



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

**Εφαρμογή σχημάτων υψηλής τάξης σε συμπιεστή ροή με
χρήση πλεγματικών και μη πλεγματικών μεθόδων**

Διπλωματική Εργασία

Αντώνης Π. Στρατής

Επιβλέπων Καθηγητής: Σπυρίδων Βουτσινάς

ΕΜΠ

Αθήνα 2018

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών
Εργαστήριο Αεροδυναμικής

Εφαρμογή σχημάτων υψηλής τάξης σε συμπιεστή ροή με χρήση πλεγματικών και μη πλεγματικών μεθόδων

Διπλωματική Εργασία

του Αντώνιου Π. Στρατή

Επιβλέπων: Σ. Βουτσινάς, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2018

Περίληψη

Η υπολογιστική ρευστομηχανική είναι ένα εργαλείο το οποίο προσομοιώνει πειραματικές διατάξεις στον βιομηχανικό και ερευνητικό κλάδο παρέχοντας αξιόπιστα αποτελέσματα. Σε πολλές εφαρμογές ενδείκνυται η ανάπτυξη νέων αριθμητικών μεθόδων με στόχο την αύξηση της ακρίβειας χωρίς την περαιτέρω αύξηση του υπολογιστικού κόστους . Απόρροια των προηγουμένων είναι η ανάπτυξη σχημάτων υψηλότερης τάξης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο την ανάλυση και την εφαρμογή των σχημάτων υψηλής τάξης ENO σε συμπιεστή ροή με χρήση πλεγματικών και μη πλεγματικών μεθόδων. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύεται η μέθοδος ENO καθώς και πως εφαρμόζονται στην πλεγματική μέθοδο του ρευστού. Το κύριο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί στο τρίτο κεφάλαιο είναι το πρόβλημα του σωλήνα κύματος κρούσης όπου τα αποτελέσματα θα παραχθούν μέσω του Roe επιλύτη, ο οποίος έχει δημιουργηθεί από το εργαστήριο αεροδυναμικής. Στην περίπτωση της περιγραφής της ροής με μη πλεγματικές μεθόδους η επίλυση της ροής επιτυγχάνεται μέσω των διορθωμένων υδροδυναμικών σωματιδίων όπου θα αναλυθούν εκτενώς στο τέταρτο κεφάλαιο και τα αποτελέσματα τους θα παρουσιαστούν στο πέμπτο. Τέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των εφαρμογών που πραγματοποιήθηκαν και τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις συγκεκριμένες εφαρμογές.

National Technical University of Athens
Department of Mechanical Engineering
Section of Fluids
Laboratory of Aerodynamics

***Application of high order schemes in compressible flow using grid
based and mesh free methods***

Diploma Thesis

By Antonis P. Stratis

Supervisor: S. Voutsinas Professor NTUA

Athens, October 2018

Abstract

Computational Fluid Dynamics is a tool that simulates experimental arrangements in the industrial and research industries to deliver reliable results. In several applications the development of new numerical methods to reduce computational costs while increasing accuracy is crucial. Due to the foregoing is the development of higher order schemes.

This diploma thesis aims at the analysis and application of the high order ENO schemes in a compressible flow using grid based and mesh free methods. In the second chapter we analyze the ENO method as well as how it is applied to the grid based method of the fluid. The main example to be presented in the third chapter is the Sod's Shock Tube problem where the results will be generated through the Roe Solver, created by the Aerodynamics Laboratory. In the case of the mesh free flow description, the solution of the flow is achieved through the corrected smoothed particle hydrodynamics, which will be analyzed extensively in the fourth chapter and their results will be presented in the fifth. Finally, the results of the applications that have been carried out and the conclusions drawn from the specific applications are presented.

Ευχαριστίες

Αρχικά οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Βουτσινά Σπυρίδων, που μου επέτρεψε να εργαστώ πάνω στο θέμα της διπλωματικής εργασίας καθώς και για την διαρκή βοήθεια, υπομονή, και καθοδήγηση του στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Θερμές και ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να δώσω στον διδάσκοντα Γεώργιο Παπαδάκη για την καθοριστική του συμβολή στην παρούσα διπλωματική. Η βοήθεια του ήταν διαρκής καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας και η συνεργασία μας άψογη. Δεν θα ήθελα να παραλείψω και τον υποψήφιο διδάκτορα Δημήτριο Ντούρα για τις συμβουλές, την βοήθεια και τον χρόνο που μου αφιέρωσε.

Τη διπλωματική αυτή εργασία αφιερώνω στην οικογένειά μου και τους φίλους μου για την διαρκή στήριξη τους όλα τα χρόνια των σπουδών μου.

Αθήνα, Οκτώβριος 2018

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	1
1.1	Εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστομηχανική.	1
1.2	Μη πλεγματική μέθοδος ανάλυσης ροής (mesh free).	2
1.3	Πλεγματική μέθοδος ανάλυσης ροής (grid based).....	3
1.4	Αύξηση ακρίβειας	4
1.5	Σκοπός της διπλωματικής εργασίας	5
2	Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.	6
2.1	Εισαγωγή.....	6
2.2	Εξισώσεις Navier -Stokes	7
2.2.1	Το σύστημα των εξισώσεων	7
2.2.2	Διακριτοποίηση εξισώσεων.....	8
2.2.3	Προσέγγιση μεταβλητών στα σύνορα των κελιών.....	10
2.2.4	Συντηρητικές ροές	10
2.3	Ανασυγκρότηση και προσέγγιση σε μία διάσταση	12
2.3.1	Ανασυγκρότηση από μέσες τιμές κελιών.....	12
2.3.2	Συντηρητική προσέγγιση της παραγώγου μέσω τιμών των κόμβων.....	19
2.4	ENO ανασυγκρότηση και προσέγγιση σε μία διάσταση (1D).....	21
2.4.1	ENO προσέγγιση	22
2.5	Οριακές συνθήκες.....	27
2.6	Χρονική ολοκλήρωση.....	28
3	Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler	30
3.1	Δοκιμή σωλήνα κύματος κρούσης (one shock wave).....	30
3.2	Αλληλεπίδραση δύο κυμάτων κρούσης	41
4	Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε SPH.	48
4.1	Εισαγωγή.....	48

4.2	Εξισώσεις Lagrange.....	48
4.2.1	Εξίσωση συνέχειας.....	49
4.2.2	Εξίσωση ορμής.....	50
4.2.3	Εξίσωση ενέργειας.....	51
4.3	Βασική σύνθεση της μεθόδου ομαλών υδροδυναμικών σωματιδίων(SPH)	52
4.3.1	Ολοκληρωματική αναπαράσταση συνάρτησης.....	52
4.3.2	Σωματιδιακή προσέγγιση	53
4.3.3	Η μορφοποίηση των εξισώσεων Lagrange με την SPH μέθοδο.....	55
4.3.4	Ανακατανομή των σωματιδίων(Remeshing).....	56
4.4	Διορθωτικά ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια(CSPH).....	60
4.5	Χρονική ολοκλήρωση.....	62
5	Εφαρμογή της μεθόδου SPH.....	63
5.1	Η παράγωγος του ημιτόνου.....	63
5.1.1	Παρεμβολή δευτέρου βαθμού στα όρια.....	63
5.1.2	Παρεμβολή τρίτου βαθμού στα όρια.....	69
5.2	Δοκιμή σωλήνα κύματος κρούσης (one shock wave).....	74
6	Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα	79
	Βιβλιογραφία	81

1 Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στην υπολογιστική ρευστομηχανική.

Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική (Computational Fluid Dynamics) ή CFD είναι η ανάλυση συστημάτων που εμπεριέχουν την ροή των ρευστών, την μετάδοση θερμότητας και συσχετισμένα φαινόμενα όπως χημικές διεργασίες χρησιμοποιώντας υπολογιστικές προσομοιώσεις. Είναι πολύ διαδεδομένη τεχνική και έχει ευρύ φάσμα σε βιομηχανικές και μη βιομηχανικές εφαρμογές [1]. Όπως για παράδειγμα:

- i. Αεροδυναμική των αεροσκαφών και οχημάτων: άνοση και άντωση.
- ii. Υδροδυναμική πλοίων.
- iii. Μονάδες παραγωγής ενέργειας : καύση σε κινητήρες IC και αεροστρόβιλους
- iv. Στους τομείς ηλεκτρονικής και ηλεκτρολογικής μηχανικής: ψύχρανση εξοπλισμών
- v. Στην μηχανική χημικών διεργασιών: ανάμειξη και διαχωρισμός ,χύτευση πολυμερών.
- vi. Εξωτερικό και εσωτερικό περιβάλλον κτηρίων: καταπόνηση , θέρμανση από τον αέρα και εξαερισμός.
- vii. Ναυτική μηχανολογία :Φορτία στις υπεράκτιες κατασκευές.
- viii. Περιβαλλοντική μηχανική :κατανομή ρύπων και αποβλήτων.
- ix. Υδρολογία και ωκεανογραφία :ροές ,εκβολές ποταμών και ωκεανών.
- x. Μετεωρολογία :πρόγνωση καιρού.
- xi. Βιοϊατρική μηχανολογία: Ροή αίματος μέσω αρτηριών και φλεβών.

Από τη δεκαετία του 1960, η αεροδιαστημική βιομηχανία έχει ενσωματώσει τεχνικές CFD στο σχεδιασμό, στην έρευνα, στην ανάπτυξη και στην κατασκευή αεροσκαφών και αεριωθούμενων κινητήρων. Πιο πρόσφατα, οι μέθοδοι εφαρμόστηκαν στον σχεδιασμό κινητήρων εσωτερικής καύσης, θαλάμων καύσης αεροστροβίλων και κλιβάνων. Επιπλέον, οι κατασκευαστές αυτοκινήτων προβλέπουν τώρα συστηματικά τις δυνάμεις άντωσης, τις ροές αέρα κάτω από το καπό και το περιβάλλον αυτοκινήτου με CFD. Όλο και περισσότερο, το CFD γίνεται ζωτικής σημασίας για το σχεδιασμό βιομηχανικών προϊόντων και διαδικασιών. Ο απώτερος στόχος των

εξελίξεων στο πεδίο των CFD είναι η παροχή ενός εργαλείου συγκρίσιμου με άλλα εργαλεία CAE (Computer-Aided Engineering) όπως είναι οι κωδικοί Ανάλυσης και Εισαγωγής στρες.

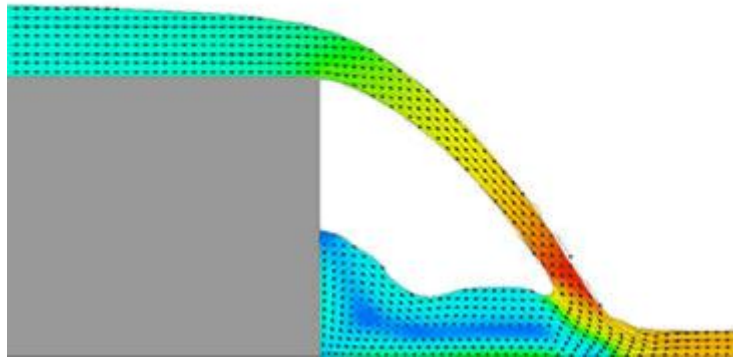
Επιπλέον υπάρχουν πολλά μοναδικά πλεονεκτήματα του CFD από πειραματικές προσεγγίσεις σχεδιασμού ρευστών συστημάτων όπως:

- Σημαντική μείωση του χρόνου παράδοσης και μείωση του κόστους νέων σχεδίων.
- Την ικανότητα μελέτης συστημάτων τα οποία είναι δύσκολα ή αδύνατον να εκτελεστούν ή υπό επικίνδυνες συνθήκες.
- Πρακτικά απεριόριστο εύρος λεπτομερειών στα αποτελέσματα .

Η μοντελοποίηση του CFD μπορεί να χωριστεί σε δύο βασικές κατηγορίες, στις μεθόδους που βασίζονται σε πλέγμα (grid based methods)και στις μεθόδους που δεν υπάρχει πλέγμα(mesh free method). Στην πρώτη περίπτωση η ροή και η εξέλιξη της περιγράφεται με συντεταγμένες Euler και καταγράφουν τις ποσότητες της ροής στους κόμβους ,ενώ στην δεύτερη περίπτωση με Lagrange, επιπλέον εισάγονται σωματίδια, για να περιγράψουν την ροή, στα οποία καταγράφονται οι ποσότητες της ροής και η εξέλιξη της ροής υπολογίζεται ακολουθώντας τις τροχιές των σωματιδίων αυτών.

1.2 Μη πλεγματική μέθοδος ανάλυσης ροής (mesh free).

Στην προκειμένη περιγραφή της ροής, ονομαζόμενη και ως λαγκρασιανή περιγραφή, το ρευστό θεωρείται ως μία συλλογή από σωματίδια τα οποία κινούνται ελεύθερα, περιστρέφονται, παραμορφώνονται και αυτοπροσαρμόζονται. [2] Μέσω αυτών των μεμονωμένων στοιχείων ρευστού μπορούν να ταυτοποιηθούν οι εξαρτημένες ποσότητες του πεδίου ροής (όπως ταχύτητα, ενέργεια κ.τ.λ.). Υπό αυτή την λογική η Λαγκρασιανή περιγραφή είναι μια φυσική επέκταση της μηχανικής των σωματιδίων. Για την ολοκληρωμένη εποπτεία της ροής επιβάλλεται η θεώρηση των αρχικών θέσεων των σωματιδίων καθώς και οι αρχικές τιμές των ποσοτήτων που τα διέπουν. Ακολουθώντας τις τροχιές των σωματιδίων υπάρχει η δυνατότητα να εποπτεύεται η ενδιαφερόμενη τιμή για κάθε θέση καθώς και για κάθε χρονική στιγμή.

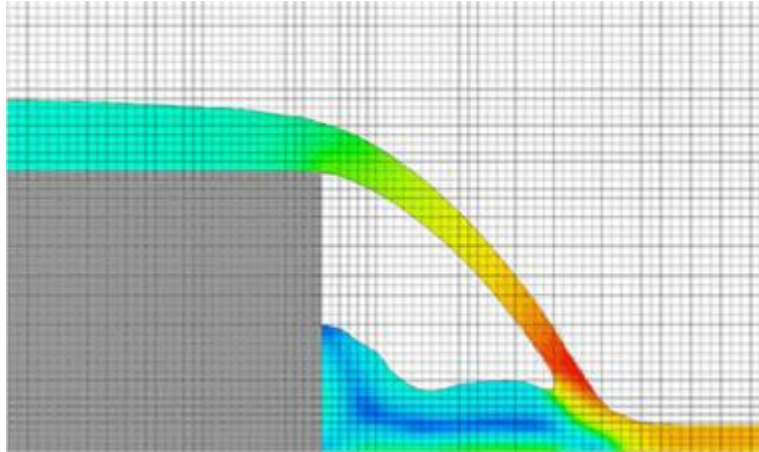


Σχήμα 1 Προσομοίωση της ροής πάνω από ένα σκαλοπάτι με σωματιδιακή περιγραφή [3]

Η μη πλεγματική μέθοδος έχει τα αρκετά θετικά. Είναι κατάλληλη κυρίως για την μελέτη του στροβιλισμού του πεδίου ροής, χειρίζεται εύκολα προσομοιώσεις πολλαπλών σωμάτων, όπως και μπορεί να παρέχει ακριβή αναπαράσταση πολύπλοκων γεωμετριών. Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες των μη πλεγματικών μεθόδων: η πρώτη ονομάζεται η μέθοδος σωματιδίων δίνης (Vortex Particle Methods) και η δεύτερη ονομάζεται ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια (Smooth Particle Hydrodynamics). Οι μέθοδοι των σωματιδίων ήταν οι πρώτες τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για αριθμητική προσομοίωση των ρευστών ξεκινώντας με τον πρωτοπόρο υπολογισμό μιας εξέλιξης μίας δίνης στο γραμμένο στο χέρι από τον Rosenhead.

1.3 Πλεγματική μέθοδος ανάλυσης ροής (grid based).

Στην συγκεκριμένη περιγραφή της ροής το σημείο παρατήρησης της ροής είναι σταθερό σε μία συγκεκριμένη θέση x του πεδίου ροής. Οι ποσότητες της ροής καθώς αλλάζουν με τον χρόνο θεωρούνται επίσης συναρτήσει της θέσης τους. Σε αντίθεση με την λαγκρασιανή μέθοδο το σημείο παρατήρησης παραμένει αμετάβλητο με την πάροδο του χρόνου και μόνο η μεταβολή των εξαρτημένων μεταβλητών περιγράφει το πεδίο ροής.



Σχήμα 2 Προσομοίωση της ροής πάνω από ένα σκαλοπάτι με πλεγματική περιγραφή [3]

Η συγκεκριμένη μέθοδος περιγραφής της ροής ονομάζεται και Euler και είναι η πιο συνήθης μέθοδος περιγραφής των φαινομένων της ροής στην βιβλιογραφία της μηχανικής των ρευστών. Σε αυτήν την περιγραφή τα μεμονωμένα στοιχεία του ρευστού και η ιστορία τους δεν ακολουθούνται όπως στην προηγούμενη μέθοδο, αλλά η γενική εικόνα του πεδίου που αλλάζει με τον χρόνο είναι που παρέχει τις πληροφορίες για την περιγραφή της ροής.

Από τα κύρια πλεονεκτήματα της πλεγματικής μεθόδου σε σύγκριση με την προηγούμενη είναι ότι είναι πιο εύκολη εφαρμογή και ακρίβεια των οριακών συνθηκών, εφαρμόζεται σε μεγαλύτερο εύρος προβλημάτων, καθώς και με την κατάλληλη ανάλυση δικτύου είναι δυνατόν να υπάρξουν πιο αξιόπιστοι υπολογισμοί. Οι κύριες κατηγορίες της είναι: η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference Method), η μέθοδος πεπερασμένων όγκων (Finite Volume Method), η μέθοδος μη συνέχειας Galerkin (Discontinuous Galerkin Method) και τέλος η φασματική μέθοδος (Spectral Method).

1.4 Αύξηση ακρίβειας

Οι περισσότεροι εμπορικοί επιλύτες έχουν ακρίβεια μέχρι δεύτερης τάξης. Τα προγράμματα πρώτης τάξης είναι γρήγορα έχουν μεγάλο εύρος στις βιομηχανικές εφαρμογές, αλλά άμα η ακρίβεια είναι πρωτεύων σημασίας, υπολείπονται. Υπάρχουν πολλά προβλήματα ροής του ρευστού όπου το επίπεδο ακριβείας που επιτυγχάνεται με της δεύτερης τάξης σχήματα δεν επαρκεί, ειδικά σε ροές που περιλαμβάνουν ασταθείς στροβιλισμούς, αερακουστικά και

μαγνητικά κύματα. Σε ροές που κυριαρχούν στροβιλισμοί τα συστήματα πρώτης και δεύτερης τάξης διαχέουν έντονα ασταθείς στροβίλους και η απαιτούμενη ανάλυση του πλέγματος της ροής καθιστά τις προσομοιώσεις πολύ ακριβές ακόμα και για τους σημερινούς υπερυπολογιστές. Παρόμοια ζητήματα προκύπτουν και στις υπολογιστική ρευστομηχανική όπου τα ακουστικά κύματα πρέπει να διαδοθούν σε μεγάλες αποστάσεις χωρίς σημαντικά σφάλματα διασποράς ή διάχυσης.

Τα πρώτης τάξεως σχήματα για να λύσουν ένα σύστημα που απαιτεί ακρίβεια θα χρειαστούν λεπτότερο πλέγμα από ένα σχήμα υψηλότερης τάξης για την ίδια ακρίβεια, επειδή θεωρητικά για πολύπλοκές εφαρμογές η ακρίβεια των αποτελεσμάτων για ένα τέταρτης τάξης σχήμα με πλέγμα ενός εκατομμυρίων στοιχείων να είναι πιο ακριβές από μία προσέγγιση πρώτης τάξης με σχήμα ενός δισεκατομμυρίων στοιχείων. Γενικά οι μέθοδοι υψηλής ακρίβειας κοστίζουν ακριβά, οπότε προσπαθούν να εφαρμοστούν πολλές τεχνικές για ένα συγκεκριμένο στόχο, να αποκτηθούν σχήματα υψηλής τάξης με το χαμηλότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

1.5 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή σχημάτων υψηλής τάξης ακρίβειας σε μονοδιάστατο μη συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό. Τα συγκεκριμένα σχήματα που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την διπλωματική είναι τα Ουσιώδη Μη Ταλαντευόμενα (Essentially Non Oscillatory) σχήματα και υλοποιούνται σε παραδείγματα με ασυνέχειες όπου όταν απαιτείται αύξηση της ακρίβειας η ανάλυση και η μελέτη της ροής καθίστανται δύσκολες έως αδύνατες. Επιπλέον εξετάζεται η εφαρμογή τους σε πλεγματικές και σε μη πλεγματικές μεθόδους.

2 Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

2.1 Εισαγωγή

Το παρών κεφάλαιο πραγματεύεται για την βασική ιδέα, ανάλυση, ανάπτυξη των ENO συστημάτων (Essentially Non Oscillatory) και την εφαρμογή τους στην υπολογιστική ρευστομηχανική. Τα συστήματα ENO είναι υψηλής τάξης ακρίβειας πεπερασμένων διαφορών ή όγκων που έχουν σχεδιαστεί για προβλήματα με τμηματικές ομαλές λύσεις τα οποία περιέχουν ασυνέχειες. Τα συγκεκριμένα συστήματα βασίζονται σε παρεμβολές διακριτών δεδομένων χρησιμοποιώντας αλγεβρικά πολυώνυμα. [3] Η βασική ιδέα της συγκεκριμένης παρεμβολής θεωρητικά, είναι ότι ένα ευρύτερο εύρος κελιών (stencil) παρεμβολής αποδίδει μια υψηλότερης τάξης ακρίβεια, με την προϋπόθεση να είναι ομαλή η συνάρτηση που παρεμβάλλεται μέσα στο εύρος των κελιών. Συνήθως οι μέθοδοι με πεπερασμένες διαφορές και πεπερασμένους όγκους βασίζονται σε σταθερά εύρη κελιών προσεγγίσεων, για παράδειγμα για την παροχή παρεμβολής τρίτου βαθμού ακρίβειας χρησιμοποιούνται τρία κελία $i-1, i, i+1$ για να δημιουργηθεί το πολυώνυμο παρεμβολής δευτέρου βαθμού. Αυτός ο τρόπος λειτουργεί καλά για τα γενικώς ομαλά προβλήματα. Το προκύπτον σύστημα είναι γραμμικό για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs) ως εκ τούτου η σταθερότητα μπορεί εύκολα να αναλυθεί μέσω μετασχηματισμών Fourier. Εναντίων παρεμβολή σταθερού εύρους κελιών δευτέρου ή υψηλότερης ακρίβειας βαθμού είναι αναγκαστικά ταλαντευτική κοντά σε μία ασυνέχεια και μπορούν να οδηγήσουν σε αριθμητικές αστάθειες. Οι ταλαντώσεις αυτές ονομάζονται Gibbs φαινόμενα.

Νεότερες προσπάθειες για να εξαλειφθούν ή να μειωθούν αυτές οι ταλαντώσεις κοντά σε ασυνέχειες δημιουργήθηκαν δύο μέθοδοι, τεχνητό ιξώδες και οι περιοριστές (limiters). Η πρώτη μέθοδος είναι η προσθήκη τεχνητού ιξώδους οι οποίες κοντά στην ασυνέχεια θα συμπιέζαν ή θα μείωναν τις ταλαντώσεις, αλλά μακριά από την ασυνέχεια θα είχαν μηδενική επίδραση για να υπάρχει μεγάλη ακρίβεια. Η δεύτερη προσπάθεια είναι η χρησιμοποίηση περιοριστών. Στην πράξη μειώνει την τάξη της ακρίβειας της παρεμβολής κοντά στην ασυνέχεια. Το μειονέκτημα

Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

αυτής της μεθόδου είναι ότι πολλές φορές μειώνεται η ακρίβεια μέχρι και πρώτου βαθμού κοντά στο μέγιστο της ταλάντωσης.

Τα ENO (Essentially Non Oscillatory) συστήματα παρουσιάστηκαν πρώτη φορά το 1987 από τον Harten, Enquist, Osher και Chakravarthy. Τα σχήματα ENO είναι ιδανικά για προβλήματα που εμπεριέχουν ασυνέχειες και πολύπλοκα δομημένη ροή, όπως για παράδειγμα αλληλεπιδράσεις κυμάτων κρούσεων με τυρβώδη ροή και με δίνες. Γι αυτό τον λόγο είναι αρκετά ελκυστικά επειδή χαμηλότερης τάξης σχήματα δεν ανταποκρίνονται το ίδιο σε αυτές τις καταστάσεις. Τα συγκεκριμένα σχήματα έχουν ευρύ εφαρμογή και στις σήμερα ημέρες και προσδοκείται περαιτέρω ανάπτυξη της μεθοδολογίας και εφαρμογή σε μεγαλύτερη πληθώρα προβλημάτων.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται η βασική ιδέα και η ανάπτυξη στην κατασκευή, ανάπτυξη και την εκτέλεση των ENO σχημάτων και την εφαρμογή τους στην υπολογιστική ρευστομηχανική.

2.2 Εξισώσεις Navier-Stokes

Οι εξισώσεις Navier-Stokes χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του ρευστού και προέρχονται από την εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα καθώς και με την συσχέτιση ότι το ρευστό είναι ένα άθροισμα ενός όρου διάχυσης και ενός όρου πίεσης. [4]

2.2.1 Το σύστημα των εξισώσεων

Το σύστημα των εξισώσεων αυτών ολοκληρωμένο σε όγκο ρευστού Ω και με σύνορο $\partial\Omega$ έχει την μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c dS - \vec{F}_u) ds = \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega$$

Όπου \vec{U} το διάνυσμα των συντηρητικών μεταβλητών, \vec{F}_c το διάνυσμα των συντηρητικών γενικευμένων παροχών (convective fluxes), \vec{F}_u το διάνυσμα των συνεκτικών παροχών (Viscous Fluxes) και $V = \vec{u} \cdot \vec{n}$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_c = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + n_x p \\ \rho v V + n_y p \\ \rho w V + n_z p \\ \rho \left(E + \frac{p}{\rho}\right) V \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \Theta_x + n_y \Theta_y + n_z \Theta_z \end{pmatrix}$$

$$\Theta_x = u \tau_{xx} + u \tau_{xy} + u \tau_{xz} + k \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Theta_y = u \tau_{yx} + u \tau_{yy} + u \tau_{yz} + k \frac{\partial T}{\partial y}$$

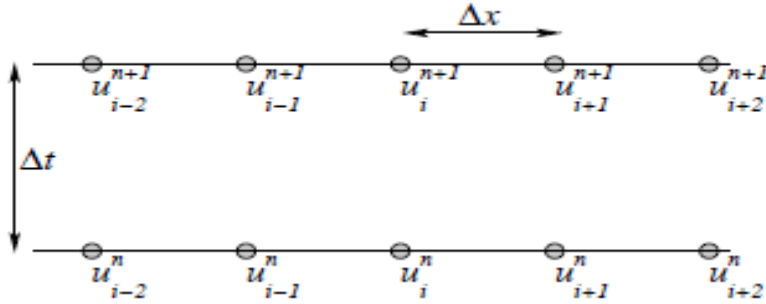
$$\Theta_z = u \tau_{zx} + u \tau_{zy} + u \tau_{zz} + k \frac{\partial T}{\partial z}$$

Και για τέλος χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$$

2.2.2 Διακριτοποίηση εξισώσεων

Η χωρική διακριτοποίηση αφορά στην αριθμητική προσέγγιση των συνεκτικών, των συντηρητικών καθώς και των πηγαίων όρων. Το είδος της μεθόδου είναι με cell-centered όπου οι μεταβλητές των εξισώσεων υπολογίζονται στα κέντρα των κελιών του πλέγματος.



Σχήμα 3 διακριτοποίηση του χώρου [5]

Επιπλέον το πλέγμα είναι δομημένο (structured grid) και θεωρώντας ότι ο όγκος(Δx) των κελιών δεν μεταβάλλεται στον χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega = \Omega \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}$$

όπου :

$$\bar{U} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \vec{U}_{exact} d\Omega$$

οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega} \left(\oint_{\partial\Omega} (\vec{F}_c - \vec{F}_v) dS - \int_{\Omega} \vec{Q} d\Omega \right)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το επιφανειακό ολοκλήρωμα αποτελείται από το άθροισμα των παροχών στις επιφάνειες για το κάθε κελί.

Οπότε για το κάθε ένα κελί I η εξίσωση γράφεται :

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = -\frac{1}{\Omega_I} \sum_{m=1}^{N_f} \left(((\vec{F}_c - \vec{F}_v)_m \Delta S_m) - (\vec{Q} d\Omega)_I \right)$$

Όπου N_f ο αριθμός των επιφανειών που ορίζουν το κελί και ΔS_m η επιφάνεια της πλευράς m.

2.2.3 Προσέγγιση μεταβλητών στα σύνορα των κελιών

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε κώδικας επίλυσης της ροής Roe που έχει αναπτυχθεί από τον κύριο Παπαδάκη Γεώργιο. Ο κώδικας έχει διαμορφωθεί με δομημένο πλέγμα και για να επιλυθούν αριθμητικά οι εξισώσεις της ροής, ολοκληρώνονται στο χώρο, εφαρμόζοντας έτσι μια μέθοδο πεπερασμένων όγκων cell centered όπου οι τιμές των συντηρητικών τιμών είναι γνωστές στα κέντρα των κελιών ($\rho, \rho u, \rho E$). Η μέθοδος που αναπτύχθηκε στο εργαστήριο υπολογίζει τις τιμές των πρωτεύουσων μεταβλητών V στα όρια των κελιών και έπειτα τις ροές. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται ανασυγκρότηση των μεταβλητών. Για τον υπολογισμό των τιμών στην επιφάνεια των κελιών χρησιμοποιούνται αριστερές και δεξιές καταστάσεις των κελιών. Η παρεμβολή των μεταβλητών σε μία συγκεκριμένη επιφάνεια ενός κελιού υπολογίζεται δύο φορές: η πρώτη φορά είναι μια για τα αριστερά και μία για τα δεξιά για μία δοσμένη επιφάνεια και έπειτα υπολογίζεται η ροή μέσω αυτής της επιφάνειας. Σε αυτήν την μέθοδο θεωρείται ότι η λύση κατανέμεται μερικώς γραμμικά στον πεπερασμένο όγκο.

2.2.4 Συντηρητικές ροές

Ο υπολογισμός των συντηρητικών παροχών γίνεται με την χρήση σχήματος Roe όπου είναι ένα σύστημα διαφορών της ροής.

Οι Roe μεταβλητές ορίζονται:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R}$$

$$\tilde{u} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{v} = \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{w} = \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{H} = \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}$$

$$\tilde{c} = \sqrt{(\gamma - 1)(\tilde{H} - \tilde{q}^2 / 2)}$$

$$\tilde{q} = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 + \tilde{w}^2$$

Η παροχή στην επιφάνεια $I + \frac{1}{2}$ είναι:

$$(\vec{F}_c)_{I+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\vec{F}_c(\vec{U}_R) + \vec{F}_c(\vec{U}_L) - |A_{ROE}|_{I+\frac{1}{2}} (\vec{U}_R - \vec{U}_L) \right]$$

$$|A_{ROE}|_{I+\frac{1}{2}} (\vec{U}_R - \vec{U}_L) = |\Delta \vec{F}_1| + |\Delta \vec{F}_{2,3,4}| + |\Delta \vec{F}_5|$$

$$|\vec{F}_1| = |\tilde{V} - \tilde{c}| \left(\frac{\Delta p - \tilde{\rho} \tilde{c} \Delta v}{2 \tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} n_x \\ \tilde{u} - \tilde{c} n_y \\ \tilde{w} - \tilde{c} n_z - \tilde{H} - \tilde{c} \tilde{V} \end{pmatrix}$$

$$|\Delta \vec{F}_{2,3,4}| = |\tilde{V}| \left(\Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{c}^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \tilde{q}_2 / 2 \end{pmatrix} + \tilde{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - \Delta V n_x \\ \Delta v - \Delta V n_y \\ \Delta w - \Delta V n_z \\ \tilde{u} \Delta u - \tilde{v} \Delta v + \tilde{w} \Delta w - \tilde{V} \Delta V \end{pmatrix}$$

$$\Delta(o) = (o)_R - (o)_L$$

2.3 Ανασυγκρότηση και προσέγγιση σε μία διάσταση

Σε αυτήν την ενότητα παρέχονται πληροφορίες για πολυωνυμικές παρεμβολές και προσεγγίσεις σε μία διάσταση (1D). [3]

Έχοντας ένα πλέγμα :

$$\alpha = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b \quad (2.1)$$

Ορίζονται κελιά, κέντρα κελιών και μέγεθος κελιών:

$$\begin{aligned} I_i &\equiv \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], & x_i &\equiv \frac{1}{2} (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}), \\ \Delta x_i &\equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, & i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.2)$$

Και το μέγιστο μέγεθος των κελιών :

$$\Delta x \equiv \max_{1 \leq i \leq N} \Delta x_i \quad (2.3)$$

2.3.1 Ανασυγκρότηση από μέσες τιμές κελιών.

Το πρώτο πρόβλημα προσέγγισης, που καλείται να λυθεί χρησιμοποιώντας μέσες τιμές σε κελία, είναι της ανασυγκρότησης.

Έχοντας τις μέσες τιμές στα κελία μιας συνάρτησης $u(x)$:

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

Είναι δυνατόν να βρεθεί ένα πολυώνυμο $p_i(x)$ μέγιστου βαθμού $k-1$, για κάθε κελί I_i το οποίο είναι προσέγγιση k ακρίβειας της συνάρτησης $u(x)$ μέσα στο I_i :

Υψηλής Τάξης ΕΝΟ σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

$$P_i(x) = v(x) + O(\Delta x)^k, \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

Συγκεκριμένα αυτό δίνει προσέγγιση στα όρια των κελίων της συνάρτησης $v(x)$:

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad v_{i-\frac{1}{2}}^+ = p_i(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

Τα οποία είναι k βαθμού ακρίβειας :

$$v_{i-\frac{1}{2}}^+ = v_i(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x)^k, \quad v_{i+\frac{1}{2}}^- = v_i(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x)^k, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Έχοντας την τοποθεσία και την τάξη της ακρίβειας k , διαλέγουμε ένα εύρος κελιών (στένσιλ), το οποίο αποτελείται από το I_i , r κελία δεξιά και s κελία αριστερά όπου $r, s > 0$, $r + s + 1 = k$

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\} \quad (2.8)$$

Υπάρχει και ένα μοναδικό πολυώνυμο μέγιστου βαθμού $k-1=r+s$, του οποίου οι μέσες τιμές στα κελία του $S(i)$ είναι ίσες με αυτές του $v(x)$.

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi, \quad j = i-r, \dots, i+s \quad (2.9)$$

το πολυώνυμο $p(x)$ είναι ακρίβειας k

Επιπλέον για την επίλυση του προβλήματος της ανασυγκρότησης χρειάζονται και οι τιμές $v(x)$ στα όρια των κελιών, (2.6). Επειδή η τοποθεσία των δεδομένων μέσων τιμών των κελιών (\bar{v}_j) στο εύρος κελιών $S(i)$ στο (2.8) για τις τιμές $v_{i-\frac{1}{2}}^+$ και $v_{i+\frac{1}{2}}^-$ στο (2.6) είναι γραμμικές,

Υψηλής Τάξης ΕΝΟ σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

υπάρχουν σταθερές c_{rj} και \bar{c}_{rj} , οι οποίες εξαρτώνται από την μετακίνηση στα αριστερά r του εύρους κελιών $S(i)$, από την τάξη της ακρίβειας και από το μέγεθος Δx του κελιού στο εύρος κελιών αλλά όχι από την ίδια συνάρτηση u .

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj}^- v_{i-r+j}^-, \quad v_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \bar{c}_{rj}^- v_{i-r+j}^- \quad \text{όπου} \quad \bar{c}_{rj}^- = c_{r-1,j}^- \quad (2.10)$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ποσοτήτων με τους διαφορετικούς εκθέτες (+, -) στην ίδια τοποθεσία $x_{i+\frac{1}{2}}$ υπάρχει για διαφορετικά εύρη κελιών: τα κελία I_i και I_{i+1} .

Για την απόδειξη των τιμών c_{rj} καθώς και για την ακρίβεια της συνάρτησης $p(x)$ πρέπει να ανατρέξουμε στην πρωτεύουσα συνάρτηση της $u(x)$:11

$$V(x) \equiv \int_{-\infty}^x v(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

Όπου το $-\infty$ δεν είναι σημαντικό και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιονδήποτε αριθμό. Το $V(x_{i+\frac{1}{2}})$ μπορεί να εκφραστεί με τις μέσες τιμές των κελιών χρησιμοποιώντας την (2.4) :

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \bar{v}_j \Delta x_j \quad (2.12)$$

Έχοντας γνώση τις μέσες τιμές των κελιών (\bar{v}_j) ακόλουθα γνωρίζουμε επίσης και την τιμή της συνάρτησης $V(x)$ στα όρια του κελιού επ' ακριβώς. Υποθέτοντας μια μοναδική πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ μέγιστου βαθμού k , της οποίας η παράγωγος της είναι η $p(x)$ και η οποία παρεμβάλει και την $V(x_{i+\frac{1}{2}})$ στα ακόλουθα $k+1$ σημεία :

$$x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

$$P'(x) = p(x) \quad (2.14)$$

Τότε αποδεικνύεται μέσω (2.9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} P'(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} (P(x_{j+\frac{1}{2}}) - P(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} (V(x_{j+\frac{1}{2}}) - V(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \left(\int_{-\infty}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{j-\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi \\ &= \bar{v}_j, \quad j = i-r, \dots, i+s \end{aligned}$$

Επιπλέον από την βασική θεωρία προσέγγισης :

$$P'(x) = V'(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i$$

Όπου είναι η προϋπόθεση για την ακρίβεια (2.5).

Οι σταθερές c_{ij} παρέχονται από την λαγκρασιανή μορφή του πολυωνύμου παρεμβολής:

Υψηλής Τάξης ΕΝΟ σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

$$P(x) = \sum_{m=0}^k V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \cdot \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \quad (2.15)$$

Αφαιρώντας μια σταθερά $V(x_{i-r-\frac{1}{2}})$ από την (2.15) και χρησιμοποιώντας :

$$\sum_{m=0}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} = 1$$

προκύπτει:

$$P(x) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}}) = \sum_{m=0}^k (V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}})) \cdot \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \quad (2.16)$$

Επιπλέον παραγωγίζοντας και στα δύο μέλη και έχοντας υπόψιν :

$$V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^{m-1} v_{i-r+j} \Delta x_{i-r+j}$$

Από την (2.12) καταλήγει στην μορφή:

$$p(x) = \sum_{m=0}^k \sum_{j=0}^{m-1} v_{i-r+j} \Delta x_{i-r+j} \left(\frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \quad (2.17)$$

Υπολογίζοντας την σχέση(2.17) στο σημείο $x = x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
 v_{i+\frac{1}{2}} &= p(x_{i+\frac{1}{2}}) \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \Delta x_{i-r+j} v_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^k \left(\frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m,l}}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right)
 \end{aligned}$$

Όπου οι σταθερές c_{rj} υπολογίζονται από :

$$c_{rj} = \Delta x_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^k \left(\frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m,l}}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \quad (2.18)$$

Άμα υπάρχει ομοιόμορφο πλέγμα $\Delta x_i = \Delta x$ η έκφραση του c_{rj} δεν εξαρτάται από το i ή το Δx πια.

$$c_{rj} = \sum_{m=j+1}^k \left(\frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m,l}}^k (r - q + 1)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (m - l)} \right) \quad (2.19)$$

Εφαρμόζοντας την έκφραση (2.19) είναι δυνατόν να γίνει κατηγοριοποίηση για τις σταθερές c_{rj} σε ομοιόμορφο πλέγμα ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια. Για ακρίβειες από $k=1$ έως $k=6$ τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

k	R	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
1	-1	1					
	0	1					
2	-1	3/2	-1/2				
	0	1/2	1/2				
	1	-1/2	3/2				
3	-1	11/6	-7/6	1/3			
	0	1/3	5/6	-1/6			
	1	-1/6	5/6	1/3			
	2	1/3	-7/6	11/6			
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4		
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12		
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12		
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4		
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12		
5	-1	137/60	-163/60	137/60	-21/20	1/5	
	0	1/5	77/60	-43/60	17/60	-1/20	
	1	-1/20	9/20	47/60	-13/60	1/30	
	2	1/30	-13/60	47/60	9/20	-1/20	
	3	-1/20	17/60	-43/60	77/60	1/5	
	4	1/5	-21/20	137/60	-163/60	137/60	
6	-1	49/20	-71/20	79/20	-163/60	31/30	-1/6
	0	1/6	29/20	-21/20	37/60	-13/60	1/30
	1	-1/30	11/30	19/20	-23/60	7/60	-1/60
	2	1/60	-2/15	37/60	37/60	-2/15	1/60
	3	-1/60	7/60	-23/60	19/20	11/30	-1/30
	4	1/30	-13/60	37/60	-21/20	29/20	1/6
5	-1/6	31/30	-163/60	79/20	-71/20	49/20	

Πίνακας 1 Πίνακας σταθερών C_{rj} [3]

2.3.2 Συντηρητική προσέγγιση της παραγώγου μέσω τιμών των κόμβων

Στο δεύτερο κομμάτι αυτού του κεφαλαίου θα αντιμετωπιστεί το προσεγγιστικό πρόβλημα της παροχής υψηλής τάξης συντηρητικών προσεγγίσεων της παραγώγου χρησιμοποιώντας τιμές σε κόμβους (πεπερασμένες διαφορές), για μίας κατεύθυνσης συντηρητική προσέγγιση.

Έχοντας τις τιμές στους κόμβους της συνάρτησης $u(x)$:

$$v_i \equiv u(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

Βρίσκεται μια συνάρτηση ροής

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} \equiv \hat{v}(v_{i-r}, \dots, v_{i+s}) \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.21)$$

Έτσι ώστε η διαφορά της ροής προσεγγίζει την παράγωγο της $u'(x)$ σε ακρίβεια k βαθμού:

$$\frac{1}{\Delta x} (\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}) = u'(x_i) + O(\Delta x^k), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.22)$$

Η επίλυση αυτού του προβλήματος είναι σημαντική για υψηλής τάξης συντηρητικές σχέσεις που βασίζονται σε τιμές σημείων (πεπερασμένες διαφορές) από ότι σε μέσες τιμές κελιών (πεπερασμένοι όγκοι). Το πρόβλημα αυτό φαίνεται διαφορετικό από το παραπάνω παρόλα αυτά και σε αυτό το πρόβλημα θεωρείται ότι το πλέγμα είναι ομοιόμορφο.

Δημιουργώντας μια συνάρτηση $h(x)$, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος του πλέγματος Δx :

$$v(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi \quad (2.23)$$

Όπου έχει παράγωγο:

$$v'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right]$$

Και για να αποδειχτεί η (2.22) πρέπει να χρησιμοποιηθεί:

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k) \quad (2.24)$$

Φαίνεται στην (2.26) ότι χρειάζεται ένας όρος $O(\Delta x^{k+1})$ για να πάρουμε την (2.22) λόγω του παρονομαστή. Παρ' αυτά, στην πράξη, ο όρος $O(\Delta x^k)$ στην (2.24) είναι ομαλός συνήθως λόγω των διαφορών στην (2.22) θα έδινε ένα επιπλέον $O(\Delta x)$ μόνο για να αφαιρέσει αυτό στον παρονομαστή.

Δεν είναι εύκολο η προσέγγιση του $h(x)$ μέσω της (2.23) καθώς είναι μόνο έμμεσα ορισμένα εκεί. Αλλά η $u(x)$ είναι η συνάρτηση των μέσων τιμών της άγνωστης συνάρτησης $h(x)$, οπότε για την εύρεση της συνάρτησης $h(x)$ χρησιμοποιείται η παραπάνω διαδικασία της ανασυγκρότησης. Αξιοποιώντας την πρωτεύουσα συνάρτηση της $h(x)$:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi \quad (2.25)$$

Και από την (2.23) βγαίνει :

$$H(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} h(\xi) d\xi = \Delta x \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v_j \quad (2.26)$$

Τέλος, έχοντας τις τιμές v_j χρησιμοποιούνται σαν μέσες τιμές μιας άλλης συνάρτησης $h(x)$ όπου η πρωτεύουσα της είναι γνωστή $H(x)$ στην επαφή των κελιών $x = x_{i+\frac{1}{2}}$. Έπειτα χρησιμοποιείται η διαδικασία της ανασυγκρότησης, η οποία παρέχει προσέγγιση k βαθμού στην $h(x_{i+\frac{1}{2}})$, η οποία θεωρείται ίση με την τιμή της ροής $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$ στην (2.21) για τα ακόλουθα k σημεία:

$$x_{i-r}, \dots, x_{i+s} \quad (2.27)$$

Όπου $r+s = k-1$, οπότε το $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$ εκφράζεται :

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} v_{i-r+j} \quad (2.28)$$

Τις σταθερές c_{ij} παρέχονται από τον παραπάνω πίνακα 1 με την προϋπόθεση ότι το πλέγμα είναι ομοιόμορφο. Επίσης η υψηλής τάξης πεπερασμένες διαφορές που αναλύονται σε αυτό το κεφάλαιο έχουν εφαρμογή μόνο σε ομοιόμορφο ή ομαλά ποικίλα πλέγματα.

Σε περίπτωση που χρησιμοποιείται σταθερό εύρος κελιών προσέγγισης εννοείται ότι η αριστερή μετατόπιση r στην (2.6) ή (2.7) είναι η ίδια για όλες τις τοποθεσίες i . Συνήθως για μία παγκόσμια ομαλή συνάρτηση $u(x)$ η καλύτερη προσέγγιση γίνεται είτε με κεντρική προσέγγιση $r = s - 1$ για ζυγο k , είτε για προσώ προσέγγιση $r = s$ ή $r = s - 2$ για μονό k . Παράδειγμα αν το πλέγμα είναι ομοιόμορφο και έχουμε κεντρική τέταρτης τάξης ανασυγκρότηση για το $v_{i+\frac{1}{2}}$ γράφεται :

$$v_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}\bar{v}_{i-1} + \frac{7}{12}\bar{v}_i + \frac{7}{12}\bar{v}_{i+1} - \frac{1}{12}\bar{v}_{i+2} + O(\Delta x^4) \quad (2.29)$$

Όμοια η τέταρτης τάξης ροϊκής συνάρτησης (2.28) είναι:

$$\bar{v}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}v_{i-1} + \frac{7}{12}v_i + \frac{7}{12}v_{i+1} - \frac{1}{12}v_{i+2} + O(\Delta x^4) \quad (2.30)$$

Όπου δίνει :

$$\frac{1}{\Delta x} (\bar{v}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{v}_{i-\frac{1}{2}}) = v'(x_i) + O(\Delta x^4)$$

2.4 ENO ανασυγκρότηση και προσέγγιση σε μία διάσταση (1D)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε το αποτέλεσμα της προσέγγισης όταν το εύρος κελιών είναι επιλεγμένο και σταθερό, σε αυτή την ενότητα θα εξηγηθεί η διαδικασία όταν είναι μεταβλητό. Για την επίλυση υπερβολικών συντηρητικών νόμων χρησιμοποιούνται μερικώς ομαλές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν όσες παραγώγους όσες απαιτεί η εξίσωση ,παντού εκτός από αρκετά πεπερασμένα απομονωμένα σημεία. Σε αυτά τα πεπερασμένα με μη συνέχεια σημεία, η συνάρτηση $u(x)$ και οι παράγωγοι της θεωρείται ότι έχουν πεπερασμένα δεξιά και αριστερά όρια.

Σε αυτές τις μερικώς ομαλές συναρτήσεις η τάξη της ακρίβειας προσδιορίζεται από το τοπικό λάθος αποκοπής στις ομαλές περιοχές της συνάρτησης. Αν η συνάρτηση $u(x)$ είναι μερικώς ομαλή τότε μια συνάρτηση με σταθερό εύρος κελιών προσέγγισης μπορεί να μην επαρκεί κοντά σε ασυνέχειες δημιουργώντας ταλαντώσεις. Αυτές οι ταλαντώσεις (ονομαζόμενες και ως Gibbs φαινόμενα) συμβαίνουν επειδή το εύρος κελιών για το x_i κοντά στην ασυνέχεια εμπεριέχει ένα μη συνεχές κελί.

2.4.1 ENO προσέγγιση

Βασική ιδέα αυτής της μεθόδου είναι η ιδέα ενός προσαρμοστικού εύρος κελιών όπου η αριστερή μετακίνηση του να αλλάζει ανάλογα με την περιοχή x_i , έτσι ώστε να αποφεύγει αν γίνεται το κελί με την ασυνέχεια. Μέσω του Νευτώνειου αναπτύγματος της πολυωνυμικής παρεμβολής μπορεί να καταστεί δυνατό. Αρχικά παρατηρώντας τον ορισμό των Νευτώνειων διαιρεμένων διαφορών, η μηδενικού βαθμού διαιρεμένη διαφορά της συνάρτησης $V(x)$ στις (2.11) – (2.12) ορίζονται σαν:

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}} \right] \equiv V(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (2.31)$$

Η γενικότερη έκφραση j βαθμού των διαιρεμένων διαφορών για $j > 1$ είναι :

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] \equiv \frac{V \left[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] - V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{3}{2}} \right]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (2.32)$$

Παρόμοια οι διαιρεμένες διαφορές για τις μέσες τιμές του \bar{V} στην σχέση (2.4) ορίζονται ως :

$$\bar{V} [x_i] \equiv \bar{V}_i \quad (2.33)$$

Και στην γενική μορφή :

$$\bar{V} \left[x_i, \dots, x_{i+j} \right] \equiv \frac{\bar{V} \left[x_{i+1}, \dots, x_{i+j} \right] - \bar{V} \left[x_i, \dots, x_{i+j-1} \right]}{x_{i+j} - x_i} \quad (2.34)$$

Συνδυάζοντας με την σχέση (2.12)

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] = \frac{V(x_{i+\frac{1}{2}}) - V(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \bar{v}_i \quad (2.35)$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι οι διαιρεμένες διαφορές μηδενικού βαθμού της $u(x)$ είναι οι πρώτες βαθμού διαιρεμένες διαφορές της $V(x)$. Οπότε είναι εφικτό να γραφτούν οι πρώτου ή και μεγαλύτερων βαθμού διαιρεμένες διαφορές $V(x)$ συναρτήσεως της $u(x)$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.35) και (2.32) αποφεύγοντας τον υπολογισμό του υπολογισμού της $V(x)$. Η νευτώνεια μορφή k βαθμού της πολυωνυμικής παρεμβολής $P(x)$, η οποία παρεμβάλλει την $V(x)$ σε $k+1$ σημεία (2.14), μπορεί να εκφραστεί μέσω των (2.32) και (2.31) :

$$P(x) = \sum_{j=0}^k V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \prod_{m=0}^{j-1} (x - x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \quad (2.36)$$

Παραγωγίζοντας την (2.36) καταλήγει η παράγωγος $p(x)$ στην (2.14)

$$p(x) = \sum_{j=0}^k V \left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}} \right] \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{j-1} (x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}) \quad (2.37)$$

Στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται ο όρος $V(x)$ γι' αυτό θα εκφραστεί η συνάρτηση $p(x)$ συναρτήσεως των διαιρεμένων διαφορών $u(x)$.

Μία σημαντική ιδιότητα των διαιρεμένων διαφορών είναι :

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] \equiv \frac{V^{(j)}(\xi)}{j!} \quad (2.38)$$

Η σχέση (2.38) θα ισχύει για οποιοδήποτε ξ μέσα στο εύρος κελιών $x_{i-\frac{1}{2}} < \xi < x_{i+j-\frac{1}{2}}$ όσο η $V(x)$ θα είναι ομαλή μέσα στο εύρος κελιών. Αν είναι μη συνεχής μέσα στο εύρος κελιών είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι :

$$V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \right] = O\left(\frac{1}{\Delta x^j}\right) \quad (2.39)$$

Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

Δηλαδή οι διαιρεμένες διαφορές είναι μέτρηση της ομαλότητας της συνάρτησης μέσα στο εύρος των κελίων.

Η περιγραφή της ENO μεθόδου ξεκινάει χρησιμοποιώντας την (2.36). Ο στόχος είναι η εύρεση ενός εύρους κελιών με συνεχόμενα $k+1$ σημεία, στα οποία εμπεριέχονται $x_{i-\frac{1}{2}}$ και $x_{i+\frac{1}{2}}$, έτσι ώστε να είναι όσο πιο δυνατόν ομαλή η συνάρτηση $V(x)$ μέσα στο εύρος κελιών αυτό συγκρίνοντας τα με άλλα δυνατά εύροι κελιών. Στην αρχή η διαδικασία ξεκινάει με δύο σημεία και προθέτονται ένα ανά φορά.

$$\tilde{S}_2(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.40)$$

Όπου το γράμμα \tilde{S} είναι το εύρος κελιών για την συνάρτηση $V(x)$. Το \tilde{S} της V έχει συσχέτιση με το εύρος κελιών S της $u(x)$. Παραδείγματος χάρη η (2.40) ανταποκρίνεται σε ένα κελί για την $u(x)$.

$$S(i) = \{I_i\}$$

Η γραμμική παρεμβολή για το \tilde{S} της $V(x)$ στην (3.10) μπορεί να γραφτεί σε νευτώνεια μορφή ως :

$$P^1(x) = V \left[x_{i-\frac{1}{2}} \right] + V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}})$$

Το επόμενο βήμα είναι η προσθήκη ενός σημείου στα αριστερά έχοντας σαν αποτέλεσμα την παρεμβολή:

$$R(x) = P^1(x) + V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.41)$$

Αντιθέτω αν προστεθεί ένα σημείο στα δεξιά θα σχηματιστεί η παρεμβολή:

$$S(x) = P^1(x) + V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] (x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.42)$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις οι διαφορές που έχουν είναι :

$$V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad \text{και} \quad V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \quad (2.43)$$

Αυτές οι δύο σταθερές είναι δευτέρου βαθμού διαιρεμένες διαφορές της $V(x)$ σε δύο διαφορετικά εύρη κελιών. Αναφέρθηκε πριν στις σχέσεις (2.38), (2.39) ότι όσο πιο μικρή είναι η διαιρεμένη διαφορά τόσο πιο ομαλό είναι και το εύρος κελιών, οπότε συγκρίνονται μεταξύ τους και το εύρος κελιών με την μικρότερη διαιρεταία διαφορά επιλέγεται σαν τρίτο σημείο. Αναλυτικότερα αν

$$\left| V \left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \right| < \left| V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right] \right| \quad (2.44)$$

Τότε επιλέγεται το εύρος κελιών:

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

Αλλιώς :

$$\tilde{S}_3(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}} \right\}$$

Η διαδικασία συνεχίζεται προσθέτοντας κάθε φορά ένα σημείο στο εύρος κελιών μέχρι να φτάσει στον επιθυμητό αριθμό σημείων. Επειδή είναι ομοιόμορφο το πλέγμα δεν χρειάζεται ο υπολογισμός των διαιρεμένων διαφορών όπως στην (2.32), αντιθέτως χρησιμοποιούνται οι μη διαιρεμένες διαφορές.

$$V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \rangle = V \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] = \bar{V}_i \quad (2.45)$$

$$V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} \rangle \quad (2.46)$$

$$\equiv V \langle x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} \rangle - V \langle x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} \rangle, \quad j \geq 1$$

Συνοψίζοντας χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές των κελίων μιας συνάρτησης $u(x)$, δημιουργείται μια μερικώς ομαλή πολυωνυμική συνάρτηση ανασυγκρότησης, μέγιστου βαθμού $k-1$ με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Υπολογισμός των διαιρεμένων διαφορών της πρωτεύουσας συνάρτησης $V(x)$, για βαθμούς από 1 έως k μέσω \bar{V} , (2.35), (2.32), αν το πλέγμα είναι ομοιόμορφο $\Delta x_i = \Delta x$ τότε υπολογίζονται οι μη διαιρεμένες διαφορές (2.45),(2.46).
2. Στο κελί I_i ξεκινάει να διαμορφώνεται το εύρος κελιών με δύο σημεία

$$\tilde{S}_2(i) = \left\{ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right\}$$

Για την $V(x)$ όπου είναι ένα σημείο για την $u(x)$: $S(i) = \{I_i\}$

3. Για $l = 2, \dots, k$ θεωρώντας ότι είναι γνωστό $\tilde{S}_l(i) = \left\{ x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{1}{2}} \right\}$

προστίθεται ένα από τα δύο γειτονικά σημεία χρησιμοποιώντας την διαδικασία ΕΝΟ :

$$\text{- αν } \left\| V \left[x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{1}{2}} \right] \right\| < \left\| V \left[x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l+\frac{1}{2}} \right] \right\|, \quad (2.47)$$

Αυξάνεται το εύρος κελιών με το σημείο $x_{j-\frac{1}{2}}$ και καταλήγει στην μορφή:

$$\tilde{S}_{l+1}(i) = \left\{ x_{j-\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l-\frac{1}{2}} \right\}$$

- σε αντίθετη περίπτωση αυξάνεται με το σημείο $x_{j+l+\frac{1}{2}}$ και το εύρος κελιών καταλείγει στην μορφή:

$$\tilde{S}_{l+1}(i) = \left\{ x_{j+\frac{1}{2}}, \dots, x_{j+l+\frac{1}{2}} \right\}$$

4. Η $p_i(x)$, η οποία είναι πολυώνυμο μέγιστου βαθμού $k-1$ στο I_i , προκύπτει από την λαγκρασιανή μορφή (2.17) ή την νευτώνεια (2.37) όσο είναι η $u(x)$ ομαλή στο κελί. Έπειτα χρησιμοποιείται η $p_i(x)$ για της προσεγγίσεις στα όρια του κελιού.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = p_i(x_{i+\frac{1}{2}}) \quad v_{i-\frac{1}{2}}^+ = p_i(x_{i-\frac{1}{2}})$$

Παρ' αυτά είναι πιο βολικό, όταν στο εύρος κελιών είναι γνωστό, να χρησιμοποιηθεί η (2.8) με τα C_{rj} που ορίζονται με την (2.18) για ανομοιομορφο πλέγμα ή με την (2.19) για ομοιομορφο πλέγμα με την χρήση του πίνακα 1 για τις προσεγγίσεις της $u(x)$ στα όρια των κελίων.

2.5 Οριακές συνθήκες

Σε αυτή την ενότητα θα αναλυθούν οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική και πως να αντιμετωπίζονται σύμφωνα με τον τύπος τους. Για οριακές συνθήκες ανακλάσεως ή συμμετρίας αρχικά θα οριστούν τα λεγόμενα σημεία φαντάσματα (ghost shells) και στην συνέχεια θα οριστούν οι τιμές τους σύμφωνα με τις ιδιότητες συμμετρίας ή αντισυμμετρίας που θα τα διέπουν. Συνήθως στα ENO συστήματα επιλέγονται μόνο οι εσωτερικές τιμές του υπολογιστικού χωρίου για την επιλογή του εύρους κελιών. Δηλαδή μόνο εύρη κελιών που εμπεριέχονται εντελώς στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου υπάρχουν στον χρησιμοποιηθέντα αλγόριθμο. Στην πράξη μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτή η αναγκαιότητα οριοθετώντας πολύ μεγάλες τιμές στα σημεία φαντάσματα για την αποφυγή σημείων εκτός του υπολογιστικού χωρίου. [5]

Στην περίπτωση των οριακών συνθηκών με συμμετρικά ή αντισυμμετρικά σημεία φαντάσματα για έναν συμπαγές τοίχο στις θέσεις $x=0$ και $x=1$ ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία. Αρχικά ορίζονται ψευδοκόμβοι με καταστάσεις:

U^n, \dots, U_{-r+1}^n για τον αριστερό τοίχο και $U_{j+1}^n, \dots, U_{j+r}^n$ για τον δεξιό τοίχο.

Οι καταστάσεις για τον αριστερό τοίχο ($x=0$) υπολογίζονται:

$$\rho_{x=0-j+1}^n = \rho_{x=0}^n, \quad v_{x=0-j+1}^n = -v_{x=0}^n, \quad P_{x=0-j+1}^n = P_{x=0}^n$$

$$j = 1, \dots, r$$

Ενώ για τις ποσότητες του δεξιό τοίχου ($x=1$):

$$\rho_{x=1+j}^n = \rho_{x=1}^n, \quad v_{x=1+j}^n = -v_{x=1}^n, \quad P_{x=1+j}^n = P_{x=1}^n, \\ j = 1, \dots, r$$

Όπου ρ είναι η πυκνότητα, v η ταχύτητα P η πίεση, n το χρονικό βήμα και r η ακρίβεια της επιθυμητής τάξης.

2.6 Χρονική ολοκλήρωση

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η μέθοδος πολλαπλών επιπέδων χρονικής ολοκλήρωσης Runge Kutta. [6] Το σύστημα πολλαπλών σταδίων προωθεί την λύση σε διάφορα στάδια τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως ενημέρωση της λύσης. Εφαρμόζοντας στην εξίσωση :

$$\frac{d(\Omega \vec{W})_I}{dt} = -\vec{R}_I$$

όπου Ω είναι ο όγκος του χωρίου που γίνεται η ολοκλήρωση, \vec{R}_I είναι το υπόλοιπο, και I είναι η αρίθμηση του συγκεκριμένου χωρίου, ένα σύστημα m επιπέδων αναπτύσσεται:

$$\vec{W}_I^{(0)} = \vec{W}_I^{(n)}$$

$$\vec{W}_I^{(1)} = \vec{W}_I^{(0)} - a_1 \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \vec{R}_I^{(0)}$$

$$\vec{W}_I^{(2)} = \vec{W}_I^{(0)} - a_2 \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \vec{R}_I^{(1)}$$

-
-
-

Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε πλεγματικές μεθόδους.

$$\vec{W}_I^{(n+1)} = \vec{W}_I^{(m)} = \vec{W}_I^{(0)} - a_m \frac{\Delta t_I}{\Omega_I} \vec{R}_I^{(m-1)}$$

Στο από πάνω σύστημα εξισώσεων η μεταβλητή α_k αναπαριστά τον συντελεστή των βημάτων. Επιπλέον το υπόλοιπο $\vec{R}_I^{(k)}$ υπολογίζεται από την λύση $\vec{W}_I^{(k)}$ στο k βήμα. Σε αντίθεση με την συνηθισμένη Runge Kutta μόνο η μηδενική λύση και το πιο καινούργιο υπόλοιπο αποθηκεύεται για να μειωθούν οι απαιτήσεις της μνήμης. Οι συντελεστές των βημάτων μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε να αυξήσουν το μέγιστο χρονικό βήμα και να βελτιώσουν την σταθερότητα για μία συγκεκριμένη χωρική διακριτοποίηση. Οι συντελεστές α_k μπορούν να αποκτηθούν μέσω του πίνακα:

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 1^ο ΒΑΘΜΟΥ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 2^ο ΒΑΘΜΟΥ

ΣΤΑΔΙΑ	3	4	5	3	4	5
σ (CFL)	1.5	2.0	2.5	0.69	0.92	1.15
α_1	0.1481	0.0833	0.0533	0.1918	0.1084	0.0695
α_2	0.4000	0.2069	0.1263	0.4929	0.2602	0.1602
α_3	1.0000	0.4265	0.2375	1.0000	0.5052	0.2898
α_4		1.0000	0.4414		1.0000	0.5060
α_5			1.0000			1.0000

Πίνακας 2 Σχήμα πολλαπλών σταδίων: βελτιστοποιημένοι συντελεστές σταδίου (α) για πρώτης και δεύτερης τάξης χωρική διακριτοποίηση.[6]

Η προσέγγιση πολλαπλών σταδίων αρμόζει και για δομημένα πλέγματα αλλά και για μη δομημένα. Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν συντελεστές α_k για συστήματα δευτέρου βαθμού και τεσσάρων χρονικών σταδίων.

3 Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστεί η δοκιμή της μεθόδου ENO που σκοπό έχει να προσομοιώσει τη βασική συμπεριφορά των εξισώσεων Euler σε δοκιμή σωλήνα κυμάτων κρούσης.

3.1 Δοκιμή σωλήνα κύματος κρούσης (*one shock wave*)

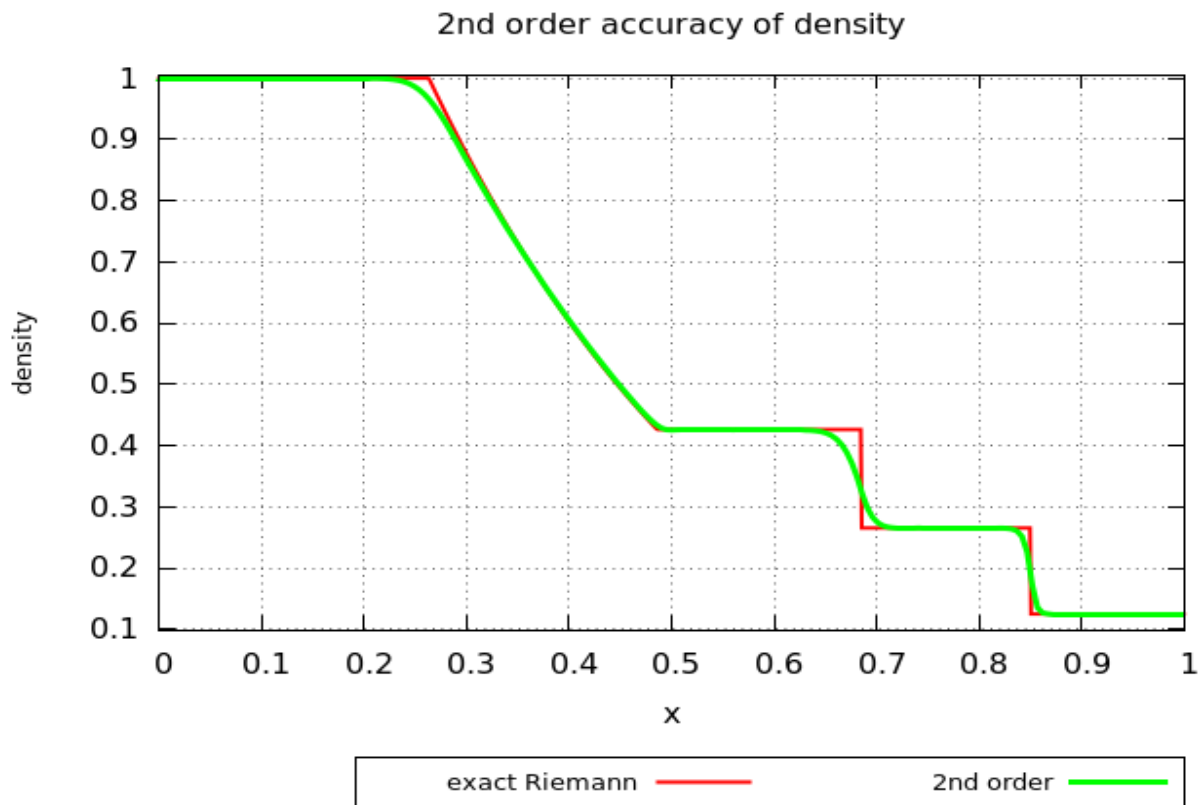
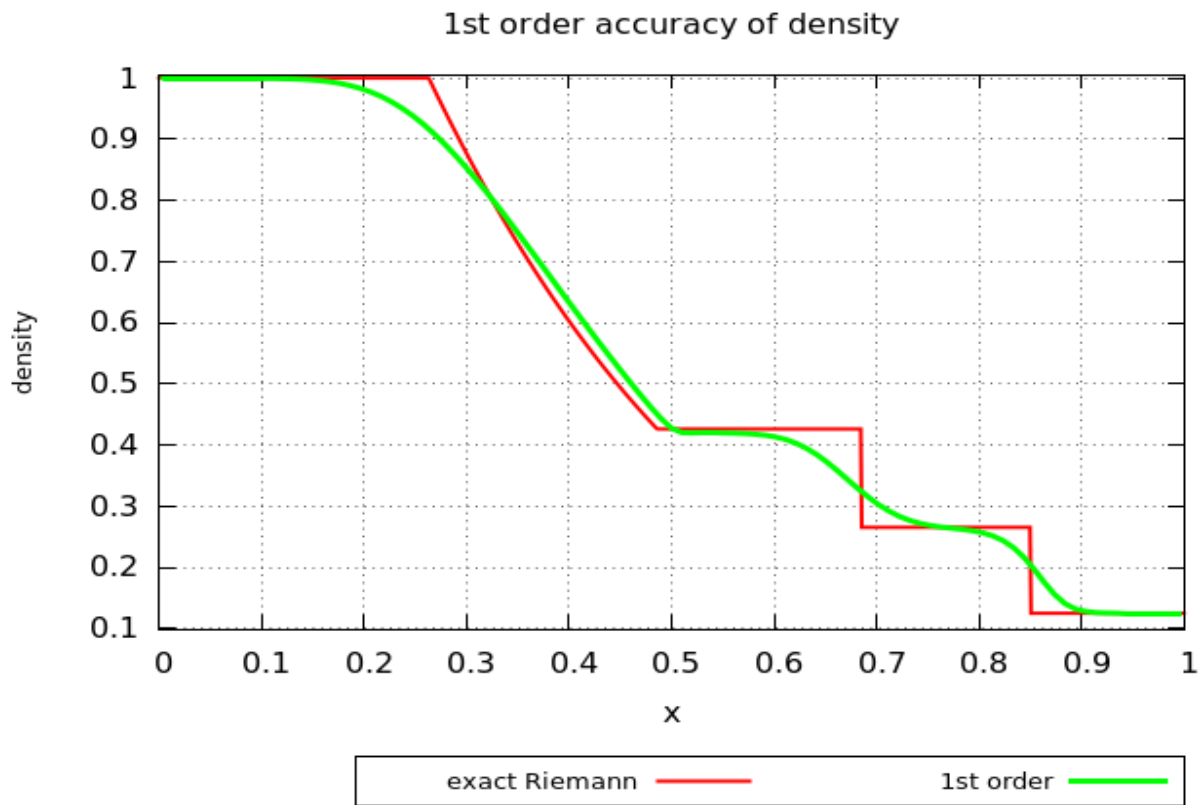
Ο σωλήνας κυμάτων κρούσης αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα επειδή η απ' ακριβής χρονικά εξαρτώμενη λύση μπορεί να συγκριθεί με την λύση που υπολογίζεται υπολογιστικά εφαρμόζοντας υπολογιστική διακριτοποίηση. Οι αρχικές συνθήκες αποτελούνται από δύο ομοιόμορφες καταστάσεις που χωρίζονται από μία ασυνέχεια. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι γνωστό ως το πρόβλημα Riemann. Οι αρχικές αριστερές και δεξιές ομοιόμορφες καταστάσεις εισάγονται συνήθως με καθορισμό της πυκνότητας, της πίεσης και της ταχύτητας. Αυτή η αρχική σειρά μοντελοποιεί έναν σωλήνα όπου η αριστερή και η δεξιά περιοχή διαχωρίζονται από ένα διάφραγμα και γεμίζουν από το ίδιο αέριο σε δύο διαφορετικές φυσικές καταστάσεις. Εάν η επίδραση του ιξώδους είναι αμελητέα κατά μήκος των τοιχωμάτων του σωλήνα, η ακριβής λύση των πλήρων εξισώσεων Euler μπορεί να ληφθεί με βάση μια απλή ανάλυση κύματος. Κατά την διάσπαση του διαφράγματος, η ασυνέχεια μεταξύ των δύο αρχικών καταστάσεων διασπάται στα αριστερά και προς τα δεξιά κινούμενα κύματα, τα οποία χωρίζονται από μια επιφάνεια επαφής. Κάθε μοτίβο κύματος αποτελείται από μια ασυνέχεια επαφής στη μέση και ένα κύμα σοκ ή αραίωσης στην αριστερή και τη δεξιά πλευρά που χωρίζει την ομοιόμορφη λύση κατάστασης. Το πρόβλημα του σωλήνα κυμάτων κρούσης παρέχει μια καλή δοκιμασία της ικανότητας ενός κώδικα να συλλάβει τους κραδασμούς και τις ασυνέχειες επαφής με ένα μικρό αριθμό ζωνών και να παράγει το σωστό προφίλ πυκνότητας σε μια αραίωση. Ο λόγος των ειδικών θεάσεων γ επιλέγεται να είναι 1,4 και στις δύο πλευρές της διεπαφής, ενώ η πίεση στην αριστερή περιοχή είναι μεγαλύτερη από τη δεξιά, η ασυνέχεια της πίεσης έχει ως αποτέλεσμα ένα κύμα κρούσης, το οποίο διαδίδεται προς τα δεξιά. Επιπλέον, η

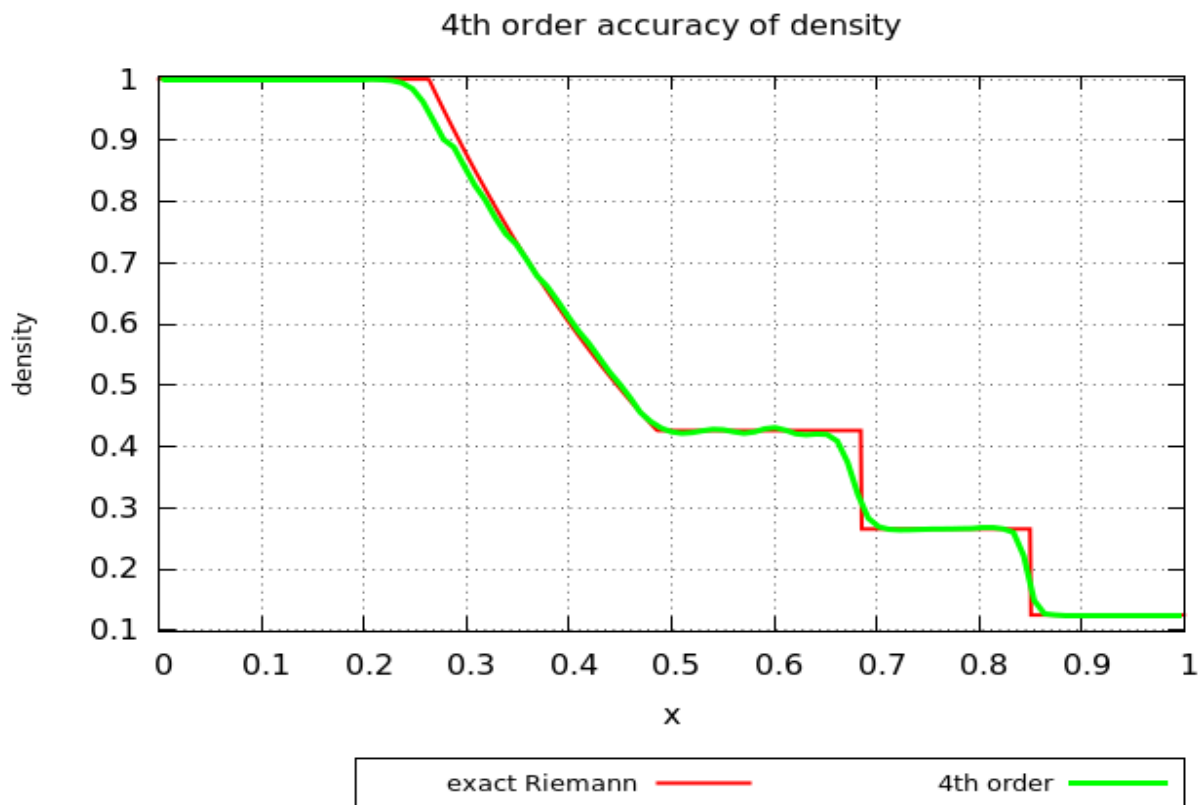
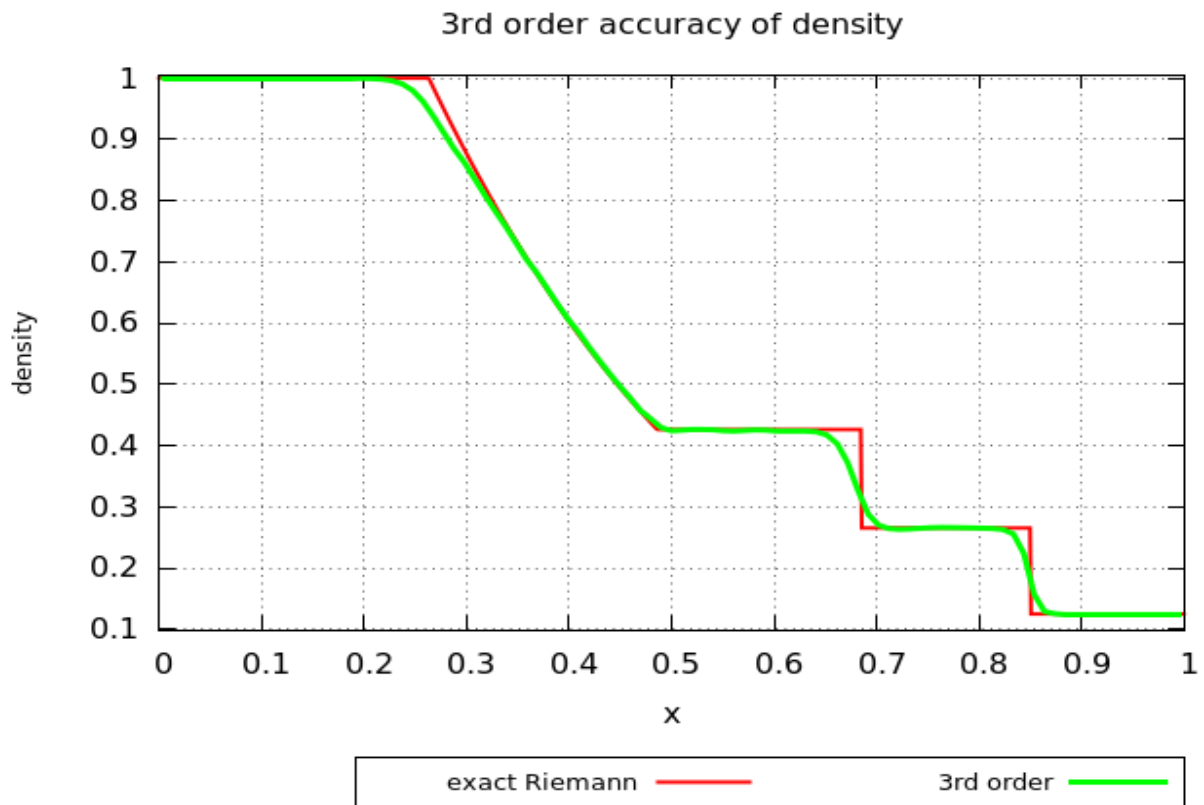
κεντρική ασυνέχεια επαφής διαδίδεται προς τα δεξιά, ενώ ένα κύμα αραίωσης διαδίδεται στα αριστερά της προέλευσης. Το παράδειγμα αυτό ονομάζεται και αλλιώς το πρόβλημα του Sod.

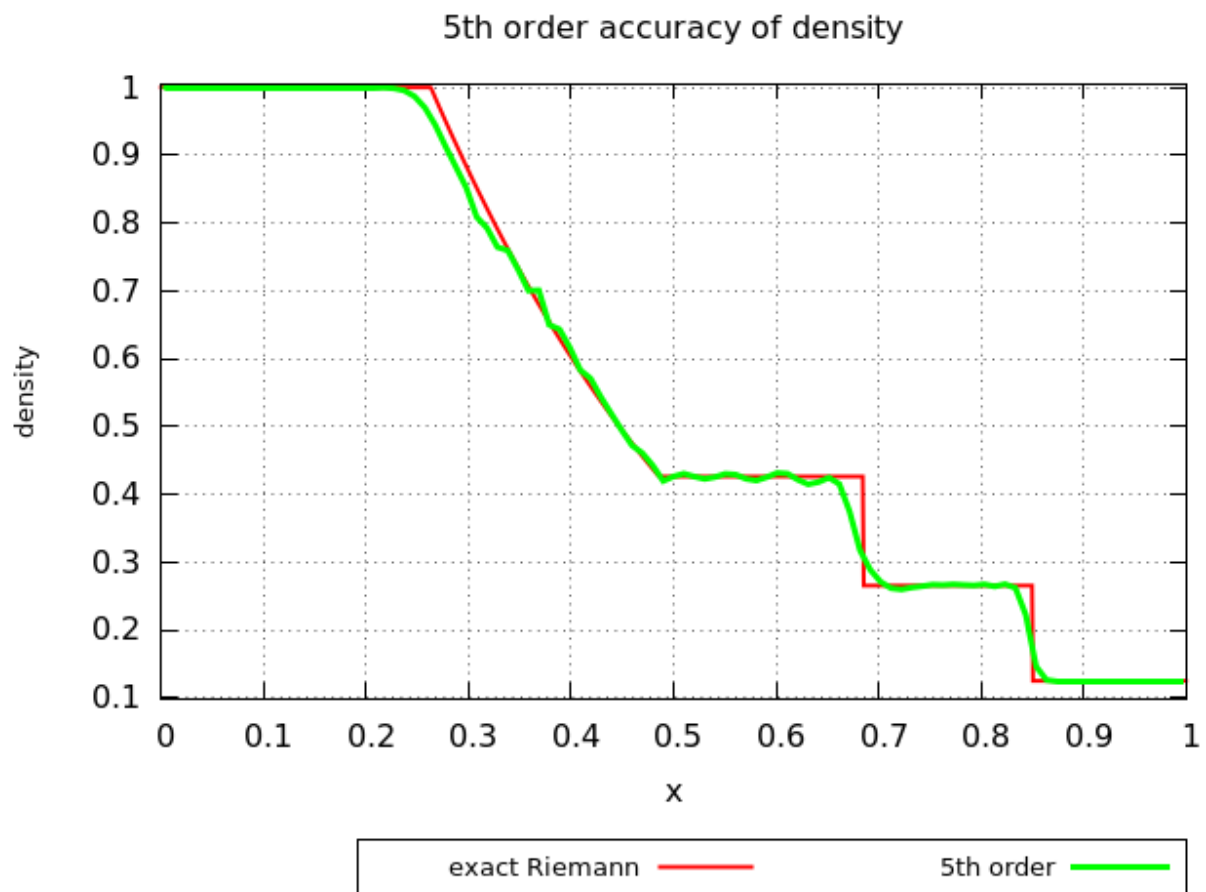
Τα αρχικά δεδομένα είναι για $0 \leq x_L \leq 0.5$ και για $0.5 < x_R \leq 1$:

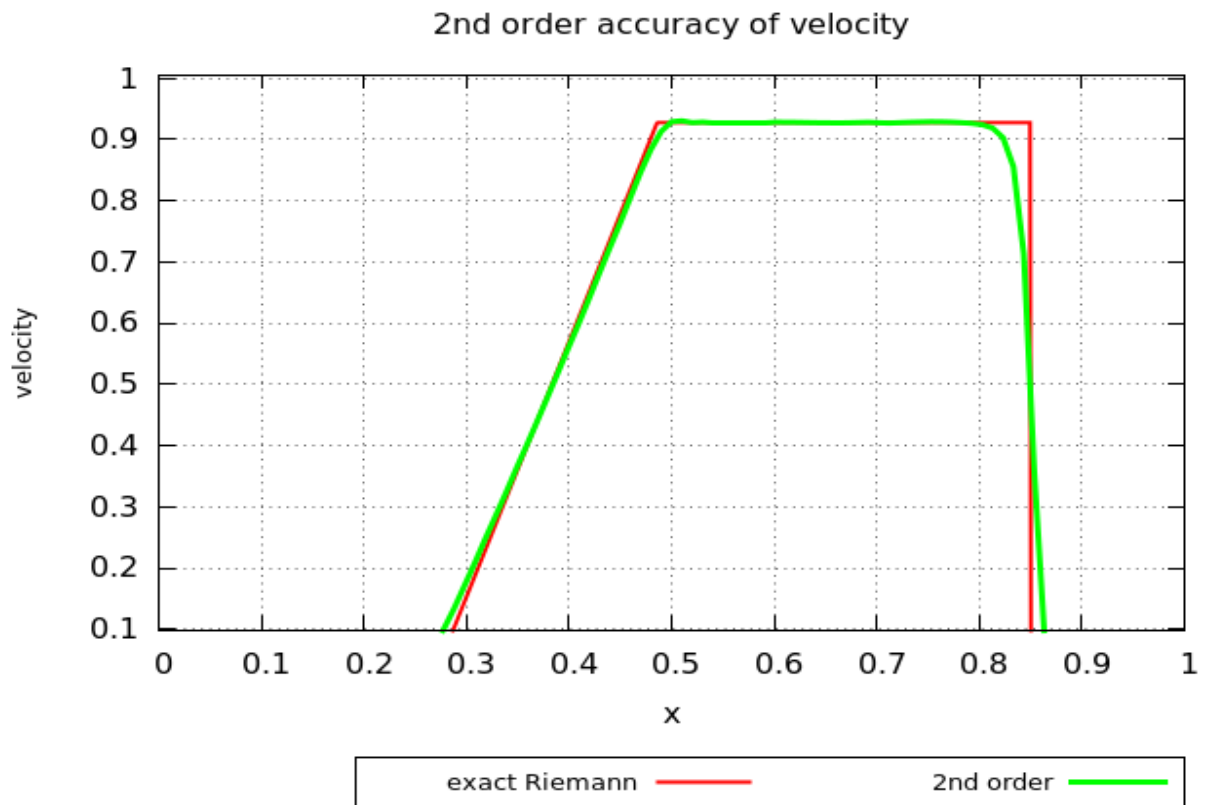
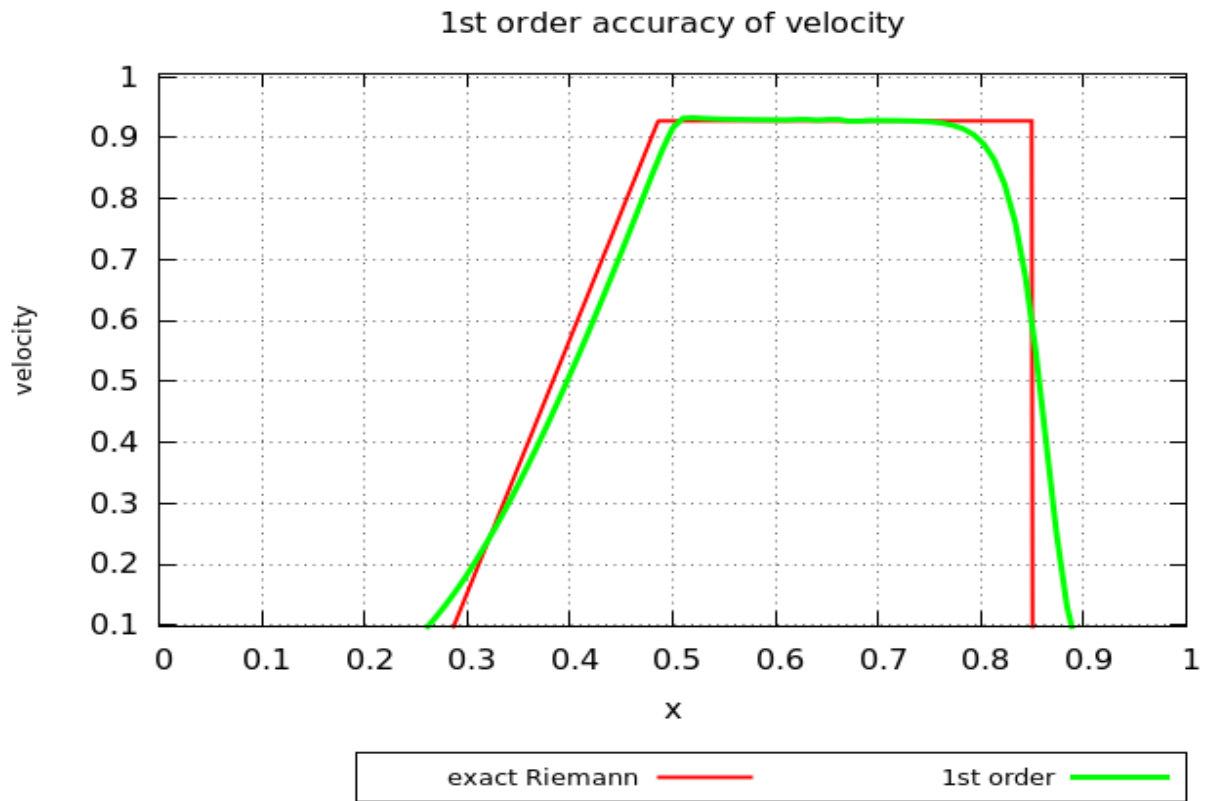
$$\begin{pmatrix} \rho = 1.0 \\ u = 0.0 \\ p = 1.0 \end{pmatrix}_L \quad \& \quad \begin{pmatrix} \rho = 0.125 \\ u = 0.0 \\ p = 0.1 \end{pmatrix}_R$$

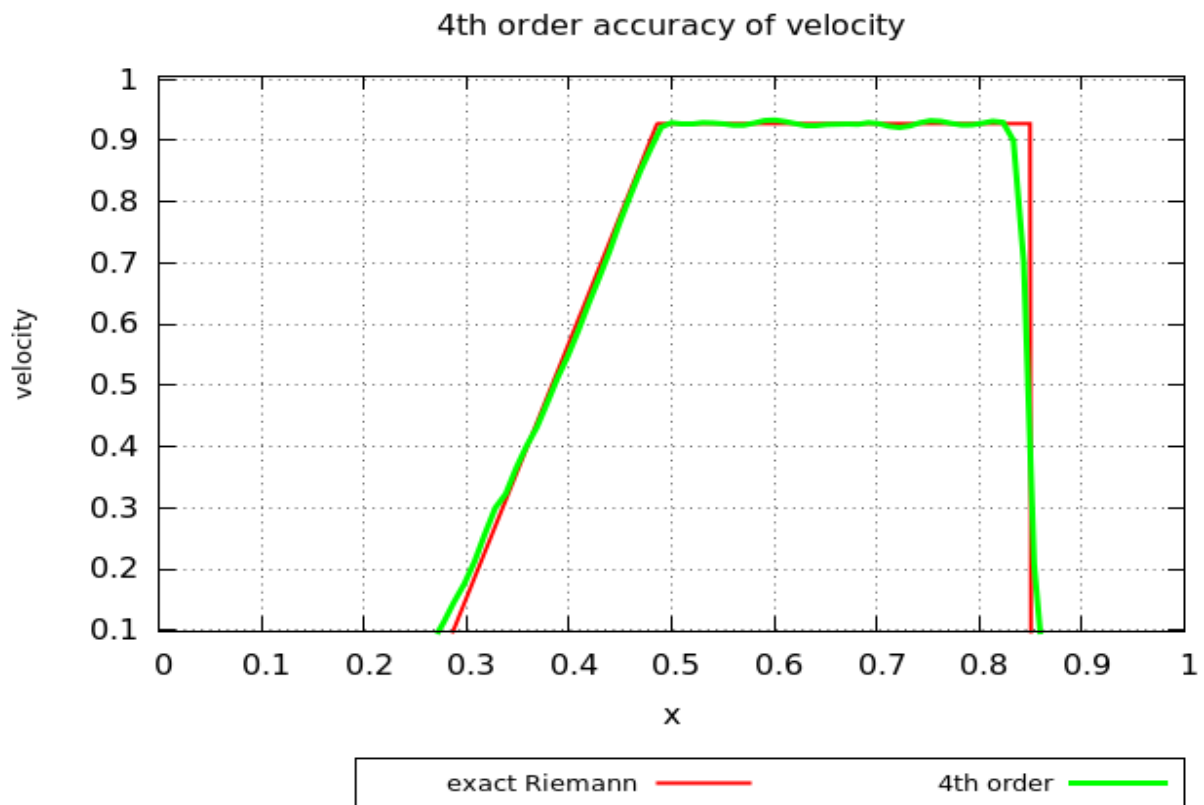
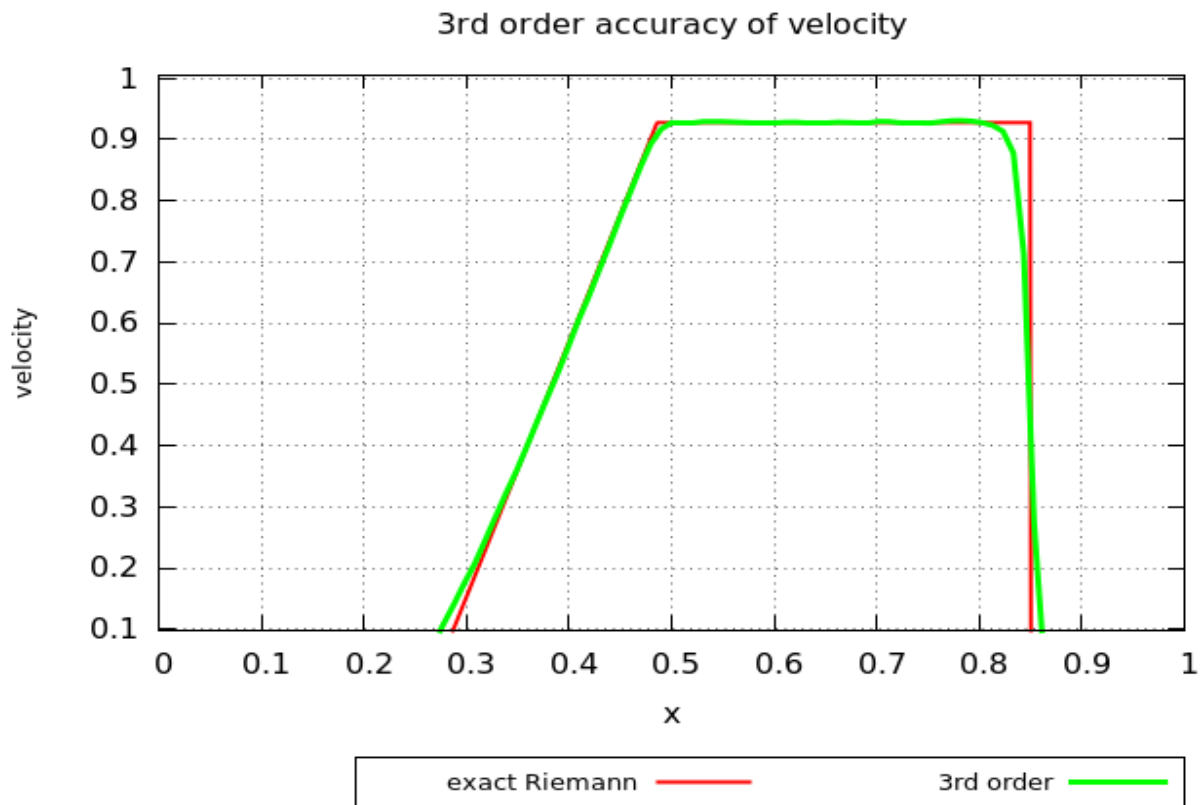
Τα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουν την πυκνότητα, ταχύτητα και πίεση σε στιγμιότυπο χρόνου $t = 0,2s$ με πλέγμα εκατό σημείων και με χρονικό βήμα $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}s$ και CFL . Οι ακρίβειες που απεικονίζονται της πυκνότητας, πίεσης και ταχύτητας είναι από πρώτου έως πέμπτου βαθμού, ενώ συγκρίνονται στα διαγράμματα και με την ακριβή λύση.

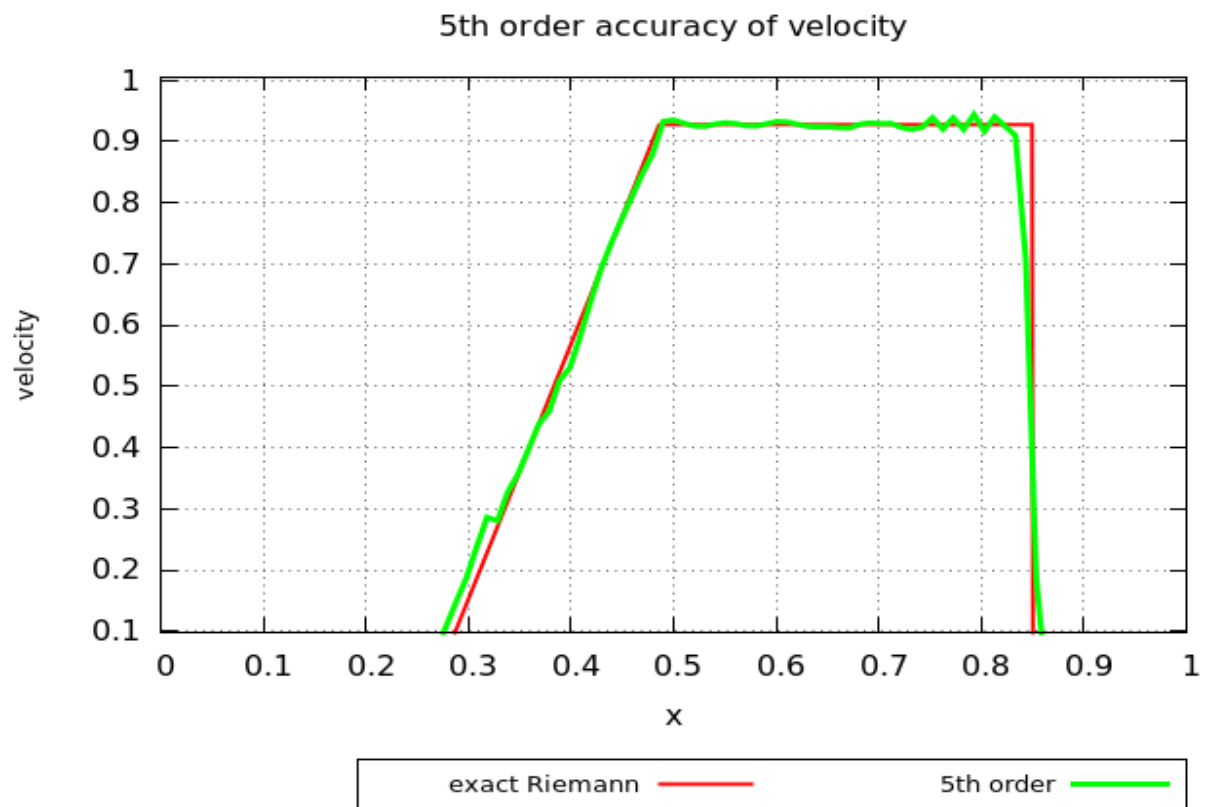


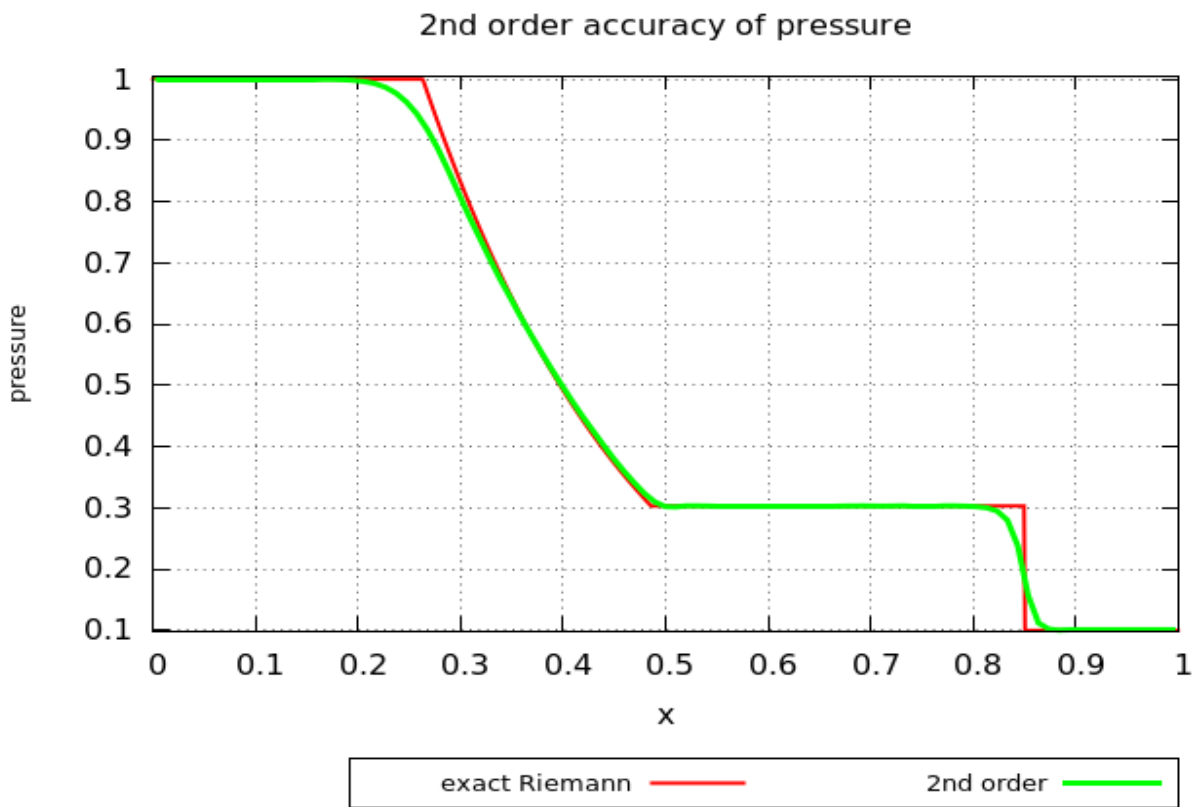
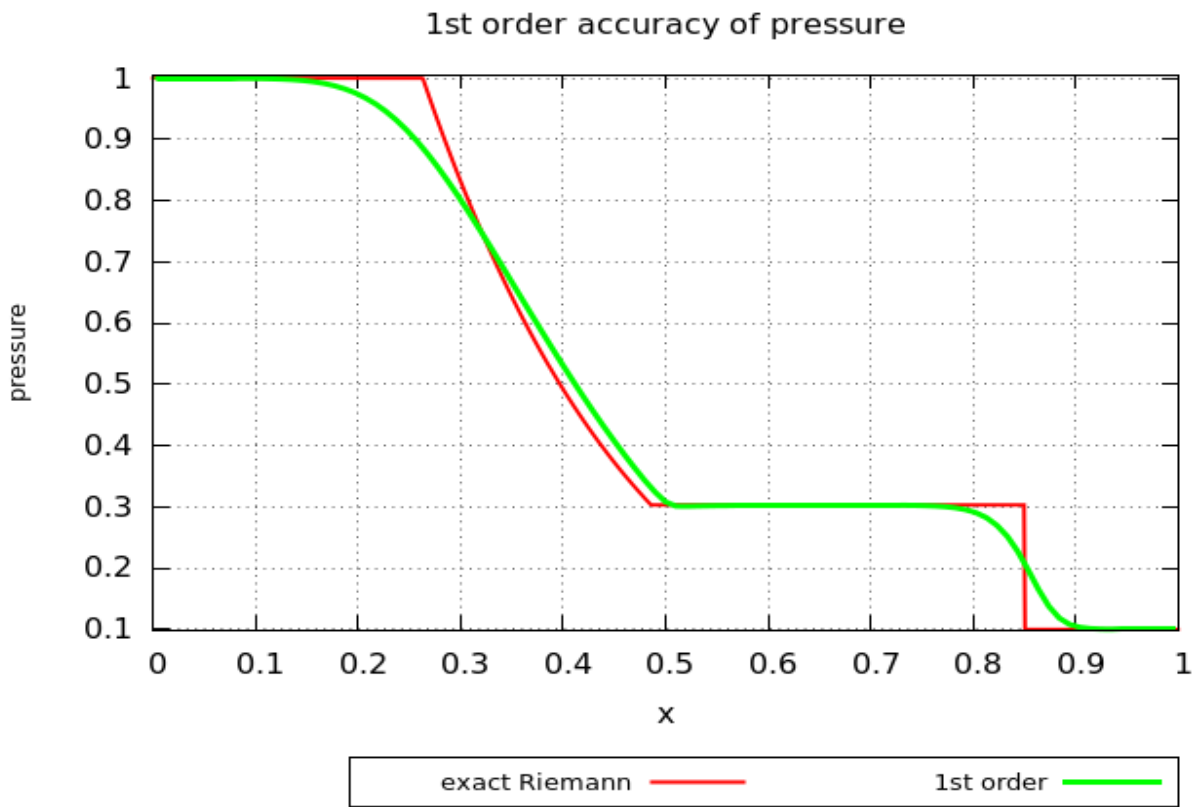


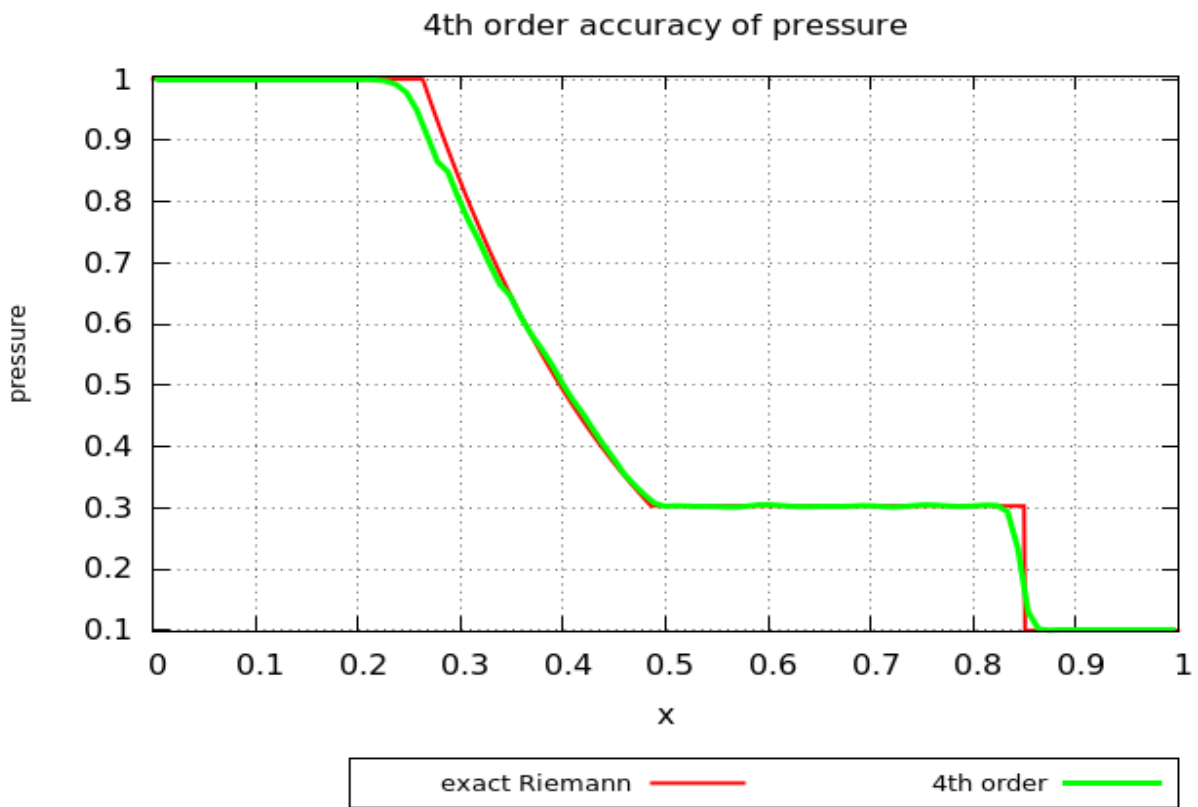
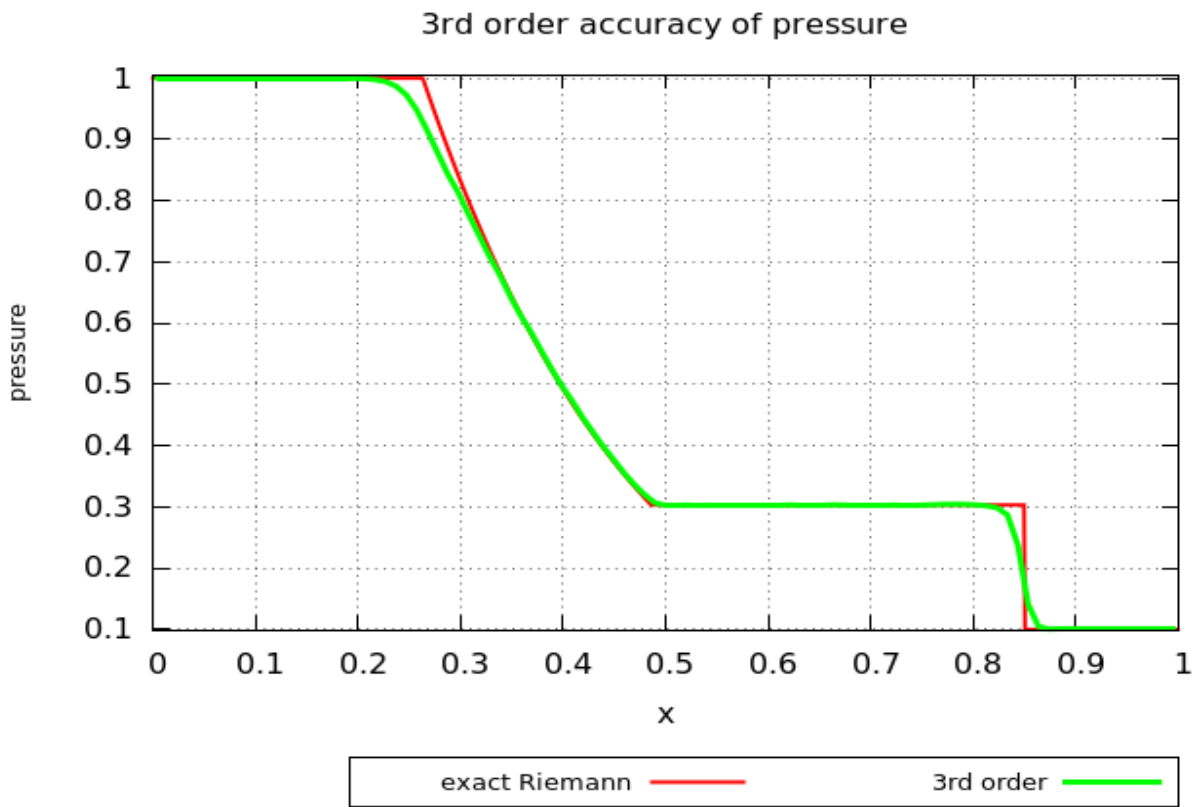


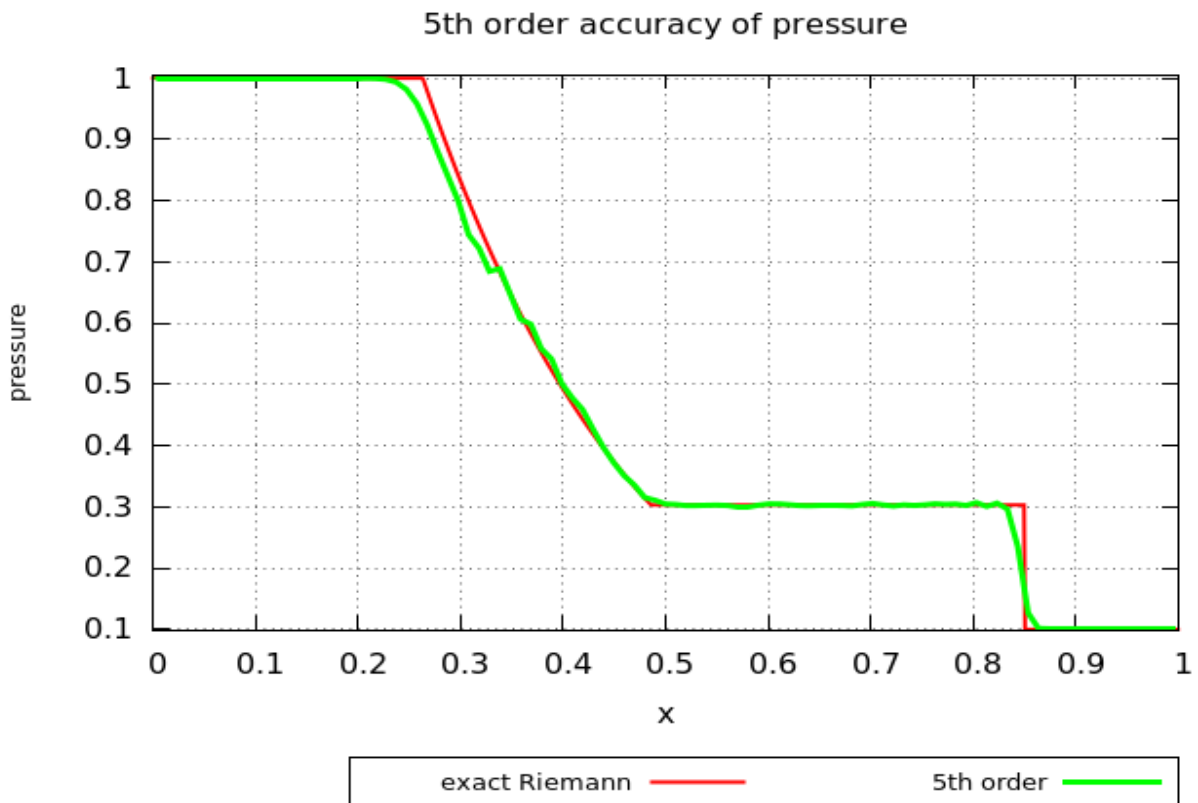












Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η ακρίβεια τόσο πιο κοντά είναι η προσέγγιση στην πραγματική τιμή. Επιπλέον επειδή χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερα σημεία για τον υπολογισμό των μεγεθών τόσο λιγότερα λεία απεικονίζονται τα διαγράμματα. Συνήθως κοντά στις ασυνέχειες στα σχήματα πέμπτου και τέταρτου βαθμού δημιουργούνται πολύ μικρές ταλαντώσεις. Οι ταλαντώσεις αυτές δημιουργούνται κατά την δημιουργία των κυμάτων κρούσης στα σχήματα μεγαλύτερα του τέταρτου βαθμού λόγω του μεγάλου εύρους κελίων. Αρχικά οι ταλαντώσεις έχουν μεγάλο πλάτος το οποίο εξομαλύνονται με την πάροδο του χρόνου. Παρατηρείται ακόμα ότι στα σχήματα του έκτου βαθμού από ένα χρονικό σημείο και μετά οι ταλαντώσεις αυξήθηκαν φτάνοντας σε αδυναμία της λύσης.

3.2 Αλληλεπίδραση δύο κυμάτων κρούσης

Σε αυτό το υποκεφάλαιο παρουσιάζονται τα υπολογιστικά πειράματα των σχημάτων ENO για το πρόβλημα με δύο αλληλοεπιδρώμενα κύματα κρούσης. [5] Οι αρχικές τιμές του πίνακα των μεταβλητών $U(x,t)$, που εμπεριέχει την πυκνότητα, ταχύτητα και πίεση κατανέμονται στον χώρο:

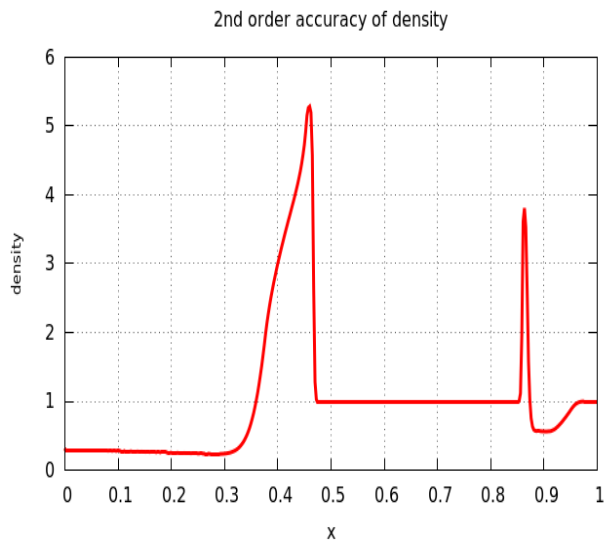
$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & 0 \leq x_L < 0.1 \\ U_M & 0.1 \leq x_M < 0.9 \\ U_R & 0.9 \leq x_R < 1 \end{cases}$$

και οι αρχικές τιμές της πυκνότητας, ταχύτητας και πίεσης ορίζονται:

$$\rho_L = \rho_M = \rho_R = 1, \quad u_L = u_M = u_R = 0, \quad P_L = 10^3, \quad P_M = 10^{-2}, \quad P_R = 10^2$$

Οι οριακές συνθήκες και σε αυτήν την περίπτωση βρίσκονται για $x=1, x=0$ και είναι στερεοί τοίχοι έχοντας σαν αποτέλεσμα και εδώ να χρησιμοποιηθούνε αντανεκλαστικές οριακές συνθήκες. Το συγκεκριμένο πρόβλημα προτάθηκε από τον Woodward και τον Colella. Σημειώνεται ότι στην παραβολική παρεμβολή υπάρχει ένα διάστημα το οποίο είναι αρνητικό. Το ίδιο μπορεί να συμβεί για υψηλής τάξης πολυώνυμα. Παρόμοια κατάσταση συμβαίνει και στα αλληλεπιδραζόμενα κύματα κρούσης όπου η πυκνότητα και η πίεση αποκτούν αρνητικές τιμές. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η περίπτωση, που λαμβάνει χώρα λίγο πριν την αλληλεπίδρασή τους, μειώνεται η τάξη ανακατασκευής τοπικά, επιπλέον λόγω της τοπικής μείωσης δεν μειώνεται η ασυμπτωτική τάξη της ακρίβειας και ως μειωθεί τοπικά μέχρι και ως πρώτου βαθμού.

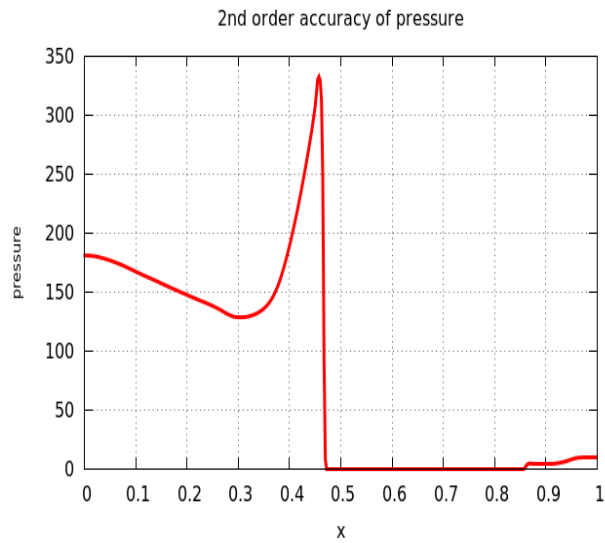
Στα παρακάτω διαγράμματα αναπαριστούνται η πυκνότητα, η ταχύτητα και η πίεση των δύο κυμάτων, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές για ακρίβεια σχημάτων ENO δεύτερης και τέταρτης τάξης. Το χωρίο διακριτοποιείται σε 200 σημεία για τετάρτου βαθμού ακρίβεια και σε 400 κόμβους για δευτέρου βαθμού ακρίβεια. Επιπλέον μελετάται για τις χρονικές στιγμές $t=0,016s$, $t=0,038s$ και $t=0,048s$. Οι χρονικές στιγμές ανταποκρίνονται για πριν την σύγκρουση των δύο κυμάτων ($t=0,016s$), την σύγκρουση ($t=0,038s$) και όταν τα δύο κύματα προσπεράσουν το ένα το άλλο ($t=0,048s$).



2nd order

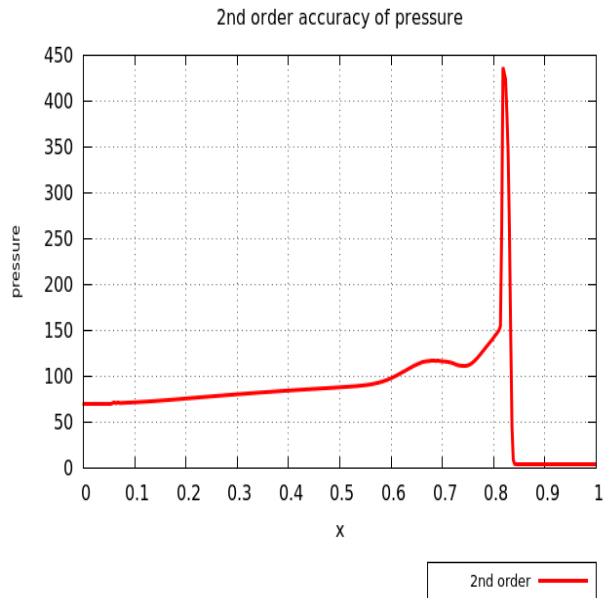
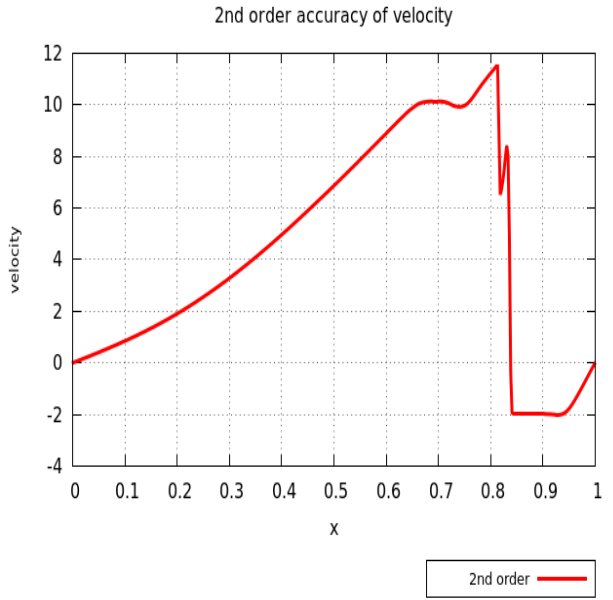
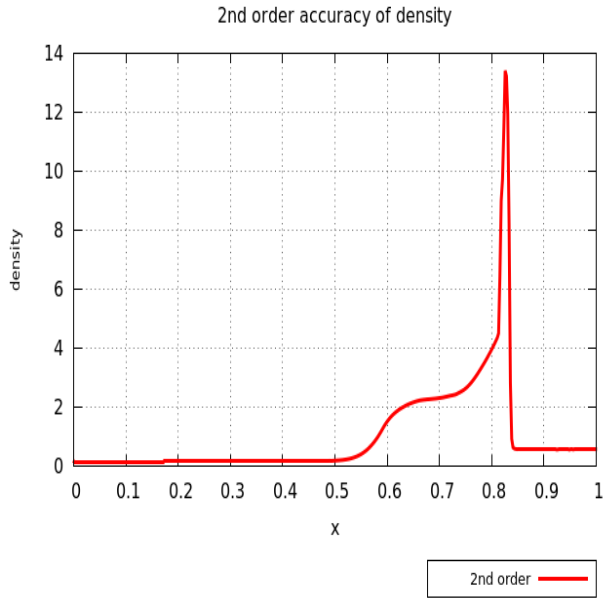


2nd order

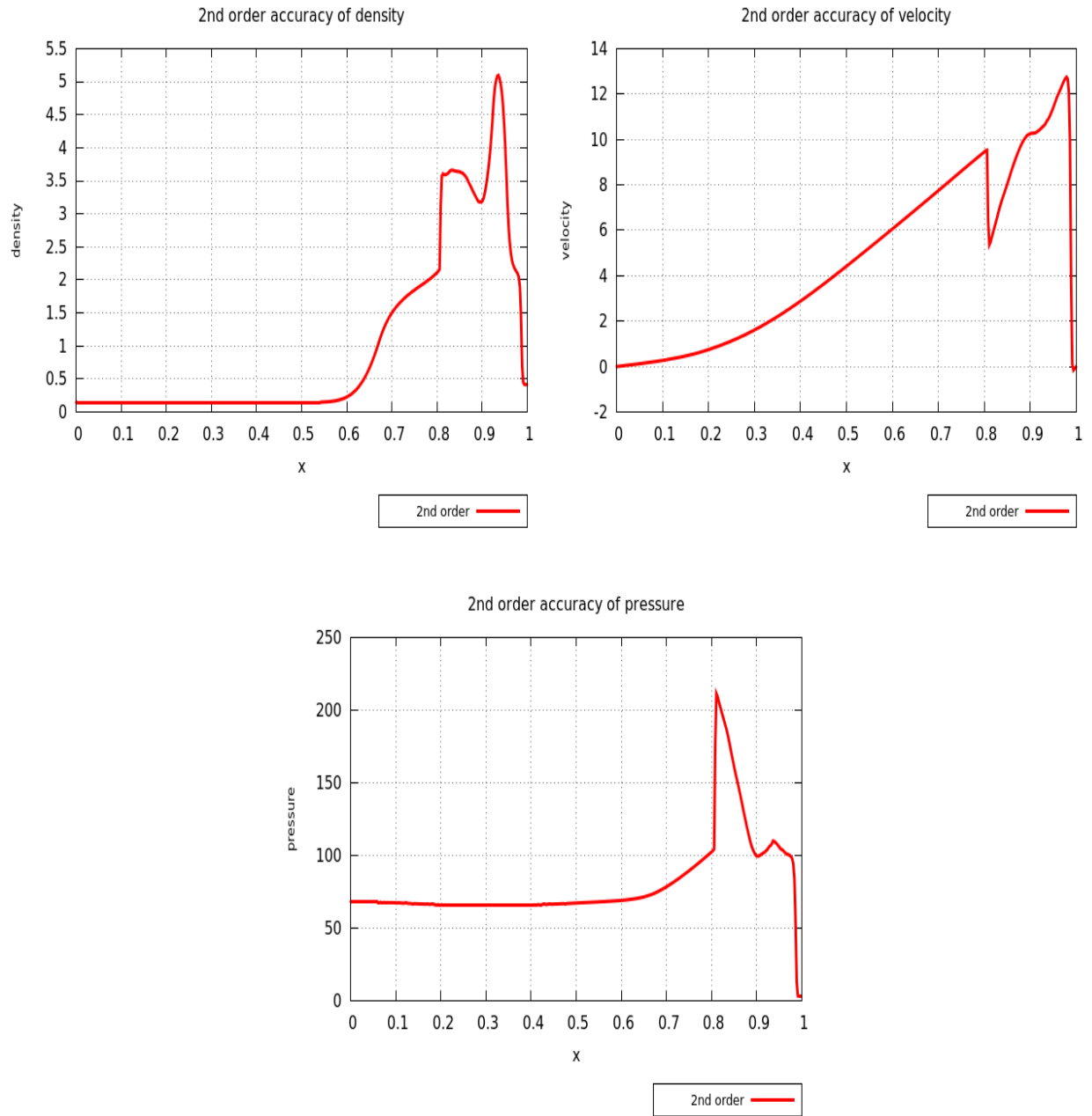


2nd order

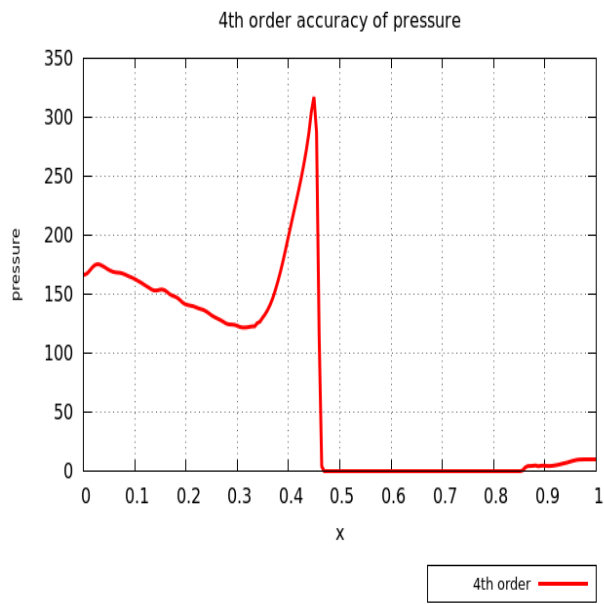
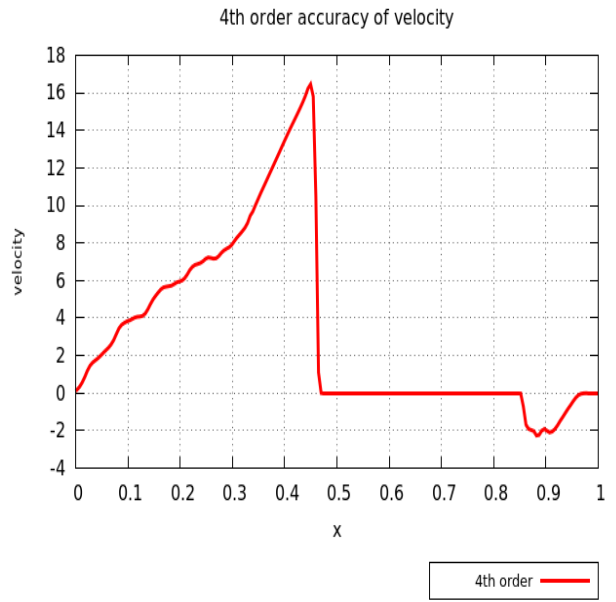
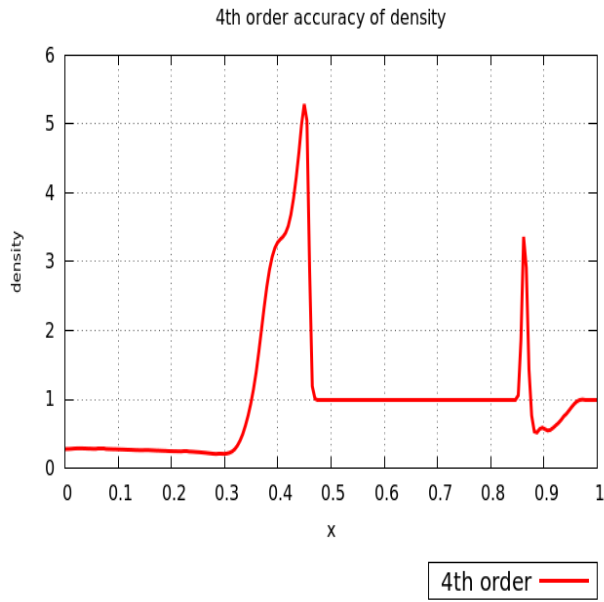
Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler



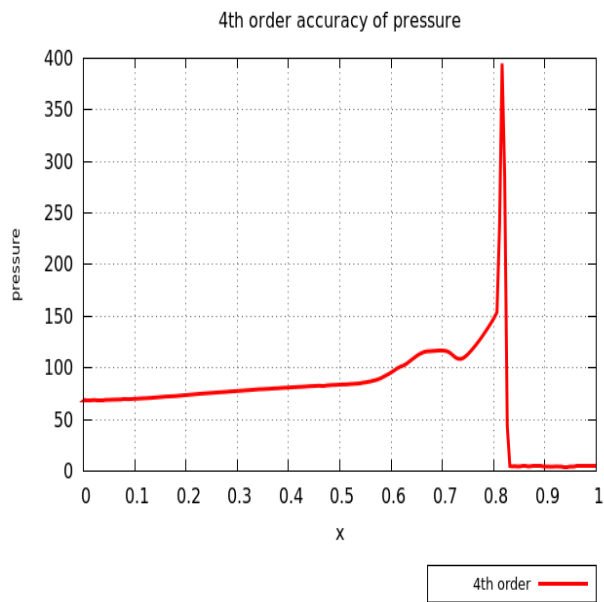
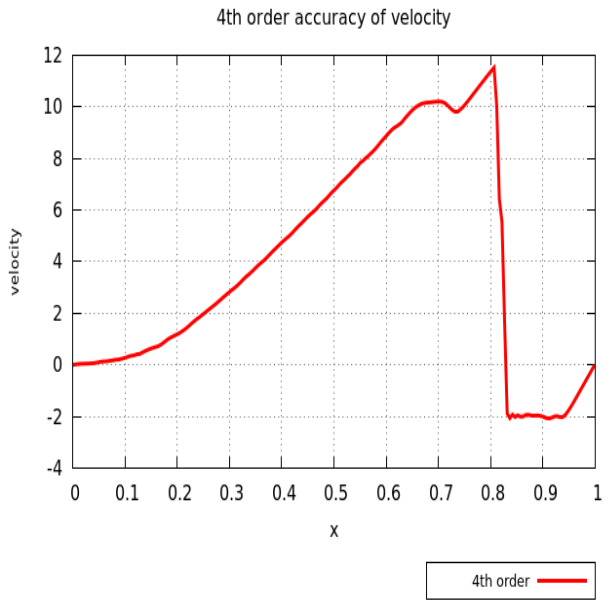
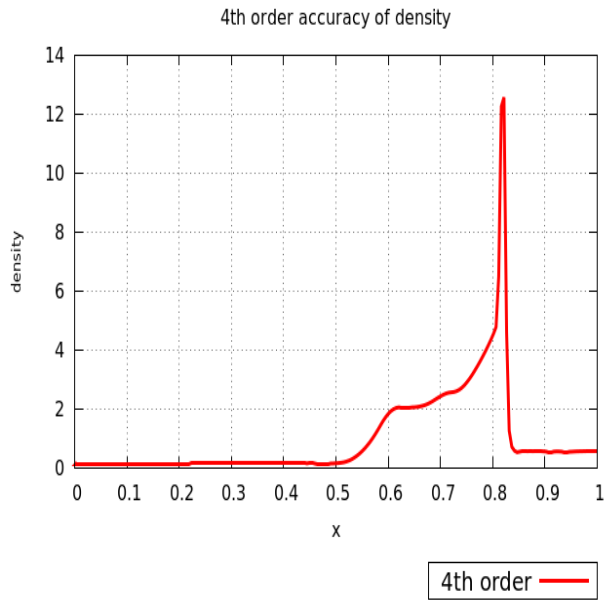
Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler

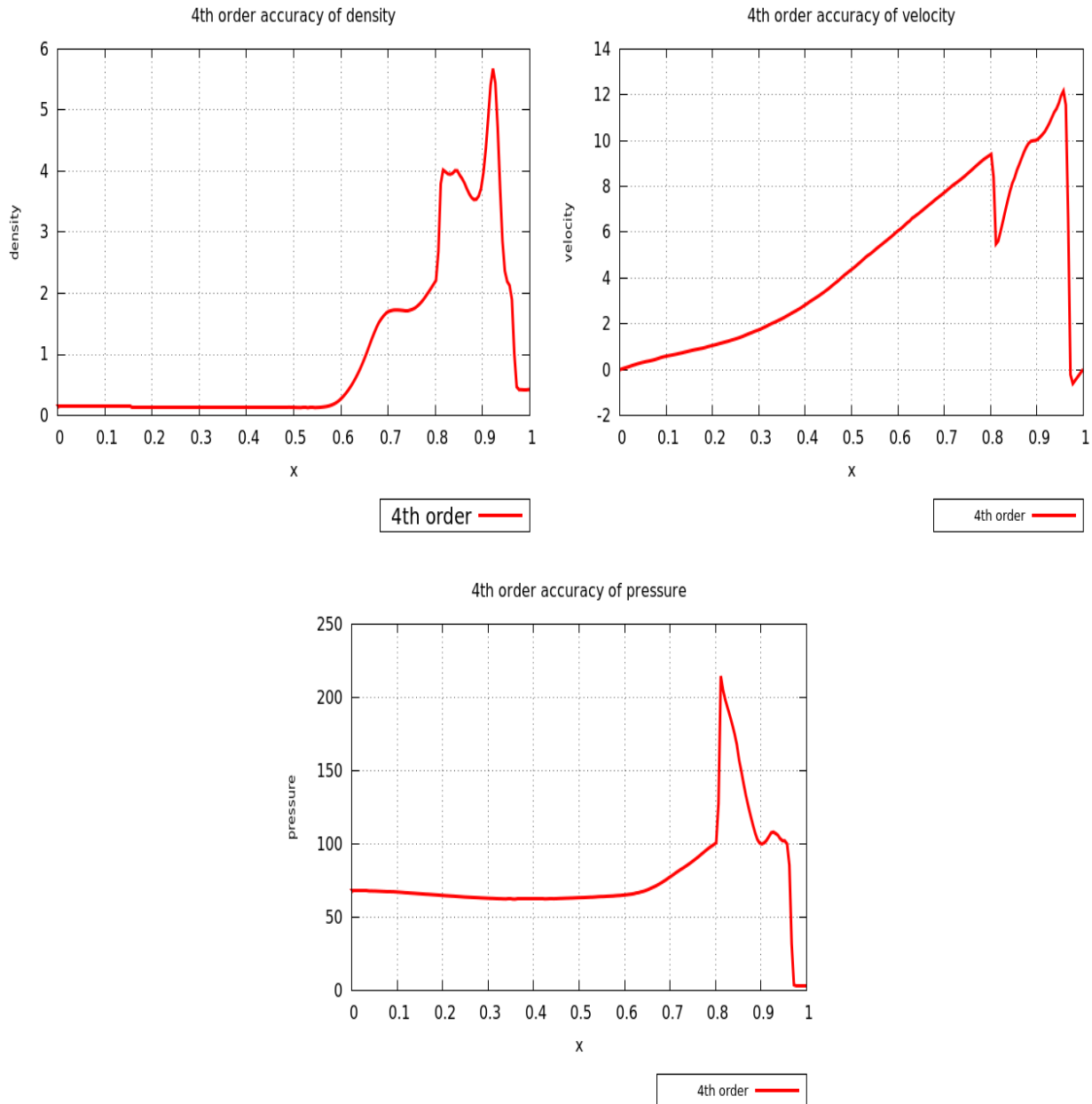


Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler



Εφαρμογή της μεθόδου ENO στις εξισώσεις Euler





Αυξάνοντας την διακριτοποίηση καταφέραμε του δεύτερου βαθμού ακρίβειας προσεγγιστική λύση να είναι τείνει πιο πολύ στου τετάρτου βαθμού κυρίως στα προφίλ ταχύτητας και πίεσης. Στην περίπτωση της πυκνότητας υπάρχει μία διαφορά στα αποτελέσματα κυρίως στην τελευταία χρονική στιγμή λόγω της ύπαρξης τριών ασυνεχειών, όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος μείωσης της ακρίβειας. Όποτε για παροχή αποτελεσμάτων δευτέρου βαθμού που μπορούν να προσεγγίζουν τα αποτελέσματα των υψηλών σχημάτων καθίσταται δυνατόν μόνο με την αύξηση της διακριτοποίησης.

4 Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε SPH.

4.1 Εισαγωγή

Τα ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια(SPH) είναι μία λαγκρασιανή μέθοδος που παρουσιάστηκε αρχικά από τον Gingold και τον Monaghan, με σκοπό να παρουσιάσει προβλήματα στην φυσική παρακάμπτοντας τα όρια των πλεγμιακά διαμορφωμένων μεθόδων. Η μέθοδος αυτή είναι μία διαδεδομένη υπολογιστική τεχνική που έχει εφαρμοστεί σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων, από συμπίεστη μηχανική των ρευστών , μέχρι στην αστροφυσική και στις αλληλεπιδράσεις των ροών. Αν και η μέθοδος αυτή έχει τα θετικά των λαγκρασιανών συστημάτων, όπως αυτόματη προσαρμοστικότητα και υπολογιστική σταθερότητα, περιορίζεται στον χειρισμό προβλημάτων διάχυσης.

Στην συγκεκριμένη περιγραφή το ρευστό αντιπροσωπεύεται από σωματίδια ,τα οποία ακολουθούν την κίνηση του ρευστού, η κίνηση τους είναι συλλογική και μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις κλασικές νευτωνειακές υδροδυναμικές σχέσεις. Τα σωματίδια είναι κόμβοι στο χώρο και το καθένα έχει φυσικά μεγέθη όπως: μάζα(m_a), πυκνότητα(ρ_a), θέση(r_a), ταχύτητα(u_a) και πίεση(p_a), όλες οι άλλες ποσότητες που τα διέπουν προκύπτουν από παρεμβολή στις ποσότητες αυτές ή άλλες στοιχειώδεις σχέσεις.

4.2 Εξισώσεις Lagrange.

Στην θεώρηση κατά Lagrange υπολογίζεται η υλική παράγωγος που αποτελείται από το άθροισμα της χρονικής παραγώγου και της παραγώγου συναγωγής [7]. Για ένα βαθμωτό μέγεθος f ισχύει:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.1)$$

όπου

- $\frac{Df}{Dt}$ είναι η χρονική παράγωγος κατά Lagrange (υλική παράγωγος)
- $\frac{\partial f}{\partial t}$ είναι η χρονική παράγωγος κατά Euler
- $\vec{v} = (u, v, w)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ είναι η χωρικές παράγωγοι της f ως προς x, y, z

Στη θεώρηση κατά Lagrange ο όγκος ελέγχου κινείται ακολουθώντας τη ροή, με συνέπεια η ποσότητα ρευστού να μένει εντός του όγκου ελέγχου. Με άλλα λόγια, ο όγκος ελέγχου μπορεί να παραμορφωθεί, αλλά η μάζα του μένει ίδια. Η συνολική μεταβολή του όγκου κατά Lagrange ενός όγκου ελέγχου, μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{D(\Delta V)}{Dt} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (4.2)$$

Όπου ΔV είναι η μεταβολή του όγκου.

4.2.1 Εξίσωση συνέχειας.

Η εξίσωση της συνέχειας εκφράζεται με την διατήρηση της μάζας:

$$\Delta m = \rho \Delta V \quad (4.3)$$

και επειδή στην Lagrange περιγραφή η μάζα δεν μεταβάλλεται:

$$\frac{D(\Delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \Delta V)}{Dt} = \Delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\Delta V)}{Dt} = 0 \quad (4.4)$$

ξαναγράφοντας την (4.4) συσχετίζοντας την (4.2) βγαίνει:

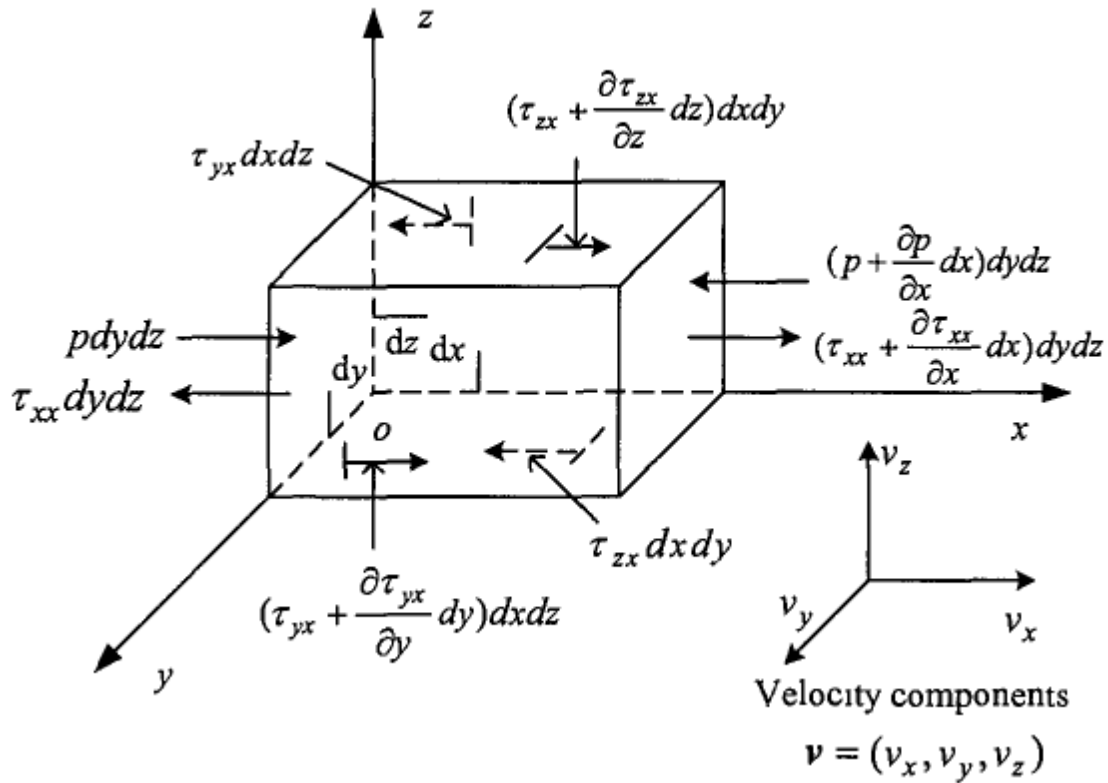
$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \quad (4.5)$$

Για μονοδιάστατη περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο η εξίσωση (4.5) γίνεται:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.6)$$

4.2.2 Εξίσωση ορμής

Η εξίσωση της ορμής βασίζεται στην διατήρηση της ορμής, όπου στην μηχανική αναπαρίσταται από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα σύμφωνα με τον οποίο η συνισταμένη δύναμη πάνω στον Lagrangian όγκο ελέγχου ισούται με τη μάζα του επί την επιτάχυνσή του.



Σχήμα 4 Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα κελί κατά Lagrange [7]

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον παραπάνω όγκο ελέγχου είναι επιφανειακές δυνάμεις και δυνάμεις σώματος. Δυνάμεις σώματος είναι η βαρύτητα, μαγνητικές δυνάμεις ή άλλες δυνάμεις που ασκούνται σε όλο τον όγκο ελέγχου του ρευστού. Η εξίσωση της ορμής σε κάθε άξονα είναι:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x \quad (4.7)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho F_y \quad (4.6)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial w} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho F_z \quad (4.7)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων για μονοδιάστατη μη συνεκτική ροή χωρίς εξωτερικές δυνάμεις να επηρεάζουν το σύστημα γίνεται:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.8)$$

4.2.3 Εξίσωση ενέργειας

Η εξίσωση της ενέργειας βασίζεται στην διατήρηση της ενέργειας, η οποία αναπαρίσταται από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο. Σύμφωνα με την εξίσωση της ενέργειας ο ρυθμός αλλαγής της ενέργειας μέσα σε έναν όγκο ρευστού θα πρέπει να ισούται με το άθροισμα της ροής της θερμότητας και τον ρυθμό του έργου που πραγματοποιείται από τις επιφανειακές δυνάμεις στον όγκο ρευστού αυτού.

Η εξίσωση της ενέργειας παίρνει την μορφή:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \tau_{xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4.9)$$

όπου για μη συνεκτικό ρευστό 1 διάστασης η υλική παράγωγος της εσωτερικής ενέργειας γίνεται:

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.10)$$

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κλείνει με την εισαγωγή της εξίσωσης του ιδανικού αερίου:

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (4.11)$$

όπου $\gamma = 1.4$

4.3 Βασική σύνθεση της μεθόδου ομαλών υδροδυναμικών σωματιδίων (SPH)

Η σύνθεση [9] της SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) μεθόδου χωρίζεται συνήθως σε δύο στάδια. Το πρώτο βήμα είναι η ολοκληρωματική αναπαράσταση συνάρτησης ή η προσέγγιση συνάρτησης πυρήνα και το δεύτερο βήμα είναι η σωματιδιακή προσέγγιση. Αρχικά στο πρώτο στάδιο η ολοκλήρωση του πολλαπλασιασμού μίας αυθαίρετης συνάρτησης και μίας ομαλής συνάρτησης πυρήνα δίνει την προσέγγιση του πυρήνα στην μορφή ολοκληρωματικής αναπαράστασης της συνάρτησης. Η ολοκληρωματική αναπαράσταση της συνάρτησης υπολογίζεται αθροίζοντας τις τιμές των γειτονικών σωματιδίων τα οποία αποδίδουν την σωματιδιακή προσέγγιση της συνάρτησης σε ένα σημείο ή σωματίδιο.

4.3.1 Ολοκληρωματική αναπαράσταση συνάρτησης

Η ιδέα της ολοκληρωματικής αναπαράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ που εφαρμόζεται στην SPH μέθοδο αρχίζει από την ακόλουθη ταυτότητα:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (4.12)$$

όπου $\delta(x - x')$ είναι η Dirac delta συνάρτηση:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases} \quad (4.13)$$

Αμα η Delta συνάρτηση Dirac αντικατασταθεί με μία ομαλή συνάρτηση πυρήνα $W(x - x', h)$ η ολοκληρωματική αναπαράσταση της συνάρτησης $f(x)$ γίνεται:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (4.14)$$

Στην παραπάνω εξίσωση το h είναι το μήκος ομαλοποίησης που καθορίζει την επιρροή της συνάρτησης πυρήνα W . Στην σύμβαση SPH ο τελεστής της προσέγγισης του πυρήνα γράφεται με $\langle \rangle$ οπότε η εξίσωση (4.14) γράφεται:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (4.15)$$

Η συνάρτηση ομαλοποίησης W είναι συνήθως άρτια και πρέπει να ικανοποιεί τρεις προϋποθέσεις.

- Η πρώτη προϋπόθεση που πρέπει να πληροί είναι η συνθήκη της ενότητας, ή αλλιώς ονομαζόμενη συνθήκη ομαλοποίησης:

$$\int_{\Omega} W(x-x',h)dx' = 1 \quad (4.16)$$

- Η δεύτερη είναι η ιδιότητα της Delta συνάρτησης όπου παρατηρείται όταν το μήκος ομαλότητας τείνει στο μηδέν. Τότε η συνάρτηση πυρήνα τείνει να γίνει η συνάρτηση Dirac:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x',h) = \delta(x-x') \quad (4.17)$$

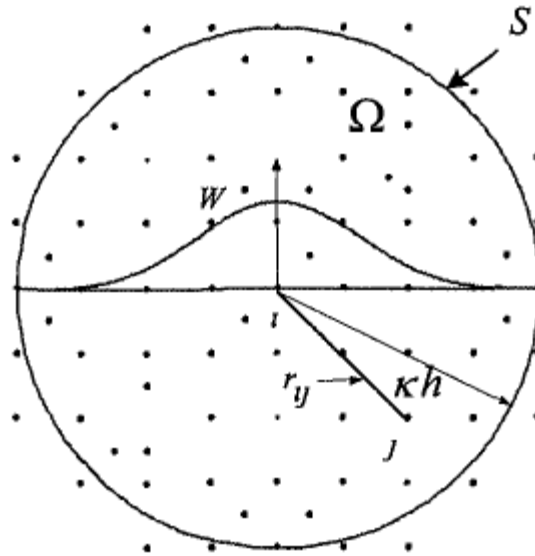
- Τέλος πρέπει να είναι συμπαγής. Να μηδενίζεται όταν είναι εκτός υπολογιστικού χωρίου το χωρίο υποστήριξης:

$$W(x-x',h) = 0 \quad \text{όταν} \quad |x-x'| > kh$$

όπου k μία σταθερά που σχετίζεται με το μήκος ομαλότητας .

4.3.2 Σωματιδιακή προσέγγιση

Στην μέθοδο SPH ολόκληρο το σύστημα αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σωματιδίων, όπου το καθένα ξεχωριστά έχει την δικιά του μάζα και καταλαμβάνει τον δικό του χώρο. Αυτές οι ιδιότητες επιτυγχάνονται μέσω της σωματιδιακής προσέγγισης και επομένως ολοκληρωματικές προσεγγίσεις μπορούν να μετατραπούν σε αθροίσματα πεπερασμένων όρων.



Σχήμα 5 Σωματιδιακή προσέγγιση χρησιμοποιώντας σωματίδια στο κυκλικό χωρίο υποστήριξης ακτίνας κh . [8]

Η σχέση (4.14) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\langle f(r) \rangle = \sum_{j=1}^N V_j f(r_j) W_{ij} \quad (4.18)$$

όπου r_j είναι η θέση του σωματιδίου j , $j = (1, 2, \dots, N)$ όπου N ο αριθμός των σωματιδίων, V_j είναι ο όγκος του σωματιδίου j :

$$V_j = \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4.19)$$

m_j η μάζα του σωματιδίου j , ρ_j η πυκνότητα του σωματιδίου j και $W_{ij} = W(r_i - r_j, h)$.

Αντίστοιχη είναι και η προσέγγιση της παραγώγου:

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \sum_{j=1}^N V_j f(r_j) \nabla W_{ij} \quad (4.20)$$

Η εξίσωση (4.20) δεν είναι σε συμμετρική μορφή, όταν η παραγωγή είναι κεντρική στην τοποθεσία ενός σωματιδίου γράφεται:

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \sum_{j=1}^N V_j (f(r_j) - f(r_i)) \nabla W_{ij} \quad (4.21)$$

4.3.3 Η μορφοποίηση των εξισώσεων Lagrange με την SPH μέθοδο.

4.3.3.1 Εξίσωση συνέχειας

Η εξίσωση της [8] συνέχειας μπορεί να διακριτοποιηθεί ορίζοντας την πυκνότητα του ρευστού μέσω μιας παρεμβολής των ξεχωριστών μαζών των σωματιδίων.

$$\rho_i(r) = \sum_{j=1}^N m_j W(r_i - r_j, h) \quad (4.22)$$

Αλλιώς η εξίσωση (4.6) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N V_j \vec{v}_j \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (4.23)$$

Τροποποιώντας την (4.23) σε συμμετρική εξίσωση γίνεται:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^N V_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i) \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (4.24)$$

Η εξίσωση (4.24) που είναι σε συμμετρική μορφή παρέχει ακριβείς προσομοιώσεις σε σύγκριση με την (4.23) .

4.3.3.2 Εξίσωση ορμής

Η εξίσωση (4.8) που είναι απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης της ορμής για μονοδιάστατο μη συνεκτικό ρευστό χωρίς πηγές δυνάμεων και βαρυτική δύναμη παίρνει την μορφή:

$$\left\langle \rho \frac{Dv}{Dt} \right\rangle_i = - \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i \quad (4.25)$$

Το σύμβολο $\langle \rangle_i$ δηλώνει την διακριτική ποσότητα για το σωματίδιο i .

Εφαρμόζοντας την μέθοδο SPH και για την παράγωγο της πίεση στην εξίσωση (4.25) :

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N V_j (p_j - p_i) \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (4.26)$$

4.3.3.3 Εξίσωση ενέργειας

Παρόμοια η εξίσωση(4.10) που εφαρμόζεται για μονοδιάστατο μη συνεκτικό ρευστό παίρνει την μορφή:

$$\left\langle \frac{De}{Dt} \right\rangle_i = - \left\langle \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_i \quad (4.27)$$

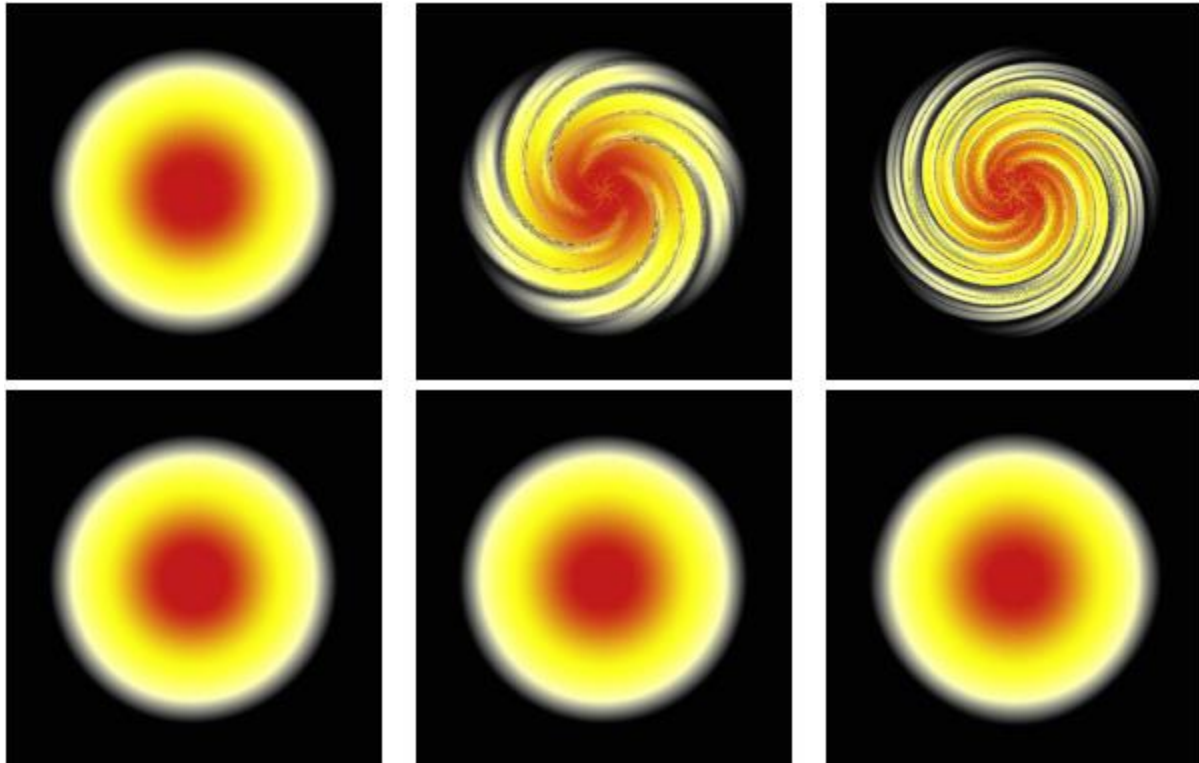
Αναπτύσσοντας την (4.27) πιο λεπτομερώς μέσω SPH μεθόδου παίρνει την μορφή:

$$\left\langle \frac{De}{Dt} \right\rangle_i = - \frac{p_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N V_j (v_j - v_i) \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (4.28)$$

4.3.4 Ανακατανομή των σωματιδίων(Remeshing)

Οι μέθοδοι σωματιδίων, [9] όταν εφαρμόζονται στην lagrangian διαμόρφωση των εξισώσεων μετάδοσης και διάχυσης, έχουν το προνόμιο της αυτόματης προσαρμοστικότητας των υπολογιστικών στοιχείων όπως υπαγορεύεται από τον χάρτη της ροής. Η συγκεκριμένη προσαρμοστικότητα έρχεται εις βάρος της κανονικότητας της κατανομής των σωματιδίων, επειδή τα σωματίδια προσαρμόζονται στις κλίσεις του πεδίου ροής. Η αριθμητική ανάλυση των μεθόδων των σωματιδίων δείχνουν ότι το σφάλμα αποκοπής της μεθόδου αυξάνεται εκθετικά στον χρόνο με ρυθμό που δίνεται από τις παραγώγους της πρώτης τάξης της ροής που σχετίζονται με την ποσότητα της τάσης της ροής. Στην πράξη η παραμόρφωση των σωματιδίων μπορεί να οδηγήσει στην δημιουργία και εξέλιξη λανθασμένων δομών στροβίλου λόγω της ανακριβούς διακριτότητας περιοχών υψηλής διατμητικών τάσεων και σε μη ακριβείς προσεγγίσεις συνδεδεμένων τελεστών παραγώγων.

Για να διορθωθεί αυτή η κατάσταση δημιουργήθηκαν τεχνικές επεξεργασίας της θέσης επαναεγκαθιστώντας το παραμορφωμένο σωματιδιακό πεδίο σε ένα κανονικοποιημένο σύνολο σωματιδίων και συγχρόνως με ακρίβεια να μεταφέρει τις ποσότητες των σωματιδίων. Ένας τρόπος για να κανονικοποιηθούν τα σωματίδια είναι η ρύθμιση των καινούργιων σωματιδίων να είναι στις θέσεις κόμβων του δικτύου και να υπολογίζουν ξανά τις μεταφερόμενες ποσότητες με την διαδικασία δικτύου των σωματιδίων.



Σχήμα 6 ένα 2D αξονοσυμμετρικού πεδίου στροβιλισμού χωρίς ιξώδες σε χρόνους : $t=0.01$, $t=0.10$, $t=0.15$ [9]

Στο παραπάνω σχήμα γίνεται αντιληπτό για πιο λόγο πραγματοποιείται η διαδικασία της ανανέωσης σωματιδίων (Remeshing). Μια προσομοίωση χωρίς πλέγμα σωματιδίων παράγουμε λανθασμένα αποτελέσματα τα οποία αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου(πάνω εικόνες).

Σε αντίθεση τα τρία κάτω σχήματα παρατηρείται ότι η ανανέωση σωματιδίων επιτρέπει στην μέθοδο να διατηρεί το αξονοσυμμετρικό προφίλ και να παρέχει ακριβείς λύσεις στις συναρτήσεις Euler.

Οι παρεμβολές που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την διπλωματική χωρίζονται σε συνήθεις, ομαλοποιημένες παρεμβολές καθώς και αυτές που είναι κοντά στα στερεά όρια.

4.3.4.1 Συνήθεις παρεμβολές

Για παρεμβολές εντός του υπολογιστικού [12] χωρίου και μακριά από τα στερεά όρια χρησιμοποιούνται οι συνήθεις παρεμβολές για μηδενικού βαθμού μέχρι δεύτερου.

Του πρώτου βαθμού είναι:

$$\Lambda_1(x, h) = \begin{cases} 1-s & 0 \leq s < 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases}, \quad s = \left| \frac{r_i - r_j}{h} \right| \quad (4.29)$$

Και του δεύτερου βαθμού η παρεμβολή είναι

$$\Lambda_2(x, h) = \begin{cases} 1-s^2 & 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ \frac{(1-s)(2-s)}{2} & \frac{1}{2} \leq s < \frac{3}{2} \\ 0 & s \geq \frac{3}{2} \end{cases}, \quad s = \left| \frac{r_i - r_j}{h} \right| \quad (4.30)$$

4.3.4.2 Ομαλοποιημένη παρεμβολή

Η ομαλοποιημένη παρεμβολή προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν το σφάλμα που προκαλούν οι συνήθεις παρεμβολές. Είναι συνεχόμενη μέσα στο εύρος της παρεμβολής όπως και ην πρώτη της παράγωγος και μας παρέχει μια συντηρητική χρονική παρεμβολή.

$$M'_4(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{5s^2}{2} + \frac{3s^3}{2} & 0 \leq s < 1 \\ \frac{(1-s)(2-s)^2}{2} & 1 \leq s < 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases}, \quad s = \left| \frac{r_i - r_j}{h} \right| \quad (4.31)$$

Χρησιμοποιεί 4,16,64 σημεία αντίστοιχα για μονοδιάστατα δισδιάστατα και τρισδιάστατα προβλήματα.

4.3.4.3 Παρεμβολή κοντά σε στερεά όρια.

Κοντά σε στερεά όρια δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν ανανεώσεις σωματιδίων με συνήθεις ή ομαλοποιημένες παρεμβολές επειδή το εύρος του χωρίου υποστήριξης εισέρχεται μέσα στο στερεό όριο δημιουργώντας λανθασμένους υπολογισμούς. Απεναντίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν μίας πλευράς σχήματα όπου είναι δεύτερου και τρίτου βαθμού και παρεμβάλλουν ποσότητες σαν τις συνήθεις παρεμβολές.

$$\Lambda_2(x, h) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}|x| + \frac{1}{2}|x^2| & i_L = 1 & i_R = N \\ |x|(2 - |x|) & i_L = 2 & i_R = N - 1 \\ \frac{|x|(|x| - 1)}{2} & i_L = 3 & i_R = N - 2 \\ 0 & & \end{cases} \quad (4.31)$$

$x = i - 1$ για τα σωματίδια κοντά στον αριστερό τοίχο.

$x = N - i$ για τα σωματίδια κοντά στο δεξιά τοίχο. Όπου N ο αριθμός των σωματιδίων και i το εξεταζόμενο σωματίδιο.

Στην περίπτωση που εφαρμόζεται παρεμβολή τρίτου βαθμού:

$$\Lambda_3(x, h) = \begin{cases} \frac{1}{48}(1 - 2|x|)(3 - 2|x|)(5 - 2|x|) & i_L = 1 & i_R = N \\ \frac{1}{16}(1 + 2|x|)(3 - 2|x|)(5 - 2|x|) & i_L = 2 & i_R = N - 1 \\ \frac{1}{16}(1 + 2|x|)(1 - 2|x|)(5 - 2|x|) & i_L = 3 & i_R = N - 2 \\ \frac{1}{48}(1 + 2|x|)(1 - 2|x|)(3 - 2|x|) & i_L = 4 & i_R = N - 3 \\ 0 & & \end{cases} \quad (4.32)$$

$x = i - \frac{3}{2}$ για τα σωματίδια κοντά στον αριστερό τοίχο.

$x = N - i + \frac{1}{2}$ για τα σωματίδια κοντά στο δεξιά τοίχο. Όπου N ο αριθμός των σωματιδίων και i το εξεταζόμενο σωματίδιο.

4.4 Διορθωτικά ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια(CSPH)

Βασισμένα στην ανάπτυξη Taylor τα διορθωτικά ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια (Corrective Smoothed Particle Hydrodynamics) [7] παρέχει μια προσέγγιση για να ομαλοποίηση των προσεγγίσεων του πυρήνα και των σωματιδίων στην SPH μέθοδο. Επομένως μειώνει τα πιθανά σφάλματα που είναι εγγενής στις παραδοσιακές μεθόδους SPH. Η διαδικασία CSPH μπορεί να συνοψιστεί ως εξής.

- Το πρώτο βήμα είναι η επέκταση της σειράς Taylor για μια συνάρτηση σε ένα σημείο ή σωματίδιο.
- Δεύτερον πολλαπλασιάζονται και οι δύο πλευρές με την συνάρτηση ομαλοποίησης.
- Τέλος ολοκληρώνοντας στο χωρίο υποστήριξης αποδίδεται η προσέγγιση του πυρήνα και στην συνέχεια η προσέγγιση των σωματιδίων της συνάρτησης στο σωματίδιο.

Με την ίδια λογική άμα αντικατασταθεί η συνάρτηση ομαλοποίησης με την παράγωγο της πρώτου και μεγαλύτερου βαθμού στην διαδικασία του πολλαπλασιασμού θα προκύψουν ο πυρήνας και οι σωματιδιακές προσεγγίσεις των παραγώγων της συνάρτησης.

Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα πραγματοποιώντας την ανάπτυξη Taylor στο χωρίο x της συνάρτησης $f(x)$ στην περιοχή x_i προκύπτει:

$$f(x) = f_i + (x - x_i)f_{xi} + \frac{(x - x_i)^2}{2} f_{xxi} + \dots \quad (4.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας όπως αναφέρθηκε πριν με την συνάρτηση ομαλοποίησης W και ορίζοντας ένα χωρίο υποστήριξης Ω που εμπεριέχει το σημείο x_i και ολοκληρώνοντας σε αυτό το χωρίο υποστήριξης έχει σαν αποτέλεσμα:

$$\int_{\Omega} f(x)W_i(x)dx = f_i \int_{\Omega} W_i(x)dx + f_{xi} \int_{\Omega} W_i(x)(x-x_i)dx + f_{xxi} \int_{\Omega} W_i(x) \frac{(x-x_i)^2}{2!} dx + \dots \quad (4.34)$$

Αμελώντας τις παραγώγους στην εξίσωση (4.34) μια διορθωτική προσέγγιση πυρήνα για την συνάρτηση $f(x)$ στο x_i :

$$f_i = \frac{\int_{\Omega} f(x)W_i(x)dx}{\int_{\Omega} W_i(x)dx} \quad (4.35)$$

Ομοίως για την παράγωγο πρώτου βαθμού:

$$f_{xi} = \frac{\int_{\Omega} (f(x) - f(x_i))W_{ix}(x)dx}{\int_{\Omega} (x-x_i)W_{ix}(x)dx} \quad (4.36)$$

Οι εξισώσεις (4.35) και (4.36) με την μέθοδο SPH γράφονται:

$$f_i = \frac{\sum_{j=1}^N V_j f_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N V_j W_{ij}} \quad (4.37)$$

$$f_{xi} = \frac{\sum_{j=1}^N V_j (f_j - f_i) \nabla W_{ij}}{\sum_{j=1}^N (x_j - x_i) \nabla W_{ij}} \quad (4.38)$$

Υψηλής Τάξης ENO σχήματα σε SPH.

Από τις εξισώσεις (4.37) και (4.38) είναι εμφανές ότι η κύρια διαφορά των μεθόδων SPH και CSPH είναι η δομή της προσέγγισης του πυρήνα σε ολοκληρωματική μορφή. Η προσέγγιση του πυρήνα καθώς και η προσέγγιση των σωματιδίων στην CSPH και στην SPH μεθόδους συνδέονται με τους παρονομαστές που δρουν σαν ένα είδος διορθωτικής ομαλοποίησης.

4.5 Χρονική ολοκλήρωση

Στην μέθοδο των διορθωτικών ομαλών σωματιδίων εφαρμόστηκε η μέθοδος Runge Kutta στην απλή μορφή της. Είναι μέθοδος τέταρτης τάξης ακρίβειας και είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος Runge Kutta. [14] Έχοντας ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

Όπου στόχος της χρονικής ολοκλήρωσης είναι η εύρεση της επόμενης τιμής του y μετά από ένα χρονικό βήμα h . Δηλαδή για τον χρόνο: $t_{n+1} = t_n + h$. Γνωρίζοντας την συναρτήσεις $f(t_0, y_0)$, y_0 και το t_0 ορίζεται:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

για τον χρόνο: $t_{n+1} = t_n + h$, όπου $n = 0, 1, 2, 3$

Οι μεταβλητές k_1, k_2, k_3, k_4 θέτονται ως:

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

Είναι εμφανές ότι η προσέγγιση της y_{n+1} βασίζεται από την παρούσα τιμή της y_n καθώς και από τον σταθμισμένο μέσο όρο των τεσσάρων μεταβλητών των k .

5 Εφαρμογή της μεθόδου SPH

Σε αυτήν την ενότητα θα εφαρμοστεί η μέθοδος CSPH με τακτική ανατοποθέτηση σωματιδίων (Remesh) στην γνωστή συνάρτηση του ημιτόνου καθώς και στον σωλήνα κυμάτων κρούσης ο οποίος αναλύθηκε και στο τρίτο κεφάλαιο λόγω ότι η μέθοδος SPH θεωρήθηκε ασταθής.

5.1 Η παράγωγος του ημιτόνου

Για την ανάπτυξη της μεθόδου CSPH αρχικά έγινε η μελέτη της μεθόδου πάνω στην συνάρτηση του ημιτόνου για την πιστοποίηση της μεθόδου καθώς είναι γνωστές οι τιμές που την διέπουν ακριβώς όπως και της παραγώγου της που είναι το συνημίτονο. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε εύκολα να διατυπώσουμε την ακρίβεια της μεθόδου και να καταλήξουμε σε εύκολα συμπεράσματα.

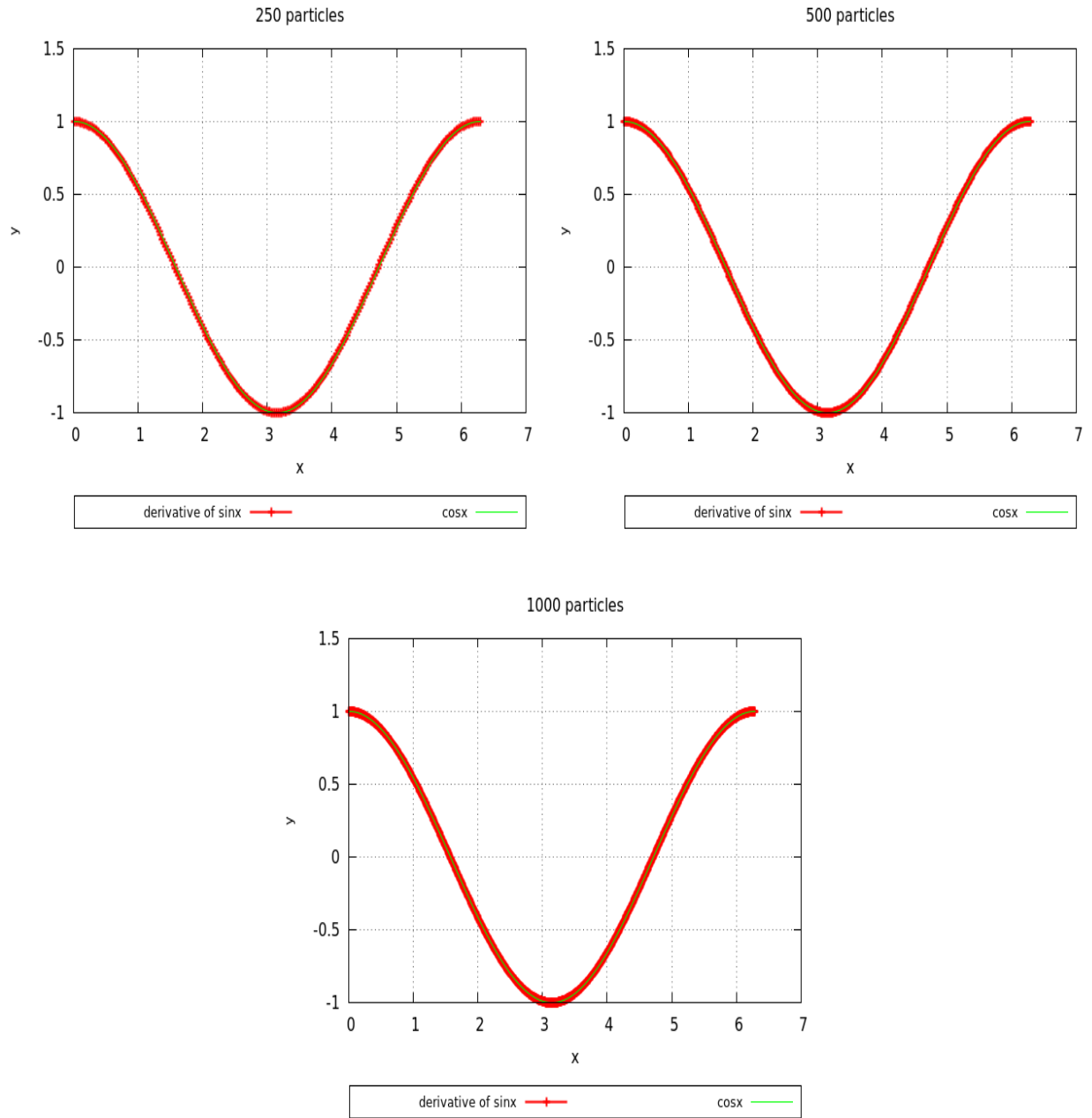
Για 250, 500 και 1000 σωματίδια πραγματοποιήθηκαν διαφορετικές προσομοιώσεις στην εξέταση της παραγώγου της συνάρτησης, της διαφοράς της υπολογιστικής από την ακριβή λύση, την επανατοποθέτηση των σωματιδίων καθώς και την διαφορά τους από την πραγματική λύση.

Ιδιαίτερη έμφαση πρέπει να δοθεί ότι εφαρμόστηκαν δευτέρου και τρίτου βαθμού παρεμβολές κοντά στα στερεά όρια.

5.1.1 Παρεμβολή δευτέρου βαθμού στα όρια

Οι παρεμβολή που χρησιμοποιήθηκε για το εσωτερικό του χωρίου είναι η M'_4 και στην πρώτη περίπτωση εφαρμόστηκε η δεύτερου βαθμού παρεμβολή για τα όρια του χωρίου. Τα διαγράμματα για 250, 500, 1000 σωματίδια για την παράγωγο του ημιτόνου και για τις ακριβείς τιμές του συνημιτόνου είναι:

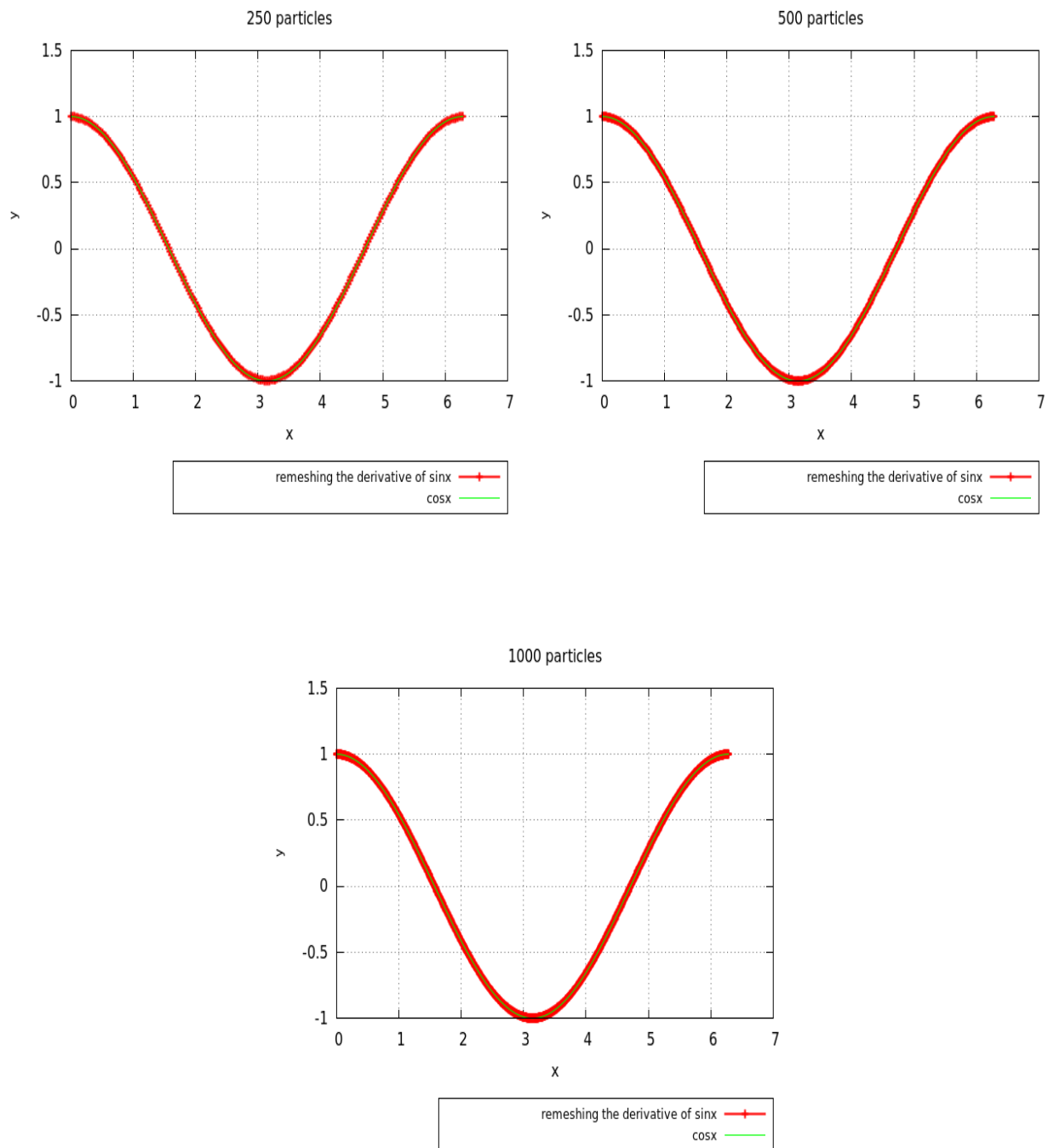
Εφαρμογή της μεθόδου SPH



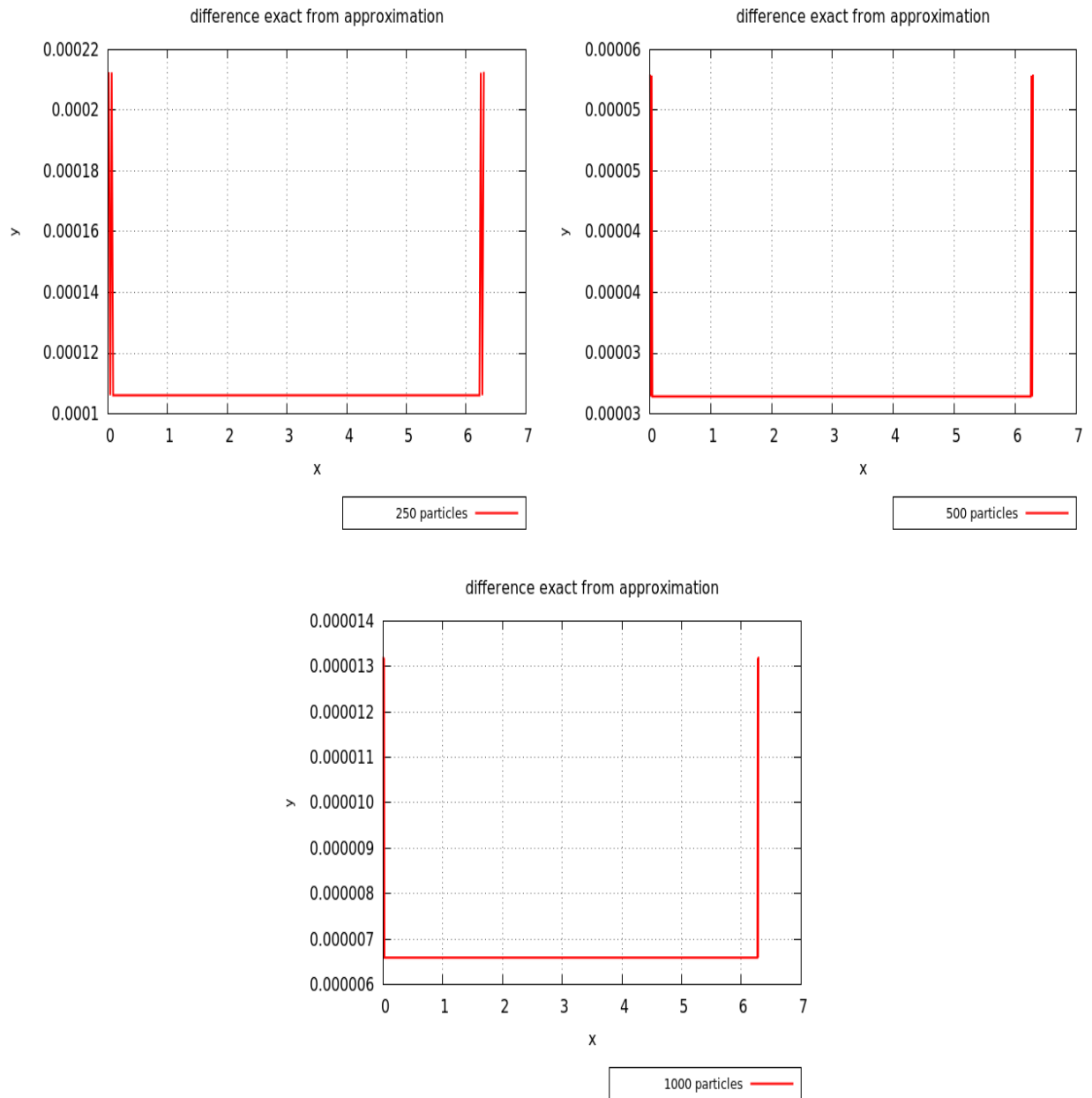
Έπειτα για να δοκιμάσουμε την διαδικασία της επανατοποθέτησης των σωματιδίων(remeshing) δημιουργούνται νέα σωματίδια στις θέσεις x_i , ενώ πριν βρισκότουσαν τοποθετημένα στις θέσεις $x_{i+\frac{1}{2}}$ για $i = 1, 2, \dots, N$. Τα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζουν τις τιμές των

Εφαρμογή της μεθόδου SPH

επανατοποθετημένων σωματιδίων στις καινούργιες τους θέσεις καθώς και τις ακριβές τιμές της συνάρτησης του συνημιτόνου.

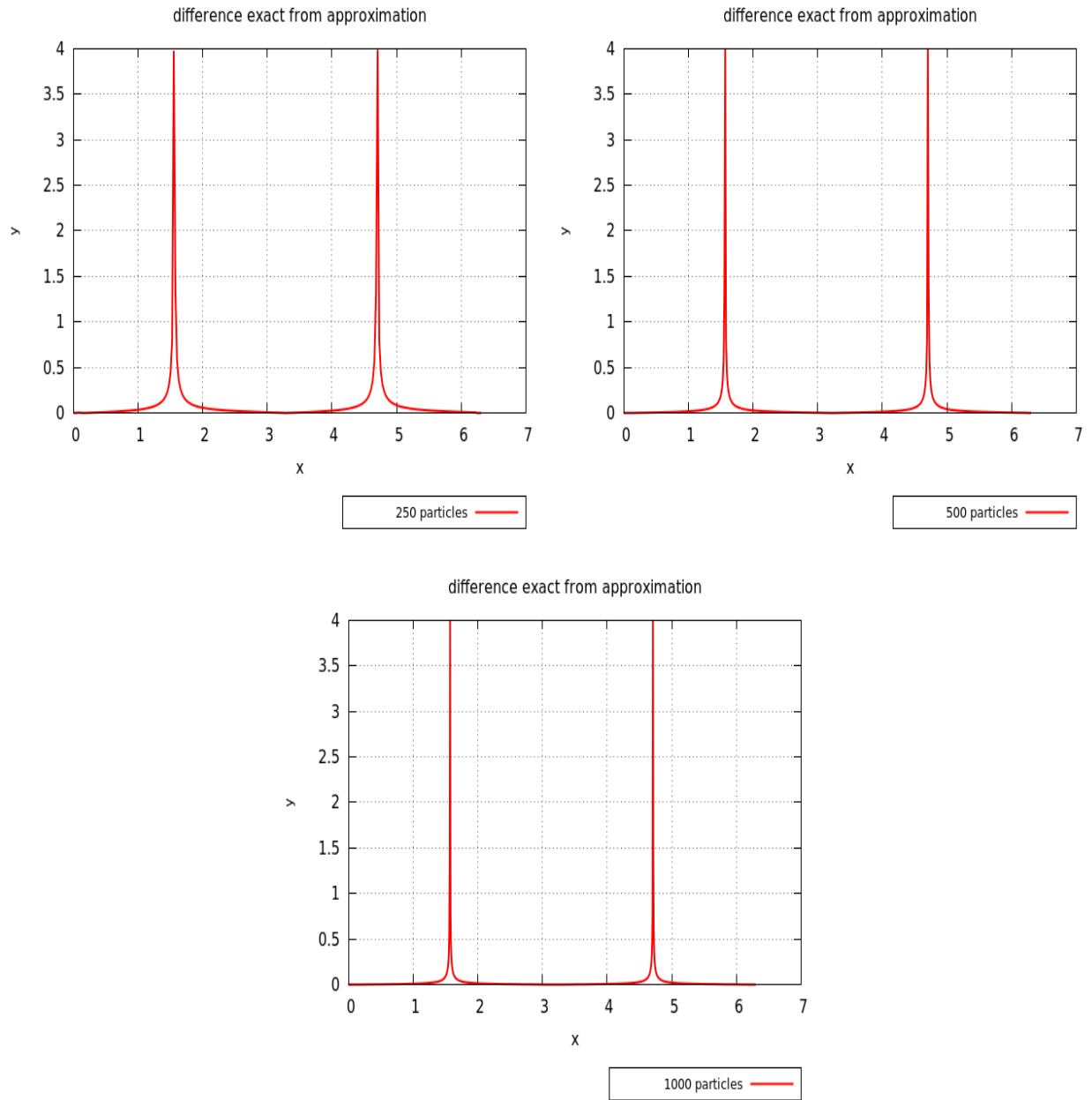


Από τα παραπάνω διαγράμματα δεν είναι δυνατόν να εξεταστεί επ' ακριβώς η διαφορά της προσεγγιστικής λύσης από την ακριβή γι' αυτό στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η ποσοστιαία διαφορά της προσεγγιστικής λύσης από την ακριβή. Η ποσοστιαία διαφορά λοιπόν της προσέγγισης της παραγώγου του ημιτόνου από το συνημίτονο είναι:



Από τα παραπάνω διαγράμματα βγαίνει το συμπέρασμα ότι η αύξηση της ανάλυσης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Γενικά υπάρχει μια διαφορά της προσέγγισης από την πραγματική τιμή αλλά κυρίως στα άκρα είναι πιο σημαντική επειδή έχει μια ταλαντευτική πορεία όπως φαίνεται στα διαγράμματα.

Τα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζουν την ποσοστιαία διαφορά της ανατοποθέτησης των αρχικών σωματιδίων, αφού αρχικά έχει βρεθεί η παράγωγος τους προσεγγιστικά, με την ακριβή συνάρτηση του συνημιτόνου.



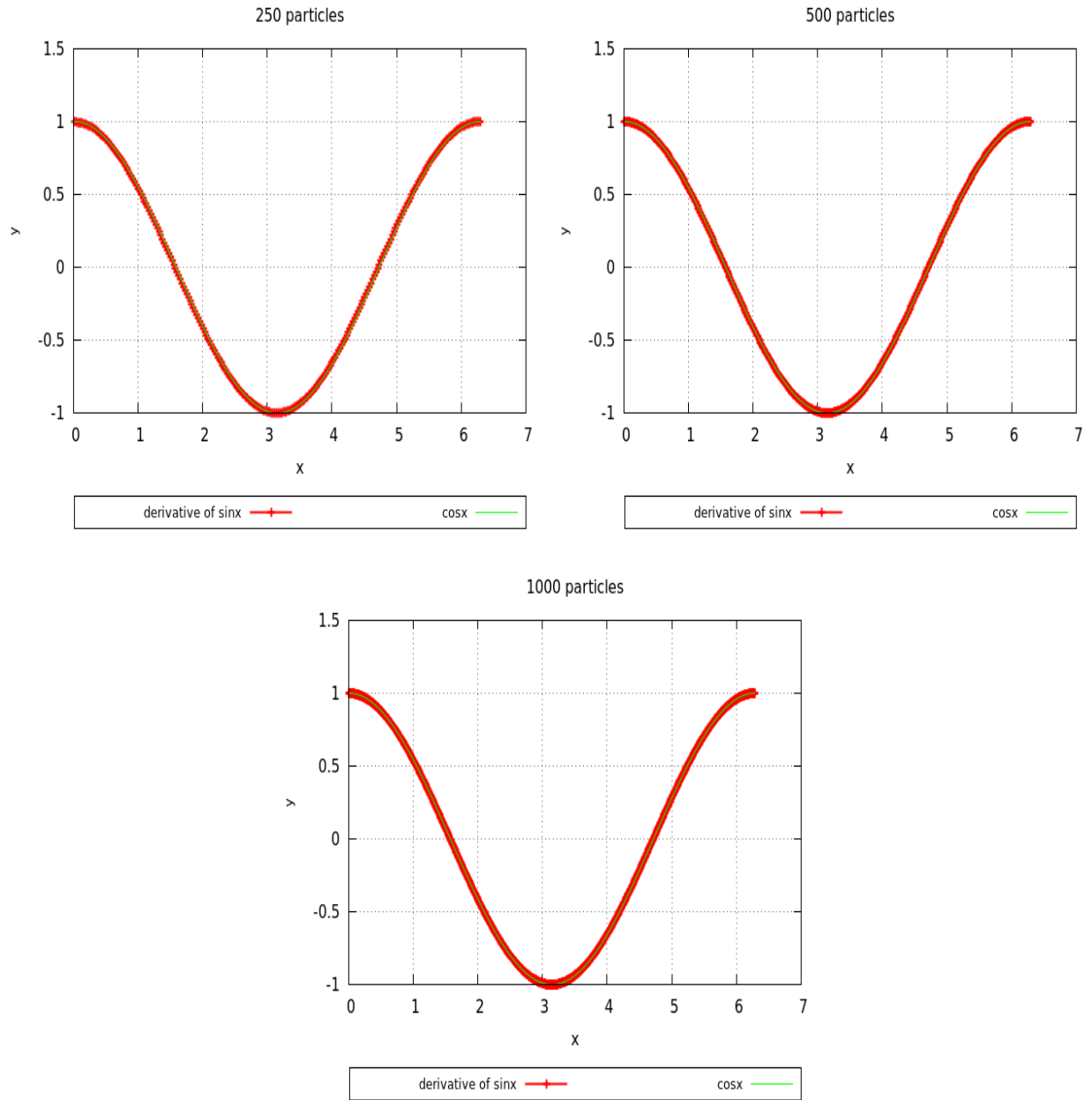
Παρατηρείται ότι οι τιμές της διαφοράς της προσεγγιστικής λύσης από την πραγματική γίνεται αντιληπτή κοντά στον μηδενισμό της προσεγγιστικής και πραγματικής λύσης. Ένας λόγος που μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι ότι τα σημεία της προσεγγιστικής λύσης δεν μηδενίζονται ποτέ σε αντίθεση με της πραγματικής λύσης. Όσο αυξάνεται η ακρίβεια τα γειτονικά σημεία του σημείου του μέγιστου σφάλματος τείνουν σε πιο αποδεκτές τιμές χωρίς παρόλα αυτά να αλλάζει η τιμή του σημείου μέγιστου σφάλματος.

5.1.2 Παρεμβολή τρίτου βαθμού στα όρια.

Σε αυτό το παράδειγμα όπως και στο προηγούμενο χρησιμοποιείται εντός των χωρίων η ομαλοποιημένη παρεμβολή τρίτου βαθμού με την διαφορά ότι στα όρια εφαρμόζεται του τρίτου βαθμού παρεμβολή οριακών συνθηκών. Ακολουθείται η ίδια διαδικασία με την προηγούμενη εφαρμογή για να παρατηρηθούν ομοιότητες και διαφορές με την συγκεκριμένη διαφορά. Αρχικά παρουσιάζονται η προσεγγίσεις της παραγωγού του ημιτόνου και η ανατοποθέτηση των σωματιδίων για 250, 500 και 1000 σωματίδια όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

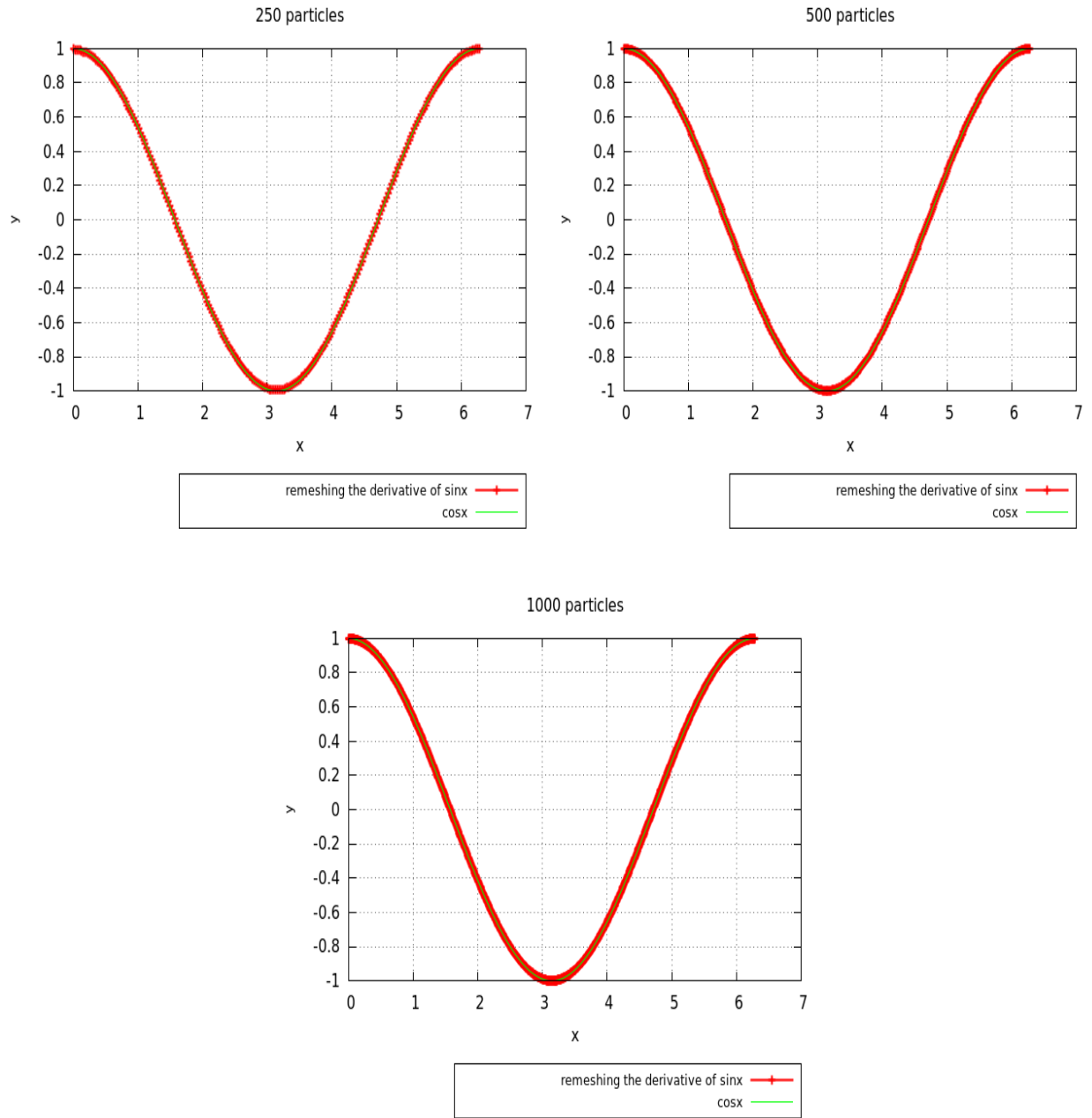
Για τις παραγωγούς του ημιτόνου δημιουργούνται τα διαγράμματα για 250, 500 και 1000 σωματίδια:

Εφαρμογή της μεθόδου SPH

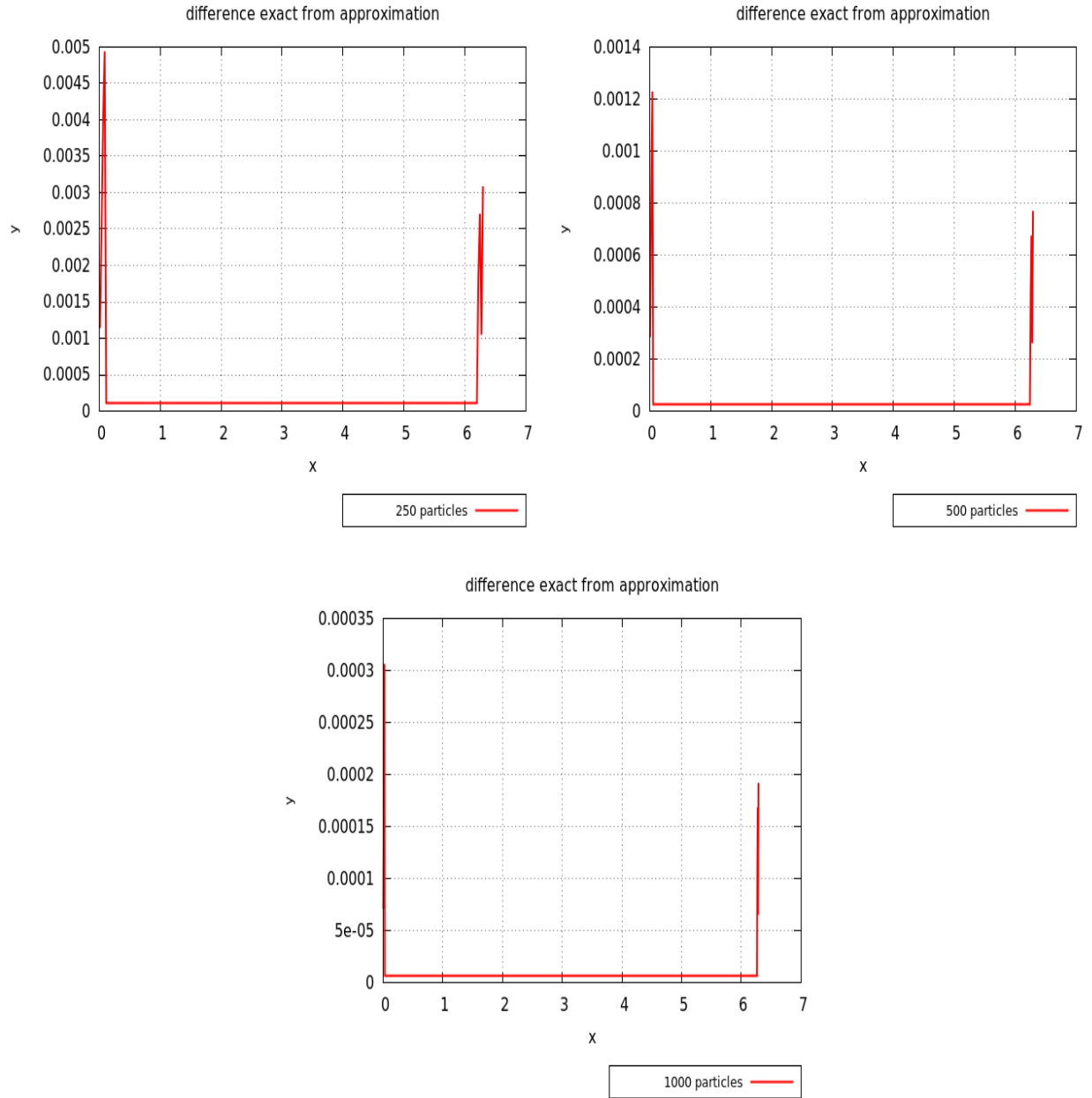


Για τις ανατοποθετήσεις των σωματιδίων ενώ έχει βρεθεί η παράγωγο τους με την μέθοδο SPH δημιουργούνται τα διαγράμματα για 250, 500 και 1000 σωματίδια:

Εφαρμογή της μεθόδου SPH



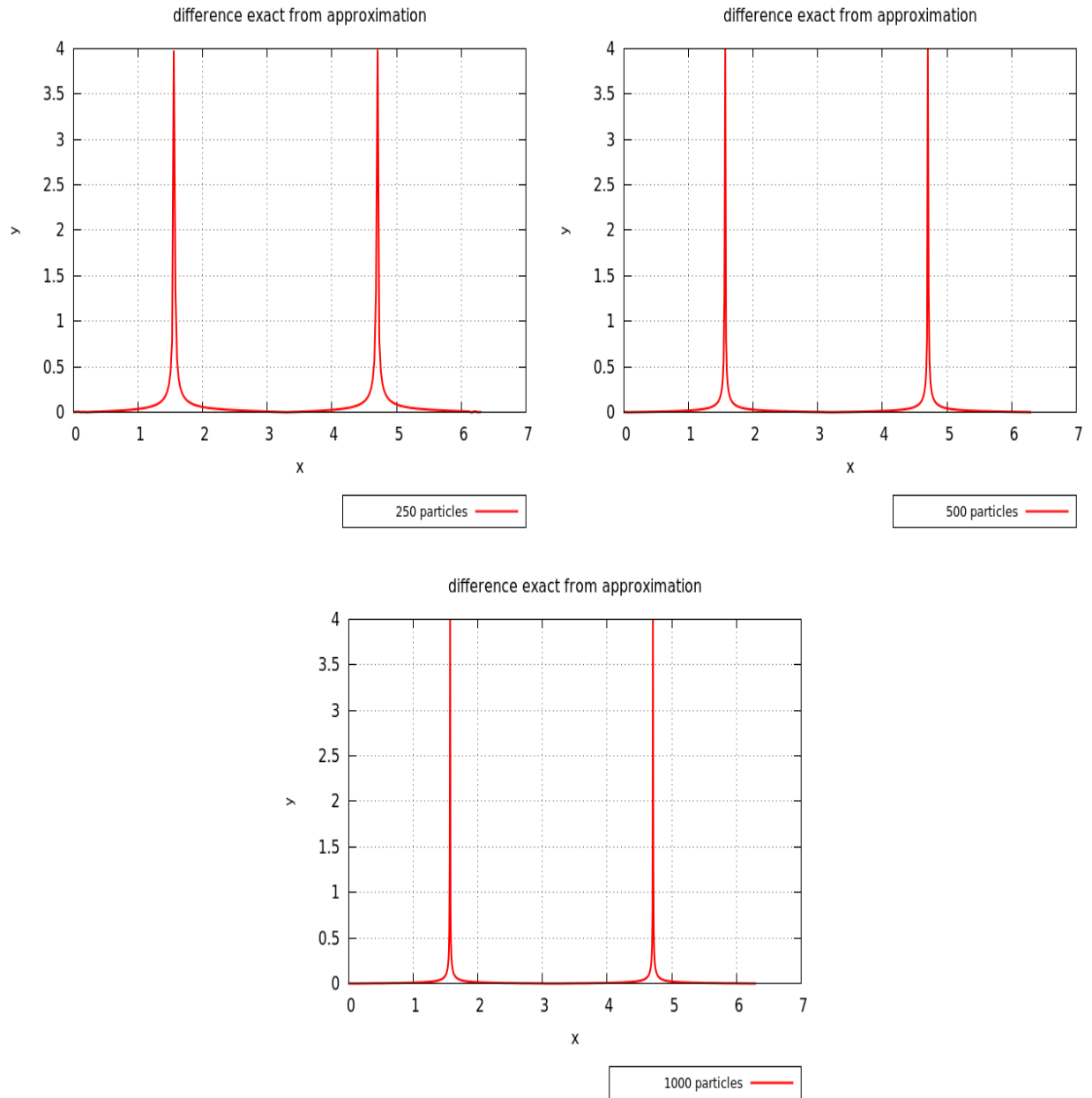
Για να εντοπίσουμε τις διαφορές των προσεγγίσεων από τις πραγματικές τιμές ακολουθείται η προηγούμενη διαδικασία, αρχικά τα διαγράμματα των ποσοστιαίων διαφορών της προσέγγισης της παραγώγου με την πραγματική τιμή του συνημιτόνου είναι:



Στο εσωτερικό του χωρίου δεν άλλαξε η ακρίβεια που είχαν τα διαγράμματα του δεύτερου βαθμού παρεμβολής στα εσωτερικά του χωρίου κάτι που αναμενότανε, αλλά παρατηρείται ότι στα άκρα οι διαφορές της προσέγγισης των ανατοποθετημένων σωματιδίων με την ακριβή λύση έχουν μια ταλαντευτική μορφή μεγαλύτερου εύρους και πλάτους από ότι στις δεύτερης τάξης.

Εφαρμογή της μεθόδου SPH

Λιγότερο ενδιαφέρων παρουσιάζουν τα διαγράμματα των ποσοστιαίων διαφορών των ανατοποθετημένων σωματιδίων της προσεγγίσεως της παραγώγου της ημιτονοειδούς συνάρτησης με την πραγματική τιμή του συνημιτόνου:



Τα διαγράμματα είναι ίδια και στην μορφή και στις τιμές με τα διαγράμματα στην περίπτωση που εφαρμόστηκαν δευτέρου βαθμού παρεμβολές στα όρια των συναρτήσεων.

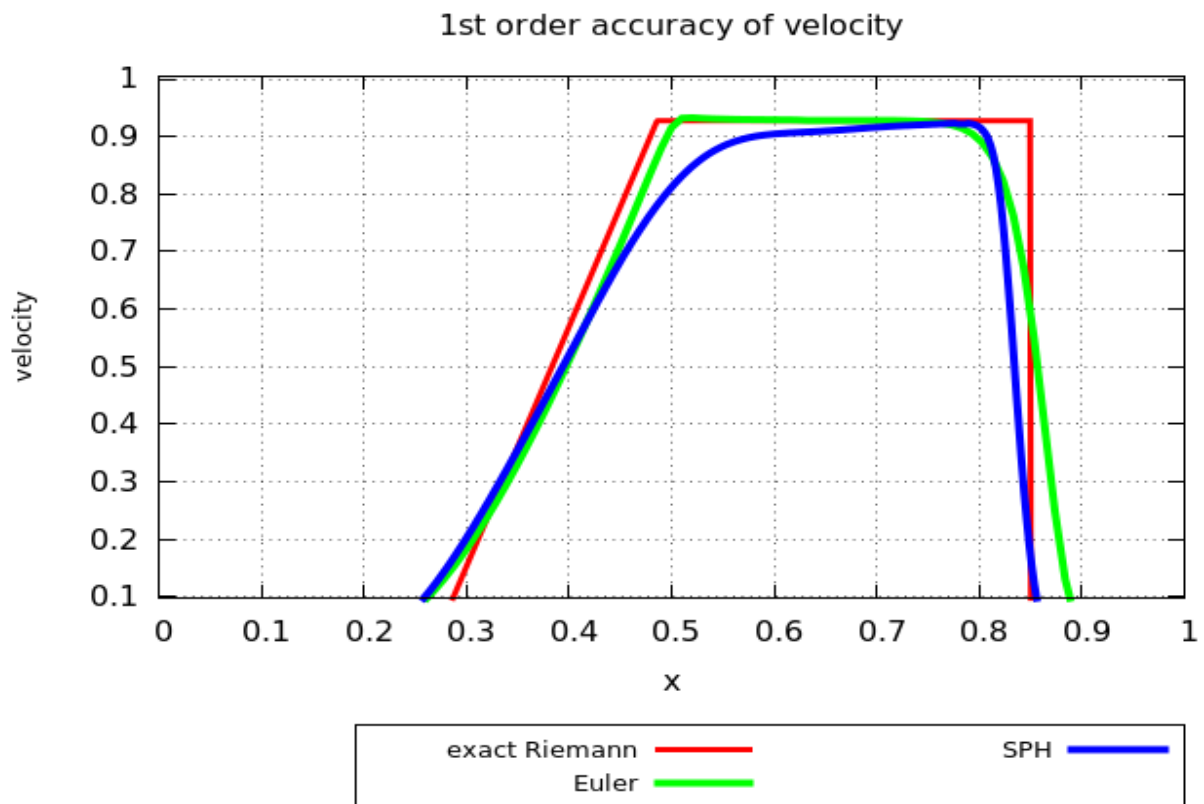
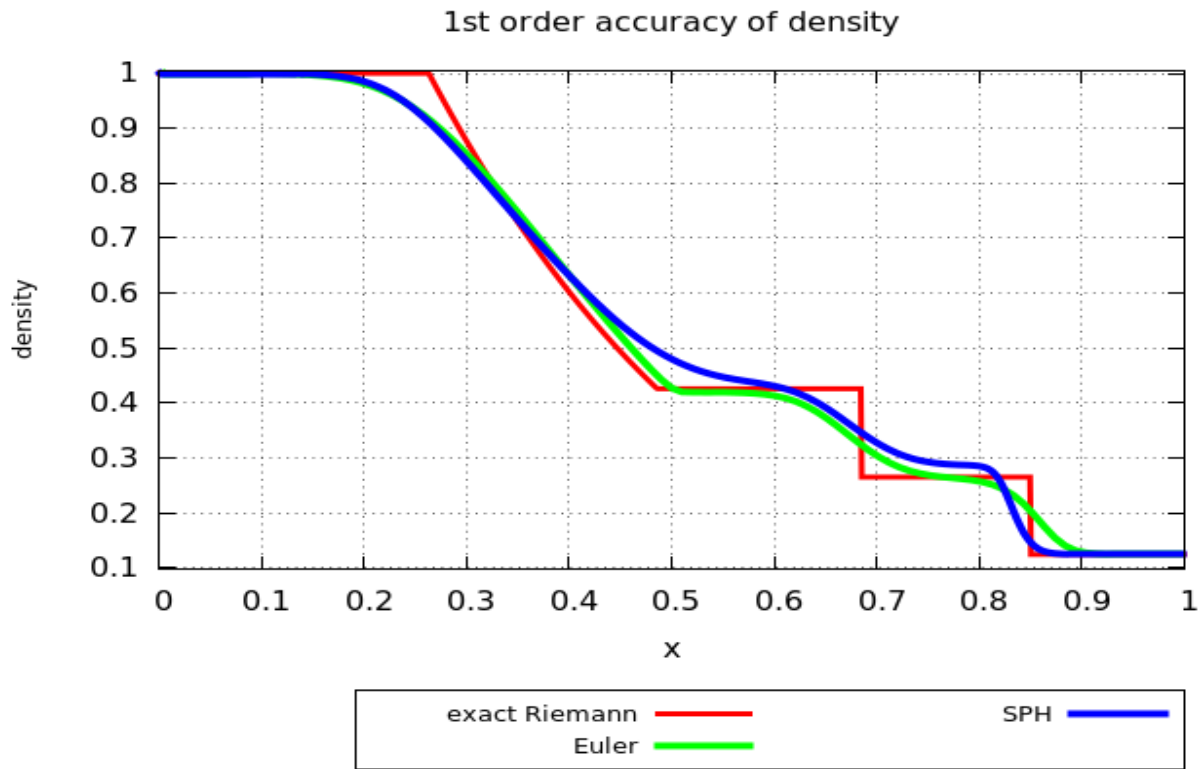
5.2 Δοκιμή σωλήνα κύματος κρούσης (*one shock wave*)

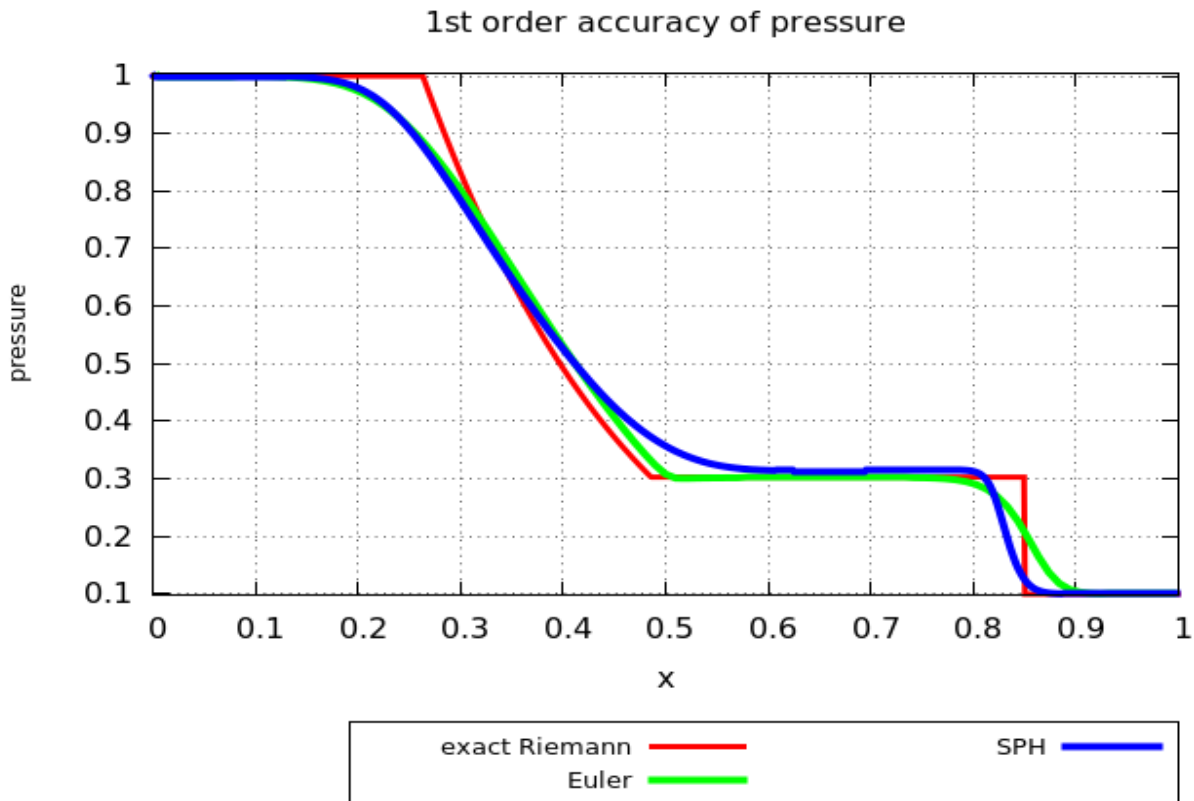
Η δεύτερη εφαρμογή που εξετάζεται στην σωματιδιακή περιγραφή, η οποία παρουσιάστηκε και στο δεύτερο κεφάλαιο, είναι η δοκιμή σωλήνα κύματος κρούσης.

Τα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζουν την πυκνότητα, ταχύτητα και πίεση σε στιγμιότυπο χρόνου $t = 0,2s$ χρησιμοποιώντας τετρακόσα σωματίδια, με χρονικό βήμα $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6}s$ και $CFL=0,8$. Οι ακρίβειες που απεικονίζονται της πυκνότητας, πίεσης και ταχύτητας είναι από πρώτου βαθμού, ενώ συγκρίνονται στα διαγράμματα και με την ακριβή λύση. Τα αρχικά δεδομένα είναι:

Για τα σωματίδια που τοποθετούνται αρχικά αριστερά : $0 \leq x_L \leq 0.5$ και δεξιά: $0.5 < x_R \leq 1$

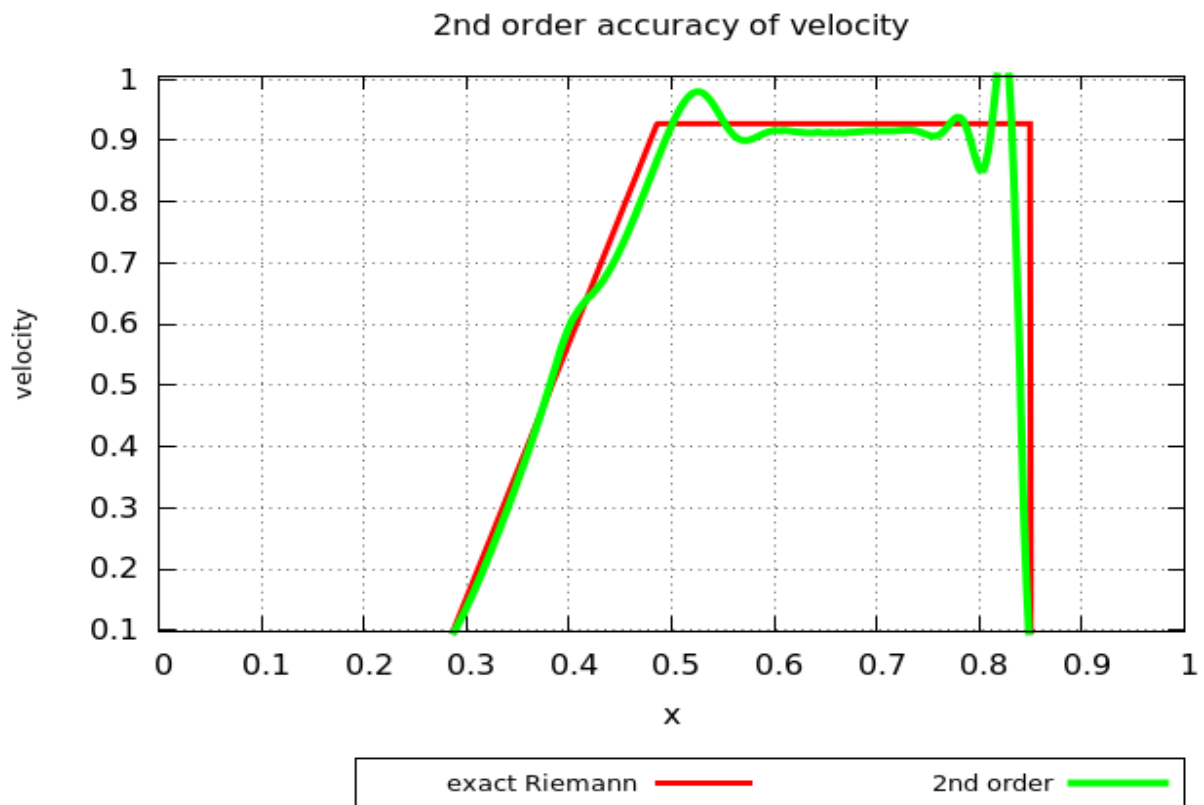
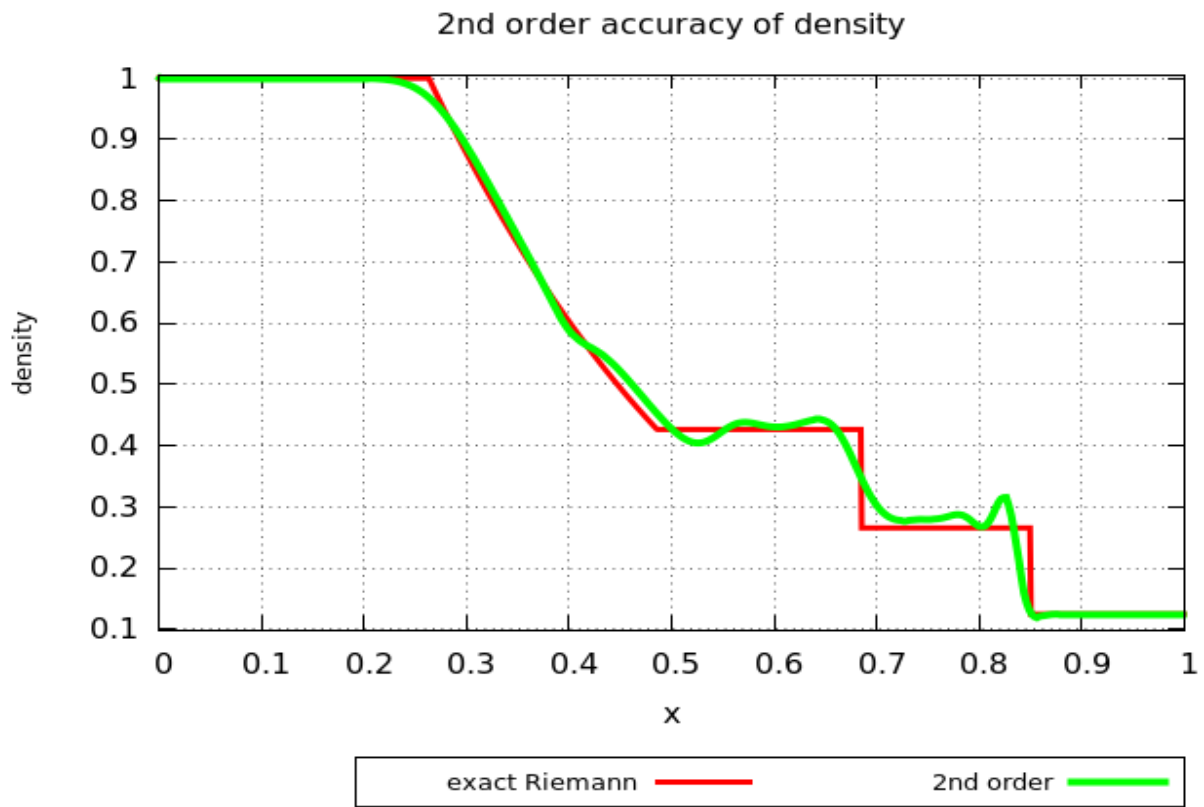
$$\begin{pmatrix} \rho = 1.0 \\ u = 0.0 \\ p = 1.0 \end{pmatrix}_L \quad \& \quad \begin{pmatrix} \rho = 0.125 \\ u = 0.0 \\ p = 0.1 \end{pmatrix}_R$$

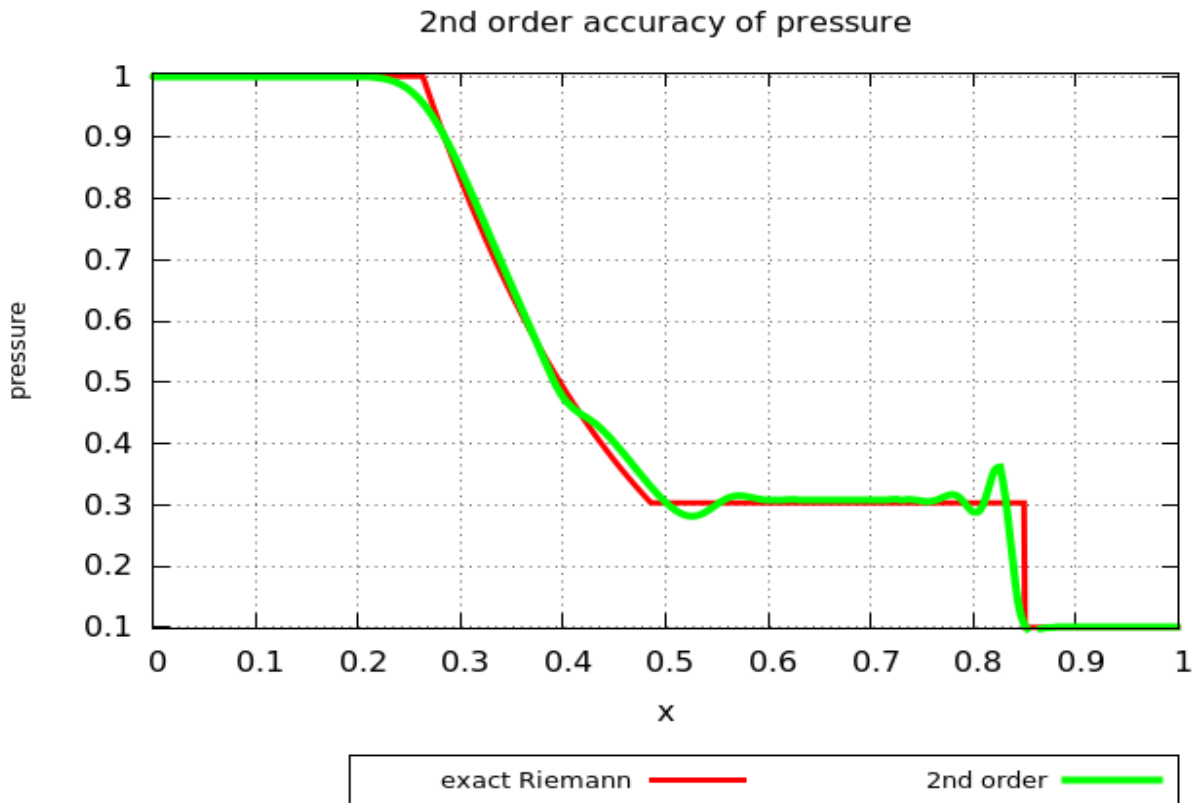




Από τα παρακάτω διαγράμματα παρατηρείται ότι υπάρχει μια σημαντική διαφορά της πραγματικής από την υπολογιστική λύση. Είναι λογικό επειδή η ακρίβεια είναι πρώτου βαθμού, αλλά επιπλέον λόγω της ανατοποθέτησης των σωματιδίων, όπου λαμβάνει χώρα ανα πενήντα χρονικές στιγμές, υπάρχει και διάχυση όπου επιδρά αρνητικά στην ακρίβεια της λύσης. Σε σύγκριση με την προηγούμενη μέθοδο Euler παρατηρείται ότι οι δύο λύσεις των μεθόδων πρώτου βαθμού προσεγγίζουν στο ίδιο βαθμό την αναλυτική λύση. Η κύρια διαφορά είναι ότι η Euler χρησιμοποιεί εκατό κόμβους για των υπολογισμό των λύσεων ενώ η Langrange τετρακόσια σωματίδια, καθιστώντας την Euler πιο επιθυμητή λόγω υπολογιστικού κόστους.

Για δευτέρου βαθμού ακρίβεια χρησιμοποιώντας κεντρική παρεμβολή δευτέρου βαθμού για 400 σωματίδια σε στιγμιότυπο $t=0,2$ s παρέχονται τα εξής αποτελέσματα:





Παρατηρούνται από τα διαγράμματα κοντά στις ασυνέχειες ότι σχηματίζονται ταλαντώσεις όπου θεωρούνται αναμενόμενες καθώς δεν χρησιμοποιήθηκε τεχνητό ιξώδες ή τα σχήματα ENO για την αύξηση της ακρίβειας. Δοκιμάστηκαν και για κεντρικές παρεμβολές τρίτου βαθμού η μέθοδος CSPH αλλά οι ταλαντώσεις ήταν τόσο ισχυρές που μετά από λίγα χρονικά βήματα ο αλγόριθμος σταμάτησε να τρέχει φτάνοντας σε αδυναμία υπολογισμού λύσης.

6 Συμπεράσματα και μελλοντική έρευνα

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα που μπορούν να παραχθούν από τα αποτελέσματα των εφαρμογών της διπλωματικής εργασίας είναι ότι η αύξηση ακρίβειας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση κρουστικών κυμάτων. Είναι εμφανές τα σχήματα υψηλής τάξης πόσο καλύτερη προσέγγιση έχουν στην πραγματική τιμή από τα σύνηθες σχήματα χωρίς την αύξηση της διακριτοποίησης. Παρατηρείται επιπλέον σε περίπτωση πολύπλοκου προβλήματος με αρκετές ασυνέχειες ότι τα σχήματα πρώτου και δεύτερου βαθμού για να πλησιάσουν τις λύσεις των υψηλών ακρίβειας σχημάτων πρέπει να διπλασιάσουν την διακριτοποίηση τους ή να την αυξήσουν ακόμα περαιτέρω. Στις δύο ενότητες έγινε μελέτη της συμπιεστής ροής κατά την δημιουργία κρουστικού κύματος ώστε να εξεταστεί μεμονωμένα η συμπεριφορά της ροής σε ασυνέχεια χωρίς την δημιουργία δινών.

Συγκρίνοντας τις μεθόδους περιγραφής Lagrange και Euler του ρευστού μέσω του Riemann προβλήματος πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα μπορούν να αποκτηθούν μέσω της Euler περιγραφής. Αν και οι δύο περιγραφές είναι εξίσου αποτελεσματικές είναι πιο ελκυστική η Euler επειδή:

- Στην Riemann περίπτωση που μελετήθηκε δεν υπάρχει πολύπλοκη γεωμετρία μέσα στο χωρίο.
- Στην περιγραφή Euler είναι δυνατόν να μελετηθεί πολύ πιο εύκολα η ανάκλασης του ρευστού σε τοίχο.
- μεγάλης διάχυσης στην περίπτωση της Lagrange περιγραφής λόγω συχνής ανατοποθέτησης των σωματιδίων.
- Η Euler περιγραφή για το ίδιο υπολογιστικό κόστος έχει καλύτερη προσέγγιση στις συγκεκριμένες εφαρμογές.

Μελλοντικά μπορούν να αναπτυχθούν περαιτέρω τα σχήματα ENO, αν και έχουν δημιουργηθεί αρκετές αναβαθμίσεις των ENO σχημάτων, όπως WENO και TENO και να εδραιωθούν τα υψηλής τάξης σχήματα ευρέως έτσι ώστε να μην χρειάζονται υπερυπολογιστές για την προσομοίωση πολύπλοκων εφαρμογών.

Στην περίπτωση της σωματιδιακής περιγραφής θα ήταν δυνατόν να υπάρξουν καλύτερα αποτελέσματα εφαρμόζοντας και υποπεριπτώσεις της μεθόδου SPH όπως η DSPH(Μη συνεχείς ομαλά υδροδυναμικά σωματίδια) όπου ειδικεύεται στις ασυνέχειες. Επειδή μελετήθηκε η ροή χωρίς προσθήκη τεχνητού ιξώδους θα ήταν ενδιαφέρον να χρησιμοποιηθούν τα σχήματα ENO και στην περίπτωση της σωματιδιακής περιγραφής της ροής. Με την επίτευξη της χρήσης των σχημάτων ENO θα ήταν δυνατόν η χρήση παρεμβολών μεγαλύτερου βαθμού για την προβολή των σωματιδίων και αποτελεσμάτων που να προσεγγίζουν καλύτερα την πραγματική λύση. Περαιτέρω μελέτη μπορεί να υπάρξει εφαρμόζοντας τα σχήματα ENO στην ανάλυση της ροής μέσω SPH και σε δισδιάστατες και τρισδιάστατες εφαρμογές.

Ένας τρόπος υλοποίησης της παραπάνω διαδικασίας θα ήταν η αλλαγή των κεντρικών σχημάτων σε σχήματα μίας πλευράς κοντά στις ασυνέχειες για την ανάλυση της ροής. Με την επίτευξη αυτού του βήματος θα ήταν ιδεατό η δημιουργία υβριδικών περιγραφών της ροής όπου θα χρησιμοποιούν τα συστήματα ENO. Τα υβριδικά συστήματα θα χρησιμοποιούν την Euler περιγραφή κοντά στα σώματα και στους τοίχους και τα Lagrange σχήματα θα χρησιμοποιούνται μεταξύ των σωμάτων στο χωρίο. Παρόμοια συστήματα έχουν σχεδιαστεί και στο εργαστήριο αεροδυναμικής από τον κ. Γεώργιο Παπαδάκη οπότε και η εισχώρηση των υβριδικών ENO σχημάτων θα βελτιστοποιούσε την ήδη υπάρχουσα ερευνά του.

Βιβλιογραφία

- [1] H.K. Versteeg, W.Malalasekera, An introduction to computational fluid dynamics The finite volume method, 1995.
- [2] George-Henri Cottet Petros D. Koumoutsakos, Vortex Methods: Theory and Practice, 2000.
- [3] "www.flow3d.com," [Online]. Available: <https://www.flow3d.com/resources/cfd-101/free-surface-fluid-flow/>.
- [4] Timothy J. Barth and Herman Deconinck, High-Order Methods for Computational Physics, 1999.
- [5] G. Papadakis, Development of a hybrid compressible vortex particle method and application to external problems including helicopter, 2014.
- [6] Frederic Magoules, Choi-Hong Lai, Computational Fluid Dynamics, 2011.
- [7] Ami Harten, Bjorn Engquist, Stanley Osher, Sukumar R. Chakravarthy, Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III*, 1997.
- [8] J. Blazek, Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications Second Edition, 2005.
- [9] G. R. Liu ,M. B. Liu , Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method, 2003.
- [10] P.-C. K. KOUKOUVINIS, Development of a meshfree particle method for the simulation of steady and unsteady free surface flows: application and validation of the method on impulse hydraulic turbines., 2012.

Βιβλιογραφία

- [11] A. Chaniotis, Remeshed smoothed particle hydrodynamics for the simulation of compressible, viscous, heat conducting, reacting & interfacial flows, 2003.
- [12] Petros Koumoutsakos, Georges-Henri Cottet and Diego Rossinelli, FLOW SIMULATIONS USING PARTICLES Bridging Computer Graphics and CFD.
- [13] Erwin Stein, Rene de Bost, Thomas J R Hughes, Encyclopedia of Computational Mechanics, 2004.
- [14] "en.wikipedia.org," [Online]. Available:
https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods.