



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

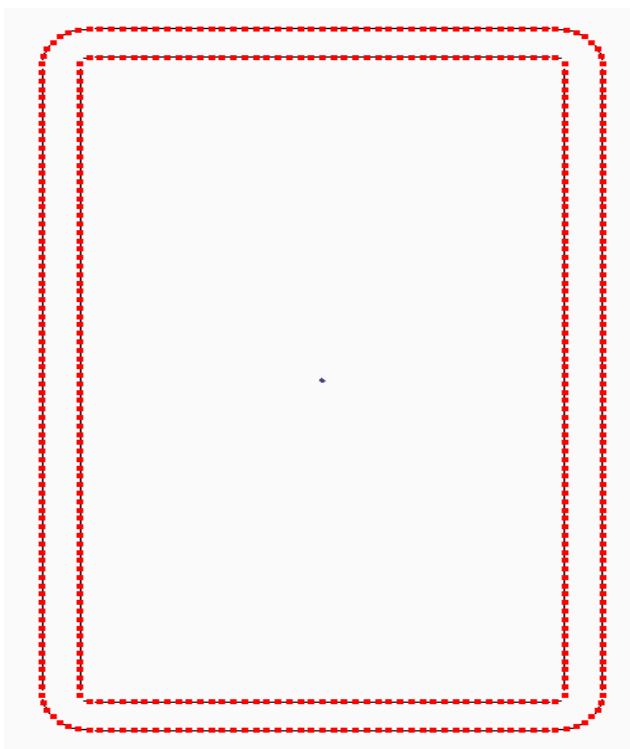
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

**ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΩΝ  
ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΨΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ  
ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΘΕΟΔΩΡΟΥ**



**ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ :**

**Ε. ΣΑΠΟΥΝΤΖΑΚΗΣ** Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

**Β. ΤΣΙΠΗΡΑΣ** Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο παρόν τεύχος αναλύεται η ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων λαμβάνοντας υπόψιν τα φαινόμενα δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε την περίοδο Οκτώβριος 2010-Ιούλιος 2011 κατά το ένατο και δέκατο εξάμηνο των προπτυχιακών σπουδών μου.

Η δομή της ύλης έχει ως εξής :

❖ Στο **1<sup>ο</sup> κεφάλαιο** παρουσιάζεται το πρόβλημα της στρέψης, γίνεται αναφορά στην ιστορική εξέλιξη των θεωριών που έχουν αναπτυχθεί για να τη μελετήσουν και αναλύεται ο σκοπός της παρούσας εργασίας.

❖ Στο **2<sup>ο</sup> κεφάλαιο** παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της θεωρίας παραμορφώσεων, της θεωρίας τάσεων και της θεωρίας τρισδιάστατης ελαστικότητας στα πλαίσια των μικρών μετατοπίσεων προκειμένου να υπάρχει και να είναι εύκολα προσβάσιμο το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη των βασικών θεωριών στρέψης.

❖ Στο **3<sup>ο</sup> κεφάλαιο** αναλύεται η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ('κλασική' θεωρία) αλλά και η ομοιόμορφη θεωρία στρέψης ως περίπτωση της προηγούμενης και παρουσιάζονται όλα τα θεωρητικά στοιχεία και οι σχέσεις που τις διέπουν.

❖ Στο **4<sup>ο</sup> κεφάλαιο** αναλύεται η θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων ('διευρυμένη' θεωρία), παρουσιάζονται οι βασικές σχέσεις και ορισμοί που τη διέπουν και μορφώνονται οι καθολικές εξισώσεις ισορροπίας της ράβδου.

❖ Στο **5<sup>ο</sup> κεφάλαιο** περιγράφεται συνοπτικά, με αναφορά στα αντίστοιχα προβλήματα συνοριακών τιμών και παράθεση εικόνων από το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε, η διαδικασία για την εξαγωγή των γεωμετρικών σταθερών των διατομών.

❖ Στο **6<sup>ο</sup> κεφάλαιο** παρουσιάζονται και αναλύονται διάφορα αριθμητικά παραδείγματα, που αφορούν ανοικτές και κλειστές διατομές σε διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών, στα οποία πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων των τριών βασικών θεωριών στρέψης ενώ συνοδεύονται από κατάλληλο σχολιασμό και από τα κύρια συμπεράσματα που εξήχθησαν σε κάθε περίπτωση.

❖ Στο **7<sup>ο</sup> κεφάλαιο** παρουσιάζεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους επιβλέποντες της διπλωματικής μου κ. Σαπουντζάκη Ευάγγελο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και κ. Τσίππια Βασίλειο, Υποψήφιο Διδάκτορα Πολιτικό Μηχανικό, για την καθοδήγηση, το συνεχές ενδιαφέρον, την άμεση βοήθεια για επίλυση αποριών αλλά και το χρήσιμο βιβλιογραφικό υλικό που μου παρείχαν σε κάθε φάση της δημιουργίας της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω, ακόμη, τον κ. Μώκο Βασίλη, Διδάκτορα Πολιτικό Μηχανικό, για την παροχή χρήσιμου και αξιόπιστου λογισμικού στο στάδιο των αναλύσεων. Επίσης, θέλω να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους γονείς μου για την διαρκή τους υποστήριξη που επέτρεψε την επιτυχή διεκπεραίωση των σπουδών μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους μου για τα όμορφα φοιτητικά χρόνια που περάσαμε μαζί.

Θοδωρής Γεωργίου,  
Αθήνα, Ιούλιος 2011

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή-Ιστορική αναδρομή.....</b>	<b>1</b>
<b>Κεφάλαιο 2: Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας.....</b>	<b>5</b>
2.1 Βασικοί ορισμοί.....	6
2.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα.....	7
2.2.1 Τάσεις.....	7
2.2.2 Μετατοπίσεις-Παραμορφώσεις.....	8
2.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις-Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας.....	10
<b>Κεφάλαιο 3: Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου.....</b>	<b>12</b>
3.1 Βασικές έννοιες.....	13
3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	20
3.3 Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	27
<b>Κεφάλαιο 4: Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδου με επιρροή     δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων.....</b>	<b>35</b>
4.1 Βασικές έννοιες.....	36
4.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις.....	37
4.3 Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας.....	41
4.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες.....	41
4.5 Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις.....	44
<b>Κεφάλαιο 5: Αριθμητικός υπολογισμός γεωμετρικών σταθερών.....</b>	<b>48</b>
5.1 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $I_p, I_t^P, I_t^S, C_s$ με συνοριακή ολοκλήρωση.....	49

5.2 Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης $k_x$ με πεδιακή ολοκλήρωση.....	52
<b>Κεφάλαιο 6: Αριθμητικές εφαρμογές-Συμπεράσματα.....</b>	<b>54</b>
6.1 Εισαγωγή.....	55
6.2 Ανοικτές διατομές.....	55
6.2.1 Γεωμετρικές σταθερές.....	55
6.2.2 Εντατικά μεγέθη, κινηματικά μεγέθη, τάσεις.....	61
6.3 Κλειστές διατομές.....	73
6.3.1 Γεωμετρικές σταθερές.....	73
6.3.2 Εντατικά μεγέθη, κινηματικά μεγέθη, τάσεις.....	77
6.4 Βασικά συμπεράσματα.....	111
<b>Κεφάλαιο 7: Βιβλιογραφία.....</b>	<b>117</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

## Εισαγωγή-Ιστορική αναδρομή

Η στρέψη αποτελεί έναν πολύ σημαντικό παράγοντα στην ανάλυση των κατασκευών και για το λόγο αυτό καθίσταται αναγκαία και χρήσιμη η διερεύνηση των προβλημάτων που σχετίζονται με αυτή. Το πρόβλημα της στρέψης δεν παρουσιάστηκε τώρα αλλά αποτελεί αντικείμενο μελέτης για ερευνητές και μηχανικούς για πολλές δεκαετίες καθώς δεν εμφανίζεται μόνο στον κλάδο του πολιτικού μηχανικού αλλά και σε διάφορους άλλους όπως την αεροναυπηγική και τη μηχανολογία. Οι απαρχές της θεωρίας της στρέψης τοποθετούνται στο 1784 όπου τότε πρώτος ο Coulomb μελέτησε την απλούστερη περίπτωση ράβδου με κυκλική ή δακτυλιοειδή διατομή και προέκυψε η τεχνική θεωρία στρέψης η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι οι διατομές της ράβδου στρέφονται σαν επίπεδοι στερεοί δίσκοι. Η θεωρία αυτή, όμως, αδυνατεί να εφαρμοστεί με αξιοπιστία σε ράβδους τυχούσας διατομής.

Καθώς το πρόβλημα παρέμενε για ράβδους τυχούσας διατομής, το 1855 ο St.Venant στηριζόμενος στη θεωρία του Coulomb και κάνοντας τις κατάλληλες τροποποιήσεις κατάφερε να επιλύσει ράβδους τυχούσας διατομής. Ο St.Venant μελέτησε ευθύγραμμες πρισματικές ράβδους στις οποίες επιβάλλονταν ίσες και αντίθετες στρεπτικές ροπές στα άκρα και οι οποίες διέπονταν από τη θεωρία γραμμικής ελαστικότητας. Η θεωρία του προέβλεπε ότι η διατομή μιας ράβδου υποβαλλόμενης σε στρέψη δεν παραμένει επίπεδη αλλά στρεβλώνει. Η θεωρία είναι γνωστή ως θεωρία ομοιόμορφης στρέψης και ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται λόγω συνοριακών συνθηκών ή άλλων κατασκευαστικών περιορισμών.

Στην περίπτωση κατά την οποία η στρέβλωση παρεμποδίζεται λόγω συνθηκών στήριξης ή υπάρχει μεταβολή της στρεπτικής έντασης τότε η στρέψη παύει να είναι ομοιόμορφη και χαρακτηρίζεται ως ανομοιόμορφη με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται ορθές και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω των οποίων αναπτύσσονται το δίρροπο στρέβλωσης και η δευτερογενής στρεπτική ροπή αντίστοιχα. Η θεωρία αυτή είναι γνωστή ως θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Οι συνέπειες από την παρεμπόδιση της στρέβλωσης έγιναν πρώτα αντιληπτές από τον Marguerre (1940).

Το 1963 ο Vlasov μελετώντας ανοικτές λεπτότοιχες διατομής υπό ανομοιόμορφη στρέψη απέδειξε ότι η στρέβλωση της διατομής είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στροφής κατά μήκος της ράβδου  $\theta'_x$ . Η απόδειξη αυτή βασίστηκε στη θεμελιώδη υπόθεση του ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις κατά μήκος της μέσης γραμμής των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη (λεπτότοιχη) διατομή είναι μηδενική. Με τη θεώρηση αυτή, όμως, στην καθολική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου λαμβάνονταν υπόψιν μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις ενώ οι δευτερογενείς υπολογίζονταν μετά την επίλυσή της με αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων η οποία είναι σημαντική όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια ιδίως σε ράβδους κλειστής διατομής. Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η επιρροή αυτή μπορεί να υιοθετηθεί ένα νέο κινηματικό μέγεθος για να εκφράσει το μέγεθος της στρέβλωσης (πρωτογενής συστροφή  $(\theta'_x)^P$ ) ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης  $\eta_x$ ) το οποίο δεν είναι ανάλογο με τη συστροφή  $\theta'_x$ . Η θεωρία αυτή παρουσιάζει πλήρη αναλογία με τη μη γραμμική θεωρία καμπτόμενων ράβδων Timoshenko (Murin and Kutis 2008, Roik and Sedlacek 1966, Rubin 2005) και παραβιάζει, επομένως, και αυτή την τοπική

διαφορική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου και την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη εξαιτίας της μη ικανοποιητικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων. Κατά αυτό τον τρόπο προέκυψε η ανάγκη διόρθωσης της δευτερογενούς στρεπτικής αντίστασης με τη χρήση ενός στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_{\chi}$  ο οποίος στην περίπτωση διπλά συμμετρικών διατομών, όπου αποδεικνύεται ότι στρεπτικές και καμπτικές καταπονήσεις αποξενώνονται (Slivker 2007, Laudiero and Savoia 1990), υπολογίζεται αριθμητικά στις εργασίες των Sapountzakis and Mokos (2009) με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και του Kraus (2007) με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Με βάση την υπάρχουσα διεθνή βιβλιογραφία, διαπιστώνεται ότι το πρόβλημα της ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων δεν έχει μελετηθεί τόσο όσο το πρόβλημα της 'κλασικής' ανομοιόμορφης στρέψης. Το 1961 ο Heilig παρουσίασε μια θεωρητική διατύπωση του προβλήματος ενώ το 1966 οι Roik and Sedlacek έδωσαν αναλυτική λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Δυνάμεων. Ο Rubin (2005) βασιζόμενος στη μεθοδολογία των Roik and Sedlacek διατύπωσε Εξίσωση Τριών Σημείων για την επίλυση συνεχών δοκών με ενδιάμεσες στηρίξεις, κατανεμημένες ή συγκεντρωμένες φορτίσεις. Το 2001 οι Roberts and Al-Ubaidi έλυσαν αναλυτικά το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ως αγνώστους την πρωτογενή και τη δευτερογενή στρεπτική γωνία στροφής και επιβεβαίωσαν πειραματικά τη μεθόδό τους σε FRP ράβδους διατομής διπλού ταυ. Οι Park (1997), Emme Erkmen and Mohareb (2006), Laudiero and Savoia (1990) χρησιμοποίησαν τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ενώ οι Sapountzakis and Mokos (2009) τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων για επίλυση στατικών προβλημάτων. Ο Tralli (1986) διατύπωσε υβριδική μεθοδολογία Πεπερασμένων Στοιχείων για στατική ανάλυση ράβδων, ενώ οι Kollar (2001), Kim and Kim (2005) εφάρμοσαν προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων ελεύθερων ταλαντώσεων ράβδου. Τέλος πολλοί ερευνητές διερευνούσαν προβλήματα λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων αλλά χωρίς να εισάγουν στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή διάτμησης όπως οι El Fatmi (2007), Back and Will (1998), Chen and Blandford (1989), Gendy (1992), Hu (1996), Cortinez and Piovan (2002), Machado and Cortinez (2007), Vo and Lee (2009), Simo and Vu-Quoc (1991), Gruttmann (2000). Όπως θα διαπιστώσουμε στα επόμενα κεφάλαια προκύπτει σημαντικό σφάλμα στις αναλύσεις σε περίπτωση που δεν εισάγουμε έναν κατάλληλο στρεπτικό διορθωτικό συντελεστή στη δευτερογενή στρεπτική αντίσταση.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετήσει και να αναδείξει την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων, μέσω της εφαρμογής και της σύγκρισης των αποτελεσμάτων της ομοιόμορφης, της 'κλασικής' και της 'διευρυμένης' θεωρίας, σε ράβδους ανοικτής αλλά και κλειστής διατομής υποβαλλόμενες σε διάφορα είδη συνοριακών συνθηκών και συνθηκών φόρτισης. Οι υπολογισμοί θα πραγματοποιηθούν με τη μέθοδο της ραβδοστατικής ανάλυσης και όχι με τη μέθοδο των τρισδιάστατων πεπερασμένων λόγω της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η τελευταία αλλά και της μεγάλης πρακτικής αξίας που έχουν τα ραβδωτά στοιχεία στην ανάλυση φορέων Πολιτικού Μηχανικού. Ο υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών για κάθε διατομή θα πραγματοποιηθεί με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων η οποία αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο και αξιόπιστο εργαλείο τόσο στις ανοικτές όσο και τις κλειστές διατομές και δεν υπόκειται στις παραδοχές της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών (Θ.Λ.Δ.). Η επίλυση των ράβδων που μελετήθηκαν πραγματοποιείται με τη Μέθοδο Αναλογικής Εξισώσεως που ανήκει

στην οικογένεια Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων. Τα συμπεράσματά που θα προκύψουν θα βασίζονται όχι μόνο στη σύγκριση κινηματικών και εντατικών μεγεθών αλλά κυρίως στη σύγκριση των τασικών μεγεθών.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

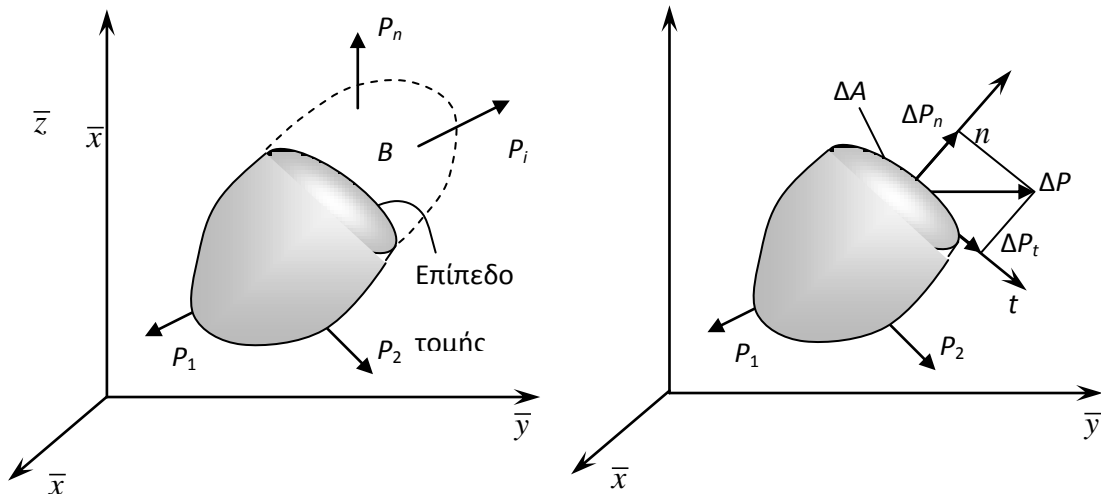
## 2.1 Βασικοί Ορισμοί

Θεωρούμε το στερεό παραμορφώσιμο σώμα, με δομή χωρίς ασυνέχειες του σχήματος (2.1), επί του οποίου επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις (καθολικές – επιφανειακές). Αποκόπτοντας και απομονώνοντας το αριστερό τμήμα, εμφανίζεται στην επιφάνεια της επίπεδης τομής μια συνισταμένη εσωτερική δύναμη  $\Delta F$ , η οποία είναι ισοπολική των δυνάμεων του δεξιού τμήματος. Συμβολίζοντας το εμβαδόν της επιφάνειας τομής ως  $A$ , ορίζουμε ως τάση  $\sigma$  το όριο του λόγου

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (2.1)$$

όπου

$\Delta A$  : ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας που τείνει να μηδενιστεί



**Σχήμα 2.1** Επίπεδη τομή σε ελαστικό σώμα.

Στη γενική περίπτωση, όπου η δύναμη  $\Delta P$  έχει τυχαία διεύθυνση, ορίζουμε το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{n}$ , οπότε αναλύοντας το διάνυσμα της δύναμης σε μια συνιστώσα παράλληλη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_n$ ) και μια συνιστώσα κάθετη στο  $\vec{n}$  ( $\Delta P_t$ ) και άρα συνεπίπεδη στην επιφάνεια  $A$ , εξάγουμε τους παρακάτω ορισμούς :

$$\text{Ορθή Τάση : } \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta A} \quad (2.2.α)$$

$$\text{Διατμητική Τάση : } \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_t}{\Delta A} \quad (2.2.β)$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε τη διάτμηση ως εξής :

**Διάτμηση** είναι το εντατικό αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στις αναπτυσσόμενες διατμητικές τάσεις. Οι διατμητικές τάσεις σε συνδυασμό με τις ορθές τάσεις αποκαθιστούν την ισορροπία για κάθε στοιχειώδες τμήμα ενός

στερεού σώματος, ενώ ταυτόχρονα είναι υπαίτιες για εσωτερικές παραμορφώσεις, δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο ένα μηχανισμό μεταβίβασης της εξωτερικής καταπόνησης του σώματος (καθολικές – επιφανειακές δυνάμεις) στο εσωτερικό του.

Είναι λοιπόν προφανές ότι κατά τον σχεδιασμό των έργων πολιτικού μηχανικού είναι απαραίτητος ο ακριβέστερος, όσο το δυνατόν, υπολογισμός των εσωτερικών εντατικών μεγεθών (ορθές και διατμητικές τάσεις), καθώς και των προκαλούμενων παραμορφώσεων. Μια λύση στο πρόβλημα αυτό δίνει η **Θεωρία της Ελαστικότητας**. Η Θεωρία της Ελαστικότητας, παρά τις όποιες παραδοχές κάνει για τη φύση των σωμάτων, αποτελεί ένα αρκετά ακριβές μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο έχοντας ως δεδομένα την γεωμετρία, τις συνθήκες στηριξης, την εξωτερική φόρτιση και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού μπορούμε να προσδιορίσουμε πλήρως την εσωτερική καταπόνηση ενός σώματος με τον υπολογισμό των τάσεων, των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο του.

## 2.2 Τρισδιάστατη ελαστικότητα

Για τον υπολογισμό των τάσεων και των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων χρησιμοποιείται η θεωρία της ελαστικότητας στον τρισδιάστατο χώρο.

### 2.2.1 Τάσεις

Για τον καθορισμό της έννοιας της τάσεως στον τρισδιάστατο χώρο θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού, μορφής κύβου με απειροστές διαστάσεις  $(d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z})$ , οι πλευρές του οποίου είναι παράλληλες στα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων  $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  (βλ. σχήμα 2.1). Σε κάθε πλευρά του κύβου ασκούνται δυνάμεις οι οποίες εάν διαιρεθούν με την επιφάνεια και αναλυθούν σε συνιστώσες παράλληλες στους άξονες  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  προκύπτουν οι παρακάτω συνιστώσες των τάσεων σε μητρική μορφή

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} & \tau_{\bar{x}\bar{y}} & \tau_{\bar{x}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{y}\bar{x}} & \sigma_{\bar{y}\bar{y}} & \tau_{\bar{y}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}\bar{x}} & \tau_{\bar{z}\bar{y}} & \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (2.2.1.1)$$

όπου

$\sigma_{ii} (i = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  : οι ορθές τάσεις

$\tau_{ij} (i, j = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  : οι διατμητικές τάσεις

- Οι δείκτες  $i, j$  στον συμβολισμό  $\tau_{ij}$  δηλώνουν αντίστοιχα τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο και τη διεύθυνση του διανύσματος της συνιστώσας των τάσεων.
- Ορίζουμε ως θετικές ορθές τάσεις τις εφελκυστικές και ως αρνητικές τις θλιπτικές. Όσον αφορά τις διατμητικές, θεωρούμε ότι αυτές είναι θετικές εάν έχουν την φορά των θετικών αξόνων του καρτεσιανού συστήματος, εφόσον η αντίστοιχη θετική ορθή τάση έχει κι αυτή φορά θετικού άξονα.

Το παραπάνω μητρώο αποτελεί ένα συμμετρικό τανυστή 2ας τάξεως και την μεταβολή των τάσεων την εκφράζουμε με το ανάπτυγμα Taylor διατηρώντας τους 2 πρώτους όρους. Εφαρμόζοντας στον στοιχειώδη κύβο τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τις τρεις διευθύνσεις  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\text{Διεύθυνση } \bar{x} : \frac{\partial \sigma_{\bar{x}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{x}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{x}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + p_{\bar{x}} = 0 \quad (2.2.1.2\alpha)$$

$$\text{Διεύθυνση } \bar{y} : \frac{\partial \sigma_{\bar{y}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{y}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + p_{\bar{y}} = 0 \quad (2.2.1.2\beta)$$

$$\text{Διεύθυνση } \bar{z} : \frac{\partial \sigma_{\bar{z}\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}\bar{x}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \tau_{\bar{z}\bar{y}}}{\partial \bar{y}} + p_{\bar{z}} = 0 \quad (2.2.1.2\gamma)$$

όπου

$p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}, p_{\bar{z}}$  : οι συνιστώσες του διανύσματος της δύναμης πεδίου ανά μονάδα όγκου

Και σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = \tau_{\bar{y}\bar{x}}, \tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{\bar{z}\bar{y}}, \tau_{\bar{z}\bar{x}} = \tau_{\bar{x}\bar{z}}$$

Τέλος οι σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων που δρουν σε ένα σημείο  $O$  και του διανύσματος τάσης  $\sigma_n$  που δρα σε επίπεδο τυχούσας διεύθυνσης, η οποία χαρακτηρίζεται από ένα κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα  $\vec{n}$  που διέρχεται από το  $O$  είναι:

$$\tau_{\bar{x}n} = \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \tau_{\bar{x}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \tau_{\bar{x}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (2.2.1.3\alpha)$$

$$\tau_{\bar{y}n} = \tau_{\bar{y}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \tau_{\bar{y}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (2.2.1.3\beta)$$

$$\tau_{\bar{z}n} = \tau_{\bar{z}\bar{x}} \cdot \lambda_{n\bar{x}} + \tau_{\bar{z}\bar{y}} \cdot \lambda_{n\bar{y}} + \sigma_{\bar{z}\bar{z}} \cdot \lambda_{n\bar{z}} \quad (2.2.1.3\gamma)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όπως θα δούμε παρακάτω χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν τις συνοριακές συνθήκες στις θεωρίες ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων που θα διατυπωθούν παρακάτω.

## 2.2.2 Μετατοπίσεις – Παραμορφώσεις

Με την προϋπόθεση ότι το υλικό σώμα στηρίζεται έτσι ώστε να εμποδίζονται οι μετακινήσεις στερεού σώματος, κάτω από την επενέργεια εξωτερικών φορτίσεων το σώμα παραμορφώνεται και επομένως κάθε υλικό σημείο του θα υφίσταται μετατοπίσεις. Οι μετατοπίσεις αυτές περιγράφονται από το λεγόμενο **πεδίο μετατοπίσεων**, δηλαδή συναρτήσεις της θέσης του σημείου  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  που εκφράζουν τις μετατοπίσεις κατά τις τρεις διευθύνσεις  $\bar{x}, \bar{y}$  και  $\bar{z}$

$$\text{Μετατόπιση κατά } \bar{x} : u_{\bar{x}} = u_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.2.2.1\alpha)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } \bar{y} : u_{\bar{y}} = u_{\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.2.2.1\beta)$$

$$\text{Μετατόπιση κατά } z : u_{\bar{z}} = u_{\bar{z}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.2.2.1\gamma)$$

Για να συσχετίσουμε τις μετατοπίσεις με τις παραμορφώσεις θεωρούμε πάλι τον στοιχειώδη κύβο, διαστάσεων  $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$ . Στα πλαίσια της ελαστικής θεωρίας υιοθετούμε την **παραδοχή των μικρών μετατοπίσεων**. Έτσι ορίζουμε τις ορθές παραμορφώσεις ως τον λόγο μεταβολής του μήκους προς το αρχικό μήκος αγνοώντας παράλληλα όλους τους μη γραμμικούς όρους που προκύπτουν. Π.χ. κατά τη διεύθυνση  $\bar{x}$  θα είναι

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\Delta d\bar{x}}{d\bar{x}} \quad (2.2.2.2)$$

Όπως και με τις συνιστώσες των τάσεων, έτσι κι εδώ εκφράζουμε τη μεταβολή των τιμών των μετατοπίσεων από σημείο σε σημείο με τη βοήθεια του αναπτύγματος

Taylor  $\left( \Delta d\bar{x} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \right)$ . Άρα τελικά προκύπτει

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} \quad (2.2.2.3\alpha)$$

$$\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \quad (2.2.2.3\beta)$$

$$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} \quad (2.2.2.3\gamma)$$

Οι διατμητικές παραμορφώσεις εκφράζουν την στροφή των αρχικά κάθετων εδρών του κύβου. Εξετάζοντας την προβολή της έδρας στο Καρτεσιανό επίπεδο  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$  ορίζουμε τις διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} = \gamma_{\bar{y}\bar{x}} \quad (2.2.2.3\delta)$$

$$\gamma_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{\partial u_{\bar{y}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} = \gamma_{\bar{z}\bar{y}} \quad (2.2.2.3\epsilon)$$

$$\gamma_{\bar{z}\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \quad (2.2.2.3\sigma\tau)$$

Όμοια λοιπόν με τις τάσεις, ορίζεται ο συμμετρικός τανυστής 2<sup>ης</sup> τάξης, ο οποίος καθορίζει πλήρως την παραμόρφωση που υφίσταται το σώμα  $\sigma'$  ένα υλικό του σημείο με συντεταγμένες  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{x}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{x}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{y}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{z}} \\ \varepsilon_{\bar{z}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{x}\bar{y}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{y}\bar{x}} & \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{y}\bar{z}} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{z}\bar{x}} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{\bar{z}\bar{y}} & \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (2.2.2.4)$$

### 2.2.3 Καταστατικές Εξισώσεις – Παραδοχές Γραμμικής Ελαστικότητας

Με όσα έχουν αναφερθεί συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τρισδιάστατης ελαστικότητας προσδιορίζεται από 15 αγνώστους :

Έξι συνιστώσες τάσεων

Έξι συνιστώσες παραμορφώσεων

Τρεις συνιστώσες μετατοπίσεων

Όμως μέχρι τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο 9 εξισώσεις :

Τρεις εξισώσεις ισορροπίας

Έξι εξισώσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Επομένως το πρόβλημα είναι 6 φορές αόριστο. Στη θεωρία της ελαστικότητας αίρεται αυτή η αοριστία με την εισαγωγή σχέσεων που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **καταστατικές εξισώσεις**. Στην ουσία εισάγουν τις μηχανικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό.

**Στο εξής θα θεωρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες παραδοχές :**

- Το υλικό είναι **ομοιογενές**. Επομένως οι μηχανικές ιδιότητες είναι ίδιες για κάθε σημείο του υλικού.
- Το υλικό είναι **ισότροπο**. Δηλαδή οι ιδιότητες ενός σημείου του υλικού παραμένουν ίδιες, ανεξαρτήτως της διεύθυνσης την οποία εξετάζουμε.
- Το υλικό είναι **γραμμικά ελαστικό**. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα των τάσεων είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών των παραμορφώσεων. Επίσης με τον μηδενισμό των επιβαλλόμενων τάσεων το υλικό επανέρχεται στην αρχική απαραμόρφωτη κατάσταση. Ισχύει λοιπόν η σχέση

$$\sigma_{ij} = k_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.2.3.1)$$

όπου ισχύει η σύμβαση πρόσθεσης των δεικτών

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές οι καταστατικές εξισώσεις αποδεικνύεται ότι λαμβάνουν τη μορφή:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}}) \right] \quad (2.2.3.2\alpha)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} + \varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}) \right] \quad (2.2.3.2\beta)$$

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \cdot \varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} + \nu \cdot (\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} + \varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}) \right] \quad (2.2.3.2\gamma)$$

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = G \cdot \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \quad (2.2.3.2\delta)$$

$$\tau_{\bar{y}\bar{z}} = G \cdot \gamma_{\bar{y}\bar{z}} \quad (2.2.3.2\epsilon)$$

$$\tau_{\bar{z}\bar{x}} = G \cdot \gamma_{\bar{z}\bar{x}} \quad (2.2.3.2\sigma\tau)$$

ή

$$\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \nu \cdot (\sigma_{\bar{y}\bar{y}} + \sigma_{\bar{z}\bar{z}}) \right] \quad (2.2.3.3\alpha)$$

$$\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} - \nu \cdot (\sigma_{\bar{z}\bar{z}} + \sigma_{\bar{x}\bar{x}}) \right] \quad (2.2.3.3\beta)$$

$$\varepsilon_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_{\bar{z}\bar{z}} - \nu \cdot (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \right] \quad (2.2.3.3\gamma)$$

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\bar{x}\bar{y}} \quad (2.2.3.3\delta)$$

$$\gamma_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\bar{y}\bar{z}} \quad (2.2.3.3\epsilon)$$

$$\gamma_{\bar{z}\bar{x}} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{\bar{z}\bar{x}} \quad (2.2.3.3\sigma\tau)$$

όπου

$E$  : μέτρο ελαστικότητας

$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$  : μέτρο διάτμησης

$\nu$  : λόγος Poisson ( $0 < \nu < 0,5$ )

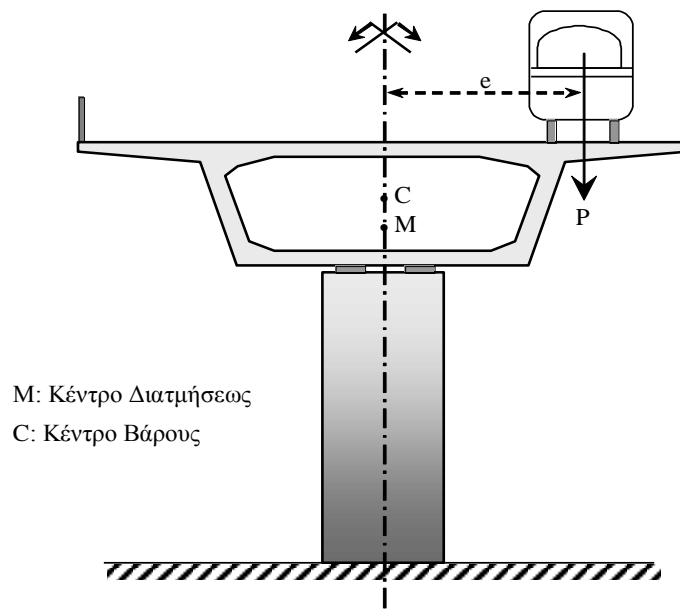
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΟΥ



### 3.1 Βασικές Έννοιες

**Στρέψη** ράβδου ονομάζεται η εντατική κατάσταση κατά την οποία ένα ζεύγος δυνάμεων επιδρά σε μια διατομή έτσι ώστε το επίπεδο του ζεύγους να είναι κάθετο στον άξονα της ράβδου και το διάνυσμα της ροπής  $M_t$  να έχει τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου. Η στρεπτική καταπόνηση, στους ραβδόμορφους φορείς, εμφανίζεται όταν η διεύθυνση του διανύσματος της εξωτερικής φόρτισης δεν διέρχεται από το κέντρο διάτμησης της (βλ. σχήμα 3.1.1). Η στρέψη είναι μια μορφή διατμητικής καταπόνησης. Το εντατικό αποτέλεσμα αυτής είναι η ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στο επίπεδο των διατομών προκαλώντας τη στρέβλωση τους.

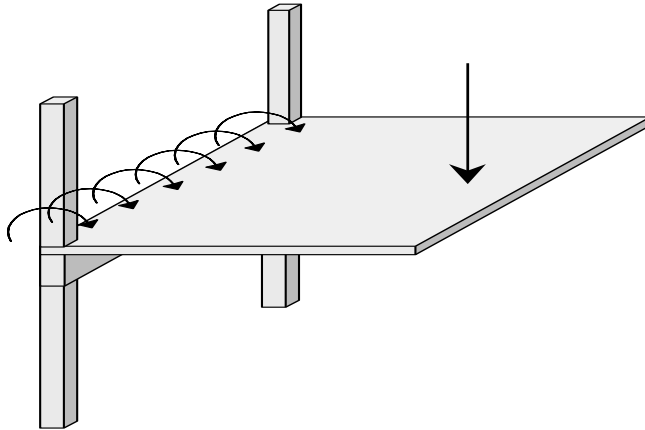


**Σχήμα 3.1.1** Ράβδος υποβαλλόμενη σε έκκεντρη ως προς το κέντρο διατμήσεως φόρτιση.

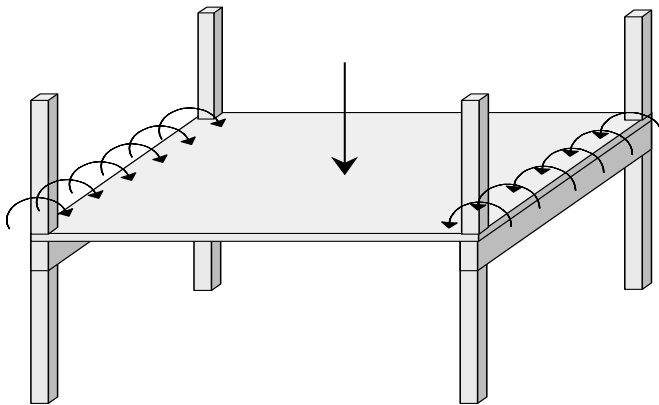
Διακρίνονται δυο κατηγορίες στρεπτικής έντασης :

- **Η άμεση στρέψη**, η οποία είναι απαραίτητη για τη στατική ισορροπία του φορέα. Ένα παράδειγμα άμεσης στρεπτικής έντασης παρουσιάζεται στο σχήμα (3.1.2), όπου παρατηρούμε ότι οι αναπτυσσόμενες στρεπτικές ροπές είναι απαραίτητες για την στατική ισορροπία του προβόλου. Στην περίπτωση που δεν υπήρχε στρεπτική πάκτωση ο φορέας θα ήταν μηχανισμός.
- **Η έμμεση στρέψη**, η οποία δεν είναι απαραίτητη για την στατική ισορροπία του φορέα, αλλά αναπτύσσεται από το συμβιβαστό των παραμορφώσεων. Οφείλεται δηλαδή στην παρεμπόδιση της γωνιακής παραμόρφωσης άλλων φορέων, οι οποίοι όμως μπορούν να ισορροπούν και χωρίς τις αναπτυσσόμενες στρεπτικές ροπές. Παράδειγμα έμμεσης στρέψης αποτελεί μια ακραία δοκός, μορφής πλακοδοκού. Η κάμψη της μονολιθικά συνδεδεμένης πλάκας μεταφράζεται σε στρεπτική καταπόνηση της δοκού (βλ. σχήμα 3.1.3). Εάν ένα στοιχείο από ωπλισμένο σκυρόδεμα που καταπονείται

σε έμμεση στρέψη ρηγματωθεί, τότε η δυστρεψία του μειώνεται σημαντικά. Η μείωση της δυστρεψίας γίνεται πιο έντονη λόγω των φαινομένων του ερπυσμού και της συστολής ξηράνσεως. Στο παράδειγμα του σχήματος (3.1.3), η μείωση της δυστρεψίας των δοκών των δυο πλαισίων συνεπάγεται την ανακατανομή της έντασης, δηλαδή τη μείωση της στρεπτικής έντασης των δοκών και την ταυτόχρονη αύξηση της καμπτικής έντασης της πλάκας.



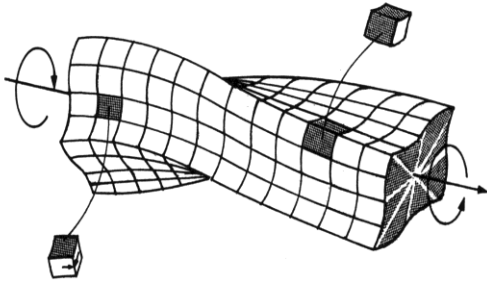
**Σχήμα 3.1.2** Δοκός υποβαλλόμενη σε έμμεση στρέψη



**Σχήμα 3.1.3** Δοκός υποβαλλόμενη σε έμμεση στρέψη

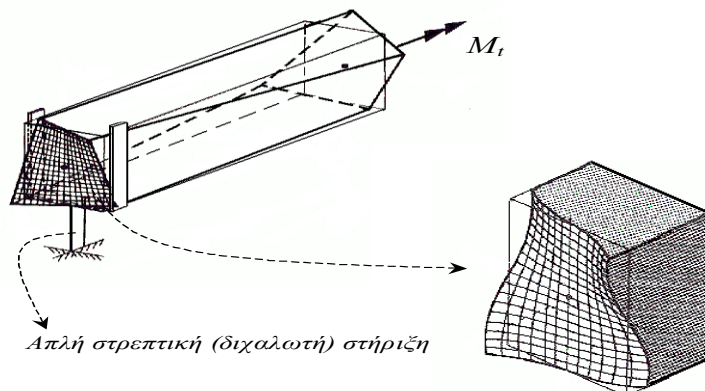
Η ανάπτυξη της θεωρίας της στρέψης ξεκίνησε από τον Coulomb (1784), ο οποίος μελέτησε την απλούστερη περίπτωση της ράβδου με κυκλική διατομή, στηριζόμενος στην παραδοχή ότι επίπεδες διατομές στην απαραμόρφωτη κατάσταση παραμένουν επίπεδες και κατά τη παραμορφωμένη κατάσταση. Η προκύπτουσα θεωρία είναι η λεγόμενη Τεχνική Θεωρία Στρέψης σύμφωνα με την οποία η στρεπτική στιβαρότητα είναι ανάλογη της πολικής ροπής αδράνεια της διατομής  $I_p$ . Η παραδοχή αυτή όμως ισχύει μόνο για την περίπτωση **κυκλικών και κυκλικών δακτυλιοειδών** διατομών. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο απέτυχαν οι μετέπειτες προσπάθειες εφαρμογής της θεωρίας σε ράβδους τυχούσας διατομής. Τελικά η λύση στο πρόβλημα της στρέψης ραβδόμορφων στοιχείων τυχούσας

διατομής δόθηκε από το Γάλλο μηχανικό Adhemar Jean Barre de Saint Venant (1855) ο οποίος βασίζόμενος στην αντίστοιχη θεωρία Coulomb εισήγαγε ορισμένες τροποποιήσεις και απέδειξε ότι **όταν μια ράβδος μη κυκλικής διατομής υπόκειται σε στρέψη, μια εγκάρσια διατομή η οποία ήταν επίπεδη πριν από τη στρέψη, δεν παραμένει επίπεδη και μετά τη στρέψη.** Η διατομή αυτή υπό την επίδραση στρεπτικής καταπόνησης υπόκειται σε **στρέβλωση** (βλ. σχήμα 3.1.4) ενώ η στρεπτική στιβαρότητα είναι ανάλογη της λεγόμενης στρεπτικής σταθεράς κατά St. Venant  $I_t$  (πρωτογενής στρεπτική σταθερά).



**Σχήμα 3.1.4** Στρέβλωση διατομών λόγω στρέψης

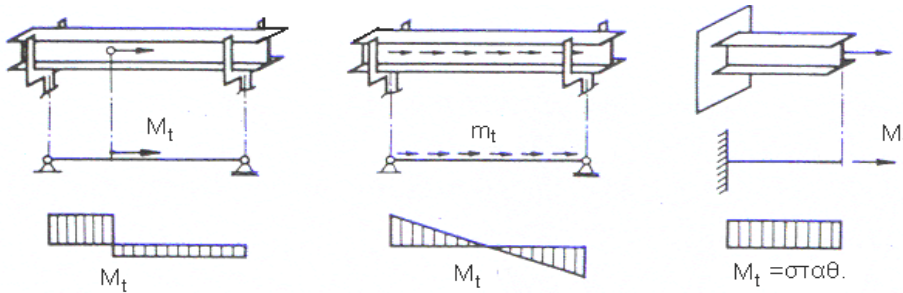
Σύμφωνα με τη θεωρία του Saint Venant η στρέβλωση των διατομών, λόγω της στρεπτικής έντασης, μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεμπόδιστα (βλ. σχήμα 3.1.5) και στην περίπτωση αυτή το είδος της στρέψης ονομάζεται **ομοιόμορφη στρέψη ή στρέψη Saint Venant**. Στην ομοιόμορφη στρέψη όλες οι διατομές της ράβδου αναπτύσσουν την ίδια στρέβλωση με αποτέλεσμα να υφίστανται μόνο διαμήκεις μετατοπίσεις χωρίς να αναπτύσσονται ορθές παραμορφώσεις. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην δημιουργούνται διαμήκεις ορθές τάσεις. Η επιβαλλόμενη στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται εξολοκλήρου από μια κλειστή ροή (ροή Bredt) στρεπτικών διατμητικών τάσεων που καλούνται **διατμητικές τάσεις Saint Venant** (πρωτογενείς διατμητικές τάσεις).



**Σχήμα 3.1.5** Ομοιόμορφη στρέψη κατά Saint-Venant, όπου η στρέβλωση δεν παρεμποδίζεται από τις

## συνθήκες στήριξης

Εν γένει η θεωρία της ομοιόμορφης στρέψης δεν επαρκεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις η στρέβλωση των διατομών οι οποίες υπόκεινται σε στρέψη **παρεμποδίζεται** είτε λόγω **συνθηκών στήριξης** (π.χ. πάκτωση στην ακραία διατομή), είτε λόγω **συνθηκών φόρτισης** (μεταβολή δηλαδή της στρεπτικής ροπής κατά μήκος της ράβδου όπως στις περιπτώσεις π.χ. συγκεντρωμένου ή κατανεμημένου στρεπτικού φορτίου).



**Σχήμα 3.1.6** Ανομοιόμορφη στρέψη ράβδων λόγω παρεμπόδισης της στρέβλωσης

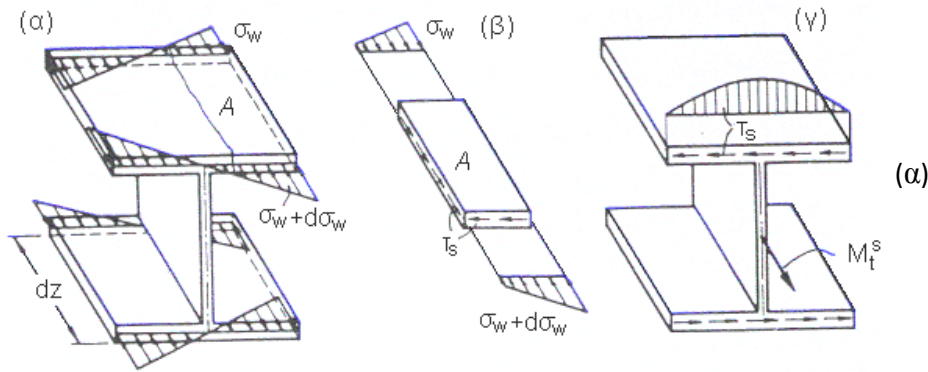
Στη περίπτωση αυτή η στρέβλωση παύει να είναι σταθερή κατά μήκος της ράβδου (βλ. σχήμα 3.1.6) και η στρέψη ονομάζεται **ανομοιόμορφη**. Συνεπώς αναπτύσσονται ορθές τάσεις, οι οποίες είναι ανάλογες της μεταβολής της στρέβλωσης κατά μήκος της ράβδου ενώ εν γένει μεταβάλλονται και αυτές κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Το φαινόμενο ανάπτυξης ορθών τάσεων γίνεται πιο έντονο κοντά στις θέσεις όπου παρεμποδίζεται η στρέβλωση και «αποσβέννυται» όσο απομακρυνόμαστε από αυτές. Λόγω της μεταβολής των ορθών τάσεων θα αναπτυχθούν, για λόγους ισορροπίας πρόσθετες διατμητικές τάσεις κατά τη διαμήκη διεύθυνση και άρα, σύμφωνα με το θεώρημα **Cauchy** ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), και επάνω στο επίπεδο της διατομής. Οι διατμητικές αυτές τάσεις ονομάζονται **τάσεις στρέβλωσης**. Συνεπώς στην ανομοιόμορφη στρέψη η στρεπτική ροπή αναλαμβάνεται κατά ένα ποσοστό από την κλειστή ροή των διατμητικών τάσεων Saint Venant (**πρωτογενείς διατμητικές τάσεις  $\tau_p$** ) και κατά το υπόλοιπο ποσοστό από τις στρεπτικές διατμητικές τάσεις στρέβλωσης (**δευτερογενείς διατμητικές τάσεις  $\tau_s$** ), οι οποίες ασκούνται στο επίπεδο της διατομής. Επομένως για τη ολική στρεπτική ροπή  $M_t$  που ασκείται σε μια διατομή ισχύει

$$M_t = M_t^p + M_t^s \quad (3.1.1)$$

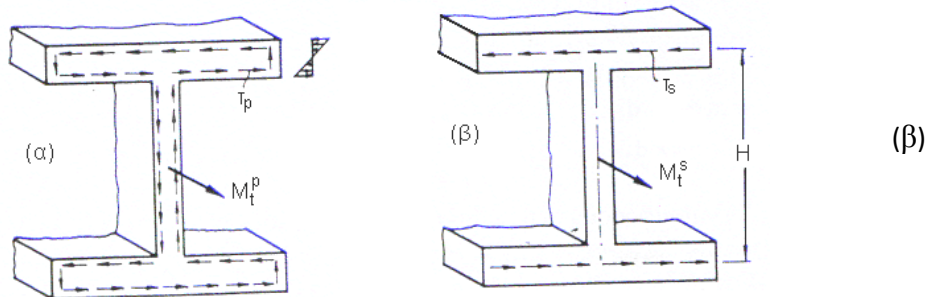
όπου

$M_t^p$  : είναι η πρωτογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων Saint Venant ( $\tau_p$ )

$M_t^s$  : είναι η δευτερογενής στρεπτική ροπή που εξισορροπείται με την ανάπτυξη των διατμητικών τάσεων στρέβλωσης ( $\tau_s$ )



Σχήμα 3.1.7 Ορθές (α) και διατμητικές (β) τάσεις, λόγω στρέβλωσης



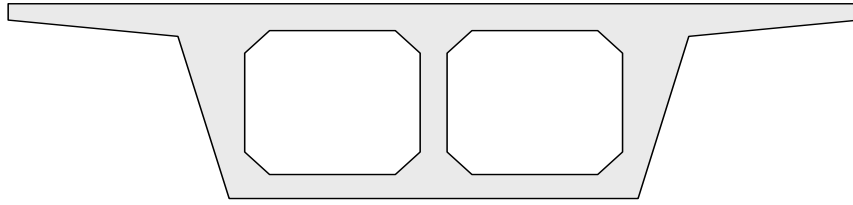
Σχήμα 3.1.8 Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων

Τα ποσοστά της συνολικής στρεπτικής ροπής που αναλαμβάνονται αντίστοιχα από τις πρωτογενείς και τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις καθορίζονται από τη γεωμετρία και το υλικό της διατομής. Πιο συγκεκριμένα, καθορίζονται η στρεπτική αντίσταση και η αντίσταση στρέβλωσης του ραβδόμορφου στοιχείου.

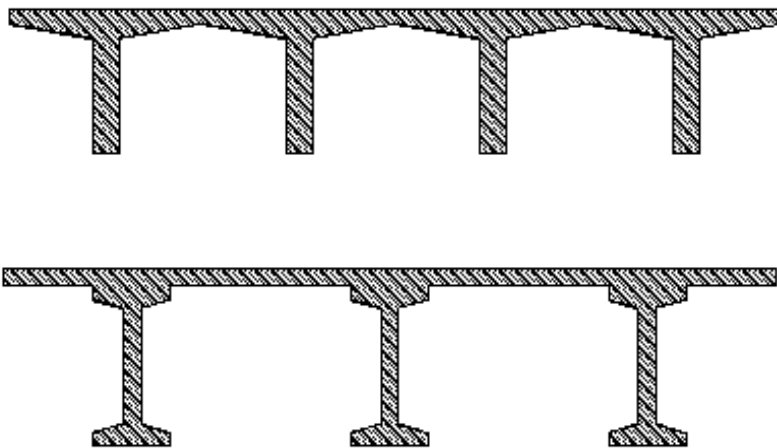
Στις περιπτώσεις διατομών με μεγάλη στρεπτική αντίσταση και μικρή αντίσταση στρέβλωσης αναπτύσσεται κυρίως ομοίμορφη στρέψη, δηλαδή εμφανίζονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις Saint Venant  $\tau_p$ , οι οποίες αναλαμβάνουν σχεδόν το σύνολο της επιβαλλόμενης στρεπτικής ροπής, ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις  $\tau_s$  καθώς και οι ορθές τάσεις  $\sigma_w$  είναι αμελητέες.

Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή οι διατομές εμφανίζουν εξίσου μεγάλη αντίσταση στρέβλωσης είναι μεγάλης σημασίας ο προσδιορισμός των ορθών και διατμητικών τάσεων στρέβλωσης.





**Σχήμα 3.1.9** Διατομή απλού (α) και πολλαπλού (β) κιβωτίου φορέα τεχνικών έργων με μεγάλη στρεπτική αντίσταση



**Σχήμα 3.1.10** Διατομές φορέων μορφής πλακοδοκού με μικρή στρεπτική αντίσταση και έντονη στρέβλωση

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι εκτός από την ‘κλασική’ θεωρία έχει αναπτυχθεί και η ‘διευρυμένη’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης στην οποία λαμβάνονται υπόψιν οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στην καθολική ισορροπία της ράβδου ενώ στην ‘κλασική’ θεωρία αμελούνται. Η διευρυμένη θεωρία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4.

Στη συνέχεια θα αναλυθεί η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως ως γενική περίπτωση και η ανεμπόδιστη στρέψη Saint Venant ως μερική περίπτωση της προηγούμενης. Πρώτα όμως θα περιγραφούν οι βασικές παραδοχές των δύο θεωριών.

#### Παραδοχές ελαστικής θεωρίας στρέψεως:

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.  
Στους καμπύλους φορείς η κάμψη και η στρέψη είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους με γεωμετρικές σχέσεις (Becker 1965, Vlassov 1964-1965, Dabrowski 1968).
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται ( $\gamma_{yz} = 0$ ).

3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή. Με την παραδοχή αυτή το σχήμα της διατομής της ράβδου είναι ανεξάρτητο της διαμήκους συντεταγμένης.  
Με την παραδοχή αυτή το σχήμα της διατομής της ράβδου είναι ανεξάρτητο της διαμήκους συντεταγμένης. Στη στρέψη ράβδων, όπου το σχήμα των διατομών τους μεταβάλλεται συναρτήσει του μήκους, αναφέρονται οι Lee and Szabo (1967).
4. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας περιστροφής. Ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών.  
Στη στρέψη ράβδων όπου επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας στροφής διαφορετικός από αυτόν που διέρχεται από το κέντρο διάτμησης των διατομών αναφέρεται ο Roik (1978). Η κάμψη της ράβδου με την παραδοχή αυτή θεωρείται ανεξάρτητη καταπόνηση. Τούτο δεν ισχύει όμως και στην περίπτωση που η ράβδος υπολογίζεται με θεωρία δευτέρας τάξεως. Λύσεις σχετικά με το θέμα δίδονται από τους Roik, Carl and Linder (1972).
5. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του. Η παραδοχή αυτή είναι συνεπής με τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων που υιοθετείται στα πλαίσια της παρούσας εργασίας (βλ. Κεφάλαιο 2).  
Στη στρεπτική καταπόνηση με μεγάλες στροφές αναφέρονται οι Kreuzinger (1969), Klöppel and Bilstein (1972).
6. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας. Η ομοιογένεια εξασφαλίζει την ομοιομορφία των ιδιοτήτων του υλικού από σημείο σε σημείο, ενώ η ισοτροπία αφορά την ομοιομορφία των ιδιοτήτων κατά τις διάφορες διευθύνσεις.
7. Η πρωτογενής (κύρια) στρέβλωση της ράβδου είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στρεπτικής στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους. Η αναλογία μεταξύ στρέβλωσης των διατομών της ράβδου και σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους αποδείχθηκε ότι ισχύει στην περίπτωση της γραμμικής ομοιόμορφης στρέψης από τον *St. Venant*. Ο συγκεκριμένος τρόπος στρέβλωσης της διατομής επεκτείνεται και στην παρούσα θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης οδηγώντας σε απλοποίησή της. Όπως θα φανεί παρακάτω, η θεώρηση αυτή προσομοιώνει την επιρροή των ορθών τάσεων ωστόσο αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η θεώρηση ανεξάρτητης παραμέτρου στρέβλωσης της διατομής, η οποία δεν είναι ανάλογη της σχετικής γωνίας στροφής ανά μονάδα μήκους, καθιστά δυνατή τη διερεύνηση της επιρροής δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων και παρουσιάζεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 4. Αυτό το απέδειξε και ο Vlasov, στις ανοικτές διατομές, βασιζόμενος στις παραδοχές της *Θ.Α.Δ.*.
8. Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

Ειδικά για την **ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη Saint Venant** ισχύει η πρόσθετη παραδοχή:

9. Οι διαμήκεις μετατοπίσεις που προκαλούν στρέβλωση δεν παρεμποδίζονται και είναι ίδιες για κάθε διατομή και ανεξάρτητες από τις διαμήκεις συντεταγμένες.  
Με την παραδοχή αυτή επιβάλλεται περιορισμός, τόσο στις συνθήκες στήριξης της ράβδου (διχαλωτή στήριξη όπως στο σχήμα 3.1.5) όσο και στη φόρτιση της, η οποία

πρέπει να είναι τέτοια ώστε η στρεπτική ροπή  $M_t$  να είναι σταθερή σε κάθε διατομή της ράβδου.

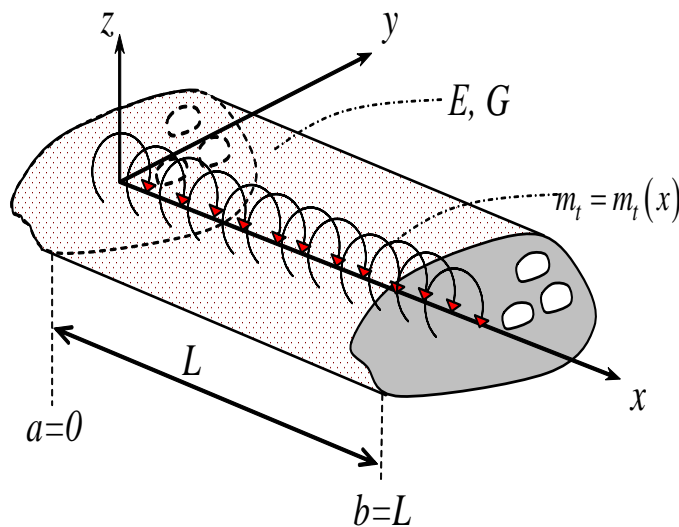
Η τελευταία παραδοχή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η θεωρία ομοιόμορφης στρέψης βρίσκει εφαρμογή σε ελάχιστες περιπτώσεις και για αυτό κρίνεται αναγκαία η ανάλυση της ανομοιόμορφης θεωρίας στρέψης.

### 3.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ράβδο τυχούσας διατομής, η οποία υποβάλλεται σε τυχούσα συγκεντρωμένη ή κατανεμημένη στρεπτική φόρτιση  $m_t = m_t(x)$  περί τον επιμήκη άξονα της  $x$  (βλ. σχήμα 3.2.1α). Αποτέλεσμα της στρεπτικής αυτής καταπόνησης είναι η στροφή της διατομής της ράβδου ως προς ως προς το κέντρο διαμήσεως  $S$  κατά γωνία  $\theta_x(x)$ . Το κέντρο διαμήσεως  $S$  ταυτίζεται με το κέντρο συστροφής της διατομής της ράβδου εφόσον δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιο άλλο κέντρο συστροφής. Στα επόμενα θεωρούμε ότι στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άλλος άξονας συστροφής.

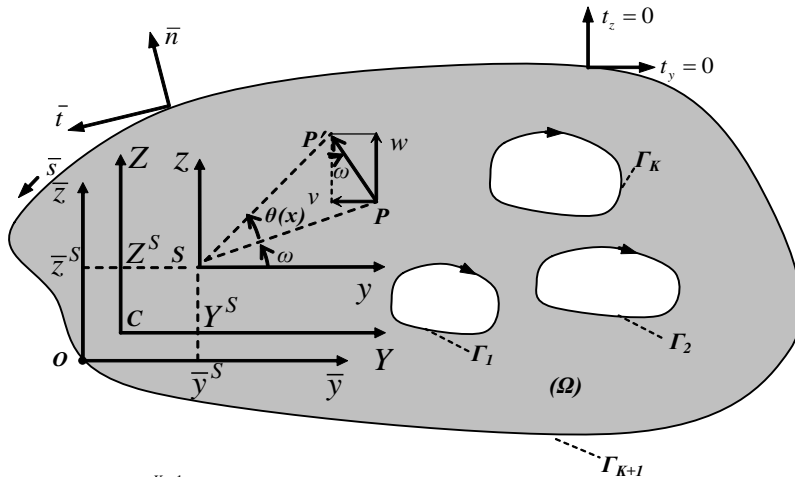
Το κέντρο διαμήσεως  $S$  είναι το σημείο στο επίπεδο της διατομής, για το οποίο η ροπή των διαμηθικών τάσεων λόγω τέμνουσας έχει μηδενική τιμή. Η θέση του κέντρου διαμήσεως είναι ανεξάρτητη του μεγέθους και του είδους της εξωτερικής φορτίσεως, αλλά εξαρτάται μόνο από το γεωμετρικό σχήμα της διατομής. Στην περίπτωση κατά την οποία η διατομή έχει άξονα συμμετρίας, το κέντρο διαμήσεως  $S$  βρίσκεται πάνω σε αυτόν, ενώ αν η διατομή έχει δύο άξονες συμμετρίας, το κέντρο διαμήσεως ταυτίζεται με το κέντρο βάρους.

Λόγω της προαναφερθείσης στροφής της διατομής ως προς το κέντρο διαμήσεως  $S$  κατά γωνία  $\theta_x(x)$  για τυχόν σημείο  $P$  της διατομής προκύπτουν μετατοπίσεις  $v$  και  $w$  κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  αντίστοιχα, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις (βλ. παραδοχές 2, 3, 5)



(α)





$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{K+1} \Gamma_j$$

(β)

**Σχήμα 3.2.1** Ράβδος τυχούσας διατομής υποβαλλόμενη σε στρεπτική ροπή  $M_t$

$$v(x, y, z) = -(PP') \sin \omega = -(MP) \theta_x(x) \sin \omega = -z \theta_x(x) \quad (3.2.2)$$

$$w(x, y, z) = (PP') \cos \omega = (MP) \theta_x(x) \cos \omega = y \theta_x(x) \quad (3.2.3)$$

ενώ για τη μετατόπιση  $u$  που αποτελεί τη στρέβλωση της διατομής θεωρούμε ότι ισχύει (βλ. παραδοχή 7)

$$u(x, y, z) = \theta'_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.4)$$

όπου  $\theta'_x(x) = d\theta_x / dx$  είναι η σχετική γωνία στροφής δύο γειτονικών διατομών της ράβδου ανηγμένη στη μονάδα μήκους και  $\phi_S(y, z)$  είναι η συνάρτηση στρεβλώσεως ως προς το κέντρο διατομής  $S$ , η οποία χαρακτηρίζεται και ως κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως. Ο δείκτης  $S$  δείχνει ότι η στρέβλωση αναφέρεται στον άξονα στροφής  $S$ . Η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\phi_S$  εκφράζει τη στρέβλωση  $u$  που προκύπτει για μοναδιαία σχετική γωνία στροφής ( $\theta'_x(x) = 1$ ). Σύμφωνα με την παραδοχή που εκφράζει η σχέση (3.2.4), η συνάρτηση στρεβλώσεως εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της διατομής, δηλαδή αποτελεί παράμετρο αυτής και είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης  $x$ .

Σύμφωνα με την ανεμπόδιστη ομοιόμορφη στρέψη *Saint Venant*, η σχετική γωνία στροφής θα πρέπει να είναι σταθερή ( $\theta'_x = c$ ), ενώ σύμφωνα με την ανομοιόμορφη στρέψη με δυνάμεις στρεβλώσεως, η σχετική γωνία στροφής είναι συνάρτηση της διαμήκους συντεταγμένης  $x$  ( $\theta'_x = \theta'_x(x)$ ).

Με τη βοήθεια των μετατοπίσεων που δίδονται από τις προηγούμενες σχέσεις και εφαρμόζοντας τις σχέσεις μετατοπίσεων - παραμορφώσεων και τάσεων - παραμορφώσεων της θεωρίας ελαστικότητας από το Κεφάλαιο 2 (βλ. σχέσεις (2.2.2.3α), (2.2.2.3β), (2.2.2.3γ), (2.2.2.3δ), (2.2.2.3ε), (2.2.2.3στ), (2.2.3.2α), (2.2.3.2β), (2.2.3.2γ), (2.2.3.2δ), (2.2.3.2ε), (2.2.3.2στ)) λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή

παραμορφώσεως ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.5\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2.5\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.2.5\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (3.2.5\delta)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.2.5\epsilon)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (3.2.5\sigma\tau)$$

και τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως ως

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right] = E^* \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right] = E^{**} \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\beta)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = E^{**} \cdot \theta_x''(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.6\gamma)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad (3.2.6\delta)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.6\epsilon)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \theta_x'(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad (3.2.6\sigma\tau)$$

όπου  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$ ,  $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$  με E,G,ν το μέτρο ελαστικότητας,

το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson. Οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας ενώ οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  (που δεν παράγουν έργο αφού οι ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των αγνώστων κινηματικών μεγεθών. Στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson. Επιπλέον, το  $E^*$  αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που  $\nu=0$ . Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι

$E^* = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$ . Οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη διατύπωση

θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Στην ειδική περίπτωση της ανεμπόδιστης ομοιόμορφης στρέψεως *Saint Venant* ( $\theta'_x = \text{σταθερή}$ ), οι σχέσεις (3.2.5α) και (3.2.6α) δίδουν, αντίστοιχα

$$\varepsilon_{xx} = 0 \quad (3.2.7\alpha)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (3.2.7\beta)$$

ενώ οι υπόλοιπες συνιστώσες των τανυστών παραμορφώσεως και τάσεως είναι ταυτόσημες με αυτές της ανομοιόμορφης στρέψεως με δυνάμεις στρεβλώσεως.

Στη συνέχεια αν αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσεως στις τρεις εξισώσεις ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας, που έχουμε ήδη παραθέσει, λαμβάνουμε

$$G \cdot \theta''_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) = 0 \quad (3.2.8\alpha)$$

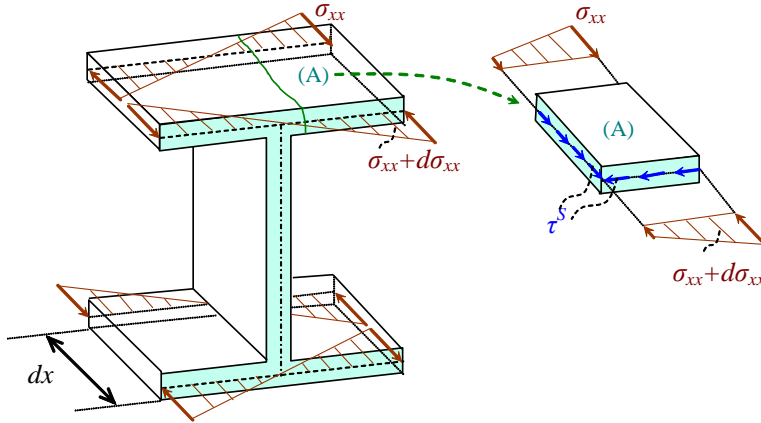
$$G \cdot \theta''_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) = 0 \quad (3.2.8\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} [E \cdot \theta''_x(x) \cdot \phi_S] = 0 \quad (3.2.8\gamma)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δεν ικανοποιούνται καθώς τοπικά εξασφαλίζεται η ισορροπία μόνο κατά τον άξονα  $x$  και μόνο στην περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψης, όπου η σχετική γωνία στροφής παραμένει σταθερή  $\theta''_x(x) = 0$ , ικανοποιούνται. Από τη σχέση (3.2.8γ) προκύπτει

$$\frac{\partial^2 \phi_S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial z^2} = - \frac{E \cdot \theta'''_x(x)}{G \cdot \theta'_x(x)} \cdot \phi_S \quad (3.2.9)$$

Στη σχέση (3.2.9) το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο των μεταβλητών  $y, z$ , εφόσον  $\phi_S = \phi_S(y, z)$ , ενώ το δεξιό μέλος είναι συνάρτηση και της μεταβλητής  $x$ . Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος αναλύουμε τις διατμητικές τάσεις σε **πρωτογενείς**  $\tau^P$  και **δευτερογενείς**  $\tau^S$ . Οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις και οι ορθές τάσεις από στρέβλωση προκύπτουν από τις παραμορφώσεις (πρωτογενείς), ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις προκύπτουν από την ανάγκη ισορροπίας των διαμήκων ορθών τάσεων στρεβλώσεως  $\sigma_{xx}$ .



**Σχήμα 3.2.2** Ορθές και διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης

Η στοιχειώδης μεταβολή  $d\sigma_{xx}^w$  των ορθών τάσεων από στρέβλωση μπορεί να εξισορροπηθεί μόνο από διατμητικές τάσεις κατά μήκος της τομής A και οι οποίες με τη βοήθεια του θεωρήματος Cauchy οδηγούν στην ανάπτυξη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων  $\tau^S$  στο επίπεδο της διατομής (βλ. σχήμα 3.2.2).

Άρα έχουμε

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^S \quad (3.2.10\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^P + \tau_{xz}^S \quad (3.2.10\beta)$$

και ισχύουν οι σχέσεις

$$\tau_{xy}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial y} - z \right) \quad \tau_{xy}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (3.2.11\alpha-\beta)$$

$$\tau_{xz}^P = G \cdot \theta'_x(x) \cdot \left( \frac{\partial \phi_S}{\partial z} + y \right) \quad \tau_{xz}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (3.2.12\alpha-\beta)$$

$$\sigma_{xx}^w = E \cdot \theta''_x(x) \cdot \phi_S(y, z) \quad (3.2.13)$$

όπου τις συναρτήσεις  $\phi_S^P(y, z)$  και  $\phi_S^S(x, y, z)$  ονομάζουμε πρωτογενή και δευτερογενή κύρια συνάρτηση στρεβλώσεως, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.10) στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας της θεωρίας ελαστικότητας απουσία μαζικών δυνάμεων λαμβάνουμε

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} = 0 \quad (3.2.14)$$

Για την ικανοποίηση της σχέσης απαιτούμε

$$\frac{\partial \tau_{xy}^P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^P}{\partial z} = 0 \quad (3.2.15)$$

και

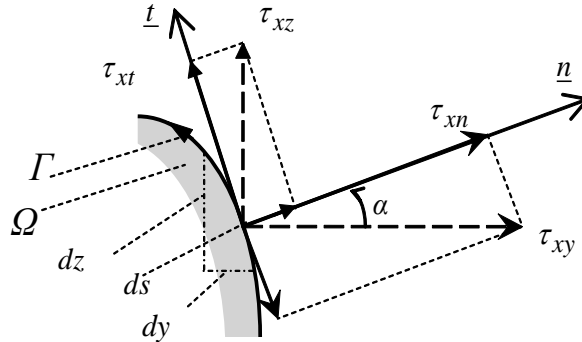
$$\frac{\partial \tau_{xy}^S}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^S}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}^w}{\partial x} = 0 \quad (3.2.16)$$

όπου με αντικατάσταση προκύπτει

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \quad (3.2.18)$$

Για τη μόρφωση των **συνοριακών συνθηκών** της πρωτογενούς και της δευτερογενούς κύριας συνάρτησης στρεβλώσεως παρατηρούμε τις διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής. Εξετάζοντας τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dydz$  στο σχήμα λαμβάνουμε



**Σχήμα 3.2.3** Διατμητικές τάσεις στο σύνορο της διατομής

$$\tau_{xn} = \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \quad (3.2.19)$$

$$\tau_{xt} = -\tau_{xy} \cdot n_z + \tau_{xz} \cdot n_y \quad (3.2.20)$$

όπου  $n_y = \cos(y, n) = \cos \alpha = \frac{dy}{dn} = \frac{dz}{ds}$  και  $n_z = \sin(z, n) = \sin \alpha = \frac{dz}{dn} = -\frac{dy}{ds}$

και με αντικατάσταση προκύπτει

$$\tau_{xn}^P = \tau_{xy}^P \cdot n_y + \tau_{xz}^P \cdot n_z \quad \tau_{xt}^P = -\tau_{xy}^P \cdot n_z + \tau_{xz}^P \cdot n_y \quad (3.2.21\alpha-\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = \tau_{xy}^S \cdot n_y + \tau_{xz}^S \cdot n_z \quad \tau_{xt}^S = -\tau_{xy}^S \cdot n_z + \tau_{xz}^S \cdot n_y \quad (3.2.22\alpha-\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των πρωτογενών και δευτερογενών διατμητικών τάσεων που δίδονται από τις σχέσεις (3.2.11, 3.2.12) στις σχέσεις (3.2.21, 3.2.22) λαμβάνουμε

$$\tau_{xn}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) \quad (3.2.23\alpha)$$

$$\tau_{xt}^P = G \cdot \theta'_x(x) \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial t} + y \cdot n_y + z \cdot n_z \right) \quad (3.2.23\beta)$$

$$\tau_{xn}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} \quad (3.2.23\gamma)$$

$$\tau_{xt}^S = G \cdot \frac{\partial \phi_S^S}{\partial t} \quad (3.2.23\delta)$$

Επειδή η ράβδος είναι αφόρτιστη κατά τη διαμήκη κατεύθυνση στην παράπλευρη επιφάνεια της πρέπει για λόγους ισορροπίας οι κάθετες διατμητικές τάσεις στο σύνορο της να μηδενίζονται.

Προκειμένου να ικανοποιήσουμε τη συνοριακή αυτή συνθήκη απαιτούμε

$$\tau_{xn}^P = 0 \quad \tau_{xn}^S = 0 \quad (3.2.24\alpha-\beta)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.2.23α, 3.2.23γ) στις σχέσεις (3.2.24α-β) και λαμβάνοντας υπόψη ότι εν γένει  $G\theta'_x \neq 0$ , η συνοριακή συνθήκη της πρωτογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως δίδεται ως

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad (3.2.25)$$

και η συνοριακή συνθήκη της δευτερογενούς κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως ως

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad (3.2.26)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι για τον προσδιορισμό της πρωτογενούς  $\phi_S^P(y, z)$  και δευτερογενούς  $\phi_S^S(x, y, z)$  κύριας συναρτήσεως στρεβλώσεως απαιτείται η λύση των πιο κάτω προβλημάτων :

1. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Laplace

$$\nabla^2 \phi_S^P = \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} = 0 \text{ στο εσωτερικό του χωρίου της διατομής } \Omega \quad (3.2.27\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z \cdot n_y - y \cdot n_z \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.2.27\beta)$$

2. Πρόβλημα Neumann της διαφορικής εξίσωσης Poisson

$$\nabla^2 \phi_S^S = \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_S^S}{\partial z^2} = -\frac{E \cdot \theta_x''(x)}{G} \cdot \phi_S^P \text{ στο εσωτερικό του } \Omega \quad (3.2.28\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο σύνορο της διατομής } \Gamma \quad (3.2.28\beta)$$

Αρα με βάση τα προηγούμενα το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου διαμορφώνεται τελικά ως

$$u = \theta_x'(x) \phi_S^P(y, z) + \phi_S^S(x, y, z) \quad (3.2.33\alpha)$$

$$v = -z\theta_x(x) \quad (3.2.33\beta)$$

$$w = y\theta_x(x) \quad (3.2.33\gamma)$$

### 3.3 Εντατικά μεγέθη, εξίσωση ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Η προκύπτουσα στρεπτική ροπή, με ολοκλήρωση στο επίπεδο της διατομής λαμβάνεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) d\Omega \quad (3.3.1)$$

Προσθαφαιρώντας τους όρους  $\partial \phi_S^P / \partial y$  και  $\partial \phi_S^P / \partial z$  η σχέση (3.3.1) γράφεται ως

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y - \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) \right] d\Omega$$

ή

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz} \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega$$

και διασπώντας τις τάσεις σε πρωτογενείς και δευτερογενείς (βλ. σχήμα 3.3.1)

$$M_t = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \cdot \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.3.2)$$

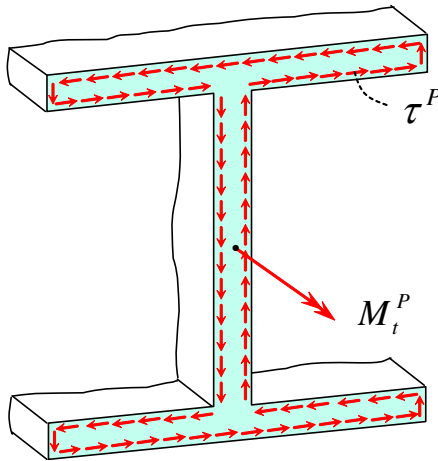
Έτσι, στην ανομοιόμορφη στρέψη σε κάθε διατομή της ράβδου ισχύει η σχέση

$$M_t = M_t^P + M_t^S \quad (3.3.3)$$

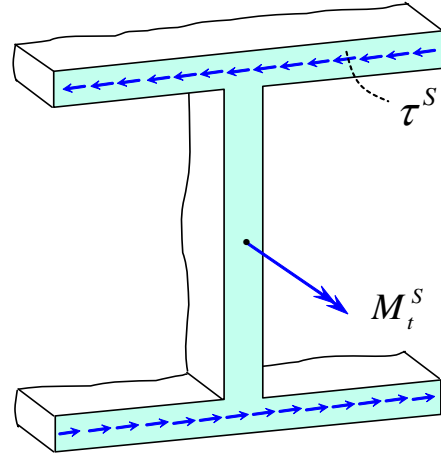
όπου έχει τεθεί

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (3.3.4\alpha)$$

$$M_t^S = \int_{\Omega} \left( -\tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (3.3.4\beta)$$



(α)



(β)

**Σχήμα 3.3.1** Διανομή πρωτογενών (α) και δευτερογενών (β) διατμητικών τάσεων και προκύπτουσες στρεπτικές ροπές

Προκειμένου να υπολογισθεί το πρωτογενές τμήμα  $M_t^P$  της στρεπτικής ροπής, η σχέση (3.3.4α) γράφεται ως

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left( \tau_{xy}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^P \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \left( -\tau_{xy}^P \cdot z + \tau_{xz}^P \cdot y \right) \right] d\Omega \quad (3.3.5)$$

και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss – Green και των σχέσεων (3.2.11α), (3.2.12α), (3.2.27α) και (3.2.24α) λαμβάνουμε

$$M_t^P = -G \cdot I_t \cdot \theta'_x(x) \quad (3.3.6)$$

όπου έχει τεθεί

$$I_t = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.3.7)$$

Το μέγεθος  $I_t$  ονομάζεται στρεπτική ροπή αδράνειας κατά *Saint-Venant* ή **στρεπτική σταθερά**. Η ποσότητα  $GI_t$  ονομάζεται **στρεπτική αντίσταση** της διατομής.

Ομοίως, από τη σχέση (3.3.4β) και κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss – Green



και των σχέσεων (3.2.11β), (3.2.12β), (3.2.27β) και (3.2.24β) λαμβάνουμε

$$M_t^S = -E \cdot C_S \cdot \theta_x''(x) \quad (3.3.8)$$

όπου έχει τεθεί

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.3.9)$$

Το μέγεθος  $C_S$  ονομάζεται **σταθερά στρεβλώσεως**. Η ποσότητα  $EC_S$  ονομάζεται **αντίσταση στρεβλώσεως** της διατομής. Η στρεπτική σταθερά είναι ανεξάρτητη της θέσεως του συστήματος συντεταγμένων, ενώ η σταθερά στρεβλώσεως αναφέρεται στο κέντρο συστροφής  $S$ .

Η μόρφωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια της **ενεργειακής μεθόδου**. Έτσι, είναι γνωστό ότι η συνολική δυναμική ενέργεια ή συνολικό δυναμικό  $\Pi_{ολ}$  οιοδήποτε ελαστικού συντηρητικού συστήματος ισούται με το άθροισμα του δυναμικού των εσωτερικών δυνάμεων (ελαστική ενέργεια παραμορφώσεως)  $\Pi_{εσ}$  και του δυναμικού των εξωτερικών δυνάμεων  $\Pi_{εξ}$ , δηλαδή

$$\Pi_{ολ} = \Pi_{εσ} + \Pi_{εξ} \quad (3.3.10)$$

Ως δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού συστήματος, που βρίσκεται σε κατάσταση παραμορφώσεως, ορίζεται το έργο που εκτελείται από όλες τις δυνάμεις (εσωτερικές και εξωτερικές), αν το σύστημα μετακινηθεί από την προαναφερθείσα κατάσταση σε άλλη προηγηθείσα (που λαμβάνεται ως αφετηρία) και η οποία συνήθως είναι η αρχική αφόρτιστη κατάσταση. Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως που έχει αποταμιευθεί στο σύστημα, δηλαδή με το έργο των εσωτερικών δυνάμεων, και αυτό διότι αν το σύστημα αποφορτιστεί το έργο που θα αποδοθεί ισούται με την ενέργεια παραμορφώσεως. Το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{εσ} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ (\tau_{xy}^P)^2 + (\tau_{xz}^P)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2E} \int_{\Omega} (\sigma_{xx}^w)^2 d\Omega \quad (3.3.11)$$

Στο δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων της σχέσεως (3.3.11) έχει ληφθεί υπόψη το ποσοστό των πρωτογενών διατμητικών τάσεων και των ορθών τάσεων στρεβλώσεως και **έχει αγνοηθεί το ποσοστό των δευτερογενών διατμητικών τάσεων**, γεγονός που όπως έχει προαναφερθεί αποτελεί τη βασική διαφορά μεταξύ 'κλασικής' και 'διευριμένης' θεωρίας. Η παράλειψη των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψεως αντιστοιχεί στην παράλειψη των διατμητικών τάσεων στην ενέργεια παραμορφώσεως στην ελαστική θεωρία κάμψεως ράβδων κατά Euler-Bernoulli.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του τανυστή τάσεως από τις σχέσεις (3.2.11α), (3.2.12α) και (3.2.13) στη σχέση (3.3.11), το δυναμικό των

εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ G^2 \theta_x'^2 \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)^2 + G^2 \theta_x'^2 \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)^2 \right] d\Omega + \frac{1}{2E} \int_{\Omega} E^2 \theta_x''^2 \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (3.3.12)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις  $\theta_x'$  και  $\theta_x''$  είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες  $y, z$  και μετά τις σχετικές πράξεις, η σχέση (3.3.12) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \Pi_{\varepsilon\sigma} = & \frac{1}{2} G \cdot \theta_x'^2 \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{1}{2} E \cdot \theta_x''^2 \int_{\Omega} \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} G \cdot \theta_x' \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss – Green μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \quad (3.3.14\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \quad (3.3.14\beta)$$

ή μετά τις σχετικές πράξεις

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial y^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) n_y ds \quad (3.3.15\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_S^P \frac{\partial^2 \phi_S^P}{\partial z^2} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) n_z ds \quad (3.3.15\beta)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (3.3.15α), (3.3.15β) κατά μέλη και μετά τις σχετικές πράξεις εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = \quad (3.3.16)$$

$$= - \int_{\Omega} \phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^P d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_S^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} - z \cdot n_y + y \cdot n_z \right) ds$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.2.27α-β), η εξίσωση (3.3.16) γράφεται ως

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 + y \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (3.3.17)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3.7), (3.3.9), (3.3.13) και (3.3.17) το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως

$$\Pi_{\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 \quad (3.3.18)$$

Το δυναμικό των εξωτερικών δυνάμεων για στοιχείο ράβδου μοναδιαίου μήκους υποβαλλόμενο σε στρεπτική φόρτιση  $m_t$  δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{\varepsilon\xi} = -m_t \cdot \theta_x \quad (3.3.19)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι χαρακτηριστικό της δυναμικής ενέργειας κάθε εξωτερικής φόρτισης, μια και σύμφωνα με όσα προαναφέρθηκαν κάθε εξωτερικό φορτίο εκτελεί αρνητικό έργο, καθώς το σύστημα μετακινείται από την κατάσταση παραμορφώσεως στην αφόρτιστη κατάσταση.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα το συνολικό δυναμικό  $\Pi_{o\lambda}$  στοιχείου ράβδου μοναδιαίου μήκους με τη βοήθεια των σχέσεων (3.3.18) και (3.3.19) θα δίδεται από τη σχέση

$$\Pi_{o\lambda} = \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 - m_t \cdot \theta_x \quad (3.3.20)$$

και για τη συνολική ράβδο μήκους  $L$  από τη σχέση

$$\Pi_{o\lambda} = \int_0^L \left( \frac{1}{2} G \cdot I_t \cdot \theta_x'^2 + \frac{1}{2} E \cdot C_S \cdot \theta_x''^2 - m_t \cdot \theta_x \right) dx \quad (3.3.21)$$

Για τη μόνωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της ράβδου θα εφαρμόσουμε ένα ενεργειακό κριτήριο, γνωστό ως **αρχή της στάσιμης τιμής της συνολικής δυναμικής ενέργειας**, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: *Μεταξύ όλων των κινηματικά συμβιβαστών θέσεων ενός συντηρητικού συστήματος, εκείνες που ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας δίδουν στάσιμη τιμή της συνολικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος ως προς μικρές και κινηματικά συμβιβαστές μεταβολές των μετατοπίσεων του.*

Η αρχή αυτή, που ισχύει και αν ακόμη η σχέση φόρτισης – παραμόρφωσης είναι μη γραμμική, εκφράζεται από την εξίσωση

$$\delta(\Pi_{\varepsilon\sigma}) + \delta(\Pi_{\varepsilon\xi}) = 0 \quad (3.3.22)$$

όπου  $\delta$  είναι τελεστής που συμβολίζει (απειροστή) μεταβολή της ποσότητας επί της οποίας εφαρμόζεται λόγω δυνατής μετατοπίσεως. Εάν η στάσιμη τιμή είναι ένα τοπικό ελάχιστο, τότε η κατάσταση της ισορροπίας του συστήματος είναι ευσταθής και η σχέση (3.3.22) εκφράζει **την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας**, την οποία και θα εφαρμόσουμε για να μορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας. Η αναγκαία συνθήκη ακρότατου της σχέσεως (3.3.22) οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας *Euler-Lagrange*, οι οποίες διέπουν την ισορροπία ελαστικού συστήματος στην παραμορφωμένη κατάσταση. Σύμφωνα λοιπόν με τις εξισώσεις αυτές, συναρτησιακό της μορφής  $\Pi_{ολ} = \Pi_{ολ}(x, \theta_x, \theta'_x, \theta''_x)$  παρουσιάζει ακρότατο (εδώ ελάχιστο), όταν ο πυρήνας του ολοκληρώματος της σχέσεως (3.3.21), τον οποίο ονομάζουμε  $F$ , ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_x} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \theta'_x} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial \theta''_x} = 0 \quad (3.3.23)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.3.20) στη σχέση (3.3.23) προκύπτει η διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως ισορροπίας της ράβδου λόγω ανομοιόμορφης στρέψεως ως

$$m_t = -G \cdot I_t \cdot \theta''_x + E \cdot C_S \cdot \theta'''_x \quad (3.3.24)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.3.24) προκύπτει ότι

$$M_t = GI_t \theta'_x - EC_S \theta''_x \quad (3.3.25)$$

Η σχέση (3.3.25) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως της ομογενούς ισότροπης ράβδου υποβαλλόμενης σε ανομοιόμορφη στρέψη.

Στη συνέχεια, σε αναλογία με τις καμπτικές ροπές  $M_y$ ,  $M_z$  ορίζουμε ένα νέο στατικό μέγεθος, το οποίο ονομάζουμε **δίρροπο στρεβλώσεως** και το οποίο δίδεται από τη σχέση

$$M_w = - \int_{\Omega} \phi_S^P \sigma_{xx}^w d\Omega \quad (3.3.26)$$

Η ανάγκη θεώρησης του νέου εντατικού μεγέθους προκύπτει από το γεγονός ότι  $M_y = M_z = N = 0$  αλλά ορθές τάσεις υπάρχουν στη διατομή, οπότε αν δεν θεωρηθεί κάποιο νέο μέγεθος, η ελαστική ενέργεια που οφείλεται στις ορθές τάσεις  $\sigma_{xx}$ , θα αγνοηθεί. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ορθής συνιστώσας τάσεως  $\sigma_{xx}^w$  από τη σχέση (3.2.13) στη σχέση (3.3.26), η τελευταία γράφεται ως

$$M_w = -E\theta_x'' \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (3.3.27)$$

ή με τη βοήθεια της σχέσεως (3.3.9)

$$M_w = -EC_S\theta_x'' \quad (3.3.28)$$

και επομένως η σχέση (3.2.13) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή

$$\sigma_{xx}^w = -\frac{M_w}{C_S} \varphi_S^P \quad (3.3.29)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.3.28) και (3.3.8) προκύπτει η σχέση που συσχετίζει τη δευτερογενή στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρεβλώσεως ως

$$\frac{dM_w}{dx} = M_t^S \quad (3.3.30)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας της σχέσης (3.3.24) εξαρτάται αφενός από τη στρεπτική φόρτιση της ράβδου και αφετέρου από τις στρεπτικές συνθήκες στήριξης της στο σύνορο ή και στο εσωτερικό της. Οι πλέον **γενικές γραμμικές συνοριακές στρεπτικές συνθήκες** στα άκρα της ράβδου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$a_1\theta_x + a_2M_t = a_3 \quad (3.3.31\alpha)$$

$$\beta_1\theta_x' + \beta_2M_w = \beta_3 \quad (3.3.31\beta)$$

Θέτοντας τις κατάλληλες τιμές στις μεταβλητές  $a_i, \beta_i$  μπορούμε να λάβουμε όλα τα είδη συνοριακών συνθηκών όπως πάκτωση, διχαλωτή στήριξη, ελεύθερο άκρο, ελαστική στήριξη. Έτσι για πάκτωση και στα δύο άκρα θέτουμε  $a_1=1, a_2=0, a_3=0, \beta_1=1, \beta_2=0, \beta_3=0$ , για διχαλωτές στηρίξεις  $a_1=1, a_2=0, a_3=0, \beta_1=0, \beta_2=1, \beta_3=0$ , για ελεύθερο άκρο  $a_1=0, a_2=1, a_3=0, \beta_1=0, \beta_2=1, \beta_3=0$ .

Έτσι, σύμφωνα με τα προηγούμενα για τον υπολογισμό της γωνίας στροφής  $\theta_x(x)$  και των παραγώγων της, που απαιτούνται για τον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων τάσεων στη διατομή της ράβδου στην περίπτωση της ανομοιόμορφης στρέψεως απαιτείται η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που περιγράφεται από τη εξίσωση (3.3.24) στο εσωτερικό της ράβδου υποκειμένη στις συνοριακές συνθήκες (3.3.31) στα άκρα της ράβδου  $x=0, L$ . Στην περίπτωση της ομοιόμορφης στρέψεως (*Saint-Venant*) η σχετική γωνία στροφής είναι σταθερή ( $\theta_x'(x) = c$ ), οπότε θα έχουμε

$$\theta_x'' = \theta_x''' = \theta_x'''' = 0 \quad (3.3.32)$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τετάρτης τάξεως γράφεται ως

$$m_t = 0 \quad (3.3.33)$$

και η διαφορική εξίσωση ισορροπίας τρίτης τάξεως (βλ. σχέση 3.3.25) γράφεται ως

$$M_t = \text{σταθερή} \quad (3.3.34)$$

Η εξίσωση ισορροπίας της ράβδου προκύπτει από τις σχέσεις (3.3.25) και (3.3.32) ως

$$M_t = G \cdot I_t \cdot \theta'_x \quad (3.3.35)$$

Ενώ η γωνία στροφής και η σχετική γωνία στροφής δίνονται ως

$$\theta_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} x \quad (3.3.36\alpha)$$

$$\theta'_x(x) = \frac{M_t}{GI_t} \quad (3.3.36\beta)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για την επίλυση προβλημάτων ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων προτιμάται η διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης, παρά η διαφορική εξίσωση 3<sup>ης</sup> τάξης για το λόγο ότι η πρώτη είναι **ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών**.

Τέλος, ορίζεται το μέγεθος  $\varepsilon$  που καλείται **Συντελεστής Στρεπτικής Αποσβέσεως** σύμφωνα με τη σχέση

$$\varepsilon = L \sqrt{\frac{GI_t}{EC_S}} \quad (3.3.37)$$

Ο συντελεστής αυτός μας δίνει μια ποιοτική εικόνα για το αν η αναπτυσσόμενη στρέψη στη ράβδο χαρακτηρίζεται ως ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη. Μικρές τιμές του  $\varepsilon$  υποδεικνύουν κυρίως ανομοιόμορφη στρέψη ενώ μεγάλες τιμές υποδεικνύουν ότι αναπτύσσεται κυρίως ομοιόμορφη στρέψη. Σε επόμενο κεφάλαιο με αριθμητικά παραδείγματα θα δειχθεί ότι το  $\varepsilon$  καθορίζει το πόσο γρήγορα σβήνουν τα εντατικά μεγέθη ανομοιόμορφης στρέψης μακριά από θέσεις στήριξης ή συγκεντρωμένων φορτίων και δεν επηρεάζει τις μέγιστες τιμές τους. Μια καλή ερμηνεία, σύμφωνα με τους Ramm and Hofmann (1995) για τις τιμές του  $\varepsilon$  είναι η εξής:

- για  $\varepsilon \leq 1$  αναπτύσσονται κυρίως δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέψη)
- για  $1 < \varepsilon \leq 15$  αναπτύσσονται πρωτογενείς, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και ορθές τάσεις από στρέβλωση κατά μήκος της ράβδου (ανομοιόμορφη στρέψη)
- για  $\varepsilon > 15$  αναπτύσσονται κυρίως πρωτογενείς διατμητικές τάσεις κατά μήκος της ράβδου (ομοιόμορφη στρέψη)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΤΡΕΨΗ ΡΑΒΔΟΥ ΜΕ ΕΠΙΡΡΟΗ ΔΕΥΤΕΡΟΓΕΝΩΝ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ

## 4.1 Βασικές έννοιες

Όπως είδαμε μέχρι τώρα η ομοιόμορφη στρέψη απαιτεί σταθερή τιμή της στρεπτικής ροπής σε όλο το μήκος της ράβδου αλλά και την ελεύθερη ανάπτυξη της στρέβλωσης χωρίς αυτή να παρεμποδίζεται. Επίσης, αναλύσαμε την ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης, η οποία εφαρμόζεται σε περίπτωση τυχούσας φόρτισης ή συνοριακών συνθηκών που παρεμποδίζουν την στρέβλωση, και στην οποία εκτός από τις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις St.Venant αναπτύσσονται ορθές και δευτερογενείς διατμητικές τάσεις λόγω στρέβλωσης. Στις δύο αυτές θεωρίες η στρέβλωση θεωρείται ανάλογη της συστροφής  $\theta'_x$ . Με τη θεώρηση αυτή, στην καθολική ισορροπία της ράβδου λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι πρωτογενείς διατμητικές και οι ορθές τάσεις ενώ οι δευτερογενείς διατμητικές υπολογίζονται μετά την επίλυσή της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αγνοείται η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην καθολική ισορροπία της ράβδου. Η επιρροή αυτή μπορεί να ληφθεί υπόψιν με την υιοθέτηση ενός νέου κινηματικού μεγέθους (πρωτογενής συστροφή  $(\theta'_x)^P$  ή ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης  $\eta_x$ ) το οποίο δεν είναι ανάλογο με τη σχετική γωνία στροφής. Επισημαίνεται ότι στη σύγχρονη βιβλιογραφία υποδεικνύεται ότι η επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική ιδίως σε ράβδους κλειστών διατομών (Rubin 2005, Murin and Kutis 2008) όπου λόγω γεωμετρίας οι διατμητικές τάσεις λαμβάνουν υψηλές τιμές και στο Κεφάλαιο 6 θα εξεταστούν αριθμητικά οι επιρροές αυτές τόσο σε κλειστές όσο και σε ανοικτές ράβδους.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η ελαστική θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης ράβδων διατομής διπλά συμμετρικής με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων (‘διεγερμένη’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης). Και αυτή η θεωρία διέπεται από κάποιες βασικές παραδοχές μερικές εκ των οποίων ταυτίζονται με αυτές της ‘κλασικής’ θεωρίας.

### Παραδοχές ελαστικής θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης με επιρροή δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων:

1. Η ράβδος είναι ευθύγραμμη.
2. Εγκάρσιες παραμορφώσεις της διατομής σε κατάσταση φορτίσεως δεν αναπτύσσονται, δηλαδή το σχήμα της διατομής διατηρείται.
3. Η διατομή της ράβδου είναι σταθερή.
4. Η διατομή της ράβδου είναι διπλά συμμετρική. Στην περίπτωση όπου η διατομή έχει έναν ή κανέναν άξονα συμμετρίας, η στρεπτική και καμπτοδιατμητική καταπόνηση είναι συζευγμένες και πρέπει να μελετηθούν μαζί (Slivker2007, Kim and Kim 2005). Όταν η διατομή διαθέτει δύο άξονες συμμετρίας, τότε η στρεπτική καταπόνηση μπορεί να μελετηθεί αυτόνομα (Slivker2007, Laudiero and Savoia1990, Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos2009).
5. Στη ράβδο δεν επιβάλλεται κατασκευαστικά κάποιος άξονας περιστροφής. Ο άξονας περιστροφής ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το γεωμετρικό κέντρο των διατομών.
6. Η στροφή της διατομής θεωρείται τόσο μικρή, ώστε το τόξο με καλή προσέγγιση να μπορεί να αντικατασταθεί από τη χορδή του.
7. Το υλικό της ράβδου θεωρείται ομογενές, ισότροπο, συνεχές και γραμμικά ελαστικό και συνεπώς ισχύουν οι σχέσεις της γραμμικής θεωρίας ελαστικότητας.



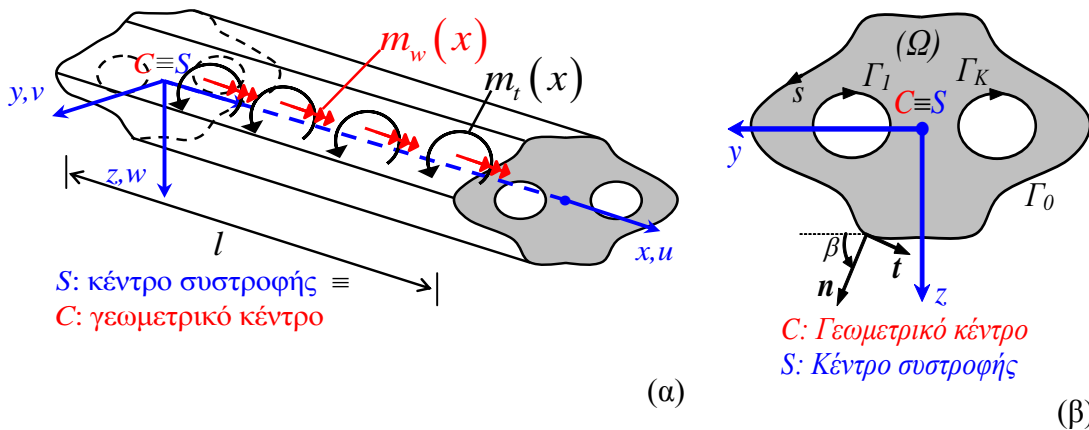
Η ομοιογένεια εξασφαλίζει την ομοιομορφία των ιδιοτήτων του υλικού από σημείο σε σημείο, ενώ η ισοτροπία αφορά την ομοιομορφία των ιδιοτήτων κατά τις διάφορες διευθύνσεις.

8. Η στρέβλωση των διατομών είναι ανάλογη της πρωτογενούς σχετικής γωνίας στροφής των διατομών ανά μονάδα μήκους (ή ανεξάρτητης παράμετρου στρέβλωσης) και όχι της συνολικής σχετικής γωνίας στροφής όπως ίσχυε στην ‘κλασική’ θεωρία με αποτέλεσμα η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων να μπορεί να ληφθεί υπόψιν στην καθολική ισορροπία της ράβδου.
9. Η κατανομή των δυνάμεων στα άκρα της ράβδου είναι τέτοια, ώστε να τηρούνται όλες οι προαναφερθείσες παραδοχές.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η ‘κλασική’ και η ‘διευρυμένη’ θεωρία ταυτίζονται σε όλες τις παραδοχές εκτός από την παραδοχή 4 της ‘διευρυμένης’ που είναι πρόσθετη και την παραδοχή 8 της ‘διευρυμένης’ με την αντίστοιχη παραδοχή 7 της ‘κλασικής’.

## 4.2 Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις

Θεωρούμε ευθύγραμμη πρισματική ράβδο (βλ. παραδοχές 1,3) τυχούσας διπλά συμμετρικής διατομής (βλ. παραδοχή 4) η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένες ή κατανεμημένες στρεπτικές ροπές  $m_t = m_t(x)$  και δίρροπα στρέβλωσης  $m_w = m_w(x)$  περί το διαμήκη άξονά της  $x$  (Σχ.4.2.1α). Ο διαμήκης άξονας διέρχεται από τα κέντρα συστροφής  $S$  των διατομών. Τα σημεία  $S$  ταυτίζονται με τα γεωμετρικά κέντρα  $C$  εξαιτίας του διπλά συμμετρικού σχήματος της διατομής (βλ. Σχ.4.2.1β και παραδοχή 5).



**Σχήμα 4.2.1** Πρισματική ράβδος υποβαλλόμενη σε τυχούσα στρεπτική φόρτιση (α) με διατομή τυχόντος διπλά συμμετρικού σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο  $\Omega$  (β).

Με βάση τις παραδοχές 2&6 οι εγκάρσιες μετατοπίσεις  $v, w$  κατά τους άξονες  $y, z$  αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις (3.2.2), (3.2.3) ως

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (4.2.1)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (4.2.2)$$

Όπου  $\theta_x$  η συνολική γωνία στροφής. Προκειμένου να ληφθεί υπόψιν η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων η διαμήκης μετατόπιση θεωρείται ότι δίνεται από τη σχέση ( βλ. παραδοχή 8)

$$u(x, y, z) = \eta_x(x)\phi_S^P(y, z) \quad (4.2.3)$$

Όπου  $\eta_x$  είναι η ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης και  $\phi_S^P$  είναι η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης ως προς το σημείο  $S$ . Η παράμετρος  $\eta_x$  είναι συνάρτηση της διαμήκουσ συντεταγμένης και περιγράφει το μέγεθος της στρέβλωσης σε μια διατομή ενώ καλείται και ανεξάρτητη παράμετρος στρέβλωσης (Wunderlich 1986). Χαρακτηρίζεται ως ανεξάρτητη διότι δεν ισχύει  $\eta_x = \theta'_x$  όπως στην ‘κλασική’ θεωρία ενώ η φυσική της σημασία αναδεικνύεται από την εναλλακτική διατύπωση με την οποία μπορεί να περιγράψει η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Σύμφωνα με αυτή, το πεδίο μετατοπίσεων της ράβδου και η γωνία στροφής διασπώνται σε πρωτογενές και δευτερογενές μέρος

$$u = u^P + u^S \quad (4.2.4\alpha)$$

$$v = v^P + v^S \quad (4.2.4\beta)$$

$$w = w^P + w^S \quad (4.2.4\gamma)$$

$$\theta_x = \theta_x^P + \theta_x^S \quad (4.2.4\delta)$$

όπου το πρωτογενές μέρος ταυτίζεται με αυτό της ‘κλασικής’ θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης ως

$$u^P(x, y, z) = (\theta_x^P)' \phi_S^P(y, z) \quad (4.2.5\alpha)$$

$$v^P(x, y, z) = -z\theta_x^P(x) \quad (4.2.5\beta)$$

$$w^P(x, y, z) = y\theta_x^P(x) \quad (4.2.5\gamma)$$

ενώ το δευτερογενές δίνεται ως

$$u^S(x, y, z) = 0 \quad (4.2.6\alpha)$$

$$v^S(x, y, z) = -z\theta_x^S(x) \quad (4.2.6\beta)$$

$$w^S(x, y, z) = y\theta_x^S(x) \quad (4.2.6\gamma)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$\eta_x = (\theta_x^P)' \quad (4.2.7)$$

Στα επόμενα παρουσιάζεται αναλυτικά η διατύπωση που βασίζεται στο πεδίο μετατοπίσεων (4.2.4-6) θέτοντας  $\theta_x^S = \theta_x - \theta_x^P$

Από τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας (βλ. Κεφάλαιο 2 –σχέσεις (2.2.2.3)) οι ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις δίνονται συναρτήσει των μετατοπίσεων ως

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.2.8\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.2.8\delta, \epsilon, \sigma\tau)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.2.4-6) στις (4.2.8) προκύπτει

$$\varepsilon_{xx} = (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.9\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = 0 \quad (4.2.9\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (4.2.9\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = (\theta_x^P)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - \theta_x^P{}_{,z} \quad (4.2.9\delta)$$

$$\gamma_{xz} = (\theta_x^P)' \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + \theta_x^P{}_{,y} \quad (4.2.9\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (4.2.9\zeta)$$

και διαχωρίζοντας πρωτογενές και δευτερογενές μέρος οι σχέσεις (4.2.9δ) και (4.2.9ε) γράφονται ως

$$\gamma_{xy} = \underbrace{\theta_x^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( (\theta_x^P)' - \theta_x^P{}_{,z} \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.10\alpha)$$

$$\gamma_{xz} = \underbrace{\theta_x^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left( (\theta_x^P)' - \theta_x^P{}_{,y} \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.10\beta)$$

και σύμφωνα με τη σχέση (4.2.4δ)

$$(\theta_x^P)' - \theta_x^P{}_{,z} = -(\theta_x^S)' \quad (4.2.11)$$

Ο υπολογισμός των τάσεων βασίζεται στον καταστατικό νόμο του Hooke (βλ. παραδοχή 7) ο οποίος συσχετίζει γραμμικά τον τανυστή παραμορφώσεως με τον τανυστή τάσεως. Έτσι υποθέτοντας ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό (βλ. παραδοχή 7) οι συνιστώσες του τανυστή τάσεως δίνονται ως

$$\sigma_{xx} = E^* (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\alpha)$$

$$\sigma_{yy} = E^{**} (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\beta)$$

$$\sigma_{zz} = E^{**} (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.12\gamma)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.12\delta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.12\epsilon)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (4.2.12\zeta)$$

όπου  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$ ,  $E^{**} = \frac{E\nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}$  με  $E, G, \nu$  το μέτρο

ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson. Οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως έχουν στις εξισώσεις ισορροπίας ενώ οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις  $\sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  (που δεν παράγουν έργο αφού οι ενεργειακά συζυγείς παραμορφώσεις είναι μηδενικές) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μετά τον προσδιορισμό των αγνώστων κινηματικών μεγεθών. Στην παρούσα θεωρία γίνεται η παραδοχή ότι  $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ , τονίζοντας ωστόσο ότι η συγκεκριμένη παραδοχή αφενός δεν επηρεάζει την ισορροπία της ράβδου και αφετέρου ισχύει στην περίπτωση μηδενικού λόγου Poisson. Επιπλέον, το  $E^*$  αντικαθίσταται από το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , γεγονός που ισχύει επακριβώς στην περίπτωση που  $\nu=0$ . Η παραδοχή αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία λεπτότοιχων διατομών (Vlasov 1963), σύμφωνα με την οποία τα τοιχώματα της διατομής θεωρείται ότι βρίσκονται σε κατάσταση επίπεδης τάσεως και αποδεικνύεται ότι  $E^* = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2} \Rightarrow E^* \approx E$ . Οι προαναφερθείσες παραδοχές είναι συνήθεις στη

διατύπωση θεωριών δοκού (Armenakas 2006). Άρα οι μη μηδενικές συνιστώσες του τανυστή τάσεων είναι

$$\sigma_{xx} = E (\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.2.13\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.13\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.2.13\gamma)$$

### 4.3 Πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης, τοπικές εξισώσεις ισορροπίας

Η πρωτογενής συνάρτηση στρέβλωσης υπολογίζονται από την επίλυση του ίδιου προβλήματος συνοριακών τιμών που έχει διατυπωθεί στην ‘κλασική’ θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης (βλ. Κεφάλαιο 3)

$$\nabla^2 \phi_S^P = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.3.1\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} = z n_y - y n_z \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.3.1\beta)$$

και απαιτώντας παράλληλα να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^P d\Omega = 0 \quad (4.3.2)$$

Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις αποτελούν αυτοϊσορροπούμενη κατανομή τάσεων σε επίπεδο υλικού σημείου (βλ. σχέση (4.3.1)) και ότι η στρεπτική ένταση δεν οδηγεί σε αξονική καταπόνηση (βλ. σχέση (4.3.2)). Όμως αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις που δίνουν τις τάσεις στην διαφορική εξίσωση ισορροπίας και στην αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη σε επίπεδο υλικού σημείου παρατηρούμε ότι δεν επαληθεύονται εξαιτίας της κακής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad (4.3.3\alpha)$$

$$\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = t_x \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.3.3\beta)$$

Το στοιχείο αυτό είναι ανάλογο με τη θεωρία Timoshenko καμπτόμενων ράβδων που παρουσιάζει το ίδιο πρόβλημα με αποτέλεσμα να πρέπει να εισαχθεί και εδώ ένας στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης ο υπολογισμός του οποίου θα γίνει στα επόμενα.

### 4.4 Εντατικά μεγέθη, καθολικές εξισώσεις ισορροπίας, συνοριακές συνθήκες

Όπως και στην ‘κλασική’ θεωρία λαμβάνονται και εδώ τα παρακάτω εντατικά μεγέθη (βλ. σχέσεις (3.3.4),(3.3.26))

$$M_t^P = \int_{\Omega} \left[ \tau_{xy}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right) + \tau_{xz}^P \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right) \right] d\Omega \quad (4.4.1\alpha)$$

$$M_t^S = - \int_{\Omega} \left( \tau_{xy}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} + \tau_{xz}^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right) d\Omega \quad (4.4.1\beta)$$

$$M_w = - \int_{\Omega} \sigma_{xx} \phi_S^P d\Omega \quad (4.4.1\gamma)$$

Και αντικαθιστώντας σε αυτά τις σχέσεις (4.2.13) προκύπτει

$$M_t^P = GI_t^P \theta'_x \quad (4.4.2\alpha)$$

$$M_t^S = -GI_t^S \left( (\theta_x^P)' - \theta'_x \right) \quad (4.4.2\beta)$$

$$M_w = -EC_S (\theta_x^P)'' \quad (4.4.2\gamma)$$

Όπου οι γεωμετρικές σταθερές δίνονται ως

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (4.4.3\alpha)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (4.4.3\beta)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega \quad (4.4.3\gamma)$$

Όπου σταθερά  $I_t^P$  είναι ίδια με αυτή του Κεφαλαίου 3 (βλ. σχέση (3.3.7)).

Παρατηρούμε ότι στη δευτερογενή στρεπτική σταθερά  $I_t^S$  έχει εισαχθεί ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης  $k_x$  προκειμένου να διορθωθεί η κακή κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων ενώ αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$I_t^S = k_x (I_P - I_t^P) \quad (4.4.4)$$

Αν στην Αρχή Δυνατών Έργων λάβουμε υπόψιν τις μεταβολές της στρεπτικής στροφής και της πρωτογενούς συστροφής προσδιορίζονται διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν την ισορροπία των στρεβλωτικών και στρεπτικών δυνάμεων στα άκρα της ράβδου ως

$$-\frac{dM_t^P}{dx} - \frac{dM_t^S}{dx} = m_t(x) \quad (4.4.5\alpha)$$

$$\frac{dM_w}{dx} - M_t^S = -m_w(x) \quad (4.4.5\beta)$$

$$(M_t^P + M_t^S - \bar{M}_t) \delta \theta_x = 0 \quad (4.4.6\alpha)$$

$$(-M_w + \bar{M}_w) \delta (\theta_x^P)' = 0 \quad (4.4.6\beta)$$

Όπου  $m_t$ ,  $m_w$  είναι εξωτερικές δράσεις και ορίζονται ως

$$m_t(x) = \int_{\Gamma} [t_y(-z) + t_z y] ds \quad (4.4.7\alpha)$$

$$m_w(x) = - \int_{\Gamma} t_x \phi_S^P ds \quad (4.4.7\beta)$$

Στις συνοριακές συνθήκες (4.4.6) τα μεγέθη  $\bar{M}_w$  και  $\bar{M}_t$  αποτελούν εξωτερικές δράσεις και ορίζονται στα άκρα της ράβδου ως

$$(\bar{M}_t)_{x=0} = - \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (\bar{M}_t)_{x=l} = \int_{\Omega} t_y(-z) + t_z y d\Omega \quad (4.4.8\alpha-\beta)$$

$$(\bar{M}_w)_{x=0} = \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (\bar{M}_w)_{x=l} = - \int_{\Omega} t_x \phi_S^P d\Omega \quad (4.4.8\gamma-\delta)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών (4.4.2) στις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε τις κυρίαρχες διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στρεβλωτικών και στρεπτικών δυνάμεων

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S(\theta_x^P)'' = m_t \quad (4.4.9\alpha)$$

$$-EC_S(\theta_x^P)''' + GI_t^S\left((\theta_x^P)' - \theta_x'\right) = -m_w \quad (4.4.9\beta)$$

Για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 (\theta_x^P)' = \beta_3 \quad (4.4.10\alpha-\beta)$$

όπου

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta_x' - GI_t^S(\theta_x^P)' \quad (4.4.11)$$

Στις εκφράσεις των συνοριακών συνθηκών μπορούμε, δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στους συντελεστές  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , να περιγράψουμε κάθε είδος συνοριακών συνθηκών (βλ. Κεφάλαιο 3).

Στην περίπτωση που θέλουμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις ως προς τους αγνώστους  $\eta_x$  και  $\theta_x$  χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.2.7) μορφώνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$-G(I_t^P + I_t^S)\theta_x'' + GI_t^S\eta_x' = m_t \quad (4.4.12\alpha)$$

$$-EC_S\eta_x'' + GI_t^S(\eta_x - \theta_x') = -m_w \quad (4.4.12\beta)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$\alpha_1 M_t + \alpha_2 \theta_x = \alpha_3 \quad \beta_1 M_w + \beta_2 \eta_x = \beta_3 \quad (4.4.13\alpha,\beta)$$

όπου

$$M_t = G(I_t^P + I_t^S)\theta'_x - GI_t^S \eta_x \quad (4.4.14)$$

Προκειμένου να υπάρξει ποιοτική σύγκριση με την ‘κλασική’ θεωρία θα διατυπώσουμε το πρόβλημα ως προς τη στροφή  $\theta_x$ . Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.4.9) προκύπτει

$$\frac{EC_S}{\kappa} \theta_x''' - GI_t^P \theta_x'' = m_t - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w' \quad (4.4.15)$$

που είναι η κυρίαρχη διαφορική εξίσωση τέταρτης τάξεως όπου  $\kappa$  βοηθητική σταθερά

$$\kappa = \frac{I_t^S}{I_t^P + I_t^S} \quad (4.4.16)$$

και οι συνοριακές συνθήκες των σχέσεων (4.4.10) ισχύουν αν τεθεί

$$M_t = GI_t^P \theta'_x - \frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t' + m_w' \quad (4.4.17)$$

$$M_w = -\frac{EC_S}{\kappa} \theta_x'' - \frac{EC_S}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_t \quad (4.4.18)$$

$$(\theta_x^P)' = \theta'_x + \frac{EC_S}{\kappa GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} \theta_x'' + \frac{EC_S}{(GI_t^P)^2} \left(\frac{1-\kappa}{\kappa}\right)^2 m_t' - \frac{1}{GI_t^P} \frac{1-\kappa}{\kappa} m_w' \quad (4.4.19)$$

Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για όλο το μήκος της ράβδου.

Με αυτό τον τρόπο δεν αμελείται πλέον η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων στην εξίσωση ισοροπίας. Αν θέλουμε να τις αγνοήσουμε, θέτοντας  $\kappa=1$  στη σχέση (4.4.15) επανερχόμαστε στην εξίσωση ισοροπίας της ‘κλασικής’ θεωρίας ενώ στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (βλ. σχέσεις (4.4.12-13)) θέτουμε  $k_x = \infty$  στην έκφραση του  $I_t^S$ . Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 6 η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων είναι σημαντική κυρίως στις κλειστές διατομές ενώ στις ανοικτές είναι αμελητέα καθώς η τιμή του  $\kappa$  είναι πολύ κοντά στη μονάδα.

## 4.5 Στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης, δευτερογενείς διατμητικές τάσεις

Ο υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης  $k_x$  προκύπτει από την εξίσωση της ακριβής έκφρασης της ελαστικής ενέργειας με την



αντίστοιχη προσεγγιστική (Kraus 2007, Sapountzakis and Mokos 2009). Για την εύρεση της ακριβής έκφρασης θα πρέπει να προσδιοριστεί ικανοποιητική κατανομή δευτερογενών διατμητικών τάσεων η οποία να μην παραβιάζει την διαφορική εξίσωση ισορροπίας και την συνοριακή συνθήκη των σχέσεων (4.3.3α-β). Έτσι στις σχέσεις (4.2.13) θα τροποποιήσουμε τις εκφράσεις των δευτερογενών διατμητικών τάσεων και θα προκύψει

$$\sigma_{xx} = E(\theta_x^P)'' \phi_S^P \quad (4.5.1\alpha)$$

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.5.1\beta)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta_x' \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{C_S} \right] \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z}}_{\text{δευτερογενείς}} \quad (4.5.1\gamma)$$

Όπου  $\phi_S^S$  είναι η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης η οποία θα προσδιοριστεί με την εφαρμογή των εξισώσεων (4.3.3). Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις περιλαμβάνουν παραγώγους της  $\phi_S^S$  και θα προκύψουν εάν θεωρήσουμε το παρακάτω πεδίο μετατοπίσεων

$$u(x, y, z) = (\theta_x^P)'(x) \phi_S^P(y, z) + \left[ - \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) \frac{I_t^S}{C_S} - \frac{m_w}{GC_S} \right] \phi_S^S(x, y, z) \quad (4.5.2\alpha)$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_x(x) \quad (4.5.2\beta)$$

$$w(x, y, z) = y\theta_x(x) \quad (4.5.2\gamma)$$

και έπειτα προσδιορίσουμε τις παραμορφώσεις και από αυτές τις τάσεις.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις των τάσεων (4.5.1) στις σχέσεις (4.3.3) και λαμβάνοντας υπόψιν την καθολική εξίσωση ισορροπίας (4.4.9β) προκύπτει πρόβλημα συνοριακών τιμών της  $\phi_S^S$  ως

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (4.5.3\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = - \frac{t_x C_S}{G \left( (\theta_x^P)' - \theta_x' \right) I_t^S + m_w} \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.5.3\beta)$$

Και για να υπολογιστεί διορθωτικός συντελεστής που να μην εξαρτάται από την φόρτιση θέτουμε  $t_x = 0$  και  $m_w = 0$  στις σχέσεις (4.5.1β-γ). Έτσι ορίζεται δισδιάστατη  $\phi_S^S$  και προκύπτει το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (4.5.4\alpha)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (4.5.4\beta)$$

Με ταυτόχρονη απαίτηση να ισχύει η συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\int_{\Omega} \phi_S^S d\Omega = 0 \quad (4.5.5)$$

Και απλοποιούνται οι εκφράσεις των διατμητικών τάσεων ως

$$\tau_{xy} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} - z \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right]}_{\text{δευτερογενείς}} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad (4.5.6\alpha)$$

$$\tau_{xz} = \underbrace{G\theta'_x \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} + y \right)}_{\text{πρωτογενείς}} + \underbrace{\left[ -G \left( (\theta'_x)^P - \theta'_x \right) \frac{I_t^S}{C_S} \right]}_{\text{δευτερογενείς}} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (4.5.6\beta)$$

Η ελαστική ενέργεια λόγω διάτμησης ανά μονάδα μήκους της ράβδου δίνεται ως

$$U = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{2G} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xy}^{S2} + 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + \tau_{xz}^{P2} + \tau_{xz}^{S2} + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S}{2G} d\Omega \quad (4.5.7\alpha)$$

$$\text{ή } U = U_P + U_S + U_{PS} \quad (4.5.7\beta)$$

όπου

$$U_P = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{P2} + \tau_{xz}^{P2}}{2G} d\Omega \quad U_S = \int_{\Omega} \frac{\tau_{xy}^{S2} + \tau_{xz}^{S2}}{2G} d\Omega \quad (4.5.8\alpha,\beta)$$

$$U_{PS} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left( 2\tau_{xy}^P \tau_{xy}^S + 2\tau_{xz}^P \tau_{xz}^S \right) d\Omega \quad (4.5.8\gamma)$$

Η προσεγγιστική έκφραση της ελαστικής ενέργειας λόγω διάτμησης θα δοθεί από τις σχέσεις (4.2.13β-γ) ενώ η ακριβής έκφραση από τις σχέσεις (4.5.6.α-β). Και στις δύο περιπτώσεις αποδεικνύεται ότι  $U_{PS}=0$  αλλά και ότι η δυναμική ενέργεια που οφείλεται στις πρωτογενείς διατμητικές τάσεις είναι η ίδια. Άρα

$$U_{approx.} = U_{exact} \Rightarrow U_{approx.,S} = U_{exact,S} \quad (4.5.9)$$

Η μη ικανοποιητική κατανομή των δευτερογενών διατμητικών τάσεων (βλ. σχέση (4.2.13β-γ)) διαμορφώνεται με τη σχέση (4.4.2β) ως

$$\tau_{xy}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \quad (4.5.10\alpha,\beta)$$

ενώ για την ακριβή κατανομή (βλ. σχέση (5.5.6α-β)) ισχύει

$$\tau_{xy}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \quad \tau_{xz}^S = \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \quad (4.5.11\alpha,\beta)$$

Έτσι με την αντικατάσταση της προσεγγιστικής κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων στη σχέση (4.5.8β) προκύπτει (Kraus 2007)

$$U_{approx.,S} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( -\frac{M_t^S}{I_t^S} \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \xrightarrow{(4.4.3\beta)} \quad (4.5.12)$$

$$U_{approx.,S} = \frac{1}{2G} \frac{(M_t^S)^2}{I_t^S}$$

ενώ με την αντικατάσταση της ακριβούς κατανομής των δευτερογενών διατμητικών τάσεων προκύπτει

$$U_{exact,S} = \frac{1}{2G} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{M_t^S}{C_S} \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \rightarrow U_{exact,S} = \frac{1}{2G} \left( \frac{M_t^S}{C_S} \right)^2 I_{\phi} \quad (4.5.13)$$

όπου

$$I_{\phi} = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^S}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (4.5.14)$$

ή

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (4.5.15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.5.12-13) στη σχέση (4.5.9) προκύπτει

$$I_t^S = \frac{C_S^2}{I_{\phi}} \quad (4.5.16)$$

Και με τη βοήθεια των σχέσεων (4.4.3β) και (4.4.4) προκύπτει η σχέση υπολογισμού του **στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης** ως

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (4.5.17)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

## 5.1 Αριθμητικός υπολογισμός των γεωμετρικών σταθερών $I_P, I_t^P, I_t^S, C_S$ με συνοριακή ολοκλήρωση

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ο υπολογισμός των αγνώστων του προβλήματος προϋποθέτει ότι έχουν προσδιοριστεί όλες οι γεωμετρικές σταθερές που υπεισέρχονται στις διάφορες εξισώσεις. Οι βασικές από αυτές τις γεωμετρικές σταθερές είναι η πολική ροπή αδρανείας  $I_P$ , η πρωτογενής στρεπτική σταθερά  $I_{tP}$ , η δευτερογενής στρεπτική σταθερά  $I_{tS}$  και η σταθερά στρέβλωσης  $C_S$  για τις οποίες έχουν δοθεί οι σχέσεις υπολογισμού τους (βλ. Σχέσεις (4.4.3α-β-γ)) και είναι οι εξής:

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega \quad (5.1.1)$$

$$I_t^S = k_x \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega \quad (5.1.2)$$

$$C_S = \int_{\Omega} \left( \phi_S^P \right)^2 d\Omega \quad (5.1.3)$$

$$I_P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 \right) d\Omega \quad (5.1.4)$$

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_{\phi}} \quad (5.1.5)$$

Όπου

$$I_{\phi} = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (5.1.6)$$

Οι παραπάνω σχέσεις όμως έχουν τη μορφή διπλού ολοκληρώματος στο χωρίο  $\Omega$  και προκειμένου να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματα της επίλυσης με συνοριακή ολοκλήρωση (για τις σχέσεις (5.1.1-4) θα γίνει συνοριακή ολοκλήρωση ενώ για τις σχέσεις (5.1.5-6) θα γίνει πεδιακή ολοκλήρωση στο Κεφάλαιο 5.2) επιδιώκουμε να μετατρέψουμε τα πεδιακά ολοκληρώματα σε συνοριακά και με τη βοήθεια του **θεωρήματος απόκλισης Gauss** (Κατσικαδέλης, 1999) προσδιορίζονται ως εξής:

$$I_P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial (y^3)}{\partial y} + \frac{\partial (z^3)}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \left( y^3 n_y + z^3 n_z \right) ds \quad (5.1.7)$$

$$I_t^P = \int_{\Omega} \left( y^2 + z^2 + y \frac{\partial \phi_S^P}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_S^P}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (yz^2 - z\phi_S^P)}{\partial y} + \frac{\partial (y^2z + y\phi_S^P)}{\partial z} \right] d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_t^P = \int_{\Gamma} \left[ \left( yz^2 - z\phi_S^P \right) n_y + \left( y^2z + y\phi_S^P \right) n_z \right] ds \quad (5.1.8)$$

$$C_S = \int_{\Omega} (\phi_S^P)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (\phi_S^P \cdot \nabla^2 \phi_S^S - \phi_S^S \cdot \nabla^2 \phi_S^P) d\Omega = - \int_{\Gamma} \phi_S^S \frac{\partial \phi_S^P}{\partial n} ds \quad (5.1.9)$$

όπου  $\phi_S^S$  η δευτερογενής συνάρτηση στρέβλωσης (βλ. σχέσεις (4.5.4)) που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 \phi_S^S = \phi_S^P \quad \text{στο } \Omega \quad (5.1.10)$$

$$\frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.1.11)$$

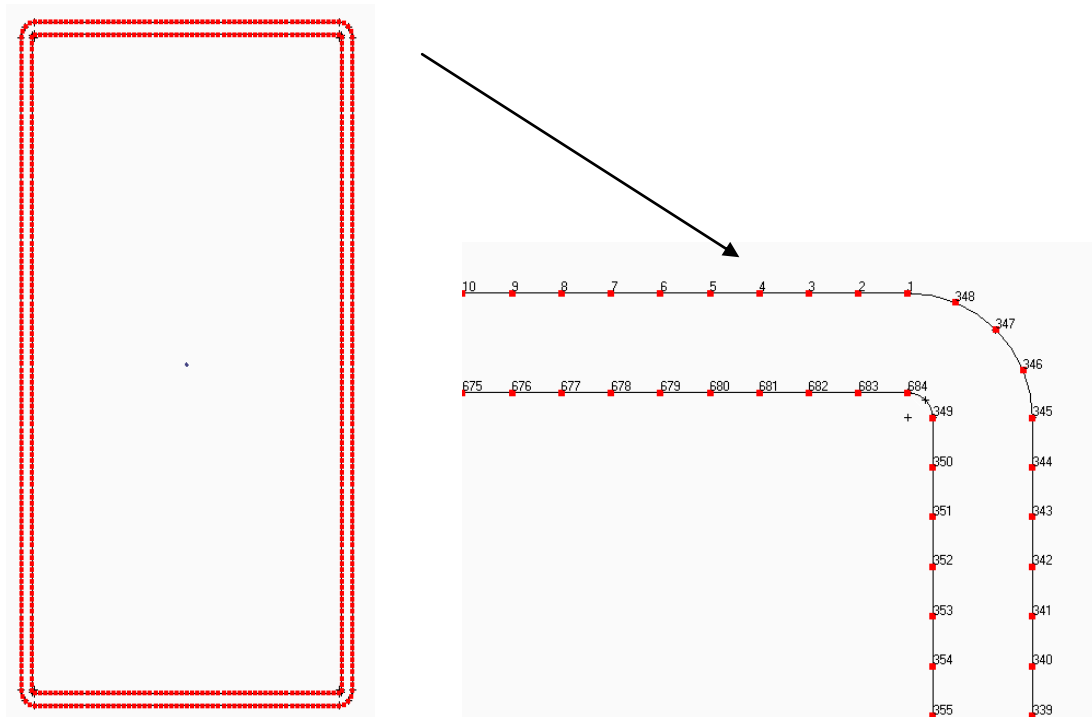
Και για το  $I_t^S$  αν κάνουμε χρήση της σχέσης (4.3.1α) από τη σχέση (5.1.2) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P \frac{\partial \phi_S^S}{\partial n} ds \quad (5.1.12)$$

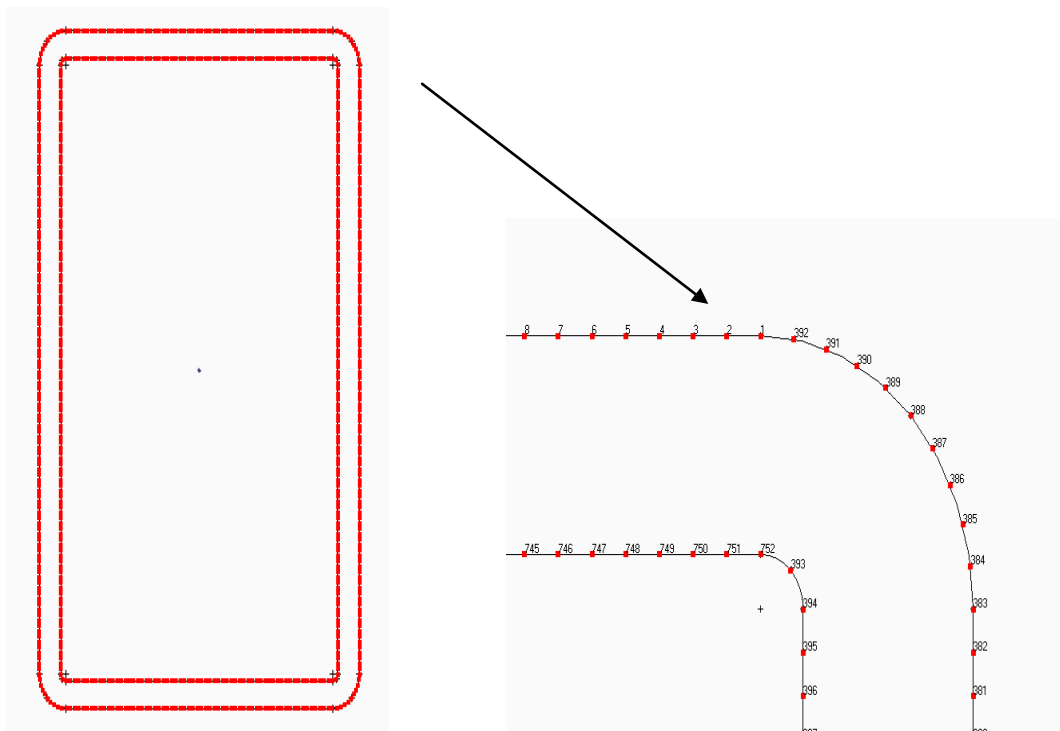
Ενώ αν κάνουμε χρήση της σχέσης (4.3.1β) προκύπτει

$$I_t^S = k_x \int_{\Gamma} \phi_S^P (zn_y - yn_z) ds \quad (5.1.13)$$

Στη συνέχεια θα διακριτοποιηθεί το σύνορο της διατομής σε σταθερά συνοριακά στοιχεία και θα εφαρμοστούν οι τυπικοί κανόνες ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στα επόμενα σχήματα φαίνονται μερικές περιπτώσεις συνοριακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran.



**Σχήμα 5.1.1** Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 450x250x8 με 684 συνοριακά στοιχεία



**Σχήμα 5.1.2** Συνοριακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική 250x150x10 με 752 συνοριακά στοιχεία

## 5.2 Αριθμητικός υπολογισμός του στρεπτικού διορθωτικού συντελεστή διάτμησης $k_x$ με πεδιακή ολοκλήρωση

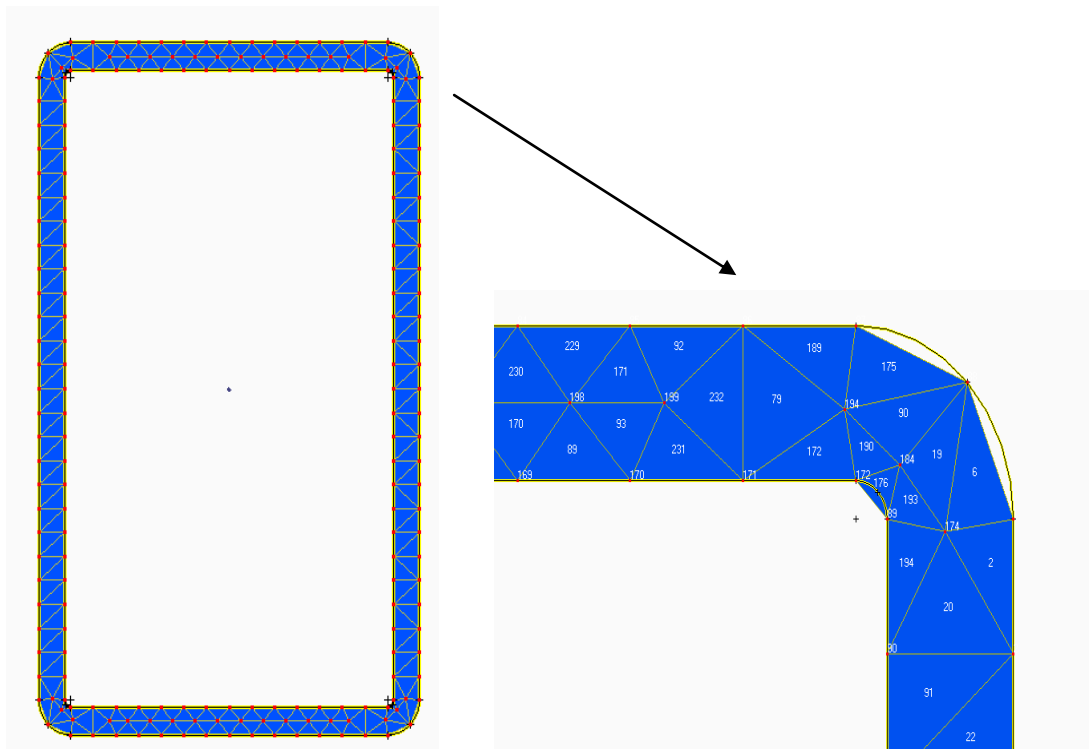
Όπως προέκυψε από το Κεφάλαιο 4 (βλ. σχέσεις (4.5.15), (4.5.17)) ο στρεπτικός διορθωτικός συντελεστής διάτμησης δίνεται από τη σχέση

$$k_x = \frac{C_S^2}{(I_P - I_t^P) I_\phi} \quad (5.2.1)$$

όπου

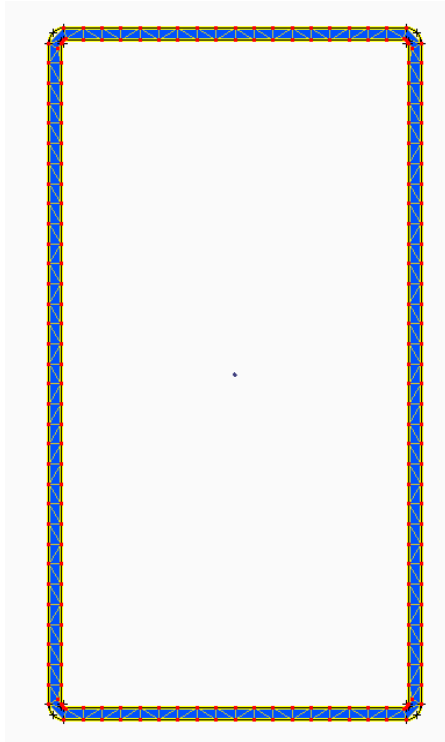
$$I_\phi = - \int_{\Omega} \phi_S^S \phi_S^P d\Omega \quad (5.2.2)$$

Η σχέση υπολογισμού του  $k_x$  και του  $I_\phi$ , όμως, δεν είναι δυνατό να μετατραπεί σε συνοριακό ολοκλήρωμα και εξαιτίας του στοιχείου αυτού απαιτείται ο υπολογισμός πεδιακού (διπλού) ολοκληρώματος. Στην παρούσα εργασία, ο υπολογισμός αυτός πραγματοποιείται με διακριτοποίηση του χωρίου της διατομής σε επιφανειακά (τριγωνικά) στοιχεία και η εφαρμογή τυπικών κανόνων ολοκλήρωσης Gauss προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα. Στα επόμενα σχήματα φαίνονται μερικές περιπτώσεις πεδιακής διακριτοποίησης όπως πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Nastran.

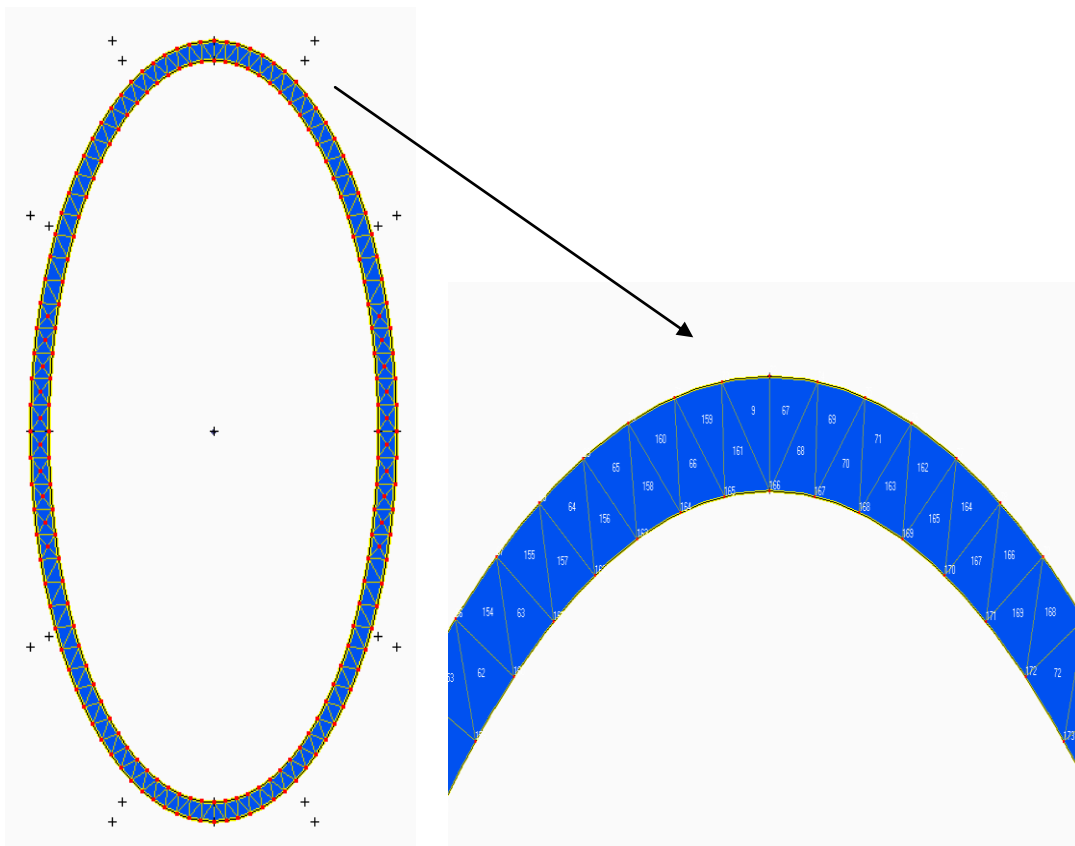


**Σχήμα 5.2.1** Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική  $250 \times 150 \times 10$  με 244 πεδιακά στοιχεία





**Σχήμα 5.2.2** Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή κοίλη ορθογωνική  $450 \times 250 \times 8$  με 236 πεδιακά στοιχεία



**Σχήμα 5.2.3** Πεδιακή διακριτοποίηση σε διατομή οβάλ  $400 \times 200 \times 10$  με 228 πεδιακά στοιχεία

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

## 6.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τη διαδικασία συνοριακής και επιφανειακής διακριτοποίησης της διατομής. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια έτοιμων προγραμμάτων σε H/Y του υποψήφιου διδάκτορα Βασιλείου Τσίππια και του προγράμματος TOBEM του διδάκτορα Βασιλείου Μώκου εκτελέσαμε πλήθος αναλύσεων (διάφορες διατομές, φορτίσεις και στατικά συστήματα ράβδων) προκειμένου να εξάγουμε γεωμετρικές σταθερές, εντατικά μεγέθη, κινηματικά μεγέθη και αναπτυσσόμενες τάσεις.

Όσο αφορά στην ανάλυση μιας διατομής και την εξαγωγή των γεωμετρικών σταθερών υπάρχουν αρκετές δημοσιευμένες εργασίες που βασίζονται είτε στη Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (Θ.Λ.Δ.) (Rubin 2005, Rubin 2007) είτε στην ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία (Kraus 2007). Επίσης, για την εύρεση των κινηματικών και των εντατικών μεγεθών και κατά συνέπεια των τάσεων η πλειονότητα των προγραμμάτων βασίζεται στην ‘κλασική’ και κυρίως στην ομοιόμορφη θεωρία.

Στα επόμενα, θα αναλύσουμε χωριστά τις διατομές ανοικτού και κλειστού τύπου. Σε κάθε περίπτωση θα παραθέσουμε τις γεωμετρικές σταθερές για διάφορες διατομές και θα τις συγκρίνουμε με αυτές των δημοσιευμένων εργασιών ενώ στη συνέχεια, παραθέτοντας διάφορα παραδείγματα στατικών συστημάτων και φορτίσεων, θα συγκρίνουμε τη ‘διευρυμένη’ θεωρία με την ‘κλασική’ και την ομοιόμορφη. Το υλικό που έχουμε θεωρήσει σε όλες τις περιπτώσεις είναι χάλυβας με ελαστικές σταθερές  $E=210000$  MPa και  $G=80769$  MPa.

## 6.2 Ανοικτές διατομές

### 6.2.1 Γεωμετρικές σταθερές

Οι ανοικτές διατομές με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι τύπου HEA, HEB και IPE και οι σταθερές που εμφανίζονται στους παρακάτω πίνακες είναι η δευτερογενής στρεπτική σταθερά  $I_{ts}$  και η σταθερά στρέβλωσης  $C_s$  που υπεισέρχονται στη διευρυμένη θεωρία ανομοιόμορφης στρέψης. Στους πίνακες αυτούς θα παραθέσουμε πρώτα τις σταθερές που προέκυψαν από τις αναλύσεις μας για διάφορα μεγέθη διατομών, τις σταθερές που έχουν δημοσιευτεί από αναλύσεις με πεπερασμένα στοιχεία(FEM) (Kraus 2007) και Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (Rubin 2005) και στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας.

Διατομές	$I_{ts}$ -BEM[ $m^4$ ]	$C_s$ -BEM[ $m^6$ ]
HEA100	2.76667E-06	2.47516E-09
HEA140	8.12935E-06	1.47277E-08
HEA180	1.97038E-05	5.90094E-08
HEA220	4.23694E-05	1.89597E-07

<b>HEA260</b>	8.19316E-05	5.04942E-07
<b>HEA300</b>	1.42882E-04	1.17460E-06
<b>HEA340</b>	2.16069E-04	1.79010E-06
<b>HEA400</b>	3.47654E-04	2.89357E-06
<b>HEA500</b>	6.63094E-04	5.56933E-06
<b>HEA600</b>	1.05452E-03	8.88007E-06
<b>HEA700</b>	1.56945E-03	1.32244E-05
<b>HEA900</b>	2.95741E-03	2.47526E-05
<b>HEB100</b>	3.57871E-06	3.23227E-09
<b>HEB140</b>	1.19955E-05	2.19645E-08
<b>HEB180</b>	3.03191E-05	9.17223E-08
<b>HEB220</b>	6.39790E-05	2.89496E-07
<b>HEB260</b>	1.17908E-04	7.36243E-07
<b>HEB300</b>	1.98434E-04	1.65092E-06
<b>HEB340</b>	2.87799E-04	2.40549E-06
<b>HEB400</b>	4.47452E-04	3.75107E-06
<b>HEB500</b>	8.20094E-04	6.92085E-06
<b>HEB600</b>	1.28204E-03	1.08384E-05
<b>HEB700</b>	1.88056E-03	1.59013E-05
<b>HEB900</b>	3.47707E-03	2.92005E-05
<b>IPE100</b>	1.26899E-06	3.42128E-10
<b>IPE140</b>	3.96919E-06	1.95074E-09
<b>IPE180</b>	9.61771E-06	7.32231E-09
<b>IPE220</b>	2.02835E-05	2.23118E-08
<b>IPE270</b>	4.22000E-05	6.94743E-08
<b>IPE330</b>	8.51254E-05	1.96105E-07
<b>IPE400</b>	1.66045E-04	4.82936E-07

*Πίνακας 1* Γεωμετρικές σταθερές *I<sub>ts</sub>* και *C<sub>s</sub>* από ανάλυση με συννοριακά στοιχεία (παρούσα θεωρία)

Διατομές	Its-FEM[ $m^4$ ]	Cs-FEM[ $m^6$ ]	Its-ΘΑΔ[ $m^4$ ]	Cs-ΘΑΔ[ $m^6$ ]
HEA100	2.76646E-06	2.47500E-09	2.58133E-06	2.60000E-09
HEA140	8.13050E-06	1.47290E-08	7.68554E-06	1.51000E-08
HEA180	1.96992E-05	5.90140E-08	1.85836E-05	6.03000E-08
HEA220	4.23287E-05	1.89610E-07	3.99310E-05	1.94000E-07
HEA260	8.18932E-05	5.04990E-07	7.63835E-05	5.17000E-07
HEA300	1.42771E-04	1.17470E-06	1.33308E-04	1.20000E-06
HEA340	2.15950E-04	1.79020E-06	2.02707E-04	1.83000E-06
HEA400	3.47373E-04	2.89360E-06	3.26897E-04	2.95000E-06
HEA500	6.62674E-04	5.56920E-06	6.27006E-04	5.65000E-06
HEA600	1.05386E-03	8.87960E-06	9.97578E-04	9.00000E-06
HEA700	1.56827E-03	1.32230E-05	1.48355E-03	1.34000E-05
HEA900	2.95713E-03	2.47480E-05	2.77350E-03	2.50000E-05
HEB100	3.57818E-06	3.23300E-09	3.37500E-06	3.40000E-09
HEB140	1.19893E-05	2.19650E-08	1.14688E-05	2.25000E-08
HEB180	3.02938E-05	9.17280E-08	2.89338E-05	9.39000E-08
HEB220	6.39477E-05	2.89510E-07	6.10368E-05	2.96000E-07
HEB260	1.17974E-04	7.36280E-07	1.11487E-04	7.55000E-07
HEB300	1.98563E-04	1.65100E-06	1.87532E-04	1.69000E-06
HEB340	2.87564E-04	2.40560E-06	2.72626E-04	2.46000E-06
HEB400	4.46985E-04	3.75110E-06	4.24128E-04	3.82000E-06
HEB500	8.19248E-04	6.92070E-06	7.79744E-04	7.03000E-06
HEB600	1.28172E-03	1.08380E-05	1.21838E-03	1.10000E-05
HEB700	1.87988E-03	1.59000E-05	1.78490E-03	1.61000E-05
HEB900	3.47461E-03	2.91960E-05	3.27348E-03	2.96000E-05
IPE100	1.26901E-06	3.42100E-10	1.16158E-06	3.50000E-10
IPE140	3.96916E-06	1.95100E-09	3.71806E-06	2.00000E-09

<b>IPE180</b>	9.60840E-06	7.32200E-09	8.97381E-06	7.50000E-09
<b>IPE220</b>	2.02714E-05	2.23100E-08	1.87374E-05	2.28000E-08
<b>IPE270</b>	4.21811E-05	6.94690E-08	3.87259E-05	7.08000E-08
<b>IPE330</b>	8.50583E-05	1.96090E-07	7.77724E-05	2.00000E-07
<b>IPE400</b>	1.65893E-04	4.82890E-07	1.51250E-04	4.92000E-07

*Πίνακας 2 Γεωμετρικές σταθερές  $I_{ts}$  και  $C_s$  από ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία και με  $\Theta.L.L.$*

Διατομές	H/tw	B/tf	<b><math>I_{ts}</math> Απόκλιση(%) BEM-FEM</b>	<b><math>I_{ts}</math> Απόκλιση(%) BEM-ΘΑΔ</b>
<b>HEA100</b>	19.2	12.5	0.008	7.180
<b>HEA140</b>	24.2	16.5	0.014	5.775
<b>HEA180</b>	28.5	18.9	0.023	6.028
<b>HEA220</b>	30.0	20.0	0.096	6.106
<b>HEA260</b>	33.3	20.8	0.047	7.264
<b>HEA300</b>	34.1	21.4	0.078	7.182
<b>HEA340</b>	34.7	18.2	0.055	6.592
<b>HEA400</b>	35.5	15.8	0.081	6.350
<b>HEA500</b>	40.8	13.0	0.063	5.756
<b>HEA600</b>	45.4	12.0	0.063	5.708
<b>HEA700</b>	47.6	11.1	0.075	5.791
<b>HEA900</b>	55.6	10.0	0.009	6.631
<b>HEB100</b>	16.7	10.0	0.015	6.036
<b>HEB140</b>	20.0	11.7	0.052	4.593
<b>HEB180</b>	21.2	12.9	0.084	4.788
<b>HEB220</b>	23.2	13.8	0.049	4.820

<b>HEB260</b>	26.0	14.9	0.056	5.759
<b>HEB300</b>	27.3	15.8	0.065	5.813
<b>HEB340</b>	28.3	14.0	0.082	5.565
<b>HEB400</b>	29.6	12.5	0.104	5.499
<b>HEB500</b>	34.5	10.7	0.103	5.175
<b>HEB600</b>	38.7	10.0	0.025	5.226
<b>HEB700</b>	41.2	9.4	0.036	5.359
<b>HEB900</b>	48.6	8.6	0.071	6.219
<b>IPE100</b>	24.4	9.6	0.002	9.247
<b>IPE140</b>	29.8	10.6	0.001	6.754
<b>IPE180</b>	34.0	11.4	0.097	7.175
<b>IPE220</b>	37.3	12.0	0.059	8.251
<b>IPE270</b>	40.9	13.2	0.045	8.971
<b>IPE330</b>	44.0	13.9	0.079	9.455
<b>IPE400</b>	46.5	13.3	0.092	9.782

*Πίνακας 3 Απόκλιση στο  $I_{ts}$  μεταξύ ανάλυσης με συνοριακά και ανάλυσης με πεπερασμένα και  $\Theta_{LL}$*

Διατομές	H/tw	B/tf	Cs Απόκλιση(%) BEM-FEM	Cs Απόκλιση(%) BEM-ΘΛΔ
<b>HEA100</b>	19.2	12.5	0.006	4.802
<b>HEA140</b>	24.2	16.5	0.009	2.466
<b>HEA180</b>	28.5	18.9	0.008	2.140
<b>HEA220</b>	30.0	20.0	0.007	2.270
<b>HEA260</b>	33.3	20.8	0.010	2.332
<b>HEA300</b>	34.1	21.4	0.009	2.117

<b>HEA340</b>	34.7	18.2	0.006	2.180
<b>HEA400</b>	35.5	15.8	0.001	1.913
<b>HEA500</b>	40.8	13.0	0.002	1.428
<b>HEA600</b>	45.4	12.0	0.005	1.333
<b>HEA700</b>	47.6	11.1	0.010	1.311
<b>HEA900</b>	55.6	10.0	0.019	0.990
<b>HEB100</b>	16.7	10.0	0.022	4.933
<b>HEB140</b>	20.0	11.7	0.002	2.380
<b>HEB180</b>	21.2	12.9	0.006	2.319
<b>HEB220</b>	23.2	13.8	0.005	2.197
<b>HEB260</b>	26.0	14.9	0.005	2.484
<b>HEB300</b>	27.3	15.8	0.005	2.312
<b>HEB340</b>	28.3	14.0	0.004	2.216
<b>HEB400</b>	29.6	12.5	0.001	1.804
<b>HEB500</b>	34.5	10.7	0.002	1.553
<b>HEB600</b>	38.7	10.0	0.003	1.469
<b>HEB700</b>	41.2	9.4	0.008	1.234
<b>HEB900</b>	48.6	8.6	0.015	1.350
<b>IPE100</b>	24.4	9.6	0.008	2.249
<b>IPE140</b>	29.8	10.6	0.013	2.463
<b>IPE180</b>	34.0	11.4	0.004	2.369
<b>IPE220</b>	37.3	12.0	0.008	2.141
<b>IPE270</b>	40.9	13.2	0.008	1.872
<b>IPE330</b>	44.0	13.9	0.008	1.947
<b>IPE400</b>	46.5	13.3	0.010	1.842



**Πίνακας 4** Απόκλιση στο Cs μεταξύ ανάλυσης με συνοριακά και ανάλυσης με πεπερασμένα και ΘΛΔ

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποια σημαντικά συμπεράσματα όσο αφορά στην αξιοπιστία κάθε θεωρίας. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στα εξής :

- Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις μας, δηλαδή επίλυση κατάλληλων προβλήματων συνοριακών τιμών με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων, παρουσιάζει αμελητέες αποκλίσεις (βλ. Πίνακες 3&4) σε σχέση με τα δημοσιευμένα αποτελέσματα του Kraus που βασίζονται στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων τόσο στην δευτερογενή στρεπτική σταθερά  $I_{ts}$  όσο και στη σταθερά στρέβλωσης Cs. Το στοιχείο αυτό, δηλαδή το ότι δύο διαφορετικοί τρόποι ανάλυσης, καταλήγουν σε αποτελέσματα με αμελητέα απόκλιση μας καταδεικνύει την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας.
- Σε αντίθεση με τη θεωρία πεπερασμένων στοιχείων η Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις με τα δικά μας αποτελέσματα και στους τρεις τύπους διατομών (βλ. Πίνακες 3&4) που μπορεί να φτάσουν μέχρι και το 9.8%. Επομένως, δεδομένου της ταύτισης πρακτικά των άλλων δύο θεωριών, η Θ.Λ.Δ. δεν μπορεί να θεωρηθεί ακριβής στον υπολογισμό των σταθερών  $I_{ts}$  και Cs.
- Στον υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς η Θ.Λ.Δ. δεν αποτελεί σίγουρα ακριβή τρόπο υπολογισμού καθώς οι αποκλίσεις σε όλες τις διατομές ξεπερνάνε το 4-5% (βλ. Πίνακα 3).
- Στον υπολογισμό της σταθεράς στρέβλωσης παρατηρούμε ότι τα σφάλματα της Θ.Λ.Δ. εμφανίζουν κάποια εξάρτηση από τις διαστάσεις της διατομής (H,B) και στην πλειονότητα των διατομών παρουσιάζει ικανοποιητικές αποκλίσεις που δεν ξεπερνούν την τιμή 2.5%. Τέλος, παρατηρούμε ότι το σφάλμα της Θ.Λ.Δ. στη σταθερά  $I_{ts}$  δεν παρουσιάζει εμφανή εξάρτηση από τους λόγους  $H/t_w$ ,  $B/t_f$  αλλά ούτε και από τις διαστάσεις της διατομής (H,B).

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι, για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών  $I_{ts}$  και Cs , η μέθοδος συνοριακών στοιχείων που έχουμε χρησιμοποιήσει αποτελεί ένα ακριβές εργαλείο όπως και αυτή των πεπερασμένων στοιχείων ενώ η Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών δεν ενδείκνυται για τον υπολογισμό τους παρά μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις και με ορισμένες προϋποθέσεις.

## 6.2.2 Εντατικά μεγέθη, κινηματικά μεγέθη, τάσεις

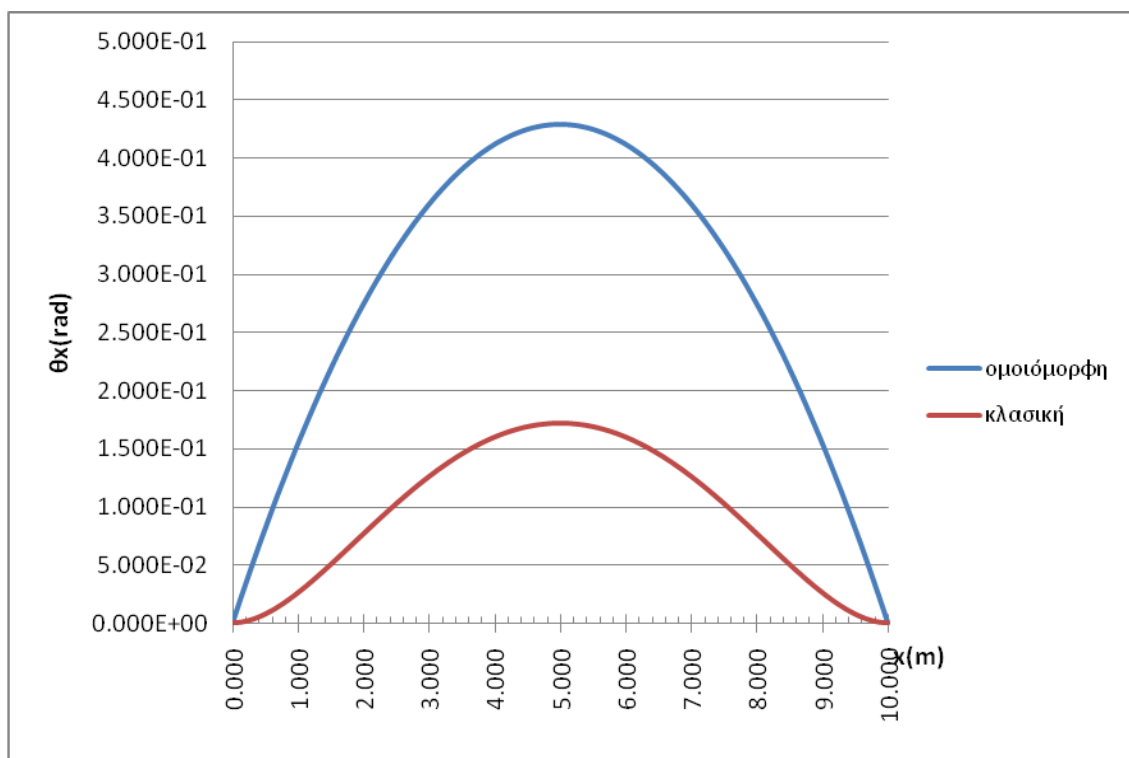
Στο πρώτο μέρος αυτού του υποκεφαλαίου θα ασχοληθούμε με ένα αριθμητικό παράδειγμα προκειμένου να σχηματίσουμε μια πρώτη εικόνα σχετικά με το τι συμβαίνει σε μια φορτιζόμενη ράβδο από άποψη εντατικών και κινηματικών μεγεθών αλλά κυρίως για να δείξουμε την ανεπάρκεια των αποτελεσμάτων της ομοιόμορφης θεωρίας μέσω της σύγκρισης με τη ‘κλασική’ θεωρία η οποία είναι η πλέον αποδεκτή στην επιστημονική βιβλιογραφία και εξάλλου χρησιμοποιείται σε πλήθος σύγχρονων εμπορικών προγραμμάτων ανάλυσης κατασκευών.

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>**

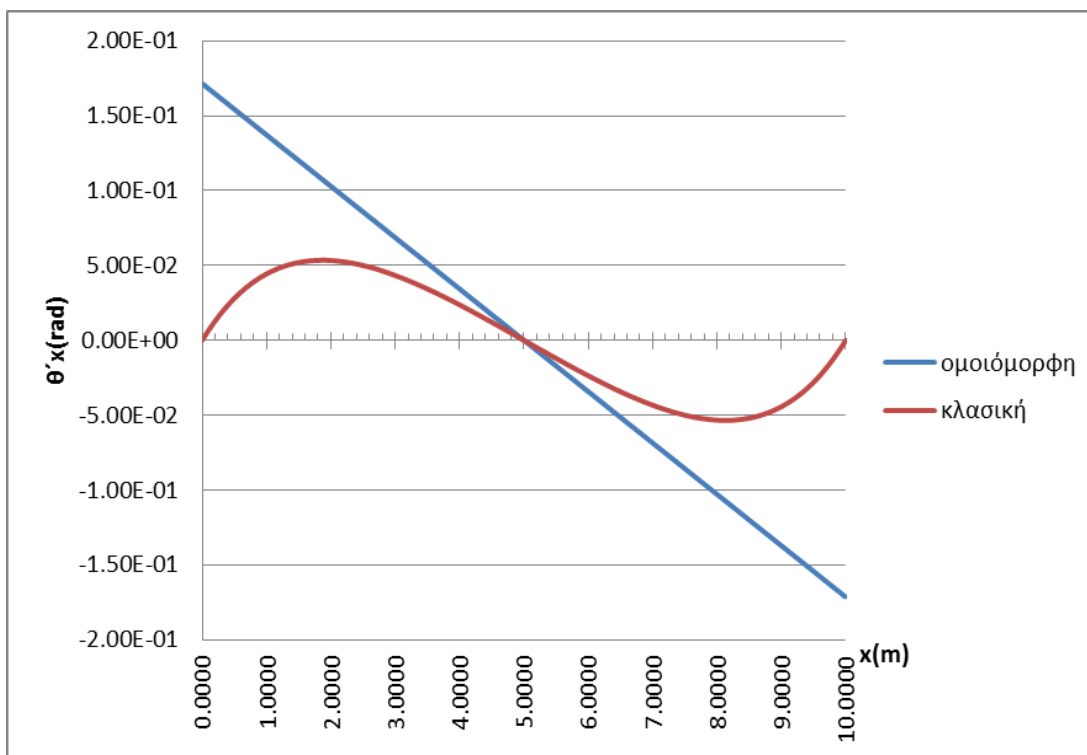
Εξετάζουμε ράβδο μήκους 10m και διατομής HEB400 ( $I_{tp}=3.61100E-06 m^4$ ,  $C_s=3.75107E-06 m^6$ ,  $I_{ts}= 4.47452E-04 m^4$ ) η οποία υποβάλλεται σε κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο 10kNm/m σε όλο το μήκος της. Η στροφή και η στρέβλωση στα άκρα της ράβδου παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι για τα άκρα  $\theta_x=0$  και  $\theta'_x=0$ . Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε στο πρόγραμμα TOBEM και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για κάθε μία από τις δύο θεωρίες χωριστά.

Μέγιστες τιμές	Ομοιόμορφη	Κλασική	Αποκλίσεις(%)
max- $\theta_x$ (rad)	4.28588E-01	1.72513E-01	148.438
max-d $\theta_x$ /dx (rad/m)	1.71231E-01	5.34666E-02	220.258
max-M <sub>tp</sub> (kNm)	50	1.55939E+01	67.936
max-M <sub>ts</sub> (kNm)	0	50	-
max-M <sub>t</sub> (kNm)	50	50	0.000
max- M <sub>w</sub>   (kNm <sup>2</sup> )	0	5.55395E+01	-

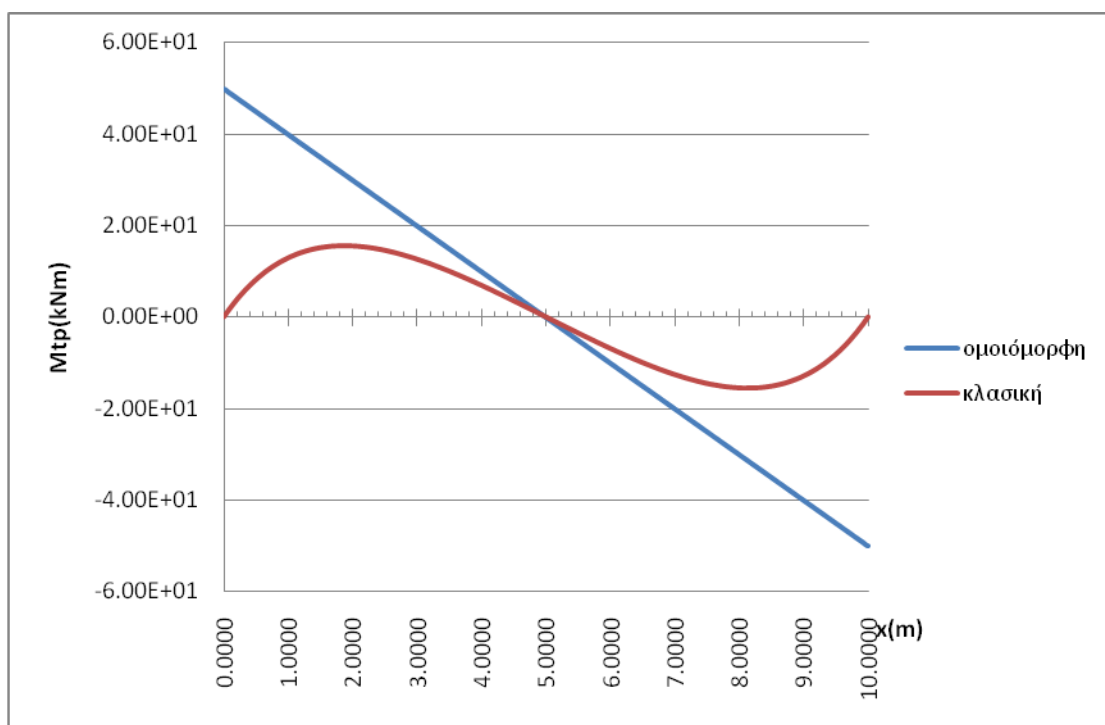
**Πίνακας 5** Μέγιστες τιμές εντατικών και κινηματικών μεγεθών για ομοιόμορφη και κλασική θεωρία



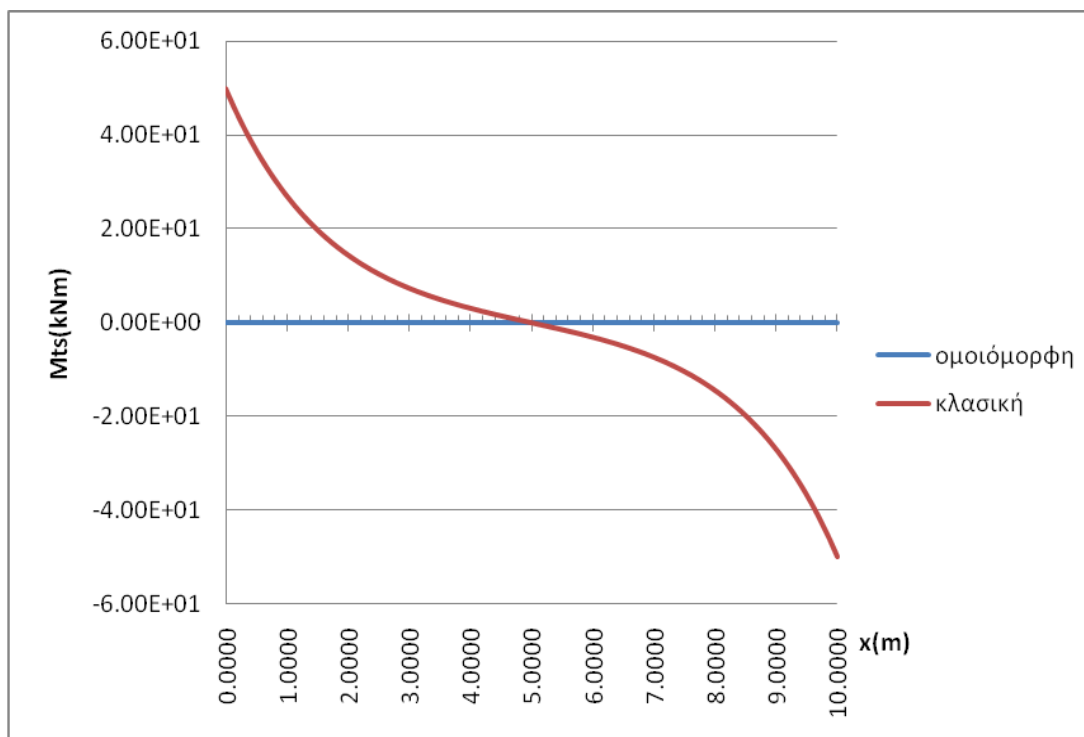
**Γράφημα 1** Μεταβολή γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος της ράβδου



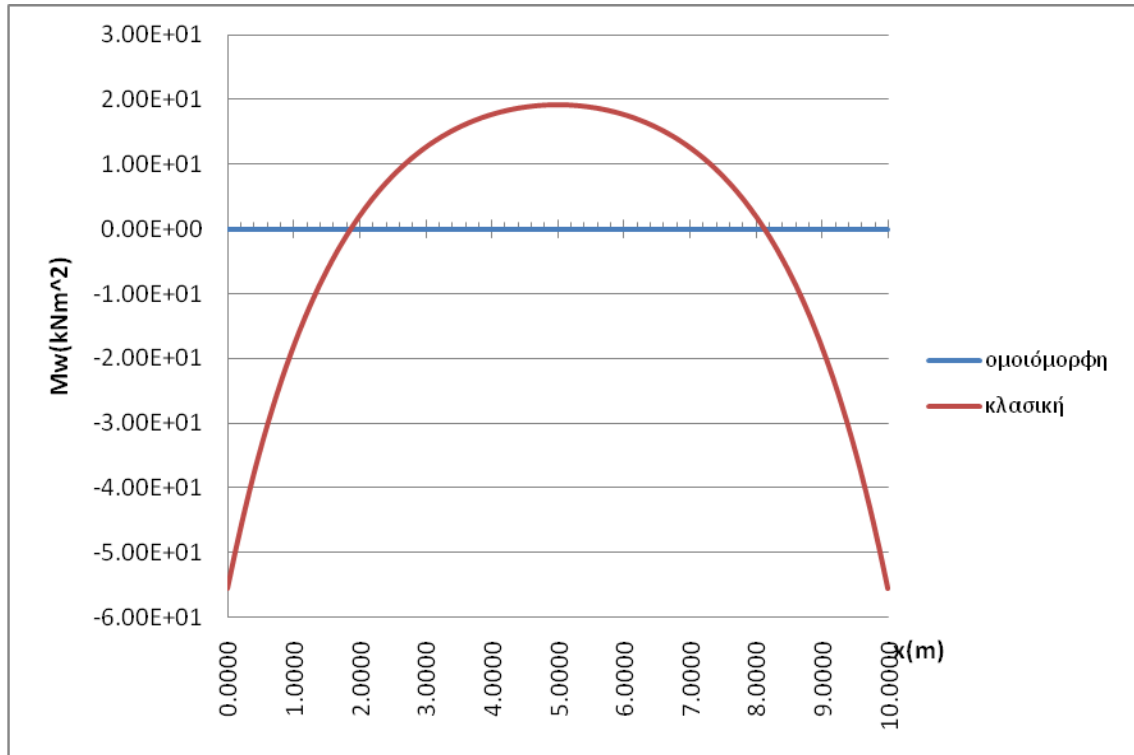
**Γράφημα 2** Μεταβολή σχετικής γωνίας στροφής  $\theta'_x$  κατά μήκος της ράβδου



**Γράφημα 3** Μεταβολή πρωτογενούς στρεπτικής ροπής  $M_{tp}$  κατά μήκος της ράβδου



**Γράφημα 4** Μεταβολή δευτερογενούς στρεπτικής ροπής κατά μήκος της ράβδου



**Γράφημα 5** Μεταβολή διρρόπου στρέβλωσης  $M_w$  κατά μήκος της ράβδου

Με βάση τα παραπάνω γραφήματα καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Όσο αφορά στα κινηματικά μεγέθη παρατηρούμε ότι η στρεπτική γωνία στροφής  $\theta_x$  λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές στην ομοιόμορφη θεωρία και αυτό μας υποδεικνύει ότι η ράβδος εμφανίζει μεγαλύτερη στρεπτική αντίσταση στην ‘κλασική’ θεωρία (βλ. Γράφημα 1). Προέκυψε ήδη λοιπόν ένα σημαντικό σφάλμα της ομοιόμορφης θεωρίας που σχετίζεται και με τον προσδιορισμό της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου. Πιο συγκεκριμένα, η ομοιόμορφη θεωρία προβλέπει σημαντικά μικρότερες στιβαρότητες απ’ότι η κλασική ανομοιόμορφη θεωρία.
- Εκτός της γωνίας στροφής και η συστροφή παρουσιάζει σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο θεωριών όχι μόνο σε μέγιστες τιμές αλλά και στη μορφή της καμπύλης (βλ. Γράφημα 2). Εδώ πρέπει να τονιστεί το ότι στην ομοιόμορφη θεωρία η συστροφή στα άκρα της ράβδου λαμβάνει μη μηδενική τιμή και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, καθώς βασική παραδοχή της ομοιόμορφης θεωρίας στρέψης κατά St.Venant είναι η μη παρεμπόδιση της στρέβλωσης, έχουμε θεωρήσει διχαλωτή στήριξη και όχι πάκτωση όπως ισχύει στο πραγματικό στατικό σύστημα που εξετάζουμε.
- Όσο αφορά στα εντατικά μεγέθη παρατηρούμε ότι η συνολική στρεπτική ροπή  $M_t$  παρουσιάζει ίδιες μέγιστες τιμές και οι καμπύλες συμπίπτουν και στις δύο θεωρίες, ωστόσο διαφέρει ο τρόπος με τον οποίο παραλαμβάνεται από πρωτογενείς και δευτερογενείς στρεπτικές ροπές. Στην ομοιόμορφη θεωρία βλέπουμε ότι το σύνολο της ροπής το έχει παραλάβει η πρωτογενής στρεπτική ροπή  $M_{tp}$  ενώ στην ‘κλασική’ θεωρία αναπτύσσεται και

δευτερογενής στρεπτική ροπή η οποία παρουσιάζει μέγιστες τιμές στα άκρα, όπου είναι έντονη η μεταβολή του διρρόπου στρέβλωσης, και φθίνει καθώς απομακρυνόμαστε από αυτά (βλ. Γράφημα 5). Σημαντικό στοιχείο αποτελεί το γεγονός ότι στην ‘κλασική’ θεωρία η πρωτογενής στρεπτική ροπή στα άκρα λαμβάνει μηδενική τιμή καθώς εκεί ισχύει  $\theta'x=0$  (βλ. σχέση 3.3.6)

- Τέλος, παρατηρώντας το Γράφημα 5 καθίσταται εμφανής η ανεπάρκεια της ομοιόμορφης θεωρίας καθώς σε αυτή το δίρροπο στρέβλωσης αμελείται ενώ στην ‘κλασική’ θεωρία όχι μόνο δεν αμελείται αλλά λαμβάνει και σημαντικές τιμές (τοπικά).
- Οπότε λόγω των συμπερασμάτων για τα εντατικά μεγέθη αλλά και δεδομένων των πολύ μεγάλων αποκλίσεων στα κινηματικά μεγέθη καθίσταται προφανής η ακαταλληλότητα της ομοιόμορφης θεωρίας στις ανοικτές διατομές.

### Σύγκριση ‘κλασικής’-‘διευρυμένης’ θεωρίας

Στο δεύτερο μέρος αυτού του υποκεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τη σύγκριση μεταξύ ‘κλασικής’ και ‘διευρυμένης’ θεωρίας προκειμένου να αναδείξουμε τα σφάλματα της ‘κλασικής’ θεωρίας αλλά και να προσδιορίσουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες τα αποτελέσματα των δύο θεωριών παρουσιάζουν αμελητέες αποκλίσεις και επομένως η ‘κλασική’ θεωρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα. Θα παραθέσουμε αριθμητικά παραδείγματα για διαφορετικού τύπου διατομές και διαφορετικά στατικά συστήματα και για κάθε περίπτωση θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αναλύσεις σε διάφορα μήκη ράβδου ώστε να εξετάσουμε αν υπάρχει κάποια εξάρτηση των σφαλμάτων της ‘κλασικής’ θεωρίας από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ράβδου, κατ’ αναλογία με τις ράβδους υπό κάμψη όταν αναλύονται με τις θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Εξετάζουμε ράβδο διατομής HEA300( $I_{tp}=8.42400E-07 m^4$ ,  $C_s=1.17460E-06 m^6$ ,  $I_{ts}=1.42882E-04 m^4$ ,  $\kappa=9.93746E-01$ ) η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στρεπτικό φορτίο 10kNm/m στο μέσο του μήκους της. Η στροφή και η στρέβλωση στα άκρα της ράβδου παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι για τα άκρα  $\theta x=0$  και  $\theta'x=0$  για την ‘κλασική’ θεωρία και  $\theta x=0$  και  $n x=0$  για τη ‘διευρυμένη’ θεωρία. Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε στο πρόγραμμα TOBEM για μήκη ράβδου 0.5,1,2,3 και 5 m και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για κάθε μία από τις δύο θεωρίες χωριστά.

Μήκος ράβδου[m]	Max- $\theta x$ [rad]	
	Κλασική	Διευρυμένη
5	0.02252	0.0224
3	0.00537	0.00534
2	0.00164	0.00163

<b>1</b>	0.0002097	0.0002084
<b>0.5</b>	0.00002635	0.00002618

**Πίνακας 6** Μέγιστες τιμές γωνίας στροφής  $\theta_x$  για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου[m]	Max-Mts[kNm]	
	Κλασική	Διευρυμένη
<b>5</b>	5.0	4.9687
<b>3</b>	5.0	4.96872
<b>2</b>	5.0	4.96873
<b>1</b>	5.0	4.96873
<b>0.5</b>	5.0	4.96873

**Πίνακας 7** Μέγιστες τιμές της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής  $M_{ts}$  για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου[m]	Max-Mw[kNm <sup>2</sup> ]	
	Κλασική	Διευρυμένη
<b>5</b>	5.48389	5.45366
<b>3</b>	3.56736	3.54612
<b>2</b>	2.44406	2.42911
<b>1</b>	1.24286	1.23513
<b>0.5</b>	0.6241	0.62020

**Πίνακας 8** Μέγιστες τιμές του διρρόπου στρέβλωσης  $M_w$  για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου[m]	Μήκος/Πλάτος	Μήκος/Υψος	Απόκλιση(%)		
			Max- $\theta_x$	Max-Mts	Max-Mw
<b>5</b>	16.67	17.24	<b>0.536</b>	<b>0.625</b>	<b>0.551</b>
<b>3</b>	10.00	10.34	<b>0.562</b>	<b>0.625</b>	<b>0.595</b>
<b>2</b>	6.67	6.90	<b>0.613</b>	<b>0.625</b>	<b>0.612</b>

1	3.33	3.45	0.624	0.625	0.622
0.5	1.67	1.72	0.649	0.625	0.655

**Πίνακας 9** Αποκλίσεις  $\theta_x$ ,  $M_t$  και  $M_w$  για διάφορα μήκη ράβδου

Με βάση τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

- Σε επίπεδο κινηματικών μεγεθών παρατηρούμε ότι η γωνία στροφής  $\theta_x$  εμφανίζει αμελητέα απόκλιση με αποτέλεσμα και οι δύο θεωρίες να προβλέπουν την ίδια στρεπτική στιβαρότητα για τη ράβδο. Επισημαίνεται, επίσης, ότι όσο μικραίνει το μήκος της ράβδου αυξάνει η απόκλιση σε αναλογία με τη θεωρία καμπτόμενων ραβδών Timoshenko.
- Και σε επίπεδο εντατικών μεγεθών παρουσιάζεται αμελητέα απόκλιση τόσο στη δευτερογενή στρεπτική ροπή όσο και στο δίρροπο στρέβλωσης. Η ταύτιση των αποτελεσμάτων ισχύει για όλους τους λόγους μήκος/πλάτος και μήκος/ύψος τουλάχιστον για την περίπτωση της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής και το συμπέρασμα αυτό μας επιτρέπει να δεχτούμε ότι, για το συγκεκριμένο στατικό σύστημα και τύπο ράβδου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η 'κλασική' θεωρία χωρίς να παρουσιάζει σφάλματα παρά το γεγονός ότι δεν λαμβάνει υπόψιν την επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων. Συνεπώς, οι δευτερογενείς στρεπτικές παραμορφώσεις έχουν πολύ μικρή επιρροή.
- Οι δύο θεωρίες έχουν τα ίδια ακριβώς εντατικά μεγέθη (σε αντίθεση με την ομοιόμορφη θεωρία), άρα και οι τάσεις που θα υπολογιστούν αναμένεται να παρουσιάζουν αμελητέες αποκλίσεις. Συνεπώς παραλείπονται από την παρούσα ανάλυση.
- Σε όλα τα μήκη η απόκλιση στο  $M_t$  είναι ακριβώς η ίδια. Συνεπώς, η διαφοροποίηση του συγκεκριμένου μεγέθους είναι ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου, σε αντίθεση με το δίρροπο στρέβλωσης και τα κινηματικά μεγέθη.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>

Εξετάζουμε ράβδο διατομής HEB300 [ $I_{tp} = 9.30900E-08 \text{ m}^4$ ,  $C_s = 3.23227E-09 \text{ m}^6$ ,  $I_{ts} = 1.98434E-04 \text{ m}^4$ ,  $\kappa = 9.74308E-01$ ] η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στρεπτικό φορτίο 10kNm στο ένα άκρο της. Το άκρο αυτό στο οποίο επιβάλλεται το φορτίο είναι ελεύθερο ενώ στο άλλο η στροφή και η στρέβλωση παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι  $\theta_x = 0$  και  $\theta'x = 0$  για την 'κλασική' θεωρία και  $\theta_x = 0$  και  $n_x = 0$  για τη 'διευρυμένη' θεωρία.. Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε στο πρόγραμμα TOBEM για μήκη ράβδου 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 3 και 5 m και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για κάθε μία από τις δύο θεωρίες χωριστά. Ειδικά για μήκος ράβδου 5 m θα παρουσιαστούν και τα αποτελέσματα της ομοιόμορφης θεωρίας ώστε να γίνει σύγκριση και των τριών θεωριών.



Μήκος ράβδου[m]	Max- $\theta_x$ [rad]	
	Κλασική	Διευρυμένη
5	6.25044	6.25560
3	3.59040	3.59557
2	2.26039	2.26556
1	0.93141	0.93666
0.5	0.29305	0.29902
0.2	0.03338	0.03865
0.1	0.00470	0.00789

**Πίνακας 10** Μέγιστες τιμές γωνίας στροφής  $\theta_x$  για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου[m]	Max-Mts[rad]	
	Κλασική	Διευρυμένη
5	10.0	9.74038
3	10.0	9.74211
2	10.0	9.74265
1	10.0	9.74298
0.5	10.0	9.74306
0.2	10.0	9.74308
0.1	10.0	9.74308

**Πίνακας 11** Μέγιστες τιμές της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής Mts για διάφορα μήκη ράβδου

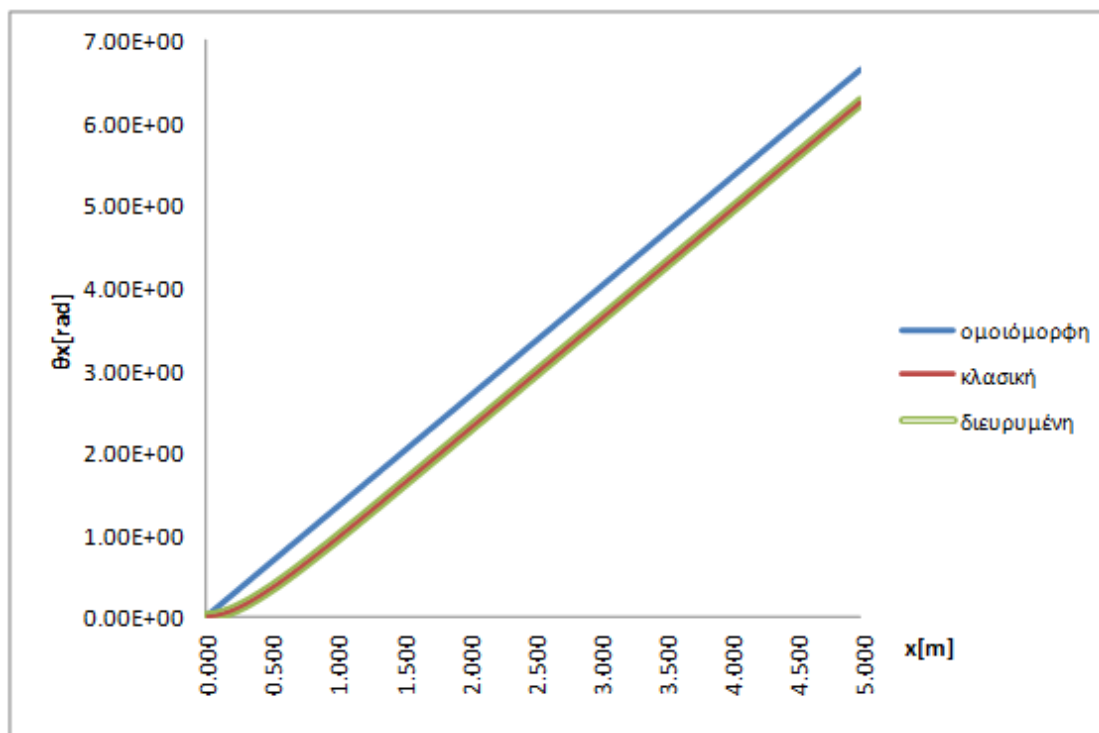
Μήκος ράβδου[m]	Max-Mw[kNm <sup>2</sup> ]	
	Κλασική	Διευρυμένη
5	3.00506	2.96621
3	3.00477	2.96593

2	3.00468	2.96583
1	2.99692	2.95749
0.5	2.79661	2.75175
0.2	1.74901	1.70943
0.1	0.96464	0.94071

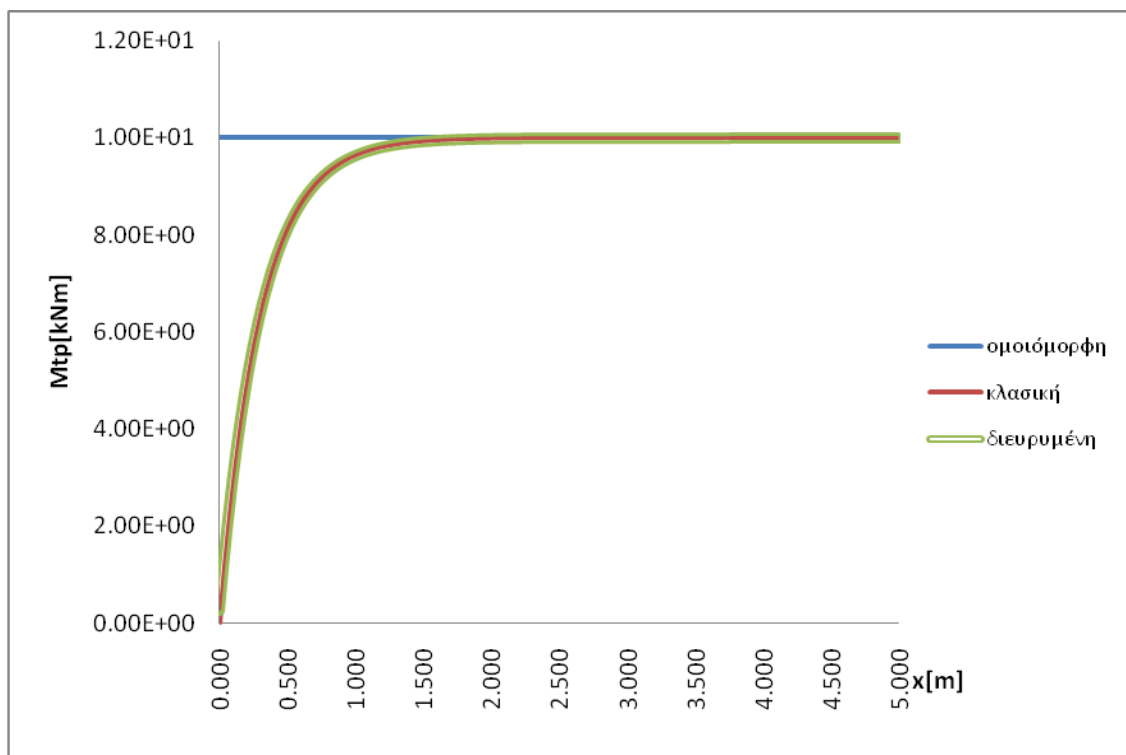
**Πίνακας 12** Μέγιστες τιμές του διρρόπου στρέβλωσης  $M_w$  για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου[m]	Μήκος/Πλάτος	Μήκος/Υψος	Απόκλιση(%)		
			Max- $\theta_x$	Max-Mts	Max- $M_w$
5	50.00	50.00	0.082	2.568	1.293
3	30.00	30.00	0.144	2.569	1.293
2	20.00	20.00	0.228	2.569	1.293
1	10.00	10.00	0.560	2.569	1.316
0.5	5.00	5.00	1.996	2.569	1.604
0.2	2.00	2.00	13.620	2.569	2.263
0.1	1.00	1.00	40.368	2.569	2.481

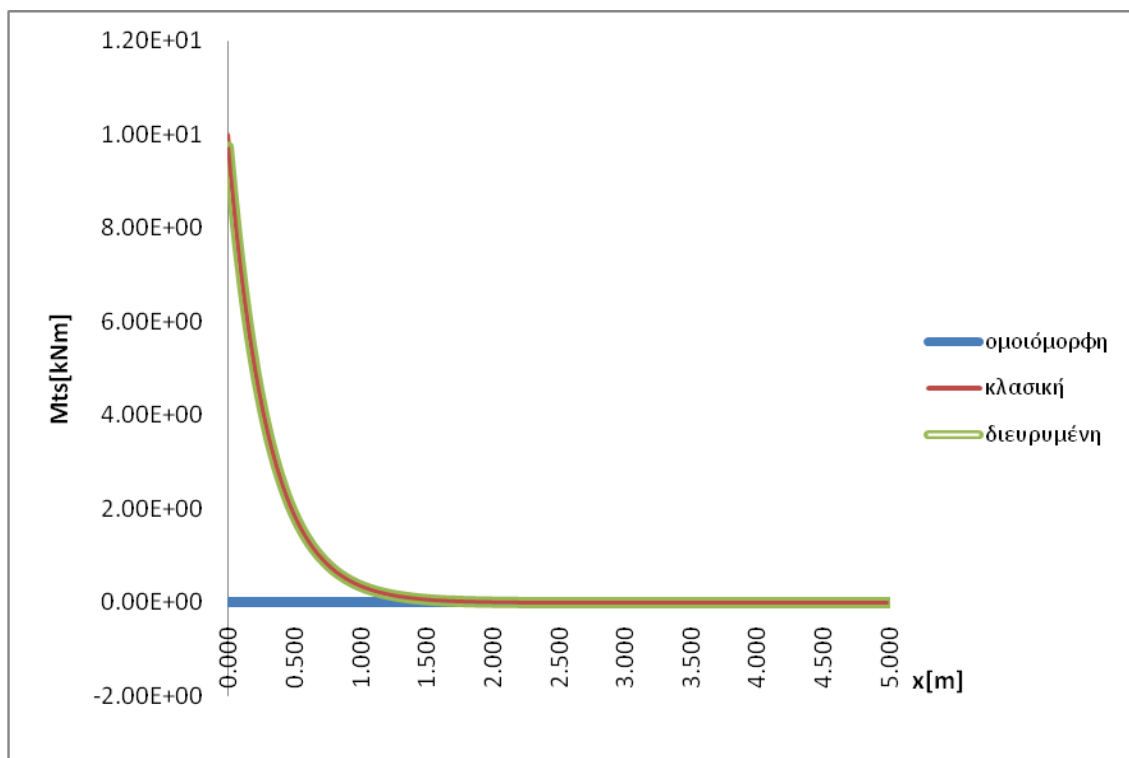
**Πίνακας 13** Αποκλίσεις  $\theta_x$ , Mts και  $M_w$  για διάφορα μήκη ράβδου μεταξύ 'κλασικής' και 'διευρυμένης' θεωρίας



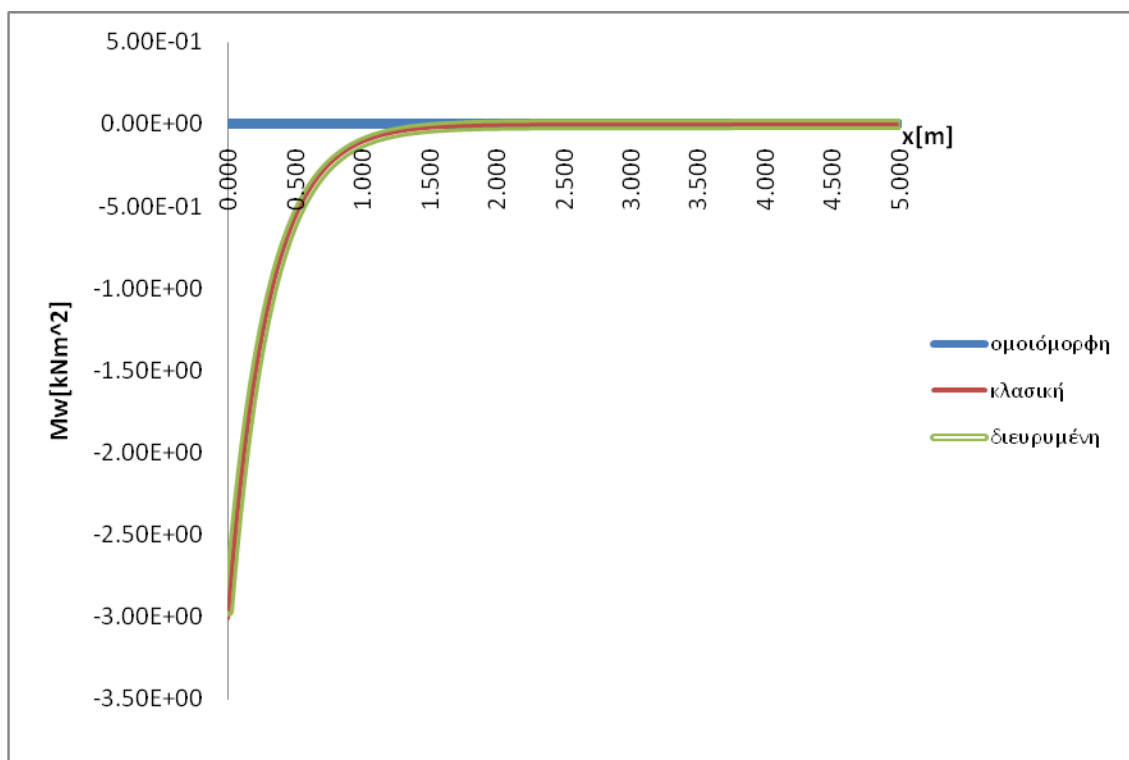
**Γράφημα 6** Μεταβολή γωνίας στροφής  $\theta_x$  κατά μήκος ράβδου 5m με στατικό σύστημα προβόλου



**Γράφημα 7** Μεταβολή πρωτογενούς στρεπτικής ροπής κατά μήκος ράβδου 5m με στατικό σύστημα προβόλου



**Γράφημα 8** Μεταβολή δευτερογενούς στρεπτικής ροπής κατά μήκος ράβδου 5m με στατικό σύστημα προβόλου



**Γράφημα 9** Μεταβολή διρρόπου στρέβλωσης κατά μήκος ράβδου 5m με στατικό σύστημα προβόλου

Με βάση τους παραπάνω πίνακες με τις αποκλίσεις ‘κλασικής’ και ‘διευρυμένης’ θεωρίας για διάφορα μήκη και τα γραφήματα που περιέχουν και τις τρεις θεωρίες για μήκος ράβδου 5m καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Όσο αφορά στην ανάλυση για μήκος ράβδου 5m παρατηρούμε ότι υπάρχει ταύτιση των αποτελεσμάτων σε ‘κλασική’ και ‘διευρυμένη’ θεωρία. Ωστόσο, η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει σημαντικές διαφορές τόσο στις μέγιστες τιμές κινηματικών και εντατικών μεγεθών όσο και στη μορφή της καμπύλης ( $\max\theta_x=6.64999E+00\text{rad}$ ,  $\max M_t=0$ ,  $\max M_w=0$ ). Όπως και στο παράδειγμα 1 η ομοιόμορφη θεωρία δίνει μεγαλύτερες τιμές για τη γωνία στροφής  $\theta_x$ , προβλέπει δηλαδή ράβδο μικρότερης στρεπτικής στιβαρότητας σε σχέση με τις άλλες δύο. Αλλά και στα εντατικά μεγέθη, στην ομοιόμορφη, παρατηρούμε ότι η ροπή παραλαμβάνεται εξ’ολοκλήρου από την πρωτογενή στρεπτική ροπή και το δίρροπο στρέβλωσης αμελείται ενώ στις άλλες δύο θεωρίες λαμβάνει σημαντικές τιμές κυρίως κοντά στη στήριξη.
- Όσο αφορά στις αναλύσεις που έχουν γίνει για τα υπόλοιπα μήκη παρατηρούμε ότι για το κινηματικό μέγεθος, δηλαδή τη γωνία στροφής, οι αποκλίσεις μεταξύ ‘κλασικής’ και ‘διευρυμένης’ θεωρίας είναι ικανοποιητικές (<2%) μέχρι ενός ορισμένου μήκους. Πιο συγκεκριμένα, για λόγους **μήκος/πλάτος<5** και **μήκος/ύψος<5** παρουσιάζονται σημαντικά σφάλματα στο  $\theta_x$  και ιδίως για μήκος/πλάτος=1 και μήκος/ύψος=1 η απόκλιση λαμβάνει τιμή 40%. Ωστόσο, στα συνήθη μήκη ράβδου που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές η ‘κλασική’ θεωρία δεν παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα.
- Σε επίπεδο εντατικών μεγεθών, σύμφωνα με τον Πίνακα 13, το δίρροπο στρέβλωσης εμφανίζει μικρές αποκλίσεις και μόνο για λόγους **μήκος/πλάτος<5** και **μήκος/ύψος<5** το σφάλμα ξεπερνάει ελάχιστα την τιμή 2% ενώ, επίσης, η ‘διευρυμένη’ θεωρία παρουσιάζει μικρότερες τιμές από αυτές της ‘κλασικής’. Στη δευτερογενή στρεπτική ροπή όμως παρατηρούμε ότι το σφάλμα παραμένει το ίδιο για όλα τα μήκη και λαμβάνει τιμή 2.57%, ελάχιστα μεγαλύτερο του 2% που θεωρούμε ως μικρή απόκλιση.
- Σε όλα τα μήκη η απόκλιση στο  $M_t$  είναι ακριβώς η ίδια. Συνεπώς, η διαφοροποίηση του συγκεκριμένου μεγέθους είναι ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου, σε αντίθεση με το δίρροπο στρέβλωσης και τα κινηματικά μεγέθη.
- Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι, για το συγκεκριμένο στατικό σύστημα και για λόγους **μήκος/πλάτος>=5** και **μήκος/ύψος>=5**, η ‘κλασική’ θεωρία δίνει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα και μόνο στο μέγεθος  $M_t$  παρουσιάζει ένα μικρό σφάλμα οπότε μπορεί να εφαρμοστεί το ίδιο αποτελεσματικά με την ‘διευρυμένη’ θεωρία.

## 6.3 Κλειστές διατομές

### 6.3.1 Γεωμετρικές σταθερές

Οι κλειστές διατομές με τις οποίες ασχοληθήκαμε είναι οι κοίλες ορθογωνικές με διαστάσεις 60x40x5, 100x60x6.3, 160x80x6.3, 250x150x10, 450x250x8 και οι οβάλ με διαστάσεις 400x200x8, 400x200x10, 400x200x12.5,

400x200x16 και οι σταθερές που παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες είναι η πρωτογενής στρεπτική σταθερά  $I_{tp}$ , η δευτερογενής στρεπτική σταθερά  $I_{ts}$  και η σταθερά στρέβλωσης  $C_s$ . Στα επόμενα θα παραθέσουμε τις γεωμετρικές σταθερές για τις παραπάνω διατομές που έχουν δημοσιευτεί και προέκυψαν από ανάλυση με Θεωρία Λεπτότοιχων Διατομών (Rubin 2007), θα παραθέσουμε τις τιμές των  $I_{tp}$  και  $C_s$  που προέκυψαν από το Nastran και θα τις συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα από τις δικές μας αναλύσεις.

Διατομές	$I_{tp}$ -BEM[ $m^4$ ]	$I_{ts}$ -BEM[ $m^4$ ]	$C_s$ -BEM[ $m^6$ ]
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 60X40X5	4.32682E-07	2.3404E-08	4.0286E-12
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 100X60X6,3	2.2501E-06	1.68046E-07	8.01345E-11
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 160X80X6,3	7.29964E-06	8.58067E-07	1.00058E-09
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 250X150X10	6.09064E-05	3.95614E-06	1.31838E-08
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 450X250X8	2.70833E-04	2.08072E-05	2.28416E-07
ΟΒΑΛ 400X200X8	1.15142E-04	4.14828E-05	3.13711E-08
ΟΒΑΛ 400X200X10	1.40457E-04	5.14181E-05	3.84077E-08
ΟΒΑΛ 400X200X12.5	1.70276E-04	6.35784E-05	4.68312E-08
ΟΒΑΛ 400X200X16	2.08779E-04	8.01179E-05	5.80705E-08

*Πίνακας 14* Γεωμετρικές σταθερές  $I_{tp}$ ,  $I_{ts}$ ,  $C_s$  από ανάλυση με συνοριακά στοιχεία (παρούσα θεωρία)

Διατομές	$I_{tp}$ -Θ.Λ.Δ. [ $m^4$ ]	$I_{ts}$ -Θ.Λ.Δ. [ $m^4$ ]	$C_s$ -Θ.Λ.Δ. [ $m^6$ ]
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 60X40X5	4.28000E-07	1.89000E-08	3.36000E-12
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 100X60X6,3	2.24000E-06	1.47000E-07	7.18000E-11
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 160X80X6,3	7.29000E-06	8.07000E-07	9.54000E-10
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 250X150X10	6.08400E-05	3.72000E-06	1.25250E-08
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 450X250X8	2.70770E-04	2.01900E-05	2.25114E-07

ΟΒΑΛ 400X200X8	-	-	-
ΟΒΑΛ 400X200X10	-	-	-
ΟΒΑΛ 400X200X12.5	-	-	-
ΟΒΑΛ 400X200X16	-	-	-

Πίνακας 15 Γεωμετρικές σταθερές  $I_{tp}$ ,  $I_{ts}$ ,  $C_s$  από ανάλυση με  $\Theta.A.A.$

Διατομές	$I_{tp}$ -Nastran [ $m^4$ ]	$C_s$ -Nastran [ $m^6$ ]
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 60X40X5	4.35219E-07	4.12810E-12
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 100X60X6,3	4.35219E-07	4.12810E-12
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 160X80X6,3	2.26108E-06	8.21840E-11
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 250X150X10	7.33511E-06	1.02155E-09
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 450X250X8	6.12688E-05	1.32510E-08
ΟΒΑΛ 400X200X8	2.72579E-04	2.29843E-07
ΟΒΑΛ 400X200X10	1.40391E-04	3.87939E-08
ΟΒΑΛ 400X200X12.5	1.70269E-04	4.78486E-08
ΟΒΑΛ 400X200X16	2.08779E-04	5.7698E-08

Πίνακας 16 Γεωμετρικές σταθερές  $I_{tp}$ ,  $C_s$  από ανάλυση στο Nastran (FEM)

Διατομές	$I_{tp}$ Απόκλιση(%) BEM-Nastran	$C_s$ Απόκλιση(%) BEM-Nastran
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 60X40X5	0.5830	2.4102
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 100X60X6,3	0.4857	2.4938
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 160X80X6,3	0.4835	2.0523
ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 250X150X10	0.5916	0.5072

<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 450X250X8</b>	0.6404	0.6209
<b>ΟΒΑΛ 400X200X8</b>	0.0069	0.0315
<b>ΟΒΑΛ 400X200X10</b>	0.0470	0.9955
<b>ΟΒΑΛ 400X200X12.5</b>	0.0041	2.1263
<b>ΟΒΑΛ 400X200X16</b>	0.0002	0.6456

*Πίνακας 17 Απόκλιση Itr και Cs μεταξύ ανάλυσης με συνοριακά στοιχεία και ανάλυσης με Nastran*

<b>Διατομές</b>	<b>Itr Απόκλιση(%) BEM-Θ.Λ.Δ.</b>	<b>Its Απόκλιση(%) BEM-Θ.Λ.Δ.</b>	<b>Cs Απόκλιση(%) BEM-Θ.Λ.Δ.</b>
<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 60X40X5</b>	1.082	19.245	16.596
<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 100X60X6,3</b>	0.449	12.524	10.401
<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 160X80X6,3</b>	0.132	5.951	4.656
<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 250X150X10</b>	0.109	5.969	4.997
<b>ΚΟΙΛΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ 450X250X8</b>	0.023	2.966	1.446
<b>ΟΒΑΛ 400X200X8</b>	-	-	-
<b>ΟΒΑΛ 400X200X10</b>	-	-	-
<b>ΟΒΑΛ 400X200X12.5</b>	-	-	-
<b>ΟΒΑΛ 400X200X16</b>	-	-	-

*Πίνακας 18 Απόκλιση Itr, Its, Cs μεταξύ ανάλυσης με συνοριακά και ανάλυσης με Θ.Λ.Δ.*

Εξετάζοντας τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να καταλήξουμε σε βασικά συμπεράσματα όσο αφορά στην ακρίβεια της μεθόδου που χρησιμοποιούμε αλλά και της Θ.Λ.Δ. στις κλειστές διατομές. Καταλήγουμε, λοιπόν, στα εξής:

- Παρατηρώντας τον Πίνακα 17 με τις αποκλίσεις ανάμεσα στα δικά μας αποτελέσματα και τα αποτελέσματα του Nastran διαπιστώνουμε ότι αποκλίσεις, τόσο στην πρωτογενή στρεπτική σταθερά όσο και στη σταθερά στρέβλωσης, είναι αμελητέες καθώς δεν ξεπερνούν το 2-2.5%. Το στοιχείο αυτό, επομένως, καταδεικνύει την ακρίβεια της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών.



- Στον Πίνακα 18 εξετάζουμε τις αποκλίσεις της μεθόδου συνοριακών στοιχείων με τη Θ.Λ.Δ. στις σταθερές  $I_{tr}$ ,  $I_{ts}$ ,  $C_s$  και παρατηρούμε ότι στην πρωτογενή στρεπτική σταθερά τα αποτελέσματα παρουσιάζουν αμελητέες αποκλίσεις και βλέπουμε ότι όσο πιο λεπτότοιχη είναι η διατομή τόσο πιο αξιόπιστα τα αποτελέσματα. Στις άλλες δύο σταθερές όμως, δηλαδή τη δευτερογενή στρεπτική σταθερά και τη σταθερά στρέβλωσης, εμφανίζονται αρκετά σημαντικές αποκλίσεις οι οποίες λαμβάνουν ακόμα τη τιμή 20%. Οι αποκλίσεις αυτές αυξάνουν όσο η διατομή γίνεται λιγότερο λεπτότοιχη και εμφανίζονται μεγαλύτερες στη σταθερά  $I_{ts}$ . Επίσης, έχοντας δείξει την ακρίβεια της μεθόδου μας στις σταθερές  $I_{tr}$  και  $C_s$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπολογίζει το ίδιο ικανοποιητικά και τη σταθερά  $I_{ts}$ . Με βάση τα προηγούμενα, καθίσταται εμφανές το σφάλμα της Θ.Λ.Δ. στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών ανομοιόμορφης στρέψης στις κλειστές ορθογωνικές διατομές.
- Όσο αφορά στις οβάλ διατομές δεν υπάρχουν δημοσιευμένα αποτελέσματα της Θ.Λ.Δ. και έχουμε παραθέσει μόνο τα αποτελέσματα της μεθόδου συνοριακών στοιχείων, τα οποία σύμφωνα με τον Πίνακα 17, παρουσιάζουν αμελητέες αποκλίσεις σε σχέση με τα αποτελέσματα του Nastran. Επομένως, και στις οβάλ διατομές η μέθοδος που χρησιμοποιούμε εμφανίζει πολύ καλή ακρίβεια στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών.

### 6.3.2 Εντατικά μεγέθη, κινηματικά μεγέθη, τάσεις

Στο πρώτο μέρος του υποκεφαλαίου αυτού θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα προκειμένου να εξετάσουμε την απόκριση μιας φορτιζόμενης ράβδου κλειστής διατομής σε κάθε μία από τις τρεις θεωρίες. Στόχος του παραδείγματος αυτού είναι να αναδείξει την ανεπάρκεια της ‘κλασικής’ θεωρίας στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

#### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>

Εξετάζουμε ράβδο κλειστής διατομής διαστάσεων 100x60x6.3mm και μήκους 5m [ $I_{tr}= 2.25010E-06 m^4$ ,  $I_{ts}=1.68046E-07 m^4$ ,  $C_s= 8.01345E-11 m^6$ ,  $\kappa= 6.94937E-02$ ] η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στρεπτικό φορτίο τιμής 10kNm στο μέσο του μήκους της. Η στροφή και η στρέβλωση στα άκρα της ράβδου παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι για τα άκρα  $\theta_x=0$  και  $\theta'x=0$  για ‘κλασική’ και ομοιόμορφη θεωρία ενώ για τη ‘διευρυμένη’ ισχύει  $\theta_x=0$  και  $\nu x=0$ . Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε στο πρόγραμμα TOBEM και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για κάθε μία από τις τρεις θεωρίες χωριστά.

Μέγιστες τιμές	Ομοιόμορφη	Κλασική	Διευρυμένη	Αποκλίσεις(%) Κλασική-
----------------	------------	---------	------------	------------------------

				Διευρυμένη
max- $\theta_x$ (rad)	6.86290E-02	6.82809E-02	6.67734E-02	2.258
max- $\theta'x$ (rad/m)	3.06589E-02	2.75120E-02	-	-
max- $n_x$ (rad/m)	-	-	2.75120E-02	-
max-M <sub>tp</sub> (kNm)	5.0	5.0	5.0	0.000
max-M <sub>ts</sub> (kNm)	0	5.0	3.40742E-01	1367.386
max-M <sub>t</sub> (kNm)	5.0	5.0	5.0	0.000
max-M <sub>w</sub> (kNm <sup>2</sup> )	0	5.09943E-02	1.28010E-02	298.362

**Πίνακας 19** Μέγιστες τιμές εντατικών και κινηματικών μεγεθών για ομοιόμορφη, ‘κλασική’ και ‘διευρυμένη’ θεωρία

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν με βάση τα παραπάνω είναι τα εξής:

- Στα κινηματικά μεγέθη η απόκλιση μεταξύ ‘κλασικής’ και ‘διευρυμένης’ θεωρίας λαμβάνει τιμή μικρότερη του 2.5% και θεωρείται ικανοποιητική.
- Στα εντατικά μεγέθη παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή του M<sub>tp</sub> ταυτίζεται στις δύο θεωρίες. Το μέγεθος M<sub>ts</sub> όμως παρουσιάζει υπερβολικά υψηλή απόκλιση μεταξύ των δύο θεωριών και η υψηλή τιμή στην ‘κλασική’ θεωρία οφείλεται στο γεγονός ότι στην πάκτωση όλη η στρεπτική ροπή παραλαμβάνεται από τη δευτερογενή στρεπτική ροπή καθώς η πρωτογενής στρεπτική ροπή μηδενίζεται εκεί (βλ. σχέση (3.3.6)). Το δίρροπο στρέβλωσης παρουσιάζει, επίσης, πολύ μεγάλη απόκλιση και εύκολα διαπιστώνουμε την ανεπάρκεια της ‘κλασικής’ θεωρίας στην επίλυση ράβδων κλειστής διατομής. Συνεπώς συμπεραίνεται ότι οι κλειστές διατομές είναι προτιμότερο να αναλύονται με τη θεωρία ομοιόμορφης στρέψης όποτε δεν είναι δυνατή η χρήση της διευρυμένης θεωρίας ανομοιόμορφης στρέψης, τουλάχιστον για τον υπολογισμό εντατικών μεγεθών. Τα κινηματικά μεγέθη υπολογίζονται ικανοποιητικά και από τις δύο θεωρίες (κλασική – ομοιόμορφη).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με η σύγκριση μεταξύ ομοιόμορφης και ‘διευρυμένης’ θεωρίας τόσο σε επίπεδο κινηματικών μεγεθών όσο και σε επίπεδο τάσεων.

## Σύγκριση ομοιόμορφης-‘διευρυμένης’ θεωρίας

Στο δεύτερο μέρος του υποκεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε με τις δύο επικρατέστερες θεωρίες στην επίλυση ράβδων κλειστής διατομής και θα τις συγκρίνουμε τόσο σε επίπεδο κινηματικών μεγεθών όσο και σε επίπεδο τάσεων. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι θα συγκρίνουμε τις τάσεις που προκύπτουν από κάθε θεωρία και όχι τα εντατικά μεγέθη διότι σε αυτά δεν υπάρχει αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο θεωρίες παρά μόνο στην πρωτογενή στρεπτική ροπή  $M_{tp}$ . Πριν προχωρήσουμε, όμως, στη σύγκριση των δύο θεωριών θα παραθέσουμε ένα δημοσιευμένο παράδειγμα (Rubin 2005) στο οποίο υπολογίζονται οι τάσεις σε μια ράβδο κάνοντας χρήση της  $\Theta.\Lambda.\Delta.$  και θα δείξουμε ότι και η δικιά μας μέθοδος υπολογισμού των τάσεων καταλήγει σε παρόμοια αποτελέσματα.

### Παράδειγμα [Rubin]

Στο παράδειγμα αυτό η διατομή της ράβδου είναι διαστάσεων 600x400x20mm και δίδονται οι τάσεις στη μέση γραμμή της διατομής σε συγκεκριμένες θέσεις της ράβδου όπου ισχύουν τα παρακάτω εντατικά μεγέθη (η  $\Theta\Lambda\Delta$  προβλέπει την ίδια κατανομή τάσεων κατά το πάχος των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή, συνεπώς τα παρακάτω αποτελέσματα ισχύουν και στις θέσεις εκτός της μέσης γραμμής της διατομής). Η ανάλυση για την εξαγωγή των τασικών μεγεθών σύμφωνα με τη μέθοδο που έχουμε υιοθετήσει πραγματοποιήθηκε σε πρόγραμμα του κ. Τσίπηρα.

Εντατική κατάσταση	Τάσεις στη μέση γραμμή		Τάσεις στο σύνορο	Αποκλίσεις (%)
	BEM	$\Theta.\Lambda.\Delta.$	BEM	BEM- $\Theta.\Lambda.\Delta.$
$M_{tp}=0.625\text{kNm}$ $M_w=M_{ts}=0$	$\max S_{xnp}=$ 65.01 kN/ $m^2$	$\max S_{xnp}=$ 65.10kN/ $m^2$	$\max S_{xnp}=$ 71.76 kN/ $m^2$	0.138
$M_w=0.00420$ $\text{kNm}^2$ $M_{tp}=M_{ts}=0$	$\max S_{xx}=$ 27.93 kN/ $m^2$	$\max S_{xx}=$ 26.25 kN/ $m^2$	$\max S_{xx}=$ 30.38 kN/ $m^2$	6.4
$M_{ts}=0.0163\text{kNm}$ $M_{tp}=M_w=0$	$\max S_{xns}=$ 12.63 kN/ $m^2$	$\max S_{xns}=$ 13.6 kN/ $m^2$	$\max S_{xns}=$ 11.89 kN/ $m^2$	7.132

**Πίνακας 20** Σύγκριση τάσεων μεταξύ  $\Theta.\Lambda.\Delta.$  και θεωρίας συνοριακών στοιχείων στο παράδειγμα του Rubin

Στον Πίνακα 20 παρατηρούμε ότι οι τάσεις που προέκυψαν από τις αναλύσεις μας δεν παρουσιάζουν μεγάλη απόκλιση ως προς τα δημοσιευμένα αποτελέσματα του Rubin και μπορούμε, επομένως, να θεωρήσουμε ότι η μέθοδός μας είναι ακριβής και να τη χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα παραδείγματα για τον υπολογισμό των τάσεων τόσο στη μέση γραμμή όσο και στο σύνολο της διατομής. Οι αποκλίσεις που παρουσιάζονται στα εντατικά μεγέθη της ανομοιομορφης στρέψης ενδεχομένως οφείλονται στη διαφοροποίηση που ήδη έχουμε δει να υπάρχει μεταξύ των δύο θεωριών στον υπολογισμό των σχετικών γεωμετρικών σταθερών.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Εξετάζουμε ράβδο με διατομή διαστάσεων 160x80x6.3mm [ $I_{tp}= 7.29964E-06 m^4$ ,  $I_{ts}=8.58067E-06 m^4$ ,  $C_s= 1.0061E-09 m^6$ ,  $\kappa= 1.05185E-01$ ] η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στρεπτικό φορτίο 10kNm στο ένα άκρο της. Το άκρο αυτό στο οποίο επιβάλλεται το φορτίο είναι ελεύθερο ενώ στο άλλο η στρόφιξη και η στρέβλωση παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι εκεί  $\theta_x=0$  και  $\theta'x=0$  για την ομοιομορφη και  $\theta_x=0$  και  $\eta_x=0$  για τη 'διευρυμένη'. Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών, τασικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε σε πρόγραμμα του κ. Τσίπηρα για μήκη ράβδου 0.1,0.2,0.5,1,2,3,5 και 10 m και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για ομοιόμορφη και διευρυμένη θεωρία χωριστά. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι δεν υπάρχει αντιστοιχία στα εντατικά μεγέθη ανάμεσα στις δύο θεωρίες παρά μόνο στο μέγεθος  $M_{tp}$  και λόγω αυτού επιβάλλεται να γίνει σύγκριση των **τάσεων** σε κρίσιμες διατομές της ράβδου.

Μήκος ράβδου	Κινηματικά μεγέθη	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις
10m	max $\theta_x$	1.69504E-01	1.69610E-01	0.063
	max $\theta'x$ (ομ.)- max $\eta_x$ (δι.)	1.69611E-02	1.69610E-02	0.001
	max $\theta_x$ diff	1.69611E-02		
5m	max $\theta_x$	8.47005E-02	8.48052E-02	0.123
	max $\theta'x$ (ομ.)- max $\eta_x$ (δι.)	1.69611E-02	1.69610E-02	0.001
	max $\theta_x$ diff	1.69611E-02		
3m	max $\theta_x$	5.07789E-02	5.08831E-02	0.205
	max $\theta'x$ (ομ.)- max $\eta_x$ (δι.)	1.69611E-02	1.69610E-02	0.001

	maxθxdiff	1.69611E-02		
2m	maxθx	3.38179E-02	3.39221E-02	0.307
	maxθ'x(ομ.)- maxηx(δι.)	1.69611E-02	1.69610E-02	0.001
	maxθxdiff	1.69611E-02		
1m	maxθx	1.68569E-02	1.69610E-02	0.614
	maxθ'x(ομ.)- maxηx(δι.)	1.69611E-02	1.69610E-02	0.001
	maxθxdiff	1.69611E-02		
0.5m	maxθx	8.37642E-03	8.48052E-03	1.228
	maxθ'x(ομ.)- maxηx(δι.)	1.69546E-02	1.69610E-02	0.037
	maxθxdiff	1.69604E-02		
0.2m	maxθx	3.28832E-03	3.39221E-03	3.063
	maxθ'x(ομ.)- maxηx(δι.)	1.58603E-02	1.69610E-02	6.490
	maxθxdiff	1.68453E-02		
0.1m	maxθx	1.59854E-03	1.69610E-03	5.752
	maxθ'x(ομ.)- maxηx(δι.)	1.10393E-02	1.69610E-02	34.913
	maxθxdiff	1.63382E-02		

**Πίνακας 21** Κινηματικά μεγέθη για διάφορα μήκη ράβδου

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=10m L/H=62.5 L/B=125</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>

0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.324E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 22** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 10m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=5m L/H=31.3 L/B=62.5</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.185E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01

	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 23** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 5m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=3m L/H=18.8 L/B=37.5</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.156E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00

	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 24** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 3m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=2m L/H=12.5 L/B=25</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.146E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00



L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 25** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 2m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=1m L/H=6.25 L/B=12.5</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.141E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	9.986E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.449E-02	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-8.458E-04	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 26** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 1m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.5m L/H=3.1 L/B=6.3</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.139E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	9.876E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.235E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-7.209E-03	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	9.985E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.451E-02	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-8.463E-04	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	9.998E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.726E-03	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-9.802E-05	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 27** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 0.5m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.2m L/H=1.3 L/B=2.5</b>			
<b>Απόσταση από</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>

<b>αριστερά άκρο</b>			
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.126E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	9.551E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	4.487E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-2.588E-02	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	9.804E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.955E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-1.069E-02	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	9.905E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	9.489E-02	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-3.847E-03	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 28** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 0.2m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.1m L/H=0.6 L/B=1.3</b>			
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Εντατικά μεγέθη</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>
0	Mtp[kNm]	8.948E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	1.052E+00	0.000E+00

	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-5.752E-02	0.000E+00
L/4	Mtp[kNm]	9.285E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	7.146E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-3.578E-02	0.000E+00
L/2	Mtp[kNm]	9.490E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	5.105E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-2.069E-02	0.000E+00
3L/4	Mtp[kNm]	9.599E+00	1.000E+01
	Mts[kNm]	4.015E-01	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-9.464E-03	0.000E+00
L	Mtp[kNm]	1.000E+01	1.000E+01
	Mts[kNm]	0.000E+00	0.000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	0.000E+00	0.000E+00

**Πίνακας 29** Εντατικά μεγέθη σε διάφορες διατομές για μήκος ράβδου 0.1m

ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=10m L/H=62.5 L/B=125				
ΣΥΝΟΠΟ				
Απόσταση από αριστερά άκρο	Τάσεις[kPa]	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις(%)
0	maxS-VonMises	1.78714E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000

	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
--	---------	-------------	-------------	-------

**Πίνακας 30** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 10m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=5m L/H=31.3 L/B=62.5</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78714E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786

	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

**Πίνακας 31** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 5m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=3m L/H=18.8 L/B=37.5</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000

	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98999E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98999E+04	6.98998E+04	0.000
L/2	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000



	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

**Πίνακας 32** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 3m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=2m L/H=12.5 L/B=25</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.38644E+05	1.38637E+05	0.005
	maxSxn	8.00464E+04	8.00421E+04	0.005
	maxSxnP	8.00405E+04	8.00421E+04	0.002
L/2	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				

0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.21077E+05	1.21070E+05	0.006
	maxSxn	6.99040E+04	6.98998E+04	0.006
	maxSxnP	6.98984E+04	6.98998E+04	0.002
L/2	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
3L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

**Πίνακας 33** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 2m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=1m L/H=6.25 L/B=12.5</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518

L/4	maxS-VonMises	1.39189E+05	1.38637E+05	0.398
	maxSxn	8.00405E+04	8.00421E+04	0.002
	maxSxnP	8.00405E+04	8.00421E+04	0.002
L/2	maxS-VonMises	1.38645E+05	1.38637E+05	0.005
	maxSxn	8.00464E+04	8.00421E+04	0.005
	maxSxnP	8.00405E+04	8.00421E+04	0.002
3L/4	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00420E+04	8.00421E+04	0.000
L	maxS-VonMises	1.38637E+05	1.38637E+05	0.000
	maxSxn	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
	maxSxnP	8.00421E+04	8.00421E+04	0.000
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.21682E+05	1.21070E+05	0.506
	maxSxn	7.02534E+04	6.98998E+04	0.506
	maxSxnP	6.97986E+04	6.98998E+04	0.145
L/2	maxS-VonMises	1.21077E+05	1.21070E+05	0.006
	maxSxn	6.99041E+04	6.98998E+04	0.006
	maxSxnP	6.98984E+04	6.98998E+04	0.002
3L/4	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98999E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

L	maxS-VonMises	1.21070E+05	1.21070E+05	0.000
	maxSxn	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000
	maxSxnP	6.98998E+04	6.98998E+04	0.000

**Πίνακας 34** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 1m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.5m L/H=3.1 L/B=6.3</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.43343E+05	1.38637E+05	3.394
	maxSxn	8.27588E+04	8.00421E+04	3.394
	maxSxnP	7.90535E+04	8.00421E+04	1.235
L/2	maxS-VonMises	1.39190E+05	1.38637E+05	0.399
	maxSxn	8.03611E+04	8.00421E+04	0.399
	maxSxnP	7.99260E+04	8.00421E+04	0.145
3L/4	maxS-VonMises	1.38703E+05	1.38637E+05	0.047
	maxSxn	8.00800E+04	8.00421E+04	0.047
	maxSxnP	8.00282E+04	8.00421E+04	0.017
L	maxS-VonMises	1.38652E+05	1.38637E+05	0.011
	maxSxn	8.00509E+04	8.00421E+04	0.011
	maxSxnP	8.00389E+04	8.00421E+04	0.004

ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.26298E+05	1.21070E+05	4.318
	maxSxn	7.29184E+04	6.98998E+04	4.318
	maxSxnP	6.90365E+04	6.98998E+04	1.235
L/2	maxS-VonMises	1.21683E+05	1.21070E+05	0.506
	maxSxn	7.02538E+04	6.98998E+04	0.506
	maxSxnP	6.97984E+04	6.98998E+04	0.145
3L/4	maxS-VonMises	1.21142E+05	1.21070E+05	0.059
	maxSxn	6.99414E+04	6.98998E+04	0.059
	maxSxnP	6.98878E+04	6.98998E+04	0.017
L	maxS-VonMises	1.21086E+05	1.21070E+05	0.013
	maxSxn	6.99090E+04	6.98998E+04	0.013
	maxSxnP	6.98970E+04	6.98998E+04	0.004

**Πίνακας 35** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 0.5m

ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.2m L/H=1.3 L/B=2.5				
ΣΥΝΟΠΟ				
Απόσταση από αριστερά άκρο	Τάσεις[kPa]	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις(%)
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.908
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906

	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.55732E+05	1.38637E+05	12.331
	maxSxn	8.99119E+04	8.00421E+04	12.331
	maxSxnP	7.64506E+04	8.00421E+04	4.487
L/2	maxS-VonMises	1.46087E+05	1.38637E+05	5.374
	maxSxn	8.43432E+04	8.00421E+04	5.374
	maxSxnP	7.84770E+04	8.00421E+04	1.955
3L/4	maxS-VonMises	1.42252E+05	1.38637E+05	2.608
	maxSxn	8.21294E+04	8.00421E+04	2.608
	maxSxnP	7.92825E+04	8.00421E+04	0.949
L	maxS-VonMises	1.41238E+05	1.38637E+05	1.876
	maxSxn	8.15437E+04	8.00421E+04	1.876
	maxSxnP	7.94956E+04	8.00421E+04	0.683
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65607E+05	1.21070E+05	36.786
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.40067E+05	1.21070E+05	15.691
	maxSxn	8.08675E+04	6.98998E+04	15.691
	maxSxnP	6.67635E+04	6.98998E+04	4.487
L/2	maxS-VonMises	1.29348E+05	1.21070E+05	6.837
	maxSxn	7.46790E+04	6.98998E+04	6.837
	maxSxnP	6.85331E+04	6.98998E+04	1.955
3L/4	maxS-VonMises	1.25087E+05	1.21070E+05	3.318
	maxSxn	7.22188E+04	6.98998E+04	3.318

	maxSxnP	6.92365E+04	6.98998E+04	0.949
L	maxS-VonMises	1.23959E+05	1.21070E+05	2.386
	maxSxn	7.15680E+04	6.98998E+04	2.386
	maxSxnP	6.94226E+04	6.98998E+04	0.683

**Πίνακας 36** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 0.2m

<b>ΜΗΚΟΣ ΡΑΒΔΟΥ=0.1m L/H=0.6 L/B=1.3</b>				
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>				
<b>Απόσταση από αριστερά άκρο</b>	<b>Τάσεις[kPa]</b>	<b>Διευρυμένη</b>	<b>Ομοιόμορφη</b>	<b>Αποκλίσεις(%)</b>
0	maxS-VonMises	1.78713E+05	1.38637E+05	28.907
	maxSxn	1.03179E+05	8.00421E+04	28.906
	maxSxnP	7.16228E+04	8.00421E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.65863E+05	1.38637E+05	19.638
	maxSxn	9.57605E+04	8.00421E+04	19.638
	maxSxnP	7.43224E+04	8.00421E+04	7.146
L/2	maxS-VonMises	1.58085E+05	1.38637E+05	14.028
	maxSxn	9.12705E+04	8.00421E+04	14.028
	maxSxnP	7.59562E+04	8.00421E+04	5.105
3L/4	maxS-VonMises	1.53932E+05	1.38637E+05	11.032
	maxSxn	8.88727E+04	8.00421E+04	11.032
	maxSxnP	7.68288E+04	8.00421E+04	4.015
L	maxS-VonMises	1.52628E+05	1.38637E+05	10.092
	maxSxn	8.81201E+04	8.00421E+04	10.092

	maxSxnP	7.71026E+04	8.00421E+04	3.672
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>				
0	maxS-VonMises	1.65606E+05	1.21070E+05	36.785
	maxSxn	9.56114E+04	6.98998E+04	36.783
	maxSxnP	6.25474E+04	6.98998E+04	10.518
L/4	maxS-VonMises	1.51325E+05	1.21070E+05	24.990
	maxSxn	8.73671E+04	6.98998E+04	24.989
	maxSxnP	6.49049E+04	6.98998E+04	7.146
L/2	maxS-VonMises	1.42682E+05	1.21070E+05	17.851
	maxSxn	8.23774E+04	6.98998E+04	17.851
	maxSxnP	6.63317E+04	6.98998E+04	5.105
3L/4	maxS-VonMises	1.38066E+05	1.21070E+05	14.038
	maxSxn	7.97126E+04	6.98998E+04	14.038
	maxSxnP	1.26195E+04	6.98998E+04	81.946
L	maxS-VonMises	1.36618E+05	1.21070E+05	12.842
	maxSxn	7.88763E+04	6.98998E+04	12.842
	maxSxnP	6.73328E+04	6.98998E+04	3.672

**Πίνακας 37** Τάσεις σε διάφορες θέσεις ράβδου μήκους 0.1

Τα συμπεράσματα που μπορούμε να εξάγουμε μελετώντας τους παραπάνω πίνακες είναι τα εξής:

- Οι μέγιστες τάσεις Von Mises εμφανίζονται στις θέσεις στις οποίες αναπτύσσονται και οι μέγιστες συνολικές διατμητικές τάσεις. Σαν αποτέλεσμα, οι ορθές τάσεις δεν επηρεάζουν τις μέγιστες τιμές τους (οι θέσεις όπου οι ορθές τάσεις παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους δεν ταυτίζονται με τις θέσεις των μέγιστων τιμών των τάσεων von Mises) και για το λόγο αυτό δεν έχουν παρουσιαστεί στους πίνακες.
- Παρατηρώντας τους πίνακες των τάσεων εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι μέγιστες αποκλίσεις, για όλα τα μήκη ράβδου, εμφανίζονται στη θέση της



πάκτωσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στη θέση αυτή τα εντατικά μεγέθη ανομοιόμορφης στρέψης λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους.

- Η διαφοροποίηση των δύο θεωριών στην κρίσιμη θέση της πάκτωσης όπου εμφανίζονται τα δυσμενέστερα τασικά μεγέθη είναι ανεξάρτητη του μήκους της ράβδου.
- Ένα πρώτο στοιχείο του σφάλματος της ομοιόμορφης θεωρίας αποτελούν οι μεγάλες αποκλίσεις στις μέγιστες τιμές των τάσεων VonMises οι οποίες στη μέση γραμμή της διατομής λαμβάνουν την τιμή 36.785% και στο σύνορο την τιμή 28.907%.
- Σε όλες τις εξετασθείσες περιπτώσεις οι τιμές των τασικών μεγεθών είναι δυσμενέστερες (μεγαλύτερες) στη διευρυμένη θεωρία, συγκριτικά με την ομοιόμορφη.
- Επίσης, οι πρωτογενείς διατμητικές τάσεις, που αναπτύσσονται και στις δύο θεωρίες, παρουσιάζουν και αυτές σημαντικές αποκλίσεις. Εκτός των πρωτογενών, όμως, οι μέγιστες συνολικές διατμητικές τάσεις εμφανίζουν ακόμα υψηλότερες αποκλίσεις και το γεγονός αυτό καθιστά εμφανές το σφάλμα της ομοιόμορφης θεωρίας η οποία δεν λαμβάνει υπόψιν τις δευτερογενείς διατμητικές τάσεις.
- Εξετάζοντας τους Πίνακες 30 έως και 34 αντιλαμβανόμαστε ότι οι αποκλίσεις λαμβάνουν μεγάλες τιμές στην περιοχή που βρίσκεται πολύ κοντά στην πάκτωση και αμελητέες τιμές σε περιοχές μακριά από αυτή ενώ στους Πίνακες 35 έως και 37 οι αποκλίσεις λαμβάνουν σημαντικές τιμές όχι μόνο κοντά στην πάκτωση αλλά και μακριά από αυτή. Συμπεραίνουμε, δηλαδή, ότι σε μεγάλα μήκη ράβδου η επιρροή των φαινομένων ανομοιόμορφης στρέψης είναι κρίσιμη στην περιοχή της πάκτωσης αλλά ‘σβήνει’ γρήγορα καθώς απομακρυνόμαστε ενώ καθώς μειώνονται τα μήκη η επιρροή των φαινομένων αυτών ‘σβήνει’ με όλο και πιο αργό ρυθμό. Βλέπουμε, λοιπόν, στον Πίνακα 37 ότι, για μήκος ράβδου 0.1m, οι αποκλίσεις στις τάσεις εξακολουθούν να λαμβάνουν σημαντικές τιμές ακόμα και στο δεξί άκρο.
- Άλλο ένα στοιχείο των παραπάνω πινάκων είναι το γεγονός ότι σε όλα τα μήκη οι τάσεις στη μέση γραμμή της διατομής εμφανίζουν μεγαλύτερες αποκλίσεις σε σχέση με αυτές του συνόρου της διατομής.
- Οι μέγιστες τάσεις στο σύνορο είναι πάντα μεγαλύτερες από τις μέγιστες τάσεις στη μέση γραμμή. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να προβλεφθεί από τη ΘΛΔ καθώς η θεωρία αυτή υπολογίζει σταθερή κατανομή τάσεων κατά το πάχος των πλακοειδών στοιχείων που συνθέτουν τη διατομή.
- Τέλος, όσο αφορά στα κινηματικά μεγέθη και κατ’ επέκταση και στη στρεπτική στιβαρότητα, η ομοιόμορφη θεωρία δίδει ικανοποιητικά αποτελέσματα καθώς οι αποκλίσεις είναι αμελητέες (βλ. Πίνακα21) και μόνο για λόγους μήκος/ύψος<1.25 και μήκος/πλάτος<2.5 παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις σε σχέση με τη διευρυμένη.

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα διαπιστώνουμε ότι η ομοιόμορφη θεωρία, ενώ αποδίδει ικανοποιητικά στον υπολογισμό των κινηματικών μεγεθών στα συνήθη μήκη ράβδων, σε επίπεδο τάσεων παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα καθώς αμελεί τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης και θα πρέπει επομένως να εφαρμόζεται η διευρυμένη θεωρία για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Μάλιστα τα σφάλματα αυτά είναι ανεξάρτητα του μήκους της ράβδου από το οποίο εξαρτάται μόνο το πόσο γρήγορα «σβήνουν» τα εντατικά μεγέθη της ανομοιόμορφης στρέψης όσο απομακρυνόμαστε από τη θέση της πάκτωσης.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>

Εξετάζουμε ράβδο με διατομή διαστάσεων 450x250x8mm [ $I_{tp}= 2.70833E-04 m^4$ ,  $I_{ts}=2.08072E-05 m^4$ ,  $C_s= 2.28416E-07 m^6$ ,  $\kappa= 7.13452E-02$ ] η οποία υποβάλλεται σε συγκεντρωμένο στρεπτικό φορτίο 10kNm στο μέσο του μήκους της. Η στροφή και η στρέβλωση στα άκρα της ράβδου παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι για τα άκρα  $\theta x=0$  και  $\theta' x=0$ . Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών, τασικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε σε πρόγραμμα του κ. Τσίππρα για μήκη ράβδου 0.1,0.5,1,2, και 10 m και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για ομοιόμορφη και διευρυμένη θεωρία χωριστά. Εδώ πρέπει να τονιστεί ξανά ότι δεν υπάρχει αντιστοιχία στα εντατικά μεγέθη ανάμεσα στις δύο θεωρίες παρά μόνο στο μέγεθος  $M_{tp}$  και λόγω αυτού επιβάλλεται να γίνει σύγκριση των τάσεων η οποία εδώ θα πραγματοποιηθεί μόνο στη θέση της πάκτωσης.

Μήκος ράβδου	L/H	L/B	Κινηματικά μεγέθη	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις (%)
10m	22.2	40	max $\theta x$	1.13709E-03	1.14035E-03	0.286
			max $\theta' x$ (ομ.) -max $\eta x$ (δι.)	2.28572E-04	2.54716E-04	10.264
			max $\theta x$ diff	2.28572E-04		
2m	4.4	8	max $\theta x$	2.22894E-04	2.28070E-04	2.270
			max $\theta' x$ (ομ.) -max $\eta x$ (δι.)	2.02224E-04	2.54716E-04	20.608
			max $\theta x$ diff	2.26695E-04		
1m	2.2	4	max $\theta x$	1.09196E-04	1.14035E-04	4.243
			max $\theta' x$ (ομ.)	1.24642E-04	2.54716E-04	51.066

			-maxnx(δλ.)			
			maxθxdiff	2.21167E-04		
0.5m	1.1	2	maxθx	5.36443E-05	5.70175E-05	5.916
			maxθ'x(ομ.) -maxnx(δλ.)	4.78488E-05	2.54716E-04	81.215
			maxθxdiff	2.15695E-04		
0.1m	0.2	0.4	maxθx	1.06198E-05	1.14035E-05	6.873
			maxθ'x(ομ.) -maxnx(δλ.)	2.30134E-06	2.54716E-04	99.097
			maxθxdiff	2.12450E-04		

**Πίνακας 37** Κινηματικά μεγέθη για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου	Εντατικά μεγέθη	Διευρυμένη	Ομοίομορφη
10m	Mtp[kNm]	4.64374E+00	5.00000E+00
	Mts[kNm]	3.56259E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.27094E-02	0.00000E+00
2m	Mtp[kNm]	4.64374E+00	5.00000E+00
	Mts[kNm]	3.56259E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.20900E-02	0.00000E+00
1m	Mtp[kNm]	4.64374E+00	5.00000E+00
	Mts[kNm]	3.56259E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-5.56657E-02	0.00000E+00
0.5m	Mtp[kNm]	4.64374E+00	5.00000E+00
	Mts[kNm]	3.56259E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-3.82650E-02	0.00000E+00

0.1m	Mtp[kNm]	4.64374E+00	5.00000E+00
	Mts[kNm]	3.56259E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-8.84638E-03	0.00000E+00

**Πίνακας 38** Εντατικά μεγέθη για διάφορα μήκη ράβδου στη θέση της πάκτωσης

Μήκος ράβδου	L/H	L/B	Τάσεις [kPa]	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις (%)
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>						
10m	22.2	40	maxS- VonMises	6.89517E+03	5.53862E+03	24.493
			maxSxn	3.98089E+03	3.19772E+03	24.491
			maxSxnP	2.96988E+03	3.19772E+03	7.125
2m	4.4	8	maxS- VonMises	6.89517E+03	5.53862E+03	24.493
			maxSxn	3.98089E+03	3.19772E+03	24.491
			maxSxnP	2.96988E+03	3.19772E+03	7.125
1m	2.2	4	maxS- VonMises	6.89516E+03	5.53862E+03	24.492
			maxSxn	3.98089E+03	3.19772E+03	24.491
			maxSxnP	2.96988E+03	3.19772E+03	7.125
0.5m	1.1	2	maxS- VonMises	6.89512E+03	5.53862E+03	24.492
			maxSxn	3.98089E+03	3.19772E+03	24.491
			maxSxnP	2.96988E+03	3.19772E+03	7.125
0.1m	0.2	0.4	maxS- VonMises	6.89510E+03	5.53862E+03	24.491
			maxSxn	3.98089E+03	3.19772E+03	24.491

			maxSxnP	2.96988E+03	3.19772E+03	7.125
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>						
10m	22.2	40	maxS-VonMises	6.67378E+03	5.06888E+03	31.662
			maxSxn	3.85306E+03	2.92652E+03	31.660
			maxSxnP	2.71800E+03	2.92652E+03	7.125
2m	4.4	8	maxS-VonMises	6.67377E+03	5.06888E+03	31.662
			maxSxn	3.85306E+03	2.92652E+03	31.660
			maxSxnP	2.71800E+03	2.92652E+03	7.125
1m	2.2	4	maxS-VonMises	6.67376E+03	5.06888E+03	31.661
			maxSxn	3.85306E+03	2.92652E+03	31.660
			maxSxnP	2.71800E+03	2.92652E+03	7.125
0.5m	1.1	2	maxS-VonMises	6.67372E+03	5.06888E+03	31.661
			maxSxn	3.85306E+03	2.92652E+03	31.660
			maxSxnP	2.71800E+03	2.92652E+03	7.125
0.1m	0.2	0.4	maxS-VonMises	6.67369E+03	5.06888E+03	31.660
			maxSxn	3.85306E+03	2.92652E+03	31.660
			maxSxnP	2.71800E+03	2.92652E+03	7.125

**Πίνακας 39** Τάσεις για διάφορα μήκη ράβδου στη θέση της πάκτωσης

Εξετάζοντας τους πίνακες του παραδείγματος αυτού καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όπως προέκυψε από το Παράδειγμα 2 οι μέγιστες αποκλίσεις για όλα τα μήκη ράβδου εμφανίζονται στη θέση της πάκτωσης καθώς στη θέση αυτή τα

εντατικά μεγέθη ανομοιόμορφης στρέψης λαμβάνουν τις μέγιστες τιμές τους και εξαιτίας αυτού στο Παράδειγμα 3 εξετάζουμε τις τάσεις στο σημείο της πάκτωσης μόνο.

- Σε επίπεδο τασικών μεγεθών παρατηρούμε ότι προκύπτουν και εδώ τα ίδια συμπεράσματα με αυτά του Παραδείγματος 2 των κλειστών διατομών.
- Στα κινηματικά μεγέθη, όμως, η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα σε όλα τα μήκη ράβδου σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα όπου για μεγάλα μήκη ράβδου έδινε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, όσο αφορά στη μέγιστη τιμή της γωνίας στροφής η ομοιόμορφη θεωρία εμφανίζει πολύ μικρότερες αποκλίσεις σε σχέση αυτές που εμφανίζει στα μεγέθη που εκφράζουν το μέγεθος της στρέβλωσης. Στα μεγέθη αυτά, παρατηρούμε ότι οι αποκλίσεις λαμβάνουν πολύ μεγάλες τιμές οι οποίες για λόγους μήκος/υψος=0.2 και μήκος/πλάτος=0.4 φτάνουν έως και το 100%.

Με βάση τα συμπεράσματα διαπιστώνουμε ότι για αυτό το στατικό σύστημα η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα όχι μόνο σε επίπεδο τάσεων αλλά και στα κινηματικά μεγέθη και καθίσταται αναγκαία και εδώ η εφαρμογή της 'διευρυμένης' θεωρίας.

#### Παράδειγμα 4°

Εξετάζουμε ράβδο με οβάλ διατομή διαστάσεων 400x200x8mm [ $I_{tr}=1.15142E-04 m^4$ ,  $I_{ts}=1.66867E-05 m^4$ ,  $C_s=3.13711E-08 m^6$ ,  $\kappa=4.96215E-02$ ] η οποία υποβάλλεται σε κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο 10kNm/m σε όλο το μήκος της. Η στροφή και η στρέβλωση στα άκρα της ράβδου παρεμποδίζονται μέσω πάκτωσης έχοντας έτσι για τα άκρα  $\theta_x=0$  και  $\theta'_x=0$ . Η ανάλυση για την εξαγωγή των εντατικών, τασικών και κινηματικών μεγεθών πραγματοποιήθηκε σε πρόγραμμα του κ. Τσίππρα για μήκη ράβδου 0.1,0.5,1,2, και 10 m και προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα για ομοιόμορφη και διευρυμένη θεωρία χωριστά. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα έτσι και εδώ θα παρουσιαστούν οι τάσεις μόνο στη θέση της πάκτωσης.

Μήκος ράβδου	L/H	L/B	Κινηματικά μεγέθη	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις (%)
10m	25	50	max $\theta_x$	1.34089E-02	1.34411E-02	0.239
			max $\theta'_x$ (ομ.) -max $\theta_x$ (δι.)	4.77139E-03	5.37002E-03	11.148
			max $\theta_x$ diff	5.15412E-03		

2m	5	10	maxθx	5.31269E-04	5.37643E-04	1.186
			maxθ'x(ομ.) -maxηx(δλ.)	6.73753E-04	1.07400E-03	37.267
			maxθxdiff	1.02196E-03		
1m	2.5	5	maxθx	1.31319E-04	1.34411E-04	2.300
			maxθ'x(ομ.) -maxηx(δλ.)	2.25684E-04	5.37002E-04	57.973
			maxθxdiff	5.10982E-04		
0.5m	1.25	2.5	maxθx	3.23595E-05	3.36027E-05	3.700
			maxθ'x(ομ.) -maxηx(δλ.)	5.26568E-05	2.68501E-04	80.389
			maxθxdiff	2.55491E-04		
0.1m	0.25	0.5	maxθx	1.27841E-06	1.34411E-06	4.888
			maxθ'x(ομ.) -maxηx(δλ.)	5.93146E-07	5.37002E-05	98.895
			maxθxdiff	5.10982E-05		

**Πίνακας 40** Κινηματικά μεγέθη για διάφορα μήκη ράβδου

Μήκος ράβδου	Εντατικά μεγέθη	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη
10m	Mtp[kNm]	4.75208E+01	5.00000E+01
	Mts[kNm]	2.47918E+00	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-2.91398E-01	0.00000E+00
2m	Mtp[kNm]	9.50416E+00	1.00000E+01
	Mts[kNm]	4.95837E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-5.21993E-02	0.00000E+00
1m	Mtp[kNm]	4.75208E+00	5.00000E+00

	Mts[kNm]	2.47918E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-2.25650E-02	0.00000E+00
0.5m	Mtp[kNm]	2.37604E+00	2.50000E+00
	Mts[kNm]	1.23959E-01	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-8.19175E-03	0.00000E+00
0.1m	Mtp[kNm]	4.75208E-01	0.50000E+01
	Mts[kNm]	2.47918E-02	0.00000E+00
	Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-4.08456E-04	0.00000E+00

**Πίνακας 41** Εντατικά μεγέθη για διάφορα μήκη ράβδου στη θέση της πάκτωσης

Μήκος ράβδου	L/H	L/B	Τάσεις [kPa]	Διευρυμένη	Ομοιόμορφη	Αποκλίσεις (%)
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>						
10m	25	50	maxS- VonMises	1.25321E+05	1.00749E+05	24.389
			maxSxn	7.23462E+04	5.81676E+04	24.375
			maxSxnP	5.53490E+04	5.81676E+04	4.846
2m	5	10	maxS- VonMises	2.50637E+04	2.01499E+04	24.386
			maxSxn	1.44692E+04	1.16335E+04	24.375
			maxSxnP	1.10698E+04	1.16335E+04	4.846
1m	2.5	5	maxS- VonMises	1.25316E+04	1.00749E+04	24.384
			maxSxn	7.23462E+03	5.81676E+03	24.375
			maxSxnP	5.53490E+03	5.81676E+03	4.846
0.5m	1.25	2.5	maxS-	6.26559E+03	5.03747E+03	24.380



			VonMises			
			maxSxn	3.61731E+03	2.90838E+03	24.375
			maxSxnP	2.76745E+03	2.90838E+03	4.846
0.1m	0.25	0.5	maxS-VonMises	1.25308E+03	1.00869E+03	24.228
			maxSxn	7.23462E+02	5.82366E+02	24.228
			maxSxnP	5.53490E+02	5.82366E+02	4.958
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>						
10m			maxS-VonMises	1.20398E+05	9.74241E+04	23.582
			maxSxn	6.89193E+04	5.62478E+04	22.528
	5	10	maxSxnP	5.35222E+04	5.62478E+04	4.846
2m			maxS-VonMises	2.40333E+04	1.94848E+04	23.344
			maxSxn	1.37839E+04	1.12496E+04	22.528
	2.5	5	maxSxnP	1.07044E+04	1.12496E+04	4.846
1m			maxS-VonMises	1.19952E+04	9.74241E+03	23.123
			maxSxn	6.89193E+03	5.62478E+03	22.528
			maxSxnP	5.35222E+03	5.62478E+03	4.846
0.5m	1.1	2	maxS-VonMises	5.98251E+03	4.87121E+03	22.814
			maxSxn	3.44596E+03	2.81239E+03	22.528
			maxSxnP	2.67611E+03	2.81239E+03	4.846
0.1m	0.2	0.4	maxS-VonMises	1.19384E+03	9.75396E+02	22.395
			maxSxn	6.89193E+02	5.63145E+02	22.383

			maxSxnP	5.35222E+02	5.63145E+02	4.958
--	--	--	---------	-------------	-------------	-------

**Πίνακας 42** Τάσεις για διάφορα μήκη ράβδου στη θέση της πάκτωσης

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάσαμε τις τάσεις στη θέση της πάκτωσης καθώς, όπως έχουμε προαναφέρει εκεί εμφανίζονται οι μέγιστες αποκλίσεις, και εξετάζοντας τους πίνακες με τα αποτελέσματα καταλήγουμε και εδώ στα ίδια συμπεράσματα με το Παράδειγμα 2 σε επίπεδο τασικών μεγεθών και στα ίδια συμπεράσματα με το Παράδειγμα 3 σε επίπεδο κινηματικών μεγεθών. Η μόνη διαφορά στα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι το γεγονός ότι εδώ οι αποκλίσεις στις τάσεις είναι μεγαλύτερες στο σύνορο της διατομής και όχι στη μέση γραμμή όπως ίσχυε στα προηγούμενα. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση καθίσταται εμφανής ανάγκη υιοθέτησης της ‘διευρυμένης’ θεωρίας καθώς η ομοιόμορφη εμφανίζει σημαντικά σφάλματα.

### Παράδειγμα 5<sup>ο</sup>

Στο παράδειγμα αυτό η υπό μελέτη ράβδος και το στατικό σύστημα ταυτίζονται με αυτά του Παραδείγματος 3 με μήκος ράβδου 10m και σκοπός του είναι να αναδείξει τα σφάλματα που παρουσιάζονται στα αποτελέσματα της ‘διευρυμένης’ θεωρίας αν δεν υπολογίσουμε το διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με την μονάδα.

	<b>kx=0.1380535028</b>	<b>kx=1</b>	<b>Απόκλιση</b>
<b>Κινηματικά μεγέθη</b>			
maxθx	1.13709E-03	1.12953E-03	0.665
maxnχ(δλ.)	2.28572E-04	2.28572E-04	0.000
maxθxdiff	2.28572E-04	2.28572E-04	0.000
<b>Εντατικά μεγέθη</b>			
Mtp[kNm]	4.64374E+00	3.21396E+00	30.789
Mts[kNm]	3.56259E-01	1.78604E+00	401.332
Mw[kNm <sup>2</sup> ]	-6.27094E-02	-1.42291E-01	126.905
<b>Τάσεις</b>			
<b>ΣΥΝΟΠΟ</b>			
maxS-VonMises	6.89517E+03	1.23413E+04	44.129

maxSxn	3.98089E+03	7.12511E+03	44.129
maxSxnP	2.96988E+03	2.05547E+03	44.487
<b>ΜΕΣΗ ΓΡΑΜΜΗ</b>			
maxS-VonMises	6.67378E+03	1.31243E+04	49.149
maxSxn	3.85306E+03	7.57718E+03	49.149
maxSxnP	2.71800E+03	1.88115E+03	44.487

**Πίνακας 43** Απόκλιση Κινηματικών, εντατικών και τασικών μεγεθών αν θέσουμε  $kx=1$

Με βάση τον Πίνακα 43 καθίσταται εμφανές το σφάλμα που θα παρουσιαστεί αν δεν υπολογίσουμε αναλυτικά τον διορθωτικό συντελεστή διάτμησης αλλά τον θέσουμε ίσο με τη μονάδα. Πιο συγκεκριμένα, στα κινηματικά μεγέθη το σφάλμα είναι αμελητέο αλλά στα εντατικά μεγέθη και συνεπώς στα τασικά το σφάλμα λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές και για το λόγο αυτό κρίνεται αναγκαίος ο υπολογισμός του. Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η αγνόηση του διορθωτικού συντελεστή διάτμησης οδηγεί σε δυσμενέστερα τασικά μεγέθη.

## 6.4 Βασικά συμπεράσματα

Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα συνοψίσουμε όλα τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη των παραπάνω αριθμητικών παραδειγμάτων και θα δώσουμε μια γενική εικόνα για την ορθότητα κάθε μίας από τις τρεις θεωρίες τόσο στις ανοικτές όσο και τις κλειστές διατομές.

### ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ

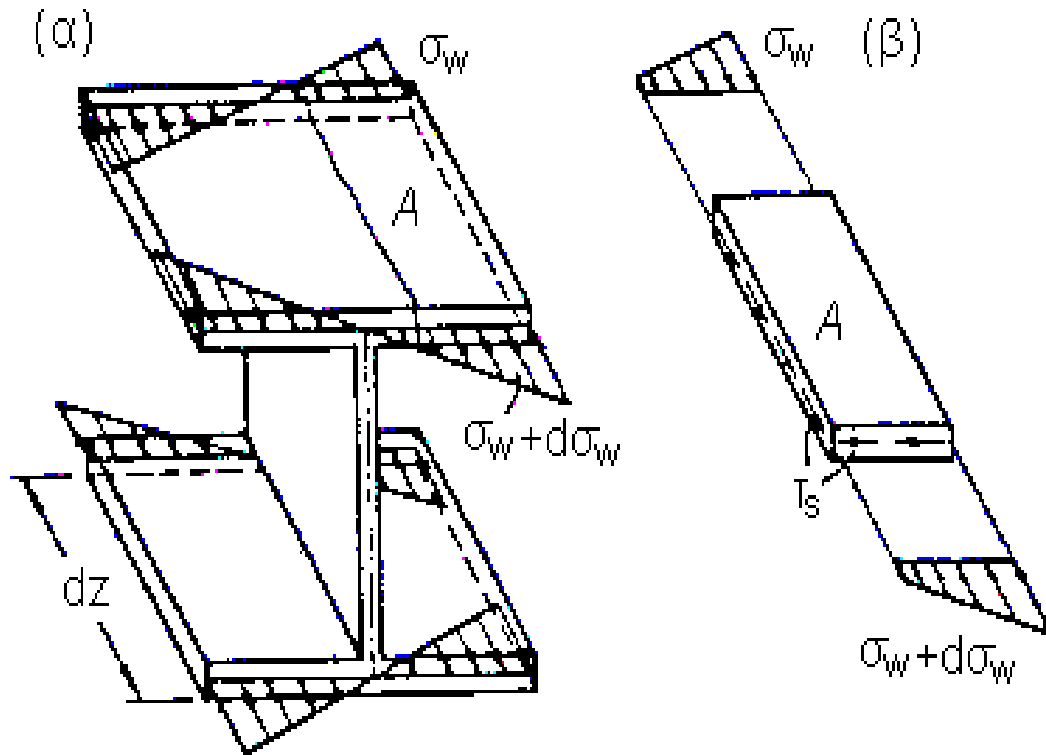
Στις ανοικτές διατομές η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις, δηλαδή η μέθοδος συντομικών στοιχείων, αποδείχτηκε πως ανταποκρίνεται με ικανοποιητική ακρίβεια στον υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής σταθεράς  $I_{ts}$  και της σταθεράς στρέβλωσης  $C_s$ . Το συμπέρασμα αυτό βασίστηκε στις μικρές αποκλίσεις που παρουσίασαν τα αποτελέσματα μας σε σχέση με δημοσιευμένα αποτελέσματα που εξήχθησαν με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Επιπλέον, έπειτα από σύγκριση, καταλήξαμε στην ακαταλληλότητα της Θεωρίας Λεπτότοιχων Διατομών όσο αφορά στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών σε ανοικτές διατομές τύπου HEA, HEB, IPE.

Σε επίπεδο εντατικών και κινηματικών μεγεθών, το πρώτο βασικό συμπέρασμα που προέκυψε ήταν ότι η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει σημαντικό σφάλμα στην επίλυση ράβδων ανοικτής διατομής και αυτό έγινε εμφανές μέσω της σύγκρισής της με την 'κλασική' θεωρία η οποία είναι η πλέον αποδεκτή στην επιστημονική βιβλιογραφία και εξάλλου χρησιμοποιείται σε πλήθος σύγχρονων εμπορικών προγραμμάτων ανάλυσης κατασκευών. Η ομοιόμορφη θεωρία προβλέπει σημαντικά

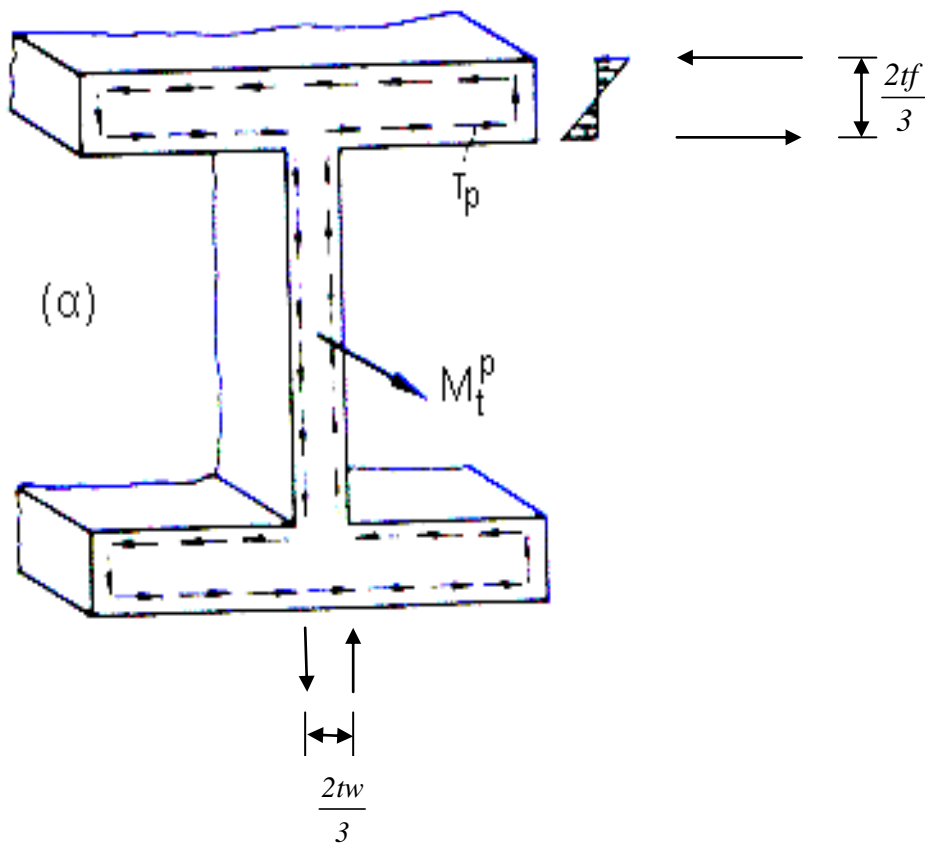
μικρότερη στρεπτική στιβαρότητα για τη ράβδο απ' ότι η 'κλασική' όπως, επίσης, και ότι το σύνολο της στρεπτικής ροπής θα παραληφθεί από τον πρωτογενή μηχανισμό ενώ στην 'κλασική' αναπτύσσεται πρωτογενής αλλά και δευτερογενής στρεπτική ροπή. Επιπλέον, η ομοιόμορφη θεωρία αμελεί την ανάπτυξη του δίρροπου στρέβλωσης ενώ στην 'κλασική' το δίρροπο στρέβλωσης λαμβάνει (συνήθως) σημαντικές τιμές.

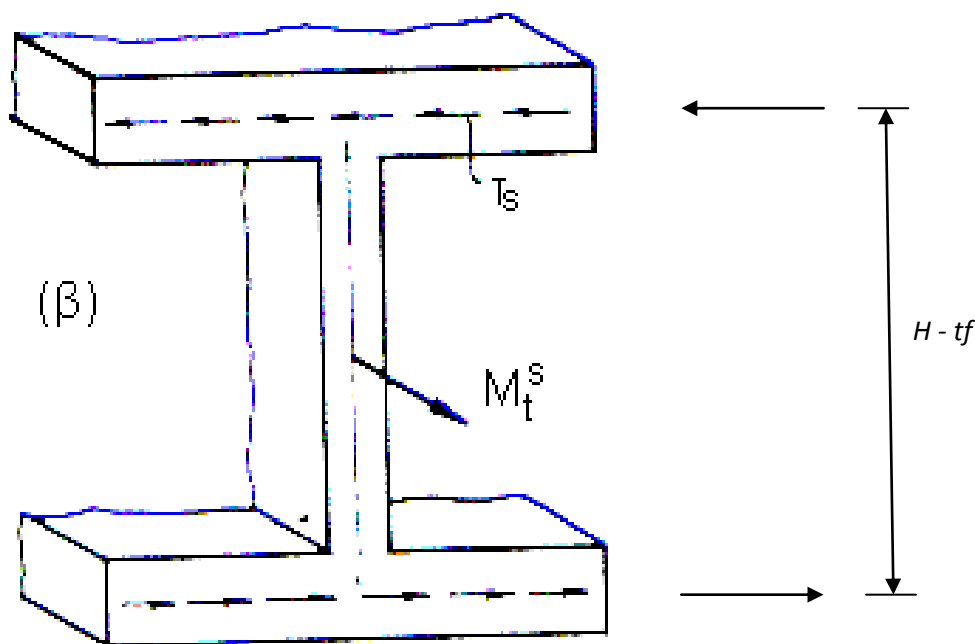
Στη συνέχεια, με βάση τα παραδείγματα στα οποία πραγματοποιήθηκε σύγκριση 'κλασικής' και 'διευρυμένης' θεωρίας καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η 'κλασική' θεωρία ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στον υπολογισμό τόσο των κινηματικών όσο και των εντατικών μεγεθών για τα συνήθη μήκη ράβδων που χρησιμοποιούνται στις κατασκευές. Μόνο στο στατικό σύστημα προβόλου με φορτίο στο άκρο παρουσιάστηκαν αποκλίσεις ελάχιστα πάνω από το όριο στη δευτερογενή στρεπτική ροπή  $M_{ts}$  αλλά και σημαντικές διαφορές στον υπολογισμό της στρεπτικής στιβαρότητας της ράβδου για λόγους **μήκος/πλάτος** < 5 και **μήκος/ύψος** < 5.

Τέλος, προκειμένου να γίνει σαφής η ακαταλληλότητα της ομοιόμορφης θεωρίας στις ανοικτές διατομές αλλά και η μικρή απόκλιση της 'κλασικής' θεωρίας από τη 'διευρυμένη' παρατίθενται τα παρακάτω σχήματα στα οποία παρουσιάζεται μια ανοικτή διατομή διπλού ταυ καθώς και η κατανομή των διατμητικών τάσεων στο επίπεδό της. Στις ανοικτές διατομές αναπτύσσεται μεγάλη στρέβλωση (εξαιτίας του ότι το σχήμα τους είναι αισθητά διαφορετικό από το κυκλικό στο οποίο έχουμε μηδενική στρέβλωση) και κατά συνέπεια με οποιαδήποτε μεταβολή της κατά μήκος της ράβδου θα αναπτυχθούν σημαντικές ορθές τάσεις. Οι τάσεις αυτές εν γένει μεταβάλλονται κατά μήκος, επομένως, για την εξισσορόπηση αυτών των ορθών τάσεων θα αναπτυχθούν δευτερογενείς διατμητικές τάσεις στο επίπεδο της διατομής και σε αυτό το σημείο καθίσταται εμφανές το σφάλμα της ομοιόμορφης θεωρίας η οποία δεν προβλέπει μεταβολή της στρέβλωσης και άρα ανάπτυξη ορθών τάσεων. Οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις εκτός της εξισσορόπησης των ορθών παραλαμβάνουν και τμήμα της συνολικής στρεπτικής ροπής της ράβδου το οποίο θα είναι σημαντικό αφού σημαντικό θα είναι και το δίρροπο στρέβλωσης  $M_w$ . Η δευτερογενής στρεπτική ροπή  $M_{ts}$  όμως, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.1, έχει πολύ μεγάλο μοχλοβραχίονα σε αντίθεση με την πρωτογενή στρεπτική ροπή που έχει πολύ μικρό μοχλοβραχίονα και επομένως οι δευτερογενείς διατμητικές τάσεις που θα αναπτυχθούν θα είναι μικρές (συγκριτικά με τις ορθές τάσεις). Κατά αυτό τον τρόπο θα είναι μικρή και επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων με αποτέλεσμα η 'κλασική' θεωρία να μπορεί να εφαρμοστεί το ίδιο ικανοποιητικά με τη 'διευρυμένη'.



**Σχήμα 6.1** Ορθές τάσεις λόγω μεταβολής της στρέβλωσης και αντίστοιχες δευτερογενείς διατμητικές για την εξισσορόπησή τους





**Σχήμα 6.2** α) Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες β) Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες

### ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ

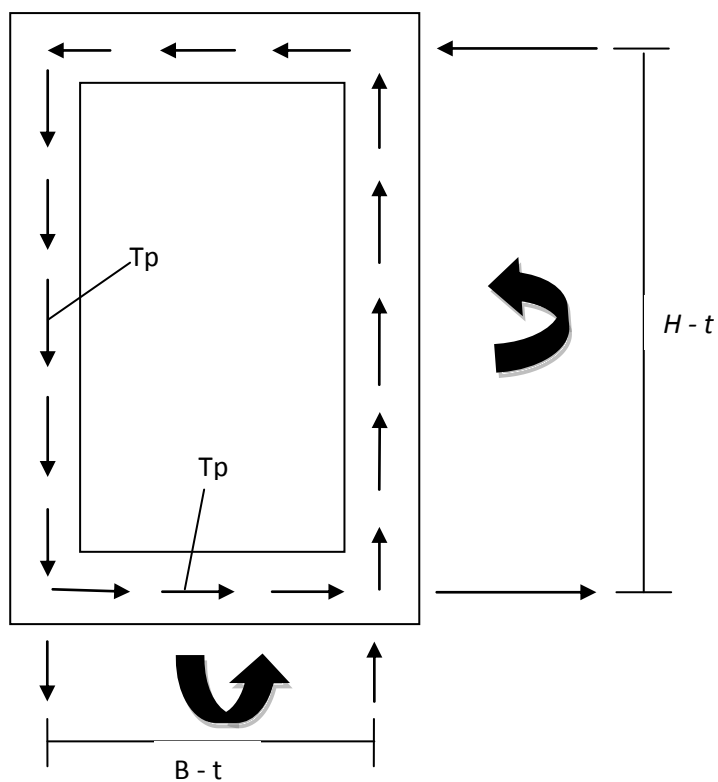
Στις κοίλες ορθογωνικές διατομές η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε στις αναλύσεις, δηλαδή η μέθοδος επίλυσης με συνοριακά στοιχεία, αποδείχτηκε πως ανταποκρίνεται με ικανοποιητική ακρίβεια στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών  $I_{tp}$ ,  $I_{ts}$ ,  $C_s$ . Το συμπέρασμα αυτό βασίστηκε στις αμελητέες αποκλίσεις που παρουσίαζαν τα αποτελέσματά μας σε σχέση με τα αποτελέσματα του λογισμικού Nastran (τουλάχιστον για τις σταθερές  $I_{tp}$ ,  $C_s$ ). Επιπλέον, ύστερα από σύγκριση, καταλήξαμε και εδώ στην ακαταλληλότητα της Θ.Λ.Δ. η οποία παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών  $I_{ts}$  και  $C_s$  και τα οποία αυξάνουν όσο η διατομή καθίσταται λιγότερο λεπτότοιχη. Εκτός των κοίλων ορθογωνικών και συγκρίνοντας πάλι τα αποτελέσματά μας με αυτά του λογισμικού Nastran αποδείχτηκε η ακρίβεια της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων και στον υπολογισμό των γεωμετρικών σταθερών σε οβάλ διατομές.

Σε επίπεδο εντατικών και κινηματικών μεγεθών καταλήξαμε σε ένα πρώτο βασικό συμπέρασμα το οποίο είναι το σφάλμα που παρουσιάζει η 'κλασική' θεωρία στην επίλυση ράβδων κλειστής διατομής. Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε από τη σύγκριση με τη 'διευρυμένη' θεωρία κατά την οποία παρατηρήθηκε ότι ενώ στον υπολογισμό των κινηματικών μεγεθών δεν υπήρξαν σημαντικές αποκλίσεις, στον υπολογισμό της δευτερογενούς στρεπτικής ροπής και του διρρόπου στρέβλωσης

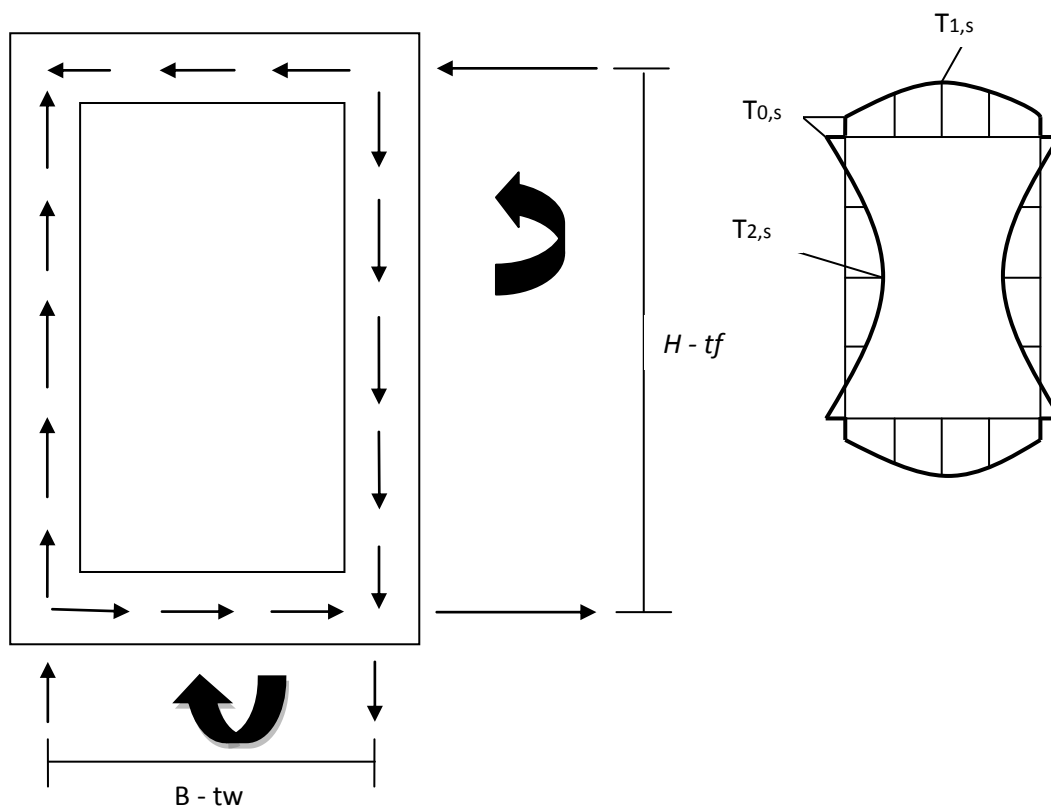
εμφανίστηκαν πολύ μεγάλα σφάλματα και επομένως κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή της ‘διευρυμένης’ ή της ομοιόμορφης θεωρίας τουλάχιστον για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών.

Στη συνέχεια, με βάση τα αριθμητικά παραδείγματα στα οποία πραγματοποιήθηκε σύγκριση ομοιόμορφης και ‘διευρυμένης’ θεωρίας καταλήξαμε σε πολύ βασικά και χρήσιμα συμπεράσματα. Η ομοιόμορφη θεωρία, ενώ αποδίδει ικανοποιητικά στον υπολογισμό των κινηματικών μεγεθών στα συνήθη μήκη ράβδων για στατικό σύστημα προβόλου, σε επίπεδο τάσεων παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα καθώς αμελεί τα φαινόμενα ανομοιόμορφης στρέψης και θα πρέπει επομένως να εφαρμόζεται η διευρυμένη θεωρία για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Μάλιστα τα σφάλματα αυτά είναι ανεξάρτητα του μήκους της ράβδου από το οποίο εξαρτάται μόνο το πόσο γρήγορα «σβήνουν» τα εντατικά μεγέθη της ανομοιόμορφης στρέψης όσο απομακρυνόμαστε από τη θέση της πάκτωσης. Σε στατικό σύστημα όμως όπου και τα δύο άκρα είναι πακτωμένα η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει σημαντικά σφάλματα σε επίπεδο κινηματικών μεγεθών ακόμα και στα συνήθη μήκη ράβδων.

Τέλος, παρουσιάζονται και εδώ κάποια σχήματα στα οποία φαίνεται μια κοίλη ορθογωνική διατομή και η κατανομή των διατμητικών τάσεων στο επίπεδό της προκειμένου να γίνει αντιληπτός ο λόγος για τον οποίο η ομοιόμορφη θεωρία παρουσιάζει αποκλίσεις σε σχέση με τη ‘διευρυμένη’. Ξέρουμε, λοιπόν, ότι στις κλειστές διατομές αναπτύσσεται μικρή στρέβλωση (εξαιτίας του ότι το σχήμα τους δε διαφέρει σημαντικά από το δακτυλιοειδές στο οποίο έχουμε μηδενική στρέβλωση) με συνέπεια οποιαδήποτε μεταβολή της κατά μήκος της ράβδου να οδηγεί στην ανάπτυξη ορθών τάσεων οι οποίες θα λαμβάνουν και αυτές μικρές τιμές. Οι τάσεις αυτές εν γένει επίσης μεταβάλλονται κατά μήκος και για την εξισσορόπηση των τάσεων αυτών αναπτύσσονται δευτερογενείς διατμητικές τάσεις οι οποίες παραλαμβάνουν και τμήμα της συνολικής στρεπτικής ροπής της ράβδου το οποίο θα είναι μικρό αφού μικρό θα είναι και το δίρροπο στρέβλωσης  $M_w$ . Στις κλειστές διατομές, όμως, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα έχουμε πολύ ευνοϊκό πρωτογενή μηχανισμό ανάληψης στρεπτικών ροπών αλλά όχι ευνοϊκό δευτερογενή μηχανισμό με αποτέλεσμα για την ανάπτυξη ακόμα και μικρής τιμής δευτερογενούς στρεπτικής ροπής να αναπτύσσονται μεγάλες δευτερογενείς διατμητικές τάσεις (συγκριτικά με τις ορθές τάσεις). Κατά αυτό τον τρόπο θα είναι σημαντική η επιρροή των δευτερογενών στρεπτικών παραμορφώσεων με αποτέλεσμα η ‘κλασική’ θεωρία να μην μπορεί να εφαρμοστεί το ίδιο ικανοποιητικά με τη ‘διευρυμένη’.



Σχήμα 6.3 Πρωτογενείς διατμητικές τάσεις και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες



Σχήμα 6.4 Δευτερογενείς διατμητικές τάσεις με την κατανομή τους και αντίστοιχοι μοχλοβραχίονες



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

**Κατσικαδέλης, Ι.Θ.** (1999), “Συνοριακά Στοιχεία στην επιστήμη του μηχανικού – Θεωρία & Εφαρμογές”, Ε.Μ.Π., Αθήνα.

**Armenakas A.E.** (2006). “*Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*”, Taylor & Francis Group, New York.

**Back, S.Y. and Will, K.M.** (1998). “A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1173-1191.

**Becker, G.** (1965). “Ein Beitrag zur statischen Berechnung Beliebiger Gelagerter Ebener Gekrümmter Stäbe Mit Einfachsymmetrischen Dünnwandigen Offenen Profilen von in der Stabachse Veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion”, *Der Stahlbau* 34, H.11, 334-346 und H.12, S.368-377.

**Chen, H. and Blandford, G.E.** (1989). “A C0 finite element formulation for thin-walled beams”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 2239-2255.

**Cortinez, V.H. and Piovan, M.T.** (2002). “Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, 258, 701-723.

**Coulomb, C.A.** (1784). “Recherches theoriques et experimentales sur la force de torsion, et sur l’elasticite des files de metal”, *Mem. De l’Acad. Roy. Des Sci.*, 229-269.

**Dabrowski, R.** (1968). “*Gekrümmte dünnwandige Träger, Theorie und Berechnung*”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

**El Fatmi, R.** (2007). “Non-uniform warping including the effects of torsion and shear forces. Part I: A general beam theory”, *International Journal of Solids and Structures*, 44, 5912-5929.

**Emre Erkmen, R. and Mohareb, M.** (2006). “Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 44, 1096-1108.

**Gendy, A.S., Saleeb, A.F. and Chang, T.Y.P.** (1992). “Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis”, *Computers & Structures*, 42, 531-550.

**Gruttmann, F., Sauer, R. and Wagner, W.** (2000). “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48, 1675-1702

**Heilig, R.** (1961a). “Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform”, *Der Stahlbau*, 30, H.11, 333-349.

**Heilig, R.** (1961b). “Der Schubverformzugseinfluss auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil”, *Der Stahlbau*, 30, H.4, 97.

**Hu, Y., Jin, X. and Chen, B.** (1996). “A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections”, *Computers & Structures*, 61, 897-908.

- Kim, N.-I. and Kim, M.-Y.** (2005). “Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects”, *Thin-Walled Structures*, 43, 701–734.
- Klöppel, K. und Bilstein, W.** (1972). “Stark tordierte, eigenspannungsbehaftete Stäbe mit dünnwandigen, offenen einfachsymmetrischen Querschnitten”, *Der Stahlbau*, 41, H.5, S.135-142.
- Kollár, L.P.** (2001). “Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 7543-7558.
- Kraus, M.** (2007). “Computerorientierte Bestimmung der Schubkorrekturfaktoren gewalzter I-Profile”, Festschrift Rolf Kindmann, Shaker Verlag, Aachen, 81-98.
- Kreuzinger, H.** (1969). “Der Einfluss eines nichtlinearen Anteils des Drehwiderstandes auf das Gleichgewichts- und Stabilitätsverhalten von geraden dünnwandigen Stäben”, Diss. TH, München.
- Laudiero, F. and Savoia, M.** (1990). “Shear strain effects in flexure and torsion of thin-walled beams with open or closed cross-section”, *Thin-Walled Structures*, 10(2), 87-119.
- Lee, G.C. and Szabo, B.A.** (1967). “Torsional response of tapered I-Girders”, *J. Struc. Div.*, ASCE vol. 93, No. St5, 233-252.
- Machado, S.P. and Cortínez, V.H.** (2007). “Free vibration of thin-walled composite beams with static initial stresses and deformations”, *Engineering Structures*, 29, 372-382.
- Marguerre, K.** (1940). “Torsion von Voll- und Hohlquerschnitten”, *Der Bauingenieur*, 21, S.317-322.
- Murín, J. and Kutis, V.** (2008). “An Effective Finite Element for Torsion of Constant Cross-Sections Including Warping With Secondary Torsion Moment Deformation Effect”, *Engineering Structures* 30, 2716-2723.
- Park, S., Fujii, D. & Fujitani, Y.** (1997). “A finite element analysis of discontinuous thin-walled beams considering nonuniform shear warping deformation”, *Computers & Structures*, 65, 17-27.
- Ramm, E. und Hofmann, T.J.,** (1995). “*Stabtragwerke*”, Der Ingenieurbau: Grundwissen–Baustatik/Baudynamik, Ernst & Sohn, Berlin
- Roberts T.M. and Al-Ubaidi, H.** (2001). “Influence of shear deformation on restrained torsional warping of pultruded FRP bars of open cross section”, *Thin-Walled Structures*, 39, 395–414.
- Roik, K. und Sedlacek, G.** (1966). “Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen–Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes”, *Der Stahlbau*, 35 H.2, 43–52 and H.5, 160.
- Roik, K.H.** (1978). “*Vorlesungen über Stahlbau (Grundlagen)*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf
- Roik, K.H., Carl, J. und Linder, J.** (1972). “*Biegetorsionsprobleme gerade dünnwandiger Stäbe*”, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.

- Rubin, H.** (2005). “Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern Mit Konstantem Querschnitt Unter Berücksichtigung Sekundärer Schubverformungen”, *Stahlbau* 74, 826-842.
- Rubin H.** (2007). “*Torsions-Querschnittswerte für rechteckige Hohlprofile nach EN 10210-2:2006 und EN 10219-2:2006*”, *Stahlbau*, Vol. 76, 2007, pp. 21–33.
- Saint-Venant, B.** (1855). “*Memoire sur la torsion des prismes*”, *Memoires des Savants Etrangers*, 14, 233-560.
- Sapountzakis, E.J. and Mokos, V.G.** (2009). “Secondary Torsional Moment Deformation Effect by BEM”, *Proceedings of the 10th international conference of Advances in Boundary Element Techniques*, Athens, Greece, 81-88.
- Simo, J.C. and Vu-Quoc, L.** (1991). “A Geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation”, *International Journal of Solids and Structures*, 27, 371-393.
- Slivker, V.** (2007). “*Mechanics of Structural Elements*”, Springer-Verlag, Berlin.
- Timoshenko, S. and Gere, J. M.** (1961). “*Theory of Elastic Stability*”, McGraw-Hill Book Company, London.
- Timoshenko, S. and Goodier, J.** (1951). “*Theory of Elasticity*”, McGraw-Hill Book Comp, New York, Toronto, London.
- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.** (1984). “*Theory of Elasticity*”, 3rd edn, McGraw-Hill, New York.
- Tralli, A.** (1986). “A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams”, *Computers and Structures*, 22, 649-658.
- Vlasov, V.** (1963). “*Thinwalled elastic beams*”, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- Vlassov, W.S.** (1964). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 1, Berlin.
- Vlassov, W.S.** (1965). “Dünnwandige elastische Stäbe”, *VEB Verlag für Bauwesen*, Band 2, Berlin.
- Vo, T.P. and Lee, J.** (2009). “Flexural-torsional coupled vibration and buckling of thin-walled open section composite beams using shear-deformable beam theory”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 51, 631-641.
- Wunderlich W., Obrecht, H. and Schroedter, V.** (1986). “Nonlinear analysis and elastic-plastic load-carrying behaviour of thin-walled spatial beam structures with warping constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 671-695.