ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ &
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τεχνικές της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων σε Θεωρήματα Επιλογής για Συνολοσυναρτήσεις

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΦΩΤΙΟΥ ΜΑΥΡΙΔΗ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Τεχνικές της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων σε Θεωρήματα Επιλογής για Συνολοσυναρτήσεις

Διδακτορική Διατριβή

του

Φώτιου Μαυρίδη

Συμβουλευτική Επιτροπή: Αλέξανδρος Αρβανιτάκης
Απόστολος Γιαννόπουλος
Βασίλης Κανελλόπουλος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την $10^{η}$ Σεπτεμβρίου 2018.

Α. Αρβανιτάκης Επ. Καθ. ΕΜΠ	Α. Γιαννόπουλος Καθ. ΕΚΠΑ	Β. Κανελλόπουλος Αν. Καθ. ΕΜΠ
Ι. Γάσπαρης Καθ. ΕΜΠ	Ν. Γιαννακάκης Αν. Καθ. ΕΜΠ	Α. Χαραλαμπόπουλος Καθ. ΕΜΠ
	Γ. Σμυρλής Επ. Καθ. ΕΜΠ	

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

. . .

Περίληψη

Ο σκοπός της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι η εφαρμογή τεχνικών της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων σε θεωρήματα επιλογής για συνολοσυναρτήσεις. Με βασικό εργαλείο τις αναδρομικές κατασκευές πάνω σε δέντρα: 1) παρουσιάζουμε μια εννιαία μέθοδο απόδειξης θεωρημάτων συνεχούς επιλογής, μετρήσιμης επιλογής και επιλογής για υπερχώρους, 2) επεκτείνουμε το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael, προκειμένου να μελετήσουμε τον χώρο των συμπαγών υποσυνόλων με την κάτω Vietoris τοπολογία, 3) γενικεύουμε το πιο γνωστό θεώρημα επιλογής του Michael. Επιπλέον, δείχνουμε ότι αυτή η γενίκευση μπορεί να εξειδικευτεί σε ένα θεώρημα σύγχρονης επιλογής και σε ένα θεώρημα επέκτασης τύπου Dugundji. Τέλος, συνδυάζοντας το θεώρημα σύγχρονης επιλογής μαζί με γνωστές τεχνικές, γενικεύουμε τα κλασικά θεωρήματα ισομορφισμού του Milutin και του Etcheberry για χώρους συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων εφοδιασμένους με διάφορες τοπολογίες.

Abstract

The aim of this dissertation is the application of methods of Descriptive Set Theory in selection theorems for multivalued maps. By means of recursive constructions on trees: 1) we introduce a unified approach for proving continuous and measurable selection theorems, as well as a selection theorem for hyperspaces, 2) we extend Michael's compact-valued selection theorem, in order to study the hyperspace of compact subsets equipped with the lower Vietoris topology, 3) we generalize Michael's convex-valued selection theorem. Moreover, we show that this generalization can give as special cases a simultaneous selection theorem and a Dugundji extension theorem. Finally, by combining known methods and a simultaneous selection theorem, we generalize Milutin's and Etcheberry's classical isomorphism theorems for spaces of continuous vector-valued functions equipped with various topologies.

Πρόλογος

ΜΙΑ ΤΡΥΠΑ ΣΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

Σε λίγο καιρό,
αυτό το θαυμάσιο γέλιο
θα γίνει η ελπίδα να σου ξαναπώ
πως ό,τι μεταμορφώνεται σε ύπαρξη,
με ύψιλον κεφαλαίο,
δίνει στους επόμενους τη σιγουριά
πως κάτι υπήρχε πριν από τον θάνατο
εξίσου δυνατό με τη ζωή.

Ο λαιμός του δήμιου
Αντρέας Τσιάκος

Το θέμα της παρούσης διδακτορικής διατριβής είναι η εφαρμογή τεχνικών της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων σε θεωρήματα επιλογής για συνολοσυναρτήσεις. Η έρευνά μου ξεκίνησε μελετώντας το θεώρημα σύγχρονης επιλογής [3, Theorem 1.1], η διατύπωση του οποίου έχει ως εξής:

Έστω X παρασυμπαγής k-space, Y πλήρης μετρικός, E πλήρης (κάθε δίκτυο Cauchy συγκλίνει) τοπικά κυρτός χώρος και $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε:

(i) $S(f) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$.

(ii) *Ο S είναι συνεχής ως προς την ομοιόμορφη (uniform) και ως προς την ομοιόμορφη στα συμπαγή (compact-open) τοπολογία.*

Το [3, Theorem 1.1] βασίζεται σε ιδέες που προέρχονται από τη μελέτη των «regular averaging» τελεστών και των εφαρμογών τους στην ισομορφική θεωρία των χώρων Banach, όπως αναπτύχθηκαν από τους Milutin [31], Pelczyński [32], Etcheberry [10], Ditor [7, 8], Haydon [12, 13] και Αργυρό και Αρβανιτάκη [2].

Με αφετηρία τις τεχνικές που προέκυψαν από τη μελέτη του [3] και με άξονες τα κλασικά θεωρήματα επιλογής του Michael (βλ. [25, 26, 27]) μελετώ διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με θεωρήματα επιλογής για συνολοσυναρτήσεις (selection theorems for multivalued maps) τύπου Michael, με τοπολογικές ιδιότητες του χώρου των συμπαγών υποσυνόλων (hyperspace of compact subsets), με θεωρήματα επέκτασης συνεχών συναρτήσεων (extension theorems for continuous functions) τύπου

Dugundji και, τέλος, με κλασικά θεωρήματα ισομορφισμού χώρων συνεχών συναρτήσεων (isomorphism theorems for spaces of continuous functions).

Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζω μια ενναία μέθοδο απόδειξης κλασικών θεωρημάτων επιλογής, μεταξύ αυτών το zero-dimensional του Michael [26], το θεώρημα επιλογής των Kuratowski και Ryll-Nardzewski [17] για μετρήσιμες συνολοσυναρτήσεις, καθώς και το θεώρημα επιλογής για υπερχώρους, που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Engelking, Heath, Michael [11] και τον Choban [6], και το οποίο απετέλεσε λύση στο λεγόμενο «hyperspace selection problem».

Ένα από τα κλασικά θέματα στην τοπολογία όσον αφορά τη μελέτη του χώρου των συμπαγών υποσυνόλων $\mathcal{K}(X)$ είναι ο προσδιορισμός της κλάσης στην οποία ανήκει ο $\mathcal{K}(X)$, δεδομένου ότι ο X ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση, και αντίστροφα (βλ. Michael [24] και Keesling [16]). Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώ τον $\mathcal{K}(X)$ με την κάτω Vietoris τοπολογία τ_V^-. Υπενθυμίζω ότι αυτή η τοπολογία χρησιμοποιείται στον ορισμό των κάτω ημισυνεχών συνολοσυναρτήσεων, οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στα θεωρήματα επιλογής του Michael (βλ. [25]). Το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου είναι ότι αν ο X είναι παρασυμπαγής, τότε ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ είναι μετασυμπαγής (metacompact). Για να το αποδείξω, πρώτα γενικεύω το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael ([27, Theorem 1.1]) για συνολοσυναρτήσεις με πεδίο ορισμού τον $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$.

Σύμφωνα με το πιο γνωστό θεώρημα επιλογής του Michael (βλ. [25, 30]), αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y χώρος Banach και $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to Y$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[\Phi(x)]$ για κάθε $x \in X$. Ο Michael [25] παρατήρησε ότι αυτό το θεώρημα παραμένει αληθές στην περίπτωση που ο Y είναι χώρος Fréchet, αλλά δεν ισχύει εν γένει όταν ο Y δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Παρ' όλα αυτά, καταβάλλοντας σημαντική προσπάθεια, κατάφερε στο [29] (βλ. επίσης [30] και [28, Theorem 1.2]) να αποδείξει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για Y πλήρως μετρικοποιήσιμο υποσύνολο (με τη σχετική τοπολογία) ενός τοπικά κυρτού χώρου E στον οποίο η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του E είναι συμπαγές. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνω μια στοιχειώδη απόδειξη για την εξής γενίκευση: αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, ο E τοπικά κυρτός τέτοιος ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του E είναι συμπαγές και η $f : Y \to E$ συνεχής, τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to E$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$. Υπενθυμίζω ότι η κλάση των τοπικά κυρτών χώρων στους οποίους η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου είναι συμπαγές περιέχει τους πλήρεις (κάθε Cauchy δίκτυο συγκλίνει) τοπικά κυρτούς χώρους, καθώς και τους χώρους Banach με την ασθενή (Θεώρημα Krein-Šmulian) ή την ασθενή* τοπολογία (Θεώρημα Alaoglu). Υπενθυμίζουμε επίσης ότι κάθε χώρος Fréchet, και άρα κάθε χώρος Banach με τη norm τοπολογία, είναι πλήρης τοπικά κυρτός χώρος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο δείχνω ότι η παραπάνω γενίκευση του θεωρήματος επιλογής του Michael δίνει ως ειδικές περιπτώσεις μια πιο γενική εκδοχή του θεωρήματος σύγχρονης επιλογής [3, Theorem 1.1], καθώς και ένα θεώρημα επέκτασης τύπου Dugundji. Αυτό έχει ενδιαφέρον για δύο λόγους. Πρώτον, είναι γνωστό από τον Michael [25] ότι μεμονωμένες συνεχείς επεκτάσεις συνεχών συναρτήσεων μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις θεωρημάτων συνεχούς επιλογής. Δεύτερον, είναι γνωστό από τον Αρβανιτάκη [3] ότι συναρτήσεις συνεχούς επιλογής και τελεστές επέκτασης τύπου Dugundji μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις του [3, Theorem 1.1]. Στη δική μας περίπτωση ένα θεώρημα συνεχούς επιλογής δίνει ως ειδικές περιπτώσεις τόσο τελεστές σύγχρονης επιλογής όσο και τελεστές επέκτασης τύπου Dugundji. Να σημειώσω ότι το ανάλογο του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji για μεγαλύτερες ή διαφορερικές κλάσεις απ' αυτή των μετρικοποιήσιμων χώρων μελετήθηκε στα [1, 5, 4, 15, 18, 14, 33]. Εν τέλει, όμως, δεν ισχύει αυτούσιο στην κλάση των παρασυμπαγών (βλ. [1, 9, 14]). Εντούτοις, οι Lutzer και Martin [18] έδειξαν ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής επέκτασης $S : C(A) \to C(X)$ τέτοιος ώστε $S(f)(X) \subseteq conv[f(A)]$, δοθέντος ότι το A είναι κλειστό μετρικοποιήσιμο G_δ υποσύνολο ενός collectionwise normal χώρου $X \cdot$ αυτή η περίπτωση βεβαίως περιλαμβάνει τους παρασυμπαγείς χώρους X. Στο τέταρτο κέφαλαιο δίνω ένα απλό παράδειγμα που υποδεικνύει ότι το θεώρημα επέκτασης τύπου Dugundji που προέκυψε αποτελεί μια διαφορετική μερική λύση απ' αυτή των Lutzer και Martin [18].

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά την ιδέα του Αρβανιτάκη [3] ότι ένας τελεστής σύγχρονης επιλογής μπορεί να γίνει είτε avegaging είτε extension τελεστής υπό την έννοια του Pelczyński [32] και συνδυάζοντας τις τεχνικές του Pelczyński [32] και του Etcheberry [10], γενικεύω τα κλασικά θεωρήματα ισομορφισμού του Milutin [31] και του Etcheberry [10] για χώρους συνεχών συναρτήσεων με τιμές σε τοπικά κυρτό χώρο και για διάφορες τοπολογίες.

Κάθε κεφάλαιο της διατριβής περιέχει ξεχωριστή εκτενή εισαγωγή, ενότητα με τα προαπαιτούμενα και τον συμβολισμό, καθώς και βιβλιογραφία, έτσι ώστε να είναι αυτόνομο απ' τα υπόλοιπα και να μπορεί να διαβαστεί επιλεκτικά. Έγινε σημαντική προσπάθεια να μεταφραστούν όλοι οι μαθηματικοί όροι από την αγγλική γλώσσα, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων. Τέλος, τα αποτελέσματα της διατριβής αυτής βρίσκονται σε ένα δημοσιευμένο (βλ. [19]) και τέσσερα υποβεβλημένα προς δημοσίευση άρθρα (βλ. [20, 21, 22, 23]).

Βιβλιογραφία

[1] R. Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific J. Math. 2 (1952), 11-22.

[2] S.A. Argyros and A. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. 151 (2002), 207-226.

[3] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. 219 (2012), 1-14.

[4] C. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 1-25.

[5] J.G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math. 11 (1961), 105-126.

[6] M.M. Choban, *Many-valued mappings and Borel sets I*, Trans. Moscow Math. Soc. 22 (1970), 258-280.

[7] S. Ditor, *On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 443-452.

[8] S. Ditor, *Averaging operators in C(S) and lower semicontinuous sections of continuous maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 175 (1973), 195-208.

[9] E. van Douwen, *Simultaneous linear extension of continuous functions*, General Topology and Appl. 5 (1975), 297-319.

[10] A. Etcheberry, *Isomorphism of spaces of bounded continuous functions*, Studia Math. 53 (1975), 103-127.

[11] R. Engelking, R.W. Heath and E. Michael, *Topological well-ordering and continuous selections*, Invent. Math. 6 (1968), 150-158.

[12] R. Haydon, *On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(0-dim)*, Studia Math. 52 (1974), 23-31.

[13] R. Haydon, *Embedding D^τ in Dugundji spaces, with an application to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Studia Math. 56 (1976), 229-242.

[14] R. Heath and D. Lutzer, *Dugundji extension theorems for linearly ordered spaces*, Pacific J. Math. 55 (1974), 419-425.

[15] R. Heath, D. Lutzer and P. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Trans. Amer. Math. Soc, 178 (1973), 481-493.

[16] J. Keesling, *Normality and properties related compactness in hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 760-766.

[17] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397-403.

[18] D.J. Lutzer and H. Martin, *A note on the Dugundji extension theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 137-139.

[19] F. Mavridis, *A unified approach to continuous, measurable selections and selections for hyperspaces*, Mathematika 64 (2018), 607-627.

[20] F. Mavridis, *Metacompactness in a hyperspace of compact subsets*, to appear.

[21] F. Mavridis, *A generalization of Michael selection theorem*, to appear.

[22] F. Mavridis, *A simultaneous selection and a Dugundji extension as special cases of a selection theorem*, to appear.

[23] F. Mavridis, *Isomorphisms of spaces of vector-valued continuous functions*, to appear.

[24] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[25] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[26] E. Michael, *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 233-238.

[27] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), 647-651.

[28] E. Michael, *Three mapping theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 410-415.

[29] E. Michael, *A selection theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1404-1406.

[30] E. Michael, *A survey of continuous selections*, in Set-Valued Mappings, Selections and Topological Properties of 2^X (eds W.M. Fleischman), Springer (Berlin, Heidelberg, 1970), 54-58.

[31] A. A. Milyutin, *On space of continuous functions*, Dissertation, Moscow State University, 1952 (in Russian).

[32] A. Pelczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. 58 (Warszawa, 1968).

[33] I. Stares, *Concerning the Dugundji extension property*, Topology Appl. 63 (1995), 165-172.

Ευχαριστίες

Στη μνήμη του Τόλη Κατριλιώτη

Θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου και φίλο Αλέξανδρο Αρβανιτάκη για το αμέριστο ενδιαφέρον του και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε σε όλα τα επίπεδα της πολύχρονης συνεργασίας μας, πολλές φορές κάτω από δύσκολες συνθήκες. Το ήθος του, η οξύνεια, η αγάπη και το σπάνιο ταλέντο του στη βαθιά κατανόηση των μαθηματικών, στη διδασκαλία και την επιστημονική έρευνα απετέλεσαν για μένα πολύτιμη βοήθεια, έμπνευση και πρότυπο. Ειλικρινά νιώθω ευγνωμοσύνη, που μου έδωσε την ευκαιρία να εργαστώ μαζί του και να εντρυφήσω στα αποτελέσματα της έρευνάς του. Ό,τι κατάφερα στην παρούσα διατριβή, το οφείλω σε αυτόν. Εύχομαι να συνεχίσει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο την πολύπλοκη, αλλά εξαιρετικά ενδιαφέρουσα έρευνά του, πλέον πάνω στην τεχνητή ευφυία, και να καταφέρουμε στο μέλλον να ξανασυνεργαστούμε.

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές της συμβουλευτικής επιτροπής κ.κ. Απόστολο Γιαννόπουλο και Βασίλειο Κανελλόπουλο που ήταν πάντοτε πρόθυμοι να με καθοδηγήσουν στο δύσβατο μονοπάτι της έρευνας. Ο κ. Κανελλόπουλος, μάλιστα, ήταν ο πρώτος καθηγητής που, σε προπτυχιακό επίπεδο, με εισήγαγε στον όμορφο κόσμο της Τοπολογίας. Ευχαριστώ επίσης την καθηγήτρια Βάντα Δούκα και τους καθηγητές Αντώνη Χαραλαμπόπουλο και Νίκο Γιαννακάκη, καθώς και τον Δημήτρη Απατσίδη για τη φιλική τους διάθεση και τη σημαντική υποστήριξη που μου προσέφεραν. Ευχαριστώ τους καθηγητές κ.κ. Νικόλαο Παπαγεωργίου και Παναγιώτη Ψαράκο για την πολύτιμη βοήθειά τους. Με τον κ. Παπαγεωργίου ήρθα για πρώτη φορά σε επαφή με τις συνολοσυναρτήσεις και τα θεωρήματα επιλογής στο μάθημα της Μη Γραμμικής Ανάλυσης. Ποιος θα περίμενε ότι μια μέρα θα ολοκλήρωνα τη διατριβή μου πάνω στα θεωρήματα επιλογής; Τέλος, ευχαριστώ τους καθηγητές κ.κ. Ιωάννη Γάσπαρη και Γεώργιο Σμυρλή που μου έκαναν την τιμή να συμμετάσχουν στην εξεταστική επιτροπή και αφιέρωσαν τον χρόνο τους για να με κρίνουν.

Από την εμπειρία μου ως ψυχοθεραπευτής ομάδας και οικογένειας, πιστεύω ακράδαντα ότι δεν υπάρχουν ατομικά επιτεύγματα, υπό την έννοια ότι, εκτός από το ταλέντο και την προσωπική εργασία, ο καθένας μας καθορίζει και καθορίζεται δυναμικά από το οικογενειακό, φιλικό, εργασιακό και κοινωνικό περιβάλλον του. Θα ήθελα, λοιπόν, να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους φίλους και συνοδοιπόρους μου στη Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. και το Ε.Μ.Π. Γιάννη Καραγιώργο, Μίλτο Καραμανλή, Γιάννη και Βαγγέλη Παππά, Γιάννη Πανάγου, Φοίβο Ξανθό, Φίλιππο Καπώνη, Δημήτρη Τσιόδρα, Γιώργο Χασάπη, Αριστοτέλη Παναγιωτόπουλο, Δημήτρη Μπόσκο, Παύλο Μοτάκη. Πολλοί απ' αυτούς βρίσκονται πλέον σε κορυφαία πανεπιστήμια του εξωτερικού, άλλοι διαπρέπουν στον ιδιωτικό τομέα και άλλοι δίνουν τον αγώνα τους στην Ελλάδα. Ήταν ευτυχία για μένα που σπουδάσαμε παρέα και είχα την ευκαιρία να συζητώ μαζί τους μαθηματικά προβλήματα και να μοιράζομαι τις επιστημονικές μου ανησυχίες.

Οφείλω τα μέγιστα στους στενούς μου ανθρώπους που μας συνδέει πραγματική φιλία ετών, που είμαστε μαζί στις χαρές και τις λύπες, στα εύκολα και τα δύσκολα. Δυστυχώς δεν είναι εφικτό να τους αναφέρω εδώ - είναι πολλοί. Οφείλω όμως να αναφέρω και να ευχαριστήσω ειλικρινά την επιστήθια φίλη μου, διδάκτορα φιλοσοφίας και εξαίρετη μουσικό Έλενα Παπανικολάου, που επιμελήθηκε τις επιστημονικές εργασίες μου στην αγγλική γλώσσα και κουβέντιασε μαζί μου διάφορα φιλοσοφικά ζητήματα.

Τελειώνοντας, νιώθω πολύ τυχερός στη ζωή μου για τέσσερεις ξεχωριστούς λόγους. Για τους γονείς μου, την αδερφή μου και τα μέλη της ευρύτερης οικογένειάς μου, που πιστεύουν σε μένα, νοιάζονται και με στηρίζουν πάντοτε, άνευ όρων σε όλα τα επίπεδα. Για τη σύντροφό μου Μαρία Καρακουσόγλου, που εκτός από έξυπνη, όμορφη, γλυκιά, σπουδαία ορθοδοντικός, μουσικός και προγραμματιστής, είναι ένας υπέροχος άνθρωπος με σπάνια χαρίσματα και ευαισθησίες. Για τη δασκάλα μου Σόνια Καραμανιάν, που με έμαθε με ευλάβεια και μεράκι τι σημαίνει τραγούδι και μουσική, τι σημαίνει σεμνότητα, βάθος, αρμονία, μέτρο, ομορφιά στην τέχνη και τη ζωή. Για τον δάσκαλό μου Ματθαίο Γιωσαφάτ, που καταδύθηκε υπομονετικά μαζί μου στην ψυχολογία του βάθους, που με μύησε στην ψυχανάλυση και την κατανόηση της ασυνείδητης ψυχικής ζωής, που μοιράστηκε απλόχερα την ανεκτίμητη σοφία του πάνω στην τέχνη της ψυχοθεραπείας και την τέχνη της ζωής. Δεν έχω λόγια να περιγράψω την ευγνωμοσύνη μου γι' αυτούς. Τους αφιερώνω την παρούσα διατριβή ως ελάχιστη ένδειξη ευγνωμοσύνης.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μια εννιαία μέθοδος απόδειξης θεωρημάτων επιλογής

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εστιάσουμε σε τρία κλασικά θεωρήματα επιλογής. Το πρώτο οφείλεται στον Michael [22]:

Μηδενοδιάστατο θεώρημα επιλογής του Michael. *Έστω X παρασυμπαγής Hausdorff χώρος με $dim(X) = 0$, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος και $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ κάτω ημισυνεχής συνολοσυνάρτηση, όπου το $\Phi(x)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to Y$ τέτοια, ώστε $\phi(x) \in \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Το δεύτερο θεώρημα ανήκει στους Kuratowski και Ryll-Nardzewski [17], και μπορούμε να το σκεφτόμαστε σαν τη μετρήσιμη εκδοχή (μετρήσιμη συνολοσυνάρτηση αντί κάτω ημισυνεχούς) του μηδενοδιάστατου θεωρήματος επιλογής του Michael:

Θεώρημα μετρήσιμης επιλογής των Kuratowski–Ryll-Nardzewski. *Έστω (X, Σ) μετρήσιμος χώρος, Y Πολωνικός χώρος και $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ συνολοσυνάρτηση τέτοια, ώστε $\{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ να ανήκει στη Σ για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό και το $\Phi(x)$ να είναι κλειστό υποσύνολο του Y για κάθε $x \in X$. Τότε υπάρχει Σ-μετρήσιμη $\phi : X \to Y$ τέτοια, ώστε $\phi(x) \in \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Το τρίτο θεώρημα, το οποίο θα καλούμε θεώρημα επιλογής για υπερχώρους, είναι η λύση στο λεγόμενο «hyperspace selection problem», που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Choban [4] και Engelking, Heath, Michael [9]:

Θεώρημα επιλογής για υπερχώρους. *Έστω X πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος με*

$dim(X) = 0$ και $\mathcal{F}(X)$ η οικογένεια όλων των κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X εφοδιασμένη με τη Vietoris τοπολογία. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : \mathcal{F}(X) \to X$ τέτοια, ώστε $\phi(A) \in A$ για κάθε $A \in \mathcal{F}(X)$.

Απ' αυτό το αποτέλεσμα, όπως παρατήρησε πρώτος ο Michael [20], προκύπτει άμεσα ένα θεώρημα επιλογής για συνεχείς συνολοσυναρτήσεις (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Υποενότητα 1.6.3).

Υπενθυμίζουμε ότι αν η $\mathcal{A}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, και τ μια τοπολογία στην οικογένεια $2^Y \setminus \{\emptyset\}$ όλων των μη κενών υποσυνόλων του Y, τότε μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ καλείται $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, αν $\Phi^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό. Είναι γνωστό και εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι οι κάτω ημισυνεχείς, οι συνεχείς και οι μετρήσιμες ως προς μια Σ-άλγεβρα συνολοσυναρτήσεις εντάσσονται στην κατηγορία των $\mathcal{A}$-μετρήσιμων συνολοσυναρτήσεων για κάποια $\mathcal{A}$ οικογένεια υποσυνόλων του X και κάποια τοπολογία τ στην $2^Y \setminus \{\emptyset\}$. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι αυτά τα τρία κλασικά θεωρήματα επιλογής καλύπτουν τρεις βασικούς τύπους μετρήσιμων συνολοσυναρτήσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μια ενναιία προσέγγιση απόδειξης αυτών των τριών θεωρημάτων, η οποία βασίζεται σε μεθόδους της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων.

Στο παρελθόν έχουν υπάρξει κι άλλες ενναιίες προσεγγίσεις: οι Maitra και Rao [19] και ο Mägerl [18] απέδειξαν γενικά θεωρήματα που περιλαμβάνουν ως ειδικές περιπτώσεις το μηδενοδιάστατο θεώρημα επιλογής του Michael και το θεώρημα μετρήσιμης επιλογής των Kuratowski–Ryll-Nardzewski. Και στις δύο ενναιίες προσεγγίσεις ακολούθησαν την ίδια τεχνική με αυτή του Michael, την οποία είχαν ακολουθήσει παλιότερα και οι Kuratowski–Ryll-Nardzewski. Σύμφωνα με την τεχνική του Michael η συνάρτηση επιλογής ορίζεται ως το ομοιόμορφο όριο κατάλληλης ακολουθίας συναρτήσεων.

Στη δική μας προσέγγιση ακολουθούμε διαφορετική στρατηγική. Υπάρχει μια κλασική τεχνική στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων, με την οποία εμφυτεύει κανείς έναν συμπαγή μετρικοποιήσιμο μηδενοδιάστατο χώρο στον χώρο του Cantor $\{0, 1\}^\omega$ ή έναν Πολωνικό μηδενοδιάστατο χώρο στον χώρο του Baire ω^ω (βλ. [16, thm. 7.4 και 7.7]). Ο Αρβανιτάκης [3], συνδυάζοντας στοιχεία αυτής της τεχνικής με ιδέες που προέκυψαν από τη μελέτη των regular averaging και regular extension τελεστών (βλ. [2], [6], [7], [13] και [14]), απέδειξε ένα θεώρημα σύγχρονης επιλογής, το οποίο μπορεί να ενταχθεί στο πλαίσιο των θεωρημάτων επιλογής για συνολοσυναρτήσεις με κυρτές τιμές (βλ. επίσης [28] και [30]). Σε αυτό το κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας την ορολογία καθώς και ιδέες της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων (Kechris [16]), προσαρμόζουμε την τεχνική του Αρβανιτάκη [3] προκειμένου να παρέχουμε μια ενναιία μέθοδο κατασκευής συνεχών και μετρήσιμων συναρτήσεων επιλογής.

Ας δούμε συνοπτικά τη μέθοδο κατασκευής. Θα απλοποιήσουμε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι ο Y είναι ο χώρος του Cantor $\{0, 1\}^\omega$. Έστω $\{V_t : t \in \{0, 1\}^{<\omega}\}$ η συνήθης βάση από ανοιχτά-κλειστά για την τοπολογία του $\{0, 1\}^\omega$. Υπάρχουν δύο γνωστές, χρήσιμες ιδιότητες που αφορούν τη δομή της $\{V_t : t \in \{0, 1\}^{<\omega}\}$. Η πρώτη είναι ότι

$$V_\emptyset = Y \text{ και } V_t = \cup\{V_s : s \text{ αμέσως επόμενο του } t\} \text{ για κάθε } t \in \{0, 1\}^{<\omega}.$$

Η δεύτερη είναι ότι για κάθε $b \in \{0,1\}^\omega$ ισχύει ότι

$$\cap_{n\in\omega} V_{b|n} = \{b\} \text{ και η } \{V_{b|n} : n \in \omega\} \text{ είναι βάση περιοχών του } b.$$

Ας υποθέσουμε ότι το X είναι ένα μη κενό σύνολο, η Σ μια οικογένεια υποσυνόλων του X και η $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ μια συνολοσυνάρτηση τέτοια, ώστε $\{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma$ για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό και το $\Phi(x)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y για κάθε $x \in X$. Αν θέσουμε

$$U_t = \{x \in X : \Phi(x) \cap V_t \neq \emptyset\},$$

είναι εύκολο να δούμε ότι $U_t \in \Sigma$ για κάθε $t \in \{0,1\}^{<\omega}$ και, επιπλέον, ότι

$$U_\emptyset = X \text{ και } U_t = \cup\{U_s : s \text{ αμέσως επόμενο του } t\} \text{ για κάθε } t \in \{0,1\}^{<\omega}.$$

Στη μέθοδό μας η κατασκευή μίας Σ-μετρήσιμης επιλογής (μιας συνάρτησης $\phi : X \to Y$ τέτοιας, ώστε $\phi(x) \in \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\phi^{-1}(V) \in \Sigma$ για κάθε $V \subseteq Y$ ανοιχτό) βασίζεται στη δυνατότητα να ορίσουμε μια οικογένεια $\{G_t : t \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ τέτοια, ώστε για κάθε t:

(i) $G_t \in \Sigma$,

(ii) $G_\emptyset = X$ και $\{G_s : s \text{ αμέσως επόμενο του } t\}$ κάλυμμα του G_t από ξένα ανά δύο,

(iii) $G_t \subseteq U_t$.

Αν μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια οικογένεια, τότε η ιδιότητα (ii) εξασφαλίζει ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $b_x \in \{0,1\}^\omega$ για το οποίο ισχύει ότι $x \in \cap_{n\in\omega} G_{b_x|n}$. Τότε, η $\phi : X \to Y$ που ορίζεται ως $\{\phi(x)\} = \cap_{n\in\omega} V_{b_x|n} = \{b_x\}$ είναι μια συνάρτηση επιλογής για τη Φ ($\phi(x) \in \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$), διότι λόγω της ιδιότητας (iii) ισχύει ότι $\Phi(x) \cap V_{b_x|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$. Επιπλέον, αν η Σ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, τότε επειδή η $\{V_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι μια βάση περιοχών του b για κάθε $b \in \{0,1\}^\omega$, η ϕ είναι Σ-μετρήσιμη.

Θα παρουσιάσουμε αυτή τη μέθοδο σε μια γενική μορφή στο Θεώρημα 1.4.2, με το οποίο, στη συνέχεια, θα δώσουμε νέες αποδείξεις για το μηδενοδιάστατο θεώρημα επιλογής του Michael (Υποενότητα 1.6.1) και το θεώρημα μετρήσιμης επιλογής των Kuratowski–Ryll-Nardzewski (Υποενότητα 1.6.2). Παράλληλα με αυτές τις αποδείξεις, θα δώσουμε νέους χαρακτηρισμούς ύπαρξης συνεχούς και μετρήσιμης, αντίστοιχα, συνάρτησης επιλογής. Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε την κεντρική ιδέα του Θεωρήματος 1.4.2 για να δώσουμε μια στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος επιλογής για υπερχώρους (Υποενότητα 1.6.3).

1.2 Προαπαιτούμενα και συμβολισμός

1.2.1 Λίγη τοπολογική ορολογία

Ξεκινάμε με την τοπολογική ορολογία που θα ακολουθήσουμε· βιβλία αναφοράς είναι τα [8] και [29]. Έστω X τοπολογικός χώρος $A \subseteq X$. Η κλειστότητα του A

στον X συμβολίζεται με $\overline{A}$ ή $cl_X(A)$, ενώ το εσωτερικό του A στον X συμβολίζεται με $int_X(A)$.

Έστω $\{W_i\}_{i\in I}$ ένα κάλυμμα του X. Λέμε ότι η οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι ακριβής εκλέπτυνση (precise refinement) του $\{W_i\}_{i\in I}$ (ή οτι το $\{W_i\}_{i\in I}$ έχει μια ακριβή εκλέπτυνση $\{G_i\}_{i\in I}$), αν η $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι ένα κάλυμμα του X και $G_i \subseteq W_i$ για κάθε $i \in I$· η $\{G_i\}_{i\in I}$ λέμε ότι είναι ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{W_i\}_{i\in I}$, αν, επιπλέον, η $\{G_i\}_{i\in I}$ απαρτίζεται από ξένα ανά δύο στοιχεία.

Ένας χώρος X είναι μηδενοδιάστατος (zero-dimensional), αν υπάρχει μια βάση από ανοιχτά-κλειστά για την τοπολογία του· το $dim(X) = 0$ αφορά τη διάσταση κάλυψης (covering dimension) ενός φυσιολογικού (normal) χώρου.

1.2.2 Συνολοσυναρτήσεις

Σε αυτή την υποενότητα θα καθορίσουμε το συμβολισμό και την ορολογία για τις συνολοσυναρτήσεις· βιβλία αναφοράς είναι τα [1], [5], [15] και [26].

Έστω X, Y μη κενά σύνολα. Με 2^Y (αντίστοιχα $2^Y \setminus \{\emptyset\}$) συμβολίζουμε την οικογένεια των υποσυνόλων (αντίστοιχα μη κενών υποσυνόλων) του Y. Μια συνάρτηση $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ καλείται συνολοσυνάρτηση (multifunction, multivalued function, maltivalued mapping).

Αν ο Y είναι τοπολογικός χώρος, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(Y)$ την οικογένεια των κλειστών, μη κενών υποσυνόλων του Y και με $\mathcal{K}(Y)$ την οικογένεια των συμπαγών, μη κενών υποσυνόλων του Y. Μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ καλείται κλειστών τιμών· αν έχουμε $\mathcal{K}(Y)$ στη θέση του $\mathcal{F}(Y)$, τότε η συνολοσυνάρτηση καλείται συμπαγών τιμών.

Μία $\phi : X \to Y$ καλείται συνάρτηση επιλογής (ή επιλογή) για τη Φ, αν $\phi(x) \in \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$. Στην περίπτωση που υπάρχει μια τέτοια ϕ, λέμε επίσης ότι η Φ δέχεται συνάρτηση επιλογής (ή επιλογή).

Έστω W ένα υποσύνολο του Y. Η κάτω αντίστροφη εικόνα (lower inverse image) του W μέσω της Φ ορίζεται ως

$$\Phi^-(W) = \{x \in X : \Phi(x) \cap W \neq \emptyset\},$$

ενώ η άνω αντίστροφη εικόνα (upper inverse image) του W μέσω της Φ ορίζεται ως

$$\Phi^+(W) = \{x \in X : \Phi(x) \subseteq W\}.$$

Αν οι X και Y είναι τοπολογικοί χώροι, τότε η Φ καλείται κάτω ημισυνεχής (lower semicontinuous), και χρησιμοποιούμε την αγγλική συντομογραφία «lsc», αν το $\Phi^-(U)$ είναι ανοιχτό στον X για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό. Αντίστοιχα, η Φ καλείται άνω ημισυνεχής (upper semicontinuous), και χρησιμοποιούμε την αγγλική συντομογραφία «usc», αν το $\Phi^+(U)$ είναι ανοιχτό στον X για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό, ισοδύναμα, αν το $\Phi^-(F)$ είναι κλειστό στον X για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό. Τέλος, η Φ καλείται συνεχής, αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Πιο γενικά, έστω $\Sigma \subseteq 2^X$. Η Φ καλείται Σ-μετρήσιμη, αν $\Phi^-(U) \in \Sigma$ για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό. Παρόμοια, μια $\phi : X \to Y$ καλείται Σ-μετρήσιμη, αν $\phi^{-1}(U) \in \Sigma$ για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό. Προφανώς, οι κάτω ημισυνεχείς συνολοσυναρτήσεις και οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ειδικές περιπτώσεις των «μετρήσιμων» συνολοσυναρτήσεων και συναρτήσεων αντίστοιχα.

1.2.3 Δέντρα

Τα δέντρα είναι το βασικό εργαλείο της μεθόδου που θα αναπτύξουμε για την κατασκευή συνάρτησης επιλογής. Σε αυτή την υποενότητα ακολουθούμε κυρίως το [16] για να καθορίσουμε την απαραίτητη ορολογία.

Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Θέτουμε $A^{<\omega} = \cup_{n<\omega} A^n$ και $A^{\leq\omega} = \cup_{n\leq\omega} A^n$ και ακολουθούμε τη σύμβαση $A^0 = \{\emptyset\}$. Ορίζουμε μερική διάταξη $\sqsubseteq$ στο $A^{\leq\omega}$ ως εξής: $t \sqsubseteq s$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \leq \omega$ τέτοιο ώστε $t = s|n$, όπου $s|n = (s(0), \ldots, s(n-1))$ είναι ο περιορισμός της συνάρτησης s στο σύνολο $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$· επίσης κάνουμε τη σύμβαση $s|0 = \emptyset$ για κάθε $s \in A^{\leq\omega}$. Η αντίστοιχη αυστηρή μερική διάταξη συμβολίζεται με $\sqsubset$. Για $t, s \in A^{<\omega}$, αν $t \sqsubseteq s$, τότε λέμε ότι το t είναι προηγούμενο (predecessor) του s ή ότι το s είναι επόμενο (successor) του t. Το μήκος του $t \in A^{\leq\omega}$, που συμβολίζεται με $|t|$, ορίζεται ως το $n \leq \omega$ για το οποίο $t \in A^n$.

Έστω T ένα μη κενό υποσύνολο του $A^{<\omega}$. Λέμε ότι το T είναι δέντρο (στο A ύψους ω), αν είναι κλειστό προς τα πίσω ως προς τη σχέση $\sqsubseteq$. Επειδή ένα δέντρο T είναι εξ ορισμού μη κενό, υπάρχει $t \in A^{<\omega}$ για το οποίο προφανώς ισχύει $\emptyset \sqsubseteq t$, επομένως $\emptyset \in T$. Άρα, σε αυτό το πλαίσιο, το T είναι πάντα ριζωμένο δέντρο (rooted tree). Επιπλέον, λέμε ότι το T' είναι υποδέντρο του T, αν $T' \subseteq T$ και το T' είναι δέντρο.

Για $n \leq \omega$ το n-επίπεδο του T ορίζεται ως $T^n = \{t \in T : |t| = n\}$. Το ύψος του T, που συμβολίζεται με $ht(T)$, ορίζεται ως ο ελάχιστος διατακτικός $n \leq \omega$ για τον οποίο ισχύει ότι $T^n = \emptyset$.

Για κάθε $t \in T$ το σύνολο των αμέσως επόμενων του t ορίζεται ως

$$succ(t) = \{s \in T : t \sqsubset s \text{ και } |s| = |t| + 1\}.$$

Αν ο k είναι ένας πληθάριθμος, λέμε ότι το T είναι k-διακλάδωσης αν ο πληθάριθμος του $succ(t)$, που συμβολίζεται με $|succ(t)|$, είναι αυστηρά μικρότερος από k για κάθε $t \in T$· ένα $\aleph_1$-διακλάδωσης δέντρο καλείται αριθμήσιμης διακλάδωσης· ένα $\aleph_0$-διακλάδωσης δέντρο καλείται πεπερασμένης διακλάδωσης.

Λέμε ότι το T είναι κλαδεμένο (pruned), αν $succ(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$· είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ένα κλαδεμένο δέντρο T έχει ύψος ω.

Τέλος, το σώμα (body) ενός κλαδεμένου δέντρου T ορίζεται ως

$$[T] = \{b \in A^\omega : b|n \in T \text{ για κάθε } n \in \omega\},$$

το οποίο, προφανώς, είναι μη κενό.

1.2.4 Τοπολογία σε σώμα δέντρου

Ολοκληρώνοντας τα προαπαιτούμενα του κεφαλαίου, θα υπενθυμίσουμε σύντομα τη συνήθη τοπολογία που θεωρούμε σε σώμα κλαδεμένου δέντρου.

Πρώτα απ' όλα, αν το T είναι ένα κλαδεμένο δέντρο στο A, για κάθε $t \in T$ ορίζουμε

$$V_t = \{b \in [T] : t \sqsubset b\}.$$

Θεωρούμε ότι το A είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία και το A^ω με την τοπολογία γινόμενο. Το $[T]$ κληρονομεί τη σχετική τοπολογία που επάγεται από τον

A^ω, και η οικογένεια $\{V_t : t \in T\}$ είναι μια βάση για τον $[T]$ από ανοιχτά-κλειστά υποσύνολα.

Προφανώς, ο $[T]$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος· ο $[T]$ είναι Πολωνικός χώρος στην περίπτωση που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι $dim([T]) = 0$ (και επομένως ο $[T]$ είναι μηδενοδιάστατος). Επιπλέον, είναι γνωστό ότι ένα μη κενό $F \subseteq A^\omega$ είναι κλειστό, αν, και μόνο αν, υπάρχει κλαδεμένο δέντρο T στο A τέτοιο ώστε $F = [T]$· ένα μη κενό $K \subseteq A^\omega$ είναι συμπαγές, αν, και μόνο αν, υπάρχει πεπερασμένης διακλάδωσης κλαδεμένο δέντρο T στο A τέτοιο ώστε $K = [T]$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [16, chap. I-2 και I-4].

1.3 Σχήμα δέντρου

Έχοντας κατά νου τις έννοιες του σχήματος Cantor (Cantor scheme) και του σχήματος Lusin (Lusin scheme) της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων (βλ. [16, def. 6.1 και 7.5]), δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 1.3.1. *Ένα σχήμα δέντρου (tree scheme) σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια οικογένεια $(W_t)_{t\in T}$ υποσυνόλων του X τέτοια, ώστε:*

(i) το T είναι κλαδεμένο δέντρο,

(ii) $W_\emptyset = X$ και $W_t = \cup\{W_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $(W_t)_{t\in T}$ ένα σχήμα δέντρου στο σύνολο X.*

(i) Αν $\Sigma \subseteq 2^X$ και $(W_t)_{t\in T} \subseteq \Sigma$, τότε λέμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα Σ σχήμα δέντρου.

Στην περίπτωση που το X είναι τοπολογικός χώρος, θα χρησιμοποιούμε και την εξής εναλλακτική ορολογία: αν η Σ είναι η τοπολογία του X, τότε λέμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα ανοιχτό σχήμα δέντρου· αν η Σ είναι η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X, τότε λέμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα κλειστό σχήμα δέντρου· αν η Σ είναι η οικογένεια των ανοιχτών-κλειστών υποσυνόλων του X, τότε λέμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα ανοιχτό-κλειστό σχήμα δέντρου.

Αν $\mathcal{A} \subseteq 2^\Sigma$ και $\{W_s : s \in succ(t)\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $t \in T$, τότε λέμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα $\mathcal{A}$ σχήμα δέντρου. Για παράδειγμα, η $\mathcal{A}$ θα μπορούσε να απαρτίζεται από όλες τις σημειακά πεπερασμένες οικογένειες ανοιχτών υποσυνόλων του X.

(ii) Το $(W_t)_{t\in T}$ καλείται ξένο, αν η οικογένεια $\{W_s : s \in succ(t)\}$ απαρτίζεται από ξένα ανά δύο στοιχεία για κάθε $t \in T$.

(iii) Το $(W_t)_{t\in T}$ καλείται σημειακά πεπερασμένο, αν η οικογένεια $\{W_s : s \in succ(t)\}$ είναι σημειακά πεπερασμένο στο W_t για κάθε $t \in T$.

(iv) Λέμε ότι η οικογένεια $(G_t)_{t\in T}$ είναι μια ακριβής εκλέπτυνση του $(W_t)_{t\in T}$ (ή ότι το $(W_t)_{t\in T}$ έχει ακριβή εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$), αν το $(G_t)_{t\in T}$ είναι ένα σχήμα δέντρου στο X και το $\{G_t : |t| = n\}$ είναι μια ακριβής εκλέπτυνση του $\{W_t : |t| = n\}$ για κάθε $n \in \omega$.

(v) *Αν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε το $(W_t)_{t\in T}$ καλείται τοπικά πεπερασμένο, αν η οικογένεια $\{W_s : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον υπόχωρο W_t για κάθε $t \in T$.*

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε μερικές βασικές ιδιότητες που αφορούν τα σχήματα δέντρου, και οι οποίες αναδεικνύουν τη βολική τους δομή· ένα σχήμα δέντρου αναλύει τον χώρο με έναν ομοιόμορφο και συνεχή τρόπο.

Λήμμα 1.3.3. *Έστω $(W_t)_{t\in T}$ ένα σχήμα δέντρου στο σύνολο X. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) *$W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubseteq s$.*

(ii) *Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο, ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Επιπλέον, αν το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ξένο, τότε το b_x είναι μοναδικό.*

(iii) *Το $\{W_t : |t| = n\}$ είναι κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$. Επιπλέον, αν το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ξένο, τότε το $\{W_t : |t| = n\}$ είναι ένα κάλυμμα του X από ξένα ανά δύο στοιχεία για κάθε $n \in \omega$.*

(iv) *Το $(W_t)_{t\in T}$ είναι σημειακά πεπερασμένο, αν, και μόνο αν, η $\{W_t : |t| = n\}$ είναι σημειακά πεπερασμένη στο X για κάθε $n \in \omega$.*

(v) *Αν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος και το $(W_t)_{t\in T}$ είναι κλειστό, τότε το $(W_t)_{t\in T}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, αν, και μόνο αν, η $\{W_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$.*

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Προφανώς $W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubset s$ με $|s| = |t|$. Από τον ορισμό του σχήματος δέντρου έχουμε ότι $W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubset s$ με $|s| = |t| + 1$. Έστω ότι για $n \in \omega$ ισχύει ότι $W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubset s$ με $|s| = |t| + n$. Έστω $t \sqsubset s$ με $|s| = |t| + n + 1$. Υπάρχει $r \in T$ τέτοιο, ώστε $t \sqsubset r \sqsubset s$, $|r| = |t| + n$ και $|s| = |r| + 1$, συνεπώς $W_r \subseteq W_t$ και $W_s \subseteq W_r$, και άρα το επαγωγικό βήμα αποδείχθηκε.

(ii) Έστω $x \in X$. Θέτουμε $t_x^0 = \emptyset$. Έστω ότι υπάρχει $t_x^n \in T^n$ με $x \in W_{t_x^n}$. Υπάρχει $s \in succ(t_x^n)$ τέτοιο, ώστε $x \in W_s$. Θέτουμε $t_x^{n+1} = s$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε αναδρομικά μια αύξουσα (ως προς τη σχέση $\sqsubset$) ακολουθία $\{t_x^n\}_{n\in\omega}$ τέτοια, ώστε $|t_x^n| = n$ και $x \in W_{t_x^n}$ για κάθε $n \in \omega$. Καταλήγουμε εύκολα στο ζητούμενο ορίζοντας $b_x = \cup_{n\in\omega} t_x^n$.

Μένει να εξετάσουμε τη μοναδικότητα του b_x στην περίπτωση που το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ξένο. Έστω ότι υπάρχουν $b_x, b'_x \in [T]$ τέτοια, ώστε $b_x \neq b'_x$, $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$ και $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b'_x|n}$. Υπάρχει το ελάχιστο $n \in \omega$ για το οποίο $b_x|n \neq b'_x|n$, επομένως $W_{b_x|n} \cap W_{b'_x|n} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

(iii) Προκύπτει εύκολα από το (ii).

(iv) Έστω ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι σημειακά πεπερασμένο· το αντίστροφο είναι προφανές. Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Αρχικά, η $\{W_t : |t| = 0\}$ είναι σημειακά πεπερασμένη στο X. Έστω ότι η $\{W_t : |t| = n\}$ είναι σημειακά πεπερασμένη στο X για κάποιο $n \in \omega$. Αν το x ανήκει σε άπειρα στοιχεία της $\{W_t : |t| = n+1\}$, τότε θα πρέπει να υπάρχει $t \in T^n$ τέτοιο, ώστε $x \in W_t$ και $x \in W_s$ για άπειρα $s \in succ(t)$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η $\{W_t : |t| = n+1\}$ είναι σημειακά πεπερασμένη στο X.

(v) Έστω ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα κλειστό σχήμα δέντρου στον X. Υποθέτουμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι τοπικά πεπερασμένο· το αντίστροφο είναι προφανές. Αρχικά η $\{W_t : |t| = 0\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X. Έστω ότι η $\{W_t : |t| = n\}$ τοπικά πεπερασμένη στον X. Θα δείξουμε ότι η $\{W_t : |t| = n+1\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X. Έστω $x \in X$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει U_x, ανοιχτή περιοχή του x, έτσι ώστε το

$$T^n_{U_x} = \{t \in T : U_x \cap W_t \neq \emptyset \text{ και } |t| = n\}$$

να είναι πεπερασμένο. Έστω

$$T^n_x = \{t \in T : x \in W_t \text{ και } |t| = n\},$$

το οποίο είναι πεπερασμένο ως υποσύνολο του $T^n_{U_x}$. Παρατηρούμε ότι το

$$U_x \setminus \cup\{W_t : t \in T^n_{U_x} \setminus T^n_x\}$$

είναι ανοιχτή (διότι η $\{W_t : t \in T^n_{U_x} \setminus T^n_x\}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια από κλειστά υποσύνολα) περιοχή του x που τέμνει το W_t με $|t| = n$, αν, και μόνο αν, $t \in T^n_x$. Η $\{W_s : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον υπόχωρο W_t για κάθε $t \in T$, επομένως για κάθε $t \in T^n_x$ υπάρχει ανοιχτή (ως προς τη σχετική τοπολογία του W_t) περιοχή του $U_t(x)$ του x, έτσι ώστε το

$$T^{n+1}_{U_t(x)} \cap succ(t) = \{s \in succ(t) : U_t(x) \cap W_s \neq \emptyset\}$$

να είναι πεπερασμένο. Επειδή το $U_t(x)$ είναι ανοιχτό στον W_t, υπάρχει ανοιχτή (ως προς την τοπολογία του X) περιοχή $V_t(x)$ του x τέτοια ώστε $U_t(x) = V_t(x) \cap W_t$. Παρατηρούμε ότι το

$$T^{n+1}_{V_t(x)} \cap succ(t) = \{s \in succ(t) : V_t(x) \cap W_s \neq \emptyset\}$$

ταυτίζεται με το

$$T^{n+1}_{U_t(x)} \cap succ(t) = \{s \in succ(t) : U_t(x) \cap W_s \neq \emptyset\}.$$

Επομένως, το

$$\left(U_x \setminus \cup\{W_t : t \in T^n_{U_x} \setminus T^n_x\}\right) \cap \left(\cap\{V_t(x) : t \in T^n_x\}\right)$$

είναι μια ανοιχτή (ως προς την τοπολογία του X) περιοχή του x που τέμνει πεπερασμένα στοιχεία της $\{W_t : |t| = n+1\}$.

□

Ορισμός 1.3.4. *Λέμε ότι ένα σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι πλήρες (complete), αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

(i) *για κάθε* $b \in [T]$ *με* $W_{b|n} \neq \emptyset$ *για κάθε* $n \in \omega$ *υπάρχει* $x_b \in X$ *τέτοιο ώστε* $\cap_{n\in\omega} W_{b|n} = \{x_b\}$,

(ii) *αν* $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n}$, *τότε η* $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ *είναι μια βάση περιοχών του* x.

Παρατήρηση 1.3.5. *Έστω* $(W_t)_{t\in T}$ *ένα πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου στον* X. *Από το Λήμμα 1.3.3(ii) για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει* $b_x \in [T]$ *τέτοιο ώστε* $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. *Επειδή το* $(W_t)_{t\in T}$ *είναι πλήρες, έχουμε ότι* $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. *Επομένως, για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει* $b_x \in [T]$ *τέτοιο ώστε* $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$ *και η* $\{W_{b_x|n} : n \in \omega\}$ *είναι μια βάση περιοχών του* x.

Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι σε έναν πλήρως μετρικοποιήσιμο χώρο υπάρχουν πλήρη ανοιχτά σχήματα δέντρου με «καλές» ιδιότητες. Αυτό το αποτέλεσμα είναι κατά κάποιο τρόπο γνωστό στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων (βλ. για παράδειγμα [16, thm. 6.2]), αλλά εδώ το διατυπώνουμε σε μια γενική μορφή που να ταιριάζει με τους ορισμούς που έχουμε δώσει και να είναι βολική για τον σκοπό μας παρακάτω. Πρώτα, όμως, ας αποδείξουμε ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 1.3.6. *Έστω* Y *μετρικοποιήσιμος χώρος και* $(U_t)_{t\in T}$ *ανοιχτό σχήμα δέντρου στον* Y. *Τότε το* $(U_t)_{t\in T}$ *έχει μια κλειστή ακριβή εκλέπτυνση* $(F_t)_{t\in T}$, *η οποία, με τη σειρά της, έχει μια ανοιχτή, ακριβή εκλέπτυνση* $(W_t)_{t\in T}$ *και, επιπλέον, οι* $\{F_t : |t| = n\}$ *και* $\{W_t : |t| = n\}$ *είναι τοπικά πεπερασμένες στον* Y *για κάθε* $n < \omega$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τα ζητούμενα σχήματα δέντρου αναδρομικά. Θέτουμε$F_\emptyset = Y$ και υποθέτουμε ότι το F_t είναι κλειστό στον Y και $F_t \subseteq U_t$. Επειδή ο F_t είναι παρασυμπαγής Hausdorff, ως υπόχωρος μετρικού χώρου, και το $\{F_t \cap U_s : s \in succ(t)\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του F_t στη σχετική τοπολογία, έχει μια τοπικά πεπερασμένη, ανοιχτή, ακριβή εκλέπτυνση $\{D_s : s \in succ(t)\}$ τέτοια, ώστε $cl_{F_t}(D_s) \subseteq F_t \cap U_s$ για κάθε $s \in succ(t)$. Ορίζουμε $F_s = cl_{F_t}(D_s)$, το οποίο είναι κλειστό στον Y, και παρατηρούμε ότι

$$F_t = \cup\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\} = \cup\{F_s : s \in succ(t)\}.$$

Επιπλέον, επειδή η $\{D_s : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον F_t, το ίδιο ισχύει για τις $\{F_s : s \in succ(t)\}$ και $\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\}$. Το αναδρομικά ορισμένο σχήμα δέντρου $(F_t)_{t\in T}$ είναι τοπικά πεπερασμένο, κλειστό και είναι ακριβής εκλέπτυνση του $(U_t)_{t\in T}$· από το Λήμμα 1.3.3(v) προκύπτει ότι η $\{F_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n < \omega$.

Τώρα θέτουμε $W_\emptyset = Y$ και υποθέτουμε ότι το W_t είναι ανοιχτό στον Y και ότι $W_t \subseteq F_t$. Παρατηρούμε ότι

$$W_t \subseteq int_X(F_t) \subseteq \cup\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\} \text{ και } int_X(F_t) \cap int_{F_t}(F_s) \subseteq int_X(F_s),$$

συνεπώς το $\{W_t \cap int_X(F_s) : s \in succ(t)\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του W_t στη σχετική τοπολογία. Ακολουθώντας τα ίδια επιχειρήματα όπως παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει τοπικά πεπερασμένη, ανοιχτή, ακριβής εκλέπτυνση $\{W_s : s \in succ(t)\}$. Επομένως, το αναδρομικά ορισμένο ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ είναι ακριβής εκλέπτυνση του $(F_t)_{t\in T}$, και άρα η $\{W_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n < \omega$. □

Πρόταση 1.3.7. *Έστω Y ένας πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος.*

(i) Υπάρχει ένα πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο, ώστε η $\{W_t : |t| = n\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n < \omega$.

(ii) Αν ο Y είναι διαχωρίσιμος, τότε υπάρχει η δυνατότητα ώστε το T στο (i) να είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης.

(iii) Αν $dim(Y) = 0$, τότε υπάρχει πλήρες, ανοιχτό-κλειστό, ξένο σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y.

Απόδειξη. (i) Πρώτα θα καταστευάσουμε ένα πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου στον Y. Έστω d πλήρης, φραγμένη, συμβατή μετρική στον Y και $\{U_i : i \in I\}$ μια βάση για την τοπολογία του Y που απαρτίζεται από μη κενά σύνολα. Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε

$$I(i) = \{j \in I : \overline{U_j} \subseteq U_i \text{ και } diam_d(\overline{U_j}) \leq \frac{1}{2} diam_d(U_i)\}$$

και παρατηρούμε ότι $U_i = \cup_{j\in I(i)} U_j = \cup_{j\in I(i)} \overline{U_j}$. Ορίζουμε το κλαδεμένο δέντρο $T \subseteq I^{<\omega}$ ως εξής:

$$t = (i_1, \dots, i_n) \in T \iff i_{k+1} \in I(i_k)\ \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ και } diam_d(\overline{U_{i_1}}) \leq \frac{1}{2} diam_d(Y).$$

Θέτουμε $U_\emptyset = Y$ και $U_t = U_{i_n}$ για κάθε $t = (i_1, \dots, i_n) \in T$. Θα δείξουμε ότι το $(U_t)_{t\in T}$ είναι ένα πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου στον Y. Έστω $t = (i_1, \dots, i_n) \in T$. Αν $s \in succ(t)$, τότε, σύμφωνα με τον ορισμό του T, υπάρχει $i_{n+1} \in I(i_n)$ έτσι ώστε $s = t^\frown i_{n+1} = (i_1, \dots, i_n, i_{n+1})$, απ' το οποίο συνεπάγεται ότι $\overline{U_s} = \overline{U_{i_{n+1}}} \subseteq U_{i_n} = U_t$. Συνεπώς

$$\cup\{U_s : s \in succ(t)\} \subseteq U_t \quad (1).$$

Απ' την άλλη πλευρά, έστω $y \in U_t$, όπου $t = (i_1, \dots, i_n) \in T$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $2\varepsilon < \frac{1}{2} diam_d(U_{i_n})$ και $\overline{B_d(y, \varepsilon)} \subseteq U_t = U_{i_n}$. Επειδή η $\{U_i : i \in I\}$ είναι βάση, υπάρχει $j \in I$ έτσι ώστε $y \in U_j \subseteq B_d(y, \varepsilon)$. Συνεπώς, $\overline{U_j} \subseteq U_{i_n}$ και $diam_d(U_j) \leq 2\varepsilon < \frac{1}{2} diam_d(U_{i_n})$, και άρα $j \in I(i_n)$. Οπότε ισχύει ότι $y \in U_s$, όπου $s = (i_1, \dots, i_n, j) \in succ(t)$, επομένως

$$U_t \subseteq \cup\{U_s : s \in succ(t)\} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$U_t = \cup\{U_s : s \in succ(t)\} \text{ for all } t \in T.$$

Άρα, το $(U_t)_{t\in T}$ είναι ένα ανοιχτό σχήμα δέντρου. Μένει να δείξουμε ότι το $(U_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες. Έστω $b \in [T]$. Παρατηρούμε ότι $\cap_{n\in\omega} U_{b|n} = \cap_{n\in\omega} \overline{U_{b|n}}$, καθώς και ότι η $\{\overline{U_{b|n}} : n \in \omega\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία από μη κενά, κλειστά υποσύνολα με συρρικνούμενη διάμετρο, συνεπώς, επειδή η d είναι πλήρης, υπάρχει $y_b \in Y$ τέτοιο, ώστε $\cap_{n\in\omega} U_{b|n} = \{y_b\}$. Τέλος, η $\{U_{b|n} : n \in$

$\omega\}$ είναι μια βάση περιοχών του y_b, αφού, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, $diam(U_{b|n}) \to 0$.

Τώρα, από το Λήμμα 1.3.6, το $(U_t)_{t\in T}$ έχει μια ανοιχτή, ακριβή εκλέπτυνση $(W_t)_{t\in T}$ τέτοια, ώστε η $\{W_t : |t| = n\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n < \omega$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το $(W_t)_{t\in T}$ είναι επίσης πλήρες.

(ii) Αν ο Y είναι διαχωρίσιμος, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τη βάση $\{U_i : i \in I\}$, στην απόδειξη του (i), να είναι αριθμήσιμη, και άρα το T στο (i) να είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης.

(iii) Από το (i) υπάρχει ένα πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο, ώστε η $\{W_t : |t| = n\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n < \omega$. Θα ορίσουμε αναδρομικά μια ανοιχτή-κλειστή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση του $(W_t)_{t\in T}$. Θέτουμε $G_\emptyset = X$. Έστω $G_t \subseteq W_t$ ανοιχτό-κλειστό. Παρατηρούμε ότι $G_t = \cup_{s\in succ(t)}(G_t \cap W_s)$. Επειδή ο G_t είναι φυσιολογικός με $dim(G_t) = 0$ και η $\{G_t \cap W_s : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον G_t, υπάρχει ανοιχτή-κλειστή, ακριβής εκλέπτυνση $\{U_s : s \in succ(t)\}$. Θεωρούμε μια αυστηρή καλή διάταξη $<$ στο $succ(t)$ και ορίζουμε $G_s = U_s \setminus \cup_{s'<s} U_{s'}$, το οποίο είναι ανοιχτό-κλειστό εφόσον η $\{U_s : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον G_t. Επομένως, το αναδρομικά ορισμένο $(G_t)_{t\in T}$ είναι ανοιχτό-κλειστό, ξένο σχήμα δέντρου, και είναι εύκολο να δούμε ότι, ως ακριβής εκλέπτυνση του $(W_t)_{t\in T}$, είναι επίσης πλήρες.

□

1.4 Ένα γενικό θεώρημα επιλογής

Στο Θεώρημα 1.4.2 παρουσιάσουμε τη βασική ιδέα του κεφαλαίου: μια ενναιία μέθοδο κατασκευής συνεχών και μετρήσιμων συναρτήσεων επιλογής. Με την Πρόταση 1.4.3 δίνουμε έναν τρόπο ορισμού μετρήσιμων συνολοσυναρτήσεων με κλειστές ή συμπαγείς τιμές, με πεδίο τιμών το σώμα δέντρου. Θα χρησιμοποιήσουμε τέτοιες συνολοσυναρτήσεις στην Ενότητα 1.6, που θα χαρακτηρίσουμε το πεδίο ορισμού των συνολοσυναρτήσεων με όρους σχημάτων δέντρου. Ας ξεκινήσουμε όμως με ένα απλό λήμμα. Το λήμμα και η Πρόταση 1.4.3 βασίζονται ουσιαστικά στο [3, prop. 2.2, lem. 2.4].

Λήμμα 1.4.1. *(i) Αν τα X, Y είναι μη κενά σύνολα, το $(W_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου στο Y και η $\Phi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ συνολοσυνάρτηση, τότε το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι σχήμα δέντρου στο X.*

(ii) Αν, επιπροσθέτως στο (i), $\Sigma \subseteq 2^X$, ο Y είναι τοπολογικός χώρος, η Φ είναι Σ-μετρήσιμη και το $(W_t)_{t\in T}$ ανοιχτό, τότε το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι Σ σχήμα δέντρου στο X.

(iii) Αν, επιπροσθέτως στο (ii), η Σ είναι τοπολογία, η Φ συνεχής και το $(W_t)_{t\in T}$ ανοιχτό-κλειστό, τότε το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι ανοιχτό-κλειστό X.

Απόδειξη. Για το (i) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\Phi^-(Y) = X$ και ότι η κάτω αντίστροφη εικόνα μέσω της Φ διατηρεί τις αυθαίρετες ενώσεις· τα (ii) και (iii) προκύπτουν άμεσα. □

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω X μη κενό σύνολο, $\Sigma \subseteq 2^X$, Y τοπολογικός χώρος και $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ συνολοσυνάρτηση.*

(i) Αν υπάρχει πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο, ώστε το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ να έχει μια ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$, τότε η Φ δέχεται μια συνάρτηση επιλογής ϕ.

(ii) Αν η Σ είναι τοπολογία στο X και το $(G_t)_{t\in T}$ στο (i) είναι επιπλέον Σ σχήμα δέντρου, τότε η ϕ στο (i) είναι συνεχής.

(iii) Αν η Σ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις και το $(G_t)_{t\in T}$ στο (i) είναι επιπλέον Σ σχήμα δέντρου με το T να είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης, τότε η ϕ στο (i) είναι Σ-μετρήσιμη.

Απόδειξη. (i) Έστω $(W_t)_{t\in T}$ πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου στον Y και $(G_t)_{t\in T}$ ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$. Από το Λήμμα 1.3.3(iii), για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $b_x \in [T]$ τέτοιο, ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} G_{b_x|n}$. Παρατηρούμε ότι $W_{b_x|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$, επομένως, εφόσον το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες, μπορούμε να ορίσουμε $\phi : X \to Y$ με $\{\phi(x)\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι συνάρτηση επιλογής της Φ. Έστω $x \in X$. Επειδή η Φ είναι κλειστών τιμών, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(x) \in \overline{\Phi(x)}$. Αλλά αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η $\{W_{b_x|n} : n \in \omega\}$ είναι μια βάση περιοχών του $\phi(x)$ και ότι $\Phi(x) \cap W_{b_x|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$.

(ii) Έστω W ανοιχτό υποσύνολο του Y. Για κάθε $x \in \phi^{-1}(W)$ υπάρχει $n_x \in \omega$ τέτοιο, ώστε $\phi(x) \in W_{b_x|n_x} \subseteq W$. Επομένως, για κάθε $x \in \phi^{-1}(W)$ έχουμε ότι $x \in G_{b_x|n_x} \subseteq \phi^{-1}(W_{b_x|n_x}) \subseteq \phi^{-1}(W)$, και άρα $\phi^{-1}(W) = \cup_{x\in\phi^{-1}(W)} G_{b_x|n_x}$, το οποίο είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y, εφόσον κάθε $G_{b_x|n_x}$ είναι ανοιχτό.

(iii) Όπως αποδείξαμε στο (ii), για κάθε $W \subseteq Y$ ανοιχτό έχουμε ότι $\phi^{-1}(W) = \cup_{x\in\phi^{-1}(W)} G_{b_x|n_x}$. Επιπλέον, η Σ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, το σύνολο $\{b_x|n_x : x \in \phi^{-1}(W)\}$ είναι αριθμήσιμο (το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης) και κάθε $G_{b_x|n_x}$ ανήκει στη Σ, συνεπώς $\phi^{-1}(W) \in \Sigma$. □

Πρόταση 1.4.3. *Έστω X μη κενό σύνολο, $\Sigma \subseteq 2^X$, $(U_t)_{t\in T}$ Σ σχήμα δέντρου στο X και $\Phi : X \to 2^{[T]} \setminus \{\emptyset\}$ που ορίζεται ως $\Phi(x) = \{b \in [T] : x \in \cap_{n\in\omega} U_{b|n}\}$.*

(i) Αν η Σ είναι τοπολογία, τότε η Φ is lsc.

(ii) Αν το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης και η Σ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, τότε η Φ είναι Σ-μετρήσιμη.

(iii) Η Φ είναι κλειστών τιμών.

(iv) Αν το $(U_t)_{t\in T}$ είναι σημειακά πεπερασμένο, τότε η Φ είναι συμπαγών τιμών.

(v) Αν η Σ είναι τοπολογία και το $(U_t)_{t\in T}$ τοπικά πεπερασμένο και ανοιχτό-κλειστό, τότε η Φ είναι συνεχής.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $\{V_t : t \in T\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του $[T]$, ότι η κάτω αντίστροφη εικόνα μέσω της Φ διατηρεί τις αυθαίρετες ενώσεις και ότι $\Phi^-(V_t) = U_t \in \Sigma$ για κάθε $t \in T$.

(ii) Έστω V ανοιχτό υποσύνολο του $[T]$ και $S \subseteq T$ τέτοιο ώστε $V = \cup_{t\in S} V_t$. Προφανώς το T είναι αριθμήσιμο και $\Phi^-(V) = \cup_{t\in S}\Phi^-(V_t)$, συνεπώς $\Phi^-(V) \in \Sigma$.

(iii) Έστω $x \in X$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\Phi(x) = [T_x]$, όπου $T_x = \{t \in T : x \in U_t\}$ είναι κλαδεμένο υποδέντρο του T. Με άλλα λόγια, το $\Phi(x)$ είναι σώμα ενός κλαδεμένου υποδέντρου του T, και άρα είναι κλειστό υποσύνολο του $[T]$.

(iv) Αν επιπλέον το $(U_t)_{t\in T}$ είναι σημειακά πεπερασμένο, τότε το $T_x = \{t \in T : x \in U_t\}$ είναι ένα κλαδεμένο, πεπερασμένης διακλάδωσης υποδέντρο του T, και άρα το $\Phi(x) = [T_x]$ είναι συμπαγές.

(v) Αν το $(U_t)_{t\in T}$ είναι τοπικά πεπερασμένο και ανοιχτό-κλειστό, τότε, λόγω του (i), μένει να δείξουμε ότι η Φ usc. Έστω V ανοιχτό υποσύνολο του $[T]$ και $x \in \Phi^+(V)$. Για κάθε $b \in \Phi(x)$ υπάρχει $n_b \in \omega$ έτσι ώστε $V_{b|n_b} \subseteq V$, άρα το $\{V_{b|n_b}\}_{b\in\Phi(x)}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $\Phi(x)$. Από το (iv) έχουμε ότι το $\Phi(x)$ είναι συμπαγές, επομένως υπάρχει ένα υποκάλυμμα $\{V_{t_i}\}_{i=1}^k$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|t_i| = n_0$ για κάποιο $n_0 \in \omega$, για όλα τα $i = 1, \dots, k$. Εφόσον το $(U_t)_{t\in T}$ είναι τοπικά πεπερασμένο και ανοιχτό-κλειστό, από το Λήμμα 1.3.3(v) υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του x τέτοια, ώστε το σύνολο

$$T_U^{n_0} = \{t \in T : |t| = n_0 \text{ και } U \cap U_t \neq \emptyset\}$$

να είναι πεπερασμένο. Έστω

$$T_x^{n_0} = \{t \in T : |t| = n_0 \text{ και } x \in U_t\}$$

και

$$G = U \setminus \cup\{U_t : t \in T_U^{n_0} \setminus T_x^{n_0}\}.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι το G είναι μια ανοιχτή περιοχή του x. Έπειτα, από τον ορισμό της Φ, παρατηρούμε ότι $G \subseteq \Phi^+(V)$, διότι $T_x^{n_0} \subseteq \{t_1, \dots, t_k\}$ και $\Phi(x) \subseteq \cup_{i=1}^k V_{t_i}$.

□

1.5 Ξένη εκλέπτυνση σχήματος δέντρου

Όπως διαπιστώσαμε στην προηγούμενη ενότητα (Θεώρημα 1.4.2), μας ενδιαφέρουν οι ξένες ακριβείς εκλεπτύνσεις σχήματος δέντρου, διότι, μέσω αυτών, μπορούμε να κατασκευάσουμε συναρτήσεις επιλογής.

Οι Maitra και Rao [19], στην προσέγγισή τους, όρισαν μια ασθενέστερη εκδοχή της λεγόμενης «reduction principle» του Kuratowski ως εξής: αν ο k είναι πληθάριθμος και η $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε η $\mathcal{F}$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle, αν κάθε $\{A_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq \mathcal{F}$ με $\beta < k$ και $X = \cup_{\alpha<\beta} A_\alpha$ έχει ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{B_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq \mathcal{F}$.

Εμείς θα ορίσουμε μια κληρονομική εκδοχή αυτής της «weak reduction principle» και θα αποδείξουμε ότι είναι ο ουσιαστικός λόγος που μπορούμε να κατασκευάσουμε ξένες, ακριβείς εκλεπτύνσεις σχήματος δέντρου που ανήκουν σε κάποια συγκεκριμένη κλάση.

Υπενθυμίζουμε πρώτα τον καθιερωμένο - στην Περιγραφική Θεωρία Συνόλων - συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε (βλ. [16, p. 167]). Αν Γ είναι μια κλάση συνόλων και X ένα σύνολο, τότε συμβολίζουμε με $\Gamma(X)$ την οικογένεια των υποσυνόλων του X που ανήκουν στη Γ. Για παράδειγμα, η $\Gamma(X)$ θα μπορούσε να είναι η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του X. Έχουμε επίσης τον εξής συμβολισμό: $\sim \Gamma(X) = \{X \setminus A : A \in \Gamma(X)\}$, $\Delta(X) =\sim \Gamma(X) \cap \Gamma(X)$ και $\Gamma(Y) = \Gamma(X)|Y = \{A \cap Y : A \in \Gamma(X)\}$ για κάθε $Y \subseteq X$.

Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν ως εξής : αν $\mathcal{A}$ είναι μια κλάση από οικογένειες συνόλων, τότε συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(X)$ τη συλλογή από τις οικογένειες υποσυνόλων του X που ανήκουν στην $\mathcal{A}$, και με $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ τη συλλογή από τις υποοικογένειες της $\Gamma(X)$ που ανήκουν στην $\mathcal{A}(X)$. Για παράδειγμα, η $\mathcal{A}(X)$ θα μπορούσε να είναι η συλλογή από τις οικογένειες υποσυνόλων του X που είναι τοπικά πεπερασμένες στον X και η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ η συλλογή από τις οικογένειες των ανοιχτών υποσυνόλων του X που είναι τοπικά πεπερασμένες στον X.

Ορισμός 1.5.1. *Έστω Γ μια κλάση συνόλων, $\mathcal{A}$ μια κλάση από οικογένειες συνόλων, X ένα σύνολο και k ένας πληθάριθμος.*

(i) *Λέμε ότι η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle, αν κάθε $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ τέτοιο, ώστε $|I| < k$ και $X = \cup_{i\in I} A_i$, έχει μια ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$.*

Αν η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle για κάθε πληθάριθμο k, τότε λέμε ότι η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί τη weak reduction principle.

(ii) *Λέμε ότι η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary, αν η $\Gamma(Y)$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle για κάθε $Y \in \Delta(X)$.*

Αν η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary για κάθε πληθάριθμο k, τότε λέμε ότι η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί τη weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary.

(iii) *Λέμε ότι η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle, αν κάθε $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$ τέτοιο, ώστε $|I| < k$ και $X = \cup_{i\in I} A_i$, έχει μια ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$.*

Αν η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle για κάθε πληθάριθμο k, τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί τη weak reduction principle.

(iv) *Λέμε ότι η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary, αν η $\mathcal{A}(\Gamma(Y))$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle για κάθε $Y \in \Delta(X)$.*

Αν η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί την k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary για κάθε πληθάριθμο k, τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί τη weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary.

Πρόταση 1.5.2. *Έστω k πληθάριθμος, Γ κλάση συνόλων και X σύνολο, έτσι ώστε:*

(1) $X \in \Gamma(X)$,

(2) $\Gamma(X)$ *κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές.*

Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) *Η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί τη weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary (k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary).*

(ii) *Κάθε $\Gamma(X)$ σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στο X (όπου T k-διακλάδωσης) έχει μια $\Gamma(X)$ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.*

Η διατύπωση αυτής της πρότασης περιλαμβάνει δύο περιπτώσεις. Αυτή που είναι ενός παρενθέσεων μπορεί να αποδειχθεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, και γι' αυτό η απόδειξη παραλείπεται.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $(U_t)_{t\in T}$ ένα $\Gamma(X)$ σχήμα δέντρου στο X. Θέτουμε $G_\emptyset = X$ και υποθέτουμε ότι $G_t \subseteq U_t$ και $G_t \in \Delta(X)$. Εφόσον $\{U_s : s \in succ(t)\} \subseteq \Gamma(X)$, παρατηρούμε ότι το $\{G_t \cap U_s : s \in succ(t)\} \subseteq \Gamma(G_t)$ καλύπτει το G_t, επομένως έχει μια ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{G_s : s \in succ(t)\} \subseteq \Gamma(G_t)$. Από τις (1) και (2) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η αναδρομικά ορισμένη ξένη, ακριβής εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$ ανήκει στη $\Gamma(X)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $Y \in \Delta(X)$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\Gamma(Y)$ ικανοποιεί τη weak reduction principle. Έστω $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(Y)$ τέτοια, ώστε $Y = \cup_{i\in I} A_i$. Από τη (2) έχουμε ότι $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$. Θέτουμε $U_\emptyset = X$. Ορίζουμε τους αμέσως επόμενους του $\emptyset$ να είναι ακριβώς δύο διαφορετικά στοιχεία t_1, t_2 και θέτουμε $U_{t_1} = Y$ και $U_{t_2} = X \setminus Y$. Έπειτα ορίζουμε τους αμέσως επόμενους του t_1 να είναι τα στοιχεία του I και για κάθε $i \in succ(t_1)$ θέτουμε $U_i = A_i$. Τέλος, θέτουμε $U_t = U_{t_2}$ για κάθε $t \in succ(t_2)$, όπου $succ(t_2)$ ορίζουμε να είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, και $U_t = U_i$ για κάθε $t \in succ(i)$ και $i \in I$. Είναι εύκολο να δούμε ότι με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ένα κλαδεμένο δέντρο T (σε κάποιο σύνολο) και ένα $\Gamma(X)$ σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$, το οποίο, εξ υποθέσεως, έχει μια $\Gamma(X)$ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$. Για να ολοκληρώσουμε την υπόθεση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ είναι μια ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{A_i\}_{i\in I}$. □

Πρόταση 1.5.3. *Έστω k πληθάριθμος, Γ κλάση συνόλων, $\mathcal{A}$ κλάση από οικογένειες συνόλων και X σύνολο, έτσι ώστε:*

(1) $\{Y\} \in \mathcal{A}(\Gamma(Y))$ *για κάθε* $Y \subseteq X$,

(2) $\Gamma(X)$ *κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές,*

(3) *αν* $Y \subseteq X$ *και* $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$, *τότε* $\{A_i \cap Y\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(Y))$,

(4) *αν* $Y \in \Delta(X)$ *και* $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(Y))$, *τότε* $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$,

(5) αν $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ από ξένα ανά δύο, τότε $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$,

(6) αν $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$, τότε $\{A_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$ για κάθε $J \subseteq I$.

Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ ικανοποιεί τη weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary (k-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary).

(ii) Κάθε $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στο X (όπου T k-διακλάδωσης) έχει μια $\Gamma(X)$ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.

Όπως στην προηγούμενη πρόταση, η διατύπωση περιλαμβάνει πάλι δύο περιπτώσεις, εκ των οποίων θα αποδείξουμε τη μία.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $(U_t)_{t\in T}$ ένα $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ σχήμα δέντρου στο X. Θέτουμε $G_\emptyset = X$ και υποθέτουμε ότι $G_t \subseteq U_t$ και $G_t \in \Delta(X)$. Εφόσον $\{U_s : s \in succ(t)\} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$, εφαρμόζοντας την (3) παρατηρούμε ότι η $\{G_t \cap U_s : s \in succ(t)\}$ ανήκει στην $\mathcal{A}(\Gamma(G_t))$ και, επιπλέον, καλύπτει το G_t, επομένως έχει μια ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{G_s : s \in succ(t)\} \in \Gamma(G_t)$. Από τη (2) έχουμε ότι η αναδρομικά ορισμένη ξένη, ακριβής εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$ είναι ένα $\Gamma(X)$ σχήμα δέντρου.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $Y \in \Delta(X)$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}(\Gamma(Y))$ ικανοποιεί τη weak reduction principle. Έστω $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(Y))$ τέτοια, ώστε $Y = \cup_{i\in I} A_i$. Από την (4) έχουμε ότι $\{A_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$. Θέτουμε $U_\emptyset = X$. Ορίζουμε τους αμέσως επόμενους του $\emptyset$ να είναι ακριβώς δύο διαφορερικά στοιχεία t_1, t_2 και θέτουμε $U_{t_1} = Y$ και $U_{t_2} = X \setminus Y$. Από την (5) έχουμε ότι $\{U_s : s \in succ(\emptyset)\} \in \mathcal{A}(\Gamma(X))$. Ορίζουμε τους αμέσως επόμενους του t_1 να είναι τα στοιχεία του I και για κάθε $i \in succ(t_1)$ θέτουμε $U_i = A_i$. Τέλος, θέτουμε $U_t = U_{t_2}$ για κάθε $t \in succ(t_2)$, όπου $succ(t_2)$ ορίζουμε να είναι ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, και $U_t = U_i$ για κάθε $t \in succ(i)$ και $i \in I$. Είναι εύκολο να δούμε (πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την (6)) ότι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ένα κλαδεμένο δέντρο T (σε κάποιο σύνολο) και ένα $\mathcal{A}(\Gamma(X))$ σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$, το οποίο, εξ υποθέσεως, έχει μια $\Gamma(X)$ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $(G_t)_{t\in T}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ είναι μια ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{A_i\}_{i\in I}$. □

1.6 Θεωρήματα επιλογής

1.6.1 Συνεχής επιλογή για κάτω ημισυνεχή συνολοσυνάρτηση και χαρακτηρισμοί

Ο Michael [21] απέδειξε ότι η ύπαρξη συνεχούς επιλογής χαρακτηρίζει την τοπολογική δομή του πεδίου ορισμού της συνολοσυνάρτησης (π.χ. παρασυμπάγεια). Αντίστοιχα, οι Maitra και Rao [19] έδειξαν ότι η ύπαρξη μετρήσιμης επιλογής χαρακτηρίζει το πεδίο ορισμού της συνολοσυνάρτησης μέσω της «weak reduction principle». Όπως έχουμε δει (Θεώρημα 1.4.2), η μέθοδος με την οποία κατασκευάσαμε συνεχείς συναρτήσεις επιλογής βασίζεται στην ύπαρξη ξένων, ακριβών εκλεπτύνσεων σχημάτων δέντρων. Επομένως, είναι αναμενόμενο η ύπαρξη συνεχούς επιλογής να χαρακτηρίζει επίσης το πεδίο ορισμού με όρους σχήματος δέντρου. Αναλογιζόμενοι τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας και τους χαρακτηρισμούς στο [19], είναι περισσότερο από αναμενόμενο οι συνεχείς επιλογές να χαρακτηρίζουν επίσης το πεδίο ορισμού μέσω της κληρονομικής εκδοχής της «weak reduction principle» που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Σε αυτή την υποενότητα το βασικό αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει είναι το μηδενοδιάστατο θεώρημα επιλογής του Michael. Θα παρουσιάσουμε μια νέα απόδειξη αυτού του θεωρήματος, καθώς και άλλων γνωστών παραλλαγών του που μπορεί κανείς να βρει στα [22], [24], [19] και [18]. Στην πραγματικότητα, επηρεασμένοι από το [19], θα χαρακτηρίσουμε την ύπαρξη συνεχών επιλογών με τρεις διαφορετικούς τρόπους: με όρους σχήματος δέντρου, με όρους της κληρονομικής εκδοχής της «weak reduction principle», και με όρους τοπολογικής δομής.

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Αν ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ lsc συνολοσυνάρτηση, τότε η Φ δέχεται συνεχή επιλογή.

(ii) Κάθε ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X έχει ξένη, ανοιχτή, ακριβή εκλέπτυνση.

(iii) Η τ ικανοποιεί τη weak reduction principle $(\sim \tau \cap \tau)$-hereditary.

(iv) Ο (X, τ) είναι παρασυμπαγής Hausdorff με $dim(X) = 0$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $(U_t)_{t\in T}$ ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X. Ορίζουμε $\Phi : X \to 2^{[T]} \setminus \{\emptyset\}$ ως

$$\Phi(x) = \{b \in [T] : x \in \cap_{n\in\omega} U_{b|n}\}.$$

Η Φ είναι lsc και κλειστών τιμών από την Πρόταση 1.4.3 και, επιπλέον, ο $[T]$ είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, συνεπώς η Φ δέχεται συνεχή επιλογή $\phi : X \to [T]$. Θέτουμε $G_t = \phi^{-1}(V_t)$ και παρατηρούμε ότι το $(G_t)_{t\in T}$ είναι μια ανοιχτή, ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $(U_t)_{t\in T}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω Y πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος και $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ lsc συνολοσυνάρτηση. Από την Πρόταση 1.3.7 υπάρχει πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y. Λόγω του Θεωρήματος 1.4.2, αρκεί να δείξουμε ότι το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ έχει μια ξένη, ανοιχτή, ακριβή εκλέπτυνση. Από το Λήμμα 1.4.1, το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X, συνεπώς, εξ υποθέσεως, έχει μια ανοιχτή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.5.2 για $\Gamma(X) = \tau$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Είναι άμεσο.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Έστω G ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X και $\{U_i\}_{i\in I}$ μια ανοιχτή οικογένεια υποσυνόλων του G (στη σχετική τοπολογία) τέτοια, ώστε $G = \cup_{i\in I} U_i$. Παρατηρούμε ότι ο G, ως κλειστός υπόχωρος του X, είναι παρασυμπαγής Hausdorff με $dim(G) = 0$, επομένως υπάρχει $\{G_i\}_{i\in I}$ ανοιχτή, ξένη ακριβής εκλέπτυνση. Εφόσον $G \in (\sim \tau \cap \tau)$, έχουμε ότι $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq (\sim \tau \cap \tau)$. $\square$

Θεώρημα 1.6.2. *Αν ο (X,τ) είναι Lindelöf μηδενοδιάστατος και ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, τότε κάθε $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ που είναι lsc δέχεται συνεχή επιλογή.*

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 1.6.1 αρκεί να δείξουμε ότι η τ ικανοποιεί τη weak reduction principle ($\sim \tau \cap \tau$)-hereditary. Έστω G ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X και $\{U_i\}_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του G στη σχετική τοπολογία. Ο G, ως υπόχωρος, είναι προφανώς Lindelöf και μηδενοδιάστατος. Έστω $\mathcal{V}$ η οικογένεια των ανοιχτών-κλειστών υποσυνόλων του G που περιέχονται σε κάποιο U_i. Εφόσον ο G έχει μια βάση από ανοιχτά-κλειστά υποσύνολα, η $\mathcal{V}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του G. Έστω $\{W_n\}_{n\in\omega}$ ένα αριθμήσιμο υποκάλυμμα του $\mathcal{V}$. Ορίζουμε $G_n = W_n \setminus \cup_{m<n} W_m$. Η $\{G_n\}_{n\in\omega}$ είναι μια ανοιχτή-κλειστή, ξένη εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$, συνεπώς η $\{G_n\}_{n\in\omega}$ είναι επίσης τοπικά πεπερασμένη στον G. Για κάθε $n \in \omega$ επιλέγουμε ένα μοναδικό $i_n \in I$ τέτοιο, ώστε $G_n \subseteq U_{i_n}$ και ορίζουμε $G_i = \cup\{G_n : i_n = i\}$ για κάθε $i \in I$. Εφόσον η $\{G_n\}_{n\in\omega}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον G, τότε το G_i είναι ανοιχτό-κλειστό για κάθε $i \in I$. Επομένως, το $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι μια ανοιχτή-κλειστή, ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$. □

Θεώρημα 1.6.3. *Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Αν ο Y είναι Πολωνικός χώρος και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ lsc συνολοσυνάρτηση, τότε η Φ δέχεται συνεχή επιλογή.*

(ii) *Κάθε ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης, έχει μια ανοιχτή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.*

(iii) *Η τ ικανοποιεί την $\aleph_1$-weak reduction principle ($\sim \tau \cap \tau$)-hereditary.*

(iv) *Ο (X,τ) είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής, φυσιολογικός με $dim(X) = 0$.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Η μόνη διαφορά με την απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ του Θεωρήματος 1.6.1 είναι ότι ο $[T]$ είναι επιπλέον διαχωρίσιμος.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Παρόμοια, η μόνη διαφορά με την απόδειξη $(ii) \Rightarrow (i)$ του Θεωρήματος 1.6.1 είναι ότι το σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y μπορεί να επιλεγεί, έτσι ώστε το T να είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης (Πρόταση 1.3.7).

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.5.2 για $\Gamma(X) = \tau$ και $k = \aleph_1$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Είναι άμεσο.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Έστω G ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X και $\{U_n\}_{n\in\omega}$ αριθμήσιμο ανοιχτό κάλυμμα του G στη σχετική τοπολογία. Παρατηρούμε ότι το G, ως κλειστός υπόχωρος του X, είναι αριθμήσιμα παρασυμπαγής, φυσιολογικός με $dim(G) = 0$, επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ανοιχτή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση $\{G_n\}_{n\in\omega}$. Επειδή $G \in (\sim \tau \cap \tau)$, έχουμε ότι $\{G_n\}_{n\in\omega} \subseteq (\sim \tau \cap \tau)$. □

Λήμμα 1.6.4. *Έστω X μη κενό σύνολο, Y τοπολογικός χώρος, $\Phi : X \to \mathcal{K}(Y)$ συνολοσυνάρτηση και $\{W_i\}_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του Y που είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y. Τότε η $\{\Phi^-(W_i)\}_{i\in I}$ είναι σημειακά πεπερασμένη στον X.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Για κάθε $y \in \Phi(x)$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U_y του y που τέμνει πεπερασμένα W_i. Η οικογένεια $\{U_y\}_{y\in\Phi(x)}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του $\Phi(x)$, συνεπώς, λόγω συμπάγειας, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{U}$. Έστω $V = \cup\mathcal{U}$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το V τέμνει πεπερασμένα W_i, επομένως το ίδιο ισχύει για το $\Phi(x)$, και άρα το x ανήκει σε πεπερασμένα $\Phi^-(W_i)$. $\square$

Θεώρημα 1.6.5. *Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Για κάθε $Z \subseteq X$ έστω τ_Z η σχετική τοπολογία στο Z και $\mathcal{A}(\tau_Z)$ η συλλογή από όλες τις οικογένειες ανοιχτών υποσυνόλων του Z που είναι σημειακά πεπερασμένες στο Z. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Αν ο Y είναι Πολωνικός χώρος και η $\Phi : X \to \mathcal{K}(Y)$ lsc συνολοσυνάρτηση, τότε η Φ δέχεται συνεχή επιλογή.

(ii) Κάθε σημειακά πεπερασμένο, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης, έχει ανοιχτή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.

(iii) Η $\mathcal{A}(\tau)$ ικανοποιεί την $\aleph_1$-weak reduction principle ($\sim \tau \cap \tau$)-hereditary.

(iv) Ο (X,τ) είναι φυσιολογικός με $dim(X) = 0$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $(U_t)_{t\in T}$ σημειακά πεπερασμένο ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης. Ορίζουμε $\Phi : X \to 2^{[T]} \setminus \{\emptyset\}$ ως

$$\Phi(x) = \{b \in [T] : x \in \cap_{n\in\omega} U_{b|n}\}.$$

Η Φ είναι συμπαγών τιμών και lsc από την Πρόταση 1.4.3 και ο $[T]$ είναι Πολωνικός, επομένως η Φ δέχεται συνεχή επιλογή $\phi : X \to [T]$. Θέτουμε $G_t = \phi^{-1}(V_t)$ και παρατηρούμε ότι το $(G_t)_{t\in T}$ ανοιχτή, ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $(U_t)_{t\in T}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω Y Πολωνικός χώρος και $\Phi : X \to \mathcal{K}(Y)$ lsc συνολοσυνάρτηση. Από την Πρόταση 1.3.7 υπάρχει πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης και η $\{W_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον Y για κάθε $n \in \omega$. Εφόσον η Φ είναι συμπαγών τιμών, τότε από το προηγούμενο λήμμα και το Λήμμα 1.4.1, το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ σημειακά πεπερασμένο, ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X, συνεπώς, εξ υποθέσεως, έχει μια ανοιχτή, ξένη, ακριβή εκλέπτυνση. Επομένως, λόγω του Θεωρήματος 1.4.2, η Φ δέχεται μια συνεχή επιλογή.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.5.3.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Είναι άμεσο.

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Έστω G ανοιχτό-κλειστό υποσύνολο του X και $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{A}(\tau_G)$ με $|I| \leq \aleph_0$, έτσι ώστε $G = \cup_{i\in I} U_i$. Ο G είναι φυσιολογικός ως κλειστός υπόχωρος του X και η $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα σημειακά πεπερασμένο, ανοιχτό κάλυμμα του G στη σχετική τοπολογία, συνεπώς υπάρχει ανοιχτή, ακριβής εκλέπτυνση $\{V_i\}_{i\in I}$ τέτοια, ώστε $cl_G(V_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$. Επιπλέον $dim(G) = 0$, διότι ο G είναι κλειστός υπόχωρος, επομένως υπάρχει οικογένεια $\{W_i\}_{i\in I}$ ανοιχτών-κλειστών υποσυνόλων του G (που είναι επίσης ανοιχτά-κλειστά στον X), έτσι ώστε $cl_G V_i \subseteq W_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$. Εφόσον $|I| \leq \aleph_0$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια αυστηρή καλή διάταξη $<$ στο I που είναι ισομορφική με έναν διατακτικό μικρότερο ή ίσο του ω. Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $G_i = W_i \setminus \cup_{j<i} W_j$ και παρατηρούμε ότι η $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι μια ανοιχτή-κλειστή, ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$. $\square$

1.6.2 Μετρήσιμη επιλογή για μετρήσιμη συνολοσυνάρτηση και χαρακτηρισμοί

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας είναι το θεώρημα μετρήσιμης επιλογής των Kuratowski–Ryll-Nardzewski. Στο ίδιο μήκος κύματος με το [19], θα χαρακτηρίσουμε την ύπαρξη μετρήσιμης επιλογής με όρους σχήματος δέντρου, αλλά και της κληρονομικής εκδοχής της «weak reduction principle», και έπειτα θα παρουσιάσουμε μια νέα απόδειξη του θεωρήματος των Kuratowski–Ryll-Nardzewski, καθώς και κάποιων γνωστών παραλλαγών του· βλ. [17].

Θεώρημα 1.6.6. *Έστω X μη κενό σύνολο και Σ οικογένεια υποσυνόλων του X που είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, τις πεπερασμένες τομές και $X \in \Sigma$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Αν ο Y είναι Πολωνικός και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ Σ-μετρήσιμη, τότε η Φ δέχεται Σ-μετρήσιμη επιλογή.

(ii) Κάθε Σ σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης, έχει Σ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση.

(iii) Η Σ ικανοποιεί την $\aleph_1$-weak reduction principle ($\sim \Sigma \cap \Sigma$)-hereditary.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $(U_t)_{t\in T}$ ένα Σ σχήμα δέντρου στον X, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης. Ορίζουμε $\Phi : X \to 2^{[T]} \setminus \{\emptyset\}$ ως

$$\Phi(x) = \{b \in [T] : x \in \cap_{n\in\omega} U_{b|n}\}.$$

Η Φ είναι Σ-μετρήσιμη και κλειστών τιμών από την Πρόταση 1.4.3. Επιπλέον, ο $[T]$ είναι Πολωνικός, συνεπώς η Φ δέχεται μια Σ-μετρήσιμη επιλογή $\phi : X \to [T]$. Θέτουμε $G_t = \phi^{-1}(V_t)$ και παρατηρούμε ότι το $(G_t)_{t\in T}$ είναι μια Σ ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $(U_t)_{t\in T}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω Y Πολωνικός και $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ Σ-μετρήσιμη. Από την Πρόταση 1.3.7 υπάρχει πλήρες, ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y, που το T είναι αριθμήσιμης διακλάδωσης. Από το Λήμμα 1.4.1 το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι ένα Σ σχήμα δέντρου στο X, συνεπώς έχει μια Σ ξένη, ακριβή εκλέπτυνση. Η ζητούμενη επιλογή, ως συνήθως, προκύπτει από το Θεώρημα 1.4.2.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.5.2 για $\Gamma(X) = \Sigma$ και $k = \aleph_1$. □

Θεώρημα 1.6.7. *Αν ο (X, Σ) είναι μετρήσιμος χώρος, ο Y Πολωνικός χώρος και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ Σ-μετρήσιμη συνολοσυνάρτηση, τότε η Φ δέχεται μια Σ-μετρήσιμη επιλογή.*

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 1.6.6, αρκεί να δείξουμε ότι η Σ ικανοποιεί την $\aleph_1$-weak reduction principle Σ-hereditary. Έστω $G \in \Sigma$, $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ με $|I| \le \aleph_0$, έτσι ώστε $G = \cup_{i\in I} U_i$. Θεωρούμε μια αυστηρή καλή διάταξη $<$ στο I και για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $G_i = U_i \setminus \cup_{j<i} U_j$, το οποίο προφανώς ανήκει στη σ-algebra Σ. Επομένως, η $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ είναι μια ξένη, ακριβής εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$. □

Έστω Γ μια κλάση συνόλων και $\Gamma(X)$ η οικογένεια των υποσυνόλων του X που ανήκουν στη Γ για κάθε σύνολο X. Υπενθυμίζουμε ότι η Γ ικανοποιεί τη «generalized reduction property» (βλ. [16, def. 22.14]), αν για κάθε σύνολο X και $\{A_n\}_{n\in\omega} \subseteq \Gamma(X)$ υπάρχει $\{B_n\}_{n\in\omega} \subseteq \Gamma(X)$ τέτοια, ώστε $B_n \cap B_m = \emptyset$ για $n \neq m$, $B_n \subseteq A_n$ για κάθε $n \in \omega$ και $\cup_{n\in\omega} B_n = \cup_{n\in\omega} A_n$.

Λήμμα 1.6.8. *Έστω Γ κλάση συνόλων που ικανοποιεί τη generalized reduction property και X μη κενό σύνολο τέτοιο, ώστε $\emptyset \in \Gamma(X)$. Τότε η $\Gamma(X)$ ικανοποιεί την $\aleph_1$-weak reduction principle $\Delta(X)$-hereditary.*

Απόδειξη. Έστω $G \in \Delta(X)$ και $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ τέτοιο, ώστε $|I| \leq \aleph_0$ και $G = \cup_{i\in I} U_i$. Υποθέτουμε ότι $|I| = \aleph_0$, διαφορετικά μπορούμε να προσθέσουμε το κενό σύνολο τόσες φορές, ώστε να φτάσουμε τον $\aleph_0$. Υπάρχει οικογένεια $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \Gamma(X)$ από ξένα ανά δύο στοιχεία, έτσι ώστε $G_i \subseteq U_i$ για κάθε $i \in I$ και $\cup_{i\in I} G_i = \cup_{i\in I} U_i$. □

Θεώρημα 1.6.9. *Αν ο X είναι μετρικοποιήσιμος χώρος, ο ξ διατακτικός, $1 < \xi < \omega_1$, ο Y Πολωνικός χώρος και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ $\Sigma^0_\xi(X)$-μετρήσιμη συνολοσυνάρτηση, τότε η Φ δέχεται μια $\Sigma^0_\xi(X)$-μετρήσιμη επιλογή.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι η $\Sigma^0_\xi(X)$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, τις πεπερασμένες τομές, ικανοποιεί τη «generalized reduction property» και $\emptyset, X \in \Sigma^0_\xi(X)$ (βλ. [16, prop. 22.1, thm. 22.16]). Το ζητούμενο προκύπτει από το προηγούμενο Λήμμα και το Θεώρημα 1.6.6. □

Οι κλάσεις $\Sigma^1_{2n+2}(X)$ και $\Pi^1_{2n+1}(X)$, για X Πολωνικό και $n \in \omega$, της «projective hierarchy» είναι κλειστές ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, τις πεπερασμένες τομές, ικανοποιούν τη «generalized reduction property» και περιέχουν το $\emptyset$ και τον X (βλ. [16, p. 327]), επομένως μπορούμε να αποδείξουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο τα επόμενα δύο αποτελέσματα

Θεώρημα 1.6.10. *Αν οι X, Y είναι Πολωνικοί χώροι, $n \in \omega$ και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ $\Sigma^1_{2n+2}(X)$-μετρήσιμη, τόετ η Φ δέχεται $\Sigma^1_{2n+2}(X)$-μετρήσιμη επιλογή.*

Θεώρημα 1.6.11. *Αν οι X, Y είναι Πολωνικοί χώροι, $n \in \omega$ και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ $\Pi^1_{2n+1}(X)$-μετρήσιμη, τότε η Φ δέχεται $\Pi^1_{2n+1}(X)$-μετρήσιμη επιλογή.*

1.6.3 Συνεχής επιλογή για συνεχή συνολοσυνάρτηση και θεώρημα επιλογής για υπερχώρους

Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ συνολοσυνάρτηση, που ο $\mathcal{F}(Y)$ είναι εφοδιασμένος με τη Vietoris τοπολογία. Υπενθυμίζουμε ότι η Vietoris τοπολογία παράγεται από τα σύνολα $\{A \in \mathcal{F}(Y) : A \cap U \neq \emptyset\}$ και $\{A \in \mathcal{F}(Y) : A \subseteq U\}$, όπου U είναι ένα οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο του Y. Ο Michael [20] παρατήρησε ότι το πρόβλημα της ύπαρξης μιας συνεχούς επιλογής για τη Φ μπορεί να απλοποιηθεί στα εξής δύο υποπροβλήματα: το πρώτο είναι να εξετάσουμε αν η Φ είναι συνεχής και το δεύτερο να βρούμε συνεχή $\phi : \mathcal{F}(Y) \to Y$ τέτοια, ώστε $\phi(A) \in A$ για κάθε $A \in \mathcal{F}(Y)$. Το δεύτερο υποπρόβλημα είναι γνωστό ως «hyperspace selection problem»· για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στους Repovš–Semenov [27], Gutev [10], Gutev–Nogura [12].

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι ο X είναι τοπολογικός χώρος και ο $\mathcal{D}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(X)$. Μια συνεχής $\phi : \mathcal{D} \to X$ τέτοια, ώστε $\phi(A) \in A$ για κάθε $A \in \mathcal{D}$, συνεχής επιλογή για τον $\mathcal{D}$. Ένα γνωστό αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Choban [4] και Engelking, Heath και Michael [9] είναι το επόμενο:

> Αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος με $dim(X) = 0$, τότε υπάρχει συνεχής επιλογή για τον $\mathcal{F}(X)$.

Αυτό το αποτέλεσμα, όπως εξηγήσαμε παραπάνω (βλ. Michael [20]) δίνει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα επιλογής:

> Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος, ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος με $dim(Y) = 0$ και η $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ συνεχής, τότε η Φ δέχεται συνεχή επιλογή.

Παρακάτω, χρησιμοποιώντας τη βασική ιδέα του Θεωρήματος 1.4.2, δίνουμε μια στοιχειώδη απόδειξη του θεωρήματος επιλογής για τον $\mathcal{F}(X)$ - που όπως είπαμε είναι λύση του «hyperspace selection problem» - που βασίζεται στην έννοια του «leftmost branch» ενός δέντρου (βλ. [16, p. 9]).

Θεώρημα 1.6.12. *Έστω X πλήρως μετρικοποιήσιμος χώρος με $dim(X) = 0$. Τότε υπάρχει συνεχής επιλογή για τον $\mathcal{F}(X)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ταυτοτική $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$· δηλαδή, $\Phi(A) = A$ για κάθε $A \in \mathcal{F}(X)$. Είναι προφανές ότι η Φ είναι συνεχής. Από την Πρόταση 1.3.7 υπάρχει ανοιχτό-κλειστό, ξένο σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον X. Από το Λήμμα 1.4.1 το $(\Phi^-(W_t))_{t\in T}$ είναι ανοιχτό-κλειστό σχήμα δέντρου στον X. Υποθέτουμε ότι το T είναι ένα δέντρο στο σύνολο I και θεωρούμε την καλή διάταξη $\leq$ στο I. Για κάθε $A \in \mathcal{F}(X)$ ορίζουμε το κλαδεμένο υποδέντρο $T_A = \{t \in T : A \in \Phi^-(W_t)\}$. Σε κάθε $A \in \mathcal{F}(X)$ αντιστοιχούμε το «leftmost branch» $b_A \in [T_A]$· αυτό σημαίνει ότι $b_A(n) \leq t(n)$ για κάθε $n \in \omega$ και $t \in T_A$ με $|t| = n$. Ορίζουμε $\phi : \mathcal{F}(X) \to X$ ως $\{\phi(A)\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_A|n}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής επιλογή της Φ. Έστω $A \in \mathcal{F}(X)$ και W μια ανοιχτή περιοχή του $\phi(A)$. Εφόσον το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες, υπάρχει $n_0 \in \omega$ τέτοιο, ώστε $\phi(A) \in W_{b_A|n_0} \subseteq W$. Έστω

$$T_A^n = \{t \in T_A : |t| = n\} \text{ για κάθε } n \in \omega$$

και

$$\mathcal{U} = \cap_{n\leq n_0}\{B \in \mathcal{F}(X) : B \subseteq \cup_{t\in T_A^n} W_t \quad \& \quad B \cap W_{b_A|n} \neq \emptyset\}.$$

Εφόσον $\Phi(A) = A$, παρατηρούμε ότι $A \cap W_t \neq \emptyset$, αν, και μόνο αν, $t \in T_A$. Επιπλέον, $\{W_t : |t| = n\}$ είναι κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$, συνεπώς $A \subseteq \cup_{t\in T_A^n} W_t$ και $A \cap W_{b_A|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \leq n_0$. Επομένως, το $\mathcal{U}$ είναι μια ανοιχτή περιοχή του A (στη Vietoris τοπολογία). Επιπλέον, από τον ορισμό του «leftmost branch» και το γεγονός ότι η $\{W_t : |t| = n\}$ ένα κάλυμμα του X από ξένα ανά δύο στοιχεία για κάθε $n \leq n_0$, έχουμε ότι $b_B|n_0 = b_A|n_0$ για κάθε $B \in \mathcal{U}$. Συνεπώς, $\phi(B) \in W_{b_A|n_0} \subseteq W$ για κάθε $B \in \mathcal{U}$, και άρα η ϕ είναι συνεχής. Μένει να δείξουμε ότι η ϕ είναι επιλογή της Φ.Έστω $A \in \mathcal{F}(X)$. Από τον ορισμό του b_A έχουμε ότι $A \in \Phi^{-}(W_{b_A|n})$ για κάθε $n \in \omega$, ισοδύναμα $\Phi(A) \cap W_{b_A|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$. Όμως η $\{W_{b_A|n} : n \in \omega\}$ είναι μια βάση περιοχών του $\phi(A)$ και η Φ είναι κλειστών τιμών, άρα $\phi(A) \in \Phi(A)$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Ch.D. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed., Springer (Berlin, Heidelberg, 2006).

[2] S.A. Argyros, A. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. 151 (2002), 207-226.

[3] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. 219 (2012), 1-14.

[4] M.M. Choban, *Many-valued mappings and Borel sets I*, Trans. Moscow Math. Soc. 22 (1970), 258-280.

[5] Z. Denkowski, S. Migórski, N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Springer (New York, 2003).

[6] S. Ditor, *Averaging operators in C(S) and lower semicontinuous sections of continuous maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 175 (1973), 195-208.

[7] S. Ditor, R. Haydon, *On absolute retracts, P(S), and complemented subspaces of* $\mathcal{C}(D^{\omega_1})$, Studia Math. 56 (1976), 243-251.

[8] R. Engelking, *General Topology*, PWN (Warszawa, 1977).

[9] R. Engelking, R.W. Heath and E. Michael, *Topological well-ordering and continuous selections*, Invent. Math. 6 (1968), 150-158.

[10] V. Gutev, *Selections and Hyperspaces*, in Recent Progress in General Topology III (eds K. P. Hart, J. van Mill and P. Simon), Atlantis Press (2014), 535–579.

[11] V. Gutev, *Completeness, sections and selections*, Set-Valued Anal. 15 (2007), 275-295.

[12] V. Gutev, T. Nogura, *Selection problems for hyperspaces*, in Open Problems in Topology II (ed. E. Pearl), Elsevier (Amsterdam, 2007), 161–170.

[13] R. Haydon, *On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(0-dim)*, Studia Math. 52 (1974), 23-31.

[14] R. Haydon, *Embedding* D^{τ} *in Dugundji spaces, with an application to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Studia Math. 56 (1976), 229-242.

[15] S. Hu, N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer (Dordrecht, 1997).

[16] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer (New York, 1995).

[17] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 13 (1965), 397-403.

[18] G. Mägerl, *A unified approach to measurable and continuous selections*, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 443-452.

[19] A. Maitra, B.V. Rao, *Selection theorems and the reduction principle*, Trans. Amer. Math. Soc. 202 (1975), 57-66.

[20] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951) 152-182.

[21] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. (2) 63 (1956), 361-382.

[22] E. Michael, *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 233-238.

[23] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J 26 (1959), 647-651.

[24] E. Michael, C. Pixley, *A unified theorem on continuous selections*, Pacific J. Math. 87 (1980), 187-188.

[25] J. van Mill, J. Pelant, R. Pol, *Selections that characterize topological completeness*, Fund. Math. 149 (1996), 127-141.

[26] D. Repovš, P.V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer (Dordrecht, 1998).

[27] D. Repovš, P.V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, in Recent Progress in General Topology II (eds M. Huˇsek and J. van Mill), North Holland (Amsterdam, 2002), 423–461.

[28] V. Valov, *On a theorem of Arvanitakis*, Mathematika 59 (2013), 250-256.

[29] S. Willard, *General Topology*, Dover (New York, 2004) (republication).

[30] T. Yamauchi, *On a simultaneous selection theorem*, Studia Math. 215 (2013), 1-9.

Κεφάλαιο 2

Μετασυμπάγεια σε έναν υπερχώρο συμπαγών υποσυνόλων

2.1 Εισαγωγή

Ένα από τα κλασικά θέματα στη μελέτη των υπερχώρων ενός χώρου X είναι ο προσδιορισμός της κλάσης στην οποία ανήκει ο υπερχώρος, δεδομένου ότι ο X ανήκει σε μια συγκεκριμένη κλάση, και αντίστροφα.

Για έναν χώρο Hausdorff X συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(X)$ (αντ. $\mathcal{K}(X)$) την οικογένεια των μη κενών κλειστών (αντ. συμπαγών) υποσυνόλων του X, και με τ_V (αντ. τ_V^-, τ_V^+) τη Vietoris τοπολογία (αντ. κάτω Vietoris τοπολογία, άνω Vietoris τοπολογία). Όσον αφορά τον υπερχώρο των συμπαγών υποσυνόλων, είναι γνωστό από τον Michael [9] ότι ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V)$ είναι συμπαγής, και ο X είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Σχετικά με τον υπερχώρο των κλειστών υποσυνόλων, ο Keesling [6] απέδειξε ότι η συμπάγεια ενός regular T_1 χώρου X είναι ισοδύναμη με τη συμπάγεια, με την παρασυμπάγεια και τη μετασυμπάγεια του $(\mathcal{F}(X), \tau_V)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την κάτω Vietoris τοπολογία. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η τοπολογία χρησιμοποιείται στον ορισμό των κάτω ημισυνεχών συνολοσυναρτήσεων, οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στα θεωρήματα επιλογής του Michael (βλ. [10]). Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμς ότι ο αν X είναι παρασυμπαγής, τότε ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ είναι μετασυμπαγής (Θεώρημα 2.3.14). Για να καταφέρουμε να δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα, θα επεκτείνουμε πρώτα το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael ([11, Theorem 1.1]) ως εξής: αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος και η $\Phi : (\mathcal{K}(X), \tau_V^-) \to \mathcal{F}(Y)$ κάτω ημισυνεχής, τότε η Φ δέχεται άνω ημισυνεχή επιλογή $\Psi : (\mathcal{K}(X), \tau_V^+) \to \mathcal{K}(Y)$, η οποία με τη σειρά της δέχετα κάτω ημισυνεχή επιλογή $\Theta : (\mathcal{K}(X), \tau_V^-) \to \mathcal{K}(Y)$ (Θεώρημα 2.3.11).Στο τέλος του κεφαλαίου θα κάνουμε κάποιες τελικές παρατηρήσεις για την κάτω Vietoris τοπολογία σχετικά με τη συμπάγεια και τα διαχωριστικά αξιώματα.

2.2 Συμβολισμός

Κάθε τοπολογικός χώρος, εκτός από τους υπερχώρους, θα θεωρείται Hausdorff.

2.2.1 Υπερχώροι

Για χώρο X και $U \subseteq X$ θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$2^X = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset\}$,

$\mathcal{F}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ κλειστό στον } X\}$,

$\mathcal{K}(X) = \{A \in 2^X : A \text{ συμπαγές στον } X\}$,

$\mathcal{K}_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$,

$< U >^- = \{A \in \mathcal{F}(X) : A \cap U \neq \emptyset\}$,

$< U >^+ = \{A \in \mathcal{F}(X) : A \subseteq U\}$.

Οι τοπολογίες που θα θεωρήσουμε στον $\mathcal{F}(X)$ είναι η κάτω Vietoris, που θα συμβολίζεται με τ_V^-, και η οποία έχει ως υποβάση την οικογένεια $\{< U >^- : U \subseteq X \text{ open}\}$, και η άνω Vietoris, που θα συμβολίζεται με τ_V^+, και η οποία έχει ως υποβάση την οικογένεια $\{< U >^+ : U \subseteq X \text{ open}\}$. Στον $\mathcal{K}(X)$ θα θεωρήσουμε τις αντίστοιχες σχετικές τοπολογίες που επάγονται από τον $\mathcal{F}(X)$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέπουμπε στα [4, Definition 1.20] και [9].

2.2.2 Συνολοσυναρτήσεις

Έστω $(X, \tau), (Y, \sigma)$ τοπολογικοί χώροι, $V \subseteq Y$, και $\Phi : X \to 2^Y$ συνολοσυνάρτηση. Θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

$\Phi^-(V) = \{x \in X : \Phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$,

$\Phi^+(V) = \{x \in X : \Phi(x) \subseteq V\}$.

Για τον σκοπό αυτού του κεφαλαίου θα υιοθετήσουμε την ακόλουθη ορολογία:

η Φ είναι lsc (κάτω ημισυνεχής) ή τ-lsc (για να δώσουμε έμφαση στην τοπολογία του X), αν $\Phi^-(V) \in \tau$ για κάθε $V \in \sigma$,

η Φ είναι usc (άνω ημισυνεχής) ή τ-usc, αν $\Phi^+(V) \in \tau$ για κάθε $V \in \sigma$.

Μια συνολοσυνάρτηση της μορφής $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ θα καλείται κλειστών τιμών·αν έχουμε $\mathcal{K}(Y)$ αντί για $\mathcal{F}(X)$, τότε η Φ θα καλείται συμπαγών τιμών. Υπενθυμίζουμε ότι η εικόνα ενός $A \subseteq X$ μέσω της $\Phi : X \to 2^Y$ ορίζεται ως $\Phi(A) = \cup_{x \in A} \Phi(x)$, και η κλειστών τιμών συνολοσυνάρτηση $\overline{\Phi} : X \to 2^Y$ ορίζεται ως $\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi(x)}$. Για $Z \subseteq X$, συμβολίζουμε με $\Phi|_Z$ τον περιορισμό της Φ στο Z. Μια Ψ λέμε ότι είναι επιλογή για τη Φ, αν $\Psi(x) \subseteq \Phi(x)$ για κάθε $x \in X$. Για παραπάνω λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [4, 12].

2.2.3 Δέντρα

Όλα τα δέντρα σε αυτό το κεφάλαιο θα θεωρούνται ύψους ω. Για τους βασικούς ορισμούς παραπέμπουμε στον Kechris [5, Chapters 1.2.A, 1.2.B]·εδώ θα προσθέσουμε κάποιους συμβολισμούς. Έστω $(T, \sqsubseteq)$ δέντρο στο μη κενό σύνολο A. Το μήκος κάθε $t \in T$ συμβολίζεται με $|t|$. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε το σύνολο των αμέσως επόμενων του t ως

$$succ(t) = \{s \in T : t \sqsubseteq s \text{ και } |s| = |t| + 1\}.$$

Λέμε ότι το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης αν ο πληθάριθμος του $succ(t)$ είναι αυστηρά μικρότερος από $\aleph_0$ για κάθε $t \in T$. Λέμε ότι το T είναι κλαδεμένο, αν $succ(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$. Το σώμα του T ορίζεται ως

$$[T] = \{b \in A^\omega : b|n \in T \text{ για κάθε } n \in \omega\},$$

και είναι προφανώς μη κενό όταν το T είναι κλαδεμένο. Για κάθε $t \in T$ θέτουμε

$$V_t = \{b \in [T] : t \sqsubseteq b\}.$$

Είναι γνωστό ότι η οικογένεια $\{V_t : t \in T\}$ είναι βάση από ανοιχτά-κλειστά για την τοπολογία του $[T]$, καθώς και ότι το $[T]$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

2.3 Αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων

2.3.1 Προαπαιτούμενα

Σε αυτή την υποενότητα θα υπενθυμίσουμε ό,τι χρειαζόμαστε από τα σχήματα δέντρου που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Ορισμός 2.3.1. *Ένα σχήμα δέντρου σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια οικογένεια $(W_t)_{t\in T}$ υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:*

(i) το T είναι κλαδεμένο δέντρο,

(ii) $W_\emptyset = X$ και $W_t = \cup\{W_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$.

Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και τα W_t είναι ανοιχτά (κλειστά), τότε το $(W_t)_{t\in T}$ καλείται ανοιχτό (αντ. κλειστό) σχήμα δέντρου X.

Λήμμα 2.3.2. *Έστω $(W_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου στο μη κενό σύνολο X. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) $W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubseteq s$.

(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$.

(iii) Το $\{W_t : |t| = n\}$ είναι κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$.

Παρατήρηση 2.3.3. *Είναι εύκολο να δούμε, χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα, ότι, όποτε είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$, περνώντας στο κλαδεμένο υποδέντρο $T_F = \{b|n : b \in F; n \in \omega\}$, όπου $F = \{b \in [T] : W_{b|n} \neq \emptyset \; \forall n \in \omega\}$.*

Λήμμα 2.3.4. *Έστω X παρασυμπαγής και $(W_t)_{t\in T}$ ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X. Τότε υπάρχει κλειστό σχήμα δέντρου $(F_t)_{t\in T}$ και ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X τέτοια ώστε οι οικογένειες $\{F_t : |t| = n\}$ και $\{U_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένες στον X και $U_t \subseteq F_t \subseteq W_t$ για κάθε $t \in T$.*

Ορισμός 2.3.5. *Λέμε ότι το σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον τοπολογικό χώρο X είναι πλήρες, αν για κάθε $b \in [T]$ τέτοιο ώστε $W_{b|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $x_b \in X$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\cap_{n\in\omega} W_{b|n} = \{x_b\}$,

(ii) *η οικογένεια $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x_b.*

Παρατήρηση 2.3.6. *Εφόσον το $(W_t)_{t\in T}$ είναι σχήμα δέντρου, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Αλλά το $(W_t)_{t\in T}$ είναι επίσης πλήρες, συνεπώς $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Επομένως, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$ και η οικογένεια $\{W_{b_x|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x. Παρ' όλα αυτά, όπως εξηγήσαμε στην Παρατήρηση 3.2.3, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δούμε οτι για κάθε $b \in [T]$ υπάρχει $x_b \in X$ τέτοιο ώστε $\{x_b\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n}$ και η οικογένεια $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x_b.*

Πρόταση 2.3.7. *Αν ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο ώστε $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$.*

2.3.2 Συνολοσυναρτήσεις επιλογής συμπαγών τιμών με πεδίο ορισμού $\mathcal{K}(X)$

Σε αυτή την υποενότητα θα ξεκινήσουμε με δύο λήμματα που θα χρησιμοποιήσουμε στο Θεώρημα 2.3.11, στο οποίο θα κατασκευάσουμε συνολοσυναρτήσεις επιλογής συμπαγών τιμών με πεδίο ορισμού τον $\mathcal{K}(X)$. Θα συνδυάσουμε ιδέες από τα [7, 8, 2, 1]. Επίσης, μοιραζόμαστε παρόμοιες ιδέες με τα [11, 3].

Λήμμα 2.3.8. *Έστω A συμπαγές υποσύνολο του X, $(G_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου στον X και $T_A = \{t \in T : G_t \cap A \neq \emptyset\}$. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) *Το T_A είναι κλαδεμένο δέντρο.*

(ii) *Αν η $\{G_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$, τότε το T_A είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.*

(iii) *Αν τα G_t είναι κλειστά, τότε $[T_A] = \cup_{x\in A}[T_x]$.*

Απόδειξη. (i) Το γεγονός ότι $G_s \subseteq G_t$ για οποιαδήποτε $t \sqsubseteq s$ δίνει ότι το T_A είναι υποδέντρο του T. Το γεγονός ότι $G_t = \cup\{G_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$ δίνει ότι το T_A είναι κλαδεμένο.

(ii) Έστω $n \in \omega$. Επειδή η $\{G_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X, για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x που τέμνει το πολύ πεπερασμένα στοιχεία της $\{G_t : |t| = n\}$. Αυτές οι ανοιχτές περιοχές σχηματίζουν ένα ανοιχτό κάλυμμα του συμπαγούς A, επομένως υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathcal{V}$. Παρατηρούμε ότι το $\cup\mathcal{V}$ τέμνει το πολύ πεπερασμένα στοιχεία της $\{G_t : |t| = n\}$, και το ίδιο ισχύει για το A, συνεπώς το T_A είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

(iii) Ο εγκλεισμός $\cup_{x\in A}[T_x] \subseteq [T_A]$ είναι προφανής. Έστω $b \in [T_A]$. Λόγω της συμπάγειας του A μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $(\cap_{n\in\omega} G_{b|n}) \cap A \neq \emptyset$, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $b \in [T_x]$. □

Ορισμός 2.3.9. *Λέμε ότι η $\Phi : \mathcal{K}(X) \to 2^Y$ είναι αύξουσα αν $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$ οποτεδήποτε $A \subseteq B$, και κανονική αν $\Phi(A) = \cup_{x\in A}\Phi(\{x\})$ για κάθε $A \in \mathcal{K}(X)$.*

Λήμμα 2.3.10. *Έστω X, Y χώροι Hausdorff, $(G_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου στον X, $(W_t)_{t\in T}$ πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου στον Y και $\Phi : \mathcal{K}(X) \to 2^Y$ που ορίζεται ως*

$$\Phi(A) = \cup\{\cap_{n\in\omega} W_{b|n} : b \in [T_A]\},$$

όπου $T_A = \{t \in T : G_t \cap A \neq \emptyset\}$. Τα επόμενα ισχύουν:

(i) Αν η $\{G_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$, τότε η Φ είναι συμπαγών τιμών.

(ii) Η Φ είναι αύξουσα.

(iii) Αν τα G_t είναι κλειστά, τότε η Φ είναι κανονική.

(iv) Αν τα G_t είναι ανοιχτά, τότε η Φ είναι τ_V^--lsc.

(v) Αν τα G_t είναι κλειστά και η $\{G_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$, τότε η Φ είναι τ_V^+-usc.

Απόδειξη. (i) Αρχικά η Φ είναι καλά ορισμένη, διότι από το προηγούμενο λήμμα το T_A είναι κλαδεμένο, και άρα $[T_A] \neq \emptyset$.

Έστω $A \in \mathcal{K}(X)$ και $\mathcal{U}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $\Phi(A)$. Επειδή το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες, για κάθε $b \in [T_A]$ υπάρχουν $y_b \in Y$, $n_b \in \omega$ και $U_b \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε

$$\{y_b\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n} \subseteq W_{b|n_b} \subseteq U_b.$$

Παρατηρούμε ότι το $\{W_{b|n_b} : b \in [T_A]\}$ είναι ένα ανοιχτό υποκάλυμμα του $\mathcal{U}$, και το $\{V_{b|n_b} : b \in [T_A]\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του $[T_A]$. Από το προηγούμενο λήμμα το $[T_A]$ είναι συμπαγές, επομένως υπάρχει, έστω $\{V_{t_i} : i = 1, \ldots, k\}$, ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{V_{b|n_b} : b \in [T_A]\}$. Αρκεί να προσέξουμε ότι το $\{W_{t_i} : i = 1, \ldots, k\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{W_{b|n_b} : b \in [T_A]\}$.

(ii) Παρατηρούμε ότι $[T_A] \subseteq [T_B]$, οποτεδήποτε $A \subseteq B$.

(iii) Το ζητούμενο προκύπτει από τον ορισμό της Φ και το γεγονός ότι $[T_A] = \cup_{x\in A}[T_x]$.

(iv) Έστω $t \in T$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\Phi^-(W_t)$ είναι ανοιχτό. Έστω $A \in \Phi^-(W_t)$ και $y \in \Phi(A) \cap W_t$. Επειδή το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες ανοιχτό, υπάρχουν $b_y \in [T_A]$ και $n_y \in \omega$ τέτοια ώστε

$$\{y\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_y|n} \subseteq W_{b_y|n_y} \subseteq W_t \quad (*) .$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το

$$< G_{b_y|n_y} >^- = \{B \in \mathcal{K}(X) : G_{b_y|n_y} \cap B \neq \emptyset\}$$

είναι μια ανοιχτή περιοχή του A ως προς την τ_V^-. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα δείξουμε ότι $< G_{b_y|n_y} >^- \subseteq \Phi^-(W_t)$. Έστω ότι $G_{b_y|n_y} \cap B \neq \emptyset$. Υπάρχει $b \in [T_B]$ τέτοιο ώστε $b|n_y = b_y|n_y$, άρα από την $(*)$ έχουμε $\cap_{n\in\omega} W_{b|n} \subseteq W_t$, επομένως $\Phi(B) \cap W_t \neq \emptyset$.

(v) Έστω W ανοιχτό υποσύνολο του Y. Θα δείξουμε ότι το $\Phi^+(W)$ είναι ανοιχτό. Έστω $A \in \Phi^+(W)$. Επειδή το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες, για κάθε $b \in [T_A]$ υπάρχει $y_b \in Y$ και $n_b \in \omega$ τέτοια ώστε

$$\{y_b\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n} \subseteq W_{b|n_b} \subseteq W \quad (*)\ .$$

Η οικογένεια $\{W_{b|n_b} : b \in [T_A]\}$ σχηματίζει ένα ανοιχτό κάλυμμα του $\Phi(A)$, το οποίο είναι συμπαγές από το προηγούμενο λήμμα, επομένως μπορούμε να περάσουμε σε ένα υποκάλυμμα $\{W_{t_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $k \in \omega$ τέτοιο ώστε $|t_i| = k$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει U_x, ανοιχτή περιοχή του x, τέτοια ώστε να τέμνει πεπερασμένα το πολύ στοιχεία της $\{G_t : |t| = k\}$. Λόγω της συμπάγειας του A μπορούμε να βρούμε ανοιχτό $U \subseteq X$ τέτοιο, ώστε να τέμνει πεπερασμένα το πολύ στοιχεία της $\{G_t : |t| = k\}$ και $A \subseteq U$. Θέτουμε

$$T_U^k = \{t \in T : G_t \cap U \neq \emptyset \text{ και } |t| = k\} \text{ και } T_A^k = \{t \in T_A : |t| = k\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το

$$O = U \cap (X \setminus \cup\{G_t : t \in T_U^k \setminus T_A^k\})$$

είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $A \subseteq O$. Συγκεκριμένα, το O τέμνει ακριβώς αυτά τα στοιχεία της $\{G_t : |t| = k\}$ που τέμνει και το A. Θέτουμε

$$< O >^+ = \{B \in \mathcal{K}(X) : B \subseteq O\},$$

το οποίο είναι ανοιχτή περιοχή του A ως προς τη τ_V^+. Θα δείξουμε ότι $< O >^+ \subseteq \Phi^+(W)$. Έστω $B \in < O >^+$ και $b \in [T_B]$. Επειδή $B \subseteq O$, έχουμε ότι $b|k \in T_A^k$. Μπορούμε να βρούμε $b' \in [T_A]$ τέτοιο ώστε $b'|k = b|k$, επομένως, λόγω της $(*)$, έχουμε ότι $W_{b'|k} \subseteq W$, και άρα $\cap_{n\in\omega} W_{b|n} \subseteq W$. Επειδή το $b \in [T_B]$ ήταν τυχαίο, ισχύει ότι $\Phi(B) \subseteq W$. $\square$

Θεώρημα 2.3.11. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος και $\Phi : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ τ_V^--lsc. Τότε η Φ δέχεται μια τ_V^+-usc κανονική συμπαγών τιμών επιλογή Ψ, η οποία με τη σειρά της δέχεται μια τ_V^--lsc αύξουσα συμπαγών τιμών επιλογή Θ.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι X και $(\mathcal{K}_1(X), \tau_V^-)$ είναι ομοιομορφικοί, άρα η $\Phi|_{\mathcal{K}_1(X)}$ είναι lsc και, επιπλέον, μπορούμε να γράφουμε $\Phi(x)$ αντί για $\Phi(\{x\})$. Από την Πρόταση 3.2.6 υπάρχει πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο ώστε $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$. Εύκολα βλέπουμε ότι το $(\Phi|_{\mathcal{K}_1(X)})^-(W_t)$ είναι ένα ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X ([7, Lemma 4.1]). Από το Λήμμα 2.3.4 υπάρχει κλειστό σχήμα δέντρου $(F_t)_{t\in T}$ και ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X έτσι ώστε οι οικογένειες $\{F_t : |t| = n\}$ και $\{U_t : |t| = n\}$ να είναι τοπικά πεπερασμένες στον X για κάθε $n \in \omega$, και $U_t \subseteq F_t \subseteq (\Phi|_{\mathcal{K}_1(X)})^-(W_t)$ για κάθε $t \in T$. Για κάθε $A \in \mathcal{K}(X)$ ορίζουμε

$$S_A = \{t \in T : A \cap U_t \neq \emptyset\} \text{ και } T_A = \{t \in T : A \cap F_t \neq \emptyset\},$$

και μετά $\Theta : \mathcal{K}(X) \to 2^Y$ και $\Psi : \mathcal{K}(X) \to 2^Y$ ως

$$\Theta(A) = \cup\{\cap_{n\in\omega} W_{b|n} : b \in [S_A]\} \text{ και } \Psi(A) = \cup\{\cap_{n\in\omega} W_{b|n} : b \in [T_A]\}.$$

Από το προηγούμενο λήμμα βλέπουμε ότι η Ψ είναι συμπαγών τιμών κανονική τ_V^+-usc, και η Θ συμπαγών τιμών αύξουσα τ_V^--lsc.

Μένει να δείξουμε ότι η Ψ είναι επιλογή για τη Φ, και η Θ επιλογή για την Ψ. Το τελευταίο είναι προφανές, διότι $[S_A] \subseteq [T_A]$. Έστω $A \in \mathcal{K}(X)$. Θα δείξουμε ότι $\Psi(A) \subseteq \Phi(A)$. Έστω $y \in \Psi(A)$. Από το Λήμμα 2.3.8 έχουμε ότι $[T_A] = \cup_{x\in A}[T_x]$, επομένως υπάρχει $x \in A$ και $b \in [T_x]$ τέτοια ώστε $\{y\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n}$. Επειδή το $(W_t)_{t\in T}$ είναι πλήρες, η $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του y. Αλλά, εξ ορισμού του T_x έχουμε ότι $x \in F_{b|n}$ για κάθε $n \in \omega$, και άρα, εξ ορισμού του $(F_t)_{t\in T}$, ισχύει ότι $\Phi(x) \cap W_{b|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$. Επομένως $y \in \Phi(x)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι η Φ είναι αύξουσα, απ' το οποίο συνεπάγεται ότι $\Phi(x) \subseteq \Phi(A)$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι υπάρχουν $B, C \in \mathcal{K}(X)$ τέτοια ώστε $B \subseteq C$ και $\Phi(B) \nsubseteq \Phi(C)$. Υπάρχει $z \in \Phi(B)$ τέτοιο ώστε $z \notin \Phi(C)$. Έστω το ανοιχτό υποσύνολο $V = Y \setminus \Phi(C)$. Επειδή η Φ είναι τ_V^--lsc και $B \in \Phi^-(V)$, υπάρχει

$$\cap_{i=1}^n < G_i >^- = \{D \in \mathcal{K}(X) : D \cap G_i \neq \emptyset \ \forall i = 1, \dots, n\},$$

ανοιχτή βασική περιοχή του B ως προς τη τ_V^-, τέτοια ώστε $\cap_{i=1}^n < G_i >^- \subseteq \Phi^-(V)$. Αλλά επειδή $B \subseteq C$, μπορούμε να δούμε ότι $C \in \cap_{i=1}^n < G_i >^-$, και άρα $C \in \Phi^-(V)$, ισοδύναμα $\Phi(C) \cap V \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Πόρισμα 2.3.12. *Το Θεώρημα 2.3.11 επάγει το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael ([11, Theorem 1.1]).*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι οι (σχετικές) τοπολογίες τ_V^- και τ_V^+ ταυτίζονται στο $\mathcal{K}_1(X)$, και ότι ο X είναι ομοιομορφικός με τον $(\mathcal{K}_1(X), \tau_V^-)$. Έστω $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ lsc, όπου ο X είναι παρασυμπαγής και ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος. Έστω $\Phi^* : \mathcal{K}(X) \to 2^Y$ που ορίζεται ως $\Phi^*(A) = \Phi(A)$. Μπορούμε να δούμε ότι $(\Phi^*)^-(V) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \cap \Phi^-(V) \neq \emptyset\}$ για κάθε $V \subseteq Y$ ανοιχτό, επομένως, επειδή η Φ είναι lsc, έπεται ότι η Φ^* είναι τ_V^--lsc, και άρα η $\overline{\Phi^*}$ είναι επίσης τ_V^--lsc. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.3.11 και να περιορίσουμε τις συνολοσυναρτήσεις επιλογής που προκύπτουν στο $\mathcal{K}_1(X)$. $\square$

2.3.3 Μετασυμπάγεια στον $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$

Τώρα είμαστε σχεδόν έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα. Το επόμενο λήμμα είναι μέρος ενός γνωστού θεωρήματος (βλ. [3] και [12, B.1.2]).

Λήμμα 2.3.13. *Ας υποθέσουμε ότι ο τοπολογικός χώρος X (όχι απαραίτητα Hausdorff) είναι τέτοιος ώστε για κάθε πλήρως μετρικοποιήσιμο Y και κάθε lsc $\Phi : X \to \mathcal{F}(Y)$ υπάρχει lsc συμπαγών τιμών επιλογή για τη Φ. Τότε ο X είναι μετασυμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Έστω επίσης $\Phi : X \to \mathcal{F}(I)$ που ορίζεται ως $\Phi(x) = \{i \in I : x \in U_i\}$, όπου το I είναι διακριτός χώρος. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\Phi^-(\{i\}) = U_i$ για κάθε $i \in I$, άρα η Φ είναι lsc. Επειδή ο I είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, εξ υποθέσεως η Φ δέχεται μια συμπαγών τιμών lsc επιλογή Ψ. Θέτουμε $G_i = \Psi^-(\{i\})$ και παρατηρούμε ότι το $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι σημειακά πεπερασμένη (βλ. [7, Lemma 6.4]) ανοιχτή εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$. □

Θεώρημα 2.3.14. *Αν ο X είναι παρασμπαγής, τότε ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ είναι μετασυμπαγής.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πλήρως μετρικοποιήσιμο Y και κάθε τ_V^--lsc $\Phi : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ υπάρχει τ_V^--lsc συμπαγών τιμών επιλογή για τη Φ. Αλλά αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.3.11. □

Ας κάνουμε μερικές τελικές παρατηρήσεις σχετικά με την κάτω Vietoris τοπολογία. Μπορούμε να αποδείξουμε, ακριβώς όπως στο [9, Theorem 4.2], η συμπάγεια του X επάγει ότι ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ είναι συμπαγής, και αντίστροφα. Παρατηρούμε επίσης ότι ένας Hausdorff χώρος X εμφυτεύεται στον $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ ως κλειστός υπόχωρος, επομένως η παρασυμπάγεια ή η μετασυμπάγεια του τελευταίου κληρονομείται από τον X. Τα ίδια ισχύουν για τον $(\mathcal{F}(X), \tau_V^-)$.

Παρ' όλα αυτά, ακόμα και αν αυτή η τοπολογία παίζει κεντρικό ρόλο στα θεωρήματα επιλογής, είναι πολύ φτωχή ως προς τα διαχωριστικά αξιώματα. Για παράδειγμα, μπορούμε πολύ εύκολα να ελέγξουμε ότι κάθε υπόχωρος του $(\mathcal{F}(X), \tau_V^-)$ είναι T_0, αλλά ο $(\mathcal{F}(X), \tau_V^-)$ είναι T_1 αν και μόνο αν X είναι τετριμμένος, και ο $(\mathcal{K}(X), \tau_V^-)$ είναι T_1 αν και μόνο αν ο X είναι μονοσύνολο.

Βιβλιογραφία

[1] S.A. Argyros and A. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. 151 (2002), 207-226.

[2] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. 219 (2012), 1-14.

[3] M.M. Choban, *Many-valued mappings and Borel sets II*, Trans. Moscow Math. Soc. 23 (1970), 286-309.

[4] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer (Dordrecht, 1997).

[5] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer (New York, 1995).

[6] J. Keesling, *Normality and properties related compactness in hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 760-766.

[7] F. Mavridis, *A unified approach to continuous, measurable selections and selections for hyperspaces*, Mathematika 64 (2018), 607-627.

[8] F. Mavridis, *A generalization of Michael selection theorem*, to appear.

[9] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[10] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[11] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), 647-651.

[12] D. Repovš and P.V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer (Dordrecht, 1998).

Κεφάλαιο 3

Μια γενίκευση του Θεωρήματος Επιλογής του Michael

3.1 Εισαγωγή

Με 2^Y θα συμβολίζουμε την οικογένεια των μη κενών υποσυνόλων του Y. Υπενθυμίζουμε ότι η $\Phi : X \to 2^Y$ είναι κάτω ημισυνεχής, αν το $\Phi^-(V)$ είναι ανοιχτό για κάθε $V \subseteq Y$ ανοιχτό, όπου $\Phi^-(V) = \{x \in X : \Phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$·για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [4]. Αν το E είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$, συμβολίζουμε με $\overline{conv}[A]$ την κλειστή κυρτή θήκη του A.

Ας ξεκινήσουμε με το πιο γνωστό θεώρημα επιλογής του Michael.

Θεώρημα 3.1.1 ([8, 12]). *Έστω X παρασυμπαγής, Y χώρος Banach και $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to Y$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[\Phi(x)]$ για κάθε $x \in X$.*

Ο Michael [8] παρατήρησε ότι το Θεώρημα 3.1.1 παραμένει αληθές αν ο Y είναι χώρος Fréchet, αλλά δεν ισχύει εν γένει αν ο Y δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Παρ' όλα, καταβάλλοντας σημαντική προσπάθεια, κατάφερε στο [11] (βλ. επίσης [10, Theorem 1.2]) να χαλαρώσει την υπόθεση της μετρικοποιησιμότητας του Y ως εξής.

Θεώρημα 3.1.2 ([11, 12]). *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμο υποσύνολο (με τη σχετική τοπολογία) ενός τοπικά κυρτού χώρου E στον οποίο η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του E είναι συμπαγές, και $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to E$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[\Phi(x)]$ για κάθε $x \in X$.*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε την παρακάτω γενίκευση του Θεωρήματος 3.1.2 (και άρα του Θεωρήματος 3.1.1)·η απόδειξη είναι στοιχειώδης.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, E τοπικά κυρτός τέτοιος ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου του E είναι συμπαγές και $f : Y \to E$ συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to E$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.*

Ως άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.1, μπορούμε να αναιρέσουμε την υπόθεση της πληρότητας στον Y με τους ακόλουθους τρόπους.

Πόρισμα 3.1.4. *Έστω X παρασυμπαγής, Y μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, E χώρος Fréchet και $f : Y \to E$ συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to E$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.*

Πόρισμα 3.1.5. *Έστω X παρασυμπαγής, Y μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, E πλήρης τοπικά κυρτός χώρος και $f : Y \to E$ ομοιόμορφα συνεχής ως προς κάποια συμβατή μετρική στον Y. Τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to E$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.*

Υπενθυμίζουμε ότι η κλάση των τοπικά κυρτών χώρων στους οποίους η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς υποσυνόλου είναι συμπαγές περιέχει τους πλήρεις (κάθε Cauchy δίκτυο συγκλίνει) τοπικά κυρτούς χώρους, καθώς και τους χώρους Banach με την ασθενή (Krein-Šmulian theorem) ή την ασθενή* τοπολογία (Alaoglu theorem). Υπενθυμίζουμε επίσης ότι κάθε χώρος Fréchet, και άρα κάθε χώρος Banach με τη norm τοπολογία, είναι πλήρης τοπικά κυρτός χώρος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1, 3, 7, 13].

3.2 Προετοιμασία για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1

3.2.1 Προαπαιτούμενα για δέντρα

Όλα τα δέντρα θα θεωρούνται ύψους ω. Για τους βασικούς ορισμούς παραπέμπουμε στον Kechris [5, Chapters 1.2.A, 1.2.B]·εδώ θα προσθέσουμε κάποιους επιπλέον συμβολισμούς. Έστω $(T, \sqsubseteq)$ δέντρο στο μη κενό σύνολο A. Για $t, s \in T$ γράφουμε $t \perp s$, αν ούτε $t \sqsubseteq s$ ούτε $s \sqsubseteq t$, άρα το $\neg(t \perp s)$ σημαίνει είτε $t \sqsubseteq s$ είτε $s \sqsubseteq t$. Το μήκος κάθε $t \in T$ συμβολίζεται με $|t|$. Για κάθε $n \in \omega$ ορίζουμε το n-επίπεδο του T ως $T^n = \{t \in T : |t| = n\}$. Για κάθε $t \in T$ και $k < \omega$ ορίζουμε το σύνολο των k-επόμενων του t ως

$$succ_T^k(t) = \{s \in T : t \sqsubset s \text{ και } |s| = |t| + k\}.$$

Αν είναι ξεκάθαρο ποιο είναι το δέντρο T στο οποίο αναφερόμαστε, θα γράφουμε απλά $succ^k(t)$. Για $k = 1$ γράφουμε $succ(t)$. Ανάλογα, για κάθε $t \in T$ ορίζουμε το σύνολο των αμέσως προηγούμενων του t ως

$$pred_T(t) = \{s \in T : s \sqsubset t \text{ και } |t| = |s| + 1\}.$$

Λέμε ότι το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, αν ο πληθάριθμος του $succ(t)$ είναι αυστηρά μικρότερος του $\aleph_0$ για κάθε $t \in T$. Λέμε ότι το T είναι κλαδεμένο, αν

$succ(t) \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$. Το σώμα του T ορίζεται ως

$$[T] = \{b \in A^\omega : b|n \in T \text{ για κάθε } n \in \omega\},$$

και είναι προφανώς μη κενό αν το T είναι κλαδεμένο. Για κάθε $t \in T$ θέτουμε

$$V_t = \{b \in [T] : t \sqsubset b\}.$$

Είναι γνωστό ότι η οικογένεια $\{V_t : t \in T\}$ είναι μια βάση που αποτελείται από ανοιχτά-κλειστά για την τοπολογία του $[T]$, και ότι το $[T]$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης.

3.2.2 Σχήμα δέντρου

Σε αυτή την υποενότητα θα υπενθυμίσουμε ό,τι χρειαζόμαστε από τα σχήματα δέντρου που ορίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

Ορισμός 3.2.1. *Ένα σχήμα δέντρου σε ένα μη κενό σύνολο X είναι μια οικογένεια $(W_t)_{t\in T}$ υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:*

(i) το T είναι κλαδεμένο δέντρο,

(ii) $W_\emptyset = X$ και $W_t = \cup\{W_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$.

Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και τα W_t είναι ανοιχτά (κλειστά), τότε το $(W_t)_{t\in T}$ καλείται ανοιχτό (αντ. κλειστό) σχήμα δέντρου X.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $(W_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου στο μη κενό σύνολο X. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) $W_s \subseteq W_t$ για κάθε $t \sqsubseteq s$.

(ii) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$.

(iii) Το $\{W_t : |t| = n\}$ είναι κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$.

Παρατήρηση 3.2.3. *Είναι εύκολο να δούμε, χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα, ότι, όποτε είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$, περνώντας στο κλαδεμένο υποδέντρο $T_F = \{b|n : b \in F; n \in \omega\}$, όπου $F = \{b \in [T] : W_{b|n} \neq \emptyset\ \forall n \in \omega\}$.*

3.2.3 Πλήρες σχήμα δέντρου

Ορισμός 3.2.4. *Λέμε ότι το σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον τοπολογικό χώρο X είναι πλήρες, αν για κάθε $b \in [T]$ τέτοιο ώστε $W_{b|n} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \omega$ υπάρχει $x_b \in X$ τέτοιο ώστε:*

(i) $\cap_{n\in\omega} W_{b|n} = \{x_b\}$,

(ii) η οικογένεια $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x_b.

Παρατήρηση 3.2.5. *Εφόσον το $(W_t)_{t\in T}$ είναι σχήμα δέντρου, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $x \in \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Αλλά το $(W_t)_{t\in T}$ είναι επίσης πλήρες, συνεπώς $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$. Επομένως, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $b_x \in [T]$ τέτοιο ώστε $\{x\} = \cap_{n\in\omega} W_{b_x|n}$ και η οικογένεια $\{W_{b_x|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x. Παρ' όλα αυτά, όπως εξηγήσαμε στην Παρατήρηση 3.2.3, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δούμε οτι για κάθε $b \in [T]$ υπάρχει $x_b \in X$ τέτοιο ώστε $\{x_b\} = \cap_{n\in\omega} W_{b|n}$ και η οικογένεια $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του x_b.*

Πρόταση 3.2.6. *Αν ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y τέτοιο ώστε $W_t \neq \emptyset$ για κάθε $t \in T$.*

3.2.4 Σχήμα δέντρου συναρτήσεων

Ορισμός 3.2.7.

*(1) Ένα **σχήμα δέντρου συναρτήσεων** σε έναν τοπολογικό χώρο X είναι μια οικογένεια $(\lambda_t)_{t\in T}$ συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $[0,1]$ τέτοια ώστε:*

(i) το T είναι κλαδεμένο δέντρο,

(ii) η οικογένεια $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$,

(iii) $\lambda_\emptyset = 1$ και $\lambda_t = \sum\{\lambda_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$.

*(2) Ένα σχήμα δέντρου συναρτήσεων $(\lambda_t)_{t\in T}$ στον X **κυριαρχείται** από το σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X, αν $supp(\lambda_t) \subseteq U_t$ για κάθε $t \in T$.*

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του σχήματος δέντρου συναρτήσεων.

Λήμμα 3.2.8. *Έστω $(\lambda_t)_{t\in T}$ ένα σχήμα δέντρου συναρτήσεων στον τοπολογικό χώρο X. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) $\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ^n(t)\} = \lambda_t(x)$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \omega$,

(ii) $\sum\{\lambda_t(x) : |t| = n\} = 1$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \omega$,

(iii) το $(supp(\lambda_t))_{t\in T}$ είναι ένα κλειστό σχήμα δέντρου στον X,

(iv) η $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι ένα τοπικά πεπερασμένο κλειστό κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$.

Απόδειξη.

(i) Θα αποδείξουμε την ισότητα με επαγωγή στον ω. Έστω $x \in X$. Η ισότητα ισχύει για $n = 0$ ($succ^0(t) = \{t\}$) και για $n = 1$ (εξ ορισμού του σχήματος δέντρου συναρτήσεων). Υποθέτουμε ότι ισχύει $n = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$. Επειδή $succ^{k+1}(t) = \cup\{succ(r) : r \in succ^k(t)\}$, έχουμε

$$\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ^{k+1}(t)\} = \sum\left\{\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(r)\} : r \in succ^k(t)\right\}.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την ισότητα για $n = 1$ και $n = k$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum\Big\{\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(r)\} : r \in succ^k(t)\Big\} &= \sum\{\lambda_r(x) : r \in succ^k(t)\} \\ &= \lambda_t(x).\end{aligned}$$

(ii) Παρατηρούμε ότι $\sum\{\lambda_t(x) : |t| = n\} = \sum\{\lambda_t(x) : t \in succ^n(\emptyset)\}$, επομένως η ζητούμενη ισότητα προκύπτει άμεσα από το (i) και το γεγονός ότι $\lambda_\emptyset = 1$.

(iii) Εξ ορισμού του σχήματος δέντρου συναρτήσεων, έχουμε $\lambda_\emptyset = 1$ και $\lambda_t = \sum\{\lambda_s : s \in succ(t)\}$. Απ' την πρώτη ισότητα προκύπτει ότι $\lambda_\emptyset^{-1}(0,1] = supp(\lambda_\emptyset) = X$, ενώ απ' τη δεύτερη $\lambda_t^{-1}(0,1] = \cup\{\lambda_s^{-1}(0,1] : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$. Όμως η $\{\lambda_s^{-1}(0,1] : s \in succ(t)\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X (η $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη εξ ορισμού), συνεπώς

$$\begin{aligned}supp(\lambda_t) = cl_X(\lambda_t^{-1}(0,1]) &= cl_X(\cup\{\lambda_s^{-1}(0,1] : s \in succ(t)\}) \\ &= \cup\{cl_X(\lambda_s^{-1}(0,1]) : s \in succ(t)\} \\ &= \cup\{supp(\lambda_s) : s \in succ(t)\}.\end{aligned}$$

(iv) Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε, με επαγωγή, ότι από κάθε σχήμα δέντρου στον X μπορούμε να πάρουμε ένα κάλυμμα του X σε κάθε επίπεδο του δέντρου. Συνεπώς, απ' το (iii) έχουμε ότι η $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι ένα κλειστό κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$· είναι επίσης τοπικά πεπερασμένη στον X εξ ορισμού του σχήματος δέντρου συναρτήσεων. □

3.2.5 Παρασυμπάγεια και σχήμα δέντρου συναρτήσεων

Λήμμα 3.2.9. *Αν ο X είναι παρασυμπαγής Hausdorff και το $(U_t)_{t\in T}$ ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X, τότε υπάρχει κλειστό σχήμα δέντρου $(F_t)_{t\in T}$ στον X τέτοιο ώστε:*

(i) $F_t \subseteq U_t$ για κάθε $t \in T$,

(ii) $F_t = \cup\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$,

(iii) η οικογένεια $\{F_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X για κάθε $n \in \omega$.

Απόδειξη. Δείτε Κεφάλαιο 1. □

Λήμμα 3.2.10. *Αν ο X είναι παρασυμπαγής Hausdorff και το $(F_t)_{t\in T}$ όπως στο προηγούμενο λήμμα, τότε υπάρχει σχήμα δέντρου συναρτήσεων $(\lambda_t)_{t\in T}$ στον X τέτοιο ώστε $supp(\lambda_t) \subseteq int_X(F_t)$ για κάθε $t \in T$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $\tilde{f}_\emptyset : X \to [0,1]$ ως $= 1$. Για κάθε $t \in T$ η οικογένεια $\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του παρασυμπαγούς Hausdorff υπόχωρου F_t, συνεπώς υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{f_s : s \in succ(t)\}$ στον F_t που κυριαρχείται από τη $\{int_{F_t}(F_s) : s \in succ(t)\}$. Για κάθε $t \in T$ και $s \in succ(t)$ επεκτείνουμε την f_s στον X ως εξής:

$$\tilde{f}_s(x) = \begin{cases} f_s(x) & \text{αν } x \in F_t \\ 0 & \text{αν } x \in X \setminus F_t \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι οι $\tilde{f}_s$ δεν είναι απαραίτητα συνεχείς. Για κάθε $t \in T$ ορίζουμε $\lambda_t : X \to [0,1]$ ως

$$\lambda_t(x) = \prod\{\tilde{f}_r(x) : r \sqsubseteq t\}.$$

Πρώτα θα δείξουμε ότι $supp(\lambda_t) \subseteq int_X(F_t)$ για κάθε $t \in T$. Η ζητούμενη σχέση είναι προφανής για $t = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι είναι αληθής για κάποιο $t \in T$. Θα δείξουμε ότι είναι επίσης αληθής για κάθε $s \in succ(t)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in T$ και $s \in succ(t)$ ισχύει

$$supp(\lambda_s) \subseteq supp(\lambda_t) \cap supp(f_s) \ \text{ και } \ int_X(F_t) \cap int_{F_t}(F_s) \subseteq int_X(F_s).$$

Απ' την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $supp(\lambda_t) \subseteq int_X(F_t)$, και εξ ορισμού των f_t ότι $supp(f_s) \subseteq int_{F_t}(F_s)$, συνεπώς $supp(\lambda_s) \subseteq int_X(F_s)$.

Τώρα θα δείξουμε ότι οι λ_t είναι συνεχείς. Προς τούτο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο περιορισμός της λ_t τόσο στο $X \setminus supp(\lambda_t)$ όσο και στο $int_X(F_t)$ είναι συνεχής, ότι τα δύο αυτά υποσύνολα είναι ανοιχτά στον X, και, λόγω της $supp(\lambda_t) \subseteq int_X(F_t)$, ότι η ένωσή τους είναι ο X.

Η οικογένεια $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X, επειδή $supp(\lambda_t) \subseteq F_t$ για κάθε $t \in T$ και η $\{F_t : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $n \in \omega$ (εξ υποθέσεως).

Τέλος, ισχύει ότι $\lambda_\emptyset = 1$ εξ ορισμού της $\tilde{f}_\emptyset$. Συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι $\lambda_t = \sum\{\lambda_s : s \in succ(t)\}$ για κάθε $t \in T$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον ω. Η ισότητα ισχύει για $n = 0$, εφόσον $succ^0(t) = \{t\}$. Εξ ορισμού των λ_t έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(t)\} &= \sum\left\{\prod\{\tilde{f}_r(x) : r \sqsubseteq s\} : s \in succ(t)\right\} \\
&= \sum\left\{\left(\prod\{\tilde{f}_r(x) : r \sqsubseteq t\}\right)\tilde{f}_s(x) : s \in succ(t)\right\} \\
&= \left(\prod\{\tilde{f}_r(x) : r \sqsubseteq t\}\right)\sum\{\tilde{f}_s(x) : s \in succ(t)\} \\
&= \lambda_t(x)\sum\{\tilde{f}_s(x) : s \in succ(t)\}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, η οικογένεια $\{f_s : s \in succ(t)\}$ είναι μια διαμέριση της μονάδας και $\tilde{f}_s|_{F_t} = f_s$, συνεπώς, αν $x \in F_t$, τότε

$$\sum\{\tilde{f}_s(x) : s \in succ(t)\} = \sum\{f_s(x) : s \in succ(t)\} = 1,$$

και άρα

$$\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(t)\} = \lambda_t(x).$$

Απ' την άλλη πλευρά, αν $x \in X \setminus F_t$, τότε $\tilde{f}_s(x) = 0$ για κάθε $s \in succ(t)$, συνεπώς

$$\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(t)\} = 0.$$

Όμως $\lambda_t(x) = 0$, διότι $supp(\lambda_t) \subseteq int_X(F_t) \subseteq F_t$. Άρα, αν $x \in X \setminus F_t$, τότε ισχύει πάλι ότι

$$\sum\{\lambda_s(x) : s \in succ(t)\} = \lambda_t(x).$$

$\square$

Πρόταση 3.2.11. *Ένας χώρος Hausdorff X είναι παρασυμπαγής, αν, και μόνο αν, για κάθε ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X υπάρχει σχήμα δέντρου συναρτήσεων $(\lambda_t)_{t\in T}$ που κυριαρχείται από το $(U_t)_{t\in T}$.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση της απόδειξης έπεται από τα Λήμματα 3.2.9 και 3.2.10. Η άλλη είναι προφανής. □

3.2.6 Φράχτης δέντρου και σχήμα δέντρου συναρτήσεων

Ορισμός 3.2.12. *Έστω T κλαδεμένο δέντρο, S υποσύνολο του T και $t_0 \in T$. Λέμε ότι το S είναι ένας* ***φράχτης του** T **κάτω από το*** t_0*, αν:*

(i) $t_0 \sqsubseteq s$ *για κάθε* $s \in S$,

(ii) *για κάθε* $b \in V_{t_0}$ *υπάρχει* $s \in S$ *τέτοιο ώστε* $s \sqsubset b$,

(iii) $(\forall s_1, s_2 \in S)\ (\neg(s_1 \perp s_2) \to (s_1 = s_2))$.

Στην περίπτωση που $t_0 = \emptyset$ λέμε ότι το S είναι ένας φράχτης του T. Το σύνολο όλων των φραχτών του T κάτω από το t_0 θα συμβολίζεται με $Br(T, t_0)$· αν $t_0 = \emptyset$ θα γράφουμε $Br(T)$. Τέλος, για $t \in T$ ορίζουμε $S(t) = \{s \in S : t \sqsubseteq s\}$.

Ορίζουμε στο $Br(T, t_0)$ μια μερική διάταξη $\preccurlyeq$ ως εξής:

$$S_1 \preccurlyeq S_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall s_1 \in S_1\ \forall s_2 \in S_2\ (\neg(s_1 \perp s_2) \to (s_1 \sqsubseteq s_2)).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το $(Br(T, t_0), \preccurlyeq)$ είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε μερικές βασικές ιδιότητες σχετικές με τους φράχτες δέντρων.

Λήμμα 3.2.13. *Έστω T κλαδεμένο δέντρο, $t_0 \in T$ και $S_1, S_2 \in Br(T, t_0)$ με $S_1 \preccurlyeq S_2$. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) *Αν $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα σχήμα δέντρου στο σύνολο X, τότε $W_{t_0} = \cup\{W_s : s \in S\}$ για κάθε $S \in Br(T, t_0)$.*

(ii) *Αν το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, τότε κάθε $S \in Br(T, t_0)$ είναι πεπερασμένο.*

(iii) *Για κάθε $b \in V_{t_0}$ υπάρχουν $s_1 \in S_1$ και $s_2 \in S_2$ τέτοια ώστε $t_0 \sqsubseteq s_1 \sqsubseteq s_2 \sqsubset b$.*

(iv) $S_2(s_0) \in Br(T, s_0)$ *για κάθε* $s_0 \in S_1$.

(v) *Η οικογένεια $\{S_2(s) : s \in S_1\}$ είναι ένα κάλυμμα του S_2 από ξένα ανά δύο στοιχεία.*

Απόδειξη.

(i) Έστω $S \in Br(T, t_0)$. Προφανώς $\cup\{W_s : s \in S\} \subseteq W_{t_0}$. Επομένως, έστω $x \in W_{t_0}$. Εφόσον το $(W_t)_{t\in T}$ είναι ένα σχήμα δέντρου, υπάρχει $b \in V_{t_0}$ τέτοιο ώστε $x \in W_{b|n}$ για κάθε $n \in \omega$. Επειδή το S είναι φράχτης του T κάτω t_0, υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $s \sqsubset b$, και άρα $x \in W_s$.

(ii) Έστω $S \in Br(T, t_0)$. Από το (i) έχουμε ότι $V_{t_0} = \cup\{V_s : s \in S\}$, όπου τα V_s είναι ξένα ανά δύο ανοιχτά υποσύνολα, και το V_{t_0} συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του $[T]$· το τελευταίο είναι συμπαγές ως σώμα δέντρου πεπερασμένης διακλάδωσης. Άρα, το S δεν μπορεί να είναι άπειρο.

(iii) Έστω $b \in V_{t_0}$. Επειδή τα S_1, S_2 είναι φράχτες του T κάτω απ' το t_0, υπάρχουν $s_1 \in S_1$ και $s_2 \in S_2$ τέτοια ώστε $t_0 \sqsubseteq s_1, s_2 \sqsubset b$. Όμως $S_1 \preccurlyeq S_2$ και $\neg(s_1 \perp s_2)$, συνεπώς $s_1 \sqsubseteq s_2$.

(iv) Έστω $s_0 \in S_1$. Θα ελέγξουμε τις τρεις προϋποθέσεις του Ορισμού 3.2.12. Αρχικά, είναι προφανές ότι $s_0 \sqsubseteq s$ για κάθε $s \in S_2(s_0)$. Έστω $b \in V_{s_0}$. Παρατηρούμε ότι $t_0 \sqsubseteq s_0 \sqsubset b$. Επειδή το S_2 είναι φράχτης του T κάτω απ' το t_0 και $b \in V_{t_0}$, υπάρχει $s \in S_2$ τέτοιο ώστε $t_0 \sqsubseteq s \sqsubset b$, άρα $\neg(s_0 \perp s)$. Όμως $S_1 \preccurlyeq S_2$, συνεπώς $s_0 \sqsubseteq s$, και άρα $s \in S_2(s_0)$. Τέλος, έστω $s_1, s_2 \in S_2(s_0)$ με $\neg(s_1 \perp s_2)$. Εφόσον το S_2 είναι φράχτης και τα s_1, s_2 είναι στοιχεία του, ισχύει ότι $s_1 = s_2$.

(v) Είναι προφανές ότι $\cup\{S_2(s) : s \in S_1\} \subseteq S_2$. Επομένως, έστω $t \in S_2$. Επιλέγουμε $b \in V_t$. Εφόσον $t_0 \sqsubseteq t$, έχουμε ότι $b \in V_{t_0}$. Εξ υποθέσεως το S_1 είναι φράχτης του T κάτω από το t_0, συνεπώς υπάρχει $s \in S_1$ τέτοιο ώστε $s \sqsubset b$. Απ' την τελευταία σχέση και το γεγονός ότι $t \sqsubset b$ συνεπάγεται ότι $\neg(s \perp t)$. Εξ υποθέσεως $S_1 \preccurlyeq S_2$, επομένως $s \sqsubseteq t$, και άρα $t \in S_2(s)$. Τέλος, αν $s, s' \in S_1$ με $s \neq s'$, τότε εξ ορισμού του φράχτη έχουμε ότι $s \perp s'$, και άρα $S_2(s) \cap S_2(s') = \emptyset$. $\square$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προσθέσουμε επιπλέον ιδιότητες σχετικές με το σχήμα δέντρου συναρτήσεων. Στο επόμενο λήμμα, για κάθε $x \in X$, $U \subseteq X$ και $n \in \omega$ ακολουθούμε τον εξής συμβολισμό:

$$T_x = \{t \in T : x \in supp(\lambda_t)\},$$

$$T_x^n = \{t \in T : x \in supp(\lambda_t) \text{ και } |t| = n\},$$

$$T_U = \{t \in T : U \cap supp(\lambda_t) \neq \emptyset\},$$

$$T_U^n = \{t \in T : U \cap supp(\lambda_t) \neq \emptyset \text{ και } |t| = n\}.$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι τα T_x και T_U είναι κλαδεμένα υποδέντρα του T.

Λήμμα 3.2.14. *Έστω $(\lambda_t)_{t\in T}$ σχήμα δέντρου συναρτήσεων στον τοπολογικό χώρο X. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) για κάθε $x \in X$ και $n \in \omega$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x τέτοια ώστε $T_U^k = T_x^k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$,

(ii) η οικογένεια $\{supp(\lambda_s) : s \in S\}$ είναι ένα τοπικά πεπερασμένο κλειστό κάλυμμα του X για κάθε $S \in Br(T)$,

(iii) $\lambda_t(x) = \sum_{s\in S} \lambda_s(x)$ για κάθε $t \in T$, $S \in Br(T, t)$ και $x \in X$,

(iv) $\sum_{s\in S} \lambda_s(x) = 1$ για κάθε $S \in Br(T)$ και $x \in X$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $x \in X$ και $n \in \omega$. Υπάρχει ανοιχτή περιοχή G του x τέτοια ώστε το T_G^n να είναι πεπερασένο, δεδομένου ότι η $\{supp(\lambda_t) : |t| = n\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X εξ ορισμού του σχήματος δέντρου συναρτήσεων. Θέτουμε $U = G \cap (X \setminus \cup\{supp(\lambda_t) : t \in T_G^n \setminus T_x^n\})$, που είναι μια ανοιχτή περιοχή του x, και παρατηρούμε ότι $T_U^n = T_x^n$. Επειδή τα T_U και T_x κλαδεμένα δέντρα, έχουμε ότι $T_U^k = T_x^k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$.

(ii) Αρχικά θα δείξουμε ότι η $\{supp(\lambda_s) : s \in S\}$ είναι τοπικά πεπερασμένη στον X για κάθε $S \in Br(T)$. Έστω $S \in Br(T)$ και $x \in X$. Θέτουμε $S_x = S \cap T_x$, το οποίο είναι πεπερασμένο, επειδή το T_x είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και $S_x \in Br(T_x)$ (Ορισμός 3.2.7(ii) και Λήμμα 3.2.13(ii)). Έστω $n = \max\{|s| : s \in S_x\}$. Σύμφωνα με το (i) υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x τέτοια ώστε $T_U^k = T_x^k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$. Θέτουμε $S_U = S \cap T_U$ και ισχυριζόμαστε ότι $S_U = S_x$. Προφανώς $S_x \subseteq S_U$. Επομένως, έστω $t \in S_U$. Μπορούμε να βρούμε $b \in [T_U]$ τέτοιο ώστε $t \sqsubset b$, συνεπώς $b|k \in T_x$ για κάθε $0 \leq k \leq n$. Επίσης υπάρχει $b' \in [T_x]$ τέτοιο ώστε $b|k = b'|k$ για κάθε $0 \leq k \leq n$. Εφόσον $S_x \in Br(T_x)$, υπάρχει $0 \leq k_0 \leq n$ τέτοιο ώστε $b'|k_0 \in S_x$, άρα $b|k_0 \in S_x$. Τώρα παρατηρούμε ότι τα t και $b|k_0$ είναι στοιχεία του S και ότι $\neg(t \perp b|k_0)$, συνεπώς $t = b|k_0$, και άρα $S_U = S_x$. Λόγω της τελευταίας ισότητας υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα $s \in S$ με $U \cap supp(\lambda_s) \neq \emptyset$.

Τέλος, η $\{supp(\lambda_s) : s \in S\}$ είναι κλειστό κάλυμμα του X λόγω του Λήμματος 3.2.8(iii) και του Λήμματος 3.2.13(i) για $t_0 = \emptyset$.

(iii) Έστω $t \in T$, $S \in Br(T, t)$ και $x \in X$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{s \in S} \lambda_s(x) = \sum_{s \in S_x} \lambda_s(x)$, όπου $S_x = S \cap T_x \in Br(T_x, t)$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_t(x) = \sum_{s \in S} \lambda_s(x)$ για κάθε $S \in Br(T_x, t)$.

Θα αποδείξουμε αυτή την τελευταία ισότητα με επαγωγή στο ύψος του $S \in Br(T_x, t)$, που ορίζεται ως $|S| = \max\{|s| : s \in S\}$ (το $|S|$ είναι καλά ορισμένο λόγω του Λήμματος 3.2.13(ii)). Αν $|S| = |t|$, τότε η ισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για κάθε $S \in Br(T_x, t)$ με $|S| = n$, όπου $n \geq |t|$. Έστω $S \in Br(T_x, t)$ με $|S| = n + 1$. Αν $|s| = n + 1$ για κάθε $s \in S$, τότε η ζητούμενη ισότητα προκύπτει άμεσα από την επαγωγική υπόθεση και το Λήμμα 3.2.8(i). Διαφορετικά, ορίζουμε τα σύνολα

$$S^{n+1} = \{s \in S : |s| = n + 1\},$$

$$pred_{T_x}(S^{n+1}) = \cup\{pred_{T_x}(s) : s \in S^{n+1}\},$$
$$R = (S \setminus S^{n+1}) \cup pred_{T_x}(S^{n+1}),$$

και παρατηρούμε ότι $R \in Br(T_x, t)$, $|R| = n$ και $(S \setminus S^{n+1}) \cap pred_{T_x}(S^{n+1}) = \emptyset$. Άρα, σε συνδυασμό με την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι

$$\lambda_t(x) = \sum_{s \in R} \lambda_s(x) = \sum_{s \in S \setminus S^{n+1}} \lambda_s(x) + \sum_{s \in pred_{T_x}(S^{n+1})} \lambda_s(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$S^{n+1} = \cup\{succ_{T_x}(s) : s \in pred_{T_x}(S^{n+1})\},$$

επομένως, εφόσον $\lambda_s(x) = \sum_{r\in succ(s)} \lambda_r(x)$ για κάθε $s \in pred_{T_x}(S^{n+1})$, έχουμε ότι
$$\sum_{s\in pred_{T_x}(S^{n+1})} \lambda_s(x) = \sum_{s\in S^{n+1}} \lambda_s(x).$$

Άρα,
$$\lambda_t(x) = \sum_{s\in R} \lambda_s(x) = \sum_{s\in S\setminus S^{n+1}} \lambda_s(x) + \sum_{s\in S^{n+1}} \lambda_s(x) = \sum_{s\in S} \lambda_s(x).$$

(iv) Προκύπτει άμεσα απ' το (iii) για $t = \emptyset$. □

Πρόταση 3.2.15. *Έστω X χώρος Hausdorff. Τότε ο X είναι παρασυμπαγής, αν, και μόνο αν, για κάθε ανοιχτό σχήμα δέντρου $(U_t)_{t\in T}$ στον X υπάρχει σχήμα δέντρου συναρτήσεων $(\lambda_t)_{t\in T}$ στον X τέτοιο ώστε:*

(i) *το $(\lambda_t)_{t\in T}$ κυριαρχείται από το $(U_t)_{t\in T}$,*

(ii) *η οικογένεια $\{supp(\lambda_s) : s \in S\}$ είναι τοπικά πεπερασμένο κλειστό κάλυμμα του X για κάθε $S \in Br(T)$,*

(iii) $\lambda_t(x) = \sum_{s\in S} \lambda_s(x)$ *για κάθε* $t \in T$, $S \in Br(T, t)$ *και* $x \in X$,

(iv) $\sum_{s\in S} \lambda_s(x) = 1$ *για κάθε* $S \in Br(T)$ *και* $x \in X$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.2.11 και το Λήμμα 3.2.14. □

3.3 Αποδείξεις του Θεωρήματος 4.1.1 και των Πορισμάτων 3.1.4 και 3.1.5

Proof of Theorem 4.1.1. Από το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael ([?, Theorem 1.1]), η $\overline{\Phi}$ δέχεται μια συμπαγών τιμών lsc επιλογή Ψ. Από την Πρόταση 3.2.6 υπάρχει πλήρες ανοιχτό σχήμα δέντρου $(W_t)_{t\in T}$ στον Y. Για $U_t = \Psi^-(W_t)$ εύκολα βλέπουμε ότι το $(U_t)_{t\in T}$ ανοιχτό σχήμα δέντρου στον X. Απ' την Πρόταση 3.2.15 υπάρχει σχήμα δέντρου συναρτήσεων $(\lambda_t)_{t\in T}$ στον X που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(a) $supp(\lambda_t) \subseteq U_t$ για κάθε $t \in T$,

(b) η $\{supp(\lambda_s) : s \in S\}$ είναι ένα τοπικά πεπερασμένο κλειστό κάλυμμα του X για κάθε $S \in Br(T)$,

(c) $\lambda_t(x) = \sum_{s\in S} \lambda_s(x)$ για κάθε $t \in T$, $S \in Br(T, t)$ και $x \in X$,

(d) $\sum_{s\in S} \lambda_s(x) = 1$ για κάθε $S \in Br(T)$ και $x \in X$.

Για κάθε $t \in T$ και $x \in X$, αν $x \in supp(\lambda_t)$, τότε η (a) μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ένα $y_t(x) \in \Psi(x) \cap W_t$, διαφορετικά ($x \notin supp(\lambda_t)$) επιλέγουμε $y_t(x) \in W_t$. Για κάθε $S \in Br(T)$ ορίζουμε $\phi_S : X \to E$ ως

$$\phi_S(x) = \sum_{s \in S} \lambda_s(x) g(y_s(x)) \ .$$

Η ιδιότητα (b)εγγυάται ότι η ϕ_S είναι καλά ορισμένη.

Πρώτα θα δείξουμε ότι το δίκτυο $(\phi_S)_{S \in Br(T)}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U}$ ανοιχτές περιοχές του 0_E, έτσι ώστε η $\mathcal{V}$ είναι συμμμετρική με $\mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ και η $\mathcal{W}$ είναι κυρτή συμμετρική με $\mathcal{W} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Επειδή το $(W_t)_{t \in T}$ είναι πλήρες, για κάθε $b \in [T]$ υπάρχει $y_b \in Y$ τέτοιο ώστε $\{y_b\} = \cap_{n \in \omega} W_{b|n}$ και η $\{W_{b|n} : n \in \omega\}$ είναι βάση περιοχών του y_b. Επομένως, λόγω της συνέχειας της g, για κάθε $b \in [T]$ υπάρχει $n_b \in \omega$ τέτοιο ώστε $g(W_{b|n_b}) \subseteq g(y_b) + \mathcal{V}$. Θέτουμε $I = \{b|n_b : b \in [T]\}$ και $I(b) = \{s \in I : s \sqsubset b\}$ για κάθε $b \in [T]$. Κάθε $I(b)$ είναι καλά διατεταγμένο από τη $\sqsubseteq$, επομένως θέτουμε s_b να είναι το ελάχιστο στοιχείο του $I(b)$. Θέτουμε $S_0 = \cup\{s_b : b \in [T]\}$ και παρατηρούμε ότι το S_0 είναι ένας φράχτης του T τέτοιος ώστε

$$g(W_s) \subseteq g(y_s) + \mathcal{V} \quad (*)$$

για κάθε $s \in S_0$, με τα y_s να είναι κάποια συγκεκριμένα στοιχεία του $\{y_b : b \in [T]\}$. Έστω $x \in X$ και $S \succcurlyeq S_0$. Από το Λήμμα 3.2.13(v) ισχύει ότι $S = \cup\{S(s) : s \in S_0\}$ και $S(s) \cap S(s') = \emptyset$ για διαφορετικά $s, s' \in S_0$, επομένως

$$\begin{aligned} \phi_S(x) - \phi_{S_0}(x) &= \sum_{t \in S} \lambda_t(x) g(y_t(x)) - \sum_{s \in S_0} \lambda_s(x) g(y_s(x)) \\ &= \sum_{s \in S_0} \left(\sum_{t \in S(s)} \lambda_t(x) g(y_t(x)) \right) - \sum_{s \in S_0} \lambda_s(x) g(y_s(x)). \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.2.13(iv) ισχύει ότι $S(s) \in Br(T, s)$ για κάθε $s \in S_0$, συνεπώς, εφαρμόζοντας την ιδιότητα (c), έχουμε ότι $\lambda_s(x) = \sum_{t \in S(s)} \lambda_t(x)$ για κάθε $s \in S_0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \phi_S(x) - \phi_{S_0}(x) &= \sum_{s \in S_0} \left(\sum_{t \in S(s)} \lambda_t(x) g(y_t(x)) \right) - \sum_{s \in S_0} \left(\left(\sum_{t \in S(s)} \lambda_t(x) \right) g(y_s(x)) \right) \\ &= \sum_{s \in S_0} \left(\sum_{t \in S(s)} \lambda_t(x) \Big(g(y_t(x)) - g(y_s(x)) \Big) \right). \end{aligned}$$

Επειδή το $(W_t)_{t \in T}$ είναι σχήμα δέντρου, για κάθε $s \in S_0$ και $t \in S(s)$ έχουμε ότι $W_t \subseteq W_s$, και άρα $y_t(x), y_s(x) \in W_s$. Συνεπώς, απ' την $(*)$ συνεπάγεται ότι

$g(y_t(x)) - g(y_s(x)) \in \mathcal{V} - \mathcal{V} = \mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ για κάθε $s \in S_0$ και $t \in S(s)$, και άρα

$$\begin{aligned} \phi_S(x) - \phi_{S_0}(x) &= \sum_{s\in S_0}\left(\sum_{t\in S(s)} \lambda_t(x)\Big(g(y_t(x)) - g(y_s(x))\Big)\right) \\ &\in \sum_{s\in S_0}\left(\sum_{t\in S(s)} (\lambda_t(x)\mathcal{W})\right) = \sum_{t\in S}(\lambda_t(x)\mathcal{W}). \end{aligned}$$

Τώρα, λόγω της ιδιότητας (d) και της κυρτότητας του $\mathcal{W}$ ισχύει ότι

$$\phi_S(x) - \phi_{S_0}(x) = \sum_{t\in S}(\lambda_t(x)\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}.$$

Αυτή η τελευταία σχέση ισχύει για αυθαίρετα $x \in X$ και $S \succcurlyeq S_0$, επομένως, για κάθε $x \in X$ και $S_1, S_2 \succcurlyeq S_0$ ισχύει ότι

$$\phi_{S_1}(x) - \phi_{S_2}(x) = \phi_{S_1}(x) - \phi_{S_0}(x) + \phi_{S_0}(x) - \phi_{S_2}(x) \in \mathcal{W} - \mathcal{W} = \mathcal{W} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}\ .$$

Τώρα θα δείξουμε ότι $\phi(x) \in \overline{conv}[g(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$. Παρατηρούμε ότι το $\overline{conv}[g(\Psi(x))]$ είναι συμπαγές και ότι $(\phi_S(x))_{S\in Br(T)} \subseteq \overline{conv}[g(\Psi(x))]$ για κάθε $x \in X$. Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα υποδίκτυο του $(\phi_S(x))_{S\in Br(T)}$ που συγκλίνει σε ένα $\phi(x)$. Επειδή το $(\phi_S(x))_{S\in Br(T)}$ είναι Cauchy, συγκλίνει στο $\phi(x)$ (στο ίδιο όριο με αυτό του συγκλίνοντος υποδικτύου). Όμως το $(\phi_S)_{S\in Br(T)}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy, επομένως το $(\phi_S)_{S\in Br(T)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ϕ. Ορίζουμε την $\phi : X \to E$ ως το ομοιόμορφο όριο της $(\phi_S)_{S\in Br(T)}$. Εξ ορισμού των ϕ_S και της ιδιότητας (a) ισχύει ότι $\phi(x) \in \overline{conv}[g(\Psi(x))] \subseteq \overline{conv}[g(cl_Y(\Phi(x)))] \subseteq \overline{conv}[cl_E(g(\Phi(x)))] = \overline{conv}[g(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.

Μένει να δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής. Έστω $x_0 \in X$ και $\mathcal{V}$,$\mathcal{U}$ κυρτές, συμμετρικές, ανοιχτές περιοχές του 0_E έτσι ώστε $\mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Επειδή το $(\phi_S)_{S\in Br(T)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη ϕ, υπάρχει $S_0 \in Br(T)$ τέτοιο ώστε $\phi(x) - \phi_{S_0}(x) \in \mathcal{V}$ για κάθε $x \in X$. Όπως και στην $(*)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(W_s) \subseteq g(y_s) + \mathcal{V}$ για κάθε $s \in S_0$, με τα y_s να είναι συγκεκριμένα στοιχεία του Y. Επιπλέον, λόγω της ιδιότητας (b) υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε το $S_0 \cap T_U = \{s \in S_0 : U \cap supp(\lambda_s) \neq \emptyset\}$ να είναι πεπερασμένο, όπου $T_U = \{t \in T : U \cap supp(\lambda_s) \neq \emptyset\}$. Θέτουμε $k = card(S_0 \cap T_U)$. Έστω $\mathcal{W}$ μια απορροφητική ανοιχτή περιοχή του 0_E τέτοια ώστε $\underbrace{\mathcal{W} + \cdots + \mathcal{W}}_{k\text{ times}} \subseteq \mathcal{V} \quad (**)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in U$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\phi_{S_0}(x_0) - \phi_{S_0}(x) &= \sum_{s \in S_0} \lambda_s(x_0) g(y_s(x_0)) - \sum_{s \in S_0} \lambda_s(x) g(y_s(x)) \\
&= \sum_{s \in S_0 \cap T_U} \lambda_s(x_0) g(y_s(x_0)) - \sum_{s \in S_0 \cap T_U} \lambda_s(x) g(y_s(x)) \\
&\in \sum_{s \in S_0 \cap T_U} \Big(\lambda_s(x_0)(g(y_s) + \mathcal{V})\Big) - \sum_{s \in S_0 \cap T_U} \Big(\lambda_s(x)(g(y_s) + \mathcal{V})\Big) \\
&= \sum_{s \in S_0 \cap T_U} (\lambda_s(x_0) - \lambda_s(x)) g(y_s) + \sum_{s \in S_0 \cap T_U} (\lambda_s(x_0)\mathcal{V}) - \sum_{s \in S_0 \cap T_U} (\lambda_s(x)\mathcal{V}) \\
&\subseteq \sum_{s \in S_0 \cap T_U} (\lambda_s(x_0) - \lambda_s(x)) g(y_s) + \mathcal{V} + \mathcal{V} \quad (***).
\end{aligned}$$

Εφόσον η $\mathcal{W}$ είναι απορροφητική, για κάθε $s \in S_0 \cap T_U$ υπάρχει $a_s > 0$ τέτοιο ώστε $a \cdot g(y_s) \in \mathcal{W}$ οποτεδήποτε $|a| < a_s$. Επειδή οι συναρτήσεις της οικογένειας $\{\lambda_s : s \in S_0\}$ είναι συνεχείς, για κάθε $s \in S_0 \cap T_U$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή $G_s \subseteq U$ του x_0 τέτοια ώστε $|\lambda_s(x_0) - \lambda_s(x)| < a_s$ για κάθε $x \in G_s$. Θέτουμε $G = \cap\{G_s : s \in S_0 \cap T_U\}$. Για κάθε $x \in G$ ισχύει

$$\sum_{s \in S_0 \cap T_U} (\lambda_s(x_0) - \lambda_s(x)) g(y_s) \in \sum_{s \in S_0 \cap T_U} \mathcal{W} = \underbrace{\mathcal{W} + \cdots + \mathcal{W}}_{k \text{ times}},$$

άρα, λόγω των $(**)$ και $(***)$ ισχύει ότι

$$\phi_{S_0}(x_0) - \phi_{S_0}(x) \in \underbrace{\mathcal{W} + \cdots + \mathcal{W}}_{k \text{ times}} + \mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V}.$$

Επομένως, για κάθε $x \in G$ ισχύει

$$\phi(x_0) - \phi(x) = \phi(x_0) - \phi_{S_0}(x_0) + \phi_{S_0}(x_0) - \phi_{S_0}(x) + \phi_{S_0}(x) - \phi(x) \in \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} + \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}.$$

□

Proof of Corollary 3.1.4. Έστω ρ μια συμβατή μετρική στον Y και d μια πλήρης συμβατή μετρική στον E. Τότε η μετρική σ που ορίζεται ως $\sigma(y_1, y_2) = \rho(y_1, y_2) + d(f(y_1), f(y_2))$ είναι συμβατή με τον Y και η $f : (Y, \sigma) \to (E, d)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\widetilde{Y}$ η πλήρωση του (Y, σ). Υπάρχει συνεχής επέκταση της f στον $\widetilde{Y}$, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1.1. Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνεχής $\phi : X \to E$ που προκύπτει είναι τέτοια, ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$. □

Proof of Corollary 3.1.5. Ανάλογα με την παραπάνω απόδειξη, θεωρούμε τη συνεχή επέκταση της f στην πλήρωση του Y και έπειτα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.1. □

Βιβλιογραφία

[1] Ch.D. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed., Springer (Berlin, Heidelberg, 2006).

[2] S.A. Argyros and A. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. 151 (2002), 207-226.

[3] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer (New York, 2001).

[4] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer (Dordrecht, 1997).

[5] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer (New York, 1995).

[6] F. Mavridis, *A unified approach to continuous, measurable selections and selections for hyperspaces*, Mathematika 64 (2018), 607-627.

[7] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer (New York, 1998).

[8] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[9] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), 647-651.

[10] E. Michael, *Three mapping theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 410-415.

[11] E. Michael, *A selection theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1404-1406.

[12] E. Michael, *A survey of continuous selections*, in Set-Valued Mappings, Selections and Topological Properties of 2^X (eds W.M. Fleischman), Springer (Berlin, Heidelberg, 1970), 54-58.

[13] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, 2nd ed., CRC Press (New York, 2011).

Κεφάλαιο 4

Θεωρήματα επιλογής και επέκτασης

4.1 Εισαγωγή

Ένα από τα κλασικά προβλήματα στην τοπολογία είναι η συνεχής επέκταση συνεχών συναρτήσεων. Δηλαδη, αν οι X και E είναι τοπολογικοί χώροι και το A κλειστό υποσύνολο του X, θα θέλαμε να γνωρίζουμε υπό ποιες προϋποθέσεις κάθε συνεχής $f : A \to E$ μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχή $\widetilde{f} : X \to E$, τουτέστιν $\widetilde{f}|_A = f$ (για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [10, 28]). Σε αυτό το κεφάλαιο, εκτός και αν διατυπωθεί ρητώς κάποια άλλη υπόθεση, θα θεωρούμε ότι ο χώρος X είναι παρασυμπαγής, το A κλειστό υποσύνολο του X και ο E τοπικά κυρτός χώρος.

Υπό αυτές τις συνθήκες, ο Arens απέδειξε ([2, Theorem 4.1]) ότι τέτοιες επεκτάσεις είναι εφικτές οποτεδήποτε ο E είναι Fréchet. Σίγουρα, το Θεώρημα Tietze-Urysohn μπορεί επίσης να εφορμοστεί οποτεδήποτε ο E είναι της μορφής $\mathbb{R}^I$ για οποιοδήποτε I (βλ. [12]).

Άλλος τρόπος να πετύχουμε επεκτάσεις είναι συγχρόνως μέσω ενός γραμμικού τελεστή επέκτασης $S : C(A, E) \to C(X, E)$, τουτέστιν η $S(f)$ είναι συνεχής επέκταση της f. Στις περιπτώσεις που μπορούμε μεμονωμένα να επεκτείνουμε κάθε $f \in C(A, E)$, μπορούμε φυσιολογικά να ορίσουμε έναν γραμμικό τελεστή επέκτασης, θεωρώντας μια Hamel βάση για τον $C(A, E)$ (βλ. [13]). Αλλά, γενικά, με τον όρο «γραμμικός τελεστής επέκτασης» υπονοούμε ότι έχουμε κάποιον έλεγχο πάνω στη μεγέθυνση της εικόνας της επεκτεταμένης $S(f)$ σε σχέση με την αρχική f, το οποίο δεν είναι εφικτό με έναν τελεστή που ορίζεται με τον προηγούμενο τρόπο. Το πιο αντιπροσωπευτικό αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση είναι το λεγόμενο Θεώρημα Επέκτασης Dugundji (βλ. [8, 2, 22] και [5, 17]), σύμφωνα με το οποίο αν ο X ανήκει στην υποκλάση των μετρικοποιήσιμων χώρων, τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής επέκτασης $S : C(A, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(X) \subseteq conv[f(A)]$ (το $conv[f(A)]$ συμβολίζει την κυρτή θήκη του $f(A)$)· επιπλέον, ο S είναι ισομορφισμός (ως προς την pointwise, την uniform και την compact-open τοπολογία), και στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο S περιορισμένος στον $C_b(A, E)$ (υπόχωρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων) είναι ισομετρία ως προς τη supremum νόρμα.

Το ανάλογο του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji για μεγαλύτερες ή διαφορετικές κλάσεις απ' αυτή των μετρικοποιήσιμων χώρων μελετήθηκε στα [2, 6, 4, 14, 18, 13, 15, 26]. Εμείς θα σημειώσουμε τον Borges [4] που απέδειξε ότι αν ο X είναι stratifiable χώρος, τότε υπάρχει γραμμικός συνεχής (pointwise, uniform, compact-open) τελεστής επέκτασης $S : C(A,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(X) \subseteq conv[f(A)]$. Υπενθυμίζουμε ότι η κλάση των stratifiable χώρων περιέχει την κλάση των μετρικοποιήσιμων και περιέχεται στην κλάση των παρασυμπαγών. Ο Stares [26] απέδειξε το αντίστοιχο Θεώρημα του Borges για πραγματικές συναρτήσεις (χωρίς τη συνέχεια του τελεστή) για ακόμα μεγαλύτερη κλάση, η οποία, όμως, περιέχεται επίσης στην κλάση των παρασυμπαγών. Εν τέλει, το Θεώρημα Επέκτασης Dugundji δεν ισχύει στην κλάση των παρασυμπαγών (βλ. [2, 7]), ακόμα και αν ο X είναι hereditarily paracompact linearly ordered χώρος και το A είναι κλειστό διαχωρίσιμο μετρικοποιήσιμο υποσύνολο του X (βλ. [13]). Εντούτοις, οι Lutzer και Martin [18] έδειξαν ότι υπάρχει γραμμικός τελεστής επέκτασης $S : C(A) \to C(X)$ τέτοιος ώστε $S(f)(X) \subseteq conv[f(A)]$, δοθέντος ότι το A είναι κλειστό μετρικοποιήσιμο G_δ υποσύνολο ενός collectionwise normal χώρου $X\cdot$ αυτή η περίπτωση βεβαίως περιλαμβάνει τους παρασυμπαγείς χώρους X.

Ένα άλλο βασικό πρόβλημα στην τοπολογία είναι αυτό των συναρτήσεων συνεχούς επιλογής. Τουτέστιν, αν οι X, Y είναι τοπολογικοί χώροι και η $\Phi : X \to 2^Y$ συνολοσυνάρτηση (το 2^Y συμβολίζει την οικογένεια των μη κενών υποσυνόλων του Y), θα θέλαμε να γνωρίζουμε υπό ποιες συνθήκες υπάρχει συνεχής επιλογή για τη Φ, δηλαδή μια συνεχής $\phi : X \to Y$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \Phi(x)$ (για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1, 16, 9]). Το πιο αντιπροσωπευτικό θεώρημα επιλογής είναι λεγόμενο Θεώρημα Επιλογής του Michael ([23, Theorem 3.2"]), σύμφωνα με το οποίο αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y Fréchet και η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής τέτοια ώστε κάθε $\Phi(x)$ να είναι κλειστό και κυρτό, τότε υπάρχει συνεχής επιλογή για τη Φ. Ο Michael [23] παρατήρησε ότι κάθε πρόβλημα επέκτασης μπορεί να ιδωθεί ως ειδική περίπτωση ενός προβλήματος επιλογής. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η $f : A \to E$ είναι συνεχής και ας ορίσουμε την $\Phi : X \to 2^E$ ως $\Phi(x) = \{f(x)\}$ αν $x \in A$ και $\Phi(x) = E$ διαφορετικά. Τότε κάθε συνάρτηση επιλογής για τη Φ είναι μια συνεχής επέκταση της f. Επομένως, προκύπτει ότι το θεώρημα επέκτασης του Arens (που παρουσιάσαμε στην αρχή) μπορεί να ιδωθεί ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Επιλογής του Michael.

Ο Αρβανιτάκης [3] έδωσε μια κοινή γενίκευση του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji και του Θεωρήματος Επιλογής του Michael (με μικρές διαφοροποιήσεις), αποδεικνύοντας ότι αν ο X είναι παρασυμπαγής k-space, ο Y πλήρης μετρικός, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και ο E πλήρης (κάθε Cauchy δίκτυο συγκλίνει) τοπικά κυρτός, τότε υπάρχει γραμμικός συνεχής (ως προς την uniform και την compact-open τοπολογία) τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$ (το $\overline{conv}[f(\Phi(x))$ συμβολίζει την κλειστή κυρτή θήκη του $f(\Phi(x))$). Ένας τέτοιος τελεστής μπορεί να λέγεται τελεστής επιλογής (που αντιστοιχεί στην Φ), εφόσον η $S(f)$ είναι μια επιλογή για την κάτω ημισυνεχή $\overline{conv}[f \circ \Phi]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$. Αργότερα θα δούμε πώς ο τελεστής επιλογής, σύμφωνα με τον Αρβανιτάκη [3], γίνεται τελεστής επέκτασης.

Απ' όσα είδαμε μέχρι στιγμής, θέλουμε να τονίσουμε τα εξής:

(A-i) Επεκτάσεις μπορούν να επιτευχθούν συγχρόνως μέσω ενός γραμμικού τελεστή επέκτασης με καλές ιδιότητες (π.χ. Θεώρημα Επέκτασης Dugundji).

(A-ii) Επεκτάσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων επιλογής ([23]).

(A-iii) Αντίστοιχα με το (A-i), οι συναρτήσεις επιλογής μπορούν να επιτευχθούν συγχρόνως μέσω ενός γραμμικού τελεστή επέκτασης με καλές ιδιότητες ([3]).

(A-iv) Αντίστοιχα με το (A-ii), οι σύγχρονες επεκτάσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις σύγχρονων επιλογών ([3]).

(A-v) Το Θεώρημα Επέκτασης Dugundji ισχύει και για μεγαλύτερες κλάσεις απ' αυτή των μετρικοποιήσιμων χώρων ([4, 26]), αλλά όχι για την κλάση των παρασυμπαγών ([2, 7, 13]), εκτός και αν υποθέσουμε ότι (για πραγματικές συναρτήσεις χωρίς τη συνέχεια του τελεστή) ότι το A είναι κλειστό μετρικοποιήσιμο G_δ υποσύνολο του X ([18]).

Ο σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δείξουμε ότι ένα θεώρημα σύγχρονης επιλογής και ένα θεώρημα σύγχρονης επέκτασης μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος επιλογής που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και το οποίο γενικεύει το Θεώρημα Επιλογής του Michael.

Πρώτα ας θυμίσουμε μερικά προαπαιτούμενα. Λέμε ότι ένας τοπικά κυρτός χώρος E έχει την convex-compact ιδιότητα (ή ο E είναι ccp τοπικά κυρτός χώρος), αν το $\overline{conv}[K]$ είναι συμπαγές για κάθε $K \subseteq E$ συμπαγές. Η κλάση των ccp τοπικά κυρτών χώρων περιέχει τους πλήρεις (κάθε Cauchy δίκτυο συγκλίνει) τοπικά κυρτούς χώρους, όπως και τους χώρους Banach με την ασθενή τοπολογία (Krein-Šmulian theorem) ή την ασθενή* τοπολογία (Alaoglu theorem). Κάθε χώρος Fréchet, και άρα κάθε χώρος Banach με τη norm τοπολογία, είναι πλήρης τοπικά κυρτός χώρος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1, 11, 21, 25].

Θεώρημα 4.1.1 ([20]). *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, E ccp τοπικά κυρτός και $f : Y \to E$ συνεχής. Τότε υπάρχει συνεχής $\widetilde{f} : X \to E$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.*

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.1 για τη συνάρτηση εκτίμησης $e : Y \to E^{C(Y,E)}$ που ορίζεται ως $e(y)(f) = f(y)$, παίρνουμε μια συνεχή $\widetilde{e} : X \to E^{C(Y,E)}$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $\widetilde{e}(x)$ είναι γραμμικός τελεστής, και άρα η απεικόνιση $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ που ορίζεται ως $S(f)(x) = \widetilde{e}(x)(f)$ είναι γραμμικός τελεστής επίσης. Με αυτόν τον τρόπο θα δώσουμε μια απόδειξη της παρακάτω γενικότερης εκδοχής του θεωρήματος σύγχρονης επιλογής του Αρβανιτάκη· για μια άλλη προσέγγιση δείτε τα [27, 29].

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$.

(2) *Ο S είναι συνεχής, δοθέντος ότι και οι δύο χώροι $C(Y,E)$ και $C(X,E)$ είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, uniform, compact-open.*

(3) *Α ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_b(Y,E)$ είναι νόρμας ένα.*

Στην ίδια λογική θα αποδείξουμε το Θεώρημα 4.2.2, που η υπόθεση της πληρότητας του A καταρρίπτεται, αλλά, ο τελεστής επιλογής περιορίζεται στον υπόχωρο των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων και ο E στην κλάση των πλήρων τοπικά κυρτών χώρων.

Αφού εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1.1 για συγκεκριμένα E και f ($e : Y \to E^{C(Y,E)}$) για να αποκτήσουμε τον τελεστή επιλογής του Θεωρήματος 4.1.2, μπορούμε περαιτέρω να επιλέξουμε συγκεκριμένη Φ (όπως στο [3]), έτσι ώστε ο τελεστής επιλογής να γίνει τελεστής επέκτασης. Με άλλα λόγια, το παρακάτω θεώρημα σύγχρονης επέκτασης είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.1.2, και άρα μπορεί αν θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.1.1 για συγκεκριμένο E, f και Φ.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω X παρασυμπαγής, A πλήρως μετρικοποιήσιμος κλειστός υπόχωρος του X και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C(A,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) *Η $S(f)$ είναι επέκταση της f για κάθε $f \in C(A,E)$.*

(2) *$S(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(A)]$ για κάθε $f \in C(A,E)$.*

(3) *Ο S είναι ισομορφική εμφύτευση, δοθέντος ότι και οι δύο χώροι $C(A,E)$ και $S(C(A,E))$ είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, uniform, compact-open.*

(4) *Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_b(A,E)$ είναι ισομετρία.*

Ανάλογα με το Θεώρημα 4.1.3 θα αποδείξουμε το Θεώρημα 4.2.3, όπου η υπόθεση της πληρότητας του A καταρρίπτεται, αλλά ο τελεστής επέκτασης περιορίζεται στον υπόχωρο των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων και ο E στην κλάση των πλήρων τοπικά κυρτών χώρων.

Όπως σημειώσαμε παραπάνω, το ανάλογο του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji δεν ισχύει στην κλάση των παρασυμπαγών χώρων, εκτός αν (για πραγματικές συναρτήσεις χωρίς τη συνέχεια του τελεστή) το A είναι επιπλέον μετρικοποιήσιμο G_δ υποσύνολο του X. Με το επόμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το Θεώρημα 4.1.3 υποδεικνύει μια διαφορετική μερική λύση στο πρόβλημα της γενίκευσης του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji στην κλάση των παρασυμπαγών χώρων.

Παράδειγμα 4.1.4. *Έστω δύο πληθάριθμοι $\kappa \leq \aleph_0$ και $\lambda \geq \aleph_1$, και έστω $X = [0,1]^\lambda$ και $A = [0,1]^\kappa$. Σίγουρα ο X είναι παρασυμπαγής και ο A μπορεί να εμφυτευθεί φυσιολογικά ως πλήρως μετρικοποιήσιμο κλειστό υποσύνολο του X, το οποίο, όμως, δεν είναι G_δ, και άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα [18, Theorem 1]. Παρ' όλα αυτά, το Θεώρημα 4.1.3 δίνει ένα θεώρημα επέκτασης τύπου Dugundji. Σίγουρα, το ίδιο ισχύει και για την απλούστερη περίπτωση όπου $X = \{0,1\}^\lambda$ και $A = \{0,1\}^\kappa$.*

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε τα εξής:

(B-i) Αντίθετα με το (A-iii), σύγχρονες επιλογές (Θεωρήματα 4.1.2 και 4.2.2) μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις μεμονομένων επιλογών (Θεωρήματα 4.1.1 και 4.2.1 αντίστοιχα).

(B-ii) Σε συμφωνία με το (A-iv), σύγχρονες επεκτάσεις (Θεωρήματα 4.1.3 και 4.2.3) είναι ειδικές περιπτώσεις σύγχρονων επιλογών (Θεωρήματα 4.1.2 και 4.2.2), και άρα μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις μεμονωμένων επιλογών.

(B-iii) Το Θεώρημα 4.1.3 (και το Θεώρημα 4.2.3) υποδεικνύουν μια μερική λύση στο πρόβλημα της γενίκευσης του Θεωρήματος Επέκτασης Dugundji στην κλάση των παρασυμπαγών χώρων (Παράδειγμα 4.1.4). Για τη ακρίβεια, στο Θεώρημα 4.1.3 χαλαρώνουμε την υπόθεση της μετρικοποιησιμότητας του X, σε σύγκριση με το Θεώρημα Επέκτασης Dugundji, αλλά ισχυροποιούμε τις υποθέσεις στο A.

(B-iv) Δίνουμε διαγράμματα και σύντομες αποδείξεις για να δείξουμε τις συνεπαγωγές μεταξύ θεωρημάτων επιλογής και επέκτασης (Ενότητα 4.3). Χοντρικά μιλώντας, όλα τα θεωρήματα που αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να προκύψουν από το Θεώρημα 4.1.1.

(B-v) Προσθέτουμε κάποιες επιπλέον ισοδυναμίες στο Θεώρημα Επιλογής του Michael (Ενότητα 4.4).

4.2 Αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων και παραλλαγές

Σε αυτή την ενότητα πρώτα θα δείξουμε ότι τα Θεωρήματα 4.1.2 και 4.1.3 είναι ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος 4.1.1, και έπειτα θα αποδείξουμε τις παραλλαγές τους: Θεωρήματα 4.2.2 και 4.2.3 αντίστοιχα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Από το Θεώρημα επιλογής του Michael συμπαγών τιμών (βλ. [24]) υπάρχει άνω ημισυνεχής $\Psi : X \to 2^Y$ και κάτω ημισυνεχής $\Theta : X \to 2^Y$ τέτοιες ώστε $\Psi(x)$ και $\Theta(x)$ είναι συμπαγή και $\Theta(x) \subseteq \Psi(x) \subseteq \overline{\Phi}(x)$ για κάθε $x \in X$, όπου η $\overline{\Phi}$ ορίζεται ως $\overline{\Phi}(x) = \overline{\Phi(x)}$. Αυτές οι δύο συνολοσυναρτήσεις είναι χρήσιμες προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο τελεστής που θα ορίσουμε παρακάτω είναι συνεχής ως προς την compact-open τοπολογία.

Έστω $e : Y \to E^{C(Y,E)}$ η συνάρτηση εκτίμησης που ορίζεται ως $e(y)(f) = f(y)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο $E^{C(Y,E)}$ είναι ccp τοπικά κυρτός. Επειδή η e είναι συνεχής, από το Θεώρημα 4.1.1 υπάρχει συνεχής $\widetilde{e} : X \to E^{C(Y,E)}$ τέτοια ώστε $\widetilde{e}(x) \in \overline{conv}[e(\Theta(x))]$ για κάθε $x \in X$. Έστω $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ που ορίζεται ως $S(f)(x) = \widetilde{e}(x)(f)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ο S είναι καλά ορισμένος και ότι $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $e(y)$ είναι γραμμική για κάθε $y \in Y$. Το ίδιο ισχύει για την $\widetilde{e}(x)$ για κάθε $x \in X$, και απ' αυτό συνεπάγεται ότι ο S είναι γραμμικός.

Ο S είναι συνεχής ως προς την pointwise τοπολογία: Έστω $(f_a)_{a\in A}$ δίκτυο στον $C(Y,E)$ που συγκλίνει κατά σημείο στην $f \in C(Y,E)$. Θα δείξουεμ ότι $S(f_a) \to S(f)$ κατά σημείο. Εξ ορισμού του S, αρκεί να δείξουμε ότι $\widetilde{e}(x)(f_a) \to \widetilde{e}(x)(f)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $x \in X$. Προφανώς $e(y)(f_a) \to e(y)(f)$ για κάθε $y \in \Phi(x)$, επομένως $T(f_a) \to T(f)$ για κάθε $T \in conv[e(\Phi(x))]$. Επειδή $\widetilde{e}(x) \in \overline{conv}[e(\Phi(x))]$, υπάρχει δίκτυο $(T_b)_{b\in B}$ στο $conv[e(\Phi(x))]$ που συγκλίνει κατά σημείο στο $\widetilde{e}(x)$. Άρα, το $(T_b(f_a))_{b\in B}$ συγκλίνει στο $\widetilde{e}(x)(f_a)$ για κάθε $a \in A$, και το $(T_b(f_a))_{a\in A}$ συγκλίνει στο $T_b(f)$ για κάθε $b \in B$. Απ' αυτές τις δύο συγκλίσεις έπεται ότι $\widetilde{e}(x)(f_a) \to \widetilde{e}(x)(f)$.

Ο S είναι συνεχής ως προς τη uniform τοπολογία: Αρκεί να δείξουμε ότι ο S είναι συνεχής στο $0_{C(Y,E)}$. Έστω $V(X,E) = \{h \in C(X,E) : h(x) \in V\ \forall x \in X\}$ ανοιχτή (ως προς τη uniform τοπολογία) βασική περιοχή του $0_{C(X,E)}$, όπου το V είναι ανοιχτή περιοχή του 0_E. Υπάρχει κυρτή ανοιχτή περιοχή U του 0_E τέτοια ώστε $\overline{U} \subseteq V$. Παρατηρούμε ότι η ανοιχτή περιοχή $U(Y,E) = \{g \in C(Y,E) : g(y) \in U\ \forall y \in Y\}$ του $0_{C(Y,E)}$ είναι τέτοια ώστε $S(U(Y,E)) \subseteq V(X,E)$.

Ο S είναι συνεχής ως προς την compact-open τοπολογία: Πάλι, αρκεί να δείξουμε ότι ο S είναι συνεχής στο $0_{C(Y,E)}$. Έστω $V(K,E) = \{h \in C(X,E) : h(x) \in V\ \forall x \in K\}$ μια ανοιχτή (ως προς την compact-open τοπολογία) βασική περιοχή του $0_{C(X,E)}$, όπου το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X και το V ανοιχτή περιοχή του 0_E. Υπάρχει κυρτή ανοιχτή περιοχή U του 0_E τέτοια ώστε $\overline{U} \subseteq V$. Είναι γνωστό ότι η εικόνα συμπαγούς μέσω μια άνω ημισυνεχούς συνολοσυνάρτησης συμπαγών τιμών είναι συμπαγές, συνεπώς το $\Psi(K)$ είναι συμπαγές, και άρα το $U(\Psi(K),E) = \{g \in C(Y,E) : g(y) \in U\ \forall y \in \Psi(K)\}$ είναι ανοιχτή (ως προς την compact-open τοπολογία) βασική περιοχή του $0_{C(Y,E)}$. Έστω $f \in U(\Psi(K),E) = \{g \in C(Y,E) : g(y) \in U\ \forall y \in \Psi(K)\}$. Τότε για κάθε $x \in K$ έχουμε $S(f)(x) \in \overline{conv}(f(\Theta(x))) \subseteq \overline{conv}(f(\Theta(K))) \subseteq \overline{conv}(f(\Psi(K))) \subseteq \overline{U} \subseteq V$, και άρα $S(U(\Psi(K),E)) \subseteq V(K,E)$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο E είναι χώρος Banach και έστω S_b ο περιορισμός του S στον $C_b(Y,E)$. Έστω $f \in C_b(Y,E)$. Για κάθε $z \in conv[f(Y)]$ έχουμε $||z|| \leq ||f||_\infty$, άρα $||S_b(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$, και επομένως $||S_b|| \leq 1$. Όμως, παρατηρούμε ότι ο S απεικονίζει σταθερές συναρτήσεις σε σταθερές με την ίδια τιμή, άρα είναι αδύνατο να έχουμε $||S_b|| < 1$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.1, όπως στην προηγούμενη απόδειξη, για τη συνάρτηση εκτίμησης $e : A \to E^{C(A,E)}$ και την κάτω ημισυνεχή $\Phi : X \to 2^A$ που ορίζεται ως $\Phi(x) = \{x\}$ αν $x \in A$ και $\Phi(x) = A$ διαφορετικά. Ο τελεστής $S : C(A,E) \to C(X,E)$ που ορίζεται ως $S(f)(x) = \widetilde{e}(x)(f)$ είναι γραμμικός, συνεχής (pointwise, uniform, compact-open) και, επιπλέον, $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(A,E)$ και $x \in X$. Εξ ορισμού της Φ προκύπτει άμεσα ότι η $S(f)$ είναι επέκταση της f και $S(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(A)]$ για κάθε $f \in C(A,E)$. Επειδή $S(f)(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, είναι εύκολο να δούμε ότι ο S είναι 1-1 και ο S^{-1} συνεχής (pointwise, uniform, compact-open), επομένως ο S είναι ισομορφική εμφύτευση.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο E είναι χώρος Banach και έστω S_b ο περιορισμός του S στον $C_b(A,E)$. Έχουμε ήδη δει στην προηγούμενη απόδειξη ότι $||S_b(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$. Αλλά ο S_b επεκτείνει την f, συνεπώς $||f||_\infty \leq ||S_b(f)||_\infty$, και άρα ο S_b είναι ισομετρία. $\square$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι ως εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.1 μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω X παρασυμπαγής, Y μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, E πλήρης τοπικά κυρτός και $f : Y \to E$ ομοιόμορφα συνεχής ως προς κάποια συμβατή μετρική στον Y. Τότε υπάρχει συνεχής $\widetilde{f} : X \to E$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.*

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω X παρασυμπαγής, Y μετρικός, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και E πλήρης τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C_u(Y, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C_u(Y, E)$ και $x \in X$.

(2) Ο S είναι συνεχής, δοθέντος ότι και οι δύο χώροι $C(Y, E)$ και $C(X, E)$ είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, uniform.

(3) Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_{ub}(Y, E)$ (τον υπόχωρο των φραγμένων ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων) είναι νόρμας ένα.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $e_u : Y \to E^{C_u(Y,E)}$ που ορίζεται ως $e_u(y)(f) = f(y)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.2.1 και ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.2, μπορούμε να πάρουμε τον ζητούμενο τελεστή. $\square$

Το επόμενο θεώρημα προκύπτει εύκολα, όπως στην περίπτωση του Θεωρήματος 4.1.3.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω X παρασυμπαγής, A μετρικός κλειστός υπόχωρος του X και E πλήρης τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C_u(A, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) Η $S(f)$ είναι επέκταση της f για κάθε $f \in C_u(A, E)$.

(2) $S(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(A)]$ για κάθε $f \in C_u(A, E)$.

(3) Ο S είναι ισομορφική εμφύτευση, δοθέντος ότι και οι δύο χώροι $C(A, E)$ και $S(C(A, E))$ είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, uniform.

(4) Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_{ub}(A, E)$ είναι ισομετρία.

4.3 Μερικές συνεπαγωγές μεταξύ θεωρημάτων επιλογής και επέκτασης

Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε τις σχέσεις μεταξύ των θεωρημάτων επιλογής και σύγχρονης επιλογής αυτού του κεφαλαίου. Τα βέλη υποδηλώνουν συνεπαγωγή από το ένα θεώρημα στο άλλο. Ακριβώς κάτω από το διάγραμμα ακολουθούν σύντομες αποδείξεις.

$$\begin{tikzcd}
\text{Θεώρημα 4.2.1} \arrow[d, "(h)"] \arrow[dr, "(f)"] & \text{Θεώρημα 4.1.1} \arrow[l, "(a)"'] \arrow[r, leftrightarrow, "(b)"] \arrow[d, "(e)"] & \text{Θεώρημα 4.1.2} \arrow[dl, "(d)"] \arrow[dll, bend left=60, "(c)"] \\
\text{Θεώρημα 4.2.2} \arrow[r, "(g)"] & \text{Θεώρημα Επιλογής του Michael} &
\end{tikzcd}$$

(a) Μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς μια ομοιόμορφα συνεχή $f : Y \to E$ στην πλήρωση του Y.

(b) Για τη μία κατεύθυνση δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Η άλλη κατεύθυνση είναι προφανής.

(c) Έπεται άμεσα αν επεκτείνουμε συνεχώς κάθε $f \in C_u(Y, E)$ στον $\widetilde{Y}$, την πλήρωση του Y, και έπειτα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1.2 και περιορίσουμε τον S στον $C_u(\widetilde{Y}, E)$.

(d) Εφοαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.2 για $E = Y$ θεωρούμε την ταυτοτική $id_Y : Y \to Y$. Τότε η $S(id_Y)$ είναι μια συνεχής επιλογή για τη Φ.

(e) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.1 για $E = Y$ και $f = id_Y$.

(f) Ίδια με (e).

(g) Ίδια με (d).

(h) Δείτε απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2.

Στο επόμενο διάγραμμα περιλαμβάνουμε τα θεωρήματα επέκτασης και σύγχρονης επέκτασης αυτού του κεφαλαίου. Τα διακεκομμένα βέλη υποδηλώνουν ότι οι υποθέσεις των θεωρημάτων είναι ελαφρώς διαφοροποιημένες. Στο τέλος δίνουμε σύντομες αποδείξεις των συνεπαγωγών που είχαμε εξαιρέσει προηγουμένως.

$$\begin{tikzcd}
\text{Θεώρημα 4.1.1} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{Θεώρημα 4.1.2} \arrow[r, "(i)"] & \text{Θεώρημα 4.1.3} \arrow[r, dashed, "(j)"] \arrow[dr, dashed, "(k)"] & \text{Θεώρημα Επέκτασης Dugundji} \\
\text{Θεώρημα 4.2.1} \arrow[r] & \text{Θεώρημα 4.2.2} \arrow[r, "(m)"] \arrow[dr] & \text{Θεώρημα 4.2.3} \arrow[r, dashed, "(l)"] & \text{Θεώρημα επέκτασης του Arens} \\
 & & \text{Θεώρημα Επιλογής του Michael} \arrow[ur, dashed, "(n)"] &
\end{tikzcd}$$

(i) Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3.

(j) Είναι εύκολο να δούμε ότι το Θεώρημα 4.1.3 δίνει το Θεώρημα Επέκτασης Dugundji με τις επιπρόσθετες υποθέσεις ότι το A είναι πλήρως μετρικοποιήσιμο και ο E ccp.

(k) Ανάλογα, το Θεώρημα 4.1.3 δίνει το Θεώρημα επέκτασης του Arens με την επιπλέον υπόθεση ότι το A είναι πλήρως μετρικοποιήσιμο.

(l) Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι το A είναι μετρικοποιήσιμο και έστω $f : A \to E$ συνεχής. Τότε υπάρχει συμβατή μετρική στο A τέτοια ώστε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για αυτή τη μετρική εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2.3. Τότε η $S(f)$ είναι συνεχής επέκταση της f.

(m) Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3.

(n) Δείτε την εισαγωγή του κεφαλαίου.

4.4 Ένα συμπλήρωμα στο Θεώρημα Επιλογής του Michael

Τέλος, μπορούμε να προσθέσουμε μερικές επιπλέον συνεπαγωγές στο Θεώρημα Επιλογής του Michael ([23, Theorem 3.2”]).

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω X χώρος T_1. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι παρασυμπαγής.

(ii) Αν ο Y είναι χώρος Banach και η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής, τότε υπάρχει συνεχής $\phi : X \to Y$ τέτοια ώστε $\phi(x) \in \overline{conv}[\Phi(x)]$ για κάθε $x \in X$.

(iii) Αν ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και ο E ccp τοπικά κυρτός, τότε για κάθε συνεχή $f : Y \to E$ υπάρχει συνεχής $\widetilde{f} : X \to E$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.

(iv) Αν ο Y είναι μετρικός, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και ο E πλήρης τοπικά κυρτός, τότε για κάθε ομοιόμορφα συνεχή $f : Y \to E$ υπάρχει συνεχής $\widetilde{f} : X \to E$ τέτοια ώστε $\widetilde{f}(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $x \in X$.

(v) Αν ο Y είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και ο E ccp τοπικά κυρτός, γραμμικός συνεχής (pointwise, uniform, compact-open) τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$· αν ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_b(Y,E)$ είναι νόρμας ένα.

(vi) Αν ο Y είναι μετρικός, η $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και ο E πλήρης τοπικά κυρτός, τότε υπάρχει γραμμικός συνεχής (pointwise, uniform) τελεστής $S : C_u(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$· αν ο E είναι χώρος Banach, τότε ο S περιορισμένος στον $C_{ub}(Y,E)$ είναι νόρμας ένα.

Απόδειξη. Ας ελέγξουμε σύντομα ότι τα (i),(ii),(iii) και (iv) είναι ισοδύναμα. Η (i)⇒(iii) έπεται από το Θεώρημα 4.1.1· η (iii)⇒(iv) προκύπτει εύκολα αν επεκτείνουμε συνεχώς κάθε f στην πλήρωση του Y· η (iv)⇒(ii) είναι άμεση εφαρμογή για $E = Y$ και f την ταυτοτική· η (ii)⇒(i) είναι το [23, Theorem 3.2"].

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η (v)⇒(iii) και η (vi)⇒(iv) προκύπτουν άμεσα για $\widetilde{f} = S(f)$, και η (i)⇒(v) και η (i)⇒(vi) έπονται από τα Θεωρήματα 4.1.2 και 4.2.2 αντίστοιχα. □

Βιβλιογραφία

[1] Ch.D. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed., Springer (Berlin, Heidelberg, 2006).

[2] R. Arens, *Extension of functions on fully normal spaces*, Pacific J. Math. 2 (1952), 11-22.

[3] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. 219 (2012), 1-14.

[4] C. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 1-25.

[5] K. Borsuk, *Über Isomorphie Functionalräume*, Bull. Acad. Polon. Sci. Lett. (1933), 1-10.

[6] J.G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math. 11 (1961), 105-126.

[7] E. van Douwen, *Simultaneous linear extension of continuous functions*, General Topology and Appl. 5 (1975), 297-319.

[8] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.

[9] Z. Denkowski, S. Migórski and N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Springer (New York, 2003).

[10] R. Engelking, *General Topology*, PWN (Warszawa, 1977).

[11] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer (New York, 2001).

[12] O. Hanner, *Solid spaces and absolute retracts*, Ark. Mat. 1 (1951), 375-382.

[13] R. Heath and D. Lutzer, *Dugundji extension theorems for linearly ordered spaces*, Pacific J. Math. 55 (1974), 419-425.

[14] R. Heath, D. Lutzer and P. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Trans. Amer. Math. Soc, 178 (1973), 481-493.

[15] R. Heath, D. Lutzer and P. Zenor, On continuous extenders. In *Studies in Topology* (eds N. Starakas and K. Allen), Academic Press (New York, 1975).

[16] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer (Dordrecht, 1997).

[17] S. Kakutani, *Simultaneous extension of continuous functions considered as a positive linear operation*, Japan J. Math. 17 (1940), 1-4.

[18] D.J. Lutzer and H. Martin, *A note on the Dugundji extension theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 137-139.

[19] F. Mavridis, *A unified approach to continuous, measurable selections and selections for hyperspaces*, Mathematika 64 (2018), 607-627.

[20] F. Mavridis, *A generalization of Michael selection theorem*, to appear.

[21] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer (New York, 1998).

[22] E. Michael, *Some extension theorems for continuous functions*, Pacific J. Math. 3 (1953), 789-806.

[23] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[24] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), 647-651.

[25] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, 2nd ed., CRC Press (New York, 2011).

[26] I. Stares, *Concerning the Dugundji extension property*, Topology Appl. 63 (1995), 165-172.

[27] V. Valov, *On a theorem of Arvanitakis*, Mathematika 59 (2013), 250-256.

[28] S. Willard, *General Topology*, Dover (New York, 2004) (republication).

[29] T. Yamauchi, *On a simultaneous selection theorem*, Studia Math. 215 (2013), 1-9.

Κεφάλαιο 5

Ισομορφισμοί χώρων συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων

5.1 Εισαγωγή

Ο Pełczyński [24], στην παρουσίαση του θεωρήματος ισομορφισμού του Milutin (βλ. [22]), είσηγαγε τις έννοιες των regular averaging και regular extension τελεστών. Έστω K, L συμπαγείς χώροι. Ένας γραμμικός τελεστής $S : C(L) \to C(K)$ καλείται regular, αν $S(1_L) = 1_K$ και $||S|| = 1$ (ισοδύναμα, $S(1_L) = 1_K$ και ο S θετικός). Επιπλέον, αν η $\phi : L \to K$ είναι συνεχής επί (αντ. ομοιομορφική εμφύτευση), τότε ο $S : C(L) \to C(K)$ καλείται regular averaging (αντ. regular extension) τελεστής για τη ϕ, αν ο S είναι regular και $S \circ \phi^\circ = id_{C(K)}$ (αντ. $\phi^\circ \circ S = id_{C(L)}$), όπου ο $\phi^\circ : C(K) \to C(L)$ ορίζεται ως $\phi^\circ(f) = f \circ \phi$. Η ύπαρξη ενός regular averaging τελεστή δίνει ότι ο $C(K)$ είναι ισομορφικός με έναν norm-one συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(L)$, ενώ η ύπαρξη ενός regular extension τελεστή δίνει ότι ο $C(L)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με έναν norm-one συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(K)$.

Σύμφωνα με την παραπάνω ορολογία, ένα από τα κρίσιμα σημεία στην απόδειξη του Milutin για το θεώρημα ισομορφισμού είναι το λεγόμενο Λήμμα του Milutin, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει συνεχής επί $\phi : \mathcal{C} \to [0, 1]$ που δέχεται regular averaging τελεστή, όπου ο $\mathcal{C}$ συμβολίζει τον χώρο του Cantor $\{0, 1\}^\omega$. Ο Pełczyński [24] απέδειξε ότι το Λήμμα του Milutin παραμένει ορθό αν αντικαταστήσουμε το$[0, 1]$ με έναν οποιοδήποτε συμπαγή μετρικό χώρο· απέδειξε επίσης ότι αν ο K είναι γινόμενο $m > \aleph_0$ συμπαγών μετρικών χώρων, τότε υπάρχει συνεχής επί $\phi : \{0, 1\}^m \to K$ που δέχεται regular averaging τελεστή.

Ο Ditor [5] επεξέτεινε το Λήμμα του Milutin (και τη γενίκευση του Pełczyński για συμπαγείς μετρικούς) δείχνοντας ότι αν ο K είναι άπειρος συμπαγής χώρος, τότε υπάρχει ολικά μη συνεκτικός τέλειος συμπαγής χώρος L του ίδιου τοπολογικού βάρους και συνεχής επί $\phi : L \to K$ που δέχεται regular averaging τελεστή.

Ο Etcheberry [8] επεξέτεινε τους ορισμούς των regular averaging τελεστών για συνεχείς επί συναρτήσεις μεταξύ χώρων Hausdorff (όχι απαραίτητα συμπαγών) και απέδειξε το ανάλογο του Λήμματος του Milutin για Πολωνικούς χώρους: Αν ο X

είναι Πολωνικός χώρος, τότε υπάρχει συνεχής επί από έναν μηδενοδιάστατο Πολωνικό χώρο στον X που δέχεται regular averaging τελεστή. Έπειτα, ακολουθώντας παρόμοια βήματα με την απόδειξη του Pełczyński, ο Etcheberry χρησιμοποίηση το λήμμα του για να αποδείξει το ανάλογο του θεωρήματος ισομορφισμού του Milutin για Πολωνικούς χώρους: Αν ο X είναι Πολωνικός χώρος που περιέχει ένα υπεραριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο το οποίο δεν είναι τοπικά συμπαγές σε κανένα σημείο, τότε ο $C_b(X)$ είναι ισομορφικός με τον $C_b(\mathcal{N})$ ως προς τη supremum νόρμα, όπου ο $\mathcal{N}$ συμβολίζει τον χώρο του Baire ω^ω.

Αρχικά ο Ditor [6] και αργότερα ο Αργυρός και ο Αρβανιτάκης [2] έδωσαν τοπολογικούς χαρακτηρισμούς των συνεχών επί συναρτήσεων μεταξύ συγκεκριμένων κλάσεων συμπαγών χώρων που δέχονται regular averaging τελεστές. Από τον χαρακτηρισμό του Ditor συνεπάγεται ότι κάθε συνεχής ανοιχτή επί από ένα γινόμενο συμπαγών μετρικών χώρων σε έναν συμπαγή μετρικό δέχεται regular averaging τελεστή ([6, Corollary 3.5]). Από τον χαρακτηρισμό του Αργυρού και του Αρβανιτάκη ([2, Theorem 2]) συνεπάγεται ότι κάθε συνεχής επί ανοιχτή από έναν συμπαγή μετρικό σε έναν συμπαγή χώρο δέχεται regular averaging τελεστή.

Όσον αφορά τους extension τελεστές, ο Pełczyński [24] έδειξε ότι υπάρχει πάντα για κάθε εμφύτευση από ένα γινόμενο συμπαγών μετρικών σε συμπαγή χώρο, και ο Haydon [10] χαρακτήρισε τους συμπαγείς χώρους L για τους οποίους κάθε εμφύτευση από τον L σε έναν συμπαγή χώρο K δέχεται regular extension τελεστή.

Τέλος, ο Αρβανιτάκης [3] απέδειξε ένα θεώρημα σύγχρονης επιλογής, το οποίο εφήρμοσε για να γενικεύσει το θεώρημα ισομορφισμού του Milutin ως εξής: Αν ο K είναι υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικός και ο E χλωρος Banach, τότε ο $C(K, E)$ είναι ισομορφικός με τον $C(\mathcal{C}, E)$ ως προς τη supremum νόρμα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε τα εξής:

(a) Επεκτείνουμε τις έννοις των regular averaging και extension τελεστών για τελεστές της μορφής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$, όπου οι X, Y είναι χώροι Hausdorff και ο E τοπικά κυρτός χώρος (βλ. Ορισμοί 5.3.1 και 5.3.3).

(b) Στο Θεώρημα 5.3.7 αποδεικνύουμε ότι αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, η $\phi : Y \to X$ συνεχής επί τέτοια ώστε η ϕ^{-1} δέχεται κάτω ημισυνεχή συνολοσυνάρτηση επιλογής και ο E είναι τοπικά κυρτός τέτοιος ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς είναι συμπαγές, τότε υπάρχει regular averaging επί τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$, ο οποίος είναι συνεχής ως προς την pointwise, την compact-open και την uniform τοπολογία.

(c) Στο Θεώρημα 5.3.10 αποδεικνύουμε ότι αν ο X είναι παρασυμπαγής, ο Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, η $\phi : Y \to X$ ομοιομορφική εμφύτευση έτσι ώστε ο $\phi(Y)$ είναι κλειστός στον X και ο E τοπικά κυρτός τέτοιος ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς είναι συμπαγές, τότε υπάρχει regular extension τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$, ο οποίος είναι ισομορφική εμφύτευση ως προς την pointwise, την compact-open και τη uniform τοπολογία.

(d) Στο Θεώρημα 5.4.2 επεκτείνουμε το Λήμμα του Milutin δείχνοντας ότι αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικού βάρους $\kappa \geq \aleph_0$ και ο E τοπικά κυρτός τέτοιος ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς είναι συμπαγές, τότε υπάρχει συνεχής επί $\phi : \kappa^{\omega} \to X$ που δέχεται regular averaging επί τελεστή $S : C(\kappa^{\omega}, E) \to C(X, E)$, ο οποίος είναι συνεχής ως προς την pointwise, την compact-open και τη uniform τοπολογία. Στα Θεωρήματα 5.4.3 και 5.4.4 κάνουμε ανάλογες γενικεύσεις του Λήμματος του Etcheberry και του Λήμματος του Milutin αντίστοιχα.

(e) Στα Θεωρήματα 5.6.1 και 5.6.3 γενικεύουμε τα κλασικά θεωρήματα ισομορφισμού του Milutin και του Etcheberry για χώρους συναρτήσεων της μορφής $C(X, E)$, όπου ο E είναι τοπικά κυρτός έτσι ώστε η κλειστή κυρτή θήκη κάθε συμπαγούς είναι συμπαγές, και ως προς την pointwise, την compact-open και τη uniform τοπολογία.

5.2 Προαπαιτούμενα

Έστω X, Y χώροι Hausdorff. Συμβολίζουμε με 2^Y την οικογένεια των μη κενών υποσυνόλων του Y. Υπενθυμίζουμε ότι μια $\Phi : X \to 2^Y$ είναι κάτω ημισυνεχής, αν το $\Phi^-(V)$ είναι ανοιχτό για κάθε $V \subseteq Y$ ανοιχτό, όπου $\Phi^-(V) = \{x \in X : \Phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1, 11].

Λέμε ότι ένας τοπικά κυρτός χώρος E έχει την convex-compact ιδιότητα (ή ο E είναι ccp τοπικά κυρτός χώρος), αν το $\overline{conv}[K]$ είναι συμπαγές για κάθε $K \subseteq E$ συμπαγές. Η κλάση των ccp τοπικά κυρτών χώρων περιέχει τους πλήρεις (κάθε Cauchy δίκτυο συγκλίνει) τοπικά κυρτούς χώρους, όπως και τους χώρους Banach με την ασθενή τοπολογία (Krein-Šmulian theorem) ή την ασθενή* τοπολογία (Alaoglu theorem). Κάθε χώρος Fréchet, και άρα κάθε χώρος Banach με τη norm τοπολογία, είναι πλήρης τοπικά κυρτός χώρος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [1, 9, 16, 23].

Για κάθε $z \in E$ συμβολίζουμε με z_X τη σταθερή απεικόνιση που ορίζεται ως $z_X(x) = z$ για κάθε $x \in X$. Ο γραμμικός χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων από τον X στον E συμβολίζεται με $C(X, E)$· αν $E = \mathbb{R}$, τότε γράφουμε $C(X)$. Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο γραμμικός υπόχωρος όλων των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων συμβολίζεται με $C_b(X, E)$. Για κάθε τελεστή $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ συμβολίζουμε με S_b τον περιορισμό του S στον $C_b(Y, E)$. Όταν γράφουμε, για παράδειγμα, ότι ο S είναι συνεχής (pointwise, compact-open, uniformly), εννοούμε ότι ο S είναι συνεχής δοθέντος ότι και οι δύο χώροι είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, compact-open, uniform (για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [4, 8]).

Υπενθυμίζουμε ότι αν ο E τοπικά κυρτός lattice (βλ. [25]) (ή locally convex-solid Riesz στο [1]), τότε ο θετικός κώνος του E είναι κλειστό υποσύνολο. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, ο $C(X, E)$ και οι γραμμικοί του υπόχωροι είναι διατεταγμένοι χώροι· μια συνάρτηση είναι θετική αν και μόνο αν είναι θετική κατά σημείο.

5.3 Regular averaging και extension τελεστές

Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι τα Θεωρήματα 5.3.7 και 5.3.10. Η ιδέα ότι ένα θεώρημα σύγχρονης επιλογής μπορεί να δώσει averaging και extension τελεστές προέρχεται από τον Αρβανιτάκη [3].

5.3.1 Βασικοί ορισμοί

Ακολουθώντας τον Etcheberry [8], επεκτείνουμε τους ορισμούς του Pełczyński για τους regular averaging κα regular extension τελεστές (βλ. [24]) σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Ορισμός 5.3.1. *Έστω X, Y χώροι Hausdorff και E τοπικά κυρτός χώρος. Ένας γραμμικός τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ καλείται regular, αν:*

(1) $S(z_Y) = z_X$ για κάθε $z \in E$.

(2) Ο S είναι συνεχής ως προς τη uniform τοπολογία.

(3) Αν ο E είναι τοπικά κυρτός lattice, τότε ο S είναι θετικός.

(4) Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε $||S_b|| = 1$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν η $\phi : Y \to X$ είναι συνεχής και ο E τοπικά κυρτός, τότε η $\phi^\circ : C(X, E) \to C(Y, E)$ ορίζεται ως $\phi^\circ(f) = f \circ \phi$. Η επόμενη πρόταση αποδεικνύεται εύκολα.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω X,Y χώροι Hausdorff, $\phi : Y \to X$ συνεχής και E τοπικά κυρτός. Ισχύουν τα επόμενα:*

(1) Η ϕ° είναι γραμμική συνεχής (pointwise, compact-open, uniform).

(2) Αν η ϕ είναι επί, τότε η ϕ° είναι ισομορφική εμφύτευση (pointwise, uniform).

(3) Αν η ϕ είναι επί και η ϕ^{-1} δέχεται επιλογή $\Psi : X \to 2^Y$ τέτοια ώστε το $\Psi(A)$ είναι συμπαγές για κάθε $A \subseteq X$ συμπαγές, τότε η ϕ° είναι ισομορφική εμφύτευση (pointwise, compact-open, uniform).

(4) Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, η ϕ_b° (η ϕ° περιορισμένη στον $C_b(X, E)$) είναι νόρμας ένα ως προς τη supremum νόρμα.

Ορισμός 5.3.3. *Έστω X, Y χώροι Hausdorff και ο E τοπικά κυρτός.*

(i) Αν η $\phi : Y \to X$ είναι συνεχής επί, τότε ο $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ καλείται averaging τελεστής για τη ϕ, αν $S \circ \phi^\circ = id_{C(X,E)}$.

(ii) Αν η $\phi : Y \to X$ είναι ομοιομορφική εμφύτευση, τότε ο $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ καλείται extension τελεστής για τη ϕ, αν $\phi^\circ \circ S = id_{C(Y,E)}$.

5.3.2 Regular selection τελεστές

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δώσαμε μια νέα απόδειξη της ακόλουθης πιο γενικής εκδοχής του θεωρήματος σύγχρονης επιλογής του Αρβανιτάκη ([3, Theorem 1.1]).

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$.

(2) Ο S είναι συνεχής (pointwise, compact-open, uniform).

(3) Αν ο E είναι χώρος Banach, τότε $||S_b|| = 1$.

According to the next lemma, the selection operator S of Theorem 5.3.4 is, in fact, a regular operator.

Λήμμα 5.3.5. *Έστω X, Y χώροι Hausdorff, E τοπικά κυρτός και $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ γραμμικός τελεστής. Αν $S(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(Y)]$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$, τότε ο S είναι regular.*

Απόδειξη. Θα ελέγχουμε τις ιδιότητες (2)-(4) του Ορισμού 5.3.1· η ιδιότητα (1) ελέγχεται εύκολα.

(2) Αρκεί να δείξουμε ότι ο S είναι συνεχής στο $0_{C(Y,E)}$. Έστω $V(X,E) = \{h \in C(X,E) : h(x) \in V \ \forall x \in X\}$ ανοιχτή (ως προς τη uniform τοπολογία) βασική περιοχή του $0_{C(X,E)}$, όπου V μια βασική ανοιχτή περιοχή του 0_E. Υπάρχει κυρτή ανοιχτή περιοχή U του 0_E έτσι ώστε $\overline{U} \subseteq V$. Παρατηρούμε ότι η περιοχή $U(Y,E) = \{g \in C(Y,E) : g(y) \in U \ \forall y \in Y\}$ του $0_{C(Y,E)}$ είναι τέτοια ώστε $S(U(Y,E)) \subseteq V(X,E)$.

(3) Έστω $f \in C(Y,E)$ έτσι ώστε $f \geq 0_{C(Y,E)}$ και $x \in X$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $z \geq 0_E$ για κάθε $z \in conv[f(Y)]$, συνεπώς, επειδή ο θετικός κώνος του E είναι κλειστό υποσύνολο, έπεται ότι $S(f)(x) \geq 0_E$. Όμως το x ήταν τυχαίο, άρα $S(f) \geq 0_{C(X,E)}$.

(4) Έστω $f \in C_b(Y,E)$. Για κάθε $z \in conv[f(Y)]$ έχουμε $||z|| \leq ||f||_\infty$, συνεπώς $||S_b(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$, και άρα $||S_b|| \leq 1$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την (1), βλέπουμε ότι είναι αδύνατο να έχουμε $||S_b|| < 1$.

□

Επομένως, το Θεώρημα 5.3.4 μπορεί να αναδιατυπωθεί στην εξής μορφή.

Θεώρημα 5.3.6. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε:*

(1) $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$ και $x \in X$.

(2) Ο S είναι regular.

(3) Ο S είναι συνεχής (pointwise, compact-open, uniform).

5.3.3 Regular averaging τελεστές

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\phi : Y \to X$ συνεχής επί τέτοια ώστε η ϕ^{-1} δέχεται κάτω ημισυνεχή συνολοσυνάρτηση επιλογής και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε η ϕ δέχεται regular averaging συνεχή (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστή $S : C(Y, E) \to C(X, E)$.*

Απόδειξη. Έστω $\Phi : X \to 2^Y$ κάτω ημισυνεχής επιλογή για τη ϕ^{-1}. Από το Θεώρημα 5.3.6 υπάρχει regular συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\phi^{-1}(x))]$ για κάθε $f \in C(Y, E)$ και $x \in X$. Η τελευταία σχέση δίνει ότι $S \circ \phi^{\circ} = id_{C(X,E)}$ (δηλ. ο S είναι averaging), το οποίο με τη σειρά δίνει ότι ο S είναι επί. □

Πόρισμα 5.3.8. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\phi : Y \to X$ συνεχής επί ανοιχτή και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε η ϕ δέχεται regular averaging συνεχή (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστή $S : C(Y, E) \to C(X, E)$.*

Πόρισμα 5.3.9. *Έστω X, Y χώροι Fréchet, $\phi : Y \to X$ γραμμική συνεχής επί και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε η ϕ δέχεται regular averaging συνεχή (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστή $S : C(Y, E) \to C(X, E)$.*

5.3.4 Regular extension τελεστές

Θεώρημα 5.3.10. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος, $\phi : Y \to X$ ομοιομορφική εμφύτευση τέτοια ώστε το $\phi(Y)$ είναι κλειστό στον X και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε η ϕ δέχεται regular extension τελεστή $S : C(Y, E) \to C(X, E)$, ο οποίος είναι ομοιομορφική εμφύτευση (pointwise, compact-open, uniform).*

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο S_b είναι ισομετρία (supremum νόρμα).

Απόδειξη. Έστω $\Phi : X \to 2^Y$ που ορίζεται ως $\Phi(x) = \{\phi^{-1}(x)\}$ αν $x \in \phi(Y)$ και $\Phi(x) = Y$ διαφορετικά. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η Φ είναι κάτω ημισυνεχής, συνεπώς, από το Θεώρημα 5.3.6, υπάρχει συνεχής (pointwise, uniform, compact) regular τελεστής $S : C(Y, E) \to C(X, E)$ τέτοιος ώστε $S(f)(x) \in \overline{conv}[f(\Phi(x))]$ για κάθε $f \in C(Y, E)$ και $x \in X$. Έπεται από τον ορισμό της Φ ότι $S(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(Y)]$ και $S(f)(x) = f(\phi^{-1}(x))$ για κάθε $f \in C(Y, E)$ και $x \in \phi(Y)$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι ο S είναι 1-1, ο S^{-1} είναι συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) και $\phi^{\circ} \circ S = id_{C(Y,E)}$. Με άλλα λόγια, ο S είναι ισομορφική εμφύτευση και regular extension τελεστής.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο E είναι χώρος Banach και έστω $f \in C_b(Y, E)$. Επειδή ο S είναι regular, ο $S_b : C_b(Y, E) \to C_b(X, E)$ είναι νόρμας ένα, συνεπώς $||S_b(f)||_\infty \leq ||f||_\infty$. Από την άλλη πλευρά, $S(f)(x) = f(\phi^{-1}(x))$ για κάθε $x \in \phi(Y)$, άρα $||f||_\infty \leq ||S_b(f)||_\infty$. □

5.4 Επέκταση του Λήμματος του Milutin

Στο επόμενο λήμμα ακολουθούμε μια γνωστή τεχνική από την Περιγραφική Θεωρία Συνόλων (βλ. [12]).

Λήμμα 5.4.1. *Αν ο X είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικού βάρους $\kappa \geq \aleph_0$, τότε υπάρχει συνεχής ανοιχτή επί $\phi : \kappa^\omega \to X$.*

Απόδειξη. Για την απαραίτητη ορολογία σχετικά με τα δέντρα παραπέμπουμε στον Kechris [12, Chapter I.2]. Έστω $d \leq 1$ συμβατή πλήρης μετρική στον X και $\{U_i\}_{i\in\kappa}$ βάση για τον X που αποτελείται από μη κενά σύνολα. Πρώτα θα ορίσουμε με αναδρομή την οικογένεια $\{U_t : t \in \kappa^{<\omega}\}$ από υποσύνολα του X έτσι ώστε:

(i) τα U_t είναι μη κενά ανοιχτά,

(ii) $U_\emptyset = X$ και $U_t = \cup\{U_{t^\frown i} : i \in \kappa\}$ (για κάθε $t = (t_1, \ldots, t_m)$ ορίζουμε $t^\frown i = (t_1, \ldots, t_m, i)$),

(iii) $\overline{U_{t^\frown i}} \subseteq U_t$ για κάθε $i \in \kappa$,

(iv) $diam(U_t) \leq 1/|t|$, όπου το $|t|$ συμβολίζει το μήκος του t.

Θέτουμε $U_\emptyset = X$. Υποθέτουμε ότι για $m \in \omega$ έχουμε ορίσει την οικογένεια $\{U_t : t \in \kappa^m\}$ έτσι ώστε τα U_t είναι μη κενά ανοιχτά και $diam(U_t) \leq 1/m$. Για κάθε $t \in \kappa^m$ υπάρχει $S_t \subseteq \kappa$ έτσι ώστε $U_t = \cup\{U_i : i \in S_t\}$, όπου κάθε U_i είναι μη κενό ανοιχτό, $\overline{U_i} \subseteq U_t$ και $diam(U_i) \leq 1/(m+1)$. Ορίζουμε $U_{t^\frown i} = U_i$ για κάθε $t \in \kappa^m$ και $i \in S_t$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S_t = \kappa$ επαναλαμβάνοντας κάποιο U_i αρκετές φορές έτσι ώστε να φτάσουμε τον πληθάριθμο κ (επιτρέπουμε τα U_t να είναι το ίδιο σύνολο). Η αναδρομικά κατασκευασμένη οικογένεια $\{U_t : t \in \kappa^{<\omega}\}$ είναι η ζητούμενη.

Υποθέτουμε ότι το κ είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία και ο κ^ω με την τοπολογία γινόμενο. Για κάθε $t \in \kappa^{<\omega}$ θέτουμε $V_t = \{b \in \kappa^\omega : t \sqsubseteq b\}$, όπου $t \sqsubseteq b$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $b|n = t$. Υπενθυμίζουμε ότι η $\{V_t : t \in \kappa^{<\omega}\}$ είναι μια βάση για τον κ^ω που αποτελείται από ανοιχτά-κλειστά. Χρησιμοποιώντας τις (i)-(iv) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η $\phi : \kappa^\omega \to X$ που ορίζεται ως $\{\phi(b)\} = \cap_{n\in\omega}\overline{U_{b|n}} = \cap_{n\in\omega}U_{b|n}$ είναι συνεχής επί. Τέλος, η ϕ είναι ανοιχτή, επειδή $\phi(V_t) = U_t$. □

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο κ^ω είναι πλήρως μετρικοποιήσιμος τέλειος χώρος τοπολογικού βάρους κ και διάστασης κάλυψης μηδέν (συνεπώς μηδενοδιάστατος και ολικά μη συνεκτικός).

Τώρα είμαστε έτοιμοι να επεκτείνουμε το Λήμμα του Milutin για πλήρως μετρικοποιήσιμους χώρους (όχι απαραίτητα συμπαγείς), για regular averaging τελεστές μεταξύ χώρων συνεχών συναρτήσεων με τιμές σε έναν ccp τοπικά κυρτό χώρο και για διάφορες τοπολογίες.

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω X πλήρως μετρικοποιήσιμος τοπολογικού βάρους $\kappa \geq \aleph_0$ και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει συνεχής ανοιχτή επί $\phi : \kappa^\omega \to X$ η οποία δέχεται regular averaging συνεχή (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστή $S : C(\kappa^\omega, E) \to C(X, E)$.*

Απόδειξη. Ο regular averaging τελεστής έπεται από το προηγούμενο λήμμα και το Πόρισμα 5.3.8. □

Ως άμεση εφαρμογή του προηγουμένου θεωρήματος, μπορούμε να επεκτείνουμε το Λήμμα του Etcheberry ([8, Theorem C]) και το Λήμμα του Milutin ως εξής.

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω X άπειρος Πολωνικός χώρος και E ccp τοπικά κυρτός χώρος. Τότε υπάρχει συνεχής ανοιχτή επί $\phi : \mathcal{N} \to X$ η οποία δέχεται regular averaging συνεχή (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστή $S : C(\mathcal{N}, E) \to C(X, E)$.*

Μπορούμε επίσης να συνάγουμε την ακόλουθη γενίκευση του Λήμματος του Milutin.

Θεώρημα 5.4.4. *Έστω X άπειρος συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε υπάρχει συνεχής επί $\phi : \mathcal{C} \to X$ έτσι ώστε υπάρχει κάτω ημισυνεχής συνολοσυνάρτηση επιλογής για τη ϕ^{-1} και regular averaging συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστής $S : C(\mathcal{C}, E) \to C(X, E)$ για τη ϕ.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.4.1 υπάρχει συνεχής ανοιχτή επί $\xi : \omega^\omega \to X$. Επειδή η $\xi^{-1} : X \to 2^{\omega^\omega}$ είναι κάτω ημισυνεχής και κλειστών τιμών, από το θεώρημα επιλογής συμπαγών τιμών του Michael (βλ. [21]) υπάρχει άνω ημισυνεχής $\Phi : X \to 2^{\omega^\omega}$ και κάτω ημισυνεχής $\Psi : X \to 2^{\omega^\omega}$ έτσι ώστε τα $\Psi(x)$ και $\Phi(x)$ είναι συμπαγή και $\Psi(x) \subseteq \Phi(x) \subseteq \xi^{-1}(x)$ για κάθε $x \in X$. Μια άνω ημισυνεχής συνολοσυνάρτηση απεικονίζει συμπαγή σε συμπαγή, συνεπώς το $\Phi(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ω^ω, και άρα υπάρχει πεπερασμένης διακλάδωσης δέντρο $T \subseteq \omega^{<\omega}$ τέτοιο ώστε $\Phi(X) = [T]$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Ψ είναι μια κάτω ημισυνεχής συνολοσυνάρτηση από το X στο $2^{[T]}$. Επιπλέον, η $\xi|_{[T]} : [T] \to X$ είναι συνεχής επί και $\Psi(x) \subseteq (\xi|_{[T]})^{-1}(x)$ για κάθε $x \in X$. Επειδή το T είναι πεπερασμένης διακλάδωσης, μπορούμε αναδρομικά να ορίσουμε (βλ. [12, Theorem 7.4]) μια οικογένεια $\{W_r : r \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ υποσυνόλων του $[T]$ τέτοια ώστε:

(i) τα W_r είναι μη κενά ανοιχτά-κλειστά,

(ii) $W_\emptyset = [T]$ και $W_r = W_{r^\frown 0} \cup W_{r^\frown 1}$,

(iii) $W_{r^\frown n} \subseteq W_r$ για $n \in \{0,1\}$,

(iv) $diam(W_{a|n}) \to 0$ για κάθε $a \in \mathcal{C}$.

Παρατηρούμε ότι τα $W_{r^\frown 0}$ και $W_{r^\frown 1}$ δεν είναι απαραίτητα ξένα· μπορεί να είναι ίσα. Έστω η συνεχής ανοιχτή επί $\psi : \mathcal{C} \to [T]$ που ορίζεται ως $\{\psi(a)\} = \cap_{n\in\omega} W_{a|n}$ και έστω $\phi = \xi|_{[T]} \circ \psi$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\phi : \mathcal{C} \to X$ είναι συνεχής επί και η $\psi^{-1} \circ \Psi : X \to 2^{\mathcal{C}}$ κάτω ημισυνεχής επιλογή για τη ϕ^{-1}. Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.7. □

5.5 Συμπληρωματικοί υπόχωροι

Η ιδέα ότι οι regular averaging και extension τελεστές δίνουν συμπληρωματικούς υποχώρους οφείλεται στον Pełczyński [24].

Θεώρημα 5.5.1. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος και E ccp τοπικά κυρτός. Αν υπάρχει συνεχής επί $\phi : Y \to X$ έτσι ώστε η ϕ^{-1} να δέχεται κάτω ημισυνεχή* *συνολοσυνάρτηση επιλογής, τότε ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(Y,E)$.*

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο $C_b(X,E)$ είναι ισομορφικός (supremum νόρμα) με έναν norm-one συμπληρωματικό υπόχωρο του $C_b(Y,E)$.

Απόδειξη. Έστω $\phi : Y \to X$ συνεχής ανοιχτή επί. Από το Θεώρημα 5.3.7 υπάρχει regular συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) επί τελεστής $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοιος ώστε $S \circ \phi^\circ = id_{C(X,E)}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\phi^\circ \circ S$ είναι γραμμική συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) προβολή. Επειδή η S είναι επί, έχουμε ότι $(\phi^\circ \circ S)(C(Y,E)) = \phi^\circ(C(X,E))$. Αλλά ο $\phi^\circ(C(X,E))$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με τον $C(X,E)$ (Πρόταση 5.3.2), συνεπώς ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο $C(Y,E)$.

Τέλος υποθέτουμε ότι ο E είναι χώρος Banach. Προφανώς η $\phi_b^\circ \circ S_b$ είναι γραμμική προβολή. Είναι εύκολο να δούμε ότι $(\phi^\circ \circ S)(f)(X) \subseteq \overline{conv}[f(Y)]$ για κάθε $f \in C(Y,E)$, επομένως, από το Λήμμα 5.3.5, έπεται ότι $||\phi_b^\circ \circ S_b|| = 1$. □

Πόρισμα 5.5.2. *Στο προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να έχουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι η ϕ είναι συνεχής επί ανοιχτή.*

Πόρισμα 5.5.3. *Έστω X, Y χώροι Fréchet και E ccp τοπικά κυρτός. Αν υπάρχει γραμμική συνεχής επί $\phi : Y \to X$, τότε ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(Y,E)$.*

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο $C_b(X,E)$ είναι ισομορφικός (supremum νόρμα) με έναν norm-one συμπληρωματικό υπόχωρο του $C_b(Y,E)$.

Θεώρημα 5.5.4. *Έστω X παρασυμπαγής, Y πλήρως μετρικοποιήσιμος και E ccp τοπικά κυρτός. Αν υπάρχει ομοιομορφική εμφύτευση $\phi : Y \to X$ τέτοια ώστε το $\phi(Y)$ είναι κλειστό στον X, τότε ο $C(Y,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(X,E)$.*

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο $C_b(Y,E)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός (supremum νόρμα) με έναν norm-one συμπληρωματικό υπόχωρο του $C_b(X,E)$.

Απόδειξη. Έστω $\phi : Y \to X$ ομοιομορφική εμφύτευση έτσι ώστε το $\phi(Y)$ είναι κλειστό στον X. Από το Θεώρημα 5.3.6 υπάρχει regular ισομορφική εμφύτευση (pointwise, compact-open, uniform) $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ τέτοια ώστε $\phi^\circ \circ S = id_{C(Y,E)}$, απ' το οποίο συνεπάγεται ότι η ϕ° είναι επί και η $S \circ \phi^\circ$ γραμμική συνεχής (pointwise, compact-open, uniform) προβολή (για τη συνέχεια της ϕ° βλ. Πρόταση 5.3.2). Επομένως, ο $(S \circ \phi^\circ)(C(X,E)) = S(C(Y,E))$ είναι συμπληρωματικός στον $C(X,E)$ και ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με τον $C(Y,E)$. Η περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach μπορεί εύκολα να επαληθευτεί. □

5.6 Κατηγοριοποίηση χώρων συνεχών συναρτήσεων με τιμές σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο

Είμαστε έτοιμοι να γενικεύσουμε τα θεωρήματα ισομορφισμού του Milutin και του Etcheberry (βλ. [22] και [8] αντίστοιχα) για χώρους συνεχών συναρτήσεων με τιμές σε ccp τοπικά κυρτό χώρο και για διάφορες τοπολογίες.

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω X υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος και E ccp τοπικά κυρτός χώρος. Τότε ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός με τον $C(\mathcal{C},E)$ (pointwise, uniform, compact).*

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι υπεραριθμήσιμος, ο $\mathcal{C}$ εμφυτεύεται στον X από το γνωστό Θεώρημα Cantor-Bendixson. Από το Θεώρημα 5.5.4, ο $C(\mathcal{C},E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(X,E)$. Το Θεώρημα 5.4.4 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.5.1 δίνουν ότι ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\mathcal{C},E)$.

Συμβολίζουμε με "$\simeq$" την ύπαρξη ισομορφισμού· όσον αφορά τους χώρους συνεχών συναρτήσεων, θα υποθέτουμε ότι όλοι είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, compact-open, uniform. Επειδή ο $\mathcal{C}$ είναι ομοιομορφικός με τον $\mathcal{C}\times(\omega+1)$, είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε τοπολογικό διανυσματικό χώρο H έχουμε ότι

$$C(\mathcal{C},H)\simeq C(\mathcal{C}\times(\omega+1),H)\simeq C(\mathcal{C},C(\omega+1,H)).$$

Έστω ότι με $(H^{\omega+1})_c$ συμβολίζουμε τον γραμμικό υπόχωρο όλων των $(x_n)_{<\omega+1}\in H^{\omega+1}$ τέτοιων ώστε η ακολουθία $(x_n)_{n<\omega}$ να συγκλίνει στο x_ω ως προς την τοπολογία του H· ο $(H^{\omega+1})_c$ είναι εφοδιασμένος με τη σχετική τοπολογία που επάγεται από τον $H^{\omega+1}$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$C(\omega+1,H)\simeq(H^{\omega+1})_c$$

και

$$C(\mathcal{C},(H^{\omega+1})_c)\simeq(C(\mathcal{C},H)^{\omega+1})_c \quad ,$$

συνεπώς

$$C(\mathcal{C},H)\simeq(C(\mathcal{C},H)^{\omega+1})_c \quad .$$

Τώρα η απόδειξη μπορεί να ολοκληρωθεί όπως στην [24, Proposition 8.3]. □

Πόρισμα 5.6.2. *Στο προηγούμενο θεώρημα αν υποθέσουμε ότι ο E είναι χώρος Banach, then ο ισομορφισμός μπορεί να θεωρηθεί ως προς τη supremum νόρμα.*

Θεώρημα 5.6.3. *Έστω X Πολωνικός χώρος που δεν είναι σ-συμπαγής και E ccp τοπικά κυρτός. Τότε ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός με τον $C(\mathcal{N},E)$ (pointwise, compact-open, uniform).*

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ο $C_b(X,E)$ είναι ισομορφικός με τον $C_b(\mathcal{N},E)$ ως προς τη supremum νόρμα.

Απόδειξη. Ο $\mathcal{N}$ εμφυτεύεται στον X ως κλειστός υπόχωρος (βλ. [12, Theorem 7.10]), συνεπώς, από το Θεώρημα 5.5.4, ο $C(\mathcal{N},E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(X,E)$. Από το Θεώρημα 5.4.3 και το Πόρισμα 5.5.2 έχουμε ότι ο $C(X,E)$ είναι ισομορφικός (pointwise, compact-open, uniform) με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\mathcal{N},E)$.

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη εφαρμόζοντας τη μέθοδο διάσπασης του Pełczyński όπως χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του [8, Theorem A]. Σε ό,τι ακολουθεί συμβολίζουμε με "$\simeq$" την ύπαρξη ισομορφισμού· όσον αφορά τους χώρους των συνεχών συναρτήσεων, υποθέτουμε για όλους ότι είναι εφοδιασμένοι με την ίδια από τις εξής τοπολογίες: pointwise, compact-open, uniform. Γενικά, αν ο Y είναι χώρος Hausdorff και οι H, F τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι

$$C(Y, H \times F) \simeq C(Y, H) \times C(Y, F). \tag{5.1}$$

Επιπλέον,

$$\text{αν } H \simeq F, \text{ τότε } C(Y, H) \simeq C(Y, F). \tag{5.2}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$C(\mathcal{N}, H) \simeq C(\omega \times \mathcal{N}, H) \simeq C(\omega, C(\mathcal{N}, H)) \tag{5.3}$$

και

$$C(\omega, H) \simeq H \times C(\omega, H), \tag{5.4}$$

συνεπώς

$$C(\mathcal{N}, H) \simeq C(\mathcal{N}, H) \times C(\omega, C(\mathcal{N}, H)). \tag{5.5}$$

Επειδή ο $C(\mathcal{N}, E)$ είναι ισομορφικός με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(X, E)$ και αντίστροφα, υπάρχουν τοπολογικοί διανυσματικοί υπόχωροι Z, W έτσι ώστε

$$C(\mathcal{N}, E) \simeq Z \times C(X, E) \tag{5.6}$$

και

$$C(X, E) \simeq W \times C(\mathcal{N}, E). \tag{5.7}$$

Το ακόλουθο επιχείρημα διάσπασης δίνει τον ζητούμενο ισομορφισμό.

$$\begin{aligned}
C(X, E) &\simeq W \times C(\mathcal{N}, E) \qquad \text{(από 5.7)} \\
&\simeq W \times C(\mathcal{N}, E) \times C(\omega, C(\mathcal{N}, E)) \qquad \text{(από 5.5)} \\
&\simeq C(X, E) \times C(\omega, C(\mathcal{N}, E)) \qquad \text{(από 5.7)} \\
&\simeq C(X, E) \times C(\omega, C(X, E) \times Z) \qquad \text{(από 5.6 και 5.2)} \\
&\simeq C(X, E) \times C(\omega, C(X, E)) \times C(\omega, Z) \qquad \text{(από 5.1)} \\
&\simeq C(\omega, C(X, E)) \times C(\omega, Z) \qquad \text{(από 5.4)} \\
&\simeq C(\omega, C(X, E) \times Z) \qquad \text{(από 5.1)} \\
&\simeq C(\omega, C(\mathcal{N}, E)) \qquad \text{(από 5.6 και 5.2)} \\
&\simeq C(\mathcal{N}, E) \qquad \text{(από 5.3).}
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που ο E είναι χώρος Banach, ισχύουν τα ίδια επιχειρήματα για τους αντίστοιχους υπόχωρους φραγμένων συνεχών συναρτήσεων εφοδιασμένων με τη supremum νόρμα. □

Παρατήρηση 5.6.4. *Συγκρίνοντας με το θεώρημα ισομορφισμού του Etcheberry, υπενθυμίζουμε ότι αν ένας μετρικός χώρος X δεν είναι τοπικά συμπαγής σε κανένα σημείο (δηλ. όλα τα συμπαγή υποσύνολα έχουν κενό εσωτερικό), τότε, από το θεώρημα κατηγορίας του Baire, ο X δεν είναι σ-συμπαγής.*

Βιβλιογραφία

[1] Ch.D. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, 3rd ed., Springer (Berlin, Heidelberg, 2006).

[2] S.A. Argyros and A. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. 151 (2002), 207-226.

[3] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. 219 (2012), 1-14.

[4] Z. Denkowski, S. Migórski and N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Springer (New York, 2003).

[5] S. Ditor, *On a lemma of Milutin concerning averaging operators in continuous function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 443-452.

[6] S. Ditor, *Averaging operators in C(S) and lower semicontinuous sections of continuous maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 175 (1973), 195-208.

[7] R. Engelking, *General Topology*, PWN (Warszawa, 1977).

[8] A. Etcheberry, *Isomorphism of spaces of bounded continuous functions*, Studia Math. 53 (1975), 103-127.

[9] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer (New York, 2001).

[10] R. Haydon, *On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(0-dim)*, Studia Math. 52 (1974), 23-31.

[11] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis, Volume I: Theory*, Kluwer (Dordrecht, 1997).

[12] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer (New York, 1995).

[13] F. Mavridis, *A unified approach to continuous, measurable selections and selections for hyperspaces*, Mathematika 64 (2018), 607-627.

[14] F. Mavridis, *A generalization of Michael selection theorem*, to appear.

[15] F. Mavridis, *A simultaneous selection and a Dugundji extension as special cases of a selection theorem*, to appear.

[16] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer (New York, 1998).

[17] E. Michael, *A linear mapping between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 407-409.

[18] E. Michael, *Three mapping theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 410-415.

[19] E. Michael, *A selection theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), 1404-1406.

[20] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[21] E. Michael, *A theorem on semi-continuous set-valued functions*, Duke Math. J. 26 (1959), 647-651.

[22] A. A. Milutin, *On space of continuous functions*, Dissertation, Moscow State University, 1952 (in Russian).

[23] L. Narici and E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, 2nd ed., CRC Press (New York, 2011).

[24] A. Pelczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. 58 (Warszawa, 1968).

[25] H.H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer (Berlin, Heidelberg, New York, 1974).