………………………..85

4.3 Η οπτική του Heyting για τη διαμάχη ………………………………………………………..87

4.4 Η οπτική των συντηρητικών για τον ιντουισιονισμό, οι προθέσεις τους και η ανάγκη για δημιουργία τρίτης στάσης ……………………………………………………………88

4.5 Η προσπάθεια δημιουργίας ουδέτερου εδάφους από τον Carnap …………………..90

4.6 Ο Bishop, το κοινό υπόβαθρο και τα μαθηματικά ……………………………………….92

4.7 Οι βασικές μαθηματικές οντότητες και οι διαφοροποιήσεις …………………………..94

4.8 Το Δημιουργικό υποκείμενο και η σημασία του στα κλασικά και ιντουισιονιστικά μαθηματικά ……………………………………………………………………………………………..95

4.9 Η μαθηματική δραστηριότητα στα κλασικά και ιντουισιονιστικά μαθηματικά …97

4.10 Σύνοψη και συμπέρασμα ……………………………………………………………………..99

Πηγές – Βιβλιογραφία ……………………………………………………………………………………101

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

«Ρεαλισμός είναι η άποψη ότι τα υλικά αντικείμενα υπάρχουν εξωτερικά προς εμάς και ανεξάρτητα από την αισθητηριακή μας εμπειρία. Έτσι, ο ρεαλισμός αντιτίθεται στον ιδεαλισμό, ο οποίος υποστηρίζει ότι δεν υπάρχουν τέτοια υλικά αντικείμενα ή εξωτερικές πραγματικότητες χωριστά από τη γνώση μας ή τη συνείδηση που έχουμε γι' αυτά, ώστε ολόκληρο το σύμπαν να εξαρτάται από το νου ή από κάτι νοητικό.» [1]

Αυτός είναι ένας ''παραδοσιακός'' ορισμός του ρεαλισμού που δίνει ο Hirst στην Encyclopedia of Philosophy και αντιπροσωπεύει το κύριο φιλοσοφικό ρεύμα, το ρεύμα του μαθηματικού ρεαλισμού του 19^{ου} αιώνα. Το πρόγραμμα θεμελίωσης των μαθηματικών που υποστηρίζεται φιλοσοφικά από το μαθηματικό ρεαλισμό, συνδέεται με το έργο του Hilbert, του Gödel, του Quine και των επιγόνων του. Παράλληλα δημιουργήθηκε ένα δεύτερο φιλοσοφικό ρεύμα αντίθετο με το ήδη υπάρχον, το ρεύμα του μαθηματικού αντιρεαλισμού το οποίο συνδέεται με το έργο του Brouwer, του Heyting, του Dummett, κ.ά.

Σ' αυτή την εργασία γίνεται μια ιστορική προσέγγιση των φιλοσοφικών τάσεων στα μαθηματικά της εποχής, αναλύονται οι απόψεις και οι ιδέες των υποστηρικτών του ρεαλισμού και του αντιρεαλισμού και τέλος γίνεται μια προσπάθεια εύρεσης κοινού πεδίου ανάπτυξης του ρεαλισμού και του ιντουισιονισμού με σκοπό τη γεφύρωση των διαφορών και την κοινή ανάπτυξη των δύο σχολών, όσο αυτό είναι εφικτό.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Ρεαλισμός, αντιρεαλισμός, ιντουισιονισμός, φιλοσοφικό ρεύμα, μαθηματικά , Hilbert, Brouwer.

---

[1] Hirst 1967, 77

ABSTRACT

''Realism is the view that material objects exist externally to us and regardless of our sensory experience. Thus, pragmatism is opposed to idealism, which argues that there are no such material objects or external realities separate from our knowledge or from the consciousness we have of them so that the whole universe depends on the mind or something mental''.

This is a ''traditional'' definition of realism that Hirst gives to the Encyclopedia of Philosophy and represents the main philosophical current, the stream of mathematical realism of the 19th century. The mathematical foundation program supported philosophically by mathematical realism is linked to the work of Hilbert, Gödel, Quine and his descendants. At the same time, a second philosophical stream was created, contrary to the existing one, the stream of mathematical antirealism associated with the work of Brouwer, Heyting, Dummett, and others.

In this paper a historical approach to the philosophical trends in the mathematics of the time is carried out, the views and ideas of supporters of realism and antirealism are analyzed, and finally, an attempt is made to find a common field of realism and intuitionism in order to bridge the differences and the mutual development of the two schools as far as possible.

KEY WORDS: Realism, antirealism, intuisionism, philosophical trend, mathematics, Hilbert, Brouwer.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρόγραμμα θεμελίωσης των Μαθηματικών 19^{ου} – 20^{ου} αι.

Οι σχολές των μαθηματικών, που εμφανίστηκαν προς τα τέλη του 19^{ου} αιώνα (ο λογικισμός του Frege και του Russel, ο περατοκρατισμός του Hilbert, ο ιντουισιονισμός του Brouwer), δεν είναι πλέον διακρίσεις ιστορικού χαρακτήρα που αντανακλούν μαθηματικές και φιλοσοφικές ιδιομορφίες στην μακρά, ιστορική πορεία ανάπτυξής τους. Ακόμα, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι μερικές από τις σχολές των μαθηματικών, εάν εξεταστούν από φιλοσοφική σκοπιά, έχουν περισσότερες ομοιότητες παρά διαφορές μεταξύ τους. Έτσι λ.χ., ο λογικισμός του Frege και μίας περιόδου του Russell, που πρέσβευε την αναγωγή των μαθηματικών στους νόμους της λογικής, δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί σήμερα ως δόγμα ασύμβατο με το δόγμα του ρεαλισμού. Κι ασφαλώς αντίστοιχες παρατηρήσεις τον περατοκρατισμό του Hilbert, παρόλη την διάθεσή του στο λογικισμό του Frege.[2]

Οι ιστορικές διακρίσεις σε σχολές -τουλάχιστο από φιλοσοφική σκοπιά- πραγματικά δεν έχουν ιδιαίτερα μεγάλο ενδιαφέρον σήμερα, μολονότι διατηρούν το ιστορικό και ταξινομικό τους ενδιαφέρον. Αν λοιπόν συμφωνήσουμε ότι πρέπει να κινηθούμε σε ένα ευρύ φιλοσοφικό πεδίο, διατηρώντας ασφαλώς μόνιμη και συνεχή επαφή με τα μαθηματικά -κλασικά, ιντουισιονιστικά και όποια άλλα προκύψουν- τότε δεν είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε ανάμεσα στις ιστορικές σχολές των μαθηματικών. Διότι, ενώ όλες τους εμφανίζουν σπουδαία πλεονεκτήματα, ταυτόχρονα παρουσιάζουν σημαντικές ενδογενείς αδυναμίες που θα μπορούσαν, ενδεχομένως, να ξεπεραστούν εφόσον ανοιχτούμε προς ευρύτερα φιλοσοφικά ρεύματα και προσανατολισμούς. Ιδιομορφία της μελέτης μας είναι το ότι επιλέγουμε την ιστορική ανάλυση του ρεαλιστικού δόγματος: εστιάζουμε την προσοχή μας τοπικά, στο ρεαλισμό που εκδηλώνεται στα προγράμματα θεμελίωσης των μαθηματικών του 20^{ου} αιώνα.

[2] Αναπολιτάνος 1985, Ρουσόπουλος 1987, 1991

Σκοπός της εργασίας και τρόπος διάρθρωσης

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να ερευνήσουμε τον τρόπο θεμελίωσης των μαθηματικών σε μια εποχή που η φιλοσοφική διαμάχη μεταξύ πλατωνισμού και ιντουισιονισμού μονοπωλούσε το ενδιαφέρον μαθηματικών και φιλοσόφων. Θα γίνει παρουσίαση και παρατήρηση των διαφόρων τάσεων που δημιουργήθηκαν λόγω των συγκρούσεων αυτών των δύο μεγάλων μαθηματικών σχολών, καθώς και σύντομες αναφορές στις ζωές μεγάλων μαθηματικών που έδωσαν το δικό τους χρώμα σε αυτό το φιλοσοφικό ταξίδι των μαθηματικών.

Αρχικά θα εξεταστεί *ο ιντουισιονισμός του Brouwer*, η αντιπαράθεση του με το φορμαλισμό της εποχής και στη συνέχεια η γέννηση του ιντουισιονισμού και η αναφορά στα κύρια χαρακτηριστικά του. Στη συνέχεια αναπτύσσεται *το πρόγραμμα του Hilbert και ο περατοκρατισμός*, αναφέρεται η σημασία της *θεωρίας συνόλων* ως θεωρία βάσης των μαθηματικών και αναλύονται οι απόψεις των *Gödel και Wang* για το ρεαλισμό. Εξετάζεται *η κριτική του Benacerraf* στον υπάρχον ρεαλισμό, *ο νατουραλισμός του Quine, οι προσεγγίσεις των Resnik και Kitcher* και *ο εμπειρισμός του Mill*. Γίνεται επίσης αναφορά στο κομμάτι εκείνο του ρεαλισμού που εξετάζει *ο Bernays* με την *αρχή της ολότητας και την αρχή της αναλογίας*, ο *Frege* με *την κατασκευή τεχνιτών γλωσσών* και ο *Wittgenstein* με *το δόγμα του νοήματος*. Τέλος θα περάσουμε στο *σημασιολογικό ρεαλισμό* μέσω του *αντιρεαλισμού του Dummett*, όπου θα δικαιολογηθεί η ανάγκη ύπαρξής του και η δημιουργία κοινού υπόβαθρου για την ανάπτυξη των κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών με τη χρήση ΄΄εργαλείων΄΄ όπως *το δημιουργικό υποκείμενο***.** Στη σύνοψη θα παρουσιαστούν τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα στις μαθηματικές σχολές του ρεαλισμού και του ιντουισιονισμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Ο ΙΝΤΟΥΙΣΙΟΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ BROUWER

1.1 Ο Brouwer και ο Φορμαλισμός.

Εικ. 1 Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

Πηγή:https://en.wikipedia.org/wiki/L._E._J._Brouwer#/media/File:Luitzen_Egbertus_Jan_Brouwer.jpeg 15.5.2017

Ο Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) ήταν ολλανδός μαθηματικός και φιλόσοφος. Ήταν ο ιδρυτής της σύγχρονης τοπολογίας καθώς επίσης έδωσε τον πρώτο σωστό ορισμό της διάστασης. Στο φιλοσοφικό κομμάτι, είναι ο πατέρας του Ιντουισιονισμού, μιας φιλοσοφικής τάσης που θα αναλύσουμε εκτενώς στη συνέχεια. Σπούδασε στο πανεπιστήμιο του Άμστερνταμ όπου είχε καθηγητές τους Diederik Korteweg και Gerrit Mannoury, δύο επιστήμονες που επηρέασαν τη ζωή και το έργο του. Από τους μαθητές του οι πιο γνωστοί είναι οι Maurits Belinfante, Arend Heyting, και Johan de Iongh οι οποίοι ήταν αργότερα και υποστηρικτές του στη διαμάχη του με το Hilbert και τους Φορμαλιστές. Βάσει των φιλοσοφικών του απόψεων, όπου ήταν βαθιά επηρεασμένος από τους Kant και Schopenhauer, ο Brouwer χαρακτήριζε τα μαθηματικά πρωτίστως ως τη ελεύθερη δραστηριότητα της σκέψης, μια δραστηριότητα η οποία προέκυψε από την πηγαία εποπτεία του χρόνου. Ο ανεξάρτητος χώρος των αντικειμένων καθώς και η γλώσσα (έκφραση) δεν έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη θεωρία του. Αγωνίστηκε να αποφύγει τη Σκύλλα του Πλατωνισμού και τη Χάρυβδη του Φορμαλισμού. Χαρακτηρίστηκε ως ρεβιζιονιστής καθώς έδωσε προτεραιότητα στα ανακατασκευασμένα Ιντουισιονιστικά μαθηματικά και στη φιλοσοφία έναντι των κλασικών μαθηματικών. Ο Brouwer φέρεται ως ένας ανεξάρτητος και μεγαλοφυής άνθρωπος υψηλών ηθικών φρονημάτων, με αυξημένη αίσθηση δικαιοσύνης, κάτι που τον κάνει μερικές φορές να φαίνεται εριστικός. Σαν συνέπεια στη ζωή του έδωσε πολλές μάχες. Ήταν μέλος μεταξύ άλλων των παρακάτω Ακαδημιών και Πανεπιστημίων: Royal Dutch Academy of Sciences, Royal Society, Preußische Akademie der Wissenschaften, Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Επίσης έλαβε τιμητικά το δίπλωμα του διδάκτορος από τα πανεπιστήμια του Όσλο (1929) και του Κέμπριτζ (1954) και χρίστηκε ιππότης στο Order of the Dutch Lion το 1932.[3]

Ο Φορμαλισμός χρονολογικά συναντάται στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και αποτελεί την κύρια έκφραση των κλασικών μαθηματικών μετά από ανακατατάξεις που σημειώθηκαν στα μαθηματικά και τη γεωμετρία του χώρου. Ο Φορμαλισμός θεωρεί τα μαθηματικά ως ένα παιχνίδι ανάλογο με το σκάκι, όπου τα πιόνια και η σκακιέρα παίζουν συμβολικούς ρόλους ή ως γενική θεωρία των συμβολικών, ή ακόμη ως ένα σύστημα πλήρους νοήματος που αφορά συμβολικά αντικείμενα στη βάση των οποίων αναπτύσσεται στη συνέχεια το μαθηματικό ‘’παιχνίδι’’.[4] Ο Φορμαλισμός, παρόλο που δεν δεσμεύεται ρητά με κάποια συγκεκριμένη οντολογία, αποτελεί είδος κρυπτο-ρεαλισμού, επειδή υποστηρίζει την ύπαρξη μίας μαθηματικής πραγματικότητας, την

[3] https://plato.stanford.edu/entries/brouwer/ 15.5.2017
[4] Resnik 1980, 54

οποία τα διάφορα λογικογλωσσικά συστήματα αναπαριστούν με κάποιο τρόπο και σε κάποιο βαθμό.

Θα εξετάσουμε τις τρεις κύριες κατευθύνσεις του Φορμαλισμού που εκδηλώθηκαν από τα τέλη του 19ου αιώνα έως τις αρχές του 20ου.

i. Ο (παλαιότερος) Φορμαλισμός ξεκινάει αφενός με την εισαγωγή των φανταστικών και μιγαδικών αριθμών στη μαθηματική πρακτική, και αφετέρου με την εισαγωγή και συζήτηση για την αποδοχή των μη ευκλειδείων γεωμετριών. Η εισαγωγή των φανταστικών και μιγαδικών αριθμών επεξέτεινε τη μαθηματική πρακτική καθιστώντας την πλουσιότερη. Ο οντολογικός εμπλουτισμός γίνεται αποδεκτός μέσω θέσπισης ρητών κανόνων που ρυθμίζουν τη συμπεριφορά τους στο διευρυμένο πλαίσιο. Με την ταυτόχρονη αποδοχή των μη ευκλείδειων γεωμετριών δίνει νέα ώθηση στα μαθηματικά του 19ου αιώνα γιατί τοποθετεί το πρόβλημα της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων και το πρόβλημα της εγκυρότητας των μαθηματικών προτάσεων σε νέα βάση. Δεν μπορεί τώρα να ζητούνται τέλειες ευθείες στη φύση ούτε ακριβείς εικόνες τους στις νοητικές παραστάσεις μας. Δε μπορεί να γίνεται λόγος για ‘’ακριβή εγκυρότητα των μαθηματικών νόμων ως νόμων της φύσης’’.[5] Η κατάσταση που διαμορφώνεται εκφράζεται σε γνωσιολογικό επίπεδο με την απόρριψη της αλήθειας των προτάσεων και την αντικατάστασή τους με περισσότερες ευλύγιστες έννοιες, όπως εγκυρότητα (validity) και νομιμότητα (legitimacy) των προτάσεων. Η σημασία αυτής της αντικατάστασης διαπιστώνεται , και αποκτάει λειτουργική υφή, στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος: ο φορμαλιστής οδηγείται σε προσωρινή έστω εγκατάλειψη του οντολογικού προσδιορισμού της ταυτότητας των αντικειμένων , και επενδύει στο λογικό σχήμα $P \to Q$ όπου P, Q προτάσεις της θεωρίας που εξετάζεται. Με τον τρόπο αυτό τα μαθηματικά απελευθερώνονται από οντολογικές δεσμεύσεις, ενώ η γνωσιοθεωρία τους ανάγεται σε γνωσιοθεωρία της λογικής επιστήμης: η αλήθεια μιας προτάσεως συνδέεται με την εγκυρότητα της προτάσεως, δηλαδή η αλήθεια της

[5] Brouwer 1913, 78

εξασφαλίζεται από τη νομιμότητα της λογικής της παραγωγής μέσα σε ένα τυπικό σύστημα.

ii. Μιλώντας για ένα τυπικό σύστημα που μετασχηματίζεται απαιτείται να αναφερθούμε στους λογικούς κανόνες που διέπουν τις μετασχηματιστικές δυνατότητες του συστήματος. Αλλά οι λογικοί κανόνες που διέπουν τους μετασχηματισμούς του τυπικού συστήματος καθώς και τα κριτήρια ορθότητας αυτών των κανόνων δεν προέρχονται από τη χρήση τους στα μαθηματικά. Εάν η αιτιολόγηση της ορθότητας τους προέρχεται από επίκληση εξωμαθηματικών στοιχείων, τότε δημιουργείται το ερώτημα κατά πόσο είμαστε βέβαιοι ότι οι λογικοί αυτοί κανόνες, εφαρμοζόμενοι στα μαθηματικά, δεν πρόκειται να οδηγήσουν σε προβλήματα. Αυτό το ερώτημα ανοίγει δρόμο προς μια αναδίπλωση του φορμαλισμού σε ένα σχήμα λογικών παραγωγών, όπου η αλήθεια και το ψεύδος των προκειμένων προτάσεων παίζουν κεντρικό ρόλο. Το να αναρωτηθούμε για την ύπαρξη των πραγματικών αριθμών ως πραγματικών μαθηματικών οντοτήτων, μας υποχρεώνει να ζητήσουμε τουλάχιστο τη συνέπεια (consistency) του αξιωματικού συστήματος μέσα στο οποίο επεξεργαζόμαστε τους πραγματικούς αριθμούς. Η εισαγωγή των αξιωματικών και τυπικών συστημάτων ως ερευνητικών μεθόδων οργάνωσης των μαθηματικών αποτελεί χαρακτηριστική μαθηματική πρακτική: από μία πλειάδα συστημάτων φαινομενικά ασύνδετων μεταξύ τους, διαμορφώνεται ένα νέο αφηρημένο σύστημα στο μέτρο που ικανοποιούνται κάποιες αρχικές συνθήκες. Η οργάνωση έτσι του υλικού βοηθά στη σαφέστερη διατύπωση και συναγωγή νέων προτάσεων. Πάντως, είτε μέσω μίας αναγωγής στη θεωρία συνόλων είτε χωρίς αυτή, η αιτιολόγηση (justification) ενός τυπικού συστήματος απαιτεί τελικά αιτιολόγηση της επιλογής των αξιωμάτων που το συγκροτούν. Το ερώτημα όμως τότε είναι : γιατί και πως επιλέγονται αυτές οι προτάσεις ως αξιώματα; [6]

iii. Το πρόβλημα της αιτιολόγησης των αξιωμάτων, θεωρουμένων ως αρχικών συνθηκών που προσδιορίζουν τις έννοιες και ρυθμίζουν τους μετασχηματισμούς μέσα

[6] Brouwer 1913, 82

σε ένα τυπικό σύστημα ήταν ζήτημα που απασχόλησε τον Hilbert. Η άποψη του Hilbert σχετικά με την εγκυρότητα ή τη νομιμότητα των αξιωμάτων, προέκυψε από τη μελέτη της θεμελίωσης της γεωμετρίας με αξιωματικά μέσα. Αποφεύγοντας δεσμεύσεις για την πιθανή αλήθεια που αυτά εκφράζουν, ή τη διαισθητική προφάνεια που τα χαρακτηρίζει, ο Hilbert ισχυρίστηκε ότι η συνέπεια (consistency) του συστήματος είναι η λύση στο πρόβλημα της ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων και της αλήθειας των προτάσεων που προκύπτουν. Αναμφισβήτητα στο πλαίσιο των αξιωματικών συστημάτων που χρησιμοποιούμε είναι επιθυμητό να μην εμφανίζονται αντιφάσεις. Όμως το ερώτημα που ανακύπτει είναι κατά πόσο το αίτημα της μη αντιφατικότητας συνιστά μια ικανή συνθήκη για τη νομιμότητα / αλήθεια και αποδοχή ενός τυπικού συστήματος. Δεν είναι δύσκολο συστήματα τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες που έθεσαν οι φορμαλιστές. Θα σήμαινε όμως αυτό ότι οι οντότητες που αιτηματικά εισάγονται υπάρχουν; Ο Hilbert δηλώνει κατηγορηματικά:

«Αν αυθαιρέτως εισαγόμενα αξιώματα δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους με τις συνολικές συνέπειες τότε αυτά είναι αληθή, και τα αντικείμενα που ορίζονται μέσω αυτών των αξιωμάτων υπάρχουν. Αυτό για μένα είναι το κριτήριο αλήθειας και ύπαρξης.» [7]

Ο Hilbert δεν υποστηρίζει απλώς έναν κρυπτορεαλισμό, αλλά έναν ρεαλισμό των οντοτήτων που εμπλέκονται σε οποιοδήποτε συνεπές τυπικό σύστημα.[8]

1.2 Αντίδραση του Brouwer στο φορμαλισμό και κριτική.

«Στα φορμαλιστικά μαθηματικά πραγματικά μόνο η λογική μορφή μιας μαθηματικής θεωρίας ενδιαφέρει, δε χρειάζεται να ενδιαφερθεί κανείς για το υλικό περιεχόμενο των μαθηματικών.» [9]

Με τον όρο ‘’φορμαλισμός’’ ο Brouwer κατανοεί συνολικά την τρέχουσα έρευνα θεμελίωσης των μαθηματικών των αρχών και των μέσων του 20ου αιώνα. Ο

[7] Resnik 1981, 115
[8] Ρουσόπουλος 1999, 29-35
[9] Brouwer 1913, 80

φορμαλισμός θέτει έμφαση στην προτεραιότητα της λογικο-γλωσσικής μεθόδου και στον παράγωγο χαρακτήρα των μαθηματικών οδηγώντας έτσι τα κλασικά μαθηματικά σε σημαντικές δυσκολίες (παράδοξα, αντινομίες, κλπ.) και αδιέξοδα (θεώρημα μη πληρότητας). Ο Brouwer ασκεί δριμεία κριτική στο λογικο-γλωσσικό ρεαλισμό που διατυπώνεται από τις ιστορικές σχολές των μαθηματικών, ο ίδιος όμως μένει προσγειωμένος στην διαισθητική-εποπτική μαθηματική πρακτική η οποία αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία οικοδομείται κατόπιν η λογικο-γλωσσική πραγματικότητα των μαθηματικών.

Ο Brouwer ασκεί κριτική στο φορμαλισμό ως πρόγραμμα θεμελίωσης των μαθηματικών που επιμερίζεται αναλυτικότερα ως εξής:

i. Στρέφεται ενάντια στη νέα μορφή που αποκτάει η ιστορική παράδοση των αξιωματικών θεωρήσεων των μαθηματικών (που αναφέρεται αρχικά και κυρίως στη μελέτη της γεωμετρίας και του χώρου (Lobatchewski, Bolyai, Riemann, Hilbert κ.ά.)) και η οποία κατόπιν διευρύνεται σε συνολικές θεωρήσεις των μαθηματικών (Dedekind, Hilbert, Mannoury κ.ά.)

ii. Επιδιώκει την ‘’απομάκρυνση’’ από τα μαθηματικά των κυρίαρχων λογικών και γλωσσικών μεθόδων που έχουν παρεισφρήσει στα προγράμματα θεμελίωσης των μαθηματικών κατά τον $20^{ο}$ αιώνα. Η θεμελίωση των μαθηματικών μέσω της θεωρίας συνόλων του Cantor, λ.χ., οδηγεί σε παράδοξα και αντινομίες επειδή οι κατασκευές που προτείνονται είναι λογικού όχι μαθηματικού χαρακτήρα. Επιπλέον ο Brouwer ασκεί κριτική στο νεόκοπο εγχείρημα θεμελίωσης των μαθηματικών που ανέπτυξε ο Hilbert (έμφαση στη μελέτη της γλώσσας των μαθηματικών με μαθηματικές μεθόδους (μεταμαθηματικά)). Η αναζήτηση (με μαθηματικές μεθόδους) αποδείξεων συνέπειας (consistency) των τυπικών συστημάτων ανεξάρτητα από τις μαθηματικές ερμηνείες τους οδηγείται σε αδιέξοδο: η μαθηματική εποπτεία, υποστηρίζει ο Brouwer, διαποτίζει και τα πλέον στοιχειώδη μαθηματικά, και οι γλωσσικές και λογικές διαμεσολαβήσεις των μαθηματικών έχουν απλώς ένα βοηθητικό ρόλο να παίξουν, να υποβοηθήσουν δηλαδή την μετάδοση των σκέψεων ή να οργανώσουν το υλικό της μνήμης του υποκειμένου.

iii. Τέλος, ο Brouwer ασκεί κριτική στο λογικισμό των Peano και Russell οι οποίοι υποστηρίζουν επίσης μία γλωσσο-κεντρική σύλληψη της μαθηματικής πρακτικής. Η επιδιωκόμενη λογικιστική θεμελίωση της μαθηματικής πρακτικής αναδεικνύει το γλωσσικό χαρακτήρα της μαθηματικής πρακτικής (υπό την έννοια ότι αυτός συνοδεύει πάντοτε τις μαθηματικές κατασκευές) και οδηγεί σε αντιφάσεις.

«Το συμπέρασμα στο οποίο φτάνουμε για το λογικισμό είναι: δε μπορεί να μας διδάξει τίποτε για τα θεμέλια των μαθηματικών, επειδή παραμένει πάντοτε σταθερά διαχωρισμένος από τα μαθηματικά.» [10]

Ο Brouwer συνεπώς απορρίπτει συλλήβδην τις πλέον ρηξικέλευθες μεθόδους και στρατηγικές αντιμετώπισης του προβλήματος της θεμελίωσης των μαθηματικών: ουσιαστικά, απορρίπτει ως αποπροσανατολιστικό το πρόγραμμα θεμελίωσης του φορμαλισμού, θεωρώντας- το ‘‘εξωτερικό’’ προς την μαθηματική δραστηριότητα.

Το κεντρικό σημείο της διάγνωσης του Brouwer των προβλημάτων στα οποία έχουν οδηγηθεί τα μαθηματικά υπό την ‘‘καθοδήγηση’’ του φορμαλισμού είναι ότι τα μαθηματικά χάνουν την αυτονομία τους έναντι των λογικο-γλωσσικών θεωρήσεων οι οποίες παρεμβαίνουν πολλαπλώς στο έργο θεμελίωσης των μαθηματικών: Τα λογικο-γλωσσικά συστήματα που κατασκευάζονται δεν συνοδεύονται από μαθηματικά μοντέλα / ερμηνείες, οπότε, η προτεινόμενη θεμελίωσή τους δε συνεπάγεται καμία εξασφάλιση των μαθηματικών. Ακόμη σε ορισμένες περιπτώσεις οι κανόνες που διέπουν το σχηματισμό των προτάσεων των λογικο-γλωσσικών συστημάτων υποκαθιστούν την οικοδόμηση εννοιών με μαθηματικό περιεχόμενο. Συνεπώς, τα λογικογλωσσικά συστήματα είτε εισάγονται ως μέσον θεμελίωσης των μαθηματικών είτε υπο-τίθενται των μαθηματικών, οπότε προτείνονται ως θεμέλιο των μαθηματικών,

[10] Brouwer 1907, 92

δεν δύνανται να φέρουν εις πέρας το εγχείρημα που τους ανατέθηκε.[11] Αλλά πέρα από την ανάδειξη των δεσμεύσεων και των περιορισμών του φορμαλισμού (λογικο-γλωσσικότητα), ο Brouwer φέρνει στο φως το κρυμμένο οντολογικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται ο φορμαλισμός : τα μαθηματικά κατανοούντα υπό μορφή αυτόνομου κόσμου ‘’που είναι ανεξάρτητος από το σκεπτόμενο υποκείμενο, και ο οποίος διέπεται από τους νόμους της κλασικής λογικής , και του οποίου τα αντικείμενα δύνανται να έχουν το ένα προς το άλλο ‘’τη σχέση ενός συνόλου προς τα μέλη του’’.[12] Τα μαθηματικά αντικείμενα που εγκατοικούν αυτόν τον κόσμο έχουν αυτόνομη και αντικειμενική ύπαρξη (οντολογικός ρεαλισμός).

Συνοψίζοντας την κριτική του Brouwer στο φορμαλισμό θα αναφερθούμε σε δύο βασικά ζητήματα. Το πρώτο αφορά τη στενή εξάρτηση των μαθηματικών από τη γλώσσα και τη λογική. Οι φορμαλιστές αναζητούν να βρουν το θεμέλιο των μαθηματικών μέσα στη γλώσσα και τη λογική, κάτι το οποίο ο Brouwer αμφισβητεί έντονα. Το δεύτερο αφορά την αναδίπλωση στην οποία οδηγείται ο φορμαλισμός, διότι καταφεύγει προς κάποια μορφή οντολογικού ρεαλισμού για να εξασφαλίσει στις λογικο-γλωσσικές οντότητες αντικειμενική ύπαρξη και ελευθερία από αντιφάσεις.

1.3 Αποτέλεσμα της αντιπαράθεσης , αρχή του Ιντουισιονισμού.

Η έμφαση της κριτικής που ασκεί ο Brouwer στα προγράμματα θεμελίωσης των κλασικών μαθηματικών βρίσκεται τόσο στις ρεαλιστικές δεσμεύσεις τους όσο και στη ‘’σύγχυση ανάμεσα στην πράξη της συγκρότησης των μαθηματικών και στη γλώσσα των μαθηματικών’’. [13] Ο όρος ‘’συγκρότηση’’ (Constitution) δεν έχει το περιορισμένο τεχνικό νόημα της κατασκευής μέσα στο πλαίσιο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών :

[11] Brouwer 1907, 78-90
[12] Brouwer 1913, 87
[13] Brouwer 1907, 96

η πράξη της συγκρότησης προσδιορίζει σε επίπεδο καθεστώτος συνολικά το χαρακτήρα των ιντουισιονιστικών μαθηματικών.

Στη διδακτορική διατριβή του, ο Brouwer υπαινίσσεται μια φιλοσοφική θεώρηση (Ιντουισιονισμός) που αναδεικνύεται ταυτόχρονα με την ‘’ελεύθερη’’ ανάπτυξη των μαθηματικών: τα μαθηματικά, συγκροτούμενα, αναδεικνύουν τη φιλοσοφία που τα διέπει. Ζητούμενο για το Brouwer είναι η φιλοσοφική συγκρότηση των μαθηματικών που θα αποφεύγει τα σφάλματα του φορμαλισμού ενώ ταυτόχρονα θα προσφέρει ικανοποιητικό θεμέλιο για την ‘’ελεύθερη’’ ανάπτυξη των μαθηματικών.

Το πρώτο από τα τρία μέρη στα οποία χωρίζεται η διδακτορική διατριβή του (με το χαρακτηριστικό τίτλο ‘’Η συγκρότηση των μαθηματικών’’) καταπιάνεται με την οικοδόμηση και ανασυγκρότηση των μαθηματικών, με ιδιαίτερη αναφορά στους φυσικούς αριθμούς, το συνεχές και άλλες έννοιες των νεότερων μαθηματικών (λ.χ., γεωμετρίες, ομάδες, κλπ.). Κεντρικό στοιχείο αυτού του εγχειρήματος είναι η πράξη της συγκρότησης (μαθηματικών) συστημάτων ‘’υπό τη μορφή διερεύνησης της δυνατότητας ή της αδυνατότητας ενσωμάτωσης νέων συστημάτων σε ένα δοθέν σύστημα που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες’’. Στο δεύτερο μέρος, ο Brouwer συζητά το ευρύτερο ερώτημα της σύνδεσης των μαθηματικών και της επιστήμης με την εμπειρία. Το πλαίσιο συγκρότησης της γνώσης που υποστηρίχθηκε στο πρώτο μέρος της Διατριβής, συνδυαζόμενο με τις έννοιες της εποπτείας (Intuition) και της μαθηματικής κατασκευής (Construction), ‘’οδηγεί’’ στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

Ο Brouwer, απομακρυνόμενος από τα κλασικά μαθηματικά, συστηματοποιεί την φιλοσοφική παρέμβαση του ιντουισιονισμού με τις Δύο Πράξεις του Ιντουισιονισμού: η βασική εποπτεία, ως άγλωσση νοητική δραστηριότητα, συγκροτεί τη δυάδα (και μέσω αυτής τους φυσικούς αριθμούς) και οι ελεύθερες ακολουθίες, ως ελεύθερη νοητική δραστηριότητα του δημιουργικού υποκειμένου, συγκροτούν το συνεχές. Υπ’ αυτές τις συνθήκες, ο Brouwer ισχυρίζεται ότι αποφεύγεται ‘’η σύγχυση ανάμεσα στην πράξη συγκρότησης των μαθηματικών και στη γλώσσα των μαθηματικών’’ [14], και

[14] Brouwer 1907, 96

οδηγούμαστε στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά ως εναλλακτική κατεύθυνση προς τα κλασικά μαθηματικά. [15]

1.4 Βασικές έννοιες και προέλευση Ιντουισιονισμού.

Η μακροχρόνια πίστη στην καθολική εγκυρότητα της Αρχής της Αποκλίσεως του Τρίτου στα μαθηματικά θεωρείται από τον Ιντουισιονισμό ένα φαινόμενο της ιστορίας του πολιτισμού, του ίδιου είδους όπως η παλαιότερη πίστη στη ρητότητα του αριθμού π, ή στην περιστροφή του στερεώματος γύρω από τον άξονα της γης. Και ο Ιντουισιονισμός προσπαθεί να εξηγήσει τη μεγάλη εμμονή αυτού του δόγματος με … την πρακτική εγκυρότητα … της κλασικής λογικής για μία εκτεταμένη ομάδα απλών καθημερινών φαινομένων. [Αυτό] το γεγονός έκανε προφανώς μια τόσο ισχυρή εντύπωση ώστε… η κλασική λογική … έγινε μία βαθιά ριζωμένη συνήθεια της σκέψης, η οποία θεωρήθηκε όχι μόνο χρήσιμη, αλλά και a priori.

Ελπίζω να έχω καταστήσει σαφές ότι ο Ιντουισιονισμός αφενός λεπτολογεί με έξυπνο τρόπο τη λογική, αφετέρου την αποκηρύσσει ως πηγή αλήθειας. Επιπλέον, ότι τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι εσωτερική αρχιτεκτονική και ότι η έρευνα στα θεμέλια των μαθηματικών είναι εσωτερική αναζήτηση… [16]

Τα μαθηματικά που παίρνει κανείς μέσω των Ιντουισιονιστικών περιορισμών είναι πολύ διαφορετικά από τα κλασικά μαθηματικά (βλ. για παράδειγμα Heyting (1956), Bishop (1967), Dummett (1977)). Οι επικριτές από κοινού υποστηρίζουν ότι οι ιντουισιονιστικοί ισχυρισμοί καθιστούν τους μαθηματικούς ανίσχυρους. Από την άλλη μεριά, τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά επιτρέπουν πολλές ενδεχομένως σημαντικές διακρίσεις που δεν είναι διαθέσιμες στα κλασικά μαθηματικά, και είναι συχνά πιο επιδέξιες με ενδιαφέροντες τρόπους. Εδώ εξετάζουμε τι οδηγεί μερικούς φιλοσόφους στο να απαιτήσουν τους περιορισμούς αυτούς. [17]

[15] Ρουσόπουλος 1999, 39-44
[16] Brouwer 1948, 94, 96
[17] Shapiro 2006, 187, 189

Παρόλο που η περατοκρατική αριθμητική του Hilbert είχε μία ξεκάθαρη και αναμφίβολη καντιανή επιρροή, έχει παρατηρηθεί μια σαφής τάση απομάκρυνσης από τη φιλοσοφία του Immanuel Kant όσον αφορά τα μαθηματικά. Από όλους τους μαθηματικούς του 20^{ου} αιώνα, ο L. E. J. Brouwer ήταν αυτός που επηρεάστηκε περισσότερο από τον Kant. Ο Brouwer ανακηρύσσει τη φιλοσοφία του Kant ‘’μια παλιά μορφή ιντουισιονισμού’’ (παρόλο που ο Kant δεν ήταν επικριτικός για τον τρόπο που ασκούνταν τα μαθηματικά). Γι’ αυτό δεν αποτελεί σύμπτωση το ότι η περατοκρατική αριθμητική του Hilbert έχει μια συνάφεια με τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. Και ο Brouwer και ο Hilbert διαπίστωσαν ότι, αν προσκολληθεί κανείς στην εξάσκηση της περατοκρατικής αριθμητική , δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ της κλασικής και της ιντουισιονιστικής προσέγγισης. Υπάρχουν ωστόσο ουσιαστικές και ασυμβίβαστες διαφορές μεταξύ του Hilbert και του Brouwer. Διαφωνούν φανερά πάνω σε αυτό που ο Hilbert ονομάζει Ιδεώδη μαθηματικά, τα οποία φυσικά αποτελούν τον κύριο όγκο των μαθηματικών. Το πιο σημαντικό όμως εδώ είναι ότι το φιλοσοφικό υπόβαθρο στα εγχειρήματά τους δύσκολα θα μπορούσε να ήταν διαφορετικό.

Για τον Brouwer, όπως και για τον Kant, οι περισσότερες μαθηματικές αλήθειες δεν είναι ικανές για ‘’αναλυτική απόδειξη’’. Δεν μπορούν να γνωσθούν από μία απλή ανάλυση των εννοιών και δεν είναι αληθινές λόγω σημασίας. Οπότε το μέγιστο μέρος των μαθηματικών είναι συνθετικό. Ωστόσο, η μαθηματική αλήθεια είναι a priori, ανεξάρτητη από κάθε επιμέρους παρατηρήσεις είτε από άλλη εμπειρία που μπορούμε να έχουμε. Ο Brouwer υποστηρίζει ότι τα μαθηματικά εξαρτώνται από το νου και αφορούν ένα συγκεκριμένο ζήτημα της ανθρώπινης σκέψης. [18]

Ο Brouwer απηχεί τη σπουδαιότερη καντιανή ιδέα, ότι μία ανθρώπινη ύπαρξη δεν είναι ένας παθητικός παρατηρητής στη φύση, αλλά περισσότερο παίζει έναν ενεργό ρόλο στο να οργανώνει την εμπειρία: ‘’αυτός ο άνθρωπος πάντα και παντού δημιουργεί τάξη στη φύση και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όχι μόνο απομονώνει τις αιτιώδεις αλληλουχίες των φαινομένων … αλλά επίσης τις συμπληρώνει με φαινόμενα

[18] Brouwer 1912, 78

που έχουν προκληθεί από τη δική του δραστηριότητα''. Τα μαθηματικά αφορούν αυτόν τον ενεργό ρόλο. [19]

Ο Brouwer παραδέχτηκε ότι η ανάπτυξη των μαθηματικών τον 19ο αιώνα έκανε την καντιανή άποψη της Γεωμετρίας ανίσχυρη. Ο ερχομός της άκρας αυστηρότητας, που οδήγησε στην ιδέα της λογικής συνέπειας ως ανεξάρτητης περιεχομένου, και η ανάπτυξη των πολλαπλών ερμηνειών της προβολικής γεωμετρίας στήριξαν τη θέση ότι μόνο η λογική μορφή ενός γεωμετρικού θεωρήματος έχει σημασία. Αυτό δεν άφησε καθόλου χώρο για τη ''γνήσια διαίσθηση'' στη γεωμετρία. Σύμφωνα με το Brouwer το κύριο πλήγμα στην καντιανή ιδέα ότι η γεωμετρία αφορά συνθετικές a priori μορφές της αντίληψης ήταν η εμφάνιση και η αποδοχή της μη ευκλείδειας γεωμετρίας: ''αυτό έδειξε ότι τα φαινόμενα που συνήθως έχουν περιγραφεί στη γλώσσα της στοιχειώδους γεωμετρίας μπορούν να περιγραφούν με την ίδια ακρίβεια… στη γλώσσα της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, γι' αυτό όχι μόνο είναι αδύνατον να υποστηρίξουμε ότι ο χώρος της εμπειρίας μας έχει τις ιδιότητες της ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά δεν έχει καθόλου νόημα να αναζητήσουμε τη γεωμετρία η οποία θα ήταν αληθής για το χώρο της δικής μας εμπειρίας'' [20]. Την ίδια άποψη είχε επίσης ο Henri Poincare, ένας άλλος μαθηματικός με ιντουισιονιστικές τάσεις.

Έτσι ο Brouwer εγκατέλειψε την άποψη του Kant για το χώρο. Στη θέση του, έκανε μια θαρραλέα πρόταση να βασιστούν όλα τα μαθηματικά πάνω σε μία άποψη του Kant για το χρόνο. Δύσκολα αποσπάσματα όπως το ακόλουθο παρουσιάζονται σ' όλο το εύρος των γραπτών του Brouwer:

[Ο σύγχρονος ιντουισιονισμός] εξετάζει την αποσύνθεση των στιγμών της ζωής σε ποιοτικώς διαφορετικά μέρη, για να ξαναενωθούν μόνο ενώ παραμένουν χωρισμένα από το χρόνο, ως τα θεμελιώδη φαινόμενα της ανθρώπινης νόησης, που μέσω της αφαίρεσης από το συναισθηματικό τους περιεχόμενο, περνούν στο θεμελιώδες φαινόμενο της μαθηματικής σκέψης, τη διαίσθηση της θεμελιώδους διμοναδικότητας

[19] Brouwer 1912 ,77
[20] Brouwer 1912, 80

(two-oneness). Αυτή η διαίσθηση της διμοναδικότητας, η βασική διαίσθηση των μαθηματικών, δημιουργεί όχι μόνο τους αριθμούς ένα και δύο, αλλά επίσης όλους τους πεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς, στο βαθμό που ένα από τα στοιχεία της διμοναδικότητας θα μπορεί να θεωρηθεί ως μία νέα διμοναδικότητα, η οποία διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί επ' άπειρον. [21]

Στην διατριβή του, ο Brouwer παρουσιάζει την οπτική του για τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών, γλώσσας και λογικής. Τόσο η ιντουισιονιστική οπτική της λογικής ως εξαιρετικά στείρα, όσο και η ύπαρξη των αποτελεσμάτων της ιντουισιονιστικής λογικής που δεν είναι συμβατά με αυτά της κλασσικής λογικής, εξαρτώνται ουσιαστικά από την οπτική .[22]

1.5 Η πρώτη πράξη, οντολογική και γνωσιοθεωρητική συνιστώσα.

«Τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι μια ουσιαστικά άγλωσση νοητική δραστηριότητα που προέρχεται από την αντίληψη μιας κίνησης του χρόνου» [23]

«Ύπαρξη στα μαθηματικά σημαίνει κατασκευή στην εποπτεία» [24]

Η Πρώτη Πράξη περιλαμβάνει μια οντολογική και μια γνωσιοθεωρητική συνιστώσα: Η οντολογική συνιστώσα διατείνεται την νομιμότητα της νοητικής δραστηριότητας και την αυτονομία των προϊόντων της – τα μαθηματικά είναι νοητική δραστηριότητα υπό την έννοια ότι τα μαθηματικά αντικείμενα συγκροτούνται νοητικά – γι' αυτά esse est concipi. Η γνωσιοθεωρητική συνιστώσα επιτρέπει στη νοητική δραστηριότητα άμεση πρόσβαση και απευθείας γνώση των αποτελεσμάτων της.

Οντολογική συγκρότηση. Για τον ιντουισιονισμό, τα μαθηματικά αντικείμενα (οι φυσικοί αριθμοί , λ.χ.) δεν υπάρχουν ανεξάρτητα από μας : τα μαθηματικά αντικείμενα συγκροτούνται από μας. Ωστόσο, οι φυσικοί αριθμοί, λ.χ. αλλά και οι άλλες

[21] Brouwer 1912, 80
[22] Brouwer 1907
[23] Brouwer 1952, 140-141
[24] Brouwer 1907, 52

μαθηματικές οντότητες, έχουν μία ασαφή ύπαρξη προτού ακόμη εμφανιστεί στο ιστορικό προσκήνιο ο ιντουισιονισμός και ξεκινήσουν οι φιλοσοφικές διαμάχες του εικοστού αιώνα. Οι φυσικοί αριθμοί, λ.χ., αποτελούν τμήμα της κοινωνικής πραγματικότητας, όντας εγκαθιδρυμένοι στη δημόσια ζωή των ανθρώπων μια κοινωνίας. Αλλά υπ' αυτή τη μορφή ύπαρξης, οι φυσικοί αριθμοί στερούνται αντικειμενικότητας επειδή δεν είναι ''ακόμη'' μαθηματικές οντότητες – υπό την έννοια ότι δεν έχουν συγκροτηθεί μαθηματικά. Απαιτείται συνεπώς μια διαδικασία (που είναι σύμφωνη με τις προϋποθέσεις του ιντουισιονισμού) που ''παράγει'' τους φυσικούς αριθμούς. Τούτο σημαίνει ότι η διαδικασία συγκρότησης τους κινείται ανάμεσα σε δύο βασικές δεσμεύσεις οι οποίες τηρούνται και αναδεικνύονται ταυτόχρονα: από τη μία μεριά, η διαδικασία της ''παραγωγής'' τους ''σέβεται'' την ασαφή ύπαρξη τους, και από την άλλη, μέσω της συγκρότησης τους διαμορφώνεται μια ιντουισιονιστική πρακτική που πρέπει να ακολουθείται σε όλες τις περιπτώσεις, δημιουργείται συνεπώς ''προηγούμενο''.

Πραγματικά, ο ιντουισιονισμός δεν ενδιαφέρεται να εισαγάγει μια νέα σύλληψη των ήδη γνωστών μας φυσικών αριθμών: Οι φυσικοί αριθμοί που συγκροτεί είναι οι φυσικοί αριθμοί των μαθηματικών , και αυτό που διαφοροποιεί την άποψή του από την άποψη των κλασικών μαθηματικών είναι το ότι επιχειρεί να δώσει μια ικανοποιητικότερη σύλληψη / ερμηνεία της εμπειρίας που έχουμε για αυτούς. Διότι, έχουμε στη διάθεση μας ποικίλες εμπειρίες των φυσικών αριθμών, όπως, λ.χ., απαρίθμηση, μετάβαση στον επόμενο, αντιστοίχιση, κ.λπ. Οι οντότητες αυτές ''μαθηματικοποιούνται'' στο βαθμό που συγκροτούνται δηλαδή κατασκευάζονται ή παράγονται μέσα από αποδεκτές διαδικασίες στο πλαίσιο του ιντουισιονισμού. Ο ιντουισιονισμός, από τη μία μεριά, δεν δέχεται την ανεξαρτησία των φυσικών αριθμών από τη νοητική δραστηριότητα και, από την άλλη, η εμπειρία των φυσικών αριθμών (η ''ασαφής ύπαρξη'' τους) λειτουργεί δεσμευτικά ως προς τα όρια της ελεύθερης δημιουργίας με την οποία θα τους εφοδιάσει, και η οποία θα αποτελέσει ''πρότυπο'' για τη μελλοντική συγκρότηση άλλων μαθηματικών οντοτήτων.

Ο αντικειμενικός χαρακτήρας των φυσικών αριθμών και των άλλων μαθηματικών οντοτήτων στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά μπορεί να αιτιολογηθεί μέσω του αντικειμενικού / διυποκειμενικού χαρακτήρα της νοητικής δραστηριότητας του κατασκευάζειν (όπως προκύπτει από την πρώτη πράξη). Η αναγνώριση του αντικειμενικού / διυποκειμενικού χαρακτήρα της νοητικής δραστηριότητας (που έχει ως αποτέλεσμα την αντικειμενικότητα των φυσικών αριθμών) συνδέεται με την αντικειμενικότητα / διυποκειμενικότητα της βασικής εποπτείας της δυάδας.

Γνωσιοθεωρητική πρόσβαση. Η επίκληση της (εποπτικής) προφάνειας των άμεσων συνειδησιακών μας δεδομένων εμφανίζεται ως ισχυρή θέση, κατά τρόπο ώστε η νομιμότητα της πρόσβασης σε αυτά να θεωρείται αυτονόητη και αδιαμφησβήτητη. Ωστόσο αυτή η στάση φαίνεται να υποτιμά κάπως τον 'ατίθασο' χαρακτήρα της γνωσιοθεωρητικής εμπειρίας: πραγματικά, δεν είναι δυνατόν να φανταστούμε εμπειρίες που θα μπορούσαν να υποσκάψουν τα θεμέλια της εμπιστοσύνης μας στην αμεσότητα και προφάνεια των συνειδησιακών μας δεδομένων;

Ο Heyting μας βεβαιώνει ότι ''στη πιο απλή τους μορφή τα μαθηματικά αντικείμενα είναι περιορισμένα σε ένα νου'' και δεν απομένει παρά να συζητήσουμε το ζήτημα της επικοινωνία και μετάδοσης τους σε άλλους ανθρώπους. [25] Αλλά θα πρέπει να σημειώσουμε εξ' αρχής πόσο εύλογο είναι να υποστηρίξουμε ότι το ίδιο άτομο είναι δυνατόν να έχει εντελώς διαφορετική εμπειρία του ίδιου (αντικειμένου) σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μπορούμε χαρακτηριστικά να αναφερθούμε στον ίδιο τον Brouwer ο οποίος κατά καιρούς είχε διαφορετικές απόψεις σχετικά με τις συνθήκες καθορισμού της ταυτότητας των ελεύθερων ακολουθιών: το ζήτημα εδώ δεν είναι ότι η έννοια των ελευθέρων ακολουθιών είναι λιγότερο ή περισσότερο προβληματική αλλά μάλλον ο ισχυρισμός ότι η βασική εποπτεία επιτρέπει ασφαλή πρόσβαση στη γνώση. [26]

Στο μέτρο που εμφανίζεται μια διαφωνία αναφορικά με ένα ιδιωτικό περιεχόμενο (προϋποθέτουμε ότι έχουμε δύο διακεκριμένους ομιλητές) είναι δύσκολο να δούμε

[25] Heyting 1974, 89
[26] Lehman 1979, 110-114

πώς θα επιτευχθεί συναίνεση μεταξύ τους) ο καθένας από τους δυο ομιλητές αναφέρεται χωριστά σε αντικείμενα του άμεσου και ιδιωτικού του περιβάλλοντος, και συνεπώς είναι δύσκολο να αναδειχθεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο μια σύγκριση μεταξύ τους είναι δυνατή. Εάν όμως μιλούμε για διυποκειμενικά και δημόσια αντικείμενα, τότε το ερώτημα είναι πώς τα αντικείμενα αυτά περιέρχονται από τη σφαίρα του ιδιωτικού στη σφαίρα του δημόσιου διαλόγου. Προφανώς, η απάντηση συνδέεται με την παρεμβατική λειτουργία της γλώσσας στη διαμεσολάβηση των ιδιωτικών περιεχομένων και τη διυποκειμενικότητα της γλώσσας.

Η άποψη ότι το υποκείμενο βρίσκεται σε άμεση επαφή με τα συνειδησιακά του περιεχόμενα είναι εύλογη. Ο Brouwer φαίνεται να υποστηρίζει ότι η μαθηματική δραστηριότητα είναι ανεξάρτητη από τη γλώσσα και τη διαμεσολαβητική της λειτουργία στην εγκαθίδρυση ενός κοινά αποδεκτού λόγου επειδή προηγείται και συγκροτεί τη γλώσσα και τη λογική! Για τον ιντουισιονισμό, το πρόβλημα αυτό είναι πρόβλημα αναγνώρισης προτεραιότητα: εάν αναγνωρίσουμε την προτεραιότητα των μαθηματικών ως προς τη γλώσσα και τη λογική τότε μπορούμε κατόπιν να δούμε πως η λογική και η γλώσσα εμπλέκονται στην επικοινωνία και τη μετάδοση των μαθηματικών. Ιδιαιτέρως, δεν έχει νόημα, για τον ιντουισιονισμό, να επιζητούμε μια θεμελίωση των μαθηματικών σε δραστηριότητες οι οποίες λογικά έπονται των μαθηματικών. Η εμμονή του Brouwer στο άγλωσσο κατά βάση χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας σημαίνει αναγνώριση της προτεραιότητας των μαθηματικών απέναντι στη γλώσσα και τη λογική : από αυτήν κατόπιν την προοπτική, μπορούμε να κατανοήσουμε την κριτική του Brouwer στις τυπικές και συμβολικές γλώσσες ως θεμέλιο των μαθηματικών καθώς και στη χρησιμοποίηση λογικών μεθόδων ως μέσου για τη θεμελίωση των μαθηματικών.

Ανακεφαλαιώνοντας παρατηρούμε ότι η παρέμβαση της συνείδησης στη συγκρότηση των μαθηματικών είναι άμεση και ουσιαστική : άμεση, επειδή η συνείδηση γνωρίζει τα προϊόντα της δραστηριότητάς της, τα οποία περιέχονται μέσα σε ένα ενιαίο πλαίσιο που δεν είναι παρά η συνείδηση η ίδια, είναι και ουσιαστική, στο μέτρο που η δυνατότητα και η ύπαρξη των νοητικών (μαθηματικών) κατασκευών ως μαθηματικών αντικειμένων συγκροτούν ακριβώς τη νοητική δραστηριότητα της συνείδησης. [27]

1.6 Η δεύτερη πράξη, ελεύθερες ακολουθίες και δημιουργικό υποκείμενο.

«Οι ελεύθερες ακολουθίες γεννιούνται από την απεριόριστη αυτοεξέλιξη της βασικής εποπτείας.» [28]

«Πρέπει να προσέχουμε ποιες κατασκευές επιτρέπει η εποπτεία και ποιες όχι…» [29]

Η δεύτερη πράξη του Ιντουισιονισμού δημιουργεί τις προϋποθέσεις συγκρότησης των πραγματικών αριθμών με τη βοήθεια των ελευθέρων ακολουθιών : για τον Brouwer η ελεύθερες ακολουθίες είναι κατασκευές par excellence αφού μέσα σε αυτές και δια αυτών εγγράφεται, θα λέγαμε, η ‘’κίνηση’’ της μαθηματικής σκέψης. Η θέση της κατασκευής στο πρόγραμμα του ιντουισιονισμού είναι απολύτως κεντρική (Δεύτερη Πράξη του ιντουισιονισμού). Η σύλληψη της βασικής εποπτείας εμπεριέχει και αναδεικνύει την έννοια της κατασκευής: τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι νόμισμα με δύο όψεις – εποπτεία και κατασκευή. Η ουσιαστική λειτουργία της εποπτείας είναι η λειτουργία στο χρόνο : η συνειδητοποίηση ενός ‘’τώρα’’’ και ενός ‘’πριν’’ συνδυασμένα στον τύπο της δυάδας αποτελούν τις στοιχειώδεις μαθηματικές κατασκευές έτσι ‘’κατασκευάζονται’’ οι φυσικοί αριθμοί και, με την παρέμβαση των ελευθέρων ακολουθιών οι πραγματικοί αριθμοί.

Ελεύθερες ακολουθίες. Οι ελεύθερες ακολουθίες δε θα πρέπει να θεωρηθούν απλώς ως γενίκευση της ιδέας των πεπερασμένων αλγορίθμων και των ακολουθιών των κλασικών μαθηματικών. Η εισαγωγή τους αποσκοπεί στο να κάνει γόνιμη τη διάκριση μεταξύ λογικο-γλωσσικής ύπαρξης και μαθηματικής ύπαρξης του συνεχούς. Γύρω από την έννοια της ελεύθερης ακολουθίας εμφανίζονται ερωτήματα που αφορούν τον

[27] Ρουσόπουλος 1999, 56-61
[28] Brouwer 1952, 141
[29] Brouwer 1907, 52

προσδιορισμό της ταυτότητας μιας ελεύθερης ακολουθίας (συνθήκες απόδοσης ταυτότητας) και το χαρακτήρα του δημιουργικού υποκειμένου.

Η ιντουισιονιστική σύλληψη συγκρινόμενη με την κλασική βρίσκεται σε πλεονεκτικότερη θέση, αφού επιφέρει λεπτές διαφοροποιήσεις και διακρίσεις στο χαρακτηρισμό της μαθηματικής δραστηριότητας, τις οποίες τα κλασικά μαθηματικά αδυνατούν να επιφέρουν. Στο μέτρο αυτό μπορούμε εύκολα να συμφωνήσουμε ότι τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά υπερβαίνουν από μεθοδολογική άποψη τα κλασικά μαθηματικά, εφόσον αξιοποιούν πληρέστερα τη μαθηματική δραστηριότητα και δημιουργούν πλουσιότερες προϋποθέσεις ανάπτυξης – εις βάρος ίσως κάποιας απλότητας με την οποία μας έχουν συνηθίσει βέβαια τα κλασικά μαθηματικά.

Το δημιουργικό υποκείμενο. Στα κλασικά μαθηματικά μια έκφραση της μορφής ‘’Η πρόταση Α είναι αληθής’’ νοείται πέρα από χρονικές δεσμεύσεις και επιστημονικούς περιορισμούς. Η πρόταση Α, εφόσον είναι αληθής, θα είναι αληθής ανεξάρτητα από το πότε την αποδείξαμε. Η ιδέα ενός δημιουργικού υποκειμένου δεν υπεισέρχεται στις κλασικές θεωρήσεις. Στο ιντουισιονιστικό πλαίσιο, η διατύπωση ‘’Η πρόταση Α είναι αληθής’’ συμβολίζεται ως $\Sigma_v A$ και υποδηλώνει ότι το δημιουργικό υποκείμενο κατά το στάδιο ν έχει στη διάθεσή του στοιχεία που του επιτρέπουν να βεβαιώσει την πρόταση Α. Πώς θα εννοήσουμε το δημιουργικό υποκείμενο: ως τον Brouwer τον ίδιο, ή ως έναν τυχαίο ερευνητή; Μήπως ως ‘’τον καλύτερό μας εαυτό, τον εαυτό μας όπως θα τον φανταζόμαστε χωρίς προβλήματα και ατέλειες’’; [30] Ή μήπως με την έννοια του δημιουργικού υποκειμένου θα έπρεπε να εννοήσουμε τον ιδεώδη ερευνητή, εκφράζοντας έτσι γενικότερα τις αντικειμενικές συνθήκες έρευνας και γνώσης που εκδηλώνονται σε χαρακτηριστικές εκφράσεις τύπου ‘’γνωρίζουμε ότι…’’, ‘’βεβαιώνουμε ότι…’’, κ.λπ.

Πέρα από την καταλληλότητα του παραπάνω συμβολισμού εκκρεμεί το γενικότερο ζήτημα που δημιουργείται με την ‘’εμπειρική θέση’’ – όπως χαρακτηριστικά ονομάζει ο Heyting την άποψη του Brouwer – η οποία επιτρέπει στο δημιουργικό υποκείμενο να

[30] Troelstra 1969, Dantzig 1949

παρεμβαίνει με διάφορους τρόπους στην εξέλιξη της μαθηματικής του δραστηριότητας. [31] Πριν ακόμη από την εισαγωγή της έννοιας του δημιουργικού υποκειμένου και της ‘’εμπειρικής’’ θέσης στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, ο Brouwer με τη βοήθεια των ελευθέρων ακολουθιών κατασκευάζει, λ.χ., τους πραγματικούς αριθμούς, ως μη αριθμήσιμο πλήθος αριθμών: η πραγματικοί αριθμοί δε μπορούν να διαταχθούν ολικώς (ασθενής άρνηση). Μετά όμως από την εισαγωγή της έννοιας του δημιουργικού υποκειμένου και σε συνδυασμό με την ‘’εμπειρική θέση’’, ο Brouwer μπορεί να υποστηρίξει κατά μια ισχυρή έννοια ότι οι πραγματικοί αριθμοί δε διατάσσονται ολικώς. [32]

Επειδή η θεωρία του δημιουργικού υποκειμένου εισάγει το χρόνο στα μαθηματικά, πολλοί μαθηματικοί (ακόμα και κατασκευαστές μαθηματικοί) την θεωρούν απαράδεκτη. Οι μαθηματικές συνέπειες ωστόσο, αν όχι και η ουσία, αυτής της θεωρίας μπορούν να προκύψουν χωρίς καμία αναφορά στο χρόνο, με τη βοήθεια ενός απλού αξιώματος. Φυσικά αυτό το αξίωμα μπορεί να θεωρηθεί τόσο αμφιλεγόμενο όσο η θεωρία που αντικαθιστά.

Το αξίωμα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Σχήμα του Kripke.

Σύμφωνα με αυτό: «Για κάθε πρόταση P υπάρχει μια αύξουσα δυαδική ακολουθία (a_ν) έτσι ώστε η πρόταση P ισχύει αν και μόνο αν $\boldsymbol{a_\nu} = 1$ για κάποιο ν.» [33]

1.7 Αρχή των δύο σθενών (αρχή του αποκλειόμενου τρίτου) και αρχή ελεγξιμότητας.

Στα κλασικά μαθηματικά, η αρχή των δύο σθενών έχει απολύτως κεντρική θέση. Ασφαλώς, χρησιμοποιώντας την αρχή των δύο σθενών δεν πρόκειται να εμπλουτίσουμε τις γνώσεις μας σχετικά με την πραγματικότητα, μαθηματική και μη.

[31] Heyting 1956, 120
[32] Ρουσόπουλος 1999, 61-65
[33] Bridges, Richman 1987, 116 – 117

Στη βάση όμως των ρεαλιστικών προϋποθέσεων αποδίδουμε τιμές αλήθειας σε κάθε καλώς σχηματισμένη πρόταση. Έτσι, ο ισχυρισμός ότι:

(1) Υπάρχουν απείρου πλήθους διπλοί αστέρες στο σύμπαν [34]

δε θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι στερείται νοήματος. Ανεξάρτητα από το πώς μπορεί να προκύψει η αλήθεια της, η πρόταση

(1) είναι καλώς σχηματισμένη πρόταση.

Κάπως αντίστοιχα στα κλασικά μαθηματικά, η προϋπόθεση ότι οι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν αντικειμενικά, ανεξάρτητα από μας, θα μας επέτρεπε να συμπεράνουμε – τουλάχιστον αναφορικά με τις ελέγξιμες προτάσεις – ότι η πρόταση:

(2) Ο αριθμός 10^{100} είναι άθροισμα δύο πρώτων

Έχει μία τιμή αλήθειας ανεξάρτητα από τις δυνατότητές μας να την ελέγξουμε. Κατ' αναλογία προς τις ελέγξιμες προτάσεις στα κλασικά μαθηματικά , προτείνεται να εννοήσουμε και την πρόταση

(3) Όλοι οι άρτιοι αριθμοί είναι άθροισμα δύο πρώτων αριθμών (Εικασία του Goldbach), ως πρόταση που έχει συγκεκριμένη τιμή αλήθειας – ανεξάρτητα από την παρούσα κατάσταση της γνώσης μας. Ομοίως, η πρόταση τύπου Brouwer (που συζητήσαμε προηγουμένως):

(4) Η ακολουθία φ εμφανίζεται στο δεκαδικό ανάπτυγμα του π, θα θεωρηθεί αληθής ή ψευδής, παρά το γεγονός ότι αδυνατούμε να καθορίσουμε την τιμή της αλήθειας της. Εδώ, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο προσδιορίζουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του π είναι τελείως σαφής: μπορούμε να γνωρίζουμε κατ' αρχήν ποιο ψηφίο κατέχει τη νιοστή θέση (λ.χ. την 10^{100} – ή) για κάθε συγκεκριμένο ν, και άρα γνωρίζουμε αν η ακολουθία φ εμφανίζεται στο ανάπτυγμα μέχρι και τη θέση ν. Στο μέτρο που ο κανόνας δεν

[34] Putnam 1967, 304

μας δίνει αναλυτικά την έκταση, δηλαδή την ολότητα των ψηφίων που αποτελούν το ανάπτυγμα του π, δεν γνωρίζουμε το ανάπτυγμά του. Εντούτοις, δεν πρέπει να θεωρηθεί ως λογικά αναγκαίο το πιθανό ενδεχόμενο ότι ενώ δεν αποκλείεται η εμφάνιση της φ, η φ πράγματι δεν εμφανίζεται. [35] Η σχετική βεβαιότητα ότι η (4) έχει ορισμένη τιμή αλήθειας φαίνεται να προέρχεται από το γεγονός ότι θεωρούμε πως τα αντικείμενα της θεωρίας είναι ανεξάρτητα από μας, δηλαδή ο κανόνας εδώ καθορίζει το ανάπτυγμα του π τελείως συγκεκριμένα και ανεξάρτητα από την ανθρώπινη παρέμβαση.

Αντίθετα από τις απόψεις των πλατωνιστών, οι ιντουισιονιστές δε μπορούν να αποδώσουν τιμές αλήθειας (στην (4), λ.χ.) προκαταβολικά και ανεξάρτητα από τις δυνατότητές μας να αποδείξουμε την εμφάνιση της ακολουθίας φ στη θέση τάξεως ν στο ανάπτυγμα του π ή να αποδείξουμε ότι μία τέτοια περίπτωση θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Το γεγονός ότι ο κανόνας του αναπτύγματος του π έχει κάποια ‘’ατέλεια’’ ως προς τον τρόπο με τον οποίο καθορίζει την έκτασή του δεν αποτελεί πρόβλημα για τον ιντουισιονισμό. Ο κανόνας είναι ένα σαφές, καλώς ορισμένο αντικείμενο των μαθηματικών, στο μέτρο που η σημασιακή του συνιστώσα μας δείχνει πώς να υπολογίσουμε την έκταση, το ανάπτυγμά του. [36]

Ο Brouwer αντικαθιστά την κλασική αρχή του αποκλειόμενου τρίτου (αρχή των δύο σθενών) με την αρχή της ελεγξιμότητας. Σύμφωνα με αυτή, και σχετικά με μια πρόταση α, οι εξής τρεις δυνατότητες παρουσιάζονται :

(1) ο ισχυρισμός α αποδείχθηκε αληθής

(2) ο ισχυρισμός α αποδείχθηκε ότι οδηγεί σε άτοπο και

(3) ο ισχυρισμός α ούτε αληθής αποδείχθηκε ούτε αποδείχθηκε ότι οδηγεί σε άτοπο, αλλά ούτε γνωρίζουμε κάποιο πεπερασμένο αλγόριθμο που να μας οδηγεί την πρόταση ‘’είτε ο ισχυρισμός α είναι αληθής είτε οδηγεί σε άτοπο’’.

[35] Wittgenstein 1983, 277

[36] Ρουσόπουλος 1999, 66-69

Σε αντίθεση με το μόνιμο χαρακτήρα των (1) και (2), η (3) μπορεί να περάσει σε έναν από τους τύπους (1) και (2), όχι μονάχα γιατί η περαιτέρω ενασχόληση με το ζήτημα ίσως οδηγήσει στο σχετικό αλγόριθμο με βάση τον οποίο θα πετύχουμε την αναγωγή, αλλά και γιατί στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά

> «μια μαθηματική οντότητα δεν είναι αναγκαστικά προσδιορισμένη και μπορεί στην κατάσταση της ελεύθερης ανάπτυξής της (free growth) σε κάποιο χρονικό σημείο να αποκτήσει μια ιδιότητα που δεν είχε πριν». [37]

1.8 Συμπέρασμα.

Η θέση του Brouwer ότι η γλώσσα και η λογική υπεισέρχονται σε ένα επόμενο χρονικό στάδιο στα μαθηματικά, διαμεσολαβώντας την επικοινωνία και μετάδοση των μαθηματικών αποτελεσμάτων, φέρνει στο προσκήνιο το γνωστό ήδη πρόβλημα του δυϊσμού γλώσσας και σκέψης. Ο Brouwer παρατήρησε σωστά ότι τα μαθηματικά, εάν εξελιχθούν σύμφωνα με τις επιταγές των αρχών της κλασικής λογικής, οδηγούνται σε αυθαίρετες γενικεύσεις και σε παράδοξα συμπεράσματα. Από την άλλη μεριά, η υιοθέτηση μιας (ή, της) ιντουισιονιστικής λογικής είναι a posteriori διαδικασία η οποία προκύπτει ως συνέπεια των βασικών δεσμεύσεων του ιντουισιονισμού, συγκεκριμένα ως συνέπεια του δυϊσμού μαθηματικών και γλώσσας και της προτεραιότητας των μαθηματικών ως προς τη γλώσσα. Αλλά πέρα από τον αιτηματικό χαρακτήρα αυτής της προτεραιότητας των μαθηματικών ως προς τη γλώσσα, μετέωρη και διαρκώς ζητούμενη είναι η αντικειμενικότητα / διυποκειμενικότητα των κατασκευών των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. [38]

[37] Brouwer 1954
[38] Ρουσόπουλος 1999, 71-72

1.9 Ανασύνταξη του Ρεαλισμού μετά από την κριτική του Brouwer.

Η κριτική του Brouwer στο φορμαλισμό έφερε στο φως το ρεαλιστικό υπόβαθρο των κλασικών μαθηματικών και εξανάγκασε τους υποστηρικτές του ρεαλισμού σε ένα περιορισμένο σχέδιο ανάπτυξής του: μια ανασύνταξη η οποία θα έπρεπε να λάβει υπόψη της την κριτική που άσκησε ο Brouwer στον οντολογικό ρεαλισμό και στο ρόλο της γλώσσας και της λογικής στο εγχείρημα θεμελίωσης των μαθηματικών. Το σχέδιο ανασύνταξης του ρεαλισμού που ακολούθησε θεωρεί ''δεδομένες'' και φιλοσοφικά ''κατοχυρωμένες'' τις οντολογικές δεσμεύσεις των κλασικών μαθηματικών, οπότε η έμφαση τίθεται κυρίως στο πρόβλημα της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση και στις εγγυήσεις που μπορούν να εξασφαλιστούν για αυτή. Ο Hilbert, ασχολούμενος με το πρόβλημα θεμελίωσης των μαθηματικών στο πρόγραμμα του περατοκρατισμού (finitism) (θεωρούμενο ως εξέλιξη του φορμαλισμού), θεωρεί αυτονόητη την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων, οπότε, το ζητούμενο γι' αυτόν είναι η αμεσότητα και εποπτικότητα που πρέπει να χαρακτηρίζει τις μαθηματικές οντότητες ώστε η πρόσβαση σε αυτές να είναι άμεση και απροβλημάτιστη. (Ρεαλισμός Ι) Αλλά και ο Gödel, αρκετά χρόνια αργότερα, θεωρεί δεδομένη και φιλοσοφικά μη προβληματική την οντολογία των κλασικών μαθηματικών: τα μαθηματικά αντικείμενα, υπό μορφή συνόλων και σχέσεων μεταξύ τους, είναι καλά προσδιορισμένα, η μαθηματική εποπτεία ''επιβάλει'' πάνω μας τις αληθείς προτάσεις που εκφράζονται υπό μορφή αξιωμάτων. (Ρεαλισμός ΙΙ) Ο Quine, αποδεχόμενος τις ρεαλιστικές δεσμεύσεις του μαθηματικού πλατωνισμού, επιχειρεί να τις υποστηρίξει με έμμεσο τρόπο: τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν καθώς τούτο προκύπτει από το γεγονός ότι είναι απαραίτητα στην εμπειρική επιστήμη. Οι επίγονοι, από τη μία μεριά, δέχονται τις δεσμεύσεις μιας ενιαίας φιλοσοφικής θεώρησης για τα μαθηματικά και την εμπειρική επιστήμη αλλά από την άλλη ενδιαφέρονται να διατυπώσουν σαφέστερα την οντολογική ταυτότητα των μαθηματικών αντικειμένων. (Ρεαλισμός ΙΙΙ)

Τα ερωτήματα που εγείρονται κατόπιν είναι πολλά και σημαντικά: Τι είδους εγγυήσεις μας παρέχουν η αμεσότητα και η εποπτικότητα της πρόσβασης στη μαθηματική γνώση που επικαλούνται οι ανωτέρω διαπρεπείς μαθηματικοί και φιλόσοφοι; Ξεπεράστηκε ο ορίζοντας της κριτικής που άσκησε ο Brouwer; Ύστερα από την περιορισμένη ανασύνταξη που επιχείρησαν οι υποστηρικτές του ρεαλισμού, ενδυναμώνεται ο ρεαλισμός, και η ενδυνάμωσή του βοηθάει στη διάσταση κλασικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών; [39]

[39] Ρουσόπουλος 1999, 73-75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ HILBERT *(ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ Ι)*

2.1 Περατοκρατισμός, σύγκλιση προς τον Ιντουισιονισμό και απομάκρυνση από τον Φορμαλισμό.

Παραφράζοντας τον Dickens, τα μαθηματικά στις απαρχές του 20ου αιώνα ήταν ''στα καλύτερά τους και στα χειρότερά του''. Δυναμικές και καρποφόρες εξελίξεις στην πραγματική ανάλυση, χάρη σε μαθηματικούς όπως ο Augustin Louis Cauchy, ο Bernard Bolzano και ο Karl Weistrass, ξεπέρασαν τα προβλήματα των απειροστών και τοποθέτησαν τον απειροστικό λογισμό σε σταθερή βάση. Ο Hilbert έγραψε ότι η πραγματική και η μιγαδική ανάλυση είναι ''η πιο αισθητική και εκλεπτυσμένα οικοδομημένη κατασκευή των μαθηματικών''[40]. Παρόλο που απείρως μικρές και απείρως μεγάλες ποσότητες δεν χρειάζονται, οι νέες θεωρίες ακόμα στηρίζονται σε άπειρες συλλογές. Σύμφωνα με τον Hilbert, ''η μαθηματική ανάλυση είναι μια συμφωνία του απείρου''. Την ίδια εποχή, υπήρχε μια ευχάριστη περιγραφή του απείρου στη συνολοθεωρία του Georg Cantor.

Παρ' όλες αυτές τις συναρπαστικές εξελίξεις, ή εξαιτίας αυτών, υπήρχε ένα αίσθημα θεμελιακής κρίσης. Τα μαθηματικά φαίνεται να είναι, και πρέπει να είναι, ο πιο ακριβής και συγκεκριμένος από όλους τους επιστημονικούς κλάδους, αλλά παρ' όλα αυτά ανέκυπταν προκλήσεις και αμφισβητήσεις. Υπό το φως αυτών των αντινομιών, όπως το παράδοξο του Russell, δεν υπήρχε καμία βεβαιότητα ότι η συνολοθεωρία ήταν έστω συνεπής. Η αίσθηση της κρίσης δεν βοηθήθηκε από τη χρήση του Cantor αυτών που ονόμαζε ''ασυνεπείς πολλότητες'', συλλογές συνόλων που είναι πολύ μεγάλες για να συλλεχθούν μαζί σε ένα σύνολο. Οι αντινομίες οδήγησαν σε επιθέσεις στη νομιμότητα μερικών μαθηματικών μεθόδων, οδηγώντας κάποιους μαθηματικούς στο

[40] Hilbert 1925, 187

να θέσουν αυστηρούς περιορισμούς στις μαθηματικές μεθόδους, περιορισμοί που θα ακρωτηρίαζαν την πραγματική και μιγαδική ανάλυση.

Η απάντηση του Hilbert σ' αυτές τις εξελίξεις ενσωματώνει απόψεις του απαγωγισμού, του φορμαλισμού των όρων και του φορμαλισμό των παιγνίων. Παρά τις φιλοσοφικές του αξίες, το πρόγραμμα του Hilbert οδήγησε σε μια γόνιμη εποχή των μεταμαθηματικών που ευδοκιμεί και σήμερα. Για τον Hilbert, το πρόγραμμα είχε έναν σαφή επιστημονικό σκοπό: ''Ο στόχος της θεωρίας μου είναι να θεμελιώσω μια για πάντα την εγκυρότητα των μαθηματικών μεθόδων''[41] . Θα στηριζόταν στην αρχική δουλεία αξιωματικοποιώντας κλάδους των μαθηματικών , όπως και στις μνημειώδεις προσπάθειες λογικιστών όπως ο Frege αναπτύσσοντας αυστηρά λογικά συστήματα:

«Υπάρχει… ένας καθ' όλα ικανοποιητικός τρόπος να αποφύγει κανείς τα παράδοξα χωρίς να προδώσει την επιστήμη μας. Οι επιθυμίες και οι συμπεριφορές που θα μας βοηθήσουν να βρούμε αυτόν τον τρόπο… είναι αυτές: (1)… Θα διερευνήσουμε προσεκτικά γόνιμους ορισμούς και παραγωγικές μεθόδους. Θα τους φροντίσουμε, θα τους ενδυναμώσουμε, και θα τους κάνουμε χρήσιμους. Κανείς δεν θα μας πετάξει έξω από τον παράδεισο που δημιούργησε για μας ο Cantor. (2) Πρέπει να εγκαθιδρύσουμε παντού στα μαθηματικά την ίδια βεβαιότητα για τις απαγωγές μας όπως υπήρχε στην κοινή βασική αριθμοθεωρία, που κανείς δεν αμφισβητεί και όπου οι αντιθέσεις και τα παράδοξα προβάλλουν μόνο λόγω απροσεξίας μας.»[42]

Η ιδέα πίσω από το πρόγραμμα είναι να τυποποιηθεί αυστηρά και προσεκτικά κάθε κλάδος των μαθηματικών, μαζί με τη λογική του, και μετά να μελετηθούν τα τυπικά συστήματα για να είναι σίγουρο ότι είναι κατανοητά.[43]

Στο σημαντικότερο ίσως κείμενο της δεκαετίας του 1920 ''Για το άπειρο'' [44], ο Hilbert διατυπώνει το περατοκρατικό πρόγραμμα (finitism) θεμελίωσης των μαθηματικών το οποίο αποκλίνει ουσιαστικά από τον παλαιότερο φορμαλισμό αναφορικά με την

[41] Hilbert 1925, 183
[42] Hilbert 1925, 191
[43] Shapiro 2006, 172, 173
[44] Hilbert 1926

αλήθεια και τη σημασιολογία των μαθηματικών. Το πρόγραμμα αυτό πρότεινε λύσεις στα προβλήματα θεμελίωσης των μαθηματικών, ενσωματώνοντας σ' αυτό κάποιες ιντουισιονιστικές απόψεις τις οποίες ο Hilbert θεωρεί γόνιμες για τα κλασικά μαθηματικά. Η αποδοχή αυτών των λύσεων ήταν γενικά θετική και ενθουσιώδης, ακόμη και από συμπαθούντες του ιντουισιονιστικού προγράμματος όπως ο Weyl. [45] Ο Hilbert βέβαια καταβάλλει κάποιο τίμημα για την επιτυχία του εγκαταλείποντας χαρακτηριστικές θέσεις του φορμαλισμού.

Το διευρυμένο πρόγραμμα Hilbert θεωρείται ότι απέτυχε λόγω των θεωρημάτων μη πληρότητας της αριθμητικής[46] . Όμως επρόκειτο για ένα φιλόδοξο πρόγραμμα με πλούσιο φιλοσοφικό υπόβαθρο το οποίο δεν φαίνεται ακόμη να έχει εγκαταληφθεί. Το πρόγραμμα Hilbert, όπως ήδη αναφέρθηκε, αποσκοπούσε να εξαλείψει τα προβλήματα θεμελίωσης των μαθηματικών, ειδικότερα αποσκοπούσε να υπερβεί τους περιορισμούς που προέκυψαν στο πλαίσιο της λογικιστικής σύλληψης του Frege (και της κατεύθυνσης του Russel), και τις κριτικές που άσκησαν σ' αυτό ο Poincare και ο Brouwer. Επρόκειτο για μια ανασυγκρότηση και αποκατάσταση του ρεαλισμού ύστερα από τις καταστρεπτικές κριτικές του ιντουισιονισμού. [47]

[45] Weyl 1928, 240
[46] Gödel 1931
[47] Ρουσόπουλος 1999, 75, 76

2.2 Ο Hilbert και το άπειρο.

Εικ. 2. David Hilbert (1862-1943)

Πηγή: https://www.famous-mathematicians.com/images/david-hilbert.jpg 15.5.2017

Ο David Hilbert ήταν Γερμανός μαθηματικός (1862-1943). Θεωρείται ως ένας από τους πιο αναγνωρίσιμους και σημαντικούς μαθηματικούς του 19^ου^ και 20^ου^ αιώνα. Επινόησε και ανέπτυξε ένα ευρύ φάσμα από νέες ιδέες, στο οποίο συμπεριέλαβε την αμετάβλητη θεωρία και τα Αξιώματα Hilbert. Επίσης διατύπωσε τη θεωρία του Χώρου του Hilbert, η οποία είναι ένα από τα θεμέλια της συναρτησιακής ανάλυσης. Ο Hilbert και οι μαθητές του συνεισέφεραν σημαντικά στην ίδρυση και ανάπτυξη σημαντικών εργαλείων, τα οποία χρησιμοποιούνται στη μοντέρνα μαθηματική φυσική. Ο Hilbert είναι γνωστός ως ένας από τους ιδρυτές της αποδεικτικής θεωρίας και της Μαθηματικής λογικής, καθώς επίσης ήταν και από τους πρώτους διακεκριμένους μαθηματικούς και μεταμαθηματικούς. Ανάμεσα στους φοιτητές του ήταν ο Χέρμαν Βέιλ, ο πρωταθλητής του σκάκι Εμάνουελ Λάσκερ, ο Ερνέστος Ζερμέλο και ο Καρλ-Γκούσταβ Χέμπελ. Ο Τζον φον Νόιμαν ήταν βοηθός του. Πολλοί ακόμη διδακτορικοί φοιτητές του έγιναν αργότερα διάσημοι μαθηματικοί. Για το Φορμαλισμό ο Hilbert ήταν αυτός που άνοιξε το δρόμο για την ανάπτυξη ενός εκ των τριών πιο σημαντικών σχολείων των μαθηματικών του 20ου αιώνα. Σύμφωνα με τον φορμαλιστή, τα μαθηματικά είναι η χειραγώγηση των συμβόλων με συμφωνημένους τυπικούς κανόνες. Συνεπώς, είναι μια αυτόνομη δραστηριότητα της σκέψης. Ωστόσο, υπάρχουν αμφιβολίες κατά πόσο οι απόψεις του Hilbert ήταν απλά φορμαλιστικές στην ουσία. Το 1920 πρότεινε ένα ερευνητικό πρόγραμμα το οποίο έγινε γνωστό σαν Το Πρόγραμμα του Hilbert. Ήθελε τα Μαθηματικά να διαμορφωθούν σε σταθερές και ολοκληρωμένες λογικές βάσεις. Το έργο του στη συναρτησιακή ανάλυση είναι επίσης σημαντικό. Εισήγαγε την ιδέα ενός άπειρου διαστάσεων Ευκλείδειου Χώρου, που αργότερα ονομάστηκε Χώρος Χίλμπερτ.[48]

Κεντρική θέση στο πρόγραμμα Hilbert είχε η μελέτη της έννοιας του απείρου το οποίο έπρεπε κατά κάποιο τρόπο να ‘’δαμαστεί’’, επειδή εμπλέκεται στους στοιχειώδεις τύπους της αριθμητικής, τη θεωρία συνόλων και την (πρωτοβάθμια) κατηγορηματική λογική. Στο πλαίσιο μιας ενιαίας θεώρησης, το άπειρο θα πρέπει να εξοβελιστεί από τα μαθηματικά, αλλά και από τη φύση επειδή ‘’Το σύμπαν είναι πεπερασμένο κατά δύο έννοιες: και όσον αφορά το απείρως μικρό και όσον αφορά το απείρως μεγάλο’’.[49] Η ιδέα του Hilbert είναι τότε να μελετήσουμε τον τρόπο εμφάνισης του απείρου στα μαθηματικά και στη συνέχεια να επιχειρήσουμε να αναγάγουμε την περιοχή όπου αυτό εμφανίζεται σε μία πιο στενή (περιορισμένη περιοχή), στην οποία δε θα εμφανίζεται πλέον. Αν καταφέρουμε να προσδιορίσουμε μια περιορισμένη περιοχή όπου το άπειρο δεν έχει θέση, τότε τα μαθηματικά μπορεί να προκύψουν ως μετριοπαθής επέκταση της περιορισμένης περιοχής. Έτσι διατυπωμένο το πρόγραμμα του Hilbert απαιτεί τον καθορισμό της περιορισμένης περιοχής και της μεθόδου αναγωγής της ευρύτερης περιοχής στην περιορισμένη περιοχή. [50]

[48] https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9D%CF%84%CE%AC%CE%B2%CE%B9%CE%BD%CF%84_%CE%A7%CE%AF%CE%BB%CE%BC%CF%80%CE%B5%CF%81%CF%84 15.5.2017

[49] Hilbert 1926, 186

[50] Resnik 1980, 86

Ακόμα, αν υποθέσουμε ότι ο Hilbert πετυχαίνει να εξαλείψει το άπειρο από τα μαθηματικά ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στην περίπτωση της φυσικής επιστήμης, το πρόγραμμά του δε θα στερούνταν σημασίας και ενδιαφέροντος. Στο πλαίσιο όμως μιας ενιαίας συμπεριφοράς στη φύση και στη σκέψη, θα ήταν παράδοξο το ενδεχόμενο η έννοια του απείρου να απαντά στη λύση παρά τον εξοβελισμό της από τη μαθηματική περιοχή. Για τον Hilbert τα παράδοξα των μαθηματικών ήταν αποτέλεσμα μιας ορισμένης χρήσης του απείρου (μέσω των λογικών νόμων, όπως λ.χ. στην περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη): Πρόκειται για αντίδραση στο λογικισμό του Frege και του Russell. Η προσέγγιση του Hilbert είναι Καντιανού χαρακτήρα : η άμεση και εποπτική πρόσληψη των μαθηματικών δεδομένων ξεκινάει από τα σύμβολα, τις στοιχειώδεις σχέσεις και τα λογικά σχήματα.

Η αναλογία που επικαλείται ο Hilbert, αρχικά για το χειρισμό του απείρου, επεκτείνεται στη συνέχεια στην προσέγγιση των υλικών αντικειμένων και των εξω-λογικών συμβόλων της αριθμητικής μέσω της άμεσης αντιληπτικής ικανότητας αυτών των αντικειμένων. [51]

2.3 Προτάσεις Hilbert και διατύπωση θεωρήματος.

Η λύση που προτείνεται είναι να αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα με τη βοήθεια ιδεατών στοιχείων (ideal elements) που πρέπει να προστεθούν στην περιορισμένη περιοχή, κατ' αντιστοιχία με την εισαγωγή, λ.χ., του φανταστικού αριθμού i στο σώμα των πραγματικών αριθμών για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$.

Η ζητούμενη επέκταση της περιορισμένης περιοχής δεν πρέπει βέβαια να προκαλεί αντιφάσεις στη περιορισμένη περιοχή. Έτσι, λ.χ., ο τύπος, που αναφέρεται ως αντιμεταθετικός νόμος των φυσικών αριθμών και εκφράζεται υπό τη μορφή:

(1) $a + b = b + a$,

[51] Ρουσόπουλος 1999, 77, 85, 86

θα έπρεπε κανονικά να εκφραστεί ως:

(2) (a) (b) (a + b = b + a),

οπότε η εμφάνιση των καθολικών ποσοδεικτών θα τα καθιστούσε ‘’ύποπτο’’ (είναι μη πραγματικός, ιδεατός τύπος) στο πλαίσιο της περιορισμένης περιοχής.

Αν όμως γράψουμε τον τύπο (1) ως ‘’πραγματικό’’ τύπο, τότε γράφουμε:

(3) (α = β = β + α),

με τον οποίο εννοούμε μια συντομογραφία της πρότασης:

(4) ο τύπος <α + β = β + α>

μας δίνει μια αληθή πρόταση όταν αντικαταστήσουμε τα α, β με συγκεκριμένους αριθμούς , όπως λ.χ., ‘’2 + 3 = 3 + 2’’.

Η τεχνική αυτή αποσκοπεί στο να συμπληρώσουμε την περιορισμένη περιοχή με ιδεατά στοιχεία, η οποία ειδάλλως θα παρέμενε φτωχή και άγονη ως μαθηματική περιοχή. Η τυποποίηση των μαθηματικών αποδείξεων, η δυνατότητα εγγραφής και αναπαράστασής τους στην περιορισμένη περιοχή είναι αναγκαία. Έτσι η έννοια και λειτουργία της απόδειξης γίνεται το πιο κρίσιμο σημείο του όλου προγράμματος. Μία απόδειξη νέσω της τυποποίησης γίνεται ένα ευκρινές, συγκεκριμένο αντικείμενο, όπως ένα αριθμητικό σύμβολο άμεσο δοσμένο στην εποπτεία μας.[52]

Το πρόγραμμα Hilbert τώρα παίρνει την εξής μορφή:

Να αποδειχθεί στην περιορισμένη περιοχή ότι κάθε απόδειξη μιας πρότασης που χρησιμοποιεί την ιδεατή περιοχή μπορεί να αντικατασταθεί από μία απόδειξη που χρησιμοποιεί στοιχεία αποκλειστικά της περιορισμένης περιοχής.

Εκτός όμως από το ασθενές αίτημα αναγωγής των μαθηματικών στην περιορισμένη περιοχή με τη βοήθεια ελεγκτικών μεθόδων, ο Hilbert διατύπωσε και ένα ισχυρό

[52] Hilbert 1926, 204

αίτημα που αφορούσε την απόδειξη της μη αντιφατικότητας του γενικότερου συστήματος που προκύπτει με τον τρόπο αυτό. Η έμφαση που δόθηκε στο να αποδειχθεί η μη αντιφατικότητα της πραγματικής περιοχής είναι χαρακτηριστική. Θα νόμιζε κανείς ότι, ανεξάρτητα από την επιτυχία και τη σχετική συνέπεια με την οποία πραγματοποιείται το πρώτο μέρος το εγχειρήματος (δηλαδή, το ασθενές αίτημα), το πρόγραμμα ζητούσε να αποκαταστήσει τη μη αντιφατικότητα της πραγματικής περιοχής (ισχυρό αίτημα), ανεξάρτητα από δυσκολίες και εννοιολογικές ασάφειες. [53]

2.4 Περιγραφή του προγράμματος Hilbert.

Το πρόγραμμα ξεκινάει με τον πυρήνα του, ο οποίος ονομάζεται ‘’Πεπερασμένη Αριθμητική’’. Η πεπερασμένη αριθμητική δεν νοείται σαν ένα ανούσιο παιχνίδι ή όπως η απαγωγή συνεπειών από ανούσια αξιώματα, αντίθετα οι ισχυρισμοί της είναι σημαντικοί και έχουν περιεχόμενο. Οι τύποι της πεπερασμένης αριθμητικής περιλαμβάνουν εξισώσεις όπως ‘’2+3=5’’ όπως και απλούς συνδυασμούς αυτών, όπως ‘’7+5=12 ή 7+7 ⍰ 10’’. Οι δηλώσεις αυτές αναφέρονται σε συγκεκριμένους φυσικούς αριθμούς και υπάρχει ένας αλγόριθμος που υπολογίζει αν οι ιδιότητες και οι σχέσεις ισχύουν. Θεωρεί ότι υπάρχουν δύο ειδών ποσοδείκτες, οι φραγμένοι οριοθετημένοι στους φυσικούς μικρότερους κάποιου συγκεκριμένου και οι μη φραγμένοι που εκτείνονται σε όλους τους φυσικούς αριθμούς. Ονομάζει, κάθε πρόταση που περιέχει ένα φραγμένο ποσοδείκτη, πεπερασμένη, ενώ αυτή που περιέχει ένα μη φραγμένο ποσοδείκτη την ονομάζει μη πεπερασμένη. Θεωρεί ότι οι προτάσεις που περιέχουν φραγμένους ποσοδείκτες είναι αλγοριθμικά αποκρίσιμες με την έννοια ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει αν είναι αληθείς. Οι προτάσεις με μη φραγμένους ποσοδείκτες δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Εισάγει γράμματα για την αναπαράσταση της γενικότητας όπως ‘’α+100=100+α’’ οι οποίες είναι νόμιμα πεπερασμένες προτάσεις και θεωρεί ότι προτάσεις που περιέχουν γράμματα γενικότητας δεν έχουν πεπερασμένες αρνήσεις. Έτσι η άρνηση της παραπάνω

[53] Ρουσόπουλος 1999, 78, 79, 81, 82

πρότασης θα έλεγε ότι υπάρχει ένας αριθμός p τέτοιος ώστε το p+100 να μην είναι ίδιο με 100+p. Έτσι, η άρνηση μιας δήλωσης της γενικότητας περιέχει έναν μη φραγμένο ποσοδείκτη, και έτσι δεν είναι πεπερασμένος.

Το επόμενο αντικείμενο αφορά το περιεχόμενο της πεπερασμένης αριθμητικής. Προφανώς το περιεχόμενο της είναι οι φυσικοί αριθμοί. Ο Hilbert υποστήριξε ότι η πεπερασμένη αριθμητική είναι κατά μια έννοια μια προσυνθήκη σε όλη την ανθρώπινη σκέψη. Προτείνει να τους αναγνωρίζουμε με τα αριθμητικά σύμβολα | , || , ||| ,… όπου κάθε αριθμητικό σύμβολο είναι διαισθητικά αναγνωρίσιμο από το γεγονός ότι περιέχει μόνο πλήθος από ‘’|’’. Με την εισαγωγή των συμβόλων φαίνεται η συγγένεια του με τον φορμαλισμό των όρων. Η λέξη όμως σύμβολα είναι παραπλανητική (όπως και στον φορμαλισμό ως παίγνιο) γιατί ο Hilbert ενδιαφέρεται για τους χαρακτήρες τους ίδιους και θέλει να μελετηθούν και να κατανοηθούν ως αφηρημένοι τύποι παρά ως φυσικά δείγματα. Η πεπερασμένη αριθμητική δεν μπορεί να είναι απόλυτα αψεγάδιαστη αλλά δεν υπάρχει πιο προτιμώμενη ή πιο επιστημονικά ασφαλής άποψη από την πεπερασμένη αριθμητική. Η πεπερασμένη αριθμητική είναι μόνο ένα μικρό κομμάτι από το ψηφιδωτό των Μαθηματικών. Η πρώτη κατάκτηση πέρα από την πεπερασμένη αριθμητική είναι οι προτάσεις για τους φυσικούς αριθμούς που περιέχουν μη φραγμένους ποσοδείκτες και στη συνέχεια η πραγματική ανάλυση , η μιγαδική ανάλυση, η συναρτησιακή ανάλυση, η γεωμετρία, η συνολοθεωρία και ούτω καθεξής. Όλα αυτά ο Hilbert τα ονομάζει ιδεατά μαθηματικά, τα οποία μας επιτρέπουν να τα οργανώσουμε και να τα μεταχειριστούμε πιο αποτελεσματικά με την πεπερασμένη αριθμητική. Τα ιδεατά μαθηματικά πρέπει να χρησιμοποιούνται περίπου όπως στον φορμαλισμό των παιγνίων, η σύνταξη και οι συμπερασματολογικοί κανόνες για κάθε κλάδο τους πρέπει να τυποποιηθούν κατηγορηματικά και ο κλάδος πρέπει να μελετηθεί σαν ένα παιχνίδι χαρακτήρων. Η μόνη αυστηρή προϋπόθεση σε έναν τυποποιημένο κλάδο των ιδεατών μαθηματικών είναι ότι δεν μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πεπερασμένη αριθμητική, για να παράγει έναν τύπο που αντιστοιχεί σε μια ψευδή πεπερασμένη πρόταση. Απαραίτητη προϋπόθεση στα ιδεατά μαθηματικά είναι η συνέπεια. Ο Hilbert υποστήριζε ότι «αν τα αυθαίρετα δοσμένα αξιώματα δεν αντιτίθενται μεταξύ τους με όλες τις συνέπειες τους, τότε είναι αληθή και τα πράγματα που ορίζονται από αυτά υπάρχουν». Αυτό είναι το κριτήριο της αλήθειας και της ύπαρξης. Για το πρόγραμμά του, η αναγνώριση των φυσικών αριθμών με τύπους χαρακτήρων επιτρέπει στην πεπερασμένη αριθμητική να εφαρμοστεί στα μεταμαθηματικά. Τα τυπικά συστήματα υπάγονται τώρα στα όρια της πεπερασμένης αριθμητικής. Μια τυποποιημένη απόδειξη, όπως ένα αριθμητικό σύμβολο, είναι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο, αφού μπορούμε να το περιγράψουμε πλήρως.

Στο τελευταίο στάδιο του προγράμματος ο Hilbert προσπαθεί να εξασφαλίσει πεπερασμένες αποδείξεις συνέπειας των πλήρως τυποποιημένων μαθηματικών θεωριών. Δηλαδή για να χρησιμοποιήσουμε μια θεωρία ιδεωδών μαθηματικών πρέπει να την τυποποιήσουμε και μετά να δείξουμε μέσω της πεπερασμένης αριθμητικής ότι η θεωρία είναι συνεπής. Έτσι έχουμε την βεβαιότητα ότι χρησιμοποιώντας αυτή την θεωρία δεν θα μας οδηγήσει σε αντίφαση ούτε θα παράγει κάποια ψευδή πεπερασμένη πρόταση. Αυτό είναι ‘’τα πάντα’’ που μπορούμε να ζητήσουμε από μια ιδεατή μαθηματική θεωρία. [54]

2.5 Ο Von Neumann για τις κατασκευαστικές μεθόδους και τον περατοκρατισμό.

Σύμφωνα με τον von Neumann οι κατασκευαστικές μέθοδοι εμφανίζονται ακόμα και σε εκείνα τα μέρη των μαθηματικών όπου το περιεχόμενό τους δεν είναι κατασκευαστικό. Οι κατασκευαστικές μέθοδοι είναι όμως εμφανείς στα επιμέρους βήματα που ακολουθεί η κλασική απόδειξη. [55] Ο von Neumann έτσι σκοπεύει να οριοθετήσει μια ικανοποιητική απόσταση ασφαλείας μεταξύ κλασικών μαθηματικών και ιντουισιονισμού, πιο συγκεκριμένα, σκοπεύει να δείξει ότι ο περατοκρατισμός (finitism) ως φιλοσοφική άποψη των κλασικών μαθηματικών μπορεί να προσφέρει μια εναλλακτική λύση στις κατασκευαστικές απαιτήσεις των ιντουισιονιστών.

[54] Ζούπας 2015, 17-19
[55] von Neumann 1931, 62

Ο von Neumann συζητά το παράδειγμα μιας συνάρτησης F(x) για την οποία μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει σημείο α του διαστήματος ορισμού της, όπου η συνάρτηση μηδενίζεται. Ας καλέσουμε E(α) αυτή την ιδιότητα της συναρτήσεως F(x) και του σημείου α. Η συνάρτηση F(x) εμπλέκει στον ορισμό της την εικασία του Goldbach και συνεπώς, η κατασκευή του αριθμού α, αν ζητείτο, δεν είναι εφικτή καθώς δε γνωρίζουμε προκαταβολικά την τιμή αλήθειας της εικασίας του Goldbach. Αυτό το επιχείρημα ‘’αποδεικνύει’’, κατά τον von Neumann ότι, ενώ ο αριθμός α δεν έχει οριστεί κατασκευαστικά – και μάλιστα κάτι τέτοιο ίσως είναι αδύνατο – εντούτοις, η αποδεικτική διαδικασία που προσφέρεται είναι καθαρά κατασκευαστική, στο μέτρο που μας επιτρέπει να δώσουμε τα βήματα της απόδειξης (περατοκρατική μέθοδος). (Ασθενές αίτημα). Χωρίς συνεπώς να θυσιάσει τα αποτελέσματα των κλασικών μαθηματικών, και χωρίς να αποδέχεται μια παθητική στάση απέναντι στις αποδείξεις ύπαρξης, το περατοκρατικό πρόγραμμα αποσκοπεί να σώσει τα κλασικά μαθηματικά, αποκαθιστώντας τη συνέπειά τους μέσω περατοκρατικών μεθόδων απόδειξης. Πρόκειται δηλαδή για μια ερμηνεία των κλασικών μαθηματικών σε πλαίσια όπου καθορίζεται μια μεθοδολογία ελέγχου παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε στην στοιχειώδη αριθμητική των φυσικών αριθμών. Η σημασία της απόδειξης για το περατοκρατικό πρόγραμμα έγκειται στην κατασκευαστική μεθοδολογία η οποία μετατρέπει τις ήδη αποδειχθείσες προτάσεις (ή τις κατ’ αρχήν αποδείξιμες) των κλασικών μαθηματικών σε τύπους και σχήματα (Schemata) της περιορισμένης περιοχής (πρωταρχική αναδρομική αριθμητική (Primitive Recursive Arithmetic), στη σύγχρονη ορολογία).[56]

Στο πλαίσιο του περατοκρατισμού, κατά τον von Neumann, μια πρόταση με υπαρκτικό ποσοδείκτη δεν πρέπει να εκληφθεί αποκλειστικά ως ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει τη ρίζα της εξίσωσης – όπως θα απαιτούσε η ιντουισιονιστική ερμηνεία. Το ουσιαστικό στην περατοκρατική ερμηνεία, κατά τον von Neumann, είναι η κατασκευή των διαδοχικών σταδίων τα οποία οδηγούν στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

[56] Resnik 1980

Μια τέτοια διαδικασία θεωρείται και κατασκευαστική και περατοκρατική: ο κατασκευαστικός της χαρακτήρας γίνεται σαφέστερος με βάση τη δυνατότητα να ελέγξουμε αναγνώσιμα σχήματα συμβόλων / βημάτων της απόδειξης. Συνεπώς, στο πλαίσιο του περατοκρατισμού, το κατασκευαστικό μας ενδιαφέρον μετατοπίζεται προς μια μεθοδολογία των αποδείξεων και των ελέγχων, χωρίς έτσι να θίγεται η γενικότερη σημασιολογία στην οποία στηρίζονται τα κλασικά μαθηματικά. Με την έννοια αυτή η κατασκευαστικότητα αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα του συντακτικού επιπέδου των προτάσεων και δεν αφορά τη γνήσια μαθηματική διαδικασία της απόδειξης, της αλήθειας και του νοήματος των προτάσεων. Με άλλα λόγια, η ένταση που εμφανίζεται αφορά την αποδειξιμότητα και την αλήθεια των προτάσεων. [57]

2.6 Οι έρευνες του Gödel δημιουργούν πρόβλημα στο πρόγραμμα Hilbert.

Το 1931 ο Kurt Gödel κατάφερε να αποδείξει ότι η πληρότητα δεν ισχύει για μια λογική αρκετά ισχυρή να στηρίξει τα θεμέλια της αριθμητικής ή άλλων αντίστοιχων μαθηματικών θεωριών με τουλάχιστον τον ίδιο βαθμό πολυπλοκότητας. Τα δύο θεωρήματα που καταγράφουν αυτή τη διαπίστωση ονομάζονται Θεωρήματα της μη πληρότητας. Σύμφωνα με το πρώτο από τα δύο θεωρήματα: «σε οποιοδήποτε σύστημα επαρκές να ορίσει τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών και τις αριθμητικές πράξεις, θα υπάρχουν πάντα προτάσεις, για τις οποίες δε μπορούν να αποδειχθούν είτε αυτές είτε οι αρνήσεις τους μέσα στο σύστημα». Το δεύτερο από τα δύο θεωρήματα ορίζει ότι: «αν ένα σύστημα τέτοιου τύπου είναι πλήρες, δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο σύστημα η συνέπεια του», δηλαδή συνέπεια και πληρότητα δεν μπορούν να αποδειχθούν ταυτόχρονα σε ένα σύστημα επαρκές για να ορίσει τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών και τις αριθμητικές πράξεις.

Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel κατά πολλούς ήταν ένα ισχυρό χτύπημα στο πρόγραμμα του Hilbert, γιατί διαλύει την ελπίδα για την εύρεση ενός μόνο τυπικού

[57] Ρουσόπουλος 1999, 80, 81, 88

συστήματος που να περικλείει όλα τα κλασικά μαθηματικά ή έστω όλη την αριθμητική. Ωστόσο το πιο σημαντικό πρόβλημα στο πρόγραμμα του Hilbert οφείλεται στο δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel. Η θριαμβευτική ιαχή του Hilbert «στα Μαθηματικά δεν υπάρχει ignorabimus» καθώς και το «πρέπει να μάθουμε και θα μάθουμε», το τελευταίο ειπωμένο λίγες ημέρες πριν από την ανακοίνωση από τον Gödel του δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας, εκφράζουν την πιο αισιόδοξη και μεγαλεπήβολη παραλλαγή της θεμελιακής αναζήτησης. Από την στιγμή εκείνη το πρόγραμμα του Hilbert κατέρρευσε , ενώ τα ‘’μεταμαθηματικά’’ έχασαν μαζί με το όνομα τους, κάθε θεμελιοκρατική βλέψη και μετεξελίχθηκαν σε ένα ακόμα κλάδο των ίδιων των μαθηματικών. Αν και όπως είπαμε, το πλήγμα ήταν ισχυρό, το Πρόγραμμά του συνέχισε να ασκεί σημαντική επιρροή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών και στη θεωρία της απόδειξης. [58]

2.7 Ο Weyl για το πρόγραμμα Hilbert.

Αξίζει τον κόπο να σημειώσουμε την αποτίμηση του Weyl για το πρόγραμμα Hilbert:

«Ο Hilbert κατόρθωσε να διασώσει τα κλασικά μαθηματικά με το να ερμηνεύσει ξανά το νόημά τους χωρίς να μειώσει τον πλούτο τους. Οπωσδήποτε πρέπει να αναγνωρίσω την τεράστια σημασία και εμβέλεια της κίνησης αυτής του Hilbert, η οποία προφανώς οφείλεται στην πίεση των περιστάσεων.» [59]

Εντυπωσιασμένος από ‘’την κίνηση του Hilbert’’, ο Weyl επισημαίνει μια γόνιμη ενσωμάτωση των κριτικών απόψεων του ιντουισιονισμού και υπαγωγή κατασκευαστικών στοιχείων στα κλασικά μαθηματικά, χωρίς τις αναγκαίες θυσίες που

[58] http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/8543/1/%CE%B4%CE%B9%CF%80%CE%BB%20%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CE%BF%CF%82%20Z%CE%BF%CF%85%CF%80%CE%B1%CF%82%20%2C%20%CF%84%CE%B5%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE.pdf, Διπλωματική εργασία του Ζούπα Αθανάσιου, Πάτρα, 2015, σελ. 19, 20, 11.6.2017

[59] Weyl 1928, 240

προτείνει ο Brouwer. Στο πνεύμα αυτής της ερμηνείας οπωσδήποτε, πρέπει να υπαχθεί και η παραπάνω παρατήρηση του Weyl, σύμφωνα με την οποία:

«Στο βάθος ο Hilbert δεν ενδιαφέρεται ας πούμε μόνο για το 0', 0'', 0''', … αλλά για το τυχόν 0'''…', για το τυχόν αριθμητικό που δίδεται με συγκεκριμένο τρόπο». [60]

Πρόκειται για την κατανόηση μιας όψης της περατοκρατικής μεθόδου. Διότι μπορούμε να φανταστούμε την κλασική κατασκευή που υπαινίσσεται ο Weyl: πρόκειται για μια πρόταση της μορφής:

(1) (χ) Α(χ),

όπου τα χ διατρέχουν το πεδίο των φυσικών αριθμών. Στην κλασική της ερμηνεία, η (1) ισοδυναμεί με μια άπειρη λογική σύζευξη των επιμέρους προτάσεων α(0), Α(1),Α(2), …. Το ζητούμενο στο πλαίσιο του περατοκρατισμού είναι να εκμεταλλευτούμε την παρατήρηση του Weyl χωρίς να αναχθούμε στην κλασική ερμηνεία. [61]

2.8 Σύνολα.

Η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική. Ως πρωταρχική έννοια δεν είναι δυνατό να οριστεί μια θέση η οποία με σαφή τρόπο υποδείχτηκε από τον Bertrand Russell. Έτσι, η θεωρία στηρίζεται σε μια σειρά αξιωμάτων και γι' αυτό είναι μια αξιωματική θεωρία, όπως άλλωστε και άλλες θεωρίες (μαθηματική θεωρία μέτρου, τοπολογία, Θεωρία Πιθανοτήτων, κ.λπ.). Η σύγχρονη μελέτη των συνόλων ξεκίνησε από τον Georg Cantor και τον Dedekind τη δεκαετία του 1870. Στις αρχές του 20ού αιώνα, μετά τον εντοπισμό παραδόξων και αντιφάσεων στην αρχική, άτυπη θεωρία συνόλων, προτάθηκαν νέα συστήματα αξιωμάτων, το πιο γνωστό από τα οποία η ''Zermelo–Fraenkel'' θεωρία συνόλων με το αξίωμα επιλογής.

[60] Weyl 1928, 239
[61] Ρουσόπουλος 86, 87

Ο Γκέοργκ Κάντορ (Georg Cantor) έθεσε τις βάσεις της Θεωρίας Συνόλων και τους υπεραριθμήσιμους αριθμούς. Σύμφωνα με τον Cantor, η Θεωρία Συνόλων ή συνολοθεωρία είναι η θεωρία που μελετά τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με συναρτήσεις και σχέσεις (π.χ. ομάδες, τοπολογικοί χώροι). Αν και κάθε είδος συλλογής αντικείμενων μπορεί να στοιχειοθετήσει την έννοια του συνόλου, η Θεωρία Συνόλων αποφεύγει την αναφορά στη φύση των στοιχείων των συνόλων και τα αντιμετωπίζει με γενικευμένη προσέγγιση, δηλαδή με την καθαρά μαθηματική λογική.

Παρότι, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, δεν υπάρχει ορισμός του συνόλου, για τον Cantor ο ορισμός του συνόλου διατυπώνεται ως εξής: Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά διά της εμπειρίας μας ή της διανόησής μας, είναι καλώς ορισμένα και διακρίνονται ευκρινώς μεταξύ τους. Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται ‘’στοιχεία ή μέλη’’ του συνόλου. Ο Cantor κάνοντας χρήση της έννοιας της ισχύος (ή πληθικού αριθμού), που είχε προηγουμένως ορίσει ο Gottlob Frege, περιγράφει το σύνολο Α ως συλλογή στοιχείων που δημιουργούν την κλάση όλων των $\aleph(A)$ συνόλων με $A \sim \aleph(A)$. Η έννοια του πληθάριθμου αναφέρεται μόνο σε πεπερασμένα σύνολα.

Ισχύς του συνόλου Α ή και πληθικός αριθμός αυτού είναι ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των στοιχείων που περιέχει το Α. Συμβολίζεται με $\aleph(A)$ ή και με $|A|$.

Στη βιβλιογραφία συναντάται και η χρήση του P αντί του εβραϊκού γράμματος $\aleph$. Ο συμβολισμός όμως της ισχύος του συνόλου Α με το P(A) δημιουργεί σύγχυση, γιατί χρησιμοποιείται ακριβώς ο ίδιος για να εκφράσει το μέτρο πιθανότητας στην αξιωματική θεωρία των Πιθανοτήτων. Τέλος, αναφέρεται και ο πολύ συνηθισμένος συμβολισμός card(.) (από το cardinality). Είναι σαφές ότι η πρωταρχική έννοια του συνόλου γίνεται αντιληπτή από τον άνθρωπο με τα ποιοτικά της χαρακτηριστικά. Για να δημιουργηθεί μια μαθηματική θεωρία, είναι απαραίτητο να οριστούν τα ποσοτικά χαρακτηριστικά των οντοτήτων που θα αποτελέσουν το αντικείμενό της. Η ισχύς του συνόλου εκφράζει ακριβώς αυτό: ένα μετρήσιμο μέγεθος, ικανό να θέσει ερωτήματα που αφορούν τη σύγκριση συνόλων ή τη σύνθεση συνόλων για να δημιουργηθούν νέα σύνολα. Στην κατεύθυνση αυτή εργαζόμενος, ο Cantor ανήγγειλε το θεώρημα συγκρισιμότητας πληθαρίθμων το 1895. Το 1899, σκιαγράφησε μια κάπως προβληματική απόδειξη. Πρόθεση του Cantor ήταν να επεκτείνει τις έρευνές του με τους πληθάριθμους στα άπειρα σύνολα, την έννοια του φυσικού αριθμού ως μέτρου του πλήθους των στοιχείων τους. Ένα σύνολο είναι ‘’καλώς ορισμένο’’ όταν τα στοιχεία του μπορούν να γίνονται απολύτως αντιληπτά. Για παράδειγμα, η αναφορά στο σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών δεν περιγράφει σύνολο, σύμφωνα με τον Cantor, διότι δεν υπάρχει σαφής τρόπος, που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσει κάποιος τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 106 , τότε αυτοί αποτελούν καλώς ορισμένο σύνολο. Ο Zadech το 1965 θεμελίωσε μια νέα περιοχή στη μαθηματική επιστήμη αναφερόμενος στα ασαφώς ορισμένα σύνολα. Για τη θεωρία των ασαφών συνόλων θα αναφέρουμε στοιχεία στο τέλος του κεφαλαίου αυτού. Η Θεωρία Συνόλων, που τυποποιείται με χρήση της λογικής πρώτου βαθμού, είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα για τα μαθηματικά. Η γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων χρησιμοποιείται στους ορισμούς σχεδόν όλων των μαθηματικών αντικειμένων, όπως οι συναρτήσεις, και έννοιες της Συνολοθεωρίας εντοπίζονται σε όλα τα διδακτέα προγράμματα μαθηματικών. Ο λόγος της προσοχής που αποδίδεται από τη μαθηματική επιστήμη στη Συνολοθεωρία είναι ακριβώς αυτή: συνδέει με άμεσο τρόπο τη διαισθητική αντίληψη του ανθρώπου για το περιβάλλον του με την καθαρά λογική διαδικασία. Στοιχειώδη δεδομένα για τα σύνολα και την ιδιότητα στοιχείου-μέλους συνόλου μπορούν να εισαχθούν στο δημοτικό σχολείο, με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn, για τη μελέτη συλλογών από κοινά φυσικά αντικείμενα. Ο Venn με τα διαγράμματά του πέτυχε ακριβώς αυτό: να καταστήσει αντιληπτή δια των αισθήσεων (όρασης) τον τρόπο διαχείρισης των συνόλων δια της Άλγεβρας των Συνόλων. Βασικές πράξεις όπως η ένωση και η τομή συνόλων μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια των διαγραμμάτων. Όπως προαναφέρθηκε, προχωρημένες έννοιες, όπως η ισχύς (ή πληθικός αριθμός) συνόλου, συνέδεσαν τα σύνολα με τη θεωρία μέτρου συνόλων. Η Θεωρία Συνόλων από τα τέλη του 19ου αιώνα μέχρι τις αρχές του 20ού, βασιζόμενη στις εικασίες του Cantor, προσέγγισε έστω και με αυτή τη μορφή (της εικασίας) τη λύση προβλημάτων σύγκρισης της ισχύος (ή πληθικότητας) άπειρων συνόλων, ενώ είχε σημαντικές εφαρμογές στην ανάλυση και τη μελέτη των αριθμητικών πράξεων (πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, ύψωσης σε δύναμη) για απειροσύνολα. Ανάμεσα σε σημαντικά αποτελέσματα της μαθηματικής σκέψης του Cantor είναι και η απόδειξη ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων. Επίσης, ανάμεσα στα σημαντικά θεωρήματά του συμπεριλαμβάνεται και το ότι το ανοικτό διάστημα $(0,1)\subset\mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην ιστορία των μαθηματικών ως η ‘’διαγώνιος μέθοδος του Cantor’’. Η αναγνώριση του έργου του είναι ευρύτατη. Ήδη, από το 1900, ο Hilbert υποστήριζε ότι ‘’κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε ο Cantor για μας’’. Μέχρι τότε, δύο ήταν τα βασικά προβλήματα σχετικά με την έννοια της ισοπληθικότητας, τα οποία δεν είχαν απαντηθεί. Τα προβλήματα αυτά, που αποτέλεσαν το αντικείμενο της έρευνας στην εξέλιξη της συνολοθεωρίας, είναι η εικασία συγκρισιμότητας της ισχύος δυο συνόλων. Για όλα τα σύνολα Α, Β, είτε $\aleph(A)\leq\aleph(B)$ ή .$\aleph(A)\leq\aleph(A)$. 3 Η υπόθεση του συνεχούς (Continuum Hypothesis), σύμφωνα με την οποία δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών Χ με πλήθος ενδιάμεσο αυτών του $\mathbb{N}$ και του $\mathbb{R}$. Οι δύο εικασίες μαζί συνεπάγονται ότι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ εκπροσωπούν τις δύο ελάχιστες ‘’τάξεις απείρου’’. Η Θεωρία Συνόλων από τα τέλη του 19ου αιώνα μέχρι τις αρχές του 20ού, βασιζόμενη στη διαισθητική προσέγγιση του Cantor, πλησίαζε έστω και με τη μορφή εικασίας στη λύση προβλημάτων σύγκρισης της ισχύος άπειρων συνόλων, ενώ είχε σημαντικές εφαρμογές στην ανάλυση και στη μελέτη των αριθμητικών πράξεων (πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, δύναμης) για άπειρα σώματα. Την ίδια σχεδόν εποχή (1902) ο sir Bertrand Russell αμφισβητεί τη βασική αρχή της Θεωρίας Συνόλων, που μέχρι τότε στηρίζονταν στην έννοια του συνόλου κατά Cantor, ότι δηλαδή σύνολο Α είναι η συλλογή όλων των στοιχείων x τα οποία ορίζουν τόσα υποσύνολα όσος και ο πληθάριθμος του $A=\{x/P(x)\}$. Ο Russell παρατήρησε ότι από τη γενική αρχή εγκλεισμού του Cantor προκύπτει ότι το σύνολο όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο, αφού ως σύνολο θα έπρεπε να περιέχεται στον εαυτό του. Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η σκέψη αυτή θεωρήστε το σύνολο V όλων των συνόλων V={x/το x είναι σύνολο} τότε V∈V. Όπως όμως είναι γνωστό, τα σύνολα με την κλασική τους έννοια, δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Αν δηλαδή R={x/ το x είναι σύνολο και το x∉x}. Τότε όμως, προκύπτει η αντίφαση R∈R(⟺)R∉R. Η παρατήρηση αυτή ονομάστηκε ως παράδοξο του Russell. Η θεμελιώδης φύση του παραδόξου του Russell έκανε πολλούς μαθηματικούς να αναθεωρήσουν τη Θεωρία Συνόλων στο σύνολό της, δημιουργώντας έτσι το κατάλληλο έδαφος για να αναθεωρηθεί εκ βάθρων η αντίληψη των μαθηματικών για τη θεωρία αυτή. Δεν θα ήταν υπερβολή αν έλεγε κανείς ότι η κρίση αυτή χρειάστηκε σχεδόν τριάντα έτη για να αντιμετωπιστεί. Τα προβλήματα αυτά, καθώς και διάφορα άλλα προβλήματα αντιφατικότητας αντιμετωπίστηκαν με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων. Κατασκευάστηκαν, δηλαδή συστήματα από ‘’θεμελιώδεις’’ ιδιότητες, οι οποίες καλούνται ‘’αξιώματα’’, την αλήθεια των οποίων δεχόμαστε άνευ αποδείξεως. Ένα τέτοιο σύστημα αξιωμάτων, για να είναι αποδεκτό, πρέπει να έχει τα εξής γνωρίσματα:

- να είναι πλήρες,
- να είναι ανεξάρτητο και
- να είναι ελεύθερο αντιφάσεων.

Ο Zermelo πρότεινε το 1908 μια πρώτη αντιμετώπιση του προβλήματος. Ξεκινώντας από την παραδοχή ότι σύμφωνα με το περίφημο πλέον παράδοξο του Russell η γενική αρχή εγκλεισμού του Cantor είναι λανθασμένη (παράδοξο του Russell), παρατήρησε ότι η χρησιμότητά της στην απόδειξη βασικών θεωρημάτων της Συνολοθεωρίας ήταν ελάχιστη. Διαφώνησε με αυτούς που απαξίωναν ολόκληρη τη Θεωρία Συνόλων και, ξεκινώντας από τα τότε άκρα της προχωρώντας προς τα πίσω, προσπάθησε να προσδιορίσει τα αξιώματα, που είναι απαραίτητα για την εδραίωσή της. Ως πρότυπο για την αξιωματική θεμελίωση του Zermelo χρησιμοποιήθηκε η αξιωματική ευκλείδεια γεωμετρία. Η αξιωματική βάση της θεωρίας στηρίζεται σε ένα μείγμα W αντικειμένων τα οποία είναι σύνολα ή άτομα μαζί με σχέσεις-συνθήκες. Με τον τρόπο αυτό ο Zermelo αντικατέστησε τις εικασίες του Cantor με επτά αξιώματα. [62]

2.9 Η σημασία της Θεωρίας Συνόλων για τα μαθηματικά.

Στα μαθηματικά είναι πλέον διάχυτη η άποψη ότι η θεωρία συνόλων, ύστερα μάλιστα από την αποσαφήνιση των σημαντικών προβλημάτων που αντιμετώπισε στις αρχές του 20ου αιώνα (παράδοξα, αντιφάσεις κ.λπ.), είναι μια καθολική θεωρία βάσης για τα μαθηματικά. Τούτο σημαίνει ότι οποιαδήποτε μαθηματική περιοχή (τοπολογία, άλγεβρα, γεωμετρία), παρόλο που φαινομενικά δεν φαίνεται να εμπλέκει στις διατυπώσεις των προτάσεών της τη θεωρία συνόλων, μπορεί εντούτοις να αναχθεί σε αυτή: μπορούν δηλαδή οι προτάσεις μιας μαθηματικής περιοχής να διατυπωθούν με τη βοήθεια της γλώσσας που έχει αναπτύξει η θεωρία συνόλων. Αν μάλιστα συμβαίνει, αναφορικά με μια τέτοια περιοχή των μαθηματικών, να έχουμε στη διάθεσή μας μια αξιωματική διατύπωσή της, τότε αυτό που χρειάζεται για να επιτευχθεί η παραπάνω αναγωγή στη θεωρία συνόλων είναι η μετάφραση της αξιωματικής θεωρίας στη θεωρία συνόλων. Έτσι, η δυνατότητα αυτής της αναγωγής δίνει την εντύπωση ότι τα μαθηματικά εκφράζονται με τη βοήθεια της θεωρίας συνόλων. Γι' αυτό λοιπόν πολλοί μιλούν για τη θεωρία συνόλων ως καθολική θεωρία βάσης. Τούτο μεταξύ άλλων, σημαίνει ότι αν κανείς προσπαθούσε να ενοποιήσει το οικοδόμημα των μαθηματικών επιστημών, τότε μια ενοποίησή τους θα μπορούσε να προέλθει με τη βοήθεια της θεωρίας συνόλων: οι φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους επιμέρους μαθηματικές περιοχές μπορούν να αναχθούν σε ένα κοινό πυρήνα, τη θεωρία συνόλων. Η παραπάνω αντιμετώπιση των μαθηματικών έχει ως συνέπεια τη διερεύνηση θεμελίωσης των μαθηματικών μέσω θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων: το ζήτημα της θεμελίωσης των μαθηματικών ανάγεται σε θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Δεδομένου ότι η θεωρία συνόλων εκφράζεται με τη βοήθεια μιας αξιωματικοποίησης

[62] https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/458/1/02_chapter_01.pdf, Θεωρία Συνόλων, Δ. Γεωργίου, 2015, 11.6.2017

που είναι γενικότερα αποδεκτή από την κοινότητα των ερευνητών, το ζήτημα αφορά τη θεμελίωση μιας αξιωματικοποιημένης θεωρίας συνόλων. Μπορούμε τώρα ενδεικτικά να αναφερθούμε σε μερικά αξιώματα της πιο ευρέως αποδεκτής σήμερα αξιωματικοποίησης της θεωρίας συνόλων προκειμένου να κατανοήσουμε τα προβλήματα που αναφύονται κατά την αντιμετώπιση που προτείνουν οι Gödel και Wang. [63]

2.10 Το σύνολο κατά Cantor.

Ένα σύνολο, σύμφωνα με τον ορισμό του Cantor, είναι «οποιαδήποτε συλλογή ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων της σκέψης μας ή της εποπτείας μας».

Ακόμη, ο Cantor όρισε ένα σύνολο ως «μια πολλαπλότητα που μπορούμε να τη σκεφτούμε ως ένα, δηλαδή ως μια ολότητα ορισμένων πραγμάτων που μπορούν να συλλεχθούν σε ένα όλον με τη βοήθεια ενός νόμου». Οι παραπάνω ''ορισμοί'' παρουσιάζουν αναμφίβολα ασάφειες αλλά ταυτόχρονα υποδηλώνουν με έμμεσο τρόπο την κατεύθυνση πάνω στην οποία θα αναπτυχθεί μελλοντικά η θεωρία συνόλων. Έτσι, και οι δύο ορισμοί επικαλούνται την έννοια της συλλογής, της ολότητας κ.λπ., οι οποίες όμως θα μπορούσαν να θεωρηθούν περίπου ισοδύναμες προς την έννοια που επιθυμούμε να ορίσουμε. Άλλωστε, οι έννοιες της ολότητας και της συλλογής δεν είναι τόσο σαφείς και κατανοητές ώστε πάνω τους να στηρίξουμε την κατανόηση της έννοιας του συνόλου. [64]

[63] Ρουσόπουλος 1999, 91-93
[64] Ρουσόπουλος 1999, 93-94

Gödel και Wang *(Ρεαλισμός ΙΙ)*

2.11 Η θεωρία συνόλων ως θεωρία βάσης.

Ο Gödel επιχειρεί μια θεμελίωση των μαθηματικών εστιάζοντας στη θεμελίωση της αξιωματικής θεωρίας συνόλων. Προσεγγίζει τη θεωρία συνόλων ως θεωρία βάσης για τα μαθηματικά μέσω της πράξης σχηματισμού συνόλων: σύμφωνα με αυτή την πράξη κατασκευάζουμε σύνολα, ξεκινώντας από φυσικούς ή ακέραιους αριθμούς, ή από άλλα καλώς σχηματισμένα μαθηματικά αντικείμενα (σύνολα). [65] Γενικά, αναγνωρίζεται ότι η πράξη αυτή, παρά τον αυτονόητο αρχικά χαρακτήρα, δεν έχει οριστεί ικανοποιητικά: ωστόσο, πρόκειται για εντελώς στοιχειώδη και θεμελιακή διαδικασία. Το εγχείρημα θεμελίωσης των μαθηματικών στηρίζεται στον αυτονόητο και αδιαμφησβήτητο ρεαλισμό των αντικειμένων της σύγχρονης θεωρίας συνόλων:

«Οι τάξεις (classes) και οι έννοιες (concepts) μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως πραγματικά αντικείμενα, δηλαδή, οι μεν τάξεις ως πολλαπλότητες πραγμάτων ή ως δομές που αποτελούνται από μια πολλαπλότητα πραγμάτων, οι δε έννοιες ως ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ πραγμάτων, που ισχύουν ανεξάρτητα από τους ορισμούς και τις κατασκευές μας.» [66]

Η έμφαση του Gödel τίθεται απευθείας στα αξιώματα της θεωρίας συνόλων: Ποιο είναι το γνωσιοθεωρητικό καθεστώς τους; Πώς εισάγονται στην πράξη; Και, εφόσον, ένα σύστημα αξιωμάτων χαρακτηρίζεται από ενδογενείς αδυναμίες, ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για την εισαγωγή νέων αξιωμάτων; Στα ερωτήματα αυτά ο Gödel απαντά με τη βοήθεια των κριτηρίων αλήθειας. [67]

---

[65] Gödel 1947, 474
[66] Gödel 1944, 456
[67] Ρουσόπουλος 1999, 97, 98

2.12 O Gödel και η ανάγκη για εισαγωγή δύο κριτηρίων αληθείας.

Εικ. 3 Kurt Friedrich Gödel (1906-1978)

Πηγή:https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%BF%CF%85%CF%81%CF%84_%CE%93%CE%BA%CE%AD%CE%BD%CF%84%CE%B5%CE%BB#/media/File:1925_kurt_g%C3%B6del.png 28.5.2017

O Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), ήταν Αυστρο-αμερικάνος επιστήμονας της λογικής, μαθηματικός και φιλόσοφος. Ένας από τους πιο σημαντικούς επιστήμονες της λογικής όλων των εποχών, ο Gödel είχε τεράστια επιρροή στην επιστημονική και φιλοσοφική σκέψη του 20ου αιώνα, σε μια εποχή όταν πολλοί, όπως ο Μπέρτραντ Ράσελ, ο A. N. Γουάιτχεντ, και ο Ντέιβιντ Χίλμπερτ, πρωτοπορούσαν στη χρήση της λογικής και της θεωρίας συνόλων για την κατανόηση των θεμελίων των μαθηματικών.

O Gödel είναι περισσότερο γνωστός για τα δυο θεωρήματα μη-πληρότητας, δημοσιευμένα το 1931 όταν ήταν 25 χρονών, ένα χρόνο μετά το τέλος του διδακτορικού του στο πανεπιστήμιο της Βιέννης. Το πιο διάσημο θεώρημα μη-πληρότητας διατυπώνει ότι για κάθε αυτο-συνεπές αναδρομικό αξιωματικό σύστημα αρκετά ισχυρό ώστε να περιγράφει την αριθμητική των φυσικών αριθμών (αριθμητική Πεάνο), υπάρχουν αληθείς προτάσεις για τους φυσικούς που δεν μπορούν να αποδειχθούν από τα αξιώματα. Για να αποδείξει το θεώρημα αυτό, ο Gödel ανέπτυξε μια τεχνική γνωστή ως Γκεντελοποίηση, η οποία κωδικοποιεί τυπικές εκφράσεις ως φυσικούς αριθμούς.

Έδειξε ακόμα ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να διαψευσθεί από τα δεκτά αξιώματα της θεωρίας συνόλων, αν τα αξιώματα αυτά είναι συνεπή. Έκανε σημαντικές συνεισφορές στην θεωρία αποδείξεων με το να ξεκαθαρίσει τις σχέσεις μεταξύ κλασσικής λογικής, διαισθητικής λογικής και τροπικής λογικής.

Στην ηλικία των 18, ο Κουρτ συνάντησε τον αδελφό του Ρούντολφ στη Βιέννη, και εγγράφηκε στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης. Μέχρι τότε, κατείχε ήδη μαθηματικά πανεπιστημιακού επιπέδου. Αν και αρχικά είχε πρόθεση να μελετήσει θεωρητική φυσική, ο Κουρτ παρακολούθησε επίσης μαθήματα μαθηματικών και φιλοσοφίας. Κατά την περίοδο αυτή, υιοθέτησε ιδέες μαθηματικού ρεαλισμού. Διάβασε τα Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft του Εμμάνουελ Καντ, και συμμετείχε στον Κύκλο της Βιέννης με τον Μόριτζ Σλικ, τον Χανς Χαν, και τον Ρούντολφ Κάρναπ. Έπειτα μελέτησε θεωρία αριθμών, αλλά κατά τη συμμετοχή του σε ένα σεμινάριο του Μόριτζ Σλικ που μελετούσε το βιβλίο Εισαγωγή στη Μαθηματική Φιλοσοφία του Μπέρτραντ Ράσελ, του κίνησε το ενδιαφέρον η μαθηματική λογική. [68]

Στο φιλοσοφικό του έργο ο Gödel υπερασπίστηκε το Μαθηματικό Πλατωνισμό, την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι μία περιγραφική επιστήμη ή εναλλακτικά ότι η έννοια της μαθηματικής αλήθειας είναι αντικειμενική. Το ενδιαφέρον του για τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά ήταν μεγάλο και διήρκησε για μεγάλη χρονική περίοδο.

[68] https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9A%CE%BF%CF%85%CF%81%CF%84_%CE%93%CE%BA%CE%AD%CE%BD%CF%84%CE%B5%CE%BB, Wikipedia, Kurt Gödel, 15.6.2017

Αν και ο ίδιος δεν συνέταξε τον εαυτό του με την προοπτική των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, συνείσφερε σημαντικά με το έργο του στην ιντουισιονιστική λογική. [69]

Πρώτο κριτήριο αλήθειας. Στο μέτρο που ορισμένα καλώς διατυπωμένα προβλήματα, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς, δεν μπορεί να απαντηθούν στο πλαίσιο του ήδη υπάρχοντος αξιωματικού συστήματος της θεωρίας συνόλων, τίθεται επιτακτικά το ζήτημα της εισαγωγής νέων αξιωμάτων. Η εισαγωγή τους δε μπορεί να είναι αυθαίρετη. Ο Gödel υποστηρίζει ότι οδηγούμαστε στην ''ανακάλυψή'' τους διαμέσου ''μιας βαθύτερης κατανόησης των εννοιών που υπεισέρχονται στη λογική και τα μαθηματικά''. [70] Πρόκειται συνεπώς για αναγνώριση νέων αξιωμάτων μέσω ανάλυσης και μελέτης των μαθηματικών εννοιών και των πρακτικών που έχουμε στη διάθεσή μας. Ανάμεσα σε αυτές, μολονότι δεν αναφέρεται ρητά, πρέπει να περιληφθεί η επαναλαμβανόμενη πράξη σχηματισμού συνόλων (iteration).

Δεύτερο κριτήριο αλήθειας. Η διατύπωση του δεύτερου κριτηρίου ουσιαστικά συμπληρώνει και δικαιολογεί την εισαγωγή του νέου αξιώματος (που έγινε με βάση το πρώτο κριτήριο). Αν το πρώτο κριτήριο δεν επιτρέπει την άμεση πρόσβαση σε νέα αξιώματα , η έμμεση όμως αναγνώρισή τους υποβοηθείται από το δεύτερο κριτήριο. Σύμφωνα με αυτό :

''Η πιθανή απόφαση για την αλήθεια κάποιου νέου αξιώματος είναι δυνατή επαγωγικά , δηλαδή μελετώντας την επιτυχία του.'' [71] Με τον όρο ''επιτυχία'' ο Gödel κατανοεί τη γονιμότητα σε ''επαληθεύσιμα'' αποτελέσματα , τέτοια που μας είναι γνωστά πριν ακόμη από την εισαγωγή του νέου αξιώματος. Επαγωγική επιτυχία, ακόμη, θα ήταν η πιθανή απλοποίηση αποδείξεων οι οποίες χωρίς το νέο αξίωμα θα ήταν ιδιαίτερα περίπλοκες.

---

[69] https://plato.stanford.edu/entries/goedel/, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Kurt Gödel, 15.6.2017

[70] Gödel 1947, 477

[71] Gödel 1947, 477

Παρόλη την αξία των διατυπώσεων των κριτηρίων αλήθειας δεν είναι ιδιαίτερα σαφές τι πρέπει να κάνουμε σχετικά με το πρώτο κριτήριο: Πώς αναγνωρίζουμε μια πρόταση ως αξίωμα; Από πού αντλούμε την σχετική βεβαιότητα; Πρόκειται για νοητική σύλληψη; Ή, μήπως πρόσβασης στα αξιώματα που εκφράζουν τις σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα στης θεωρίας συνόλων. Ο Gödel επικαλείται την μαθηματική εποπτεία (μέσω της αναλογίας μεταξύ υλικών και μαθηματικών αντικειμένων): [72]

«Αλλά παρόλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία έχουμε πραγματικά κάτι που μοιάζει με αντίληψη (perception) των αντικειμένων της θεωρίας συνόλων , όπως φαίνεται από το γεγονός ότι τα αξιώματα μας επιβάλλονται ως αληθή». [73]

2.13 Η μαθηματική εποπτεία για τον Gödel.

Πρόκειται λοιπόν για ʻʻκάτι που μοιάζει με αντίληψηʼʼ των αντικειμένων της θεωρίας συνόλων που ακούει στο όνομα ʻʻμαθηματική εποπτείαʼʼ (mathematical intuition), και αποτελεί στην ουσία την απάντηση στα ερωτήματα που διατυπώσαμε προηγουμένως. Μια πρόταση εισάγεται ως ʻʻυποψήφιοʼʼ αξίωμα όταν (ή επειδή) προκύπτει ως παράγωγο μιας σαφούς εποπτείας. Συνεπώς, αυτό που κατά τη διατύπωση του πρώτου κριτηρίου μπορούσε απλώς να αναγνωριστεί μέσω μιας βαθύτερης κατανόησης των βασικών εννοιών που υπεισέρχονται στη θεωρία συνόλων, τώρα αποκτά σαφέστερο χαρακτήρα: δίδεται μέσω μιας εποπτείας. Ο Gödel παρατηρεί ότι έχουμε το δικαίωμα να μιλούμε για την εισαγωγή ενός νέου αξιώματος χάρη στο ʻʻψυχολογικό γεγονός της ύπαρξης μιας εποπτείας η οποία είναι αρκετά σαφής για να παραγάγει τα αξιώματα της θεωρίας συνόλωνʼʼ. [74] Αναμφισβήτητα, ο Gödel φαίνεται να πιστεύει ότι οι μαθηματικοί έχουν προσωπική και άμεση εμπειρία της μαθηματικής εποπτείας στην

[72] Ρουσόπουλος 1999, 98-100
[73] Gödel 1947, 283-284
[74] Gödel 1947, 484

περιοχή της θεωρίας συνόλων, αποτέλεσμα της οποίας είναι η συγκεκριμένη και γενικά αποδεκτή αξιωματοποίηση αυτής της περιοχής. [75]

2.14 Δυσαναλογία αισθητηριακής αντίληψης και μαθηματικής εποπτείας, ασθενής θέση.

Αναφέρθηκε ήδη ότι ο Gödel διατυπώνει και μια ασθενή θέση η οποία συνδέει την μαθηματική εποπτεία με τα κριτήρια αληθείας, και προς αυτή θα στραφούμε αμέσως τώρα. Το πρώτο κριτήριο αληθείας, όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, χαρακτηρίζει την ανοικτότητα του αξιωματικού συστήματος της θεωρίας συνόλων και παρέχει τη δυνατότητα εισαγωγής νέων αξιωμάτων μέσω ‘’μιας βαθύτερης κατανόησης των εννοιών’’ που υπεισέρχονται στη θεωρία συνόλων. Πρόκειται για αυτό που ο Gödel ονομάζει ’’εσωτερική αναγκαιότητα’’: μια πρόταση εισάγεται ως νέο αξίωμα ως αίτημα εσωτερικό, αίτημα που είναι άμεσα συναρτημένο με την εσωτερική οργάνωση και λογική του αξιωματικού συστήματος των προτάσεων της θεωρίας συνόλων. Έτσι γίνεται φανερό ότι απομακρυνόμαστε από τη γνωσιοθεωρητική δέσμευση μιας άμεσης μαθηματικής εποπτείας (η οποία θα μας παράσχει άμεσα και χωρίς διαμεσολάβηση τα υποψήφια νέα αξιώματα της θεωρίας συνόλων), μεταφερόμενοι προς μια (εννοιολογική) κατανόηση και ανάλυση των εννοιών που υπεισέρχονται στη συνολοθεωρητική πρακτική (η οποία θα μας βοηθήσει να εξετάσουμε υποψήφιες προτάσεις που είναι πιθανόν να μας ‘’δώσουν’’ αξιώματα).Πρόκειται για την κατεύθυνση που ερευνά ο Wang. [76]

[75] Ρουσόπουλος 1999, 100
[76] Ρουσόπουλος 1999, 102, 103

2.15 Ο Wang και οι απόψεις του για το σχηματισμό συνόλων, συλλογών και κριτηρίων αληθείας.

Ο Hao Wang (1921-1995) γεννήθηκε στο Τζινάν, στη Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας κι έλαβε την πρώτη του εκπαίδευση στην Κίνα. Είχε αποκτήσει το πρώτο του πτυχίο και το τίτλο μεταπτυχιακού στη Φιλοσοφία πριν αποχωρήσει για την Αμερική για περεταίρω σπουδές. Σπούδασε λογική στο πανεπιστήμιο του Harvard, με αποκορύφωμα το διδακτορικό του τίτλο το 1948. Διορίστηκε ως βοηθός καθηγητή στο Harvard την ίδια χρονιά.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1950, ο Wang συνεργάστηκε με τον Paul Bernays στη Ζυρίχη. Το 1959 ο Wang έγραψε σε σύστημα ηλεκτρονικού υπολογιστή IBM704 ένα πρόγραμμα το οποίο μηχανικά αποδείκνυε εκατοντάδες θεωρήματα μαθηματικής λογικής του Whitehead and Russell's Principia Mathematica. Από το 1967 ως το 1991, ήταν επικεφαλής του τμήματος έρευνας λογικής στο Rockefeller University της Νέας Υόρκης , όπου ήταν και καθηγητής λογικής. Το 1972, ο Wang ήταν μέλος μίας ομάδας Κινεζο-αμερικάνων επιστημόνων, της όποιος ηγείτο ο Chih-Kung Jen ως της πρώτης τέτοιου είδους επιτροπής από τις Ηνωμένες πολιτείες προς τους ανθρώπους της Λαϊκής Δημοκρατίας της Κίνας.

Μία από τις σημαντικότερες συνεισφορές του Wang ήταν το Wang tile. Έδειξε ότι οποιαδήποτε μηχανή Turing μπορεί να μετατραπεί σε μια σειρά από Wang tiles. Το πρώτο παράδειγμα απεριοδικού tiling που έχει σημειωθεί είναι μία σειρά από Wang tiles, των οποίων τη μη-ύπαρξη είχε κάποτε υποθέσει, που ανακαλύφθηκαν από το μαθητή του Robert Berger το 1966. Ο Wang επίσης ανέπτυξε μια διαπεραστική ερμηνεία της ύστερης Φιλοσοφίας των μαθηματικών του Ludwig Wittgenstein, την οποία ονόμασε ‘’ανθρωπολογία’’. Κατέγραψε τις φιλοσοφικές ιδέες του Kurt Gödel και συνέγραψε αρκετά βιβλία επί του θέματος, με αυτόν τον τρόπο παρείχε στους σύγχρονους μαθητευόμενους μία ανεκτίμητη πηγή για τις ύστερες φιλοσοφικές απόψεις του Gödel. [77]

Η διέξοδος κατά τον Wang βρίσκεται στα κριτήρια αληθείας. Τα κριτήρια αληθείας αποσκοπούν να καθορίσουν τις συνθήκες υπό τις οποίες μια πρόταση μπορεί να εισαχθεί ως αξίωμα. Σύμφωνα με το πρώτο κριτήριο, μια πρόταση εισάγεται και χρησιμοποιείται στο υπάρχον αξιωματικό σύστημα ως αναγνώριση της εσωτερικής οργάνωσης και ενότητας του συστήματος. Η σημασία του πρώτου κριτηρίου διαφαίνεται όταν προσπαθήσουμε να αποδώσουμε αυτονομία στο δεύτερο κριτήριο. Παρατηρούμε τότε ότι η εισαγωγή ‘’υποθέσεων’’ μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα γόνιμη σε αποτελέσματα, όμως, στο μέτρο που μια ‘’υπόθεση’’ αντιβαίνει προς μια διαισθητική μας εποπτεία απορρίπτεται.

Ο ορισμός του συνόλου από τον Cantor συνδέει την έννοια του συνόλου με την γενετική έννοια σχηματισμού συλλογών από δοθέντα αντικείμενα. Ένα σύνολο προσδιορίζεται όταν προσδιορίζεται αν κάθε δοθέν αντικείμενο ανήκει ή δεν ανήκει σε αυτό. Σύμφωνα με την έννοια της επανάληψης, ένα σύνολο σχηματίζεται από ορισμένα βασικά αντικείμενα (φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί) επαναλαμβάνοντας την πράξη ‘’σύνολο που σχηματίζεται από …’’. Η έμφαση τώρα βρίσκεται στην πράξη σχηματισμού και επιτελείται ως δυνατότητα επανάληψης της πράξης – όχι του αποτελέσματος της πράξης. Δεν επαναλαμβάνουμε συλλογές αλλά την πράξη του συλλέγειν, και μάλιστα οποτεδήποτε και οσοδήποτε συχνά. Οι έννοιες που απαιτούν την προσοχή μας είναι η τριάδα: ‘’συλλέγειν, επανάληψη, εποπτεία’’. [78] Σχηματίζουμε κατά τον Wang ένα σύνολο από μια πολλαπλότητα: η πολλαπλότητα μας δίδεται μέσω της εποπτείας αλλά μια οποιαδήποτε πολλαπλότητα δε συγκροτεί σύνολο. Ο καθορισμός ενός συνόλου απαιτεί μια εποπτική έννοια, ένα κατηγόρημα που μας επιτρέπει να επιθεωρήσουμε, κατά ιδεατό τρόπο, ένα εποπτικό πεδίο αναφοράς, την έκταση του κατηγορήματος.

[77] https://en.wikipedia.org/wiki/Hao_Wang_(academic), Wikipedia, Hao Wang, 20.6.2017

[78] Wang 1974, 530

Ασφαλώς, ως πεπερασμένα όντα που είμαστε έχουμε στη διάθεσή μας μια πεπερασμένη εποπτεία, μια εποπτεία δηλαδή που επιτρέπει να διατρέχουμε με το νου μας πεπερασμένες μόνο πολλαπλότητες. Η εξιδανίκευση (idealization) που έτσι εισάγεται ''περιέχει το σπόρο ανάπτυξης'' της αξιωματικής θεωρίας συνόλων. [79]

2.16 Ο Wang ακολουθεί διαφορετικό δρόμο από εκείνον που χάραξε ο Gödel.

Στο σημείο αυτό εμφανίζονται δύο επιμέρους προβλήματα που οδηγούν τον Wang σ' ένα διαφορετικό δρόμο από αυτόν που χάραξε ο Gödel. Το πρώτο πρόβλημα συνδέεται άμεσα με την έννοια της επισκόπησης: πως νοείται η επισκόπηση; Κατ' αναλογία προς την αισθητηριακή αντίληψη; Αλλά η δυνατότητα αυτής της αναλογίας εξαφανίζεται μόλις αναλογιστούμε ότι μας ενδιαφέρει να επισκοπούμε άπειρες πολλαπλότητες: πως θα πετύχουμε να διατρέχουμε εποπτικά πολλαπλότητες με άπειρο πλήθος στοιχείων; Η δυνατότητα να αποδώσουμε στα ανθρώπινα όντα μια ''άπειρη εποπτεία'' είναι οπωσδήποτε προβληματική. Ο ίδιος ο Wang ομολογεί:

«Αυστηρά μιλώντας, μπορούμε να διατρέχουμε πεδία με πεπερασμένο μόνο πλήθος στοιχείων – και μάλιστα με περιορισμένο πλήθος στοιχείων». [80]

Φτάνουμε έτσι στο δεύτερο πρόβλημα. Ο Wang δεν αποδίδει στα ανθρώπινα όντα τη δυνατότητα επισκόπησης απείρων πολλαπλοτήτων, οπότε απομακρυνόμενος από τις πραγματικές δυνατότητες που έχουμε ως πεπερασμένα όντα, ο Wang εισάγει την εξιδανικευμένη επισκόπηση. Έτσι κατ' αναλογία προς την (πεπερασμένη) εποπτεία, διαθέτουμε ''άπειρη εποπτεία'' ως δυνατότητα επισκόπησης απείρων πολλαπλοτήτων. Η άποψη αυτή βρίσκει χαρακτηριστική διατύπωση και εφαρμογή στην περίπτωση του αξιώματος σύμφωνα με το οποίο εάν μια πολλαπλότητα Α περιέχεται σε ένα σύνολο χ τότε και η ίδια είναι σύνολο. Η άτυπη δικαιολόγηση του Wang είναι: [81]

[79] Ρουσόπουλος 1999, 104, 105
[80] Wang 1974, 532
[81] Ρουσόπουλος 1999, 108, 109

«Εφόδων το χ είναι ένα δοθέν σύνολο μπορούμε να διατρέξουμε όλα τα μέλη του χ, και συνεπώς μπορούμε να κάνουμε αυθαίρετες παραλείψεις. Ιδιαιτέρως, μπορούμε να ελέγξουμε το Α με μια εξιδανικευμένη έννοια, και να διαγράψουμε εκείνα τα μέλη του χ που δε είναι στο Α. Με τον τρόπο αυτό επισκοπούμε όλα τα αντικείμενα του Α και αναγνωρίζουμε το Α ως σύνολο». [82]

2.17 Αποτέλεσμα της απόστασης των δύο θεωριών.

Η εξιδανίκευση που εισάγει ο Wang προχωρεί σε τόσο μεγάλο βαθμό, που θυμίζει πάλι την παντογνωσία ενός υπερ-όντως (του θεού). Η έννοια της εξιδανικευμένης εποπτείας κάνει εντελώς ασαφές τι είναι αυτό που ζητείται να κατανοήσουμε ως εποπτεία, προπαντός αποστερεί από την εποπτεία οποιοδήποτε στοιχείο αισθητηριακότητας. Ο Wang απομακρύνεται από τον αισθητηριακό χαρακτήρα της εποπτείας των αξιωμάτων και μετατοπίζεται σταδιακά προς μια εννοιολογική σύλληψη της αλήθειας των αξιωμάτων: η επαναλαμβανόμενη πράξη δεν είναι τελικά ζήτημα εποπτικής σύλληψης αλλά μάλλον ζήτημα νοητικής σύλληψης και ανάλυσης των εννοιών που υπεισέρχονται στη θεωρία συνόλων. Τώρα γίνεται φανερό ότι η σύλληψη και ανάλυση των εννοιών που υπεισέρχονται στη θεωρία συνόλων δε συνδέεται ιδιαιτέρως με τη μαθηματική εποπτεία του Gödel. Αντίθετα μάλιστα, η σημασία της μαθηματικής εποπτείας υποβαθμίζεται εφόσον τα αξιώματα δε μας ‘’επιβάλλονται ως αληθή’’ με τον έναν ή τον άλλο τρόπο (όπως ζητούσε ο Gödel) αλλά μάλλον γίνονται απλώς αποδεκτά ως αληθή. [83]

[82] Wang 1974, 533
[83] Ρουσόπουλος 1999, 109

2.18 Ο Wang φέρει στην επιφάνεια το πρόβλημα των δύο τάσεων του ρεαλισμού.

Ο Gödel επικαλείται τη μαθηματική εποπτεία ως μέσο που παρέχει επικύρωση (μολονότι προσωρινή) των μαθηματικών. (Ισχυρή θέση) Η άποψή του ωστόσο οδηγείται σε αδιέξοδο καθώς η γνωσιοθεωρητική συνιστώσα δε φαίνεται να μπορεί να εξασφαλίσει πρόσβαση στην αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Ο Wang μετριάζοντας την ισχυρή θέση του Gödel επιχείρησε στο πλαίσιο του μαθηματικού ρεαλισμού να εκμεταλλευτεί την ασθενή θέση: χρησιμοποιεί τη μαθηματική εποπτεία ως ερευνητική λειτουργεία διατύπωσης των αξιωμάτων περισσότερο και λιγότερο ως τελικό θεμέλιο επικύρωσης της αλήθειας των αξιωμάτων. Τα κριτήρια αλήθειας τώρα επιφορτίζονται σημαντικό ρόλο διακινδυνεύοντας να θεωρηθούν απλές συμβάσεις. Ο Wang προσπαθεί να κρατήσει σε λεπτή ισορροπία δύο τάσεις του μαθηματικού ρεαλισμού οι οποίες φύσει απομακρύνονται η μία από την άλλη (δημιουργώντας ένταση στο όλο οικοδόμημα) . Από τη μία μεριά έχουμε την ευλογοφανή αρχικά θέση που δέχεται την εποπτεία ως ουσιαστικό, φιλοσοφικό εργαλείο επικύρωσης της σημασιολογικής αξίας των προτάσεων. Στη φάση αυτή, η εποπτεία λειτουργεί με έντονο αισθητηριακό χαρακτήρα. Από την άλλη, η εποπτεία χάνει διαρκώς τον αισθητηριακό χαρακτήρα με ον οποίο είναι σφραγισμένη και μετατρέπεται σε μια εννοιολογική και θεωρητική λειτουργία. Στην περίπτωση αυτή δεν χρειάζεται καμία ιδιαίτερη αναφορά στη μαθηματική εποπτεία αφού η ίδια καθίσταται εντελώς ανενεργός στη διαμόρφωση και ανακάλυψη της αλήθειας. [84]

[84] Ρουσόπουλος 1999, 110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΓΟΝΩΝ (*ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ III*)

3.1 Ο Benacerraf, πως εκθειάζει τους Hilbert, Gödel και πως ορίζει τις δύο δικές του συνιστώσες.

Εικ. 4 Paul Benacerraf (1931- σήμερα)

Πηγή:https://www.google.gr/search?q=Paul+Benacerraf&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjioujJ3NDbAhVqyKYKHTtSCPkQ_AUICigB&biw=1396&bih=690#imgrc=psoLiP9mMrNhlM:, 20.8.2017

Ο Paul Joseph Salomon Paul Benacerraf γεννήθηκε στο Παρίσι το 1931, οι γονείς του ήταν Εβραϊκής καταγωγής από το Μαρόκο και την Αλγερία. Το 1939 η οικογένεια μετακόμισε στο Καράκας και ύστερα στη Νέα Υόρκη. Όταν η οικογένεια επέστρεψε στο Καράκας, ο ίδιος παρέμεινε στις Ηνωμένες Πολιτείες για να φοιτήσει στο Peddie School του NJ. Φοίτησε στο Princeton University από όπου παρέλαβε πτυχίο και μεταπτυχιακό τίτλο. Ο Benacerraf είναι ίσως περισσότερο γνωστός για τις δημοσιεύσεις του ‘’What numbers could not be’’ (1965) και ‘’Mathematical truth’’ (1973) και για το ανθολόγιο του πάνω στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, σε συνεργασία με την Hilary Putnam. Του αποδόθηκε τίτλος τιμής από την Αμερικανική Ακαδημία Τεχνών και Επιστημών το 1998. Ο αδερφός του ήταν ο Βενεζουελανός ανοσολόγος, κάτοχος Nobel, Baruj Benacerraf. [85]

Ο Benacerraf, συζητώντας τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι κυρίαρχες φιλοσοφικές κατευθύνσεις του ρεαλισμού, αναφέρεται ρητά στις δύο προηγούμενες ερευνητικές κατευθύνσεις του ρεαλισμού (Ρεαλισμού I, II): το περατοκρατικό πρόγραμμα του Hilbert, το οποίο ο Benacerraf ονομάζει συνδυαστικό (‘’combinatorial’’) , και το πλατωνιστικό πρόγραμμα του Gödel, το οποίο ο Benacerraf ονομάζει σύνηθες / κοινό (‘’standard’’). Ο Benacerraf εκθειάζει τη γενικότερη τάση που διαμορφώνεται τόσο στο πρόγραμμα Hilbert όσο και στο πρόγραμμα Gödel, και σύμφωνα με την οποία επιδιώκουμε να διαμορφώσουμε μια ενιαία φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών. Η φιλοσοφική θεώρηση της εμπειρικής επιστήμης εν γένει, κατά τον Benacerraf, συνδυάζει δύο βασικές συνιστώσες, μία συνιστώσα που αφορά τις σημασιολογικές έννοιες της αλήθειας, της αναφοράς και της κατανόησης και μία άλλη συνιστώσα γνωσιολογικού χαρακτήρα που αναφέρεται στη δυνατότητα της γνώσης των προτάσεων μιας ορισμένης περιοχής από την προοπτική του υποκειμένου. [86]

3.2 Η κριτική του Benacerraf στις απόψεις των Hilbert, Gödel και η αιτιακή θεωρία της γνώσης.

Ο Benacerraf θεωρεί ότι οι ρεαλιστικές θεωρήσεις των μαθηματικών αντιμετωπίζουν σημαντικά προβλήματα στην προσπάθεια τους να συνδυάσουν τις δυο συνιστώσες (‘’συνθήκες’’ τις αποκαλεί ο Benacerraf): (α) η προσέγγιση που ακολουθεί ο Hilbert και οι άλλοι συνεργάτες του, ξεκινώντας από, και τονίζοντας, τις γνωσιοθεωρητικές προσβάσεις του προγράμματος στα μαθηματικά αντικείμενα και τις προτάσεις που παράγονται κατόπιν (μέσω των αποδείξεων), δεν καταφέρνει να συνδέσει ‘’τις

[85] https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Benacerraf, Wikipedia, Paul Benacerraf, 20.8.2017
[86] Ρουσόπουλος 1999, 111

αποκαλούμενες ‘’συνθήκες αλήθειας’’ με την αλήθεια των προτάσεων των οποίων αυτές οι συνθήκες είναι συνθήκες αλήθειας’’[87] . Αλλά, και (β), η προσέγγιση του Gödel αντιμετωπίζει εξίσου σημαντικά προβλήματα, επειδή, ξεκινώντας από τη βασική αναγνώριση μιας ομοιόμορφης σημασιολογικής θεώρησης της εμπειρικής επιστήμης με τα μαθηματικά, δεν μπορεί να εξηγήσει την πρόσβαση στη γνώση που έχουμε στη διάθεση μας στην περίπτωση των μαθηματικών, κατ’ αναλογία προς την πρόσβαση στη γνώση στην περίπτωση της εμπειρικής επιστήμης. Όπως είδαμε ο Gödel, για να καταστήσει δυνατή την πρόσβαση στην αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων, η οποία γι’ αυτόν εκφράζεται με τη βοήθεια των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, προσφεύγει στη (μαθηματική) εποπτεία, μια νοητική διεργασία η οποία λειτουργεί κατ’ αναλογία προς την κοινή αισθητηριακή αντίληψη. Το πρόβλημα στην περίπτωση της μαθηματικής εποπτείας δεν είναι απλώς ότι η αναλογία που ο Gödel υποθέτει μεταξύ αυτής και της κοινής αισθητηριακής αντίληψης δεν υποστηρίζεται με πειστικά επιχειρήματα αλλά επιπλέον ότι η μαθηματική εποπτεία δεν συμβιβάζεται με μία αιτιακή θεωρία της γνώσης (causal theory of knowledge). [88] Ο Benacerraf υποστηρίζει μια αιτιακή θεωρία της γνώσης, σύμφωνα με την οποία,

«Το να γνωρίζει το υποκείμενο Χ ότι η πρόταση Σ είναι αληθής απαιτεί να ισχύει κάποια αιτιακή σχέση ανάμεσα στο υποκείμενο και στις αναφορές των ονομάτων, στα κατηγορήματα, και στους ποσοδείκτες της προτάσεως Σ.»

Οπότε, εάν οι μαθηματικός οντότητες υπάρχουν αντικειμενικά και ανεξάρτητα από το υποκείμενο, τότε δεν μπορούμε να τις γνωρίσουμε! Οι μαθηματικές οντότητες – σε αντίθεση με τα υλικά αντικείμενα- χαρακτηρίζονται από μεταφυσική αδράνεια: δεν μπορούν να μας επηρεάσουν κατά κάποιο τρόπο. Αλλά, παρά τη μεταφυσική αδράνεια που χαρακτηρίζει τις μαθηματικές οντότητες, έχουμε πρόσβαση στη μαθηματική γνώση , έστω σε ένα πεπερασμένο τμήμα της, οπότε πιθανώς ο μαθηματικός ρεαλισμός πρέπει να απορριφθεί ως μη λογικά συνεκτικός. [89]

---

[87] Benacerraf 1973, 419
[88] Steiner 1975, 109-137
[89] Ρουσόπουλος 1999, 111-113

3.3 Οι αντιδράσεις στην επιχειρηματολογία του Benacerraf.

Οι αντιδράσεις στην παραπάνω επιχειρηματολογία του Benacerraf συνοψίζονται στις ακόλουθες δυνατότητες:

(1) Απορρίπτουμε συνολικά τον πλατωνισμό / μαθηματικό ρεαλισμό ως συνεκτική φιλοσοφία των μαθηματικών (αντιρεαλισμός), (α) μένοντας δεσμευμένοι με τις βασικές προκείμενες της γνωσιοθεωρίας του επιστημονικού εμπειρισμού και φυσικαλισμού [90], (β) χωρίς να δεσμευόμαστε με τις προηγούμενες γνωσιοθεωρητικές και οντολογικές θέσεις προχωρούμε στη ριζική ανασυγκρότηση των μαθηματικών. (Ιντουισιονισμός)

(2) Στο πλαίσιο των δεσμεύσεων του Νατουραλισμού (Quine) που αναγνωρίζει μια ενιαία φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών με τις εμπειρικές επιστήμες, διεκλεπτύνουμε τον παλαιό εμπειρισμό τύπου Mill , συμπληρώνοντας όμως το οντολογικό κενό με μια στιβαρή ρεαλιστική οντολογία (Kitcher, Resnik, Maddy). (Ρεαλισμός ΙΙΙ) [91]

[90] Field 1980, 1990

[91] Ρουσόπουλος 1999, 113

3.4 Ο Quine, ο Νατουραλισμός και μια συνολική κριτική του ύστερου λογικού εμπειρισμού.

Εικ. 5 Willard Van Orman Quine (1908-2000)

Πηγή:https://www.google.gr/search?q=quine&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjhvoSz4dDbAhUCBywKHZAGCocQ_AUICigB&biw=1396&bih=690#imgrc=UTbZrf6SbbEauM:, 25.8.2017

Ο Willard Van Orman Quine (1908-2000) γεννήθηκε στο Akron, Ohio. Φοίτησε στο Oberlin College, Ohio (1926-1930) και συνέχισε για τη διδακτορική του διατριβή στο Harvard University (1930-1932). Ασχολήθηκε με τη Θεωρητική Φιλοσοφία και τη Λογική. (Στην πρακτική Φιλοσοφία-Ηθική και πολιτική Φιλοσοφία-η συνεισφορά του είναι αμελητέα.) Είναι πιθανότατα γνωστός για τη διαφωνία του με το Λογικό Εμπειρισμό (συγκεκριμένα, με τη χρήση της αναλυτικής-συνθετικής διάκρισης). Αυτή η διαφωνία, ωστόσο, θα πρέπει να θεωρηθεί σαν μέρος μιας αντιληπτικής κοσμοθεωρίας που δεν κάνει διακρίσεις μεταξύ Φιλοσοφίας και εμπειρικής επιστήμης, και γι’ αυτό απαιτεί πλήρη επαναπροσανατολισμό του αντικειμένου.

Ο φιλοσοφικός λογισμός του Quine είναι αξιοθαύμαστα συνεπής σε όλη την πορεία του έργου του. Υπάρχουν, φυσικά, κάποιες εξελίξεις ή μετατροπές, αλλά δεν παρατηρείται σε κανένα σημείο του έργου του πλήρη αλλαγή πλεύσης. Μπορούμε με σιγουριά να πούμε πως έχει συγκεκριμένο φιλοσοφικό προσανατολισμό, στον οποίο ο Νατουραλισμός έχει πολύ κρίσιμο ρόλο. Βέβαια ο Νατουραλισμός του Quine δεν ήταν συνειδητός από την αρχή, αλλά περισσότερο κάτι που προέκυψε και έγινε ξεκάθαρος με το πέρασμα των χρόνων. Ο όρος ''Νατουραλισμός'' έχει χρησιμοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Ο Νατουραλισμός του Quine περιγράφεται σε ένα βαθμό ως ''η αναγνώριση της ίδιας της επιστήμης, και όχι σε κάποια προ υπάρχουσα φιλοσοφία , ότι η πραγματικότητα είναι για να αναγνωριστεί και να περιγραφεί'' [92] [93]

Ο Quine δημιούργησε μια μεθοδική κριτική ενάντια στην παραδοσιακή Φιλοσοφία. Η φιλοσοφική μεθοδολογία που πρότεινε έγινε γνωστή ως Νατουραλισμός. Σύμφωνα με το νατουραλισμό αν θέλουμε να γνωρίζουμε την καλύτερη δυνατή απάντηση σε φιλοσοφικά ερωτήματα όπως *Τι γνωρίζουμε;* και *Ποιες οντότητες υπάρχουν;*, δεν πρέπει να απευθυνθούμε στις παραδοσιακές επιστημονικές και μεταφυσικές θεωρίες. Ο Putnam εφάρμοσε τη νατουραλιστική στάση του Quine στη μαθηματική οντολογία. [94] Μέχρι το Γαλιλαίο, οι καλύτερες μας θεωρίες από τις φυσικές επιστήμες έχουν εκφραστεί μέσω των μαθηματικών. Η θεωρία της βαρύτητας του Newton, για παράδειγμα, στηρίζεται στην κλασσική θεωρία των πραγματικών αριθμών. Γι' αυτό μια οντολογική δέσμευση στις μαθηματικές οντότητες φαίνεται έμφυτη στις καλύτερες επιστημονικές μας θεωρίες. Αυτού του είδους η λογική μπορεί να υποστηριχθεί αν την εφαρμόσουμε στη θέση του Quine περί επιβεβαιωτικής ολότητας. Η εμπειρική απόδειξη δεν παραχωρεί την επιβεβαιωτική της ισχύ σε καμία μεμονωμένη υπόθεση. Αντίθετα επιβεβαιώνει τη θεωρία στην οποία η μεμονωμένη υπόθεση ενσωματώνεται.

[92] Quine 1981,21
[93] https://plato.stanford.edu/entries/quine/#QuiPlaHis, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Willard van Orman Quine, 30.8.2017
[94] Putman 1972

Εφόσον οι μαθηματικές θεωρίες είναι αναπόσπαστο κομμάτι των επιστημονικών θεωριών τότε κι αυτές επιβεβαιώνονται επίσης από την εμπειρία. Έτσι έχουμε εμπειρική επιβεβαίωση για τις μαθηματικές θεωρίες. Φαίνεται ότι τα μαθηματικά είναι υψίστου σημασίας στις σημαντικότερες επιστημονικές μας θεωρίες: δεν είναι καθόλου προφανές πως θα μπορούσαμε να τις εκφράσουμε χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα των μαθηματικών. Ως εκ τούτου η νατουραλιστική στάση μας προστάζει να δεχτούμε τις μαθηματικές οντότητες σαν κομμάτι της φιλοσοφικής μας οντολογίας. [95]

Στις παραπάνω απόψεις του Quine ασκήθηκε κριτική η οποία εξανάγκασε τους επίγονους να ακολουθήσουν διαφορετικό δρόμο προς τον πλατωνισμό από αυτόν που εισηγείται ο Quine. [96]

«Ο νατουραλιστής φιλόσοφος αρχίζει τη σκέψη του μέσα στην παραδομένη θεωρία του κόσμου ως μία συνεχιζόμενη έρευνα / διαφέρον. Πιστεύει δοκιμαστικά και προσωρινά όλη αυτή τη θεωρία αλλά πιστεύει ταυτόχρονα ότι ένα μη προσδιορισμένο εκ των προτέρων μέρος της είναι εσφαλμένο. Επιχειρεί λοιπόν να βελτιώσει, να αποσαφηνίσει και να κατανοήσει το σύστημα εκ των έσω. Πρόκειται για τον πολυάσχολο ναυτικό που εργάζεται πάνω στο καράβι του Neurath.»[97]

«Ο επιστημονικός λόγος, εάν τον ερμηνεύσουμε με τον συνήθη τρόπο, είναι αμετάκλητα δεσμευμένος με την ύπαρξη αφηρημένων οντοτήτων – έθνη, γένη, αριθμοί, συναρτήσεις, σύνολα – όπως άλλωστε είναι δεσμευμένος με τα μήλα και τα άλλα σώματα. Όλα αυτά τα πράγματα εμφανίζονται ως τιμές των μεταβλητών στο συνολικό σύστημα του κόσμου. Οι αριθμοί και οι συναρτήσεις συνεισφέρουν εξίσου γνήσια στη φυσική θεωρία όπως και τα υποθετικά σωμάτια.» [98]

[95] https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#NatInd, Stanford Encyclopedia of Philosophy, Naturalism and Indispensability, 30.8.2017
[96] Field 1980, Maddy 1990, 1992, Azzouni 1994, 71-75
[97] Quine 1981, 72
[98] Quine 1981, 149-50

3.5 Προσέγγιση Resnik, ο λογισμός των αφηρημένων σχεδίων (patterns)

Μεταφράζουμε τον όρο ‘’pattern’’ του Resnik ως αφηρημένο σχέδιο ή σχήμα. Για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με το νόημα αυτού του όρου στα ελληνικά θα έπρεπε να τον συνδέσουμε με μια κατανόησης στο πλαίσιο του στρουκτουραλισμού / δομισμού.

Η θέση του Resnik είναι ότι τα μαθηματικά είναι ένας διευρυμένος λογισμός των αφηρημένων σχεδίων. Αλλά ο Resnik θα επιμείνει στη σύλληψη των μαθηματικών ως αφηρημένων σχεδίων στο βαθμό που μπορεί να οικοδομήσει μια ικανοποιητική θεωρία της γνώσης για τα αφηρημένα σχέδια, μια θεωρία που θα μας εξηγεί πως καταφέρνουμε να ποριστούμε μαθηματικές αλήθειες ως αλήθειες που αφορούν αφηρημένα σχέδια. Επειδή μια αιτιακή σύνδεση του υποκειμένου με τα αφηρημένα σχέδια δεν είναι εύκολο να υποστηριχθεί (όπως έδειξε ο Benacerraf), ο Resnik επιχειρεί να δείξει πώς το υποκείμενο σχηματίζει πεποιθήσεις που αφορούν αφηρημένα σχέδια: η διαδικασία που το υποκείμενο ακολουθεί ομοιάζει σε σημαντικό βαθμό τις ιστορικές διαδικασίες διαμόρφωσης των πεποιθήσεων του υποκειμένου που συζητά αναλυτικότερά ο Kitcher. Ο Resnik υποθέτει ότι το υποκείμενο είναι σα να βρίσκεται σε ένα αρχικό στάδιο, όπου αυτό που του ζητείται είναι να κοιτάξει τον κόσμο για πρώτη φορά. Οπότε, το υποκείμενο, σαν τον κολυμβητή που φορώντας την μάσκα αποπειράται να καταδυθεί στα βάθη της θάλασσας, κοιτάζει γύρω του και σχηματίζει εντυπώσεις / εικόνες των ‘’αφηρημένων σχεδίων ‘’ και τα εγγράφει στη μνήμη του ως τέτοια. [99] [100]

3.6 Προσέγγιση Kitcher

Η προσέγγιση του Kitcher συνδυάζει μια οντολογική και μια γνωσιοθεωρητική συνιστώσα: η έμφαση βρίσκεται βέβαια στη γνωσιοθεωρητική συνιστώσα, αλλά είναι αδύνατο να προκύψει μια ‘’βιώσιμη’’ άποψη χωρίς αναφορά στην οντολογική

[99] Resnik 1982, 97
[100] Ρουσόπουλος 1999, 117, 118

συνιστώσα. Έτσι, η εικόνα που παρουσιάζει ο Kitcher είναι περισσότερο πειστική από αυτή του Resnik, και σε συμφωνία με τον αισθητηριακό χαρακτήρα της γνώσης στις εμπειρικές επιστήμες. Το πρόβλημα όμως τώρα είναι ο χαρακτήρας του ρεαλισμού που ο Kitcher επιχειρεί να υποστηρίξει.

Ξεκινάει λοιπόν από την επαναδιατύπωση μιας γνωσιοθεωρίας των μαθηματικών, η οποία, σε αντίθεση με τους προηγούμενους ρεαλιστές που (Hilbert, Gödel), εκλαμβάνει τη γνώση των μαθηματικών ως a posteriori γνώση, σε πλήρη δηλαδή συμφωνία με το χαρακτήρα της γνώσης που παράγουν οι εμπειρικές επιστήμες.

Για τον Kitcher τα μαθηματικά δεν ‘’αντανακλούν’’ άμεσα τον υλικό κόσμο αλλά περιγράφουν τα δομικά χαρακτηριστικά του κόσμου που εκδηλώνονται στις σχέσεις μας μαζί του, στους χειρισμούς που υποβάλουμε τον κόσμο. Συνεπώς τα μαθηματικά δεν αποτελούν μια απευθείας ‘’ανάγνωση’’ των χαρακτηριστικών του κόσμου αλλά μια διαμεσολαβημένη σχέση του κόσμου μέσω των κατοίκων του. [101]

«Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι αληθείς εξαιτίας των συμβάσεων που εμείς οι ίδιοι έχουμε διατυπώσει, αυτές καθορίζουν τις συνθήκες αλήθειας των κατηγορημάτων. Αλλά τα κατηγορήματα στην πραγματικότητα δεν ικανοποιούνται από τίποτα απολύτως, ικανοποιούνται όμως προσεγγιστικά από τις πράξεις που εκτελούμε (και από τις φυσικές πράξεις).» [102]

3.7 Ο εμπειρισμός του Mill και οι απόψεις του.

Ένα κύριο θέμα της φιλοσοφίας κατά τον 19ο αιώνα ήτα να εξηγήσουν την prima facie (εκ πρώτης όψεως) αναγκαιότητα και την a priori φύση των μαθηματικών και της λογικής, χωρίς την επίκληση της καντιανής διαίσθησης. Μπορούμε να κατανοήσουμε τα μαθηματικά και τη λογική ανεξάρτητα από τις μορφές χωροχρονικής διαίσθησης;

[101] Ρουσόπουλος 1999, 119-125
[102] Kitcher 1983, 110

Από μια συνολική εμπειριστική προοπτική, υπάρχουν δύο εναλλακτικές πορείες στην καντιανή άποψη ότι τα μαθηματικά είναι συνθετικά a priori. Μπορεί κανείς είτε να κατανοήσει τα μαθηματικά σαν αναλυτικά είτε να τα κατανοήσει ως εμπειρικά και έτσι ως a posteriori. O John Stuart Mill είναι ένας ριζοσπαστικός εμπειριστής, ο οποίος ακολούθησε τη δεύτερη πορεία, ισχυριζόμενος ότι τα μαθηματικά είναι εμπειρικά. Είναι προάγγελος κάποιων πολύ σημαντικών και με μεγάλη επιρροή σύγχρονων εμπειριστικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά.

O Mill υπήρξε ένας από τους πλέον συνεπείς νατουραλιστές στην ιστορία της φιλοσοφίας. Αντίθετα με τους καντιανούς, υποστήριξε ότι ο ανθρώπινος νους είναι από κάθε άποψη ένα μέρος της φύσης και επομένως καμία σημαντική γνώση του κόσμου δε μπορεί να είναι a priori. Ανέπτυξε μια επιστημολογία πάνω σε αυτή τη ριζοσπαστική εμπειρική βάση.

Η διάκριση του Mill ανάμεσα σε ‘’λεκτικές’’ και ‘’πραγματικές’’ προτάσεις φαίνεται να είναι απομίμηση της αναλυτικής συνθετικής διχοτομίας του Kant, ή, καλύτερα, της διάκρισης του Hume ανάμεσα σε ‘’σχέσεις ιδεών’’ και ‘’πραγματικά γεγονότα’’. Για τον Mill οι λεκτικές προτάσεις είναι αληθείς εξ ορισμού. Δεν έχουν γνήσιο περιεχόμενο, και δε μας λένε τίποτα σχετικά με τον κόσμο. O Mill διαφέρει από τον Kant και από άλλους εμπειριστές, όπως ο Hume πριν από αυτόν και ο Rudolf Carap μετά, στο ότι ισχυρίζεται ότι οι προτάσεις των μαθηματικών – και οι περισσότερες της λογικής – είναι πραγματικές και ως εκ τούτου συνθετικές και εμπειρικές. Με όρους του Hume, για τον Mill τα μαθηματικά και η λογική αφορούν πραγματικά γεγονότα.

Αντίθετα με προγενέστερους και μεταγενέστερους εμπειριστές, ο θεμελιώδης επιστημολογικός τρόπος εξαγωγής συμπεράσματος για τον Mill είναι η απαριθμήσιμη επαγωγή. Βλέπουμε πολλούς μαύρους κόρακες και κανέναν άλλου χρώματος, και συμπεραίνουμε ότι όλοι οι κόρακες είναι μαύροι και ότι μαύρος θα είναι και ο επόμενος που θα δούμε. Όλη η πραγματική γνώση του κόσμου έμμεσα ανάγεται σε γενικεύσεις που βασίζοντα στην παρατήρηση. Η συνολική επιστημολογία του Mill είναι απαιτητική και συμπεριλαμβάνει τις διάσημες αρχές του για την πειραματική έρευνα στις επιστήμες. Η επιστημονική σχέση ανάμεσα στους επιστημονικούς νόμους και τις γενικεύσεις και την εμπειρία είναι μάλλον κυκλική. Εντούτοις, η επιστημολογία του Mill για τα μαθηματικά και τη λογική δεν είναι τόσο απαιτητική. Ισχυριζόταν ότι οι νόμοι των μαθηματικών και της λογικής μπορούν να ιχνηλατηθούν άμεσα στην απαριθμήσιμη επαγωγή – εξαγωγή συμπερασμάτων από την παρατήρηση μέσω γενικεύσεων επί του παρατηρούμενου. [103]

3.8 Διαφορά προσέγγισης ανάμεσα σε Mill και Kitcher.

Έχουμε συναντήσει σκληρές κριτικές των διαφόρων εννοιών ‘‘δυνατότητας’’ που χρειάζονται για να στηριχθεί η προσέγγιση του Mill στα μαθηματικά. Αν και θα μπορούσαν να ξεπεραστούν αυτές οι κριτικές, φαίνεται ότι αυτό είναι επαχθής και δύσκολη δουλειά. Δεύτερον, και σημαντικότερο, η απόφαση του Mill να στηρίξει όλα τα μαθηματικά και τη λογική στην απαριθμητή επαγωγή είναι αβάσιμη. Για λόγους σαν και αυτούς που περιεγράφηκαν εδώ, οι σύγχρονοι εμπειριστές δεν αποπειράθηκαν να υπερασπιστούν τον Mill σε τέτοια ζητήματα. Παρ’ όλα αυτά η κύρια τάση του εμπειρισμού του Mill είναι ‘’ζωντανή’’ σήμερα, και ίσως μάλιστα και καλά στην ‘’υγεία’’ της. Ένας αφοσιωμένος πυρήνας φιλοσόφων αποδέχονται και υπερασπίζουν τη ‘’ριζοσπαστική’’ άποψη του εμπειρισμού του Mill , δηλαδή την άποψη ότι η λογική και τα μαθηματικά περιέχουν ‘’συνθετικές’’ ή ‘’πραγματικές’’ προτάσεις και ότι σε αντίθεση με τον Kant αυτές οι προτάσεις είναι γνωστές a posteriori, και σε τελική ανάλυση γνωστές εμπειρικά.

Ο Kitcher μας παρέχει μια εκλεπτυσμένη και περίπλοκη προσέγγιση των Ανώτερων Μαθηματικών σε ένα χονδρικά μιλλιανό πλαίσιο. Όπως και ο Mill, ο Kitcher θεωρεί ότι τα μαθηματικά σχετίζονται με ανθρώπινες ικανότητες κατασκευής και συλλογής, αλλά είναι πιο σαγής από τον Mill σχετικά με τις εξιδανικεύσεις που εμπλέκονται. Αντί να μιλάει για δραστηριότητες κατασκευής και συλλογής των πραγματικών αριθμών, ο

[103] Shapiro 2006, 100-102

Kitcher μιλάει για δραστηριότητες ιδεωδών κατασκευών οι οποίες δεν μοιράζονται τους ανθρώπινους περιορισμούς του χρόνου, του χώρου, της προσοχής ή ακόμα και της διάρκειας της ζωής. Φυσικά, αντίθετα με τον Mill, ο Kitcher δε βασίζεται αποκλειστικά στην απαριθμητή επαγωγή για να θεμελιώσει τα μαθηματικά και τη λογική. Οι κινήσεις που διαθέτει ο ιδεώδης κατασκευαστής αιτιολογούνται με βάση τη χρησιμότητα της θεωρίας στην όλη επιστημονική δραστηριότητα. Ο Kitcher παραμένει ακόμα ένας ριζοσπαστικός εμπειριστής στο ότι ο γενικός σκοπός όλης της επιστημονικής δραστηριότητας – συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών- είναι να λογοδοτήσει στην εμπειρία. Συμφωνεί με τον Mill στην απόρριψη της κοινά αποδεκτής άποψης ότι τα μαθηματικά είναι a priori γνώσιμα. Ο Kitcher ισχυρίζεται ότι χρειαζόμαστε την εμπειρία για να προσδιορίσουμε επακριβώς ποιες εξιδανικεύσεις είναι χρήσιμες στην πρόβλεψη της εμπειρίας και στον έλεγχο του περιβάλλοντος. Τα μαθηματικά δεν είναι αλάθητα, αφού πρέπει να κρατάμε ανοιχτή τη δυνατότητα για ριζικά διαφορετικές εξιδανικεύσεις και, έτσι, ριζικά διαφορετικά μαθηματικά. [104]

ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ IV

3.9 Η αρχή της ολότητας και η αρχή της αναλογίας του Bernays.

Ο Bernays διερεύνησε τον πλατωνισμό των κλασικών μαθηματικών με τη βοήθεια των αρχών της ολότητας (totality) και της αναλογίας (analogy). [105] Η αρχή της ολότητας είναι οντολογική αρχή που εμφανίζεται στα νεότερα μαθηματικά με ιδιαίτερη σαφήνεια και συχνότητα στη θεωρία συνόλων (Dedekind, Cantor, Zermelo). Χρησιμοποιείται υπό μορφή κριτηρίου που καθορίζει τι είδους νέες οντότητες συγκροτούνται με βάση τις υπάρχουσες οντότητες. Σύμφωνα με την αρχή της ολότητας, μπορούμε να θεωρούμε ως καλώς – σχηματισμένες μαθηματικές οντότητες εκείνες που προκύπτουν είτε από ‘’αφαίρεση’’ γνωρισμάτων ή ιδιοτήτων είτε από ομαδοποίηση επιμέρους αντικειμένων. Συνεπώς, εύλογα μιλάμε για την ολότητα ή το

[104] Shapiro 2006, 111, 112
[105] Bernays 1935, 269

σύνολο των φυσικών αριθμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων, κ.ο.κ.

Η αρχή της αναλογίας είναι μεθοδολογικά αρχή, και η σημασία της αναδεικνύεται σε συνδυασμό με την αρχή της ολότητας. Σύμφωνα με την αρχή της αναλογίας μπορούμε να χειριζόμαστε συλλογές αντικειμένων (όπως προέκυψαν κατά την εφαρμογή της αρχής της ολότητας) βάσει μιας τέλειας αναλογίας μεταξύ πεπερασμένων και μη πεπερασμένων συλλογών. Έτσι, οι αρχές αυτές μας επιτρέπουν να προσδώσουμε στις άπειρες συλλογές οντολογικό καθεστώς (status), ανάλογο με αυτό που ήδη δεχόμαστε για τις πεπερασμένες συλλογές: θεωρούμε λ.χ. ως καλώς – σχηματισμένο σύνολο το σύνολο των φυσικών αριθμών, και εξομοιώνουμε τη συμπεριφορά του με ένα τμήμα των φυσικών αριθμών. Οι προηγούμενες αρχές αποκτούν ιδιαίτερη σημασία στην εξέλιξη των μαθηματικών και ειδικά της θεωρίας συνόλων, όπου εμφανίζονται με σαφήνεια και ακρίβεια, και με σκοπό την επαρκέστερη μελέτη αυτής της περιοχής. Με βάση, λ.χ., την αρχή της ολότητας, η επαναλαμβανόμενη πράξη σχηματισμού συνόλων μας επιτρέπει να σχηματίσουμε νέα σύνολα από υπάρχουσες μαθηματικές οντότητες. Επιπλέον, με βάση την αρχή της αναλογίας μπορούμε να επισκοπήσουμε μια άπειρη πολλαπλότητα κατ' αναλογία προς μία πεπερασμένη πολλαπλότητα: η αρχή αυτή ενεργοποιείται στον τρόπο παρέμβασης της μαθηματικής εποπτείας. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής των παραπάνω αρχών εκφράζονται, όπως είδαμε, ως αξιώματα που διέπουν το σχηματισμό της θεωρίας συνόλων, και εξ αυτού, προκύπτει μια ορισμένη θεμελίωση των μαθηματικών.[106]

3.10 Δυσαναλογία ανάμεσα στην υλική και τη μαθηματική πραγματικότητα.

«Η μαθηματική πραγματικότητα βρίσκεται έξω από εμάς, ο πόλος μας είναι να την ανακαλύπτουμε ή να την παρατηρούμε, και ότι τα θεωρήματα που αποδεικνύουμε και

[106] Ρουσόπουλος 1999, 130, 131

που με υπερφίαλο τρόπο τα περιγράφουμε ως δικές μας ‘δημιουργίες’ είναι απλώς οι σημειώσεις για τις παρατηρήσεις μας.» [107]

«Μου φαίνεται ότι η υπόθεση ότι τα (μαθηματικά) αντικείμενα υπάρχουν είναι εντελώς νόμιμη όπως η υπόθεση ότι υπάρχουν τα φυσικά αντικείμενα και ότι υπάρχουν πολύ καλοί λόγοι να πιστεύουμε στην ύπαρξή τους. Είναι με την ίδια σημασία απαραίτητα για να λάβουμε ένα ικανοποιητικό μαθηματικό σύστημα που είναι απαραίτητα τα φυσικά αντικείμενα για να λάβουμε μια ικανοποιητική θεωρία των αισθητηριακών αντιλήψεων.» [108]

Η παραπάνω γοητευτική εικόνα με την οποία ο πλατωνισμός παρουσιάζει τα κλασικά μαθηματικά αμαυρώνεται εξαιτίας της δυσαναλογίας που υπάρχει ανάμεσα στη μαθηματική πραγματικότητα και την υλική πραγματικότητα. Το υποκείμενο γνωρίζει τα υλικά αντικείμενα και την υλική πραγματικότητα συνέπεια των αλληλεπιδράσεών του με αυτά (αιτιακή θεωρία της γνώσης). [109] Τα μαθηματικά αντικείμενα και η μαθηματική πραγματικότητα όμως – σε αντίθεση με τα υλικά αντικείμενα και την υλική πραγματικότητα – χαρακτηρίζονται από μεταφυσική αδράνεια: τα μαθηματικά αντικείμενα δεν αλληλοεπιδρούν αλλά ούτε εμάς μπορούν να επηρεάσουν κατά κάποιο τρόπο. Έτσι, ενώ μπορούμε να υποστηρίξουμε σοβαρά μια ρεαλιστική άποψη για τα υλικά αντικείμενα και την υλική πραγματικότητα, δε μπορούμε κατ’ αναλογία να κάνουμε το ίδιο πράγμα στην περίπτωση των μαθηματικών αντικειμένων και της μαθηματικής πραγματικότητας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εγκαταλείψουμε την στήριξη του μαθηματικού ρεαλισμού σε οντολογικό επίπεδο, και ότι, εάν θέλουμε παρόλα αυτά να υποστηρίξουμε τον μαθηματικό ρεαλισμό, τότε πρέπει να στραφούμε σε άλλες μορφές επιχειρηματολογίας.

[107] Hardy 1940, 84
[108] Gödel 1944, 456
[109] Benacerraf 1973, 412, Steiner 1975, 110

3.11 Το έργο του Tarski και η κατασκευή τεχνιτών γλωσσών από τον Frege.

Για τον Frege, όπως άλλωστε και αργότερα για τον Tarski, η φυσική γλώσσα δεν είναι ικανοποιητική για τις ανάγκες δόμησης μιας σημασιολογικής θεωρίας. Γι' αυτό, ο Frege προχωρεί στην κατασκευή τεχνητών γλωσσών οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ιδεατό όριο της φυσικής γλώσσας (τυπικές και τυποποιημένες γλώσσες (Formal, formalized languages)) για να καλύψει τις ανάγκες των επιστημών. Η διατύπωση όμως μιας σαφούς και συνεπούς έννοιας της αλήθειας για τις τυπικές και τις τυποποιημένες γλώσσες είναι έργο του Tarski. Δεν πρόκειται για μια εναλλακτική θεωρία για τον ορισμό της αλήθειας πλάι σ' αυτές που ήδη γνωρίζουμε. Το πρόγραμμα του Tarski αποσκοπεί στο να τυποποιήσει το κατηγόρημα ''… είναι αληθές '' στο πλαίσιο της σημασιολογικής θεώρησης του Frege και του αρχικού ορισμού της αλήθειας του Αριστοτέλη. Ο Tarski ενδιαφέρεται να στηρίξει την κλονισμένη διαίσθηση στην εποπτική αλήθεια, κατ' αντιδιαστολή προς την βεβαιότητα και την πειστικότητα των αποδείξεων των μαθηματικών προτάσεων (στο πλαίσιο ενός τυπικού συστήματος). Ο Tarski εισάγει στη σημασιολογία τη βασική διάκριση της γλώσσας- αντικείμενο, ως εκείνου του τμήματος μιας γλώσσας που αποτελεί το αντικείμενο μελέτης μας, από την μεταγλώσσα, ως εκείνου του τμήματος μιας γλώσσας που αποτελεί το αναγκαίο υπόβαθρο μέσο στο οποίο μπορεί να πραγματοποιηθεί η μελέτη της γλώσσας- αντικείμενο. Η θεωρία του Tarski καταλήγει στην περίφημη σύμβαση (Τ) ή σχήμα (Τ):

(Τ) Η πρόταση Δ είναι αληθής στη γλώσσα Γ↔Ρ,

όπου το ''Δ'' αντικαθιστά μια δομική περιγραφή μιας πρότασης της γλώσσας αντικείμενο Γ και το ''Ρ'' είναι μια πρόταση της γλώσσας αντικείμενο Τη οποία εκφράζει τι συνθήκες υπό τις οποίες η περιγραφόμενη πρόταση Δ είναι αληθής. Η έκφραση που εμφανίζεται αριστερά από το σχήμα της διπλής συνεπαγωγής στο σχήμα (Τ), συνιστά μια πρόταση η οποία δεν ανήκει στη γλώσσα- αντικείμενο αλλά σε ένα διαφορετικό επίπεδο γλώσσας, τη μεταγλώσσα Μ. Το σχήμα (Τ) διατυπώνει ένα αίτημα που πρέπει να ικανοποιηθεί κάθε προτεινόμενος ορισμός του κατηγορήματος της αλήθειας: δεν διατυπώνει έναν ορισμό με βάση τον οποίο θα αποφασίζαμε για την τιμή αλήθειας μιας συγκεκριμένης πρότασης. Αυτό συχνά εκφράζεται λέγοντας ότι η σημασιολογική θεωρία της αλήθειας κατά Tarski είναι γνωσιοθεωρητικά ουδέτερη αφού δεν προκρίνει καμιά από τις υπάρχουσες θεωρίες της αλήθειας. [110]

3.12 Το δόγμα του νοήματος του Wittgenstein.

Η σημασία του δόγματος του νοήματος του Wittgenstein στην συζήτηση του μαθηματικού ρεαλισμού αρχίζει να διαφαίνεται στον ορίζοντα, όταν λάβουμε υπόψη μας ότι η σημασιολογία των κλασικών μαθηματικών στηρίζεται στην αλήθεια και στο νόημα. Δύο είναι τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από το δόγμα του νοήματος του Wittgenstein για τη φιλοσοφία των μαθηματικών:

(i) Η διάσταση μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών μεταφέρεται στο επίπεδο της σημασιολογίας, και επιπλέον, δομείται στο πλαίσιο ενός κοινού υπόβαθρου (θεωρία του νοήματος).

(ii) Γίνεται σαφές το αδιέξοδο του μαθηματικού ρεαλισμού, και κατ’ επέκταση, του ρεαλισμού.

Η κατανόηση των μαθηματικών προτάσεων στηρίζεται στην έννοια της αλήθειας και τις συνθήκες αλήθειας της πρότασης. Το πρόβλημα των κλασικών μαθηματικών προέρχεται από το γεγονός ότι στην περίπτωση των μη ελέγξιμων προτάσεων (λ.χ., εικασία του Goldbach) εμφανίζεται το παράδοξο ότι ενώ κατανοούμε την πρόταση δε μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι κατανοούμε τις συνθήκες αλήθειας, και τούτο, επειδή το ότι κατανοούμε τις συνθήκες αλήθειας δε μπορεί να εκδηλωθεί κατά τη χρήση. Η ρεαλιστική θεωρία του νοήματος είναι προβληματική, κατά τον Dummett, επειδή αδιαφορεί για τη διάκριση ανάμεσα στην αιτιολόγηση της γνώσης και την ίδια τη γνώση. [111] Η διάκριση ανάμεσα στο τι γνωρίζουμε, όταν γνωρίζουμε ότι μια πρόταση είναι αληθής, και στο γεγονός ότι κατανοούμε την πρόταση, δηλαδή γνωρίζουμε τι

[110] Ρουσόπουλος 1999, 136, 137
[111] Dummett 1973

εκφράζει η πρόταση, ποιο είναι το νόημά της, αντιστοιχεί στη διάκριση ανάμεσα στην αλήθεια που διατυπώνουμε όταν διατυπώνουμε μια αληθή πρόταση και στους λόγους (συνθήκες, όρους) με βάση τους οποίους βεβαιώνουμε την αλήθεια της πρότασης. Η διάκριση συνεπώς μεταξύ μιας ορισμένης γνώσης και της αιτιολόγησής της απαιτεί να αποδίδουμε σε όσους γνωρίζουν τη γλώσσα των μαθηματικών, όχι απλώς ικανότητα να αναγνωρίζουν ότι η πρόταση ισχύει όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες αλήθειας, αλλά γνώση των ίδιων των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται για να αληθεύει η πρόταση.[112]

3.13 Το επιχείρημα Dummett.

Το επιχείρημα Dummett είναι επιχείρημα που αποσκοπεί να αντικαταστήσει στο πλαίσιο της σημασιολογίας και της θεωρίας του νοήματος την έννοια της αλήθειας με την έννοια της απόδειξης. Στα κλασσικά μαθηματικά, έχουμε διαθέσιμη μία έννοια της αλήθειας σύμφωνα με την οποία αποδίδουμε σε κάθε πρόταση τιμή αλήθειας ανεξάρτητα από τη δυνατότητά μας να την προσδιορίσουμε ως αληθή ή ψευδή, επιπλέον η γνώση του νοήματος, του περιεχομένου μιας πρότασης, συνίσταται στο να γνωρίζουμε τι σημαίνει ότι οι συνθήκες αλήθειας της πρότασης ικανοποιούνται. Η ρεαλιστική θεωρία του νοήματος απορρίπτεται επειδή αντιβαίνει προς τη βασική άποψη το νόημα εκδηλώνεται μέσω της χρήσης των προτάσεων.

Ο Dummett κατανοεί τη ρεαλιστική θεωρία του νοήματος ως θεωρία που επικεντρώνεται στην αλήθεια και το νόημα. Αλλά ποιο είδος ρεαλισμού απειλείται από το επιχείρημα Dummett; Παρακάτω θα δείξουμε ότι το επιχείρημα Dummett απειλεί ένα περιορισμένο είδος ρεαλισμού (μεταφυσικός ρεαλισμός), αφήνοντας έτσι ανοιχτό το δρόμο για ένα σημασιολογικό ρεαλισμό. [113]

[112] Ρουσόπουλος 146, 147
[113] Ρουσόπουλος 1999, 151

3.14 Ο μεταφυσικός ρεαλισμός, το αδιέξοδο και ο αντιρεαλισμός του Dummett.

Η εξέταση της πρώτης πλευράς του επιχειρήματος Dummett αφορά την δομή του επιχειρήματος που διατυπώνεται εναντίον της ρεαλιστικής θεωρίας του νοήματος ως θεωρία που εστιάζεται στην έννοια της αλήθειας και την κατανόηση των συνθηκών αλήθειας των προτάσεων. Η διεξοδική ανάλυση των βημάτων που παρακολουθούνται για να φτάσουμε στην οριστική διατύπωση της θεωρίας του νοήματος δείχνει ότι αυτή δομείται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι συνθήκες αληθείας των προτάσεων καθίστανται προβληματικές στο πλαίσιο του μεταφυσικού ρεαλισμού. Μπορούμε να δούμε τώρα ότι ο μεταφυσικός ρεαλισμός δέχεται πρόσθετες δεσμεύσεις πέρα από αυτές που δέχεται ο σημασιολογικός ρεαλισμός, και ότι αυτές οι επιπλέον δεσμεύσεις τον οδηγούν στα προβλήματα που αντιμετωπίζει η ρεαλιστική θεωρία του νοήματος.

Στα πλαίσια του μεταφυσικού ρεαλισμού, εάν μια πρόταση είναι αληθής τότε μπορούμε κα’ αρχήν να την γνωρίσουμε. Αλλά ποιος λόγος αλήθεια υπάρχει για να υποθέσουμε ότι μπορούμε να γνωρίσουμε την πρόταση εάν συμβαίνει να είναι αληθής; Πρόκειται, προφανώς, για μια μεταφυσική πίστη στο αδιέξοδο του μεταφυσικού ρεαλιστή, ο οποίος, επειδή δε μπορεί να ικανοποιηθεί με μια έννοια της αλήθειας σύμφωνα με την οποία δεν είναι αναγκαίο οι αληθείς προτάσεις να γνωρίζονται από εμάς, προχωρεί προς ένα μεταφυσικό αίτημα για το κατηγόρημα της αλήθειας. Έτσι, τοποθετεί σε μια βάση ισοδύναμη με άλλα κατηγορήματα, όπως η σφαιρικότητα και η τριγωνικότητα.

Ο Dummett απορρίπτει τη μεταφυσική ερμηνεία του νοήματος των μαθηματικών προτάσεων μετατοπιζόμενος όχι προς ένα σημασιολογικό ρεαλισμό αλλά, αντίθετα, προς μια αντιρεαλιστική θεωρία του νοήματος με βάση την αναγνώριση των συνθηκών βεβαίωσης της πρότασης. Η σημασία του δημιουργικού υποκειμένου στο οποίο εγγράφονται οι επιστημονικές συνθήκες της γνώσης μας είναι φανερή στο ανώτερο επιχείρημα. Το δημιουργικό υποκείμενο υπεισέρχεται στην εξέταση της διαμάχης στο πιο κρίσιμο σημείο, δομώντας τη διαμάχη μεταξύ μεταφυσικού ρεαλισμού και ιντουισιονισμού ως διαφορά στις ικανότητες του δημιουργικού υποκειμένου, ως διαφορά δηλαδή στις ιδιότητες που έχουμε αποδώσει στο δημιουργικό υποκείμενο. [114]

3.15 Το πραγματικό πρόβλημα του ρεαλισμού κατά Dummett.

Ο αντιρεαλισμός του Dummett αντανακλάται στον ιντουισιονισμό του Brouwer σε ένα περιορισμένο μόνο βαθμό, επειδή ο Dummett συναρτά το χαρακτήρα της εξάρτησης και διαμεσολάβησης της πραγματικότητας όχι από την υποκειμενικότητα και τις νοητικές διεργασίες -πράγμα που θα άνοιγε το δρόμο για τον υποκειμενικό ιδεαλισμό- αλλά από την αντικειμενικότητα των διαδικασιών βεβαίωσης (από την απόδειξη / κατασκευή στην περίπτωση των μαθηματικών). Το ζήτημα που εξετάζει ο Dummett αφορά κυρίως τον ισχυρισμό του ρεαλισμού ότι υπάρχει μια πραγματικότητα η οποία έχει αντικειμενική ύπαρξη και είναι ανεξάρτητη από εμάς. Το συμπέρασμά του είναι ότι το πραγματικό πρόβλημα του ρεαλισμού δεν αφορά την εξωτερικότητα και αντικειμενικότητα αυτής της πραγματικότητας αλλά το πόσο καλά είναι προσδιορισμένη ως εξωτερική και αντικειμενική. Από αυτό όμως δεν προκύπτει ότι πρέπει αναγκαστικά να εγκαταλείψουμε το ρεαλισμό γενικά: απαιτείται απλώς να απορρίψουμε το μεταφυσικό ρεαλισμό μένοντας στο σημασιολογικό ρεαλισμό, ένας ρεαλισμός που είναι βιώσιμος ως ρεαλισμός στο πεδίο των μαθηματικών. [115]

[114] Ρουσόπουλος 1999, 151, 152, 154
[115] Ρουσόπουλος 1999, 163

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ο ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΟΣ ΡΕΑΛΙΣΜΟΣ

4.1 Η ανάγκη δημιουργίας του σημασιολογικού ρεαλισμού, η διαφορά του με τον αντιρεαλισμό του Dummett και τον ιντουισιονισμό.

Ο Dummett, αλλάζοντας προοπτική, πρότεινε να μετατοπίσουμε τη διαμάχη πλατωνισμού – ιντουισιονισμού από το οντολογικό επίπεδο στο σημασιολογικό επίπεδο. Το εγχείρημα του Dummett είχε ως σκοπό του να ανασυγκροτήσει (και να απορρίψει, κατόπιν) το ρεαλιστικό δόγμα στο επίπεδο της σημασιολογίας. Ξεκινώντας από θεωρήσεις οι οποίες χαρακτηρίζουν ταυτόχρονα τα κλασικά και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, από ένα προβληματισμό δηλαδή ο οποίος δε συνδέεται άμεσα με τα μαθηματικά αλλά με τη θεωρία του νοήματος του Wittgenstein, ο Dummett έδειξε ποιος είναι ο χαρακτήρας των δεσμεύσεων του ρεαλισμού σε σημασιολογικό επίπεδο. Το νόημα των προτάσεων, ανεξαρτήτως περιοχής στην οποία αυτές ανήκουν, προσδιορίζεται ολοκληρωτικά και αποκλειστικά μέσω της χρήσης. Από την εξέταση της ρεαλιστικής θεωρίας του νοήματος προέκυψε ότι ο Dummett συνηγορεί υπέρ της αντικατάστασής της: απορρίπτοντας όμως την ρεαλιστική θεωρία του νοήματος, ο Dummett δεν απορρίπτει απλώς τον πλατωνισμό αλλά και τα κλασικά μαθηματικά, απορρίπτει ένα τεράστιο τμήμα της μαθηματικής πρακτικής.

Από την εξέταση στην οποία υποβάλαμε το επιχείρημα Dummett φάνηκε ότι η ανασυγκρότηση στο σημασιολογικό επίπεδο δομείται ως αντίθεση ανάμεσα στο μεταφυσικό ρεαλισμό και στον ιντουισιονισμό. Έτσι, ο δρόμος για ένα βιώσιμο σημασιολογικό ρεαλισμό είναι ανοιχτός. Ο σημασιολογικός ρεαλισμός ως ρεαλιστικό δόγμα δε δεσμεύεται σε επίπεδα αντικειμενικότητας των μαθηματικών οντοτήτων αλλά σε επίπεδο αντικειμενικότητας των προτάσεων, οπότε υπερβαίνει τις θέσεις τόσο του πλατωνισμού όσο και του ιντουισιονισμού. Επίσης, ο σημασιολογικός ρεαλισμός στηρίζεται σε μία σύλληψη της αλήθειας ως περιττότητας και σε μία θεωρία του νοήματος που συνδέει την κατανόηση των προτάσεων (είτε των κλασικών είτε των ιντουισιονιστικών μαθηματικών), όχι με τις συνθήκες αλήθειας ούτε με τη δυνατότητα αναγνώρισης μιας απόδειξης, αλλά με τη χρήση τους σε (αποδεκτά) κοινωνικά πλαίσια. Η αποδοχή συνεπώς του σημασιολογικού ρεαλισμού δεν συνεπάγεται απόρριψη και περιφρόνηση των ιντουισιονιστικών μαθηματικών ως ανύπαρκτων από μαθηματική σκοπιά. Διότι η μαθηματική δραστηριότητα δε μπορεί να περιοριστεί αποκλειστικά και μόνο στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών. [116]

4.2 Προσέγγιση της διάστασης κλασικών-ιντουισιονιστικών μαθηματικών σε λογική και φιλοσοφική βάση.

«Τα κατασκευαστικά μαθηματικά είναι μέρος των κλασικών μαθηματικών και όχι μια χωριστή επιστήμη που πραγματεύεται ένα τελείως διαφορετικό αντικείμενο.» [117]

«Μόνο το ιντουισιονιστικό σύστημα που εισήγαγε ο Brouwer επιζεί σήμερα ως μια βιώσιμη θεωρία της οποίας κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει τον εαυτό του υποστηρικτή». [118]

Ξεκινήσαμε τη μελέτη μας από τη διαπίστωση ότι υπάρχουν σημαντικές αλλά αγεφύρωτες διαφορές μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών, και εκφράζουμε αυτή την κατάσταση με τον όρο ‘’διάσταση κλασικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών’’. Η διάσταση κλασικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών είναι γνήσια διάσταση: όπως είδαμε, υπάρχουν θεωρήματα / προτάσεις των κλασικών μαθηματικών που δε μπορούν να αποδειχθούν με τα μέσα των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Επίσης υπάρχουν βασικές αρχές των ιντουισιονιστικών μαθηματικών (αρχές συνέχειας) οι οποίες δεν είναι αποδεχτές στα κλασικά μαθηματικά. Οι λογικές μέθοδοι και οι λογικοί κανόνες που υπεισέρχονται στα ιντουισιονιστικά και στα κλασικά μαθηματικά, αντίστοιχα, επίσης διαφέρουν σημαντικά: η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου δεν ισχύει εν γένει στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

[116] Ρουσόπουλος 1999, 160, 161
[117] Tait 1983, 173
[118] Dummett 1977, 1

Μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διάσταση κλασικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών δι’ αναγωγής στην αντίστοιχη διάσταση μεταξύ των λογικών μεθοδολογιών που υπεισέρχονται στα μαθηματικά (λογική διάσταση). Ωστόσο, η μαθηματική διάσταση δε μπορεί να υποκατασταθεί από τη λογική διάσταση. Ας μην λησμονούμε ότι η κλασική λογική θεωρείται a priori λογική, ενώ αντίθετα, η ιντουισιονιστική λογική a posteriori. Αλλά, ακόμη κι αν αδιαφορήσουμε για το καθεστώς των λογικών αρχών και για τη σημασία τους στη δυνατότητα υπέρβασης της διάστασης των κλασικών με τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, η εξέταση της λογικής διάστασης απλώς μας επαναφέρει στο πρόβλημα της μαθηματικής διάστασης. Πως θα μπορούσαμε λόγου χάρη να αποφασίσουμε υπέρ ή κατά της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου χωρίς να προσφύγουμε στα μαθηματικά;

Αλλά, ακόμη κι αν καταφέρουμε να λύσουμε με κάποιο τρόπο τη λογικά διάσταση υπέρ της κλασικής ή υπέρ της ιντουισιονιστικής λογικής, αυτή η πράξη δε θα συνεπάγεται αυτομάτως διάλυση της αντίστοιχης μαθηματικής διάστασης: τα μαθηματικά δεν ισοδυναμούν με τη λογική, περιλαμβάνουν κάτι παραπάνω και κάτι διαφορετικό από τη λογική.

Ένας άλλος τρόπος για να προσεγγίσουμε τη διάσταση μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών έχει χαρακτήρα φιλοσοφικό: προσφεύγουμε στις αντίστοιχες φιλοσοφικές δεσμεύσεις των κλασικών και των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, και επιχειρούμε να προσεγγίσουμε τη μαθηματική διάσταση επικαλούμενοι φιλοσοφικές προτιμήσεις, επιχειρήματα και αδυναμίες των αντίστοιχων φιλοσοφικών θέσεων. Η διερεύνηση αυτή τοποθετήθηκε κατ’ αρχάς σε οντολογικό επίπεδο: πήρε λοιπόν το χαρακτήρα της διαμάχης μεταξύ πλατωνισμού και ιντουισιονισμού, και δε θα μπορούσε, όπως είδαμε, να διαλυθεί με τρόπο άμεσο υπέρ του ενός ή του άλλου δόγματος. Ωστόσο, η εξέταση της διαμάχης αυτής δεν ήταν εντελώς άκαρπη εφόσον μας οδήγησε στο σημασιολογικό ρεαλισμό ως γενικό φιλοσοφικό πλαίσιο που είναι συμβατό τόσο με τα κλασικά όσο και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. [119]

4.3 Η οπτική του Heyting για τη διαμάχη.

Ο Heyting φαντάζεται ένα διάλογο ανάμεσα στους υποστηριχτές των κλασικών μαθηματικών (Class) και στους εισηγητές του ιντουισιονισμού (Int), και παρατηρεί:

«Class: Στα μαθηματικά ερευνούμε τις συνέπειες δοθέντων υποθέσεων, οι ιντουισιονιστικές προϋποθέσεις έχουν ίσως ενδιαφέρον αλλά δεν δικαιούνται να μονοπωλούν τη συζήτηση.

Int: Ούτε εμείς ισχυριστήκαμε κάτι τέτοιο, είμαστε ικανοποιημένοι αν μας αναγνωρίσετε το δικαίωμα στη δική μας ερμηνεία». [120]

Η κατηγορία που διατυπώνεται εδώ από τον Class, και σχολιάζεται από τον Int (Heyting), αφορά τη μονοπώληση της ‘’ορθότητας’’ στα μαθηματικά που διεκδικεί ο ιντουισιονισμός του Brouwer.

Ο Bernays παρατηρούσε: «Αλλά όπως ξέρετε, ο ιντουισιονισμός δεν είναι καθόλου ικανοποιημένος με ένα τέτοιο ρόλο, αντιτίθεται στα συνήθη μαθηματικά και ισχυρίζεται ότι αντιπροσωπεύει τα μόνα αληθή μαθηματικά». [121]

Οπότε η παραπάνω μετριοπαθής και ήπια παρατήρηση του Heyting αποτελεί σαφή διαφοροποίηση από τη ‘’σκληρή’’ στάση του Brouwer απέναντι στα κλασικά μαθηματικά.

«Το αντικείμενο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, η νοητική μαθηματική κατασκευή, προσδιορίζει κατά μονοσήμαντο τρόπο τις προκείμενες προτάσεις (premises) και τις τοποθετεί δίπλα στα κλασικά μαθηματικά, όχι στο εσωτερικό τους –

[119] Ρουσόπουλος 1999, 165, 166, 169
[120] Heyting 1956, 68
[121] Bernays 1935, 267

διότι τα κλασικά μαθηματικά μελετούν ένα άλλο αντικείμενο, όποιο κι αν είναι αυτό». [122]

Ο Heyting προβάλλει λοιπόν το αίτημα αποδοχής των ιντουισιονιστικών μαθηματικών από τους αντιπάλους του σε μία ισοδύναμη βάση που θα επιτρέπει παράλληλα την ανάπτυξή τους με τα κλασικά μαθηματικά, ταυτόχρονα προτείνεται η σχετική ή απόλυτη αυτονομία των αντιστοίχων μαθηματικών προγραμμάτων. Έπεται ότι, εφόσον «τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά έχουν διαφορετικό αντικείμενο από τα κλασικά μαθηματικά», δε μπορεί να γίνονται συγκρίσεις μεταξύ τους – με σκοπό την εξέταση της νομιμότητας και εγκυρότητας των αντίστοιχων προγραμμάτων. [123]

Οι παραπάνω απόψεις του Heyting επιτρέπουν στους υποστηρικτές των κλασικών μαθηματικών να ισχυριστούν ότι τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι ‘’μέρος των κλασικών μαθηματικών’’ και ότι δε μπορούν να διεκδικούν αυτόνομη ανάπτυξη στο επιστημονικό πεδίο. [124]

4.4 Η οπτική των συντηρητικών για τον ιντουισιονισμό, οι προθέσεις τους και η ανάγκη για δημιουργία τρίτης στάσης.

Η συντηρητική στάση υπονομεύει την ‘’ευημερία’’ των ιντουισιονιστικών μαθηματικών και ζητά την οργανική ενσωμάτωση των ιντουισιονιστικών μαθηματικών στο ευρύτερο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών. Μια διατύπωση αυτής της απόπειρας οφείλεται στον Tait:

«Μια κριτική της ιντουισιονιστικής σύλληψης του νοήματος και της λογικής οδηγεί, νομίζω, σε μια πολλά υποσχόμενη σύλληψη των μαθηματικών βάσει της οποίας αυτές οι δυσκολίες εξαλείφονται και σύμφωνα με την οποία τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά

[122] Heyting 1956, 69
[123] Ρουσόπουλος 1999, 173-175
[124] Tait 1983, Kitcher 1983

εμφανίζονται ως μέρος των κλασικών μαθηματικών και όχι ως ξεχωριστή επιστήμη που πραγματεύεται ένα τελείως διαφορετικό αντικείμενο». [125]

Οι υποστηρικτές των κλασικών μαθηματικών εν αντιτίθενται κατ' αρχήν στη δυνατότητα ανάπτυξης κατασκευών και ιντουισιονιστικών, γενικότερα, μεθόδων, και στην ενσωμάτωσή τους κατόπιν στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών. [126] Για να ενισχυθεί όμως η παραπάνω θέση (όπως προτείνει ο Tait, λ.χ.) χρειάζεται προηγουμένως να αποδυναμωθούν, ίσως και να απορριφθούν, χαρακτηριστικές θέσεις του ιντουισιονισμού. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να διαχωρίσουμε τη φιλοσοφική συνιστώσα του ιντουισιονισμού από τη μαθηματική συνιστώσα και να ενσωματώσουμε μόνο τη δεύτερη στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών. Η απόρριψη όμως της φιλοσοφικής συνιστώσας δεν θα επέτρεπε ευρέα πλαίσια ανάπτυξης των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Μια περιορισμένη χρήση των ιδεών των ιντουισιονιστικών μαθηματικών στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών δε θα σήμαινε απλώς την ενσωμάτωσή τους σε αυτό, αλλά ουσιαστικά την εξαφάνισή τους: δε μπορούμε να νοήσουμε τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά ξέχωρα από τις φιλοσοφικές τους δεσμεύσεις. Γιατί συνεπώς θα έπρεπε να δεχτούμε μια τέτοια πρόταση εφόσον αυτή ισοδυναμεί με καταδίκη των ιντουισιονιστικών μαθηματικών; Τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά – εάν αδιαφορήσουμε προς στιγμήν για τις φιλοσοφικές τους δεσμεύσεις – παρουσιάζουν τεράστιο ερευνητικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, την επιστήμη και τη φιλοσοφία ευρύτερα. Γιατί λοιπόν θα έπρεπε να ενσωματωθούν στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών;

Οι δύο προηγούμενες τάσεις δεν είναι ικανοποιητικές: οι κριτικές που αναπτύχθηκαν εκφράζουν την ανάγκη να προσχωρήσουμε και να ενισχύσουμε μια τρίτη στάση. Πρόκειται για τη δυνατότητα ''ειρηνικής συνύπαρξης'' και ομόλογης ανάπτυξης των αντιπάλων μαθηματικών πρακτικών μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο του σημασιολογικού ρεαλισμού. Η χαλαρή αυτή στάση εκφράζει μια ανεκτικότητα, σύμφωνα με την οποία υπάρχει δυνατότητα ''ειρηνικής συνύπαρξης'' των κλασικών μαθηματικών με τα

[125] Tait 1983, 173
[126] Quine 1970, Kitcher 1983

ιντουισιονιστικά μαθηματικά: στην περίπτωση αυτή, τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά μπορούν και πρέπει να αναπτυχθούν αυτόνομα και παράλληλα με τα κλασικά μαθηματικά. Τα κλασικά μαθηματικά αλλά και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά (ή και ‘’άλλα’’ μαθηματικά που ενδεχομένως προκύψουν στο μέλλον) αποτελούν σημαντικό τμήμα μιας παράδοσης στην οποία δε μπορούμε να παραβλέψουμε επηρεαζόμενοι από σχετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μίας ή της άλλης κατεύθυνσης. Αυτό λοιπόν που ζητείται τώρα είναι η στήριξη του σημασιολογικού ρεαλισμού ως ευρέως και ανεκτικού φιλοσοφικού πλαισίου μέσα στο οποίο θα κατανοηθούν τόσο τα κλασικά όσο και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.[127]

4.5 Η προσπάθεια δημιουργίας ουδέτερου εδάφους από τον Carnap.

Η σαφέστερη προσπάθεια κατανόησης της διάστασης κλασικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών έγινε από τον Carnap στη Λογική Σύνταξη της Γλώσσας (1937), και αποτελεί την πρώτη συνειδητή και επεξεργασμένη προσπάθεια για να δημιουργηθεί ένα φιλοσοφικό πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να κατανοήσουμε φιλοσοφικά τις διαφορές των κλασικών μαθηματικών από τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. Η στρατηγική που ακολούθησε ο Carnap εντάσσεται στη γενικότερη ανασυγκρότηση των φιλοσοφικών ζητημάτων ως ζητημάτων που αφορούν τη λογικό – γλωσσική τους οργάνωση. Στο πλαίσιο αυτό, η διάσταση ανάμεσα σε διαφορετικές κατευθύνσεις / σχολές των μαθηματικών ανασυγκροτείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψουν και να αναδειχτούν οι συστημικές προϋποθέσεις των μαθηματικών της κάθε σχολής: τα κλασικά μαθηματικά τότε μπορούν να νοηθούν ως σύστημα με συγκεκριμένους κανόνες (σχηματισμού και μετασχηματισμού), το οποίο όμως είναι σαφώς διακριτό από αυτό που συγκροτούν τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

Η ανασυγκρότηση συνεπώς της διάστασης κλασικών μαθηματικών – ιντουισιονιστικών μαθηματικών που προτείνει ο Carnap τοποθετείται στο επίπεδο της

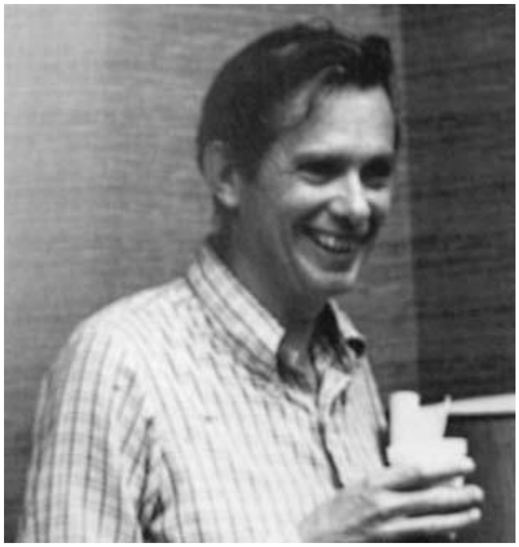
[127] Ρουσόπουλος 1999, 175-177

σημασιολογίας, οπότε η διαφοροποίηση μεταξύ τους αφορά στους διαφορετικούς κανόνες που υπεισέρχονται στη διαμόρφωση του κάθε μαθηματικού συστήματος. Όποιος δεσμεύεται με τους κανόνες του ιντουισιονιστικού συστήματος εργάζεται στο πλαίσιο αυτού του συστήματος ενώ όποιος δεσμεύεται με τους κανόνες των κλασικών μαθηματικών εργάζεται μέσα σε διαφορετικό πλαίσιο – οπότε, τα μαθηματικά που παράγει είναι διαφορετικά από αυτά που παράγει ο ιντουισιονιστής. Κοινό λοιπόν υπόβαθρο που να επιτρέπει τη σύγκριση των κλασικών με τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά δεν υφίσταται παρά μόνο στο επίπεδο των κανόνων που συγκροτούν τα αντίστοιχα συστήματα μαθηματικών και η επιλογή μεταξύ αυτών των κανόνων καταντά, κατά τον Cantor, ζήτημα αυθαίρετο ή προσωπικό.

Η παραπάνω πρόταση του Carnap δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή, εν μέρει τουλάχιστον: τα κλασικά μαθηματικά μπορεί, όπως υποστηρίζει ο Carnap , να νοηθούν ως λογικό – γλωσσικό σύστημα ‘’ισχυρότερων’’ κανόνων από το αντίστοιχο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Ωστόσο, τόσο τα κλασικά μαθηματικά όσο και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά προϋποθέτουν ένα κοινό σώμα μαθηματικών πρακτικών και δραστηριοτήτων. Η πρότασή μας συνεπώς (ως τρίτη δυνατότητα) πρέπει να ‘σεβαστεί’ και να αξιοποιήσει το κοινό αυτό πυρήνα της μαθηματικής πρακτικής – πράγμα που δε συμβαίνει επαρκώς με την άποψη που διατύπωσε ο Carnap. [128]

[128] Ρουσόπουλος 199, 177-179

4.6 O Bishop, το κοινό υπόβαθρο και τα μαθηματικά.



Εικ. 6 Errett Bishop (1928-1983)

Πηγή: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Bishop.html 5.6.2018

O Errett Bishop (1928-1983) ήταν Αμερικανός μαθηματικός γεννημένος στο Newton του Kansas των Ηνωμένων Πολιτειών. O πατέρας του Albert T. Bishop, αποφοίτησε από την στρατιωτική Αμερικανική Ακαδημία του West point, τελειώνοντας την καριέρα του ως καθηγητής μαθηματικών στο Winchita State University του Kansas. Αν και πέθανε όταν ο Errett ήταν μόλις τεσσάρων ετών, επηρέασε την καριέρα του μέσω των μαθηματικών κειμένων που άφησε πίσω. Με αυτόν τον τρόπο ο Errett ανακάλυψε τα μαθηματικά. Μεγάλωσε μαζί με την αδερφή του, και οι δύο θεωρούνταν μαθηματικές ιδιοφυΐες. O Bishop εισήχθη στο University of Chicago το 1944, ενώ τρία χρόνια αργότερα τελείωσε τις σπουδές του και του αποδόθηκε μεταπτυχιακός τίτλος. Εκείνη τη χρονιά ξεκίνησε για διδακτορικό τίτλο αλλά οι σπουδές του διακόπηκαν εξαιτίας των στρατιωτικών του υποχρεώσεων για δύο χρόνια, 1950-1952, τελώντας έρευνα στα μαθηματικά στο National Bureau of Standards. Τελείωσε το διδακτορικό του το 1954, υπό την επίβλεψη του Paul Halmos. Η διδακτορική του διατριβή είχε τον τίτλο Spectral theory for operation on Banach spaces. [129]

Μπορούμε λοιπόν να υποστηρίξουμε ότι είναι δυνατή μια κατανόηση των μαθηματικών η οποία από τη μία μεριά αναγνωρίζει το κοινό υπόβαθρο (ουδέτερο έδαφος) που μοιράζονται τα κλασικά και τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, ενώ από την άλλη τα διαφοροποιεί επαρκώς. Για το σκοπό αυτό προσφεύγουμε σε μια στοιχειώδη επιστημολογική ανάλυση του χαρακτήρα των μαθηματικών πρακτικών και της παραγωγής της μαθηματικής γνώσης. Βασικό στοιχείο αυτής της προσέγγισης είναι η αναγνώριση των αφαιρέσεων (abstractions) ως χαρακτηριστικών διαδικασιών που συγκροτούν τα μαθηματικά και παράγουν γνώση. [130]

Επιπλέον, το κοινό υπόβαθρο που υπόκειται των κλασικών και των ιντουισιονιστικών μαθηματικών μπορεί να ενισχυθεί περαιτέρω, όπως υποστηρίζουν οι Bridges και Richman (1987), παρεμβάλλοντας τα (κατασκευαστικά) μαθηματικά που ανέπτυξε ο Bishop και η σχολή του. Μολονότι το σώμα αυτών των μαθηματικών του Bishop, από την άποψη της έκτασης, δεν είναι ιδιαίτερα ευρύ (διευρύνεται ωστόσο συνεχώς), μπορούμε ωστόσο να το χρησιμοποιήσουμε ως βάση για να διευρύνουμε κατόπιν είτε προς την κατεύθυνση των κλασικών μαθηματικών είτε προς την κατεύθυνση των κλασικών μαθηματικών. Τα μαθηματικά του Bishop χαρακτηρίζονται από τα εξής δύο στοιχεία: κάθε αληθής πρόταση των μαθηματικών του Bishop έχει μια άμεση ερμηνεία στο πλαίσιο των κλασικών μαθηματικών, και κάθε απόδειξη μιας πρότασης των μαθηματικών του Bishop είναι επίσης αποδεκτή (αποτελεί δηλαδή απόδειξη) στα κλασικά μαθηματικά. (Αυτό βέβαια δεν ισχύει για τις σχέσεις ιντουισιονιστικών μαθηματικών και κλασικών μαθηματικών!) Τούτο ισχύει επειδή τα μαθηματικά του Bishop δεσμεύονται με το ελάχιστο αριθμητικό και υπολογιστικό περιεχόμενο που χαρακτηρίζει τη βεβαίωση της ύπαρξης ενός αντικειμένου χ: εάν είναι δυνατό να δοθεί

[129] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bishop.html 5.6.2018
[130] Ρουσόπουλος 199, 180

ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει / υπολογίζει βηματιστά το αντικείμενο χ, τότε το αντικείμενο χ υπάρχει.

Στα μαθηματικά του Bishop, και στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, η έννοια του αλγόριθμου θεωρείται ως πρωταρχική. Από τα μαθηματικά του Bishop κατόπιν μπορούμε να περάσουμε στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά προσθέτοντας κατάλληλες αρχές που διατύπωσε ο Brouwer. Ταυτόχρονα, τα θεωρήματα των κλασικών μαθηματικών μπορούν να θεωρηθούν ως θεωρήματα των μαθηματικών του Bishop.[131]

4.7 Οι βασικές μαθηματικές οντότητες και οι διαφοροποιήσεις.

Παρά τη φαινομενικά διαφορετική γλώσσα που χρησιμοποιεί ο Brouwer όταν, μιλώντας, λ.χ., για τους φυσικούς αριθμούς αναφέρεται σε αυτούς ως ελεύθερες κατασκευές της νόησης, οι βασικές μαθηματικές οντότητες αποτελούν μέρος του κοινού υπόβαθρου των κλασικών μαθηματικών και των ιντουισιονιστικών μαθηματικών: το κοινό αυτό υπόβαθρο διαμορφώνεται με τη βοήθεια στοιχείων που προέρχονται τόσο από το έξω – μαθηματικό περιβάλλον των άλλων (μη μαθηματικών) επιστημών, της καθημερινής ζωής, αλλά και από το μαθηματικό περιβάλλον που λειτουργεί προτού ακόμα να γίνουν οι ιστορικές διαφοροποιήσεις των ιντουισιονιστικών μαθηματικών από το κλασικά μαθηματικά (20^{ος} αιώνας). Οι διαφοροποιήσεις μεταξύ τους προκύπτουν αργότερα, προϋποθέτουν το κοινό αυτό λειτουργικό υπόβαθρο, και οφείλονται στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να συγκροτηθούν οι βασικοί επιστημολογικοί παράγοντες των μαθηματικών, δηλαδή το δημιουργικό υποκείμενο, τα μέσα και εργαλεία της γνώσης που χρησιμοποιεί, και τα αποτελέσματα που παράγει. [132]

[131] Ρουσόπουλος 199, 185-187
[132] Ρουσόπουλος 199, 188

4.8 Το Δημιουργικό υποκείμενο και η σημασία του στα κλασικά και ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

Η αφαίρεση του δημιουργικού υποκειμένου των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει το σημείο εκκίνησης της σύλληψης περί κοινού μέτρου σύγκρισης και διαφοροποίησης με βάση το οποίο προκύπτει ταυτότητα και διαφορά στα κλασικά και στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. Στα κλασικά μαθηματικά δεν υφίσταται κυριολεκτικά κάποια έννοια δημιουργικού υποκειμένου: μπορεί όμως αυτό να δομηθεί γύρω από προσδιορισμούς και χαρακτηριστικά γνωρίσματα τα οποία είναι διαφορετικά αλλά συγκρίσιμα απ' ότι στην περίπτωση του δημιουργικού υποκειμένου των ιντουισιονιστικών μαθηματικών. Το εύρος των δυνατοτήτων του δημιουργικού υποκειμένου είναι μεγάλο, απεριόριστο: από τη θέσπιση ενός δημιουργικού υποκειμένου που καταφέρνει να απαντά σε όλα τα προβλήματα που θέτουμε στα μαθηματικά (Hilbert), στο υπέρ-ον των Gödel και Wang που καταφέρνει να επισκοπεί τις άπειρες κλάσεις με παραλείψεις στα κλασικά μαθηματικά – έως το δημιουργικό υποκείμενο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών και το δημιουργικό υποκείμενο των αυστηρά περατοκρατικών μαθηματικών (strict finitism) (και οι διαβαθμίσεις μπορούν πραγματικά να συνεχιστούν). Για τον πλατωνισμό η θεμελίωση των συγκεκριμένων δυνατοτήτων του δημιουργικού υποκειμένου συνδέεται με την κατανόηση και ερμηνεία της μαθηματικής δραστηριότητας και πρακτικής ως νοητικής κυρίως σύλληψης μιας αντικειμενικής δομής. Αντίθετα, για τον ιντουισιονισμό, η μαθηματική δραστηριότητα του δημιουργικού υποκειμένου θεμελιώνεται στην ''αυτόνομη νοητική δραστηριότητα'' ως διαισθητική, εποπτική συγκρότηση / κατασκευή μιας πραγματικότητας.

Το δημιουργικό υποκείμενο μολονότι δεν προσδιορίζεται ρητά ως αφαίρεση (ειδικά στα κλασικά μαθηματικά) εντούτοις αποτελεί ενδιαφέρουσα περίπτωση για την ανάλυσή μας. Στα κλασικά μαθηματικά πραγματικά δεν καταφεύγουμε στο δημιουργικό υποκείμενο ως υποκείμενο της γνώσης. Θα μπορούσε ωστόσο να εισαχθεί ένα δημιουργικό υποκείμενο εντελώς εικονικά, ως μια αφαίρεση που εκφράζει τη συλλογική μαθηματική κοινότητα. Τα χαρακτηριστικά και οι προσδιορισμοί του δε θα ήταν ζήτημα συμφωνιών ή συμβάσεων, που τίθενται προκαταβολικά με ένα σαφή τρόπο. Έτσι αν και δε γίνεται λόγος στα κλασικά μαθηματικά για ένα δημιουργικό υποκείμενο με τις άλφα ή βήτα ιδιότητες, όμως είναι σαφές ότι κάτι τέτοιο υποδηλώνεται έμμεσα μέσω των δραστηριοτήτων και διεργασιών που αναλαμβάνουν οι ερευνητές – μαθηματικοί στο πλαίσιο της μαθηματικής πρακτικής. Μια ενδιαφέρουσα εκδοχή του δημιουργικού υποκειμένου των κλασικών μαθηματικών διαμορφώνεται μέσω της αρχής της αναλογίας. [133]

Η αρχή της αναλογίας που εισάγεται στα διάφορα επίπεδα της πρακτικής των κλασικών μαθηματικών συνδέεται με τη σύλληψη / αφαίρεση μιας έννοιας δημιουργικού υποκειμένου την οποία τα κλασικά μαθηματικά δεν διατυπώνουν ρητά: το δημιουργικό υποκείμενο που συγκροτείται με τον τρόπο αυτό, είναι μια αφαίρεση από πραγματικές δυνατότητες (βιολογικές και πνευματικές ιδιότητες) που έχουμε ως πεπερασμένα όντα. Επιπλέον, ο πλατωνισμός θέτει έμφαση στην περιοχή της αλήθειας: ουσιαστικά προϋποτίθεται ένα υπέρ-ον παντογνώστης, το οποίο δεν περιορίζεται από τις συγκεκριμένες συνθήκες υπό τις οποίες γνωρίζουμε: τα μαθηματικά συλλαμβάνονται ως αληθής θεωρία – όχι ως θεωρία που κατασκευάζεται και άρα δύναται να γνωστεί.

Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, η προσφυγή στο δημιουργικό υποκείμενο είναι άμεση και ουσιαστική. Το δημιουργικό υποκείμενο συνιστά ερευνητικό και μεθοδολογικό εργαλείο το οποίο παρεμβαίνει ουσιαστικά και ενεργά στη διαδικασία παραγωγής της γνώσης. Βασική άποψη του ιντουισιονισμού είναι, λ.χ., ότι τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά οφείλουν την αλήθεια τους στη δραστηριότητα του δημιουργικού υποκειμένου. Η δραστηριότητα του δημιουργικού υποκειμένου συνίσταται σε νοητικές κατασκευές, μέσω των οποίων διατυπώνεται σαφέστερα η έννοια του δημιουργικού υποκειμένου.

Η διαφοροποίηση των κλασικών μαθηματικών από τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά εκφράζεται ως διαφορετική σύλληψη του δημιουργικού υποκειμένου, πράγμα που

[133] Bernays 1935

σημαίνει ότι το δημιουργικό υποκείμενο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών είναι εφοδιασμένο με δυνατότητες και ιδιότητες οι οποίες αντικαθιστούν άλλες – καθόλου λιγότερο σημαντικές για τα κλασικά μαθηματικά. Το ζήτημα που παραμένει ανοιχτό για τον ιντουισιονισμό δεν είναι, όπως θεωρεί ο Troelstra, αν θα νοήσουμε το δημιουργικό υποκείμενο ως ‘’τον καλύτερό μας εαυτό’’, ή ‘’τον εαυτό μας όπως θα θέλαμε να είμαστε, χωρίς ασάφειες και ακατανοησίες στα συμπεράσματά μας’’ αλλά ο ακριβής χαρακτηρισμός των ιδιοτήτων / δυνατοτήτων του δημιουργικού υποκειμένου. [134] Μολονότι το δημιουργικό υποκείμενο των ιντουισιονιστικών μαθηματικών διαφοροποιείται σαφώς από το υπερ-όν δημιουργικό υποκείμενο των κλασικών μαθηματικών εντούτοις παραμένουν ασάφειες ως προς τη διαφοροποίησή του, λ.χ., από το δημιουργικό υποκείμενο των αυστηρώς περατοκρατικών μαθηματικών (strict finitism).

Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, ο ρόλος του δημιουργικού υποκειμένου ως γνωρίζοντος υποκειμένου λαμβάνεται σοβαρά υπόψιν: τα μαθηματικά αντικείμενα κατασκευάζονται και αναγνωρίζονται από το δημιουργικό υποκείμενο, έχουν εκείνες τις ιδιότητες που το δημιουργικό υποκείμενο αναγνωρίζει ότι έχουν. Τα μαθηματικά αντικείμενα, κατ’ επέκταση, υπάρχουν μόνο στο βαθμό που κατασκευάζονται ή στο βαθμό που μπορούν να κατασκευαστούν στο πλαίσιο των διαδικασιών που επιτρέπονται. Στα κλασικά μαθηματικά, όπως γνωρίζουμε, το δημιουργικό υποκείμενο διατηρεί μια σταθερή απόσταση από τη μαθηματική πραγματικότητα, μη εμπλεκόμενο στις επιστημικές συνθήκες της γνώσης. [135]

4.9 Η μαθηματική δραστηριότητα στα κλασικά και ιντουισιονιστικά μαθηματικά.

Στην πλατωνιστική σύλληψη των μαθηματικών, η μαθηματική δραστηριότητα εκλαμβάνεται κυρίως ως νοητική – εννοιολογική διαδικασία, στην ιντουισιονιστική σύλληψη, η μαθηματική δραστηριότητα εκλαμβάνεται ως διαισθητική, εποπτική

[134] Troelstra 1969
[135] Ρουσόπουλο 1999, 188-194

διαδικασία. Αν υποθέσουμε ότι αναγνωρίζουμε τη σημασία και τη βαρύτητα της κάθε μιας σύλληψης χωριστά (όπως προκύπτει από τη μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών), τότε προκύπτει και το αίτημα της αναγνώρισης των δύο χωριστών μεθοδολογιών, και επιπλέον, η ανάγκη να ληφθούν αυτές υπόψιν κατά τη διαμόρφωση μιας ενοποιητικής απόψεως για τη μαθηματική πρακτική, το ζητούμενο σχετικά με ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι κάθε φορά ‘’οι ιδέες να γίνουν σαφείς’’, όμως η προσέγγιση και η μεθοδολογία αντιμετώπισής του στα κλασικά και στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, αντιστοίχως, είναι διαφορετική.[136]

Από την πλευρά των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, αυτό που χαρακτηρίζει τη μαθηματική δραστηριότητα και, ταυτόχρονα, συνιστά θεμελιώδες αίτημά τους είναι το αίτημα για απόλυτη σαφήνεια και καθαρότητα των αποδείξεων / κατασκευών: το να κατανοήσουμε μια αληθή πρόταση είναι κάτι ουσιωδώς διαφορετικό από το να δούμε ή να συλλάβουμε ότι η πρόταση είναι αληθής. Το αίτημα λοιπόν των ιντουισιονιστικών μαθηματικών είναι αίτημα για πλήρη διαφάνεια της μαθηματικής δομής που μελετάμε. Στην περίπτωση μιας πρότασης, λ.χ., που διατείνεται την ύπαρξη ενός αριθμού, χωρίς να προσφέρεται ένας τρόπος υπολογισμού του, το πρόβλημα δεν έχει λυθεί: δεν ‘’βλέπουμε’’ το φαινόμενο με σαφήνεια στο μέτρο που αρκούμαστε στην κατανόηση της πρότασης, στη λογική παραγωγή της ή απλώς στη συνέπειά της.

Η μετάβαση από το αίτημα ‘’να βλέπουμε κάτι με σαφήνεια’’ στο αίτημα ‘’να το κατανοούμε’’ χαρακτηρίζει την ιστορική εξέλιξη των νεότερων και σύγχρονων μαθηματικών. Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, εγκαταλείπουμε τη σαφήνεια της κατανόησης και της λογικής θεμελίωσης υπέρ μιας απόλυτης καθαρότητας και διαφάνειας. Ενώ στα κλασικά μαθηματικά οι αποδείξεις είναι βαθιά μη ιντουισιονιστικές, δε μπορούν να εκθέσουν στα μάτια μας την απόλυτη καθαρότητα που ζητούν τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά, μόνον η κατασκευή ως διαδικασία υποδεικνύει στοιχεία τα οποία η ίδια η δομή δεν μπορεί να εκθέσει σαφώς. [137]

[136] Goodman 1983
[137] Ρουσόπουλο 1999, 194-197

4.10 Σύνοψη και συμπέρασμα.

Μετά από την ιστορική και φιλοσοφική ανάλυση που κάναμε στα μαθηματικά της εποχής, βάση της μαθηματικής διαμάχης που περιγράψαμε ανάμεσα στα κλασικά και ιντουισιονιστικά μαθηματικά το συμπέρασμα που προκύπτει είναι αδιαμφισβήτητο. Δε μπορούμε να απορρίψουμε ή να αμφισβητήσουμε τη νομιμότητα κάποιας εκ των δύο μαθηματικών σχολών. Αντιθέτως προκύπτει ότι η ύπαρξη της μιας μαθηματικής σχολής θεμελιώνει τη φιλοσοφία της άλλης. Ο ρεαλισμός μπορεί να νοηθεί ως το δόγμα σύμφωνα με το οποίο υπάρχει μια αντικειμενική πραγματικότητα που είναι ανεξάρτητη από εμάς και τις δυνατότητές μας. Ενώ ο ιντουισιονισμός ως πιο ευέλικτο δόγμα, αποφεύγει τα φιλοσοφικά προβλήματα του ρεαλισμού και στηρίζεται στην εποπτεία, στην κατασκευή και σε μια εναλλακτική σύλληψη της λογικής. Σε αυτή την εργασία περιηγηθήκαμε ιστορικά ανάμεσα σε διάφορες φιλοσοφικές σχολές (π.χ. λογικισμός του Frege, περατοκρατισμός του Hilbert, νατουραλισμός του Quine) που παρουσιάζουν σπουδαία πλεονεκτήματα έναντι άλλων ανταγωνιστικών σχολών αλλά δεν επιλέξαμε κάποια από αυτές ως προτιμότερη ή πιο αποτελεσματική. Παρ' όλ' αυτά δε μπορούμε να μην παραδεχτούμε ότι ο σημασιολογικός ρεαλισμός αποτελεί μια πιο προωθημένη θέση από τους δύο αντιπάλους του αφού παρουσιάζει πιο ανεκτική στάση στις διαφορές των δύο σχολών και βρίσκεται στο επίκεντρο των φιλοσοφικών συζητήσεων της εποχής μας. Ενδιαφέρον έχουν οι ορισμοί των Dummett και Engel για το σημασιολογικό ρεαλισμό.

Ο ορισμός του Dummett:

«Χαρακτηρίζω το ρεαλισμό ως την πεποίθηση ότι οι προτάσεις της αμφιλεγόμενης κλάσης έχουν μια αντικειμενική τιμή αλήθειας, ανεξάρτητα από τα μέσα που διαθέτουμε για να τη γνωρίσουμε: είναι αληθείς ή ψευδείς δυνάμει μιας πραγματικότητας που υπάρχει ανεξάρτητα από μας.»[138]

[138] Dummett 1978, 146

Ο ορισμός του Engel:

«Σημασιολογικός ρεαλισμός: η σύλληψη σύμφωνα με την οποία το νόημα των προτάσεων προσδιορίζεται δυνάμει των συνθηκών αλήθειας ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο είμαστε ικανοί να τις επαληθεύσουμε.»[139]

Στο σημασιολογικό ρεαλισμό, το ενδιαφέρον μας δε συγκεντρώνεται σε μια ορισμένη τάξη αντικειμένων (λ.χ., αντικείμενα της καθημερινής εμπειρίας, τάξεις και σύνολα) στην οποία αποδίδεται αντικειμενική ύπαρξη. Ζητούμενο δεν είναι το καθεστώς, ο χαρακτήρας της ύπαρξης μιας τάξης (υλικών ή αφηρημένων) πραγμάτων αλλά μιας τάξης προτάσεων που σχηματίζονται σε μια ορισμένη περιοχή (λ.χ., ηθική, μαθηματικά, κλπ.). Δεν πρόκειται πάντως για ένα ρεαλισμό που δεσμεύεται με απλές διαβεβαιώσεις αναφορικά με εμπειρικά άμεσα παρατηρησιακά δεδομένα. Η έννοια της αλήθειας υπεισέρχεται τώρα με ουσιαστικό τρόπο, και η ακριβής διατύπωση μιας θεωρίας για την αλήθεια αποτελεί κύριο πρόβλημα του σημασιολογικού ρεαλισμού.[140]

[139] Engel 1991, 129
[140] Ρουσόπουλος 1999, 19, 20

ΠΗΓΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ιστότοπος Stanford Encyclopedia of Philosophy, https://plato.stanford.edu/index.html

Ιστότοπος Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Ιστότοπος Mac Tutor, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bishop.html

Azzouni, J. 1994. ''Metaphysical Myths'', ''Mathematical Practice'', Cambridge UP.

Αναπολιτάνος, Δ. 1985. ''Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών'', Νεφέλη.

Benacerraf, P. 1973. ''Mathematical truth''.

Bernays, P. 1935. ''On Platonism in Mathematics''.

Bridges, D., Richman, F. 1987. ''Varieties of Constructive Mathematics'', Cambridge UP.

Brouwer, L. J. 1907. ''The foundation of Science''.

Brouwer, L. J. 1913. ''Intuitionism and Formalism''.

Brouwer, L. J. 1948. ''Consciousness, philosophy and mathematics symbol''.

Brouwer, L. J. 1952. ''Historical background, principles and methods of Intuitionism''.

Brouwer, L. J. 1954. ''Points and Spaces''.

Γεωργίου, Δ. 2015. ''Θεωρία συνόλων''.
https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/458/1/02_chapter_01.pdf

Dantzig, D. van 1949. ''Comments on Brouwer's theorem of essentially negative predicates'', Indagationes Math. 11.

Dummett, M. 1973. ''The philosophical basis of intuitionistic logic''.

Dummett, M. 1977. ''Elements of intuisionism'', Clarendon Press.

Dummett, M. 1978. ''Truth and other enigmas'', Harvard UP.

Engel, M. 1991. ''Inconsistency: The Coherence Theorist's Nemesis'', Grazer Philosophische Studien 40.

Field, H. 1980. ''Science without numbers'', Princeton UP.

Gödel, K. 1944. ''Russell's mathematical logic''.

Gödel, K. 1947. ''What is Cantor's continuum problem?''

Goodman, N. D. 1983. ''Reflections on Bishop's philosophy of mathematics'' in Richman, Flew (eds) ''Constructive Mathematics'', Springer Lecture Notes, No 873.

Hardy, G.H. 1940. ''Η Απολογία ενός Μαθηματικού'', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 1991.

Heyting, A. 1956. ''Intuitionism: an introduction, North-Holland.

Heyting, A. 1974. ''Intuitionistic news on the nature of mathematics'', Synthese 27.

Hirst, R.J. 1967. ''The Encyclopedia of Philosophy'', Collier – McMillan, London.

Kitcher, P. 1983. ''The nature of mathematical knowledge'', Oxford UP.

Lehman, H. 1979. ''Introduction to the philosophy of mathematics'', American Philosophical Quarterly.

Maddy, P. 1990. ''Realism in Mathematics'', Clarendon Press.

Maddy, P. 1992. ''Indispensability and Practice'', Journal of Philosophy 89.

Putnam, H. 1967. ''Mathematics without foundations'', Journal of Philosophy 64.

Putman, H. 1972. ''Philosophy of Logic'', London: George Allen & Unwin.

Quine, W. V. 1970. ''Φιλοσοφία της Λογικής, μετ. Γ. Ρουσόπουλος, Ι. Ζαχαρόπουλος, Δαίδαλος 1991.

Quine, W. V. 1981. ''Theories and Things'', Harvard UP.

Resnik, M 1980. Frege and the philosophy of mathematics, Cornell UP.

Resnik, M 1981. ''Mathematics as a science of patterns: ontology'', Nous 15.

Resnik, M. 1982. ''Mathematics as a science of patterns: epistemology'', Nous 16.

Ρουσόπουλος, Γ. 1987. ''Η Κριτική των κλασικών μαθηματικών από τον Brouwer και τη σχολή του ιντουισιονισμού'', Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Ρουσόπουλος, Γ. 1991. ''Επιστημολογία των μαθηματικών'', Gutenberg.

Ρουσόπουλος, Γ. 1999. ''Μαθηματικός Ρεαλισμός'', Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Shapiro S. 2006. ''Σκέψεις για τα μαθηματικά'', Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

Steiner, M. 1975. ''Mathematical Knowledge'', Cornell UP.

Tait, W. 1983. '' Against intuisionism: Constructive mathematics is a part of classical mathematics'', Journal of Phil. Logic 12.

Troelstra, A. 1969. ''Principles of Intuitionism'', Spinger Veriag Lecture Notes, No 94, Spinger.

Wang, H. 1974. ''From mathematics to Philosophy'', Oxford UP.

Wittgenstein, L. 1983. ''Remarks on the foundations of mathematics'', Princeton UP.

Διπλωματική εργασία του Ζούπα, Α. 2015.'' Μεταμαθηματικές Θεωρήσεις στην Γεωμετρία από τους Hilbert και Tarski''.
http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/8543/1/%CE%B4%CE%B9%CF%80%CE%BB%20%CE%B8%CE%B1%CE%BD%CE%BF%CF%82%20Z%CE%BF%CF%85%CF%80%CE%B1%CF%82%20%2C%20%CF%84%CE%B5%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CE%AE.pdf

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ Α.Κ.Ε.Δ.