



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Το πρόβλημα consensus παρουσία εμποδίων με
χρήση διακοπτικού μηχανισμού αλλαγής
κέρδους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ ΤΣΙΤΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
Αθήνα, Οκτώβρης 2018



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Το πρόβλημα **consensus** παρουσία εμποδίων με
χρήση διακοπτικού μηχανισμού αλλαγής
κέρδους

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΥ ΤΣΙΤΟΥ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22 Οκτωβρίου 2018.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Γεώργιος Παπαβασιλόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβρης 2018

(Υπογραφή)

.....

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΤΣΙΤΟΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2018 – All rights reserved

Copyright ©–All rights reserved Αθανάσιος Χριστόφορος Τσίτος, 2018.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στόχος αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός κατανεμημένου αλγορίθμου για ένα σύνολο απο δυναμικά συστήματα στα οποία υπάρχει ένας leader. Ο τελικός σκοπός των πρακτόρων είναι να πετύχουν προσεγγιστικό consensus γύρω από ένα προκαθορισμένο σημείο αναφοράς (set point). Υποθέτουμε την ύπαρξη στατικών εμποδίων στον χώρο κίνησης των πρακτόρων καθώς και ότι το set point βρίσκεται αρκετά μακριά από τα εμπόδια. Στην συνέχεια, θεωρούμε πως υπάρχει ένα στατικό μοντέλο επικοινωνίας το οποίο πρόκειται για γεννητικό δέντρο (spanning tree) και προκύπτει με βάση τις αρχικές αποστάσεις των πρακτόρων. Οι πράκτορες προσπαθούν να έρθουν κοντά και να διατηρήσουν το αρχικό μοντέλο επικοινωνίας ενώ παράλληλα αποφεύγουν τις συγκρούσεις με τα εμπόδια και τους υπόλοιπους πράκτορες. Ο leader έχει ως επιπρόσθετο στόχο να φτάσει σε μια γειτονιά του set point. Τα συστήματα μοντελοποιούνται με απλούς ολοκληρωτές, ενώ για την εξαγωγή των σημάτων εισόδου χρησιμοποιούνται τέσσερα δυναμικά. Το πρώτο δυναμικό έχει ως στόχο να έρθουν κοντά οι πράκτορες, διατηρώντας παράλληλα την επικοινωνία με τους γείτονες, ενώ το δεύτερο αφορά την διατήρηση της συνεκτικότητας με βάση τις θέσεις των εμποδίων στον χώρο. Το τρίτο δυναμικό αφορά την αποφυγή συγκρούσεων ενώ το τέταρτο έχει ως στόχο να φτάσει ο leader σε κάποιο προκαθορισμένο σημείο του χώρου. Οι πράκτορες τείνουν στα τοπικά ελάχιστα του συνολικού δυναμικού, το οποίο προκύπτει ως άθροισμα των τεσσάρων προαναφερθέντων. Είναι προφανές, όμως, πως υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα. Στόχος είναι η επιλογή του ελαχίστου στο οποίο ο leader βρίσκεται αρκετά κοντά στο set point. Αυτό επιτυγχάνεται με έναν διακοπτικό αλγόριθμο σύμφωνα με τον οποίο, εφόσον συμβούν συγκεκριμένα γεγονότα (event-based algorithm), ο leader αυξάνει με κατανεμημένο τρόπο το συντελεστή βάρους του τέταρτου δυναμικού έως ότου αυτός φτάσει σε γειτονιά γύρω από το set point. Με αυτόν τον τρόπο, οι πράκτορες καταφέρνουν να πετύχουν προσεγγιστικό consensus με ταυτόχρονη διατήρηση του αρχικού μοντέλου επικοινωνίας και παράλληλη αποφυγή συγκρούσεων τόσο μεταξύ τους όσο και με τα εμπόδια.

Λέξεις Κλειδιά

Πολυπρακτορικά συστήματα, πρόβλημα ομοφωνίας, γράφος επικοινωνίας, διατήρηση συνεκτικότητας, αποφυγή συγκρούσεων, διακοπτικός αλγόριθμος.

Abstract

This diploma thesis aims to develop a distributed control algorithm for multi-agent systems in the presence of a leader. The main goal of the agents is to achieve approximate consensus close to a predetermined set point. Static obstacles are considered in the space of agent motion and we assume that the set point lies far away from the obstacles. Furthermore, we claim that a static communication network exists, which is supposed to be a spanning tree and is created based on the initial distances of the agents. The agents aim to get close to one another and to maintain the initial communication network topology while they try to avoid collision not only with the obstacles but also with themselves. The leader has an additional goal, which is to arrive at a neighbourhood of the set point and remain therein for all time after. The systems are being modelled using simple integrators while four potential functions are employed for the derivation of the control inputs. The first one aims to bringing the agents close to one another while maintaining the communication with the neighbours. The second one is about connectivity maintenance in the presence of the obstacles. The third one guarantees collision avoidance while the fourth one pertains to the leader and its goal of reaching the set point. The agents tend to the local minima of the overall Lyapunov function which is the sum of the above mentioned functions. However, it is obvious that several local minima exist. Our main objective is the agents to get to the minima in which the leader has reached the set point or is very close to it. This can be achieved using an event-based switching algorithm according to which the leader increases the weight of the fourth potential function in a distributed way until he gets to a neighbourhood of the set point. In this way, approximate consensus is achievable while the agents maintain the connectivity and avoid any collision. Moreover, a theoretical proof of the algorithm convergence is presented which is based on the Lyapunov's and LaSalle's Theorems. Lastly, the multi-agent system is simulated in the Matlab environment and the results of these simulations verify the theoretical analysis.

Keywords

Multi-agent systems, consensus problem, communication graph, connectivity maintenance, collision avoidance.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη που μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα καθώς και για την βοήθεια και την καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	5
Περιεχόμενα	8
Κατάλογος Σχημάτων	10
1 Εισαγωγή	11
1.1 Εισαγωγή στα κατανεμημένα συστήματα	12
1.1.1 Συνεισφορά της διπλωματικής	13
1.2 Οργάνωση του τόμου	15
2 Μαθηματικό Υπόβαθρο	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Εισαγωγή στη θεωρία γράφων	17
2.3 Αλγεβρική θεωρία γράφων	20
2.4 Θεωρία Συστημάτων	22
3 Θεωρητικό υπόβαθρο	25
3.1 Εισαγωγή	25
3.2 Το πρόβλημα consensus	25
3.3 Μοντέλα δυναμικής των πρακτόρων	28
3.4 Το πρόβλημα Consensus υπό την παρουσία εμποδίων	30
3.5 Consensus εν παρουσία συστήματος-leader	33
4 Ανάλυση Σύγκλισης	37
4.1 Εισαγωγή	37
4.2 Μαθηματικός Φορμαλισμός	37
4.3 Θεωρητική Απόδειξη Σύγκλισης	41

5	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	45
5.1	Περιγραφή Προσομοίωσης	45
5.2	Αναλυτική Παρουσίαση Αποτελεσμάτων	45
5.2.1	Δισδιάστατοι Πράκτορες	46
5.2.2	Τρισδιάστατοι Πράκτορες	64
6	Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις	81
	Παράρτημα Α΄	83
	Βιβλιογραφία	87

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Σύστημα ανοιχτού βρόγχου	12
1.2	Σύστημα κλειστού βρόγχου	12
1.3	Συλογική συμπεριφορά ζώων	14
2.1	Μη κατευθυνόμενος και κατευθυνόμενος γράφος 5 κορυφών	18
2.2	Συνεκτικός και αποσυνδεδεμένος γράφος 5 κορυφών	19
2.3	Ειδικές περιπτώσεις γράφων όσων αφορά τη συνεκτικότητα	19
3.1	Σχηματική απεικόνιση του ε-box σε τρεις διαστάσεις[26]	26
3.2	Μοντέλα επικοινωνίας (α)Ακτινική (β)Σφηνοειδής (γ)Μονής ακτίνας[9]	26
3.3	Μετάβαση από την τοπολογία των agents σε γράφο επικοινωνίας	27
3.4	Υποδιαιρέσεις περιοχών ανίχνευσης ενός πράκτορα	28
3.5	Γραφικές παραστάσεις των δύο δυναμικών για τυχαίο ζευγάρι πρακτόρων	30
3.6	Εμπόδια εγγεγραμμένα σε κύκλο γνωστής ακτίνας	31
3.7	Διαγραφή ενός link λόγω εμποδίου	31
3.8	Τοπολογία πριν από τη διαγραφή του link	31
3.9	Εγκλωβισμένο εμπόδιο μεταξύ τριών agents	32
3.10	Ελάχιστη απόσταση του set point από τα εμπόδια	33
4.1	Γραφική παράσταση του δυναμικού διατήρησης της συνεκτικότητας για $R=10$	38
4.2	Γραφική παράσταση του δυναμικού αποφυγής συγκρούσεων	38
4.3	Γωνία θ_{ijk} μεταξύ του εμποδίου k και των πρακτόρων i, j	39
4.4	Τοπολογία χείριστης περίπτωσης για την γωνία e_{θ}	39
5.1	Στιγμιότυπα από την προσομοίωση	49
5.2	Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση	50
5.3	Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση	50
5.4	Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	51
5.5	Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	51
5.6	Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	52
5.7	Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	52
5.8	Τελική διάταξη των πρακτόρων	53
5.9	Στιγμιότυπα από την προσομοίωση	55

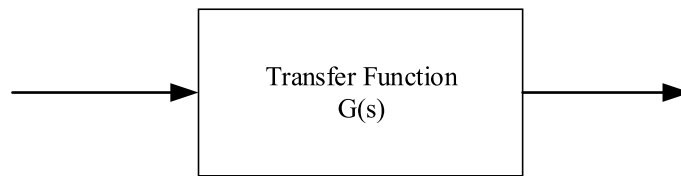
5.10 Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση	55
5.11 Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση	56
5.12 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	56
5.13 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	57
5.14 Τελική διάταξη των πρακτόρων	57
5.15 Στιγμιότυπα από την προσομοίωση	61
5.16 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	62
5.17 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	62
5.18 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	63
5.19 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	63
5.20 Τελική διάταξη των πρακτόρων	64
5.21 Στιγμιότυπα από την προσομοίωση	68
5.22 Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση	68
5.23 Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση	69
5.24 Τροχιές των πρακτόρων στην z διάσταση	69
5.25 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	70
5.26 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	70
5.27 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση	71
5.28 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	71
5.29 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	72
5.30 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	72
5.31 Στιγμιότυπα από την προσομοίωση	75
5.32 Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση	75
5.33 Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση	76
5.34 Τροχιές των πρακτόρων στην z διάσταση	76
5.35 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση	77
5.36 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση	77
5.37 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση	78
5.38 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	78
5.39 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	79
5.40 Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα . .	79

Κεφάλαιο 1

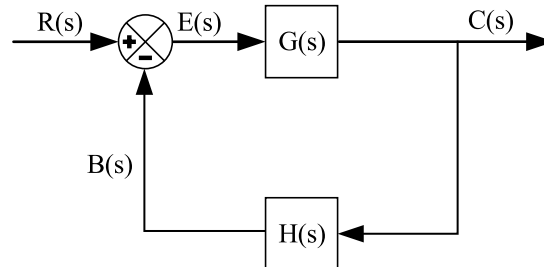
Εισαγωγή

Οι θεωρίες ελέγχου που συνήθως χρησιμοποιούνται σήμερα περιλαμβάνουν την κλασσική θεωρία ελέγχου (η οποία ονομάζεται και συνήθης θεωρία ελέγχου), τη σύγχρονη θεωρία ελέγχου [1] και τη στιβαρή θεωρία ελέγχου[2]. Ο αυτόματος έλεγχος ουσιαστικά συναντάται σε κάθε περιοχή της τεχνολογίας και των επιστημών. Αποτελεί σπουδαίο και αναπόσπαστο κομμάτι των διαστημοπλοίων, των ρομποτικών συστημάτων, των σύγχρονων βιομηχανιών κατασκευής καθώς και κάθε βιομηχανικής λειτουργίας η οποία αφορά τον έλεγχο θερμοκρασίας, πίεσης, υγρασίας, κ.λ.π.. Συνεπώς η ανάγκη για εξοικείωση με την θεωρία και τις πρακτικές εφαρμογές των συστημάτων αυτόματου ελέγχου (Σ.Α.Ε.) είναι επιτακτική για έναν μηχανικό. Ανατρέχοντας στην ιστορία των Σ.Α.Ε. παρατηρούμε ότι οι επιστήμονες προσπαθούσαν να αναπτύξουν μαθηματικά μοντέλα τα οποία αντικατοπτρίζουν την συμπεριφορά των συστημάτων και βοηθούν στην ανάλυσή τους και την εξαγωγή διαφόρων συμπερασμάτων. Την πρώτη προσπάθεια ανάπτυξης μαθηματικών μοντέλων για δυναμικά συστήματα την έκανε ο Isaac Newton το 1687 στο βιβλίο του *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, στο οποίο παρουσιάζει πως η εξέλιξη συνεχών ως προς τον χρόνο φαινομένων μπορεί να περιγραφεί μέσω διαφορικών εξισώσεων. Η προσέγγιση αυτή αποδείχθηκε ότι είναι πολύ ισχυρή και αυτό φαίνεται καθώς ακόμη και σήμερα τα δυναμικά συστήματα μοντελοποιούνται μέσω διαφορικών εξισώσεων. Επόμενο βήμα ήταν η ανάπτυξη συστημάτων τα οποία μπορούν να φτάσουν σε μια επιθυμητή κατάσταση. Με βάση αυτήν την προσέγγιση, τα συστήματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τα συστήματα ανοιχτού και κλειστού βρόγχου[1]. Ένα σύστημα κλειστού βρόγχου παίρνει μετρήσεις της εξόδου και τις συγκρίνει με αυτές της εισόδου με σκοπό να μειώσει το σχετικό σφάλμα και να πετύχει την επιθυμητή συμπεριφορά. Αντιθέτα στα συστήματα ανοιχτού βρόγχου δεν υπάρχει ούτε μέτρηση ούτε ανατροφοδότηση της εξόδου. Παράδειγμα συστημάτων κλειστού βρόγχου είναι το ψυγείο, ενώ ανοιχτού είναι το πλυντήριο ρούχων. Στο σχήμα 1.1 φαίνεται μια απεικόνιση συστημάτων ανοιχτού βρόγχου, ενώ στο 1.2 κλειστού.

Στην συνέχεια, παρουσιάστηκε η ανάγκη για σύνδεση πολλών συστημάτων μεταξύ τους με στόχο την διεκπεραίωση πιο σύνθετων λειτουργιών. Όμως, η ανάλυση καθώς και η δημιουργία ενός περίπλοκου και σύνθετου συστήματος είναι πολλές φορές αρκετά δύσκολη. Κατα την ανάπτυξη της θεωρίας ελέγχου με σκοπό τον έλεγχο σύνθετων συστημάτων, δημιουργήθηκαν



Σχήμα 1.1: Σύστημα ανοιχτού βρόγχου



Σχήμα 1.2: Σύστημα κλειστού βρόγχου

αρκετά εργαλεία και μεθοδολογίες, όπως ο αναλογικός-ολοκληρωτικός-διαφορικός έλεγχος (P.I.D.), ο προσαρμοστικός, ο σθεναρός και ο ασαφής έλεγχος. Τα τελευταία χρόνια, όμως, έχει αρχίσει να αναπτύσσεται μια διαφορετική προσέγγιση για την δημιουργία και την ανάλυση σύνθετων συστημάτων. Η κεντρική ιδέα έγκειται στην διάσπαση του συστήματος σε άλλα μικρότερα, τα οποία επιτελούν μια συγκεκριμένη λειτουργία, καθώς και στην επικοινωνία των συστημάτων μεταξύ τους. Καθ' ένα από τα υποσυστήματα αυτά είναι πολύ πιο απλό στην υλοποίηση από το αρχικό σύστημα και αυτός είναι ο κύριος λόγος που μελετάται αυτή η προσέγγιση. Στην εργασία αυτή θα μας απασχολήσουν εξ ολοκλήρου πολλαπλά διασυνδεδεμένα συστήματα ή όπως καλούνται στη βιβλιογραφία **κατανεμημένα συστήματα**[3].

1.1 Εισαγωγή στα κατανεμημένα συστήματα

Ο έλεγχος κατανεμημένων συστημάτων μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους. Ο πρώτος καλείται **συγκεντρωτικός** (centralized) και βασίζεται στην ύπαρξη ενός ισχυρού κεντρικού συστήματος το οποίο ελέγχει όλα τα υπόλοιπα μικρότερα συστήματα ή έστω κάποια από αυτά. Παρόλ' αυτά, η ύπαρξη μιας κεντρικής μονάδας δεν είναι πάντα εφικτή καθώς, για παράδειγμα, δεν είναι δυνατή η επικοινωνία με όλα τα υπόλοιπα συστήματα. Το μειονέκτημα αυτό σε συνδιασμό με την συνεχώς αυξανόμενη αυτοματοποίηση των συστημάτων, δηλαδή την δυνατότητα λήψης κάποιων αποφάσεων από τα ίδια τα συστήματα, οδήγησε στον δεύτερο τρόπο ελέγχου κατανεμημένων συστημάτων, ο οποίος καλείται **αποκεντρωμένος ή κατανεμημένος** (decentralized or distributed). Αυτός ο έλεγχος δεν απαιτεί την ύπαρξη μιας κεντρικής μονάδας αλλά το κάθε σύστημα δρα με βάση κάποια τοπική πληροφορία που έχει. Τέλος, έχει παρατηρηθεί ότι ο αποκεντρωμένος έλεγχος έχει πολλά περισσότερα πλεονεκτήματα από τον συγκεντρωτικό και για αυτό επιλέγεται σε πολλές εφαρμογές κατανεμημένων συστημάτων. Στη βιβλιογραφία τα συστήματα αυτά αναφέρονται ως πράκτορες (agents), ενώ όταν κάνουμε λόγο για το σύνολο των συστημάτων χρησιμοποιούμε τον όρο **πολυπρακτορικά**

συστήματα (multi-agent systems). Μερικά από τα προβλήματα τα οποία καλούνται να λύσουν τα πολυπρακτορικά συστήματα είναι τα εξής:

- **Consensus** ή πρόβλημα ομοφωνίας. Σκοπός είναι να οδηγηθούν οι πράκτορες στην λήψη μιας κοινής απόφασης.
- **Formation Control**. Στόχος είναι η επίτευξη μιας προκαθορισμένης η μη διάταξης ανάλογα με κάποια κριτήρια.
- **Flocking**. Προσπαθεί το σύστημα να προσομοιώσει συμπεριφορές παρόμοιες με αυτές πουλιών, ψαριών και άλλων ειδών από το ζωικό βασίλειο.
- **Synchronization**. Το πρόβλημα αυτό ασχολείται με την παραγωγή συγκεκριμένων αποκρίσεων-συμπεριφορών σε μία ομάδα προκτόρων για κάποια κοινή χρονική στιγμή.
- **Coverage**. Διατάσσει τους agents με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο στον χώρο ώστε να μην υπάρχουν κενά-οπές.

Ένας από τους λόγους που αναπτύχθηκαν τα κατενεμημένα συστήματα αναφέρθηκε πιο πάνω και είναι η ευκολία με την οποία μοντελοποιούνται κάποια αρκετά σύνθετα προβλήματα. Από που, όμως, προέκυψε η ιδέα για μια τέτοιου είδους προσέγγιση; Η απάντηση είναι απλή. Την ιδέα την έδωσε η φύση![4][5] Η ομαδική κίνηση ζωικών ομάδων είναι ένα από τις πιο συνηθισμένες καταστάσεις που συναντώνται στη φύση, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Παρά το γεγονός ότι κάθε οργανισμός έχει τη δική του νοημοσύνη, κλίση και ιδιομορφία, η συνολική συμπεριφορά της ομάδας φαίνεται ως μια οντότητα με τα δικά της χαρακτηριστικά, ψυχολογία και ερεθίσματα από το περιβάλλον. Το εκπληκτικό αυτής της συμπεριφοράς είναι ότι παρά το γεγονός ότι οι κινήσεις αυτές φαίνονται συγχρονισμένες, κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Αντιθέτως, κάθε οντότητα που απαρτίζει το σύστημα δρα με βάση τα ερεθίσματα που δέχεται από το περιβάλλον και οποιαδήποτε κίνηση είναι απόρροια στιγμιαίων αποφάσεων. Παρατηρήθηκε, λοιπόν, πως η συγχρονισμένη κίνηση ατομικοτήτων μπορεί, αν προσομοιωθεί σωστά, να βοηθήσει στην επίλυση μιας μεγάλης κατηγορίας προβλημάτων στον τομέα της τεχνολογίας. Κάποια παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων είναι ο έλεγχος πολλαπλών κεραίων για τηλεπικοινωνιακούς σκοπούς[6], ο συγχρονισμός ταχύτητας σε πολλαπλούς κινητήρες[7], ο έλεγχος πολλαπλών δορυφόρων[8], κ.α. Είναι, λοιπόν, οφθαλμοφανές πως τα κατεναμημένα συστήματα βρίσκονται σε πάρα πολλούς τομείς της ζωής μας πράγμα που καθιστά την ανάπτυξή τους επιτακτική ανάγκη.

1.1.1 Συνεισφορά της διπλωματικής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε εν συντομία το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει στην παρούσα διπλωματική. Σκοπός είναι να επιτευχθεί προσεγγιστικό consensus για ένα πολυπρακτορικό σύστημα παρουσία εμποδίων στον χώρο, δηλαδή ξεκινώντας οι agents από οποιαδήποτε αρχική τοπολογία να μπορούν να συγκεντρώνονται σε μια γειτονιά ενός προκαθορισμένου σημείου στο χώρο. Η έννοια του consensus που μας απασχολεί είναι το λεγόμενο



Σχήμα 1.3: Συλογική συμπεριφορά ζώων

ϵ -box consensus και σημαίνει ότι όλοι οι πράκτορες συγκεντρώνονται σε ένα υπερ-κύβο πλευράς ϵ . Επιπρόσθετα, αντιμετωπίζουμε τα εξής υποπροβλήματα. Το πρώτο είναι η συνοχή του γραφήματος επικοινωνίας, δηλαδή πως κάθε agent θα διατηρεί την επικοινωνία με τους γείτονες του. Αυτό θεωρούμε ότι εξασφαλίζεται αν η απόσταση από κάθε γείτονα δεν ξεπεράσει ένα άνω όριο πάνω από το οποίο χάνεται η επικοινωνία και αν στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζεται από τη θέση δύο γειτόνων δεν παρεμβληθεί κανένα εμπόδιο. Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει το πρόβλημα της αποφυγής συγκρούσεων των πρακτόρων μεταξύ τους αλλά και με τα εμπόδια. Θεωρούμε επίσης την ύπαρξη ενός πράκτορα-αρχηγού (leader), σκοπός του οποίου είναι να φτάσει σε ένα προκαθορισμένο σημείο του χώρου (set point) όπου θέλουμε να επιτευχθεί το consensus. Η προσέγγιση που ακολουθείται βασίζεται πάνω στις συναρτήσεις και στην ευστάθεια Lyapunov. Επιπλέον, λόγω της ύπαρξης αρκετών τοπικών ελαχίστων των συναρτήσεων Lyapunov, ο leader αλλάζει διακοπτικά με αποκεντρωμένο τρόπο το κέρδος ελέγχου που αφορά την απόστασή του από το set point ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση σε γειτονιά του set point. Αντικείμενο της διπλωματικής λοιπόν είναι η ανάπτυξη ενός νέου σχήματος ελέγχου για συστήματα 1^{ης} τάξης με βάση το οποίο:

- θα αποφεύγονται οι συγκρούσεις μεταξύ των agents
- θα διατηρείται η αρχική συνοχή της τοπολογίας ώστε να έχουμε διάδοση της πληροφορίας σε όλο το σύστημα όλες τις χρονικές στιγμές
- θα αποφεύγονται τα εμπόδια και θα εμποδίζεται η διαγραφή κάποιου συνδέσμου επικοινωνίας, δηλαδή η πιθανότητα να βρεθεί κάποιο εμπόδιο ανάμεσα σε δύο agents οι οποίοι επικοινωνούν
- θα φτάνει ο leader σε μια γειτονιά ϵ_0 γύρω από το set point και θα παραμένει εκεί
- θα πλησιάζουν οι agents αρκετά κοντά μεταξύ τους

Επιπλέον, παρατίθεται θεωρητική απόδειξη των παραπάνω στόχων. Τέλος, παρατίθενται αναλυτικές προσομοιώσεις για διδιάστατους και τρισδιάστατους πράκτορες.

1.2 Οργάνωση του τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε 6 κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο που σχετίζεται με την παρούσα διπλωματική εργασία. Αρχικά παρατίθενται κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας γραφημάτων ενώ στην συνέχεια παρουσιάζονται κάποια βασικά θεωρήματα από την θεωρία ελέγχου τα οποία βοηθούν στην απόδειξη σύγκλισης του συστήματος στην τελική επιθυμητή κατάσταση. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται εκτενώς το πρόβλημα consensus παρουσία εμποδίων και ενός leader καθώς και οι κύριες προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα δυναμικά που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάπτυξη του νόμων ελέγχου για τα συστήματα 1^{ης} τάξης και παρατίθεται ο τελικός αλγόριθμος που επιτυγχάνει το consensus καθώς και η αντίστοιχη απόδειξη. Ακολούθως, στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις για τους απλούς ολοκληρωτές. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων καθώς και μελλοντικές επεκτάσεις που επιδέχεται η διπλωματική εργασία.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

2.1 Εισαγωγή

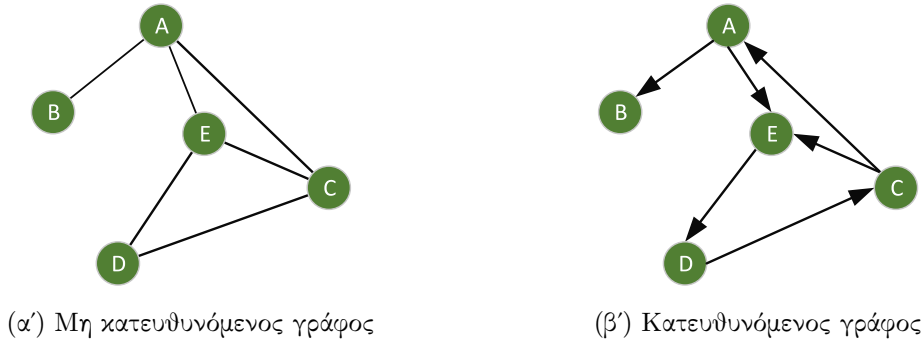
Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες οι οποίες θα μας βοηθήσουν να προσεγγίσουμε και εν τέλη να λύσουμε το πρόβλημα consensus. Η προσέγγιση μιας λύσης για το πρόβλημα consensus είναι διττή. Το πρώτο σκέλος αφορά την μαθηματική μοντελοποίηση της επικοινωνίας των συστημάτων. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο Κεφάλαιο, στο πρόβλημα ομοφωνίας ασχολούμαστε με κατανεμημένα συστήματα. Αυτό σημαίνει ότι το κάθε σύστημα δρα με βάση κάποιου είδους πληροφορία που λαμβάνει από τα συστήματα με τα οποία επικοινωνεί. Επομένως, κατά τη λειτουργία κατανεμημένων συστημάτων υπάρχει ένα μοντέλο επικοινωνίας. Η πιο εύκολη μαθηματική αναπαράσταση ενός τέτοιου μοντέλου είναι μέσω *γράφων*. Θεωρούμε, δηλαδή, ότι κάθε σύστημα αποτελεί έναν κόμβο και η επικοινωνία μεταξύ δύο συστημάτων μοντελοποιείται μέσω ενός συνδέσμου. Επομένως, θα μας απασχολήσει πολύ η **θεωρία γράφων** και συγκεκριμένα η **αλγεβρική θεωρία γράφων** σύμφωνα με την οποία κάθε γράφος μπορεί να παρασταθεί μέσω πινάκων. Το δεύτερο σκέλος αφορά την ανάπτυξη αποκεντρωμένων νόμων ελέγχου για κάθε σύστημα, οι οποίοι βασίζονται στην εκάστοτε γνώση των πρακτόρων. Επομένως, θα μας απασχολήσουν ορισμένες έννοιες από **θεωρία συστημάτων** όπως συναρτήσεις **Lyapunov**, ευστάθεια **Lyapunov** κ.α. με τη βοήθεια των οποίων θα αναπτυχθούν οι τελικοί νόμοι ελέγχου. Τέλος, θεωρούμε πως ο αναγνώστης γνωρίζει βασικά στοιχεία γραμμικής άλγεβρας. Σε διαφορετική περίπτωση τον παραπέμπουμε στο [12].

2.2 Εισαγωγή στη θεωρία γράφων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται κάποια βασικά στοιχεία καθώς και κάποιοι ορισμοί από την θεωρία γράφων τα οποία έχουν παρθεί από τα [10], [11].

Ορισμός 2.1. *Γράφος ή γράφημα καλείται το διατεταγμένο ζεύγος $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, όπου \mathcal{V} είναι το σύνολο των κορυφών και \mathcal{E} είναι το σύνολο των ακμών. Πιο συγκεκριμένα, αν ένα γράφημα αποτελείται από N κορυφές, τότε $\mathcal{V} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_N\}$ και $\mathcal{E} \subseteq \{\mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$. Δηλαδή, κάθε ακμή συμβολίζεται με βάση τους κόμβους του γράφου που έχει ως άκρα.*

Αν $\{u_i, u_j\} = \{u_j, u_i\}$ τότε ο γράφος καλείται μη-κατευθυνόμενος ενώ διαφορετικά καλείται κατευθυνόμενος. Παρακάτω φαίνονται σχηματικά ένας κατευθυνόμενος και ένας μη-κατευθυνόμενος γράφος αποτελούμενοι από 5 κορυφές έκαστος.



Σχήμα 2.1: Μη κατευθυνόμενος και κατευθυνόμενος γράφος 5 κορυφών

Σε κάθε ακμή του γράφου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό ο οποίος καλείται **βάρος** της ακμής. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι επειδή σε πολλές εφαρμογές που χρησιμοποιούνται γραφήματα, η κάθε ακμή μπορεί να έχει διαφορετική αξία από τις υπόλοιπες. Για παράδειγμα, σε μία εφαρμογή ασύρματων ad-hoc δικτύων, τα βάρη συμβολίζουν το πόσο δυνατή η ασθενής είναι η επικοινωνία μεταξύ των κόμβων.

Ορισμός 2.2. Γράφος με βάρη καλείται ένα γράφημα \mathcal{G} στο οποίο υπάρχει προσαρτημένη μια συνάρτηση βαρών, $w : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε ακμή ένα βάρος. Τα βάρη αυτά συμβολίζονται με $w_{ij} = w(e_{ij})$, ενώ το σύνολο όλων των βαρών αναπαρίσταται με το σύμβολο \mathcal{W} . Ο γράφος με βάρη γράφεται τελικώς $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$.

Ορισμός 2.3. Έστω γράφημα $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Δύο οποιοδήποτε κόμβοι $u_i, u_j \in \mathcal{V}$ καλούνται γείτονες αν και μόνο αν υπάρχει ακμή που να τους συνδέει, δηλαδή αν και μόνο αν $\{u_i, u_j\} \in \mathcal{E}$. Επομένως, για κάθε κόμβο u_i μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο N_i από κόμβους $u_j, j \neq i$ για τους οποίους $\{u_i, u_j\} \in \mathcal{E}$. Το σύνολο αυτό περιέχει όλους τους γείτονες του κόμβου i και επομένως καλείται γειτονιά του i . Μαθηματικά έχουμε $N_i = \{u_j \mid j \neq i \wedge (u_i, u_j) \in \mathcal{E}\}$.

Σημείωση 1. Η έννοια της γειτονιάς δεν είναι η ίδια για τους κατευθυνόμενος γράφους καθώς σε αυτούς $e_{ij} \neq e_{ji}$. Στους κατευθυνόμενος γράφους υπάρχουν δύο διαφορετικές έννοιες γειτονιάς οπότε και δύο διαφορετικά σύνολα. Το πρώτο αποτελείται από τους γείτονες οι οποίοι αποτελούν την αρχή της ακμής ενώ το δεύτερο από τους γείτονες οι οποίοι αποτελούν το πέρας της.

Σημείωση 2. Στην παρούσα εργασία θα μας απασχολήσουν μόνο μη κατευθυνόμενοι γράφοι. Επιπλέον, η συνάρτηση βαρών που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι μία "δείκτρια" συνάρτηση οπότε θα αντιστοιχεί 1 όταν υπάρχει ακμή και 0 όταν δεν υπάρχει.

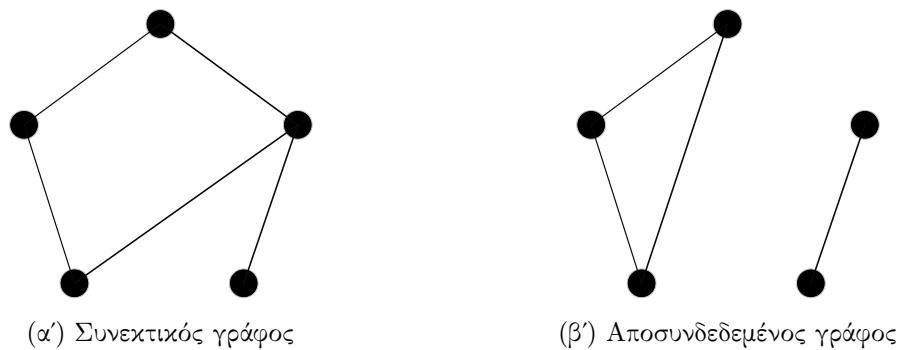
Μια δεύτερη χρησιμότητα των ακμών είναι ότι μέσω αυτών μπορούμε να οδηγηθούμε από έναν κόμβο i σε έναν κόμβο j χωρίς να είναι γείτονες. Μία ακολουθία συνεχόμενων κορυφών, δηλαδή $\langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$ με $(u_i, u_{i+1}) \in \mathcal{E}$ καλείται περίπατος (walk). Σε έναν

περίπατο επιτρέπεται η επανάληψη ίδιων κορυφών. Αν αυτή η επανάληψη απαγορεύεται τότε η ακολουθία των κορυφών καλείται μονοπάτι (path).

Σε αυτό το σημείο δημιουργείται ένα εύλογο ερώτημα. Μπορούμε να μεταβούμε από έναν οποιονδήποτε κόμβο i σε έναν οποιονδήποτε κόμβο j ; Υπάρχει, δηλαδή, μονοπάτι μέσω του οποίου να συνδέονται δύο οποιονδήποτε κόμβοι του γραφήματος; Προφανώς αυτό δεν είναι πάντα εφικτό.

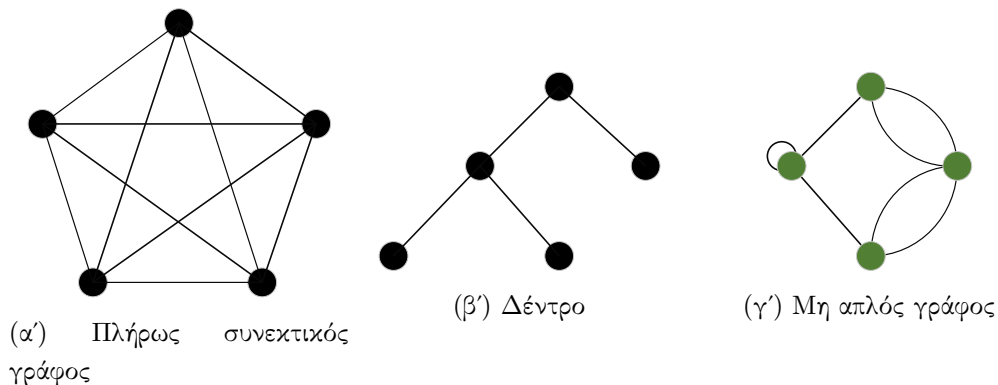
Ορισμός 2.4. Ένα γράφημα G καλείται *συνεκτικό* ή *συνδεδεμένο* αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε κορυφές του.

Σε πραγματικές εφαρμογές η έννοια της συνεκτικότητας, δηλαδή η δυνατότητα μετάβασης από ένα σύστημα σε ένα οποιοδήποτε άλλο είναι πολύ σημαντική και αν κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό, τότε είναι πολύ πιθανό να παρουσιαστούν προβλήματα. Παρακάτω παρουσιάζονται ένας συνεκτικός και ένας μη συνεκτικός γράφος.



Σχήμα 2.2: Συνεκτικός και αποσυνδεδεμένος γράφος 5 κορυφών

Η συνεκτικότητα ενός γράφου μπορεί να χαρακτηριστεί ως ισχυρή ή ασθενής αναλόγως με το πλήθος των ακμών που υπάρχουν. Ένας διαφορετικός τρόπος για να χαρακτηρίσουμε την συνεκτικότητα του γράφου είναι μέσω του πλήθους των διαφορετικών μονοπατιών που συνδέουν δύο οποιεσδήποτε κορυφές. Στο σχήμα 2.3 φαίνονται τρία παραδείγματα γράφων οι οποίοι διαφέρουν ως προς το επίπεδο συνεκτικότητας.



Σχήμα 2.3: Ειδικές περιπτώσεις γράφων όσον αφορά τη συνεκτικότητα

Ο γράφος της (α) εικόνας καλείται πλήρης γράφος και περιέχει τον μέγιστο αριθμό ακμών. Δηλαδή, κάθε ζευγάρι κόμβων συνδέεται με μία ακμή. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από το πλήθος των κόμβων και αν N είναι ο αριθμός των κόμβων τότε ο αριθμός των ακμών είναι $N(N - 1)/2$. Ο γράφος της (β) εικόνας καλείται δέντρο και περιέχει τον ελάχιστο αριθμό ακμών ώστε ο γράφος να είναι συνεκτικός. Ο αριθμός αυτός είναι $N - 1$. Τέλος, στην (γ) εικόνα παρουσιάζεται ένας μη απλός γράφος ο οποίος περιέχει βρόγχους και πολλαπλές ακμές.

Έστω ο γράφος $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ και ο γράφος $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$. Τότε ο γράφος \mathcal{G}' ονομάζεται:

- υπογράφημα (subgraph) του \mathcal{G} αν $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$.
- γεννητικό υπογράφημα (spanning subgraph) του \mathcal{G} αν είναι υπογράφημα και επιπλέον $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$.
- γεννητικό δέντρο (spanning tree) αν είναι συνδεκτικό υπογράφημα του \mathcal{G} και επιπλέον δέντρο.

Επόμενο βήμα αποτελεί η μαθηματική μοντελοποίηση των γράφων. Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα μας τη δίνει η αλγεβρική θεωρία γράφων. Τα παρακάτω αποτελέσματα για μη κατευθυνόμενους γράφους μπορούν να βρεθούν στα [13],[14] ενώ για κατευθυνόμενα γραφήματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [3],[8] και [10].

2.3 Αλγεβρική θεωρία γράφων

Σύμφωνα με την αλγεβρική θεωρία γράφων, κάθε γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός πίνακα ο οποίος ονομάζεται **πίνακας γειτνίασης** και δίνεται από τη σχέση

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{u_i, u_j\} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.1)$$

Το πλήθος των γραμμών (και των στηλών) ενός γράφου γειτνίασης είναι ίσο με το πλήθος των κόμβων του γράφου. Στην περίπτωση που ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος και δεν περιέχει βρόγχους ισχύουν τα εξής:

- Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι μηδενικά.
- Είναι συμμετρικός.
- Το άθροισμα στοιχείων κάθε γραμμής ισούται με τον βαθμό του κόμβου στον οποίο αντιστοιχεί η κάθε γραμμή, δηλαδή με το πλήθος των ακμών με τις οποίες συνδέεται ο κόμβος.

Ένας δεύτερος τρόπος αναπαράστασης του γραφήματος, ο οποίος όμως εμπεριέχει μειωμένη πληροφορία, είναι μέσω του **πίνακα βαθμού**. Ο τελευταίος δίνεται από την σχέση:

$$D(i, j) = \begin{cases} |N_i| & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \text{diag}\{|N_1|, |N_2|, |N_3|, \dots, |N_n|\} \quad (2.2)$$

όπου $|N_i| = \sum_{u_j \in \mathcal{V}} \alpha(i, j)$.

Συνδιάζοντας τις δύο προηγούμενες αναπαραστάσεις φτάνουμε στον τελικό πίνακα που θα μας απασχολήσει και πιο πολύ. Ο πίνακας αυτός καλείται **Λαπλασιανή μήτρα γράφων** και προκύπτει ως εξής:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{D}(\mathcal{G}) - \mathcal{A}(\mathcal{G}) \quad (2.3)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού της Λαπλασιανής μήτρας είναι μέσω της μήτρας πρόσπτωσης, η οποία ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{C}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο κόμβος } u_i \text{ είναι η κεφαλή της ακμής } e_j \\ -1 & \text{αν ο κόμβος } u_i \text{ είναι η ουρά της ακμής } e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.4)$$

Τότε ισχύει:

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{C}(\mathcal{G})\mathcal{G}(\mathcal{G})^T \quad (2.5)$$

Οι κυριότερες ιδιότητες της Λαπλασιανής μήτρας είναι οι εξής:

- Είναι συμμετρική, δηλαδή $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T$
- Είναι θετικά ημιορισμένη αφού $x^T \mathcal{L} x = x^T \mathcal{C} \mathcal{C}^T x = (\mathcal{C}^T x)^T \mathcal{C}^T x = \|\mathcal{C}^T x\|^2 \geq 0$
- Έχει μία μηδενική ιδιοτιμή, αφού το άθροισμα των γραμμών της \mathcal{L} είναι μηδέν. Με μαθηματικό φορμαλισμό: $\mathcal{L} \mathbf{1}_N = \mathbf{0}_N$

Οι ιδιοτιμές της Λαπλασιανής μήτρας μπορούν να υπολογιστούν μέσω της φόρμουλας Courant-Fischer σύμφωνα με την οποία:

$$\lambda_1 = \min_{x^T x = \mathbf{1}_N} x^T \mathcal{L} x, \quad \lambda_2 = \min_{\substack{x^T x = \mathbf{1}_N \\ x \perp \mathbf{1}_N}} x^T \mathcal{L} x, \quad \dots$$

Θεώρημα 2.1. Έστω γράφημα \mathcal{G} και $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ η επαγόμενη Λαπλασιανή μήτρα. Τότε για τη συνεκτικότητα του γραφήματος ισχύουν τα παρακάτω:

- Η μηδενική ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα ίση με ένα \Leftrightarrow το γράφημα \mathcal{G} είναι συνεκτικό
- $\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow$ το γράφημα \mathcal{G} είναι συνεκτικό
- $\text{rank}(\mathcal{L}) = n - 1 \Leftrightarrow$ το γράφημα \mathcal{G} είναι συνεκτικό
- $\mathcal{N}(\mathcal{L}) = \text{span}\{\mathbf{1}_N\} \Leftrightarrow$ το γράφημα \mathcal{G} είναι συνεκτικό¹
- Οι ιδιοτιμές του Λαπλασιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και επομένως μπορούν να διαταχθούν. Επιπλέον ισχύει $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$. Τέλος, με βάση την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$

¹με $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ συμβολίζουμε τον μηδενοχώρο της \mathcal{L}

Σημείωση 3. Το πρόσημο της ιδιοτιμής λ_2 μας δείχνει αν ο γράφος είναι συνεκτικός ή όχι. Παρόλ' αυτά, αν $\lambda_2 > 0$ τότε μπορούμε να εξάγουμε περισσότερη πληροφορία για το γράφημα. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη είναι η ιδιοτιμή λ_2 τόσο πιο συνδεδεμένο είναι το γράφημα.

Στις δύο προηγούμενες υποενότητες παρουσιάστηκαν κάποια βασικά στοιχεία της θεωρίας γράφων. Για τον αναγνώστη ο οποίος επιθυμεί να εμβαθύνει σε αυτές τις έννοιες τον παραπέμπουμε στο [10]. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποια στοιχεία από την θεωρία συστημάτων καθώς και κάποια βασικά θεωρήματα.

2.4 Θεωρία Συστημάτων

Οι παρακάτω ορισμοί καθώς και τα παρακάτω θεωρήματα βασίζονται στα [15],[16].

Ορισμός 2.5. **Σύστημα** καλείται μία οντότητα η οποία δέχεται κάποια στοιχεία ως εισόδους και παράγει μέσω κάποιων διαδικασιών κάποια άλλα στοιχεία τα οποία καλούνται έξοδοι.

Τα συστήματα χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα στατικά και τα δυναμικά συστήματα. Στατικά ονομάζονται τα συστήματα τα οποία δεν μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Τέτοια συστήματα συναντώνται πολύ σπάνια στη φύση και για αυτό η ανάλυσή τους δεν έχει μεγάλη αξία. Αντιθέτως, τα δυναμικά τα οποία μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου έχουν πάρα πολύ μεγάλη χρήση κι αξία. Η μαθηματική μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων γίνεται μέσω διαφορικών εξισώσεων. Η γενική μορφή αυτών των εξισώσεων είναι η εξής:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

όπου

- t_0 : αρχική χρονική στιγμή
- t : χρόνος
- x : κατάσταση του συστήματος, δηλαδή τα στοιχεία-μεταβλητές που εξετάζουμε
- \dot{x} : χρονική παράγωγος της κατάστασης του συστήματος
- x_0 : αρχική κατάσταση του συστήματος

Ουσιαστικά, η διαφορική εξίσωση μας δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το σύστημα με βάση την παρούσα κατάσταση καθώς και τον χρόνο. Η συνάρτηση $f(\cdot)$ μας δείχνει τον τρόπο μεταβολής της κατάστασης. Αν δεν υπάρχει άμεση χρονική εξάρτηση της συνάρτησης αυτής, τότε παίρνουμε $\dot{x} = f(x)$ και το σύστημα καλείται **αυτόνομο**. Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα καλείται μη-αυτόνομο. Επιπροσθέτως, τα συστήματα μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες με βάση τη συνάρτηση $f(\cdot)$, σε γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα. Παράδειγμα ενός γραμμικού συστήματος είναι το $\dot{x} = ax$, όπου a είναι μία σταθερά. Τα γραμμικά συστήματα, ενώ είναι απλά να αναλυθούν από μαθηματικής σκοπιάς,

δεν αντιπροσωπεύουν κανένα πραγματικό σύστημα με ικανοποιητική ακρίβεια. Αντιθέτως, τα πραγματικά συστήματα μοντελοποιούνται με μεγάλη ακρίβεια από μη γραμμικά συστήματα, τα οποία βέβαια είναι αρκετά πιο δύσκολο να αναλυθούν. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με μη γραμμικά, αυτόματα συστήματα. Επιστρέφοντας στην 2.6, αρχικά πρέπει να εγγυηθούμε πως υπάρχει λύση της διαφορικής εξίσωσης. Σε αυτό μας βοηθάνε οι παρακάτω ορισμοί και θεωρήματα.

Ορισμός 2.6. Μία συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ καλείται *Lipschitz* συνεχής ως προς την μεταβλητή x εάν $\forall x, x_0 \in D \exists L > 0 : \|f(x) - f(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|$

Θεώρημα 2.2. Έστω συνάρτηση $f(x, t)$, τμηματικά συνεχής ως προς τη μεταβλητή t και η οποία ικανοποιεί την συνθήκη *Lipschitz*

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|, \quad \forall x, x_0 \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

Τότε $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0$ να έχει μοναδική λύση $x : [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.3. Αν η συνάρτηση $f(\cdot)$ του θεωρήματος 2.2 ικανοποιεί τη συνθήκη *Lipschitz* για οποιοδήποτε ζεύγος $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε η λύση υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το διάστημα $[t_0, t_1]$.

Η έννοια της λύσης που συναντάμε στα παραπάνω θεωρήματα επιδέχεται δύο ερμηνείες:

1. η λύση x είναι διαφορίσιμη παντού και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (2.6) σε όλο το χρονικό ορίζοντα
2. η λύση x είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$. Αυτή η ασθενέστερη μορφή επιτρέπει μεγαλύτερο εύρος συναρτήσεων $f(\cdot)$ για λύσεις οι οποίες καλούνται λύσεις Caratheodory.

Με βάση τα προαναφερθέντα θεωρήματα μπορούμε να αποφανθούμε για την ύπαρξη λύσης. Επόμενο βήμα είναι να αποφανθούμε για την συμπεριφορά του συστήματος όταν (ιδεατά) $t \rightarrow \infty$. Θέλουμε, δηλαδή, να μάθουμε ποια θα είναι η τελική κατάσταση του συστήματος. Η τελική κατάσταση εξετάζεται ως προς το **σημείο ισορροπίας** του συστήματος. Ως σημείο ισορροπίας της (2.6) καλείται το σημείο $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο $f(\tilde{x}) = 0$. Να σημειωθεί ότι κατά την θεωρητική μελέτη μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι $\tilde{x} = 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Για να αποφανθούμε για την τελική κατάσταση μας βοηθάει πολύ το παρακάτω θεώρημα.

Ορισμός 2.7. (Ευστάθεια κατά Lyapunov). Το σημείο ισορροπίας $\tilde{x} = 0$ της (2.6) καλείται:

- **ευσταθές:** όταν $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t > t_0$
- **ασταθές:** όταν δεν είναι ευσταθές
- **ασυμπτωτικά ευσταθές:** όταν είναι ευσταθές και επιπλέον το δ μπορεί να επιλεγθεί έτσι ώστε $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

Θεώρημα 2.4. (Άμεση μέθοδος Lyapunov). Αν $\tilde{x} = 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ είναι σημείο ισορροπίας της 2.6 και η συνάρτηση $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη ώστε να ισχύει:

1. $V(0) = 0$ και $V(x) > 0 \quad \forall x \in D/\{0\}$
2. $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in D/\{0\}$

τότε το $\tilde{x} = 0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Εάν επιπλέον αντί για τη (2) ισχύει $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D/\{0\}$, τότε το $\tilde{x} = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Σημείωση 4. Αν ισχύουν οι σχέσεις (1)&(2) του θεωρήματος (2.5) τότε η συνάρτηση $V(\cdot)$ καλείται συνάρτηση Lyapunov.

Θεώρημα 2.5. Αν $\tilde{x} = 0$ είναι σημείο ισορροπίας της (2.6) και η συνάρτηση $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη ώστε να ισχύει:

1. $V(0) = 0$ και $V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0$
3. $V(x) \rightarrow \infty, \text{ καθώς } \|x\| \rightarrow \infty$

τότε το $\tilde{x} = 0$ είναι καθολικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Με βάση τα προαναφερθέντα θεωρήματα μπορεί να αποδειχθεί η σύγκλιση σε διάφορα μη γραμμικά συστήματα. Στην απόδειξη της σύγκλισης υπάρχουν διάφορα εργαλεία τα οποία είναι πολύ βοηθητικά όπως το θεώρημα LaSalle.

Ορισμός 2.8. (Αναλλοίωτα Σύνολα-Invariant Sets). Ένα σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος (2.6) όταν $\forall x(t_0) \in D \Rightarrow x(t) \in D, \forall t \geq 0$

Θεώρημα 2.6. (LaSalle). Έστω $\Omega \subset D$ ένα συμπαγές, θετικά αναλλοίωτο υποσύνολο του συστήματος (2.6). Έστω ακόμη πως η $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $\dot{V}(\cdot) \leq 0$ στο Ω . Αν επιπλέον ορίσουμε το σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$ και το σύνολο M ως το μεγαλύτερο αναλλοίωτο υποσύνολο του S , τότε κάθε λύση που εκκινεί εντός του Ω καταλήγει στο M καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν επιπλέον ισχύει ότι καμία λύση δεν μπορεί να μείνει εξ ολοκλήρου στο M εκτός από την τετριμμένη λύση $x(t) \equiv 0$, τότε προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Κεφάλαιο 3

Θεωρητικό υπόβαθρο

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί το πρόβλημα του consensus σε πολυπρακτορικά συστήματα από θεωρητική σκοπιά. Αρχικά, παρατίθενται κάποιοι ορισμοί μέσω των οποίων δομείται το πρόβλημα. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μία βασική μοντελοποίηση της δυναμικής των agents καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα της αντίστοιχης προσέγγισης. Τέλος, αναλύεται το πρόβλημα του consensus παρουσία εμποδίων και ενός leader. Για τον μη εξοικωμένο αναγνώστη σε προβλήματα ομοφωνίας τον παραπέμπουμε στα [17],[18], [19], ενώ τον πιο εξοικωμένο αναγνώστη στον παραπέμπουμε στο [20]. Τέλος, μια πολύ ενδιαφέρουσα προσέγγιση για τα προβλήματα ομοφωνίας εν παρουσία εμποδίων έχουν γίνει στα [21],[22].

3.2 Το πρόβλημα consensus

Το πρόβλημα consensus σε πολυπρακτορικά συστήματα έγκειται στην λήψη μιας κοινής απόφασης. Δηλαδή, τα συστήματα καταλήγουν σε consensus όταν συγκλίνουν όλα σε μία κοινή κατάσταση. Στη θεωρία ελέγχου, συγκεκριμένα, το πρόβλημα αυτό καλείται και πρόβλημα agreement και ο σκοπός είναι να ‘μαζευτούν’ όλοι οι πράκτορες σε ένα προκαθορισμένο ή μη σημείο του χώρου. Πρωτού προχωρήσουμε σε κάποια βασικά θεωρήματα που θα βοηθήσουν να δομηθεί καλύτερα το πρόβλημα, εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς:

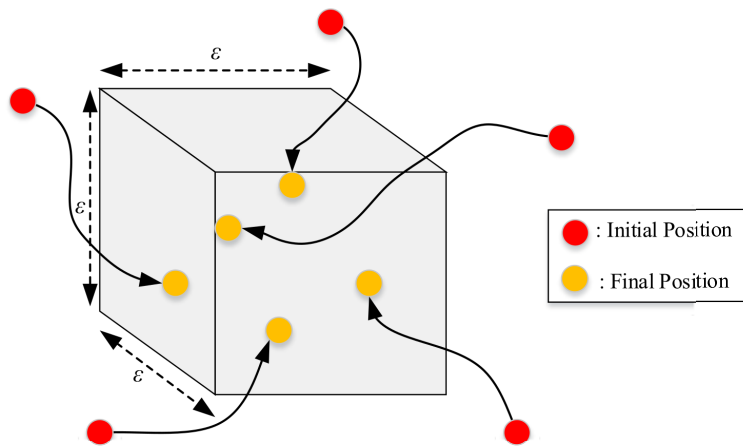
- N : το πλήθος των πρακτόρων
- I_N : το σύνολο των πρακτόρων, δηλαδή $I_N = \{1, 2, \dots, N\}$
- m : το πλήθος διαστάσεων του χώρου
- I_m : το σύνολο των διαστάσεων, δηλαδή $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$
- x_i : θέση του πράκτορα- i στον χώρο, δηλαδή $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}] \in R^m$

Έστω ότι υπάρχουν N πράκτορες στον χώρο με $x_i(t)$ να συμβολίζει την θέση του πράκτορα- i κάθε χρονική στιγμή t , $i \in I_N$. Οι παρακάτω ορισμοί καθώς και τα σχήματα είναι βασισμένοι στο [9].

Ορισμός 3.9. (Consensus): Ένα δίκτυο N πρακτόρων φτάνει σε κατάσταση *consensus* όταν για κάθε αρχική διάταξη, δηλαδή $\forall x_i(0) \in \mathbb{R}^m, i \in I_N$, ισχύει $\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0, \forall i, j \in I_N$, καθώς $t \rightarrow \infty$.

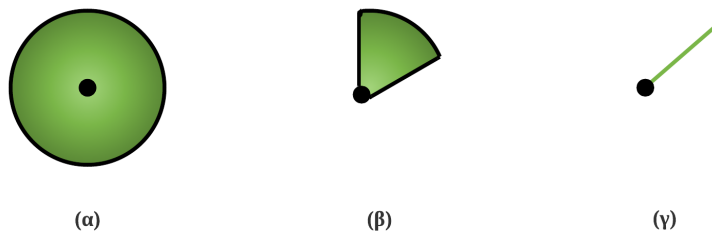
Ορισμός 3.10. ([26] ϵ -box Consensus): Θα λέμε ότι ένα σύνολο πρακτόρων επιτυγχάνει ϵ -box consensus όταν όλοι οι πράκτορες καταλήγουν μέσα σε έναν υπερκύβο πλευράς ϵ . Φορμαλιστικά έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i, j \leq N} |x_{ik} - x_{jk}| \leq \epsilon \quad \forall k \in I_m \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση του ϵ -box σε τρεις διαστάσεις[26]

Για να επιτευχθεί το consensus πρέπει οι πράκτορες να γνωρίζουν τις θέσεις των υπολοίπων πρακτόρων, δηλαδή πρέπει να υπάρχει ένα μοντέλο επικοινωνίας. Δύο πράκτορες οι οποίοι επικοινωνούν, γνωρίζουν ο ένας την θέση του άλλου, και είναι **γείτονες**. Ο τρόπος με τον οποίον ένας πράκτορας διαισθάνεται τους υπολοίπους γίνεται μέσω αισθητήρων (π.χ. camera, laser, sonar). Κάποια συνηθισμένα μοντέλα επικοινωνίας είναι το ακτινικό(radial), το σφηνοειδές(wedge-edged) και το μονής ακτίνας(single ray), τα οποία παρουσιάζονται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3.2: Μοντέλα επικοινωνίας (α)Ακτινική (β)Σφηνοειδής (γ)Μονής ακτίνας[9]

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το ακτινικό μοντέλο επικοινωνίας. Αυτό σημαίνει

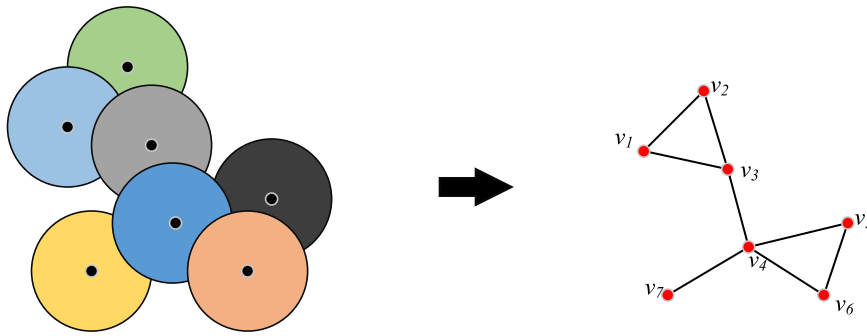
ότι κάθε agent διαισθάνεται άλλους πράκτορες όταν αυτοί βρίσκονται σε ακτίνα μικρότερη ή ίση από αυτήν που ορίζει η αισθητήριά του διάταξη.

Ορισμός 3.11. Κάθε πράκτορας καλύπτει στον χώρο εργασίας του $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ μια περιοχή η οποία ονομάζεται **περιοχή ανίχνευσης ή επικοινωνίας** και συμβολίζεται με S_i , $i \in I_N$. Φορμαλιστικά έχουμε:

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_i\| \leq R\} \quad (3.2)$$

όπου R η ακτίνα ανίχνευσης και x_i η θέση του agent- i .

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, η επικοινωνία των πρακτόρων μεταξύ τους δημιουργεί μία τοπολογία. Ουσιαστικά, η τοπολογία αυτή μας δείχνει με ποιους πράκτορες επικοινωνεί, δηλαδή ανταλλάσει πληροφορία, ο κάθε agent. Η μαθηματική μοντελοποίηση της τοπολογίας γίνεται μέσω γράφων, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Κάθε κόμβος(node) του γράφου



Σχήμα 3.3: Μετάβαση από την τοπολογία των agents σε γράφο επικοινωνίας

αντιπροσωπεύει έναν agent, ενώ όταν δύο agents επικοινωνούν, τότε οι αντίστοιχοι κόμβοι συνδέονται με μία ακμή(edge). Με αυτόν τον τρόπο, μεταβαίνουμε από τον χώρο εργασίας των agents στον γράφο επικοινωνίας, ο οποίος μας βοηθάει πολύ να μοντελοποιήσουμε μαθηματικά το πρόβλημα consensus. Εφόσον οι θέσεις των πρακτόρων αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, είναι αναμενόμενο να αλλάζει και η τοπολογία τους. Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι αν δύο agents οι οποίοι ήταν γείτονες κάποια χρονική στιγμή t , να σταματήσουν να είναι κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ επειδή ο καθένας βρέθηκε έξω από την περιοχή ανίχνευσης του άλλου, οπότε έχουμε διαγραφή ενός link από τον γράφο επικοινωνίας. Ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο μπορεί να μεταβληθεί η τοπολογία είναι αν κάποιος πράκτορας βρεθεί στην περιοχή ανίχνευσης ενός άλλου, οπότε έχουμε δημιουργία κάποιου link. Επομένως, η τοπολογία των πρακτόρων και συνεπώς ο γράφος επικοινωνίας είναι δυναμικές δομές. Όπως έχει προαναφερθεί, ο τελικός στόχος του consensus είναι να συγκεντρωθούν όλοι οι πράκτορες σε ένα σημείο του χώρου. Αυτό προϋποθέτει να μπορεί ο κάθε agent να μάθει την θέση οποιουδήποτε άλλου agent κάθε χρονική στιγμή. Δηλαδή, πρέπει να υπάρχει ένα μονοπάτι με αρχή έναν οποιοδήποτε agent i και πέρας έναν agent j , με $i \neq j$ και $i, j \in I_N$, ώστε να μπορεί να μεταφερθεί η πληροφορία μεταξύ οποιονδήποτε πρακτόρων. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι ο γράφος επικοινωνίας πρέπει να είναι συνεκτικός(connected). Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται ένα σημαντικό πρόβλημα. Η κίνηση των agents πρέπει να γίνεται με έναν τρόπο ώστε να διατηρείται η συνεκτικότητα του γράφου(connectivity maintenance).

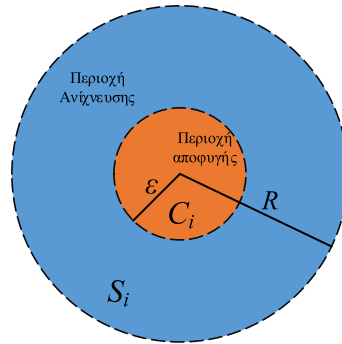
Η δεύτερη δυσκολία που παρουσιάζεται σε προβλήματα consensus είναι πιο προφανής. Κατά την διάρκεια κίνησης, οι agents πρέπει να μην συγκρούονται μεταξύ τους. Αυτό επιτυγχάνεται θέτοντας ένα κάτω φράγμα, δηλαδή μία ελάχιστη απόσταση στην οποία μπορούν να βρεθούν οι agents (collision avoidance). Για να συμβεί αυτό, ορίζουμε μια περιοχή γύρω από κάθε agent, την λεγόμενη περιοχή αποφυγής. Αν κάποιος πράκτορας εισέλθει σε αυτή την περιοχή τότε ενεργοποιούνται απωστικές δυνάμεις. Για το λόγο αυτό υποθέτουμε ότι ανιχνεύονται όλοι οι πράκτορες οι οποίοι βρίσκονται στην περιοχή αποφυγής ενός agent.

Ορισμός 3.12. Κάθε πράκτορας καλύπτει στον χώρο εργασίας του $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ μια περιοχή η οποία ονομάζεται **περιοχή αποφυγής** και συμβολίζεται με C_i , $i \in I_N$. Φορμαλιστικά έχουμε:

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_i\| \leq \epsilon\} \quad (3.3)$$

όπου ϵ μία σταθερά αποφυγής και x_i η θέση του agent- i .

Στην παρακάτω εικόνα φαίνονται οι δύο περιοχές που αναφέρθηκαν και γίνονται πιο εύκολα κατανοητές.



Σχήμα 3.4: Υποδιαιρέσεις περιοχών ανίχνευσης ενός πράκτορα

Συνεπώς, σε ένα πρόβλημα consensus πρέπει μέσω των νόμων ελέγχου να εξασφαλίζεται η διατήρηση της συνεκτικότητας καθώς και η αποφυγή συγκρούσεων. Στα πλαίσια της εργασίας θεωρούμε πως ο γράφος επικοινωνίας αποτελεί μια στατική δομή, δηλαδή δεν επιτρέπεται η δημιουργία και η διαγραφή συνδέσμων, καθώς και πως ο αρχικός γράφος επικοινωνίας είναι ένα δέντρο.

3.3 Μοντέλα δυναμικής των πρακτόρων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ένα μοντέλο δυναμικής των πρακτόρων καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα που έχουν προκύψει με βάση αυτό. Στην παρούσα εργασία το μοντέλο δυναμικής το οποίο χρησιμοποιήθηκε είναι οι ολοκληρωτές 1^{ης} τάξης ή απλοί ολοκληρωτές.

Οι απλοί ολοκληρωτές είναι μοντέλα δυναμικής της μορφής

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i \in I_N, \quad x_i, u_i \in \mathbb{R}^m \quad (3.4)$$

όπου u_i είναι η είσοδος του agent- i και \dot{x}_i είναι η χρονική παράγωγος της θέσης, δηλαδή η ταχύτητα, του agent- i . Επομένως, με τους ολοκληρωτές 1^{ης} τάξης επηρεάζουμε άμεσα την ταχύτητα των πρακτόρων.

Έστω ένα δίκτυο αποτελούμενο από N πράκτορες και $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ ο γράφος επικοινωνίας, όπου $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ είναι το σύνολο των κόμβων και $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ είναι το σύνολο των συνδέσμων στον γράφο. Επιπλέον, με \mathcal{A} συμβολίζουμε τον πίνακα γειτνίασης, ο οποίος προκύπτει με βάση την τοπολογία των πρακτόρων και με \mathcal{L} την λαπλασιανή μήτρα του γράφου. Τέλος, με \mathcal{N}_i συμβολίζουμε το σύνολο των agents οι οποίοι είναι γείτονες του agent- i . Δηλαδή,

$$\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} \mid i \neq j \ \& \ (i, j) \in \mathcal{E}\} \quad (3.5)$$

Σημείωση 5. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με συστήματα των οποίων ο γράφος επικοινωνίας αποτελεί μια στατική δομή, δηλαδή δεν υπάρχουν προσθήκες ή αφαιρέσεις συνδέσμων. Για τους αναγνώστες οι οποίοι επιθυμούν να ενημερωθούν για συστήματα με μεταβλητούς γράφους επικοινωνίας τους παραπέμπουμε στο[24]. Ενδεικτικά αναφέρουμε πως η προθήκη συνδέσμων γίνεται μέσω προτοκόλλων υστέρησης ενώ η διαγραφή μέσω αναδρομικών αλγορίθμων[25].

Οι κυριότερες προσεγγίσεις που έχουν γίνει βασίζονται στα gradient συστήματα. Η γενική μορφή τέτοιων συστημάτων είναι

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x) \quad (3.6)$$

και έχουν την ιδιότητα να τείνουν στο/α ελάχιστο/α της συνάρτησης φ . [23]

Η διατήρηση της συνεκτικότητας επιτυγχάνεται μέσω των νόμων ελέγχου που εφαρμόζονται στους πράκτορες. Η ιδέα βασίζεται στα gradient συστήματα τα οποία έχουν αναφερθεί παραπάνω. Συγκεκριμένα επιλέγονται συναρτήσεις δυναμικού οι οποίες απαγορεύουν σε πράκτορες οι οποίοι ήταν 'γείτονες' σε κάποια χρονική στιγμή t να σταματήσουν να είναι σε μελλοντικές χρονικές στιγμές $t + \Delta t$, δηλαδή να μην μπορεί η απόσταση μεταξύ τους να γίνει μεγαλύτερη από ένα ανώφλι R . Παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η

$$\mathcal{V}_{CM,ag} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{R - \|l_{ij}\|} \quad (3.7)$$

όπου με $\|l_{ij}\|$ συμβολίζεται η Ευκλείδεια απόσταση των agents i, j και R η μέγιστη επιτρεπτή απόσταση ώστε να διατηρείται το link. Σκοπός του δυναμικού αυτού, όμως, είναι να διατηρούνται οι 'γειτονιές' καθ' όλη την διάρκεια κίνησης και επομένως είναι προτιμότερο να εφαρμόζεται μόνο στα ζευγάρια πρακτόρων οι οποίοι είναι γείτονες. Συνεπώς, με βάση τις (3.5) και (3.7), το δυναμικό διατήρησης συνεκτικότητας γίνεται

$$\mathcal{V}_{CM,ag} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{R - \|l_{ij}\|} \quad (3.8)$$

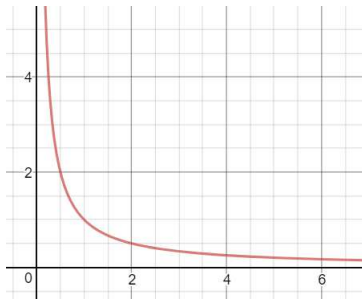
Ένα δεύτερο πρόβλημα που παρουσιάζεται στον προαναφερθέντα νόμο ελέγχου (3.4) είναι ότι στην κατάσταση consensus, $x_i(t) \rightarrow x_j(t)$, $\forall i, j \in I_N$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Αυτό σημαίνει ότι οι

agents έρχονται πάρα πολύ κοντά ο ένας με τον άλλον με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγάλος κίνδυνος σύγκρουσης. Όπως έχει αναφερθεί, πρέπει να οριστεί ένα κάτω φράγμα στην απόσταση μεταξύ των πρακτόρων. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της επιλογής μιας δεύτερης συνάρτησης δυναμικού η οποία απαγορεύει στους πράκτορες να βρεθούν σε απόσταση μικρότερη από ένα όριο. Παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η

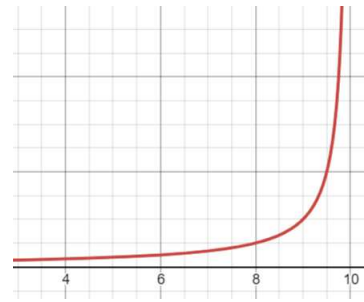
$$\mathcal{V}_{CA,ag} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{\|l_{ij}\|} \quad (3.9)$$

η οποία απαγορεύει να μηδενιστεί η απόσταση μεταξύ των agents.

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ανωτέρω δυναμικών για δύο πράκτορες.



(α') Collision Avoidance



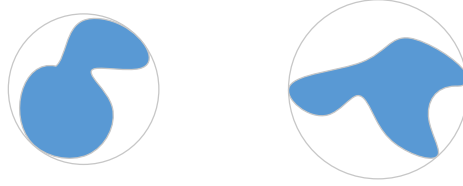
(β') Connectivity Maintenance με $R = 10$

Σχήμα 3.5: Γραφικές παραστάσεις των δύο δυναμικών για τυχαίο ζευγάρι πρακτόρων

Το άθροισμα των δύο δυναμικών αποτελεί το συνολικό δυναμικό και επιτυγχάνει τόσο connectivity maintenance όσο και collision avoidance. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στο θεώρημα Lyapunov και στο θεώρημα La Salle. Εκτενής απόδειξη θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζονται οι νόμοι ελέγχου που εφαρμόστηκαν στα πλαίσια της εργασίας και για αυτόν τον λόγο παραλείπεται προς το παρόν. Ας δούμε, τώρα, πως τροποποιείται το πρόβλημα λόγω της ύπαρξης εμποδίων στον χώρο.

3.4 Το πρόβλημα Consensus υπό την παρουσία εμποδίων

Σε αυτήν την υποενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα consensus υπό την παρουσία στατικών εμποδίων στον χώρο. Θα δούμε ποια προβλήματα εισάγει η παρουσία εμποδίων και πως αυτά αντιμετωπίζονται. Αρχικά, υποθέτουμε πως ο επιτεύξιμος χώρος του consensus είναι το \mathbb{R}^m και επομένως είναι δυνατό να καταλήξουν όλοι οι πράκτορες σε ομοφωνία παρά την παρουσία εμποδίων. Επιπλέον υποθέτουμε πως τα εμπόδια έχουν άγνωστο μέγεθος αλλά μπορούν να εγγραφούν σε υπερ-σφαίρα γνωστής ακτίνας όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Έστω ένα δίκτυο αποτελούμενο από N agents και από M εμπόδια και έστω $I_M = \{1, 2, \dots, M\}$ το σύνολο των εμποδίων. Το πρώτο πρόβλημα που προκύπτει είναι η πιθανότητα σύγκρουσης κάποιου agent με κάποιο εμπόδιο. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπισθεί πολύ εύκολα, όπως ακριβώς αντιμετωπίσθηκε και το πρόβλημα συγκρούσεων των πρακτόρων μεταξύ τους. Δηλαδή, εισάγεται ένα δυναμικό το οποίο ορίζει μία ελάχιστη απόσταση μεταξύ των

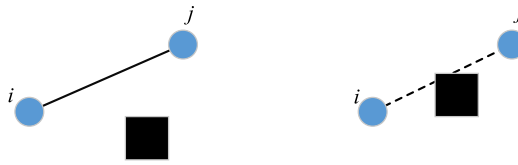


Σχήμα 3.6: Εμπόδια εγγεγραμμένα σε κύκλο γνωστής ακτίνας

πρακτόρων και των εμποδίων. Ένα τέτοιο δυναμικό θα μπορούσε να είναι το εξής:

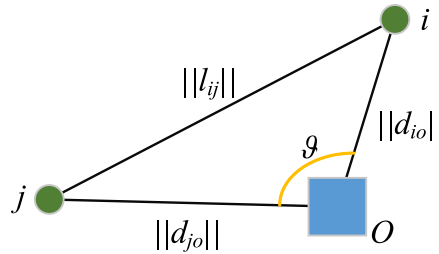
$$\mathcal{V}_{CA,obs} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{1}{\|d_{ik}\|} \quad (3.10)$$

όπου $\|d_{ik}\|$ η Ευκλείδεια απόσταση του agent- i από το εμπόδιο- k , το οποίο αποτρέπει τον μηδενισμό των αποστάσεων των πρακτόρων από τα εμπόδια. Το δεύτερο πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι η διατήρηση της συνεκτικότητας. Στην περίπτωση που υπάρχουν εμπόδια στον χώρο, ένα link μπορεί να διαγραφεί αν δύο agents οι οποίοι είναι γείτονες βρεθούν εκατέρωθεν ενός εμποδίου.



Σχήμα 3.7: Διαγραφή ενός link λόγω εμποδίου

Όταν η διαγραφή του link δεν επηρεάζει την συνεκτικότητα, τότε δεν δημιουργείται κάποιο πρόβλημα και οι agents μπορούν να κινηθούν εκατέρωθεν του εμποδίου. Το πρόβλημα δημιουργείται όταν ο σύνδεσμος είναι καταλυτικός για την συνεκτικότητα του γράφου επικοινωνίας, δηλαδή όταν η διαγραφή του εκάστοτε link οδηγεί σε παραβίαση της συνεκτικότητας. Πρέπει, λοιπόν, σε περιπτώσεις σαν την προαναφερθείσα να βρεθεί ένας τρόπος κίνησης των πρακτόρων έτσι ώστε αυτοί να μην περνάνε εκατέρωθεν του εμποδίου αλλά να κινούνται από την ίδια μεριά με αποτέλεσμα να μην διαγράφεται το link. Στο σχήμα 3.7 παρουσιάζεται μία περίπτωση κίνησης των agents η οποία οδηγεί σε διαγραφή του link.



Σχήμα 3.8: Τοπολογία πριν από τη διαγραφή του link

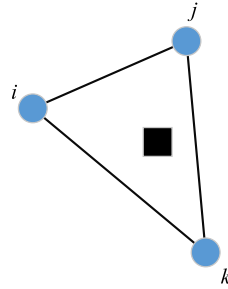
Με $\|l_{ij}\|$ συμβολίζεται η απόσταση των agents i, j , με $\|d_{io}\|$ η απόσταση του agent- i από το εμπόδιο O , με $\|d_{jo}\|$ η απόσταση του agent- j από το αντίστοιχο εμπόδιο και με θ η γωνία

μεταξύ των δύο πρακτόρων και του εμποδίου. Ουσιαστικά, το link δεν θα διαγραφεί αν η γωνία ϑ δεν γίνει ίση με π . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή ενός δυναμικού το οποίο κρατά την εν λόγω γωνία μικρότερη από μία τιμή ϑ_{cr} η οποία ορίζεται με βάση την εκάστοτε εφαρμογή. Η γενική μορφή ενός τέτοιου δυναμικού είναι η εξής:

$$\mathcal{V}_{CM,obs} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \frac{K}{\varrho(\vartheta_{ijk}, \vartheta_{cr})} \quad (3.11)$$

όπου $\varrho(\vartheta, \vartheta_{cr})$ είναι μία μη αρνητική συνάρτηση της γωνίας ϑ , η οποία εξαρτάται από τις θέσεις των πρακτόρων και των εμποδίων και K είναι ένα κέρδος το οποίο επιλέγεται πειραματικά. Ισχύει ότι $\varrho(\cdot, \vartheta_{cr}) : [0, \vartheta_{cr}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ με $\varrho(\vartheta, \vartheta_{cr}) > 0$ αν $\vartheta \neq \vartheta_{cr}$ και $\varrho(\vartheta_{cr}, \vartheta_{cr}) = 0$. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται η διατήρηση της συνεκτικότητας καθ' όλη την κίνηση των πρακτόρων στον χώρο.

Στο σημείο αυτό, όμως, παρουσιάζεται ένα σημαντικό πρόβλημα. Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή t παρουσιαστεί η τοπολογία που απεικονίζεται στο σχήμα 3.9. Σε αυτήν την



Σχήμα 3.9: Εγκλωβισμένο εμπόδιο μεταξύ τριών agents

περίπτωση το εμπόδιο είναι εγκλωβισμένο μεταξύ τριών agents οι οποίοι είναι γείτονες ανά δύο. Ο παραπάνω νόμος ελέγχου θα προσπαθήσει να διατηρήσει τα ήδη υπάρχοντα links με αποτέλεσμα να μην μπορούν οι agents ούτε να απομακρυνθούν από το εμπόδιο και να προσεγγίσουν το set point ούτε να καταλήξουν σε consensus. Σε αυτήν την περίπτωση οι πράκτορες θα κινούνται συνεχώς γύρω από το εμπόδιο προσπαθώντας να καταλήξουν σε consensus. Αυτό, όμως, που επιτυγχάνουν είναι να καταλήξουν σε μια περιοδική τροχιά (orbit) από την οποία δεν θα μπορούν να ξεφύγουν. Μαθηματικά, η τροχιά αυτή αποτελεί ένα τοπικό ελάχιστο των δυναμικών από τα οποία προέκυψαν οι νόμοι ελέγχου. Είναι, λοιπόν, προφανές πως σε μία τέτοια περίπτωση πρέπει να διαγραφεί ένα link. Εδώ, όμως, παρουσιάζεται ένα σημαντικό πρόβλημα. Η διαγραφή ενός συνδέσμου με βάση τοπική γνώση των agents που αποτελούν τα άκρα του είναι **αδύνατη** με παράλληλη διατήρηση της συνεκτικότητας. Για να γίνει αυτό θα πρέπει ο κάθε agent να γνωρίζει ένα γεννητικό υπογράφημα (spanning subgraph) του συνολικού γράφου επικοινωνίας. Αυτό σημαίνει πως ο κάθε πράκτορας δεν θα παίρνει αποφάσεις με βάση τοπική γνώση με αποτέλεσμα να χάνεται η ιδέα του πλήρως κατανομημένου νόμου ελέγχου. Για αυτό τον λόγο επιλέγουμε η αρχική τοπολογία να είναι ένα γεννητικό δέντρο (spanning tree) με αποτέλεσμα κάθε σύνδεσμος να είναι καταλυτικός για την συνεκτικότητα και να απαγορεύεται η οποιαδήποτε διαγραφή. Με αυτό τον τρόπο,

αποφεύγονται καταστάσεις όπως αυτή του σχήματος 3.9 καθώς αν ο γράφος επικοινωνίας είναι δέντρο τότε δεν θα υπάρχουν μονοπάτια με αρχή και πέρας τον ίδιο κόμβο, το οποίο σημαίνει πως κανένα εμπόδιο δεν θα εγκλωβιστεί μεταξύ κάποιων πρακτόρων. Τέλος, ας δούμε πως τροποποιούνται οι κινήσεις των πρακτόρων όταν εισάγεται ένας leader στο σύστημα.

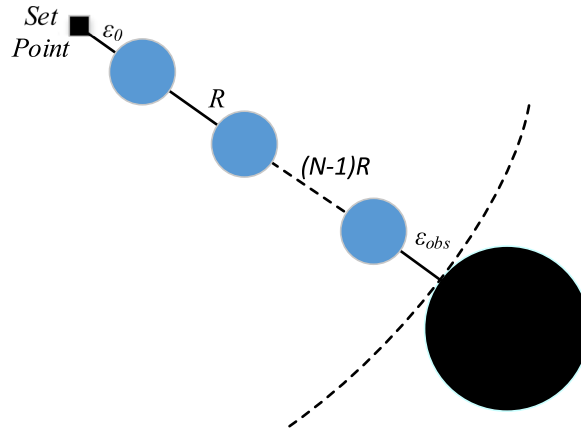
3.5 Consensus εν παρουσία συστήματος-leader

Σε πολυπρακτορικά συστήματα στα οποία υπάρχει κάποιος leader, η κίνησή του είναι συνήθως ανεξάρτητη από την κίνηση των υπόλοιπων πρακτόρων και εξαρτάται από άλλα στοιχεία τα οποία αφορούν τον τελικό στόχο της εκάστοτε εφαρμογής. Προφανώς, όμως, η κίνηση του leader επηρεάζει την κίνηση των υπολοίπων πρακτόρων.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η συγκέντρωση των agents σε ένα προκαθορισμένο σημείο του χώρου το οποίο βρίσκεται σχετικά μακριά από τα εμπόδια. Ο όρος 'σχετικά μακριά' σημαίνει πως όταν ο leader φθάσει σε μια ε_0 -γειτονιά του set point, τότε δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο στον χώρο ανίχνευσης κάποιου agent. Φορμαλιστικά έχουμε:

$$\varepsilon_0 + (N - 1)R + \varepsilon_{obs} < \min_{i=1,2,\dots,M} \|x_T - x_{obs,i}\| \quad (3.12)$$

όπου ε_0 είναι η μέγιστη επιθυμητή απόσταση του leader από το set point, R η απόσταση δύο γειτόνων για την διατήρηση της συνεκτικότητας, ε_{obs} η απόσταση ενεργοποίησης του δυναμικού αποφυγής από τα εμπόδια, x_T η θέση του set point και $x_{obs,i}$ η θέση του εμποδίου- i .



Σχήμα 3.10: Ελάχιστη απόσταση του set point από τα εμπόδια

Σκοπός του leader, λοιπόν, είναι να φθάσει στο set point. Για αυτόν το λόγο, η δυναμική του θα πρέπει να τροποποιηθεί. Πιο συγκεκριμένα, στο συνολικό δυναμικό προστίθεται ένας όρος της μορφής $(K_L/2)\|x_L(t) - x_T\|^2$, όπου $x_L(t)$ είναι η θέση του leader τη χρονική στιγμή t , x_T η θέση του set point και $K_L > 0$ ένας συντελεστής βάρους. Η εισαγωγή αυτού του όρου τείνει να οδηγήσει τον leader στο set point καθώς και τους υπόλοιπους πράκτορες λόγω του δυναμικού (3.7) που διατηρεί τους agents σχετικά κοντά μεταξύ τους. Επομένως, θα ακολουθούν τον leader. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζεται το εξής πρόβλημα:

Εφόσον στους πράκτορες ασκούνται δυνάμεις έλξης και απώθησης, οι οποίες προκύπτουν από τα αντίστοιχα δυναμικά, μπορεί το σύστημα να καταλήξει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο και να παραμείνει εκεί, με αποτέλεσμα να μην επιτευχθεί το consensus. Η παρουσία τοπικών ελαχίστων, όμως, εξαρτάται άμεσα από τα κέρδη που έχουν τα δυναμικά. Επομένως, η πιο απλή λύση αυτού του προβλήματος είναι η κατάλληλη επιλογή κερδών έτσι ώστε το συνολικό σύστημα να έχει ένα μόνο ελάχιστο στο set point. Εύκολα, όμως, μπορεί κάποιος να καταλάβει πως η επιλογή των κατάλληλων δυναμικών είναι αρκετά δύσκολη καθώς εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως είναι η αρχική τοπολογία των agents, η τοπολογία των εμποδίων κ.α., και εν γένει θα πρέπει να αλλάζει για κάθε διαφορετική εφαρμογή. Επιπλέον, αν οι πράκτορες έχουν εξ αρχής τα σωστά κέρδη, τότε χάνεται σε έναν βαθμό η έννοια της αυτοματοποίησης.

Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί τον ακόλουθο τρόπο. Η δυναμική κάθε πράκτορα είναι η εξής:

$$u_i = -A_i = -\frac{\partial V_{CM,ag}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{CA,ag}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{CM,obs}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{CA,obs}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

όπου ο τελευταίος όρος είναι μηδέν για όλους τους πράκτορες εκτός από τον leader. Όπως προαναφέρθηκε, το set point είναι ένα σημείο του χώρου στο οποίο αν βρεθεί κάποιος agent, τότε δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο στον χώρο ανίχνευσής του. Επομένως, στη γειτονιά του set point η δυναμική των πρακτόρων αλλάζει και γίνεται

$$u_i = -\frac{\partial V_{CM,ag}}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{CA,ag}}{\partial x_i} \quad (3.14)$$

καθώς οι δύο τελευταίοι όροι της (3.13) μηδενίζονται αφού δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο στον χώρο ανίχνευσης των agents. Επομένως, το ολικό ελάχιστο θα προκύπτει μόνο από τους δύο εναπομείναντες όρους και όπως αποδεικνύεται στο [26] το σύστημα θα καταλήξει σε consensus. Επομένως η μοναδική απαίτηση που υπάρχει είναι να καταλήξει ο leader αρκετά κοντά στο set point.

Η απαίτηση να φτάσει ο leader κοντά στο set point μπορεί να υλοποιηθεί με έναν αλγόριθμο ο οποίος αλλάζει το κέρδος K_L . Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα χρονικό παράθυρο διάρκειας $T_s > 0$ και αν καθ' όλη τη διάρκεια του παραθύρου ισχύουν δύο συνθήκες που αφορούν την απόσταση του leader από το set point και την ποσότητα $\|A_L\|$ ¹, τότε αυξάνεται το κέρδος K_L . Στη συνέχεια, το παράθυρο μετατοπίζεται και η αρχή του ταυτίζεται με την χρονική στιγμή του τελευταίου switching του κέρδους. Αυτό συνοψίζεται στον παρακάτω αλγόριθμο.

Algorithm

Initialization: $t_s = 0$, $K_L = K_{L,0}$, $\delta_{sw} > 0$, $\beta \in (0, 1)$, $\varrho > 1 + \frac{1}{\beta}$, $\zeta = \beta(\varrho - 1)\delta_{sw}\varepsilon_0^2$,

$$T_s > \frac{V_{tot}(0)}{(1 - \beta)\delta_{sw}\varepsilon_0^2}$$

while $[t \geq t_s + T_s \quad \wedge \quad \min_{t-T_s \leq \tau \leq t} \|x_L(\tau) - x_T\| \geq \varepsilon_0$

$$\wedge \quad \min_{t-T_s \leq \tau \leq t} (\|A_L(\tau)\|^2 - \delta_{sw}\varrho^{i-1} \min(\|x_L(\tau) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2)) \geq -\zeta]$$

¹To A_L είναι το gradient του συνολικού δυναμικού ως προς τη θέση του leader και ορίζεται στην (3.13) για $i = L$.

$$K_L \leftarrow \varrho * K_L$$
$$t_s \leftarrow t$$

end

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται δύο ερωτήματα. Το πρώτο είναι αν το πλήθος των switchings είναι πεπερασμένο και το δεύτερο αν ο leader καταφέρνει να φτάσει σε μια γειτονιά ε_0 γύρω από το set point. Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι πως ο αριθμός των switchings είναι πεπερασμένος. Επιπλέον, αν επιλεγούν σωστά οι σταθερές ζ, ϱ, ν και δ_{sw} τότε ο leader καταφέρνει να φτάσει σε μια γειτονιά ε_0 του set point. Η αντίστοιχη απόδειξη παρουσιάζεται στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου.

Κεφάλαιο 4

Ανάλυση Σύγκλισης

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι νόμοι ελέγχου που αναπτύχθηκαν για τα πολυπρακτορικά συστήματα 1^{ης} τάξης μοντελοποιημένα από απλούς ολοκληρωτές. Η είσοδος απαρτίζεται από τέσσερις όρους. Ο πρώτος αφορά το consensus και την διατήρηση της συνεκτικότητας όσον αφορά τις αποστάσεις των πρακτόρων, ο δεύτερος την αποφυγή συγκρούσεων των πρακτόρων μεταξύ τους αλλά και με τα εμπόδια, ο τρίτος αφορά την διατήρηση της συνεκτικότητας εν παρουσία εμποδίων και ο τελευταίος αφορά την απόσταση του leader από το set point. Η θεωρητική παρουσίαση καθώς και η προσέγγιση που ακολουθείται σε αυτήν την εργασία αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.2 Μαθηματικός Φορμαλισμός

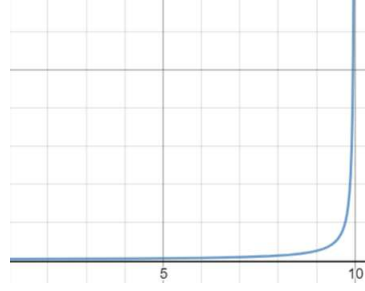
Αρχικά παρατίθεται μία μαθηματική έννοια η οποία είναι πολύ χρήσιμη, η έννοια του dead zone. Αν στην συνάρτηση f εφαρμοστεί ο τελεστής dead zone πλάτους ε τότε η έξοδος θα είναι:

$$[f(x)]_\varepsilon = \begin{cases} f(x) - \varepsilon & , \quad f(x) > \varepsilon \\ f(x) + \varepsilon & , \quad f(x) < -\varepsilon \\ 0 & , \quad \text{αλλιού} \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου ε είναι μία θετική σταθερά. Όσον αφορά την διατήρηση της συνεκτικότητας με βάση τις αποστάσεις των agents, το προτεινόμενο δυναμικό είναι το ακόλουθο:

$$V_{CM,ag} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \frac{K_1}{R^2 - \|l_{ij}\|^2} \quad (4.2)$$

όπου $\|l_{ij}\| = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (x_{i2} - x_{j2})^2 + \dots + (x_{im} - x_{jm})^2}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του agent- i από τον agent- j , R το άνω όριο για την διατήρηση του δυναμικού και K_1 το κέρδος του εν λόγω δυναμικού.

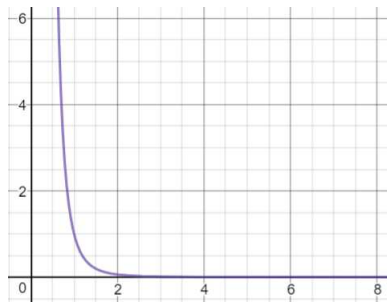


Σχήμα 4.1: Γραφική παράσταση του δυναμικού διατήρησης της συνεκτικότητας για $R=10$

Το δεύτερο δυναμικό που χρησιμοποιείται αφορά την αποφυγή συγκρούσεων των agents μεταξύ τους αλλά και με τα εμπόδια, το οποίο είναι το εξής:

$$\mathcal{V}_{CA} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{K_2}{4} \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}}^2 + \frac{K_3}{4} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}}^2 \right] \quad (4.3)$$

όπου $\|d_{ik}\| = \sqrt{(x_{i1} - x_{k1})^2 + (x_{i2} - x_{k2})^2 + \dots + (x_{im} - x_{km})^2}$ η Ευκλείδεια απόσταση του agent- i από το εμπόδιο- k , d_{ag} και d_{obs} η ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση των πρακτόρων μεταξύ τους και από τα εμπόδια αντιστοίχως και K_2 και K_3 τα αντίστοιχα δυναμικά. Η εισαγωγή του dead-zone στο δυναμικό ορίζει την περιοχή ενεργοποίησής του. Δηλαδή, το δυναμικό ενεργοποιείται όταν $\|l_{ij}\| \leq d_{ag} + \varepsilon_{ag}$ και αντιστοίχως όταν $\|d_{ik}\| \leq d_{obs} + \varepsilon_{obs}$ και αποτρέπει στις αποστάσεις να γίνουν μικρότερες από d_{ag} και d_{obs} αντιστοίχως. Εν γένει, οι σταθερές του dead zone μπορεί να είναι διαφορετικές ή ίδιες αναλόγως με την εκάστοτε εφαρμογή. Με αυτόν τον τρόπο, ορίζεται μία περιχή ασφάλειας ώστε να μπορούν να κινούνται οι agents χωρίς να υπάρχουν συγκρούσεις. Η εισαγωγή των ποσοτήτων d_{ag} και d_{obs} μας επιτρέπει να αναλύσουμε agents και εμπόδια με μη σημειακές διαστάσεις. Επομένως, για agents και εμπόδια που εγγράφονται σε υπερ-σφαίρες ακτίνας R_{ag} , R_{obs} αντίστοιχα, μπορούμε να επιλέξουμε $d_{ag} = 2R_{ag}$, $d_{obs} = R_{ag} + R_{obs}$ για να εξασφαλίσουμε την αποφυγή συγκρούσεων.

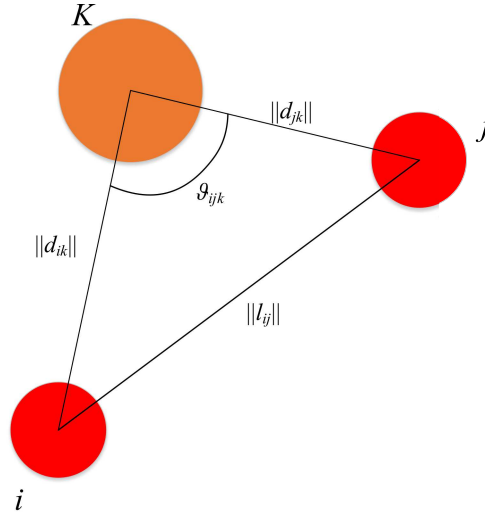


Σχήμα 4.2: Γραφική παράσταση του δυναμικού αποφυγής συγκρούσεων

Το τρίτο δυναμικό που χρησιμοποιείται αφορά την διατήρηση της συνεκτικότητας εν παρουσία των εμποδίων και είναι το ακόλουθο:

$$\mathcal{V}_{CM,obs} = \frac{K_4}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\vartheta_{ijk} - c_{\vartheta}}{2} \right)} \right]_{1/\varepsilon_{\vartheta}}^2 \quad (4.4)$$

όπου $\vartheta_{ijk} = \vartheta(\|l_{ij}\|, \|d_{ik}\|, \|d_{jk}\|)$ η γωνία που φαίνεται στο Σχήμα 4.3 ανάμεσα στο εμπόδιο K και τους agents i, j και υπολογίζεται από γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα ως εξής:

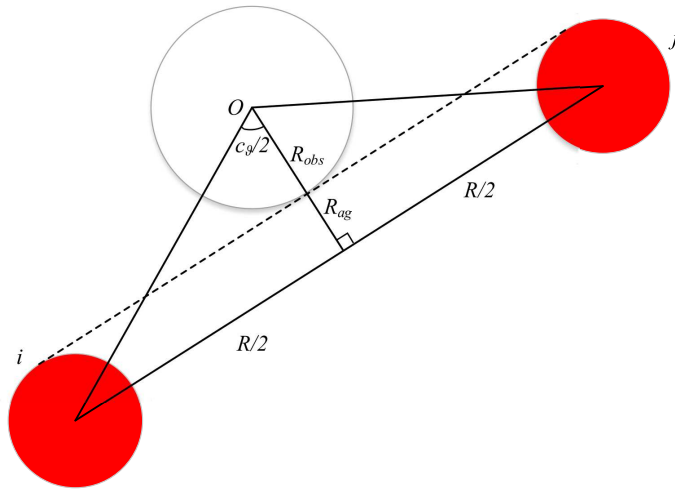


Σχήμα 4.3: Γωνία ϑ_{ijk} μεταξύ του εμποδίου k και των πρακτόρων i, j .

$$\vartheta = \arccos \frac{-\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 + \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|} \quad (4.5)$$

Η σταθερά c_ϑ είναι η μέγιστη επιτρεπτή γωνία ώστε να διατηρείται η συνεκτικότητα. Η μέγιστη αυτή γωνία εξαρτάται από την απόσταση των πρακτόρων η οποία αλλάζει δυναμικά. Όμως, η απόσταση των πρακτόρων είναι άνω φραγμένη από την σταθερά R . Αν, λοιπόν, θέσουμε το μέγεθος των εμποδίων R_{obs} τότε από το σχήμα 4.4 έχουμε:

$$\tan\left(\frac{c_\vartheta}{2}\right) = \frac{\frac{R}{2}}{(R_{obs} + R_{ag})} \Rightarrow c_\vartheta = 2 \arctan \frac{R}{2(R_{obs} + R_{ag})} \quad (4.6)$$



Σχήμα 4.4: Τοπολογία χειρίστης περίπτωσης για την γωνία c_ϑ

Επομένως, επιλέγοντας γωνία c_θ λίγο μικρότερη από την ποσότητα της εξίσωσης (4.6), επιτυγχάνουμε διατήρηση της συνεκτικότητας για κάθε πιθανή τοπολογία πρακτόρων και εμποδίων.

Το τέταρτο και τελευταίο δυναμικό που χρησιμοποιείται αφορά τον leader και είναι το εξής:

$$\mathcal{V}_L = K_L \sum_{i=1}^N \delta_i \|l_{iT}\|^2 \quad (4.7)$$

όπου $\|l_{iT}\| = \sqrt{(x_{i1} - x_{T1})^2 + (x_{i2} - x_{T2})^2 + \dots + (x_{im} - x_{Tm})^2}$ η απόσταση του agent- i από το set point, $K_L > 0$ το κέρδος και δ_i μία συνάρτηση η οποία είναι 1 όταν αναφερόμαστε στον leader και 0 διαφορετικά, δηλαδή

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & , \quad i : leader \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.8)$$

Τώρα που ορίστηκαν τα δυναμικά που θα χρησιμοποιηθούν, μπορούμε να προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των νόμων ελέγχου. Η γενική μορφή της εισόδου βασίζεται στη σχέση Δύναμης-Δυναμικού. Με βάση τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα

$$\mathbf{F} = -\nabla \mathbf{U} \quad (4.9)$$

όπου \mathbf{F} η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και \mathbf{U} το δυναμικό που την δημιουργεί. Αντιστοίχως, θα χρησιμοποιήσουμε τα δυναμικά που προαναφέρθηκαν για να δημιουργήσουμε ελκτικές και απωστικές δυνάμεις μεταξύ των πρακτόρων και των εμποδίων. Επομένως, η γενική μορφή της εισόδου u_i είναι

$$u_i = -\nabla_{x_i} \mathcal{V}_{tot} = -\frac{\partial \mathcal{V}_{tot}}{\partial x_i} \quad (4.10)$$

όπου $\mathcal{V}_{tot} = \mathcal{V}_{CM,agents} + \mathcal{V}_{CA} + \mathcal{V}_{CM,obs} + \mathcal{V}_L$.

Οι υπολογισμοί των μερικών παραγώγων μπορούν να βρεθούν στο τέλος του συγγράματος, στο παράρτημα.

Τέλος, το επόμενο θεώρημα το οποίο αποδεικνύεται στο [26] είναι καταλυτικό για την απόδειξη της σύγκλισης του συστήματος.

Θεώρημα 4.7. Έστω $w_{ij} = \frac{1}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2}$, $\phi_{ij} = \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}}$ και Δ_{il} με $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta_{il}(t)\| \leq \Delta_{il}^*$ για κάποια $\Delta_{il}^* \geq 0$. Έστω ακόμη οι ποσότητες

$$A_{il} = \sum_{j=1}^N (w_{ij} - \phi_{ij})(x_{il} - x_{jl}) + \Delta_{il} \quad , \quad i \in I_N, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (4.11)$$

Αν $\max_{i,l} \Delta_{il}^* < \frac{1}{(N-1)} w_{ij}(\varepsilon_{ag})$, τότε οι agents πετυχαίνουν $(N-1)(\varepsilon_{ag} + d_{ag})$ -box consensus, δηλαδή συγκεντρώνονται σε έναν m -διάστατο κύβο πλευράς $(N-1)(\varepsilon_{ag} + d_{ag})$.

Το άνω φράγμα του πλήθους των switchings θα υπολογιστεί παρακάτω. Τώρα που υπολογίσαμε τις μερικές παραγώγους των επιμέρους δυναμικών, είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το γενικό αλγόριθμο για το consensus.

4.3 Θεωρητική Απόδειξη Σύγκλισης

Για την χρονική παράγωγο του συνολικού δυναμικού έχουμε:

$$\dot{V}_{tot} = \sum_{i=1}^N A_i^T \dot{x}_i \quad (4.12)$$

όπου $A_i = \frac{\partial V_{tot}}{\partial x_i}$. Τότε:

$$\dot{V}_{tot} = \sum_{i=1}^N A_i^T \dot{x}_i = \sum_{i=1}^N A_i^T u_i = - \sum_{i=1}^N \|A_i\|^2 \leq 0. \quad (4.13)$$

Επομένως, το συνολικό δυναμικό είναι φραγμένο και κατα συνέπεια είναι φραγμένη κάθε επιμέρους συνιστώσα του μεταξύ δύο διαδοχικών switchings. Στην συνέχεια θα δείξουμε πως το πλήθος των switchings είναι πεπερασμένο και επομένως το συνολικό δυναμικό θα είναι φραγμένο $\forall t \geq t_0$.

Πλήθος Switchings

Έστω πως το πλήθος των switchings είναι άπειρο. Έστω, ακόμη, πως η χρονική στιγμή t_i αντιστοιχεί στο i -οστό switching. Τότε $\forall t \in [t_i - T_s, t_i]$ ισχύει λόγω (4.13) και της συνθήκης για το switching ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{tot} &\leq -\|A_L\|^2 \\ &\leq \zeta - \delta_{sw} \varrho^{i-1} \min(\|x_L(t) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) \\ &\leq \zeta - \delta_{sw} \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

αφού, δεδομένου πως συνθήκες του αλγορίθμου είναι αληθείς στο χρονικό διάστημα $[t_i - T_s, t_i]$, ισχύει $\min(\|x_L(t) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) = \varepsilon_0^2$. Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[t_i - T_s, t_i]$ έχουμε:

$$V_{tot}(t_i^-) \leq V_{tot}(t_i - T_s) + \zeta T_s - \delta_{sw} T_s \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2. \quad (4.15)$$

Πηγαίνοντας πίσω χρονικά, για το διάστημα $(t_{i-1}, t_i - T_s)$ από (4.13) έχουμε:

$$\dot{V}_{tot} \leq 0 \Rightarrow V_{tot}(t_i - T_s) \leq V_{tot}(t_{i-1}^+). \quad (4.16)$$

Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση $\bar{V}_{tot}(t) := V_{tot}(t) - \frac{K_L(t)}{2} \|x_L(t) - x_T\|^2$. Τότε επειδή η \bar{V}_{tot} είναι συνεχής στους switching times έχουμε:

$$\begin{aligned} V_{tot}(t_{i-1}^+) &= \bar{V}_{tot}(t_{i-1}^+) + \frac{\varrho^{i-1} K_L(0)}{2} \|x_L(t_{i-1}) - x_T\|^2 \\ &= \bar{V}_{tot}(t_{i-1}^-) + \frac{\varrho^{i-1} K_L(0)}{2} \|x_L(t_{i-1}) - x_T\|^2 \leq \rho V_{tot}(t_{i-1}^-). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Συνδυάζοντας τις (4.15), (4.16), (4.17) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} V_{tot}(t_i^-) &\leq \rho V_{tot}(t_{i-1}^-) + \zeta T_s - \delta_{sw} T_s \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2 \\ &\leq \varrho^2 V_{tot}(t_{i-2}^-) + (\varrho + 1) \zeta T_s - 2 \delta_{sw} T_s \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2 \\ &\leq \dots \leq \varrho^{i-1} V_{tot}(0) + (1 + \varrho + \dots + \varrho^{i-2}) \zeta T_s - (i-1) \delta_{sw} T_s \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2 \\ &= \varrho^{i-1} V_{tot}(0) + \frac{\varrho^{i-1} - 1}{\varrho - 1} \zeta T_s - (i-1) \delta_{sw} T_s \varrho^{i-1} \varepsilon_0^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Παρατηρούμε πως καθώς $i \rightarrow \infty$ το δεξί μέλος της (4.18) τείνει στο $-\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού $V_{tot}(t) \geq 0 \quad \forall t$. Επιπλέον πρέπει να είναι μη αρνητικό. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \varrho^{i-1}V_{tot}(0) + \frac{\varrho^{i-1} - 1}{\varrho - 1}\zeta T_s - (i-1)\delta_{sw}T_s\varrho^{i-1}\varepsilon_0^2 &> 0 \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \\ \varrho^{i-1}V_{tot}(0) + \frac{\varrho^{i-1}}{\varrho - 1}\zeta T_s - (i-1)\delta_{sw}T_s\varrho^{i-1}\varepsilon_0^2 &> 0 \Rightarrow \\ i < \frac{V_{tot}(0) + \frac{\zeta T_s}{\varrho - 1}}{\delta_{sw}T_s\varepsilon_0^2} + 1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Επομένως, το πλήθος των switchings είναι φραγμένο από την ποσότητα

$$i^* = \left\lceil \frac{V_{tot}(0) + \frac{\zeta T_s}{\varrho - 1}}{\delta_{sw}T_s\varepsilon_0^2} \right\rceil + 1. \quad (4.20)$$

όπου με $\lceil x \rceil$ συμβολίζεται ο μέγιστος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος από x για $x > 0$.

Εφόσον το πλήθος των switchings είναι πεπερασμένο, από (4.13) έχουμε πως η V_{tot} είναι φραγμένη $\forall t$. Επιπλέον, από το θεώρημα LaSalle έχουμε πως το σύστημα θα καταλήξει στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο στο οποίο $A_i \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_i \equiv 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$. Αφού δεν έχουμε κάποιο switching μετά το i^* , τότε $\forall t \geq t_{i^*} + T_s \exists \tau_1, \tau_2 \in [t - T_s, t]$ έτσι ώστε να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

$$\bullet \|x_L(\tau_1) - x_T\| < \varepsilon_0 \quad (A)$$

$$\bullet \min(\|x_L(\tau_2) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) > \frac{\zeta}{\delta_{sw}\varrho^{i^*-1}} \quad (B)$$

Αν ισχύει η πρώτη, τότε θα υπάρχει $\tau \in [t - T_s, t]$ για το οποίο $\|x_L(\tau) - x_T\| < \varepsilon_0$, δηλαδή ο leader θα βρίσκεται σε μιά γειτονιά ε_0 του set point. Όμως από Θεώρημα Μέσης Τιμής(Θ.Μ.Τ.) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \|x_L(t) - x_T\| &\leq \|x_L(\tau) - x_L(t)\| + \|x_L(\tau) - x_T\| \\ &\leq \max_{s \in [\min(t, \tau), \max(t, \tau)]} \|\dot{x}_L(s)\|T_s + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Αφού $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_i(t) = 0, \forall \bar{\varepsilon} > 0 \exists \tilde{T}$ τέτοιο ώστε:

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{T_s}, \quad \forall t \geq \tilde{T} \quad (4.22)$$

Από (4.21) και (4.22) θα έχουμε ότι

$$\|x_L(t) - x_T\| \leq \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon} \quad (4.23)$$

για αυθαίρετα μικρό $\bar{\varepsilon}$. Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο χρόνο, αν υπάρξει κάποια χρονική στιγμή για την οποία ο leader βρεθεί σε γειτονιά ε_0 του set point, τότε θα συνεχίσει να βρίσκεται σε

αυτήν για κάθε μεταγενέστερη χρονική στιγμή, δηλαδή $\forall t \geq \max\{\tilde{T}, t_{i^*} + T_s\}$, αν $\exists \tau$ τέτοιο ώστε $\|x_L(t) - x_T\| < \varepsilon_0$ για κάποιο $\tau \in [t - T_s, t]$, τότε $\|x_L(t) - x_T\| \leq \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon} \forall t$.

Όσον αφορά την δεύτερη περίπτωση πρέπει να γίνει κάποια διευρένηση.

Αν $\min(\|x_L(\tau) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) = \|x_L(\tau) - x_T\|^2$, τότε προφανώς θα ο leader θα έχει φτάσει σε μια γειτονιά του set point με αποτέλεσμα να μεταβαίνουμε στην πρώτη περίπτωση.

Αν $\min(\|x_L(\tau) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) = \varepsilon_0^2$, τότε

$$\delta_{sw} \varrho^{i^*-1} \varepsilon_0^2 > \zeta. \quad (4.24)$$

Επιπλέον, από την (4.20) έχουμε:

$$\begin{aligned} i^* - 1 &= \left\lfloor \frac{V_{tot}(0) + \frac{\zeta T_s}{\varrho - 1}}{\delta_{sw} T_s \varepsilon_0^2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{V_{tot}(0)}{\delta_{sw} T_s \varepsilon_0^2} + \frac{\zeta}{(\varrho - 1) \delta_{sw} \varepsilon_0^2} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Για $T_s > \frac{V_{tot}(0)}{(1 - \beta) \delta_{sw} \varepsilon_0^2}$ και $\zeta = \beta(\varrho - 1) \delta_{sw} \varepsilon_0^2$ με $\beta \in (0, 1)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} i^* - 1 &< \lfloor (1 - \beta) + \beta \rfloor < 1 \Rightarrow \\ i^* &< 2 \Rightarrow i^* \leq 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Έτσι, από την (4.24) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \delta_{sw} \varrho^{i^*-1} \varepsilon_0^2 &> \zeta \Rightarrow \\ 1 &\geq \varrho^{i^*-1} > \beta(\varrho - 1) \Rightarrow \\ \varrho &< 1 + \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Επομένως, αν επιλέξουμε $\varrho > 1 + \frac{1}{\beta}$ είναι αδύνατο μετά το τελευταίο switching i^* να ισχύει $\min(\|x_L(\tau) - x_T\|^2, \varepsilon_0^2) = \varepsilon_0^2$. Άμεσο αποτέλεσμα είναι πως $\forall t \geq t_{i^*} + T_s \exists \tau \in [t - T_s, t] : \|x_L(\tau) - x_T\| < \varepsilon_0$, που δείξαμε ότι συνεπάγεται τη σύγκλιση του leader στην γειτονιά ε_0 του set point.

Επιπλέον, στην μόνιμη κατάσταση ο όρος του leader που αφορά την απόστασή του από το set point θα είναι $K_L(0) \varrho^{i^*} (x_L - x_T)$ ο οποίος είναι φραγμένος κατά μέτρο από την ποσότητα $K_L(0) \varrho^{i^*} \varepsilon_0$.

Τέλος, από το θεώρημα (4.7), αν επιλέξουμε

- $\max_{i,l} \Delta_{il}^* = K_L(0) \varrho^* \varepsilon_0$
- $K_L(0) < \frac{1}{(N-1) \varrho^* \varepsilon_0} w_{ij}(\varepsilon_{ag})$

τότε πετυχαίνουμε $(N-1)(\varepsilon_{ag} + d_{ag})$ -box consensus. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.8. Έστω το σύστημα N πρακτόρων με δυναμική

$$\dot{x}_i = u_i \quad (4.28)$$

όπου $x_i, u_i \in \mathbb{R}^m$. Έστω, ακόμη, πως πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- Το αρχικό γράφημα επικοινωνίας είναι ένα *spanning tree*
- $\zeta = \beta(\varrho - 1)\delta_{sw}\varepsilon_0^2$, με $\beta \in (0, 1)$
- $\varrho > 1 + \frac{1}{\beta}$
- $T_s > \frac{V_{tot}(0)}{(1 - \beta)\delta_{sw}\varepsilon_0^2}$
- $K_L(0) < \frac{1}{(N - 1)\varrho^{i^*}\varepsilon_0} w_{ij}(\varepsilon_{ag})$
- $\varepsilon_0 + (N - 1)R + \varepsilon_2 < \min_{i=1,2,\dots,M} \|x_T - x_{obs,i}\|$

Αν επιλέξουμε τον νόμο ελέγχου

$$u_i = -A_i \quad (4.29)$$

$$A_i = \frac{\partial V_{tot}}{\partial x_i} \quad (4.30)$$

όπου $V_{tot} = V_{CM,agents} + V_{CA,agents} + V_{CA,obs} + V_{CM,obs} + V_L$ και το σχήμα μεταγωγής της παραμέτρου K_L που περιγράφεται στο Κεφ. 3 τότε, το σύστημα καταλήγει σε $(N - 1)(\varepsilon_{ag} + d_{ag})$ -box consensus (προσεγγιστικό consensus) γύρω από το set point με παράλληλη αποφυγή συγκρούσεων και διατήρηση της συνεκτικότητας και ο leader συγκλίνει σε απόσταση ε_0 από το set point.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

5.1 Περιγραφή Προσομοίωσης

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων με βάση τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο για συστήματα 1^{ης} τάξης. Θα παρατεθούν αποτελέσματα για δύο και για τρεις διαστάσεις καθώς και για διαφορετικά πλήθη πρακτόρων και εμποδίων.

Οι προσομοιώσεις στήθηκαν σε περιβάλλον Matlab/Simulink. Πιο συγκεκριμένα, τα συστήματα μοντελοποιήθηκαν σε περιβάλλον Simulink ενώ η αρχικοποίηση κάποιων παραμέτρων καθώς και ο κώδικας για την τελική οπτικοποίηση γράφτηκε σε περιβάλλον Matlab.

5.2 Αναλυτική Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται φαίνονται στον πίνακα 5.1. Σε κάθε διάσταση θα παρουσιάσουμε κάποια γραφικά αποτελέσματα τα οποία μας επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα και μας δίνουν μια πιο πρακτική αίσθηση.

Παράμετροι Προσομοιώσεων	
$x_{ag,i}(0)$	αρχικές θέσεις πρακτόρων
$x_{obs,i}$	θέσεις εμποδίων
R	ακτίνα ανίχνευσης
δ	περιοχή διατήρησης
R_{ag}	μέγεθος πρακτόρων
R_{obs}	μέγεθος εμποδίων
ϵ_{ag}	περιοχή ενεργοποίησης αποφυγής πρακτόρων
ϵ_{obs}	περιοχή ενεργοποίησης αποφυγής εμποδίων
c_{θ}	οριακή γωνία πρακτόρων και εμποδίων
ρ	παράμετρος αύξησης κέρδους του leader
K_i	κέρδη των επιμέρους δυναμικών
x_T	Set Point

5.2.1 Δισδιάστατοι Πράκτορες

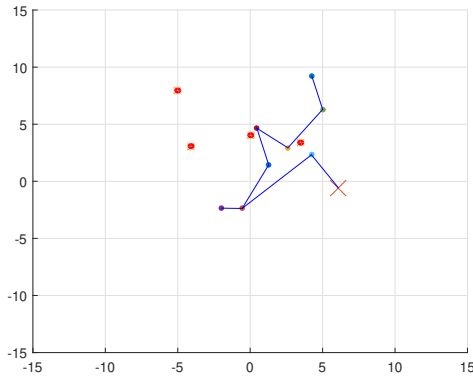
Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για τις δύο διαστάσεις. Θα παρουσιαστούν δύο προσομοιώσεις οι οποίες διαφέρουν ως προς την επιλογή των κερδών. Για την πρώτη προσομοίωση έχουμε:

Παράμετροι Προσομοίωσης

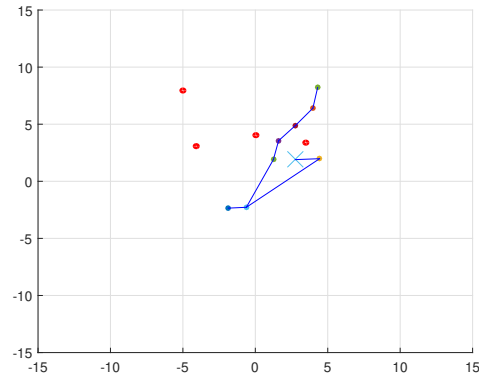
- Πλήθος πρακτόρων: $N = 9$
- Πλήθος εμποδίων: $M = 4$
- Παράμετροι επικοινωνίας: $(R, \delta, \varepsilon_{ag}, \varepsilon_{obs}) = (3, 1, 0.5, 1)$
- Μεγέθη πρακτόρων και εμποδίων: $(R_{ag}, R_{obs}) = (0.1, 0.3)$
- Οριακή γωνία εμποδίων-πρακτόρων: $c_{\vartheta} = 150^\circ$
- Παράμετρος αύξησης κέρδους του leader: $\varrho = 1.5$
- Κέρδη δυναμικών: $K_i = 1, i = 1, 2, 3, 4, K_L = 0.05$

Αρχικοποιήσεις

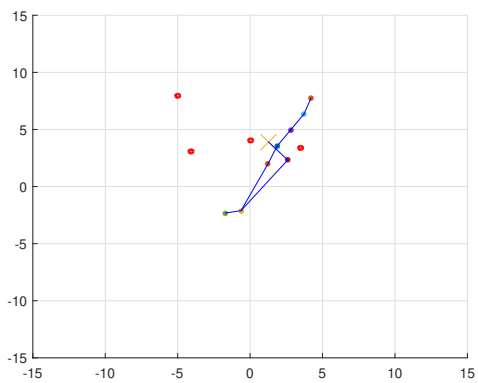
- Αρχικές θέσεις πρακτόρων:
 $x_{ag}(0) = [1.2807, -0.5583, 2.6050, -1.9747, 5.0043, 4.2306, 0.4646, 4.2565, 6.0865]$
 $y_{ag}(0) = [1.4386, -2.3786, 2.9348, -2.3522, 6.2947, 2.3173, 4.6418, 9.2092, -0.567]$
- Θέσεις εμποδίων:
 $x_{obs} = [-3.5784, 3.4857, -5, 0.0399]$
 $y_{obs} = [4.0784, 3.3857, 7.9516, 4.0399]$
- Set Point:
 $[x_T, y_T] = [-10, 10]$



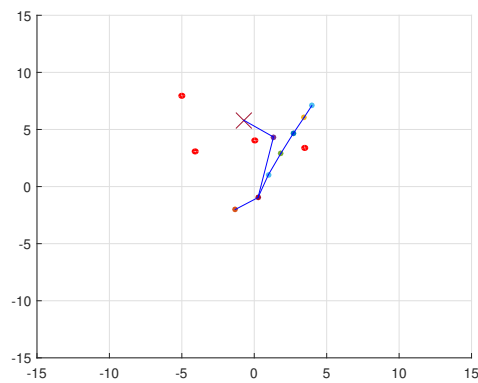
(α') $t=0$



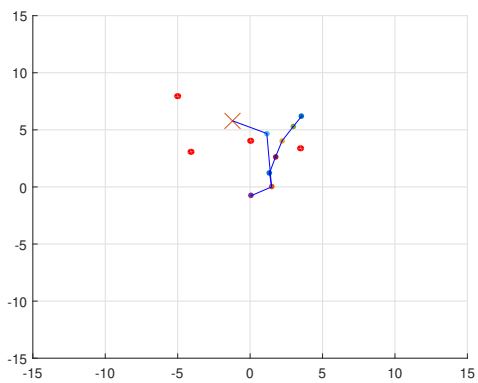
(β') $t=3$



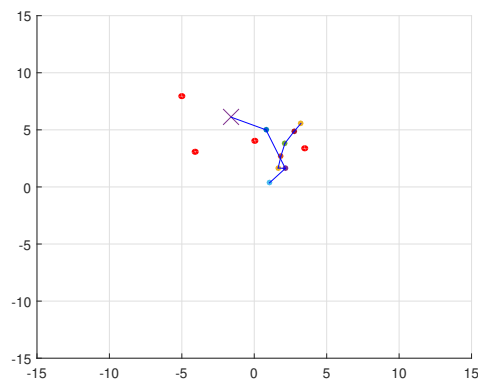
(γ') t=8



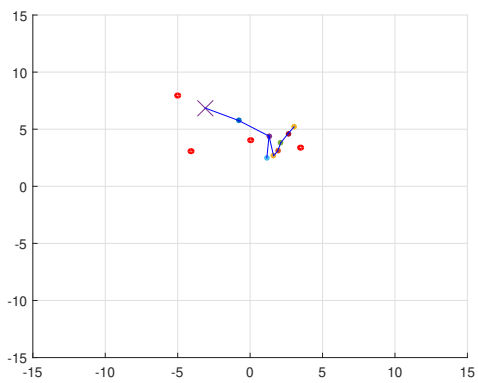
(δ') t=20



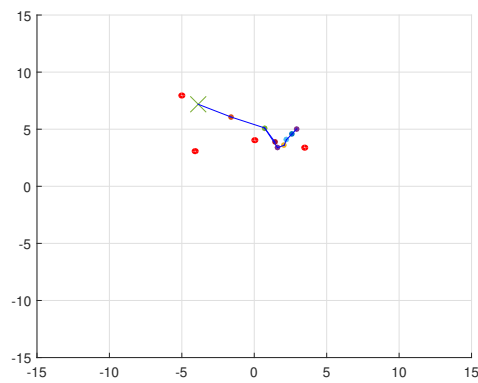
(ε') t=40



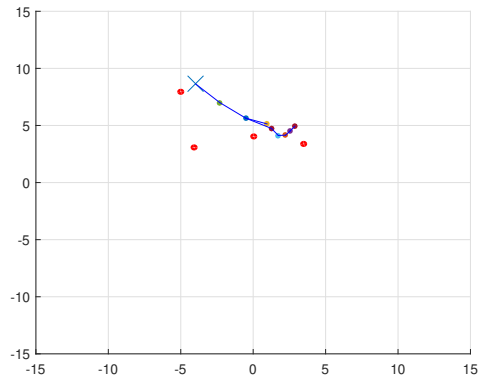
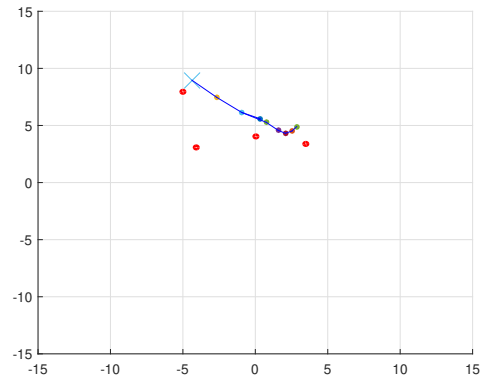
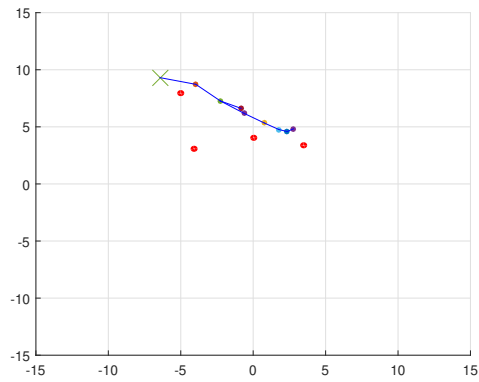
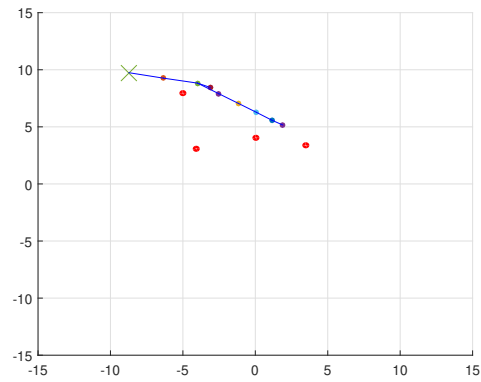
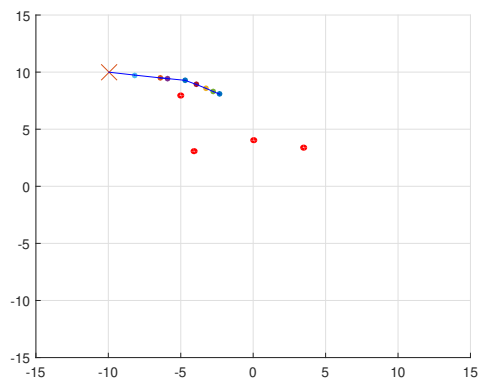
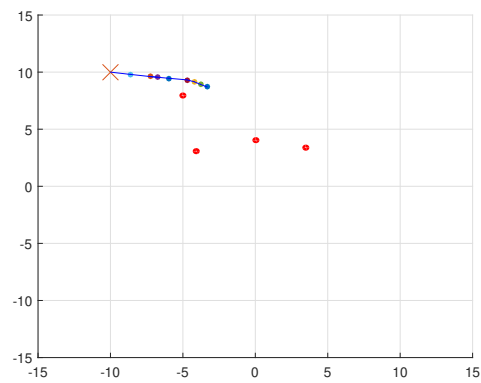
(Ϝ') t=60

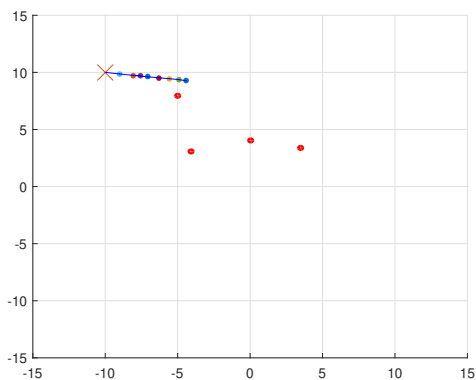
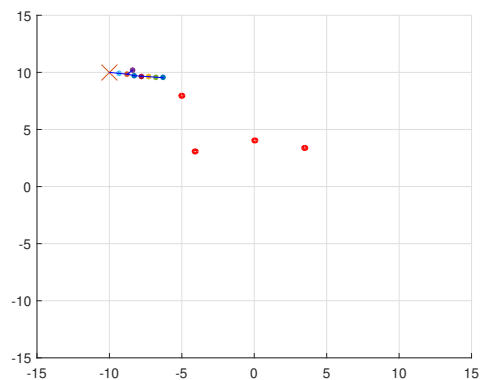
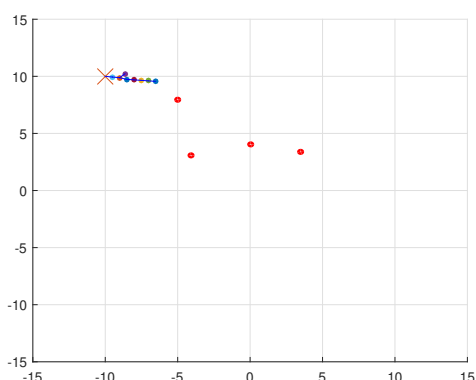


(ζ') t=75



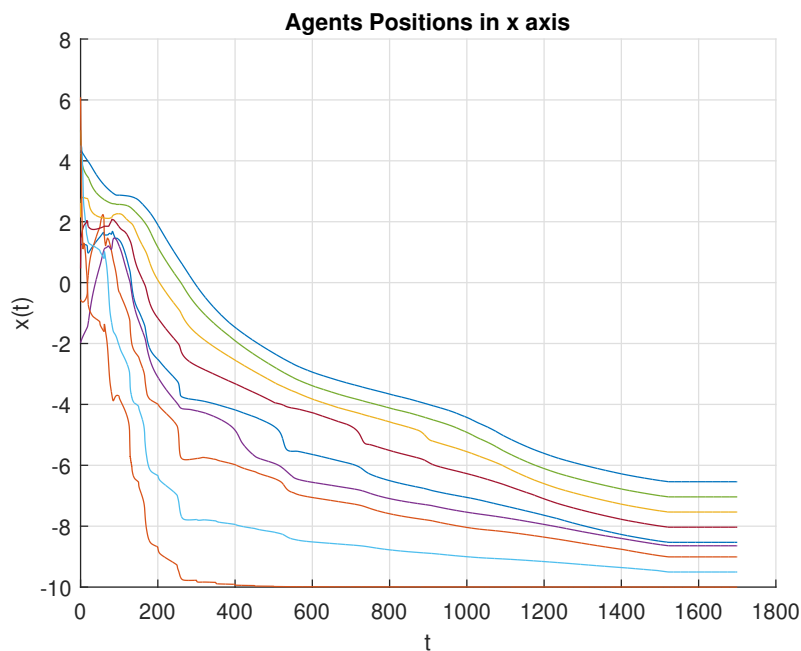
(η') t=85

 (θ') $t=100$  (ι') $t=120$  $(\iota\alpha')$ $t=140$  $(\iota\beta')$ $t=200$  $(\iota\gamma')$ $t=500$  $(\iota\delta')$ $t=700$

(ιε') $t=1000$ (ιζ') $t=1400$ (ιζ') $t=1700$

Σχήμα 5.1: Στιγμιότυπα από την προσομοίωση

Στο σχήμα 5.1 παρουσιάζονται κάποια στιγμιότυπα από την κίνηση των πρακτόρων στον χώρο. Τα εμπόδια είναι οι τέσσερις κόκκινοι κύκλοι ενώ ο leader συμβολίζεται με το X. Το μπλε πλέγμα είναι ο γράφος επικοινωνίας και όπως φαίνεται πρόκειται για spanning tree. Στην συνέχεια, στα σχήματα 5.2 και 5.3, παρουσιάζονται οι τροχιές των πρακτόρων στις δύο διαστάσεις.



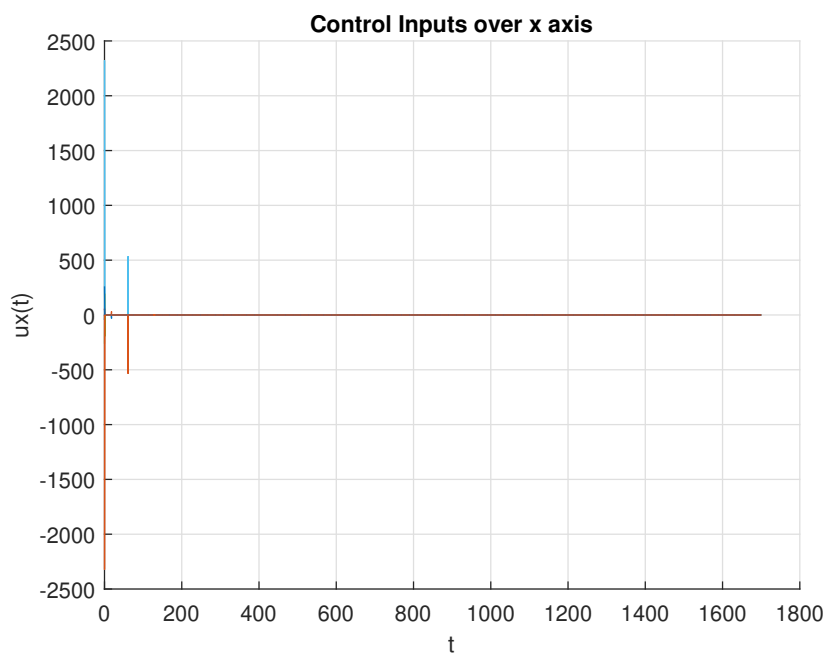
Σχήμα 5.2: Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση



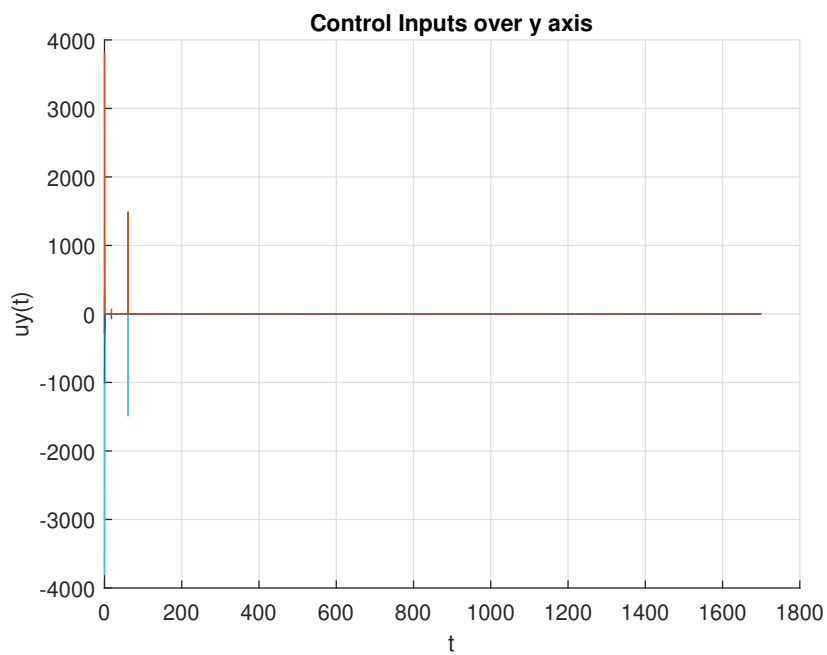
Σχήμα 5.3: Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση

Παρατηρούμε πως οι τροχιές συγκλίνουν και στις δύο διαστάσεις. Η τελική διάταξη, βέβαια, εξαρτάται από την παράμετρο ϵ_{ag} η οποία καθορίζει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πρακτόρων. Επιπλέον, παρατηρούμε πως η σύγκλιση στην διάσταση y είναι μεγαλύτερη από την σύγκλιση στον άξονα x . Αυτό εξαρτάται κυρίως από τον γράφο

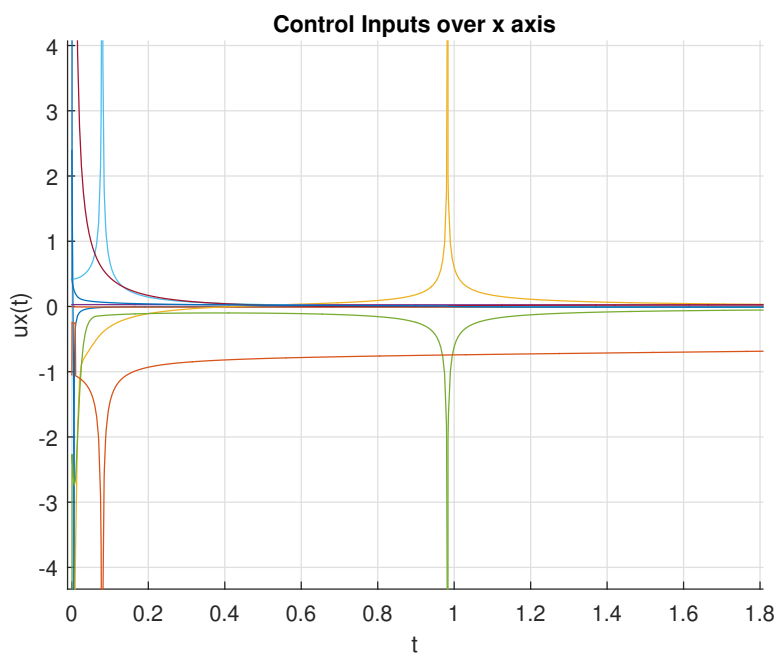
επικοινωνίας και αλλάζει με βάση αυτόν. Στην συνέχεια, παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των εισόδων ελέγχου σε κάθε διάσταση.



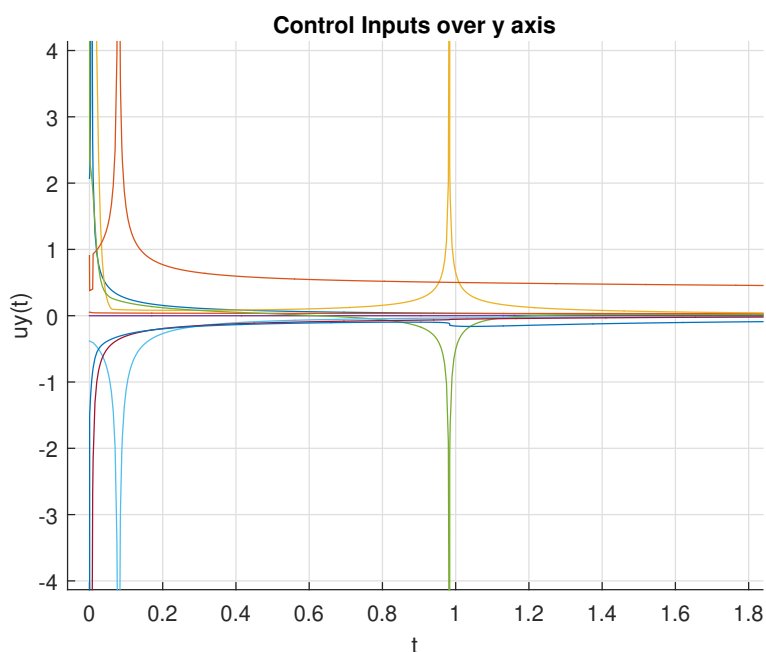
Σχήμα 5.4: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση



Σχήμα 5.5: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση



Σχήμα 5.6: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση

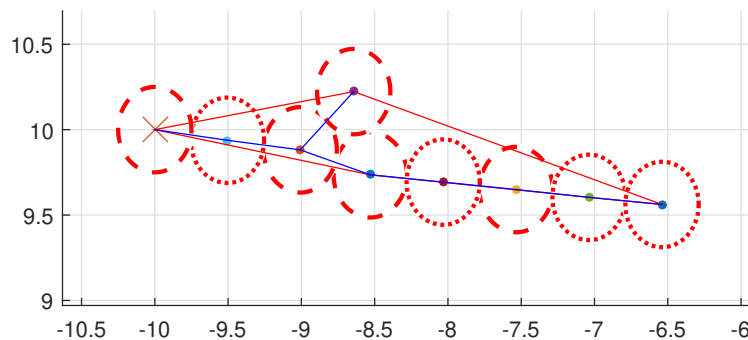


Σχήμα 5.7: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση

Από τα σχήματα 5.4 και 5.5 παρατηρούμε οι είσοδοι συγκλίνουν στο μηδέν, όπως ήταν αναμενόμενο. Επιπλέον, η σύγκλιση αυτή γίνεται σε πάρα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, ενώ μέσω των σχημάτων 5.6 και 5.7 φαίνεται πως σύγκλιση απαιτεί λιγότερο από 0.5 δευτερόλεπτα. Ακολούθως, περίπου στο εξικοστό δευτερόλεπτο παρατηρούμε πως η είσοδος τόσο στη

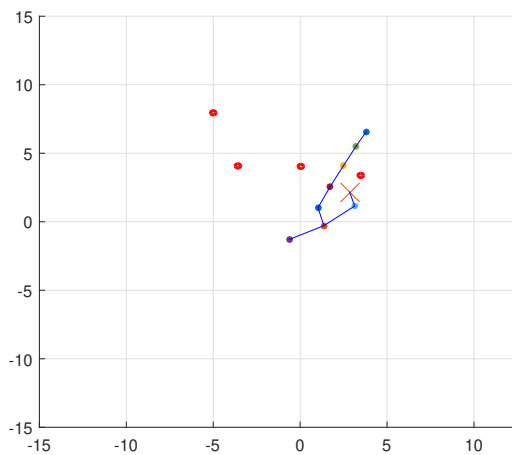
διάσταση x όσο και στην διάσταση y αυξάνεται σημαντικά. Αυτό συμβαίνει διότι σε εκείνο το χρονικό διάστημα ενεργοποιήθηκε το δυναμικό διατήρησης της συνεκτικότητας καθώς κάποιο εμπόδιο πήγε να βρεθεί ανάμεσα σε δύο πράκτορες.

Στο σχήμα 5.8 παρουσιάζεται η τελική διάταξη των πρακτόρων. Παρατηρούμε πως οι πράκτορες που είναι γείτονες βρίσκονται σε αποστάσεις ε_{ag} καθώς και πως ο leader έχει φτάσει στο set point. Επομένως επιτεύχθηκε το consensus.

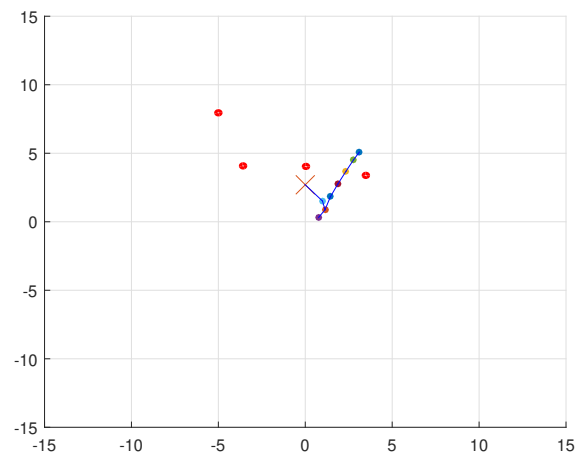


Σχήμα 5.8: Τελική διάταξη των πρακτόρων

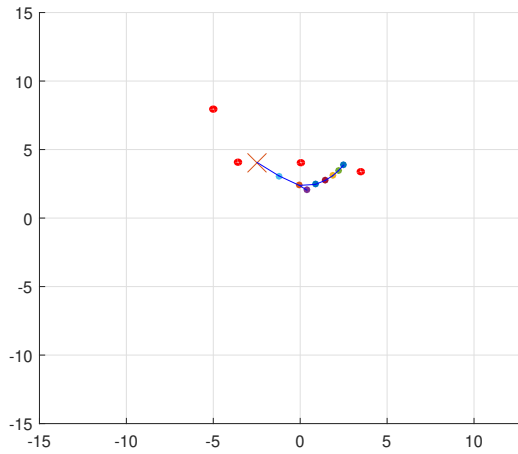
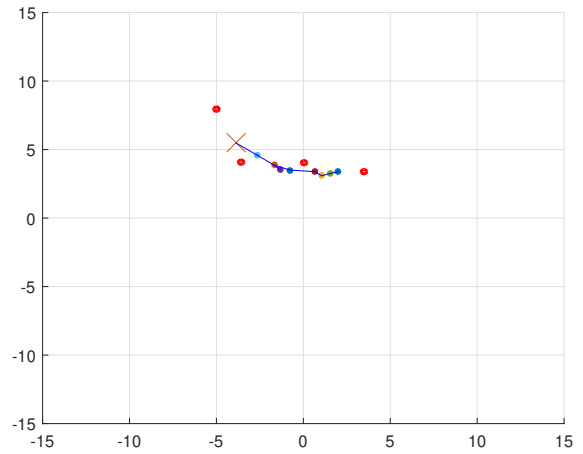
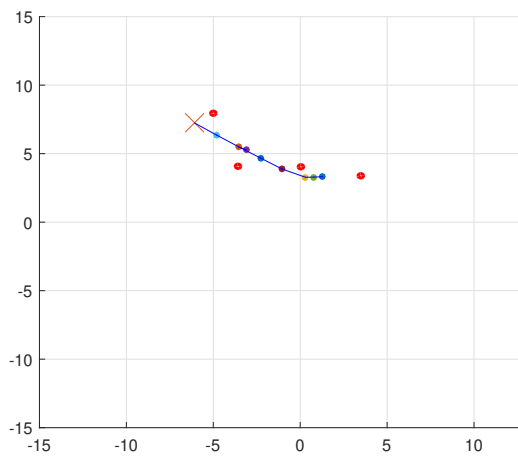
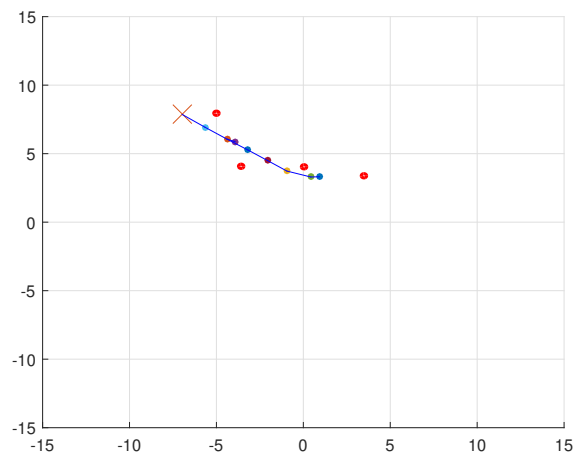
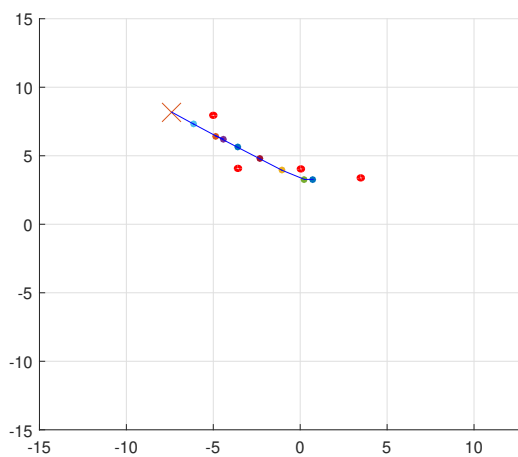
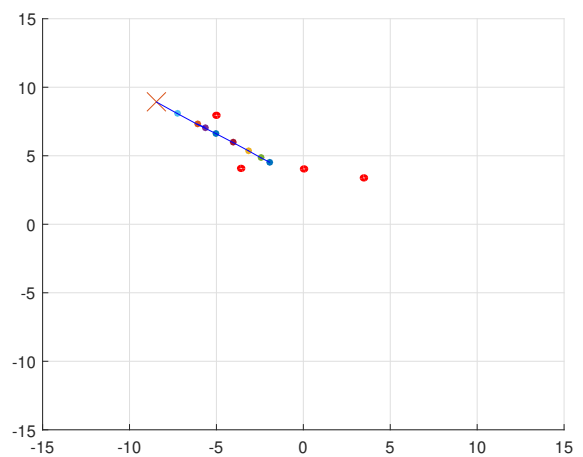
Στη συνέχεια, διεξάγαμε το ίδιο πείραμα με την διαφορά ότι το κέρδος του δυναμικού διατήρησης της συνεκτικότητας έγινε $K_1 = 10$ και $d_{obs} = 0.1$.

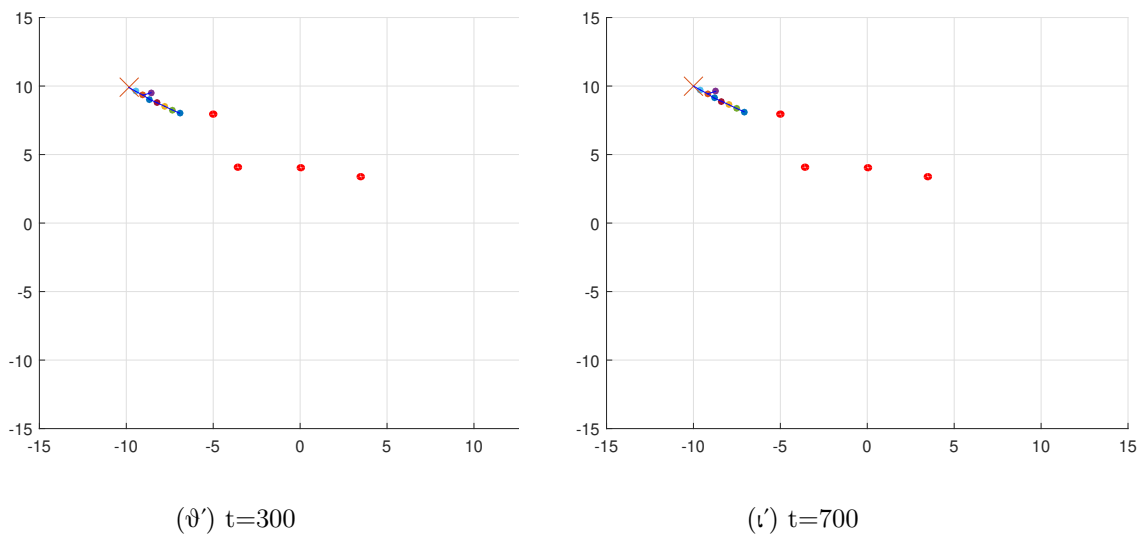


(α') $t=3$

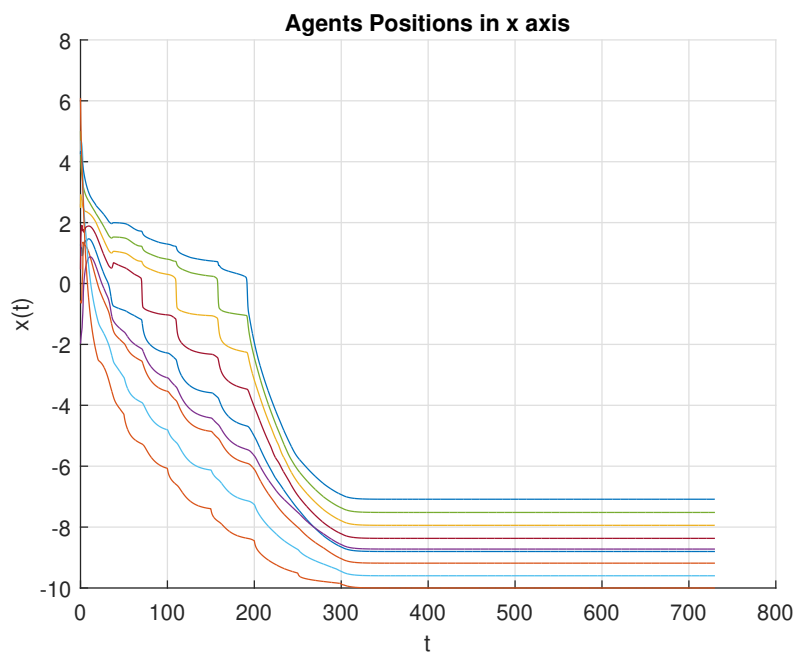


(β') $t=8$

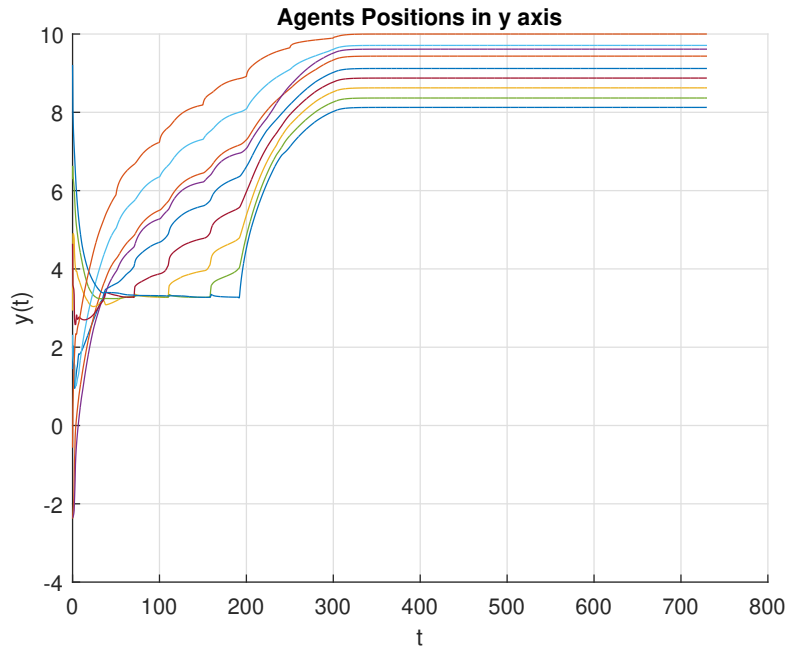
 (γ') $t=20$  (δ') $t=40$  (ϵ') $t=100$  (ς') $t=120$  (ζ') $t=150$  (η') $t=200$



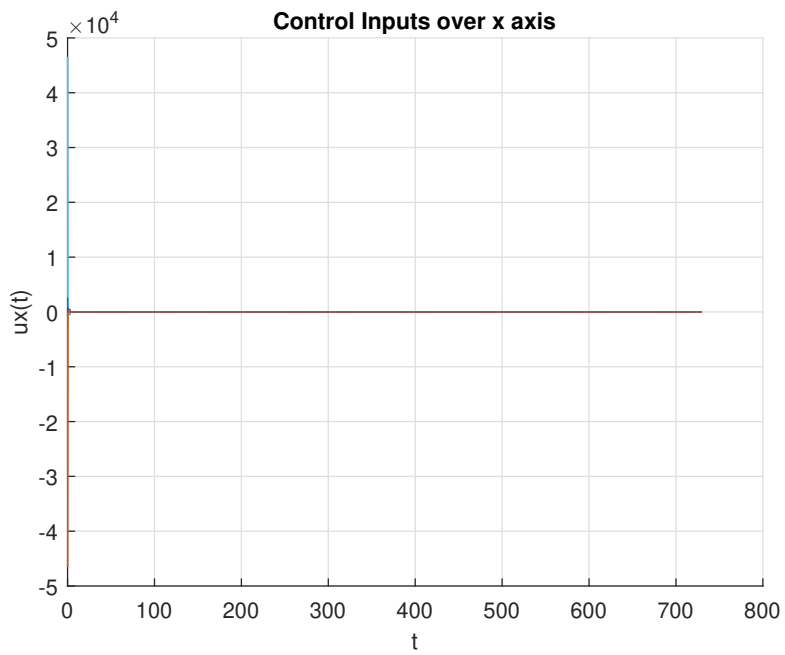
Σχήμα 5.9: Στιγμιότυπα από την προσομοίωση



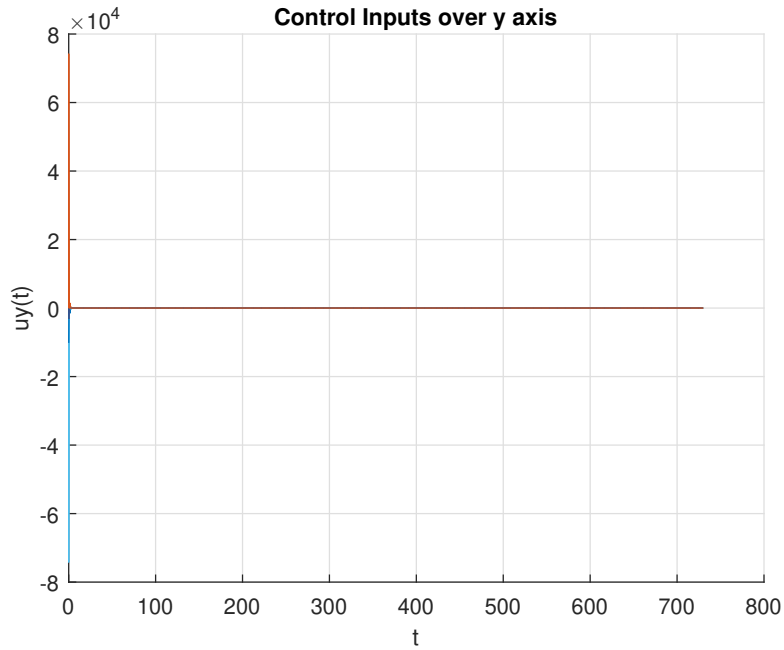
Σχήμα 5.10: Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση



Σχήμα 5.11: Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση

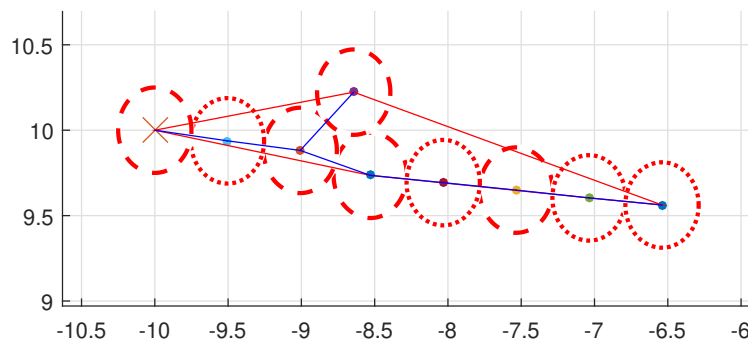


Σχήμα 5.12: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση



Σχήμα 5.13: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση

Συγκρίνοντας τα σχήματα 5.10 και 5.11 με τα 5.2 και 5.3 παρατηρούμε μία μεγάλη διαφορά στην ταχύτητα σύγκλισης του συστήματος, καθώς στο χρονικό διάστημα $200s - 300s$ οι τροχιές συγλίνουν με πολύ μεγάλη ταχύτητα στις τελικές τους καταστάσεις. Όσον αφορά τα σχήματα 5.12 και 5.13 παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις χρονικές εξελίξεις των εισόδων ελέγχου σε σχέση με το προηγούμενο πείραμα, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο.



Σχήμα 5.14: Τελική διάταξη των πρακτόρων

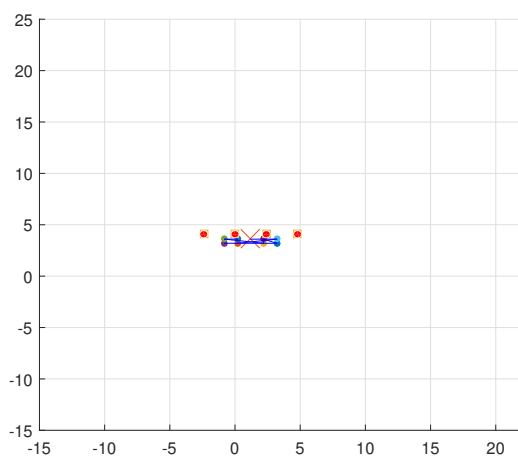
Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζονται στιγμιότυπα από την δεύτερη προσομοίωση. Η κύρια διαφορά είναι πως ο leader επιλέγει διαφορετική διαδρομή για να φτάσει στο set point και κατα συνέπεια αλλάζουν και οι τροχιές που διαγράφουν οι υπόλοιποι agents. Επομένως, οι τροχιές που διαγράφουν οι πράκτορες εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες αλλά αν ικανοποιούνται οι απαραίτητες προϋποθέσεις, τότε το σύστημα θα καταλήξει σε consensus. Τέλος, αλλάζουμε την αρχική τοπολογία των πρακτόρων και των εμποδίων.

Παράμετροι Προσομοίωσης

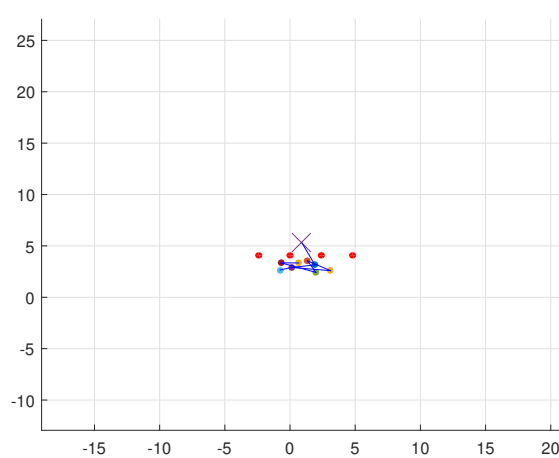
- Πλήθος πρακτόρων: $N = 9$
- Πλήθος εμποδίων: $M = 4$
- Παράμετροι επικοινωνίας: $(R, \delta, \varepsilon_{ag}, \varepsilon_{obs}) = (8, 1, 0.5, 0.6)$
- Μεγέθη πρακτόρων και εμποδίων: $(R_{ag}, R_{obs}) = (0.1, 0.3)$
- Οριακή γωνία εμποδίων-πρακτόρων: $c_{\theta} = 150^\circ$
- Παράμετρος αύξησης κέρδους του leader: $\varrho = 1.5$
- Κέρδη δυναμικών: $K_1 = 10, K_i = 1, i = 2, 3, 4, K_L = 0.025$

Αρχικοποιήσεις

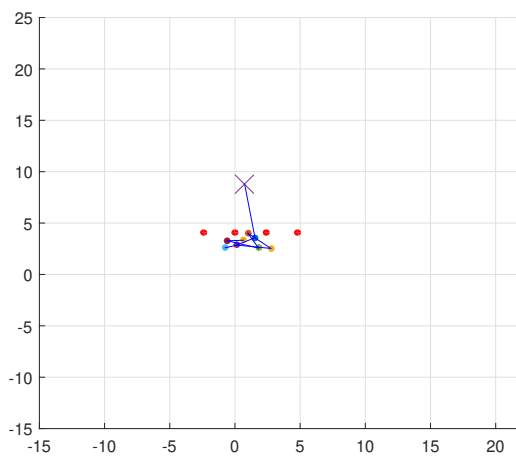
- Αρχικές θέσεις πρακτόρων:
 $x_{ag}(0) = [3.2, 0.2, 2.2, -0.8, -0.8, 3.2, 2.2, 0.2, 1.2]$
 $y_{ag}(0) = [3.2, 3.2, 3.2, 3.2, 3.6, 3.6, 3.6, 3.6, 3.6]$
- Θέσεις εμποδίων:
 $x_{obs} = [-2.4, 0, 2.4, 4.8]$
 $y_{obs} = [4.0784, 4.0784, 4.0784, 4.0784]$
- Set Point:
 $[x_T, y_T] = [1.2, 25]$



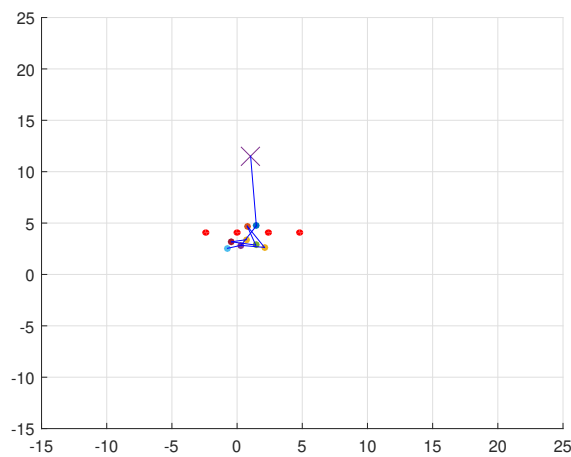
(α') $t=0$



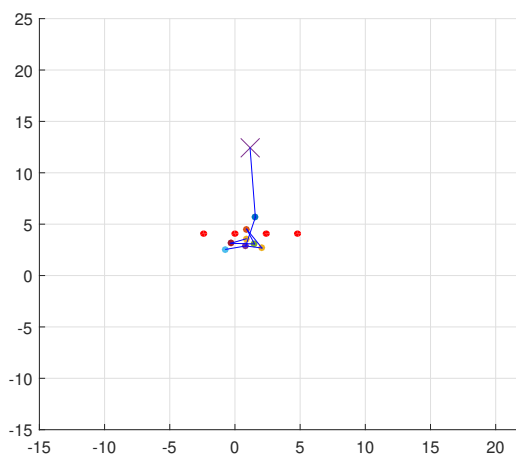
(β') $t=4$



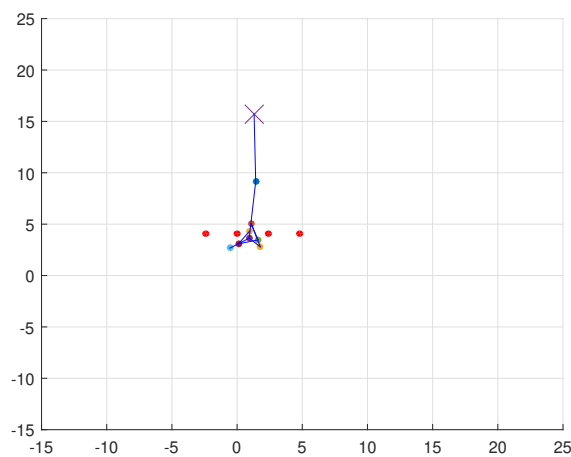
(γ') t=10



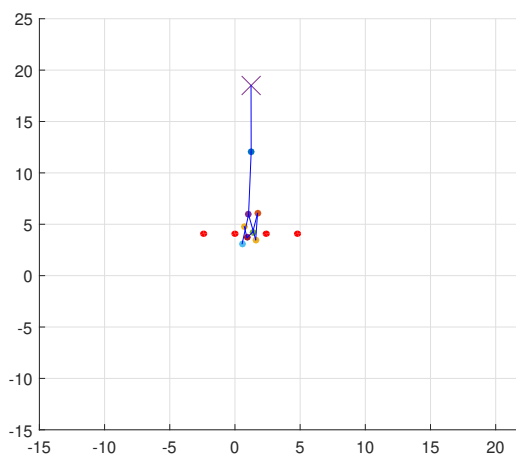
(δ') t=20



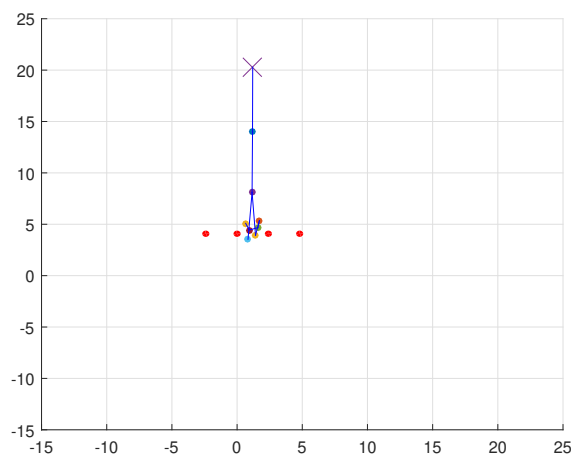
(ϵ') t=30



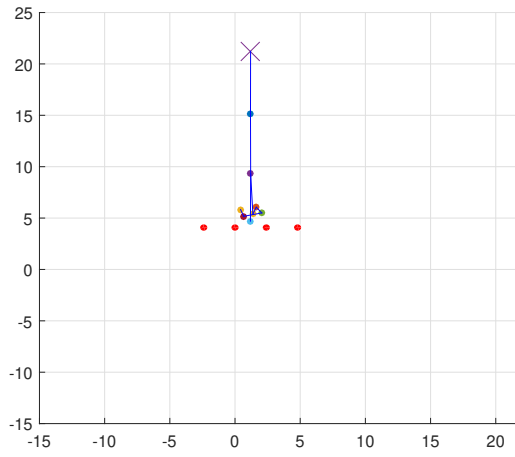
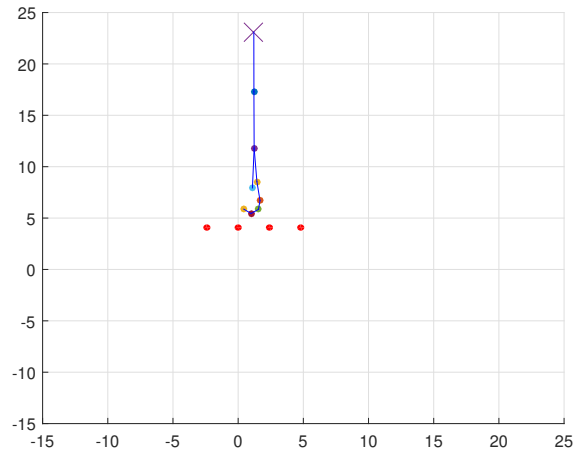
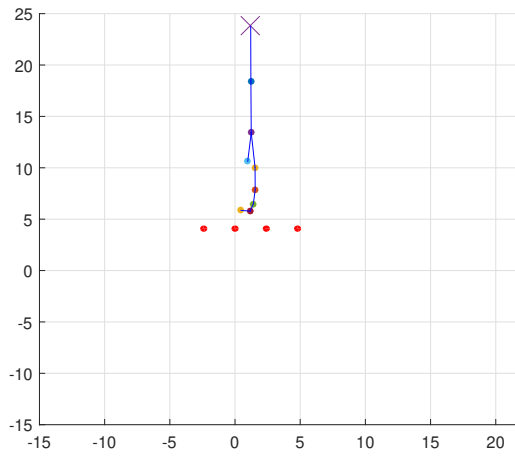
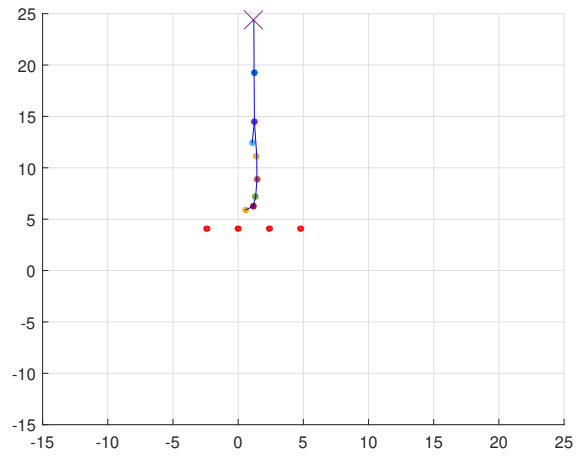
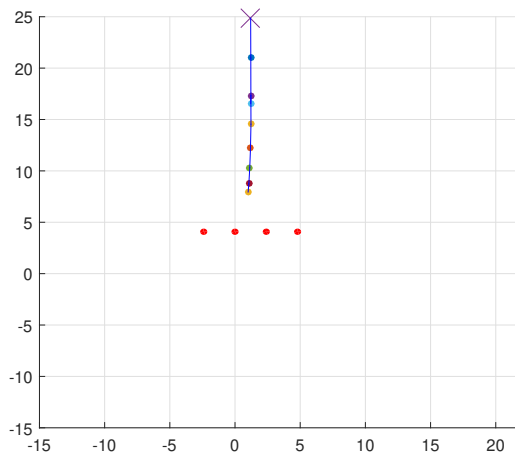
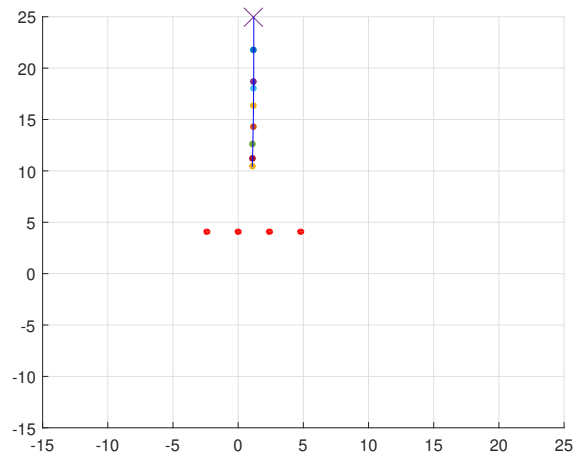
(φ') t=50

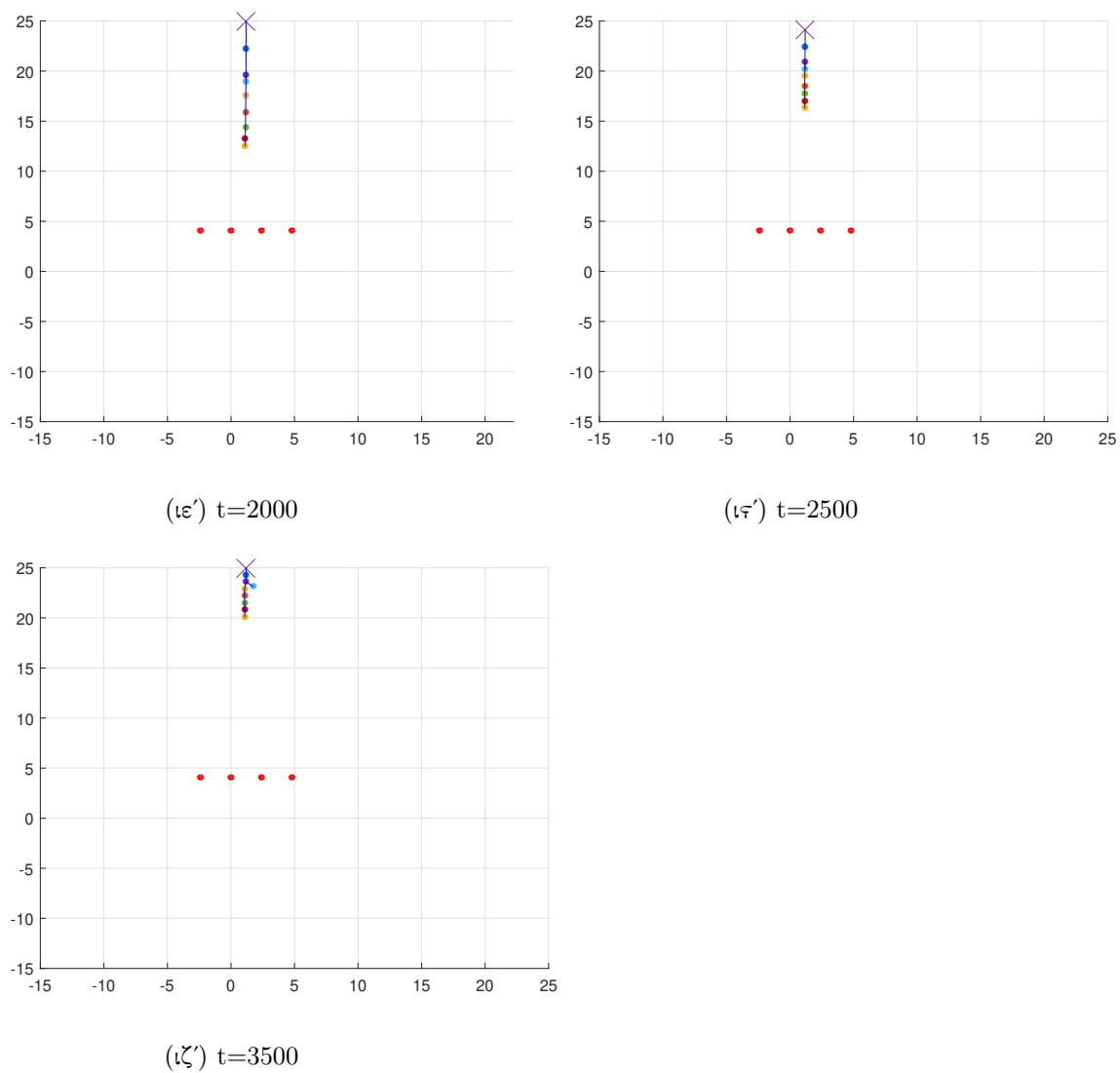


(ζ') t=100



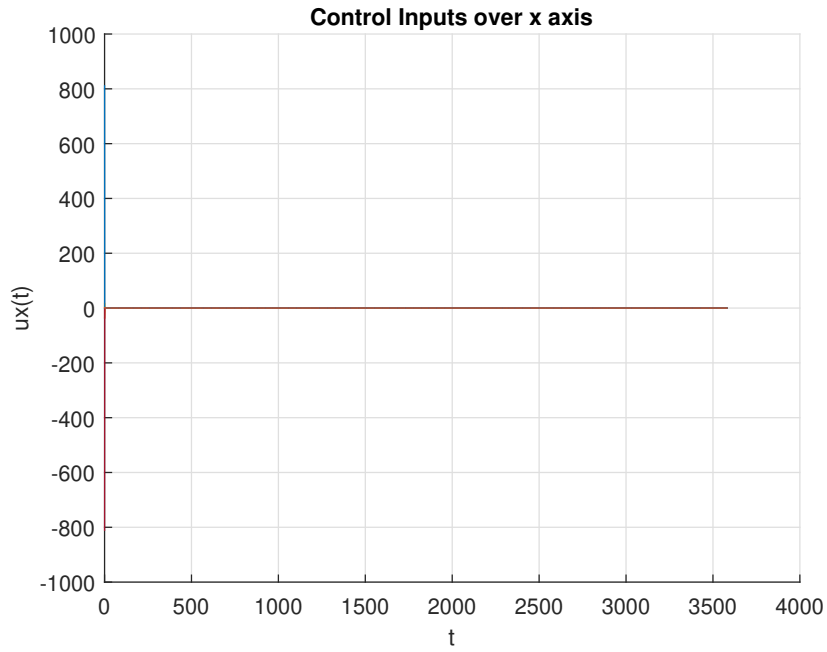
(η') t=150

 (ϑ') $t=200$  (ι') $t=300$  $(\iota\alpha')$ $t=400$  $(\iota\beta')$ $t=500$  $(\iota\gamma')$ $t=1000$  $(\iota\delta')$ $t=1500$

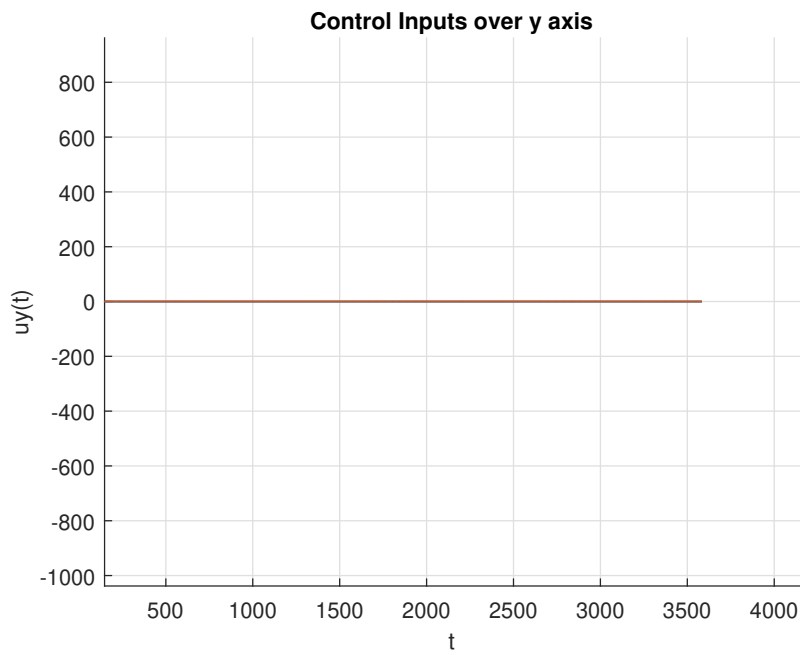


Σχήμα 5.15: Στιγμιότυπα από την προσομίωση

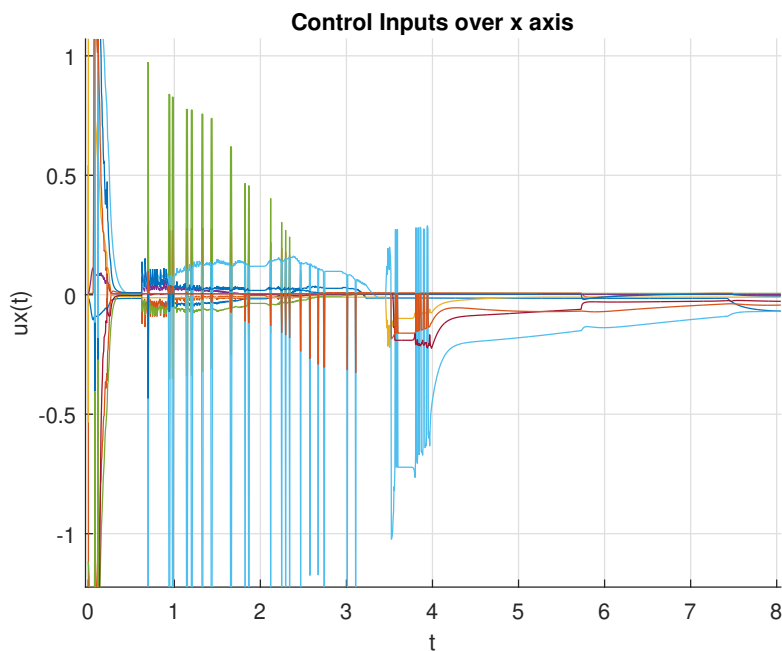
Ακολούθως παρουσιάζονται οι εισοδοί ελέγχου σε κάθε διάσταση.



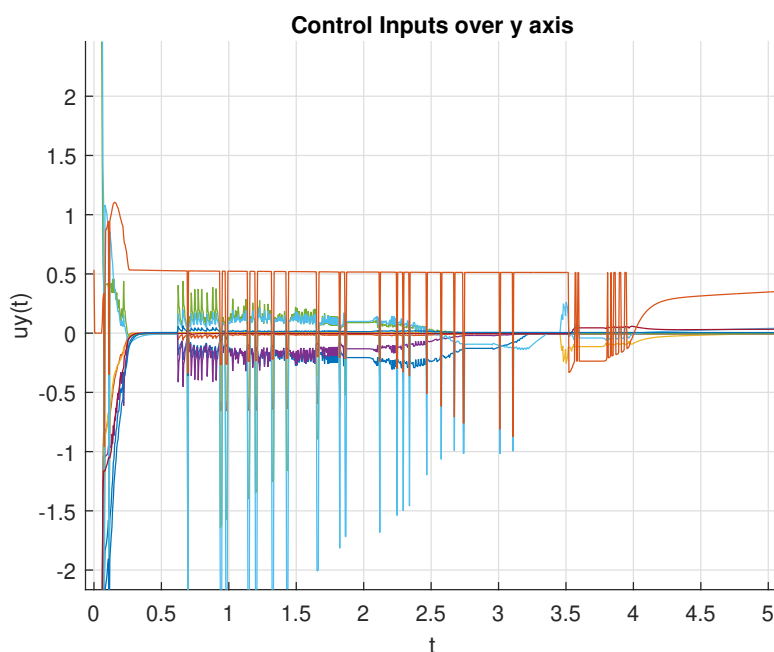
Σχήμα 5.16: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση



Σχήμα 5.17: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση



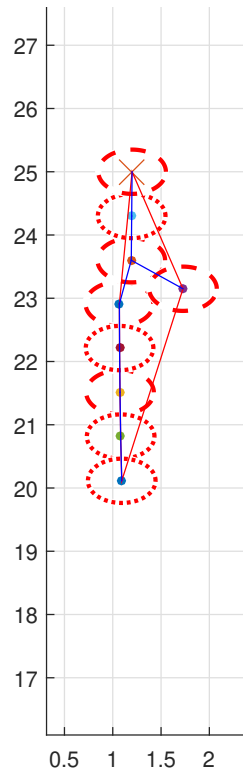
Σχήμα 5.18: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα



Σχήμα 5.19: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα

Παρατηρούμε πως στα πρώτα δευτερόλεπτα της προσομοίωσης υπάρχουν σημαντικές αυξομειώσεις στα σήματα εισόδου. Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε τοποθετήσει τους πράκτορες και τα εμπόδια πολύ κοντά μεταξύ τους με αποτέλεσμα τα ενεργοποιούνται πολλές φορές τα δυναμικά αποφυγής συγκρούσεων και διατήρησης συνεκτικότητας.

Τέλος παρουσιάζεται η τελική διάταξη των πρακτόρων.



Σχήμα 5.20: Τελική διάταξη των πρακτόρων

5.2.2 Τρισδιάστατοι Πράκτορες

Παράμετροι Προσομοίωσης

- Πλήθος πρακτόρων: $N = 13$
- Πλήθος εμποδίων: $M = 5$
- Παράμετροι επικοινωνίας: $(R, \delta, \varepsilon_{ag}, \varepsilon_{obs}) = (3, 1, 0.5, 1)$
- Μεγέθη πρακτόρων και εμποδίων: $(R_{ag}, R_{obs}) = (0.1, 0.3)$
- Οριακή γωνία εμποδίων-πρακτόρων: $c_{\theta} = 150^\circ$
- Παράμετρος αύξησης κέρδους του leader: $\varrho = 1.5$
- Κέρδη δυναμικών: $K_1 = 10, K_i = 1, i = 2, 3, 4, K_L = 0.01$

Αρχικοποιήσεις

- Αρχικές θέσεις πρακτόρων:

$$x_{ag}(0) = [0.2807, 2.9583, 0.7050, 3.9747, 1.0043, 1.9356, 0.4646, 3.9565, 5.0865, 0.4386, 5.2436, 2.9348, 4.8522]$$

$$y_{ag}(0) = [0.4386, 5.2436, 2.9348, 4.8522, 6.2947, 3.3173, 2.3418, 9.2092, 3.567, 1.0043, 1.9356, 0.4646, 3.9565]$$

$$z_{ag}(0) = [-0.4386, 5.2436, -2.9348, 4.8522, 6.2947, -3.3173, 2.3418, 9.2092, -3.567, 4.8522, 6.2947, 3.3173, 2.3418]$$

- Θέσεις εμποδίων:

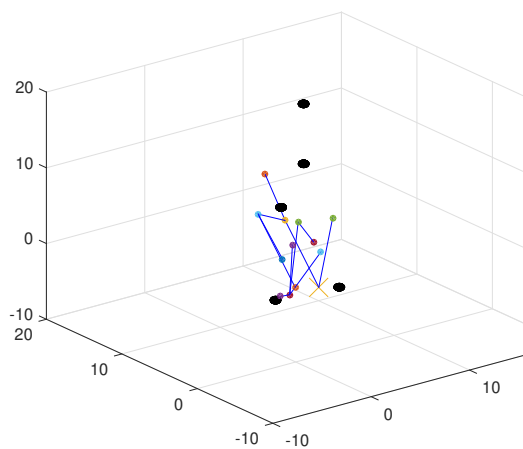
$$x_{obs} = [1.0784, 6.4857, 9.1516, 10.0399, 8.904]$$

$$y_{obs} = [4.0784, 10.3857, 6.1516, 12.0399, 10.547]$$

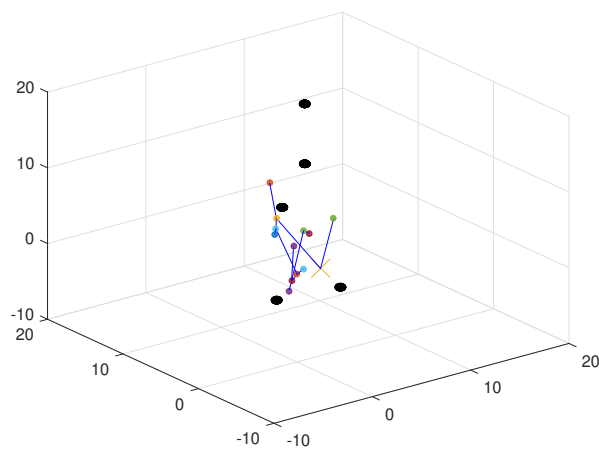
$$z_{obs} = [-4.0784, 3.3857, -6.1516, 15.0399, 8.2102]$$

- Set Point:

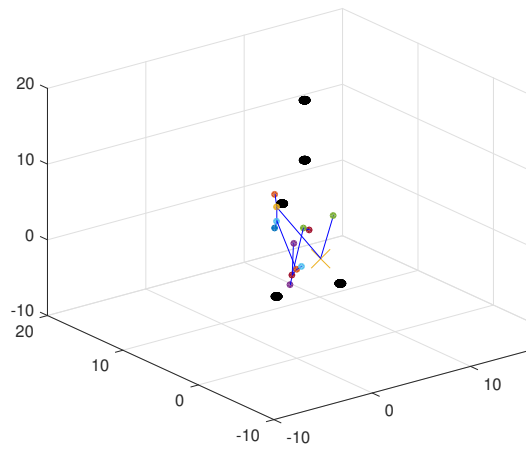
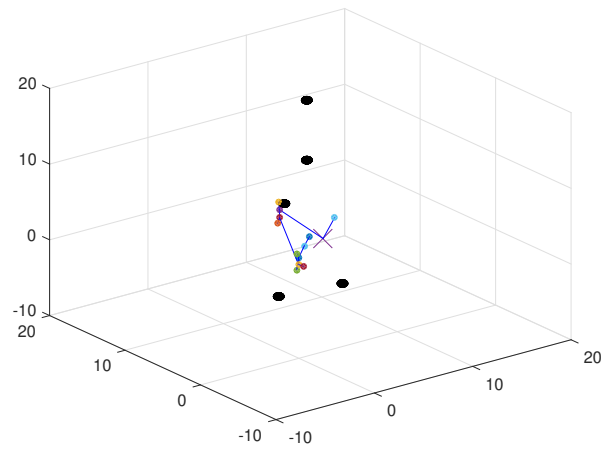
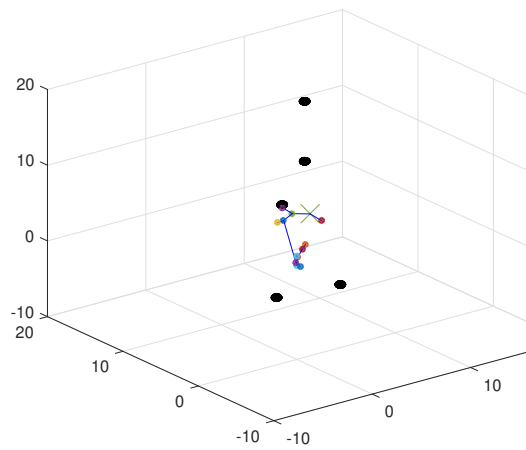
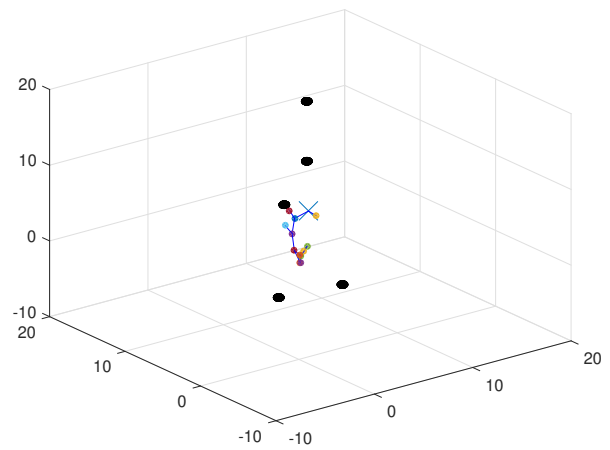
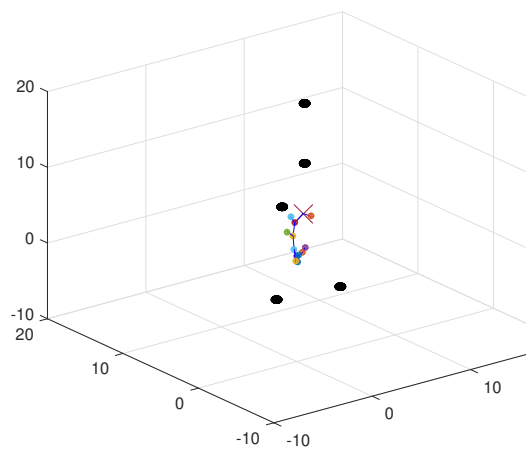
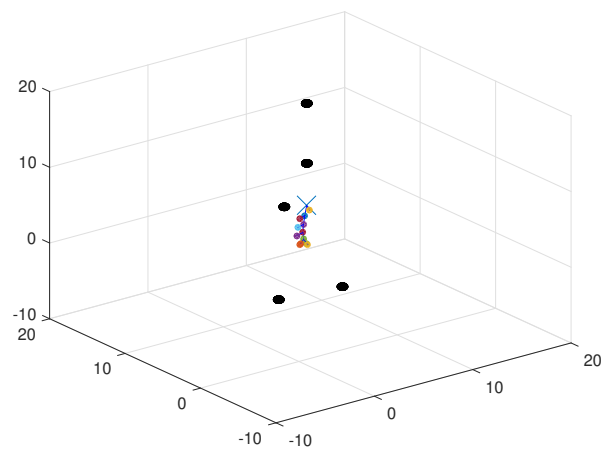
$$[x_T, y_T, z_T] = [20, 20, 20]$$

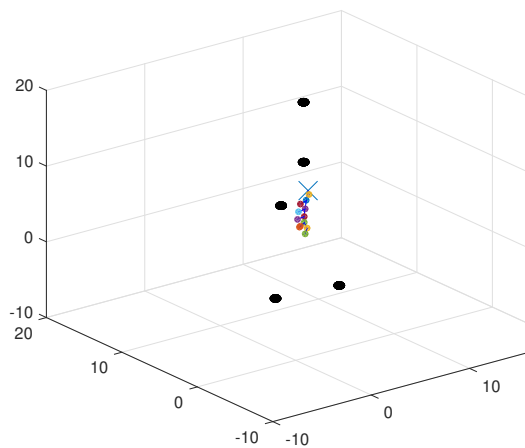
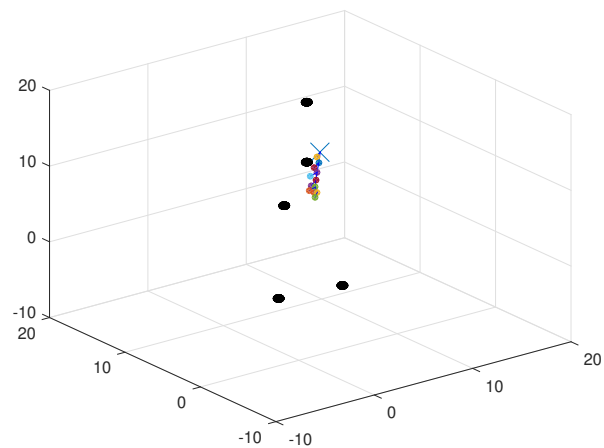
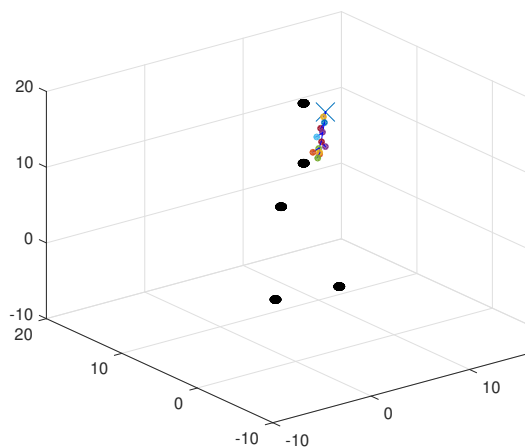
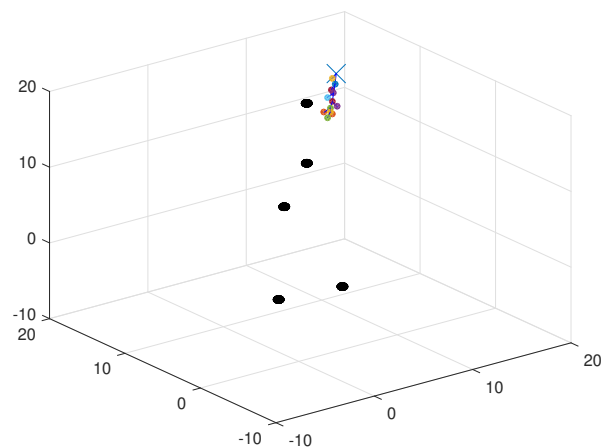
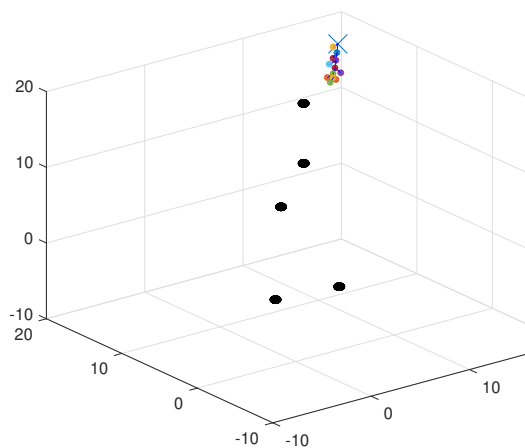
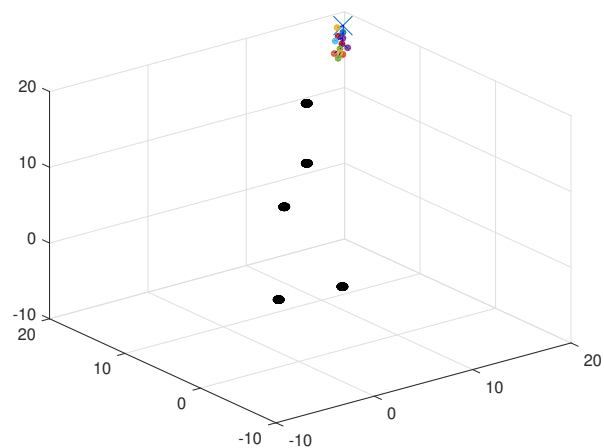


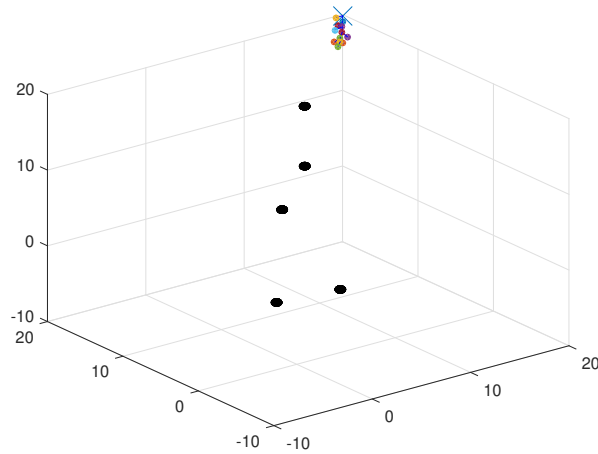
(α') $t=0$



(β') $t=3$

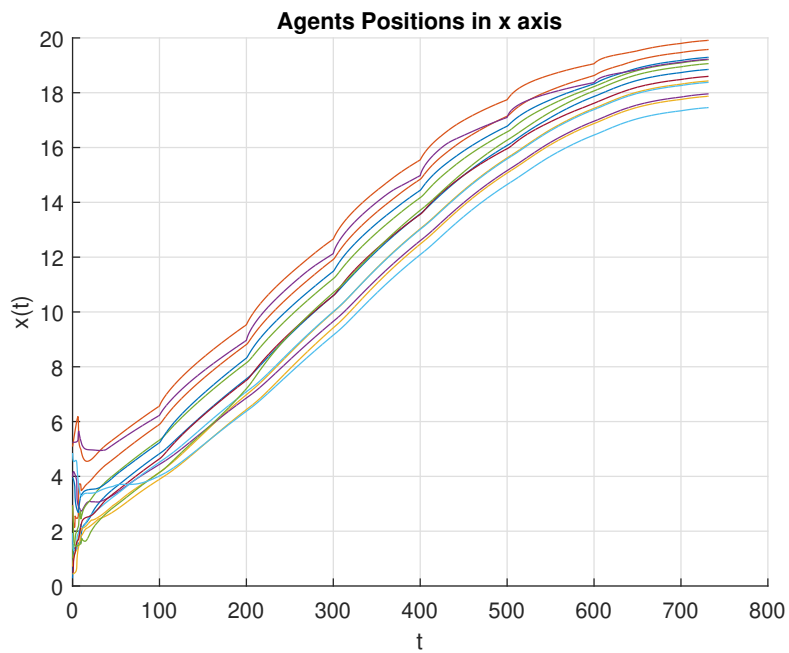
 (γ') $t=4$  (δ') $t=6$  (ϵ') $t=8$  (ς') $t=10$  (ζ') $t=12$  (η') $t=50$

 (ϑ') $t=100$  (ι') $t=200$  $(\iota\alpha')$ $t=300$  $(\iota\beta')$ $t=400$  $(\iota\gamma')$ $t=500$  $(\iota\delta')$ $t=600$

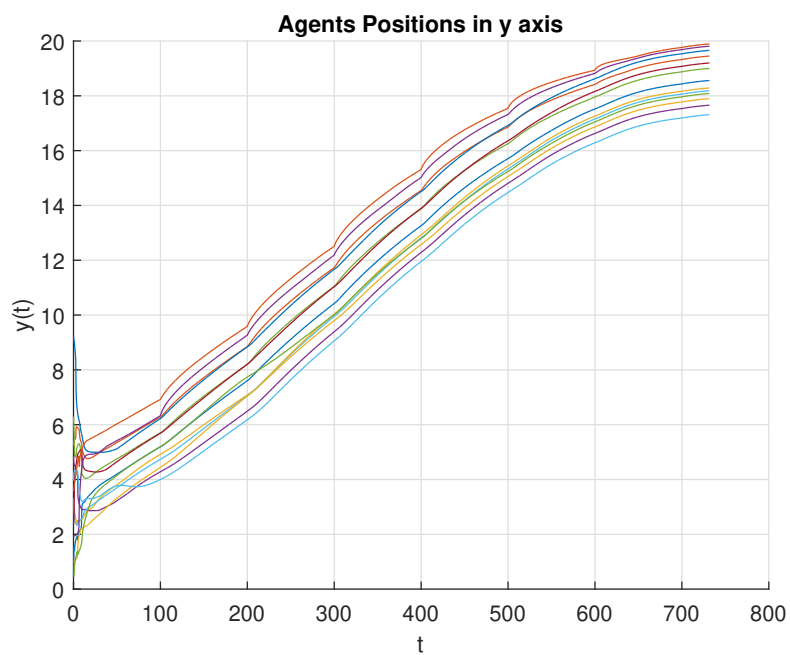
(ιε') $t=700$

Σχήμα 5.21: Στιγμιότυπα από την προσομοίωση

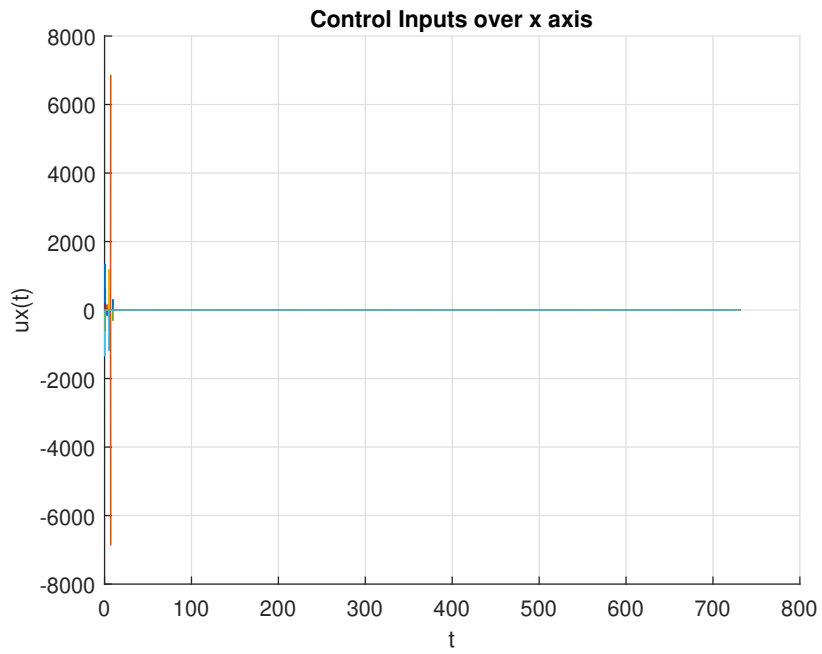
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η αρχική διάταξη των πρακτόρων καθώς και κάποια στιγμιότυπα από την κίνησή τους. Όπως και στο διδιάστατο επίπεδο, ο leader συμβολίζεται με X, ενώ τα εμπόδια είναι οι μαύρες σφαίρες. Στα σχήματα 5.22, 5.23 και 5.24 φαίνονται οι τροχιές των πρακτόρων σε καθεμία από τις τρεις διαστάσεις.



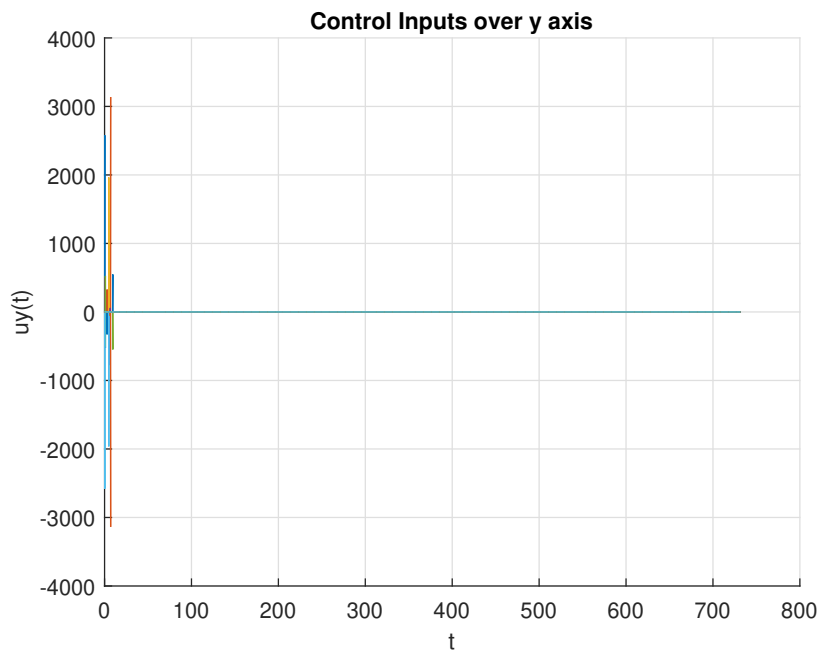
Σχήμα 5.22: Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση

Σχήμα 5.23: Τροχιές των πρακτόρων στην y διάστασηΣχήμα 5.24: Τροχιές των πρακτόρων στην z διάσταση

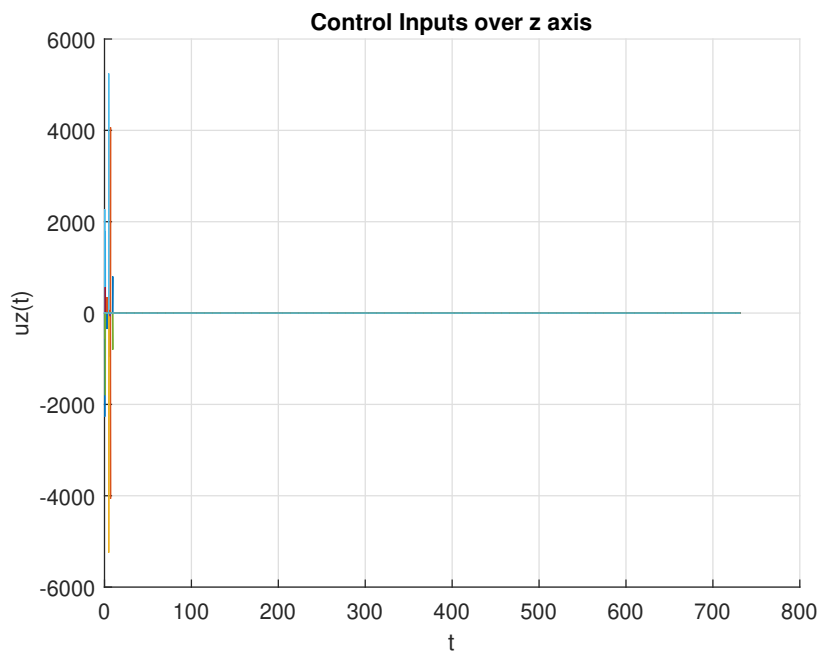
Ακολούθως, παρατίθενται οι χρονικές εξελίξεις των εισόδων σε κάθε μία διάσταση.



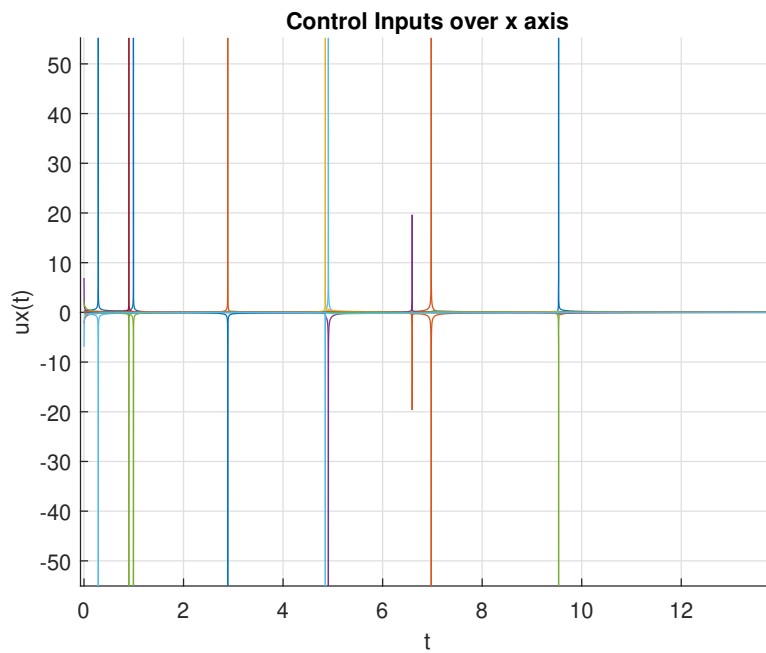
Σχήμα 5.25: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση



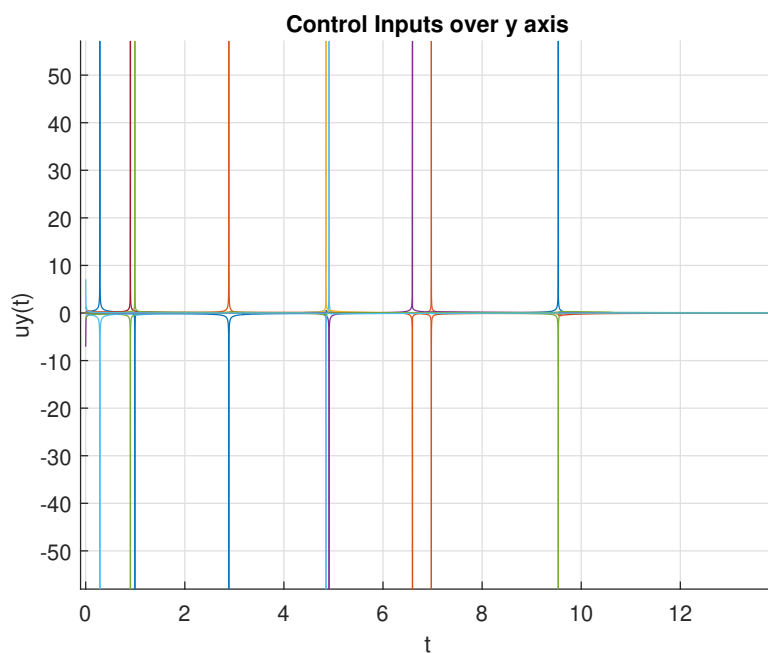
Σχήμα 5.26: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση



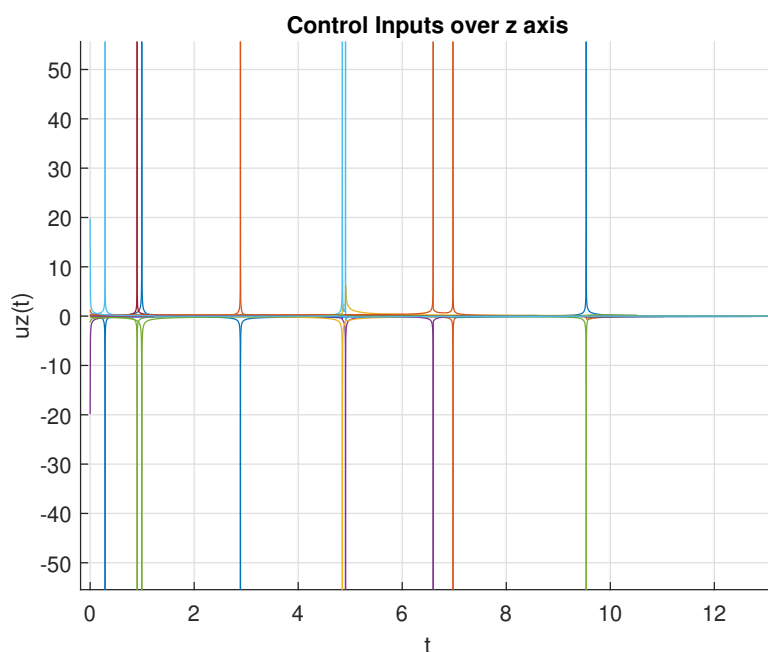
Σχήμα 5.27: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση



Σχήμα 5.28: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα



Σχήμα 5.29: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα

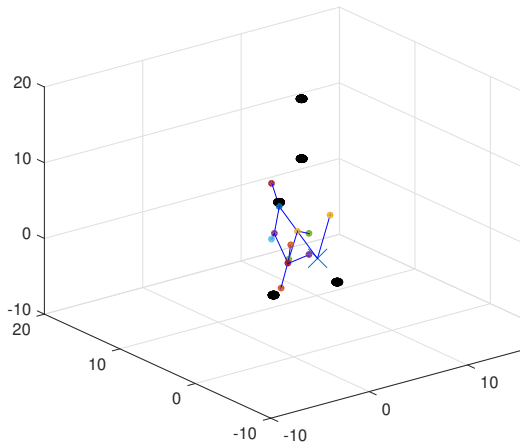
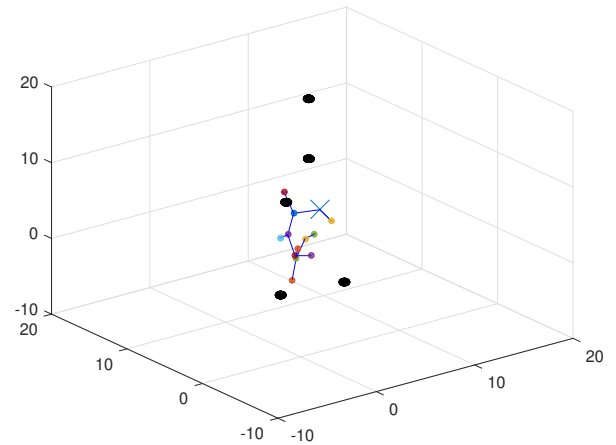
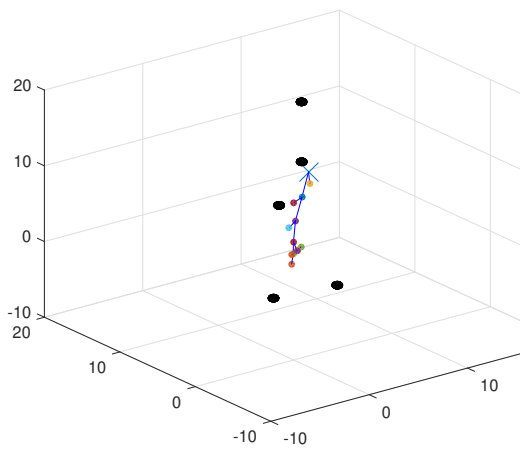
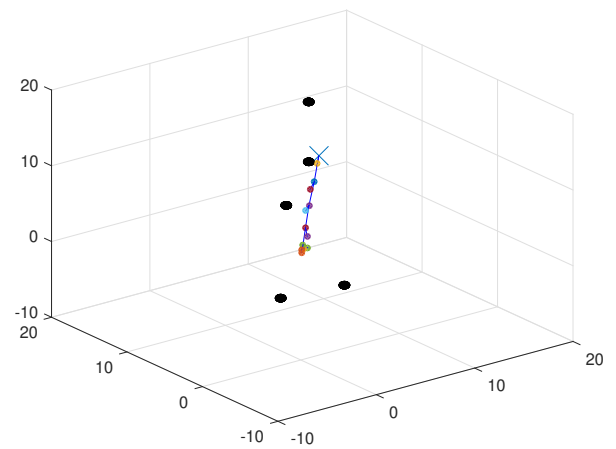


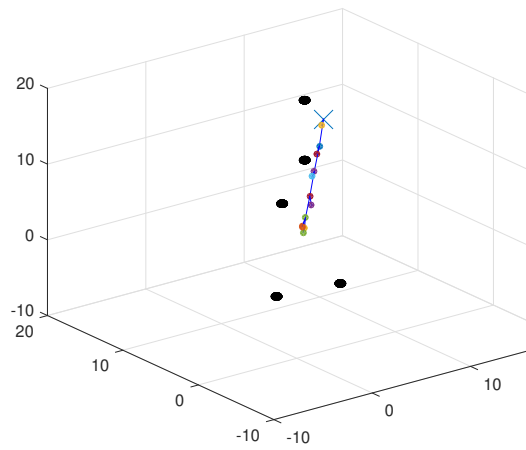
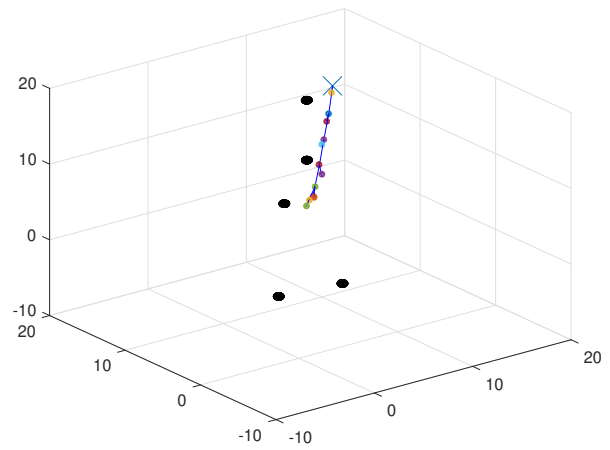
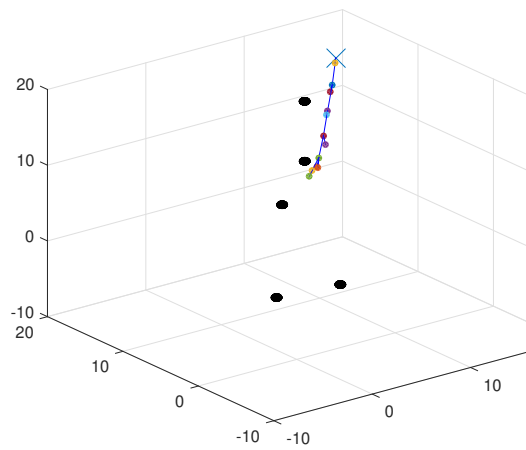
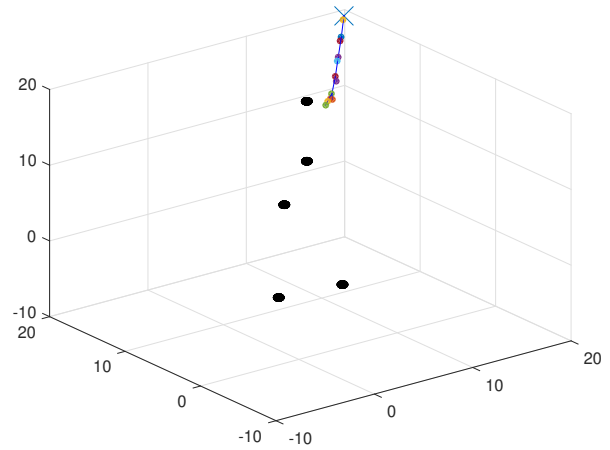
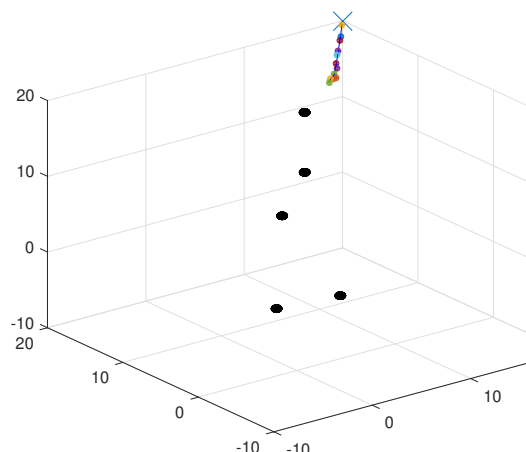
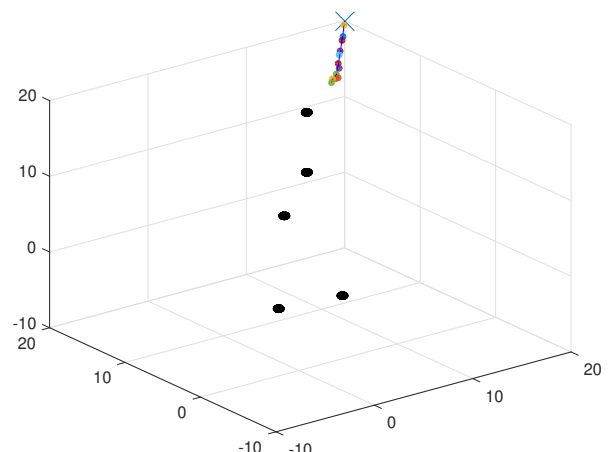
Σχήμα 5.30: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα

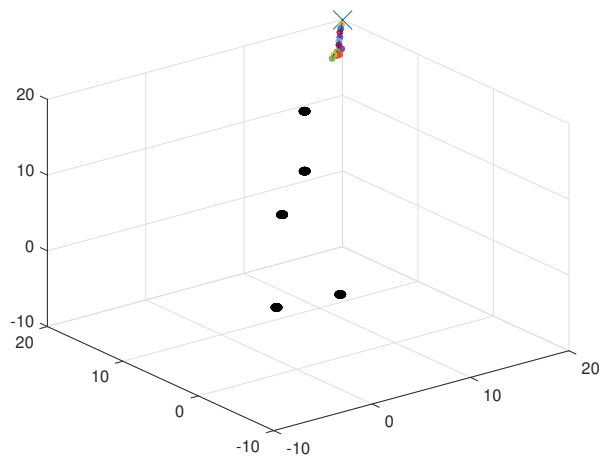
Στα σχήματα 5.28, 5.29 και 5.30 βλέπουμε την χρονική εξέλιξη των εισόδων στα πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης και παρατηρούμε πως σε κάποια δευτερόλεπτα σημειώνεται πολύ μεγάλη αύξηση της εισόδου. Αυτό οφείλεται στο δυναμικό διατήρησης της συνεκτικότητας το οποίο ενεργοποιείται εκείνες τις χρονικές στιγμές. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η τελική

διάταξη των πρακτόρων στον χώρο. Παρατηρούμε πως ο leader έχει καταλήξει στο set point και πως όλοι οι πράκτορες έχουν πετύχει ε -box consensus.

Τέλος, διεξάγουμε το ίδιο πείραμα με την διαφορά ότι τώρα θέτουμε την παράμετρο διατήρησης της συνεκτικότητας $R = 5$. Η αρχική διάταξη προφανώς δεν αλλάζει. Αρχικά παρατίθενται κάποιες ενδιάμεσες καταστάσεις των πρακτόρων πριν καταλήξουν σε consensus.

 (α') $t=3$  (β') $t=8$  (γ') $t=50$  (δ') $t=100$

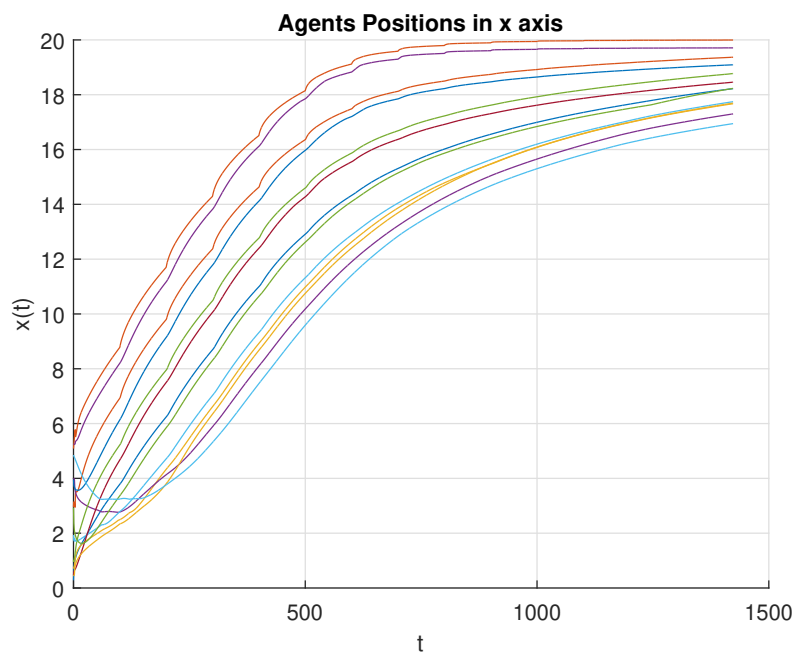
 (ε') $t=200$  (ε') $t=300$  (ζ') $t=400$  (η') $t=700$  (ϑ') $t=1000$  (ι') $t=1200$



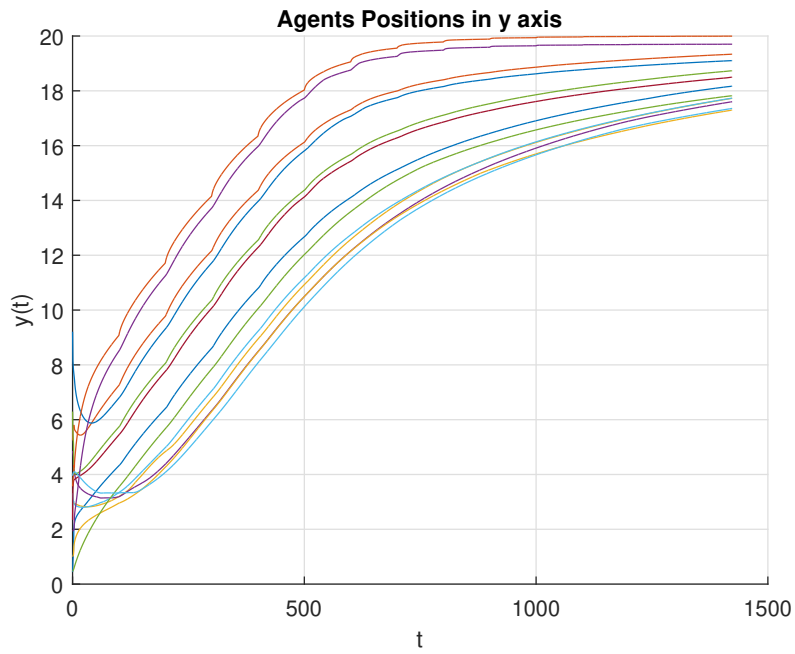
(ια') $t=1400$

Σχήμα 5.31: Στιγμιότυπα από την προσομίωση

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι τροχιές των πρακτόρων σε κάθε διάσταση καθώς και οι αντίστοιχες είσοδοι.



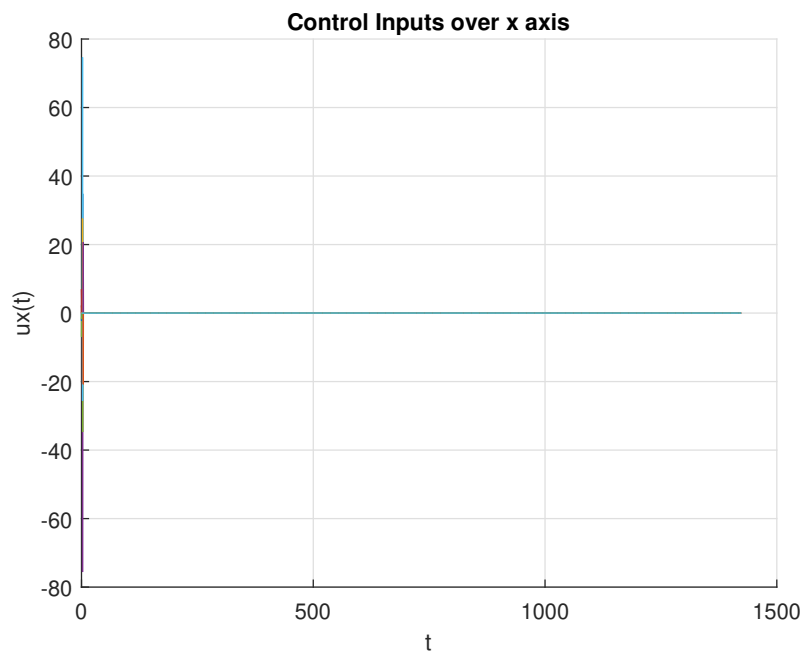
Σχήμα 5.32: Τροχιές των πρακτόρων στην x διάσταση



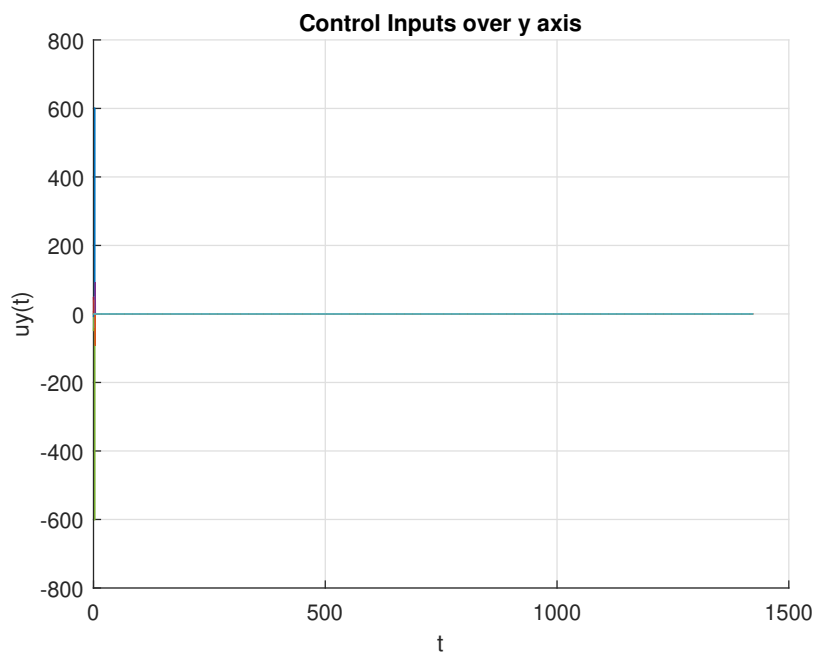
Σχήμα 5.33: Τροχιές των πρακτόρων στην y διάσταση



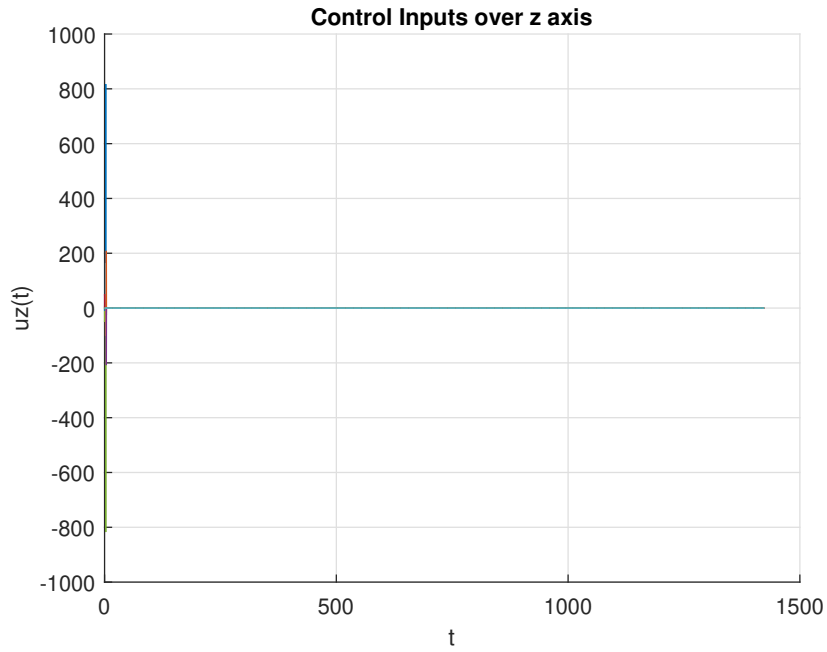
Σχήμα 5.34: Τροχιές των πρακτόρων στην z διάσταση



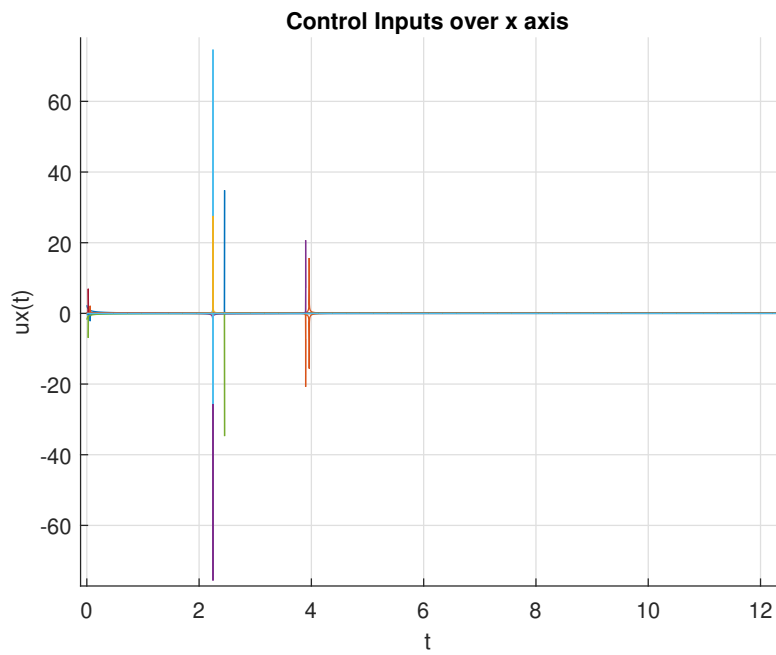
Σχήμα 5.35: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση



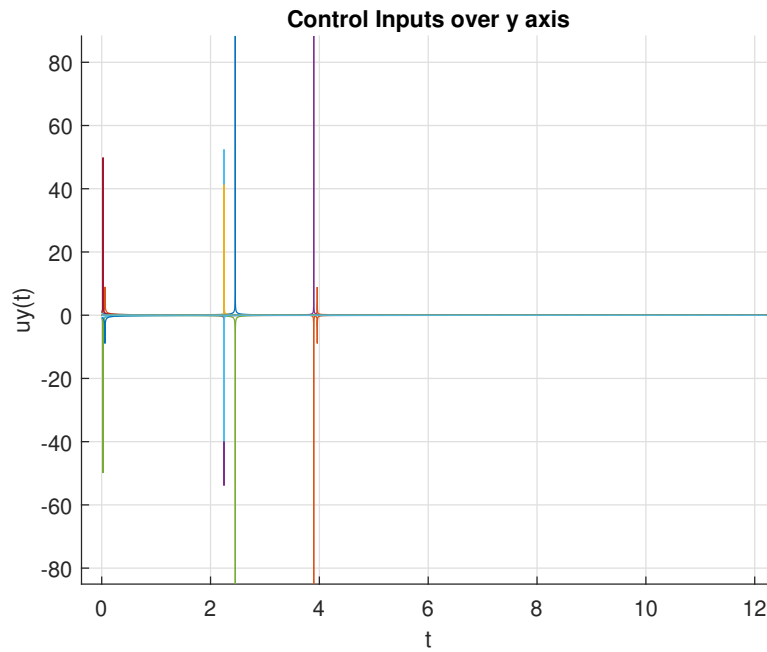
Σχήμα 5.36: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση



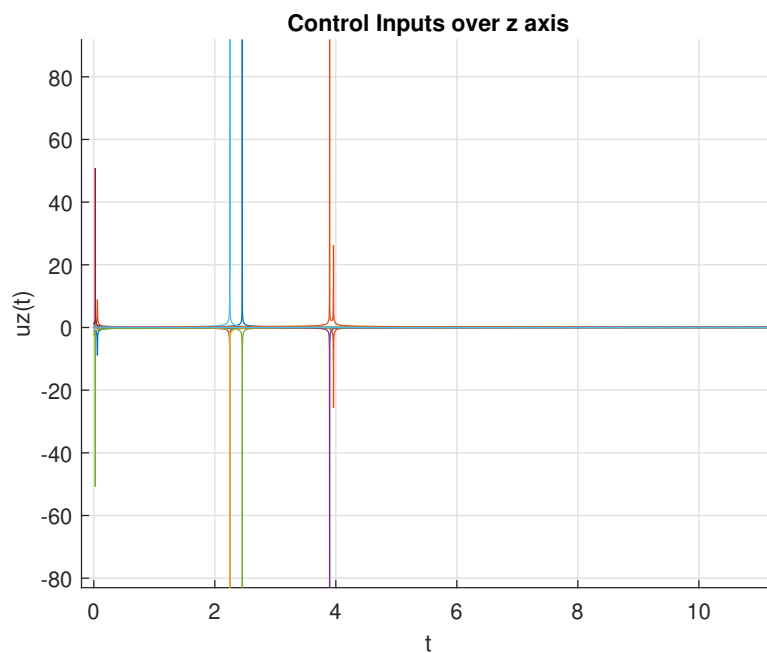
Σχήμα 5.37: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση



Σχήμα 5.38: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην x διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα



Σχήμα 5.39: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην y διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα



Σχήμα 5.40: Είσοδοι ελέγχου των πρακτόρων στην z διάσταση στα πρώτα δευτερόλεπτα

Παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές ούτε στις τροχιές αλλά ούτε στις εισόδους ελέγχου. Η κύρια διαφορά έγκειται στην ταχύτητα σύγκλισης του συστήματος η οποία είναι εμφανώς μεγαλύτερη. Αυτό είναι λογικό και αναμενόμενο, διότι η αύξηση της παραμέτρου διατήρησης της συνεκτικότητας αφήνει περισσότερες επιτρεπτές αποστάσεις μεταξύ

των γειτόνων, με αποτέλεσμα απαιτείται περισσότερος χρόνος ώστε να καταλήξει το σύστημα σε ε-box consensus.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε ένας αλγόριθμος για consensus κατανεμημένων πολυπρακτορικών συστημάτων εν παρουσία εμποδίων στον χώρο. Το μοντέλο επικοινωνίας των πρακτόρων μοντελοποιείται μέσω ενός γραφήματος επικοινωνίας. Οι πράκτορες προσπαθούν να διατηρήσουν το αρχικό μοντέλο επικοινωνίας ενώ παράλληλα αποφεύγουν τις συγκρούσεις μεταξύ τους αλλά και με τα εμπόδια. Για τον λόγο αυτόν ο αρχικός γράφος επιλέγεται ως spanning tree έτσι ώστε να αποφεύγεται ο εγκλωβισμός εμποδίων μεταξύ τριών ή περισσότερων agents λόγω της ανάγκης διατήρησης της συνεκτικότητας. Επιπλέον, ορίζεται ένα σύστημα-leader ο οποίος έχει έναν επιπρόσθετο σκοπό. Στόχος του είναι να φτάσει σε ένα προκαθορισμένο σημείο του χώρου στο οποίο το consensus είναι επιτεύξιμο. Οι είσοδοι των συστημάτων προκύπτουν μέσα από συναρτήσεις Lyapunov και οι πράκτορες τείνουν στα ελάχιστα αυτών των συναρτήσεων. Το πρόβλημα που παρουσιάζεται είναι πως σε πολλές περιπτώσεις οι agents μπορεί να 'κολλήσουν' σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Αυτά τα τοπικά ελάχιστα αποφεύγονται μέσω ενός διακοπτικού αλγορίθμου (switching algorithm) ο οποίος αυξάνει το κέρδος του leader ανά τακτά χρονικά διαστήματα, εξαναγκάζοντάς τον να φτάσει σε μια γειτονιά του set point. Επιπλέον, παρατίθεται μια θεωρητική απόδειξη του αλγορίθμου μέσα από την οποία εξάχθει το συμπέρασμα πως το κέρδος του leader είναι άνω φραγμένο και πως αν επιλεγούν κάποιες σταθερές με σκοπό να ικανοποιούνται κάποιες μαθηματικές σχέσεις, τότε οι πράκτορες επιτυγχάνουν ε-box consensus.

Μέσα από τις προσομοιώσεις που διεξάγαμε φάνηκε πως η ταχύτητα σύγκλισης του συστήματος εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως η αρχική τοπολογία, η παράμετρος διατήρησης της συνεκτικότητας R και τα κέρδη των επιμέρους δυναμικών. Συγκεκριμένα, όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος R τόσο πιο αργή είναι η σύγκλιση του συστήματος. Επίσης όσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος διατήρησης της συνεκτικότητας με βάση τις αποστάσεις των πρακτόρων, τόσο πιο γρήγορη είναι η σύγκλιση του συστήματος. Τέλος, αν η αρχική τοπολογία επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε οι πράκτορες να εξαναγκάζονται να περάσουν ανάμεσα από εμπόδια που οριακά χωράνε, τότε ο χρόνος που θα χρειαστεί ώστε να καταλήξουν τα συστήματα σε ε-box consensus θα είναι αρκετά μεγάλος.

Τα σχήματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν θα μπορούσαν να επεκταθούν ως προς τις ακόλουθες κατευθύνσεις:

- Εισαγωγή άγνωστων παραμέτρων στην δυναμική των πρακτόρων με αποτέλεσμα στην εισαγωγή προσαρμοστικών νόμων ελέγχου
- Ανάπτυξη συστημάτων 2^{ης} ή 3^{ης} τάξης ή πιο ρεαλιστικών μοντέλων όπως Euler-Lagrange
- Άγνωστο μέγεθος εμποδίων με online εκτίμησή του
- Διαφορετικές αισθητηριακές διατάξεις
- Εισαγωγή κινούμενων εμποδίων

Μία επιπλέον επέκταση που επιδέχεται η παρούσα εργασία προς μία διαφορετική κατεύθυνση από τις προαναφερθείσες είναι κατά πόσο είναι εφικτό το consensus με βάση τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Η συγκεκριμένη επέκταση, βέβαια, είναι πιο θεωρητική αλλά μπορεί να παρουσιάσει πολύ σημαντικά αποτελέσματα.

Παράρτημα Α'

Παρακάτω, παρουσιάζονται αναλυτικά οι υπολογισμοί των μερικών παραγώγων των δυναμικών που προτάθηκαν στο Κεφάλαιο 4, οι οποίες χρησιμοποιούνται ως είσοδο στους πράκτορες.

Δυναμικο $\mathcal{V}_{CM,ag}$

Αν θέσουμε $\psi_{ij} = \frac{K_1}{R^2 - \|l_{ij}\|^2}$, τότε έχουμε:

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \|l_{ij}\|} \frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} \quad (\text{A'.1})$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \|l_{ij}\|} &= \frac{\partial}{\partial \|l_{ij}\|} \left(\frac{K_1}{R^2 - \|l_{ij}\|^2} \right) = \frac{-\frac{K_1}{2}(2\|l_{ij}\|)}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2} = K_1 \frac{\|l_{ij}\|}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2} \\ \bullet \frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} &= \frac{\partial \|x_i - x_j\|}{\partial x_i} = \frac{l_{ij}}{\|l_{ij}\|} \end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_i} = K_1 \frac{\|l_{ij}\|}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2} \frac{l_{ij}}{\|l_{ij}\|} = K_1 \frac{l_{ij}}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2} = \frac{\partial \psi_{ji}}{\partial x_i} \quad (\text{A'.2})$$

καθώς $\psi_{ij} = \psi_{ji}$.

Για το συνολικό δυναμικό έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{CM}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \psi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_i} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \in N_j} \frac{\partial \psi_{ji}}{\partial x_i} \quad (\text{A'.3})$$

Από την (A'.3) και του γεγονότος ότι $j \in N_i \Leftrightarrow i \in N_j$ έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_{CM}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_i} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \in N_j} \frac{\partial \psi_{ji}}{\partial x_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x_i} = \sum_{j \in N_j} K_1 \frac{l_{ij}}{(R^2 - \|l_{ij}\|^2)^2} \quad (\text{A'.4})$$

Δυναμικο \mathcal{V}_{CA}

Αντιστοίχως αν θέσουμε $\phi_{ij} = \left[\frac{K_2}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}}^2$ και $\phi_{ik} = \left[\frac{K_3}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}}^2$, έχουμε:

$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \|l_{ij}\|} \frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} \quad (A'.5)$$

Επομένως:

- $\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left[\frac{K_2}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}}^2 \right) = 2K_2 \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}} \frac{-1}{(\|l_{ij}\| - d_{ag})^2}$
- $\frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} = \frac{l_{ij}}{\|l_{ij}\| - d_{ag}}$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} &= 2K_2 \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}} \frac{-1}{(\|l_{ij}\| - d_{ag})^2} \frac{l_{ij}}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \\ &= -2K_2 \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}} \frac{l_{ij}}{(\|l_{ij}\| - d_{ag})^3} = \frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (A'.6)$$

Ομοίως για τον όρο ϕ_{ik} έχουμε:

$$\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial \|d_{ik}\|} \frac{\partial \|d_{ik}\|}{\partial x_i} \quad (A'.7)$$

Επομένως:

- $\frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left[\frac{K_3}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}}^2 \right) = 2K_3 \left[\frac{1}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}} \frac{-1}{(\|d_{ik}\| - d_{obs})^2}$
- $\frac{\partial \|d_{ik}\|}{\partial x_i} = \frac{d_{ik}}{\|d_{ik}\| - d_{obs}}$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} &= 2K_3 \left[\frac{1}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}} \frac{-1}{(\|d_{ik}\| - d_{obs})^2} \frac{d_{ik}}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \\ &= -2K_3 \left[\frac{1}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}} \frac{d_{ik}}{(\|d_{ik}\| - d_{obs})^3} \end{aligned} \quad (A'.8)$$

Επομένως για το συνολικό δυναμικό έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}_{CA}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \phi_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \phi_{ik} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{4} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{A'.9}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (A'.6) και (A'.8) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}_{CA}}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_i} \\
&= -K_2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\frac{1}{\|l_{ij}\| - d_{ag}} \right]_{1/\varepsilon_{ag}} \frac{1}{(\|l_{ij}\| - d_{ag})^3} l_{ij} \\
&\quad - K_3 \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{\|d_{ik}\| - d_{obs}} \right]_{1/\varepsilon_{obs}} \frac{1}{(\|d_{ik}\| - d_{obs})^3} d_{ik}
\end{aligned} \tag{A'.10}$$

Δυναμικο $\mathcal{V}_{CM,obs}$

Για το τρίτο δυναμικό, αν θέσουμε $\omega_{ijk} = \left[\frac{K_4}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta}^2$ και

$\vartheta = \arccos \frac{-\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 + \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|}$, έχουμε:

$$\frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \|l_{ij}\|} \frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \|d_{ik}\|} \frac{\partial \|d_{ik}\|}{\partial x_i} \right) \tag{A'.11}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\frac{K_4}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta}^2 = 2 \left[\frac{K_4}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta} \frac{\cos\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \\
\bullet \frac{\partial \vartheta}{\partial \|l_{ij}\|} &= \frac{\partial}{\partial \|l_{ij}\|} \left(\arccos \frac{-\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 + \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \frac{-2\|l_{ij}\|}{2\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|} = \frac{-\|l_{ij}\|}{\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \|d_{ik}\|} &= \frac{\partial}{\partial \|d_{ik}\|} \left(\arccos \frac{-\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 + \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \frac{4\|d_{ik}\|^2\|d_{jk}\| - 2\|d_{jk}\|(-\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 + \|d_{jk}\|^2)}{4\|d_{ik}\|^2\|d_{jk}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \frac{\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 - \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|^2\|d_{jk}\|} = \frac{\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 - \|d_{jk}\|^2}{2\|d_{ik}\|^2\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \end{aligned}$$
- $$\frac{\partial \|l_{ij}\|}{\partial x_i} = \frac{l_{ij}}{\|l_{ij}\|}$$
- $$\frac{\partial \|d_{ik}\|}{\partial x_i} = \frac{d_{ik}}{\|d_{ik}\|}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial x_i} &= 2K_4 \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta} \frac{\cos\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \left(\frac{-l_{ij}}{\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 - \|d_{jk}\|^2)d_{ik}}{2\|d_{ik}\|^3\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right) \end{aligned} \quad (A.12)$$

Αντιστοίχως έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{jik}}{\partial x_i} &= 2K_4 \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta} \frac{\cos\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \left(\frac{-l_{ij}}{\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\|l_{ij}\|^2 + \|d_{jk}\|^2 - \|d_{ik}\|^2)d_{jk}}{2\|d_{jk}\|^3\|d_{ik}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right) \end{aligned} \quad (A.13)$$

Επομένως, για το συνολικό δυναμικό έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_{maxCM}}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \omega_{ijk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial \omega_{ijk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{jik}}{\partial x_i} \right) \\ &= K_4 \sum_{j \in N_i} \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \right]_{1/\varepsilon_\vartheta} \frac{\cos\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta - c_\vartheta}{2}\right)} \left(\frac{-2l_{ij}}{\|d_{ik}\|\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\|l_{ij}\|^2 + \|d_{jk}\|^2 - \|d_{ik}\|^2)d_{jk}}{2\|d_{jk}\|^3\|d_{ik}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} + \frac{(\|l_{ij}\|^2 + \|d_{ik}\|^2 - \|d_{jk}\|^2)d_{ik}}{2\|d_{ik}\|^3\|d_{jk}\|\sqrt{1 - \cos^2(\vartheta)}} \right) \end{aligned} \quad (A.14)$$

Δυναμικο \mathcal{V}_L

Η παραγωγή του εν λόγω δυναμικού είναι πολύ απλή και έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_L}{\partial x_i} = K_L \delta_i l_{i,T} \quad (A.15)$$

Βιβλιογραφία

- [1] K. Ogata. *Modern Control Theory*. Prentice Hall, 5th edition, 2010.
- [2] U. Mackenroth. *Robust control systems*. Springer, 1st edition, 2004.
- [3] W. Ren, Y. Cao. *Distributed Coordination of Multi-agent Networks*. Springer, 2011.
- [4] A. Okubo. Dynamical aspects of animal grouping: Swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in Biophysics*, Volume 22, 1986, p. 1 – 94.
- [5] C.W. Reynolds. Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, Volume 21, Issue 4, July 1987, p. 25 – 34.
- [6] D.Z. Zhao, C.W. Li and J. Ren. Speed synchronisation of multiple induction motors with adjacent cross-coupling control. *IET Control Theory and Appl.*, Volume 4, Issue 1, January 2010, p. 119Γ128.
- [7] F.D. Hutu, S. Cauet and P. Coirault. Robust synchronization of different coupled oscillators: Application to antenna arrays. *Journal of the Franklin Ins.*, Volume 346, Issue 5, June 2009, p. 413 – 430.
- [8] Z. Li, Z. Duan. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: A Consensus Region Approach*. CRC Press, 1st edition, 2015.
- [9] Ευθύμης Γεωργίου. *Το πρόβλημα Consensus με άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου, αποφυγή συγκρούσεων και παράλληλη διατήρηση συνοχής*. Διπλωματική εργασία, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2018.
- [10] M. Meshabi, M. Egerstedt. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. Princeton University Press, 1st edition, 2010.
- [11] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 3rd edition, 2005.
- [12] G. Strang *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press and SIAM, 5th edition, 2005.
- [13] C. Godsil, G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer, 1st edition, 2001.
- [14] L.W. Beineke, R.J. Wilson. *Topics in Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2007.

-
- [15] H.K. Khalil. *Nonlinear System*. Prentice Hall, 3rd edition, 2002.
- [16] N.S. Nise. *Control Systems Engineering*. Wiley, 5th edition, 2005.
- [17] M.M. Zavlanos, M.B. Egerstedt and G.J. Pappas. Graph Theoretic Connectivity Control of Mobile Robot Networks. *IEEE Proc.*, Volume 99, Issue 9, September 2011, p. 1525 – 1540.
- [18] R. Olfati-Saber, J.A. Fax and R.M. Murray. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. *IEEE Proc.*, Volume 95, Issue 1 , January 2007, p. 215 – 233.
- [19] M. Ji, M.B. Egerstedt. Distributed Coordination Control of Multiagent Systems While Preserving Connectedness. *IEEE Trans. on Robotics*, Volume 23, Issue 4 , August 2007, p. 693 – 703.
- [20] R. Olfati-Saber. Flocking for Multi-Agent Dynamic Systems: Algorithms and Theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Volume 51, Issue 3, March 2006, p. 401 – 420.
- [21] S. Paternain, D.E. Koditschek and A. Ribeiro. Navigation Functions for Convex Potentials in a Space with Convex Obstacles. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Volume 63, Issue 9, September 2018, p. 2944 – 2959.
- [22] J. Alonso-Mora, E. Montijano, M. Schwager and D. Rus. Distributed Multi-Robot Formation Control among Obstacles: A Geometric and Optimization Approach with Consensus. *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, 2016, p. 5356–5363.
- [23] R. Olfati-Saber, R.M. Murray. Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents. *Proc. of the American Control Conf.*, Volume 2, IEEE, 2003, p. 951-956.
- [24] R. Olfati-Saber, R.M. Murray. Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Volume 49, Issue 9, September 2004, p. 1520 – 1533.
- [25] M.M. Zavlanos, G.J. Pappas. Distributed Connectivity Control of Mobile Networks. *IEEE Trans. on Robotics*, Volume 24, Issue 6, December 2008, p. 1416 – 1428.
- [26] H.E. Psillakis. Adaptive Control for Swarm Consensus: Geometric characterization of limiting configurations. *in preparation*, 2017.

