ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘ. ΚΑΙ ΦΥΣ.ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ, ΘΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΩΣΗ ΑΓΟΡΩΝ ΜΕΣΩ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθήνα 2011

Ονοματεπώνυμο: Φιλή Ζαχαρίας
Επιβλέπον Καθ. : Πολυράκης Ιωάννης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί τη Διπλωματική μου Εργασία στα πλαίσια των σπουδών μου στο τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ υπό την επίβλεψη του καθηγητή του τομέα Μαθηματικών Πολυράκη Ιωάννη, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες τόσο για την ανάθεση της εργασίας όσο και για τη γενικότερη συμβολή του στη μελλοντική μου επαγγελματική σταδιοδρομία και τη κριτική επιτροπή για τη διάθεση του πολύτιμου χρόνου τους. Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους φίλους μου , για τη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές, την υποστήριξη και την καθοδήγηση που μου παρείχαν καθ’ όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου που με στήριζαν και με συμβούλευαν σε κάθε βήμα της φοιτητικής μου ζωής.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 :ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ορισμός 1.1.1: Πραγματικός διανυσματικός χώρος ή γραμμικός χώρος ονομάζεται μια τριάδα $(X,+,\cdot)$ όπου X είναι ένα σύνολο,

$+: X\times X \rightarrow X$ μια εσωτερική πράξη (πρόσθεση) και

$\cdot : \mathbb{R}\times X\rightarrow X$ μια εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο)

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$ για κάθε $x,y,z \in X$
2. $x+y=y+x$ για κάθε $x,y \in X$
3. Υπάρχει ένα στοιχείο 0 του X που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, τέτοιο ώστε $x+0=x$ για κάθε $x \in X$
4. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα στοιχείο $-x \in X$, που ονομάζεται αντίθετο του x , τέτοιο ώστε $x+(-x)=0$.
5. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ για κάθε $x,y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
7. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
8. $1x=x$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 1.1.2: Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια διμελής σχέση $\leq$ στο X καλείται **μερική διάταξη στο X** αν:

1. $x\leq x$, για κάθε $x \in X$. (Αυτοπαθής)
2. $x\leq y$ και $y\leq z \Rightarrow x\leq z$, για κάθε $x,y,z \in X$ (Μεταβατική)
3. $x\leq y$ και $y\leq x\Rightarrow x=y$, για κάθε $x,y, \in X$ (Αντισυμμετρική)

Ορισμός 1.1.3: Αν X μη κενό σύνολο και $\leq$ μια διμελής σχέση στον X η οποία είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του X, δηλ. έχει τις ιδιότητες:

1. Αν $x,y,z \in X$ και $x\leq y$, τότε $x+z\leq y+z$
2. Αν $x,y \in X$ και ένας πραγματικός αριθμός $a\geq 0$ με $x\leq y \Rightarrow ax\leq ay$

τότε η δυάδα $(X, \leq)$ καλείται μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος.

Στη συνέχεια, χάρη συντομίας με τον όρο ‘ διατεταγμένος γραμμικός χώρος’ θα εννοούμε «μερικώς διατεταγμένος γραμμικός χώρος».

Ορισμός 1.1.4: Έστω X γραμμικός χώρος. Ένα υποσύνολο K του X λέγεται κυρτό αν για κάθε $x,y \in K$ και $0\leq\lambda\leq 1$ ισχύει ότι $\lambda x +(1-\lambda)y \in K$.

Ορισμός 1.1.5: Έστω X γραμμικός χώρος. Ένα κυρτό, μη κενό υποσύνολο P του X είναι **κώνος** αν $\lambda x \in P$ για κάθε $x \in P$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 1.1.6: Έστω X γραμμικός χώρος. Ένα κυρτό, μη κενό υποσύνολο P του X για το οποίο ισχύουν:

1. Αν $\lambda x \in P$ για κάθε $x \in P$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
2. $P \cap (-P) = \{0\}$

Λέγεται **οξύς κώνος**.

Παρατήρηση: Από τον ορισμό 1.1.5 παρατηρούμε ότι κάθε κώνος του X περιέχει το μηδέν αφού $0 \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμός 1.1.7: Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $x,y \in X$. Λέμε ότι το x είναι μεγαλύτερο του y και γράφουμε $x>y$ αν $x \geq y$ και $x \neq y$.

Ορισμός 1.1.8: Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Θεωρούμε **θετικό κώνο** του X το σύνολο:

$$X_+ = \{x \in X : \ x \geq 0\}$$

Παρατήρηση: Ο θετικός κώνος X_+ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $X_+ + X_+ \subseteqq X_+$
2. $\alpha X_+ \subseteqq X_+$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
3. $X_+ \cap (-X_+) = \{0\}$. Δηλαδή ο θετικός κώνος είναι ένας οξύς κώνος.

Πρόταση 1.1.1: Αν $P \subseteqq X$ οξύς κώνος του X, τότε ορίζεται μια σχέση μερικής διάταξης $\geq$ στον X, συμβατή με τη γραμμική δομή του X, ως εξής:

$$x \geq y \Leftrightarrow x-y \in P \qquad (1)$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η σχέση $\geq$ ορίζει μερική διάταξη στον X. Αρκεί να αποδείξουμε τις ιδιότητες του ορισμού 1.2

1. Έστω $x \in X$. Θα δείξω ότι $x \geq x$. Αρκεί να δείξω ότι το $x-x \in P$. Από την υπόθεση ότι ο P είναι οξύς κώνος έχουμε ότι το $x-x=\{0\} \in P$ (Αυτοπαθής)
2. Έστω $x,y,z \in X$ με $x \geq y$ και $y \geq z$. Θα δείξω ότι $x \geq z$. Από τις υποθέσεις έχουμε $x-y \in P$ και $y-z \in P$. Επειδή P κυρτό έχουμε ότι κάθε κυρτός συνδυασμός στοιχείων του P θα ανήκει στο P, άρα
   $(x-y)-(y-z)= x-z \in P$. Άρα $x \geq z$. (Μεταβατική)
3. Έστω $x,y, \in X$ με $x \geq y$ και $y \geq x$. Θα δείξω ότι $x=y$. Από την υπόθεση έχουμε: $x-y \in P$ και $y-x \in P$. Επειδή ο P είναι οξύς κώνος έχουμε ότι $P \cap (-P)=\{0\}$ και ακόμα έχουμε ότι $x-y \in P$ και ότι $x-y \in (-P)$ άρα
   $x-y \in P \cap (-P)=\{0\} \Longrightarrow x-y=0 \Longrightarrow x=y$. (Αντιμεταθετική)

□

Ορισμός 1.1.9: Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $P \subseteqq X$ οξύς κώνος του X. Τότε ο X εφοδιασμένος με τη μερική διάταξη που ορίζεται από τον P με τη σχέση (1) λέγεται γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P.

Πρόταση 1.1.2: Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $P \subseteqq X$ κώνος του X. Το σύνολο P-P είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το P.

Ορισμός 1.1.10: Έστω X διατεταγμένος γραμμικός χώρος και $P \subseteqq X$ κώνος του X. Αν P-P=X λέμε ότι ο P παράγει τον X.

Έστω $(X,\geq)$ ένας μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος και έστω $x,y \in X$. Τότε συμβολίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$$\{x\}+ X_+ =\{y \in X : \ y \geq x\}$$

Το σύνολο των στοιχείων του X που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από το x.

$$\{x\}- X_+ =\{y \in X : \ x \geq y\}$$

Το σύνολο των στοιχείων του X που είναι μικρότερα ή ίσα από το x.

$$[x,y]=\{u \in X: \ y\geq u \ \text{ και } u \geq x\}$$

Το διατεταγμένο διάστημα με άκρα τα x και y.

Ένα υποσύνολο B του X λέμε ότι είναι άνω φραγμένο (αντίστοιχα κάτω φραγμένο) αν υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε $x\geq y$(αντίστοιχα $x\leq y$) για κάθε $y\in B$ και το x λέμε ότι είναι άνω φράγμα (αντ. κάτω φράγμα) του B.

Ορισμός 1.1.11: Αν κάθε ζεύγος στοιχείων ενός υποσυνόλου D του X είναι άνω φραγμένο (αντίστοιχα κάτω φραγμένο), τότε το D είναι **άνω κατευθυνόμενο**(αντίστοιχα **κάτω κατευθυνόμενο**).

Πρόταση1.1.3: Ο θετικός κώνος X_+ του X παράγει τον X αν και μόνο αν ο X είναι άνω κατευθυνόμενος.

Απόδειξη: Έστω ότι ο X_+ παράγει τον X. Τότε για κάθε $x,y \in X$ υπάρχουν $x_1,x_2,y_1,y_2 \in X_+$ ώστε $x= x_1- x_2$ και $y= y_1 - y_2$, αφού $X= X_+- X_+$, άρα $x\leq x_1$, $y\leq y_1$ και επομένως $\{x,y\}\leq x_1+ y_1$. Άρα κάθε ζεύγος στοιχείων του X είναι άνω φραγμένο άρα ο X είναι άνω κατευθυνόμενος.

Αντίστροφα, έστω ότι ο X είναι άνω κατευθυνόμενος. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $z \in X$ ώστε $z \geq x$ και $z \geq 0$. Επομένως $x= z-(z- x) \in X_+- X_+$. Άρα ο X_+ παράγει τον X.

□

Ορισμός 1.1.12: Ένα στοιχείο $e \in X_+$ ονομάζεται **διατακτική μονάδα**(order unit) του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει πραγματικός αριθμός α>0 τέτοιος ώστε $x \in [-\alpha e, \alpha e]$.

Παράδειγμα1.1.1: Έστω $\mathbb{R}$ ο χώρος των πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένος με τη συνήθη διάταξη. Τότε το 1 είναι διατακτική μονάδα του $\mathbb{R}$.

Πρόταση1.1.4: Αν ο X έχει διατακτική μονάδα τότε ο X_+ παράγει τον X.

Απόδειξη: Έστω e X_+ μια διατακτική μονάδα του X. Τότε $\forall$ $x,y \in X$, $\exists$ α,β>0 τέτοια ώστε $x \leq \alpha e$ και $y \leq \beta e$, δηλαδή $x,y \leq \max\{\alpha e, \beta e\} \in X$. Άρα ο X είναι άνω κατευθυνόμενος και επομένως ο θετικός κώνος X_+ παράγει τον X.

◻

Ορισμός 1.1.13: Έστω $D \subseteqq X$ και $y \in X$. Αν το y είναι άνω φράγμα του D τέτοιο ώστε για κάθε άλλο άνω φράγμα z του D να ισχύει $y \leq z$, το y ονομάζεται **ελάχιστο άνω φράγμα** του D (supremum) και γράφουμε $y=\sup(D)$. Αντίστοιχα, αν το y είναι κάτω φράγμα του D τέτοιο ώστε για κάθε άλλο κάτω φράγμα z του D να ισχύει $z \leq y$, το y ονομάζεται **μέγιστο κάτω φράγμα** (infimum) και γράφουμε $y=\inf(D)$.

1.2 Αρχιμήδειοι Χώροι

Ορισμός 1.2.1: Έστω X γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P.
Ο X καλείται **Αρχιμήδειος** αν για κάθε $x,y \in X$ ισχύει:

$$nx \leq y, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \leq 0$$

Ορισμός 1.2.2: Ο χώρος X είναι σχεδόν Αρχιμήδειος αν για κάθε $y \in X_+$ η σχέση

$$-ay \leq x \leq ay \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } a>0, \text{ συνεπάγεται ότι } x=0.$$

Παραδείγματα: Ένα παράδειγμα μη Αρχιμήδειου διατεταγμένου διανυσματικού χώρου είναι ο $X= \mathbb{R}^2$ εφοδιασμένος με τη διάταξη:

$$(x_1,x_2) \geqq (y_1,y_2) \Leftrightarrow x_1>y_1 \text{ ή } x_1=y_1 \text{ και } x_2>y_2.$$

Ο X εφοδιασμένος με τον κώνο X_+ όπου

$$X_+=\{(x,y) \in \mathbb{R}: x>0 \text{ και } y \geqq 0\}$$

είναι μη Αρχιμήδειος διατεταγμένος χώρος. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $n(0,1) \leq (1,0)$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ ενώ $(0,1) \notin -X_+$.

Ορισμός1.2.3: Έστω X γραμμικός χώρος και έστω

$$C: \quad r(t)=x + ty\ , t\in\mathbb{R},$$

όπου x,y $\in$ X. Αν $r(t_0)=z$ και $x_n= r(t_n)$, θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ της C συγκλίνει στο z στην τοπολογία της ευθείας αν και μόνο αν $t_n\to t_0$.

Ορισμός1.2.4: Έστω $A\subseteqq X$. Θα λέμε ότι το A είναι **ευθειακά κλειστό** αν για κάθε ευθεία C του X το σύνολο $A\cap C$ είναι κλειστό υποσύνολο της C. Δηλαδή αν για κάθε ακολουθία στο σύνολο $A\cap C$ που συγκλίνει, το όριο της είναι στοιχείο του $A\cap C$.

Πρόταση1.2.1: Έστω X γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P. Τότε ο X είναι Αρχιμήδειος αν και μόνο αν ο P είναι ευθειακά κλειστός.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο X είναι Αρχιμήδειος και θα δείξουμε ότι ο P είναι ευθειακά κλειστός. Έστω C ευθεία του X με $C\cap P\neq\emptyset$ και ότι $y\in C$ με $y=\lim y_n$, όπου $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteqq C\cap P$. Θα δείξουμε τότε ότι $y\in P$ και άρα ο P είναι ευθειακά κλειστός. Η εξίσωση της C είναι:

$$C: \ r(t)=y+t(y_1-y),\ t\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $r(1)=y_1 \in P$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r(t)\notin P$ για κάθε $t<0$ γιατί αν υποθέσουμε ότι $r(t)\in P$ για κάποιο $t<0$ έχουμε ότι $y\in P$ οπότε ισχύει το ζητούμενο. Πράγματι, αν $r(t)\in P$ με $t<0$, τότε για $\lambda=\frac{1}{1-t}$ έχουμε ότι το $y=\lambda r(t)+(1-\lambda)r(1)$ ως κυρτός συνδυασμός του κώνου P θα ανήκει στο P. Έτσι υποθέτουμε ότι $r(t)\in P\Longrightarrow t>0$. Έστω

$$y_n=r(t_n)=y+t_n(y_1-y).$$

Επειδή $y_n \to y$, έχουμε ότι $t_n\to 0$ και επειδή ο κώνος P είναι κυρτός έχουμε ότι $r(t)\in P$ για κάθε $t\in(0,1]$. Άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε:

$$r(\tfrac{1}{n})=y+\tfrac{1}{n}(y_1-y)\geqq 0,$$

επομένως $ny\geqq y-y_1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα έχουμε $n(-y)\leq y_1-y$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, επομένως $-y\leq 0$, άρα $y\geqq 0$. Επομένως $y\in P$ και ο P είναι ευθειακά κλειστός.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο P είναι ευθειακά κλειστός και θα δείξουμε ότι ο X είναι Αρχιμήδειος. Έστω x,y $\in$ X με $nx \leq y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $y+n(-x) \geqq 0$, επομένως $-x+\frac{1}{n}y\geqq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Έστω η ευθεία

$$C: \quad r(t)=-x+ty,\ t\in\mathbb{R}.$$

Τότε $r(\frac{1}{n}) \in P$ και $r(\frac{1}{n}) \rightarrow r(0)=-x$, επομένως $-x\geqq 0$ και $x\leq 0$. Άρα ο X είναι Αρχιμήδειος.

□

Ορισμός1.2.5: Έστω X γραμμικός χώρος διατεταγμένος από τον κώνο P. Αν για κάθε $x,y,z\in P$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$0\leq x\leq y+z \Longrightarrow x=x_1+x_2 \text{ με } x_1,x_2 \in X \text{ και } 0\leq x_1\leq y,\ 0\leq x_2\leq z,$$

τότε λέμε ότι ο X έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz (Riesz Decomposition Property-R.D.P).

1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Ορισμός1.3.1: Έστω X γραμμικός μερικά διατεταγμένος χώρος και $x,y \in X$. Τότε το supremum και το infimum του $\{x,y\}$, εφόσον υπάρχουν ορίζονται ως $x\vee y$ και $x\wedge y$ αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$x\vee y=\sup(\{x,y\}) \text{ και } x\wedge y=\inf(\{x,y\}).$$

Ορισμός1.3.2: Ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος X ονομάζεται **διανυσματικός σύνδεσμος**(**linear lattice ή Riesz Space**) όταν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχει το supremum και το infimum του συνόλου $\{x,y\}$.

Για κάθε $x\in X$, όπου X γραμμικός σύνδεσμος ορίζουμε:

i. $x^+ = x\vee 0$ και το ονομάζουμε θετικό μέρος του x.
ii. $x^- =(- x)\vee 0$ και το ονομάζουμε αρνητικό μέρος του x.
iii. $|x|=(- x)\vee x$ και το ονομάζουμε απόλυτη τιμή του x.

Πρόταση 1.3.1: Για κάθε $x,y,z\in X$, όπου X διανυσματικός σύνδεσμος ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $y\vee x=-[(-x)\wedge(-y)]$ και $y\wedge x=-[(-x)\vee(-y)]$
2. $\sup\{x,-x,0\}=\sup\{x,-x\}$
3. $x+(y\vee z)=(x+y)\vee(x+z)$ και $x+(y\wedge z)=(x+y)\wedge(x+z)$
4. $x-(y\vee z)=(x-y)\wedge(x-z)$ και $x-(y\wedge z)=(x-y)\vee(x-z)$
5. $x\vee y=(x-y)^+ +y=(y-x)^+ +x$
6. $\lambda(x\vee y)=(\lambda x)\vee(\lambda y)$ και $\lambda(x\wedge y)=(\lambda x)\wedge(\lambda y)$, $\forall\ \lambda\geq 0$

7. $2(x\vee y)=x+y+|x-y|$ και $2(x\wedge y)=x+y-|x-y|$
8. $x+y=x\vee y+x\wedge y$
9. $x=x^+-x^-$. Ακόμα αν $x=x_1-x_2$ με $x_1,x_2\in X_+$ τότε $x_1\geq x^+$ και $x_2\geq x^-$
10. $x^+\wedge x^-=0$
11. $|x|=x^++x^-$
12. $|x-y|=x\vee y - x\wedge y$
13. $|x+y|\vee|x-y|=|x|+|y|$
14. $2|x|\vee|y|=|x+y|+|x-y|$ και $2|x|\wedge|y|=|x+y|-|x-y|$

Απόδειξη:

1. Θέτω $w=(-x)\wedge(-y)$ και θα δείξω ότι $-w=x\vee y$. Παρατηρούμε ότι:

   $$-w\geq x\Rightarrow w\leq x$$
   $$-w\geq y\Rightarrow w\leq y$$

   Άρα το $-w$ είναι άνω φράγμα του $\{x,y\}$. Αρκεί να δείξω ότι το $-w$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{x,y\}$. Έστω u τέτοιο ώστε:

   $$x\leq u \text{ και } w\leq u\Rightarrow -u\leq -x \text{ και } -u\leq -y.$$

   Επομένως $-u\leq(-x)\wedge(-y)=w\Rightarrow -u\leq w\Rightarrow u\geq -w$. Άρα $-w=x\vee y$. Όμοια και η δεύτερη σχέση.

2. Έστω $u=\sup\{x,-x,0\}$ και $k=\sup\{x,-x\}$. Προφανώς $u\geq k$. Αρκεί να δείξω ότι $u\leq k$. Έχουμε ότι:

   $$k\geq x \text{ και } k\geq -x\Rightarrow 2k\geq 0\Rightarrow k\geq 0\Rightarrow k\geq u.$$

3. Έστω $u=y\vee z, s=x+u$. Τότε ισχύει ότι:

   $$x+y\leq x+u \text{ και } x+z\leq x+u$$

   $$\Rightarrow \quad x+y\leq s \text{ και } x+z\leq s$$

   $$\Rightarrow \quad y\leq s-x \text{ και } z\leq s-x$$

   $$\Rightarrow \quad y\vee z\leq s-x$$

   $\Rightarrow u\leq s-x\Rightarrow x+t\leq s\Rightarrow x+y\leq s$ και $x+z\leq s$

   Άρα $s=(x+y)\vee(x+z)\Leftrightarrow x+u=(x+y)\vee(x+z)$. Όμοια και η δεύτερη σχέση.

4. Έχουμε ότι:

   $$(x-y)\vee(x-z)=(x+(-y))\vee(x+(-z))$$

και από ιδιότητα 3 θα έχουμε:

$$(x+(-y))\vee(x+(-z))=x+(-y)\vee(-z).$$

Τότε από ιδιότητα 1 :

$$x+(-y)\vee(-z)=x-y\wedge z.$$

Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

5. Έχουμε ότι:

$$(x-y)^{+}+y=(x-y)\vee 0+y$$

Και $$(y-x)^{+}+x=(y-x)\vee 0+x$$

Τότε από την ιδιότητα 3:

$$(x-y)\vee 0+y=(x-y+y)\vee(0+y)=x\vee y$$

και $$(y-x)\vee 0+x=(y-x+x)\vee(0+x)=y\vee x.$$

6. Για λ=0 η ιδιότητα προφανώς ισχύει. Έστω λ>0. Τότε:
Επειδή $x\leq x\vee y$ και $y\leq x\vee y$
έχουμε ότι $\lambda x\leq\lambda(x\vee y)$ και $\lambda y\leq\lambda(x\vee y)$ (a)

Έστω τώρα z τέτοιο ώστε: $\lambda x\leq z$ και $\lambda y\leq z$, τότε:

$$\lambda x\leq z \Rightarrow x\leq\frac{1}{\lambda}z$$

$$\lambda y\leq z \Rightarrow y\leq\frac{1}{\lambda}z$$

$$\Rightarrow x\vee y\leq\frac{1}{\lambda}z \Rightarrow \lambda(x\vee y)\leq z \Rightarrow \lambda(x\vee y)\leq \lambda x \text{ και } \lambda(x\vee y)\leq \lambda y \qquad \text{(b)}$$

Από (a),(b) προκύπτει το ζητούμενο και ομοίως αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

7. Έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+(x-y)\vee(y-x))$$

Από την ιδιότητα 3 :

$$\frac{1}{2}(x+y+(x-y)\vee(y-x))= \frac{1}{2}((2x)\vee(2y))$$

Από την ιδιότητα 6 :

$$\frac{1}{2}((2x)\vee(2y))=x\vee y.$$

Ομοίως για τη δεύτερη σχέση.

8. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις της ιδιότητας 7 έχουμε:
$x\vee y+x\wedge y=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)+\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)=x+y.$

9. Έχουμε ότι:

$$x=x+0$$

και από ιδιότητα 8:

$$x+0=x\vee 0+x\wedge 0$$

και από ιδιότητα 1:

$$x\vee 0+x\wedge 0=x\vee 0-((-x)\vee 0)=x^{+}-x^{-}.$$

Έστω $x_1=x+x_2 \Rightarrow x_1\geq x\vee 0\Rightarrow x_1\geq x^{+}$.

Ανάλογα έχουμε ότι $x_2=x_1-x\Rightarrow x_2\geq -x\Rightarrow x_2\geq(-x)\vee 0\Rightarrow x_2\geq x^{-}$.

10. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3 έχουμε:

$$x^{+}\wedge x^{-}=(x^{+}-x^{-})\wedge(x^{-}-x^{-})+x^{-}=(x^{+}-x^{-})\wedge 0+x^{-}$$

και από ιδιότητα 9:

$$(x^{+}-x^{-})\wedge 0+x^{-}=x\wedge 0+x^{-}$$

και από ιδιότητα 1:

$$x\wedge 0+x^{-}=-[(-x)\vee 0]+x^{-}=-x^{-}+x^{+}=0.$$

11. Έχουμε ότι :

$$x^{+}+x^{-}=\sup\{x,0\}+\sup\{-x,0\}=\sup\{x,-x,0\}=\sup\{x,-x\}=|x|.$$

12. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3 έχουμε:

$$|x-y|=(x-y)\vee(y-x)=(2x)\vee(2y)-(x+y)$$

και από ιδιότητες 6 και 8 έχουμε :

$2(x\vee y)-(x\vee y+x\wedge y)=x\vee y-x\wedge y.$

13. Έχουμε ότι:

$$|x+y|\vee|x-y|=[(x+y)\vee(-x-y)]\vee[(x-y)\vee(y-x)]$$

$$=[(x+y)\vee(x-y)]\vee[(-x-y)\vee(y-x)]$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3:

$$[(x+y)\vee(x-y)]\vee[(-x-y)\vee(y-x)]=[x+y\vee(-y)]\vee[-x+(-y)\vee y]$$

$$=[x+|y|]\vee[-x+|y|]$$

$$=[x\vee(-x)]+|y|$$

$$=|x|+|y|.$$

14. Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2}[|x+y|+|x-y|]=\frac{1}{2}[(x+y)\vee(-x-y)+|x-y|]$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3:

$$\frac{1}{2}[(x+y)\vee(-x-y)+|x-y|]=\frac{1}{2}[(x+y+|x-y|)\vee(-x-y+|x-y|)]$$

και από ιδιότητα 12:

$$\frac{1}{2}[(x+y+|x-y|)\vee(-x-y+|x-y|)]=\frac{1}{2}[(x+y+x\vee y-x\wedge y)\vee(-x-y+x\vee y-x\wedge y)]$$

$$=\frac{1}{2}([2(x\vee y)]\vee[2\{(-x\vee(-y)\}])$$

$$=x\vee y\vee(-x)\vee(-y)$$

$$=[x\vee(-x)]\vee[y\vee(-y)]$$

$$=|x|\vee|y|.$$

Ομοίως αποδεικνύεται η δεύτερη σχέση.

□

Παρατήρηση: Από την ιδιότητα (9) $x=x^+-x^-$ συνεπάγεται ότι ο θετικός κώνος X_+ ενός γραμμικού συνδέσμου(linear lattice) X παράγει πάντα τον X αφού τα στοιχεία $x^+,x^-\in X_+$. Πράγματι, $x^+\in X_+$ εξ' ορισμού και $x^-=(-x)^+\in X_+$. Επομένως ισχύει :

$$X=X_+-X_+$$

και άρα ο X_+ παράγει τον X.

Πρόταση 1.3.2: Ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος X είναι γραμμικός σύνδεσμος αν και μόνο αν $\exists$ y$\in$X, τέτοιο ώστε το sup{x,y} να υπάρχει στον X, $\forall$ x$\in$X.

Απόδειξη:

Έστω ότι ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος και θα δείξουμε ότι $\exists$ y$\in$X τέτοιο ώστε το $x \vee y$ να υπάρχει στον X, $\forall$ x$\in$X. Αφού ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος για κάθε y$\in$ X ισχύει ότι το $x \vee y \in X$ για κάθε x στον X, άρα προκύπτει το ζητούμενο.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι υπάρχει στοιχείο y$\in$X τέτοιο ώστε το $x \vee y \in X$ για κάθε x$\in$X. Έστω u,v $\in$ X, τότε ισχυριζόμαστε ότι:

$$u \vee v=[(u+y-v)\vee y]+(v-y).$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού θέτουμε $z=[(u+y-v)\vee y]+(v-y)$. Άρα έχουμε ότι:

$$z+y-v=(u+y-v)\vee y$$

Επομένως, $u + y - v \le z + y - v$ και $y \le z +y-v$. Άρα $u\le z$ και $v\le z$. Δηλαδή, το z είναι ένα άνω φράγμα του {x,y}.

Θα δείξουμε ότι είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω w $\in$ X τέτοιο ώστε $u\le w$ και $v\le w$. Τότε έχουμε:

$w + y - v \ge w + y - w = y$ και $w + y - v \ge u + y - v$

και άρα $w+y-v\ge(u+y-v)\vee y$ ή $w\ge[(u+y-v)\vee y]+(v-y)=z$.

Επομένως $z=u\vee v$, άρα ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.

□

Πρόταση1.3.3: Για κάθε x,y,z$\in$X, όπου X διανυσματικός σύνδεσμος ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $| x + y | \le |x| + |y|$
2. $| |x| - |y| | \le | x - y |$
3. $|(x \vee z) - (y \vee z)| \le | x - y |$
4. $| x^+ - y^+ | \le | x - y |$
5. $| x^- - y^-| \le | x - y |$
6. $(x + y)^+ \le x^+ + y^+$
7. $(x + y)^- \le x^- + y^-$
8. $(x+y) \wedge z \le x\wedge z + y\wedge z$,   αν $x,y,z\in X_+$

Λήμμα 1.3.1: Έστω X ένας γραμμικός σύνδεσμος και X_+ ο θετικός κώνος του X.

Αν $\{x_i : i = 1,2, \ldots, n\}$ και $\{y_j : j = 1,2, \ldots, m\}$ πεπερασμένα υποσύνολα του X_+ και

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{z_{ij} : i = 1,2, \ldots, n \text{ και } j = 1,2, \ldots, m\}$ του X_+ τέτοιο ώστε:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \quad i = 1,2, \ldots, n$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \quad j = 1,2, \ldots, m$$

Πόρισμα: Κάθε γραμμικός σύνδεσμος X έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz.

Δηλαδή αν $x,y,z \in X$ τέτοια ώστε:

$$0 \leq z \leq x+y,$$

τότε υπάρχουν $x_1, y_1 \in X$ τέτοια ώστε:

$$z = x_1 + y_1 \;, \text{ με } 0 \leq x_1 \leq x \text{ και } 0 \leq y_1 \leq y \;.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένας μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος που έχει την ιδιότητα διάσπασης του Riesz δεν είναι απαραίτητα γραμμικός σύνδεσμος.

Ορισμός1.3.3: Ένα υποσύνολο S ενός γραμμικού συνδέσμου X λέγεται συμπαγές (Solid) αν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$|x| \leq |y| \text{ στον } X \text{ και } y \in S \implies x \in S$$

Έστω B υποσύνολο του X. Το μικρότερο συμπαγές (Solid) υποσύνολο του X που περιέχει το B ονομάζεται συμπαγές θήκη(Solid hull) του B και συμβολίζεται με Sol(B). Δηλαδή:

$$Sol(B)=\{y \in X : \exists\, x \in B \text{ τέτοιο ώστε } |x| \leq |y|\}$$

Θεώρημα 1.3.1: (Namioka) Σε ένα γραμμικό σύνδεσμο X η κυρτή θήκη ενός solid συνόλου είναι solid.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.: ΘΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

2.1 ΒΑΣΕΙΣ SCHAUDER ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

Ορισμός 2.1.1: Έστω $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σε ένα γραμμικό χώρο X με νόρμα. Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι **Schauder βάση** του X αν για κάθε x$\in$X υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, b_n$$

Στη συνέχεια η λέξη «βάση» θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει «Schauder βάση». (Στις Hamel βάσεις, η βάση έχει πεπερασμένα στοιχεία)

Ορισμός 2.1.2: Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, …, $\mathbf{x}_n$, ενός διανυσματικού χώρου S λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την εξής, μαθηματικά πιο εύχρηστη, έκφραση :

Τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, …, $\mathbf{x}_n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν η συνθήκη
$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n=0$ αναγκαστικά συνεπάγεται ότι $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$.

Ένα παράδειγμα βάσης είναι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο χώρο $c_0(\mathbb{N})$ ή στο χώρο $\ell_p(\mathbb{N})$ όπου η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελείται από τα διανύσματα $e_1, e_2, \ldots$, όπου $e_n=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ (όπου η μονάδα βρίσκεται στη n-ιοστή συντεταγμένη) για κάθε n$\in\mathbb{N}$. Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος $c_0(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο μηδέν. Δηλαδή:

$$c_0(\mathbb{N})=\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in\mathbb{R}, n=1,2,\ldots, \text{και } a_n\to 0\}$$

Ο χώρος $\ell_p(\mathbb{N})$ για $1\le p\le\infty$ ορίζεται ως εξής:

$$\ell_p(\mathbb{N})=\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in\mathbb{R}, n=1,2,\ldots, \text{και } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p <\infty\}$$

Παρατήρηση: Στον ορισμό της βάσης η μοναδικότητα των $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδυναμεί με το γεγονός ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, b_n=0$ τότε $\lambda_n=0$ για κάθε n$\in\mathbb{N}$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, b_n=0$ και ότι υπάρχει k$\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\lambda_k\neq 0$. Τότε

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n=0 \Longrightarrow \lambda_k b_k=-\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \lambda_n b_n \Longrightarrow b_k= -\frac{1}{\lambda_k}\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq k}}^{\infty} \lambda_n b_n$

Όμως $b_k \in X$ και επομένως εξ' ορισμού της Schauder βάσης του X υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$b_k= \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n b_n$$

Τέτοια ακολουθία είναι η $\tau_n=0$ για $n\neq k$ και $\tau_k=1$. Τότε θα ήταν $b_k=0$ που είναι άτοπο. Άρα αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n=0$ τότε $\lambda_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ακόμα ισχύει ότι τα b_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν $\sum_{n=1}^{k} \lambda_n b_n=0$ και $\lambda_i\neq 0$ για κάποιο $1\leq i\leq k$, τότε θέτοντας $\lambda_j=0$ για κάθε $j>k$ παίρνουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n=0 \text{ και } \lambda_i\neq 0 \text{ για κάποιο } 1\leq i\leq k$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Αν δηλαδή $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων ενός γραμμικού χώρου με νόρμα και υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n=0$, τότε δεν συνεπάγεται ότι $\lambda_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Παράδειγμα: Έστω $b_1=\frac{1}{2}e_1$ και $b_n=\frac{1}{2}e_n-e_{n-1}$ για $n\geq 2$, που ανήκουν στον $c_0(\mathbb{N})$. Τότε τα b_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά

$$\sum_{m=1}^{n} 2^{-m} b_m= \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2^2}b_2+ \frac{1}{2^3}b_3 + \dots + \frac{1}{2^n}b_n=$$

$$= \frac{1}{2^2}e_1 + \frac{1}{2^3}e_2 - \frac{1}{2^2}e_1 + \frac{1}{2^4}e_3 - \frac{1}{2^3}e_2 + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}e_n - \frac{1}{2^n}e_{n-1}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} 2^{-m} b_m = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} e_n =0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n=0 \quad \text{ενώ} \quad \lambda_n = 2^{-n} \neq 0 \text{ για } n\in\mathbb{N}$$

Ορισμός 2.1.3: Έστω $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βάση του X. Συμβολίζουμε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, με $f_n(x)$ τα μοναδικά λ_n για τα οποία $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$. Τα f_n, που είναι γραμμικές συναρτήσεις του X, ονομάζονται συναρτησοειδή σχετικά με τη βάση $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι ισχύει $f_i(b_j)=\delta_{ij}$.

Ορισμός 2.1.4: Η ακολουθία $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i$ είναι ονομάζεται γραμμική προβολή σχετική με τη βάση $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Η P_n είναι μια γραμμική προβολή στο:

$$A=\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i : \lambda_i\in\mathbb{R}, b_i \in X, i=1,2,\dots, n \ \ n\in\mathbb{N}\}$$

και $P_n(x) \rightarrow x$, $\forall x \in X$.

Πόρισμα: Έστω $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία από μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς, τότε $(\alpha_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επίσης μια βάση του X. Σε αυτή τη περίπτωση, τα σχετικά συναρτησοειδή f_n^* είναι $\alpha_n^{-1} f_n$, και οι σχετικές προβολές P_n^* παραμένουν αμετάβλητες.

Πράγματι, για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} f_n(x)(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x)(a_n b_n)$$

και

$$P_n(x)= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} f_i(x)(a_i b_i) = P_n^*(x)$$

Μπορούμε πάντοτε να αντικαταστήσουμε κάθε b_n με ένα στοιχείο που έχει νόρμα ένα, αποκτώντας έτσι μια κανονική βάση.

Η συνέχεια των f_n ισοδυναμεί με τη συνέχεια των P_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι:

$$(P_n-P_{n-1})(x)=P_n(x)-P_{n-1}(x)= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) b_i = f_n(x) b_n$$

έχουμε ότι:

$$\|P_n - P_{n-1}\| = \|f_n\| \|b_n\|$$

Τονίζουμε ότι αν ο X είναι πλήρης, τότε οι P_n είναι αυτομάτως συνεχείς για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα υπενθυμίσουμε κάποιες χρήσιμες μαθηματικές έννοιες.

2.2 ΠΛΗΡΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ – ΧΩΡΟΙ BANACH ΚΑΙ ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 2.2.1: Μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται **βασική ή Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$ με $n_0<n<m$ να ισχύει ότι $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Ορισμός 2.2.2: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **πλήρης** αν κάθε βασική ακολουθία στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.

Ορισμός 2.2.3: Ένας χώρος με νόρμα $(X,\|.\|)$ λέγεται χώρος **Banach** αν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα, δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.

Θεώρημα 2.2.1: Έστω $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια βάση ενός χώρου Banach X. Τότε τα σχετικά συναρτησοειδή f_n και οι προβολές P_n είναι συνεχή, και υπάρχει M τέτοιο ώστε $\|P_n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης $\|f_n(x)b_n\|$=$\|P_n(x)-P_{n-1}(x)\|$≤2M$\|x\|$ για κάθε n.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει για μη πλήρης χώρους

Παράδειγμα: Στο γραμμικό χώρο $c_\infty=\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n\in\mathbb{R}, n=1,2,\ldots,$ και υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n=0\ \forall\ n\geq n_0\}$, ορίζω τα στοιχεία $b_1=e_1$ και $b_n=e_n-e_{n-1}$ για $n\geq 2$. Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βάση του c_∞, αν ο c_∞ έχει τη supremum νόρμα ($\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}$ όπου $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Έστω ότι η σχετική ακολουθία συναρτησοειδών είναι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η μοναδική έκφραση του $e_1+e_2+\ldots+e_n$ με τη βοήθεια της $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $ne_1+(n-1)(e_2-e_1)+\ldots+(e_n-e_{n-1})$, δηλαδή

$$e_1+e_2+\ldots+e_n= nb_1+(n-1)b_2+\ldots+b_n.$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$f_1(e_1+e_2+\ldots+e_n)=n\to\infty$ ενώ $\|e1 + e2+\ldots+en\|=1$ δηλαδή παίρνει φραγμένο σύνολο σε μη φραγμένο.

Κατά συνέπεια, η f_1: $(c_\infty,\|.\|_\infty)$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

□

Επειδή στην πραγματικότητα οι βάσεις μη πλήρων χώρων δε χρησιμοποιούνται πολύ, θα συγκεντρώσουμε τη προσοχή μας στους πλήρεις χώρους. Πρώτα θα δείξουμε ότι οι συνθήκες του θεωρήματος είναι πλέον ικανές ώστε η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X να είναι μια βάση του X, κάτι για το οποίο η πληρότητα δεν είναι απαραίτητη. Με $[b_n]$ θα συμβολίζουμε τη κλειστότητα των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών στοιχείων της $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο θεώρημα υπενθυμίζουμε ότι X^* είναι ο γραμμικός χώρος των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων f : $X\to\mathbb{R}$, όπου X γραμμικός χώρος με νόρμα.

Θεώρημα 2.2.2: Έστω X διανυσματικός χώρος με νόρμα και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $[b_n]$=X. Έστω ακόμα πως υπάρχει ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X^* τέτοια ώστε $f_i(b_j)=\delta_{ij}$ και $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)b_i$ για κάθε $x\in X$. Αν υπάρχει M τέτοιο ώστε$\|P_n\|\leq M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ τότε η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βάση του X.

Απόδειξη: Αν $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n b_n$ τότε λόγω της συνέχειας των f_n έχουμε

$f_n(x)=f_n(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i b_i)=\sum_{i=1}^{\infty} f_n(\lambda_i b_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i f_n(b_i)=\lambda_i$.

Κατά συνέπεια, $f_n(x)$ είναι η μοναδική πιθανή επιλογή για το λ_i. Θα έχουμε τελειώσει αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι $P_n(x)\to x$. Παίρνουμε $x\in X$ και ε>0.

Αφού $[b_n]=X$, υπάρχει ένα στοιχείο $y=a_1b_1+\ldots+a_nb_n$ με $\|y-x\|\leq\varepsilon$. Για $n\geq m$ έχουμε $P_n(y)=y$ και επομένως

$$\|P_n(x)-y\|=\|P_n(x-y)\|\leq\|P_n\|\|x-y\|\leq M\varepsilon$$

Συνεπώς,

$$\|P_n(x)-x\|=\|P_n(x)-y+y-x\|\leq\|P_n(x)-y\|+\|y-x\|\leq M\varepsilon+\varepsilon=(M+1)\varepsilon$$

Άρα $P_n(x)\rightarrow x$ για κάθε $x\in X$.

□

Πρόταση 2.2.1: Έστω X ένας χώρος Banach και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη μηδενικών στοιχείων του X τέτοια ώστε $[b_n]=X$. Η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελεί μια βάση του X αν και μόνο αν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να ισχύει ότι

$$\left\|\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_pb_p\right\|\geq\delta\|\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_nb_n\|, \text{ όταν } p\geq n.$$

Όπου στην παραπάνω πρόταση πρέπει να έχουμε $\delta\leq1$.

Ορισμός 2.2.4: Η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται μονότονη βάση του X αν

$$\left\|\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_pb_p\right\|\geq\|\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_nb_n\|, \text{ όταν } p\geq n,$$

δηλαδή όταν $\delta=1$.

Παράδειγμα: Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια μονότονη βάση του $c_0(\mathbb{N})$ και του $\ell_p(\mathbb{N})$ αφού

$$\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n+\lambda_{n+1}e_{n+1}\|\geq\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n\| \Leftrightarrow$$

$$\|(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1})\|\geq\|(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\| \text{ , που ισχύει.}$$

Θα υπενθυμίσουμε την έννοια του διαχωρίσιμου μετρικού χώρου.

Ορισμός 2.2.5: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό.

Οι διαχωρίσιμοι χώροι Banach $c_0(\mathbb{N})$, $\ell_p(\mathbb{N})$, C(I), έχουν βάσεις. Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει μια βάση. Το «πρόβλημα βάσης» παρέμεινε άλυτο για 46 χρόνια μέχρι που απαντήθηκε αρνητικά από το μαθηματικό P.Enflo το 1972.

Μια ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε ένα χώρο Banach X είναι βασική αν είναι βάση ενός κλειστού υπόχωρου του X. Φυσικά αυτός ο υπόχωρος είναι αναγκαστικά ο $[b_n]$. Επιπλέον μια ακολουθία είναι βασικό αν και μόνο αν ικανοποιεί τη συνθήκη της προηγούμενης πρότασης. Ισχύει ακόμα ότι σε ένα χώρο Banach , κάθε υπακολουθία μιας βασικής ακολουθίας είναι βασική.

Θεώρημα 2.2.3: Έστω $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια βάση ενός χώρου Banach X. Τότε η σχετική ακολουθία συναρτησοειδών $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βασική ακολουθία στον X^*

Το παραπάνω δεν συνεπάγεται ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι και βάση του X^*.

2.3 ΘΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 2.3.1: Έστω X ένας διατεταγμένος χώρος Banach, διατεταγμένος από τον θετικό κώνο X_+. Μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ είναι **θετική βάση** του X, αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder και

$$X_+=\{x=\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \in X: \ \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \ \forall \ i\}$$

Πρόταση 2.3.1: Έστω $\{b_1,b_2,\ldots, b_n\}$ θετική βάση του X, τότε όλες οι θετικές βάσεις του X είναι της μορφής $\lambda_1 b_1,\lambda_2 b_2,\ldots,\lambda_n b_n$ με $\lambda_i>0$, $i\in\{1,2,\ldots, n\}$.

Απόδειξη: Έστω $\{b_1,b_2,\ldots, b_n\}$ θετική βάση του X και $\lambda_i>0$, $i\in\{1,2,\ldots, n\}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda_1 b_1,\lambda_2 b_2,\ldots,\lambda_n b_n$ είναι θετική βάση. Προφανώς είναι βάση Schauder. Θα δείξω ότι είναι και θετική.

$X_+=\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i : \alpha_i \geq 0\}=\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \lambda_i b_i: \alpha_i \geq 0\}=\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i b'_i : \alpha'_i \geq 0\}$.

Άρα δείξαμε ότι $\lambda_1 b_1,\lambda_2 b_2,\ldots,\lambda_n b_n$ είναι θετική βάση. Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο.

Έστω τώρα $\{d_1,d_2,\ldots, d_n\}$ θετική βάση του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει d_i που δεν είναι θετικό πολλαπλάσιο κάποιου στοιχείου της θετικής βάσης $\{b_1,b_2,\ldots, b_n\}$. Έστω $d_i=\lambda_{i1}b_{i1}+ \lambda_{i2}b_{i2}+ \sum_{i\neq i_1,i_2}^{\infty} \lambda_i b_i$ με $\lambda_{i1},\lambda_{i2}>0$, τότε:

$\Longrightarrow b_{i1}=\frac{d_i}{\lambda_{i1}} - \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1}}b_{i2} - + \sum_{i\neq i_1,i_2} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i1}} b_i \notin \{\sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i : \mu_i \geq 0\}$.

Άτοπο διότι $b_{i1} \in X_+$.

□

Παράδειγμα: Έστω $\Omega=\{1,2,\ldots, n\}$,$C(\Omega)=\mathbb{R}^n$ και $b_1=(1,0,\ldots,0)$, $b_2=(0,1,0,\ldots,0)$,

$,\ldots, b_n=(0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n$. Αν $x \in \mathbb{R}^n_+ \Longrightarrow x=(x(1), x(2) ,\ldots, x(n))$ και $x(i)\geq 0$

Ώστε

$x = x(1)b_1 + x(2)b_2 + \ldots + x(n)b_n$ και επομένως η $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ θετική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο παράδειγμα και την πρόταση συμπεραίνουμε ότι στον $\mathbb{R}^n$ οι μόνες θετικές βάσεις είναι η συνήθης βάση και οποιαδήποτε άλλη βάση που έχει ως στοιχεία της πολλαπλάσια των στοιχείων της συνήθης βάσης.

Πρόταση 2.3.2: Έστω X ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος και X_+ ο θετικός κώνος του, που είναι κλειστός και παράγει τον X. Ο X είναι ένας διανυσματικός σύνδεσμος αν και μόνο αν μια βάση B του X_+ είναι ένα κυρτό πολύγωνο με n κορυφές.

Σε αυτή τη περίπτωση, αν $b_1, b_2, \ldots, b_n$ είναι οι κορυφές του B, τότε το σύνολο $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ είναι μια θετική βάση του X.

Παράδειγμα: Έστω $b_1(t)=t$, $b_2(t)=1-t$ και $\Omega=[0,1]$, $X=\{\alpha t+b, t\in[0,1]\}$. Το $\{b_1, b_2\}$ είναι θετική βάση του X. Έχουμε:

Αν $x \in X_+ \Rightarrow \begin{cases} x(t) \geq 0, \forall\, t \in [0,1] \\ x = \lambda_1 t + \lambda_2(1-t) \end{cases}$

Για $t=0 \Rightarrow x(0) \geq 0 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0$ και για $t=1 \Rightarrow x(1) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$. Άρα όντως είναι θετική βάση του X.

Πρόταση 2.3.3(Choquet-Kendall): Ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος X με κλειστό θετικό κώνο X_+, τέτοιος ώστε ο X να παράγεται από τον X_+ (δηλ. $X=X_+-X_+$), είναι γραμμικός σύνδεσμος (linear lattice) αν και μόνο αν ο X έχει θετική βάση.

Ορισμός 2.3.2: Έστω X γραμμικός χώρος και P κώνος του X, $P\neq\{0\}$. Το σύνολο $B\subseteq P$ ονομάζεται **βάση του κώνου** P αν το B είναι κυρτό και για κάθε $x\in P$, $x\neq 0$, υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda_x>0$ ώστε $\lambda_x x \in B$.

Οι βάσεις κώνων έχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές στην οικονομική και χρηματοοικονομική θεωρεία. Ειδικότερα, κάθε βάση κώνου ορίζει ένα υποσύνολο προϋπολογισμού και αντίστροφα, κάθε σύνολο προϋπολογισμού ορίζει μια βάση του κώνου κατανάλωσης.

Πρόταση 2.3.4: Κάθε κυρτό υποσύνολο B ενός μερικά διατεταγμένου γραμμικού χώρου X αποτελεί βάση του κώνου P του X αν και μόνο αν $P=\cup\{\alpha B:\alpha\geq 0\}$ και το 0 δεν ανήκει στη μικρότερη γραμμική πολλαπλότητα του X που περιέχει το B.

Απόδειξη:

($\Longrightarrow$): Έστω B βάση του κώνου P. Για κάθε x$\in$P υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός α>0 ώστε x=αb ώστε b$\in$B. Συνεπώς, παρατηρούμε ότι ο κώνος P ταυτίζεται με το σύνολο $\cup\{\alpha B:\alpha\geq 0\}$. Η μικρότερη αφινική θήκη που περιέχει το σύνολο B είναι $L=\{\lambda b_1+(1-\lambda)b_2: b_1,b_2 \in B \text{ και } \lambda\in\mathbb{R}\}$. Υποθέτουμε ότι 0$\in$L. Τότε υπάρχουν b_0,b_1 και $\lambda\neq 1$ ώστε $\lambda b_0+(1-\lambda)b_1=0$, δηλαδή $(\lambda-1)b_1=\lambda b_0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία του κώνου που έχουν την ίδια αναπαράσταση ως προς τη βάση B. Από τον ορισμό της βάσης όμως καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $0\notin L$.

($\Longleftarrow$) Έστω ένα κυρτό υποσύνολο B του κώνου P και έστω $b_1\neq b_2 \in B$ και $\lambda_1\neq\lambda_2$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $\lambda_1 b_1=\lambda_2 b_2$, άρα έχουμε:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}b_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}b_2 \Longrightarrow 0=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}b_1+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)b_2 \Longrightarrow 0=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 b_1-\lambda_2 b_2)\in L$$

όταν $\lambda_1\neq\lambda_2$. Όμως έχουμε υποθέσει ότι $0\notin L$, άρα πρέπει $\lambda_1=\lambda_2$, και κατά συνέπεια $b_1=b_2$.

□

Θεώρημα 2.3.1: Έστω P κώνος του X και f: P→$\mathbb{R}$. Αν f θετικά ομογενής και προσθετική, δηλαδή $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$ για κάθε x,y$\in$ P και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}_+$, τότε η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησιακό του X.

Θεώρημα 2.3.2: Έστω X γραμμικός χώρος, P κώνος του X και B⊆P κυρτό. Το B είναι βάση του P αν και μόνο αν υπάρχει αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό f του X, τέτοιο ώστε:

$$B=\{x\in P : f(x)=1\}$$

Απόδειξη: Έστω B βάση του κώνου P. Για κάθε x$\in$P, x≠0, θέτουμε $f(x)=\frac{1}{\lambda_x}$ όπου λ_x είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός ώστε $\lambda_x x \in$ B. Τότε για κάθε x,f(x) το λ_x είναι ο μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός ώστε $\frac{x}{f(x)}\in$ B. Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}_+$, λ>0 έχουμε:

$$\frac{\lambda x}{\lambda f(x)}\in B, \text{ άρα } f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

Ακόμα για κάθε x,y$\in$P, x,y≠0 έχουμε :

$$\frac{x}{f(x)},\frac{y}{f(y)}\in B$$

Από την κυρτότητα του B έχουμε ότι:

$$\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\frac{x}{f(x)}+\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\frac{y}{f(y)}=\frac{x+y}{f(x)+f(y)}\in B.$$

Απ’ όπου έπεται ότι f(x+y)=f(x)+f(y). Αν υποθέσουμε ότι f(0)=0, τότε για κάθε x,y$\in$P και λ,μ$\in\mathbb{R}_+$ έχουμε:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y),$$

επομένως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η f επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησιακό του X.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι f είναι αυστηρά θετικό γραμμικό συναρτησιακό του X και ότι B={x$\in$P : f(x)=1}. Θα δείξουμε ότι B είναι βάση του P. Το B είναι κυρτό, άρα για κάθε x$\in$P έχουμε ότι $\frac{x}{f(x)} \in$ B. O αριθμός $\frac{1}{f(x)}$ είναι μοναδικός γιατί αν λx $\in$ B έχουμε ότι f(x)=2, άρα λ=$\frac{1}{f(x)}$. Άρα B είναι βάση του P.

□

Ορισμός 2.3.3: Έστω P κώνος του X. Το γραμμικό συναρτησιακό f του X είναι ομοιόμορφα μονότονο (uniformly monotonic) στον P αν υπάρχει πραγματικός αριθμός α>0 τέτοιος ώστε:

$$f(x) \geq \alpha\|x\| \text{ για κάθε } x \in P.$$

Πρόταση 2.3.5: Έστω X γραμμικός χώρος, P κώνος του X και f γραμμικό συναρτησιακό του X, αυστηρά θετικό στον P. Αν B={x$\in$P : f(x)=1} , έχουμε ότι η βάση B του P είναι norm-φραγμένη αν και μόνο αν το συναρτησιακό f είναι ομοιόμορφα μονότονο στον P.

Απόδειξη: Έστω M ένα norm-φράγμα της B. Για κάθε x$\in$P\{0}, έχουμε $\frac{x}{f(x)} \in$ B, άρα:

$$\left\|\frac{x}{f(x)}\right\| \leq M.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι f(x)≥$\frac{1}{M}\|x\|$, άρα η f είναι ομοιόμορφα μονότονη.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι:

$$f(x) \geq \alpha\|x\| \text{ για κάθε } x \in P.$$

Τότε το f είναι αυστηρά θετικό στον P και το σύνολο:

$$B=\{x\in P : f(x)=1\},$$

είναι βάση του P. Για κάθε x $\in$ B έχουμε f(x)=1, άρα $\|x\|\leq\frac{1}{\alpha}$, άρα η βάση B είναι φραγμένη.

□

Πρόταση 2.3.6: Αν το σύνολο $K=\{x \in X : f(x)=0\}$ είναι ο πυρήνας ενός γραμμικού συναρτησιακού f που ορίζεται στο X και $K\cap P=\{0\}$, τότε είτε το f είτε το –f είναι αυστηρά θετικό.

Απόδειξη: Έστω ότι f,-f δεν είναι αυστηρά θετικά. Τότε κανένα από τα δύο δεν είναι θετικό και δεν υπάρχουν $x,y \in P$ τέτοια ώστε $f(x)=1$ και $f(y)=-1$. Επομένως, $f(x)+f(y)=f(x+y)=0$ και $x+y\in K\cap P$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $x+y=0$, δηλαδή $x=-y$, το οποίο είναι άτοπο αφού ο P είναι κώνος.

□

Παρατήρηση: Από την παραπάνω πρόταση συμπεραίνουμε ότι ο P έχει βάση αν και μόνο αν υπάρχει μεγιστικός (maximal) υπόχωρος K τέτοιος ώστε $K\cap P=\{0\}$.

Πρόταση 2.3.7: Έστω X γραμμικός χώρος. Αν P πεπερασμένης διάστασης κλειστός κώνος του X, τότε κάθε βάση του P είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Έστω $K=P-P$ ο γραμμικός υπόχωρος του X που παράγεται από τον P. Τότε ο K είναι πεπερασμένης διάστασης, κλειστός υπόχωρος του X. Έστω $B=\{x\in P : f(x)=1\}$, βάση του P που ορίζεται από το αυστηρά θετικά γραμμικό συναρτησιακό f του K. Αν η B δεν είναι φραγμένη, τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ ώστε $\|x_n\|\to \infty$. Θεωρούμε την ακολουθία $y_n=\frac{x}{\|x_n\|}$. Επειδή η μοναδιαία σφαίρα του K είναι συμπαγής, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία y_{k_n} της y_n. Αν $y_{k_n} \to x_0$ έχουμε ότι $x_0 \in P$ αφού ο P είναι κλειστός και $\|x_0\|=1$. Τότε $f(x_0) = \lim f(y_{k_n})=0$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f είναι αυστηρά θετική στον P. Άρα κάθε βάση του P είναι φραγμένη.

□

Θεώρημα 2.3.3: Έστω X γραμμικός χώρος διάστασης 2 και ο θετικός του κώνος X_+. Αν ο X_+ είναι κλειστός και παράγει τον X (δηλ $X=X_+-X_+$) τότε ο X είναι γραμμικός σύνδεσμος.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο X έχει θετική βάση. Έστω B_f βάση του X_+ που ορίζεται από το $f \in X'$, όπου X΄ο γραμμικός δυικός του X, τότε η $B_f=f^{-1}(\{1\})\cap X_+$ είναι κλειστή ως τομή κλειστών και σύμφωνα με την πρόταση είναι φραγμένη. Άρα η B_f είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $\{x \in X: f(x)=1\}$ το οποίο είναι υπερεπίπεδο του X, οπότε είναι ισομετρικό με το $\mathbb{R}$. Άρα η B_f ταυτίζεται μέσω της ισομετρίας με ένα κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο (άρα κλειστό διάστημα) του $\mathbb{R}$ και άρα έχουμε ότι $B_f=co\{b_1,b_2\}$, όπου τα b_1,b_2 είναι τα ακραία σημεία του B_f. Παρατηρούμε ότι $X_+=\{\lambda_1b_1+\lambda_2b_2: \lambda_1,\lambda_2 \geq 0\}$, πράγματι έστω $x\in X_+$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της βάσης του κώνου έχουμε ότι $x=\mu y$, $y\in B_f$, τότε όμως $y= \lambda_1b_1+\lambda_2b_2$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda_1,\lambda_2 \geq 0$, άρα $x=\mu \lambda_1b_1+ \mu \lambda_2b_2$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής. Μένει να δείξουμε ότι $[b_1,b_2]=X$, τότε το $\{ b_1,b_2\}$ είναι θετική βάση του X. Έστω $\omega\in X$, επειδή ο X_+ παράγει τον X, υπάρχουν $x_1,x_2 \in X_+$: $\omega = x_1 - x_2$, τότε επειδή όπως δείξαμε η $\{b_1,b_2\}$ παράγει τον X_+ έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_i \geq 0$: $\omega = \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2 - (\lambda_3 b_1+\lambda_4 b_2)$ και άρα $X=[b_1,b_2]$.

□

Παρατήρηση: Το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει όταν η διάσταση του X είναι μεγαλύτερη του 2. Κάθε βάση B του X_+ θα εξακολουθεί να είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του X και άρα σύμφωνα με το θεώρημα Krein-Milman θα ισχύει $K=co(Ex(K))$, όμως σε αυτή τη περίπτωση η B θα ταυτίζεται με ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$ για το οποίο δεν ισχύει γενικά ότι έχει $n+1$ ακραία σημεία. Κλασσικό αντιπαράδειγμα είναι η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^2$.

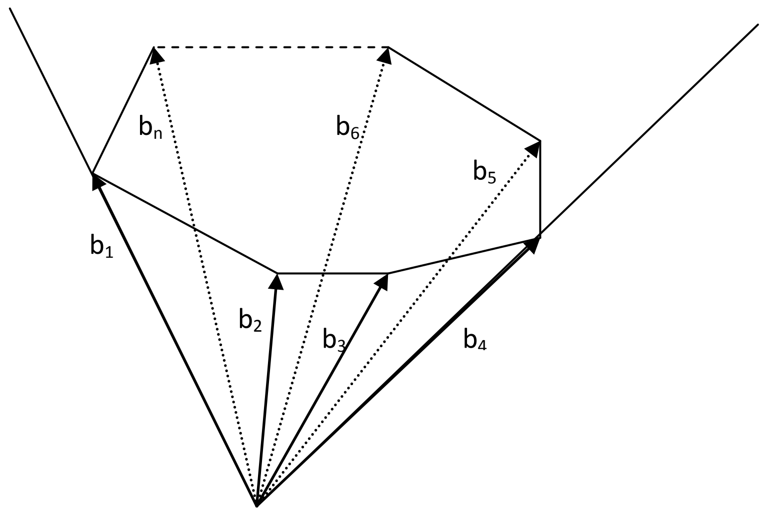
2.4 Παραδείγματα θετικών βασεων

Παράδειγμα 2.4.1: Έστω X ένας διατεταγμένος γραμμικός χώρος με νόρμα, πεπερασμένης διάστασης. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι χώρος Banach. Σύμφωνα με τον ορισμό της θετικής βάσης, μια βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ του X είναι θετική βάση του X αν το σύνολο των θετικών γραμμικών συνδυασμών της $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ συμπίπτει με το θετικό κώνο X_+ του X.

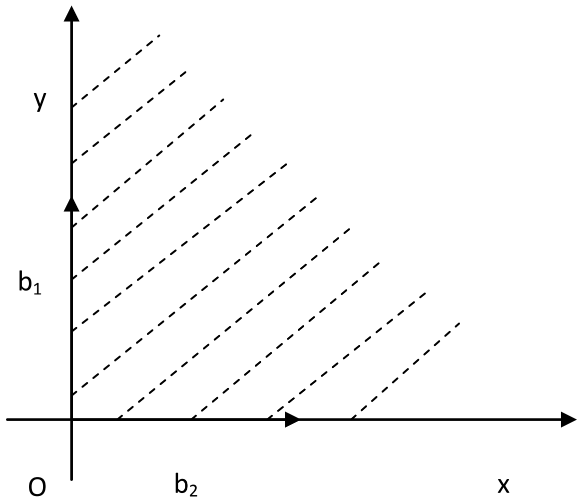
Παράδειγμα 2.4.2: Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι ο $\mathbb{R}^2_+$ είναι το πρώτο τεταρτημόριο. Τότε οποιαδήποτε βάση της μορφής $\{b_1,b_2\}$ όπου

$$b_1=(x,0),\ b_2=(0,y),\ \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}_+$$

είναι θετική βάση του $\mathbb{R}^2$.



Σχήμα: Θετικός κώνος X_+ και βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$.



Σχήμα: Θετικός κώνος $\mathbb{R}^2_+$ και βάση $\{b_1,b_2\}$.

Παράδειγμα 2.4.2: Στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $\mathbb{R}^3_+$ είναι ο κώνος που δημιουργείται από τις ημιευθείες Ox,Oy,Oz. Οποιαδήποτε βάση της μορφής $\{b_1,b_2, b_3\}$ όπου

$$b_1=(x,0,0),\ b_2=(0,y,0),\ b_3=(0,0,z),\ \text{ για κάθε } x,y,z\in\mathbb{R}_+$$

αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 2.4.4: Η βάση $\{b_1,b_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ όπου $b_1=(1,1)$, $b_2=(1,3)$ δεν είναι θετική βάση του $\mathbb{R}^2$ διότι :

$$(1,0)\in \mathbb{R}^2_+ \quad \text{και}$$

$$(1,0)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,3)=(\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_1+3\lambda_2)$$

Άρα $\qquad \lambda_1=\frac{3}{2} \quad$ και $\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}<0$

Δηλαδή $\qquad (1,0)=\frac{3}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2$

Άρα η $\{b_1,b_2\}$ δεν είναι θετική βάση του $\mathbb{R}^2$.

2.5 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ-ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Έστω Κ υπόχωρος ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου Χ. Ο κώνος $K \cap X_+$ ονομάζεται επαγόμενος κώνος του Κ, και η διάταξη που ορίζεται στον Κ απ' αυτό το κώνο ονομάζεται επαγόμενη διάταξη. Ένας διατεταγμένος υπόχωρος του Χ είναι ένας υπόχωρος του Χ διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη.

Έστω λοιπόν Χ ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και Κ ένας διατεταγμένος υπόχωρος του Χ. Για κάθε $x,y \in K$ ορίζουμε με $\sup_K\{x,y\}$ (αντίστοιχα με $\inf_K\{x,y\}$) το ελάχιστο άνω φράγμα (αντίστοιχα το μέγιστο κάτω φράγμα) των x,y στον Κ. Πιο συγκεκριμένα για $x,y \in K$ ισχύει ότι :

$\sup_K\{x,y\}=z$ αν,

1. $z \in K$
2. $z \geq x,\ z \geq y$ και
3. για κάθε $\omega \in K$ με $\omega \geq x$ και $\omega \geq y$ ισχύει ότι $\omega \geq z$.

Αντίστοιχα για $x,y \in K$ ισχύει ότι $\inf_K\{x,y\}=u$ αν

1. $u \in K$
2. $u \leq x, u \leq y$ και
3. για κάθε $v \in K$ με $v \leq x$ και $v \leq y$ ισχύει ότι $v \leq u$.

Ορισμός 2.5.1: Έστω Χ ένας διατεταγμένος διανυσματικός χώρος και Κ ένας διατεταγμένος υπόχωρος του Χ. Αν για κάθε $x,y \in K$ υπάρχει το $\sup_K\{x,y\}$ και το $\inf_K\{x,y\}$ λέμε ότι ο Κ είναι ένας **σύνδεσμος-υπόχωρος** του Χ.

Από προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος Κ ενός διατεταγμένου διανυσματικού χώρου Χ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος αν και μόνο αν έχει μια θετική βάση. Με άλλα λόγια ένας σύνδεσμος-υπόχωρος του Χ είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του Χ που είναι επίσης διανυσματικός σύνδεσμος.

Αν ο Κ είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του Χ, για κάθε $x,y \in K$ συμβολίζουμε:

$$x \vee_K y=\sup_K\{x,y\} \quad \text{και} \quad x \wedge_K y=\inf_K\{x,y\}.$$

Προφανώς, ισχύει ότι:

$$x \wedge_K y \leq x \wedge y \quad \text{και} \quad x \vee_K y \geq x \vee y$$

όταν τα $x \wedge y$ και $x \wedge y$ υπάρχουν.

Ορισμός 2.5.2: Έστω Χ ένας διανυσματικός σύνδεσμος. Αν Κ είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του Χ και για κάθε $x,y \in K$, το $x \vee y \in K$ και $x \wedge y \in K$, τότε λέμε ότι ο Κ είναι γραμμικός υποσύνδεσμος (sublattice) του Χ.

Παρατήρηση: Κάθε γραμμικός υποσύνδεσμος του X είναι και γραμμικός σύνδεσμος υπόχωρος. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

2.6 ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΤΟΥ C(Ω) ΜΕ ΘΕΤΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Ορισμός 2.6.1: Έστω Ω συμπαγής χώρος Hausdorff. C(Ω) είναι ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Ω.

Ορισμός 2.6.2: Έστω Y κλειστός υπόχωρος του C(Ω) και $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ μια βάση του Y. Επιλέγουμε $t\in\Omega$ και $m \in \mathbb{N}$. Αν $b_m(t)\neq 0$ και $b_n(t)=0$ για κάθε $n\neq m$, τότε θα λέμε ότι το σημείο t είναι ένας m-κόμβος (η πιο απλά ένας κόμβος) της βάσης $\{b_n\}$.

Αν για κάθε n υπάρχει ένας n-κόμβος t_n της βάσης $\{b_n\}$, τότε θα λέμε ότι η $\{b_n\}$ είναι μια βάση του Y με κόμβους και ότι $\{t_n\}$ είναι μια ακολουθία κόμβων της $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Αν dimY=n και για κάθε $m \in \{1,2,\ldots,n\}$ υπάρχει ένας m-κόμβος t_m της βάσης του Y, τότε θα λέμε ότι $\{b_n\}$ είναι μια βάση του Y με κόμβους και ότι τα σημεία $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι κόμβοι της βάσης $\{b_n\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι το στήριγμα (φορέας) μιας συνάρτησης $x\in C(\Omega)$, συμβολίζεται με supp x και είναι η κλειστότητα του συνόλου $\{t\in\Omega: x(t)>0\}$. Έτσι λοιπόν $\text{supp } x = \overline{\{t\in\Omega: x(t) > 0\}}$.

Θεώρημα(Polyrakis 2.1)2.6.1: Έστω Y κλειστός διατεταγμένος υπόχωρος του C(Ω) και $\{b_n\}$ μια βάση του Y που αποτελείται από θετικές συναρτήσεις. Ισχύει ότι

1. Αν $\{b_n\}$ μια θετική βάση του Y, τότε
   a) Για κάθε m υπάρχει ακολουθία $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \Omega$ τέτοια ώστε $\lim_{\nu\to\infty}\frac{b_j(\omega_\nu)}{b_m(\omega_\nu)}=0$ για κάθε $j\neq m$, και
   b) Υπάρχει ακολουθία $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ με $t_n \in \text{supp}(b_n)$ και $b_m(t_n)=0$ για $m\neq n$.
2. Εάν $\{t_n\}$ είναι μια ακολουθία κόμβων της βάσης $\{b_n\}$, τότε η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση του Y και για κάθε $x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i b_i \in Y$ έχουμε $\lambda_i=\frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$ για κάθε i.

Απόδειξη: 1.a) Για κάθε k έστω $z_k=-\frac{1}{k}b_m+\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}b_i$. Αφού η $\{b_n\}$ είναι μια θετική βάση, $z_k\notin Y_+$ και επομένως υπάρχει $\omega_k\in\Omega$ (που εξαρτάται από το m) τέτοιο ώστε $z_k(\omega_k)<0$ ή

$=-\frac{1}{k}b_m(\omega_k)+\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}b_i(\omega_k)<0 \Longrightarrow \sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}b_i(\omega_k)<\frac{1}{k}b_m(\omega_k) \Longrightarrow$

$0 \le \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{\infty} \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} < \frac{1}{k} \Longrightarrow 0 \le \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{\infty} \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} < 0 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{\infty} \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} = 0.$

Άρα για κάθε $i\neq m$ $0 \le \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} \le \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq m}}^{\infty} \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$,

Δηλαδή για κάθε $i\neq m$ $\lim_{k\to\infty} \frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)} = 0$.

Καταλήξαμε δηλαδή ότι ισχύει το 1.a

1.b) Αφού το $\Omega=[0,1]$, είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία $\{\omega_{\nu_k}\}$ της ακολουθίας $\{\omega_\nu\}$ που συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $t_m \epsilon \Omega$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία $\{t_m\}$ τέτοια ώστε $b_i(t_m) = 0$ για κάθε $i\neq m$. Έστω λοιπόν υπακολουθία της $\{\omega_{\nu_k}\}$. Ισχύει ότι $\omega_{\nu_k} \to t_m$.

Από το 1.α έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} \frac{b_i(\omega_{\nu_k})}{b_m(\omega_{\nu_k})} = 0$ για κάθε $i\neq m$. Επειδή ισχύει ότι $0 \le b_i(\omega_{\nu_k}) \le \|b_i\|_\infty$, υπάρχει υπακολουθία της $\{\omega_{\nu_k}\}$ που συμβολίζουμε πάλι με $\{\omega_{\nu_k}\}$ τέτοια ώστε $0 \le b_i(\omega_{\nu_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \theta \le \|b_i\|_\infty$.

Επίσης $0 \le b_m(\omega_{\nu_k}) \le \|b_m\|_\infty$, και άρα υπάρχει υπακολουθία $\{\omega_{\nu_k}\}$ της $\{\omega_{\nu_k}\}$ ώστε $0 \le b_m(\omega_{\nu_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \rho \le \|b_m\|_\infty$.

Αφού λοιπόν $\rho = \lim_{k\to\infty} b_m(\omega_{\nu_k}) \neq \infty$ η σχέση $\lim_{k\to\infty} \frac{b_i(\omega_{\nu_k})}{b_m(\omega_{\nu_k})} = 0$ συνεπάγεται ότι $\theta = \lim_{k\to\infty} b_i(\omega_{\nu_k}) = 0$, δηλαδή $b_i(t_m) = 0$ για κάθε $i\neq m$.

2) Έστω $\{t_n\}$ είναι μια ακολουθία κόμβων της $\{b_n\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $x=\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i \,\epsilon\, Y$ τότε $\lambda_n = \frac{x(t_n)}{b_n(t_n)}$. Πράγματι

$x(t_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i\,(t_n) = \lambda_n b_n(t_n) \Longrightarrow \lambda_n = \frac{x(t_n)}{b_n(t_n)}$ για κάθε n.

Είναι φανερό ότι αν $x \epsilon Y_+$, τότε $\lambda_n \epsilon \mathbb{R}_+$ για κάθε n, κάτι που δείχνει ότι η $\{b_n\}$ είναι θετική βάση του Υ.

□

Πρόταση 2.6.1: Έστω Υ ένας κλειστός σύνδεσμος – υπόχωρος (lattice subspace) του $C(\Omega)$ με θετική βάση $\{b_n\}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Ο Υ είναι υποσύνεδσμος (sublattice) του $C(\Omega)$
2. Αν $b_m(t)>0$ για κάποια t και m, τότε t είναι ένας m-κόμβος της βάσης $\{b_n\}$.

Πρόταση 2.6.2: Έστω Υ ένας n διάστατος υπόχωρος του C(ω) και $b_1,b_2,\ldots,b_n \in Y_+$. Τότε η $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ είναι μια θετική βάση του Υ αν και μόνο αν για κάθε $1\leq m\leq n$ υπάρχει ακολουθία $\{\omega_n\}$ του Ω που ικανοποιεί την $\lim_{k\to\infty}\frac{b_i(\omega_k)}{b_m(\omega_k)}=0$ για κάθε $i\neq m$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο το ευθύ γιατί η υπόλοιπη απόδειξη είναι η ίδια με το 1.α. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $b_1,b_2,\ldots,b_n$ είναι μια θετική βάση του Υ. Για αυτό το λόγο έστω x= $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i \in Y_+$. Τότε

$$0\leq x(\omega_\nu)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\,(\omega_\nu)\Longrightarrow$$

$$0\leq\frac{x(\omega_\nu)}{b_m(\omega_\nu)}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\,(\omega_\nu)\,\frac{b_i(\omega_\nu)}{b_m(\omega_\nu)}\xrightarrow{\nu\to\neq\infty}\lambda_m.$$

Συνεπώς ισχύει ότι $\lambda_m\geq 0$ για κάθε m. Επίσης, αν x=0 τότε όπως πριν βλέπουμε ότι $\lambda_m=0$ για κάθε m. Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι η $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ είναι μια θετική βάση του Υ.

□

Πρόταση 2.6.3: Έστω $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ μια θετική βάση ενός n-διάστατου συνδέσμου υπόχωρου Υ του C(Ω). Για μια συνάρτηση $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i \in Y$ έχουμε

1. Αν ένα σημείο t_i είναι ένας i-κόμβος της βάσης τότε $\lambda_i=\frac{x(t_i)}{b_i(t_i)}$
2. Αν $\{\omega_\nu\}$ είναι μια ακολουθία του Ω τέτοια ώστε $\lim_{k\to\infty}\frac{b_j(\omega_k)}{b_i(\omega_k)}$ για κάθε $i\neq j$, τότε $\lambda_i=\lim_{k\to\infty}\frac{x(\omega_k)}{b_i(\omega_k)}$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι αν το σημείο t_i είναι ένας i-κόμβος, τότε

$$x(t_i)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k b_k\,(t_i)=\lambda_i b_i(t_i).$$

Άρα ισχύει το (1).

Για το (2) παρατηρούμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(\omega_k)}{b_i(\omega_k)}=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\frac{b_j(\omega_k)}{b_i(\omega_k)}=\lambda_i$$

□

2.7 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ-ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΤΟΥ C(Ω)

Επιλέγουμε n γραμμικά ανεξάρτητες θετικές συναρτήσεις $x_1,x_2,\ldots,x_n$ του C(Ω). Έστω X ο διατεταγμένος υπόχωρος του C(Ω) που παράγεται από αυτές τις συναρτήσεις, και γράφουμε $X=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$. Σημειώνεται ότι ο κώνος X_+ του X παράγει πάντα τον X. Το κύριο ερώτημα είναι πότε ο X είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του C(Ω), ή ισοδύναμα, πότε ο X έχει μια θετική βάση.

Στη συνέχεια θα δηλώνουμε με z το άθροισμα των $x_1,x_2,\ldots,x_n$, δηλαδή $z=\sum_{i=1}^{n} x_i$ και με β τη συνάρτηση $\beta: \Omega \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\beta(t) = \left(\frac{x_1(t)}{z(t)}, \frac{x_2(t)}{z(t)}, \ldots, \frac{x_n(t)}{z(t)}\right) \text{ για κάθε } t\in\Omega \text{ με } z(t)>0.$$

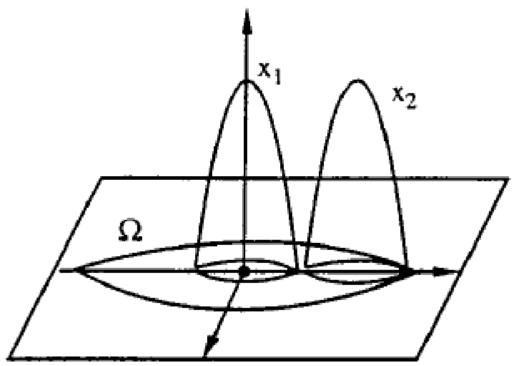
Η β αποτελεί μια καμπύλη που ανήκει στο σύνολο $B=\{y\in\mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} y_i=1\}$. Θα αναφερόμαστε στη συνάρτηση β ως η **βασική καμπύλη** των διανυσμάτων $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Παραθέτουμε παραδείγματα διατεταγμένων σύνδεσμων υπόχωρων του $C(\Omega)$.

Παράδειγμα 2.7.1: Έστω $\Omega=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: u^2 + v^2 \leq 9\}$ και $x_1,x_2 \in C(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$x_1(u,v)=\begin{cases} 4(1-u^2-v^2), & \alpha\nu\ u^2+v^2 \leq 1 \\ 0 & ,\alpha\nu\ \ u^2+v^2 > 1 \end{cases},$$

$$x_2(u,v)=\begin{cases} 4[1-u^2-(v-2)^2], & \alpha\nu\ u^2+(v-2)^2 \leq 1 \\ 0 & ,\alpha\nu\ \ u^2+(v-2)^2 > 1 \end{cases}$$



Σχήμα: Γραφική παράσταση των x_1,x_2.

Έστω X ο υπόχωρος του $C(\Omega)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις των x_1,x_2. Επειδή ο X παράγεται από δύο συναρτήσεις είναι σύνδεσμος υπόχωρος του $C(\Omega)$ σαν υπόχωρος δύο διαστάσεων. Επιπλέον έχουμε ότι:

Για το σημείο (0,0) ισχύει:

$x_1(0,0)=4$

$x_2(0,0)=0$

Για το σημείο (0,2) ισχύει:

$x_1(0,2)=0$

$x_2(0,2)=4$

Άρα τα σημεία (0,0),(0,2) είναι κόμβοι της βάσης $\{x_1,x_2\}$ και σύμφωνα με το θεώρημα η $\{x_1,x_2\}$ είναι θετική βάση του X.

Ο χώρος X σύμφωνα με τη πρόταση είναι υποσύνδεσμος (sublattice) του C(Ω), αφού για κάθε $(u,v) \in \Omega$ με $(x_1 + x_2)(u,v)>0$ ισχύει πως (u,v) είναι κόμβος της βάσης $\{x_1,x_2\}$. Δηλαδή οι δυο συναρτήσεις δεν δίνουν και οι δυο μη μηδενική τιμή για το ίδιο σημείο του Ω.

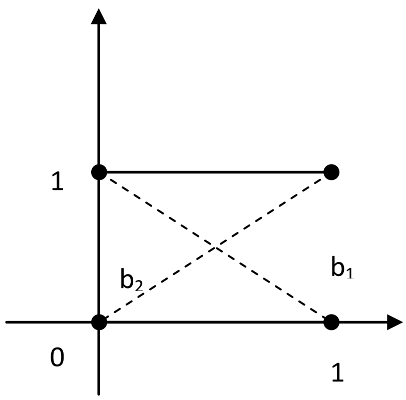
Παράδειγμα 2.7.2: Έστω Ω=[0,1], και

$$x_1(t)=1 \quad \text{και} \quad x_2(t)=t \text{ , για κάθε } t\in\Omega$$

και X ο υπόχωρος του C(Ω) που παράγεται από τις x_1,x_2, δηλαδή $X=[x_1,x_2]$.

Ο X αφού παράγεται από δύο θετικές συναρτήσεις, είναι σύνδεσμος – υπόχωρος του C(Ω). Μια βάση του X είναι η $\{b_1,b_2\}$ όπου

$$b_1(t)=1-t \text{ και } b_2(t)=t \text{ , για κάθε } t\in\Omega$$



Σχήμα: Γραφική παράσταση των b_1,b_2.

Επιπλέον έχουμε ότι:

Για $t_1=0$ ισχύει

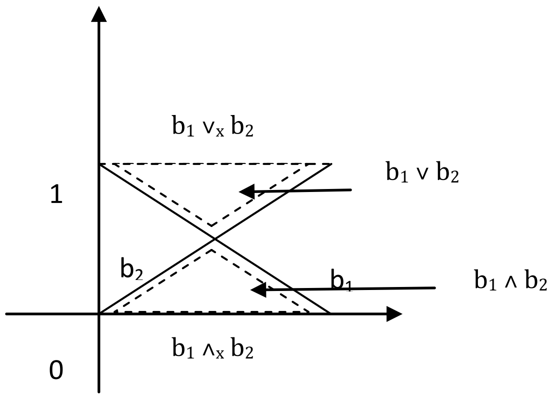
$$b_1(0)=1 \text{ και } b_2(0)=0$$

Για $t_2=1$ ισχύει

$$b_1(1)=0 \text{ και } b_2(1)=1$$

Άρα t_1,t_2 είναι κόμβοι της βάσης $\{b_1,b_2\}$ και επομένως σύμφωνα με το θεώρημα η $\{b_1,b_2\}$ είναι θετική βάση του X.

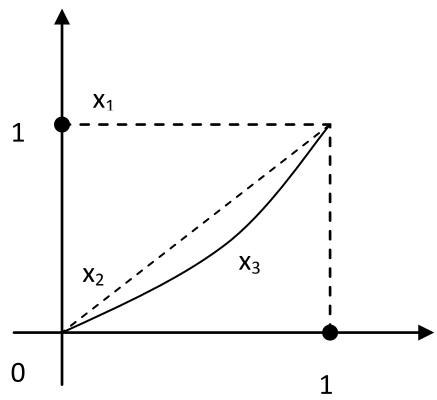
Ο X δεν είναι υποσύνδεσμος του C(Ω) γιατί δεν ικανοποιείται η πρόταση. Πιο συγκεκριμένα για $t=\frac{1}{2}$ ισχύει ότι $b_1(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ και $b_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Το ότι ο X δεν είναι υποσύνδεσμος του C(Ω) προκύπτει και από το παρακάτω σχήμα. Έτσι λοιπόν $b_1 \vee_x b_2=1 \neq b_1 \vee b_2$ και $b_1 \wedge_x b_2=0 \neq b_1 \wedge b_2$.



Παράδειγμα 2.7.3: Έστω Ω=[0,1], και

$$x_1(t)=1 \ , \ x_2(t)=t \ , \ x_3(t)=t^2 \text{ για κάθε } t\in\Omega$$

και X ο υπόχωρος του C(Ω) που παράγεται από τις x_1,x_2,x_3, δηλαδή $X=[x_1,x_2,x_3]$.



Σχήμα: Γραφική παράσταση των x_1,x_2,x_3.

Ο X δεν είναι σύνδεσμος- υπόχωρος του C(Ω). Αυτό αποδεικνύεται με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Έστω λοιπόν ότι ο X είναι ένας σύνδεσμος υπόχωρος του C[0,1].

Έστω ακόμα ότι $\{b_1,b_2,b_3\}$ είναι μια θετική βάση του X. Τότε για κάθε $\alpha \in [0,1]$ η συνάρτηση $x_\alpha(t)=(t-\alpha)^2$, ως θετικό στοιχείο του X, είναι ένας θετικός γραμμικός συνδυασμός των b_1,b_2,b_3. Έτσι λοιπόν

$$x_\alpha(t)=\lambda_1 b_1(t)+\lambda_2 b_2(t)+\lambda_3 b_3(t), \quad \text{με} \quad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \geq 0$$

και $$0=x_\alpha(\alpha)=\lambda_1 b_1(\alpha)+\lambda_2 b_2(\alpha)+\lambda_3 b_3(\alpha) \text{ για κάθε } \alpha\in[0,1].$$

Άρα $b_i(\alpha)=0$ για κάθε $\alpha \epsilon [0,1]$ και για τουλάχιστον ένα i και επομένως $b_i=0$ για ένα τουλάχιστον i. Δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο, και επομένως ο X δεν είναι σύνδεσμος- υπόχωρος του C[0,1].

□

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με D(β) το πεδίο ορισμού (Π.Ο.) και με R(β) το πεδίο τιμών (Π.Τ.) της βασικής καμπύλης β των $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Ως συνήθως, αν K είναι ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου F, θα συμβολίζουμε με int(K) το εσωτερικό του K, με $\overline{K}$την κλειστότητα του K και με $\boldsymbol{\partial}$(K) το σύνορο του K. Επίσης, όταν F είναι ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος θα δηλώνουμε με coK το κυρτό περίβλημα του K και με $\overline{co}$K το κλειστό κυρτό περίβλημα του K. Ακόμα αν A είναι ένας πίνακας, τότε ια δηλώνουμε με A^T τον ανάστροφο του A.

Θεώρημα 2.7.1: Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Ο X είναι ένας σύνδεσμος-υπόχωρος του C(Ω).
2. Υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $P_1,P_2,\ldots,P_n$ του $\mathbb{R}^n$, που ανήκουν στην κλειστότητα του Π.Τ της β, τέτοια ώστε για κάθε $t\epsilon D(\beta)$ το διάνυσμα β(t) είναι ένας κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων $P_1,P_2,\ldots,P_n$, δηλαδή $R(\beta)\subseteq co\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$.

Λήμμα 2.7.1: Οι συναρτήσεις $y_i \epsilon C_+(\Omega)$, i=1,2,...,m είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν ο χώρος παράγεται από το R(β) όπου β η βασική συνάρτηση.

Πρόταση 2.7.1: Αν ισχύουν :

i. Το (2).
ii. $P_i = \lim_{\nu\to\infty} \beta(\omega_{i\nu})$ για κάθε i,
iii. A είναι ο nxn-πίνακας του οποίου η i στήλη είναι το διάνυσμα P_i, και $b_1,b_2,\ldots,b_n$ είναι οι συναρτήσεις που ορίζονται από τη σχέση
$$(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T= A^{-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$$

Τότε ο X έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

a) Το σύνολο $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ είναι μια θετική βάση του X. Επιπλέον, αν t_i είναι ένα οριακό σημείο της ακολουθίας $\{\omega_{i\nu}: \nu= 1,2,\ldots\}$ τότε $t_i \epsilon \operatorname{supp} b_i$ και $b_k(t_i)=0$ για κάθε $k\neq i$.
b) Το κλειστό κυρτό περίβλημα του R(β) και το κυρτό πολύγωνο με κορυφές τα σημεία $P_1,P_2,\ldots,P_n$ συμπίπτουν.
c) Αν $P_k=\beta(t_k)$, τότε t_k είναι ένας k-κόμβος της βάσης $\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$.
d) Αν $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $P_k= \beta(t_k)$ για κάποιο σημείο t_k του Ω, και οι συναρτήσεις x_i είναι C^2- συναρτήσεις σε μια γειτονιά του t_k, τότε $D_j\beta(t_k)=0$, j=1,2,... m όπου D_j παριστάνει τον τελεστή της j-ιοστής μερικής παραγώγου.

2.8 Περίπτωση Ω={1,2,. . . , m}

Έστω ότι Ω={1,2,. . ., m}. Τότε $C(\Omega)=\mathbb{R}^m$ και X είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα θετικά διανύσματα

$$x_i = (x_i(1), x_i(2), \ldots, x_i(m)),\ i=1,2,\ldots n \text{ , του } \mathbb{R}^m.$$

Ισχύει ότι $z = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ και η βασική καμπύλη των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι η συνάρτηση $\beta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ορίζεται ως εξης:

$$\beta(k)= \left(\frac{x_1(k)}{z(k)}, \frac{x_2(k)}{z(k)}, \ldots, \frac{x_n(k)}{z(k)}\right) \text{ για κάθε } k\in\{1,2,\ldots,m\} \text{ με } z(k)>0.$$

Επειδή $R(\beta)=\overline{R(\beta)}$, αν X είναι ένας σύνδεσμος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ τότε υπάρχει $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \subseteq D(\beta)$ τέτοιο ώστε $E(\beta)=\{\beta(j_i): i= 1,2,\ldots,n\}$. Προκειμένου λοιπόν να ελέγξουμε αν ο X είναι ένας σύνδεσμος-υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ βρίσκουμε τα υποσύνολα του $R(\beta)$ που αποτελούνται από n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και εξετάζουμε αν κάποιο από αυτά είναι ακραίο υποσύνολο της β. Σαν συνέπεια του θεωρήματος έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.8.1: Ο χώρος X είναι ένας σύνδεσμος-υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν υπάρχουν δείκτες $j_1, j_2, \ldots, j_n$ του $D(\beta)$ τέτοιοι ώστε για κάθε $k\in D(\beta)$ το διάνυσμα $\beta(k)$ να είναι ένας κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων $\beta(j_1), \beta(j_2), \ldots, \beta(j_n)$.

Σε αυτή τη περίπτωση, μια θετική βάση $\{ b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ του X με κόμβους τα σημεία $j_1, j_2, \ldots, j_n$ δίνεται από τη σχέση

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^T= A^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

Όπου ο A είναι ο n x n πίνακας με στήλες τα διανύσματα $\beta(j_i)$ με i= 1,2,. . .,n.

Παράδειγμα 2.8.1: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα ακόλουθα τρία θετικά και γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$:

$x_1=(1,1,1,1)$

$x_2=(1,1,2,2)$

$x_3=(0,1,1,2)$.

Έτσι λοιπόν $X=[x_1, x_2, x_3]$. Ακόμα ισχύει ότι $z=x_1 +x_2 +x_3$. Δηλαδή:

$$z(k)= x_1(k) +x_2(k) +x_3(k),\ k\in\{1,2,3,4\}$$

Επομένως : $z(1)=2$,

$z(2)=3$,

$z(3)=4$,

$z(4)=5$.

Ακόμα:

$$\beta(k)=\frac{1}{z(k)}(x_1(k),x_2(k),x_3(k))$$

Επομένως: $\beta(1)=\frac{1}{2}(1,1,0)$,

$\beta(2)=\frac{1}{3}(1,1,1)$,

$\beta(3)=\frac{1}{4}(1,2,1)$,

$\beta(4)=\frac{1}{5}(1,2,2)$.

Για να είναι ο X σύνδεσμος- υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ αρκεί να υπάρχουν τρεις δείκτες j_1,j_2,j_3 του $D(\beta)$ τέτοιοι ώστε το διάνυσμα $\beta(j_4)$, όπου $j_4 \in D(\beta)$, να γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$.

Έχουμε λοιπόν ότι αν $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,3\}$, τότε

$$\beta(4)=-\frac{2}{5}\beta(1)+\frac{3}{5}\beta(2)+\frac{4}{5}\beta(3).$$

Συνεπώς το $\beta(j_4)=\beta(4)$ δεν γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός αφού οι συντελεστές των διανυσμάτων $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$ δεν είναι όλοι θετικοί με το άθροισμα τους να κάνει μονάδα.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,4\}$, τότε

$$\beta(3)=\frac{1}{2}\beta(1)-\frac{3}{4}\beta(2)+\frac{5}{4}\beta(4).$$

Συνεπώς το $\beta(j_4)=\beta(3)$ δεν γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,3,4\}$, τότε

$$\beta(2)=\frac{2}{3}\beta(1)-\frac{4}{3}\beta(3)+\frac{5}{3}\beta(4).$$

Συνεπώς το $\beta(j_4)=\beta(2)$ δεν γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,3,4\}$, τότε

$$\beta(1)=\frac{3}{2}\beta(2)+2\beta(3)-\frac{5}{2}\beta(4).$$

Συνεπώς το $\beta(j_4)=\beta(1)$ δεν γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι ο X δεν είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

Παράδειγμα 2.8.2: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα ακόλουθα τρία θετικά και γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^5$.

$x_1=(1,6,3,0,0)$,

$x_2=(1,0,3,4,0)$,

$x_3=(0,3,0, 2,2)$.

Έτσι λοιπόν $X=[x_1,x_2,x_3]$. Ακόμα ισχύει ότι $z=x_1 +x_2 +x_3$. Δηλαδή:

$$z(k)= x_1(k) +x_2(k) +x_3(k),\ k\in\{1,2,3,4,5\}$$

Επομένως : $z(1)=2$,

$z(2)=9$,

$z(3)=6$,

$z(4)=6$,

$z(5)=2$.

Ακόμα:

$$\beta(k)=\frac{1}{z(k)}(x_1(k),x_2(k),x_3(k))$$

Επομένως: $\beta(1)=\frac{1}{2}(1,1,0)$,

$\beta(2)=\frac{1}{9}(6,0,3)$,

$\beta(3)=\frac{1}{6}(3,3,0)$,

$\beta(4)=\frac{1}{6}(0,4,2)$,

$\beta(5)=\frac{1}{2}(0,0,2)$.

Για να είναι ο X σύνδεσμος- υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ αρκεί να υπάρχουν τρεις δείκτες j_1,j_2,j_3 του $D(\beta)$ τέτοιοι ώστε το διάνυσμα $\beta(k)$, όπου $k\in D(\beta)$, να γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$.

Έχουμε λοιπόν ότι τα σύνολα $\{ j_1,j_2,j_3\} \in \{\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,3,5\}\}$ απορρίπτονται διότι τα διανύσματα β(1),β(3) δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αφού $\beta(3)=\frac{1}{3}\beta(1)$.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,3,4\}$, τότε

$$\beta(5)=\frac{3}{2}\beta(2) - 2\beta(3) +\frac{3}{2}\beta(4).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=5) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,3,4\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,4\}$, τότε

$$\beta(5)= - 2\beta(1)+\frac{3}{2}\beta(2) +\frac{3}{2}\beta(4).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=5) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,4\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,5\}$, τότε

$$\beta(4)= \frac{4}{3}\beta(1) - \beta(2) +\frac{2}{3}\beta(5).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=4) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,2,5\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,3,5\}$, τότε

$$\beta(4)= - \beta(3)+\frac{4}{3}\beta(3) +\frac{2}{3}\beta(5).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=4) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,3,5\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,4,5\}$, τότε

$$\beta(2)= \frac{4}{3}\beta(1) - \beta(4) +\frac{2}{3}\beta(5).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=2) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{1,4,5\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,4,5\}$, τότε

$$\beta(3)= \frac{3}{4}\beta(2) +\frac{3}{4}\beta(4) - \frac{1}{2}\beta(5).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ (k=3) για τον οποίο το β(k) δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{2,4,5\}$ απορρίπτεται.

Αν τώρα $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{3,4,5\}$, τότε

$$\beta(2)= \frac{4}{3}\beta(3) - \beta(4) +\frac{2}{3}\beta(5).$$

Συνεπώς υπάρχει δείκτης $k\in D(\beta)$ $(k=2)$ για τον οποίο το $\beta(k)$ δεν είναι κυρτός συνδυασμός των $\beta(j_1)$, $\beta(j_2)$,$\beta(j_3)$. Άρα το σύνολο $\{ j_1,j_2,j_3 \}=\{3,4,5\}$ απορρίπτεται.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο X δεν είναι σύνδεσμος-υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$.

Παράδειγμα 2.8.3: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα ακόλουθα τέσσερα θετικά και γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^5$.

$x_1=(4,1,2,1,2)$,

$x_2=(3,0,2,1,2)$,

$x_3=(3,1,2, 1,0)$,

$x_4=(3,1,0, 1,2)$.

Έτσι λοιπόν $X=[x_1,x_2,x_3,x_4]$. Ακόμα ισχύει ότι $z=x_1 +x_2 +x_3 + x_4$. Δηλαδή:

$$z(k)= x_1(k) +x_2(k) +x_3(k) + x_4(k) \ , k\in\{1,2,3,4,5\}$$

Επομένως : $z(1)=13$,

$z(2)=3$,

$z(3)=6$,

$z(4)=4$,

$z(5)=6$.

Ακόμα:

$$\beta(k)=\frac{1}{z(k)}(x_1(k),x_2(k),x_3(k), x_4(k))$$

Επομένως: $\beta(1)=\frac{1}{13}(4,3,3,3)$,

$\beta(2)=\frac{1}{3}(1,0,1,1)$,

$\beta(3)=\frac{1}{6}(2,2,2,0)$,

$\beta(4)=\frac{1}{4}(1,1,1,1)$,

$\beta(5)=\frac{1}{6}(2,2,0,2)$.

Για να είναι ο X σύνδεσμος- υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ αρκεί να υπάρχουν τέσσερις δείκτες j_1,j_2,j3,j4 του D(β) τέτοιοι ώστε το διάνυσμα β(j_5), όπου $j_5 \in$ D(β), να γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων β(j_1), β(j_2),β(j_3),β(j_4),.

Επειδή λοιπόν ισχύει ότι

$$\beta(1)=\frac{3}{13}\beta(2)+\frac{3}{13}\beta(3)+\frac{4}{13}\beta(4)+\frac{3}{13}\beta(5),$$

δηλαδή το β(1) γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων β(2),β(3),β(4),β(5), έχουμε ότι οι ζητούμενοι δείκτες j_1,j_2,j3,j4 του D(β) είναι οι 2,3,4,5. Καταλήξαμε λοιπόν ότι ο X είναι σύνδεσμος -υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$.

Μια θετική βάση { b_1,b_2, b_3, b_4} του X δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2, b_3, b_4)^T= A^{-1}(x_1,x_2, x_3, x_4)^T$$

Όπου A είναι ο 4x4 πίνακας του οποίου οι στήλες είναι υα διανύσματα β(i), i=2,3,4,5.

Έτσι λοιπόν μια θετική βάση του X είναι η:

$$b_1=(1,1,0,0,0),\ b_2=(\tfrac{1}{2},0,1,0,0),\ b_3=(1,0,0,1,0),\ b_4=(\tfrac{1}{2},0,0,0,1).$$

Παράδειγμα 2.8.4: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα ακόλουθα τέσσερα θετικά και γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^5$.

x_1=(2,3,0,1,0),

x_2=(3,0,1,1,2),

x_3=(2,0,1,0,2),

x_4=(1,0,0,0,2).

Έτσι λοιπόν X=[x_1,x_2,x_3,x_4]. Ακόμα ισχύει ότι $z=x_1+x_2+x_3+x_4$. Δηλαδή:

$$z(k)= x_1(k) +x_2(k) +x_3(k) + x_4(k)\ ,\ k\in\{1,2,3,4,5\}$$

Επομένως : z(1)=8,

z(2)=3,

z(3)=2,

z(4)=2,

z(5)=6.

Ακόμα:

$\beta(k)=\frac{1}{z(k)}(x_1(k),x_2(k),x_3(k), x_4(k))$

Επομένως: $\beta(1)=\frac{1}{8}(2,3,2,1)$,

$\beta(2)=\frac{1}{3}(3,0,0,0)$,

$\beta(3)=\frac{1}{2}(0,1,1,0)$,

$\beta(4)=\frac{1}{2}(1,1,0,0)$,

$\beta(5)=\frac{1}{6}(0,2,2,2)$.

Επειδή λοιπόν ισχύει ότι

$$\beta(1)=\frac{1}{8}\beta(2)+\frac{1}{8}\beta(3)+\frac{1}{8}\beta(4)+\frac{3}{8}\beta(5),$$

δηλαδή το β(1) γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των διανυσμάτων β(2),β(3),β(4),β(5), έχουμε ότι οι ζητούμενοι δείκτες $j_1,j_2,j3,j4$ του D(β) είναι οι 2,3,4,5. Καταλήξαμε λοιπόν ότι ο X είναι σύνδεσμος -υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$.

Μια θετική βάση $\{ b_1,b_2, b_3, b_4\}$ του X δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2, b_3, b_4)^T= A^{-1}(x_1,x_2, x_3, x_4)^T$$

Όπου A είναι ο 4x4 πίνακας του οποίου οι στήλες είναι υα διανύσματα β(i), i=2,3,4,5.

Έτσι λοιπόν μια θετική βάση του X είναι η:

$b_1=(1,3,0,0,0)$, $b_2=(1,0,1,0,0)$, $b_3=(1,0,0,1,0)$, $b_4=(1,0,0,0,2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: COMPLETION BY OPTIONS

3.1 ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Ορισμός 3.1.1:Χρεόγραφο είναι ένα επενδυτικό διαπραγματεύσιμο προϊόν που εκδίδεται από μια κυβέρνηση, μια εταιρία ή κάποιο άλλο οργανισμό και αποτελεί αποδεικτικό χρέους ή δικαίωμα σε διανεμόμενα κέρδη.

Στα χρεόγραφα περιλαμβάνονται τα: ομόλογα, έντοκα γραμμάτια του Ελληνικού Δημοσίου, μερίδια αμοιβαίων κεφαλαίων [ομόλογα τραπεζών], προθεσμιακά συμβόλαια (forwards), συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης, παραστατικά απόκτησης μετοχών (warrants), οι μετοχές κι άλλα προϊόντα που μπορούν να διαπραγματεύονται στη χρηματοπιστωτική αγορά.

Ορισμός3.1.2:Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο προϊόν, αγγλ. underlying asset). Ουσιαστικά, δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Σε κάθε τέτοιο συμβόλαιο υπάρχουν δύο αντισυμβαλλόμενοι. Ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position). Τα υποκείμενα προϊόντα από τα οποία προέρχεται ένα παράγωγο μπορεί να είναι είτε προϊόντα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε μία οργανωμένη δευτερογενή αγορά, όπως ένα χρηματιστήριο, είτε προϊόντα που δεν τίθενται υπό διαπραγμάτευση σε οργανωμένες αγορές. Σε γενικές γραμμές, τα υποκείμενα προϊόντα μπορεί να είναι σχεδόν οτιδήποτε από εμπορεύσιμες μετοχές και ομόλογα μέχρι αγροτικά προϊόντα (π.χ. σιτάρι) και μέταλλα (π.χ. χρυσός).

Οι Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης (options) αποτελούν μια από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγώγων. Είναι παρόμοιες συμβάσεις με τις συμβάσεις μελλοντικής εκπλήρωσης με τη διαφορά ότι οι πρώτες δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, έναντι καταβολής τιμήματος να αγοράσει ή να πουλήσει μία υποκείμενη αξία σε μία συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) έως μία καθορισμένη ημερομηνία λήξης. Από την άλλη ο πωλητής του δικαιώματος, είναι υποχρεωμένος, έναντι είσπραξης τιμήματος να αναλάβει ή παραδώσει την υποκείμενη αξία στον αγοραστή αν αυτός ασκήσει το δικαίωμά του. Οι συμβάσεις δικαιωμάτων προαίρεσης είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο σε ρυθμιζόμενες αγορές, όσο και Over-The-Counter.

Τα δικαιώματα προαίρεσης για αγορά υποκείμενων τίτλων ονομάζονται δικαιώματα αγοράς (call options) και τα δικαιώματα προαίρεσης για πώληση υποκείμενων τίτλων ονομάζονται σε δικαιώματα πώλησης (put options).

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αγορές χρεογράφων (security markets) δύο περιόδων με ένα πεπερασμένο σύνολο δυνατών καταστάσεων $\{1,2,\ldots,m\}$.

Υποθέτουμε ότι στην αγορά, τη χρονική περίοδο 0, διατίθενται *n* χρεόγραφα τα οποία συμβολίζουμε με τους φυσικούς αριθμούς 1,2,. . .,n. Η απόδοση του k-οστού χρεογράφου, k $\in$ {1,2,. . .,n}, είναι ένα διάνυσμα $x_k \in \mathbb{R}^m_+$, του οποίου οι συντεταγμένες είναι η απόδοση του συγκεκριμένου χρεογράφου σε περίπτωση που συμβεί η συγκεκριμένη κατάσταση. Δεχόμαστε ότι οι αποδόσεις $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού συνδέσμου E τον οποίο ονομάζουμε χώρο αποδόσεων. Ο γραμμικός υπόχωρος X του E που παράγεται από τα διανύσματα αυτά λέγεται υπόχωρος διαθέσιμων (marketed securities) και τα διανύσματα που ανήκουν στον X ονομάζονται χαρτοφυλάκια (portfolios). Ο X είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Ορισμός 3.1.3: Με τον όρο χαρτοφυλάκιο ορίζουμε το διάνυσμα $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ του $\mathbb{R}^n$, όπου θ_k είναι ο αριθμός των μονάδων του k-οστού χαρτοφυλακίου.

Τότε η απόδοσή του χαρτοφυλακίου $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$T(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \,, \ \in \mathbb{R}^m$$

Παρατήρηση: Ο τελεστής T είναι 1-1 και για αυτό για κάθε χαρτοφυλάκιο θ μπορούμε να το ταυτίζουμε με την απόδοση του T(θ).

Υπενθύμιση: 1) Θυμίζουμε ότι για κάθε x,y $\in$ E, όπου ο E ο διανυσματικός σύνδεσμος, ορίζουμε με $x \vee y=\sup\{x,y\}$ και $x \wedge y=\inf\{x,y\}$. Ακόμα $x^+=x \vee 0$, $x^-=(-x) \vee 0$ και $|x|=x \vee (-x)$ είναι το θετικό μέρος, το αρνητικό μέρος και η απόλυτη τιμή του x αντίστοιχα.

2) Ένας γραμμικός υπόχωρος Z του E είναι υποσύνδεσμος του E αν για κάθε x,y $\in$ Z, $x \vee y$ και $x \wedge y$ ανήκουν στον Z.

3) Υποθέτουμε τώρα B είναι ένα υποσύνολο του E. Η τομή όλων των υποσυνδέσμων του E που περιέχουν το B είναι και πάλι υποσύνδεσμος και είναι ο μικρότερος υποσύνδεσμος του E που περιέχει το B. Αυτό τον υποσύνδεσμο τον συμβολίζουμε με S(B) και λέμε ότι είναι ο υποσύνδεσμος του E που παράγεται από το B. Αν τώρα [B] είναι ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το B τότε ισχύει ότι S([B])=S(B).

Τα διανυσματικά δικαιώματα προαίρεσης έχουν μια αρχική χρονική στιγμή κατά την οποία εγγράφονται (ημερομηνία εγγραφής) και μια τελική ημερομηνία κατά την οποία λήγουν (ημερομηνία λήξης). Σύμφωνα με το μοντέλο της στοχαστικής οικονομίας που μελετάμε, Ω={1,2,. . .,m} είναι το σύνολο καταστάσεων και T={1,2,. . .,T} το σύνολο των χρονικών περιόδων. Επίσης υποθέτουμε ότι η ροή πληροφορίας δίνεται από μια αύξουσα οικογένεια διαμερίσεων $\{\Delta_t : t \in T\}$ του Ω, με $\Delta_0=\{\Omega\}$ και με $\Delta_T=\{\{1\},\{2\},\ldots,\{m\}\}$, και ότι $F_0, F_1, \ldots, F_T$ είναι η οικογένεια των αλγεβρών που παράγονται από τις αντίστοιχες διαμερίσεις το Ω.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα χρηματοοικονομικό συμβόλαιο (χρεόγραφο) αναπαριστάται από μια στοχαστική ανέλιξη

$$x: T \times \Omega \to \mathbb{R},$$

προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα (filtration) $F=\{F_0,F_1,...,F_T\}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι το χρεόγραφο x αναπαριστάται από τη διανυσματική συνάρτηση $x=(x_0,x_1,...,x_T)$ όπου $x_t:\Omega\to\mathbb{R}$. Η στοχαστική ανέλιξη x παριστάνει τις συνολικές απολαβές του κατόχου κατά τις διάφορες χρονικές στιγμές.

Ορισμός 3.1.4: Για κάθε $x \in E$,$u \in E$ και πραγματικό αριθμό α το διάνυσμα $c_u(x,\alpha)=(x-\alpha u)^+$ είναι το δικαίωμα αγοράς και $p_u(x,\alpha)=(\alpha u-x)^+$ είναι το δικαίωμα πώλησης του χαρτοφυλακίου x ως προς το διάνυσμα εξάσκησης (strike vector) u και τιμή εξάσκησης α.

Ως εκ τούτου έχουμε ότι $p_u(x,\alpha)= (\alpha u-x)^+ = (- x- (-\alpha)u)^+= c_u(-x,-\alpha)$.

Στη κλασική περίπτωση όπου $E=\mathbb{R}^m$ και τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης λαμβάνονται ως προς το χωρίς κίνδυνο διάνυσμα **1**.

Κλασικές περιπτώσεις είναι τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία εγγραφής 0 και ημερομηνία εξάσκησης τ. Το διάνυσμα $c_u(x,k)=(x-k\mathbf{1})^+$ είναι το δικαίωμα αγοράς και $p_u(x,k)=(k\mathbf{1}-x)^+$ είναι το δικαίωμα πώλησης του χαρτοφυλακίου x ως προς το διάνυσμα εξάσκησης **1** με τιμή εξάσκησης k τη χρονική στιγμή τ και 0 οποιαδήποτε άλλη ενδιάμεση χρονική περίοδο.

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης που λαμβάνονται ως προς το διάνυσμα εξάσκησης u, το οποίο ανήκει σε ένα υπόχωρο U του E. Θα χρησιμοποιούμε το U για να ορίσουμε ένα τυχαίο αλλά σταθερό υπόχωρο του E τον οποίο ονομάζουμε υπόχωρο εξάσκησης (strike suspace). Τα στοιχεία του U ονομάζονται διανύσματα εξάσκησης (strike vectors). Η γενίκευση αυτή είναι εμπνευσμένη από μερικά δικαιώματα προαίρεσης στα χρηματοοικονομικά, όπως είναι τα εξωτικά δικαιώματα όπως τα forward-start και lookback δικαιώματα προαίρεσης τα οποία παρουσιάζουμε παρακάτω.

3.2 Τα forward-start και lookback δικαιώματα προαίρεσης

Forward-start

Θεωρούμε το μοντέλο στοχαστικής οικονομίας με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων $\Omega=\{1,2,...,m\}$ και χρεόγραφο με αποδόσεις $x_0,x_1,...,x_T$ τις διάφορες χρονικές περιόδους. Υποθέτουμε ότι στο χρεόγραφο εγγράφεται δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία εγγραφής τη χρονική στιγμή μηδέν και ημερομηνία εξάσκησης τη χρονική στιγμή τ. Ως διάνυσμα εξάσκησης του δικαιώματος λαμβάνεται η απόδοση του συμβολαίου σε κάποια προκαθορισμένη χρονική στιγμή t, με $0 \leq t \leq \tau$. Αν C_i, $i=0,1,2,...$,τα είναι η απόδοση του δικαιώματος τη χρονική στιγμή i, έχουμε ότι $C_i=0$ για κάθε $i \neq \tau$ και $C_\tau=(x_\tau - kx_t)^+$ όπου k είναι η τιμή εξάσκησης. Ανάλογα το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης p έχει αποδόσεις $P_i=0$ για $i \neq \tau$ και $P_\tau=(kx_t - x_\tau)^+$.

Παράδειγμα 3.2.1: Σε στοχαστική οικονομία υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $T=\{0,1,2,3,4\}$ και η διαμέριση της πληροφορίας

$\Delta_0=\{\Omega\}$, $\Delta_1=\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$, $\Delta_2=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\}$, $\Delta_3=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\},\{6\}\}$
$\Delta_4=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$

Έστω χρεόγραφο x με αποδώσεις

$x_0=(0,0,0,0,0,0)$, $x_1=(1,1,1,2,2,2)$, $x_2=(1,1,2,3,3,1)$, $x_3=(1,2,0,2,2,2)$,
$x_4=(2,3,2,1,0,5)$

Το forward-start δικαίωμα αγοράς C ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο x τη χρονική στιγμή 0 με ημερομηνία λήξης $\tau=4$, διάνυσμα εξάσκησης το x_1 και τιμή εξάσκησης $k=1$ έχει αποδώσεις $C_i=0$ για κάθε $i \neq 4$ και $C_4=(x_4-x_1)^+=(1,2,1,0,0,3)$. Το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης P έχει αποδώσεις $P_i=0$ για κάθε $i \neq 4$ και $P_4=(x_1-x_4)^+=(0,0,0,0,2,0)$. Τα forward-start δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να είναι και αμερικανικού τύπου.

Lookback.

Έστω χρεόγραφο με αποδώσεις $x_0,x_1,...,x_T$ στις διάφορες χρονικές περιόδους. Υποθέτουμε ότι στο x εγγράφεται δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία εγγραφής τη χρονική στιγμή t και ημερομηνία εξάσκησης τη χρονική στιγμή $\tau > t$. Ως διάνυσμα εξάσκησης του δικαιώματος λαμβάνεται το $u=\inf\{x_i : t \leq i \leq \tau'\}$, όπου τ' προκαθορισμένη χρονική περίοδος με $t \leq \tau' \leq \tau$. Δηλαδή για κάθε κατάσταση, η τιμή του u είναι ίση με το minimum των αποδόσεων του συμβολαίου στη κατάσταση αυτή στις χρονικές περιόδους μεταξύ της χρονικής στιγμή t και τ'.

Αν C_i, $i=0,1,2,...$, τ είναι η απόδοση του δικαιώματος τη χρονική στιγμή i, έχουμε ότι $C_i=0$ για κάθε $i<\tau'$ και $C_i=(x_\tau-ku)^+$ όπου k είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, για κάθε i ώστε $\tau' \leq i \leq \tau$. Η τ' ονομάζεται ενδιάμεση ημερομηνία και μπορεί να είναι και η τ. Το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης P έχει ως διάνυσμα εξάσκησης το $v=\sup\{ x_i : t \leq i \leq \tau'\}$. Δηλαδή για κάθε κατάσταση, η τιμή του v είναι ίση με το maximum των αποδόσεων του συμβολαίου στη κατάσταση αυτή στις χρονικές περιόδους μεταξύ της χρονικής στιγμής t και τ'.

Παράδειγμα 3.2.2: Στη στοχαστική οικονομία του προηγούμενου παραδείγματος και για το ίδιο χρεόγραφο με αποδώσεις $x_0=(0,0,0,0,0,0)$, $x_1=(1,1,1,2,2,2)$, $x_2=(1,1,2,3,3,1)$, $x_3=(1,2,0,2,2,2)$, $x_4=(2,3,2,1,0,5)$

Το lookback δικαίωμα αγοράς C ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο x τη χρονική στιγμή μηδέν με προκαθορισμένη ημερομηνία t=2, τιμή εξάσκησης k=1 και ενδιάμεση ημερομηνία ίση με την ημερομηνία λήξης τ=4, θα έχει αποδώσεις $C_i=0$ για κάθε $i\neq4$ και $C_4=(x_4\text{-}u)^+=(1,2,2,0,0,4)$, όπου $u=\inf\{x_i:2\leq i\leq4\}=(1,1,0,1,0,1)$, είναι το διάνυσμα εξάσκησης. Το αντίστοιχο lookback δικαίωμα πώλησης P ευρωπαϊκού τύπου που εγγράφεται στο χρεόγραφο x με προκαθορισμένη ημερομηνία t=3, τιμή εξάσκησης k=1 και ενδιάμεση ημερομηνία την ημερομηνία λήξης τ=4, έχει αποδώσεις $P_i=0$ για $i\neq4$ και $P_4=(v\text{-}x_4)^+=(0,0,0,1,2,0)$ όπου $v=\max\{x_i:2\leq i\leq4\}=(2,3,2,3,3,5)$ είναι το διάνυσμα εξάσκησης.

3.3 ΠΛΗΡΩΣΗ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΜΕ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ

Όπως αναφέρει ο Nachman D.C (1988), ο ρόλος των συνήθη δικαιωμάτων προαίρεσης στη διευκόλυνση της πλήρωσης μιας οικονομίας χρεογράφων (security markets) εξετάζεται στο πλαίσιο ενός μοντέλου ενδεχόμενων δικαιωμάτων, επαρκώς γενικευμένων, για να περιλαμβάνουν όλες τις συνεχείς κατανομές της θεωρίας τιμολόγησης κεφαλαίου (asset pricing) και τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης (options pricing theory). Ο Nachman D.C (1988), έδειξε ότι τα δικαιώματα αγοράς (call options) που εγγράφονται σε ένα χρεόγραφο παράγουν περίπου(με την έννοια του μέτρου Lebesgue) όλα τα ενδεχόμενα δικαιώματα προαίρεσης σε αυτό το χρεόγραφο. Ακόμα έδειξε ότι τα δικαιώματα αγοράς που είναι εγγραμμένα σε χαρτοφυλάκια δικαιωμάτων αγοράς που είναι εγγεγραμμένα σε διαφορετικά πρωταρχικά χρεόγραφα (primitive securities) παράγουν περίπου(με την έννοια του μέτρου Lebesgue) όλα τα ενδεχόμενα δικαιώματα που είναι εγγεγραμμένα σε αυτά τα πρωταρχικά χρεόγραφα.

Ο ρόλος των πλήρη οικονομιών (complete markets) ενδεχόμενων δικαιωμάτων στη βέλτιστη κατανομή της επιβάρυνσης κινδύνου (ρίσκο) είναι γνωστός από τους Arrow(1964), Debreau (1959) και είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της οικονομικής θεωρίας των χρηματοοικονομικών αγορών. (Mossin 1977).

Σαν συνέπεια, είναι σημαντικό από πρακτικής πλευράς, να καθορίσουμε πόσο περίπλοκες πρέπει να είναι οι αγορές χρεογράφων ούτως ώστε να πετυχαίνεται (allocational efficiency) αποτελεσματική κατανομή. (Δηλαδή η αγορά να ικανοποιεί τα απαιτούμενα - να είναι πληροφοριακά αποτελεσματική (δηλ όλοι να έχουν την ίδια πρόσβαση στη πληροφορία) και να υπάρχουν αποτελεσματικές συναλλαγές (δίκαιη αγορά)).

Αν όλες οι συνθήκες ισχύουν τότε σύμφωνα με τους John (1981,1984) και Amershi(1985) οι ροές κεφαλαίου κατευθύνονται σε αγορές στις οποίες θα είναι πιο αποτελεσματικές παρέχοντας ένα βέλτιστο σενάριο ρίσκου/απόδοσης για τους επενδυτές.

Η συνεισφορά του Ross (1976) , που αφορά τη περιπλοκότητα των πλήρη οικονομιών χρεογράφων (complete security markets) έδωσε το έναυσμα για την ανάλυση του ρόλου των συνήθη δικαιωμάτων προαίρεσης στη πλήρωση των αγορών. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα του Ross είναι το παρακάτω:

Ορισμός3.3.1: Ένα διάνυσμα $x \in X$ ονομάζεται αποτελεσματικό ομόλογο (efficient fund) αν για κάθε $i,j \in \Omega$ με $i \neq j$ ισχύει ότι $x(i) \neq x(j)$.

Θεώρημα(Ross (1976)) 3.3.1: Αν υπάρχει χαρτοφυλάκιο efficient fund $x \in X$ τότε η πλήρωση $F_1(X)$ του X είναι ολόκληρος χώρος αποδόσεων $\mathbb{R}^m$.

Παρόλα τα σημαντικά αποτελέσματα στην θεωρία της πλήρωσης των αγορών, η εύρεση της πλήρωσης της αγοράς μέσω δικαιωμάτων δεν ήταν δυνατή μέχρι πρόσφατα.

Ο Polyrakis(1999) απέδειξε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να καθορίσουμε τη πλήρωσης της αγοράς μέσω της εύρεσης μιας θετικής της βάσης. Σύμφωνα με τον Polyrakis(1999), μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση ότι οι πρωταρχικοί τίτλοι και τα διανύσματα εξάσκησης είναι απαραίτητα θετικά. Επιπλέον είναι γνωστό ότι τα δικαιώματα προαίρεσης δεν ανήκουν γενικά στο χώρο διαθέσιμων X.

Η πλήρωση της οικονομίας (market) είναι ο υπόχωρος του χώρου αποδόσεων E ο οποίος προκύπτει επαγωγικά προσθέτοντας στην οικονομία (market) τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης των χρεογράφων και παίρνοντας ξανά δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Δηλαδή λαμβάνοντας όλα τα πιθανά δικαιώματα προαίρεσης που μπορούν να εγγραφούν στην αγορά.

Ορίζουμε αυτό τον υπόχωρο ως εξής:

Ορίζουμε με O_1 το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που εγγράφονται στα στοιχεία του X (υπενθ. Ο X είναι ο χώρος των διαθέσιμων) , δηλαδή $O_1=\{c_u(x,\alpha): x \in X, u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Στη συνέχεια δηλώνουμε με X_1 τον υπόχωρο του E που παράγεται από τον O_1.

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $O_n=\{c_u(x,\alpha): x \in X_{n-1}, u \in U, \alpha \in \mathbb{R}\}$, το σύνολο των δικαιωμάτων αγοράς που εγγράφονται στα στοιχεία του X_{n-1} και με X_n τον υπόχωρο του E που παράγεται από το σύνολο O_n.

Παρατήρηση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $X_n \subseteq X_{n+1}$. Πράγματι, γιατί $x=x^+-x^-=c_u(x,0) - c_u(-x,0) \in X_{n+1}$ για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 3.3.2: Ο χώρος $F_U(X)= \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι η πλήρωση με δικαιώματα προαίρεσης (completion by options) του X ως προς το χώρο εξάσκησης U.

Σημείωση: Αν U είναι ένας μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται από ένα διάνυσμα u του E, τότε τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης λαμβάνονται ως προς το σταθερό διάνυσμα u. Ακόμα αντί να γράφουμε $F_U(X)$ γράφουμε $F_u(X)$ και λέμε ότι ο $F_u(X)$ είναι η πλήρωση με options του X ως προς το διάνυσμα u.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε με Y τον υπόχωρο του E που παράγεται από το σύνολο X∪U. Δηλ.

$$Y=\{\lambda x+\alpha u : x\in X, u\in U \text{ και } \lambda,\alpha\in\mathbb{R}\}$$

Ορίζουμε επίσης τα παρακάτω σύνολα ως εξής:

$S_2=\{x\vee y : x,y \in Y\}$ και $S_n=\{ x\vee y : x\in S_{n-1}, y \in Y\}$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Εφόσον, όπως είδαμε στην υπενθύμιση, ο S(Y) είναι ο υποσύνδεσμος του E που παράγεται από τον Y με τα supremum των πεπερασμένων υποσυνόλων του Y συνεπάγεται ότι :

$$S(Y)=\bigcup_{n=2}^{\infty} S_n$$

Θεώρημα 3.3.2: Έστω σύνδεσμος E ο χώρος αποδόσεων , X υπόχωρος του E ο χώρος διαθέσιμων και X_n,S_n όπως παραπάνω, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε ισχύουν τα εξής:

1. $Y\subseteq X_1$
2. $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος S(Y) του E που παράγεται από τον Y.
3. Αν $U\subseteq X$, τότε $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος του E που παράγεται από τον X.

Απόδειξη:

1. Για κάθε $y=x+\alpha u \in Y$ έχουμε ότι :
$y=(x+\alpha u)^+ -(-x-\alpha u)^+=c_u(x,-\alpha)- c_u(-x,\alpha) \in X_1$ άρα το (1) ισχύει.
2. Θα δείξουμε ότι $F_U(X)\subseteq S(Y)$ και ότι $S(Y)\subseteq F_U(X)$. Για να δείξουμε ότι $F_U(X)\subseteq S(Y)$ αρκεί να δείξουμε ότι $X_n\subseteq S(Y)$ για κάθε n, λόγω του ορισμού του $F_U(X)$. Για κάθε $y\in O_1$ έχουμε $y=c_u(x,\alpha)= (x-\alpha u)^+= \quad =(x-\alpha u)\vee 0$, για κάποιο $x\in X$, $u\in U$ και $\alpha\in\mathbb{R}$, για αυτό έχουμε ότι $y\in S_2\subseteq S(Y)$ γιατί $x-\alpha u \in Y$. Οπότε το O_1 και ο X_1 περιέχονται S(Y).
Υποθέτουμε τώρα ότι $X_n\subseteq S(Y)$. Για να δείξουμε ότι $X_{n+1}\subseteq S(Y)$ αρκεί να δείξουμε ότι $O_{n+1}\subseteq S(Y)$. Για κάθε $z\in O_{n+1}$ έχουμε ότι $z=(x-\alpha u)\vee 0$ για κάποιο $x\in X_n$, $u\in U$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Ακόμα, αφού $X_n\subseteq S(Y)$ έχουμε ότι $x\in S_k$ για κάποιο k. Επίσης $z=-\alpha u+(x\vee\alpha u)$ οπότε $z\in Y + S_{k+1}\subseteq S(Y)+S(Y)=S(Y)$. Για αυτό $O_{n+1}\subseteq S(Y)$. Άρα $X_{n+1}\subseteq S(Y)$ το οποί συνεπάγεται ότι $F_U(X)\subseteq S(Y)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $S(Y) \subseteq F_U(X)$. Έστω $y \in S_2$. Τότε $y=z \vee x$ όπου $z,x \in Y$. Για αυτό $y=(z_1+\alpha_1 u_1) \vee (z_2+\alpha_2 u_2)$ όπου $z_1, z_2 \in X$, $u_1, u_2 \in U$ και $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Οπότε $y= z_2+ \alpha_2 u_2 +(z_1- z_2 - (\alpha_2 u_2 - \alpha_1 u_1)) \vee 0 \in Y+X_1$. Αφού $Y \subseteq X_1$, συνεπάγεται ότι $y \in X_1 + X_1 = X_1$ και για αυτό $S_2 \subseteq F_U(X)$. Έστω τώρα ότι $S_n \subseteq F_U(X)$ για κάποιο n. Τότε για κάθε $z \in S_{n+1}$ ισχύει ότι $z=x \vee y$ με $x \in S_n$, $y \in Y$. Από την υπόθεση μας ότι $S_n \subseteq F_U(X)$ συνεπάγεται ότι $x \in X_k$ για κάποιο k. Αφού $Y \subseteq X_k$ έχουμε ότι $x-y \in X_k$. Όμως $z= y+ (x-y) \vee 0$, ως εκ τούτου $z=y+c_u(x-y,0) \in Y+X_{k+1} \subseteq X_{k+1}+ X_{k+1}= X_{k+1}$, οπότε $z \in F_U(X)$ και $S_{n+1} \subseteq F_U(X)$. Έτσι $S_m \subseteq F_U(X)$ για κάθε m, και για αυτό $S(Y) \subseteq F_U(X)$. Οπότε $S(Y)= F_U(X)$ και η πρόταση (2) αποδείχτηκε.

3. Αν $U \subseteq X$ τότε έχουμε ότι $X=Y$ οπότε $S(Y)= F_U(X)$.

□

Έστω ότι ο E είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Αν τα όρια των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης θεωρούνται επίσης διαθέσιμα, είναι φυσικό να ορίσουμε τη κλειστότητα της πλήρωσης του X ως εξής.

Ορισμός 3.3.3: Η κλειστότητα του $F_U(X)$ στον E είναι η κλειστή πλήρωση του X ως προς τον χώρο εξάσκησης U.

Αν τώρα $E=\mathbb{R}^m$, η πλήρωση με options του X και η κλειστή πλήρωση με options του X ταυτίζονται γιατί κάθε υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ είναι κλειστός.

Σε αυτό το σημείο θα θυμίσουμε κάποια στοιχεία της θεωρίας των διατεταγμένων χώρων και των θετικών βάσεων του $\mathbb{R}^m$.

3.4 Υποσυνδέσμοι και θετικές βάσεις του $\mathbb{R}^m$.

Σε αυτή τη παράγραφο θα θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_m): x_i \in \mathbb{R} \ \forall\ i\}$ σαν ένα διατεταγμένο χώρο με τη κατά σημείο διάταξη, δηλαδή για κάθε $x,y \in \mathbb{R}^m$ έχουμε ότι $x \geq y$ αν και μόνο αν $x_i \geq y_i$, $\forall\ i=1,2,\ldots,m$.

Ορισμός 3.4.1: Ο θετικός κώνος του $\mathbb{R}^m$ ορίζεται ο χώρος $\mathbb{R}_+^m=\{x \in \mathbb{R}^m: x_i \geq 0 \ \forall\ i\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι L είναι ένας διατεταγμένος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ σύμφωνα με την κατά σημείο διάταξη.

Ορισμός 3.4.2: Ορίζουμε ως θετικό κώνο του L το σύνολο $L_+=L \cap \mathbb{R}_+^m$.

Υπενθύμιση 3.4.1: Μια βάση Schauder $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ του L, είναι θετική βάση του L αν $L_+=\{x=\sum_{n=1}^{r} \lambda_n b_n: \lambda_n \in \mathbb{R}_+\}$. Δηλαδή η βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ είναι θετική αν για κάθε $x \in L$ έχουμε ότι το x είναι θετικό αν και μόνο αν οι συντελεστές λ_n της βάσης είναι θετικοί.

Παρόλο που ο L έχει άπειρες βάσεις, η ύπαρξη θετικής βάσης του L δεν είναι πάντοτε δυνατή. Επιπλέον, δείξαμε ότι ο L έχει θετική βάση αν και μόνο αν ο L είναι ένας σύνδεσμος υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Υπενθύμιση 3.4.2: Ο L είναι υποσύνδεσμος (sublattice) του $\mathbb{R}^m$ αν για κάθε $x,y\in L$, ισχύει ότι $x\vee y, x\wedge y \in L$.

Υπενθύμιση 3.4.5: Ακόμα, όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ έχει θετική βάση.

Υπενθύμιση 3.4.6: Έστω τώρα ότι $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ είναι μια θετική βάση του L, τότε ισχύει ότι για κάθε $x=\sum_{n=1}^{r}\lambda_n b_n$, $y=\sum_{n=1}^{r}\mu_n b_n$, $x\geq y$ αν και μόνο αν $\lambda_n \geq \mu_n$ για κάθε $n=1,2,\ldots,r$.

Υπενθύμιση 3.4.7: Έστω τώρα ότι $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ είναι μια θετική βάση του L. Τότε κάθε b_n είναι ακραίο σημείο του L_+. (Θυμίζουμε ότι ένα σημείο x_0 του L_+ είναι ακραίο σημείο του L_+ αν για κάθε $x\in L$ ισχύει ότι $0\leq x\leq x_0$ συνεπάγεται ότι $x=\lambda x_0$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$).

Υπενθύμιση 3.4.8: Στήριγμα ενός διανύσματος $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ του $\mathbb{R}^m$ είναι το σύνολο $supp(x)=\{i\in\{1,2,\ldots,m\}: x_i\neq 0\}$.

Πρόταση 3.4.1: Ένας διατεταγμένος υπόχωρος Z του $\mathbb{R}^m$ με μια θετική βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ είναι ένας υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $supp(b_i)\cap supp(b_j)=\emptyset$ για κάθε $i\neq j$.

Πρόταση 3.4.2: Αν Z είναι ένας υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ με μια θετική βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$, τότε για κάθε $x=\sum_{n=1}^{r}\lambda_n b_n$, $y=\sum_{n=1}^{r}\mu_n b_n$, $\in Z$ έχουμε ότι

i. $\lambda_n=\frac{x(k)}{b_n(k)}$, όπου $k\in supp(b_n)$
ii. $x\vee y=\sum_{n=1}^{r}(\lambda_n \vee\mu_n)b_n$ και $x\wedge y=\sum_{n=1}^{r}(\lambda_n \wedge\mu_n)b_n$

Πρόταση 3.4.3: Έστω ότι Z είναι ένας υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$. Αν το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)$ είναι στοιχείο του Z, τότε ο Z έχει μια θετική βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ η οποία είναι διαμέριση της μονάδας, δηλαδή $\mathbf{1}=\sum_{n=1}^{r}b_n$ και για κάθε διάνυσμα b_n ισχύει ότι $b_n(j)=1$ για κάθε $j\in supp(b_n)$

Πρόταση 3.4.4: Έστω ότι ο Z είναι ένας υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ με μια θετική βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$. Τότε για κάθε n το διάνυσμα b_n έχει ελάχιστο στήριγμα στο Z, δηλαδή δεν υπάρχει $x\in Z$, $x\neq 0$, τέτοιο ώστε $supp(x)\subsetneq supp(b_n)$.

Έστω τώρα $z_1,z_2,\ldots,z_r$ σταθερά, γραμμικώς ανεξάρτητα, και θετικά διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ και Z είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα z_n. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του Polyrakis (1999) για το καθορισμό μιας θετικής βάσης του υποσυνδέσμου W του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{z_1,z_2,\ldots,z_r\}$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $\beta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ που ορίζεται ως εξης:

$$\beta(i)= \left(\frac{z_1(i)}{z(i)}, \frac{z_2(i)}{z(i)}, \ldots, \frac{z_n(i)}{z(i)}\right) \text{ για κάθε } i\in\{1,2,\ldots,m\} \text{ με } z(i)>0.$$

Όπου $z(i)=z_1(i)+z_2(i)+\ldots+z_r(i)$. Η συνάρτηση β ονομάζεται βασική συνάρτηση των $z_1,z_2,\ldots,z_r$.

Ο παραπάνω ορισμός δόθηκε από τον Polyrakis (1999) και είναι σημαντικός όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τη μελέτη των θετικών βάσεων. Επιπλέον ορίσαμε με $R(\beta)=\{\beta(i): i=1,2,\ldots,m \text{ με } z(i)>0\}$ και $cardR(\beta)$ του $R(\beta)$ να είναι η διάσταση του $R(\beta)$

Θεώρημα (Polyrakis (1999)3.6) 3.4.1: Ο υπόχωρος Z, όπου Z ο υπόχωρος που παράγεται από τα $z_1,z_2,\ldots,z_r$ σταθερά , γραμμικώς ανεξάρτητα, και θετικά διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ είναι υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $cardR(\beta)=r$.

Δείξαμε ακόμα ότι αν $R(\beta)=\{P_1,P_2,\ldots,P_r\}$, μια θετική βάση $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$, του Z δίνεται ως εξής:

$$(b_1,b_2,\ldots,b_r)^T=A^{-1}(z_1,z_2,\ldots,z_r)^T$$

Όπου A είναι ο rxr πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n, για κάθε $n=1,2,\ldots,r$.

Θεώρημα (Plolyrakis (1999), Theorem 3.5)3.4.2: Έστω $R(\beta)=\{P_1,P_2,\ldots,P_r\}$, X ένας σύνδεσμος υπόχωρος και έστω $\{b_1,b_2,\ldots,b_r\}$ η θετική βάση του X και $I_i=b^{-1}_i(0,+\infty)$ για κάθε i. Τότε τα επόμενα ισχύουν.

1. Ο X είναι υποσύνδεσμος του $C(\Omega)$.
2. $I_i=\beta^{-1}(P_i)$ για κάθε i και $D(\beta)=\bigcup_{i=1}^{r} I_i$.
3. Αν $y_i, i=1,2,\ldots,\mu$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του X_+ και γ η βασική καμπύλη του y_i, $i=1,2,\ldots,\mu$ τότε υπάρχει $\Phi\subseteq\{1,2,\ldots,r\}$ τέτοιο ώστε
   i. $D(\gamma)= \bigcup_{i\in\Phi} I_i$,
   ii. Η συνάρτηση γ είναι σταθερή στο I_i, για κάθε $i\in\Phi$.
   iii. $\mu\leq l\leq r$, όπου l ο πληθάριθμος του $R(\gamma)$.

Θεώρημα (Plolyrakis (1999), Theorem 3.7) 3.4.3: Έστω Z ο υποσύνδεσμος του $C(\Omega)$ (για $\Omega=\{1,2,\ldots,m\}$ $C(\Omega)=\mathbb{R}^m$) που παράγεται από τα διανύσματα $\{z_1,z_2,\ldots,z_r\}$ και έστω $\mu\in\mathbb{N}$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. $\dim(Z)=\mu$.
2. $R(\beta)=\{P_1,P_2,\ldots,P_\mu\}$.

Αν τώρα η πρόταση (2) ισχύε,ι τότε ο Z κατασκευάζεται ως εξής:

a. Απαριθμώ τον R(β) έτσι ώστε τα r πρώτα διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλώνουμε ξανά με P_i, i=1,2, . . .,μ την νέα απαρίθμηση και έστω τα σύνολα $I_i=\beta^{-1}(P_i)$, i=1,2,. . .,μ.
b. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$z_{r+k}(t)=\alpha_k(t)\|r(t)\|_1$, t$\in$Ω, k=1,2, . . .,μ-r, όπου α_k είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του I_{n+k} και $r(t)=(z_1(t),z_2(t),\ldots,z_r(t))$.

c. $Z=[z_1,z_2,\ldots,z_r,z_{r+1},\ldots,z_\mu]$.
d. Μια θετική βάση { $b_1,b_2,\ldots,b_\mu$} του Z κατασκευάζεται ως εξής. Θεωρούμε τη βασική καμπύλη γ των $z_1,z_2,\ldots,z_r,z_{r+1},\ldots,z_\mu$ και έστω $\{P_1',P_2',\ldots,P_\mu'\}$ είναι το R(γ) (το R(γ) έχει ακριβώς μ σημεία).

Τότε

$$(b_1,b_2,\ldots,b_\mu)^T=D^{-1}(z_1,z_2,\ldots,z_\mu)^T$$

Όπου D είναι ο μxμ πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n', για κάθε n=1,2,. . .,μ.

Απόδειξη: Έστω τώρα ότι το 2 ισχύει και ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις (a),(b). Θα δείξουμε ότι ισχύει η (c). Είναι προφανές ότι μ≥r. Τα σύνολα I_i είναι ανοικτά υποσύνολα του D(β) γιατί τα τα σύνολα $\{P_i\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του R(β). Επιπλέον, $D(\beta)=\bigcup_{i=1}^{\mu} I_i$. Διότι το D(β) είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Ω, άρα τα σύνολα I_i είναι ανοικτά, μη κενά υποσύνολα του Ω. Ακόμα $\partial(I_i)\cap I_j=\emptyset$. Ως εκ τούτου $\partial(I_i)\subseteq\Omega\setminus D(\beta)$, οπότε $\|r(t)\|_1=0$ για κάθε t$\in\partial(I_i)$. Αυτό συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις z_{r+k} είναι συνεχείς, οπότε $z_{r+k}\in C_+(\Omega)$ για κάθε k. Έστω u το γράφημα γ το γράφημα της βασικής συνάρτησης των z_i, i=1,2,. . .,μ. Τότε από των ορισμό των z_{r+k} έχουμε ότι

u(t)=(r(t),0) για κάθε t$\in\bigcup_{i=1}^{r} I_i$ και u(t)=(r(t), $\|r(t)\|_1 e_{i-r}$) για κάθε t$\in I_i$ i>r.

Έστω t$\in I_i$. Τότε

$$\gamma(t)=(\beta(t),0)=(P_i,0)=Q_i, \text{ αν } i\leq r$$

και

$$\gamma(t)=\frac{1}{2}(\beta(t), e_{i-r})= \frac{1}{2}(P_i, e_{i-r})= Q_i, \text{ αν } i=r+1,\ldots,\mu.$$

Αφού $D(\gamma)=D(\beta)= \bigcup_{i=1}^{\mu} I_i$, έχουμε ότι

$$R(\gamma)=\{Q_i:i=1,2,\ldots,\mu\}$$

Τα διανύσματα Q_i, i=1,2,. . .,μ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ως εκ τούτου οι συναρτήσεις z_i,i=1,2,. . .,μ, είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητες, για αυτό ο υπόχωρος Y που παράγεται από τα z_i,i=1,2,. . .,μ, είναι ένας μ-διάστατος υποσύνδεσμος του C(Ω), σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Για αυτό Z⊆Y. Αφού z_i,i=1,2,. . .,r, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του Z_+ και ο πληθάριθμος του R(β) είναι μ, από τη (ιι) του θεωρήματος 3.5 έχουμε ότι μ≤dimZ. Για αυτό dimZ=μ. Ως εκ τούτου Z=Y.

Έστω τώρα ότι η πρόταση (1) είναι αληθής. Τότε τα z_i,i=1,2,. . .,r είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του Z_+, οπότε από το θεώρημα 3.5 υπάρχει μη κενό σύνολο Φ του {1,2,. . .,μ} και μη κενά, ανά δύο ξένα, ανοικτά υποσύνολα I_i,i∈Φ, του Ω τέτοια ώστε D(β)= $\bigcup_{i\in\Phi} I_i$ και η β να είναι σταθερή σε κάθε I_i. Άρα R(β)={P_1,P_2, . . .,P_l} όπου l ο πληθάριθμος του Φ. Από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι r≤l≤μ. Όπως δείξαμε προηγουμένως μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα l-διάστατο υποσύνδεσμο Y του Ω που να περιέχει τα z_i,i=1,2,. . .,r. Ως εκ τούτου, Z⊆Y και μ≤l. Άρα μ=l και η πρόταση (2) είναι αληθής.

□

3.5 Πλήρωση με Options στον $\mathbb{R}^m$

Στη παράγραφο αυτή συνεχίζουμε τη θεωρία των αγορών χρεογράφων (security markets) με την υπόθεση ότι E= $\mathbb{R}^m$. Όπως δείξαμε στην αρχή του κεφαλαίου, η πλήρωση με δικαιώματα (completion by options) $F_U(X)$ του X ως προς το χώρο εξάσκησης (strike space) U είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από τον Y, όπου Y ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από το σύνολο X∪U. Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια μέθοδο για τη κατασκευή του υποσυνδέσμου του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων θετικών διανυσμάτων του $\mathbb{R}^m$. Σε αυτή τη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο για να καθορίσουμε τη πλήρωση με δικαιώματα (completion by options) $F_U(X)$ του X ως προς το χώρο εξάσκησης (strike space) U.

Ορισμός 3.5.1: Κάθε σύνολο {y_1,y_2, . . .,y_r} όπου y_i γραμμικώς ανεξάρτητα θετικά διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε ο $F_U(X)$ να είναι ο υποσύνδεσμος του $\mathbb{R}^m$ που παράγεται από το σύνολο {y_1,y_2, . . .,y_r}, ονομάζεται βασικό σύνολο της οικονομίας (market).

Ορισμός 3.5.2: Δηλώνουμε με $\mathcal{A}$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{A}=\{x_1^+,x_1^-,x_2^+,x_2^-, \dots,x_n^+,x_n^-\}, \text{ αν } U\subseteq X$$

Και

$$\mathcal{A}=\{x_1^+,x_1^-,x_2^+,x_2^-, \dots,x_n^+,x_n^-, u_1^+,u_1^-,u_2^+,u_2^-,\dots, u_d^+,u_d^-,\}, \text{ αν } U\nsubseteq X$$

όπου { u_1,u_2, . . .,u_d} είναι μια βάση του U.

Θυμίζουμε το παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.5.3: Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και υποσύνολο του U. Αν $r \leq n$ λέμε ότι το σύνολο $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$ είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα αν τα στοιχεία $u_1,u_2,\ldots,u_r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και τα στοιχεία $u_1,u_2,\ldots,u_r,u_i$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα για κάθε $i>r$.

Θεώρημα 3.5.1: Κάθε μεγιστικό (maximal) υποσύνολο $\{y_1,y_2,\ldots,y_r\}$ γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathcal{A}$ είναι ένα βασικό σύνολο της οικονομίας.

Απόδειξη: Εφόσον $\{y_1,y_2,\ldots,y_r\}$ είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathcal{A}$, αυτά τα δύο σύνολα παράγουν τον ίδιο γραμμικό υπόχωρο και άρα το εν ίδιο υποσύνδεσμο στον $\mathbb{R}^m$. Έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι $F_U(X)$ είναι ο υποσύνδεσμος $S(\mathcal{A})$ που παράγεται από το σύνολο $\mathcal{A}$. Για κάθε $x \in X \cup U$ έχουμε ότι $x^+,x^- \in F_U(X)$, και για αυτό $\mathcal{A} \subseteq F_U(X)$ και $S(\mathcal{A}) \subseteq F_U(X)$. Για το αντίστροφο έχουμε ότι $x_i=x_i^+-x_i^- \in S(\mathcal{A})$ και έτσι $u_i=u_i^+-u_i^-$, για κάθε i. Εφόσον ο $F_U(X)$, είναι ο ελάχιστος υποσύνδεσμος ο οποίος περιέχει το σύνολο $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,u_1,u_2,\ldots,u_d\}$ και $S(\mathcal{A})$ είναι ένας υποσύνδεσμος που περιέχει αυτό το σύνολο και συνεπάγεται ότι $F_U(X) \subseteq S(\mathcal{A})$ και άρα $F_U(X)= S(\mathcal{A})$

□

Έστω τώρα $\{z_1,z_2,\ldots,z_r\}$ ένα βασικό σύνολο της οικονομίας. Θυμίζουμε ότι

$\beta(i)= \left(\frac{z_1(i)}{z(i)},\frac{z_2(i)}{z(i)},\ldots,\frac{z_r(i)}{z(i)}\right)$ για κάθε $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ με $z(i)>0$.

Όπου $z(i)=z_1(i)+z_2(i)+\ldots+z_r(i)$. Η συνάρτηση β ονομάζεται βασική συνάρτηση των $z_1,z_2,\ldots,z_r$. Θυμίζουμε ακόμα ότι $R(\beta)$ είναι το πεδίο τιμών του β, $D(\beta)$ το πεδίο ορισμού και $\mathrm{card}R(\beta)$ ο πληθάριθμος του $R(\beta)$.

Από τα θεωρήματα 3.4.1,3.4.3 προκύπτουν τα παρακάτω κριτήρια για τη πλήρωση του X.

Θεώρημα 3.5.2: Ο χώρος X, των διαθέσιμων χρεογράφων (marketed securities) ,που παράγεται από n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, είναι πλήρης ως προς τα δικαιώματα προαίρεσης (complete by options) ως προς το χώρο εξάσκησης U αν και μόνο αν $U \subseteq X$ και $\mathrm{card}R(\beta)=n$.

Θεώρημα 3.5.3: Η διάσταση του $F_U(X)$ είναι ίση με τον πληθάριθμο του $R(\beta)$. Για αυτό $F_U(X)= \mathbb{R}^m$ αν και μόνο αν $\mathrm{card}R(\beta)=m$.

3.6 Αλγόριθμος για το προσδιορισμό της πλήρωσης μιας αγοράς χρεογράφων.

Με χρήση των θεωρημάτων 3.5.2,3.5.3 μπορούμε να ελέγξουμε αν ο X είναι πλήρης μέσω δικαιωμάτων προαίρεσης ή όχι ελέγχοντας το πλήθος του συνόλου τιμών της βασικής συνάρτησης β ενός βασικού συνόλου διανυσμάτων.

Παράδειγμα 3.6.1: Υποθέτουμε ότι ο χώρος των αποδόσεων είναι ο $\mathbb{R}^9$ και

x_1=(1,3,2,1,3,1,0,3,2), x_2=(3,2,0,3,2,3,1,2,0), x_3=(1,1,1,1,1,1,4,1,1), x_4=(3,2,0,3,2,3,0,2,0),

είναι οι αποδόσεις των πρωταρχικών χρεογράφων μιας αγοράς X που παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα x_1,x_2,x_3,x_4. Υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος εξάσκησης παράγεται από ένα διάνυσμα u$\in$X. Σύμφωνα με τα παραπάνω ένα μεγιστικό υποσύνολο του $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ αποτελούμενο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς και επομένως το $\{y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3,y_4=x_4\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς. Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_i, i=1,2,3,4 είναι

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

όπου $y=y_1+y_2+y_3+y_4=(8,8,3,8,8,8,5,8,3)$

άρα έχουμε: $\beta(1)=\frac{1}{8}(1,3,1,3)$ $\beta(5)=\frac{1}{8}(3,2,1,2)$

$\beta(2)=\frac{1}{8}(3,2,1,2)$ $\beta(6)=\frac{1}{8}(1,3,1,3)$

$\beta(3)=\frac{1}{3}(2,0,1,0)$ $\beta(7)=\frac{1}{5}(0,1,4,0)$

$\beta(4)=\frac{1}{8}(1,3,1,3)$ $\beta(8)=\frac{1}{8}(3,2,1,2)$

$\beta(9)=\frac{1}{3}(2,0,1,0)$

Άρα έχουμε ότι

$$\beta(1)=\beta(4)=\beta(6)=\frac{1}{8}(1,3,1,3)=P_1$$

$$\beta(2)=\beta(5)=\beta(8)=\frac{1}{8}(3,2,1,2)=P_2$$

$$\beta(3)=\beta(9)=\frac{1}{3}(2,0,1,0)=P_3$$

$$\beta(7)=\frac{1}{5}(0,1,4,0)=P_4$$

Επομένως το σύνολο τιμών R(β) της βασικής συνάρτησης β είναι το

$$R(\beta)=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

Άρα έχουμε ότι cardR(β)=dimX=4 και επιπλέον U⊆X. Από το θεώρημα 3.5.2 συνεπάγεται ότι η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων του X υπάρχει.

Παράδειγμα 3.6.2: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ που παράγεται από τα παρακάτω τέσσερα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^5$

$x_1=(2,3,0,1,0) \qquad x_2=(3,0,1,1,2)$

$x_3=(2,0,1,0,2) \qquad x_4=(1,0,0,0,2)$

Υποθέτουμε ότι ο χώρος εξάσκησης U παράγεται από ένα διάνυσμα u του X. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω ένα μεγιστικό υποσύνολο του Σύμφωνα με τα παραπάνω ένα μεγιστικό υποσύνολο του $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ αποτελούμενο από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς και επομένως το $\{y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3,y_4=x_4\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της αγοράς. Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_i, i=1,2,3,4 είναι

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,y_4)$$

όπου $y=y_1+y_2+y_3+y_4=(8,3,2,2,6)$

Άρα $\quad \beta(1)=\frac{1}{8}(2,3,2,1) \qquad \beta(2)=\frac{1}{3}(3,0,0,0)$

$\beta(3)=\frac{1}{2}(0,1,1,0) \qquad \beta(4)=\frac{1}{2}(1,1,0,0)$

$\beta(5)=\frac{1}{6}(0,2,2,2)$

Παρατηρούμε ότι:

$$\beta(1)=\frac{1}{8}\,\beta(2)+\frac{1}{8}\,\beta(3)+\frac{1}{8}\beta(4)+\frac{3}{8}\beta(5)$$

Το β(1) δηλαδή γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων β(2),β(3),β(4),β(5). Οπότε, θέτοντας

$\beta(2)=P_1$, $\beta(3)=P_2$,$\beta(4)=P_3$ και $\beta(5)=P_4$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της R(β) της βασικής συνάρτησης β παράγεται από τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ και άρα cardR(β)=4=dimX. Από το θεώρημα 3.5.2 συνεπάγεται ότι η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων του X υπάρχει αφού $U\subseteq X$.

Παράδειγμα 3.6.3: Έστω ότι ο χώρος των αποδόσεων είναι ο $\mathbb{R}^{13}$ και

$x_1=(2,8,2,-4,20,-16,0,-12,0,0,-4,-16,4) \qquad x_2=(6,8,6,0,20,0,4,0,4,6,0,0,0)$
$x_3=(4,8,4,1,20,4,12,3,2,18,0,0,4)$

είναι τα πρωταρχικά χρεόγραφα μιας αγοράς X. Ο υπόχωρος U είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα εξάσκησης

$u=(4,0,4,2,0,8,-12,6,-2,-18,0,0,0)$

Παρατηρούμε ότι $u \notin X$ διότι δεν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $u=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3$ αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για τις τρεις τελευταίες συντεταγμένες των x_i δεν υπάρχουν λ_i, όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε να μας δίνουν μηδέν στις συντεταγμένες του u. Άρα το u δεν μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός των x_i,

Ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς X είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{A}=\{x_1^+,x_1^-,x_2,x_3,u^+,u^-\}$$

Παρατηρούμε ότι $x_3=x_1^+ + \frac{1}{2}u^+ + u^-$ και επομένως ένα βασικό σύνολο της αγοράς X ως προς U είναι το σύνολο διανυσμάτων $\{y_1= x_1^+, y_2= x_1^-, y_3= x_2, y_4= u^+, y_5= u^-\}$.

Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_i, i=1,2,3,4,5 ορίζεται

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,y_4, y_5)$$

όπου $y=y_1+y_2+y_3+y_4+ y_5=(12,16,12,6,40,24,16,18,6,24,4,16,4)$

Άρα

$\beta(1)=\frac{1}{12}(2,0,6,4,0)$ $\quad$ $\beta(2)=\frac{1}{16}(8,0,8,0,0)$

$\beta(3)=\frac{1}{12}(2,0,6,4,0)$ $\quad$ $\beta(4)=\frac{1}{6}(0,4,0,2,0)$

$\beta(5)=\frac{1}{40}(20,0,20,0,0)$ $\quad$ $\beta(6)=\frac{1}{24}(0,16,0,8,0)$

$\beta(7)=\frac{1}{16}(0,0,4,0,12)$ $\quad$ $\beta(8)=\frac{1}{18}(0,12,0,6,0)$

$\beta(9)=\frac{1}{6}(2,0,6,4,0)$ $\quad$ $\beta(10)=\frac{1}{24}(0,0,6,0,18)$

$\beta(11)=\frac{1}{4}(0,4,0,0,0)$ $\quad$ $\beta(12)=\frac{1}{16}(0,16,0,0,0)$

$\beta(13)=\frac{1}{4}(4,0,0,0,0)$

Άρα έχουμε ότι

$$\beta(1)=\beta(3)= (\tfrac{1}{6},0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},0)=P_1$$

$$\beta(2)=\beta(5)=(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0,0)=P_2$$

$$\beta(4)=\beta(6)=\beta(8)=(0,\tfrac{2}{3},0,\tfrac{1}{3},0)=P_3$$

$$\beta(7)=\beta(10)=(0,0,\tfrac{1}{4},0,\tfrac{3}{4})=P_4$$

$$\beta(9)=(0,0,\tfrac{2}{3},0,\tfrac{1}{3})=P_5$$

$\beta(11)=\beta(12)=(0,1,0,0,0)=P_6$

$\beta(13)=(1,0,0,0,0)=P_7$

Άρα dim $F_U(X)=7$ αφού το πεδίο τιμών $R(\beta)$ παράγεται από 7 διαφορετικά διανύσματα.(Θεώρημα 3.5.3)

3.7 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΩΣΗΣ ΜΙΑΣ ΑΓΟΡΑΣ ΧΡΕΟΓΡΑΦΩΝ

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο για το προσδιορισμό της πλήρωσης του X, $F_U(X)$, ως προς το χώρο εξάσκησης U. Βάση του *Θεώρημα (Plolyrakis (1999), Theorem 3.7) 3.4.3,* ο $F_U(X)$ μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής:

1. Βρίσκουμε ένα σύνολο βασικών διανυσμάτων $\{y_1,y_2,...,y_r\}$ της αγοράς X ως προς U (θυμίζουμε ότι Y είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το X∪U και $y_i \in Y$), και ορίζουμε τη βασική συνάρτηση των $\{y_1,y_2,...,y_r\}$ και στη συνέχεια το σύνολο τιμών της $R(\beta)$. Έστω $R(\beta)=\{P_1,P_2,...,P_\mu\}$. Αν ισχύει ότι $\mu=r$ και τα διανύσματα $P_1,P_2,...,P_\mu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $F_U(X)=Y$ και μια θετική βάση του $F_U(X)$, $\{b_1,b_2,...,b_r\}$, δίνεται από τη σχέση

   $$(b_1,b_2,...,b_r)^T=A^{-1}(y_1,y_2,...,y_r)^T$$

   Όπου A είναι ο rxr πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n, για κάθε $n=1,2,...,r$.

   Στη περίπτωση που $\mu>r$ εφαρμόζουμε τα εξής βήματα:

   a. Αριθμούμε τα διανύσματα του $R(\beta)$ έτσι ώστε τα r πρώτα διανύσματα να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^r$. Στη συνέχεια, για τη νέα απαρίθμηση προσδιορίζουμε τα σύνολα καταστάσεων $I_{r+k}=\{n\in\{1,2,...,m\}:\beta(n)=P_{r+k}\}$, για κάθε $k=1,2,...,\mu-r$.
   b. Ορίζουμε τα διανύσματα y_{r+k}, $k=1,2,...,\mu-r$, ως εξής:
      $y_{r+k}(n)=y(n)$, για κάθε $n\in I_{r+k}$ και $y_{r+k}(n)=0$ διαφορετικά.
   c. Η πλήρωση με δικαιώματα (completion by options) του X, ως προς το χώρο εξάσκησης U, $F_U(X)$, είναι ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$, ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $y_1,y_2,...,y_r,y_{r+1},...,y_\mu$.
   d. Ορίζουμε τη βασική συνάρτηση γ των διανυσμάτων $y_1,y_2,...,y_r,y_{r+1},...,y_\mu$ και βρίσκουμε το σύνολο τιμών της, έστω $R(\gamma)=\{P_1',P_2',...,P_\mu'\}$.

Τότε η θετική βάση { $b_1,b_2,\ldots,b_\mu$} του $F_U(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2,\ldots,b_\mu)^T=A^{-1}(y_1,y_2,\ldots,y_\mu)^T$$

Όπου A είναι ο μxμ πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n', για κάθε n=1,2,. . .,μ.

Παράδειγμα 3.7.1: Έστω X υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα παρακάτω δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$

$$x_1=(2,2,4,4) \qquad x_2=(2,4,2,4)$$

Υποθέτουμε ότι ο χώρος εξάσκησης U παράγεται από ένα διάνυσμα u του X. Αν u είναι το σταθερό διάνυσμα **1** του $\mathbb{R}^4$, έχουμε ότι (1,1,1,1) δεν ανήκει στον X αφού δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των x_1,x_2. Τότε ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς X είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{A}=\{x_1,x_2,u=(1,1,1,1)\}$$

Ένα τέτοιο σύνολο είναι το { $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3=(1,1,1,1)$} και η βασική του συνάρτηση είναι $\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3)$

όπου $\quad y=y_1+y_2+y_3=(5,7,7,9)$

Άρα $\quad \beta(1)=\frac{1}{5}(2,2,1)=P_1 \qquad \beta(2)=\frac{1}{7}(2,4,1)=P_2$

$\beta(3)=\frac{1}{7}(4,2,1)=P_3 \qquad \beta(4)=\frac{1}{9}(4,4,1)=P_4$

και άρα το πεδίο τιμών είναι $R(\beta)=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ και άρα $F_U(X)=\mathbb{R}^4$.

Έστω τώρα το $u\in X$. Τότε το σύνολο {$y_1=x_1$, $y_2=x_2$} είναι ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς X.

Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_1, y_2 είναι η

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2)$$

όπου $\quad y=y_1+y_2=(4,6,6,8)$

Άρα $\quad \beta(1)=\frac{1}{4}(2,2) \qquad \beta(2)=\frac{1}{6}(2,4)$

$\beta(3)=\frac{1}{6}(4,2) \qquad \beta(4)=\frac{1}{8}(4,4)$

Ισχύει ότι

$$\beta(1)=\beta(4)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=P_1$$
$$\beta(2)=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3})=P_2$$
$$\beta(3)=(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})=P_3$$

Άρα το σύνολο τιμών της β είναι $R(\beta)=\{P_1,P_2,P_3\}$ και παρατηρούμε ότι τα P_1,P_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ότι βρισκόμαστε τη περίπτωση όπου $\mu>r$ αφού $3>2$. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο έχουμε ότι $I_3=\{3\}$ και $y_3=(0,0,6,0)$.

Άρα η πλήρωση $F_U(X)$ του X είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα y_1, y_2,y_3.

Σύμφωνα με το βήμα (d) η βασική συνάρτηση γ των y_1, y_2,y_3

$$\gamma=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3)$$

όπου $$y=y_1+y_2+y_3=(4,6,12,8)$$

Άρα $\gamma(1)=\frac{1}{4}(2,2,0)$ $\gamma(2)=\frac{1}{6}(2,4,0)$

$\gamma(3)=\frac{1}{12}(4,2,6)$ $\gamma(4)=\frac{1}{8}(4,4,0)$

Ισχύει ότι

$$\gamma(1)=\gamma(4)=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0)=P_1'$$
$$\gamma(2)=(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},0)=P_2'$$
$$\gamma(3)=(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2})=P_3'$$

και σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο μια θετική βάση $\{b_1,b_2,b_3\}$ του $F_U(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2,b_3)^T=A^{-1}(y_1,y_2,y_3)^T$$

Όπου A είναι ο μxμ πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n', για κάθε $n=1,2,3$.

Οπότε βρίσκουμε ότι η μια θετική βάση του $F_U(X)$ είναι η $b_1=(4,0,0,8)$, $b_2=(0,6,0,0)$, $b_3=(0,0,12,0)$.

Παράδειγμα 3.7.2: Έστω Χ υπόχωρος του $\mathbb{R}^7$ που παράγεται από τα παρακάτω τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^7$

$x_1=(1,1,1,1,1,1,1)$ $x_2=(1,2,-3,0,0,0,-1)$ $x_3=(0,0,0,2,-1,4,0)$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο χώρος εξάσκησης U παράγεται από το σταθερό, χωρίς κίνδυνο διάνυσμα **1** του $\mathbb{R}^7$. Προφανώς το διάνυσμα (1,1,1,1,1,1,1) είναι στοιχείο του Χ. Τότε ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς Χ είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του συνόλου

$$\mathcal{A}=\{x_1,x_2^+,x_2^-,x_3^+,x_3^-\} \text{ όπου}$$

$x_2^+=(1,2,0,0,0,0,0)$, $x_2^-=(0,0,3,0,0,0,1)$, $x_3^+=(0,0,0,2,0,4,0)$, $x_3^-=(0,0,0,0,1,0,0)$.

Ένα τέτοιο σύνολο είναι το $\{\ y_1=x_1,\ y_2=x_2^+,\ y_3=x_2^-, y_4=x_3^+,\ y_5=x_3^-\ \}$ και η βασική συνάρτηση των y_i, $i=1,2,..,5$ είναι

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$$

όπου $$y=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=(2,3,4,3,2,5,2)$$

Άρα $\beta(1)=\frac{1}{2}(1,1,0,0,0)=P_1$ $\beta(2)=\frac{1}{3}(1,2,0,0,0)=P_2$

$\beta(3)=\frac{1}{4}(1,0,3,0,0)=P_3$ $\beta(4)=\frac{1}{3}(1,0,0,2,0)=P_4$

$\beta(5)=\frac{1}{2}(1,0,0,0,1)=P_5$ $\beta(6)=\frac{1}{5}(1,0,0,4,0)=P_6$

$\beta(7)=\frac{1}{2}(1,0,1,0,0)=P_7$

Άρα το σύνολο τιμών της β είναι $R(\beta)=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7\}$. Άρα επειδή βρισκόμαστε στη περίπτωση όπου $\mu>r$ αφού 7>5. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο έχουμε ότι $I_6=\{6\}$ και $y_6=(0,0,0,0,0,5,0)$ και $I_7=\{7\}$ και $y_7=(0,0,0,0,0,0,2)$.

Άρα η πλήρωση $F_U(X)$ του Χ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^7$ που παράγεται από τα διανύσματα $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$.

Σύμφωνα με το βήμα (d) η βασική συνάρτηση γ των $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$ είναι

$$\gamma=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7)$$

όπου $$y=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7==(2,3,4,3,2,9,3)$$

Άρα $\gamma(1)=\frac{1}{2}(1,1,0,0,0,0,0)=P_1$ $\gamma(2)=\frac{1}{3}(1,2,0,0,0,0,0)=P_2$

$\gamma(3)=\frac{1}{4}(1,0,3,0,0,0,0)=P_3$ $\gamma(4)=\frac{1}{3}(1,0,0,2,0,0,0)=P_4$

$\gamma(5)=\frac{1}{2}(1,0,0,0,1,0,0)=P_5$ $\gamma(6)=\frac{1}{9}(1,0,0,4,0,5,0)=P_6$

$\gamma(7)=\frac{1}{3}(1,0,1,0,0,0,2)=P_7$

Τα P_i, i=1,2, . .,7 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $R(\gamma)=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6,P_7\}$ οπότε $cardR(\gamma)=7=dimX$. Από θεώρημα 3.5.3 η πλήρωση του X θα είναι $F_U(X)=\mathbb{R}^7$.

Παράδειγμα 3.7.3: Έστω ότι ο χώρος αποδόσεων είναι ο $\mathbb{R}^{10}$ και ότι οι αποδόσεις των πρωταρχικών χρεογράφων είναι τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^{10}$:

$x_1=(0,2,0,1,6,2,6,1,2,0)$ $x_2=(3,2,3,3,3,0,3,3,0,3)$,

$x_3=(2,4,2,3,1,0,1,3,0,2)$ $x_4=(5,2,5,3,0,8,0,3,8,5)$.

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα εξάσκησης u είναι ένα στοιχείο του X. Για παράδειγμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι το u είναι το σταθερό διάνυσμα $\mathbf{1}=\frac{1}{10}(x_1+x_2+x_3+x_4)$. Στη περίπτωση αυτή, η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων $F_U(X)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του u. Αφού τα πρωταρχικά χρεόγραφα έχουν θετικές αποδόσεις και $u\in X$, ένα βασικό σύνολο της αγοράς X είναι το σύνολο διανυσμάτων $\{y_1=x_1, y_2=x_2, y_3=x_3, y_4=x_4\}$ και η βασική συνάρτηση των y_i, i=1,2,3,4 είναι

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2, y_3, y_4)$$

όπου $y=y_1+y_2+y_3+y_4=10(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Άρα $\beta(1)=\beta(3)=\beta(10)=\frac{1}{10}(0,3,2,5)=P_1$

$\beta(2)=\frac{1}{10}(2,2,4,2)=P_2$

$\beta(4)=\beta(8)=\frac{1}{10}(1,3,3,3)=P_3$

$\beta(5)=\beta(7)=\frac{1}{10}(6,3,1,0)=P_4$

$\beta(6)=\beta(9)=\frac{1}{10}(2,0,0,8)=P_5$

Επομένως το σύνολο τιμών της β είναι $R(\beta)=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5\}$ και άρα η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων του X, $F_U(X)$, είναι ένας 5-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{10}$. Για να προσδιορίσουμε την πλήρωση αρκεί να προσδιορίσουμε μια θετική της βάση. Για αυτό παρατηρούμε ότι τα τέσσερα πρώτα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και σύμφωνα με τον αλγόριθμο για τον προσδιορισμό της πλήρωσης παρατηρούμε ότι $\beta(6)=\beta(9)=P_5$ και επομένως $I_5=\{6,9\}$. Επειδή $y=10(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ θεωρούμε το διάνυσμα:

$$y_5=(0,0,0,0,0,10,0,0,10,0).$$

Η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων $F_U(X)$ της αγοράς X είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{10}$ που παράγεται από το σύνολο διανυσμάτων y_1, y_2,y_3,y_4, y_5. Η βασική συνάρτηση των διανυσμάτων y_i δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma=\frac{1}{y}(y_1,y_2, y_3,y_4, y_5)$$

όπου $$y=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$$

Άρα $$\gamma(1)=\gamma(3)=\gamma(10)=\frac{1}{10}(0,3,2,5,0)=P_1'$$

$$\gamma(2)=\frac{1}{10}(2,2,4,2,0)=P_2'$$

$$\gamma(4)=\gamma(8)=\frac{1}{10}(1,3,3,3,0)=P_3'$$

$$\gamma(5)=\gamma(7)=\frac{1}{10}(6,3,1,0,0)=P_4'$$

$$\gamma(6)=\gamma(9)=\frac{1}{20}(2,0,0,8,10)=P_5'$$

και σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο μια θετική βάση $\{ b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$ του $F_U(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^T=A^{-1}(y_1,y_2,y_3,y_4, y_5)^T$$

Όπου A είναι ο μxμ πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n', για κάθε n=1,2,3,4,5. Έπειτα από υπολογισμούς έχουμε:

$$b_1=(10,0,10,0,0,0,0,0,0,10),\ b_2=(0,10,0,0,0,0,0,0,0,0)$$
$$b_3=(0,0,0,10,0,0,0,10,0,0),\quad b_4=(0,0,0,0,10,0,10,0,0,0)$$
$$b_5=(0,0,0,0,0,20,0,0,20,0).$$

Παίρνοντας θετικά πολλαπλάσια των b_i έχουμε:

$$b_1'=(1,0,1,0,0,0,0,0,0,10),\ b_2'=(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$$
$$b_3'=(0,0,0,1,0,0,0,1,0,0),\quad b_4'=(0,0,0,0,1,0,1,0,0,0)$$
$$b_5'=(0,0,0,0,0,1,0,0,1,0).$$

Παράδειγμα 3.7.4: Θεωρούμε μια στοχαστική οικονομία με 10 καταστάσεις και χρονικό ορίζοντα T={0,1,2,3}. Το σύνολο των διαμερίσεων της πληροφορίας είναι :

$$\delta=\{\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\}$$

όπου $\Delta_0=\{S\}$, $\Delta_1=\{\{1,2,3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}\}$, $\Delta_2=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7\},\{8\},\{9,10\}\}$, $\Delta_3=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\},\{9\},\{10\}\}$.

Επιπλέον θεωρούμε μια αγορά χρεογράφων παραγόμενη από δύο πρωταρχικά χρεόγραφα x_1,x_2 με αποδόσεις:

$$x_i=(x_i^0,x_i^1,x_i^2,x_i^3),\ i=1,2$$

και $$x_i^t\in\mathbb{R}_+^{10},\ t=0,1,2,3$$

Σύμφωνα με το σύνηθες μοντέλο αγορών χρεογράφων πολλών περιόδων έχουμε ότι οι αποδόσεις x_i^t, t=0,1,2,3 i=1,2 , είναι σταθερές στα στοιχεία της διαμέρισης Δ_t. Τα διανύσματα αποδόσεων για τα δύο συμβόλαια είναι:

$x_1^0=\frac{3}{5}(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, $x_1^1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $x_1^2=(0,0,1,1,1,1,1,1,0,0)$, $x_1^3=(0,0,1,1,1,1,1,1,0,0)$, $x_2^0=\frac{2}{5}\ (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, $x_2^1=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $x_2^2=(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1)$, $x_2^3=(1,1,0,0,0,0,0,0,1,1)$,

Για κάθε διαθέσιμο στην αγορά χρεόγραφο θεωρούμε το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό δικαίωμα καθορισμένης περιόδου τ=1 του οποίου η ημερομηνία εξάσκησης είναι t=3. Τότε οι αποδόσεις των χρεογράφων x_1^3,x_2^3 τη χρονική περίοδο T=3 είναι τα υποκείμενα χρεόγραφα των δικαιωμάτων και κάθε υποκείμενο χρεόγραφο ανήκει στον υπόχωρο $X=[x_1^3,x_2^3]$ του $\mathbb{R}^{10}$.

Συγκεκριμένα οι αποδόσεις των δικαιωμάτων καθορισμένης περιόδου τα=1 που εγγράφονται στα x_1^3,x_2^3 είναι

$$c_{x_1^3}=(x_1^3,1)=(x_1^3-x_1^1)^+=(0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$$

$$c_{x_2^3}=(x_2^3,1)=(x_2^3-x_2^1)^+=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0,0,0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε υποκείμενο χρεόγραφο το οποίο είναι διαθέσιμο στην αγορά, δηλαδή για κάθε $\theta_1x_1^3+\theta_2x_2^3$, όπου $(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$, το διάνυσμα εξάσκησης για το αντίστοιχο δικαίωμα καθορισμένης περιόδου τ=1 είναι $u=\theta_1x_1^1+\theta_2x_2^1$, δηλαδή η απόδοση του κατά τη περίοδο τ=1. Για κάθε χαρτοφυλάκιο **θ**, το διάνυσμα εξάσκησης του αντίστοιχου δικαιώματος καθορισμένης περιόδου τ=1 ανήκει στον υπόχωρο $U=[u_1,u_2]$, όπου $u_1=(1,1,1,1,1,1,0,0,0,0)$, $u_2=(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$.

Έτσι η πλήρωση του X μέσω δικαιωμάτων καθορισμένης περιόδου τ=1 είναι ο υποσύνδεσμος $F_U(X)$ του $\mathbb{R}^{10}$. Για να προσδιορίσουμε μια θετική βάση του $F_U(X)$, προσδιορίζουμε ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς X ως προς U. Αφού ισχύει ότι $u_2= x_1^3+ x_2^3-u_1$, το βασικό σύνολο είναι $\{y_1= x_1^3, y_2= x_2^3, y_3= u_1\}$ και η βασική του συνάρτηση

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2, y_3)$$

όπου $y=y_1+y_2+y_3$

Άρα $\beta(1)=\beta(2)= (0,\frac{1}{2}, \frac{1}{2})=P_1$

$$\beta(3)=\beta(4)=\beta(5)=\beta(6)=(\frac{1}{2},0, \frac{1}{2})=P_2$$

$$\beta(7)=\beta(8)=(1,0,0)= P_3$$

$$\beta(9)=\beta(10)=(0,1,0)= P_4.$$

Δηλαδή $\dim F_U(X)=4$. Τα διανύσματα P_1,P_2,P_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ισχύει ότι $P_4=2P_1-2P_2+P_3$. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο προσδιορισμού της πλήρωσης λαμβάνουμε το διάνυσμα

$$y_4=(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1)$$

και προσδιορίζουμε τη βασική συνάρτηση γ των y_i, i=1,2,3,4. Έτσι παίρνουμε:

$$\gamma(1)=\gamma(2)= (0,\frac{1}{2}, \frac{1}{2},0)=P_1'$$

$$\gamma(3)=\gamma(4)=\gamma(5)=\gamma(6)= (\frac{1}{2},0, \frac{1}{2},0)=P_2'$$

$$\gamma(7)=\gamma(8)=(1,0,0,0)= P_3'$$

$$\gamma(9)=\gamma(10)=(0, \frac{1}{2},0, \frac{1}{2})= P_4'.$$

και σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο μια θετική βάση $\{ b_1,b_2,b_3,b_4\}$ του $F_U(X)$ δίνεται από τη σχέση:

$$(b_1,b_2,b_3,b_4)^T=A^{-1}(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$$

Όπου A είναι ο μxμ πίνακας του οποίου η n-ιοστή στήλη είναι το διάνυσμα P_n', για κάθε n=1,2,3,4,5. Έπειτα από υπολογισμούς έχουμε:

$$b_1=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0),\ b_2=(0,0,1,1,1,1,0,0,0,0)$$
$$b_3=(0,0,0,0,0,0,1,1,0,0),\ b_4=(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1)$$

□

3.8 Υπολογιστική Μέθοδος

Ο υπολογισμός των θετικών βάσεων και ο καθορισμός των διανυσματικών υποσυνδέσμων απαιτεί πολύπλοκους μαθηματικούς υπολογισμούς. Στην παρούσα διπλωματική μελέτη για την εύρεση θετικών βάσεων και υποσυνδέσμων ενός διανυσματικού χώρου στο πλαίσιο της πλήρωσης μιας αγοράς μέσω δικαιωμάτων, έχει δοθεί αλγόριθμος για το λογισμικό πρόγραμμα Matlab . Στην εργασία των V.N. Katsikis, I.A. Polyrakis (2010) παρέχονται οι απαραίτητες συναρτήσεις.

Χρησιμοποιώντας το Matlab, θα επιλύσουμε το παράδειγμα 16 του Polyrakis (1999). Έτσι έχουμε:

Παράδειγμα 3.8.1: Υποθέτουμε ότι ο χώρος αποδόσεων είναι ο$\mathbb{R}^{12}$ και ότι X είναι ο υπόχωροςαποδόσεων της αγοράς που παράγεται από τα πρωταρχικά χρεόγραφα:

x_1=(1,2,2,-1,1,-2,-1,-3,0,0,0,0), x_2=(0,2,0,0,1,2,0,3,-1,-1,-1,-2), x_3=(1,2,2,0,1,0,0,0,-1,-1,-1,-2).

Υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος εξάσκησης U παράγεται από το διάνυσμα u=(1,2,2,1,1,2,1,3,-1,-1,-1,-2).

Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση basikosinolo(), που δέχεται ως παράμετρο τον πίνακα A όπου οι γραμμές του A είναι τα διανύσματα x_i,i=1,2,3 και u μας παρέχει το βασικό σύνολο W της αγοράς του οποίου οι στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητα βασικά διανύσματα.

```
A =

   1   2   2  -1   1  -2  -1  -3   0   0   0   0
   0   2   0   0   1   2   0   3  -1  -1  -1  -2
   1   2   2   0   1   0   0   0  -1  -1  -1  -2
   1   2   2   1   1   2   1   3  -1  -1  -1  -2
>> W=basikosinolo(A)

W =

   1   0   1   0
   2   2   2   0
   2   0   2   0
   0   0   1   0
   1   1   1   0
   0   2   2   0
   0   0   1   0
   0   3   3   0
   0   0   0   1
   0   0   0   1
   0   0   0   1
   0   0   0   2
```

Εφαρμόζοντας τώρα τη συνάρτηση SUBlati() που δέχεται ως παράμετρο ένα πίνακα από θετικά, γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, W, έχουμε:

```
>> [VectorSublattice,Positivebasis]=SUBlati(W)

VectorSublattice =
   1   2   2   0   1   0   0   0   0   0   0   0
   0   2   0   0   1   2   0   3   0   0   0   0
   1   2   2   1   1   2   1   3   0   0   0   0
   0   0   0   0   0   0   0   0   1   1   1   2
   2   0   4   0   0   0   0   0   0   0   0   0
Positivebasis =
   0   0   0   0   0   0   0   0   1   1   1   2
   0   0   0   1   0   0   1   0   0   0   0   0
   0   0   0   0   0   4   0   6   0   0   0   0
   4   0   8   0   0   0   0   0   0   0   0   0
   0   6   0   0   3   0   0   0   0   0   0   0
```

Άρα μια θετική βάση του $F_U(X)$ είναι η :

$b_1=(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2)$, $b_2=(0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0)$,
$b_3=(0,0,0,0,0,4,0,6,0,0,0,0)$, $b_4=(4,0,8,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$,
$b_5=(0,6,0,0,3,0,0,0,0,0,0,0)$.

Άρα τα αποτελέσματα μας συμπίπτουν.

Κεφάλαιο 4: EFFICIENT FUNDS (Αποτελεσματικά Ομόλογα)

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η θεωρία των Efficient Funds είναι η θεωρία που υποστηρίζει ότι οι πραγματικές αγορές κεφαλαίου, οι οποίες είναι καλά οργανωμένες, όπως το NYSE, είναι αποτελεσματικές. Έτσι οι επενδυτές που επενδύουν σε μια αποτελεσματική αγορά και αγοράζουν π.χ. μετοχές, τις αγοράζουν σε τιμή που αντιπροσωπεύει την πραγματική τους αξία. Με άλλα λόγια η Καθαρή Παρούσα Αξία (NPV) της επένδυσης αυτής είναι μηδέν. Η αποτελεσματικότητα των αγορών οφείλεται στον ανταγωνισμό των επενδυτών που προσπαθούν να ανακαλύψουν υποτιμημένες μετοχές και καθώς οι πληροφορίες που συγκεντρώνονται γίνονται συνεχώς λιγότερες, η αγορά μετατρέπεται γρήγορα σε αποτελεσματική αγορά.

Ο προσδιορισμός του συνόλου των αποτελεσματικών ομολόγων (efficient funds) είναι ένα σημαντικό πρόβλημα που έχει μελετηθεί σε πλήθος εργασιών. Στις εργασίες αυτές αναφέρονται διάφοροι τύποι αποτελεσματικών ομολόγων και δίνονται διάφορα κριτήρια για το πότε μια ενδεχόμενη απόδοση είναι αποτελεσματικό ομόλογο. Στη παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος των διανυσμάτων εξάσκησης είναι μονοδιάστατος και παράγεται από το διάνυσμα u και χρησιμοποιούμε τη θετική βάση του $F_u(X)$ για τον προσδιορισμό των αποτελεσματικών ομολόγων.

Ορισμός 4.1.1: Έστω $x \in F_u(X)$. Αν $(x-au)^+>0$ και $(x-au)^->0$ τότε το δικαίωμα αγοράς $c_u(x,a)$ ονομάζεται μη τετριμμένο (nontrivial). Σε αυτή τη περίπτωση και το δικαίωμα πώλησης $p_u(x,a)$ είναι μη τετριμμένο.

Ορισμός 4.1.2: Το διάνυσμα $e \in F_u(X)$ είναι ένα $F_u(X)$- αποτελεσματικό ομόλογο, αν ο γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ ο οποίος παράγεται από τα μη τετριμμένα δικαιώματα αγοράς και πώλησης που εγγράφονται στο e είναι η πλήρωση $F_u(X)$ της αγοράς X ως προς το διάνυσμα εξάσκησης u.

Έστω ότι $\{ b_1,b_2,\ldots,b_\mu\}$ είναι μια θετική βάση της πλήρωσης μέσω δικαιωμάτων $F_u(X)$ του X και ότι

$$u=\sum_{n=1}^{\mu} \lambda_n b_n$$

είναι το ανάπτυγμα του u ως προς τη βάση $\{ b_1,b_2,\ldots,b_\mu\}$ και υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0$ για κάθε n.

Θεώρημα 4.1.1: Υποθέτουμε ότι $\{ b_1,b_2,\ldots,b_\mu\}$ είναι μια θετική βάση της πλήρωσης μέσω δικαιωμάτων $F_u(X)$ του X, $u=\sum_{n=1}^{\mu} \lambda_n b_n$ και υποθέτουμε ότι $\lambda_n > 0$ για κάθε n. Τότε το διάνυσμα $e=\sum_{n=1}^{\mu} \kappa_n b_n \in F_u(X)$ είναι ένα (X)-αποτελεσματικό ομόλογο αν και μόνο αν $\frac{\kappa_i}{\lambda_i} \neq \frac{\kappa_j}{\lambda_j}$ για κάθε $i \neq j$.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι ένα στοιχείο x ϵ $F_u(X)$ δεν είναι $F_u(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο αν και μόνο αν το x ανήκει σε κάποιον από τους ακόλουθους $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ υπόχωρους του $F_u(X)$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\kappa_2}{\lambda_2}, \frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\kappa_3}{\lambda_3}, \ldots, \frac{\kappa_{\mu-1}}{\lambda_{\mu-1}}=\frac{\kappa_\mu}{\lambda_\mu}$$

Οι παραπάνω υπόχωροι ονομάζονται μη αποτελεσματικοί υπόχωροι του $F_u(X)$. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε ότι ο μη αποτελεσματικός υπόχωρος που αντιστοιχεί στην εξίσωση $\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\kappa_2}{\lambda_2}$ είναι ο ακόλουθος υπόχωρος

$$\{x=\sum_{n=1}^{\mu} \kappa_n b_n \,\epsilon\, F_u(X): \frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\kappa_2}{\lambda_2}\}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τα αποτελεσματικά ομόλογα και τους μη αποτελεσματικούς υπόχωρους.

Παράδειγμα 4.1.1: Θεωρούμε την αγορά χρεογράφων στο παράδειγμα 3.7.3 στην οποία έχουμε υποθέσει ότι το u είναι στοιχείο του X και τα διανύσματα της θετικής βάσης του $F_u(X)$ είναι τα

b_1=(1,0,1,0,0,0,0,0,0,1), b_2=(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0), b3=(0,0,0,1,0,0,0,1,0,0)

b_4=(0,0,0,0,1,0,1,0,0,0), b5=(0,0,0,0,01,0,0,1,0).

Σημειώνουμε ότι ο υπόχωρος $F_u(X)$ είναι ανεξάρτητος από το u στην περίπτωση που το u είναι στοιχείο του X. Έστω ότι το u είναι στοιχείο του X και u=(23,16,23,19,13,26,13,19,26,23) και u=23 b_1+16 b_2+19 b_3 +13 b_4 +26 b_5, είναι το ανάπτυγμα του u ως προς τη θετική βάση του $F_u(X)$. Παρατηρούμε ότι λ_1=23, λ_2=16, λ_3=19, λ_4=13, λ_5=26 και έστω οι πραγματικοί αριθμοί $\kappa_1=5\lambda_1=115$,$\kappa_2=4\lambda_2=64$,$\kappa_3=3\lambda_3=57$,$\kappa_4=2\lambda_4=26$,$\kappa_5=\lambda_5=26$. Τότε το διάνυσμα e=115 b_1+64 b_2+57 b_3 +26 b_4 +26 b_5 είναι ένα $F_u(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο διότι $\frac{\kappa_i}{\lambda_i}\neq\frac{\kappa_j}{\lambda_j}$ για κάθε i≠j. Παρατηρούμε ακόμα ότι υπάρχουν 10 μη αποτελεσματικοί υπόχωροι του $F_u(X)$ που δίνονται από τις εξισώσεις που είδαμε πριν. Για παράδειγμα ο υπόχωρος $\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\kappa_2}{\lambda_2}$ είναι ο ακόλουθος υπόχωρος

$$\{x=\sum_{n=1}^{\mu} \kappa_n b_n \,\epsilon\, F_u(X): \kappa_1 b_1+\frac{16}{23}\kappa_2 b_2+\kappa_3 b_3+\kappa_4 b_4+\kappa_5 b_5, \kappa_i \epsilon \mathbb{R}\}.$$

Πρόταση 4.1.1: Κάθε μη αποτελεσματικός υπόχωρος του $F_u(X)$ είναι ένας γνήσιος υποσύνδεσμος του $F_u(X)$.

4.2 Η κλασική περίπτωση

Στη παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις των πρωταρχικών χρεογράφων $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι θετικά διανύσματα και ότι το διάνυσμα εξάσκησης u είναι το σταθερό διάνυσμα **1**=(1,1,. . .,1) του $\mathbb{R}^m$. Με $F_1(X)$ συμβολίζουμε την πλήρωση μέσω δικαιωμάτων του X ως προς τον υπόχωρο εξάσκησης που παράγεται από το διάνυσμα **1**. Το σύνολο $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ είναι ένα βασικό σύνολο διανυσμάτων της αγοράς και ισχύει ότι $r=n$ και $x_i=y_i$ για κάθε $i=1,\ldots,n$ αν το $\mathbf{1}\epsilon X$. Επίσης ισχύει ότι $r=n+1$ και $x_i=y_i$ για κάθε $i=1,\ldots,n$ και $y_{n+1}=1$, αν το 1 δεν ανήκει στον X.

Πρόταση4.2.1: Η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων $F_1(X)$ του X έχει θετική βάση $\{b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ με $supp(b_i) \cap supp(b_j)=\emptyset$ για κάθε $i\neq j$ και $b_i(j)=1$, για κάθε $j\epsilon supp(b_i)$.

Απόδειξη: Από τη πρόταση 3.4.1 έχουμε ότι η $F_1(X)$ έχει θετική βάση $b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ με $supp(b_i) \cap supp(b_j)=\emptyset$ για κάθε $i\neq j$. Αφού το **1** είναι στοιχείο της πλήρωσης $F_1(X)$ θα έχουμε ότι $\mathbf{1}=\sum_{n=1}^{\mu} \lambda_n b_n$, άρα για κάθε $j\epsilon$ $supp(b_i)$ έχουμε ότι $\mathbf{1}(j)=\lambda_i\, b_i(j)$, επομένως $b_i(j)=\frac{1}{\lambda_i}$ για κάθε $j\epsilon supp(b_i)$. Άρα το σύνολο $\{b_i'=\lambda_i\, b_i,\ i=1,2,\ldots,\mu\}$, είναι μια θετική βάση του $F_1(X)$ με $b_i'(j)=1$ για κάθε $j\epsilon supp(b_i')$. Άρα $\{ b_i'\}$ είναι η επιθυμητή βάση του $F_1(X)$.

□

Ορισμός 4.2.1: Αν $\{b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ είναι μια θετική βάση του $F_1(X)$ όπως στη παραπάνω πρόταση τότε η βάση $\{b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ είναι μια διαμέριση της μονάδας και ονομάζεται έτσι γιατί

$$\mathbf{1}=\sum_{n=1}^{\mu} b_n$$

Είναι το ανάπτυγμα του **1** ως προς τη βάση $\{b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ και $supp(b_i) \cap supp(b_j)=\emptyset$, για κάθε $i\neq j$.

Θεώρημα 4.2.1: Έστω $\{b_1, b_2, \ldots, b_\mu\}$ μια θετική βάση του $F_1(X)$ η οποία είναι η διαμέριση της μονάδας. Τότε το διάνυσμα

$$e=\sum_{n=1}^{\mu} \kappa_n\, b_n$$

του υπόχωρου $F_1(X)$ του $\mathbb{R}^m$ είναι ένα $F_1(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο.

Κατά το Ross το σχετικό θεώρημα είναι

Θεώρημα 4.2.2: Αν ένα στοιχείο $e\epsilon X$ είναι ένα αποτελεσματικό ομόλογο, τότε η πλήρωση μέσω δικαιωμάτων του X ως προς το διάνυσμα **1** είναι ο $\mathbb{R}^m$.

Στην εργασία του K.John ορίζεται η έννοια του μεγιστικά αποτελεσματικού ομολόγου (maximally efficient fund portfolio) ως εξής: Αν A είναι ο πίνακας με στήλες τα x_i τότε το θετικό στοιχείο $e\epsilon X$ είναι ένα μεγιστικά αποτελεσματικό ομόλογο αν $e(i)\neq e(j)$ για κάθε i,j τέτοια ώστε $A(i)\neq A(j)$ όπου $A(k)$ είναι το διάνυσμα της k-γραμμής του A. Στην ίδια εργασία ο K.John παρατηρεί ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τα δικαιώματα αγοράς που εγγράφονται σε ένα μεγιστικά αποτελεσματικό ομόλογο e είναι η πλήρωση του X και επομένως σύμφωνα με τι κεφάλαιο αυτό αν το e είναι μεγιστικά αποτελεσματικό ομόλογο τότε το e είναι ένα $F_1(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο.

Θεώρημα 4.2.3: Ένα στοιχείο $e \in F_1(X)$ είναι ένα μεγιστικά αποτελεσματικό ομόλογο αν και μόνο αν το e είναι ένα $F_1(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο.

Παράδειγμα 4.2.1: Υποθέτουμε ότι ο χώρος των αποδόσεων είναι ο $\mathbb{R}^4$.

$$x_1=(1,1,2,3),\ x_2=(4,0,2,0)$$

είναι τα πρωταρχικά χρεόγραφα και έστω το διάνυσμα εξάσκησης είναι το σταθερό διάνυσμα $u=\mathbf{1}$. Τότε ο υπόχωρος που παράγεται από αυτά είναι ο $X=[x_1,x_2]$ και παρατηρούμε ότι $\mathbf{1} \notin X$. Ακόμα παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{y_1=x_1, y_2=x_2, y_3=\mathbf{1}\}$ είναι ένα σύνολο βασικών διανυσμάτων και $y=y_1+y_2+y_3=(6,2,5,4)$.

Η βασική συνάρτηση των y_i είναι

$$\beta=\frac{1}{y}(y_1,y_2,y_3,)$$

άρα

$\beta(1)=\frac{1}{6}(1,4,1)=P_1$ $\beta(2)=\frac{1}{2}(1,0,1)=P_2$

$\beta(3)=\frac{1}{5}(2,2,1)=P_3$ $\beta(4)=\frac{1}{4}(3,0,1)=P_4$

Αφού το σύνολο τιμών της β, $R(\beta)=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ τότε $F_1(X)=\mathbb{R}^4$. Μια θετική βάση της πλήρωσης επομένως, είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^4$ $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει ότι το

$$x=\sum_{n=1}^{\mu} \kappa_n e_n=(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4) \in \mathbb{R}^4$$

δεν είναι $F_1(X)$-αποτελεσματικό ομόλογο αν και μόνο αν ανήκει σε κάποιον από τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$: $\kappa_1=\kappa_2, \kappa_1=\kappa_3, \kappa_1=\kappa_4, \kappa_2=\kappa_4, \kappa_2=\kappa_3, \kappa_3=\kappa_4$.
Επομένως η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου (a,b) δεν δίνει ένα μεγιστικά αποτελεσματικό ομόλογο αν και μόνο αν η απόδοση του ανήκει σε κάποιον από αυτούς τους υπόχωρους.

Παράρτημα

Η συνάρτηση SUBlati

```
function [Sublattice,Positivebasis] = SUBlati(B)
%SUBlat(B) provides the vector sublattice generated by
%a given finite collection of positive, linearly
%independent vectors of R?n
%B denotes the matrix whose columns are the given vectors
[N,M] = size(B);
Id = eye(N);
for i = 1:N,
if norm(B(i,:),1)~=0
Test(i,:) = 1/norm(B(i,:),1)*B(i,:);
end
end
Matrix = Test;
[BB,m,n] = unique(Matrix,'rows');
Index = 1:N;
S = rref(BB');
[I,J] = find(S);
Linearindep = accumarray(I,J,[rank(BB),1],@min)';
mm = length(m);
nn = length(n);
Index1 = 1 : mm;
Index2 = setdiff(Index1,Linearindep);
YY = sum(B,2)';
TTT = setdiff(Index,m(Linearindep));
KK = Id(TTT,:);
TT = YY(1,TTT)';
T = diag(TT)*KK;
K = zeros(N);
K(TTT,:) = T;
Vec = zeros(mm-M,N);
if mm < nn,

for i = 1:length(Index2),
DD = strmatch(Index2(i),n,'exact')' ;
R = length(DD);
if R >= 2,
Vector = sum(K(DD,:));
else
Vector = K(DD,:);
end
Vec(i,:) = Vector;
end
[a,b] = find(Vec);
Vectors = Vec(unique(a),:);
Sublattice = [B';Vectors];
Positivebasis = SUBlatSUB1(Sublattice');
else
KKK = unique(K,'rows');
[II,JJ] = find(KKK);
Vectors = KKK(unique(II),:);
Sublattice = [B';Vectors];
Positivebasis = SUBlatSUB1(Sublattice');
end
```

Η συνάρτηση basikosinolo

```
function [ W] = basikosinolo( X )
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here

XX = [max(X,zeros(size(X)));max(-X,zeros(size(X)))];
S = rref(XX');
[I,J] = find(S);
Linearindep = accumarray(I,J,[rank(XX),1],@min)';
W = XX(Linearindep,:)';
end
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] I.A Πολυράκης, Θέματα Ανάλυσης και Θεωρία Γενικής Ισορροπίας στην Οικονομία, Αθηνα 2010.

[2] G.Jameson,Ordered Linear Spaces, Springer-Verlag, Heidelberg,1970

[3] Polyrakis,I.A.(1996):Finite –dimensional lattice-subspaces of C(Ω) and curves of $\mathbb{R}^n$. Transactions of the American Mathematical Society 348, 2793-2810

[4] Polyrakis,I.A.(1994): Lattice-subspaces of C[0,1] and positive basis, J.Math Anal. Appl. 184(1994), 1-18

[5] C. Kountzakis,I.A Polyrakis (2006): The completion of security markets, Decisions in Economics and Finance, Springer-Verlag 2006

[6] Polyrakis,I.A.(1999): Minimal lattice-subspaces. Transactions of the American Mathematical Society 351, 4186-4203

[7] Nachman D.C(1988):Spanning and completeness with options. The Review of Financial Studies I,311-328

[8] Ross, S.A (1976): Options and Efficiency. The Quarterly Journal of Economics 90,75-89

[9] Katsikis, V.N , I.A. Polyrakis(2010): Computation of vector sublattices and minimal lattice-subspaces of $\mathbb{R}^k$. Applications in finance.

[10] Αργυρός Σ.: Σημειωσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Ε.Μ.Π, 2002.

[11] Abramovich Y.A, Aliprantis C.D, Polyrakis I.A., Lattice-Subspaces and Positive Projections, Proceedings of the Royal Irish Academy 94A, 1994, 237-245.