



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μηχανικής

Συζευγμένες ταλαντώσεις και μεταφορά ενέργειας

Διπλωματική Εργασία

Θεοφιλάτος Άγγελος-Αθανάσιος

Επιβλέποντες: Τσόπελας Παναγιώτης Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Κομίνης Ιωάννης Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Μάιος 2018

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές της διπλωματικής, αναπληρωτή καθηγητή του ΕΜΠ Παναγιώτη Τσόπελα και επίκουρο καθηγητή του ΕΜΠ Ιωάννη Κομίνη για την πολύτιμη βοήθειά τους, την ενασχόληση και την καθοδήγησή τους για την ολοκλήρωση της εργασίας. Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου από τη σχολή, που περάσαμε μαζί όλα αυτά τα υπέροχα χρόνια, σε αυτό το δύσκολο αλλά και όμορφο ταξίδι. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τον αδερφό μου για την αμέριστη υποστήριξη και συμπαράσταση που μου παρείχαν όλο αυτό το διάστημα. Χωρίς αυτούς δε θα βρισκόμουν εδώ που βρίσκομαι.

Περίληψη

Οι συζευγμένες ταλαντώσεις αποτελούν τον κατεξοχήν μηχανισμό απορρόφησης ενέργειας και κραδασμών, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά της απόσβεσης, για την ασφαλέστερη και αποδοτικότερη λειτουργία κατασκευών. Η ευελιξία των χαρακτηριστικών τους, συνεπώς και των λειτουργιών τους, συντελούν στην ολοένα και μεγαλύτερη χρήση τους. Στην εργασία αυτή, μελετάμε τα χαρακτηριστικά των συστημάτων αυτών, τα χαρακτηριστικά των ταλαντώσεων που εκτελούνται, καθώς και τους παράγοντες που διαμορφώνουν το τελικό αποτέλεσμα. Στόχος είναι να σχηματιστεί μία πιο σαφής και ολοκληρωμένη εικόνα, που θα κάνει φανερό το πώς επηρεάζει η κάθε παράμετρος το αποτέλεσμα και τον τρόπο με τον οποίο απορροφάται η ενέργεια. Με τη βοήθεια του Matlab καταφέραμε να αναλύσουμε το πρόβλημα και να παρατηρήσουμε το πως εξελίσσονται οι ταλαντώσεις και ποια η σχέση τους με τις παραμέτρους. Ταυτόχρονα, μπορέσαμε να δούμε τις περιπτώσεις όπου η ενέργεια απορροφάται και εγκλωβίζεται για μεγάλο χρονικό διάστημα ή περιπτώσεις που συμβαίνει το αντίστροφο. Οι παρατηρήσεις περιλαμβάνουν δοκιμές των βασικών παραμέτρων, δοκιμές διαφορετικών φασμάτων συχνοτήτων, όπως και χρήση απόσβεσης και μη γραμμικών συστημάτων.

Abstract

Coupled oscillations are the primary of the alternative ways of non-dissipative energy and vibration absorption that are required for more efficient function of devices. The flexibility of their characteristics therefore and their functions, contribute to their more usage. In this diploma thesis we study the characteristics of these systems as the factors they shape the final result. The goal is to form a clearer and complete image, that is going to reveal how each of the parameters influence the result and the way energy is absorbed. With the help of Matlab we managed to analyze the problem and obscure how the oscillations configure and what is their relationship with the parameters. At the same time, we were able to note the cases where energy is being absorbed and trapped for a long time or cases which the opposite can be achieved. The observations include tests of the basic parameters, tests with the use of different frequency spectrums, as also the use of damping and nonlinear systems.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	3
Περίληψη	5
Κεφάλαιο 1: Συζευγμένες ταλαντώσεις	8
1.1: Περιγραφή μοντέλου	9
1.2: Εξισώσεις κίνησης	10
1.3: Χρόνος επιστροφής και ενέργεια	11
Κεφάλαιο 2: Επίλυση εξισώσεων	12
Κεφάλαιο 3: Ταλαντώσεις όταν οι δευτερευοντες ταλαντωτες εχουν μονότονη κατανομή των συχνοτήτων τους	16
Κεφάλαιο 4: Ταλαντώσεις κύριου συστηματος όταν οι δευτερεύοντες ταλαντωτές έχουν μη μονότονη κατανομή των συχνοτήτων τους	26
Κεφάλαιο 5: Συζευγμένες ταλαντώσεις με χρήση απόσβεσης	31
Κεφάλαιο 6: Μη γραμμικό σύστημα συζευγμένων ταλαντώσεων	38
Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα	45
Κεφάλαιο 8: Αναφορές	46
Κεφάλαιο 9: Appendix	47

Κεφάλαιο 1

Συζευγμένες ταλαντώσεις

Ένα από τα πολλά ερωτήματα που αφορούν συστήματα απορρόφησης κραδασμών ή δόνησης (vibration absorption), είναι το κατά πόσο μπορούμε να δημιουργήσουμε συσκευές ευέλικτες για πολλαπλές και εξειδικευμένες χρήσεις. Η απόσβεση μέσω των ταλαντώσεων είναι η πιο γνωστή μέθοδος και ανάλογα με το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε, απαιτείται και η χρήση των κατάλληλων υλικών. Για παράδειγμα, η απόσβεση επαφής (contact damping) χρησιμοποιείται σε κραδασμούς μηχανών αεροπλάνων ενώ η χρήση υγρού στρώματος για περιστρεφόμενους λεπτούς δίσκους [1]. Η κατασκευή αντηχείων (resonators) ανίχνευσης μαζών σε μικρο- και νάνο-κλίμακα τοποθετημένων μέσα σε υγρό υλικό [2-3] ή αντίστοιχα η κατασκευή συσκευών ευαισθησίας θορύβων για την ίδια χρήση [4] αποτελούν περαιτέρω εφαρμογές των ευρύτερων συστημάτων απορρόφησης ενέργειας (energy sinks) που εξυπηρετούν αυτό το σκοπό. Οι μέθοδοι αυτοί έχουν περιορισμένους τρόπους λειτουργίας και συνεπώς περιορισμένο εύρος χρήσεων. Καθίσταται λοιπόν αναγκαία η αναζήτηση νέων τρόπων απορρόφησης κραδασμών και αποσβέσεων πέρα από τους συμβατικούς [5]. Ένας διαφορετικός τρόπος είναι ευρύτερα οι κατασκευές απορρόφησης ενέργειας, με πιο διαδεδομένες τα συστήματα ταλαντώσεων [5-6]. Πιο συγκεκριμένα, τα συστήματα συζευγμένων ταλαντώσεων αποτελούν μία λύση στα παραπάνω προβλήματα, μιας και ο τρόπος λειτουργίας τους ποικίλει ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους και τις καθιστά ευέλικτες συσκευές στη χρήση διαφόρων εφαρμογών.

Τα συστήματα λοιπόν των συζευγμένων ταλαντώσεων αποτελούνται από ένα βασικό (κύριο) ταλαντωτή (master oscillator), ο οποίος είναι συνδεδεμένος με μια σειρά από δευτερεύοντες-μικρότερης μάζας ταλαντωτές (secondary oscillators). Όταν διεγερθεί ο βασικός ταλαντωτής, η ενέργεια της ταλάντωσής του μεταφέρεται στους δευτερεύοντες ταλαντωτές, θέτοντάς τους σε ταλάντωση. Ανάλογα με το πώς είναι διαμορφωμένο το σύστημα έχουμε αντιστροφή ή όχι της αρχικής μεταφοράς ενέργειας, δηλαδή αν η ταλάντωση θα επιστρέψει στον κύριο ταλαντωτή ή όχι. Παραδείγματος χάριν, σε περιπτώσεις που έχουμε μη γραμμική ακαμψία (nonlinear stiffness), χωρίς απώλειες ενέργειας (dissipation) και χωρίς απόσβεση (damping), η αρχική ενέργεια που εισάγεται σε έναν κόμβο, ισοκατανέμεται στους υπόλοιπους κόμβους του συστήματος και δεν επιστρέφει ποτέ στον αρχικό (irreversibility). Αντίθετα, στην περίπτωση που το σύστημα είναι γραμμικό, η αρχική ενέργεια μεταφέρεται στους κόμβους και σε κάποια

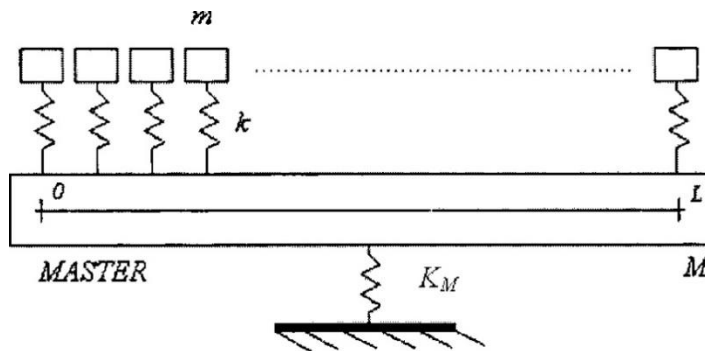
χρονική στιγμή επιστρέφει στον πρώτο. Με άλλα λόγια, όταν ο βασικός ταλαντωτής δεχθεί εξωτερική δύναμη που θα τον θέσει σε ταλάντωση, η ταλάντωση αυτή «μεταφέρεται» στους δευτερεύοντες ταλαντωτές και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, «επιστρέφει» στον πρώτο (reversibility) [6]. Η χρονική στιγμή αυτή ονομάζεται χρόνος επιστροφής (return time, t^*). Όπως θα δούμε παρακάτω, το όλο αυτό σύστημα συμπεριφέρεται ως ένας ενιαίος ταλαντωτής, που περιέχει «φαινόμενη» απόσβεση.

1.1. Περιγραφή μοντέλου

Το βασικό όμως ερώτημα που προκύπτει σε αυτές τις μελέτες, είναι το κατά πόσο η ενέργεια μπορεί να συσσωρευθεί σε όσο το δυνατό μεγαλύτερο βαθμό στους δευτερεύοντες ταλαντωτές και κατά πόσο μπορεί να παραμείνει σε αυτούς πριν επιστρέψει. Ο στόχος δηλαδή των περισσότερων διατάξεων προσπαθεί να εξυπηρετήσει τη μη-αντιστρεψιμότητα (irreversibility) της ενέργειας, αλλά λόγω της ίδιας της συντηρητικής, και χωρίς απώλειες, φύσης των συστημάτων αυτών, δε μπορεί να υπάρξει σε απόλυτο βαθμό. Τις περισσότερες φορές λοιπόν, στόχος είναι η επίτευξη της σχεδόν-μη-αντιστρεψιμότητας (near-irreversibility).

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις συνθήκες και τους παράγοντες που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η ταλάντωση, τη μεταφορά της ενέργειας, καθώς και τον χρόνο επιστροφής στον βασικό ταλαντωτή.

Στο μοντέλο που θα μελετήσουμε, ο βασικός ταλαντωτής αποτελείται από μία άκαμπτη δοκό μάζας M , που είναι προσδεδεμένη με μικρότερης μάζας m διακεκριμένους ταλαντωτές, πεπερασμένου πλήθους N , χωρίς αποσβεστήρες.



Σχήμα 1. Βασικός (master) ταλαντωτής ο οποίος συνδέεται με επιφάνεια μέσω ελατηρίου και ταυτόχρονα σώματα μικρότερης μάζας είναι συνδεδεμένα με αυτόν, μέσω ξεχωριστών ελατηρίων με αντίστοιχες τιμές ακαμψίας

1.2. Εξισώσεις κίνησης

Ξεκινώντας θα εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης που χαρακτηρίζουν το σύστημα, κάτω από μία τυχαία διέγερση του συστήματος από την εφαρμογή του νόμου του Newton και είναι οι εξής:

$$\text{Master oscillator: } M\ddot{x}_M + K_M x_M + \sum_{i=1}^N k_i [x_M - x_i] = 0 \quad (1)$$

$$\text{Secondary oscillators: } m\ddot{x}_i + k_i [x_i - x_M] = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

όπου K είναι ο συντελεστής δυσκαμψίας του master, k_i οι αντίστοιχοι συντελεστές δυσκαμψίας των προσδεδμένων ταλαντωτών, x_M μετατόπιση του βασικού ταλαντωτή ως προς τη βάση του και x_i μετατόπιση του δευτερεύοντος ταλαντωτή “ i ” ως προς τη βάση του συστήματος με αρχικές συνθήκες $x_M = 0, x_i = 0, \dot{x}_M = V_0, \dot{x}_i = 0$.

Το μοντέλο περιέχει N διακριτούς ταλαντωτές με φυσική συχνότητα $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$ και κατανομή της μορφής $\omega_i = \omega_{max} \left(\frac{i}{N}\right)^p$, όπου ω_{max} είναι η μέγιστη τιμή του φάσματος, ω_M η φυσική συχνότητα του βασικού ταλαντωτή, $\left(\frac{i}{N}\right) = \xi_i$ η θέση του εκάστοτε δευτερεύοντα ταλαντωτή και p θετική σταθερά.

Με κατάλληλες πράξεις οι εξισώσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$$\ddot{x}_M = -\omega_M^2 x_M - \sum_{i=1}^N \mu \omega_M^2 \Omega_{max}^2 \left(\frac{i}{N}\right)^{2p} [x_M - x_i] \quad (3)$$

$$\ddot{x}_i = -\omega_M^2 \Omega_{max}^2 \left(\frac{i}{N}\right)^{2p} [x_i - x_M] \quad (4)$$

$$\text{όπου } \mu = \frac{m}{M}, \quad \Omega_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_M} \text{ ενώ } \Omega_i = \frac{\omega_i}{\omega_M} = \Omega_{max} \left(\frac{i}{N}\right)^p, \quad \omega_M = \left(\frac{k_M}{M}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3. Χρόνος επιστροφής και ενέργεια

Ο χρόνος επιστροφής [6] δίνεται από τον τύπο:

$$t^* = \frac{2\pi N}{p\omega_M} \left(\frac{\omega_M}{\omega_{max}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5)$$

Η ενέργεια που μεταφέρεται από το βασικό ταλαντωτή στους δευτερεύοντες και στη συνέχεια κατανέμεται σε αυτούς, είναι στην κανονικοποιημένη-αδιάστατη μορφή της

$$e(\xi) = E(\xi) / \left(\frac{1}{2} \right) mV_0^2 \quad \text{ή} \quad e(\xi) = \frac{\Omega_i^4}{|1 - \Omega_i^2 + j\chi\Omega_i|^2} [6] \quad (6)$$

όπου $\chi = C_M / M\omega_M$ ο συντελεστής απώλειας.

Είναι εμφανές ότι η ποσότητα αυτή εξαρτάται άμεσα από τις φυσικές συχνότητες των δευτερευόντων ταλαντωτών ($\Omega_i = \frac{\omega_i}{\omega_M}$). Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια συσσωρεύεται πρωτίστως στους ταλαντωτές με μεγάλες συχνότητες και στη συνέχεια κατανέμεται στους υπόλοιπους κατά παρόμοιο τρόπο. Επομένως, όσους περισσότερους ταλαντωτές διαθέτει το μοντέλο, τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται η ενέργεια για να κατανεμηθεί σε αυτούς, άρα και περισσότερο χρόνο μέχρι να επιστρέψει. Το τελευταίο είναι επίσης άμεσο αν παρατηρήσουμε ότι ο χρόνος επιστροφής t^* είναι ανάλογος του πλήθους N των ταλαντωτών. Οι παραπάνω σχέσεις φανερώουν ότι τα p , N και Ω_{max} αποτελούν τους παράγοντες που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η ταλάντωση του συστήματος. Εξαρτάται δηλαδή από την σχέση των φυσικών συχνοτήτων των δευτερευόντων ταλαντωτών με αυτή του βασικού ταλαντωτή, από την κατανομή των φυσικών συχνοτήτων των δευτερευόντων ταλαντωτών και από το πλήθος τους.

Κεφάλαιο 2:

Επίλυση εξισώσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης που αναφέραμε, ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε τα ποιοτικά και ποσοτικά χαρακτηριστικά των ταλαντώσεων στις διάφορες περιπτώσεις. Η επίλυση των εξισώσεων θα γίνει με δύο τρόπους, αριθμητικά και αναλυτικά με τη βοήθεια του Matlab, με σταθερό πλήθος ταλαντωτών $N=100$. και τα αποτελέσματα θα αποτυπωθούν σε διαγράμματα που θα μας δίνουν την αδιάστατη μετατόπιση του βασικού ταλαντωτή ($x_M \omega_M / V_0$) συναρτήσει του αδιάστατου χρόνου ($t \omega_M$). Πρώτα όμως θα τις μετατρέψουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= -\frac{k_1}{m}(x_1 - x_M) \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{k_2}{m}(x_2 - x_M) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_N &= y_N \\ \dot{y}_N &= -\frac{k_N}{m}(x_N - x_M) \\ \dot{x}_M &= \dot{y}_M \\ \dot{y}_M &= -\frac{K_M}{M}x_M - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^N k_i(x_M - x_i) \end{aligned} \tag{7}$$

Αριθμητική μέθοδος: Καταγράφουμε στον κώδικα τις παραπάνω εξισώσεις και επιλύουμε χρησιμοποιώντας την ρουτίνα ode45 [7], η οποία λύνει το πρόβλημα με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης}-5^{ης} τάξης ή όπως αλλιώς είναι γνωστή Dormand-Prince. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί 7 βήματα, δηλαδή υπολογίζει 7 κλίσεις K_1, K_2, \dots, K_7 δοσμένου ενός αρχικού σημείου (t_k, y_k) .

Αναλυτική μέθοδος: Διατυπώνουμε το σύστημα σε πινακοποιημένη μορφή και στη συνέχεια επιλύουμε ως προς το διάνυσμα των μετατοπίσεων.

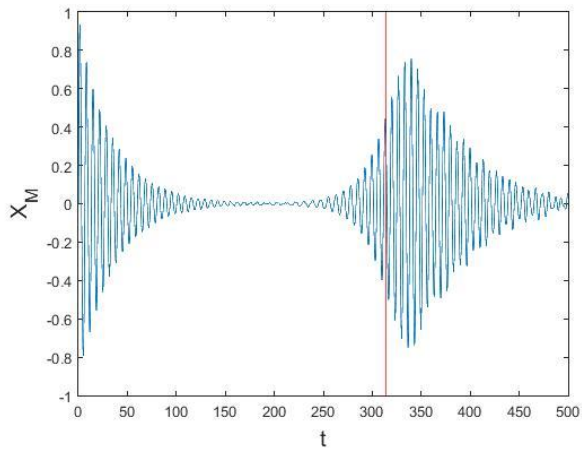
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \\ x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_1/m & 0 \\ 0 & -k_2/m & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_2/m & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -k_1/m & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_1/m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ k_1/M & k_2/M & \dots & k_N/m & 0 & 0 & \dots & 0 & -K_M/M - \sum_{i=1}^N k_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \\ x_M \\ y_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \\ x_M \\ y_M \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \\ x_M \\ y_M \end{bmatrix}$$

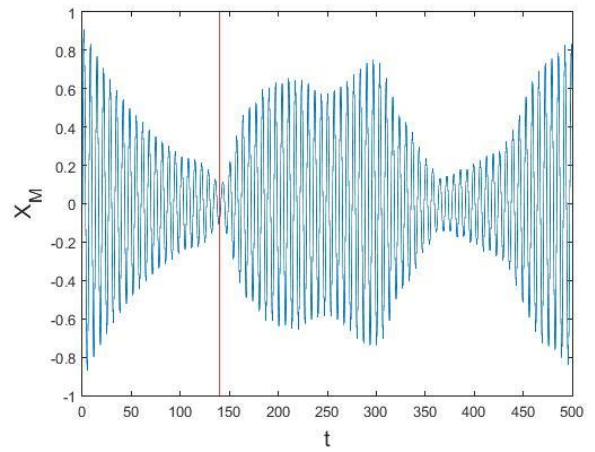
$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Αν και τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων είναι ακριβώς ίδια, η αριθμητική μέθοδος μας δίνει επιπλέον τη δυνατότητα να επιλύσουμε και μη γραμμικά συστήματα. Από την άλλη, η αναλυτική μέθοδος όπως θα δούμε παρακάτω, μπορεί να μας δώσει επιπλέον πληροφορίες για το πώς διαμορφώνεται το σύστημα, μέσω των ιδιοτιμών των πινάκων που εξάγουμε.

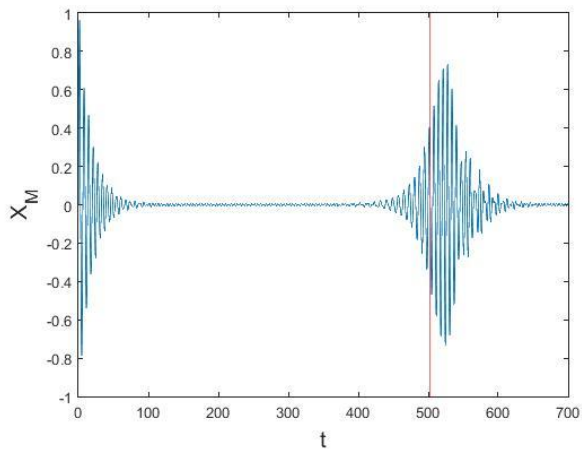
Παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα συναρτήσεων των p και Ω_{max} (με $\omega_M = k_M = V_0 = 1$, για λόγους απλοποίησης) και έχουν ως εξής:



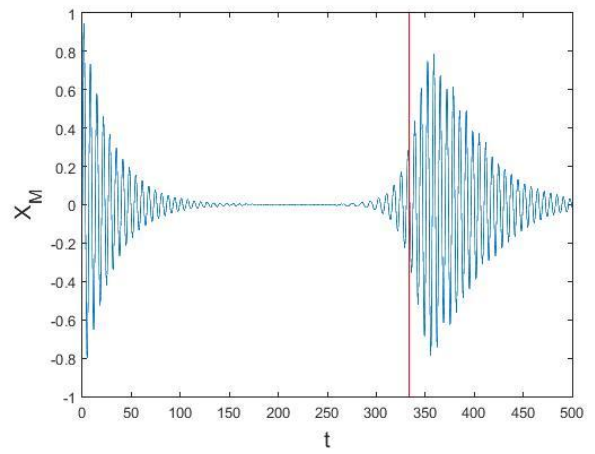
(a)



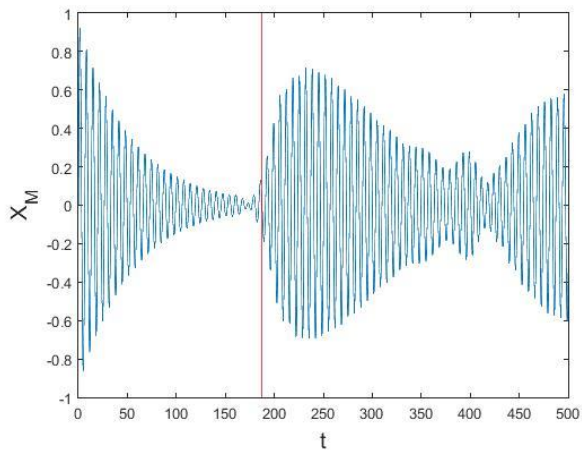
(b)



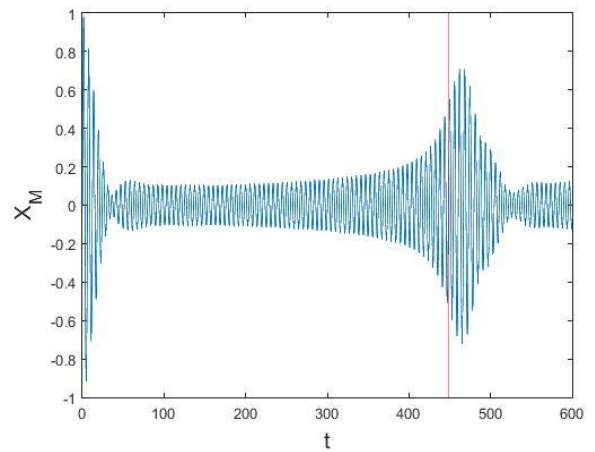
(d)



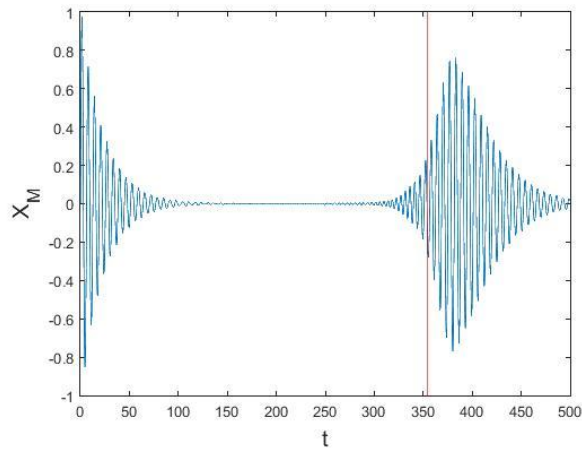
(e)



(e)



(f)



(g)

Σχήμα 2. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

(a): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (b): $p = 0.5, \Omega_{max} = 3$, (c): $p = 0.7, \Omega_{max} = 1.5$, (d): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$

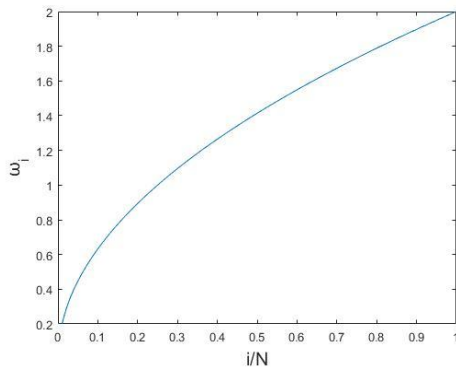
(e): $p = 0.7, \Omega_{max} = 3$, (f): $p = 1.3, \Omega_{max} = 1.1$, (g): $p = 1.3, \Omega_{max} = 1.5$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε το πλάτος της ταλάντωσης του βασικού ταλαντωτή μειώνεται δραματικά (σαν να έχουμε απόσβεση στο σύστημα), μέχρι ένα σημείο όπου η ταλάντωση είναι ανεπαίσθητη. Έπειτα, η ταλάντωση συνεχίζεται κανονικά. Στην ουσία, πρόκειται για τη μεταφορά ενέργειας, συνεπώς και της ταλάντωσης από τον βασικό στους δευτερεύοντες ταλαντωτές, η οποία από ένα σημείο και μετά επιστρέφει στον πρώτο. Το χρονικό σημείο αυτό, στο οποίο αφού έχει ελαχιστοποιηθεί η ταλάντωση και αρχίζει να αυξάνεται το πλάτος, είναι ο χρόνος επιστροφής t^* .

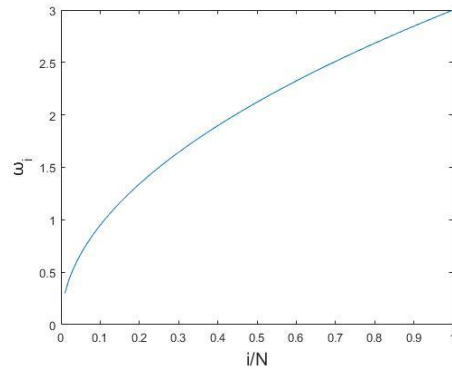
Κεφάλαιο 3:

Ταλαντώσεις μονότονων κατανομών συχνοτήτων

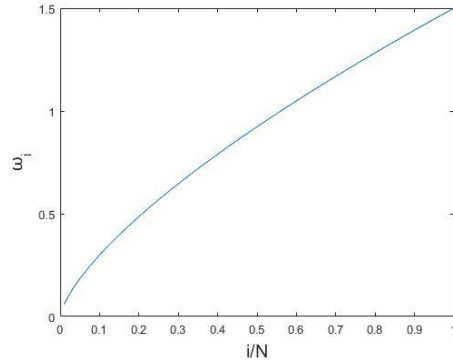
Στη συνέχεια παραθέτουμε τα αποτελέσματα και με τη βοήθεια των ιστογραμμάτων θα δούμε πώς συμπεριφέρονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Ο οριζόντιος άξονας αποτυπώνει τις τιμές των ιδιοτιμών, ενώ ο κάθετος άξονας το πλήθος των ιδιοτιμών που βρίσκονται στις αντίστοιχες τιμές. Τα ω_i ακολουθούν κατανομή ως προς τον κάθε i – ταλαντωτή με τρόπο που αναγράφονται στα παρακάτω διαγράμματα $\omega - i/N$ ($i = 1, \dots, N$, $N = 100$):



(a)



(b)



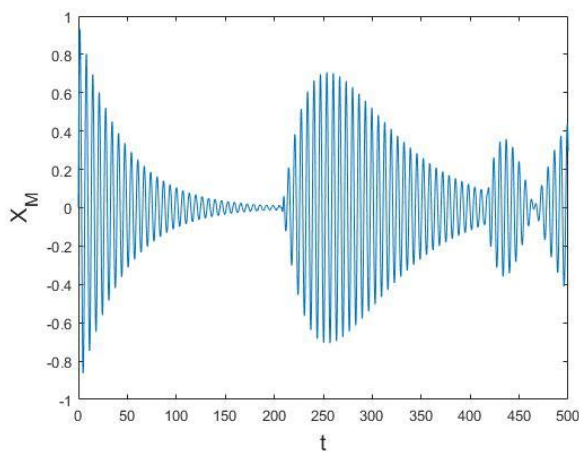
(c)

Σχήμα 3. Φυσική Συχνότητα του ταλαντωτή i ως προς την τοποθέτησή του στην επιφάνεια

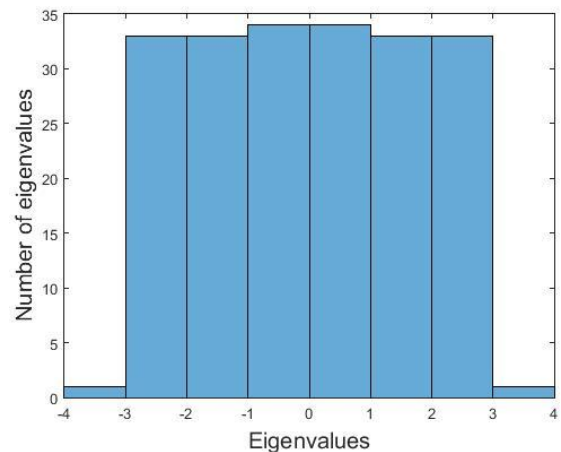
(a): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (b): $p = 0.5, \Omega_{max} = 3$, (c): $p = 0.7, \Omega_{max} = 1.5$

Αν λοιπόν σταθεροποιήσουμε το $\Omega_{max} = 3$ και μεταβάλλουμε το p ($p = 1, 2, 3$) παρατηρούμε ότι:

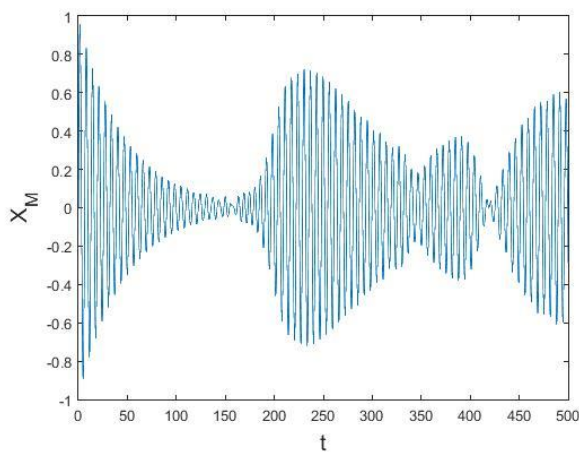
- Το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται για $t < t^*$.
- Ο χρόνος επιστροφής μειώνεται (η ταλάντωση επιστρέφει πιο γρήγορα στον βασικό ταλαντωτή).
- Όσο μικρότερη είναι η τιμή του p , τόσο ελαχιστοποιείται η ταλάντωση πριν αυτή επιστρέψει.
- Οι ιδιοτιμές του πίνακα A φαίνονται ως επί το πλείστον να έχουν τιμές κοντά στο 0.
- Όσο αυξάνεται το p όλο και μεγαλύτερο πλήθος των ιδιοτιμών λαμβάνουν τιμές κοντά στο μηδέν.



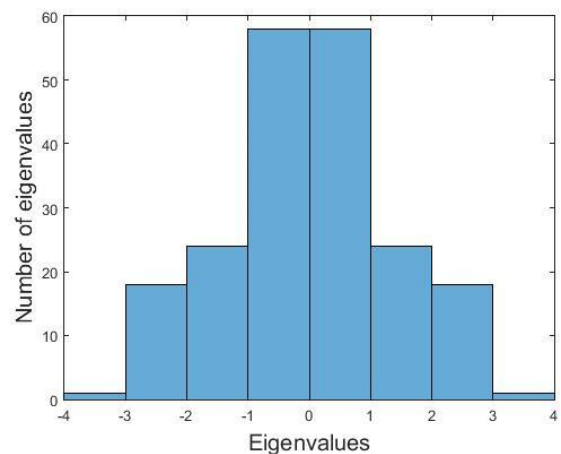
(a)



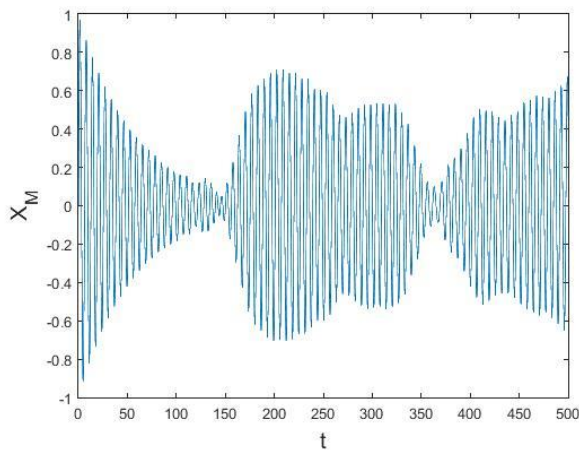
(b)



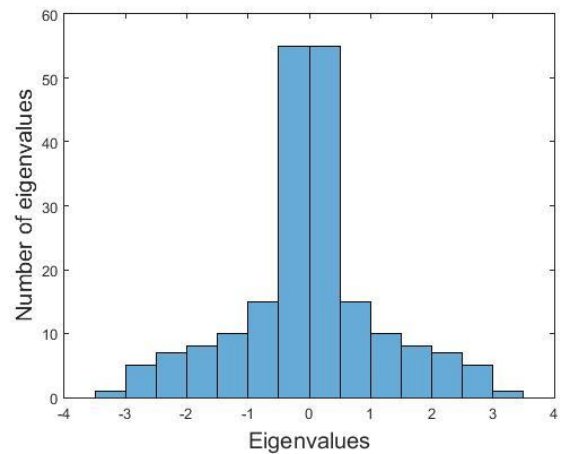
(c)



(d)



(e)



(f)

Σχήμα 4. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

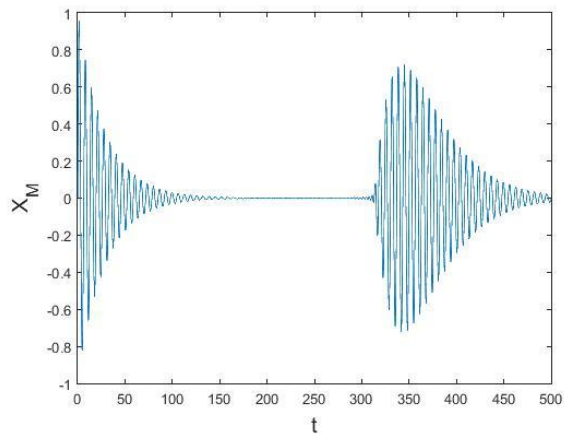
(a): $p = 1, \Omega_{max} = 3$, (c): $p = 2, \Omega_{max} = 3$, (e): $p = 3, \Omega_{max} = 3$

Τιμές ιδιοτιμών ως προς το πλήθος τους

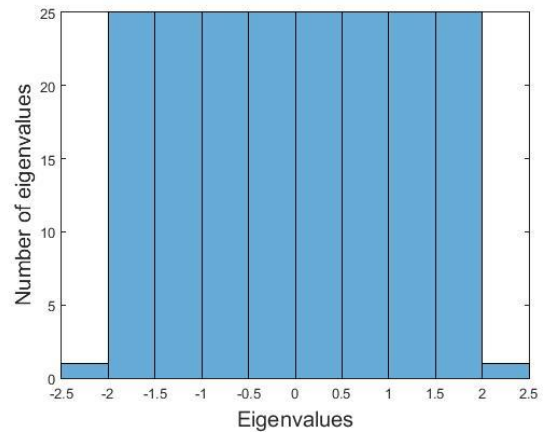
(b): $p = 1, \Omega_{max} = 3$, (d): $p = 2, \Omega_{max} = 3$, (f): $p = 3, \Omega_{max} = 3$

Επαναλαμβάνουμε για $\Omega_{max} = 2$ και παρατηρούμε ότι ο βασικός ταλαντωτής και οι ιδιοτιμές του πίνακα A συμπεριφέρονται κατά παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση για $\Omega_{max} = 3$, μόνο που τώρα οι μεταβολές πραγματοποιούνται με ταχύτερο ρυθμό. Δηλαδή:

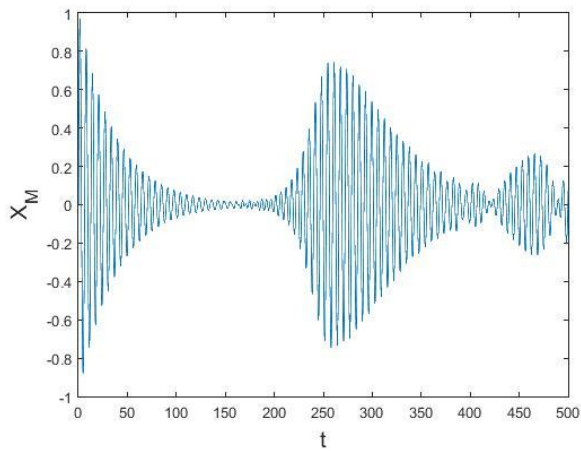
- Το πλάτος της ταλάντωσης για $t < t^*$ αυξάνεται πιο γρήγορα.
- Ο χρόνος επιστροφής μειώνεται αντίστοιχα.
- Όσο μικρότερη είναι η τιμή του p , τόσο ελαχιστοποιείται η ταλάντωση πριν αυτή επιστρέψει και μάλιστα στην περίπτωση όπου $p = 1$, μηδενίζεται εντελώς.
- Οι ιδιοτιμές του πίνακα A φαίνονται ως επί το πλείστον να έχουν τιμές κοντά στο 0.
- Όσο αυξάνεται το p όλο και μεγαλύτερο πλήθος των ιδιοτιμών λαμβάνουν τιμές κοντά στο μηδέν.



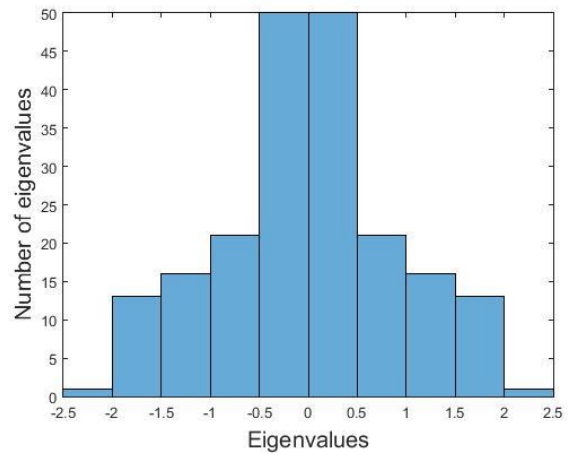
(a)



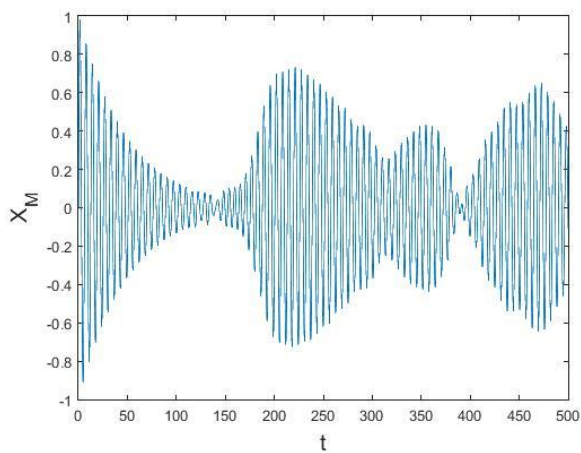
(b)



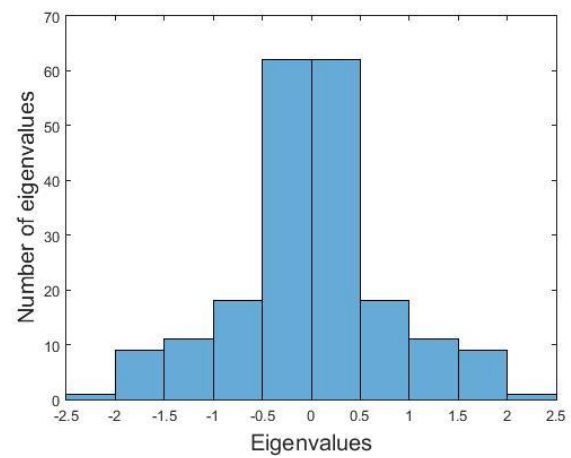
(c)



(d)



(e)

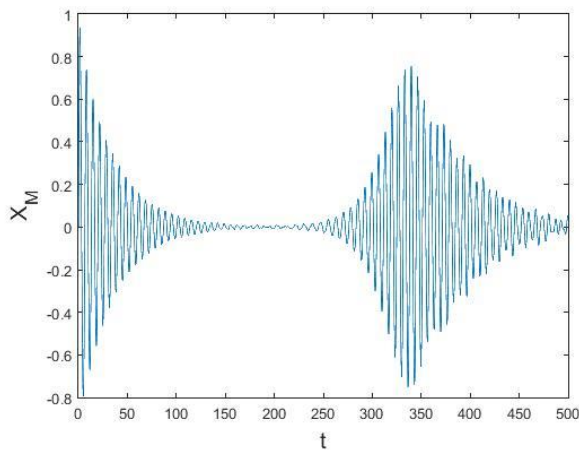


(f)

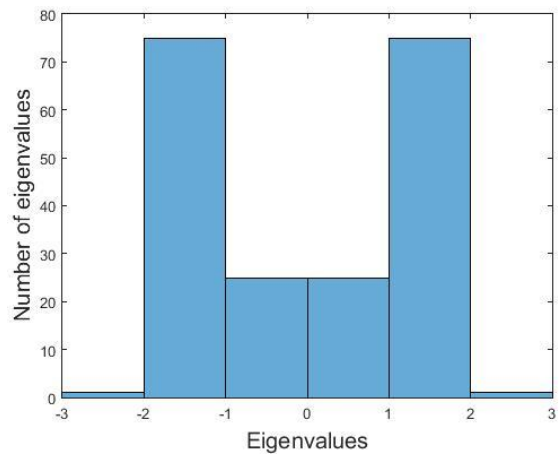
Σχήμα 5. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή
 (a): $p = 1, \Omega_{max} = 2$, (c): $p = 2, \Omega_{max} = 2$, (e): $p = 3, \Omega_{max} = 2$
 Τιμές ιδιοτιμών ως προς το πλήθος τους
 (b): $p = 1, \Omega_{max} = 2$, (d): $p = 2, \Omega_{max} = 2$, (f): $p = 3, \Omega_{max} = 2$

Αν τώρα σταθεροποιήσουμε το $\Omega_{max} = 2$ και μεταβάλλουμε ελάχιστα το p , αλλά με τιμές μικρότερες του 1 ($p = 0.5, 0.7, 0.9$) παρατηρούμε ότι:

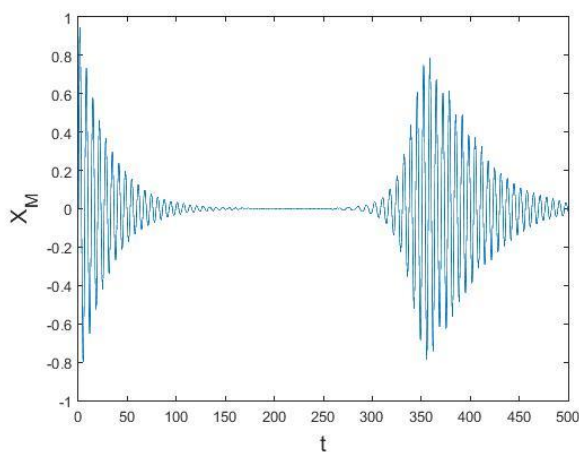
- Αρχικά το πλάτος της ταλάντωσης για $t < t^*$ μειώνεται.
- Ο χρόνος επιστροφής αυξάνεται (δηλαδή η ταλάντωση επιστρέφει πιο αργά στο βασικό ταλαντωτή).
- Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του p , τόσο ελαχιστοποιείται η ταλάντωση πριν αυτή επιστρέψει ενώ σε όλες τις περιπτώσεις, η ταλάντωση μηδενίζεται.
- Οι ιδιοτιμές του πίνακα A φαίνονται απομακρυσμένες από το 0, αλλά όσο αυξάνεται το p μετατοπίζονται ελαφρώς γύρω από αυτό το σημείο, αλλά όχι στο βαθμό που παρατηρήθηκε στις προηγούμενες περιπτώσεις (όπως για $p > 1$).



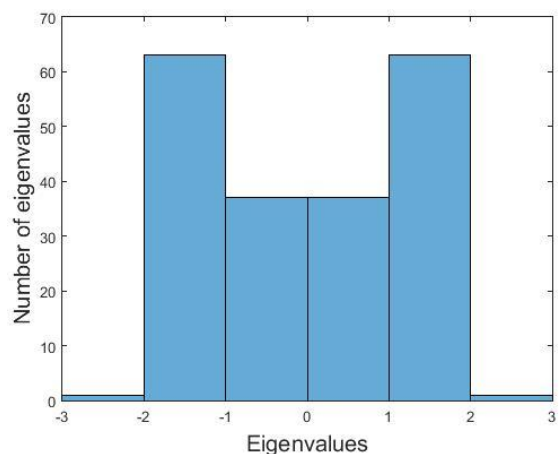
(a)



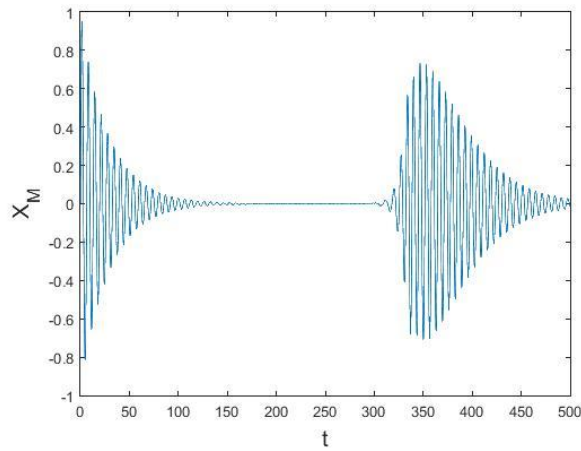
(b)



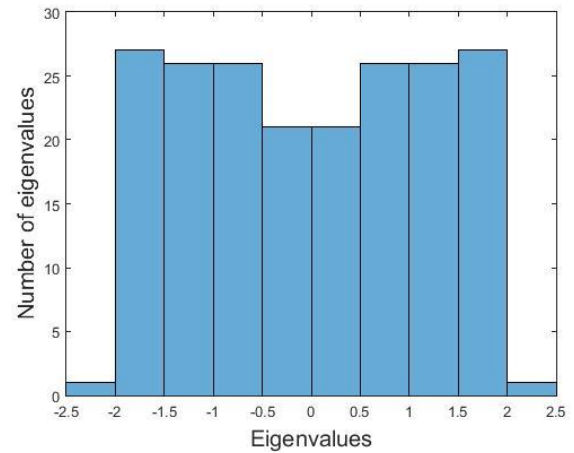
(c)



(d)



(e)



(f)

Σχήμα 6. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

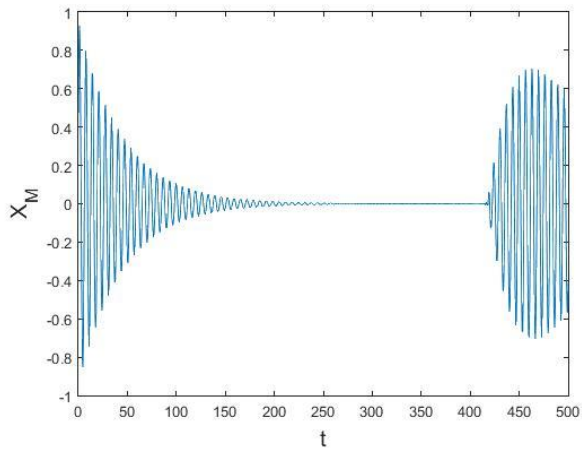
(a): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (c): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$, (e): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2$

Τιμές ιδιοτιμών ως προς το πλήθος τους

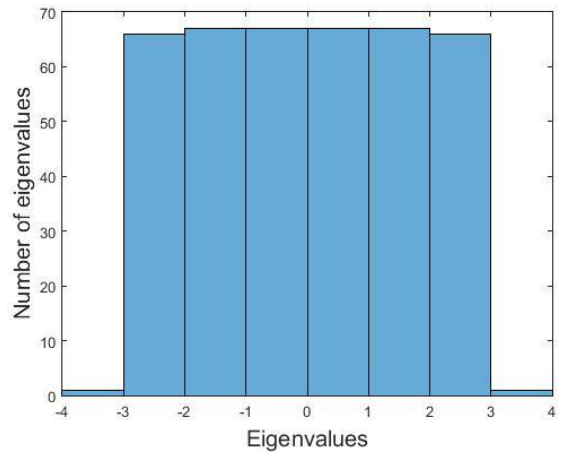
(b): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (d): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$, (f): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2$

Επομένως παρατηρούμε ότι για $p < 1$, το πλάτος της ταλάντωσης, ο χρόνος επιστροφής και η ελαχιστοποίησή της, λειτουργούν αντίστροφα σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα, όπου το p έχει τιμές μεγαλύτερες του 1. Ένα άλλο στοιχείο που παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι στα μοντέλα όπου η ταλάντωση μειώνεται και ελαχιστοποιείται (για $t < t^*$), το μεγαλύτερο πλήθος των ιδιοτιμών λαμβάνει τιμές στο 0 ή κοντά σε αυτό.

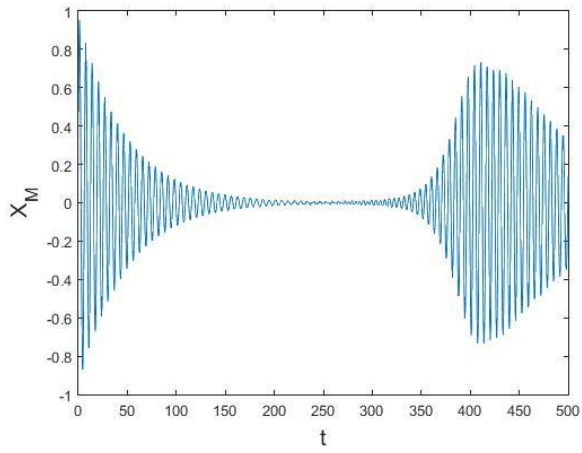
Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο εκτελεί την ταλάντωση ο κύριος ταλαντωτής, αυξάνοντας κατά πολύ το πλήθος των δευτερευόντων ταλαντωτών. Συγκεκριμένα θα εκτελέσουμε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις με τη διαφορά ότι τώρα θα έχουμε $N=200$ ταλαντωτές.



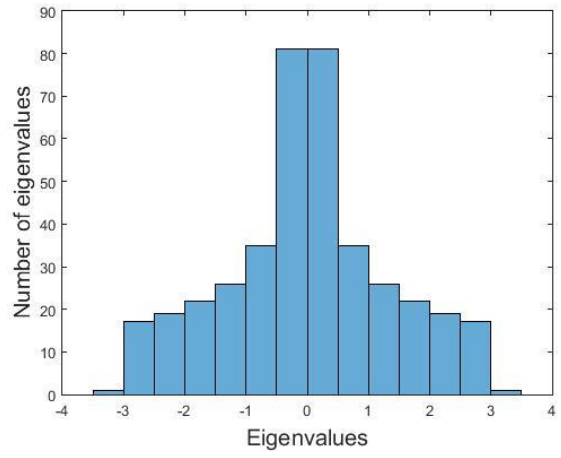
(a)



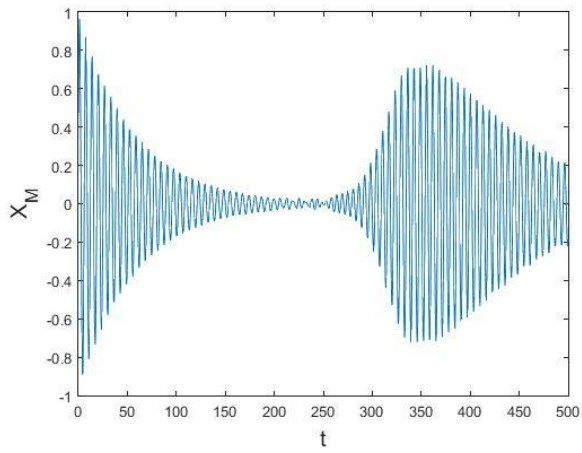
(b)



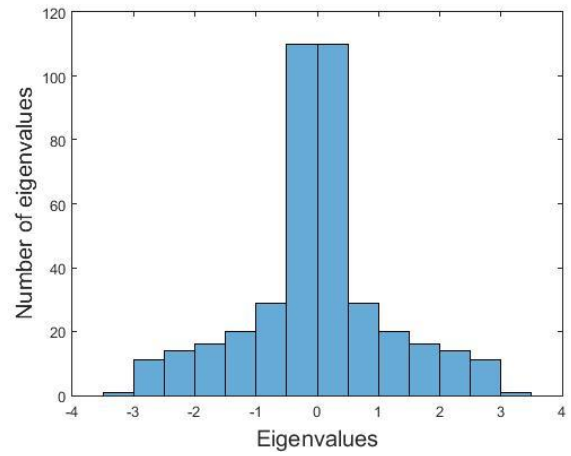
(c)



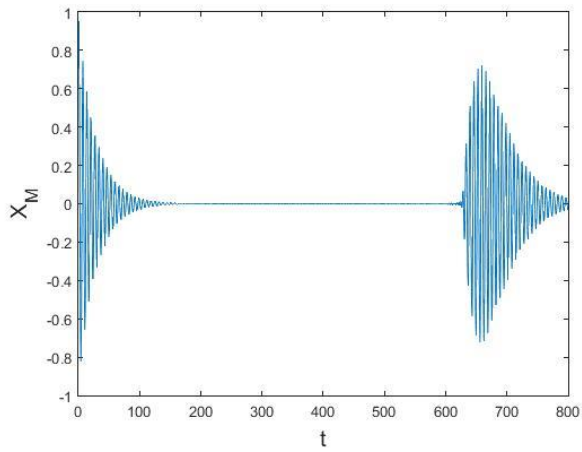
(d)



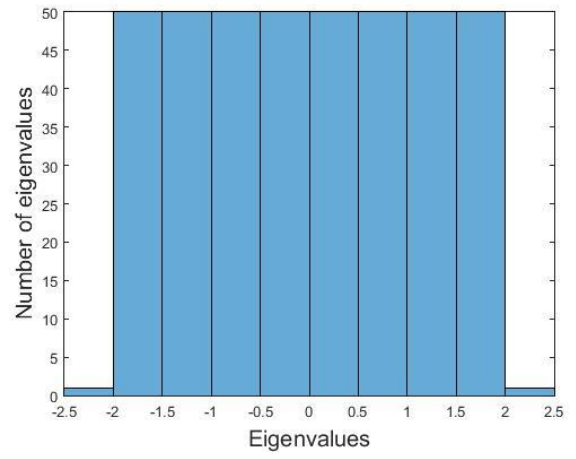
(e)



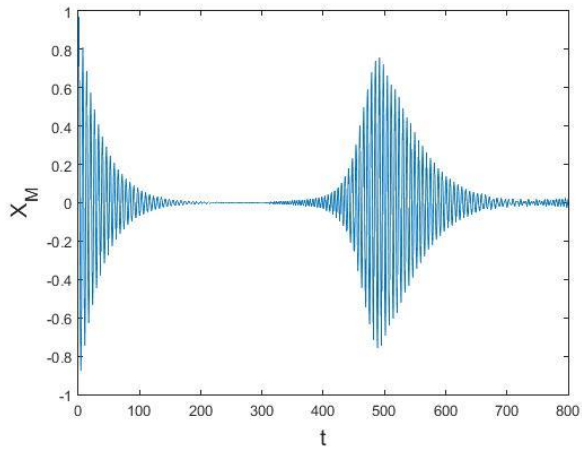
(f)



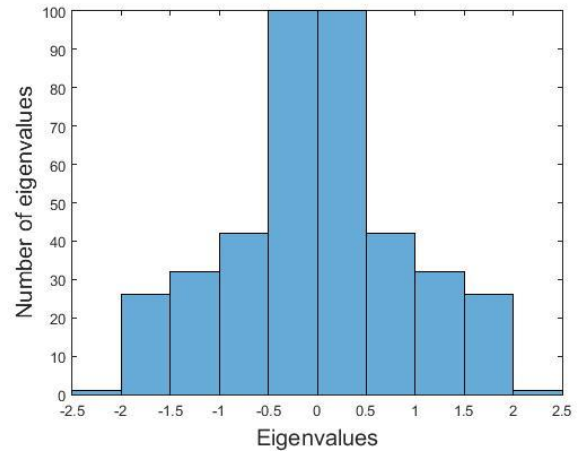
(g)



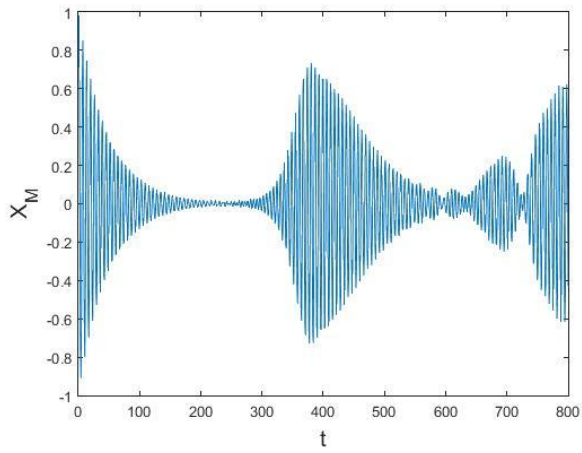
(h)



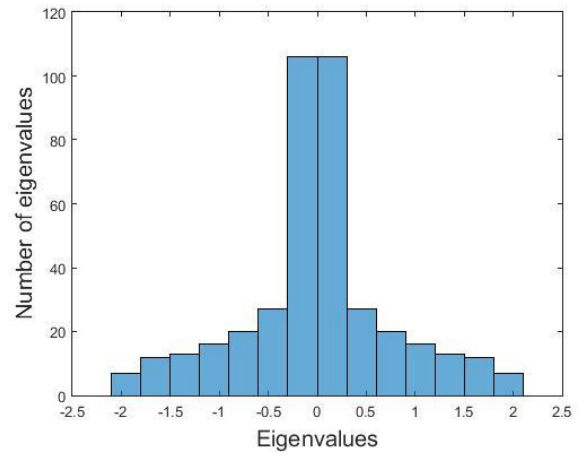
(i)



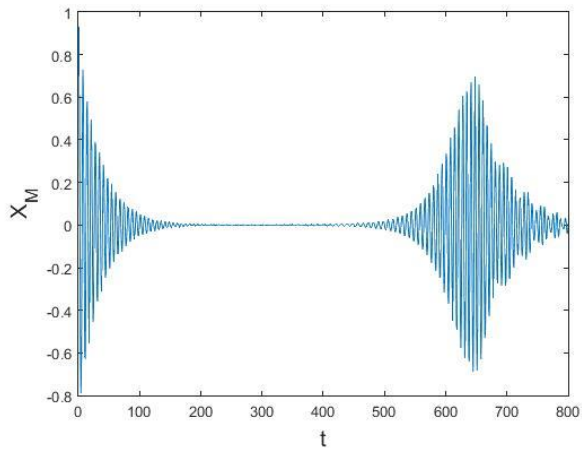
(j)



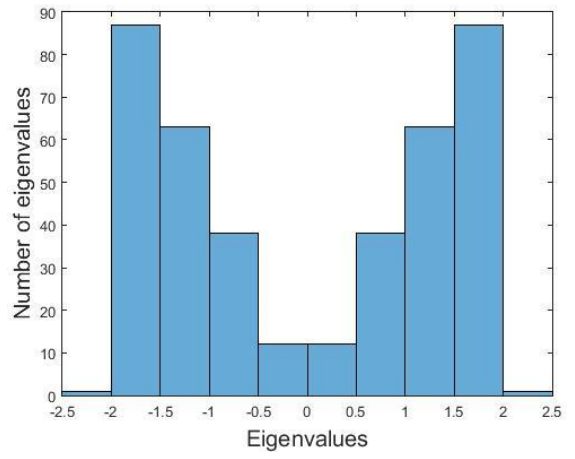
(k)



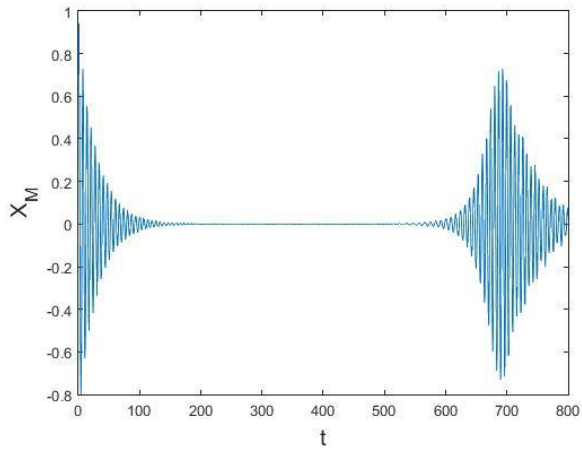
(l)



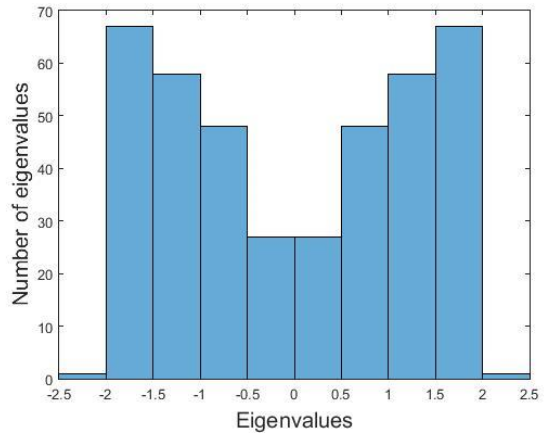
(m)



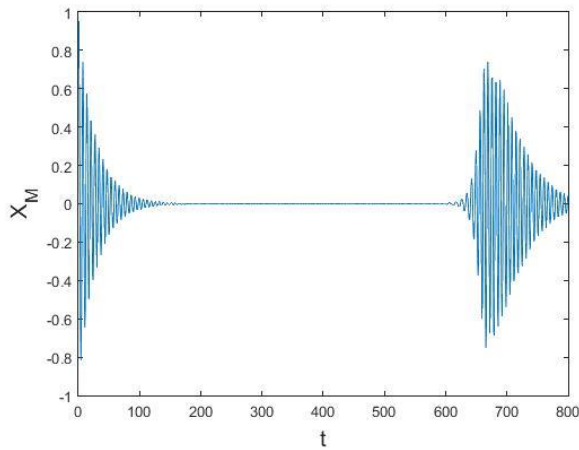
(n)



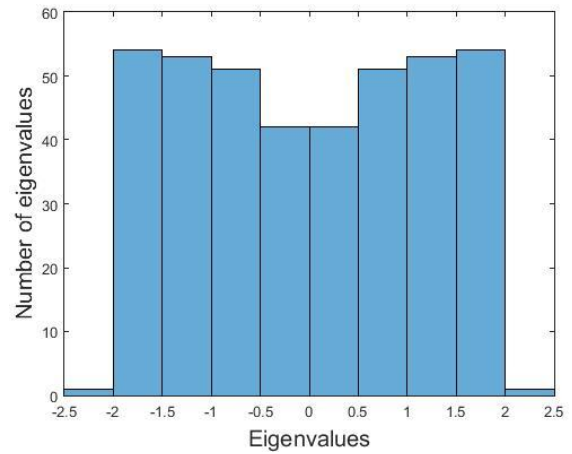
(o)



(p)



(q)



(r)

Σχήμα 7. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

(a): $p = 1, \Omega_{max} = 3$, (c): $p = 2, \Omega_{max} = 3$, (e): $p = 3, \Omega_{max} = 3$,

(g): $p = 1, \Omega_{max} = 2$, (i): $p = 2, \Omega_{max} = 2$, (k): $p = 3, \Omega_{max} = 2$,

(m): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (o): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$, (q): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2$,

Τιμές ιδιοτιμών ως προς το πλήθος τους

(b): $p = 1, \Omega_{max} = 3$, (d): $p = 2, \Omega_{max} = 3$, (f): $p = 3, \Omega_{max} = 3$,

(h): $p = 1, \Omega_{max} = 2$, (j): $p = 2, \Omega_{max} = 2$, (l): $p = 3, \Omega_{max} = 2$,

(n): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (p): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$, (r): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2$

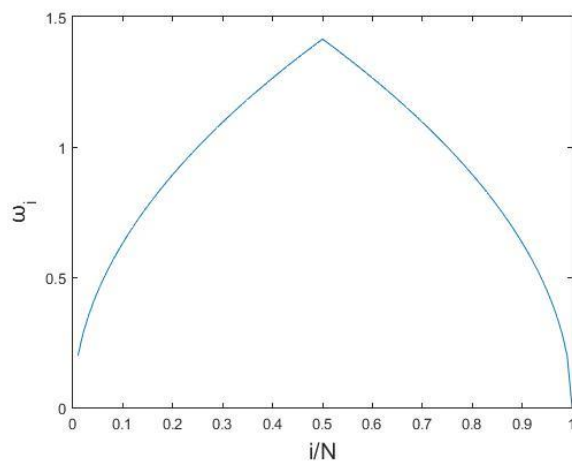
Όπως περιμέναμε ο χρόνος επιστροφής αυξάνεται δραματικά. Ενδιαφέρον όμως έχει και το γεγονός ότι για $t < t^*$ το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται και μάλιστα απότομα και για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Κεφάλαιο 4:

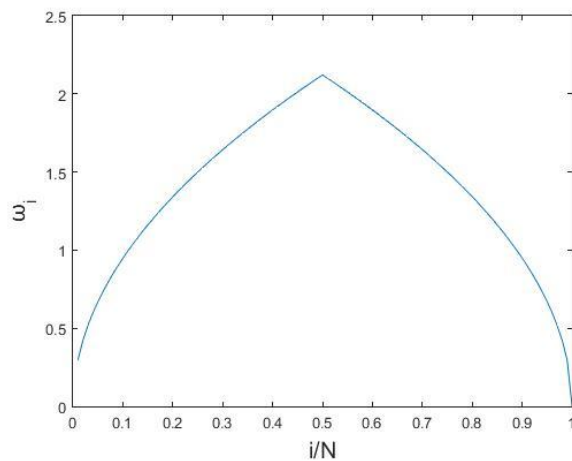
Ταλαντώσεις κυρίου συστήματος όταν οι δευτερεύοντες ταλαντωτές έχουν μη-μονότονη κατανομή συχνοτήτων

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την ταλάντωση που εκτελεί ο κύριος ταλαντωτής για τις παραπάνω τιμές των Ω_{max} και p , αλλά με διαφορετική κατανομή του φάσματος των ω .

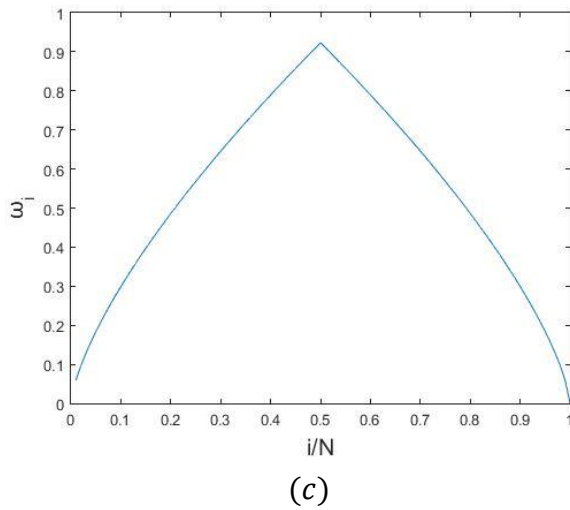
Οι κατανομές που θα χρησιμοποιήσουμε τώρα έχουν την παρακάτω μορφή:



(a)



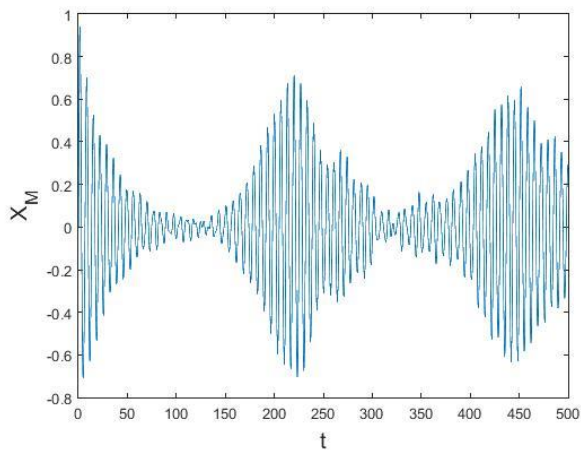
(b)



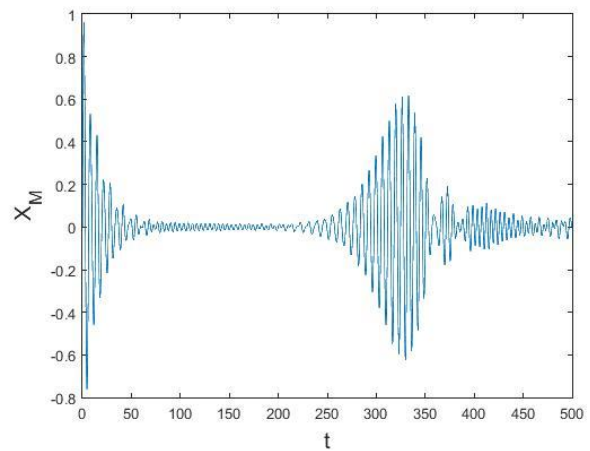
Σχήμα 8. Φυσική Συχνότητα του ταλαντωτή i ως προς την τοποθέτησή του στην επιφάνεια

(a): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (b): $p = 0.5, \Omega_{max} = 3$, (c): $p = 0.7, \Omega_{max} = 1.5$

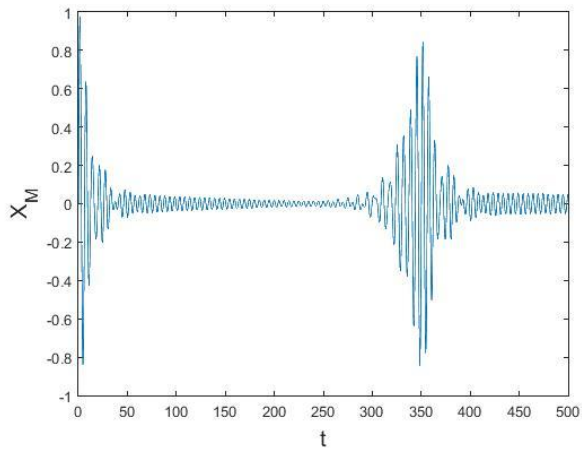
Σύμφωνα με τα αποτελέσματα, οι τιμές που λαμβάνουν τα k_i μηδενίζονται ή προσεγγίζουν το μηδέν για συγκεκριμένα διαστήματα των p σε συνάρτηση πάντα με το εκάστοτε Ω_{max} , με αποτέλεσμα να μην πραγματοποιείται ταλάντωση. Για παράδειγμα όταν το Ω_{max} ισούται με 3, το p πρέπει να ανήκει στο διάστημα $[1, 1.6]$ για να έχουμε ταλάντωση. Με παρόμοιο τρόπο λειτουργούν οι παράμετροι για τις υπόλοιπες τιμές του Ω_{max} , οπότε παρατίθενται τα αποτελέσματα για τα οποία έχουμε ταλάντωση και έχουν ως εξής:



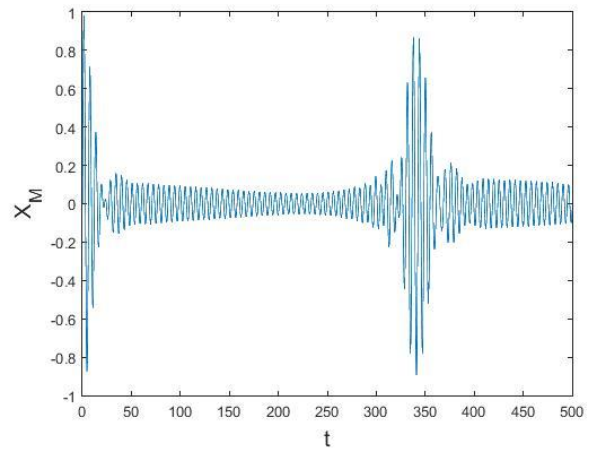
(a)



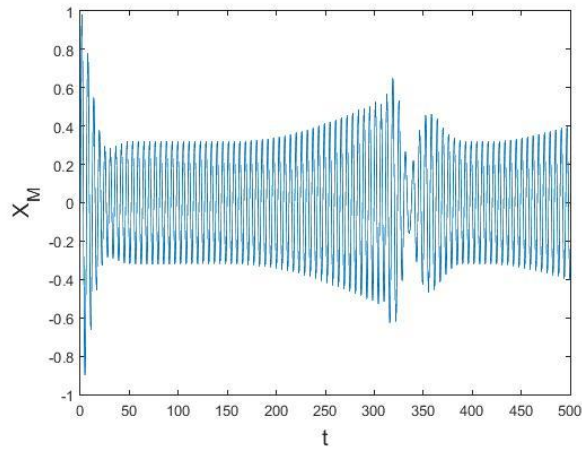
(b)



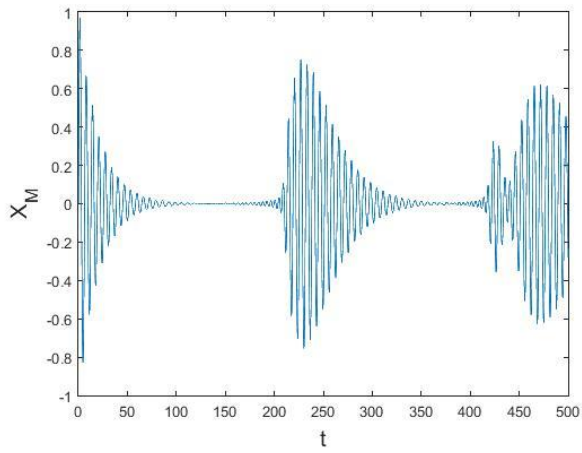
(c)



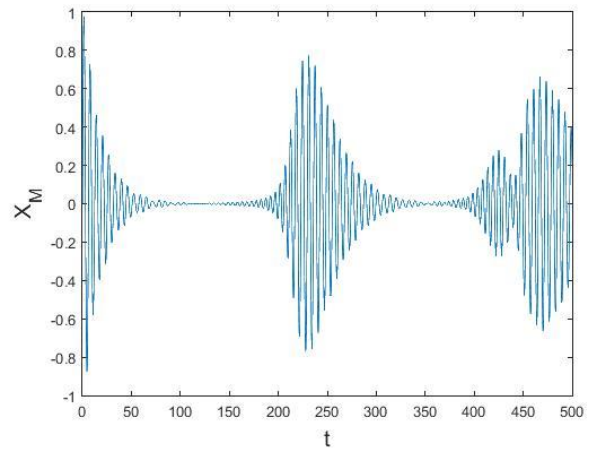
(d)



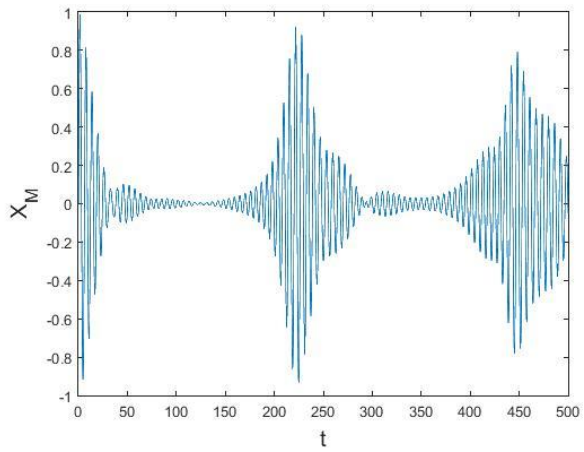
(e)



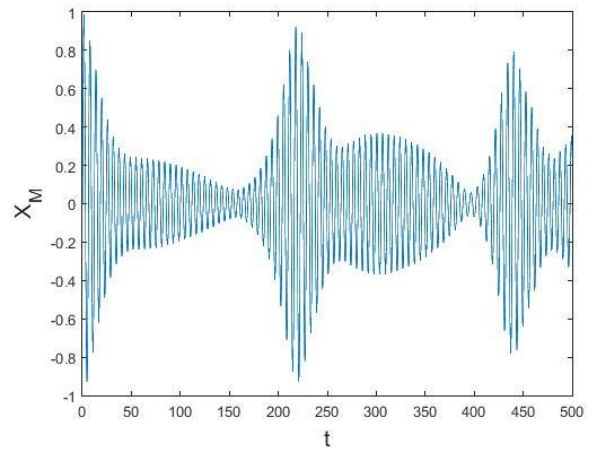
(f)



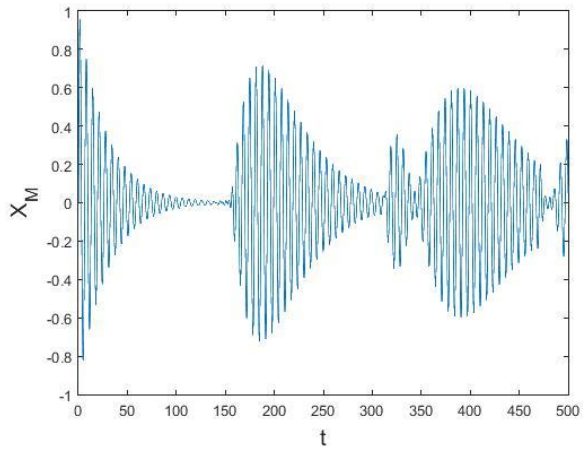
(g)



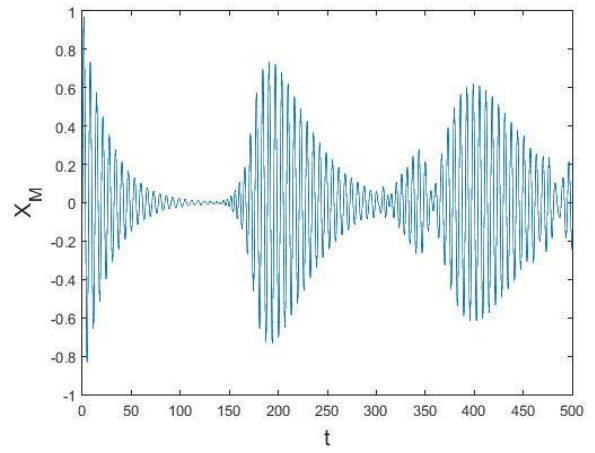
(h)



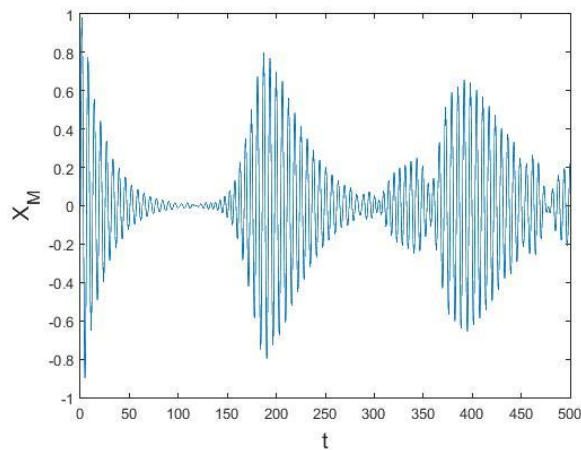
(i)



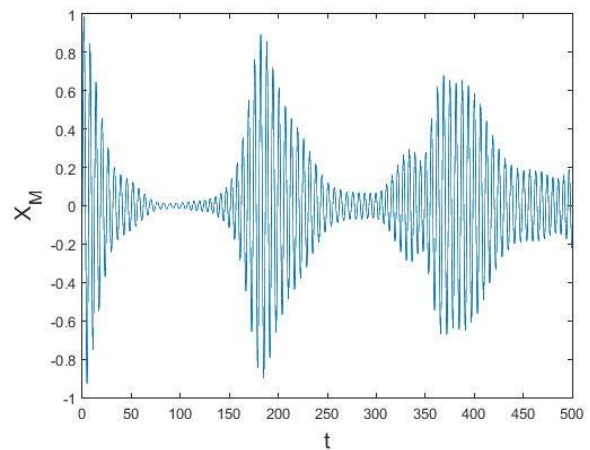
(j)



(k)



(l)



(m)

Σχήμα 9. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

(a): $p = 0.3, \Omega_{max} = 2$, (b): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2$, (c): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2$,

(d): $p = 0.8, \Omega_{max} = 2$, (e): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2$, (f): $p = 1, \Omega_{max} = 3$,

(g): $p = 1.2, \Omega_{max} = 3$, (h): $p = 1.4, \Omega_{max} = 3$, (i): $p = 1.5, \Omega_{max} = 3$,

(j): $p = 1, \Omega_{max} = 4$, (k): $p = 1.2, \Omega_{max} = 4$, (l): $p = 1.6, \Omega_{max} = 4$,

(m): $p = 1.8, \Omega_{max} = 4$

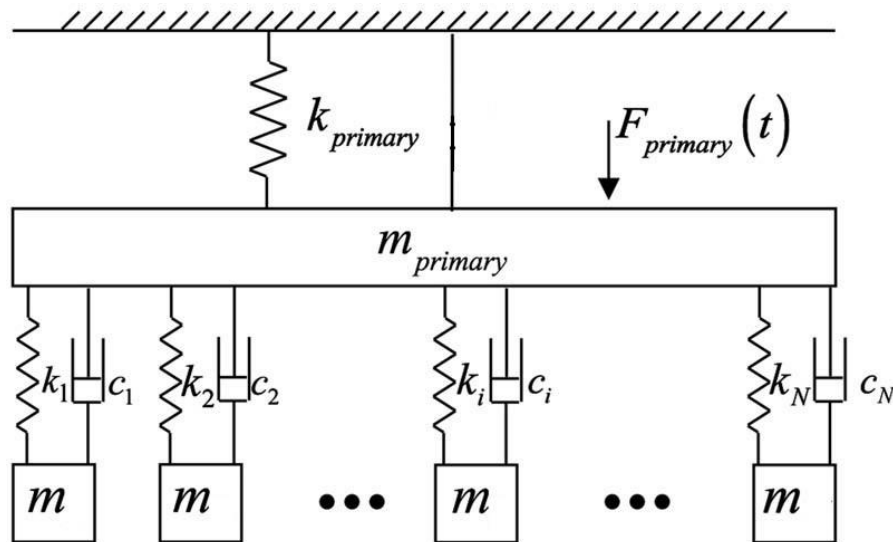
Παρ' όλο που τα αποτελέσματα δε μας δίνουν αρκετές πληροφορίες λόγω του περιορισμένου εύρους του φάσματος των επιτρεπόμενων τιμών του p , μπορούμε να εξάγουμε ορισμένα συμπεράσματα:

- Ο χρόνος επιστροφής φαίνεται να αυξάνεται μέχρι ένα σημείο, αλλά στη συνέχεια βλέπουμε ότι μειώνεται. Δηλαδή όσο αυξάνεται το p , δεν έχουμε τις γνωστές μονότονες συμπεριφορές του χρόνου επιστροφής t^* , όπως στις περιπτώσεις των κατανομών του τύπου Σχήμα 3.
- Ανάλογα μεταβάλλεται και το πλάτος της ταλάντωσης για $t < t^*$. Στα πρώτα αποτελέσματα δείχνει να μειώνεται, αλλά στη συνέχεια αυξάνεται. Το τελευταίο μάλιστα φαίνεται να λειτουργεί σε συνάρτηση με την προηγούμενη διαπίστωση, δηλαδή με την αυξομείωση του χρόνου επιστροφής t^* .

Κεφάλαιο 5:

Συζευγμένες ταλαντώσεις με χρήση απόσβεσης

Σε αυτό το σημείο θα μελετήσουμε το μοντέλο για την περίπτωση όπου οι προσδεδεμένοι ταλαντωτές περιέχουν απόσβεση, όπως περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 10. Βασικός ταλαντωτής με προσδεδεμένους N ταλαντωτές που περιέχουν απόσβεση

Λόγος απόσβεσης

Ο λόγος απόσβεσης (ζ) είναι η καθοριστική παράμετρος σύμφωνα με την οποία χαρακτηρίζεται το είδος της απόσβεσης και κατ' επέκταση ο τρόπος με τον οποίο θα εξελιχθεί η ταλάντωση.

Ορίζεται ως εξής: $\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{\text{συντελεστής απόσβεσης}}{\text{κρίσιμος συντελεστής απόσβεσης}}$, όπου c η απόσβεση που προκαλεί στο σύστημα απώλεια ενέργειας και καθιστά φθίνουσα την ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης πλέον είναι

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, ενώ η κρίσιμη απόσβεση ορίζεται ως $c_c = 2\sqrt{k_i m} = 2m\omega_i$ είναι ο συντελεστής απόσβεσης για τον οποίον το σύστημα (μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας) δεν θα εκτελέσει ταλάντωση εάν διεγερθεί με αρχικές συνθήκες.

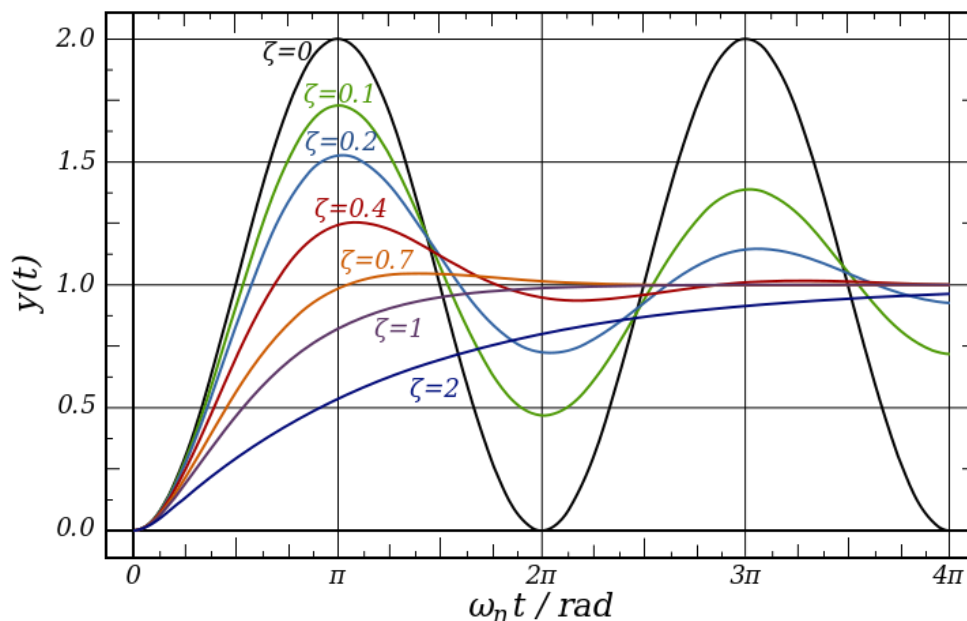
Ανάλογα με την τιμή που λαμβάνει το ζ , διαμορφώνεται και ο τρόπος της ταλάντωσης και αποτυπώνονται στο παρακάτω διάγραμμα [8]. Οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$\zeta = 0$: Το σύστημα δεν περιέχει απόσβεση και η ταλάντωση δεν είναι φθίνουσα (undamped)

$0 < \zeta < 1$: Υποκρίσιμη απόσβεση (underdamped)

$\zeta = 1$: Κρίσιμη απόσβεση (critically damped)

$\zeta > 1$: Υπερκρίσιμη απόσβεση (overdamped)



Σχήμα 11. Εκτέλεση εξαναγκασμένης ταλάντωσης για διαφορετικούς λόγους απόσβεσης ζ

Η περίπτωση που θα μας απασχολήσει είναι η υποκρίσιμη απόσβεση, δηλαδή για $0 < \zeta < 1$.

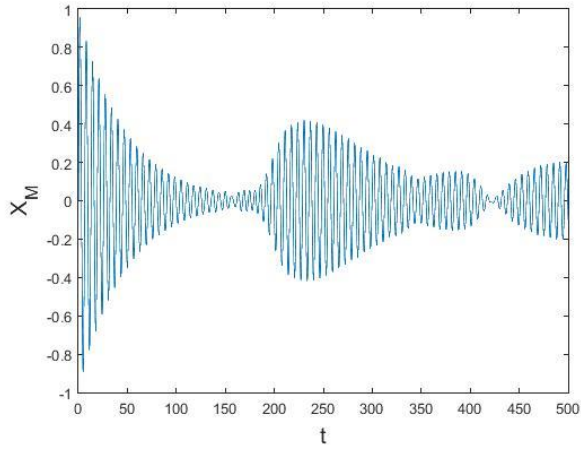
Με την προσθήκη της απόσβεσης στους προσδεδεμένους ταλαντωτές οι εξισώσεις κίνησης θα έχουν την παρακάτω μορφή:

Master oscillator: $M\ddot{x}_M + k_M x_M + \sum_{i=1}^N k_i(x_M - x_i) + \sum_{i=1}^N c_i(\dot{x}_M - \dot{x}_i) = 0$ (9)

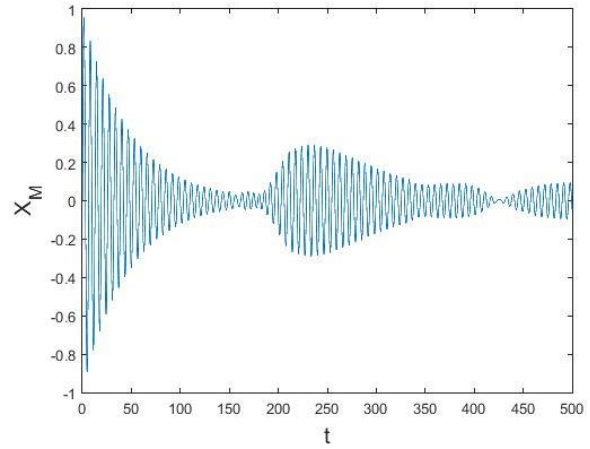
Secondary oscillators: $m\ddot{x}_i + k_i(x_i - x_M) + c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_M) = 0, \quad i = 1, \dots, N$ (10)

όπου c_i ο συντελεστής απόσβεσης στον i – ταλαντωτή.

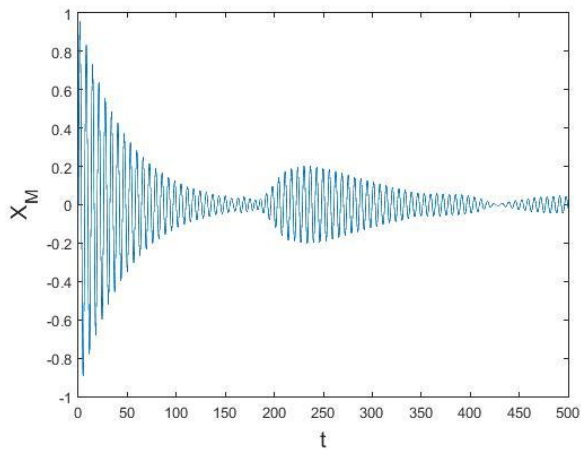
Πρώτα θα σταθεροποιήσουμε τα Ω_{max} και p , με $\Omega_{max} = 2$, $p = 3$ και στη συνέχεια θα μεταβάλλουμε το ζ .



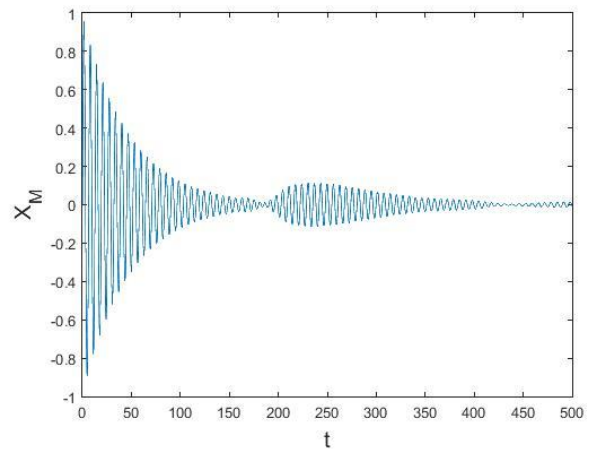
(a)



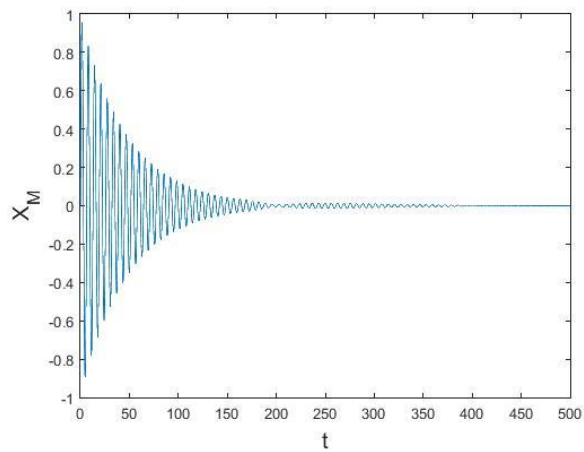
(b)



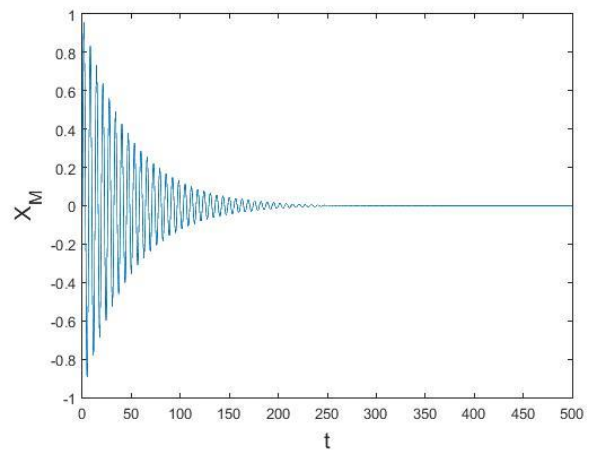
(c)



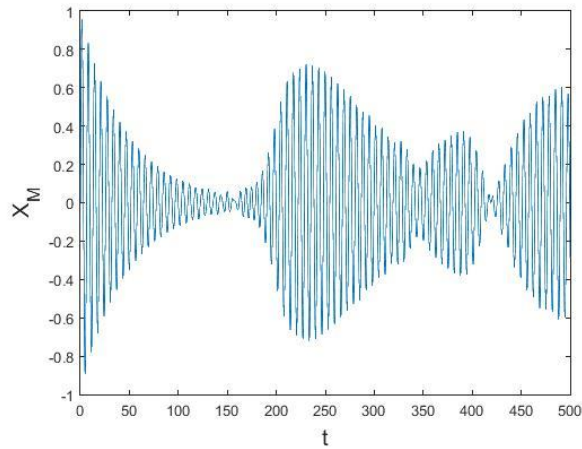
(d)



(e)



(f)

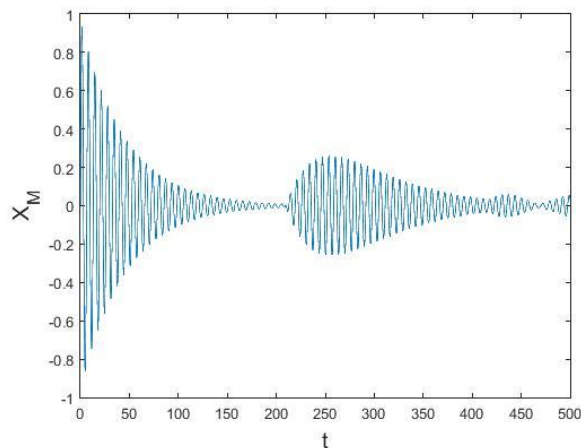


(g)

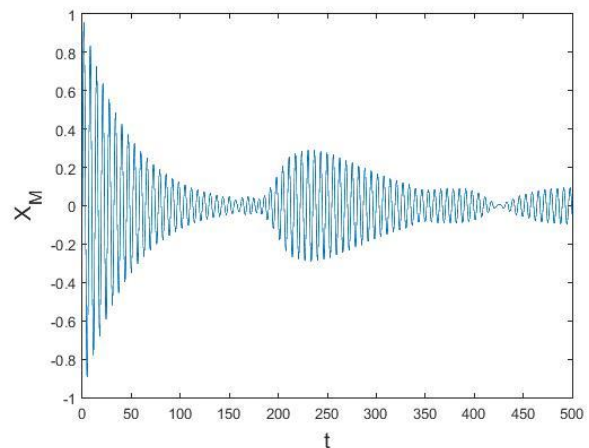
Σχήμα 12. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή
 (a): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.003$, (b): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$,
 (c): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.007$ (d): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.010$,
 (e): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.020$, (f): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.030$,
 (g): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0$

Όπως πολύ εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε, ο συντελεστής της απόσβεσης c συμβάλλει στην κατά τμήματα μείωση του πλάτους της ταλάντωσης. Όσο αυξάνεται ο συντελεστής τόσο μεγαλύτερη είναι αυτή η μείωση, έως ότου να επιστρέφεται ελάχιστη ενέργεια (Σχήμα 12e) της ταλάντωσης ή να μην υπάρχει καν επιστροφή (Σχήμα 12f). Φυσικά στην περίπτωση όπου $\zeta = 0$ η ταλάντωση είναι όπως περιγράφηκε στην αρχή (Σχήμα 5e). Με την πάροδο του χρόνου το πλάτος μειώνεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ενώ ο χρόνος επιστροφής t^* παραμένει αναλλοίωτος, πράγμα αναμενόμενο αφού όπως δείξαμε προηγουμένως η συγκεκριμένη τιμή εξαρτάται από τα p , N και Ω_{max} . Η απόσβεση λοιπόν μειώνει το πλάτος αλλά η γενική συμπεριφορά της ταλάντωσης διατηρείται. Τα σημεία δηλαδή στα οποία επιστρέφει η ταλάντωση, όπως και ο τρόπος με τον οποίο αυξομειώνονται τα πλάτη, φαίνεται να μην επηρεάζονται από αυτή την προσθήκη. Το μοντέλο αυτό παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον, μιας και αναφερόμαστε σε περίπτωση όπου οι ταλαντωτές περιέχουν απόσβεση και ταυτόχρονα έχουμε χρονικά διαστήματα στα οποία το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται.

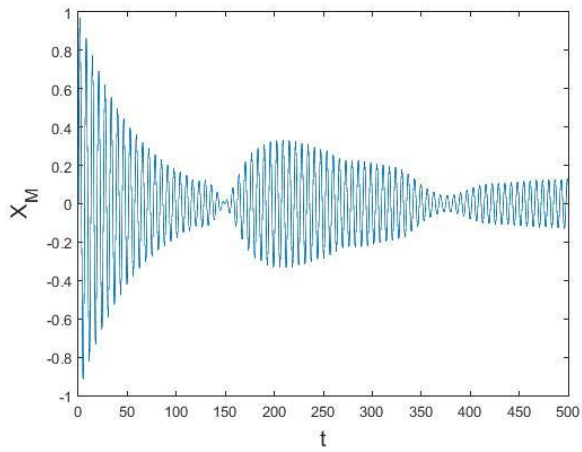
Όμοια βλέπουμε ότι εξελίσσονται οι ταλαντώσεις και για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων:



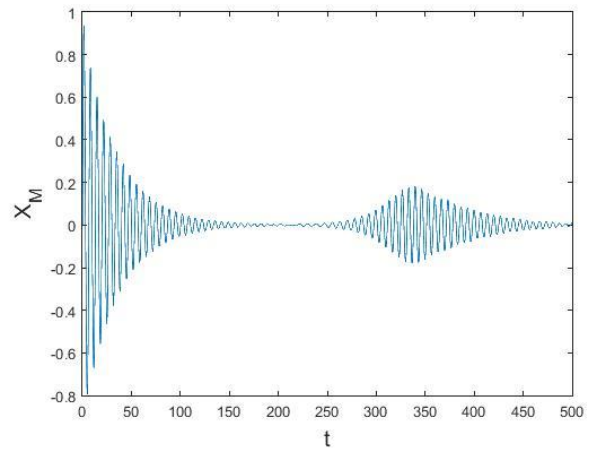
(a)



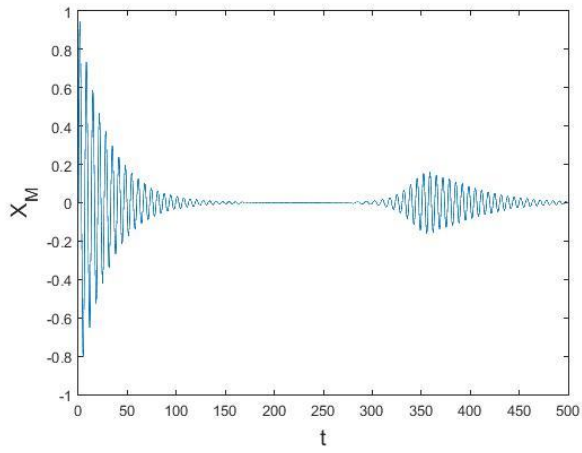
(b)



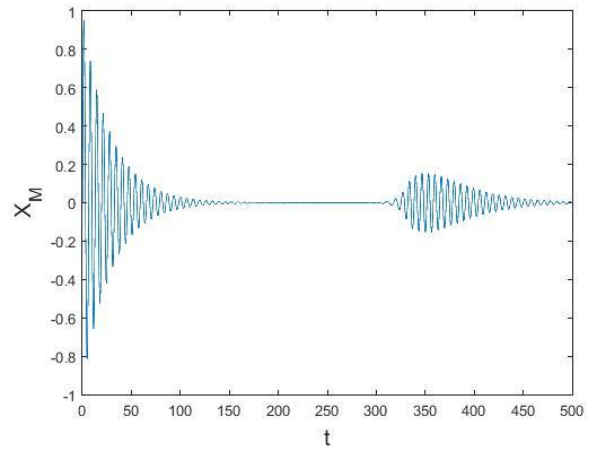
(c)



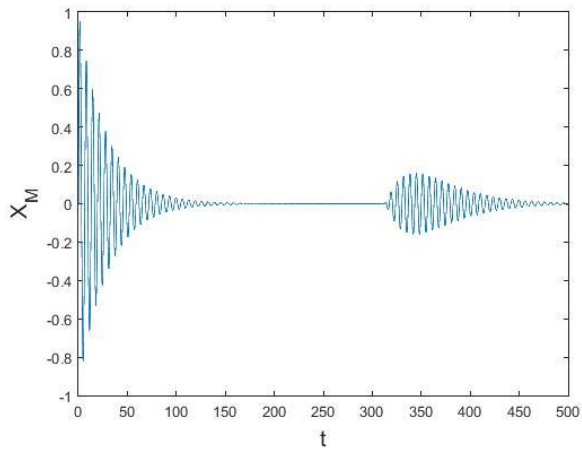
(d)



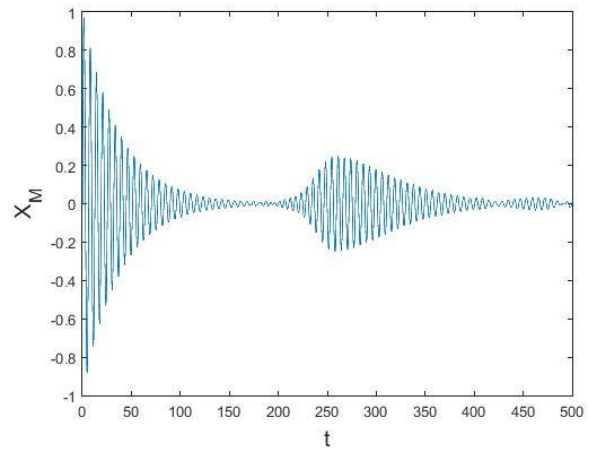
(e)



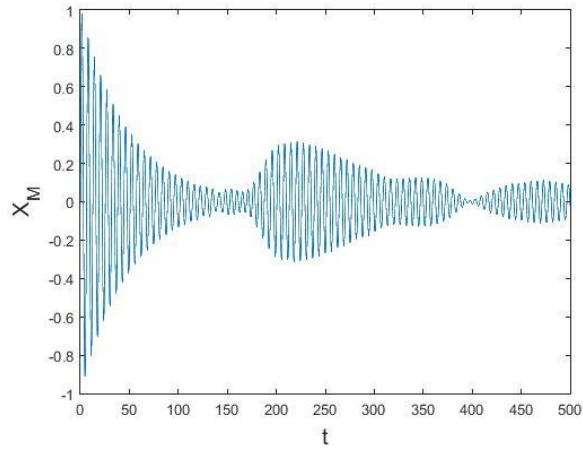
(f)



(g)



(h)



(i)

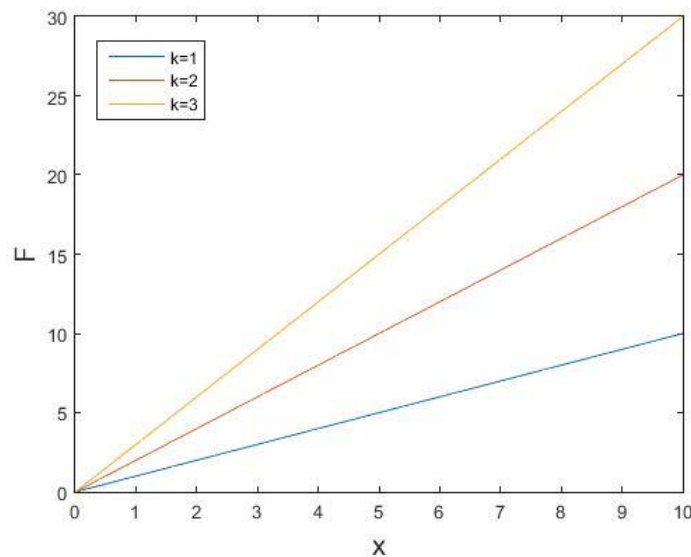
Σχήμα 13. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

- (a): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \zeta = 0.005$, (b): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \zeta = 0.005$,
(c): $p = 3, \Omega_{max} = 3, \zeta = 0.005$, (d): $p = 0.5, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$,
(e): $p = 0.7, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$, (f): $p = 0.9, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$,
(g): $p = 1, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$, (h): $p = 2, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$,
(i): $p = 3, \Omega_{max} = 2, \zeta = 0.005$

Κεφάλαιο 6:

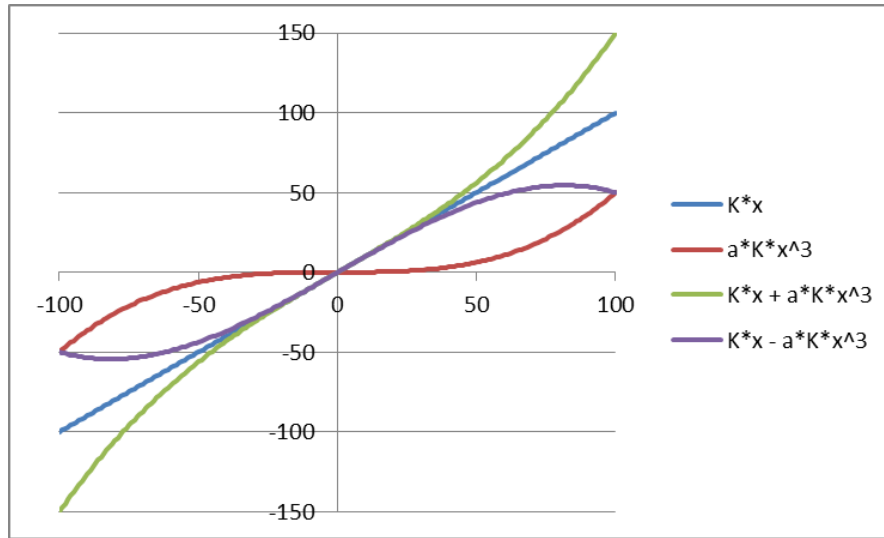
Συζευγμένες ταλαντώσεις όταν οι δευτερεύοντες ταλαντωτές έχουν μη γραμμική δυσκαμψία

Οι περιπτώσεις που εξετάσαμε παραπάνω, αναφέρονται σε ελατήρια που λειτουργούν βάσει του νόμου του Hook. Δηλαδή η δύναμη F που ασκείται σε ένα ελατήριο ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου k επί τη μετατόπισή του x από την αρχική του θέση ($F = kx$). Η σχέση που έχει η ασκούμενη δύναμη με την μετατόπιση είναι γραμμική και μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:



Σχήμα 14. Μετατόπιση ελατηρίου ως προς τη δύναμη που του ασκείται για $k = 1, k = 2, k = 3$

Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση που οι ταλαντωτές χαρακτηρίζονται από συντελεστές δυσκαμψίας και δε συνδέουν τη δύναμη με την μετατόπιση με γραμμική σχέση; Το παρακάτω διάγραμμα μας δείχνει ορισμένες περιπτώσεις με τις οποίες μπορεί να σχετίζονται αυτά τα δύο μεγέθη.



Σχήμα 15. Μετατόπιση ελατηρίου ως προς τη δύναμη που του ασκείται όταν αυτή ισούται με

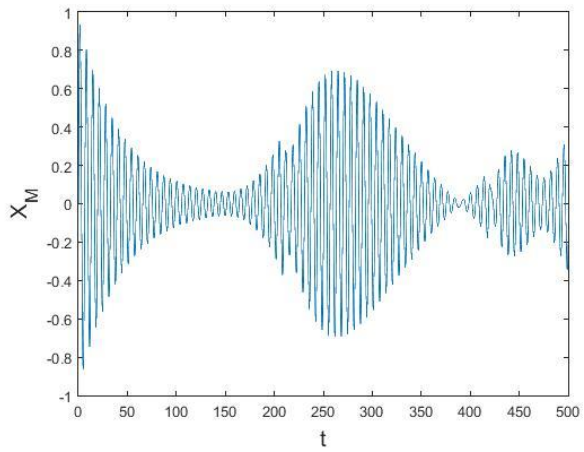
$kx, akx^3, kx + akx^3, kx - akx^3$, όπου a θετική σταθερά

Η περίπτωση που θα εξετάσουμε αφορά την περίπτωση όπου η δύναμη θα έχει τη μορφή $F = kx + akx^3 = (k + akx^2)x$, δηλαδή με συντελεστή δυσκαμψίας $k + akx^2$. Οπότε οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνουν τη μορφή:

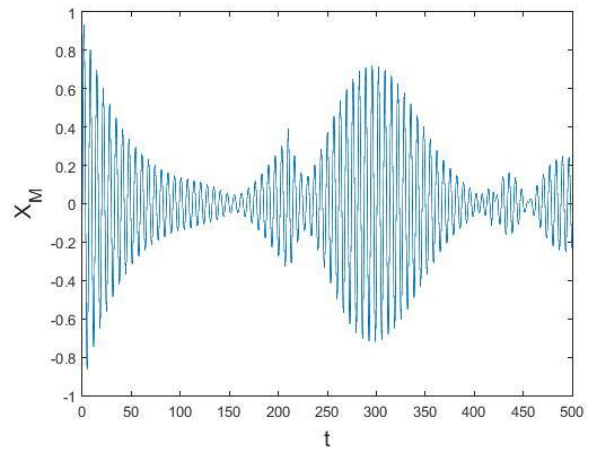
Master oscillator: $M\ddot{x}_M + K_M x_M - \sum_{i=1}^N ([k + ak(x_i - x_M)^2][x_i - x_M]) = 0$ (11)

Secondary oscillators: $m\ddot{x}_i + [k + ak(x_i - x_M)^2][x_i - x_M] = 0$ (12) $i = 1, \dots, N$

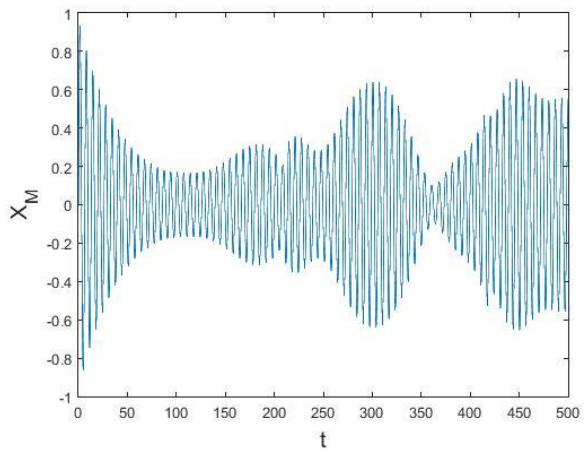
Είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του a , τόσο περισσότερο θα «απομακρύνεται» η ταλάντωση του βασικού ταλαντητή από την αρχική μορφή που είχε. Για αρχή λοιπόν σταθεροποιούμε τις τιμές των p και Ω_{max} ($p = 1, \Omega_{max} = 3$) και θα μεταβάλλουμε την τιμή του a .



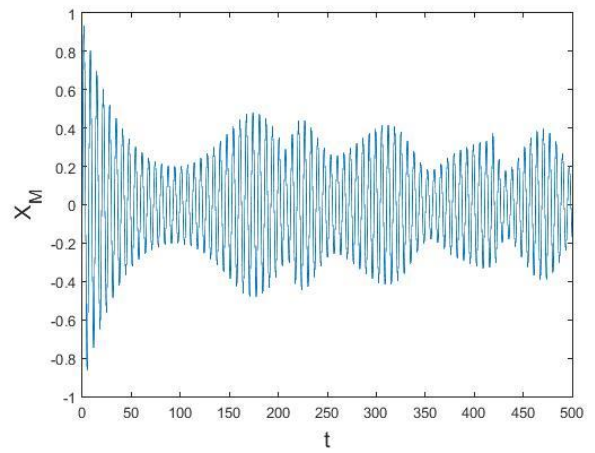
(a)



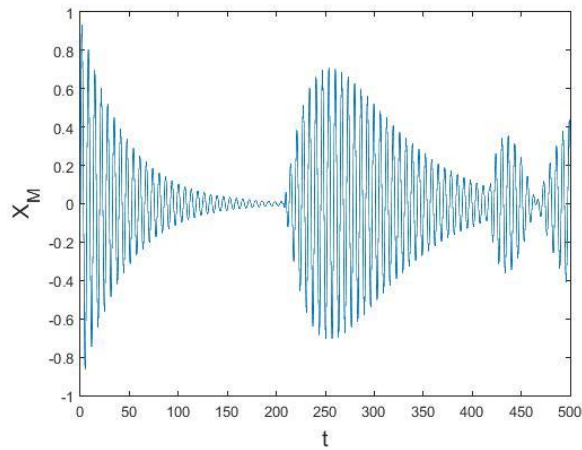
(b)



(c)



(d)



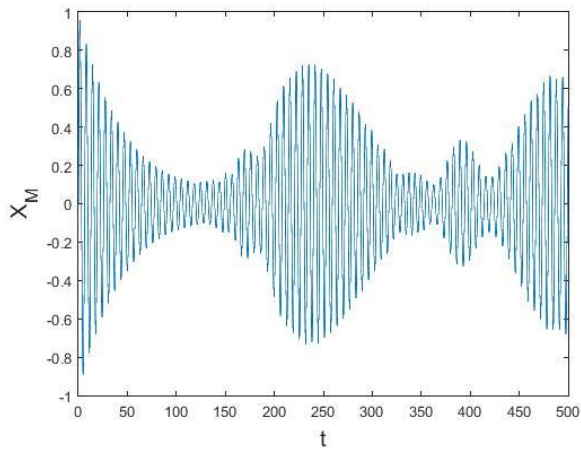
(e)

Σχήμα 16. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

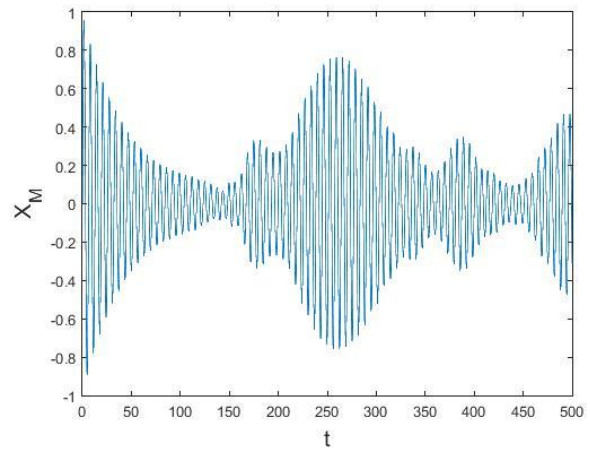
(a): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0001$, (b): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0002$,

(c): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0003$, (d): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0004$,

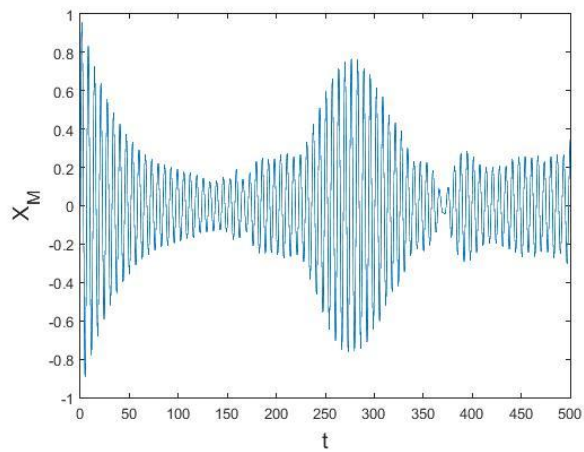
(e): $p = 1, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0000$



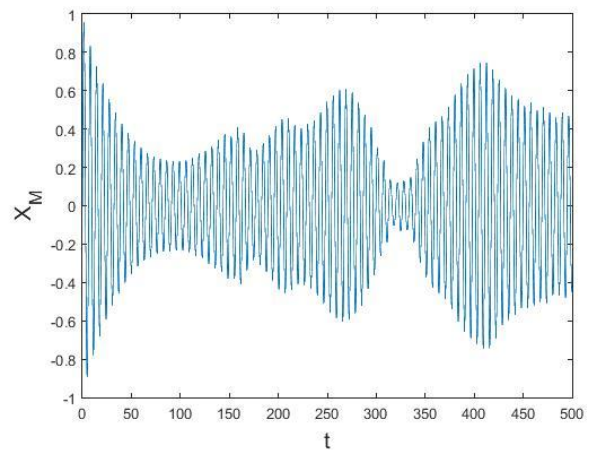
(a)



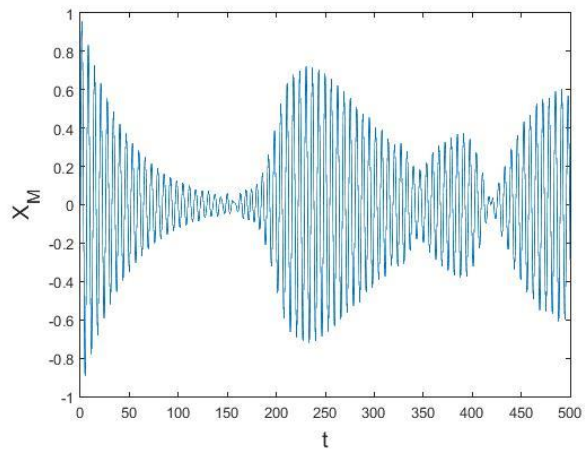
(b)



(c)



(d)



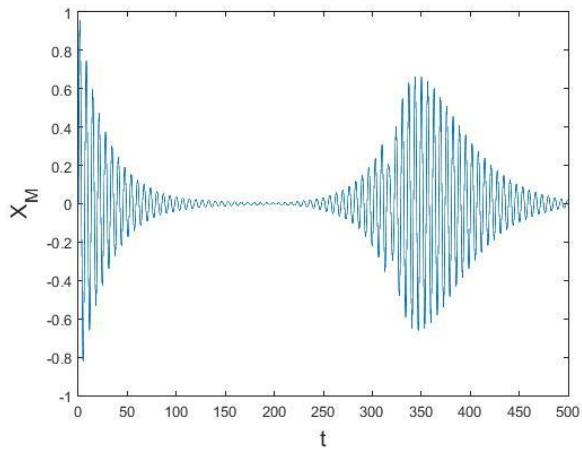
(e)

Σχήμα 17. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

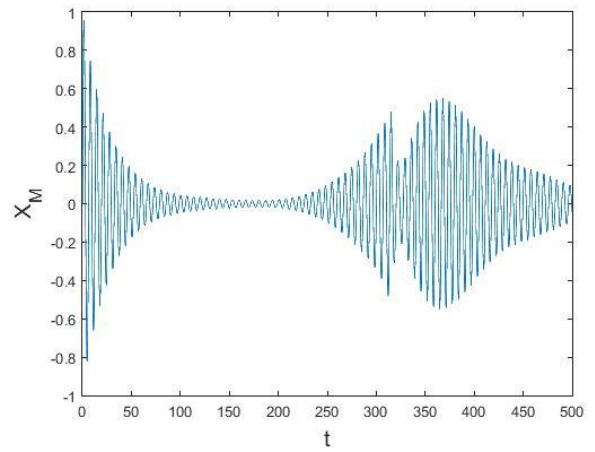
(a): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0001$, (b): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0002$,

(c): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0003$, (d): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0004$,

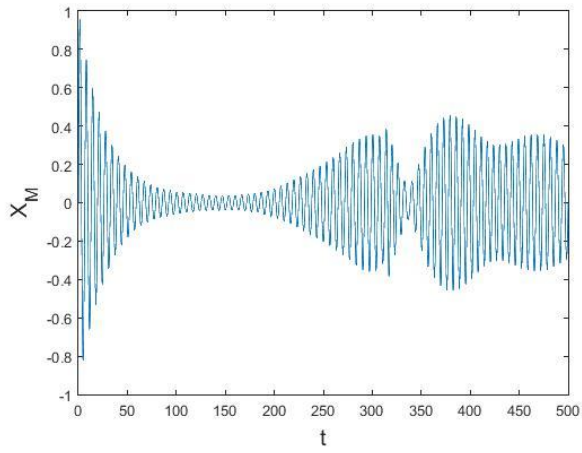
(e): $p = 2, \Omega_{max} = 3, \alpha = 0.0000$



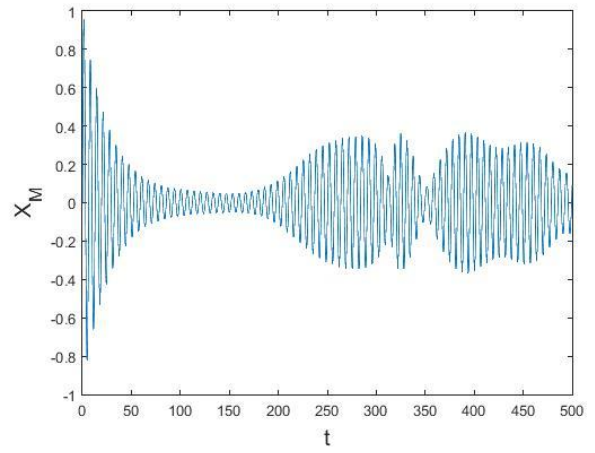
(a)



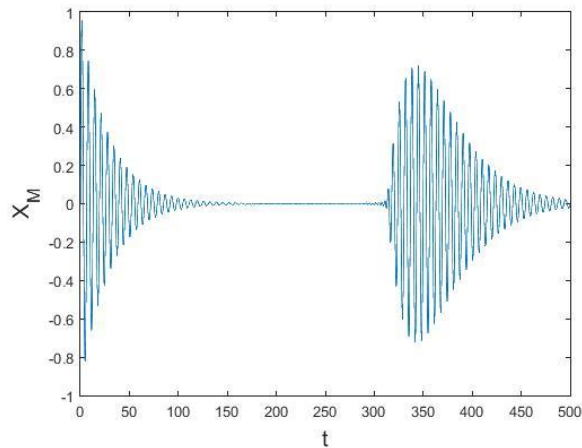
(b)



(c)



(d)



(e)

Σχήμα 18. Μετατόπιση ως προς το χρόνο του βασικού ταλαντωτή

(a): $p = 1$, $\Omega_{max} = 2$, $\alpha = 0.0001$, (b): $p = 1$, $\Omega_{max} = 2$, $\alpha = 0.0002$,

(c): $p = 1$, $\Omega_{max} = 2$, $\alpha = 0.0003$, (d): $p = 1$, $\Omega_{max} = 2$, $\alpha = 0.0004$,

(e): $p = 1$, $\Omega_{max} = 2$, $\alpha = 0.0000$

Βασικό χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων περιπτώσεων είναι η μείωση του υποτιθέμενου χρόνου επιστροφής. Υποτιθέμενου διότι αυτό που παρατηρείται είναι ότι όσο αυξάνεται το α , τόσο λιγότερο απορροφάται η ταλάντωση και επομένως η ενέργεια από τους δευτερεύοντες ταλαντωτές. Το πλάτος της ταλάντωση δηλαδή του βασικού ταλαντωτή μειώνεται κατά τα γνωστά, χωρίς όμως να φτάνει σε σημείο όπου να μηδενίζεται ή σχεδόν να μηδενίζεται, οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε ακριβώς για χρόνο επιστροφής. Το χρονικό σημείο όμως στο οποίο το πλάτος αρχίζει να αυξάνεται πάλι, μειώνεται όσο μεγαλύτερες τιμές δίνουμε στο α , όπως επίσης το πλάτος μειώνεται με αισθητά μικρότερο ρυθμό. Μπορούμε να πούμε ότι ο παράγοντας που επηρεάζει τη γραμμικότητα των εξισώσεων κατά κάποιο τρόπο εμποδίζει τη μεταφορά ενέργειας από το βασικό στους δευτερεύοντες ταλαντωτές.

Κεφάλαιο 7:

Συμπεράσματα

Το πρώτο και βασικό συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε για το πως εξελίσσονται οι συζευγμένες ταλαντώσεις είναι ότι οι βασικές παράμετροι σε αυτή τη διαδικασία είναι τα p , Ω_{max} και N . Μάλιστα αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι ο συνδυασμός και όχι η μεμονωμένη εναλλαγή τιμών των p και Ω_{max} είναι που καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα. Με βάση αυτές τις παραμέτρους έχουμε αρχικές ταλαντώσεις όπου μηδενίζονται (Σχήμα 5a) ή όχι (Σχήμα 5a) και περιπτώσεις όπου μειώνονται με μικρότερο (Σχήμα 5e) ή μεγαλύτερο ρυθμό (Σχήμα 2c). Η αυξομειώση του αριθμού των δευτερευόντων ταλαντωτών (N) διατηρεί την ταλάντωση στην ίδια μορφή, μετατοπίζοντας ανάλογα το χρονικό σημείο της επιστροφής. Αυτό που επίσης παρατηρήθηκε είναι η αντιστοιχία της μορφής της ταλάντωσης με τις ιδιοτιμές του πίνακα A που εκφράζει τις εξισώσεις κίνησης. Στις περιπτώσεις όπου δεν είχαμε απορρόφηση της ενέργειας σε μεγάλο βαθμό, δηλαδή στις περιπτώσεις όπου η ταλάντωση δεν μειώνεται δραστηρικά, ούτε μηδενίζεται, οι ιδιοτιμές του πίνακα A λαμβάνουν ως επί το πλείστον τιμές κοντά στο 0. Αντίθετα, στις περιπτώσεις όπου είχαμε πλήρη απορρόφηση και για μάλιστα μεγάλο χρονικό διάστημα, οι ιδιοτιμές φαίνονται να κατανέμονται διαφορετικά, χωρίς να παρουσιάζουν μεγάλη συγκέντρωση γύρω από το σημείο 0. Ενδεικτικό είναι επίσης το γεγονός ότι παρουσιάζεται και μια αναλογικότητα ως προς την αντιστοιχία αυτή, δηλαδή όσο πιο απότομη και μεγαλύτερη είναι η απορρόφηση της ενέργειας, άλλο τόσο περισσότερες ιδιοτιμές θα έχουν τιμή γύρω από το 0. Στη συνέχεια μελετήθηκε η συμπεριφορά του ταλαντωτή με διαφορετικές κατανομές των ω_i . Αυτό που προκύπτει είναι ότι οι ταλαντώσεις δεν ακολουθούν μια μονότονη διαδικασία. Για παράδειγμα, όταν αυξάνεται το p το πλάτος της ταλάντωσης και ο χρόνος επιστροφής δεν μεταβάλλονται μονότονα, αλλά από κάποια στιγμή και μετά ακολουθούν την αντίστροφη πορεία. Επειδή οι ταλαντώσεις εκφυλίζονται στην πλειονότητα των μετρήσεων, τα αποτελέσματα που μπορούμε να λάβουμε είναι περισσότερα. Όσον αφορά την προσθήκη απόσβεσης στους δευτερεύοντες ταλαντωτές, οι μετρήσεις δείχνουν ότι το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται ανάλογα, καθώς τα βασικά της χαρακτηριστικά διατηρούνται. Ενδεχομένως αυτό να ήταν κάτι αναμενόμενο. Η εισαγωγή της μη γραμμικής ακαμψίας από την άλλη, φανερώνει ότι κατά κάποιο τρόπο, η απορρόφηση της ενέργειας περιορίζεται δραματικά, ανάλογα πάντα με το συντελεστή που επηρεάζει τη γραμμικότητα των εξισώσεων κίνησης. Και σε αυτή την περίπτωση δε μπορούμε να εξάγουμε περαιτέρω συμπεράσματα, αφού το συγκεκριμένο πρόβλημα συνδέεται με πληθώρα παραμέτρων όπως για παράδειγμα οι αρχικές συνθήκες και απαιτεί ξεχωριστή μελέτη.

Κεφάλαιο 8:

Αναφορές:

- [1] I. Murat Koç, Antonio Carcaterra και Zhaoshun Xu και Adnan Akay, "Energy sinks: Vibration absorption by an optimal set of undamped oscillators"
- [2] Joseph F. Vignola και John A. Judge , "Architectural considerations of micro- and nanoresonators for mass detection in the presence of a fluid"
- [3] Aldo A. Glean, John A. Judge, Joseph F. Vignola και Teresa J. Ryan, "Mode-shape-based mass detection scheme using mechanically diverse, indirectly coupled microresonator arrays"
- [4] Teresa J. Ryan, John A. Judge, Joseph F. Vignola, και Aldo A. Glean, "Noise sensitivity of a mass detection method using vibration modes of coupled microcantilever arrays"
- [5] I. Murat Koç, Antonio Carcaterra, Zhaoshun Xu και Adnan Akay "Energy sinks: Vibration absorption by an optimal set of undamped oscillators"
- [6] A. Carcaterra και A. Akay, "Transient energy exchange between a primary structure and a set of oscillators: return time and apparent damping"
- [7] J. R. Dormand και P. J. Prince, "A family of embedded Runge-Kutta formulae"
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Damping_ratio

Κεφάλαιο 9:

APPENDIX

```
function dy=akay_1(t,y)
%%% PARAMETERS %%%
N=100;
M=1;
kM=1;
p=1;
Wmax=3;
mu=0.1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=mu*M;
n=(1/N:1/N:1) .';
w_max=Wmax*sqrt(kM/M);
w=w_max*n.^p;
k=m*w.^2;
dy=zeros(2*N+2,1);
dy(1:N)=y(N+1:2*N);
dy(N+1:2*N)=-(1/m)*k.*(y(1:N)-(y(2*N+1)));
dy(2*N+1)=y(2*N+2);
dy(2*N+2)=-(1/M)*(kM*y(2*N+1)+(1/N)*(k.'*(y(2*N+1)-y(1:N))));
rett = 2*pi*N/p*((1/Wmax)^(1/p));
```

```
function dy=akay_2(t,y)
%%% PARAMETERS %%%
N=100;
M=1;
kM=1;
p=1.8;
Wmax=4;
mu=0.1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=mu*M;
n1=(1/N:1/N:0.5) .';
n2=(0.51:1/N:1) .';
w_max=Wmax*sqrt(kM/M);
w1=w_max*n1.^p;
w2=w_max*(1-n2).^p;
w=[w1;w2];
k=m*w.^2;
dy=zeros(2*N+2,1);
dy(1:N)=y(N+1:2*N);
dy(N+1:2*N)=-(1/m)*k.*(y(1:N)-y(2*N+1));
dy(2*N+1)=y(2*N+2);
dy(2*N+2)=-(1/M)*(kM*y(2*N+1)+(1/N)*(k.'*(y(2*N+1)-y(1:N))));
```

```

function dy=akay_4(t,y)
%%% PARAMETERS %%%
N=100;
M=1;
kM=1;
p=3;
Wmax=2;
mu=0.1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=mu*M;
n=(1/N:1/N:1) .';
w_max=Wmax*sqrt(kM/M);
w=w_max*n.^p;
k=m*w.^2;
z=0.005;
c=2*z*m*w;
dy=zeros(2*N+2,1);
dy(1:N)=y(N+1:2*N);
dy(N+1:2*N)=-(1/m)*(k.*(y(1:N)-y(2*N+1))+c.*(y(N+1:2*N)-y(2*N+2)));
dy(2*N+1)=y(2*N+2);
dy(2*N+2)=-(1/M)*(kM*y(2*N+1)+(1/N)*(k.*(y(2*N+1)-y(1:N)))+(1/N)*(c.*(y(2*N+2)-y(N+1:2*N))));

function dy=akay_3(t,y)
%%% PARAMETERS %%%
N=100;
M=1;
kM=1;
p=1;
Wmax=2;
mu=0.1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
m=mu*M;
n=(1/N:1/N:1) .';
w_max=Wmax*sqrt(kM/M);
w=w_max*n.^p;
k=m*w.^2;
alpha=0.0000;
z=0.000;
c=2*z*m*w;
dy=zeros(2*N+2,1);
dy(1:N)=y(N+1:2*N);
%Linear stiffness
%dy(N+1:2*N)=-(1/m)*(k.*(y(1:N)-y(2*N+1))+c.*(y(N+1:2*N)-y(2*N+2)));
%Nonlinear stiffness k*x*(1+alpha*x^2)
dy(N+1:2*N)=-(1/m)*(k.*(y(1:N)-y(2*N+1)).*(1+alpha*(y(1:N)-y(2*N+1)).^2)+c.*(y(N+1:2*N)-y(2*N+2)));

dy(2*N+1)=y(2*N+2);
%Linear stiffness
%dy(2*N+2)=-(1/M)*(kM*y(2*N+1)+(1/N)*(k.*(y(2*N+1)-y(1:N)))+(1/N)*(c.*(y(2*N+2)-y(N+1:2*N))));
%Nonlinear stiffness k*x*(1+alpha*x^2)
dy(2*N+2)=-(1/M)*(kM*y(2*N+1)+(1/N)*(k.*(y(2*N+1)-y(1:N)).*(1+alpha*(y(2*N+1)-y(1:N)).^2)))+(1/N)*(c.*(y(2*N+2)-y(N+1:2*N)));

```