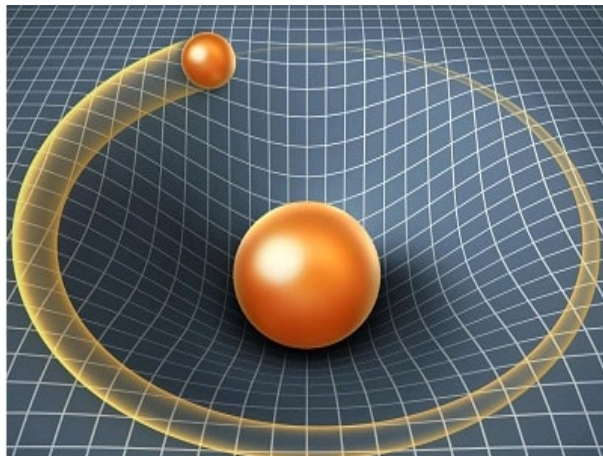




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΜΑΡΙΑΣ Α. ΑΛΕΞΙΟΥ
Πτυχιούχου Μαθηματικού ΕΚΠΑ



ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:
ΚΕΧΑΓΙΑΣ Α.
Καθηγητής ΕΜΠ
ΣΤΑΥΡΙΝΟΣ Π.
Καθηγητής ΕΚΠΑ

Ιούνιος, 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ
ΣΕ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΜΑΡΙΑΣ Α. ΑΛΕΞΙΟΥ
Πτυχιούχου Μαθηματικού ΕΚΠΑ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

- 1.Κεχαγιάς Α., Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων)
- 2.Σταυρινός Π., Καθηγητής ΕΚΠΑ (Επιβλέπων)
- 3.Κουτσούμπας Γ., Καθηγητής ΕΜΠ

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

- 1.Κεχαγιάς Α., Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπων)
- 2.Σταυρινός Π., Καθηγητής ΕΚΠΑ (Επιβλέπων)
- 3.Κουτσούμπας Γ., Καθηγητής ΕΜΠ
- 4.Αναγνωστόπουλος Κ., Αν. Καθηγητής ΕΜΠ
- 5.Βασιλάκος Σ., Διευθυντής Κέντρου Ερευνών Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Αστρονομίας της Ακαδημίας Αθηνών
- 6.Παπαντωνόπουλος Ε., Καθηγητής ΕΜΠ
- 7.Χριστοδουλάκης Θ., Αν. Καθηγητής ΕΚΠΑ

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Copyright © Αλεξίου Μαρία, 2018
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος, All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περιεχόμενα

1	Πρόλογος	6
2	Εισαγωγή	8
2.1	Γιατί η Γεωμετρία Finsler στη Βαρύτητα και στην Κοσμολογία	8
2.2	Μια Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Γεωμετρίας Finsler και των Βασικών Θεμελίων της	11
3	Βασικά Στοιχεία από τη Διαφορική Γεωμετρία	22
3.1	Ενότητες από την Κλασική Διαφορική Γεωμετρία	22
3.2	Ενότητες από την Καθολική Διαφορική Γεωμετρία	33
4	Βασικά στοιχεία από τη Βαρύτητα και την Κοσμολογία	46
5	Ενεργειακές Συνθήκες σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας και Συνθήκες Bounce για Σύμπαν με (FRW) Δομή και η Μελέτη τους σε Γενικευμένο Μετρικά Κοσμολογικό Μοντέλο	58
5.1	Ενεργειακές Συνθήκες σε Τροποποιημένη Βαρύτητα	58
5.2	Συνθήκες Bounce για Μοντέλα (FRW) σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας	63
6	Εξίσωση Raychaudhuri σε χωροχρόνο Finsler-Randers και Γενικευμένες Scalar-Tensor Θεωρίες	68
6.1	Η Εξίσωση Raychaudhuri	74
6.1.1	Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Χωροχρόνο Finsler	75
6.1.2	Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Χωροχρόνο Finsler-Randers (FR)	78
6.1.3	Οι Ενεργειακές Συνθήκες σε Χωροχρόνο Finsler-Randers	81
6.2	Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Γενικευμένη Θεωρία Scalar-Tensor	83
6.3	Το μοντέλο	83
6.4	Η Εξίσωση Raychaudhuri του Μοντέλου	85
6.5	Η Συνεισφορά της Μη-Γραμμικής Συνοχής στην Εξίσωση	87
6.6	Συμπεράσματα	88
6.7	Παράρτημα	89
7	Εξίσωση Ροών Ricci	91
7.1	Κάποιες Ακριβείς λύσεις στη ροή Ricci	92
7.2	Σολιτόνια	93
8	Κοσμολογία και Ροές Ricci	95

9	Ανολονομικές Ροές Ricci και Finsler-Lagrange $f(R,F,L)$-τροποποιημένα αποτελέσματα βαρύτητας και σκοτεινής ύλης	98
10	Ανολονομικές Ροές Ricci μετρικών Riemann και Lagrange-Finsler Γεωμετρίας	101
10.1	Περίληψη	101
10.2	Εισαγωγή	101
10.2.1	N-συναχές	103
10.2.2	Στρέψεις και Καμπυλότητες d-συναχών και d-μετρικών .	106
10.2.3	(Μη) επισυναπτόμενες γραμμικές συναχές	109
10.2.4	Η διαδικασία μετρικοποίησης και προτιμητέες γραμμικές συναχές	109
10.3	Βαρύτητα και Γεωμετρία Lagrange-Finsler	110
10.3.1	Γενικευμένοι χώροι Lagrange	110
10.3.2	Χώροι Lagrange-Finsler	112
10.4	Ανολονομικές ροές Ricci	113
10.4.1	Ολονομικές ροές Ricci	114
10.4.2	Ροές Ricci και N-ανολονομικές κατανομές	115
10.4.3	Ανολονομικές ροές Ricci (μη)-συμμετρικών μετρικών . .	115
10.5	Γενικευμένες ροές Lagrange-Ricci	116
10.5.1	Ροές Finsler-Ricci	117
10.5.2	Ροές Ricci κανονικών συστημάτων Lagrange	120
10.5.3	Γενικευμένες ροές Lagrange-Ricci	122
10.6	Παράρτημα - Τοπική γεωμετρία N-ανολονομικών πολλαπλοτήτων	124
11	Μετρικές Δομές και Συναχές του βαρυτικού Πεδίου σε χώρους Finsler	130
11.1	Εισαγωγή	130
11.2	Βαρυτικό Πεδίο Finsler	131
11.3	Μη-Τοπικοποίηση I	132
11.4	Μη-Τοπικοποίηση II	136
11.5	Μη-Τοπικοποίηση III	137
12	Summary	140
13	Βιβλιογραφία	142

1 Πρόλογος

Στην παρούσα διατριβή μελετάται και παράγεται μια επέκταση των εξισώσεων Raychaudhuri για διάφορους τύπους Finsler και Finsler-like χωροχρόνων. Ο θεμελιώδης ρόλος της εξίσωσης Raychaudhuri για την γενική σχετικότητα επεκτείνεται στο πλαίσιο των γενικευμένων γεωμετρικών δομών ενός χωροχρόνου Finsler-Randers (FR) και γενικευμένων θεωριών Scalar-Tensor [173]. Επιπλέον όροι εισάγονται στην εξίσωση, λόγω των ανισοτροπικών καμπυλοτήτων και της μορφής των γεωδαισιακών, αυξάνοντας έτσι τους βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτή την προσέγγιση, χρησιμοποιήθηκε η συνοχή Cartan, η οποία διατηρεί την νόρμα ενός διανύσματος (time-like / null) κάτω από παράλληλη μετατόπιση και είναι θεμελιώδης για την μελέτη τροποποιημένων (modified) βαρυτικών και κοσμολογικών θεωριών. Η εξίσωση Raychaudhuri παράχθηκε σε σχέση με το μοντέλο Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FRW) για έναν (FR)-χωροχρόνο.

Επίσης, έχουν μελετηθεί οι ενεργειακές συνθήκες σε μία (FR)-κοσμολογία και η σχέση τους με την (FRW)-κοσμολογία. Επιπλέον, έχουν παραχθεί οι εξισώσεις Klein-Gordon και η Raychaudhuri στο πλαίσιο μιας γενικευμένης θεωρίας Scalar-Tensor στη νηματική δέσμη [170] για ένα πρότυπο που αποτελείται από μια πολλαπλότητα Riemann και δύο βαθμωτά πεδία $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ ως μια μορφή του τύπου $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$. Στη μελέτη αυτή, η παρουσία των μη-γραμμικών συνοχών ως επιπλέον όρων στη δομή των εξισώσεων μπορούν να παίξουν ένα σημαντικό ρόλο στη βαρυτική επιρροή και στην αλληλεπίδρασή της με άλλα πεδία. Αυτό σημαίνει, ότι αυτοί οι επιπλέον όροι/πεδία θα διαφοροποιούν την εξέλιξη της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος (focusing/defocusing), όπως φαίνεται από τις εξισώσεις που παρήχθησαν.

Η θεωρία των ροών Ricci έχει μελετηθεί για πολλαπλότητες, οι οποίες επεξεργάζονται με μη ολοκληρώσιμες (μη ολονομικές) κατανομές που ορίζονται από μη-γραμμικές δομές συνοχής [187, 188, 6]. Τέτοιες πολλαπλότητες μας παρέχουν ένα ενοποιημένο γεωμετρικό πλαίσιο για μη ολονομικούς χώρους Riemann, μηχανική Lagrange, γεωμετρία Finsler και διάφορα μοντέλα βαρύτητας (τη θεωρία Einstein και γενικεύσεις χορδών ή gauge). Μη ολονομικά συστήματα θεωρούνται προσδιορισμένα με μη-γραμμική δομή συνοχής και καλά ορισμένες κλάσεις μη ολονομικών περιορισμών σε πολλαπλότητες Riemann, για τις οποίες διάφοροι τύποι γενικευμένων γεωμετριών Finsler μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις ροές Ricci. Σε αυτό το πλαίσιο, ερευνώνται πιθανές εφαρμογές των μη ολονομικών ροών στη σύγχρονη Φυσική και τη Μηχανική.

Επιπλέον, περιγράφονται μη ολονομικές πολλαπλότητες με μη-γραμμική δομή συνοχής. Οι μη ολονομικές διαμορφώσεις μπορούν να οριστούν με φυσικό τρόπο στην σύγχρονη Βαρύτητα και στη Γεωμετρία των Riemann-Finsler και χώρων Lagrange. Η θεωρία των μη ολονομικών ροών Ricci αναλύει την εξέλιξη

των διακεκριμένων γεωμετρικών αντικειμένων και μελετάται σε μη ολονομικές ροές Ricci συμμετρικών και μη συμμετρικών μετρικών.

Αναπτύσσονται και συνοψίζονται τα αποτελέσματα στη θεωρία της γεωμετρικής εξέλιξης των μετρικών Einstein και στις πιθανές δομές γενικευμένης μετρικής συνοχής από μη ολοκληρώσιμους (ισοδύναμα μη ολονομικούς) περιορισμούς, που έχουν ως αποτέλεσμα διαμορφώσεις Finsler-Lagrange. Θεωρείται πως οι αυτοσυνεπείς και με φυσικά κίνητρα ελαχιστοποιημένες (minimal) τροποποιήσεις Finsler της κλασικής ροής Ricci και των βαρυτικών εξισώσεων πεδίου μπορούν να επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας τις συνοχές Cartan και κανονικές διακεκριμένες δομές συνοχής (d-connections). Αυτές οι θεωρήσεις μπορούν να έχουν όρια σε θεωρίες κλασικής βαρύτητας. Οι προσεγγίσεις με μετρικά ασύμβατες Finsler συνοχές ή χωρίς γραμμικές συνοχές δεν έχουν όρια σε κλασικές θεωρίες της φυσικής και δεν επιτρέπουν τυποποιήσεις ορισμένων αναλόγων του αξιωματικού φορμαλισμού, όπως η Γενική Σχετικότητα (General Relativity) - (GR).

Επίσης, μελετάται στο τελευταίο κεφάλαιο, μια γενίκευση της έννοιας του Βαρυτικού πεδίου σε ενοποιημένη μορφή στη βάση της γεωμετρίας του ολικού χώρου μιας χωροχρονικής πολλαπλότητας. Ορισμένες φυσικο-γεωμετρικές θεωρήσεις αναπτύσσονται στην ιδέα της μη-τοπικοποιημένης θεωρίας πεδίου, συσχετισμένης με το βαρυτικό πεδίο Finsler [161]. Ιδιαίτερος μελετάται η μη-τοπικότητα, σε επίπεδο περισσότερο υψηλής - τάξης (higher-order) από της γεωμετρίας Finsler. Ακόμη επισημαίνεται ότι η μέθοδος της μη-τοπικοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί για οποιαδήποτε εσωτερική μεταβλητή, ακόμα κι αν υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη εσωτερικών μεταβλητών, όπως π.χ. spinors, βαθμωτά, κ.λ.π. Το περιεχόμενο της μη-τοπικότητας μπορεί να επεκταθεί για συνοχές σε πολλαπλότητες και εφαπτόμενες δέσμες δομής Lorentz καθώς και σε χωρόχρονο Finsler, βασιζόμενο σε μη-γραμμικές συνοχές. Επιπλέον, αναφέρεται ότι μπορούν να γίνουν συσχετίσεις κι εφαρμογές της μη-τοπικότητας με δομές spinor και null χωροχρόνους. Τέλος, μια εφαρμογή της μετρικής δομής του προτύπου (FRW) δίνεται στο πλαίσιο της διανυσματικής δέσμης.

Η παρούσα εργασία έχει τίτλο «Γενικευμένες Θεωρίες Βαρύτητας σε Κοσμολογικά Πρότυπα» και αποτελεί τη διδακτορική μου διατριβή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.). Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους επιβλέποντες καθηγητές μου, κ. Α. Κεχαγιά, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. και κ. Π. Σταυρινό, Καθηγητή του Ε.Κ.Π.Α. για το εξαιρετικό ενδιαφέρον που έδειξαν, αφιερώνοντάς μου μέρος από τον χρόνο τους και για την καθοδήγησή τους, που υπήρξε αναγκαία για την εκπόνηση της διατριβής αυτής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον κ. Γ. Κουτσούμπα, Καθηγητή του Ε.Μ.Π. για τον χρόνο που διέθεσε. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το στενό μου περιβάλλον για την υποστήριξη που μου παρείχε.

2 Εισαγωγή

2.1 Γιατί η Γεωμετρία Finsler στη Βαρύτητα και στην Κοσμολογία

Κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, υπήρξε ένα αξιοσημείωτο ενδιαφέρον στη μελέτη των εφαρμογών της Finsler γεωμετρίας σε διαφορετικούς τομείς της φυσικής, όπως στις θεωρίες της τροποποιημένης βαρύτητας, στη σύγχρονη κοσμολογία, στην κβαντική βαρύτητα κλπ. Η βαρύτητα Finsler μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη φυσικών φαινομένων ανισοτροπικού χαρακτήρα στο σύμπαν.

Η συμφύτης δυναμική μορφή της γεωμετρίας Finsler επεκτείνει τα όρια του πλαισίου Riemann, όπως και του βαρυτικού πεδίου, λόγω των εσωτερικών (internal) μεταβλητών. Η y -εξάρτηση, ουσιαστικά, χαρακτηρίζει το βαρυτικό πεδίο Finsler και έχει συνδυαστεί με την έννοια της ανισοτροπίας που προκαλεί την απόκλιση από τη γεωμετρία Riemann. Έτσι, η θεώρηση της γεωμετρίας Finsler, ως υποψήφιας για τη μελέτη βαρυτικών θεωριών, εξασφαλίζει ότι η δυναμική της ύλης λαμβάνει χώρα. Στη θεωρία του βαρυτικού πεδίου Finsler ένα ιδιαίτερο πεδίο ταχυτήτων παράγεται από τη βαρύτητα των διαταραχών της μάζας, που οφείλονται στην ανισοτροπική κατανομή και κίνηση των σωματιδίων.

Από την άλλη μεριά, η γενικευμένη μετρική δομή της γεωμετρίας Finsler με στρέψεις, περισσότερες από μία συναλλοίωτες παραγώγους και ανισοτροπικές καμπυλότητες, επεκτείνει το πλαίσιο των εξισώσεων πεδίου στη γενική σχετικότητα και κοσμολογία. Μία ενοποιημένη περιγραφή του βαρυτικού πεδίου Finsler μιας χωροχρονικής πολλαπλότητας M δίνεται από τη μετρική συνάρτηση F , μια ολική μετρική δομή G στην εφαπτόμενη δέσμη της M , μια μετρικά συμβατή συνοχή και μια μη-γραμμική συνοχή N .

Ο τανυστής στρέψης τύπου Cartan χαρακτηρίζει όλες τις γεωμετρικές ιδέες της γεωμετρίας Finsler και συμβάλλει στη διαμόρφωση της ως φυσικής γεωμετρίας. Η θεωρία του βαρυτικού πεδίου Finsler-Cartan είναι συμβατή με τη δομή της γενικής σχετικότητας. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, περιορίζουμε τη θεώρηση μας, ώστε να περιγράψουμε το τοπικό ανισοτροπικό ansatz των εξισώσεων του βαρυτικού πεδίου σε μία τετραδιάστατη πολλαπλότητα Finsler.

Στο πλαίσιο της μελέτης της κοσμολογίας Finsler, έχει θεωρηθεί σε πολλές περιπτώσεις, η μορφή της εγγυτατοποίησης Riemann μιας μετρικής. Ο μετρικός τανυστής Finsler και ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $y^i(x)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευαστεί ο *εγγυτατοποιημένος μετρικός τανυστής Riemann* $a_{ij}(x) = g_{ij}(x, y(x))$ σε μία περιοχή του χωροχρόνου. Ο χώρος Riemann που σχετίζεται με αυτόν τον μετρικό τανυστή λέγεται *εγγυτατοποιημένος χώρος Riemann*. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε κοσμολογικές θεωρήσεις σε τετραδιάστατο χωροχρονικό πλαίσιο.

Πολλά μοντέλα έχουν δημιουργηθεί για τη μελέτη θεωριών βαρύτητας και έχουν κατασκευαστεί σε χωροχρόνο Finsler. Ένας ειδικός τύπος του χώρου Finsler είναι ο Finsler-Randers χώρος (FR), ο οποίος αποτελεί μια σημαντι-

κή κατηγορία χώρων Finsler και έχει σημαντική συνεισφορά στη γενική σχετικότητα και στην κοσμολογία. Αυτός ο τύπος χώρου εκφράζει μια τοπικά ανισοτροπική διαταραχή της γεωμετρίας Riemann.

Στο χωροχρόνο Finsler, οι γεωδαισιακές περιλαμβάνουν ανισοτροπικούς όρους, λόγω της παρουσίας του ταυιστή Cartan, ο οποίος επηρεάζει όλες τις γεωμετρικές ιδιότητες του χωροχρόνου. Είναι προφανές, ότι οι επιπλέον όροι των γεωδαισιακών εισάγονται από το συναλλοίωτο διάνυσμα u_μ του δεύτερου όρου της μετρικής Finsler-Randers, η οποία δίνει μια περιστροφή στην εξίσωση των γεωδαισιακών. Από φυσική άποψη, ένας παρατηρητής σ' αυτό το χωροχρόνο περιστρέφεται κατά μήκος των γεωδαισιακών, δίνοντας μια επέκταση στη μορφή εξίσωσης γεωδαισιακών ενός (ψευδο)-Riemann χωροχρόνου. Οι γεωδαισιακές σ' έναν χωροχρόνο Finsler-Randers μπορούν να επηρεασθούν από φαινόμενα Lorentz violation (λόγω του διανύσματος u_μ που σχετίζεται με το redshift, την luminosity distance και τη σχέση διασποράς (dispersion)). Σε ένα βαρυτικό πεδίο Finsler, όταν μια συμφυής ανισοτροπία λαμβάνει χώρα, η φορά των ρολογιών μπορεί να επηρεάζεται από την προέλευση του.

Οι θεωρίες βαρύτητας Einstein-Finsler-like θεωρούνται ως φυσικές υποψήφιας για τη διερεύνηση των τοπικών ανισοτροπιών και του προβλήματος της σκοτεινής ενέργειας. Επίσης, επεκτεινόμενες τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας στο πλαίσιο των εφαπτόμενων δεσμών Lorentz επιτρέπουν τις γενικεύσεις των $f(R, T, \dots)$.

Η γεωμετρία Finsler δίνει μία επέκταση της μετρικής υποβάθρου του χωροχρόνου σε ανώτερης τάξης διαστάσεις. Τα μοντέλα βαρύτητας Finsler και κοσμολογίας αναπτύχθηκαν, επεκτείνοντας γεωμετρικές και φυσικές ιδέες και συνδέθηκαν με την κβαντική βαρύτητα και τις σχέσεις τροποποιημένης διασποράς, με το σπάσιμο της συμμετρίας Lorentz, με μη-γραμμικές συμμετρίες και βαρυτικά κύματα. Η αιτιότητα σε μια εφαπτόμενη δέσμη περιλαμβάνεται στη δομή Lorentz της χωροχρονικής βασικής πολλαπλότητας.

Οι χωροχρόνοι που περιγράφονται από τη γεωμετρία Finsler επιτρέπουν την απόκλιση από συμμετρίες Lorentz αναλλοίωτου. Μία θεωρία που φυσικά περιγράφει παραβίαση των φαινομένων Lorentz στην κβαντική βαρύτητα, ενώ διατηρεί τη γενική σχετικότητα του Einstein στο επίπεδο υποβάθρου είναι η Standard Model Extension Theory (SME). Αυτή η θεωρία σχετίζεται με τις πειραματικές έρευνες και τις παρατηρησιακές προσπάθειες στην αστροφυσική, στην κοσμολογία και στη φυσική υψηλών ενεργειών. Σε αυτό το πλαίσιο, οι δομές Finsler για b -χώρους αναπτύσσονται, δίνοντας μία αξιοσημείωτη γεωμετρικοποίηση στη μελέτη των θεωριών στοιχειωδών σωματιδίων. Επιπλέον, ο ρυθμός χτύπου των ρολογιών, που είναι σημαντικός στο μέγεθος των διαταραχών του redshift, καθορίζεται με βάση τη μετρική γεωμετρία του χωροχρόνου. Σε έναν εξαρτημένο από την κατεύθυνση χωροχρόνο, ο ρυθμός χτύπου εξαρτάται από την κατεύθυνση.

Οι θεωρίες της βαρύτητας Einstein-Finsler παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη επίλυση των κοσμολογικών προβλημάτων και γενικεύουν κοσμολογικά μοντέλα, λόγω της τοπικά ανισοτροπικής δομής τους. Βασιζόμενοι σε αυτό το

σχεπτικό, μπορούμε να πάρουμε επιπλέον πληροφορίες για τη βαρύτητα, π.χ. στη σύνδεση με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ένα inflaton, ένα βαθμωτό πεδίο ή ένα σπινωριακό πεδίο. Συγκεκριμένα, οι δυναμικές της γεωμετρίας Finsler (χώρος ταχυτήτων) συνεισφέρουν καθοριστικά στην επιτάχυνση του σύμπαντος. Αυτή η θεώρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να συμβάλει, για να αναλυθούν οι συνέπειες της κβαντικής βαρύτητας και των σχετικών Lorentz violations στο πρώιμο σύμπαν και στην κοσμολογία του σήμερα.

Στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας, τα ασθενή πεδία και τα βαρυτικά κύματα έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς εδώ και δεκαετίες. Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη γενική σχετικότητα είναι η μελέτη των βαρυτικών κυμάτων. Η ύπαρξη των βαρυτικών κυμάτων σε γραμμικές εκδοχές της θεωρίας έχει ήδη μελετηθεί στο χωροχρόνο Minkowski με μια μετρική $n_{\mu\nu}$ με μια μικρή διαταραχή $\epsilon_{\mu\nu}$ τέτοια, ώστε το επαγόμενο πεδίο $a_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$ με $|\epsilon_{\mu\nu}| \ll 1$ υπακούει, λόγω της διαταραχής, στις γραμμικές εξισώσεις της κίνησης. Η γραμμική θεωρία της βαρύτητας είναι μια σημαντική θεωρία, επειδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για να προκύψει η γενική σχετικότητα. Χρησιμοποιώντας τη θεωρία γραμμικού πεδίου βαρύτητας, κάποια παρατηρήσιμα φαινόμενα του ηλιακού μας συστήματος και του σύμπαντος μπορούν να εντοπισθούν. **Το όριο ασθενούς πεδίου σε έναν χωροχρόνο Finsler έχει μελετηθεί και στην εφαιπτόμενη δέσμη ενός χώρου Finsler.** Στη μελέτη μας, θα θεωρήσουμε χωροχρόνο Finsler-Randers με μετρική

$$\mathcal{F} = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + k A_i(x)y^i$$

στο όριο ασθενούς πεδίου, όπου το a_{ij} αναπαριστά μετρική (ψευδο)-Riemann, το $y^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ (σε εφαρμογές το y^i αναπαριστά την ταχύτητα), λ μια παράμετρος πάνω στην καμπύλη, k μια σταθερά και το A_i αναπαριστά το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, το οποίο είναι συνδεδεμένο με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσω της $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$. Ένας χώρος Finsler-Randers (FR) αποτελεί μια σημαντική κατηγορία των χώρων Finsler από μαθηματική και φυσική άποψη, όπως υπογραμμίστηκε προηγουμένως. Σε έναν χώρο (FR), η συνθήκη της συμμετρίας $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}(x, -y)$ για τη θεμελιώδη συνάρτηση $\mathcal{F}(x, y)$ δεν ικανοποιείται. Θεωρήσεις, σε χωροχρόνο (ψευδο)-Finsler, ο οποίος περιλαμβάνει μόνο συμμετρικές θεμελιώδων συναρτήσεων, είναι πολύ περιορισμένες και αποκλείουν περαιτέρω μελέτη χωροχρόνων (ψευδο)-Finsler. Ο χώρος (FR) μπορεί να παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία ασθενούς πεδίου και των βαρυτικών κυμάτων, αφού το «βαρυτικο-ηλεκτρομαγνητικό» πεδίο περιλαμβάνεται συμφυώς στη μετρική του. Η Γενική Σχετικότητα του Einstein δείχνει πως το «βαρυτικο-ηλεκτρομαγνητικό» πεδίο μπορεί να σχετίζεται με ρεύματα μάζας [89]. Επίσης, η βαρυτικομαγνητική δύναμη απαιτήθηκε ως μια εξήγηση για την ανώμαλη μετάπτωση (precession) του περιηλίου του Ερμή. Προηγούμενες εργασίες έχουν δείξει πως τα ηλεκτρικά και μαγνητικά μέρη των τανυστών καμπυλότητας σχετίζονταν με τα ηλεκτρικά και μαγνητικά μέρη του βαρυτικού πεδίου όπως και με τα βαρυτικά κύματα.

2.2 Μια Σύντομη Ιστορική Ανασκόπηση της Γεωμετρίας Finsler και των Βασικών Θεμελίων της

Η γεωμετρία Finsler ονομάζεται και Γεωμετρία του Λογισμού των Μεταβολών, λόγω της σημαντικής συμβολής του Κ.Καραθεοδωρή. Αυτή η γεωμετρία προέρχεται από τον P.Finsler το 1918 και δεν είναι ακόμα ευρέως γνωστή. Η μετρική σε μία πολλαπλότητα Riemann είναι :

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}$$

Το γραμμικό στοιχείο ds είναι φανερό ότι εξαρτάται από τις θέσεις x^i και τα διαφορικά dx^i , δηλαδή είναι συνάρτηση

$$ds = L(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)(=: L(x, dx)).$$

Αυτό παρατηρήθηκε πρώτα από τον Riemann. Η παραπάνω σχέση δίνει την απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία x και $x + dx$ και οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τη συνάρτηση $L(x, y)$ ($y = dx$), είναι οι εξής :

$$L(x, y) > 0, \quad \forall y \neq 0 \quad (L1)$$

$$L(x, py) = pL(x, y), \quad \forall p > 0 \quad (L2)$$

$$L(x, -y) = L(x, y) \quad (L3)$$

Αυτές οι συνθήκες είναι σίγουρα επιθυμητές στη φυσική αίσθηση της γεωμετρικής επιστήμης. Συγκεκριμένα, η συνθήκη θετικότητας ($L1$) εκφράζει συνοπτικά ότι η απόσταση PQ ανάμεσα σε δύο σημεία P, Q θα έπρεπε να είναι θετική και η συνθήκη συμμετρίας ($L3$) εκφράζει $\overline{PQ} = \overline{QP}$. Η συνθήκη ομογένειας ($L2$) είναι επίσης φυσική. Αν οι ποσότητες y^i , οι οποίες δείχνουν αλλαγή της θέσης, πολλαπλασιαστούν με το p , η απόσταση θα έπρεπε να γίνει από το p . Έστω $C = x^i = x^i(t), a \leq t \leq b$, ένα τμήμα καμπύλης σε μια πολλαπλότητα. Το μήκος s της C ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$s = \int_a^b L(x, dx/dt) dt.$$

Τότε, αν η C γραφτεί με μια άλλη παράμετρο $\tau, c \leq \tau \leq d$, έχουμε

$$s = \int_c^d L(x, dx/d\tau) d\tau.$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ισοδύναμο με το $\int_a^b L(x, dx/d\tau \cdot d\tau/dt) dt$ και το δεύτερο είναι ισοδύναμο με το $\int_a^b L(x, dx/d\tau) d\tau/dt \cdot dt$, έτσι ώστε να έχουμε $L(x, py) = pL(x, y)$ ($y = dx/d\tau, p = d\tau/dt$).

Οι πιο σημαντικοί τανυστές είναι αυτοί που έχουν αντίστοιχους στη γεωμετρία Riemann. Έτσι, θα πρέπει να θεωρούμε χώρους Finsler και να γνωρίζουμε

σε ποιο βαθμό αυτοί διαφέρουν από τους χώρους Riemann. Σημαντικοί επίσης τανυστές στη γεωμετρία Finsler είναι εκείνοι, οι οποίοι στη γεωμετρία Riemann είναι μηδέν. Ο θεμελιώδης τανυστής

$$g_{ij}(x, y) = (\partial^2 L^2 / \partial y^i \partial y^j) / 2$$

και ο C-τανυστής

$$C_{ijk} = (\partial g_{ij} / \partial y^k) / 2.$$

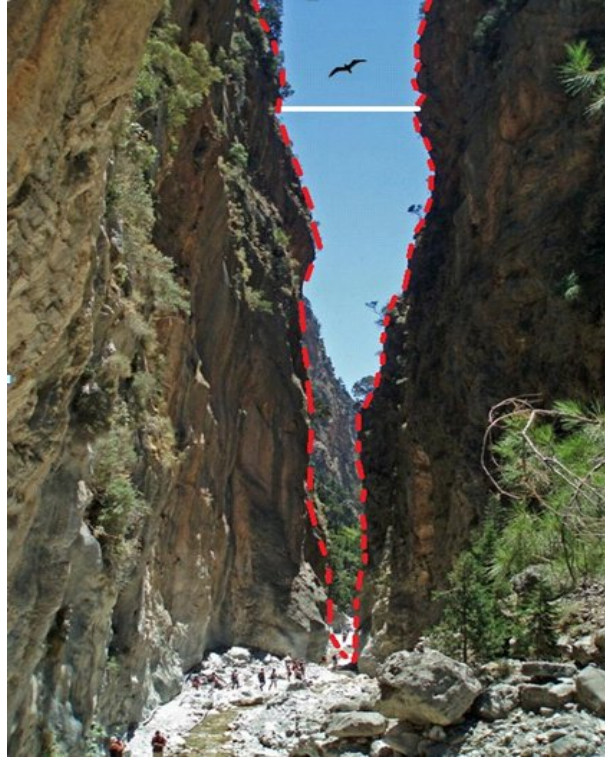
Στην περίπτωση Riemann, η g_{ij} συμπίπτει με τον θεμελιώδη τανυστή $g_{ij}(x)$. Στην περίπτωση Finsler, λόγω της συνθήκης ομογένειας (L2) έχουμε :

$$L^2(x, y) = g_{ij}(x, y) y^i y^j,$$

το οποίο είναι το μήκος Finsler $L(x, y)$ του $y = (y^i)$ και συμπίπτει με το μέτρο του σχετικά με το μετρικό τανυστή $g_{ij}(x, y)$. Από την άλλη πλευρά, ο τανυστής C_{ijk} είναι πολύ σημαντικός, επειδή η εξίσωση $C_{ijk} = 0$ χαρακτηρίζει τις μετρικές Riemann από τις μετρικές Finsler. Από αυτή την άποψη, ο C_{ijk} είναι ο πιο σημαντικός τανυστής. Στη θεωρία του Cartan, αυτός ο τανυστής λέγεται τανυστής στρέψης.

Σχόλιο : Μια σημείωση από τον P.Finsler στον M.Matsumoto για τη διαφοροποίηση των γεωμετριών Riemann και Finsler: Στην αστρονομία μετράμε την απόσταση σε έτη φωτός. Αν πάρουμε το δευτερόλεπτο ως μονάδα, τότε η μοναδιαία επιφάνεια είναι μια σφαίρα ακτίνας 300.000 χλμ. Κάθε σημείο του χώρου μας σχετίζεται με μια τέτοια σφαίρα. Έτσι, ορίζεται η απόσταση (μετρημένη σε χρόνο) και η γεωμετρία του χώρου μας είναι η πιο απλή, η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Όταν μια ακτίνα φωτός θεωρείται ως η πιο σύντομη γραμμή στο βαρυτικό πεδίο, τότε η γεωμετρία του χώρου μας είναι η Γεωμετρία Riemann και η ελάχιστη διαδρομή δεν είναι μία ευθεία γραμμή, αλλά μια γεωδαισιακή σε χώρο Riemann. Επιπλέον, σε ένα ανισοτροπικό μέσο, η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από την κατεύθυνσή του και η μοναδιαία επιφάνεια δεν είναι πλέον σφαίρα.

Η μοναδιαία επιφάνεια και η μοναδιαία καμπύλη στο παραπάνω γράμμα, λέγεται δείκτης στον συγκεκριμένο φορμαλισμό, που είναι μια υπερεπιφάνεια σε κάθε επαπτόμενο χώρο του χώρου Finsler που δίνεται από την εξίσωση $L(x, y) = 1$ (όπου το x είναι σταθερό). Οπότε, όταν μια ακτίνα φωτός θεωρείται ως η συντομότερη γραμμή σε ένα βαρυτικό πεδίο με ηλεκτρομαγνητισμό, ο χώρος μας θα λέγεται Finsler με μια μετρική Randers.



Ο Berwald ήταν ο πρώτος, που εισήγαγε την έννοια της συνοχής στο χώρο Finsler. Η συνοχή του Berwald είναι βασισμένη στη θεωρία των γενικών τροχιών, το οποίο είναι ένα πρόβλημα ακρότατου στη μεταβολή καμπύλων. Το ακρότατο αυτό

$$\delta \int_a^b L(x(t), dx/dt) dt = 0,$$

αποκαλείται γεωδαισιακή καμπύλη ενός χώρου Finsler με μετρική συνάρτηση την $L(x, y)$ και δίνεται από τις διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + Y_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

όπου $Y_{jk}^i(x, y)$ είναι τα σύμβολα Christoffel που κατασκευάζονται από το θεμελιώδη τανυστή $g_{ij}(x, y)$ στο x^i :

$$Y_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} \right).$$

Τότε, ο Berwald βάζει

$$2G^i(x, y) = Y_{jk}^i(x, y) y^j y^k$$

και το παραγωγίζει δύο φορές

$$G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}, G_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial y^k},$$

όπου $G_{jk}^i(x, y)$ είναι προφανώς συμμετρικά στους κάτω δείκτες. Η συνθήκη ομογένειας (L2) μας επιτρέπει να γράψουμε τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις της γεωδαισιακής καμπύλης στη μορφή

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + G_{jk}^i \left(x, \frac{dx}{ds} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0.$$

Γενικά, αν έχουμε a priori ένα σύνολο ποσοτήτων $\Gamma_{jk}^i(x)$ που ικανοποιούν το νόμο μετασχηματισμού της μορφής

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{bc}^a(\bar{x}) &= \Gamma_{jk}^i(x) X_i^a X_b^j X_c^k + X_i^a X_{bc}^i \\ X_i^a &= \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \\ X_b^j &= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \\ X_{bc}^i &= \frac{\partial X_b^i}{\partial \bar{x}^c}, \end{aligned}$$

η πολλαπλότητα θεωρείται πως είναι εφοδιασμένη με μια γραμμική συνοχή $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i(x)\}$. Τότε, για ένα διανυσματικό πεδίο $V^i(x)$ παίρνουμε τις καλούμενες συναλλοίωτες παραγώγους, που συνιστούν ένα ταυστικό πεδίο (1, 1)–τύπου, οι συντελεστές του οποίου δίνονται από τη σχέση

$$V_{;j}^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^r \Gamma_{rj}^i.$$

Όπως είναι γνωστό, η έννοια της παράλληλης μετατόπισης εξαρτάται προφανώς από τη συνοχή, συνεπώς διαφορετικές συνοχές οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα. Αν η συνοχή είναι μετρικά συμβατή, τότε η συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού ταυστή είναι μηδέν, με βάση τη σχέση

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0$$

Συνεπώς, το εσωτερικό γινόμενο δύο παράλληλα μετατοπισμένων διανυσμάτων διατηρείται. Αν V^μ και W^ν μετατοπίζονται παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης $x^\sigma(\lambda)$, έχουμε

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right) V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu} \left(\frac{D}{d\lambda} V^\mu \right) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu \left(\frac{D}{d\lambda} W^\nu \right) = 0$$

Το οποίο σημαίνει ότι η παράλληλη μετατόπιση με βάση μια μετρικά συμβατή συνοχή διατηρεί τη νόρμα των διανυσμάτων και την έννοια της ορθογωνιότητας. Η παράλληλη μετατόπιση είναι βασικό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη των γεωδαισιακών.

Στην παράλληλη μετατόπιση του Berwald, λόγω του μη μετρικού χαρακτήρα της, το μήκος ενός διανύσματος δε διατηρείται αναλλοίωτο από την παράλληλη μετατόπιση. Έτσι, αν ένα διάνυσμα μετατοπιστεί παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης σε ένα πεδίο $y(s)$ και επιστρέψει στο αρχικό σημείο, κατά μήκος της ίδιας καμπύλης σχετικά με το ίδιο πεδίο, το μήκος του διανύσματος αλλάζει και δεν είναι ίδιο με το αρχικό.

Από την τελευταία σχέση, προκύπτει η ιδέα της καμπυλότητας. Ο τανυστής καμπυλότητας Berwald H_{hjk}^i εισάγεται από τον τύπο των συναλλοίωτων παραγωγίσεων :

$$V_{;j;k}^i - V_{;k;j}^i = V^h H_{hjk}^i - V^i |_h H_{0jk}^h,$$

όπου $|_h$ δηλώνει $\partial/\partial y^h$. Είναι γνωστό, πως η μερική παραγωγή $|$ παράγει έναν τανυστή. Έτσι έχουμε άλλον ένα μεταθετικό τύπο :

$$V_{;j|k}^i - V^i |_{k;j} = V^h G_{hjk}^i,$$

όπου ο τανυστής $G_{hjk}^i = \partial G_{hj}^i / \partial y^k$ είναι συμμετρικός. Αν και ο G_{hjk}^i είναι ένα είδος τανυστή καμπυλότητας, σύμφωνα με τη μοντέρνα θεωρία, φαίνεται πως ο Berwald δεν το είχε παρατηρήσει. Ο τανυστής καμπυλότητας H_{hjk}^i δεν συμπίπτει με αυτόν του Cartan R_{hjk}^i , αλλά αξίζει να σημειώσουμε ότι ο H_{0jk}^i είναι ίσος με τον R_{0jk}^i καθώς και οι δύο προκύπτουν από τις μη-γραμμικές συνοχές, που συμπίπτουν, όπως θα φανεί και αργότερα. Επιπλέον, ο H_{hjk}^i έχει μια ιδιαίτερη ιδιότητα $H_{hjk}^i = H_{0jk|h}^i$, η οποία είναι μια συνέπεια του ορισμού $G_{jk}^i = \partial G_j^i / \partial y^k$. Αυτή η απλότητα στο φορμαλισμό είναι ένα από τα πλεονεκτήματα της θεωρίας του Berwald. Η μη μετρική ιδιότητα είναι όμως ένα μικρό μειονέκτημα της συνοχής Berwald από κάθε άποψη. Ο Berwald είναι ο δημιουργός της γεωμετρίας Finsler και το κυριότερο, είναι ο θεμελιωτής της, καθώς εισάγει διάφορες σημαντικές ιδέες και ποσότητες. Επιπλέον, η αξιοσημείωτη κλάση των χώρων Finsler που αποκαλείται κλάση των **ομοπαράλληλων** χώρων (1925) και χαρακτηρίζεται από $G_{hjk}^i = 0$, συνιστώσες G_{jk}^i της συνοχής Berwald είναι συναρτήσεις του x μόνο. Σύμφωνα με τον V.V.Wagner (1938), ένας τέτοιος χώρος λέγεται χώρος Berwald. Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως ένας τέτοιος χώρος χαρακτηρίζεται επιπλέον από $C_{ijk|h} = 0$ στα πλαίσια της συνοχής Cartan. Τέλος, η θεωρία των διδιάστατων χώρων Finsler έχει μελετηθεί από τον ίδιο. Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, εισάγει ένα φυσικό πεδίο-πλαίσιο $(1_i, m_i)$, όπου $1_i = L_{|i}$ και m_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, που είναι ορθογώνιο στο 1_i , σύμφωνα με το οποίο, όλοι οι τανυστές εκφράζονται με βαθμωτούς συντελεστές. Επιπλέον, εισάγοντας την γωνία Landsberg θ , παρόμοια με το όρισμα μιας πολικής συντεταγμένης, που ορίζεται από $\partial\theta/\partial y^i = m_i$,

βρήκε πολλές μετρικές συναρτήσεις $L(x, y)$ που ανήκουν σε ενδιαφέρουσες κλάσεις διδιάστατων χώρων Finsler. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις της βαθμωτής καμπυλότητας και της σταθερής καμπυλότητας είναι :

$$H_{0i0j} = KL^2 h_{ij}, H_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}),$$

όπου K είναι ένα βαθμωτό πεδίο (σταθερό στην τελευταία περίπτωση) και h_{ij} είναι ο γωνιακός μετρικός τανυστής, που ορίζεται από τη σχέση :

$$h_{ij} = L(\partial^2 L / \partial y^i \partial y^j) = g_{ij} - 1_i 1_j$$

Γενικά, αν έχουμε a priori ένα σύνολο ποσοτήτων $\Gamma_j^i(x, y)$ που ικανοποιούν έναν νόμο μετασχηματισμού της μορφής :

$$\bar{\Gamma}_b^a(\bar{x}, \bar{y}) = \Gamma_j^i(x, y) X_i^a X_b^j + X_i^a X_{0b}^i,$$

το ονομάζουμε μη-γραμμική συνοχή. Στη συνέχεια, ορίζουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους για το βαθμωτό πεδίο $S(x, y)$:

$$S_{;i} = \frac{\partial S}{\partial x^i} - \frac{\partial S}{\partial y^r} \Gamma_i^r$$

και μια παράλληλη μετατόπιση για ένα διανυσματικό πεδίο V^i :

$$\frac{dV^i}{ds} + \Gamma_j^i(x, \frac{dx}{ds}) V^j = 0$$

αλλά όχι τις συναλλοίωτες παραγώγους για ένα γενικό τανυστικό πεδίο. Οι Synge και Taylor τελικά βρήκαν πως το σύνολο των ποσοτήτων

$$N_j^i(x, y) = Y_{0j}^i - C_{jr}^i Y_{00}^r,$$

όπου τα C_{jr}^i είναι Finsler, είναι μια μη-γραμμική συνοχή. Εδώ θα μπορούσαμε να εισάγουμε μια παράλληλη μετατόπιση αλλά όχι τανυστική ανάλυση. Μπορούμε να έχουμε μια συνοχή, που δεν εξαρτάται μόνο από τη θέση, αλλά από μια γενική μη-γραμμική συνοχή $\{\Gamma_j^i(x, y)\}$:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial y^k},$$

αφού ο Berwald παίρνει τα G_{jk}^i από τα G_j^i αλλά οι Synge και Taylor δεν το παρατήρησαν. Επιπλέον, τα N_j^i είναι ουσιαστικά τα G_j^i του Berwald. Οι σχέσεις

$$N_j^i = G_j^i = F_{0j}^i$$

ισχύουν, όπου το σύνολο $\{F_{jk}^i\}$ είναι μια συνοχή Cartan. Συνεπώς, οι θεωρίες των Berwald, Cartan έχουν την κοινή μη-γραμμική συνοχή που δίνουν οι Synge και Taylor. Ο πρώτος, που μελέτησε τις μη-γραμμικές συνοχές συστηματικά,

ήταν ο A.Kawaguchi το 1952 και ο οποίος έδωσε έμφαση στη μεγάλη σημασία που έχουν για τη γεωμετρία Finsler.

Η συμβολή του Cartan

Όπως είναι γνωστό, έχει δημοσιεύσει μια σειρά εργασιών, σχετικά με τη θεωρία των συνοχών από το 1923. Έστω $C : x^i = x^i(t)$, μια καμπύλη με μια παράμετρο t μιας n -διάστατης διαφορίσιμης πολλαπλότητας M . Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$(E1) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e_i, \quad \frac{de_i}{dt} = \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^j}{dt} e_k,$$

όπου $\Gamma_{ij}^k(x)$ είναι συναρτήσεις a priori που δίνονται σε κάθε περιοχή συντεταγμένων του M . Οι λύσεις $\{P(t), e_i(t)\}$ για αρχικές τιμές $\{P(0), e_i(0)\}$ θεωρούνται τέτοιες, ώστε το $P(t)$ να σχηματίζει μια καμπύλη C^* σε έναν n -διάστατο ομοπαράλληλο (affine) χώρο N και τα $e_i(t)$ είναι n διανυσματικά πεδία κατά μήκος της C^* . Αν οι αρχικές τιμές $e_i(0)$ δοθούν έτσι, ώστε τα $\{e_i(0)\}$ να είναι ένα σύνορο στο $P(0)$, τότε τα $e_i(t)$ είναι ένα συνοριακό πεδίο, κατά μήκος της C^* για κατάλληλα μικρό t . Η C^* που παίρνουμε ονομάζεται ένα ανάπτυγμα της C στον N και το σύνολο $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ λέγεται ομοπαράλληλη συνοχή. Επιπλέον, αν μια πολλαπλότητα M με ομοπαράλληλη συνοχή $\Gamma = \{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ είναι εξοπλισμένη με μετρική Riemann $ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j$ και το παραπάνω πεδίο-πλαίσιο $\{e_i(t)\}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις $g_{ij} = e_i e_j$ (εσωτερικό γινόμενο στον ευκλείδειο χώρο N) κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, τότε το $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ λέγεται ευκλείδεια συνοχή. Η συνθήκη ώστε το $\{\Gamma_{ij}^k(x)\}$ να είναι ευκλείδεια συνοχή δίνεται από τις σχέσεις :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ijk} = g_{jr} \Gamma_{ik}^r.$$

Ο Cartan γενίκευσε την ιδέα της ευκλείδειας συνοχής σε χώρους Finsler: Οι εξισώσεις του αναπτύγματος (E1) αλλάζουν

$$(F1) \quad \frac{dP}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e^i, \quad \frac{de^i}{dt} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{dt} + C_{ij}^k \frac{dy^j}{dt} \right) e_k$$

όπου οι $\Gamma_{ij}^k(x, y)$ και $C_{ij}^k(x, y)$ είναι συναρτήσεις των (x, y) a priori που δίνονται σε κάθε περιοχή συντεταγμένων. Αυτό το ανάπτυγμα βασίζεται σε μια καμπύλη $\bar{C} : x^i = x^i(t), y^i = y^i(t)$ του γραμμικού στοιχείου χώρου \bar{M} , που ονομάζεται μια καμπύλη $C : x^i = x^i(t)$ του M μαζί με ένα πεδίο κατεύθυνσης $y^i = y^i(t)$, που ορίζεται κατά μήκος της C . Η συνθήκη της ευκλείδειας συνοχής, $g_{ij} = e_i e_j$ τώρα δίνεται από τις εξισώσεις :

$$F(2-1) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ijk} = g_{jr} \Gamma_{ik}^r,$$

$$F(2-2) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = C_{ijk} + C_{jik}, C_{ijk} = g_{jr}C_{ik}^r.$$

Το σύστημα αξιωματών του Cartan αρχικά αποτελούταν από 5 συνθήκες όμως ο A.de Mira Fernandes παρατήρησε πως μία από αυτές ήταν αχρείαστη, έτσι το σύστημα είναι το εξής :

(C1) Αν η κατεύθυνση ενός διανύσματος X συμπίπτει με αυτή του y του στηρικτικού στοιχείου (x, y) , το μήκος του X είναι ίσο με την τιμή $L(x, X)$ του L . Αφού $X = py, p > 0$, αυτή η συνθήκη γράφεται

$$(C1) \quad g_{ij}(x, X)X^iX^j = L^2(x, X)$$

επειδή $g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x, X)$.

(C2) Έστω X, Y δύο διανύσματα με ένα κοινό στηρικτικό στοιχείο (x, y) . Όταν το y κάνει μια απειροστή περιστροφή γύρω από το x , ενώ τα X, Y παραμένουν σταθερά, τα συναλλοίωτα διαφορικά DX, DY ικανοποιούν την $g_{ij}(x, y)X^iDY^j = g_{ij}(x, y)Y^iDX^j$. Γενικά, η συναλλοίωτη διαφορίση DX του X ορίζεται από

$$DX^i = dX^i + X^r(\Gamma_{rj}^i(x, y)dx^j + C_{rj}^i(x, y)dy^j).$$

Αφού στη (C2) ισχύει ότι $dx = dX = dY = 0$ αυτή η συνθήκη γράφεται

$$(C2) \quad C_{ijk} = C_{jik}.$$

(C3) Αν η κατεύθυνση ενός διανύσματος X με σταθερούς συντελεστές συμπίπτει με αυτό του y του στηρικτικού στοιχείου (x, y) , το συναλλοίωτο διαφορικό που αντιστοιχεί σε μια απειροστή περιστροφή γύρω από το στηρικτικό του στοιχείο εξαφανίζεται. Αφού $DX^i = X^rC_{rj}^i(x, y)dy^j = 0$ και $X = py, p > 0$ σε αυτή την περίπτωση, η (C3) γράφεται

$$(C3) \quad X^rC_{rij}(x, X) = 0.$$

(C4) Έστω $F_{jk}^i(x, y)$ οι συνιστώσες συνοχής, όταν η μετατόπιση είναι τέτοια, ώστε το στηρικτικό στοιχείο (x, y) να μεταφέρεται παράλληλα στον εαυτό του από το x στο $x + dx$. Τα F_{jk}^i θεωρούνται συμμετρικά στους κάτω δείκτες. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε :

$$Dy^i = 0 = dy^i + y^r(\Gamma_{rj}^i(x, y)dx^j + C_{rj}^i(x, y)dy^j).$$

Από το (C3), έχουμε $dy^i = -y^r\Gamma_{rj}^i dx^j$ τέτοιο, ώστε

$$DX^i = dX^i + X^r(\Gamma_{rj}^i dx^j - C_{rj}^i \Gamma_{0k}^j dx^k)$$

από το οποίο, προκύπτει

$$F_{rj}^i = \Gamma_{rj}^i - C_{rs}^i \Gamma_{0j}^s.$$

Έτσι, η (C4) γράφεται

$$(F3) \quad T_{jk}^i = F_{jk}^i - F_{kj}^i = (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) - (C_{jr}^i \Gamma_{0k}^r - C_{kr}^i \Gamma_{0j}^r) = 0.$$

Συνεπώς, η (C4) είναι μια γενίκευση της (F3) και οι (C1, 2, 3) είναι επιπλέον συνθήκες. Εδώ, έχουμε τους συμβολισμούς F_{jk}^i , αντί για αυτούς του Cartan Γ_{jk}^{*i} . Αρχικά, από τις $F(2-2)$, (C2) προκύπτει ότι τα C_{ijk} είναι αυτά του Finsler. Άρα από τις (C1, 3), συμπεραίνουμε πως ο g_{ij} είναι ο θεμελιώδης ταυστής, που έχει δοθεί από τον Finsler. Τέλος, η τελευταία συνθήκη (F3) παίζει βασικό ρόλο στον ορισμό του Γ_{jk}^i . Ξαναγράφουμε την $F(2-1)$ με $F_{ijk} = g_{jr} F_{ik}^r$ κι έχουμε

$$g_{ij|k} = 0 = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - F_{ijk} - F_{jik},$$

όπου $\delta/\delta x^k = \partial/\partial x^k - F_{0k}^r \partial/\partial y^r$. Η (F3) σε συνδυασμό με την παραπάνω μας δίνει

$$F_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j} \right).$$

Ο O.Varga (1942) ήταν ο πρώτος που παρατήρησε ότι τα F_{jk}^i είναι τα σύμβολα Christoffel, που κατασκευάζονται από την g_{ij} ως προς τις δ -παραγωγίσεις. Πρέπει να σημειώσουμε τη σημασία της προσδιορισμένης μη-γραμμικής συνοχής $\{F_{0k}^r\}$. Οι $S_{rjk}^i, P_{rjk}^i, R_{rjk}^i$ ονομάζονται πρώτος, δεύτερος και τρίτος ταυστής καμπυλότητας του Cartan αντίστοιχα και ο S_{jk}^i ονομάζεται **ταυστής στρέψης**. Φαίνεται, πως οι R_{0jk}^r, P_{0jk}^r θα έπρεπε να θεωρούνται ως ταυστές στρέψης παρόμοιοι με τον C_{jk}^i . Τα σύμβολα Christoffel κατασκευάζονται από τη $g_{ij}(x, y)$ σε σχέση με το y^i :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j} \right),$$

τα οποία ουσιαστικά είναι τα C_{ijk} , που είναι η συνοχή Riemann ενός εφαπτόμενου χώρου M_x του χώρου Finsler M , όπου M_x θεωρείται χώρος Riemann με μετρική Riemann

$$d\sigma^2 = g_{ij}(x, y) dy^i dy^j,$$

όπου το x είναι σταθερό. Συνεπώς, ο τρίτος τύπος είναι μία από αυτές της συνοχής Riemann. Ενώ, ο ταυστής καμπυλότητας Riemann του M_x δίνεται από τη σχέση:

$$S_{rjk}^i = \frac{\partial C_{rj}^i}{\partial y^k} - \frac{\partial C_{rk}^i}{\partial y^j} + C_{rj}^s C_{sk}^i - C_{rk}^s C_{sj}^i$$

και λόγω της πολύ απλής κατασκευής του C_{ijk} , η παραπάνω σχέση γράφεται σε μια απλή μορφή:

$$S_{rjk}^i = C_{rk}^s C_{sj}^i - C_{rj}^s C_{sk}^i.$$

Ο τρίτος τανυστής καμπυλότητας R_{rjk}^i είναι ο πιο σημαντικός στη μελέτη της γεωμετρίας Finsler, καθώς είναι ανάλογος της καμπυλότητας Riemann. Αντίθετα, οι P_{rjk}^i, S_{rjk}^i γίνονται μηδέν στην περίπτωση Riemann.

Η συμβολή του Busemann

Έστω G μια φραγμένη περιοχή, σε έναν χώρο Riemann R , του οποίου ο όγκος είναι **καθορισμένος**. Ακολουθώντας τη διαδικασία της ολοκλήρωσης, χωρίζουμε το G σε μικρές περιοχές G_α . Σε κάθε G_α , διαλέγουμε ένα σημείο x_α και αντικαθιστούμε την $g_{ij}(x)$ στην G_α με την $g_{ij}(x_\alpha)$. Με αυτή τη μετρική, η G_α είναι ευκλείδεια. Γνωρίζουμε τι σημαίνει ο όγκος στον ευκλείδειο χώρο. Ο όγκος της για την G_α είναι :

$$\sqrt{|g_{ij}(x_\alpha)|} \cdot \int \int_{G_\alpha} dx^1 \cdots dx^n.$$

Από τη συνήθη διαδικασία ολοκλήρωσης, βρίσκουμε

$$\int \int_G \sqrt{|g_{ij}(x)|} dx^1 \cdots dx^n$$

ως όγκο Riemann του G . Η αρχή που διέπει αυτή τη διαδικασία είναι η εξής : Μια μετρική Riemann είναι τοπικά ευκλείδεια. Σε κάθε σημείο, το στοιχείο του όγκου του χώρου πρέπει να συμπίπτει με το στοιχείο του όγκου της τοπικής γεωμετρίας.

Τώρα, θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τον όγκο στον χώρο Finsler R με το γραμμικό στοιχείο $L(x, dx)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αρχή. Χωρίζουμε τη δοθείσα περιοχή G στον R , σε μικρότερες περιοχές G_α . Στην G_α επιλέγουμε ένα σημείο x_α . Στην G_α αντικαθιστούμε την $L(x, dx)$ με την $L(x_\alpha, dx)$. Ο χώρος με γραμμικό στοιχείο $L(x_\alpha, dx) = L(dx)$ δεν είναι ευκλείδειος, αλλά είναι ένας χώρος S Minkowski, επειδή είναι ανεξάρτητος της θέσης x_α .

Ο Busemann δίνει έμφαση στη σημασία της μελέτης της γεωμετρίας Minkowski για την εξέλιξη της γεωμετρίας Finsler. Συνοπτικά, ο χώρος Minkowski είναι ένας εφαιπτόμενος χώρος M_x του χώρου Finsler M , σε ένα σημείο x σταθερό. Όπως παραπάνω, ο M_x είναι εφοδιασμένος με μια μετρική συνάρτηση $L(y) = (= L(x, y)$ με ένα σταθερό x .

Στο χώρο M_x Minkowski, η έννοια της δείκτριας I_x είναι απαραίτητη. Η δείκτρια είναι μια υπερεπιφάνεια του M_x , που ορίζεται από την εξίσωση $L(y) = 1$ και καλείται μοναδιαία επιφάνεια από τον Καραθεοδωρή. Έτσι, κάθε σημείο x του χώρου Finsler M σχετίζεται με τη δείκτρια I_x στον M_x με τέτοιο τρόπο, ώστε να ορίζεται το μήκος Finsler $L(y)$. Η μελέτη των δεικτριών είναι απαραίτητη, από την απόψη ότι ο χώρος Finsler είναι τοπικά Minkowski. **Είναι αλήθεια**, ότι θεωρείται πως ο χώρος Finsler είναι τοπικά Minkowski, αλλά αν αναφερθούμε στον θεμελιώδη τανυστή $g_{ij}(x, y)$ ενός χώρου Finsler R και ακολουθήσουμε τη διαδικασία του Busemann στην G_α , αντικαθιστούμε την

$g_{ij}(x, y)$ με την $g_{ij}(x_\alpha, y)$. Έτσι, η G_α είναι Riemann με αυτό το μετρικό τανυστή $g_{ij}(y)(= g_{ij}(x_\alpha, y))$. Πιο συγκεκριμένα, κάθε εφαπτόμενος χώρος M_x ενός χώρου Finsler M θεωρείται ως χώρος Riemann με γραμμικό στοιχείο $d\sigma^2$. Συνεπώς, ο χώρος Finsler μπορεί να θεωρείται τοπικά Riemann. Θα πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός, ότι η γεωμετρία Riemann του M_x δεν είναι γενική. Αρχικά, η $g_{ij}(y)$ είναι ειδικά δοσμένη από $g_{ij}(y) = (\partial^2 L^2 / \partial y^i \partial y^j) / 2$, έτσι ώστε τα σύμβολα Christoffel C_{ijk} , όπως και ο τανυστής καμπυλότητας S_{hijk} να έχουν απλές μορφές. Στη συνέχεια, το σύστημα συντεταγμένων (y^i) στον M_x είναι επαγόμενο από το σύστημα συντεταγμένων της πολλαπλότητας (x^i) . Έτσι, το (y^i) υπακούει μόνο σε έναν ομοπαράλληλο μετασχηματισμό

$$\bar{y}^a = (X_i^a)_x y^i$$

με σταθερούς συντελεστές $(X_i^a)_x$, που αντιστοιχούν στον μετασχηματισμό συντεταγμένων $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x)$. Συνεπώς, η γεωμετρία Riemann του M_x είναι **ομοπαράλληλη**. Τώρα αν ένας χώρος Finsler δέχεται ένα σύστημα συντεταγμένων (x^i) , υπό τη συνθήκη ότι η θεμελιώδης συνάρτηση L ανάγεται σε μια συνάρτηση μόνο του y^i , ο χώρος ονομάζεται τοπικά Minkowski, επειδή η περιοχή συντεταγμένων του (x^i) θεωρείται ως χώρος Minkowski με τη μετρική $L(y)$. Στις σημειώσεις του Cartan ένας τοπικά Minkowski χώρος χαρακτηρίζεται από τις αναλλοίωτες εξισώσεις :

$$R_{hijk} = 0, C_{hij|k} = 0.$$

Ένα διανυσματικό πεδίο Finsler $V^i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ δεν είναι πάντα ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε έναν χώρο Finsler M . Αν και κάθε συντελεστής V^i έχει τοπικές συναρτήσεις στην εφαπτόμενη δέσμη $T(M)$, δεν είναι **πάντα** ένα εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην $T(M)$, γιατί έχει μόνο $n(= \dim M)$ συντελεστές, ενώ η $T(M)$ είναι $2n$ -διάστατη.

3 Βασικά Στοιχεία από τη Διαφορική Γεωμετρία

3.1 Ενότητες από την Κλασική Διαφορική Γεωμετρία

Ο τανυστής Einstein

Μία ταυτότητα που είναι πολύ χρήσιμη στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας είναι εκείνη του Bianchi. Από την ταυτότητα αυτή, προκύπτει ένας χρήσιμος τανυστής, ο τανυστής Einstein. Αρχικά γράφουμε τις ταυτότητες Bianchi

$$R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\sigma} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\sigma} + R_{\beta\mu\nu;\lambda}^{\sigma} = 0 \quad (1)$$

όπου το «;» συμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο. Πολλαπλασιάζουμε την (1) με $g_{\alpha\sigma}$ και λαμβάνουμε υπόψη ότι ο $g_{\alpha\sigma}$ έχει συναλλοίωτο παράγωγο μηδέν. Οπότε έχουμε,

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (2)$$

Η ανωτέρω σχέση (2) προέκυψε από την $R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\sigma}g_{\alpha\sigma}$ που χρησιμεύει στο να κατεβάσει δείκτες και άθροιση μέσα στη διαφόριση. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες συμμετρίας του τανυστή Riemann παίρνουμε

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} - R_{\beta\alpha\nu\lambda;\mu} + R_{\alpha\beta\nu\mu;\lambda} = 0. \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (3) με $g^{\alpha\mu}g^{\beta\lambda}$ και ανεβάζοντας τους δείκτες πάλι μέσα στο συναλλοίωτο διαφορικό τελεστή παίρνουμε

$$g^{\beta\lambda}R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\mu} - g^{\alpha\mu}R_{\alpha\nu\lambda;\mu}^{\lambda} - g^{\beta\lambda}R_{\beta\nu\mu;\lambda}^{\mu} = 0. \quad (4)$$

Χρησιμοποιούμε την πράξη της συστολής

$$R_{;\nu} - g^{\alpha\mu}R_{\alpha\nu;\mu} - g^{\beta\lambda}R_{\beta\nu;\lambda} = 0 \quad (5)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι της εξίσωσης (5) ταυτίζονται, επειδή μπορώ να εναλλάξω τους δείκτες $\alpha \rightarrow \beta, \mu \rightarrow \lambda$. Επομένως, παίρνουμε

$$R_{;\nu} - 2g^{\alpha\mu}R_{\alpha\nu;\mu} = 0 \quad (6)$$

Όταν ο δείκτης ανέρχεται στο δεύτερο όρο, η (6) γίνεται

$$R_{;\nu} - 2R_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (7)$$

Μετά τον πολλαπλασιασμό του πρώτου όρου με τον μικτό τανυστή $g_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$, η εξίσωση (7) μπορεί να γραφτεί

$$\left(R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\mu}R \right)_{;\mu} = 0 \quad (8)$$

Η ποσότητα στην παρένθεση ονομάζεται τανυστής Einstein

$$G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\mu}R. \quad (9)$$

Ο G_{ν}^{μ} έχει συναλλοίωτη απόκλιση μηδέν

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \quad (10)$$

Η ποσότητα $R_{\alpha\beta}$ καλείται τανυστής Ricci και η $R^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = R$ Βαθμωτή ή (Αριθμητική) καμπυλότητα. Η σχέση (9) μπορεί ακόμα να γραφτεί

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (11)$$

Γεωδαισιακές

Το μήκος τόξου μιας καμπύλης είναι μία affine παράμετρος. Για να βρούμε την εξίσωση των γεωδαισιακών θα αναζητήσουμε τις σχέσεις που ικανοποιούνται, έτσι ώστε το παρακάτω ολοκλήρωμα να έχει μία σταθερή τιμή

$$I = \int ds \quad (12)$$

Τα όρια ολοκλήρωσης θεωρούνται σταθερά. Θα πρέπει να βρούμε τη λύση σε ένα πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών, δηλαδή

$$\delta I = \delta \int L ds = 0, \quad (13)$$

όπου η Lagrangian συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$L = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

της οποίας η τιμή είναι ίση με μονάδα κατά μήκος της καμπύλης. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους του λογισμού των μεταβολών για την $L(x, \dot{x})$ με $\dot{x}^{\mu} = (dx^{\mu}/ds)$, θα έχουμε

$$\delta \int L ds = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \delta x^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \delta \dot{x}^{\mu} \right) ds \quad (15)$$

Όμως,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \delta x^{\mu} \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right) \delta x^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}} \delta \dot{x}^{\mu} \quad (16)$$

Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\frac{d}{ds} (\delta \dot{x}^{\mu}) = \delta \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right),$$

γιατί

$$\frac{d}{ds}(\delta x^\mu) = \frac{d}{ds}(x_2^\mu - x_1^\mu) = \frac{dx_2^\mu}{ds} - \frac{dx_1^\mu}{ds} = \delta \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)$$

Και η (15) γίνεται

$$\begin{aligned} \delta \int L ds &= \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu \right] ds = \\ &= \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right] \delta x^\mu ds + \int \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right) ds = \\ &= \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right] \delta x^\mu ds + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \Big|_{s_2}^{s_1} \end{aligned} \quad (17)$$

Ο τελευταίος όρος ισούται με μηδέν, αφού τα τελευταία τελικά σημεία είναι σταθερά και ίδια για όλες τις καμπύλες x^μ , δηλαδή

$$\delta x^\mu(s_2) - \delta x^\mu(s_1) = (x_2^\mu(s_2) - x_1^\mu(s_1)) - (x_2^\mu(s_2) - x_1^\mu(s_1)) = 0$$

Τελικά, η (17) γράφεται

$$\delta \int L ds = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \right] \delta x^\mu ds = 0 \quad (18)$$

και επειδή η μεταβολή δx^μ είναι τυχαία έχουμε

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (19)$$

Για να απαιτήσουμε μία αναλυτική έκφραση για την διαφορική εξίσωση των γεωδαισιακών χρησιμοποιούμε την Lagrangian (14) στην εξίσωση Euler-Lagrange (19). Έτσι, ο πρώτος όρος δίνει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma)^{1/2} = \frac{1}{2} (g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma)^{-1/2} g_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} (\dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma) = \\ &= \frac{1}{2} (g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma)^{-1/2} g_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial \dot{x}^\rho}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\sigma + \dot{x}^\rho \frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \\ &= \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} (\delta_\mu^\rho \dot{x}^\sigma + \delta_\mu^\sigma \dot{x}^\rho) = \\ &= \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma} \dot{x}^\sigma + g_{\rho\mu} \dot{x}^\rho) = g_{\mu\alpha} \dot{x}^\alpha, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Διαφορίζοντας την παραπάνω έκφραση έχουμε

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = g_{\mu\alpha} \dot{x}^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha$$

Ο δεύτερος όρος της (19) δίνει

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma)^{1/2} = \frac{1}{2} (g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma)^{-1/2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma\end{aligned}$$

Βάζοντας τις παραπάνω εκφράσεις μαζί, έχουμε

$$g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (20)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha$$

η εξίσωση του Lagrange τελικά δίνει την ακόλουθη εξίσωση γεωδαισιακών

$$g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \quad (21)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $g^{\rho\mu}$ και αθροίζοντας στα μ έχουμε

$$\begin{aligned}g^{\rho\mu} g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\alpha + g^{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\beta\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0 \\ \delta_\alpha^\rho \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0 \\ \ddot{x}^\rho \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta &= 0\end{aligned} \quad (22)$$

Η προκύπτουσα σχέση (22) αποτελεί την **εξίσωση γεωδαισιακών**.

Απόκλιση των γεωδαισιακών

Στα παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\delta/\delta u$, για να ορίσουμε την απόλυτη παραγωγή ενός τανυστικού πεδίου $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, που ορίζεται σε μία καμπύλη του χωροχρόνου, με παράμετρο u και παραμετρικές εξισώσεις $x^i = x^i(u)$. Αυτή αποτελεί ένα τανυστικό πεδίο τάξης $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\frac{\delta V^i}{\delta u} &= \frac{dV^i}{du} + \Gamma_{ab}^i V^\alpha \frac{dx^b}{du} \\ \frac{\delta V_i}{\delta u} &= \frac{dV_i}{du} - \Gamma_{ib}^\alpha V_\alpha \frac{dx^b}{du} \\ \frac{\delta T^{ij}}{\delta u} &= \frac{dT^{ij}}{du} + \Gamma_{ab}^j T^{i\alpha} \frac{dx^b}{du} + \Gamma_{ab}^i T^{\alpha j} \frac{dx^b}{du} \\ \frac{\delta T_{ij}}{\delta u} &= \frac{dT_{ij}}{du} - \Gamma_{jb}^\alpha T_{i\alpha} \frac{dx^b}{du} - \Gamma_{ib}^\alpha T_{\alpha j} \frac{dx^b}{du}\end{aligned}$$

$$\frac{\delta T_j^i}{\delta u} = \frac{dT_j^i}{du} + \Gamma_{ab}^i T_j^a \frac{dx^b}{du} - \Gamma_{jb}^\alpha T_\alpha^i \frac{dx^b}{du}$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για ταυυστικά πεδία ανώτερης τάξης. Στα ανωτέρω, με $(dx^b)/(du)$ συμβολίζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της καμπύλης. Επίσης, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta u} = 0, \frac{\delta g^{ij}}{\delta u} = 0, \frac{\delta \delta_j^i}{\delta u} = 0$$

Ακόμη, η απόλυτη παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου, πάνω σε μία καμπύλη, συμπίπτει με τη συνήθη παράγωγο:

$$\frac{\delta \phi}{\delta u} = \frac{d\phi}{du}.$$

Για την απόλυτη παραγωγήιση, ισχύει ο κανόνας του Leibnitz, όπως και για την συναλλοίωτο. Η απόλυτη παραγωγήιση μπορεί ακόμα να οριστεί και για ταυυστικά πεδία, που ορίζονται πάνω σε μία διδιάστατη επιφάνεια ή τρισδιάστατη περιοχή του χωροχρόνου, ως προς κάθε μία από τις δύο ή τρεις παραμέτρους αντίστοιχα.

Ας θεωρήσουμε τη 2-διάστατη επιφάνεια στο χωροχρόνο, με παραμέτρους u, v και παραμετρικές εξισώσεις $x^i = x^i(u, v)$. Πάνω στην επιφάνεια, ορίζονται τα διανυσματικά πεδία

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, V^i = \frac{\partial x^i}{\partial v} \quad (23)$$

Η συναλλοίωτη παραγωγήιση του διανυσματικού πεδίου U , ως προς παράμετρο v και του V^i ως προς u μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{\delta U^i}{\delta v} &= \frac{\partial U^i}{\partial v} + \Gamma_{ab}^i U^a \frac{\partial x^b}{\partial v} \\ \frac{\delta V^i}{\delta u} &= \frac{\partial V^i}{\partial u} + \Gamma_{ab}^i V^a \frac{\partial x^b}{\partial u} \end{aligned}$$

Έχουμε όμως ότι

$$\frac{\partial U^i}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial x^i}{\partial v} \right) = \frac{\partial V^i}{\partial u}$$

Επίσης, έχουμε

$$\Gamma_{ab}^i U^a \frac{\partial x^b}{\partial v} = \Gamma_{ba}^i U^a \frac{\partial x^b}{\partial v} = \Gamma_{ab}^i U^b \frac{\partial x^a}{\partial v} = \Gamma_{ab}^i V^a \frac{\partial x^b}{\partial u}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u} \quad (24)$$

Το γεγονός ότι η σχέση (24) ισχύει, μπορούμε να το καταλάβουμε και με τον εξής συλλογισμό: Η (24) είναι μία ταυστική εξίσωση, επομένως αν ισχύει, θα ισχύει σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Επιλέγουμε το γεωδαισιακό σύστημα εκείνο, στο οποίο όλα τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται, οπότε η (24) γράφεται:

$$\frac{\partial U^i}{\partial v} = \frac{\partial V^i}{\partial u}$$

Η οποία, όπως αποδείχθη προηγουμένως, ισχύει.

Σημείωση: Η σχέση

$$\frac{\delta U^i}{\delta v} = \frac{\delta V^i}{\delta u}$$

δεν σημαίνει ότι οι τελεστές $\delta/\delta v$ και $\delta/\delta u$ μετατίθενται. Αυτό συμβαίνει, μόνο όταν ο χώρος είναι επίπεδος (flat), έτσι η μη μεταθετικότητα των τελεστών $\delta/\delta v$ και $\delta/\delta u$ οφείλεται στη μη μηδενική καμπυλότητα του χωροχρόνου. Αυτό γίνεται φανερό από τη σχέση

$$\frac{\delta^2 T^i}{\delta u \delta v} - \frac{\delta^2 T^i}{\delta v \delta u} = R_{abc}^i T^a U^b V^c \quad (25)$$

όπου R_{abc}^i ο ταυστής καμπυλότητας του χωροχρόνου και T^i ένα διάνυσμα της επιφάνειας. Εφαρμόζοντας τη σχέση (25) για το διανυσματικό πεδίο U^i έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 U^i}{\delta u \delta v} - \frac{\delta^2 U^i}{\delta v \delta u} &= R_{abc}^i U^a U^b V^c \\ \frac{\delta^2 U^i}{\delta u \delta v} &= \frac{\delta}{\delta v} \left(\frac{\delta U^i}{\delta u} \right) + R_{abc}^i U^a U^b V^c \end{aligned} \quad (26)$$

Όμως, έχουμε ότι

$$\frac{\delta^2 U^i}{\delta u \delta v} = \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{\delta U^i}{\delta v} \right) = \frac{\delta}{\delta u} \left(\frac{\delta V^i}{\delta u} \right) = \frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} \quad (27)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (27), η (26) γίνεται

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} = \frac{\delta}{\delta v} \left(\frac{\delta U^i}{\delta u} \right) + R_{abc}^i U^a U^b V^c \quad (28)$$

Μέχρι τώρα, οι καμπύλες $\Gamma(v)$ που έχουμε θεωρήσει είναι τυχαίες. Αν απαιτήσουμε από αυτές, να είναι γεωδαισιακές και η παράμετρος u να είναι affine, τότε θα ισχύει η σχέση

$$\frac{\delta U^i}{\delta u} = 0 \quad (29)$$

Τώρα, ο πρώτος όρος του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (28) μηδενίζεται και αυτή γράφεται

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} = R_{abc}^i U^a U^b V^c$$

Χρησιμοποιώντας την αντισυμμετρικότητα του τανυστή καμπυλότητας ως προς τους δύο τελευταίους δείκτες, η τελευταία σχέση γράφεται

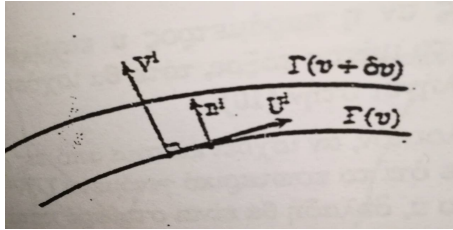
$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} = -R_{acb}^i U^a U^b V^c$$

και εναλλάσσοντας τους βωβούς δείκτες b και c έχουμε

$$\frac{\delta^2 V^i}{\delta u^2} + R_{abc}^i U^a V^b U^c = 0 \quad (30)$$

Η σχέση (30) λέγεται **εξίσωση απόκλισης των γεωδαισιακών** και αν χρησιμοποιηθεί το απειροστό διάνυσμα απόκλισης n^i για δύο γειτονικές γεωδαισιακές $\Gamma(v)$ και $\Gamma(v + \delta v)$, που ορίζεται από τη σχέση $n^i = V^i \delta v$ θα έχουμε

$$\frac{\delta^2 n^i}{\delta u^2} + R_{abc}^i V^a n^b U^c = 0 \quad (31)$$



Χρησιμοποιώντας μια affine παράμετρο u σε γεωδαισιακές παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (U_i V^i) &= \frac{\delta}{\delta u} (U_i V^i) = \frac{\delta U_i}{\delta u} V^i + U_i \frac{\delta V_i}{\delta u} = U_i \frac{\delta V_i}{\delta u} = \\ &= U_i \frac{\delta U_i}{\delta v} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta v} (U_i U^i) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} (U_i U^i) \end{aligned} \quad (32)$$

Όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση

$$\frac{\delta U_i}{\delta u} = 0$$

Αν οι γεωδαισιακές $\Gamma(v)$ είναι null, τότε θα ισχύει $U_i U^i = 0$, που σημαίνει

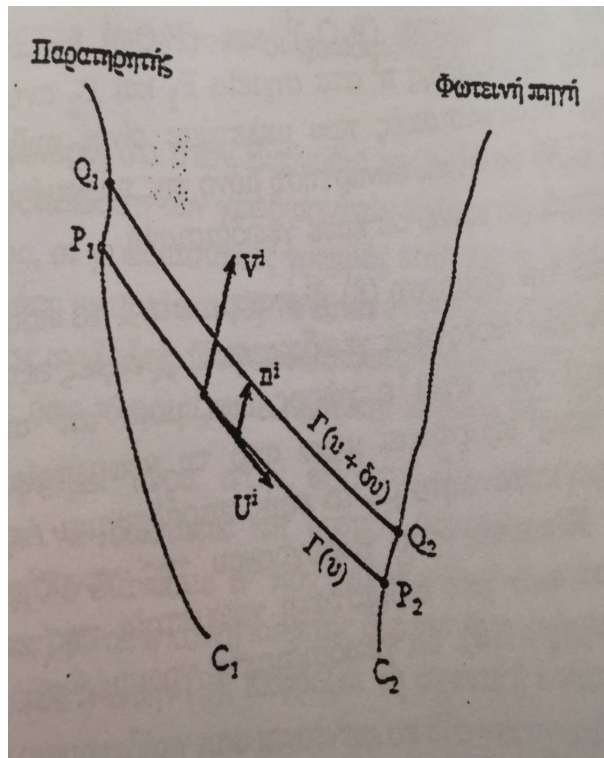
$$\frac{\partial}{\partial v} (U_i U^i) = 0$$

και η (32) γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial u} (U_i U^i) = 0 \quad (33)$$

Επίσης, αν η παράμετρος u κατά μήκος των γεωδαισιακών συμπίπτει με το μήκος τόξου, τότε θα ισχύει $U_i U^i = \pm 1$, οπότε πάλι η (32) θα καταλήγει στην (33). Έτσι λοιπόν, αν ισχύει κάποια από τις δύο πιο πάνω περιπτώσεις θα έχουμε ότι

το εσωτερικό γινόμενο $U_i V^i$ δεν θα εξαρτάται από την παράμετρο u , δηλαδή θα είναι σταθερό κατά μήκος των γεωδαισιακών (ή ισοδύναμα, το εσωτερικό γινόμενο $n_i \frac{\partial x^i}{\partial u}$ θα είναι σταθερό κατά μήκος των γεωδαισιακών). Οι null γεωδαισιακές έχουν ιδιαίτερη σημασία στη Σχετικότητα, διότι τις αστρονομικές πληροφορίες τις αποκτούμε με φωτόνια, των οποίων η ύπαρξη στο χωροχρόνο παριστάνεται με null γεωδαισιακές. Για το λόγο αυτό, θα προχωρήσουμε στη μελέτη των null γεωδαισιακών λίγο περισσότερο. Έστω C_1 και C_2 δύο time-like καμπύλες (όχι αναγκαστικά γεωδαισιακές), οι οποίες παριστάνουν έναν παρατηρητή και μία φωτεινή πηγή αντίστοιχα.



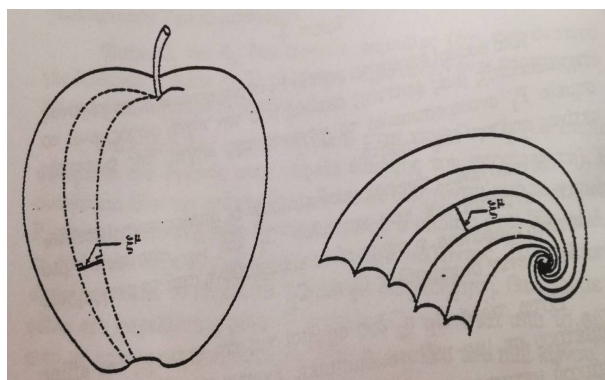
Θεωρούμε ένα σημείο P_1 πάνω στην καμπύλη C_1 (το οποίο φανερώνει ένα γεγονός στην πορεία ύπαρξης του παρατηρητή). Η οικογένεια όλων των null γεωδαισιακών που διέρχονται από το σημείο P_1 αποτελούν το null κώνο (ή κώνο φωτός), ο οποίος έχει δύο φύλλα, το φύλλο του παρελθόντος και το φύλλο του μέλλοντος. Το σημείο P_1 αντιπροσωπεύει το παρόν, το «τώρα» του παρατηρητή. Θεωρούμε το φύλλο του παρελθόντος μόνο. Η καμπύλη C_2 τέμνεται από το φύλλο αυτό σε κάποιο σημείο, έστω P_2 . Μέσω, λοιπόν, του null κώνου, ένα σημείο της καμπύλης C_1 αντιστοιχίζεται με ένα σημείο της καμπύλης C_2 . Αν θεωρήσουμε ένα γειτονικό σημείο Q_1 της καμπύλης C_1 , το φύλλο παρελθόντος του null κώνου, που σχηματίζεται από τις null γεωδαισιακές που διέρχονται από το σημείο Q_1 , τέμνει την καμπύλη C_2 στο σημείο Q_2 . Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας δηλαδή το φύλλο του παρελθόντος του null κώνου σε

κάθε σημείο της καμπύλης C_1 , έχουμε αντιστοίχιση των δύο καμπύλων C_1, C_2 , σημείο προς σημείο. Στο παραπάνω σχήμα, φαίνεται αυτή η αντιστοίχιση, μέσω των δύο null γεωδαισιακών P_1Q_1 και P_2Q_2 .

Από φυσική άποψη, το σημείο P_2 αντιπροσωπεύει το γεγονός της εκπομπής μιας φωτεινής ακτίνας από την πηγή φωτός, ενώ το σημείο P_1 αντιπροσωπεύει το γεγονός της λήψης της φωτεινής ακτίνας από τον παρατηρητή. Η οικογένεια των null γεωδαισιακών, οι οποίες πραγματοποιούν την αντιστοίχιση των καμπύλων C_1 και C_2 αποτελούν μία διδιάστατη επιφάνεια, η οποία είναι καθορισμένη από τη στιγμή που είναι δεδομένες οι καμπύλες C_1 και C_2 . Έστω, τώρα, u_1 και u_2 δύο αριθμοί για την επιλογή της affine παραμέτρου σε μία null γεωδαισιακή, έχουμε την ελευθερία ενός γραμμικού μετασχηματισμού (και μόνο αυτή), επομένως μία μοναδική παράμετρος u , η οποία ορίζεται πάνω στη διδιάστατη επιφάνεια και έχει τιμή $u = u_1$ στην καμπύλη C_1 και $u = u_2$ στην καμπύλη C_2 . Ακόμη, επιλέγουμε μία δεύτερη παράμετρο v που ορίζεται πάνω στην επιφάνεια και η οποία είναι σταθερή κατά μήκος κάθε μίας από τις null γεωδαισιακές. (Μπορούμε για παράδειγμα να επιλέξουμε σαν παράμετρο v το μήκος τόξου s_1 πάνω στην καμπύλη C_1). Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση απόκλισης γεωδαισιακών στο σύστημα των null γεωδαισιακών P_1P_2 και Q_1Q_2 .

Τα διανύσματα $(P_1Q_1)^i$ και $(P_2Q_2)^i$ είναι τα απειροστά διανύσματα απόκλισης n^i στα σημεία P_1 και P_2 αντίστοιχα. Ακόμη, επειδή οι γεωδαισιακές που μελετάμε είναι null, το εσωτερικό γινόμενο U_iV^i θα είναι συνάρτηση μόνο της παραμέτρου v , επομένως θα είναι σταθερό πάνω σε κάθε γεωδαισιακή. Από την εξίσωση (31) βλέπουμε ότι το πόσο συγκλίνουν ή αποκλίνουν δύο γειτονικές γεωδαισιακές γραμμές εξαρτάται από την καμπυλότητα που έχει ο χώρος, και μόνο από αυτό. Δηλαδή η απόκλιση τους εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία. Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό με το εξής παράδειγμα : Ας υποθέσουμε ότι η γεωμετρία Riemann του χωροχρόνου της γενικής σχετικότητας συμβολίζεται από μία διδιάστατη γεωμετρία της επιφάνειας ενός μήλου. Οι γεωδαισιακές γραμμές που ακολουθούνται από ζώφια στην επιφάνεια του μήλου συμβολίζουν τις κοσμικές γραμμές που ακολουθούνται από ένα ελεύθερο σωματίδιο μέσα στο χωροχρόνο Riemann . Η επιφάνεια του μήλου δεν έχει παντού την ίδια καμπυλότητα με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η μορφή των γεωδαισιακών. Βλέπουμε στο σχήμα, ότι όσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα τόσο περισσότερο συγκλίνουν οι γεωδαισιακές (στο κοτσάνι του μήλου).

Είναι φανερό ότι στον ευκλείδειο χώρο, όπου η καμπυλότητα είναι μηδέν, η απόκλιση των γεωδαισιακών είναι μηδέν. Δηλαδή στον ευκλείδειο χώρο οι γεωδαισιακές γραμμές είναι παράλληλες ευθείες. Παρόμοια μελέτη μπορεί κανείς να κάνει στην περίπτωση της επιφάνειας μιας λείας αχιβάδας. Οι γεωδαισιακές γραμμές συγκλίνουν στην επιφάνεια της όσο πλησιάζουμε προς την κορυφή της.



Ξαναγυρνάμε τώρα στην εξίσωση (31) της γεωδαισιακής απόκλισης για να δώσουμε τη φυσική σημασία των παραπάνω παρατηρήσεων. Το διάνυσμα n^μ που ονομάζεται διάνυσμα απόκλισης (deviation vector) είναι η κοινή κάθετος δύο γειτονικών γεωδαισιακών. Ο όρος $(\delta^2 n^\mu)/(\delta u^2)$ στην (31) εκφράζει τη σχετική επιτάχυνση των δύο ελεύθερων σωματιδίων που κινούνται σε δύο γειτονικές γεωδαισιακές γραμμές. Τα

$$U^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}, V^j = \frac{\partial x^j}{\partial v}$$

είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα στην τροχιά (εφαπτόμενα στις γεωδαισιακές) κι άρα εκφράζουν ταχύτητες.

Από την εξίσωση (31) της γεωδαισιακής απόκλισης προκύπτει δηλαδή ότι δύο σωματίδια που ακολουθούν διαφορετικές γεωδαισιακές γραμμές στο βαρυτικό πεδίο, προοδευτικά θα αποκλίνουν μεταξύ τους. Έτσι παρόλο που ένα σωματίδιο που πέφτει ελεύθερα φαίνεται να ηρεμεί, όταν παρατηρείται από ένα σύστημα συντεταγμένων που πέφτει ελεύθερα μαζί με το σωματίδιο, στο βαρυτικό πεδίο. Ωστόσο ένα ζεύγος γειτονικών σωματιδίων που πέφτουν ελεύθερα θα ανακάλυπταν μία σχετική κίνηση μεταξύ τους. Αυτή η σχετική κίνηση θα αποκάλυπτε την παρουσία του βαρυτικού πεδίου σε έναν παρατηρητή που θα έπεφτε ελεύθερα μαζί με τα σωματίδια. Βέβαια αυτό δεν αποτελεί παραβίαση της αρχής της ισοδυναμίας, διότι τα φαινόμενα του δεξιού μέλους της εξίσωσης (31) γίνονται αμελητέα όταν η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερη από τις χαρακτηριστικές αποστάσεις του πεδίου.

Σημείωση : Η εξίσωση της απόκλισης των γεωδαισιακών μπορεί να χρησιμεύσει στην παραγωγή της εξίσωσης Raychaudhuri, η οποία είναι ένα βασικό θεμέλιο στη μελέτη των singularities για το σύμπαν.

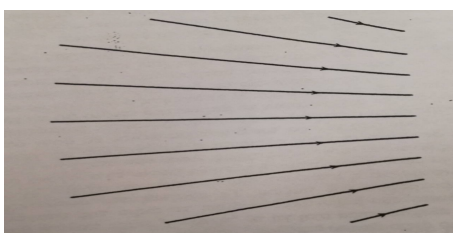
Παλιρροϊκές δυνάμεις

Αφού μεταξύ δύο γειτονικών σωματιδίων που κινούνται ελεύθερα στο βαρυτικό πεδίο υπάρχει σχετική επιτάχυνση, τότε μεταξύ των σωματιδίων αυτών

θα εμφανίζονται δυνάμεις, οι λεγόμενες **παλιρροϊκές δυνάμεις**, οι οποίες είναι αυτές που προκαλούν την απόκλιση στις τροχιές των γειτονικών σωματιδίων. Όμως, όπως είδαμε από την εξίσωση (30) της γεωδαισιακής απόκλισης, ο όρος $(\delta^2 n^i)/(\delta u^2)$ εκφράζει τη σχετική επιτάχυνση δύο γειτονικών σωματιδίων που κινούνται ελεύθερα στο βαρυτικό πεδίο, συμπεραίνουμε ότι η καμπυλότητα του χωροχρόνου, στον οποίο τα σωματίδια ακολουθούν γεωδαισιακές, εκφράζει μαθηματικά τις παλιρροϊκές δυνάμεις. **Οι παλιρροϊκές δυνάμεις προκαλούνται από τις ανομοιογένειες των βαρυτικών πεδίων και εμποδίζουν την κατασκευή αδρανειακών συστημάτων που να καλύπτουν ολόκληρο τον καμπυλωμένο χωροχρόνο. Είναι επομένως, οι δυνάμεις που αποκαλύπτουν την παρουσία της βαρύτητας στη γενική σχετικότητα. Οι παλιρροϊκές δυνάμεις είναι αυτές που προκαλούν τις παλίρροιες. Εάν η γη βρισκόταν μέσα σε ένα ομοιογενές βαρυτικό πεδίο και έπεφτε ελεύθερα, δεν θα είχε παλίρροιες. Οι παλίρροιες εμφανίζονται εξαιτίας της διαφοράς των βαρυτικών πεδίων της σελήνης και του ήλιου κατά μήκος της διαμέτρου της γης.** Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εμφάνιση των παλιρροϊκών δυνάμεων θεωρούμε το παράδειγμα που ακολουθεί. Θεωρούμε ένα διαστημόπλοιο σε τροχιά γύρω από τη γη. Το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση. Έτσι, οι αστροναύτες βρίσκονται σε ένα περιβάλλον μηδενικού g , δεν έχουν βάρος και δεν αισθάνονται καμία βαρυτική δύναμη. Το εσωτερικό του διαστημόπλοιου αποτελεί, επομένως, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς: ένα δοκιμαστικό σωματίδιο που ηρεμεί ως προς το διαστημόπλοιο παραμένει σε ηρεμία, ενώ ένα δοκιμαστικό σωματίδιο που κινείται, διατηρείται σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Παρόλα αυτά ως προς έναν «ακίνητο» παρατηρητή (ακίνητο ως προς τους απλανείς αστέρες), το διαστημόπλοιο κάνει επιταχυνόμενη κίνηση, και ένας τέτοιος παρατηρητής θα ανασκεύαζε το επιχείρημα των αστροναυτών ότι βρίσκονται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, λέγοντας ότι και το διαστημόπλοιο και το δοκιμαστικό σωματίδιο μέσα σε αυτό πέφτουν με τον ίδιο ρυθμό και ότι οι αστροναύτες εξαπατώνται από τα φαινόμενα.

Ρωτάμε τώρα: Τα φαινόμενα της βαρύτητας εξαλείφονται εντελώς από την ελεύθερη πτώση ; Υπάρχουν κάποια τοπικά πειράματα που να επιτρέπουν στους αστροναύτες να διαπιστώσουν ότι πέφτουν σε ένα βαρυτικό πεδίο και δεν ηρεμούν σε κάποια περιοχή μακριά από κάθε ελκτική μάζα ; **Η απάντηση είναι ότι οι αστροναύτες μπορούν να ανιχνεύσουν το βαρυτικό πεδίο με τα παλιρροϊκά φαινόμενα που προκαλεί.** Εάν οι αστροναύτες τοποθετήσουν μία σταγόνα νερού στο κέντρο του διαστημόπλοιου θα δουν ότι αυτή η σταγόνα δεν είναι ακριβώς σφαιρική, αλλά έχει δύο εξογκώματα, τα οποία της δίνουν ελλειψοειδές σχήμα. Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και αφού η επιφανειακή τάση θα έκανε τη σταγόνα σφαιρική, συμπεραίνουμε ότι η απόκλιση από το σφαιρικό σχήμα δηλώνει την ύπαρξη του βαρυτικού πεδίου. Τα εξογκώματα οφείλονται στην ανομοιογένεια του βαρυτικού πεδίου: το άκρο της σταγόνας που βρίσκεται πλησιέστερα στη γη το «τραβάει» πάρα

πολύ η βαρύτητα, ενώ το άλλο άκρο δεν το «τραβάει» αρκετά. [Σημειώνουμε ότι αν οι αστροναύτες έκαναν τα πειράματά τους στο εσωτερικό ενός αρκετά μικρού διαστημόπλοιου, δεν θα μπορούσαν να ανιχνεύσουν τις παλιρροϊκές δυνάμεις, ούτε το βαρυτικό πεδίο. Για να το πετύχουν αυτό και να μετρήσουν την παλιρροϊκή δύναμη που προκαλεί η γη σε μία σταγόνα νερού, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν πολύ μεγάλη σταγόνα και κατά συνέπεια πολύ μεγαλύτερο διαστημόπλοιο]. Οι παλιρροϊκές δυνάμεις μπορούν επίσης να παρασταθούν από δυναμικές γραμμές, όπως ακριβώς γίνεται στην περίπτωση ενός ηλεκτρικού πεδίου. Μία πιο οικεία απεικόνιση των βαρυτικών πεδίων χρησιμοποιεί τις δυναμικές γραμμές των βαρυτικών πεδίων και όχι των παλιρροϊκών δυνάμεων.



Αυτή η απεικόνιση είναι πολύ χρήσιμη σε έναν εξωτερικό παρατηρητή που θα ήθελε να μελετήσει την κίνηση του διαστημόπλοιου, ή οποιουδήποτε άλλου σώματος, μέσα στο βαρυτικό πεδίο. Αλλά αυτή η απεικόνιση αποτυγχάνει να περιγράψει τι συμβαίνει τοπικά. Εάν θέλουμε μία περιγραφή του τι αντιλαμβάνονται οι αστροναύτες μέσα στο διαστημόπλοιο, τότε η απεικόνιση των δυναμικών γραμμών και παλιρροϊκών δυνάμεων είναι πολύ πιο αποκαλυπτική από αυτή των δυναμικών γραμμών του βαρυτικού πεδίου.

3.2 Ενότητες από την Καθολική Διαφορική Γεωμετρία

Τα μοντέλα που θα θεωρήσουμε περιγράφουν τα βαρυτικά φαινόμενα ως συνέπεια ενός καμπυλωμένου και δυναμικού χωρόχρονου, ο οποίος περιγράφεται με τα εργαλεία της διαφορικής γεωμετρίας. Στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύσσονται οι βασικές μαθηματικές έννοιες που θα χρειαστούμε στη συνέχεια της εργασίας.

Διαφορίσιμη Πολλαπλότητα

Η έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας αποτελεί το βασικό μαθηματικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο αναπτύσσουμε τα διάφορα γεωμετρικά μοντέλα για τη βαρύτητα. Η διαφορίσιμη δομή της, μας επιτρέπει να ορίσουμε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας έναν χώρο, που ονομάζουμε εφαπτόμενο, ο οποίος έχει δομή διανυσματικού χώρου. Χρησιμοποιώντας αυτή τη δομή, ορίζουμε γεωμετρικά αντικείμενα επί της πολλαπλότητας, όπως είναι οι τανυστές και οι συνοχές.

Θα παρουσιάσουμε έναν ορισμό της ένωσης των εφαπτόμενων χώρων από κάθε σημείο της πολλαπλότητας σε έναν χώρο που είναι ο ίδιος πολλαπλότητα

και ονομάζεται εφαπτόμενη δέσμη, στην οποία αργότερα θα περιγράψουμε τις γενικευμένες γεωμετρίες Finsler και Lagrange.

Οι πολλαπλότητες που θα θεωρήσουμε είναι τοπολογικοί χώροι Hausdorff, είναι δηλαδή σύνολα για τα οποία κάθε δύο διακριτά σημεία έχουν γειτονίες, οι οποίες είναι ξένες μεταξύ τους. Αν M και N είναι δύο τέτοιοι χώροι, μπορούμε να ορίσουμε μία διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του M ένα συγκεκριμένο σημείο του N . Αυτή η διαδικασία ονομάζεται απεικόνιση από τον M στον N και συμβολίζεται $\phi : M \rightarrow N$. Για δύο απεικονίσεις $\phi : M \rightarrow N$ και $\psi : N \rightarrow O$ ορίζουμε τη σύνθεση $\psi \circ \phi : M \rightarrow O$ όπου $(\psi \circ \phi)(p) = \psi(\phi(p))$ με $p \in M$. Αν η $\phi : M \rightarrow N$ είναι 1 προς 1 και επί, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ με $(\phi^{-1} \circ \phi)(p) = p$. Αν η ϕ είναι και αμφισυνεχής ονομάζεται διαφορομορφισμός και οι χώροι M και N ονομάζονται τότε διαφορομορφικοί. Έστω M ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff, U μία περιοχή του, V μία ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^n και ο διαφορομορφισμός $\phi : U \rightarrow V$ με

$$p \mapsto \phi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p)), p \in M$$

Τότε, το ζευγάρι (U, ϕ) ονομάζεται τοπικό σύστημα συντεταγμένων ή χάρτης του M και η n -άδα $(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$ συντεταγμένες του p σε αυτό το σύστημα. Έστω μία συλλογή $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}_{\kappa \in I}$, όπου οι περιοχές U_κ καλύπτουν πλήρως τον M , δηλαδή $\bigcup_{\kappa \in I} U_\kappa = M$. Αν για δύο περιοχές U_κ και U_λ για τις οποίες ισχύει $U_\kappa \cap U_\lambda \neq \emptyset$ η απεικόνιση

$$\phi_{\lambda\kappa} = \phi_\lambda \circ \phi_\kappa^{-1} : \phi_\kappa(U_\kappa \cap U_\lambda) \rightarrow \phi_\lambda(U_\kappa \cap U_\lambda) \quad (34)$$

με

$$(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (35)$$

είναι C^r , αν δηλαδή οι συνιστώσες της έχουν συνεχείς r παραγώγους, τότε οι χάρτες (U_κ, ϕ_κ) και $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ λέγονται C^r συμβιβαστοί. Η $\phi_{\lambda\kappa}$ ορίζει έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων στην περιοχή $U_\kappa \cap U_\lambda$ και είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφο την $\phi_{\lambda\kappa}^{-1} = \phi_{\kappa\lambda}$. Μία συλλογή $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}_{\kappa \in I}$ με $\bigcup_{\kappa \in I} U_\kappa = M$ η οποία αποτελείται από C^r συμβιβαστούς χάρτες ονομάζεται C^r άτλας του M . Δύο C^r άτλαντες $\{(U_\kappa, \phi_\kappa)\}_{\kappa \in I}$ και $\{(U_\lambda, \phi_\lambda)\}_{\lambda \in I'}$ ονομάζονται ισοδύναμοι αν η συλλογή $\{(U_\mu, \phi_\mu)\}_{\mu \in I \cup I'}$ είναι C^r άτλας. Ερχόμαστε τώρα στον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας:

Ορισμός 1 Ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff εφοδιασμένος με μία κλάση ισοδυναμίας C^r ατλάντων ονομάζεται C^r n -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μία C^∞ διαφορίσιμη πολλαπλότητα ονομάζεται λεία πολλαπλότητα.

Γεωμετρικά αντικείμενα στην πολλαπλότητα

Πρώτα θα χρειαστούμε την έννοια της παραμετρικής καμπύλης, η οποία ορίζεται ως εξής: Έστω διαφορίσιμη πολλαπλότητα M και C^r , $r \geq 1$ απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ με $t \mapsto \gamma(t)$. Η γ ονομάζεται C^r καμπύλη της M με παράμετρο t , ενώ αν $r = \infty$ η γ ονομάζεται λεία καμπύλη της M . Θεωρούμε μία λεία πραγματική συνάρτηση $f \in \mathcal{FM}$. Ορίζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης γ στο σημείο $p = \gamma(t)$ ως η απεικόνιση

$$X : \mathcal{FM} \rightarrow \mathbb{R}$$

με

$$X(f) = \frac{df}{dt} \quad (36)$$

Με άλλα λόγια, το εφαπτόμενο διάνυσμα X ταυτίζεται με τον διαφορικό τελεστή d/dt . Ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε εφαπτόμενα διανύσματα και για οποιαδήποτε άλλη C^r παραμετρική καμπύλη που περνάει από το p .

Το σύνολο των διαφορικών τελεστών σε ένα σημείο της πολλαπλότητας συνιστούν πραγματικό διανυσματικό χώρο, όπως προκύπτει από τις ιδιότητές τους. Ο χώρος αυτός ονομάζεται εφαπτόμενος στο p και συμβολίζεται $T_p M$, ενώ τα στοιχεία του ονομάζονται ανταλλοίωτα διανύσματα.

Σε μία περιοχή U της πολλαπλότητας, μπορεί να ορισθεί ένα διανυσματικό πεδίο X αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο p της περιοχής ένα διάνυσμα του $T_p M$. Σε μία λεία πολλαπλότητα θα έχουμε ένα λείο διανυσματικό πεδίο, αν για κάθε $f \in \mathcal{FM}$ η συνάρτηση $X(f) : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λεία. Θα συμβολίζουμε τον χώρο των λείων διανυσματικών πεδίων ως CM . Ένα σύνολο λείων γραμμικά ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων αποτελεί μία βάση του CM και ονομάζεται κινούμενο πλαίσιο.

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων (U, ϕ) υπολογίζουμε τη δράση του εφαπτόμενου στην καμπύλη γ διανύσματος $X = d/dt$ σε μία πραγματική συνάρτηση f και βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt}[(f \circ \phi^{-1})(\phi \circ \gamma)] = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{dt} \quad (37)$$

Ή πιο σύντομα

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (38)$$

Παρατηρούμε πως σε ένα σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα d/dt μπορεί να γραφεί

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (39)$$

Τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$ αποτελούν τη φυσική βάση του εφαπτόμενου χώρου στις συντεταγμένες x^μ , και οι ποσότητες $X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$ ονομάζονται συνιστώσες

του διανύσματος X στη βάση αυτή. Βέβαια μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε βάση $\{e_{(\mu)}\}$ που παράγει τον χώρο αυτό, χωρίς απαραίτητα να είναι συντεταγμένα. Αν αφήσουμε το $X = \frac{d}{dt}$ να δράσει στη συνάρτηση συντεταγμένων x^ν χρησιμοποιώντας την (39) βρίσκουμε τις συνιστώσες του X :

$$X(x^\nu) = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\nu}{dt} = X^\nu \quad (40)$$

Αντίστροφα, αν έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο $X = X^\mu \partial_\mu$ μπορούμε να βρούμε μία καμπύλη στην οποία το X να είναι εφαπτόμενο, λύνοντας τις εξισώσεις

$$X^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (41)$$

Η τελευταία έχει πάντα μοναδική λύση για κάποιο αρχικό σημείο $x^\mu(p)$ σε κάποια περιοχή του. Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο έχει μία μοναδική οικογένεια ολοκληρωτικών καμπύλων σε μία περιοχή οποιουδήποτε σημείου της πολλαπλότητας. Ο δυϊκός χώρος T_p^*M του εφαπτόμενου ορίζεται ως το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων

$$\omega(X) \equiv \langle \omega, X \rangle: T_pM \rightarrow \mathbb{R} \quad (42)$$

Ο χώρος αυτός έχει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου και τα στοιχεία του ονομάζονται δυϊκά ή συναλλοίωτα διανύσματα. Από φυσική άποψη, ο δυϊκός χώρος ερμηνεύεται ως ο φασικός χώρος με βάση τις γενικευμένες θέσεις και ορμές. Ένα παράδειγμα δυϊκού διανύσματος είναι η βαθμίδα μίας συνάρτησης $f \in \mathcal{F}M$, η οποία για ένα διάνυσμα $X = \frac{d}{dt}$ ορίζεται ως εξής:

$$df(X) = df \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{df}{dt} \quad (43)$$

Για $f = x^\mu$ και $X = \partial_\nu$ η (43) δίνει

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (44)$$

Συμπεραίνουμε πως το σύνολο $\{dx^\mu\}$ αποτελεί τη δυϊκή βάση της φυσικής βάσης $\{\partial_\nu\}$, και κάθε δυϊκό διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \quad (45)$$

Και πάλι μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε βάση $\{\theta^{(\nu)}\}$ που παράγει τον δυϊκό χώρο, με την απαίτηση $\langle e_{(\mu)}, \theta^{(\nu)} \rangle = \delta_\mu^\nu$. Ορίζεται ο k ανταλλοίωτης και l συναλλοίωτης τάξης τανυστής T ως η πολυγραμμική απεικόνιση

$$T: \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_k \text{ στοιχεία} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_l \text{ στοιχεία} \rightarrow \mathbb{R}$$

Το σύνολο των (k, l) τανυστών στο σημείο p ορίζει έναν διανυσματικό χώρο, τον οποίο συμβολίζουμε $T_p(k, l)$ ή T_l^k . Μπορεί να οριστεί μία πράξη γινομένου μεταξύ δύο (k, l) και (r, s) τανυστών T και S ως

$$\otimes : T_p(k, l) \times T_p(r, s) \rightarrow T_p(k+r, l+s)$$

με

$$(T \otimes S)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k+r)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l+s)})$$

$$= T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}; X_{(1)}, \dots, X_{(l)})S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+r)}; X_{(l+1)}, \dots, X_{(l+s)})$$

Ονομάζουμε την πράξη αυτή τανυστικό γινόμενο. Οι συνιστώσες ενός (k, l) τανυστή T ορίζονται ως

$$T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_k} = T(\theta^{(\nu_1)}, \dots, \theta^{(\nu_k)}; e_{(\mu_1)}, \dots, e_{(\mu_l)}) \quad (46)$$

οπότε γράφουμε

$$T = T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_k} e_{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes e_{(\nu_k)} \otimes \theta^{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \theta^{(\mu_l)} \quad (47)$$

Κάθε (k, l) τανυστής μπορεί να γραφεί σύμφωνα με την (47), οπότε συμπεραίνουμε πως το σύνολο $\{e_{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes e_{(\nu_k)} \otimes \theta^{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \theta^{(\mu_l)}\}$ παράγει τον χώρο των (k, l) τανυστών, δηλαδή το σύνολο αυτό αποτελεί μία βάση του $T_p(k, l)$. Η βάση που προκύπτει από το τοπικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή η $\{\partial_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\nu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l}\}$ ονομάζεται φυσική βάση του χώρου. Σε αυτή τη βάση ένας (k, l) τανυστής T γράφεται

$$T = T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_k} \partial_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\nu_k} \otimes dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_l} \quad (48)$$

Ο μετρικός τανυστής

Η έννοια της απόστασης στην πολλαπλότητα συνδέεται με τον μετρικό τανυστή, ο οποίος ορίζεται ως η απεικόνιση

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (49)$$

με τις εξής ιδιότητες:

- 1) Μη εκφυλισμένη $g(X, Y) = 0, \forall Y \in T_p M \Leftrightarrow X = 0$
- 2) Συμμετρική $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in T_p M$
- 3) Θετικά ορισμένη $g(X, X) > 0, \forall X \in T_p M, X \neq 0$

Ως μέτρο $\|X\|$ ενός διανύσματος ορίζεται η ποσότητα

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}, X \in T_p M \quad (50)$$

και η πράξη του εσωτερικού γινομένου \cdot στον T_pM ορίζεται ως

$$\cdot : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \quad (51)$$

με

$$X \cdot Y = g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \quad (52)$$

ενώ ως συνημίτονο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων ορίζεται η ποσότητα

$$\cos(X, Y) = \frac{g(X, Y)}{\sqrt{g(X, X)g(Y, Y)}} \quad (53)$$

Δύο διανύσματα X και Y είναι κάθετα αν $g(X, Y) = 0$. Η βάση του χώρου μπορεί να επιλεγεί πάντα έτσι ώστε σε ένα σημείο η μετρική να λάβει την κανονική της μορφή $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Να σημειώσουμε εδώ πως στη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας χρησιμοποιούμε (ψευδο)-Riemann μετρική, η οποία μπορεί να είναι εκφυλισμένη και αρνητική. Στην περίπτωση αυτή, η κανονική μορφή της μετρικής τοπικά είναι $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ και λέμε ότι ο μετρικός χώρος είναι τοπικά Minkowski με υπογραφή Lorentz. Αυτό σημαίνει πως μπορούμε να έχουμε διανύσματα με θετικό, μηδενικό ή αρνητικό μέτρο τα οποία ονομάζονται χωροειδή, φωτοειδή και χρονοειδή αντίστοιχα. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες των αντίστοιχων διανυσματικών πεδίων ονομάζονται χωροειδείς, φωτοειδείς και χρονοειδείς.

Η απόσταση ds μεταξύ δύο απειροστά κοντινών σημείων της πολλαπλότητας με συντεταγμένη απόσταση dx^μ ορίζεται ως

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (54)$$

Έτσι το μήκος μίας παραμετρικής καμπύλης $\gamma(t)$ βρίσκεται ίσο με

$$l_\gamma(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (55)$$

Οι φυσικές τροχιές σωματιδίων στον χωρόχρονο περιγράφονται από χρονοειδείς και φωτοειδείς καμπύλες. Οι πρώτες χαρακτηρίζονται από αρνητικό μήκος σύμφωνα με την (55), καθώς τα εφαπτόμενα χρονοειδή διανύσματα έχουν αρνητικό μέτρο. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται ο ιδιόχρονος ως η παράμετρος τ με $d\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$. Το στοιχείο όγκου μίας n -διάστατης πολλαπλότητας ορίζεται στη συντεταγμένη βάση ως η απεικόνιση, η οποία ονομάζεται και ταυστής του Levi-Civita:

$$\sqrt{|g|} d^n x = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (56)$$

όπου g η ορίζουσα της μετρικής και \wedge το σφηνοειδές γινόμενο

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_m} = \sum_{\substack{\text{άρτιες} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_m}} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_m} - \sum_{\substack{\text{περιττές} \\ \text{ανακατατάξεις} \\ \text{δεικτών} \\ \mu_1 \dots \mu_m}} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_m}.$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα μίας φυσικής τροχιάς $x(\tau)$ για χρονοειδείς ή $x(\lambda)$ για φωτοειδείς καμπύλες στον χωρόχρονο ονομάζεται τετραταχύτητα U . Στην περίπτωση των χρονοειδών καμπύλων έχουμε

$$U^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (57)$$

Σε πλήρεις μονάδες βρίσκουμε

$$g(U, U) = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \quad (58)$$

αποτέλεσμα το οποίο επεκτείνεται και για τις φωτοειδείς τροχιές. Η γενίκευση της ορμής ενός σωματιδίου ονομάζεται τετραορμή και ορίζεται ως

$$p^\nu = mU^\nu = m \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (59)$$

με

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \quad (60)$$

Η μετρική μας δίνει έναν τρόπο να αντιστοιχίσουμε 1-1 και επί τον $T_p M$ με τον δυϊκό χώρο $T_p^* M$ ορίζοντας

$$X^* = g(X, \dots) \quad (61)$$

και σε συνιστώσες γράφουμε

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu.$$

Συναλλοιώτη παραγωγήιση και τανυστής στρέψης

Η συναλλοιώτη παραγωγήιση ενός τανυστικού πεδίου μιας πολλαπλότητας, στη μοντέρνα θεώρηση, αποτελεί γενίκευση της μερικής παραγωγίσης και ανάγεται σε αυτήν όταν δρα σε πραγματική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, η συναλλοιώτη παραγωγήιση ή (γραμμική) συνοχή D είναι μία απεικόνιση

$$D : C_l^k M \rightarrow C_{l+1}^k M \quad (62)$$

με συνιστώσες

$$(DT)^{\nu^1 \dots \nu^k}_{\mu_1 \dots \mu_{l+1}} = D_{\mu_{l+1}} T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu^1 \dots \nu^k} \quad (63)$$

όπου $C_l^k M$ το σύνολο των (k, l) τανυστικών πεδίων της πολλαπλότητας M . Θέλουμε η D να διατηρεί τις βασικές ιδιότητες της μερικής παραγωγίσης, όπως είναι η γραμμικότητα:

$$D(aT + bS) = aDT + bDS \quad (64)$$

ο κανόνας Leibniz για τις συνιστώσες:

$$D_{\mu_{l+n+1}} (T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu^1 \dots \nu^k} V_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}}^{\nu^{k+1} \dots \nu^{k+m}}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (D_{\mu_{l+n+1}} T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_k}) V_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}}^{\nu_{k+1} \dots \nu_{k+m}} + \\
&\quad + T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_k} (D_{\mu_{l+n+1}} V_{\mu_{l+1} \dots \mu_{l+n}}^{\nu_{k+1} \dots \nu_{k+m}})
\end{aligned} \tag{65}$$

ενώ μία προφανής απαίτηση είναι η συναλλοίωτη παραγωγή του δ'_μ να μηδενίζεται. Τέλος, όπως αναφέραμε η συναλλοίωτη παραγωγή ανάγεται στη μερική όταν δρα σε πραγματικές συναρτήσεις στην M . Στη συντεταγμένη βάση θα έχουμε:

$$D_\mu f = \partial_\mu f \tag{66}$$

Η κατευθυνόμενη συναλλοίωτη παραγωγή ορίζεται ως η απεικόνιση

$$D_X : CM \times C_l^k M \rightarrow C_l^k M \tag{67}$$

όπου $X = d/dt$. Εύκολα φαίνεται πως η $D_{e_{(\mu)}} T$ δίνει τη μ συνιστώσα της DT στη βάση $e_{(\mu)}$. Από την (64) συμπεραίνουμε πως η D_X είναι γραμμική:

$$D_X(aT + bS) = aD_X T + bD_X S \tag{68}$$

ενώ από την (65) παίρνουμε

$$D_X(T \otimes V) = (D_X T) \otimes V + T \otimes (D_X V) \tag{69}$$

Από την (66) εύκολα παίρνουμε για πραγματική συνάρτηση f

$$D_X f = X(f) = \frac{df}{dt} \tag{70}$$

Ορίζουμε τους συντελεστές συνοχής $G_{\mu\kappa}^\sigma$ ως

$$D_{e_{(\mu)}} e_{(\kappa)} \equiv G_{\kappa\mu}^\sigma e_{(\sigma)} \tag{71}$$

ή

$$G_{\kappa\mu}^\sigma = \langle D_{e_{(\mu)}} e_{(\kappa)}, \theta^{(\sigma)} \rangle . \tag{72}$$

Ο ταυστής στρέψης του χώρου T ορίζεται ως $T_{\mu\lambda}^\nu = G_{\mu\lambda}^\nu - G_{\lambda\mu}^\nu = 2W_{\mu\lambda}^\nu$. Από το νόμο μετασχηματισμού εύκολα βρίσκουμε

$$G_{\mu\lambda}^\nu - G_{\lambda\mu}^\nu = (G_{\mu'\lambda'}^{\nu'} - G_{\lambda'\mu'}^{\nu'}) \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}}$$

οπότε η στρέψη είναι πράγματι ταυστής. Από την άλλη, εύκολα βλέπουμε πως τα $V_{\mu\lambda}^\nu$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον νόμο μετασχηματισμού, οπότε αποτελούν συντελεστές συνοχής από μόνα τους με το χαρακτηριστικό της συμμετρίας ως προς τους συναλλοίωτους δείκτες. Ο ταυστής στρέψης ως απεικόνιση $CM \times CM \rightarrow CM$ γράφεται:

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] \tag{73}$$

όπου $[X, Y] = XY - YX : CM \times CM \rightarrow CM$ ο μεταθέτης δύο διανυσμάτων, και έχει συνιστώσες

$$T(\partial_\mu, \partial_\nu) = T_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda. \quad (74)$$

Παράλληλη μετατόπιση και Γεωδαισιακές

Στην παρακάτω θεώρηση, δίνουμε την έννοια της παράλληλης μετατόπισης και εξίσωσης των γεωδαισιακών επί μιας πολλαπλότητας Riemann.

Έστω παραμετρική καμπύλη $\gamma(t)$ με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $X = d/dt$. Η παράλληλη μετατόπιση ενός (k, l) τανυστή A ως προς τη συνοχή D με συντελεστές $G_{\mu\lambda}^\nu$ ορίζεται ως η συνθήκη

$$D_X A = 0 \quad (75)$$

επάνω στην καμπύλη. Ο τανυστής T , τότε θεωρείται σταθερός κατά μήκος της $\gamma(t)$ ως προς τη συνοχή D . Θεωρούμε δύο διανυσματικά πεδία Y και Z , τα οποία μεταφέρονται παράλληλα στην καμπύλη $\gamma(t)$ ως προς τη συνοχή D και υπολογίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο του εσωτερικού γινομένου τους κατά μήκος της:

$$D_X g(Y, Z) = X^\kappa D_\kappa (g_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu) = X^\kappa (D_\kappa g_{\mu\nu}) Y^\mu Z^\nu, \quad (76)$$

το οποίο είναι γενικά διαφορετικό του μηδενός, εκτός και αν ισχύει ταυτοτικά

$$Dg = 0. \quad (77)$$

Αυτή η συνθήκη ονομάζεται μετρική συμβατότητα και είναι σπουδαίας σημασίας για τη φυσική συνέπεια της θεωρίας καθώς οδηγεί σε διατήρηση της γωνίας μεταξύ διανυσμάτων όπως προκύπτει από την (53) και του μέτρου ενός διανύσματος σύμφωνα με την (50). Επίσης, διατηρεί τη σταθερότητα του μήκους ενός διανύσματος κατά μήκος μιας τροχιάς σε μία πολλαπλότητα.

Θέλουμε να ορίσουμε στον χώρο μας, μία γενίκευση της παραλληλίας. Μία ιδιότητα που έχει η παραλληλία στον ευκλείδιο χώρο είναι να μεταφέρει παράλληλα το εφαπτόμενο διάνυσμά της και αυτή είναι μία ιδιότητα που θέλουμε να διατηρήσουμε και στον χώρο που μελετάμε. Μία πρώτη προσπάθεια λοιπόν είναι να θεωρήσουμε την καμπύλη για την οποία

$$D_X X = 0 \quad (78)$$

Η κλασική μορφή της συναλλοίωτης παραγωγίσης τανυστικών πεδίων, η οποία εξαρτάται από το μετρικό τανυστή, γίνεται με βάση τους συντελεστές συνοχής των συμβόλων Christoffel σε μια πολλαπλότητα Riemann,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\nu g_{\kappa\mu} + \partial_\mu g_{\nu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (79)$$

Για τη μετρικά συμβατή συνοχή Levi-Civita και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συναλλοιώτης παραγωγίσισης υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\nabla_X X = 0 &\Leftrightarrow \nabla_X \left(\frac{dx^\nu}{dt} \partial_\nu \right) = \frac{d}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \partial_\nu + \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \\ &= \left(\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right) \partial_\lambda = 0\end{aligned}$$

ή

$$\frac{d^2 x^\lambda}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (80)$$

Αυτή ονομάζεται εξίσωση γεωδαισιακών και όπως αναφέραμε περιγράφει φυσικές τροχιές στο χωρόχρονο, απουσία άλλων δυνάμεων. Σημειώνουμε πως η εξίσωση (80) περιορίζει την παραμετροποίηση της λύσης της σε μία κλάση παραμέτρων:

$$t = a\lambda + b \quad (81)$$

όπου a, b σταθερές. Οι παράμετροι που ανήκουν σε αυτή την κλάση ονομάζονται ομοπαράλληλικές (affine).

Ο τανυστής καμπυλότητας

Ο τανυστής καμπυλότητας που αντιστοιχεί στη συνοχή D με συντελεστές $G_{\mu\nu}^\lambda$ ορίζεται ως απεικόνιση $CM \times CM \times CM \rightarrow CM$:

$$Q(X, Y)Z = [D_X, D_Y]Z - D_{[X, Y]}Z \quad (82)$$

και έχει συνιστώσες

$$Q(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\kappa = Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \quad (83)$$

με

$$Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu G_{\kappa\nu}^\lambda - \partial_\nu G_{\kappa\mu}^\lambda + G_{\rho\mu}^\lambda G_{\kappa\nu}^\rho - G_{\rho\nu}^\lambda G_{\kappa\mu}^\rho \quad (84)$$

Ο τανυστής αυτός περιέχει πληροφορίες για την καμπυλότητα του χωρόχρονου, λόγω της οποίας παρατηρούνται τα βαρυτικά φαινόμενα. Από τον ορισμό αμέσως προκύπτει η ιδιότητα

$$Q_{\kappa\mu\nu}^\lambda = -Q_{\kappa\nu\mu}^\lambda \quad (85)$$

Από τον τανυστή καμπυλότητας ορίζεται ο $(2, 0)$ τανυστής

$$Q_{\mu\nu} = Q_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (86)$$

ο οποίος ονομάζεται τανυστής Ricci. Το ίχνος του τανυστή Ricci

$$Q = g^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} \quad (87)$$

ονομάζεται βαθμωτή καμπυλότητα ή καμπυλότητα Ricci. Αν ο χώρος είναι εφοδιασμένος με τη Levi-Civita συνοχή, τότε η (84) ονομάζεται τανυστής καμπυλότητας του Riemann και γράφεται $R_{\kappa\mu\nu}^\lambda$ και ανάλογα γράφονται ο τανυστής και το βαθμωτό του Ricci. Για τον τανυστή του Riemann ισχύουν οι επιπλέον συμμετρίες

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (88)$$

και

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (89)$$

Για χώρο εφοδιασμένο με τη Levi-Civita συνοχή, ο τανυστής Ricci $R_{\mu\nu}$ αποτελεί τη μοναδική ανεξάρτητη συστολή του τανυστή Riemann και επιπλέον είναι συμμετρικός.

Ταυτότητες Bianchi

Ο τανυστής καμπυλότητας (82) και η στρέψη (73) δεν είναι ανεξάρτητα μεγέθη αλλά συνδέονται από τις σχέσεις

$$Q_{X,Y,Z} \{D_X T(X,Y) - T([X,Y],Z) - Q(X,Y)Z\} = 0 \quad (90)$$

και

$$Q_{X,Y,Z} \{D_X Q(Y,Z) - Q(Y,Z)D_X - Q([X,Y],Z)\} = 0 \quad (91)$$

όπου $Q_{X,Y,Z}$ το άθροισμα για όλες τις κυκλικές μεταθέσεις των X, Y, Z για τους όρους εντός των αγκύλων. Οι παραπάνω ονομάζονται ταυτότητες Bianchi και επαληθεύονται εύκολα με χρήση των ορισμών της καμπυλότητας και της στρέψης.

Η συνοχή Levi-Civita έχει μηδενική στρέψη οπότε από τις εξισώσεις Bianchi σε συνδυασμό με τις ιδιότητες (85), (88) και (89) λαμβάνουμε για τον τανυστή Riemann τις σημαντικές ιδιότητες

$$R_{[\kappa\mu\nu]}^\lambda = 0 \quad (92)$$

και

$$\nabla_{[\sigma} R_{\rho\kappa]\mu\nu} = 0 \quad (93)$$

Από την τελευταία και τις (86) και (87) για Levi-Civita συνοχή παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_{[\sigma} R_{\rho\kappa]\mu\nu} &= \nabla_\sigma R_{\rho\kappa\mu\nu} + \nabla_\kappa R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\kappa\sigma\mu\nu} = 0 \\ \Leftrightarrow g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} (\nabla_\sigma R_{\rho\kappa\mu\nu} + \nabla_\kappa R_{\sigma\rho\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\kappa\sigma\mu\nu}) &= -\nabla^\mu R_{\kappa\nu}^\nu + \nabla_\kappa R^{\nu\nu} - \nabla^\nu R_{\kappa\mu\nu}^\mu = \\ &= \nabla_\kappa R - 2\nabla^\mu R_{\kappa\mu} = 0 \Rightarrow \nabla^\nu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0 \end{aligned}$$

Η ποσότητα στην παρένθεση ορίζεται ως ο τανυστής του Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (94)$$

ο οποίος «διατηρείται», δηλαδή έχει μηδενική απόκλιση

$$\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0 \quad (95)$$

και είναι και συμμετρικός. Ο σύμμορφος τανυστής Ricci θα είναι

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} [(2-n)\nabla_\mu\nabla_\nu\alpha - g_{\mu\nu}\square\alpha] \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{n}{4}\right) g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\alpha\nabla^\lambda\alpha + \frac{3}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \nabla_\mu\alpha\nabla_\nu\alpha \right] \end{aligned}$$

όπου $\square \equiv \nabla_\lambda\nabla^\lambda$ ο τελεστής d'Alembert.

Εφαπτόμενη Δέσμη

Για κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα M μπορεί να οριστεί η εφαπτόμενη δέσμη της, η οποία αποτελείται από τους εφαπτόμενους χώρους της T_pM σε όλα τα σημεία $p \in M$. Η εφαπτόμενη δέσμη είναι ειδική περίπτωση νη-ματικής δέσμης, όπου τα νήματα είναι οι εφαπτόμενοι χώροι. Για μία C^r διαφορίσιμη πολλαπλότητα M με εφαπτόμενο χώρο T_pM ορίζεται ο χώρος $TM = \{(p, v_p) | p \in M, v_p \in T_pM\}$ ή $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. Από τον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας, η M μπορεί να εφοδιαστεί με έναν άτλαντα $\{(U_j, \psi_j)\}_{j \in I}$ με τη βοήθεια των αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων $\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου n η διάσταση της πολλαπλότητας και $\{U_j\}_{j \in I} = M$. Στον χώρο TM ορίζεται η προβολή:

$$\pi : TM \rightarrow M \quad \text{με} \quad (p, v_p) \mapsto p \quad (96)$$

Οι συντεταγμένες του $p \in U_j$ είναι οι $\{x_{(j)}^\mu\}_{\mu=1:n} = \psi_j(p)$, και αυτές του $v_{(j)} \in T_pM$ στη φυσική βάση $\partial/\partial x_{(j)}^\mu$ είναι οι $\{y_{(j)}^\mu\} = v_{(j)}(x_{(j)}^\nu)$, οπότε για κάθε περιοχή $\pi^{-1}(U_j)$ μπορούμε να ορίσουμε έναν χάρτη. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί πως οι χάρτες που ορίζονται με αυτή τη διαδικασία είναι συμβιβαστοί μεταξύ τους. Επίσης, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως οι περιοχές $\{\pi^{-1}(U_j)\}_{j \in I}$ καλύπτουν τον χώρο TM . Συμπεραίνουμε πως ο TM έχει δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας με διάσταση $2n$, και μάλιστα αν η M είναι C^r τότε η TM είναι C^{r-1} . Η εφαπτόμενη δέσμη συμβολίζεται ως (TM, π, M) . Οι τοπικές τετριμμενοποιήσεις της δέσμης ορίζονται ως οι απεικονίσεις

$$\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad (p, v_p) \mapsto (p, \{y_{p(j)}^\mu\}_{\mu=1:n}) \quad (97)$$

Εύκολα φαίνεται πως η ϕ_j είναι απεικόνιση της μορφής $\phi_j = (\pi, \Phi_j)$, όπου

$$\Phi_j|_{T_pM} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad (p, v_p) \mapsto \{y_{p(j)}^\mu\}_{\mu=1:n} \quad (98)$$

και για κάποιον άλλον χάρτη (U_i, ψ_i) θα έχουμε αντίστοιχα

$$\Phi_i|_{T_pM} : \pi^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad (p, v_p) \mapsto \{y_{p(i)}^\mu\}_{\mu=1:n} \quad (99)$$

οπότε για $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ η απεικόνιση $g_{ij}(p) = \Phi_i|_{T_p M} \circ \Phi_j^{-1}|_{T_p M} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό συντεταγμένων $\{y_{p(i)}^\mu\}_{\mu=1:n} \rightarrow \{y_{p(j)}^\mu\}_{\mu=1:n}$. Όμως, γνωρίζουμε πως

$$y_{p(i)}^\mu = \frac{\partial x^\mu_{(i)}}{\partial x^\nu_{(j)}} y_{p(j)}^\nu \quad (100)$$

όπου ο πίνακας $\frac{\partial x^\mu_{(i)}}{\partial x^\nu_{(j)}}$ είναι $n \times n$ αντιστρέψιμος. Το σύνολο αυτών των πινάκων αποτελεί αναπαράσταση στον \mathbb{R}^n της ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$. Από τη θεωρία των νηματικών δεσμών, η οποία δε θα αναπτυχθεί εδώ, προκύπτει πως η εφαπτόμενη δέσμη (TM, π, M) έχει δομή νηματικής δέσμης με τυπικό νήμα τον \mathbb{R}^n και δομική ομάδα τη $GL(n, \mathbb{R})$.

4 Βασικά στοιχεία από τη Βαρύτητα και την Κοσμολογία

Η βαρύτητα ως γεωμετρία του χωροχρόνου

Όπως έχουμε αναφέρει, οι τροχιές δοκιμαστικών σωματιδίων σε καμπυλωμένο χωρόχρονο απουσία άλλων δυνάμεων, περιγράφεται από την εξίσωση των γεωδαισιακών (80).

Σε κάθε περίπτωση, το μοντέλο που μελετάμε περιγράφεται ως μία κλασική θεωρία πεδίου, οπότε οι εξισώσεις για τα δυναμικά πεδία θα καθορίζονται από την ακροτατοποίηση μίας δράσης της μορφής

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L} d^4x \quad (101)$$

όπου \mathcal{L} είναι η Lagrangian πυκνότητα για αυτήν τη δράση και είναι βαθμωτό μέγεθος, ενώ το στοιχείο όγκου δίνεται από την (56). Τα δυναμικά πεδία $g_{\mu\nu}$ και $G_{\mu\lambda}^{\nu}$ αποτελούν πλήρη γεωμετρική περιγραφή της βαρύτητας, ενώ την τελευταία καθορίζουν πλήρως τα πεδία ύλης που βρίσκονται στον χωρόχρονο. Σύμφωνα με αυτά, η δράση μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη ως εξής:

$$S = \frac{1}{2\kappa} S_G + S_M \equiv \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_G d^4x + \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x \quad (102)$$

όπου με τους δείκτες G και M συμβολίζουμε το γεωμετρικό και το υλικό μέρος αντίστοιχα, ενώ η σταθερά κ θα καθοριστεί από το Νευτώνειο όριο της θεωρίας (ο παράγοντας 2 ακολουθεί την κοινή σύμβαση).

Εξισώσεις πεδίου του Einstein

Μετρική μέθοδος

Θεωρούμε πως ο χωρόχρονος είναι εφοδιασμένος με τη συνοχή Levi-Civita, οπότε το μοναδικό δυναμικό πεδίο είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$. Η \mathcal{L}_G γενικά μπορεί να εξαρτάται από το δυναμικό πεδίο και τις παραγώγους του. Αν θέλουμε η εξάρτησή της \mathcal{L}_G από τη μετρική να μην είναι τετριμμένη, θα πρέπει η συναρτησιακή της μορφή να περιέχει παραγώγους της $g_{\mu\nu}$ τουλάχιστον δεύτερης τάξης. Αυτό φαίνεται εύκολα, από τη δυνατότητα ορισμού τοπικά αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων στην περιοχή ενός αυθαίρετου σημείου P με συντεταγμένες \bar{x} της πολλαπλότητας, στο οποίο $g_{\mu\nu}(\bar{x}) = \eta_{\mu\nu}$ και $\partial_\lambda g_{\mu\nu}(\bar{x}) = 0^1$. Αν λοιπόν η \mathcal{L}_G εξαρτάται μόνο από τη μετρική και την πρώτη παράγωγο, τότε τοπικά θα είναι σταθερή, και καθώς το P είναι αυθαίρετο, το συμπέρασμα ισχύει παντού στην πολλαπλότητα.

¹Η δυνατότητα ορισμού ενός συστήματος, με αυτές τις συνθήκες σε οποιοδήποτε σημείο, είναι η γεωμετρική έκφραση της ασθενούς αρχής ισοδυναμίας, σύμφωνα με την οποία, ένας παρατηρητής σε ελεύθερη πτώση δεν παρατηρεί βαρυτικά φαινόμενα τοπικά.

Το πιο προφανές βαθμωτό μέγεθος που δεν εξαρτάται τετριμμένα από τη μετρική, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι το βαθμωτό του Ricci R και αποδεικνύεται ότι είναι το μοναδικό βαθμωτό που μπορεί να κατασκευαστεί με γινόμενα του μετρικού τανυστή και των πρώτων δύο παραγώγων του. Έτσι, ορίζουμε τη δράση Hilbert ως

$$S_H \equiv \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (103)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη μεταβολή δS της δράσης (102) για μεταβολές $\delta g^{\mu\nu}$ της μετρικής χρησιμοποιώντας τη δράση Hilbert στο γεωμετρικό μέρος. Από τη μεταβολή της S_H

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int \delta(\sqrt{-g}R) d^4x = \int (R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta R) d^4x \\ &= \int [R \delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})] d^4x \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις πεδίου του Einstein, οι οποίες χρησιμοποιούνται στη Γενική θεωρία της σχετικότητας. Λαμβάνοντας το Νευτώνειο όριο της θεωρίας προκύπτει σε πλήρεις μονάδες $\kappa = 8\pi G/c^4$.

Μετρική Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Από τις αστρονομικές παρατηρήσεις, γνωρίζουμε πως τα αντικείμενα στο σύμπαν σχηματίζουν διάφορες δομές. Από μικρότερη σε μεγαλύτερη κλίμακα τέτοιες δομές είναι τα αστρικά σμήνη, οι γαλαξίες, τα σμήνη και υπερσμήνη γαλαξιών. Σε μεγάλη κλίμακα, η κατανομή ύλης και ενέργειας είναι με καλή ακρίβεια ομογενής και ισότροπη όπως αυτή παρατηρείται από τη γη. Κάνουμε την υπόθεση πως οποιοσδήποτε παρατηρητής σε οποιοδήποτε σημείο του σύμπαντος παρατηρεί την ίδια ομοιογένεια και ισοτροπία. Στο πλαίσιο αυτής της θεώρησης, μπορούμε να αναζητήσουμε μία μετρική που να είναι ομογενής και ισότροπη παντού, με άλλα λόγια θα είναι ανεξάρτητη της χωρικής θέσης και του προσανατολισμού στον χώρο.

Για να συνδέσουμε τις παραπάνω παραδοχές με την περιγραφή του χωρόχρονου ως πολλαπλότητα, θα χρειαστούμε την έννοια της υπερεπιφάνειας. Έστω n -διάστατη πολλαπλότητα M και πραγματική συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Μία υπερεπιφάνεια $\Sigma \subset M$ ορίζεται ως ο υπόχωρος εκείνος του M , για τον οποίο ισχύει $f(x) = \text{σταθερή}$. Από αυτόν τον ορισμό, προκύπτει ότι η Σ είναι διαστάσεως $n-1$. Σε κάθε σημείο $p \in \Sigma$ ορίζεται ο εφαπτόμενος χώρος $T_p \Sigma \subset T_p M$. Ένα διάνυσμα $\zeta^\mu \in T_p M$ είναι κάθετο στη Σ στο σημείο p , αν είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του $T_p \Sigma$. Αν το ζ^μ είναι χρονοειδές, η Σ ονομάζεται χωροειδής, ενώ αν το ζ^μ είναι χωροειδές, η Σ ονομάζεται χρονοειδής. Αν το ζ^μ είναι φωτοειδές, τότε και η Σ ονομάζεται φωτοειδής.

Ο χωρόχρονος λέγεται χωρικά ομογενής, αν υπάρχει μονοπαραμετρική οικογένεια χωροειδών υπερεπιφανειών Σ_t , οι οποίες καλύπτουν τον χωρόχρονο τέτοιες ώστε για οποιαδήποτε $p, q \in \Sigma_t$ υπάρχει αμφιδιαφόριση $\phi : M \rightarrow M$ με $\phi(p) = q$ η οποία είναι ισομετρία. Αν υπάρχει μία συστοιχία χρονοειδών καμπύλων με εφαπτόμενο πεδίο U^ν οι οποίες γεμίζουν τον χωρόχρονο και για τις οποίες σε κάθε σημείο p και για κάθε δύο διανύσματα $T_{(1)}^\kappa$ και $T_{(2)}^\lambda$, τα οποία ανήκουν στον κάθετο υπόχωρο του U υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το $T_{(1)}$ στο $T_{(2)}$, τότε ο χωρόχρονος ονομάζεται χωρικά ισότροπος. Η μετρική

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j \quad (104)$$

της 3-διάστατης υπερεπιφάνειας Σ_t ορίζεται ως το χωρικό μέρος της μετρικής $g_{\mu\nu}$ που αναζητούμε. Από την απαίτηση χωρικής ισοτροπίας μπορεί ναδειχθεί ότι ο ταυιστής Riemann για την 3-διάστατη υπερεπιφάνεια γράφεται

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k\gamma_{k[i}\gamma_{j]l} \quad (105)$$

από όπου παίρνουμε

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k\gamma_{ij} \quad (106)$$

και

$${}^{(3)}R = 6k \quad (107)$$

Με κατάλληλη κανονικοποίηση των μεταβλητών, ο παράγοντας κλίμακας μπορεί να γίνει αδιάστατος και τότε λαμβάνουμε για τη μετρική τη μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (108)$$

Οι εξισώσεις Friedmann

Έχοντας βρει μία μετρική χωρικά ομογενή και ισότροπη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση πεδίου του Einstein για να βρούμε την εξέλιξη της δυναμικής μεταβλητής $a(t)$. Τα σύμβολα Christoffel για την (108) είναι

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = a\dot{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (109)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{\ddot{a}}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r(1-kr^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (110)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

Υπολογίζουμε τον ταυνοστή Ricci και βρίσκουμε

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a}}{1 - kr^2}$$

$$R_{22} = r^2 (2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a})$$

$$R_{33} = r^2 (2\dot{a}^2 + 2k + a\ddot{a}) \sin^2\theta$$

ενώ όλοι οι άλλοι όροι μηδενίζονται. Η ταυνοστική καμπυλότητα Ricci θα είναι

$$R = 6 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right] \quad (113)$$

Θεωρούμε πως η ύλη και ενέργεια στο σύμπαν περιγράφονται σε μεγάλη κλίμακα από την εξίσωση ιδανικού ρευστού

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (114)$$

Κάθε συστατικό του σύμπαντος θεωρούμενο ως ρευστό χαρακτηρίζεται από μία σχέση μεταξύ της πυκνότητας ρ και της πίεσης P που μπορεί να γραφεί ως

$$P = w\rho \quad (115)$$

και ονομάζεται καταστατική εξίσωση του εν λόγω ρευστού. Από τη διατήρηση του ταυνοστή ενέργειας - ορμής βρίσκουμε

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^{\mu\lambda} = 0$$

και για την $\nu = 0$ υπολογίζουμε

$$\partial_0 T^{00} + \Gamma_{01}^1 T^{00} + \Gamma_{02}^2 T^{00} + \Gamma_{03}^3 T^{00} - \Gamma_{01}^1 T^{11} - \Gamma_{02}^2 T^{22} - \Gamma_{03}^3 T^{33} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(-\rho) - 3\frac{\dot{a}}{a}P = 0 \\
&\Rightarrow \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0
\end{aligned} \tag{116}$$

όπου η παράμετρος H του Hubble ορίζεται ως

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{117}$$

και εκφράζει τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος. Έχοντας γνωστά όλα τα στοιχεία της εξίσωσης πεδίου βρίσκουμε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις για το $a(t)$, τις εξισώσεις Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{118}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3P) \tag{119}$$

Από την (118), η συνθήκη για να είναι επίπεδο το σύμπαν για κάποιο t είναι ($k = 0$) και ισοδυναμεί με τη συνθήκη $\rho = \rho_{cr}$, όπου η κρίσιμη πυκνότητα ορίζεται ως

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{120}$$

Μία ειδική περίπτωση χωρόχρονου προκύπτει για συνολική πυκνότητα ενέργειας $\rho = 0$, οπότε η εξίσωση Friedmann (118) γίνεται $\dot{a}^2 = -k$ και προκύπτει το λεγόμενο σύμπαν Milne. Μία σημαντική συνθήκη για την κοσμολογική εξέλιξη προκύπτει με χρήση της ταυτότητας Bianchi ή ισοδύναμα της σχέσης (95). Γράφουμε

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu} \right) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu R = 0$$

Για τη $\nu = 0$ συνιστώσα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_0 R^{00} + 3\Gamma_{01}^1 R^{11} - \Gamma_{01}^1 R^{11} - \Gamma_{02}^2 R^{22} - \Gamma_{03}^3 R^{33} - \frac{1}{2}\partial_0 R = 0 \\
&\Rightarrow 3\frac{d}{dt} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + 9H\frac{\ddot{a}}{a} - 3H \left(2H^2 + 2\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) - 3\frac{d}{dt} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) = 0 \\
&\Rightarrow 6H\frac{\ddot{a}}{a} - 6H^3 - 6H\frac{k}{a^2} - 6H\dot{H} - 3\frac{d}{dt} \left(\frac{k}{a^2} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left(\frac{k}{a^2} \right) = H\frac{\ddot{a}}{a} - H^3 - H\dot{H} - H\frac{k}{a^2} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{a^2} \right) = -2H\frac{k}{a^2} \Rightarrow d \left(\frac{k}{a^2} \right) = -2\frac{k}{a^2} \frac{da}{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d \left[\ln \left(\frac{k}{a^2} \right) \right] &= -2 d \ln a \\ \Rightarrow \frac{k/a^2}{k_0/a_0^2} &= \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-2} \Rightarrow k = k_0 \end{aligned}$$

Βλέπουμε λοιπόν πως ο δείκτης χωρικής καμπυλότητας k παραμένει σταθερός κατά την κοσμολογική εξέλιξη.

Το καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας

Στο καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας, η μετρική (108) περιγράφει ένα σύμπαν χωρικά ομογενές και ισότροπο σε μεγάλη κλίμακα, και η περιγραφή της ενέργειας και ορμής σε αυτό με καλή ακρίβεια, γίνεται όπως είπαμε από την εξίσωση ιδανικού ρευστού (114). Με βάση τις παραδοχές αυτές, αναπτύσσονται διάφορα μοντέλα, τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους, κυρίως ως προς το είδος των συστατικών που αποτελούν το κοσμολογικό ρευστό. Το πιο διαδεδομένο μοντέλο είναι το λεγόμενο *καθιερωμένο μοντέλο* της κοσμολογίας γνωστό και ως Λ -CDM (Λ -Cold Dark Matter) μοντέλο. Σε αυτό, τα βασικά συστατικά που αποτελούν την ύλη και ενέργεια στο σύμπαν είναι η κρύα μάζα, η ακτινοβολία και η κοσμολογική σταθερά, τα οποία συστατικά κατανέμονται ομογενώς στον χώρο². Η κρύα μάζα αποτελείται από σωματίδια, τα οποία έχουν μη σχετικιστική ταχύτητα στο συν-κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τέτοια είναι τα βαρυόνια, τα ηλεκτρόνια και τα υποθετικά σωματίδια κρύας (μη σχετικιστικής) σκοτεινής ύλης. Η πίεση της κρύας μάζας είναι αμελητέα σε σχέση με την πυκνότητα ενέργειας ($P_{cm} \approx 0$) και λόγω της (116) για την πυκνότητα ενέργειας ισχύει

$$\rho_{cm}(t) = \rho_{cm}(t_0) a^{-3}(t) \quad (121)$$

όπου ακολουθούμε τη συνήθη σύμβαση κανονικοποίησης των μονάδων ώστε σήμερα ($t = t_0$) ο παράγοντας κλίμακας να είναι $a(t_0) = 1$.

Η ακτινοβολία αποτελείται από σχετικιστικά σωματίδια, κατά κύριο λόγο φωτόνια και νετρίνα και η πίεσή της δίνεται από τη γνωστή σχέση $P_r = \rho_r/3$, οπότε λόγω της (116), η πυκνότητα ενέργειας της συναρτηθεί του παράγοντα κλίμακας είναι

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0) a^{-4}(t) \quad (122)$$

Η κοσμολογική σταθερά $\Lambda > 0$ χρησιμοποιείται σε ένα απλό μοντέλο επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος. Συγκεκριμένα, στο αριστερό μέλος των εξισώσεων Einstein προστίθεται ο όρος $\Lambda g_{\mu\nu}$ οπότε λαμβάνουμε τις εξισώσεις πεδίου με κοσμολογική σταθερά

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (123)$$

²Σε μικρότερη κλίμακα, το σύμπαν δεν είναι ομογενές και τα συστατικά του μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά ως διαταραχές σε ένα ομογενές υπόβαθρο, οι οποίες αποτελούν εξέλιξη κάποιων πρωταρχικών διαταραχών στις αρχικές στιγμές του σύμπαντος.

Αν ο επιπλέον όρος ερμηνευθεί ως μέρος του ταχυστή ενέργειας - ορμής τότε αυτός περιγράφει ιδανικό ρευστό σύμφωνα με την (114) με σταθερή αρνητική πίεση $P_{de} = -\Lambda/\kappa$ και σταθερή πυκνότητα ενέργειας

$$\rho_{de} = -P_{de} = \Lambda/\kappa \quad (124)$$

Το κοσμολογικό ρευστό αυτό, αποτελεί ένα από τα διάφορα μοντέλα σκοτεινής ενέργειας, μία άγνωστης φύσεως θεωρητική κατασκευή, η οποία έχει σκοπό να περιγράψει την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος όπως υπαγορεύεται από τις παρατηρήσεις.

Η πυκνότητα ενέργειας των παραπάνω συστατικών είναι θετική, ενώ ο όρος καμπυλότητας της εξίσωσης Friedmann (118) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, κάτι που συμφωνεί και με τις παρατηρήσεις οι οποίες υποδεικνύουν ένα σχεδόν επίπεδο σύμπαν. Έτσι από αυτή την εξίσωση προκύπτει $\dot{a}(t) > 0, \forall t$ και επίσης ότι κάποια στιγμή $t = 0$ στο παρελθόν, πρέπει να ήταν $a(0) = 0$, δηλαδή οι χωρικές αποστάσεις στο σύμπαν ήταν μηδενικές.

Οι πυκνότητες ενέργειας εξαρτώνται μόνο από τον παράγοντα κλίμακας και σε διαφορετικές εποχές διαφορετικά συστατικά του κοσμολογικού ρευστού κυριαρχούν στη δυναμική του χωροχρόνου, σύμφωνα με την (118) και τις (121), (122) και (124). Στα πρώτα στάδια της κοσμολογικής εξέλιξης, κυριαρχούσε η ακτινοβολία, ενώ μεταγενέστερα κυριαρχούσε η μη σχετικιστική ύλη. Στη σημερινή εποχή, φαίνεται να έχει αρχίσει να κυριαρχεί μία άλλη μορφή ενέργειας και η κοσμολογική σταθερά είναι ανάμεσα στα μοντέλα που επιδιώκουν να την περιγράψουν.

Ένα σημαντικό μέγεθος που χρησιμοποιείται στην κοσμολογία είναι ο συν-κινούμενος (co-moving) χρόνος

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)} \quad (125)$$

και όπως φαίνεται από την (108), ουσιαστικά, είναι η απόσταση που διανύει το φως σε χρόνο dt . Έτσι, η συνολική απόσταση που μπορεί να έχει διανύσει το φως από την αρχή του χρόνου είναι

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (126)$$

Αυτή η απόσταση ονομάζεται συν-κινούμενος ορίζοντας (co-moving horizon), η οποία με τη βοήθεια της (117) μπορεί να γραφεί και ως

$$\eta = \int_0^a \frac{da'}{a' a' H(a')} \quad (127)$$

Η συν-κινούμενη ακτίνα Hubble ορίζεται ως

$$R_H = \frac{1}{aH(a)} \quad (128)$$

και εκφράζει τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να διανύσουν σωματίδια ανά λογαριθμική μεταβολή του παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Είναι ένα μέτρο της μέγιστης απόστασης δύο σημείων, τα οποία συνδέονται αιτιατά σε χρόνο που αναλογεί περίπου στον διπλασιασμό του παράγοντα κλίμακας. Έτσι, σύμφωνα με την (127), ο συν-κινούμενος ορίζοντας είναι το λογαριθμικό ολοκλήρωμα της συν-κινούμενης ακτίνας Hubble (128) για όλο τον χρόνο.

Κοσμολογικός πληθωρισμός

Το καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας, κάποια βασικά στοιχεία του οποίου αναφέρονται στην προηγούμενη ενότητα, εμφανίζει σημαντικές αδυναμίες. Η Λ -CDM κοσμολογία δε μπορεί να ερμηνεύσει την παρατηρούμενη ομογένεια στην κατανομή της ύλης και ενέργειας στο ορατό σύμπαν, η οποία γίνεται πιο φανερή στην κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου (CMB).

Στα αρχικά στάδια της κοσμικής εξέλιξης, η πυκνότητα της ύλης και ακτινοβολίας ήταν πολύ μεγαλύτερες από σήμερα, όπως φαίνεται και από τις (121), (122), όπως και η θερμοκρασία $T \propto a^{-1}$. Η ύλη ήταν σε κατάσταση πλήρως ιονισμένη (πλάσμα) και αδιαφανής στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Έτσι, η τελευταία ήταν σε θερμοδυναμική ισορροπία με την ύλη μέχρι το σημείο που η θερμοκρασία έπεσε αρκετά ώστε τα ηλεκτρόνια να σχηματίσουν άτομα με τους πυρήνες (recombination era, $z = 1100$), οπότε το σύμπαν έγινε διαφανές στην ΗΜ ακτινοβολία.

Η ομογένεια της (CMB) σε μεγάλες γωνίες παρατήρησης, σημαίνει πως η ύλη θα πρέπει να βρισκόταν σε αιτιατή επαφή κάποια στιγμή στο παρελθόν, με άλλα λόγια η ακτίνα Hubble θα πρέπει να κάλυπτε τουλάχιστον το σημερινό ορατό σύμπαν κάποτε. Αυτό θα πρέπει να συνέβη πριν την εποχή επανασύνδεσης (recombination), καθώς μετά από αυτό το σημείο οι αλληλεπιδράσεις της ΗΜ ακτινοβολίας είναι αμελητέες και δε θα μπορούσαν να είχαν συμβάλει στην αποκατάσταση ισορροπίας στη θερμοκρασία της (CMB).

Η συν-κινούμενη ακτίνα Hubble (128) αυξάνεται με τον χρόνο σε κυριαρχούμενο από ακτινοβολία και μάζα σύμπαν, οπότε ο συν-κινούμενος ορίζοντας (127) έχει τη μεγαλύτερη συμβολή του από αυτή που έχει μετά την εποχή επανασύνδεσης. Σε εκείνη την εποχή, ο συν-κινούμενος ορίζοντας θα ήταν πολύ μικρότερος από το σημερινό ορατό σύμπαν, οπότε μακρινές περιοχές δε θα είχαν δυνατότητα να έρθουν σε θερμοδυναμική ισορροπία. Έτσι, το μοντέλο Λ -CDM δε μπορεί να εξηγήσει την ομογένεια της (CMB), το οποίο βασίζεται εκτός από τις παρατηρήσεις και στην υπόθεση πως η φυσική που γνωρίζουμε, δηλαδή το καθιερωμένο μοντέλο της φυσικής υψηλών ενεργειών και η γενική θεωρία της σχετικότητας, εξακολουθεί να ισχύει και στις ακραίες συνθήκες των πρώτων στιγμών της κοσμολογικής εξέλιξης.

Η λύση, στο πρόβλημα αυτό, είναι να βρεθεί ένα μοντέλο όπου ο συν-κινούμενος ορίζοντας, την εποχή πριν την επανασύνδεση, είναι μεγαλύτερος από το σημερινό ορατό σύμπαν, οπότε η ακτίνα Hubble θα είχε τη μεγαλύτερη συμβολή της σε αυτόν, σε αυτά τα πρώιμα στάδια της κοσμολογικής εξέλιξης.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η ακτίνα Hubble να μειώνεται πριν την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας και μάζας, οπότε και αρχίζει να αυξάνεται ξανά. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{R_H}{t} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \quad (129)$$

δηλαδή το σύμπαν πρέπει να έχει περάσει από μία σύντομη εποχή επιταχυνόμενης διαστολής κατά τη διάρκεια της οποίας, ο παράγοντας κλίμακας έπρεπε να αυχθεί κατά 10^{-28} δηλαδή κατά τουλάχιστον 28 τάξεις μεγέθους ή $\ln(10^{28}) \sim 64$ e-folds. Αυτή η εποχή ονομάζεται *κοσμολογικός πληθωρισμός*.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι αναγκαίο να βρεθεί κάποιος μηχανισμός που να προκαλεί επιταχυνόμενη διαστολή πολύ νωρίς στην κοσμολογική ιστορία και μετά να αδρανοποιείται, ώστε το σύμπαν να κυριαρχηθεί από την ακτινοβολία και αργότερα από τη μάζα και την κοσμολογική σταθερά. Θα θεωρηθεί πως ο ταχυοστής ενέργειας - ορμής που προκαλεί αυτόν τον μηχανισμό είναι αυτός ενός ιδανικού ρευστού (114), οπότε οι εξισώσεις Friedmann ισχύουν. Η συνθήκη $\ddot{a} > 0$ και η απαίτηση η πυκνότητα ενέργειας του ρευστού να είναι θετική, λόγω της (119) σημαίνει πως για την πίεση ισχύει πίεση $P < -\rho/3$, κάτι που αποκλείει τη συνήθη ύλη και ακτινοβολία.

Το βαθμωτό πεδίο inflaton

Το πιο διαδεδομένο μοντέλο για ένα τέτοιο ρευστό είναι αυτό ενός βαθμωτού πεδίου³ ϕ , του οποίου η Lagrangian πυκνότητα για επίπεδο χώρο Minkowski ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi - V(\phi) \quad (130)$$

όπου ο πρώτος όρος $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2$ είναι η κινητική ενέργεια του πεδίου, ο όρος $\frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi$ με $i = 1, 2, 3$ είναι η ενέργεια βαθμίδας του και η $V(\phi)$ είναι η δυναμική του ενέργεια. Οι δύο πρώτοι όροι συγχωνεύονται στον όρο $-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ και η φυσική γενίκευση της Lagrangian σε έναν καμπυλωμένο χωρόχρονο είναι

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (131)$$

Ένα τέτοιο πεδίο, όταν εισάγεται για να ερμηνεύσει την πληθωριστική εποχή ονομάζεται inflaton. Η μεταβολή της δράσης S_ϕ της $\mathcal{L}_\phi(\phi, \partial_\mu\phi)$ δίνει

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_\phi d^4x = 0 \\ \Rightarrow \int \sqrt{-g} \left[\frac{\mathcal{L}_\phi}{\phi} \delta\phi + \frac{\mathcal{L}_\phi}{(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right] d^4x &= 0 \end{aligned}$$

³Στη φύση, το μόνο γνωστό βαθμωτό πεδίο ύλης είναι το πεδίο Higgs, αλλά οι περιορισμοί του, το αποκλείουν ως υποψήφιο πεδίο για την πληθωριστική εποχή.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \sqrt{-g} \left[\frac{\mathcal{L}_\phi}{\phi} \delta\phi + \nabla_\mu \left(\frac{\mathcal{L}_\phi}{(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) - \nabla_\mu \frac{\mathcal{L}_\phi}{(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] d^4x &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\mathcal{L}_\phi}{\phi} - \nabla_\mu \frac{\mathcal{L}_\phi}{(\partial_\mu \phi)} &= 0 \end{aligned}$$

όπου ως συνήθως ο συνοριακός όρος μηδενίζεται στο άπειρο. Οι εξισώσεις αυτές είναι οι Euler-Lagrange για τη Lagrangian πυκνότητα \mathcal{L}_ϕ και για τη (131) δίνουν

$$\begin{aligned} -\frac{V}{\phi} + \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) &= 0 \\ \Rightarrow g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{V}{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Ο τελεστής d'Alembertian ορίζεται ως $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ οπότε τελικά γράφουμε

$$\square\phi - V'(\phi) = 0 \quad (132)$$

όπου με τόνο συμβολίσαμε την παράγωγο ως προς ϕ . Αυτή είναι η γνωστή εξίσωση Klein-Gordon (KG) και καθορίζει τη δυναμική του πεδίου ϕ . Για κοσμολογία με μετρική (108) και $k = 0$, η (KG) για χωρικά ομογενές ϕ γράφεται

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi) - V' &= 0 \\ \Rightarrow -\ddot{\phi} - \left(\frac{1}{a^2} a\dot{a} + \frac{1}{a^2 r^2} a\dot{a}r^2 + \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\phi} - V' &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' &= 0. \end{aligned} \quad (133)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (109). Ο ταυοστής ενέργειας - ορμής για το ϕ είναι

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (134)$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_\phi + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_\phi = \\ &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \right) \quad (135)$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση ιδανικού ρευστού (114)

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}$$

παίρνουμε

$$\partial_\mu \phi = \sqrt{\rho_\phi + P_\phi} U_\mu$$

και

$$P_\phi = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi - V(\phi) \quad (136)$$

και συνδυάζοντάς τις

$$\begin{aligned} P_\phi &= -\frac{1}{2} (\rho_\phi + P_\phi) U^\lambda U_\lambda - V(\phi) = \frac{1}{2} (\rho_\phi + P_\phi) - V(\phi) \\ &\Rightarrow \rho_\phi = P_\phi + 2V(\phi) \end{aligned}$$

οπότε

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \partial_\kappa \phi \partial_\lambda \phi + V(\phi) \quad (137)$$

Καθώς θεωρούμε χωρικά ομογενές ϕ τελικά έχουμε

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Για να είναι αρνητική η πίεση, θα πρέπει η $V(\phi) > \dot{\phi}^2/2$ που σημαίνει πως η $\rho_\phi > 0$ για αυτό το μοντέλο, γεγονός που συμβάλλει στη φυσική συνέπεια της θεωρίας. Η προσέγγιση αργής κύλισης του πεδίου ϕ προκύπτει από τις συνθήκες

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad \ddot{\phi} \sim 0 \quad (138)$$

Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε πυκνότητα ενέργειας και πίεση παρόμοιας μορφής με το μοντέλο της κοσμολογικής σταθεράς:

$$\rho_\phi \approx V(\phi), \quad P_\phi \approx -V(\phi) \quad (139)$$

Αν επίσης θεωρηθεί δυναμικό της μορφής $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$, η εξίσωση (118) και αν θεωρήσουμε τη συμβολή των υπόλοιπων πεδίων ύλης αμελητέα έχουμε

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) = \frac{4\pi G m^2}{3} \phi^2 \quad (140)$$

και η εξίσωση κίνησης του πεδίου ϕ (133) θα γράφεται

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} m\phi\dot{\phi} + m^2\phi = 0$$

με λύσεις $\phi = 0$ ή

$$\dot{\phi} = -m\sqrt{\frac{3}{4\pi G}} \Rightarrow \phi(t) = \phi(t_e) - m\sqrt{\frac{3}{4\pi G}} t \quad (141)$$

όπου t_e ο χρόνος τερματισμού της πληθωριστικής εποχής. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Friedmann παίρνουμε

$$H^2(t) = \frac{4\pi G m^2}{3} \left(\phi(t_e) - m \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} t \right)^2$$

$$\Rightarrow H(t) = H_e - m^2 t$$

όπου $H_e \equiv H(t_e)$. Η εξίσωση αυτή έχει λύση

$$a(t) = a_e \exp [H_e(t - t_e) - m^2(t - t_e)^2] \quad (142)$$

Αν η πληθωριστική εποχή ξεκίνησε κάποιον χρόνο t_b , τότε θα πρέπει $a_e/a_b > e^{64}$ ή

$$m^2(t_b - t_e)^2 - H_e(t_b - t_e) > 64 \quad (143)$$

Ένα μοντέλο που υπακούει σε αυτούς τους περιορισμούς, μπορεί να οδηγήσει το σύμπαν σε μία πληθωριστική εποχή, η οποία εξηγεί την παρατηρούμενη ομογένεια της ύλης και ακτινοβολίας σε μεγάλες κλίμακες.

5 Ενεργειακές Συνθήκες σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας και Συνθήκες Bounce για Σύμπαν με (FRW) Δομή και η Μελέτη τους σε Γενικευμένο Μετρικά Κοσμολογικό Μοντέλο

Στα ακόλουθα, θα παρουσιάσουμε ενεργειακές συνθήκες για τροποποιημένα μοντέλα βαρύτητας που έχουν μελετηθεί από διάφορους συγγραφείς [150, 37, 74].

5.1 Ενεργειακές Συνθήκες σε Τροποποιημένη Βαρύτητα

Θεωρούμε τις γενικευμένες ενεργειακές συνθήκες σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας παίρνοντας τους περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας σχετιζόμενους με βαθμωτά πεδία και μεταβλητές καμπυλότητας. Οι τελευταίες θεωρούνται γεωμετρικά ρευστά, τα οποία έχουν διαφορετικές σημασίες με βάση τα κλασικά ρευστά ύλης που επισυνάπτονται ως πηγές των εξισώσεων πεδίου. Πιο συγκεκριμένα, στην τροποποιημένη βαρύτητα οι όροι καμπυλότητας ομαδοποιούνται σε έναν ταυυστή H^{ab} και μία σύζευξη $g(\Psi^i)$, που μπορεί να μετατραπεί σε δραστικές εξισώσεις πεδίου Einstein ως διορθώσεις στον ταυυστή ενέργειας - ορμής της ύλης. Η ισχύς τέτοιων ανισοτήτων δεν εξασφαλίζει κάποιες βασικές απαιτήσεις, όπως η ελκτική φύση της βαρύτητας, έτσι ώστε οι ενεργειακές συνθήκες να θεωρούνται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο.

Εισαγωγή

Στη Γενική Σχετικότητα (GR), οι εξισώσεις πεδίου του Einstein : $G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$ συσχετίζουν τον ταυυστή Einstein : $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ με τον ταυυστή ενέργειας - ορμής των πεδίων ύλης T_{ab} , όπου R_{ab} είναι ο ταυυστής Ricci, που ορίζεται ως η συστολή του ταυυστή καμπυλότητας Riemann : $R^c_{acb} = R_{ab}$ και $R = R^a_a$ είναι βαθμωτό καμπυλότητας. Οι εξισώσεις Einstein παίζουν ένα σημαντικό ρόλο ανάμεσα στη γεωμετρία του χωροχρόνου και στο θέμα της ύλης. Υπάρχει ένας σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στο αριστερό μέρος που αντιστοιχεί τη γεωμετρία και στο δεξί μέρος, όπου μπορεί κάποιος να βρει την κατανομή ενέργειας - ύλης. Η ιδέα κάτω από τη σχέση της εξίσωσης Einstein είναι ότι η κατανομή ενέργειας - ύλης μας λέει πως ο χωροχρόνος καμπυλώνει και συνεπώς πως δρα η βαρύτητα. Έτσι, προκύπτει από τις εξισώσεις ότι οποιεσδήποτε συνθήκες βάλουμε στον T_{ab} , αμέσως θα μεταφραστούν σε αντίστοιχες συνθήκες στον ταυυστή Einstein: G_{ab} . Με αυτό τον τρόπο, οι αιτιώδεις και γεωδαισιακές δομές του χωροχρόνου καθορίζονται από την κατανομή ενέργειας - ύλης. Σε αυτό το πλαίσιο, οι ενεργειακές συνθήκες μας εξασφαλίζουν ότι το αξίωμα αιτιότητας γίνεται σεβαστό και είναι κατάλληλο, όταν θεωρούνται φυσικές πηγές [81],[204].

Ο ορισμός των ενεργειακών συνθηκών περιλαμβάνει μια αυθαίρετη ροή που αναπαριστά έναν γενικό παρατηρητή του πλαισίου αναφοράς. Γενικά, θεωρούμε μια congruence των time-like καμπύλων, των οποίων το εφαπτόμενο 4-διάνυσμα W^a αναπαριστά το διάνυσμα ταχύτητας μιας οικογένειας παρατηρητών. Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πεδίο null διανυσμάτων, k^a , στο οποίο ισχύει $G_{ab}k^ak^b = R_{ab}k^ak^b$, αφού $g_{ab}k^ak^b = 0$ από υπόθεση. Έτσι, οι ενεργειακές συνθήκες προκύπτουν άμεσα από την γεωδαισιακή δομή του χωροχρόνου. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την εξίσωση Raychaudhuri που δίνεται από τους [141]

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{W}_{;a}^a = -R_{ab}W^aW^b \quad (144)$$

όπου σ_{ab} είναι ο τανυστής παραμόρφωσης, το θ είναι το βαθμωτό διαστολής και ω_{ab} είναι ο τανυστής στροβιλισμού. Είναι σημαντικό να δώσουμε έμφαση στο ότι η εξίσωση (144) έχει μόνο μία γεωμετρική σημασία, αφού οι ποσότητες μέσα σε αυτήν προκύπτουν άμεσα από τις ταυτότητες Ricci. Μόνο όταν επιλέξουμε μία συγκεκριμένη θεωρία μπορούμε να έχουμε μία σχέση ανάμεσα στο $R_{ab}W^aW^b$ στην εξίσωση Raychaudhuri (144) και στον τανυστή ενέργειας - ορμής που περιγράφει τα πεδία ύλης [81],[204]. Κάποιος μπορεί επίσης να θεωρήσει μία null congruence, k^a και ένα μηδενικό στροβιλισμό $\omega_{ab} = 0$, που σημαίνει ότι στη γενική σχετικότητα είναι δυνατό να συσχετίσουμε την null ενεργειακή συνθήκη με την έλξη, από το χαρακτηριστικό του focusing της γεωμετρίας του χωροχρόνου.

Εδώ, θα μελετηθεί το πρόβλημα των ενεργειακών συνθηκών σε τροποποιημένη βαρύτητα. Αυτό το θέμα είναι εξαιρετικά λεπτό, αφού η κλασική προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε τις εξισώσεις βαρυτικού πεδίου ως δραστηκές εξισώσεις Einstein . Πιο ειδικά, οι περαιτέρω βαθμοί ελευθερίας αυτών των θεωριών [82],[83],[183] μπορούν να θεωρηθούν ως γενικευμένα γεωμετρικά ρευστά, που έχουν διαφορετικές σημασίες με βάση τα κλασικά ρευστά ύλης που επισυνάπτονται ως πηγές εξισώσεων πεδίου [38]. Ενώ τα κλασικά ρευστά γενικά υπακούουν σε κλασικές εξισώσεις καταστάσεων, αυτά μπορούν να συσχετιστούν με βαθμωτά πεδία ή περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας βαρύτητας, όπως την $f(R)$ βαρύτητα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι φυσικές ιδιότητες μπορεί να μην είναι καλά ορισμένες και οι συνέπειες να είναι δραματικές αφού οι αιτιώδεις και γεωδαισιακές δομές της θεωρίας μπορεί να παρουσιάσουν σοβαρά ελαττώματα, όπως και ο τανυστής ενέργειας - ορμής θα μπορούσε να μην είναι συνεπής με τις ταυτότητες Bianchi και τους νόμους διατήρησης. Πρέπει να αναφερθούν άλλα σημαντικά αποτελέσματα για ενεργειακές συνθήκες σε εναλλακτική βαρύτητα. Για παράδειγμα, οι ενεργειακές συνθήκες στην $f(R)$ βαρύτητα και στις θεωρίες Brans-Dicke συζητώνται [13]. Ο μη ελκτικός χαρακτήρας της βαρύτητας στις $f(R)$ θεωρίες θεωρείται [4], ενώ υπολογίζονται οι ενεργειακές συνθήκες στο πλαίσιο Jordan [48]. Σε αυτή την εργασία υιοθετείται η υπογραφή $(-+++)$ και $c = 1$.

Ενεργειακές Συνθήκες σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

Στο πλαίσιο των τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας, τουλάχιστον σε μία μεγάλη κλάση ενδιαφέρουσων περιπτώσεων, το γενικευμένο πεδίο εξίσωσης μπορεί να έχει την ακόλουθη μορφή

$$g(\Psi^i)(G_{ab} + H_{ab}) = 8\pi GT_{ab} \quad (145)$$

όπου H_{ab} είναι ένας επιπλέον γεωμετρικός όρος που σε σχέση με τη γενική σχετικότητα περιλαμβάνει γεωμετρικές τροποποιήσεις, οι οποίες εισάγονται από την τροποποιημένη θεωρία. Η $g(\Psi^i)$ είναι ένας παράγοντας που τροποποιεί τη σύζευξη σε πεδία ύλης στον T_{ab} , όπου το Ψ^i γενικά αναπαριστά είτε μεταβλητές καμπυλότητας, είτε βαρυτικά πεδία που συνεισφέρουν στη δυναμική. Στη γενική σχετικότητα έχουμε $H_{ab} = 0$ και $g(\Psi^i)=1$. Λαμβάνοντας υπόψη τον διαφορομορφισμό της δράσης της ύλης και την συναλλοίωτη διατήρηση του τανυστή ενέργειας - ορμής, έχουμε $\nabla_a T^{ab} = 0$. Έτσι, από τις συστελλόμενες ταυτότητες Bianchi ακολουθεί ο παρακάτω νόμος διατήρησης

$$\nabla_b H^{ab} = -\frac{8\pi G}{g^2} T^{ab} \nabla_b g. \quad (146)$$

Το γεγονός ότι ο H^{ab} είναι μία γεωμετρική ποσότητα με την έννοια ότι μπορεί να δοθεί από γεωμετρικές μεταβλητές ή βαθμωτά πεδία διαφορετικά από τα κανονικά πεδία ύλης, έχει ως αποτέλεσμα την επιβολή μιας συγκεκριμένης ενεργειακής συνθήκης στον T^{ab} . Έτσι, δεν μπορούμε να έχουμε μία πιο απλή γεωμετρική συνέπεια, όπως στη γενική σχετικότητα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε πως ισχύει η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη $T_{ab}W^aW^b \geq \frac{1}{2}TW^aW_a$, θα σήμαινε από τη μία πλευρά στη γενική σχετικότητα ότι $R_{ab}W^aW^b \geq 0$ και από την άλλη πλευρά, λόγω της εξίσωσης (144), ότι οι γεωδαισιακές συγκλίνουν και άρα η βαρύτητα έχει ελκτικό χαρακτήρα. Αυτή είναι μία από τις υποθέσεις των θεωρημάτων μοναδικότητας των Hawking και Penrose [81]. Στο πλαίσιο της τροποποιημένης βαρύτητας, αυτή η συνθήκη μας λείπει

$$g(\Psi^i) \left(R_{ab} + H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H \right) W^aW^b \geq 0 \quad (147)$$

πως δεν έχει απαραίτητα ως αποτέλεσμα τη συνθήκη $R_{ab}W^aW^b \geq 0$. Επιπλέον δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ευθέως ότι η ικανοποίηση της ισχυρής ενεργειακής συνθήκης (SEC) είναι συνώνυμη με την ελκτική φύση της βαρύτητας στη συγκεκριμένη τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας. Ο γεωμετρικός όρος H^{ab} θεωρείται συνήθως ως μία διόρθωση στον τανυστή ενέργειας - ορμής. Η σημασία του, που συμβάλλει στις ενεργειακές συνθήκες, είναι η ικανοποίηση μιας συγκεκριμένης ανισότητας, χρησιμοποιώντας την συνδυασμένη ποσότητα $T_{eff}^{ab} = T^{ab}/g - H^{ab}$. Θα ήταν αποπροσανατολιστικό να συνδέσουμε το

δραστικό τανυστή ενέργειας - ορμής με τις ενεργειακές συνθήκες, αφού δεν προκύπτουν μόνο από τον T^{ab} αλλά και από τη γεωμετρική ποσότητα H^{ab} , η οποία θεωρείται ως ένας επιπρόσθετος τανυστής ενέργειας - ορμής.

Αν η τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας που μελετάται, μας επιτρέπει μία ισοδύναμη περιγραφή πάνω σε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, δικαιολογείται ο συσχετισμός του μετασχηματισμένου H^{ab} με το ορισμένο T^{ab} στο μετασχηματισμό του πλαισίου Einstein. Συγκεκριμένα, οι μετασχηματισμοί παίζουν έναν εξαιρετικά σχετικό ρόλο στις συζητήσεις των ενεργειακών συνθηκών. Μας επιτρέπουν να δώσουμε έμφαση στους περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας που προέρχονται από τροποποιημένες βαρύτητες με τη μορφή των μεταβλητών καμπυλότητας και βαθμωτών πεδίων. Ειδικά ιδιαίτερες γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας μπορούν να οριστούν ως θεωρίες τροποποιημένης γενικής σχετικότητας μαζί με έναν αριθμό κατάλληλων πεδίων συζευγμένων με την ύλη. Αυτό είναι για παράδειγμα η περίπτωση των θεωριών βαθμωτού τανυστή βαρύτητας, όπως η βαρύτητα $f(R)$ [38].

Στην περίπτωση του scalar-tensor, ακόμα και στο πλαίσιο Jordan μπορεί να έχουμε διαχωρισμό ανάμεσα στους γεωμετρικούς όρους και στους κλασικούς όρους της ύλης της (145), όπου ο H_{ab} περιλαμβάνει αμφότερα βαθμωτά και τανυστικά βαρυτικά πεδία π.χ. του φ, R^{ab}, R . Για έναν κατάλληλο μετασχηματισμό πώς μπορούμε να έχουμε εξισώσεις πεδίου $\tilde{G}_{ab} = 8\pi G \tilde{T}_{ab}^{eff}$, όπου $\tilde{T}_{ab}^{eff} = \tilde{T}_{ab}^M + \tilde{T}_{ab}^\phi$. Επιπλέον, έχει νόημα να θεωρούμε τον \tilde{T}_{ab}^{eff} ως έναν δραστικό τανυστή ενέργειας - ορμής, όπου \tilde{T}_{ab}^M είναι ο μετασχηματισμένος τανυστής ενέργειας - ορμής της ύλης και \tilde{T}_{ab}^ϕ είναι ένας τανυστής ενέργειας - ορμής για το βαθμωτό πεδίο φ που είναι συζευγμένο με την ύλη.

Αν θεωρήσουμε ότι, σε αυτό το πλαίσιο, ο δραστικός τανυστής ενέργειας - ορμής \tilde{T}_{ab}^{eff} ικανοποιεί κάποια ενεργειακή συνθήκη για παράδειγμα την null ενεργειακή συνθήκη (NEC). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι το \tilde{G}_{ab} πρέπει να ικανοποιεί μία τέτοια συνθήκη. Είναι εύκολο να γράψουμε την εξίσωση Raychaudhuri

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dv} = - \left[\frac{\tilde{\theta}^2}{3} = 2\tilde{\sigma}^2 + \tilde{R}_{ab}\tilde{k}^a\tilde{k}^b \right] \quad (148)$$

η οποία μας επιτρέπει να συμπεράνουμε τον ελκτικό χαρακτήρα της δοθείσας θεωρίας βαρύτητας στο πλαίσιο Einstein.

Παράδειγμα Τροποποιημένης Θεωρίας Βαρύτητας: Scalar-Tensor Βαρύτητα

Η δυνατότητα να γράψουμε τις ενεργειακές συνθήκες για οποιαδήποτε τροποποιημένη βαρύτητα εξαρτάται από τη σωστή ταυτοποίηση της συνάρτησης $g(\Psi^i)$ που σχετίζεται με την βαρυτική σύζευξη και τον τανυστή H_{ab} που περιέχει τους περαιτέρω βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας με βάση την Γενική Σχετικότητα. Θεωρούμε τη βαρύτητα βαθμωτού τανυστή [22] που δίνεται από

τη δράση

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,a} \phi^{,a} + 2\phi\lambda(\phi) \right] + S_M \quad (149)$$

όπου S_M είναι το κλασικό κομμάτι της ύλης, η βαρυτική σύζευξη θεωρείται μεταβλητή και η αλληλεπίδραση δυναμικού είναι παρούσα. Μεταβάλλοντας αυτή τη δράση με βάση τη μετρική g_{ab} και το βαθμωτό πεδίο ϕ προκύπτουν εξισώσεις πεδίου με H_{ab} που δίνονται από

$$H_{ab} = -\frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left[\phi_{;a} \phi_{;b} - \frac{1}{2} g_{ab} \phi_{;c} \phi^{;c} \right] - \frac{1}{\phi} [\phi_{;ab} - g_{ab} \phi_{;c}^{;c}] - \lambda(\phi) g_{ab} \quad (150)$$

και $g(\Psi^i) = \phi$, που θεωρούμε θετικό, και

$$\square\phi + \frac{2\phi^2\lambda'(\phi) - 2\phi\lambda(\phi)}{2\omega(\phi) + 3} = \frac{1}{2\omega(\phi) + 3} [8\pi GT - \omega'(\phi)\phi_{;c}\phi^{;c}] \quad (151)$$

όπου $T \equiv T_c^c$ είναι το ίχνος του τανυστή ενέργειας - ορμής της ύλης και $G \equiv \frac{2\omega+4}{2\omega+3}$ είναι η βαρυτική σταθερά που κανονικοποιείται από την τιμή του Newton. Μπορούμε επίσης να απαιτήσουμε τη διατήρηση της ύλης $\nabla^a T_{ab} = 0$ για να διατηρήσουμε το αξίωμα της ισοδυναμίας. Το αρχέτυπο της θεωρίας Brans-Dicke χαρακτηρίζεται από τον περιορισμό του $\omega(\phi)$ που είναι μία σταθερά και από $\lambda=\lambda'=0$. Επειδή έχει θεωρηθεί $\phi > 0$, η συνθήκη έχει ως αποτέλεσμα το focusing των time-like congruences και η ελκτική βαρύτητα γίνεται

$$(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) W^a W^b \geq \phi (H_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} H) W^a W^b. \quad (152)$$

5.2 Συνθήκες Bounce για Μοντέλα (FRW) σε Τροποποιημένες Θεωρίες Βαρύτητας

Μια έννοια bouncing του σύμπαντος, όπου το Big Bang συμβαίνει μετά την κατάρρευση ενός προηγούμενου σύμπαντος, έχει διερευνηθεί τα τελευταία χρόνια [33, 30]. Τα bouncing κοσμολογικά μοντέλα δεν εξαρτώνται από ιδιάζοντα σημεία αλλά έχουν δύο άλλα μεγάλα προβλήματα: δεν είναι σαφές μέχρι σήμερα η αιτία του Big Bang ως αιτία για την επιτάχυνση του σύμπαντος. Η δυναμική της ύλης και της ακτινοβολίας στα bouncing κοσμολογικά μοντέλα έχει μελετηθεί εδώ και πολλά χρόνια [8].

Πρόσφατα, ως γνωστόν, η επιστημονική συνεργασία του (*LIGO*) Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory ανακοίνωσε την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων, τα οποία προκαλούνται από τη συγχώνευση δύο μαύρων τρυπών με μάζες περίπου 36 με 29 φορές τη μάζα του ήλιου [1]. Περίπου 3 φορές η μάζα του ήλιου π.χ. 5 % της αρχικής συνολικής μάζας των μαύρων τρυπών, μετατράπηκε σε βαρυτικά κύματα. Πρόσφατα, προτάθηκε η έννοια της ύπαρξης πολλών μαύρων τρυπών με μάζες 20-100 φορές τη μάζα του ήλιου [29]. Αυτές τις ογκώδεις μαύρες τρύπες μπορούν να τις εκλάβουμε ως «σκοτεινή ύλη» [29]. Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως οι μαύρες τρύπες γίνονται ένας σημαντικός συντελεστής των κοσμολογικών μοντέλων και ειδικότερα της bouncing κοσμολογίας επειδή οι μαύρες τρύπες είναι το μοναδικό μακρο-αντικείμενο που μπορεί να επιβιώσει από το Big Crunch και το Big Bang και εμφανίζεται στον επόμενο κύκλο του σύμπαντος [52].

Η έννοια του bouncing (-αναπήδηση) σε κοσμολογίες Friedmann-Robertson-Walker (FRW) έχει εξετασθεί πολλές φορές από το 1930 όταν ο Tolman [179] πρότεινε ότι τα κλειστά ($k = 1$), (FRW) σύμπαντα μπορεί να επαναδιασταλούν αφού καταρρεύσουν σε μια κατάσταση υψηλής πυκνότητας στο μέλλον (ήταν ήδη γνωστό ότι αυτό δεν ήταν δυνατό για ανοιχτά και επίπεδα μοντέλα (FRW)). Το θέμα αυτό έχει παραμείνει δημοφιλές στην ιστορία της κοσμολογίας [57, 111] και είναι αυτή τη στιγμή ένας πολύ ενεργός τομέας έρευνας [129, 211]. Συγκεκριμένα, το εκπυρωτικό μοντέλο του σύμπαντος [99] μιας κυκλικής κοσμολογίας είναι εμπνευσμένο από τη M-θεωρία, ενώ στη loop κβαντική βαρύτητα, οι ημι-κλασικές εξισώσεις Friedmann προκαλούν ένα bounce [148, 12].

Στην κλασική κοσμολογία, τέτοια bounce δεν είναι δυνατά στα μοντέλα (FRW) [55] αν η ενεργή βαρυτική μάζα είναι θετική π.χ. $\rho + 2p > 0$. Αυτή είναι μια άμεση συνέπεια της εξίσωσης Raychaudhuri, η οποία είναι η θεμελιώδης εξίσωση της βαρυτικής έλξης [59, 62, 92]. Από την άλλη, κβαντικά πεδία και μερικά κλασικά βαθμωτά πεδία μπορούν επίσης να παραβιάσουν αυτή την συνθήκη [81, 67]. Γι' αυτό και τέτοια πεδία μπορούν καταρχήν να επιτρέπουν bounce σε (FRW) μοντέλα. Ωστόσο, τέτοια bounce είναι δύσκολο να παραχθούν σε σύμπαντα που αναπτύσσονται τόσο πολύ ώστε να είναι ρεαλιστικά. Επιπλέον, μη ομαλές φυσικές συμπεριφορές μπορούν να συμβούν αν αυτά τα κλασικά πεδία παραβιάζουν την συνθήκη $\dot{\phi}^2 > 0$, που είναι ισοδύναμη με το να

απαιτούν ότι η εσωτερική πυκνότητα μάζας είναι θετική $\rho + p > 0$. Είναι επίσης πιθανό ότι τα ghost πεδία (πεδία που έχουν μια αρνητική πυκνότητα ενέργειας) είναι ικανά να παράξουν ένα κλασικό bounce [72].

Δεν είναι μόνο τα μοντέλα (*FRW*) που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Η ιδέα του Smolin ότι το στάδιο της κατάρρευσης σε μια μαύρη τρύπα οδηγεί σε νέα διαστελλόμενη περιοχή [157, 158] προτείνει ότι η γεωμετρία του σύμπαντος σε ένα bounce μπορεί να είναι πολύ διαφορετική από ολικά ιστροπικούς και χωρικά ομογενείς χωροχρόνους (*FRW*). Λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος σε bouncing και κυκλικές κοσμολογίες, αξίζει τον κόπο να ερευνήσουμε όλες τις πιθανότητες και στη γενική σχετικότητα και σε άλλες θεωρίες βαρύτητας. Κλασικά bounce σε Kantowski-Sachs μοντέλα έχουν συζητηθεί [159] μέσα στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας. Οι Molina-Paris και Visser [124] έχουν ερευνήσει τις ελάχιστες συνθήκες κάτω από τις οποίες η δημιουργία του σύμπαντός μας μπορεί να προέκυψε εξαιτίας ενός bounce από μια προηγούμενη κατάρρευση στη περίπτωση των (*FRW*) χώρων. Οι Carloni κ.α.[41] έχουν συζητήσει τις συνθήκες για ένα bounce σε (*FRW*) κοσμολογίες σε $f(R)$ θεωρία. Οι Burgess κ.α.[32] ερεύνησαν τις απαραίτητες συνθήκες για bouncing μεμβρανόκοσμους. Οι Biswas κ.α.[28] μελέτησαν bounce σύμπαντα σε string-inspired βαρύτητα.

Bounce συνθήκες για *FRW* σύμπαν στη θεωρία Einstein

Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein είναι μια γεωμετρική θεωρία του χωροχρόνου. Ο θεμελιώδης λίθος της είναι το μετρικό ταυυστικό πεδίο g_{ij} . Το Κλασικό Κοσμολογικό Μοντέλο περιλαμβάνει τη γενική σχετικότητα ως μια από τις κύριες υποθέσεις του. Το μεγαλύτερο τμήμα της ύλης έχει θετική ενεργειακή πυκνότητα ρ , η οποία εξετάζεται πειραματικά. Ο ταυυστής ενέργειας - ορμής τέλειου ρευστού ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες, όπως η θετικότητα και η κυριαρχία της πυκνότητας ενέργειας πάνω στην πυκνότητα πίεσης. Το (*FRW*) σύμπαν μέσω ενός bounce γίνεται ελάχιστο και σε αυτό το ελάχιστο, η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη (*SEC*) της κλασικής βαρύτητας πρέπει να παραβιαστεί. Αν και η παραβίαση της (*SEC*) είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη. Με τον όρο bouncing σύμπαν, εννοούμε ένα σύμπαν που καταρρέει, γίνεται ελάχιστο και στην συνέχεια διαστέλλεται. Το γραμμικό στοιχείο του μοντέλου (*FRW*) είναι

$$ds^2 = dt^2 - \alpha(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (153)$$

όπου $k = +1, 0, -1$ για κλειστούς, επίπεδους και ανοιχτούς χωρικούς τομείς αντίστοιχα και $\alpha(t)$ είναι ο scale-factor. Για ένα επιτυχές bounce στο (*FRW*) μοντέλο, κατά τη διάρκεια της φάσης της συστολής το $\alpha(t)$ αρχικά μειώνεται π.χ. ($\alpha(t) < 0$) και μετά στη φάση της διαστολής π.χ. ($\alpha(t) > 0$). Στο σημείο bounce π.χ. στο $t = t_b$, η ελάχιστη αναγκαία συνθήκη είναι

$$1. \dot{\alpha}(t_b) = 0 \text{ και}$$

$$2. \ddot{\alpha}(t) > 0 \text{ για } t \in (t_b - \epsilon, t_b) \cup (t_b, t_b + \epsilon) \text{ για μικρά } \epsilon > 0.$$

Για ένα μη μοναδικό bounce ισχύει $\alpha(t_b) \neq 0$. Οι συνθήκες μπορεί να μην είναι ικανές για ένα μη μοναδικό bounce. Χρησιμοποιούμε το δείκτη b στις ποσότητες που έχουν υπολογιστεί στο χρόνο bounce, ($t = t_b$). Εξ ορισμού για τον scale-factor ισχύει $\alpha(t) > 0$ για όλα τα t . Για ένα τέλειο ρευστό, ο ταυυστής ενέργειας - ορμής είναι

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j - p g_{ij} \quad (154)$$

Σε ένα co-moving σύστημα συντεταγμένων με τη μετρική του (FRW) μοντέλου (153) έχουμε

$$T_j^i = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (155)$$

Σύμφωνα με την σχέση (155), η null ενεργειακή συνθήκη (NEC) θα είναι $\rho + p \geq 0$. Η ασθενής ενεργειακή συνθήκη (WEC) θα ικανοποιείται όταν $\rho \geq 0$ και $\rho + p \geq 0$. Η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη (SEC) θα ικανοποιείται όταν $\rho + p \geq 0$ και $\rho + 3p \geq 0$. Από τις (153), (154), οι εξισώσεις Einstein θα είναι

$$H^2 + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{\rho}{3} \quad (156)$$

$$\frac{2\ddot{\alpha}}{\alpha} + H^2 + \frac{k}{\alpha^2} = -p \quad (157)$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) \quad (158)$$

όπου $H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$. Στον χρόνο bounce, t_b , $H=0$ και $\dot{H} > 0$ σε ένα μικρό χρονικό διάστημα κοντά στον χρόνο t_b . Για να ικανοποιείται η $\dot{H} > 0$, πρέπει να έχουμε $\rho + 3p \leq 0$. Οπότε από τις (156), (157) έχουμε

$$\rho + p = 2 \left(-\dot{H} + \frac{k}{\alpha^2} \right) \quad (159)$$

Από τη σχέση (159), για ένα επίπεδο σύμπαν, έχουμε $\rho + p \leq 0$ π.χ. η (WEC) πρέπει να παραβιαστεί για ένα bounce. Για ανοιχτό σύμπαν, η (WEC) πρέπει να παραβιαστεί για ένα bounce και για ένα κλειστό (FRW) σύμπαν υπό τη συνθήκη $\dot{\alpha}_b > \frac{1}{\alpha_b}$, η WEC παραβιάζεται. Εδώ θεωρήσαμε $8\pi G = c = 1$ για κατάλληλα units.

***FRW* μοντέλο σε θεωρία πεδίου Hoyle-Narlikar**

Οι εξισώσεις πεδίου στη θεωρία Hoyle-Narlikar δίνονται από τις σχέσεις [85]:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -(T_{ij} - f(C_i C_j - \frac{1}{2}g_{ij}C_k C^k))$$

όπου $C(x, t) \equiv C(t)$, $\dot{C} \equiv \frac{dC}{dt}$. Οι εξισώσεις (*FRW*) θα είναι :

$$3H^2 + \frac{3k}{a^2} = \rho - \frac{1}{2}f\dot{C}^2$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + f\dot{C}^2$$

Στο σημείο bounce ισχύουν

$$(\rho + p) = \frac{-2\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2} + f\dot{C}^2$$

και

$$(\rho - p) = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{4k}{a^2}$$

FRW μοντέλο σε θεωρία Brans-Dicke (πλαίσιο Einstein)

Σε αυτή τη θεωρία, οι εξισώσεις πεδίου :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -(T_{ij} + \Lambda_{ij})$$

όπου T_{ij} ο ταυιστής ενέργειας - ορμής (154) και $\Lambda_{ij} = \frac{2w+3}{2\lambda^2}(\lambda_i\lambda_j - \frac{1}{2}g_{ij}\lambda_k\lambda^k)$. Οι εξισώσεις (*FRW*) θα είναι :

$$3H^2 + \frac{3k}{a^2} = \rho_{eff}$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)_{eff}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) - \frac{1}{6}(2w + 3)\left(\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}\right)^2$$

Για να ισχύει $\ddot{a} > 0$, θα πρέπει $(2w + 3) < 0$ και $(\rho + 3p) < 0$. Αυτές είναι οι απαραίτητες συνθήκες για bounce στη θεωρία Brans-Dicke. Επίσης, στο σημείο bounce έχουμε

$$(\rho + p)_{eff} = \frac{-2\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}$$

και

$$(\rho - p)_{eff} = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{4k}{a^2}.$$

Σε επίπεδο μοντέλο και η (*NEC*) και η (*DEC*) παραβιάζονται, ενώ στο κλειστό μοντέλο η (*NEC*) παραβιάζεται αν $\ddot{a} > \frac{1}{a_b}$.

FRW μοντέλο στη γενική κλάση θεωριών Scalar-Tensor (πλάισιο Einstein)

FRW μοντέλο με μεταβλητό κοσμολογικό όρο

Για Friedmann scale factor $a(t)$ έχουμε :

$$3H^2 + \frac{3k}{a^2} = \rho + \Lambda(t)$$

και

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \Lambda(t)$$

Στο σημείο bounce έχουμε :

$$\rho + p = \frac{-2\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}$$

και

$$\rho - p = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{4k}{a^2} - 2\Lambda(t)$$

FRW μοντέλο με (εξόγκωμα) bulk viscosity

Για Friedmann scale factor $a(t)$ έχουμε :

$$3H^2 + \frac{3k}{a^2} = \rho$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p'),$$

Στο σημείο bounce έχουμε :

$$\rho + p' = \frac{-2\ddot{a}}{a} + \frac{2k}{a^2}$$

και

$$\rho - p' = \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{4k}{a^2}$$

Για ($k = 0$)

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \frac{9}{2}H\xi$$

Για ($k = 1$) Αφού $\xi > 0$, η $\ddot{a} > 0$ θα ικανοποιείται μόνο όταν $(\rho + 3p) < 0$. Η απαραίτητη συνθήκη για bounce σε ένα κλειστό (*FRW*) μοντέλο με bulk viscosity είναι ότι η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη παραβιάζεται. Εδώ η (*NEC*) παραβιάζεται αν $\ddot{a} > \frac{1}{a^2}$.

Στα προηγούμενα ήδη αναφερθήκαμε σε τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, οι οποίες έχουν ως μια βασική γεωμετρική δομή τη Riemann γεωμετρία. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν οι ενεργειακές συνθήκες και τα bounce σε γενικευμένα γεωμετρικά μοντέλα τροποποιημένων θεωριών βαρύτητας.

6 Εξίσωση Raychaudhuri σε χωροχρόνο Finsler-Randers και Γενικευμένες Scalar-Tensor Θεωρίες

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τις εξισώσεις Raychaudhuri για διάφορους τύπους χώρων Finsler, όπως ο χωροχρόνος Finsler-Randers (FR) και σε μια γενικευμένη γεωμετρική δομή της πολλαπλότητας του χωροχρόνου που περιέχει δύο νήματα που αναπαριστούν δύο βαθμωτά πεδία $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$. Επίσης, υπολογίζουμε την εξίσωση Klein-Gordon για αυτό το μοντέλο. Επιπλέον, μελετώνται οι ενεργειακές συνθήκες σε κοσμολογία (FR) που συσχετίζονται με το μοντέλο (FRW). Τέλος, εφαρμόζουμε την εξίσωση Raychaudhuri για το μοντέλο $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$ όπου M είναι ένας χωροχρόνος (FRW).

Η εξίσωση Raychaudhuri έχει εισαχθεί από τον Raychaudhuri [137]. Είναι μια θεμελιώδης εξίσωση για τη βαρύτητα και την κοσμολογία και έχει μελετηθεί και γενικευθεί με πολλούς τρόπους σε διαφορετικές περιπτώσεις [58], [7],[64], [122], [126], [53], [92], [94] [80], [106], [54], [2], [123], [4], [140], [3], [142], [37],[93]. Αυτή η εξίσωση έχει εισαχθεί [162], [163], [171] και έχει μελετηθεί επίσης στο χωροχρόνο Finsler [118]. Η εξίσωση Raychaudhuri περιγράφει την εξέλιξη ενός βαρυτικού ρευστού και μας παρέχει μια επιβεβαίωση της προσδοκίας μας, πως η βαρύτητα θα έπρεπε να είναι μια παγκόσμια ελκτική δύναμη ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σωματίδια στη γενική σχετικότητα. Όταν κοσμολογικά πεδία, όπως η σκοτεινή ενέργεια, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, τα σπινωρικά πεδία ή η ανισοτροπία θεωρούνται σε μια συμβατική εξίσωση Raychaudhuri, η εξέλιξη της επιτάχυνσης του σύμπαντος επηρεάζεται [101], [164]. Η μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri μεταβάλλεται, όταν η μετρική δομή του χώρου αλλάζει, για παράδειγμα σε χώρους με στρέψη ή γενικευμένους μετρικούς χώρους, όπως ο χωροχρόνος Finsler, στον οποίο οι εξισώσεις Friedmann τροποποιούνται [162],[163],[164]. Στην περίπτωση των null γεωδαισιακών, η null εξίσωση Raychaudhuri παίζει σημαντικό ρόλο στη γεωμετρική οπτική του καμπυλωμένου χωροχρόνου. Επιπλέον, η εξίσωση Raychaudhuri επιβεβαιώνει την ύπαρξη των συζυγών σημείων με τα θεμελιώδη θεωρήματα μοναδικότητας στις congruences και την ισχύ των συνθηκών ενέργειας [81]. Η εξίσωση Raychaudhuri παράγεται από την δομή της εξίσωσης απόκλισης γεωδαισιακών ή καμπύλων και θεωρείται πως αποτυπώνει την εξέλιξη των γεωδαισιακών (focusing/defocusing) (εστίασης /απόκλισης) παίζοντας θεμελιώδη ρόλο στη δυναμική του ρευστού. Οι συνέπειες της βαρύτητας είναι ενταγμένες στην εξέλιξη της διαστολής που περιγράφεται από τις εξισώσεις Raychaudhuri. Οι διαφορετικοί τύποι της εξίσωσης Raychaudhuri είναι χρήσιμοι, όταν θέλουμε να μεταβούμε σε διαφορετικές γεωμετρικές δομές και φάσεις, κατά τη διάρκεια της εξέλιξης του σύμπαντος. Όλοι αυτοί οι τύποι μπορούν να περιγράψουν τις αντίστοιχες αλλαγές των εξισώσεων κίνησης. Η εξίσωση Raychaudhuri σχετίζεται με τα πεδία παλιρροϊκών δυνάμεων ($R_{jkl}^i \neq 0$), συνεπώς το βαρυτικό πεδίο μεταφέρεται σε αυτήν και το παλλιροϊκό πεδίο Ricci εντάσσεται στην εξίσωση. Όταν θεωρούμε μία con-

gience γεωδαισιακών, οι οποίες αναπαριστούν την κίνηση των γραμμών ροής, αυτές περνούν διαμέσου μιας επιφάνειας, η οποία είναι κάθετη στη ροή του ρευστού. Σε αυτή την περίπτωση, η επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος μπορεί να μελετηθεί μέσω των αποτελεσμάτων της, σε μία congruence των γεωδαισιακών [5]. Ενώ τα στοιχειώδη σωματίδια κινούνται σε γειτονικές γεωδαισιακές του ρευστού, μία απόκλιση συμβαίνει εξαιτίας του βαρυτικού πεδίου και της στρέψης σε γενικευμένους μετρικούς χώρους. Η κίνηση και η μεταβολή των γεωδαισιακών γραμμών μετά από κάποιο χρόνο προκαλεί μια ρυτίδωση στην επιφάνεια του υγρού. Η μεταβολή του όγκου (διαστολή/συστολή) περιλαμβάνει ένα παλιρροϊκό πεδίο, περιστροφή και παραμόρφωση που συνδέονται με το διάνυσμα απόκλισης. Αλλαγές στο διάνυσμα απόκλισης ανάμεσα σε δύο κοντινές ροϊκές γραμμές καθορίζονται από την εξίσωση Raychaudhuri, που είναι άμεσα συνδεδεμένη με την εξέλιξη του σύμπαντος.

Η απόκλιση των γεωδαισιακών είναι θεμελιώδους σημασίας στην γενική σχετικότητα και βαρύτητα, επειδή συσχετίζει την αλληλεπίδραση της καμπυλότητας του χωροχρόνου με την ύλη. Η απόκλιση των γεωδαισιακών σε γενικευμένους μετρικούς χώρους δομής Finsler έχει μελετηθεί από τον H.Rund [139] και τον E. Cartan [44] και αργότερα σε μια σειρά εργασιών για χώρους Finsler και Lagrange και τις εφαρμογές τους στον χωροχρόνο Finsler [11], [16], [167], [168].

Η χρήση της γεωμετρίας Finsler σε φυσικές εφαρμογές αποτελεί μια φυσική μετρική γενίκευση (επέκταση) της πολλαπλότητας του χωροχρόνου Riemann. Η γεωμετρία Finsler επιτρέπει τοπικές ανισοτροπίες που περιλαμβάνονται συμφύως ως διανυσματικές μεταβλητές $y^i = \frac{dx^i}{dt}$ στο πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης ή μιας ανώτερης τάξης διανυσματικής δέσμης της πολλαπλότητας, στην οποία οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται. Θεωρώντας ένα διαφορετικό υπόβαθρο, μπορούμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες για ένα σύμπαν που περιλαμβάνει ένα αρχέγονο διανυσματικό πεδίο, όπως για παράδειγμα ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, ένα βαθμωτό (inflaton) πεδίο ή ένα σπινοριακό πεδίο.

Ο τανυστής στρέψης τύπου Cartan χαρακτηρίζει όλες τις γεωμετρικές ιδέες της γεωμετρίας Finsler και συμβάλλει στη διαμόρφωσή της ως μιας φυσικής γεωμετρίας. Η θεωρία βαρυτικού πεδίου Finsler-Cartan είναι συμβατή με τη δομή της γενικής σχετικότητας.

Ένας σημαντικός παράγοντας για την μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri είναι η δομή του χώρου και το είδος της καμπυλότητας. Ειδικά σε γενικευμένους μετρικούς χώρους, όπως ο χωροχρόνος Finsler όπου οι καμπυλότητες είναι περισσότερες από μία. Η ιδέα της εξίσωσης Raychaudhuri επεκτείνεται με την εξάρτηση των εσωτερικών μεταβλητών, όπως η ταχύτητα (βαθμωτά, σπίνορες ή ένα ανισοτροπικό πεδίο) και επιπλέον όροι. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις Raychaudhuri εκφράζονται με καμπυλότητες της μορφής $K_{jkl}^i(x, v)$, $S_{\beta\gamma\delta}^\alpha(x, v)$ συζευγμένες με μια κατεύθυνση y ή με ένα διάνυσμα ταχύτητας v . Η εξάρτηση των καμπυλοτήτων από την κατεύθυνση (ταχύτητα) ή από ένα βαθμωτό πεδίο είναι μια συνέπεια της τοπικής ανισοτροπίας του χωροχρόνου που συμ-

φύως θεωρείται στο χώρο. Μια δυναμική θεωρία τροποποιημένης βαρύτητας πιο γενική από του Einstein, η εξίσωση απόκλισης γεωδαισιακών και η εξίσωση Raychaudhuri μπορούν να περιλαμβάνουν τα αποτελέσματα της σύζευξης καμπυλότητα-ύλη-ταχύτητα. Επιπλέον, μια ανισοτροπική μορφή καμπυλότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αστροφυσικές θεωρήσεις, όπως για παράδειγμα σε μια κοσμολογία Finsler [23].

Ένας τύπος χώρου Finsler είναι ο χώρος Finsler-Randers (FR) [136] που αποτελεί μια σημαντική γεωμετρική δομή στους χώρους Finsler [19],[115] ως προς τις εφαρμογές του στην γενική σχετικότητα και την κοσμολογία [164],[206]. Σε ένα χώρο (FR), μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο δεύτερο μέρος το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό με μία ποσότητα που αναπαριστά ένα πεδίο ανισοτροπίας ή ένα βαθμωτό ή spinning σωματίδια. Στον κλασικό τύπο του χωροχρόνου (FR), η γεωμετρία περιλαμβάνει πληροφορία για την βαρύτητα και τον ηλεκτρομαγνητισμό. Φυσικά αυτό δεν είναι μια πλήρης θεωρία ενοποίησης. Ωστόσο δεν πρέπει να αγνοούμε το γεγονός ότι μας δίνει μια εικόνα για το τι πρέπει να περιμένουμε από μια θεωρία ενοποιημένου πεδίου σε ένα πιο εκτεταμένο γεωμετρικό πλαίσιο.

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζουμε μερικές θεμελιώδεις γεωμετρικές ιδέες από τη θεωρία των χώρων Finsler [31, 193]. Θεωρούμε μια λεία 4-διάστατη πολλαπλότητα M (TM, π, M) και την εφαπτόμενη δέσμη της με προβολή $\pi : TM \rightarrow M$. Το σύνολο TM έχει τη φυσική διαφορίσιμη δομή που επάγεται από τη βασική πολλαπλότητα M . Στη μελέτη αυτή, θεωρούμε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων x^i , με $i = 0, 1, 2, 3$ και U , μια απεικόνιση της χωροχρονικής πολλαπλότητας M . Τότε, το ζεύγος (x^i, y^a) είναι ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στην $\pi^{-1}(U)$ στην TM , $a = 0, 1, 2, 3$. Ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων στον ολικό χώρο TM δίνεται από τις σχέσεις

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^0, \dots, x^3) \quad (160)$$

$$\det \left\| \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right\| \neq 0 \quad (161)$$

$$\tilde{y}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} y^b \quad (162)$$

$$x^\alpha = \delta_i^\alpha x^i \quad (163)$$

Μια μετρική Finsler στη M είναι μια συνάρτηση $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει τις ιδιότητες :

1.Ο περιορισμός της F στην $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$ είναι τάξης C^∞ και η F είναι συνεχής στην εικόνα της μηδενοτομής στην εφαπτόμενη δέσμη στην M .

2.Η F είναι θετικά ομογενής τάξης 1 (y^α), $F(x, ky) = kF(x, y)$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Η τετραγωνική μορφή με συνιστώσες $f_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$ ορίζεται στην \widetilde{TM} , είναι μη ιδιάζουσα ($\det(f_{ij}) \neq 0$), τάξης $(f_{ij}) = 4$.

Η ύπαρξη μια οριζόντιας κατανομής μαζί με μια κάθετη ορίζουν ένα διαχωρισμό της εφαπτόμενης δέσμης TTM σε ένα άθροισμα Whitney

$$T_{(x,y)}(TM) = H_{(x,y)} \oplus V_{(x,y)}. \quad (164)$$

Μια μη-γραμμική συνοχή N στην TM μπορεί να οριστεί στον ολικό χώρο της εφαπτόμενης δέσμης και ορίζει μια παράλληλη μετατόπιση στη βασική πολλαπλότητα. Οι συνιστώσες μιας μη-γραμμικής συνοχής δίνονται από τις σχέσεις

$$N_j^a = \frac{\partial G^a}{\partial y^j} \quad (165)$$

όπου οι συνιστώσες G^a ορίζονται ως εξής

$$G^a = \frac{1}{4} f^{aj} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \partial_j F \right), \quad (166)$$

και η σχέση

$$\frac{dy^a}{ds} + 2G^a(x, y) = 0 \quad (167)$$

προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y^a} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^a} = 0. \quad (168)$$

Ο νόμος μετασχηματισμού των συνιστωσών της μη-γραμμικής συνοχής προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\tilde{N}_i^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} N_j^b(x, y) + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^h} \frac{\partial^2 x^h}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^b} y^b \quad (169)$$

Μια τοπική βάση της $T_{(x,y)}(TM)$, $(\delta_i, \dot{\delta}_\alpha)$ επισυναπτόμενη στην οριζόντια κατανομή N έχει τη μορφή

$$\delta_i = \frac{\delta}{\delta x^i} = \partial_i - N_i^\alpha(x, y) \dot{\delta}_\alpha, \quad (170)$$

όπου

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \dot{\delta}_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \quad (171)$$

και $N_i^\alpha(x, y)$ είναι οι συνιστώσες της μη-γραμμικής συνοχής Cartan N. Η ιδέα της μη-γραμμικής συνοχής είναι θεμελιώδης στη γεωμετρία των διανυσματικών δεσμών και τοπικά ανισοτροπικών χώρων. Είναι ένα ισχυρό εργαλείο για μια γεωμετρική ενοποίηση των πεδίων. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, η μη-γραμμική συνοχή στο πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης

ενοποιεί τους εξωτερικούς και εσωτερικούς χώρους π.χ. το χώρο θέσης (τη βασική πολλαπλότητα M) με τον εφαπτόμενο χώρο T_pM . Με άλλα λόγια, συνδέεται με την τοπικά ανισοτροπική δομή του χωροχρόνου (εξαρτάται από τις ταχύτητες). Η δυϊκή τοπική βάση είναι

$$\{d^i = dx^i, \delta^\alpha = \delta y^\alpha = dy^\alpha + N_j^\alpha dx^j\}_{i,\alpha=0,\bar{3}} \quad (172)$$

Οι νόμοι μετασχηματισμού για μια τοπική βάση και τη δυϊκή της δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\delta}{\delta x^j}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^a} = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial}{\partial y^b} \quad (173)$$

$$d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j, \quad \delta \tilde{y}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^b} \delta y^b \quad (174)$$

Μια d -συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη TM του χωροχρόνου είναι μια γραμμική συνοχή στην TM που διατηρεί με την παράλληλεια, την οριζόντια κατανομή H και την κάθετη κατανομή V στην TM (164). Μια συναλλοίωτη παράγωγος που σχετίζεται με μια d -συνοχή γίνεται d -συναλλοίωτη. Η εφαπτόμενη δέσμη διαθέτει μια $(h - v)$ Sasaki τύπου μετρική που περιλαμβάνει ένα οριζόντιο και ένα κάθετο τμήμα που δίνονται από τις σχέσεις

$$G = f_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j + f_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j, \quad (175)$$

όπου $i, j = (1, \dots, 4)$.

Βασική Παρατήρηση: Σε βαρυτικές μετρικές θεωρίες επί μιας χωροχρονικής πολλαπλότητας καθώς και επί μιας εφαπτόμενης δέσμης μετρικά συμβατών συνοχών ένα θεμελιώδη ρόλο παίζει ότι στην παράλληλη μετατόπιση των διανυσμάτων διατηρείται η νόρμα τους.

Στο πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης, τα οριζόντια και κάθετα τμήματα της μετρικής f_{ij} ικανοποιούν τις σχέσεις

$$f_{ij|k} = 0$$

$$f_{ij|l} = 0$$

Θεωρούμε μια μετρική d -συνοχή $C\Gamma = (N_j^\alpha, L_{jk}^i, C_{jk}^i)$ με την ιδιότητα

$$f_{ij|k} = \delta_k f_{ij} - L_{ik}^h f_{hj} - L_{jk}^h f_{ih} = 0, \quad (176)$$

$$f_{ij|k} = \dot{\delta}_k f_{ij} - C_{ik}^h f_{hj} - C_{jk}^h f_{ih} = 0 \quad (177)$$

όπου

$$L_{jk}^i = \frac{1}{2} f^{ir} (\delta_j f_{rk} + \delta_k f_{jr} - \delta_r f_{jk}) \quad (178)$$

$$C_{jk}^i = \frac{1}{2} f^{ir} (\dot{\delta}_j f_{rk} + \dot{\delta}_k f_{jr} - \dot{\delta}_r f_{jk}) \quad (179)$$

Σε μια Finsler βαρυτική θεωρία, η συνοχή Cartan διατηρεί τις σχέσεις (176),(177) και παράγει τη βαρυτική θεωρία πεδίου Cartan-Finsler, που είναι αξιόπιστη για μια Finsler σχετικότητα και κοσμολογία. Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων των αντικειμένων L_{jk}^i και C_{jk}^i είναι

$$\tilde{L}_{jk}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^h} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} L_{lr}^h(x, y) + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} \quad (180)$$

$$\tilde{C}_{jk}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^h} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} C_{lr}^h(x, y) \quad (181)$$

Οι συνιστώσες της στρέψης Cartan C_{ijk} δίνονται από τις σχέσεις

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \dot{\delta}_k f_{ij} \quad (182)$$

ενώ τα σύμβολα Christoffel για το πρώτο και δεύτερο είδος για τη μετρική f_{ij} είναι

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (183)$$

$$\gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} f^{lk} \left(\frac{\partial f_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (184)$$

αντίστοιχα. Οι στρέψεις και οι καμπυλότητες που χρησιμοποιούμε δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$T_{kj}^i = 0, \quad S_{kj}^i = 0 \quad (185)$$

$$R_{jk}^i = \delta_k N_j^i - \delta_j N_k^i, \quad P_{jk}^i = \dot{\delta}_k N_j^i - L_{kj}^i \quad (186)$$

$$P_{jk}^i = f^{im} P_{mjk}, \quad P_{ijk} = C_{ijk|l} y^l \quad (187)$$

$$R^i_{jkl} = \delta_l L^i_{jk} + \delta_k L^i_{jl} + L^h_{jk} L^i_{hl} - L^h_{jl} L^i_{hk} + C^i_{jc} R^c_{kl} \quad (188)$$

$$S_{jikh} = C_{iks} C^s_{jh} - C_{ihc} C^s_{jk} \quad (189)$$

$$P_{ihkj} = C_{ijk|h} - C_{hjk|i} + C^r_{hj} C_{rik|ly^l} - C^r_{ij} C_{rkh|ly^l} \quad (190)$$

$$S^l_{ikh} = f^{lj} S_{jikh} \quad (191)$$

$$P^l_{ikh} = f^{lj} P_{jikh} \quad (192)$$

Οι ταυτότητες Ricci για την d -συνοχή είναι

$$X^i_{|k|h} - X^i_{|h|k} = X^r R^i_{rkh} - X^i_{|r} R^r_{kh}, \quad (193)$$

$$X^i_{|k|h} - X^i_{|h|k} = X^r P^i_{rkh} - X^i_{|r} C^r_{kh} - X^i_{|r} P^r_{kh} \quad (194)$$

$$X^i_{|k|h} - X^i_{|h|k} = X^r S^i_{rkh} \quad (195)$$

6.1 Η Εξίσωση Raychaudhuri

Στη φυσική, αν κοιτάζουμε προσεχτικά, δεν υπάρχουν πολλές εξισώσεις οι οποίες να ισχύουν σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς της και να έχουν αντέξει στο χρόνο. Μια τέτοια εξίσωση είναι η εξίσωση Raychaudhuri. Οι εξισώσεις Raychaudhuri αφορούν την κινηματική των ροών. Οι ροές παράγονται από ένα διανυσματικό πεδίο και είναι οι ολοκληρώσιμες καμπύλες ενός δοθέντος διανυσματικού πεδίου. Αυτές οι καμπύλες μπορεί να είναι γεωδαισιακές, αλλά μπορεί και να μην είναι. Μια ροή είναι μια ροϊκή γραμμή τέτοιων καμπύλων ενώ κάθε καμπύλη μπορεί να είναι time-like ή null ή μερικές φορές space-like. Εμάς μας ενδιαφέρουν τα επιπλέον κινηματικά χαρακτηριστικά τέτοιων ροών με επιπρόσθετους όρους. Οι εξισώσεις εξέλιξης (κατά μήκος των ροών) των ποσοτήτων που χαρακτηρίζουν τη ροή του ρευστού σε ένα δοθέν υπόβαθρο χωροχρόνου είναι οι εξισώσεις Raychaudhuri. Στις ροές ρευστών στην κοσμολογία υπάρχει ένα προτιμητέο διανυσματικό πεδίο 4-ταχυτήτων $u^\alpha : u^\alpha u_\alpha = 1$ που αναπαριστά την κίνηση της ύλης κατά μέσο όρο. Έστω τ ο κατάλληλος χρόνος κατά μήκος αυτών των ροϊκών γραμμών $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$. Το διάνυσμα επιτάχυνσης του u^α είναι $u^\alpha = u^a_b u^b$, το οποίο εξαφανίζεται αν και μόνο αν οι ροϊκές γραμμές είναι γεωδαισιακές για ένα (ψευδο)-Riemannian υπόβαθρο. Ειδικότερα, η συναλλοίωτη παραγωγή του διανυσματικού πεδίου u είναι ένας ταυυστής δεύτερης τάξης

$$\nabla_b u_a = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{n-1} h_{ab} \Theta, \quad n : \text{διάσταση}$$

που αποτελείται από τρία μέρη :

στο συμμετρικό κομμάτι χωρίς ίχνος, την παραμόρφωση (shear) της ροής

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{2}(\nabla_b u_a + \nabla_a u_b) - \left(\frac{1}{n-1}\right) h_{ab} \Theta$$

στο αντισυμμετρικό μέρος, την περιστροφή της ροής

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}(\nabla_b u_a - \nabla_a u_b)$$

και στο ίχνος, τον όγκο της ροής

$$\Theta = \nabla_a u^a$$

Η εξίσωση Raychaudhuri δεδομένης της εξέλιξης του όγκου Θ κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του ρευστού είναι της μορφής

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 = 2(\omega^2 - \sigma^2) + u^\alpha{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\kappa(\mu + 3p) + \Lambda \quad (196)$$

Αυτή είναι η γενική μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri, η οποία είναι θεμελιώδης για την βαρυτική έλξη και μας δείχνει πως η παραμόρφωση, η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση έχουν την τάση να κάνουν την ύλη να συστέλλεται ή επιβραδύνουν τη διαστολή, ενώ ο στροβιλισμός (vorticity) και μια θετική κοσμολογική σταθερά έχουν την τάση να κάνουν την ύλη να επεκτείνεται.

6.1.1 Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Χωροχρόνο Finsler

Finslerian congruences

Έστω $(F^4, f_{ij}(x, y))$ μια τετραδιάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $f_{ij}(x, y)$ η ανισοτροπική Finsler μετρική υπογραφής $(+, -, -, -)$ για κάθε (x, y) . Η κίνηση ενός σωματιδίου σε έναν Finsler χωροχρόνο F^4 περιγράφεται από ένα ζεύγος (x^i, u^i) όπου $x^i \in F^4$ και $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$, $i = 1, 2, 3, 4$ η 4-ταχύτητα του σωματιδίου (time-like/null) (τ είναι ο κατάλληλος χρόνος) που αναπαριστά την επαπτομένη της world-line εκφράζοντας την κίνηση τοπικών παρατηρητών σε ένα Finslerian τοπικά ανισοτροπικό σύμπαν.

Μια λεία congruence είναι μια περιοχή ανοιχτών συντεταγμένων U του F^4 που μπορεί να αναπαρασταθεί από μια προτιμητέα οικογένεια world lines (time-like curves / null) τέτοιες ώστε μέσω κάθε ζεύγους $(x, u) \in U$ να περνάει μία καμπύλη σε αυτή την οικογένεια, στην οποία το u είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο σημείο x . Αυτή η θεώρηση είναι ανάλογη με το Riemann πλαίσιο. Στο πλαίσιο της εφαπτόμενης δέσμης, η επεκτεινόμενη congruence έχει τη μορφή $(x^{(i)}(t), y^{(i)}(t))$. Η εξάρτηση από ένα γραμμικό στοιχείο (x, y) μπορεί επίσης να μελετηθεί σε αυτή την προσέγγιση με υπογραφή $(+, -, -, -)$ [107].

Η μετρική του (ψευδο)-Finsler χωροχρόνου περιγράφεται από τη σχέση

$$ds^2 = F^2(x, y) = f_{ij}y^i y^j$$

Οι καμπύλες time-like, null και space-like μπορούν να οριστούν στο Finsler πλαίσιο από τις παρακάτω σχέσεις [90]

$$\begin{aligned} \text{time-like} & \quad f_{ij}(x, y)u^i u^j > 0 \\ \text{null-like} & \quad f_{ij}(x, y)u^i u^j = 0 \\ \text{space-like} & \quad f_{ij}(x, y)u^i u^j < 0 \end{aligned} \quad (197)$$

Στο πλαίσιο της Finsler κοσμολογίας έχουμε θεωρήσει τη μορφή της Riemann εγγυτατοποίησης μιας μετρικής [164]. Ο Finsler μετρικός τανυστής και το ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $y^i(x)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευάσουμε τον Riemann μετρικό τανυστή $a_{ij}(x) = g_{ij}(x, y(x))$. Ο Riemann χώρος μαζί με αυτό τον μετρικό τανυστή λέγεται εγγυτατοποιημένος χώρος Riemann. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να δούμε κάποιες κοσμολογικές θεωρήσεις σε ένα πλαίσιο τετραδιάστατου χωροχρόνου. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις εξισώσεις Raychaudhuri για ένα χωροχρόνο Finsler. Θεωρούμε μια Finslerian οικογένεια ρευστού όπου οι ροϊκές γραμμές του ρευστού είναι time-like γεωδαισιακές και παραμετρικοποιούνται από τον κατάλληλο χρόνο τ έτσι ώστε ένα διανυσματικό πεδίο $u^i(x)$ επαπτομένων να κανονικοποιείται με το μοναδιαίο μήκος $u^i = \frac{y^i}{F}$. Χρησιμοποιώντας τη δ -διαφορίση στην κατεύθυνση του $u^i(x)$ για μια congruence ροϊκών γραμμών (όχι απαραίτητα γεωδαισιακών) η διαστολή, ο στροβιλισμός και η παραμόρφωση ορίζονται από τους παρακάτω τύπους [163]:

$$\tilde{\Theta} = Z_{ij}h^{ij} = u_{|i}^i - C_{im}^i \dot{u}^m \quad (198)$$

$$\tilde{\omega}_{ik} = Z_{[ik]} + \dot{u}_i u_k - \dot{u}_k u_i \quad (199)$$

$$\tilde{\sigma}_{ik} = Z_{(ik)} - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}h_{ik} - 2C_{ikm}u^m - \dot{u}_i u_k - \dot{u}_k u_i \quad (200)$$

όπου $\dot{u}^i = u_{|k}^i u^k = Z_k^i u^k$ και '|' συμβολίζει την Riemann συναλλοίωτη παράγωγο συσχετισμένη με την εγγυτατοποιημένη Riemann μετρική $a_{ij}(x) = g_{ij}(x, u(x))$. Τα σύμβολα '[]', '()' συμβολίζουν την αντισυμμετρικοποίηση και συμμετρικοποίηση του Z_{ik} αντίστοιχα. Ο τανυστής $C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_{ij}(x, y)}{\partial y^k}$ είναι συμμετρικός σε όλους τους δείκτες. Έτσι η εκτεταμένη Finslerian συναλλοίωτη παράγωγος του u μπορεί να εκφραστεί

$$Z_{ik} = \frac{1}{3}\tilde{\Theta}h_{ik} + \tilde{\sigma}_{ik} + \tilde{\omega}_{ik} + \dot{u}_i u_k \quad (201)$$

Η θεώρηση ενός Finslerian ιδανικού ρευστού υποδεικνύει ότι οι ροϊκές γραμμές είναι γεωδαισιακές και $\dot{u}^i = Z_k^i u^k = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, οι

γεωδαισιακές Finsler συμπίπτουν με εκείνες ενός εγγυτατοποιημένου χώρου Riemann. Οι σχέσεις μεταθετικότητας της δ -συναλλοιώτης παραγώγου του διανυσματικού πεδίου $u^i(x)$ δίνει

$$u_{i;hk} - u_{i;kh} = L_{ikh}^j u_j \quad (202)$$

όπου L_{jhh}^i ο τανυστής καμπυλότητας που παράγεται από τη δ -συναλλοιώτη παράγωγο με βάση τις συνιστώσες της εγγυτατοποιημένης affine συνοχής $a_{jk}^i(x, u(x))$ [139].

$$L_{jhh}^i(x, u(x)) = \left(\frac{\partial L_{jh}^i}{\partial x^k} + \frac{\partial L_{jh}^i}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right) - \left(\frac{\partial L_{jk}^i}{\partial x^h} + \frac{\partial L_{jk}^i}{\partial u^l} \frac{\partial u^l}{\partial x^h} \right) + L_{mk}^i L_{jh}^m - L_{mh}^i L_{jk}^m$$

Τελικά

$$\frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = -\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}_{ik}\tilde{\sigma}^{ik} + \tilde{\omega}_{ik}\tilde{\omega}^{ik} - L_{i\ell}u^i u^\ell + \dot{u}_{;i}^i \quad (203)$$

Αυτή είναι η εξίσωση *Raychaudhuri* για τον χωροχρόνο Finsler. Η αλλαγή της διαστολής εκφράζεται από $\frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau}$, που εξαρτάται από την V -ανιστροπική συμπεριφορά του τανυστή C_{jk}^i , κατά μήκος των ροϊκών γραμμών της ύλης. Όταν θεωρούμε ένα ιδανικό ρευστό, οι ροϊκές γραμμές είναι γεωδαισιακές και ο τελευταίος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (203) είναι $\dot{u}^i = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση *Raychaudhuri* μετατρέπεται στη μορφή μιας u -Riemann μετρικής εγγυτατοποιημένου χώρου συσχετισμένου με την congruence των γεωδαισιακών. Ένα ιδανικό ρευστό στην περίπτωση του χωροχρόνου Finsler έχει την εγγυτατοποιημένη μορφή

$$T_{ij}(x, u(x)) = (\mu + p)u_i(x)u_j(x) + pa_{ij} \quad (204)$$

όπου $p = p(x)$, $\mu = \mu(x)$ και $u_i(x)$ αναπαριστούν την πίεση, την πυκνότητα του ρευστού και την fluid-4 ταχύτητα αντίστοιχα. Οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$L_{ij}(x, u(x)) = K \left(T_{ij}(x, u(x)) - \frac{1}{2}T_k^k a_{ij} \right), \quad K : \text{σταθερά} \quad (205)$$

όπου ο τανυστής Ricci L_{ij} είναι ορισμένος απευθείας από τον τανυστή ενέργειας - ορμής της ύλης T_{ij} και σε κάθε σημείο είναι συσχετισμένος με τον εγγυτατοποιημένο μετρικό τανυστή Riemann $a_{ij}(x) = g_{ij}(x, u(x))$. Από τις (204),(205) παίρνουμε

$$L_{ij}u^i u^j = \frac{1}{2}K(\mu + 3p) \quad (206)$$

Ο όρος $L_{i\ell}u^i u^\ell$ αντιστοιχεί σε μια ανιστροπική βαρυτική επιρροή της ύλης κατά μήκος των world-lines του ρευστού και εκφράζει την παλιρροϊκή δύναμη του πεδίου.

Από την εξίσωση (204), η εξίσωση Raychaudhuri στην περίπτωση ενός ιδανικού ρευστού δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\Theta} = \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = -\frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}_{ik}\tilde{\sigma}^{ik} + \tilde{\omega}_{ik}\tilde{\omega}^{ik} - \frac{1}{2}K(\mu + 3p) + \dot{u}^i{}_{;i} \quad (207)$$

Η σχέση

$$L_{i\ell}u^i u^\ell > 0 \quad (208)$$

δείχνει ότι η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη ισχύει για κάθε διάνυσμα time-like u^α που είναι εφαπτόμενο στις time-like γεωδαισιακές.

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια του ρευστού μ και η πίεση p ικανοποιούν την ενεργειακή συνθήκη $\mu + p > 0$. Αυτή η συνθήκη ορίζει μοναδικά τις Finslerian world lines (congruences) του ρευστού με $u(x)$ εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο ανάλογο με αυτό του πλαισίου Riemann [63] σε μια περιοχή του χωροχρόνου Finsler η οποία λέγεται «εγγυτατοποιημένη πολλαπλότητα Riemann» [139]. Ο όρος $L_{i\ell}u^i u^\ell > 0$ (205) μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ένα κλειδί για την ύπαρξη συζυγών σημείων στη δομή του χωροχρόνου Finsler.

6.1.2 Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Χωροχρόνο Finsler-Randers (FR)

Οι γεωδαισιακές

Η Lagrangian μετρική συνάρτηση σε έναν χώρο (FR) δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L} = (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2} + kA_i\dot{x}^i, \quad (209)$$

όπου k σταθερά, $A_i(x)$ είναι το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό και $g_{ij}(x)$ το Riemann βαρυτικό δυναμικό με $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{ds}$. Από την (178) έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = \frac{1}{2(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} \dot{x}^i\dot{x}^j + k \frac{\partial A_i}{\partial x^a} \dot{x}^i \quad (210)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} = \frac{1}{(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2}} g_{aj}\dot{x}^j + kA_a$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτουν από τη σχέση

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^a} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 0 \quad (211)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει

$$\frac{d\dot{x}^i}{ds} + \Gamma_{mn}^i \dot{x}^m \dot{x}^n + k(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{1/2} F_j^i \dot{x}^j = 0 \quad (212)$$

όπου F_{ik} αναπαριστά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η εξίσωση (212) συμπίπτει με την εξίσωση κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα βαρυτικό πεδίο

$$\frac{d\dot{x}^i}{ds} + \Gamma_{mn}^i \dot{x}^m \dot{x}^n = -k F_j^i \dot{x}^j \quad (213)$$

ή για ένα διάνυσμα V παράλληλο στο \dot{x}^m παίρνουμε

$$\frac{dV^i}{d\tau} + \Gamma_{mn}^i V^m V^n = -k F_j^i V^j, \quad (214)$$

με

$$\dot{V}^i = V_{;k}^i V^k \quad (215)$$

Σε έναν χώρο (FR) η ποσότητα $\dot{V}_{;i}^i \neq 0$ εφαρμόζεται στις γεωδαισιακές, επειδή η εξίσωση των γεωδαισιακών είναι η δύναμη Lorentz (212). Αυτή η ποσότητα εντάσσεται στην εξίσωση Raychaudhuri γενικεύοντας την περίπτωση του Riemann, στον οποίο η δύναμη Lorentz εισάγεται στην εξίσωση Raychaudhuri μόνο για μη γεωδαισιακές ροές με την παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου [126],[106]. Επιπλέον σε έναν γενικό χωροχρόνο Finsler μιας εγγυτατοποιημένης μορφής οι ροϊκές γραμμές ακολουθούν την κίνηση των γεωδαισιακών όταν η επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν.

Γενικά, θεωρούμε ένα διάνυσμα $V^\ell(x)$ εφαπτόμενο στις ροϊκές γραμμές στο χώρο (FR) και τότε η εξίσωση των γεωδαισιακών γίνεται

$$\frac{d^2 V^l}{ds^2} + \Gamma_{ij}^l y_i y_j + g^{lm} (\partial_j V_m - \partial_m V_j) y^j = 0 \quad (216)$$

όπου Γ_{ij}^l αναπαριστούν τα σύμβολα Christoffel και g^{lm} οι συντελεστές της αντίστροφης μετρικής του Riemann χωροχρόνου, $V_m = \phi(x) \widehat{V}_m$ με \widehat{V}_m το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του V_m και $\phi(x)$ ένα βαθμωτό. Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση των γεωδαισιακών έχουμε έναν επιπλέον όρο, $g^{lm} (\partial_j V_m - \partial_m V_j) y^j$, ο οποίος περιλαμβάνει μια περιστροφή. Για την περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων πρέπει να τροποποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας μια affine παράμετρο λ . Αυτό οφείλεται στο ότι οι world-lines ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι null. Στη γεωμετρική οπτική, η κατεύθυνση της διάδοσης μιας ακτίνας φωτός καθορίζεται από το εφαπτόμενο διάνυσμα κύματος στην ακτίνα. Έτσι έχουμε

$$\frac{d V^l}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^l V_i V_j + g^{lm} (\partial_j V_m - \partial_m V_j) V^j = 0 \quad (217)$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $V_{i;j} - V_{j;i} = V_{i,j} - V_{j,i}$ από (216) με τον στροβιλισμό $\tilde{\omega}_{ij}$ παίρνουμε

$$\frac{dy^\ell}{ds} + \Gamma_{ij}^l y_i y_j + g^{li} \tilde{\omega}_{ij} y^j = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (218)$$

Σημείωση: Παρατηρούμε από την (216) ότι η y -εξάρτηση της μετρικής είναι μια συνέπεια της ύπαρξης ανισοτροπικού πεδίου V_k σε έναν χώρο (FR) και ο όρος του στροβιλισμού μπορεί να συμπεριληφθεί στην εξίσωση των γεωδαισιικών (218).

Η εξίσωση Raychaudhuri

Λαμβάνοντας υπόψη την παρουσία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου F_{ik} (214) οι κινηματικές παράμετροι $\tilde{\Theta}, \tilde{\omega}, \tilde{\sigma}$ (198)-(200) τροποποιούνται στη μορφή

$$\tilde{\Theta} = V_{|i}^i + f^m C_{im}^i \quad (219)$$

$$\tilde{\sigma}_{ik} = Z_{(ik)} - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}h_{ik} - 2C_{ikm}V^m + \Gamma_{ki0} - \Gamma_{i0k} + 2kF_{ki} \quad (220)$$

$$\tilde{\omega}_{ik} = Z_{[ik]} + \Gamma_{ki0} - \Gamma_{i0k} + 2kF_{ki}. \quad (221)$$

όπου θέτουμε $f^m = \Gamma_{jk}^m V^j V^k + kF_j^m V^j$ και $\Gamma_{i0k} = \Gamma_{ijk}V^j$. Εδώ το " | " συμβολίζει την εγγυτατοποιημένη συναλλοίωτη παράγωγο. Στις παραπάνω εξισώσεις, χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (214) της δύναμης Lorentz σ' ένα χώρο (FR).

Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη διαφύριση παίρνουμε τον τανυστή καμπυλότητας Cartan \tilde{R}_{jkl}^i και τον τανυστή Ricci \tilde{R}_{jk} . Στο πλαίσιο μιας εφαιπτόμενης δέσμης, η εξίσωση Raychaudhuri έχει δοθεί [162]. Μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση Raychaudhuri για το μοντέλο του χωροχρόνου (FR) (209) στην Finsler εφαιπτόμενη δέσμη, όπου αντί για το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό μπορούμε να θεωρήσουμε ένα time-like διανυσματικό πεδίο X^n .

$$\begin{aligned} X^m \tilde{\Theta}_{|m} &= \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = \tilde{R}_{lm} X^l X^m - T_{mk}^i X_{|i}^k X^m - \tilde{R}_{mk}^b X_{|b}^k X^m - X_{|l}^m X_{|m}^l = \\ &= \tilde{R}_{km} X^k X^m - T_{mk}^i \left(\frac{1}{3}\tilde{\Theta}\tilde{h}_i^k + \tilde{\sigma}_i^k + \tilde{\omega}_i^k \right) X^m - \tilde{R}_{mk}^b \left(\frac{1}{3}\tilde{\Theta}\tilde{h}_b^k + \sigma_b^k + \omega_b^k \right) X^m - \\ &\quad - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \sigma_l^m \sigma_m^l - \omega_l^m \omega_m^l \end{aligned} \quad (222)$$

Θεωρώντας την εξίσωση (185) και τη συνθήκη ολοκλήρωσης $\tilde{R}_{mk}^b = 0$ της σχέσης (186) παίρνουμε από την (222), την εξίσωση

$$X^m \tilde{\Theta}_{|m} = \tilde{R}_{km} X^k X^m - \sigma_l^m \sigma_m^l - \omega_l^m \omega_m^l - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 \quad (223)$$

λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή του τανυστή Ricci \tilde{R}_{kj} στο χώρο (FR) [115, 209] παίρνουμε

$$\tilde{R}_{kj} = R_{kj} + \Delta_{00k|j} - \Delta_{00j|k} + \Delta_{km0}\Delta_{0j}^m - \Delta_{kmj}\Delta_{00}^m \quad (224)$$

όπου Δ_{mj}^i αναπαριστά τον τανυστή μορφοποίησης

$$\Delta_{hmj} = f_{ih}\Delta_{mj}^i \quad (225)$$

R_{kj} είναι ο τανυστής Ricci του Riemann χώρου και η f_{ih} αναπαριστά τη μετρική του χωροχρόνου (FR). Μετά την (224), η μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri στον οριζόντιο υπόχωρο της εφαπτόμενης δέσμης δίνεται από

$$X^j \tilde{\Theta}|_j = -\frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 + \\ + \{R_{kj} + \Delta_{00k|j} - \Delta_{00j|k} + \Delta_{km0} \Delta_{0j}^m - \Delta_{kmj} \Delta_{00}^m\} X^k X^j - \tilde{\sigma}_l^j \tilde{\sigma}_j^l - \tilde{\omega}_l^j \tilde{\omega}_j^l \quad (226)$$

$$X^j \tilde{\Theta}|_j = -\frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 + \tilde{R}_{kj} X^k X^j - \tilde{\sigma}_l^j \tilde{\sigma}_j^l - \tilde{\omega}_l^j \tilde{\omega}_j^l$$

Η μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri στον κάθετο υπόχωρο του χώρου (FR) δίνεται από

$$X^g \Theta|_g = \frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3} \Theta^2 + S_{hg} X^h X^g - S_{ge}^h X^e|_h X^g - X^g|_f X^f|_g = \\ = -\frac{1}{3} \Theta^2 - \sigma_f^e \sigma_e^f - \omega_f^e \omega_e^f + S_{hg} X^h X^g - S_{ge}^f X^g \left(\frac{1}{3} \Theta h_f^e + \sigma_f^e + \omega_f^e \right). \quad (227)$$

Τα « $|$, \rangle » συμβολίζουν τις οριζόντιες και κάθετες συναλλοίωτες παραγώγους [31, 193]. Αντικαθιστώντας $S_{ge}^f = 0$ από την (185), η S-Ricci καμπυλότητα ενός χώρου (FR) μας δίνει [165]

$$S_{hg} = \frac{\phi^2}{2F^2\sigma^2} \left[\frac{3\sigma^2(y_h y_g - g_{hg}) - \beta^2(4y_h y_g + 3g_{hg})}{2} + \beta S_{hg}(y_h \widehat{V}_g) \right]$$

όπου S_{hg} είναι ένας τελεστής και συμβολίζει τη συμμετρικότητα των δεικτών h, g . Θεωρούμε επίσης $\widehat{V}_a \widehat{V}^a = 1$ ως time-like διανύσματα και $\sigma = (g_{ij} y^i y^j)^{1/2}, \beta = y^a \widehat{V}_a$. Έτσι, η εξίσωση Raychaudhuri σε ένα χώρο (FR) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{1}{3} \Theta^2 - \sigma_f^e \sigma_e^f - \omega_f^e \omega_e^f + \\ + \left\{ \frac{\phi^2}{2F^2\sigma^2} \left[\frac{3\sigma^2(y_h y_g - g_{hg}) - \beta^2(4y_h y_g + 3g_{hg})}{2} + \beta S_{hg}(y_h \widehat{V}_g) \right] \right\} X^h X^g \quad (228)$$

Η μορφή της εξίσωσης Raychaudhuri στον κάθετο υπόχωρο μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια εσωτερική (internal) ανισοτροπική συμβολή στην εξέλιξη του σύμπαντος, συνδεδεμένη με αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών σωματιδίων.

6.1.3 Οι Ενεργειακές Συνθήκες σε Χωροχρόνο Finsler-Randers

Οι ενεργειακές συνθήκες είναι πολύ σημαντικές στην κοσμολογία, γιατί μαζί με τις εξισώσεις Friedmann και Raychaudhuri παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη του σύμπαντος [81]. Παρακάτω δίνουμε τις ενεργειακές συνθήκες σε ένα

χώρο (FR). Σε αυτόν το χώρο, σημαντικό είναι ένα βαθμωτό Z_t της ανισοτροπίας. Οι Friedmann-like εξισώσεις της γενικευμένης μορφής της κοσμολογίας τύπου (FR) έχουν μελετηθεί [164]. Η μορφή αυτών των εξισώσεων δίνεται από τις σχέσεις:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4} \frac{\dot{a}}{a} \dot{u}_0 = -\frac{4\pi G}{3} (\mu + 3P) \quad (229)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} + \frac{11}{4} \frac{\dot{a}}{a} \dot{u}_0 = 4\pi G(\mu - P) \quad (230)$$

Από τις σχέσεις (229),(230) παίρνουμε την Friedmann-like εξίσωση

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}}{a} Z_t = \frac{8\pi G}{3} \mu - \frac{k}{a^2} \quad (231)$$

όπου θέτουμε $u_0(t) = \phi(x)\hat{u}_0$, με $u_0(t)$ τη χρονική συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος \hat{u}_a και Z_t , που ορίζεται ως $Z_t = \dot{u}_0$. Με βάση τις σχέσεις (229),(230),(231) παίρνουμε

$$\mu = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a} Z_t + \frac{k}{a^2} \right) = \frac{3}{8\pi G} (H^2 + \frac{k}{a^2} + Z_t H) \quad (232)$$

με $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Από τη (232) για να ισχύει ότι $\mu \geq 0$, για το βαθμωτό θα πρέπει να ισχύει $Z_t \geq 0$. Επίσης έχουμε

$$P = -\frac{1}{8\pi G} \left[2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + H^2 + \left(\frac{k}{a^2} \right) + \frac{5Z_t}{2} H \right] \quad (233)$$

Από τις (229)-(232) παίρνουμε

$$\mu + P = \frac{1}{8\pi G} \left[-2\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2\frac{k}{a^2} + \frac{1}{2} Z_t H \right] \quad (234)$$

και

$$\mu + 3P = \frac{-3}{4\pi G} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4} \frac{\dot{a}}{a} Z_t \right] \quad (235)$$

Η ισχυρή ενεργειακή συνθήκη $\mu + 3P \geq 0$ λαμβάνεται για $\frac{\ddot{a}}{a} \leq -\frac{3}{4} Z_t$ συνεπώς $\ddot{a} < 0$, ($Z_t > 0$). Έχουμε επίσης $\mu + P \geq 0$ αν $\ddot{a} < 0$ από την (234). Επιπλέον οι ασθενείς ενεργειακές συνθήκες (WEC) και οι συνθήκες null-energy (SEC) ικανοποιούνται εξίσου.

Ένα bounce συμβαίνει στο σύμπαν όταν παραβιάζονται οι (WEC), (NEC), (SEC) για μικρό διάστημα ενός χρονικού σημείου (bounce time) με $\dot{a} = 0$ και $\ddot{a} > 0$ [149, 150, 151]. Ανάλογα με το (FRW)-σύμπαν για μια (FR)-κοσμολογία, ένα bounce μπορεί να θεωρηθεί αν οι προαναφερθείσες συνθήκες για την (WEC) και (SEC) παραβιαστούν. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

$HZ_t = 0$ και $\ddot{a} > 0$. Σε ένα bounce time, οι (SEC) συνθήκες ενός χωροχρόνου (FR) και μιας (FRW)-κοσμολογίας ταυτοποιούνται. Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες bounce $\mu + P < 0$, $\mu + 3P < 0$ είναι ισοδύναμες με

$$2\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right) + \frac{1}{2}HZ_t < 2\frac{\ddot{a}}{a} \Rightarrow \ddot{a} > 0 \quad (236)$$

$$\ddot{a} > -\frac{3}{4}Z_t\dot{a} \Rightarrow \ddot{a} > 0 \quad (237)$$

6.2 Η Εξίσωση Raychaudhuri σε Γενικευμένη Θεωρία Scalar-Tensor

6.3 Το μοντέλο

Οι θεωρίες scalar-tensor και Brans-Dicke αποτελούν θεμελιώδες κομμάτι της μελέτης της γενικής σχετικότητας και της κοσμολογίας και η συμβολή τους είναι αξιοσημείωτη στην κοσμολογία [67, 18]. Από την άλλη μεριά, τα πιο απλά μοντέλα inflation περιλαμβάνουν ένα βαθμωτό πεδίο. Ωστόσο, στη θεωρία χορδών ή σε θεωρίες supergravity είναι πιθανόν να μελετήσουμε μοντέλα με διάφορα διαφορετικά βαθμωτά πεδία ειδικά αν έχουν κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Ο μηχανισμός δύο βαθμωτών $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ οδηγεί το inflation σε μια πιο περίπλοκη θεωρία που είναι χρήσιμη για την μελέτη της εξέλιξης του σύμπαντος. Όταν ο μηχανισμός δε δουλεύει, δύο βαθμωτά μπορούν να μας δώσουν μια επιπλέον ελευθερία στην εύρεση ρεαλιστικών μοντέλων inflationary κοσμολογίας [112].

Στο πλαίσιο των γενικευμένων μετρικών δομών μιας θεωρίας βαρύτητας scalar-tensor έχει μελετηθεί η Lagrangian πυκνότητα [170]. Επιπλέον έχουν παραχθεί οι εξισώσεις πεδίου για το βαρυτικό πεδίο Finsler της μορφής $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$ όπου το M αναπαριστά μια (ψευδο)-Riemann χωροχρονική πολλαπλότητα με $\{\phi^{(1)}\}$, $\{\phi^{(2)}\}$, δύο μη μεταθετικούς G -αριθμούς (Grassmannian). Στην περίπτωση μας, θεωρούμε μία 4-(ψευδο)-Riemann πολλαπλότητα συζευγμένη με δύο βαθμωτά $\{\phi^{(1)}\}$, $\{\phi^{(2)}\}$, που παίζουν το ρόλο των νημάτων ή των εσωτερικών (internal) μεταβλητών. Φυσικά, αυτά μπορούν να αναπαριστούν για παράδειγμα το inflaton ή μια ανισοτροπία που προέρχεται από ένα βαθμωτό πεδίο [101]. Σε αυτό το χώρο, το επισυναπτόμενο πλαίσιο έχει τη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial Z^M} \equiv \left(\frac{\delta}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - N_\alpha^{(1)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}} - N_\alpha^{(2)} \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}}, \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}} \right)$$

$$dZ^M \equiv (dx^\alpha, \delta\phi^{(1)} = d\phi^{(1)} + N_\alpha^{(1)} dx^\alpha, \delta\phi^{(2)} = d\phi^{(2)} + N_\alpha^{(2)} dx^\alpha)$$

Θέτουμε

$$X_\alpha = \frac{\delta}{\delta x^\alpha}, X_{(1)} = \frac{\partial}{\partial \phi^{(1)}}, X_{(2)} = \frac{\partial}{\partial \phi^{(2)}}$$

και

$$X_M = (X_\alpha, X_{(1)}, X_{(2)}),$$

με

$$\frac{\partial}{\partial\phi^{(1)}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi^{(1)}} = g_{(1)(1)} = g_{(2)(2)} = \frac{\partial}{\partial\phi^{(2)}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi^{(2)}} = \phi(x^\alpha) \quad (238)$$

όπου ϕ είναι ένα βαθμωτό $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Οι γεωμετρικές έννοιες $N_a^{(1)}, N_a^{(2)}$ αναπαριστούν τις μη-γραμμικές συνοχές των βαθμωτών πεδίων $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ με βάση τις συντεταγμένες του χωροχρόνου. Η αντίστροφη μετρική του G_{MN} δίνεται από $G^{MN} = [g^{\alpha\beta}, g^{(1)(1)}, g^{(2)(2)}]$, όπου $g^{\alpha\beta}$ είναι η αντίστροφη μετρική του $g_{\alpha\beta}$ για M . Το συνδιάνυσμα X_M έχει την αντίστροφη $X^N = G^{MN} X_M$.

$$X^{(1)} = \phi^{-1} X_{(1)} = g^{(1)(1)} X_1$$

$$X^{(2)} = \phi^{-1} X_{(2)} = g^{(2)(2)} X_{(2)}$$

$$\phi^{-1} = g^{(1)(1)} = g^{(2)(2)}$$

Η μετρική δομή αυτού του προτύπου που αφορά την επισυναπτόμενη βάση δίνεται από τη σχέση

$$G = G_{MN} dZ^M dZ^N = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta + g_{(1)(1)} \delta\phi^{(1)} \otimes \delta\phi^{(1)} + g_{(2)(2)} \delta\phi^{(2)} \otimes \delta\phi^{(2)} \quad (239)$$

όπου $G_{MN} = \{g_{\beta\gamma}(x^\alpha), g_{(1)(1)}(x^\alpha), g_{(2)(2)}(x^\alpha)\}$ με $g_{(1)(1)}(x^\alpha) = g_{(2)(2)}(x^\alpha) = \phi(x^\alpha) \neq 0$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση. Ο τανυστής καμπυλότητας σε αυτό το χώρο γράφεται

$$R_{LNM}^K = X_M \Gamma_{LN}^K - X_N \Gamma_{LM}^K + \Gamma_{LN}^Z \Gamma_{ZM}^K - \Gamma_{LM}^Z \Gamma_{ZN}^K + \Gamma_{LZ}^K W_{NM}^Z \quad (240)$$

Στην προσέγγισή μας, θα υιοθετήσουμε την περίπτωση, όπου όλες οι συνιστώσες του τανυστή στρέψης είναι ίσες με μηδέν και $g_{a(1)} = g_{(1)a} = g_{a(2)} = g_{(2)a} = g_{(1)(2)} = g_{(2)(1)} = 0$. Ο τανυστής Ricci, σε αυτό το μοντέλο, δίνεται από τη σχέση

$$R_{MN} \equiv R_{MLN}^L \equiv (R_{\alpha\beta}, \dots, R_{(1)(1)}, R_{(2)(2)}) \quad (241)$$

ή

$$R_{MN} = \{R_{MN\alpha}^\alpha, R_{MN(1)}^{(1)}, R_{MN(2)}^{(2)}\} \quad (242)$$

$$\mathcal{R} = R_{MN} G^{MN} = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} + R_{(1)(1)} g^{(1)(1)} + R_{(2)(2)} g^{(2)(2)} = R + R^{(1)} + R^{(2)} \quad (243)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτουν από μια Lagrangian της μορφής

$$\mathcal{L} = \sqrt{|G|} \mathcal{R}$$

όπου $G = |\det(G_{MN})|$.

Η βαθμωτή καμπυλότητα \mathcal{R} κατασκευάζεται από G_{MN} και διαφέρει από τη Riemann, λόγω των συνεισφορών των εσωτερικών μεταβλητών $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$. Έτσι η βαθμωτή καμπυλότητα \mathcal{R} γίνεται πιο γενική από αυτή της θεωρίας Brans-Dicke. Στην περίπτωση μας, οι τανυστές Ricci παίρνουν τη μορφή

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \phi_{,\mu} \phi^{-1} + \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \phi^{-1} - \phi_{,\alpha\beta} \phi^{-1} \quad (244)$$

$$R_{(1)(1)} = R_{(2)(2)} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\alpha\beta,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi_{,\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{,\mu} \phi_{,\nu}) \quad (245)$$

όπου $R_{\alpha\beta}$ είναι ο Riemann-Ricci τανυστής, οι δείκτες (α, β, \dots) είναι $(0, \dots, 3)$ και τα $(1), (2)$ αναπαριστούν τα νήματα. Σε αυτό το μοντέλο, η Lagrangian πυκνότητα δίνεται από τη σχέση [170]

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|} (\phi R - 2g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} / \phi) \quad (246)$$

Από την (246), παρατηρούμε ότι ο πρώτος και ο τρίτος όρος της Lagrangian είναι παρόμοιοι με τη θεωρία Brans-Dicke. Σε αυτή τη μορφή της Lagrangian \mathcal{L} παρουσιάζεται ένα non-minimal coupling με ένα βαθμωτό πεδίο. Μεταβάλλοντας τη δράση (\mathcal{L}) με βάση το $g_{\mu\nu}$ και ϕ παίρνουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\kappa\lambda}} \equiv & \left(R^{\kappa\lambda} - \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} R \right) + \frac{1}{4} \left(g^{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda} \phi^{-1} - g^{\alpha\kappa} g^{\beta\lambda} \right) \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \\ & + \phi_{|\alpha\beta} (g^{\alpha\kappa} g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\beta} g^{\kappa\lambda}) = 0 \end{aligned} \quad (247)$$

$$\mathcal{L}_{\phi} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} \equiv \phi R + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \phi^{-1} - g^{\alpha\beta} \phi_{;\alpha\beta} = 0 \quad (248)$$

όπου το σύμβολο «;» είναι η συναλλοίωτη παράγωγος. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ, ότι παρά το γεγονός ότι έχουμε δύο βαθμωτά πεδία $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ και τα δύο σχετίζονται με την εξίσωση $\phi(x)$ (238). Συνεπώς, η εξίσωση πεδίου του ϕ προκύπτει από την (248). Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την Lagrangian \mathcal{L} της σχέσης (246) με ένα δυναμικό $V(\phi, \phi^{(1)}, \phi^{(2)})$ παίρνουμε την εξίσωση Klein-Gordon που εκφράζει τη δυναμική του ϕ στην ακόλουθη μορφή

$$\left(1 + \frac{1}{2} \phi^{-1} \right) \square \phi - \frac{1}{2} \phi^{-1} g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \phi R + V'(\phi, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = 0, \quad (249)$$

όπου $V' = \frac{dV}{d\phi}$.

6.4 Η Εξίσωση Raychaudhuri του Μοντέλου

Αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (244),(245) σε αυτό το μοντέλο, παίρνουμε την εξίσωση Raychaudhuri

$$X^N \tilde{\Theta}|_N = \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = R_{MN} X^M X^N - \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}_K^N \tilde{\sigma}_N^K - \tilde{\omega}_K^N \tilde{\omega}_N^K$$

ή

$$\begin{aligned} X^N \tilde{\Theta}|_N = & \{R_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \phi_{,\mu} \phi^{-1} + \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \phi^{-1} - \phi_{,\alpha\beta} \phi^{-1} + \\ & + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\alpha\beta,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi_{,\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{,\mu} \phi_{,\nu})\} X^M X^N - \\ & - \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \tilde{\sigma}_K^N \tilde{\sigma}_N^K - \tilde{\omega}_K^N \tilde{\omega}_N^K \end{aligned} \quad (250)$$

όπου στα ανωτέρω έχουμε θεωρήσει τις συνθήκες $T_{mk}^i = R_{mk}^b = 0$ και R_{MN} δίνονται από την (241). Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μετρική της γεωμετρίας (FRW) με συντεταγμένες $(t, r, \theta, \phi) = (x^a)$ για το χωροχρόνο $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$. Χρησιμοποιούμε τους ταυστές Ricci

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\mu + 3p)$$

$$R_{11} = -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}$$

$$R_{22} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{r^2}$$

$$R_{33} = -\frac{(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{MN} = & R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{(1)(1)} + R_{(2)(2)} = \\ = & 4\pi G(\mu + 3p) + \frac{1}{2} (\phi_{,t})^2 \phi^{-1} - \phi_{,tt} \phi^{-1} + \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} + \frac{k}{2} (1 - kr)^{-1} \phi_{,r} \phi^{-1} + \frac{1}{2} \phi_{,r}^2 \phi^{-1} - \phi_{,rr} \phi^{-1} - \\ & - \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{r^2} + \frac{1}{2} \phi_{,\theta}^2 \phi^{-1} - \phi_{,\theta\theta} \phi^{-1} - \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \phi_{,\phi}^2 \phi^{-1} - \phi_{,\phi\phi} \phi^{-1} + \phi_{,tt} + a^{-2} k \phi_{,r} - \\ & - \frac{1 - kr^2}{a^4} \phi_{,rr} + \frac{(4 - 2kr)r^3 a^6 \sin^2 \theta}{(1 - kr)^2} \phi_{,r} - (ar)^{-2} \phi_{,\theta\theta} + \\ & + \left(\frac{r^4 a^6 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}\right)_{,\theta} \phi_{,\theta} (ar)^{-2} - (ar \sin \theta)^{-2} \phi_{,\phi\phi} \end{aligned} \quad (251)$$

Από τις εξισώσεις (250), (251) το πεδίο παλιρροϊκής δύναμης με $\tilde{R}_{MN} X^M X^N$ γράφεται

$$\tilde{R}_{MN} X^M X^N = \tilde{\mathcal{A}}_{MN} X^M X^N \quad (252)$$

όπου

$$\tilde{\mathcal{A}}_{MN} = [4\pi G(\mu + 3p) + \frac{1}{2} (\phi_{,t})^2 \phi^{-1} - \phi_{,tt} \phi^{-1} + \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} + \frac{k}{2} (1 - kr)^{-1} \phi_{,r} \phi^{-1} + \frac{1}{2} \phi_{,r}^2 \phi^{-1} - \phi_{,rr} \phi^{-1} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{r^2} + \frac{1}{2}\phi_{,\theta}^2\phi^{-1} - \phi_{,\theta\theta}\phi^{-1} - \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{r^2\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\phi_{,\phi}^2\phi^{-1} - \phi_{,\phi\phi}\phi^{-1} + \phi_{,tt} + a^{-2}k\phi_{,r} - \\
& -\frac{1 - kr^2}{a^4}\phi_{,rr} + \frac{(4 - 2kr)r^3a^6\sin^2\theta}{(1 - kr)^2}\phi_{,r} - (ar)^{-2}\phi_{,\theta\theta} + \\
& + \left(\frac{r^4a^6\sin^2\theta}{1 - kr^2}\right)_{,\theta}\phi_{,\theta}(ar)^{-2} - (ar\sin\theta)^{-2}\phi_{,\phi\phi} \quad (253)
\end{aligned}$$

έτσι η εξίσωση Raychaudhuri παίρνει τη μορφή

$$X^N\tilde{\Theta}|_N = \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = \tilde{\mathcal{A}}_{MN}X^MX^N - \frac{1}{3}\tilde{\Theta}^2 - \sigma_K^N\sigma_N^K - \omega_K^N\omega_N^K \quad (254)$$

Αν $\tilde{\mathcal{A}}_{MN} > 0$, συμβάλλει στο defocusing ή στην επιτάχυνση και αν $\tilde{\mathcal{A}}_{MN} < 0$, έχουμε focusing ή επιβράδυνση στην εξέλιξη του σύμπαντος.

6.5 Η Συνεισφορά της Μη-Γραμμικής Συνοχής στην Εξίσωση

Σε μια πιο γενική περίπτωση, αν θεωρήσουμε την στρέψη (165) παίρνουμε τους τανυστές Ricci $K_{\alpha\beta}, K_{(1)(1)}, K_{(2)(2)}$:

$$K_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{-1} \left(\frac{\partial N_{\beta}^{(1)}}{\partial\phi^{(1)}} + \frac{\partial N_{\beta}^{(2)}}{\partial\phi^{(2)}} \right) \quad (255)$$

$$K_{(1)(1)} = R_{(1)(1)} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\nu} \left(\frac{\partial N_{\mu}^{(1)}}{\partial\phi^{(1)}} \right) \quad (256)$$

$$K_{(2)(2)} = R_{(2)(2)} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\nu} \left(\frac{\partial N_{\mu}^{(2)}}{\partial\phi^{(2)}} \right) \quad (257)$$

όπου $\tilde{R}_{\alpha\beta}, R_{(1)(1)}, R_{(2)(2)}$ δίνονται από τις (244),(245).

Οι μη-γραμμικές συνοχές $N_{\beta}^{(1)}, N_{\beta}^{(2)}$ μπορούν φυσικά να αναπαριστούν το πεδίο αλληλεπίδρασης μεταξύ χωροχρόνου και inflaton ή ανισοτροπίας. Επιπλέον οι όροι $\frac{\partial N_{\alpha}^{(1)}}{\partial\phi^{(1)}}, \frac{\partial N_{\alpha}^{(2)}}{\partial\phi^{(2)}}$ μπορούν να αναπαρασταθούν ως μεταβολή των πεδίων που αλληλεπιδρούν, με βάση την τοπική ανισοτροπία του χωροχρόνου ή το inflaton. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις πεδίου παράγονται από την αρχή μεταβολών της γενικευμένης Lagrangian [170]

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{|G|}G^{AB}K_{AB}$$

προκύπτει από

$$\delta\tilde{\mathcal{L}}_{\phi} = \frac{\delta\tilde{\mathcal{L}}}{\delta\phi} = \sqrt{|g|}g^{\alpha\beta} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{\phi_{,\alpha\beta}}{\phi} + \frac{\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}}{2\phi^2} \right) -$$

$$-\frac{\delta}{\delta x^a} \left[\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial N_\beta^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial N_\beta^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \right) \right] = 0 \quad (258)$$

όπου $\mathcal{K}_{AB} = \{K_{\alpha\beta}, K_{(1)(1)}, K_{(2)(2)}\}$. Σε αυτή τη δομή του χωροχρόνου, η εξίσωση Raychaudhuri γράφεται ως

$$X^N \tilde{\Theta}|_N = \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = \mathcal{K}_{LN} X^L X^N - \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \sigma_K^N \sigma_N^K - \omega_K^N \omega_N^K \quad (259)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν, μπορούμε να πάρουμε τις εξισώσεις Raychaudhuri με τη συμβολή της μη-γραμμικής συνοχής.

$$X^N \tilde{\Theta}|_N = \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tau} = \tilde{\mathcal{B}}_{MN} X^M X^N - \frac{1}{3} \tilde{\Theta}^2 - \sigma_K^N \sigma_N^K - \omega_K^N \omega_N^K \quad (260)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_{MN} = & \tilde{\mathcal{A}}_{MN} + \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} \phi^{-1} \left(\frac{\partial N_\beta^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial N_\beta^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\nu} \left(\frac{\partial N_\mu^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\nu} \left(\frac{\partial N_\mu^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \right) \end{aligned} \quad (261)$$

και $\tilde{\mathcal{A}}_{MN}$ δίνεται από την (253). Από τις εξισώσεις (260),(261), φαίνεται ότι οι όροι αλληλεπίδρασης μπορούν να συνεισφέρουν στην decelerate μορφή του χωροχρόνου.

6.6 Συμπεράσματα

Σε αυτή τη μελέτη, ο θεμελιώδης ρόλος της εξίσωσης Raychaudhuri για την γενική σχετικότητα επεκτείνεται στο πλαίσιο των γενικευμένων γεωμετρικών δομών του χωροχρόνου Finsler-Randers και των γενικευμένων θεωριών Raychaudhuri σε μια γενικευμένη μορφή θεωρίας scalar-tensor. Επιπλέον όροι εισάγονται στην εξίσωση εξαιτίας των ανισοτροπικών καμπυλοτήτων και της μορφής των γεωδαισιακών (210). Σε αυτή την προσέγγιση χρησιμοποιήσαμε τη συνοχή Cartan, η οποία διατηρεί την νόρμα ενός διανύσματος (time-like, null) κάτω από παράλληλη μετατόπιση και είναι θεμελιώδης για την μελέτη τροποποιημένων (modified) βαρυτικών και κοσμολογικών θεωριών. Η εξίσωση Raychaudhuri επίσης παράχθηκε σε σχέση με το μοντέλο (*FRW*) για (*FR*) χωροχρόνο. Μελετήσαμε τις ενεργειακές συνθήκες για την (*FR*)-κοσμολογία και την σχέση της με την (*FRW*)-κοσμολογία. Επιπλέον δόθηκαν οι συνθήκες bounce για μια (*FR*) κοσμολογία. Έχει αποδειχθεί ότι σε ένα bounce και οι δύο ενεργειακές συνθήκες ταυτοποιούνται. Η μελέτη βασίζεται στην γεωμετρία μιας δέσμης που αποτελείται από μία πολλαπλότητα υπόβαθρου και δύο βαθμωτά ως νήματα. Σε αυτό το πλαίσιο, δώσαμε την μορφή της εξίσωσης Klein-Gordon

και μελετήσαμε την εξίσωση Raychaudhuri σε μια γενικευμένη μορφή θεωρίας scalar-tensor ενός μοντέλου $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$ με την παρουσία μη-γραμμικών συνοχών. Αυτές οι συνοχές, ως επιπλέον όροι μπορούν να παίζουν ένα σημαντικό ρόλο στη βαρυτική επιρροή και στην αλληλεπίδρασή της με άλλα πεδία. Αυτό σημαίνει ότι αυτοί οι επιπλέον όροι/πεδία θα διαφοροποιούν την εξέλιξη της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος (focusing/defocusing) όπως φάνηκε από τις εξισώσεις (252),(253),(260),(261).

6.7 Παράρτημα

Η Lagrangian μετρική συνάρτηση σε έναν χώρο Finsler-Randers (FR) δίνεται από τη σχέση

$$L(x, y) = (g_{ij}(x)y^i y^j)^{1/2} + a_i(x)y^i$$

όπου το a_i αναπαριστά ένα συνδιάνυσμα και το g_{ij} έναν μετρικό τανυστή του (ψευδο)-Riemann χωροχρόνου. Χρησιμοποιώντας μια συνοχή Cartan, ο τανυστής διαφοράς Δ_{jk}^i σε έναν χώρο (FR) ορίζεται ως

$$\Delta_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - L_{jk}^i \quad (262)$$

[115, 209, 165] όπου Γ_{jk}^i είναι τα σύμβολα Christoffel ενός χώρου Riemann και L_{jk}^i οι συνιστώσες των συνοχών Cartan ενός χώρου (FR). Οι όροι συστολής $\Delta_{j0}^i, \Delta_{00}^i$ δίνονται από

$$\Delta_{j0}^i = p^i a_{(j0)} + \frac{1}{2} h_j^i a_{00} + G^{is} (a_{[sj]} + a_{[s0]} p_j) - 2g^{ms} A_{jm}^i a_{[s0]} / \tau, \quad (263)$$

$$\Delta_{00}^i = 2(\lambda p^i + g^{is} a_{[s0]} / \tau), \quad (264)$$

όπου ο τανυστής στρέψης A_{jk}^i ορίζεται από

$$A_{jk}^i = (h_j^i L_k + h_k^i L_j + \frac{2}{5} h_{jk} A^i) / 2,$$

και

$$a_{ij} = \nabla_j a_i,$$

με ∇_j συμβολίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο με βάση τον χώρο Riemann. Επίσης τα σύμβολα $(), []$, συμβολίζουν τη συμμετρικοποίηση, την αντισυμμετρικοποίηση και το «ο» αναπαριστά τη συστολή με p^i

$$h_{ij} = \tau(g_{ij} - a_i a_j)$$

$$h_j^i = G^{ik} h_{kj} = \delta_j^i - p^i p_j,$$

Τα G^{ij} συμβολίζουν τους συντελεστές της αντίστροφης μετρικής χώρου (FR) και

$$\tau = L/g^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
p^i &= y^i/L \\
p_i &= \partial L/\partial Y^i \\
L_i &= a_i - \mu l_i \\
\mu &= a_i l^i \\
\ell^i &= y^i/g^{1/2}
\end{aligned}$$

Αν $\Delta_{jk}^i = 0$ από την (262), τα L_{jk}^i είναι τα σύμβολα Christoffel Γ_{jk}^i του χώρου Riemann. Σε αυτή την περίπτωση, ο χώρος Randers λέγεται χώρος Landsberg-Randers. Η h -καμπυλότητα \tilde{R}_{hjk}^i του χώρου (FR) συνδέεται με αυτόν του Riemann R_{hjk}^i με τη σχέση

$$\tilde{R}_{hjk}^i = R_{hjk}^i + A_{hr}^i R_{0jk}^r. \quad (265)$$

Επιπλέον, αν για τον τανυστή στρέψης ισχύει $A_{hr}^i = 0$, οι χώροι Finsler-Randers ανάγονται σε έναν Riemann.

7 Εξίσωση Ροών Ricci

Ορισμός 2 Η εξίσωση ροών Ricci είναι η παρακάτω εξίσωση εξέλιξης για μια μετρική Riemann

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric(g)$$

Μια λύση σε αυτή την εξίσωση (ή μια ροή Ricci) είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια από μετρικές $g(t)$, παραμετροποιημένες από το t σε ένα μη - εκφυλισμένο διάστημα I σε μια λεία πολλαπλότητα M που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Αν το I έχει ένα αρχικό σημείο t_0 , τότε το $(M, g(t_0))$ ονομάζεται η αρχική συνθήκη ή η αρχική μετρική για τη ροή Ricci. Η εξίσωση ροών Ricci, σε αρμονικές συντεταγμένες (x^1, \dots, x^n) με $\Delta x^i = 0$ για όλα τα i έχει τη μορφή:

$$Ric_{ij} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -\frac{1}{2} \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g^{-1}, \partial g)$$

όπου Δ η Laplacian και Q η τετραγωνική μορφή στο g^{-1} και στο ∂g και συγκεκριμένα είναι ένας όρος χαμηλότερης τάξης στις παραγώγους του g . Σε αυτές τις συντεταγμένες, η εξίσωση ροών Ricci είναι ουσιαστικά μια εξίσωση θερμότητας για την μετρική Riemann

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \Delta g + 2Q(g^{-1}, \partial g).$$

Εισάγουμε κάποιους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στην πορεία. Έστω ροή Ricci $(M^n, g(t))$ ορισμένη για t που περιέχεται σε ένα διάστημα I , ο χωροχρόνος για αυτή τη ροή είναι $M \times I$. Η χρονική διατομή t του χωροχρόνου είναι η πολλαπλότητα Riemann $M \times \{t\}$ με τη μετρική Riemann $g(t)$. Η οριζόντια εφαπτόμενη δέσμη του χωροχρόνου $HT(M \times I)$ π.χ. η δέσμη των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε χρονο-διατομές είναι μια λεία, n -βαθμού υποδέσμη της εφαπτόμενης δέσμης εξέλιξης του χωροχρόνου. Η εξελισσόμενη μετρική $g(t)$ είναι τότε ένας λείος τομέας του $Sym^2 HT^*(M \times I)$. Συμβολίζουμε τα σημεία του χωροχρόνου ως ζεύγη (p, t) .

Έστω (p, t) και για τυχαίο $r > 0$, συμβολίζουμε με $B(p, t, r)$ τη μετρική μπάλα ακτίνας r με κέντρο το (p, t) στη χρονοδιατομή. Για τυχαίο $\Delta t > 0$ για το οποίο $[t - \Delta t, t] \subset I$, ορίζουμε την παραβολική γειτονιά προς τα πίσω $P(x, t, r, -\Delta t)$ ως το γινόμενο $B(x, t, r) \times [t - \Delta t, t]$ στο χωροχρόνο. Σημειώνουμε ότι αυτή η τομή του $P(x, t, r, -\Delta t)$ με μια χρονοδιατομή διαφορετική από την χρονοδιατομή t δεν χρειάζεται να είναι μια μετρική μπάλα σε αυτή τη χρονοδιατομή. Υπάρχει μια αντίστοιχη παραβολική γειτονιά προς τα εμπρός $P(x, t, r, \Delta t)$ δεδομένου ότι $[t, t + \Delta t] \subset I$.

7.1 Κάποιες Ακριβείς λύσεις στη ροή Ricci

Πολλαπλότητες Einstein

Έστω g_0 μια μετρική Einstein : $Ric(g_0) = \lambda g_0$, όπου λ σταθερά. Τότε για κάθε θετική σταθερά c , θέτοντας $g = c g_0$ έχουμε $Ric(g) = Ric(g_0) = \lambda g_0 = \frac{\lambda}{c} g$. Χρησιμοποιώντας αυτό, κατασκευάζονται λύσεις στην εξίσωση ροών Ricci ως εξής : Θεωρούμε $g(t) = u(t)g_0$. Αν αυτή η μονοπαραμετρική οικογένεια μετρικών είναι μια λύση στη ροή Ricci, τότε

$$\frac{\partial g}{\partial t} = u'(t)g_0 = -2Ric(u(t)g_0) = -2Ric(g_0) = -2\lambda g_0$$

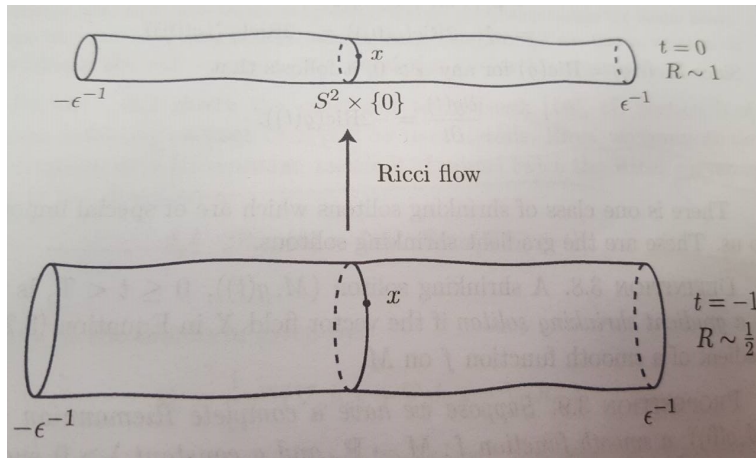
Έτσι $u'(t) = -2\lambda$ και $u(t) = 1 - 2\lambda t$. Ενώ $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ είναι μια λύση για τη ροή Ricci. Οι περιπτώσεις $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ και $\lambda < 0$ αντιστοιχούν στις λύσεις συστολής, σταθεροποίησης και διαστολής. Στην περίπτωση της σμίκρυνσης, η λύση υπάρχει για $t \in [0, \frac{1}{2\lambda}]$ και γίνεται μονάδα στο $t = \frac{1}{2\lambda}$.

Παράδειγμα Η κλασική μετρική σε κάθε έναν από τους S^n , \mathbb{R}^n και \mathbb{H}^n είναι Einstein. Η ροή Ricci συστέλλεται στον S^n , παραμένει σταθερή στον \mathbb{R}^n και διαστέλλεται στον \mathbb{H}^n . Η ροή Ricci στον S^n έχει πεπερασμένου χρόνου ιδιομορφία, όταν η διάμετρος της πολλαπλότητας γίνεται μηδέν και η καμπυλότητα τείνει ομοιόμορφα στο $+\infty$. Η ροή Ricci στον \mathbb{H}^n υπάρχει για όλα τα $t \geq 0$ και καθώς το t πηγαίνει στο άπειρο, η απόσταση ανάμεσα στα ζεύγη των σημείων μεγαλώνει χωρίς φραγμό και η καμπυλότητα πάει ομοιόμορφα στο μηδέν.

Ορισμός 3 Έστω $(M, g(t))$ μια ροή Ricci. Ένας εξελισσόμενος ϵ -λαιμός που έχει κέντρο το (x, t_0) και είναι ορισμένος για αναβαθμισμένο χρόνο t_1 είναι ένας ϵ -λαιμός:

$$\phi : S^2 \times (-\epsilon^{-1}, \epsilon^{-1}) \rightarrow \cong N \subset (M, g(t))$$

με κέντρο το (x, t_0) με την ιδιότητα του pullback μέσω του ϕ της οικογένειας των μετρικών $R(x, t_0)g(t')|_N$, $-t_1 < t' \leq 0$ όπου $t_1 = R(x, t_0)^{-1}(t - t_0)$ είναι ανάμεσα στο ϵ . Ένας ισχυρός ϵ -λαιμός με κέντρο το (x, t_0) στη ροή Ricci είναι ένας εξελισσόμενος ϵ -λαιμός με κέντρο το (x, t_0) και είναι ορισμένος για αναβαθμισμένο χρόνο 1.



7.2 Σολιτόνια

Ένα σολιτόνιο Ricci είναι μια ροή Ricci $(M, g(t))$, $0 \leq t < T \leq \infty$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $t \in [0, T)$ υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $\phi_t : M \rightarrow M$ και μια σταθερά $\sigma(t)$ τέτοια ώστε $\sigma(t)\phi_t^*g(0) = g(t)$. Δηλαδή σε ένα σολιτόνιο Ricci όλες οι πολλαπλότητες Riemann $(M, g(t))$ είναι ισομετρικές σε ένα βαθμωτό παράγοντα που επιτρέπεται να μεταβάλλεται ανάλογα με το t . Το σολιτόνιο λέμε πως συστέλλεται αν $\sigma'(t) < 0$ για όλα τα t . Ένας τρόπος για να παραχθούν σολιτόνια Ricci είναι ο εξής : Έστω ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο X στην M , μια σταθερά λ και μια μετρική $g(0)$ τέτοια ώστε

$$-Ric(g(0)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g(0) - \lambda g(0)$$

Θέτουμε $T = \infty$, αν $\lambda \leq 0$ και ίσο με $(2\lambda)^{-1}$, αν $\lambda > 0$. Για όλα τα $t \in [0, T)$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\sigma(t) = 1 - 2\lambda t$ και ένα διανυσματικό πεδίο $Y_t(x) = \frac{X(x)}{\sigma(t)}$. Τότε ορίζουμε ως ϕ_t την μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορομορφισμών που παράγεται από τα χρονικά εξαρτημένα διανυσματικά πεδία U_t .

Αξίωμα Η ροή $(M, g(t))$, $0 \leq t < T$ όπου $g(t) = \sigma(t)\phi_t^*g(0)$, είναι ένα σολιτόνιο και είναι ένα συστελλόμενο σολιτόνιο αν $\lambda > 0$.

Απόδειξη: Ελέγχουμε αν αυτή η ροή ικανοποιεί την εξίσωση ροών Ricci, από αυτή προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \sigma'(t)\phi_t^*g(0) + \sigma(t)\phi_t^*\mathcal{L}_{Y_t}g(0) = \\ &= \phi_t^*(-2\lambda + \mathcal{L}_X)g(0) = \phi_t^*(-2Ric(g(0))) = -2Ric(\phi_t^*(g(0))). \end{aligned}$$

Αφού $Ric(ag) = Ric(g)$ για κάθε $a > 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)).$$

Υπάρχει μια κλάση συστελλόμενων σολιτονίων που είναι ιδιαίτερης σημασίας, τα βαθμωτά συστελλόμενα σολιτόνια.

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Hamilton) Έστω (M, g_0) μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann διάστασης n . Τότε, υπάρχει ένα $T > 0$ που εξαρτάται από τη (M, g_0) και μια ροή Ricci $(M, g(t)), 0 \leq t < T$ με $g(0) = g_0$. Επιπλέον, αν έχουμε ροές Ricci με αρχικές συνθήκες (M, g_0) σε χρόνο 0 που ορίζονται αντίστοιχα σε χρονικά διαστήματα I και I' τότε αυτές οι ροές συμφωνούν στη $I \cap I'$.

8 Κοσμολογία και Ροές Ricci

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται συγκεκριμένες εφαρμογές από τις ροές Ricci στην κοσμολογία. Θεωρούμε το συγχρονισμό της ροής Einstein με τη ροή Ricci των κλασικών χωρικών διατομών του Robertson-Walker χωροχρόνου και δείχνουμε ότι η σχετική λύση τέλειου ρευστού έχει τετραγωνική καταστατική εξίσωση και είναι είτε σφαιρική και καταρρέει είτε υπερβολική και διαστέλλεται. Έστω ο Robertson-Walker ($R - W$) χωροχρόνος $(M, g_{\alpha, \beta})$ με το γραμμικό στοιχείο :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (266)$$

με τη χωρική χρονοεξαρτώμενη μετρική

$$g_{ij} = f^2(t) \gamma_{ij} \quad (267)$$

όπου $f(t)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση και γ_{ij} είναι η τρισδιάστατη fixed (χρονο-ανεξάρτητη) μετρική Riemann σταθερής καμπυλότητας k . Οι χωροχρονικοί δείκτες $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ έτσι ώστε $x^0 = t$ και οι χωρικοί δείκτες $i, j = 1, 2, 3$. Η ακριβής λύση των εξισώσεων Einstein για ένα τέλειο ρευστό με ($R - W$) μετρική υπολογίζεται υποθέτοντας μια καταστατική εξίσωση (γενικά, γραμμική). Η κλασική λύση είναι η λύση Friedmann για σκόνη. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε το αποτέλεσμα του συγχρονισμού της ροής Einstein του ($R - W$) χωροχρόνου κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου εξέλιξης $\frac{\partial}{\partial t}$ με τη ροή Ricci [51, 104] της χρονοεξαρτώμενης μετρικής g_{ij} . Για παράδειγμα

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij} \quad (268)$$

(αρχικά εισήχθη από τον Hamilton και αργότερα χρησιμοποιήθηκε από τον Perelman για να αποδείξει την εικασία Poincare). Η σχετική λύση τέλειου ρευστού έχει τετραγωνική καταστατική εξίσωση και εξελίσσεται για ένα πεπερασμένο χρονικό τομέα για $k > 0$ και $k < 0$. Για $k = 0$ έχουμε την αντιστοιχία στη στατική degenerate λύση $f(t) = f_0$.

Βασικές Κινηματικές και Γεωμετρικές Εξισώσεις

Αφού η g_{ij} είναι ομοθετική στην γ_{ij} , παρατηρούμε πρώτα ότι οι ταυστές Ricci είναι ίσοι : $R_{ij} = R_{ij}^{(\gamma)}$. Αφού η γ_{ij} έχει σταθερή καμπυλότητα k , έχουμε :

$$R_{ij}^{(\gamma)} = 2k\gamma_{ij} \quad (269)$$

Από την (268) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f^2(t) &= -4k \\ f^2(t) &= c - 4kt \end{aligned} \quad (270)$$

για μια σταθερά c . Προφανώς $c = f_0^2$ όπου $f_0 = f(0)$. Έτσι η εξίσωση (270) γίνεται

$$f^2(t) = -4k \left(t - \frac{f_0^2}{4k} \right) \quad (271)$$

Από την (271) συμπεραίνουμε ότι για $k = 0$ έχουμε την εκφυλισμένη λύση $f(t) = f_0$ και γι' αυτό θα συζητήσουμε τις περιπτώσεις I. $k > 0$ και II. $k < 0$.

Περίπτωση I: η γραφική παράσταση της $f(t)$ συναρτήσει του t είναι το άνω μισό μιας παραβολής με κορυφή $\frac{f_0^2}{4k}$ και άνοιγμα προς τα αριστερά, κι έτσι η λύση $f(t)$ είναι ιδιάζουσα στην κορυφή $t = \frac{f_0^2}{4k}$ (σφαιρικά καταρρέουσα λύση).

Περίπτωση II: η λύση είναι ιδιάζουσα στην κορυφή $t = \frac{f_0^2}{4k}$ (διαστελλόμενη υπερβολική λύση). Οι περιορισμοί στις περιοχές της ροής Ricci, τίθενται από τις ενεργειακές συνθήκες.

Αρχικά παρατηρούμε από την εξίσωση (271) ότι $\frac{\dot{f}}{f} = -2\frac{k}{f^2}$ και $\frac{\ddot{f}}{f} = -\frac{4k^2}{f^4}$. Οι κλασικοί υπολογισμοί και η χρήση της εξίσωσης (269) μας οδηγούν στους παρακάτω συντελεστές του χωροχρονικού τανυστή Ricci :

$$\bar{R}_{ij} = \left(\frac{2k}{f^2} + \frac{4k^2}{f^4} \right) g_{ij} \quad (272)$$

$$\bar{R}_{i0} = 0 \quad (273)$$

$$\bar{R}_{00} = \frac{12k^2}{f^4} \quad (274)$$

Σε αυτό το σημείο θα εξετάσουμε τη λύση τέλειου ρευστού σε σχέση με τη μετρική Robertson-Walker (266) με (267) και (271) μέσω της ροής Ricci. Οι εξισώσεις του Einstein για μια λύση τέλειου ρευστού είναι :

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = 4\pi(\rho - p)g_{\alpha\beta} + 8\pi(\rho + p)u_\alpha u_\beta \quad (275)$$

όπου u_α είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες της 4-ταχύτητας, ρ η πυκνότητα ενέργειας και p η πίεση του ρευστού. Συγκρίνοντας τους συντελεστές του $\bar{R}_{\alpha\beta}$ από την (275) με τις εξισώσεις (272),(273),(274) προκύπτουν οι παρακάτω λύσεις για τα ρ και p :

$$\frac{8\pi\rho}{3} = \frac{4k^2 + kf^2}{f^4}, \quad 8\pi p = \frac{4k^2 - kf^2}{f^4} \quad (276)$$

Προφανώς, η λύση του κενού ($\rho = 0, p = 0$) αποκλείεται διότι τότε $k = 0$ και $f = f_0$, το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι η ροή Ricci είναι παραβολική και οι εξισώσεις κενού του Einstein είναι υπερβολικές. Παρατηρούμε απαλείφοντας το f από τις εξισώσεις (276) ότι

$$(\rho - 3p)^2 = \frac{3}{16\pi}(\rho + 3p) \quad (277)$$

για παράδειγμα τα ρ και p είναι τετραγωνικά συσχετισμένα. Αυτό μας παρέχει μια νέα λύση τέλειου ρευστού, για την οποία η σχέση ανάμεσα στα ρ και p είναι τετραγωνική. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η κυρίαρχη ενεργειακή συνθήκη (*DEC*) : $\rho > 0, \rho > p$ [175] ισχύει αν :

$$2k^2 + kf^2 > 0. \quad (278)$$

Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση $k > 0$, η (*DEC*) (278) ικανοποιείται. Για την περίπτωση $k < 0$, η (*DEC*) απαιτεί

$$2k + f^2 < 0. \quad (279)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (276) βρίσκουμε ότι $\frac{dp}{d\rho} = \frac{8k-f^2}{3(8k+f^2)}$. Για μια φυσικά ρεαλιστική λύση, $0 \leq \frac{dp}{d\rho} = c_s^2 < 1$, όπου c_s η ταχύτητα του ήχου και 1 η ταχύτητα του φωτός σε σχετικιστικές μονάδες [120]. Σύμφωνα με αυτή τη συνθήκη, την (*DEC*) και $t < \frac{f_0^2}{4k}$ για $k > 0$ και $t > \frac{f_0^2}{4k}$ για $k < 0$ βρίσκουμε δύο λύσεις με τους ακόλουθους τομείς εξέλιξης:

Περίπτωση I (Σφαιρικά καταρρέον πρότυπο) :

$$k > 0 : -2 + \frac{f_0^2}{4k} < t < \frac{f_0^2}{4k} \quad (280)$$

Περίπτωση II (Υπερβολικά διαστελλόμενο πρότυπο) :

$$k < 0 : \frac{f_0^2}{4k} < t < \frac{f_0^2}{4k} + \frac{1}{2} \quad (281)$$

Συγκεκριμένα, επιλέγοντας $k = \frac{1}{4}, f_0 = 1$ στην περίπτωση I παίρνουμε τον τομέα $-1 < t < 1$. Στην περίπτωση II, επιλέγοντας $k = -\frac{1}{4}, f_0 = \frac{1}{2}$ παίρνουμε τον τομέα $-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}$.

Ακριβείς λύσεις για ένα χώρο τέλειου ρευστού Robertson-Walker συνήθως απαιτούν την υπόθεση βαροτροπικής καταστατικής εξίσωσης, όπως η γραμμική εξίσωση $p = (\gamma - 1)\rho$, όπου $1 \leq \gamma \leq 2$. Το κλασικό μοντέλο Friedmann αντιστοιχεί σε $\gamma = 1$ π.χ. $p = 0$ (σκόνη).

9 Ανολονομικές Ροές Ricci και Finsler-Lagrange $f(R, F, L)$ - τροποποιημένα αποτελέσματα βαρύτητας και σκοτεινής ύλης

Στο παρόν γίνεται μια ανασκόπηση στη θεωρία γεωμετρικών ροών σε μη ολονομικές πολλαπλότητες και εφαπτόμενες δέσμες που έχουν ως αποτέλεσμα γενικευμένα σολιτόνια Ricci και εξισώσεις Finsler-Lagrange. Δίνονται ορισμένες νέες τάξεις ακριβών λύσεων σε Finsler-Lagrange $f(R, F, L)$ -τροποποιήσεις γενικής σχετικότητας και γίνεται συζήτηση πάνω στις πιθανές συνέπειες στην κοσμολογία [6].

Πρόσφατα σημαντικά και συναρπαστικά προβλήματα στη σύγχρονη κοσμολογία και στη φυσική σκοτεινής ενέργειας και σκοτεινής ύλης συμπεριλαμβάνουν την εύρεση κανονικής (βέλτιστης) μετρικής και δομών συνοχής του χωροχρόνου, αναζήτηση πιθανών τοπολογικών διαμορφώσεων και των σχετικών φυσικών εφαρμογών [23, 172, 185]. Υπάρχουν ισχυρά παρατηρησιακά κοσμολογικά δεδομένα και θεωρητικά επιχειρήματα (π.χ. το θεμελιώδες άλυτο πρόβλημα της κατασκευής ενός συνεπούς μοντέλου κβαντικής βαρύτητας). Επίσης η γενική σχετικότητα (GR) και η θεωρία της βαρύτητας ίσως πρέπει να τροποποιηθούν σε μια γεωμετρική δομή που δεν θα είναι Riemann ή όπως η τροποποιημένη θεωρία βαρύτητας (MGT). Με μια πιο συντηρητική προσέγγιση, τα κοσμολογικά σενάρια πρέπει να μπορούν να επεκταθούν τουλάχιστον για νέες κλάσεις λύσεων μη-γραμμικών συστημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων ($PDEs$) με γενικές off diagonal μετρικές που καθορίζονται από ιδιόζουσες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις [71].

Ο πρώτος μας στόχος είναι να κάνουμε μια σύνοψη και να αναπτύξουμε τα αποτελέσματα στη θεωρία της γεωμετρικής εξέλιξης των μετρικών Einstein και στις πιθανές δομές γενικευμένης μετρικής συνοχής από μη ολοκληρώσιμους (ισοδύναμα μη ολονομικούς) περιορισμούς, που έχουν ως αποτέλεσμα διαμορφώσεις Finsler-Lagrange [187, 6]. Θεωρούμε πως οι αυτοσυνεπείς και με φυσικά κίνητρα ελαχιστοποιημένες (minimal) τροποποιήσεις Finsler της κλασικής ροής Ricci και των βαρυτικών εξισώσεων πεδίου μπορούν να επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας τις Cartan και κανονικές διακεκριμένες δομές συνοχής (d -connections). Οι προσεγγίσεις με μετρικά ασύμβατες Finsler συνοχές ή χωρίς γραμμικές συνοχές δεν έχουν όρια σε κλασικές θεωρίες της φυσικής σωματιδίων και δεν επιτρέπουν τυποποιήσεις ορισμένων αναλόγων, όπως η Γενική Σχετικότητα (General Relativity) (GR) [186, 194].

Διαισθητικά, γενικά τοπικές ανισοτροπικές χωροχρονικές δομές με θεμελιώδη γεωμετρικά/φυσικά αντικείμενα (π.χ. η μετρική g και/ή σχεδόν μιγαδική δομή [187, 194]) εξαρτώνται από επιπλέον χωροχρονικές συντεταγμένες $x = \{x^i\}$ και τις συντεταγμένες ταχύτητας ορμής $y = \{y^\alpha \simeq v^\alpha \text{ ταχύτητα ή } \simeq p_\alpha \text{ ορμή}\}$ για παράδειγμα στη μορφή $g(x, y)$. Για διαφορετικά γεωμετρικά μοντέλα μηχανικής, στατιστικής και κλασικής και κβαντικής θεωρίας πεδίου με μη-γραμμικές σχέσεις διασποράς, θεωρούνται αντίστοιχοι τύποι χώρων και

χωροχρόνου και πολλαπλοτήτων και των (συν) εφαπτόμενων δεσμών, χώρων φάσης κ.λ.π. εφοδιασμένων με κλασικές και κβαντικές μεταβλητές. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε συγκεκριμένο μη ολονομικό διαχωρισμό με τοπικές ή γενικευμένες συντεταγμένες $u = (x, y) = \{u^\alpha = (x^i, y^\alpha)\}$ όπου οι δείκτες $i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$ και $\alpha, \beta, \dots = n+1, n+2, \dots, n+m$ για $n \geq 2$ και $m \geq 1$ για μια δέσμη $(n+m)$ -δομή σε μια γενικευμένη μη ολονομική πολλαπλότητα. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο \mathbf{V} , $\dim \mathbf{V} = n+m$ για μια κατάλληλη δέσμη πολλαπλότητας ή χώρο δεσμών με συγκεκριμένες κλάσεις μη ολονομικών κατανομών συγκεκριμένα μη ολονομικών πλαισίων.

Έστω V μια πραγματική Lorentz C^∞ - πολλαπλότητα, $\dim V = n \geq 2$ με υπογραφή $(+, +, \dots, -)$ και συμβολίζουμε με TV την εφαπτόμενη δέσμη της. Μια κανονική Lagrangian L μια θεμελιώδης συνάρτηση Lagrange (ή μετρική Lagrange) είναι μια συνάρτηση $L : TM \rightarrow [0, \infty)$ με μη ιδιάζουσα Hessian $\tilde{g}_{ab} = \frac{1}{2} \partial^2 L / \partial y^\alpha \partial y^\beta$. Μπορούμε να πάρουμε την $L = F^2(x, y)$ ως μια θεμελιώδης συνάρτηση Finsler υπό τους εξής όρους: (Η μόνη διαφορά της προσέγγισής μας από αυτή των κανονικών γεωμετριών Finsler είναι ότι θεωρούμε ως βασικές πολλαπλότητες συγκεκριμένες υπογραφές Lorentz αντί για τις Ευκλείδειες, το οποίο είναι απαραίτητο για την εργασία με relativity-like γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας με καλά ορισμένα όρια στη GR και στις θεωρίες ειδικής βαρύτητας.) 1) η $F(x, y)$ είναι C^∞ στην $\mathbf{V} \simeq \tilde{TV} := TV \setminus \{0\}$, όπου το $\{0\}$ αναπαριστά το σύνολο των μηδενισμών της TV στην V , 2) η συνθήκη ομογένειας $F(x, \beta y) = \beta F(x, y), \forall \beta > 0$ και 3) $\forall u \in \tilde{TV}$ η κάθετη v , επαγόμενη από την \tilde{g}_{ab} είναι μη ιδιάζουσα και θετικά ορισμένη για μια δομή Riemann. (Τα σύμβολα L και F έχουν παρθεί αντίστοιχα από τα Lagrange και Finsler μη-γραμμικά τετραγωνικά στοιχεία $ds^2 = L(x, dx)$ και $= F^2(x, dx)$ που γενικεύουν το τετραγωνικό στοιχείο στην (ψευδο)-Riemannian γεωμετρία, $ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j, dx^i \sim y^i$).

Αντίθετα με την (ψευδο)-Riemannian γεωμετρία που είναι εξ ολοκλήρου ορισμένη από ένα μετρικό ταυιστή $g_{ab}(u)$, ένα (ψευδο)-Lagrange ή Finsler γεωμετρικό μοντέλο δεν ορίζεται εξ ολοκλήρου μόνο από το $L(u)$ ή $F(u)$ θεμελιώδες ιδιάζον στοιχείο χωρίς υποθέσεις πάνω σε δύο άλλα γεωμετρικά αντικείμενα: τη μη-γραμμική συνοχή, N-συνοχή και την διακεκριμένη συνοχή, d-συνοχή [186, 194]. Συγκεκριμένα μοντέλα γεωμετρίας Finsler έχουν μελετηθεί με τον ορισμό Akbar-Zaeth του ταυιστή τύπου Ricci με όρους συνάρτησης semi-spray $\tilde{G}^k = \frac{1}{4} \tilde{g}^{kj} \left(y^i \frac{\partial^2 L}{\partial y^j \partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^j} \right)$ χωρίς την εμπλοκή της ιδέας της γραμμικής συνοχής. **Αυτή είναι μια καλή γεωμετρική κατασκευή αλλά δεν είναι αρκετή για μια φυσική θεωρία.** Για να συμπεριλάβουμε αλληλεπιδράσεις με πεδία ύλης και να εργαστούμε με λογισμό μεταβολών σε μη ολονομικές δομές σε χώρους Lagrange-Finsler, πρέπει να θεωρήσουμε μια φυσικά συναλλοίωτη παράγωγο (γραμμική συνοχή) και αντίστοιχες υποθέσεις σε φυσικά πλαίσια (που ορίζονται από μια δομή N-συνοχής).

Ένα γεωμετρικό μοντέλο Lagrange/Finsler είναι εξ ολοκλήρου ορισμένο από $(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{D}}, L)$, όπου L παράγει για κάποιες γεωμετρικές/φυσικές αρχές, μια

ανύψωση τύπου Sasaki \tilde{g}_{ab} σε μετρική ολικού χώρου

$$\tilde{\mathbf{g}} = [\tilde{g}_{ij}, \tilde{g}_{ab}, \tilde{N}_i^a := \partial \tilde{G}^a / \partial y^i],$$

για μια κανονική N-συνοχή

$$\tilde{\mathbf{N}} : T\mathbf{V} = h\mathbf{V} \oplus u\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{N}} = \tilde{N}_i^a dx^i \otimes \partial / \partial y^a$$

Μια μη ολονομική κατανομή με κατάλληλο οριζόντιο h και κάθετο διαχωρισμό u του Cartan (Finsler-like) d -συνοχή $\tilde{\mathbf{D}}$, η οποία είναι μοναδικά ορισμένη από τις ιδιότητες ότι είναι μετρικά συμβατή $\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{g}} = 0$ και συμβατή με τη σχεδόν μιγαδική δομή $\tilde{\theta} := \tilde{\mathbf{g}}(x, \tilde{\mathbf{J}})$, $\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\theta} = 0$, όπου η σχεδόν μιγαδική δομή $\tilde{\mathbf{J}}$ είναι φυσικά ορισμένη από τη $\tilde{\mathbf{N}}$. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η $\tilde{\mathbf{D}}$ είναι με μη τετριμμένη στρέψη $\tilde{\mathbf{T}}$.

10 Ανολονομικές Ροές Ricci μετρικών Riemann και Lagrange-Finsler Γεωμετρίας

10.1 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό, η θεωρία των ροών Ricci για πολλαπλότητες επεξεργάζεται με μη ολοκληρώσιμες (μη ολονομικές) κατανομές ορίζοντας μη-γραμμικές δομές συνοχής. Τέτοιες πολλαπλότητες μας παρέχουν μια ενοποιημένη γεωμετρική μορφή για μη ολονομικούς χώρους Riemann, μηχανική Lagrange, γεωμετρία Finsler και διάφορα μοντέλα βαρύτητας (τη θεωρία Einstein και γενικεύσεις χορδών ή gauge). Μη ολονομικά πλαίσια θεωρούνται με affine μη-γραμμική δομή συνοχής και καλά ορισμένες κλάσεις μη ολονομικών περιορισμών σε πολλαπλότητες Riemann για τις οποίες διάφοροι τύποι γενικευμένων γεωμετρικών Finsler μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις ροές Ricci. Ερευνώνται για πιθανές εφαρμογές των μη ολονομικών ροών στη σύγχρονη φυσική και μηχανική.

10.2 Εισαγωγή

Μία σειρά από τα πιο αξιοσημείωτα αποτελέσματα στα μαθηματικά σχετίζονται με την απόδειξη της Υπόθεσης του Poincare [131, 132, 133] του G. Perelman που βασίζεται στην εικασία γεωμετρικοποίησης [177, 178] πεδίων Riemann τριών διαστάσεων και του R.Hamilton θεωρία ροών Ricci [78, 79], περισσότερο στις [34, 125, 100]. Οι ροές Ricci έχουν μελετηθεί αρκετά από ειδικούς στον τομέα της γεωμετρικής ανάλυσης και της Riemann γεωμετρίας. *Πρόσφατα, προτάθηκε μία σειρά από εφαρμογές της θεωρίας ροών Ricci στη φυσική* [187, 188, 189, 190, 42]. Μερικές γεωμετρικές προσεγγίσεις στη σύγχρονη βαρύτητα και στη θεωρία χορδών είναι συνδεδεμένες με τη μέθοδο των κινούμενων πλαισίων και κατανομών των γεωμετρικών αντικειμένων στις (semi)Riemann πολλαπλότητες και στους γενικευμένους χώρους που διαθέτουν μη τετριμμένη στρέψη, μη μετρικότητα, και/ή μη-γραμμικές δομές συνοχής [43, 56]. Η γεωμετρία των μη ολονομικών πεδίων και των μη Riemann χώρων εφαρμόζεται στο μέγιστο στη σύγχρονη μηχανική, βαρύτητα, κοσμολογία και στην κλασική κβαντική θεωρία πεδίων [172], [23], [105], [107], [116], [117], [10], [134], [114], [45], [46], [70], [65], [138], [191], [193], [192]. Τέτοιοι χώροι χαρακτηρίζονται από τρεις θεμελιώδεις γεωμετρικές κατηγορίες: μη-γραμμική συνοχή, γραμμική συνοχή και μετρική. Υπάρχει ένα σημαντικό γεωμετρικό πρόβλημα για να αποδείξουμε την ύπαρξη της καλύτερης δυνατής μετρικής και γραμμικής συνοχής προσαρμοσμένης σε δομή μη-γραμμικής συνοχής. Από την πλευρά της γεωμετρίας Riemann, η εικασία του Einstein ισχυρίζεται την ύπαρξη μιας κατάλληλης μετρικής σε μια αυθαίρετη κλειστή τρισδιάστατη πολλαπλότητα.

Είναι πολύ δύσκολος ο ορισμός ροών Ricci αμοιβαία συμβατών θεμελιώδων γεωμετρικών δομών σε μη Riemann πολλαπλότητες (για παράδειγμα, σε μία Finsler πολλαπλότητα). Για αυτούς τους σκοπούς, μπορούμε να εφαρμόσου-

με την προσέγγιση του Hamilton αλλά αντίστοιχα γενικευμένη έτσι ώστε να περιγράφει μη ολονομικές (περιορισμένες) διαμορφώσεις. Οι πρώτες προσπάθειες να κατασκευαστούν ακριβείς λύσεις των Ricci εξισώσεων ροών σε μη ολονομικές Einstein και Riemann - Cartan (με μη τετριμμένη στρέψη) πολλαπλότητες, ήταν να γενικευθούν γνωστές κλάσεις ακριβών λύσεων Einstein και string βαρύτητας [188, 189, 190] (για την εξαγωγή ολονομικών λύσεων [42]). Χρησιμοποιούμε ενιαία θεώρηση για τους Riemann και γενικευμένους χώρους Finsler-Lagrange ακολουθώντας τη γεωμετρία των μη ολονομικών πολλαπλοτήτων. Στη συνέχεια, θα φανεί πότε τα αξιοσημείωτα αποτελέσματα Perelman-Hamilton αληθεύουν για περισσότερο γενικές μη Riemann διαμορφώσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτό δεν είναι μόνο μία ξεκάθαρη τεχνική επέκταση της θεωρίας ροών Ricci σε συγκεκριμένες πολλαπλότητες με επιπρόσθετες γεωμετρικές δομές. Το πρόβλημα της κατασκευής της θεωρίας ροών Finsler-Ricci περιλαμβάνει έναν αριθμό νέων θεμελιωδών θεμάτων στην συμβατότητα των γεωμετρικών και φυσικών αντικειμένων.

Υπάρχουν τρεις σημαντικοί λόγοι που υποστηρίζουν την αναζήτηση μη ολονομικών ροών Ricci: 1) Οι ροές Ricci μιας Riemann μετρικής μπορεί να οδηγήσουν σε μια Finsler-like μετρική, αν οι ροές υπόκεινται σε συγκεκριμένους μη ολοκληρώσιμους περιορισμούς και μοντελοποιημένους με βάση μη ολονομικά πλαίσια. 2) Γενικευμένες Finsler-like μετρικές εμφανίζονται φυσικά ως ακριβείς λύσεις στην Einstein, string, gauge και μη μεταθετική βαρύτητα, παραμετροποιημένες με μετρικές generic off diagonal, μη ολονομικά πλαίσια και γενικευμένες συνοχές [191, 193]. Είναι μια σημαντική φυσική εργασία να αναλύσουμε τις ροές Ricci τέτοιων λύσεων όπως επίσης άλλων φυσικών σημαντικών λύσεων (για παράδειγμα, μαύρες τρύπες solitonic και pp waves λύσεις, Taub NUT διαμορφώσεις [188, 189, 190]), που οδηγούν σε μη ολονομικές γεωμετρικές διαμορφώσεις. 3) Τελικά, το γεγονός ότι μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα εγχαθιστά μια κατάλληλη μετρική Riemann, η οποία υποδηλώνει συγκεκριμένες θεμελιώδεις συνέπειες (για παράδειγμα) για την τοπολογία του χωροχρόνου μας, μας επιτρέπει να θεωρήσουμε άλλους τύπους μετρικών με πιθανή τοπική ανισοτροπία και μη ολονομικές βαρυτικές αλληλεπιδράσεις. Ποιες είναι οι φυσικές εξισώσεις εξέλιξης για τέτοιες διαμορφώσεις και πως μπορούμε να τις συσχετίσουμε με την τοπολογία μη ολονομικών πολλαπλοτήτων ; Θα πρέπει να απαντηθούν αυτές οι ερωτήσεις (για κανονικά συστήματα Lagrange) στη μελέτη αυτή και στο μέλλον.

Η ιδέα της μη ολονομικής πολλαπλότητας είχε παρουσιαστεί ανεξάρτητα από τον G. Vranceanu [202] και τον Z. Horak [84], αφού υπήρχε η ανάγκη για γεωμετρική αναπαράσταση των μη ολονομικών μηχανικών συστημάτων [26, 193, 76]. Ένα ζεύγος (M, D) , όπου M είναι μια πολλαπλότητα και D είναι μια μη ολοκληρώσιμη κατανομή στη M , λέγεται μια μη ολονομική πολλαπλότητα. Τρεις γνωστές κατηγορίες μη ολονομικών πολλαπλοτήτων, όπου η μη ολονομική κατανομή καθορίζει μια μη-γραμμική δομή συνοχής, καθορίζεται από τους χώρους Finsler [44, 26, 19] και τις γενικεύσεις τους ως Lagrange και Hamilton χώρους [98, 193] (συνήθως τέτοιες γεωμετρικές μοντελοποιούνται στην εφαπτόμενη δέ-

σημ TM). Πιο πρόσφατα παραδείγματα, που σχετίζονται με ακριβείς off diagonal λύσεις και μη ολονομικά πλαίσια σε Einstein/ string/ gauge/ noncommutative βαρύτητα και μη ολονομικές Fedosov πολλαπλότητες [191, 66, 193] επίσης δίνουν έμφαση στις μη ολονομικές γεωμετρικές δομές.

Στα επόμενα θα αναφερθούμε σε μη ολονομικές πολλαπλότητες τύπου Lagrange-Finsler. Διαφορετικά μοντέλα των «τοπικά ανισότροπων» χώρων μπορούν να επεξεργαστούν για διαφορετικούς τύπους θεμελιωδών γεωμετρικών δομών (μετρικών, μη μετρικών και γραμμικών συνοχών). Γενικά τέτοιοι χώροι περιλαμβάνουν μη τετριμμένη στρέψη και μη μετρικά πεδία. Θα ήταν πολύ δύσκολο τεχνικά να γενικεύσουμε και να επεξεργαστούμε νέες αποδείξεις για όλους τους τύπους μη Riemann γεωμετριών. Θα καθορίσουμε τα κριτήρια για να αποφασίσουμε πότε συγκεκριμένοι τύποι Finsler-like γεωμετριών μπορούν να εξαχθούν (επιβάλλοντας τους αντίστοιχους μη ολονομικούς περιορισμούς) από τις «καλώς ορισμένες» ροές Ricci και τις μετρικές Riemann. Αυτό είναι πιθανό, επειδή τέτοιες γεωμετρικές δομές μπορούν να περιγραφούν ισοδύναμα σε όρους των συνοχών Levi-Civita ή από τις μετρικές διαμορφώσεις με μη τετριμμένη στρέψη επαγόμενη από μη ολονομικά πλαίσια. Από μη ολονομικούς μετασχηματισμούς των γεωμετρικών δομών, πρέπει να είμαστε σε θέση να παράξουμε συγκεκριμένες κατηγορίες μη μετρικών γεωμετριών ή γενικευμένων διαμορφώσεων στρέψης.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα καθορίσουμε τις εξισώσεις ροών Ricci σε μη ολονομικές πολλαπλότητες και να αποδείξουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες τέτοιες διαμορφώσεις (του τύπου Finsler-Lagrange και στη σύγχρονη φυσική) μπορούν να εξαχθούν από καλώς ορισμένες ροές των μετρικών Riemann. Επίσης θα αναλύσουμε γενικεύσεις των αποτελεσμάτων του G.Perelman [131, 132, 133] για μη ολονομικές πολλαπλότητες και χώρους που δημιουργούνται από μη γραμμικές συνοχές. Θα κατασκευάσουμε επίσης νέες κλάσεις ακριβών λύσεων μη ολονομικών Ricci εξισώσεων ροών με μη μεταθετική και/ή Lie-αλγεβροειδή συμμετρία, ορίζοντας τοπικά ανισοτροπικές ροές των μαύρων τρυπών, wormholes και κοσμολογικών διαμορφώσεων και αναπτύσσοντας τα αποτελέσματα [188, 189, 190, 191, 193, 192].

10.2.1 N-συνοχές

Θεωρώντας μία $(n + m)$ -διάστατη πολλαπλότητα \mathbf{V} , με $n \geq 2$ και $m \geq 1$ (για έναν αριθμό φυσικών εφαρμογών, μπορεί ισοδύναμα να θεωρηθεί ένα φυσικό και/ή γεωμετρικό διάστημα). Σε μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου, $\mathbf{V} = TM$, με $n = m$ (π.χ. μία εφαπτόμενη δέσμη), ή $\mathbf{V} = \mathbf{E} = (E, M)$, $\dim M = n$, είναι μία διανυσματική δέσμη στο M , με ολικό χώρο E . Σε μια γενική περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε μία πολλαπλότητα \mathbf{V} εφοδιασμένη με μία νηματική δομή, σε «οριζόντιες» και «κάθετες» κατευθύνσεις. Οι τοπικές συντεταγμένες του \mathbf{V} συμβολίζονται με τη μορφή $u = (x, y)$, ή $u^\alpha = (x^i, y^a)$, όπου οι «οριζόντιοι» δείκτες παίρνουν τις τιμές $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$ και οι «κάθετοι»

δείκτες παίρνουν τις τιμές $a, b, c, \dots = n+1, n+2, \dots, n+m$.⁴ Συμβολίζουμε με $\pi^\top : T\mathbf{V} \rightarrow TM$ το διαφορικό της απεικόνισης $\pi : \mathbf{V} \rightarrow V$ ορισμένο από το νήμα μιας εφαπτόμενης δέσμης $T\mathbf{V}$ και TM . Ο πυρήνας του π^\top είναι μόνο ο κάθετος υπόχωρος $v\mathbf{V}$ με ένα σχετικό $i : v\mathbf{V} \rightarrow T\mathbf{V}$.

Ορισμός 4 Μία μη-γραμμική συνοχή (N -συνοχή) \mathbf{N} μιας πολλαπλότητας \mathbf{V} ορίζεται από το διαχωρισμό στα αριστερά μιας ακριβούς ακολουθίας

$$0 \rightarrow v\mathbf{V} \xrightarrow{i} T\mathbf{V} \rightarrow T\mathbf{V}/v\mathbf{V} \rightarrow 0,$$

π.χ. από ένα μορφισμό μια υποπολλαπλότητας $\mathbf{N} : T\mathbf{V} \rightarrow v\mathbf{V}$ τέτοια ώστε $\mathbf{N} \circ i$ είναι η ένωση στο $v\mathbf{V}$.

Τοπικά, μία N -συνοχή ορίζεται από τις συνιστώσες της $N_i^a(u)$,

$$\mathbf{N} = N_i^a(u) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}. \quad (282)$$

Γενικεύοντας το τοπικό διαχωρισμό, αποδεικνύεται ότι :

Πρόταση 1 Οποιαδήποτε N -συνοχή ορίζεται από ένα άθροισμα *Whitney* του οριζόντιου (h) υπόχωρου, ($h\mathbf{V}$), και κάθετου (v) υπόχωρου, ($v\mathbf{V}$),

$$T\mathbf{V} = h\mathbf{V} \oplus v\mathbf{V}. \quad (283)$$

Το άθροισμα (283) δηλώνει στην $T\mathbf{V}$ μια μη ολονομική (ισοδύναμα, ανολονομική ή μη ολοκληρώσιμη) κατανομή οριζόντιων και κάθετων υπόχωρων. Μία γνωστή κλάση γραμμικών συνοχών αποτελείται από μία συγκεκριμένη υποομάδα με γραμμικές συνιστώσες στο y^a , π.χ. $N_i^a(u) = \Gamma_{bi}^a(x)y^b$.

Τα γεωμετρικά αντικείμενα στη \mathbf{V} μπορούν να οριστούν σε μια μορφή που επισυνάπτεται με τη δομή N -συνοχής, ακολουθώντας συγκεκριμένες αναλύσεις από παράλληλες μετατοπίσεις διατηρώντας το διαχωρισμό (283). Σε αυτή την περίπτωση, τις διαχωρίζουμε (από τη δομή N -συνοχής), π.χ. d -αντικείμενα. Για παράδειγμα, ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X} \in T\mathbf{V}$ εκφράζεται

$$\mathbf{X} = (hX, vX) \quad \text{ή} \quad \mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{e}_\alpha = X^i \mathbf{e}_i + X^a e_a,$$

όπου $hX = X^i \mathbf{e}_i$ και $vX = X^a e_a$ δηλώνουν, αντίστοιχα, τα επισυναπτόμενα στη δομή N -συνοχής οριζόντια (h) και κάθετα (v) στοιχεία του διανύσματος, εν συντομία, \mathbf{X} ονομάζεται ένα διαχωρισμένο διάνυσμα, εν συντομία, d -διάνυσμα. Τα γεωμετρικά αντικείμενα επί της \mathbf{V} όπως οι ταχυστές, σπίνορες, συνοχές, ... ονομάζονται αντίστοιχα d -ταχυστές, d -σπίνορες, d -συνοχές, ... αν επισυνάπτονται στο διαχωρισμό με την N -συνοχή (283).

⁴Για τις εφαπτόμενες δέσμες TM , θεωρούμε ότι και οι δύο δείκτες παίρνουν τις ίδιες τιμές.

Ορισμός 5 Η καμπυλότητα N -συνοχής ορίζεται σαν τανυστές *Neijenhuis* ,

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq [vX, vY] + v[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - v[vX, \mathbf{Y}] - v[\mathbf{X}, vY]. \quad (284)$$

Σε τοπική μορφή, έχουμε για (284)

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \Omega_{ij}^a d^i \wedge d^j \otimes \partial_a,$$

με συνιστώσες

$$\Omega_{ij}^a = \frac{\partial N_i^a}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j^a}{\partial x^i} + N_i^b \frac{\partial N_j^a}{\partial y^b} - N_j^b \frac{\partial N_i^a}{\partial y^b}. \quad (285)$$

Οποιαδήποτε N -συνοχή \mathbf{N} μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα affine πλαίσιο (vierbein) με δομή $\mathbf{e}_\nu = (\mathbf{e}_i, e_a)$, όπου

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^a(u) \frac{\partial}{\partial y^a}, e_a = \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad (286)$$

και το δυϊκό πλαίσιο (coframe) με δομή $\mathbf{e}^\mu = (e^i, \mathbf{e}^a)$, όπου

$$e^i = dx^i \quad \text{και} \quad \mathbf{e}^a = dy^a + N_i^a(u) dx^i \quad (287)$$

Αυτά τα vielbeins λέγονται αντίστοιχα N -επισυναπτόμενα πλαίσια και δυϊκά πλαίσια. Έτσι ώστε να διατηρείται μια σχέση με τους προηγούμενους συμβολισμούς [191, 193], σημειώνουμε ότι $\mathbf{e}_\nu = (\mathbf{e}_i, e_a)$ και $\mathbf{e}^\mu = (e^i, \mathbf{e}^a)$ είναι αντίστοιχα οι προηγούμενες N -επεκτεινόμενες μερικές παράγωγοι $\delta_\nu = \delta/\partial u^\nu = (\delta_i, \partial_a)$ και N -επεκτεινόμενα διαφορικά $\delta^\mu = \delta u^\mu = (d^i, \delta^a)$. Αυτό τονίζει ότι οι τελεστές (286) και (287) ορίζουν συγκεκριμένα « N -επεκτεινόμενες» μερικές παραγώγους και διαφορικά, τα οποία είναι πιο κατάλληλα για τανυστές και υπολογισμούς ολοκληρωμάτων σε τέτοιες μη ολονομικές πολλαπλότητες.⁵ Τα vielbeins (287) ικανοποιούν τις μη ολονομικές σχέσεις

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha = W_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma \quad (288)$$

με (αντισυμμετρικές) μη τετριμμένες ολονομικές συνιστώσες $W_{ia}^b = \partial_a N_i^b$ και $W_{ji}^a = \Omega_{ij}^a$. Οι παραπάνω τύποι παρουσιάζουν την απόδειξη της

Πρόταση 2 *Μια N -συνοχή στη \mathbf{V} ορίζει μια προτιμητέα μη ολονομική N -επισυναπτόμενη δομή πλαισίου (vierbein) $\mathbf{e} = (h\mathbf{e}, v\mathbf{e})$ και η δυϊκή της βάση $\tilde{\mathbf{e}} = (h\tilde{\mathbf{e}}, v\tilde{\mathbf{e}})$ με \mathbf{e} και $\tilde{\mathbf{e}}$ γραμμικά εξαρτώμενα από τις συνιστώσες της N -συνοχής.*

⁵Πρέπει να χρησιμοποιούμε πάντα *boldface* σύμβολα αν είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι συγκεκριμένοι χώροι και/ή γεωμετρικά αντικείμενα είναι επισυναπτόμενα σε μία δομή N -συνοχής, ή με τις συνιστώσες υπολογισμένες με βάση τα N -επισυναπτόμενα πλαίσια.

Για απλότητα εργαζόμαστε με μια συγκεκριμένη κλάση μη ολονομικών πολλαπλοτήτων :

Ορισμός 6 Μια πολλαπλότητα \mathbf{V} είναι N -ανολονομική αν ο εφαπτόμενος χώρος της $T\mathbf{V}$ εφοδιάζεται με μια δομή N -συνοχής (283).

Υπάρχουν δύο σημαντικά παραδείγματα N -ανολονομικών πολλαπλοτήτων όταν $V = E$, ή TM :

Παράδειγμα Μια διανυσματική δέσμη $\mathbf{E} = (E, \pi, M, \mathbf{N})$, ορίζεται από μια *surjective* προβολή $\pi : E \rightarrow M$, με M βασική πολλαπλότητα $\dim M = n$, και E ο ολικός χώρος $\dim E = n + m$, και εφοδιασμένη με ένα διαχωρισμό N -συνοχής (283) καλείται N -ανολονομική διανυσματική δέσμη. Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι εκείνη της N -ανολονομικής εφαπτόμενης δέσμης $\mathbf{TM} = (TM, \pi, M, \mathbf{N})$, με διαστάσεις $n = m$.

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε διαφορετικούς τύπους (υπερ) χώρων Riemann ή Riemann-Cartan πολλαπλοτήτων μη μεταθετικών δεσμών ή υπερδεσμών με μη ολονομικές κατανομές (283) και προτιμητέα συστήματα αναφοράς [191, 193].

10.2.2 Στρέψεις και Καμπυλότητες d -συνοχών και d -μετρικών

Μια N -επισυναπτόμενη γραμμική συνοχή και μετρικές δομές μπορούν να οριστούν:

Ορισμός 7 Μία διακεκριμένη συνοχή (d -συνοχή) \mathbf{D} σε μια ανολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} είναι μια γραμμική συνοχή διατηρώντας σε παραλληλία το άθροισμα Whitney (283).

Για οποιοδήποτε d -διάνυσμα \mathbf{X} , υπάρχει μια ανάλυση \mathbf{D} σε h - και v -συναλλοίωτες παραγώγους,

$$\mathbf{D}_X \doteq \mathbf{X} \rfloor \mathbf{D} = hX \rfloor \mathbf{D} + vX \rfloor \mathbf{D} = Dh_X + D_vX = hD_X + vD_X. \quad (289)$$

Ο συμβολισμός ' \rfloor ' στην (289) συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο. Πρέπει να γράψουμε ότι $\mathbf{D} = (hD, vD)$, ή $\mathbf{D}_\alpha = (D_i, D_a)$. Για διευκόλυνση, στο Παράρτημα (333), παρουσιάζουμε μερικές τοπικές σχέσεις για d -συνοχές $\mathbf{D} = \{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = (L^i_{jk}, L^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc})\}$, με $hD = (L^i_{jk}, L^a_{bk})$ και $vD = (C^i_{jc}, C^a_{bc})$, βλ. (332).

Ορισμός 8 Η στρέψη μίας d -συνοχής $\mathbf{D} = (hD, vD)$, για κάθε d -διανύσματα \mathbf{X}, \mathbf{Y} ορίζεται από d -τανυστικό πεδίο

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \mathbf{D}_X \mathbf{Y} - \mathbf{D}_Y \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \quad (290)$$

Μια N-επισυναπτόμενη ανάλυση

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{T}(hX, hY) + \mathbf{T}(hX, vY) + \mathbf{T}(vX, hY) + \mathbf{T}(vX, vY). \quad (291)$$

Θεωρώντας h - και v - προβολές της (291) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $h[vX, vY] = 0$, αποδεικνύεται

Θεώρημα 2 Η στρέψη \mathbf{T} μίας d -συναχής \mathbf{D} ορίζεται από πέντε μη τετριμμένα d -τανυστικά πεδία επισυναπτόμενα σε h - και v -διαχωρισμό από τη δομή N -συναχής

$$\begin{aligned} hT(hX, hY) &\doteq D_{hX} hY - D_{hY} hX - h[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \\ vT(hX, hY) &\doteq v[hY, hX], \\ vT(hX, vY) &\doteq -vD_{vY} hX - h[hX, vY], \\ vT(hX, vY) &\doteq vD_{hX} vY - v[hX, vY], \\ vT(vX, vY) &\doteq vD_X vY - vD_Y vX - v[vX, vY]. \end{aligned}$$

Οι d -στρέψεις $hT(hX, hY), vT(vX, vY), \dots$ ονομάζονται αντίστοιχα η h (hh)-στρέψη, v (vv)-στρέψη κοκ. Οι τοπικοί τύποι για στρέψη \mathbf{T} δίνονται στο Παράρτημα (335).

Ορισμός 9 Η καμπυλότητα της d -συναχής \mathbf{D} ορίζονται

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \mathbf{D}_X \mathbf{D}_Y - \mathbf{D}_Y \mathbf{D}_X - \mathbf{D}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \quad (292)$$

για κάθε d -διάνυσμα \mathbf{X}, \mathbf{Y} .

Από ευθείς υπολογισμούς, προκύπτουν οι ιδιότητες

$$\begin{aligned} hR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) vZ &= 0, \quad vR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) hZ = 0, \\ \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{Z} &= hR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) hZ + vR(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) vZ, \end{aligned}$$

για κάθε d -διάνυσμα $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$.

Θεώρημα 3 Η καμπυλότητα \mathbf{R} μίας d -συναχής \mathbf{D} ορίζεται πλήρως από έξι d -καμπυλότητες

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(hX, hY) hZ &= (D_{hX} D_{hY} - D_{hY} D_{hX} - D_{[hX, hY]} - vD_{[hX, hY]}) hZ, \\ \mathbf{R}(hX, hY) vZ &= (D_{hX} D_{hY} - D_{hY} D_{hX} - D_{[hX, hY]} - vD_{[hX, hY]}) vZ, \\ \mathbf{R}(vX, hY) hZ &= (D_{hX} D_{hY} - D_{hY} D_{vX} - D_{[vX, hY]} - vD_{[vX, hY]}) hZ, \\ \mathbf{R}(vX, hY) vZ &= (D_{vX} D_{hY} - D_{hY} D_{vX} - D_{h[vX, hY]} - D_{v[vX, hY]}) vZ, \\ \mathbf{R}(vX, vY) hZ &= (D_{vX} D_{vY} - D_{vY} D_{vX} - D_{v[vX, vY]}) hZ, \\ \mathbf{R}(vX, vY) vZ &= (D_{vX} D_{vY} - D_{vY} D_{vX} - D_{v[vX, vY]}) vZ. \end{aligned}$$

Οι τύποι για τις τοπικές συνιστώσες μιας d -καμπυλότητας $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta}\}$ δίνονται στο Παράρτημα, βλ. (337) .

Ορισμός 10 Μία μετρική δομή \check{g} σε μία N -μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} είναι ένα συμμετρικό συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο δεύτερης τάξης, που είναι μη ιδιάζον και σταθερής υπογραφής σε κάποιο σημείο $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

Ορισμός 11 Μία d -μετρική $\mathbf{g} = hg \oplus vg$ είναι ένας συνηθισμένος μετρικός τανυστής, ο οποίος με συστολή με ένα d -διάνυσμα οδηγεί σε ένα διπλό d -διάνυσμα, d -δυσικό διάνυσμα (η δυσικότητα ορίζεται από τον αντίστροφο αυτού του μετρικού τανυστή).

Θεώρημα 4 Κάθε μετρική \check{g} μπορεί να μετατραπεί ισοδύναμα σε d -μετρική

$$\mathbf{g} = hg(hX, hY) + vg(vX, vY) \quad (293)$$

επισυναπτόμενη σε μια δοθείσα δομή N -συνοχής.

Απόδειξη: Εισάγουμε $h\check{g}(hX, hY) = hg(hX, hY)$ και $v\check{g}(vX, vY) = vg(vX, vY)$ και προσπαθούμε να βρούμε μία N -συνοχή όταν

$$\check{g}(hX, vY) = 0 \quad (294)$$

για κάθε d -διάνυσμα \mathbf{X}, \mathbf{Y} . Σε τοπική μορφή, η εξίσωση (294) είναι μία αλγεβρική εξίσωση για N -συνοχής συνιστώσες N_i^a , βλ. τους τύπους στο Παράρτημα (327),(328).

Μια διακεκριμένη μετρική (εν συντομία, d -μετρική) σε μία N μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} είναι ένας συνήθης μετρικός τανυστής δεύτερης τάξης \mathbf{g} ο οποίος με βάση μια N -επισυναπτόμενη βάση (287) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{g} = g_{ij}(x, y) e^i \otimes e^j + h_{ab}(x, y) e^a \otimes e^b \quad (295)$$

ορίζοντας μια N -επισυναπτόμενη ανάλυση $\mathbf{g} = hg \oplus vg = [hg, vg]$. Από την κλάση των αυθαίρετα d -συνοχών \mathbf{D} στη \mathbf{V} , διαχωρίζουμε εκείνες που είναι μετρικά συμβατές (μετρικές d -συνοχές) ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (296)$$

περιλαμβάνουν όλες τις h - και v - προβολές

$$D_j g_{kl} = 0, D_a g_{kl} = 0, D_j h_{ab} = 0, D_a h_{bc} = 0.$$

Διαφορετικές προσεγγίσεις στη Finsler-Lagrange γεωμετρία μοντελοποιημένη στην \mathbf{TM} (ή σε μια δυσική εφραπτόμενη δέσμη $\mathbf{T}^*\mathbf{M}$, στην περίπτωση της Cartan-Hamilton γεωμετρίας) έχουν γίνει για διαφορετικές d -μετρικές δομές που είναι μετρικά συμβατές [44, 193] ή μη μετρικά συμβατές [19, 193] .

10.2.3 (Μη) επισυναπτόμενες γραμμικές συνοχές

Για κάθε μετρική δομή \mathbf{g} σε μία πολλαπλότητα \mathbf{V} , υπάρχει η μοναδική συμβατή μετρική και Levi-Civita συνοχή χωρίς στρέψη ∇ . Για την οποία $\nabla T^\alpha = 0$ και $\nabla \mathbf{g} = \mathbf{0}$. Αυτό δεν είναι μία d -συνοχή επειδή δεν υπόκειται σε παραλληλισμό της N -συνοχής του διαχωρισμού (283) (δεν επισυνάπτεται στη δομή N -συνοχής).

Θεώρημα 5 Για κάθε d -μετρική $\mathbf{g} = [hg, vg]$ σε μία N μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} , υπάρχει μία μοναδική κανονική μετρική d -συνοχής $\widehat{\mathbf{D}}$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $\widehat{\mathbf{D}}\mathbf{g} = 0$ και απαλείφοντας $h(hh)$ -στρέψη, $v(vv)$ -στρέψη, π.χ. $h\widehat{T}(hX, hY) = 0$ και $v\widehat{T}(vX, vY) = 0$.

Απόδειξη: Από υπολογισμούς, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η d -συνοχή με συνιστώσες $\widehat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = (\widehat{L}^i_{jk}, \widehat{L}^a_{bk}, \widehat{C}^i_{jc}, \widehat{C}^a_{bc})$, βλ. στο Παράρτημα (341), ικανοποιεί την υπόθεση του θεωρήματος.

Ορισμός 12 Μια N μη ολονομική Riemann-Cartan πολλαπλότητα ${}^{RC}\mathbf{V}$ ορίζεται από μία d -μετρική \mathbf{g} και μία δομή μετρικής d -συνοχής \mathbf{D} . Για μια ιδιαίτερη περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χώρος ${}^R\mathbf{V}$ είναι μια N -ανολονομική Riemann πολλαπλότητα αν η δομή d -συνοχής του είναι κανονική, π.χ. $\mathbf{D} = \widehat{\mathbf{D}}$.

Η δομή d -μετρικής \mathbf{g} στην ${}^{RC}\mathbf{V}$ είναι του τύπου (295) και ικανοποιεί τις συνθήκες μετρικότητας (296). Σε σχέση με μια τοπική βάση συντεταγμένων η μετρική \mathbf{g} παραμετροποιείται από ένα γενικό off diagonal μετρικό ansatz (328). Για μια ιδιαίτερη περίπτωση, μπορούμε να πάρουμε $\mathbf{D} = \widehat{\mathbf{D}}$ και να αντιμετωπίσουμε την στρέψη $\widehat{\mathbf{T}}$ ως ένα μη ολονομικό αποτέλεσμα του πλαισίου που επάγεται από ένα μη ολοκληρώσιμο N -διαχωρισμό. Συμπεραίνουμε ότι μια N μη ολονομική πολλαπλότητα Riemann είναι μια μη τετριμμένη δομή στρέψης (335) (που ορίζεται από τις συνιστώσες της N -συνοχής (282)) και d -μετρικής (295) και κανονικής d -συνοχής (341). Ωστόσο τέτοιες πολλαπλότητες μπορούν να περιγραφούν εναλλακτικά, ισοδύναμα, ως μια συνήθης ολονομική πολλαπλότητα Riemann με τη συνήθη Levi-Civita για τη μετρική (327) με συνιστώσες (328). Δε διακρίνουμε την υπάρχουσα μη ολονομική δομή για τέτοιες γεωμετρικές κατασκευές.

Για πιο γενικές εφαρμογές πρέπει να θεωρήσουμε επιπλέον συντελεστές στρέψης, για παράδειγμα, το H -πεδίο στη βαρυτική θεωρία χορδών [56].

10.2.4 Η διαδικασία μετρικοποίησης και προτιμητέες γραμμικές συνοχές

Σε μια N ανολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} , με θεμελιώδεις γεωμετρικές δομές \mathbf{g} και \mathbf{N} , μπορούμε να θεωρήσουμε διάφορες κλάσεις d -συνοχών \mathbf{D} , οι οποίες γενικά δεν είναι μετρικά συμβατές π.χ. $\mathbf{D}\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Η κανονική d -συνοχή $\widehat{\mathbf{D}}$ είναι

η πιο απλή μετρική, με βάση την οποία άλλες κλάσεις d -συνοχών $\mathbf{D} = \widehat{\mathbf{D}} + \mathbf{Z}$ μπορούν να διαχωριστούν από την παραμόρφωση d -τανυστών \mathbf{Z} . Κάθε γεωμετρική κατασκευή εφαρμοσμένη για μια d -συνοχή \mathbf{D} μπορεί να οριστεί πάλι για $\widehat{\mathbf{D}}$, και αντίστροφα, αν \mathbf{Z} είναι καλά ορισμένη.

Ας θεωρήσουμε το σύνολο όλων των δυνατών μη μετρικών και μετρικών d -συνοχών κατασκευασμένων μόνο από συνιστώσες μιας d -μετρικής και δομή N -συνοχής g_{ij} , h_{ab} και N_i^a και τις μερικές παραγώγους τους. Τέτοιες d -συνοχές μπορούν να παραχθούν από δύο διαδικασίες παραμόρφωσης

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} &\rightarrow [K]\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} + [K]\mathbf{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma} \text{ (μετρικοποίηση Kawaguchi [95, 96])}, \\ \text{ή} &\rightarrow [M]\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} + [M]\mathbf{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma}, \end{aligned}$$

όπου $[K]\mathbf{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ και $[M]\mathbf{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ είναι d -τανυστές παραμόρφωσης.

Θεώρημα 6 Για δοθείσα d -μετρική $\mathbf{g}_{\alpha\beta} = [g_{ij}, h_{ab}]$ και N -συνοχή $\mathbf{N} = \{N_i^a\}$ δομές, ο d -τανυστής παραμόρφωσης

$$\begin{aligned} [K]\mathbf{Z}_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \left\{ [K]Z_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{im}D_jg_{mk}, [K]Z_{bk}^a = \frac{1}{2}h^{ac}D_kh_{cb}, \right. \\ [K]Z_{ja}^i &= \left. \frac{1}{2}g^{im}D_ag_{mj}, [K]Z_{bc}^a = \frac{1}{2}h^{ad}D_ch_{db} \right\} \end{aligned}$$

μετασχηματίζει μια d -συνοχή $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = (L_{jk}^i, L_{bk}^a, C_{jc}^i, C_{bc}^a)$ σε μια μετρική d -συνοχή

$$[K]\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = (L_{jk}^i + [K]Z_{jk}^i, L_{bk}^a + [K]Z_{bk}^a, C_{jc}^i + [K]Z_{ja}^i, C_{bc}^a + [K]Z_{bc}^a).$$

Απόδειξη: Προκύπτει ότι οι συνθήκες μετρικότητας $[K]\mathbf{D}\mathbf{g} = \mathbf{0}$ ικανοποιούνται (παρόμοια με [193] για γενικευμένους Finsler ομοπαράλληλους χώρους).

10.3 Βαρύτητα και Γεωμετρία Lagrange-Finsler

Μελετάμε N -μη ολονομικές δομές σε Riemann-Finsler και Lagrange γεωμετρικές μοντελοποιημένες πάνω σε μη ολονομικές πολλαπλότητες Riemann-Cartan.

10.3.1 Γενικευμένοι χώροι Lagrange

Αν μια N -ανολονομική πολλαπλότητα M είναι σε μια εφαπτόμενη δέσμη $\mathbf{V} = \mathbf{TM}$, η διάσταση της βάσης και του χώρου των νημάτων συμπίπτουν $n = m$, και παίρνουμε μια ειδική περίπτωση γεωμετρίας N -συνοχής. Για τέτοια γεωμετρικά μοντέλα, μια N -συνοχή ορίζεται από το άθροισμα Whitney

$$T\mathbf{TM} = h\mathbf{TM} \oplus v\mathbf{TM}, \quad (297)$$

με τοπικές συνιστώσες $\mathbf{N} = \{N_i^a(x^i, y^a)\}$, όπου είναι σωστό να ξεχωρίσουμε τους δείκτες h, i, j, k, \dots από τους δείκτες v, a, b, c, \dots ⁶. Στην \mathbf{TM} , υπάρχει μια σχεδόν μιγαδική δομή $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_\alpha^\beta\}$ που σχετίζεται με τη \mathbf{N} που ορίζεται

$$\mathbf{F}(\mathbf{e}_i) = -e_i \text{ και } \mathbf{F}(e_i) = \mathbf{e}_i, \quad (298)$$

όπου $\mathbf{e}_i = \partial/\partial x^i - N_i^k \partial/\partial y^k$ και $e_i = \partial/\partial y^i$ και $\mathbf{F}_\alpha^\beta \mathbf{F}_\beta^\gamma = -\delta_\alpha^\gamma$. Παρόμοιες κατασκευές μπορούν να εφαρμοστούν σε N -μη ολονομικές πολλαπλότητες \mathbf{V}^{n+n} , όπου νηματικές δομές διάστασης $n+n$ μοντελοποιούνται. Μια γενική d -μετρική δομή (295) στην \mathbf{V}^{n+n} , μαζί με μια N συνοχή \mathbf{N} , ορίζει μια N -μη ολονομική πολλαπλότητα Riemann-Cartan περιττής διάστασης.

Ορισμός 13 Ένας γενικευμένος χώρος Lagrange μοντελοποιείται στη \mathbf{V}^{n+n} (στην \mathbf{TM} , βλ. [193]) από μια d -μετρική με $g_{ij} = \delta_i^a \delta_j^b h_{ab}$, π.χ.

$${}^c \mathbf{g} = h_{ij}(x, y) (e^i \otimes e^j + \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j). \quad (299)$$

Θεωρούμε $\varepsilon = h_{ab}(x, y) y^a y^b$ ως την απόλυτη ενέργεια που σχετίζεται με ένα h_{ab} σταθερής υπογραφής.

Θεώρημα 7 Για μη ιδιάζουσες Hessians

$$\tilde{h}_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^a \partial y^b}, \quad (300)$$

όταν $\det |\tilde{h}| \neq 0$, υπάρχει μια κανονική N -συνοχή που ορίζεται εντελώς από h_{ij} ,

$${}^c N_i^a(x, y) = \frac{\partial G^a}{\partial y^i} \quad (301)$$

όπου

$$G^a = \frac{1}{2} \tilde{h}^{ab} \left(y^k \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^b \partial x^k} - \delta_b^k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} \right).$$

Απόδειξη: Πρέπει να θεωρήσουμε πως οι νόμοι μετασχηματισμού τοπικών συντεταγμένων για κάποιες συνιστώσες N_i^a διατηρούν το διαχωρισμό (297). Πιστοποιούμε ότι οι ${}^c N_i^a$ ικανοποιούν τέτοιες συνθήκες. Το σχεδιάγραμμα της απόδειξης δίνεται για \mathbf{TM} . Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε μη ιδιάζουσα τετραγωνική μορφή $h_{a'b'}(x, y) = e_{a'}^a e_{b'}^b h_{ab}(x, y)$ στη \mathbf{V}^{n+n} αν επαναορίσουμε τις v - συντεταγμένες στη μορφή $y^{a'} = y^a(x^i, y^a)$ και $x^{i'} = x^i$. Τελικά σε αυτή την ενότητα έχουμε :

Θεώρημα 8 Για οποιοδήποτε γενικευμένο χώρο Lagrange, υπάρχουν κανονική N -συνοχή ${}^c \mathbf{N}$, σχεδόν μιγαδική ${}^c \mathbf{F}$, d -μετρική ${}^c \mathbf{g}$ και d -συνοχή ${}^c \hat{\mathbf{D}}$ δομές που ορίζονται από μια δυναμική κανονική Lagrangian ${}^\varepsilon L(x, y) = \sqrt{|\varepsilon|}$ και την Hessian της $\tilde{h}_{ab}(x, y)$ (300).

⁶ Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι πάνω στην \mathbf{TM} μπορούμε να κάνουμε συστολή στους h - και v - δείκτες, το οποίο δεν είναι δυνατό σε μια διανυσματική δέσμη \mathbf{E} με $n \neq m$.

Απόδειξη: Προκύπτει από τους τύπους (300),(301),(298),(345) και την επισημασμένη d -συναγωγή (347) και τις d -μετρικές δομές (346) όλες επαγόμενες από ένα ${}^\varepsilon L = \sqrt{|\varepsilon|}$.

10.3.2 Χώροι Lagrange-Finsler

Η κλάση των γεωμετριών Lagrange-Finsler είναι συνήθως ορισμένη σε επαγόμενες δέσμες αλλά είναι δυνατό να μοντελοποιηθούν τέτοιες δομές σε γενικές N -μη ολονομικές πολλαπλότητες, για παράδειγμα σε (ψευδο)-Riemann και Riemann-Cartan γεωμετρία, αν μη ολονομικά πλαίσια ληφθούν υπόψη [193, 191]. Δύο σημαντικά παραδείγματα προκύπτουν όταν οι N -ανολονομικές δομές μοντελοποιηθούν στην \widetilde{TM} . Συμβολίζουμε με $\widetilde{TM} = TM \setminus \{0\}$, όπου $\{0\}$ συμβολίζει το σύνολο των μηδενισμών της απεικόνισης προβολής $\pi : TM \rightarrow M$.

Παράδειγμα Ένας χώρος Lagrange είναι ένα ζεύγος $L^n = [M, L(x, y)]$ με μια θεμελιώδη διαφορίσιμη συνάρτηση Lagrange $L(x, y)$ που ορίζεται από μια απεικόνιση $L : (x, y) \in TM \rightarrow L(x, y) \in \mathbb{R}$ κλάσης C^∞ στην \widetilde{TM} και συνεχής στη μηδενιστική $0 : M \rightarrow TM$ του π . Η Hessian (300) ορίζεται

$${}^L g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \quad (302)$$

όταν $\text{rank} |g_{ij}| = n$ στην \widetilde{TM} και το πάνω αριστερά L ορίζει πως συγκεκριμένες τιμές ορίζονται από τη Lagrangian L . Η έννοια του χώρου Lagrange εισήχθη από τον J. Kern [98] και μελετήθηκε ως μια φυσική επέκταση της γεωμετρίας Finsler. Σε μια πιο ειδική περίπτωση έχουμε

Παράδειγμα Ένας χώρος Finsler που ορίζεται από μια θεμελιώδη συνάρτηση Finsler $F(x, y)$ και είναι ομογενής $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ για μη μηδενικό $\lambda \in \mathcal{R}$, μπορεί να θεωρηθεί μια ειδική περίπτωση της γεωμετρίας Lagrange όταν $L = F^2$.

Η προσέγγιση μας στην γεωμετρία των N -ανολονομικών χώρων (και πιο συγκεκριμένα στον χώρο Lagrange ή Finsler) βασίζεται στις κανονικές d -συναχές. Σχετίζεται περισσότερο με τα υπάρχοντα πρότυπα βαρύτητας και θεωρίας πεδίου που επιτρέπουν τον ορισμό γενικεύσεων Finsler σε σπινοριακά πεδία μη μεταθετικά και υπερσυμμετρικά πρότυπα, βλ. [193, 191]. Ωστόσο, ένα πλήθος σχολών και συγγραφέων στη γεωμετρία Finsler προτιμά γραμμικές συναχές που δεν είναι μετρικά συμβατές (για παράδειγμα τις συναχές Berwald και Chern βλ. Ορισμό 14) που ορίζουν νέες κλάσεις γεωμετρικών μοντέλων και εναλλακτικών φυσικών θεωριών με μη μετρικό πεδίο [19, 26, 44, 193]. Από μια γεωμετρική οπτική γωνία, όλες αυτές οι προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες [135].

Από το Θεώρημα 8 προκύπτει

Συμπέρασμα : Οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα με κανονική Lagrangian $L(x, y)$ (ή οποιαδήποτε γεωμετρία Finsler με θεμελιώδη συνάρτηση $F(x, y)$) μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια μη ολονομική γεωμετρία Riemann με κανονικές δομές ${}^L\mathbf{N}$, ${}^L\mathbf{g}$ και ${}^L\hat{\mathbf{D}}$ (ή ${}^F\mathbf{N}$, ${}^F\mathbf{g}$ και ${}^F\hat{\mathbf{D}}$, για $L = F^2$) ορισμένες σε μια N-ανολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V}^{n+n} . Σε ισοδύναμη μορφή τέτοιες γεωμετρίες Lagrange-Finsler μπορούν να περιγραφούν από την ίδια μετρική και N-ανολονομικές κατανομές αλλά με τις αντίστοιχες μη επισυναπτόμενες συνοχές Levi-Civita.

Ορίζουμε ως $\mathbf{Ric}(\mathbf{D}) = C(1, 4)\mathbf{R}(\mathbf{D})$, όπου $C(1, 4)$ δηλώνει την συστολή στον πρώτο και τέταρτο δείκτη της καμπυλότητας ο $\mathbf{R}(\mathbf{D})$, και $\mathbf{Sc}(\mathbf{D}) = C(1, 2)\mathbf{Ric}(\mathbf{D}) = {}^s\mathbf{R}$, όπου $C(1, 2)$ ορίζεται από τη συστολή $\mathbf{Ric}(\mathbf{D})$ με την αντίστροφη d -μετρική. Αντίστοιχα, ο ταυιστής Ricci και το βαθμωτό καμπυλότητας ορίζονται από οποιαδήποτε μετρική d -συναχή \mathbf{D} και d -μετρική \mathbf{g} στην ${}^{RC}\mathbf{V}$, βλ. επίσης τις συνιστώσες στο Παράρτημα (338),(339),(340). Οι εξισώσεις Einstein έχουν τη μορφή

$$\mathbf{En}(\mathbf{D}) \doteq \mathbf{Ric}(\mathbf{D}) - \frac{1}{2}\mathbf{g} \mathbf{Sc}(\mathbf{D}) = \mathbf{Y}, \quad (303)$$

όπου η πηγή \mathbf{Y} αντικατοπτρίζει οποιοδήποτε συμβολές του πεδίου ύλης και διορθώσεις, για παράδειγμα θεωρίες χορδών και μεμβρανών για τη βαρύτητα. Σε ένα φυσικό μοντέλο, οι παραπάνω εξισώσεις (303) συμπληρώνονται με εξισώσεις για τα πεδία ύλης και στρέψης (για παράδειγμα στη θεωρία Einstein-Cartan θεωρούνται αλγεβρικές εξισώσεις για τη στρέψη και την πηγή της). Να σημειωθεί εδώ ότι λόγω της μη ολονομικής δομής της ${}^{RC}\mathbf{V}$, ο ταυιστής $\mathbf{Ric}(\mathbf{D})$ δεν είναι συμμετρικός και $\mathbf{D}[\mathbf{En}(\mathbf{D})] \neq 0$. Αυτό επιβάλλει μια μορφή νόμων διατήρησης σε τέτοιους χώρους με γενική «τοπική ανισοτροπία» [193] (μια παρόμοια κατάσταση προκύπτει στη μηχανική Lagrange όταν μη ολονομικοί περιορισμοί τροποποιούν τον ορισμό των νόμων διατήρησης). Για $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}$, όλες οι κατασκευές μπορούν ισοδύναμα να επαναοριστούν για τη συναχή Levi-Civita ∇ , όταν $\nabla[\mathbf{En}(\nabla)] = 0$. Μια πολύ σημαντική κλάση προτύπων μπορεί να μελετηθεί όταν $\mathbf{Y} = \text{diag}[\lambda^h(\mathbf{u}) \mathbf{hg}, \lambda^v(\mathbf{u}) \mathbf{vg}]$, που ορίζει τους καλούμενους N-μη ολονομικούς χώρους Einstein με «μη ομογενή» κοσμολογική σταθερά (διάφορες κλάσεις ακριβών λύσεων σε βαρύτητα και μη ολονομική θεωρία ροών Ricci έχουν κατασκευασθεί και αναλυθεί [191, 193, 188, 189, 190]).

10.4 Ανολονομικές ροές Ricci

Η θεωρία ροών Ricci μελετήθηκε από τον R.Hamilton [78, 79] και εφαρμόστηκε ως μέθοδος προσέγγισης της εικασίας Poincare και της εικασίας γεωμετρικοποίησης Thurston [177, 178] βλ. τις εργασίες του Grisha Perelman [131, 132, 133] και τις περιλήψεις των αποτελεσμάτων στις αναφορές [125, 34].

10.4.1 Ολονομικές ροές Ricci

Για μια μονοπαραμετρική τ οικογένεια μετρικών Riemann $g(\tau) = \{g_{\alpha\beta}(\tau, u^\gamma)\}$ σε μια N -μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} , εισάγεται η εξίσωση ροών Ricci

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \tau} = -2 \, {}_1R_{\alpha\beta}, \quad (304)$$

όπου ${}_1R_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής Ricci για τη συνοχή *Levi-Civita* $\nabla = \{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\}$ με συνιστώσες ορισμένες στη βάση συντεταγμένων $\partial_{\underline{\alpha}} = \partial/\partial u^{\underline{\alpha}}$. Η εξίσωση (304) είναι μια τανυστική μη-γραμμική γενίκευση της βαθμωτής εξίσωσης θερμότητας $\partial\phi/\partial\tau = \Delta\phi$, όπου Δ ο τελεστής Laplace που ορίζεται από \underline{g} . Συνήθως θεωρούμε κανονικοποιημένες ροές Ricci που ορίζονται από

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g_{\alpha\beta} = -2 \, {}_1R_{\alpha\beta} + \frac{2r}{5} g_{\alpha\beta}, \quad (305)$$

$$g_{\alpha\beta}|_{\tau=0} = g_{\alpha\beta}^{[0]}(u), \quad (306)$$

όπου ο παράγοντας κανονικοποίησης $r = \int R dV/dV$ εισάγεται ώστε να διατηρήσουμε τον όγκο V , οι συνοριακές συνθήκες θεωρούνται για $\tau = 0$ και οι λύσεις αναζητώνται για $\tau_0 > \tau \geq 0$. Είναι σημαντικό να μελετήσουμε την εξέλιξη των τανυστών σε ορθοκανονικά πλαίσια και δυϊκά πλαίσια σε μη ολονομικές πολλαπλότητες. Έστω $(\mathbf{V}, g_{\alpha\beta}(\tau))$, $0 \leq \tau < \tau_0$, μια ροή Ricci με ${}_1R_{\alpha\beta} = {}_1R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$ και θεωρούμε την εξέλιξη των διανυσματικών πεδίων βάσης

$$e_{\underline{\alpha}}(\tau) = e_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}}(\tau) \partial_{\underline{\alpha}} \text{ και } e^{\underline{\beta}}(\tau) = e^{\underline{\beta}}_{\underline{\beta}}(\tau) du^{\underline{\beta}}$$

τα οποία είναι $g(0)$ -ορθοκανονικά σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$. Εξελίσσουμε αυτή την τοπική ροή πλαισίου σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e_{\underline{\alpha}}^{\underline{\alpha}} = g^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \, {}_1R_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} e_{\underline{\alpha}}^{\underline{\gamma}}. \quad (307)$$

Υπάρχουν μοναδικές λύσεις για τέτοιες γραμμικά διαφορικές εξισώσεις για όλο το χρόνο $\tau \in [0, \tau_0)$.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (305), (306), (307), μπορεί να οριστεί η εξέλιξη των εξισώσεων από τη ροή Ricci, για παράδειγμα για τον τανυστή Riemann, για τον τανυστή Ricci, για το βαθμωτό Ricci και για τη μορφή όγκου που θεωρείται σε πλαίσια συντεταγμένων [125]. Σε αυτή την ενότητα, θα θεωρήσουμε τέτοιους μη ολονομικούς περιορισμούς στην εξίσωση εξέλιξης όπου το γεωμετρικό αντικείμενο θα εξελίσσεται σε N -επισυναπτόμενη μορφή. Θα μοντελοποιήσουμε και σύνολα N -μη ολονομικών γεωμετριών και πιο ειδικά ροών γεωμετρικών αντικειμένων σε μη ολονομικές πολλαπλότητες Riemann και χώρους Finsler και Lagrange.

10.4.2 Ροές Ricci και N-ανολονομικές κατανομές

Σε πολλαπλότητα \mathbf{V} , οι εξισώσεις (305),(306) περιγράφουν ροές που δεν επισυνάπτονται στις N-συναρχές $N_i^a(\tau, u)$. Για μια οικογένεια τέτοιων N-συναρχών μπορούμε να κατασκευάσουμε από $\underline{g}_{\alpha\beta}(\tau, u^\gamma)$ το αντίστοιχο σύνολο d -μετρικών $\mathbf{g}_{\alpha\beta}(\tau, u) = [g_{ij}(\tau, u), h_{ab}(\tau, u)]$ και το σύνολο N-επισυναπτόμενων πλαισίων στη $(\mathbf{V}, \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\tau))$, $0 \leq \tau < \tau_0$. Η εξέλιξη τέτοιων N-επισυναπτόμενων πλαισίων δεν ορίζεται από τις εξισώσεις (307) αλλά ικανοποιεί την

Πρόταση 3 Για ένα $n+m$ διαχωρισμό, οι λύσεις του συστήματος (305),(306) ορίζουν μια φυσική ροή προτιμητέων N-επισυναπτόμενων δομών πλαισίου.

Απόδειξη: Ακολουθώντας τους τύπους (327),(328),(329), τις συνοριακές συνθήκες (306) και τις τιμές $N_i^a(\tau = 0, u)$ και $\mathbf{g}_{\alpha\beta}(\tau = 0, u) = [g_{ij}(\tau = 0, u), h_{ab}(\tau = 0, u)]$. Έχοντας μια καλά ορισμένη λύση $\underline{g}_{\alpha\beta}(\tau, u)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις συνιστώσες της N-συναρχής $N_i^a(\tau, u)$ και d -μετρική $\mathbf{g}(\tau, u) = [g(\tau, u), h(\tau, u)]$ για οποιοδήποτε $\tau \in [0, \tau_0)$:

Το προσδιορισμένο σύνολο δομών πλαισίου (*vielbein*) $\mathbf{e}_\nu(\tau) = (\mathbf{e}_i(\tau), e_a)$, όπου

$$\mathbf{e}_i(\tau) = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^a(\tau, u) \frac{\partial}{\partial y^a} \text{ και } e_a = \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad (308)$$

και το σύνολο των δυϊκών δομών πλαισίου (δυϊκού πλαισίου) $\mathbf{e}^\mu(\tau) = (e^i, \mathbf{e}^a(\tau))$, όπου

$$e^i = dx^i \text{ και } \mathbf{e}^a(\tau) = dy^a + N_i^a(\tau, u) dx^i. \quad (309)$$

10.4.3 Ανολονομικές ροές Ricci (μη)-συμμετρικών μετρικών

Οι εξισώσεις ροών Ricci εισήχθησαν από τον R. Hamilton [78]. Σε (ψευδο)-Riemann χώρους, η μετρική και οι τανυστές Ricci είναι συμμετρικοί και είναι δυνατό να θεωρήσουμε την παραμετροποιημένη παράγωγο της μετρικής και/ή αντίστοιχα συμμετρικά πεδία ενέργειας - ορμής της ύλης ως πηγές για τον τανυστή Ricci.

Σε N-ανολονομικές πολλαπλότητες υπάρχουν δύο εναλλακτικές δυνατότητες: Η πρώτη είναι να απαιτεί τις εξισώσεις ροών Ricci σε συμμετρική μορφή για συναρχή Levi-Civita και μετά να εξάγουμε διάφορες N μη ολονομικές διαμορφώσεις απαιτώντας αντίστοιχους μη ολονομικούς περιορισμούς.

Στη δεύτερη περίπτωση, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την αρχή με ένα μη συμμετρικό τανυστή Ricci για ένα χώρο non-Riemann. Σε αυτή την ενότητα, θα εργαστούμε σε τέτοιες γεωμετρικές κατασκευές : Οι μη ολονομικές ροές Ricci ακόμα και αν αρχίζουν με ένα συμμετρικό μετρικό τανυστή μπορεί να έχουν ως φυσικό αποτέλεσμα μη συμμετρικούς μετρικούς τανυστές $\hat{g}_{\alpha\beta} = \underline{g}_{\alpha\beta} + \overleftrightarrow{g}_{\alpha\beta}$, όπου $\overleftrightarrow{g}_{\alpha\beta} = -\overleftrightarrow{g}_{\beta\alpha}$. Μη συμμετρικές μετρικές στη βαρύτητα θεωρήθηκαν αρχικά από τον Einstein [60] και L. P. Eisenhart [61] και πρόσφατα [121].

Θεώρημα 9 Με βάση τα N -επισυναπτόμενα πλαίσια οι κανονικές μη ολονομικές ροές Ricci με μη συμμετρικές μετρικές ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij} = -2\hat{R}_{ij} + 2\lambda g_{ij} - h_{cd} \frac{\partial}{\partial \tau} (N_i^c N_j^d), \quad (310)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h_{ab} = -2\hat{R}_{ab} + 2\lambda h_{ab}, \quad (311)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \overleftrightarrow{g}{}_{ia} = \hat{R}_{ia}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \overleftrightarrow{g}{}_{ai} = \hat{R}_{ai} \quad (312)$$

όπου $\underline{g}_{\alpha\beta} = [g_{ij}, h_{ab}]$ με βάση την N -επισυναπτόμενη βάση (287) $\lambda = r/5$, $y^3 = v$ και τ μπορεί να είναι, για παράδειγμα η *time-like* συντεταγμένη $\tau = t$, ή οποιαδήποτε παράμετρος ή επιπλέον συντεταγμένη διάσταση.

Απόδειξη: Προκύπτει από τον επανορισμό των εξισώσεων (305) με βάση τα N -επισυναπτόμενα πλαίσια (χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό πλαισίου (330),(331)), και θεωρώντας τον κανονικό d -τανυστή Ricci (338), ο οποίος κατασκευάζεται από $[g_{ij}, h_{ab}]$. Εδώ σημειώνουμε ότι ο παράγοντας κανονικοποίησης r θεωρείται για το συμμετρικό τμήμα της μετρικής.

Συμπέρασμα Μη ολονομικές ροές Ricci (για κανονική d -συνοχή) καταλήγουν σε συμμετρικές d -μετρικές που παραμετροποιούνται από τους περιορισμούς

$$\overleftrightarrow{g}{}_{\alpha\beta} = 0 \text{ και } \hat{R}_{ia} = \hat{R}_{ai} = 0. \quad (313)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (310),(311),(313) και για «συμμετρικές» μη ολονομικές ροές Ricci εισήχθη και αναλύθηκε στις [188, 189].

Παράδειγμα Οι συνθήκες (313) ικανοποιούνται από οποιοδήποτε ansatz τύπου (295) σε $3D, 4D$, ή $5D$, με συνιστώσες τύπου

$$g_i = g_i(x^k), h_a = h_a(x^k, v), N_i^3 = w_i(x^k, v), N_i^4 = n_i(x^k, v), \quad (314)$$

για $i, j, \dots = 1, 2, 3$ και $a, b, \dots = 4, 5$ (οι $3D$ και $4D$ παραμετροποιούνται απαλείφοντας τις περιπτώσεις $i = 1$ και αντίστοιχα $j = 1, 2$).

Έχουν κατασκευασθεί διάφοροι τύποι ακριβών λύσεων μη ολονομικών εξισώσεων Einstein και εξισώσεων ροών Ricci [191, 193, 192, 188, 189, 190]. Παραμετροποιούνται από ansatz τύπου (314), το οποίο θετικά περιορίζει τις ροές Ricci, ώστε να έχουν συμμετρικές μετρικές. Τέτοιες λύσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πλαίσιο για έρευνα ροών Eisenhart (γενικευμένων γεωμετρικών Finsler-Eisenhart) αν οι περιορισμοί (313) δεν είναι εντελώς επιβεβλημένοι.

10.5 Γενικευμένες ροές Lagrange-Ricci

Σκοπός αυτής της ενότητας, είναι να παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα που αποτυπώνουν τον τρόπο, με τον οποίο διαφορετικοί τύποι μη ολονομικών περιορισμών σε ροές Ricci μετρικών Riemann μοντελοποιούν διαφορετικές κλάσεις

N-ανολονομικών χώρων (που ορίζονται από μετρικές Finsler και συνοχές, γεωμετρικά μοντέλα μηχανικής Lagrange και γενικευμένες γεωμετρίες Lagrange).

10.5.1 Ροές Finsler-Ricci

Θεωρούμε μια τ -παραμετροποιημένη οικογένεια (σύνολο) από θεμελιώδεις Finsler συναρτήσεις $F(\tau) = F(\tau, x^i, y^a)$. Για μια οικογένεια μη ιδιάζουσων Hessians

$${}^F h_{ij}(\tau, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(\tau, x, y)}{\partial y^i \partial y^j}, \quad (315)$$

βλ. (302) για δυναμική $\varepsilon(\tau) = L(\tau) = F^2(\tau)$, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε μετρικές Finsler σε \mathbf{V}^{n+n} (ή σε \mathbf{TM}) και την αντίστοιχη οικογένεια κανονικών N-συναχών βλ. (301)

$${}^c N_i^a(\tau) = \frac{\partial G^a(\tau)}{\partial y^i}, \quad (316)$$

όπου $G^a(\tau) = \frac{1}{2} {}^F h^{ab}(\tau) \left(y^k \frac{\partial^2 F^2(\tau)}{\partial y^b \partial x^k} - \delta_b^k \frac{\partial F^2(\tau)}{\partial x^k} \right)$ και ${}^F h^{ab}(\tau)$ είναι αντίστροφες στο ${}^F h_{ij}(\tau)$.

Πρόταση 4 Οποιαδήποτε οικογένεια θεμελιωδών συναρτήσεων Finsler $F(\tau)$ με μη ιδιάζον ${}^F h_{ij}(\tau)$ ορίζει μια αντίστοιχη οικογένεια μετρικών τύπου Sasaki

$${}^c \mathbf{g}(\tau) = {}^F h_{ij}(\tau, x, y) (e^i \otimes e^j + {}^c e^i(\tau) \otimes {}^c e^j(\tau)), \quad (317)$$

με ${}^F g_{ij}(\tau) = {}^F h_{ij}(\tau, x, y)$, όπου ${}^c e^a(\tau) = dy^a + {}^c N_i^a(\tau, u) dx^i$ ορίζονται από τη N-συναχή (316).

Απόδειξη: Προκύπτει από την αναλυτική κατασκευή (317).

Για $\mathbf{V}^{n+n} = \mathbf{TM} = (TM, \pi, M, {}^c N_i^a)$ με απεικόνιση προβολής $\pi : TM \rightarrow M$, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με $F(\tau)$ διάφορες κλάσεις γεωμετρικών Finsler. Σε αναλυτική μορφή εργαζόμαστε σε $\widetilde{TM} \doteq TM \setminus \{0\}$ και θεωρούμε τη δέσμη pull-back $\pi^* TM$. Παράγονται γεωμετρικά αντικείμενα στην συνεφαπτόμενη δέσμη pull-back $\pi^* T^* M$ και τα τανυστικά του γινόμενα:

$\pi^* T^* M \otimes \pi^* T^* M \otimes \pi^* T^* M$, μια αντίστοιχη οικογένεια τανυστών Cartan είναι

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A_{ijk}(\tau) dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k, \\ A_{ijk}(\tau) &\doteq \frac{F(\tau)}{2} \frac{\partial g_{ij}(\tau)}{\partial y^k}; \end{aligned}$$

$\pi^* T^* M$, μια οικογένεια μορφών Hilbert $\omega(\tau) \doteq \frac{\partial F(\tau)}{\partial y^k} dx^i$ και η d -συναχή 1-μορφή

$$\begin{aligned} \omega_j^i(\tau) &= L^i_{jk}(\tau) dx^k \\ L^i_{jk}(\tau) &= \frac{1}{2} {}^F g^{ih} ({}^c e_k {}^F g_{jh} + {}^c e_j {}^F g_{kh} - {}^c e_h {}^F g_{jk}). \end{aligned} \quad (318)$$

Θεώρημα 10 Το σύνολο των θεμελιωδών συναρτήσεων Finsler $F(\tau)$ ορίζει στην π^*TM ένα μοναδικό σύνολο γραμμικών συνοχών που λέγεται συνοχές Chern και χαρακτηρίζονται από τις εξισώσεις δομής :

$$d(dx^i) - dx^i \wedge \omega_i^i(\tau) = -dx^i \wedge \omega_i^i(\tau) = 0,$$

η συνθήκη χωρίς στρέψη

$$dg_{ij}(\tau) - {}^F g_{kj}(\tau)\omega_i^k(\tau) - {}^F g_{ik}(\tau)\omega_j^k(\tau) = 2 \frac{A_{ija}(\tau)}{F(\tau)} {}^c e^a(\tau),$$

η σχεδόν μετρικά συμβατή συνθήκη

Απόδειξη: Προκύπτει από υπολογισμούς. Για οποιαδήποτε σταθερή τιμή $\tau = \tau_0$, είναι απλά το Θεώρημα 2.4.1. από Chern.

Προκειμένου να επεξεργαστούμε ένα πλήρες γεωμετρικό μοντέλο στην TM , η οποία επίσης μας επιτρέπει να κάνουμε κατασκευές για N -μη ολονομικές πολλαπλότητες πρέπει να επεκτείνουμε τις παραπάνω μορφές με μη τετριμμένες συνιστώσες ${}^c e^a(\tau)$.

Ορισμός 14 Μια οικογένεια θεμελιωδών μετρικών Finsler $F(\tau)$ ορίζει μοντέλα γεωμετρίας Finsler (ισοδύναμα χώρων) με d -συνοχές $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(\tau) = (L^i_{jk}(\tau), C^i_{jk}(\tau))$ σε μια αντίστοιχη N -μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} :

- τύπου Cartan αν η $L^i_{jk}(\tau)$ δίνεται από (318) και

$$C^i_{jk}(\tau) = \frac{1}{2} {}^F g^{ih}(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial x^k} {}^F g_{jh}(\tau) + \frac{\partial}{\partial x^j} {}^F g_{kh}(\tau) - \frac{\partial}{\partial x^h} {}^F g_{jk}(\tau) \right), \quad (319)$$

η οποία είναι παρόμοια με τους τύπους (347) αλλά για $L = F^2(\tau)$;

- τύπου Chern αν $L^i_{jk}(\tau)$ δίνεται από (318) και $C^i_{jk}(\tau) = 0$;
- τύπου Berwald αν $L^i_{jk}(\tau) = \partial {}^c N_j^i / \partial y^k$ και $C^i_{jk}(\tau) = 0$;
- τύπου Hashiguchi αν $L^i_{jk}(\tau) = \partial {}^c N_j^i / \partial y^k$ και $C^i_{jk}(\tau)$ δίνεται από (319)

Διάφορες κλάσεις αξιολογημένων συνοχών Finsler έχουν μελετηθεί [26, 19, 191, 193] στη μοντελοποίηση Finsler-like δομών σε Einstein και βαρύτητα χορδών και σε μη μεταθετική βαρύτητα.

Πρέπει να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι τα μοντέλα γεωμετρίας Finsler με d -συνοχές τύπου Chern, Berwald ή Hashiguchi είναι με μη τετριμμένο μη μετρικό πεδίο. Έτσι γενικά μια οικογένεια θεμελιωδών μετρικών συναρτήσεων Finsler $F(\tau)$ μπορεί να παράγει διάφορους τύπους N -ανολονομικών μετρικών ομοπαράλληλων γεωμετρικών διαμορφώσεων, αλλά όλοι οι συντελεστές τέτοιων επαγόμενων μη μετρικών και/ ή στρέψης πεδίων ορίζονται από τις συνιστώσες

αντίστοιχων οικογενειών γενικών off diagonal μετρικών τύπου (327), όταν το ansatz (328) παραμετροποιείται για $g_{ij} = h_{ij} = {}^F h_{ij}(\tau)$ και $N_i^a = {}^c N_i^a(\tau)$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις οικογένειες των μη μετρικών γεωμετριών Finsler σε αντίστοιχες μετρικές και να μοντελοποιήσουμε τις διαμορφώσεις Finsler σε N-ανολονομικούς χώρους. Με τον πιο απλό γεωμετρικό και φυσικό τρόπο (αξιόπιστοι και οι δύο) για την εφαρμογή των προηγούμενων Hamilton-Perelman αποτελεσμάτων σε ροές Ricci για μετρικές Riemann, όπως και για επιπλέον γενικεύσεις σε μη μεταθετική γεωμετρία Finsler, υπερσυμμετρικά μοντέλα κλπ, περιορίζουμε την ανάλυση μας σε ροές Finsler-Ricci με κανονική d-συνοχή τύπου Cartan όταν ${}^F \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(\tau) = (L^i{}_{jk}(\tau), C^i{}_{jk}(\tau))$ είναι με $L^i{}_{jk}(\tau)$ από (318) και $C^i{}_{jk}(\tau)$ από (319). Αυτό μας παρέχει μια απόδειξη για το

Λήμμα 1 *Μια οικογένεια γεωμετριών Finsler που ορίζεται από $F(\tau)$ μπορεί να χαρακτηριστεί ισοδύναμα από τις αντίστοιχες κανονικές d-συνοχές (σε N-επισυναπτόμενη μορφή) και συνοχές Levi-Civita (σε μη N-επισυναπτόμενη μορφή) που σχετίζεται με τους τύπους*

$${}^F \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = {}^F \widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma + {}_i Z_{\alpha\beta}^\gamma \quad (320)$$

όπου ${}_i Z_{\alpha\beta}^\gamma$ υπολογίζεται ακολουθώντας τους τύπους (344) για $g_{ij} = h_{ij} = {}^F h_{ij}(\tau)$ και $N_i^a = {}^c N_i^a(\tau)$.

Ακολουθώντας το Λήμμα 1 προκύπτει η απόδειξή του.

Θεώρημα 11 *Οι ροές Finsler-Ricci για θεμελιώδεις μετρικές συναρτήσεις $F(\tau)$ μπορούν να εξαχθούν από συνήθεις ροές Ricci μετρικών Riemann παραμετροποιημένων στη μορφή*

$${}^F g_{\alpha\beta}(\tau) = \begin{bmatrix} {}^F g_{ij} + {}^c N_i^a {}^c N_j^b {}^F g_{ab} & {}^c N_j^e {}^F g_{ae} \\ {}^c N_i^e {}^F g_{be} & {}^F g_{ab} \end{bmatrix} \quad (321)$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις π.χ. για κανονικοποιημένες ροές

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} {}^F g_{\alpha\beta} &= -2 {}_i R_{\alpha\beta} + \frac{2r}{5} {}^F g_{\alpha\beta}, \\ {}^F g_{\alpha\beta}|_{\tau=0} &= {}^F g_{\alpha\beta}^{[0]}(u). \end{aligned}$$

Οι ροές Finsler-Ricci διαχωρίζονται από τις συνήθεις (μη περιορισμένες) ροές μετρικών Riemann, λόγω της ύπαρξης επιπλέον εξελίξεων των προτιμητέων N-επισυναπτόμενων πλαισίων βλ. Πρόταση 2.

Πόρισμα 1 *Η εξέλιξη για όλους τους χρόνους $\tau \in [0, \tau_0)$, από τα προτιμητέα πλαίσια σε έναν χώρο Finsler*

$${}^F \mathbf{e}_\alpha(\tau) = {}^F \mathbf{e}_\alpha^\alpha(\tau, u) \partial_\alpha$$

ορίζεται από τις συνιστώσες

$${}^F e_\alpha^\alpha(\tau, u) = \begin{bmatrix} {}^F e_i^i(\tau, u) & {}^c N_i^b(\tau, u) {}^F e_b^a(\tau, u) \\ 0 & {}^F e_a^a(\tau, u) \end{bmatrix}, \quad (322)$$

με ${}^F g_{ij}(\tau) = {}^F e_i^i(\tau, u) {}^F e_j^j(\tau, u) \eta_{ij}$, όπου $\eta_{ij} = \text{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1]$ εγκαθιδρύουν την υπογραφή του ${}^F g_{\alpha\beta}^{[0]}(u)$, δίνονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial \tau} {}^F e_\alpha^\alpha = {}^F g^{\alpha\beta} {}^F R_{\beta\gamma} {}^F e_\alpha^\gamma, \quad (323)$$

όπου ${}^F g^{\alpha\beta}$ είναι αντίστροφο στην (321) και ${}^F R_{\beta\gamma}$ είναι ο ταυστής Ricci που κατασκευάζεται από τις συνιστώσες Levi-Civita της (321).

Απόδειξη: Πρέπει να εισάγουμε τις συνιστώσες μετρικής και N-συνοχής (316),(317) που ορίζονται από $F(\tau)$, σε (330). Οι εξισώσεις (323) είναι παρόμοιες με τις (307) αλλά στην περίπτωση μας για τα N-επισυναπτόμενα πλαίσια (322).

Σημειώνουμε ότι η εξέλιξη των ταυστών Riemann, Ricci και βαθμωτής καμπυλότητας που ορίζονται από την Cartan d -συνοχή π.χ. την κανονική d -συνοχή ${}^F \widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$, μπορούν να εξαχθούν αν οι τιμές επαναοριστούν για τη μετρική (320), (321).

Τελικά σε αυτή την ενότητα, συμπεραίνουμε πως οι ροές Ricci των μετρικών Finsler μπορούν να εξαχθούν από ροές Ricci μετρικών Riemann από αντίστοιχα μετρικά ansatz, μη ολονομικούς περιορισμούς και μορφοποιήσεις γραμμικών συνοχών, τα οποία προκύπτουν κανονικά από θεμελιώδεις συναρτήσεις Finsler.

10.5.2 Ροές Ricci κανονικών συστημάτων Lagrange

Έχουν γίνει πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις στη γεωμετρική μηχανική. Ακολουθούμε αυτές που αναφέρονται στα πλαίσια σχεδόν συμπλεκτικής γεωμετρίας [114] και γενικευμένης Finsler-Lagrange γεωμετρίας [98]. Σημειώνουμε ότι οι χώροι Finsler-Lagrange μπορούν να είναι ισοδύναμα μοντελοποιημένοι, όπως οι γεωμετρίες Kahler (βλ. (298) που ορίζουν σχεδόν μιγαδική δομή) και οι οποίες είναι σημαντικές για εφαρμογές της θεωρίας των μη ολονομικών ροών Ricci, μοντελοποιημένων ως μη ολονομικές πολλαπλότητες Riemann.

Για κανονικά μηχανικά συστήματα, μπορούμε να μορφοποιήσουμε το πρόβλημα : Ποια θεμελιώδης συνάρτηση Lagrange $L(\tau) = L(\tau, x^i, y^j)$ από μια κλάση Lagrangians που παραμετρικοποιούνται από $\tau \in [0, \tau_0)$ θα ορίσει την εξέλιξη της γεωμετρίας Lagrange, από μια θεωρία ροών Ricci ; Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να παρουσιάσει τα αποτελέσματα που λύνουν αυτό το πρόβλημα.

Ακολουθώντας τύπους και μεθόδους προηγούμενης ενότητας, όταν $F^2(\tau) \rightarrow L(\tau)$; ${}^F h_{ij}(\tau) \rightarrow {}^L g_{ij}(\tau)$, βλ. (315),(302) ${}^c N_i^a(\tau) \rightarrow {}^L N_j^i(\tau)$, βλ. (316),(345)

${}^c \mathbf{g}(\tau) \rightarrow {}^L \mathbf{g}(\tau)$, βλ. (317),(346) ${}^F \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(\tau) \rightarrow {}^L \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(\tau)$, βλ. (320),(347), όπου όλες οι τιμές πάνω αριστερά "L" είναι κανονικά ορισμένες από $L(\tau)$, αποδεικνύουμε γενικεύσεις του θεωρήματος 11 και του Πορίσματος 1:

Θεώρημα 12 Οι ροές Lagrange-Ricci για κανονικές Lagrangians $L(\tau)$ μπορούν να εξαχθούν από συνήθεις ροές Ricci μετρικών Riemann παραμετροποιημένων ως εξής

$${}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau) = \begin{bmatrix} {}^L g_{ij} + {}^L N_i^a {}^L N_j^b {}^L g_{ab} & {}^L N_j^e {}^L g_{ae} \\ {}^L N_i^e {}^L g_{be} & {}^L g_{ab} \end{bmatrix}$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις (για παράδειγμα κανονικοποιημένες)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} {}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} &= -2 {}^L R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} + \frac{2r}{5} {}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \\ {}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}|_{\tau=0} &= {}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{[0]}(u), \end{aligned}$$

όπου ${}^L R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau)$ είναι οι τανυστές Ricci που κατασκευάζονται από τις συνοχές Levi-Civita των μετρικών ${}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau)$.

Οι ροές Lagrange-Ricci χαρακτηρίζονται από τις εξελίξεις των προτιμητέων N-επισυναπτόμενων πλαισίων βλ. Πρόταση 2:

Πόρισμα 2 Η εξέλιξη για όλο το χρόνο $\tau \in [0, \tau_0)$, προτιμητέων πλαισίων σε έναν χώρο Lagrange

$${}^L \mathbf{e}_\alpha(\tau) = {}^L \mathbf{e}_\alpha^\alpha(\tau, u) \partial_\alpha$$

ορίζεται από τις συνιστώσες

$${}^L \mathbf{e}_\alpha^\alpha(\tau, u) = \begin{bmatrix} {}^L e_i^i(\tau, u) & {}^L N_i^b(\tau, u) {}^L e_b^a(\tau, u) \\ 0 & {}^L e_a^a(\tau, u) \end{bmatrix},$$

με ${}^L g_{ij}(\tau) = {}^L e_i^i(\tau, u) {}^L e_j^j(\tau, u) \eta_{ij}$, όπου $\eta_{ij} = \text{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1]$ δίνει την υπογραφή του ${}^L g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{[0]}(u)$, δίνεται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial \tau} {}^L e_\alpha^\alpha = {}^L g^{\alpha\beta} {}^L R_{\beta\gamma} {}^L e_\alpha^\gamma.$$

Συμπεραίνουμε πως οι ροές Ricci των μετρικών Lagrange μπορούν να εξαχθούν από ροές Ricci μετρικών Riemann από αντίστοιχα μετρικά ansatz, μη ολονομικούς περιορισμούς και μορφοποιήσεις γραμμικών συνοχών, τα οποία προκύπτουν κανονικά από κανονικές συναρτήσεις Lagrange.

10.5.3 Γενικευμένες ροές Lagrange–Ricci

Κάθε μηχανικό σύστημα με μια κανονική Lagrangian $L(x, y)$ μπορεί να γεωμετρικοποιηθεί κανονικά από τους όρους της μη-ολονομικής γεωμετρίας Riemann, και για καθορισμένες συνθήκες τέτοιες διαμορφώσεις παράγουν ακριβείς λύσεις των εξισώσεων βαρυτικού πεδίου στη βαρύτητα Einstein και/ή σε γενικεύσεις χορδών/ gauge, βλ. Θεώρημα 14. Με άλλα λόγια, για κάθε συμμετρικό τανυστή $g_{ij} = \delta_i^a \delta_j^b h_{ab}(x, y)$ πάνω σε μια πολλαπλότητα \mathbf{V}^{n+n} μπορούμε να παράγουμε ένα μοντέλο χώρου Lagrange. Σκοπός αυτής της ενότητας, είναι να δείξουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε μη ολονομικές ροές Ricci με δραστικές Lagrangians που ξεκινούν από μια αυθαίρετη οικογένεια $g_{ij}(\tau) = \delta_i^a \delta_j^b h_{ab}(\tau, x, y)$. (Για κάποιες ειδικές περιπτώσεις, μπορούμε να θεωρούμε ότι $g_{ij}(\tau)$ ορίζεται από συγκεκριμένες οικογένειες ακριβών μη ολονομικών λύσεων των εξισώσεων Einstein ή των εξισώσεων ροών Ricci που μοντελοποιούν τις ροές Ricci κάποιων αποτελεσματικών Lagrangians). Οι τιμές $h_{ab}(\tau)$ της σταθερής υπογραφής ορίζουν μια οικογένεια απόλυτων ενεργειών $\varepsilon(\tau) = h_{ab}(\tau, x, y) y^a y^b$ και d -μετρικών τύπου (299).

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{g}(\tau) &= h_{ij}(\tau, x, y) (e^i \otimes e^j + \varepsilon \mathbf{e}^i(\tau) \otimes \varepsilon \mathbf{e}^j(\tau)), \\ \varepsilon \mathbf{e}^i(\tau) &= dy^i + \varepsilon N_i^a(\tau, x, y) dx^i, \end{aligned} \quad (324)$$

όπου τ - παραμετροποιημένοι συντελεστές N-συναχής

$$\varepsilon N_i^a(\tau, x, y) = \frac{\partial \varepsilon G^a(\tau)}{\partial y^i} \quad (325)$$

με $\varepsilon G^a(\tau) = \frac{1}{2} \varepsilon \tilde{h}^{ab}(\tau) \left(y^k \frac{\partial^2 \varepsilon(\tau)}{\partial y^b \partial x^k} - \delta_b^k \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial x^k} \right)$ ορίζονται για μη ιδιάζουσες Hessians

$$\varepsilon \tilde{h}_{ab}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(\tau)}{\partial y^a \partial y^b}, \quad (326)$$

όταν $\det |\tilde{h}| \neq 0$. Για οποιαδήποτε καθορισμένη τιμή τ , η ύπαρξη των θεμελιωδών γεωμετρικών αντικειμένων (324),(325),(326) προκύπτει από το θεώρημα 7. Ομοίως, το Θεώρημα 8 παρουσιάζει μια μοντελοποίηση $h_{ab}(\tau)$ οικογενειών των χώρων Lagrange με κανονικές N-συναχές $\varepsilon \mathbf{N}(\tau)$, σχεδόν μιγαδική δομή $\varepsilon \mathbf{F}(\tau)$, d -μετρικές $\varepsilon \mathbf{g}(\tau)$ και d -συναχές $\varepsilon \mathbf{D}(\tau)$ δομές ορισμένες αντίστοιχα από δραστικές κανονικές Lagrangians $\varepsilon L(\tau, x, y) = \sqrt{|\varepsilon(\tau, x, y)|}$ και τις Hessians αυτών $\varepsilon \tilde{h}_{ab}(\tau, x, y)$ (326). Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας μπορούν να επαναμορφωποιηθούν στη μορφή (με αποδείξεις παρόμοιες με αυτές για το Θεώρημα 11 και το Πόρισμα 1 ,αλλά με εL αντί για F^2 και εN_i^a αντί για $\varepsilon N_i^a, \dots$):

Θεώρημα 13 Οι γενικευμένες ροές Lagrange–Ricci για κανονικές δραστικές Lagrangians $\varepsilon L(\tau)$ που προκύπτουν από μια οικογένεια συμμετρικών τανυστών

$h_{ab}(\tau, x, y)$ μπορούν να εξαχθούν από κανονικές ροές Ricci μετρικών Riemann παραμετροποιημένων στη μορφή

$${}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{ij} + {}^\varepsilon N_i^a {}^\varepsilon N_j^b & \tilde{h}_{ab} & {}^\varepsilon N_j^e \tilde{h}_{ae} \\ {}^\varepsilon N_i^e \tilde{h}_{be} & & \tilde{h}_{ab} \end{bmatrix}$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις (για παράδειγμα, κανονικοποιημένες)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} {}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} &= -2 {}^\varepsilon R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} + \frac{2r}{5} {}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \\ {}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}|_{\tau=0} &= {}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{[0]}(u), \end{aligned}$$

όπου ${}^\varepsilon R_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau)$ οι τανυστές Ricci που κατασκευάζονται από τις συνοχές Levi-Civita των μετρικών ${}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(\tau)$.

Οι εξελίξεις των προτιμητέων N-επισυναπτόμενων πλαισίων (Πρόταση 2) ορισμένων από γενικευμένες ροές Lagrange-Ricci παρουσιάζονται από το πόρισμα:

Πόρισμα 3 Η εξέλιξη, για όλο το χρόνο $\tau \in [0, \tau_0)$, των προτιμητέων πλαισίων σε ένα δραστικό χώρο Lagrange

$${}^\varepsilon \mathbf{e}_\alpha(\tau) = {}^\varepsilon \mathbf{e}_\alpha^\alpha(\tau, u) \partial_\alpha$$

ορίζεται από τους συντελεστές

$${}^\varepsilon \mathbf{e}_\alpha^\alpha(\tau, u) = \begin{bmatrix} {}^\varepsilon e_i^i(\tau, u) & {}^\varepsilon N_i^b(\tau, u) {}^\varepsilon e_b^a(\tau, u) \\ 0 & {}^\varepsilon e_a^a(\tau, u) \end{bmatrix},$$

με $\tilde{h}_{ij}(\tau) = {}^\varepsilon e_i^i(\tau, u) {}^\varepsilon e_j^j(\tau, u) \eta_{ij}$, όπου $\eta_{ij} = \text{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1]$ εγκαθιδρύουν την υπογραφή του ${}^\varepsilon g_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}^{[0]}(u)$, που δίνονται από τις εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial \tau} {}^\varepsilon e_\alpha^\alpha = {}^\varepsilon g^{\alpha\beta} {}^\varepsilon R_{\beta\gamma} {}^\varepsilon e_\alpha^\gamma.$$

Συγκεκριμένοι τύποι βαρυτικών αλληλεπιδράσεων μπορούν να μοντελοποιηθούν ως γεωμετρίες Lagrange-Finsler και αντίστροφα, συγκεκριμένες κλάσεις γενικευμένων γεωμετρικών Finsler μπορούν να μοντελοποιηθούν σε N-ανολονομικές πολλαπλότητες ακόμα και ως ακριβείς λύσεις εξισώσεων βαρυτικού πεδίου [191, 193, 192].

10.6 Παράρτημα - Τοπική γεωμετρία N-ανολονομικών πολλαπλοτήτων

Έστω μια μετρική δομή σε μια N-ανολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} ,

$$\check{g} = \underline{g}_{\alpha\beta}(u) du^\alpha \otimes du^\beta \quad (327)$$

ορισμένη σε μια τοπική βάση συντεταγμένων $du^\alpha = (dx^i, dy^a)$ με συντελεστές

$$\underline{g}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{ij} + N_i^a N_j^b h_{ab} & N_j^e h_{ae} \\ N_i^e h_{be} & h_{ab} \end{bmatrix}. \quad (328)$$

Μια τέτοια μετρική (328) είναι γενικά off diagonal δηλαδή δε μπορεί να διαγωνιοποιηθεί με μετασχηματισμούς συντεταγμένων αν $N_i^a(u)$ είναι οποιοσδήποτε γενικές συναρτήσεις. Η συνθήκη (294) για $hX \rightarrow e_i$ και $vY \rightarrow e_a$, μετασχηματίζεται σε

$$\check{g}(e_i, e_a) = 0,$$

ισοδύναμα

$$\underline{g}_{ia} - N_i^b h_{ab} = 0, \quad (329)$$

όπου $\underline{g}_{ia} \doteq g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial y^a)$, μας επιτρέπει να ορίσουμε τους συντελεστές με μια μοναδική μορφή $N_i^b = h^{ab} \underline{g}_{ia}$, όπου h^{ab} είναι αντίστροφο στο h_{ab} . Μπορούμε να γράψουμε την μετρική \check{g} με ansatz (328) σε ισοδύναμη μορφή ως μια d -μετρική (295) επισυναπτόμενη σε μια δομή N-συνοχής, αν ορίσουμε $g_{ij} \doteq \mathbf{g}(e_i, e_j)$ και $h_{ab} \doteq \mathbf{g}(e_a, e_b)$ και θεωρήσουμε τις vielbeins \mathbf{e}_α και \mathbf{e}^α , (286), (287).

Μπορούμε να πούμε ότι η μετρική \check{g} (327) μετασχηματίζεται ισοδύναμα (295) εφαρμόζοντας έναν μετασχηματισμό πλαισίου vielbein

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^{\underline{\alpha}} \partial_{\underline{\alpha}} \text{ και } \mathbf{e}^\beta = \mathbf{e}^\beta_{\underline{\beta}} du^{\underline{\beta}}.$$

με συντελεστές

$$\mathbf{e}_\alpha^{\underline{\alpha}}(u) = \begin{bmatrix} e_i^{\underline{\alpha}}(u) & N_i^b(u) e_b^{\underline{\alpha}}(u) \\ 0 & e_a^{\underline{\alpha}}(u) \end{bmatrix}, \quad (330)$$

$$\mathbf{e}^\beta_{\underline{\beta}}(u) = \begin{bmatrix} e^i_{\underline{\beta}}(u) & -N_k^b(u) e^k_{\underline{\beta}}(u) \\ 0 & e^a_{\underline{\beta}}(u) \end{bmatrix}. \quad (331)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια N-ανολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} που διαθέτει μετρική δομή \check{g} (327) (ισοδύναμα με d -μετρική (295)) είναι μια ειδική περίπτωση μιας πολλαπλότητας με καθολικό διαχωρισμό σε κατάλληλους οριζόντιους και κάθετους υπόχωρους (283) από τους όρους τους off diagonal $N_i^b(u)$ και έναν τύπο μη ολονομικής δομής πλαισίου (288). Οι N-επισυναπτόμενοι συντελεστές $\mathbf{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ μιας d -συνοχής $\mathbf{D}_\alpha = (\mathbf{e}_\alpha \rfloor \mathbf{D})$, όπου « \rfloor » συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο, ορίζονται με τις εξισώσεις

$$\mathbf{D}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \mathbf{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\gamma, \text{ ή } \mathbf{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}(u) = (\mathbf{D}_\alpha \mathbf{e}_\beta) \rfloor \mathbf{e}^\gamma. \quad (332)$$

Ο N-επισυναπτόμενος διαχωρισμός σε h - και v - συναλλοίωτες παραγώγους ορίζεται από

$$h\mathbf{D} = \{\mathbf{D}_k = (L_{jk}^i, L_{bk}^a)\}, \text{ και } v\mathbf{D} = \{\mathbf{D}_c = (C_{jc}^i, C_{bc}^a)\},$$

όπου εξ ορισμού

$$L_{jk}^i = (\mathbf{D}_k \mathbf{e}_j) \rfloor \mathbf{e}^i, \quad L_{bk}^a = (\mathbf{D}_k \mathbf{e}_b) \rfloor \mathbf{e}^a, \quad C_{jc}^i = (\mathbf{D}_c \mathbf{e}_j) \rfloor \mathbf{e}^i, \quad C_{bc}^a = (\mathbf{D}_c \mathbf{e}_b) \rfloor \mathbf{e}^a.$$

Οι συνιστώσες $\mathbf{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = (L_{jk}^i, L_{bk}^a, C_{jc}^i, C_{bc}^a)$ πλήρως ορίζουν μια d -συνοχή \mathbf{D} σε μια N-μη ολονομική πολλαπλότητα \mathbf{V} . Ο πιο απλός τρόπος να κάνουμε υπολογισμούς με d -συνοχές είναι να χρησιμοποιήσουμε N-επισυναπτόμενες διαφορίσιμες μορφές όπως

$$\mathbf{\Gamma}_{\beta}^\alpha = \mathbf{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \mathbf{e}^\gamma \quad (333)$$

με συντελεστές ορισμένους με βάση (286),(287). Για παράδειγμα, η στρέψη μπορεί να υπολογιστεί στη μορφή

$$\mathcal{T}^\alpha \doteq \mathbf{D}\mathbf{e}^\alpha = d\mathbf{e}^\alpha + \mathbf{\Gamma}_{\beta}^\alpha \wedge \mathbf{e}^\beta. \quad (334)$$

Τοπικά χαρακτηρίζεται από (N-επισυναπτόμενους) συντελεστές d -στρέψης

$$\begin{aligned} T_{jk}^i &= L_{jk}^i - L_{kj}^i, \quad T_{ja}^i = -T_{aj}^i = C_{ja}^i, \quad T_{ji}^a = \Omega_{ji}^a, \\ T_{bi}^a &= -T_{ib}^a = \frac{\partial N_i^a}{\partial y^b} - L_{bi}^a, \quad T_{bc}^a = C_{bc}^a - C_{cb}^a. \end{aligned} \quad (335)$$

Από ανάλυση d -μορφής μπορούμε να βρούμε τις N-επισυναπτόμενες συνιστώσες της καμπυλότητας

$$\mathcal{R}_{\beta}^\alpha \doteq \mathbf{D}\mathbf{\Gamma}_{\beta}^\alpha = d\mathbf{\Gamma}_{\beta}^\alpha - \mathbf{\Gamma}_{\beta}^\gamma \wedge \mathbf{\Gamma}_{\gamma}^\alpha = \mathbf{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha \mathbf{e}^\gamma \wedge \mathbf{e}^\delta, \quad (336)$$

μιας d -συνοχής \mathbf{D} , π.χ. οι d -καμπυλότητες του Θεωρήματος 3:

$$\begin{aligned} R_{hjk}^i &= e_k L_{hj}^i - e_j L_{hk}^i + L_{hj}^m L_{mk}^i - L_{hk}^m L_{mj}^i - C_{ha}^i \Omega_{kj}^a, \\ R_{bjk}^a &= e_k L_{bj}^a - e_j L_{bk}^a + L_{bj}^c L_{ck}^a - L_{bk}^c L_{cj}^a - C_{bc}^a \Omega_{kj}^c, \\ R_{jka}^i &= e_a L_{jk}^i - D_k C_{ja}^i + C_{jb}^i T_{ka}^b, \\ R_{bka}^c &= e_a L_{bk}^c - D_k C_{ba}^c + C_{bd}^c T_{ka}^d, \\ R_{jbc}^i &= e_c C_{jb}^i - e_b C_{jc}^i + C_{jb}^h C_{hc}^i - C_{jc}^h C_{hb}^i, \\ R_{bcd}^a &= e_d C_{bc}^a - e_c C_{bd}^a + C_{bc}^e C_{ed}^a - C_{bd}^e C_{ec}^a. \end{aligned} \quad (337)$$

Από τους συντελεστές (337), μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο ταυστής Ricci $\mathbf{R}_{\alpha\beta} \doteq \mathbf{R}_{\alpha\beta\tau}^\tau$ χαρακτηρίζεται από h - και v -συνιστώσες π.χ. d -ταυστές

$$R_{ij} \doteq R_{ijk}^k, \quad R_{ia} \doteq -R_{ika}^k, \quad R_{ai} \doteq R_{aib}^b, \quad R_{ab} \doteq R_{abc}^c. \quad (338)$$

Θα έπρεπε να σημειωθεί ότι αυτός ο τανυστής δεν είναι συμμετρικός για αυθαίρετες d -συνοχές \mathbf{D} . Η βαθμωτή καμπυλότητα μιας d -συνοχής είναι

$${}^s\mathbf{R} \doteq \mathbf{g}^{\alpha\beta}\mathbf{R}_{\alpha\beta} = g^{ij}R_{ij} + h^{ab}R_{ab}, \quad (339)$$

ορίζεται από ένα άθροισμα, οι h - και v -συνιστώσες του (338) και d -μετρική (295). Ο τανυστής Einstein ορίζεται και υπολογίζεται σε κανονική μορφή

$$\mathbf{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\alpha\beta} {}^s\mathbf{R} \quad (340)$$

Υπάρχει μια ελάχιστη επέκταση της συνοχής Levi-Civita ∇ σε μια κανονική d -συνοχή \mathbf{D} , η οποία ορίζεται μόνο από μια μετρική \check{g} που είναι μετρικά συμβατή με $\hat{T}_{jk}^i = 0$ και $\hat{T}_{bc}^a = 0$ αλλά οι $\hat{T}_{ja}^i, \hat{T}_{ji}^a$ και \hat{T}_{bi}^a δεν είναι μηδέν (335). Ο συντελεστής $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = (\hat{L}_{jk}^i, \hat{L}_{bk}^a, \hat{C}_{jc}^i, \hat{C}_{bc}^a)$ αυτής της συνοχής με βάση τα N-επισυναπτόμενα πλαίσια ορίζονται

$$\begin{aligned} \hat{L}_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{ir}(e_k g_{jr} + e_j g_{kr} - e_r g_{jk}), \\ \hat{L}_{bk}^a &= e_b(N_k^a) + \frac{1}{2}h^{ac}(e_k h_{bc} - h_{dc} e_b N_k^d - h_{db} e_c N_k^d), \\ \hat{C}_{jc}^i &= \frac{1}{2}g^{ik} e_c g_{jk}, \quad \hat{C}_{bc}^a = \frac{1}{2}h^{ad}(e_c h_{bd} + e_c h_{cd} - e_d h_{bc}). \end{aligned} \quad (341)$$

Η γραμμική συνοχή Levi-Civita $\nabla = \{ {}_1\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \}$, ορίζεται μονοσήμαντα από τις συνθήκες ${}_1\mathcal{T} = 0$ και $\nabla g = 0$, και δεν είναι επισυναπτόμενη στην κατανομή (283). Θα παραμετροποιήσουμε τους συντελεστές στη μορφή

$${}_1\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = ({}_1L_{jk}^i, L_{jk}^a, L_{bk}^i, {}_1L_{bk}^a, C_{jb}^i, C_{jb}^a, C_{bc}^i, C_{bc}^a),$$

όπου

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{e}_k}(\mathbf{e}_j) &= {}_1L_{jk}^i \mathbf{e}_i + {}_1L_{jk}^a e_a, \quad \nabla_{\mathbf{e}_k}(e_b) = L_{bk}^i \mathbf{e}_i + {}_1L_{bk}^a e_a, \\ \nabla_{e_b}(\mathbf{e}_j) &= C_{jb}^i \mathbf{e}_i + C_{jb}^a e_a, \quad \nabla_{e_c}(e_b) = C_{bc}^i \mathbf{e}_i + C_{bc}^a e_a. \end{aligned}$$

Ένας ευθύς υπολογισμός ⁷ δείχνει ότι οι συντελεστές της συνοχής Levi-Civita

⁷Τέτοια αποτελέσματα είχαν θεωρηθεί αρχικά από τους R. Miron, M. Anastasie [119] για διανυσματικές δέσμες που διαθέτουν N-συνοχή και μετρικές δομές. Παρόμοιες αποδείξεις ισχύουν για οποιαδήποτε μη ολονομική πολλαπλότητα που διαθέτει ορισμένες δομές N-συνοχής

μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$\begin{aligned}
{}_1L_{jk}^i &= L_{jk}^i, \quad {}_1L_{jk}^a = -C_{jb}^i g_{ik} h^{ab} - \frac{1}{2} \Omega_{jk}^a, \\
{}_1L_{bk}^i &= \frac{1}{2} \Omega_{jk}^c h_{cb} g^{ji} - \frac{1}{2} (\delta_j^i \delta_k^h - g_{jk} g^{ih}) C_{hb}^j, \\
{}_1L_{bk}^a &= L_{bk}^a + \frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_d^b + h_{cd} h^{ab}) [L_{bk}^c - e_b(N_k^c)], \\
{}_1C_{kb}^i &= C_{kb}^i + \frac{1}{2} \Omega_{jk}^a h_{cb} g^{ji} + \frac{1}{2} (\delta_j^i \delta_k^h - g_{jk} g^{ih}) C_{hb}^j, \\
{}_1C_{jb}^a &= -\frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_b^d - h_{cb} h^{ad}) [L_{dj}^c - e_d(N_j^c)], \quad {}_1C_{bc}^a = C_{bc}^a, \\
{}_1C_{ab}^i &= -\frac{g^{ij}}{2} \{ [L_{aj}^c - e_a(N_j^c)] h_{cb} + [L_{bj}^c - e_b(N_j^c)] h_{ca} \},
\end{aligned} \tag{342}$$

όπου Ω_{jk}^a ορίζονται στη μορφή (285). Για συγκεκριμένες θεωρήσεις, είναι κατάλληλο να εκφράσουμε

$${}_1\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma + {}_1Z_{\alpha\beta}^\gamma \tag{343}$$

όπου οι αναλυτικές συνιστώσες του ταυυστή παραμόρφωσης ${}_1Z_{\alpha\beta}^\gamma$ μπορούν να οριστούν συγκρίνοντας τους τύπους (341), (342):

$$\begin{aligned}
{}_1Z_{jk}^i &= 0, \quad {}_1Z_{jk}^a = -C_{jb}^i g_{ik} h^{ab} - \frac{1}{2} \Omega_{jk}^a, \\
{}_1Z_{bk}^i &= \frac{1}{2} \Omega_{jk}^c h_{cb} g^{ji} - \frac{1}{2} (\delta_j^i \delta_k^h - g_{jk} g^{ih}) C_{hb}^j, \\
{}_1Z_{bk}^a &= \frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_d^b + h_{cd} h^{ab}) [L_{bk}^c - e_b(N_k^c)], \\
{}_1Z_{kb}^i &= \frac{1}{2} \Omega_{jk}^a h_{cb} g^{ji} + \frac{1}{2} (\delta_j^i \delta_k^h - g_{jk} g^{ih}) C_{hb}^j, \\
{}_1Z_{jb}^a &= -\frac{1}{2} (\delta_c^a \delta_b^d - h_{cb} h^{ad}) [L_{dj}^c - e_d(N_j^c)], \quad {}_1Z_{bc}^a = 0, \\
{}_1Z_{ab}^i &= -\frac{g^{ij}}{2} \{ [L_{aj}^c - e_a(N_j^c)] h_{cb} + [L_{bj}^c - e_b(N_j^c)] h_{ca} \}.
\end{aligned} \tag{344}$$

Πρέπει να δώσουμε έμφαση στο ότι όλες οι συνιστώσες του ${}_1\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, $\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ και ${}_1Z_{\alpha\beta}^\gamma$ ορίζονται από τους συντελεστές της d -μετρικής (295) και N -συνοχής (282), ή ισοδύναμα από τους συντελεστές της αντίστοιχης γενικής off diagonal μετρικής (328).

Για μια διαφορίσιμη Lagrangian $L(x, y)$, π.χ. μια θεμελιώδης συνάρτηση Lagrange ορίζεται από μια απεικόνιση $L : (x, y) \in TM \rightarrow L(x, y) \in \mathbb{R}$ κλάσης C^∞ στον $\widehat{TM} = TM \setminus \{0\}$ και που είναι συνεχής στην μηδενοτομή $0 : M \rightarrow TM$ του π [193]. Προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα

1. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

όπου $y^i = \frac{dx^i}{d\zeta}$ με $x^i(\zeta)$ να εξαρτώνται από την παράμετρο ζ , είναι ισοδύναμες με τις μη-γραμμικές γεωδαισιακές εξισώσεις

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + 2G^i(x^k, \frac{dx^j}{d\zeta}) = 0$$

που ορίζουν οι τροχιές ενός κανονικού semispray

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

όπου

$$2G^i(x, y) = \frac{1}{2} L g^{ij} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial x^k} y^k - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right)$$

με $L g^{ij}$ αντίστροφο στην (302).

2. Υπάρχει $\mathbf{V} \simeq \widetilde{TM}$ μια κανονική N-συνοχή

$${}^L N_j^i = \frac{\partial G^i(x, y)}{\partial y^j} \quad (345)$$

που ορίζεται από τη θεμελιώδη συνάρτηση Lagrange $L(x, y)$, η οποία ορίζει μη ολονομικές δομές πλαισίου τύπου (286),(287) ${}^L \mathbf{e}_\nu = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_a)$ και ${}^L \mathbf{e}^\mu = (e^i, e^a)$.

3. Υπάρχει μια κανονική μετρική δομή

$${}^L \mathbf{g} = g_{ij}(x, y) e^i \otimes e^j + g_{ij}(x, y) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad (346)$$

που κατασκευάζεται ως μια Sasaki τύπου ανύψωση από M για $g_{ij}(x, y) = {}^L g_{ij}(x, y)$, βλ. (302).

4. Υπάρχει μια μοναδική μετρική και σε αυτή την περίπτωση, κανονική χωρίς στρέψη d -συνοχή ${}^L \mathbf{D} = (hD, vD)$ με μη τετριμμένους συντελεστές με βάση την ${}^L \mathbf{e}_\nu$ και ${}^L \mathbf{e}^\mu$ παραμετροποιημένη με βάση ${}^L \widehat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = (\widehat{L}^i_{jk}, \widehat{C}^a_{bc})$, για

$$\widehat{L}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} (\mathbf{e}_k g_{jh} + \mathbf{e}_j g_{kh} - \mathbf{e}_h g_{jk}), \widehat{C}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} (e_k g_{jh} + e_j g_{kh} - e_h g_{jk}) \quad (347)$$

που ορίζουν τα γενικευμένα σύμβολα Christoffel όπου (για απλότητα έχουμε παραλείψει τις πάνω αριστερά ενδείξεις (L) για N-επισυναπτόμενες βάσεις.)

Συνοψίζουμε πως κάθε κανονική μορφή της Lagrangian μηχανικής μπορεί να γεωμετροποιηθεί σαν μια μη ολονομική Riemann πολλαπλότητα \mathbf{V} εφοδιασμένη με μια κανονική N-συνοχή (345) και επισυναπτόμενη d -συνοχή (347) και d -μετρικές δομές (346) όλες επαγόμενες από μια $L(x, y)$.

Θα δείξουμε πως N-ανολονομικοί σχηματισμοί μπορούν να οριστούν σε θεωρίες βαρύτητας βλ. [191, 193]. Σε αυτή την περίπτωση, είναι κατάλληλο, να εργαστούμε πάνω σε μια γενική πολλαπλότητα \mathbf{V} , $\dim \mathbf{V} = n + m$ που επιτρέπει μια δομή N-συνοχής αντί για μια απλά εφαπτόμενη δέσμη \widetilde{TM} .

Αποτέλεσμα: Διάφορες κλάσεις ακριβών λύσεων κενού και μη κενού (303) παραμετροποιούνται από γενικές off diagonal μετρικές, μη ολονομικές vielbeins και Levi-Civita ή μη Riemann συνοχές σε Einstein και βαρυτικά μοντέλα επιπλέον διαστάσεων, τα οποία ορίζουν αναλυτικά παραδείγματα N-ανολονομικών Einstein-Cartan (συγκεκριμένα, Einstein) χώρων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η υποκλάση των N-ανολονομικών χώρων Einstein σχετίζεται με τις γενικές off diagonal λύσεις στη γενική σχετικότητα από τέτοιους μη ολονομικούς περιορισμούς όταν $\mathbf{Ric}(\widehat{\mathbf{D}}) = Ric(\nabla)$ ή $\widehat{\mathbf{D}} \neq \nabla$, όπου $\widehat{\mathbf{D}}$ είναι η κανονική d -συνοχή και ∇ είναι η συνοχή Levi-Civita.

Μια κατεύθυνση στη σύγχρονη βαρύτητα είναι συνδεδεμένη με ανάλογα βαρυτικά μοντέλα, όπου συγκεκριμένα βαρυτικά αποτελέσματα όπως π.χ. σχηματισμοί μαύρων οπών μοντελοποιούνται βλ. πρόσφατα αποτελέσματα [20]. Ακολουθώντας αυτή την προσέγγιση στην γεωμετρική ενοποίηση της βαρύτητας και της μηχανικής Lagrange σχετικά με τους N-ανολονομικούς χώρους προκύπτει

Θεώρημα 14 Ένας χώρος Lagrange (Finsler) μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια ακριβής λύση των εξισώσεων Einstein (303) σε έναν N-ανολονομικό χώρο Riemann-Cartan αν και μόνο αν η κανονική N-συνοχή ${}^L\mathbf{N}$ (${}^F\mathbf{N}$), d -μετρική ${}^L\mathbf{g}$ (${}^F\mathbf{g}$) και d -συνοχή ${}^L\widehat{\mathbf{D}}$ (${}^F\widehat{\mathbf{D}}$) είναι δομές ορισμένες από την αντίστοιχη θεμελιώδη συνάρτηση Lagrange $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (Finsler συνάρτηση $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) ικανοποιεί τις εξισώσεις βαρυτικού πεδίου για συγκεκριμένες λογικές πηγές \mathbf{Y} .

Απόδειξη: Μπορεί να εφαρμοστεί σε τοπική μορφή θεωρώντας τον ταυ-στή (340) Einstein που ορίζεται από την ${}^L\mathbf{N}$ (${}^F\mathbf{N}$) στη μορφή (345) και ${}^L\mathbf{g}$ (${}^F\mathbf{g}$) στη μορφή (346) που επάγει την κανονική d -συνοχή ${}^L\widehat{\mathbf{D}}$ (${}^F\widehat{\mathbf{D}}$). Για συγκεκριμένες μηδενικές ή μη μηδενικές πηγές \mathbf{Y} , τέτοιοι N-ανολονομικοί σχηματισμοί μπορούν να οριστούν από ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Einstein για μια δομή d -συνοχής.

11 Μετρικές Δομές και Συνοχές του βαρυτικού Πεδίου σε χώρους Finsler

11.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία 10 χρόνια το ενδιαφέρον, όσον αφορά τη μελέτη των εφαρμογών της γεωμετρίας Finsler στη γενική σχετικότητα, στη θεωρία πεδίου και στην κοσμολογία, έχει αυξηθεί στην επιστημονική κοινότητα των θεωρητικών φυσικών [162], [163], [180], [169],[164], [155],[109], [102], [103],[181], [156], [197],[201], [198], [162],[49], [208], [24],[171],[146], [205], [105], [68], [69],[123], [36],[150], [199],[118], [144],[50],[6], [145]. Διαφορετικοί τομείς που αφορούν τα στοιχειώδη σωματίδια, τη βαρύτητα και την κοσμολογία βασισμένα σε γεωμετρία Riemann έχουν επεκταθεί στο πεδίο της γεωμετρίας Finsler. Ειδικότερα, μετρικά μοντέλα τοπικά ανισοτροπικής μορφής όπως Finsler-Randers ή Finsler-Randers-like μετρικών έχουν παίξει ένα σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη της δομής του (*SME*), της Lorentz violation, της κοσμολογίας κλπ [109, 24, 103]. Επιπλέον, η ιδέα της εγγυτατοποίησης ανάμεσα στον χωροχρόνο Riemann και Finsler [163] είχε εισαχθεί από το Σταυρινό και έχει συνεισφέρει στο να παρέχει μία πιο συνδεδετική μορφή στη μελέτη της τοπικής ανισοτροπίας της γενικής σχετικότητας και της κοσμολογίας. Αυτή η μελέτη στηρίζεται στα πλαίσια της γεωμετρίας Riemann-Finsler [164, 109].

Σε αυτή τη βάση της ενοποιημένης περιγραφής του Finsler βαρυτικού πεδίου, ο Ikeda [86] ανέπτυξε την έννοια της μη-τοπικοποίησης, η οποία ενσωματώνεται μέσω της εσωτερικής μεταβλητής, που σχετίζεται με κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας. Το μη τοπικό βαρυτικό πεδίο επισυνάπτεται με την εσωτερική μεταβλητή σε κάθε σημείο του βαρυτικού πεδίου Einstein. Έτσι, το μη τοπικό βαρυτικό πεδίο έχει «μη»-Riemann χωρική δομή, η οποία οφείλεται στην εσωτερική μεταβλητή. Το βαρυτικό πεδίο Finsler είναι ένα τυπικό παράδειγμα μη τοπικού βαρυτικού πεδίου, το οποίο είναι μη τοπικό λόγω του εσωτερικού διανύσματος $y = (y^i, i = 1, 2, 3, 4)$ που επισυνάπτεται σε κάθε σημείο $x = (x^\lambda, \lambda = 1, 2, 3, 4)$, **το οποίο σημαίνει πως το βαρυτικό πεδίο Finsler είναι ο ολικός χώρος του εσωτερικού και εξωτερικού πεδίου για κάθε σημείο x και νήμα y πάνω στη διανυσματική δέσμη.**

Σε μια πιο γενική θεώρηση, η μη-τοπικοποίηση μπορεί να παραχθεί επισυνάπτοντας σε ένα σημείο p μιας βασικής πολλαπλότητας M^k ένα βαθμωτό ή έναν σπίνορα [170, 196, 174]. Επίσης, η έννοια της μη-τοπικοποίησης μπορεί να εισαχθεί στη θεωρία πεδίου με σκοπό να εξασφαλίσει μια πιθανή ενοποιημένη περιγραφή στοιχειωδών σωματιδίων.

Σε αυτό το κεφάλαιο, αφού περιγράψουμε τη μη τοπική χωρική δομή του Finsler βαρυτικού πεδίου, θα θεωρήσουμε κάποια είδη μη τοπικοποιήσεων του βαρυτικού πεδίου υιοθετώντας διαφορετικές εσωτερικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε τη μη-τοπικοποίηση σε υψηλότερη τάξη (ή σε πιο μικροσκοπικό επίπεδο) από αυτή του Finsler. Θα παρουσιάσουμε τη μορφή της

μη-γραμμικής συνοχής σε ένα (*FRW*) χωροχρόνο στον ολικό χώρο της διανυσματικής δέσμης. Κάποιες εφαρμογές της μη-γραμμικής συνοχής δίνονται από διαφορετικούς τύπους χωροχρόνου Finsler. Επιπλέον, παρουσιάζουμε θεωρήσεις μη τοπικοποιήσεων για έναν χώρο Kawaguchi σε σχέση με τη σπινοριακή δομή.

11.2 Βαρυτικό Πεδίο Finsler

Όπως αναφέρθηκε στην πρώτη ενότητα, το βαρυτικό πεδίο Finsler είναι μη τοπικό λόγω του εσωτερικού διανύσματος y που σχετίζεται με κάθε σημείο x . Το διάνυσμα y συνιστά τον εσωτερικό χώρο ή το νήμα σε κάθε σημείο x του βαρυτικού πεδίου Einstein, έτσι ώστε το βαρυτικό πεδίο Finsler να θεωρείται ως ένα ενοποιημένο πεδίο μεταξύ του εξωτερικού (x)-πεδίου παραγόμενου από σημεία $\{x\}$ μιας βασικής πολλαπλότητας και του εσωτερικού (y)-πεδίου παραγόμενου από διανύσματα $\{y\}$ στον εσωτερικό χώρο. Σε αυτή τη θεώρηση, ο μετρικός ταυστής $g_{ij}(x, y)$ δίνεται σε κάθε νήμα και προέρχεται από μια διαφορίσιμη θεμελιώδη συνάρτηση $F : TM \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ πρώτης τάξης ομογένειας ως προς τη δεύτερη μεταβλητή y , $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\lambda > 0$, $y = dx/dt$ [119, 193]. Η μετρική στο νήμα έχει τη μορφή $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$, η οποία για φυσικές θεωρήσεις μπορεί να είναι εκφυλισμένη. Από μια διανυσματική bundle-like οπτική γωνία [86], το βαρυτικό πεδίο Finsler ταυτοποιείται με τον ολικό χώρο της διανυσματικής δέσμης, της οποίας η βασική πολλαπλότητα είναι το (x)-πεδίο και το νήμα στο σημείο x είναι το (y)-πεδίο. Στον ολικό χώρο, το παρακάτω επισυναπτόμενο πλαίσιο τίθεται κατάλληλα :

$$\begin{aligned} d\zeta^A &= (dx^\lambda, \delta y^i = dy^i + N_\lambda^i dx^\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^A} &= \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right), \end{aligned} \quad (348)$$

όπου $A = (\lambda, i) = 1, 2, 3, \dots, 8$ και N_λ^i συμβολίζει τη μη-γραμμική συνοχή. Μια γραμμική συνοχή (**N**-συνοχή) βρίσκεται στον ολικό χώρο της εφαπτόμενης δέσμης μιας πολλαπλότητας M και μπορεί να εισαχθεί με τον ίδιο τρόπο, όπως η γραμμική συνοχή. Επάγει μια παράλληλη μεταφορά στη βασική πολλαπλότητα. Τοπικά, μια **N**-συνοχή ορίζεται από ένα άθροισμα Whitney στον εφαπτόμενο χώρο $T_u(TM)$, $\forall u \in TM$,

$$T_u(TM) = H_u TM \oplus V_u TM$$

όπου $H_u TM$ συμβολίζει την οριζόντια υποδέσμη και $V_u TM$ την κάθετη. Τοπικά, οι συνιστώσες της **N**-συνοχής δίνονται από $N_i^a(u)$ με $\mathbf{N} = N_i^a(u) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}$. Το επισυναπτόμενο πλαίσιο είναι κατασκευασμένο, ώστε να επισυνάπτεται στη δομή ευθείου αθροίσματος της μετρικής δομής G_{AB} του ολικού χώρου

$$G = G_{AB} d\zeta^A d\zeta^B = g_{\lambda\mu}(x, y) dx^\lambda \otimes dx^\mu + g_{ij}(x, y) \delta y^i \otimes \delta y^j, \quad (349)$$

$$G_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\lambda\mu} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}$$

όπου $g_{\lambda\mu}$ και g_{ij} αναπαριστούν τις μετρικές στη βασική πολλαπλότητα και στα νήματα. Οι συντεταγμένες συνοχής αναπαρίστανται από συντελεστές μετρικής συνοχής Γ_{BC}^A , όπου

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^C}} \frac{\partial}{\partial z^B} = \Gamma_{BC}^A \frac{\partial}{\partial z^A}$$

με

$$\Gamma_{BC}^A = (F_{\mu\nu}^\lambda, F_{j\nu}^i, C_{\mu\xi}^\lambda, C_{j\xi}^i). \quad (350)$$

Οι συναλλοίωτες παράγωγοι ορίζονται, για παράδειγμα, για ένα αυθαίρετο διάνυσμα $V(x, y)$ και έχουν τη μορφή

$$V_{|\nu}^\lambda = \frac{\delta V^\lambda}{\delta x^\nu} + F_{\mu\nu}^\lambda V^\mu$$

$$V^\lambda|_\xi = \frac{\delta V^\lambda}{\delta y^\xi} + C_{\mu\xi}^\lambda V^\mu \kappa.\lambda.\pi. \quad (351)$$

Οι μετρικές συνθήκες θεωρούνται $g_{\lambda\mu|\nu} = 0, g_{\lambda\mu|l} = 0, g_{ij|\nu} = 0$ και $g_{ij|l} = 0$. Όπως καταλαβαίνουμε από τα παραπάνω, η y -εξάρτηση του βαρυτικού πεδίου Finsler προκαλείται από τη μη-τοπικοποίηση με βάση το y . Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε κάποια άλλα είδη μη-τοπικοποιήσεων υιοθετώντας διαφορετικά είδη εσωτερικών μεταβλητών και γενικευμένων/ειδικών δομών δομής Finsler που αναφέρθηκαν παραπάνω.

11.3 Μη-Τοπικοποίηση I

Αρχικά, αν πάρουμε ένα άλλο διάνυσμα $z(= z^\alpha; \alpha = 1, 2, 3, 4)$ ως εσωτερική μεταβλητή εκτός του y , τότε μπορούμε να γενικεύσουμε τη δομή Finsler χρησιμοποιώντας δύο μη-γραμμικές συνοχές $N_\lambda^i, M_\lambda^\alpha$:

Επισυναπτόμενο πλαίσιο:

$$dz^A = (dx^\lambda, \delta y^i = dy^i + N_\lambda^i dx^\lambda, \delta z^\alpha = dz^\alpha + M_\lambda^\alpha dx^\lambda),$$

$$\frac{\partial}{\partial z^A} = \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i} - M_\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right), \quad (352)$$

Μετρική δομή:

$$G = g_{\lambda\mu} dx^\lambda \otimes dx^\mu + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j + g_{\alpha\beta} \delta z^\alpha \otimes \delta z^\beta \quad (353)$$

Συνιστώσες γραμμικής συνοχής:

$$\Gamma_{BC}^A = (F_{\mu\nu}^\lambda, F_{j\nu}^i, F_{b\nu}^\alpha; C_{\mu\xi}^\lambda, C_{j\xi}^i, C_{b\xi}^\alpha; E_{\mu c}^\lambda, E_{j c}^i, E_{b c}^\alpha) \quad (354)$$

Συναλλοιώτες Παράγωγοι:

$$\begin{aligned} V_{|\nu}^\lambda &= \frac{\delta V^\lambda}{\delta x^\nu} + F_{\mu\nu}^\lambda V^\mu, \\ V^i|_\xi &= \frac{\partial V^i}{\partial y^\xi} + C_{j\xi}^i V^j, \\ V^\alpha||_c &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial z^c} + E_{bc}^\alpha V^b, \end{aligned} \quad (355)$$

κ.λ.π.

Στους παραπάνω τύπους, αν $y^p = (y^i, y^0)$ (y^0 είναι ένα ανεξάρτητο βαθμωτό) τότε ανήκει σε έναν 5-διάστατο χώρο. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να το επισυνάψουμε, αντί για y^i ή z^α , τότε οι (352) - (355) ανάγονται σε αυτούς τους τύπους για την περίπτωση, όπου στις (352) - (355), τα z^α, z^b, \dots αντικαθίστανται από y^0 και οι δείκτες α, b, \dots αντικαθίστανται από 0. Αυτό προσαρμόζεται για τη χρονοεξαρτώμενη γεωμετρία Lagrange με χωροχρόνο (3+1) διαστάσεων [9]. Σε αυτή την περίπτωση, η μορφή που θεωρούμε, ανάγεται στη μορφή της tangent bundle-like, όπου y^0 είναι ο χρόνος ($y^0 \equiv t$). Από την άλλη, αν επιλέξουμε μόνο την y^0 ως την ανεξάρτητη εσωτερική μεταβλητή, τότε οι σχέσεις (348) - (351) ανάγονται και γίνονται:

$$\begin{aligned} d\zeta^A &= (dx^\lambda, \delta y^0 = dy^0 + N_\lambda^0 dx^\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^A} &= \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^0 \frac{\partial}{\partial y^0}, \frac{\partial}{\partial y^0} \right), \end{aligned} \quad (356)$$

Ένα γενικευμένο μοντέλο Finsler - Randers μπορεί να εισαχθεί από τη μετρική (349)

$$\begin{aligned} G &= g_{\lambda\mu} dx^\lambda \otimes dx^\mu + g_{00} \delta y^0 \otimes \delta y^0 \\ ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \end{aligned} \quad (357)$$

Αν εφαρμόσουμε αυτή τη μελέτη για ένα κοσμολογικό μοντέλο Friedmann-Robertson-Walker (FRW) τότε η μετρική του (FRW) μπορεί να επεκταθεί στη μορφή του ολικού χώρου

$$G = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] + (\delta y^0)^2 \quad (358)$$

Στην παραπάνω σχέση, έχουμε αντικαταστήσει τον πρώτο όρο της εξίσωσης (357) με τη μετρική του μοντέλου (FRW) και έχουμε θέσει $g_{00} = 1$. Στην περίπτωση που $y^0 = t_0 = \text{σταθερά}$, η σχέση (358) ανάγεται σε μια space-like μορφή

$$\dot{G} = a^2(t_0) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] + (N_\lambda^0 dx^\lambda)^2.$$

Τα σύμβολα Christoffel του μοντέλου (FRW) δίνονται από

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-\kappa r^2}, \gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \gamma_{01}^1 = \gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \gamma_{22}^1 &= -r(1-\kappa r^2), \gamma_{12}^2 = \gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \\ \gamma_{11}^1 &= \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}, \gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2\sin^2\theta, \gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \gamma_{33}^1 &= -r(1-\kappa r^2)\sin^2\theta, \gamma_{23}^3 = \cot\theta\end{aligned}\quad (359)$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι συνιστώσες της συνοχής στον ολικό χώρο μπορεί να γραφεί ως

$$\Gamma_{BC}^A = (\gamma_{\mu\nu}^\lambda, F_{0r}^0, C_{\mu 0}^\lambda, C_{00}^0) \quad (360)$$

όπου $F_{\mu\nu}^\lambda = \gamma_{\mu\nu}^\lambda$, με $\gamma_{\mu\nu}^\lambda$ τα σύμβολα Christoffel της (FRW) μετρικής. Στην παραπάνω περίπτωση, η συναλλοίωτη παράγωγος του διανύσματος $V(x, y)$ δίνεται από

$$\begin{aligned}V_{|\nu}^\lambda &= \frac{\delta V^\lambda}{\delta x^\nu} + \gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu, \\ V^0|_0 &= \frac{\partial V^0}{\partial y^0} + C_{00}^0 V^0, \\ &\text{κ.λ.π.}\end{aligned}\quad (361)$$

Εφαρμογές της μη-γραμμικής συνοχής

Το φυσικό νόημα του y^0 και του N_a^0 έχουν ήδη συζητηθεί στην [169] και για C_{00}^0 στην κοσμολογία [164].

1. Στην κλασική θεωρία Kaluza-Klein θεωρώντας το x^0 ως την 5η συντεταγμένη και θέτοντας $g_{00} = 1$ στη σχέση (357), μπορούμε να βρούμε ότι η μη-γραμμική συνοχή N_λ^0 παίζει το ρόλο του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού. Σε αυτή την περίπτωση, ο ταυστής στρέψης ορίζεται από $R_{\lambda k}^0 \equiv \frac{\delta N_\lambda^0}{\delta x^k} - \frac{\delta N_k^0}{\delta x^\lambda}$ που αναπαριστά τον ταυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου [88].

2. Η μετρική Finsler-Randers (FR) δίνεται από

$$F(x, y) = (a_{ij}(x)y^i y^j)^{1/2} + u_i y^i$$

με $a_{ij}(x)$ μια (ψευδο)-Riemann μετρική και το u_m αναπαριστά ένα ασθενές διανυσματικό πεδίο, όπου $\|u_i\| \ll 1$. Η χρονική συνιστώσα u_0 του u_m ενσωματώνεται στη γεωμετρία του χωροχρόνου με τον ταυστή στρέψης του Cartan C_{00}^0 από τη σχέση $C_{000} = \frac{u_0}{2}$, [164]. Αν αντικαταστήσουμε αυτή τη σχέση στην (361) παίρνουμε

$$V^0|_0 = \frac{\partial V^0}{\partial y^0} + g^{00} \frac{u_0}{2} V^0$$

Από την τελευταία σχέση, παρατηρούμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του V^0 εξαρτάται από το u_0 . Μια φυσική αναπαράσταση της μη-γραμμικής συνοχής για το μοντέλο του χώρου Finsler-Randers με έναν τύπο γωνιακής ροπής της περιστροφής των γαλαξιών, μπορεί να δοθεί από [162]

$$N_k^l(x, y) = \gamma_{jk}^\ell(x) y^j + \sigma a^{ml} \mathcal{A}_{km} [\partial_k u_m] + \frac{1}{\sigma} a^{ml} y^j \mathcal{A}_{jm} [\partial_j u_m] y_k \quad (362)$$

όπου γ_{jk}^i είναι τα σύμβολα Christoffel για τον χωροχρόνο Riemann και το \mathcal{A}_{km} συμβολίζει την αντισυμμετρικότητα και την αφαίρεση ανάμεσα στους δείκτες k και m . Μια μορφή μη-γραμμικής συνοχής για (FRW) κοσμολογικό μοντέλο σε έναν χώρο (FR) μπορεί να προκύψει αντικαθιστώντας τις τιμές της σχέσης (359) στη σχέση (362). Η μη-γραμμική συνοχή για ένα μοντέλο (FRW) έχει τη μορφή $\dot{N}_j^i = \gamma_{jk}^i(x) y^k$, όπου το γ_{jk}^i παίρνει τιμές από την (359). Χρησιμοποιώντας τη μη-γραμμική συνοχή του Cartan στη σχέση (362) παίρνουμε

$$N_k^l(x, y) = \dot{N}_k^\ell + \sigma a^{ml} \mathcal{A}_{km} [\partial_k u_m] + \frac{1}{\sigma} a^{ml} y^j \mathcal{A}_{jm} [\partial_j u_m] y_k. \quad (363)$$

Η μορφή του επισυναπτόμενου πλαισίου της σχέσης (352) γίνεται $\{\frac{\partial}{\partial \zeta^A}, \delta \zeta^A\}$

$$\begin{aligned} d\zeta^A &= \left(dx^\lambda, \delta y^i = dy^i + N_\lambda^i dx^\lambda, \delta z^a + \dot{N}_\lambda^a dx^\lambda \right), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^A} &= \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i} - \dot{N}_\lambda^a \frac{\partial}{\partial z^a}, \frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial z^a} \right), \end{aligned} \quad (364)$$

όπου $\dot{N}_\lambda^a = \gamma_{k\lambda}^a z^k$ είναι οι τοπικές συνιστώσες της μη-γραμμικής συνοχής Cartan και z^k μια εσωτερική μεταβλητή όπως y^i .

3. Μια ασθενής μη-γραμμική συνοχή μπορεί να δοθεί σε ένα μοντέλο (FR) χρησιμοποιώντας μια ασθενή μετρική Riemann της μορφής $a_{ij}(x) = n_{ij} + h_{ij}(x)$, $\|h_{ij}\| \ll 1$, όπου n_{ij} αναπαριστά τη μετρική Minkowski και η $h_{ij}(x)$ είναι μια ασθενής διαταραχή. Η αντίστοιχη ασθενής μη-γραμμική συνοχή \tilde{N}_k^ℓ για ένα χωροχρόνο (FR) γράφεται λόγω της (362)

$$\tilde{N}_k^\ell(x, y) = \tilde{\gamma}_{jk}^\ell(x) y^j + \sigma a^{ml} \mathcal{A}_{km} [\partial_k u_m] + \frac{1}{\sigma} a^{ml} y^j \mathcal{A}_{jm} [\partial_j u_m] y_k. \quad (365)$$

με $\tilde{\gamma}_{jk}^\ell(x)$ τα ασθενή σύμβολα Christoffel.

4. Στο (FR) κοσμολογικό μοντέλο, η περιστροφή ενός διανύσματος u γύρω από έναν άξονα ℓ^β μπορεί να δοθεί με βάση την ομάδα περιστροφής $\Lambda_\beta^a(x)$. Σε αυτή την περίπτωση, η μη-γραμμική συνοχή μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$N_\lambda^i = -\frac{\partial \Lambda_\beta^i(x)}{\partial x^\lambda} \ell^\beta.$$

η οποία εκφράζει τη μεταβολή της ομάδας περιστροφής με βάση τον ανισοτροπικό άξονα ℓ^β , [169]. Η ομάδα περιστροφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί δίνοντας μια βασική γεωμετρική και φυσική εξήγηση στην έννοια της μη-γραμμικής συνοχής N . Η μορφή της μη-γραμμικής συνοχής τύπου Berwald N_λ^i δίνεται από

$$N_{\lambda k}^i = \frac{\partial N_\lambda^i}{\partial \ell^k} = -\frac{\partial \Lambda_k^i}{\partial x^\lambda}$$

Το τανυστικό πεδίο

$$\Lambda_{k\lambda}^i = N_{k\lambda}^i - N_{\lambda k}^i = \frac{\partial \Lambda_k^i}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Lambda_\lambda^i}{\partial x^k}$$

συμβολίζει την καμπυλότητα της μη-γραμμικής συνοχής και εκφράζει μια στρέψη της μεταβολής της ομάδας περιστροφής Λ_k^i . Μη-γραμμικές συνοχές έχουν επίσης θεωρηθεί στο πλαίσιο μιας σπινωριακής θεωρίας για χώρους Finsler [196, 195].

11.4 Μη-Τοπικοποίηση II

Τώρα θα θεωρήσουμε τη μη-τοπικοποίηση σε υψηλότερη τάξη από αυτή του Finsler. Αρχικά, αν ένα άλλο διάνυσμα $Z (= z^\alpha; \alpha = 1, 2, 3, 4)$ ληφθεί υπόψη σε ένα πιο μικροσκοπικό επίπεδο, τότε η μορφή της θεώρησης γενικεύεται σε διάνυσμα δεύτερης τάξης μορφής bundle-like. Σε αυτή την περίπτωση, οι σχέσεις (352) - (355) γενικεύονται:

Επισυναπτόμενο πλαίσιο :

$$\begin{aligned} d\zeta^A &= (dx^\lambda, \delta y^i = dy^i + N_\lambda^i dx^\lambda, \delta z^\alpha = dz^\alpha + L_i^\alpha dy^i + M_\lambda^\alpha dx^\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta^A} &= \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^i \frac{\partial}{\partial y^i} - M_\lambda^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\delta}{\delta y^i} = \frac{\partial}{\partial y^i} - L_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (366)$$

Μετρική δομή :

$$G = g_{\lambda\mu} dx^\lambda \otimes dx^\mu + g_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j + g_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes dz^\beta \quad (367)$$

Συνιστώσες γραμμικής συνοχής :

$$\Gamma_{BC}^A = (F_{\mu\nu}^\lambda, F_{j\nu}^i, F_{b\nu}^\alpha; C_{\mu\xi}^\lambda, C_{jk}^i, C_{b\xi}^\alpha; E_{bc}^\lambda, E_{jc}^i, E_{\beta c}^\alpha) \quad (368)$$

$$\begin{aligned} V_{|\nu}^\lambda &= \frac{\delta V^\lambda}{\delta x^\nu} + F_{\mu\nu}^\lambda V^\mu, \\ V^i|_k &= \frac{\partial V^i}{\partial y^k} + C_{jk}^i V^j, \\ V^\alpha||_c &= \frac{\partial V^\alpha}{\partial z^c} + E_{bc}^\alpha V^b, \end{aligned} \quad (369)$$

κ.λ.π.

Μπορούμε να επισυνάψουμε δύο ή περισσότερα διανύσματα δεύτερης ή τρίτης τάξης ή ακόμα και υψηλότερης τάξης αν χρειάζεται. Οι τύποι γενικεύονται όπως στις (366) - (369) αντικαθιστώντας (x, y, z) με $(x, y, z_1, z_2), (x, y, z_1, z_2, z_3), \dots$, όπου πολλά είδη μη-γραμμικών συνοχών και συνιστώσες συνοχής πρέπει να εισαχθούν. Παρόμοια με την προηγούμενη θεώρηση στο 3 για τη μετρική και τη συνοχή του (*FRW*), η μορφή του μπορεί να επεκταθεί λόγω της μη-τοπικοποίησης (367)-(369) στο πλαίσιο μιας μορφής υψηλότερης τάξης.

11.5 Μη-Τοπικοποίηση III

Ο χώρος Kawaguchi και σπινორιακές συνοχές

Από φυσική άποψη, αν υιοθετήσουμε τις πιο μικροσκοπικές εσωτερικές μεταβλητές αντί για τα διανύσματα, όπως ο σπινόρας κ.λ.π., οι οποίες δεν υπακούουν στον μετασχηματισμό συντεταγμένων, τότε πρέπει να λάβουμε υπόψη την τάξη της δομής του χώρου υψηλότερη από εκείνη της δομής Finsler του χώρου. Μια ανάλογη αλλά διαφορετική περίπτωση έχει μελετηθεί [199, 196, 195].

Ο χώρος υψηλότερης τάξης (higher order) (ή χώρος Kawaguchi) τάξης $M (= 1, 2, 3, \dots)$ είναι ένας μετρικός χώρος, στον οποίο ένα μήκος τόξου κατά μήκος μιας καμπύλης $x = x(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$s = \int L(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(M)}) dt, \quad (370)$$

όπου το L αναπαριστά τη θεμελιώδη συνάρτηση και η $x^{(n)} (= \frac{d^n x}{dt^n}; x = 1, 2, \dots, M)$ παίζει το ρόλο της εσωτερικής μεταβλητής. Φυσικά, αυτός ο χώρος μελετάται ως γενικευμένος Riemann ή χώρος Finsler μη τοπικοποιημένος από $x^{(n)}, (x^{(n)} (n \geq 2))$ δεν είναι ένα διάνυσμα). Ο χώρος Riemann είναι τάξης 0 και ο χώρος Finsler είναι χώρος τάξης 1. Έτσι, η μη-τοπικοποίηση σε αυτή την ενότητα πρέπει να θεωρείται μέσα στο πλαίσιο της υψηλότερης τάξης χώρου τάξης $M \geq 2$, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή πρέπει να αντικαθίσταται από $(x, y, z \equiv x^{(n)})(n \geq 2; y \equiv x^{(1)})$.

Σε αυτή την περίπτωση, τα dy και dz αναπαριστούν τις συνοχές βάσης που ορίζονται από (για ένα συγκεκριμένο $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} \delta z^\alpha &= P_b^\alpha (dz^b + Q_k^b dy^k + Q_\lambda^b dx^\lambda) \\ \delta y^i &= P_j^i (dy^j + Q_\lambda^i dx^\lambda) \end{aligned} \quad (371)$$

όπου τα $P_b^\alpha, P_j^i, Q_k^b \dots$ εισάγονται για να καθορίσουν τους ισομορφισμούς ανάμεσα στα στοιχεία των $S_{x_0}^{(0)} \equiv \{x_0\}, S_{x_0}^{(1)} \equiv \{x_0, y\}, S_{x_0}^{(n)} \equiv \{x_0, y_0, z\}$ και των $S_{x_0+dx}^{(0)}, S_{x_0+dx}^{(1)}, S_{x_0+dx}^{(n)}, (S_{x_0}^{(0)}, S_{x_0}^{(1)}, S_{x_0}^{(n)})$ και $(S_{x_0+dx}^{(0)}, S_{x_0+dx}^{(1)}, S_{x_0+dx}^{(n)})$

που είναι οι χώροι που επισυνάπτονται στα γενικευμένα γραμμικά στοιχεία $e_{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$ και $e_{x_0+dx} = (x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ αντίστοιχα. Η σχέση (371) μπορεί να αναχθεί στις ίδιες μορφές όπως στην (366) υπό κατάλληλες συνθήκες όπως, $P_b^\alpha \equiv \delta_b^\alpha, P_j^i \equiv \delta_j^i, Q_k^\alpha \equiv L_k^\alpha, Q_\lambda^\alpha \equiv M_\alpha^\lambda, Q_\lambda^i \equiv N_\lambda^i$ αλλά τα περιεχόμενα αυτών των ποσοτήτων είναι συμφυώς διαφορετικά το ένα από το άλλο. Αυτές οι συνοχές βάσης θα έπρεπε να καθορίζονται από μια φυσική οπτική γωνία από τη συμφυή συμπεριφορά των y και z .

Η μετρική δομή και η σχέση συνοχής για την περίπτωση $(x, y, z = x^{(n)})$, θα έπρεπε να μορφοποιηθούν μέσα στο πλαίσιο της υψηλότερης τάξης χώρου τάξης $M \geq 2$, οι οποίες ωστόσο δε μπορούν να γραφούν σε παρόμοιες και απλές μορφές όπως στις (367) - (369). Αλλά από μια φυσική οπτική γωνία, αν $z = x^{(n)}$, ($n > 2$) εξομοιώνεται με τον σπινόρα ψ και (x, ψ) επιλέγεται ως ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε οι (366) - (369) μπορούν να μετασχηματιστούν

$$d\zeta^K = (dx^\lambda, \delta\psi^A = d\psi^A + \Xi_{\lambda B}^A \Psi^B dx^\lambda + H_{BC}^A \Psi^B d\Psi^C = P_B^A d\Psi^C + Q_\lambda^A dx^\lambda),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^K} = \left(\frac{\delta}{\delta x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - N_\lambda^A \frac{\partial}{\partial \psi^A}, \frac{\delta}{\delta \psi^A} = (P^{-1})_A^B \frac{\partial}{\partial \psi^B} \right), \quad (372)$$

όπου

$$P_B^A = \delta_B^A + H_{BC}^A \Psi^B, Q_\lambda^A \equiv \Xi_{\lambda B}^A \Psi^B, N_\lambda^A \equiv Q_\lambda^B (P^{-1})_B^A$$

Σε αυτή την περίπτωση, η μετρική δίνεται

$$G = g_{\lambda\mu} dx^\lambda \otimes dx^\mu + g_{AB} \delta\psi^A \otimes \delta\psi^B \quad (373)$$

με συνοχές και συναλλοίωτες παραγώγους

$$\Gamma_{LM}^K = \{F_{\mu\nu}^\lambda, \Xi_{\lambda B}^A, H_{BC}^A, C_{\mu A}^\lambda\} \quad (374)$$

$$V_{|\nu}^\lambda = \frac{\delta V^\lambda}{\delta x^\nu} + F_{\mu\nu}^\lambda V^\mu,$$

$$V|_B^A = \frac{\delta V^A}{\delta \psi^B} + H_{\Gamma B}^A V^\Gamma, \quad (375)$$

Επιπλέον, αν πάρουμε ένα μη τοπικό σπινόρακό πεδίο $\Phi(x, \psi)$, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους του

$$D\Phi = d\Phi - \Theta_\lambda \Phi dx^\lambda - G_A \Phi d\Psi^A = (\Phi|_\lambda) dx^\lambda + (\Phi|_A) \delta\psi^A; \quad (376)$$

όπου

$$\Phi|_\nu = \frac{\delta \Phi}{\delta x^\nu} - \bar{\Theta}_\nu \Phi$$

$$\Phi|_A = \frac{\delta \Phi}{\delta \psi^A} - \bar{G}_A \Phi$$

και $\bar{\Theta}_\lambda \equiv \Theta_\lambda - N_\lambda^A G_A$ και $\bar{G}_A = (P^{-1})_A^B G_B$, τα A, B αναπαριστούν τους σπινωριακούς δείκτες.

Τέτοιες ποσότητες, όπως $\bar{\Theta}_\lambda$ και \bar{G}_A αναπαριστούν συνοχές spin affine που παίζουν το ρόλο spin gauge πεδίων που υπακούουν στην αρχή της ελάχιστης σύζευξης.

Όπως καταλαβαίνουμε από τα παραπάνω, η μέθοδος για μη-τοπικοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε εσωτερική μεταβλητή ακόμα και αν υπάρχουν πολλά διαφορετικά είδη εσωτερικών μεταβλητών. Επίσης μπορεί να επεκταθεί η ιδέα των παραπάνω θεωριών και να εφαρμοστούν σε συνοχές και μετρικές σε πολλαπλότητες Lorentz και μετρικές Lorentz στην εφαπτόμενη δέσμη ενός χωροχρόνου Finsler που βασίζεται σε μη-γραμμικές συνοχές. Επιπλέον εφαρμογές του null χωροχρόνου μπορούν να γενικευτούν στη γεωμετρία του ολικού χώρου μιας πολλαπλότητας null congruence που θεωρείται σε άλλες εργασίες για μία πολλαπλότητα Lorentz [77].

12 Summary

In this thesis, an extension of Raychaudhuri equation for different types of Finsler spaces is studied. The fundamental role of Raychaudhuri equation for general relativity is extended in the context of generalized geometric structures of a Finsler-Randers (FR) spacetime and generalized scalar-tensor theories. Additional terms are introduced into the equation because of anisotropic curvatures and because of the form of geodesics. In this approach, Cartan connection was used, which preserves the norm of a vector time-like/null under parallel transport and is fundamental to the study of gravitational and cosmological theories. The equation Raychaudhuri was also derived in relation with the model (FRW) for an (FR) space-time. The energy conditions for (FR)-Cosmology and its relation with the (FRW)-cosmology were studied. Additionally, bounce conditions for an (FR) cosmology have been obtained. It was proved that in a bounce, both energy conditions of the two models are identical. The study is based on the geometry of a fiber bundle. In this framework, the equation Klein-Gordon was derived and the equation Raychaudhuri was studied in a generalized theory scalar-tensor of a model $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$ with the presence of nonlinear connections. These connections, as additional terms, can play an important role in the gravitational influence and its interaction with other fields. This means that the additional terms/fields will differentiate the evolution of accelerated expansion of the universe focusing/defocusing, as shown by the equations obtained. The theory of Ricci flows on manifolds, which is treated by non-integrable (non-holonomic) distributions is defined by nonlinear connection structures. Such manifolds provide a unified geometric framework for non-holonomic spaces Riemann, mechanics Lagrange geometry Finsler and various models of gravity (the theory Einstein and generalizations of strings or gauge). Non-holonomic context were considered by associated non-linear connection structure and well defined classes of non-holonomic restrictions on manifolds Riemann. With these structures various types of generalized Finsler spaces can be modelled by the Ricci flows. In this approach, possible applications of non-holonomic flows in modern physics and mechanics can be investigated. The concept of non-local field theory of the Finslerian gravitational field was studied in virtue of internal variables. In this approach, an internal variable is correlated with the geometry of total space of a space-time manifold. As well, different kinds of internal variables and non-linear connections are considered in this framework, giving some applications to the (FRW) model and in a spinorial structure of a Kawaguchi spacetime in classical level.

Περίληψη

Σε αυτή τη διατριβή, μελετάται μια επέκταση της εξίσωσης Raychaudhuri για διαφορετικούς τύπους χώρων Finsler. Ο θεμελιώδης ρόλος της εξίσωσης Raychaudhuri για τη γενική σχετικότητα επεκτείνεται στο πλαίσιο των γενικευμένων γεωμετρικών δομών ενός χωροχρόνου Finsler-Randers (FR) και γενικευμένων θεωριών Scalar-Tensor. Επιπλέον όροι εισάγονται στην εξίσωση λόγω των ανισοτροπικών καμπυλοτήτων και της μορφής των γεωδαισιακών. Σε αυτή την προσέγγιση, χρησιμοποιήθηκε η συνοχή Cartan, που διατηρεί τη νόρμα ενός διανύσματος time-like/null κάτω από παράλληλη μετατόπιση και είναι θεμελιώδης για τη μελέτη των βαρυτικών και κοσμολογικών θεωριών. Κατασκευάστηκε επίσης η εξίσωση Raychaudhuri για το (*FRW*) μοντέλο σε έναν (*FR*) χωροχρόνο. Μελετήθηκαν οι ενεργειακές συνθήκες για (*FR*) κοσμολογία και η σχέση τους με την (*FRW*) κοσμολογία. Επιπλέον υπολογίστηκαν οι συνθήκες αναπήδησης (bounce) για μία (*FR*) κοσμολογία. Αποδείχθηκε ότι σε μία αναπήδηση, οι ενεργειακές συνθήκες των δύο μοντέλων είναι ταυτόσημες. Η μελέτη βασίστηκε στη γεωμετρία μιας νηματικής δέσμης. Σε αυτό το πλαίσιο, υπολογίστηκε η εξίσωση Klein-Gordon και η εξίσωση Raychaudhuri μελετήθηκε σε μια γενικευμένη θεωρία Scalar-Tensor του μοντέλου $M \times \{\phi^{(1)}\} \times \{\phi^{(2)}\}$ και με την παρουσία μη-γραμμικών συνοχών. Αυτές οι μη-γραμμικές συνοχές, ως επιπλέον όροι, μπορούν να παίξουν σημαντικό ρόλο στη βαρυτική επιρροή και στην αλληλεπίδραση της με τα άλλα πεδία. Αυτό σημαίνει ότι οι επιπλέον όροι/πεδία θα διαφοροποιούν την εξέλιξη μιας επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος (focusing/defocusing) όπως φαίνεται από τις εξισώσεις που υπολογίστηκαν. Η θεωρία των Ricci ροών σε πολλαπλότητες, που μελετάται με μη ολοκληρώσιμες (μη ολονομικές) κατανομές ορίζεται από μη γραμμικές δομές συνοχών. Τέτοιες πολλαπλότητες μας παρέχουν ένα ενοποιημένο γεωμετρικό πλαίσιο για μη ολονομικούς χώρους Riemann, μηχανική Lagrange, γεωμετρία Finsler και διάφορα μοντέλα βαρύτητας (η θεωρία Einstein και γενικεύσεις χορδών ή gauge). Το μη ολονομικό πλαίσιο θεωρήθηκε με βάση συσχετισμένες μη γραμμικές δομές συνοχών και καλά ορισμένες κλάσεις μη ολονομικών περιορισμών σε πολλαπλότητες Riemann. Με αυτές τις δομές, διάφοροι τύποι γενικευμένων χώρων Finsler μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις ροές Ricci. Με αυτό τον τρόπο, μπορούν να ερευνηθούν πιθανές εφαρμογές των μη-ολονομικών ροών στη μοντέρνα φυσική και στη μηχανική. Η έννοια της μη-τοπικοποιημένης θεωρίας πεδίου του Finslerian βαρυτικού πεδίου μελετήθηκε χάρη στη χρήση εσωτερικών μεταβλητών. Σε αυτή την προσέγγιση, μια εσωτερική μεταβλητή συσχετίζεται με τη γεωμετρία του ολικού χώρου μιας χωροχρονικής πολλαπλότητας. Επιπλέον, διαφορετικά είδη εσωτερικών μεταβλητών και μη-γραμμικών συνοχών θεωρούνται σε αυτό το πλαίσιο και δίνουν μερικές εφαρμογές στο (*FRW*) μοντέλο και σε μια σπινωριακή δομή ενός χωροχρόνου Kawaguchi στην κλασική περίπτωση.

13 Βιβλιογραφία

Αναφορές

- [1] B.P.Abbot et al, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger (2016),Phys.Rev.Letters,116,061102
- [2] G.Abreu,M.Visser, Some generalizations of the Raychaudhuri equation,Phys. Rev. D83,104016 (2011)
- [3] N.Ahmadi,M.Nouri-Zonoz, Raychaudhuri equation in quantum gravitational optics,PRAMANA, vol.69,No.1,July (2007),pp147-157
- [4] F.D.Albareti,J.A.R.Cembranos,A. de la Cruz-Dombriz,A.Dobado, The Raychaudhuri equation in homogeneous cosmologies arXiv:1401.7926v2 [gr-qc] 17 Mar (2014)
- [5] F.D.Albareti,J.A.R.Cembranos,A. de la Cruz-Dombriz, Focusing of geodesic congruences in an accelerated expanding Universe,arXiv:1208.4201v2 [gr-qc] 8 Jan (2013)
- [6] M.Alexiou,Stavrinos P.,Vacaru S.,(2016) Nonholonomic Ricci Flows of Riemannian metrics and Lagrange-Finsler Geometry, Journal of Physical Mathematics Vol.7 issue 1 1161
- [7] Ahmed Farag Ali,Saurya Das, Cosmology from quantum potential,Phys.Letters B Vol.741,pp.276,(2015)
- [8] R.A.Alpher and Herman R.C., Remarks on the evolution of the expanding universe (1949), Phys. Rev.,75,1089
- [9] M.Anastasiu, Kawaguchi H.,(1989) A geometrical theory of time-dependent Lagrangians. Nonlinear connections Tensor, N.S., 48,272.
- [10] C.Arcus, E. Peyghan and E. Sharahi, Weyl's Theory in the Generalized Lie Algebroids Framework, J. Math. Phys. **55** (2014) 123505
- [11] G.Asanov,P.Stavrinos, Deviation of geodesics over tangent bundle,Rep.Math.Phys.vol.30,i.1,pp.63-69, (1991)
- [12] A.Ashtekar,P.Singh, Loop Quantum Cosmology: A Status Report, Class.Quantum Grav. **28**,2013001(2011)
- [13] K.Atazadeh,A.Khaleghi,H.R.Sepangi and Y.Tavakoli,Energy Conditions in f(R) Gravity and Brans-Dicke Theories, Int.J.Mod.Phys. D **18**,1101(2009)
- [14] I.Bakas,Geometric flows and (some of) their physical applications,arXiv:hep-th/0511057v1,4 Nov (2005)

- [15] I.Bakas,D.Orlando,P.M.Petropoulos, Ricci flows and expansion in axion-dilation cosmology,arXiv:hep-th/0610281v3,6 Feb (2008)
- [16] V.Balan, P.C.Stavrinos, Weak Gravitational fields in generalized metric spaces, Proc.of the Int.Conf.of Geometry and its Applications,Thessaloniki, Greece, vol.6 (1999) pp.27-37
- [17] K.Bamba, S. Nojiri, S.D. Odintsov, D. Saez-Gomez, Possible antigra-
vity regions in F(R) theory?, arXiv:1401.1328 [hep-th], (2014).
- [18] K.Bamba,S.D.Odintsov,P.V.Tretyakov, Inflation in a conformally-
invariant two-scalar-field theory with an extra R^2 term, arXi-
v:1505.00854v2 [hep-th] (2015)
- [19] D.Bao, S. S. Chern and Z. Chen, An Introduction to Riemann-Finsler
Geometry (Springer, 2000)
- [20] C. Barcelo, S. Liberati and M. Visser, Analogue Gravity, Living Rev.
Rel. **8** (2005) 12
- [21] J.D. Barrow, R.A. Matzner, Size of a bouncing mixmaster universe,
Phys. Rev. D **21**, 326 (1980).
- [22] J.D.Barrow and J.P.Mimoso, Phys.Rev.D **50**, 3746(1994);
J.P.Mimoso and D.Wands,Phys.Rev.D **51**, 477(1995); J.P.Mimoso
and D.Wands,Phys.Rev. D **52**, 5612 (1995)
- [23] S.Basilakos, A.Kouretsis, E. Saridakis, P.Stavrinos,Resembling dark e-
nergy and modified gravity with Finsler-Randers cosmology, Phys.Rev.D.
88. Issue 12 (2013) 123510
- [24] S.Basilakos, Stavrinos P.,(2013) Cosmological Equivalence between the
Finsler-Randers spacetime and the DGP gravity model, Phys.Rev. D
87,043506
- [25] O.Bertolami, Phys.Lett.B **186**,161 (1987).J.Santos, J.S.Alcaniz,
M.J.Reboucas and F.C.Carvalho, Phys.Rev. D **76**,083513
(2007); O.Bertolami and M.C.Soqueira, Phys.Rev.D **79**,104010
(2009); N.M.Garcia, T.Harko, F.S.N.Lobo and J.P.Mimoso,
Phys.Rev.D **83**,104032(2011);T.Harko,F.S.N.Lobo,M.K.Mak and
S.V.Sushkov,Phys.Rev.D **87**,067504(2013)
- [26] A.Bejancu, Finsler Geometry and Applications (Ellis Harwood, 1990)
- [27] A.Bejancu and H. R. Farran, Foliations and Geometric Structures
(Springer, 2005)
- [28] T.Biswas, A.Majumdar, W.Siegel, Bouncing Universes in String-
inspired Gravity, arXiv:hep-th/0508194(2005)

- [29] S.Bird, Cholis I., Muñoz J.B., Ali Haimoud Y., Kamionkowski M., Kovetz E.D., Raccanelli A. and Riess A.G., Did LIGO detect dark matter?, *Phys.Rev.Lett.*, 116, 201301 (2016)
- [30] R.Brandenberger and Peter P., The simplest possible bouncing quantum cosmological model, *Foundations of Physics*, 47, 797 (2017)
- [31] I.Bucataru, R.Miron *Finsler-Lagrange Geometry, Applications to dynamical systems*, Editura Academiei Romane (2007)
- [32] C.P.Burgess, F. Quevedo, R. Rabadan, G. Tasinato, I. Zavala, On bouncing brane-worlds, S-branes and branonium *Cosmology*, *JCAP* 22, 008 (2004)
- [33] Y.-F.Cai, Easson D.A., Brandenberger R., Towards a nonsingular bouncing cosmology, (2012), *JCAP*08(2012)020
- [34] H.-D.Cao, B. Chow, S.-C.Chu and S.-T.Yau (Eds.), *Collected Papers on Ricci Flow* (International Press, Somerville, 2003)
- [35] H.-D.Cao and H.-P. Zhu, Hamilton-Perelman's proof of the Poincaré conjecture and the geometrization conjecture, *Asian J. Math.* **10** (2006) 165-495
- [36] E.Caponio, Stancaronone G., (2015) Standard static Finsler spacetime, [ArXiv:1506.07451-ArXive.org](https://arxiv.org/abs/1506.07451)
- [37] S.Capozziello, Energy conditions in modified gravity, *Phys.Let.B*, Vol.730, (2014), 280-283.
- [38] S.Capozziello and M.De Laurentis, *Extended Theories of Gravity*, *Phys.Rept.* **509**, 167, 2011
- [39] S.Capozziello and M. Francaviglia, *Extended Theories of gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, *Gen. Rel. Grav.* 40, 357, 2008.
- [40] S.Capozziello, and S. Vignolo, On the well-formulation of the initial value problem of metric-affine $f(R)$ -gravity, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 6, 985, 2009
- [41] S.Carloni, P.K.S. Dunsby, D. Solomons, Bounce conditions in $f(R)$ cosmologies, *Class. Quantum Grav.* 22, 4839 (2005).
- [42] S.A.Carstea and M. Visinescu, Special solutions for Ricci flow equation in 2D using the linearization approach, *Mod. Phys. Lett. A* **20** (2005) 2993-2998

- [43] E.Cartan, La Methode du Repere Mobile, la Theorie des Groupes Continus et les Espaces Generalises (Herman Paris, 1963)
- [44] E.Cartan, Les Espaces de Finsler (Paris, Hermann, 1935)
- [45] C.Castro, Quaternionic-valued Gravitation in 8D, Grand Unification and Finsler Geometry, Int. J. Theor. Phys. **51** (2012) 3318-3329
- [46] C.Castro, Gravity in Curved Phase-Spaces, Finsler Geometry and Two-Times Physics, Int. J. Mod. Phys. A **27** (2012) 1250069
- [47] R.Catena, M. Pietroni and L. Scarabello, Einstein and Jordan frames reconciled: a frame-invariant approach to scalar-tensor cosmology, Phys. Rev. D **76**, 084039, 2007; T. Chiba and M. Yamaguchi, JCAP **1310**, 040, 2013
- [48] S.Chatterjee, D.A.Easson, M.Parikh, Energy conditions in the Jordan frame, Class.Quant.Grav., **30**,235031 (2013)
- [49] Z.Chang, Wang S.,(2013) Inflation and Primordial power spectra at anisotropic spacetime inspired by planck's constraints on isotropy of CMB, Eur.Phys.J.C. **73**:2516
- [50] Z.Chang, Xin L., Wang S.,(2015) Quadropol-octopole alignment of CMB related to the primordial power spectrum with dipolar modulation in anisotropic spacetime, Chinese Phys.C Vol.39 No 5
- [51] B.Chow, S-C, Glickenstein,D, Guenther,C., Isenberg,J., Ivey,T., Knopf,D., Lu,P., Luo,F.,Ni,L. The Ricci Flow : An Introduction (Mathematical Surveys ans Monographs, Vol.110: American Mathematical Society),2007.
- [52] T.Clifton,Carr B.J.,Coley A.,Black holes as echoes of previous cosmic cycles,(2017),Class.Quantum Grav.,34,135005
- [53] N.Dadhich, Derivation of the Raychaudhuri Equation,arXiv:gr-qc/0511123 November (2005)
- [54] S.Das, Quantum Raychaudhuri Equation, Phys.Rev.D **89**, 084068 (2014)
- [55] G.Date,arXiv:gr-qc/0704.0145 [gr-qc]
- [56] P. Deligne, P. Etingof, D. S. Freed et all (eds.), *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, Vols 1 and 2, Institute for Advanced Study (American Mathematical Society, 1994)
- [57] R.H.Dicke,P.J.E.Peebles,the Big-Bang Cosmology:Enigmas and Nostrums,in General Relativity,edited by S.W.Hawking,W.Israel (Cambridge University Press,1979)

- [58] J.Ehlers, A.K.Raychaudhuri and his equation, PRAMANA vol.69, No 1, July (2007),pp.7-14
- [59] J.Ehlers, Contributions to the relativistic mechanics of continuous media, Gen.Relativ.Gravit.**25**,1225 (1993)
- [60] A.Einstein, A Generalization of the Relativistic Theory of Gravitation, Ann. Math. **46** (1945) 578–584
- [61] L.P.Eisenhart, Generalized Riemann Spaces, I and II, Proc. Nat. Acad. USA, **37** (1951) 311–315; **38** (1952) 505–508
- [62] G.F.R.Ellis, Relativistic Cosmology, in General Relativity and Cosmology, Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi", edited by R.K.Sachs (Academic Press,1971) No.104
- [63] G.F.R.Ellis, M. Bruni, J.Hwang, Density-gradient-vorticity relation in perfect-fluid Robertson-Walker perturbations,Phys.Rev. D 42,1035 (1990)
- [64] G.F.R. Ellis, On the Raychaudhuri equation, PRAMANA vol.69, No 1, July (2007),pp.15-22
- [65] E.Esrafilian and E. Azizpour, Nonlinear Connections and Supersprays in Finsler Superspaces, Rep. Math. Phys. **54** (2004) 365–372
- [66] F.Etayo, R. Santamaría and S. Vacaru, Lagrange-Fedosov Nonholonomic Manifolds, J. Math. Phys. **46** (2005) 032901
- [67] V.Faraoni, Cosmology in Scalar-Tensor Gravity, Kluwer Academic Publishers, (2004)
- [68] Foster A.,Pabst C., (2015) Finsler pp-waves, ArXiv:151003058-ArXiv.org
- [69] Foster J.,Lehnert R.,(2015) Classical-Physics Applications for b space, Phys.Let.B vol.746 p.164
- [70] R.Gallego, A Finslerian Version of 't Hooft Deterministic Quantum Models, J. Math. Phys. **47** (2006) 072101
- [71] T.Gheorghiu, O. Vacaru, S. Vacaru, Off-diagonal deformations of Kerr black holes in Einstein and modified massive gravity and higher dimensions, EPJC 74, ?3152 (2014); arXiv: 1312.4844.
- [72] G. Gibbons, Phantom Matter and the cosmological constant, arXiv:hep-th/0302199 (2003)
- [73] H.Goener, On the history of unified field theory,Living reviews in relativity, 17 (2014),5

- [74] N.Gorkavyi,A.Vasilikov, A modified Friedmann equation for a system with varying gravitational mass, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (2018)
- [75] W.Graf, Ricci Flow Gravity, PMCPHys.A1:3, (2007), arXiv:gr-qc/0602054v3
- [76] P.Grozman and D. Leites, The Nonholonomic Riemann and Weyl Tensors for Flag Manifolds, Theor. Math. Physics, **153** (2007) 1511-1538
- [77] S.Haesen, Palomo F., Romero A., (2009) Null congruence spacetimes constructed from 3-dimensional Robertson-Walker spaces, Diff.Geom. and its Applications 27 p.240
- [78] R.S.Hamilton, Three Manifolds of Positive Ricci Curvature, J. Diff. Geom. **17** (1982) 255–306
- [79] R.S.Hamilton, Formation of Singularities in the Ricci flow, in: Surveys in Differential Geometry, Vol. 2 (International Press, 1995), pp. 7–136
- [80] T.Harko, F.S.N.Lobo, Geodesic Deviation, Raychaudhuri equation and tidal forces in modified gravity with an arbitrary curvature-matter coupling,ArXiv:1210.8044 vol.2 [gr-qc],(2012)
- [81] S.W.Hawking,G.F.R. Ellis, The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, Cambridge,1973
- [82] F.W.Hehl, P.von der Heyde, G.D.Kerlick and J.M.Nester, General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects, Rev.Mod.Phys.**48**,393,(1976)
- [83] F.W.Hehl and J.D.McCrea, E.W.Mielke and Y.Ne’eman,Metric-Affine gauge theory of gravity: field equations, noether identities, world spinors, and breaking of Dilation Invariance, Phys.Rep.,4258,1,(1995)
- [84] Z.Horak, Sur les systèmes non holonomes, Bull. Internat. Acad. Sci. Bohème, (1927) 1–18
- [85] F.Hoyle, J.V.Narlikar, Mach’s principle and the creation of matter, Proc.R.Soc.A **270**,334(1962)
- [86] S.Ikeda,(1980) A differential geometrical consideration on a ”nonlocal” field,Rep.Math.Phys.,18,103.
- [87] S.Ikeda,(1990) Some remarks on the Lagrangian theory of electromagnetism, Tensor, N.S.,49,204.
- [88] S.Ikeda,On the theory of Graviational Field in Finsler spaces, Tensor N.S.50(1991) 256-262

- [89] L.Iorio, C.Corda, Gravitomagnetism and gravitational waves, arXiv:1001.395 V.2, (2010)
- [90] H.Ishikawa, "Note on Finslerian Reativity", Jour.Math.Phys.vol.22,p.995,(1981)
- [91] R Kantowski, R.K. Sachs, Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models, J. Math. Phys. 7, 443 (1966), G.F.R. Ellis, The dynamics of pressure-free matter in general relativity, J. Math Phys. 8, 1171 (1967)
- [92] S.Kar,S.S.Gupta,in Raychaudhuri Equation at the Crossroads,edited by N.Dadhich,Pankaj Joshi,Probir Roy,Special Issue of Pramana (India, 2007) pp.49-76.
- [93] S.Kar, An introduction to the Raychaudhuri Equations, RESONANCE, vol.13,Is.4,pp.319,April 2008
- [94] S.Kar, Generalized Raychaudhuri equations for strings and membranes,arXiv:hep-th/9604046v1 (1996)
- [95] A. Kawaguchi, Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **40** (1937) 596–601
- [96] A. Kawaguchi, On the Theory of Non-linear Connections, I, II, Tensor, N. S. **2** (1952) 123–142; **6** (1956) 165–199
- [97] A.Kawaguchi,(1932) Die Differential geometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rend.Circ.Mate.Palermo,56,246.
- [98] J. Kern, Lagrange Geometry, Arch. Math. **25** (1974) 438–443
- [99] J.Khoury,B.A. Ovrut,P.J.Steinhardt,N.Turok, The ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang, Phys.Rev.D **64**,123522 (2001)
- [100] B.Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, Geometry & Topology **12** (2008) 2587-2855
- [101] T.Koivisto,D.Mota, M.Quartin and T.Slosnik, Possibility of anisotropic curvature in cosmology,Phys.Rev.D 83,023509 (2011)
- [102] V.A.Kosteletsky,Riemann-Finsler geometry and Lorentz-violating kinematics,Phys.Let.B vol.701,pp.137-143 (2011)
- [103] Kosteletsky V., Russell N. ,Tso R., (2012) Bipartite Riemann-Finsler Geometry and Lorentz violation, Physics Letters B vol.716,Issue 3-5 p.470

- [104] Kouneiher J., Einstein flow and Cosmology, *Internat.J.Modern Physics A* **30** (2015), 1530047 (1-18)
- [105] A.Kouretsis, (2014) Cosmic Magnetization in Curved and Lorentz violating space-times *Eur.Phys.Jour.C* **74**:2879
- [106] A.Kouretsis, C.Tsagas, Raychaudhuri's equation and aspects of relativistic charged collapse, *Phys. Rev. D* **82**, 124053 (2010)
- [107] A.P. Kouretsis, M. Stahakopoulos and P. C. Stavrinou, Relativistic Finsler geometry, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol.37 (2014) 223-229
- [108] A.P.Kouretsis, M.Stathakopoulos, P.C.Stavrinou, Covariant kinematics and gravitational bounce in Finsler space-times, *Phys.Rev.D* **86**, 124025 (2012)
- [109] A.Kouretsis, Stathakopoulos M., Stavrinou P., (2009) General very Special Relativity, *Phys.Rev.D* Vol79 N.10
- [110] A.P.Kouretsis, Cosmic Magnetization in Curved and Lorentz Violating Space-Times, *Eur. Phys. Journal C* **74** (2014) 2879
- [111] H.Kragh, Continual fascination: the oscillating universe in modern cosmology, *Sci.Context* **22**, 587 (2009)
- [112] A.Linde, Inflationary Cosmology, 22nd IAP Colloquium, Inflation +25, Paris, arXiv:0705.0164v2 [hep-th] (2007)
- [113] G.Magnano, L. M. Sokolowski, Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field, *Phys.Rev. D* **50**, 5039, 1994
- [114] J.E.Marsden and T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics, vol. **17**, Current 2nd Printing (Springer-Verlag, 1994, 1999, 2003)
- [115] M.Matsumoto, On Finsler spaces with Randers' metric and special forms of important tensors, *J.Math.Kyoto Univ.(JMKYAZ)* **14-3** (1974) 477-498
- [116] N.Mavromatos, S. Sarkar and A. Vergou, Stringy Space-Time Foam, Finsler-like Metrics and Dark Matter Relics, *Phys. Lett. B* **696** (2011) 300-304
- [117] N.Mavromatos, V. Mitsou, S. Sarkar and A. Vergou, Implications of a Stochastic Microscopic Finsler Cosmology, **72** (2012) 1956

- [118] Minguzzi E., (2015) Raychaudhuri equation and singularity theorems in Finsler spacetimes, *Classical and Quantum Gravity* vol.32 N.18
- [119] R.Miron , Anastasiei M., (1987) *Vector Bundles. Lagrange Spaces. Applications to the Theory of Relativity* (Ed.Acad. R.S. Romania, Bucuresti) (in Romanian).
- [120] Mitra, A. No uniform density star in general relativity, *Astrophysics and Space Sci.* 333, (2011), 351-356.
- [121] J.W.Moffat, *Nonsymmetric Gravitational Theory*, *Phys. Lett. B* **355** (1995) 447–452
- [122] H.K.Mohajan, *Space-Time Singularities and Raychaudhuri Equations*, *Journal of Natural Sciences*, vol.1 No.2, (2013)
- [123] M.Mohseni, *The Raychaudhuri Equation for Spinning Test particles*, arXiv:1502.07833v1 [gr-qc] 27 Feb (2015)
- [124] C. Molina-Paris, M. Visser, Minimal conditions for the creation of a Friedman-Robertson-Walker universe from a 'bounce', *Phys. Lett. B* 455, 90 (1999).
- [125] J.W.Morgan and G. Tian, *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, AMS, *Clay Mathematics Monographs*, vol. 3 (2007)
- [126] C.Mukku,S.M.Mahajan,B.A.Bambah, *On a Raychaudhuri equation for hot gravitating fluids*, *PRAMANA*,69:137-146,(2007)
- [127] G.L.Murphy, *Big-Bang model without singularities*, *Phys.Rev. D* **8**, 4231 (1973)
- [128] S.Nojiri and S.D. Odintsov, *Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy*, *Int. Jou. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4, 115, (2007)
- [129] M.Novello, S.E.P.Bergliaffa, *Bouncing Cosmologies*, *Phys.Rep.* **463**, 127 (2008)
- [130] B.O'ANeill,*Semi-Riemannian Geometry with application to Relativity* (Academic Press, New York, London), 1983
- [131] G.Perelman, *The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications*, math.DG/ 0211159
- [132] G.Perelman, *Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds*, math. DG/ 03109
- [133] G.Perelman, *Finite Extinction Time for the Solutions to the Ricci Flow on Certain Three-Manifolds*, math.DG/0307245

- [134] E.Peyghan and A. Tyebi, Finsler Manifolds with a Special Class of g-natural Metrics, J. Contemporary Math. Analysis - Armenian Academy of Sciences, **49** (2014) 260-269
- [135] H. Poincare, Science and Hypothesis, Dover, (1952)
- [136] G. Randers, On an asymmetrical Metric in the Four-Space of general Relativity, Physical Review, vol.59,p.195-199, January 1941
- [137] A.Raychaudhuri, Relativistic Cosmology, Physical Review, vol.98, No.4, 1123 May (1955)
- [138] M.M.Rezalii and E. Azizpour, On a Superspray in Lagrange Super-spaces, Rep. Math. Phys. **56** (2005) 257-269
- [139] H.Rund, The differential Geometry of Finsler spaces, Monograph, Springer (1955)
- [140] C.S.Santos, J.Santos, S.Capozziello, J.S.Alcaniz, Strong energy condition and the repulsive character of f(R) gravity,(2016) arXiv:1606.02212v1.[gr-qc]
- [141] P.Schneider, J.Ehlers, E.E.Falco, Gravitational Lenses, Springer, Berlin1992
- [142] R.Shaikh,S. Kar,A.Das Gupta, Evolution of geodesic congruences in a gravitationally collapsing scalar field background, Phys.Rev. D90, 124069 (2014)
- [143] R.Sharma (2016) Cosmological models through spatial Ricci flow,International Journal of geometric Methods in Modern Physics,13(5),1650069(1-4)
- [144] Silva J.E.G., Maluf R., Almeida C.A.S.,(2015) A non-linear dynamics for the scalar field in Randers spacetime ArXive:1511.00769-ArXive.org
- [145] Silva J.E.G., (2016) Symmetries and fields in Randers-Finsler spacetime,ArXive:1602.07345-ArXive.org
- [146] Silva J.E.G.,Almeida C.A.S.,(2014) Kinematics and Dynamics in a Bipartite Finsler spacetime, Phys.Let.B 2014 vol.731 p.74
- [147] T.Singh,R.Chaubey, Bianchi Type-I,V and VIo models in modified generalized scalar-tensor theory, PRAMANA,vol.69,No.2, August (2007) pp159-166
- [148] P.Singh,A.Toporensky, Big crunch avoidance in k=1 semi-classical loop quantum cosmology, Phys. Rev. D69 104008, arXiv:gr-qc/0312110, (2004)

- [149] T.Singh,R.Chaubey,A.Singh, Bounce conditions in Kantowski-Sachs and Bianchi cosmologies in modified gravity theories,Intern.Jour.of Mod.Phys.A vol.30 No.14 (2015) 1550073
- [150] T.Singh,R.Chaubey,A.Singh, Bounce conditions for FRW models in modified gravity theories,Eur.Phys.J.Plus (2015) vol. 130,issue 2, p.31
- [151] T.Singh,R.Chaubey,A.Singh, Bouncing cosmologies with viscous fluids,Astrophys Space Sci (2016) vol.361,n.3,p.106
- [152] T.Singh,G.P.Singh.,Lyra's geometry and cosmology: A review, Fortsch.Phys. **41**,737 (1993)
- [153] T.Singh,L.N.Rai, Scalar-tensor theories of gravitation: foundations and prospects, Gen.Relativ.Gravit. **16**,875 (1983)
- [154] T.Singh,Tarkeshwar Singh, General class of scalar-tensor theories: A review, Int.J.Mod.Phys. A **2**,645 (1987)
- [155] Skakala J.,Visser M., (2009) Birefringence in pseudo-Finsler spacetimes Jour.of Phys: Conf.Ser. vol189 N.1
- [156] Skakala J.,Visser M.,(2011) Bi-metric pseudo Finslerian spacetimes, Journal of Geometry and Physics, vol.61 p.1396-1400
- [157] L. Smolin, Did the universe evolve?, Class. Quantum Grav. 9, 173 (1992)
- [158] L. Smolin, The Life of Cosmos (Oxford University Press, 1997).
- [159] D.Solomons, P.K.S. Dunsby, G.F.R. Ellis, Bounce behaviour in Kantowski-Sachs and Bianchi Cosmologies, arXiv:gr-qc/0103087
- [160] A.A.Starobinski,Sov.Astron.Lett **4**,82 (1978)
- [161] Stavrinou P.C., Ikeda S., Alexiou M., On the metric structures and Connections Considerations of Gravitational Field in Finsler Spaces, Journal of Physics Research and Applications 2:1, (2018)
- [162] P.Stavrinou, Weak Gravitational Field in Finsler - Randers Space and Raychaudhuri Equation, Gen.Rel.Grav. 44(123029-3045) (2012)
- [163] P.Stavrinou, Congruences of fluids in a Finslerian anisotropic space-time, Int.Jour.ofTheor.Phys. 44,2,245-254 (2005)
- [164] P.C.Stavrinou, A.P.Kouretsis, M.Stathakopoulos, Friedmann-like Robertson-Walker model in generalized metric space-time with weak anisotropy, Gen.Relativ.Gravit. DOI 10.1007/s10714-007-0540-1 (2008)

- [165] P.C. Stavrinou and F.I. Diakogiannis, Finslerian Structure Of Anisotropic Gravitational Field, *Gravitational and Cosmology* Vol. 10 (2004), No.4 (40), pp. 269-278
- [166] P.C.Stavrinou, Gravitational and cosmological considerations based on the Finsler and Lagrange metric structures, *Nonlinear Analysis* 71 (2009)
- [167] P.C.Stavrinou, H. Kawaguchi, Deviation of Geodesics in the Gravitational Field of Finslerian Space-Time, *Memoira of Shonan Institute of Technology* Vol.27,p.35, No.1, (1993)
- [168] P.C.Stavrinou,Tidal forces in vertical spaces of Finslerian spacetime, *Rep.Math.Phys.* vol.31,1 pp.1-4 (1992)
- [169] P.Stavrinou,S.Ikeda,Connection Considerations of Gravitational Field in Finsler Spaces,*Inter.Jour.Theor.Phys.*Vol.45,No.4,p.743
- [170] P.Stavrinou,S.Ikeda,Some connections and variational principle to the Finslerian scalar-tensor theory of gravitation, *Rep.Math.Phys.*v44,i.1 pp.221-230 (1999)
- [171] P.Stavrinou, S.Vacaru, Cyclic ekpyrotic universes in modified Finsler osculating gravity on tangent Lorentz bundles, *Class.Quant.Grav.* **30**(5) 055012 (2013)
- [172] P.Stavrinou, O. Vacaru and S. Vacaru, Modified Einstein and Finsler Like Theories on Tangent Lorentz Bundles, *Int. J. Mod. Phys. D* **23** (2014) 1450094
- [173] P.Stavrinou,M.Alexiou,Raychaudhuri equation in the Finsler-Randers spacetime and generalized scalar-tensor theories,*Int.J.Gem.Methods Mod.Phys.* **15**,1850039(2018)
- [174] P.Stavrinou,Manouselis P., (1995) Nonlocalized Field Theory over Spinor Bundles, *Poincare Gravity and Yang-Mills fields*, *Rep.Math.Phys.*36 293-306
- [175] H.Stephani, Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., Herlt, E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Second edition (Cambridge University press, New York, London), 2009.
- [176] Y.Takano, Theory of fields in Finsler spaces I, *Progress of theoretical physics* vol.40,n.5,pp.1159 (1968)
- [177] W.Thurston, Three Dimensional Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **6** (1982) 357–381

- [178] W.Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, preprint, 1978, Princeton University, and Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol. 1, (Princeton University Press, 1997)
- [179] R.C.Tolman,relativity,Thermodynamics and Cosmology (Oxford University Press,1934)
- [180] Torrome G.R.,(2006) A Finslerian version of t' Hooft deterministic quantum models,Journal of Mathematical Physics, 47,072101
- [181] Torrome R.,(2012) On Fermat's principle for causal curves in time oriented Finsler space-times, arXiv.org/abs/1202.3869.
- [182] A.Triantafyllopoulos, P.C.Stavrinos, Weak field equations and generalized FRW cosmology on the tangent Lorentz bundle,CQG **35**(2018) 085011 (30pp)
- [183] A.Trautman,Encyc.of Math.Phys.Eds.J.P.Francoise,G.L.Naber and S.T.Tsou,Oxford:Elsevier,189,2006
- [184] M.Tsamparlis, L. Paliathanasis, S. Basilakos, S. Capozziello, Gen. Rel. Grav. 45, 2003, 2013
- [185] S.Vacaru, Ghost-free Massive $f(R)$ theories modelled as effective Einstein spaces and cosmic acceleration, EPJC 74, 3132 (2014); arXiv: 1401.2882.
- [186] S.Vacaru, Critical remarks on Finsler modifications of gravity and cosmology by Zhe Chang and Xin Li, Phys. Lett. B **690** 224-228 (2010); arXiv: 1003.0044v2.
- [187] S.Vacaru, Nonholonomic Ricci Flows: II. Evolution Equations and Dynamics, J. Math. Phys. **49** (2008) 043504
- [188] S.Vacaru, Ricci Flows and Solitonic pp-Waves, Int. J. Mod. Phys. A **21** (2006) 4899-4912
- [189] S.Vacaru and M. Visinescu, Nonholonomic Ricci Flows and Running Cosmological Constant: I. 4D Taub-NUT Metrics, Int. J. Mod. Phys. A **22** (2007) 1135-1159
- [190] S.Vacaru and M. Visinescu, Romanian Reports in Physics **60** (2008) 218-238; gr-qc/0609086
- [191] S.Vacaru, Exact Solutions with Noncommutative Symmetries in Einstein and gauge Gravity, J. Math. Phys. **46** (2005) 042503
- [192] S.Vacaru, Clifford Algebroids and Nonholonomic Einstein-Dirac Structures, J. Math. Phys. **47** (2006) 093504

- [193] S. Vacaru, P. Stavrinou, E. Gaburov and D. Gonța, Clifford and Riemann- Finsler Structures in Geometric Mechanics and Gravity, Selected Works. Differential Geometry - Dynamical Systems, Monograph 7 (Geometry Balkan Press, 2006); www.mathem.pub.ro/dgds/mono/vacaru.pdf and [gr-qc/0508023](http://arxiv.org/abs/gr-qc/0508023)
- [194] S.Vacaru, Metric Compatible or Noncompatible Finsler-Ricci, IJGMMP **9**. 1250041 (2012); arXiv: 1106.4888.
- [195] S.Vacaru, Nicol N.,(2004) Nonlinear Connections and Spinor Geometry, arXiv:math/0406585v1
- [196] S.Vacaru, Stavrinou P., (2002) Spinors and space-time Anisotropy, Eds: University of Athens, Athens ArXiv:gr-qc/01122028 v3
- [197] S.Vacaru, (2012) Principles of Einstein-Finsler gravity and perspectives in modern Cosmology, Int.Jour.of Mod.Phys. D. vol.21, Issue 09
- [198] S.Vacaru,(2012) Modified Dispersion Relations in Horava-Lipschitz Gravity and Finsler brane models, GRG 44:1015-1042
- [199] S.Vacaru, (2015) Spinor and Twistor Geometry in Einstein Gravity and Finsler Modifications, Advances in Applied Clifford Algebras vol.25 Issue 2 pp.453
- [200] M.Visser, Lorentzian Wormholes, American Institute of Physics Press,(1996)
- [201] N.Voicu, (2011) On the fundamental equations of electromagnetism in Finslerian spacetimes, Progress in electromagnetics Research vol.113 pp.83
- [202] G.Vrănceanu, Sur les espaces non holonomes, C. R. Acad. Sci. Paris **183** (1926) 1083–1085
- [203] J. Wainwright, G.F.R. Ellis, Dynamical Systems in Cosmology (Cambridge University Press, 1997).
- [204] R.M.Wald, General Relativity, Chicago University Press, Chicago, (1984)
- [205] Xin Li, Chang Z., Exact solution of vacuum field equation in Finsler spacetime, Phys.Rev.D 90,064049 (2014)
- [206] Xin Li, Zhe Chang, Kinematics in Randers -Finsler geometry and secular increase of the astronomical unit, Chinese Physics C, Vol.35,N.10 (2011)

- [207] T.Yajima, H.Nagahama, Finsler geometry of topological singularities for multi-valued fields:Applications to continuum theory of defects, *Annalen der Physik*, Vol.528,Issue 11-12,(2016)
- [208] S.Yang,Lin K., Dynamical effect of electromagnetic wave in spherical symmetrical Finsler spacetime, *Int.Journal of Theor.Physics* 52:3176-3181 (2013)
- [209] H.Yasuda,H.Shimada, On Randers Spaces of Scalar Curvature,reports on *Math.Physics* vol.11,No.3,p.347 (1977)
- [210] H.Yukawa, *Physical Review* 219;80 (1950) 1047
- [211] Y.B.Zeldovich,I.D.Novikov,*The Structure and Evolution of the universe* (Chicago University Press,USA,1983) chapt.24