



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Πρωτότυπες Μέθοδοι Αυτόματης Αναγνώρισης Γραφέα και
Αντιμετώπισης Υπολογιστικών Προβλημάτων Υλοποίησης**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Φώτιος Γ. Γιαννόπουλος

Αθήνα, Ιούνιος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πρωτότυπες Μέθοδοι Αυτόματης Αναγνώρισης Γραφέα και Αντιμετώπισης Υπολογιστικών Προβλημάτων Υλοποίησης

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Φώτιος Γ. Γιαννόπουλος

Συμβουλευτική Επιτροπή : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Ηλίας Κουκούτσης

Βασίλειος Λούμος

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Ιουνίου 2018.

.....

Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς,
Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Γεώργιος Φικιώρης,
Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Ηλίας Κουκούτσης,
Επ. Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Βασίλειος Παπανικολάου,
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

.....

Μιχάλης Παναγόπουλος,
Επ. Καθηγητής, Τμήμα Τεχνών
Ήχου και Εικόνας, Ιόνιο
Πανεπιστήμιο

Αθήνα, Ιούνιος 2018

.....

Νεκτάριος Κοζύρης,
Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Αθανάσιος Παναγόπουλος,
Αν. Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....

Φώτιος Γ. Γιαννόπουλος

Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Φώτιος Γ. Γιαννόπουλος, 2018.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή αναπτύσσονται μεθοδολογίες αναγνώρισης προτύπων και μέθοδοι αντιμετώπισης υπολογιστικών προβλημάτων που οφείλονται στη χρήση πεπερασμένου μήκους λέξης στους σύγχρονους υπολογιστές. Οι μεθοδολογίες αυτές αντιμετωπίζουν πραγματικά, σημαντικά προβλήματα της Αρχαιομετρίας και της Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών.

Αρχικά παρουσιάζεται μία νέα μέθοδος για την αυτόματη κατάταξη ενός αριθμού κειμένων επί τη βάση του γραφέα τους. Η σύγκριση των συμβόλων από τα οποία αποτελούνται τα κείμενα αυτά πραγματοποιείται με μία πρωτότυπη μέθοδο προσαρμογής σχημάτων, η οποία βασίζεται σε μία νέα μαθηματική οντότητα, την επίπεδη καμπυλότητα. Η προσαρμογή αυτή χρησιμοποιεί επιπλέον τους αφινικούς μετασχηματισμούς της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης, ούτως ώστε να γίνει βέλτιστη. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε σε έναν αριθμό συμβόλων της αλφαβήτου που εμφανίζονται σε σημαντικά αρχαία και βυζαντινά κείμενα. Σε κάθε σχετική προσαρμογή υπολογίζεται η τιμή ενός κριτηρίου ομοιότητας που βέλτιστα εκφράζει το βαθμό ομοιότητας δύο υλοποιήσεων. Ακολούθως, εισάγονται κατάλληλα πρωτότυπα στατιστικά κριτήρια, τα οποία δρουν επί αυτών των τιμών του κριτηρίου ομοιότητας, διαχωρίζουν τους διαφορετικούς γραφείς που έγραψαν τα υπό μελέτη κείμενα και αποδίδουν σε κάθε γραφέα τα κείμενα που αυτός είχε γράψει. Η ανωτέρω μέθοδος κατέταξε 46 αρχαίες επιγραφές σε 10 γραφείς/λιθοξόους και 25 βυζαντινούς παπύρους σε 4 γραφείς. Με την κατάταξη αυτή συμφώνησαν πλήρως επιφανείς επιγραφολόγοι και καθηγητές Κλασικών Σπουδών.

Σε επόμενο στάδιο, παρουσιάζεται μία νέα προσέγγιση για τη μελέτη παραγωγής και διάδοσης του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση της πράξης του πολλαπλασιασμού στους σύγχρονους υπολογιστές. Η ανάγκη αυτής της μελέτης προέκυψε και κατά την εκτέλεση των προαναφερθέντων, αρκετά περίπλοκων αλγορίθμων ταυτοποίησης γραφέα. Το συγκεκριμένο λάθος πεπερασμένης ακρίβειας, ειδικά σε περιπτώσεις εκτέλεσης πολλών διαδοχικών πολλαπλασιασμών, είναι δυνατόν να συσσωρεύεται, καθιστώντας τα αποτελέσματα του αντίστοιχου αλγορίθμου αναξιόπιστα ή/και εντελώς λανθασμένα. Στην παρούσα διατριβή εισάγεται μία νέα, γενική μεθοδολογία που επιτρέπει τον εντοπισμό των κυρίων πηγών γένεσης αριθμητικού λάθους κβαντισμού και τον επακριβή υπολογισμό του αριθμού των λανθασμένων ψηφίων που συσσωρεύονται στα γινόμενα που υπολογίζονται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Η σχετική μεθοδολογία οδηγεί στον ακριβή θεωρητικό και πρακτικό υπολογισμό της τροποποίησης του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που μπορεί να προκαλέσει ένας τυχών πολλαπλασιασμός. Για κάθε σχετικό ενδεχόμενο τροποποίησης, οι αντίστοιχες πιθανότητες αυτό να λάβει χώρα δίνονται επακριβώς. Τα ανωτέρω αποτελέσματα επεκτείνονται και στην περίπτωση εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Επιπλέον, πραγματοποιήθηκαν εκτεταμένα πειράματα, τα οποία πλήρως επιβεβαίωσαν τις θεωρητικές προβλέψεις. Ειδικότερα, επιβεβαιώθηκαν οι θεωρητικά προβλεπόμενες συνθήκες, οι οποίες μπορούν να καταστήσουν έναν αλγόριθμο που περιλαμβάνει πολλούς πολλαπλασιασμούς ανθεκτικό ή όχι στη γένεση και συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Τέλος, δόθηκαν συγκεκριμένοι αλγόριθμοι που αστοχούν πλήρως λόγω επανειλημμένων πολλαπλασιασμών, καθώς και άλλοι αλγόριθμοι που είναι πολύ ανθεκτικοί στο λάθος πεπερασμένης ακρίβειας, αν και περιλαμβάνουν μεγάλο πλήθος πολλαπλασιασμών.

Λέξεις κλειδιά: Αυτόματη Αναγνώριση Γραφέα, Ομαδοποίηση Κειμένων Βάσει του Γραφέα τους, Επίπεδη Καμπυλότητα, Γένεση Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας, Συσσώρευση Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας, Ακριβής Προσδιορισμός Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας

Abstract

In the present thesis a new pattern recognition methodology, as well as a new method for coping with computation problems caused by the use of finite word length in contemporary computers are presented. The introduced methods can resolve really important problems in the fields of Archaeometry and Computer Architecture.

A new method for the automatic classification of a set of documents according to their writer is initially presented. The comparison between the various symbols appearing in the documents at hand is achieved by means of a novel shape matching method based on a new mathematical entity called plane curvature. Moreover, the affine transformations of rotation and parallel translation are taken into account, so that the final matching of any two shapes becomes optimal. The aforementioned method was applied to a number of alphabet symbols appearing in important ancient and Byzantine documents. For each comparison of two instances of a certain alphabet symbol, a value of a similarity criterion was calculated that best expresses the similarity between these instances. Furthermore, a number of novel statistical criteria applied to the values of the aforementioned similarity criterion is introduced. By means of these statistical criteria, the determination of the number of different writers who wrote the given ensemble of documents, as well as the clustering of the set of given documents according to their writer is achieved. The aforementioned method attributed 46 ancient inscriptions to 10 individual writers/carvers and 25 Byzantine codices to 4 distinct writers. Prominent epigraphists and professors of Classical Studies fully agreed with the classification proposed by the method.

On the second part of the thesis, a novel approach for studying the finite precision error generation and propagation in any multiplication process performed in a contemporary computing machine is presented. The need for this study occurred during the execution of the algorithms corresponding to the aforementioned writer identification method. This error may accumulate and render the results of an algorithm totally erroneous very fast, especially in cases where multiple successive multiplications take place during the execution of the algorithm. In the present thesis, a new, general methodology that allows for exact tracking of the finite precision error's main sources, as well as calculation of the exact number of erroneous decimal digits appearing in any algorithm's multiplication result at any given time is introduced. The corresponding methodology determines the exact theoretical and practical evaluation of the finite precision error's modification caused by any multiplication process. For any modification eventuality, the corresponding exact probabilities for it to take place are given. These results are also extended in order to include the case of execution of successive multiplications.

Moreover, extensive experiments that fully supported the theoretical analysis were carried out. Specifically, the theoretical conditions under which an algorithm that includes numerous successive multiplications may be finite precision error resistant or not were experimentally verified. Finally, specific algorithms that quickly fail to provide accurate results due to finite precision error accumulation, as well as others that are remarkably finite precision error resistant, even if they contain a large number of successive multiplications, were presented.

Keywords: Automatic Writer Identification, Document Classification According to their Writer, Plane Curvature, Finite Precision Error Generation, Finite Precision Error Accumulation, Exact Tracking of Finite Precision Error

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη συγγραφή της παρούσας διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν στην προσπάθειά μου αυτή και συνετέλεσαν με οποιοδήποτε τρόπο στην ολοκλήρωσή της.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω βαθύτατα τον ουσιαστικό επιβλέποντα της διατριβής αυτής, Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Κωνσταντίνο Παπαοδυσσέα για την αμέριστη καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια τόσο της ερευνητικής εργασίας που οδήγησε στο παρόν αποτέλεσμα, όσο και της συγγραφής του κειμένου της διατριβής. Οι βαθιές γνώσεις του και η εμπειρία του πάνω στο αντικείμενο του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών, στα Μαθηματικά και σε όλα τα αντικείμενα έρευνας με τα οποία έχει ασχοληθεί, είχαν ως αποτέλεσμα πάντοτε εύστοχες υποδείξεις προς την κατεύθυνση επίλυσης κάθε προβλήματος που προέκυπτε. Επίσης, χάρις στη γνήσια και αστείρευτη διάθεσή του για έρευνα, ήταν πάντοτε πρόθυμος να ασχοληθεί ατελείωτα βράδια με οποιοδήποτε πρόβλημα, μέχρι την επίλυσή του. Τα ανωτέρω τον καθιστούν υπόδειγμα επιβλέποντα. Η δε ικανότητά του να μεταδίδει τόσο στους συνεργάτες του, όσο και στους φοιτητές του ότι η γνώση δεν είναι δύσκολη, αρκεί να δομείται με συγκεκριμένο τρόπο και να τεκμηριώνεται επιστημονικά, τον καθιστούν υπόδειγμα καθηγητή και ερευνητή. Χωρίς τη δική του καθοδήγηση δεν θα ήταν δυνατόν να ολοκληρώσω την παρούσα διατριβή. Για όλα τα ανωτέρω, για την ευκαιρία που μου έδωσε να συνδράμω επικουρικά στο διδακτικό του έργο, για τα όσα μου έμαθε, αλλά και για την συναναστροφή που είχαμε σε προσωπικό επίπεδο, του είμαι ευγνώμων.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Ηλία Κουκούτση, αρχικά για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε επιλέγοντάς με ως υποψήφιο διδάκτορα, αλλά και για την καθοδήγησή του και την εξαιρετική στάση του απέναντί μου καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας διατριβής. Τον ευχαριστώ επίσης για την άριστη συνεργασία που είχαμε στα πλαίσια της διδασκαλίας μαθημάτων της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π.. Ο κύριος Κουκούτσης είναι ένας καθηγητής ο οποίος ανέκαθεν έδινε ιδιαίτερη σημασία στην εκπαιδευτική διαδικασία και για το λόγο αυτό μου έδωσε ιδιαίτερη χαρά το γεγονός ότι μου δόθηκε η ευκαιρία να προσφέρω επικουρικό έργο σε ορισμένα από τα μαθήματα τα οποία διδάσκει. Η εμπειρία που αποκόμισα από τη συνεργασία μας είναι μοναδική.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τον Ομότιμο Καθηγητή Ε.Μ.Π. και μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου κύριο Βασίλειο Λούμο για τις ουσιαστικότερες συζητήσεις τις οποίες είχαμε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου, αλλά και για το ότι ήταν πάντοτε πρόθυμος να με βοηθήσει σε ό,τι χρειάστηκε.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω να απευθύνω στον Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Βασίλειο Παπανικολάου, διότι με τίμησε με τη συμμετοχή του στην Επταμελή Επιτροπή Εξέτασης της διατριβής μου, αλλά και διότι συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της μεθοδολογίας που

αναπτύχθηκε για τη στατιστική επεξεργασία που παρουσιάζεται στο Α Μέρος της παρούσας διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης τον Καθηγητή Ε.Μ.Π. και Κοσμήτορα της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών κύριο Νεκτάριο Κοζύρη, τον Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Γεώργιο Φικιώρη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Αθανάσιο Παναγόπουλο και τον Επίκουρο Καθηγητή του Ιονίου Πανεπιστημίου κύριο Μιχάλη Παναγόπουλο, διότι με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην Επταμελή Επιτροπή Εξέτασης της διατριβής μου. Ειδικότερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Μιχάλη Παναγόπουλο για τις πολύ εύστοχες παρατηρήσεις του αναφορικά με τη διατριβή μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Ομότιμο Καθηγητή Ε.Μ.Π. κύριο Μιχαήλ Θεολόγου, για την τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην Πενταμελή Επιτροπή Αξιολόγησης της Ενδιάμεσης Κρίσης μου, αλλά και για την προθυμία του να με βοηθήσει όποτε του το ζήτησα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης θερμότατα τα μέλη της ερευνητικής μας ομάδας και συγκεκριμένα τον Δρ. Σόλωνα Ζάννο, τον Δρ. Δημήτρη Αραμπατζή, τον Δρ. Μιχάλη Έξαρχο και τον Δρ. Παναγιώτη Ρουσόπουλο, καθώς και τον υποψήφιο διδάκτορα Κωνσταντίνο Χαλάτση για την άριστη συνεργασία μας όλα αυτά τα χρόνια. Η υποδειγματική μας συνεργασία και η αλληλοβοήθεια που υπήρχε εντός της ομάδας, έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των σχετικών ιδεών.

Ξεχωριστά από τους ανωτέρω θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Δημήτρη Αραμπατζή για τη συνολική προσφορά του στη διαμόρφωση της παρούσας διατριβής. Ο Δρ. Αραμπατζής με τις άριστες γνώσεις του στα Μαθηματικά και στο αντικείμενο του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών, αλλά και με τις οξυδερκείς παρατηρήσεις και υποδείξεις του, είχε ρόλο συν – επιβλέποντα στην παρούσα διατριβή και για την ουσιαστική του συνδρομή τον ευχαριστώ.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου που μου συμπαραστάθηκαν όλα αυτά τα χρόνια στην προσπάθειά μου. Η αρωγή τους ήταν πολύτιμη και μου έδινε πάντα δύναμη να συνεχίσω να προσπαθώ.

Τέλος, θα ήθελα να απευθύνω τις θερμότερες ευχαριστίες μου και να αφιερώσω την παρούσα διατριβή στους γονείς μου Γιώργο και Τασία και στην αδελφή μου Ελένη για την αμέριστη ηθική και υλική στήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου αυτής και για την πίστη τους σε εμένα και στις επιλογές μου.

Φώτιος Γ. Γιαννόπουλος

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	5
Abstract	6
Ευχαριστίες.....	7
Πίνακας Περιεχομένων	9
A. Αυτόματη Αναγνώριση Γραφέα Αρχαίων Επιγραφών και Βυζαντινών Χειρογράφων	13
1 Εισαγωγή	15
1.1 Η σημασία της ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων επιγραφών και χειρογράφων	15
1.2 Ένας πρώτος σκοπός της παρούσας εργασίας: Μια νέα προσέγγιση στο πρόβλημα της χρονολόγησης γραφέν αρχαίων κειμένων μέσω της ταυτοποίησης των γραφέν τους. 21	
2 Βιβλιογραφική έρευνα και εγγενείς δυσκολίες του προβλήματος της αυτόματης αναγνώρισης γραφέα.....	25
2.1 Το state of the art στην αυτόματη αναγνώριση γραφέα	25
2.2 Οι εγγενείς δυσκολίες και απαιτήσεις της ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων κειμένων 28	
3 Μαθηματικό υπόβαθρο	33
3.1 Ορισμός καμπύλης στο \mathbb{R}^n και η επιβατική ακτίνα τυχόντος σημείου της καμπύλης 33	
3.2 Ορισμός συνεχούς και ομαλής καμπύλης	35
3.3 Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης C_1 στο \mathbb{R}^n	35
3.4 Θεμελίωση της εφαπτομένης καμπύλης στο \mathbb{R}^2 : Η σχέση \vec{l} και $\vec{r}'(t)$	36
3.5 Μήκος ομαλής καμπύλης ή/και τόξου αυτής στο \mathbb{R}^2	38
3.6 Παραμετρική παράσταση ομαλής καμπύλης C στο \mathbb{R}^2 , με ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος αυτής, s	39
3.7 Η περίπτωση τυχούσας καμπύλης: Ο εγγύτατος κύκλος σε τυχόν σημείο αυτής	44
3.8 Η καμπυλότητα τυχούσας καμπύλης εκπεφρασμένης συναρτήσει οποιασδήποτε ανεξάρτητης μεταβλητής t	49
3.9 Κάθετο διάνυσμα και η καμπυλότητα σε καμπύλη που δίδεται σε πεπλεγμένη εξίσωση της μορφής $f(x, y) = c$	55
4 Μία νέα, πολύ χρήσιμη Μαθηματική οντότητα: Η επίπεδη καμπυλότητα.....	65
4.1 Θεμελιώδεις ορισμοί που αφορούν την επίπεδη καμπυλότητα	65
4.2 Προτάσεις που αφορούν την επίπεδη καμπυλότητα.....	69

4.3	Μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας όταν το χωρίο υπόκειται σε αφινικούς μετασχηματισμούς.....	80
5	Μία νέα μέθοδος προσαρμογής δύο καμπυλών Γ_1 και Γ_2 και αντίστοιχη διαδικασία....	99
5.1	Βέλτιστος μετασχηματισμός του μεγέθους της καμπύλης Γ_2 , ώστε αυτή να ταιριάζει στην καμπύλη Γ_1	103
5.2	Ενσωμάτωση της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης για τη βέλτιστη προσαρμογή της καμπύλης Γ_2 στη Γ_1	107
5.3	Το χρησιμοποιηθέν τελικό μέτρο ομοιότητας μεταξύ δύο υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου της αλφαβήτου.....	107
6	Στατιστικά κριτήρια κατάταξης ενός δεδομένου συνόλου σχημάτων σε ομάδες και εφαρμογή τους στην αναγνώριση γραφέα.....	113
6.1	Τα χρησιμοποιηθέντα στατιστικά κριτήρια για την απόδοση ενός κειμένου στο γραφέα του	113
6.2	Εντοπισμός των διαφορετικών γραφένων και απόδοση του κάθε κειμένου στο γραφέα του	121
6.3	Κατάταξη ενός συνόλου καμπυλών βάσει μιας τυχούσας ιδιότητας \mathcal{P}	126
7	Εφαρμογή της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στην αναγνώριση των γραφένων αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών χειρογράφων	129
7.1	Τα κείμενα στα οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος.....	130
7.2	Οι εγγενείς δυσκολίες της αναγνώρισης γραφένων αρχαίων κειμένων	138
7.3	Αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου που βασίζεται στην επίπεδη καμπυλότητα στην αναγνώριση γραφέα αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών παπύρων	141
7.4	Σύγκριση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ταυτοποίησης γραφένων που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή με εκείνη αντίστοιχων, εναλλακτικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν από την ερευνητική ομάδα	164
8	Συμπεράσματα	165
9	Βιβλιογραφία Α Μέρους	169
B.	Μελέτη Γένεσης και Συσσώρευσης Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας	179
1	Εισαγωγή	181
1.1	Η μεγάλη και γενική σημασία του προβλήματος γένεσης και συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στους υπολογιστές	181
1.2	Το state of the art στη μελέτη του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας.....	183
2	Γενικές έννοιες και ορισμοί που αποτελούν τη βάση της νέας μεθόδου.....	187
2.1	Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός και συντομογραφίες.....	187

2.2	Αυστηρός ορισμός του μεγέθους της διαφοράς της ψηφιακής αναπαράστασης δύο αριθμών	190
2.3	Αυστηρός ορισμός του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που εμπεριέχεται στην ψηφιακή αναπαράσταση ενός αριθμού.....	194
3	Γένεση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε έναν πολλαπλασιασμό και σχετικές πιθανότητες.....	197
3.1	Αναλυτικός υπολογισμός του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού.....	197
3.2	Οι πιθανότητες να προκύψει συγκεκριμένος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων στο αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού	213
4	Υπολογισμός των πιθανοτήτων για τη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς.....	227
5	Εκτέλεση ενός συνόλου πολλαπλασιασμών με δύο διαφορετικά μήκη λέξης	247
6	Πειράματα ελέγχου/επιβεβαίωσης της θεωρητικής ανάλυσης που προηγήθηκε	251
6.1	Πειραματική επαλήθευση ελέγχου συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας με χρήση δύο διαφορετικών μηκών λέξης	251
6.2	Πειραματική επαλήθευση συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς	252
6.3	Πειραματική επαλήθευση των πιθανοτήτων γένεσης συγκεκριμένου αριθμού λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων στην πράξη του πολλαπλασιασμού.....	262
7	Συμπεράσματα	277
8	Βιβλιογραφία Β Μέρους.....	279
	Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα	283
	Δημοσιεύσεις	285
	Διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές	285
	Διεθνή επιστημονικά συνέδρια με κριτές	285
	Κεφάλαια σε βιβλία	287
	Υπό κρίση σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές	287

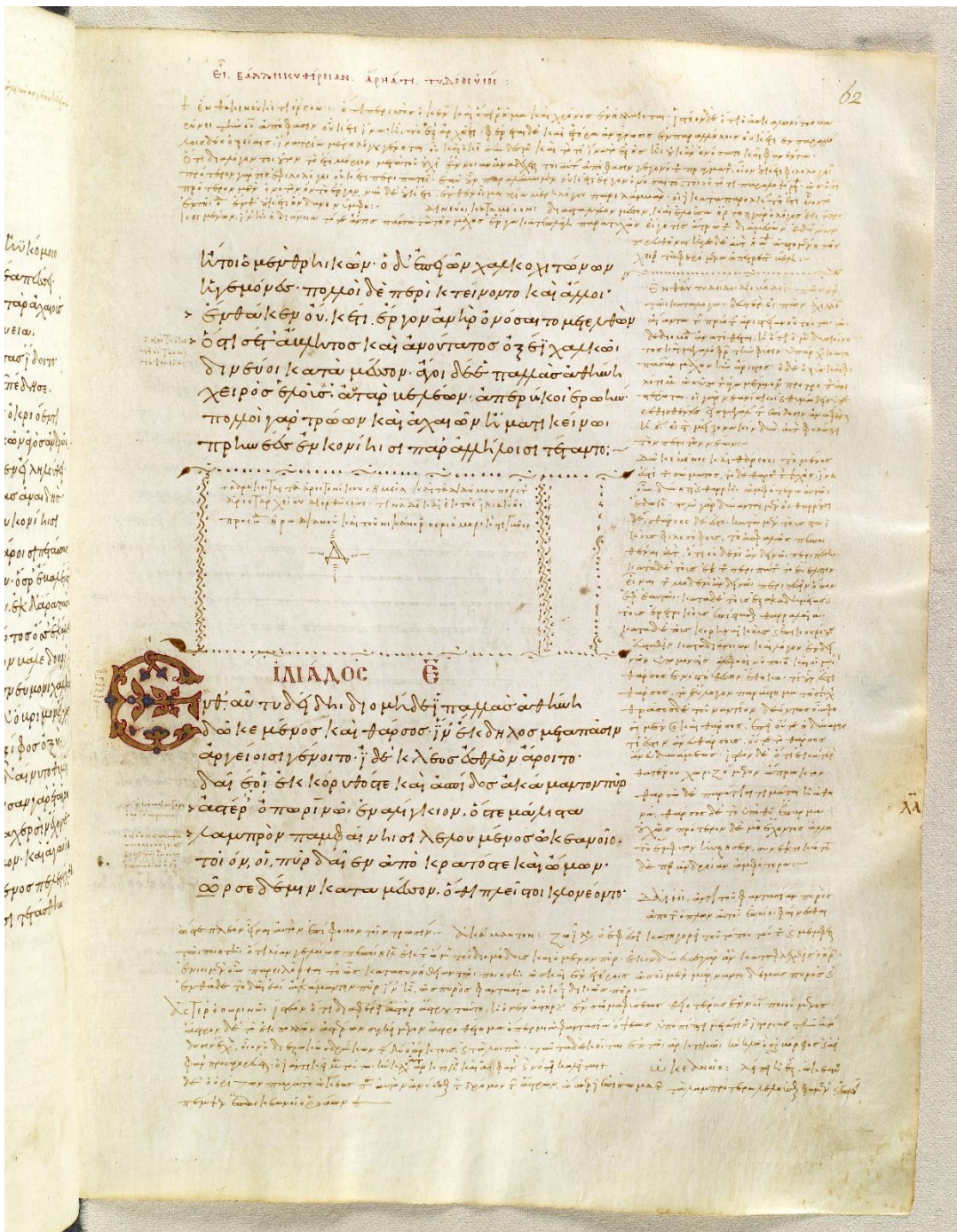
Α. Αυτόματη Αναγνώριση Γραφέα
Αρχαίων Επιγραφών και
Βυζαντινών Χειρογράφων

1 Εισαγωγή

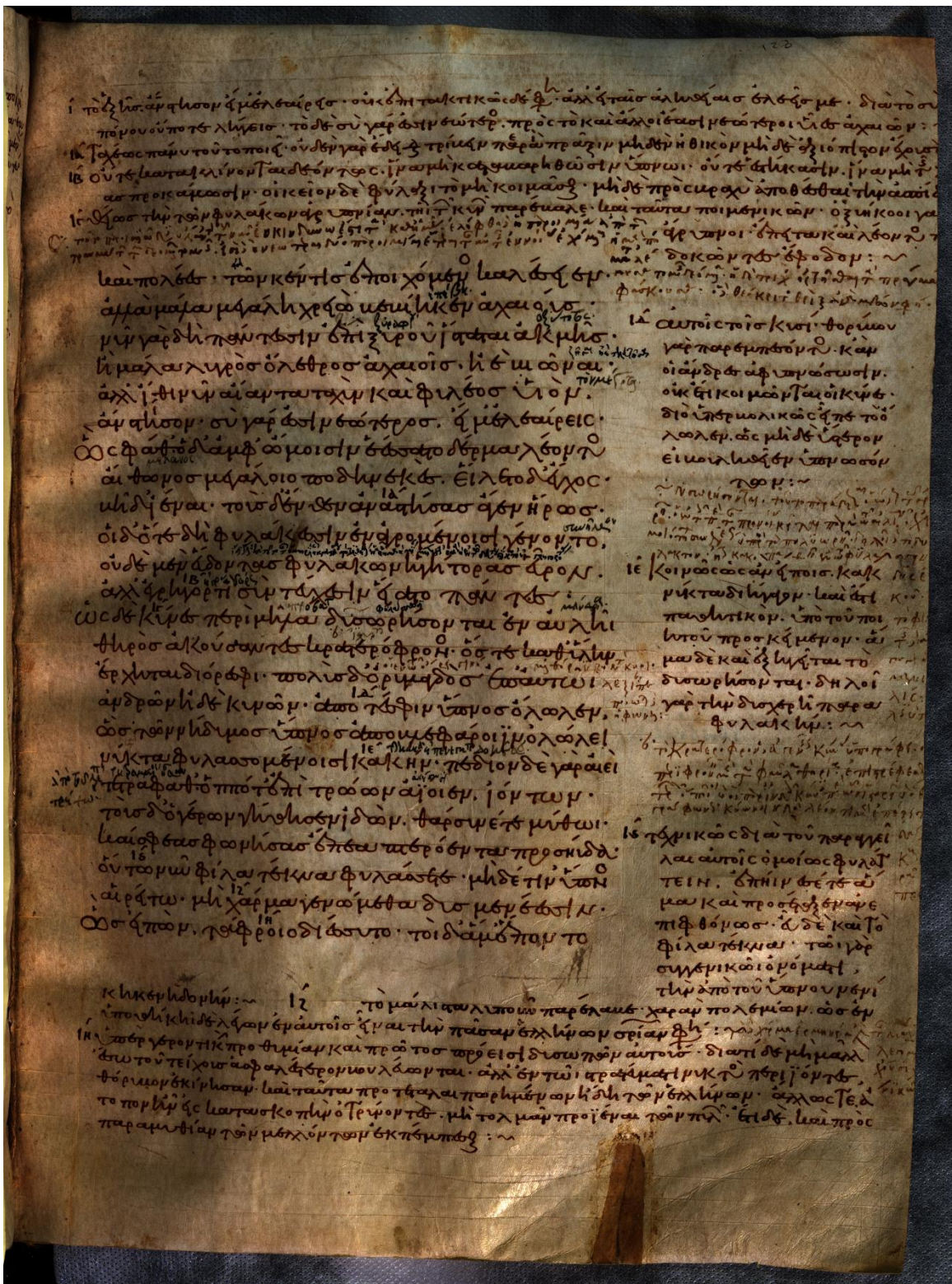
1.1 Η σημασία της ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων επιγραφών και χειρογράφων

Η σημαντικότερη πηγή για την επιστήμη της Ιστορίας είναι το σύνολο των διασωθέντων γραπτών κειμένων. Όσον αφορά την μελέτη των αρχαίων χρόνων, το σύνολο των γραπτών αυτών κειμένων περιλαμβάνει επιγραφές χαραγμένες σε λίθινες πλάκες [1 – 3] και χειρόγραφα. Η χρονολόγηση του περιεχομένου των εγγράφων αυτών είναι ζωτικής σημασίας για τις επιστήμες της Ιστορίας και της Αρχαιολογίας. Όπως αναφέρουν ορισμένοι από τους επιφανέστερους ιστορικούς, το περιεχόμενο των αρχαίων κειμένων μπορεί να αξιοποιηθεί μόνο εάν μπορεί να χρονολογηθεί. Ωστόσο, κατά κανόνα, οι γραφείς των αρχαίων επιγραφών δεν υπέγραφαν ούτε σημείωναν ημερομηνία στα κείμενά τους, καθιστώντας εξαιρετικά δύσκολη τη διαδικασία ταυτοποίησής και χρονολόγησής τους. Παρόμοιες δυσκολίες με αυτές των αρχαίων επιγραφών αλλά και ορισμένες νέες παρουσιάζουν και τα χειρόγραφα, τα οποία αποτελούν κείμενα γραμμένα σε παπύρους ή περγαμηνές. Τα κείμενα αυτά αποτέλεσαν το όχημα διάδοσης της λογοτεχνίας, της φιλοσοφίας και της επιστήμης του αρχαίου κόσμου μέχρι την επικράτηση των μηχανικών μέσων αναπαραγωγής (τυπογραφεία), αρχικά και των ηλεκτρονικών πολύ αργότερα. Για παράδειγμα, η Ιλιάδα του Ομήρου σώζεται ως τις μέρες μας κυρίως μέσω ορισμένων φημισμένων, χειρόγραφων τόμων. Οι ογκώδεις αυτοί τόμοι αναπαρήχθησαν στη Βυζαντινή Αυτοκρατορία και συγκεκριμένα στην Κωνσταντινούπολη μεταξύ δεκάτου και ενδεκάτου αιώνα με χειρόγραφη αντιγραφή. Προφανώς, αυτή η αναπαραγωγή ήταν ένας από τους τελευταίους κρίκους, αν όχι ο τελευταίος, της αλυσίδας χειρόγραφων αναπαραγωγών, η αρχή της οποίας τοποθετείται στον έκτο αιώνα προ Χριστού, όταν ο Πεισίστρατος, τύραννος των Αθηνών, έδωσε εντολή συστηματικής καταγραφής του Ομηρικού έργου. Στη συνέχεια, τα βυζαντινά κείμενα της τελευταίας αναπαραγωγής διασκορπίστηκαν σε διάφορες βιβλιοθήκες της Ευρώπης: στη Βενετία, στο Ελ Εσκοριάλ στην Ισπανία, στο Λονδίνο, στη Γενεύη, στη Φλωρεντία και στη Ρώμη. Καθένας από τους τόμους αυτούς περιέχει έναν αριθμό διαφορετικών κειμένων: το κείμενο του έπους του Ομήρου, έναν αριθμό διαφόρων κειμένων με σχόλια, καθώς και σύντομες σημειώσεις στα περιθώρια και ανάμεσα στις γραμμές.

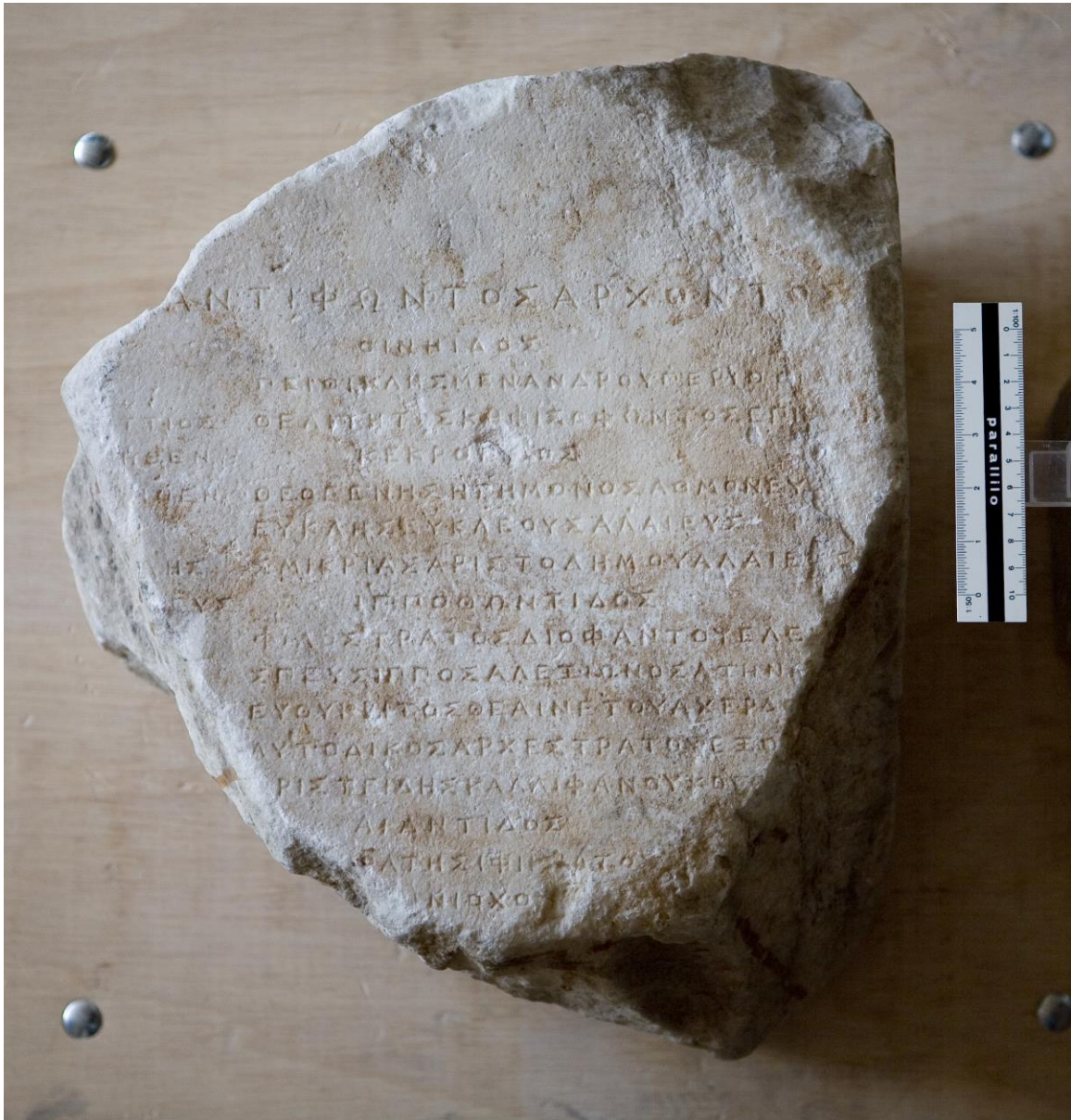
Στόχος της παρούσης εργασίας είναι η ανάπτυξη πρωτότυπων μεθόδων ομαδοποίησης ενός συνόλου κειμένων βάσει των διαφόρων γραφικών χαρακτήρων εκείνων που τα έγραψαν, προκειμένου να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφορετικών γραφένων αυτών, αλλά και κάθε κείμενο να αποδοθεί ορθά στο γραφέα του. Μέσω αυτού, καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της ημερομηνίας δημιουργίας ή αναπαραγωγής του εκάστοτε κειμένου. Όσον αφορά τις χειρόγραφες αναπαραγωγές πρωτότυπων φημισμένων έργων, μέσω της ανάλυσης των κειμένων αυτών με τις μεθόδους που θα παρουσιαστούν, είναι δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων και για τα πρωτότυπα κείμενα στα οποία οι γραφείς βασίστηκαν για την παραγωγή τους. Μέχρι στιγμής, κατά κανόνα, η χρονολόγηση του περιεχομένου των αρχαίων επιγραφών και χειρογράφων αποτελεί εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα και βασίζεται κυρίως στην προσωπική διαίσθηση του εκάστοτε μελετητή, καθώς και σε άλλες, εν πολλοίς υποκειμενικές, εκτιμήσεις [1]. Ως εκ τούτου, η χρονολόγηση των αρχαίων κειμένων αποτελεί συχνά αντικείμενο επιστημονικών διαφωνιών και διαφορών. Ευελπιστούμε ότι η ποσοτική ανάλυση που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία θα εξαλείψει ή τουλάχιστον θα μειώσει σε μεγάλο βαθμό τις διαφωνίες αυτές.



Σχήμα 1.1. Εικόνα του βυζαντινού πατύρου Venetus A (Marcianus Graecus Z. 454) – 62r. Φυλάσσεται στη βιβλιοθήκη Marciana στη Βενετία.



Σχήμα 1.2. Εικόνα του βυζαντινού πατύρου Escorialensis 3 (Escorialensis Y.I.1) – 128r, ο οποίος φυλάσσεται στο μοναστήρι του San Lorenzo στο El Escorial, στις παρυφές της Μαδρίτης.



Σχήμα 1.3. Εικόνα της αρχαίας επιγραφής με κωδικό 2054.



Σχήμα 1.4. Εικόνα της αρχαίας επιγραφής με κωδικό 7457.

1.2 Ένας πρώτος σκοπός της παρούσας εργασίας: Μια νέα προσέγγιση στο πρόβλημα της χρονολόγησης γραφένων αρχαίων κειμένων μέσω της ταυτοποίησης των γραφένων τους.

Ένας ιδιαίτερα σημαντικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η χρονολόγηση αρχαίων κειμένων μέσω της αυτόματης ταυτοποίησης των γραφένων που έγραψαν τα κείμενα αυτά. Οι γραφείς οι οποίοι σκάλιζαν τις λίθινες πλάκες στην Αρχαιότητα εξασκούσαν επαγγελματικά τη δραστηριότητά τους αυτή. Η χάραξη επιγραφών στην Αρχαιότητα, δηλαδή, αποτελούσε επάγγελμα. Το γεγονός αυτό έχει τις ακόλουθες συνέπειες:

α) Ο αριθμός των διαφορετικών γραφένων που χάρασαν τις πέτρινες πλάκες ήταν εξαιρετικά περιορισμένος. Ως εκ τούτου, οι δεκάδες χιλιάδες επιγραφές οι οποίες έχουν κατά καιρούς ανακαλυφθεί στην περιοχή της Αττικής είναι δυνατό να έχουν γραφεί από μερικές εκατοντάδες διαφορετικών γραφένων.

β) Σε περίπτωση επιτυχούς απόδοσης ενός συνόλου επιγραφών σε κάποιον γραφέα, η χρονική περίοδος της επαγγελματικής του καριέρας είναι εύκολο να προσδιοριστεί, καθώς, κατά κανόνα, το περιεχόμενο τουλάχιστον μίας από τις επιγραφές αυτές θα την προσδιορίζει. Όπως μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των επιγραφών που επιτυχώς αποδίδονται σε κάθε γραφέα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα επιτυχούς χρονολόγησης των κειμένων του γραφέα αυτού.

γ) Σε περίπτωση που κάποια νέα επιγραφή βρεθεί ή/και μελετηθεί και το περιεχόμενό της δεν είναι δυνατόν να χρονολογηθεί, αν η παρούσα μέθοδος αποδώσει την επιγραφή αυτή σε κάποιο γραφέα, το περιεχόμενό της αυτόματα αποδίδεται στη χρονική περίοδο κατά την οποία ο γραφέας ήταν επαγγελματικά ενεργός. Σημειώνεται πως η επαγγελματική δραστηριότητα των περισσότερων γραφένων της Αρχαιότητας καλύπτει μία περίοδο είκοσι έως εικοσιπέντε ετών, δεδομένου ότι από μία ηλικία και ύστερα, η πρεσβυωπία, αλλά και άλλα προβλήματα όρασης δυσχέραιναν την εκτέλεση του έργου των γραφένων. Υπενθυμίζεται ότι οι φακοί (τα γυαλιά) ανακαλύφθηκαν και διαδόθηκαν γύρω στο 1300 – 1400 μετά Χριστόν.

Παρόμοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για τα άτομα τα οποία συνετέλεσαν στη διάσωση των αρχαίων κειμένων μέσω της χειρόγραφης αναπαραγωγής τους επί παπύρων ή

άλλων, παρόμοιων μορφών γραφικής ύλης. Για παράδειγμα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα έπη του Ομήρου έχουν διασωθεί ως τις μέρες μας από μερικές δεκάδες γραφέν οι οποίοι αντέγραψαν τα κείμενα αυτά στο Βυζάντιο κατά το δέκατο και ενδέκατο αιώνα, ενώ, στα τελικά κείμενα, ορισμένα ακόμα άτομα προσέθεσαν τα σχόλιά τους. Εάν επιτευχθεί η αναγνώριση των διαφορετικών χειρών τα οποία έγραψαν τα κείμενα αυτά με τη μέθοδο που παρουσιάζεται στην παρούσα διατριβή, θα μπορούσε αμέσως να γίνει και η χρονολογική κατάταξη των κειμένων αυτών και να εξαχθούν επιπλέον πολύτιμες πληροφορίες για τα κείμενα και τους γραφείς τους, όπως αναφέρθηκε ήδη στην Παράγραφο 1.1.

Όπως μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό από τα ανωτέρω, η αναγκαιότητα ανάπτυξης ενός συνόλου μεθόδων μέσω των οποίων θα επιτυγχάνεται η σωστή και με αυτόματο τρόπο ταυτοποίηση γραφέν και ενός σχετικού πληροφοριακού συστήματος είναι άμεση. Ένα τέτοιο πληροφοριακό σύστημα, το οποίο ενσωματώνει έναν αριθμό πρωτότυπων μεθόδων έχει αναπτυχθεί ήδη προς την κατεύθυνση της αυτόματης ταυτοποίησης γραφέν από μέλη της ερευνητικής ομάδας. Το σύστημα αυτό έχει δώσει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα κατά την εφαρμογή του στην ταυτοποίηση γραφέν αρχαίων επιγραφών [1 – 3]. Η μέθοδος και το αντίστοιχο σύστημα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία εισάγει έναν αριθμό νέων στοιχείων και σαφώς βελτιωμένες επιδόσεις σε σχέση με τις προηγούμενες. Συγκεκριμένα:

1. Η μέθοδος είναι πρωτότυπη και ουσιωδώς διαφορετική σε σχέση με αυτές που έχουν ήδη δημοσιευτεί και αφορούν την ταυτοποίηση γραφέν σε αρχαίες επιγραφές [3, 2]. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί ότι, όπως περιγράφεται στο [4], όταν αναπτύσσεται μία νέα στατιστική μέθοδος για την επίλυση ενός προβλήματος ή στοχαστικής διαδικασίας, μπορεί να υπάρξει ασυμπτωτική βεβαιότητα για τα κοινά αποτελέσματα ανάμεσα στη νέα και στις υπάρχουσες μεθόδους. Με άλλα λόγια, κάθε νέα, εναλλακτική μέθοδος η οποία επιβεβαιώνει ήδη υπάρχοντα από άλλες στατιστικές μεθόδους αποτελέσματα ενισχύει την εμπιστοσύνη στην ορθότητα των αποτελεσμάτων αυτών.
2. Οι μέθοδοι οι οποίες έχουν ήδη αναπτυχθεί και παρουσιάζονται στα [3, 2], δίνουν εξαιρετικά αποτελέσματα όταν υπάρχει ικανός αριθμός υλοποιήσεων κάθε γράμματος της αλφαβήτου που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση των επιγραφών πάνω σε κάθε επιγραφή, συνήθως περισσότερες από πέντε. Η νέα μέθοδος, η οποία παρουσιάζεται

στην παρούσα εργασία, λειτουργεί αρκετά καλά, ακόμη και για πολύ μικρό αριθμό διαθέσιμων υλοποιήσεων ενός γράμματος σε κάθε κείμενο (έως πέντε υλοποιήσεις).

3. Οι προηγούμενες μέθοδοι εφαρμόστηκαν αποκλειστικά σε αρχαίες επιγραφές. Η νέα μέθοδος αντιμετωπίζει το πρόβλημα ταυτοποίησης του γραφέα τόσο αρχαίων επιγραφών, όσο και βυζαντινών χειρογράφων. Οι διαφορές ανάμεσα στα δύο αυτά είδη κειμένων και στις ιδιαιτερότητες που παρουσιάζουν τα προβλήματα τα οποία σχετίζονται με κάθε είδος θα αναλυθούν στα επόμενα.

Η ερευνητική ομάδα ασχολείται σε κάθε περίπτωση με το πρόβλημα της ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων κειμένων για τα οποία δεν υπάρχει καμία πρότερη γνώση όσον αφορά τη χρονολογία, τον τόπο γραφής ή/και το συγγραφέα. Δεν υπάρχει, δηλαδή κανένα κείμενο αναφοράς και, ως εκ τούτου, δεν υπάρχουν δεδομένα για «εκπαίδευση» του συστήματος στην τεχνοτροπία του κάθε γραφέα, ούτε κάποια βάση δεδομένων για υποστήριξη του συστήματος. Τα μόνα δεδομένα που χρησιμοποιούνται στην παρουσιαζόμενη μέθοδο αυτόματης αναγνώρισης γραφέα είναι τα εξής δύο:

1. Η πληροφορία ότι συγκεκριμένα κείμενα ή τμήματα κειμένων έχουν γραφεί αποκλειστικά από τον ίδιο γραφέα. Την πληροφορία αυτή δίνουν οι ειδικοί ερευνητές Κλασικών Σπουδών και συνήθως είναι «αυτονόητη», με την έννοια ότι τα αντίστοιχα κείμενα είναι αυτόνομες μονάδες που έχουν διασωθεί μεμονωμένα. Κατά κανόνα, οι μονάδες αυτές είναι ή μία ενιαία επιγραφή ή ένας διασωθείς πάπυρος. Σε κάθε περίπτωση, όμως, η μεθοδολογία που προτείνεται εδώ μπορεί να ελέγξει τη Στατιστική υπόθεση ότι κάθε τέτοιο αυτόνομο κείμενο έχει όντως γραφεί από τον ίδιο γραφέα.
2. Η γνώση του συνόλου των θεμελιωδών συμβόλων της εκάστοτε αλφαβήτου που απεικονίζονται στα κείμενα που συγκρίνονται. Ισοδύναμα, για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτείται η διάκριση των διαφορετικών συμβόλων ενός αλφαβήτου, όπως του Ελληνικού, του Λατινικού ή και προγενέστερων όπως του Βαβυλωνιακού, του Ετρουσκικού και άλλων που εμφανίζονται στα προς εξέταση κείμενα. Ο μόνος λόγος για τον οποίο απαιτείται η διάκριση των μεμονωμένων συμβόλων ή/και όμοιων ομάδων συμβόλων είναι η ανάγκη συγκρίσεων υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου ή συμπλέγματος συμβόλων.

Πέραν τούτου, η παρούσα μέθοδος δεν παρουσιάζει καμία άλλη εξάρτηση από το περιεχόμενο των προς σύγκριση κειμένων.

2 Βιβλιογραφική έρευνα και εγγενείς δυσκολίες του προβλήματος της αυτόματης αναγνώρισης γραφέα

2.1 To state of the art στην αυτόματη αναγνώριση γραφέα

Η αυτόματη αναγνώριση γραφέα και η επαλήθευση ότι ένα κείμενο έχει γραφεί από ένα συγκεκριμένο γραφέα αποτελούν αντικείμενα ενεργής και εντατικής έρευνας κατά τα τελευταία χρόνια. Ιδιαίτερα εντατική είναι η έρευνα η οποία διενεργείται από επιστημονικούς κλάδους που ασχολούνται με χειρόγραφα κείμενα.

Η επί τόπου (on – line) αναγνώριση γραφέα έχει ξεκινήσει μόλις τα τελευταία χρόνια, και, ως εκ τούτου, υπάρχει σχετικά περιορισμένος αριθμός μεθόδων που χρησιμοποιούν τέτοιου είδους τεχνικές για την αυτόματη αναγνώριση γραφέα, σε σχέση με το πλήθος των off – line μεθόδων, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω. Για παράδειγμα, στην εργασία [5] προτείνεται μία μέθοδος δυναμικής αναγνώρισης γραφέα, η οποία χρησιμοποιεί σχέσεις μεταξύ στατικών και δυναμικών στοιχείων χειρόγραφων κειμένων. Στην [6] χρησιμοποιείται ένα νέο μοντέλο, το οποίο ονομάζεται Beta – Elliptic, για την εξαγωγή πληροφορίας ποικίλης μορφής από τα μελετώμενα αραβικά κείμενα και τη διάκριση διαφορετικών τεχνοτροπιών γραφής, ενώ η τελική κατάταξη επιτυγχάνεται με χρήση ενός Νευρωνικού Δικτύου Μίας Κατεύθυνσης (Feed Forward Neural Network). Στην εργασία [7], για κάθε γραφέα αρχικά προσδιορίζεται ένα σύνολο Τυχαίων Υβριδικών Χτυπημάτων (Random Hybrid Strokes), το οποίο περιγράφει τις κινήσεις του εργαλείου γραφής του εκάστοτε γραφέα κατά τη γραφή του εκάστοτε κειμένου. Βάσει αυτού του συνόλου, ένα Νευρωνικό Δίκτυο με Ανάδραση (Recurrent Neural Network) πραγματοποιεί την τελική κατάταξη. Το σύστημα το οποίο προκύπτει δεν περιλαμβάνει εξαγωγή των διαφόρων υλοποιήσεων των δομικών συμβόλων του αλφαβήτου ή των διαφόρων λέξεων για την πραγματοποίηση συγκρίσεων.

Σαφώς μεγαλύτερη ερευνητική πρόοδος έχει σημειωθεί στον τομέα της εκ των υστέρων (off – line) αναγνώρισης και επαλήθευσης γραφέα. Συγκεκριμένα, υπάρχουν μέθοδοι οι οποίες εφαρμόζουν μορφολογικές προσεγγίσεις, όπως η [8], φίλτρα Gabor και ομοιότητας αποχρώσεων του γκρι, όπως η [9], αλλά και τεχνικές αναγνώρισης υφής, όπως η [10]. Οι εργασίες [11 – 13] βασίζονται σε τεχνικές εξαγωγής χαρακτηριστικών, ενώ οι [14 – 16]

εφαρμόζουν μοντέλα Hidden Markov. Στην [17] παρουσιάζεται η μέθοδος Γενικευμένης Πυκνότητας Gauss (Generalized Gaussian Density) (GGD), η οποία βασίζεται σε wavelets. Στις εργασίες [18] και [19] εφαρμόζονται τεχνικές οι οποίες εκμεταλλεύονται τοπικά χαρακτηριστικά του κειμένου. Στην [20] προτείνεται μία προσέγγιση η οποία εφαρμόζει μετασχηματισμό Fourier, ενώ στη [21] εφαρμόζεται μετασχηματισμός διχοτόμησης. Στην [22] ελέγχεται η ανεξαρτησία των χαρακτήρων του κειμένου μέσω εφαρμογής μοντέλων αναγνώρισης και επαλήθευσης γραφέα. Μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούν αλλογραφικά πρότυπα και πρότυπα υφής παρουσιάζονται στις εργασίες [23] και [24]. Μία διαφορετική προσέγγιση στην εκ των υστέρων αυτόματη αναγνώριση γραφέα βασίζεται στη δημιουργία ενός συνόλου διαφόρων χαρακτηριστικών τα οποία μεταβάλλονται εντός των κειμένων που μελετώνται. Το σύνολο αυτό ονομάζεται codebook στη διεθνή βιβλιογραφία και η χρήση ενός ή και περισσότερων codebooks είναι αρκετά δημοφιλής τα τελευταία χρόνια [25]. Για παράδειγμα, στην εργασία [26], το codebook δημιουργείται με πληροφορίες από το ιστόγραμμα συχνότητας εμφάνισης των διαφόρων σχημάτων. Στο ίδιο άρθρο προτείνονται δύο τρόποι εξαγωγής τέτοιων χαρακτηριστικών. Στην [27] χρησιμοποιείται ένα σύνολο χαρακτηριστικών, τα οποία ονομάζονται SIFT Descriptors. Το αντίστοιχο codebook δημιουργείται από ομαδοποίηση των χαρακτηριστικών αυτών στο στάδιο εκπαίδευσης του συστήματος. Για την ταυτοποίηση του γραφέα ενός νέου κειμένου πραγματοποιείται σύγκριση των επιλεγμένων χαρακτηριστικών του κειμένου αυτού με τα αντίστοιχα σύνολα χαρακτηριστικών των κειμένων του training set. Η [28] βασίζεται σε στοιχειώδεις δομικές μονάδες γραφής (graphemes). Ωστόσο, δεν χρησιμοποιεί κάποιο σύνολο δειγμάτων για την εκπαίδευση του συστήματος, αλλά δημιουργεί τέτοιες δομικές μονάδες γραφής από τα κείμενα που μελετώνται με χρήση του μοντέλου Beta – Elliptic. Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι η δημιουργία πέντε codebooks (ενός πλήρους και τεσσάρων μερικών) με χαρακτηριστικά βάσει των οποίων πραγματοποιείται η σύγκριση μεταξύ των κειμένων, καθώς και η τελική ομαδοποίηση.

Μία ξεχωριστή κατηγορία στην εκ των υστέρων (off – line) αναγνώριση και επαλήθευση γραφέα συναποτελούν μέθοδοι οι οποίες βασίζονται στα Gaussian Mixture Model Supervectors (GMM Supervectors) για την κωδικοποίηση και την περιγραφή χαρακτηριστικών της εκάστοτε τεχνοτροπίας γραφής. Στα supervectors συγκεντρώνονται χαρακτηριστικά που προκύπτουν από πιθανοτικά μοντέλα Gauss για την απομόνωση συγκεκριμένων χαρακτηριστικών τμημάτων ενός πληθυσμού [29, 30].

Σημαντικό ρόλο, ιδιαίτερα στην εκ των υστέρων (off – line) αναγνώριση και επαλήθευση γραφέα, διαδραματίζουν οι μέθοδοι εξαγωγής των χαρακτηριστικών από τα διάφορα κείμενα που μελετώνται και χρησιμοποιούνται στην ταυτοποίηση του γραφέα των κειμένων αυτών ή και στην ομαδοποίηση των κειμένων αυτών ανάλογα με το γραφέα τους. Από τέτοιου είδους χαρακτηριστικά δημιουργούνται και τα codebooks τα οποία αναφέρθηκαν προηγουμένως. Για το λόγο αυτό, σημαντικό μέρος της διεθνούς βιβλιογραφίας είναι αφιερωμένο στον εντοπισμό και στην εξαγωγή τέτοιων χαρακτηριστικών [31 – 37].

Συχνά, η ταυτοποίηση γραφέα με χρήση τεχνικών ανάκτησης πληροφοριών επιτυγχάνεται είτε με προσεγγίσεις ταιριάσματος αλλογραφικών προτύπων, όπως στην [38], είτε με προσεγγίσεις κατανομής προτύπων διακριτών χαρακτήρων, όπως στην [39]. Προσφάτως, προτάθηκε προσέγγιση η οποία χρησιμοποιεί κατανομή προτύπων συνεχόμενων χαρακτήρων με χρήση αλγορίθμου fuzzy c – means προκειμένου να πραγματοποιηθεί εκτίμηση της πιθανότητας ένας χαρακτήρας να έχει παραχθεί από ένα συγκεκριμένο πρότυπο [40]. Άλλοι ερευνητές, όπως οι συγγραφείς της [41], επιλέγουν τη χρήση συνδυασμού «τοπικών χαρακτηριστικών» και τεχνικών εκμάθησης συστημάτων, ενώ οι συγγραφείς της [42] εκμεταλλεύονται κατευθυντικά μορφολογικά χαρακτηριστικά για την επιτυχή ταυτοποίηση γραφέα. Στην [43] δίνεται έμφαση σε συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γραφολογικής φύσης, όπως η καμπύλωση των γραμμάτων, η κλίση τους, η πίεση που έχει ασκηθεί στο υλικό αποτύπωσης της γραφής (χαρτί, πάπυρος κλπ.), το πόσο λεπτή είναι η γραφή στα διάφορα σημεία του γράμματος κλπ., προκειμένου να επιτευχθεί κατάταξη καλλιγραφικά γραμμένων χειρόγραφων κειμένων ανάλογα με το γραφέα τους. Οι συγγραφείς της [44] χρησιμοποιούν ένα σύστημα το οποίο βασίζεται σε κωδικοποίηση και εξαγωγή ενός συνόλου ειδικών χαρακτηριστικών, τα οποία οι συγγραφείς αποκαλούν oriented Basic Image Feature (oBIF) Columns. Το στυλ κάθε γραφέα αντιμετωπίζεται σαν απόκλιση των χαρακτηριστικών oBIF του γραφέα αυτού από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά ενός πληθυσμού γραφέων. Στην [45], οι συγγραφείς χρησιμοποιούν μία διδιάστατη συνάρτηση κατανομή πιθανότητας, η οποία λαμβάνει υπ' όψιν κατάλληλα επιλεγμένους συνδυασμούς γωνιών αποκλίσεων των εμφανιζομένων συμβόλων ανά δύο. Στην εργασία [46] εξάγεται πληροφορία για την υφή του κειμένου σε πολύ μικρή κλίμακα παρατήρησης. Για το λόγο αυτό, το εκάστοτε μελετώμενο κείμενο χωρίζεται σε πολύ μικρά τμήματα και για κάθε τέτοιο τμήμα δημιουργούνται ιστογράμματα, καθένα από τα οποία περιγράφει διαφορετικές ιδιότητες της υφής του κειμένου. Η σύγκριση μεταξύ των κειμένων πραγματοποιείται μέσω του

υπολογισμού της απόστασης των χαρακτηριστικών υφής αυτών των επί μέρους τμημάτων τους.

Πρόσφατα, αρκετές μέθοδοι αυτόματης ταυτοποίησης γραφέα έχουν εφαρμοστεί σε κείμενα ιστορικής σημασίας αλλά και σε κείμενα που περιέχουν σύμβολα αλφαβήτων εκτός του ελληνικού ή του λατινικού [47 – 54].

Τεχνικές αναγνώρισης γραφέα και ομαδοποίησης κειμένων ανάλογα με το γραφέα τους έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για την αυτόματη ομαδοποίηση μουσικών χειρογράφων [55]. Τέλος, χαρακτηριστικά όπως η καμπυλότητα, η υφή και η κλίση της γραφής έχουν χρησιμοποιηθεί και για την αναγνώριση του φύλου του γραφέα [56].

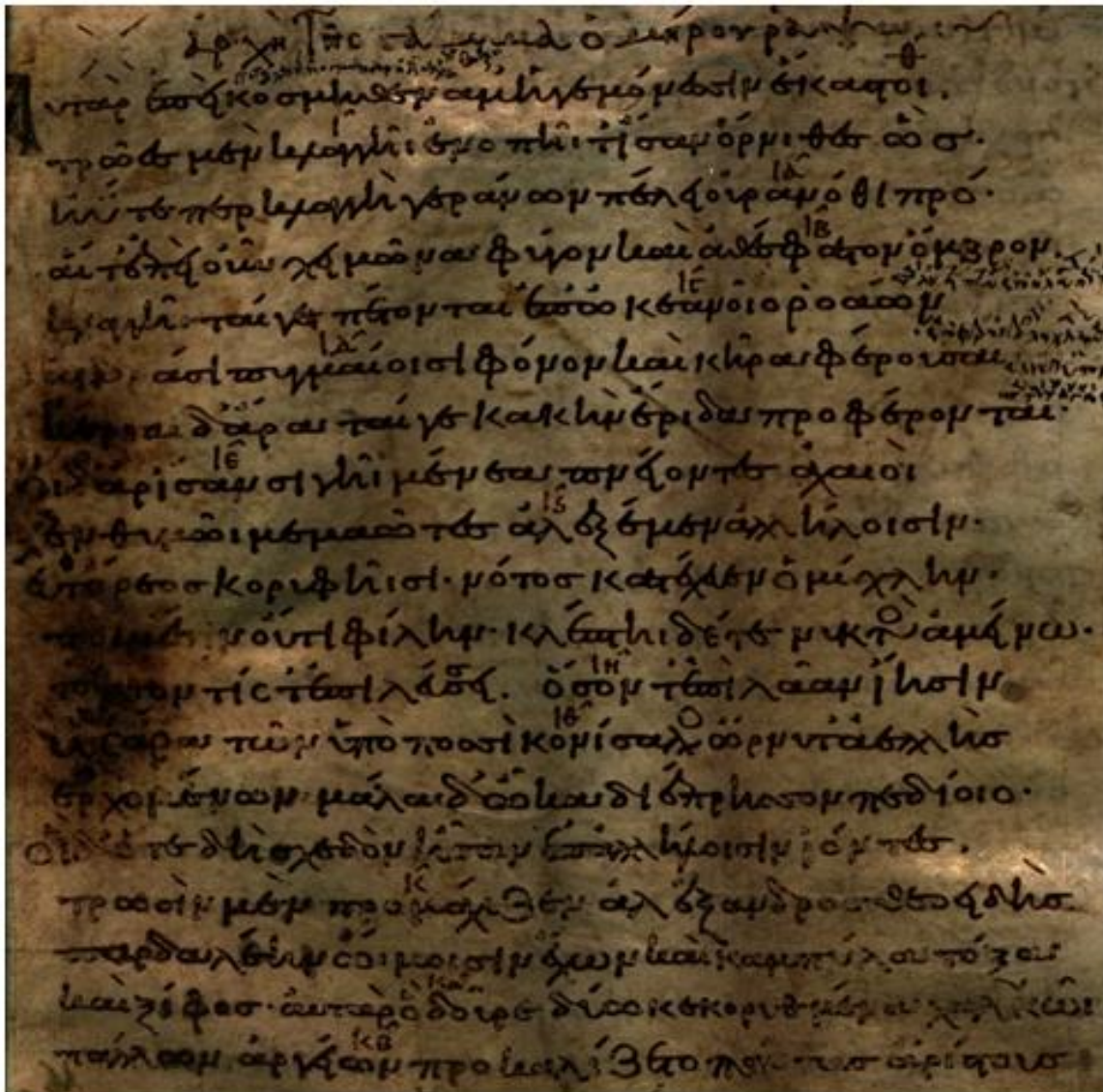
2.2 Οι εγγενείς δυσκολίες και απαιτήσεις της ταυτοποίησης γραφέα αρχαίων κειμένων

Μία από τις κύριες δυσκολίες του προβλήματος της ταυτοποίησης γραφέα είναι πως δεν υπάρχει διαθέσιμο σύνολο δεδομένων για εκπαίδευση του συστήματος σε κείμενα παρόμοια με αυτά τα οποία καλείται να ταυτοποιήσει. Με άλλα λόγια, σε αντίθεση με τις περισσότερες μεθόδους που παρουσιάστηκαν σύντομα στην Παράγραφο 2.1, δεν υπάρχουν κείμενα αναφοράς για το αναπτυχθέν σύστημα. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως κληθήκαμε να επιτύχουμε την αναγνώριση γραφέα χωρίς τη χρήση κάποιου δείγματος κειμένου γραμμένου από κάποιον ή κάποιους από τους γραφείς που επιχειρήσαμε να ταυτοποιήσουμε στα κείμενα στα οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος. Επιπλέον, δεν χρησιμοποιήθηκε κάποια βάση δεδομένων με δείγματα γραφής από έναν αριθμό γραφέων, ούτε κάποιο στοιχείο αναφορικά με τα κείμενα ή τους συγγραφείς τους. Στην ερευνητική ομάδα δεν ήταν γνωστός ούτε ο αριθμός των διαφορετικών γραφέων που έγραψαν τα κείμενα. Το μοναδικό δεδομένο το οποίο ήταν διαθέσιμο από την αρχή στην ερευνητική μας ομάδα σχετικά με τα προς μελέτη κείμενα ήταν ότι κάθε μεμονωμένη επιγραφή ή/και κάθε σελίδα χειρόγραφου κειμένου είχε γραφεί από έναν και μόνο γραφέα.

Πέραν αυτών που έχουν ήδη αναφερθεί, εμφανίζονται και άλλες δυσκολίες στην επίτευξη της αναγνώρισης γραφέα αρχαίων κειμένων. Οι δυσκολίες αυτές είναι οι εξής:

1. Τόσο οι αρχαίες επιγραφές όσο και οι βυζαντινοί πάπυροι έχουν υποστεί σημαντική φθορά, όπως παρουσιάζεται στα Σχήματα 2.1(α) και 2.1(β).
2. Αρκετά συχνά η ομοιότητα που παρουσιάζεται μεταξύ των διαφορετικών υλοποιήσεων ενός γράμματος από τον ίδιο γραφέα είναι μικρότερη από αυτή που παρουσιάζεται μεταξύ υλοποιήσεων διαφορετικών γραμμάτων του ίδιου γραφέα με κάποιον άλλο.
3. Συχνά εμφανίζεται μεγάλη διαφοροποίηση στον τρόπο με τον οποίο οι γραφείς της Αρχαιότητας ή/και του Μεσαίωνα σχημάτιζαν ένα συγκεκριμένο γράμμα σε ένα κείμενο. Για παράδειγμα, στο ίδιο βυζαντινό χειρόγραφο, είναι δυνατόν ένα σύνολο υλοποιήσεων του γράμματος 'ω' να αποτελείται από «κλειστές» εκδοχές του 'ω', ενώ κάποιες άλλες υλοποιήσεις να εμφανίζονται «ανοικτές», όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.2. Παρόμοιες παρατηρήσεις είναι δυνατόν να διατυπωθούν για το γράμμα 'ε' αλλά και για άλλα σύμβολα. Σε ορισμένα χειρόγραφα, ορισμένες υλοποιήσεις του γράμματος 'κ' εμφανίζονται σαν 'κ' και άλλες σαν το λατινικό γράμμα 'u'. Σε αρχαίες επιγραφές απαντάται πολύ συχνά το φαινόμενο ο ίδιος γραφέας να συνδέει τη μεσαία οριζόντια γραμμή του γράμματος 'Α' σε ορισμένες περιπτώσεις μόνο με το αριστερό σκέλος του γράμματος, σε άλλες περιπτώσεις μόνο με το δεξί, ενώ σε άλλες δεν το συνδέει με κανένα από τα δύο. Στο σημείο αυτό τονίζεται πως οι διαφοροποιήσεις στη γραφή του 'Α' δεν εξαντλούνται στην οριζόντια γραμμή του γράμματος, αλλά εμφανίζονται επίσης στη σχετική θέση των σκελών του γράμματος, στο σχήμα της κορυφής του γράμματος, και αλλού.
4. Ακόμη και στις περιπτώσεις που οι διαφορετικές υλοποιήσεις ενός γράμματος σε κάποιο κείμενο εμφανίζονται ίδιες, το περίγραμμα των διαφορετικών υλοποιήσεων του γράμματος είναι κατά κανόνα θορυβώδες. Στατιστικά, ο θόρυβος των καμπυλών του περιγράμματος είναι πολύ εντονότερος στις αρχαίες επιγραφές, όπως γίνεται άμεσα αντιληπτό από το Σχήμα 2.3. Ωστόσο, υπάρχουν επιγραφές και πάπυροι στους οποίους η παρουσία θορύβου στα περιγράμματα των διαφόρων υλοποιήσεων των γραμμάτων είναι αρκετά σοβαρή, όπως στη χαρακτηριστική επιγραφή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1(β). Το θορυβώδες περίγραμμα των υλοποιήσεων οφείλεται σε πολλούς παράγοντες, όπως η κούραση και η ψυχολογική διάθεση του

γραφέα, η ποιότητα του υλικού πάνω στο οποίο αποτυπωνόταν η γραφή (πέτρα, πάπυρος, περγαμνή κλπ.), η ποιότητα και η κατάσταση του μέσου γραφής (γραφίδα, καλέμι κλπ.), η ηλικία του γραφέα κ.α..



(α)



(β)

Σχήμα 2.1.

(α) Λεπτομέρεια του βυζαντινού χειρογράφου Escorialensis 3 – 40r με ορισμένα ευδιάκριτα σημάδια φθοράς.

(β) Λεπτομέρεια της επιγραφής 7478. Η φθορά την οποία έχει υποστεί η επιγραφή είναι παραπάνω από εμφανής.



Σχήμα 2.2. Δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'ω' από το βυζαντινό χειρόγραφο T04_I21.

Επιπροσθέτως, είναι απαραίτητο η ταυτοποίηση του γραφέα ενός κειμένου να γίνει με το μεγαλύτερο βαθμό εμπιστοσύνης. Ως εκ τούτου, είναι αναγκαία η ανάπτυξη μιας προσέγγισης για την ποσοτικοποίηση και τον έλεγχο της υπόθεσης πως δύο κείμενα έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα με βαθμό εμπιστοσύνης όσο το δυνατόν πλησιέστερο στη μονάδα. Η μέθοδος η οποία παρουσιάζεται εδώ εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή πιθανοφάνεια ένα κείμενο να ανήκει σε κάποιο συγκεκριμένο γραφέα.



Σχήμα 2.3. Υλοποιήσεις των γραμμάτων 'Α' και 'Ω' με εξαιρετικά θορυβώδες περίγραμμα, όπως εξήχθησαν από την επιγραφή 10068.

3 Μαθηματικό υπόβαθρο

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα αναλύσουμε ορισμένες βασικές μαθηματικές έννοιες, η γνώση των οποίων είναι απαραίτητη για την ανάλυση της μεθόδου που παρουσιάζεται στα Κεφάλαια 4 και 5.

Σύμβαση. Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο «□» για να δηλώσουμε το πέρας οποιουδήποτε ορισμού, θεωρήματος, λήμματος, οποιασδήποτε πρότασης, σύμβασης κλπ. Θα χρησιμοποιούμε επίσης το σύμβολο «■» για να δηλώσουμε το πέρας οποιασδήποτε μαθηματικής απόδειξης.

□

3.1 Ορισμός καμπύλης στο \mathbb{R}^n και η επιβατική ακτίνα τυχόντος σημείου της καμπύλης

Καμπύλη C στον χώρο \mathbb{R}^n ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων n – άδων $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, κάθε συνιστώσα της οποίας είναι συνάρτηση μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής ή παραμέτρου, t , η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , έστω I ($I \subseteq \mathbb{R}$). Στην περίπτωση των τμηματικώς συνεχών καμπυλών στο \mathbb{R}^n , το I αποτελεί διάστημα ή ένωση διαστημάτων του \mathbb{R} . Ισοδύναμα, η καμπύλη είναι το σύνολο των σημείων που συναποτελούν το πεδίο τιμών μιας απεικόνισης του υποσυνόλου I στο \mathbb{R}^n .

Στην περίπτωση του \mathbb{R}^2 , η οποία θα μας απασχολήσει στην παρούσα διατριβή, η καμπύλη ορίζεται ως το σύνολο των διατεταγμένων δυάδων $(x_1(t), x_2(t)) = (x(t), y(t))$, όπου τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , έστω I , και πεδίο τιμών την απεικόνιση του υποσυνόλου I στο \mathbb{R}^2 , μέσω των $x(t)$ και $y(t)$.

Για τυχούσα καμπύλη $C \subset \mathbb{R}^n$ και για τυχόν σημείο M αυτής με συντεταγμένες $(x_1(t_M), x_2(t_M), \dots, x_n(t_M))$, όπου t_M η ανεξάρτητη παράμετρος της καμπύλης στο σημείο M , ορίζεται η επιβατική ακτίνα της καμπύλης στο σημείο M ως εξής:

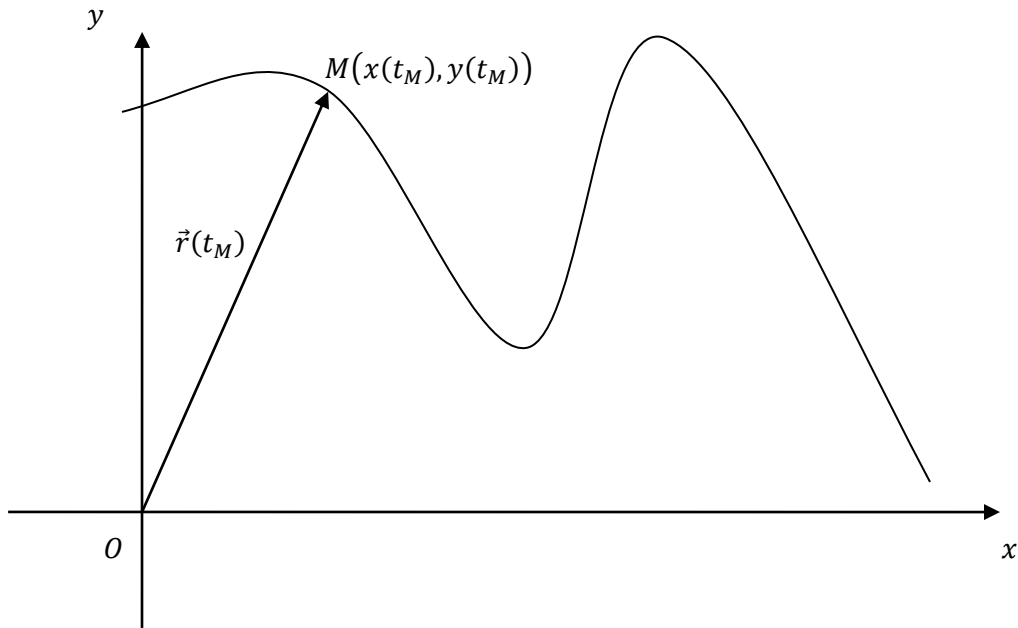
$$\vec{r}(t_M) = \overline{OM} = x_1(t_M)\vec{e}_1 + x_2(t_M)\vec{e}_2 + \dots + x_n(t_M)\vec{e}_n$$

όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων και $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ μία ορθοκανονική βάση του χώρου \mathbb{R}^n .

Ειδικότερα, στο \mathbb{R}^2 , η επιβατική ακτίνα στο τυχόν σημείο M που αντιστοιχεί στην τιμή $t = t_M, t_M \in I$, είναι εξ' ορισμού

$$\vec{r}(t_M) = \overline{OM} = x(t_M)\vec{i} + y(t_M)\vec{j}$$

Όπου, στην περίπτωση αυτή, έχει χρησιμοποιηθεί ο εναλλακτικός συμβολισμός $\vec{i} = \vec{e}_1$ και $\vec{j} = \vec{e}_2$ για τα μοναδιαία διανύσματα του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων του \mathbb{R}^2 που επιλέχθηκε. Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι ο συμβολισμός (\vec{i}, \vec{j}) έχει υιοθετηθεί καθ' όλη την παρούσα εργασία έναντι του (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .



Σχήμα 3.1. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 και επιβατική ακτίνα αυτής $\vec{r}(t_M)$.

Θα θέλαμε να σημειώσουμε ότι για αυτή την περιγραφή μιας καμπύλης χρησιμοποιείται επίσης ο όρος **παραμετρική παράσταση της καμπύλης C** .

3.2 Ορισμός συνεχούς και ομαλής καμπύλης

Έστω καμπύλη $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ορισμένη σε ένα διάστημα ή σε μία ένωση διαστημάτων $I \in \mathbb{R}$. Η καμπύλη αυτή λέγεται **συνεχής** στο διάστημα I όταν όλες οι συνιστώσες της $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της παραμέτρου t στο I . Μία τέτοια καμπύλη συμβολίζεται συνήθως και σαν C_0 . Στην περίπτωση στην οποία μία καμπύλη είναι ένωση ξένων καμπυλών C_0 , η προκύπτουσα καμπύλη ονομάζεται **τμηματικώς συνεχής** και συμβολίζεται με C_0^t .

Στην περίπτωση στην οποία όλες οι συναρτήσεις $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο I , η καμπύλη ονομάζεται **ομαλή** και συμβολίζεται με C_1 . Η ένωση ξένων, τμηματικά ομαλών καμπυλών C_1 συνιστά μια **τμηματικώς ομαλή** καμπύλη, η οποία συμβολίζεται συχνά με C_1^t .

Επεκτείνοντας ευθύγραμμα, εάν όλες οι συντεταγμένες μίας καμπύλης είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο I , τότε η καμπύλη ονομάζεται **C_n ομαλή**. Η ένωση ξένων C_n καμπυλών λέγεται **τμηματικώς ομαλή** και συμβολίζεται με C_n^t .

3.3 Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης C_1 στο \mathbb{R}^n

Έστω η ομαλή (C_1) καμπύλη C του \mathbb{R}^n με παράμετρο t και $M(x_1(t_M), x_2(t_M), \dots, x_n(t_M)), t_M \in I$ τυχόν σημείο της C .

Τότε το διάνυσμα

$$\vec{r}'(t) = x_1'(t_M)\vec{e}_1 + x_2'(t_M)\vec{e}_2 + \dots + x_n'(t_M)\vec{e}_n$$

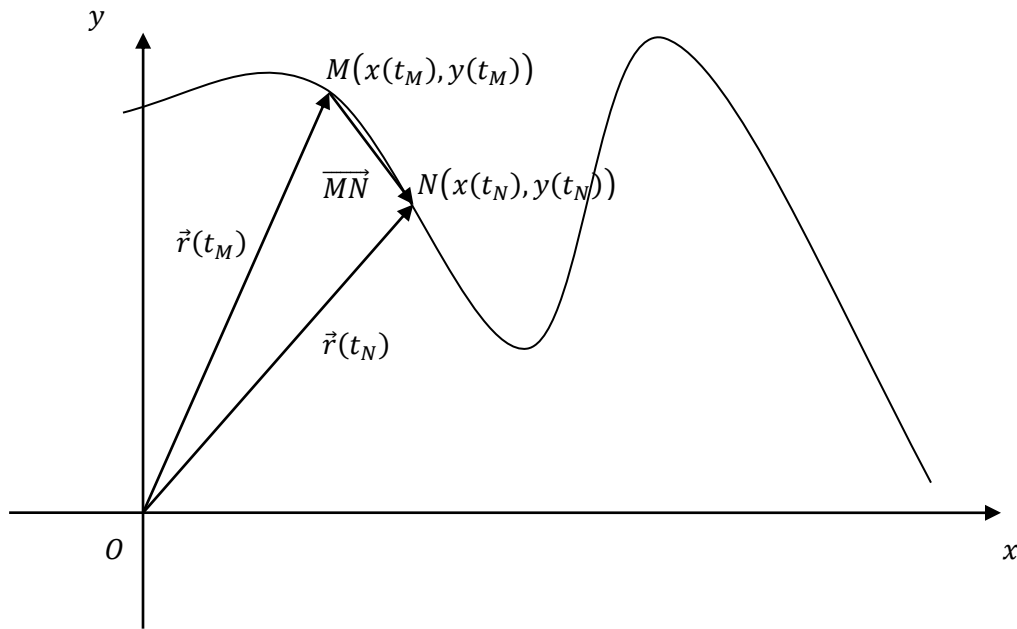
είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη στο σημείο M , όπου $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, τα μοναδιαία διανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης του \mathbb{R}^n . Θα θεμελιώσουμε παρακάτω την ορθότητα του ορισμού αυτού για την περίπτωση καμπυλών που κείνται στο \mathbb{R}^2 .

Στην περίπτωση στην οποία οι συναρτήσεις $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο υποσύνολο I του \mathbb{R} , μπορεί να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, από τη σχέση

$$\vec{r}''(t) = x_1''(t_M)\vec{e}_1 + x_2''(t_M)\vec{e}_2 + \dots + x_n''(t_M)\vec{e}_n$$

Με άμεση επέκταση των ανωτέρω, είναι δυνατόν να οριστούν οι παράγωγοι ανώτερης τάξης του διανύσματος της επιβατικής ακτίνας.

3.4 Θεμελίωση της εφαπτομένης καμπύλης στο \mathbb{R}^2 : Η σχέση \vec{l} και $\vec{r}'(t)$



Σχήμα 3.2. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 , επιβατικές ακτίνες δύο σημείων αυτής, $\vec{r}(t_M)$ και $\vec{r}(t_N)$, καθώς και το διάνυσμα \overline{MN} .

Έστω μία ομαλή διδιάστατη καμπύλη C . Θεωρούμε τα σημεία $M(x(t_M), y(t_M))$ και $N(x(t_N), y(t_N))$ της καμπύλης και τις διανυσματικές ακτίνες τους

$$\vec{r}(t_M) = \overline{OM} = x(t_M)\vec{i} + y(t_M)\vec{j}$$

και

$$\vec{r}(t_N) = \overline{ON} = x(t_N)\vec{i} + y(t_N)\vec{j}$$

Στην παρούσα παράγραφο θα θεμελιωθεί ότι καθώς το σημείο N τείνει στο M , το διάνυσμα \overrightarrow{MN} προσεγγίζει την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο M , η οποία, με τη σειρά της, προσεγγίζει την καμπύλη C τοπικά στο σημείο M .

Το διάνυσμα \overrightarrow{MN} προκύπτει ως εξής:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (x(t_N) - x(t_M))\vec{i} + (y(t_N) - y(t_M))\vec{j}$$

Έστω ότι τα σημεία της καμπύλης M και N απέχουν στοιχειωδώς ως προς την παράμετρο t , ώστε να ισχύει $M(x(t_M), y(t_M))$ και $N(x(t_M + dt), y(t_M + dt))$.

Η μεταβολή των συνιστωσών του διανύσματος \overrightarrow{MN} ως προς την παράμετρο t δίνεται από τις σχέσεις

$$\frac{x(t_M + dt) - x(t_M)}{dt}$$

για την x – συντεταγμένη και

$$\frac{y(t_M + dt) - y(t_M)}{dt}$$

για την y – συντεταγμένη

Στην περίπτωση που η διαφορά dt μεταξύ των τιμών των παραμέτρων στα σημεία M και N , t_M και t_N αντίστοιχα, τείνει στο μηδέν, οι ανωτέρω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{x(t_M + dt) - x(t_M)}{dt}$$

και

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{y(t_M + dt) - y(t_M)}{dt}$$

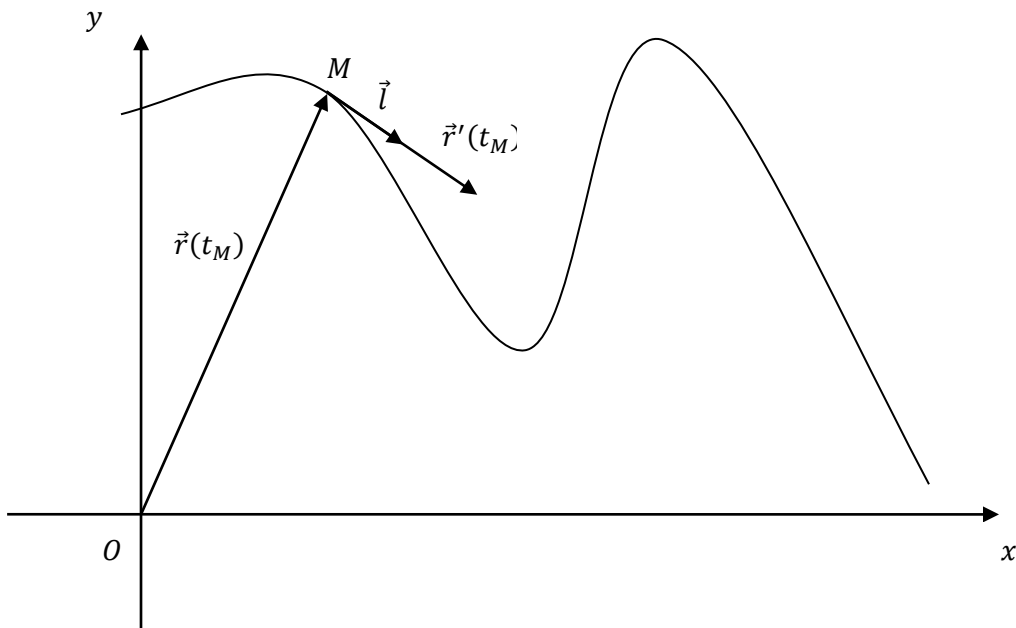
Οι σχέσεις αυτές, όμως, εκφράζουν τις παραγώγους των συναρτήσεων των συντεταγμένων του διανύσματος $\vec{r}(t_M)$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, t . Άρα, σύμφωνα με τα ανωτέρω, ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο M αυτής είναι το

$$\vec{r}'(t_M) = x_1'(t_M)\vec{i} + x_2'(t_M)\vec{j}$$

Όταν η παράμετρος t είναι ο χρόνος, τότε το διάνυσμα $\vec{r}'(t)$ είναι η ταχύτητα ενός κινητού που νοητά διατρέχει τη συγκεκριμένη καμπύλη C .

Θεμελιώδες Συμπέρασμα: Σε μία ομαλή καμπύλη C του \mathbb{R}^2 το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο της καμπύλης M είναι το $\vec{r}'(t)$ και το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{l} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.3. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 , επιβατική ακτίνα στο σημείο M , $\vec{r}(t_M)$, καθώς και το εφαπτόμενο και μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο M , $\vec{r}'(t_M)$ και \vec{l} αντίστοιχα.

3.5 Μήκος ομαλής καμπύλης ή/και τόξου αυτής στο \mathbb{R}^2

Σε συνέχεια της ανωτέρω ανάλυσης, παρατηρούμε πως καθώς το διάνυσμα \overline{MN} τείνει στην εφαπτομένη, τοπικά συμπίπτει και με την καμπύλη. Επομένως, σε μια περιοχή πολύ κοντά στο σημείο M , η καμπύλη ταυτίζεται με την εφαπτομένη της. Άρα και το στοιχειώδες μήκος ds της καμπύλης τοπικά στο M συμπίπτει με το $\lim_{dt \rightarrow 0} \|\overline{MN}\|$.

Αλλά,

$$\lim_{dt \rightarrow 0} x(t_M + dt) - x(t_M) = x'(t_M)dt$$

και

$$\lim_{dt \rightarrow 0} y(t_M + dt) - y(t_M) = y'(t_M)dt$$

Ισοδύναμα,

$$ds = \|\overrightarrow{MN}\|_{dt \rightarrow 0} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

3.6 Παραμετρική παράσταση ομαλής καμπύλης C στο \mathbb{R}^2 , με ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος αυτής, s

Έστω ομαλή καμπύλη C στο χώρο \mathbb{R}^2 και το σημείο A επί αυτής με συντεταγμένες $A(x(t_0), y(t_0))$, το οποίο έχει επιλεγεί σαν αρχή αυτής. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε το επικαμπύλιο μήκος κάθε σημείου $M(x(t_M), y(t_M))$ αυτής ως την επικαμπύλια απόσταση του M από το A . Σε αυστηρή διατύπωση:

$$s(t_M) = \int_{t_0}^{t_M} ds = \int_{t_0}^{t_M} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (3.2)$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, κάθε σημείο M μιας ομαλής καμπύλης έχει ένα μονοσήμαντα ορισμένο μήκος s , το οποίο δίνεται από τη Σχέση (3.2). Άρα, μια ομαλή καμπύλη μπορεί να περιγραφεί πλήρως με ανεξάρτητη μεταβλητή το s , αντί της αρχικά επιλεγείσης ανεξάρτητης μεταβλητής t . Στην περίπτωση αυτή, οι παραμετρικές εξισώσεις/η επιβατική ακτίνα της καμπύλης συμβολίζεται ως

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

όπου s το μήκος του τυχόντος σημείου της C .

Επιπλέον, για το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο μιας ομαλής καμπύλης, ισχύει το κάτωθι:

Λήμμα 3.1. Μοναδιαίο εφαπτόμενο και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε ομαλή καμπύλη στο \mathbb{R}^2

Έστω καμπύλη C , η οποία διαγράφεται ανθρωπολογικά και έχει μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j}$ στο τυχόν σημείο M αυτής. Τότε,

(α) Εάν η C εκφραστεί με παράμετρο το μήκος της s ισχύει

$$\vec{l} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{r}'(s) \quad (3.3)$$

(β) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη είναι το $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ το οποίο ισούται με

$$\vec{n} = l_y \vec{i} - l_x \vec{j} \equiv \frac{dy(s)}{ds} \vec{i} - \frac{dx(s)}{ds} \vec{j}$$

Απόδειξη:

(α) Για κάθε παράμετρο t μιας ομαλής καμπύλης C , έχουμε προηγουμένως θεμελιώσει ότι το στοιχειώδες μήκος της C στο τυχόν σημείο της δίνεται από τη σχέση

$$ds = \|d\vec{r}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Στην ειδική περίπτωση που επιλέγουμε το μήκος της C ως παράμετρο, προφανώς ισχύει $t = s \Rightarrow dt = ds$, οπότε, η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$ds = \|d\vec{r}(s)\| = \|d\vec{s}\| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds$$

ή, ισοδύναμα,

$$1 = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} \Leftrightarrow \|\vec{r}'(s)\| = 1$$

Άρα $\vec{l} = \vec{r}'(s)$.

(β) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη C είναι εξ' ορισμού κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη. Επομένως, προκύπτει από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{l} με στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$, ώστε, με σύμβαση, στα σημεία στα οποία η καμπύλη στρέφει τα κοίλα προς τα μέσα, το \vec{n} να δείχνει προς τα έξω (προς την άλλη κατεύθυνση). Ισχύει

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n_x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)l_x - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)l_y \\ n_y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)l_x + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)l_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_x = l_y \\ n_y = -l_x \end{cases} \quad (3.4)$$

Μπορεί όντως να επιβεβαιωθεί ότι τα διανύσματα \vec{l} και \vec{n} είναι κάθετα μεταξύ τους μετά από υπολογισμό του εσωτερικού τους γινομένου.

■

Όλα τα ανωτέρω θα καταδειχθούν με κάποια παραδείγματα.

Ένα πρώτο, αλλά θεμελιωδέστατο παράδειγμα: Ο κύκλος

Στον κύκλο κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας α ισχύει ότι

$$\vec{r}(t) = (x_0 + \alpha \cdot \cos(t))\vec{i} + (y_0 + \alpha \cdot \sin(t))\vec{j}, t \in [0, 2\pi)$$

Άρα

$$\vec{r}'(t) = -\alpha \cdot \sin(t)\vec{i} + \alpha \cdot \cos(t)\vec{j}$$

Το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{r}'(t)$ είναι

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\alpha^2 \cdot \sin^2(t) + \alpha^2 \cdot \cos^2(t)} = \alpha, \forall t$$

Το μήκος του κύκλου ορίζεται, προφανώς ως

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau = \alpha \cdot t$$

δηλαδή ο τύπος που είχε βρει ο μέγιστος Αρχιμήδης τον 3ο αιώνα προ Χριστού.

Εάν επιλέξουμε $t = s$, τότε

$$\vec{r}(s) = \left(x_0 + \alpha \cdot \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \right) \vec{i} + \left(y_0 + \alpha \cdot \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \right) \vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{r}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{i} + \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{j} \quad (3.5)$$

Επομένως, θα ισχύει $|\vec{r}'(s)| = 1$, σε πλήρη συμφωνία με το Λήμμα 3.1(α).

Αν το διάνυσμα \vec{l} είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, τότε, σύμφωνα με τα ανωτέρω ισχύει

$$\vec{l} \equiv \vec{r}'(s)$$

$$\text{με } \vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j}$$

και

$$\vec{r}'(s) = x'(s) \vec{i} + y'(s) \vec{j}$$

Άρα,

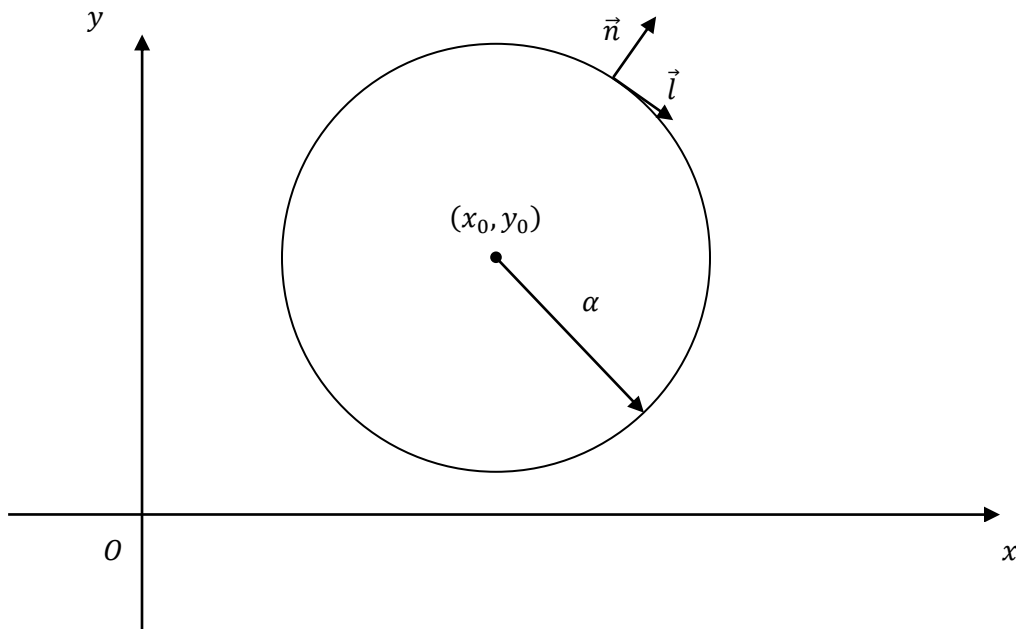
$$l_x = x'(s) \text{ και } l_y = y'(s) \quad (3.6)$$

Εναλλακτικά, θα χρησιμοποιούμε για το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα το συμβολισμό $\vec{T}(s)$ με

$$\vec{T}(s) \triangleq \vec{l}(s) \equiv \vec{r}'(s) \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1(β) και επειδή ο κύκλος διαγράφεται ανθρωλογιακά, δεδομένου ότι το $t \in [0, 2\pi)$, προκύπτει ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$, στον κύκλο είναι το

$$\begin{aligned} \vec{n} = l_y \vec{i} - l_x \vec{j} &\equiv \frac{dy(s)}{ds} \vec{i} - \frac{dx(s)}{ds} \vec{j} \Rightarrow \\ \vec{n} &= \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{i} + \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{j} \end{aligned} \quad (3.8)$$



Σχήμα 3.4. Κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας α , σε τυχόν σημείο M του οποίου σημειώνονται το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, \vec{l} και \vec{n} αντίστοιχα. Το \vec{n} βρίσκεται κατά μήκος της ακτίνας.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τη δεύτερη παράγωγο της διανυσματικής ακτίνας $\vec{r}(s)$ του κύκλου. Όντως,

$$\vec{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{i} - \frac{1}{\alpha} \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{j} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\alpha \cdot \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{i} + \alpha \cdot \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{j} + x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} - x_0 \vec{i} - y_0 \vec{j} \right]$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}''(s) = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{i} + \alpha \cdot \sin\left(\frac{s}{\alpha}\right) \vec{j} + x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \right) - (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}) \right]$$

Άρα, τελικά, λαμβάνουμε

$$x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} = \vec{r}(s) + \alpha^2 \vec{r}''(s) = \vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \quad (3.10)$$

όπου, στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη Σχέση (3.9), η οποία, προφανώς, γεννά άμεσα τη σχέση $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{\alpha}$.

3.7 Η περίπτωση τυχούσας καμπύλης: Ο εγγύτατος κύκλος σε τυχόν σημείο αυτής

Έστω διδιάστατη καμπύλη εκπεφρασμένη με ανεξάρτητη μεταβλητή t ως εξής:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, t \in \mathbb{R}$$

Η ίδια καμπύλη εκπεφρασμένη με παράμετρο το μήκος της, s , περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$$

Διευκρινίζεται ότι οι συναρτησιακές μορφές $x(s)$, $y(s)$ είναι εν γένει διαφορετικές από τις $x(t)$, $y(t)$, όπως και το πεδίο ορισμού τους, που είναι εν γένει διαφορετικό. Το πεδίο τιμών,

όμως, των $x(t), y(t)$, αφ' ενός και $x(s), y(s)$ αφ' ετέρου είναι ακριβώς το ίδιο, ώστε και οι δύο παραστάσεις σε ζεύγη να συνιστούν την καμπύλη C .

Σημαντική σημείωση: Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1(α), το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{T}(s)$ στη C είναι

$$\vec{T}(s) = \vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}, \forall s$$

Όπως προαναφέρθηκε, θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως τόσο το συμβολισμό $\vec{T}(s)$, όσο και το $\vec{i}(s)$ για το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C στο σημείο $(x(s), y(s))$.

Έστω ότι η $\vec{r}(s)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, οπότε και ορίζουμε το σημείο O_κ με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_{O_\kappa}(s) \equiv x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + \frac{x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$.

Θεωρούμε τον κύκλο (K) με κέντρο O_κ και ακτίνα $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$. Προφανώς, το σημείο A με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ εκ κατασκευής ανήκει σε αυτόν τον κύκλο, αφού

$$\begin{aligned} \|\vec{r}(s) - \vec{r}_{O_\kappa}(s)\| &= \left\| x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} - \left(x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + \frac{x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \right\| \\ &= \left\| -\frac{x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right\| = \frac{\|x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}\|}{\|\vec{r}''(s)\|^2} = \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|} \end{aligned}$$

Επομένως, το σημείο A με συντεταγμένες $(x(s), y(s))$ ανήκει στον κύκλο κέντρου O_κ και ακτίνας $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$.

Επιπλέον, τόσο ο κύκλος (K), όσο και η καμπύλη $\vec{r}(s)$ έχουν κοινό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $A(x(s), y(s))$.

Πράγματι,

$$\overrightarrow{O_\kappa A} = -\frac{x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

$$\text{και } \overrightarrow{O_\kappa A} \cdot \vec{T}(s) = \left(-\frac{x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \cdot (x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}) = -\frac{x''(s)x'(s) + y''(s)y'(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Αλλά το $\vec{T}(s)$ είναι μοναδιαίο για κάθε s . Άρα, πάνω στην καμπύλη, ταυτοτικά ισχύει

$$x'^2(s) + y'^2(s) = 1$$

και, συνεπώς, παραγωγίζοντας ως προς s , τελικά λαμβάνουμε ταυτοτικά επί της καμπύλης

$$2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 0, \text{ άρα}$$

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0 \quad (3.11)$$

Επομένως, από την ανωτέρω σχέση προκύπτει $\vec{O}_K \vec{A} \cdot \vec{T}(s) = 0$ ταυτοτικά πάνω στην καμπύλη.

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει ότι το $\vec{T}(s)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου, $\vec{O}_K \vec{A}$ και άρα, είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (K) στο σημείο A .

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι και το σημείο B της καμπύλης με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(s + ds) = x(s + ds)\vec{i} + y(s + ds)\vec{j}$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Όντως, εάν $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων, θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{O}_K \vec{B} = \vec{OB} - \vec{OO}_K = \vec{r}(s + ds) - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το $\vec{r}(s + ds)$ και, κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους, η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\vec{O}_K \vec{B} = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) = \vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \quad (3.12)$$

Ισχύει, όμως, ότι

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{O_\kappa B}\|^2 &= \overrightarrow{O_\kappa B} \cdot \overrightarrow{O_\kappa B} = \left(\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \cdot \left(\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \\ &= \vec{r}'^2(s)(ds)^2 - 2\vec{r}'(s) \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} ds + \frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4}\end{aligned}$$

Επειδή $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$, (Σχέση (3.11)) και θεωρώντας το διαφορικό $(ds)^2$ αμελητέο μπροστά στον όρο $\frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4} \equiv \frac{\|\vec{r}''^2(s)\|}{\|\vec{r}''(s)\|^4} = \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$, λαμβάνουμε

$$\|\overrightarrow{O_\kappa B}\| = \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι το σημείο B ανήκει στον κύκλο (K) , καθώς απέχει από το σημείο O_κ απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου (K) .

Ακολουθως, θα αποδείξουμε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $B(x(s+ds), y(s+ds))$ και η εφαπτομένη του κύκλου (K) στο σημείο B ταυτίζονται.

Αρκεί να δείξουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\vec{r}'(s+ds)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{O_\kappa B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων, $\vec{r}'(s+ds) \cdot \overrightarrow{O_\kappa B}$.

Χρησιμοποιούμε εκ νέου το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor του $\vec{r}'(s+ds)$ και διατηρούμε μόνο τους δύο πρώτους όρους, ενώ αντικαθιστούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{O_\kappa B}$ με την ισοδύναμη έκφρασή του, η οποία υπολογίστηκε στην (3.12). Η ισοδύναμη έκφραση την οποία λαμβάνουμε είναι:

$$\begin{aligned}(\vec{r}'(s) + \vec{r}''(s)ds) \cdot \left(\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \\ = (\vec{r}'(s))^2 ds - \vec{r}'(s) \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} + \vec{r}''(s) \cdot \vec{r}'(s)(ds)^2 - \frac{(\vec{r}''(s))^2}{\|\vec{r}''(s)\|^2} ds\end{aligned}$$

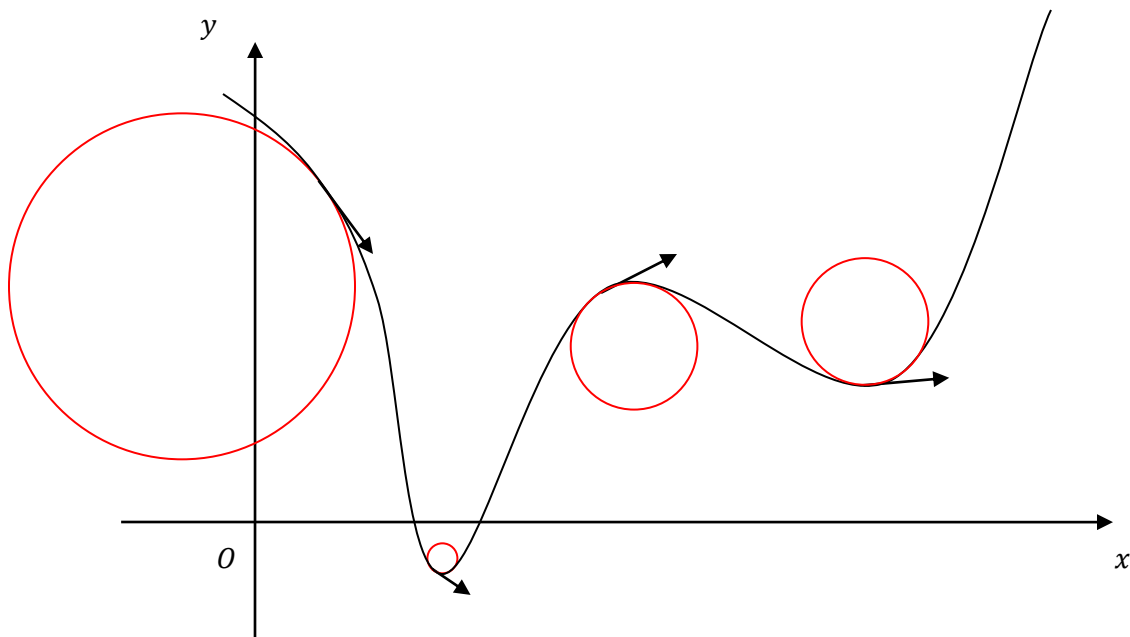
Για την ανωτέρω σχέση ισχύει $(\vec{r}'(s))^2 = \|\vec{r}'(s)\|^2 = 1$ και $\vec{r}''(s) \cdot \vec{r}'(s) = 0$.

Επομένως, η σχέση του εσωτερικού γινομένου γίνεται

$$\vec{r}'(s+ds) \cdot \overrightarrow{O_\kappa B} = ds - ds = 0$$

Από την ανωτέρω σχέση αποδεικνύεται ότι το διάνυσμα $\overline{O_k B}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης και του κύκλου (K) στο σημείο $B(x(s + ds), y(s + ds))$. Επομένως, αποδείχθη πως και το σημείο $B(x(s + ds), y(s + ds))$ ανήκει στην καμπύλη.

Προφανώς, κάθε μετακίνηση του κέντρου O_k του κύκλου (K) έχει ως αποτέλεσμα το να μην διέρχεται ο παραγόμενος κύκλος από τα σημεία A και B ταυτόχρονα ή/και η C και ο (K) να μην έχουν κοινό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στα σημεία αυτά. Άρα, ο συγκεκριμένος κύκλος (K) με κέντρο $O_k \left(x(s) + \frac{x''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}, y(s) + \frac{y''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)$ είναι ο μοναδικός που διέρχεται από τα σημεία $A(x(s), y(s))$ και $B(x(s + ds), y(s + ds))$ και ταυτίζεται πλήρως τοπικά με την καμπύλη στο τυχόν σημείο A αυτής. Για το λόγο αυτό, αυτός ο κύκλος (K) ονομάζεται εγγύτατος κύκλος της καμπύλης C στο τυχόν σημείο της $(x(s), y(s))$. Παραδείγματα εγγύτατων κύκλων σε διάφορα σημεία κατά μήκος μίας τυχούσας καμπύλης δίνονται στο ακόλουθο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5. Τυχούσα καμπύλη σε χαρακτηριστικά σημεία της οποίας σημειώνονται τα εφαπτόμενα διανύσματα και οι εγγύτατοι κύκλοι αυτής.

Ορισμός 3.1. Ορίζουμε, εύλογα, την καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο αυτής $A(\vec{r}(s))$ ως την καμπυλότητα του εγγύτατου κύκλου (K), η οποία ισούται με την ακτίνα του εγγύτατου κύκλου (K).

□

3.8 Η καμπυλότητα τυχούσας καμπύλης εκπεφρασμένης συναρτήσεως οποιασδήποτε ανεξάρτητης μεταβλητής t

Η προηγούμενη ανάλυση οδήγησε με φυσικό τρόπο στον ορισμό της καμπυλότητας στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή της επιβατικής ακτίνας της καμπύλης είναι το μήκος αυτής s . Στο σημείο αυτό θα δώσουμε τον τύπο της καμπυλότητας μιας C_2 καμπύλης, όταν η επιβατική ακτίνα αυτής εκφράζεται ως συνάρτηση μιας τυχούσας ανεξάρτητης μεταβλητής t που λαμβάνει τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, δηλαδή όταν η διανυσματική ακτίνα της καμπύλης είναι της μορφής $\vec{r}(t)$. Όντως ισχύει το κάτωθι:

Λήμμα 3.2. Έστω τυχούσα καμπύλη C του \mathbb{R}^2 με διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ ορισμένη σε ένα διάστημα ή σε μία ένωση διαστημάτων $I \subset \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η $\vec{r}(t)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση του t , $t \in I$. Τότε η καμπυλότητα $K(t)$ στο τυχόν σημείο $\vec{r}(t)$ της C δίνεται από τον τύπο:

$$K(t) = \frac{|[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot \vec{r}''(t)|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Απόδειξη:

Ισχύει:

$$\vec{r}'(s) \equiv \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{ds} \equiv \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \quad (3.13)$$

Παραγωγίζοντας μία φορά ακόμη λαμβάνουμε

$$\vec{r}''(s) \equiv \frac{d}{ds} \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = \frac{d}{dt} \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \frac{dt}{ds}$$

Αλλά

$$\frac{d}{dt} \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| - \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{d}{dt} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|^2} \quad (3.14)$$

Και επειδή $\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ ενώ $\|\vec{r}'(t)\| = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \frac{d}{dt} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

$$\text{και } \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$$

Συνεπώς, η ανωτέρω Σχέση (3.14) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} &= \frac{\vec{r}''(t)\|\vec{r}'(t)\| - \vec{r}'(t)\frac{d}{dt}\|\vec{r}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^2} = \frac{\vec{r}''(t)\|\vec{r}'(t)\| - \vec{r}'(t)\frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}}{\|\vec{r}'(t)\|^2} \\ &= \frac{\vec{r}''(t)\|\vec{r}'(t)\|^2 - \vec{r}'(t)(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t))}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τα $\vec{r}'(t)$ και $\vec{r}''(t)$ προκύπτει

$$\frac{d}{dt} \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = \frac{[x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}] \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right] - [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}] [x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)]}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Ο αριθμητής της σχέσης αυτής γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}] \left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right] - [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}] [x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)] \\ &= (x'(t))^2 x''(t)\vec{i} + (y'(t))^2 x''(t)\vec{i} + (x'(t))^2 y''(t)\vec{j} + (y'(t))^2 y''(t)\vec{j} \\ & \quad - (x'(t))^2 x''(t)\vec{i} - x'(t)y'(t)y''(t)\vec{i} - x'(t)x''(t)y'(t)\vec{j} - (y'(t))^2 y''(t)\vec{j} \\ &= \left[(y'(t))^2 x''(t) - x'(t)y'(t)y''(t) \right] \vec{i} + \left[(x'(t))^2 y''(t) - x'(t)x''(t)y'(t) \right] \vec{j} \\ &= y'(t)[y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)]\vec{i} + x'(t)[x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)]\vec{j} \\ &= [y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)][y'(t)\vec{i} - x'(t)\vec{j}] \end{aligned}$$

Αλλά

$$[y'(t)x''(t) - x'(t)y''(t)] = -[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]$$

Επομένως, η έκφραση για τον αριθμητή είναι

$$\{[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]\}[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}]$$

και η έκφραση για το $\vec{r}''(s)$ λόγω της Σχέσης (3.14) είναι

$$\vec{r}''(s) = \frac{\{[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]\}[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}]}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \frac{dt}{ds}$$

Λόγω του ότι $ds = \|\vec{r}'(t)\| dt = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt \Leftrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|}$ ισχύει

$$\vec{r}''(s) = \frac{\{[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]\}[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}]}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} \quad (3.15)$$

Επειδή μας ενδιαφέρει η βαθμωτή καμπυλότητα, λαμβάνουμε τα μέτρα και στα δύο μέλη της Σχέσης (3.15)

$$\|\vec{r}''(s)\| = \frac{|[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]| \cdot \|-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \frac{1}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}$$

$$\|\vec{r}''(s)\| = \frac{|[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot [x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}]| \cdot \|\vec{r}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\|\vec{r}''(s)\| = \frac{|[-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}] \cdot \vec{r}''(t)|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

■

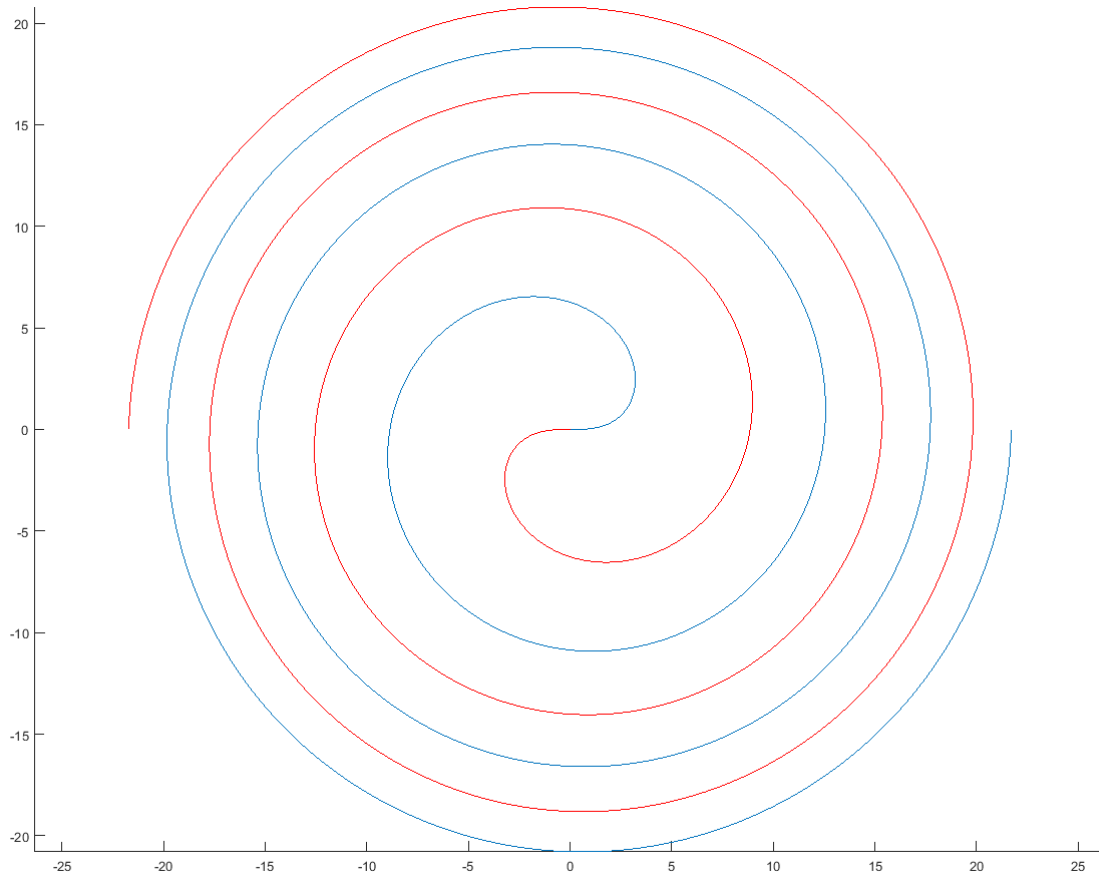
Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζεται η σπείρα του Fermat, η οποία αποτελείται από δύο κλάδους με γενικές παραμετρικές εξισώσεις:

$$x(t) = \pm \alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t) \quad \text{και} \quad y(t) = \pm \alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t)$$

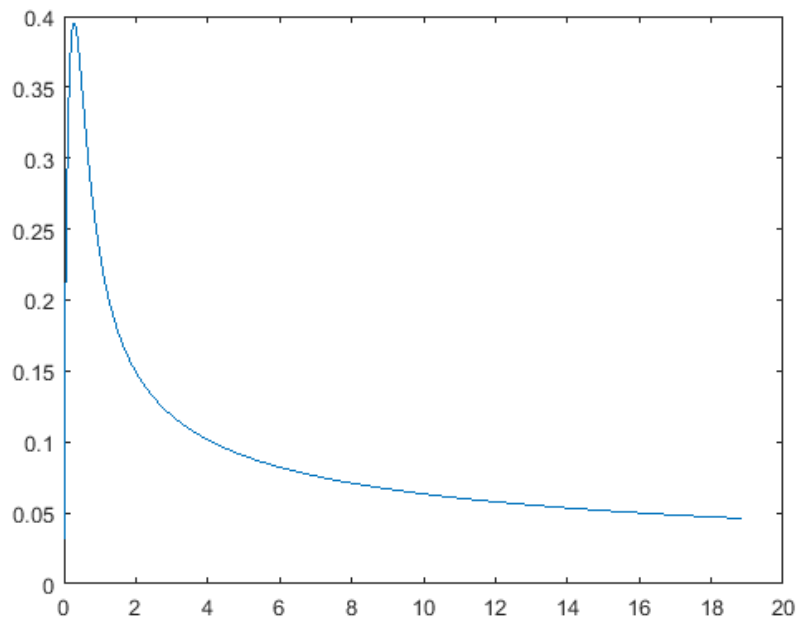
Στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $\alpha = 5$ και $t \in [0, 6\pi]$.

Στο Σχήμα 3.6, τα σημεία με καρτεσιανές συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), \alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$ απεικονίζονται με μπλε χρώμα, ενώ τα σημεία με συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (-\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), -\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$ απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα.

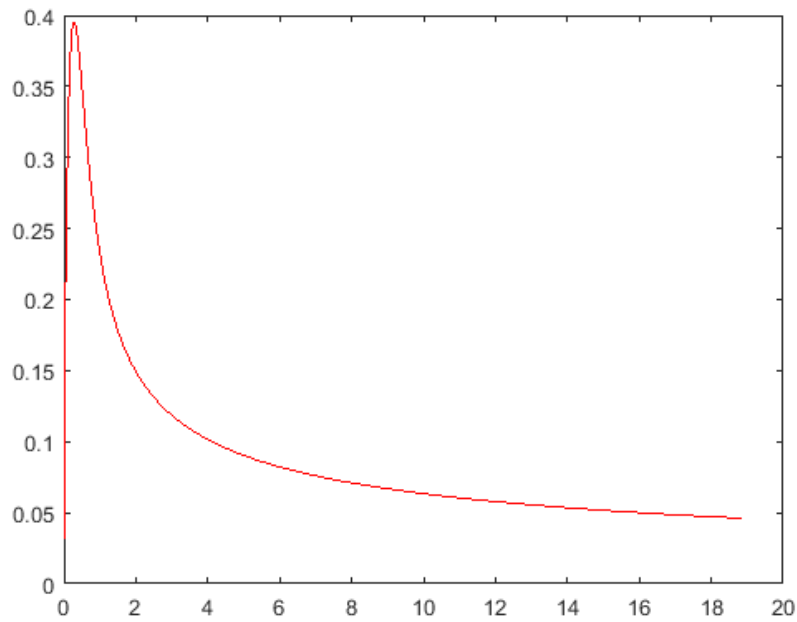
Στο Σχήμα 3.7 παρουσιάζονται οι καμπυλότητες της ανωτέρω σπείρας του Fermat για καθέναν από τους δύο κλάδους της ξεχωριστά. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.7(α) απεικονίζεται η καμπυλότητα η οποία αντιστοιχεί στα σημεία με συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), \alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$ και στο Σχήμα 3.7(β) απεικονίζεται η καμπυλότητα των σημείων με συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (-\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), -\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$. Όπως παρατηρούμε από το συγκεκριμένο σχήμα, οι δύο απεικονίσεις της καμπυλότητας ταυτίζονται, γεγονός το οποίο οφείλεται στο ότι οι δύο κλάδοι της σπείρας είναι συμμετρικοί ως προς την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.6. Σπείρα του Fermat, στην οποία ο κλάδος που αντιστοιχεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), \alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$ απεικονίζεται με μπλε χρώμα, ενώ ο κλάδος που αντιστοιχεί στις συντεταγμένες $(x(t), y(t)) = (-\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \cos(t), -\alpha \cdot \sqrt{t} \cdot \sin(t))$ απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.



(α)



(β)

Σχήμα 3.7. Γραφική αναπαράσταση της καμπυλότητας των κλάδων της σείρας του Fermat του Σχήματος 3.6.

(α) Απεικόνιση της καμπυλότητας του μπλε κλάδου της σείρας.

(β) Απεικόνιση της καμπυλότητας του κόκκινου κλάδου της σείρας.

3.9 Κάθετο διάνυσμα και η καμπυλότητα σε καμπύλη που δίδεται σε πεπλεγμένη εξίσωση της μορφής $f(x, y) = c$

Πρόταση 3.1. Έστω η καμπύλη C που δίδεται σε εξίσωση της μορφής $f(x, y) = c$, όπου (x, y) ανήκουν στο D υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και c οποιοσδήποτε σταθερός, πραγματικός αριθμός. Η εξίσωση αυτή συχνά λέγεται **πεπλεγμένη παράσταση** της C . Έστω, επίσης, ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό υπερσύνολο του D . Τότε, το διάνυσμα

$$\vec{\nabla} f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

είναι κάθετο στην καμπύλη στο τυχόν σημείο (x, y) αυτής.

Απόδειξη:

Θεωρούμε μία οποιαδήποτε παραμετρική παράσταση της καμπύλης C , της μορφής

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, t \in I, I \subset \mathbb{R}$$

Προφανώς, η $\vec{r}(t)$ είναι μία απεικόνιση από το διάστημα ή την ένωση διαστημάτων $I \subset \mathbb{R}$, στο σημειοσύνολο C του \mathbb{R}^2 , το οποίο συνιστά τη συγκεκριμένη καμπύλη.

Επομένως, ισχύει ότι

$$f(x(t), y(t)) \equiv c, \forall t \in I \tag{3.16}$$

αφού για κάθε $t \in I$ μεταβαίνουμε σε ένα σημείο της καμπύλης, συγκεκριμένα στο $(x(t), y(t))$, για το οποίο εξ' ορισμού ισχύει η σχέση $f(x, y) = c$. Σε ισοδύναμη διατύπωση, η σχέση $f(x, y) = c$ είναι μία εξίσωση στο \mathbb{R}^2 , η λύση της οποίας δίνει την καμπύλη C , ενώ η σχέση $f(x(t), y(t)) \equiv c$ είναι μία ταυτότητα επί του $I \subset \mathbb{R}$, δεδομένου ότι εξ' υποθέσεως, τα $(x(t), y(t))$ είναι οι λύσεις της $f(x, y) = c$, η οποία ισχύει για κάθε $t \in I$. Επιπλέον, λόγω της

συνεχούς παραγωγισιμότητας της $f(x, y)$, η C είναι ομαλή καμπύλη, άρα ορίζεται καλώς το διάνυσμα $\vec{r}'(t), \forall t \in I$.

Επομένως, η Σχέση (3.16) μπορεί να παραγωγιστεί στο διάστημα I , οπότε λαμβάνουμε:

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} \equiv 0$$

Αλλά, με εφαρμογή του κανόνα αλληλουχίας,

$$\frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

όπου, βεβαίως, οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ και $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ορίζονται σε ένα ανοικτό δίσκο του \mathbb{R}^2 με κέντρο το τυχόν σημείο $(x(t), y(t))$ πάνω στην καμπύλη C .

Ισοδύναμα,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} y'(t) \equiv 0$$

Αλλά $\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη με συντεταγμένες $(x(t), y(t))$.

Από την ανωτέρω σχέση, συνάγουμε ότι το διάνυσμα $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{j}$ είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο $(x(t), y(t))$, για κάθε t που ανήκει στο I .

■

Πόρισμα 3.1. Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη C της Πρότασης 3.1 είναι το

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

□

Πόρισμα 3.2. Εάν η ανωτέρω καμπύλη C διαγράφεται ανθρωπολογικά, τότε, εάν \vec{l} είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο $(x(t), y(t))$, ισχύει ότι

$$\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \vec{i} + \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \vec{j}$$

Απόδειξη:

Από την ανωτέρω ανάλυση είναι ήδη γνωστό ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη C είναι εξ' ορισμού κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη. Επομένως, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα \vec{l} λαμβάνεται με στροφή του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος στην καμπύλη κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$, επειδή η C διαγράφεται ανθρωρολογιακά. Με στροφή του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος κατά $\frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \\ \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} l_x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \\ l_y = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_x = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \\ l_y = \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f\|} \end{cases}$$

Μπορεί όντως να επιβεβαιωθεί ότι τα διανύσματα \vec{l} και \vec{n} είναι κάθετα μεταξύ τους μετά από υπολογισμό του εσωτερικού τους γινομένου, το οποίο είναι μηδέν ταυτοτικά.

■

Πρόταση 3.2. Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη C , η οποία περιγράφεται από τη διανυσματική παράσταση $\vec{r}(t), t \in I \subset \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Έστω $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη στο τυχόν σημείο αυτής. Τότε, το μέτρο της καμπυλότητας της C σε κάθε σημείο αυτής ισούται με το $\vec{v} \cdot \vec{n}$, όπου

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y}$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1(β), ισχύει

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} = -\frac{\partial l_y}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}$$

Επίσης, επειδή η καμπύλη είναι ομαλή, ορίζεται το μήκος αυτής $s(t)$ σε κάθε σημείο της. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης C το μήκος αυτής s , χωρίς καμιά βλάβη της γενικότητας. Στην περίπτωση αυτή λαμβάνουμε:

$$x''(s) = \frac{d}{ds} x'(s) = \frac{d}{ds} l_x = \frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial l_x}{\partial y} \frac{dy}{ds} \Rightarrow$$

$$x''(s) = \frac{\partial l_x}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_x}{\partial y} y'(s) \quad (3.17)$$

Ομοίως, ισχύει

$$y''(s) = \frac{d}{ds} y'(s) = \frac{d}{ds} l_y = \frac{\partial l_y}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial l_y}{\partial y} \frac{dy}{ds} \Rightarrow$$

$$y''(s) = \frac{\partial l_y}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_y}{\partial y} y'(s) \quad (3.18)$$

Ισχύει, επίσης, ότι το διάνυσμα $\vec{r}''(s) = (x''(s), y''(s))$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{r}'(s) = (x'(s), y'(s))$. Αυτό ισχύει διότι το μήκος του $\vec{r}'(s)$ είναι μονάδα (Σχέση (3.11), Παράγραφος 3.7).

Επίσης, ένα κάθετο διάνυσμα στο $\vec{r}'(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j}$ είναι το $\vec{n}(s) = y'(s)\vec{i} - x'(s)\vec{j}$. Όπως προαναφέρθηκε, αυτό εύκολα επιβεβαιώνεται με στροφή του $\vec{r}'(s)$ κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$ επειδή η καμπύλη C θεωρούμε ότι διαγράφεται ανθρωπολογικά ή λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων το οποίο είναι ίσο με το μηδέν.

Επομένως, τα διανύσματα $\vec{r}''(s)$ και $\vec{n}(s)$ είναι συγγραμμικά, εφ' όσον είναι κάθετα στο ίδιο διάνυσμα. Συνεπώς, θα υπάρχει κάποιο κ για το οποίο θα ισχύει

$$x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j} = \kappa(y'(s)\vec{i} - x'(s)\vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x''(s) = \kappa \cdot y'(s) \\ y''(s) = -\kappa \cdot x'(s) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x''^2(s) = \kappa^2 \cdot y'^2(s) \quad (+) \\ y''^2(s) = \kappa^2 \cdot x'^2(s) \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$x''^2(s) + y''^2(s) = \kappa^2 (x'^2(s) + y'^2(s)) \Rightarrow$$

$$x''^2(s) + y''^2(s) = \kappa^2 \quad (3.20)$$

Σύμφωνα, όμως με την ανάλυση της Παραγράφου 3.8, εξ ορισμού, αυτός ο συντελεστής αναλογίας $\kappa = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s)} = \|\vec{r}''(s)\|$ είναι η καμπυλότητα της καμπύλης στο τυχόν σημείο αυτής $\vec{r}(s)$.

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι από τις Σχέσεις (3.17) και (3.18) προκύπτει

$$\begin{cases} x''^2(s) = x''(s) \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_x}{\partial y} y'(s) \right) \\ y''^2(s) = y''(s) \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_y}{\partial y} y'(s) \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

Από τις Σχέσεις (3.21) προκύπτει

$$x''^2(s) + y''^2(s) = x''(s) \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_x}{\partial y} y'(s) \right) + y''(s) \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_y}{\partial y} y'(s) \right)$$

Αλλά από τις Σχέσεις (3.19) και (3.20), η ανωτέρω εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \kappa \cdot y'(s) \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_x}{\partial y} y'(s) \right) - \kappa \cdot x'(s) \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_y}{\partial y} y'(s) \right) \Leftrightarrow \\ \kappa &= y'(s) \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_x}{\partial y} y'(s) \right) - x'(s) \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial l_y}{\partial y} y'(s) \right) \Leftrightarrow \\ \kappa &= y'(s)x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} + y'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} - x'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} - x'(s)y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} \xleftrightarrow{\pm x'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} \pm y'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x}} \\ \kappa &= y'(s)x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} + y'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} - x'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} - x'(s)y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} + x'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} - x'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} \\ &\quad + y'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} - y'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \kappa &= \frac{\partial l_x}{\partial y} (y'^2(s) + x'^2(s)) - \frac{\partial l_y}{\partial x} (x'^2(s) + y'^2(s)) + y'(s)x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} - x'(s)y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} \\ &\quad - x'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} + y'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} \xleftrightarrow{|\vec{r}'(s)|^2=1} \\ \kappa &= \frac{\partial l_x}{\partial y} - \frac{\partial l_y}{\partial x} + y'(s)x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} - x'(s)y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} - x'^2(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} + y'^2(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{\partial l_x}{\partial y} - \frac{\partial l_y}{\partial x} + y'(s) \left(y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} + x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} \right) - x'(s) \left(x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} + y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} \right) \quad (3.22)$$

Αλλά ισχύει ότι

$$x'^2(s) + y'^2(s) = 1 \Leftrightarrow l_x^2 + l_y^2 = 1$$

Παίρνοντας τη μερική παράγωγο της ανωτέρω σχέσης ως προς x λαμβάνουμε

$$\frac{\partial}{\partial x} (l_x^2 + l_y^2) = 0 \Rightarrow 2l_x \frac{\partial l_x}{\partial x} + 2l_y \frac{\partial l_y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow l_x \frac{\partial l_x}{\partial x} + l_y \frac{\partial l_y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial x} + y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

Ομοίως, παίρνοντας τη μερική παράγωγο ως προς y προκύπτει

$$x'(s) \frac{\partial l_x}{\partial y} + y'(s) \frac{\partial l_y}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

Άρα η (3.22) λόγω των (3.23) και (3.24) γίνεται

$$\kappa = \frac{\partial l_x}{\partial y} - \frac{\partial l_y}{\partial x}$$

Όμως,

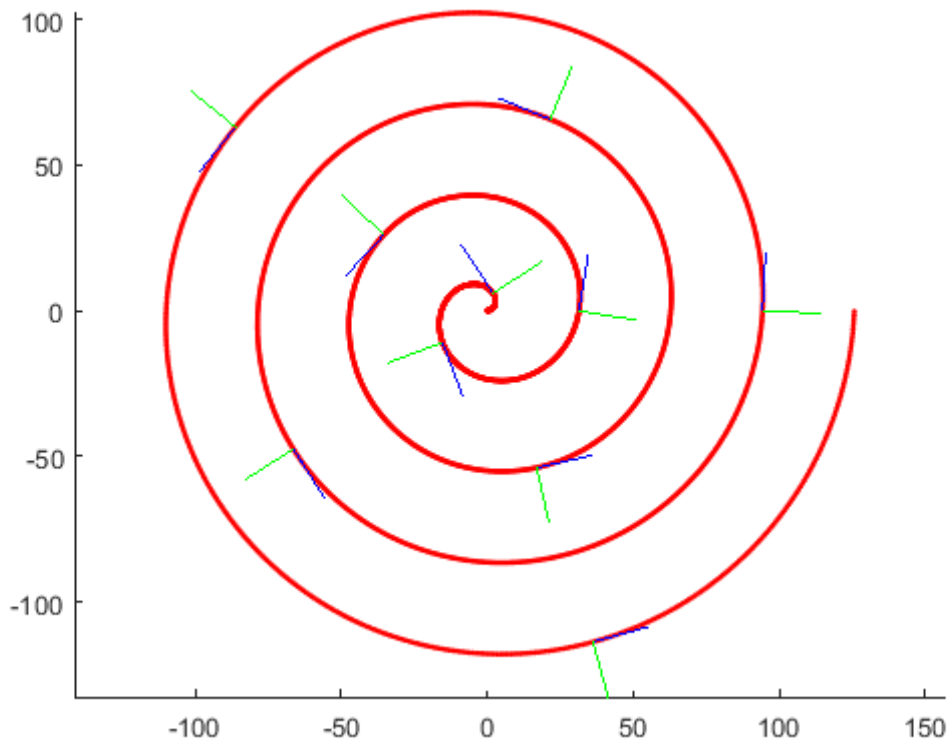
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial l_y}{\partial x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}$$

Οπότε, τελικά,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \kappa$$

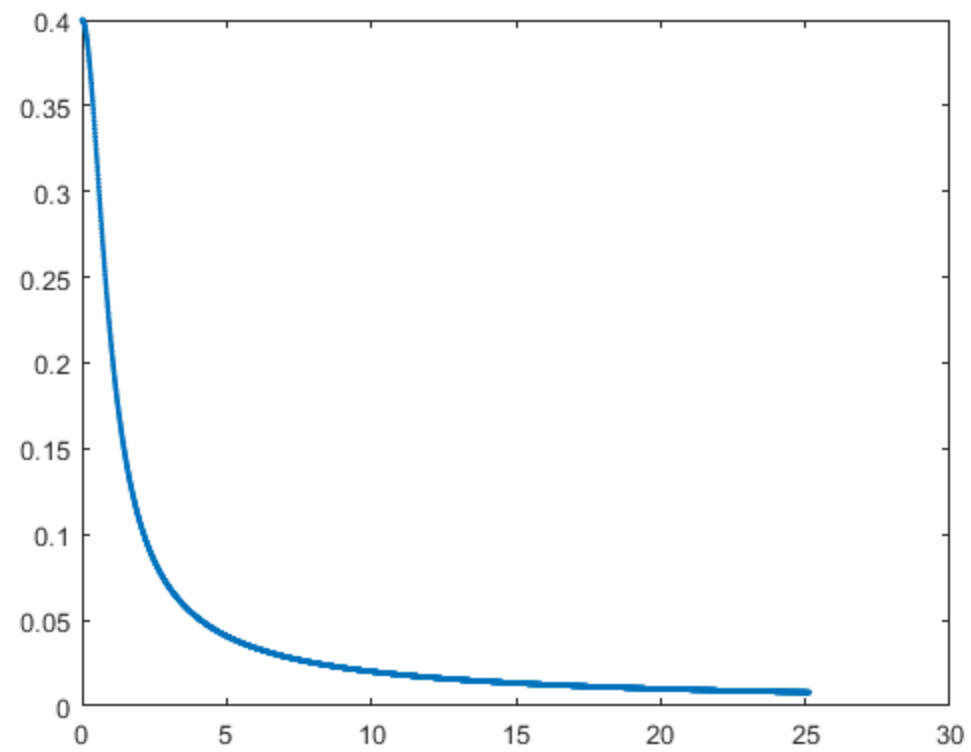
■

Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζεται μία σπείρα του Αρχιμήδη, κατά μήκος της οποίας σημειώνονται με μπλε χρώμα ορισμένα εφαπτόμενα σε αυτή διανύσματα και με πράσινο χρώμα τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα.



Σχήμα 3.8. Σπείρα του Αρχιμήδη. Με μπλε χρώμα απεικονίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα σε διάφορα σημεία της και με πράσινο χρώμα απεικονίζονται τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα στα ίδια σημεία.

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η καμπυλότητα της ανωτέρω σπείρας:



Σχήμα 3.9. Γραφική απεικόνιση της καμπυλότητας της σειράς του Αρχιμήδη του Σχήματος 3.8.

4 Μία νέα, πολύ χρήσιμη Μαθηματική οντότητα: Η επίπεδη καμπυλότητα

Ένας πρώτος, σημαντικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι η βέλτιστη προσαρμογή μεταξύ των καμπυλών ενός συνόλου, με χρήση μίας νέας μαθηματικής οντότητας και σχετικών θεωρημάτων. Προς την κατεύθυνση αυτή ορίζεται αρχικά μία νέα ποσότητα η οποία ονομάζεται **επίπεδη καμπυλότητα**. Στην πράξη, οι καμπύλες οι οποίες χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της μεθόδου είναι ψηφιακές και βρίσκονται εντός ψηφιακών εικόνων. Ωστόσο, η αυστηρή μαθηματική προσέγγιση που θα ακολουθήσει αφορά συνεχείς καμπύλες και, στη συνέχεια, οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν προκύπτουν από διακριτοποίηση των σχέσεων και των θεωρημάτων της συνεχούς προσέγγισης. Όπως θα καταστεί σαφές από την ακόλουθη ανάλυση, αλλά και από τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου, η βέλτιστη προσαρμογή των καμπυλών, η οποία υποδεικνύεται από τη συνεχή, αυστηρή προσέγγιση, εξασφαλίζει και τη φυσική ομοιότητα των εμπλεκόμενων ψηφιακών σχημάτων.

4.1 Θεμελιώδεις ορισμοί που αφορούν την επίπεδη καμπυλότητα

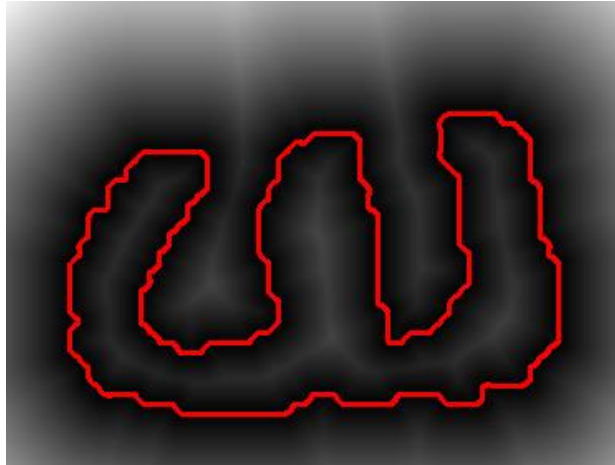
Ορισμός 4.1. Έστω μία συνάρτηση $f(x, y)$, με πεδίο ορισμού ένα χωρίο I του \mathbb{R}^2 και πεδίο τιμών το \mathbb{R} , η οποία είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I . Θεωρούμε ότι το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει $f(x, y) = 0$ περιγράφουν μία ομαλή καμπύλη Jordan, Γ_1 , την οποία ονομάζουμε **μηδενική ισοϋψή** της $f(x, y)$.

□

Ορισμός 4.2. Έστω E το σύνολο των σημείων τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $f(x, y) = c$, όπου η $f(x, y)$ είναι όπως και στον Ορισμό 4.1 και c τυχούσα σταθερά. Θεωρούμε ότι τα σημεία της E σχηματίζουν μία τμηματικώς ομαλή καμπύλη Jordan, την οποία θα ονομάζουμε **c - ισοϋψή** της $f(x, y)$. Ένα σύνολο τέτοιων ισοϋψών παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1 για την ειδική περίπτωση για την οποία η $f(x, y)$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του τυχόντος σημείου (x, y)

του χωρίου I από μία κλειστή καμπύλη Jordan, που είναι το περίγραμμα ενός γράμματος. Έστω, επίσης M τυχόν σημείο της E . Επιπροσθέτως, έστω \vec{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης E στο σημείο M , για το οποίο έχουμε αποδείξει στο Πρόρισμα 3.1 ότι ισχύει $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}f}{\|\vec{\nabla}f\|}$.

□



Σχήμα 4.1. Απεικόνιση των ισοϋψών της Ευκλείδειας απόστασης από το περίγραμμα μιας υλοποίησης του γράμματος 'ω'. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στο περίγραμμα του γράμματος ή, εναλλακτικά, στη μηδενική ισοϋψή του.

Ορισμός 4.3 (της Επίπεδης Καμπυλότητας). Σε συνέχεια των Ορισμών 4.1 και 4.2, ορίζεται η συνάρτηση

$$C(x, y) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \equiv \text{div}(\vec{n}) \quad (4.1)$$

όπου $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$ ο διαφορικός τελεστής ανάδελτα (ισοδυνάμως της κλίσης) στις δύο διαστάσεις.

Στο εξής, για τη συνάρτηση $C(x, y)$ θα χρησιμοποιείται ο όρος **Επίπεδη Καμπυλότητα** της συνάρτησης f .

□

Πόρισμα 4.1. Λόγω του ότι η καμπύλη Γ_1 αποτελεί ισοϋψή καμπύλη της $f(x, y)$ για $c = 0$, τότε, επί τη βάσει της Πρότασης 3.2, η συνάρτηση $C(x, y)$ πάνω στην καμπύλη Γ_1 αντιπροσωπεύει την καμπυλότητα της καμπύλης Γ_1 σε κάθε σημείο αυτής.

□

Ας υποθεθεί στη συνέχεια ότι μία ακόμη ομαλή καμπύλη Jordan, Γ_2 , εντίθεται στο χωρίο I και ότι το Ω είναι το χωρίο του I το οποίο βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2(α). Ας υποθεθεί ότι η Γ_2 είναι ταυτοτικά ίδια με την Γ_1 και ότι κατά την ένθεση της Γ_2 στο I , η καμπύλη αυτή διαφέρει από τη Γ_1 μόνο λόγω τυχαίας στροφής και παράλληλης μετατόπισης. Σε ισοδύναμη διατύπωση, οι καμπύλες Γ_2 και Γ_1 έχουν ακριβώς την ίδια καμπυλότητα σε όλα τα ζεύγη των αντιστοιχών σημείων τους. Τότε, επειδή η καμπυλότητα είναι ανεξάρτητη της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης της καμπύλης, σε έναν ιδεατό χώρο καμπυλοτήτων δεν θα υπήρχε χωρίο Ω που θα χώριζε αυτές τις δύο καμπύλες.

Εάν τώρα φανταστεί κανείς ότι η Γ_2 διαφοροποιείται από τη Γ_1 σε μια πολύ μικρή περιοχή αυτής, τότε όταν οι δύο καμπύλες Γ_1 και Γ_2 ταιριάζουν βέλτιστα, θα δημιουργείται μεταξύ τους ένα πολύ μικρό χωρίο $d\Omega \subset I$. Τότε, στο χώρο καμπυλοτήτων, παρουσιάζεται μεταξύ τους μία διαφορά στην καμπυλότητά τους της τάξης του $C(x, y)d\Omega$.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, είναι εύλογο να ορίσουμε το βαθμό ομοιότητας δύο καμπυλών που είναι βέλτιστα προσαρμοσμένες στο \mathbb{R}^2 ως το ολοκλήρωμα των επιπέδων καμπυλοτήτων στο χωρίο που τις χωρίζει. Όντως, ορίζουμε το κάτωθι κριτήριο ομοιότητας:

Ορισμός 4.4 (κριτήριο ομοιότητας δύο καμπυλών με χρήση της επίπεδης καμπυλότητας).

Δεδομένου ότι, εξ' ορισμού, η επίπεδη καμπυλότητα είναι $\vec{V} \cdot \vec{n}$, η ομοιότητα μεταξύ των δύο

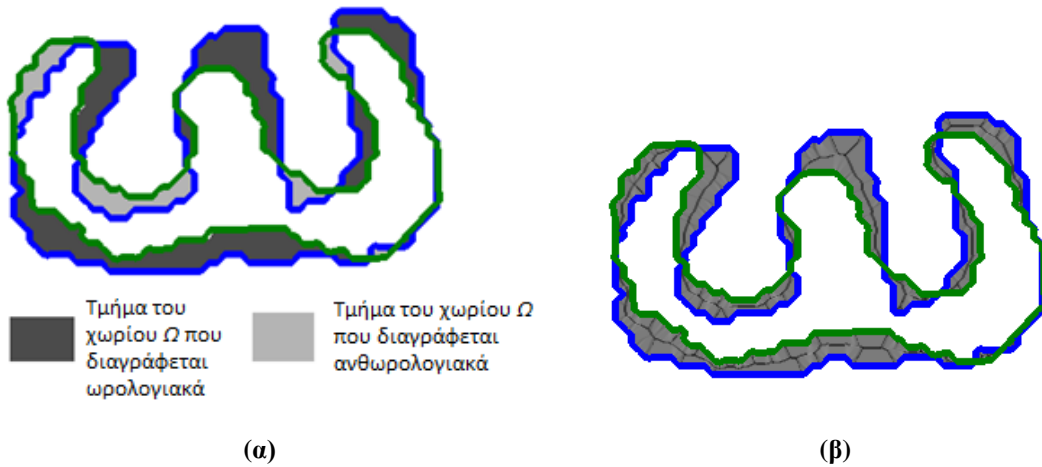
καμπυλών Γ_1 και Γ_2 μπορεί να παρασταθεί μέσω της συνάρτησης σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\varepsilon^c = \int_{\Omega} |\vec{\nu} \cdot \vec{n}| d\Omega \quad (4.2)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί το διπλό ολοκλήρωμα του μέτρου της ποσότητας $\vec{\nu} \cdot \vec{n}$ πάνω στο προαναφερθέν χωρίο Ω , όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2(β).

□

Στην περίπτωση στην οποία οι καμπύλες Γ_1 και Γ_2 είναι ταυτόσημες και βέλτιστα ταιριασμένες, ισχύει ότι $\varepsilon^c = 0$. Στην περίπτωση στην οποία η καμπύλη Γ_2 παρουσιάζει διαφοροποίηση σε σχέση με τη Γ_1 και οι δύο καμπύλες ταιριάζουν βέλτιστα, η συνάρτηση σφάλματος ε^c αυξάνει ανάλογα με το βαθμό διαφοροποίησης των δύο καμπυλών, όπως θα γίνει καλύτερα αντιληπτό στην Παράγραφο 5.1. Με άλλα λόγια, η Συνάρτηση σφάλματος (4.2) συνδέεται άμεσα με τη φυσική ερμηνεία της ομοιότητας και διαφοροποίησης μεταξύ δύο ομαλών καμπυλών Jordan Γ_1 και Γ_2 . Στα επόμενα θα αποδειχθεί ότι εάν η καμπύλη Γ_2 υποστεί κατάλληλους μετασχηματισμούς όπως προσαρμογή μεγέθους, περιστροφή και παράλληλη μετατόπιση, μπορεί να ταιριάξει βέλτιστα στην καμπύλη Γ_1 όσον αφορά την καμπυλότητα με χρήση της συνάρτησης σφάλματος ε^c .



Σχήμα 4.2. Το χωρίο Ω της μεταβολής των δύο καμπυλών και η συνάρτηση σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας.

α) Το χωρίο Ω , όπως σχηματίζεται λόγω της μεταβολής δύο υλοποιήσεων του γράμματος 'ω'. Η καμπύλη αναφοράς Γ_1 απεικονίζεται με μπλε χρώμα, ενώ η μετασχηματισμένη καμπύλη Γ_2 απεικονίζεται με πράσινο χρώμα. Τα μονοπάτια που οδηγούν από τη Γ_1 στη Γ_2 βέλτιστα καθορίζουν τη φορά διαγραφής του περιγράμματος κάθε κλειστού υποσυνόλου του Ω , όπως απεικονίζεται στο σχήμα.

β) Τιμές της συνάρτησης της επίπεδης καμπυλότητας στο χωρίο Ω σε διαφορετικές αποχρώσεις του γκρι. Οι μικρότερες τιμές της επίπεδης καμπυλότητας αντιστοιχούν σε περισσότερο έντονες αποχρώσεις.

4.2 Προτάσεις που αφορούν την επίπεδη καμπυλότητα

Θεωρούμε τη συνάρτηση σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας ε^c σαν συναρτησιοειδές με την έννοια ότι για κάθε καμπύλη Γ_2 , εντεθειμένη στο χωρίο I , δημιουργείται και μία διαφορετική τιμή για την ε^c . Ως εκ τούτου, το συναρτησιοειδές αυτό μπορεί να λάβει ελάχιστη τιμή για μία δεδομένη σχετική θέση της καμπύλης Γ_2 ως προς τη σταθερή καμπύλη Γ_1 . Στη θέση αυτή ελαχίστου ε^c , η τιμή της ε^c είναι στάσιμη, θα ισχύει δηλαδή ότι τοπικά η μεταβολή της ε^c θα είναι μηδέν ή, ισοδύναμα, $\delta(\varepsilon^c) = 0$ στη θέση βέλτιστης προσαρμογής.

Ας θεωρήσουμε τώρα και ένα άλλο συναρτησιοειδές, το οποίο δίνεται από τη σχέση

$$\zeta^c = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})^2 d\Omega \quad (4.3)$$

Θα αποδείξουμε την άρρηκτη σχέση των συναρτησιοειδών ε^c και ζ^c , όσον αφορά τη βέλτιστη προσαρμογή δύο τυχουσών καμπυλών Γ_1 και Γ_2 . Όντως, θα αποδείξουμε ότι ισχύει η κάτωθι:

Πρόταση 4.1. Το συναρτησιοειδές ε^c λαμβάνει ελάχιστη τιμή εάν το συναρτησιοειδές σφάλματος, $\zeta^c = \int_{\Omega} (\vec{V} \cdot \vec{n})^2 d\Omega$ λάβει ελάχιστη τιμή σε μία δεδομένη θέση της μετακινήσιμης καμπύλης Γ_2 ως προς την ακίνητη/σταθερή καμπύλη Γ_1 .

Ισοδύναμα, ισχύει $\delta(\varepsilon^c) = 0 \Rightarrow \delta(\zeta^c) = 0$.

Απόδειξη:

Έστω η ποσότητα $I(\Omega)$ που ορίζεται από την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq D$.

Ορίζουμε

$$I(\Omega) = \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$$

Έστω, επίσης, διαταραχή του χωρίου Ω που προκύπτει από τον παρακάτω τυχόντα στοιχειώδη μετασχηματισμό

$$\Omega \rightarrow \Omega' : (x, y) \rightarrow (x', y') = (x + \varepsilon \cdot \eta_x(x, y), y + \varepsilon \cdot \eta_y(x, y))$$

Στην ανωτέρω σχέση η ποσότητα ε αντιπροσωπεύει το μέτρο της διαταραχής, ενώ οι συναρτήσεις $\eta_x(x, y)$ και $\eta_y(x, y)$ αντιπροσωπεύουν τις παραμορφώσεις αυτές, οι οποίες είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν στροφή, παράλληλη μετατόπιση ή/και προσαρμογή του μεγέθους του χωρίου Ω γύρω από ένα σημείο (x, y) ή οποιαδήποτε άλλη παραμόρφωση.

Στην περίπτωση αυτή, η επίδραση του μετασχηματισμού στην $I(\Omega)$ μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο χρησιμοποιώντας πρώτου βαθμού προσέγγιση με σειρά Taylor γύρω από το σημείο (x, y) το οποίο μετασχηματίζεται στο (x', y') :

$$I(\Omega') = I(\Omega, \varepsilon) = \int_{\Omega'} g(x', y') dx' dy' = I(\Omega, 0) + \left. \frac{\Delta I}{\Delta \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Αλλά

$$\left. \frac{\Delta I}{\Delta \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \left\{ \int_{\Omega} g(x', y') dx' dy' \right\} \right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega} \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{g(x', y') dx' dy'\} \right|_{\epsilon=0}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{g(x', y') dx' dy'\} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{g(x', y')\} \right|_{\epsilon=0} dx' dy' + g(x', y') \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{dx'\} \right|_{\epsilon=0} dy' \\ &+ g(x', y') dx' \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{dy'\} \right|_{\epsilon=0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{g(x', y') dx' dy'\} \right|_{\epsilon=0} &= \left. \frac{\Delta}{\Delta \epsilon} \{g(x', y')\} \right|_{\epsilon=0} dx' dy' + g(x', y') \left. \frac{d\Delta x'}{\Delta \epsilon} \right|_{\epsilon=0} dy' \\ &+ g(x', y') dx' \left. \frac{d\Delta y'}{\Delta \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Βάσει των ορισμών του x' ισχύει

$$\Delta x' = x' - x = \epsilon \cdot \eta_x(x, y) \Rightarrow d\Delta x' = \epsilon \cdot d\eta_x(x, y)$$

Άρα και

$$\frac{d\Delta x'}{\Delta \epsilon} = d\eta_x(x, y)$$

Ομοίως, για το y' ισχύει

$$\frac{d\Delta y'}{\Delta \epsilon} = d\eta_y(x, y)$$

Αλλά, όπως προαναφέρθηκε, ισχύει ότι $x' - x \triangleq \epsilon \cdot \eta_x(x, y)$ και $y' - y \triangleq \epsilon \cdot \eta_y(x, y)$, όπως ορίστηκε από τη διαταραχή. Επίσης, ισχύει ότι $d(x + \epsilon \cdot \eta_x(x, y)) = dx + \epsilon \cdot d\eta_x(x, y)$ και $d(y + \epsilon \cdot \eta_y(x, y)) = dy + \epsilon \cdot d\eta_y(x, y)$.

Οπότε, ισχύει και για το γινόμενο

$$\begin{aligned} dx'dy' &= (dx + \epsilon \cdot d\eta_x(x, y)) \cdot (dy + \epsilon \cdot d\eta_y(x, y)) \\ &= dx dy + \epsilon \cdot d\eta_x(x, y)dy + \epsilon \cdot d\eta_y(x, y)dx + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

όπου σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις θεωρούμε ότι

$$d\eta_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \eta_x(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y} \eta_x(x, y)dy$$

και

$$d\eta_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \eta_y(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y} \eta_y(x, y)dy$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \Delta\{g(x', y')\}|_{\epsilon=0} &= (x' - x) \frac{\partial}{\partial x'} g(x', y') \Big|_{x'=x} + (y' - y) \frac{\partial}{\partial y'} g(x', y') \Big|_{y'=y} \\ &= (\epsilon \cdot \eta_x) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \Big|_{\epsilon=0} + (\epsilon \cdot \eta_y) \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \Big|_{\epsilon=0} \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\Delta}{\Delta\epsilon} \{g(x', y')\}|_{\epsilon=0} = \eta_x \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \Big|_{\epsilon=0} + \eta_y \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \Big|_{\epsilon=0}$$

Επομένως, η Έκφραση (4.4) για το $I(\Omega')$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} I(\Omega') &= I(\Omega, 0) + \epsilon \int_{\Omega} \left\{ \left(\eta_x \frac{\partial}{\partial x} g \Big|_{\epsilon=0} + \eta_y \frac{\partial}{\partial y} g \Big|_{\epsilon=0} \right) \right. \\ &\quad \cdot (dx dy + \epsilon \cdot d\eta_x dy + \epsilon \cdot d\eta_y dx + O(\epsilon^2)) + g \cdot d\eta_x (dy + \epsilon \cdot d\eta_y) \\ &\quad \left. + g \cdot d\eta_y (dx + \epsilon \cdot d\eta_x) \right\} \end{aligned}$$

$$= I(\Omega, 0) + \epsilon \int_{\Omega} \left\{ \left(\eta_x \frac{\partial}{\partial x} g \Big|_{\epsilon=0} + \eta_y \frac{\partial}{\partial y} g \Big|_{\epsilon=0} \right) dx dy + g(d\eta_x dy + d\eta_y dx) \right\} + O(\epsilon^2)$$

Επομένως, προκύπτει

$$I(\Omega') = I(\Omega, 0) + \epsilon \int_{\Omega} \{g(d\eta_x dy + dx d\eta_y) + (\eta_x, \eta_y) \cdot \vec{\nabla} g dx dy\} + O(\epsilon^2)$$

Σε όλες τις ανωτέρω σχέσεις έχουμε αντικαταστήσει τους συμβολισμούς $g(x, y)$, $\eta_x(x, y)$ και $\eta_y(x, y)$ με τους απλούστερους g, η_x, η_y .

Για τη διαφορά $I(\Omega') - I(\Omega)$ και για προσέγγιση πρώτης τάξης ισχύει

$$\begin{aligned} I(\Omega') - I(\Omega) &= \epsilon \int_{\Omega} \{g(d\eta_x dy + dx d\eta_y) + (\eta_x, \eta_y) \cdot \vec{\nabla} g dx dy\} \\ &= \epsilon \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial}{\partial y} \eta_y \right) g + (\eta_x, \eta_y) \cdot \vec{\nabla} g \right) dx dy = \epsilon \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot ((\eta_x, \eta_y) g) dx dy \end{aligned}$$

Ισχύει το Γενικευμένο Θεώρημα Gauss

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (F_x, F_y) dx dy \equiv \oint_{\partial\Omega} (-F_y, F_x) \cdot d\vec{l} \equiv \oint_{\partial\Omega} (-F_y, F_x) \cdot (dx, dy) \equiv \oint_{\partial\Omega} F_x dy - F_y dx$$

Οπότε η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$I(\Omega') - I(\Omega) = \epsilon \oint_{\partial\Omega} g(\eta_x dy - \eta_y dx)$$

Αντικαθιστώντας $g = 1$ λαμβάνουμε $I(\Omega) = \text{Area}(\Omega)$, όπου $\text{Area}(\Omega)$ το εμβαδόν που περικλείεται από το χωρίο Ω .

Τότε

$$\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega) = \epsilon \oint_{\partial\Omega} (\eta_x dy - \eta_y dx)$$

Η σχέση αυτή μας βοηθά να γράψουμε τη μεταβολή οποιασδήποτε $I(\Omega)$ ως προς τη μεταβολή του εμβαδού του Ω ως εξής:

$$(I(\Omega') - I(\Omega)) \oint_{\partial\Omega} (\eta_x dy - \eta_y dx) = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) \oint_{\partial\Omega} g (\eta_x dy - \eta_y dx)$$

Καθώς η $\partial\Omega$ απαρτίζεται από μια σταθερή (πρότυπη) καμπύλη Γ_F και μια «μεταβλητή» καμπύλη Γ_R , της οποίας η θέση σε σχέση με αυτή της Γ_F είναι υπό προσδιορισμό, η διαταραχή της Γ_F είναι μηδενική. Συνεπώς, τα ολοκληρώματα των διαταραχών επί του $\partial\Omega$ περιορίζονται σε ολοκληρώματα επί της Γ_R μόνο. Τότε

$$(I(\Omega') - I(\Omega)) \int_{\Gamma_R} (\eta_x dy - \eta_y dx) = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) \int_{\Gamma_R} g (\eta_x dy - \eta_y dx)$$

Από τη στιγμή που αυτή η σχέση ισχύει για οποιανδήποτε Γ_R , ισχύει και για κάποια Γ_R η οποία περιβάλλει στοιχειωδώς την καμπύλη Γ_F ή/και, σε ακραία περίπτωση που η Γ_R εκφυλίζεται σε σημειακή διαταραχή της Γ_F .

Στην ακραία αυτή περίπτωση θα πρέπει να ισχύει

$$(I(\Omega') - I(\Omega)) (-\eta_y, \eta_x)|_{\Gamma_R} = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) (g(-\eta_y, \eta_x))|_{\Gamma_R}$$

Επειδή η ανωτέρω σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε διαταραχή (η_x, η_y) , συνεπάγεται ότι

$$(I(\Omega') - I(\Omega)) = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) g|_{\Gamma_R}$$

Για τις ειδικές περιπτώσεις των ποσοτήτων

$$I_1(\Omega) = \int_{\Omega} |c(x, y)| dx dy, \quad I_2(\Omega) = \int_{\Omega} c(x, y)^2 dx dy$$

η σχέση των μεταβολών $I_1(\Omega') - I_1(\Omega)$ και $I_2(\Omega') - I_2(\Omega)$, στην ακραία περίπτωση όπου η Γ_R διαφέρει από τη Γ_F κατά μία σημειακή διαταραχή, λόγω της ανωτέρω σχέσης που εφαρμόζεται και στα δύο ολοκληρώματα ταυτόχρονα γράφεται

$$(I_1(\Omega') - I_1(\Omega)) = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) |c(x, y)| |_{\Gamma_R}$$

$$(I_2(\Omega') - I_2(\Omega)) = (\text{Area}(\Omega') - \text{Area}(\Omega)) c(x, y)^2 |_{\Gamma_R}$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις

$$I_2(\Omega') - I_2(\Omega) = |c(x, y)| \Big|_{\Gamma_R} (I_1(\Omega') - I_1(\Omega))$$

Ισοδύναμα

$$\Delta I_2 = |c(x, y)| \Big|_{\Gamma_R} (\Delta I_1)$$

Συνεπώς τα στάσιμα σημεία της I_1 είναι και στάσιμα σημεία της I_2 . Επιπλέον, εάν η ποσότητα $|c(x, y)|$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν πάνω σε κάθε Γ_R , δηλαδή πάνω σε κάθε σημειακή διαταραχή της Γ_F , τότε ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή, η ελαχιστοποίηση της $I_2(\Omega)$ για κάποιο Ω^* συνεπάγεται την ελαχιστοποίηση της $I_1(\Omega)$ για το ίδιο Ω^* . Εάν η $|c(x, y)|$ είναι μηδέν σε μια ανοικτή περιοχή γύρω από τη Γ_F , τότε, προφανώς, τόσο τα $\Delta I_1(\Omega)$, όσο και τα $\Delta I_2(\Omega)$ θα είναι ταυτοχρόνως μηδέν, γεγονός που σημαίνει ότι τα συναρτησιοειδή ζ^c και ε^c έχουν κοινά στάσιμα σημεία. ■

Πρόταση 4.2. Το σφάλμα ζ^c μπορεί να γραφεί ισοδυνάμως στη μορφή

$$\zeta^c = 2 \oint_{\partial\Omega} \vec{\nu} \cdot \vec{n} \, dl \Leftrightarrow \zeta^c = 2 \left(\oint_{\Gamma_2} \vec{\nu} \cdot \vec{n} \, dl - \oint_{\Gamma_1} \vec{\nu} \cdot \vec{n} \, dl \right) \quad (4.5)$$

Απόδειξη:

Ισχύει ότι

$$\zeta^c = \int_{\Omega} (\vec{\nu} \cdot \vec{n})^2 \, d\Omega$$

Αλλά

$$(\vec{\nu} \cdot \vec{n})^2 = (\vec{\nu} \cdot \vec{n})(\vec{\nu} \cdot \vec{n})$$

Ισχύει, όμως, η διανυσματική ταυτότητα [57, 58]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A}g) = g(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}g)$$

όπου \vec{A} τυχούσα, παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση και g τυχούσα, παραγωγίσιμη, βαθμωτή συνάρτηση.

Εφαρμόζοντας την ανωτέρω ταυτότητα για $\vec{A} = \vec{n}$ και $g = \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) &= (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) \Leftrightarrow \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) - \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) \end{aligned}$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας στο χωρίο Ω λαμβάνουμε

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) d\Omega$$

Με εφαρμογή του Γενικευμένου Θεωρήματος Gauss (Generalized Divergence Theorem) στον

όρο $\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) d\Omega$ έχουμε:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\vec{n} \cdot (\vec{n}dl) - \int_{\Omega} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) d\Omega \quad (4.6)$$

όπου $\partial\Omega$ το σύνορο του χωρίου Ω , \vec{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$ και dl το στοιχειώδες μήκος του συνόρου αυτού.

Αλλά στην (4.6) παρατηρούμε ότι

$$\vec{n} \cdot (\vec{n}dl) = (\vec{n} \cdot \vec{n})dl$$

δεδομένου ότι το \vec{n} είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Άρα, εν τέλει συνάγουμε ότι

$$\oint_{\partial\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{n})\vec{n} \cdot (\vec{n}dl) = \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl$$

Η ποσότητα $\vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n}))$ αντιπροσωπεύει την κατά κατεύθυνση παράγωγο $\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{n}}$ κατά μήκος του μοναδιαίου διανύσματος \vec{n} . Επιπρόσθετα, εάν υποθεθεί ότι το \vec{l} είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης Γ_2 , η ποσότητα dl εκφράζει το στοιχειώδες μήκος τόξου της καμπύλης Γ_2 στο σημείο αυτό και η ποσότητα dn εκφράζει το στοιχειώδες μήκος του διανύσματος που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης, \vec{l} , και έχει κατεύθυνση προς τη Γ_1 , τότε ισχύει πως $d\Omega = -dn dl$. Το πρόσημο «-» προκύπτει από το γεγονός ότι η καμπύλη Γ_2 πρέπει να κινηθεί προς την καμπύλη Γ_1 , η οποία βρίσκεται σε κατεύθυνση αντίθετη από αυτή του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος του ορίου $\partial\Omega$, σύμφωνα με το θεώρημα Green.

Στη συνέχεια,

$$\int_{\Omega} \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{n}} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}{\partial \vec{n}} dn dl = - \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl$$

Με αντικατάσταση στη Σχέση (4.6) προκύπτει

$$\zeta^c = 2 \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl \Leftrightarrow \zeta^c = 2 \left(\oint_{\Gamma_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl - \oint_{\Gamma_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl \right)$$

■

Δηλαδή, το $|\zeta^c|$ εκφράζει τη διαφορά συνολικής καμπυλότητας της Γ_2 και της Γ_1 και άρα είναι το βασικό κριτήριο ομοιότητας των καμπυλών αυτών όσον αφορά την καμπυλότητα.

Πρόταση 4.3. Έστω (x, y) τυχόν σημείο του χωρίου $I \subseteq \mathbb{R}^2$, E η ισοϋψής της $f(x, y)$ η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και έστω $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ισοϋψή αυτή, το οποίο περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3 του μαθηματικού υποβάθρου.

Θεωρώντας τους ακόλουθους συμβολισμούς για τον κατά κατεύθυνση διαφορικό τελεστή

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

και τον τελεστή Hessian

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

ορίζουμε την ποσότητα μ μέσω της σχέσης

$$\mu^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad (4.7)$$

Η ποσότητα μ^2 αντιπροσωπεύει το $\|\vec{\nabla} f\|^2$. Επιπλέον θεωρούμε τον ακόλουθο βοηθητικό πίνακα

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η επίπεδη καμπυλότητα στο σημείο (x, y) μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης

$$C(x, y) = \frac{1}{\mu^3} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \mathbf{J}^T \mathbf{H} \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Απόδειξη:

Λόγω του ότι η E είναι ισοϋψής της $f(x, y)$, δηλαδή ικανοποιεί εξ' ορισμού τη σχέση $f(x, y) = c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, το $\vec{\nabla} f(x, y)$ είναι διάνυσμα κάθετο στην E στο σημείο (x, y) , σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 της Παραγράφου 3.9. Ως εκ τούτου, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \vec{n} πάνω στην E είναι, βάσει του Πορίσματος 3.1 της Παραγράφου 3.9 το

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} \Leftrightarrow n_x = \frac{\partial f / \partial x}{\|\vec{\nabla} f\|}, n_y = \frac{\partial f / \partial y}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

Στη συνέχεια, η επίπεδη καμπυλότητα εκφράζεται ως

$$C(x, y) = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f / \partial x}{\|\vec{\nabla} f\|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f / \partial y}{\|\vec{\nabla} f\|} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \|\vec{\nabla} f\| - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \|\vec{\nabla} f\|}{\|\vec{\nabla} f\|^2} + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \|\vec{\nabla} f\| - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \|\vec{\nabla} f\|}{\|\vec{\nabla} f\|^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Γράφοντας το $\|\vec{\nabla} f\|$ αναλυτικά ως $\|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ και με χρήση των πινάκων οι οποίοι ορίστηκαν ανωτέρω λαμβάνουμε

$$\vec{\nabla} \|\vec{\nabla} f\| = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \|\vec{\nabla} f\| = \mathbf{H}(f) \frac{\vec{\nabla} f}{\mu}$$

οπότε και η ανωτέρω ανάπτυξη του $C(x, y)$ της Σχέσης (4.9) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} C(x, y) &= \frac{\vec{\nabla}^T \vec{\nabla}(f) - \frac{\vec{\nabla}^T(f)}{\mu} \mathbf{H}(f) \frac{\vec{\nabla} f}{\mu}}{\mu} = \vec{\nabla}^T(f) \frac{(I_2 \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} - \vec{\nabla} \vec{\nabla}^T)(f)}{\mu^3} \vec{\nabla}(f) \\ &= \vec{\nabla}^T(f) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\vec{\nabla} \vec{\nabla}^T(f)}{\mu^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{\nabla}(f) \end{aligned}$$

Από την οποία προκύπτει άμεσα η Σχέση (4.8).

■

4.3 Μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας όταν το χωρίο υπόκειται σε αφινικούς μετασχηματισμούς

Προκειμένου να επιτευχθεί βέλτιστη προσαρμογή ανάμεσα στις καμπύλες Γ_1 και Γ_2 εφαρμόζουμε μεγέθυνση ή σμίκρυνση, εν ολίγοις ομοιοθεσία, περιστροφή και παράλληλη μετατόπιση στο χωρίο I και, ειδικότερα, στις δύο καμπύλες Γ_1 και Γ_2 . Οι μετασχηματισμοί αυτοί που εφαρμόζονται σε όλα τα σημεία του χωρίου I αναφέρονται και ως αφινικοί. Με τον τρόπο αυτό, έπειτα από ένα σύνολο τέτοιου είδους μετασχηματισμών, λαμβάνουμε τις μετασχηματισμένες καμπύλες $\tilde{\Gamma}_1$ και $\tilde{\Gamma}_2$. Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι η αλλαγή και των ισοϋψών της καμπύλης $\tilde{\Gamma}_1$, αλλάζοντας με τον τρόπο αυτό τόσο το μέτρο, όσο και την κατεύθυνση του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος \vec{n} στις ισοϋψείς αυτές. Ως εκ τούτου, μεταβάλλεται και η τιμή της επίπεδης καμπυλότητας $C(x, y)$ σε κάθε σημείο (x, y) της εκάστοτε ισοϋψούς καμπύλης της $\tilde{\Gamma}_1$. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός της μεταβολής της τιμής της επίπεδης καμπυλότητας που προκύπτει από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι ενώ το χωρίο I υπόκειται στους ανωτέρω μετασχηματισμούς, τα σφάλματα προσαρμογής ε^c και ζ^c , τα οποία λαμβάνονται υπ' όψιν για το ταίριασμα των δύο καμπυλών υπολογίζονται στο χωρίο Ω και πάνω σε κάθε όριο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω , όπου το Ω ορίζεται ως το χωρίο μεταξύ της μη μετασχηματισμένης καμπύλης Γ_1 και της μετασχηματισμένης καμπύλης $\tilde{\Gamma}_2$. Ισοδύναμα, μετασχηματίζουμε όλο το χωρίο I , προκειμένου να τροποποιήσουμε κατάλληλα την καμπύλη Γ_2 και να λάβουμε τελικά τη μετασχηματισμένη εκδοχή αυτής, τη $\tilde{\Gamma}_2$, την οποία επιθυμούμε να προσαρμόσουμε βέλτιστα στη Γ_1 . Ισοδυνάμως, προκειμένου να διαπιστωθεί η βέλτιστη προσαρμογή μεταξύ των αρχικών καμπυλών Γ_1 και Γ_2 , ελέγχεται πάντα η προσαρμογή της μετασχηματισμένης καμπύλης $\tilde{\Gamma}_2$, στην μη τροποποιημένη Γ_1 .

Προτού προχωρήσουμε στην υλοποίηση της συγκεκριμένης προσέγγισης, είναι αναγκαία η παράθεση των ακόλουθων ορισμών και προτάσεων που σχετίζονται με τις μεταβολές του χωρίου I υπό τους προαναφερθέντες αφινικούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 4.5 (αναλυτική έκφραση των στοιχειωδών αφινικών μετασχηματισμών). Οι δύο στοιχειώδεις αφινικοί μετασχηματισμοί της ομοιοθεσίας και της στροφής, οι οποίοι εφαρμόζονται σε κάθε σημείο του χωρίου I περιγράφονται μέσω του ακόλουθου πίνακα:

$$\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} 1 + da & 0 \\ 0 & 1 + db \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & dT \\ -dT & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} da & dT \\ -dT & db \end{bmatrix} \equiv I_2 + d\mathbf{A}_E \quad (4.10)$$

όπου

I_2 είναι ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων 2×2 ,

$d\mathbf{A}_E$ είναι μία στοιχειώδης μεταβολή του \mathbf{A}_E ,

$1 + da$ είναι ο συντελεστής ομοιοθεσίας κατά τον x – άξονα,

$1 + db$ είναι ο συντελεστής ομοιοθεσίας κατά τον y – άξονα και

dT είναι η στοιχειώδης γωνία περιστροφής γύρω από ένα νοητό z – άξονα, κάθετο στο επίπεδο χωρίου I .

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί πως στον ορισμό του \mathbf{A}_E χρησιμοποιήθηκαν προσέγγιση πρώτης τάξης και μονοπαραμετρικοί μετασχηματισμοί και ότι τα da, db, dT είναι προσημασμένες στοιχειώδεις μεταβολές.

Εάν θεωρήσουμε ότι στους ανωτέρω μετασχηματισμούς προστίθεται και μία στοιχειώδης παράλληλη μετατόπιση όλων των σημείων του χωρίου I κατά $d\gamma_x, d\gamma_y$, κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, τότε κάθε σημείο $(x, y) \in I$ μετασχηματίζεται στο σημείο με συντεταγμένες (\tilde{x}, \tilde{y}) , οι οποίες συνδέονται με τις συντεταγμένες (x, y) μέσω της σχέσης

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = (I_2 + d\mathbf{A}_E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

□

Λήμμα 4.1. Ο αντίστροφος στοιχειώδης αφινικός μετασχηματισμός της (4.11) δίνεται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (I_2 - d\mathbf{A}_E) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$$

Θέτοντας $\mathbf{A} = I_2 - d\mathbf{A}_E$ συνεπάγεται $d\mathbf{A} = -d\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} -da & -dT \\ dT & -db \end{bmatrix}$, οπότε λαμβάνουμε

$$\mathbf{A} = I_2 - d\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} 1 - da & -dT \\ dT & 1 - db \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

και

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix} = (I_2 + d\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$$

Απόδειξη:

Από τη Σχέση (4.11) συνάγουμε άμεσα ότι

$$(I_2 + d\mathbf{A}_E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$$

πολλαπλασιάζουμε από αριστερά και τα δύο μέλη της σχέσης με $(I_2 - d\mathbf{A}_E)$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει

$$(I_2 - d\mathbf{A}_E)(I_2 + d\mathbf{A}_E) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (I_2 - d\mathbf{A}_E) \left(\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix} \right)$$

Εκτελώντας τις πράξεις και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης έχουμε

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix} - d\mathbf{A}_E \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + d\mathbf{A}_E \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$$

Ωστόσο, η ποσότητα $d\mathbf{A}_E \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$ είναι διαφορετικό ανώτερης τάξης και άρα αμελητέα μπροστά στους υπόλοιπους όρους. Επομένως, προκύπτει

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (I_2 - d\mathbf{A}_E) \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$$

Στο σημείο αυτό και με σκοπό να απλοποιήσουμε και να κάνουμε κομψότερη την ανάλυση που ακολουθεί, ορίζουμε τους πίνακες dA και A ως εξής:

$$A = I_2 - dA_E$$

$$dA = -dA_E = \begin{bmatrix} -da & -dT \\ dT & -db \end{bmatrix}$$

και

$$A = I_2 - dA_E \equiv I_2 + dA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -da & -dT \\ dT & -db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - da & -dT \\ dT & 1 - db \end{bmatrix}$$

Τώρα, οι σχέσεις του λήμματος προκύπτουν άμεσα.

■

Ορισμός 4.6. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f όπως στους Ορισμούς 4.1 και 4.2. Τότε, απαιτούμε ο αφινικός μετασχηματισμός στο τυχόν σημείο (x, y) του χωρίου I να μετασχηματίζει όχι μόνον το σημείο (x, y) στο (\tilde{x}, \tilde{y}) , αλλά επίσης να τροποποιεί στοιχειωδώς τη συνάρτηση f στην \tilde{f} κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y) \quad (4.13)$$

□

Λήμμα 4.2. Ο μετασχηματισμένος τελεστής $\tilde{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix}$ όταν δρα σε μια οποιαδήποτε συνάρτηση

$h(x, y)$ συνεχώς παραγωγίσιμη δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\nabla} = A^T \nabla \quad (4.14)$$

όπου A ο πίνακας που ορίστηκε στη Σχέση (4.12).

Απόδειξη:

Για την τυχούσα συνάρτηση $h(x, y)$ που είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, ισχύει ότι

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \quad (4.15)$$

Αλλά, από τον αντίστροφο στοιχειώδη αφινικό μετασχηματισμό λαμβάνουμε

$$x = (1 - d\alpha)\tilde{x} - dT\tilde{y} - d\gamma_x \quad (4.16)$$

$$y = dT\tilde{x} + (1 - db)\tilde{y} - d\gamma_y \quad (4.17)$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = 1 - d\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} = dT$$

και, συνεπώς, η Σχέση (4.15) γίνεται

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} = (1 - d\alpha) \frac{\partial h}{\partial x} + dT \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4.18)$$

Ομοίως, ισχύει

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}}$$

και επειδή από τις Σχέσεις (4.16) και (4.17) προκύπτει

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} = -dT, \quad \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} = (1 - db)$$

τελικά έχουμε

$$\frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} = -dT \frac{\partial h}{\partial x} + (1 - db) \frac{\partial h}{\partial y} \quad (4.19)$$

Άρα, τελικά, από τις (4.18) και (4.19) λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - da) & dT \\ -dT & (1 - db) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial h}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση $h(x, y)$ επελέγη τυχαία με μοναδικό περιορισμό να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, οδηγεί στη γενικότερη σχέση

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{A}^T \nabla$$

■

Πόρισμα 4.2. Για το ζεύγος συναρτήσεων f και \tilde{f} του Ορισμού 4.6 ισχύει ότι

$$\tilde{\nabla} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{A}^T \nabla f(x, y)$$

Απόδειξη:

Δεδομένου ότι για τον στοιχειώδη αφινικό μετασχηματισμό της Σχέσης (4.12) ισχύει, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6 ότι

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y) \Rightarrow \tilde{\nabla} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{\nabla} f(x, y)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν το ανωτέρω Λήμμα 4.2, λαμβάνουμε άμεσα

$$\tilde{\nabla} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{A}^T \nabla f(x, y)$$

Όπου στην ανωτέρω σχέση θεωρούμε ότι $h(x, y) = f(x, y)$

■

Πόρισμα 4.3. Βάσει των ανωτέρω μετασχηματισμών, η νόρμα του $\tilde{\nabla} f$, την οποία έχουμε συμβολίσει με $\tilde{\mu}$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\tilde{\nabla}^T f \mathbf{A} \mathbf{A}^T \nabla f} \quad (4.20)$$

ενώ ο τελεστής Hessian μετασχηματίζεται σύμφωνα με την εξής σχέση:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{A}^T \mathbf{H} \mathbf{A} \quad (4.21)$$

Απόδειξη:

Η Σχέση (4.20) για το $\tilde{\mu}$ προκύπτει άμεσα από την ανωτέρω σχέση $\tilde{\nabla} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{A}^T \nabla f(x, y)$, η οποία προέκυψε από το Πόρισμα 4.2. Συγκεκριμένα, από τη Σχέση (4.7) ισχύει

$$\mu = \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}} = \sqrt{\nabla^T f \cdot \nabla f}$$

Επομένως, η μετασχηματισμένη σχέση θα είναι η

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\tilde{\vec{v}}^T \tilde{f} \cdot \tilde{\vec{v}} \tilde{f}}$$

Αλλά,

$$\tilde{\vec{v}} \tilde{f} = \mathbf{A}^T \vec{v} f \Leftrightarrow \tilde{\vec{v}}^T \tilde{f} = \vec{v}^T f \mathbf{A}$$

Επομένως,

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\tilde{\vec{v}}^T f \mathbf{A} \mathbf{A}^T \vec{v} f}$$

Με ανάλογο τρόπο, ο πίνακας Hessian είναι εξ' ορισμού

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \vec{v} \cdot \vec{v}^T$$

Ο μετασχηματισμός του ορίζεται ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} = \tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\vec{v}}^T$$

Αλλά,

$$\tilde{\vec{v}} = \mathbf{A}^T \vec{v} \Leftrightarrow \tilde{\vec{v}}^T = \vec{v}^T \mathbf{A}$$

Επομένως,

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\vec{v}} \tilde{\vec{v}}^T = \mathbf{A}^T \vec{v} \vec{v}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{H} \mathbf{A}$$



Επειδή ένας στοιχειώδης αφινικός μετασχηματισμός μετατοπίζει κάθε σημείο (x, y) που ανήκει στο I , σε ένα σημείο (\tilde{x}, \tilde{y}) μέσω της Σχέσης (4.11), προκύπτει άμεσα ο ακόλουθος Ορισμός 4.7.

Ορισμός 4.7. Θεωρούμε ότι το σύνολο \tilde{I} των σημείων (\tilde{x}, \tilde{y}) που προκύπτουν όταν κάθε σημείο (x, y) που ανήκει στο I μετασχηματίζεται στο (\tilde{x}, \tilde{y}) μέσω του στοιχειώδους αφινικού μετασχηματισμού που περιγράφεται στη Σχέση (4.11). Επειδή το αρχικό χωρίο I είναι κλειστό και ο στοιχειώδης αφινικός μετασχηματισμός είναι συνεχής συνάρτηση, συνάγεται από γνωστό θεμελιώδες θεώρημα της τοπολογίας ότι το \tilde{I} είναι επίσης κλειστό χωρίο, υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

□

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι η έννοια της επίπεδης καμπυλότητας που έχει οριστεί στο χωρίο I που περιγράφεται από το καρτεσιανό σύστημα (x, y) , μπορεί να επεκταθεί ώστε να ισχύει με τον ίδιο συναρτησιακό τύπο και για το χωρίο \tilde{I} που αποτελείται από τα σημεία (\tilde{x}, \tilde{y}) . Αυτό συμβαίνει διότι ο ορισμός της επίπεδης καμπυλότητας αφορά ισοϋψείς της $f(x, y)$ στο χωρίο I . Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6, όμως, ο στοιχειώδης αφινικός μετασχηματισμός της Σχέσης (4.11) απαιτείται να μετασχηματίζει και τη συνάρτηση f στη συνάρτηση \tilde{f} , ούτως ώστε να ισχύει $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y)$, γεγονός που σημαίνει ότι κάθε ισοϋψής της f στο χωρίο I μετασχηματίζεται σε ισοϋψή της \tilde{f} στο χωρίο \tilde{I} και μάλιστα με την ίδια τιμή. Επομένως, ο ορισμός της επίπεδης καμπυλότητας $\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ισχύει και στο \tilde{I} και δη, με τον ίδιο συναρτησιακό τύπο.

Πρόταση 4.4. Η επίπεδη καμπυλότητα $C(x, y)$ κάτω από τη δράση των προαναφερθέντων στοιχειωδών αφινικών μετασχηματισμών, μετασχηματίζεται στην

$$\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) = C(x, y) + dC(x, y)$$

Η στοιχειώδης μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας $dC(x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$dC = c \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} \quad (4.22)$$

όπου

$$g_a = 3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2\mu^2 \quad (4.23)$$

$$g_b = 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2\mu^2 \quad (4.24)$$

και, όπως πριν,

$$\mu = \|\vec{\nabla} f\|$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, η μετασχηματισμένη επίπεδη καμπυλότητα $\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$ μπορεί να εκφραστεί σε μετασχηματισμένες συντεταγμένες (\tilde{x}, \tilde{y}) ως εξής:

$$\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\tilde{\nabla}^T \tilde{f} \mathbf{J}^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{J} \tilde{\nabla} \tilde{f}}{\tilde{\mu}^3} \quad (4.25)$$

Με χρήση του Λήμματος 4.2 και του Πορίσματος 4.3, η Έκφραση (4.25) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\vec{\nabla}^T f \mathbf{A} \mathbf{J}^T \mathbf{A}^T \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{A}^T \vec{\nabla} f}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A} \mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}} \quad (4.26)$$

Αλλά

$$\mathbf{A} \mathbf{J}^T \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -(1-da)(1-db) \\ (1-da)(1-db) & 0 \end{bmatrix} = (1-da)(1-db) \mathbf{J}^T(\alpha) \quad (4.27)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & (1-da)(1-db) \\ -(1-da)(1-db) & 0 \end{bmatrix} = (1-da)(1-db)\mathbf{J} \quad (\beta)$$

Όπου στις ανωτέρω Σχέσεις (4.27) έχει χρησιμοποιηθεί προσέγγιση πρώτης τάξης.

Επομένως, η (4.26) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (1-da)^2(1-db)^2 \frac{\vec{\nabla}^T f \mathbf{J}^T \mathbf{H} \mathbf{J} \vec{\nabla} f}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}} \Leftrightarrow \\ \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (1-da)^2(1-db)^2 \frac{\vec{\nabla}^T f \mathbf{J}^T \mathbf{H} \mathbf{J} \vec{\nabla} f}{\mu^3} \frac{\mu^3}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}} \stackrel{(4.8)}{\Leftrightarrow} \\ \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (1-da)^2(1-db)^2 \frac{\mu^3}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}} C(x, y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Αντικαθιστώντας $\tilde{C} = C + dC$ και με χρήση της Σχέσης (4.28) λαμβάνουμε:

$$dC = C \left(\frac{(1-da)^2(1-db)^2 \|\vec{\nabla} f\|^3}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}} - 1 \right) \quad (4.29)$$

Ισχύει, όμως ότι

$$(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}$$

Εκτελώντας τις πράξεις και κρατώντας μόνο πρώτης τάξης διαφορικά.

Εάν ονομάσουμε την ποσότητα $p = \frac{1}{(\vec{\nabla}^T f \mathbf{A}\mathbf{A}^T \vec{\nabla} f)^{3/2}}$ τότε

$$p = \frac{1}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Στο κλάσμα αυτό πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}$, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} p &= \frac{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}}{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}} \\ &= \frac{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2 - \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \right\}^{3/2}} \end{aligned}$$

Ισχύει, ωστόσο, πως οι ποσότητες $\left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right]^2$, $\left[2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2$ και $4dadb \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$ αποτελούν διαφορικά ανώτερης τάξης, αμελητέα μπροστά στα $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right]^2$, $\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2$ και $2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$ αντίστοιχα.

Επομένως,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^2 \right\}^{3/2}} \\ &= \frac{\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left[2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^{3/2}}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^3} \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, αναπτύσσοντας τον αριθμητή σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $da = db = 0$ έχουμε

$$p = \frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2} + \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \Big|_{da=db=0} da}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^3} + \frac{\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2da \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + 2db \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} 2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \Big|_{da=db=0} db}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^3}$$

Από την ανωτέρω σχέση, θεωρώντας αμελητέα τα διαφορικά ανώτερης τάξης, έχουμε

$$p = \frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2} + 3 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 da + 3 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 db}{\left\{ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}^3} \Rightarrow$$

$$p = \frac{\|\vec{\nabla} f\|^3 + 3\|\vec{\nabla} f\| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 da + 3\|\vec{\nabla} f\| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 db}{\|\vec{\nabla} f\|^6}$$

Επιστρέφοντας στη Σχέση (4.29) και με χρήση της έκφρασης για το p λαμβάνουμε

$$dC = C \left((1 - da)^2 (1 - db)^2 \|\vec{\nabla} f\|^3 \frac{\|\vec{\nabla} f\|^3 + 3\|\vec{\nabla} f\| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 da + 3\|\vec{\nabla} f\| \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 db}{\|\vec{\nabla} f\|^6} - 1 \right)$$

Αναπτύσσοντας τα $(1 + da)^2$ και $(1 + db)^2$ και διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης, έχουμε

$$\begin{aligned}
dC &= C \left((1 - 2da - 2db) \|\vec{\nabla}f\|^3 \frac{\|\vec{\nabla}f\|^3 + 3\|\vec{\nabla}f\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 da + 3\|\vec{\nabla}f\| \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 db}{\|\vec{\nabla}f\|^6} - 1 \right) \\
&= C \left((1 - 2da - 2db) \frac{\|\vec{\nabla}f\|^2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 da + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 db}{\|\vec{\nabla}f\|^2} - 1 \right) \\
&= C \left(\frac{\|\vec{\nabla}f\|^2 + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 da + 3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 db - 2da\|\vec{\nabla}f\|^2 - 2db\|\vec{\nabla}f\|^2}{\|\vec{\nabla}f\|^2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

όπου έχουν διατηρηθεί μόνο οι όροι με διαφορικά πρώτης τάξης. Τελικά προκύπτει

$$dC = C \left(\frac{\left[3 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\mu^2 \right] da + \left[3 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\mu^2 \right] db}{\mu^2} \right)$$

Με χρήση των ορισμών των g_a και g_b από τις Σχέσεις (4.23) και (4.24), προκύπτει άμεσα το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Πόρισμα 4.4. Η διαφορική μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας $dC(x, y) = \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y}) - C(x, y)$ είναι ανεξάρτητη της διαφορικής στροφής dT , ως και της διαφορικής στοιχειώδους παράλληλης μετατόπισης $\begin{bmatrix} d\gamma_x \\ d\gamma_y \end{bmatrix}$.

Απόδειξη:

Για τη Σχέση (4.26) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1-da & -dT \\ dT & 1-db \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-da & dT \\ -dT & 1-db \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -dT & -1+da \\ 1-db & -dT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-da & dT \\ -dT & 1-db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1+da+db \\ 1-da-db & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Όπου στην ανωτέρω παράσταση θεωρούμε ότι τα διαφορικά δεύτερης τάξης είναι αμελητέα μπροστά στους όρους πρώτης τάξης και τους σταθερούς όρους.

Επίσης, ευθύγραμμο ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 1-da & -dT \\ dT & 1-db \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-da & dT \\ -dT & 1-db \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} dT & 1-da \\ -1+db & dT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-da & dT \\ -dT & 1-db \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1-da-db \\ -1+da+db & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Στην ανωτέρω σχέση έχουν θεωρηθεί αμελητέα τα διαφορικά δεύτερης τάξης.

Από τις δύο ανωτέρω εκφράσεις των $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ και $\mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{A}^T$ προκύπτει άμεσα ότι η μετασχηματισμένη έκφραση της επίπεδης καμπυλότητας δεν εξαρτάται από τη στοιχειώδη στροφή dT γύρω από το z -άξονα και από τη στοιχειώδη μετατόπιση κατά τους άξονες x και y , $d\gamma_x$ και $d\gamma_y$ αντίστοιχα.

■

Επί τη βάση του Πορίσματος αυτού θα βρούμε τη βέλτιστη σχέση που συνδέει την αρχική καμπύλη Γ_1 και την βέλτιστα προσαρμοσμένη σε αυτή καμπύλη $\tilde{\Gamma}_2$ ανεξάρτητα από στροφή και παράλληλη μετατόπιση, όσον αφορά το κριτήριο της Σχέσης (4.5) της Πρότασης 4.2 και με μεταβολή αποκλειστικά των συντελεστών ομοιοθεσίας.

Πόρισμα 4.5. Ας υποθέσουμε πως εφαρμόζουμε σειριακά ένα σύνολο αφινικών μετασχηματισμών που περιεγράφησαν σε αυτή την παράγραφο, λαμβάνοντας ένα πεπερασμένο, σύνθετο μετασχηματισμό, ο οποίος αντιστοιχίζει μια αρχική καμπύλη Γ_2 σε μία νέα, τη $\tilde{\Gamma}_2$. Έστω (x, y) τυχόν σημείο της Γ_2 , το οποίο μέσω αυτού του σύνθετου μετασχηματισμού μετασχηματίζεται στο σημείο με συντεταγμένες $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Gamma}_2$. Θεωρούμε ότι το ζεύγος των συντελεστών ομοιοθεσίας (a, b) μεταβάλλεται κατά μήκος μιας καμπύλης Δ στο

χώρο των καμπυλοτήτων, η οποία εκκινεί από ένα δεδομένο σημείο, π.χ. το σημείο (1,1). Σημειώνουμε ότι η διαδρομή αυτή Δ έχει απεικόνιση στο \mathbb{R}^2 , δεδομένου ότι μετασχηματίζει κάθε σημείο (x, y) που αντιστοιχεί σε $(a, b) = (1, 1)$ του \mathbb{R}^2 στο σημείο (\tilde{x}, \tilde{y}) που αντιστοιχεί στην τελική θέση των (a, b) . Στη συνέχεια, η μετασχηματισμένη επίπεδη καμπυλότητα $\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$ σχετίζεται με την επίπεδη καμπυλότητα του αρχικού συστήματος συντεταγμένων $C(x, y)$ μέσω της σχέσης

$$\frac{\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})}{C(x, y)} = e^{\int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2}} \quad (4.30)$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στον εκθέτη υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης Δ .

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η Σχέση (4.30) για να παραμετροποιήσουμε τον αφινικό μετασχηματισμό του xy – επιπέδου μέσω κατάλληλης παραμόρφωσης της καμπυλότητας πρέπει να υπολογιστεί η ευαισθησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος της Σχέσης (4.30) στις μεταβολές της καμπύλης Δ . Ισοδύναμα αρκεί να υπολογιστεί η παράγωγος δεύτερης τάξης της ποσότητας $\ln \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$ υπό τους απειροστούς μετασχηματισμούς $(a, b) \rightarrow (a + da, b + db)$. Ο υπολογισμός αυτός παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω.

Απόδειξη:

Η Σχέση (4.22) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dC}{C} = \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} \Leftrightarrow \frac{C + dC}{C} = \frac{\tilde{C}}{C} = e^{\frac{g_a da + g_b db}{\mu^2}} \quad (4.31)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης σε σειρά Taylor και διατήρηση των πρώτης τάξης όρων. Εάν θεωρήσουμε τη νέα θέση σαν θέση έναρξης και επαναλάβουμε την ανάλυση που προηγήθηκε λαμβάνουμε:

$$\frac{\tilde{C}_1}{\tilde{C}} = e^{\frac{g_{a^1} da^1 + g_{b^1} db^1}{\mu_1^2}}$$

Ισχύει, επομένως ότι

$$\frac{\tilde{C}_1}{C} = \frac{\tilde{C}_1 \tilde{C}}{\tilde{C} C} = e^{\frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} + \frac{g_{a^1} da^1 + g_{b^1} db^1}{\mu_1^2}}$$

Προκειμένου να λάβουμε τον πεπερασμένο σύνθετο μετασχηματισμό, ολοκληρώνουμε τη σχέση $\frac{dC}{C} = \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2}$ κατά μήκος της καμπύλης Δ και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \frac{dC(x, y)}{C(x, y)} &= \int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} \Rightarrow [\ln C(x, y)]_{\text{αρχή } \Delta}^{\text{τέλος } \Delta} = \int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} \\ &\Rightarrow \ln \left(\frac{C(x, y; \text{τελικά}(a, b))}{C(x, y; \text{αρχικά}(a, b))} \right) = \int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2} \end{aligned}$$

Ισχύει, όμως, ότι $C(x, y; \text{τελικά}(a, b)) = \tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})$ και $C(x, y; \text{αρχικά}(a, b)) = C(x, y)$, οπότε έχουμε

$$\ln \left(\frac{\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})}{C(x, y)} \right) = \int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει άμεσα η ζητούμενη σχέση, υψώνοντας τη σχέση σε εκθέτες με βάση το e :

$$\frac{\tilde{C}(\tilde{x}, \tilde{y})}{C(x, y)} = e^{\int_{\Delta} \frac{g_a da + g_b db}{\mu^2}}$$

■

Τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού αυτού συνοψίζονται στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 4.5. Υπό τους προαναφερθέντες απειροστούς αφινικούς μετασχηματισμούς, η διαφορίση δεύτερης τάξης του λογαρίθμου της συνάρτησης της επίπεδης καμπυλότητας $\ln C(x, y)$ είναι ανεξάρτητη του απολύτου μεγέθους του διαφορικού μονοπατιού (da, db) και εξαρτάται μόνο από το λόγο $\gamma = \frac{da}{db}$. Συγκεκριμένα, για $\lambda = ab$ και $\sigma = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} d \ln C \Big|_{\substack{a=1 \\ b=1}} = 0$$

$$d^2 \ln C = d\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln C \Big|_{\substack{a=1 \\ b=1}} \sim \mathbf{n}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{n} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (4.32)$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη της Πρότασης 4.5 βρίσκεται στην [59].



Ως εκ τούτου, σύμφωνα με την προαναφερθείσα Πρόταση 4.5, η μεταβολή του εφαπτόμενου διανύσματος του μονοπατιού ολοκλήρωσης Δ στο σημείο εκκίνησης του μονοπατιού εξαρτάται μόνο από την κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος και όχι από το μέτρο του. Επομένως, ο προσδιορισμός του βέλτιστου μονοπατιού Δ που πρέπει να ακολουθεί ο μετασχηματισμός προκειμένου να ελαχιστοποιείται η μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας μεταξύ των δύο καμπυλών, εξαρτάται αποκλειστικά από την κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος στο αρχικό σημείο του μετασχηματισμού, το οποίο αποτελεί σημείο έναρξης του μονοπατιού Δ και παραμένει αμετάβλητο στις μεταβολές των παραμέτρων του μονοπατιού. Συνεπώς, σύμφωνα με τα ανωτέρω, η παρεμβολή μεταξύ των σημείων του μονοπατιού Δ καθίσταται ομοιόμορφα σταθερή και ισχυρή.

Η προαναφερθείσα ανάλυση αποδεικνύει ότι η μεταβολή της επίπεδης καμπυλότητας υπό τους αφινικούς μετασχηματισμούς που αναλύθηκαν στο παρόν κεφάλαιο, εξαρτάται αποκλειστικά από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και, συγκεκριμένα, από τους παράγοντες ομοιοθεσίας κατά τον x και y – άξονα, a και b αντίστοιχα. Ωστόσο, η βέλτιστη σχετική τοποθέτηση των δύο καμπυλών Γ_1 και Γ_2 εξαρτάται από τρεις επιπλέον παραμέτρους, οι οποίες αντιστοιχούν στη στροφή της καμπύλης Γ_2 γύρω από τον z – άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο xy – επίπεδο, καθώς και στην παράλληλη μετατόπισή της κατά μήκος των αξόνων x και y . Εφ' όσον έχει

αποδειχθεί μέσω της ανωτέρω ανάλυσης αλλά και με τον τρόπο με τον οποίο έχει οριστεί η έννοια της επίπεδης καμπυλότητας ότι η βέλτιστη ομοιοθεσία μεταξύ των δύο καμπυλών επιτυγχάνεται ανεξάρτητα της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης, είναι λογικό να υποθέσουμε πως υπάρχουν άπειρες θέσεις της καμπύλης Γ_2 για τις οποίες το εισαχθέν σφάλμα της επίπεδης καμπυλότητας ζ^C ελαχιστοποιείται. Οι θέσεις αυτές αντιστοιχούν στους άπειρους συνδυασμούς στροφής και παράλληλης μετατόπισης που είναι δυνατόν να εφαρμοστούν στην καμπύλη Γ_2 . Ωστόσο, είναι δυνατόν να υιοθετηθεί ένα κριτήριο προσαρμογής μεταξύ των καμπυλών $\tilde{\Gamma}_2$ και Γ_1 εντός του χωρίου I , το οποίο θα απαιτεί το ολοκλήρωμα των Ευκλείδειων αποστάσεων των σημείων της $\tilde{\Gamma}_2$ από τη Γ_1 να είναι ελάχιστο. Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο αυτό σε συνδυασμό με τα προηγούμενα αποτελέσματα, προκειμένου να επιτύχουμε πολύ ικανοποιητικό ταίριασμα των καμπυλών $\tilde{\Gamma}_2$ και Γ_1 εντός του χωρίου I , λαμβάνοντας υπ' όψιν, με τον τρόπο αυτό, όλους τους αφινικούς μετασχηματισμούς. Αυτό θα αποτελέσει το αντικείμενο μελέτης του επόμενου κεφαλαίου.

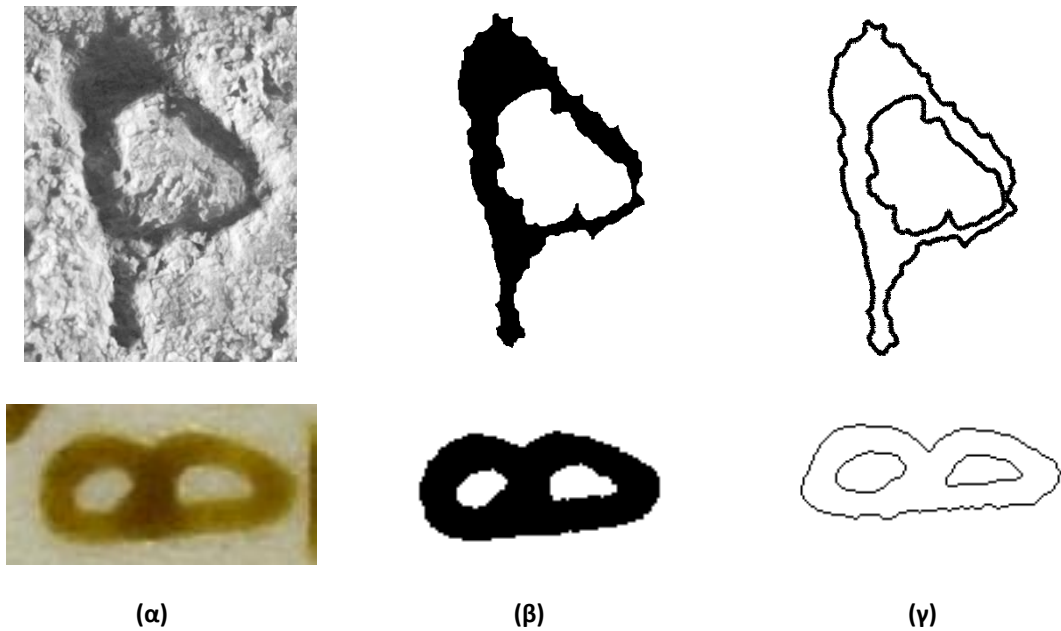
5 Μία νέα μέθοδος προσαρμογής δύο καμπυλών Γ_1 και Γ_2 και αντίστοιχη διαδικασία

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια νέα μέθοδος ταυτοποίησης του γραφέα ενός κειμένου, η οποία βασίζεται στα χαρακτηριστικά των περιγραμμάτων των υλοποιήσεων των διαφόρων συμβόλων της αλφαβήτου που εμφανίζονται στο κείμενο. Η ομοιότητα των χαρακτηριστικών αυτών ελέγχεται με καινοφανή τρόπο, με χρήση των εννοιών και ιδιοτήτων που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο 4 και σχετίζονται με την επίπεδη καμπυλότητα.

Το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι η εξαγωγή των περιγραμμάτων των διάφορων γραμμάτων που εμφανίζονται σε ένα αρχαίο κείμενο.

Προς το σκοπό αυτό, οι διάφορες υλοποιήσεις των γραμμάτων εξάγονται από τα κείμενα από τα οποία προέρχονται με τεχνικές κατάτμησης εικόνας, οι οποίες παρουσιάζονται στις εργασίες [3, 60]. Η εξαγωγή των περιγραμμάτων των υλοποιήσεων πραγματοποιείται όπως περιγράφεται στην εργασία [61]. Γίνεται δε με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε εικονοστοιχείο των περιγραμμάτων να έχει ακριβώς δύο γειτονικά εικονοστοιχεία, να μην σχηματίζονται ορθές γωνίες μεταξύ διαδοχικών εικονοστοιχείων και να μην υπάρχουν μεμονωμένες, συνεκτικές ομάδες εικονοστοιχείων μικρού εμβαδού, όπως, για παράδειγμα, συμβαίνει με το περίγραμμα το οποίο εξάγεται από την υλοποίηση του γράμματος 'Ω' του Σχήματος 2.3, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Στο Σχήμα 5.3 παρατίθενται λεπτομέρειες των περιγραμμάτων των συμβόλων της αλφαβήτου του Σχήματος 5.2. Οι λεπτομέρειες αυτές είναι ενδεικτικές της τελικής μορφής που πρέπει να έχει κάθε περίγραμμα υλοποίησης κάθε συμβόλου της αλφαβήτου προκειμένου να εφαρμοστεί επί αυτού η διαδικασία βέλτιστης προσαρμογής που θα αναλυθεί στο παρόν κεφάλαιο. Λόγω έλλειψης αλγορίθμου κατάτμησης εικόνας ο οποίος πραγματοποιεί εξαγωγή του γράμματος με τις ανωτέρω προδιαγραφές, στην εικόνα της υλοποίησης του γράμματος εφαρμόζονται κατάλληλα μορφολογικά φίλτρα, προκειμένου το τελικό εξαχθέν περίγραμμα της υλοποίησης του γράμματος να πληροί τις προδιαγραφές αυτές. Συνεπώς, μετά από την ολοκλήρωση της προαναφερθείσας διαδικασίας, το περίγραμμα κάθε υλοποίησης ενός συμβόλου της αλφαβήτου που εμφανίζεται σε ένα κείμενο είναι μία ένωση πολυγωνικών καμπυλών, όπου κάθε τέτοια πολυγωνική καμπύλη είναι αποτέλεσμα

διακριτοποίησης μιας συνεχούς καμπύλης Jordan. Στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων, κάθε τέτοιο περίγραμμα είναι η ένωση κλειστών πολυγωνικών γραμμών που αντιστοιχούν σε συνεχείς καμπύλες Jordan. Ορισμένα παραδείγματα της διαδικασίας εξαγωγής περιγραμμάτων παρατίθενται στο Σχήμα 5.1.



Σχήμα 5.1. Διαδικασία εξαγωγής περιγραμμάτων των υλοποιήσεων διαφόρων συμβόλων της αλφαβήτου.

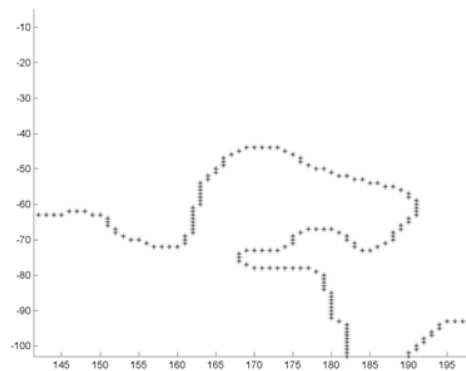
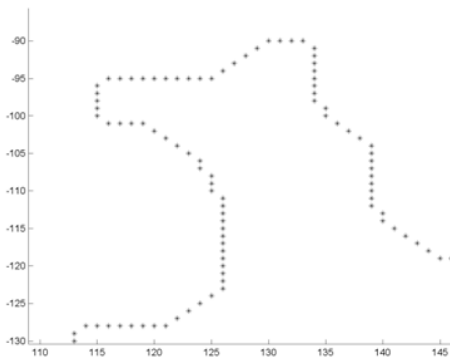
(α) Εξαγωγή της υλοποίησης από την εικόνα του κειμένου (επιγραφής ή παπύρου) στην οποία αυτή βρίσκεται.

(β) Μαύρισμα του σώματος του γράμματος.

(γ) Εξαγωγή του περιγράμματος της υλοποίησης του γράμματος.



Σχήμα 5.2. Περιγράμματα των υλοποιήσεων των γραμμάτων 'Α' και 'Ω' του Σχήματος 2.3. Το περίγραμμα του γράμματος 'Α' στα αριστερά αποτελεί καλό δείγμα περιγράμματος για την εφαρμογή της διαδικασίας προσαρμογής που θα ακολουθήσει. Αντιθέτως, το περίγραμμα του γράμματος 'Ω' που παρουσιάζεται δεξιά δεν είναι απολύτως κατάλληλο για την εφαρμογή της διαδικασίας προσαρμογής, καθώς περιλαμβάνει μικρές συνεκτικές ομάδες εικονοστοιχείων μικρού εμβαδού. Για την εφαρμογή της διαδικασίας προσαρμογής στη συγκεκριμένη υλοποίηση απαιτείται περαιτέρω επεξεργασία αυτής.



Σχήμα 5.3. Λεπτομέρειες των περιγραμμάτων του Σχήματος 5.2. Από το σχήμα αυτό φαίνεται η μορφή την οποία πρέπει να έχει το περίγραμμα της κάθε υλοποίησης συμβόλου της αλφαβήτου, προκειμένου να εφαρμοστεί επί αυτού η διαδικασία βέλτιστης προσαρμογής.

Εν συνεχεία, στο παρόν κεφάλαιο, θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων και θα καθορίσουμε ένα νέο κριτήριο ομοιότητας, προκειμένου να παρουσιάσουμε στη συνέχεια τα βήματα ενός πρωτότυπου αλγορίθμου μέσω του οποίου επιτυγχάνεται βέλτιστη προσαρμογή δύο οποιονδήποτε καμπυλών Jordan Γ_1 και Γ_2 που βρίσκονται εντός ενός χωρίου I . Ο αλγόριθμος αυτός προσφέρει ένα πρωτότυπο σφάλμα

προσαρμογής, το οποίο λαμβάνει υπ' όψιν τόσο τη διαφορά της καμπυλότητας όλων των σημείων των δύο καμπυλών, όσο και τη συνολική Ευκλείδεια απόστασή τους. Εν συνεχεία, το λάθος αυτό προσαρμογής μπορεί να ενσωματωθεί σε ένα τυχόντα αλγόριθμο ο οποίος πραγματοποιεί ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης σφάλματος, όπως είναι ο Nelder – Mead. Η μέθοδος αυτή για το ταίριασμα των καμπυλών αποτελείται από τα εξής δύο επί μέρους στάδια:

- Στο πρώτο στάδιο προσδιορίζονται οι βέλτιστες τιμές των συντελεστών ομοιοθεσίας a και b για τις οποίες η συνολική διαφορά της καμπυλότητας μεταξύ των καμπυλών Γ_1 και της μετασχηματισμένης Γ_2 ελαχιστοποιείται. Σημειώνεται πως, λόγω του ότι η διαδικασία υπολογισμού των συντελεστών αυτών είναι ανεξάρτητη της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης της καμπύλης Γ_2 , όπως έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο ανεξάρτητος υπολογισμός των δύο αυτών παραγόντων ομοιοθεσίας a και b είναι απόλυτα αιτιολογημένος. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών των συντελεστών ομοιοθεσίας a και b μέσω κλασικών μεθόδων είναι ορθός μόνο στην περίπτωση κατά την οποία οι κανονικοποιημένες καμπύλες αποτελούνται από ίσο πλήθος εικονοστοιχείων. Σε αντίθετη περίπτωση, μικρές τοπικές διαταραχές της καμπύλης Γ_2 καταστρατηγούν τη δυνατότητα αμφιμονοσήμαντης αντιστοίχισης των σημείων των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 επί τη βάση της καμπυλότητάς τους.

Εντούτοις, η δύναμη της έννοιας της επίπεδης καμπυλότητας που έχουμε εισάγει, έγκειται, μεταξύ άλλων, και στο γεγονός ότι μπορεί να παρακάμψει την απαίτηση οι προς σύγκριση καμπύλες Γ_1 και Γ_2 να αποτελούνται από ίσο πλήθος στοιχείων. Πράγματι, όπως έχουμε δείξει, με την ελαχιστοποίηση του απολύτου της διαφοράς των ολοκληρωμάτων των επιπέδων καμπυλοτήτων λαμβάνουμε τη βέλτιστη ομοιοθεσία μεταξύ δύο τυχουσών καμπυλών, ανεξάρτητα από οποιονδήποτε Ευκλείδειο μετασχηματισμό.

- Σε δεύτερο στάδιο ορίζεται αρχικά ένα μέτρο ομοιότητας μεταξύ της καμπύλης Γ_1 και της βέλτιστα ομοιοθετημένης στη Γ_1 καμπύλη Γ_2 , προκειμένου να ληφθούν υπ' όψιν οι μετασχηματισμοί της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης. Στη συνέχεια, η

μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε αλγόριθμο ελαχιστοποίησης κάποιας συνάρτησης ελαχιστοποίησης σφάλματος, προκειμένου να προσδιοριστεί η βέλτιστη σχετική θέση προσαρμογής της καμπύλης Γ_1 και της μετασχηματισμένης Γ_2 .

Τα στάδια αυτά περιγράφονται αναλυτικά στις παραγράφους που ακολουθούν.

5.1 Βέλτιστος μετασχηματισμός του μεγέθους της καμπύλης Γ_2 , ώστε αυτή να ταιριάζει στην καμπύλη Γ_1

Το ταίριασμα των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 το οποίο επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της επίπεδης καμπυλότητας επιτελείται με τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: Θεωρούμε την καμπύλη Γ_2 στην αρχική της θέση εντός του χωρίου I και για κάθε σημείο $M(x, y) \in \Gamma_2$ υπολογίζουμε την ισοϋψή της Γ_1 , η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό, δηλαδή την Ευκλείδεια απόσταση

$$f(x, y) = \sqrt{d^2(x, \Gamma_1) + d^2(y, \Gamma_1)} \quad (5.1)$$

όπου $d(x, \Gamma_1)$, $d(y, \Gamma_1)$ είναι οι συνιστώσες της διανυσματικής απόστασης του M από την πρότυπη καμπύλη Γ_1 .

Εν συνεχεία υπολογίζουμε το $\vec{\nabla} f(x, y)$ στο M , ως και τις ποσότητες g_a, g_b, μ^2 μέσω των Σχέσεων (4.23), (4.24) και (4.7), αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι ο υπολογισμός του $\vec{\nabla}$ μπορεί να γίνει είτε αριθμητικά με χρήση πεπερασμένων διαφορών, είτε με προσέγγιση της ισοϋψούς της Γ_1 που διέρχεται από το M με πολυώνυμο και απ' ευθείας παραγωγή.

Βήμα 2: Αρχικά θέτουμε $a = 1, b = 1$, ώστε η διαδικασία να εκκινήσει από την κατάσταση στην οποία η καμπύλη Γ_2 είναι απαραμόρφωτη.

Υπολογίζουμε το $\varepsilon_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dl$. Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται αριθμητικά μόνο μία φορά και για την κοντινότερη ισοϋψή της Γ_1 προς την κατεύθυνση της Γ_2 , εάν η κατεύθυνση αυτή είναι καλώς ορισμένη ή ισοδύναμα, προς την εξωτερική πλευρά της Γ_1 στο ψηφιακό χωρίο I . Το ολοκλήρωμα επί της καμπύλης Γ_1 δεν μπορεί να υπολογιστεί για λόγους για τους οποίους θα εξηγηθούν στο δεύτερο μέρος της διατριβής και αφορούν το γεγονός ότι όλες οι υπολογιστικές μηχανές de facto και a priori εκτελούν όλες τις πράξεις με πεπερασμένο μήκος λέξης. Λόγω αυτού, η σχέση $f(x, y) = 0$ που περιγράφει την καμπύλη Γ_1 στο συνεχή χώρο \mathbb{R}^2 μετασχηματίζεται στο διακριτό χωρίο I σε μια ακολουθία τιμών πολύ κοντά μεν στο μηδέν, αλλά πρακτικά ποτέ μηδέν και κατά κανόνα με εναλλασσόμενα πρόσημα.

Σε κάθε σημείο (x, y) της Γ_2 θεωρούμε την ισοϋψή της $f(x, y)$ η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό, υπολογίζουμε το $\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \equiv \frac{\vec{\nabla} f(x, y)}{\|\vec{\nabla} f(x, y)\|}$ στο σημείο αυτό της ισοϋψούς και αποδίδουμε την τιμή αυτή στο $C(x, y)$. Αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός των $f(x, y), \vec{n}, \vec{\nabla} \cdot \vec{n}$ γίνεται όπως περιγράφεται στο Βήμα 1. Το σύνολο των τιμών αυτών $C(x, y)$ παίζει το ρόλο των αρχικών τιμών της επίπεδης καμπυλότητας, σε σχέση με την καμπύλη Γ_2 . Για τις τιμές αυτές θα χρησιμοποιούμε εφ' εξής το σύμβολο $C_0^{\Gamma_2}(x, y)$. Ο δείκτης μηδέν (0) υποδεικνύει ότι οι τιμές αυτές της καμπυλότητας υπολογίζονται στη θέση μηδέν, δηλαδή στην αρχική θέση, όπου η Γ_2 είναι απαραμόρφωτη, ενώ ο δείκτης Γ_2 υποδεικνύει ότι οι τιμές αυτές της καμπυλότητας αφορούν την καμπύλη Γ_2 . Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι από τη διαδικασία αυτή προκύπτει ένα σύνολο τιμών $C_0^{\Gamma_2}(x, y)$ με κάθε τιμή να υπολογίζεται στο κέντρο του εκάστοτε εικονοστοιχείου της καμπύλης Γ_2 .

Βήμα 3: Δεδομένων των τιμών $C_0^{\Gamma_2}(x, y)$ για κάθε σημείο της καμπύλης Γ_2 και εάν θεωρηθεί ότι τα δa και δb είναι δεδομένα, χρησιμοποιούμε τις ποσότητες g_a, g_b, μ^2 που έχουν υπολογιστεί στο Βήμα 1 και τις συμβολίζουμε με προφανή αντιστοιχία ως g_a^0, g_b^0, μ_0^2 , ώστε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\delta C_0^{\Gamma_2}(x, y) = C_0^{\Gamma_2}(x, y) \frac{g_a^0 \delta a + g_b^0 \delta b}{\mu_0^2}$$

για κάθε σημείο της Γ_2 . Μέσω αυτής, υπολογίζουμε για κάθε σημείο της καμπύλης Γ_2 τη

$$C_1^{F_2}(x, y) = C_0^{F_2}(x, y) + \delta C_0^{F_2}(x, y)$$

Εάν οι συναρτήσεις $C_1^{F_2}(x, y)$ και $C_0^{F_2}(x, y)$ εντεθούν σε έναν αλγόριθμο ελαχιστοποίησης, στο πρώτο βήμα εκτέλεσης του αλγορίθμου λαμβάνουμε τα $\delta a_0, \delta b_0$ προς την κατεύθυνση της ελαχιστοποίησης του σφάλματος $|\zeta^C| = \left| 2 \left(\oint_{F_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dl - \oint_{F_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dl \right) \right|$, όπου, βεβαίως, τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά στο ψηφιακό χωρίο I .

Βήμα 4: Με δεδομένα τα $\delta a_0, \delta b_0$ του προηγούμενου βήματος, προσδιορίζουμε τη νέα θέση της καμπύλης F_2 , η οποία συμβολίζεται $\tilde{F}_2(x_1, y_1)$, όπου κάθε σημείο (x_1, y_1) προκύπτει από κάθε αρχικό σημείο (x, y) της $F_2(x, y)$ από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta a & 0 \\ 0 & \delta b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Βήμα 5: Αντιστοιχίζουμε στη συνέχεια την τιμή της καμπυλότητας $C_1^{F_2}(x, y)$ στο σημείο (x_1, y_1) της \tilde{F}_2 και με τον τρόπο αυτό έχουμε τη συνάρτηση $C_1^{F_2}(x_1, y_1)$.

Βήμα 6: Υπολογίζουμε το συναρτησιοειδές $|\zeta^C|$ για τη νέα εκδοχή της καμπύλης $\tilde{F}_2(x_1, y_1)$ μέσω της Σχέσης (4.5). Για την ακρίβεια, υπολογίζουμε το $\varepsilon_2 = \oint_{\tilde{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dl$ ολοκληρώνοντας αριθμητικά τις ποσότητες $C_1^{F_2}(x_1, y_1)$ πάνω στην καμπύλη $\tilde{F}_2(x_1, y_1)$, αφού, εξ' ορισμού, σε κάθε σημείο $C_1^{F_2}(x_1, y_1) = \vec{v} \cdot \vec{n}$. Στην περίπτωση κατά την οποία η ποσότητα $|\zeta^C|$ είναι μικρότερη από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι, το οποίο συνήθως σχετίζεται με τον αλγόριθμο ελαχιστοποίησης ο οποίος χρησιμοποιείται, η διαδικασία σταματά. Σε διαφορετική περίπτωση, η διαδικασία συνεχίζει στο επόμενο Βήμα 7.

Βήμα 7: Στη συνέχεια υπολογίζουμε το

$$\tilde{\nabla}(x_1, y_1)\tilde{f}(x_1, y_1) = \mathbf{A}^T \tilde{\nabla}(x, y)f(x, y) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

όπου η \mathbf{A}^T προσδιορίζεται άμεσα από τα βήματα $\delta a, \delta b$ του αλγορίθμου. Εφ' όσον έχουμε υπολογίσει τα $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}$, μπορούμε μέσω των Σχέσεων (4.23), (4.24) και (4.7) να υπολογίσουμε τα g_a^1, g_b^1, μ_1^2 αντίστοιχα.

Βήμα 8: Επιστρέφουμε στο Βήμα 3 και επαναλαμβάνουμε τα Βήματα 3 έως 8 για την καμπύλη $\tilde{\Gamma}_2(x_1, y_1)$, χρησιμοποιώντας τις νέες τιμές $C_1^{\Gamma_2}(x_1, y_1), g_a^1, g_b^1$ και μ_1^2 στη θέση των $C_0^{\Gamma_2}(x, y), g_a^0, g_b^0, \mu_0^2$ λαμβάνοντας τη νέα μετασχηματισμένη εκδοχή της $\Gamma_2(x, y)$, τη $\tilde{\Gamma}_2(x_2, y_2)$ κ.ο.κ., μέχρις ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού του Βήματος 6, δηλαδή μέχρις ότου η συνάρτηση σφάλματος $|\zeta^C|$ λάβει ελάχιστη τιμή.

Με το πέρας αυτής της διαδικασίας λαμβάνουμε τη βέλτιστη μετασχηματισμένη εκδοχή της Γ_2 , τη $\tilde{\Gamma}_2$, ως προς τη διαφορά των επίπεδων καμπυλοτήτων της $\tilde{\Gamma}_2$ από τη Γ_1 , για την οποία η συνάρτηση $|\zeta^C|$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Επιπλέον, γνωρίζουμε και τα άκρα της διαδρομής Δ στο \mathbb{R}^2 , δηλαδή, μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντιστοιχία κάθε σημείου M_1 της Γ_1 με το κατάλληλο σημείο M_2 της Γ_2 το οποίο έχει τη βέλτιστη αντιστοιχία καμπυλότητας με το M_1 . Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι στο Κεφάλαιο 4, μέσω της Πρότασης 4.5, έχει αποδειχθεί ότι η επίδοση της ανωτέρω διαδικασίας βελτιστοποίησης δεν βασίζεται στο απόλυτο μέγεθος των βημάτων διακριτοποίησης ($\delta a, \delta b$). Το μέγεθος αυτό επηρεάζει μόνο την πυκνότητα επιλογής των χαρακτηριστικών σημείων του μετασχηματισμού και άρα της διαδρομής Δ στο \mathbb{R}^2 .

5.2 Ενσωμάτωση της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης για τη βέλτιστη προσαρμογή της καμπύλης Γ_2 στη Γ_1

Όπως έχει ήδη αποδειχθεί, η ελαχιστοποίηση της επίπεδης καμπυλότητας είναι ανεξάρτητη της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης. Ως εκ τούτου, από τη στιγμή που η βέλτιστη καμπύλη $\tilde{\Gamma}_2$ έχει υπολογιστεί, θα περιμέναμε να υπάρχουν άπειρες θέσεις της $\tilde{\Gamma}_2$ ως προς τη Γ_1 για τις οποίες ελαχιστοποιείται η ποσότητα $|\zeta^C|$. Επομένως, ο αλγόριθμος προσαρμογής θα πρέπει να λαμβάνει υπ' όψιν τόσο τη στροφή, όσο και την παράλληλη μετατόπιση. Με το σκεπτικό αυτό, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση σφάλματος στον χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης. Για λόγους τους οποίους θα εξηγήσουμε στα επόμενα, επιλέξαμε το σφάλμα προσαρμογής το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω:

Έστω P τυχόν σημείο της $\tilde{\Gamma}_2$ και έστω $d(P)$ η Ευκλείδεια απόσταση του P από τη Γ_1 . Το σφάλμα προσαρμογής της $\tilde{\Gamma}_2$ στη Γ_1 το οποίο έχει επιλεγεί είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της απόστασης όλων των σημείων P της $\tilde{\Gamma}_2$ από τη Γ_1 , δηλαδή το

$$\oint_{\tilde{\Gamma}_2} d(P) dl$$

Σε κάθε σημείο του χρησιμοποιούμενου αλγορίθμου ελαχιστοποίησης, η νέα θέση της $\tilde{\Gamma}_2$ επανυπολογίζεται μέσω των αφινικών μετασχηματισμών που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 4.3, αφού τεθεί $da = db = 0$, καθώς η ελαχιστοποίηση της διαφοράς της επίπεδης καμπυλότητας έχει ήδη επιτευχθεί μέσω του αλγορίθμου της Παραγράφου 5.1 και επιπλέον έχουμε αποδείξει στο Πόρισμα 4.4 ότι οι δύο διαδικασίες είναι ανεξάρτητες. Στο σημείο αυτό σημειώνεται πως η στροφή και η παράλληλη μετατόπιση εφαρμόζεται μόνο στη μετασχηματισμένη καμπύλη $\tilde{\Gamma}_2$ και όχι σε ολόκληρο το χωρίο I .

5.3 Το χρησιμοποιηθέν τελικό μέτρο ομοιότητας μεταξύ δύο υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου της αλφαβήτου

Στην περίπτωση εφαρμογής της προηγούμενης διαδικασίας βέλτιστης προσαρμογής των περιγραμμάτων δύο γραμμάτων, μετά τον προσδιορισμό της βέλτιστης θέσης των $\tilde{\Gamma}_2$ και Γ_1 , συμπεριλαμβανομένης της ομοιοθεσίας, της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης,

απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του μέτρου που όντως περιγράφει την ομοιότητα μεταξύ των βέλτιστα προσαρμοσμένων $\tilde{\Gamma}_2$ και Γ_1 . Πράγματι, ακόμη και εντός του ίδιου κειμένου, οι διαφορετικές υλοποιήσεις των γραμμάτων της αλφαβήτου παρουσιάζουν έντονες διαφορές όσον αφορά το μέγεθος και την κατανομή της καμπυλότητάς τους κατά μήκος του περιγράμματός τους. Ως εκ τούτου, εάν ταιριάζουμε βέλτιστα όλες τις υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος της αλφαβήτου ενός κειμένου με το περίγραμμα μιας συγκεκριμένης υλοποίησης Γ_1 , τα σφάλματα σύγκρισης τα οποία προκύπτουν εξαρτώνται άμεσα από το μέγεθος και τη μέση καμπυλότητα αυτής της υλοποίησης αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή, η στατιστική επεξεργασία των σφαλμάτων σύγκρισης είναι δυνατόν να καταστεί άχρηστη. Ισοδυνάμως, προκειμένου να εξαχθεί μία στατιστικά συνεπής απόφαση σχετικά με την προσαρμογή των υλοποιήσεων των γραμμάτων, όπως αυτή η οποία θα παρουσιαστεί στο επόμενο κεφάλαιο, θα πρέπει να οριστεί ένα κριτήριο ομοιότητας μεταξύ δύο καμπυλών Γ_1 και Γ_2 , το οποίο θα είναι ανεξάρτητο του μεγέθους και της μέσης καμπυλότητας της επιλεγείσας καμπύλης αναφοράς Γ_1 . Για τους ανωτέρω λόγους, ορίζουμε και χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ομοιότητας μεταξύ των καμπυλών $\tilde{\Gamma}_2$ και Γ_1 :

Ορισμός 5.1 (Το τελικό κριτήριο ομοιότητας δύο βέλτιστα προσαρμοσμένων υλοποιήσεων συμβόλων με περιγράμματα Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$).

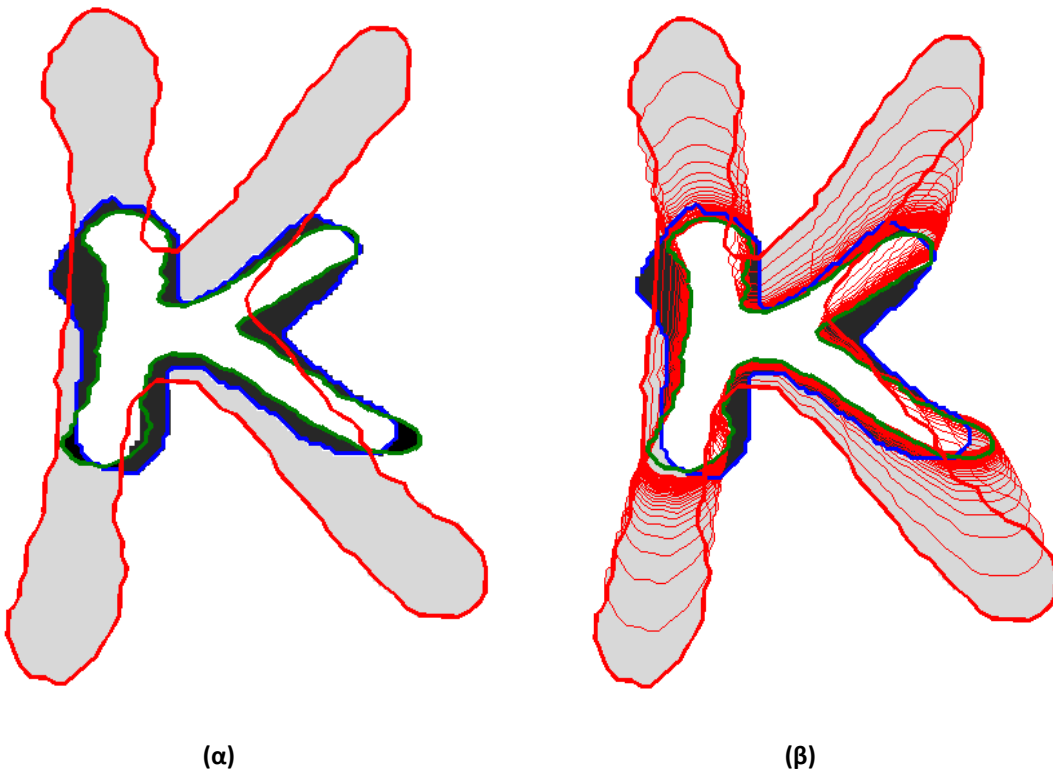
Με τη διαδικασία που παρουσιάστηκε στις Παραγράφους 5.1 και 5.2 έχουν προσδιοριστεί τόσο οι βέλτιστες τιμές των συντελεστών ομοιοθεσίας a και b για τις οποίες ελαχιστοποιείται η συνολική διαφορά της καμπυλότητας μεταξύ των καμπυλών Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$, όσο και οι βέλτιστοι αφινικοί μετασχηματισμοί οι οποίοι πρέπει να εφαρμοστούν στην ομοιοθετημένη εκδοχή της Γ_2 , προκειμένου οι δύο καμπύλες Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$ να ταιριάζουν βέλτιστα. Το τελικό, ολικό κριτήριο ομοιότητας μεταξύ των βέλτιστα προσαρμοσμένων καμπυλών Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\xi(\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2) = \frac{\text{εμβαδόν τομής των χωρίων που οριοθετεί η } \Gamma_1, \text{ αφ' ενός} \\ \text{και η μετασχηματισμένη } \tilde{\Gamma}_2, \text{ αφ' ετέρου}}{\text{εμβαδόν ένωσης των χωρίων που οριοθετεί η } \Gamma_1, \text{ αφ' ενός} \\ \text{και η μετασχηματισμένη } \tilde{\Gamma}_2, \text{ αφ' ετέρου}} \quad (5.2)$$

□

Θεωρούμε εύλογα πως η ποσότητα $\xi(\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$ αποτελεί κριτήριο ομοιότητας μεταξύ των χωρίων που οριοθετούν οι Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$, αλλά και των δύο αρχικών προς σύγκριση καμπυλών Γ_1 και Γ_2 . Η ποσότητα αυτή είναι μη πολωμένη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εξαγωγή συμπερασμάτων στατιστικής φύσης. Στην ιδανική περίπτωση κατά την οποία η βέλτιστα μετασχηματισμένη καμπύλη $\tilde{\Gamma}_2$ συμπέσει με την καμπύλη Γ_1 , ισχύει $\xi(\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2) = 1$, ενώ, όσο περισσότερο διαφορετικές είναι μεταξύ τους οι καμπύλες Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_2$, τόσο μικρότερη είναι και η αντίστοιχη τιμή του κριτηρίου ομοιότητας $\xi(\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$. Η αποτελεσματικότητα του επιλεγέντος κριτηρίου ομοιότητας θα φανεί και στα τελικά αποτελέσματα της ταυτοποίησης γραφεία.

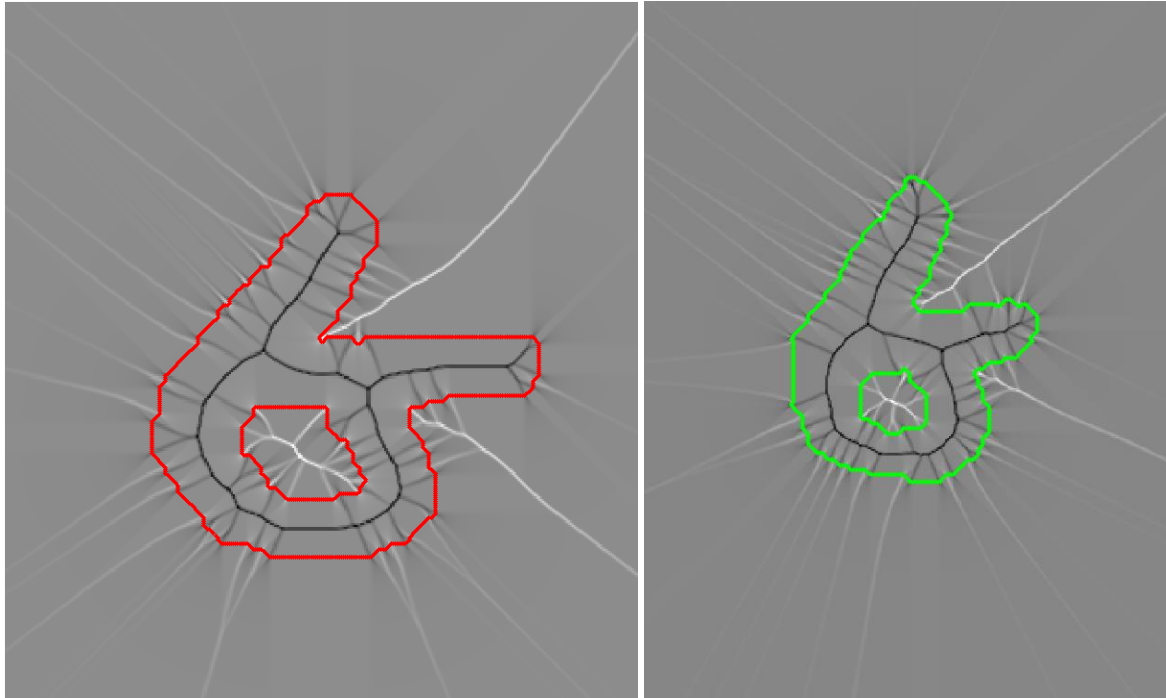
Τελικά, μέσω της εφαρμογής της μεθόδου που παρουσιάστηκε στα Κεφάλαια 4 και 5, επιτυγχάνεται η βέλτιστη προσαρμογή των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 , λαμβάνοντας υπ' όψιν την ομοιότητα της καμπυλότητας μεταξύ τους, την περιστροφή και την παράλληλη μετατόπιση κατά τους άξονες x και y . Ορισμένα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτής της διαδικασίας προσαρμογής σε περιγράμματα γραμμάτων τα οποία εμφανίζονται σε βυζαντινούς παπύρους παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.4 και 5.5. Ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής της διαδικασίας προσαρμογής δύο υλοποιήσεων του γράμματος 'Ω' που απαντώνται σε αρχαίες επιγραφές παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.6. Σημειώνεται ότι όλη η προαναφερθείσα μέθοδος και το τελικό κριτήριο μπορούν να χρησιμοποιηθούν, πρακτικά αυτούσιες, για τον εντοπισμό της ομοιότητας σχημάτων, τα οποία οριοθετούνται από κλειστές καμπύλες Jordan Γ_1 και Γ_2 .



Σχήμα 5.4. Απεικόνιση της διαδικασίας προσαρμογής κατά την εφαρμογή της στα περιγράμματα δύο υλοποιήσεων του γράμματος 'κ', οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικά κείμενα.

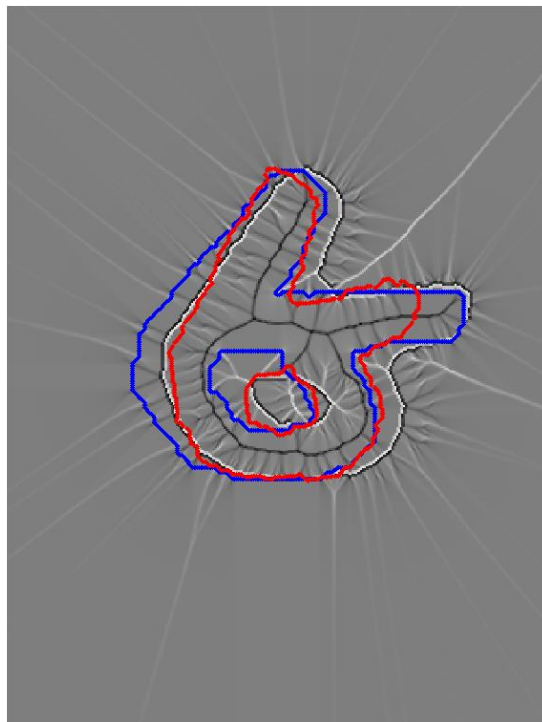
α) Αρχική βέλτιστη τοποθέτηση των περιγραμμάτων των δύο γραμμάτων. Η καμπύλη η οποία χρησιμοποιείται σαν αναφορά απεικονίζεται με μπλε χρώμα. Η αρχική θέση της καμπύλης την οποία επιχειρούμε να προσαρμόσουμε στην καμπύλη αναφοράς απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα, ενώ, η ίδια καμπύλη στη θέση βέλτιστης προσαρμογής απεικονίζεται με πράσινο.

β) Οι ενδιάμεσες παραμορφώσεις του περιγράμματος της προς προσαρμογή καμπύλης, το οποίο υπόκειται σε μετασχηματισμούς μέχρις ότου καταλήξει στη θέση βέλτιστης προσαρμογής απεικονίζονται σαν κόκκινες καμπύλες. Η τελική καμπύλη η οποία προκύπτει από τη διαδικασία προσαρμογής υπόκειται σε στροφή και παράλληλη μετατόπιση, προκειμένου να προσαρμοστεί βέλτιστα στην καμπύλη αναφοράς.



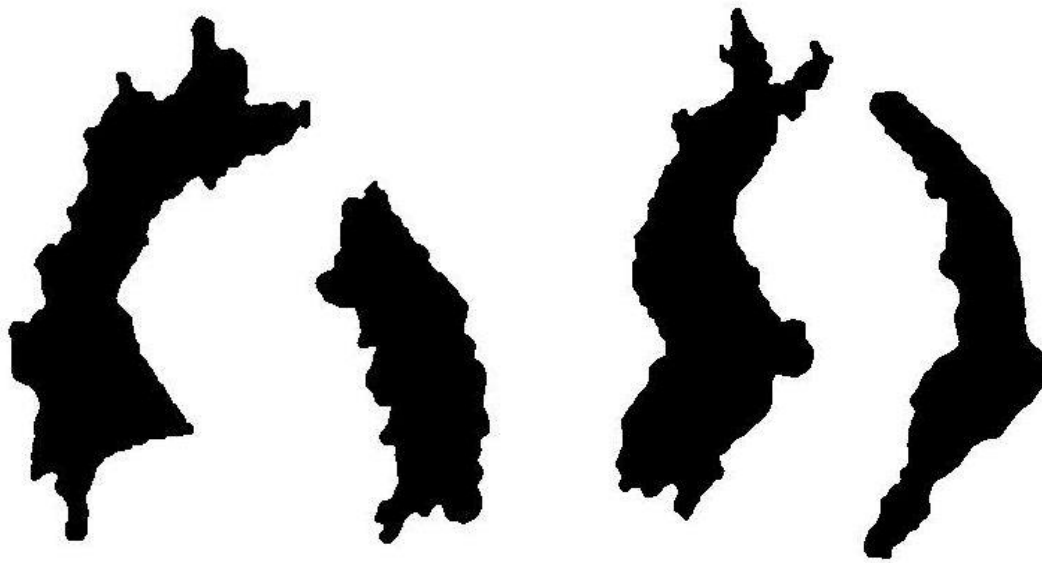
(α)

(β)



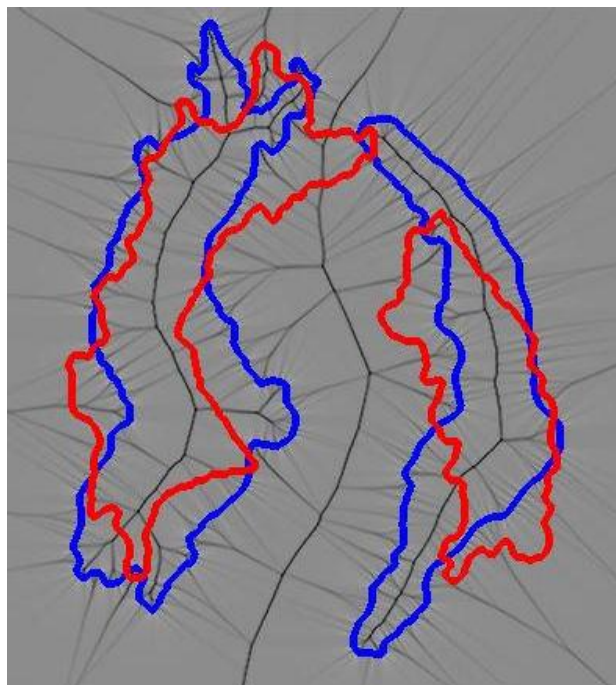
(γ)

Σχήμα 5.5. Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου προσαρμογής. Στα Σχήματα (α) και (β) παρουσιάζονται δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'ε' της αλφαβήτου, ενώ στο Σχήμα (γ) παρουσιάζονται οι ίδιες υλοποιήσεις στη θέση βέλτιστης προσαρμογής.



(α)

(β)



(γ)

Σχήμα 5.6. Ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου προσαρμογής σε υλοποιήσεις γράμματος που προέρχονται από αρχαίες επιγραφές. Στα Σχήματα (α) και (β) παρουσιάζονται δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Ω'. Στο Σχήμα (γ) παρουσιάζονται οι ίδιες υλοποιήσεις στη θέση βέλτιστης προσαρμογής. Η υλοποίηση του Σχήματος (α) απεικονίζεται στο Σχήμα (γ) με κόκκινο χρώμα, ενώ η υλοποίηση του Σχήματος (β) απεικονίζεται με μπλε χρώμα.

6 Στατιστικά κριτήρια κατάταξης ενός δεδομένου συνόλου σχημάτων σε ομάδες και εφαρμογή τους στην αναγνώριση γραφεία

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί ένα σύνολο νέων στατιστικών κριτηρίων για την ομαδοποίηση διδιάστατων καμπυλών, ανάλογα με το βαθμό ομοιότητάς τους. Ο κύριος στόχος της ανάπτυξης αυτών των κριτηρίων και της σχετικής μεθοδολογίας είναι η αυτόματη ταυτοποίηση των γραφείων μιας ομάδας κειμένων, αλλά, εν τούτοις, η προτεινόμενη μεθοδολογία έχει ευρεία εφαρμοσιμότητα. Ακριβώς επειδή το κύριο αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η κατάταξη ενός συνόλου κειμένων σε ομάδες ανάλογα με το γραφεία τους, η μεθοδολογία θα εφαρμοστεί αρχικά για το σκοπό αυτό, ενώ, στη συνέχεια, θα παρουσιαστεί μία γενίκευση της στατιστικής μεθοδολογίας όταν το αντικείμενο κατάταξης είναι οποιοδήποτε σύνολο σχημάτων.

6.1 Τα χρησιμοποιηθέντα στατιστικά κριτήρια για την απόδοση ενός κειμένου στο γραφεία του

Θεωρούμε δύο διακριτά κείμενα D_1 και D_2 και ένα δεδομένο σύμβολο της αλφαβήτου, έστω L , N_1^L υλοποιήσεις του οποίου εμφανίζονται στο κείμενο D_1 , ενώ N_2^L υλοποιήσεις του εμφανίζονται στο κείμενο D_2 . Απομονώνουμε κάθε σύμβολο από την υποκείμενη εικόνα του κειμένου στο οποίο βρίσκεται (πάπυρο ή επιγραφή), το ενθέτουμε σε ατομικό πλαίσιο, στο οποίο πραγματοποιούμε κατάτμηση εικόνας και εξαγωγή του περιγράμματος του γράμματος στην κατάλληλη μορφή βάσει της μεθόδου η οποία περιγράφηκε στην αρχή του Κεφαλαίου 5. Επιλέγουμε αυθαίρετα μια επεξεργασμένη υλοποίηση του συμβόλου L στο κείμενο D_1 , την οποία ονομάζουμε $L_{1,1}$ και τη συγκρίνουμε με όλες τις υπόλοιπες υλοποιήσεις του συμβόλου L στο D_1 , δηλαδή τις $L_{1,2}, L_{1,3}, \dots, L_{1,N_1^L}$. Προκειμένου να εκτελέσουμε τις συγκρίσεις αυτές, ενθέτουμε το περίγραμμα της υλοποίησης $L_{1,1}$ και το περίγραμμα της εκάστοτε $L_{1,i}$, όπου $i = 2, 3, \dots, N_1^L$, στο ίδιο χωρίο I , το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ορθογώνια ψηφιακή εικόνα. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο η οποία παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5, χρησιμοποιώντας ένα μέτρο ομοιότητας όπως αυτό το οποίο περιγράφηκε στην Παράγραφο 5.3, το οποίο συμβολίζουμε με

$\xi(L_{1,1}, \tilde{L}_{1,i})$. Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιούμε την περισπωμένη (\sim) στο σύμβολο $L_{1,i}$ για να δηλώσουμε ότι η προσαρμογή λαμβάνει χώρα μεταξύ του περιγράμματος της προτύπου υλοποίησης $L_{1,1}$ του κειμένου D_1 και του μετασχηματισμένου περιγράμματος της υλοποίησης $L_{1,i}$ του ίδιου κειμένου, σύμφωνα με την ανάλυση που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 5. Στη συνέχεια θεωρούμε την υλοποίηση $L_{1,2}$ σαν υλοποίηση αναφοράς και τη συγκρίνουμε με τις υλοποιήσεις $L_{1,3}, L_{1,4}, \dots, L_{1,N_1^L}$, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο λαμβάνοντας ένα σύνολο μέτρων ομοιότητας $\xi(L_{1,2}, \tilde{L}_{1,i}), i > 2$ κ.ο.κ., μέχρις ότου η υλοποίηση L_{1,N_1^L-1} συγκριθεί με την L_{1,N_1^L} . Σχετικές βέλτιστα προσαρμοσμένες θέσεις ζευγών υλοποιήσεων διαφόρων συμβόλων της αλφαβήτου παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.4, 5.5 και 5.6.

Στο σημείο αυτό θεωρήσαμε ότι η συνολική ομοιότητα των υλοποιήσεων του συμβόλου L στα D_1 και D_2 κατ' αρχάς επηρεάζεται άμεσα από τη διαφορά των μέσων τιμών $\xi\mu_1$ και $\xi\mu_2$. Το $\xi\mu_1$ είναι η μέση τιμή των τιμών του κριτηρίου ομοιότητας ξ που προέκυψαν από τη σύγκριση των υλοποιήσεων του συμβόλου L εντός του κειμένου D_1 . Είναι, δηλαδή, η μέση τιμή των $\xi(L_{1,i}, \tilde{L}_{1,j}), j > i, i, j = 1, 2, 3, \dots, N_1^L$. Το $\xi\mu_2$ είναι η μέση τιμή των τιμών του κριτηρίου ομοιότητας που προήλθαν από τη σύγκριση των υλοποιήσεων του L μεταξύ των κειμένων D_1 και D_2 , είναι, δηλαδή, η μέση τιμή των $\xi(L_{1,i}, \tilde{L}_{2,j}), i = 1, 2, 3, \dots, N_1^L, j = 1, 2, 3, \dots, N_2^L$. Θεωρήσαμε πολύ εύλογα ότι, όσο πλησιέστερες είναι οι τιμές $\xi\mu_1$ και $\xi\mu_2$, τόσο αυξάνονται οι ενδείξεις ότι το σύμβολο L έχει πιθανόν γραφεί από τον ίδιο γραφέα. Για να λάβουμε υπ' όψιν την καλλιγραφία στη στατιστική επεξεργασία προχωρήσαμε στις εξής δύο ενέργειες:

1. Λάβαμε υπ' όψιν τις διασπορές ξS_1 και ξS_2 , ως και το πλήθος των εξεταζομένων υλοποιήσεων του L . Προς το σκοπό αυτό, θεωρήσαμε ότι μία πρώτη εκτίμηση της ομοιότητας του L προσφέρεται από την ποσότητα

$$t_1^L = \frac{(\xi\mu_1 - \xi\mu_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(\xi S_1)^2}{N_{1,1}^L} + \frac{(\xi S_2)^2}{N_{1,2}^L}}}$$

$$\text{όπου } N_{1,1}^L = \frac{(N_1^L - 1) \cdot N_1^L}{2} \text{ και } N_{1,2}^L = N_1^L \cdot N_2^L.$$

Εάν προς στιγμὴν αποδεχθούμε τη μηδενική υπόθεση $H_0: \mu_1 = \mu_2$, τότε η ποσότητα t_1^L έχει πλήρως καθορισμένη τιμή, η οποία ισούται με

$$t_1^L = \frac{(\xi\mu_1 - \xi\mu_2)}{\sqrt{\frac{(\xi S_1)^2}{N_{1,1}^L} + \frac{(\xi S_2)^2}{N_{1,2}^L}}} \quad (6.1)$$

2. Τα πειράματα έδειξαν ότι σε σχέση με όλα τα σύμβολα και όλα τα κείμενα, ο μέσος όρος $\xi\mu_1$, ο οποίος αφορά πάντα το ίδιο κείμενο, κυμαίνεται στο διάστημα (0.48, 0.67), με επικρατέστερη τιμή μεγαλύτερη του 0.58.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να συγκρίνουμε δύο κείμενα D_1 και D_2 με $\xi\mu_1 = 0.65$ και $\xi\mu_2 = 0.62$, καθώς και άλλα δύο κείμενα D_3 και D_4 με $\xi\mu_3 = 0.59$ και $\xi\mu_4 = 0.56$. Φρονούμε ότι ενώ οι διαφορές $\xi\mu_1 - \xi\mu_2$ και $\xi\mu_3 - \xi\mu_4$ είναι ίσες και δη ότι ισχύει

$$\xi\mu_1 - \xi\mu_2 = \xi\mu_3 - \xi\mu_4 = 0.03$$

εν τούτοις, η πιθανοφάνεια ότι το σύμβολο L έχει γραφεί από τον ίδιο γραφέα στις D_1 και D_2 πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανοφάνεια σε σχέση με τις D_3 και D_4 . Αυτό συμβαίνει διότι το $\xi\mu_2$ είναι απολύτως μεγαλύτερο στην περίπτωση των D_1 και D_2 .

Επιπλέον, θεωρούμε επιβεβλημένο να αυξήσουμε ακόμα περισσότερο την πιθανοφάνεια, όταν ισχύει $\xi\mu_2 > \xi\mu_1$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι εάν Π_α είναι η πιθανοφάνεια το σύμβολο L να έχει γραφεί από το ίδιο άτομο όταν $\xi\mu_1 = 0.65$ και $\xi\mu_2 = 0.68$ πρέπει αυτή να είναι σαφώς μεγαλύτερη από την αντίστοιχη πιθανοφάνεια Π_β , η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση $\xi\mu_1 = 0.65$ και $\xi\mu_2 = 0.62$.

Επομένως, αποφασίσαμε να ενισχύσουμε την πιθανοφάνεια καθώς το $\xi\mu_2$ αυξάνει. Προς το σκοπό αυτό, εισάγαμε το τελικό κριτήριο

$$t^L = t_1^L \cdot (1 - \xi\mu_2) \Leftrightarrow t^L = \frac{(\xi\mu_1 - \xi\mu_2) \cdot (1 - \xi\mu_2)}{\sqrt{\frac{(\xi S_1)^2}{N_{1,1}^L} + \frac{(\xi S_2)^2}{N_{1,2}^L}}} \quad (6.2)$$

Για να επιβεβαιώσουμε το ρόλο αυτής της πιθανοφάνειας, αλλά και για να εξετάσουμε τη στατιστική συμπεριφορά των εκάστοτε ποσοτήτων t^L , προχωρήσαμε ως εξής:

- i) Χρησιμοποιήσαμε τη μόνη διαθέσιμη πληροφορία που μας είχε δοθεί από τους επιγραφολόγους και τους ειδικούς των Κλασικών Σπουδών σε σχέση με τα μελετώμενα κείμενα και συγκεκριμένα την πληροφορία ότι κάθε κείμενο (επιγραφή ή πάπυρος) είχε γραφεί από τον ίδιο γραφέα. Επομένως,
- ii) Θεωρήσαμε ένα τυχόν κείμενο (επιγραφή ή πάπυρο) από τα διαθέσιμα, έστω αυτό D_i . Λάβαμε υπ' όψιν όλες τις υλοποιήσεις του εκάστοτε συμβόλου της αλφαβήτου L , οι οποίες εμφανίζονται στο D_i . Εάν το σύνολο αυτών των υλοποιήσεων συμβολιστεί ως Γ_i^L , τότε είναι δυνατόν να επιλέξουμε με τυχαίο τρόπο (για παράδειγμα με γεννήτρια τυχαίων αριθμών) ρ ισοπληθή υποσύνολα του Γ_i^L και να θεωρήσουμε ότι κάθε τέτοιο υποσύνολο είναι ένα ανεξάρτητο κείμενο. Συνεπώς, μπορούμε να δημιουργήσουμε τεχνητά ένα σύνολο κειμένων $D_{i,1}, D_{i,2}, \dots, D_{i,\rho}$, καθένα από τα οποία περιέχει m το πλήθος υλοποιήσεις του συμβόλου L και τα οποία έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα.
- iii) Τότε, μπορούμε να ελέγξουμε τη στατιστική συμπεριφορά των ποσοτήτων t^L για κάθε διαφορετικό ζεύγος κειμένων που ανήκουν στο σύνολο $\{D_{i,1}, D_{i,2}, \dots, D_{i,\rho}\}$.

Συγκεκριμένα, για κάθε διαφορετικό ζεύγος κειμένων $(D_{i,\kappa}, D_{i,\lambda})$ είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την προαναφερθείσα μεθοδολογία προσαρμογής και να λάβουμε τις αντίστοιχες μέσες τιμές $\xi\mu_\kappa$ και $\xi\mu_{\kappa,\lambda}$, καθώς και τις τυπικές αποκλίσεις ξS_κ και $\xi S_{\kappa,\lambda}$. Προφανώς, οι ποσότητες $\xi\mu_\kappa$ και ξS_κ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των συγκρίσεων των m υλοποιήσεων του L εντός του

κειμένου $D_{i,\kappa}$, ενώ, $\xi\mu_{\kappa,\lambda}$ και $\xi S_{\kappa,\lambda}$ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των κριτηρίων ομοιότητας που λαμβάνονται όταν όλες οι υλοποιήσεις του $D_{i,\kappa}$ συγκρίνονται με όλες τις υλοποιήσεις του $D_{i,\lambda}$.

Πραγματοποιώντας τα ανωτέρω λάβαμε ένα σύνολο τιμών $t_{\kappa,\lambda}^L$, για τις οποίες, ακολουθώντας πλήρως τη Σχέση (6.2), ισχύει

$$t_{\kappa,\lambda}^L = \frac{(\xi\mu_{\kappa} - \xi\mu_{\kappa,\lambda}) \cdot (1 - \xi\mu_{\kappa,\lambda})}{\sqrt{\frac{(\xi S_{\kappa})^2}{N_{\kappa}^L} + \frac{(\xi S_{\kappa,\lambda})^2}{N_{\kappa,\lambda}^L}}} \quad (6.3)$$

όπου, βεβαίως, $N_{\kappa}^L = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$ και $N_{\kappa,\lambda}^L = m^2$.

Τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας έδειξαν ότι οι ποσότητες $t_{\kappa,\lambda}^L$ ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν (0) και τυπική απόκλιση ένα (1). Τόσο το κλασικό τεστ Kolmogorov – Smirnov, όσο και το τεστ Lilliefors δεν απέρριψαν την υπόθεση αυτή.

Συνεπώς, υποθέσαμε εύλογα ότι και για διαφορετικά κείμενα που έχουν γραφεί από το ίδιο χέρι, οι αντίστοιχες ποσότητες t^L θα έχουν πολύ παραπλήσια στατιστική συμπεριφορά.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, ορίσαμε την πιθανοφάνεια τα δύο τυχόντα κείμενα D_1 και D_2 να έχουν γραφεί από το ίδιο χέρι, όσον αφορά το σύμβολο L και μόνον, επί τη βάση του κάτωθι κριτηρίου:

Τελικό στατιστικό κριτήριο ομοιότητας δύο κειμένων αναφορικά με τυχόν σύμβολο της αλφαβήτου L που εμφανίζεται στα κείμενα αυτά

Έστωσαν δύο οποιαδήποτε κείμενα D_1 και D_2 στα οποία εφαρμόστηκε όλη η προαναφερθείσα επεξεργασία.

Όλοι οι υπολογισμοί πιθανοφάνειας που θα ακολουθήσουν θα χρησιμοποιούν ως κριτήριο την ποσότητα t^L της Σχέσης (6.2), η οποία παρατίθεται εκ νέου εδώ

$$t^L = \frac{(\xi\mu_1 - \xi\mu_2) \cdot (1 - \xi\mu_2)}{\sqrt{\frac{(\xi S_1)^2}{N_{1,1}^L} + \frac{(\xi S_2)^2}{N_{1,2}^L}}}$$

Η ποσότητα αυτή θεωρούμε ότι ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή, όταν αφορά σύμβολα της αλφαβήτου L που έχουν προέλθει από τον ίδιο γραφέα.

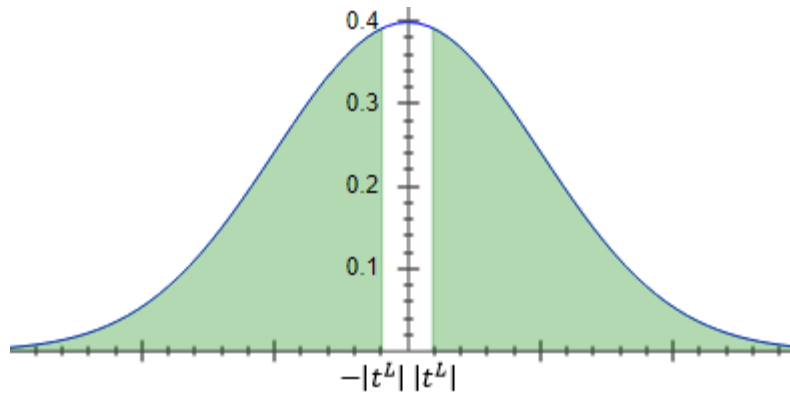
Συνεπώς, η πιθανοφάνεια τα κείμενα D_1 και D_2 να ανήκουν στον ίδιο γραφέα, όσον αφορά το σύμβολο της αλφαβήτου L και μόνον, είναι

$$\begin{aligned} P_{1,2}^L &= P(-\infty < x < -|t^L| \vee |t^L| < x < +\infty) \\ \Leftrightarrow P_{1,2}^L &= \int_{-\infty}^{-|t^L|} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{|t^L|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned} \quad (6.4)$$

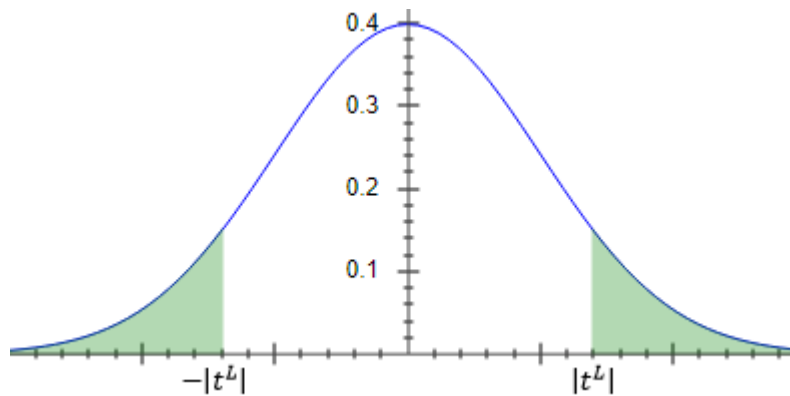
$$\Leftrightarrow P_{1,2}^L = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{|t^L|}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

□

Ισχύει ότι όσο η ποσότητα t^L πλησιάζει στο μηδέν, δηλαδή όσο περισσότερο μοιάζουν μεταξύ τους τα κείμενα τα οποία συγκρίνονται ως προς το σύμβολο της αλφαβήτου L , τόσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της αντίστοιχης πιθανοφάνειας $P_{1,2}^L$, όπως για παράδειγμα στο Σχήμα 6.1(α). Αντίστοιχα, όσο μικρότερος είναι ο βαθμός ομοιότητας των δύο κειμένων ως προς το L , τόσο μεγαλύτερη είναι η απόλυτη τιμή της ποσότητας t^L και αντίστοιχα μικρότερη είναι η τιμή της πιθανοφάνειας $P_{1,2}^L$, όπως για παράδειγμα στο Σχήμα 6.1(β).



(α)



(β)

Σχήμα 6.1. Γραφική απεικόνιση της πιθανοφάνειας $P_{1,2}^L$ δύο κείμενα D_1 και D_2 να έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα για ένα και μόνον σύμβολο της αλφαβήτου L , σύμφωνα με τη Σχέση (6.4). Στα δύο σχήματα η πιθανοφάνεια αντιστοιχεί στο εμβαδόν της περιοχής που σημειώνεται με πράσινο χρώμα.

(α) Περίπτωση κατά την οποία η απόλυτη τιμή του κριτηρίου t^L είναι μικρή, οπότε και η αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας $P_{1,2}^L$ είναι μεγάλη.

(β) Περίπτωση η απόλυτη τιμή του t^L να είναι μεγάλη, γεγονός το οποίο οδηγεί σε μικρή τιμή πιθανοφάνειας $P_{1,2}^L$.

Τόσο η διαίσθηση, όσο και όλα τα πειράματα που επιτελέσαμε, έδειξαν με σαφήνεια ότι ο γραφέας αναδεικνύεται από ένα σύνολο συμβόλων της αλφαβήτου. Επομένως, είναι απολύτως απαραίτητο να επεκτείνουμε το προηγούμενο κριτήριο ως εξής:

Τελική πιθανοφάνεια και σχετικό κριτήριο που λαμβάνει υπ' όψιν ένα σύνολο γραμμάτων

Επιλέγουμε προς επεξεργασία ένα σύνολο n συμβόλων της αλφαβήτου Σ^S , για παράδειγμα το

$$\Sigma^S = \{\alpha, \delta, \eta, \theta, \kappa, \lambda, \sigma, \varphi, \omega\}$$

για το οποίο $n = 9$.

Έστω ότι μας δίνεται ένα ζεύγος κειμένων D_1, D_2 για το οποίο θέλουμε να αποφανθούμε εάν έχει γραφεί από το ίδιο χέρι ή όχι. Προς το σκοπό αυτό, θα ορίσουμε και θα χρησιμοποιήσουμε την κάτωθι πιθανοφάνεια $\alpha_{1,2}$ δύο διαφορετικά κείμενα να έχουν γραφεί από το ίδιο χέρι:

$$\alpha_{1,2} = \sqrt[n]{\prod_{L \in \Sigma^S} P_{1,2}^L} \quad (6.5)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα του Σ^S :

$$\alpha_{1,2} = \sqrt[9]{\prod_{L \in \Sigma^S} P_{1,2}^L} = \sqrt[9]{P_{1,2}^\alpha \cdot P_{1,2}^\delta \cdot P_{1,2}^\eta \cdot P_{1,2}^\theta \cdot P_{1,2}^\kappa \cdot P_{1,2}^\lambda \cdot P_{1,2}^\sigma \cdot P_{1,2}^\varphi \cdot P_{1,2}^\omega}$$

Θα θεωρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή αυτής της πιθανοφάνειας, τόσο περισσότερο μακρινό είναι το ενδεχόμενο τα κείμενα D_1 και D_2 να προέρχονται από τον ίδιο γραφέα. Αντιστρόφως, όσο μεγαλύτερη είναι η συγκεκριμένη πιθανοφάνεια, τόσο αυξάνει η εμπιστοσύνη ότι τα D_1 και D_2 ανήκουν στον ίδιο γραφέα. Η συνολική αυτή πιθανοφάνεια είναι ανηγμένη πρακτικά σε ένα σύμβολο και ουσιωδώς ανεξάρτητη του πλήθους των συμβόλων που χρησιμοποιήσαμε. Η ποσοτικοποίηση αυτής της διατύπωσης θα πραγματοποιηθεί στις αμέσως επόμενες παραγράφους.

□

6.2 Εντοπισμός των διαφορετικών γραφένων και απόδοση του κάθε κειμένου στο γραφέα του

Εφαρμόζουμε την εξής διαδικασία προκειμένου να λάβουμε στατιστικά αποτελέσματα για όλα τα n τω πλήθος διαφορετικά κείμενα που έχουμε στη διάθεσή μας, τα οποία αποτελούν το σύνολο $\Sigma_0 = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$:

Βήμα 1: Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην εργασία αυτή σε όλα τα ζεύγη κειμένων (D_1, D_p) , $p = 2, \dots, n$ για το ευρύ σύνολο συμβόλων της αλφαβήτου Σ^S , όλα τα στοιχεία του οποίου εμφανίζονται σε όλα τα κείμενα του συνόλου Σ_0 . Προφανώς στο συγκεκριμένο βήμα, το κείμενο D_1 έχει το ρόλο κειμένου αναφοράς.

Βήμα 2: Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή χρησιμοποιώντας σαν κείμενο αναφοράς ένα νέο κείμενο του συνόλου Σ_0 , έστω D_2 , με $D_2 \neq D_1$, στη συνέχεια ένα κείμενο D_3 του Σ_0 κ.ο.κ, μέχρις ότου το D_n γίνει κείμενο αναφοράς και συγκριθεί με όλα τα υπόλοιπα $n - 1$ κείμενα.

Βήμα 3: Για κάθε ζεύγος κειμένων (D_i, D_j) , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ υπολογίζουμε την πιθανοφάνεια $\alpha_{i,j}$, η οποία δίνεται από τη Σχέση (6.5), δηλαδή την

$$\alpha_{i,j} = \sqrt[n]{\prod_{L \in \Sigma^S} P_{i,j}^L}$$

όπου $P_{i,j}^L$ δίνεται από την (6.4) και σύμφωνα με το σχετικό τελικό κριτήριο.

Εντοπίζουμε το ζεύγος (D_{q_1}, D_{q_2}) για το οποίο η ανωτέρω πιθανοφάνεια λαμβάνει την ελάχιστη τιμή μεταξύ όλων των $n \cdot (n - 1)$ πιθανοφανειών που αφορούν όλα τα διαθέσιμα κείμενα. Ταυτόχρονα, απαιτούμε αυτή η ελάχιστη πιθανοφάνεια να είναι μικρότερη από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι α_T .

Αυτό το επίπεδο σημαντικότητας α_T προσδιορίζεται με ευρεστικά κριτήρια. Πράγματι, στην πράξη, εφ' όσον η γραφή σε πλάκες αποτελούσε επάγγελμα κατά την Αρχαιότητα, μέχρι και

τους Ελληνιστικούς χρόνους, μπορούμε με ασφάλεια να υποθέσουμε ότι το σύνολο των διασωθέντων επιγραφών γράφτηκαν από μερικές εκατοντάδες χεριών. Επίσης, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι μία βάση δεδομένων η οποία θα περιλαμβάνει το σύνολο των επιγραφών αυτών περιέχει μερικές δεκάδες χιλιάδες τέτοιου είδους επιγραφές. Ανάλογους συλλογισμούς μπορούμε να κάνουμε και για τα διασωθέντα βυζαντινά χειρόγραφα, καθώς η αντιγραφή αρχαίων κειμένων σε παπύρους και περγαμηνές αποτελούσε σε πολλά μοναστήρια κατά το Μεσαίωνα μέρος της καθημερινής ή εβδομαδιαίας εργασίας των μοναχών. Μια λογική τιμή για το κατώφλι του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας α_T είναι η τιμή

$$\alpha_T = 10^{-2}$$

Θα φανεί και από το μεγάλο «άλμα» που λαμβάνει χώρα μεταξύ της πιθανοφάνειας που αφορά κείμενα που έχουν γραφεί από το ίδιο χέρι σε σχέση με αυτά που έχουν γραφεί από διαφορετικό πως αυτή η τιμή του κατωφλίου είναι πολύ παραπάνω από επαρκής.

Επομένως, εάν για οποιαδήποτε δύο κείμενα $(D_i, D_j), i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ ισχύει ότι η αντίστοιχη πιθανοφάνεια $\alpha_{i,j}$ είναι μικρότερη από το κατώφλι $\alpha_T = 10^{-2}$, τότε θεωρούμε de facto ότι τα δύο κείμενα D_i και D_j δεν ανήκουν στον ίδιο γραφέα.

Συνεχίζοντας την ανωτέρω συλλογιστική, εντοπίζουμε το ζεύγος κειμένων (D_{q_1}, D_{q_2}) για το οποίο η πιθανοφάνεια που δίνεται από τη Σχέση (6.5) είναι μικρότερη από το κατώφλι α_T και, επιπλέον, είναι η ελάχιστη μεταξύ όλων των πιθανοφανειών που προέκυψαν για όλες τις συγκρίσεις μεταξύ των διαθέσιμων κειμένων. Τα κείμενα αυτά D_{q_1} και D_{q_2} ανήκουν προφανώς σε δύο διαφορετικούς γραφείς. Συμβολίζουμε αυτούς τους δύο γραφείς W_1 και W_2 . Το κείμενο D_{q_1} με τον τρόπο αυτό είναι το πρώτο κείμενο το οποίο σχετίζεται με το γραφέα W_1 και θεωρούμε ότι αποτελεί ένα πρώτο καλό αντιπρόσωπο του τρόπου γραφής του συγκεκριμένου γραφέα. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε για το κείμενο D_{q_1} τον εναλλακτικό συμβολισμό $\Delta_{1,1}$. Με ανάλογο τρόπο, θεωρούμε ότι το κείμενο D_{q_2} αποτελεί τον πρώτο καλό αντιπρόσωπο του τρόπου γραφής του γραφέα W_2 και, για το λόγο αυτό, το συμβολίζουμε εφ' εξής με το σύμβολο $\Delta_{2,1}$. Σε κάθε ένα από τα κείμενα $\Delta_{1,1}$ και $\Delta_{2,1}$, ο πρώτος κάτω δείκτης αναφέρεται στον γραφέα, ενώ ο δεύτερος κάτω δείκτης είναι ο αύξων αριθμός του κειμένου που έχει αποδοθεί σε αυτόν.

Βήμα 4: Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε κείμενο D_i που ανήκει στο σύνολο $\Sigma_1 = \Sigma_0 - \{D_{q_1}, D_{q_2}\}$ και πραγματοποιούμε τη σύγκριση του D_i με το D_{q_1} με την ίδια ακριβώς μέθοδο που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη Παράγραφο 6.1, θεωρώντας ως πρότυπο τόσο το D_i , οπότε λαμβάνουμε την πιθανοφάνεια α_{i,q_1} , όσο και το D_{q_1} , λαμβάνοντας την πιθανοφάνεια $\alpha_{q_1,i}$. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία για όλα τα κείμενα που ανήκουν στο σύνολο Σ_1 , υπολογίζοντας κάθε φορά τις αντίστοιχες πιθανοφάνειες. Λαμβάνουμε τη μέγιστη πιθανοφάνεια μεταξύ όλων αυτών, δηλαδή την

$$\alpha_m = \max\{\alpha_{i,q_1}, \alpha_{q_1,i}\}, i \in \Sigma_1$$

Εάν $\alpha_m > \alpha_T$, θεωρούμε ότι το κείμενο D_m που παρήγαγε το α_m ανήκει στο γραφέα W_1 . Όλα τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν κατέδειξαν με μεγάλη σαφήνεια ότι το α_m είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το α_T , συνήθως περισσότερες από 10^3 φορές.

Συνεπώς, θα επανασυμβολίσουμε το κείμενο D_m ως $\Delta_{1,2}$, δεδομένου ότι είναι το δεύτερο κείμενο που αποδόθηκε στον πρώτο γραφέα.

Βήμα 5: Σχηματίζουμε το σύνολο $\Sigma_2 = \Sigma_1 - \{D_m\} \equiv \Sigma_0 - \{D_{q_1}, D_{q_2}, D_m\}$ και θεωρούμε τυχόν κείμενο D_i που ανήκει στο σύνολο Σ_2 . Στο κείμενο D_i εφαρμόζουμε τη διαδικασία του Βήματος 4, τόσο αναφορικά με τη $\Delta_{1,1} \equiv D_{q_1}$, όσο και αναφορικά με την $\Delta_{1,2} \equiv D_m$. Αφού επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για όλα τα D_i που ανήκουν στο σύνολο Σ_2 και αφού προσδιορίσουμε όλες τις σχετικές πιθανοφάνειες, θεωρούμε εκ νέου τη μέγιστη από όλες αυτές τις πιθανοφάνειες, δηλαδή την

$$\alpha_{m1} = \max\{\alpha_{i,q_1}, \alpha_{q_1,i}, \alpha_{i,m}, \alpha_{m,i}\}, i \in \Sigma_2$$

Εφ' όσον $\alpha_{m1} > \alpha_T$, θεωρούμε de facto ότι το κείμενο D_{m1} που παρήγαγε τη μέγιστη σχετική πιθανοφάνεια α_{m1} ανήκει στο γραφέα W_1 . Ως εκ τούτου, θα επανασυμβολίσουμε το D_{m1} ως $\Delta_{1,3}$. Τονίζουμε εκ νέου ότι στην πράξη το α_{m1} είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο του α_T .

Βήμα 6: Εξαιρούμε όλα τα κείμενα που έχουν ήδη αποδοθεί στο γραφέα W_1 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία των προηγούμενων Βημάτων 4 και 5 αποδίδοντας νέα κείμενα στον W_1 , όσο ισχύει ότι η μέγιστη σχετική πιθανοφάνεια είναι μεγαλύτερη του α_T .

Μόλις δεν υπάρχουν κείμενα που να δίνουν μέγιστη πιθανοφάνεια, σε σχέση με όλα τα εντοπισθέντα κείμενα του W_1 , η οποία να είναι μεγαλύτερη του α_T , τότε θεωρούμε ότι εξαντλήθηκαν όλα τα κείμενα που αποδίδουμε στον πρώτο γραφέα W_1 .

Βήμα 7: Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία των Βημάτων 4, 5 και 6 για το δεύτερο γραφέα W_2 , αρχής γενομένης από το πρώτο κείμενο $\Delta_{2,1} \equiv D_{q_2}$ που έχει ήδη αποδοθεί σε αυτόν.

Βήμα 8: Έστω ότι στο γραφέα W_1 έχουν αποδοθεί n_1 κείμενα, ενώ στον W_2 έχουν αποδοθεί n_2 κείμενα με βάση όλα τα προηγούμενα βήματα. Τότε, σχηματίζουμε το σύνολο

$$\Sigma_3 = \Sigma_0 - \{\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \dots, \Delta_{1,n_1}, \Delta_{2,1}, \Delta_{2,2}, \dots, \Delta_{2,n_2}\}$$

Συγκρίνουμε όλα τα κείμενα D_i που ανήκουν στο σύνολο Σ_3 με όλα τα κείμενα των γραφέων W_1 και W_2 , δηλαδή τα $\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \dots, \Delta_{1,n_1}, \Delta_{2,1}, \Delta_{2,2}, \dots, \Delta_{2,n_2}$, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως. Υπολογίζουμε την ελάχιστη πιθανοφάνεια με τρόπο που είναι ευθύγραμμη επέκταση εκείνου του Βήματος 3 και εφ' όσον αυτή είναι μικρότερη του α_T , τότε και μόνον τότε αποδίδουμε το κείμενο που έδωσε την ελάχιστη αυτή πιθανοφάνεια σε ένα νέο γραφέα W_3 . Το κείμενο αυτό δε λαμβάνει την ονομασία $\Delta_{3,1}$, καθώς είναι το πρώτο κείμενο που αποδίδεται στο γραφέα W_3 .

Βήμα 9: Σχηματίζουμε το σύνολο

$$\Sigma_4 = \Sigma_0 - \{\Delta_{1,1}, \Delta_{1,2}, \dots, \Delta_{1,n_1}, \Delta_{2,1}, \Delta_{2,2}, \dots, \Delta_{2,n_2}, \Delta_{3,1}\}$$

και για κάθε D_i που ανήκει στο Σ_4 επαναλαμβάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα με τα 4, 5 και 6 προηγουμένως, με μοναδική διαφορά ότι τώρα το ρόλο του W_1 τον παίζει ο W_3 , αρχής γενομένης από το κείμενό του $\Delta_{3,1}$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο εντοπίζουμε όλα τα κείμενα $\Delta_{3,1}, \Delta_{3,2}, \dots, \Delta_{3,n3}$ του γραφέα W_3 , δεδομένου ότι στο γραφέα αυτόν αποδόθηκαν συνολικά $n3$ κείμενα.

Βήμα 10: Συνεχίζουμε τη διαδικασία των Βημάτων 8 και 9 με προφανή ευθύγραμμη επέκταση, εντοπίζοντας ενδεχομένως νέους γραφείς, έως ότου όλα τα κείμενα έχουν αποδοθεί σε αντίστοιχο γραφέα.

Η ανωτέρω διαδικασία υποκρύπτει ένα αξίωμα μεταβατικής ιδιότητας, το οποίο περιγράφεται κατωτέρω και το περιεχόμενο του οποίου θα καταστεί περισσότερο σαφές στο Κεφάλαιο 7 των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Αξίωμα μεταβατικής ιδιότητας

Έστωσαν τρία κείμενα, D_1, D_2, D_3 και έστω επίσης ότι έχουμε θεμελιώσει πως τα κείμενα D_1 και D_2 ανήκουν στον ίδιο γραφέα, W . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε θεμελιώσει πως τα κείμενα D_2 και D_3 ανήκουν στον ίδιο γραφέα. Τότε και τα τρία κείμενα, D_1, D_2 και D_3 ανήκουν στον ίδιο γραφέα W , ακόμα και αν αρχικά τα κείμενα D_1 και D_3 δεν προέκυπτε ότι ανήκουν στον ίδιο γραφέα. Συνεπώς, σε ισοδύναμη διατύπωση, η ένθεση ενός κειμένου D_2 , το οποίο αποδεικνύεται ότι ανήκει στον ίδιο γραφέα τόσο με το D_1 , όσο και με το D_3 , «γεφυρώνει/συνδέει» και τα D_1, D_3 , θεμελιώνοντας ότι και αυτά έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα.

Η επέκταση των ανωτέρω για οποιοδήποτε πλήθος κειμένων προκύπτει άμεσα με ευθύγραμμη επαγωγή.

□

6.3 Κατάταξη ενός συνόλου καμπυλών βάσει μιας τυχούσας ιδιότητας \mathcal{P}

Η ανάλυση η οποία παρουσιάστηκε στις Παραγράφους 6.1 και 6.2 αφορά την κατάταξη συμβόλων της αλφαβήτου επί τη βάσει του γραφέα τους. Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή μπορεί να γενικευτεί άμεσα, προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της κατάταξης ενός συνόλου τυχόντων καμπυλών βάσει μιας ιδιότητας \mathcal{P} , η οποία παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες: χωρίζει το σύνολο των καμπυλών σε διακριτές οικογένειες σχημάτων και εάν ένα μέλος κάθε τέτοιας οικογένειας υποστεί στροφή, παράλληλη μετατόπιση ή ομοιοθεσία κατά μήκος των αξόνων x και y χωριστά, τότε η καμπύλη αυτή παραμένει εντός της ίδιας οικογένειας.

Η μέθοδος αυτή δεν απαιτεί την ύπαρξη βάσης δεδομένων με σχήματα αναφοράς, αλλά απλά την επιλογή κάποιου εύλογου κατωφλίου εμπιστοσύνης α_T . Ακολουθεί συνοπτική περιγραφή της μεθόδου.

Συνοπτική περιγραφή της μεθόδου

Δεδομένου ενός συνόλου καμπυλών, οι οποίες δεν αντιπροσωπεύουν απαραίτητα γράμματα, προκειμένου να ταιριάξουμε βέλτιστα δύο από αυτές, θεωρούμε τη μία καμπύλη ως «πρότυπη» και την άλλη ως «τρέχουσα» και εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία η οποία αφορά την επίπεδη καμπυλότητα και παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 και στην Παράγραφο 5.1. Κατ' αυτόν τον τρόπο, λαμβάνουμε τους βέλτιστους παράγοντες ομοιοθεσίας a και b που πρέπει να εφαρμοστούν στην τρέχουσα καμπύλη, ώστε αυτή να έχει μέγεθος πολύ κοντινό σε εκείνο της πρότυπης καμπύλης.

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε στροφή και παράλληλη μετατόπιση στην καμπύλη που προκύπτει από την προηγηθείσα ομοιοθεσία της τρέχουσας και τοποθετούμε τις δύο καμπύλες σε βέλτιστη θέση, ώστε το σφάλμα προσαρμογής τους, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 5, να είναι ελάχιστο. Στη συνέχεια εντοπίζουμε τη στατιστική κατανομή του μέτρου ομοιότητας ξ που εισήχθη στην Παράγραφο 5.3. Εάν η ιδιότητα \mathcal{P} είναι πολυπαραμετρική, συμπεραίνουμε ότι το μέτρο ομοιότητας ξ ακολουθεί κανονική κατανομή, λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Σε κάθε περίπτωση, η θεωρητική υπόθεση σχετικά με τη στατιστική κατανομή που ακολουθεί το μέτρο ομοιότητας ξ μπορεί να ελεγχθεί χρησιμοποιώντας δοκιμές Kolmogorov – Smirnov ή/και Shapiro – Wilk.

Ακολουθως, εφαρμόζουμε επαναλαμβανόμενες συγκρίσεις και σχετικούς, κατάλληλους στατιστικούς ελέγχους, προκειμένου να προσδιορίσουμε τον αριθμό των διακριτών οικογενειών σχημάτων βάσει της ιδιότητας \mathcal{P} με ευθύγραμμη επέκταση της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στις αμέσως προηγούμενες Παραγράφους 6.1 και 6.2.

Εξυπακούεται δε ότι οι σχετικές τιμές πιθανοφάνειας θα αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά της ιδιότητας \mathcal{P} και θα έχουν τη μορφή της Σχέσης (6.4) όταν το ανάλογο του t^L μέτρο ομοιότητας ακολουθεί γνωστή κατανομή.

7 Εφαρμογή της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε στην αναγνώριση των γραφένων αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών χειρογράφων

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής της θεωρητικής ανάλυσης που παρουσιάστηκε στα Κεφάλαια 4, 5 και 6 στην αναγνώριση των γραφένων ενός συνόλου σημαντικών αρχαίων επιγραφών, αλλά και ενός εξίσου σημαντικού συνόλου βυζαντινών χειρογράφων. Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα δώσουμε μία σύντομη περιγραφή των κειμένων αυτών, καθώς και πληροφορίες που αφορούν την επιλογή τους.

Η μελέτη που αφορούσε την ταυτοποίηση των γραφένων στις αρχαίες επιγραφές προέκυψε μέσα από τη συνεργασία της ερευνητικής μας ομάδας με τον καθηγητή Stephen Tracy, πρώην διευθυντή της Αμερικανικής Σχολής Κλασικών Σπουδών στην Αθήνα και νυν καθηγητή της Σχολής Ιστορικών Σπουδών του Institute for Advanced Study στο Princeton των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Ο καθηγητής Tracy επέλεξε έναν αριθμό αρχαίων επιγραφών στις οποίες θα εφαρμοζόταν η μέθοδος. Αντίστοιχα, η μελέτη των γραφένων των βυζαντινών χειρογράφων προέκυψε από τη συνεργασία της ερευνητικής μας ομάδας με τον καθηγητή Christopher Blackwell, καθηγητή Κλασικών Ελληνικών στο Furman University στο Greenville της South Carolina των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Ο καθηγητής Blackwell επέλεξε έναν αριθμό από βυζαντινά χειρόγραφα γραμμένα σε παπύρους, επί των οποίων επίσης θα εφαρμοζόταν η μέθοδος που παρουσιάστηκε στη διατριβή αυτή για την ομαδοποίησή τους ανά γραφέα.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι τόσο ο καθηγητής Tracy, όσο και ο καθηγητής Blackwell δεν αποκάλυψαν στην ερευνητική ομάδα κανένα στοιχείο το οποίο θα μπορούσε να διευκολύνει την ταυτοποίηση του γραφέα των κειμένων που είχαν επιλέξει προς ταυτοποίηση. Συγκεκριμένα, κράτησαν κρυφές με μεγάλη σχολαστικότητα πληροφορίες που αφορούσαν τη γενικότερη περίοδο στην οποία γράφτηκαν τα κείμενα, το περιεχόμενό τους, την περιοχή στην οποία αυτά βρέθηκαν, αλλά και οποιαδήποτε άλλη πληροφορία την οποία εκείνοι γνώριζαν για τα κείμενα αυτά. Οι πληροφορίες που αφορούν τα κείμενα και παρουσιάζονται στην επόμενη Παράγραφο 7.1 γνωστοποιήθηκαν από τους καθηγητές Tracy και Blackwell στην ερευνητική

μας ομάδα μετά την εφαρμογή της μεθόδου και την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της εφαρμογής της στους καθηγητές αυτούς.

7.1 Τα κείμενα στα οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος

Στον Πίνακα 7.1 παρουσιάζεται η λίστα με τις 46 αρχαίες επιγραφές που δόθηκαν στην ερευνητική ομάδα από τον καθηγητή Stephen Tracy. Στον πίνακα αυτό παρουσιάζεται ο επίσημος κωδικός που καθένα από αυτά τα κείμενα έχει στην Αρχαία Αγορά ή στο Επιγραφικό Μουσείο, καθώς και ο απλούστερος κωδικός εργασίας που δόθηκε από την ερευνητική ομάδα σε κάθε μία από τις επιγραφές αυτές και ο οποίος χρησιμοποιήθηκε καθ' όλη τη διάρκεια της επεξεργασίας τους και της εφαρμογής της μεθόδου σε αυτές από την ερευνητική ομάδα. Οι 46 αυτές επιγραφές καλύπτουν μία ευρεία χρονική περίοδο και συγκεκριμένα από τα μέσα του τετάρτου έως το τέλος του δευτέρου αιώνα προ Χριστού και, ως εκ τούτου, περιλαμβάνουν πολλά διαφορετικά είδη γραφής των συμβόλων του ίδιου αλφαβήτου.

Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός
I1	0247	I17	6006	I33	7400
I2	0286	I18	6053	I34	7405
I3	1024	I19	6124	I35	7446
I4	1640	I20	6295	I36	7457
I5	2054	I21	6422	I37	7478
I6	2361	I22	6671	I38	7481

Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός
17	3717	123	7041	139	7482
18	3855	124	7156	140	7519
19	4033	125	7188	141	7542
110	4266	126	7190	142	7566
111	4330	127	7220	143	7567
112	4424	128	7237	144	7587
113	4462	129	7245	145	7723
114	4917	130	7254	146	10068
115	5039	131	7335		
116	5297	132	7398		

Πίνακας 7.1. Πίνακας με τις 46 αρχαίες επιγραφές στις οποίες εφαρμόστηκε η μέθοδος ομαδοποίησης ανάλογα με το γραφέα τους. Στον πίνακα αναφέρονται για κάθε μία επιγραφή ο επίσημος κωδικός που έχει από το Επιγραφικό Μουσείο ή την Αρχαία Αγορά, καθώς και ο απλούστερος κωδικός εργασίας που αποδόθηκε από τα μέλη της ερευνητικής ομάδας σε αυτή.

Στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζεται η επιγραφή με κωδικό 7567 από το δοθέν σύνολο επιγραφών.



Σχήμα 7.1. Εικόνα της αρχαίας επιγραφής 7567.

Αντίστοιχα, στον Πίνακα 7.2 παρουσιάζεται η λίστα των 25 βυζαντινών χειρογράφων στα οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος ομαδοποίησης. Στον πίνακα αυτό εμφανίζεται τόσο ο κωδικός του εκάστοτε παπύρου, όπως αυτός δόθηκε στην ερευνητική μας ομάδα από τον καθηγητή Christopher Blackwell, όσο και ο απλούστερος κωδικός εργασίας που δόθηκε σε κάθε έναν από τους παπύρους από την ερευνητική ομάδα. Στον Πίνακα 7.3 παρουσιάζεται η ίδια λίστα, στην οποία σημειώνεται ο κωδικός εργασίας που δόθηκε σε κάθε χειρόγραφο από την ερευνητική ομάδα, καθώς και ο επίσημος κωδικός του κάθε ενός.

Οι χειρόγραφοι τόμοι, μέρος των οποίων αποτελούν οι ανωτέρω πάπυροι και μέσω των οποίων σώζεται έως τις μέρες μας το ομηρικό έπος της Ιλιάδας, αναπαρήχθησαν στην Κωνσταντινούπολη μεταξύ του 10^{ου} και του 11^{ου} αιώνα. Κάθε σελίδα κάθε ενός τέτοιου τόμου περιλαμβάνει το κείμενο του ομηρικού έργου στο κέντρο της, καθώς και σχόλια γραμμένα στα περιθώριά της, αλλά και ανάμεσα στις γραμμές του κεντρικού κειμένου [62]. Στα Σχήματα 7.2 και 7.3 παρουσιάζονται δύο σελίδες από το δοθέν σύνολο παπύρων.

Κατά τον 15^ο αιώνα, μεγάλο μέρος των χειρογράφων αυτών μεταφέρθηκε στη Βενετία από τον Έλληνα επίσκοπο Βασίλειο Βηρσαρίωνα τον Τραπεζούντιο και αποτέλεσε μέρος της πρώτης συλλογής της βιβλιοθήκης Marciana της Βενετίας. Για το λόγο αυτό, τα χειρόγραφα αυτά ονομάζονται στο σύνολό τους «Marcianus Graecus», ενώ οι επί μέρους τόμοι έχουν τις ονομασίες «Marcianus Graecus Z. 454 [= 822]», «Marcianus Graecus Z. 453 [= 821]» και «Marcianus Graecus Z. 458 [= 841]». Στους μελετητές του ομηρικού έργου, τα δύο πρώτα από τα έργα αυτά είναι περισσότερο γνωστά με τις απλούστερες ονομασίες τους «Venetus A» και «Venetus B», αντίστοιχα [62, 63].

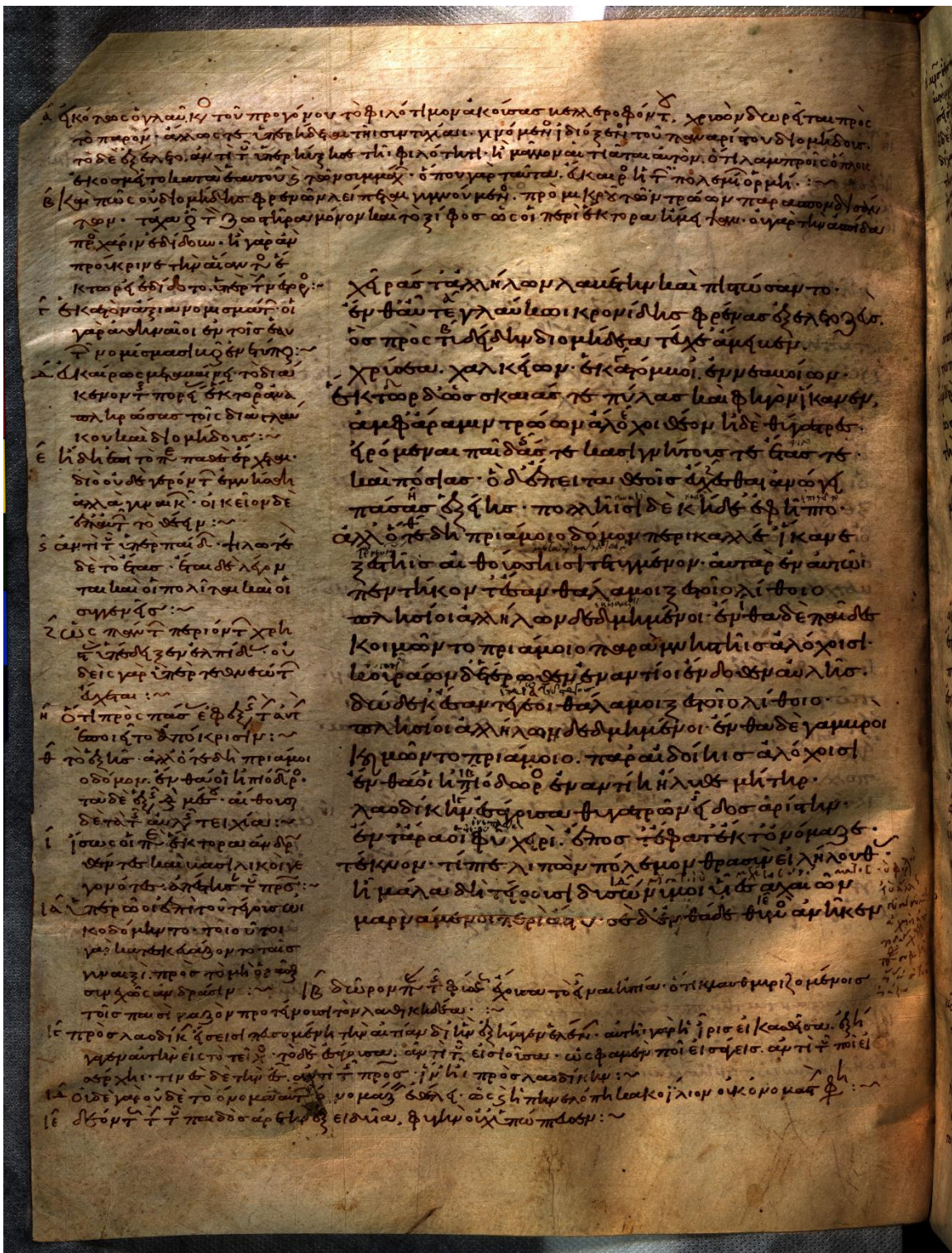
Τα υπόλοιπα χειρόγραφα αποκτήθηκαν από τον βασιλιά της Ισπανίας Φίλιππο τον 2^ο κατά το 16^ο αιώνα και μεταφέρθηκαν από τη Βενετία, όπου και αρχικά βρίσκονταν, στην Ισπανία. Τοποθετήθηκαν δε στη βιβλιοθήκη του μοναστηριού του San Lorenzo στο El Escorial της Ισπανίας, ως μέρος της βασιλικής βιβλιοθήκης. Ως εκ τούτου, τα χειρόγραφα αυτά είναι στο σύνολό τους γνωστά με το όνομα «Escorialensis». Τα επί μέρους έργα που απαρτίζουν τη συλλογή αυτή χειρογράφων είναι γνωστά με τα ονόματα «Escorialensis Y.I.1» και «Escorialensis Ω.I.12», αλλά και με τα απλούστερα ονόματα «Escorialensis 3» και «Escorialensis 4», αντίστοιχα [64].

Κωδικός Εργασίας	Δοθείς Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Δοθείς Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Δοθείς Κωδικός
BC1	T01_I01	BC10	T02_I10	BC21	T04_I21
BC2	T01_I02	BC11	T02_I11	BC22	T04_I22
BC3	T01_I03	BC13	T02_I13	BC23	T04_I23
BC4	T01_I04	BC14	T03_I14	BC24	T04_I24
BC5	T01_I05	BC16	T03_I16	BC25	T04_I25
BC6	T01_I06	BC17	T03_I17	BC26	T04_I26
BC7	T01_I07	BC18	T03_I18	BC27	T04_I27
BC8	T02_I08	BC19	T03_I19		
BC9	T02_I09	BC20	T03_I20		

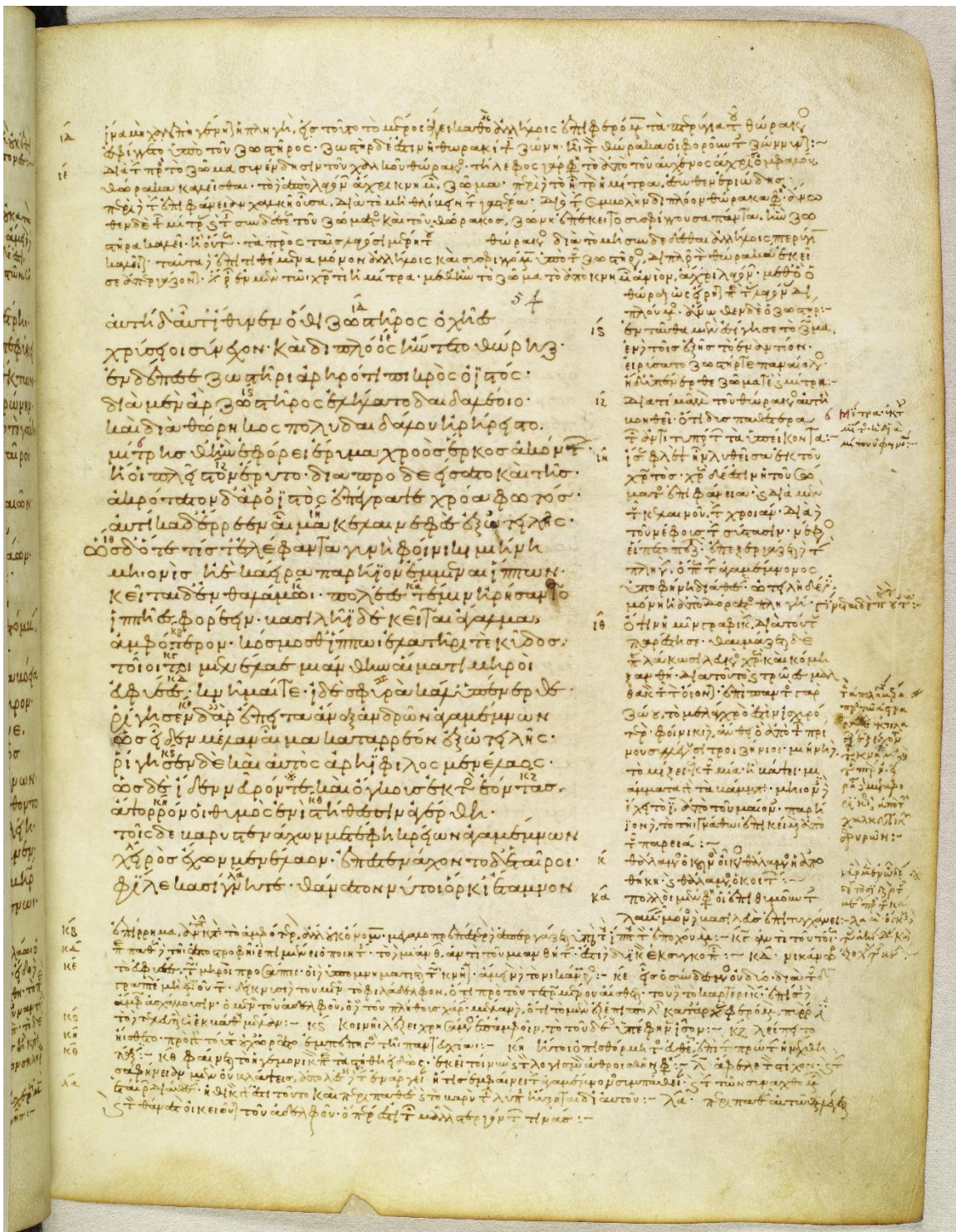
Πίνακας 7.2. Πίνακας με τους 25 βυζαντινούς παπύρους στους οποίους εφαρμόστηκε η μέθοδος κατάταξής τους σε ομάδες ανάλογα με το γραφέα τους. Στον πίνακα αναφέρεται ο κωδικός που απέδωσε ο καθηγητής Blackwell σε κάθε πάπυρο, καθώς και ο απλούστερος κωδικός εργασίας που αποδόθηκε από τα μέλη της ερευνητικής ομάδας σε αυτόν.

Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός	Κωδικός Εργασίας	Επίσημος Κωδικός
BC1	Escorialensis 4 – 142r	BC16	Venetus B – 54r
BC2	Venetus A – 47v	BC17	Escorialensis 3 – 72r
BC3	Venetus B – 44r	BC18	Marcianus Graecus Z. 458 – 37v
BC4	Venetus A – 23r	BC19	Escorialensis 3 – 97r
BC5	Escorialensis 3 – 40r	BC20	Marcianus Graecus Z. 458 – 21v
BC6	Escorialensis 4 – 49v	BC21	Marcianus Graecus Z. 458 – 43v
BC7	Venetus A – 62r	BC22	Escorialensis 4 – 69v
BC8	Venetus A – 36r	BC23	Marcianus Graecus Z. 458 – 32r
BC9	Escorialensis 4 – 76v	BC24	Marcianus Graecus Z. 458 – 8r
BC10	Escorialensis 3 – 100r	BC25	Escorialensis 3 – 128r
BC11	Venetus A – 52r	BC26	Escorialensis 3 – 83v
BC13	Escorialensis 4 – 86r	BC27	Escorialensis 3 – 143v
BC14	Escorialensis 4 – 59v		

Πίνακας 7.3. Πίνακας με τους 25 βυζαντινούς παπύρους στους οποίους εφαρμόστηκε η μέθοδος κατάταξης επί τη βάσει του γραφέα τους. Στον πίνακα αναφέρεται ο κωδικός εργασίας που δόθηκε σε κάθε πάπυρο από την ερευνητική ομάδα, καθώς και ο επίσημος κωδικός του κάθε ενός.



Σχήμα 7.2. Εικόνα του βυζαντινού πατύρου T04_I26 (Escorialensis 3 – 83v) από το δοθέν σύνολο πατύρων. Φυλάσσεται στο μοναστήρι του San Lorenzo στο El Escorial της Ισπανίας.



Σχήμα 7.3. Εικόνα του βυζαντινού παπύρου T03_116 (Venetus B – 54r) από το δοθέν σύνολο παπύρων. Φυλάσσεται στη βιβλιοθήκη Marciana της Βενετίας.

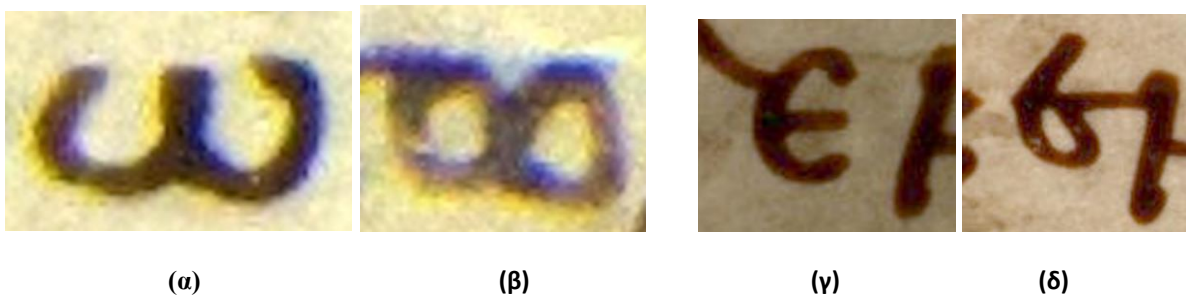
7.2 Οι εγγενείς δυσκολίες της αναγνώρισης γραφένων αρχαίων κειμένων

Η πρώτη και μεγαλύτερη δυσκολία την οποία κληθήκαμε να αντιμετωπίσουμε ήταν η απουσία κειμένων αναφοράς τα οποία θα μπορούσαν να περιέχουν δείγματα γραφής όλων ή ορισμένων από τους γραφείς στους οποίους κληθήκαμε να αποδώσουμε τα κείμενα που είχαμε στη διάθεσή μας και παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 7.1. Η ιδιαιτερότητα αυτή του προβλήματος καθιστά τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας διατριβής ριζικά διαφορετική σε σχέση με την πλειοψηφία των μεθόδων ταυτοποίησης γραφέα που απαντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία και αναφέρθηκαν στην Παράγραφο 2.1. Επιπλέον, δεν υπήρχε καμία άλλη διαθέσιμη πληροφορία σχετική με τα κείμενα ή/και τους γραφείς αυτών, όπως για παράδειγμα η χρονική περίοδος στην οποία αυτά γράφτηκαν.

Μία ακόμη σημαντική δυσκολία έγκειτο στο γεγονός ότι δεν ήταν γνωστός ο αριθμός των διαφορετικών χεριών στα οποία έπρεπε να αποδώσουμε τα διαθέσιμα κείμενα.

Εκτός από τις ανωτέρω γενικές δυσκολίες, υπήρχαν και άλλου τύπου προβλήματα, τα οποία σχετίζονταν άμεσα με τα κείμενα τα οποία κληθήκαμε να επεξεργαστούμε. Αυτά ήταν τα εξής:

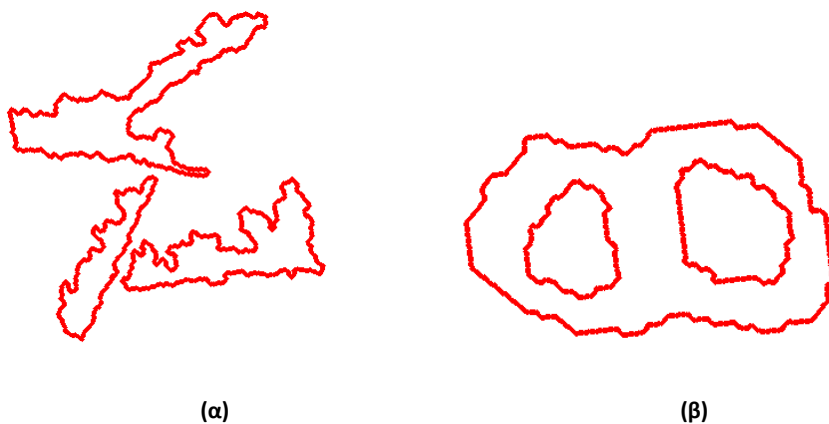
1. Η διαφοροποίηση του τρόπου γραφής συγκεκριμένων συμβόλων της αλφαβήτου, ακόμα και από τον ίδιο γραφέα. Για παράδειγμα, γράμματα όπως το 'θ', το 'ω' και το 'ε', ακόμη και αν έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα και ακόμη και αν απαντώνται περισσότερες της μίας φορές στο ίδιο κείμενο, είναι δυνατόν να εμφανίζονται «ανοικτά» ή «κλειστά», όπως παρουσιάζεται σε χαρακτηριστικά παραδείγματα στο Σχήμα 7.4.



Σχήμα 7.4. Διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'ω' («ανοικτό» στο Σχήμα (α) και «κλειστό» στο Σχήμα (β)) και του γράμματος 'ε' («ανοικτό» στο Σχήμα (γ) και «κλειστό» στο Σχήμα (δ)) που έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα.

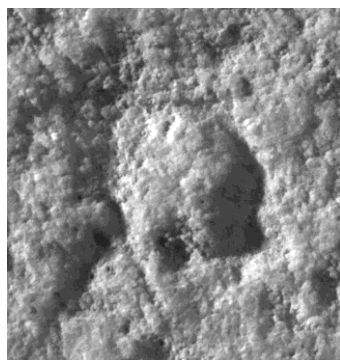
Επίσης χαρακτηριστική περίπτωση είναι αυτή του μικρού γράμματος 'κ', το οποίο σε αρκετές περιπτώσεις εμφανίζεται σαν το λατινικό γράμμα 'u', ενώ σε άλλες περιπτώσεις, ακόμη και στο ίδιο κείμενο εμφανίζεται σαν 'κ'. Όσον αφορά τις αρχαίες επιγραφές, πολλές και χαρακτηριστικές είναι οι διαφορετικές υλοποιήσεις του γράμματος 'Α'. Είναι συχνό το φαινόμενο ακόμη και ο ίδιος γραφέας μέσα στο ίδιο κείμενο σε ορισμένες περιπτώσεις να ενώνει το αριστερό και το δεξί σκέλος του γράμματος 'Α' με την οριζόντια γραμμή, σε άλλες περιπτώσεις να ενώνει την οριζόντια γραμμή μόνο με ένα από τα δύο σκέλη και σε άλλες περιπτώσεις να μην ενώνει την οριζόντια γραμμή με κανένα από τα δύο σκέλη του γράμματος.

2. Αρκετές φορές, οι υλοποιήσεις ορισμένων γραμμάτων παρουσιάζουν ιδιαίτερα θορυβώδη περιγράμματα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι εντονότερο στις αρχαίες επιγραφές, αλλά εμφανίζεται συχνά και σε βυζαντινούς παπύρους. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις υλοποιήσεων γραμμάτων με θορυβώδη περιγράμματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.5. Ο θόρυβος που εμφανίζεται στο περίγραμμα μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες όπως τη φθορά του χρόνου, την ποιότητα του υλικού πάνω στο οποίο αποτυπώνεται η γραφή (πέτρα, πάπυρος κλπ.), το σχήμα του οργάνου γραφής (της πέννας, του καλεμιού κλπ.), την ηλικία του γραφέα, την ψυχολογική του διάθεση, το πόσο κουρασμένος ήταν, και άλλα.

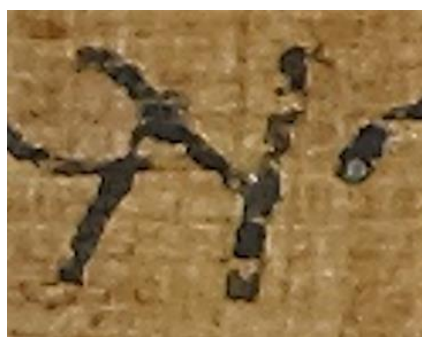


Σχήμα 7.5. Θορυβώδη περιγράμματα τα οποία εξήχθησαν από αρχαία επιγραφή (Σχήμα (α)) και βυζαντινό πάπυρο (Σχήμα (β)) και είχαν υποστεί σημαντική φθορά.

3. Παρατηρείται συχνά το φαινόμενο δύο διαφορετικές υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος που έχουν γραφεί από τον ίδιο γραφέα να παρουσιάζουν μικρότερη ομοιότητα μεταξύ τους από ότι με υλοποιήσεις του ίδιου γράμματος από διαφορετικούς γραφείς.
4. Ιδιαίτερα συχνά επίσης, τα προς μελέτη κείμενα παρουσιάζουν σημαντική φθορά, η οποία καθιστά την αναγνωσιμότητά τους ιδιαιτέρως δύσκολη και μερικές φορές αδύνατη. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα υλοποιήσεων γραμμάτων από ιδιαίτερα φθαρμένα κείμενα παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.6.



(α)



(β)

Σχήμα 7.6. Παραδείγματα υλοποιήσεων γραμμάτων από ιδιαίτερα φθαρμένα κείμενα. Στο Σχήμα (α) παρουσιάζεται μία υλοποίηση του γράμματος 'Α' από αρχαία επιγραφή, ενώ στο Σχήμα (β) εμφανίζεται μία υλοποίηση του γράμματος 'Ν' από βυζαντινό πάπυρο.

Βάσει των ανωτέρω παρατηρήσεων, είναι επιτακτική η ανάγκη μείωσης της επίδρασης του θορύβου οποιασδήποτε μορφής στη διαδικασία ταυτοποίησης γραφέα, καθώς η παρουσία του μπορεί να αλλοιώσει το περίγραμμα του εκάστοτε γράμματος και να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Προκειμένου να επιτευχθεί ο περιορισμός του θορύβου, πρέπει να καθοριστεί ένας πυρήνας για κάθε υλοποίηση καθενός συμβόλου της αλφαβήτου, ο οποίος να παραμένει αναλλοίωτος μεταξύ των διαφόρων κειμένων του ίδιου γραφέα. Προς το σκοπό αυτό, πρέπει να βρεθεί σε κάθε περίπτωση μία κατάλληλη μαθηματική περιγραφή αυτού του πυρήνα.

7.3 Αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου που βασίζεται στην επίπεδη καμπυλότητα στην αναγνώριση γραφέα αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών παπύρων

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε τα αποτελέσματα που έδωσε η μέθοδος που αναλύθηκε στην παρούσα διατριβή κατά την εφαρμογή της στην ομαδοποίηση των αρχαίων επιγραφών και των βυζαντινών παπύρων που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 7.1.

Η μέθοδος προσέφερε ιδιαίτερως εντυπωσιακά αποτελέσματα, τόσο κατά την εφαρμογή της στις αρχαίες επιγραφές, όσο και κατά την εφαρμογή της στους βυζαντινούς παπύρους, όπως θα φανεί από τα αμέσως επόμενα.

Πριν προχωρήσουμε στην παράθεση των αποτελεσμάτων, πρέπει να τονίσουμε πως για την εφαρμογή της μεθόδου που βασίζεται στην επίπεδη καμπυλότητα, πρέπει να υπάρχουν διαθέσιμα τα σώματα των διαφόρων υλοποιήσεων των συμβόλων της αλφαβήτου επί των οποίων εφαρμόζεται η μέθοδος. Όπως αναφέρθηκε ήδη στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 5 της παρούσας διατριβής, για την εξαγωγή του σώματος των διαφόρων υλοποιήσεων των γραμμάτων από τις εικόνες των κειμένων (επιγραφών ή παπύρων) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος κατάτμησης που παρουσιάζεται στην εργασία [60]. Στη συνέχεια, οι εξαχθείσες εικόνες των γραμμάτων μετατράπηκαν σε ασπρόμαυρες με κατωφλιοποίηση και ακολούθως πραγματοποιήθηκε η εξαγωγή των περιγραμμάτων των υλοποιήσεων των συμβόλων, με τη μέθοδο που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας [61].

Ειδικότερα, οι βυζαντινοί πάπυροι που επεξεργαστήκαμε ήταν αυτοί παραθέτουμε στον Πίνακα 7.2, οι οποίοι συνθέτουν το σύνολο

$$\Sigma^0 = \left\{ \begin{array}{l} \text{BC1, BC2, BC3, BC4, BC5, BC6, BC7, BC8, BC9, BC10, BC11, BC13, BC14,} \\ \text{BC16, BC17, BC18, BC19, BC20, BC21, BC22, BC23, BC24, BC25, BC26, BC27} \end{array} \right\}$$

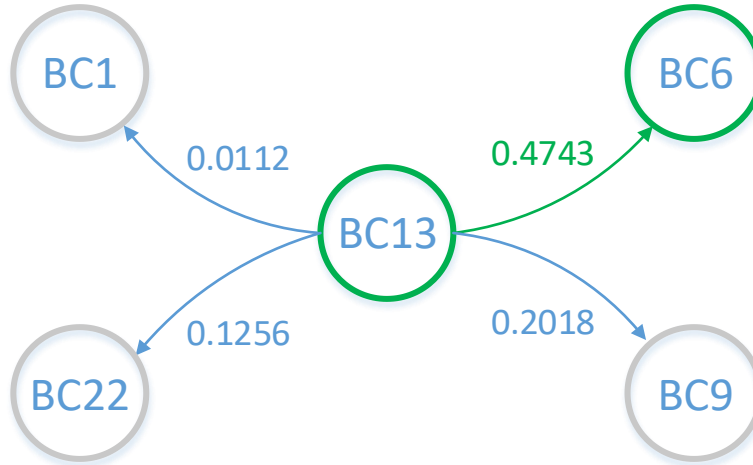
Από όλους τους παπύρους του συνόλου Σ^0 εξήχθησαν όλες οι υλοποιήσεις των συμβόλων της αλφαβήτου που στοιχειοθετούν το σύνολο

$$\Sigma^S = \{\alpha, \delta, \eta, \theta, \kappa, \lambda, \sigma, \varphi, \omega\}$$

Σε κάθε ζεύγος παπύρων του συνόλου Σ^0 και για όλα τα σύμβολα της αλφαβήτου του συνόλου Σ^S εφαρμόστηκε αρχικά η μεθοδολογία του Κεφαλαίου 5. Κατ' αυτόν τον τρόπο επετεύχθη η βέλτιστη προσαρμογή όλων των υλοποιήσεων των συμβόλων του συνόλου Σ^S , για κάθε ζεύγος παπύρων του συνόλου Σ^0 και υπολογίστηκαν όλες οι ποσότητες $\xi(\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_2)$, σύμφωνα με την ανάλυση της Παραγράφου 5.3.

Επί τη βάσει των ποσοτήτων αυτών και με εφαρμογή της στατιστικής ανάλυσης που εισήχθη στο Κεφάλαιο 6, υπολογίσαμε τις τιμές της πιθανοφάνειας $\alpha_{i,j}$ για όλους τους συνδυασμούς των διαθέσιμων παπύρων D_i και D_j , όπου $D_i, D_j \in \Sigma^0$ και διαπιστώσαμε ότι η εν απολύτως ελάχιστη τιμή πιθανοφάνειας, η οποία ήταν ταυτόχρονα μικρότερη από το επιλεγμένο κατώφλι $\alpha_T = 10^{-2}$, ήταν $3.603 \cdot 10^{-61}$. Η ελάχιστη αυτή τιμή πιθανοφάνειας προέκυψε από τη σύγκριση των παπύρων BC4 και BC13. Θεωρήσαμε, επομένως ότι οι δύο αυτοί πάπυροι ανήκαν στους δύο πρώτους γραφείς που διέκρινε το σύστημα και αποδώσαμε τον πάπυρο BC13 στο Γραφέα 1 και τον BC4 στο Γραφέα 2.

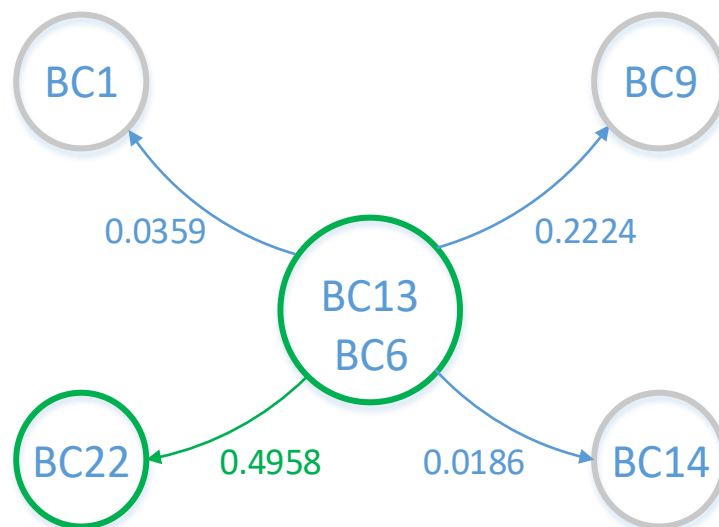
Στη συνέχεια, για το Γραφέα 1, εκκινώντας από το κείμενο BC13, βρήκαμε όλους τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^1 = \Sigma^0 - \{BC4, BC13\}$, οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με τον πάπυρο BC13 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι $\alpha_T = 10^{-2}$. Οι πάπυροι αυτοί παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.7 μέσα σε κυκλάκια, ενώ στο βέλος που συνδέει το κυκλάκι του παπύρου BC13 με αυτά των υπολοίπων παπύρων σημειώνεται η αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας. Όλοι οι υπόλοιποι πάπυροι που δεν παρουσιάζονται στο σχήμα έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μικρότερη από το κατώφλι α_T κατά τη σύγκρισή τους με τον πάπυρο BC13. Από το σχήμα αυτό διαπιστώνουμε πως η μέγιστη πιθανοφάνεια προέκυψε από τη σύγκριση του παπύρου BC13 με τον BC6 και για το λόγο αυτό, τόσο τα αντίστοιχα κυκλάκια, όσο και το βέλος και η αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας σημειώνονται στο Σχήμα 7.7 με πράσινο χρώμα.



Σχήμα 7.7. Γραφική αναπαράσταση των παπύρων του συνόλου Σ^1 που συγκρινόμενοι με τον πάπυρο BC13 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι $\alpha_T = 10^{-2}$. Στο σχήμα αυτό κάθε κυκλάκι αντιπροσωπεύει έναν πάπυρο και εντός του σημειώνεται ο κωδικός εργασίας του παπύρου. Δίπλα σε κάθε βέλος σημειώνεται η τιμή της πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση μεταξύ των παπύρων που συνδέονται με αυτό. Από το σχήμα προκύπτει ότι τη μεγαλύτερη τιμή πιθανοφάνειας έδωσε η σύγκριση μεταξύ των παπύρων BC13 και BC6. Για το λόγο αυτό, οι αντίστοιχοι κύκλοι, το βέλος που τους συνδέει και η τιμή της πιθανοφάνειας επί αυτού σημειώνονται με πράσινο χρώμα.

Ακολούθως, θεωρήσαμε το ζεύγος των παπύρων BC13 και BC6. Για το ζεύγος αυτό εντοπίσαμε όλους τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^2 = \Sigma^1 - \{BC6\} = \Sigma^0 - \{BC4, BC13, BC6\}$ οι οποίοι συγκρινόμενοι με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους BC13 και BC6 έδωσαν τιμές πιθανοφάνειας μεγαλύτερες του κατωφλίου α_T . Οι εν λόγω πάπυροι παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.8. Στην περίπτωση στην οποία τόσο ο πάπυρος BC13, όσο και ο πάπυρος BC6 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T κατά τη σύγκρισή τους με έναν οποιοδήποτε πάπυρο του συνόλου Σ^2 , δίπλα στο αντίστοιχο βελάκι το οποίο συνδέει τους παπύρους αυτούς σημειώνεται η μεγαλύτερη τιμή πιθανοφάνειας που προέκυψε από τις συγκρίσεις. Για παράδειγμα, η σύγκριση του παπύρου BC13 με τον BC1 έδωσε τιμή πιθανοφάνειας 0.0112, ενώ η σύγκριση του BC6 με τον BC1 έδωσε τιμή πιθανοφάνειας 0.0359. Για το λόγο αυτό, στο Σχήμα 7.8 επάνω στο βέλος που συνδέει τους παπύρους που έχουν αποδοθεί στο Γραφέα 1 με τον πάπυρο BC1 έχει σημειωθεί η τιμή της πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση του BC6 με τον BC1. Από το Σχήμα 7.8 παρατηρούμε επίσης ότι στους παπύρους που έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T έχει προστεθεί ο πάπυρος BC14, η σύγκριση του οποίου με τον πάπυρο BC6 έδωσε τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T , ενώ η σύγκρισή του με τον πάπυρο BC13

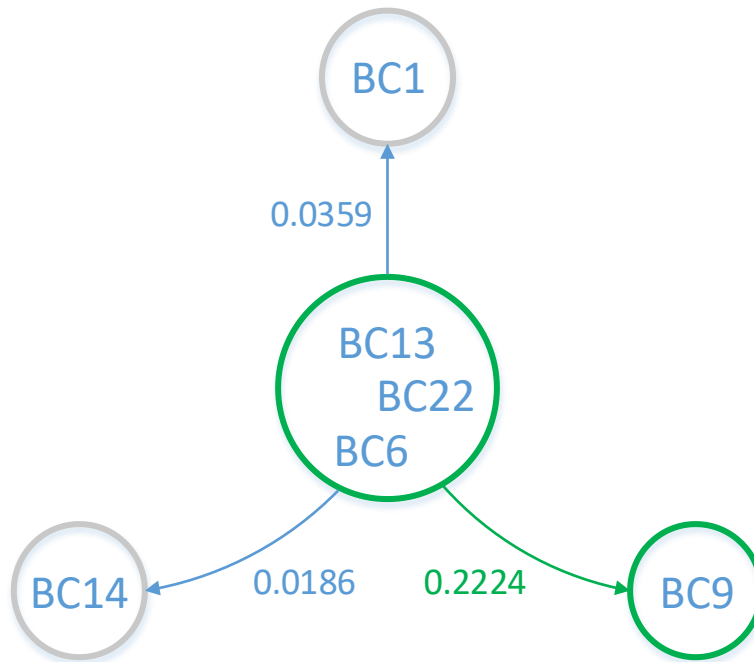
έδωσε τιμή πιθανοφάνειας $8.56 \cdot 10^{-4}$ και για το λόγο αυτό ο συγκεκριμένος πάπυρος δεν εμφανίζεται στο Σχήμα 7.7. Από το Σχήμα 7.8 προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή πιθανοφάνειας που προήλθε από τη σύγκριση οποιουδήποτε από τους παπύρους BC13 και BC6 που έχουν αποδοθεί στο Γραφέα 1 με τους παπύρους του συνόλου Σ^2 είναι 0.4958, η οποία αντιστοιχούσε στη σύγκριση του παπύρου BC6 με τον πάπυρο BC22. Για το λόγο αυτό, στο Σχήμα 7.8 το κυκλάκι του παπύρου BC22, το βελάκι που τον συνδέει με τους παπύρους που έχουν αποδοθεί στο Γραφέα 1 και η αντίστοιχη τιμή της πιθανοφάνειας που σημειώνεται δίπλα σε αυτό σημειώνονται με πράσινο χρώμα. Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι ο πάπυρος BC22 έχει επίσης γραφεί από το Γραφέα 1.



Σχήμα 7.8. Γραφική αναπαράσταση των παπύρων του συνόλου Σ^2 οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους που έχουν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1 (BC13 και BC6) έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι $\alpha_T = 10^{-2}$. Δίπλα σε κάθε βέλος σημειώνεται η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση μεταξύ του κάθε παπύρου με τον πάπυρο BC13 και τον πάπυρο BC6. Από το σχήμα συνάγεται ότι τη μεγαλύτερη τιμή πιθανοφάνειας προέκυψε από τη σύγκριση του BC6 με τον BC22 και για το λόγο αυτό τα αντίστοιχα κυκλάκια, το βέλος που τα συνδέει και η τιμή της αντίστοιχης πιθανοφάνειας σημειώνονται με πράσινο χρώμα.

Σε επόμενο στάδιο, συγκρίναμε τις τιμές πιθανοφάνειας που προέκυψαν από τη σύγκριση των παπύρων BC13, BC6 και BC22, οι οποίοι είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 με τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^3 = \Sigma^2 - \{BC22\} \equiv \Sigma^0 - \{BC4, BC13, BC6, BC22\}$. Οι πάπυροι οι οποίοι έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη του α_T κατά τη σύγκρισή τους με έναν τουλάχιστον από τους

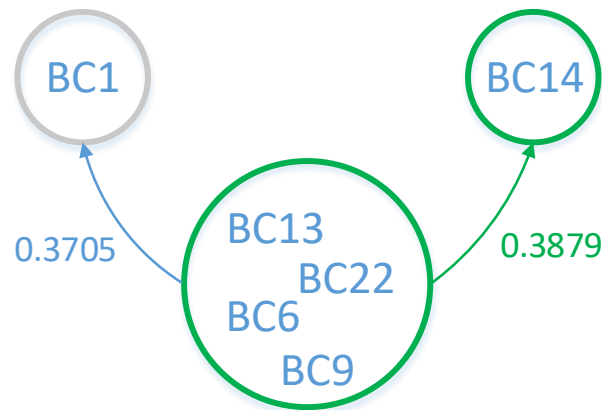
παπύρους BC13, BC6 ή BC22 παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.9. Όπως και στο Σχήμα 7.8, η τιμή της πιθανοφάνειας που σημειώνεται δίπλα σε κάθε βέλος είναι η μέγιστη τιμή πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση κάθε ενός από τους παπύρους που δεν είχαν στο στάδιο αυτό αποδοθεί σε κάποιο γραφέα με τους παπύρους που είχαν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1, εφ' όσον αυτή ήταν μεγαλύτερη του κατωφλίου α_T . Από το Σχήμα 7.9 παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή πιθανοφάνειας από όλες τις σημειούμενες είναι αυτή που αντιστοιχεί στη σύγκριση του παπύρου BC9 με κάποιον από τους παπύρους που έχουν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1 και συγκεκριμένα με τον BC6. Με τον τρόπο αυτό, ο πάπυρος BC9 αποδόθηκε επίσης στο Γραφέα 1.



Σχήμα 7.9. Γραφική αναπαράσταση των παπύρων οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους που, στο στάδιο αυτό της διαδικασίας, είχαν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T . Από το σχήμα προκύπτει ότι μεγαλύτερη τιμή πιθανοφάνειας έδωσαν οι πάπυροι οι οποίοι είχαν ήδη αποδοθεί στον Γραφέα 1 κατά τη σύγκρισή τους με τον πάπυρο BC9, όπως φαίνεται και από τον πράσινο χρωματισμό.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, λάβαμε τις τιμές πιθανοφάνειας που προέκυψαν από τη σύγκριση κάθε ενός από τους παπύρους BC13, BC6, BC22 και BC9 με τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^4 = \Sigma^3 - \{BC9\} \equiv \Sigma^0 - \{BC4, BC13, BC6, BC22, BC9\}$. Στην περίπτωση αυτή, οι

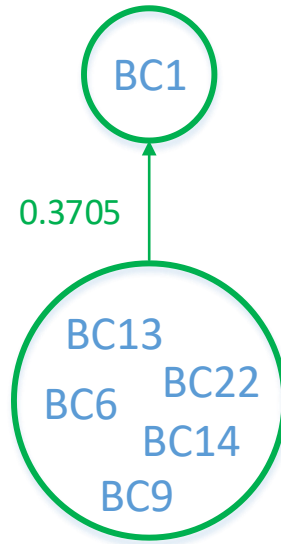
πάπυροι αυτού του συνόλου οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους που είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 μέχρι το παρόν στάδιο της διαδικασίας έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.10. Όπως και στα προηγούμενα βήματα εφαρμογής της μεθόδου, οι σημειούμενες τιμές πιθανοφάνειας δίπλα στα βελάκια που ενώνουν τους παπύρους που είχαν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1 με αυτούς που δεν είχαν ακόμη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα είναι σε κάθε περίπτωση οι μέγιστες. Στο παρόν σημείο εφαρμογής της μεθοδολογίας, από τη σύγκριση των παπύρων που είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 με τους παπύρους που δεν είχαν ακόμη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα, προέκυψε πως η μέγιστη τιμή πιθανοφάνειας αντιστοιχούσε στη σύγκριση των παπύρων BC9 και BC14 και ήταν ίση με 0.3879. Για το λόγο αυτό, ο πάπυρος BC14 θεωρήσαμε πως είχε επίσης γραφεί από το Γραφέα 1.



Σχήμα 7.10. Γραφική αναπαράσταση των παπύρων οι οποίοι έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T κατά τη σύγκρισή τους με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους που, έως το παρόν στάδιο, είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1. Η μέγιστη από αυτές τιμή πιθανοφάνειας ήταν η 0.3879, η οποία αντιστοιχούσε στη σύγκριση του BC9 με τον BC14, όπως υποδεικνύει ο σχετικός πράσινος χρωματισμός.

Στο σημείο αυτό είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 τα κείμενα BC13, BC6, BC22, BC9 και BC14. Λαμβάνοντας όλες τις συγκρίσεις των παπύρων αυτών με όλους τους υπόλοιπους παπύρους που δεν είχαν ακόμη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα διαπιστώσαμε πως οι μοναδικές συγκρίσεις που έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από $\alpha_T = 10^{-2}$ ήταν αυτές των παπύρων του Γραφέα 1 με τον πάπυρο BC1, όπως φαίνεται γραφικά και στο Σχήμα 7.11. Η μέγιστη από αυτές τις τιμές πιθανοφάνειας προέκυψε από τη σύγκριση του BC1 με τον BC9 και για το λόγο αυτό

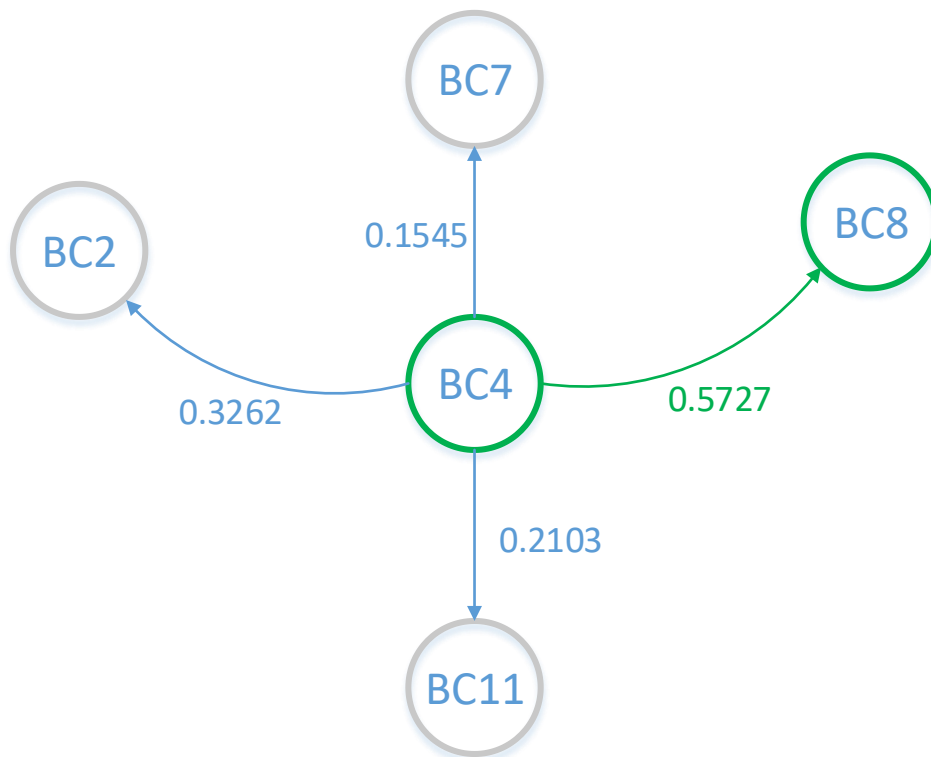
αυτή η τιμή πιθανοφάνειας σημειώνεται δίπλα στο βελάκι που συνδέει τους παπύρους του Γραφέα 1 με τον BC1. Επομένως, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο πάπυρος BC1 είχε επίσης γραφεί από το Γραφέα 1.



Σχήμα 7.11. Γραφική αναπαράσταση των παπύρων οι οποίοι όταν συγκρίθηκαν με έναν τουλάχιστον από τους παπύρους του Γραφέα 1 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T . Ο μοναδικός πάπυρος που πληρούσε την προϋπόθεση αυτή ήταν ο BC1, τον οποίο αποδώσαμε επίσης στο Γραφέα 1.

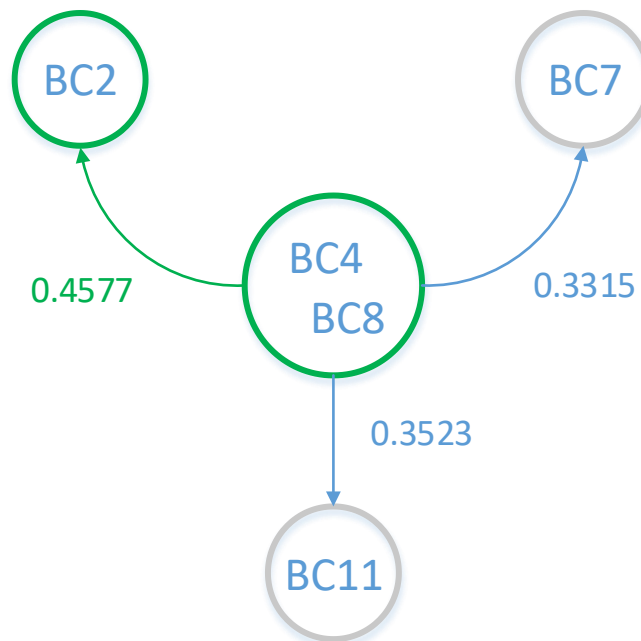
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι μετά την προσθήκη του παπύρου BC1 σε αυτούς που είχαν γραφεί από το Γραφέα 1, κανένας άλλος πάπυρος από το σύνολο $\Sigma^5 = \Sigma^0 - \{BC4, BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1\}$ δεν έδωσε τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T κατά τη σύγκρισή του με κάποιον από τους παπύρους του Γραφέα 1. Ειδικότερα, η μέγιστη τιμή πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση οποιουδήποτε από τους παπύρους του Γραφέα 1 με οποιονδήποτε από τους μη αποδοθέντες σε κάποιο γραφέα παπύρους ήταν $2.661 \cdot 10^{-8}$. Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένα μεγάλο «άλμα» ανάμεσα στην τιμή αυτή και στο κατώφλι α_T που επιλέχθηκε, αλλά και ένα ακόμη μεγαλύτερο «άλμα» ανάμεσα στην τιμή αυτή και στις τιμές πιθανοφάνειας με τις οποίες αποδόθηκαν οι διάφοροι πάπυροι στο Γραφέα 1, οι οποίες ήταν όλες της τάξης του 10^{-1} . Από τις παρατηρήσεις αυτές συνάγεται ότι η διάκριση του Γραφέα 1 από τους υπολοίπους γραφείς είναι ξεκάθαρη.

Συνεχίσαμε με την αναζήτηση των παπύρων που ανήκαν στο Γραφέα 2. Υπενθυμίζουμε πως από την αρχική σύγκριση των παπύρων και την εξαγωγή των αντίστοιχων τιμών πιθανοφάνειας, ο πρώτος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 2 ήταν ο BC4. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε για την εύρεση των παπύρων του Γραφέα 1, λάβαμε τις τιμές της πιθανοφάνειας που προέκυψαν από τη σύγκριση του παπύρου BC4 με τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^5 = \Sigma^0 - \{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4\}$. Οι πάπυροι οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με τον BC4 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από α_T παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.12. Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, η μέγιστη από αυτές τις τιμές πιθανοφάνειας ήταν αυτή που προέκυψε από τη σύγκριση των παπύρων BC4 και BC8. Επομένως, ο BC8 έγινε ο δεύτερος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 2 και για το λόγο αυτό το κυκλάκι του, το βέλος που τον συνδέει με τον BC4 και η αντίστοιχη τιμή πιθανοφάνειας επισημαίνονται στο Σχήμα 7.12 με πράσινο χρώμα.



Σχήμα 7.12. Πάπυροι οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με τον BC4 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T . Η μεγαλύτερη από τις τιμές αυτές προέκυψε από τη σύγκριση των παπύρων BC4 και BC8, όπως επισημαίνεται με πράσινο χρώμα στο σχήμα.

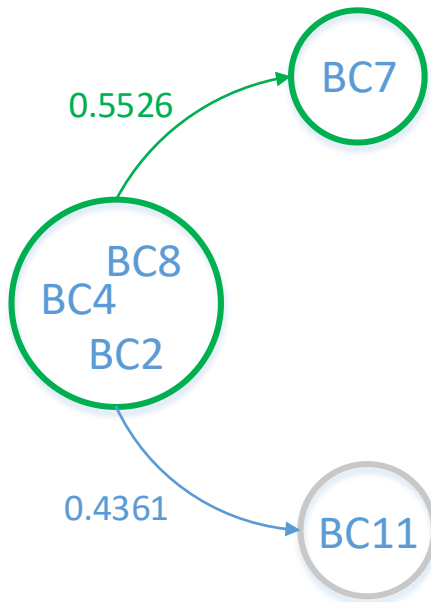
Στη συνέχεια, συγκρίναμε τις τιμές της πιθανοφάνειας που προέκυψαν από τη σύγκριση των παπύρων BC4 και BC8 με τους παπύρους του συνόλου $\Sigma^6 = \Sigma^0 - \{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4, BC8\}$. Οι πάπυροι οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με έναν από τους παπύρους BC4 ή BC8 έδωσαν τιμές πιθανοφάνειας μεγαλύτερες του κατωφλίου α_T ήταν οι BC2, BC7 και BC11, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.13. Όπως και σε όλα τα προηγούμενα σχήματα, στο Σχήμα 7.13 οι τιμές της πιθανοφάνειας που αναγράφονται δίπλα στο κάθε βέλος είναι οι μέγιστες τιμές που κάθε φορά προέκυψαν από τη σύγκριση του εκάστοτε παπύρου στον οποίο καταλήγει το βέλος με καθέναν από τους BC4 και BC8. Από το σχήμα προκύπτει άμεσα πως ο επόμενος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 2 ήταν ο BC2, καθώς έχει τη μεγαλύτερη από όλες τις σημειούμενες τιμές πιθανοφάνειας πάνω στο σχήμα.



Σχήμα 7.13. Πάπυροι οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με τους BC4 και BC8 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T . Η μεγαλύτερη από τις τιμές αυτές προέκυψε από τη σύγκριση του παπύρου BC8 με τον BC2, όπως επισημαίνεται με πράσινο χρώμα στο σχήμα.

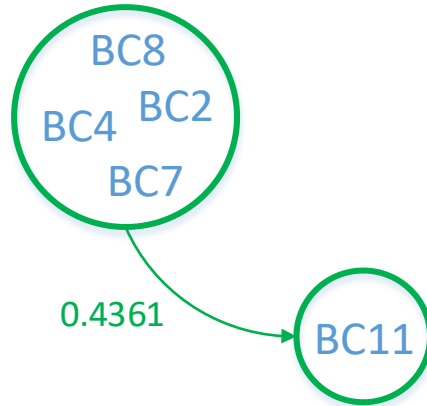
Έχοντας προσθέσει στα κείμενα του Γραφέα 2 τον πάπυρο BC2, λάβαμε όλες τις τιμές πιθανοφάνειας που προέκυψαν από τη σύγκριση των παπύρων που αποδόθηκαν ήδη στο Γραφέα 2 και των εναπομεινάντων παπύρων. Διαπιστώσαμε ότι οι μοναδικοί πάπυροι οι οποίοι

έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη του α_T κατά τη σύγκριση αυτή ήταν οι BC7 και BC11, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 7.14. Από το σχήμα αυτό προκύπτει άμεσα ότι το επόμενο κείμενο που αποδόθηκε στο Γραφέα 2 ήταν ο πάπυρος BC7.



Σχήμα 7.14. Πάπυροι οι οποίοι κατά τη σύγκρισή τους με τους παπύρους που είχαν έως αυτό το σημείο αποδοθεί στο Γραφέα 2 έδωσαν τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T σε τουλάχιστον μία σύγκριση. Η μέγιστη τιμή πιθανοφάνειας προέκυψε από τη σύγκριση του παπύρου BC7 με έναν από τους παπύρους BC4, BC8 ή BC2, όπως επισημαίνεται στο σχήμα με πράσινο χρώμα, καθιστώντας τον BC7 τον τέταρτο πάπυρο που αποδόθηκε από το σύστημα στο Γραφέα 2.

Ακολουθώντας, λάβαμε όλες τις τιμές της πιθανοφάνειας μεταξύ των στοιχείων του συνόλου $\{BC4, BC8, BC2, BC7\}$ των παπύρων που είχαν αποδοθεί μέχρι στιγμής στο Γραφέα 2 και των στοιχείων του συνόλου $\Sigma^7 = \Sigma^0 - \{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4, BC8, BC2, BC7\}$ των παπύρων που δεν είχαν ακόμη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα. Διαπιστώσαμε ότι ο μοναδικός πάπυρος του συνόλου Σ^7 ο οποίος κατά τη σύγκρισή του με τους παπύρους του Γραφέα 2 έδωσε τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη του κατωφλίου α_T ήταν ο BC11, όπως απεικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα 7.15.



Σχήμα 7.15. Ο τελευταίος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 2 ήταν ο BC11. Κανένας άλλος πάπυρος δεν έδωσε τιμή πιθανοφάνειας μεγαλύτερη από το κατώφλι α_T κατά τη σύγκρισή του με τους παπύρους που αποδόθηκαν στο Γραφέα 2.

Μετά από σύγκριση των τιμών πιθανοφάνειας των παπύρων που αποδόθηκαν στο Γραφέα 2 με τους υπόλοιπους παπύρους που είτε δεν είχαν αποδοθεί ακόμη σε κάποιο γραφέα, είτε είχαν ήδη αποδοθεί στο Γραφέα 1, διαπιστώθηκε ότι η μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας αυτής ήταν $8.5 \cdot 10^{-4}$. Η απόσταση της τιμή αυτής από το κατώφλι α_T , αλλά και από την τάξη μεγέθους των τιμών της πιθανοφάνειας με την οποία κάθε πάπυρος αποδόθηκε στο Γραφέα 2, η οποία ήταν 10^{-1} , είναι σημαντική. Από τη δοκιμή αυτή συνάγεται άμεσα ότι ο Γραφέας 2, όπως και ο Γραφέας 1 προηγουμένως, διαχωρίζεται πλήρως από τους υπολοίπους. Ως εκ τούτου, ο πάπυρος BC11 ήταν ο τελευταίος που αποδόθηκε στο Γραφέα 2.

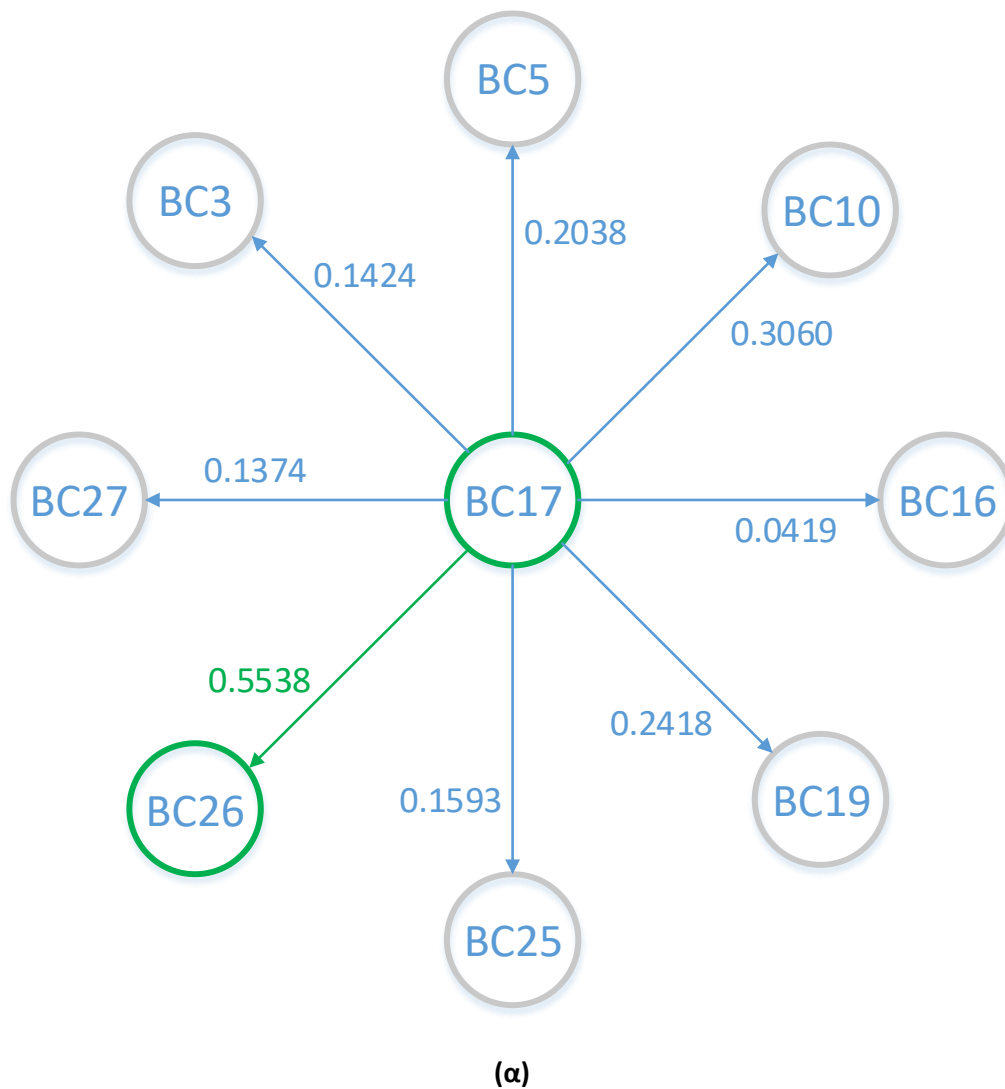
Στη συνέχεια, καθώς δεν υπήρχαν άλλοι πάπυροι οι οποίοι να έχουν ήδη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα, αλλά και λόγω του ότι οι πάπυροι που είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 και στο Γραφέα 2 παρουσίαζαν πολύ μικρές τιμές πιθανοφάνειας κατά τη σύγκρισή τους με τους υπολοίπους παπύρους, αναζητήσαμε έναν πάπυρο ο οποίος να ανήκει σε έναν τρίτο γραφέα. Μετά από σύγκριση των παπύρων του συνόλου

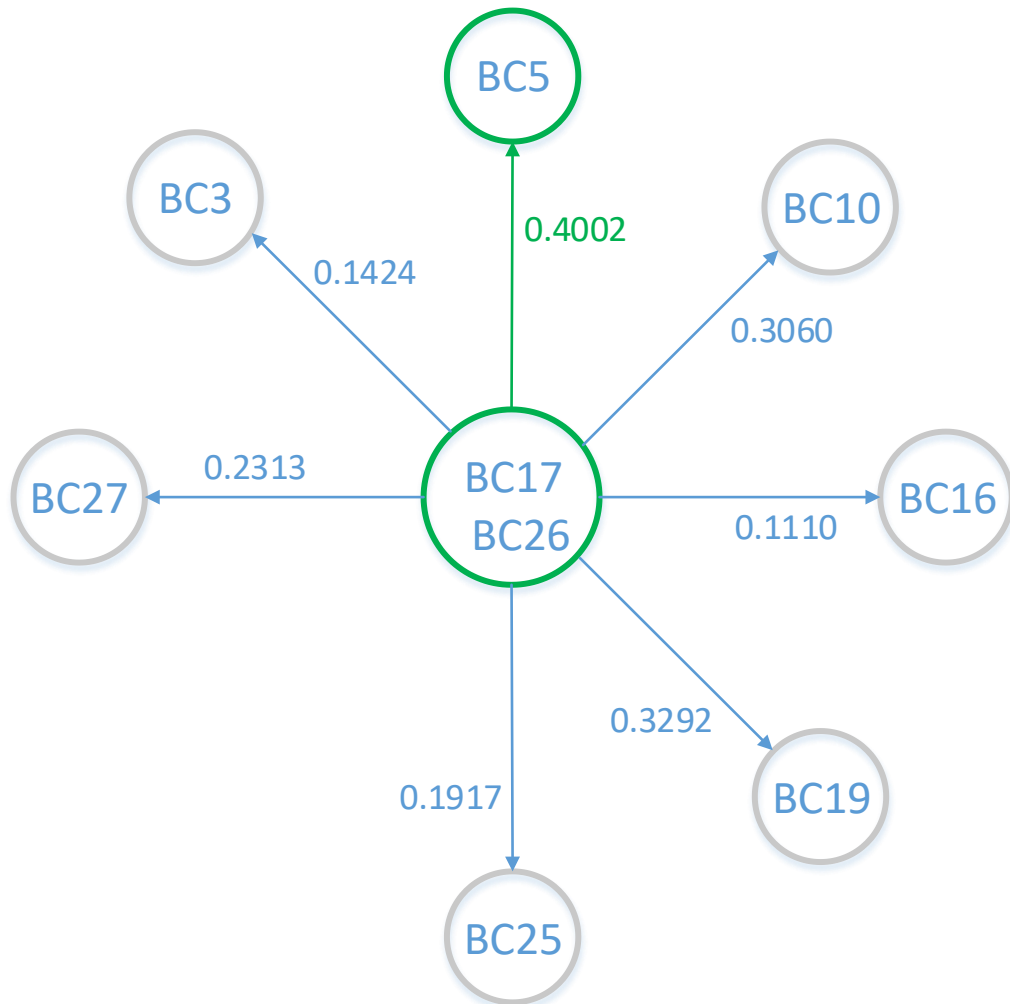
$$\Sigma^8 = \Sigma^0 - \{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4, BC8, BC2, BC7, BC11\}$$

με τους παπύρους που είχαν αποδοθεί στο Γραφέα 1 και στο Γραφέα 2, προέκυψε ότι η ελάχιστη τιμή πιθανοφάνειας ήταν $5.681 \cdot 10^{-49}$ και αντιστοιχούσε στη σύγκριση του παπύρου BC6 του Γραφέα 1 με τον πάπυρο BC17 που δεν είχε ακόμη αποδοθεί σε κάποιο γραφέα. Ο

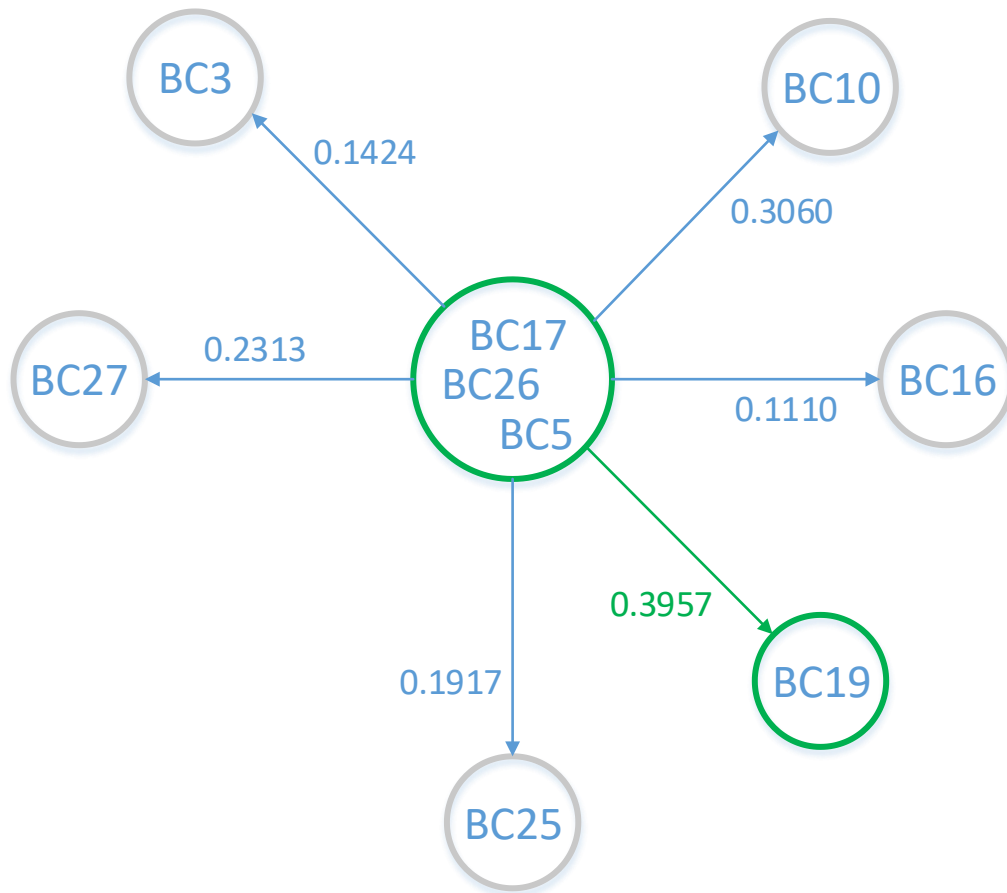
πάπυρος BC17 ήταν με τον τρόπο αυτό ο πρώτος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 3. Τονίζουμε ότι η επιλογή αντιπροσωπευτικού πάπυρου για το Γραφέα 3 με βάση την μέση αρμονική πιθανοφάνεια ή και τη μέγιστη πιθανοφάνεια κάποιος πάπυρος του συνόλου Σ^8 να ανήκει στο Γραφέα 1 ή στο Γραφέα 2 οδήγησαν στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα.

Η μεθοδολογία με την οποία βρήκαμε τα υπόλοιπα κείμενα του Γραφέα 3 ήταν ακριβώς ίδια με αυτή με την οποία εντοπίσαμε τα κείμενα του Γραφέα 1 και του Γραφέα 2. Για το λόγο αυτό η παράθεση των σχετικών βημάτων θα γίνει μέσω των Σχημάτων (α) έως (η) του Σχήματος 7.16.

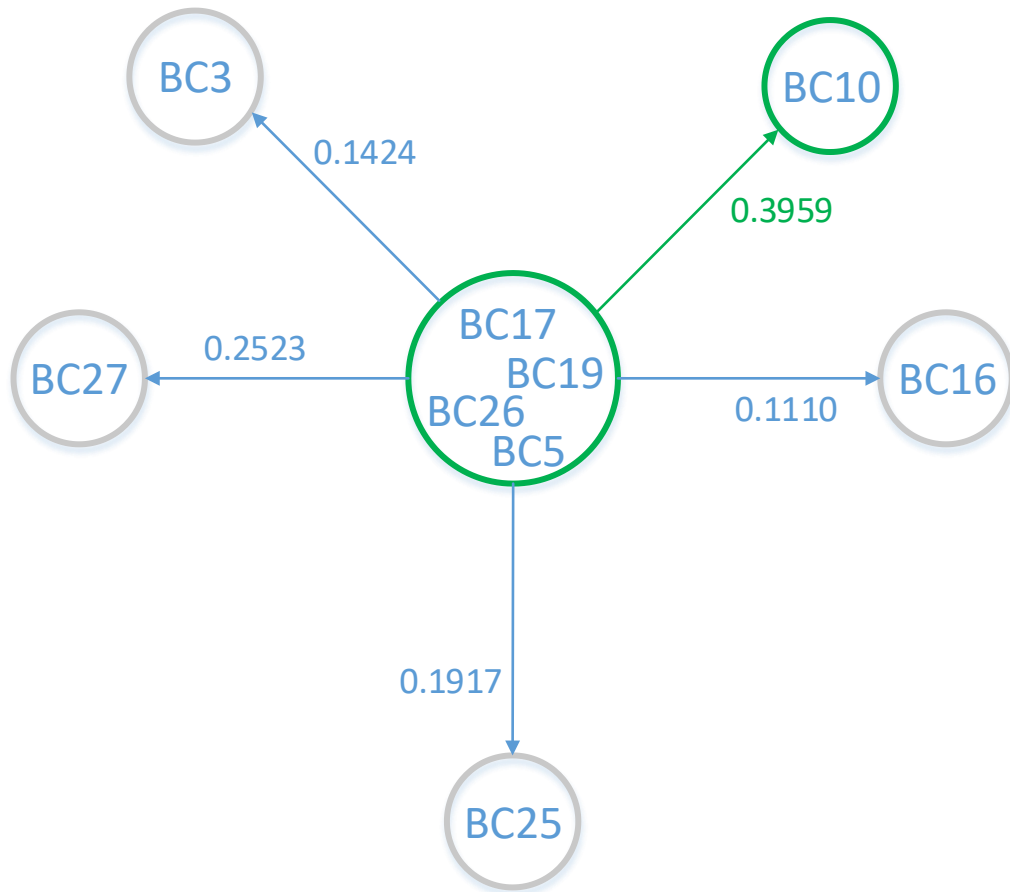




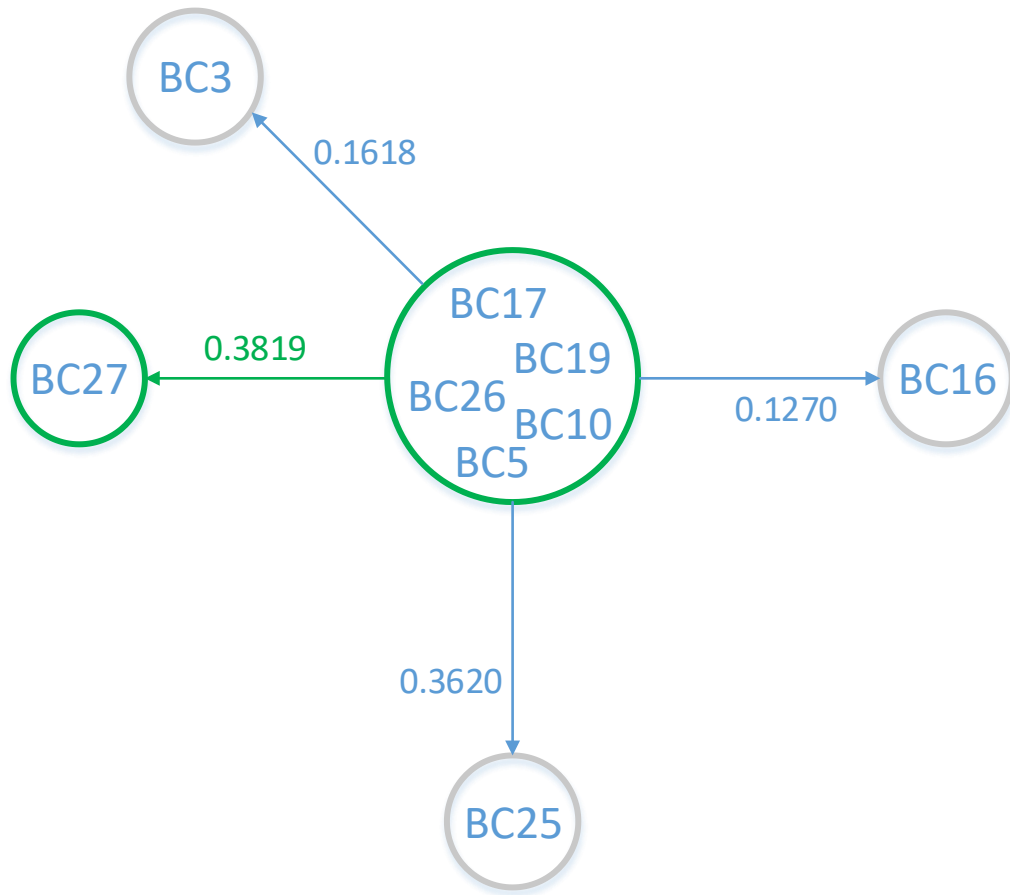
(B)



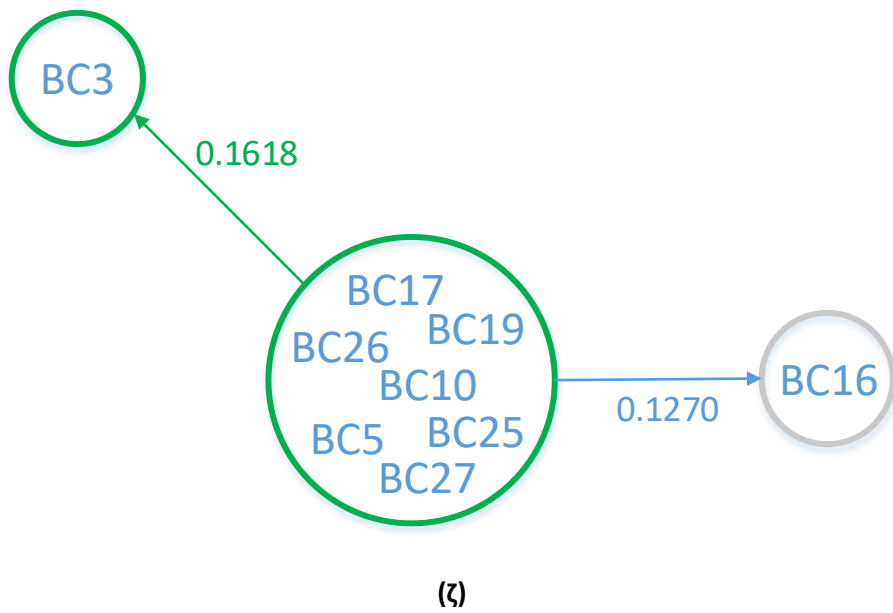
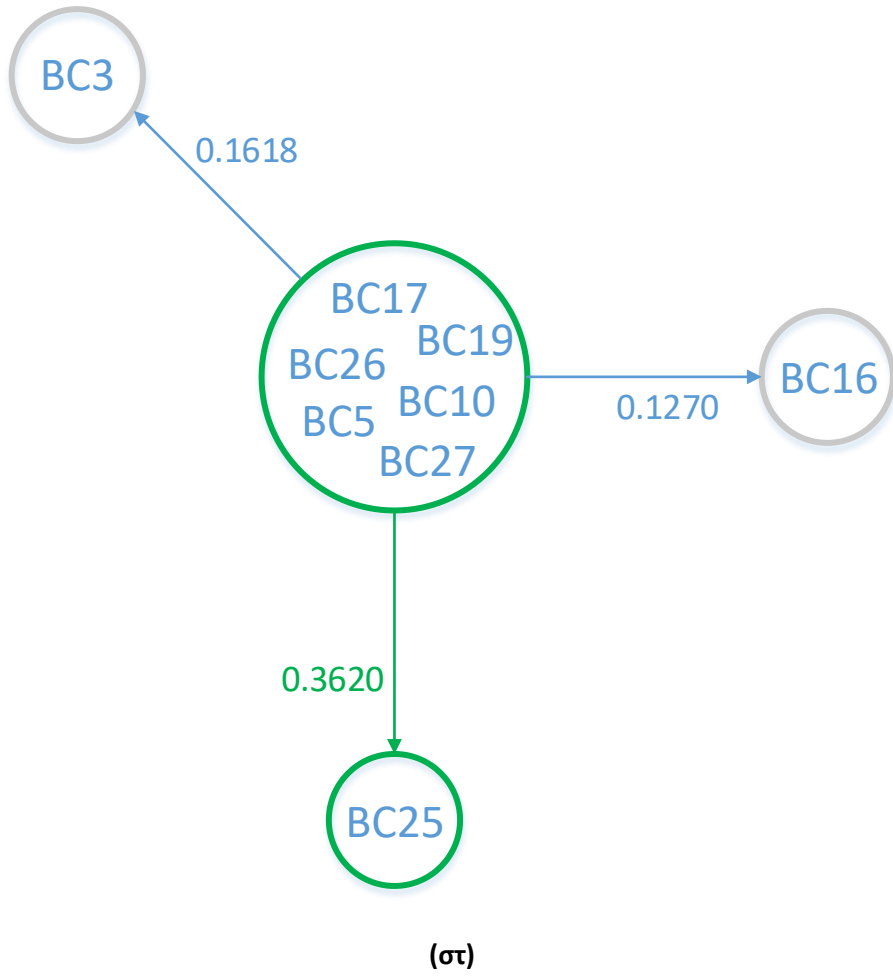
(v)

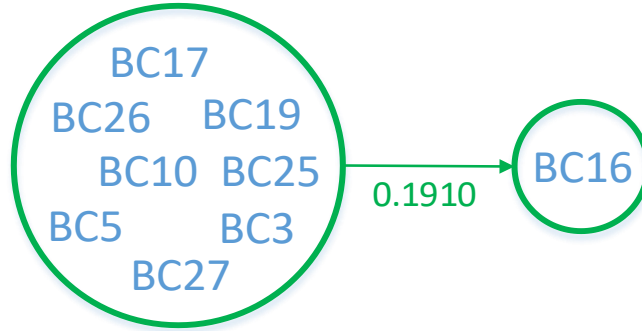


(d)



(ε)





(η)

Σχήμα 7.16. Εφαρμογή της μεθοδολογίας απόδοσης παπύρων στο Γραφέα 3, βάσει του κριτηρίου μέγιστης πιθανοφάνειας της Παραγράφου 6.1.

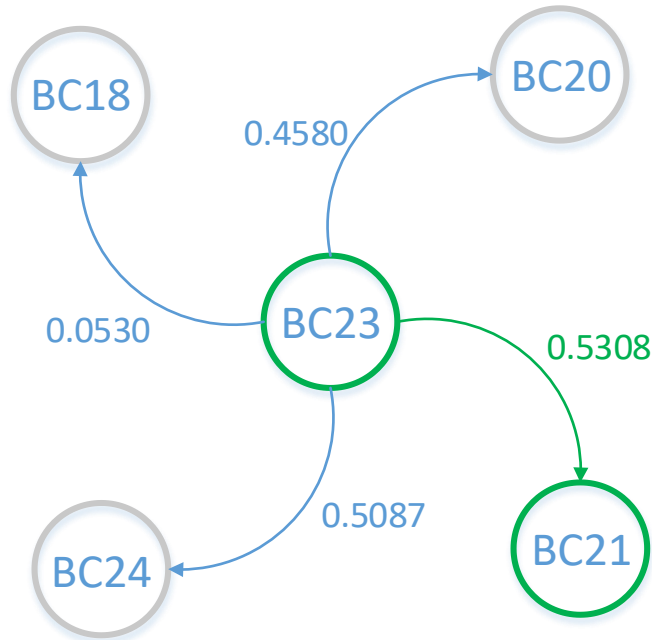
Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι μετά την απόδοση του παπύρου BC16 στο Γραφέα 3, η τιμή της μέγιστης πιθανοφάνειας μεταξύ των παπύρων του Γραφέα 3 και των υπολοίπων παπύρων ήταν $8.5 \cdot 10^{-4}$, γεγονός το οποίο αποδεικνύει ότι οι πάπυροι που γράφτηκαν από το Γραφέα 3 παρουσιάζουν ξεκάθαρη διαφοροποίηση από τους υπολοίπους.

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με προηγουμένως, αναζητήσαμε έναν πάπυρο ο οποίος ανήκε σε έναν τέταρτο γραφέα, επιλέγοντας την ελάχιστη τιμή πιθανοφάνειας που προέκυψε από τη σύγκριση των παπύρων που δεν είχαν αποδοθεί σε κάποιο γραφέα με τους παπύρους των Γραφών 1, 2 και 3 που αποτελούν το σύνολο

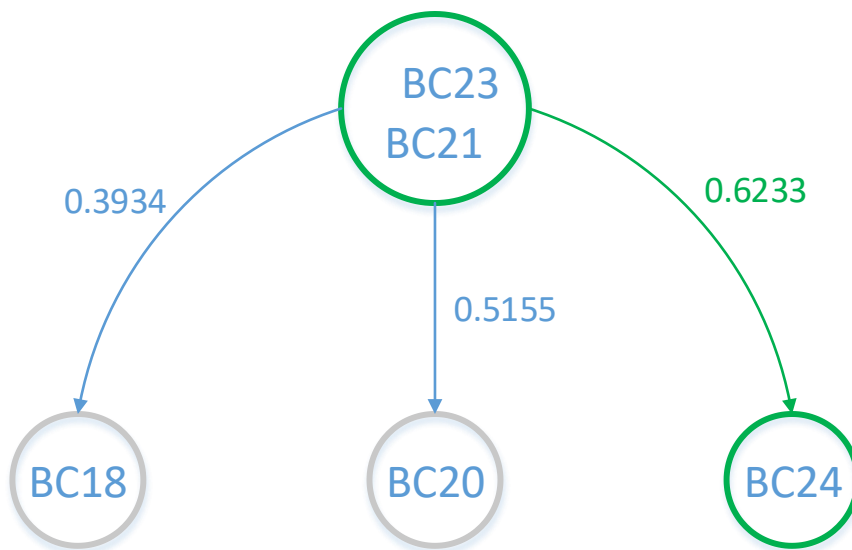
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4, BC8, BC2, BC7,} \\ \text{BC11, BC17, BC26, BC5, BC19, BC10, BC27, BC25, BC3, BC16} \end{array} \right\}$$

Η ελάχιστη αυτή τιμή πιθανοφάνειας ήταν $3.61 \cdot 10^{-48}$, η οποία αντιστοιχούσε στη σύγκριση του παπύρου BC26 του Γραφέα 3 με τον πάπυρο BC23, ο οποίος δεν είχε αποδοθεί σε κάποιο γραφέα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ο πάπυρος BC23 ήταν ο πρώτος πάπυρος που αποδόθηκε στο Γραφέα 4. Εκ νέου τονίζουμε ότι η επιλογή αντιπροσωπευτικού παπύρου για το Γραφέα 4 με βάση τη μέση αρμονική πιθανοφάνεια ή και τη μέγιστη πιθανοφάνεια κάποιος πάπυρος του συνόλου $\Sigma^9 = \Sigma^0 - \left\{ \begin{array}{l} \text{BC13, BC6, BC22, BC9, BC14, BC1, BC4, BC8, BC2, BC7,} \\ \text{BC11, BC17, BC26, BC5, BC19, BC10, BC27, BC25, BC3, BC16} \end{array} \right\}$ να ανήκει

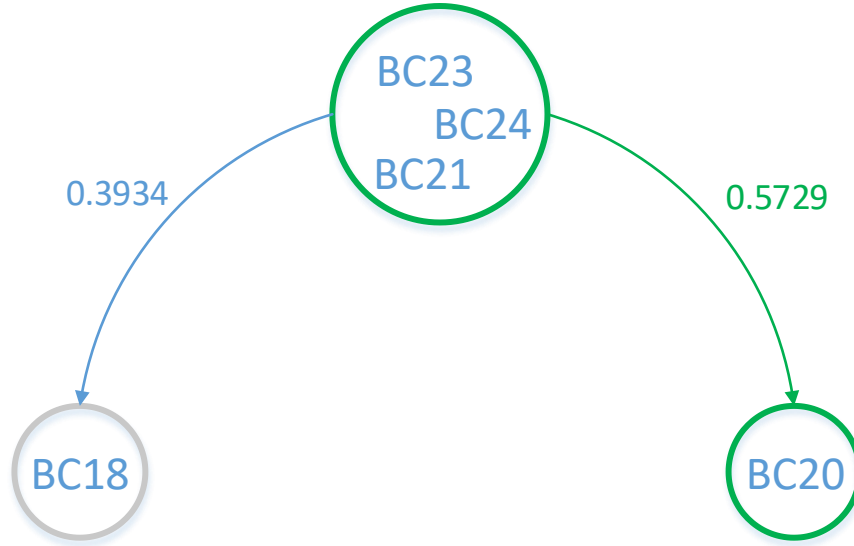
σε έναν από τους γραφείς 1, 2 ή 3 οδήγησαν στα ίδια ακριβώς συμπεράσματα. Η σειρά απόδοσης των υπολοίπων παπύρων στο Γραφείο 4 παρουσιάζεται στα Σχήματα (α) έως (δ) του Σχήματος 7.17:



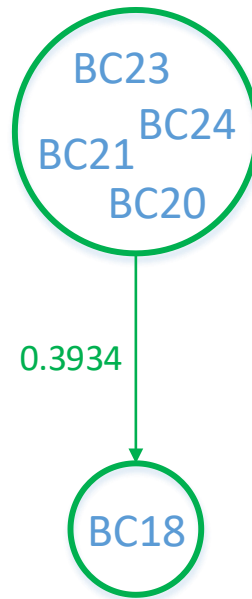
(α)



(β)



(v)



(δ)

Σχήμα 7.17. Γραφική απεικόνιση της διαδικασίας με την οποία ομαδοποιήθηκαν οι πάπυροι οι οποίοι γράφτηκαν από το Γραφέα 4.

Μετά την απόδοση και του τελευταίου παπύρου στο Γραφέα 4, διαπιστώσαμε ότι ολοκληρώθηκε η απόδοση όλων των παπύρων στους γραφείς τους. Η απόδοση αυτή δε έγινε με εξαιρετικά καλή τιμή πιθανοφάνειας.

Η τελική κατάταξη των παπύρων στους τέσσερις (4) διαφορετικούς γραφείς που εντοπίστηκαν παρατίθεται στον Πίνακα 7.4. Ο καθηγητής Blackwell και οι ειδικοί του Κέντρου Ελληνικών Σπουδών (Center for Hellenic Studies) του Πανεπιστημίου του Harvard συμφώνησαν πλήρως με την ομαδοποίηση που προτάθηκε εδώ.

Γραφείς	Πάπυροι που αποδόθηκαν σε κάθε γραφέα (κωδικός εργασίας)	Πάπυροι που αποδόθηκαν σε κάθε γραφέα (επίσημος κωδικός)
Γραφέας 1	BC1	Escorialensis 4 – 142r
	BC6	Escorialensis 4 – 49v
	BC9	Escorialensis 4 – 76v
	BC13	Escorialensis 4 – 86r
	BC14	Escorialensis 4 – 59v
	BC22	Escorialensis 4 – 69v
Γραφέας 2	BC2	Venetus A – 47v
	BC4	Venetus A – 23r
	BC7	Venetus A – 62r
	BC8	Venetus A – 36r
	BC11	Venetus A – 52r

Γραφείς	Πάπυροι που αποδόθηκαν σε κάθε γραφέα (κωδικός εργασίας)	Πάπυροι που αποδόθηκαν σε κάθε γραφέα (επίσημος κωδικός)
Γραφέας 3	BC3	Venetus B – 44r
	BC5	Escorialensis 3 – 40r
	BC10	Escorialensis 3 – 100r
	BC16	Venetus B – 54r
	BC17	Escorialensis 3 – 72r
	BC19	Escorialensis 3 – 97r
	BC25	Escorialensis 3 – 128r
	BC26	Escorialensis 3 – 83v
	BC27	Escorialensis 3 – 143v
Γραφέας 4	BC18	Marcianus Graecus Z. 458 – 37v
	BC20	Marcianus Graecus Z. 458 – 21v
	BC21	Marcianus Graecus Z. 458 – 43v
	BC23	Marcianus Graecus Z. 458 – 32r
	BC24	Marcianus Graecus Z. 458 – 8r

Πίνακας 7.4. Η τελική κατάταξη των 25 βυζαντινών παπύρων σε τέσσερις (4) διαφορετικούς γραφείς. Οι πάπυροι παρουσιάζονται τόσο με τον κωδικό εργασίας που τους δόθηκε από την ερευνητική ομάδα, όσο και με τον επίσημο κωδικό τους (Πίνακες 7.2 και 7.3).

Ανάλογα αποτελέσματα ελήφθησαν κατά την εφαρμογή της μεθόδου στις διαθέσιμες αρχαίες επιγραφές, όπου η εξαντλητική εφαρμογή της μεθόδου που περιγράφηκε στην παρούσα διατριβή, οδήγησε στο συμπέρασμα ότι **οι 46 διαθέσιμες επιγραφές γράφτηκαν από δέκα (10) διαφορετικούς γραφείς**, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 7.5.

Γραφεία	Επιγραφές που αποδόθηκαν σε κάθε γραφείο (κωδικός εργασίας)	Επιγραφές που αποδόθηκαν σε κάθε γραφείο (επίσημος κωδικός)
Γραφεία 1	I33, I34, I41, I19, I32	7400, 7405, 7542, 6124, 7398
Γραφεία 2	I9, I38, I39, I46, I6, I4	4033, 7481, 7482, 10068, 2361, 1640
Γραφεία 3	I17, I20, I40, I42, I43, I16, I18	6006, 6295, 7519, 7566, 7567, 5297, 6053
Γραφεία 4	I28, I31, I30	7237, 7335, 7254
Γραφεία 5	I23, I26, I27	7041, 7190, 7220
Γραφεία 6	I36, I35, I29, I45	7457, 7446, 7245, 7723
Γραφεία 7	I1, I22, I14, I25, I13, I7	0247, 6671, 4917, 7188, 4462, 3717
Γραφεία 8	I10, I12, I44, I15, I11	4266, 4424, 7587, 5039, 4330
Γραφεία 9	I2, I21, I24, I37	0286, 6422, 7156, 7478
Γραφεία 10	I3, I8, I5	1024, 3855, 2054

Πίνακας 7.5. Η τελική κατάταξη των 46 αρχαίων επιγραφών σε γραφεία. Οι επιγραφές παρουσιάζονται τόσο με τον κωδικό εργασίας που δόθηκε σε κάθε μία από αυτές από την ερευνητική ομάδα, όσο και με τον επίσημο κωδικό καταλόγου που έχει δοθεί σε αυτές από το Επιγραφικό Μουσείο και την Αρχαία Αγορά (Πίνακας 7.1). Η εφαρμογή της μεθόδου έδειξε πως οι επιγραφές αυτές γράφτηκαν από δέκα (10) διαφορετικούς γραφεία.

Ο καθηγητής Tracy, καθώς και άλλοι διακεκριμένοι επιγραφολόγοι με τους οποίους συνεργάζεται συμφώνησαν πλήρως με την ανωτέρω κατάταξη. Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστεί πως ένας μελετητής αρχαίων επιγραφών θα χρειαζόταν χρόνια δουλειάς προκειμένου να καταλήξει στην κατάταξη αυτή.

7.4 Σύγκριση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου ταυτοποίησης γραφέων που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή με εκείνη αντίστοιχων, εναλλακτικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν από την ερευνητική ομάδα

Ολοκληρώνοντας την παρουσίαση της νέας αυτής μεθόδου για την κατάταξη κειμένων σε ομάδες ανάλογα με το γραφέα τους, αξίζει να αναφερθούμε στο γεγονός ότι η ερευνητική ομάδα έχει μακροχρόνια εμπειρία στο χώρο της αναγνώρισης προτύπων και της επεξεργασίας εικόνας γενικότερα, αλλά και στο χώρο της αυτόματης αναγνώρισης γραφέα σημαντικών ιστορικών κειμένων ειδικότερα.

Αποτέλεσμα αυτής της μακροχρόνιας ενασχόλησης με τα ανωτέρω αντικείμενα είναι η ανάπτυξη ενός αριθμού διαφορετικών πρωτότυπων μεθόδων για την αυτόματη κατάταξη κειμένων ανάλογα με το γραφέα τους. Παρουσιάσεις των μεθόδων αυτών, καθώς και τα αντίστοιχα αποτελέσματα βρίσκονται στις εργασίες [2, 3, 59, 60, 61, 65 – 68] και στις διατριβές [69, 70]. Ως εκ τούτου, το σύνολο των δεδομένων στα οποία εφαρμόστηκε και με το οποίο ελέγχθηκε η αποτελεσματικότητα της παρούσας μεθόδου έχει χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο άλλων μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί από την ερευνητική ομάδα.

Η κατάταξη των κειμένων η οποία παρουσιάστηκε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής είναι απολύτως η ίδια με αυτή που έχουν προσφέρει για το ίδιο σύνολο δεδομένων και οι υπόλοιπες αναπτυχθείσες από την ερευνητική ομάδα μέθοδοι. Η ταύτιση αυτή των αποτελεσμάτων αποδεικνύει την ισχύ και την ορθότητα της νέας αυτής μεθόδου αφ' ενός και ενισχύει το βαθμό εμπιστοσύνης στα ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα της κατάταξης αφ' ετέρου, καθώς όταν δύο ή περισσότερες, ουσιωδώς διαφορετικές μέθοδοι συγκλίνουν στα ίδια αποτελέσματα, ενισχύεται η πεποίθηση ότι τα κοινά τους αποτελέσματα είναι ορθά και πλησιάζει την απόλυτη βεβαιότητα [4].

8 Συμπεράσματα

Στο πρώτο αυτό μέρος αυτής της διατριβής παρουσιάστηκε κατ' αρχάς μία νέα, πρωτότυπη μέθοδος ομαδοποίησης καμπυλών, ανάλογα με το βαθμό ομοιότητάς τους. Κάθε καμπύλη η οποία έχει καταταγεί σε μία συγκεκριμένη ομάδα παραμένει σε αυτήν ακόμη και αν υποστεί οποιοδήποτε αφινικό μετασχηματισμό, δηλαδή οποιαδήποτε στροφή, ομοιοθεσία ή/και παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος των αξόνων x και y . Η νέα αυτή μέθοδος εφαρμόστηκε στην επίλυση του προβλήματος της ομαδοποίησης αρχαίων επιγραφών και βυζαντινών παπύρων, ανάλογα με το γραφέα τους επί τη βάσει του γραφικού χαρακτήρα των γραφένων αυτών και μόνον. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα ισχυρότατο και αποδοτικότατο, όσον αφορά την αποτελεσματικότητά του, εργαλείο για την ακριβή χρονολόγηση κειμένων.

Ένα βασικό στοιχείο της νέας αυτής μεθόδου είναι η επίπεδη καμπυλότητα, μία νέα μαθηματική έννοια η οποία εισήχθη στην παρούσα διατριβή, καθώς και ένα σύνολο θεμελιωδών προτάσεων που την αφορούν.

Εν συνεχεία, εφαρμόζεται η εξής μεθοδολογία:

- Σε πρώτο στάδιο, απομονώνονται από τη συνολική εικόνα του κειμένου (επιγραφής ή παπύρου) οι υλοποιήσεις των συμβόλων της αλφαβήτου επί των οποίων εφαρμόζεται η μέθοδος.
- Ακολούθως, για τις υλοποιήσεις αυτές εξάγονται τα περιγράμματά τους.
- Επί τη βάσει της επίπεδης καμπυλότητας, αλλά και της στροφής και της παράλληλης μετατόπισης που εφαρμόζονται στο σώμα και το περίγραμμα της υλοποίησης ενός γράμματος, είναι δυνατόν αυτό να προσαρμοστεί βέλτιστα σε ένα άλλο. Σε αυτή τη θέση βέλτιστης προσαρμογής δύο υλοποιήσεων του ίδιου συμβόλου ενός αλφαβήτου, ορίζεται ένα πρωτότυπο μέτρο ομοιότητας των δύο αυτών υλοποιήσεων.
- Τα σχετικά μέτρα ομοιότητας υπολογίζονται για έναν συγκεκριμένο, στατιστικά λίαν επαρκή αριθμό συμβόλων της αλφαβήτου και για όλα τα διαθέσιμα κείμενα, ανά δύο.

- Στα εξαχθέντα από τη διαδικασία αυτή μέτρα ομοιότητας εφαρμόζεται πρωτότυπη στατιστική επεξεργασία, από την οποία συνάγεται τόσο ο αριθμός των διαφορετικών γραφών που έγραψαν τα υπό μελέτη κείμενα, όσο και το σύνολο των κειμένων που γράφτηκαν από κάθε έναν γραφέα.

Η πρωτότυπη αυτή μέθοδος εφαρμόστηκε σε 25 βυζαντινούς παπύρους του 11^{ου} αιώνα και 46 αρχαίες επιγραφές της Κλασικής και της Ελληνιστικής εποχής. Τα μέλη της ερευνητικής ομάδας δεν διέθεταν κάποιο δείγμα γραφής το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί σαν αναφορά για την αναγνώριση κάποιου ή κάποιων γραφών από αυτούς που έγραψαν τα υπό μελέτη κείμενα. Δεν γνώριζαν επίσης ούτε τον αριθμό των διαφορετικών γραφών που έγραψαν τα κείμενα αυτά, αλλά ούτε και κάποιο άλλο στοιχείο που αφορούσε τα κείμενα, όπως, για παράδειγμα, την περίοδο στην οποία γράφτηκαν. Τα μόνα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν α) η γνώση του αλφαβήτου και β) η πληροφορία ότι συγκεκριμένα κείμενα ή τμήματα κειμένων είχαν γραφεί αποκλειστικά από τον ίδιο γραφέα. Η πληροφορία αυτή, που δίνουν οι ειδικοί ερευνητές Κλασικών Σπουδών, είναι συνήθως «αυτονόητη», με την έννοια ότι τα αντίστοιχα κείμενα είναι αυτόνομες μονάδες που έχουν διασωθεί μεμονωμένα. Κατά κανόνα, οι μονάδες αυτές είναι είτε μία ενιαία επιγραφή, είτε ένας διασωθείς πάπυρος. Εν τούτοις, η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε εδώ μπορεί να ελέγξει εκ των υστέρων τη στατιστική υπόθεση ότι όντως κάθε τέτοιο αυτόνομο κείμενο έχει γραφεί από το ίδιο χέρι.

Με την εφαρμογή της μεθοδολογίας που παρουσιάστηκε εδώ, οι 25 βυζαντινοί πάπυροι αποδόθηκαν σε τέσσερις (4) διαφορετικούς γραφείς, ενώ οι 46 αρχαίες επιγραφές αποδόθηκαν σε δέκα (10) διαφορετικούς γραφείς. Διακεκριμένοι επιστήμονες από τους κλάδους της Επιγραφολογίας, της Αρχαιολογίας και των Κλασικών Σπουδών επιβεβαίωσαν πλήρως την κατάταξη που πρότεινε το αναπτυχθέν σύστημα. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί ότι ένας μελετητής αρχαίων και βυζαντινών κειμένων χρειάζεται συνήθως χρόνια μελέτης και εργασίας προκειμένου να καταλήξει στην ομαδοποίηση ενός τέτοιου όγκου κειμένων, η οποία σημειωτέον είναι αρκετά υποκειμενική και κατά κανόνα ποτέ ποσοτικοποιημένη.

Τέλος, αναφέρουμε ότι τα μέλη της ερευνητικής ομάδας έχουν περαιτέρω επεκτείνει τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή, προκειμένου να μπορέσει να εφαρμοστεί σε ακόμη μεγαλύτερο όγκο κειμένων μεγάλης ιστορικής αξίας, όπως αυτά τα οποία

μελετήθηκαν με την εφαρμογή της παρούσας μεθόδου, αλλά και προκειμένου να αντιμετωπίσουν επιπλέον ερωτήματα που κατά καιρούς προκύπτουν σχετικά με τους γραφείς κειμένων μεγάλης ιστορικής αξίας.

9 Βιβλιογραφία Α Μέρους

- [1] S. Tracy and C. Papaodysseus, "The Study of Hands on Greek Inscriptions: The Need for a Digital Approach," *American Journal of Archaeology*, pp. 99-102, January 2009.
- [2] S. V. Tracy, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, D. Fragoulis, D. Dafi and Th. Panagopoulos, "Identifying Hands on Ancient Athenian Inscriptions: First Steps Towards a Digital Approach," *Archaeometry*, vol. 49, no. 4, pp. 749-764, 2007.
- [3] M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Dafi and S. Tracy, "Automatic Writer Identification of Ancient Greek Inscriptions," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 8, pp. 1404-1414, July 2009.
- [4] G. E. Kokolakis, "Bayesian Classification and Classification Performance for Independent Distributions," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 27, pp. 419-21, 1981.
- [5] J. Chapran, "Biometric Writer Identification: Feature Analysis and Classification," *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 20, no. 4, pp. 483-503, 2006.
- [6] T. Dhieb, W. Ouarda, H. Boubaker and A. M. Alimi, "Beta-Elliptic Model for Writer Identification from Online Arabic Handwriting," *Journal of Information Assurance & Security*, vol. 11, no. 5, pp. 263-272, 2016.
- [7] X. Y. Zhang, G. S. Xie, C. L. Liu and Y. Bengio, "End-to-End Online Writer Identification With Recurrent Neural Network," *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, vol. 47, no. 2, pp. 285-292, April 2017. doi: 10.1109/THMS.2016.2634921
- [8] E. N. Zois and V. Anastassopoulos, "Morphological Waveform Coding for Writer Identification," *Pattern Recognition*, vol. 33, pp. 385-398, 2000.
- [9] H. Said, T. Tan and K. Baker, "Personal Identification Based on Handwriting," *Pattern Recognition*, vol. 33, no. 1, pp. 149-160, January 2000.

- [10] Y. Zhu, T. Tan and Y. Wang, "Biometric Personal Identification Based on Handwriting," *Proceedings 15th International Conference on Pattern Recognition. ICPR-2000*, Barcelona, 2000, vol. 2, pp. 797-800. doi: 10.1109/ICPR.2000.906196
- [11] U. V. Marti, R. Messerli and H. Bunke, "Writer Identification Using Text Line Based Features," *Proceedings 6th International Conference on Document Analysis and Recognition*. Seattle, WA, 2001, pp. 101-105. doi: 10.1109/ICDAR.2001.953763
- [12] A. Bensefia, T. Paquet and L. Heutte, "Handwriting Analysis for Writer Verification," *Proceedings Ninth International Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition*, 2004, pp. 196-201. doi: 10.1109/IWFHR.2004.49
- [13] G. Leedham and S. Chachra, "Writer Identification Using Innovative Binarised Features of Handwritten Numerals," *Proceedings Seventh International Conference on Document Analysis and Recognition*, 2003, vol. 1, pp. 413-416. doi: 10.1109/ICDAR.2003.1227700
- [14] A. Schlapbach and H. Bunke, "A Writer Identification and Verification System Using HMM Based Recognizers," *Pattern Analysis and Applications*, vol. 10, no. 1, February 2007.
- [15] Z. He, X. You and Y. Yan Tang, "Writer Identification of Chinese Handwriting Documents Using Hidden Markov Tree Model," *Pattern Recognition*, vol. 41, no. 4, pp. 1295-1307, 2008.
- [16] A. Schlapbach and H. Bunke, "Off-Line Handwriting Identification Using HMM Based Recognizers," *Proceedings 17th International Conference on Pattern Recognition, ICPR-2004*, 2004, vol. 2, pp. 654-658.
- [17] Z. He, B. Fang, J. Du, Y. Yan Tang and X. You, "A Novel Method for Off-Line Handwriting-Based Writer Identification," *Proceedings Eighth International Conference on Document Analysis and Recognition, ICDAR-2005*, 2005, vol. 1, pp. 242-246. doi: 10.1109/ICDAR.2005.27
- [18] A. Bensefia, T. Paquet and L. Heutte, "A Writer Identification and Verification System," *Pattern Recognition Letters*, vol. 26, pp. 2080-2092, 2005.

- [19] V. Pervouchine and G. Leedham, "Extraction and Analysis of Forensic Document Examiner Features Used for Writer Identification," *Pattern Recognition*, vol. 40, 2007.
- [20] T. Pitak and T. Matsuura, "On-Line Writer Recognition for Thai Based on Velocity of Barycenter of Pen-Point Movement," *Proceedings International Conference on Image Processing, ICIP-2004*, 2004, vol. 2, pp. 889-892.
- [21] S. H. Cha and S. N. Srihari, "Multiple Feature Integration for Writer Verification," *Proceedings 7th International Workshop Frontiers in Handwriting Recognition*, 2000, pp. 333-342.
- [22] B. Zhang, S. N. Srihari and S. Lee, "Individuality of Handwritten Characters," *Proceedings 7th International Conference on Document Analysis and Recognition*, 2003, pp. 1086-1090. doi:10.1109/ICDAR.2003.1227824
- [23] M. Bulacu and L. Schomaker, "Text-Independent Writer Identification and Verification Using Textural and Allographic Features," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 29, no. 4, April 2007.
- [24] L. Schomaker and M. Bulacu, "Automatic Writer Identification Using Connected-Component Contours and Edge-Based Features of Uppercase Western Script," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 6, pp. 787-798, June 2004.
- [25] E. Khalifa, S. Al-maadeed, M. A. Tahir, A. Bouridane and A. Jamshed, "Off-Line Writer Identification Using an Ensemble of Grapheme Codebook Features," *Pattern Recognition Letters*, vol. 59, pp. 18-25, July 2015.
- [26] G. Ghiasi and R. Safabakhsh, "Offline Text-Independent Writer Identification Using Codebook and Efficient Code Extraction Methods," *Image and Vision Computing*, vol. 31, no. 5, pp. 379-391, May 2013.
- [27] X. Wu, Y. Tang and W. Bu, "Offline Text-Independent Writer Identification Based on Scale Invariant Feature Transform," *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*, vol. 9, no. 3, pp. 526-536, March 2014.

- [28] M. N. Abdi and M. Khemakhem, "A Model-Based Approach to Offline Text-Independent Arabic Writer Identification and Verification," *Pattern Recognition*, vol. 48, no. 5, pp. 1890-1903, May 2015.
- [29] V. Christlein, D. Bernecker, F. Hönig and E. Angelopoulou, "Writer Identification and Verification Using GMM Supervectors," *Proceedings IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision*, Steamboat Springs, CO, 2014, pp. 998-1005. doi: 10.1109/WACV.2014.6835995
- [30] V. Christlein, D. Bernecker, F. Hönig and E. Angelopoulou, "Writer Identification and Verification Using GMM Supervectors and Exemplar-SVMs," *Pattern Recognition*, vol. 63, pp. 258-267, March 2017.
- [31] S. Nomura, K. Yamanaka, O. Katai, H. Kawakami and T. Shiose, "A Novel Adaptive Morphological Approach for Degraded Character Image Segmentation," *Pattern Recognition*, vol. 38, pp. 1961-1975, 2005.
- [32] Y. Lu and M. Shridhar, "Character Segmentation in Handwritten Words – an Overview," *Pattern Recognition*, vol. 29, no. 1, pp. 77-96, 1996.
- [33] A. R. Zarei and R. Safabakhsh, "A New Approach for Feature Extraction With Applications to Automatic Writer Recognition," *Proceedings 4th International Conference on Computer and Knowledge Engineering, ICCKE-2014*, Mashhad, 2014, pp. 13-17. doi: 10.1109/ICCKE.2014.6993341
- [34] D. Bertolini, L. S. Oliveira, E. Justino and R. Sabourin, "Texture-Based Descriptors for Writer Identification and Verification," *Expert Systems with Applications*, vol. 40, no. 6, pp. 2069-2080, May 2013.
- [35] A. Garz, M. Würsch, A. Fischer and R. Ingold, "Simple and Fast Geometrical Descriptors for Writer Identification," *Proceedings Document Recognition and Retrieval*, 2016, pp. 1-12.
- [36] S. Al-Maadeed, A. Hassaine, A. Bouridane and M. A. Tahir, "Novel Geometric Features for Off-Line Writer Identification," *Pattern Analysis and Applications*, vol. 19, no. 3, pp. 699-708, August 2016.

- [37] S. He and L. Schomaker, "Writer Identification Using Curvature-Free Features," *Pattern Recognition*, vol. 63, pp. 451-464, March 2017.
- [38] R. Niels, F. Gootjen and L. Vuurpijl, "Writer Identification Through Information Retrieval: The Allograph Weight Vector," *Proceedings International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, 2008, pp. 481-486.
- [39] S. K. Chan, C. Viard-Gaudin and Y. H. Tay, "Online Writer Identification Using Character Prototypes Distributions," *Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering*, 2008.
- [40] G. Xian Tan, C. Viard-Gaudin and A. C. Kot, "Automatic Writer Identification Framework for Online Handwritten Documents Using Character Prototypes," *Pattern Recognition*, vol. 42, no. 12, pp. 3313-3323, December 2009.
- [41] L. Wolf, R. Littman, N. Mayer, T. German, N. Dershowitz, R. Shweka and Y. Choueka, "Identifying Join Candidates in Cairo Genizah," *International Journal of Computer Vision, Springer*, vol. 94, no. 1, pp. 118-135, August 2011.
- [42] P. Purkait, R. Kumar and B. Chanda, "Writer Identification for Handwritten Telugu Documents Using Directional Morphological Features," *Proceedings International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition*, 2010, pp. 658-663.
- [43] O. Santana, C. M. Travieso, J. B. Alonso and M. A. Ferrer, "Writer Identification Based on Graphology Techniques," *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 25, no. 6, pp. 35-42, 2010.
- [44] A. J. Newell and L. D. Griffin, "Writer Identification Using Oriented Basic Image Features and the Delta Encoding," *Pattern Recognition*, vol. 47, no. 6, pp. 2255-2265, June 2014.
- [45] M. K. Konstantakis and E. J. Yannakoudakis, "A Writer Identification System of Greek Historical Documents Using MATLAB," *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, vol. 4, no. 10, p. 609, October 2014.

- [46] Y. Hannad, I. Siddiqi and M. El Youssfi El Kettani, "Writer Identification Using Texture Descriptors of Handwritten Fragments," *Expert Systems with Applications*, vol. 47, pp. 14-22, April 2016.
- [47] J. Tan, J. H. Lai, C. D. Wang and M. S. Feng, "A Stroke Shape and Structure Based Approach for Off-Line Chinese Handwriting Identification," *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, vol. 3, no. 2, pp. 1-8, March 2011.
- [48] E. Dalton and N. R. Howe, "Style-Based Retrieval for Ancient Syriac Manuscripts," *Proceedings 2011 Workshop on Historical Document Imaging and Processing, HIP-2011*, ACM, 2011, pp. 1-5.
- [49] M. Contreras Seitz, "Towards Chilean Spanish Language Diachronic Corpus [Hacia la Constitución de un Corpus Diacrónico del Español de Chile]," *Revista de Lingüística Teórica y Aplicada*, vol. 47, no. 2, pp. 11-134, 2009.
- [50] L. Schomaker, K. Franke and M. Bulacu, "Using Codebooks of Fragmented Connected-Component Contours in Forensic and Historic Writer Identification," *Pattern Recognition Letters*, vol. 28, no. 6, pp. 719-727, 2007.
- [51] I. Bar – Yosef, I. Beckman, K. Kedem and I. Dinstein, "Binarization, Character Extraction, and Writer Identification of Historical Hebrew Calligraphy Documents," *International Journal on Document Analysis and Recognition*, vol. 2, no. 9, pp. 89-99, 2007.
- [52] C. Adak and B. B. Chaudhuri, "Writer Identification from Offline Isolated Bangla Characters and Numerals," *Proceedings 13th International Conference on Document Analysis and Recognition, ICDAR-2015*, Tunis, 2015, pp. 486-490. doi: 10.1109/ICDAR.2015.7333809
- [53] R. Kumar, K. Kumar Ravulakollu and R. Bhat, "Fuzzy-Membership Based Writer Identification from Handwritten Devnagari Script," *Journal of Information Processing Systems*, vol. 13, no. 4, pp. 893-913, 2017.
- [54] C. Halder, K. Thakur, S. Phadikar and K. Roy, "Writer Identification from Handwritten Devanagari Script," *Proceedings Second International Conference on Information Systems Design and Intelligent Applications*, , India, 2015, vol. 2, pp. 497-505.

- [55] M. Niitsuma, L. Schomaker, J.-P. Van Oosten, Y. Tomita and D. Bell, "Musicologist-Driven Writer Identification in Early Music Manuscripts," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 75, no. 11, pp. 6463-6479, June 2016.
- [56] I. Siddigi, C. Djeddi, A. Raza and L. Souici-Meslati, "Automatic Analysis of Handwriting for Gender Classification," *Pattern Analysis and Applications*, vol. 18, no. 4, pp. 887-899, November 2015.
- [57] Σ. Ζάννος, "Νέες Προηγμένες Μέθοδοι Αναγνώρισης Προτύπων με Εφαρμογές στην Επεξεργασία Βιοσημάτων και την Αυτόματη Τρισδιάστατη Ανακατασκευή Θραυσμένων Αντικειμένων," Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.
- [58] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. 3rd Edition. Prentice-Hall, 1999.
- [59] D. Arabadjis, F. Giannopoulos, C. Papaodysseus, S. Zannos, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos and C. Blackwell, "New Mathematical and Algorithmic Schemes for Pattern Classification with Application to the Identification of Writers of Important Ancient Documents," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 8, pp. 2278-2296, August 2013.
- [60] C. Papaodysseus, M. Exarhos, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, C. Triantafillou and Th. Panagopoulos, "Image and Pattern Analysis for 1650 B.C. Wall Paintings Study and Reconstruction," *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, vol. 38, no. 4, pp. 958-965, July 2008.
- [61] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafillou, D. Fragoulis and C. Doumas, "Contour-Shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings," *IEEE Transactions On Signal Processing*, vol. 50, no. 6, pp. 1277-1288, June 2002.
- [62] C. Dué and M. Ebbott, "An Introduction to the Homer Multitext Edition of the Venetus A Manuscript of the Iliad," The Homer Multitext (www.homermultitext.org), [online document], December 6, 2014. Available: <https://www.homermultitext.org/manuscripts-papyri/VenA-Introduction-2014.html>. [Accessed: June 14, 2018].

- [63] The Homer Multitext Project, “Venetus B (Marciana 453 = 821),” The Homer Multitext. [Online]. Available: <https://www.homermultitext.org/manuscripts-papyri/venetusB.html>. [Accessed: June 14, 2018].
- [64] C. Dué and M. Ebbott, “Homer in the Escorial,” The Homer Multitext (www.homermultitext.org), first published 2014, [Accessed: June 14, 2018].
- [65] C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, S. Zannos, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, E. Kalfa, C. Blackwell and S. Tracy, “Identifying the Writer of Ancient Inscriptions and Byzantine Codices. A Novel Approach,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 121, pp. 57-73, April 2014.
- [66] C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, D. Arabadjis, F. Panopoulou and M. Panagopoulos, “Handwriting Automatic Classification: Application to Ancient Greek Inscriptions,” *Proceedings 2010 International Conference on Autonomous and Intelligent Systems, AIS-2010*, Povoá de Varzim, 2010, pp. 1-6. doi: 10.1109/AIS.2010.5547045
- [67] P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, F. Panopoulou, D. Arabadjis, S. Tracy, F. Giannopoulos and S. Zannos, “A New Approach for Ancient Inscriptions' Writer Identification,” *Proceedings 17th International Conference on Digital Signal Processing, DSP*, Corfu, 2011, pp. 1-6. doi: 10.1109/ICDSP.2011.6004966
- [68] G. Galanopoulos, C. Papaodysseus, D. Arabadjis and M. Exarhos, “Exploiting 3D Digital Representations of Ancient Inscriptions to Identify Their Writer,” *Advances in Visual Computing. ISVC 2012. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, vol. 7432, pp. 188-198.
- [69] Μ. Παναγόπουλος, “Ταυτοποίηση Χαρακτών Αρχαίων Επιγραφών και Εντοπισμός Τεχνοτροπίας Αρχαιολογικών Ευρημάτων με Χρήση Πρωτότυπων Αλγορίθμων Αναγνώρισης Προτύπων και Επεξεργασίας Εικόνας,” Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2008.
- [70] Π. Ρουσόπουλος, “Ανάπτυξη Προηγμένων Μεθόδων Αναγνώρισης Προτύπων και Μαθηματική Θεμελίωση για τον Εντοπισμό του Τρόπου Δημιουργίας και της Ταυτότητας

του Δημιουργού Σημαντικών Αρχαιολογικών Ευρημάτων,” Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2010.

Β. Μελέτη Γένεσης και Συσσώρευσης Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας

1 Εισαγωγή

1.1 Η μεγάλη και γενική σημασία του προβλήματος γένεσης και συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στους υπολογιστές

Ένα από τα κύρια προβλήματα των σύγχρονων υπολογιστικών μηχανών είναι το αριθμητικό λάθος το οποίο γεννάται και συσσωρεύεται κατά την εκτέλεση ενός αλγορίθμου, λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης με το οποίο εκτελούνται οι αριθμητικές πράξεις στις μηχανές αυτές. Για το λόγο αυτό, ο όρος **λάθος πεπερασμένης ακρίβειας** χρησιμοποιείται για την περιγραφή ακριβώς αυτού του λάθους. Εναλλακτικά, πλήθος ερευνητών χρησιμοποιεί τους όρους **λάθος στρογγυλοποίησης** (round – off error) ή **λάθος κβαντισμού** (quantization error), αλλά και άλλους, ισοδύναμους, όταν αναφέρεται στο λάθος αυτό. Ήδη, από τα πρώτα βήματα της τεχνολογίας των υπολογιστών είχε παρατηρηθεί πως το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας υπεισέρχεται στους υπολογισμούς κατά την εκτέλεση των διαφόρων αλγορίθμων. Το σφάλμα αυτό, όπως θα δειχθεί και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας είναι δυνατόν να μεγαλώσει αυθαίρετα υπό κατάλληλες υπολογιστικές συνθήκες, καθιστώντας τα αποτελέσματα των αλγορίθμων που τα παράγουν εντελώς αναξιόπιστα.

Θα καταδείξουμε τις σημαντικές επιπτώσεις του λάθους αυτού με μερικά παραδείγματα.

Η ποσότητα $\sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ υπολογισμένη αλγεβρικά είναι ταυτόσημη με το μηδέν. Ωστόσο, ο υπολογισμός της σε υπολογιστή με ακρίβεια 16 ψηφίων δίνει αποτέλεσμα $-4.440892098500626 \cdot 10^{-16}$, το οποίο είναι μεν πολύ μικρό, απέχει, ωστόσο από το μηδέν.

Η τιμή της ακόλουθης ορίζουσας είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Εάν, όμως, επιχειρήσουμε να βρούμε την τιμή της σε υπολογιστή με ακρίβεια 16 ψηφίων έχει απόλυτη τιμή σαφώς μεγαλύτερη από το μηδέν, την $6.661338147750939 \cdot 10^{-16}$.

Η ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων, $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ δεν αποτελεί ταυτότητα όταν οι πράξεις στα δύο μέλη της ισότητας πραγματοποιούνται σε υπολογιστή με πεπερασμένη ακρίβεια. Συγκεκριμένα, για δύο τυχαίες τιμές των x και y , έστω τις

$$x = 3.145778655645638 \cdot 10^7$$

$$y = 3.145778508977189 \cdot 10^7$$

η μεν ποσότητα $x^2 - y^2$ δίνει, σε υπολογιστή με λέξη 64 ψηφίων, αποτέλεσμα $9.227729312500000 \cdot 10^7$ εκπεφρασμένο σε 16 δεκαδικά ψηφία. Η δε ποσότητα $(x - y) \cdot (x + y)$ δίνει στον ίδιο υπολογιστή σε ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων αποτέλεσμα $9.227729314083283 \cdot 10^7$.

Πέραν των απλών αυτών αλλά ενδεικτικών του προβλήματος παραδειγμάτων, αξίζει να αναφερθεί ότι το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας συναντάται ιδιαίτερα συχνά σε πληθώρα σοβαρών τεχνολογικών και ερευνητικών εφαρμογών, προκαλώντας αλλοίωση των αποτελεσμάτων εκτέλεσης αλγορίθμων, αλλά και της ίδιας της σύγκλισής τους. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι, λόγω του λάθους που σταδιακά αλλά αθροιστικά εισάγεται στα ενδιάμεσα αποτελέσματα της εκτέλεσης των πράξεων σε μια υπολογιστική διαδικασία, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος δίνει μερικώς ή ολικώς λανθασμένα αποτελέσματα, συχνά με καταστρεπτικές συνέπειες.

Ως ένα επιπλέον σημαντικό παράδειγμα του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που ανακύπτει σε εφαρμογές, παραθέτουμε τα όσα προαναφέρθηκαν στην Παράγραφο 5.1, στο Βήμα 2 της μεθόδου προσαρμογής των δύο προς σύγκριση περιγραμμάτων των καμπυλών Γ_1 και Γ_2 . Πράγματι, στο συγκεκριμένο βήμα υπολογίζεται άπαξ το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας κατά μήκος της κοντινότερης ισοΐψους της καμπύλης που διατηρείται σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της σύγκρισης, $\varepsilon_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dl$. Επιλέγουμε την κοντινότερη στη Γ_1 ισοΐψή, αποφεύγοντας τον υπολογισμό κατά μήκος της ίδιας της καμπύλης. Κάνουμε αυτή την επιλογή διότι εάν

υπολογίζαμε το ολοκλήρωμα αριθμητικά επί της καμπύλης $f(x, y) = 0$, τότε δεν θα παίρναμε ακριβές, ούτε συνεπές αποτέλεσμα, καθώς οι τιμές τόσο του καθέτου διανύσματος \vec{n} , όσο και της απόκλισης αυτού, $\vec{v} \cdot \vec{n}$, θα ταλαντώνονταν γύρω από το μηδέν, αντί να είναι μηδέν, ως αποτέλεσμα του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Με άλλα λόγια, λόγω του ότι οι υπολογισμοί εκτελούνται με πεπερασμένο μήκος λέξης, τα κάθετα διανύσματα κατά μήκος της καμπύλης Γ_1 θα μπορούσαν να έχουν φορά είτε προς το εσωτερικό, είτε προς το εξωτερικό της Γ_1 , καθιστώντας αδύνατο τον υπολογισμό του ως άνω ολοκληρώματος ε_1 . Επιλέγοντας να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ε_1 στην κοντινότερη στην αρχική καμπύλη Γ_1 ισοϋψή, για την οποία ισχύει $f(x, y) = c$, πετυχαίνουμε τη σταθεροποίηση του προσήμου των τιμών της $f(x, y)$ για τις οποίες ισχύει η ανωτέρω ισότητα, εξασφαλίζοντας με τον τρόπο αυτό συνεπή φορά για τα κάθετα διανύσματα στο περίγραμμα της καμπύλης. Αυτό δεν σημαίνει ότι το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας έπαψε να υφίσταται, αλλά απλά υπογραμμίζει το γεγονός ότι η κατανόηση της σχετικής νομοτέλειας μπορεί να οδηγήσει σε άρση κάποιων καταστρεπτικών συνεπειών.

Στα πλαίσια του Μέρους Β της παρούσας διατριβής θα μελετήσουμε το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας με έναν εντελώς νέο τρόπο, μεγάλης εφαρμοσιμότητας, ο οποίος δίνει ακριβή αποτελέσματα.

1.2 To state of the art στη μελέτη του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές αναφορές σε σχέση με το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι λόγω του λάθους αυτού, πολλοί αλγόριθμοι δίνουν εντελώς λανθασμένα αποτελέσματα. Στην παράγραφο αυτή δίνεται μία συγκεντρωτική παρουσίαση ορισμένων αξιόλογων αναφορών στο λάθος πεπερασμένης ακρίβειας στη διεθνή επιστημονική βιβλιογραφία.

Οι συγγραφείς της εργασίας [1] μελετούν το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας στον αλγόριθμο προσαρμογής βάσει της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων και αποδεικνύουν ότι η μέση τιμή του τετραγώνου του λάθους αυτού είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρησιμοποιούμενου βήματος προσαρμογής μ . Η [2] εισάγει έναν γρήγορο αλγόριθμο για το φιλτράρισμα Kalman με χρήση ελαχίστων τετραγώνων με εκθετικά βάρη. Με την προσέγγιση αυτή, μειώνεται η

επίδραση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας και των επιπτώσεών του στα αποτελέσματα του αλγορίθμου φιλτραρίσματος. Σημειώνεται πως σε όλη την κλάση των αλγορίθμων Kalman και των γρήγορων εκδοχών αυτών, η επίδραση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας είναι μεγάλη και επιφέρει σοβαρά προβλήματα. Στην [3] παρουσιάζονται αλγόριθμοι για την μετατροπή αριθμών κινητής υποδιαστολής σε δεκαδικούς, με μείωση του σχετικού λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Η εργασία [4] μελετά την επίδραση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου Lanczos, ο οποίος χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος εντοπισμού των μη συμμετρικών ιδιοτιμών. Οι συγγραφείς της [5] μελετούν την επίδραση του λάθους κβαντισμού σε έναν αλγόριθμο υπολογισμού της ορθοκανονικής βάσης ενός υποχώρου Krylov με χρήση ορθοκανονικών πινάκων Householder. Στην [6] μελετάται το λάθος στρογγυλοποίησης κοντά στις περιοδικές τροχιές ενός αλγορίθμου διακριτών γραμμικών απεικονίσεων, οι οποίες διατηρούν το εμβαδόν. Στο συγκεκριμένο άρθρο υποδεικνύεται και μία χρονοεξαρτώμενη στατιστική κατανομή που ακολουθεί το σχετικό λάθος πεπερασμένης ακρίβειας στους αλγορίθμους αυτούς. Στην [7] αποδεικνύεται ότι υπάρχουν θεωρητικές λύσεις, οι οποίες συγκλίνουν σε τελικές καταστάσεις που είναι ουσιωδώς διαφορετικές από τις αντίστοιχες που λαμβάνονται όταν το συγκεκριμένο πρόβλημα επιλύεται σε υπολογιστή με πεπερασμένη ακρίβεια. Η εργασία [8] καταδεικνύει ότι η σύγκλιση των πολυωνύμων Gegenbauer στα καταληκτικά σημεία επηρεάζεται από το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας. Προτείνεται δε τόσο η βελτιστοποίηση των παραμέτρων, όσο και η ελαχιστοποίηση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας για τη μέθοδο ανακατασκευής Gegenbauer. Στην εργασία [9] εισάγεται συγκεκριμένη σημειολογία, η οποία περιγράφει τη δημιουργία λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε έναν υπολογισμό. Οι συγγραφείς της δημοσίευσης [10] δίνουν μία εκτίμηση για το σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας που γεννάται κατά την ολοκλήρωση σε ένα μεγάλο χρονικό διάστημα σε σχέση με μη γραμμικά συστήματα. Στην [11] εισάγεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό των ορθογώνιων ροπών Fourier – Mellin. Ο υπολογισμός αυτός είναι γραμμικής πολυπλοκότητας και είναι ανθεκτικός στη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Η εργασία [12] προτείνει μία μέθοδο για την αντιμετώπιση της αστάθειας που παρατηρείται στην Ψηφιακή Σύνθεση Συχνότητας (Digital Frequency Synthesis – DFS), η οποία προκαλείται από το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας. Στο άρθρο [13] παρουσιάζονται τα όρια του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που γεννάται σε διάφορους αλγορίθμους. Στην εργασία [14] εισάγεται μία εναλλακτική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία η εξέλιξη του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε χαοτικούς χάρτες αντιμετωπίζεται ως θόρυβος ο οποίος

προστίθεται στις αναμενόμενες ακριβείς λύσεις. Στην εργασία αυτή ορίζεται ένα κατώφλι κάτω από το οποίο τα σφάλματα είναι δυνατόν να αγνοηθούν. Το άρθρο [15] μελετά το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας το οποίο γεννάται κατά τον υπολογισμό των πολυτετραγωνικών επιφανειών Hardy και των σχετικών τιμών παρεμβολής (interpolators). Προτείνει δε τη χρήση αριθμητικής αυθαίρετα μεγάλης ακρίβειας για την υπέρβαση των προβλημάτων που παρουσιάζονται λόγω λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Οι συγγραφείς της [16] προτείνουν μία γρήγορη και σχετικά ανθεκτική ως προς τις επιπτώσεις του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας μέθοδο για τον υπολογισμό συντελεστών Zernike ανώτερης τάξης. Τέλος, στις εργασίες [17] και [18] παρουσιάζεται μία πρώιμη μορφή της προσέγγισης η οποία αναπτύσσεται διεξοδικά στο παρόν τμήμα της διατριβής.

Θα αναζητήσουμε τον αυστηρό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε το λάθος το οποίο υπεισέρχεται στις ανωτέρω πράξεις. Προς το σκοπό αυτό, θα παραθέσουμε κατωτέρω ένα σύνολο αυστηρών ορισμών.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε προς στιγμήν ότι μία υπολογιστική μηχανή εκτελεί τις πράξεις στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Τονίζουμε με έμφαση ότι διατυπώνουμε αυτή την υπόθεση αυστηρά και μόνο διότι το δεκαδικό σύστημα είναι πολύ πιο οικείο στον άνθρωπο από ότι το δυαδικό. Εν τούτοις, όλοι οι ορισμοί και οι προτάσεις που θα αποδείξουμε ισχύουν και στο δυαδικό σύστημα με εξαιρετική προσέγγιση. Επιπλέον, οι ορισμοί αυτοί, καθώς και οι σχετικές προτάσεις και θεωρήματα μπορούν να επεκταθούν άμεσα σε οποιοδήποτε θεσιακό αριθμητικό σύστημα.

Σε πρώτη φάση, πρέπει να ορίσουμε την αναπαράσταση των αριθμών που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα διατριβή:

Ορισμός 2.1 (Επιστημονική μορφή σε τυχόν θεσιακό σύστημα με n ψηφία ακρίβειας).

Η επιστημονική μορφή ενός αριθμού α σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής (floating point) είναι η αναπαράσταση του αριθμού αυτού στην ακόλουθη γενική μορφή:

$$man(\alpha) \cdot b^{exp(\alpha)}$$

Στην αναπαράσταση αυτή, η ποσότητα $man(\alpha)$ ονομάζεται **mantissa** του α , η ποσότητα b είναι η βάση του θεσιακού αριθμητικού συστήματος και η ποσότητα $exp(\alpha)$ ονομάζεται **εκθέτης** του αριθμού. Η mantissa του αριθμού με ακρίβεια n ψηφίων αναπαρίσταται σε οποιαδήποτε υπολογιστική μηχανή που χρησιμοποιεί παράσταση κινητής υποδιαστολής (floating point representation) διατηρώντας ένα ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του ένα (1) κατ' απόλυτη τιμή πριν την υποδιαστολή και τα υπόλοιπα $n - 1$ ψηφία μετά από αυτήν. Σημειώνεται ότι η mantissa αποτελείται από ψηφία του συγκεκριμένου αριθμητικού συστήματος, δηλαδή φυσικούς αριθμούς που ανήκουν στο σύνολο $\Psi_b = \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$. Η τάξη μεγέθους του αριθμού προσδιορίζεται από τη βάση b και τον εκθέτη $exp(\alpha)$, όπου η βάση πρέπει να είναι πάντα φυσικός αριθμός, μεγαλύτερος ή ίσος του δύο. Η μορφή αυτή είναι εντελώς αντίστοιχη της IEEE 754.

Στους σύγχρονους υπολογιστές, όπου έχει επικρατήσει το πρότυπο IEEE 754, οι mantissae των αριθμών είναι πάντοτε θετικοί αριθμοί. Για λόγους συμπαγούς αναπαράστασης, θα θεωρήσουμε σε όλη την ανάλυση που ακολουθεί ότι οι mantissae είναι προσημασμένες. Εν τούτοις, όλη η ανάλυση που παρουσιάζεται στο Β Μέρος της παρούσας διατριβής είναι απολύτως συμβατή με τον τρόπο με τον οποίο εκτελούνται οι πράξεις στους σύγχρονους υπολογιστές.

□

Ορισμός 2.2 (Γραφή αριθμού σε επιστημονική μορφή στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με n ψηφία ακρίβειας).

Η αναπαράσταση ενός οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού α σε επιστημονική μορφή στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης σε αριθμητική κινητής υποδιαστολής, ως άμεση συνέπεια του γενικού ορισμού, είναι η εξής:

$$\alpha = \text{man}(\alpha) \cdot 10^{\text{exp}(\alpha)}$$

Στη συγκεκριμένη αναπαράσταση, η απόλυτη τιμή της mantissa $\text{man}(\alpha)$ ανήκει στο διάστημα $[1, 10)$ και η βάση b είναι το δέκα (10), ως βάση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

□

Για παράδειγμα, η αναπαράσταση του αριθμού 100.1437378863281 σε επιστημονική μορφή είναι $1.001437378863281 \cdot 10^2$, ενώ η αναπαράσταση του αριθμού -0.004789201479518454 σε επιστημονική μορφή είναι $-4.789201479518454 \cdot 10^{-3}$. Όπως παρατηρούμε από τα ανωτέρω παραδείγματα, στην επιστημονική μορφή του αριθμού, το πλήθος των ψηφίων της mantissa ισούται με n , δηλαδή τη χρησιμοποιούμενη ακρίβεια.

Οι προσημασμένες mantissae των αριθμών του προηγούμενου παραδείγματος είναι 1.001437378863281 και -4.789201479518454 , ενώ οι εκθέτες είναι 2 και -3 αντίστοιχα.

Συμβολισμός 2.1 και σχετικές Συντομογραφίες. Σε όλη τη διατριβή θα χρησιμοποιείται το ελληνικό ακρωνύμιο λ.δ.ψ. για τον όρο «λανθασμένα δεκαδικά ψηφία» και, ισοδυνάμως, το αγγλικό ακρωνύμιο e.d.d. για την ισοδύναμη αγγλική έκφραση «erroneous decimal digits».

Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\#edd(\alpha)$ για το ακριβές πλήθος λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων σε μία συγκεκριμένη, πλην τυχούσα, αναπαράσταση της ποσότητας α .

□

2.2 Αυστηρός ορισμός του μεγέθους της διαφοράς της ψηφιακής αναπαράστασης δύο αριθμών

Στο σημείο αυτό, είναι θεμελιώδους σημασίας για την ανάλυση που ακολουθεί να ορίσουμε αυστηρά το αν δύο αριθμοί οι οποίοι είναι γραμμένοι σε επιστημονική μορφή διαφέρουν ή όχι και αν διαφέρουν, να καθορίσουμε τόσο το μέγεθος της διαφοράς τους, όσο και το πλήθος των ψηφίων αυτής. Προς το σκοπό αυτό δίνουμε τους κάτωθι ορισμούς:

Ορισμός 2.3. Θεωρούμε δύο ομόσημους αριθμούς n_1, n_2 , οι οποίοι γράφονται σε κανονική εκθετική μορφή και έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων στη mantissa τους, έστω n . Έστω ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι:

$$\begin{aligned}n_1 &= d_1 \cdot d_2 d_3 \dots d_n \cdot 10^\tau \\n_2 &= \delta_1 \cdot \delta_2 \delta_3 \dots \delta_n \cdot 10^\rho\end{aligned}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως $\tau \geq \rho$.

Σχηματίζουμε τη διαφορά $S = n_1 - n_2$ και τη γράφουμε σε κανονική μορφή. Σημειώνουμε ότι εάν κατά την αφαίρεση των n_1 και n_2 προκύψουν μηδενικά στις πρώτες λ_0 θέσεις, $\lambda_0 \geq 0$, τότε, κατά την αποκατάσταση του S σε κανονική μορφή τα ψηφία του S μετά από τη θέση $(n - \lambda_0)$ τίθενται από την υπολογιστική μηχανή κατά τρόπο τυχαίο, ενώ ο εκθέτης μειώνεται κατά λ_0 . Επομένως, τελικά, η διαφορά S σε κανονική μορφή γράφεται ως

$$S = w \cdot 10^{\tau - \lambda_0}$$

Έστω ότι

$$|n_1 - n_2| = w \cdot 10^{\tau - (n-k)}$$

όπου $1 \leq w < 10$ είναι η mantissa του απολύτου της διαφοράς των δύο αριθμών.

Τότε, οι δύο αυτοί αριθμοί διαφέρουν κατά

$$k = n - \lambda_0$$

δεκαδικά ψηφία, εφ' όσον $k \geq 0$.

Τονίζουμε ότι εάν η ανωτέρω σχέση έχει σαν αποτέλεσμα αρνητικό k , τότε, εξ' ορισμού $k = 0$, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί n_1 και n_2 είναι ταυτόσημοι ως προς τα n πρώτα δεκαδικά τους ψηφία. Τέλος, εάν οι δύο αριθμοί n_1 και n_2 είναι ετερόσημοι, θεωρούμε de facto ότι διαφέρουν σε όλα τα n δεκαδικά τους ψηφία.

□

Ενδεχόμενη αρνητική τιμή του k μπορεί να προκύψει λόγω του ότι μαθηματικά πακέτα όπως το Matlab παρουσιάζουν μεν τα αποτελέσματα με 16 δεκαδικά ψηφία, ωστόσο εσωτερικά εκτελούν τις πράξεις με περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Για παράδειγμα, το Matlab εκτελεί τις πράξεις με ακρίβεια 17 ή 18 δεκαδικών ψηφίων. Εάν πραγματοποιήσουμε τις ίδιες πράξεις χρησιμοποιώντας βιβλιοθήκες που επιτρέπουν σημαντικά μεγαλύτερη ακρίβεια, όπως είναι η MPFR στη γλώσσα C++, το αποτέλεσμα θα ήταν η τιμή του k να είναι κατά κανόνα μηδέν (0).

Επομένως, σύμφωνα με τον ανωτέρω ορισμό, δύο αριθμοί με mantissa 32 ψηφίων, έστω

$$n_1 = 6.98765432123456789777777777777777 \cdot 10^1$$

$$n_2 = 6.9876543212345678901523451234533 \cdot 10^1$$

Οι αριθμοί αυτοί δίνουν, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3, διαφορά πέντε (5) ψηφίων σε ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων.

Μερικά ακόμη παραδείγματα:

$$\alpha_1 = 4.357864325780864$$

$$\alpha_2 = 4.362956762356473$$

Για τους αριθμούς αυτούς ισχύει $\tau = \rho = 0, n = 16$ και $|\alpha_1 - \alpha_2| = |S_1| = 5.092436575609316 \cdot 10^{-3}$. Οπότε, $\tau - (n - k) = -3 \Leftrightarrow k = 13$. Αρχικά, με μία πρώτη επισκόπηση, μπορεί να προκύψει η λανθασμένη εντύπωση ότι οι αριθμοί διαφέρουν σε ένα (1) επιπλέον ψηφίο. Όμως, αυτό δεν είναι ορθό, διότι ισχύει

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 5.092436575609316 \cdot 10^{-3}$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι οι αριθμοί α_1 και α_2 διαφέρουν από το τρίτο δεκαδικό τους ψηφίο και μετά.

Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και από το επόμενο παράδειγμα:

$$\alpha_1 = 4.7901645$$

$$\alpha_2 = 4.8002223$$

Για τους αριθμούς αυτούς ισχύει $|\alpha_1 - \alpha_2| = 1.0057799 \cdot 10^{-2}$, οπότε βάσει του ορισμού, οι αριθμοί αυτοί διαφέρουν κατά έξι (6) ψηφία, ενώ, με απλή επισκόπηση τους, φαίνεται ότι διαφέρουν κατά επτά (7) ψηφία.

2.3 Αυστηρός ορισμός του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που εμπεριέχεται στην ψηφιακή αναπαράσταση ενός αριθμού

Στην παράγραφο αυτή, θα χρησιμοποιήσουμε τα προαναφερθέντα για να ορίσουμε αυστηρά τον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα οποία έχει υπολογιστεί μία οποιαδήποτε ποσότητα σε έναν τυχόντα αλγόριθμο.

Συμβολισμός 2.2. Έστω ότι όλες οι πράξεις εκτελούντο με άπειρη ακρίβεια. Τότε, το αποτέλεσμα το οποίο θα προέκυπτε από την εκάστοτε πράξη, θα ήταν ένας αριθμός ο οποίος δεν θα είχε κανένα λάθος δεκαδικό ψηφίο και θα χρησιμοποιείτο σαν αριθμός αναφοράς, με τον οποίο θα συγκρίνονταν τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης πράξης για τα ίδια ορίσματα, αλλά με πεπερασμένη ακρίβεια στην εκτέλεσή της. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με a^c . Εάν περιορίσουμε τον a^c σε έναν αριθμό με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων, έστω n , με διαδικασία στρογγύλευσης του n -οστού ψηφίου, τότε, αυτή η περιορισμένη έκδοση του a^c θα συμβολίζεται ως a_n^c .

□

Ορισμός 2.4. Η ποσότητα a έχει υπολογιστεί με ακριβώς τα τελευταία λ δεκαδικά της ψηφία λανθασμένα, αν και μόνον αν ο περιορισμός του αριθμού a^c σε n δεκαδικά ψηφία και ο a διαφέρουν κατά λ δεκαδικά ψηφία, βάσει του Ορισμού 2.3.

Θεωρούμε οποιαδήποτε υπολογιστική μηχανή η οποία έχει ακρίβεια πρακτικά ίση με n δεκαδικά ψηφία στη mantissa. Ακολούθως, για τυχόντα αριθμό κινητής υποδιαστολής ο οποίος αναπαρίσταται στην υπολογιστική αυτή μηχανή, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & (\text{αριθμός ορθών δεκαδικών ψηφίων του } a) \\ & + (\text{αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του } a) = n \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda^c + \lambda = n \tag{2.1}$$

Σημείωση: Σε μία υπολογιστική μηχανή που εκτελεί εσωτερικά τις πράξεις σε δυαδική αριθμητική κινητής υποδιαστολής της μορφής IEEE 754, η mantissa ενός αριθμού αναπαρίσταται από ένα πλήθος δυαδικών ψηφίων, έστω m . Ο ίδιος αριθμός στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης αναπαρίσταται με n δεκαδικά ψηφία, όπου n είναι η πλησιέστερη προσέγγιση της τιμής της παράστασης $m \cdot \log_{10} 2$ σε ακέραιο αριθμό στο δεκαδικό σύστημα.

□

Στην πράξη, ο αριθμός α^c δεν είναι ποτέ διαθέσιμος. Για το λόγο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 3, 4, 5 και 6 του Β Μέρους της παρούσας εργασίας για να βρίσκουμε σε κάθε περίπτωση μία εξαιρετικά αξιόπιστη αναπαράσταση του α^c για οποιοδήποτε επιθυμητή ακρίβεια n δεκαδικών ψηφίων της υπολογιστικής μηχανής.

Με χρήση των αυστηρών ορισμών που δώσαμε στο παρόν κεφάλαιο, θα μελετήσουμε στα επόμενα το φαινόμενο της γένεσης και της συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού (Κεφάλαιο 3) αλλά και κατά την εκτέλεση πολλών διαδοχικών πολλαπλασιασμών (Κεφάλαιο 4).

3 Γένεση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε έναν πολλαπλασιασμό και σχετικές πιθανότητες

3.1 Αναλυτικός υπολογισμός του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$, όπου α και β είναι δύο αριθμοί εκπεφρασμένοι σε επιστημονική μορφή με ίδιο αριθμό ψηφίων στη mantissa τους. Ας υποθέσουμε, επίσης, πως έχουμε τους αριθμούς α^c και β^c που αντιπροσωπεύουν τους α και β αντίστοιχα, υπολογισμένους με άπειρη ακρίβεια και, ως εκ τούτου, με καθόλου λάθος πεπερασμένης ακρίβειας. Στην πράξη, η πλήρης γνώση των αριθμών α^c και β^c είναι εν γένει αδύνατη. Εντούτοις, όπως ήδη αναφέρθηκε στο τέλος του Κεφαλαίου 2 και θα θεμελιωθεί στο Κεφάλαιο 5, είναι δυνατόν να έχουμε ακριβή παράσταση των ορθών αριθμών α^c και β^c σε επιστημονική μορφή, με οποιονδήποτε επιθυμητό αριθμό n ψηφίων στη mantissa. Σε όλη την ανάλυση που θα ακολουθήσει, όπου αναφέρονται τα α^c και β^c , θα θεωρούμε ότι έχουμε διαθέσιμες ακριβώς αυτές τις πεπερασμένες μεν, ακριβείς δε παραστάσεις των αριθμών αυτών σε n ψηφία. Υποθέτουμε, επίσης, πως ο αριθμός α έχει υπολογιστεί με λ_a^e ή λ_a λανθασμένα ψηφία, ή, ισοδύναμα, με λ_a^c ορθά ψηφία, λόγω του ότι οι υπολογισμοί που οδήγησαν στην παραγωγή του α έχουν γίνει με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων. Σε πλήρη αντιστοιχία με τον α , ο αριθμός β έχει υπολογιστεί με λ_β^e ή λ_β λανθασμένα ή, ισοδύναμα, με λ_β^c ορθά ψηφία.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι, όπως προκύπτει άμεσα από τον τρόπο με τον οποίο εκτελούνται οι πράξεις στην αρχιτεκτονική των σύγχρονων υπολογιστικών μηχανών, το σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας στην πράξη του πολλαπλασιασμού ανιχνεύεται αποκλειστικά στην mantissa του γινομένου. Συγκεκριμένα, σε οποιαδήποτε πράξη πολλαπλασιασμού που εκτελείται σε αρχιτεκτονική κινητής υποδιαστολής, ο υπολογιστής πολλαπλασιάζει τις mantissae και προσθέτει τους εκθέτες. Μετά την ολοκλήρωση του πολλαπλασιασμού των mantissae ενδέχεται η υπολογιστική μηχανή να πραγματοποιήσει δεξιά ολίσθηση για να φέρει το γινόμενο σε κανονική μορφή, τροποποιώντας κατάλληλα τον εκθέτη του γινομένου. Η συμμετοχή των εκθετών σε αριθμητικό λάθος κατά την πράξη του πολλαπλασιασμού περιορίζεται στο ενδεχόμενο να υπάρξει υπερχειλίση του εκθέτη. Επομένως, μπορούμε να

θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες α , β , α^c και β^c είναι mantissae. Ειδικότερα θεωρούμε ότι τα α , β , α^c και β^c είναι προσημασμένες mantissae. Σύμφωνα με το πρότυπο IEEE 754, οι mantissae των αριθμών είναι πάντοτε θετικές, καθώς το πρόσημο του αριθμού αποθηκεύεται χωριστά στην αναπαράσταση του αριθμού. Ωστόσο, για λόγους συμπαγούς αναπαράστασης αλλά και για να λάβουμε υπ' όψιν όλες τις δυνατές περιπτώσεις γινομένων μεταξύ οποιωνδήποτε αριθμών από μαθηματικής άποψης, θα θεωρήσουμε σε όλη την ανάλυση που ακολουθεί ότι οι mantissae είναι προσημασμένες. Εν τούτοις, όλη η ανάλυση που ακολουθεί θα είναι απολύτως συμβατή με τον τρόπο με τον οποίο εκτελούνται οι πράξεις στους σύγχρονους υπολογιστές.

Επιπλέον, όλη η ανάλυση που έχει γίνει και παρουσιάζεται εδώ θεωρεί ότι ο πολλαπλασιασμός $\gamma = \alpha \cdot \beta$ είναι ενταγμένος στα πλαίσια ενός ευρύτερου αλγορίθμου ή ενός συνόλου πράξεων και, επομένως, ότι στους πολλαπλασιαστέους α και β μπορεί να έχει ήδη συσσωρευτεί ένα οσοδήποτε μεγάλο σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας.

Προκειμένου να μελετήσουμε το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας που παράγεται κατά τον υπολογισμό του γινομένου γ , θεωρούμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Οι όροι του γινομένου, α και β , έχουν υπολογιστεί με το ίδιο πλήθος ορθών δεκαδικών ψηφίων ($\lambda_a^c = \lambda_b^c$)

Λόγω του ότι οι αριθμοί α και β έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, μπορούμε να εκφράσουμε τις ποσότητες α^c και β^c ως ακολούθως, βάσει του Ορισμού 2.4:

$$\begin{aligned} \alpha^c &= \alpha + y \cdot 10^{-\lambda_a^c} \\ \beta^c &= \beta + x \cdot 10^{-\lambda_b^c} \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου x και y είναι προσημασμένες mantissae, εκπεφρασμένες σε κανονική μορφή.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις Σχέσεις (3.1), έχουμε:

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = (\alpha + y \cdot 10^{-\lambda_a^c}) \cdot (\beta + x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c})$$

$$\gamma^c = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c} + \beta \cdot y \cdot 10^{-\lambda_a^c} + x \cdot y \cdot 10^{-(\lambda_a^c + \lambda_\beta^c)}$$

Εξ' υποθέσεως ισχύει ότι $\lambda_a^c = \lambda_\beta^c = \lambda^c$. Οπότε η ανωτέρω έκφραση λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$\gamma^c = \alpha \cdot \beta + (\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c} + xy \cdot 10^{-2\lambda^c} \quad (3.2)$$

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4, το σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας με το οποίο έχει υπολογιστεί το γινόμενο γ είναι

$$\varepsilon_\gamma = (\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c} + xy \cdot 10^{-2\lambda^c} \quad (3.3)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η ανάλυση που ακολουθεί μπορεί να εφαρμοστεί για την ανωτέρω, πλήρη μορφή του σφάλματος ε_γ με μικρές, ευθύγραμμες τροποποιήσεις. Ωστόσο, στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί προσέγγιση πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι για $\lambda^c \geq 3$, ο όρος $xy \cdot 10^{-2\lambda^c}$ είναι πρακτικά αμελητέος συγκριτικά με τον όρο $(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c}$, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ίσος με μηδέν. Όλα τα πειράματα που έχουν επιτελεσθεί, όπως αυτά που αναφέρονται στο Κεφάλαιο 6, επιβεβαιώνουν πλήρως την ορθότητα αυτής της προσέγγισης. Στην περίπτωση που για τον αριθμό των ορθών ψηφίων λ^c των α και β ισχύει $\lambda^c < 3$, τότε η ποσότητα ε_γ της Σχέσης (3.3) μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσια στην ακόλουθη ανάλυση.

Πριν περάσουμε σε διεξοδική ανάλυση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συγκεντρώνονται στην ποσότητα γ , είναι απαραίτητο να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, για λόγους που θα γίνουν αντιληπτοί στα επόμενα. Στις περιπτώσεις αυτές, όπως έχει ήδη αναφερθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, οι mantissae των πολλαπλασιαστέων α και β , αλλά και αυτές των ορθών τους αναπαραστάσεων α^c και β^c θεωρούνται προσημασμένες για λόγους απλοποίησης της ανάλυσης.

- Περίπτωση 1.i $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| < 10$ και
- Περίπτωση 1.ii $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| \geq 10$

Συγκεκριμένα,

$$\text{Περίπτωση 1.i } |man(\alpha) \cdot man(\beta)| < 10 \quad (3.4)$$

Στην περίπτωση αυτή, όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω, ο μέγιστος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του γινομένου $\gamma = \alpha \cdot \beta$ είναι $\lambda + 2$, όπου λ είναι ο κοινός αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των όρων του γινομένου α και β . Υπενθυμίζεται ότι έχουμε υποθέσει πως όλες οι ποσότητες έχουν μηδενικούς εκθέτες και, ως εκ τούτου, το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δίνεται από τη σχέση

$$\alpha \cdot \beta = man(\alpha) \cdot man(\beta) = man(\alpha \cdot \beta)$$

Συνεπώς, τώρα, η ορθή αναπαράσταση του γινομένου γ^c , βάσει της (3.2) είναι:

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = man(\alpha \cdot \beta) + (\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c} \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να διακρίνουμε έναν αριθμό περιπτώσεων, ανάλογα με την τιμή της ποσότητας $|\alpha x + \beta y|$. Δεδομένου του περιορισμού $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| < 10$, εύκολα αποδεικνύεται ότι η μέγιστη τιμή που η ποσότητα $|\alpha x + \beta y|$ μπορεί να λάβει είναι $UB = 110$, καθώς όλες οι ποσότητες, α, β, x, y , είναι προσημασμένες mantissae. Επομένως, διακρίνουμε τις ακόλουθες επιπλέον περιπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση 1.i.}\alpha \quad 100 \leq |\alpha x + \beta y| < UB \quad (3.6)$$

Εδώ ισχύει

$$\alpha x + \beta y = man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^2$$

Επομένως,

$$man(\alpha^c \cdot \beta^c) = man(\alpha \cdot \beta) + man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c - 2)} \quad (3.7)$$

Η ανωτέρω Σχέση (3.7), μαζί με τον Ορισμό 2.4 δείχνουν ότι το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με δύο λιγότερα ορθά δεκαδικά ψηφία σε σχέση με τα λ^c ορθά δεκαδικά ψηφία που είχαν οι πολλαπλασιαστέοι α και β . Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το γινόμενο έχει υπολογιστεί με δύο επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με τα α και β .

$$\text{Περίπτωση 1.i.β } 10 \leq |ax + \beta y| < 100 \quad (3.8)$$

Τώρα ισχύει

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10$$

Οπότε,

$$\gamma^c = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c - 1)} \quad (3.9)$$

Από την ανωτέρω Σχέση (3.9) και τον Ορισμό 2.4 συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με ένα ορθό δεκαδικό ψηφίο λιγότερο σε σχέση με αυτά των α και β .

$$\text{Περίπτωση 1.i.γ } 1 \leq |ax + \beta y| < 10 \quad (3.10)$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y)$$

Από τη σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (3.5) προκύπτει

$$\gamma^c = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c} \quad (3.11)$$

Επί τη βάση του Ορισμού 2.4, η ανωτέρω σχέση για το γ^c δηλώνει ότι η ποσότητα γ παρουσιάζει ακριβώς τον ίδιο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα α και β .

$$\text{Περίπτωση 1.i.δ } 10^{-1} \leq |ax + \beta y| < 1 \quad (3.12)$$

Εδώ ισχύει ότι

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-1}$$

Λόγω αυτής της σχέσης, η (3.5) γράφεται ως εξής:

$$\gamma^c = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c+1)} \quad (3.13)$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του γινομένου γ έχει μειωθεί κατά ένα.

$$\text{Περίπτωση 1.i.ε-στ } 10^{-k} \leq |ax + \beta y| < 10^{-(k-1)}, k = 2,3,4 \quad (3.14)$$

Στη γενική περίπτωση στην οποία η ποσότητα $|ax + \beta y|$ βρίσκεται μεταξύ του 10^{-k} και του $10^{-(k-1)}$, ισχύει ότι

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-k}$$

Επομένως,

$$\gamma^c = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c+k)} \quad (3.15)$$

Όπως παρατηρούμε από την ανωτέρω γενική σχέση, ο αριθμός των σωστών δεκαδικών ψηφίων του γινομένου γ έχει αυξηθεί κατά k σε σχέση με αυτόν των πολλαπλασιαστέων α και β . Είναι προφανές ότι ανάλογη προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί για την περίπτωση που $k \geq 5$. Ωστόσο, στην ανάλυση που ακολουθεί θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα να ισχύει μία τέτοια περίπτωση είναι ιδιαίτερα μικρή, πρακτικά αμελητέα.

$$\text{Περίπτωση 1.ii} \quad |man(\alpha) \cdot man(\beta)| \geq 10 \quad (3.16)$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι για την ποσότητα $(\alpha x + \beta y)$ στην έκφραση $\varepsilon_\gamma = (\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c}$ ισχύει πάντα $|\alpha x + \beta y| \leq 200$, λόγω του ότι τα α, β, x, y είναι mantissae. Όπως και προηγουμένως, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση 1.ii.α} \quad 100 \leq |\alpha x + \beta y| < 200 \quad (3.17)$$

Εδώ ισχύει

$$\alpha x + \beta y = man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^2$$

Επομένως,

$$\gamma^c = \alpha \cdot \beta + man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c-2)} \quad (3.18)$$

Ισχύει, ωστόσο, ότι

$$\alpha \cdot \beta = man(\alpha) \cdot man(\beta) = man(\alpha \cdot \beta) \cdot 10$$

ενώ ταυτόχρονα ισχύει ότι

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = man(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10$$

εάν ο αλγόριθμος στον οποίον εντάσσεται ο συγκεκριμένος πολλαπλασιασμός δεν έχει καταστραφεί λόγω λάθους πεπερασμένης ακρίβειας, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι οι ποσότητες $\alpha^c \cdot \beta^c$ και $\alpha \cdot \beta$ είναι ίδιας τάξης. Ως εκ τούτου, η Σχέση (3.18) γράφεται ως εξής:

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = man(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10 = man(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 + man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^2 \cdot 10^{-\lambda^c}$$

Μετά από διαίρεση της ανωτέρω σχέσης με 10, λαμβάνουμε τελικά

$$man(\alpha^c \cdot \beta^c) = man(\alpha \cdot \beta) + man(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c-1)} \quad (3.19)$$

Η ανωτέρω σχέση σε συνδυασμό με τον Ορισμό 2.4 υποδηλώνει ότι το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με $(\lambda^c - 1)$ σωστά δεκαδικά ψηφία. Παρ' όλο που οι Ανισότητες (3.6) και (3.17) που αντιστοιχούν στις Περιπτώσεις 1.i.α και 1.ii.α είναι παρόμοιες, στην Περίπτωση 1.ii.α το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με ένα λιγότερο λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο, λόγω της δεξιάς ολίσθησης που επιτελεί ο υπολογιστής, προκειμένου να αναπαραστήσει τον αριθμό γ σε κανονική μορφή.

$$\text{Περίπτωση 1.ii.β } 10 \leq |ax + \beta y| < 100$$

Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10$$

Ωστόσο, εάν ο αλγόριθμος δεν έχει καταστραφεί, ισχύει

$$\alpha \cdot \beta = \text{man}(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 \text{ και } \alpha^c \cdot \beta^c = \text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10$$

Οπότε,

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = \text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10 = \text{man}(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10 \cdot 10^{-\lambda^c} \Leftrightarrow$$

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c}$$

Η σχέση αυτή και ο Ορισμός 2.4 υποδεικνύουν ότι το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με λ^c ορθά δεκαδικά ψηφία. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, δεν υπάρχει δημιουργία επιπλέον λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού.

$$\text{Περίπτωση 1.ii.γ } 1 \leq |ax + \beta y| < 10$$

Εν προκειμένω, ισχύει

$$ax + \beta y = \text{man}(ax + \beta y)$$

Εάν ο αλγόριθμος δεν έχει καταστραφεί λόγω λάθους πεπερασμένης ακρίβειας, συνάγεται ότι

$$\alpha \cdot \beta = \text{man}(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 \text{ και } \alpha^c \cdot \beta^c = \text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10$$

Επομένως ισχύει

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = \text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10 = \text{man}(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 + \text{man}(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-\lambda^c} \Leftrightarrow$$

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c+1)}$$

Η τελική σχέση δείχνει ότι η ποσότητα $\alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με ένα επιπλέον ορθό ψηφίο σε σχέση με αυτά των όρων του γινομένου α και β . Στην περίπτωση αυτή, η πράξη του πολλαπλασιασμού έχει μειώσει το συνολικό αριθμό των λανθασμένων ψηφίων του γινομένου κατά ένα (1) ψηφίο σε σχέση με τα λανθασμένα ψηφία των όρων του γινομένου.

$$\text{Περίπτωση 1.ii.δ-ε-στ-ζ } 10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y| < 10^{-(k-1)}, k = 1,2,3,4$$

Όταν η ποσότητα $|\alpha x + \beta y|$ παραμένει μεταξύ 10^{-k} και $10^{-(k-1)}$ ισχύει ότι

$$\alpha x + \beta y = \text{man}(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-k}$$

Άρα

$$\gamma^c = \text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) \cdot 10 = \text{man}(\alpha \cdot \beta) \cdot 10 + \text{man}(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c+k)} \Leftrightarrow$$

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y) \cdot 10^{-(\lambda^c+k+1)} \quad (3.20)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των ορθών δεκαδικών ψηφίων του γινομένου $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει αυξηθεί κατά $k + 1$.

Θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα στα οποία θα παρουσιαστούν ορισμένες από τις προαναφερθείσες χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

Έστω οι απολύτως ορθές αναπαραστάσεις δύο αριθμών α και β με δέκα (10) δεκαδικά ψηφία στη mantissa τους, όπως αυτοί έχουν προκύψει μετά από εκτέλεση πράξεων σε μία υπολογιστική μηχανή με άπειρη ακρίβεια:

$$\alpha^c = 4.146846782$$

$$\beta^c = 1.840920587$$

Έστω επίσης οι αναπαραστάσεις των δύο αυτών αριθμών με δέκα δεκαδικά ψηφία στη mantissa τους, αλλά σε μία υπολογιστική μηχανή που εκτελεί πράξεις με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων:

$$\alpha = 4.146842957$$

$$\beta = 1.840921923$$

Οι αριθμοί α και β διαφέρουν αντίστοιχα από τους α^c και β^c κατά

$$S_\alpha = \alpha^c - \alpha = y \cdot 10^{-\lambda_\alpha^e} = 3.825000000 \cdot 10^{-6}$$

και

$$S_\beta = \beta^c - \beta = x \cdot 10^{-\lambda_\beta^e} = -1.336000000 \cdot 10^{-6}$$

αντίστοιχα. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε πως

$$y = 3.825000000 \text{ και } \lambda_\alpha^c = 6.$$

$$\text{Από τη Σχέση (2.1) προκύπτει ότι } \lambda_\alpha^c + \lambda_\alpha^e = n \Leftrightarrow \lambda_\alpha^e = n - \lambda_\alpha^c = 10 - 6 \Rightarrow \lambda_\alpha^e = 4.$$

$$\text{Επίσης, } x = -1.336000000 \text{ και } \lambda_\beta^c = 6 \Leftrightarrow \lambda_\beta^e = 4.$$

Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε πως οι αριθμοί α και β έχουν τον ίδιο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων στη mantissa τους.

$$\text{Επίσης, ισχύει } |\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)| = 7.634014111 < 10 \text{ και } |\alpha x + \beta y| = 1.501344165.$$

Βάσει της προηγούμενης ανάλυσης, η περίπτωση του γινομένου αυτού είναι ανάλογη της Περίπτωσης 1.ι.γ, γεγονός το οποίο σημαίνει ότι το γινόμενο των α και β θα έχει ακριβώς τον ίδιο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα α και β , δηλαδή τέσσερα (4) λανθασμένα δεκαδικά ψηφία. Πράγματι, εάν πολλαπλασιάσουμε τους α και β αφ' ενός και τους α^c και β^c αφ' ετέρου λαμβάνουμε τα γινόμενα:

$$\alpha \cdot \beta = 7.634014111 \cdot 10^{-12}$$

και

$$\alpha^c \cdot \beta^c = 7.634015612 \cdot 10^{-12}$$

Από τον Ορισμό 2.3 έχουμε

$$\alpha^c \cdot \beta^c - \alpha \cdot \beta = 1.500999999 \cdot 10^{-18}$$

Ισχύει

$$\tau - (n - k) = -18$$

όπου $\tau = -12$ και $n = 10$. Επομένως, $k = 4$.

Συμπεραίνουμε πως το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με τέσσερα (4) λανθασμένα δεκαδικά ψηφία, όπως και οι όροι του, α και β .

Στη συνέχεια θεωρούμε τους αριθμούς α και β με ακρίβεια δέκα (10) δεκαδικών ψηφίων

$$\alpha = 3.730711853$$

$$\beta = -3.579315832$$

Καθώς και τις ορθές αναπαραστάσεις αυτών με δέκα (10) δεκαδικά ψηφία

$$\alpha^c = 3.730717609$$

$$\beta^c = -3.579312767$$

Λαμβάνουμε εκ νέου τις διαφορές

$$S_\alpha = \alpha^c - \alpha = y \cdot 10^{-\lambda_\alpha} = 5.756000000 \cdot 10^{-6}$$

και

$$S_\beta = \beta^c - \beta = x \cdot 10^{-\lambda_\beta} = 3.065000000 \cdot 10^{-6}$$

Με εφαρμογή του Ορισμού 2.3 επί των ανωτέρω αριθμών είναι δυνατόν να διαπιστωθεί ότι τα α και β έχουν υπολογιστεί και σε αυτή την περίπτωση με τέσσερα (4) λανθασμένα δεκαδικά ψηφία.

Ωστόσο, τώρα ισχύει $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| = 1.335339600 \cdot 10^1 > 10$ και $|ax + \beta y| = 9.167910100$.

Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη της Περίπτωσης 1.ii.γ και, ως εκ τούτου το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ αναμένεται να έχει ένα (1) λιγότερο λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο από τα α και β . Για να το επαληθεύσουμε, υπολογίζουμε, όπως και προηγουμένως, τα γινόμενα τόσο των α και β , όσο και των α^c και β^c :

$$\alpha \cdot \beta = -1.335339600 \cdot 10^1$$

$$\alpha^c \cdot \beta^c = -1.335340517 \cdot 10^1$$

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3 λαμβάνουμε

$$\alpha^c \cdot \beta^c - \alpha \cdot \beta = -9.167892451 \cdot 10^{-6}$$

Ισχύει

$$\tau - (n - k) = -6$$

όπου $\tau = 1$ και $n = 10$. Συνεπώς, $k = 3$.

Στην περίπτωση αυτή, στην οποία ίσχυε $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| > 10$, ενώ η ποσότητα $|ax + \beta y|$ παρέμεινε εντός του διαστήματος $[1, 10)$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το γινόμενο των αριθμών α και β υπολογίστηκε με ένα λιγότερο λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο σε σχέση με τα λανθασμένα ψηφία των πολλαπλασιαστέων.

Περίπτωση 2: Οι όροι του γινομένου, α και β , έχουν υπολογιστεί με διαφορετικό πλήθος ορθών δεκαδικών ψηφίων ($\lambda_a^c \neq \lambda_\beta^c \Leftrightarrow \lambda_a^e \neq \lambda_\beta^e \Leftrightarrow \lambda_a \neq \lambda_\beta$)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda_a^e < \lambda_\beta^e$, ή, ισοδύναμα, $\lambda_a^c > \lambda_\beta^c$. Γράφουμε εκ νέου τις ποσότητες α^c και β^c ως εξής:

$$\alpha^c = \alpha + y \cdot 10^{-\lambda_a^c}$$

$$\beta^c = \beta + x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c}$$

Οι σχέσεις αυτές οδηγούν στην ακόλουθη έκφραση:

$$\gamma^c = \alpha^c \cdot \beta^c = (\alpha + y \cdot 10^{-\lambda_a^c}) \cdot (\beta + x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c})$$

$$\gamma^c = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c} + \beta \cdot y \cdot 10^{-\lambda_a^c} + x \cdot y \cdot 10^{-(\lambda_a^c + \lambda_\beta^c)}$$

Για μια ακόμη φορά θα χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση πρώτης τάξης. Για την ακρίβεια, θα υποθέσουμε ότι για $\lambda_\beta^c \geq 3$ ο όρος $xy \cdot 10^{-(\lambda_a^c + \lambda_\beta^c)}$ είναι πρακτικά αμελητέος σε σχέση με τους υπόλοιπους. Και σε αυτή την περίπτωση, η ανάλυση που ακολουθεί μπορεί να επεκταθεί ευθύγραμμα, ώστε να περιλαμβάνει και την επίδραση του όρου ανώτερης τάξης. Ωστόσο, όπως θα γίνει κατανοητό στα επόμενα κεφάλαια, η διαφοροποίηση του αποτελέσματος, εάν ληφθεί υπ' όψιν στην ανάλυση ο όρος ανώτερης τάξης, είναι πρακτικά ασήμαντη, ειδικά εάν λάβουμε υπ' όψιν τη μεγάλη αύξηση της πολυπλοκότητας που υπεισέρχεται στους υπολογισμούς. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$\gamma^c = \alpha \cdot \beta + \alpha x \cdot 10^{-\lambda_\beta^c} + \beta y \cdot 10^{-\lambda_a^c} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^c \cdot \beta^c = \alpha \cdot \beta + (\alpha x + \beta y \cdot 10^{-(\lambda_a^c - \lambda_\beta^c)}) \cdot 10^{-\lambda_\beta^c}$$

Εάν θέσουμε $\delta = \lambda_a^c - \lambda_\beta^c \geq 1$, λαμβάνουμε

$$\alpha^c \cdot \beta^c = \alpha \cdot \beta + (\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-\lambda_\beta^c} \quad (3.21)$$

Προκειμένου να λάβουμε υπ' όψιν όλα τα πιθανά ενδεχόμενα, αρκεί να επαναλάβουμε την ανάλυση της Περίπτωσης 1, χρησιμοποιώντας την ποσότητα $(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta})$ στη θέση της $\alpha x + \beta y$ και το λ_β^c στη θέση του λ^c . Η μόνη διαφορά στην ανάλυση μεταξύ των δύο περιπτώσεων έγκειται στο γεγονός ότι η μέγιστη τιμή της ποσότητας $|\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}|$ είναι μικρότερη σε σχέση με αυτή της $|\alpha x + \beta y|$. Βάσει των ανωτέρω, διακρίνουμε πάλι για την περίπτωση αυτή τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

- Περίπτωση 2.i $|\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)| < 10$ και
- Περίπτωση 2.ii $|\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)| \geq 10$

Για καθεμία από τις δύο ανωτέρω υποκατηγορίες πρέπει να διακρίνουμε τις ακόλουθες περαιτέρω υποπεριπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση 2.i.α } 100 \leq |ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 101 \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση αυτή, κατ' αναλογία της Περίπτωσης 1.i.α ισχύει

$$ax + \beta y \cdot 10^{-\delta} = \text{man}(ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^2$$

Εφ' όσον δε υποθέσαμε ότι $\lambda_\alpha^c > \lambda_\beta^c \geq 1$, ισχύει ότι τα γινόμενα $\alpha^c \cdot \beta^c$ και $\alpha \cdot \beta$ είναι της ίδιας τάξης. Επομένως, η αλλοίωση του γινομένου των mantissae λόγω λάθους πεπερασμένης ακρίβειας δεν έχει επηρεάσει τον εκθέτη των πολλαπλασιαστέων. Συνεπώς,

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_\beta^c - 2)}$$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με δύο επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το μέγιστο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των α και β , δηλαδή λ_β^e .

$$\text{Περίπτωση 2.i.β } 10 \leq |ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 100 \quad (3.23)$$

Στην περίπτωση αυτή, κατ' αναλογία με την Περίπτωση 1.i.β ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_\beta^c - 1)}$$

Από την ανωτέρω σχέση και τον Ορισμό 2.4 συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο γ έχει υπολογιστεί με ένα επιπλέον λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο σε σχέση με τον πολλαπλασιαστέο β .

$$\text{Περίπτωση 2.i.γ } 1 \leq |ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10 \quad (3.24)$$

Για το συγκεκριμένο εύρος τιμών της ποσότητας $|ax + \beta y \cdot 10^{-\delta}|$ ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-\lambda_\beta^c}$$

Επομένως, το γινόμενο γ στην περίπτωση αυτή έχει υπολογιστεί με λ_β^c λανθασμένα δεκαδικά ψηφία.

$$\text{Περίπτωση 2.i.δ-ε-στ } 10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10^{-(k-1)}, k = 1,2,3,4 \quad (3.25)$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_\beta^c + k)}$$

Παρατηρούμε ότι, εδώ, το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί με k λιγότερα λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το μέγιστο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των όρων του γινομένου, α και β . Είναι προφανές πως η ίδια προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε περίπτωση για την οποία ισχύει $k \geq 4$. Ωστόσο, η πιθανότητα να ισχύει οποιαδήποτε τέτοια περίπτωση είναι αμελητέα στην πράξη, όπως θα φανεί στα επόμενα.

$$\text{Περίπτωση 2.ii } |\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)| \geq 10$$

Για την περίπτωση αυτή, ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία με προηγουμένως, διακρίνοντας τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\text{Περίπτωση 2.ii.α } 100 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 110 \quad (3.26)$$

Ακολουθώντας συλλογιστική ανάλογη με αυτή της Περίπτωσης 1.ii.α, λαμβάνουμε

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_\beta^c - 1)}$$

Η ανωτέρω σχέση και ο Ορισμός 2.4 δείχνουν ότι το γινόμενο γ έχει υπολογιστεί με $(\lambda_\beta^c - 1)$ ορθά δεκαδικά ψηφία.

$$\text{Περίπτωση 2.ii.β } 10 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 100 \quad (3.27)$$

Τώρα ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-\lambda_{\beta}^c}$$

Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με τον Ορισμό 2.4 υποδεικνύουν ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού γ έχει υπολογιστεί με τον ίδιο ακριβώς αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με αυτόν του όρου β .

$$\text{Περίπτωση 2.ii.γ } 1 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10 \quad (3.28)$$

Εδώ ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_{\beta}^c + 1)}$$

Η ποσότητα $\alpha \cdot \beta$ έχει υπολογιστεί στην περίπτωση αυτή με ένα επιπλέον ορθό δεκαδικό ψηφίο σε σχέση με το πλήθος ορθών ψηφίων του β .

$$\text{Περίπτωση 2.ii.δ-ε-στ } 10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10^{-(k-1)}, k = 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\text{man}(\alpha^c \cdot \beta^c) = \text{man}(\alpha \cdot \beta) + \text{man}(\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}) \cdot 10^{-(\lambda_{\beta}^c + k + 1)}$$

Επομένως, ο αριθμός των ορθών δεκαδικών ψηφίων του γινομένου γ είναι αυξημένος κατά $(k + 1)$ σε σχέση με αυτόν του ελαχίστου εκ των $\lambda_{\alpha}^c, \lambda_{\beta}^c$.

3.2 Οι πιθανότητες να προκύψει συγκεκριμένος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων στο αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού

Προκειμένου να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να παραχθεί ένας συγκεκριμένος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων μετά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών α και β θα ακολουθήσουμε τη διάκριση των περιπτώσεων της Παραγράφου 3.1.

Πράγματι:

$$\text{Περίπτωση 1: } \lambda_{\alpha}^e = \lambda_{\beta}^e = \lambda \Leftrightarrow \lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta} = \lambda$$

Ας υποθέσουμε ότι πολλαπλασιάζουμε δύο τυχόντες αριθμούς α και β , οι οποίοι έχουν τον ίδιο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων, λ . Το γινόμενο τους γ υπολογίζεται με $\lambda + \xi$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία. Σε περίπτωση που $\xi > 0$, το γ υπολογίζεται με ξ επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία, ενώ αν $\xi < 0$ το γ υπολογίζεται με ξ λιγότερα λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με τα α και β . Πάντοτε, όμως, ισχύει ότι το ξ είναι ένας ακέραιος αριθμός, ο οποίος δεν υπερβαίνει ποτέ το δύο (2) όταν ισχύει η Ανισότητα (3.4) και ποτέ το ένα (1) όταν ισχύει η Ανισότητα (3.16). Σύμφωνα με την Παράγραφο 3.1, το ξ είναι τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη του λ . Ως εκ τούτου, και οι πιθανότητες λήψης μίας συγκεκριμένης τιμής για το ξ είναι ανεξάρτητες του λ . Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στον ακόλουθο συμβολισμό για τις πιθανότητες της περίπτωσης αυτής:

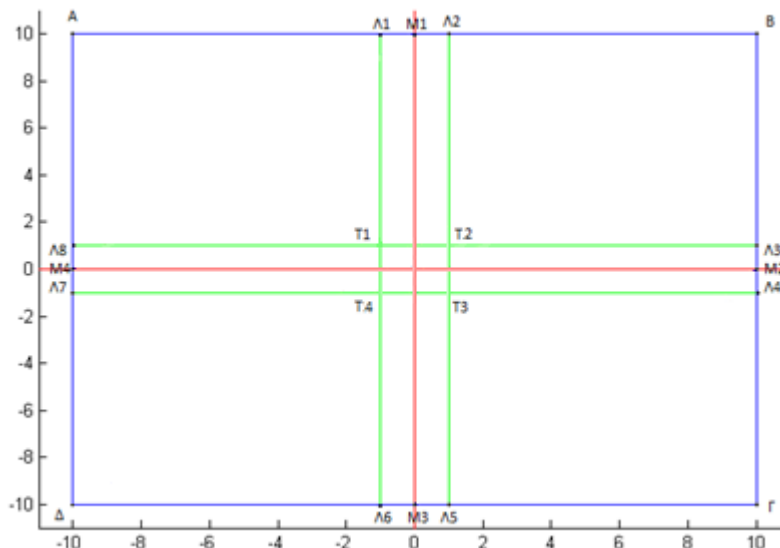
Συμβολισμός 3.1. Το γινόμενο $\gamma = \alpha \cdot \beta$ έχει ξ επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το λ εάν $\xi > 0$, τον ίδιο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων εάν $\xi = 0$ ή ξ λιγότερα λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το λ εάν $\xi < 0$. Οι αντίστοιχες πιθανότητες συμβολίζονται με $P^{EQ}(\xi; \alpha, \beta)$.

□

Στην παρούσα ανάλυση, όπως και προηγουμένως, υποθέτουμε χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας ότι τα α και β είναι προσημασμένες mantissae, καθώς και ότι τα x και y είναι οι προσημασμένες mantissae του στοχαστικού τμήματος του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας με το οποίο έχουν υπολογιστεί τα β και α αντίστοιχα. Επαναλαμβάνουμε ότι η υπόθεση πως τα

α, β, x, y είναι προσημασμένες mantissae αφορά τη γενικότερη περίπτωση, δεδομένου ότι, όπως έχει ήδη ειπωθεί, οι εκθέτες των όρων δεν συμμετέχουν στο λάθος πεπερασμένης ακρίβειας όσο δεν υπάρχει άνω ή κάτω υπερχειλίση. Στην παρούσα ανάλυση δεν αντιμετωπίζουμε το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας που οφείλεται σε υπερχειλίση, διότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι μάλλον τετριμμένο και εν πολλοίς ανένδοτο για συγκεκριμένο, σταθερό μήκος λέξης. Επομένως, για τον υπολογισμό της εκάστοτε πιθανότητας $P^{EQ}(\xi; \alpha, \beta)$ είναι απαραίτητη η γνώση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (joint probability density function), $f(x, y)$, των τυχαίων μεταβλητών x και y . Στην ανάλυση που ακολουθεί θα δώσουμε τις γενικές σχέσεις για τις πιθανότητες που αναζητούμε για τυχούσα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Στην Παράγραφο 6.3 θα αναφέρουμε κλάσεις από κοινού συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας οι οποίες απαντώνται συχνά στην πράξη, θα υπολογίσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες και θα παρουσιάσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν. Στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης και επειδή τα $|x|, |y| \in [1, 10)$, σχηματίζουμε το τετράγωνο του Σχήματος 3.1, στο οποίο κάθε ζεύγος mantissae (x, y) αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα σημείο του χωρίου

$$J = (A\Lambda_1 T_1 \Lambda_8 A) \cup (B\Lambda_3 T_2 \Lambda_2 B) \cup (\Gamma\Lambda_5 T_3 \Lambda_4 \Gamma) \cup (\Delta\Lambda_7 T_4 \Lambda_6 \Delta)$$



Σχήμα 3.1. Γεωμετρική αναπαράσταση όλων των ζευγών προσημασμένων mantissae λάθους πεπερασμένης ακρίβειας (x, y) . Λόγω του ότι τα ζεύγη αυτά δεν ανήκουν στο σταυρό $\Lambda_1\Lambda_2T_2\Lambda_3\Lambda_4T_3\Lambda_5\Lambda_6T_4\Lambda_7\Lambda_8T_1\Lambda_1$, η αντίστοιχη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας περιορίζεται εντός των ορίων του $J = (A\Lambda_1T_1\Lambda_8A) \cup (B\Lambda_3T_2\Lambda_2B) \cup (\Gamma\Lambda_5T_3\Lambda_4\Gamma) \cup (\Delta\Lambda_7T_4\Lambda_6\Delta)$.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, y)$ είναι δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, λόγω του ότι $(x, y) \in J$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$\iint_J f(x, y) dx dy = 1$$

Η αρχική από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, y)$ έχει οριστεί σε ένα υπερσύνολο του J και στη συνέχεια περιορίστηκε στο J , μέσω του κανόνα δεσμευμένης πιθανότητας του Bayes. Σημειώνεται επίσης πως τα σημεία του «σταυρού» $C = \Lambda_1 \Lambda_2 T_2 \Lambda_3 \Lambda_4 T_3 \Lambda_5 \Lambda_6 T_4 \Lambda_7 \Lambda_8 T_1 \Lambda_1$ δεν ανήκουν στο J , λόγω του ότι τα x και y είναι mantissae. Προχωρώντας στην ανάλυση, διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις της Παραγράφου 3.1:

$$\text{Περίπτωση 1.i} \quad |man(\alpha) \cdot man(\beta)| < 10$$

$$\text{Περίπτωση 1.i.α} \quad 100 \leq |ax + \beta y| < UB$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε το υποχωρίο του J στο οποίο ισχύει η ανωτέρω Ανίσωση (3.6), υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι τα α και β είναι θετικές mantissae και σχεδιάζουμε τις ευθείες γραμμές

$$E_{100}: ax + \beta y = 100 \quad \text{και} \quad E_{UB}: ax + \beta y = UB$$

Συμβολίζουμε με P_α^i το σύνολο των σημείων (x, y) του J που βρίσκονται μεταξύ των E_{100} και E_{UB} . Στο συμβολισμό αυτό οι δείκτες i και α προέρχονται από την περίπτωση την οποία αναλύουμε. Σχεδιάζουμε, επίσης, τις ευθείες γραμμές

$$E_{-100}: ax + \beta y = -100 \quad \text{και} \quad E_{-UB}: ax + \beta y = -UB$$

Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με N_α^i το σύνολο των σημείων (x, y) του J που βρίσκονται μεταξύ των E_{-100} και E_{-UB} . Ορίζουμε, τέλος, το χωρίο $D_\alpha^i = P_\alpha^i \cup N_\alpha^i$, το οποίο περιλαμβάνει όλα τα σημεία του J που ικανοποιούν την Ανίσωση (3.6). Η πιθανότητα ένα ζεύγος (x, y) να ανήκει στο D_α^i δίνεται από τη σχέση

$$P\{(x, y) \in D_{\alpha}^i\} = \iint_{D_{\alpha}^i} f(x, y) dx dy$$

Ωστόσο, σύμφωνα με την ανάλυση της Παραγράφου 3.1, για τη συγκεκριμένη περίπτωση και μόνο, το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ υπολογίζεται με δύο επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το λ . Επομένως,

$$P^{EQ}(2; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\alpha}^i} f(x, y) dx dy \quad (3.30)$$

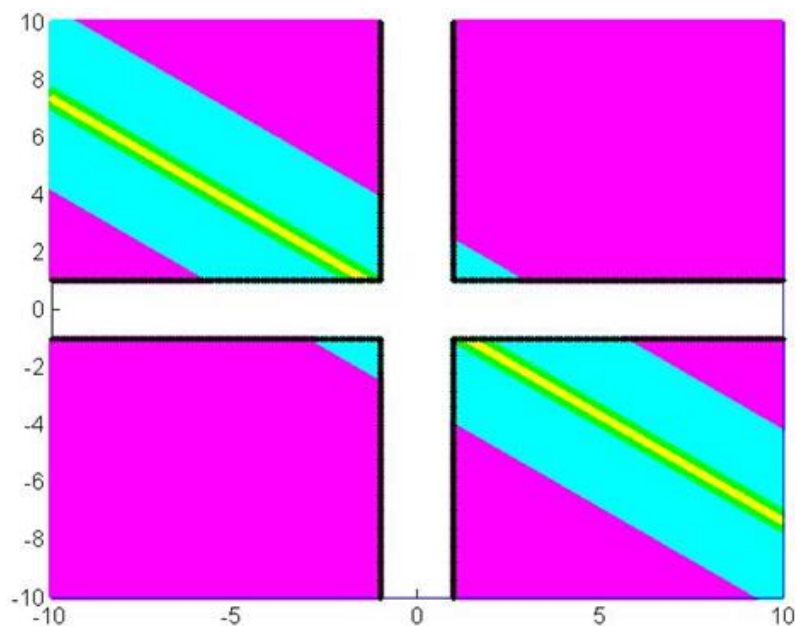
Περίπτωση 1.i.β $10 \leq |\alpha x + \beta y| < 100$

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τις επιπλέον ευθείες γραμμές

$$E_{10}: \alpha x + \beta y = 10 \quad \text{και} \quad E_{-10}: \alpha x + \beta y = -10$$

Συμβολίζουμε με P_{β}^i το σύνολο των σημείων $(x, y) \in J$ που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών E_{100} και E_{10} και με N_{β}^i το σύνολο των σημείων $(x, y) \in J$ που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών E_{-100} και E_{-10} . Το $D_{\beta}^i = P_{\beta}^i \cup N_{\beta}^i$ είναι το σύνολο των σημείων του J που ικανοποιούν την ανωτέρω Ανίσωση (3.8). Το D_{β}^i παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2 με χρώμα magenta. Η πιθανότητα ένα ζεύγος (x, y) να ανήκει στο D_{β}^i δίνεται από τη σχέση

$$P\{(x, y) \in D_{\beta}^i\} \equiv P^{EQ}(1; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\beta}^i} f(x, y) dx dy$$



Σχήμα 3.2. Απεικόνιση διαφόρων χωρίων του J για $\alpha = 2.3912$ και $\beta = 3.2578$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταβολές του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στο τελικό γινόμενο ως εξής:

α) Το χωρίο που αντιστοιχεί στην αύξηση των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά 1 στο γινόμενο απεικονίζεται με χρώμα magenta.

β) Το χωρίο που αντιστοιχεί στη διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων απεικονίζεται με κυανό χρώμα.

γ) Το χωρίο το οποίο αντιστοιχεί στη μείωση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά 1 απεικονίζεται με πράσινο χρώμα.

δ) Το κίτρινο χωρίο αντιστοιχεί στη μείωση κατά 2 των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων.

Στο παρόν σχήμα, οι περιοχές οι οποίες αντιστοιχούν είτε σε περαιτέρω μείωση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων, είτε σε αύξηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του αποτελέσματος κατά 2 είναι πολύ μικρές και, ως εκ τούτου, δεν εμφανίζονται.

Περίπτωση 1.i.γ $1 \leq |ax + \beta y| < 10$

Ακολουθώντας την ανάλυση που προηγήθηκε, σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$E_1: ax + \beta y = 1 \quad \text{και} \quad E_{-1}: ax + \beta y = -1$$

Το σύνολο των σημείων του J που βρίσκεται μεταξύ των E_1 και E_{10} συμβολίζεται με P_γ^i , ενώ το σύνολο των σημείων του J που βρίσκεται μεταξύ των E_{-1} και E_{-10} συμβολίζεται με N_γ^i . Ορίζοντας $D_\gamma^i = P_\gamma^i \cup N_\gamma^i$, το οποίο εμφανίζεται στο Σχήμα 3.2 με κυανό χρώμα, υπολογίζουμε

την πιθανότητα ένα ζεύγος από προσημασμένες mantissae λάθους πεπερασμένης ακρίβειας (x, y) να ικανοποιεί την (3.10),

$$P\{(x, y) \in D_{\gamma}^i\} \equiv P^{EQ}(0; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\gamma}^i} f(x, y) dx dy$$

Περίπτωση 1.ι.δ-ε-στ-ζ $10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y| < 10^{-(k-1)}, k = 1, 2, 3, 4$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$E_{0.1}: \alpha x + \beta y = 10^{-1}$$

$$E_{0.01}: \alpha x + \beta y = 10^{-2}$$

$$E_{0.001}: \alpha x + \beta y = 10^{-3}$$

$$E_{0.0001}: \alpha x + \beta y = 10^{-4}$$

καθώς και τις ευθείες

$$E_{-0.1}: \alpha x + \beta y = -10^{-1}$$

$$E_{-0.01}: \alpha x + \beta y = -10^{-2}$$

$$E_{-0.001}: \alpha x + \beta y = -10^{-3}$$

$$E_{-0.0001}: \alpha x + \beta y = -10^{-4}$$

Οι ανωτέρω ευθείες οριοθετούν τα χωρία $D_{\delta}^i, D_{\varepsilon}^i, D_{\sigma\tau}^i$ και D_{ζ}^i (βλέπε Σχήμα 3.2). Οι αντίστοιχες πιθανότητες που έχει ένα σημείο $(x, y) \in J$ να ανήκει σε ένα από τα ανωτέρω χωρία είναι

$$P\{(x, y) \in D_{\delta}^i\} \equiv P^{EQ}(-1; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\delta}^i} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in D_{\varepsilon}^i\} \equiv P^{EQ}(-2; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\varepsilon}^i} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in D_{\sigma\tau}^i\} \equiv P^{EQ}(-3; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\sigma\tau}^i} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in D_{\zeta}^i\} \equiv P^{EQ}(-4; \alpha, \beta) = \iint_{D_{\zeta}^i} f(x, y) dx dy$$

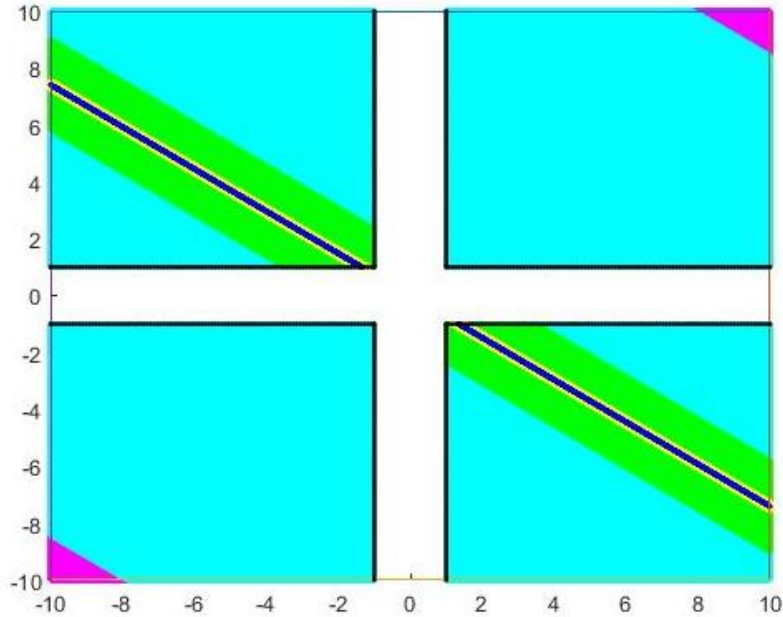
Περίπτωση 1.ii $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| \geq 10$

Η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται όπως η Περίπτωση 1.i. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, όπως περιεγράφη στην Παράγραφο 3.1, η υπολογιστική μηχανή επιτελεί μία δεξιά ολίσθηση, προκειμένου να αποκαταστήσει την κανονική επιστημονική μορφή του γινομένου $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Ως εκ τούτου, το γινόμενο γ υπολογίζεται με ένα λιγότερο λανθασμένο ψηφίο σε σχέση με το αντίστοιχο αποτέλεσμα της Περίπτωσης 1.i. Στα πλαίσια της ανάλυσης της παρούσας κατηγορίας, παρουσιάζουμε συνοπτικά τις ακόλουθες αντίστοιχες υποπεριπτώσεις:

Περίπτωση 1.ii.α $100 \leq |\alpha x + \beta y| < 200$

Εδώ, όπως και στην 1.i.α, οι ευθείες E_{100} και E_{200} , οριοθετούν το χωρίο $P_{\alpha}^{ii} \subset J$, ενώ οι ευθείες E_{-100} και E_{-200} , οριοθετούν το χωρίο $N_{\alpha}^{ii} \subset J$. Έστω, επίσης, $\mathcal{D}_{\alpha}^{ii} = P_{\alpha}^{ii} \cup N_{\alpha}^{ii}$, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3 με χρώμα magenta. Όταν $(x, y) \in \mathcal{D}_{\alpha}^{ii}$, το γινόμενο γ υπολογίζεται με ακριβώς ένα επιπλέον λανθασμένο ψηφίο με πιθανότητα

$$P\{(x, y) \in \mathcal{D}_{\alpha}^{ii}\} \equiv P^{EQ}(1; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{D}_{\alpha}^{ii}} f(x, y) dx dy$$



Σχήμα 3.3. Απεικόνιση των διαφόρων χωρίων του J για $\alpha = 4.6812$ και $\beta = 6.3178$, τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταβολές του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του αποτελέσματος σε σχέση με το λ . Συγκεκριμένα:

- α) Το χωρίο το οποίο αντιστοιχεί στην αύξηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά 1 απεικονίζεται με χρώμα magenta.
- β) Το κυανό χωρίο αντιστοιχεί στη μη μεταβολή του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων.
- γ) Το πράσινο χωρίο αντιστοιχεί στη μείωση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά 1.
- δ) Το χωρίο που αντιστοιχεί στη μείωση κατά 2 του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων απεικονίζεται με κίτρινο χρώμα.
- ε) Το χωρίο που αντιστοιχεί στη μείωση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά 3 απεικονίζεται με μπλε χρώμα.

Τα χωρία τα οποία αντιστοιχούν σε περαιτέρω μείωση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων είναι ιδιαίτερως μικρά και, επομένως, δεν παρουσιάζονται στο σχήμα.

$$\text{Περίπτωση 1.ii.β } 10 \leq |\alpha x + \beta y| < 100$$

Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε τις ευθείες E_{100} και E_{10} , οι οποίες οριοθετούν το χωρίο P_{β}^{ii} , καθώς και τις ευθείες E_{-100} και E_{-10} που οριοθετούν το χωρίο N_{β}^{ii} , ενώ $\mathcal{D}_{\beta}^{ii} = P_{\beta}^{ii} \cup N_{\beta}^{ii}$ (βλέπε Σχήμα 3.3). Η αντίστοιχη πιθανότητα είναι η

$$P^{EQ}(0; \alpha, \beta) \equiv P\{(x, y) \in \mathcal{D}_{\beta}^{ii}\} = \iint_{\mathcal{D}_{\beta}^{ii}} f(x, y) dx dy$$

Περίπτωση 1.ii.γ $1 \leq |\alpha x + \beta y| < 10$

Επιλέγουμε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in J$, τα οποία βρίσκονται μεταξύ των ευθειών E_{10} και E_1 . Το σύνολο των σημείων αυτών οριοθετεί το χωρίο P_γ^{ii} . Αντίστοιχα, το σύνολο των σημείων $(x, y) \in J$ που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών E_{-10} και E_{-1} σχηματίζει το χωρίο N_γ^{ii} . Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται το χωρίο $\mathcal{D}_\gamma^{ii} = P_\gamma^{ii} \cup N_\gamma^{ii}$. Στην περίπτωση αυτή, στην οποία το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας ελαττώνεται κατά ένα ψηφίο, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$P\{(x, y) \in \mathcal{D}_\gamma^{ii}\} \equiv P^{EQ}(-1; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{D}_\gamma^{ii}} f(x, y) dx dy$$

Περίπτωση 1.ii.δ-ε-στ $10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y| < 10^{-(k-1)}, k = 1, 2, 3$

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα προηγούμενα, ορίζουμε τις ευθείες $E_{0.1}, E_{0.01}, E_{0.001}, E_{-0.1}, E_{-0.01}, E_{-0.001}$, οι οποίες, μαζί με το J οριοθετούν τα χωρία $\mathcal{D}_\delta^{ii}, \mathcal{D}_\varepsilon^{ii}$ και $\mathcal{D}_{\sigma\tau}^{ii}$ του J . Μερικά από τα χωρία αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.3. Με βάση τα χωρία αυτά υπολογίζουμε τις πιθανότητες

$$P\{(x, y) \in \mathcal{D}_\delta^{ii}\} \equiv P^{EQ}(-2; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{D}_\delta^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{D}_\varepsilon^{ii}\} \equiv P^{EQ}(-3; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{D}_\varepsilon^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{D}_{\sigma\tau}^{ii}\} \equiv P^{EQ}(-4; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{D}_{\sigma\tau}^{ii}} f(x, y) dx dy$$

Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι η πιθανότητα $P^{EQ}(\xi; \alpha, \beta)$ εμφανίζεται στις Περιπτώσεις 1.i και 1.ii για ένα δεδομένο ξ . Για παράδειγμα, για $\xi = 1$, το $P^{EQ}(1; \alpha, \beta)$ παρουσιάζεται τόσο στην Περίπτωση 1.i.β, όσο και στην Περίπτωση 1.ii.α. Εντούτοις, τα χωρία στα οποία υπολογίζονται σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές οι αντίστοιχες πιθανότητες δεν επικαλύπτονται, δεδομένου ότι όλες οι ευθείες που υπεισέρχονται καθορίζονται από τα α και β , τα οποία είναι

de facto διαφορετικά, διότι στην Περίπτωση 1.i.β ικανοποιούν την Ανισότητα (3.4), ενώ στην 1.ii.α ικανοποιούν την Ανισότητα (3.16).

Περίπτωση 2 $\lambda_\alpha^e \neq \lambda_\beta^e \Leftrightarrow \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$

Υποθέτουμε, πάλι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\lambda_\alpha^e < \lambda_\beta^e$ ($\Leftrightarrow \lambda_\alpha^c > \lambda_\beta^c$) και ότι $\xi = \#edd(\gamma) - \lambda_\beta^e$.

Συμβολισμός 3.2. Στην περίπτωση αυτή, όπως αναλύθηκε στην Παράγραφο 3.1, το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας εξαρτάται εκτός των άλλων, από τη διαφορά δ . Στα πλαίσια αυτά, για τις αντίστοιχες πιθανότητες, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $P^{UN}(\xi, \delta; \alpha, \beta)$, όπου υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\#edd(\beta) > \#edd(\alpha)$. Σε περίπτωση που ισχύει η αντίστροφη ανισότητα, $\#edd(\alpha) > \#edd(\beta)$, για την αντίστοιχη πιθανότητα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $P^{UN}(\xi, \delta; \beta, \alpha)$.

□

Στη γενικότερη αυτή περίπτωση και σε πλήρη αντιστοιχία με τις προηγούμενες, θεωρούμε την ακόλουθη κατηγοριοποίηση:

Περίπτωση 2.i $|\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)| < 10$

Περίπτωση 2.i.α $100 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 101$

Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε τις ακόλουθες ευθείες, όπου και πάλι θεωρούμε ότι τα α και β είναι θετικές mantissae.

$$E_{100}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 100 \quad \text{και} \quad E_{-100}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -100$$

καθώς και τις ευθείες

$$E_{101}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 101 \quad \text{και} \quad E_{-101}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -101$$

Το σύνολο των σημείων (x, y) που βρίσκονται αφ' ενός μεταξύ των ευθειών E_{100}^δ και E_{101}^δ , αφ' ετέρου μεταξύ των ευθειών E_{-100}^δ και E_{-101}^δ και εντός των ορίων του J συμβολίζεται με G_α^i , κατ' αναλογία με την Περίπτωση 1.ι.α. Η πιθανότητα ένα ζεύγος mantissae (x, y) να ανήκει στο G_α^i είναι

$$P\{(x, y) \in G_\alpha^i\} = \iint_{G_\alpha^i} f(x, y) dx dy = P^{UN}(2, \delta; \alpha, \beta)$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι εδώ το γινόμενο γ παράγεται με δύο επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία σε σχέση με το β .

Περίπτωση 2.ι.β $10 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 100$

Τώρα, σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$E_{10}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 10 \quad \text{και} \quad E_{-10}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -10$$

Το σύνολο των σημείων (x, y) του J που βρίσκονται μεταξύ των ευθειών E_{100}^δ και E_{10}^δ αφ' ενός και μεταξύ των ευθειών E_{-100}^δ και E_{-10}^δ αφ' ετέρου αποτελούν το χωρίο G_β^i . Η πιθανότητα να παραχθεί το γ με ένα επιπλέον λανθασμένο ψηφίο από το λ_β^e , που ισοδυναμεί με την πιθανότητα ένα ζεύγος (x, y) να ανήκει στο G_β^i , είναι η ακόλουθη:

$$P\{(x, y) \in G_\beta^i\} = \iint_{G_\beta^i} f(x, y) dx dy = P^{UN}(1, \delta; \alpha, \beta)$$

Σημειώνεται, ωστόσο, ότι η συγκεκριμένη δεν είναι η μοναδική πιθανότητα να παραχθεί ένα επιπλέον λανθασμένο ψηφίο ($\xi = 1$). Είναι, όμως, η μοναδική τέτοια περίπτωση, κατά την οποία οι πολλαπλασιαστέοι α και β ικανοποιούν την Ανίσωση (3.4).

Περίπτωση 2.ι.γ $1 \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10$

Στην περίπτωση αυτή σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$E_1^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 1 \quad \text{και} \quad E_{-1}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -1$$

Τα ζεύγη (x, y) τα οποία ανήκουν στο χωρίο J και αποτελούν την ένωση των σημείων του J που εντοπίζονται μεταξύ των ευθειών E_{10}^δ και E_1^δ αφ' ενός και μεταξύ των ευθειών E_{-10}^δ και E_{-1}^δ αφ' ετέρου σχηματίζουν το χωρίο G_γ^i . Μπορούμε, επομένως, να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P\{(x, y) \in G_\gamma^i\} = \iint_{G_\gamma^i} f(x, y) dx dy = P^{UN}(0, \delta; \alpha, \beta)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι η πιθανότητα αυτή αντιστοιχεί στην περίπτωση να μην παραχθεί επιπλέον λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο στο γινόμενο γ , όταν οι πολλαπλασιαστέοι ικανοποιούν την (3.4) και ισχύει ότι $\lambda_\alpha^e < \lambda_\beta^e$.

$$\text{Περίπτωση 2.ι.δ-ε-στ } 10^{-k} \leq |\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}| < 10^{-(k-1)}, k = 1, 2, 3$$

Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τις ευθείες

$$E_{0.1}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 0.1 \quad \text{και} \quad E_{-0.1}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -0.1$$

$$E_{0.01}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 0.01 \quad \text{και} \quad E_{-0.01}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -0.01$$

$$E_{0.001}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = 0.001 \quad \text{και} \quad E_{-0.001}^\delta: \alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta} = -0.001$$

σε πλήρη αντιστοιχία με τα προηγούμενα. Με τον τρόπο αυτό ορίζονται τα χωρία G_δ^i , G_ε^i και $G_{\sigma\tau}^i$, τα οποία περιλαμβάνουν τα ζεύγη mantissae που οριοθετούνται από τις ανωτέρω ευθείες, ανά δύο συνεχόμενες, και το χωρίο J . Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι οι εξής:

$$P\{(x, y) \in G_\delta^i\} \equiv P^{UN}(-1, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{G_\delta^i} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in G_\varepsilon^i\} \equiv P^{UN}(-2, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{G_\varepsilon^i} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in G_{\sigma\tau}^i\} \equiv P^{UN}(-3, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{G_{\sigma\tau}^i} f(x, y) dx dy$$

Περίπτωση 2.ii $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| \geq 10$

Για κάθε ζεύγος (α, β) που ικανοποιεί την ανωτέρω Ανίσωση (3.16), σχεδιάζουμε τις ευθείες $E_{110}^\delta, E_{100}^\delta, E_{10}^\delta, E_1^\delta, E_{0.1}^\delta, E_{0.01}^\delta, E_{0.001}^\delta$ και $E_{-0.001}^\delta, E_{-0.01}^\delta, E_{-0.1}^\delta, E_{-1}^\delta, E_{-10}^\delta, E_{-100}^\delta, E_{-110}^\delta$, οι οποίες επιτελούν την ίδια λειτουργία με αυτές της Περίπτωσης 2.i. Τα ζεύγη αυτά ορίζουν τα χωρία $\mathcal{G}_\alpha^{ii}, \mathcal{G}_\beta^{ii}, \mathcal{G}_\gamma^{ii}, \mathcal{G}_\delta^{ii}, \mathcal{G}_\varepsilon^{ii}$ και $\mathcal{G}_{\sigma\tau}^{ii}$. Επί των χωρίων αυτών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες:

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_\alpha^{ii}\} \equiv P^{UN}(1, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_\alpha^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_\beta^{ii}\} \equiv P^{UN}(0, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_\beta^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_\gamma^{ii}\} \equiv P^{UN}(-1, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_\gamma^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_\delta^{ii}\} \equiv P^{UN}(-2, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_\delta^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_\varepsilon^{ii}\} \equiv P^{UN}(-3, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_\varepsilon^{ii}} f(x, y) dx dy$$

$$P\{(x, y) \in \mathcal{G}_{\sigma\tau}^{ii}\} \equiv P^{UN}(-4, \delta; \alpha, \beta) = \iint_{\mathcal{G}_{\sigma\tau}^{ii}} f(x, y) dx dy$$

4 Υπολογισμός των πιθανοτήτων για τη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το σφάλμα πεπερασμένης ακρίβειας που παράγεται σε έναν πολλαπλασιασμό εξαρτάται από την τιμή του γινομένου των mantissae των πολλαπλασιαστέων. Επομένως, ας υποθέσουμε αρχικά ότι δύο αριθμοί α_1 και β_1 πολλαπλασιάζονται και ότι από τον πολλαπλασιασμό τους προκύπτει το γινόμενο $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \beta_1$. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι το α_2 πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, έστω β_2 και πως το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ένας νέος αριθμός α_3 κ.ο.κ.. Όπως έχουμε ήδη δείξει, ανάλογα με το αν ισχύει η ανισότητα $|\text{man}(\alpha_i) \cdot \text{man}(\beta_i)| < 10$ ή $|\text{man}(\alpha_i) \cdot \text{man}(\beta_i)| \geq 10$, για ένα τυχόν ζεύγος αριθμών (α_i, β_i) , αλλάζει και η πιθανότητα παραγωγής ενός συγκεκριμένου αριθμού λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων για το γινόμενο $\alpha_{i+1} = \alpha_i \cdot \beta_i$.

Προκειμένου να δώσουμε σαφή εκτίμηση του πλήθους των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων τα οποία συσσωρεύονται στο αποτέλεσμα ενός συνόλου διαδοχικών πολλαπλασιασμών, υιοθετούμε τις ακόλουθες παραδοχές:

1. Έστωσαν δύο mantissae α και β , με $\alpha = \alpha_c + y \cdot 10^{-\tau}$ και $\beta = \beta_c + x \cdot 10^{-\rho}$, όπου α_c, β_c οι mantissae των ορθών αναπαραστάσεων των α και β , ενώ y και x είναι οι προσημασμένες mantissae του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας με το οποίο οι δύο ποσότητες α και β έχουν ως τώρα υπολογιστεί. Από τον τρόπο λειτουργίας των σύγχρονων υπολογιστικών μηχανών συνάγεται άμεσα ότι οι προσημασμένες mantissae x και y είναι τυχαίες μεταβλητές.

Εάν τα α και β πολλαπλασιαστούν και παράξουν το γινόμενο γ , τότε το γινόμενο γ παράγεται και αυτό με λάθος πεπερασμένης ακρίβειας, η mantissa του οποίου είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή.

2. Ας υποθέσουμε, όπως και στην Παράγραφο 3.1, ότι το λ_β είναι το μέγιστο πλήθος λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των πολλαπλασιαστέων α και β . Το γινόμενο γ

διαφέρει από το λ_β κατά ξ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία, όπου το ξ είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή. Επιπλέον, το ξ αντιστοιχεί στα ακόλουθα ενδεχόμενα: $A_1: \xi = 2$, $A_2: \xi = 1$, $A_3: \xi = 0$, $A_{3+k}: \xi = -k$, $k = 1, 2, \dots$, όπου τα ενδεχόμενα A_{3+k} αφορούν διόρθωση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά k ψηφία.

3. Στην Παράγραφο 3.2 παραθέσαμε τη μέθοδο υπολογισμού των πιθανοτήτων $P^{EQ}(\xi; \alpha, \beta)$ και $P^{UN}(\xi, \delta; \alpha, \beta)$. Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι στο παρόν Κεφάλαιο 4, λαμβάνει χώρα η χειρότερη περίπτωση, δηλαδή αυτή κατά την οποία οι πολλαπλασιαστέοι α και β έχουν τον ίδιο αριθμό ορθών ψηφίων. Επομένως, θα απλοποιήσουμε τη γραφή των πιθανοτήτων ως εξής:

$$P_1 = P^{EQ}(2; \alpha, \beta) = P(A_1), \quad (\alpha)$$

$$P_2 = P^{EQ}(1; \alpha, \beta) = P(A_2), \quad (\beta)$$

$$P_3 = P^{EQ}(0; \alpha, \beta) = P(A_3), \quad (\gamma)$$

$$P_{3+k} = P^{EQ}(-k; \alpha, \beta) = P(A_{3+k}) \quad (\delta)$$

(4.1)

4. Πραγματοποιήσαμε εκτενή πειράματα, για μεγάλο πλήθος πολλαπλασιασμών της μορφής $\alpha_{i+1} = \alpha_i \cdot \beta_i$, όπου τα α_i και β_i επιλέγονται αρχικά από μία κανονική ή μία μοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-10, 10)$. Η mantissa του σφάλματος του γινομένου α_{i+1} ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν (0) και τυπική απόκλιση $\sigma \in [1.1, 6.5]$. Οπότε, ο υπολογισμός των πιθανοτήτων P_i προκύπτει άμεσα από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3. Ωστόσο, η ακόλουθη ανάλυση ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή των mantissae των σφαλμάτων, η οποία οδηγεί σε ένα σύνολο πιθανοτήτων P_i που αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα A_i . Για το λόγο αυτό, η ακόλουθη ανάλυση θα πραγματοποιηθεί για οποιαδήποτε τιμή του P_i που σχετίζεται με έναν τυχόντα πολλαπλασιασμό.
5. Η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου μπορεί να εφαρμοστεί σε διαφορετικά σύνολα τιμών των πιθανοτήτων P_i , τα οποία παραμένουν αμετάβλητα καθ' όλη τη διάρκεια των διαδοχικών πολλαπλασιασμών. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι τα

ενδεχόμενα A_i , και, ως εκ τούτου, και η τιμή του ξ , δεν μεταβάλλονται εξ' αιτίας του τρόπου με τον οποίο εκτελείται ένας τυχών πολλαπλασιασμός στην εκάστοτε υπολογιστική μηχανή. Ωστόσο, η ανάλυση που ακολουθεί μπορεί να επεκταθεί ευθύγραμμα, προκειμένου να συμπεριλαμβάνει τις εκάστοτε τιμές των πιθανοτήτων P_i , ή, ισοδύναμα, τις τιμές των $P^{EQ}(\xi; \alpha, \beta)$ και $P^{UN}(\xi, \delta; \alpha, \beta)$, καθ' όλη τη διαδικασία των διαδοχικών πολλαπλασιασμών. Στη γενικότερη δυνατή περίπτωση, για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων P_i , απαιτείται κατάλληλος κώδικας. Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση, η ισχύς της ανάλυσης που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο παραμένει αναλλοίωτη.

Στο παρόν κεφάλαιο θα υπολογίσουμε την πιθανότητα M διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί να γεννήσουν ακριβώς ω λανθασμένα δεκαδικά ψηφία στο τελικό τους αποτέλεσμα. Για την ακρίβεια, ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε M διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς και ότι i_1 από αυτούς παράγουν δύο επιπλέον λανθασμένα δεκαδικά ψηφία στο αποτέλεσμα (ενδεχόμενο A_1), i_2 εξ' αυτών παράγουν ένα επιπλέον λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο (ενδεχόμενο A_2), i_3 πολλαπλασιασμοί δεν παράγουν κανένα λανθασμένο ψηφίο (ενδεχόμενο A_3) και i_{3+k} πολλαπλασιασμοί μειώνουν τα λανθασμένα δεκαδικά ψηφία του τελικού αποτελέσματος κατά k . Ισχύει, δε, $i_\mu \geq 0, \mu = 1, 2, \dots$ και $\sum_\mu i_\mu = M$. Επομένως, ο αριθμός ω των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα οποία λαμβάνουμε το τελικό αποτέλεσμα M διαδοχικών πολλαπλασιασμών δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \xi_1 \cdot i_1 + \xi_2 \cdot i_2 + \xi_3 \cdot i_3 + \dots = \sum_\mu \xi_\mu \cdot i_\mu$$

όπου, σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, $\xi_1 = 2$ (η τιμή του ξ που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο A_1), $\xi_2 = 1$ (η τιμή του ξ που αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο A_2) κ.ο.κ..

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέση τιμή $\bar{\omega}$ και η διασπορά S_ω^2 της ποσότητας ω . Οι αντίστοιχες σχέσεις δίνονται από το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.1. Έστω πολυωνυμική κατανομή με πιθανά ενδεχόμενα A_1, A_2, \dots, A_N , και αντίστοιχες πιθανότητες εμφάνισης των ενδεχομένων αυτών P_1, P_2, \dots, P_N . Έστω, επίσης, ότι πραγματοποιούμε ένα πείραμα M διαδοχικές φορές και ότι το αποτέλεσμα του πειράματος μοντελοποιείται από την πολυωνυμική αυτή κατανομή. Τέλος, έστω ότι το πρώτο ενδεχόμενο A_1 επισυμβαίνει i_1 φορές, το ενδεχόμενο A_2 επισυμβαίνει i_2 φορές κ.ο.κ., όπου $i_1 + i_2 + \dots +$

$i_N = M$. Τότε, η ποσότητα $\omega = A_1 \cdot i_1 + A_2 \cdot i_2 + \dots + A_N \cdot i_N = \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cdot i_\mu$ έχει μέση τιμή $\bar{\omega}$ και διασπορά S_ω^2 , οι οποίες δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\bar{\omega} = M \cdot \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cdot P_\mu \quad (4.2)$$

$$S_\omega^2 = M \cdot \left[\sum_{\mu=1}^N A_\mu^2 \cdot P_\mu - \sum_{\mu=1}^N A_\mu^2 \cdot P_\mu^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_i \cdot A_j \cdot P_i \cdot P_j \right] \quad (4.3)$$

Απόδειξη:

Η πιθανότητα το ενδεχόμενο A_1 να εμφανιστεί i_1 φορές, το ενδεχόμενο A_2 να εμφανιστεί i_2 φορές κ.ο.κ. δίνεται από τη σχέση

$$P(\omega) = \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \quad (4.4)$$

$$\dots \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})}$$

α) Για τη μέση τιμή $\bar{\omega}$

Η μέση τιμή $\bar{\omega}$ της ποσότητας ω , δίνεται από την ακόλουθη γενική σχέση

$$\bar{\omega} = \sum_{\omega} \{\omega \cdot P(\omega)\} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} [A_1 \cdot i_1 + A_2 \cdot i_2 + \dots + A_N \cdot i_N] \cdot P(\omega)$$

όπου $P(\omega)$ δίνεται από τη Σχέση (4.4). Με χρήση της (4.4) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} A_1 \cdot i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\
&+ \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} A_2 \cdot i_2 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} + \\
&\quad \dots \\
&+ \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} A_N \cdot i_N \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})}
\end{aligned}$$

Ακολουθως, θα ασχοληθούμε με καθένα πολλαπλό άθροισμα ξεχωριστά. Επομένως, υπολογίζουμε αρχικά το

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_N} A_1 \cdot i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\
&= \sum_{i_1=0}^M A_1 \cdot i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-i_1-\dots-i_{N-1}} \\
&= A_1 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \dots \\
&\quad \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \frac{(M-i_1-\dots-i_{N-2})!}{i_{N-1}! \cdot (M-i_1-\dots-i_{N-1})!} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-i_1-\dots-i_{N-1}}
\end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_1 = A_1 \cdot P_1 \cdot M \cdot \sum_{i_1=1}^{M-1} \frac{(M-1)!}{(i_1-1)! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1-1} \dots$$

$$\dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \frac{(M-i_1-\dots-i_{N-2})!}{i_{N-1}! \cdot (M-i_1-\dots-i_{N-1})!} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-i_1-\dots-i_{N-1}}$$
(4.5)

Στην ανωτέρω σχέση, το άθροισμα ως προς τα i_1, i_2, \dots, i_{N-1} συνιστά αποτέλεσμα αναδρομικής εφαρμογής της ταυτότητας

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_N)^M = \sum_{i_1=0}^M \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1}$$

Στην προκειμένη περίπτωση, τα P_1, P_2, \dots, P_N είναι οι πιθανότητες να συμβούν όλα τα δυνατά ενδεχόμενα A_1, A_2, \dots, A_N , γεγονός που συνεπάγεται ότι $P_1 + P_2 + \dots + P_N = 1$. Ως εκ τούτου, η ανωτέρω σχέση (4.5) για το $\bar{\omega}_1$ γράφεται ως εξής:

$$\bar{\omega}_1 = A_1 \cdot P_1 \cdot M$$

Με τη χρήση της ίδιας μεθοδολογίας για τα υπόλοιπα επί μέρους πολλαπλά αθροίσματα λαμβάνουμε τελικά

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_N \Rightarrow \bar{\omega} = M \cdot \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cdot P_\mu$$

β) Για τη διασπορά S_ω^2

Η διασπορά της ποσότητας ω δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$S_\omega^2 = \sum_{\omega} \omega^2 \cdot P(\omega) - \bar{\omega}^2$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική σχέση για το ω και την (4.4) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
S_{\omega}^2 &= \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} [A_1 \cdot i_1 + A_2 \cdot i_2 + \dots + A_N \cdot i_N]^2 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\
&\quad - M^2 \cdot \left(\sum_{\mu=1}^N A_{\mu} \cdot P_{\mu} \right)^2 \\
&= \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} [A_1^2 \cdot i_1^2 + \dots + A_N^2 \cdot i_N^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot i_1 \cdot i_2 + \dots \\
&\quad + 2 \cdot A_{N-1} \cdot A_N \cdot i_{N-1} \cdot i_N] \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \binom{M-i_1-i_2}{i_3} \\
&\quad \cdot P_3^{i_3} \cdot \dots \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\
&\quad - M^2 \cdot \left(\sum_{\mu=1}^N A_{\mu} \cdot P_{\mu} \right)^2
\end{aligned}$$

Η ανωτέρω σχέση μπορεί να οδηγήσει σε κλειστό, απλό τύπο με υπολογισμό των επί μέρους αθροισμάτων της. Θα ξεκινήσουμε με τον υπολογισμό της ποσότητας

$$\begin{aligned}
s_1^2 &= \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} A_1^2 \cdot i_1^2 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \dots \\
&\quad \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\
&= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1^2 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})}
\end{aligned}$$

Έχει ήδη αποδειχθεί ότι

$$\sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} = (P_{N-1} + P_N)^{M-i_1-\dots-i_{N-1}}$$

Πηγαίνοντας επαγωγικά προς τα πίσω λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
s_1^2 &= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1^2 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot (i_1 - 1 + 1) \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot (i_1 - 1) \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&\quad + A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot (i_1 - 1) \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&\quad + A_1^2 \cdot P_1 \cdot M \cdot \sum_{i_1=1}^{M-1} \frac{(M-1)!}{(i_1-1)! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1-1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&= A_1^2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot (i_1 - 1) \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&\quad + A_1^2 \cdot P_1 \cdot M \\
s_1^2 &= A_1^2 \cdot M \cdot (M-1) \cdot P_1^2 \cdot \sum_{i_1=2}^{M-2} \frac{(M-2)!}{(i_1-2)! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1-2} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1} \\
&\quad + A_1^2 \cdot P_1 \cdot M
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας εκ νέου την ταυτότητα

$$(P_1 + P_2 + \dots + P_N)^M = \sum_{i_1=0}^M \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1}$$

η ποσότητα s_1^2 λαμβάνει την τελική μορφή

$$s_1^2 = A_1^2 \cdot M \cdot (M - 1) \cdot P_1^2 + A_1^2 \cdot P_1 \cdot M$$

Ακολουθώντας εντελώς ανάλογη διαδικασία και για τους υπόλοιπους όμοιους όρους του S_ω^2 , λαμβάνουμε

$$s_\mu^2 = A_\mu^2 \cdot M \cdot (M - 1) \cdot P_\mu^2 + A_\mu^2 \cdot P_\mu \cdot M, \mu = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

Ακολουθώντας, υπολογίζουμε τα διπλάσια γινόμενα της αρχικής σχέσης, ξεκινώντας από το

$$s_{1,2}^2 = \sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot \dots \cdot \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2 &= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \sum_{i_2=0}^{M-i_1} i_2 \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \dots \\ &\dots \sum_{i_{N-1}=0}^{M-i_1-\dots-i_{N-2}} \binom{M-i_1-\dots-i_{N-2}}{i_{N-1}} \cdot P_{N-1}^{i_{N-1}} \cdot P_N^{M-(i_1+i_2+\dots+i_{N-1})} \\ &= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \sum_{i_2=0}^{M-i_1} i_2 \cdot \binom{M-i_1}{i_2} \cdot P_2^{i_2} \cdot (P_3 + \dots + P_N)^{M-i_1-i_2} \\ &= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot (M-i_1) \\ &\quad \sum_{i_2=1}^{M-i_1-1} \frac{(M-i_1-1)!}{(i_2-1)! \cdot (M-i_1-i_2)!} \cdot P_2^{i_2-1} \cdot (P_3 + \dots + P_N)^{M-i_1-i_2} \\ &= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \binom{M}{i_1} \cdot P_1^{i_1} \cdot (M-i_1) \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot \sum_{i_1=0}^M i_1 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (M-i_1) \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1} \\
&= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot \sum_{i_1=0}^{M-1} i_1 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (M-i_1) \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1} \\
&\quad + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot i_1 \cdot \frac{M!}{i_1! \cdot (M-i_1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (M-i_1) \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1} \Big|_{i_1=M} \\
&= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot \sum_{i_1=1}^{M-1} \frac{M!}{(i_1-1)! \cdot (M-i_1-1)!} \cdot P_1^{i_1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1} \\
&= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot M \cdot \sum_{i_1=1}^{M-1} \frac{(M-1)!}{(i_1-1)! \cdot (M-i_1-1)!} \cdot P_1^{i_1-1} \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-i_1-1}
\end{aligned}$$

Πραγματοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $j = i_1 - 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
s_{1,2}^2 &= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot M \cdot (M-1) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{M-2} \frac{(M-2)!}{j! \cdot (M-j-2)!} \cdot P_1^j \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-j-2} \\
&= 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot M \cdot (M-1) \cdot \sum_{j=0}^{M-2} \binom{M-2}{j} \cdot P_1^j \cdot (P_2 + \dots + P_N)^{M-j-2}
\end{aligned}$$

Τελικά λαμβάνουμε

$$s_{1,2}^2 = 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot M \cdot (M-1)$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία για τα υπόλοιπα διπλάσια γινόμενα λαμβάνουμε τη γενική σχέση

$$s_{i,j}^2 = 2 \cdot A_i \cdot A_j \cdot P_i \cdot P_j \cdot M \cdot (M-1), i, j = 1, 2, \dots, N, j = i + 1 \quad (4.7)$$

Αθροίζοντας τους τετραγωνικούς όρους s_{μ}^2 της Σχέσης (4.6) και τα διπλάσια γινόμενα $s_{i,j}^2$ από τη Σχέση (4.7) λαμβάνουμε

$$S_{\omega}^2 = \sum_{\mu=1}^N s_{\mu}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N s_{i,j}^2 - \bar{\omega}^2 \Leftrightarrow$$

$$S_{\omega}^2 = M \cdot [A_1^2 \cdot P_1 \cdot (1 - P_1) + \dots + A_N^2 \cdot P_N \cdot (1 - P_N) - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot P_1 \cdot P_2 - \dots - 2 \cdot A_{N-1} \cdot A_N \cdot P_{N-1} \cdot P_N]$$

$$\Leftrightarrow S_{\omega}^2 = M \cdot \left[\sum_{\mu=1}^N A_{\mu}^2 \cdot P_{\mu} - \sum_{\mu=1}^N A_{\mu}^2 \cdot P_{\mu}^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_i \cdot A_j \cdot P_i \cdot P_j \right]$$

■

Ο συνδυασμός του ανωτέρω λήμματος με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα οδηγεί στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.2. Έστω ότι εκτελούμε ένα σύνολο διαδοχικών πολλαπλασιασμών M , με $M \geq 30$. Τότε, η ποσότητα $\omega = \sum_{\mu=1}^N A_{\mu} \cdot i_{\mu}$, η οποία εκφράζει το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που δημιουργούνται στο τελικό αποτέλεσμα αυτών των M διαδοχικών πολλαπλασιασμών πρακτικά ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{\omega}$ και διασπορά S_{ω}^2 που δίνονται από τις Σχέσεις (4.2) και (4.3) του Λήμματος 4.1, αντίστοιχα.

□

Όλα τα ανωτέρω θα εφαρμοστούν στις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις, οι οποίες αναλύονται παρακάτω.

- Περίπτωση 4.1. Η χειρότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ισχύει $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| < 10$.

- Περίπτωση 4.2. Η ευνοϊκότερη περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ισχύει $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| \geq 10$.
- Περίπτωση 4.3. Η γενικότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία η κατανομή του ποσοστού των πολλαπλασιασμών για τους οποίους ισχύει η σχέση $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| \geq 10$ είναι τυχαία.

Οι περιπτώσεις αυτές αναλύονται αμέσως παρακάτω.

Περίπτωση 4.1. Στην περίπτωση κατά την οποία σε κάθε πολλαπλασιασμό $\alpha_i \cdot \beta_i$ ισχύει η ανισότητα $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| < 10$, θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Πράγματι, επιλέγουμε το κάτωθι σύνολο πιθανοτήτων $P_i, i = 1, 2, \dots$ για τα αντίστοιχα ενδεχόμενα A_i . Σημειώνουμε ότι η τάξη μεγέθους των επιλεγισών πιθανοτήτων P_i εμφανίζεται συχνότερα στην πράξη:

1. Ενδεχόμενο A_1 : Παραγωγή δύο επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων
 $P(\xi = 2) = P_1 = 0$.
2. Ενδεχόμενο A_2 : Παραγωγή ενός επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου
 $P(\xi = 1) = P_2 = 0.5530$.
3. Ενδεχόμενο A_3 : Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων
 $P(\xi = 0) = P_3 = 0.3934$.
4. Ενδεχόμενο A_{3+k} : Ανακούφιση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας κατά k δεκαδικά ψηφία
 $P(\xi = -k) = P_{3+k}, k = 1, 2, \dots$. Οπότε, $P_4 = 0.0457$ για $k = 1$, $P_5 = 7.8 \cdot 10^{-3}$ για $k = 2$ κλπ.

Ως εκ τούτου, εάν εκτελεστούν M διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί, η ποσότητα $\omega = \sum_{\mu=1}^M A_{\mu} \cdot i_{\mu}$ των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που γεννώνται κατά τους διαδοχικούς αυτούς πολλαπλασιασμούς ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή, η οποία προσεγγίζεται από μία κανονική κατανομή με $\bar{\omega} = 0.4917 \cdot M$ και $S_{\omega}^2 = 0.3881 \cdot M$, για $M \geq 30$. Ως εκ τούτου, η ποσότητα $z = \frac{\omega - \bar{\omega}}{S_{\omega}}$ ακολουθεί τυπική κανονική κατανομή Gauss με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση, λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, η οποία συμβολίζεται με $\tilde{N}(0,1)$.

Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα $\frac{\omega - \bar{\omega}}{S_\omega} \geq -4.2649$ ισχύει με βαθμό εμπιστοσύνης 0.99999. Με αυτό το βαθμό εμπιστοσύνης, το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων ω που συσσωρεύονται μετά από M διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς, για τους οποίους ισχύει η ανισότητα $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$ ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$\omega \geq -4.2649 \cdot \tau_\omega \cdot \sqrt{M} + \mu_\omega \cdot M \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow \omega \geq (-4.2649 \cdot \tau_\omega + \mu_\omega \cdot \sqrt{M}) \cdot \sqrt{M}$$

όπου τα τ_ω και μ_ω προκύπτουν από τις Σχέσεις (4.3) και (4.2) αντίστοιχα ως εξής:

$$\tau_\omega = \sqrt{\sum_{\mu=1}^N A_\mu^2 \cdot P_\mu - \sum_{\mu=1}^N A_\mu^2 \cdot P_\mu^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N A_i \cdot A_j \cdot P_i \cdot P_j} \quad (4.9)$$

$$\mu_\omega = \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cdot P_\mu \quad (4.10)$$

Σημειώνουμε emphaticά ότι στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα μ_ω είναι πάντοτε θετική. Οπότε, λόγω της Ανισότητας (4.8) ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων ω που συσσωρεύονται σε καθένα από τα γινόμενα $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, M$ τείνει να αυξάνεται ιδιαίτερα γρήγορα, ακόμη και για μικρό αριθμό διαδοχικών πολλαπλασιασμών M . Αυτό θα φανεί και στα αντίστοιχα παραδείγματα που παρατίθενται στο Κεφάλαιο 6 (Πίνακας 6.2(α)). Όλες οι ανωτέρω παρατηρήσεις συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1. Ας υποθέσουμε ότι εκτελείται ένας αριθμός διαδοχικών πολλαπλασιασμών $\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta_i, i = 1, \dots, M$ και πως για κάθε πολλαπλασιασμό ισχύει η ανισότητα $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$. Στην περίπτωση αυτή, το εκάστοτε γινόμενο $\gamma_i, i = 1, \dots, M$ είναι ιδιαίτερα επιρρεπές στη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας.

Συγκεκριμένα, έστωσαν τα κάτωθι ενδεχόμενα:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{δύο λανθασμένα δεκαδικά ψηφία προστίθενται στο } \gamma_i\}, \\
A_2 &= \{\text{ένα λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο προστίθεται στο } \gamma_i\}, \\
A_3 &= \{\text{δεν προστίθεται λανθασμένο δεκαδικό ψηφίο στο } \gamma_i\}, \\
A_4 &= \{\text{μείωση των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του } \gamma_i \text{ κατά ένα}\} \text{ κλπ.}
\end{aligned}$$

Σε όλα τα ανωτέρω ενδεχόμενα, ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του γινομένου γ_i συγκρίνεται κάθε φορά με το μέγιστο αριθμό λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των όρων του γινομένου, α_i, β_i . Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι οι πιθανότητες P_j όπου $j = 1, 2, \dots$, να συμβούν τα ανωτέρω ενδεχόμενα A_j , όπως αυτές ορίστηκαν στις Σχέσεις (4.1), παραμένουν κατά προσέγγιση σταθερές για όλους τους πολλαπλασιασμούς. Ο αριθμός ω των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύονται στο γινόμενο γ_i κατά τον υπ' αριθμόν i πολλαπλασιασμό ικανοποιεί την Ανισότητα (4.8). Το παρόν θεώρημα ισχύει για οποιοδήποτε βαθμό εμπιστοσύνης, αρκεί να προσαρμοστεί κατάλληλα ο συντελεστής του τ_ω . Εξ' αιτίας του γεγονότος ότι η ποσότητα μ_ω παραμένει θετική για την περίπτωση αυτή, η ποσότητα ω τείνει να αυξάνεται ραγδαία, ακόμη και για ιδιαίτερα μικρό αριθμό διαδοχικών πολλαπλασιασμών M . Στην περίπτωση κατά την οποία οι πιθανότητες $P_j, j = 1, 2, \dots$ δεν παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, τότε η ποσοτική εκτίμηση, η οποία δίνεται από τη Σχέση (4.8) είναι δυνατόν να υπολογιστεί είτε δυναμικά, είτε αντικαθιστώντας την εκάστοτε πιθανότητα P_j για M διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με τη μέση τιμή αυτών \bar{P} .

Επομένως, ο ρυθμός αύξησης του συσσωρευμένου λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στα παραγόμενα γινόμενα γ_i είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Δηλαδή, όταν η ανισότητα $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| < 10$ ισχύει πάντα, ο πολλαπλασιασμός είναι ιδιαίτερος «τοξικός», όσον αφορά το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας που γεννάται και είναι δυνατόν να καταστρέψει γρήγορα οποιονδήποτε αλγόριθμο.

□

Περίπτωση 4.2. Εάν για κάθε πολλαπλασιασμό $\alpha_i \cdot \beta_i$ ισχύει η ανισότητα $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| \geq 10$, θα αναδείξουμε τα σχετικά αποτελέσματα πάλι με τη χρήση ενός συγκεκριμένου παραδείγματος. Επαναλαμβάνουμε ότι η τάξη μεγέθους των επιλεγεισών πιθανοτήτων $P_i, i = 1, 2, \dots$ των αντιστοιχών ενδεχομένων A_i εμφανίζεται συχνότερα στην πράξη.

1. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A_2 ($\xi = 1$) είναι $P_2 = 6.146 \cdot 10^{-4}$.
2. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A_3 ($\xi = 0$) είναι $P_3 = 0.7468$.
3. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A_4 ($\xi = -1$) είναι $P_4 = 0.2224$.
4. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A_5 ($\xi = -2$) είναι $P_5 = 0.02720$.
5. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου A_6 ($\xi = -3$) είναι $P_6 = 0.002979$.

Όπως παρατηρούμε και από τα ανωτέρω αποτελέσματα, οι πιθανότητες εμφάνισης των ενδεχομένων A_1, A_6, A_7, \dots είναι πρακτικά μηδέν γι' αυτό και τις αγνοήσαμε. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 4.1, $\bar{\omega} = -0.2851 \cdot M$ και $S_{\bar{\omega}}^2 = 0.2783 \cdot M$.

Σημειώνουμε πως και σε αυτή την περίπτωση, για $M \geq 30$ η ποσότητα $z = \frac{\omega - \bar{\omega}}{S_{\omega}}$ ακολουθεί, λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, τυπική κανονική κατανομή Gauss με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση ένα, $\bar{z}N(0,1)$. Τονίζεται επίσης πως, στην περίπτωση αυτή, η μέση τιμή $\bar{\omega}$ του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που παράγονται είναι αρνητική, όπως και στο παράδειγμα που επιλέξαμε ανωτέρω.

Δεδομένου ότι $\bar{z}N(0,1)$, η ανισότητα $\frac{\omega - \bar{\omega}}{S_{\omega}} \leq 4.2649$ ισχύει με βαθμό εμπιστοσύνης 99.999%. Με αυτό το βαθμό εμπιστοσύνης, ο αριθμός ω των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύονται μετά από την εκτέλεση M διαδοχικών πολλαπλασιασμών για τους οποίους ισχύει η ανισότητα $|\tan(\alpha_i) \cdot \tan(\beta_i)| \geq 10$, ικανοποιεί τη σχέση

$$\omega \leq (4.2649 \cdot \tau_{\omega} + \mu_{\omega} \cdot \sqrt{M}) \cdot \sqrt{M} \quad (4.11)$$

όπου οι ποσότητες τ_{ω} και μ_{ω} δίνονται από τις Σχέσεις (4.9) και (4.10) αντίστοιχα.

Εδώ, η ποσότητα μ_ω είναι πάντα αρνητική. Ως εκ τούτου, ο αριθμός ω των συσσωρευμένων λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων παραμένει πολύ κοντά στο μηδέν, ακόμη και για μεγάλο αριθμό πολλαπλασιασμών. Αυτό έχει επαληθευτεί πειραματικά στο Κεφάλαιο 6 (Παράγραφος 6.2). Οπότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.2. Ας υποθέσουμε ότι εκτελείται ένας αριθμός M διαδοχικών πολλαπλασιασμών $\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta_i, i = 1, \dots, M$. Για καθέναν από αυτούς του πολλαπλασιασμούς υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα $|\text{man}(\alpha_i) \cdot \text{man}(\beta_i)| \geq 10$. Οι διαδοχικοί αυτοί πολλαπλασιασμοί δεν προκαλούν σημαντική συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στο γινόμενο γ_i , για οποιοδήποτε i και M .

- i) Ας υποθέσουμε επιπλέον πως οι πιθανότητες P_j , με $j = 1, 2, \dots$, να παραχθεί λάθος πεπερασμένης ακρίβειας σε κάθε νέο πολλαπλασιασμό, όπως αυτές ορίστηκαν στο Θεώρημα 4.1 και μέσω των Σχέσεων (4.1), παραμένουν κατά προσέγγιση σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια των διαδοχικών πολλαπλασιασμών που εκτελούνται. Επίσης, όπως πάντα, θεωρούμε ότι στην i -οστή αναδρομή, η ποσότητα ω , $\omega = \sum_{\mu=1}^N A_\mu \cdot i_\mu$ αντιπροσωπεύει το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων τα οποία εμφανίζονται στο γινόμενο γ_i . Στην περίπτωση αυτή με βαθμό εμπιστοσύνης 0.99999 ισχύει η Ανισότητα (4.11). Συνεπώς, επειδή το μ_ω είναι σε αυτή την περίπτωση πάντα αρνητικό, το ω παραμένει κοντά στο μηδέν, πρακτικά για οποιαδήποτε τιμή του πλήθους M των διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Η Σχέση (4.11) ισχύει για οποιοδήποτε βαθμό εμπιστοσύνης με μοναδική, επουσιώδη διαφορά ότι πρέπει να αλλάξει αντίστοιχα ο σταθερός συντελεστής του τ_ω .

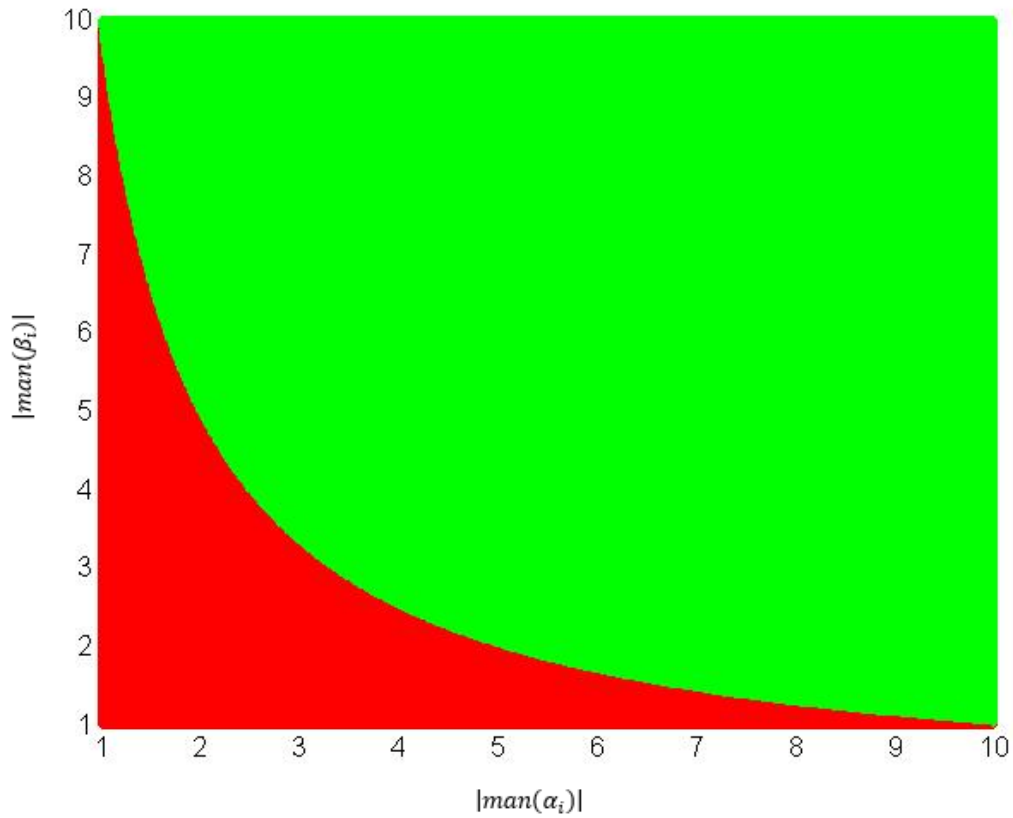
- ii) Με παρόμοιο τρόπο, ακόμη και στην περίπτωση που οι πιθανότητες $P_j, j = 1, 2, \dots$ (Σχέσεις (4.1)) της γένεσης συγκεκριμένου αριθμού λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων δεν παραμένουν σταθερές, η ποσοτική εκτίμηση η οποία δίνεται από τη Σχέση (4.11) μπορεί να δοθεί είτε δυναμικά, είτε λαμβάνοντας ως αντίστοιχη αντιπροσωπευτική τιμή τη μέση τιμή \bar{P} όλων των P_j για το σύνολο των διαδοχικών πολλαπλασιασμών M .

Συνοπώς, σε κάθε περίπτωση, εάν η σχέση $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$ ισχύει για κάθε έναν από τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς, τότε η συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε όλα τα γινόμενα $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, M$, είναι στην πράξη αμελητέα.

□

Περίπτωση 4.3. Στη γενική περίπτωση, σε κάθε πολλαπλασιασμό ισχύει είτε η Ανισότητα (3.4), είτε η (3.16), χωρίς να καθορίζεται με συγκεκριμένο τρόπο ποια από τις δύο θα ισχύει σε κάθε περίπτωση. Εδώ, προκειμένου να λάβουμε μία αυστηρή εκτίμηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που παράγονται σε κάθε πολλαπλασιασμό, καθώς και την αντίστοιχη πιθανότητα, πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή των ποσοτήτων $|man(\alpha_i)|$ και $|man(\beta_i)|$. Ωστόσο, οι κατανομές αυτές είναι δυνατόν να εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τον ίδιο τον αλγόριθμο. Προκειμένου να λάβουμε μία εκτίμηση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας που παράγεται, παραθέτουμε το παράδειγμα στο οποίο και οι δύο ποσότητες $|man(\alpha_i)|$ και $|man(\beta_i)|$ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1, 10]$. Στο παράδειγμα αυτό, το σύνολο των ζευγών (α, β) στο $\alpha\beta$ – επίπεδο που ικανοποιούν την (3.4) απαρτίζουν το διδιάστατο χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $\beta = 1$ και $\alpha = 1$ και την υπερβολή $\alpha \cdot \beta = 10$. Το χωρίο αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1 με κόκκινο χρώμα. Αντίστοιχα, το χωρίο στο οποίο ισχύει η (3.16) είναι αυτό που φράσσεται από τις ευθείες $\alpha = 10$ και $\beta = 10$ και την υπερβολή $\alpha \cdot \beta = 10$. Το χωρίο αυτό απεικονίζεται με πράσινο χρώμα στο Σχήμα 4.1. Η πιθανότητα το γινόμενο των mantissae να είναι μικρότερο του δέκα στην περίπτωση αυτή είναι

$$P\{|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10\} = \frac{1}{81} \cdot \int_1^{10} \frac{10}{\beta} d\beta = \frac{1}{81} \cdot [10 \cdot \ln\beta]_1^{10} \cong 0.2843$$



Σχήμα 4.1. Σχηματική απεικόνιση των κατανομών των γινομένων που ικανοποιούν τις ανισότητες $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$ και $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$, εάν τα $|man(\alpha_i)|$ και $|man(\beta_i)|$ ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[1,10]$. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται τα γινόμενα για τα οποία ισχύει $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$, ενώ με πράσινο χρώμα εμφανίζονται εκείνα για τα οποία ισχύει $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$.

Σε περίπτωση που δεν υπάρχει συγκεκριμένη κατανομή των $|man(\alpha_i)|$ και $|man(\beta_i)|$, μπορούμε να υπολογίσουμε δυναμικά, κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, το πλήθος των πολλαπλασιασμών που ικανοποιούν την Ανισότητα (3.4) σε σχέση με αυτό των πολλαπλασιασμών που ικανοποιούν τη συμπληρωματική Ανισότητα (3.16), προκειμένου να λάβουμε μία εκτίμηση για τη συσσώρευση του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στο συγκεκριμένο αλγόριθμο, όπως υποδεικνύει το κάτωθι θεώρημα:

Θεώρημα 4.3. Ας υποθέσουμε ότι εκτελούνται M διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί $\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta_i$, $i = 1, \dots, M$. Για ένα ποσοστό F_g των διαδοχικών αυτών πολλαπλασιασμών ισχύει η Ανισότητα

(3.16), ενώ για το υπόλοιπο ποσοστό $F_s = 1 - F_g$ των πολλαπλασιασμών αυτών ισχύει η Ανισότητα (3.4). Στην περίπτωση αυτή, αναφορικά με τη συγκέντρωση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στα επί μέρους γινόμενα $\gamma_i, i = 1, \dots, M$, ισχύουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- i. Όταν ισχύει $F_g > \frac{1}{2}$, το τυχόν γινόμενο γ_i τείνει να συμπεριφέρεται όπως περιεγράφη στην ανωτέρω Περίπτωση 4.2, με αποτέλεσμα το συνολικό λάθος πεπερασμένης ακρίβειας που συσσωρεύεται κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου να περιορίζεται. Όσο το ποσοστό F_g προσεγγίζει τη μονάδα, τόσο περισσότερο περιορίζεται ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύονται σε καθένα από τα επί μέρους γινόμενα γ_i .
- ii. Στην αντίθετη περίπτωση, στην οποία $F_g \leq \frac{1}{2}$, το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας το οποίο συσσωρεύεται στα γινόμενα γ_i αυξάνει. Συγκεκριμένα, όσο περισσότερο το ποσοστό F_g προσεγγίζει το μηδέν, τόσο περισσότερο αυξάνει ο ρυθμός συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στα γινόμενα γ_i .

Σχετικά πειράματα, τα οποία αποδεικνύουν πλήρως την ισχύ των ανωτέρω περιπτώσεων παρουσιάζονται αναλυτικά στην Παράγραφο 6.2.

5 Εκτέλεση ενός συνόλου πολλαπλασιασμών με δύο διαφορετικά μήκη λέξης

Έστω ένας αλγόριθμος A , ο οποίος σε κάθε επανάληψή του περιλαμβάνει έναν αριθμό πολλαπλασιασμών. Εκτελούμε τον αλγόριθμο A ταυτόχρονα με n και m δεκαδικά ψηφία στη mantissa. Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 7$ και ότι $m \geq 2 \cdot n + 7$, ενώ και στις δύο περιπτώσεις εκτέλεσης χρησιμοποιούνται ακριβώς τα ίδια δεδομένα ως είσοδοι του αλγορίθμου. Έστω, επίσης, τυχούσα ποσότητα γ του αλγορίθμου A . Η τιμή της ποσότητας γ στην υπ' αριθμόν ρ αναδρομή του αλγορίθμου όταν όλοι οι υπολογισμοί έχουν πραγματοποιηθεί πρακτικά με n δεκαδικά ψηφία συμβολίζεται με γ_n^ρ . Με αντίστοιχο σκεπτικό συμβολίζουμε με γ_m^ρ την τιμή της ίδιας ποσότητας γ στην ίδια αναδρομή όταν όλοι οι υπολογισμοί εκτελούνται πρακτικά με m δεκαδικά ψηφία στη mantissa. Στο παρόν κεφάλαιο θα συγκρίνουμε τον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα οποία έχει υπολογιστεί καθεμία από τις ποσότητες γ_n^ρ και γ_m^ρ .

Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, ο αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που παράγεται κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού εξαρτάται από την τάξη του γινομένου των mantissae των πολλαπλασιαστέων. Η τάξη αυτή δεν εξαρτάται από την ακρίβεια των όρων του γινομένου, όσο ο αλγόριθμος δεν έχει καταστραφεί εξ' αιτίας του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Στο Κεφάλαιο 4 καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι, ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο μήκος λέξης με το οποίο αναπαρίστανται οι αριθμοί οι οποίοι λαμβάνουν μέρος στις πράξεις του εκάστοτε αλγορίθμου, ο αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων οποιουδήποτε γινομένου γ ακολουθεί με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση κανονική κατανομή εάν ο αριθμός των διαδοχικών πολλαπλασιασμών που γέννησε το γ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από 30, αλλά ακόμα και αν ο αριθμός των διαδοχικών πολλαπλασιασμών είναι μεγαλύτερος του 20. Ως εκ τούτου, η διαφορά ανάμεσα στον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των ποσοτήτων γ_n^ρ και γ_m^ρ ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν (0) και διασπορά η οποία προκύπτει άμεσα από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4. Συνεπώς, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.1. Ας υποθέσουμε ότι ένας αλγόριθμος A εκτελείται παράλληλα, με την ίδια ακριβώς είσοδο, με δύο διαφορετικά πεπερασμένα μήκη λέξης, τα οποία πρακτικά αντιστοιχούν σε n και m δεκαδικά ψηφία. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις της ίδιας ποσότητας γ του αλγορίθμου A για τα δύο διαφορετικά αυτά μήκη λέξης είναι γ_n και γ_m αντίστοιχα. Έστω η τυχαία μεταβλητή

$$\begin{aligned} \Lambda = \{ & \text{Αριθμός λ. δ. ψ. που έχουν συσσωρευτεί στο } \gamma_m \} - \\ & \{ \text{Αριθμός λ. δ. ψ. που έχουν συσσωρευτεί στο } \gamma_n \}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Η τυχαία μεταβλητή Λ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν (0) και διασπορά $2 \cdot S_{\omega}^2$, όπου το S_{ω}^2 δίνεται από τη Σχέση (4.3).

Έστω $F_{m,n}(t)$ η συνάρτηση κατανομής του Λ . Η πιθανότητα το $|\Lambda|$ να είναι μεγαλύτερο από ζ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία δίνεται από τη σχέση

$$P(|\Lambda| > \zeta \geq 0) = 2 \cdot (1 - F_{m,n}(\zeta)) \quad (5.2)$$

□

Χρησιμοποιώντας αντιπροσωπευτικές τιμές για τις πιθανότητες $P_{i,j}$, όπου $i = 1, \dots, M$ και $j = 2, 1, \dots$, όπως αυτές που εμφανίζονται στο Κεφάλαιο 6 και συγκεκριμένα στους Πίνακες 6.4 και 6.5, συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα τα γ_n^{ρ} και γ_m^{ρ} να διαφέρουν κατ' απόλυτη τιμή κατά $\Lambda \geq 7$ δεκαδικά ψηφία είναι πρακτικά μηδενική. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει ακόμη και για μεγάλο αριθμό διαδοχικών πολλαπλασιασμών M . Επιπλέον, η μικρή ευαισθησία του ζ στις αλλαγές της τυπικής απόκλισης καθιστά τα ανωτέρω αποτελέσματα έγκυρα ακόμη και αν οι πιθανότητες $P_{i,j}$ μεταβάλλονται από πολλαπλασιασμό σε πολλαπλασιασμό. Επομένως, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2. Όπως και στο Θεώρημα 5.1, υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος A εκτελείται παράλληλα με την ίδια ακριβώς είσοδο και με δύο διαφορετικά πεπερασμένα μήκη λέξης, n και m , όπου $m > 2 \cdot n + 7$. Για μία τυχούσα ποσότητα γ του αλγορίθμου A ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Προβάλλουμε το γ_m σε n δεκαδικά ψηφία. Η προβολή επιτυγχάνεται με στρογγυλοποίηση του γ_m επί τη βάση της πληροφορίας του $n + 1$ – οστού δεκαδικού ψηφίου του γ_m . Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε την αναπαράσταση $\tilde{\gamma}_n$ του γ_m . Συγκρίνουμε τα $\tilde{\gamma}_n$ και γ_n χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 2.3 και 2.4 και εάν το αποτέλεσμα υποδεικνύει διαφορά k δεκαδικών ψηφίων, με ($k < n$), συμπεραίνουμε ότι τα τελευταία k δεκαδικά ψηφία του γ_n είναι λανθασμένα.
2. Συμπεραίνουμε επίσης ότι το γ_m έχει το πολύ $k + 7$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία ή, ισοδύναμα, ότι τα πρώτα $m - k - 7$ δεκαδικά ψηφία του γ_m είναι σωστά.
3. Για όσο χρόνο κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου A ισχύει ότι $k < n$, το $\tilde{\gamma}_n$ παραμένει μία εντελής ορθή αναπαράσταση του γ με n δεκαδικά ψηφία.

□

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, η πλήρως ορθή αναπαράσταση της εκάστοτε ποσότητας γ που παράγεται από έναν αλγόριθμο A , είτε ως ενδιάμεσο, είτε ως τελικό αποτέλεσμα του δεν μπορεί να είναι διαθέσιμη, καθώς δεν υπάρχει υπολογιστική μηχανή η οποία να εκτελεί πράξεις μεταξύ αριθμών με άπειρη ακρίβεια. Ως εκ τούτου, τα συμπεράσματα που εξάγονται από την ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου δίνουν μία εναλλακτική λύση στην αδυναμία αυτή των σύγχρονων υπολογιστικών συστημάτων και μία συστηματική μεθοδολογία με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε σε κάθε αναδρομή ενός αλγορίθμου τον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων οποιασδήποτε ποσότητάς του.

Η ορθότητα του Θεωρήματος 5.2 έχει ελεγχθεί πειραματικά στο επόμενο Κεφάλαιο 6 της παρούσας διατριβής.

6 Πειράματα ελέγχου/επιβεβαίωσης της θεωρητικής ανάλυσης που προηγήθηκε

Στο παρόν κεφάλαιο θα παραθέσουμε μία σειρά από πειραματικές διαδικασίες, οι οποίες έχουν ως σκοπό την επαλήθευση της θεωρητικής ανάλυσης που πραγματοποιήθηκε στα Κεφάλαια 3, 4 και 5 του δεύτερου αυτού μέρους της διατριβής. Ωστόσο, για την πειραματική επαλήθευση, θα κινηθούμε με την αντίθετη φορά από αυτή της παρουσίας των θεωρητικών αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, θα παραθέσουμε αρχικά τη διαδικασία και τα αποτελέσματα της πειραματικής επαλήθευσης των θεωρητικών συμπερασμάτων του Κεφαλαίου 5 και συγκεκριμένα του Θεωρήματος 5.2 και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην πειραματική επαλήθευση των αποτελεσμάτων των Κεφαλαίων 4 και 3.

6.1 Πειραματική επαλήθευση ελέγχου συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας με χρήση δύο διαφορετικών μηκών λέξης

Για την πειραματική επαλήθευση του Θεωρήματος 5.2 εκτελέσαμε 10^8 διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς. Καθένας από τους πολλαπλασιασμούς αυτούς εκτελέστηκε τρεις φορές, τη μία χρησιμοποιώντας 16 δεκαδικά ψηφία στη mantissa του κάθε όρου του εκάστοτε γινομένου, τη δεύτερη χρησιμοποιώντας 40 δεκαδικά ψηφία και την τρίτη χρησιμοποιώντας 128 δεκαδικά ψηφία. Με τον τρόπο αυτό λάβαμε τις αναπαραστάσεις γ_{16} , γ_{40} και γ_{128} για το τυχόν γινόμενο γ αντίστοιχα. Στη συνέχεια προβάλλαμε το αποτέλεσμα γ_{40} , το οποίο έχει υπολογιστεί με 40 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια σε 16 δεκαδικά ψηφία, λαμβάνοντας την αναπαράσταση $\tilde{\gamma}_{16}$, όπως περιεγράφη στο Κεφάλαιο 5. Με παρόμοιο τρόπο προβάλλαμε το αποτέλεσμα γ_{128} σε αναπαραστάσεις με 16 και 40 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια, λαμβάνοντας τις αναπαραστάσεις $\hat{\gamma}_{16}$ και $\hat{\gamma}_{40}$. Τέλος, συγκρίναμε το γ_{16} με τα $\tilde{\gamma}_{16}$ και $\hat{\gamma}_{16}$, με χρήση των Ορισμών 2.3 και 2.4. Συγκρίναμε επίσης τις αναπαραστάσεις $\tilde{\gamma}_{16}$ και $\hat{\gamma}_{16}$, καθώς και το γ_{40} με το $\hat{\gamma}_{40}$, χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1 και, όπως παρατηρούμε, επιβεβαιώνουν πλήρως τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 5.2.

Ελάχιστη διαφορά λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με 16 και 40 δεκαδικά ψηφία	-3
Μέγιστη διαφορά λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με 16 και 40 δεκαδικά ψηφία	3
Μέση διαφορά λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με 16 και 40 δεκαδικά ψηφία	-0.0945
Μέγιστος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με 16 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια	16
Μέγιστος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων κατά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών με 40 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια	16

Πίνακας 6.1. Σύγκριση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύτηκαν κατά την εκτέλεση 10^8 διαδοχικών πολλαπλασιασμών. Όλοι οι διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί εκτελέστηκαν παράλληλα με 16, 40 και 128 δεκαδικά ψηφία στη mantissa τους.

6.2 Πειραματική επαλήθευση συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς

Στην παρούσα παράγραφο θα παραθέσουμε πειραματικές διαδικασίες και τα αντίστοιχα αποτελέσματα, τα οποία επαληθεύουν πλήρως τη θεωρητική ανάλυση του Κεφαλαίου 4. Στο τέλος του Κεφαλαίου 4 τα εξαχθέντα θεωρητικά πορίσματα εφαρμόστηκαν και αναλύθηκαν σε σχέση με τις ακόλουθες τρεις διακριτές περιπτώσεις:

- Περίπτωση 4.1. Η χειρότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ισχύει $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$.
- Περίπτωση 4.2. Η ευνοϊκότερη περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ισχύει $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$.
- Περίπτωση 4.3. Η γενικότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία η κατανομή του ποσοστού των πολλαπλασιασμών για τους οποίους ισχύει η σχέση $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$ είναι τυχαία.

Για λόγους συνέπειας, θα διακρίνουμε τις ίδιες περιπτώσεις. Αρχικά θα περιγράψουμε ένα γενικό πείραμα, το οποίο εφαρμόστηκε και στις τρεις προαναφερθείσες περιπτώσεις και θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα εφαρμογής του για καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε δύο επιπλέον πειραματικές διαδικασίες, καθεμιά από τις οποίες έχει ως στόχο την περαιτέρω επαλήθευση καθεμιάς από τις ανωτέρω Περιπτώσεις 4.1 και 4.2.

Ένα πρώτο, γενικό πείραμα

Αρχικά επιλέξαμε ένα σύνολο S_n από 10^6 τυχαία επιλεγμένους αριθμούς κινητής υποδιαστολής, οι οποίοι είχαν 16 δεκαδικά ψηφία στη mantissa τους. Στην περίπτωση αυτή, ο δείκτης n αντιπροσωπεύει τα 16 δεκαδικά ψηφία της mantissa των επιλεγέντων αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί προήλθαν από μία ομοιόμορφη κατανομή, ήταν, δε, όλοι εκπεφρασμένοι σε επιστημονική μορφή

$$mantissa \cdot 10^T$$

Ακολούθως, επεκτείναμε καθέναν από τους αριθμούς α_n του συνόλου S_n , ώστε να περιλαμβάνει 40 δεκαδικά ψηφία στη mantissa του, με τα τελευταία 24 δεκαδικά ψηφία να είναι μηδενικά. Με τον τρόπο αυτό λάβαμε τα στοιχεία α_m του συνόλου S_m , όπου, εδώ, ο δείκτης m αντιπροσωπεύει τα 40 δεκαδικά ψηφία της mantissa των αριθμών α_m .

Στη συνέχεια, επιλέξαμε μία τυχαία, αλλά σταθερή τιμή του ποσοστού F_g εντός του διαστήματος $[0,1]$, όπου, όπως και στο Κεφάλαιο 4, F_g είναι το ποσοστό των διαδοχικών αυτών πολλαπλασιασμών για τους οποίους ισχύει η ανισότητα $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$. Πραγματοποιήσαμε $F_g \cdot 10^9$ πολλαπλασιασμούς με ακρίβεια $n = 16$ δεκαδικών ψηφίων, για τους οποίους οι όροι του γινομένου $\alpha_n, \beta_n \in S_n$ ικανοποιούσαν την ανισότητα $|man(\alpha_n) \cdot man(\beta_n)| \geq 10$. Εκτελέσαμε επιπλέον $(1 - F_g) \cdot 10^9$ πολλαπλασιασμούς με επίσης 16 δεκαδικά ψηφία ακρίβεια, για τους οποίους οι όροι του γινομένου $\alpha_n, \beta_n \in S_n$ ικανοποιούσαν τη συμπληρωματική ανισότητα $|man(\alpha_n) \cdot man(\beta_n)| < 10$. Εξασφαλίσαμε, επίσης, ότι δεν έλαβε χώρα ο ίδιος πολλαπλασιασμός περισσότερες από μία φορά.

Εκτελέσαμε επίσης ακριβώς τους ίδιους πολλαπλασιασμούς με ακρίβεια 40 δεκαδικών ψηφίων, χρησιμοποιώντας σαν όρους του γινομένου στοιχεία α_m, β_m του συνόλου S_m .

Υποθέτουμε ότι κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων $\alpha_n, \beta_n \in S_n$ παράγεται ένα γινόμενο γ_n^1 , το οποίο έχει παραχθεί με $x_n^1 \geq 0$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία στη mantissa. Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι κατά την εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού μεταξύ των στοιχείων $\alpha_m, \beta_m \in S_m$ παράγεται ένα γινόμενο γ_m^1 , με $x_m^1 \geq 0$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία στη mantissa του. Τα σφάλματα στα x_n^1 δεκαδικά ψηφία του γ_n^1 υπολογίστηκαν μέσω των Ορισμών 2.3 και 2.4, καθώς και του Θεωρήματος 5.2, χρησιμοποιώντας σαν αριθμούς αναφοράς τα γινόμενα γ_m^1 και υπολογίζοντας το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας των γινομένων γ_n^1 ως προς αυτά. Από τα προκύπτοντα γινόμενα γ_n^1 και γ_m^1 σχηματίσαμε δύο νέα σύνολα αριθμών S_n^1, S_m^1 , τα οποία βρίσκονταν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (γ_n^1, γ_m^1) .

Επιπλέον, για την ίδια τιμή F_g εκτελέσαμε $F_g \cdot 10^9$ πολλαπλασιασμούς μεταξύ των στοιχείων α_n^1, β_n^1 του συνόλου S_n^1 που ικανοποιούσαν την ανισότητα $|\text{man}(\alpha_n^1) \cdot \text{man}(\beta_n^1)| \geq 10$ και $(1 - F_g) \cdot 10^9$ πολλαπλασιασμούς μεταξύ των στοιχείων του ίδιου συνόλου που ικανοποιούσαν την ανισότητα $|\text{man}(\alpha_n^1) \cdot \text{man}(\beta_n^1)| < 10$. Με τη διαδικασία αυτή λάβαμε 10^9 γινόμενα, το σύνολο των οποίων αποκαλέσαμε γ_n^2 . Και σε αυτή την περίπτωση εξασφαλίσαμε ότι κανένας πολλαπλασιασμός δεν εκτελέστηκε περισσότερες από μία φορές. Οι ίδιοι ακριβώς πολλαπλασιασμοί εκτελέστηκαν και με ακρίβεια 40 δεκαδικών ψηφίων μεταξύ των στοιχείων του συνόλου S_m^1 , παρέχοντας τα γινόμενα γ_m^2 . Από τα γινόμενα γ_n^2 και γ_m^2 σχηματίσαμε τα σύνολα S_n^2 και S_m^2 αντίστοιχα, τα οποία βρίσκονταν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (γ_n^2, γ_m^2) , όπως και τα σύνολα S_n^1, S_m^1 .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, σχηματίσαμε τα σύνολα $(S_n^3, S_m^3), \dots, (S_n^i, S_m^i)$ κλπ. με το ίδιο ποσοστό F_g . Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις υπολογίσαμε τον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τον οποίο παρήχθησαν τα γινόμενα γ_n^i χρησιμοποιώντας τις προσεγγίσεις των Κεφαλαίων 2 και 5. Επιπλέον, όποτε κάποιος εκθέτης υπερέβαινε κάποια προκαθορισμένη μεγάλη τιμή, παραδείγματος χάριν το 30, κατά την ανωτέρω διεργασία, αυτός ετίθετο στο μηδέν για να αποφύγουμε την υπερχειλίση. Τονίζουμε για ακόμη μία φορά ότι ο παράγοντας 10^T δεν συμμετέχει στην παραγωγή και τη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Αναφορικά με το ανωτέρω πείραμα, διακρίναμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- Περίπτωση 6.2.1. Η χειρότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ίσχυε $|\text{man}(\alpha_n^i) \cdot \text{man}(\beta_n^i)| < 10$ ή, ισοδύναμα, $F_g \cong 0$. Στην περίπτωση αυτή, το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας το οποίο συσσωρευόταν στα

γινόμενα γ_n^i κατά την εκτέλεση διαδοχικών πολλαπλασιασμών, ακόμα και για μικρές τιμές του i αυξανόταν ραγδαία, με αποτέλεσμα να φθάνει τα 16 δεκαδικά ψηφία μετά από μόλις 61 αναδρομές περίπου, σε πλήρη συμφωνία με τη θεωρητική ανάλυση που προηγήθηκε. Ένα σχετικό πείραμα το οποίο καταδεικνύει καλύτερα την «τοξικότητα» της περίπτωσης αυτής, παρουσιάζεται παρακάτω.

- Περίπτωση 6.2.2. Η ευνοϊκότερη περίπτωση, στην οποία για όλους τους πολλαπλασιασμούς ίσχυε $|man(\alpha_n^i) \cdot man(\beta_n^i)| \geq 10$ ή, ισοδύναμα, $F_g \cong 1$. Σε αυτή την περίπτωση, το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας το οποίο συσσωρευόταν στα γινόμενα γ_n^i ήταν πρακτικά αμελητέο για όλες τις τιμές του i . Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με την προηγηθείσα θεωρητική ανάλυση, δείχνει ότι όταν ισχύει η ανισότητα $|man(\alpha_n^i) \cdot man(\beta_n^i)| \geq 10$ σε όλες τις περιπτώσεις, ο αλγόριθμος στον οποίο εκτελούνται οι διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί δεν κινδυνεύει να δώσει λανθασμένα αποτελέσματα λόγω συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας. Αναφορικά με αυτή την περίπτωση έχουμε καταρτίσει ένα ειδικό πείραμα, το οποίο παρουσιάζεται στα επόμενα.

- Περίπτωση 6.2.3. Η γενικότερη δυνατή περίπτωση, στην οποία η κατανομή των γινομένων για τα οποία ίσχυε η ανισότητα $|man(\alpha_n^i) \cdot man(\beta_n^i)| \geq 10$ ήταν τυχαία ή, ισοδύναμα, $F_g \in (0,1)$. Στη γενική αυτή περίπτωση, τα αποτελέσματα των διαδοχικών πολλαπλασιασμών σχετικά με τη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας εξαρτώνταν έντονα από την τιμή του ποσοστού F_g . Για την καλύτερη μελέτη της περίπτωσης αυτής, διακρίναμε δύο περαιτέρω υποπεριπτώσεις:
 - i. την περίπτωση στην οποία $F_g \leq 0.5$ και
 - ii. την περίπτωση στην οποία $F_g > 0.5$.

Η υποπερίπτωση (i) ήταν ανάλογη της Περίπτωσης 6.2.1. Συγκεκριμένα, τα γινόμενα $\gamma_n^i = \alpha_n^i \cdot \beta_n^i$ που παρήχθησαν είχαν όλα τους τα ψηφία λανθασμένα μετά από έναν σχετικά μικρό αριθμό αναδρομών, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.2(α). Αντιθέτως, η υποπερίπτωση (ii) ήταν ανάλογη της Περίπτωσης 6.2.2, με την έννοια ότι τα γινόμενα γ_n^i παρουσίαζαν σημαντικά

μικρότερη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 6.2(β).

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη θεωρητική ανάλυση, όσο μικρότερο είναι το ποσοστό F_g , τόσο μεγαλύτερο είναι και το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας που συσσωρεύεται στο εκάστοτε γινόμενο γ_n^i . Τονίζουμε ότι, εάν τα αποτελέσματα της παρούσας παραγράφου συνδυαστούν με τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4, συμπεραίνουμε άμεσα ότι ο πολλαπλασιασμός είναι ιδιαίτερα «τοξική» πράξη, από την άποψη της παραγωγής και της συσσώρευσης λάθους πεπερασμένης ακρίβειας, δεδομένου ότι η πιο συχνά απαντώμενη περίπτωση είναι αυτή του $F_g \cong 0.29$ για ομοιόμορφα κατανεμημένες τιμές των όρων του γινομένου α και β .

Ποσοστό διαδοχικών πολλαπλασιασμών που ικανοποιούσαν την ανισότητα $ \text{man}(\alpha_n^i) \cdot \text{man}(\beta_n^i) \geq 10$	Αριθμός διαδοχικών πολλαπλασιασμών για τον οποίο το γινόμενο $\alpha_n^i \cdot \beta_n^i$ ήταν εντελώς λανθασμένο
0.0578	92
0.0718	89
0.0841	88
0.0926	90
0.1160	104
0.1360	107
0.1862	108
0.2310	131
0.2734	175
0.4053	328
0.4562	729
0.4591	449
0.4826	877
0.4934	1781
0.4948	1897
0.4951	3001
0.4964	4298
0.4977	6090
0.4987	10138
0.4989	16305
0.4999	25264

(α)

Ποσοστό διαδοχικών πολλαπλασιασμών που ικανοποιούσαν την ανισότητα $ man(\alpha_n^i) \cdot man(\beta_n^i) \geq 10$	Μέγιστος αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τον οποίο υπολογίστηκε το γινόμενο $\alpha_n^i \cdot \beta_n^i, i \leq F_g \cdot 10^9$	Μέσος αριθμός συσσωρευμένων λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων σε όλα τα γινόμενα $\alpha_n^i \cdot \beta_n^i, i \leq F_g \cdot 10^9$
0.5014	13	7.7761
0.5029	12	7.2217
0.5051	11	6.9437
0.5063	11	6.8764
0.5076	11	6.6435
0.5131	10	6.1244
0.5143	10	6.0928
0.5154	10	6.0165
0.5171	10	5.9189
0.5204	10	5.7784
0.5260	9	5.5140
0.5300	9	5.4266
0.5404	9	5.1647
0.5481	9	5.0070
0.5588	8	4.8098
0.5899	8	4.4619
0.6182	8	4.1856
0.7742	6	3.4101
0.8422	6	3.0055
0.8702	5	2.9013
0.8913	5	2.8306
0.9195	5	2.7292
0.9412	5	2.6463
0.9519	4	2.6105

(β)

Πίνακας 6.2. Αποτελέσματα του πρώτου, γενικού πειράματος της Παραγράφου 6.2. $F_g \cdot 10^9$ διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί $\gamma_n^i = \alpha_n^i \cdot \beta_n^i$ εκτελέστηκαν για διάφορες τιμές του ποσοστού F_g με $|man(\alpha_n^i) \cdot man(\beta_n^i)| \geq 10$.

(α) Όταν $F_g \leq \frac{1}{2}$, το γινόμενο γ_n^i γίνεται εντελώς λανθασμένο μετά από έναν πολύ μικρό αριθμό πολλαπλασιασμών, σε πλήρη συμφωνία με τη θεωρητική πρόβλεψη.

(β) Όταν $F_g > \frac{1}{2}$, το γινόμενο γ_n^i επιδεικνύει αξιοσημείωτη αντοχή στο λάθος πεπερασμένης ακρίβειας. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι το F_g , τόσο μικρότερος είναι ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα οποία τα γινόμενα γ_n^i υπολογίζονται, όπως προβλέπεται και από τη θεωρητική ανάλυση.

Δύο επιπλέον πειράματα

Αναφορικά με τις δύο προαναφερθείσες Περιπτώσεις 6.2.1 και 6.2.2, εκτός από το γενικό πείραμα που παρουσιάστηκε ανωτέρω, πραγματοποιήθηκαν δύο επιπλέον πειράματα, τα οποία επαληθεύουν την ορθότητα της θεωρητικής ανάλυσης του Κεφαλαίου 4.

Συγκεκριμένα, για την Περίπτωση 6.2.1, στην οποία ισχύει $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| < 10$ για κάθε i , υλοποιήσαμε ένα τεχνητό αλγόριθμο, ο οποίος εξαναγκάζει όλους τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς να ικανοποιούν την ανωτέρω ανισότητα. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου έχει ως ακολούθως:

- Εκκινώντας από έναν τυχαίο αριθμό $\beta_0 \in [1, 10)$, εκφράζουμε αυτόν τον αριθμό με ένα συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων, καθώς και με «το διπλάσιο συν επτά» πλήθος ψηφίων, λαμβάνοντας τις εκφράσεις του β_0 για «μικρή» και «μεγάλη» ακρίβεια αντίστοιχα.
- Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε το β_0 με τον εαυτό του και στις δύο εκφράσεις, λαμβάνοντας το γινόμενο β_0^2 με αυτές τις δύο διαφορετικές εκφράσεις ακρίβειας.
- Εάν η ποσότητα β_0^2 που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό αυτό ξεπερνά το 10, αφαιρούμε έναν κατάλληλα επιλεγμένο θετικό ακέραιο αριθμό c_0 από το β_0 και για τις δύο ακρίβειες του β_0 . Αυτό γίνεται προκειμένου η ποσότητα $(\beta_0 - c_0)^2$ να ικανοποιεί την ανισότητα $1 \leq (\beta_0 - c_0)^2 < 10$. Το c_0 επιλέγεται να είναι φυσικός, ούτως ώστε η αφαίρεσή του από το β_0 να μην εισάγει λάθος πεπερασμένης ακρίβειας στο β_0 . Το γεγονός ότι η αφαίρεση του c_0 από το β_0 δεν εισάγει λάθος πεπερασμένης ακρίβειας στην προκύπτουσα ποσότητα πέραν του σφάλματος που ήδη έχει η ποσότητα β_0 , επιβεβαιώνεται σε κάθε περίπτωση που είναι αναγκαία κάποια τέτοια αφαίρεση συγκρίνοντας το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων της ποσότητας β_0 με αυτό της διαφοράς $(\beta_0 - c_0)$ μέσω των Ορισμών 2.3 και 2.4. Σε δημοσίευση που θα επακολουθήσει, θεμελιώνεται ότι μία πράξη αυτής της μορφής δεν παράγει ποτέ λάθος πεπερασμένης ακρίβειας.
- Ακολούθως, συγκρίνουμε τις δύο εκφράσεις της ποσότητας β_0^2 ως προς το λάθος πεπερασμένης ακρίβειας, θεωρώντας ως ορθή αναπαράσταση της ποσότητας την

έκφραση «μεγάλης» ακρίβειας αυτής. Το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων της έκφρασης «μικρής» ακρίβειας υπολογίζεται βάσει των Ορισμών 2.3 και 2.4 και του Θεωρήματος 5.2 και αποθηκεύεται.

- Αμέσως μετά, ο εκθέτης του τετραγώνου τίθεται ίσος με μηδέν, προκειμένου να αποφύγουμε υπερχειλίση.
- Η mantissa του τετραγώνου αποθηκεύεται σαν νέος αριθμός εκπεφρασμένος τόσο σε «μικρή», όσο και σε «μεγάλη» ακρίβεια. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται β_1 .
- Η προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται με το β_1 στη θέση του β_0 . Από την εφαρμογή της ανωτέρω διαδικασίας στο β_1 προκύπτει το τετράγωνο β_1^2 . Το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του β_1^2 υπολογίζεται και αποθηκεύεται, αφού πρώτα εξακριβωθεί ότι $\beta_1^2 \in [1, 10)$ ή αφότου επιβληθεί στο β_1^2 να ανήκει στο διάστημα $[1, 10)$, μέσω αφαίρεσης μίας κατάλληλης ποσότητας c_1 .
- Τέλος, τα βήματα του ανωτέρω αλγορίθμου εκτελούνται έως ότου η προκύπτουσα ποσότητα β_i^2 για κάποια αναδρομή i να έχει όλα της τα ψηφία στην έκφραση «μικρής» ακρίβειας λανθασμένα, ενώ, ταυτόχρονα, ισχύει $\beta_i^2 \in [1, 10)$.

Ο αλγόριθμος αυτός εκτελέστηκε για 10^3 διαφορετικές αρχικές τιμές της ποσότητας β_0 , η οποία ανήκε πάντα στο διάστημα $[1, 10)$. Στον Πίνακα 6.3 παρουσιάζεται ο αριθμός των αναδρομών του αλγορίθμου που εκτελέστηκαν μέχρις ότου η ποσότητα β_i^2 να έχει όλα τα ψηφία της έκφρασής της σε «μικρή» ακρίβεια λανθασμένα, για διαφορετικές τιμές «απλού» και «διπλού» μήκους λέξης. Από τον πίνακα αυτό εξάγουμε το ιδιαίτερα σημαντικό συμπέρασμα ότι η ποσότητα β_i^2 έχει όλα της τα ψηφία λανθασμένα μετά από έναν εντυπωσιακά μικρό αριθμό αναδρομών, ειδικά αν συγκρίνουμε τον αριθμό των αναδρομών με την εκάστοτε χρησιμοποιούμενη ακρίβεια. Το αποτέλεσμα βρίσκεται σε πλήρη συμφωνία με τη θεωρητική ανάλυση του Κεφαλαίου 4.

Χρησιμοποιηθείσα «μικρή» ακρίβεια (αριθμός δεκαδικών ψηφίων)	Αριθμός αναδρομών στον οποίο όλα τα ψηφία του β_i^2 ήταν λανθασμένα, ανεξάρτητα της επιλογής του β_0
16	61
64	249
128	484
256	967
512	1915
1024	3843
2048	7670
4096	15285

Πίνακας 6.3. Πίνακας που απεικονίζει τον αριθμό των αναδρομών στον οποίο ο τεχνητός αλγόριθμος που περιεγράφη στην παρούσα Παράγραφο 6.2 και αφορά αποκλειστικά την Περίπτωση 6.2.1 έδωσε εντελώς λανθασμένα αποτελέσματα για διάφορα μήκη λέξης. Τα αποτελέσματα του πίνακα αυτού βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με τη θεωρητική ανάλυση.

Για την Περίπτωση 6.2.2, για την οποία ισχύει ότι $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$ για κάθε έναν από τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς i , υλοποιήσαμε έναν ειδικό τεχνητό αλγόριθμο, ο οποίος επιβάλλει την ισχύ της ανισότητας $|man(\alpha_i) \cdot man(\beta_i)| \geq 10$ σε όλους τους διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς που εκτελούνται σε αυτόν. Ο αλγόριθμος αυτός περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα:

- Εκκινώντας πάλι από έναν τυχόντα αριθμό $\beta_0 \in [1, 10)$, λαμβάνουμε τις εκφράσεις αυτού σε «μικρή» και «μεγάλη» ακρίβεια, όπου, και εδώ η «μεγάλη» ακρίβεια περιλαμβάνει «το διπλάσιο συν επτά» πλήθος ψηφίων στη mantissa του αριθμού σε σχέση με αυτό της «μικρής».
- Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε το β_0 με τον εαυτό του και στις δύο εκφράσεις ακρίβειας αυτού.
- Σε περίπτωση που το β_0^2 είναι μικρότερο από 10, προσθέτουμε έναν κατάλληλο θετικό ακέραιο c_0 και στις δύο εκφράσεις ακρίβειας του β_0 , έτσι ώστε $(\beta_0 + c_0)^2 \geq 10$. Τονίζουμε ότι η εκτέλεση του αθροίσματος $\beta_0 + c_0$ δεν επιφέρει ποτέ αλλοίωση του πλήθους των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του β_0 .

- Ακολούθως, διατυπώνουμε τη νέα τιμή του β_0^2 σε κανονική μορφή και θέτουμε τον εκθέτη αυτής ίσο με μηδέν, προκειμένου να αποφύγουμε το ενδεχόμενο υπερχείλισης.
- Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις του γινομένου β_0^2 («μικρή» και «μεγάλη» ακρίβεια), θεωρώντας ως ορθή έκφραση του τετραγώνου αυτή της «μεγάλης» ακρίβειας, υπολογίζουμε και αποθηκεύουμε το πλήθος των λανθασμένων ψηφίων της έκφρασης του β_0^2 σε «μικρή» ακρίβεια, χρησιμοποιώντας ξανά τους Ορισμούς 2.3 και 2.4, καθώς και το Θεώρημα 5.2.
- Εν συνεχεία, θέτουμε τη mantissa του β_0^2 ή του $(\beta_0 + c_0)^2$ ως ένα νέο αριθμό, β_1 , ο οποίος είναι διαθέσιμος τόσο σε «μικρή», όσο και σε «μεγάλη» ακρίβεια. Επαναλαμβάνουμε τα ανωτέρω βήματα του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας το β_1 στη θέση του β_0 , υπολογίζοντας και αποθηκεύοντας το πλήθος των λανθασμένων ψηφίων του β_1^2 , αφού βεβαιωθούμε ότι $\beta_1^2 \geq 10$ ή αφού επιβάλλουμε στο β_1^2 να είναι μεγαλύτερο του 10, προσθέτοντας στο β_1 μία κατάλληλη ποσότητα c_1 .
- Τα ανωτέρω βήματα του αλγορίθμου αυτού επαναλαμβάνονται για ένα μεγάλο αριθμό αναδρομών, ενώ ταυτόχρονα παρακολουθούμε τη συσσώρευση λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στην ποσότητα β_i^2 , όπου i ο αύξων αριθμός της εκάστοτε αναδρομής.

Ο αλγόριθμος αυτός εκτελέστηκε 10^{10} φορές, για 100 αρχικές τιμές του β_0 , οι οποίες ανήκαν στο διάστημα $[1, 10)$ και για τις τιμές «μικρής» και «μεγάλης» ακρίβειας του Πίνακα 6.3. Το συγκεκριμένο πείραμα έδειξε ότι ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τον οποίο υπολογίστηκε η «μικρή» έκφραση της ποσότητας β_i^2 σε σχέση με τη «μεγάλη» αναπαράσταση της δεν ξεπέρασε ποτέ το δύο (2), ενώ η μέση τιμή των λανθασμένων αυτών δεκαδικών ψηφίων παρέμεινε αρκετά κοντά στο μηδέν (0), ακόμη και για μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου, όπως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρητική ανάλυση του Κεφαλαίου 4.

6.3 Πειραματική επαλήθευση των πιθανοτήτων γένεσης συγκεκριμένου αριθμού λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων στην πράξη του πολλαπλασιασμού

Προκειμένου να επαληθεύσουμε την εγκυρότητα της ανάλυσης και των αποτελεσμάτων των Παραγράφων 3.1 και 3.2, πραγματοποιήσαμε το ακόλουθο πείραμα:

1. Αρχικά, επιλέξαμε ένα σύνολο Σ^{16} αποτελούμενο από 10^5 ζεύγη τυχαία επιλεγμένων mantissae (α_i, β_i) με 16 ψηφία. Οι αριθμοί αυτοί θα αναφέρονται και ως α_i^{16} και β_i^{16} , όπου ο άνω δείκτης 16 δηλώνει την ακρίβεια με την οποία αναπαρίσταται ο αντίστοιχος αριθμός. Θεωρούμε πως κάθε ένας αριθμός του συνόλου Σ^{16} έχει όλα του τα 16 ψηφία σωστά.
2. Στη συνέχεια, «μολύναμε» καθένα από τα (α_i, β_i) με ένα διαφορετικό σφάλμα, το οποίο προέκυψε από μία κανονική κατανομή με διάφορες τιμές σ της τυπικής απόκλισης. Συγκεκριμένα, για κάθε τιμή της τυπικής απόκλισης σ παράξαμε 10^5 ζεύγη τιμών λάθους $(\theta_{\alpha,i}^N, \theta_{\beta,i}^N)$ κανονικά κατανεμημένων, οι οποίες θα διαδραματίσουν το ρόλο του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας των $(\alpha_i^{16}, \beta_i^{16})$. Με τον τρόπο αυτό παράξαμε ένα σύνολο από «μολυσμένα» ζεύγη

$$(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) = (\alpha_i + \theta_{\alpha,i}^N, \beta_i + \theta_{\beta,i}^N)$$

3. Ακολούθως, πραγματοποιήσαμε όλους τους δυνατούς πολλαπλασιασμούς

$$\tilde{\gamma}_i^{16} = \tilde{\alpha}_i \cdot \tilde{\beta}_i$$

μεταξύ των «μολυσμένων» αριθμών που παρήχθησαν στο Βήμα 2. Για το γινόμενο, όπως και για τους αρχικούς αριθμούς, έχει χρησιμοποιηθεί ο άνω δείκτης 16 για να δηλώσει πως αυτό έχει ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων. Πραγματοποιήσαμε, επίσης, τα γινόμενα

$$\gamma_i^{64} = \alpha_i \cdot \beta_i$$

με το γινόμενο να έχει ακρίβεια 64 δεκαδικών ψηφίων. Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3 και το Θεώρημα 5.2 υπολογίσαμε το σύνολο των διαφορών:

$$\#edd(\tilde{\gamma}_i^{16}) - \max\{\#edd(\tilde{\alpha}_i), \#edd(\tilde{\beta}_i)\}$$

Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο σύνολο διαφορών, συγκρίναμε τις πειραματικές συχνότητες με τις θεωρητικές πιθανότητες που υπολογίστηκαν στην Παράγραφο 3.2 για διάφορες τιμές της τυπικής απόκλισης των κανονικά κατανομημένων σφαλμάτων πεπερασμένης ακρίβειας. Ορισμένα αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα για δύο αντιπροσωπευτικές τιμές της τυπικής απόκλισης, $\sigma = 1.14$ και $\sigma = 2.2$, παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4. Συγκεκριμένα, στους Πίνακες 6.4(β) και 6.4(ε) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός των λανθασμένων ψηφίων του «μολυσμένου» όρου $\tilde{\alpha}_i$ είναι ίσος με τον αριθμό των λανθασμένων ψηφίων του «μολυσμένου» όρου $\tilde{\beta}_i$ ($\#edd(\tilde{\alpha}_i) = \#edd(\tilde{\beta}_i)$) για τέσσερα (4) τυχαία επιλεγμένα ζεύγη τιμών των (α_i, β_i) , τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.4(α). Στους Πίνακες 6.4(γ), 6.4(δ), 6.4(στ) και 6.4(ζ) παρουσιάζονται για τις δύο διαφορετικές τιμές της τυπικής απόκλισης της κατανομής του σφάλματος τα αποτελέσματα της περίπτωσης κατά την οποία ο αρχικός αριθμός λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των όρων του γινομένου $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i)$ δεν είναι ίδιος και συγκεκριμένα για την περίπτωση κατά την οποία το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\beta}_i$ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\alpha}_i$ ($\#edd(\tilde{\alpha}_i) < \#edd(\tilde{\beta}_i)$). Όπως παρατηρούμε από τους πίνακες, υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των θεωρητικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων, γεγονός το οποίο αναδεικνύει την ισχύ της συγκεκριμένης θεωρίας.

4. Τέλος, επαναλάβουμε το ανωτέρω πείραμα χρησιμοποιώντας σφάλματα τα οποία προέκυψαν από ομοιόμορφη κατανομή της mantissa του σφάλματος $x \cdot 10^{-\lambda c}$, όπου ο όρος $10^{-\lambda c}$ ανήκε στο διάστημα $[10^{-16}, 10^{-3}]$. Τα σφάλματα αυτά τα συμβολίζουμε με ζ_i^U . Με τον τρόπο αυτό παράξαμε τα δείγματα

$$\hat{\alpha}_i^{16} = \alpha_i^{16} + \zeta_{\alpha,i}^U$$

και

$$\hat{\beta}_i^{16} = \beta_i^{16} + \zeta_{\beta,i}^U$$

5. Επαναλαμβάνοντας το πείραμα για την περίπτωση της μόλυνσης που προέρχεται από ομοιόμορφη κατανομή, διαπιστώσαμε για μία ακόμη φορά τη συμφωνία μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων, όπως προκύπτει από τον Πίνακα 6.5.

Τέσσερα τυχαία επιλεγμένα ζεύγη τιμών (α_i, β_i)

$\alpha_1 = 1.505791937075619$	$\beta_1 = 5.526986816293506$
$\alpha_2 = 2.675404049994100$	$\beta_2 = 2.778498218867048$
$\alpha_3 = 7.946881519204984$	$\beta_3 = 4.557506835434298$
$\alpha_4 = 5.557116785741900$	$\beta_4 = 5.549129305868777$

(α)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{EQ}(\xi; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 1.14$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	0.372	0.129	$5.40 \cdot 10^{-21}$	$2.96 \cdot 10^{-28}$
	Πειραματική Συχνότητα	0.377	0.128	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.627	0.652	0.582	0.513
	Πειραματική Συχνότητα	0.622	0.653	0.580	0.513
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	$1.15 \cdot 10^{-3}$	0.193	0.377	0.367
	Πειραματική Συχνότητα	$1.02 \cdot 10^{-3}$	0.194	0.378	0.368
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Θεωρητική Πιθανότητα	$6.50 \cdot 10^{-5}$	0.0233	0.0377	0.106
	Πειραματική Συχνότητα	$4.80 \cdot 10^{-5}$	0.0233	0.0377	0.106

(β)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 1; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 1.14$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	$2.73 \cdot 10^{-7}$	$3.14 \cdot 10^{-3}$	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	$2.37 \cdot 10^{-3}$	0	0
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.862	0.997	0.714	0.312
	Πειραματική Συχνότητα	0.861	0.998	0.717	0.313
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	0.135	$4.20 \cdot 10^{-7}$	0.286	0.688
	Πειραματική Συχνότητα	0.136	0	0.283	0.687
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Θεωρητική Πιθανότητα	$3.05 \cdot 10^{-3}$	$9.33 \cdot 10^{-18}$	0	$1.47 \cdot 10^{-14}$
	Πειραματική Συχνότητα	$2.87 \cdot 10^{-3}$	0	0	0

(v)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 2; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 1.14$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	$1.58 \cdot 10^{-8}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	$1.97 \cdot 10^{-3}$	0	0
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	1	0.997	0.709	0.301
	Πειραματική Συχνότητα	1	0.998	0.711	0.301
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0.291	0.699
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0.289	0.699
Ανακούφιση κατά 2	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
δεκαδικά ψηφία	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0

(δ)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{EQ}(\xi; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 2.2$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
δεκαδικών ψηφίων	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου	Θεωρητική Πιθανότητα	0.651	0.388	$9 \cdot 10^{-7}$	$6.13 \cdot 10^{-9}$
δεκαδικού ψηφίου	Πειραματική Συχνότητα	0.647	0.389	$1.06 \cdot 10^{-7}$	0
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.335	0.504	0.703	0.625
δεκαδικών ψηφίων	Πειραματική Συχνότητα	0.339	0.504	0.700	0.624
Ανακούφιση κατά 1	Θεωρητική Πιθανότητα	0.0120	0.0959	0.264	0.320

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
δεκαδικό ψηφίο	Πειραματική Συχνότητα	0.0127	0.0951	0.265	0.321
Ανακούφιση κατά 2	Θεωρητική Πιθανότητα	$1.13 \cdot 10^{-3}$	0.0103	0.0305	0.0491
δεκαδικά ψηφία	Πειραματική Συχνότητα	$1.21 \cdot 10^{-3}$	0.0102	0.0309	0.0493

(ε)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 1; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 2.2$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
δεκαδικών ψηφίων	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου	Θεωρητική Πιθανότητα	$8.69 \cdot 10^{-3}$	0.142	0	0
δεκαδικού ψηφίου	Πειραματική Συχνότητα	$9.05 \cdot 10^{-3}$	0.139	0	0
Διατήρηση του αριθμού	Θεωρητική Πιθανότητα	0.870	0.858	0.874	0.642

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Πειραματική Συχνότητα	0.868	0.861	0.874	0.646
	Θεωρητική Πιθανότητα	0.111	$1.61 \cdot 10^{-4}$	0.126	0.358
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Πειραματική Συχνότητα	0.112	$1.39 \cdot 10^{-4}$	0.126	0.354
	Θεωρητική Πιθανότητα	$9.05 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$	0	$3.34 \cdot 10^{-6}$
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Πειραματική Συχνότητα	$9.26 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$	0	0

(στ)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 2; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση κανονικής κατανομής $\sigma = 2.2$

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον	Θεωρητική Πιθανότητα	$3.94 \cdot 10^{-3}$	0.138	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Πειραματική Συχνότητα	$3.69 \cdot 10^{-3}$	0.135	0	0
Διατήρηση του αριθμού των	Θεωρητική Πιθανότητα	0.996	0.862	0.874	0.637
λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Πειραματική Συχνότητα	0.996	0.865	0.880	0.629
Ανακούφιση κατά 1	Θεωρητική Πιθανότητα	$1.17 \cdot 10^{-7}$	0	0.126	0.363
δεκαδικό ψηφίο	Πειραματική Συχνότητα	$3.37 \cdot 10^{-7}$	0	0.120	0.371
Ανακούφιση κατά 2	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
δεκαδικά ψηφία	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0

(ζ)

Πίνακας 6.4. Επιλέξαμε τυχαία 10^5 ζεύγη mantissae (α_i, β_i) , τα οποία καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στις Παραγράφους 3.1 και 3.2. «Μολύναμε» κάθε τέτοιο ζεύγος (α_i, β_i) με 10^5 ζεύγη τιμών σφάλματος κανονικά κατανομημένων, για κάθε διαφορετική τιμή της τυπικής απόκλισης σ της κανονικής κατανομής των σφαλμάτων. Με τον τρόπο αυτό παράξαμε τα αντίστοιχα «μολυσμένα» ζεύγη των (α_i, β_i) , τα $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i)$. Στη συνέχεια, υπολογίσαμε τον αριθμό των λανθασμένων ψηφίων των γινομένων των $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i)$, συγκρίνοντας τα γινόμενα αυτά με τα γινόμενα των (α_i, β_i) .

Ο Πίνακας 6.4(α) περιλαμβάνει ορισμένα χαρακτηριστικά ζεύγη τιμών από αυτά στα οποία εφαρμόστηκε η πειραματική διαδικασία.

Οι Πίνακες 6.4(β) και 6.4(ε) περιέχουν τα πειραματικά αποτελέσματα στην περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\alpha}_i$ είναι ίδιος με αυτόν του $\tilde{\beta}_i$ για $\sigma = 1.14$ και $\sigma = 2.2$, αντίστοιχα.

Οι Πίνακες 6.4(γ) και 6.4(στ) περιέχουν τα πειραματικά αποτελέσματα στις περιπτώσεις στις οποίες ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\alpha}_i$ είναι κατά 1 μικρότερος του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\beta}_i$ για $\sigma = 1.14$ και $\sigma = 2.2$, αντίστοιχα.

Οι Πίνακες 6.4(δ) και 6.4(ζ) περιέχουν τα πειραματικά αποτελέσματα στις περιπτώσεις στις οποίες η διαφορά των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\alpha}_i$ και του $\tilde{\beta}_i$ είναι 2, για $\sigma = 1.14$ και $\sigma = 2.2$, αντίστοιχα.

Από τα αποτελέσματα αυτά είναι εμφανής η πλήρης αντιστοιχία μεταξύ θεωρίας και πειράματος.

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{EQ}(\xi; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση ομοιόμορφης κατανομής

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	0.868	0.666	0.0532	0.0121
	Πειραματική Συχνότητα	0.869	0.668	0.0534	0.0120
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.117	0.293	0.821	0.807
	Πειραματική Συχνότητα	0.117	0.292	0.822	0.807

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	0.0127	0.0355	0.112	0.160
	Πειραματική Συχνότητα	0.0126	0.0355	0.112	0.161
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Θεωρητική Πιθανότητα	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$	0.0115	0.0178
	Πειραματική Συχνότητα	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$3.57 \cdot 10^{-3}$	0.0115	0.0178

(α)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 1; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση ομοιόμορφης κατανομής

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	0.373	0.695	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0.370	0.694	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.566	0.299	0.967	0.909
	Πειραματική Συχνότητα	0.570	0.301	0.965	0.912
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	0.0536	$4.87 \cdot 10^{-3}$	0.0326	0.0890
	Πειραματική Συχνότητα	0.0543	$4.77 \cdot 10^{-3}$	0.0340	0.0875
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Θεωρητική Πιθανότητα	$5.37 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$	0	$9.73 \cdot 10^{-4}$
	Πειραματική Συχνότητα	$5.40 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	0	$9.59 \cdot 10^{-4}$

(β)

Επαλήθευση πιθανοτήτων $P^{UN}(\xi, 2; \alpha_i, \beta_i)$ με μόλυνση ομοιόμορφης κατανομής

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 2 επιπλέον λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0

(α_i, β_i)		(α_1, β_1)	(α_2, β_2)	(α_3, β_3)	(α_4, β_4)
Παραγωγή 1 επιπλέον λανθασμένου δεκαδικού ψηφίου	Θεωρητική Πιθανότητα	0.372	0.695	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0.366	0.699	0	0
Διατήρηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων	Θεωρητική Πιθανότητα	0.626	0.304	0.970	0.910
	Πειραματική Συχνότητα	0.634	0.301	0.972	0.914
Ανακούφιση κατά 1 δεκαδικό ψηφίο	Θεωρητική Πιθανότητα	$8.11 \cdot 10^{-5}$	0	0.0287	0.0888
	Πειραματική Συχνότητα	$9.50 \cdot 10^{-5}$	0	0.0275	0.0864
Ανακούφιση κατά 2 δεκαδικά ψηφία	Θεωρητική Πιθανότητα	0	0	0	0
	Πειραματική Συχνότητα	0	0	0	0

(γ)

Πίνακας 6.5. Επιλέξαμε τυχαία 10^5 ζεύγη mantissae (α_i, β_i) , τα οποία καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν στις Παραγράφους 3.1 και 3.2. «Μολύναμε» κάθε τέτοιο ζεύγος (α_i, β_i) με 10^5 ζεύγη ομοιόμορφα κατανεμημένων τιμών σφάλματος αυτή τη φορά. Κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση, όπου τα σφάλματα ήταν κανονικά κατανεμημένα, υπολογίσαμε τον αριθμό των λανθασμένων ψηφίων που προέκυψαν από τη σύγκριση των γινομένων των «μολυσμένων» αριθμών $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i)$ με τα γινόμενα των αρχικών, «καθαρών» αριθμών (α_i, β_i) . Στον πίνακα αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτής της πειραματικής διαδικασίας για τις τιμές των (α_i, β_i) του Πίνακα 6.4(α).

Ο Πίνακας 6.5(α) περιέχει τα πειραματικά αποτελέσματα στην περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του $\tilde{\alpha}_i$ είναι ίδιος με αυτόν του $\tilde{\beta}_i$.

Οι Πίνακες 6.5(β) και 6.5(γ) περιέχουν τα πειραματικά αποτελέσματα στις περιπτώσεις στις οποίες η διαφορά των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των $\tilde{\alpha}_i$ και $\tilde{\beta}_i$ είναι 1 και 2, αντίστοιχα.

Από τα αποτελέσματα του πίνακα είναι και στην περίπτωση της «μόλυνσης» των αριθμών με σφάλμα ομοιόμορφης κατανομής εμφανής η πλήρης αντιστοιχία μεταξύ θεωρίας και πειράματος.

7 Συμπεράσματα

Στο δεύτερο μέρος της παρούσας διατριβής εισήχθη μία νέα προσέγγιση στη μελέτη της γένεσης και συσσώρευσης του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας στην πράξη του πολλαπλασιασμού. Αρχικά δόθηκε ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός του πλήθους των ορθών ψηφίων ενός οποιουδήποτε αριθμού εκπεφρασμένου σε οποιοδήποτε πεπερασμένο μήκος λέξης. Στο σημείο αυτό τονίζουμε για μία ακόμη φορά ότι η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε, παρ' όλο που παρουσιάστηκε στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, παρέχει ακριβή αποτελέσματα και πρόβλεψη του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας το οποίο γεννάται και συσσωρεύεται σε οποιαδήποτε υπολογιστική μηχανή.

Στα πλαίσια της νέας αυτής προσέγγισης αποδείχθηκε ότι κατά την εκτέλεση οποιουδήποτε πολλαπλασιασμού $\gamma = \alpha \cdot \beta$, όπου οι συντελεστές του γινομένου α και β έχουν το πολύ λ^e λανθασμένα δεκαδικά ψηφία στη mantissa τους, ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων με τα οποία υπολογίζεται το γινόμενο γ εξαρτάται από την τιμή της ποσότητας $|\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)|$. Για την ακρίβεια, εάν για την ποσότητα αυτή ισχύει η ανισότητα $|\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)| < 10$, τότε το γινόμενο γ υπολογίζεται με $\lambda^e + 2$ το πολύ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία. Είναι δυνατόν, ωστόσο, να υπολογιστεί και με $\lambda^e + 1$, λ^e , $\lambda^e - 1$, $\lambda^e - 2$ ή και με $\lambda^e - 3$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία. Στην περίπτωση στην οποία ισχύει η δυϊκή ανισότητα $|\text{man}(\alpha) \cdot \text{man}(\beta)| \geq 10$, το γινόμενο γ υπολογίζεται με $\lambda^e + 1$ το πολύ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία, ενώ είναι δυνατόν να υπολογιστεί και με λ^e ή και με $\lambda^e - \kappa$ λανθασμένα δεκαδικά ψηφία, όπου $\kappa = 1, 2, 3, 4$. Απεδείχθη επίσης ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί κάποια από τις ανωτέρω περιπτώσεις εξαρτάται έντονα από την τιμή της ποσότητας $|\alpha x + \beta y \cdot 10^{-\delta}|$, όπου x και y είναι οι mantissae του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας των πολλαπλασιαστέων β και α αντίστοιχα, ενώ το δ είναι η διαφορά των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων των όρων του γινομένου. Είναι, δηλαδή, $\delta = \#edd(\beta) - \#edd(\alpha)$.

Προκειμένου να υπολογιστούν οι πιθανότητες να πραγματοποιηθεί κάθε μία από τις ανωτέρω περιπτώσεις, εισήχθη το σύνολο των σημείων που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 3.1 και επί του σχήματος αυτού ορίστηκαν οι περιοχές στις οποίες οι τυχαίες μεταβλητές x και y αντιστοιχούν σε τροποποίηση του αριθμού των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του γινομένου γ κατά δύο, ένα κλπ. Στη συνέχεια, με ολοκλήρωση επί των κατάλληλων περιοχών, υπολογίστηκαν οι

πιθανότητες τροποποίησης του πλήθους των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων του γ ως προς το λ^e .

Δόθηκε επίσης ακριβής τύπος για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης για τον αριθμό των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύονται στα αποτελέσματα διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

Επιπλέον, θεμελιώθηκε ότι εάν πραγματοποιηθούν οι ίδιοι πολλαπλασιασμοί με χρήση δύο διαφορετικών μηκών λέξης n και m , με $m > 2 \cdot n + 7$ δεκαδικά ψηφία, είναι δυνατόν να παρακολουθείται εύκολα ο αριθμός των λανθασμένων δεκαδικών ψηφίων που συσσωρεύονται στα αποτελέσματα για ακρίβεια n δεκαδικών ψηφίων.

Προκειμένου να ελεγχθεί η εγκυρότητα της θεωρητικής ανάλυσης που παρουσιάστηκε, πραγματοποιήθηκαν ορισμένα ειδικά σχεδιασμένα πειράματα. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης των πειραμάτων αυτών επιβεβαίωσαν πλήρως τα αποτελέσματα της θεωρητικής ανάλυσης.

Ένα γενικό, πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τη θεωρητική και πειραματική ανάλυση είναι το ακόλουθο:

Όπως προκύπτει από την ανάλυση του Β Μέρους της παρούσας διατριβής, η θεωρητική απόδειξη της ευστάθειας και ορθής σύγκλισης ενός οποιουδήποτε αλγορίθμου δεν συνεπάγεται ότι όντως ο αλγόριθμος αυτός θα είναι ευσταθής κατά την υλοποίησή του σε έναν υπολογιστή. Σε ισοδύναμη διατύπωση, ένας αλγόριθμος που θεωρητικά, σε άπειρη ακρίβεια, θα ήταν ευσταθής και θα συνέκλινε στις δέουσες τιμές, μπορεί κάλλιστα να είναι ασταθής και να αποκλίνει όταν υλοποιηθεί σε έναν υπολογιστή, λόγω του πεπερασμένου μήκους λέξης που αυτός ενδογενώς χρησιμοποιεί. Η απόκλιση και η αστάθεια είναι τόσο σαφέστερες και εντονότερες, όσο συχνότερα ισχύει ότι $|man(\alpha) \cdot man(\beta)| < 10$ στους διάφορους πολλαπλασιασμούς που λαμβάνουν χώρα κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Τέλος, τονίζουμε ότι η μεθοδολογία προσέγγισης του προβλήματος που παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή είναι επεκτάσιμη, ώστε να είναι δυνατή η παρακολούθηση και αντιμετώπιση των επιπτώσεων της γένεσης και συσσώρευσης του λάθους πεπερασμένης ακρίβειας σε οποιαδήποτε αριθμητική πράξη.

8 Βιβλιογραφία Β Μέρους

- [1] C. Caraiscos and B. Liu, "A Roundoff Error Analysis of the LMS Adaptive Algorithm," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 32, no. 1, pp. 34–41, February 1984. doi: 10.1109/TASSP.1984.1164286
- [2] G. V. Moustakides, "Correcting the Instability Due to Finite Precision of the Fast Kalman Identification Algorithms," *Signal Processing*, vol. 18, no. 1, pp. 33–42, September 1989. doi: 10.1016/0165-1684(89)90060-1
- [3] G. L. Steele Jr. and J. L. White, "How to Print Floating-Point Numbers Accurately," *Proceedings Programming Language Design and Implementation, PLDI-1990*, White Plains, NY, USA, 1990, pp. 112-126.
- [4] Z. Bai, "Error Analysis of the Lanczos Algorithm for the Nonsymmetric Eigenvalue Problem," *Mathematics of Computation*, vol. 62, no. 205, pp. 209-226, January 1994. doi: 10.2307/2153404
- [5] M. Arioli and C. Fassino, "Roundoff Error Analysis of Algorithms Based on Krylov Subspace Methods," *BIT Numerical Mathematics*, vol. 36, no. 2, pp. 189-205, June 1996. doi: 10.1007/BF01731978
- [6] J. Lowenstein and F. Vivaldi, "Anomalous Transport in a Model of Hamiltonian Round-Off," *Nonlinearity*, vol. 11, no. 5, February 1988. doi: 10.1088/0951-7715/11/5/009
- [7] E. Allen, "The Impact of Finite Precision Arithmetic and Sensitivity on the Numerical Solution of Partial Differential Equations," *Mathematical and Computer Modeling*, vol. 35, no. 11-12, pp. 1165-1195, June 2002. doi: 10.1016/S0895-7177(02)00078-X
- [8] A. Gelb, "Parameter Optimization and Reduction of Round Off Error For the Gegenbauer Reconstruction Method," *Journal of Scientific Computing*, vol. 20, no. 3, pp. 433-459, June 2004. doi: 10.1023/B:JOMP.0000025933.39334.17

- [9] M. Martel, "Semantics of Roundoff Error Propagation in Finite Precision Calculations," *Higher Order and Symbolic Computation*, vol. 19, no. 1, pp. 7-30, March 2006. doi: 10.1007/s10990-006-8608-2
- [10] P. Wang, G. Huang and Z. Wang, "Analysis and Application of Multiple Precision Computation and Round-Off Error for Nonlinear Dynamical Systems," *Advances in Atmospheric Sciences*, vol. 23, no. 5, pp. 758-766, October 2006. doi: 10.1007/s00376-006-0758-y
- [11] G. A. Papakostas, Y. S. Boutalis, D. A. Karras and B. G. Mertzios, "Fast Numerically Stable Computation of Orthogonal Fourier-Mellin Moments," *IET Computer Vision*, vol. 1, no. 1, pp. 11-16, March 2007. doi: 10.1049/iet-cvi:20060130
- [12] A. Kountouris, "A Randomized Algorithm for Controlling the Round-Off Error Accumulation in Recursive Digital Frequency Synthesis (DFS)," *Digital Signal Processing*, vol. 19, no. 4, pp. 534-544, July 2009. doi: 10.1016/j.dsp.2009.03.006
- [13] M. D. Linderman, M. Ho, D. L. Dill, T. H. Meng and G. P. Nolan, "Towards Program Optimization Through Automated Analysis of Numerical Precision," *Proceedings 8th Annual IEEE/ACM International Symposium on Code Generation and Optimization, CGO-2010*, Toronto, Ontario, Canada, 2010, pp. 230-237. doi: 10.1145/1772954.1772987
- [14] G. Turchetti, S. Vaienti and F. Zanlungo, "Relaxation to the Asymptotic Distribution of Global Errors Due to Round Off," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 89, no. 4, March 2010. doi: 10.1209/0295-5075/89/40006
- [15] A. H. D. Cheng, "Multiquadric and Its Shape Parameter—A Numerical Investigation of Error Estimate, Condition Number and Round-Off Error by Arbitrary Precision Computation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 36, no. 2, pp. 220-239, February 2012. doi: 10.1016/j.enganabound.2011.07.008
- [16] A. W. Deng, C. H. Wei and C. Y. Gwo, "Stable, Fast Computation of High-Order Zernike Moments Using a Recursive Method," *Pattern Recognition*, vol. 56, pp. 16-25, August 2016. doi: 10.1016/j.patcog.2016.02.014

- [17] C. Papaodysseus, E. Koukoutsis and C. Vassilatos, "Error Propagation and Methods of Error Correction in the LS FIR Filtering and the L-Step Ahead Prediction Algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 5, pp. 1097-1108, May 1994. doi: 10.1109/78.295208
- [18] C. Papaodysseus, E. Koukoutsis and C. Triantafyllou, "Error Sources and Error Propagation in the Levinson-Durbin Algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 4, pp. 1635-1651, April 1993. doi: 10.1109/78.212736

Συνοπτικό Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Φώτης Γιαννόπουλος γεννήθηκε το 1985 στην Αθήνα, έλαβε το δίπλωμα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών από το Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο το 2009 και εκπόνησε τη διδακτορική του διατριβή στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π.. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα συμπεριλαμβάνουν τους τομείς της Αναγνώρισης Προτύπων, της Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας με πρωτότυπες εφαρμογές στην Αρχαιολογία, των Αλγορίθμων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, της μελέτης του Λάθους Πεπερασμένης Ακρίβειας, της Αυτόματης Αναγνώρισης Μουσικών Συνθέσεων και της Βιοϊατρικής Μηχανικής.

Δημοσιεύσεις

Διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές

1. C. Chalatsis, C. Papaodysseus, D. Arabadjis and F. Giannopoulos, "Finite Precision Error Analysis of Zernike Moments Computation Schemes and a New, Efficient, Robust Recursive Algorithm," *Digital Signal Processing*, vol. 79, pp. 75-90, August 2018.
2. C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, S. Zannos, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, E. Kalfa, C. Blackwell and S. Tracy, "Identifying the Writer of Ancient Inscriptions and Byzantine Codices. A Novel Approach," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 121, pp. 57-73, April 2014. ISSN 1077-3142, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cviu.2014.01.003>
3. D. Arabadjis, F. Giannopoulos, C. Papaodysseus, S. Zannos, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos and C. Blackwell, "New Mathematical and Algorithmic Schemes for Pattern Classification with Application to the Identification of Writers of Important Ancient Documents," *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 8, pp. 2278-2296, August 2013.
4. C. Papaodysseus, S. Zannos, F. Giannopoulos, D. Arabadjis, P. Rousopoulos, X. Stachtea and C. Papageorgiou, "A New Approach for the Classification of Event Related Potentials for Valid and Paradox Reasoning," *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, vol. 36, no. 1, pp. 292-301. ISSN 0208-5216, <http://dx.doi.org/10.1016/j.bbe.2015.12.004>

Διεθνή επιστημονικά συνέδρια με κριτές

1. F. Giannopoulos, D. Arabadjis, K. Kampouri, P. Tsakalidou, C. Papaodysseus and M. Panagopoulos, "A Novel Approach and the Related Information System for the Identification of the Writer of Historical Documents," *Proceedings 10th International Symposium on the Conservation of Monuments in the Mediterranean Basin, MONUBASIN '10 2017*, Athens, Greece, 2017.

2. D. Arabadjis, S. Zannos, C. Papaodysseus, F. Giannopoulos, M. Exarhos, P. Tsakalidou, E. Fotopoulos and D. Kanellopoulos, "A Novel Information System for the Automatic Reconstruction of Highly Fragmented Objects, With Application to the Reassembly of Prehistoric Wall Paintings and Vessels," *Proceedings 10th International Symposium on the Conservation of Monuments in the Mediterranean Basin, MONUBASIN '10 2017*, Athens, Greece, 2017.
3. P. Tsakalidou, D. Arabadjis, C. Papaodysseus, M. Exarhos, P. Rousopoulos, F. Giannopoulos, E. Fotopoulos and M. Panagopoulos, "Advanced Geometric Guides Were Used for the Drawing of Celebrated Late Bronze Age Wall Paintings," *Proceedings 10th International Symposium on the Conservation of Monuments in the Mediterranean Basin, MONUBASIN '10 2017*, Athens, Greece, 2017.
4. M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, D. Arabadjis, F. Giannopoulos, S. Zannos, E. Kalfa and C. Papaodysseus, "Methods and Algorithms for the Automatic Identification of Writer of Ancient Documents," *Proceedings 1st Conference on Computer Applications and Quantitative Methods in Archaeology Greek Chapter, CAA-GR*, Rethymno, Crete, 2014.
5. C. Papaodysseus, C. Chalatsis, D. Arabadjis, S. Zannos, F. Giannopoulos, P. Rousopoulos and E. Kalfa, "A General, Novel Methodology for Studying the Generation of Finite Precision Error in Any Algorithm," *Proceedings IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology, ISSPIT*, 2013.
6. D. Arabadjis, C. Papaodysseus, S. Zannos, F. Giannopoulos, E. Kalfa, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos and C. Blackwell, "A New Approach for the Identification of Writers of Important Ancient Documents," *Proceedings 18th International Conference on Digital Signal Processing, DSP*, 2013, pp. 1-6.
7. Dagstuhl Perspectives Workshop in "Computation and Palaeography: Potentials and Limits" (id. 12382), Schloss Dagstuhl Leibniz Zentrum für Informatik, 20 September 2012.
8. S. Zannos, F. Giannopoulos, D. Arabadjis, P. Rousopoulos, C. Papageorgiou, E. Koukoutsis, C. Papaodysseus, and C. Papageorgiou, "Classifying Event Related Potentials For Valid And Paradox Reasoning," *Proceedings 5th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies*, Villamoura, Portugal, 2012.

9. P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, C. Papaodysseus, F. Panopoulou, D. Arabadjis, S. Tracy, F. Giannopoulos and S. Zannos, "A New Approach for Ancient Inscriptions' Writer Identification," *Proceedings 17th International Conference on Digital Signal Processing, DSP*, Corfu, 2011, pp. 1-6. doi: 10.1109/ICDSP.2011.6004966

Κεφάλαια σε βιβλία

1. C. Papaodysseus, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, D. Arabadjis, F. Panopoulou, S. Zannos, F. Giannopoulos and S. Tracy. "Automatic Identification of the Writer of Ancient Greek Inscriptions, Employing Methods of Computer Engineering and Mathematics," in *Pattern Recognition and Signal Processing in Archaeometry: Mathematical and Computational Solutions for Archaeology*. IGI Global, 2012, pp. 212–262. Web. 16 Jan. 2014. doi:10.4018/978-1-60960-786-9.ch007-ch008

Υπό κρίση σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά με κριτές

1. C. Chalatsis, F. Giannopoulos, D. Arabadjis and C. Papaodysseus, "A New Approach for Studying, Monitoring and Remediating Round – Off Error".
2. C. Papaodysseus, D. Arabadjis, F. Giannopoulos and C. Chalatsis, "Analysis, Evaluation and Exact Tracking of the Finite Precision Error Generated in any Number of Multiplications".
3. G. Tsakalidou, D. Arabadjis, F. Giannopoulos, M. Panagopoulos, C. Blackwell and C. Papaodysseus, "A General Methodology for Identifying the Writer of Codices. Application to the Celebrated "Twins"".