ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ, ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Περιγραφή Fokker-Planck της Σκέδασης Μικροκυμάτων στην Παρυφή του Πλάσματος από Τυρβώδεις Δομές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Σπυρίδωνος Ο. Κατσαρού

Επιβλέπων : Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ, ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ (ΣΧΟΛΗΣ Η.Μ.Μ.Υ.)

Περιγραφή Fokker-Planck της σκέδασης μικροκυμάτων στην παρυφή του πλάσματος από τυρβώδεις δομές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Σπυρίδωνος Ο. Κατσαρού

Επιβλέπων : Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 13η Ιουλίου 2011.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
.....	.....	.....
Κυριάκος Χιτζανίδης Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ηλίας Γλύτσης Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ιωάννης Ράπτης Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

(Υπογραφή)

.....

ΣΠΥΡΙΔΩΝ ΚΑΤΣΑΡΟΣ

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

© 2011 – All rights reserved

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της σκέδασης μικροκυμάτων στην παρυφή του πλάσματος από τυρβώδεις δομές. Το βασικό ερέθισμα που οδήγησε σε αυτή την προσέγγιση είναι η ευρεία χρήση των ραδιοκυμάτων στα Tokamak και η πιθανή επιρροή των blobs στην διάδοση τους.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας γίνεται μια εισαγωγή στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και ιδιαίτερα στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που συναντάμε στο πλάσμα.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας αναπτύσσουμε το γενικό μοντέλο για την περιγραφή της σκέδασης μικροκυμάτων από τυρβώδεις δομές. Το μοντέλο αυτό υπολογίσθηκε, εισάγοντας μικρές χωρικά μεταβαλλόμενες διαταραχές, στην πυκνότητα των στοιχείων που αποτελούν το πλάσμα και στο μέτρο του μαγνητικού πεδίου.

Στο τελευταίο μέρος κάνουμε χρήση του μοντέλου που υπολογίσαμε για την περίπτωση σφαιρικών blobs και μαγνητικού πεδίου οπού το Bz εξαρτάται από την μεταβλητή x.

Abstract

The main subject of this diploma thesis is the study of the scattering of microwaves at the plasma edge by turbulent structures. The initial stimulation that led to this approach is the wide use of radio-frequency waves in Tokamaks and how blobs could affect them while they travel in Plasmas.

In the first part of this thesis we introduce the concept of electromagnetic waves, especially the electromagnetic waves that we can find in Plasmas.

In the second part of this thesis we develop a general model for the scattering of microwaves by turbulent structures. Our model was based on the assumption that the density and the magnetic field have a small spatial dependence.

Lastly, we use the model we calculated for the case of spherical blobs and a magnetic field which its z component depends on the space variable x.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όσους συνέβαλλαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, στο να ολοκληρωθεί η εργασία αυτή. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής και ιδιαίτερα τον Αναπληρωτή Καθηγητή, κ. Ιωάννη Ράπτη, ο οποίος όχι μόνο δέχθηκε να είναι μέλος της επιτροπής in the nick of time αλλά και με βοήθησε με οποιονδήποτε τρόπο μπορούσε.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από την καρδιά μου, τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Κυριάκο Χιτζανίδη, για την υπομονή που επέδειξε κατά την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής αλλά και για την αρωγή που μου προσέφερε είτε σε επιστημονικό είτε σε προσωπικό επίπεδο. Δίχως αυτόν, το όνειρο για διδακτορικές σπουδές στη Φυσική στις Η.Π.Α, θα ήταν αυτό, απλά ένα όνειρο.

Ιδιαίτερη μνεία αξίζει στους υποψήφιους διδάκτορες Νικόλαο Βέργο και Παναγιώτη Ζεστανάκη. Ο Νίκος ήταν αυτός που με προσκάλεσε στο πρώτο μου Σχολείο Σύντηξης, μου σύστησε αυτό τον καταπληκτικό άνθρωπο και δάσκαλο, τον κ. Χιτζανίδη και ουσιαστικά με έφερε στην ‘οικογένεια’ του Εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και Μη Γραμμικής Οπτικής. Τον Παναγιώτη θέλω να τον ευχαριστήσω για τις επιστημονικές και μη, αλλά πάντα ενδιαφέρουσες συζητήσεις μας, για το πόσο εύκολα με αποδέχτηκε ως μέλος της ομάδας και κυρίως για το ότι όποτε χρειάστηκα την βοήθεια του, ήταν εκεί για να την προσφέρει. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει σε όλα τα μέλη του 2.2.18 που με έκαναν να νιώσω όχι μέλος μιας ομάδας αλλά μιας μεγάλης οικογένειας.

Σε πιο προσωπικό επίπεδο, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τους γονείς μου, οι οποίοι θυσιάζοντας πολλά πράγματα, στήριξαν αυτή μου την προσπάθεια με κάθε τρόπο, υλικό και ηθικό.

Όμως δεν θα ήμουν αυτός που είμαι σήμερα, δίχως την αγάπη, παρότρυνση και αμέριστη υποστήριξη σε κάθε μου απόφαση, ενός πολύ ιδιαίτερου και αγαπημένου προσώπου.

Αφιερώνω αυτή την εργασία στην Ανδρομάχη και την οικογένεια μου.

Contents

1 Εισαγωγή **2**

1.1 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα 2

1.2 Διάδοση κυμάτων στο πλάσμα 4

1.2.1 Γενική περίπτωση 4

1.2.2 Ισοτροπικό μέσο 6

1.2.3 Ανισοτροπικό μέσο 7

1.2.4 Παράδειγμα (Συχνότητα Πλάσματος) 7

2 Το γενικό μοντέλο **8**

2.1 Hamilton-Jacobi Ray Equations 9

2.2 Δείκτης διάθλασης και εξισώσεις $\frac{d\mathbf{k}}{dl}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dl}$ 9

2.2.1 $\frac{d\mathbf{k}}{dl}, \frac{d\mathbf{r}}{dl}$ παρουσία διαταραχών 12

2.2.2 $\frac{d\mathbf{k}}{dl}, \frac{d\mathbf{r}}{dl}$ απουσία διαταραχών 12

2.3 Εξίσωση Fokker-Planck 13

3 Υπολογισμός εξίσωσης Fokker-Planck **15**

3.1 Επιλογή $\delta n_a(\mathbf{r})$, $\delta B(\mathbf{r})$ 15

3.1.1 Κλίση $\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$, $\delta B(\mathbf{r})$ 17

3.2 Υπολογισμός τανυστή διάχυσης $\mathbf{D_{kk}}$ 18

3.2.1 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_1$ 18

3.2.2 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_2$ 28

3.2.3 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_3$ 35

3.2.4 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_4$ 40

3.3 Υπολογισμός $\mathbf{D_{kk}}$ και σύνοψη αποτελεσμάτων 46

3.3.1 Εξίσωση Fokker-Planck 47

3.3.2 Συμπεράσματα 48

A Υπολογισμός παραγώγων $\frac{\partial\theta}{\partial k_x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial k_y}$ και $\frac{\partial\theta}{\partial k_z}$ **50**

1 Εισαγωγή

Καθ'όλη τη διάρκεια της εργασίας θα συμβολίζουμε με $\mathbf{A}$ τους πίνακες, με $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα και με α το μέτρο του διανύσματος.

1.1 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Οι εξισώσεις του Maxwell μας δίνουν την εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Αυτές είναι οι :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

όπου οι πυκνότητες φορτίου ρ και ρεύματος $\mathbf{J}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \tag{5}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \tag{6}$$

δηλαδή τα φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται εντός στοιχειώδους όγκου ΔV γύρω από τη θέση αναφοράς $\mathbf{r}$.

Οι παραπάνω εξισώσεις απουσία ελεύθερων φορτίων και ρευμάτων, δηλαδή στο κενό, μετασχηματίζονται στις :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{10}$$

Αυτές οι συζευγμένες πρωτοτάξιες διαφορικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ως προς $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$. Για να το επιτύχουμε αυτό, παίρνουμε τον στροβιλισμό των εξισώσεων (6) και (8) και κάνουμε χρήση της ταυτότητας :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Έτσι έχουμε

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times (-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

και

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Δεδομένου ότι στο κενό $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, τελικά έχουμε

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{και} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{11}$$

Αποσυζεύγνοντας λοιπόν τις αρχικές μας εξισώσεις, καταλήξαμε σε δύο δευτεροτάξιες εξισώσεις της μορφής

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{12}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η γνωστή μας κυματική εξίσωση. Συνεπώς η (11) περιγράφει την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό με ταχύτητα ίση με $\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,00 \times 10^8 \mathrm{m/s} = c$.

Στο εσωτερικό της ύλης, σε περιοχές δίχως ελεύθερα φορτία και ρεύματα και υποθέτωντας πως το υλικό μας είναι γραμμικό και όμογενές, δηλαδή ισχύει

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{και} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \tag{13}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell γίνονται

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{17}$$

Οι εξισώσεις (14-17) είναι της ίδιας μορφής με τις (7-10) επομένως και η λύση τους θα είναι της ίδιας μορφής. Συνεπώς, οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν τη

διάδοση ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ένα γραμμικό και ομογενές υλικό, με ταχύτητα ίση με

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{18}$$

Για τα περισσότερα υλικά το μ είναι περίπου ίσο με το μ_0, ενώ το ϵ είναι μεγαλύτερο από το ϵ_0, επομένως το φως στο εσωτερικό της ύλης, κινείται με ταχύτητα μικρότερη από c. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί

$$\upsilon = \frac{c}{\eta} \tag{19}$$

όπου ως η ορίζουμε τον δείκτη διάθλασης. Από τις παραπάνω είναι προφανές ότι

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \tag{20}$$

Από την (18) είναι εμφανές πως ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από τις ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του υλικού εντός του οποίου διαδίδεται το φως. Καθώς το ϵ, η ηλεκτρική διαπερατότητα, εξαρτάται από τη συχνότητα ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου, είναι λογικό να εξαρτάται και ο δείκτης διάθλασης από την συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός. Η εξάρτηση αυτή είναι εμφανής π.χ. σε ένα πρίσμα ή ένα ουράνιο τόξο.

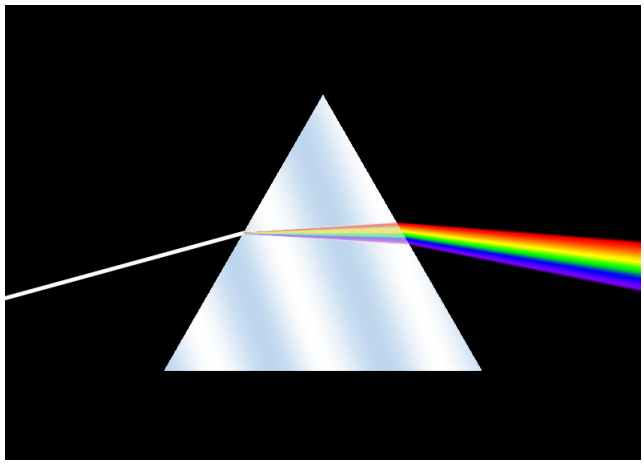


Figure 1: Διάθλαση λευκού φωτός από πρίσμα

1.2 Διάδοση κυμάτων στο πλάσμα

1.2.1 Γενική περίπτωση

Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Υποθέτουμε ότι το πλάσμα είναι άπειρο και ομοιόμορφο. Τότε μπορούμε να κάνουμε χρήση των μετασχηματισμών Fourier στο χώρο και στο χρόνο. Επομένως αναζητούμε λύσεις της μορφής $\exp\left[i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right)\right]$. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E}$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \tag{21}$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές εξισώσεις παίρνουμε,

$$i\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \omega\mu_0 \mathbf{J} - \frac{i\omega^2}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{J} = 0 \tag{22}$$

Χρειαζόμαστε μια σχέση μεταξύ των $\mathbf{J}$ και $\mathbf{E}$. Η σχέση αυτή μας δίνεται από τον νόμο του Ωμ,

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{23}$$

όπου με $\boldsymbol{\sigma}$ συμβολίσαμε τον τανυστή αγωγιμότητας.

Έτσι κάνοντας χρήση της γνωστής διανυσματικής ταυτότητας μπορούμε να γράψουμε την (22) ως

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right) - k^2\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} + i\omega\mu_0 \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E} = 0$$

Εισάγουμε τον διηλεκτρικό τανυστή τον οποίο ορίζουμε ως

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I} + \frac{i\mu_0 c^2}{\omega}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\omega\epsilon_0} \tag{24}$$

Άρα η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right) - k^2\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{25}$$

Ορίζουμε έναν νέο τανυστή $\mathbf{D}$(dispersion tensor) ως

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}\mathbf{k} - k^2\mathbf{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\epsilon}$$

Ο τανυστής αυτός δεν σχετίζεται με τον τανυστη διάχυσης $\mathbf{D}$ που θα ορίσουμε αργότερα.Η (25) λοιπόν γράφεται

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{26}$$

Ως γνωστόν για να έχουμε μια μη μηδενική λύση της παραπάνω εξίσωσης θα πρέπει να ισχύει

$$det\,(\mathbf{D}) = 0 \tag{27}$$

Λόγω του μετασχηματισμού Fourier όλοι οι παραπάνω τανυστές εξαρτώνται από τα μεγέθη $\mathbf{k}$ και ω. Έτσι η επίλυση της (27) θα μας δώσει την σχέση διασποράς στο πλάσμα.

1.2.2 Ισοτροπικό μέσο

Στην απλούστερη των περιπτώσεων μπορούμε να θεωρήσουμε το πλάσμα ισοτροπικό. Τότε θα έχουμε

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon \mathbf{I}$$

Επιπλέον υποθέτουμε πως το $\mathbf{k}$ έχει μόνο z συνιστώσα. Τότε ο τανυστής $\mathbf{D}$ γράφεται

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \end{bmatrix}$$

Παίρνοντας την ορίζουσα του παραπάνω τανυστή, βρίσκουμε

$$det(\mathbf{D}) = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\right)^2 = 0$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε 2 λύσεις για τη σχέση διασποράς
A)$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon = 0$
Άρα η σχέση (26) γίνεται

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow E_z = 0 \tag{28}$$

Επομένως αυτή η σχέση διασποράς περιγράφει ένα εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, το οποίο διαδίδεται με φασική ταχύτητα ίση με $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$. Το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα κύμα το οποίο διαδίδεται σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης $\eta = \frac{kc}{\omega} = \sqrt{\epsilon}$.

B) $\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$

Επομένως η σχέση (26) σε αυτή την περίπτωση γράφεται

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow E_x = E_y = 0 \tag{29}$$

Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι το διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι διαμήκες. Επομένως στο πλάσμα μπορούμε να παρατηρήσουμε και διαμήκη ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

1.2.3 Ανισοτροπικό μέσο

Υποθέτουμε πάλι ότι το $\mathbf{k}$ έχει μόνο z συνιστώσα. Αλλά αυτή την φορά το μέσο μας είναι ανισοτροπικό. Τότε ο τανυστής $\mathbf{D}$ θα γράφεται

$$\mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} -\eta^2 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & -\eta^2 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Η διακρίνουσα του παραπάνω τανυστή θα μας δώσει μια τετραγωνική εξίσωση όσον αφορά το η^2. Έτσι για κάθε τιμή του ω θα έχουμε δύο λύσεις του η^2 και έτσι δύο τρόπους ταλάντωσεις. Η πόλωση του $\mathbf{E}$ σε αυτούς τους τρόπους ταλάντωσης δεν θα είναι ούτε καθαρά εγκάρσια, ούτε καθαρά διαμήκης. Επομένως σε ανισοτροπικά μέσα δεν είναι δυνατόν να διαχωρίσουμε τους τρόπους ταλάντωσης σε καθαρά εγκάρσιους και καθαρά διαμήκεις. Όλα τα παραπάνω ισχύουν εάν υποθέσουμε πως το πλάσμα είναι γραμμικό. Σε κάθε άλλη περίπτωση χρειάζεται να υπολογίσουμε τον τανυστη αγωγιμότητας $\boldsymbol{\sigma}$ μέσω τον υποθέσεων που κάνουμε για το πλάσμα και έπειτα να υπολογίσουμε τον τανυστή $\mathbf{D}$. Ακολουθεί σχετικό παράδειγμα.

1.2.4 Παράδειγμα (Συχνότητα Πλάσματος)

Για να υπολογίσουμε τον τανυστη αγωγιμότητας $\boldsymbol{\sigma}$ κάνουμε κάποιες υποθέσεις. Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι

1. Δεν έχουμε συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων του πλάσματος
2. Το πλάσμα μας είναι ψυχρο (T$\simeq 0$)
3. Το πλάσμα θεωρείται ισοτροπικό
4. Έχουμε μηδενικό μαγνητικό πεδίο
5. Αγνοούμε την κίνηση των ιόντων

Από τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα για τα ηλεκτρόνια έχουμε

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier και επιλύοντας για $\mathbf{v}$ παίρνουμε,

$$\mathbf{v} = \frac{iq}{\omega m}\mathbf{E}$$

Επομένως το ρεύμα των ηλεκτρονίων θα είναι

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v} = \frac{inq^2}{\omega m}\mathbf{E}$$

Άρα η αγωγιμότητα $\boldsymbol{\sigma}$ θα είναι ίση με

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{inq^2}{\omega m}\mathbf{I}$$

και ο διηλεκτρικός τανυστής

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{\omega\epsilon_0} = \left(1 - \frac{nq^2}{m\epsilon_0\omega^2}\right)\mathbf{I}$$

Από την παράγραφο 1.2.2 γνωρίζουμε πως η σχέση διασποράς για διαμήκη ηλεκτρομαγνητικά κύματα, είναι $\epsilon = 0$. Άρα θα έχουμε

$$\epsilon = 1 - \frac{nq^2}{m\epsilon_0\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{nq^2}{m\epsilon_0}$$

Σε αυτή την περίπτωση τα ηλεκτρόνια εκτελούν ταλάντωση με συχνότητα ίση με

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{m\epsilon_0}}$$

Η συχνότητα αυτή ονομάζεται συχνότητα πλάσματος ηλεκτρονίων. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

1. Σε αυτή την περίπτωση, η σχεση διασποράς μας δίνει $\omega = \omega_p$ για κάθε k
2. Η φασική ταχύτητα $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή
3. Η ομαδική ταχύτητα $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 0$, αφού η σχέση διασποράς είναι ανεξάρτητη του k.

Για τον λόγο αυτό, η ταλάντωση των ηλεκτρονίων δεν μπορεί να θεωρηθεί "κανονικό" κύμα, παρόλο που αναδύεται μέσα από την κυματική ανάλυση.

2 Το γενικό μοντέλο

Στο προηγούμενο μέρος της εργασίας ειδαμε τον πλούτο των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που μπορεί να υποστηρίξει το πλάσμα. Σε αυτό το μέρος θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα γενικό μοντέλο για την σκέδαση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην παρυφή του πλάσματος από τυρβώδεις δομές. Το μοντέλο που θα ακολουθήσουμε σε αυτή την εργασία βασίστηκε στην εργασία των K.Hizanidis et.al.[3]

2.1 Hamilton-Jacobi Ray Equations

Σύμφωνα με την εργασία του Ira B. Bernstein[1], οι Hamilton-Jacobi Ray Equations για τα ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}$ είναι

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{r}}\omega, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega, \quad \frac{d\omega}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}} \tag{30}$$

όπου ως $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ορίζουμε το κυματάνυσμα, $\omega = \omega(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ είναι η συχνότητα του κύματος και $\mathbf{r} = (\mathrm{x,y,z})$ είναι το διάνυσμα θέσης. Ο τελεστής $\nabla_{\mathbf{k}}$ στις παραπάνω εξισώσεις ορίζεται ως $\nabla_{\mathbf{k}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_x}\mathbf{i_x} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_y}\mathbf{i_y} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_z}\mathbf{i_z}$, οπού ως $\mathbf{i_a}$ με a=x,y,z ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση a. Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla_{\mathbf{r}}$ στο μέτρο του $\mathbf{k}$, παίρνουμε

$$0 = \nabla_{\mathbf{r}} k = \frac{\eta}{\mathrm{c}}\nabla_{\mathbf{r}}\omega + \frac{\omega}{\mathrm{c}}\nabla_{\mathbf{r}}\eta \tag{31}$$

όπου κάναμε χρηση της ανεξαρτησίας του $\mathbf{k}$ από τις χωρικές συντεταγμένες ενώ εισαγάγαμε και τον δείκτη διάθλασης $\eta = \frac{kc}{\omega}$.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla_{\mathbf{k}}$ στο μέτρο του $\mathbf{k}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{k}}\mathrm{k} &= \frac{\partial k}{\partial \mathrm{k}_x}\mathbf{i_x} + \frac{\partial k}{\partial \mathrm{k}_y}\mathbf{i_y} + \frac{\partial k}{\partial \mathrm{k}_z}\mathbf{i_z} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_x}(\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2})\mathbf{i_x} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_y}(\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2})\mathbf{i_y} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{k}_z}(\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2})\mathbf{i_z} \\
&= \frac{\mathrm{k}_x}{\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2}}\mathbf{i_x} + \frac{\mathrm{k}_y}{\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2}}\mathbf{i_y} + \frac{\mathrm{k}_z}{\sqrt{\mathrm{k}_x^2 + \mathrm{k}_y^2 + \mathrm{k}_z^2}}\mathbf{i_z} = \frac{\mathbf{k}}{k}
\end{aligned} \tag{32}$$

Κάνοντας χρήση του δείκτη διάθλασης η, η σχέση (32) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\mathbf{k}}{k} = \nabla_{\mathbf{k}}\mathrm{k} = \frac{\eta}{\mathrm{c}}\nabla_{\mathbf{k}}\omega + \frac{\omega}{c}\nabla_{\mathbf{k}}\eta \tag{33}$$

Εισάγοντας την ποσότητα $\ell = \mathrm{ct}$, που είναι το μήκος που διανύει το κύμα σε χρόνο t, οι εξισώσεις Hamilton-Jacobi μπορούν να γραφούν συναρτήσει του η

$$\frac{d\mathbf{k}}{dl} = \frac{d\mathbf{k}}{\mathrm{c}dt} \overset{(1)}{=} -\frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{r}}\omega \overset{(2)}{=} \frac{\omega}{\eta \mathrm{c}}\nabla_{\mathbf{r}}\eta = \frac{k}{\eta^2}\nabla_{\mathbf{r}}\eta = -k\nabla_{\mathbf{r}}(\frac{1}{\eta}) \tag{34}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{cdt} \overset{(1)}{=} \frac{1}{c}\nabla_{\mathbf{k}}\omega \overset{(4)}{=} \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2}\nabla_{\mathbf{k}}\eta = \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} + k\nabla_{\mathbf{k}}(\frac{1}{\eta}) \tag{35}$$

2.2 Δείκτης διάθλασης και εξισώσεις $\frac{d\mathbf{k}}{dl}$, $\frac{d\mathbf{r}}{dl}$

Υποθέτουμε πως στην περιοχή που μελετάμε, η θερμοκρασία του πλάσματος είναι χαμηλή και σταθερή. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να κάνουμε χρήση της προσέγγισης ψυχρού πλάσματος για τα κύματα ενώ ταυτόχρονα μπορούμε να αγνοήσουμε θερμικά φαινόμενα στην υπό μελέτη περιοχή. Ο δείκτης διάθλασης σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$\eta = \eta(\{\omega_a^2(n_a(\mathbf{r}))\}, \{\Omega_a(B(\mathbf{r}))\}, \vartheta)$$

$$\omega_a^2(n_a(\mathbf{r})) = \frac{q_\alpha^2 n_a(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 m_\alpha}, \quad \Omega_a(B(\mathbf{r})) = \frac{q_\alpha B(\mathbf{r})}{\mathrm{m}_\alpha}, \quad \theta = \arccos(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{i_z}}{k}) \tag{36}$$

όπου ως ω_α ορίσαμε την συχνότητα πλάσματος για τα σωματίδια του είδους α, ως Ω_a ορίσαμε την γυροσυχνότητα για τα σωματίδια του είδους α ενώ ως θ την γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και του κυματανύσματος. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε, πως οι παραπάνω ορισμοί συνεπάγονται ότι ο δείκτης διάθλασης η εξαρτάται από τα $n_a(\mathbf{r})$ και $B(\mathbf{r})$, οπού ως $n_a(\mathbf{r})$ και ως $B(\mathbf{r})$, ορίσαμε την πυκνότητα των σωματιδίων α και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου στη θέση $\mathbf{r}$ αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας το η στην εξίσωση (34) παίρνουμε

$$\frac{d\mathbf{k}}{dl} = -k\nabla_{\mathbf{r}}(\frac{1}{\eta}) = \frac{k}{\eta^2}\nabla_{\mathbf{r}}\eta = \frac{k}{\varepsilon_0\eta^2}\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\omega_\alpha^2}\nabla_{\mathbf{r}}n_a(\mathbf{r}) + \frac{k}{\eta^2}\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\Omega_\alpha}\nabla_{\mathbf{r}}B(\mathbf{r}) \tag{37}$$

Από την εξίσωση (35) έχουμε

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2}\nabla_{\mathbf{k}}\eta$$

Εκφράζοντας το διάνυσμα $\mathbf{k}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουμε

$$k_x = k\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$k_y = k\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$k_z = k\cos(\theta)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας[1] έχουμε

$$\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{k}_x} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial k_x} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)\cos(\varphi)}{k}$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{k}_y} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial k_y} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)\sin(\varphi)}{k}$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial \mathrm{k}_z} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial k_z} = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{-\sin(\theta)}{k}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

[1] Οι παράγωγοι $\frac{\partial\theta}{\partial k_x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial k_y}$ και $\frac{\partial\theta}{\partial k_z}$ δίνονται στο Παράρτημα Α

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2}\nabla_{\mathbf{k}}\eta$$
$$= \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{k}{\eta^2}(\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)\cos(\varphi)}{k}\mathbf{i_x} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)\sin(\varphi)}{k}\mathbf{i_y} - \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\sin(\theta)}{k}\mathbf{i_z})$$
$$= \frac{1}{\eta}\frac{\mathbf{k}}{k} - \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial\theta}(\cos(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{i_x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\mathbf{i_y} - \sin(\theta)\mathbf{i_z})$$

Εισάγοντας τον πίνακα

$$\mathbf{I_T} \equiv \mathbf{I} - \mathbf{i_k}\mathbf{i_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) & -\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ -\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) & 1-\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{i_k} = \frac{\mathbf{k}}{k}$. Κάνοντας χρήση του παραπάνω πίνακα και σε συνδυασμό με τις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε τελικά

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{1}{\eta}\mathbf{i_k} + \frac{1}{\eta^2\sin(\theta)}\frac{\partial\eta}{\partial\vartheta}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T}) \tag{38}$$

Υποθέτουμε πως η πυκνότητα των στοιχείων του πλάσματος είναι παντού σταθερή και μεταβάλλεται μόνο στις περιοχές των blobs. Επομένως η πυκνότητα για τα σωματίδια α θα έχει την μορφή

$$n_a(\mathbf{r}) = n_{a0} + \delta n_a(\mathbf{r}) \tag{39}$$

όπου ως n_{a0} έχουμε θέσει το σταθερό μέρος της πυκνότητας και ως $\delta n_a(\mathbf{r})$ την χωρικά εξαρτώμενη μικρή διαταραχή που εισάγουν τα blobs στην πυκνότητα. Επιπλέον θεωρούμε πως το μέτρο του μαγνητικού πεδίου είναι σταθερό παντού εκτός από μια μικρή χωρική διαταραχή που εισάγουμε εμείς, δηλαδή

$$B(\mathbf{r}) = B_0 + \delta B(\mathbf{r}) \tag{40}$$

όπου ως B_0 ορίσαμε το σταθερό μέτρο και ως $\delta B(\mathbf{r})$ την διαταραχή στο μέτρο του μαγνητικού πεδίου. Κάνοντας χρήση τον παραπάνω, κάνουμε ένα ανάπτυγμα Taylor του δείκτη διάθλασης κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης. Τότε ο δείκτης διάθλασης μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\eta \simeq \eta_0 + \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\alpha}\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2}\delta n_a(\mathbf{r}) + \sum_{\alpha}\frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha}\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}}\delta B(\mathbf{r}) \tag{41}$$

όπου ως η_0 ορίσαμε τον δείκτη διάθλασης απουσία των blobs.

2.2.1 $\frac{d\mathbf{k}}{dl}, \frac{d\mathbf{r}}{dl}$ παρουσία διαταραχών

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (39),(40) και (41) στις εξισώσεις (37) και (38), παίρνουμε τις εξισώσεις Hamilton-Jacobi παρουσία διαταραχών.

$$\dot{\mathbf{k}} \equiv \frac{d\mathbf{k}}{dl} \simeq \frac{k}{\varepsilon_0 \eta_0^2} \sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) + \frac{k}{\eta_0^2} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha} \frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}} \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r})$$

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dl} \simeq \frac{1}{\eta_0} \mathbf{i_k} + \frac{1}{\eta_0^2 \sin(\theta)} (\mathbf{i_z} \cdot \mathbf{I_T}) [\frac{d\eta_0}{d\vartheta} + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha \delta n_a(\mathbf{r}) \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \frac{d}{d\theta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2}) + \sum_\alpha \delta B(\mathbf{r}) \frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha} \frac{d}{d\theta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})] \tag{42}$$

Οι εξισώσεις αυτές μας δίνουν την εξέλιξη των $\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}$, καθώς το κύμα διαδίδεται στο πλάσμα παρουσία blobs, με μεταβαλλόμενο χωρικά μαγνητικό πεδίο. Οι εξισώσεις (42) αποτελούν προσεγγίσεις πρώτης τάξης, αφού στα αναπτύγματά μας κρατάμε μόνο τις πρώτες δυνάμεις των εμπλεκόμενων ποσοτήτων, $\delta n_a(\mathbf{r})$ και $\delta B(\mathbf{r})$. Ενώ επιπλέον έχουμε αντικαταστήσει τον δείκτη διάθλασης η, με την προσέγγισή του $\eta \simeq \eta_0$, για να καταστήσουμε δυνατούς τους υπολογισμούς στην τάξη που μας ενδιαφέρει.

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι εμφανείς οι τέσσερις παράγοντες που επηρρεάζουν την διάδοση των κυμάτων στο πλάσμα. Αυτοί είναι

1. Η πυκνότητα του πλάσματος. Η εξάρτηση αυτή έρχεται από τον δείκτη διάθλασης η_0.

2. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου. Η εξάρτηση αυτή έρχεται από τον δείκτη διάθλασης η_0.

3. Η χωρική μεταβολή της πυκνότητας που υπεισέρχεται από τον όρο $\nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r})$.

4. Η χωρική μεταβολή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου που υπεισέρχεται από τον όρο $\nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r})$.

Κάνοντας χρήση γεωμετρικής οπτικής βλέπουμε πως ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα όταν διέρχεται από περιοχές μεταβαλλόμενης πυκνότητας ή μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου αλλάζει κατεύθυνση διάδοσης. Εδώ έγκειται και η αρνητική επίδραση των blobs και του μεταβαλλόμενου χωρικά μαγνητικού πεδίου στους αντιδραστήρες πυρηνικής σύντηξης, αφού η παρουσία τους, οδηγεί σε εκτροπή των κυμάτων που εκπέμπουμε για διάφορες διεργασίες (Electron Cyclotron και Lower Hybrid κύματα για την δημιουργία ρευμάτων, EC κύματα για τον έλεγχο των ασταθειών Neoclassical Tearing Mode κ.α.)

2.2.2 $\frac{d\mathbf{k}}{dl}, \frac{d\mathbf{r}}{dl}$ απουσία διαταραχών

Απουσία των διαταραχών στο μέτρο του μαγνητικού πεδίου και στην πυκνότητα των στοιχείων του πλάσματος, οι εξισώσεις Hamilton-Jacobi γίνονται

$$\frac{d\mathbf{k}}{dl} = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{i_s}\sqrt{\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{1}{\eta_0^4}(\frac{d\eta_0}{d\theta})^2} \tag{43}$$

$$\mathbf{i_s} = \frac{\frac{1}{\eta_0}\mathbf{i_k} + \frac{1}{\eta_0^2\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\frac{d\eta_0}{d\vartheta}}{\sqrt{\frac{1}{\eta_0^2} + \frac{1}{\eta_0^4}(\frac{d\eta_0}{d\theta})^2}} \tag{44}$$

όπου ως $\mathbf{i_s}$ έχουμε ορίσει το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση της ομαδικής ταχύτητας του κύματος. Από τις εξισώσεις (43) εύκολα βλέπουμε πως το κυματάνυσμα δεν αλλάζει κατεύθυνση κατά την διάδοση του κύματος, ενώ το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση του $\mathbf{i_s}$ απουσία διαταραχών. Επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν παρατηρείται εκτροπή του κύματος. Κατά την διάρκεια της δικής μας μελέτης, το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{i_s}$δείχνει την αρχική διεύθυνση του κύματος.

2.3 Εξίσωση Fokker-Planck

Καθώς σκοπός της μελέτης μας είναι να καταλήξουμε σε μια Fokker-Planck εξίσωση, χρειάζεται να εισάγουμε τον 6×6 τανυστή διάχυσης $\mathbf{D}(\mathbf{X})$, ο οποίος ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{X}) &= \frac{1}{\Delta s}\int_0^{\Delta s} ds \int_{-s}^{\Delta s - s} d\sigma \times \left\langle \dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\mathrm{s});\mathbf{k}]\dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\mathrm{s}) + \mathbf{i}_\mathrm{s}\sigma;\mathbf{k}]\right\rangle \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \times \left\langle \dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\ell);\mathbf{k}]\dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\ell) + \mathbf{i}_\mathrm{s}\sigma;\mathbf{k}]\right\rangle \end{aligned} \tag{45}$$

Εδώ μπορούμε να σχολιάσουμε τους ορισμούς και τις υποθέσεις που κάναμε στην παραπάνω εξίσωση. Το διάνυσμα $\mathbf{X}$ είναι ένα διάνυσμα 6 διαστάσεων και ισούται με $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{k}\end{bmatrix}$. Η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς το μέγεθος $\ell = c\cdot t$, ο τελεστής $\langle\ldots\rangle$ δηλώνει οτί παίρνουμε την μέση τιμή ως προς τις τυχαίες μεταβλητές, ενώ ο τονισμός δηλώνει ρυθμούς μεταβολής λόγω των διαταραχών. Ο ρυθμός μεταβολής, τον οποίο παίρνουμε από τις εξισώσεις (42), είναι

$$\dot{\mathbf{X}}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_0^2\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})[\frac{1}{\epsilon_0}\sum_\alpha \delta n_a(\mathbf{r})\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2}) + \sum_\alpha \delta B(\mathbf{r})\frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha 0}})] \\ \frac{k}{\varepsilon_0\eta_0^2}\sum_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2}\nabla_\mathbf{r}\delta n_a(\mathbf{r}) + \frac{k}{\eta_0^2}\sum_\alpha \frac{q_\alpha}{\mathrm{m}_\alpha}\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha 0}}\nabla_\mathbf{r}\delta B(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \tag{46}$$

Επιπλέον η προσέγγιση που κάνουμε στην εξίσωση (45) υπονοεί ότι η αλληλεπίδραση κύματος-blobs γίνεται σε απόσταση μικρότερη από Δs. Ο ορισμός του τανυστή διάχυσης μας επιτρέπει να τον διαχωρίσουμε σε τέσσερις 3×3 πίνακες. Έτσι γράφουμε

$$\mathbf{D_{XX}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_{kk}} & \mathbf{D_{kx}} \\ \mathbf{D_{xk}} & \mathbf{D_{xx}} \end{bmatrix} \tag{47}$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω πίνακα χρειάζονται οι συναρτήσεις συσχέτισης $\left\langle \dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\mathrm{s});\mathbf{k}]\dot{\mathbf{X}}'[\mathbf{r}(\mathrm{s})+\mathbf{i}_{\mathrm{s}}\sigma;\mathbf{k}]\right\rangle$. Κάνοντας χρήση της (46), εύκολα βρίσκουμε πως οι συναρτήσεις αυτές είναι οι

$$\begin{aligned}
\left\langle \dot{\mathbf{k}}(\mathbf{r};\mathbf{k})\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma;\mathbf{k})\right\rangle &\simeq \frac{k^2}{\epsilon_0^2\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k^2}{\epsilon_0\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k^2}{\epsilon_0\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k^2}{\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\langle\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r};\mathbf{k})\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma;\mathbf{k})\rangle &\simeq \mathbf{i_k}\mathbf{i_k}+\frac{2}{\eta_0^2\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\mathbf{i_k}\frac{d\eta_0}{d\vartheta}+\frac{1}{\eta_0^4\sin^2(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})(\frac{d\eta_0}{d\vartheta})^2 \\
&+\frac{1}{\eta_0^4\sin^2(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})[\frac{1}{\epsilon_0^2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\delta n_a(\mathbf{r})\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\delta n_a(\mathbf{r})\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\left\langle\delta B(\mathbf{r})\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta}\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\delta B(\mathbf{r})\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle]
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{r};\mathbf{k})\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma;\mathbf{k})\right\rangle &\simeq \frac{k}{\epsilon_0^2\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k}{\epsilon_0\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k}{\epsilon_0\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \\
&+\frac{k}{\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\left\langle \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r};\mathbf{k})\dot{\mathbf{k}}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma;\mathbf{k})\right\rangle \simeq \frac{k}{\epsilon_0^2\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\delta n_\beta(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\alpha(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle$$

$$+\frac{k}{\epsilon_0\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})\left\langle\delta n_\beta(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle$$

$$+\frac{k}{\epsilon_0\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha0}^2})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\alpha(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle$$

$$+\frac{k}{\eta_0^4\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\frac{d}{d\theta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta0}})\left\langle\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\right\rangle \quad (51)$$

Στις παραπάνω συναρτήσεις έχουμε αγνοήσει όρους οι οποιοί περιείχαν μόνο τα δn_α,$\delta B(\mathbf{r})$,$\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\alpha$ ή $\nabla_{\mathbf{r}}\delta B$ καθότι οι όροι αυτοί αποτελούν διαταραχές και για αυτό η μέση τιμή τους θα πρέπει να είναι 0. Για τον λόγο αυτό στους παραπάνω τύπους εμφανίζονται μόνο γινόμενα των διαταρακτικών όρων.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε μια εξισώση εξέλιξης της κατανομής των ακτίνων $f(\mathbf{X},\ell)$ της μορφής Fokker-Planck. Η εξίσωση εξέλιξης της κατανομής είναι

$$\frac{\partial f}{\partial\ell}+\left[\frac{1}{\eta_0}\mathbf{i_k}+\frac{1}{\eta_0^2\sin(\theta)}(\mathbf{i_z}\cdot\mathbf{I_T})\frac{d\eta_0}{d\vartheta}\right]\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f=\frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}\cdot\left[\mathbf{D}(\mathbf{X})\cdot\frac{\partial f}{\partial\mathbf{X}}\right] \quad (52)$$

όπου οι διαφορικοί τελεστές στο αριστερό μέρος δρουν πάνω στην αδιατάραχτη κατανομή. Παίρνοντας την μέση τιμή της (52) όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες και κρατώντας το τμήμα $\mathbf{D_{kk}}$ του πίνακα διάχυσης, αφού μας ενδιαφέρει μόνο η εξέλιξη του κυματανύσματος, παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\ell}=div_{\mathbf{k}}(\langle\langle\mathbf{D_{kk}}(\mathbf{X})\cdot grad_{\mathbf{k}}f\rangle\rangle)\simeq div_{\mathbf{k}}(\langle\langle\mathbf{D_{kk}}(\mathbf{X})\rangle\rangle\cdot grad_{\mathbf{k}}\bar{f}) \quad (53)$$

η οποία είναι η ζητούμενη Fokker-Planck εξίσωση για την εξέλιξη της κατανομής των ακτίνων. Στην εξίσωση (53) η$\langle\langle\ldots\rangle\rangle$ δηλώνει μέση τιμή όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες ενώ η $\bar{f}$ δίνεται από την σχέση

$$\bar{f}(\mathbf{k},\ell)\equiv\langle\langle f(\mathbf{X},\ell)\rangle\rangle\equiv\frac{1}{V_0}\int dV_0 f(\mathbf{X},\ell) \quad (54)$$

και είναι η μέση τιμή της συνάρτησης κατανομής όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες.

3 Υπολογισμός εξίσωσης Fokker-Planck

3.1 Επιλογή $\delta n_a(\mathbf{r})$, $\delta B(\mathbf{r})$

Στο προηγούμενο μέρος της εργασίας θέσαμε το μοντέλο πάνω στο οποίο θα εργασθούμε. Στο μέρος αυτό θα επιλέξουμε την μορφή των διαταραχών $\delta n_a(\mathbf{r})$

και $\delta B(\mathbf{r})$. Στο μοντέλο αυτό θα θεωρήσουμε πως οι διακυμάνσεις της πυκνότητας έχουν μορφή Γκαουσιανής και είναι κοινές για όλα τα είδη που συνθέτουν το πλάσμα. Επιπλέον θεωρούμε οτί τα blobs έχουν σφαιρικό σχήμα. Έτσι η διαταραχή στην πυκνότητα θα δίνεται από την σχέση

$$\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = v n_a \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \tag{55}$$

όπου v είναι μια αδιάστατη τυχαία μεταβλητή, το διάνυσμα $\mathbf{r}_0$ δηλώνει το κέντρο του blob και το μήκος Δr είναι το χαρακτηριστικό μήκος του blob. Λόγω της μορφής της διαταραχής, η οιονεί ουδετερότητα του πλάσματος διατηρείται, αφού έχουμε

$$\sum_\alpha q_\alpha \delta n_\alpha = v \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha = 0 \tag{56}$$

Για την τυχαία μεταβλητή v υποθέτουμε κανονική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της μορφής,

$$w(v) = \frac{1}{\delta_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v-v_0)^2}{2\delta_0^2}\right] \tag{57}$$

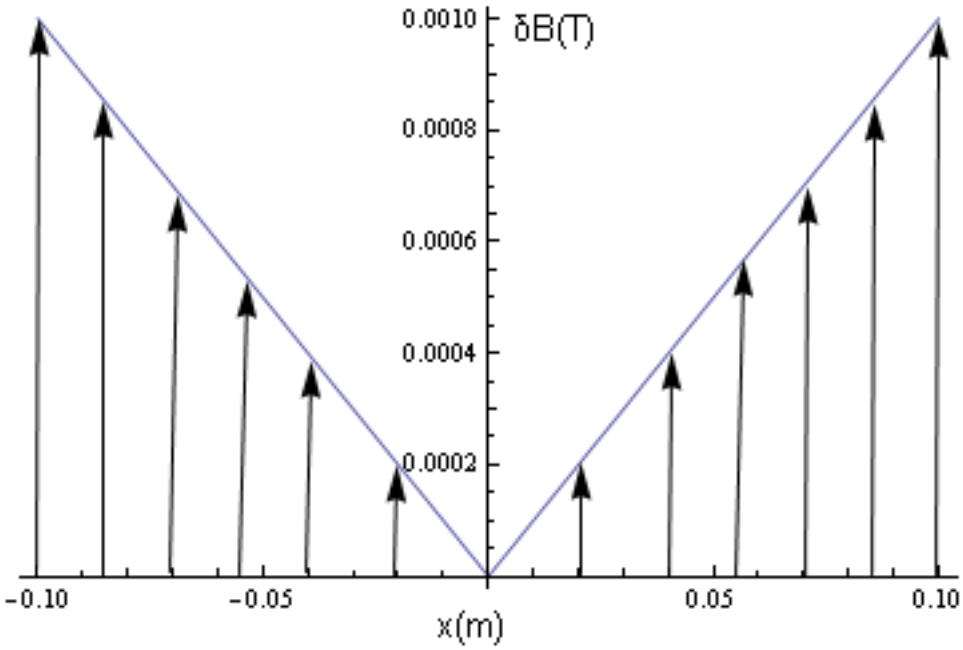
Με v_0 συμβολίσαμε την μέση τιμή και με δ_0 την τυπική απόκλιση. Οι δύο αυτές παράμετροι χαρακτηρίζουν τις διακυμάνσεις στο πλάσμα.

Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο αυτό επιλέγουμε να βρίσκεται στον άξονα z. Η διαταραχή στο μέτρο του μαγνητικού πεδίου επιλέγουμε να είναι της μορφής

$$\delta B(\mathbf{r}) = \frac{B_0\,|\mathrm{x}|}{L} \tag{58}$$

όπου έχουμε υποθέσει πως $x \ll L$

Figure 2: Αναπαράσταση της διαταραχής του μαγνητικού πεδίου για $\frac{B_0}{L} = 0.01^{\mathrm{T}}/_{\mathrm{m}}$



3.1.1 Κλίση $\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$, $\delta B(\mathbf{r})$

Επειδή μας ενδιαφέρει μόνο η μεταβολή της κατανομής του $\mathbf{k}$ καθώς το κύμα διαδίδεται, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε μόνο τον τανυστή $\mathbf{D_{kk}}$. Για να υπολογίσουμε τα στοιχεία του τανυστή $\mathbf{D_{kk}}$, χρειαζόμαστε τις κλίσεις των δύο αυτών ποσοτήτων. Στο σημείο αυτό θα τις υπολογίσουμε. Η κλίση της διαταραχής της πυκνότητας των σωματιδίων α βρίσκεται ίση με,

$$\nabla_{\mathrm{r}}\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\partial}{\partial x}\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x} + \frac{\partial}{\partial y}\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\mathbf{i_y} + \frac{\partial}{\partial z}\delta n_a(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\mathbf{i_z}$$

$$= -vn_{a0}\frac{x-x_0}{(\Delta r)^2}\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}\right]\mathbf{i_x} - vn_{a0}\frac{y-y_0}{(\Delta r)^2}\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}\right]\mathbf{i_y} - vn_{a0}\frac{z-z_0}{(\Delta r)^2}\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}\right]\mathbf{i_z}$$

$$= -\frac{vn_{a0}}{(\Delta r)^2}\exp(-\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|^2}{2(\Delta r)^2})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \tag{59}$$

Η κλίση της διαταραχής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με,

$$\nabla_{\mathrm{r}}\delta B(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\delta B(\mathbf{r})\mathbf{i_x} + \frac{\partial}{\partial y}\delta B(\mathbf{r})\mathbf{i_y} + \frac{\partial}{\partial z}\delta B(\mathbf{r})\mathbf{i_z}$$

$$= \frac{B_0}{L} sgn(x)\mathbf{i_x} = \frac{B_0}{L} sgn(\mathbf{r}\cdot\mathbf{i_x})\mathbf{i_x} \tag{60}$$

όπου με sgn(x) συμβολίζουμε την γνωστή συνάρτηση προσήμου.

3.2 Υπολογισμός τανυστή διάχυσης $\mathbf{D_{kk}}$

Για να υπολογίσουμε τον τανυστή $\mathbf{D_{kk}}$ τον σπάμε σε άθροισμα τεσσάρων πινάκων. Έχουμε

$$\mathbf{D_{kk}} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_4$$

όπου

$$\mathbf{D}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0^2\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta 0}^2}) \langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle \tag{61}$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta 0}}) \langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle \tag{62}$$

$$\mathbf{D}_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha 0}}) \langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle \tag{63}$$

$$\mathbf{D}_4 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\beta 0}}) \langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle \tag{64}$$

3.2.1 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_1$

Για τον υπολογισμό του πίνακα $\mathbf{D}_1$ χρειαζόμαστε την μέση τιμή $\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle$. Από την εξίσωση (59) έχουμε

$$\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma) = \frac{v^2}{(\Delta r)^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 + |\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right](\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

$$\Rightarrow \nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma) = \frac{v^2}{(\Delta r)^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 + 2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right](\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0) \tag{65}$$

Παίρνοντας την μέση τιμή ως προς την τυχαία μεταβλητή v, έχουμε

$$\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle = \frac{\left\langle v^2\right\rangle}{(\Delta r)^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 + 2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right](\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

$$\Rightarrow \langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_a(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle = \frac{v_0^2+\delta_0^2}{(\Delta r)^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 + 2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right](\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0) \tag{66}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γνωστή σχέση από τη στατιστική

$$\left\langle v^2\right\rangle = Var(v) + \langle v\rangle^2 = \delta_0^2 + v_0^2$$

Εισάγοντας την εξίσωση (66) στην (61) προκύπτει

$$\mathbf{D}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0^2\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta 0}^2}\right)$$

$$\times\frac{v_0^2+\delta_0^2}{(\Delta r)^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 + 2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right](\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους έχουμε

$$\mathbf{D}_1 = \frac{v_0^2+\delta_0^2}{(\Delta r)^4}\frac{k^2}{\epsilon_0^2\eta_0^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\alpha 0}^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta 0}^2}\right)\exp\left[-\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2}{(\Delta r)^2}\right]$$

$$\times\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\sigma}_{I1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\cdot\exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\sigma}_{I2}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}\right] \tag{67}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα I1 και I2.

$$I1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\sigma+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma$$

$$\Rightarrow I1 = \sqrt{2\pi}\Delta r \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$I2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\cdot\exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\cdot\exp\left[-\frac{(\sigma+(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma$$

$$\Rightarrow I2 = -(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

Κατά την διάρκεια των υπολογισμών των ολοκληρωμάτων $I1$ και $I2$ κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της κανονικής κατανομής. Αντικαθιστώντας τις τιμές των $I1$ και $I2$ στην εξίσωση (67), παίρνουμε για τον $\mathbf{D}_1$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{v_0^2+\delta_0^2}{(\Delta r)^4}\frac{k^2}{\epsilon_0^2\eta_0^4} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2}) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{(\Delta r)^2}\right]$$

$$\times\sqrt{2\pi}\Delta r \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{\epsilon_0^2\eta_0^4(\Delta r)^3} n_{\alpha 0} n_{\beta 0} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{1}{2\eta_0}\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{1}{2\eta_0}\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})$$

$$\times \exp\left[-\frac{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{4\eta_0^6(\Delta r)^3} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 n_{\alpha 0} q_\beta^2 n_{\beta 0}}{\epsilon_0^2 m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})$$

$$\times \exp\left[-\frac{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{4\eta_0^6(\Delta r)^3}\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha 0}^2\omega_{\beta 0}^2(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\beta 0}^2})$$

$$\times \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2-((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}\right] \tag{68}$$

Θεωρώντας ότι τα blobs είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όγκο V_0, μπορούμε να πάρουμε την μέση τιμή του $\mathbf{D}_1$ όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες ολοκληρώνοντας πάνω στον όγκο V_0. Το ολοκλήρωμα που προκύπτει δεν υπολογίζεται για πεπερασμένο όγκο αλλά μπορούμε να επεκτείνουμε την ολοκλήρωση στο $-\infty,\infty$ λόγω της εκθετικής μορφής της συνάρτησης. Έτσι έχουμε

$$\langle\langle\mathbf{D}_1\rangle\rangle = \frac{\sqrt{2\pi}k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{4V_0\eta_0^6(\Delta r)^3}\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha 0}^2\omega_{\beta 0}^2(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\beta 0}^2})$$

$$\times\int_{V_0}\exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2-((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]\left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}\right]dV_0 \tag{69}$$

Για τον υπολογισμό των στοιχείων του τανυστή $\mathbf{D}_1$ εισάγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων χ,ψ,ζ που αναπαρίσταται στο σχήμα 3. Ο άξονας ζ έχει την κατεύθυνση του διανύσματος της ομαδικής ταχύτητας $\mathbf{i_s}$, ο άξονας ψ ταυτίζεται με τον άξονα y ενώ ο άξονας χ επιλέγεται έτσι ώστε το σύστημα συντεταγμένων χ,ψ,ζ να είναι ορθοκανονικό. Από το σχήμα είναι προφανές ότι το νέο σύστημα προκύπτει με στροφή α γύρω από τον άξονα y.

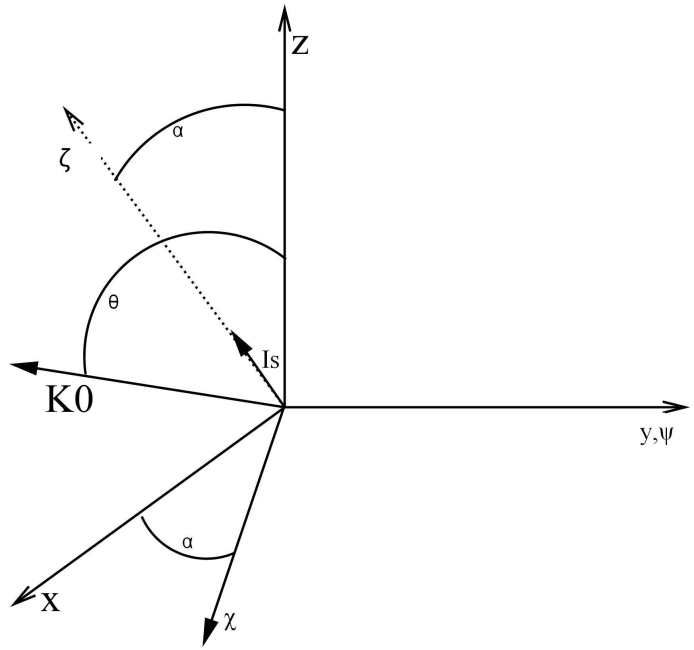


Figure 3: Το καρτεσιανό και το νέο σύστημα συντεταγμένων. Το B_0 έχει την κατεύθυνση του άξονα z ενώ το i_s ανήκει στο επιπέδο x-z και δείχνει την κατεύθυνση ζ του νέου συστήματος.

Το νέο σύστημα συνδέεται με το παλιό με τον πίνακα στροφής,

$$\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{70}$$

ενώ το παλιό με το νέο, με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{71}$$

Το ολοκλήρωμα της εξισώσης (69) δεν θα το υπολογίσουμε με απευθείας ολοκλήρωση. Είναι απλούστερο να υπολογίσουμε τις προβολές του τανυστή στο νέο σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθούν οι πράξεις για την εύρεση των προβολών $\langle\langle \mathbf{i_1 D_1 i_2} \rangle\rangle$ με $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_\chi$ ή $\mathbf{i}_\psi$ ή $\mathbf{i}_\zeta$.

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

Υπολογίζουμε πρώτα τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{i}_\chi - \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\mathbf{s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i}_\mathbf{s}] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$\overset{\mathbf{i}_\mathbf{s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\chi-\chi_0)^2 - (\zeta-\zeta_0)(\chi-\chi_0) \cdot 0 = (\chi-\chi_0)^2$$

Ο εκθετικός όρος στο νέο σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i}_\mathbf{s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{2(\chi-\chi_0)^2 + 2(\psi-\psi_0)^2 + 2(\zeta-\zeta_0)^2 - (\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

Το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (69) μπορεί να γραφεί λοιπόν ως

$$\int\limits_{V_0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i}_\mathbf{s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i}_\mathbf{s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i}_\mathbf{s}] \cdot \mathbf{i}_\chi dV_0$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (\chi-\chi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] dV_0$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\chi-\chi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\chi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\chi-\chi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\chi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{\Delta r}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{2\pi}\frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}\Delta r = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{4}\Delta r^5$$

Άρα έχουμε

$$\mathbf{D_1}_{\chi\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = \frac{k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{4V_0\eta_0^6}(\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})$$

Στον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων, κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της κανονικής κατανομής

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\chi-\chi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\chi = \sqrt{2\pi}\frac{\Delta r}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\chi = \sqrt{2\pi}\Delta r$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μας δίνει το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης πολλαπλασιασμένο με έναν παράγοντα κανονικοποίησης, ενώ το δεύτερο μας δίνει απλά τον παράγοντα κανονικοποίησης.

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\cdot\mathbf{i}_\psi - \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\chi-\chi_0)(\psi-\psi_0) - (\zeta-\zeta_0)(\chi-\chi_0)\cdot 0 = (\chi-\chi_0)(\psi-\psi_0)$$

Το ολοκλήρωμα σε αυτή την περίπτωση είναι ίσο με

$$\int_{V_0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right]\mathbf{i}_\chi\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\psi dV_0$$

$$= \iiint_{V_0} (\chi-\chi_0)(\psi-\psi_0)\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] dV_0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\chi-\chi_0)\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\chi \int_{-\infty}^{\infty} (\psi-\psi_0)\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\psi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\chi-\chi_0)\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\chi \int_{-\infty}^{\infty} (\psi-\psi_0)\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\psi \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \sqrt{2\pi}\Delta r = 0$$

Επομένως

$$\mathbf{D_{1}}_{\chi\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

Εδώ κάναμε χρήση της ιδιότητας της κανονικής κατανομής

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\chi - \chi_0) \exp\left[-\frac{(\chi - \chi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\chi = 0$$

αφού το ολοκλήρωμα αυτό ουσιαστικά μας δίνει $\chi_0 - \chi_0 = 0$.

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{i}_\zeta - \mathbf{i}_\chi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\chi - \chi_0)(\zeta - \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)(\chi - \chi_0) = 0$$

Άρα έχουμε

$$\mathbf{D_{1}}_{\chi\zeta} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{i}_\chi - \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\psi - \psi_0)(\chi - \chi_0) - (\zeta - \zeta_0)(\psi - \psi_0) \cdot 0 = (\psi - \psi_0)(\chi - \chi_0)$$

Όπως και πριν το ολοκλήρωμα αυτής της ποσότητας θα μας δώσει 0, οπότε

$$\mathbf{D_{1}}_{\psi\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{i}_\psi - \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\psi-\psi_0)^2 - (\zeta-\zeta_0)(\psi-\psi_0)\cdot 0 = (\psi-\psi_0)^2$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα γράφεται

$$\int\limits_{V_0} \exp\left[-\frac{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\psi dV_0$$

$$= \iiint\limits_{V_0} (\psi-\psi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2} - \frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] dV_0$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\chi \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\psi-\psi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{(\Delta r)^2}\right] d\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\chi \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\psi-\psi_0)^2 \exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}})^2}\right] d\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\zeta$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2\pi}\frac{\Delta r}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Delta r}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{2\pi}\Delta r = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{4}\Delta r^5$$

Επομένως τελικά παίρνουμε

$$\mathbf{D_{1}}_{\psi\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = \frac{k^2(v_0^2+\delta_0^2)}{4V_0\eta_0^6}(\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{i}_\zeta - \mathbf{i}_\psi \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\psi-\psi_0)(\zeta-\zeta_0)-(\zeta-\zeta_0)(\psi-\psi_0)=0$$

Άρα θα έχουμε

$$\mathbf{D_{1}}_{\psi\zeta}=\langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\zeta\rangle\rangle=0$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\chi$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\chi$$

$$=\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\cdot\mathbf{i}_\chi-\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\chi$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\zeta-\zeta_0)(\chi-\chi_0)-(\zeta-\zeta_0)^2\cdot 0=0$$

Επομένως θα έχουμε

$$\mathbf{D_{1}}_{\zeta\chi}=\langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\chi\rangle\rangle=0$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\psi$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$=\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\cdot\mathbf{i}_\psi-\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\zeta-\zeta_0)(\psi-\psi_0)-(\zeta-\zeta_0)^2\cdot 0=0$$

Επομένως και αυτή η προβολή του τανυστή $\mathbf{D_1}$ θα είναι μηδενική. Άρα,

$$\mathbf{D_{1}}_{\zeta\psi}=\langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\psi\rangle\rangle=0$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\zeta$

Υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα.

$$\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\zeta$$

$$=\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\cdot\mathbf{i}_\zeta-\mathbf{i}_\zeta\cdot[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_s}]\cdot\mathbf{i}_\zeta$$

$$\overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} (\zeta-\zeta_0)^2-(\zeta-\zeta_0)^2=0$$

Τελικά και αυτός ο όρος είναι μηδενικός. Άρα,

$$\mathbf{D_{1\zeta\zeta}} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_1 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

Επομένως βλέπουμε πως στο νέο αυτό σύστημα συντεταγμένων και μετά την ολοκλήρωση πάνω στον όγκο V_0, ο τανυστής $\mathbf{D}_1$ είναι διαγώνιος και ίσος με,

$$\mathbf{D}_1 = \mathrm{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{72}$$

όπου

$$D = \frac{k^2(v_0^2 + \delta_0^2)}{4V_0\eta_0^6}(\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2}) \tag{73}$$

3.2.2 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_2$

Ο τανυστής $\mathbf{D}_2$ ισούται με

$$\mathbf{D}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0 \eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle$$

Για τον υπολογισμό του χρειαζόμαστε την μέση τιμή $\langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle$. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (59) και (60), παίρνουμε

$$\nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) = -\frac{v n_{\alpha 0} B_0}{(\Delta r)^2 L} \exp(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

Παίρνοντας την μέση τιμή για την τυχαία μεταβλητή v, έχουμε

$$\langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle = -\frac{\langle v \rangle n_{\alpha 0} B_0}{(\Delta r)^2 L} \exp(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_a(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle = -\frac{v_0 n_{\alpha 0} B_0}{(\Delta r)^2 L} \exp(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_x} \tag{74}$$

Εισάγουμε την εξίσωση (74) στον ορισμό του τανυστή $\mathbf{D}_2$. Τότε,

$$\mathbf{D}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma - \frac{k^2}{\epsilon_0 \eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \frac{v_0 n_{\alpha 0} B_0}{(\Delta r)^2 L} \exp(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό με αναδιάταξη των όρων μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{D}_2 = -\frac{k^2 v_0 n_{\alpha 0} B_0}{\epsilon_0 \eta_0^4 (\Delta r)^2 L} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\mathbf{r}\cdot\mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s}\cdot\mathbf{i_x}) d\sigma (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\int_{-\infty}^{\infty} sgn(\mathbf{r}\cdot\mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s}\cdot\mathbf{i_x}) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} sgn(x + \sigma \sin(\alpha)) d\sigma$$

όπου αντικαταστήσαμε τα εσωτερικά γινόμενα με τα ορίσματα τους που προκύπτουν από την γεωμετρία του σχήματος (3). Για να διευκολύνουμε τον υπολογισμό, αντικαθιστούμε τα κάτω και άνω όρια του ολοκληρώματος με $-\Lambda, \Lambda$ και μετά το πέρας των υπολογισμών παίρνουμε το όριο $\Lambda \to \infty$. Επιπλέον υποθέτουμε πως $\sin(\alpha)>0$. Τότε έχουμε

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} sgn(x + \sigma \sin(\alpha)) d\sigma = \int_{-\Lambda}^{-\frac{x}{\sin(\alpha)}} (-1) d\sigma + \int_{-\frac{x}{\sin(\alpha)}}^{\Lambda} d\sigma$$

$$= \left[-\Lambda + \frac{x}{\sin(\alpha)}\right] + \left[\Lambda + \frac{x}{\sin(\alpha)}\right] = \frac{2x}{\sin(\alpha)}$$

Όμοια υπολογίζουμε και για $\sin(\alpha)<0$. Σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} sgn(x + \sigma \sin(\alpha)) d\sigma = -\frac{2x}{\sin(\alpha)}$$

και κάνοντας χρήση της συνάρτησης προσήμου, μπορούμε τελικά να συμπτήξουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία,

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} sgn(x + \sigma \sin(\alpha)) d\sigma = sgn(\sin(\alpha)) \frac{2x}{\sin(\alpha)}$$

Έχοντας υπολογίσει αυτό το ολοκήρωμα ο τανυστής $\mathbf{D}_2$ γράφεται

$$\mathbf{D}_2 = -\frac{k^2 v_0 n_{\alpha 0} B_0}{\epsilon_0 \eta_0^4 (\Delta r)^2 L} \frac{2xsgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_2 = -\frac{k^2 v_0}{\eta_0^4 (\Delta r)^2 L} \frac{2xsgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha^2 n_{\alpha 0} q_\beta B_0}{\epsilon_0 m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_2 = -\frac{k^2 v_0}{4\eta_0^6 (\Delta r)^2 L} \frac{2xsgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta \mathrm{r})^2}) \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x}$$

Όπως και πριν ολοκληρώνουμε πάνω στον όγκο V_0. Έτσι τελικά έχουμε

$$\langle\langle \mathbf{D}_2 \rangle\rangle = -\frac{k^2 v_0}{4\eta_0^6 (\Delta r)^2 L} \frac{sgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} 2x \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right] (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{i_x} dV_0$$

και στο νέο σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\langle\langle \mathbf{D}_2 \rangle\rangle = -\frac{k^2 v_0}{4V_0\eta_0^6 (\Delta r)^2 L} \frac{sgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} 2(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right] (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) dV_0$$

$$= -\frac{k^2 v_0 sgn(\sin(\alpha))}{4V_0\eta_0^6 (\Delta r)^2 L} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} 2(\cot(\alpha)\chi + \zeta) \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 + (\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right] (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) dV_0 \tag{75}$$

Υπολογίζουμε τις προβολές του τανυστή $\mathbf{D}_2$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων.

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\cdot\mathbf{i}_\chi\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi+\sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\cdot\mathbf{i}_\chi$$

$$=2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)(\chi-\chi_0)\cos(\alpha)$$

$$=2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi^2-2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi\chi_0+2\cos(\alpha)\zeta(\chi-\chi_0)$$

Επομένως το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (75) μπορεί να γραφεί

$$2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\chi^2\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$-2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$2\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}(\chi-\chi_0)\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$\Rightarrow 2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r(\chi_0^2+\Delta r^2)\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r$$

$$-2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi_0\sqrt{2\pi}\Delta r\chi_0\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r$$

$$+2\cos(\alpha)\cdot 0\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\zeta_0$$

$$\Rightarrow 2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^5$$

Έτσι έχουμε

$$\mathbf{D_{2}}_{\chi\chi}=\langle\langle\mathbf{i}_\chi\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\chi\rangle\rangle=-\frac{k^2v_0sgn(\sin(\alpha))}{4V_0\eta_0^6L}2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^3\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha0}^2\Omega_{\beta0}(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\Omega_{\beta0}})$$

Στον υπολογισμό του ολοκληρώματος κάναμε χρήση της ιδιότητας της κανονικής κατανομής

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi^2\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi=\sqrt{2\pi}\Delta r(\chi_0^2+\Delta r^2)$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\psi$

$$2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\cdot\mathbf{i}_\chi\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi+\sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$=2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)(\chi-\chi_0)\cdot 0=0$$

Επομένως έχουμε

$$\mathbf{D_{2}}_{\chi\psi}=\langle\langle\mathbf{i}_\chi\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\psi\rangle\rangle=0$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\zeta$

$$2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\cdot\mathbf{i}_\chi\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi+\sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\cdot\mathbf{i}_\zeta$$

$$=2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)(\chi-\chi_0)\cdot\sin(\alpha)=2(\cos(\alpha)\chi+\sin(\alpha)\zeta)(\chi-\chi_0)$$

$$=2(\cos(\alpha)\chi^2-2\cos(\alpha)\chi\chi_0+2\sin(\alpha)\zeta(\chi-\chi_0)$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό του τανυστή έχουμε

$$2\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\chi^2\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$-2\cos(\alpha)\chi_0\int_{-\infty}^{\infty}\chi\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$+2\sin(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}(\chi-\chi_0)\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r(\chi_0^2+\Delta r^2)\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r$$

$$-2\cos(\alpha)\chi_0\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\chi_0\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r$$

$$+2\sin(\alpha)\cdot 0\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\zeta_0$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^5$$

Άρα έχουμε

$$\mathbf{D_{2}}_{\chi\zeta}=\langle\langle\mathbf{i}_\chi\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\zeta\rangle\rangle=-\frac{k^2v_0sgn(\sin(\alpha))}{4V_0\eta_0^6L}2\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^3\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha0}^2\Omega_{\beta0}(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\Omega_{\beta0}})$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$2(\cot(\alpha)\chi + \zeta) \cdot \mathbf{i}_\psi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= 2(\cot(\alpha)\chi + \zeta)\,(\psi - \psi_0)\cos(\alpha) = 2(\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi + \cos(\alpha)\zeta)\,(\psi - \psi_0)$$

Λόγω του όρου $(\psi - \psi_0)$ το ολοκλήρωμα που προκύπτει μηδενίζεται. Συνεπώς

$$\mathbf{D_2}_{\psi\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$2(\cot(\alpha)\chi + \zeta) \cdot \mathbf{i}_\psi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= 2(\cot(\alpha)\chi + \zeta)\,(\psi - \psi_0) \cdot 0 = 0$$

Επομένως αυτός ο όρος του τανυστή είναι ίσος με

$$\mathbf{D_2}_{\psi\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$2(\cot(\alpha)\chi + \zeta) \cdot \mathbf{i}_\psi \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= 2(\cot(\alpha)\chi + \zeta)\,(\psi - \psi_0) \cdot \sin(\alpha)$$

$$= 2(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta)\,(\psi - \psi_0)$$

Όπως και παραπάνω το ολοκλήρωμα που προκύπτει θα μηδενίζεται λόγω του όρου $(\psi - \psi_0)$. Άρα έχουμε,

$$\mathbf{D_2}_{\psi\zeta} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_2 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$2(\cot(\alpha)\chi + \zeta) \cdot \mathbf{i}_\zeta \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= 2(\cot(\alpha)\chi + \zeta)\,(\zeta - \zeta_0)\cos(\alpha)$$

$$= 2\cot(\alpha)\cos(\alpha)\chi\,(\zeta - \zeta_0) + 2\cos(\alpha)\zeta^2 - 2\cos(\alpha)\zeta\zeta_0$$

Ο πρώτος όρος όπως και πριν θα μηδενίζεται, ενώ οι 2 τελευταίοι όροι θα μας δώσουν

$$2\cos(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^2\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$-2\cos(\alpha)\zeta_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r(\zeta_0^2+\Delta r^2)$$

$$-2\cos(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\zeta_0^2$$

$$\Rightarrow 2\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^5$$

Άρα αυτός ο όρος του τανυστή θα ισούται με

$$\mathbf{D_{2}}_{\zeta\chi}=\langle\langle\mathbf{i}_\zeta\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\chi\rangle\rangle=-\frac{k^2v_0sgn(\sin(\alpha))}{4V_0\eta_0^6L}2\cos(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^3\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha0}^2\Omega_{\beta0}(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\Omega_{\beta0}})$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\psi$

$$2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\cdot\mathbf{i}_\zeta\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi+\sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\cdot\mathbf{i}_\psi$$

$$=2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\,(\zeta-\zeta_0)\cdot 0=0$$

Επομένως θα έχουμε

$$\mathbf{D_{2}}_{\zeta\psi}=\langle\langle\mathbf{i}_\zeta\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\psi\rangle\rangle=0$$

- $\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2}=\mathbf{i}_\zeta$

$$2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\cdot\mathbf{i}_\zeta\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi+\sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\cdot\mathbf{i}_\zeta$$

$$=2(\cot(\alpha)\chi+\zeta)\,(\zeta-\zeta_0)\cdot\sin(\alpha)$$

$$=2\cos(\alpha)\chi\,(\zeta-\zeta_0)+2\sin(\alpha)\zeta^2-2\sin(\alpha)\zeta\zeta_0$$

Όπως προηγουμένως το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου θα μηδενίζεται, ενώ το ολοκλήρωμα των δύο τελευταίων όρων μας δίνει

$$2\sin(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\chi\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\psi\int_{-\infty}^{\infty}(\zeta^2-\zeta\zeta_0)\exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]d\zeta$$

$$\Rightarrow 2\sin(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r(\zeta_0^2+\Delta r^2)$$

$$-2\sin(\alpha)\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\cdot\sqrt{2\pi}\Delta r\zeta_0^2$$

$$\Rightarrow 2\sin(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^5$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος στο στοιχείο του τανυστή $\mathbf{D_{2}}_{\zeta\zeta}$ έχουμε,

$$\mathbf{D_{2}}_{\zeta\zeta}=\langle\langle\mathbf{i}_\zeta\mathbf{D}_2\mathbf{i}_\zeta\rangle\rangle=-\frac{k^2v_0sgn(\sin(\alpha))}{4V_0\eta_0^6L}2\sin(\alpha)\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^3\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha0}^2\Omega_{\beta0}(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\Omega_{\beta0}})$$

Έχοντας υπολογίσει τα στοιχεία του, βλέπουμε πως ο τανυστής $\mathbf{D_2}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{D}_2=\mathrm{A}\begin{bmatrix}\cot(a)\cos(a) & 0 & \cos(a)\\ 0 & 0 & 0\\ \cos(a) & 0 & \sin(a)\end{bmatrix}\tag{76}$$

με

$$\mathrm{A}=-\frac{k^2v_0\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\Delta r^3sgn(\sin(\alpha))}{2LV_0\eta_0^6}\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha0}^2\Omega_{\beta0}(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\omega_{\alpha0}^2})(\frac{\partial\eta_0^2}{\partial\Omega_{\beta0}})\tag{77}$$

Παρατηρούμε πως ο τανυστής $\mathbf{D}_2$ είναι συμμετρικός σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων. Αυτό οφείλεται στην επιλογή των διαταραχών μας αλλά και στο ότι επιλέξαμε το διάνυσμα της ομαδικής ταχύτητας να ανήκει στο επίπεδο $y-z$.

3.2.3 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_3$

Ο τανυστής $\mathbf{D}_3$ ισούται με

$$\mathbf{D}_3=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma\frac{k^2}{\epsilon_0\eta_0^4}\sum_{\alpha,\beta}\frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta}(\frac{\partial\eta_0}{\partial\omega_{\beta0}^2})(\frac{\partial\eta_0}{\partial\Omega_{\alpha0}})\,\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle$$

Χρειαζόμαστε την μέση τιμή $\langle\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle$. Από τις εξισώσεις (59) και (60) παίρνουμε

$$\nabla_{\mathbf{r}}\delta B(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{r}}\delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)=-\frac{B_0vn_{\beta0}}{L(\Delta r)^2}sgn(x)\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right]\mathbf{i_x}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

Παίρνουμε την μέση τιμή όσον αφορά την τυχαία μεταβλητή v.

$$\langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle = -\frac{B_0 \langle v \rangle n_{\beta 0}}{L(\Delta r)^2} sgn(x) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right] \mathbf{i_x}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_\beta(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma)\rangle = -\frac{B_0 v_0 n_{\beta 0}}{L(\Delta r)^2} sgn(x) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right] \mathbf{i_x}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0) \tag{78}$$

Εισάγουμε την εξίσωση (78) στον ορισμό του τανυστή $\mathbf{D}_3$,

$$\mathbf{D}_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\epsilon_0 \eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})$$

$$\times \frac{B_0 v_0 n_{\beta 0}}{L(\Delta r)^2} sgn(x) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right] \mathbf{i_x}(\mathbf{r}+\mathbf{i_s}\sigma-\mathbf{r}_0)$$

Με αναδιάταξη των όρων παίρνουμε

$$\mathbf{D}_3 = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \eta_0^4} \frac{B_0 v_0 n_{\beta 0}}{L(\Delta r)^2} sgn(x) \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}}) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma \mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \exp\left[-\frac{2\sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s}+\sigma^2}{2(\Delta r)^2}\right] d\sigma \mathbf{i_x}\mathbf{i_s}\right]$$

Τα δύο αυτά ολοκληρώματα τα υπολογίσαμε ήδη κατά την εύρεση του τανυστή $\mathbf{D}_1$. Κάνοντας λοιπόν χρήση των γνωστών αποτελεσμάτων μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{D}_3 = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \eta_0^4} \frac{B_0 v_0 n_{\beta 0}}{L(\Delta r)^2} sgn(x) \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta^2}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}}) \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$\times \sqrt{2\pi}\Delta r \exp\left[\frac{((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [\mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})\mathbf{i_x}\mathbf{i_s}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_3 = -\frac{k^2}{\eta_0^4} \frac{v_0\sqrt{2\pi}}{L\Delta r} sgn(x) \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha B_0 q_\beta^2 n_{\beta 0}}{\epsilon_0 m_\alpha m_\beta} (\frac{1}{2\eta_0}\frac{\partial \eta_0}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{1}{2\eta_0}\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})$$

$$\times \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [\mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{i_s})\mathbf{i_x}\mathbf{i_s}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_3 = -\frac{k^2}{4\eta_0^6}\frac{v_0\sqrt{2\pi}}{L\Delta r} sgn(x) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\omega_{\beta 0}^2 (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})$$

$$\times \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [\mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})\mathbf{i_x}\mathbf{i_s}]$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στον στοιχειώδη όγκο V_0, παίρνουμε την μέση τιμή του τανυστή $\mathbf{D}_3$ όσον αφορά τις χωρικές συντεταγμένες. Έτσι έχουμε

$$\langle\langle \mathbf{D}_3 \rangle\rangle = -\frac{k^2 v_0\sqrt{2\pi}}{4V_0\eta_0^6 L\Delta r} sgn(x) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\omega_{\beta 0}^2 (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})$$

$$\times \int_{V_0} \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] [\mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})\mathbf{i_x}\mathbf{i_s}]\, dV_0 \tag{79}$$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων το εκθετικό μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται,

$$\exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})^2}{2(\Delta r)^2}\right] \overset{\mathbf{i_s}=\mathbf{i}_\zeta}{=} \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2 + (\zeta-\zeta_0)^2 - (\zeta-\zeta_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{(\chi-\chi_0)^2 + (\psi-\psi_0)^2}{2(\Delta r)^2}\right]$$

ενώ ο πίνακας

$$\mathbf{i_x}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i_s})\mathbf{i_x}\mathbf{i_s}$$

$$= (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\zeta-\zeta_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta$$

Σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε τις προβολές του πίνακα στο νέο σύστημα συντεταγμένων και μετά τις εισάγουμε στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (50) και το οποίο μετέπειτα υπολογίζουμε.

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\zeta-\zeta_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot \mathbf{i}_\chi - (\zeta-\zeta_0)\,\mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \cos(\alpha)\,(\chi - \chi_0) - (\zeta - \zeta_0)\cos(\alpha) \cdot 0 = \cos(\alpha)\,(\chi - \chi_0)$$

Όπως και πριν το ολοκλήρωμα αυτού του όρου θα είναι μηδενικό. 'Αρα,

$$\mathbf{D_{3}}_{\chi\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\,(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\psi - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \cos(\alpha)\,(\psi - \psi_0) - (\zeta - \zeta_0)\cos(\alpha) \cdot 0 = \cos(\alpha)\,(\psi - \psi_0)$$

Ο όρος αυτός είναι παρόμοιος με τον παραπάνω, επομένως το ολοκλήρωμα του θα είναι 0. Έτσι έχουμε

$$\mathbf{D_{3}}_{\chi\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\,(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\zeta - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\chi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \cos(\alpha)\,(\zeta - \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)\cos(\alpha) = 0$$

Άρα,

$$\mathbf{D_{3}}_{\chi\zeta} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$\mathbf{i}_\psi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\,(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\chi - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\psi \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\,\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= 0 \cdot (\chi - \chi_0) - (\zeta - \zeta_0) \cdot 0 = 0$$

Συνεπώς και αυτό το στοιχείο του τανυστή $\mathbf{D}_3$ θα είναι μηδενικό.

$$\mathbf{D_{3}}_{\psi\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$\mathbf{i}_\psi \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta\right] \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\psi - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\psi \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= 0 \cdot (\psi - \psi_0) - (\zeta - \zeta_0) \cdot 0 = 0$$

Επομένως θα έχουμε,

$$\mathbf{D_{3}}_{\psi\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$\mathbf{i}_\psi \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta\right] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \mathbf{i}_\psi \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\zeta - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\psi \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= 0 \cdot (\zeta - \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0) \cdot 0 = 0$$

Άρα και εδώ θα έχουμε

$$\mathbf{D_{3}}_{\psi\zeta} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$\mathbf{i}_\zeta \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\zeta - \zeta_0)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta\right] \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \mathbf{i}_\zeta \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\chi - (\zeta - \zeta_0)\,\mathbf{i}_\zeta \cdot \left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\chi$$

$$= \sin(\alpha) \cdot (\chi - \chi_0) - (\zeta - \zeta_0) \cdot \sin(\alpha) \cdot 0 = \sin(\alpha) \cdot (\chi - \chi_0)$$

Κατά τα γνωστά, το ολοκλήρωμα του παραπάνω όρου είναι μηδενικό αφού θα μας δώσει όρους της μορφής $\chi_0 - \chi_0 = 0$.Άρα,

$$\mathbf{D_{3}}_{\zeta\chi} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$\mathbf{i}_\zeta \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\zeta-\zeta_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \mathbf{i}_\zeta \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\psi - (\zeta-\zeta_0)\mathbf{i}_\zeta \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\psi$$

$$= \sin(\alpha)(\psi-\psi_0) - (\zeta-\zeta_0)\sin(\alpha)\cdot 0 = \sin(\alpha)(\psi-\psi_0)$$

Όμοια με παραπάνω το ολοκλήρωμα αυτού του όρου θα μας δώσει μηδέν. Συνεπώς,

$$\mathbf{D_{3}}_{\zeta\psi} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$\mathbf{i}_\zeta \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - (\zeta-\zeta_0)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\mathbf{i}_\zeta] \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \mathbf{i}_\zeta \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{i}_\zeta - (\zeta-\zeta_0)\mathbf{i}_\zeta \cdot (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\mathbf{i}_\zeta \cdot \mathbf{i}_\zeta$$

$$= \sin(\alpha)(\zeta-\zeta_0) - (\zeta-\zeta_0)\sin(\alpha) = 0$$

Επομένως και ο τελευταίος όρος του τανυστή είναι μηδενικός. Άρα,

$$\mathbf{D_{3}}_{\zeta\zeta} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_3 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

Τελικά έχοντας υπολογίσει τα στοιχεία του τανυστή $\mathbf{D_3}$, βλέπουμε πως ο τανυστής $\mathbf{D_3}$ ισούται με έναν μηδενικό πίνακα.

$$\mathbf{D_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{80}$$

Το γεγονός ότι ο τανυστής $\mathbf{D_3}$ είναι μηδενικός, μπορεί να εξηγηθεί θεωρώντας οτί δεν υπάρχει στοχαστική συσχέτιση μεταξύ των δύο διαταραχών που έχουμε επιλέξει, μέτρου μαγνητικού πεδίου - πυκνότητας. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι ο τανυστής $\mathbf{D}_2$ των διαταραχών, πυκνότητας-μέτρου μαγνητικού πεδίου, δεν είναι μηδενικός.

3.2.4 Υπολογισμός τανυστή $\mathbf{D}_4$

Ο τανυστής $\mathbf{D}_4$ ορίζεται ως

$$\mathbf{D}_4 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle$$

Για να τον υπολογίσουμε χρειαζόμαστε την μέση τιμή $\langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle$. Από την εξίσωση (60) έχουμε

$$\nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) = \frac{B_0^2}{L^2} sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

Καθώς το παραπάνω γινόμενο δεν εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή v ,η μέση τιμή του όσον αφορά αυτή θα είναι απλά ο εαυτός του, δηλαδή

$$\langle \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}} \delta B(\mathbf{r} + \mathbf{i_s}\sigma) \rangle = \frac{B_0^2}{L^2} sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x} \tag{81}$$

Εισάγοντας την εξίσωση (81) στον τανυστή $\mathbf{D}_4$ έχουμε,

$$\mathbf{D}_4 = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{k^2}{\eta_0^4} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \frac{B_0^2}{L^2} sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται,

$$\mathbf{D}_4 = \frac{k^2 B_0^2}{\eta_0^4 L^2} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \int_{-\infty}^{\infty} sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x}) sgn(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i_x} + \sigma \mathbf{i_s} \cdot \mathbf{i_x}) d\sigma \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

$$= \frac{k^2 B_0^2}{\eta_0^4 L^2} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \int_{-\infty}^{\infty} sgn(x) sgn(x + \sigma \sin(\alpha)) d\sigma \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό το έχουμε ήδη υπολογίσει για τον τανυστή $\mathbf{D}_2$. Κάνοντας χρήση του γνωστού αποτελέσματος παίρνουμε

$$\mathbf{D}_4 = \frac{k^2 B_0^2}{\eta_0^4 L^2} \frac{2x sgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha m_\beta} (\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_4 = \frac{k^2}{\eta_0^4 L^2} \frac{2x sgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \sum_{\alpha,\beta} \frac{q_\alpha B_0 q_\beta B_0}{m_\alpha m_\beta} (\frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{1}{2\eta_0} \frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_4 = \frac{k^2}{4\eta_0^6 L^2} \frac{2x sgn(\sin(\alpha))}{\sin(\alpha)} \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0} \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \mathbf{i_x} \mathbf{i_x}$$

Όπως και στις άλλες περιπτώσεις ολοκληρώνουμε πάνω στον όγκο V_0.

$$\langle \langle \mathbf{D}_4 \rangle \rangle = \frac{k^2}{4\eta_0^6 L^2} sgn(\sin(\alpha)) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0} \Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}}) \int_{V_0} \frac{2x}{\sin(\alpha)} \mathbf{i_x} \mathbf{i_x} dV_0$$

Το ολοκλήρωμα αυτό εκπεφρασμένο στο σύστημα συντεταγμένων χ, ψ , ζ γράφεται

$$\langle\langle \mathbf{D}_4 \rangle\rangle = \frac{k^2}{4\eta_0^6 L^2} sgn(\sin(\alpha)) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} \frac{2\left(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta\right)}{\sin(\alpha)} (\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) dV_0$$

$$\Rightarrow \langle\langle \mathbf{D}_4 \rangle\rangle = \frac{k^2}{4V_0\eta_0^6 L^2} sgn(\sin(\alpha)) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\chi + \zeta\right)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta) dV_0 \qquad (82)$$

Όπως και για τους προηγούμενους τανυστές, θα υπολογίσουμε τις προβολές του $\mathbf{D}_4$ στο σύστημα συντεταγμένων χ, ψ , ζ και έπειτα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα τηε εξισώσεως (82).

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot \left[(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\chi = \cos^2(\alpha)$$

Επομένως το ολοκλήρωμα της εξισώσεως (82) γράφεται σε αυτή την περίπτωση

$$\int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\chi + \zeta\right)\cos^2(\alpha) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\cos^2(\alpha)\chi + \cos^2(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς μας εκφράζουμε τις νέες συντεταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα.

$$\int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\cos^2(\alpha)\chi + \cos^2(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left(2\cot(\alpha)\cos^3(\alpha)x - 2\cot(\alpha)\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)z + 2\cos^3(\alpha)z + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left(2\cot(\alpha)\cos^3(\alpha)x - 2\cos^3(\alpha)z + 2\cos^3(\alpha)z + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left(2\cot(\alpha)\cos^3(\alpha)x + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος δεν χρειάζεται να επεκτείνουμε τα όριά του στο άπειρο όπως κάνουμε προηγουμένως. Αρκεί να περιορίσουμε τον υπολογισμό του πάνω σε έναν όγκο $V_0 = x_0 y_0 z_0$. Αλλά ακόμη και αυτή η ολοκλήρωση δεν χρειάζεται, αφού αν παρατηρήσουμε την (82) βλέπουμε πως το ολοκλήρωμα γράφεται,

$$\langle\langle \mathbf{D}_4 \rangle\rangle = \frac{k^2}{4V_0\eta_0^6 L^2} sgn(\sin(\alpha)) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} \left(2\cot(\alpha)\cos^3(\alpha)x + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

$$\langle\langle \mathbf{D}_4 \rangle\rangle = \frac{k^2}{4V_0\eta_0^6 L} sgn(\sin(\alpha)) \sum_{\alpha,\beta} \Omega_{\alpha 0}\Omega_{\beta 0} (\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\alpha 0}})(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}})$$

$$\times \int_{V_0} \frac{1}{L} \left(2\cot(\alpha)\cos^3(\alpha)x + 2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

Όμως εξ υποθέσεως γνωρίζουμε πως $x \ll L$. Άρα η συνεισφορά του όρου στο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρή και προσεγγιστικά 0. Επομένως θα έχουμε

$$\mathbf{D_{4\chi\chi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)] \cdot \mathbf{i}_\psi = \cos(\alpha) \cdot 0 = 0$$

Άρα αυτός ο όρος του τανυστή $\mathbf{D}_4$ είναι ίσος με

$$\mathbf{D_{4\chi\psi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\chi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$\mathbf{i}_\chi \cdot [(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta)] \cdot \mathbf{i}_\zeta = \cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

Το ολοκλήρωμα της εξισώσεως (82) γράφεται

$$\int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\chi + \zeta\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\left(\cos^2(\alpha)\chi + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

Όπως προηγουμένως εκφράζουμε τις νέες συντεταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι έχουμε,

$$\int_{V_0} 2\left(\cos^2(\alpha)\chi + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\cos(\alpha)\left(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left(2\cos(\alpha)x\right) dV_0$$

Επειδή όμως $x \ll L$, για τους ίδιους λόγους με πριν αυτός ο όρος του τανυστή θα ισούται με

$$\mathbf{D_{4\chi\zeta}} = \langle\langle \mathbf{i}_\chi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

  $$\mathbf{i}_\psi \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\chi = 0 \cdot \cos(\alpha) = 0$$

Άρα θα έχουμε

$$\mathbf{D_{4\psi\chi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

  $$\mathbf{i}_\psi \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\psi = 0$$

Επομένως,

$$\mathbf{D_{4\psi\psi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\psi$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

  $$\mathbf{i}_\psi \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\zeta = 0 \cdot \sin(\alpha) = 0$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{D_{4\psi\zeta}} = \langle\langle \mathbf{i}_\psi \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\chi$

  $$\mathbf{i}_\zeta \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\chi = \cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\chi + \zeta\right)\cos(\alpha)\sin(\alpha) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\left(\cos^2(\alpha)\chi + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

Όπως και στις άλλες περιπτώσεις εκφράζουμε τις νέες συντεταγμένες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι έχουμε,

$$\int_{V_0} 2\left(\cos^2(\alpha)\chi + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\cos(\alpha)\left(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\int_{V_0} \left(2\cos(\alpha)x\right) dV_0$$

Όμως $x \ll L$, επομένως με τον ίδιο τρόπο όπως πριν αυτός ο όρος του τανυστή θα ισούται με

$$\mathbf{D_{4\zeta\chi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\chi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\psi$

$$\mathbf{i}_\zeta \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\psi = \sin(\alpha) \cdot 0 = 0$$

Έτσι έχουμε,

$$\mathbf{D_{4\zeta\psi}} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\psi \rangle\rangle = 0$$

- $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_\zeta$, $\mathbf{i_2} = \mathbf{i}_\zeta$

$$\mathbf{i}_\zeta \cdot \left[\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\left(\cos(\alpha)\mathbf{i}_\chi + \sin(\alpha)\mathbf{i}_\zeta\right)\right] \cdot \mathbf{i}_\zeta = \sin^2(\alpha)$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (82) παίρνουμε

$$\int_{V_0} 2\left(\cot(\alpha)\chi + \zeta\right)\sin^2(\alpha) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\left(\cos(\alpha)\sin(\alpha)\chi + \sin^2(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

Οι νέες συντεταγμένες εκπεφρασμένες στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μας δίνουν,

$$\int_{V_0} 2\left(\cos(\alpha)\sin(\alpha)\chi + \sin^2(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} 2\sin(\alpha)\left(\cos(\alpha)\chi + \sin(\alpha)\zeta\right) dV_0$$

$$\Rightarrow \int_{V_0} \left(2\sin(\alpha)x\right) dV_0$$

Κάνοντας χρήση της υπόθεσης $x \ll L$ και χρησιμοποιώντας την ίδια επιχειρηματολογία με πριν, έχουμε τελικά

$$\mathbf{D_{4\zeta\zeta}} = \langle\langle \mathbf{i}_\zeta \mathbf{D}_4 \mathbf{i}_\zeta \rangle\rangle = 0$$

Έτσι τελικά συνοψίζοντας τις συνιστώσες του τανυστή $\mathbf{D}_4$ έχουμε

$$\mathbf{D_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{83}$$

Ο μηδενισμός αυτού του τανυστή επήλθε λόγω των υποθέσεων που έχουμε κάνει όσον αφορά την διαταραχή του μέτρου του μαγνητικού πεδίου. Με κάποιο άλλο είδος διαταραχής ο τανυστής αυτός θα ήταν μη μηδενικός.

3.3 Υπολογισμός $\mathbf{D_{kk}}$ και σύνοψη αποτελεσμάτων

Στο σημείο αυτό πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του τανυστή $\mathbf{D_{kk}}$ είναι βολικό να θυμηθούμε τα αποτελέσματα για τους τανυστές που τον συνθέτουν. Έτσι έχουμε,

$$\mathbf{D}_1 = \mathrm{D} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

με

$$D = \frac{k^2(v_0^2 + \delta_0^2)}{4V_0\eta_0^6}(\pi\Delta r)^2 \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \omega_{\beta 0}^2 \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2}\right)\left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\beta 0}^2}\right)$$

$$\mathbf{D}_2 = \mathrm{A} \begin{bmatrix} \cot(a)\cos(a) & 0 & \cos(a) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(a) & 0 & \sin(a) \end{bmatrix}$$

με

$$\mathrm{A} = -\frac{k^2 v_0 \left(2\pi\right)^{\frac{3}{2}} \Delta r^3 sgn(\sin(\alpha))}{2LV_0\eta_0^6} \sum_{\alpha,\beta} \omega_{\alpha 0}^2 \Omega_{\beta 0} \left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \omega_{\alpha 0}^2}\right)\left(\frac{\partial \eta_0^2}{\partial \Omega_{\beta 0}}\right)$$

ενώ οι τανυστές $\mathbf{D}_3$ και $\mathbf{D}_4$ ισούνται με

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{D}_4 = \mathbf{0} \tag{84}$$

Επομένως, ο τανυστής διάχυσης $\mathbf{D_{kk}}$ που αναζητούσαμε και μας ήταν απαραίτητος για την δημιουργία της Fokker-Planck εξίσωσης για την κατανομή των ακτίνων, γράφεται από τον ορισμό του ως

$$\mathbf{D_{kk}} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_4$$

$$= \mathrm{D}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{A}\begin{bmatrix} \cot(a)\cos(a) & 0 & \cos(a) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(a) & 0 & \sin(a) \end{bmatrix} + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{D} + A\cot(a)\cos(a) & 0 & A\cos(a) \\ 0 & D & 0 \\ A\cos(a) & 0 & A\sin(a) \end{bmatrix} \tag{85}$$

Παρατηρούμε ότι η διαταραχή στο μέτρο του μαγνητικού πεδίου, εισήγαγε μια έντονη εξάρτηση του τανυστή διάχυσης από την κατεύθυνση του διαδιδόμενου κύματος σε σχέση με τον άξονα z. Αυτό φαίνεται εύκολα αν συγκρίνουμε τον τανυστή της εξίσωσης (85) με τον τανυστή $\mathbf{D}_1$, ο οποίος προκύπτει μόνο από την διαταραχή στην πυκνότητα του πλάσματος.

3.3.1 Εξίσωση Fokker-Planck

Έχουμε διατυπώσει ήδη την εξίσωση εξέλιξης για μια κατανομή ακτίνων φωτός, αυτή είναι η

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} \simeq div_k(\langle\langle \mathbf{D_{kk}}(\mathbf{X})\rangle\rangle \cdot grad_k \bar{f}) \tag{86}$$

Για τον τανυστή $\mathbf{D_{kk}}$ που υπολογίσαμε στην εξίσωση (56) γράφεται,

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial k_x}(\langle\langle \mathbf{D}_{\chi\chi}\rangle\rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial k_x} + \langle\langle \mathbf{D}_{\chi\zeta}\rangle\rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial k_\zeta}) + \frac{\partial}{\partial k_\psi}(\langle\langle \mathbf{D}_{\psi\psi}\rangle\rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial k_\psi}) + \frac{\partial}{\partial k_\zeta}(\langle\langle \mathbf{D}_{\zeta\chi}\rangle\rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial k_x} + \langle\langle \mathbf{D}_{\zeta\zeta}\rangle\rangle \frac{\partial \bar{f}}{\partial k_\zeta}) \tag{87}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του τανυστή, παίρνουμε

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} = (\mathrm{D} + A\cot(a)\cos(a))\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x^2} + A\cos(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x \partial k_\zeta} + D\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\psi^2} + A\cos(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta \partial k_\chi} + A\sin(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} = (\mathrm{D} + A\cot(a)\cos(a))\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x^2} + 2A\cos(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x \partial k_\zeta} + D\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\psi^2} + A\sin(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta^2} \tag{88}$$

όπου κάναμε χρήση της ιδιότητας των μερικών παραγώγων

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\chi \partial k_\zeta} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta \partial k_\chi}$$

Η εξίσωση (88) είναι η εξίσωση που αναζητούσαμε. Είναι μια Fokker-Planck εξίσωση της κατανομής των ακτίνων $\bar{f}(\mathbf{k}, \ell)$. Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την εξίσωση (88).

1. Ο συντελεστής του $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x^2}$, δείχνει να απειρίζεται για κύμα διαδιδόμενο κατά τον άξονα z, δηλαδή για $\alpha = 0, \pi$. Ο απειρισμός αυτός δεν έχει παρατηρηθεί πειραματικά και για τον λόγο αυτό είναι ένα σφάλμα του μοντέλου μας. Πιθανότατα για τον απειρισμό αυτόν, ευθύνεται η απότομη αλλαγή της κλίσης για $x = 0$ του μέτρου του μαγνητικού πεδίου.

2. Η εξίσωση (88) διαγωνοποιείται για κύμα διαδιδόμενο κάθετα στον άξονα z, δηλαδή για $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Τότε η εξίσωση Fokker-Planck γράφεται

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x^2} + D\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\psi^2} + A\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta^2} \tag{89}$$

Η εξίσωση (89) μας θυμίζει στην μορφή την κλασσική εξίσωση θερμότητας από τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

της οποίας οι λύσεις έχουν την μορφή

$$\mathrm{E}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') = \frac{\exp(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{4t})}{2^3\sqrt{\pi^3 t^3}}$$

Δυστυχώς όμως, παρά την ομοιότητα της με την εξίσωση θερμότητας, η εξίσωση (89) δεν έχει αναλυτική λύση αφού ο συντελεστής A μπορεί να είναι είτε θετικός είτε αρνητικός.

3.3.2 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή επιχειρήθηκε να δοθεί ένα γενικότερο μοντέλο βασισμένο στην εργασία [3], το οποίο να περιγράφει την αλληλεπίδραση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με τα διάφορα στοιχεία του πλάσματος παρουσία blobs και μεταβλητών χωρικά μαγνητικών πεδίων. Αφού εξαγάγαμε το γενικό μοντέλο και καταλήξαμε σε μια εξίσωση διάχυσης Fokker-Planck για την σκέδαση μιας δέσμης ακτίνων, περάσαμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Για διευκόλυνση των πράξεων, υποθέσαμε ότι τα blobs έχουν σφαιρικό σχήμα (γνωρίζουμε από πειράματα πως τα blobs μπορούν να είναι και ελλειπτικά) και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε όγκο V_0 ενώ για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου υποθέσαμε ότι η διαταραχή είναι της μορφής $\delta B(\mathbf{r}) = \frac{B_0|\mathrm{x}|}{L}$. Υπολογίζοντας τον τανυστή διάχυσης στον χώρο των κυματανυσμάτων και τις προβολές του σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που ορίσαμε, καταλήξαμε στην εξίσωση διάχυσης Fokker-Planck για το συγκεκριμένο μοντέλο, η οποία είναι η

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{f}}}{\partial \ell} = (\mathrm{D} + A\cot(a)\cos(a))\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x^2} + 2A\cos(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_x \partial k_\zeta} + D\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\psi^2} + A\sin(a)\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial k_\zeta^2}$$

Η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά και χρειάζεται να επιλυθεί με αριθμητικές μεθόδους.

Το μοντέλο το οποίο εξήχθη σε αυτή την εργασία σαφώς και έχει περιθώρια βελτίωσης. Για αρχή πρέπει να βρεθεί λύση στο πρόβλημα του απειρισμού του τανυστή διάχυσης. Πιθανή επίλυση του θέματος θα μπορούσε να δοθεί από ένα καλύτερο μοντέλο της διαταραχής του μέτρου του μαγνητικού πεδίου. Επιπλέον θα πρέπει να γραφεί κώδικας για την αριθμητική επίλυση της Fokker-Planck στην οποία καταλήγουμε. Τέλος, για να βελτιωθεί η προσέγγιση μας και να έχουμε αποτελέσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ελλειπτικά blobs.

A Υπολογισμός παραγώγων $\frac{\partial\theta}{\partial k_x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial k_y}$ και $\frac{\partial\theta}{\partial k_z}$

Η πρώτη παράγωγος ισούται με,

$$\frac{\partial\theta}{\partial k_x} = \frac{\partial}{\partial k_x}\left(\arccos\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{i_z}}{k}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial k_x}\left(\arccos\left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k_z^2}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}}\left(-\frac{k_z k_x}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\right)$$

$$= \frac{k_z k_x\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_z k_x}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)}$$

$$= \frac{k^2\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\cdot\cos(\varphi)}{k^3\sin(\vartheta)} = \frac{\cos(\vartheta)\cos(\varphi)}{k}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα αντικαταστήσαμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις αντίστοιχες σφαιρικές.

Για την δεύτερη παράγωγο έχουμε,

$$\frac{\partial\theta}{\partial k_y} = \frac{\partial}{\partial k_y}\left(\arccos\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{i_z}}{k}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial k_y}\left(\arccos\left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k_z^2}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}}\left(-\frac{k_z k_y}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\right)$$

$$= \frac{k_z k_y\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_z k_y}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)}$$

$$= \frac{k^2\cos(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)\cdot\sin(\varphi)}{k^3\sin(\vartheta)} = \frac{\cos(\vartheta)\sin(\varphi)}{k}$$

Η τρίτη παράγωγος είναι ίση με,

$$\frac{\partial\theta}{\partial k_z} = \frac{\partial}{\partial k_z}\left(\arccos\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{i_z}}{k}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial k_z}\left(\arccos\left(\frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k_z^2}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}}\left(\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}-\frac{k_z^2}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\frac{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}-\frac{k_z^2}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$$

$$= -\frac{k}{k\sin(\theta)}\frac{k-\frac{k^2\cos^2(\theta)}{k}}{k^2} = -\frac{\sin(\theta)}{k}$$

References

[1] Bernstein, I.B. (1974). "Geometric optics in space- and time-varying plasmas," Phys. Fluids, 18, 320

[2] Chandrasekhar S. (1943). "Stochastic Problems in Physics and Astronomy," Rev. Mod. Phys., 15, 1

[3] Hizanidis, K. et al. (2010). "Fokker-Planck description of the scattering of radio frequency waves at the plasma edge," Phys. Plasmas, 17, 022505

[4] Ichimaru, S. (1994). *Basic Principles of Plasma Physics, A Statistical Approach,* Westview Press

[5] Peeters, A.G. and Strintzi, D. (2008). "The Fokker-Planck equation and its application in plasma physics," Ann. Phys. (Berlin) 17, 2-3

[6] Stix, T.H. (1959). "Absorption of Plasma Waves," Phys. Fluids, 3, 1

[7] Stix, T.H. (1992). *Waves in Plasmas,* Springer-Verlag, New York.

[8] Tsironis, C. et al. (2009). "Electron-cyclotron wave scattering by edge density fluctuations in ITER," Phys. Plasmas, 16, 112510

[9] Βομβορίδης, Γ. (1990). *ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ*, Αθήνα

[10] Δάσιος, Γ. και Κυριάκη, Κ. (1994). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Αθήνα

[11] Τραχανάς, Σ. (2007). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο