

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Χημικών Μηχανικών
ΔΠΜΣ Υπολογιστική Μηχανική

Μεγάλες Στροφές

Μια Μαθηματική-Αριθμητική Προσέγγιση



Μπεντούρ Γιούνης

Επιβλέποντες Καθηγητές:

Σπηλιόπουλος Κωνσταντίνος, Παπαδόπουλος Βησσαρίων

Αθήνα, Οκτώβριος 2018

Περιεχόμενα

1	Πολλαπλότητες	3
1.1	Ο Ευκλείδειος Χώρος	3
1.2	Λείες Πολλαπλότητες	6
1.3	Λείες απεικονίσεις	7
1.4	Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης	11
1.5	Ο εφαπτόμενος χώρος	12
1.6	Διανυσματικά Πεδία	18
1.7	Πολλαπλότητες Riemann	22
2	Ομάδες και Άλγεβρες Lie	31
2.1	Ομάδες Lie	31
2.2	Το εκθετικό ενός πίνακα	34
2.3	Ο εφαπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie πινάκων - άλγεβρες Lie πινάκων	36
3	Γεωμετρική μη γραμμικότητα στη Μηχανική Συνεχούς Μέσου	41
3.1	Σώματα, σχηματισμοί, τοποθετήσεις	41
3.2	Παραμετροποίηση του χώρου του σχηματισμού	42
3.3	Κίνηση: Πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης	50
3.4	Τανυστές τάσης: Εξισώσεις ορμής	51
4	Ακριβές στοιχείο δοκού μη γραμμικής γεωμετρίας	54
4.1	Περιορισμένο μοντέλο δοκού: Βασική κινηματική	54
4.1.1	Κίνηση: Βασικές κινηματικές σχέσεις	56
4.2	Πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης	57
4.3	Η ακριβής εξίσωση ροπής σε εσωτερικές τάσεις	59
4.3.1	Παραμετροποίηση: Διατομές και κάθετα πεδία	60
4.3.2	Εσωτερικές τάσεις και ζεύγη τάσεων	62
4.4	Τροπική ενέργεια και συζυγή τροπικά μεγέθη.	64
4.5	Νόμοι ισορροπίας και καταστατικές εξισώσεις.	64
4.5.1	Διατήρηση μάζας.	65
4.5.2	Διατήρηση Ορμής.	65
4.5.3	Διατήρηση στροφορμής	66
4.5.4	Παράδειγμα απλοποιημένων καταστατικών εξισώσεων	68
4.6	Μεταβολική διατύπωση και συνεπής γραμμικοποίηση	71
4.6.1	Χώρος των κινηματικά αποδεκτών μεταβολών	71
4.6.2	Μεταβολική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας ροπών	72
4.6.3	Συνεπής γραμμικοποίηση: Εφαπτόμενος τελεστής	72
4.6.4	Συμμετρία του εφαπτόμενου τελεστή στην ισορροπία	73
4.7	Διατύπωση με πεπερασμένα στοιχεία	74
5	Παραδείγματα με χρήση του λογισμικού FEAP	77
6	Βιβλιογραφία	86

Εισαγωγή

Για τους σκοπούς της παρούσας αυτής διπλωματικής εργασίας, το βασικό μαθηματικό εργαλείο που θα μας απασχολήσει είναι αυτό των πολλαπλοτήτων και ειδικότερα αυτό των λείων πολλαπλοτήτων. (πολλοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο διαφορίσιμες ή C^∞ πολλαπλότητες). Εάν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα παραλείψουμε τον πρώτο όρο και όταν θα μιλάμε για πολλαπλότητες θα εννοούμε αποκλειστικά και μόνο λείες πολλαπλότητες. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι επειδή στα μαθηματικά υπάρχουν πολλά είδη πολλαπλοτήτων όπως αλγεβρικές, τοπολογικές, αναλυτικές πολλαπλότητες, οι οποίες ωστόσο δεν αποτελούν αντικείμενο ενδιαφέροντος στο εν λόγω κείμενο.

Η Θεωρία Πολλαπλοτήτων ανήκει στον κλάδο της Γεωμετρίας και το έναυσμα για την ανάπτυξή της δόθηκε από τον Bernhard Riemann περί το 19ο αιώνα ύστερα από προτροπή του δασκάλου του Carl F. Gauss για την επέκταση των αποτελεσμάτων που είχαν προκύψει για την κλασική Θεωρία Επιφανειών του \mathbb{R}^3 , σε ανώτερες διαστάσεις. Είναι ένα σαφές παράδειγμα μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ασφαλώς είχαν ανακαλυφθεί στο παρελθόν διάφορες μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες οι οποίες προέκυψαν από την προσπάθεια μελέτης χώρων όπου το αίτημα της παραλληλίας του Ευκλείδη αποτυγχάνει. Μια άλλη σημαντική πηγή πολλαπλοτήτων στα μαθηματικά του 19ου αιώνα, ήταν η αναλυτική μηχανική, όπως αναπτύχθηκε από τους Simeon Poisson, Jacobi, William Rowan Hamilton. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας του Riemann είναι αυτό που ο περισσότερος κόσμος σήμερα γνωρίζει ως Διαφορική Γεωμετρία, αν και ο όρος είναι αρκετά διευρυμένος και περιέχει πολλούς κλάδους. Κεντρικό ρόλο στη μελέτη που πραγματοποίησε ο Riemann είναι οι πολλαπλότητες Riemann που ουσιαστικά είναι λείες πολλαπλότητες εφοδιασμένες με μια μετρική Riemann δηλαδή εφοδιασμένες με μια θετικά ορισμένη, συμμετρική, διγραμμική μορφή η οποία αντιστοιχίζει ένα εσωτερικό γινόμενο σε κάθε ζεύγος εφαπτόμενων διανυσμάτων (θα το δούμε αυτό παρακάτω).

Χρειάστηκαν πολλά χρόνια να παρέλθουν ώστε η θεωρία να πάρει τη σύγχρονη μορφή της, καθώς και η συμβολή πολλών σπουδαίων Μαθηματικών του 19ου και 20ου αιώνα όπως ο Henri Poincare, Tulio Levi-Civita, Felix Klein, Ellie Cartan και πολλών άλλων. Η θεωρία αυτή βρήκε την τέλεια εφαρμογή της στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας του Einstein και φυσικά σε θέματα Μηχανικής Συνεχούς Μέσου όπως φιλοδοξούμε να δείξουμε στην παρούσα εργασία.

Συγχρόνως, περί τα τέλη του 19ου αιώνα μελετήθηκε μια ειδική κατηγορία λείων πολλαπλοτήτων οι οποίες είναι γνωστές σήμερα ως ομάδες Lie από προσπάθεια του Νορβηγού μαθηματικού Sophus Lie περί το 1870 να αναπτύξει μια θεωρία συμμετριών για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Η αρχική ονομασία που έδωσε ο Lie στις ομάδες αυτές ήταν συνεχείς ομάδες. Ο στόχος του Lie ήταν η ανάπτυξη μιας θεωρίας ανάλογης της θεωρίας του Evariste Galois σύμφωνα με την οποία τη θέση της λύσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ριζικά, θα έπαιρνε μια πεπερασμένη ομάδα συμμετριών μιας διαφορικής εξίσωσης. Έτσι σε αυτήν την κατηγορία πολλαπλοτήτων υπεισέρχεται και η αλγεβρική δομή (δομή ομάδας) και η έννοια της άλγεβρας Lie μιας ομάδας Lie η οποία δίνει ένα πλούσιο αλγεβρικό χαρακτήρα σε κάτι που ως τώρα θεωρούνταν αμιγώς γεωμετρικό/αναλυτικό. Οι ομάδες και οι άλγεβρες Lie έχουν ένα τεράστιο πεδίο εφαρμογών όπως η κβαντομηχανική μέσω της άλγεβρας του Heisenberg αλλά και σε θέματα Μηχανικής Συνεχών Μέσων όπου θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά τις λεγόμενες κλασικές ομάδες Lie και τις άλγεβρες αυτών, όπως οι $GL_n\mathbb{R}$, $SO(n)$ και άλλες.

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να δείξουμε πως τα μαθηματικά συνιστούν τα απαραίτητα τα εργαλεία για την ανάπτυξη μιας θεωρίας δοκού σε πεδία μεγάλων στροφών και μετακινήσεων, με μικρές παραμορφώσεις. Για το λόγο αυτό θεωρήθηκε σκόπιμο να αφιερωθεί ένα αρκετά μεγάλο τμήμα της εργασίας για τη μελέτη και την κατανόηση των εννοιών που θα μας απασχολήσουν. Τα δύο πρώτα κεφάλαια θα αφιερωθούν για την εισαγωγή σε τις λείες πολλαπλότητες και τις ομάδες Lie. Το κεφάλαιο 3 αποτελεί η σύνδεση των μαθηματικών και της θεωρίας του στοιχείου που αναλύεται εκτενώς στο κεφάλαιο 4. Πρακτικά το αντικείμενο αυτού είναι η μη γραμμικότητα γεωμετρίας που συναντάται στη μηχανική συνεχούς μέσου, η οποία όμως διατυπώνεται σε γλώσσα διαφορικής γεωμετρίας. Το κεφάλαιο 4 θα προσπαθήσουμε να εξειδικεύσουμε τη θεωρία του κεφαλαίου 3 στο πλαίσιο της εξαγωγής ενός στοιχείου δοκού που έχει επιθυμητές ιδιότητες, αυτές που θα συζητήσουμε τότε. Στο κεφάλαιο 5, γίνεται η εφαρμογή της θεωρίας του στοιχείου σε διάφορα παραδείγματα ανά τη βιβλιογραφία, με στόχο να ελεγχθεί η θεωρία αυτή μέσω της σύγκρισης με αντίστοιχα δοκιμασμένα παραδείγματα.

1 Πολλαπλότητες

1.1 Ο Ευκλείδειος Χώρος

Ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n αποτελεί το βασικό παράδειγμα μιας πολλαπλότητας, συνεπώς απαιτείται μια καλή κατανόηση της έννοιας της διαφορισιμότητας μιας συνάρτησης στον \mathbb{R}^n , καθώς και αυτής του εφαπτόμενου διανύσματος. Οι έννοιες αυτές θα επεκταθούν αργότερα στις πολλαπλότητες.

Θεωρούμε επομένως τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n και γράφουμε τις συντεταγμένες του ως x^1, \dots, x^n . Έστω $p = (p^1, \dots, p^n)$ ένα σημείο σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^n .

Ορισμός 1.1. Έστω k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Μια πραγματική συνάρτηση f ονομάζεται κλάσης C^k στο $p \in U$, αν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$$

όλων των τάξεων $j \leq k$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο p . Η συνάρτηση \mathbb{R}^n ονομάζεται κλάσης C^∞ (ή λεία) στο $p \in U$ αν είναι κλάσης C^k για κάθε $k \geq 0$. Μια διανυσματική συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ονομάζεται κλάσης C^k στο $p \in U$ αν όλες οι συνιστώσες συναρτήσεις f^1, \dots, f^m (δηλαδή οι συναρτήσεις $f^i = \pi^i \circ f$, όπου $\pi^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -προβολή) της f είναι κλάσης C^k στο p . Η $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ονομάζεται κλάσης C^k στο U αν είναι κλάσης C^k σε κάθε σημείο $p \in U$. Παρόμοια ορίζεται μια συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι C^∞ στο U .

Μια περιοχή ενός σημείου $p \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο περιέχει το σημείο p . Στην κλασική ανάλυση συναντάμε την έννοια της αναλυτικής συνάρτησης σε ένα σημείο p , ως την πραγματική συνάρτηση η οποία σε μια περιοχή του p ισούται με το ανάπτυγμα Taylor αυτής. Σημειώνεται ότι μια αναλυτική συνάρτηση είναι κλάσης C^∞ αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα Taylor.

Πρόταση 1.1. Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n το οποίο είναι αστεροειδές ως προς το σημείο $p = (p^1, \dots, p^n)$ (δηλαδή για κάθε $x \in U$ το ευθύγραμμο τμήμα από το p στο x βρίσκεται εξόλοκληρου μέσα στο U) Και έστω $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $g_1(x), \dots, g_n(x)$ λείες συναρτήσεις ορισμένες στο U ώστε να ισχύει:

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Η επόμενη έννοια που θα μας απασχολήσει είναι αυτή του εφαπτόμενου διανύσματος. Στη στοιχειώδη διαφορική γεωμετρία ορίζουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο p μιας επιφάνειας M στον \mathbb{R}^3 ως ένα σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου της M στο p . Το εφαπτόμενο επίπεδο μπορεί διαισθητικά να οριστεί ως εξής: Θεωρούμε όλα τα επίπεδα που διέρχονται από 3 σημεία της επιφάνειας. Καθώς τα 3 αυτά σημεία πλησιάζουν το σημείο p , αν τα αντίστοιχα επίπεδα στα οποία βρίσκονται πλησιάζουν σε ένα οριακό επίπεδο έστω Π , τότε το επίπεδο Π ονομάζεται *εφαπτόμενο επίπεδο* της M στο p . Ο ορισμός όμως αυτός προϋποθέτει ότι η επιφάνεια βρίσκεται εμφυτευμένη σε έναν Ευκλείδειο χώρο, συνεπώς δεν είναι τόσο γενική όσο θα έπρεπε. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια άλλη οπτική για τα εφαπτόμενα διανύσματα του \mathbb{R}^n , προκειμένου αυτά να γενικευθούν σε πολλαπλότητες. Η οπτική αυτή βρίσκεται στην έννοια της παραγώγου ως προς κατεύθυνση. Σημειώνεται ότι ο κλασικός/απλός ορισμός για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας είναι αρκετός, ωστόσο η ανάπτυξη που ακολουθεί είναι η πλέον γενική.

Θεωρούμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_p \mathbb{R}^n$ σε ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^n$, ως το διανυσματικό χώρο όλων των διανυσμάτων τα οποία έχουν αρχή το σημείο p . Λόγω της αντιστοιχίας μεταξύ διανυσμάτων και στηλών ενός $n \times 1$ ή $1 \times n$ πίνακα, ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n μπορεί να ταυτιστεί με τον εφαπτόμενο χώρο $T_p \mathbb{R}^n$. Για να διακρίνουμε μεταξύ σημείων και διανυσμάτων, θα συμβολίζουμε ένα σημείο του \mathbb{R}^n ως $p = (p^1, \dots, p^n)$ και ένα διάνυσμα στον εφαπτόμενο χώρο $T_p \mathbb{R}^n$ ως

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \eta, v = (v^1, \dots, v^n)$$

Αν e_1, \dots, e_n είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n ή του $T_p \mathbb{R}^n$, τότε $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$. Τα στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου $T_p \mathbb{R}^n$ θα ονομάζονται εφαπτόμενα διανύσματα ή απλώς διανύσματα.

Θεωρούμε την ευθεία στον \mathbb{R}^n η οποία διέρχεται από το σημείο $p = (p^1, \dots, p^n)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $v = (v^1, \dots, v^n)$. Η ευθεία αυτή έχει παραμετρηση

$$c(t) = (c^1(t), \dots, c^n(t)) = (p^1 + tv^1, \dots, p^n + tv^n)$$

Έστω f μια λεία πραγματική συνάρτηση σε μια περιοχή του σημείου p και έστω v ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο p . Τότε η παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο p ως προς τη διεύθυνση του διανύσματος v , είναι ο αριθμός (αν υπάρχει)

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(c(t))$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η απεικόνιση

$$D_v = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

που στέλνει μια λεία συνάρτηση f στον αριθμό $D_v f$. Έτσι ορίζεται η απεικόνιση $v \rightarrow D_v$, η οποία στέλνει κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v στην παράγωγο κατά κατεύθυνση D_v . Αυτός θα είναι ο τρόπος με τον οποίο θα χαρακτηρίσουμε/αναγνωρίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα, δηλαδή ως συγκεκριμένους τελεστές σε χώρο συναρτήσεων.

Εάν 2 συναρτήσεις παίρνουν τις ίδιες τιμές σε μια περιοχή ενός σημείου p , τότε θα έχουν και την ίδια παράγωγο ως προς κατεύθυνση στο p . Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των λείων συναρτήσεων που ορίζονται σε μια περιοχή του p . Συγκεκριμένα, έστω το σύνολο όλων των ζευγών (f, U) όπου U μια περιοχή του p και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση. Ορίζουμε τη σχέση $(f, U) \sim (g, V)$, αν υπάρχει ανοιχτό $W \subset U \cap V$ το οποίο να περιέχει το p ώστε $f|_W = g|_W$. Εύκολα προκύπτει ότι η \sim είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας (U, f) ονομάζεται σπόρος της f στο p . Συμβολίζουμε με C_p^∞ το σύνολο όλων των σπόρων των λείων συναρτήσεων στο p .

Η παράγωγος ως προς κατεύθυνση, όπως είδαμε, ορίζει μια απεικόνιση $D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, $f \rightarrow D_v f$ μεταξύ πραγματικών διανυσματικών χώρων, οποία είναι γραμμική και λόγω της βασικής σχέσης

$$D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$D_v(fg) = (D_v f)g(p) + f(p)(D_v g)$$

Γενικά μια γραμμική απεικόνιση η οποία είναι γραμμική και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz ονομάζεται παραγωγή (derivation) στο p . Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_p \mathbb{R}^n$ το σύνολο όλων των παραγωγίσεων στο p . Το σύνολο αυτό αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο (Αυτό είναι αρκετά άμεσο καθώς το άθροισμα 2 παραγωγίσεων προφανώς είναι παραγωγή, και το ίδιο ισχύει και για το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

Έχουμε λοιπόν ορίσει μια απεικόνιση

$$\phi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}_p \mathbb{R}^n, v \rightarrow D_v = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική.

Ισχύει ένα βασικό αποτέλεσμα το οποίο αποσαφηνίζει την εναλλακτική γραφή για τα εφαπτόμενα διανύσματα που απαντάται σε πολλά βιβλία (Πηγή [1])

Θεώρημα 1.1. Η γραμμική απεικόνιση $\phi : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}_p \mathbb{R}^n$, όπως ορίστηκε παραπάνω είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

(Για την απόδειξη που δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη παραπέμπουμε στην πηγή [2]).

Λόγω του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να ταυτίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα σε ένα σημείο p με τις παραγωγίσεις κατά σημείο. Μέσω του ισομορφισμού $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathcal{D}_p\mathbb{R}^n$, η κανονική βάση e_1, \dots, e_n του $T_p\mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί στο σύνολο των μερικών παραγώγων $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$. Συνεπώς μπορούμε να γράφουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $v = \sum v^i e_i$ ως

$$v = \sum v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

Σε κλασικά κείμενα διαφορικής γεωμετρίας αλλά και σε βιβλία μηχανικών (παραπέμπουμε στην πηγή [1]) αυτή είναι η συνηθισμένη γραφή για τα εφαπτόμενα διανύσματα.

Το επόμενο που θα μας απασχολήσει είναι η έννοια της παραγώγου ως προς κατεύθυνση ενός διανυσματικού πεδίου. Για το λόγο αυτό ας θυμηθούμε τον ορισμό του.

Ένα διανυσματικό πεδίο X σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του \mathbb{R}^n είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $p \in U$ ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_p\mathbb{R}^n$. Λόγω της παραπάνω σχέσης το διάνυσμα αυτό γράφεται ως

$$X_p = \sum \alpha^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, p \in U, \alpha^i(p) \in \mathbb{R}$$

Αν αγνοήσουμε το σημείο p , το πεδίο X γράφεται ως

$$X = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

όπου $\alpha^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ λείες συναρτήσεις. Το διανυσματικό πεδίο X ονομάζεται λείο αν οι συναρτήσεις α^i είναι λείες. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(U)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων στο U .

Στην ανάπτυξή μας εμφανίζεται πολλάκις η δράση ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε μια συνάρτηση αλλά και το αντίστροφο.

Έστω f μια λεία συνάρτηση στο U και X ένα λείο διανυσματικό πεδίο. Ορίζουμε το λείο διανυσματικό πεδίο fX με τιμή

$$(fX)_p = f(p)X_p$$

για κάθε $p \in U$. Συνεπώς αν $X = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, τότε $fX = \sum (f\alpha^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Αντίστοιχα, ορίζουμε τη συνάρτηση $Xf : U \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(Xf)_p = X_p f$$

για $p \in U$. Επιπλέον αν $X = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ τότε

$$(Xf)(p) = \sum \alpha^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

συνεπώς $Xf = \sum \alpha^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$, άρα η Xf είναι λεία. Είναι προφανές ότι η δράση ενός λείου διανυσματικού πεδίου σε μια συνάρτηση είναι πρακτικά η παράγωγος της συνάρτησης ως προς τη κατεύθυνση που ορίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα X_p που αντιστοιχεί στο σημείο p του διανυσματικού πεδίου X . Συνοψίζοντας, δοθέντος ενός λείου διανυσματικού πεδίου X , ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $f \rightarrow Xf$ στο σύνολο των λείων απεικονίσεων που ορίζονται στο U και μάλιστα ισχύει ένας κανόνας του Leibniz για διανυσματικά πεδία:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

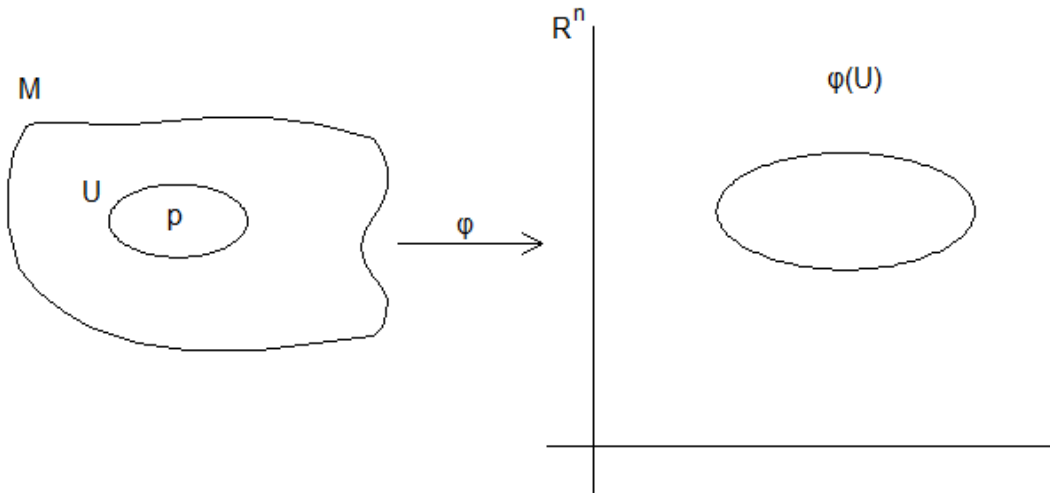
για κάθε f, g λείες που ορίζονται στο U . Από τον παραπάνω τύπο που θυμίζει έντονα τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων στην κλασική Ανάλυση, μπορούμε (σε ενδεχομένως πιο ελεύθερο ύφος) να πούμε ότι η δράση ενός διανυσματικού πεδίου σε μια συνάρτηση είναι υπό μια έννοια παραγωγή. Θα δώσουμε και άλλες πολύ σημαντικές ιδιότητες της παραγώγου ως προς κατεύθυνση, πρώτα όμως πρέπει να ορίσουμε μια νέα πράξη στα εφαπτόμενα διανύσματα μιας πολλαπλότητας, που είναι το γινόμενο Lie (Lie bracket). Αυτό θα το κάνουμε στην Παράγραφο 1.4.

1.2 Λείες Πολλαπλότητες

Μια λεία πολλαπλότητα είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο με την ιδιότητα σε κάθε σημείο του να υπάρχει μια περιοχή (που θα ονομάζεται χάρτης) ομοιομορφική με ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή οι πολλαπλότητες αποτελούν γενίκευση των καμπυλών και των επιφανειών σε μεγαλύτερες διαστάσεις.

Ορισμός 1.2 Έστω M ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff με αριθμήσιμη βάση (δηλαδή ισχύει το δεύτερο αξίωμα της αριθμησιμότητας). Ο M ονομάζεται *τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n* , αν για κάθε σημείο p στον M υπάρχει μια ανοιχτή περιοχή U του σημείου p και ένας ομοιομορφισμός $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, τέτοιος ώστε το $\phi(U)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . (Η τελευταία αυτή συνθήκη ονομάζεται τοπικά Ευκλείδεια δομή)

Το ζεύγος (U, ϕ) ονομάζεται *τοπικός χάρτης* ή *τοπικό σύστημα συντεταγμένων*.



Σχήμα 1.1: Τοπικός χάρτης (U, ϕ) της πολλαπλότητας M στο σημείο $p \in M$

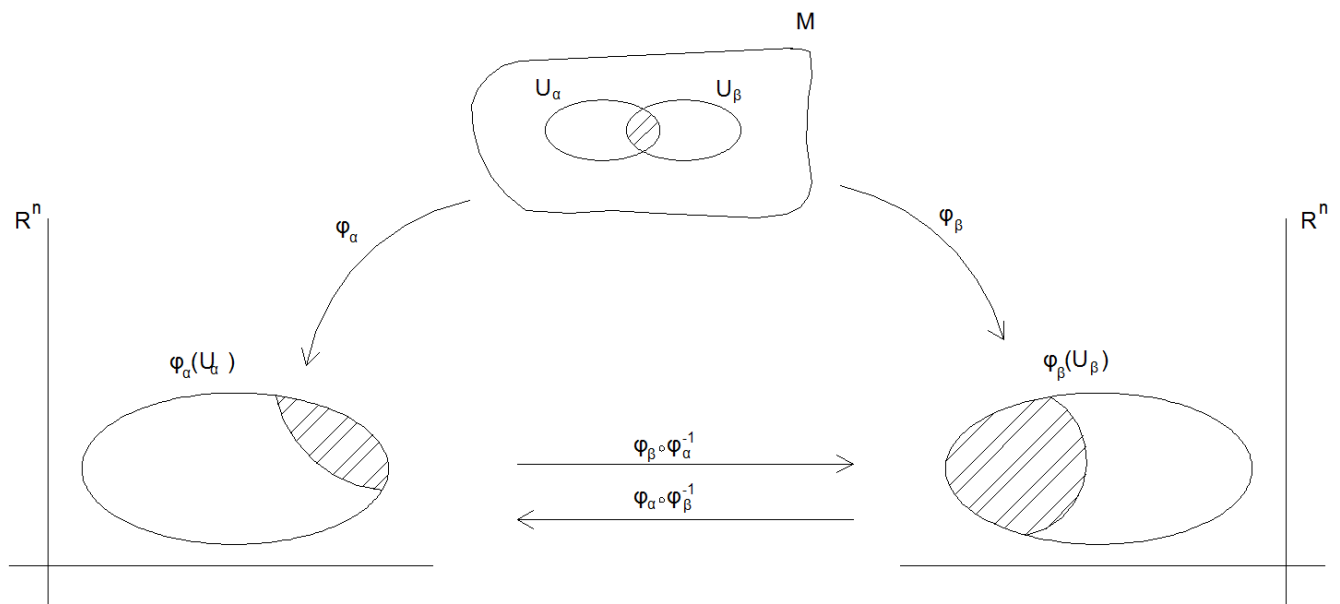
Η συνθήκη της τοπικά Ευκλείδειας δομής είναι απαραίτητη προκειμένου να ορίσουμε τη διαφορισιμότητα συναρτήσεων ορισμένων σε μια πολλαπλότητα. Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας τη διαφορισιμότητα συναρτήσεων μεταξύ ανοιχτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n (ακριβώς όπως την γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό)

Ορισμός 1.3 Έστω M μια τοπολογική πολλαπλότητα και $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ μια συλλογή χαρτών.

Η \mathcal{A} λέγεται *λείος άτλας*, εάν ισχύουν τα παρακάτω:

1. Η ένωση όλων των ανοιχτών συνόλων U_α καλύπτουν την M , δηλαδή $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. Για κάθε $\alpha, \beta \in I$, η απεικόνιση $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, καθώς και η αντίστροφη της $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ είναι λείες απεικονίσεις μεταξύ ανοιχτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n . Οι παραπάνω απεικονίσεις ονομάζονται απεικονίσεις μετάβασης.

Η ιδιότητα 2. αναφέρεται και ως λεία συμβατότητα των χαρτών $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$.



Σχήμα 1.2: Συναρτήσεις αλλαγής συντεταγμένων $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ των χαρτών (U_α, ϕ_α) και (U_β, ϕ_β) .

Η σχέση συμβατότητας μεταξύ 2 χαρτών προφανώς είναι ανακλαστική και συμμετρική, δεν είναι όμως μεταβατική. Παρόλα αυτά, αν ορίσουμε έναν χάρτη (U_ϕ) να είναι συμβατός με έναν άτλαντα $\{(U_a, \phi_a) : a \in I\}$, εάν είναι συμβατός με όλους τους χάρτες του άτλαντα, τότε η συμβατότητα είναι μεταβατική.

Ένας άτλαντας \mathcal{A} σε έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο ονομάζεται μεγιστικός άτλας, αν δεν περιέχεται σε κάποιον μεγαλύτερο άτλαντα. Με άλλα λόγια, αν \mathcal{B} ένας άλλος άτλας που περιέχει τον \mathcal{A} τότε $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Ορισμός 1.4 Μια λεία ή διαφορική πολλαπλότητα είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με έναν μεγιστικό λείο άτλαντα \mathcal{A} . Ο μεγιστικός άτλαντας ονομάζεται διαφορική δομή της M .

Για να αποδείξουμε ότι μια τοπολογική πολλαπλότητα M είναι μια λεία πολλαπλότητα, αρκεί να κατασκευάσουμε έναν λείο άτλαντα αυτής, όχι αναγκαστικά κάποιον μεγιστικό, καθώς γνωρίζουμε από σχετικό αποτέλεσμα ότι κάθε άτλαντας περιέχεται σε έναν μοναδικό μεγιστικό άτλαντα.

1.3 Λείες απεικονίσεις

Όσον αφορά τις συναρτήσεις συντεταγμένων αυτές έχουν κάποιες πολύ σημαντικές και χρήσιμες ιδιότητες. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε τον ορισμό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Γενικά, η έννοια της διαφορισμότητας μιας απεικόνισης μεταξύ Ευκλείδειων χώρων μπορεί να επεκταθεί σε πολλαπλότητες. Συνεπώς ο παρακάτω ορισμός είναι πολύ φυσιολογικός.

Ορισμός 1.5 Έστω M μια λεία πολλαπλότητα, και συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ και $p \in M$.

1. Η f ονομάζεται λεία ή C^∞ στο p , αν υπάρχει χάρτης (U, ϕ) ώστε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι λεία στο $\phi(p)$ (ως απεικόνιση μεταξύ Ευκλείδειων χώρων)
2. Η f ονομάζεται λεία, αν είναι λεία σε κάθε σημείο $p \in M$.

Παρατήρηση: Ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη (U, ϕ) . Πράγματι, αν (V, ψ) είναι ένας άλλος χάρτης στο $p \in M$ τότε στο σύνολο $\psi(U \cap V)$ θα έχουμε ότι $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$ η οποία είναι διαφορίσιμη στο $\psi(p)$.

Ερχόμαστε τώρα στον ορισμό μιας λείας συνάρτησης μεταξύ πολλαπλοτήτων, όπου όπως θα δούμε συνιστά μια απλή γενίκευση του προηγούμενου.

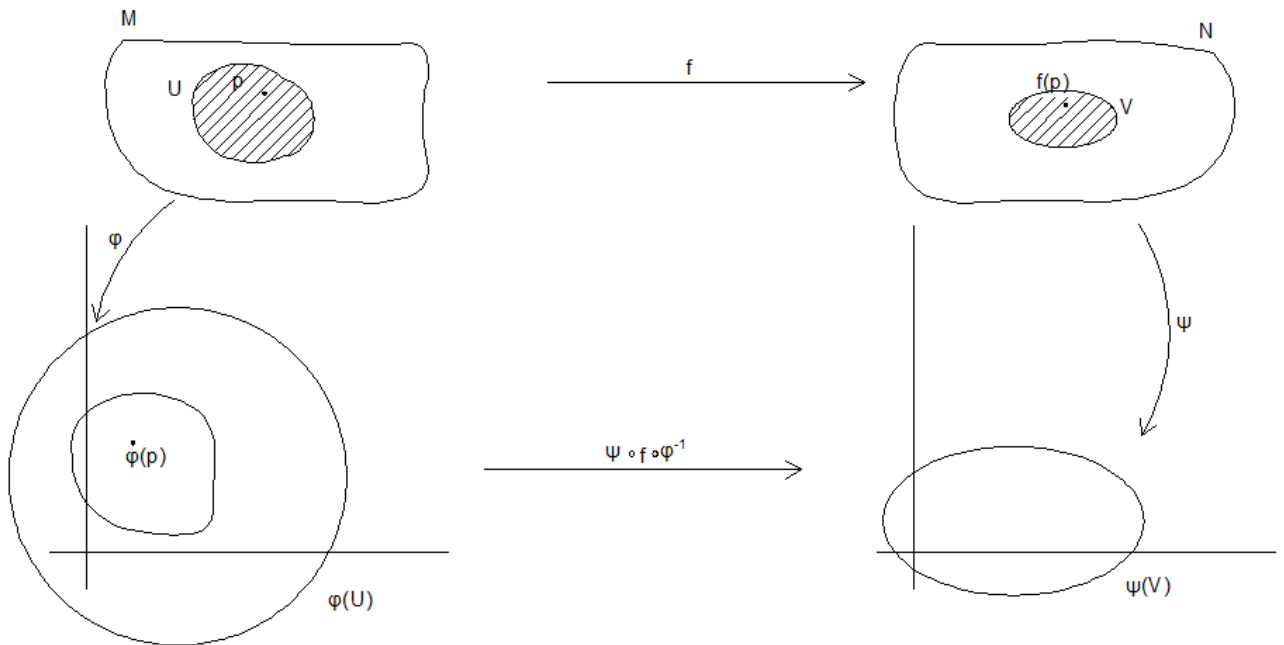
Ορισμός 1.6 Έστω M και N πολλαπλότητες διάστασης m και n αντίστοιχα, $f : M \rightarrow N$ συνεχής απεικόνιση και $p \in M$.

1. Η f ονομάζεται λεία στο p , αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) στο p και (V, ψ) στο $f(p)$ ώστε η τοπική αναπαράσταση της

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\phi(p)$ (ως απεικόνιση μεταξύ Ευκλείδειων χώρων)

2. η f ονομάζεται λεία αν είναι λεία σε κάθε σημείο $p \in M$.



Σχήμα 1.3: Τοπική αναπαράσταση $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ της απεικόνισης $f : M \rightarrow N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Όπως και στην περίπτωση μιας πραγματικής συνάρτησης ορισμένης σε μια πολλαπλότητα M , ο παραπάνω ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη. Αναφορικά με τον χαρακτηρισμό λείων συναρτήσεων θα λέμε ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : M \rightarrow N$ είναι λεία αν και μόνον αν για κάθε χάρτη (U, ϕ) της M και (V, ψ) η συνάρτηση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι λεία, ή ισοδύναμα αν και μόνον αν οι πολλαπλότητες M και N έχουν άτλαντες \mathcal{A} και \mathcal{B} ώστε για κάθε χάρτη (U, ϕ) στον \mathcal{A} και για κάθε χάρτη (V, ψ) στον \mathcal{B} η απεικόνιση

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι λεία.

Πριν προχωρήσουμε σε μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα των συναρτήσεων συντεταγμένων δίνουμε έναν βασικό ορισμό που θα μας αποσχολήσει στα επόμενα.

Ορισμός 1.7. Μια λεία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ μεταξύ πολλαπλοτήτων ονομάζεται αμφιδιαφόριση αν είναι 1-1, επί και η αντίστροφή της f^{-1} είναι λεία. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι πολλαπλότητες είναι αμφιδιαφορικές.

Ισχύουν τα εξής σημαντικά (για την απόδειξη των οποίων παραπέμπουμε στην πηγή [8])

Πρόταση 1.2. Έστω M μια πολλαπλότητα διάστασης n και (U, ϕ) ένας χάρτης της. Τότε η συνάρτηση συντεταγμένων $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια αμφιδιαφόριση.

Ισχύει και το αντίστροφο αυτού:

Πρόταση 1.3. Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο μιας πολλαπλότητας M διάστασης n . Αν $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι μια αμφιδιαφόριση και το $f(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , τότε το ζεύγος (U, f) είναι ένας χάρτης που ανήκει στη διαφορική δομή της M , δηλαδή στον μεγιστικό λείο άτλαντα.

Ακολουθούν κάποια παραδείγματα με έμφαση στις κλασικές ομάδες Lie πινάκων που θα μας χρειαστούν στην ανάπτυξη μας.

Παραδείγματα.

1. Ο Ευκλείδιος χώρος \mathbb{R}^n καλύπτεται με έναν χάρτη $U = \mathbb{R}^n, \phi = Id_{\mathbb{R}^n}$, άρα είναι μια πολλαπλότητα διάστασης n .
2. Έστω M μια πολλαπλότητα διάστασης n με άτλαντα $\{(U_a, \phi_a)\}$ και έστω V ένα ανοιχτό υποσύνολο της M . Τότε και το V είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης n αφού μπορούμε να ορίσουμε στο V έναν άτλαντα με περιορισμό των χαρτών (U_a, ϕ_a) στο V δηλαδή $\{(V \cap U_a, \phi_a|_{V \cap U_a})\}$
3. Το κλασικό παράδειγμα μιας λείας πολλαπλότητας διάστασης n είναι η σφαίρα

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

Ας δούμε για ευκολία τη σφαίρα S^2 . Έστω $N = \{(0, 0, 1)\}$ και $S = \{(0, 0, -1)\}$ ο βόρειος και ο νότιος πόλος αντίστοιχα. Ορίζουμε δύο χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) της S^2 ως εξής: $U = S^2 \setminus \{N\}, V = S^2 \setminus \{S\}$ και

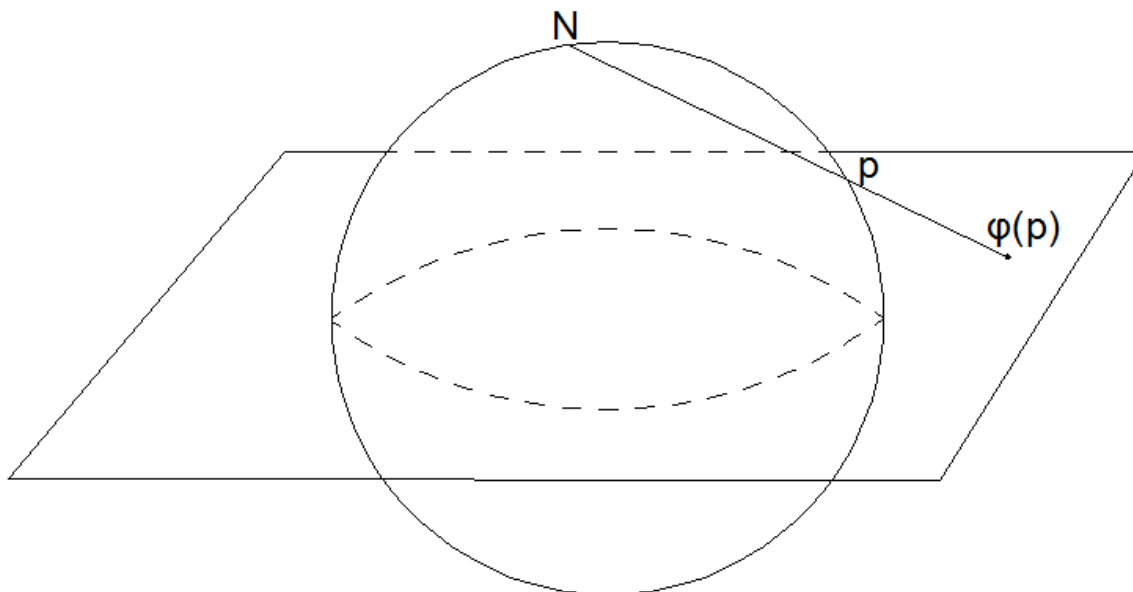
$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$$

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right)$$

οι στερεογραφικές προβολές. Οι απεικονίσεις ϕ, ψ είναι 1-1 με αντίστροφες τις

$$\phi^{-1}(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{2u_2}{u_1^2 + u_2^2 + 1}, \frac{u_1^2 + u_2^2 - 1}{u_1^2 + u_2^2 + 1} \right)$$

$$\psi^{-1}(v_1, v_2) = \left(\frac{2v_1}{v_1^2 + v_2^2 + 1}, \frac{2v_2}{v_1^2 + v_2^2 + 1}, \frac{1 - v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2 + 1} \right)$$



Σχήμα 1.4: Στερεογραφική προβολή

Είναι $\mathbb{S}^2 = U \cup V$ και η \mathbb{S}^2 έχει την επαγόμενη τοπολογία του \mathbb{R}^3 . Είναι προφανές από τα παραπάνω ότι τόσο οι ϕ, ψ είναι συνεχείς στους χάρτες τους και έχουν συνεχείς αντίστροφες, άρα είναι ομοιομορφισμοί. Επιπλέον η σύνθεση

$$\psi \circ \phi^{-1}(u_1, u_2) = \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2}, \frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \right)$$

είναι διαφορίσιμη στο ανοιχτό $\phi(U \cap V) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2) \neq (0, 0)\}$. Αντίστοιχα

$$\phi \circ \psi^{-1}(v_1, v_2) = \left(\frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2} \right)$$

Άρα ο $\mathcal{A} = \{(U, \phi), (V, \psi)\}$ είναι ένας λείος άτλαντας της \mathbb{S}^2 , συνεπώς η σφαίρα \mathbb{S}^2 είναι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης 2.

4. Το σύνολο $\mathbb{R}^{m \times n}$ ή $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ όλων των $(m \times n)$ πραγματικών πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης mn . Ως τοπολογικός χώρος είναι ομοιομορφικός με τον \mathbb{R}^{mn} και σύμφωνα με το παράδειγμα 1 είναι μια πολλαπλότητα διάστασης mn .
5. Το σύνολο $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times n}$ άρα σύμφωνα με το παράδειγμα 2 είναι πολλαπλότητα διάστασης n^2 . Το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ είναι επιπλέον μια ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων και ονομάζεται γενική γραμμική ομάδα. Είναι το βασικότερο ίσως παράδειγμα ομάδας Lie πινάκων και θα ασχοληθούμε αρκετά μαζί της καθώς και με τις υποομάδες της στο επόμενο κεφάλαιο.
6. Το σύνολο $SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^T = I, \det A = 1\}$ ονομάζεται ειδική ορθογώνια ομάδα. Θα δείξουμε στα επόμενα ότι είναι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης $\frac{n(n-1)}{2}$ χωρίς όμως την αναλυτική περιγραφή χαρτών, αλλά εκμεταλλευόμενοι την αλγεβρική φύση της. Μπορούμε να δούμε κάποιες περιπτώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε:
 - (α) $n = 1$. Το σύνολο $SO(1) = \{1\}$ είναι πολλαπλότητα διάστασης 0
 - (β') $n = 2$. Με απλό υπολογισμό προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} SO(2) &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = d, b = -c, ad - bc = 1 \right\} \\ &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \end{aligned}$$

συνεπώς η ομάδα $SO(2)$ είναι ομοιομορφική με τον κύκλο \mathbb{S}^1 , άρα είναι πολλαπλότητα διάστασης 1.

(γ) $n = 3$. Η ομάδα $SO(3)$ είναι πιο περίπλοκη στην περιγραφή. Γεωμετρικά κάθε στοιχείο της $SO(3)$ παριστά μια στροφή στον \mathbb{R}^3 κατά γωνία θ περί μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή. Επειδή η ευθεία αυτή καθορίζεται από 2 γωνίες ϕ και ψ , μπορούμε διαισθητικά να πούμε ότι είναι μια πολλαπλότητα διάστασης 3. Οι παραπάνω γωνίες είναι γνωστές ως γωνίες του Euler.

1.4 Το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Θα μεταφέρουμε την έννοια της μερικής παραγώγου από έναν Ευκλείδειο χώρο σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων μια πολλαπλότητας, ώστε να γενικεύσουμε το κλασικό θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό μπορούμε να διατυπώσουμε ένα απλό κριτήριο για το πότε ένα σύνολο λείων (πραγματικών) απεικονίσεων αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων στην περιοχή ενός σημείου της πολλαπλότητας. Επιπλέον, σε μερικές περιπτώσεις, θα μπορούμε να αποδεικνύουμε ευκολότερα ότι ένα σύνολο είναι μια λεία πολλαπλότητα.

Έστω f μια λεία (πραγματική) συνάρτηση ορισμένη σε ένα χάρτη $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ μιας πολλαπλότητας M και έστω $p \in U$. Στο εξής θα συμβολίζουμε με u^1, \dots, u^n τις συντεταγμένες του \mathbb{R}^n . Τότε η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : (u^1, \dots, u^n) \rightarrow f(\phi^{-1}(u^1, \dots, u^n))$ ορίζεται στο ανοιχτό $\phi(U)$ που περιέχει το $\phi(p)$ άρα ορίζονται οι συνήθεις μερικές παράγωγοι

$$\left. \frac{\partial}{\partial u^n} (f \circ \phi^{-1}) \right|_{\phi(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial u^1} (f \circ \phi^{-1}) \right|_{\phi(p)}$$

τις οποίες συμβολίζουμε με

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial f}{\partial x^n} \right|_p$$

Αυτές ονομάζονται μερικές παράγωγοι της f ως προς x^i στο σημείο p όπου $x^i = u^i \circ \phi$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι λείες στο U επειδή οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \phi^{-1}$ είναι λείες στο $\phi(U)$.

Οι μερικές παράγωγοι σε μια πολλαπλότητα ικανοποιούν την εξής ιδιότητα, αντίστοιχη των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων του \mathbb{R}^n .

Πρόταση 1.4 Έστω (U, x^1, \dots, x^n) ένας τοπικός χάρτης μιας πολλαπλότητας. Τότε ισχύει $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$

Απόδειξη Η απόδειξη είναι πολύ απλή και βασίζεται στην ιδέα ότι η παραγώγιση γίνεται στον \mathbb{R}^n . Πράγματι έστω $p \in U$. Τότε εξόρισμού της μερικής παραγώγου έχουμε ότι

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (x^i \circ \phi^{-1})}{\partial u^j}(\phi(p)) = \frac{\partial (u^i \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial u^j}(\phi(p)) = \frac{\partial u^i}{\partial u^j}(\phi(p)) = \delta_j^i$$

Ορισμός 1.8 Έστω $f : M \rightarrow N$ μια λεία απεικόνιση και έστω $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n)), (V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ δυο χάρτες στις πολλαπλότητες M και N αντίστοιχα τέτοιοι ώστε $f(U) \subset V$. Συμβολίζουμε με f^i την απεικόνιση $y^i \circ f = u^i \circ \psi \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ δηλαδή την i -συντεταγμένη της f στο χάρτη (V, ψ) . Ο πίνακας $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$ ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας της f ως προς τους χάρτες $(U, \phi), (V, \psi)$. Εάν οι πολλαπλότητες έχουν την ίδια διάσταση, τότε η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα ονομάζεται Ιακωβιανή ορίζουσα και συμβολίζεται ως $\frac{\partial (f^1, \dots, f^n)}{\partial (x^1, \dots, x^n)}$.

Μια λεία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ ονομάζεται τοπικά αντιστρέψιμη η τοπική αμφιδιαφόριση σε ένα σημείο $p \in M$, εάν υπάρχει μια περιοχή του p στην οποία η απεικόνιση $f|_U : U \rightarrow f(U)$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Υπενθυμίζεται το κλασικό θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης στον \mathbb{R}^n). Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια λεία απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του \mathbb{R}^n και έστω $p \in A$. Τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p αν και μόνον αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial (f^1, \dots, f^n)}{\partial (x^1, \dots, x^n)}$ είναι μη μηδενική.

Λόγω του τοπικού χαρακτήρα του, το θεώρημα γενικεύεται εύκολα σε πολλαπλότητες.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για πολλαπλότητες). Έστω $f : M \rightarrow N$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων ίδιας διάστασης και έστω $p \in M$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν χάρτες $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ στο p και $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ στο $f(p)$ ώστε $f(U) \subset V$. Έστω $f^i = y^i \circ f$. Τότε η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p αν και μόνον αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $\frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}$ είναι μη μηδενική.

Απόδειξη. Ο Ιακωβιανός πίνακας της f ως προς τους χάρτες $(U, \phi), (V, \psi)$ είναι:

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right) = \left(\frac{\partial(u^i \circ \psi \circ f)}{\partial x^j}(p) \right) = \left(\frac{\partial(u^i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial u^j}(\phi(p)) \right),$$

ο οποίος είναι ο Ιακωβιανός πίνακας στο σημείο $\phi(p)$ της απεικόνισης $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \supset \phi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, μεταξύ ανοιχτών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n . Λόγω του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης στον \mathbb{R}^n θα ισχύει:

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right) = \det \left(\frac{\partial(u^i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial u^j}(\phi(p)) \right) \neq 0$$

αν και μόνον αν η $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο $\phi(p)$. Επειδή οι συναρτήσεις ϕ και ψ είναι αμφιδιαφορίσεις, το τελευταίο συμπέρασμα ισοδυναμεί με το ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p .

Η βασική εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων είναι στο να αποφασίσουμε κατά πόσον ένα σύνολο που περιέχει n λείες συναρτήσεις f^1, \dots, f^n σε μια περιοχή ενός σημείου p μια πολλαπλότητας M , αποτελούν ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο p ενδεχομένως σε μια μικρότερη περιοχή. Αυτό ακριβώς διατυπώνουμε παρακάτω ως πρόρισμα.

Πρόρισμα 1.1 Έστω M μια πολλαπλότητα διάστασης n . Ένα σύνολο από λείες συναρτήσεις f^1, \dots, f^n ορισμένες σε μια περιοχή συντεταγμένων (U, x^1, \dots, x^n) ενός σημείου $p \in M$ αποτελεί ένα σύστημα συντεταγμένων στο p αν και μόνον αν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μη μηδενική.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = (f^1, \dots, f^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για πολλαπλότητες η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right)$ είναι μη μηδενική αν και μόνον αν η $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p . Αυτό ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει μια περιοχή W στην M , ώστε η $f : W \rightarrow f(W)$ να είναι μια αμφιδιαφόριση (από τον ορισμό της τοπικής αντιστρεψιμότητας). Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.2 η τελευταία διατύπωση ισοδυναμεί με το ότι το σύνολο (W, f^1, \dots, f^n) αποτελεί έναν τοπικό χάρτη στο p , ο οποίος ανήκει στη διαφορική δομή της M .

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1, x)$. Λόγω του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης, η f είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση στο $p = (x, y)$ αν και μόνον αν

$$\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2y \neq 0$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις $f^1 = x^2 + y^2 - 1$ και $f^2 = x$ είναι δυνατό να αποτελέσουν ένα σύστημα συντεταγμένων για οποιοδήποτε σημείο $p \in \mathbb{R}^2$, εκτός των σημείων που βρίσκονται στον άξονα των x .

1.5 Ο εφαπτόμενος χώρος

Η βασική δυσκολία με τη θεωρία πολλαπλοτήτων είναι ότι αυτή αναπτύσσεται χωρίς να λαμβάνεται υπόψη κάποια πιθανή εμφύτευση της λείας πολλαπλότητας σε έναν Ευκλείδειο χώρο. Συνεπώς έννοιες που αντιμετωπίστηκαν με σχετική ευκολία στη θεωρία επιφανειών (όπως εφαπτόμενος χώρος, καμπυλότητα) χρειάζονται διαφορετικό χειρισμό.

Έχοντας ορίσει την έννοια της λείας απεικόνισης μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, θα προχωρήσουμε στον ορισμό του διαφορικού μιας λείας απεικόνισης. Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$ μιας πολλαπλότητας M σε ένα σημείο p . Τα εφαπτόμενα διανύσματα θα τα αναγνωρίζουμε ως παραγωγίσεις στο σημείο p . Η γενική αρχή είναι

ότι ο εφαπτόμενος χώρος αποτελεί τη βέλτιστη προσέγγιση μιας πολλαπλότητας σε ένα σημείο της, και το διαφορικό τη βέλτιστη προσέγγιση μιας λείας συνάρτησης σε ένα σημείο.

Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο $C_p^\infty(M)$ όλων των σπόρων των πραγματικών συναρτήσεων σε μια περιοχή του σημείο p . Η σημειακή πρόσθεση και πολλαπλασιασμός εφοδιάζουν το παραπάνω σύνολο με δομή δακτυλίου. Επιπλέον, με πράξη το βαθμωτό πολλαπλασιασμό από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το σύνολο αυτό εφοδιάζεται με δομή πραγματικής άλγεβρας.

Ορισμός 1.9. Έστω M μια λεία πολλαπλότητα και έστω $p \in M$. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της M στο p είναι μια απεικόνιση:

$$v : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

1. $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$ (γραμμικότητα)
2. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ (κανόνας Leibniz)

για κάθε $f, g \in C_p^\infty(M)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Με άλλα λόγια ένα εφαπτόμενο διάνυσμα είναι μια παραγωγή κατά σημείο στο σύνολο $C_p^\infty(M)$. Συμβολίζουμε με $T_p M$ το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων της M στο p . Αυτό το σύνολο θα ονομάζουμε ως *εφαπτόμενο χώρο* της πολλαπλότητας M στο σημείο p . Εύκολα προκύπτει ότι το σύνολο αυτό έχει δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου.

Στην παραπάνω θεώρηση τα εφαπτόμενα διανύσματα δρουν πάνω σε λείες συναρτήσεις και το αποτέλεσμα αυτής της δράσης είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό και μόνο συνιστά μια ουσιαστική διαφορά σε ο,τι ως τώρα γνωρίζαμε για τα εφαπτόμενα διανύσματα. Προκειμένου να υπάρξει μια σχετική εξικώωση δίνουμε τα 2 παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Έστω $M = \mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τον κανονικό άτλαντα $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$. Τότε οι συναρτήσεις

$$e_i : f \rightarrow \frac{\partial f}{\partial u^i}(p), 1 \leq i \leq n$$

είναι εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο $p = (p_1, \dots, p_n)$. Τα διανύσματα $\left. \frac{\partial}{\partial u^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial u^n} \right|_p$, αποτελούν μια βάση του $T_p \mathbb{R}^n$, άρα

$$T_p \mathbb{R}^n = \left\{ \lambda_1 \left. \frac{\partial}{\partial u^1} \right|_p + \dots + \lambda_n \left. \frac{\partial}{\partial u^n} \right|_p : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

. Σημειώνεται ξανά αυτό που αναφέραμε πριν το παράδειγμα, ότι δηλαδή η παραπάνω περιγραφή των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι κάπως διαφορετική από τη διαισθητική μας άποψη ότι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα έχει τη μορφή $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Έστω $(U, \phi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ ένας τοπικός χάρτης στο p μια πολλαπλότητας M , όπου $x^i = u^i \circ \phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$. Για κάθε $f \in C_p^\infty(M)$ ορίζουμε

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \left. \frac{\partial}{\partial u^i} (f \circ \phi^{-1}) \right|_{\phi(p)}$$

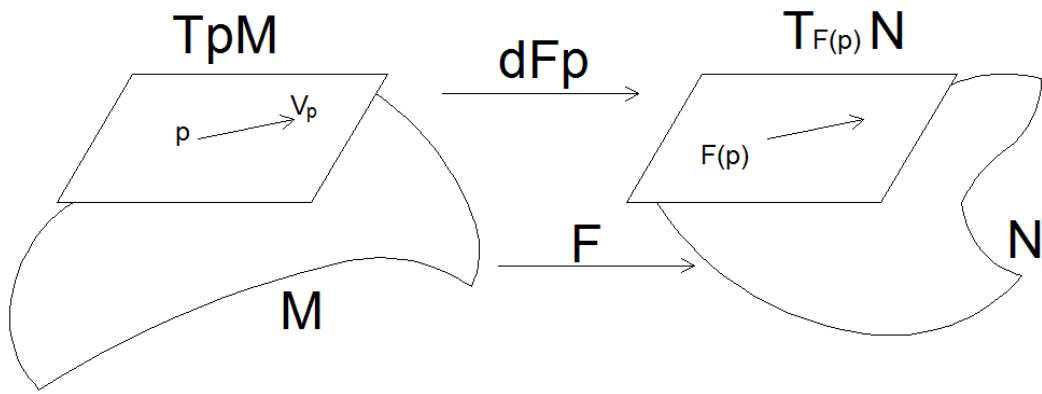
Οι ποσότητες $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ είναι παραγωγίσεις στο p , άρα εφαπτόμενα διανύσματα της πολλαπλότητας M στο p .

Έχοντας ορίσει τον εφαπτόμενο χώρο μιας λείας πολλαπλότητας σε ένα σημείο της μπορούμε να ορίσουμε το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 1.10. Έστω M και N λείες πολλαπλότητες, $F : M \rightarrow N$ μια λεία απεικόνιση και $p \in M$. Το διαφορικό (ή παράγωγος) της F στο p είναι η απεικόνιση $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ με τιμή

$$dF_p(v_p)(f) = v_p(f \circ F)$$

για κάθε $v_p \in T_p M, f \in C_p^\infty(M)$



Σχήμα 1.5: Το διαφορικό dF_p μιας απεικόνισης $F : N \rightarrow M$ στο σημείο $p \in M$.

Παράδειγμα. Έστω $M = \mathbb{R}^n$, $N = \mathbb{R}^m$ με συντεταγμένες $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m$ αντίστοιχα. Θεωρούμε μια λεία συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ στο σημείο $p \in \mathbb{R}^n$. Θυμίζουμε ότι το σύνολο $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ αποτελεί μια βάση του $T_p \mathbb{R}^n$ και το σύνολο $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_{F(p)} \right\}$ αποτελεί μια βάση του $T_{F(p)} \mathbb{R}^m$. Η γραμμική απεικόνιση $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ καθορίζεται από τον πίνακα (a_j^i) που ορίζεται ως εξής

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_k \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)}, \alpha_j^k \in \mathbb{R}$$

Έστω $F^i = y^i \circ f$ η i -συνιστώσα της F . Εφαρμόζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης στις συναρτήσεις y^i ($i = 1, \dots, m$), προκύπτει ότι το δεξί μέλος ισούται με

$$\left(\sum_k \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{F(p)} \right) y^i = \sum_k \alpha_j^k \delta_k^i = \alpha_j^i$$

και το αριστερό μέλος ισούται με

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) y^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} (p)$$

Άρα ο πίνακας του διαφορικού ως προς τις παραπάνω βάσεις είναι ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} (p) \right)$$

Συνεπώς, το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων γενικεύει τη γνωστή μας παράγωγο μιας απεικόνισης μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται και όταν οι πολλαπλότητες είναι τυχούσες (λόγω της απαίτησης της τοπικά Ευκλείδειας δομής), και προκειμένου να το διατυπώσουμε χρειαζόμαστε μια σειρά από αποτελέσματα.

Πρόταση 1.5. (Κανόνας της αλυσίδας) Έστω $F : M \rightarrow N$ και $G : N \rightarrow P$ λείες συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων και έστω $p \in M$. Τότε ισχύει $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.

Απόδειξη. Έστω $X_p \in T_p N$ λεία συνάρτηση στο $G(F(p))$. Αν δούμε ως απεικόνιση το $G \circ F : M \rightarrow P$ το διαφορικό της θα είναι κατά τον ορισμό:

$$d(G \circ F)(X_p)(f) = X_p(f \circ G \circ F)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $dG_{F(p)} \circ dF_p = f \circ G \circ F$.

Είναι: $(dG_{F(p)} \circ dF_p)(X_p)(f) = (dG_{F(p)}(dF_p(X_p)))(f) = dF_p(X_p)(f \circ G) = X_p(f \circ G \circ F)$ όπου στην πρώτη ισότητα εκμεταλλευτήκαμε ότι το $(dF_p(X_p))$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην N και στη δεύτερη και τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του διαφορικού.

Το διαφορικό της ταυτοτικής απεικόνισης $Id_M : M \rightarrow M$ σε κάθε σημείο $p \in M$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Αυτό προκύπτει πολύ εύκολα με έναν απλό υπολογισμό:

Πράγματι, για κάθε $v_p \in T_p M$ και f λεία είναι:

$$(dId_M(v_p))f = v_p(f \circ Id_M) = v_p f$$

Πόρισμα 1.2. Έστω $F : M \rightarrow N$ μια αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων και έστω $p \in M$. Τότε το διαφορικό $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Απόδειξη. Αφού η F είναι αμφιδιαφόριση θα έχει μια λεία αντίστροφη $G : N \rightarrow M$ τέτοια ώστε $G \circ F = Id_M$ και $f \circ G = Id_N$. Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτουν οι σχέσεις $d(G \circ F)_p = Id_{T_p M}$ και $d(F \circ G)_{F(p)} = Id_{T_{F(p)} N}$,

άρα οι απεικονίσεις dF_p και $dG_{F(p)}$ είναι ισομορφισμοί.

Θα βρούμε τώρα μια βάση του εφαπτόμενου χώρου T_pM . Υπενθυμίζουμε ότι αν (U, ϕ) ένας χάρτης συντεταγμένων σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M τότε η απεικόνιση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αμφιδιαφόριση επί του $\phi(U)$, και έτσι από το πρόγραμμα 5.1 το διαφορικό $d\phi : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Για το λόγο ότι ορίζουμε ως διάσταση μιας πολλαπλότητας τη διάσταση του εφαπτόμενου χώρου της, το παραπάνω συμπέρασμα δείχνει με σαφήνεια ότι η διάσταση μιας πολλαπλότητας είναι καλά ορισμένη.

Πρόταση 1.6. Έστω $(U, \phi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ ένας χάρτης σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M . Τότε

$$d\phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\phi(p)}$$

όπου $x^i = u^i \circ \phi$ και u^1, \dots, u^n οι κανονικές συντεταγμένες του \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Έστω $f \in C_p^\infty(N)$. Τότε από τον ορισμό του διαφορικού

$$d\phi_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) f = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\phi(p)} f$$

που είναι το ζητούμενο.

Φαίνεται από την παραπάνω πρόταση ότι το διαφορικό της απεικόνισης της συνάρτησης συντεταγμένων (λόγω του ότι είναι ισομορφισμός) απεικονίζει τη βάση του \mathbb{R}^n στη βάση του T_pM . Αυτό είναι το περιεχόμενο της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 1.7 Έστω $(U, \phi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ ένας χάρτης σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M . Τότε το σύνολο

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

αποτελεί μια βάση του εφαπτόμενου χώρου T_pM .

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ένας ισομορφισμός απεικονίζει βάσεις σε βάσεις. Λόγω της πρότασης 5.2 ο ισομορφισμός $d\phi : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$ στέλνει το σύνολο $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ στο σύνολο $\frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_{\phi(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \Big|_{\phi(p)}$ το οποίο αποτελεί βάση του $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$, απόπου προκύπτει το αποτέλεσμα.

Θα κλείσουμε το τμήμα αυτό με μια τοπική έκφραση του διαφορικού, η οποία γενικεύει τη γνωστή έκφραση του διαφορικού μιας διαφορίσιμης συνάρτησης μεταξύ Ευκλείδειων χώρων.

Πρόταση 1.8 Έστω $F : M \rightarrow N$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων, $p \in M$ και έστω $(U, x^1, \dots, x^n), (V, y^1, \dots, y^m)$ τοπικοί χάρτες στα σημεία $p \in M$ και $F(p) \in N$. Τότε ως προς τις βάσεις $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\}$ του T_pM και $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{F(p)} \right\}$ του $T_{F(p)}N$, το διαφορικό $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ παρίσταται από τον πίνακα $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} (p) \right)$, όπου $F^i = y^i \circ F$ η i -συνιστώσα της F .

Όπως ειπώθηκε στην εισαγωγή, κυρίαρχο ρόλο στην ανάπτυξή μας θα αποτελέσουν οι ομάδες Lie. Όταν θελήσουμε να περιγράψουμε τον εφαπτόμενο χώρο μιας τέτοιας ομάδας ο ορισμός του διαφορικού όπως δόθηκε παραπάνω δεν είναι ιδιαίτερα χρηστικός ή βολικός. Για αυτόν τον λόγο, στο τελευταίο αυτό τμήμα της παραγράφου θα επιχειρήσουμε να δώσουμε έναν εναλλακτικό αλλά ισοδύναμο ορισμό του διαφορικού μιας λείας απεικόνισης, και συγχρόνως θα επιτύχουμε μια πιο "φυσική" ερμηνεία του εφαπτόμενου διανύσματος. Το μέσον για το σκοπό αυτό είναι οι καμπύλες σε πολλαπλότητα.

Μια λεία καμπύλη σε μια πολλαπλότητα M είναι μια λεία απεικόνιση $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ όπου (a, b) είναι ένα ανοιχτό διάστημα για το οποίο υποθέτουμε τακτικά ότι περιέχει το μηδέν. Μια καμπύλη γ έχει αρχή το p αν $\gamma'(0) = p$. Το διάνυσμα ταχύτητας $\gamma'(t_0)$ της καμπύλης γ τη χρονική στιγμή $t_0 \in (a, b)$ (ή στο σημείο $\gamma(t_0)$) ορίζεται ως

$$\gamma'(t_0) = d\gamma_{\gamma(t_0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \right) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

Αν συμβολίσουμε με $\dot{\gamma}(t_0)$ τη συνηθισμένη παράγωγο στο σημείο t_0 (όπως τη γνωρίζουμε από την στοιχειώδη ανάλυση) τότε είναι θέμα απλών πράξεων να δει κανείς ότι οι 2 παράγωγοι συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση

$$\gamma'(t) = \dot{\gamma}(t) \frac{d}{dx} \Big|_{\gamma(t)}$$

Σε επίπεδο πολλαπλότητας η γενίκευση είναι αρκετά απλή. Αν $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ μια λεία πολλαπλότητα και (U, x^1, \dots, x^n) ένας τοπικός χάρτης στο σημείο $\gamma(t)$ τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t)$ εκφράζεται ως

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$$

όπου $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ είναι η i -συντεταγμένη της καμπύλης γ στον χάρτη U . Συνεπώς η ταχύτητα $\gamma'(t)$ ως προς τη βάση $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_{\gamma(t)}M$, παρίσταται από το διάνυσμα $(\dot{\gamma}^1(t), \dots, \dot{\gamma}^n(t))$.

Η απόδειξη αυτού είναι αρκετά απλή καθώς εφόσον το σύνολο $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ είναι βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_{\gamma(t)}M$ αρκεί μόνον να βρούμε συντελεστές α^i ώστε να ισχύει η ισότητα $\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Όπως έχουμε ξανακάνει και στα προηγούμενα, εφαρμόζοντας και στα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης τη συντεταγμένη x^j θα έχουμε:

$$\alpha^j = \left(\sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) x^j = \gamma'(t)x^j = d\gamma_{\gamma(t)} \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(x^j \circ \gamma) = \frac{d}{dt}\gamma^j = \dot{\gamma}^j(t)$$

Κάθε λεία καμπύλη γ που διέρχεται από ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M ορίζει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(0)$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM . Ισχύει και το αντίστροφο αυτού, δηλαδή για κάθε σημείο $p \in M$ και για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $v_p \in T_pM$ υπάρχει καμπύλη γ ώστε $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v_p$.

Χρησιμοποιώντας καμπύλες σε μια πολλαπλότητα μπορούμε να δώσουμε μια εμνηεία ενός εφαπτόμενου διανύσματος, γνωστή ως *φυσική εμνηεία* των εφαπτόμενων διανυσμάτων.

Πρόταση 1.9. Έστω v_p ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M και έστω $f \in C_p^\infty(M)$. Αν $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη που διέρχεται από το σημείο p τέτοια ώστε $\gamma'(0) = v_p$ τότε

$$v_p f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

Το παραπάνω μπορούμε να το δείξουμε πολύ εύκολα λαμβάνοντας μόνον υπόψη τους ορισμούς. Πράγματι έχουμε

$$v_p f = \gamma'(0)f = d\gamma_{\gamma(0)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

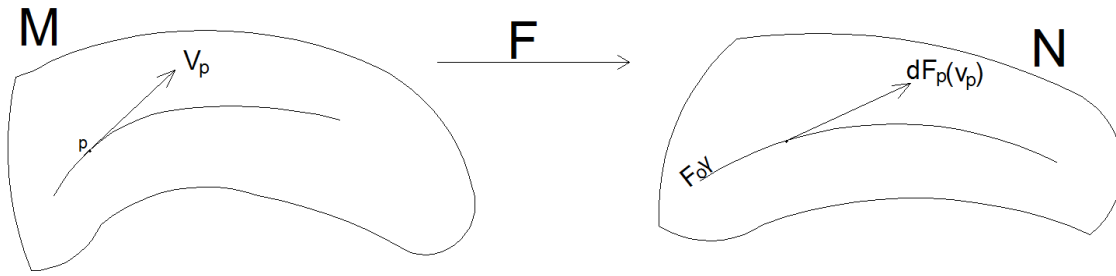
Η τελευταία πρόταση για την παράγραφο αυτή δίνει έναν εξαιρετικά χρήσιμο τρόπο υπολογισμού του διαφορικού μιας λείας συνάρτησης μεταξύ πολλαπλοτήτων, η οποία θα χρησιμοποιηθεί με επόμενα θεωρήματα για να δείξουμε ότι μια υποομάδα της γενικής γραμμικής ομάδας $GL_n\mathbb{R}$ είναι λεία πολλαπλότητα και ομάδα Lie.

Πρόταση 1.10. Έστω $F : M \rightarrow N$ μια λεία συνάρτηση μεταξύ πολλαπλοτήτων, $p \in M$ και $v_p \in T_pM$. Αν γ μια λεία καμπύλη με αρχή το σημείο p και με διάνυσμα ταχύτητας v_p , τότε ισχύει

$$dF_p(v_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F \circ \gamma)(t)$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v_p$. Τότε χρησιμοποιώντας τους ορισμούς και τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$dF_p(v_p) = dF_p(\gamma'(0)) = (dF_p \circ d\gamma_0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) = d(F \circ \gamma)_0 \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F \circ \gamma)(t)$$



Σχήμα 1.6 : Φυσική ερμηνεία του διαφορικού απεικόνισης $F : M \rightarrow N$ στο σημείο p

1.6 Διανυσματικά Πεδία

Η έννοια του λείου (διαφορίσιμου) διανυσματικού πεδίου σε μια πολλαπλότητα απαιτεί μια σχολαστικότερη προετοιμασία από αυτήν ενός διανυσματικού πεδίου σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να ορίσουμε είναι αυτό της εφαπτόμενης δέσμης.

Έστω M μια λεία πολλαπλότητα. Η εφαπτόμενη δέσμη της M είναι η ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων της M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω ένωση είναι διακεκριμένη, επειδή για δύο διαφορετικά σημεία p, q στην M οι εφαπτόμενοι χώροι $T_p M$ και $T_q M$ είναι διαφορετικοί. Ένα σημείο στην εφαπτόμενη δέσμη έχει τη μορφή (p, v_p) , όπου $p \in M$ και $v_p \in T_p M$.

Η απεικόνιση $\pi : TM \rightarrow M$ με τιμή $\pi(p, v_p) = p$ ονομάζεται *φυσική προβολή* (υπό την έννοια ότι είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε επιλογή, όπως άτλαντας, τοπικές συντεταγμένες κ.λ.π.)

Όσον αφορά την εφαπτόμενη δέσμη μας ενδιαφέρουν δύο πράγματα. Το πρώτο είναι η Τοπολογία και το δεύτερο είναι η Διαφορική δομή.

Τοπολογία. Έστω $(U, \phi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ ένας τοπικός χάρτης της M . Θεωρούμε το σύνολο

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_p U = \bigcup_{p \in U} T_p M$$

και έστω $v_p \in T_p M$. Τότε γνωρίζουμε ότι ως προς τη βάση $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$ θα έχουμε ότι

$$v_p = \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Οι συντελεστές c^i εξαρτώνται από το v_p , άρα είναι συναρτήσεις ορισμένες στο TU . Θέτουμε $\bar{x}^i = x^i \circ \pi$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\bar{\phi} : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$$

με τιμή

$$(p, v_p) \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), c^1(v_p), \dots, c^n(v_p)) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, c^1, \dots, c^n)(v_p)$$

Η απεικόνιση $\bar{\phi}$ έχει ως αντίστροφη την απεικόνιση

$$(\phi(p), c^1, \dots, c^n) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right)$$

συνεπώς είναι 1-1 και επί.

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της απεικόνισης $\bar{\phi}$ είναι $\bar{\phi} = (\phi \circ \pi, d\phi_p)$. Πράγματι αν $d\phi_p : T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ είναι το διαφορικό της ϕ στο p , τότε $d\phi_p(v_p) = \sum c^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\phi(p)}$, άρα μπορούμε να ταυτίσουμε το $d\phi_p(v_p)$ με το διάνυσμα-γραμμή (c^1, \dots, c^n) .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την απεικόνιση $\bar{\phi}$ για να μεταφέρουμε την τοπολογία του $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ στο σύνολο TU ως εξής: Ένα σύνολο A στο TU θα ονομάζεται ανοιχτό αν και μόνον αν το σύνολο $\bar{\phi}(A)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$. Το σύνολο $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ έχει την κανονική τοπολογία ως ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^{2n} .

Διαφορική δομή. Έστω $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ ένας λείος άτλαντας της πολλαπλότητας M . Θα αποδείξουμε ότι ο $\{(TU_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)\}$ είναι λείος άτλαντας της εφαπτόμενης δέσμης TM . Προφανώς ισχύει ότι $TM = \bigcup_a TU_\alpha$ άρα αρκεί να δείξουμε τη λεία συμβατότητα των $\bar{\phi}_\alpha$ και $\bar{\phi}_\beta$ στην τομή $(TU_\alpha) \cap (TU_\beta)$.

Θυμίζουμε ότι αν $(U; x^1, \dots, x^n), (V; y^1, \dots, y^n)$ είναι 2 χάρτες στην M , τότε για κάθε $p \in U \cap V$ υπάρχουν 2 βάσεις $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\}_{j=1}^n$ και $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$, ώστε κάθε διάνυσμα $v_p \in T_p M$ να εκφράζεται με δύο τρόπους ως

$$v_p = \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p$$

Εφαρμόζοντας και τα δυο μέλη στις συναρτήσεις y^k προκύπτει ότι

$$b^k = \sum_j a^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, k = 1, \dots, n$$

Επιστρέφουμε τώρα στον άτλαντα $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ και έστω ότι $\phi_\alpha = (x^1, \dots, x^n)$ και $\phi_\beta = (y^1, \dots, y^n)$ Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση για το v_p βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$\bar{\phi}_\beta \circ \bar{\phi}_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

έχει τη μορφή

$$(\phi_\alpha(p), a^1, \dots, a^n) \mapsto \left(p, \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \mapsto ((\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(p))), b^1, \dots, b^n)$$

Επιπλέον λόγω της παραπάνω έκφρασης για τα b^k θα έχουμε

$$b^k = \sum_j a^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(p) = \sum_j a^j \frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^k}{\partial u^j}(\phi_\alpha(p)), k = 1, \dots, n$$

Εξόρισμού του λείου άτλαντα, η απεικόνιση $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ είναι λεία, συνεπώς λόγω των παραπάνω εκφράσεων η απεικόνιση $\bar{\phi}_\beta \circ \bar{\phi}_\alpha^{-1}$ θα είναι και αυτή λεία. Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι η εφαπτόμενη δέσμη είναι μια λεία πολλαπλότητα διάστασης $2n$ με λείο άτλαντα τον $\{(TU_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)\}$.

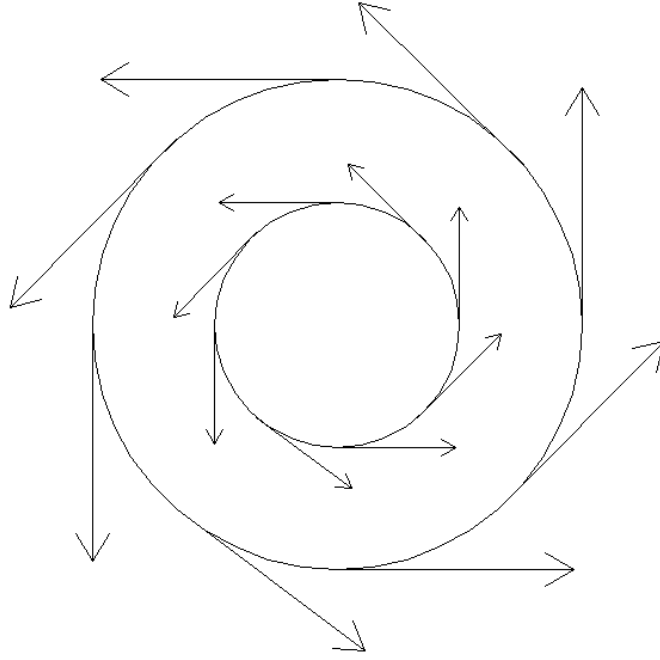
Ορισμός 1.11. Ένα διανυσματικό πεδίο X σε μια πολλαπλότητα M είναι μια απεικόνιση η οποία σε κάθε $p \in M$ αντιστοιχεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_p M$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων στην M . Έστω $(U; x^1, \dots, x^n)$ ένας τοπικός χάρτης στην M . Τότε η τιμή ενός διανυσματικού πεδίου X σε ένα σημείο $p \in U$ δίνεται ως

$$X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, a^i(p) \in \mathbb{R}$$

Καθώς το σημείο p μεταβάλλεται στο U , οι συντελεστές a^i ορίζουν πραγματικές συναρτήσεις στο U . Συνεπώς στο U το πεδίο X εκφράζεται ως

$$X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$$



Σχήμα 1.7: Το διανυσματικό πεδίο $X_{(x,y)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ στον \mathbb{R}^2 .

Χρησιμοποιώντας τη διαφορική δομή της επαφόμενης δέσμης TM προκύπτει ότι το διανυσματικό πεδίο είναι λείο αν και μόνον αν οι συναρτήσεις a^i είναι λείες στο U .

Έστω $\mathcal{F}(M)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων στην M . Για $f \in \mathcal{F}(M)$ και $X \in \mathcal{X}(M)$ ορίζεται η συνάρτηση $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ με τιμή

$$(Xf)_p = X_p f$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτή μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω χαρακτηρισμό ενός λείου διανυσματικού πεδίου.

Πρόταση 1.10. Ένα διανυσματικό πεδίο X σε μια πολλαπλότητα M είναι λείο, αν και μόνον αν για κάθε λεία συνάρτηση f στην M , η συνάρτηση Xf είναι λεία.

Απόδειξη. Για το ευθύ υποθέτουμε $X \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in \mathcal{F}(M)$ και $(U; x^1, \dots, x^n)$ ένας τοπικός χάρτης στην M . Τότε το διανυσματικό πεδίο X εκφράζεται ως $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, όπου οι συναρτήσεις a^i είναι λείες, άρα η συνάρτηση $Xf = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ είναι λεία στο U . Επειδή η πολλαπλότητα M καλύπτεται με μια συλλογή χαρτών, η συνάρτηση Xf είναι λεία στην M .

Το αντίστροφο είναι λίγο πιο τεχνικό, και απαιτεί χρήση αποτελεσμάτων που δεν έχουν αναφερθεί και ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε βιβλίο για πολλαπλότητες.

Ένα λείο διανυσματικό πεδίο X στην M μπορεί να θεωρηθεί και ως ένας γραμμικός τελεστής $X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, ο οποίος να είναι μια παραγώγιση, δηλαδή ισχύει:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Το γινόμενο Lie

Έστω X, Y δύο λεία διανυσματικά πεδία ορισμένα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U μιας πολλαπλότητας M , τα οποία τα θεωρούμε ως παραγωγίσεις στην άλγεβρα $\mathcal{F}(M)$. Από την Πρόταση 1.10 γνωρίζουμε ότι αν f είναι μια λεία συνάρτηση στο U , τότε η συνάρτηση Yf είναι επίσης λεία συνάρτηση στο U , και το ίδιο ισχύει και για το $X(Yf)$. Επιπλέον επειδή οι X, Y είναι γραμμικές συναρτήσεις $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ (τις θεωρούμε ως παραγωγίσεις, άρα είναι γραμμικές και ικανοποιούν τον κανόνα του Leibniz) η σύνθεση XY είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Παρατηρούμε όμως ότι ο κανόνας του Leibniz δεν ικανοποιείται αφού αν $f, g \in \mathcal{F}(M)$ τότε

$$XY(fg) = X((Yf)g + f(Yg)) = (XYf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(XYg)$$

όπου σε κάθε ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι X, Y είναι παραγωγίσεις.

Αν το XY ήταν παραγωγή, θα έπρεπε $(Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) = 0$ για κάθε $f, g \in \mathcal{F}(M)$, το οποίο φυσικά δεν ισχύει απαραίτητα.

Άρα το XY δεν είναι παραγωγή και ως εκ τούτου δεν είναι λείο διανυσματικό πεδίο. Παρατηρούμε όμως ότι οι παραπάνω περιττοί όροι είναι συμμετρικοί ως προς X και Y . Άρα αν υπολογίζαμε το $(YX)(fg)$ και το αφαιρούσαμε από την παραπάνω έκφραση, οι επιπλέον όροι θα εξαφανίζονταν, και το $XY - YX$ θα ήταν μια παραγωγή στο $\mathcal{F}(M)$ και σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω θα ήταν ένα λείο διανυσματικό πεδίο. Ο ακόλουθος ορισμός είναι εντελώς φυσιολογικός.

Ορισμός 1.12. Έστω X, Y δύο λεία διανυσματικά πεδία ορισμένα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U μιας πολλαπλότητας M και έστω $p \in U$. Το γινόμενο Lie των X και Y είναι το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ του οποίου η τιμή στο σημείο p ορίζεται ως εξής: Για κάθε λεία συνάρτηση f στο σημείο p είναι

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

Η ποσότητα $[X, Y]_p$ είναι μια παραγωγή στο p , άρα ορίζει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p . Καθώς το p μεταβάλλεται στο U το $[X, Y]$ ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο στο U .

Παρατήρηση. Σε πολλά βιβλία καμιά φορά το γινόμενο Lie ονομάζεται και Lie παράγωγος, και συμβολίζεται με

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Υπάρχει μια πορεία που ακολουθείται και οδηγεί σε αυτόν τον ορισμό, ότι δηλαδή η Lie παράγωγος του διανυσματικού πεδίου Y ως προς το διανυσματικό πεδίο X ισούται με το γινόμενο Lie των πεδίων X, Y . Η παρουσίαση αυτής της πορείας ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας εργασίας.

Εφόσον τα X, Y είναι λεία διανυσματικά πεδία στο U τότε και το γινόμενο Lie $[X, Y]$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο U . Αυτό είναι άμεση απόρροια της πρότασης 6.1 διότι οι Xf και Yf είναι λείες (σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση), άρα η συνάρτηση

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

είναι λεία ως διαφορά λείων συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το γινόμενο Lie ορίζει έναν τελεστή

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

στο διανυσματικό χώρο των λείων διανυσματικών πεδίων. Ο τελεστής αυτός προφανώς ικανοποιεί τη σχέση

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

αλλά και την ταυτότητα Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Οι ιδιότητες αυτές του γινομένου Lie ικανοποιούν μια σημαντική δομή σε έναν διανυσματικό χώρο, τη δομή άλγεβρας Lie.

Ορισμός 1.11. Μια άλγεβρα Lie επί του \mathbb{R} είναι ένας διανυσματικός χώρος V επί του \mathbb{R} εφοδιασμένο με ένα γινόμενο $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ (γινόμενο Lie-Lie bracket), το οποίο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες: για $a, b \in \mathbb{R}$ και $X, Y, Z \in V$, τότε

1. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
 $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ (διγραμμικότητα)
2. $[Y, X] = -[X, Y]$ (αντισυμμετρία)
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (ταυτότητα Jacobi)

Παραδείγματα.

1. Το βασικό παράδειγμα εφαρμογής του Lie bracket που ένας Μηχανικός έχει συναντήσει είναι στη Δυναμική, στην έκφραση της στροφορμής. Πιο συγκεκριμένα ο \mathbb{R}^3 εφοδιασμένος με το εξωτερικό γινόμενο $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια άλγεβρα Lie. Οι 3 απαιτήσεις του παραπάνω ορισμού ικανοποιούνται, αφού ισχύουν ως ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου στον \mathbb{R}^3 .
2. Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{X}(M)$ όλων των λείων διανυσματικών πεδίων σε μια πολλαπλότητα M αποτελεί μια πραγματική άλγεβρα Lie, με γινόμενο Lie το γινόμενο Lie των λείων διανυσματικών πεδίων ακριβώς όπως αυτό ορίστηκε στα παραπάνω.
3. Έστω $\mathbb{R}^{n \times n}$ ο διανυσματικός χώρος όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα των πραγματικών αριθμών. Για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ η πράξη

$$[X, Y] = XY - YX$$

ορίζει ένα γινόμενο Lie στον $\mathbb{R}^{n \times n}$ (είναι θέμα απλής επαλήθευσης των 3 απαιτήσεων του ορισμού) και κάνει τον $(\mathbb{R}^{n \times n}, [,])$ μια άλγεβρα Lie.

Στο κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα κάποια χρήσιμα αλγεβρικά αποτελέσματα που αφορούν ομάδες και άλγεβρες Lie.

1.7 Πολλαπλότητες Riemann

Στις προηγούμενες παραγράφους αντικείμενο μελέτης ήταν η Διαφορική Τοπολογία των πολλαπλοτήτων. Θα κλείσουμε το Κεφάλαιο 1 με μια σύντομη ανασκόπηση της Διαφορικής Γεωμετρίας των πολλαπλοτήτων ή με λίγα λόγια των πολλαπλοτήτων Riemann. Επειδή το φάσμα των εννοιών που πραγματεύεται η θεωρία είναι ιδιαίτερα ευρύ, θα περιοριστούμε μόνο σε εκείνες τις έννοιες οι οποίες είναι απαραίτητες για την σωστή μαθηματική θεμελίωση του πεπερασμένου στοιχείου, όπως αναφέρονται στην εισαγωγή. Έννοιες επομένως όπως καμπυλότητα, γεωδαισιακές κ.ά, δεν θα παρουσιαστούν (όπως δεν παρουσιάστηκαν και για τις απλές επιφάνειες του \mathbb{R}^3). Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις πηγές [2],[3],[4],[5],[8] για περαιτέρω μελέτη.

Κυρίαρχο ρόλο στη Γεωμετρία Riemann κατέχει η έννοια της μετρικής Riemann. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να την ορίσει κανείς. Διαδοδομένος είναι ο τρόπος ορισμού της σύμφωνα με την ταυυστική φύση αυτής. Δεν είναι ο τρόπος που επιθυμούμε να την ορίσουμε, καθώς στα μαθηματικά ο ταυυστικός λογισμός έχει βαθιά και ιδιαίτερα τεχνική φύση, και σε λίγα πράγματα μοιάζει με αυτό που οι μηχανικοί ορίζουν ως ταυυστή. Θα ήταν αδόκιμο να προσχωρήσουμε στην παρούσα εργασία σε μια τέτοια βαθιά και τεχνική έννοια. Προκρίνεται επομένως ένας καθόλα ισοδύναμος ορισμός

Ορισμός 1.12 Μια μετρική Riemann σε μια πολλαπλότητα M είναι η ανάθεση/αντιστοίχιση σε κάθε σημείο $p \in M$ ενός εσωτερικού γινομένου $g_p = \langle, \rangle_p$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$ (δηλαδή μια συμμετρική, διγραμμική και θετικά ορισμένη διγραμμική μορφή). Επιπλέον η αντιστοίχιση $p \mapsto \langle, \rangle_p$ απαιτείται να είναι λεία υπό την ακόλουθη έννοια: Αν X, Y είναι λεία διανυσματικά πεδία στην M , τότε η συνάρτηση

$$\langle X, Y \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle X, Y \rangle_p = \langle X_p, Y_p \rangle$$

είναι λεία συνάρτηση στην M . Μια πολλαπλότητα Riemann είναι ένα ζεύγος $(M, g = \langle, \rangle)$, δηλαδή είναι μια λεία πολλαπλότητα, όπως την ορίσαμε στα προηγούμενα, εφοδιασμένη με μια μετρική Riemann.

Το μήκος ενός εφαπτόμενου διανύσματος $v_p \in T_p M$ και η γωνία που σχηματίζουν 2 εφαπτόμενα διανύσματα $u_p, v_p \in T_p M$ δίνεται μέσω της μετρικής Riemann από τους ίδιους τύπους που δίνει το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Χρησιμοποιώντας τη μετρική Riemann μπορούμε να ορίσουμε το μήκος μιας λείας καμπύλης σε μια πολλαπλότητα. Πράγματι, έστω $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια λεία καμπύλη σε μια πολλαπλότητα (M, g) . Τότε το μήκος $L(\gamma)$ της γ είναι το ολοκλήρωμα

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

Θα δούμε τώρα την τοπική έκφραση μιας μετρικής Riemann. Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και $(U; x^1, \dots, x^n)$ ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα σημείο $p \in M$. Έστω $u, v \in T_p M$ με

$$u = \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, v = \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

Τότε έχουμε ότι

$$g_p(u, v) = g_p \left(\sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \sum_{j=1}^n v^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \sum_{i,j} u^i(p) v^j(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)$$

Συμβολίζουμε με

$$g_{ij} = g_{ij}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right)$$

Ακριβώς όπως στο Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, είναι $g_{ij} = g_{ji}$, άρα ορίζεται ο συμμετρικός πίνακας (g_{ij}) , ο οποίος ονομάζεται πίνακας της μετρικής g στο σημείο p . Επεκτείνοντας τα εφαπτόμενα διανύσματα u, v σε αντίστοιχα διανυσματικά πεδία

$$X = \sum u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

(δηλαδή $X_p = u, Y_p = v$), τότε προκύπτει η παρακάτω έκφραση της συνάρτησης $g(X, Y)$:

$$g(X, Y) = g \left(\sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) u^i v^j = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$$

Συνοπώς η απεικόνιση $p \mapsto \langle, \rangle_p$ είναι λεία αν και μόνον αν οι συναρτήσεις $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι λείες. Λόγω της ισότητας $dx^i \otimes dx^j(X, Y) = dx^i(X) dx^j(Y) = u^i v^j$, συχνά η παραπάνω σχέση παρουσιάζεται με την κλασσική γραφή

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Ως παράδειγμα δίνουμε το συνηθισμένο Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum u^k v^k$$

. Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n ορίζει μια μετρική Riemann. Η πολλαπλότητα Riemann $E^n = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_{\mathbb{R}^n})$ ονομάζεται n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος.

Μέχρι στιγμής, μέσω της τοπικής περιγραφής, έχουμε εισάγει μια μετρική Riemann σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(U; x^1, \dots, x^n)$ μιας λείας πολλαπλότητας M . Υπάρχει θεώρημα που εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας μετρικής Riemann σε ολόκληρη την πολλαπλότητα, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με 'συγκόληση' μετρικών Riemann από κάθε ανοιχτό υποσύνολο ενός άτλαντα της M .

Ορισμός 1.13 Έστω $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ μια λεία συνάρτηση πολλαπλοτήτων Riemann. Θα λέμε ότι η f διατηρεί τη μετρική (metric preserving function) αν για κάθε $p \in M$ και διανυσματικά πεδία $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{f(p)}(df_p(X_p), df_p(Y_p))$$

Αν επιπλέον η f είναι αμφιδιαμόρφιση, τότε θα λέγεται ισομετρία. Οι ισομετρίες παίζουν εξέχοντα ρόλο στη Γεωμετρία Riemann.

Εφόσον έχουμε στα χέρια μας μια μετρική, το πρώτο πράγμα που θα θέλαμε να μελετήσουμε είναι παραγώγους στους εφαπτόμενους χώρους των πολλαπλοτήτων ακριβώς όπως κάναμε και στην κλασική θεωρία επιφανειών του \mathbb{R}^3 . Δυστυχώς όμως η μετάβαση από τον Λογισμό του \mathbb{R}^n στις πολλαπλότητες δεν είναι άμεση και απαιτείται διαφορετικός χειρισμός. Θα πρέπει να βρούμε εκείνες τις έννοιες οι οποίες μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε πολλαπλότητες.

Το κεντρικό εργαλείο προκειμένου να οριστούν διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα σε μια πολλαπλότητα Riemann M είναι αυτό της *συναχής*. Επιθυμούμε να ορίσουμε παράγωγο κατά κατεύθυνση ενός λείου διανυσματικού πεδίου Y στην κατεύθυνση ενός διανύσματος $X_p \in T_p M$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να συγκρίνουμε τις τιμές του Y σε μια περιοχή του σημείου p . Αν q είναι ένα άλλο σημείο κοντά στο p τότε γενικά δεν είναι δυνατόν να συγκρίνουμε τα διανύσματα Y_p και Y_q μέσω της διαφοράς $Y_p - Y_q$, επειδή τα αντίστοιχα διανύσματα ανήκουν σε διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους. Ας θυμηθούμε πως ορίζεται η παράγωγος ως προς κατεύθυνση στην περίπτωση όπου $M = \mathbb{R}^n$. Έστω $p \in \mathbb{R}^n, X_p \in T_p \mathbb{R}^n$ και Y ένα λείο διανυσματικό πεδίο στον \mathbb{R}^n . Τότε η παράγωγος ως προς κατεύθυνση του Y στη διεύθυνση X_p είναι ο αριθμός

$$D_{X_p} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tX_p) - Y_p}{t}$$

Ισοδύναμα αν $Y = \sum b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ τότε

$$D_{X_p} Y = \sum (X b^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Καθώς το σημείο p μεταβάλλεται στον \mathbb{R}^n , τότε για κάθε ζεύγος λείων διανυσματικών πεδίων X, Y στον \mathbb{R}^n ορίζεται το διανυσματικό πεδίο $D_X Y$ με τιμή

$$(D_X Y)_p = D_{X_p} Y, p \in M$$

Στην περίπτωση που το πεδίο Y είναι μια λεία συνάρτηση στον \mathbb{R}^n , τότε η παράγωγος ως προς κατεύθυνση είναι απλώς

$$D_{X_p} f = X_p f, X_p \in T_p \mathbb{R}^n$$

και αυτή είναι μια ιδιότητα που μπορεί να επεκταθεί και σε μια πολλαπλότητα Riemann. Η απεικόνιση

$$D : \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^n), (X, Y) \mapsto D_X Y$$

ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες με μεγάλη σημασία την ιδιότητα 4.

1. $D_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda D_X Y + \mu D_X Z$, \mathbb{R} -γραμμική ως προς Y
2. $D_X(fY) = f D_X Y + D_X(f)Y$, κανόνας του Leibniz
3. $D_{fX+gY} Z = f D_X Z + g D_Y Z$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -γραμμική ως προς X
4. Εφόσον η παράγωγος ως προς κατεύθυνση D στον \mathbb{R}^n είναι μια \mathbb{R} -διγραμμική απεικόνιση $D : \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ μπορεί κανείς να αναρωτηθεί αν είναι συμμετρική, δηλαδή για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $D_X Y = D_Y X$. Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι η απάντηση είναι όχι. Στην πράξη, αν $[X, Y]$ είναι το γινόμενο Lie $[X, Y] = XY - YX$ όπου για $p \in \mathbb{R}^n$ και $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), [X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$ τότε $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$

Η ποσότητα

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$$

καταλήγει να είναι θεμελιώδης για τη διαφορική γεωμετρία και ονομάζεται στρέψη της παραγώγου ως προς κατεύθυνση D .

5. Ο κανόνας του γινομένου ισχύει για το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$D_X \langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

Επειδή τώρα στους Ευκλείδειους χώρους το εσωτερικό γινόμενο παράγει τη μετρική, η σημαντική αυτή ιδιότητα λέγεται και συμβατότητα με τη μετρική.

Οι ιδιότητες 1 έως 4 καθορίζουν την απεικόνιση D ως μια *ομοπαράλληλη συναχή* (affine connection) στον \mathbb{R}^n . Εν προκειμένω, (μαζί με την ιδιότητα 5) ονομάζεται *Ευκλείδεια συναχή* στον \mathbb{R}^n .

Θα γενικεύσουμε τώρα την ομοπαράλληλη συναχή στον \mathbb{R}^n στη συναχή Levi-Civita σε μια πολλαπλότητα Riemann.

Ορισμός 1.14. Μια ομοπαράλληλη συνοχή σε μια πολλαπλότητα M είναι μια \mathbb{R} -διγραμμική απεικόνιση

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

όπου συμβολίζουμε την τιμή $\nabla(X, Y)$ με $\nabla_X Y$, η οποία ικανοποιεί της εξής ιδιότητες: για κάθε $f \in C^\infty(M)$ και για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ισχύουν

1. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, $C^\infty(M)$ -γραμμική ως προς X
2. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$ (κανόνας του Leibniz)

Ένα διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathcal{X}(M)$ ονομάζεται παράλληλο ως προς τη συνοχή ∇ αν ισχύει $\nabla_X Y = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{X}(M)$.

Παρατήρηση Η συνοχή $\nabla_X Y$ είναι τανυστής ως προς X αλλά δεν είναι τανυστής ως προς Y .

Δοθείσης μιας ομοπαράλληλης συνοχής ∇ σε μια πολλαπλότητα M , τίθεται το ερώτημα κατά πόσον αυτή ικανοποιεί κάποιες από τις ιδιότητες 1-5 της Ευκλείδειας συνοχής.

Η ιδιότητα 1 είναι η γραμμικότητα, οπότε ικανοποιείται από τον ορισμό. Επίσης το ίδιο ισχύει και για την ιδιότητα 2, αφού απαιτούμε να ικανοποιείται ο κανόνας του Leibniz για την ομοπαράλληλη συνοχή. Όμοια και για την ιδιότητα 3. Όσον αφορά τις ιδιότητες 4 και 5, δεν μπορούμε να πούμε κάτι περισσότερο, εκτός αν κάνουμε επιπλέον υποθέσεις. Πράγματι αυτό είναι το επόμενο πράγμα που θα κάνουμε.

Ορισμός 1.15. Έστω M μια λεία πολλαπλότητα και ∇ μια συνοχή στην M . Η στρέψη της συνοχής ∇ είναι η απεικόνιση

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

με τιμή

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Εάν η στρέψη μηδενίζεται για κάθε $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ τότε η συνοχή ονομάζεται μηδενικής στρέψης (torsion free).

Λόγω του κανόνα του Leibniz η συνοχή $\nabla_X Y$ δεν είναι $C^\infty(M)$ -γραμμική ως προς Y (για να ήταν θα έπρεπε $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y$), εντούτοις η στρέψη είναι $C^\infty(M)$ -γραμμική ως προς X και Y , δηλαδή ισχύει

$$T(fX, Y) = fT(X, Y) = T(X, fY)$$

Μας ενδιαφέρει τώρα να περιορίσουμε τον δυνατό αριθμό ομοπαράλληλων συνοχών σε μια πολλαπλότητα Riemann

Ορισμός 1.16 Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann. Μια συνοχή ∇ ονομάζεται συμβατή με τη μετρική g ή μετρική συνοχή αν για κάθε $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ισχύει η σχέση

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

. Η παραπάνω ισότητα αφορά ισότητα συναρτήσεων Ερμηνεύεται ως τύπος παραγωγίσης (θυμίζει κανόνα γινομένου), γενίκευση της ιδιότητας 5 της Ευκλείδειας συνοχής.

Φαίνεται ότι οι 2 επιπλέον περιορισμοί στην ομοπαράλληλη συνοχή είναι ικανοί να καθορίσουν μια μοναδική συνοχή σε μια πολλαπλότητα Riemann

Ορισμός 1.16 Μια ομοπαράλληλη συνοχή σε μια πολλαπλότητα Riemann ονομάζεται συνοχή Levi-Civita, αν έχει μηδενική στρέψη και είναι συμβατή με τη μετρική.

Σημειώνουμε ότι η συνοχή Levi-Civita αποτελεί εσωτερική ποσότητα της πολλαπλότητας (M, g) , δηλαδή εξαρτάται μόνο από τη διαφορική δομή της και τη μετρική g .

Ερχόμαστε τώρα στο κεντρικό αποτέλεσμα της γεωμετρίας Riemann το οποίο αναφέρει ότι κάθε πολλαπλότητα Riemann επιδέχεται μια και μοναδική συνοχή Levi-Civita. Θα χρειαστούμε πρώτα το εξής:

Λήμμα 1.1. Ένα λείο διανυσματικό πεδίο X σε μια πολλαπλότητα Riemann (M, g) καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της συνάρτησης $g(X, Z)$ για κάθε $Z \in \mathcal{X}(M)$.

Απόδειξη. Αρκεί ναδειχθεί ότι αν $X' \in \mathcal{X}(M)$ τέτοιο ώστε $g(X, Z) = g(X', Z)$ για κάθε $Z \in \mathcal{X}(M)$ τότε $X = X'$. Θέτοντας $Y = X - X'$, αρκεί να δείξουμε ότι αν $g(Y, Z) = 0$ για κάθε $Z \in \mathcal{X}(M)$, τότε $Y = 0$. Έστω $Z = Y$. Τότε $g(Y, Y) = 0$, άρα $g(Y_p, Y_p) = 0$ για κάθε $p \in M$. Επειδή η μετρική είναι θετικά ορισμένη, προκύπτει ότι $Y_p = 0$ για κάθε $p \in M$, συνεπώς $Y = 0$.

Θεώρημα 1.4 (Θεμελιώδες Θεώρημα της γεωμετρίας Riemann). Σε κάθε πολλαπλότητα Riemann (M, g) υπάρχει μία και μοναδική συνοχή Levi-Civita.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν μια τέτοια μετρική υπάρχει, τότε αυτή είναι μοναδική. Έστω ∇ μια συνοχή Levi-Civita στην M . Τότε λόγω του λήμματος 1.1, προκειμένου να καθοριστεί το πεδίο $\nabla_X Y$, αρκεί να γνωρίζουμε τη συνάρτηση $g(\nabla_X Y, Z)$, για κάθε διανυσματικό πεδίο $Z \in \mathcal{X}(M)$. Άρα θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν τύπο για τη συνάρτηση $g(\nabla_X Y, Z)$ ο οποίος θα εξαρτάται μόνο από τη μετρική και από πράξεις μεταξύ διανυσματικών πεδίων, όπως είναι το γινόμενο Lie

Θυμίζουμε ότι η συνοχή Levi-Civita ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad (7.1)$$

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (7.2)$$

Με κυκλική εναλλαγή των X, Y, Z στην (7.2) προκύπτουν οι σχέσεις

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \quad (7.3)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (7.4)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.1) εκφράζουμε το πεδίο $\nabla_Y X$ στη σχέση (7.3) ως προς $\nabla_X Y$:

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Z, [X, Y]) \quad (7.5)$$

Αφαιρώντας την (7.4) από την (7.2) και προσθέτοντας το αποτέλεσμα στην (7.5), θα προκύψουν οι όροι $\nabla_X Z - \nabla_Z X$ και $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y$, οι οποίοι λόγω του ότι η στρέψη είναι μηδενική ισούται με $[X, Z]$ και $[Y, Z]$ όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - g(Z, [X, Y]) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $g(\nabla_X Y, Z)$ προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ο τύπος (7.6) είναι γνωστός ως τύπος του Koszul και δείχνει ότι αν η συνοχή Levi-Civita υπάρχει, τότε είναι μοναδική. Τώρα, για να δείξουμε την ύπαρξη, θεωρούμε μια συνοχή από τη σχέση (7.6). Είναι μια απλή άσκηση να δει κάποιος ότι η συνοχή αυτή είναι μια μηδενικής στρέψης, συμβατή με τη μετρική. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη της συνοχής Levi-Civita στην πολλαπλότητα Riemann (M, g) .

Παράδειγμα. Η συνοχή Levi-Civita στον \mathbb{R}^n εφοδιασμένου με την Ευκλείδεια μετρική, είναι η παράγωγος ως προς κατεύθυνση, δηλαδή ισχύει $\nabla_X Y = D_X Y$.

Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann διάστασης n . Ας δούμε κάποιες συνέπειες, όταν εκφράσουμε τη μετρική g και τη συνοχή Levi-Civita ∇ σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ της M . Θέτουμε $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathcal{X}(U)$. Το σύνολο $\{X_1, \dots, X_n\}$ αποτελεί ένα πλαίσιο της M , υπό την έννοια ότι για κάθε σημείο $p \in U$ το σύνολο $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ αποτελεί μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p M$. Αν ορίσουμε τη μετρική \bar{g} στο υποσύνολο $\phi(U)$ του \mathbb{R}^n ως

$$\bar{g}(e_i, e_j) = g_{ij} = g(X_i, X_j)$$

τότε λαμβάνουμε την κλασική έκφραση

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Ας εκφράσουμε τα διανυσματικά πεδία $\nabla_{X_i} X_j$ συναρτήσει των πεδίων $X_k, k = 1, \dots, n$. Τότε υπάρχουν n^3 το πλήθος συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ (σύμβολα του Christoffel) ως προς τη συνοχή ∇ , έτσι ώστε

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

Τα σύμβολα του Christoffel καθορίζονται πλήρως από τη μετρική g και τις πρώτες παραγώγους αυτής, όπως φαίνεται από τον παρακάτω υπολογισμό.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} &= \left\langle \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k, X_l \right\rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_l \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ X_i \langle X_j, X_l \rangle + X_j \langle X_l, X_i \rangle - X_l \langle X_i, X_j \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} \end{aligned}$$

Θέτοντας $g^{kl} = (g^{-1})_{kl}$ (τα στοιχεία του αντίστροφου του πίνακα (g_{ij}) , προκύπτει ότι

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} \quad (7.7)$$

Επειδή $[X_i, X_j] = 0$, τότε λόγω της $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, προκύπτει ότι $\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i$, συνεπώς είναι

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

δηλαδή τα σύμβολα Christoffel εμφανίζουν συμμετρία στους κάτω δείκτες, ακριβώς όπως στην περίπτωση των επιφανειών του \mathbb{R}^3 όπου τα συναντήσαμε για πρώτη φορά. Υπενθυμίζεται ακόμα ότι ο τρόπος εξαγωγής τους είναι ακριβώς ίδιος με αυτόν στην κλασική θεωρία επιφανειών.

Τέλος λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα 2 του ορισμού 1.14 είναι δυνατόν να πάρουμε έκφραση για το πεδίο $\nabla_{X_i} Y, Y = \sum Y^j X_j$. Τα παραπάνω συνοψίζονται στην εξής πρόταση.

Πρόταση 1.11. Έστω $(U; x^1, \dots, x^n)$ ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων σε μια πολλαπλότητα Riemann και έστω $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Τότε τα ακόλουθα ισχύουν:

1. $\nabla_{X_i} \sum_{j=1}^n Y^j X_j = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k Y^j \right\} X_k$
2. $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\}$

Παραδείγματα.

1. Θεωρούμε τον \mathbb{R}^n εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική $g_{ij} = \delta_{ij}$. Από την Πρόταση 1.7.1 (2) προκύπτει ότι $\Gamma_{ij}^k = 0$ για κάθε $1 \leq i, j, k \leq n$.
2. Μια κανονική επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 εφοδιασμένη με την επαγόμενη Ευκλείδεια μετρική $g = \langle, \rangle$, είναι μια πολλαπλότητα Riemann διάστασης 2. Συμβολίζοντας τις συντεταγμένες της M με u, v , τότε οι συνιστώσες της μετρικής συμβολίζονται με τον κλασικό τρόπο ως

$$E = g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, F = g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, G = g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

και έχουμε την παραδοσιακή γραφή

$$g = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

γνωστή ως πρώτη θεμελιώδης μορφή. Ο πίνακας της μετρικής αυτής είναι

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

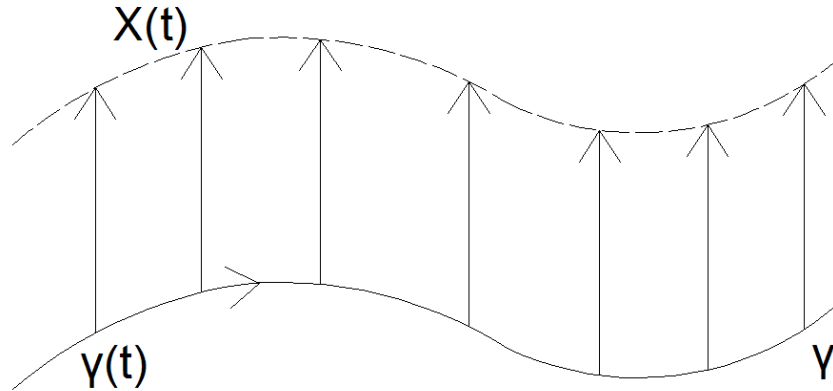
Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.11 (2) είναι δυνατόν να υπολογιστούν τα σύμβολα Christoffel. Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που πήραμε από τη κλασική θεωρία επιφανειών.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με μια έννοια που θα μας απασχολήσει στην ανάπτυξη. Είναι η έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου. Ξεκινάμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 1.17 Έστω M μια πολλαπλότητα και $c : I \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη. Ένα διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της καμπύλης c είναι μια απεικόνιση

$$X : I \rightarrow \bigcup_{t \in I} T_{c(t)}M$$

τέτοια ώστε $X(t) \in T_{c(t)}M$. Η παραπάνω ένωση είναι ένωση υποσυνόλων ξένων μεταξύ τους. Ένα τέτοιο διανυσματικό πεδίο είναι λείο, αν για κάθε συνάρτηση f , η συνάρτηση $X(t)f$ είναι μια λεία συνάρτηση του t .



Σχήμα 1.8 : Διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της καμπύλης γ

Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(c)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της καμπύλης c .

Παράδειγμα. Αν $c : I \rightarrow M$ είναι μια καμπύλη σε μια πολλαπλότητα, τότε το πεδίο ταχυτήτων $X(t) = c'(t)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c .

Θέλουμε να ορίσουμε τώρα μια έννοια παραγώγισης ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος μιας καμπύλης σε μια πολλαπλότητα. Ο λόγος είναι ότι έτσι θα ορίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο ως παράλληλο αν η παράγωγος αυτή είναι μηδέν. Ως συνήθως θα χρησιμοποιήσουμε ιδέες που εφαρμόστηκαν στον \mathbb{R}^n και θα τις εφαρμόσουμε σε επίπεδο πολλαπλοτήτων.

Έστω $X(t) = \sum_{i=1}^n X^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i}$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας λείας καμπύλης $c(t)$ στον \mathbb{R}^n . Τότε η παράγωγος $\frac{dX}{dt}$ του X είναι το πεδίο

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{X}^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες

1. $\frac{d(\lambda X + \mu Y)}{dt} = \lambda \frac{dX}{dt} + \mu \frac{dY}{dt}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} -γραμμικότητα)
2. $\frac{d(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f \frac{dX}{dt}$ για κάθε f λεία που ορίζεται στο πεδίο ορισμού I της καμπύλης. (κανόνας Leibniz).

3. Εάν το πεδίο X επάγεται από ένα λείο διανυσματικό πεδίο $\bar{X} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, υπό την έννοια ότι $X(t) = \bar{X}_{c(t)}$ και εάν D είναι η παράγωγος κατά κατεύθυνση στον \mathbb{R}^n , τότε

$$\frac{dX}{dt} = D_{c'(t)}\bar{X}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ανάλογου τελεστή παραγωγίσης σε μια πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια ομοπαράλληλη συνοχή (και άρα σε μια πολλαπλότητα Riemann).

Θεώρημα 1.5 Έστω M μια λεία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια ομοπαράλληλη συνοχή ∇ και έστω $c : I \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη στην M . Τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση (τελεστής)

$$\frac{D}{dt} : \mathcal{X}(c) \rightarrow \mathcal{X}(c)$$

τέτοια ώστε για κάθε $X \in \mathcal{X}(c)$ να ισχύουν τα εξής:

1. $\frac{d(\lambda X + \mu Y)}{dt} = \lambda \frac{dX}{dt} + \mu \frac{dY}{dt}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} -γραμμικότητα)
2. $\frac{d(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f \frac{dX}{dt}$ για κάθε f λεία που ορίζεται στο πεδίο ορισμού I της καμπύλης. (κανόνας Leibniz)
3. Εάν το διανυσματικό πεδίο X επάγεται από ένα λείο διανυσματικό πεδίο $\bar{X} \in \mathcal{X}(M)$, υπό την έννοια ότι $X(t) = \bar{X}_{c(t)}$ τότε

$$\frac{Dx}{dt}(t) = \nabla_{c'(t)}\bar{X} (= (\nabla_{c'}\bar{X})_{c(t)})$$

συμβατότητα με τη συνοχή ∇

Το διανυσματικό πεδίο $\frac{Dx}{dt}$ ονομάζεται συναλλοίωτη παράγωγος (ως προς τη συνοχή ∇ του διανυσματικού πεδίου X κατά μήκος της καμπύλης $c(t)$ στην M ή πιο σύντομα, επαγόμενη συναλλοίωτη παράγωγος και πολλές φορές συμβολίζεται με X').

Ορισμός 1.18 Έστω (M, g) μια λεία πολλαπλότητα Riemann και $c : I \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη. Ένα διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της c λέγεται παράλληλο αν ισχύει

$$\frac{DX}{dt} = 0$$

Παρατήρηση. Λόγω της ιδιότητας $\nabla_{fZ}X = f\nabla_ZX$ της συνοχής, καθώς και της ιδιότητας 3. του Θεωρήματος 1.5, η τιμή $(\nabla_{fZ}X)_p$ του πεδίου $\nabla_{fZ}X$ στο σημείο p εξαρτάται μόνο από τις τιμές Z_p του πεδίου Z στο σημείο p και του πεδίου X κατά μήκος κάποιας καμπύλης c , τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = Z_p$. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\nabla_{c'}X$ αντί του $\frac{DX}{dt}$.

Θα αποδείξουμε το παρακάτω ιδιαίτερα χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα 1.6 Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και ∇ μια ομοπαράλληλη συνοχή στην M συμβατή με τη μετρική (όχι απαραίτητα μηδενικής στρέψης). Αν $c : I \rightarrow M$ είναι μια λεία καμπύλη στην M , τότε για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία V, W κατά μήκος της c ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right)$$

Δηλαδή με λόγια, η συναλλοίωτη παράγωγος σέβεται τον κανόνα του γινομένου όταν εφαρμόζεται στη μετρική.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα τοπικά. Έστω $(U; x^1, \dots, x^n)$ ένας τοπικός χάρτης ο οποίος περιέχει την καμπύλη c και έστω $\{X_1, \dots, X_n\}, (X_i \frac{\partial}{\partial x^i})$ ένα τοπικό πλαίσιο κατά μήκος της c . Τότε στο $c(t)$ (δηλαδή κατά μήκος της c) έχουμε ότι

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t)X_i, \quad W(t) = \sum_{j=1}^n W^j(t)X_j$$

για κάποιες λείες συναρτήσεις V^i, W^j στο διάστημα I . Άρα είναι

$$\frac{d}{dt}g(V, W) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n V^i W^i = \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} W^i + \sum_{i=1}^n V^i \frac{dW^i}{dt}$$

Λόγω των ιδιοτήτων 1. και 2. της συναλλοίωτης παραγώγου έχουμε ότι

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} x_i + V^i \frac{DX^i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dV^i}{dt} + V^i \nabla_{c'(t)} X_i \right)$$

όπου γράψαμε X_i αντί για το ακριβές $X_i|_{c(t)}$. Παρόμοια είναι

$$\frac{DW}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dW^i}{dt} + W^i \nabla_{c'(t)} X_i \right)$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} W^i + \sum_{i,j=1}^n V^i W^j g(\nabla_{c'(t)} X_i, X_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n V^i \frac{dW^i}{dt} + \sum_{i,j=1}^n V^i W^j g(X_i, \nabla_{c'(t)} X_j) \end{aligned}$$

Επειδή τα διανυσματικά πεδία X_1, \dots, X_n είναι ανά δυο κάθετα στο U και η συνοχή ∇ είναι συμβατή με τη μετρική g θα έχουμε ότι

$$g(\nabla_{c'(t)} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{c'(t)} X_j) = c'(t)g(X_i, X_j) = c'(t)\delta_{ij} = 0$$

συνεπώς προκύπτει ότι

$$g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} W^i + V^i \frac{dW^i}{dt} = \frac{d}{dt}g(V, W)$$

που είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα. Έστω ∇ η συναλλοίωτη παράγωγος στον \mathbb{R}^n και $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μια λείας καμπύλης $c(t)$ στον \mathbb{R}^n . Τότε η συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^n V^i D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^n \frac{dV^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{dV}{dt}$$

επειδή ισχύει $D_{c'(t)} \frac{\partial}{\partial u^i} = 0$ στον \mathbb{R}^n .

2 Ομάδες και Άλγεβρες Lie

Το παρόν δεύτερο κεφάλαιο θα αφιερωθεί με στόχο να γίνει μια πρώτη γνωριμία με τις Ομάδες και Άλγεβρες Lie. Αυτός ο κλάδος των μαθηματικών συνιστά 'πάντρεμα' άλγεβρας και ανάλυσης, με βάση τη γεωμετρία. Δηλαδή έχουμε συνήπαρξη αλγεβρικής δομής (δομή ομάδας) και αναλυτικής δομής (τοπολογικές ιδιότητες), και το αποτέλεσμα αυτό είναι γεωμετρικής φύσης. Ειδικότερα, ορίζουμε μια ομάδα Lie να είναι μια λεία πολλαπλότητα και ταυτόχρονα ομάδα, ώστε οι πράξεις της ομάδας να είναι λείες απεικονίσεις. Αποτελούν έναν εξαιρετικά πλούσιο κλάδο των σύγχρονων μαθηματικών και ασφαλώς, λόγω της προαναφερθείσας συνύπαρξης, ένα πεδίο με τεράστιο αριθμό εφαρμογών. Δεν φιλοδοξούμε να δώσουμε τα ακριβή χαρακτηριστικά της θεωρίας. Αυτό που θα επιχειρήσουμε στα επόμενα, είναι μια σχετική εξοικώωση με μια ιδιαίτερα σημαντική κλάση ομάδων Lie που είναι οι ομάδες Lie πινάκων. Κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι ομάδα Lie (αυτό το πολύ σπουδαίο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Θεώρημα του John von Neumann), δεν ισχύει όμως το αντίστροφο (κλασικό τέτοιο παράδειγμα είναι η άλγεβρα Lie του Heisenberg με την οποία δεν θα ασχοληθούμε). Όπως μαρτυρά το όνομα τους έχουν μια καθαρά αλγεβρική δομή (ως ομάδες πινάκων) αλλά και αναλυτική-γεωμετρική (ως ομάδες Lie). Αρχικά ίσως να είναι λίγο δυσνόητο το πως κάτι που είναι καθαρά αλγεβρικό, να αποκτά μια γεωμετρική δομή. Αυτό θα φανεί μέσω ενός ισομορφισμού διανυσματικών χώρων που θα ανφέρουμε παρακάτω. Καταλαβαίνει κανείς επομένως, ότι ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να μελετήσουμε τις ομάδες Lie πινάκων διακρίνεται στον αμιγώς αλγεβρικό τρόπο, και στον γεωμετρικό. Ο δεύτερος τρόπος είναι καθολικός, και εφαρμόζεται σε κάθε ομάδα Lie. Εντούτοις είναι αρκετά δύσκολο στην πράξη να δείξουμε πότε ένα σύνολο ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού μιας ομάδας Lie και επίσης χρησιμοποιεί κάποια 'βαριά' θεωρήματα της ανάλυσης, γραμμένα σε γλώσσα πολλαπλοτήτων (όπως το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης, θεώρημα σταθερής-τάξης συνόλου στάθμης) για να ορίσουμε πότε ένα υποσύνολο της γενικής γραμμικής ομάδας είναι υποπολλαπλότητα αυτής, και άρα ομάδα Lie. Το ίδιο πρόβλημα απαντάται στην μελέτη της άλγεβρας Lie μιας ομάδας Lie που όπως θα δούμε είναι ο επαπτόμενος χώρος στο ταυτοτικό στοιχείο: ο γεωμετρικός-αναλυτικός τρόπος προσέγγισης είναι αρκετά πιο περίπλοκος στην υλοποίηση. Ως εκ τούτου, και με δεδομένο ότι ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για ομάδες Lie πινάκων προκρίνεται ο πρώτος τρόπος, δηλαδή ο καθαρά αλγεβρικός.

2.1 Ομάδες Lie

Ορισμός 2.1 Έστω G μια λεία πολλαπλότητα. Η G θα ονομάζεται ομάδα Lie αν

1. Η G είναι ομάδα
2. Οι απεικονίσεις $\mu : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$ και $i : G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ είναι λείες.

Επειδή σε κάθε ομάδα Lie οι πράξεις της ομάδας είναι λείες απεικονίσεις, τότε θα είναι και συνεχείς, οπότε οι ομάδες Lie είναι και τοπολογικές ομάδες.

Η διάσταση μιας ομάδας Lie G είναι η διάσταση της G ως λεία πολλαπλότητα.

Η ύπαρξη τοπολογίας σε μια ομάδα G μας επιτρέπει να μιλάμε για σύγκλιση, συμπάγεια συνέχεια και συνεκτικότητα. Στην περίπτωση που η τοπολογία της ομάδας G περιγράφεται με ακολουθίες, π.χ στους μετρικούς χώρους, η συνέχεια των απεικονίσεων $(x, y) \mapsto xy$ και $x \mapsto x^{-1}$ συνεπάγεται ότι αν (x_n) και (y_n) είναι ακολουθίες της G τέτοιες ώστε, καθώς $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow x \in G$ και $y_n \rightarrow y \in G$ τότε $x_n y_n \rightarrow xy$ και $x_n^{-1} \rightarrow x^{-1}$. Τώρα εφόσον έχουμε ομάδες Lie οι παραπάνω συναρτήσεις θα είναι λείες, οπότε μπορούμε να ορίσουμε έννοιες και να χρησιμοποιήσουμε τεχνικές του διαφορικού λογισμού.

Οι ομοιομορφισμοί μεταξύ χώρων διατηρούν τις τοπολογικές ιδιότητες (εκείνες δηλαδή τις ιδιότητες που δύνανται να περιγραφούν με χρήση ανοιχτών συνόλων) όπως η συμπάγεια, η συνεκτικότητα, η διαχωρισιμότητα. Από την οπτική γωνία της τοπολογίας οι ομοιομορφικοί χώροι ταυτίζονται. Άρα μια ομάδα Lie ταυτίζεται τοπικά με τον χώρο \mathbb{R}^n τον οποίο φανταζόμαστε να καλύπτει τοπικά (στο κάθε σημείο) την ομάδα Lie. Οι ιδιότητες της διαφορίσιμης πολλαπλότητας εξασφαλίζουν ότι οι Ευκλείδειοι χώροι στα διάφορα σημεία αναμειγνύονται με ομαλό τρόπο.

Το βασικό μας παράδειγμα μιας τέτοιας ομάδας θα είναι η γενική γραμμική ομάδα $GL_n \mathbb{R}$. Το σύνολο $GL_n \mathbb{R}$ αποτελείται από όλους τους $n \times n$ αντιστρέψιμους πίνακες, δηλαδή

$$GL_n \mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$$

και αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων: (πράγματι το γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων είναι αντιστρέψιμος πίνακας, ο ταυτοτικός πίνακας είναι το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας και ένας αντιστρέψιμος πίνακας έχει

(εξ ορισμού) έναν αντίστροφο, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός). Γνωρίζουμε από το παράδειγμα της παραγράφου 1.2 ότι το σύνολο $GL_n\mathbb{R}$ είναι μια πολλαπλότητα διάστασης n^2 (Υπενθυμίζεται ο λόγος που συμβαίνει αυτό. Οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^{n \times n}$ και \mathbb{R}^{n^2} είναι ισόμορφοι, επομένως μπορούμε κάθε στοιχείο του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ να το αναγνωρίσουμε ως τις συντεταγμένες ενός σημείου του \mathbb{R}^{n^2} που ως γνωστόν είναι λεία πολλαπλότητα. Τώρα, το σύνολο $GL_n\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times n}$ και άρα είναι λεία πολλαπλότητα). Θα δείξουμε τώρα ότι οι πράξεις του γινομένου πινάκων και του αντιστρόφου ενός πίνακα είναι λείες απεικονίσεις. Πράγματι, το γινόμενο δύο πινάκων $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ της γενικής γραμμικής ομάδας δίνεται ως $AB = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, δηλαδή τα στοιχεία του γινομένου είναι πολυώνυμα. Συνεπώς ο πολλαπλασιασμός πινάκων

$$GL_n\mathbb{R} \times GL_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n\mathbb{R}, (A, B) \mapsto AB$$

είναι λεία συνάρτηση. Επίσης γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα A δίνεται από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$$

, όπου $\text{adj} A$ ο προσαρτημένος πίνακας του A , άρα τα στοιχεία του A^{-1} θα είναι πολυώνυμα, οπότε η απεικόνιση

$$GL_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n\mathbb{R}, A \mapsto A^{-1}$$

θα είναι λεία, επομένως η $GL_n\mathbb{R}$ είναι μια ομάδα Lie.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της ομάδας Lie πινάκων, χρειαζόμαστε το ακόλουθο.

Ορισμός 2.2 Έστω A_n μια ακολουθία πραγματικών πινάκων στο σύνολο $\mathbb{R}^{n \times n}$. Λέμε ότι η A_n συγκλίνει σε έναν πίνακα A αν κάθε στοιχείο της A_n συγκλίνει στο αντίστοιχο στοιχείο του A (δηλαδή, αν $(A_n)_{kl}$ συγκλίνει στο A_{kl} για κάθε $1 \leq k, l \leq n$).

Ορισμός 2.3 Μια ομάδα Lie πινάκων είναι οποιαδήποτε υποομάδα G της $GL_n\mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν A_n είναι οποιαδήποτε ακολουθία πινάκων στην G , και η A_n συγκλίνει σε κάποιον πίνακα A τότε είτε $A \in G$ είτε A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Παρατηρήσεις επί του ορισμού

1. Το ότι είναι υποομάδα απλά σημαίνει τα εξής 2 πράγματα

$$(\alpha') A, B \in G \Rightarrow AB \in G$$

$$(\beta') A \in G \Rightarrow A^{-1} \in G$$

Άρα μια ομάδα Lie πινάκων είναι μια κλειστή υποομάδα της $GL_n\mathbb{R}$ (π.χ με τη συνήθη τοπολογία γινόμενο που ορίζεται θεωρώντας την $GL_n\mathbb{R}$ ως υποσύνολο του \mathbb{R}^{n^2}).

2. Η ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιείται εναλλακτικά διατυπώνεται ως εξής: Αν $A_n \in G$ και $\lim A_n = A$ με A αντιστρέψιμο, τότε $A \in G$ ονομάζεται συνθήκη μη ιδιάζουσας σύγκλισης, που ισοδυναμεί με την κλειστότητα της G ως υποσύνολο της $GL_n\mathbb{R}$, εξασφαλίζει ότι η ομάδα Lie πινάκων G είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Αναφέραμε παραπάνω ότι μια ομάδα πινάκων δεν είναι αναγκαστικά ομάδα Lie. Ας πάρουμε την υποομάδα

$$GL_2\mathbb{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Q}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

της $GL_n\mathbb{R}$. Αυτή δεν είναι ομάδα Lie πινάκων γιατί δεν είναι κλειστή υποομάδα. Εύκολα μπορεί να βρει κανείς μια ακολουθία αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία ρητούς αριθμούς η οποία να συγκλίνει σε έναν αντιστρέψιμο πίνακα με στοιχεία άρρητους αριθμούς. Παράδειγμα είναι η ακολουθία

$$A_n = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{n})^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{Q}$$

που συγκλίνει στον αντιστρέψιμο πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin GL_2\mathbb{Q}$$

Οι ομάδες Lie πινάκων συγκαταλέγονται στις λεγόμενες κλασικές ομάδες. Ας δούμε κάποιες από αυτές. Όλες οι ομάδες που ακολουθούν είναι υποομάδες Lie της γενικής γραμμικής ομάδας.

1. Η ειδική γραμμική ομάδα (special linear group)

Η ειδική γραμμική ομάδα πάνω στο \mathbb{R} είναι η ομάδα των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων που έχουν ορίζουσα 1. Θα συμβολίζεται ως

$$SL_n\mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 1\}$$

. Η ειδική γραμμική ομάδα μπορεί να χαρακτηριστεί ως η ομάδα των γραμμικών μετασχηματισμών $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που διατηρούν όγκο και προσανατολισμό.

Είναι υποομάδα της $GL_n\mathbb{R}$. Επιπλέον, αν A_n είναι μια ακολουθία πινάκων με ορίζουσα 1 που συγκλίνει στον πίνακα A , τότε και ο A έχει ορίζουσα 1, επειδή η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα η $SL_n\mathbb{R}$ είναι ομάδα Lie πινάκων (και από το θεώρημα του von Neumann είναι ομάδα Lie).

2. Η ορθογώνια ομάδα (orthogonal group)

Ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας A λέγεται ότι είναι ορθογώνιος αν τα διανύσματα-στήλες που συνθέτουν τον A είναι ορθοκανονικά δηλαδή αν

$$\sum_{i=1}^n A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}$$

Ισοδύναμα, ο A είναι ορθογώνιος αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, αν δηλαδή $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ για όλα τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ (όπου το ' $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' συμβολίζει το σύννηδες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n). Ένας ακόμα ισοδύναμος ορισμός είναι ότι ο A είναι ορθογώνιος αν $A^T A = I$ ή καλύτερα αν $A^T = A^{-1}$

Εφόσον $\det A^T = \det A$ βλέπουμε ότι αν ο A είναι ορθογώνιος τότε $\det(A^T A) = \det I = 1$. Άρα $\det A = \pm 1$ για όλους του ορθογώνιους πίνακες ανάλογα με το αν διατηρούν τον προσανατολισμό (αν δηλαδή απεικονίζει δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων σε δεξιόστροφα συστήματα και αριστερόστροφα σε αριστερόστροφα ή όχι. Αυτός ο τύπος μας λέει ότι κάθε ορθογώνιος πίνακας πρέπει να είναι αντιστρέψιμος. Όμως, αν ο A είναι ένας ορθογώνιος πίνακας τότε

$$\langle A^{-1}x, A^{-1}y \rangle = \langle A(A^{-1}x), A(A^{-1}y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Έτσι, ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθογώνιος πίνακας. Επιπλέον, το γινόμενο δυο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιο, εφόσον αν οι A και B διατηρούν τα εσωτερικά γινόμενα, το ίδιο θα κάνει και το γινόμενο του AB . Επομένως, το σύνολο όλων των ορθογώνιων πινάκων σχηματίζει μια ομάδα. Την ομάδα αυτή θα τη συμβολίζουμε ως

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = I\}$$

Γεωμετρικά, τα στοιχεία της ορθογώνιας ομάδας είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που διατηρούν το μήκος, δηλαδή είναι ισομετρίες, και τη γωνία διανυσμάτων, δηλαδή είναι σύμμορφες απεικονίσεις. Άρα είναι στροφές (αν η ορίζουσα είναι +1) ή ανακλάσεις (αν η ορίζουσα είναι -1) ή συνδυασμός στροφών και ανακλάσεων. Δείξαμε παραπάνω ότι η $O(n)$ είναι υποομάδα της $GL_n\mathbb{R}$. Επιπλέον το όριο μιας ακολουθίας ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας, επειδή η σχέση $A^T A = I$ διατηρείται όταν παίρνουμε όρια. Έτσι η $O(n)$ είναι ομάδα Lie πινάκων.

3. Η ειδική ορθογώνια ομάδα (special orthogonal group). Το σύνολο των $n \times n$ ορθογώνιων πινάκων με ορίζουσα 1 είναι η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n)$. Προφανώς είναι υποομάδα της $O(n)$ και άρα υποομάδα της $GL_n\mathbb{R}$. Δηλαδή αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία $A \in O(n)$ που διατηρούν τον προσανατολισμό (που έχουν ορίζουσα +1). Δηλαδή κάθε $A \in SO(n)$ αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (άρα διατηρεί την αρχή των αξόνων) ο οποίος διατηρεί το μήκος και τον προσανατολισμό. Μετασχηματισμοί με αυτές τις ιδιότητες αντιστοιχούν σε στροφή γύρω από άξονα που διέρχεται από το μηδέν. Επιπλέον η ορθογωνιότητα και η ιδιότητα του να είναι η ορίζουσα +1 διατηρούνται όταν παίρνουμε όρια. Ας το δούμε αυτό λίγο πιο αναλυτικά μιας και η ομάδα αυτή θα έχει κεντρικό ρόλο στα επόμενα.

Συμβολίζουμε

$$S^{n-1} = SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^T = I, \det A = 1\}$$

Είδαμε στο Παράδειγμα 6. του κεφαλαίου 1.3 ότι αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$$

τότε

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$$

που είναι ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού της στροφής κατά γωνία θ στον \mathbb{R}^2 . Επιπλέον, αν $A, B \in SO(2)$ τότε $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I$ και επίσης $\det(AB) = \det A \det B = 1$ (που δείχνουν ότι είναι υποομάδα της $GL_n \mathbb{R}$).

Έστω τώρα

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in SO(2) \rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A \neq 0$$

ως προς οποιαδήποτε από τις ισοδύναμες νόρμες πινάκων, τότε $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c, d_n \rightarrow d$ άρα

$$AA^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_n^2 + b_n^2 & a_n c_n + b_n d_n \\ a_n c_n + b_n d_n & c_n^2 + d_n^2 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n A_n^T = \lim_{n \rightarrow \infty} I = I$$

και από τη συνέχεια της απεικόνισης $A \mapsto \det A, \det A = \lim_{n \rightarrow \infty} \det A_n = \det(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ προκύπτει ότι η $SO(2)$ είναι ομάδα Lie πινάκων. Παρατηρούμε ότι η στροφή στον \mathbb{R}^2 του διανύσματος (x, y) στο $x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta$ αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό του διανύσματος (x, y) ταυτισμένο με το μιγαδικό αριθμό $x + iy$, με το μιγαδικό αριθμό $e^{i\theta}$. Άρα η $SO(2)$ ταυτίζεται με το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου (και αυτό μάλιστα στον ορισμό της συμπεριλάβαμε τη σφαίρα S^{n-1} για να υποδηλώσει αυτό ακριβώς).

2.2 Το εκθετικό ενός πίνακα

Το εκθετικό ενός πίνακα παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των ομάδων Lie. Το εκθετικό υπεισέρχεται στον ορισμό της Lie άλγεβρας μιας ομάδας Lie πινάκων και είναι ο μηχανισμός να περνάμε πληροφορίες από την άλγεβρα Lie στην ομάδα Lie. Εφόσον πολλοί υπολογισμοί γίνονται με αρκετά μεγαλύτερη ευκολία στο επίπεδο μιας Lie άλγεβρας, το εκθετικό είναι απαραίτητο στη μελέτη ομάδων Lie πινάκων (και όχι μόνο πινάκων).

Έστω X ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Επιθυμούμε να ορίσουμε το εκθετικό του X , το οποίο συμβολίζουμε με e^X ή $\exp X$, μέσω της συνηθισμένης δυναμοσειράς

$$e^X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε το εξής.

Πρόταση 2.1. Για κάθε $n \times n$ πραγματικό πίνακα X , η παραπάνω σειρά συγκλίνει (ως προς οποιαδήποτε νόρμα πινάκων). Το εκθετικό ενός πίνακα είναι μια συνεχής συνάρτηση του X .

Υπενθυμίζουμε ότι η νόρμα ενός διανύσματος $x = (x_1, \dots, x_n)$ στον \mathbb{R}^n ορίζεται να είναι

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

Τώρα ορίζουμε τη νόρμα ενός πίνακα θεωρώντας το χώρο $\mathbb{R}^{n \times n}$ όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων ως το διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^{n^2} . Αυτό σημαίνει ότι

$$\|X\| = \left(\sum_{k,l=1}^n |X_{kl}|^2 \right)^{1/2}$$

Η νόρμα ικανοποιεί (μεταξύ άλλων) τις ιδιότητες

1. $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

2. $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ (προκύπτει από την ανισότητα Schwarz)

Είναι εύκολο να δούμε ότι μια ακολουθία πινάκων X_n συγκλίνει στον πίνακα X υπό την έννοια του Ορισμού 2.1.2 αν και μόνον αν $\|X_n - X\| \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Η εκθετική απεικόνιση είναι μια πολύ σημαντική απεικόνιση, διότι μέσω αυτής μπορούμε να πάρουμε καμπύλες στην $GL_n\mathbb{R}$ οι οποίες να διέρχονται από δεδομένο σημείο και να έχουν συγκεκριμένη αρχική ταχύτητα. Με τα όσα έχουμε πει ως τώρα αυτό δεν είναι προφανές πως γίνεται και για το λόγο αυτό η επόμενη πρόταση είναι ιδιαίτερα σημαντική.

Πρόταση 2.2 Για την εκθετικό πίνακα ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $e^0 = I$
2. $e^{X^T} = (e^X)^T$
3. e^X είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο $e^{-X} = (e^X)^{-1}$
4. $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X}e^{\beta X}$ για κάθε πραγματικούς α, β .
5. Αν τα X, Y μετατίθενται, δηλαδή αν $XY = YX$ τότε $e^{X+Y} = e^Xe^Y = e^Ye^X$
6. Αν ο C είναι αντιστρέψιμος τότε $e^{CXC^{-1}} = Ce^XC^{-1}$
7. $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$

Παρατήρηση. Γενικά δεν είναι αλήθεια ότι $e^{X+Y} = e^Xe^Y$ παρά μόνο αν τα X, Y μετατίθενται. Αυτό είναι ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο εφιστάμε την προσοχή. Ισχύει κάτι γενικότερο που είναι γνωστό ως τύπος των Campbell-Baker-Hausdorff

Απόδειξη. Το 1. είναι εντελώς προφανές, το 2. έπεται παίρνοντας όρο προς όρο τους ανάστροφους της σειράς του e^X . Τα 3. και 4. είναι ειδικές περιπτώσεις της 5. την οποία θα αποδείξουμε. Πρέπει απλά να πολλαπλασιάσουμε τις δυναμοσειρές όρο προς όρο (αυτό επιτρέπεται διότι οι σειρές συγκλίνουν). Πράγματι είναι

$$\begin{aligned} e^Xe^Y &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \sum_{m,k=0}^{\infty} \frac{X^m X^k}{m!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \frac{Y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k} \end{aligned}$$

Τώρα επειδή (και μόνο για αυτό το λόγο) τα X, Y μετατίθενται έχουμε

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k}$$

και άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$e^Xe^Y = (X + Y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} X^k Y^{n-k} = e^{X+Y}$$

Εύκολα τώρα, παίρνοντας $Y = -X$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$e^O = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{O^n}{n!} = 1$$

έχουμε ότι $e^{-X} = (e^X)^{-1}$.

Όμοια το 4. βάζοντας στη θέση του X το αX και στη θέση του Y το βX .

Για το 6. απλά παρατηρούμε ότι

$$(CXC^{-1})^n = CX^nC^{-1}$$

και άρα τα 2 μέλη του 6. είναι ίσα όρο προς όρο.

Το επόμενο είναι πολύ χρήσιμο, καθώς δίνει τν έννοια της ταχύτητας καμπύλης σε ομάδα Lie

Πρόταση 2.3 Έστω X ένας $n \times n$ πραγματικός πίνακας. Τότε e^{tX} είναι μια λεία καμπύλη στο $\mathbb{R}^{n \times n}$ και μάλιστα ισχύει

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX}$$

Πιο συγκεκριμένα ισχύει, $\left. \frac{d}{dt}e^{tX} \right|_{t=0} = X$

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να παραγωγίσουμε τη δυναμοσειρά του e^{tX} όρο προς όρο. Αυτή η εναλλαγή άθροισης και παραγωγίσης επιτρέπεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς. Έχουμε δηλαδή

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n X^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \frac{d}{dt}(t^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} X^n}{(n-1)!} = X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} X^{n-1}}{(n-1)!} = Xe^{tX}$$

Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\det e^X = e^{tr(X)}$ όπου trX είναι το ίχνος του πίνακα X , το οποίο ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα X . Υπάρχουν 2 τρόποι να το αποδείξει κανείς αυτό. Ο πρώτος είναι να διακρίνει περιπτώσεις για το αν ο X είναι άνω τριγωνικός, οπότε το εκθετικό του πίνακα θα είναι και αυτό άνω τριγωνικός πίνακας και τα διαγώνια στοιχεία του e^X θα είναι τα εκθετικά των διαγωνίων στοιχείων του X . Άρα

$$\det e^X = \prod_{i=1}^n e^{x_{ii}} = e^{\sum_{i=1}^n x_{ii}} = e^{trX}$$

Αν τώρα ο X είναι τυχαίος, τότε ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση μέσω της ανάλυσης Jordan όπου μπορούμε να βρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα G με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του X και έναν μη ιδιόμορφο πίνακα A ώστε $X = AGA^{-1}$. Τότε θα ισχύει

$$\det e^X = \det(Ae^G A^{-1}) = \det A \det e^G \det A^{-1} = \det e^G = e^{trG} = e^{trX}$$

Για πιο αναλυτική απόδειξη παραπέμπουμε στον *TU*

Ο δεύτερος τρόπος είναι να διακρίνει κανείς αν ο X είναι διαγωνοποιήσιμος, ή αν είναι μηδενοδύναμος ή τυχαίος. Στην τελευταία περίπτωση γίνεται χρήση ενός θεωρήματος της γραμμικής άλγεβρας που μας λέει ότι κάθε πίνακας γράφεται ως το άθροισμα ενός διαγωνοποιήσιμου και ενός μηδενοδύναμου πίνακα, οπότε η αναγωγή στα προηγούμενα 2 είναι άμεση. Για περισσότερες λεπτομέρειες σε αυτήν την ανάλυση παραπέμπουμε στο βιβλίο του Brian C. Hall.

2.3 Ο εφαπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie πινάκων - άλγεβρες Lie πινάκων

Οι ομάδες Lie ως μη γραμμικά αντικείμενα, είναι αρκετά δύσκολα στη μελέτη. Όπως και για μια οποιαδήποτε πολλαπλότητα ο εφαπτόμενος χώρος σε κάθε σημείο τους αποτελεί τη βέλτιστη γραμμική προσέγγιση στο σημείο αυτό. Ωστόσο το σημαντικό με τη θεωρία ομάδων Lie είναι ότι χρησιμοποιώντας απεικονίσεις μεταφοράς, (εδώ η δομή ομάδας παίζει σημαντικό ρόλο) αρκεί να μελετήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο στο ουδέτερο στοιχείο της ομάδας. Εκ πρώτης όψης αυτό φαίνεται κάπως περίεργο καθώς δεν θα μελετήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο σε άλλο στοιχείο πλην του ουδετέρου, και αν χρειαστεί να το κάνουμε, λόγω του ισομορφισμού μεταξύ εφαπτόμενων χώρων που θα εισάγουμε στα επόμενα, η έκφραση αυτή θα είναι αποκλειστικά συνάρτηση του εφαπτόμενου χώρου στο ουδέτερο στοιχείο.

Επιπλέον, ο εφαπτόμενος χώρος στο ουδέτερο στοιχείο αποκτά δομή μιας άλγεβρας Lie (ένα καθαρά αλγεβρικό αντικείμενο όπως το έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο) και το πιο συναρπαστικό σημείο της θεωρίας είναι ότι κάθε ομάδα Lie καθορίζεται τοπικά από την αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Ο τρόπος που θα γίνει αυτό είναι μέσω της εκθετικής απεικόνισης ομάδας Lie, η οποία στην περίπτωση των ομάδων πινάκων είναι η συνηθισμένη εκθετική απεικόνιση πινάκων. Ξεκινάμε με το να εξηγήσουμε γιατί ο εφαπτόμενος χώρος στο ουδέτερο στοιχείο είναι το μόνο που χρειαζόμαστε.

Έστω G μια ομάδα Lie και $a \in G$. Οι απεικονίσεις

$$L_a, R_a : G \rightarrow G, \quad L_a(g) = ag, \quad R_a(g) = ga$$

ονομάζονται αριστερή μεταφορά και δεξιά μεταφορά αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι είναι αμφιαδιαφορίσεις με αντιστρόφους $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ και $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$. Η αμφιαδιαφόριση L_a επάγει τον ισομορφισμό διανυσματικών χώρων

$$(dL_a)_e : T_e G \rightarrow T_a G$$

συνεπώς αν περιγράψουμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_e G$ στο ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ τότε η εικόνα $(dL_a)_e(T_e G)$ περιγράφει τον εφαπτόμενο χώρο $T_a G$ σε οποιοδήποτε σημείο a της ομάδας Lie G . Πιο γενικά, ορίζεται ο ισομορφισμός $(dL_a)_g : T_g \rightarrow T_{ag} G$

Η γενική θεωρία ομάδων Lie προβλέπει ότι για το σχηματισμό του εφαπτόμενου χώρου $T_e G$ στο ουδέτερο στοιχείο μιας ομάδας Lie G γίνεται χρήση των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων στην πολλαπλότητα G . Αυτή η οπτική είναι αρκετά δύσκολη στην υλοποίηση, πλην όμως παρέχει έναν καθολικό τρόπο εύρεσης του $T_e G$. Δεν θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση αυτή. Ένας δεύτερος τρόπος ορισμού του εφαπτόμενου χώρου μια ομάδας Lie G είναι μέσω των μονοπαραμετρικών υποομάδων της. Ας το δούμε αυτό λίγο πιο αναλυτικά.

Ορισμός 2.4 Έστω G μια ομάδα Lie. Μια συνάρτηση $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$, από την προσθετική ομάδα $\mathbb{R}, +$ στην ομάδα Lie G , καλείται μονοπαραμετρική υποομάδα της G αν είναι λείος ομομορφισμός. Βλέπουμε ότι η μονοπαραμετρική υποομάδα ϕ είναι μια λεία καμπύλη της G η οποία ως ομομορφισμός θα ικανοποιεί τις σχέσεις $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$, $\phi(0) = e$, $\phi(-t) = \phi(t)^{-1}$.

Θεώρημα 2.1 Αν ϕ είναι μια μονοπαραμετρική υποομάδα μιας ομάδας Lie πινάκων G , τότε υπάρχει μοναδικός πίνακας X τέτοιος ώστε

$$\phi(t) = e^{tX}$$

Ορίζουμε ως εφαπτόμενο χώρο στο ταυτοτικό στοιχείο μιας ομάδας Lie πινάκων το σύνολο των μονοπαραμετρικών υποομάδων της. Και πάλι όμως αυτή η θεώρηση μας οδηγεί στην πιο γεωμετρική σκοπιά των ομάδων Lie καθώς γίνεται συστηματική χρήση των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων, πράγμα με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε.

Όπως πολλάκις έχουμε αναφέρει, στην παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε για ομάδες Lie πινάκων. Εν προκειμένω, η ανάπτυξη αυτή θα μπορούσε να γίνει αγνοώντας πλήρως το γεγονός ότι συγχρόνως είναι λείες πολλαπλότητες. Τότε όμως, δεν θα υπήρχε καν η υποψία να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο στο ταυτοτικό στοιχείο, αφού πρόκειται για μια τοπολογική έννοια, που απορρέει από το γεγονός ότι αυτές οι ομάδες είναι λείες πολλαπλότητες. Υπό αυτό το πρίσμα, αυτό που θα ορίσουμε είναι η άλγεβρα Lie πινάκων (δεν φαίνεται να είναι αυτό που έχουμε ορίσει γενικά ως άλγεβρα Lie στο προηγούμενο κεφάλαιο, όμως αποδεικνύεται ότι είναι)

Η άλγεβρα Lie είναι ένα απαραίτητο εργαλείο στη μελέτη ομάδων Lie πινάκων (και όχι μόνο πινάκων). Από τη μια πλευρά, οι άλγεβρες Lie είναι απλούστερες από τις ομάδες Lie, διότι μια Lie άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος. Έτσι μπορούμε να καταλάβουμε πολλά πράγματα για τις Lie άλγεβρες, απλά κάνοντας γραμμική άλγεβρα. Επίσης, η Lie άλγεβρα μιας ομάδας Lie περιέχει αρκετή πληροφορία για την ομάδα. Έτσι πολλά ερωτήματα που αφορούν ομάδες Lie πινάκων μπορούν να απαντηθούν θεωρώντας ένα όμοιο αλλά ευκολότερο πρόβλημα για την άλγεβρα Lie.

Ορισμός 2.5 Έστω G μια ομάδα Lie πινάκων. Η άλγεβρα Lie της G , την οποία συμβολίζουμε με \mathfrak{g} είναι το σύνολο όλων των πινάκων X ώστε το e^{tX} είναι στην G για όλους τους πραγματικούς αριθμούς t .

Αυτό σημαίνει ότι το X ανήκει στην \mathfrak{g} αν και μόνον αν η μονοπαραμετρική υποομάδα που παράγεται από το X κείται στην G .

Έχουμε δώσει έναν πιο αφηρημένο ορισμό Lie άλγεβρας (που δεν χρειάζεται καν να προέρχεται από μια ομάδα). Αποδεικνύεται όμως ότι η \mathfrak{g} είναι άλγεβρα Lie και με αυτήν την έννοια. Έχουμε επίσης αναφέρει ότι κάθε ομάδα Lie πινάκων είναι υποομάδες (με την αλγεβρική έννοια) και εμψυευμένες υποπολλαπλότητες (με την τοπολογική έννοια) της $GL_n \mathbb{R}$ (για συντομία τις ονομάζουμε υποομάδες Lie). Αποδεικνύεται ότι η \mathfrak{g} μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως το σύνολο όλων των παραγώγων των λείων καμπύλων που διέρχονται από το ταυτοτικό στοιχείο της G . Άρα καταλαβαίνει κανείς ότι η ταύτιση του εφαπτόμενου χώρου στο ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας Lie G και της άλγεβρας Lie \mathfrak{g} είναι εντελώς φυσιολογική.

Για λόγους πληρότητας, ξεκινήσαμε με τον ορισμό της άλγεβρας Lie πινάκων ώστε να επιτευχθεί η κατά το δυνατόν καλύτερη κατανόηση. Η ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θα ξεκινήσει από τον εφαπτόμενο χώρο (συνεπώς επαναφέρουμε τις 'καλές' τοπολογικές ιδιότητες που φέρουν οι ομάδες) και θα δείξουμε ότι αυτός ταυτίζεται με την άλγεβρα Lie \mathfrak{g} . (η αντίστροφη διαδικασία είναι πιο απαιτητική για αυτό δεν ακολουθείται. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Brian C.

Hall)

Ορισμός 2.6 Ο εφαπτόμενος χώρος $T_I G$ στο ταυτοτικό στοιχείο I μιας ομάδας Lie πινάκων G είναι το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων

$$A'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t+0) - A(0)}{t}$$

όπου $A(t) = (a_{ij}(t))$ μια λεία καμπύλη στην G με $A(0) = I$.

Δηλαδή, ο εφαπτόμενος χώρος $T_I G$ στο ταυτοτικό στοιχείο μιας ομάδας Lie πινάκων είναι το σύνολο των πινάκων X της μορφής $X = A'(0)$ όπου $A(t) \in G$ λεία καμπύλη στην G με $A(0) = I$.

Ας δούμε κάποιες ιδιότητες της Lie άλγεβρας.

Πρόταση 2.4 Αν G μια ομάδα Lie πινάκων, και X ένα στοιχείο της Lie άλγεβρας, τότε το e^X είναι ένα στοιχείο της ταυτοτικής συνιστώσας της G .

Απόδειξη. Από τον ορισμό της Lie άλγεβρας, το e^{tX} κείται στην G για όλα τα t . Όμως καθώς το t μεταβάλλεται από το μηδέν στο 1, το e^{tX} είναι ένας συνεχής δρόμος που συνδέει το ταυτοτικό στοιχείο με το e^X .

Πρόταση 2.5 Έστω G μια ομάδα Lie πινάκων, με άλγεβρα Lie \mathfrak{g} . Έστω X ένα στοιχείο της \mathfrak{g} και A ένα στοιχείο της G . Τότε $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$

Απόδειξη. Αυτό είναι εντελώς άμεσο διότι από την Πρόταση 2.1 ισχύει

$$e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1}$$

και έτσι $Ae^{tX}A^{-1} \in G$ για κάθε t .

Θεώρημα 2.2 Έστω G μια ομάδα Lie πινάκων, \mathfrak{g} η Lie άλγεβρα της και $X, Y \in \mathfrak{g}$. Τότε τα επόμενα ισχύουν.

1. $sX \in \mathfrak{g}$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς s .
2. $X + Y \in \mathfrak{g}$
3. $XY - YX \in \mathfrak{g}$

Η πρόταση αυτή μας λέει ότι η άλγεβρα Lie πινάκων είναι ένας διανυσματικός χώρος πινάκων, που επιπλέον ισχύει η συνθήκη 3. Επιστούμε όμως μεγάλη προσοχή στο σημείο αυτό. Δεν αναφέρουμε ότι η έκφραση αυτή είναι το Lie bracket των X και Y , παρόλο που στα προηγούμενα αυτή ήταν η συνθιτισμένη μορφή για αυτό. Θυμίζουμε ότι Lie άλγεβρα είναι ένας διανυσματικός χώρος (όχι αναγκαστικά διανυσματικός χώρος πινάκων) που επιπλέον είναι εφοδιασμένος με μια πράξη που είναι διγραμμική, αντισυμμετρική και ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi. Δεν υπάρχει καμία απολύτως ανάγκη για το Lie bracket να έχει την παραπάνω μορφή. Ειδικότερα το $[X, Y]$ δεν είναι ανάγκη να είναι ίσο με $XY - YX$. Πράγματι, η τελευταία σχέση δεν έχει καν νόημα, επειδή η \mathfrak{g} δεν είναι υποχρεωτικό (ως διανυσματικός χώρος) να έχει μια πράξη γινομένου για τα στοιχεία της. Για παράδειγμα, δώσαμε στα προηγούμενα ως κλασικό παράδειγμα άλγεβρας Lie τον \mathbb{R}^3 και ορίζουμε ως Lie bracket $[x, y]$ να είναι το $x \times y$. Προφανώς το τελευταίο είναι μια διγραμμική, αντισυμμετρική μορφή, που εύκολα ελέγχει κανείς ότι ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi. Εντούτοις, δεν υπάρχει καμία πράξη γινομένου στον \mathbb{R}^3 'αφ'όσον $x \times y = xy - yx$.

Ο προσεκτικός αναγνώστης ίσως διαπιστώσει μια μικρή άσυμφωνία στα όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα για τις άλγεβρες Lie πινάκων και για τους εφαπτόμενους χώρους αλλά και για τις άλγεβρες Lie γενικά. Αυτό που διατυπώνουμε τώρα ως θεώρημα, το είχαμε διατυπώσει στα προηγούμενα ως ορισμό. Η διαφορά έγκειται καθαρά στην προσέγγιση του αντικειμένου από τη σκοπιά των πολλαπλοτήτων, και από την αμιγώς αλγεβρική. Αφετηρία για την απόδειξη μας θα είναι ο Ορισμός 2.6, ο οποίος στην προσέγγιση από τη σκοπιά των πολλαπλοτήτων αποδεικνύεται, με χρήση της εκθετικής απεικόνισης ομάδας, θέμα με το οποίο δεν θα ασχοληθούμε. Βλέπουμε επομένως ότι ο αλγεβρικός και τοπολογικός δυϊσμός καθιστά τη θεωρία εξαιρετικά πλούσια, αλλά συγχρόνως μας εξασφαλίζει πολλούς τρόπους να αποδεικνύουμε διάφορα αποτελέσματα.

Απόδειξη. Το 1. είναι άμεσο, εφόσον $e^{s(tX)} = e^{(ts)X}$, το οποίο οφείλει να ανήκει στην G αφού το X ανήκει στην \mathfrak{g} . Το 2. είναι επίσης άμεσο αν τα X, Y μετατίθενται από την πρόταση 2.3. Αν δεν μετατίθενται, τότε θα χρειαστούμε

κάτι που ονομάζεται τύπος γινομένου του Lie το οποίο ισχυρίζεται ότι

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{tX/n} e^{tY/n} \right)^n$$

Εφόσον τα X, Y είναι στην \mathfrak{g} , τα $e^{tX/n}, e^{tY/n}$ ανήκουν στην G , και επειδή η G είναι ομάδα το $(e^{tX/n} e^{tY/n})$ ανήκει επίσης στην G . Για το λόγο ότι η G είναι ομάδα Lie πινάκων, το όριο πρέπει να ανήκει στην G , αρκεί να είναι αντιστρέψιμο. Από τη στιγμή που το $e^{t(X+Y)}$ είναι αυτομάτως αντιστρέψιμο, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να ανήκει στην G . Αυτό δείχνει ότι το $X + Y$ ανήκει στην G .

Για το 3. θυμόμαστε ότι $\left. \frac{d}{dt} e^{tX} \right|_{t=0} = X$. Έπεται ότι $\left. \frac{d}{dt} e^{tX} Y \right|_{t=0} = XY$, και άρα από τον κανόνα γινομένου

$$\left. \frac{d}{dt} (e^{tX} Y e^{-tX}) \right|_{t=0} = (XY)e^0 - (e^0 Y)(-X) = XY - YX$$

Τώρα από την Πρόταση 2.6 το $(e^{tX} Y e^{-tX})$ είναι στην \mathfrak{g} για όλα τα t . Ακόμη λόγω των 1. και 2. έχουμε εξασφαλίσει ότι το \mathfrak{g} είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n \times n}$. Αυτό ειδικότερα σημαίνει ότι το \mathfrak{g} είναι τοπολογικά κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times n}$. Δηλαδή περιέχει όλα τα οριακά του σημεία. Αυτό όμως είναι το ζητούμενο αφού

$$XY - YX = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h}$$

ανήκει στο \mathfrak{g} .

Ας δούμε κάποια παραδείγματα για τις κλασικές ομάδες πινάκων, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς.

Παραδείγματα.

1. Από την Πρόταση 2.3 έχουμε ότι αν X οποιοσδήποτε $n \times n$ πραγματικός πίνακας, τότε ο e^{tX} θα είναι επίσης αντιστρέψιμος και πραγματικός. Από την άλλη, αν ο e^{tX} είναι πραγματικός για όλους τους πραγματικούς αριθμούς t , τότε $X = \left. \frac{d}{dt} e^{tX} \right|_{t=0}$ θα είναι επίσης πραγματικός. Άρα η άλγεβρα Lie της $GL_n \mathbb{R}$ είναι ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^{n \times n}$ όλων των $n \times n$ πινάκων, και συμβολίζεται με $\mathfrak{gl}_n \mathbb{R}$.

Το παραπάνω ήταν με τον Ορισμό 2.5. Το ίδιο μπορούμε να δείξουμε με τον ορισμό 2.6. Δοθέντος οποιουδήποτε πίνακα $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, η καμπύλη $c(t) = e^{tX}$ είναι στην $GL_n \mathbb{R}$ εφόσον $\det e^{tX} \neq 0$. Άρα δείξαμε τον εγκλεισμό $T_I GL_n \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$. Επιπλέον $c(0) = I$. Εξ ορισμού $c'(0) \in T_I GL_n \mathbb{R}$. Αλλά $c'(0) = X$ άρα $X \in T_I GL_n \mathbb{R}$ και δείξαμε τον εγκλεισμό $\mathbb{R}^{n \times n} \subseteq T_I GL_n \mathbb{R}$.

Αξίζει να σχολιάσουμε ότι η πορεία για την εύρεση του εφαπτόμενου χώρου στο ταυτοτικό στοιχείο μιας ομάδας Lie πινάκων είναι ακριβώς ίδια με τη διαδικασία εύρεσης της άλγεβρας Lie πινάκων. Επομένως ταύτιση που κάναμε στα παραπάνω είναι απολύτως φυσιολογική. (Δεν την έχουμε όμως αποδείξει με αυστηρότητα).

2. Θα βρούμε τον εφαπτόμενο χώρο της $O(n)$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathfrak{o}(n) = T_I O(n) = \{X \in GL_n \mathbb{R} : X + X^T = 0\}$$

Θα το δείξουμε με τον διπλο εγκλεισμό. (\subseteq) Έστω $X \in T_I G$ και $A(t) \in O(n)$ μια λεία καμπύλη με $A(0) = I$ και $A'(0) = X$. Αφού $A \in O(n)$ ισχύει $A(t)A(t)^T = I$ καθώς και $A(0) = I$ και $A'(0) = X$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε ότι $A'(t)A(t)^T + A(t)A'(t)^T = 0$. Επειδή $A(0) = I = A(0)^T$, θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $A'(0) + A'(0)^T = 0$ δηλαδή $X + X^T = 0$.

Αν τώρα ο πίνακας X ικανοποιεί την $X + X^T = 0$ τότε η λεία καμπύλη $A(t) = e^{tX}$ ικανοποιεί

$$A(t)A(t)^T = e^{tX} e^{(tX)^T} = e^{tX} e^{-tX} = e^0 = I$$

Δηλαδή, κατά τον ορισμό, $A(t) = e^{tX} \in O(n)$

3. Θα δείξουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος της ειδικής ορθογώνιας ομάδας είναι ο εφαπτόμενος χώρος της ορθογώνιας ομάδας. Δηλαδή

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X + X^T = 0\}$$

Ο πρώτος εγκλεισμός δείχνεται ακριβώς όπως και πριν. Για τον δεύτερο εγκλεισμό θα ικανοποιήσουμε πάλι τον ορισμό της Lie άλγεβρας πινάκων. Πράγματι αν ο πίνακας X ικανοποιεί $X + X^T = 0$ τότε ο δρόμος e^{tX} ικανοποιεί

$$e^{tX} e^{(tX)^T} = e^{tX} e^{-tX} = e^0 = I$$

Επιπλέον

$$\det(e^{tX}e^{(tX)^T}) = \det I = 1$$

και επίσης

$$\det(e^{tX}e^{tX^T}) = \det e^{tX} \det e^{tX^T} = (\det e^{tX})^2$$

Συνεπώς

$$(\det e^{tX})^2 = 1$$

Άρα $\det e^{tX} = \pm 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Επειδή για $t = 0$, $\det e^{0X} = 1$ και η συνάρτηση ορίζουσα είναι συνεχής, θα ισχύει $\det e^{tX} = 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Αν όχι, δηλαδή αν υπάρχουν $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ώστε $\det e^{t_1 X} = 1$ και $\det e^{t_2 X} = -1$, τότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα t_0 ώστε $\det e^{t_0 X} = 0$ το οποίο ασφαλώς και είναι άτοπο, διότι έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο $e^{t_0 X}$ είναι αντιστρέψιμος. Άρα $\det e^{tX} = 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$ που σημαίνει ότι ο πίνακας $A(t) = e^{tX} \in SO(n)$ και $A'(0) = X$. Άρα ο X είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στο ταυτοτικό στοιχείο το οποίο ολοκληρώνει τον δεύτερο εγχειρισμό.

3 Γεωμετρική μη γραμμικότητα στη Μηχανική Συνεχούς Μέσου

Στο κεφάλαιο αυτό θα συνοψίσουμε το βασικό συμβολισμό και κάποιες θεμελιώδεις ιδέες στη μηχανική συνεχών μέσων, περιορίζοντας όμως τη συζήτηση μόνο σε εκείνες τις ιδέες που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη μιας θεωρίας δοκού. Ειδικότερα, θα συζητήσουμε έννοιες συνεχούς σώματος και την παραμετροποίησή του, κίνηση σώματος στο χρόνο και μια convective συντεταγμένων μορφή των εξισώσεων ισορροπίας ροπής.

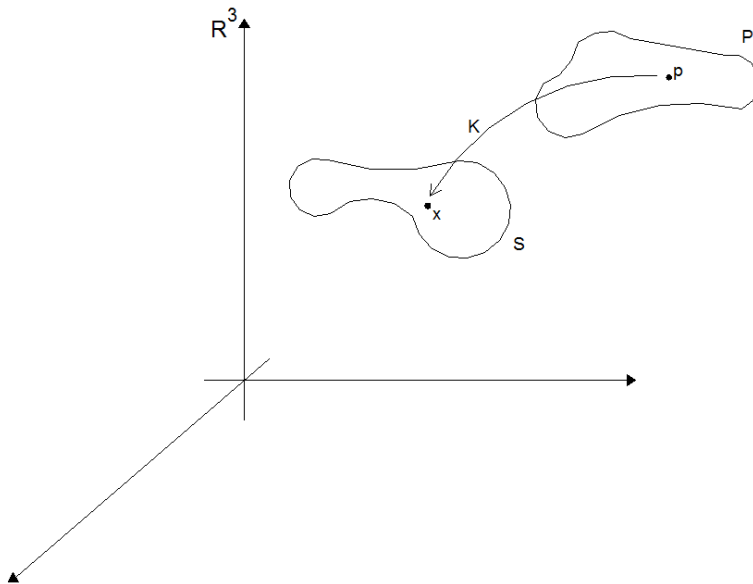
3.1 Σώματα, σχηματισμοί, τοποθετήσεις

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς.

Ένα συνεχές σώμα \mathcal{P} είναι μια πολλαπλότητα υλικών σημείων $p \in P$. Ένας τοπικός σχηματισμός είναι ένας χάρτης (U, κ) τέτοιος ώστε

$$\kappa : U \subset P \rightarrow \kappa(U) \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

όπου το $\kappa(U)$ είναι ανοιχτό. Γενικά, στη μηχανική συνεχούς μέσου δεχόμαστε ότι ένας απλός χάρτης αρκεί για να καλύψει το \mathcal{P} .



Σχήμα 3.1: Απλό μοντέλο σώματος. Μια τοποθέτηση $S \subset \mathbb{R}^3$ σε έναν σχηματισμό $\kappa : P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο $S = \kappa(P) \subset \mathbb{R}^3$.

Καλεί κάποιος το $S = \kappa(P) \subset \mathbb{R}^3$ ως τη τοποθέτηση του P υπό τον (καθολικό) σχηματισμό $\kappa : P \rightarrow S$. Μια κίνηση του P είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια σχηματισμών που έχει ως δείκτη το χρόνο, δηλαδή

$$\kappa_t : P \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

Καλούμε

$$S_t = \kappa_t(P) \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.3)$$

την τοποθέτηση (ή θέση) του P στο χρόνο t . Σε όσα ακολουθούν, υποθέτουμε ότι ένας σχηματισμός αναφοράς που καθορίζει μια τοποθέτηση (ή θέση) αναφοράς έχει επιλεγεί μια και καλή, και θέτουμε

$$\kappa_0 : P \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ και ορίζουμε } B = \kappa_0(P) \quad (3.4)$$

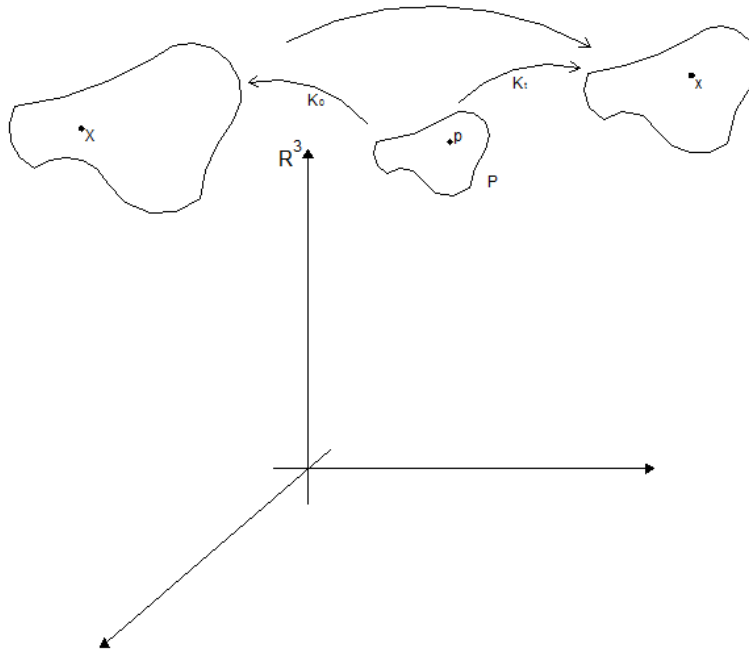
Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\phi_t := \kappa_t \circ \kappa_0^{-1} : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.5)$$

και γράφουμε

$$x = \phi_t(X), X \in S_0 \quad (3.5)$$

Από υπόθεση $B = S_t|_{t=0}$. Αυτή η κατάσταση περιγράφεται στο σχήμα



Σχήμα 3.2: Κλασική θεώρηση στη Μηχανική Συνεχούς Μέσου. Θεωρούμε το $B = \kappa_0(P)$ (τη θέση αναφοράς) και το $S_t = \kappa_t(P)$ (τωρινή θέση) ως πολλαπλότητες.

3.2 Παραμετροποίηση του χώρου του σχηματισμού

Σε όσα ακολουθούν, θεωρούμε το $B = \kappa_0(p)$, τη θέση αναφοράς, ως μια δοθείσα λεία πολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 , και θεωρούμε απεικονίσεις της μορφής (3.5) και (3.6)

Ορισμός 3.1. Έστω ∂B το σύνορο της θέσης αναφοράς $B = \kappa_0(P)$. Υποθέτουμε ότι οι παραμορφώσεις είναι της μορφής (3.5) και (3.6) και έχουν οριστεί σε ένα τμήμα του συνόρου $\partial_\phi B \subset \partial B$ ως

$$\bar{\phi} : \partial_\phi B \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.7)$$

Για κάθε $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ορίζουμε την κλίση παραμόρφωσης ως την εφαπτόμενη απεικόνιση

$$F(X) := T\phi(X) : T_X B \rightarrow T_{\phi(X)} \mathbb{R}^3 \quad (3.8)$$

Απαιτούμε, για κάθε $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ να ισχύει $\det(D\phi(X)) > 0$ για κάθε $X \in B$. Συνοψίζοντας, ορίζουμε το χώρο των σχηματισμών των αποδεκτών παραμορφώσεων ως

$$\mathcal{C} = \{\phi : B \rightarrow \mathbb{R}^3 : \phi_{\partial_\phi B} = \bar{\phi} \text{ και } \det(D\phi) > 0\} \quad (3.9)$$

Γενικά, το $B \subset \mathbb{R}^3$ είναι μια λεία πολλαπλότητα, όχι αναγκαστικά ένα ανοιχτό υποσύνολο. Έτσι εισάγουμε τις τοπικές συντεταγμένες σε όρους τοπικών χαρτών ως ακολούθως.

Ορισμός 3.2. Έστω $B \subset \mathbb{R}^3$ και $S \subset \mathbb{R}^3$ να είναι η θέση αναφοράς και η τωρινή θέση αντίστοιχα και $\phi : B \rightarrow S$ η παραμόρφωση ($\phi \in \mathcal{C}$). Θεωρούμε $X \in B$ και $x \in \phi(B)$
 Ορίζουμε τοπικούς χάρτες (χ_0, Ω_0) και (χ, Ω) στα $X \in B$ και $x \in \phi(B)$ έτσι ώστε

$$X = \chi_0(\xi) \ , \ \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega_0 \tag{3.10}$$

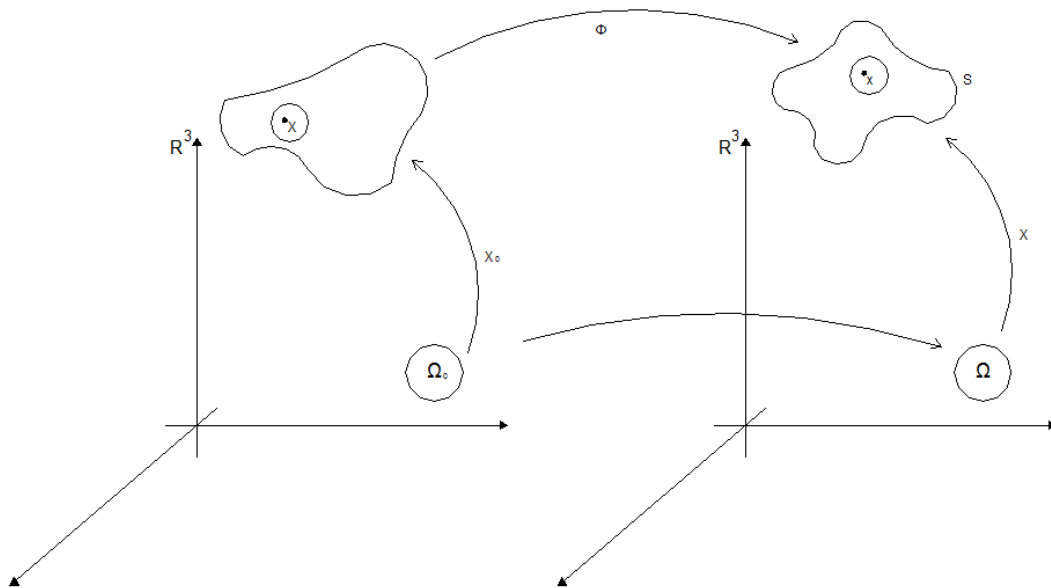
$$x = \chi(\eta) \ , \ \eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3) \in \Omega \tag{3.11}$$

Ασφαλώς τα $\chi_0 : \Omega_0 \rightarrow B$ και $\chi : \Omega \rightarrow S$ υπόκεινται στους συνηθισμένους περιορισμούς. Ως συνήθως

$$\phi_{\chi\chi_0} := \chi^{-1} \circ \phi \circ \chi_0 : \Omega_0 \rightarrow \Omega \tag{3.12}$$

είναι η αναπαράσταση του ϕ στους χάρτες (χ_0, Ω_0) και (χ, Ω) .

Οι προηγούμενοι ορισμοί δείχνουν ότι η μηχανική συνεχούς μέσου, σε ένα αρκετά γενικό πλαίσιο, ταιριάζει με φυσικό τρόπο στην ανάλυση σε πολλαπλότητες. Στη μελέτη μας για δοκούς όμως, μια ιδιαίτερη παραμετροποίηση που αναφέρεται ως convective συντεταγμένες είναι πολύ χρήσιμη.

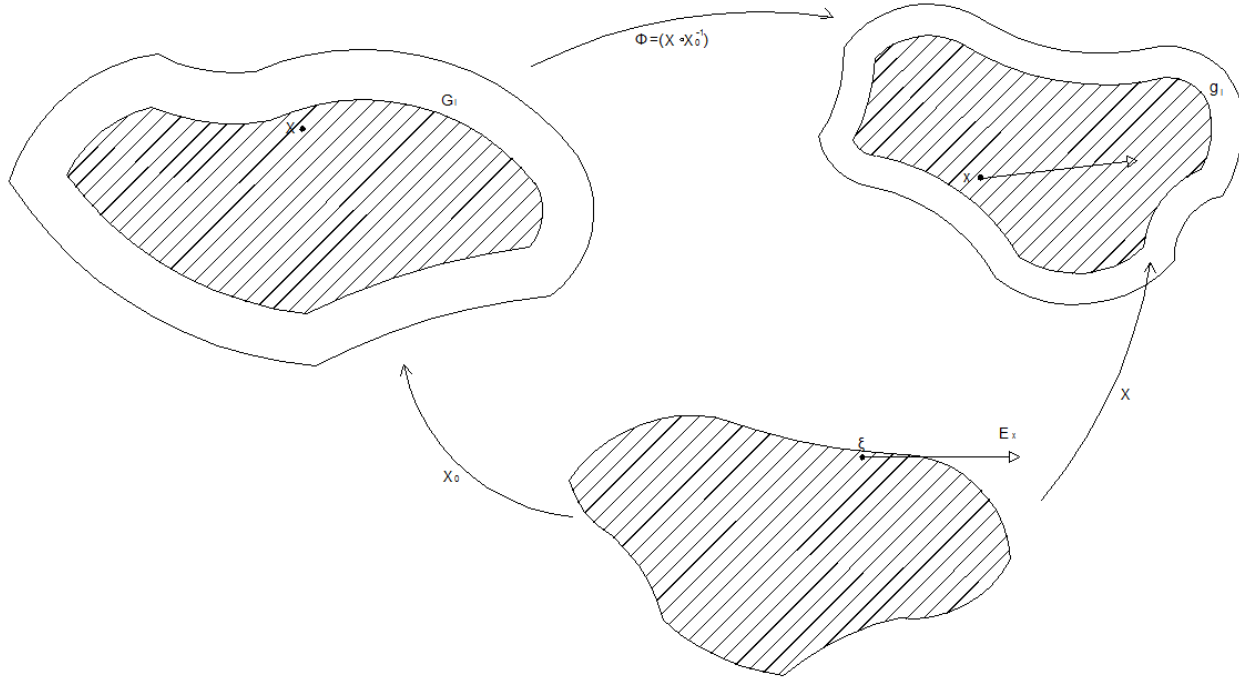


Σχήμα 3.3: Γεωμετρική θεώρηση. Απεικονίσεις μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων

Ορισμός 3.3. Έστω $\phi \in \mathcal{C}$ και (χ_0, Ω_0) ένας χάρτης στο $X \in B$. Το convective σύστημα συντεταγμένων προκύπτει θέτοντας

$$\Omega = \Omega_0 \text{ και } \chi = \phi \circ \chi_0 : \Omega \rightarrow S \tag{3.13}$$

Εικονικά, έχουμε την κατάσταση στην εικόνα



Σχήμα 3.4: Το convective σύστημα συντεταγμένων $X = \chi_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ και $x = \chi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ για το ίδιο $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega$

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των χωρικών και υλικών διανυσματικών πεδίων πριν εισάγουμε τα διανύσματα βάσης συντεταγμένων.

Ορισμός 3.4. Ένα υλικό διανυσματικό πεδίο είναι μια απεικόνιση

$$X \in B \mapsto W(X) \in T_{\phi(X)}S \quad (3.14)$$

ενώ ένα χωρικό διανυσματικό πεδίο είναι μια απεικόνιση

$$x \in S \mapsto w(x) \in T_x S \quad (3.15)$$

Η υλική και χωρική αναπαράσταση ενός διανυσματικού πεδίου κατασκευάζεται θέτοντας

$$W(X) = w(\phi(X)) \Leftrightarrow W = w \circ \phi \quad (3.16)$$

Ειδικά για την convective αναπαράσταση έχουμε το παρακάτω χρήσιμα διανυσματικά πεδία.

Ορισμός 3.5. Έστω (χ_0, Ω) ένας χάρτης στο B με $X \in \Omega$. Έστω $\phi \in \mathcal{C}$ και ορίζουμε τον convective χάρτη της $S = \phi(B)$ θέτοντας $\chi = \phi \circ \chi_0$. Τότε έχουμε

1. Παραμόρφωση

$$\phi = \chi \circ \chi_0^{-1} \quad (3.17)$$

2. Εφαπτόμενη απεικόνιση και κλίση παραμόρφωσης

$$T_{\phi(X)} = (\phi(X), F(X)) = (\phi(X), D\chi(\chi_0^{-1}) \circ D\chi_0^{-1}(X)) \quad (3.18)$$

3. Διανυσματικά πεδία συντεταγμένων $X \mapsto G_i(X) \in T_X B$ και $x \mapsto g_i(x) \in T_x S$

$$\begin{aligned} G_i \circ \chi_0(\xi) &= D\chi_0(\xi)E_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \chi_0(\xi) \\ g_i \circ \chi(\xi) &= D\chi(\xi)E_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \chi(\xi) \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου $\{E_I\}$ οι κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Παρατηρούμε συγχρόνως ότι

$$g_I(x) = D\phi(X)G_I \quad (3.20)$$

4. Ιακωβιανές ορίζουσες των χαρτών

$$j_0(\xi) = \det(D\chi_0(\xi)) \quad , \quad j(\xi) = \det(D\chi(\xi)) \quad (3.21)$$

5. Η Ιακωβιανή της $\phi : B \rightarrow S$

$$J(X) = \frac{j(\chi_0^{-1}(X))}{j_0(\chi_0^{-1}(X))} > 0 \quad (3.22)$$

6. Η δυϊκή βάση ορίζεται από τις συνθησιμένες σχέσεις

$$\langle g_i, g^j \rangle = \delta_i^j \quad , \quad \langle G_i, G^j \rangle = \delta_i^j \quad (3.23)$$

Τα επόμενα απλά αποτελέσματα είναι χρήσιμα στην ανάπτυξή μας.

Πρόταση 3.1. Τα ακόλουθα ισχύουν.

$$\begin{aligned} j(\xi) &= \langle g_1 \times g_2, g_3 \rangle \Big|_{x=\chi(\xi)} \\ g_i \times g_j &= j \varepsilon_{ijk} g^k \\ g^i &= (D\phi)^{-T} G^i \end{aligned} \quad (3.24)$$

όπου ε το σύμβολο Levi Civita

Ύστερα εισάγουμε μια ιδιαίτερη έννοια συναλλοίωτης παραγώγισης, σύμφωνα με την συνήθη συνοχή στον \mathbb{R}^3 . Κίνητρο για τον ορισμό μας είναι η γενική έννοια συναλλοίωτης παραγώγισης, όπως γράφουμε παρακάτω.

Έστω $c : [a, b] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ μια λεία καμπύλη ώστε $c(0) = x$. Ας θεωρήσουμε ακόμα ένα διανυσματικό πεδίο $v : S \rightarrow TS$. Αυτό το διανυσματικό πεδίο ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος την c , το οποίο παίρνουμε αν απλά συνθέσουμε το V με την καμπύλη c , δηλαδή

$$t \in [a, b] \mapsto V(c(t)) \in T_{c(t)} S \quad (3.25)$$

Τότε έχουμε το ακόλουθο:

Ορισμός 3.6. Η συναλλοίωτη παράγωγος του $V : S \rightarrow TS$ κατά μήκος της καμπύλης $c : [a, b] \rightarrow S$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του V κατά μήκος της καμπύλης c , και συμβολίζεται με $\nabla_{c'(t)} V(c(t))$. Έτσι έχουμε

$$\nabla_{c'(t)} V(c(t)) := \frac{d}{dt} V(c(t)) \quad (3.26)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα κάποιες ιδιαίτερες καμπύλες, που αναφέρονται ως καμπύλες συντεταγμένων και ορίζονται ως

$$t \in \mathbb{R} \mapsto c_1(t) = \chi(t, \xi^2, \xi^3) \in S \quad (3.27)$$

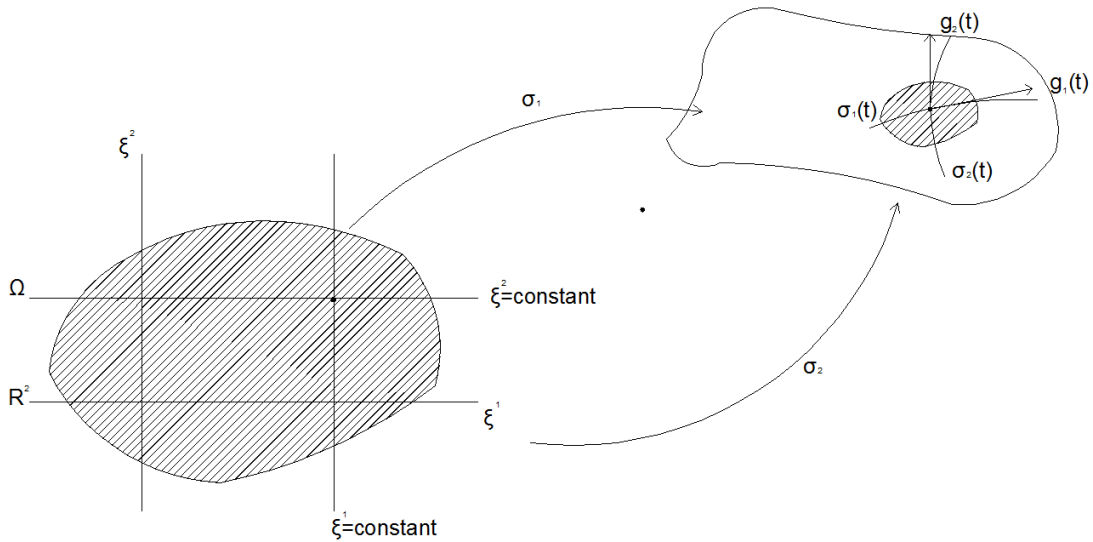
και όμοια ορίζονται τα $c_2(t)$ και $c_3(t)$. Σημειώνουμε ότι

$$c_i(t) \Big|_{t=\xi^i} = \chi(\xi) = x \in S \quad (3.28)$$

Τα εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες συντεταγμένων του χάρτη (χ, Ω) στο $x = \chi(\xi)$, $\xi \in \Omega$ είναι

$$\frac{d}{dt} c_i(t) \Big|_{t=\xi^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \chi(\xi) = g_i(\chi(\xi)) \quad (3.29)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα εφαπτόμενα διανύσματα στις καμπύλες συντεταγμένων είναι τα διανύσματα βάσης του χάρτη. Αυτό δείχνουμε στην εικόνα



Σχήμα 3.5: Καμπύλες συντεταγμένων και διανύσματα βάσης σε έναν χάρτη (χ, Ω)

Από τον ορισμό που δώσαμε για τη συναλλοίωτη παράγωγο στην παράγραφο 1.7, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου $V : S \rightarrow TS$ κατά μήκος των καμπύλων συντεταγμένων του χάρτη, υπολογισμένη στο σημείο $x = \chi(\xi)$ είναι

$$\nabla_{c'(t)} V(c_i(t)) \Big|_{t=\xi^i} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\xi^i} V(c_i(t)) \quad (3.30)$$

Από τις (3.30) και (3.29) παίρνουμε

$$\nabla_{g_i(\chi(\xi))} V(\chi(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} V(\chi(\xi)) \quad (3.31)$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι ο ορισμός που δώσαμε για τη συναλλοίωτη παράγωγο πρέπει να είναι συνεπής με τη γενική έννοια της συναλλοίωτης παραγωγού. Απλές πράξεις επιβεβαιώνουν ότι αυτό ισχύει.

Θα πρέπει δηλαδή να έχουμε ότι $\nabla_{aY} V = a \nabla Y V$ για όλα τα a . Κατά συνέπεια ορίζουμε $W = \langle W, g^i \rangle g_i$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_W V &= \nabla_{\langle W, g^i \rangle} V = W^i \nabla_{g_i} V \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} (V \circ \chi) \circ \chi^{-1} \right) W^i \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} (V \circ \chi) \circ \chi^{-1} \right) \langle W, g^i \rangle \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} (V \circ \chi) \circ \chi^{-1} \right) \otimes g^i \right] W \end{aligned} \quad (3.32)$$

Δηλαδή, το $\nabla_W V$ είναι γραμμικό ως προς W . Η παραπάνω έκφραση και ο προηγούμενος ορισμός δίνουν κίνητρο στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.7. Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός διανυσματικού πεδίου $V : S \rightarrow TS$ σε έναν χάρτη (χ, Ω) σε ένα σημείο $x \in \Omega$ συμβολίζεται με $\nabla V(x)$ και ορίζεται ως

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} (V \circ \chi) \right) \circ \chi^{-1}(x) \otimes g^i(x) \quad (3.33)$$

Αφαλώς, ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του χάρτη (χ, Ω) .

Παρατηρήσεις.

1. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την κανονική βάση ο Ορισμός 3.7 εκφυλίζεται στην συνηθισμένη μορφή της παραγώγου Frechet δηλαδή

$$\nabla V(x) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) e_i \otimes e_j \quad (3.34)$$

2. Μπορούμε να θεωρήσουμε στην (3.30) την ιδιαίτερη περίπτωση όπου $V = g_i, i = 1, 2, 3$. Τότε η (3.31) γράφεται

$$\begin{aligned} \nabla_{g_i} g_j(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial \xi^i} g_j(\chi(\xi)) \right|_{\xi=\chi^{-1}(x)} \\ &= \left. \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \chi(\xi) \right|_{\xi=\chi^{-1}(x)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Από τον ορισμό

$$\Gamma_{ij}^k(\xi) := \left\langle \frac{\partial^2 \chi(\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}, g^k(\chi(\xi)) \right\rangle \quad (3.36)$$

ονομάζονται όπως έχουμε ήδη αναφέρει σύμβολα Christoffel σύμφωνα με τον χάρτη (χ, Ω) . Από τις 2 τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\nabla_{g_i} g_j = \nabla_{g_j} g_i = (\Gamma_{ij}^k \circ \chi^{-1}) g_k \quad (3.37)$$

3. Ας υποθέσουμε ότι $g_{ij} = \langle g_i, g_j \rangle$ η μετρική (ή αλλιώς ο θεμελιώδης μετρικός τανυστής) στο χάρτη (χ, Ω) . Η σχέση που αποδείξαμε στην παράγραφο 1.7 ισχύει και τώρα δηλαδή

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^l} \right) \quad (3.38)$$

παίζει θεμελιώδη ρόλο στη γεωμετρία Riemann

Στις εξισώσεις ορμής που θα διατυπώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή της απόκλισης διανυσματικού πεδίου. Θα πρέπει να τον ορίσουμε σε επίπεδο χαρτών σε μια πολλαπλότητα και είναι ακριβώς αυτό που θα κάνουμε τώρα.

Ορισμός 3.8. Έστω $V \rightarrow TS$ ένα διανυσματικό πεδίο. Ο τελεστής της απόκλισης ορίζεται ως

$$\operatorname{div} V := \operatorname{tr}(\nabla V) \quad (3.39)$$

Συνοπώς από την (3.33) ως προς οποιοδήποτε χάρτη (χ, Ω) έχουμε

$$\operatorname{div} V = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} (V \circ \chi) \right) \circ \chi^{-1}, g^i \right\rangle \quad (3.40)$$

Αναφέρουμε μια χρήσιμη ιδιότητα του τελεστή.

Πρόταση 3.2. Ως προς οποιοδήποτε χάρτη (χ, Ω) έχουμε την έκφραση

$$\operatorname{div} V = \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j V^i(\xi)) \chi^{-1} \quad (3.41)$$

όπου $V^i(\xi) = \langle V \circ \chi, g^i \circ \chi \rangle$ και $j = \langle g_1 \times g_2, g_3 \rangle \circ \chi$

Απόδειξη. Από την (3.40) παίρνει κανείς

$$(\operatorname{div} V) \circ \chi = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \langle V \circ \chi, g^i \circ \chi \rangle - \left\langle V \circ \chi, \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g^i \circ \chi) \right\rangle \quad (3.42)$$

Εφόσον τώρα, $V = \langle V, g^i \rangle g_i$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} V) \circ \chi &= \frac{\partial V^i}{\partial \xi^j} - V^j \left\langle g_j \circ \chi, \frac{\partial}{\partial \xi^j} (g^i \circ \chi) \right\rangle \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial \xi^i} + V^j \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_j \circ \chi), g^i \circ \chi \right\rangle \\ &= \frac{\partial v^i}{\partial \xi^i} + V^j \Gamma_{ji}^i \end{aligned} \quad (3.43)$$

Πιο κάτω θα δείξουμε ότι $\Gamma_{ji}^i = \frac{1}{j} \frac{\partial j}{\partial \xi^i}$. Αντικατάσταση στην (3.43) δίνει το αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.1. Έστω (χ, Ω) ένας χάρτης, και έστω $j = \det D\chi$. Τότε

$$\frac{\partial j}{\partial \xi^i} = j \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_j \circ \chi), g^j \circ \chi \right\rangle = j \Gamma_{ik}^k \quad (3.44)$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την πρώτη από τις σχέσεις της Πρότασης 3.1 στο χάρτη (χ, Ω) και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial \xi^i} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_1 \circ \chi), (g_2 \times g_3) \circ \chi \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_2 \circ \chi), (g_3 \times g_1) \circ \chi \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_3 \circ \chi), (g_1 \times g_2) \circ \chi \right\rangle \\ &= j \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g_k \circ \chi), g^k \circ \chi \right\rangle \\ &= j \left\langle g^k \circ \chi, \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \right\rangle = j \Gamma_{ik}^k \end{aligned}$$

Ύστερα, επεκτείνουμε τη μελέτη μας σε τανυστικά πεδία. Ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε για τανυστικά πεδία δευτέρας τάξης. (Ο τανυστής της τάσης είναι ένα τέτοιο πεδίο, και εμπλέκεται μέσω του τελεστή απόκλισης στην εξίσωση ορμής).

Ορισμός 3.9. Έστω $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ο διανυσματικός χώρος των γραμμικών μετασχηματισμών $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ορίζουμε τον τανυστή τάσης Cauchy ως το τανυστικό πεδίο της μορφής

$$x \in S \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad (3.45)$$

Έστω (χ, Ω) ένας χάρτης στο σημείο $x \in \chi(\Omega)$, με διανύσματα βάσης $\{g_i(x)\}$ και δυϊκά τα $\{g^i(x)\}$ ούτως ώστε $\langle g_i, g^j \rangle = \delta_i^j$. Θέτουμε

$$t^i := \sigma g^i \rightarrow \sigma = t^i \otimes g_i \quad (3.46)$$

Στο πλαίσιο της μηχανικής, το $x \in S \mapsto t^i(x)$ αναφέρεται ως διάνυσμα ελκυστής που δρα σε επιφάνειες με κάθετο διανυσματικό πεδίο το $n^i = \frac{g^i}{\|g^i\|}$.

Η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστικού πεδίου $\sigma(x)$ μπορεί να προκύψει ακριβώς όπως προέκυψε για ένα διανυσματικό πεδίο V . Χάρην συντομίας παρακάμπτουμε τους υπολογισμούς και δίνουμε το τελικό αποτέλεσμα ως ορισμό.

Ορισμός 3.10. Έστω $\gamma : S \rightarrow TS$ μια καμπύλη και $x \in S \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ένα τανυστικό πεδίο. Η συναλλοίωτη παράγωγος του σ κατά μήκος της καμπύλης γ είναι ο ρυθμός μεταβολής του σ κατά μήκος της γ , δηλαδή

$$\nabla_{\gamma'(t)} \sigma(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \sigma(\gamma(t)) \quad (3.47)$$

Ένα άμεσο αποτέλεσμα είναι

$$\nabla_{\gamma'(t)} \sigma(\gamma(t)) = \nabla \sigma(\gamma(t)) \gamma'(t) \quad (3.48)$$

όπου

$$\nabla\sigma = \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi^i}(\sigma \circ \chi) \right\} \circ \chi^{-1} \otimes g^i \quad (3.49)$$

Πρόταση 3.3. Έστω

$$\sigma = t^i \otimes g_i = \sigma^{ji} g_i \otimes g_j \quad (3.50)$$

Όπου σ^{ji} η αναπαράσταση του τανυστή ως πίνακα, ακριβώς όπως τη γνωρίζουμε από την κλασική μηχανική συνεχούς μέσου.

Ισχύει τότε

$$\nabla\sigma = \sigma^{ji} \Big|_k g_i \otimes g_j \otimes g_k \quad (3.51)$$

όπου από τον ορισμό

$$\sigma^{ij} \Big|_k = \frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial\xi^k} + \sigma^{lj} \Gamma_{lk}^i + \sigma^{il} \Gamma_{lk}^j \quad (3.52)$$

Ορίζουμε τώρα τον τελεστή απόκλισης για τανυστικά πεδία δευτέρας τάξης.

Ορισμός 3.11. Ως προς οποιοδήποτε χάρτη (χ, Ω) ο τελεστής απόκλισης του $\sigma(x)$ όπως ορίζεται στα παραπάνω είναι

$$\operatorname{div}\sigma = \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial\xi^i}(\sigma \circ \chi) \right\} \circ \chi^{-1} \right] g^i \quad (3.53)$$

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι αρκετά χρήσιμο.

Πρόταση 3.4. Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\sigma(x) = t^i(x) \otimes g_i(x)$ δίνεται ως

$$\operatorname{div}\sigma = \left\{ \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial\xi^i}(jt^i \circ \chi) \right\} \circ \chi^{-1} \quad (3.54)$$

Απόδειξη. Από την (3.53) και τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma \circ \chi &= \frac{\partial}{\partial\xi^i} [(\sigma g^i) \circ \chi] - (\sigma \circ \chi) \frac{\partial}{\partial\xi^i} (g^i \circ \chi) \\ &= \frac{\partial}{\partial\xi^i} (t^i \circ \chi) - (t^j \circ \chi) \left\langle g_j \circ \chi, \frac{\partial(g^i \circ \chi)}{\partial\xi^i} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial\xi^i} (t^i \circ \chi) + (t^i \circ \chi) \left\langle \frac{\partial}{\partial\xi^i} (g_j \circ \chi), g^i \right\rangle \end{aligned} \quad (3.55)$$

Από το Λήμμα 3.3 παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\sigma &= \frac{\partial}{\partial\xi^i} (t^i \circ \chi) + \frac{1}{j} (t^j \circ \chi) \frac{\partial j}{\partial\xi^i} \\ &= \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial\xi^i} (jt^i \circ \chi) \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει τη συζήτηση μας για τα βασικά αποτελέσματα που αφορούν τους σχηματισμούς της κλασικής θεωρίας των τριδιάστατων συνεχών μέσων και της convective παραμετροποίησης. Στην επόμενη παράγραφο θα ανακεφαλαιώσουμε με κάποιες ιδέες που σχετίζονται με κινήσεις συνεχών μέσων.

3.3 Κίνηση: Πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης

Υπενθυμίζουμε ότι μια κίνηση ενός σώματος P είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια σχηματισμών $\kappa_t : P \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια θέσεων/τοποθετήσεων $S_t = \kappa_t(P) \subset \mathbb{R}^3$. Θέτουμε $B = S|_{t=0}$ και

$$\phi_t = \kappa_t \circ \kappa_0^{-1} : B \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.56)$$

ώστε $\phi_t \in \mathcal{C}$ για κάθε $t > 0$. Σε όσα ακολουθούν, θα θεωρούμε την κίνηση ως μια καμπύλη

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \phi_t \in \mathcal{C}, \quad S_t = \phi_t(B) \subset \mathbb{R}^3 \quad (3.57)$$

και $\phi_t|_{t=0} = I$

Ορισμός 3.12. Δοθείσας μιας κίνησης $t \mapsto \phi_t \in \mathcal{C}$, ορίζει κανείς την υλική ταχύτητα ως

$$V_t = \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \Rightarrow V(X) \in T_{\phi_t(X)} S_t \quad (3.58)$$

Η χωρική ταχύτητα είναι το διανυσματικό πεδίο

$$v_t : S_t \times \mathbb{R}_+ \rightarrow TS_t \quad (3.59)$$

ώστε

$$v_t \circ \phi_t = V_t \Leftrightarrow v(\phi(X, t), t) = V(X, t) \quad (3.59)$$

Έτσι, τα V_t και v_t είναι υλικά και χωρικά πεδία, υπό την έννοια που περιγράφηκε στην παράγραφο 3.3. Όμοια ορίζει κανείς τις επιταχύνσεις ως ακολούθως:

Ορισμός 3.13. Η υλική επιτάχυνση είναι το υλικό διανυσματικό πεδίο $A_t : B \rightarrow TS_t$ που ορίζεται ως

$$A_t = \frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} \Rightarrow A_t(X) \in T_{\phi_t(X)} S_t \quad (3.60)$$

Η χωρική επιτάχυνση θα είναι τότε

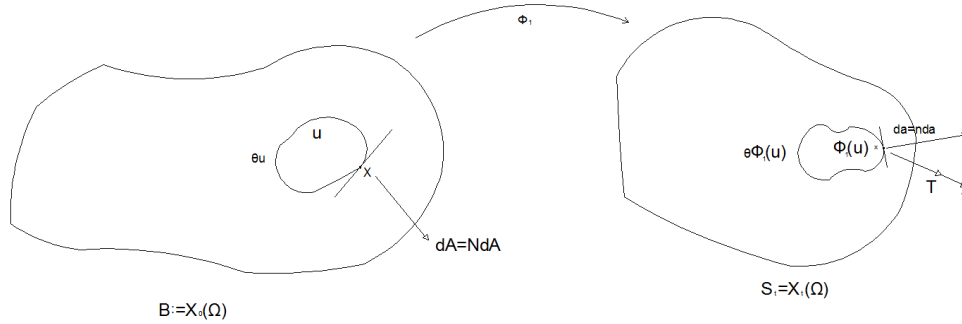
$$a_t \circ \phi_t = A_t \Leftrightarrow a(\phi(X, t), t) = A(X, t) \quad (3.61)$$

Προσοχή όμως. Η χωρική επιτάχυνση δεν είναι η χρονική παράγωγος της χωρικής ταχύτητας. Από τη μηχανική συνεχών μέσων γνωρίζουμε ότι είναι η υλική παράγωγος της χωρικής ταχύτητας. Δηλαδή αυτό που ισχύει είναι

$$a_t = \frac{\partial v_t}{\partial t} + \nabla_{v_t} v_t = \frac{\partial v_t}{\partial t} + (\nabla v_t) v_t \quad (3.62)$$

3.4 Τανυστές τάσης: Εξισώσεις ορμής

Ξεκινάμε ορίζοντας τον πρώτο τανυστή Piola-Krichhoff. Η ιδέα αναπαρίσταται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3.6: Τανυστές τάσεις και διανυσμάτα ελκυστές

Ορισμός 3.14. Έστω $x \in S \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ο τανυστής τάσης Cauchy. Ορίζουμε τον πρώτο τανυστή Piola-Krichhoff ως το πεδίο

$$X \in B \mapsto P(X) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad (3.63)$$

με τύπο

$$P = J_t \sigma \circ \phi_t F^{-T} \quad (3.64)$$

όπου F η κλίση παραμόρφωσης. Σε πολλά βιβλία αναφέρεται ως τανυστής 2 σημείων. Ο λόγος είναι επειδή δρα σε 2 σημεία, ένα στον σχηματισμό αναφοράς και ένα στον τωρινό σχηματισμό.

Ορίζουμε τους ελκυστές ως προς έναν χάρτη.

Ορισμός 3.15. Έστω (χ_0, Ω_0) και (χ, Ω) δυο χάρτες που περιέχουν τα $X \in B$ και $x = \phi_t(X) \in S_t$ αντίστοιχα, με διανύσματα βάσης $\{G_i(X)\}$ και $\{g_i(x_t)\}$ αντίστοιχα. Τότε

$$T_t^i := P_t G^i, \quad t_t^i := \sigma_t g^i$$

είναι οι ελκυστές κατά Piola-Kirchhoff και Cauchy αντίστοιχα. Στην convective αναπαράσταση $\chi_t = \phi_t \circ \chi_0$ και $\Omega = \Omega_0$. Τότε οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$P_t = T_t^i \otimes G_i, \quad \sigma_t = t_t^i \otimes g_i$$

Η επόμενη πρόταση συνδέει τους ελκυστές για τους 2 τανυστές.

Πρόταση 3.5. Οι ελκυστές Piola-Krichhoff και Cauchy συνδέονται ως

$$T_t^i = J_t t_t^i \circ \phi_t, \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.64)$$

Απόδειξη. Από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} P_t &= T_t^i \otimes G_i = J_t (t_t^i \otimes g_i) \circ \phi_t F_t^{-T} \\ &= (J_t t_t^i \circ \phi_t) \otimes F_t^{-T} (g_i \circ \phi_t) \\ &= (J_t t_t^i \circ \phi_t) \otimes G_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει εφαρμόζοντας και τα 2 μέλη της (3.64) στο G^j

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι γνωστό ως μετασχηματισμός Piola

Πρόταση 3.6. Ως προς τους χάρτες (χ_0, Ω_0) και (χ_t, Ω) έχουμε τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P_t &= \frac{1}{j_0} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_0 T_t^i \circ \chi_0) \circ \chi_0^{-1} \\ \operatorname{div} \sigma_t &= \frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial \eta^i} (j_t t_t^i \circ \chi_t) \circ \chi_t^{-1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

όπου $x = \chi_t(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$ και $X = \chi_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Ο μετασχηματισμός Piola δίνεται ως

$$\operatorname{div} P_t = J_t(\operatorname{div} \sigma_t \circ \phi_t) \quad (3.66)$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι ο μετασχηματισμός δίνεται από αυτόν τον τύπο επιλέγουμε convective συντεταγμένες δηλαδή $\xi^1 = \eta^1, \xi^2 = \eta^2, \xi^3 = \eta^3$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P_t &= \frac{1}{j_0} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_0 T_t^i \circ \chi_0) \circ \chi_0^{-1} \\ &= \frac{j_t}{j_0} \frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_0 J_t t_t^i \circ \phi_t \circ \chi_0) \circ \chi_t^{-1} \circ \chi_t \circ \chi_0^{-1} \\ &= J_t \left[\frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_t t_t^i \circ \chi_t) \circ \chi_t^{-1} \right] \circ \phi_t \\ &= J_t(\operatorname{div} \sigma_t \circ \phi_t) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με τις κλασσικές εξισώσεις ορμής της μηχανικής συνεχούς μέσου.

1. Ισορροπία ροπών (υλική περιγραφή)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P_t + \rho_0 B &= \rho_0 A_t \\ P_t F_t^T &= F_t P_t^T, \quad \forall X \in B \end{aligned} \quad (3.68)$$

όπου $\rho_0 : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ είναι η πυκνότητα στην κατάσταση αναφοράς και $B : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι οι καθολικές δυνάμεις. A_t είναι η υλική επιτάχυνση. Παρατηρούμε ότι στις convective συντεταγμένες

$$A_t = \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial t^2} \circ \chi_0^{-1} \quad (3.69)$$

Έτσι, ως προς τις convective συντεταγμένες γράφουμε την (3.68) ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_0} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_0 T_t^i \circ \chi_0) + (\rho_0 B) \circ \chi_0 &= (\rho_0 \circ \chi_0) \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial t^2} \\ (g_i \circ \phi_t) \times T_t^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Η δεύτερη από τις εξισώσεις (3.70) προκύπτει από το γεγονός ότι $\sigma_t = \sigma_t^T$ και από τη σχέση των ελκυστών αφού

$$g_i \times T^i \circ \phi_t^{-1} = J_t g_i \times t_t^i = J_t g_i \times g_j \sigma^{ji} = 0$$

αφού ο τανυστής των τάσεων Cauchy είναι συμμετρικός.

2. Ισορροπία ροπών (χωρική περιγραφή)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma_t + \rho_t b &= \rho_t a_t \\ \sigma_t &= \sigma_t^T, \quad \forall x \in S_t \end{aligned} \quad (3.71)$$

Εδώ $\rho_t : S_t \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ είναι η τωρινή πυκνότητα, και $b = B \circ \phi_t^{-1} : S_t \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι οι καθολικές δυνάμεις στην υλική περιγραφή. Από την (3.70) στην convective περιγραφή, η υλική επιτάχυνση δίνεται ως

$$a_t = A_t \circ \phi_t^{-1} = \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial t^2} \circ \chi_0^{-1} \circ (\chi_t \circ \chi_0^{-1})^{-1} = \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial t^2} \circ \chi_0^{-1} \quad (3.72)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (3.65)₂ μπορούμε να γράψουμε τις 2 τελευταίες εξισώσεις ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (j_t t_t^i \circ \chi_t) + (\rho_t b) \circ \chi_t &= (\rho_t \circ \chi_t) \frac{\partial^2 \chi_t}{\partial t^2} \\ g_i \times t^i &= 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Σημειώνουμε ότι οι (3.70) και (3.72) είναι στην ουσία οι ίδιες εξισώσεις ως προς τον παράγοντα $\frac{j_t}{j_0}$.

3. Η διατήρηση της μάζας εκφράζεται ως

$$\rho_0 = J_t \rho_t \circ \phi_t \quad (3.73)$$

Στους convective χάρτες, αφού $\phi_t = \chi_t \circ \chi_0^{-1}$ χρησιμοποιώντας τη σύνδεση των ιακωβιανών όπως έχουμε αναφέρει, παίρνουμε

$$j_0(\rho_0 \circ \chi_0) = j_t(\rho_t \circ \chi_t) \quad (3.74)$$

Οι παραπάνω σχέσεις, στο convective σύστημα συντεταγμένων που έχουν διατυπωθεί είναι κατάλληλες για εφαρμογή στη δοκό.

4 Ακριβές στοιχείο δοκού μη γραμμικής γεωμετρίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε τη βάση για ένα γεωμετρικά ακριβές στοιχείο δοκού που είναι κατάλληλο για υπολογιστική επίλυση. Πολλοί μηχανικοί έχουν κατά καιρούς ασχοληθεί με το θέμα αυτό όπως οι Simo και Vu-Quoc. Το πεδίο μελέτης αυτών είναι η εξαγωγή ενός τέτοιου στοιχείου σε πεδία μικρών ή μεγάλων παραμορφώσεων. Στην παρούσα εργασία θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στα πεδία μεγάλων μετακινήσεων (δηλαδή μεγάλων μετατοπίσεων και μεγάλων στροφών) και μικρών παραμορφώσεων. Αυτό το κεφάλαιο στοχεύει ειδικά στην διατύπωση ενός στοιχείου δοκού μη γραμμικής ανάλυσης και παρουσιάζει το μοντέλο με τρόπο που είναι κατάλληλος για αριθμητική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Μια σύνοψη του κεφαλαίου είναι αυτή που ακολουθεί. Αφού περιγράψουμε τη βασική κινηματική που αφορά το κινούμενο πλαίσιο, θα κάνουμε μια ανασκόπηση των εκφράσεων για την γραμμική και την στροφική ροπή. Το πρώτο σχετίζεται με την επιτάχυνση του κεντροειδούς, το δεύτερο με την επιτάχυνση του κινούμενου πλαισίου. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί σε μια βολική παραμετροποίηση των εξισώσεων ισορροπίας με θεωρητικά και υπολογιστικά πλεονεκτήματα. Σημειώνουμε ότι το κινούμενο πλαίσιο δεν συμπίπτει με την convected βάση εκτός και αν η διαμητική παραμόρφωση της δοκού αγνοηθεί. Τότε θα παρουσιάσουμε τους βασικούς νόμους της κίνησης σε όρους εσωτερικών δυνάμεων και ροπών. Οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές που δρουν σε μια τυπική διατομή αναλύονται ως προς το κινούμενο πλαίσιο.

Τέλος, μια ασθενής (ή μεταβολική) διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας της δοκού παρουσιάζεται. Αυτό είναι ένα θεμελιώδες βήμα για την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης ροπών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η ασθενής διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ροπών εμπεριέχει αρκετά σημαντικά στοιχεία. Πρώτον, η διατήρηση της ροπής και της γραμμικής ροπής (ορμής) εξακολουθεί να ισχύει. Δεύτερον, η συνεπής γραμμικοποίηση πραγματοποιείται εκεί που ο εναπομείνων εφαπτόμενος τελεστής δεν είναι συμμετρικός, δηλαδή όχι σε ισορροπία. Αυτή η συνθήκη συμμετρίας θα μας απασχολήσει και θα την ερευνήσουμε λεπτομερώς.

4.1 Περιορισμένο μοντέλο δοκού: Βασική κινηματική

Θα ασχοληθούμε με τη βασική κινηματική που καθορίζει ένα περιορισμένο μοντέλο δοκού. Το μοντέλο αυτό είναι πιθανόν το ιδανικότερο μοντέλο δοκού.

Θα ξεκινήσουμε από τις ακόλουθες φυσικές ιδιότητες της δοκού. Μια δοκός είναι ένα μακρύ, λεπτό μονοδιάστατο σώμα. Αυτές οι φυσικές ιδιότητες δίνουν το κίνητρο για την μαθηματική μοντελοποίηση που θα ακολουθήσει.

Θεωρούμε την παρακάτω περιγραφή της θέσης $S \subset \mathbb{R}^3$ μιας δοκού \mathcal{P} στον Ευκλείδειο χώρο. Έστω

1. \mathcal{P} μια πολλαπλότητα σημείων
2. $\kappa : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένας καθολικός χάρτης
3. $S = \kappa(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^3$ η θέση του \mathcal{P} υπό το χάρτη κ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές, και έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Περιγράφουμε τη θέση $S = \kappa(\mathcal{P})$ υπό τον καθολικό χάρτη κ εισάγοντας τις παρακάτω ποσότητες.

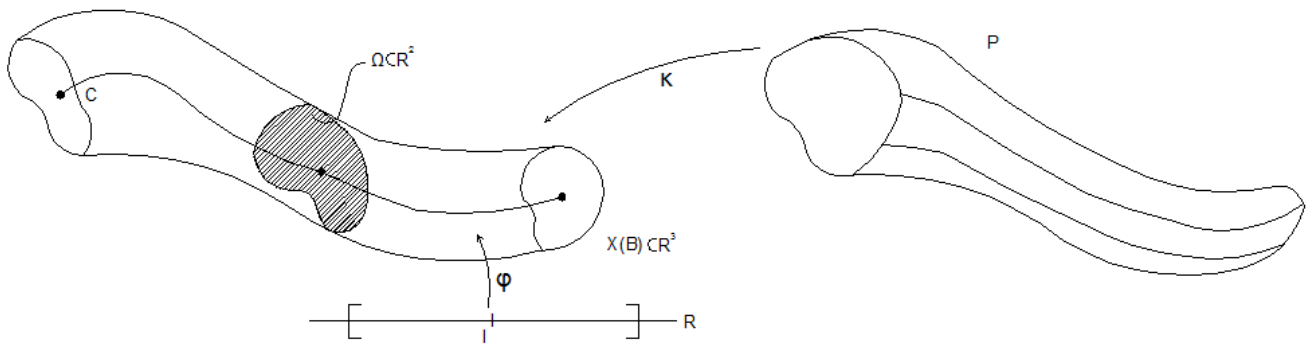
1. Μια καμπύλη $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ παραμετροποιείται ως

$$\phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \kappa(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.1)$$

Γράφουμε

$$x_0 = \phi(\xi), \quad \xi \in I \quad (4.2)$$

Αναφερόμαστε στο \mathcal{C} ως τη γραμμή των κεντροειδών.



Σχήμα 4.1: Βασικά γεωμετρικά αντικείμενα

2. Μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιπέδων, που ονομάζουμε διατομές, ορίζονται από ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο

$$\xi \in I \mapsto t_3(\xi) \in S^2 \quad (4.3)$$

όπου S^2 είναι η μοναδιαία σφαίρα.

3. Μια ένα ενδιάμεσα κάθε διατομής ορίζεται από το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο

$$\xi \in I \mapsto t_1(\xi) \in S^2 \quad (4.4)$$

όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^3 . Έτσι σε κάθε σημείο $\phi(\xi) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε ένα κινούμενο πλαίσιο $\{t_i(\xi)\}_{i=1,2,3}$ με

$$t_3(\xi) := t_1(\xi) \times t_2(\xi) \neq 0 \quad (4.5)$$

και

$$\|t_i(\xi)\| = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \langle t_1(\xi), t_2(\xi) \rangle = 0 \quad (4.6)$$

Κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι

$$\langle t_3(\xi), \phi'(\xi) \rangle > 0 \quad (4.7)$$

Με το συμβολισμό αυτό ανά χείρας, η βασική υπόθεση που χαρακτηρίζει τη θεωρία δοκού είναι η ακόλουθη.

Κινηματική υπόθεση.

Κάθε θέση $\kappa(P) = S \subset \mathbb{R}^3$ της δοκού στον Ευκλείδειο χώρο ορίζεται ως

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \phi(\xi) + \sum_{i=1}^2 \xi^i t_i(\xi), \quad \xi \in I, \quad (\xi^1, \xi^2) \in \Omega \right\} \quad (4.8)$$

όπου $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη που αναφέρεται ως γραμμή κεντροειδών, και $\{t_1, t_2, t_3\}$ είναι ένα κινούμενο πλαίσιο κατά μήκος της ϕ .

Παρατηρήσεις.

1. Βλέποντας τη σχέση (4.8), εφοδιάζουμε το \mathcal{P} Με συντεταγμένες $(\xi^1, \xi^2, \xi) \in \Omega \times I$ για ένα δοθέν $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ και με ένα κινούμενο πλαίσιο $\{t_1(\xi), t_2(\xi), t_3(\xi)\}$.
2. Μπορούμε να συγκεκριμενοποιήσουμε το κινούμενο πλαίσιο $\{t_1(\xi), t_2(\xi), t_3(\xi)\}$ δίνοντας μια μονοπαραμετρική οικογένεια ορθογώνιων σχηματισμών

$$\Lambda : I \rightarrow SO(3) \quad (4.9)$$

τέτοια ώστε

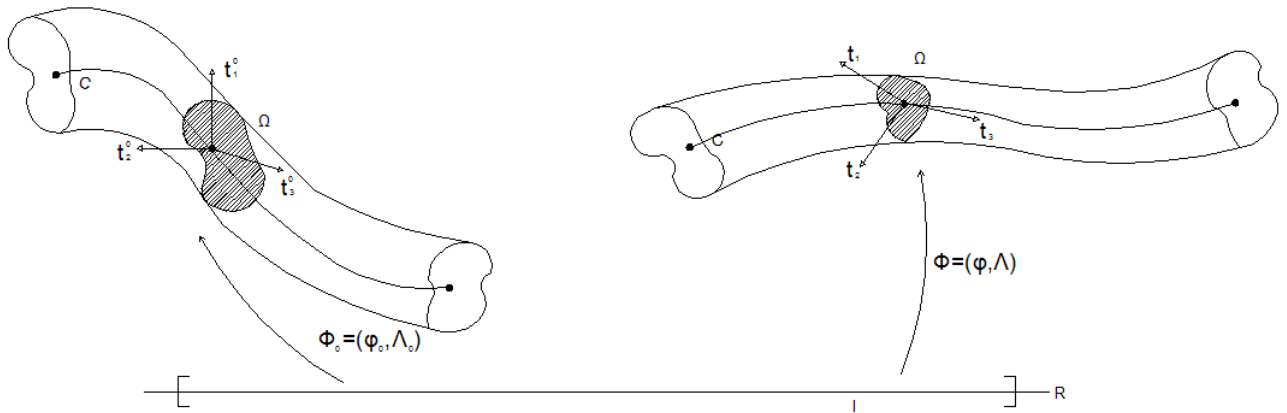
$$t_i(\xi) = \Lambda(\xi)e_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.10)$$

όπου $\{e_i\}$ η συνήθης βάση του \mathbb{R}^3 .

3. Ας ορίσουμε

$$\mathcal{C} = \{\Phi = (\phi, \Lambda) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times SO(3)\} \quad (4.11)$$

Δοθέντος οποιουδήποτε $\Phi = (\phi, \Lambda)$ αυτό ορίζει μια μοναδική οικογένεια κεντροειδών, και ένα μοναδικό κινούμενο πλαίσιο μέσω των σχέσεων (4.9) και (4.10) αντίστοιχα. Όμοια, σύμφωνα με την (4.8) ένα δοθέν $\Phi \in \mathcal{C}$ καθορίζει μια μοναδική θέση S του \mathcal{P} . Έτσι αναφερόμαστε στο \mathcal{C} ως ο αφηρημένος σχηματισμός πολλαπλότητας. Οι παρατηρήσεις συνοψίζονται στο σχήμα



Σχήμα 4.2: Δύο σχηματισμοί της δοκού σε έναν Ευκλείδειο χώρο

4.1.1 Κίνηση: Βασικές κινηματικές σχέσεις

Μια κίνηση είναι όπως έχουμε αναφέρει μια μονοπαραμετρική οικογένεια σχηματισμών με δείκτη το χρόνο, $t \in [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ για κάποιο $T > 0$. Έτσι, το \mathcal{P} καταλαμβάνει θέσεις $S_t = \kappa_t(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^3$ για χρονοεξαρτημένους σχηματισμούς $t \rightarrow \kappa_t$ όπου

$$\kappa_t : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.12)$$

Προκειμένου να υπάρχει συμβατότητα με την κινηματική υπόθεση (4.8), υποθέτουμε ότι $S_t = \kappa(\mathcal{P})$ είναι της μορφής

$$S_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \chi(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = \phi(\xi, t) + \sum_{i=1}^2 \xi^i t_i(\xi, t) \text{, } (\xi^1, \xi^2) \in \Omega, (\xi, t) \in I \times [0, T] \right\} \quad (4.13)$$

όπου $\phi : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ Και $t_i : I \times [0, T] \rightarrow S^2$ ορίζουν τη γραμμή των κεντροειδών και το κινούμενο πλαίσιο σε κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$. Ας σημειώσουμε ότι η κίνηση καθορίζει μια καμπύλη

$$t \in [0, T] \mapsto \Phi_t = (\phi_t, \Lambda_t) \in \mathcal{C} \quad (4.14)$$

στον χώρο σχηματισμών \mathcal{C} , ούτως ώστε $\phi_t(\xi) = \phi(\xi, t)$ και $\Lambda_t(\xi) = \Lambda(\xi, t)$ για κάθε t και

$$t_i(\xi, t) = \Lambda(\xi, t)e_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.15)$$

4.2 Πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης

Πριν ορίσουμε τα πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης, ρίζουμε ως σχηματισμό αναφοράς ως το

$$\Phi_0 = \Phi_t|_{t=0} = (\phi_0, \Lambda_0) \quad (4.16)$$

με θέση αναφοράς το $S_0 \in \mathbb{R}^3$.

Η υλική ταχύτητα και επιτάχυνση σημείων της γραμμής του κεντροειδούς δίνονται ως

$$\dot{\phi}(\xi, t) = \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t}, \quad \ddot{\phi}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\xi, t) \quad (4.17)$$

Σημειώνουμε ότι τα $\dot{\phi}_t(\xi), \ddot{\phi}_t(\xi) : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικά πεδία κατά μήκος της $\phi_t : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\dot{\phi}_t(\xi), \ddot{\phi}_t(\xi) \in T_{\phi_t(\xi)}\mathbb{R}^3 \quad (4.18)$$

Εντελώς όμοια, ορίζουμε την υλική ταχύτητα και την υλική επιτάχυνση του κινούμενου πλαισίου ως

$$\dot{\Lambda}(\xi, t) = \frac{\partial \Lambda(\xi, t)}{\partial t}, \quad \ddot{\Lambda}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \Lambda(\xi, t)}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε την (4.19) ως ακολούθως. Εφόσον $\Lambda(\xi, t) \in SO(3)$ για όλα τα $(\xi, t) \in I \times [0, T]$ έχουμε

$$\hat{w}(\xi, t) := \frac{\partial \Lambda(\xi, t)}{\partial t} \Lambda^T(\xi, t) = -\hat{w}^T(\xi, t) \quad (4.20)$$

για όλα τα $(\xi, t) \in I \times [0, T]$. Συνεπώς, $\hat{w} : I \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ είναι ένα αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο, που αναφέρεται ως υλικό σπιν του μετακινούμενου πλαισίου. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε αντισυμμετρικό τανυστή (και πίνακα ασφαλώς), ότι αντιστοιχεί ένα αξονικό διάνυσμα $w : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ η υλική γωνιακή ταχύτητα. Όμοια

$$\hat{W}(\xi, t) = \Lambda^T(\xi, t) \frac{\partial \Lambda(\xi, t)}{\partial t} = -\hat{W}(\xi, t) \quad (4.21)$$

για κάθε $(\xi, t) \in I \times [0, T]$. Το $\hat{W}(\xi, t) : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ αναφέρεται ως το convected σπιν του κινούμενου πλαισίου, και το αξονικό του διάνυσμα είναι η convected γωνιακή ταχύτητα. Κρίσιμες είναι οι σχέσεις

$$\hat{w} = \Lambda \hat{W} \Lambda^T \Leftrightarrow w = \Lambda W \quad (4.22)$$

Η κατάληξη στις παραπάνω σχέσεις είναι αποτέλεσμα της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 4.1. Τα ακόλουθα ισχύουν:

1. Το $w : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του κινούμενου πλαισίου υπό την έννοια ότι

$$\dot{t}_i = w \times t_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.23)$$

2. $W : I \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του σώματος, υπό την έννοια ότι οι συντεταγμένες του w ως προς το κινούμενο πλαίσιο $\{t_i\}$ συμπίπτουν με τις συντεταγμένες του W ως προς το κανονικό πλαίσιο $\{e_i\}$:

$$\langle W, e_i \rangle = \langle w, t_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.24)$$

Απόδειξη. Εφόσον $t_i = \Lambda e_i$ έχουμε με παραγωγή ως προς το χρόνο

$$\dot{t}_i = \dot{\Lambda} e_i = \dot{\Lambda} \Lambda^T \Lambda e_i = \hat{w} t_i = w \times t_i \quad (4.25)$$

Για τη δεύτερη σχέση έχουμε: Εφόσον $w = \Lambda W$ τότε

$$\langle w, t_i \rangle = \langle \Lambda W, \Lambda e_i \rangle = \langle W, \Lambda^T \Lambda e_i \rangle \quad (4.26)$$

Αφού $\Lambda^T \Lambda = I$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Πλέον εφόσον έχουμε εισάγει τα βασικά μας μεγέθη για την εξαγωγή του στοιχείου, θα θέλαμε να ορίσουμε παραγώγους στα βασικά αυτά μεγέθη. Έστω $S_t = \kappa_t(\mathcal{P})$ η θέση του \mathcal{P} στο χρόνο $t \in [0, T]$, όπου το S_t ορίζεται όπως στην (4.13). Ορίζουμε

$$\chi_t : \Omega \times [0, T] \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.27)$$

την απεικόνιση

$$x = \chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi) = \phi_t(\xi) + \sum_{i=1}^n \xi^i t_i(\xi, t) \quad (4.28)$$

Με τον προηγούμενο συμβολισμό, το πεδίο ταχύτητας $t \mapsto \frac{\partial}{\partial t} \chi_t$ σύμφωνα με την (4.28) δίνεται ως

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_t = \dot{\phi}_t(\xi) + w_t(\xi) \times \sum_{i=1}^2 \xi^i t_i(\xi, t) \quad (4.29)$$

Από τις (4.28),(4.29) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi_t = \dot{\phi}_t(\xi) + w_t(\xi) \times (\chi_t - \phi_t) \quad (4.30)$$

Στο επόμενο θα δώσουμε μια αρκετά απλή μορφή της κλίσης παραμόρφωσης που συνδέεται με τις (4.28) και (4.29).

Frechet παράγωγος ενός χάρτη. Υπενθυμίζουμε ότι εξ ορισμού μπορούμε να γράψουμε

$$D\chi_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \chi_t}{\partial \xi^i} \otimes e^i + \frac{\partial \chi_t}{\partial \xi} \otimes e^3 \quad (4.31)$$

Από την (4.28) έχουμε

$$\frac{\partial \chi_t}{\partial \xi^i} = t_i, \quad \frac{\partial \chi_t}{\partial \xi} = \phi'_t(\xi) + \sum_{i=1}^2 \xi^i t'_i \quad (4.32)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παράγωγο ως προς ξ . Εφόσον $t_i = \Lambda_t e_i$ παίρνουμε

$$t'_i = \hat{\omega}_t t_i = \omega_t \times t_i \quad (4.33)$$

όπου $\hat{\omega}_t(\xi) = \hat{\omega}(\xi, t)$ και $\hat{\omega} : I \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής που ορίζεται ως

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = \hat{\omega} \Lambda = \Lambda \hat{\Omega} \quad (4.34)$$

Αναφερόμαστε στο $\hat{\omega} = -\hat{\omega}^T$ ως την υλική καμπυλότητα της γραμμής των κεντροειδών. Ο αντισυμμετρικός τανυστής $\hat{\Omega} : I \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ όπως ορίζεται από την (4.34) και ικανοποιεί την

$$\hat{\Omega} = \Lambda^T \hat{\omega} \Lambda \Leftrightarrow \Omega = \Lambda^T \omega \quad (4.35)$$

αναφέρεται ως η convected καμπυλότητα. Συνδυάζοντας τις (4.32),(4.33),(4.35) έχουμε

$$D\chi_t = \sum_{i=1}^2 t_i \otimes e^i + (\phi'_t + \omega_t \times \xi^i t_i) \otimes e^3 \quad (4.36)$$

Σημειώνουμε ότι αφού $t_i = \Lambda_t e_i$ μια ισοδύναμη έκφραση για το Λ_t είναι

$$\Lambda_t = \sum_{i=1}^2 t_i \otimes e^i + t_3 \otimes e^3 \quad (4.37)$$

Τότε η (4.36) γίνεται

$$D\chi_t = \Lambda_t - t_3 \otimes e^3 + \phi'_t \otimes e^3 + \omega_t \times (\chi_t - \phi_t) \otimes e^3 \quad (4.38)$$

Εισάγοντας του ορισμούς

$$\gamma_t := \phi'_t - t_3, \quad \Gamma_t = \Lambda_t^T \gamma_t \quad (4.39)$$

παίρνουμε

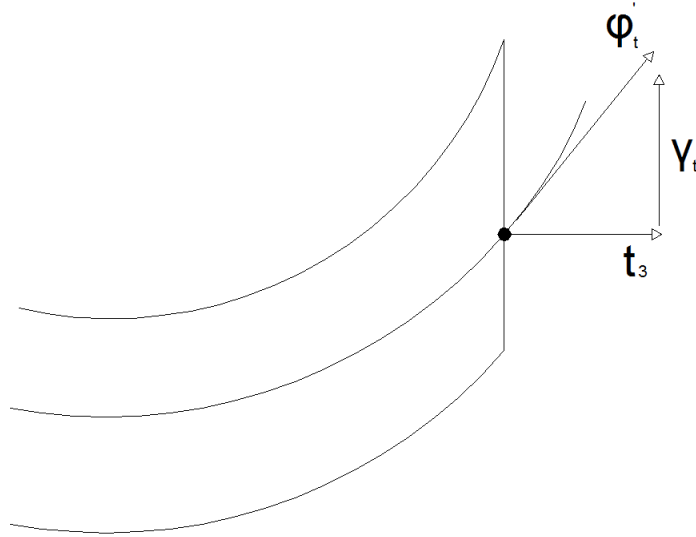
$$\begin{aligned} D\chi_t &= \Lambda_t + \gamma_t \otimes e^3 + \omega_t \times (\chi_t - \phi_t) \otimes e^3 \\ &= \Lambda_t [1 + \Gamma_t \otimes e^3 + \Omega_t \times \Lambda_t^T (\chi_t - \phi_t) \otimes e^3] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Η εξίσωση (4.40) παίζει σημαντικό ρόλο στα επόμενα.

Παρατήρηση Αναφερόμαστε στα (γ_t, ω_t) και στα (Γ_t, Ω_t) ως η υλική και convected εσωτερική τροπή αντίστοιχα. Όπως στην Πρόταση 4.1, έχουμε τις σχέσεις

$$\langle \gamma_t, t_i \rangle = \langle \Gamma_t, e_i \rangle, \quad \langle \omega_t, t_i \rangle = \langle \Omega_t, e_i \rangle \quad (4.41)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του $\gamma_t = \phi'_t - t_3$ θα γίνει πιο κατανοητή στο σχήμα



Σχήμα 4.3: Ερμηνεία του τροπικού μεγέθους γ_t .

Η σημασία των μεγεθών τροπής θα αναδειχθεί όταν μιλήσουμε για τροπική ενέργεια.

4.3 Η ακριβής εξίσωση ροπής σε εσωτερικές τάσεις

Πρώτα θα μιλήσουμε για την παραμετροποίηση του παραμορφωμένου σώματος. Θα μελετήσουμε διαφορικά στοιχεία όγκου, θα ορίσουμε διατομές, και θα αναπτύξουμε μια γενική έκφραση για το κάθετο πεδίο. Για την κινηματική υπόθεση που αναπτύξαμε στα προηγούμενα, θα δώσουμε την έκφραση για την τροπική ενέργεια από την τριδιάστατη ελαστικότητα. Από την τροπική ενέργεια, θα είμαστε σε θέση να αναγνωρίσουμε τα συζυγή μεγέθη των τροπικών μεγεθών που χρησιμοποιούμε. Στη συνέχεια θα παράξουμε τις ακριβείς εξισώσεις ισορροπίας ροπών σε όρους εσωτερικών τάσεων

(stress resultants) και ζευγών τάσεων (stress couples). Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση ότι αυτές οι εξισώσεις ροπής είναι ανεξάρτητες από την μορφή της κινηματικής υπόθεσης.

Σε αρχική φάση, θα συζητήσουμε την παραμετροποίηση της δοκού χωρίς κάποια κινηματική υπόθεση, και ύστερα θα εξειδικεύσουμε τα αποτελέσματα για τη βασική κινηματική υπόθεση.

4.3.1 Παραμετροποίηση: Διατομές και κάθετα πεδία

Ξεκινάμε από τον καθολικό χάρτη. Έστω $B = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^3$ όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ συμπαγές. Ακόμη, έστω $S_t \subset \mathbb{R}^3$ η θέση της δοκού $\kappa(\mathcal{P})$ σε ένα χρόνο $t > 0$. Δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο

$$\chi_t : B \rightarrow S_t \subset \mathbb{R}^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.42)$$

είναι ένας καθολικός χάρτης που δίνει συντεταγμένες στις θέσεις $x = \chi_t(\xi)$ των σημείων $\xi \in B$ μέσω της 1-1 απεικόνισης

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \Omega \times I \mapsto x = \chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in S_t \quad (4.43)$$

Επαναφέρουμε το συμβολισμό $\xi^3 = \xi$ και το $x : B \times \mathbb{R}^+ \mapsto S_t \subset \mathbb{R}^3$ ορίζεται

$$x = \chi(\xi^1, \xi^2, \xi, t) = \chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi) \quad (4.44)$$

Επιπροσθέτως ορίζουμε

$$\phi : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{S}_t \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.45)$$

όπου \bar{S}_t είναι η θέση της γραμμής των κεντροειδών που δίνεται ως

$$\phi(\xi, t) = \chi(\xi^1, \xi^2, \xi, t)|_{\xi^1=\xi^2=0} \quad (4.46)$$

Σημειώνουμε ότι η θέση αναφοράς $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ της δοκού ορίζεται ως

$$\chi_0 : B \rightarrow S_0 \subset \mathbb{R}^3 \quad (4.47)$$

και την παίρνουμε θέτοντας $t = 0$. Όμοια η γραμμή αναφοράς των κεντροειδών $\bar{S}_0 \subset \mathbb{R}^3$ αποκτάται θέτοντας $t = 0$ και

$$\phi_0(\xi) = \phi(\xi, t)|_{t=0} \quad (4.48)$$

Ορίζουμε ως μια διατομή της δοκού στο χρόνο $t \in \mathbb{R}^+$ που διέρχεται από το σημείο $p = \phi(\xi, t)$, ως το υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που παίρνουμε αν κρατήσουμε το $\xi^3 = \xi \in I$ σταθερό στο χάρτη $\chi_t : B \rightarrow S_t$. Ειδικότερα

$$\mathcal{A}_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi) \Big|_{\xi^3=\xi}, \quad \xi \in I \right\} \quad (4.49)$$

Είναι εμφανές ότι το \mathcal{A}_t είναι μια διδιάστατη υποπολλαπλότητα της S_t με συντεταγμένες

$$(\xi^1, \xi^2) \in \Omega \mapsto x = \chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi) \Big|_{\xi^3=\xi} \in \mathcal{A}_t \quad (4.50)$$

Για την περίπτωση της βασικής κινηματικής υπόθεσης, κάθε διατομή \mathcal{A}_t είναι επίπεδη με εικόνα πανομοιότυπη με το Ω .

Ένα στοιχείο όγκου στην τωρινή θέση ορίζεται ως

$$dV_t = j_t d\xi^1 d\xi^2 d\xi \quad (4.51)$$

όπου j_t είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα που δίνεται ως

$$j_t = \det(D\chi_t) = \left\langle \frac{\partial \chi_t}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \chi_t}{\partial \xi^2}, \chi'_t \right\rangle \quad (4.52)$$

Το κάθετο πεδίο σε κάθε διατομή $\mathcal{A}_t \subset S_t$ είναι μια 1-μορφή που εκφράζεται ως

$$(\xi^1, \xi^2) \in \Omega \mapsto d\mathcal{A}_t := \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi^1} \times \frac{\partial \chi}{\partial \xi^2} \right) d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.53)$$

Ας συμβολίσουμε με $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 (έχουμε δει ότι αυτή η τριάδα είναι και διανυσματικό πεδίο). Σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει, η convected βάση είναι το διανυσματικό πεδίο

$$g_i(\xi^1, \xi^2, \xi, t) = D\chi_t e_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.54)$$

Τότε η παράγωγος Frechet γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$D\chi_t = \frac{\partial \chi}{\partial \xi^i} \otimes e^i = g_i \otimes e^i \quad (4.55)$$

όπου $g_i = \frac{\partial \chi}{\partial \xi^i}$. Η δυϊκή βάση $\{g^i(\xi^1, \xi^2, \xi, t)\}$ ορίζεται ως

$$g^i(\xi^1, \xi^2, \xi, t) = D\chi_t^{-T} e^i \quad (4.56)$$

Εφόσον όμως τα e^i και e_i ταυτίζονται στον \mathbb{R}^3 παίρνουμε την κλασική συνθήκη

$$\langle g^i, g_j \rangle = \langle D\chi_t^{-T} e^i, D\chi_t e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle \quad (4.57)$$

Υπενθυμίζουμε την ταυτότητα ότι για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $L : V \rightarrow V$, όπου V είναι ένας διανυσματικός χώρος μπορούμε να γράψουμε

$$LU \times LW = \det(L)L^{-T}(U \times W), \quad \forall U, W \in V$$

Συνεπώς, συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις το διαφορικό του εμβαδού της διατομής μπορεί να γραφεί εκ νέου ως

$$\begin{aligned} dA_t &= (g_1 \times g_2) d\xi^1 d\xi^2 \\ &= j_t D\chi_t^{-T} (e_1 \times e_2) d\xi^1 d\xi^2 \\ &= j_t g^3(\xi^i, t) d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Στη γραμμή των κεντροειδών που παραμετροποιείται ως $\phi : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \bar{S}_t$ ορίζουμε την convected βάση

$$a_i(\xi, t) = \left. \frac{\partial \chi}{\partial \xi^i} \right|_{\xi^1, \xi^2=0} \quad (4.59)$$

Εφόσον $\phi = \chi|_{\xi^1=\xi^2=0}$, το a_3 έχει την εναλλακτική αναπαράσταση

$$a_3(\xi, t) = \phi'_t(\xi, t) \quad (4.60)$$

Έχουμε πολλάκις χρησιμοποιήσει την έκφραση $\phi_t = \chi_t \circ \chi_0^{-1}$. Είναι μια απεικόνιση από την παραμόρφωτη θέση (ή αλλιώς θέση 0) στην τωρινή θέση που αντιστοιχεί στο χρόνο t . Αυτό θα ονομάζουμε στο εξής ως σχετική παραμόρφωση. Φυσιολογικά, παραγωγίζοντας ως προς το χρόν, παίρνουμε τη σχετική κλίση παραμόρφωσης που είναι απλά το

$$F_t = D\phi_t = D\chi_t D\chi_0^{-1} : TS_0 \rightarrow TS_t \quad (4.61)$$

Παράδειγμα. Ακολουθώντας τη βασική κινηματική υπόθεση που είναι

$$\chi_t(\xi^1, \xi^2, \xi) = \phi(\xi, t) + \sum_{i=1}^2 \xi^i t_i(\xi, t) \quad (4.62)$$

στα όσα αναφέραμε στα προηγούμενα θα πάρουμε

$$g_i = a_i = t_i, \quad a_3 = \phi' \quad (4.63)$$

και

$$g_3 = a_3 + \sum_{i=1}^2 \xi^i \omega \times t_i \quad (4.64)$$

Η δυϊκή βάση δίνεται ως

$$g^i = a^i = t^i, \quad a^3 = \frac{1}{\langle t_3, \phi' \rangle} t_3 \quad (4.65)$$

και

$$g^3 = \frac{1}{j_t}(g_1 \times g_2) = \frac{1}{j_t}t_3 \quad (4.66)$$

όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα δίνεται ως

$$\begin{aligned} j_t &= \langle (g_1 \times g_2), g_3 \rangle = \left\langle t_3(\phi' + \sum \xi^i \omega \times t_i) \right\rangle \\ &= \langle t_3, \phi' \rangle - \langle \xi^1 t_2, \omega \rangle + \langle \xi^2 t_1, \omega \rangle \end{aligned} \quad (4.66)$$

Σημειώνουμε ότι η Ιακωβιανή στη γραμμή των κεντροειδών δίνεται ως

$$\bar{j}_t = j_t|_{\xi^1=\xi^2=0} = \langle t_3, \phi' \rangle \quad (4.67)$$

Έχοντας στο χέρι μας τους προηγούμενους συμβολισμούς, ορίζουμε τις εσωτερικές τάσεις και τα ζεύγη τάσεων.

4.3.2 Εσωτερικές τάσεις και ζεύγη τάσεων

Θα ξεκινήσουμε με υπειθυμίσεις από την τρισδιάστατη ελαστικότητα. Έστω $P(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ ο πρώτος τανυστής Piola=Kirchhoff ως προς τα S_0 και S_t . Η δύναμη που δρα σε μια ένα επιφανειακό στοιχείο dA_t μιας διατομής A_t στην τωρινή θέση S_t είναι η 1-μορφή

$$(\xi^1, \xi^2) \in \Omega \mapsto D\mathcal{F}_t = P|_{\xi^3=\xi} dA_0 \quad (4.68)$$

όπου $dA_0 = dA_t|_{t=0}$. Ας θυμηθούμε ότι

$$P = J_t \sigma F_t^{-T}, \quad J_t = \frac{j_t}{j_0} = \det F_t \quad (4.69)$$

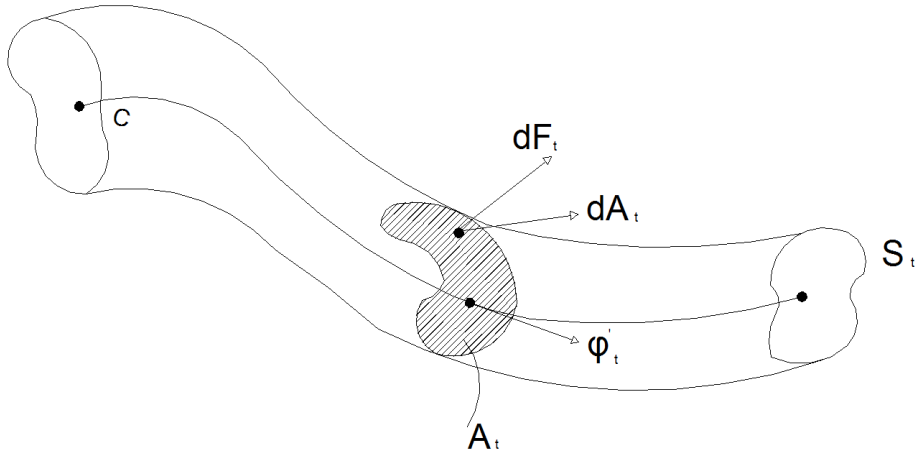
όπου $\sigma = \sigma^T$ ο τανυστής της τάσης Cauchy. Από τα παραπάνω μπορούμε να επιτύχουμε μια ακριβή έκφραση για τη στοιχειώδη δύναμη $d\mathcal{F}_t$. Πράγματι είναι

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}_t &= j_0 P|_{\xi^3=\xi} D\chi_0^{-T} e^3 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= j_0 J_t \sigma|_{\xi^3=\xi} (D\chi_t D\chi_0^{-1})^{-T} D\chi_0^{-T} e^3 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= j_t \sigma|_{\xi^3=\xi} D\chi_t^{-T} e^3 d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Υπάρχει και μια εναλλακτική έκφραση για την $d\mathcal{F}_t$

$$d\mathcal{F}_t = j_0 P|_{\xi^3=\xi} g_0^3 d\xi^1 d\xi^2 = j_t \sigma|_{\xi^3=\xi} g^3 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.71)$$

Μια φυσική ερμηνεία της στοιχειώδους δύναμης $d\mathcal{F}_t$ περιλαμβάνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.4: Στοιχείο δοκού σε μια διατομή \mathcal{A}_t

Ορίζουμε τώρα την εσωτερική δύναμη σε μια διατομή \mathcal{A}_t της τωρινής θέσης S_t ως το διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γραμμής των κεντροειδών, το οποίο θα συμβολίζουμε με

$$n : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.72)$$

όπου $n(\xi, t) \in T_{\phi(\xi, t)}\mathbb{R}^3$, $\forall (\xi, t) \in I \times \mathbb{R}^+$ και

$$n(\xi, t) = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\mathcal{A}_0} P|_{\xi^3=\xi} d\mathcal{A}_0 \quad (4.73)$$

Σημειώνουμε ότι η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην επιφάνεια αναφοράς και όχι πάνω στην τωρινή επιφάνεια.

Χρησιμοποιώντας την (4.70) και θέτοντας

$$\bar{J}(\xi, t) = \det F_t|_{\xi^1=\xi^2=0} = \frac{\bar{j}_t}{\bar{j}_0} \quad (4.74)$$

έχουμε την παρακάτω ισοδύναμη έκφραση

$$\begin{aligned} n(\xi, t) &= \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} P g_0^3 j_0 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} \sigma g_t^3 j_t d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.75)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις

$$g_0^3 = D\chi_0^{-T} e^3, \quad g_t^3 = D\chi_t^{-T}, \quad j_0 P D\chi_0 = j_t \sigma \chi_t \quad (4.76)$$

Θα ορίσουμε τώρα το εσωτερικό ζεύγος σε μια διατομή \mathcal{A}_t στην τωρινή θέση S_t ως το διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γραμμής των κεντροειδών, το οποίο θα συμβολίζουμε με

$$m : I \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.77)$$

όπου $m(\xi, t) \in T_{\phi(\xi, t)}\mathbb{R}^3$, $\forall (\xi, t) \in I \times \mathbb{R}^+$, με τύπο

$$m(\xi, t) = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\mathcal{A}_0} (\chi_t - \phi_t) \times P|_{\xi^3=\xi} d\mathcal{A}_0 \quad (4.77)$$

Όπως και πριν, κάνοντας χρήση της σχέσης (4.71) παίρνουμε την ισοδύναμη έκφραση

$$\begin{aligned} m(\xi, t) &= \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times P g_0 j_0 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times \sigma g_t j_t d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

Κλείνουμε την υποπαράγραφο αυτή με 2 παρατηρήσεις.

1. Υπενθυμίζεται ότι

$$\phi_0 = \phi_t|_{t=0}, \quad \phi_t = \chi_t|_{\xi^1=\xi^2=0} \quad (4.79)$$

Κατά συνέπεια, η γραμμή των κεντροειδών στη θέση αναφοράς $\xi \mapsto \phi_0(\xi)$ απεικονίζεται από τη σχετική παραμόρφωση ϕ_t στη γραμμή των κεντροειδών στην τωρινή θέση.

2. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι οι προηγούμενοι ορισμοί είναι ακριβείς και ανεξάρτητοι από οποιαδήποτε κινηματική υπόθεση έχει γίνει.

4.4 Τροπική ενέργεια και συζυγή τροπικά μεγέθη.

Θα επανέλθουμε στη βασική κινηματική υπόθεση που συζητήσαμε προηγουμένως. Εκφράζοντας την τροπική ενέργεια από την τριδιάστατη ελαστικότητα σε όρους εσωτερικών τάσεων και ζευγών τάσεων, μπορούμε να αναγνωρίσουμε συζυγή τροπικά μεγέθη.

Υπενθυμίζεται ότι η τροπική ενέργεια παραμόρφωσης είναι

$$\mathcal{W} = \int_{V_0} P : \dot{F}_t dV_0 \quad (4.80)$$

όπου $P : \dot{F}_t = \text{tr}(P^T \dot{F}_t)$ και η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στον όγκο αναφοράς V_0 .

Πρόταση 4.2. Εισάγοντας τη βασική κινηματική υπόθεση (4.8) στην τροπική ενέργεια της τριδιάστατης ελαστικότητας ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int_{v_0} P : \dot{F}_t dV_0 \\ &= \int_I (n\gamma^\nabla + m\omega^\nabla) \bar{j}_t d\xi \end{aligned} \quad (4.81)$$

όπου n, m είναι η εσωτερική τάση και ζεύγος αντίστοιχα, όπως ορίζονται στις σχέσεις (4.75) και (4.78) αντίστοιχα, και $(\cdot)^\nabla = (\cdot) - \omega_t \times (\cdot)$ η convected χρονική παράγωγος, και $\bar{j}_t = j_t|_{\xi^1=\xi^2=0}$ η ορίζουσα του $D\chi_t$ υπολογισμένη στο $\xi^1 = \xi^2 = 0$.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής κάνει χρήση των ορισμών και των παρατηρήσεων που έχουμε δώσει, και ως εκ τούτου δεν έχει κάτι να προσφέρει στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Taylor σελίδα 482.

Παρατηρήσεις.

1. Από τον ορισμό της convected χρονικής παραγώγου, $t_i^\nabla = \dot{t}_i - \omega_t \times t_i = 0$. Η convected χρονική παράγωγος ερμηνεύεται ως ο ρυθμός αλλαγής ως προς το κινούμενο πλαίσιο $\{t_i\}_{i=1,2,3}$. Ισοδύναμα το γ^∇ μπορεί να γραφεί ως

$$\gamma^\nabla = \phi_t'^\nabla - t_3^\nabla \equiv \phi_t'^\nabla \quad (4.82)$$

2. Τα μεγέθη γ_t (ή ισοδύναμα ϕ_t') και ω_t καλούνται τροπικά μεγέθη συζυγή προς την εσωτερική τάση n , και το ζεύγος τάσης m αντίστοιχα.
3. Ο παράγοντας κανονικοποίησης \bar{j}_t είναι απαραίτητος προκειμένου οι εκφράσεις που τον περιλαμβάνουν να είναι ανεξάρτητες από την παραμετροποίηση κατά μήκος της παραμέτρου του μήκους ξ .

4.5 Νόμοι ισορροπίας και καταστατικές εξισώσεις.

Θα εξάγουμε ακριβείς εξισώσεις ισορροπίας για εσωτερικές τάσεις και ζεύγη τάσεων από τους νόμους ισορροπίας για την τριδιάστατη ελαστικότητα. Σε αυτήν την εξαγωγή καμμία κινηματική υπόθεση δεν θα πραγματοποιηθεί. Υπενθυμίζουμε όσα μεγέθη είναι απαραίτητα για να πραγματοποιηθεί αυτή η εξαγωγή.

1. Η τωρινή και η θέση αναφοράς μιας δοκού συμβολίζεται με $S_t \subset \mathbb{R}^3$ και $B \subset \mathbb{R}^3$ αντίστοιχα.
2. Συμβολίζουμε με $(\chi_0, \Omega \times I)$ και $(\chi_t, \Omega \times I)$ τους convected χάρτες για τα σημεία $X \in B$ και $x = \phi_t(X)$ ώστε $\chi_t = \phi_t \circ \chi_0$. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι $(\chi_0, \Omega \times I)$ και $(\chi_t, \Omega \times I)$ είναι καθολικοί χάρτες.
3. Ορίζουμε 2 καμπύλες $\phi_0 : I \rightarrow B$ και $\phi_t : I \rightarrow S_t$ στη θέση αναφοράς και τη τωρινή θέση αντίστοιχα με την παρακάτω ιδιότητα

$$\phi_0(I) \subset \chi_0(\Omega), \quad \phi_t(I) \subset \chi_t(\Omega) \quad (4.83)$$

Τα $\phi_0(I)$ και $\phi_t(I)$ ορίζουν δυο θέσεις μιας υλικής καμπύλης $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. Ένας ακριβής ορισμός αυτών των δυο καμπύλων θα γίνει στα επόμενα.

Η μεθοδολογία που ακολουθείται την εξαγωγή των εξισώσεων πεδίου είναι αρκετά άμεση. Ειδικότερα, θα κατασκευάσουμε εκφράσεις για διάφορα μεγέθη φυσικού ενδιαφέροντος όπως είναι πυκνότητα, ροπή, ορμή, και θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας της τρισδιάστατης ελαστικότητας για να πάρουμε τις κατάλληλες εξισώσεις ισορροπίας ως προς τα εσωτερικά μεγέθη. Ξεκινάμε με την ισορροπία μάζας.

4.5.1 Διατήρηση μάζας.

Έστω $\rho_0 : B \rightarrow \mathbb{R}$ και $\rho_t : S_t \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν την πυκνότητα μάζας στη θέση αναφοράς και την τωρινή θέση αντίστοιχα. Ορίζουμε τη μέση πυκνότητα ως

$$\bar{\rho}_0(\phi_0(\xi)) = \frac{1}{\bar{j}_0(\xi)} \int_{\Omega} \rho_0(\chi_0(\xi^1, \xi^2, \xi)) j_0(\xi^1, \xi^2, \xi) d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.84)$$

Συμβολικά έχουμε

$$\bar{\rho}_0 \circ \phi_0 = \frac{1}{\bar{j}_0} \int_{\Omega} (\rho_0 \circ \chi_0) j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.85)$$

Σημειώνουμε ότι η καμπύλη ϕ_0 παραμένει άγνωστη ως τώρα. Όμοια, για κάθε t μπορούμε να ορίσουμε τη μέση πυκνότητα στην τωρινή θέση S_t ως

$$\bar{\rho}_t \circ \phi_t = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} (\rho_t \circ \chi_t) j_t d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.86)$$

Φυσιολογικά, ενδιαφερόμαστε να συσχετίσουμε τα $\bar{\rho}_0$ και $\bar{\rho}_t$. Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε χρήση της διατήρησης μάζας από την τρισδιάστατη ελαστικότητα η οποία μας λέει ότι

$$\det F_t(\rho_t \circ \chi_t) = \rho_0 \circ \chi_0 \Leftrightarrow (\rho_t \circ \chi_t) j_t = (\rho_0 \circ \chi_0) j_0 \quad (4.87)$$

Ολοκλήρωση της (4.87) στην επιφάνεια Ω δίνει την εξίσωση διατήρησης της μάζας

$$(\bar{\rho}_t \circ \phi_t) \bar{j}_t = (\bar{\rho}_0 \circ \phi_0) \bar{j}_0 \quad (4.88)$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ακόμα πιο απλά ως

$$\bar{\rho}_t \bar{J}_t = \bar{\rho}_0 \quad (4.89)$$

4.5.2 Διατήρηση Ορμής.

Έστω $\rho_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ η μέση συνάρτηση πυκνότητας μάζας ως προς την θέση αναφοράς. Ορίζουμε τη γραμμή των κεντροειδών $\phi_t(\xi)$ θέτοντας

$$\phi_t(\xi) = \frac{1}{\bar{j}_0 \bar{\rho}_0} \int_{\Omega} \rho_0 \chi_t j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.90)$$

Ύστερα, ορίζουμε την εσωτερική γραμμική ροπή (εσωτερική ορμή) σε μια διατομή \mathcal{A}_t , την οποία συμβολίζουμε με p_t , και ορίζεται κατά φυσικό τρόπο θέτοντας

$$p_t = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\chi}_t j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.91)$$

Από τις (4.90),(4.91) και τη διατήρηση της μάζας έπεται ότι

$$p_t = \bar{\rho}_t \dot{\phi}_t \quad (4.92)$$

Για να παράξουμε την εσωτερική μορφή της εξίσωσης της ορμής, παραγωγίζουμε την έκφραση για την εσωτερική τάση για να πάρουμε

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{j}_t n_t(\xi)) = \int_{\Omega} (j_t \sigma g^3)_{,3} d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.93)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισορροπίας ορμών της τρισδιάστατης ελαστικότητας παίρνουμε

$$\frac{1}{\bar{j}_t} (j_t \sigma g^i)_{,i} + \rho_t b = \rho_t \ddot{\chi}_t \quad (4.94)$$

όπου το $(\cdot)_{,i}$ σημαίνει όπως πάντα παραγωγή ως προς την i -συντεταγμένη.

Ολοκληρώνοντας στο χωρίο Ω και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.93) η εξίσωση (4.94) γίνεται για $i = 1, 2$

$$(j_t n_t)' = - \int_{\Omega} (j_t \sigma g^i)_{,i} d\xi^1 d\xi^2 - \int_{\Omega} j_t \rho_t b d\xi^1 d\xi^2 + \bar{j}_t \bar{\rho}_t \ddot{\phi} \quad (4.95)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην (4.95) μπορεί να απλοποιηθεί με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης. Αν συμβολίσουμε το κάθετο πεδίο στην επιφάνεια Ω με $\nu_i e^i$, $i = 1, 2$ μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{\Omega} (j_t \sigma g^i)_{,i} d\xi^1 d\xi^2 = \int_{\partial\Omega} j_t \sigma g^i \nu_i d\Gamma \quad (4.96)$$

Η τελική μορφή της ισορροπίας της ορμής πλέον γίνεται

$$\frac{1}{\bar{j}_t} (\bar{j}_t n_t)' + \bar{n} = \bar{\rho}_t \ddot{\phi} \quad (4.97)$$

όπου τα εξωτερικά φορτία \bar{n} δίνονται ως

$$\bar{n} = \frac{1}{\bar{j}_t} \left(\int_{\Omega} j_t \rho_t b d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\partial\Omega} j_t \sigma g^i \nu_i d\Gamma \right) \quad (4.98)$$

4.5.3 Διατήρηση στροφορμής

Στη γραμμή των κεντροειδών ϕ_t ορίζουμε την εσωτερική ροπή σε μια διατομή \mathcal{A}_t από τη σχέση

$$\pi_t = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} \rho_0 (\chi_t - \phi_t) \times \dot{\chi}_t j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.99)$$

Έπεται από από την (4.99) και την (4.90) ότι

$$\frac{1}{\bar{j}_t} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{j}_t \pi_t) = \frac{1}{\bar{j}_t} \int_{\Omega} \rho_0 (\chi_t - \phi_t) \times \ddot{\chi}_t j_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.100)$$

Για να προκύψει ο νόμος ισορροπίας για την εσωτερική ροπή, παραγωγίζουμε την έκφραση για τα ζεύγη τάσεων ως προς ξ για να πάρουμε

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{j}_t m_t) = \int_{\Omega} (\chi'_t - \phi'_t) \times \sigma g^3 j_t d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times (j_t \sigma g^3)_{,3} d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.101)$$

Έπειτα, κάνουμε χρήση της ισορροπίας ορμής και τον ορισμό των εσωτερικών τάσεων για να γράψουμε την (4.101) ως

$$\begin{aligned} (\bar{j}_t m_t)' + \phi'_t \times \bar{j}_t n_t &= \int_{\Omega} \chi'_t \times \sigma g^3 j_t d\xi^1 d\xi^2 + (\bar{j}_t \pi_t) \\ &+ \int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times [-(j_t \sigma g^i)_{,i} - j_t \rho_t b] d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα απλοποιείται εισάγοντας το κάθετο πεδίο στο χωρίο Ω το $\nu_i e^i$, και ολοκληρώνοντας κατά μέρη χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης για να πάρουμε την παρακάτω έκφραση

$$\int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times (j_t \sigma g^i)_{,i} d\xi^1 d\xi^2 = \int_{\partial\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times j_t \sigma g^i \nu_i d\Gamma - \int_{\Omega} \chi_{t,i} \times j_t \sigma g^i d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.103)$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε κάνει χρήση του γεγονότος ότι $\phi_{t,i} = 0$. Ξερισμοποιώντας την εξίσωση διατήρησης της στροφορμής από την τρισδιάστατη ελαστικότητα και κάνοντας κάποιες πράξεις παίρνουμε την τελική σχέση

$$\frac{1}{j_t} (\bar{j}_t m_t)' + \phi_t' \times n_t + \bar{m} = \frac{1}{j_t} (\bar{j}_t \pi_t) \quad (4.104)$$

όπου το εφαρμοζόμενο ζεύγος \bar{m} ορίζεται ως

$$\bar{m} = \frac{1}{j_t} \left[\int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times j_t \rho_t b d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\partial\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times j_t \sigma g^i \nu_i d\Gamma \right] \quad (4.105)$$

Αν τώρα κάποιος εφαρμόσει τη βασική κινηματική υπόθεση, κάνοντας χρήση του ορισμού της γραμμής των κεντροειδών η οποία είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\int_{\Omega} \xi^i j_t \rho_t d\xi^1 d\xi^2 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.106)$$

και την ροπή π_t όπως αυτή ορίζεται στη σχέση (4.99), τότε το δεξί μέλος της (4.104) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial t} (j_t \pi_t) &= \frac{1}{j_t} \int_{\Omega} (\chi_t \phi_t) \times j_t \rho_t \ddot{\chi}_t d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \frac{1}{j_t} \int_{\Omega} \xi^i t_i \times [\ddot{\phi}_t + \xi^j \dot{w}_t \times t_j + \xi^j w_t \times (w_t \times t_j)] d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \left(\frac{1}{j_t} \int_{\Omega} \xi^i \xi^j j_t \rho_t d\xi^1 d\xi^2 \right) [t_i \times (\dot{w}_t \times t_j) + t_i \times (w_t \times (w_t \times t_j))] \end{aligned} \quad (4.107)$$

Η έκφραση αυτή μας δείχνει ότι οι συντελεστές του τανυστή αδρανείας \mathcal{J} δίνονται από τη σχέση

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{j_0} \int_{\Omega} \xi^1 \xi^2 j_t \rho_t d\xi^1 d\xi^2$$

κάνοντας χρήση των σχέσεων

$$t_i \times (\dot{w}_t \times t_j) = \langle t_i, t_j \rangle \dot{w}_t - \langle t_i, \dot{w}_t \rangle t_j = (\delta_{ij} - t_j \otimes t_i) \dot{w}_t$$

και

$$t_i \times [w_t \times (w_t \times t_j)] = \langle t_i, w_t \times t_j \rangle w_t - \langle t_i, w_t \rangle (w_t \times t_j) = \langle t_j \times t_i, w_t \rangle - w_t \times (t_j \otimes t_i) w_t$$

μαζί με το γεγονός ότι ο τανυστής αδρανείας είναι συμμετρικός, τότε ο όρος αδρανείας της σχέσης (4.107) γίνεται

$$\frac{1}{j_t} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{j}_t \pi_t) = \frac{1}{j_t} [\mathcal{J}^{ij} (\delta_{ij} - t_i \otimes t_j) \dot{w}_t - w_t \times (t_i \otimes t_j) w_t] \quad (4.108)$$

Ορίζοντας τον τανυστή αδρανείας ως

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^{ij} (\delta_{ij} - t_i \otimes t_j) \quad (4.109)$$

η ισορροπία ροπών μπορεί να απλοποιηθεί στον τύπο

$$\frac{1}{j_t} (\bar{j}_t m_t)' + \phi_t' n_t + \bar{m} = \frac{1}{j_t} [\mathcal{J} \dot{w}_t + w_t \times \mathcal{J} w_t] \quad (4.110)$$

Αυτός ο τύπος θα μας χρειαστεί όταν σχηματίσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.

4.5.4 Παράδειγμα απλοποιημένων καταστατικών εξισώσεων

Θα συζητήσουμε για καταστατικές εξισώσεις που είναι αναλλοίωτες, σε όρους εσωτερικών τάσεων και ζευγών τάσεων $\bar{J}_t N_t$ και $\bar{J}_t M_t$ αντίστοιχα. Αυτές οι καταστατικές εξισώσεις αποτελούν μια επέκταση των αποτελεσμάτων της θεωρίας απειροστών παραμορφώσεων στο εύρος πεπερασμένων παραμορφώσεων. Παρόλο που αυτές οι σχέσεις μπορούν να προκύψουν και διαφορετικά, η δομή κατασκευής τους υποκινείται από το παρακάτω επιχείρημα.

Υπενθυμίζεται ότι η παράγωγος Frechet του τωρινού σχηματισμού χ_t (με τη βασική κινηματική συνθήκη) είναι

$$D\chi_t = \Lambda_t [I + \Gamma_t \otimes e^3 + (\Omega_t \times \xi^i e_i) \otimes e^3] \quad (4.111)$$

Ορίζουμε τον παρακάτω τανυστή δευτέρας τάξης

$$H_t := \Lambda_t^T D\chi_t - I = \Gamma_t \otimes e^3 + (\Omega_t \times \xi^i e_i) \otimes e^3 \quad (4.112)$$

Έτσι από την (4.111) μπορούμε να γράψουμε

$$D\chi_t = \Lambda_t (I + H_t), \quad D\chi_0 = \Lambda_0 (I + H_0) \quad (4.113)$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας το H_0 από το $D\chi_t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} D\chi_t &= \Lambda_t [I + (H_t - H_0) + H_0] \\ &= \Lambda_t [(H_t - H_0) + \Lambda_0^T D\chi_0] \end{aligned} \quad (4.114)$$

Έτσι το $D\chi_t$ γίνεται

$$D\chi_t = \Lambda_t (H_t - H_0) + \Lambda_t \Lambda_0^T D\chi_0 \quad (4.115)$$

Παρατηρήσεις.

1. Η εξίσωση (4.115) είναι μια ακριβής λύση (σύμφωνη με την κινηματική υπόθεση). Καμμία υπόθεση απολύτως δεν έχει γίνει για το μέγεθος των τροπών.
2. Η ποσότητα $H_t - H_0$ αναπαριστά ένα σχετικό μέγεθος τροπής. Αν η κίνηση $t \mapsto \chi_t$ είναι μια κίνηση στερεού σώματος του σχηματισμού αναφοράς, τότε $H_t - H_0 = 0$ ταυτοτικά και το $D\chi_t$ διαφέρει από το $D\chi_0$ κατά μια στροφή στερεού σώματος δηλαδή

$$D\chi_t = \Lambda_t \Lambda_0^T D\chi_0 \quad (4.116)$$

Για να προχωρήσουμε ακόμα περισσότερο, υπενθυμίζουμε ότι ο τανυστής τροπής Lagrange ορίζεται μέσω της σχέσης

$$E_t := \frac{1}{2} (F_t^T F_t - I) \quad (4.117)$$

όπου F_t είναι η κλίση παραμόρφωσης. Έχουμε δει ότι το F_t μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\begin{aligned} F_t &= D\chi_t D\chi_0^{-1} \\ &= \Lambda_t (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} + \Lambda_t \Lambda_0^T \\ &= \Lambda_t [I + (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} \Lambda_0] \Lambda_0^T \end{aligned} \quad (4.117)$$

Κατά συνέπεια, ο τανυστής τροπής Lagrange γίνεται

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{1}{2} [\Lambda_0 [I + (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} \Lambda_0]^T [I + (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} \Lambda_0] \Lambda_0^T - I] \\ &= \frac{1}{2} [D\chi_0^{-T} (H_t - H_0)^T \Lambda_0^T + \Lambda_0 (H_t - H_0) D\chi_0^{-1}] \\ &\quad + \frac{1}{2} D\chi_0^{-T} (H_t - H_0)^T (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} \end{aligned} \quad (4.118)$$

Αν επομένως ορίσουμε τον τανυστή

$$K_t := \Lambda_0 (H_t - H_0) D\chi_0^{-1} \quad (4.119)$$

ο τανυστής τροπής Lagrange παίρνει την τελική μορφή

$$E_t = K_t^S + \frac{1}{2} K_t^T K_t \quad (4.120)$$

όπου $K_t^S = \frac{1}{2}(K_t + K_t^T)$ το συμμετρικό κομμάτι του K_t . Θεωρούμε τώρα την περίπτωση απειροστών τροπών. Συνεπώς η υπόθεση που πρέπει να κάνουμε είναι

$$\|H_t - H_0\| = O(\varepsilon) \quad (4.121)$$

για κάποιο $0 < \varepsilon \ll 1$, όπου το $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow c$, όπου c μια σταθερά. Έπεται ότι

$$E_t = K_t^S + O(\varepsilon^2) \quad (4.122)$$

Επιπλέον, για την ανάπτυξη του καταστατικού μοντέλου μας, υποθέτουμε μια αρχικώς ευθεία, πρισματική δοκό με ομοιόμορφη κατανομή πυκνότητας πάνω στη διατομή.

Η παραπάνω ειπλέον υπόθεση οδηγεί στην ακόλουθη μορφή του τανυστή τροπής Lagrange

$$E_t = H_t^S + \frac{1}{2} H_t^T H_t = H_t^S + O(\varepsilon^2) \quad (4.123)$$

Άρα η υπόθεση της απειροστής παραμόρφωσης γίνεται $\|H_t\| = O(\varepsilon)$. Επιπροσθέτως, υποθέτουμε ότι

$$\|\sigma_t\| = O(\varepsilon) \quad (4.124)$$

Η παραπάνω υπόθεση δεν είναι κάτι καινούργιο στη μηχανική συνεχούς μέσου, είναι απλά η τάξη της προσέγγισης που πραγματοποιείται.

Παρατήρηση. Κανένας περιορισμός δεν γίνεται στο μέγεθος του πεδίου μετατοπίσεων $\phi(\xi, t)$ ή στο πεδίο στροφών $\Lambda(\xi, t)$. Απλά υποθέτουμε μικρές τροπές για να πάρουμε καταστατικές εξισώσεις με σφάλμα $O(\varepsilon)$ πρώτης τάξης.

Υπενθυμίζουμε τον δεύτερο τανυστή τάσης Piola-Kirchhoff που ορίζεται ως

$$S_t = J_t F_t^{-1} \sigma_t F_t^{-T} \quad (4.125)$$

όπου, σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις

$$J_t = \frac{j_t}{j_0} = j_t = \det[\Lambda_t(I + H_t)] = 1 + O(\varepsilon) \quad \text{tag 4.126}$$

Τώρα, εφόσον $F_t = \Lambda_t(I + H_t)$, ο δεύτερος τανυστής Piola-Kirchhoff γράφεται ως

$$S_t = \Lambda_t^T \sigma_t \Lambda_t + O(\varepsilon^2) \quad (4.127)$$

Θεωρούμε τώρα αξιωματικά μια γραμμική ισότροπη σχέση μεταξύ των S_t και E_t με δομή ίδια με αυτή της γραμμικής θεωρίας. Αυτό οδηγεί σε μια καταστατική σχέση τύπου St. Vennant-Kirchhoff. Μέχρι τάξη ε η σχέση αυτή είναι

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta} &= [\lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\rho} + 2G \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho}] H_{\gamma\rho}^S \\ \Sigma_{\alpha 3} &= 2G H_{\alpha 3}^S, \quad \Sigma_{33} = H_{33}^S \end{aligned} \quad (4.128)$$

Όπου $\Sigma = \Lambda^T \sigma \Lambda$, ($\alpha, \beta, \gamma, \rho = 1, 2$), και λ η σταθερά του Lamé, G το μέτρο διάτμησης, E το μέτρο ελαστικότητας.

Για να εκφράσουμε τις εσωτερικές τάσεις και τα ζεύγη τάσεων σε όρους μεγεθών τροπής κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση:

$$\Lambda_t^T P_t = J_t \Lambda_t^T \sigma_t F_t^{-T} = J_t \Lambda_t^T \sigma_t \Lambda_t (I + H_t)^{-T} = \Sigma_t + O(\varepsilon^2) \quad (4.129)$$

Εφαρμόζοντας την (4.129) στο $g_0^3 \equiv e^3$ παίρνουμε

$$\Lambda_t^T P_t g_0^3 = \Lambda_t^T P_t e^3 = \Sigma e^3 + O(\varepsilon^2) = \Sigma_{i3} e_i + O(\varepsilon^2) \quad (4.130)$$

Χρησιμοποιώντας τις καταστατικές σχέσεις η τελευταία σχέση γίνεται

$$\Lambda_t^T P_t g_0^3 = 2GH_{i3}^S e_i + EH_{33} e_3 \quad (4.131)$$

όπου οι συνιστώσες H_{i3}^S είναι

$$2H_{i3}^S = \langle e_i, H_t e_3 \rangle + \langle e_3, H_t e_i \rangle \quad (4.132)$$

Όμως από τον ορισμό ισχύει ότι $H_t e_i = 0$. Τότε παίρνουμε ακριβείς σχέσεις

$$2H_{13}^S = \Gamma_1 - \xi^2 \Omega_3, \quad 2H_{23}^S = \Gamma_2 + \xi^1 \Omega_3, \quad H_{33} = \Gamma_3 - \xi^1 \Omega_2 + \xi^2 \Omega_1 \quad (4.133)$$

Θα απλοποιήσουμε τώρα τις μορφές των εσωτερικών τάσεων και ζευγών τάσεων. Από τους ορισμούς τους έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{j}_t N_t &= \Lambda_t^T \int_{\Omega} P_t g_0^3 j_0 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\Omega} (2GH_{i3}^S e_i + EH_{33} e_3) d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\Omega} (G(\Gamma_1 - \xi^2 \Omega_3) e_1 + G(\Gamma_2 + \xi^1 \Omega_3) e_2 + E(\Gamma_3 - \xi^1 \Omega_2 + \xi^2 \Omega_1) e_3) d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.134)$$

Λόγω της υπόθεσης της ομοιόμορφης πυκνότητας, ο ορισμός της γραμμής των κεντροειδών απλοποιείται σε

$$\int_{\Omega} \xi^i d\xi^1 d\xi^2 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.135)$$

Αφού τα Γ_i, Ω_i δεν εξαρτώνται από τα ξ^1, ξ^2 για κάνα $i = 1, 2, 3$, η τελευταία συνθήκη δίνει

$$\bar{j}_t N_t = GA \Gamma_i e_i + EA \Gamma_3 e_3 \quad (4.136)$$

όπου $A = \int_{\Omega} d\xi^1 d\xi^2$ είναι το εμβαδόν της διατομής.

Όμοια θα κάνουμε και για τα ζεύγη τάσεων. Είναι

$$\begin{aligned} \bar{j}_t M_t &= \Lambda_t^T \int_{\Omega} (\chi_t - \phi_t) \times P_t g_0^3 d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\Omega} \xi^i e_i \times (2GH_{i3}^S e_i + EH_{33} e_3) d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\Omega} [G\xi^i (\Gamma_1 - \xi^2 \Omega_3) e_i \times e_1 + G\xi^i (\Gamma_2 + \xi^1 \Omega_3) e_i \times e_2 + E\xi^i (\Gamma_3 - \xi^1 \Omega_2 + \xi^2 \Omega_1) e_i \times e_3] d\xi^1 d\xi^2 \\ &= \int_{\Omega} [G(\xi^2)^2 \Omega_3 e_3 + G(\xi^1)^2 \Omega_3 e_3 + E\xi^1 (\xi^1 \Omega_2 - \xi^2 \Omega_1) + E\xi^2 (-\xi^1 \Omega_2 + \xi^2 \Omega_1) e_1] d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

Από τον ορισμό για τις συνιστώσες του ταυιστή αδρανείας παίρνουμε

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{j_0} \int_{\Omega} \xi^i \xi^j j_0 \rho_0 d\xi^1 d\xi^2 = \bar{\rho}_0 \int_{\Omega} \xi^i \xi^j d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.138)$$

Ορίζουμε την πολική ροπή αδρανείας ως

$$\mathcal{J}^0 = \frac{1}{j_0} \int_{\Omega} [(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] j_0 \rho_0 d\xi^1 d\xi^2 \quad (4.139)$$

Άρα η εξίσωση για τα ζεύγη τάσεων γίνεται

$$\bar{j}_t M_t = \frac{1}{\bar{\rho}_0} [G\Omega_3 \mathcal{J}^0 e_3 + E(-\mathcal{J}^{12} \Omega_2 + \mathcal{J}^{22} \Omega_1) e_1 + E(\mathcal{J}^{11} - \mathcal{J}^{12} \Omega_1) e_2] \quad (4.140)$$

Έχοντας στο χέρι τις εξισώσεις (4.136) και (4.140) είμαστε να κατασκευάσουμε το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.

$$\bar{\rho}_0 \bar{J}_0 \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_0 GA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_0 GA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_0 EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E\mathcal{J}^{22} & -E\mathcal{J}^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E\mathcal{J}^{12} & E\mathcal{J}^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\mathcal{J}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (4.141)$$

4.6 Μεταβολική διατύπωση και συνεπής γραμμικοποίηση

Στην παράγραφο αυτή θα αναπτύξουμε την μεταβολική (ασθενή) μορφή των εξισώσεων που έχουμε διατυπώσει στα προηγούμενα. Αυτή η ανάλυση ασφαλώς και θα λαμβάνει υπόψιν την βασική κινηματική υπόθεση. Καθώς αναμένουμε επαναληπτική διαδικασία για την επίλυση, η συνεπής γραμμικοποίηση της μεταβολικής μορφής των εξισώσεων ισορροπίας θα παρουσιαστεί εκτενώς.

4.6.1 Χώρος των κινηματικά αποδεκτών μεταβολών

Ας υπενθυμίσουμε την σχέση που δίνει το χώρο των αφηρημένων σχηματισμών της δοκού

$$\mathcal{C} = \{ \Phi = (\phi, \Lambda) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \times SO(3) \} \quad (4.142)$$

Στο εξής, θα συμβολίζουμε με $T_\phi \mathcal{C}$ τον εφαπτόμενο χώρο του. Ο $T_\phi \mathcal{C}$ όπως το υποδεικνύουν το όνομα και ο συμβολισμός, ορίζεται να είναι ο εφαπτόμενος χώρος στο Φ της αυθαίρετης πολλαπλότητας σχηματισμών \mathcal{C} . Ακολουθώντας τις συνηθισμένες πρακτικές, ο $T_\phi \mathcal{C}$ ορίζεται ως ακολούθως.

Κατασκευάζουμε μια καμπύλη σχηματισμών $\Phi_\varepsilon = (\phi_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon)$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon|_{\varepsilon=0} &= \Phi \\ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Phi_\varepsilon &= \delta\Phi \in T_\phi \mathcal{C} \end{aligned} \quad (4.143)$$

όπου το $\delta\Phi$ είναι ένας τοιχείο του εφαπτόμενου χώρου $T_\phi \mathcal{C}$. Αυτή η καμπύλη των σχηματισμών κατασκευάζεται από την εκθετική απεικόνιση στον \mathbb{R}^3 και στην $SO(3)$. Αρχικά, επειδή ο \mathbb{R}^3 είναι διανυσματικός χώρος, η εκθετική απεικόνιση παίρνει τη μορφή

$$\phi_\varepsilon = \phi + \varepsilon \delta\phi \quad (4.144)$$

όπου $\delta\phi \in T_\phi \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$. Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 2 ότι η εκθετική απεικόνιση σε μια ομάδα πινάκων, όπως είναι η $SO(3)$, είναι η συνήθης εκθετική απεικόνιση πίνακα. Οπότε η εκθετική απεικόνιση στην $SO(3)$ είναι

$$\Lambda_\varepsilon = e^{\varepsilon \delta\theta} \Lambda \quad (4.145)$$

όπου κατά τα γνωστά $\delta\theta \in T_I SO(3) = \mathfrak{so}(3)$. Η απαίτηση 1 από τις εξισώσεις (4.143) μπορεί πολύ εύκολα να επαληθευτεί από τις σχέσεις (4.144) και (4.145). Παίρνοντας παράγωγο κατά Frechet της δεύτερης απαίτησης της σχέσης (4.143) έχουμε ότι

$$\delta\Phi = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (\phi_\varepsilon, \Lambda_\varepsilon) = (\delta\phi, \delta\theta \Lambda) \quad (4.146)$$

Η τελευταία σχέση αναπαριστά στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου της αυθαίρετης πολλαπλότητας σχηματισμών \mathcal{C} . Εδώ το $\delta\theta \Lambda$ αναπαριστά ένα στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου του $SO(3)$ στο στοιχείο Λ . Τότε, το $\delta\theta$ λογίζεται ως μια απειροστή στροφή, επιπρόσθετη της πεπερασμένης στροφής Λ . Για τους σκοπούς ορισμού του χώρου των κινηματικά αποδεκτών μεταβολών, υπενθυμίζουμε τον ισομορφισμό $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$. Έτσι, το $\hat{\cdot}$ αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^3 μια απειροστή στροφή, που είναι στοιχείο του $\mathfrak{so}(3)$.

Επιστρέφοντας στο περιεχόμενο της δοκού, το $\delta\theta \in \mathfrak{so}(3)$ ή ισοδύναμα το $\delta\theta$ λογίζεται ως μια απειροστή στροφή του τωρινού σχηματισμού (ϕ, Λ) . Όμοια, το $\delta\phi$ λογίζεται ως μια απειροστή μετακίνηση της γραμμής των κεντροειδών του τωρινού σχηματισμού. Έτσι, ο χώρος των κινηματικά αποδεκτών μεταβολών ορίζεται ως

$$\mathcal{V} = \{ (\delta\phi, \delta\theta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \delta\phi = 0 \text{ στο } \partial_\theta I, \delta\theta = 0 \text{ στο } \partial_\phi I \} \quad (4.147)$$

όπου $\partial_\theta I$ και $\partial_\phi I$ είναι τα τμήματα του συνόρου όπου οι στροφές και οι μετακινήσεις αντίστοιχα ορίζονται.

4.6.2 Μεταβολική μορφή των εξισώσεων ισορροπίας ροπών

Τώρα θα κατασκευάσουμε την μεταβολική ή ασθενή μορφή των εξισώσεων ισορροπίας ροπών πολλαπλασιάζοντας τις (4.97) και (4.110) με μια αυθαίρετη μεταβολή $(\delta\phi, \delta\theta) \in \mathcal{V}$ και ολοκληρώνοντας στο τωρινό μήκος. Για λόγους απλότητας, ορίζουμε $\delta\Phi = (\delta\phi, \delta\theta)$. Σημειώνουμε ότι η χρήση του $\delta\Phi$ δεν θα πρέπει να μπερδεύεται με τη χρήση του $\delta\Phi$ ως στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου $T_{\Phi}\mathcal{C}$.

Η μεταβολική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας τότε είναι

$$G_{dyn}(\Phi, \delta\Phi) = G(\Phi, \delta\Phi) + \int_I [\bar{\rho}_0 \langle \ddot{\phi}_t, \delta\phi \rangle + \langle (\mathcal{J}\dot{w}_t + w_t \times \mathcal{J}w_t), \delta\theta \rangle] \bar{j}_0 d\xi \quad (4.148)$$

Το $G(\Phi, \delta\Phi)$ είναι η στατική ασθενής μορφή των εξισώσεων ισορροπίας και αναπτύσσεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} G(\Phi, \delta\Phi) &= \int_I \left[- \left\langle \frac{1}{\bar{j}_t} (\bar{j}_t n_t)', \delta\phi \right\rangle \langle \bar{n}, \delta\phi \rangle - \left\langle \frac{1}{\bar{j}_t} (\bar{j}_t m_t)', \delta\theta \right\rangle - \langle \phi_t' \times n_t, \delta\theta \rangle - \langle \bar{m}, \delta\theta \rangle \right] \bar{j}_t d\xi \\ &= \int_I \left[\langle \bar{j}_t n_t, \delta\phi_t' \rangle + \langle \bar{j}_t m_t, \delta\theta_t' \rangle + \langle n_t, \phi_t' \times \delta\theta \rangle - \langle \bar{j}_t n_t, \delta\phi_t' \rangle - \langle \bar{j}_t m_t, \delta\theta_t' \rangle - \langle \bar{j}_t \bar{n}, \delta\phi \rangle - \langle \bar{j}_t \bar{m}, \delta\theta \rangle \right] d\xi \end{aligned} \quad (4.149)$$

Έτσι η στατική ασθενής μορφή γράφεται

$$G(\Phi, \delta\Phi) = \int_I [\langle n_t, (\delta\phi_t' + \phi_t' \times \delta\theta) \rangle + \langle m_t, \delta\theta_t' \rangle] \bar{j}_t d\xi - G_{ext}(\delta\Phi) \quad (4.150)$$

όπου $G_{ext}(\delta\Phi)$ είναι η συνεισφορά των εξωτερικών φορτίων που δίνεται ως

$$G_{ext}(\delta\Phi) = \int_I [\langle \bar{n}_t, \delta\phi \rangle + \langle \bar{m}, \delta\theta \rangle] \bar{j}_t d\xi + (\langle \bar{j}_t n_t, \delta\phi \rangle + \langle \bar{j}_t m_t, \delta\theta \rangle)|_{I-}^{I+} \quad (4.151)$$

όπου όπως πάντα $(\cdot)|_{I-}^{I+}$ είναι το I υπολογισμένο στο $I+$ και στο $I-$ αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι είναι βολικό στο σημείο αυτό να ορίσουμε έναν τελεστή για την έκφραση της στατικής ασθενούς μορφής. Για το σκοπό αυτό, ξαναγράφουμε την (4.150) σε όρους convected μεγεθών ως εξής

$$G(\Phi, \delta\Phi) = \int_I [\langle \bar{J}_t N_t, \Lambda^T (\delta\phi_t' + \phi_t' \times \delta\theta) \rangle + \langle \bar{J}_t M_t, \Lambda^T \delta\theta_t' \rangle] \bar{j}_0 d\xi - G_{ext}(\delta\Phi) \quad (4.151)$$

Ορίζουμε το διάνυσμα υπολοίπου (resultant vector) R ως

$$R = \bar{J}_t \begin{pmatrix} N_t \\ M_t \end{pmatrix} \quad (4.152)$$

Τότε η στατική ασθενής μορφή μπορεί να γραφεί

$$G(\Phi, \delta\Phi) = \int_I \left\langle \mathcal{B} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \end{pmatrix}, R \right\rangle \bar{j}_0 d\xi - G_{ext}(\delta\Phi) \quad (4.153)$$

όπου

$$\mathcal{B} = \Pi^T \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \Lambda^T & 0 \\ 0 & \Lambda^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\xi} I & \hat{\phi}_t' \\ 0 & \frac{d}{d\xi} 1 \end{pmatrix} \quad (4.154)$$

Οι εκφράσεις (4.151) και (4.153) είναι πολύ σημαντικές για τη συνεπή γραμμικοποίηση που θα παρουσιάσουμε πιο κάτω.

4.6.3 Συνεπής γραμμικοποίηση: Εφαπτόμενος τελεστής

Θα μελετήσουμε τώρα τη συνεπή γραμμικοποίηση της στατικής ασθενούς μορφής. Γραμμικοποιώντας την (4.151) ή ισοδύναμα την (4.153) γύρω από το σχηματισμό $\Phi = (\phi, \Lambda)$ οδηγεί σε 2 συνεισφορές του εφαπτόμενου τελεστή: Το

υλικό και το γεωμετρικό μέρος. Από τον ορισμό, η γραμμικοποιημένη στατική μορφή υπολογίζεται με την παράγωγο ως προς κατεύθυνση ως

$$DG(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} G(\Phi_\varepsilon, \delta\Phi) \quad (4.155)$$

όπου $\Delta\Phi := (\Delta\phi, \Delta\theta) \in \mathcal{V}$ είναι μια αυθαίρετη μεταβολή που χρησιμοποιείται για να κατασκευάσουμε την καμπύλη των σχηματισμών Φ_ε υπό το πνεύμα των εξισώσεων (4.143). Στο πλαίσιο αυτό της εργασίας μας αφορά ως επί το πλείστον το γεωμετρικό μέρος, καθώς το υλικό το οποίο υποθέτουμε είναι γραμμικά ελαστικό. Οπότε το γεωμετρικό μέρος είναι αυτό που θα αναπτύξουμε.

Το γεωμετρικό μέρος Το γεωμετρικό μέρος του εφαπτόμενου τελεστή προκύπτει κρατώντας τις ιδιότητες του υλικού σταθερές, ενώ μεταβάλλουμε τη γεωμετρία. Από την (4.151), αυτό είναι εντελώς ισοδύναμο με το να κρατήσουμε τα $\bar{J}_t N_t$ και $\bar{J}_t M_t$ σταθερά, και να πάρουμε την παράγωγο ως προς κατεύθυνση των υπόλοιπων εκφράσεων. Από την (4.151), το γεωμετρικό μέρος του εφαπτόμενου τελεστή είναι

$$D_G G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = \int_I \left[\left\langle \bar{J}_t N_t, \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Lambda_\varepsilon^T (\delta\phi' + \phi'_\varepsilon \times \delta\theta) \right\rangle + \left\langle \bar{J}_t M_t, \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Lambda_\varepsilon^T \delta\theta' \right\rangle \right] \bar{j}_0 d\xi \quad (4.156)$$

Όμως, για την εκθετική απεικόνιση έχουμε ότι αφού $\Lambda_\varepsilon = e^{\varepsilon\Delta\hat{\theta}}\Lambda$ και $e^{(\varepsilon\Delta\hat{\theta})^T} = e^{(-\varepsilon\Delta\hat{\theta})}$ τότε

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Lambda_\varepsilon^T = \Lambda^T \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} e^{-\varepsilon\Delta\hat{\theta}} = -\Lambda^T \Delta\hat{\theta} \quad (4.157)$$

Άρα η (4.156) μέσω της (4.157), και με τον ορισμό των convected μεγεθών N_t, M_t , αλλά και τη σχέση $\bar{J}_t \bar{j}_0 = \bar{j}_t$ γράφεται

$$D_G G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = \int_I [-\langle n_t, \Delta\theta \times (\delta\phi' + \phi'_t \times \delta\theta) \rangle + \langle n_t, \Delta\phi' \times \delta\theta \rangle - \langle m_t, \Delta\theta \times \delta\theta' \rangle] \bar{j}_t d\xi \quad (4.158)$$

Μετά από κάποιες πράξεις, η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$D_G G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = \int_I \left\langle \Xi \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \end{pmatrix}, k_G \Xi \begin{pmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\theta \end{pmatrix} \right\rangle \bar{j}_t d\xi \quad (4.159)$$

όπου Ξ είναι ο πίνακας

$$\Xi = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\xi} 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\xi} 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.160)$$

και k_G είναι το μητρώο γεωμετρικής δυσκαμψίας (geometric stiffness matrix) που δίνεται από την έκφραση

$$k_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\hat{n}_t \\ 0 & 0 & -\hat{m}_t \\ \hat{n}_t & 0 & [n_t \otimes \phi'_t - \langle n_t, \phi'_t \rangle] \end{pmatrix} \quad (4.161)$$

4.6.4 Συμμετρία του εφαπτόμενου τελεστή στην ισορροπία

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με μια σημαντική ιδιότητα που αφορά τη συμμετρία του εφαπτόμενου τελεστή στην ισορροπία. Η τελική μορφή του εφαπτόμενου τελεστή δίνεται ως

$$DG(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = D_M G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi + D_G G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi \quad (4.162)$$

Από τις σχέσεις (4.159) και (4.161) βλέπουμε ότι ο εφαπτόμενος τελεστής εν γένει δεν είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει

$$DG(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi \neq DG(\Phi, \Delta\Phi) \cdot \delta\Phi \quad (4.163)$$

Εντούτοις, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη του αντισυμμετρικού μέρους του $DG(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi$ το οποίο θα συμβολίζουμε με $DG^A(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi$. Γνωρίζουμε όμως ότι το μέρος του εφαπτόμενου τελεστή που αφορά το υλικό, το οποίο συμβολίσαμε πιο πάνω ως $D_M G$, προέρχεται από τον ταυυστή ελαστικότητας, ο οποίος είναι συμμετρικός. Άρα το αντισυμμετρικό μέρος του εφαπτόμενου τελεστή οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στη γεωμετρία. Πράγματι, αυτό δίνεται ως

$$DG^A(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = \frac{1}{2} [D_G G(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi - D_G G(\Phi, \Delta\Phi) \cdot \delta\Phi] \quad (4.164)$$

Λόγω της (4.158) το αντισυμμετρικό μέρος απλοποιείται σε

$$\begin{aligned} DG^A(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi &= \frac{1}{2} \int_I [-\langle n_t, \Delta\theta \times (\phi'_t \times \delta\theta) \rangle + \langle n_t, \delta\theta \times (\phi'_t \times \Delta\theta) \rangle - \langle m_t, \Delta\theta \times \delta\theta' \rangle + \langle m_t, \delta\theta \times \Delta\theta' \rangle] \bar{j}_t d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_I [\langle m_t, (\delta\theta \times \Delta\theta)' \rangle + \langle n_t \times \phi'_t, \delta\theta \times \Delta\theta \rangle] \bar{j}_t d\xi \end{aligned} \quad (4.165)$$

Αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη θα πάρουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} DG^A(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi &= \frac{1}{2} \int_I \left\langle \frac{1}{\bar{j}_t} (\bar{j}_t m_t)' + \phi'_t \times n_t + \bar{m}, \delta\theta \times \Delta\theta \right\rangle \bar{j}_t d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_I \langle \bar{m}, \delta\theta \times \Delta\theta \rangle \bar{j}_t d\xi + \langle \bar{j}_t m_t, \delta\theta \times \Delta\theta \rangle \Big|_{I_-}^{I_+} \right) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Δύο σημαντικές παρατηρήσεις που αφορούν την (4.166) είναι οι εξής. Αρχικά η συνθήκη

$$\int_I \langle \bar{m}, \delta\theta \times \Delta\theta \rangle \bar{j}_t d\xi + \langle \bar{j}_t m_t, \delta\theta \times \Delta\theta \rangle \Big|_{I_-}^{I_+} = 0 \quad (4.167)$$

αντιστοιχεί στη συνθήκη για συντηρητική φόρτιση στα εξωτερικά εφαρμοζόμενα φορτία. Δεύτερον, στην ισορροπία ισχύει ότι

$$\frac{1}{\bar{j}_t} (\bar{j}_t m_t)' + \phi'_t \times n_t + \bar{m} = 0 \quad (4.168)$$

Άρα για συντηρητική φόρτιση, στην κατάσταση ισορροπίας ισχύει

$$DG^A(\Phi, \delta\Phi) \cdot \Delta\Phi = 0 \quad (4.169)$$

και άρα ο εφαπτόμενος τελεστής είναι συμμετρικός. Γενικά όμως, σε μη ισορροπώντας σχηματισμούς, ο εφαπτόμενος τελεστής δεν είναι συμμετρικός.

4.7 Διατύπωση με πεπερασμένα στοιχεία

Στην τελευταία αυτή παράγραφο του κεφαλαίου, θα θεωρήσουμε τη διατύπωση με πεπερασμένα στοιχεία των μεταβολικών εξισώσεων, και θα εφαρμόσουμε όσα συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Ο έλεγχος αυτής της διατύπωσης θα πραγματοποιηθεί με κάποια παραδείγματα μέσω του προγράμματος FEAP. Ουσιαστικά θα γίνει μια ανασκόπηση του αλγόριθμου που υλοποιεί όλα όσα προβλέπει η θεωρία, και ύστερα θα εκτελεστούν κάποια επιλεγμένα μοντέλα για λόγους ελέγχου και πληρότητας.

Η εν λόγω διατύπωση χρησιμοποιεί πεπερασμένα στοιχεία πρώτης τάξης, 2 κόμβων, με μειωμένη ολοκλήρωση για να αποφευχθεί το shear locking. Η διατύπωση ακολουθεί πιστά την προσέγγιση των Simo και Vu-Quoc, που είναι ένα στοιχείο που βρίσκεται στις βιβλιοθήκες του παραπάνω προγράμματος. Αρχικά θα μελετήσουμε το θέμα της διακριτοποίησης του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων. Έπειτα, η διαδικασία ανανέωσης, που παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην διατύπωση, θα μελετηθεί αρκετά.

Διακριτοποίηση. Ας θεωρήσουμε μια κανονική διακριτοποίηση σε πεπερασμένα στοιχεία $[0, L] = \bigcup_{e=1}^N I_e^h$, όπου

$I_e^h \subset [0, L]$ δηλώνει ένα τυπικό στοιχείο με μη-μηδενικό μήκος, και N είναι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων. Ο χώρος των αποδεκτών μεταβολών \mathcal{V} προσεγγίζεται από έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο \mathcal{V}^h . Ως συνήθως, όλοι οι υπολογισμοί γίνονται σε επίπεδο στοιχείου. Έστω $\Delta\Phi_e^h$ να είναι ο περιορισμός σε ένα τυπικό στοιχείο I_e^h των επαυξητικών

πεδίων μετακινήσεων και στροφών $\Delta\Phi^h = (\Delta\phi^h, \Delta\theta^h) \in T_{\Phi}C^h$ που υπόκεινται στον σχηματισμό $\Phi^h = (\phi^h, \theta^h) \in C^h$. Τότε το επαυξητικό πεδίο μετακινήσεων και στροφών $\Delta\Phi^h$ παρεμβάλλεται σε όρους συναρτήσεων σχήματος σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\Delta\phi_e^h = \sum_{i=1}^{n_e} N^i(\xi)\Delta\phi_i^e, \quad \Delta\theta_e^h = \sum_{i=1}^{n_e} N^i(\xi)\Delta\theta_i^e \quad (4.170)$$

Εδώ, n_e δηλώνει τον αριθμό των κόμβων του στοιχείου δοκού I_e^h , $N^i(\xi)$ είναι η συνάρτηση σχήματος που συνδέεται με τον κόμβο i , και $\Delta\phi_i^e, \Delta\theta_i^e$ είναι η επικόμβια επαυξητική μετακίνηση και στροφή του στοιχείου I_e^h στον κόμβο i .

Η συνεισφορά του στοιχείου στο υπόλοιπο του διανύσματος δύναμης αποκτάται από την διακριτή προσέγγιση της ασθενούς μορφής της ισορροπίας ροπών. Σε επίπεδο στοιχείου, εισάγοντας την (4.170) στην παραπάνω ιδέα το $G(\Phi, \delta\Phi)$ μπορεί να γραφεί ως

$$G(\Phi^h, \delta\Phi^h) = \sum_{e=1}^{N_{elm}} G^e(\Phi_e^h, \delta\Phi_e^h) \quad (4.171)$$

όπου

$$G^e(\Phi_e^h, \delta\Phi_e^h) = \delta\Phi_e^h \cdot P_e^h(\Phi^h) \equiv \sum_{i=1}^{N_{elm}} \delta\Phi_{ie}^h \cdot P_{ie}^h \quad (4.172)$$

Εδώ το P_e^h συμβολίζει το διάνυσμα της μη ισορροπούσας δύναμης. Έστω B_i^h η αναπαράσταση του διακριτού διαφορικού τελεστή που συνδέεται με τον κόμβο i . Τότε, μέσω της (4.170) έχουμε

$$B_i^h = \begin{pmatrix} \Lambda^T & 0 \\ 0 & \Lambda^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{,\xi}^i 1 & N^i \hat{\phi}'_t \\ 0 & N_{,\xi}^i 1 \end{pmatrix} \quad (4.173)$$

Στην έκφραση αυτή, $N_{,\xi}^i$ συμβολίζει την παράγωγο της συνάρτησης σχήματος $N^i(\xi)$ ως προς $\xi \in I_e^h$, και $1 = \text{Diag}[1, 1, 1]$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας, και $\hat{\phi}'_t$ είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας του οποίου το αξονικό διάνυσμα είναι το ϕ'_t . Η μη ισορροπούσα επικόμβια δύναμη στο στοιχείο I_e^h που συνδέεται με τον κόμβο i είναι η

$$P_{ie}^h(\Phi^h) = \int_{I_3^h} \left(B_i^h(R) - \begin{pmatrix} N_i 1 & 0 \\ 0 & N_i 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{m} \end{pmatrix} \right) \bar{j}_0 d\xi \quad (4.174)$$

Αυτό ολοκληρώνει τον υπολογισμό του τοπικού διανύσματος υπολοίπου.

Υπολογισμός του εφαπτόμενου μητρώου δυσκαμψίας. Θεωρούμε τώρα την γραμμικοποιημένη ασθενή μορφή. Η γραμμικοποίηση της ασθενούς μορφής (4.171) ως προς το στοιχείο I_e^h στο σχηματισμό Φ^h μπορεί να εκφραστεί ως

$$DG_e^h(\Phi^h, \delta\Phi^h) \cdot \Delta\Phi^h = D_M G_e^h(\Phi^h, \delta\Phi^h) + D_G G_e^h(\Phi^h, \delta\Phi^h) \quad (4.175)$$

όπου M και G υποδεικνύουν το υλικό και γεωμετρικό αντίστοιχα μητρώο δυσκαμψίας. Το υλικό μητρώο δυσκαμψίας δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς όπως αναφέραμε και στη σχετική παράγραφο το υλικό είναι γραμμικά ελαστικό, με σταθερό μέτρο ελαστικότητας. Όσον αφορά το γεωμετρικό μητρώο δυσκαμψίας, αυτό λαμβάνεται υπολογίζοντας τις γεωμετρικές συνεισφορές στην εφαπτόμενη ακαμψία, όπως φαίνεται από τη σχέση (4.159). Για το σκοπό αυτό, παρατήρηουμε πρώτα ότι από την (4.170) και την (4.160) η διακριτή προσέγγιση για τον τελεστή Ξ δίνεται ως

$$\Xi_i^h = \begin{pmatrix} N_{,\xi}^i 1 & 0 \\ 0 & N_{,\xi}^i 1 \\ 0 & N^i 1 \end{pmatrix} \quad (4.176)$$

όπου 1 και 0 είναι μοναδιαίος και ο μηδενικός πίνακας αντίστοιχα. Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα παίρνουμε ότι το μητρώο γεωμετρικής ακαμψίας είναι της μορφής

$$D_G G_e^h(\Phi^h, \delta\Phi^h) \cdot \Delta\Phi^h = \sum_{a=1}^2 \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} \delta\phi_a \\ \delta\theta_a \end{pmatrix}^T K_G^{ab} \begin{pmatrix} \Delta\phi_b \\ \Delta\theta_b \end{pmatrix} \quad (4.177)$$

όπου

$$K_G^{ab} = \int_{I_e^h} \begin{pmatrix} 0 & -N_{,\xi}^a N^b \hat{n}_t \\ N^a N_{,\xi}^b \hat{n}_t & -N_{,\xi}^a N^b \hat{m}_t + [n_t \otimes \phi'_t - \langle n_t, \phi'_t \rangle 1] N^a N^b \end{pmatrix} \bar{j}_0 d\xi \quad (4.178)$$

Δίνουμε έμφαση στο γεγονός ότι η εξίσωση (4.177) οδηγεί σε ένα μη συμμετρικό μητρώο γεωμετρικής δυσκαμψίας αν ο σχηματισμός Φ^h δεν είναι σε ισορροπία. Στο σχηματισμό ισορροπίας, το μητρώο γεωμετρικής δυσκαμψίας γίνεται συμμετρικό, και έρχεται σε συμφωνία με τα όσα είπαμε στην παράγραφο (4.5.4).

Σχηματισμοί και αλγόριθμος ανανέωσης τάσεων. Ας υποθέσουμε ότι ο σχηματισμός $\Phi^k = (\phi^k, \Lambda^k) \in \mathcal{C}$ είναι γνωστός. Σε μια τυπική επαναληπτική μέθοδο, γραμμικοποιούμε την ασθενή μορφή γύρω από το σχηματισμό Φ^k και λύνουμε την γραμμικοποιημένη ασθενή μορφή για μια επαυξητική παραμόρφωση $\Delta\Phi^k = (\Delta\phi^k, \Delta\theta^k) \in \mathcal{C}$, όπου το $\Delta\theta$ είναι το αξονικό διάνυσμα (επαυξητική στροφή) του αντισυμμετρικού ταυστή $\hat{\Delta}\theta$. Μια ανανεωτική διαδικασία, που είναι συνεπής με τη γεωμετρική δομή του προβλήματος δίνεται από τους τύπους

$$\phi^{k+1}(\xi) = \phi^k(\xi) + \Delta\phi^k(\xi), \quad \Lambda^{k+1}(\xi) = e^{\hat{\Delta}\theta^k} \Lambda^k(\xi) \quad (4.179)$$

Σημειώνουμε ότι αυτή η ανανέωση είναι η μόνη δυνατή που δίνει έναν ανανεωμένο σχηματισμό $\Phi^{k+1} = (\phi^{k+1}, \Lambda^{k+1})$ που ανήκει στο χώρο \mathcal{C} . Παρατηρούμε επιπλέον ότι η εκθετική απεικόνιση της (αντισυμμετρικής) επαυξητικής στροφής $e^{\hat{\Delta}\theta^k}$ δίνεται σε κλειστή μορφή όπως θα δείξουμε αμέσως τώρα.

Παρατήρηση. Οι αποδεκτοί σχηματισμοί συμβολίζονται με σημεία στην επιφάνεια \mathcal{C} . Το $\hat{\Delta}\theta^k$ συμβολίζει την επαυξητική στροφή, δηλαδή ένα στοιχείο στον εφαπτόμενο χώρο του Λ^k . Ο ανανεωμένος σχηματισμός Λ^{k+1} λαμβάνεται προβάλλοντας το $\hat{\Delta}\theta^k$ στο \mathcal{C} σε όρους εκθετικής απεικόνισης. Μένει να υπολογίσουμε τις ανανεωμένες καμπυλότητες και τροπές. Αυτοί οι υπολογισμοί περιλαμβάνουν την παράγωγο της εκθετικού ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Παραθέτουμε τα αποτελέσματα.

1. Υπολογισμός αξονικών διανυσμάτων

$$e = \frac{\Delta\theta^k}{\|\Delta\theta^k\|}, \quad \bar{\theta} = \tan \frac{1}{2} \|\Delta\theta^k\| e$$

$$\bar{\theta}' = \frac{1}{2} \frac{\tan \frac{1}{2} \|\Delta\theta^k\|}{\frac{1}{2} \|\Delta\theta^k\|} \left[(\Delta\theta^k)' - \left(1 - \frac{\|\Delta\theta^k\|}{\sin \|\Delta\theta^k\|} \right) (e \cdot (\Delta\theta^k)') e \right] \quad (4.180)$$

2. Υπολογισμός του εκθετικού και της παραγώγου.

$$e^{\hat{\Delta}\theta^k}(\xi) = 1 + \frac{2}{1 + \|\bar{\theta}\|^2} (\hat{\theta} + \hat{\theta}^2)$$

$$\left(\frac{de^{\hat{\Delta}\theta^k}}{d\xi} \right) e^{-\hat{\Delta}\theta^k} = \frac{2}{1 + \|\bar{\theta}\|^2} (\hat{\theta}' + \hat{\theta}'\hat{\theta} - \hat{\theta}\hat{\theta}') \quad (4.181)$$

3. Ανανέωση του σχηματισμού

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \Delta\phi^k$$

$$\Lambda^{k+1} = e^{\hat{\Delta}\theta^k} \Lambda^k \quad (4.182)$$

4. Υπολογισμός καμπυλότητας και τροπών

$$\Gamma^{k+1} = \Lambda^{(k+1)T} \phi^{(k+1)'} - E_3$$

$$\hat{\Omega}^{k+1} = \left(\frac{de^{\hat{\Delta}\theta^k}}{d\xi} \right) e^{-\hat{\Delta}\theta^k} + e^{\hat{\Delta}\theta^k} \hat{\Omega}^k e^{-\hat{\Delta}\theta^k} \quad (4.183)$$

5. Υπολογισμός των εσωτερικών τάσεων και ζευγών τάσεων

$$\bar{J}_{k+1} N^{k+1} = \bar{\rho}_0 \frac{\partial \psi(\Gamma^{k+1}, \Omega^{k+1})}{\partial \Gamma}, \quad \bar{J}_{k+1} M^{k+1} = \bar{\rho}_0 \frac{\partial \psi(\Gamma^{k+1}, \Omega^{k+1})}{\partial \Omega} \quad (4.184)$$

5 Παραδείγματα με χρήση του λογισμικού FEAP

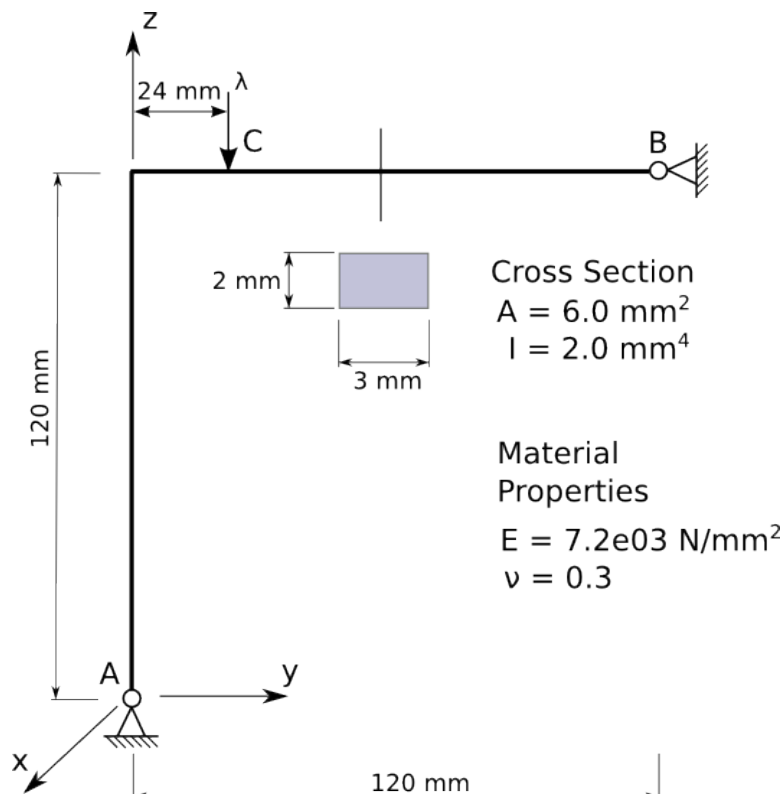
Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο θα αναλυθούν 3 παραδείγματα, και θα σχολιαστούν τα αποτελέσματα αυτών. Τα βασικά χαρακτηριστικά της ανάλυσης έχουν αναφερθεί στην παράγραφο 4.6. Σε κάποια παραδείγματα χρησιμοποιείται η πλήρης επαναληπτική διαδικασία Newton-Rapshon, όταν θέλουμε η ανάλυση να πραγματοποιείται με έλεγχο της επιβαλλόμενης φόρτισης (load-control). Όμως, σε κάποια παραδείγματα όπου στο διάγραμμα φορτίου-μετακίνησης υπάρχει κατιόντας κλάδος, η παραπάνω μέθοδος δεν είναι κατάλληλη, και ως εκ τούτου χρησιμοποιείται η μέθοδος μήκους τόξου arc-length method [16], όπου σε κάθε χρονικό βήμα (step) γίνεται μια πλήρης διαδικασία Newton-Rapshon με μικρό αριθμό επαναλήψεων. Λεπτομέρειες για τις τιμές των διαφορών παραμέτρων που χρησιμοποιούνται δίνονται σε κάθε παράδειγμα ξεχωριστά. Σε κάθε περίπτωση όμως, η σύγκλιση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων εξασφαλίζεται όταν η νόρμα του υπολοίπου των δυνάμεων γίνεται μικρότερη από μια μικρή τιμή (ανοχή). Στο FEAP η ανοχή αυτή καθορίζεται από το ίδιο το πρόγραμμα.

Προτού όμως ξεκινήσουμε την παρουσίαση των παραδειγμάτων, οφείλουμε να κάνουμε μια σημείωση όσον αφορά στο αναλλοίωτο το μοντέλου.

1. Αντικειμενικότητα (objectivity). Λέμε γενικά ότι ένα στοιχείο ή μοντέλο είναι αντικειμενικό (objective), όταν οι τιμές των εντατικών και παραμορφωσιακών μεγεθών παραμένουν αναλλοίωτες σε μια κίνηση στερεού σώματος (μεταφορά και στροφή).
2. Ανεξαρτησία από το δρόμο φόρτισης. (path independence). Όταν τα φορτία στα οποία υπόκειται το μοντέλο είναι συντηρητικά, δηλαδή δεν αλλάζει το διανυσματικό μέγεθος της φόρτισης, τότε η τελική γεωμετρική και εντατική κατάσταση παραμένει αμετάβλητη ανεξάρτητα από την αλληλουχία επιβολής των φορτίων. Ακόμη, γενικά ο ίδιος όρος χρησιμοποιείται και για αμιγώς αριθμητικής φύσεως διαφορετικό δρόμο. (για παράδειγμα σε μια επαυξητική φόρτιση, ο ρυθμός με τον οποίο επιβάλλουμε τη φόρτιση στο μοντέλο μας, αυτόματα ορίζει και διαφορετικούς 'αριθμητικούς' δρόμους φόρτισης, και χαρακτηρίζουν το path independence του μοντέλου).

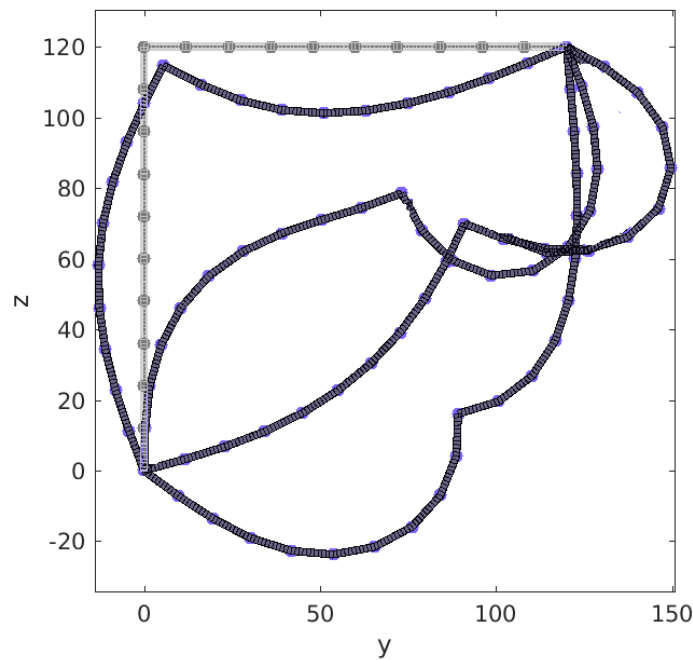
Η διερεύνηση των παραπάνω χαρακτηριστικών του στοιχείου που χρησιμοποιούμε έχει πραγματοποιηθεί στις [10],[11] και έχει αποδειχθεί ότι το εν λόγω στοιχείο δεν είναι ούτε objective ούτε path independent.

Παράδειγμα 1

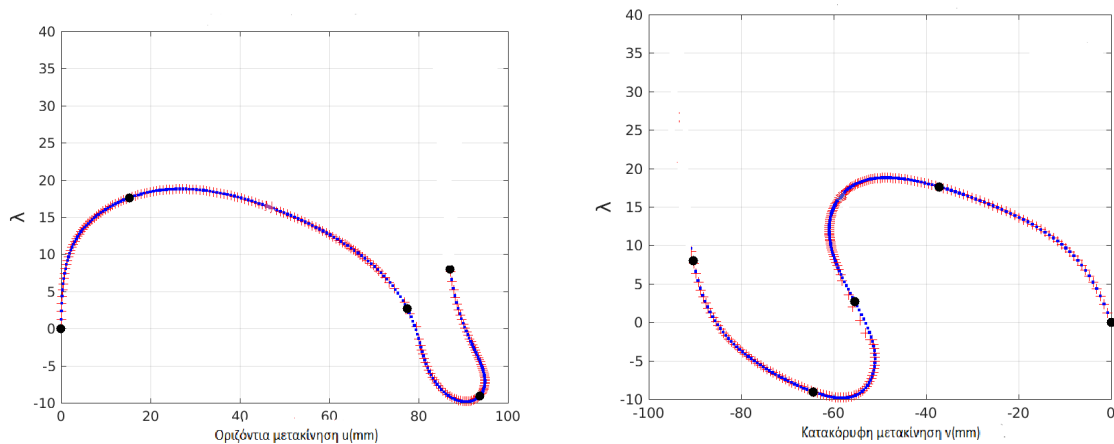


Σχήμα 5.1: Λυγισμός αμφιαρθρωτής γωνιακής δοκού

Στη βιβλιογραφία το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως Lee frame [12],[13],[14]. Το επίπεδο αυτό πρόβλημα, αφορά το λυγισμό μιας γωνιακής αμφιαρθρωτής δοκού, η οποία συμπεριφέρεται ελαστικά σε όλη τη διάρκεια της φόρτισης. Το πλαίσιο αυτό υπόκειται σε ένα εγκάρσιο φορτίο, εφαρμοζόμενο στο 1/5 του μήκους του ζυγώματος, του οποίου η διεύθυνση σε όλη τη διάρκεια της φόρτισης είναι κατακόρυφη. Για λόγους σύγκρισης με αποτελέσματα της βιβλιογραφίας η μοντελοποίηση γίνεται με 20 πεπερασμένα στοιχεία του τύπου που αναπτύξαμε στη θεωρία του Κεφαλαίου 4. Οι διαστάσεις και τα διάφορα μηχανικά χαρακτηριστικά αναγράφονται στο Σχήμα 5.1. Η επίλυση γίνεται με τη μέθοδο arc-length. Ειδικά για το εν λόγω πρόγραμμα, ο χρήστης επιλέγει τον αριθμό των εσωτερικών επαναλήψεων που θα γίνεται σε κάθε βήμα της arc length (θα γίνονται 20 επαναλήψεις της διαδικασίας Newton-Rapshon) και το 'χρόνο' που θα εκτελείται η arc length. Το τελευταίο απλά σημαίνει ότι η μέθοδος θα εκτελείται όσες φορές ζητήσουμε από το πρόγραμμα, και το κάθε step 'χρονικά' θα απέχει από το άλλο 'χρόνο' dt . Και οι 2 παραπάνω παράμετροι καθορίζονται από το χρήστη. Συνήθως επιλέγουμε μικρή τιμή για την παράμετρο dt ούτως ώστε να είμαστε πιο κοντά στον πραγματικό δρόμο ισορροπίας, και απλά αυξάνουμε τον αριθμό των steps για να καλύψουμε μεγαλύτερο εύρος της καμπύλης. Σημειώνεται ότι ο χρήστης δεν επιλέγει την ακτίνα της καμπύλης, όπως συμβαίνει γενικά, και το πρόγραμμα την καθορίζει, και ενδεχομένως, για λόγους ευκολίας ή δυσκολίας της σύγκλισης, την μεταβάλλει από step σε step.



Σχήμα 5.2: Αρχική και παραμορφωμένη γεωμετρία για διάφορες θέσεις πάνω στην καμπύλη φορτίου μετακίνησης.



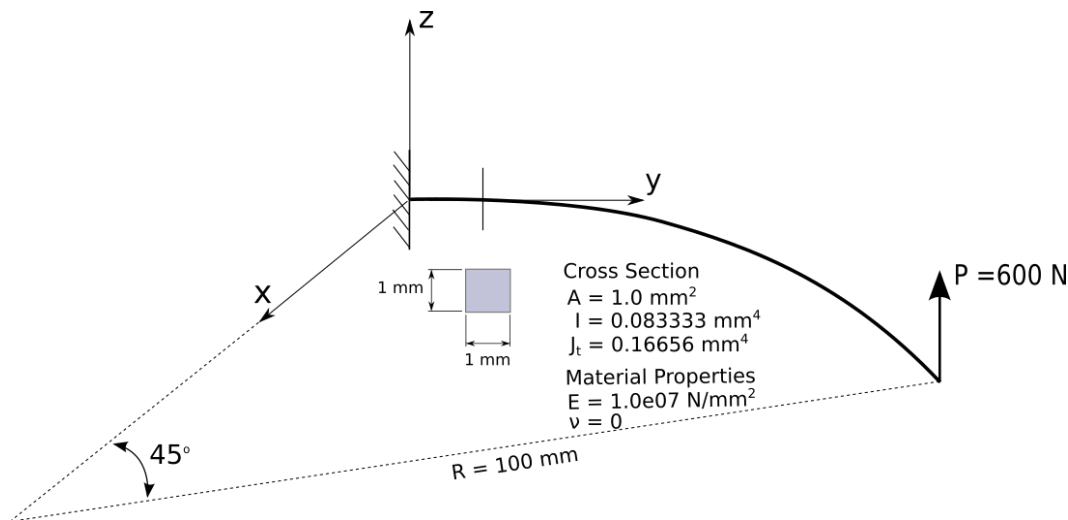
Σχήμα 5.3: Διαγράμματα φορτίου οριζόντιας και κατακόρυφης μετακίνησης για το σημείο C.

Στο Σχήμα 5.3 βλέπουμε το δρόμο ισορροπίας της γωνιακής δοκού. Η παραμόρφωση είναι εντός επιπέδου και, λόγω της μοντελοποίησης με το εν λόγω στοιχείο, λογίζεται ως μικρή. Επισημαίνουμε ότι οι διάφορες παραμορφωμένες καταστάσεις στο Σχήμα 5.2 αντιστοιχούν στα σημεία πάνω στους δρόμους ισορροπίας του Σχήματος 5.3.

Προτού προχωρήσουμε σε παραδείγματα σε 3 διαστάσεις αξίζει να κάνουμε μια ποιοτική παρατήρηση. Στο επίπεδο, ο χειρισμός των μητρώων των στρωφών είναι σημαντικά ευκολότερος από ότι στις 3 διαστάσεις. Από το Κεφάλαιο 2, έχουμε δει ότι η άλγεβρα Lie της ειδικής ορθογωνιας ομάδας $SO(2)$ είναι διάστασης 1, ενώ για τις 3 διαστάσεις είναι διάστασης 3. Αυτό και μόνο του περιπλέκει σημαντικά τους υπολογισμούς, όπως θα φανεί ειδικότερα και στο παράδειγμα 3.

Παράδειγμα 2

Το επόμενο παράδειγμα που θα μελετήσουμε είναι ένας καμπύλος πρόβολος, του οποίου το σχήμα είναι το 1/4 ενός ημικυκλίου, πακτωμένο στο ένα άκρο, και φορτίζεται με μια κατακόρυφη δύναμη στο ελεύθερο άκρο του. Το παράδειγμα αυτό είχε εισαχθεί από τους Bathe και Bolourchi [15], και έκτοτε συνιστά ένα παράδειγμα για ερευνητές για να ελεγχθεί κατά πόσο τα διάφορα μοντέλα δοκού που δημιουργούνται έχουν καλή απόδοση. Η μοντελοποίηση θα γίνει με 8 ισομήκη πεπερασμένα στοιχεία, και οι γεωμετρικές και μηχανικές ιδιότητες φαίνονται στο Σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Καμπύλος γωνιακός πρόβολος με κατακόρυφο φορτίο στο ελεύθερο άκρο του.

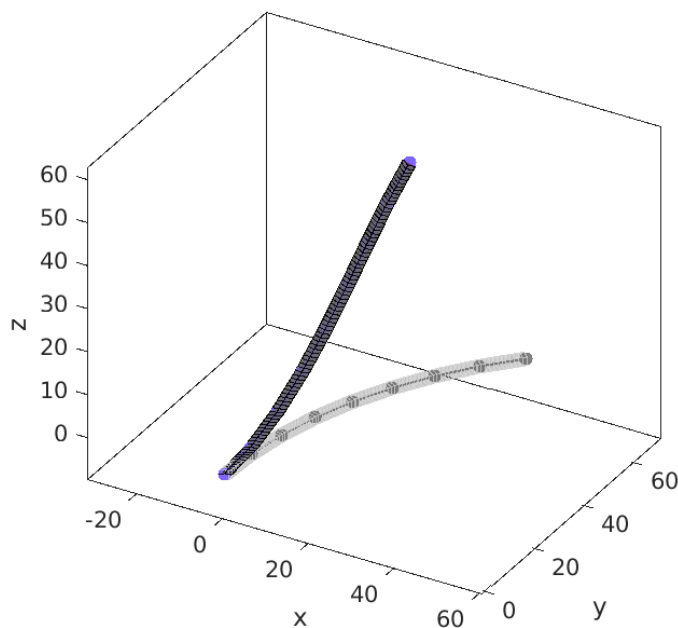
Όπως θα δούμε παρακάτω, ο δρόμος ισορροπίας είναι μονίμως ανοδικός, και άρα η επίλυση δεν είναι απαραίτητο να γίνει με την arc length. Οπότε η αναλογική εφαρμογή του φορτίου ήταν εφικτή. Αναφέρουμε τον τύπο της αναλογικής φόρτισης που χρησιμοποιήθηκε. Η γενική αναλογική φόρτιση που προτείνει το FEAP είναι της μορφής

$$Prop(t) = a_1 + a_2(t - t_{min}) + a_3(\sin(a_4(t - t_{min})))^k$$

Η σημασία της κάθε μιας παραμέτρου αναλύεται στο εγχειρίδιο του FEAP. Επιθυμούμε μια απλή γραμμική αύξηση του φορτίου, οπότε θέτουμε $a_3 = 0$. Μπορούμε ακόμα να θεωρήσουμε ότι $t_{min} = 0$ και ότι στην αρχή της επίλυσης το φορτίο που εξασκείται έχει τη διεύθυνση του σχήματος, αλλά μηδενική τιμή. Συνεπώς η μόνη παράμετρος που δε μηδενίζεται είναι η a_2 και μπορούμε να της βάλουμε όποια (θετική) τιμή θέλουμε, ανάλογα φυσικά και σε πόσα βήματα θέλουμε να υλοποιηθεί η τελική τιμή του φορτίου. Σε κάθε τέτοιο βήμα γίνονται μέχρι 20 επαναλήψεις της Newton-Raphson, όπως και στο παράδειγμα 1. Βασιζόμενοι στο [12] επιβάλαμε τη συνολική τιμή του φορτίου 600 σε 6 τμήματα, αυτήν του 300 σε 13 βήματα (καθαρά για λόγους σύγκρισης) και τα αποτελέσματα των μετατοπίσεων στο ελεύθερο άκρο παρατίθενται στον πίνακα 1. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά της αναφοράς, παρατηρούμε ότι οι τιμές είναι πολύ κοντά μεταξύ τους σε απόλυτη τιμή. Οι μετακινήσεις στο επίπεδο xy είναι με αντίθετο πρόσημο, και ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι απλά επειδή διαλέξαμε διαφορετική διεύθυνση για τους άξονες. Με άλλα λόγια, αν υπήρχε συμφωνία αξόνων, θα είχαμε και συμφωνία στα πρόσημα.

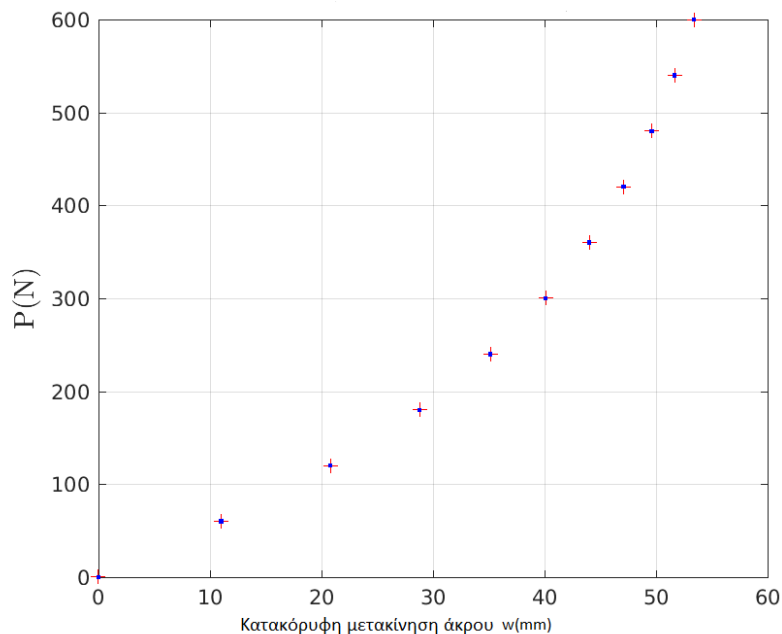
Πίνακας 1: Καμπύλος πρόβολος: Τελικές μετακινήσεις άκρου.

Φορτίο	$u(mm)$	$v(mm)$	$w(mm)$
300	-22.38	-58.89	40.02
600	-15.76	-47.23	53.47



Σχήμα 5.5: Αρχική και παραμορφωμένη γεωμετρία του καμπύλου προβόλου

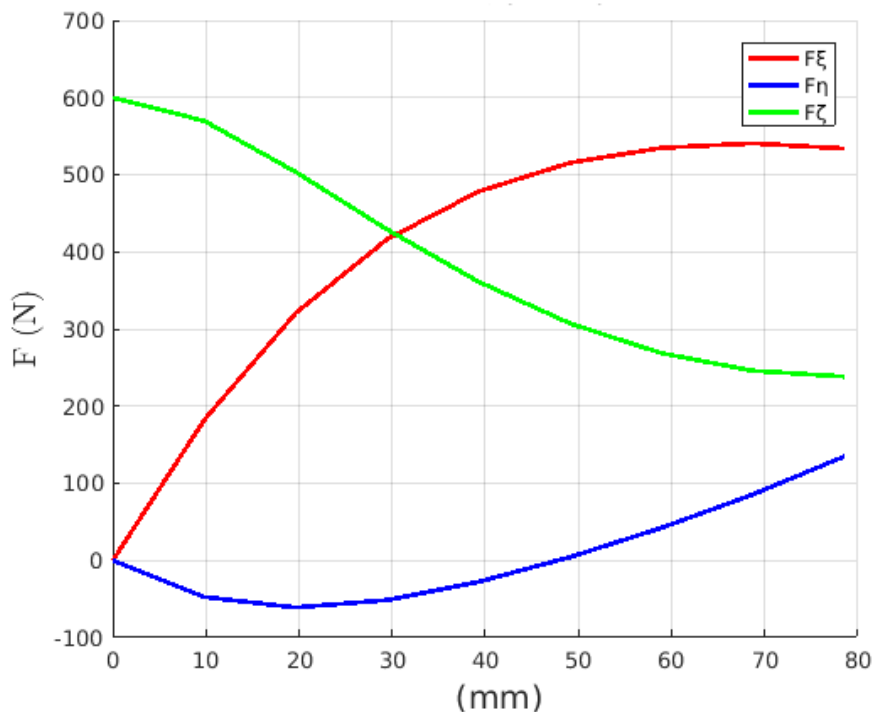
Στο παραπάνω σχήμα δίνουμε την παραμορφωμένη εικόνα του καμπύλου προβόλου για την τιμή 600N. Η παραμορφωμένη γεωμετρία για την τιμή των 300N είναι ανάλογη και παραλείπεται.



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα φορτίου-μετακίνησης για το άκρο.

Από το διάγραμμα αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί κανείς ότι οι τιμές της κατακόρυφης μετακίνησης στο άκρο είναι σχεδόν ίδιες με αυτές τη βιβλιογραφία.

Καθώς το εξωτερικό φορτίο αυξάνεται, η διατομή της δοκού όπου εξασκείται το φορτίο υποβάλλεται σε μεγάλη στροφή, και έτσι το φορτίο, που έχει σταθερή κατακόρυφη διεύθυνση, αρχίζει να αποκτά συνιστώσα στον διαμήκη άξονα της δοκού, που έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε μια μορφή 'προέντασης' το οποίο συνεπάγεται αυξημένη στιβαρότητα στην εγκάρσια διεύθυνση. Αυτό ερμηνεύεται στο σχήμα 5.6, από το σημείο και ύστερα όπου η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης αυξάνεται.

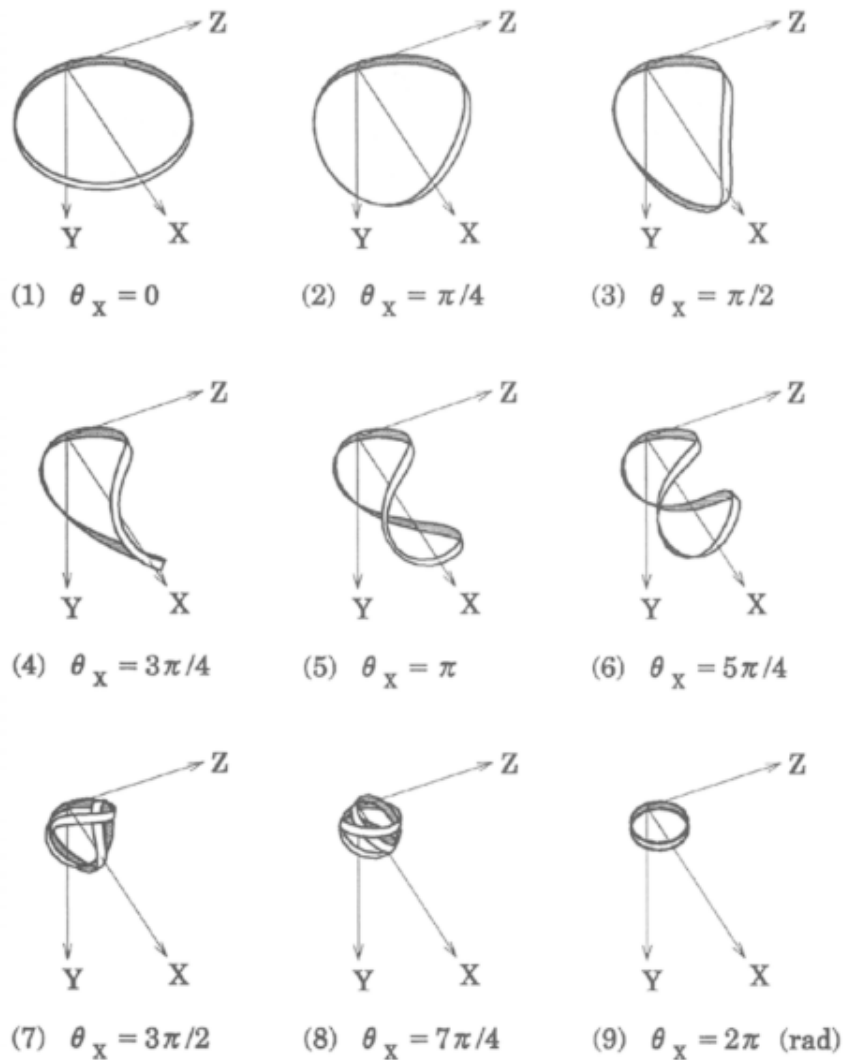


Σχήμα 5.7: Εσωτερικές δυνάμεις

Στο ίδιο συμπέρασμα με παραπάνω, μπορεί να καταλήξει κανείς παρατηρώντας το Σχήμα 5.7, όπου η αξονική δύναμη F_{ξ} από μηδενική καταλήγει να γίνεται 600N περίπου, όσο και το εξωτερικό φορτίο.

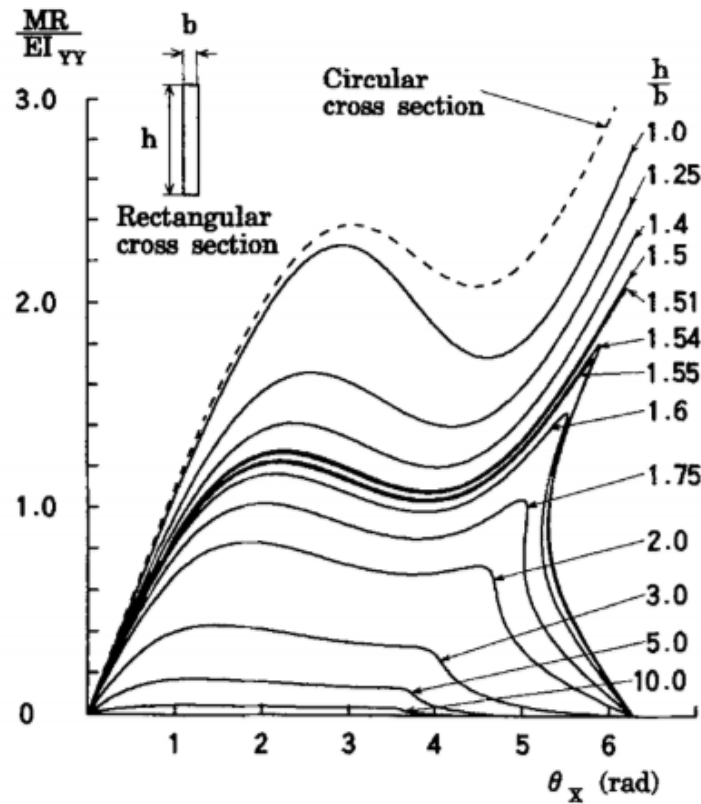
Παράδειγμα 3.

Το τελευταίο παράδειγμα που θα μελετήσουμε είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον, αλλά και αρκετά δύσκολο παράδειγμα. Πρόκειται για ένα δακτύλιο που φέρει μια διπλά συμμετρική διατομή, και το σύστημα συντεταγμένων διέρχεται από το κέντρο κάποιας διατομής. Ο δακτύλιος στηρίζεται σε 2 αντιδιαμετρικά σημεία του. Στο ένα από αυτά έχουμε πλήρη πάκτωση, και στο αντιδιαμετρικό του επιτρέπουμε μόνο τη στροφή κατά τη διάμετρο (που θεωρούμε ότι είναι ο άξονας των x), και την μετακίνηση ως προς τον ίδιο άξονα. Θεωρούμε ότι το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά σε όλη τη διάρκεια της φόρτισης και για κάθε τιμή της μετακίνησης. Φορτίζουμε τον δακτύλιο με μια ροπή στρέψης M_x . Μέσα από το *FEAP* επιχειρήσαμε την εύρεση της καμπύλης φορτίου μετακίνησης. Το παράδειγμα αυτό εισήχθη από τους Goto et al. [17], για τη διερεύνηση των μεγάλων στροφών στο χώρο.



Σχήμα 5.8: Θεωρητική μετάβαση του δακτυλίου σταδιακά μέχρι μια πλήρη περιστροφή στην αντιδιαμετρική θέση της στήριξης, για λόγο $h/b = 3$ και $R/h = 20$

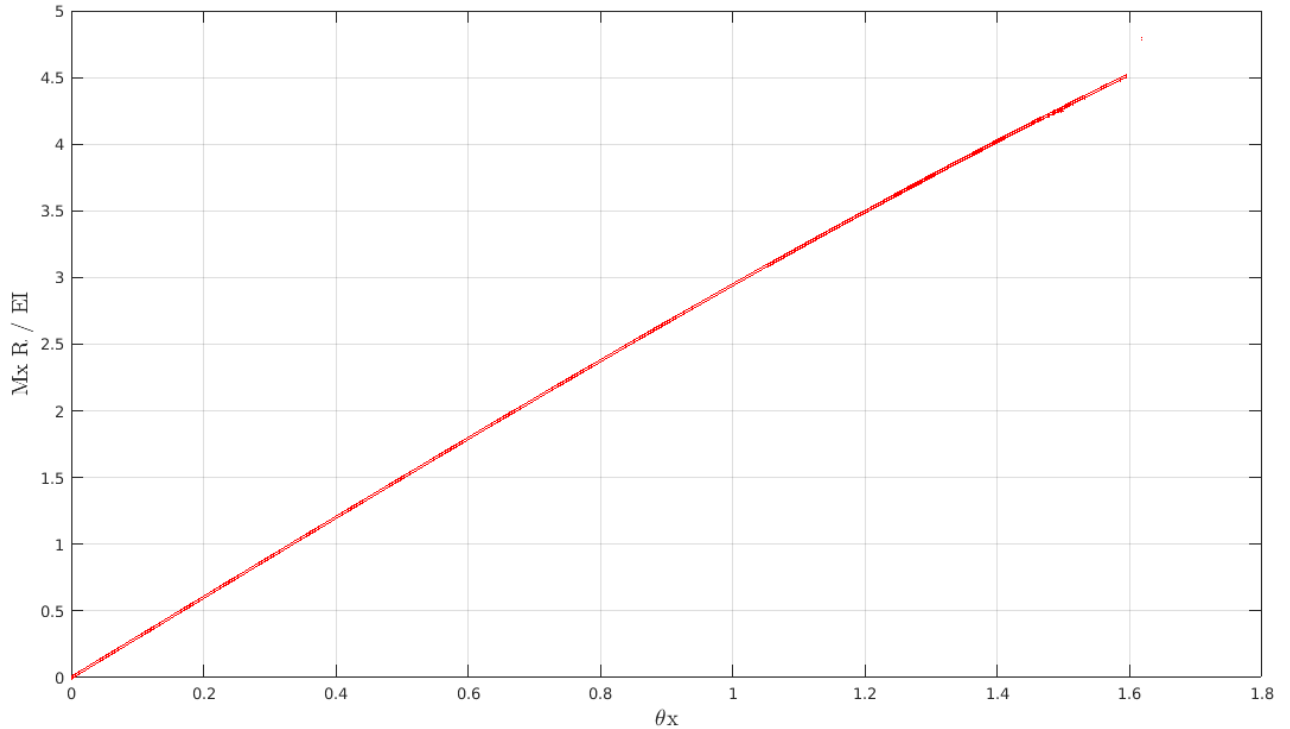
Λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει το πρόβλημα, η αριθμητική επίλυση θα μπορούσε να γίνει χρησιμοποιώντας το 1/2 ή το 1/4 του δακτυλίου. Με αυτήν την απλοποίηση του προβλήματος, το πρόβλημα εκφυλίζεται σε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών 2 σημείων. Με αυτή τη λύση θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας. Στο πρόγραμμα εισάγαμε το πλήρες μοντέλο.



Σχήμα 5.9: Ανηγγμένο διάγραμμα ροπής-στροφής για διάφορες τιμές του λόγου h/b .

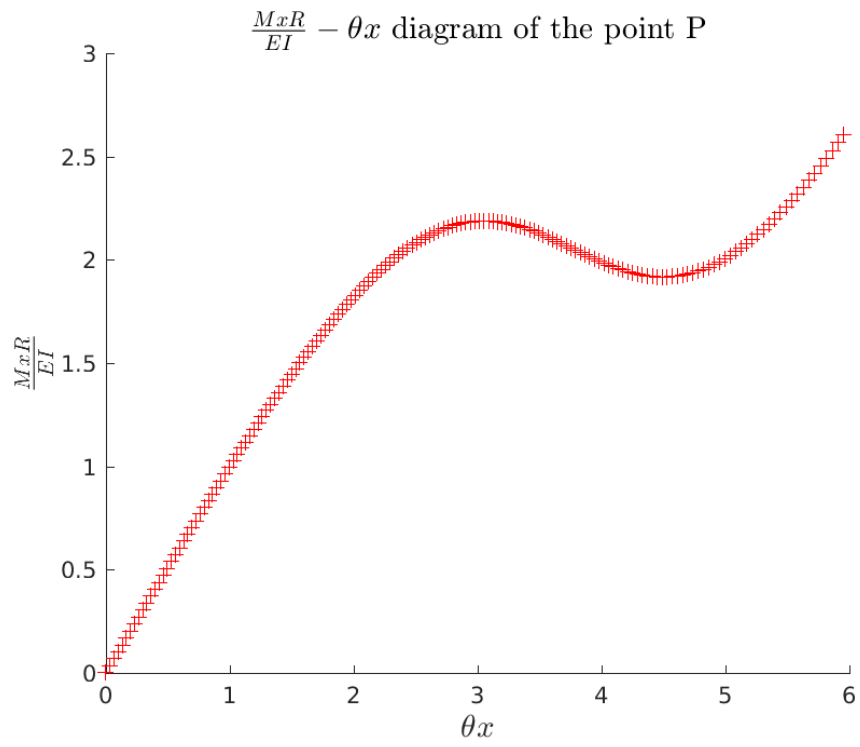
Παρατηρούμε στο Σχήμα 5.9 ότι η τιμή του λόγου αυτού παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο για το δρόμο ισορροπίας του δακτύλιου. Πράγματι, για λόγους $h/b > 1.5$ όταν εφαρμοστεί μια πλήρης στροφή 2π στο αντιδιαμετρικό σημείο της στήριξης τότε έχουμε την κατάσταση που περιγράφεται στο Σχήμα 5.8. Το τελικό σχήμα δηλαδή είναι ένας δακτύλιος με ακτίνα ίση με το $1/3$ της αρχικής διαμέτρου. Το ενδιαφέρον εδώ μάλιστα είναι ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται χωρίς την επιβολή κάποιας εξωτερικής ροπής. Ωστόσο, μια τέτοια μοντελοποίηση με το στοιχείο του FEAP κατά πάσα πιθανότητα δεν θα ήταν εφικτή, μιας και όπως έχουμε αναφέρει, το στοιχείο δεν είναι ούτε objective ούτε path-independent. Πράγματι, μια τέτοια ανάλυση έγινε, και δεν μπορούσαμε να πάρουμε σύγκλιση στον δεδομένο δρόμο. Αντίθετα, για τιμές του λόγου μικρότερες από 1.5, παρατηρούμε ότι περίπου μέχρι την τιμή $\theta=3$, όπου ο δακτύλιος έχει γίνει ένα δάρι, έχουμε ανιόντα κλάδο, ύστερα κατιόντα κλάδο και τέλος έναν γνήσιο ανιόντα κλάδο. Και στις 2 περιπτώσεις λόγω του κατιόντα κλάδου, είναι φανερό ότι μια μέθοδος Newton-Raphson με επαυξητική επιβολή της ροπής δεν θα έδινε ένα σωστό αποτέλεσμα. Οπότε, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε με την μέθοδο arc length. Επίλεξαμε μια διπλά συμμετρική διατομή με διαστάσεις 1.0×1.0 με μέτρο ελαστικότητας $2.1e07$ και λόγο Poisson 0.3.

Ο δρόμος ισορροπίας που μας έδωσε το FEAP είναι ο παρακάτω.



Σχήμα 5.10: Ανηγγέμενος δρόμος ισορροπίας για $h/b = 1$

Κατά την ανάλυση στο πρόγραμμα, εφαρμόσαμε τη μέθοδο μήκους τόξου. Παρατηρήθηκε ότι ενώ προχωρούσαμε πάνω στην καμπύλη, μέχρι περίπου η γωνία θ να πάρει την τιμή $\pi/2$, είχαμε έναν φυσιολογικό ανοδικό κλάδο. Καθώς όμως προχωρούσαμε χρονικά στη μέθοδο, διαπιστώθηκε ότι είχαμε πτώση τόσο στην τιμή της ροπής, όσο και στη τιμή της στροφής, το οποίο απέχει πολύ από την πραγματική συμπεριφορά του μοντέλου (Σχήμα 5.10). Ο λόγος για τον οποίο εικάζουμε ότι το στοιχείο του προγράμματος αδυνατεί να μοντελοποιήσει το πρόβλημα είναι πιθανόν επειδή η μέθοδος μήκους τόξου που χρησιμοποιείται, αδυνατεί να χειριστεί με σωστό τρόπο τις μεγάλες στροφές. Για λόγους σύγκρισης, παρουσιάζεται το αντίστοιχο διάγραμμα, το οποίο προέκυψε από την χρήση του αναλλοιώτου μοντέλου μη γραμμικότητας γεωμετρίας [11], το οποίο έχει υλοποιηθεί στο Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών από την Υπ. Διδάκτωρ ΕΜΠ Ανθούλα Παντελή.



Σχήμα 5.11: Ανηγμένο διάγραμμα ροπής στροφής για λόγο $h/b = 1$

6 Βιβλιογραφία

1. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor and David Fox: The Finite Element Method for Structural and Solid Mechanics, Seventh Edition, Elsevier
2. Loring W.Tu: An Introduction to Manifolds, Second Edition, Springer
3. Loring W.Tu: Differential Geometry: Connections, Curvature and Characteristic Classes, Springer
4. Barrett O'Neil: Elementary Differential Geometry, Revised Second Edition, Elsevier
5. Barrett O'Neil: Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity, Academic Press
6. Brian C.Hall: Lie Groups, Lie Algebras and Representations, An Elementary Introduction, Springer
7. J.J Duistermaat, J.A.C Kolk: Lie Groups, Springer
8. Ανδρέας Αρβανιτογεώργος: Γεωμετρία Πολλαπλότητας, Πολλαπλότητες Riemann και άλγεβρες Lie
9. Ανάργυρος Φελλούρης, Ανδρέας Μπούκας: Εισαγωγή στις Ομάδες και Άλγεβρες Lie, Σημειώσεις μαθήματος
10. M.A Crisfield, G.Jelenic: Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation
11. G.Jelenic, M.A Crisfield, Geometrically exact 3D beam theory: implementaton of a strain-invariant finite element for statics and dynamics
12. J.C Simo, L. Vu-Quoc, A three dimensional finite-strain rod model, Part II
13. P.Betsch, P.Steinmann, Frame-indifferent beam finite elements based upon the geometrically exact beam theory
14. E.A de Souza Neto, Y.T Feng, On the determination of the path direction for the arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs'
15. K-J Bathe, S.Bolourchi, Large displacement analysis of the three-dimensional beam structures
16. K.H Schweizerhof, P.Wriggers, Consistent linearization for path following methods in non-linear finite element analysis
17. Yoshiaki Goto et al, Elastic buckling phenomenon applicable to deployable rings