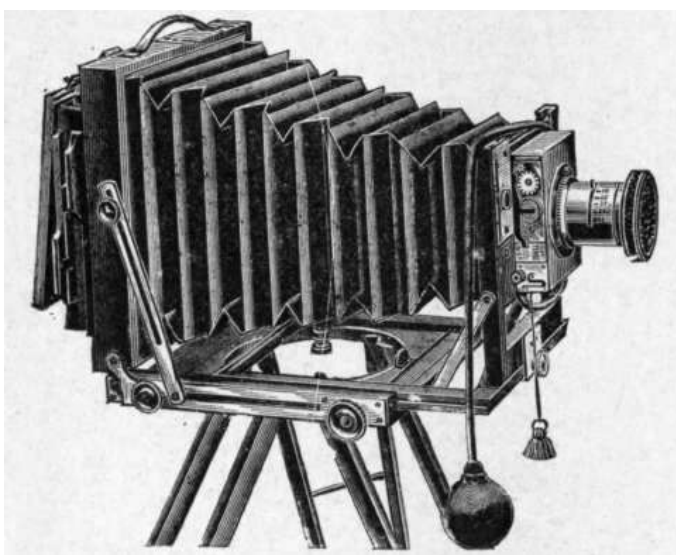
Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Εφαρμογων

Διπλωματικη Εργασια

Χώροι BV και εφαρμογές στην επεξεργασία εικόνας

Βικελής Ανδρέας



Επιβλέπων Καθηγητής
Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος ....

Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Γκιντίδης Δρόσσος ....

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Γιαννακάκης Νικόλαος ....

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η φωτογραφία είναι μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις της ανθρωπότητας και αποτελεί μέχρι και σήμερα επίκεντρο της επιστημονικής μελέτης και έρευνας. Τις πρώτες δεκαετίες, η ποιότητα των φωτογραφιών ήταν αρκετά χαμηλή και η πρόσβαση στην αντίστοιχη τεχνολογία πολύ περιορισμένη. Η ανάπτυξη των υπολογιστών ήταν αυτή που έφερε την επανάσταση στην επιστήμη της μελέτης και της επεξεργασίας εικόνας. Πλέον η τεχνολογία μπήκε για τα καλά στην καθημερινότητα των απλών ανθρώπων, ενώ παράλληλα η εικόνα γίνονταν αντιληπτή σαν μια συλλογή αριθμών, και όχι απλώς μια χημική διαδικασία σε μια ταινία film. Αυτό έδωσε στους μαθηματικούς την δυνατότητα να μοντελοποιούν τις ψηφιακές πλέον εικόνες μέσω συναρτήσεων. Έτσι τα προβλήματα ανακατασκευής, επαναχρωματισμού, επεξεργασίας και διόρθωσης μιας εικόνας έγιναν στην ουσία μαθηματικά προβλήματα που μοντελοποιούνται μέσω συναρτησιακών σχέσεων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια συσκευή που μας εφοδιάζει με εικόνες, π.χ. φωτογραφική μηχανή, δορυφόρος, αξονικός τομογράφος, κινητό κτλ.. Σε έναν ιδανικό κόσμο η συσκευή αυτή θα μας παρείχε μια τέλεια εικόνα u. Φυσικά ο κόσμος δεν είναι τέλειος και για αυτό δεν μπορούμε να παραβλέψουμε τους θορύβους, τις θολούρες και τις γενικότερες απώλειες που σίγουρα θα υποστεί η εικόνα u. Για αυτό στην πραγματικότητα η συσκευή μας δεν θα μας εφοδιάσει με την τέλεια εικόνα, αλλά με μια αλλοιωμένη εικόνα f. Ένα τυπικό μοντέλο στην μαθηματική επιστήμη της εικόνας υποθέτει ότι η u έχει μετασχηματιστεί μέσω ενός γραμμικού τελεστή T σε συναδυασμό με την ύπαρξη ενός τυχαίου θορύβου η. Το πιο σύγχρονο μοντέλο περιγραφής της επεξεργασίας μιας εικόνας είναι το :

$$f = Tu + \eta,$$

όπου ο T καλείται forward operator και συνήθως εκφράζει την επεξεργασία της πληροφορίας u και η συνάρτηση η είναι ο θόρυβος που έχει υποστεί η πληροφορία αυτή. Το είδος του θορύβου είναι αυτό που καθορίζει την σωστή επιλογή του τελεστή T. Για να ανακτήσουμε την αρχική πληροφορία χρειάζεται να αντιστρέψουμε τον τελεστή T, κάτι το οποίο πολύ συχνά δεν είναι εφικτό. Για τον λόγω αυτό εισάγουμε priori πληροφορίες στο μοντέλο μας (αυτό συνήθως αφορά υπαθέσεις ομαλότητας για την u). Το πιο σύνηθες, είναι να προσπαθεί κανείς να παράξει μια ανακατασκευμασμένη εκδοχή της f ελαχιστοποιώντας ένα συναρτησιακό της μορφής :

$$J(u) = \Phi(Tu, f) + \Psi(u).$$

Η συνάρτηση Φ καλείται όρος πιστώτητας, data fidelity, και μετρά της απόσταση την f από την Tu. Μικρές τιμές αυτής, δείχνουν ότι ο θόρυβος είναι μικρός. Η συνάρτηση Ψ καλείται regularizer και προσθέτει επιπλέον ομαλότητα στην αρχική πληροφορία u. Μικρές τιμές αυτής, οδηγούν στην εν μέρη εξάλειψη των ανεπιθύμητων χαρακτηριστικών της πληροφορίας f. Η επιλογή της Ψ καθορίζεται από τον χώρο στον οποίο ελαχιστοποιώ το συναρτησιακό J, ο οποίος δίναται να είναι χώρος $Banach$ στον οποίο η Ψ παίρνει πεπερασμένες τιμές.

Η επιλογή της Φ καθορίζει την ποιότητα της ανακατασκευασμένης εικόνας u και εξαρτάται από την κατανομή του θορύβου η (βλέπε τον Πίνακα της σελίδας 3). Όπως ειπώθηκε, η συνάρτηση Ψ εξαρτάται από την a priori γνώση που επιβάλει κανείς στην u και άρα διαφορετικές Ψ οδηγούν σε διαφορετικά χαρακτηριστικά για την u.

Type of noise	$\boldsymbol{\Phi(Tu, f)}$
Gaussian	$\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx$
Impulse	$\int_\Omega \lvert Tu-f\rvert dx$
Poisson	$\int_\Omega (Tu - flogTu)dx$
Uniform	$\lVert Tu-f\rVert_{L^\infty(\Omega)}$

Το πιο γνωστό παράδειγμα μαθηματικής επεξεργασίας εικόνας με Gaussian θόρυβο, είναι το λεγόμενο Tikhonov regularisation problem, το οποίο οδηγεί στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης :

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big].$$

Το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο καθώς ο $H^1(\Omega)$ είναι αυτοπαθής και έχει τις κατάλληλες ιδιότητες συμπάγειας που χρειάζεται κανείς για να εφαρμόσει την κλασική μέθοδο της θεωρίας μεταβολών. Η ανακατασκευασμένη συνάρτηση u που προκύπτει από το μοντέλο αυτό, εμφανίζει ανεπιθύμητες θολούρες.

Μία άλλη κατηγορία παραδειγμάτων τα οποία κατά κάποιο τρόπο βελτιώνουν τα αποτελέσματα του προηγούμενου, είναι τα Total Variation Regularization problems, TV problems , τα οποία επάγουν προβλήματα ελαχιστοποίησης της μορφής :

$$\min_{u\in BV(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha |Du|(\Omega)\Big].$$

Αυτό που κάνει το τελευταία πιο αποτελεσματικά είναι η χρήση των χώρων BV, οι οποίοι επιδέχονται συναρτήσεις με περισσότερες ασυνέχειες σε σχέση με τους χώρους Sobolev, κάτι που οδηγεί στην μεγαλύτερη εξομάλυνση ομοιογενών περιοχών της εικόνας αλλά και ταυτόχρονη διατήρηση των χαρακτηριστικών της. Το γεγονός ότι το μοντέλο TV επιτρέπει μεγαλύτερες ασυνέχειες στην u, το κάνει ιδιαίτερα χρήσιμο και αποτελεσματικό σε προβλήματα αναχρωματισμού εικόνας (image inpainting). Τέτοια προβλήματα έχουν την μορφή :

$$\min_{u\in BV(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_{\Omega/D} (u-f)^2 dx + \alpha |Du|(\Omega)\Big],$$

όπου το D εκφράζει το "χαμένο" κομμάτι της εικόνας. Παρόλα αυτά η μέθοδος πετυχαίνει μόνο όταν το κενό που καλούμαστε να αναχρωματίσουμε είναι αρκετά μικρό. Επίσης, το μοντέλο TV, λόγω της φύσης των συναρτήσεων που επιδέχονται οι χώροι BV, πετυχαίνει τμηματικά σταθερές ανακατασκευές μέσα στο χαμένο κομμάτι της εικόνας που θέλουμε να αναχρωματίσουμε, γεγονός που δεν ανταποκρίνεται στην φυσική πραγματκότητα.

Τα παραπάνω προβλήματα έρχονται να περιορίσουν μοντέλα μεγαλύτερης τάξης, όπως αυτό που θα παρουσιάσουμε στην παρούσα εργασία. Το ενλόγω μοντέλο επάγει το πρόβλημα ελαχιστοποιήσης πρώτης και δεύτερης τάξης, $TV - TV^2$:

$$\min_{u\in BV^2(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u) dx + \beta\phi_2(D^2 u)(\Omega)\Big],$$

που καλείται να αντιμετωπίσει ζητήματα ανακατασκευής εικόνας, όπως αυτά περιγράφηκαν παραπάνω.

Η δομή της διπλωματικής αυτής είναι η εξής :

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα από την θεωρία των κατανομών, των μέτρων Radon, των χώρων Sobolev και την μέθοδο χαλάρωσης σε πρώτους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους. Τα αποτελέσματα που περιέχονται στο κεφάλαιο αυτό είναι απαραίτητα προκειμένου να μπορεί κανείς να μελετήσει την παρούσα εργασία.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγουμε την θεωρία των χώρων φραγμένης κύμανσης, χώροι $BV(\Omega)$. Αποδεικνύουνε βασικές ιδιότητες των χώρων αυτών, όπως ιδιότητες συμπάγειας και θεωρήματα προσέγγισης, ίχνους, επέκτασης κτλ. ενώ παράλληλα αναδεικνύουμε τις ομοιότητες αλλά και τις διαφορές της θεωρίας των χώρων $BV(\Omega)$ με την αντίστοιχη των χώρων Sobolev.

Στο Κεφάλαιο 4 αρχικά ορίζουμε και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του χώρου φραγμένης κύμανσης δεύτερης τάξης, χώρος $BV^2(\Omega)$. Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρώτης και δεύτερης τάξης, $TV - TV^2$, μέσω της κλασικής μεθόδου της θεωρίας μεταβολών και κάνοντας χρήση της μεθόδου χαλάρωσης.

2 Προαπαιτούμενη γνώση

Στο κεφάλαιο αυτό θα υπενθυμίσουμε μια σειρά από αποτελέσματα της θεωρίας κατανομών, της θεωρίας μέτρου και της θεωρίας χώρων Sobolev που χρειάζεται κανείς για να κατανοήσει τα τελευταία 2 κεφάλαια της εργασίας. Στην πραγματικότητα, όπως θα δει κανείς στο κεφάλαιο 3, οι χώροι BV αποτελούν μια επέκταση των χώρων Sobolev, με κατά κατανομή παραγώγους στον χώρο των μέτρων Borel.

2.1 Δοκιμαστικές συναρτήσεις και κατανομές

Η ιδέα των κατανομών προκύπτει αρκετά φυσιολογικά, αν κανείς ξεκινήσει από απλές φυσικές παρατηρήσεις.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι έχουμε μια συνάρτηση $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοιχτό. Είναι γνωστό ότι για τυχαίο $x \in \Omega$ δεν μπορούμε να δώσουμε νόημα στο $f(x)$. Έχει όμως φυσική σημασία, να συζητήσουμε για τη μέση τιμή της f πάνω σε μια μικρή μπάλα κέντρου x και ακτίνας $\epsilon > 0$ και να στείλουμε το ϵ στο μηδέν. Πράγματι, όπως προκύπτει από την θεωρία Lebesgue, σχεδόν για όλα τα $x \in \Omega$ το όριο

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} f(\xi) d\xi$$

υπάρχει και είναι αντιπροσωπευτικό της f, (Lebesgue σημεία της f). Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} f(\xi) d\xi = \int_{\Omega} f(\xi) u_{x,\epsilon}(\xi) d\xi,$$

με

$$u_{x,\epsilon}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B(x,\epsilon)|}, & \xi \in B(x,\epsilon) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επομένως, είναι ισοδύναμο να ξέρουμε την f σαν στοιχείο του $L^1_{loc}(\Omega)$ ή να ξέρουμε την τιμή των ολοκληρωμάτων $\displaystyle\int_{\Omega} f(\xi) u_{x,\epsilon}(\xi) d\xi$, με u να ανήκει σε μια επαρκώς μεγάλη κλάση συναρτήσεων. Αυτό αποτελεί και το σημείο εκκίνησης της έννοιας των κατανομών. Οι συναρτήσεις u καλούνται δοκιμαστικές συναρτήσεις. Είναι επομένως ισοδύναμο να γνωρίζουμε την f ως συνάρτηση ή ως κατανομή, και λέγοντας κατανομή εννοούμε την απεικόνιση

$$f \ : \ u \mapsto \int_{\Omega} f u dx.$$

Η κλάση των δοκιμαστικών συναρτήσεων που θα θεωρήσουμε, εξαρτάται συνήθως από τον χώρο στον οποίο ζει η f. Ο πιο φυσιολογικός χώρος, στην προκειμένη περίπτωση, στον οποίο θα θεωρήσουμε ότι ζουν οι δοκιμαστικές συναρτήσεις u είναι ο $C_c(\Omega)$.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να ορίσουμε την κατά κατανομή παράγωγο της f, της $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Προσεγγίζουμε την f με μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ομαλών συναρτήσεων. Τότε η κατά κατανομή παράγωγος της συνάρτησης f_n είναι η απεικόνιση

$$u \mapsto \int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i} u dx.$$

Στην περίπτωση αυτή όμως δεν μπορούμε να περάσουμε στο όριο παίρνοντας τις δοκιμαστικές συναρτήσεις u απλά συνεχής, όπως προηγουμένως. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $u \in C_c^1(\Omega)$. Τότε,

$$\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i} u dx = -\int_\Omega f_n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \to -\int_\Omega f \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

και άρα η κατά κατανομή παράγωγος της f, η $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, ορίζεται ως η απεικόνιση

$$u \in C_c^1(\Omega) \mapsto \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε τις κατανομές, θεωρώντας τον $D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ τον χώρο τον δοκιμαστικών συναρτήσεων. Αυτό μας επιτρέπει να καλύψουμε τις παραπάνω περιπτώσεις αλλά και πολλές ακόμα άλλες.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό. Ένα στοιχείο $\alpha \in N^N$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, όπου N η διάσταση του χώρου, καλείται πολυδιάνυσμα. Ο ακέραιος $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ καλείται μήκος του πολυδιανύσματος α.

Για $u \in D(\Omega)$, γράφουμε

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Πάνω στον χώρο $D(\Omega)$ ορίζουμε την εξής σύγκλιση (η οποία αναδεικνύει και την αντίστοιχη τοπολογία) :

Ορισμός 2.1.1. Μια ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον χώρο $D(\Omega)$ σε μια μια συνάρτηση $u \in D(\Omega)$, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις :

i) Υπάρχει ένα συμπαγές υποσύνολο K του Ω τέτοιο ώστε $spt(u_n) \subset K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $spt(u) \subset K$.

$ii)$ Για κάθε πολυδιάνυσμα $\alpha \in N^N$, $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ ομοιόμορφα στο K.

Ορισμός 2.1.2. Μια γραμμική απεικόνιση $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι κατανομή στο Ω, αν για κάθε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $D(\Omega)$, ισχύει η συνεπαγωγή :

$$u_n \to 0, \text{ στον } D(\Omega) \Rightarrow T(u_n) \to 0.$$

Ο χώρος των κατανομών στο Ω συμβολίζεται με $D'(\Omega)$. Αποτελεί τον τοπολογικό δυϊκό του $D(\Omega)$ και γράφουμε $\langle T, u\rangle_{(D'(\Omega),D(\Omega))} := T(u)$ εννοώντας το duality pairing μεταξύ των $T \in D'(\Omega)$ και $u \in D(\Omega)$.

Ο χώρος των δοκιμαστικών συναρτήσεων $D(\Omega)$ έχει μια σειρά από πολύ σηματνικές ιδιότητες, οι οποίες αποτελούν βασικά εργαλεία της ανάλυσης και της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων. Μερικές από αυτές θα αναφέρουμε στην συνέχεια, αφού πρώτα παρουσιάσουμε την μέθοδο της ομαλοποίησης μέσω συνέλιξης. Η μέθοδος αυτή, όπως θα δούμε στις επόμενες ενότητες και κεφάλαια της εργασίας, θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο σε πλήθος θεωρημάτων που θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε.

Μέθοδος συνέλιξης : Έστω $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Εισάγουμε έναν πυρήνα ομαλοποίησης ρ με :

$$. \begin{cases} \rho \in D(\mathbb{R}^N), \ \rho \geq 0, \\ spt(\rho) \subset B(0,1), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx = 1. \end{cases}$$

Τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$\rho_n(x) := n^N \rho(nx),$$

η οποία εξόρισμού ικανοποιεί

$$. \begin{cases} \rho_n \in D(\mathbb{R}^N), \ \rho_n \geq 0, \\ spt(\rho_n) \subset B(0,1/n), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = 1. \end{cases}$$

Η ακολουθία $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται mollifier. Μέσω αυτής ορίζουμε την ακολουθία συνέλιξης $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής :

$$u_n(x) = u * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\rho_n(x-y)dy.$$

Τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι ισχύουν τα εξής :

$i)$ $spt(u_n) \subset spt(u) + B(0,1/n)$,

$ii)$ $u_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$,
$iii)$ $\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$,
$iv)$ $u_n \to u$ στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Η μέθοδος αυτή είναι πολύ σημαντική, καθώς αν για παράδειγμα ξεκινήσω με μια συνάρτηση $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ με συμπαγή φορέα, η αντίστοιχη ακολουθία συνέλιξης που προκύπτει, για επαρκώς μεγάλο $n \in \mathbb{N}$, θα βρίσκεται στον χώρο $D(\mathbb{R}^N)$. Μπορούμε στην περίπτωση που συζητάμε λοιπόν, να προσεγγίσουμε την συνάτηση u με ομαλές συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Για τον χώρο των δοκιμαστικών συναρτήσεων $D(\Omega)$ ισχύουν επίσης τα εξής σημαντικά αποτελέσματα :

Πρόταση 2.1.1. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοιχτό και $1 \leq p < +\infty$. Τότε :

$i)$ Ο χώρος $D(\Omega)$ είναι πυκνός στον χώρο $C_c(\Omega)$, ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ομοιόμορφη σύγκλιση.
$ii)$ Ο χώρος $D(\Omega)$ είναι πυκνός στον χώρο $L^p(\Omega)$.

Πρόταση 2.1.2. Για $1 \leq p < +\infty$, θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f \in L^p(\Omega)$ και $g \in L^p(\Omega)$ που ικανοποιούν την σχέση :

$$\int_\Omega f(x)u(x)dx = \int_\Omega g(x)u(x)dx, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

Τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο Ω.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Radon, μ, είναι μια γραμμική μορφή στον χώρο $C_c(\Omega)$, τέτοια ώστε για κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$ ο περιορισμός του μ στον $C_K(\Omega)$ είναι συνεχής, δηλαδή, για κάθε $K \subset \Omega$ συμπαγές, υπάρχει σταθερά $C(K) \geq 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $u \in C_c(\Omega)$ με $spt(u) \subset K$ να ισχύει

$$|\mu(u)| \leq C(K)\|u\|_\infty.$$

Σε ένα Radon μέτρο λοιπόν, μπορεί να κανείς να σκεφτεί τον περιορισμό του στον χώρο $D(\Omega)$ ως την απεικόνιση

$$T_\mu \, : \, u \in D(\Omega) \mapsto \int_\Omega u(x)d\mu(x).$$

Η απεικόνιση T_μ, εξόρισμού του μέτρου μ, είναι κατανομή. Επομένως το μέτρο μ προσδιορίζεται εξολοκλήρου από την κατανομή T_μ. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της πυκνότητας του χώρου $D(\Omega)$ στον $C_c(\Omega)$, βλέπε Πρόταση 2.1.1.. Σαν άμεση συνέπεια προκύπτει ότι μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε τα μέτρα Radon σαν κατανομές, $\mathcal{M} \hookrightarrow D'(\Omega)$.

Ορισμός 2.1.3. Έστω $T \in D'(\Omega)$ μια κατανομή στο Ω. Τότε η $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ ορίζεται ως η γραμμική απεικόνιση στο $D(\Omega)$,

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} \,:\, u \in D(\Omega) \mapsto -\Big\langle T, \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\rangle_{(D',D)}.$$

Πιο γενικά, για κάθε πολυδιάνυσμα $\alpha \in N^N$, ορίζουμε

$$D^\alpha T \,:\, u \in D(\Omega) \mapsto (-1)^{|\alpha|}\Big\langle T, D^\alpha u\Big\rangle_{(D',D)}.$$

Εύκολα δείχνει κανείς ότι η απεικόνιση $D^\alpha T$ είναι κατανομή στο Ω και ότι επεκτείνει την κλασσική έννοια παραγώγου, δηλ., για κάθε συνάρτηση $f \in C^k(\Omega)$ και πολυδιάνυσμα $\alpha \in N^N$ με $|\alpha| \leq k$, η κατά κατανομή παράγωγός της $D^\alpha f$, ταυτίζεται με την κλασσική της παράγωγο.

Όπως και στον χώρο $D(\Omega)$ έτσι και στον $D'(\Omega)$ θα ορίσουμε σύγκλιση, η οποία όπως θα δούμε αποτελεί μια μορφή ασθενούς* σύγκλισης στον χώρο $D'(\Omega)$.

Ορισμός 2.1.4. Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του $D'(\Omega)$ και $T \in D'(\Omega)$. Λέμε ότι η ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην T στον $D'(\Omega)$ αν

$$T_n(u) \to T(u), \quad \forall u \in D(\Omega).$$

Θα γράφουμε $T_n \to T$ στον $D'(\Omega)$.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό σύγκλισης μπορεί κανείς να δείξει το εξής αποτέλεσμα συνέχειας :

Πρόταση 2.1.3. Έστω πολυδιάνυσμα $\alpha \in N^N$. Τότε για κάθε ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και κατανομή T στον $D'(\Omega)$, με $T_n \to T$ στον $D'(\Omega)$, ισχύει ότι

$$D^\alpha T_n \to D^\alpha T$$

στον $D'(\Omega)$. Με άλλα λόγια η απεικόνιση

$$T \in D'(\Omega) \mapsto D^\alpha T \in D'(\Omega),$$

είναι συνεχής.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει παραπάνω, μπορούμε κάθε συνάρτηση $f \in L^p(\Omega)$ να την αντιλαμβανόμαστε είτε ως συνάρτηση είτε ως κατανομή, ως δηλαδή την απεικόνιση

$$f \ : \ u \mapsto \int_\Omega f u dx, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

Αναρωτιέται λοιπόν κανείς αν παιρνώντας από τον $L^p(\Omega)$ στον $D'(\Omega)$ διατηρείται η σύγκλιση. Η απάντηση είναι ναι και την δίνει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.4. Έστω ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και συνάρτηση f του $L^p(\Omega)$ με $f_n \to f$ στον $L^p(\Omega)$. Τότε $f_n \to f$ και στον $D'(\Omega)$.

Οι δύο τελευταίες προτάσεις μας οδηγούν στην εξής πολύ σημαντική παρατήρηση :

Παρατήρηση 2.1.1. Έστω ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και συναρτήσεις f, g του $L^p(\Omega)$ με $f_n \to f$ και $\dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \to g$ στον $L^p(\Omega)$. Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = g$ στον $L^p(\Omega)$.

2.2 Δϋική προσέγγιση των μέτρων Borel

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοιχτό και $\mathcal{B}(\Omega)$ τα Borel σύνολα του Ω. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των Borel μέτρων με τιμές στον $\mathbb{R}^m$ με $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Ο $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συνολοσυναρτήσεων $\mu \ : \ \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}^m$ που ικανοποιούν $\mu(\emptyset) = 0$ και την ιδιότητα της σ-προσθετικότητας :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$$

για κάθε οικογένοια $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων του $\mathcal{B}(\Omega)$. Στην ειδική περίπτωση που $m = 1$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{M}(\Omega)$. Το υποσύνολο όλων των μη αρνητικών στοιχείων του συμβολίζεται με $\mathcal{M}_+(\Omega)$.

Αν $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, ο περιορισμός ενός $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ στο A είναι το μέτρο Borel $\mu|_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, που ορίζεται ως εξής :

$$\mu|_A(E) = \mu(E \cap A), \quad \forall E \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Ο φορέας ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ορίζεται ως το μικρότερο κλειστό σύνολο E του Ω για το οποίο ισχύει $|\mu|(\Omega/E) = 0$.

Τα μέτρα του χώρου $\mathcal{M}_+(\Omega)$ έχουν την εξής, πολύ σημαντική, ιδιότητα ομαλότητας :

Πρόταση 2.2.1. Τα μέτρα Borel του χώρου $\mathcal{M}_+(\Omega)$ είναι ομαλά, δηλ. για κάθε $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, ισχύει ότι :

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\, K \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega \} =$$

$$= \inf\{\mu(U) : B \subset U,\, U \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } \Omega \}.$$

Η συνολική μεταβολή ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ είναι η πραγματική συνολοσυνάρτηση $|\mu|$, που ορίζεται για κάθε $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ από την σχέση

$$|\mu|(B) = \sup\Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| \,:\, \bigcup_{i=o}^{\infty} B_i = B \Big\},$$

με το sup να παίρνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του B στον $\mathcal{B}(\Omega)$. Αποδεικνύεται ότι $|\mu| \in \mathcal{M}_+(\Omega)$, αλλά και ότι η απεικόνιση

$$\mu \mapsto |\mu|(\Omega),$$

αποτελεί νόρμα με την οποία ο χώρος $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ γίνεται χώρος Banach. Θα ορίσουμε τώρα τα μη αρνητικά μέτρα Radon, ως τα τοπικά πεπερασμένα μη αρνητικά μέτρα Borel.

Ορισμός 2.2.1. Μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$, τέτοια ώστε για όλα τα $\Omega' \subset\subset \Omega$ ισχύει ότι $\mu|_{\Omega'} \in \mathcal{M}_+(\Omega')$, καλείται μη αρνητικό μέτρο Radon.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι μέτρα Radon είναι ομαλά.

Για δοσμένο μέτρο $\lambda \in \mathcal{M}_+(\Omega)$, ορίζουμε το σύνολο όλων των Borel συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ τέτοιες ώστε

$$\int_\Omega |f| d\lambda < +\infty,$$

με $L^1_\lambda(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Για δοσμένα μέτρα $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ και $\lambda \in \mathcal{M}_+(\Omega)$, λέμε ότι το μέτρο μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο λ και γράφουμε $\mu << \lambda$ αν και μόνο αν

$$\forall B \in \mathcal{B}(\Omega),\ \lambda(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0.$$

Λέμε ότι το μέτρο μ είναι κάθετο στο μέτρο λ και γράφουμε $\mu \perp \lambda$ αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\lambda(B) = 0$ και $\mu(C) = 0$ για όλα τα $C \in \mathcal{B}(\Omega)$ με $C \cap B = \emptyset$. Μπορεί κανείς να διαπυστώσει ότι

$$\mu << \lambda \Leftrightarrow \exists\, f \in L^1_\lambda(\Omega, \mathbb{R}^m)\ :\ \mu = f\lambda.$$

Το επόμενο θεώρημα, αποτελεί επέκταση του παραπάνω αποτελέσματος και όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3, θα παίξει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των χώρων BV.

Θεώρημα 2.2.1. (Radon-Nikodym) Έστω δύο μέτρα $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ και $\lambda \in \mathcal{M}_+(\Omega)$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f \in L^1_\lambda(\Omega, \mathbb{R}^m)$ και ένα μέτρο $\mu^s \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

$$\mu = f\lambda + \mu^s,\ \ \mu^s \perp \lambda.$$

Ένα από τα σπουδαιότερα θεωρήματα στην θεωρία μέτρου είναι το θεώρημα αναπαράστασης Rierz-Alexandroff, το οποίο μας επιτρέπει να καταλάβουμε τον τοπολογικό δυϊκό του χώρου $C_0(X)$, όπου X ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Στην περίπτωση μας, ο χώρος αυτός θα είναι το Ω.

Θεώρημα 2.2.2. (Riesz-Alexandroff representation theorem) Για κάθε γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $F : C_0(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$, υπάρχει ένα μέτρο Radon, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ με $|\mu|(\Omega) = \|F\|$, τέτοιο ώστε

$$F(f) = \int_\Omega f d\mu,\ \ \forall f \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να αντιλαμβανόμαστε τον χώρο των μέτρων Borel $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, ως τον τοπολογικό δυϊκό του χώρου $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (ή του $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ λόγω πυκνότητας). Υπό αυτή την έννοια, κάθε Borel μέτρο είναι ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό στον $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ και ισχύει ότι :

$$|\mu|(\Omega) = \sup\{\langle \mu, f\rangle\ :\ f \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^m),\ \|f\|_\infty \leq 1\},$$

με $\langle \mu, f\rangle = \displaystyle\int_\Omega f d\mu$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο χώρος $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ είναι ισόμορφος με τον χώρο γινόμενο $\mathcal{M}(\Omega)^m$ και άρα

$$\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \mu = (\mu_1, ..., \mu_m) \, : \, \mu_i \in C_0'(\Omega), \, i = 1, .., m.$$

Με βάση την δυϊκή αυτή προσέγγιση, εφοδιάζουμε τον χώρο $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ με την ασθενή* τοπολογία $\sigma(C_0', C_0)$. Τότε ισχύει το εξής αποτέλεσμα συμπάγειας :

Πρόταση 2.2.2. Για κάθε φραγμένη ακολουθία του χώρου $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, υπάρχει $\sigma(C_0', C_0)$-συγκλίνουσα υπακολουθία της στον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Εκτός από την ασθενή* τοπολογία που φυσιολογικά ορίζεται λόγω της δυϊκότητας του χώρου των μέτρων Borel, μπορεί κανείς να ορίσει μια ισχυρότερη τοπολογία που επάγεται από τον χώρο $C_b(\Omega, \mathbb{R}^m)$ των φραγμένων, συνεχών συναρτήσεων στο Ω με τιμές ατον $\mathbb{R}^m$, την οποία θα συμβολίσουμε με $\sigma(C_b', C_b)$. Η τοπολογία αυτή εισάγει μια διαφορετική έννοια σύγκλισης, την narrowly σύγκλιση.

Ορισμός 2.2.2. Μια ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ συγκλίνει nawrrowly στο μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ αν και μόνο αν

$$\int_\Omega \phi d\mu_n \to \int_\Omega \phi d\mu, \qquad \forall \phi \in C_b(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Οι δύο παραπάνω συγκλίσεις στον $\mathcal{M}_+(\Omega)$ συνδέονται από την ισοδυναμία $(i) \Leftrightarrow (ii)$ όπου :
$i)$ $\mu_n \to \mu$ narrowly,
$ii)$ $\mu_n \to \mu$ με την έννοια της $\sigma(C_0', C_0)$-σύγκλισης και $\mu_n(\Omega) \to \mu(\Omega)$.

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει μια ισοδύναμη διατύπωση του τελευταίου αποτελέσματος.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ και $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :
$i)$ $\mu_n \to \mu$ narrowly,
$ii)$ $\mu_n(\Omega) \to \mu(\Omega)$ και για όλα τα ανοιχτά υποσύνολα U του Ω, $\mu(U) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(U)$.

Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε δύο βασικά αποτελέσματα από την θεωρία κυρτών συναρτήσεων μέτρων, δηλαδή συναρτήσεων που ορίζονται στον χώρο των μέτρων Borel, τον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Έστω συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ να ικανοποιεί την σχέση :

$$g(tx) = tg(x), \quad \forall t \geq 0.$$

Έστω ακόμα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Ορίζουμε το μέτρο $g(\mu) \in \mathcal{M}(\Omega)$ ως εξής :

$$g(\mu) := g\Big(\frac{\mu}{|\mu|}\Big)|\mu|$$

$$A \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto \int_A g\Big(\frac{\mu}{|\mu|}\Big)d|\mu|,$$

όπου η συνάρτηση $\dfrac{\mu}{|\mu|}$ είναι η Radon-Nikodym παράγωγος του μ ως προς το $|\mu|$.

Το μέτρο αυτό είναι καλά ορισμένο και ισχύει το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.2.4. Έστω συνάρτηση g όπως παραπάνω και $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Τότε για κάθε μέτρο $\nu \in \mathcal{M}_+(\Omega)$ με $\mu << \nu$, ισχύει

$$g(\mu) = g\Big(\frac{\mu}{|\nu|}\Big)|\nu|.$$

Επίσης, αν g κυρτή συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}$, τότε η $g : \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}(\Omega)$ είναι επίσης κυρτή συνάρτηση ως συνάρτηση μέτρων.

Το τελευταίο αποτέλεσμα της ενότητας, διατυπώθηκε από τους Buttazzo και Freddi, και μας δείχνει ότι οι κυρτές συναρτήσεις είναι κάτω ημισυνεχείς στον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ως προς την $\sigma(C_0', C_0)$-τοπολογία.

Πρόταση 2.2.5. Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ που συγκλίνει στο μέτρο Borel $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ με την έννοια της $\sigma(C_0', C_0)$ σύγκλισης. Έστω ακόμα κυρτή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι

$$g(\mu)(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} \inf g(\mu_n)(\Omega).$$

2.3 Οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε τον ορισμό και κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των χώρων *Sobolev* που ορίζονται σε ένα χωρίο Ω υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Οι χώροι αυτοί έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων τις τελευταίες δεκαετίες. Τα εργαλεία που μας παρέχει η μελέτη των συγκεκριμένων χώρων θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα τόσο στην ανάπτυξη της θεωρίας των χώρων BV του επόμενου κεφαλαίου, όσο και για την μελέτη του μοντέλου $TV-TV^2$ που θα παρουσιάσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας. Για τις ανάγκες της συγκεκριμένης ενότητας, θα θεωρούμε ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$.

2.3.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες χώρων Sobolev

Ορισμός 2.3.1.1. Για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$, ο χώρος *Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \ \ i = 1, 2, ..., N \Big\},$$

όπου η $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ εννοείται με την έννοια των κατανομών. Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ εφοδιάζεται με την νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big[\int_\Omega \Big(|u|^p + \sum_{i=1}^{N} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|^p \Big) dx \Big]^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max \Big\{ \|u\|_\infty ; \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big\|_\infty ; ... ; \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \Big\|_\infty \Big\}, \quad p = +\infty$$

Όταν $p = 2$, ο χώρος $W^{1,2}(\Omega)$ συχνά συμβολίζεται με $H^1(\Omega)$. Και οι δύο συμβολισμοί χρησιμοποιούνται εξίσου συχνά, με τον δεύτερο να αναδεικνύει καλύτερα την ιδιότητα *Hilbert* του χώρου αυτού. Ο παραπάνω ορισμός επεκτείνεται και για χώρους *Sobolev* μεγαλύτερης τάξης.

Όπως και παραπάνω με $W^{k,p}(\Omega)$ συμβολίζουμε τον χώρο *Sobolev* όλων των L_p-συναρτήσεων όπου οι κατά κατανομή παράγωγοί τους τάξης από 1 έως k είναι L^p-συναρτήσεις. Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με την αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \Big)^{1/p},$$

όπου με $D^\alpha u$ συμβολίζουμε την τάξης α κατά κατανομή παράγωγο της u και $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$ είναι η τάξη του διανύσματος $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$. Όταν $p = 2$, χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $H^k(\Omega)$ για τον χώρο $W^{k,2}(\Omega)$ για να αναδείξουμε την $Hilbertian$ δομή του χώρου αυτού.

Ο χώρος $W^{1,p}(\Omega)$ μπορεί να εφοδιαστεί και με την ισοδύναμη νόρμα

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p},$$

αλλά προτιμούμε να χρησιμοποιούμε την νόρμα του ορισμού !!!, καθώς όταν $p = 2$ επάγει μια $Hilbertian$ νόρμα (κάτι το οποίο δεν συμβαίνει με την παραπάνω νόρμα).

Είναι προφανές ότι ο χώρος $D(\Omega)$ αποτελεί πάντα υπόχωρο του χώρου $W^{k,p}(\Omega),\ \forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq +\infty$, και άρα μπορεί κανείς να συζητήσει για την κλειστότητά του στον $W^{k,p}(\Omega)$ ως προς την τοπολογία της νόρμας του χώρου.

Ορισμός 2.3.1.2. Ορίζουμε ως

$$H_0^1(\Omega) = \text{κλειστότητα του } D(\Omega) \text{ στον } H^1(\Omega),$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{κλειστότητα του } D(\Omega) \text{ στον } W^{1,p}(\Omega),$$
$$W_0^{k,p}(\Omega) = \text{κλειστότητα του } D(\Omega) \text{ στον } W^{k,p}(\Omega).$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, ο χώροι αυτοί περιέχουν συναρτήσεις $Sobolev$ που το ίχνος τους στο $\partial\Omega$ είναι ίσο με μηδέν. Αυτό όμως απαιτεί να ορίσουμε το ίχνος για τέτοιες συναρτήσεις, το οποίο στην πραγματικότητα επεκτείνει την έννοια του $restriction$ τελεστή για ομαλές συναρτήσεις.

Παράδειγμα Θεωρούμε $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ και $u(x) = |x|$. Είναι προφανές ότι η u δεν είναι παραγωγίσιμη στο Ω με την κλασσική έννοια. Ας υπολογίσουμε την κατά κατανομή παράγωγό της. Για δοσμένη $\phi \in D(\Omega)$ έχουμε

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle = -\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)dx = -\int_{-1}^{0} (-x)\phi'(x)dx - \int_{0}^{1} x\phi'(x)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{1} \phi(x)dx = \int_{-1}^{1} sign(x)\phi(x)dx.$$

Επομένως $u'(x) = sign(x)$ στον $D'(-1, 1)$ και $u' \in L^\infty \Rightarrow\ u \in W^{1,\infty}(-1, 1)$. Επειδή το Ω είναι φραγμένο $u \in W^{1,p}(-1, 1),\ 1 \leq p \leq +\infty$. ■

Λήμμα 2.3.1.1. Έστω $f \in L^1_{loc}(a,b)$ με $f' = 0$ στον $D'(a,b)$. Τότε υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f = C$ σχεδόν παντού στο (a,b).

Το παραπάνω λήμμα θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο για να αποδείξουμε ότι για $N = 1$ κάθε συνάρτηση *Sobolev* έχει συνεχή αντιπρόσωπο. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι όταν μιλάμε για συναρτήσεις *Sobolev*, όπως και αντίστοιχα για συναρτήσεις *Lebesgue*, αναφερόμαστε σε κλάσεις συναρτήσεων και όχι αναγκαστηκά σε κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Το γεγονός αυτό καθιστά ιδιαίτερα σημαντική την έννοια του "αντιπρόσωπου" κλάσης.

Θεώρημα 2.3.1.1. Παίρνουμε $1 \leq p \leq +\infty$ και $\Omega = (a,b)$ ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έστω $u \in W^{1,p}(a,b)$ και $u' \in L^p(a,b)$ η κατά κατανομή παράγωγός της. Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\bar{u} \in C([a,b])$ τέτοια ώστε

$$u(x) = \bar{u}(x),$$

σχεδόν για κάθε $x \in (a,b)$ και

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt,$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη : Ορίζουμε την

$$w(x) = \int_a^x u'(t)dt$$

και κάνοντας χρήση της ανιστητας Hölder δείχνουμε ότι $w \in C^{0,1/p'}([a,b])$. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Fubini* παίρνουμε ότι $w' = u'$ στον $D'(a,b)$. Τελικά από το Λήμμα 2.3.1.1. προκείπτει το ζητούμενο. ∎

Στις περιπτώσεις που $N \geq 2$ η κατάσταση γίνεται πιο περίπλωκη. Γενικώς στις περιπτώσεις αυτές τα στοιχεία του $W^{1,p}(\Omega)$ δεν έχουν συνεχή αντιπρόσωπο.

Παρατήρηση Είναι λογικό κανείς, βλέποντας και το παραπάνω αποτέλεσμα, να αναρωτηθεί το πόσο ομαλές είναι τελικά οι συναρτήσεις *Sobolev*. Για μια συνάρτηση $u \in L^p(\Omega)$, η οποία εκ των προτέρων ορίζεται σχεδόν παντού στο Ω, το να ξέρεις ότι κάποιες από τις κατά κατανομή παραγώγους της ανήκουν στον $L^p(\Omega)$ σου επιτρέπει, ακόμα και αν η συνάρτηση u δεν έχει συνεχή αντιπρόσωπο, να την προσδιορίσεις σε κάτι περισσότερο από το σχεδόν παντού. Τα δύο βασικότερα αποτελέσματα της θεωρίας χώρων *Sobolev* στην κατεύθυνση αυτή είναι το θεώρημα ίχνους και το θεώρημα εμφύτευσης

Sobolev. Πριν φτάσουμε όμως εκεί, θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των χώρων αυτών.

Θεώρημα 2.3.1.2. Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k και κάθε πραγματικό αριθμό p με $1 \leq p \leq +\infty$, ο χώρος $\Big(W^{k,p}(\Omega), \|.\|_{W^{k,p}(\Omega)}\Big)$ είναι χώρος *Banach*. Στην περίπτωση $p = 2$ έχουμε χώρο *Hilbert*.

Θεώρημα 2.3.1.3. Έστω $\Omega = \mathbb{R}^N$. Για κάθε $1 \leq p < +\infty$ ισχύει ότι

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N).$$

Υπόδειξη : Η απόδειξη αυτή θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτο : Θα δείξουμε ότι ο χώρος $W_c^{1,p}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$ όπου

$$W_c^{1,p}(\Omega) := \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ spt(u) \subseteq spt(\phi) \ , \ \phi \in D(\Omega)\Big\}.$$

Για τον σκοπό αυτό θα κάνουμε χρήση της μεθόδου " truncation of the domain ". Με την μέθοδο αυτή συμπιέζουμε τον φορέα της συνάρτησης μας και τον εγκλοβίζουμε μέσα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Πιο συγκεκριμένα έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Θεωρούμε συνάρτηση $M \in D(\mathbb{R}^N)$ με $M(0) = 1$ και ορίζουμε συναρτήσεις $M_n(\xi) = M(\dfrac{\xi}{n})$ $\xi \in \mathbb{R}^N$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $M_n \in D(\mathbb{R}^N)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(\xi) = 1$. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος κυριαρχιμένης σύγκλισης του *Lebesgue* δείχνουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ με

$$u_n := M_n u,$$

$u_n \in W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Δεύτερο : Δείχνουμε ότι ο χώρος $D(\mathbb{R}^N)$ είναι πυκνός στον $W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Έστω $v \in W_c^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Αρκεί κανείς να δείξει ότι $v_n \to v$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ με

$$v_n := v * \rho_n \in D(\mathbb{R}^N),$$

τα mollifiers της v. ■

Στην γενική περίπτωση όπου $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, οι χώροι $W^{1,p}(\Omega)$ και $W_0^{1,p}(\Omega)$ δεν ταυτίζονται. Ο δεύτερος περιέχεται γνήσια στον πρώτο. Πιο συγκεκριμένα, όπως θα δούμε όταν ορίσουμε τον τελεστή ίχνους, ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ περιέχει εκείνες τις συναρτήσεις που έχουν ίχνος μηδέν στο $\partial\Omega$.

Ο γνήσιος εγκλεισμός $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega), \ \Omega \neq \mathbb{R}^N$ φαίνεται αρκετά εύκολα μέσω της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 2.3.1.1. Έστω $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Τότε, η συνάρτηση

$$\bar{u} = \begin{cases} u, & \Omega \\ 0, & \mathbb{R}^N/\Omega, \end{cases}$$

ανήκει στον $W^{k,p}(\Omega)$. Ο γραμμικός τελεστής p που ορίζεται μέσω της σχέσης $p(u) = \bar{u}$ είναι ισομετρία από τον $W_0^{k,p}(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\Omega)$.

Υπόδειξη : Αρχικά δουλεύω με τον τελεστή

$$\bar{p} : \ D(\Omega) \to D(\mathbb{R}^N) \subseteq W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$u \ \mapsto \ \bar{p}(u) = \bar{u}.$$

Εύκολα κανείς βλέπει ότι ο $\bar{p}$ είναι καλά ορισμένος και ισομετρία από τον $D(\Omega)$ στον $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Στην συνέχεια λόγω πυκνότητας του $D(\Omega)$ στον $W_0^{k,p}(\Omega)$ επεκτείνουμε τον $\bar{p}$ σε όλον τον $W_0^{k,p}(\Omega)$ και προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. ■

Παράδειγμα : Έστω $N = 1$ και $\Omega = (-1, 1)$. Έστω ακόμα η συνάρτηση $u \equiv 1$ στο Ω. Τότε $u \in W^{1,p}(-1, 1)$ αλλά $u \notin W_0^{1,p}(-1, 1)$. Πράγματι αν $u \in W_0^{1,p}(-1, 1)$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση θα έπρεπε η

$$\bar{u} = \begin{cases} 1, & (-1, 1) \\ 0, & \mathbb{R}/(-1, 1), \end{cases}$$

να άνηκε στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να ισχύει αφού $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \delta_{\{-1\}} - \delta_{\{1\}}$, μια κατανομή που δεν μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης. □

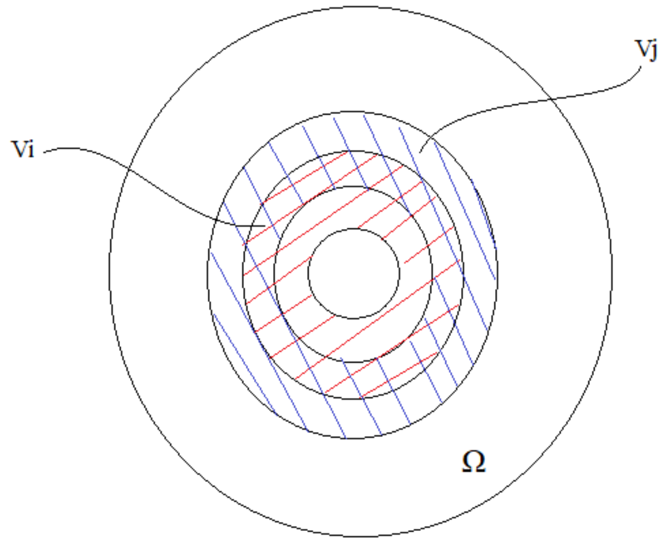
Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας χώρων Sobolev, καθώς μας επιτρέπει να προσεγγίζουμε συναρτήσεις Sobolev με ομαλές συναρτήσεις. Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την απόδειξη, καθώς η εξοικίωση με τις τεχνικές που χρησιμοποιεί θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση της υπόλοιπης εργασίας.

Θεώρημα 2.3.1.4. (Meyers-Serin) Για $1 \leq p < +\infty$, ο χώρος $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Έστω ακόμα οικογένεια $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ανοιχτών υποσυνόλων του Ω με

$$U_i := \Big\{ x \in \Omega \ : \ dist(x, \partial\Omega) > 1/i \Big\}.$$

Σχήμα 1: Λωρίδες V_i και V_j με $j = i + 1$.



Κατασκευάζουμε τότε το ανοιχτό κάλυμμα από λωρίδες $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του Ω ως εξής (βλέπε Σχήμα 1):

$$V_0 \subset\subset \Omega$$

$$V_i = U_{i+3} \cap (\overline{U}_{i+1})^c, \quad i = 1, 2, 3, ...$$

Έυκολα παρατηρεί κανείς ότι $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i = \Omega$. Έστω τώρα $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ να είναι ένα partision of unity του καλύμματος $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Οι συναρτήσεις ϕ_i ικανοποιούν: $\phi_i \in C_c^\infty(V_i)$, $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$. Τότε $u(x) = 1\, u(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x)u(x)$. Για δοσμένο $\epsilon > 0$, θα κατασκευάσουμε $\phi \in C^\infty(\Omega)$ τέτοια ώστε $\|u - \phi\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon$.

Για $i \in \mathbb{N}$, θα επικεντρωθούμε στην συνάρτηση $\phi_i u$. Έχουμε ότι $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in W^{1,p}(V_i)$ και $\phi_i \in D(V_i)$ άρα $\phi_i u \in W^{1,p}(V_i)$. Επίσης $spt(\phi_i u) \subseteq spt(\phi_i)$ και άρα τελικά $\phi_i u \in W_0^{1,p}(V_i)$. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή επέκτασης p της Πρότασης 2.3.1.1., επεκτείνουμε την ϕu σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^N$. Χρησιμοποιούμε τώρα την μέθοδο της συνέλιξης και για αρκετά μεγάλο $n(i) \in \mathbb{N}$ (προκειμένου να μην βγούμε έξω από το χωρίο Ω) έχουμε

$$\|\rho_{n(i)} * (\bar{\phi_i u}) - \bar{\phi_i u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Λόγω του ότι ο τελεστής επέκτασης p είναι ισομετρία, προκύπτει ότι

$$\|\rho_{n(i)} * (\phi_i u) - \phi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{2^{i+1}}. \tag{3.1}$$

Τώρα ορίζουμε την συνάρτηση

$$\phi := \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{n(i)} * (\phi_i u).$$

Τότε ισχύει ότι $\phi \in C^{\infty}(\Omega)$. Πράγματι, σε κάθε $V \subset\subset \Omega$ ανοιχτό, επιβιώνουν το πολύ πεπερασμένοι όροι του αθροίσματος $\Big(V \subset K$ συμπαγές. Τότε $K \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} V_i$ και άρα $\phi_i u(x) = 0, \ \forall i \geq n$ και $x \in V \subseteq K \Big)$. Επομένως για κάθε $V \subset\subset \Omega$ έχουμε

$$\|u - \phi\|_{W^{1,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\rho_{n(i)} * (\phi_i u) - \phi_i u\|_{W^{1,p}(V)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|\rho_{n(i)} * (\phi_i u) - \phi_i u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

και από την σχέση (3.1) προκύπτει ότι

$$\Rightarrow \|u - \phi\|_{W^{1,p}(V)} \leq \epsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \epsilon.$$

Παίρνοντας τώρα το supremum πάνω σε όλα τα ανοιχτά $V \subset\subset \Omega$, λόγω ομαλότητας του μέτρου Lebesgue, έχουμε το ζητούμενο. ■

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε το πρώτο θεώρημα συμπάγειας Sobolev για τον $W_0^{1,p}(\Omega)$. Στη συνέχεια θα δούμε και άλλα, πιο γενικευμένα θεωρήματα συμπάγειας και εμφύτευσης, τα οποία παίζουν κομβικό ρόλο στην θεωρία διαφορικών εξισώσεων, στην θεωρία μεταβολών αλλά και πιο συγκεκριμένα στην συνέχεια της παρούσας εργασίας.

Θεώρημα 2.3.1.5. (**Rellich-Kondrakov**) Έστω Ω φραγμένο. Τότε η κανονική εμφύτευση $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής.

Υπόδειξη : Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή επέκτασης p της πρότασης !!!, για να πάμε από τον $W_0^{1,p}(\Omega)$ στον $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Ο p είναι γραμμική ισομετρία. Η κανονική εμφύτευση $j : W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ καθώς και ο τελεστής $r : L^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ με $r(u) = u|_{\Omega}$ εύκολα βλέπει κανείς ότι είναι γραμμικοί και συνεχείς τελεστές. Σχηματικά έχουμε

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{p}} W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{\text{j}} L^p(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{\text{r}} L^p(\Omega).$$

Έστω B η μοναδιαία μπάλα του $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ο τελεστής r είναι συνεχής, επομένως απεικονίζει συμπαγή σε συμπαγή υποσύνολα. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $j \circ p\,(B)$ είναι σχετικά συμπαγές στον $L^p(\mathbb{R}^N)$. Για το σκοπό αυτό πρέπει κανείς να χρησιμοποιήσει το θεώρημα συμπάγειας Kolmogorov, βλέπε [4]. ■

2.3.2 Θεώρημα επέκτασης Sobolev

Παραπάνω παρουσιάσαμε μια σειρά από αποτελέσματα για τον χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ χωρίς να κάνουμε καμία υπόθεση ομαλότητας για το σύνορο $\partial\Omega$, επειδή μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε την ύπαρξη του τελεστή επέκτασης p της Πρότασης 2.3.1.1.. Όταν δουλεύουμε με τον χώρο $W^{1,p}(\Omega)$ η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη και σε καμία περίπτωση δεν μπορούμε να αποφύγουμε κάποια υπόθεση ομαλότητας για το σύνορο $\partial\Omega$. Και σε αυτήν την περίπτωση όμως, ο αντίστοιχος τελεστής επέκτασης που θα ορίσουμε θα αποτελέσει βασικό συστατικό της θεωρίας του χώρου $W^{1,p}(\Omega)$.

Συμβολισμός : Για $x \in \mathbb{R}^N$ γράφουμε $x = (x', x_N)$ με $x' = (x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ και συμβολίζουμε ως

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N \ : \ x_N > 0\},$$

$$Q_+ = B(0,1) \cap \mathbb{R}^N_+,$$

$$B_0 = B(0,1) \cap \mathbb{R}^{N-1} = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N \ : \ |x'| \leq 1 \ \& \ x_N = 0\,\}$$

Ορισμός 2.3.2.1. Λέμε ότι το Ω είναι κλάσης C^1 αν για κάθε $x \in \partial\Omega$, υπάρχει γειτονιά G του x και C^1-διαφορομοσφισμός $\phi \, : \, B(0,1) \to G$ τέτοιος ώστε

$$\phi(Q_+) = G \cap \Omega,$$

$$\phi(B_0) = G \cap \partial\Omega.$$

Για το υπόλοιπο της συγκεκριμένης ενότητας θεωρούμε ότι το Ω είναι κλάσης C^1. Η παραδοχή αυτή θα μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε καλύτερα τις συναρτήσεις *Sobolev*, ξεκινώντας με ένα αποτέλεσμα επέκτασης αντίστοιχο με το 2.3.1.1. .

Λήμμα 2.3.2.1. Αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και $\phi : \Omega' \to \Omega$, C^1 διαφορομορφισμός, τότε $u \circ \phi \in W^{1,p}(\Omega')$ και $\|u \circ \phi\|_{W^{1,p}(\Omega')} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Θεώρημα 2.3.2.1. Υπάρχει τελεστής επέκτασης $P \, : \, W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ γραμμικός και φραγμένος. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$i) \ Pu|_\Omega \, = \, u,$$

$$ii) \ \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \, \leq \, C_1 \, \|u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$iii)\ \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Υπόδειξη : Και η συγκεκριμένη απόδειξη γίνεται σε δύο βήματα. Πρώτο : Δείχνουμε ότι υπάρχει γραμμικός και φραγμένος τελεστής ανάκλασης $P : W^{1,p}(Q_+) \to W^{1,p}(Q)$. Τον τελεστή αυτόν θα τον ορίσουμε ως

$$Pu(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N), & x_N > 0 \\ u(x', -x_N), & x_N < 0. \end{cases}$$

Δεύτερο : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ φραγμένο και άρα $\bar{\Omega}$ συπαγές. Τότε μπορώ να βρώ οικογένοια $(G_i)_{i=0}^k$ ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^N$ με $\bar{\Omega} \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} G_i$ και $\bar{G}_0 \subset \Omega$. Επειδή το Ω είναι κλάσης C^1, για κάθε $i \in \{1, 2, .., k\}$ ορίζω $\phi_i : B(0,1) \to G_i$ διαφορομορφισμό.

Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και $(\alpha_i)_{i=0}^k$ να είναι ένα partision of unity του καλύμματος $(G_i)_{i=0}^k$. Οι συναρτήσεις α_i ικανοποιούν: $\alpha_i \in C_c^\infty(G_i)$, $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$. Τότε $u(x) = 1\, u(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(x) u(x)$.

Για $i \in \{1, 2, .., k\}$, θεωρούμε την $\phi_i|_{Q_+} : Q_+ \to G_i \cap \Omega$. Αφού $u \in W^{1,p}(G_i \cap \Omega)$, από το Λήμμα 2.3.2.1. παίρνουμε ότι $u \circ \phi_i|_{Q_+} \in W^{1,p}(Q_+)$. Τότε από το πρώτο βήμα προκύπτει ότι $P(u \circ \phi_i|_{Q_+}) \in W^{1,p}(Q)$, όπου P ο τελεστής ανάκλασης. Ορίζουμε $w_i = P(u \circ \phi_i|_{Q_+}) \circ \phi^{-1}$ και παρατηρούμε ότι $w_i|_{G_i \cap \Omega} = u$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 2.3.2.1. παίρνουμε ότι $w_i \in W^{1,p}(G_i)$. Τώρα ορίζουμε

$$\bar{u}_i = \begin{cases} \alpha_i w_i, & G_i \\ 0, & \mathbb{R}^N / G_i. \end{cases}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.1.1. έχουμε ότι $\bar{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ αφού $a_i w_i \in W_0^{1,p}(G_i)$. Τέλος, μένει να ελέγξουμε ότι ο τελεστής επέκτασης, τον οποίο θα συμβολίσουμε επίσης με P,

$$P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

$$u \mapsto P(u) = \sum_{i=0}^{k} \bar{u}_i,$$

είναι ο ζητούμενος. ■

Ο τελεστής επέκτασης μας βοηθάει να αποδείξουμε μια σειρά από αποτελέσματα, τα οποιά αναφέρουμε παρακάτω.

Πρόταση 2.3.2.1. Ο χώρος

$$D(\bar{\Omega}) := \Big\{ u|_{\Omega} \ : \ u \in D(\mathbb{R}^N) \Big\},$$

είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Θεώρημα 2.3.2.2. Για $1 \leq p \leq +\infty$ η κανονική εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής.

Πρόταση 2.3.2.2. (Poincare-Wirtinger inequality) Αν το Ω είναι επιπλέον και συνεκτικό, υπάρχει σταθερά $C_p > 0$ τέτοια ώστε

$$\Big\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x)dx \Big\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|Du\|_{L^p(\Omega)},$$

για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

2.3.3 Θεωρήματα ίχνους και εμφύτευσης Sobolev

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την συμπεριφορά μιας συνάρτησης στο σύνορο του πεδίου ορισμού της. Κάτι τέτοιο όμως καθίστανται ιδιαίτερα δύσκολο σε μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$, καθώς πρώτον είναι ορισμένη σχεδόν παντού (και όχι παντού) στο Ω και δεύτερον το ολοκλήρωμα Lebesgue της u στο $\partial\Omega$ είναι μηδέν καθώς $\mathcal{L}^N(\partial\Omega) = 0$. Τη δυσκολία αυτή έρχεται να ξεπεράσει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.3.1. (Trace Theorem) Για $1 \leq p < +\infty$ ο χώρος $D(\bar{\Omega})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$ και ο τελεστής

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \ D(\bar{\Omega}) &\to L^p(\partial\Omega) \\ u \ &\mapsto \ \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

είναι συνεχής. Επειδή ο χώρος $L^p(\partial\Omega)$ είναι χώρος Banach, ο τελεστής γ_0 μπορεί να επεκταθεί σε έναν γραμμικό και φραγμένο τελεστή, ο οποίος επίσης θα συμβολίζεται με γ_0, από τον $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^p(\partial\Omega)$. Ο τελεστής

$$\gamma_0 : \ W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

καλείται τελεστής ίχνους μηδενικής τάξης.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\gamma_0 : \ D(\bar{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ με $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$. Ο τελεστής γ_0 είναι καλά ορισμένος αφού $u \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ και άρα η u ορίζεται κανονικά πάνω στο $\partial\Omega$. Έστω τώρα $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Για $x \in \partial\Omega$ υποθέτω αρχικά ότι υπάρχει περιοχή G του x με $G \subset \mathbb{R}^{N-1}$.

Για $r > 0$ επιλέγω τις μπάλες $B(x,r)$ και $\bar{B}(x,r/2)$. Έστω συνάρτηση $J \in D(B)$ με $J \geq 0$ στο B και $J = 1$ στο $\bar{B}$. Τότε αν $\Gamma = G \cap \bar{B} \subset \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\int_\Gamma |u|^p dx' = \int_\Gamma J|u|^p dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} J|u|^p dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Big(- \int_0^\infty \frac{\partial J|u|^p}{\partial x_N} dx_N \Big) dx' =$$

$$= - \int_{B_+} \frac{\partial J|u|^p}{\partial x_N} dx = - \int_{B_+} \Big(|u|^p \frac{\partial J}{\partial x_N} + p|u|^{p-1} sgn(u) u_{x_N} J \Big) dx$$

και κάνοντας χρήση της ανισώτητας Young, τελικά προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ για την οποία

$$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq C \int_{B_+} \Big(|u|^p + |Du|^p \Big) dx.$$

Έστω τώρα ότι για κάποιο $x \in \partial\Omega$ δεν υπάρχει περιοχή G όπως παραπάνω. Τότε το γεγονός ότι το Ω είναι κλάσης C^1 μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον διαφορομορφισμό ϕ και να αναχθούμε στην πρώτη περίπτωση για την συνάρτηση $u \circ \phi$. Στην συνέχεια, κάνοντας κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων, παίρνουμε ότι

$$\int_\Gamma |u|^p dS \leq C \int_\Omega \Big(|u|^p + |Du|^p \Big) dx,$$

με $\Gamma \subset \partial\Omega$ ανοιχτό. Λόγω συμπάγειας του $\overline{\partial\Omega}$ περνάμε τελικά στο ζητούμενο, ότι δηλαδή

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Ο τελεστής ίχνους μας δίνει την δυνατότητα να αποδείξουμε μια σειρά από πολύ σημαντικά αποτελέσματα. Κάποια από αυτά αναφέρουμε παρακάτω.

Πρόταση 2.3.3.1. Για $1 \leq p < +\infty$ ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ταυτίζεται με τον πυρήνα του τελεστή ίχνους γ_0, δηλ.

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{1,p}(\Omega) \ : \ \gamma_0(u) = 0 \Big\}.$$

Θεώρημα 2.3.3.2. (Green's formula) Για κάθε $u, v \in H^1(\Omega)$ και για κάθε $1 \leq i \leq N$ έχουμε

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(\vec{n_i}\vec{\epsilon_i}) d\sigma.$$

Πρόταση 2.3.3.2. Ο τελεστής ίχνους γ_0 είναι γραμμικός, φραγμένος και επί από τον $H^1(\Omega)$ στον $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Όπως είδαμε στο θεώρημα !!!, κάθε συνάρτηση του χώρου $W^{1,p}(a,b)$ έχει συνεχή αντιπρόσωπο. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει γενικά για τον $W^{1,p}(\Omega), \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ για $N \geq 2$. Είναι εύλογο λοιπόν να αναρωτηθεί κανείς, αν η σχέση των m, N και p επιρρεάζει το αποτέλεσμα αυτό. Η απάντηση είναι ναι και δίνεται μέσω του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.3.3.3. (Sobolev embedding theorem) Για $1 \leq p \leq +\infty$ ισχύουν οι παρακάτω συνεχής εμφυτεύσεις :
$i)$ Αν $1 \leq p < N$, έχουμε την συμπαγή εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ με $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.
$ii)$ Αν $p = N$, έχουμε την εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ για κάθε $1 \leq q < +\infty$.
$iii)$ Αν $p > N$ έχουμε την εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$. Πιο συγκεκριμένα $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,a}(\Omega)$ με $a = 1 - \dfrac{N}{p}$.

Το θεώρημα εμφύτευσης Sobolev μας επιτρέπει να γενικεύσουμε την Πρόταση 2.3.2.2.. Το αποτέλεσμα που προκύπτει θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο για την απόδειξη του σημαντικότερου αποτελέσματος της εργασίας, την ύπαρξη δηλαδή λύσης για το μοντέλο $TV - TV^2$ το οποίο περιγράφεται αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο.

Πρόταση 2.3.3.3. Αν το Ω είναι επιπλέον συνεκτικό, υπάρχει σταθερά $C_{p,N,\Omega} > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $1 \leq p < +\infty$, ισχύει η εξής ανισώτητα :

$$\Big\| u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx \Big\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq C_{p,N,\Omega} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $M(u) = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u(x)dx$ και παρατηρούμε ότι $u - M(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.3.3. (i) παίρνουμε μια σταθερά $C1_{p,N,\Omega} > 0$ για την οποία ισχύει

$$\|u - M(u)\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq C1_{p,N,\Omega}\|u - M(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C1_{p,N,\Omega}\Big[\|u - M(u)\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\Big]. \tag{3.2}$$

Κάνοντας τώρα χρήση της Πρότασης 2.3.2.2. παίρνουμε

$$\|u - M(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C2_{p,N,\Omega}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις ανισότητες (3.2) και (3.3), προκύπτει ότι

$$\|u - M(u)\|_{L^{p*}(\Omega)} \leq C_{p,N,\Omega}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. ■

2.4 Μέθοδος χαλάρωσης σε πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε την αρχή χαλάρωσης σε έναν μετρικοποιήσιμο χώρο, ή πιο γενικά, σε έναν πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο X. Για δοσμένο $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, επιθυμούμε να εφαρμόσουμε την άμεση μέθοδο της θεωρίας μεταβολών στο κάτω ημισυνεχές envelope $sc(F)$ του συναρτησιακού F, έτσι ώστε $\inf_X F = \min_X sc(F)$. Μια τέτοια μεθοδολογία είναι πάρα πολύ σημαντική σε μεγάλο εύρος εφαρμογών αλλά και συγκεκριμένα της εφαρμογής που παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία. Θυμίζουμε ότι το κάτω ημισυνεχές envelope της F ορίζεται ως

$$sc(F)(x) := \sup\Big\{G(x)\,,\ G : X \to \bar{\mathbb{R}},\ \text{κάτω ημισυνεχές},\ G(y) \leq F(y),\ \forall y \in X\Big\}.$$

Η διαδικασία αυτή οδηγεί στην λογική των γενικευμένων λύσεων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\inf_X F$. Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας ένα λήμμα το οποίο θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στις αποδείξεις της υποενότητας.

Λήμμα 2.4.1. Έστω $(\alpha_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ να είναι μια ακολουθία ενός πρώτου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου X, τέτοια ώστε

(i) $\lim\limits_{n} \alpha_{m,n} = a_m$,
(ii) $\lim\limits_{m} \alpha_m = \alpha$.

Τότε υπάρχει αύξουσα απεικόνιση $n \mapsto m(n)$ τέτοια ώστε

$$\lim_n \alpha_{m(n),n} = \alpha.$$

Τότε ισχύουν τα εξής σημαντικά αποτελέσματα :

Πρόταση 2.4.1. Έστω $F : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ ένα επεκταμένο πραγματικό συναρτησιακό σε έναν μετρικοποιήσιμο χώρο (X, d), ή γενικότερα σε έναν πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο. Ορίζουμε το επεκταμένο πραγματικό συναρτησιακό
$\bar{F} : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ως

$$\bar{F}(x) := \inf\{\liminf_n F(x_n) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, x_n \to x\}. \tag{3.4}$$

Τότε το συναρτησιακό $\bar{F}$ χαρακτηρίζεται σε κάθε $x \in X$ από τους ακόλουθους ισχυρισμούς :
$i)$ $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n \to x$, $\bar{F}(x) \leq \liminf\limits_n F(x_n)$,
$ii)$ $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n \to x$ και $\bar{F}(x) \geq \limsup\limits_n F(y_n)$.

Απόδειξη. Αφού για κάθε $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n \to x$ ισχύει

$$\bar{F}(x) \leq \liminf_n F(y_n) \leq \limsup_n F(y_n),$$

οι υποθέσεις $i)$ και $ii)$ είναι ισοδύναμες με τις υποθέσεις $i)$ και $ii)'$ όπου
$ii)'$ $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n \to x$ και $\bar{F}(x) = \lim\limits_n F(y_n)$.
Κάθε συναρτησιακό $\bar{F}$ που ικανοποιεί τις $i)$ και $ii)'$ αυτόματα προκύπτει ότι

$$\bar{F}(x) := \inf\{\liminf_n F(x_n) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\, x_n \to x\}.$$

Επομένως μένει να δείξουμε ότι το συναρτησιακό που ορίζεται από την Σχέση (3.4) ικανοποιεί τις $i)$ και $ii)'$ (η (i) προκύπτει εξόρισμού άρα αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί την $(ii)')$. Από τον ορισμό του infima, για όλα τα $m \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει ακολουθία $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$

του X με $\lim_n x_{n,m} = x$ και τέτοια ώστε
Αν $\bar{F}(x) \neq -\infty$, $\bar{F}(x) \leq \liminf_n F(x_{m,n}) \leq \bar{F}(x) + 1/m$,
Αν $\bar{F}(x) = -\infty$, $\bar{F}(x) \leq -m$.

Τότε $\lim_m \lim_n F(x_{m,\sigma_m(n)}) = \bar{F}(x)$, όπου $\sigma_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια αύξουσα απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\liminf_n F(x_{m,n}) = \lim_n F(x_{m,\sigma_m(n)}).$$

Τώρα, κάνοντας χρήση του Λήμματος 2.4.1. στην ακολουθία $(x_{m,\sigma_m(n)}, F(x_{m,\sigma_m(n)}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ του μετρικοποιήσιμου χώρου $X \times \bar{\mathbb{R}}$, παίρνουμε μια αύξουσα απεικόνιση $n \mapsto m(n)$ τέτοια ώστε

$$\lim_n F(x_{m(n),\sigma_{m(n)}(n)}) = \lim_m \lim_n F(x_{m,\sigma_m(n)}) = \bar{F}(x),$$

και

$$\lim_n x_{m(n),\sigma_{m(n)}(n)} = \lim_m \lim_n x_{m,\sigma_m(n)} = x.$$

Η ακολουθία $y_n = x_{m(n),\sigma_{m(n)}(n)}$ είναι η ζητούμενη της υπόθεσης $ii)'$. ■

Θεώρημα 2.4.1. Το συναρτησιακό $\bar{F}$ που ορίστηκε από την Σχέση (3.4), είναι το κάτω ημισυνεχές envelope της F, δηλ.

$$\bar{F} = sc(F).$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε τα εξής :
a. $\bar{F} \leq F$,
b. $\bar{F}$ κάτω ημισυνεχές,
c. $G : X \to \bar{\mathbb{R}}$, G κάτω ημισυνεχές και $G \leq F \Rightarrow G \leq \bar{F}$.

Για το (a) αρκεί να πάρουμε την σταθερή ακολουθία $x_n = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ στην Σχέση (3.4).

Για το (b). Θεωρούμε ακολουθία $(y_m)_{m\mathbb{N}} \subseteq X$ με $y_m \to y \in X$. Έστω ότι $(y_{\sigma(m)})_{m\mathbb{N}}$ να είναι μια ακολουθία για την οποία

$$\lim_m \bar{F}(y_{\sigma(m)}) = \liminf_m \bar{F}(y_m).$$

Για $m \in \mathbb{N}$, εξόρισμού του $\bar{F}(y_{\sigma(m)})$ και κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.4.1.(ii), εξάγουμε μια ακολουθία $(y_{\sigma(m),n})_{n\mathbb{N}}$ με $\lim_n y_{\sigma(m),n} = y_{\sigma(m)}$ τέτοια ώστε

$$\bar{F}(y_{\sigma(m)}) = \lim_n F(y_{\sigma(m),n}) \Rightarrow \lim_m \bar{F}(y_{\sigma(m)}) = \lim_m \lim_n F(y_{\sigma(m),n}).$$

Τότε από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\liminf_m \bar{F}(y_m) = \lim_m \lim_n F(y_{\sigma(m),n}).$$

Κάνοντας τώρα εφαρμογή του Λήμματος 2.4.1. στην ακολουθία $(y_{\sigma(m),n}, F(y_{\sigma(m),n}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ του μετρικοποιήσιμου χώρου $X \times \bar{\mathbb{R}}$, παίρνουμε μια αύξουσα απεικόνιση $n \mapsto m(n)$ τέτοια ώστε

$$\lim_n F(y_{\sigma(m(n)),n}) = \liminf_m \bar{F}(y_m)$$

και

$$\lim_n y_{\sigma(m(n)),n} = y.$$

Τότε εξόρισμού του $\bar{F}(y)$,

$$\liminf_m \bar{F}(y_m) = \lim_n F(y_{\sigma(m(n)),n}) \geq \liminf_n F(y_{\sigma(m(n)),n}) \geq \bar{F}(y).$$

Για το (c). Είναι άμεσο καθώς για κάθε τέτοιο G και για ακολουθία $(x_n)_{n\mathbb{N}} \subseteq X$ με $x_n \to x \in X$ έχουμε ότι

$$G(x) \leq \liminf_n G(x_n) \leq \liminf_n F(x_n).$$

Παίρνοντας το infimun προκύπτει το ζητούμενο. ■

Από εδώ και στο εξής είτε γράφουμε $sc(F)$ είτε $\bar{F}$ θα εννοούμε το ίδιο συναρτησιακό, εφόσον βέβαια ο χώρος X είναι μετρικοποιήσιμος ή πρώτος αριθμήσιμος. Οι δύο ορισμοί δεν ταυτίζονται σε τυχαίο τοπολογικό χώρο.

Στο επόμενο θεώρημα αναφέρουμε την αρχή χαλάρωσης σε μετρικοποιήσιμους ή πρώτους αριθμήσιμους τοπολογικούς χώρους.

Θεώρημα 2.4.2. Έστω $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ένα επεκταμένο πραγματικό συναρτησιακό σε έναν μετρικοποιήσιμο χώρο (X, d), ή γενικότερα, σε έναν πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο. Υποθέτω ότι υπάρχει ακολουθία ελαχιστοποίησης $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ τέτοια ώστε το $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι σχετικά συμπαγές στον X. Τότε

(i) $\inf_X F = \min_X sc(F)$,

(ii) κάθε σημείο συσσώρευσης $\bar{x}$ του S είναι λύση του $\min_X sc(F)$, δηλ., $sc(F)(\bar{x}) = \min_X sc(F)$.

Απόδειξη. Έστω $\bar{x}$ ένα σημείο συσσώρευσης του S και $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με $x_{\sigma(n)} \to \bar{x}$. Τότε από την Πρόταση 2.4.1.(i), έχουμε

$$sc(F)(\bar{x}) \leq \liminf_n F(x_{\sigma(n)}) = \inf_X F.$$

Έστω τώρα $x \in X$. Από την Πρόταση 2.4.1.(ii), υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ με $y_n \to x$ τέτοια ώστε

$$sc(F)(x) \geq \limsup_n F(y_n).$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$sc(F)(\bar{x}) \leq \liminf_n F(x_{\sigma(n)}) = \inf_X F \leq \limsup_n F(y_n) \leq sc(F)(x). \tag{3.5}$$

Αφού λοιπόν $sc(F)(\bar{x}) \leq cl(F)(x)$, $\forall x \in X$ συμπεραίνουμε ότι $sc(F)(\bar{x}) = \min_X sc(F)$. Παίρνωντας τώρα $x = \bar{x}$ στην Σχέση (3.5), τελικά

$$\inf_X F = sc(F)(\bar{x}) = \min_X sc(F). \qquad \blacksquare$$

Η παραπάνω τεχνική χαλάρωσης θα αποτελέσει το βασικό μας εργαλείο στην απόδειξη της ύπαρξης λύσης στον μοντέλο $TV - TV^2$, το οποίο παρουσιάζεται αναλυτικά στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

3 Οι χώροι συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης $BV(\Omega)$

Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης, συμβ. $BV(\Omega)$, κατέχει κεντρικό ρόλο στην μοντελοποίηση και την αντιμετώπιση μεγάλου αριθμού προβλημάτων της φυσικής, της μηχανικής και της επεξεργασίας εικόνας (image processing) με ένα εκτών οποίων θα ασχοληθούμε και στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας. Ιδιαίτερα σε προβλήματα επεξεργασίας εικόνας, οι συναρτήσεις που ανήκουν στον $BV(\Omega)$, επιτρέπεται να έχουν ασυνέχειες με ¨άλματα¨, οι οποίες ερμηνεύονται ως αιχμηρές ακμές στις εικόνες. Ακόμα όμως και σε προβλήματα που προκύπτουν από την θεωρία πλαστικότητας, την μελέτη ρωγμών και σχισμών, την μηχανική των υλικών, την ρευστομηχανική κ.α., οι λύσεις τους παρουσιάζουν ασυνέχειες κατά μήκος επιφανειών χαμηλότερης διάστασης. Οι κατά κατανομή παράγώγοι τους είναι πλέον μέτρα και οι λύσεις αυτές δεν μπορούν να βρεθούν στους κλασσικούς χώρους *Sobolev*. Επομένος, η κλασσική θεωρία των χώρων *Sobolev* πρέπει να συμπληρωθεί με τους νέους χώρους $BV(\Omega)$ και $SBV(\Omega)$ (με τον τελευταίο δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία, μπορεί κανείς όμως να ανατρέξει στο [1]).

3.1 Ορισμός,συγκλίσεις και βασικά αποτελέσματα.

Στο κεφάλαιο αυτό το Ω θα είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ας υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο (βλέπε ενότητα 2.2.) ότι ο χώρος $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, που ορίζεται ως ο χώρος όλων των $\mathbb{R}^d - Borel$ μέτρων στο Ω, είναι επίσης, σύμφωνα με την θεωρία του Riesz, ο δυϊκός του χώρου $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$, όταν ο τελευταίος εφοδιάζεται με την ομοιόμορφη νόρμα $\|.\|_\infty$. Ας σημειώσουμε επίσης ότι ο $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον χώρο $\mathcal{M}^d(\Omega)$ και τότε: $\mu = (\mu_1, ..., \mu_d) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \mu_i \in C_0^{'}(\Omega),\ i = 1, .., d$.

Ορισμός 3.1.1. Έστω $u \in L^1(\Omega)$. Λέμε ότι η u είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο Ω, δηλ. $u \in BV(\Omega)$, αν η κατά κατανομή παράγωγός της Du αντιπροσωπεύεται από ένα πεπερασμένο $\mathbb{R}^d - Radon$ μέτρο στο Ω, (το οποίο επίσης θα συμβολίζεται με Du). Δηλαδή αν,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \psi D_i u, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1, ..., d$$

για κάποιο $\mathbb{R}^d - Radon$ μέτρο $Du = (D_1 u, ..., D_d u)$ στο Ω.

Από τα παραπάνω προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός του χώρου $BV(\Omega)$, ο οποίος αναδεικνύει την αντίληψη του χώρου $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ως τον δυϊκό του χώρου $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $u \in L^1(\Omega)$. Λέμε ότι $u \in BV(\Omega)$ αν και μόνο αν

$$\|Du\| = \sup\Big\{\langle Du, \psi\rangle :\ \psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_\infty \le 1\Big\} < \infty,$$

όπου Du η κατά κατανομή παράγωγος της u στο Ω.

Σύμφωνα με την διανυσματική μορφή του θεωρήματος αναπαράστασης Riesz-Alexandroff, Θεώρημα 2.2.2., η νόρμα $\|Du\|$ ταυτίζεται με την την συνολική μάζα $|Du|(\Omega) = \int_\Omega |Du|$ της συνολικής μεταβολής $|Du|$ του μέτρου Du. Έστω $u \in L^1(\Omega)$, τότε ορίζουμε την συνολική μεταβολή της u στο Ω ως εξής

$$TV(u) := \sup\Big\{\int_\Omega u\, div\psi\, dx :\ \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_\infty \le 1\Big\}.$$

Στο παρακάτω θεώρημα φαίνεται η σχέση των ποσοτήτων $|Du|(\Omega)$ και $TV(u)$, όταν $u \in BV(\Omega)$.

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $u \in L^1(\Omega)$. Τότε η $u \in BV(\Omega)$ αν και μόνο αν $TV(u) < \infty$. Κατά συνέπεια, $TV(u) = |Du|(\Omega)$.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 3.1.2.. Για το αντίστροφο υποθέτω ότι $TV(u) < \infty$. Τότε εξόρισμού έχουμε ότι

$$\Big|\int_\Omega u\, div\psi\, dx\Big| \le TV(u), \quad \forall \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

με $\|\psi\|_\infty \le 1$. Τότε άμεσα παίρνουμε ότι

$$\Big|\int_\Omega u\, div\psi\, dx\Big| \le TV(u)\|\psi\|_\infty, \quad \forall \psi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d). \tag{3.1}$$

Ορίζουμε γραμμικό τελεστή

$$F :\ C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$$
$$\psi \mapsto \int_\Omega u\, div\psi\, dx$$

και τότε από την (3.1) έχουμε ότι ο F είναι συνεχής με $\|F\| \le TV(u)$. Λόγω της πυκνότητας του $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ στον $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$, ο τελεστής F έχει μοναδική συνεχή επέκταση $\tilde{F} :\ C_0(\Omega, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ με $\|\tilde{F}\| = \|F\| \le TV(u)$ και $\tilde{F}|_{C_c^1} = F$. Τότε από το θεώρημα αναπαράστασης *Riesz*, Θεώρημα 2.2.2., υπάρχει ένα $\mathbb{R}^d - Radon$ μέτρο $\mu = (\mu_1, .., \mu_d)$ με $|\mu|(\Omega) = \|\tilde{F}\|$ και

$$\tilde{F}(\psi) = \int_\Omega \psi d\mu, \quad \forall \psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Επομένως

$$\langle Du, \psi \rangle = -\int_\Omega u\, div\psi\, dx = -F(\psi) = \int_\Omega \psi d(-\mu) = \langle -\mu, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

και άρα $u \in BV(\Omega)$ με $Du = -\mu$ και $|Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega) = \|\tilde{F}\| \le TV(u) < \infty$. ■

Μπορούμε στον Ορισμό 3.1.1. να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις του $Lip_c(\Omega)$ αντί για δοκιμαστικές συναρτήσεις. Πράγματι, έστω $u \in BV(\Omega)$ και $\psi \in Lip_c(\Omega)$. Τότε για αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ θεωρούμε $\psi * \rho_\epsilon$ τα $mollifiers$ της ψ, και τότε

$$\psi * \rho_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega),$$

και

$$\langle D_i u, \psi * \rho_\epsilon \rangle = -\langle u, \frac{\partial(\psi * \rho_\epsilon)}{\partial x_i} \rangle \Rightarrow \int_\Omega (\psi * \rho_\epsilon) D_i u = -\int_\Omega u \frac{\partial(\psi * \rho_\epsilon)}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, .., d.$$

Όταν $\epsilon \to 0$, έχουμε ότι $\psi * \rho_\epsilon \to \psi$ ομοιόμορφα και $\dfrac{\partial(\psi * \rho_\epsilon)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} * \rho_\epsilon \to \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}$ σχεδόν παντού στο Ω. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του $Lebesque$, παίρνουμε ότι

$$\int_\Omega \psi\, D_i u = -\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \quad i = 1, .., d. \qquad \square$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym, Θεώρημα 2.2.1., υπάρχει $\nabla u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ και μέτρο $D_s u$, κάθετο στο $d-$διάστατο μέτρο $Lebesque$ $\mathcal{L}^d|_\Omega$ περιορισμένο στο Ω, τέτοια ώστε

$$Du = \nabla u\, \mathcal{L}^d|_\Omega + D_s u.$$

Κατά συνέπεια, ο $W^{1,1}(\Omega)$ είναι υπόχωρος του $BV(\Omega)$ και $u \in W^{1,1}(\Omega)$ αν και μόνο αν $Du = \nabla u\, \mathcal{L}^d|_\Omega$. Ο χώρος $BV(\Omega)$ εφοδιάζεται με την ακόλουθη νόρμα, η οποία επεκτείνει την κλασσική νόρμα του $W^{1,1}(\Omega)$:

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Τώρα θα ορίσουμε δύο ασθενής συγκλίσεις στον $BV(\Omega)$. Η πρώτη είναι αρκετά ασθενής για να εξασφαλίσει την συνέχεια του τελεστή ίχνους, όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.2., αλλά αρκετή για να εξασφαλίσει την συμπάγεια στον χώρο $BV(\Omega)$. Η δεύτερη είναι μια ενδιάμεση σύγκλιση ανάμεσα στην πρώτη και την ισχυρή σύγκλιση και σχετίζεται με την νόρμα. Η σύγκλιση αυτή, την οποία θα ονομάσουμε ενδιάμεση σύγκλιση, μας επιτρέπει επίσης να αποδείξουμε αποτελέσματα εμφύτευσης, παρόμοια με αυτά των χώρων *Sobolev*.

Ορισμός 3.1.3.(Ορισμός ασθενούς* σύγκλισης στον BV) Έστω $u \in BV(\Omega)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$. Λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς* στην u, αν η $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$ και η $(Du_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς* στο Du στον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, δηλαδή αν

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi Du_n = \int_\Omega \phi Du, \quad \forall \phi \in C_0(\Omega).$$

Θεώρημα 3.1.2. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$ τέτοια ώστε να συγκλίνει σε κάποια u στον $L^1(\Omega)$ και $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Du_n| < \infty$.Τότε

$i)$ $u \in BV(\Omega)$ και $\|Du\| \leq \liminf\limits_n \|Du_n\|$
$ii)$ Η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς* στην u στον $BV(\Omega)$.

Απόδειξη. $i)$ Για όλες τις $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ με $\|\phi\|_\infty \leq 1$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \int_\Omega u_n \nabla\phi dx - \int_\Omega u \nabla\phi dx \Big| = \lim_{n\to\infty} \Big| \int_\Omega (u_n - u)\nabla\phi dx \Big|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u||\nabla\phi| dx \leq \|\nabla\phi\|_\infty \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u| dx = 0 \tag{3.2}$$

αφού η ακολουθία $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$. Όμως εξορισμού της $\|Du_n\|$ και της (3.2) έχουμε

$$\int_\Omega u_n \nabla\phi dx \leq \|Du_n\| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \nabla\phi dx \leq \liminf_n \|Du_n\|$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u\nabla\phi dx \leq \liminf_n \|Du_n\|.$$

Από την υπόθεση $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Du_n| < \infty$, και παίρνοντας το *supremum* πάνω σε όλες τις $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ με $\|\phi\|_\infty \leq 1$ προκύπτει ότι

$$\|Du\| \leq \liminf_n \|Du_n\| < \infty.$$

$ii)$ Για όλες τις $\phi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} (Du_n, \phi)_{D'(\Omega)} = - \lim_{n\to\infty} (u_n, \nabla\phi)_{D'(\Omega)} = - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \nabla\phi dx =$$

$$= - \int_\Omega u\nabla\phi dx = (Du, \phi)_{D'(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Έστω τώρα $\psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Από την πυκνότητα του $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ στον $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ παίρνω ακολουθία $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ που συγκλίνει στην ψ ως προς την συνήθη τοπολογία του $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Τότε

$$(Du_n, \psi)_{D'(\Omega)} - (Du, \psi)_{D'(\Omega)} = (Du_n - Du, \psi)_{D'(\Omega)} = (Du_n - Du, \psi - \psi_m + \psi_m)_{D'(\Omega)}$$

$$\leq \|Du_n - Du\| \|\psi - \phi_m\|_\infty + (Du_n, \phi_m)_{D'(\Omega)} - (Du, \phi_m)_{D'(\Omega)}$$

και τώρα από την (3.3) και στέλνοντας αρχικά το m και στην συνέχεια το n στο άπειρο παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} (Du_n, \psi)_{D'(\Omega)} = (Du, \psi)_{D'(\Omega)}, \quad \forall \psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi Du_n = \int_\Omega \psi Du, \quad \forall \psi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^d). \quad \blacksquare$$

Ως συνέπεια της ιδιότητας ημισυνέχειας (i) θα δείξουμε ότι ο χώρος $BV(\Omega)$, εφοδιασμένος με την νόρμα που ορίσαμε παραπάνω, είναι πλήρης χώρος με νόρμα.

Πρόταση 3.1.1. Ο χώρος $\Big(BV(\Omega), \|.\|_{BV(\Omega)}\Big)$ είναι χώρος *Banach*.

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy* ακολουθία του $BV(\Omega)$. Τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|u_q - u_p\|_{BV(\Omega)} = \|u_q - u_p\|_{L^1(\Omega)} + \|Du_q - Du_p\| < \epsilon, \quad \forall q, p \geq N_\epsilon \tag{3.4}$$

και άρα

$$\int_\Omega |Du_q - Du_p| = \|Du_q - Du_p\| < \epsilon, \quad \forall q, p \geq N_\epsilon. \tag{3.5}$$

Από την (3.4) φαίνεται ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *Caushy* ακολουθία του $L^1(\Omega)$. Τότε αφού ο $L^1(\Omega)$ είναι χώρος *Banach*, υπάρχει $u \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$ και άρα

$$\lim_{p\to\infty} (u_p - u_q) = u - u_q, \quad \text{στον} \ \ L^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Από τις (3.5) και (3.6) προκύπτει άμεσα ότι η ακολουθία $(u_p - u_q)_{p\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.2. και άρα

$$\|D(u-u_q)\| \leq \liminf_p \|D(u_p-u_q)\|$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |Du - Du_q| \leq \liminf_p \int_\Omega |Du_p - Du_q|.$$

Όμως από την (3.5) για $q > N_\epsilon$ έχουμε

$$\int_\Omega |Du - Du_q| \leq \liminf_p \int_\Omega |Du_p - Du_q| \leq \epsilon$$

και άρα η $(Du_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς* στο Du στον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. ■

Τώρα θα ορίσουμε μια διαφορετική έννοια ασθενούς σύγκλισης στον χώρο $BV(\Omega)$, η οποία θα μας βοηθήσει να αναπτύξουμε αποτελέσματα παρόμοια με αυτά των χώρων $Sobolev$. Η τροφοδότηση με τέτοιου είδους εργαλεία (πχ το αντίστοιχο $Meyes - Serin$ στον χώρο $BV(\Omega)$), θα μας φανεί πολύ χρήσιμη και στην επόμενη ενότητα της εργασίας και συγκεκριμένα στην απόδειξη ύπαρξης λύσης για το πρόβλημα $TV - TV^2$.

Ορισμός 3.1.4. (Ορισμός ενδιάμεσης σύγκλισης στον BV) Έστω $u \in BV(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$. Λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης, αν η $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$ και η ακολουθία συνολικών μαζών $(|Du_n|(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $|Du|(\Omega)$, δηλαδή αν

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n| = \int_\Omega |Du|.$$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει με βάση το Θεώρημα 3.1.2.(i), ότι όταν η $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$, υπάρχει απώλεια συνολικής μάζας στο όριο. Φαίνεται λοιπόν λογικό να ορίσει κανείς μια έννοια σύγκλισης όπως η παραπάνω, προκειμένου να καλύψει την απώλεια αυτή. Αν $u \in BV(\Omega)$, κάθε συνάρτηση $f \in C_b(\Omega)$ είναι $-|Du|-$ολοκληρώσιμη. Πράγματι,

$$\Big| \int_\Omega f|Du| \Big| \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |Du| < \infty.$$

Η παρακάτω πρόταση παρουσιάζει της σχέση της $narrowly$ σύγκλισης με τις ασθενείς συγκλίσεις που ορίσαμε παραπάνω, και δείχνει ότι η ενδιάμεση σύγκλιση είναι πιο ισχυρή απο την ασθενή* σύγκιλη του χώρου $BV(\Omega)$.

Πρόταση 3.1.2. Έστω $u \in BV(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$. Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

$i)$ $u_n \to u$ με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV(\Omega)$,

$$ii)\begin{cases} u_n \to u \text{ ασθενώς}^* \text{ στον } BV(\Omega) \\ |Du_n|(\Omega) \to |Du|(\Omega), \end{cases}$$

$$iii)\begin{cases} u_n \to u \text{ στον } L^1(\Omega) \\ |Du_n| \to |Du| \text{ με την έννοια της narrowly σύγκλισης στον } \mathcal{M}(\Omega). \end{cases}$$

Απόδειξη. $i) \implies ii)$. Αφού η $u_n \to u$ με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης, εξορισμού έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0 \tag{3.7}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n| = \int_\Omega |Du|. \tag{3.9}$$

Από την (3.9) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $u_n \in BV(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, φαίνεται ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Du_n| < \infty$. Λόγω αυτού και της (3.7), κάνωντας χρήση του Θεωρήματος 3.1.2.(ii), παίρνουμε ότι $u_n \to u$ ασθενώς* στον $BV(\Omega)$. Πάμε τώρα στο $ii) \implies iii)$. Εξορισμού της ασθενούς* σύγκλισης στον $BV(\Omega)$ προκύπτει ότι η $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$. Για να δείξουμε την narrowly σύγκλιση της ακολουθίας $(|Du_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $|Du|$ στον $\mathcal{M}_+(\Omega)$, θα κάνουμε χρήση της Πρότασης 2.2.3.. Αφού $|Du_n|, |Du| \in \mathcal{M}_+(\Omega)$, εν αντιστοιχία με το θεώρημα, θέτουμε $\mu_n = |Du_n|$ και $\mu = |Du|$. Τότε από τον ισχυρισμό (ii) έχουμε

$$\mu_n(\Omega) = \int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du| = \mu(\Omega). \tag{3.10}$$

Αφού η $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$ είναι άμεσο ότι η $u_n \to u$ στον $L^1(U)$ για κάθε $U \subseteq \Omega$ ανοιχτό. Πράγματι

$$\lim_{n\to\infty} \int_U |u_n - u| dx \le \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n - u| dx = 0. \tag{3.11}$$

Επίσης αφού $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n| = \int_\Omega |Du|$ και $u_n \in BV(\Omega),\ \forall n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_U |Du_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Du_n| < \infty. \tag{3.12}$$

Από (3.11) και (3.12) πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.2. με $\Omega = U$ και τελικά προκύπτει ότι

$$\mu(U) = \int_U |Du| \leq \liminf_n \int_U |Du_n| = \liminf_n \mu_n(U). \tag{3.13}$$

Οι σχέσεις (3.10) και (3.13) μας δίνουν το ζητούμενο. Για το $iii) \Longrightarrow i)$, πάλι κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.3., αφού η $|Du_n| \to |Du|$ με την έννοια της narrowly σύγκλισης στον χώρο $\mathcal{M}_+(\Omega)$, προκύπτει ότι $|Du_n|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Επομένως, μαζί με την υπόθεση της L^1 σύγκλισης της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην u, παίρνουμε ότι $u_n \to u$ με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV(\Omega)$. ■

Για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ των δύο ασθενών συγκλίσεων που ορίσαμε στον χώρο $BV(\Omega)$, θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο γίνεται ξεκάθαρο ότι η ενδιάμεση είναι πιο ισχυρή απο την ασθενή* σύγκλιση.

Παράδειγμα 3.1.1. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$u_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 < x \leq 1/n \\ 1, & 1/n < x < 1. \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι $u_n \in W^{1,1}(0,1)$ και άρα $u_n \in BV(0,1)$. Επίσης

$$|Du_n|(0,1) = \|u_n'\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |u_n'(x)|dx = \int_0^{1/n} n dx = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς* στην συνάρτηση $u = 1$ στον $BV(0,1)$, αλλά δεν συγκλίνει στην u με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης. Πράγματι

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - 1\|_{L^1(0,1)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |u_n(x) - 1|dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n} |nx - 1|dx = 0$$

και άρα η $u_n \to 1$ στον $L^1(0,1)$. Επίσης $\sup_n \int_0^1 |Du_n| = 1 < \infty$, και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.2.1. για $\Omega = (0,1)$ παίρνουμε ότι $u_n \to 1$ ασθενώς* στον $BV(0,1)$. Όμως $\lim_{n\to\infty} |Du_n|(0,1) = 1 \neq 0 = |Du|(0,1)$. □

Ο χώρος $C^\infty(\overline{\Omega})$ δεν είναι πυκνός στον $BV(\Omega)$, όταν ο τελευταίος εφοδιάζεται με την τοπολογία που επάγεται από την ισχυρή$-norm$ σύγκλιση. Πράγματι, η κλειστότητα του είναι ο χώρος $W^{1,1}(\Omega)$ (βλέπε Πρόταση 2.3.2.1.). Όμως, θα αποδείξουμε ότι κανείς μπορεί να προσεγγίσει κάθε στοιχείο του $BV(\Omega)$ με στοιχεία του $C^\infty(\overline{\Omega})$, με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης. Για τον σκοπό αυτόν, θα χρειαστεί να αποδείξουμε πρώτα δύο λήμματα. Οριζουμε τον χώρο

$$BV_{loc}(\Omega) = \Big\{ u \in BV(U) : \forall \ U \subset\subset \Omega \Big\}$$

και τότε :

Λήμμα 3.1.1. (Κανόνας αλυσίδας) Αν $\phi \in C^1_{loc}(\Omega)$ και $u \in BV_{loc}(\Omega)$, έχουμε ότι $u\phi \in BV_{loc}(\Omega)$ με

$$D(u\phi) = \phi Du + u\nabla\phi\mathcal{L}^n.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $u\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$. Πράγματι, έστω $U \subset\subset \Omega$. Τότε

$$\int_U |u\phi| dx \leq \|\phi\|_\infty \int_U |u| dx \leq \|\phi\|_\infty \int_\Omega |u| dx < \infty$$

αφού $u \in L^1(\Omega)$. Τότε για κάθε $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ και $i = 1, 2, ..., n$ έχουμε

$$\langle D_i(u\phi), \psi\rangle = -\langle u\phi, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\rangle = -\int_\Omega u\phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx =$$

$$= -\int_\Omega u \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x_i} dx + \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi dx = \int_\Omega \phi\psi D_i u + \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi dx =$$

$$= \langle \phi D_i u, \psi\rangle + \langle u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \psi\rangle$$

και άρα

$$\langle D_i(u\phi), \psi\rangle = \langle \phi D_i u, \psi\rangle + \langle u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \psi\rangle. \tag{3.14}$$

Στην παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιήσαμε τον κλασσικό κανόνα της αλυσίδας για το γινόμενο $\phi\psi$ αφού και οι δύο συναρτήσεις ανήκουν στον χώρο $C^1(\Omega)$. Η σχέση (3.14) μας δείχνει ότι $D(u\phi) = \phi Du + u\nabla\phi\mathcal{L}^n$ με την έννοια των κατανομών και άρα άμεσα προκύπτει το ζητούμενο. ■

Για να προχωρήσει κανείς στο επόμενο λήμμα, χρειάζεται να ανατρέξει πίσω στο Κεφάλαιο 2 και να θυμιθεί την μέθοδο της συνέλιξης και τις βασικές της ιδιότητες. Η μέθοδος της συνέλιξης χρησιμοπιέιται και σε μέτρα του $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ και έχει παρόμοιες ιδιότητες. Έστω $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\rho(x) \geq 0$ και $\rho(x) = \rho(-x)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$, $spt(\rho) \subset B(0,1)$, και $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$. Επιλέγω $\epsilon > 0$ και ορίζω τις συναρτήσεις $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)$, και $\Omega_\epsilon := \Big\{x \in \Omega \ : \ dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\Big\}$. Τότε για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, ορίζουμε

$$\mu * \rho_\epsilon(x) = \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\mu(y), \quad x \in \Omega_\epsilon.$$

Ισχύει λοιπόν το εξής

Λήμμα 3.1.2. Αν $u \in BV(\Omega)$ και $\Omega_\epsilon := \Big\{x \in \Omega \ : \ dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\Big\}$, έχουμε

$$\nabla(u * \rho_\epsilon) = Du * \rho_\epsilon$$

στο Ω_ϵ.

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος $Fubini$, για κάθε $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ παίρνουμε

$$\langle \nabla(u * \rho_\epsilon), \psi\rangle = -\langle u * \rho_\epsilon, \nabla\psi\rangle = -\int_\Omega (u * \rho_\epsilon)\nabla\psi dx = -\int_\Omega u(\rho_\epsilon * \nabla\psi)dx =$$

$$= -\int_\Omega u\nabla(\rho_\epsilon * \psi)dx = \int_\Omega (\rho_\epsilon * \psi)Du = \int_\Omega (Du * \rho_\epsilon)\psi dx = \langle Du * \rho_\epsilon, \psi\rangle$$

και άρα

$$\langle \nabla(u * \rho_\epsilon), \psi\rangle = \langle Du * \rho_\epsilon, \psi\rangle. \tag{3.15}$$

Η (3.15) μας δείχνει ότι $\nabla(u * \rho_\epsilon) = Du * \rho_\epsilon$ με την έννοια των κατανομών και άρα άμεσα προκύπτει το ζητούμενο. ■

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το αντίστοιχο θεώρημα Meyes-Serin του Κεφαλαίου 2 (Θεώρημα 2.3.1.4.), για τον χώρο $BV(\Omega)$.

Θεώρημα 3.1.3. Ο χώρος $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ είναι πυκνός στον $BV(\Omega)$, όταν ο τελευταίος εφοδιάζεται με την τοπολογία που επάγεται από την ενδιάμεση σύγκλιση.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Αρκεί να κατασκευάσω συνάρτηση $v_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, για την οποία να ισχύει

$$\|u - v_\delta\|_{L^1(\Omega)} < \delta, \qquad \Big|\int_\Omega |\nabla v_\delta|dx - |Du|(\Omega)\Big| < \delta. \tag{3.16}$$

Η παρακάτω κατασκευή γίνεται αντίστοιχα με το θεώρημα Meyers-Serrin, Θεώρημα 2.3.1.4.. Έστω οικογένεια $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ανοιχτών υποσυνόλων του Ω με

$$U_i := \Big\{x \in \Omega \ : \ dist(x, \partial\Omega) > 1/i\Big\}.$$

Κατασκευάζουμε τότε το ανοιχτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του Ω ως εξής:

$$V_0 \subset\subset \Omega$$

$$V_i = U_{i+3} \cap (\overline{U}_{i+1})^c, \quad i = 1, 2, 3, ...$$

Έυκολα παρατηρεί κανείς ότι $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i = \Omega$. Έστω τώρα $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ να είναι ένα partision of unity του καλύμματος $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Οι συναρτήσεις ϕ_i ικανοποιούν: $\phi_i \in C_c^\infty(V_i)$, $0 \leq \phi_i(x) \leq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$. Τότε $u(x) = 1\, u(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x)u(x)$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ μπορώ να βρώ $\epsilon_i > 0$, τέτοιο ώστε

$$spt[\rho_{\epsilon_i} * (\phi_i u)] \subset V_i \tag{3.17}$$

$$\int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) - u\phi_i| + |\rho_{\epsilon_i} * (u\nabla\phi_i) - u\nabla\phi_i| dx < 2^{-i}\delta, \tag{3.18}$$

αφού $\rho_\epsilon * (u\phi_i) \to u\phi_i$ και $\rho_\epsilon * (u\nabla\phi_i) \to u\nabla\phi_i$ στον $L^1(\Omega)$, (με $\epsilon \to 0$). Τώρα ορίζω την v_δ ως εξής

$$v_\delta := \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i).$$

Παρατηρώ ότι το κάθε $x \in \Omega$ ανήκει σε πεπερασμένο το πλήθος V_i και άρα, λόγω της (3.17), η v_δ είναι καλά ορισμένη και ανήκει στον $C^\infty(\Omega)$. Από την (3.18) παίρνουμε

$$\int_\Omega |v_\delta - u| dx = \int_\Omega \Big| \sum_{i=0}^{\infty} [\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) - u\phi_i] \Big| dx \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) - u\phi_i| dx < \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\delta < \delta.$$

Τώρα μένει να αποδείξουμε την δεύτερη εκτίμηση της σχέσης (3.16). Κάνοντας χρήση των Λημμάτων (3.1.1.) και (3.1.2.) παίρνουμε

$$\nabla v_\delta = \sum_{i=0}^{\infty} \nabla(\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * D(u\phi_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du) + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (u\nabla\phi_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i Du) + \sum_{i=0}^{\infty} [\rho_{\epsilon_i} * (u\nabla\phi_i) - u\nabla\phi_i],$$

αφού $\sum_{i=0}^{\infty} \nabla \phi_i = 0$. Όμως

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big| \int_{\Omega} \phi_i(y)\rho_{\epsilon_i}(x-y)Du(y)\Big| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} \phi_i(y)\rho_{\epsilon_i}(x-y)|Du|(y). \tag{3.19}$$

Από τις σχέσεις (3.18) και (3.19) έχουμε

$$\int_{\Omega} |\nabla v_\delta| dx < \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} \rho_{\epsilon_i} * (\phi_i |Du|) dx + \delta = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} \phi_i |Du| + \delta = |Du|(\Omega) + \delta.$$

Επομένος αποδείξαμε και την δεύτερη εκτίμηση της (3.16) και έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη του θεωρήματος. ■

Παρατήρηση 3.1.1. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει σαν άμεση συνέπεια ότι ο χώρος $C^\infty(\overline{\Omega})$ είναι πυκνός στον $BV(\Omega)$, όταν ο τελευταίος εφοδιάζεται με την τοπολογία που επάγεται από την ενδιάμεση σύγκλιση. Πράγματι, με βάση το Θεώρημα 2.3.2.1., ο χώρος $C^\infty(\overline{\Omega})$ είναι πυκνός στον $W^{1,1}(\Omega)$, όταν ο τελευταίος εφοδιάζεται με την *norm* τοπολογία και άρα $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap cl_{\|\cdot\|}\Big(C^\infty(\overline{\Omega})\Big)$.

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τις ανισότητες *Sobolev* και τα αποτελέσματα συμπαγής εμφύτευσης του χώρου $W^{1,1}(\Omega)$, στον χώρο $BV(\Omega)$.

Θεώρημα 3.1.4. Έστω Ω κλάσης-C^1, ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Τότε για κάθε p, με $1 \leq p \leq \dfrac{N}{N-1}$, η εμφύτευση

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

είναι συνεχής. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα Ω, p και N, τέτοιο ώστε για κάθε $u \in BV(\Omega)$ να ισχύει

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Απόδειξη. Έστω $u \in BV(\Omega)$. Τότε από το Θεώρημα 3.1.3., υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ η οποία συγκίνει με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στην u στον $BV(\Omega)$. Από το θεώρημα εμφύτευσης του $W^{1,1}(\Omega)$, Θεώρημα 2.3.3.3.(i), παίρνουμε ότι

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \tag{3.20}$$

με $p^* = \dfrac{N}{N-1}$. Επειδή το Ω είναι φραγμένο, $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ για $p < q$ και άρα από την (3.20)

$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}.$$

Τότε, υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} = C\|u_n\|_{BV(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολοθουθία $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς στην u στον $L^p(\Omega)$. Πράγματι, αφού $u_n \to u$ με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV(\Omega)$, $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$. Τότε, (i) :

$$\sup_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} = \sup_n \|u_n - u + u\|_{L^1(\Omega)} \leq \sup_n \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)} < \infty$$

και άρα $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία του $L^1(\Omega)$. Επίσης, (ii) : $|Du_n|(\Omega) \to |Du|(\Omega) \Rightarrow \sup\limits_n \displaystyle\int_\Omega |Du_n| < \infty$. Από τα $(i), (ii)$ και την σχέση (3.21) παίρνουμε ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία του $L^p(\Omega)$. Όμως αφού η $u_n \to u$ στον $L^1(\Omega)$ έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $u_{k_n}(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού στο Ω. Από γνωστό θεώρημα, βλέπε [4], η $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στην u στον $L^p(\Omega)$. Από την ασθενή κάτω ημισυνέχεια της νόρμας του $L^p(\Omega)$ και την σχέση (3.21) παίρνουμε

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_n \|u_{k_n}\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_n C\|u_{k_n}\|_{BV(\Omega)} = C\|u\|_{BV(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.4., κάθε συνάρτηση $u \in BV(\Omega)$ ανήκει και στον $L^p(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p \leq \dfrac{N}{N-1}$, και άρα μπορεί κανείς να γενικεύσει λίγο το Θεώρημα 3.1.3. ως εξής: για όλες τις $u \in BV(\Omega)$, υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$(I) \begin{cases} u_n \to u \ \ in \ \ L^p(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|. \end{cases}$$

Η απόδειξη αυτού προκύπτει άμεσα, αν κανείς ακολουθήσει την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3., σε συνδυασμό με το θεώρημα εμφύτευσης *Sobolev*, Θεώρημα 2.3.3.3.. Χρησιμοποιώντας την σύγκλιση (I), θα αποδείξουμε ότι η εμφύτευση $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι και συμπαγής.

Θεώρημα 3.1.5. Έστω Ω κλάσης-C^1, ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Τότε για κάθε p, με $1 \leq p \leq \dfrac{N}{N-1}$, η εμφύτευση

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Έστω ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|u_n\|_{BV(\Omega)} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.22}$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ τέτοια ώστε $u_k^{(n)} \to u_n$, $k \to \infty$ με την έννοια της (I) σύγκλισης. Τότε μπορώ να βρώ ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_{k_n}^{(n)}\|_{L^p(\Omega)} < 1/n. \tag{3.23}$$

Τώρα ορίζω ακολουθία $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ ως εξής

$$v_n := u_{k_n}^{(n)}$$

και από τις σχέσεις (3.22), (3.23) και του ορισμού της σύγκλισης (I) προκύπτει ότι

$$. \begin{cases} \|u_n - v_n\|_{L^p(\Omega)} < 1/n, \\ \displaystyle\int_\Omega |Dv_n| \leq 2, \\ \|v_n\|_{L^1(\Omega)} \leq 2. \end{cases} \tag{3.24}$$

Λόγω της (3.24) έχουμε

$$\|v_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \|v_n\|_{L^1(\Omega)} + |Dv_n|(\Omega) \leq 4 \Rightarrow \sup_n \|v_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq 4$$

και άρα ότι η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία του $W^{1,1}(\Omega)$. Όμως από το Θεώρημα 2.3.3.3., ξέρουμε ότι η εμφύτευση $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής για κάθε p, με $1 \leq p \leq \dfrac{N}{N-1}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(v_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $v \in L^p(\Omega)$ τέτοια ώστε $v_{k_n} \to v$, $n \to \infty$ στον $L^p(\Omega)$. Τότε η απόδειξη ολοκληρώνεται, αφού και η υπακολουθία $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην v στον $L^p(\Omega)$. Πράγματι, από την (3.24) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|u_{k_n} - v\|_{L^p(\Omega)} &\leq \lim_{n\to\infty} \|u_{k_n} - v_{k_n}\|_{L^p(\Omega)} + \lim_{n\to\infty} \|v_{k_n} - v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} 1/k_n + \lim_{n\to\infty} \|v_{k_n} - v\|_{L^p(\Omega)} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.2 Θεώρημα ίχνους στον $BV(\Omega)$

Στην ενότητα αυτή θα υποθέσουμε ότι το Ω είναι *Lipschitz* χωρίο. Κάτω από την ασθενέστερη αυτή απαίτηση για το χωρίο Ω, θα επεκτείνουμε την έννοια του ίχνους που ορίσαμε στους χώρους *Sobolev*, Θεώρημα 2.3.3.1., στον χώρο $BV(\Omega)$. Η απόδειξη του θεωρήματος ίχνους για τον $BV(\Omega)$, απαιτεί την κατανόηση και την χρήση αρκετά προχωρημένων αποτελεσμάτων από την Θεωρία Μέτρου. Για τις ανάγκες λοιπόν της εργασίας, δεν θα εστιάσουμε τόσο στα αποτελέσματα αυτά, αλλά στην διαίσθεση και την λογική της απόδειξης του θεωρήματος. Αφού διατυπώσουμε και παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία της ιδέας της απόδειξης του θεωρήματος ίχνους του $BV(\Omega)$, θα αποδείξουμε μερικές βασικές συνέπειες αυτού, οι οποίες θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 3.2.1. (Θεώρημα ίχνους) Υπάρχει γραμμικός και φραγμένος τελεστής γ_0 από τον $BV(\Omega)$ στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$ τέτοιος ώστε
i) για κάθε $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$, $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$,
ii) ισχύει ο γενικευμένος τύπος *Green* :

$$\int_\Omega \phi Du = -\int_\Omega u div\phi dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall \phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

όπου το $\nu(x)$ είναι το εξωτερικό, μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον $\mathcal{H}^{N-1}$, σχεδόν για όλα τα $x \in \partial\Omega$.

Απόδειξη. Κάθε $x \in \mathbb{R}^N$ θα σημειώνεται ως $x = (\tilde{x}, x_N)$ όπου $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{N-1}$ και $x_N \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε πεπερασμένο κάλυμμα του $\partial\Omega$ από τους ανοιχτούς κυλίνδρους

$$C_R(y) = S_R(\tilde{y}) \times (y_N - R, y_N + R), \quad y = (\tilde{y}, y_N) \in \partial\Omega$$

όπου $S_R(\tilde{y})$ είναι η μπάλα του $\mathbb{R}^{N-1}$ με κέντρο το $\tilde{y}$ και ακτίνα R. Αφού το Ω είναι *Lipschitz* χωρίο και κάνοντας πιθανή αλλαγή συντεταγμένων αν χρειαστεί, υπάρχουν $\epsilon_0 > 0$ και συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, *Lipschitz*, τέτοια ώστε το $\Omega \cap C_R(y)$ να περιέχει το ανοιχτό σύνολο

$$C_{R,\epsilon_0}(y) := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \ \tilde{x} \in S_R(\tilde{y}), \ f(\tilde{x}) - \epsilon_0 < x_N < f(\tilde{x})\Big\}$$

και το

$$\Sigma(y) := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \ \tilde{x} \in S_R(\tilde{y}), \ x_N = f(\tilde{x})\Big\}$$

να είναι γειτονιά του y στο $\partial\Omega$. Διαισθητικά, το γεγονός ότι το Ω είναι *Lipschitz*, σημαίνει ότι αν εστιάσω πολύ κοντά στο $\partial\Omega$, θα δω έναν κύλινρο του οποίου η άνω επιφάνεια αποτελεί κομμάτι του $\partial\Omega$ ενώ ο υπόλοιπος βρίσκεται στο εσωτερικό του Ω. Έστω $u \in BV(\Omega)$.

Πρώτο βήμα: Θα βρώ συνάρτηση $u^+ \in L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\int_\Sigma |u^+| d\mathcal{H}^{N-1} \leq C\Big(\int_{C_{R,\epsilon_0}} |u|dx + \int_{C_{R,\epsilon_0}} |Du|\Big) \tag{3.25}$$

και

$$\int_{C_{R,\epsilon_0}} \phi Du = -\int_{C_{R,\epsilon_0}} u div\phi dx + \int_\Sigma u^+ \phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall \phi \in C^1_c(C_{R,\epsilon_0} \cup \Sigma, \mathbb{R}^N). \tag{3.26}$$

όπου $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από την f. Στο βήμα αυτό θα εστιάσουμε στο χωρίο C_{R,ϵ_0}. Από το Θεώρημα 3.1.3., υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(C_{R,\epsilon_0}) \cap BV(C_{R,\epsilon_0})$ που συγκλίνει στην u με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV(C_{R,\epsilon_0})$, και άρα

$$.\begin{cases} u_n \to u \ \ in \ \ L^1(C_{R,\epsilon_0}), \\ \displaystyle\int_{C_{R,\epsilon_0}} |Du_n| \to \int_{C_{R,\epsilon_0}} |Du|. \end{cases} \tag{3.27}$$

Κάθε ομαλή συνάρτηση v που ορίζεται στο C_{R,ϵ_0}, άρα και τις $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μπορώ να τις βλέπω ως εξής: $v^\epsilon(\tilde{x}) = v(\tilde{x}, f(\tilde{x}) - \epsilon)$ με το ϵ να σαρώνει όλο το διάστημα $(0, \epsilon_0)$. Έτσι για συγκεκριμένο $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, η v^ϵ αποτελεί τον περιορισμό της v στην επιφάνεια

$$\Sigma_\epsilon(y) := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \ \tilde{x} \in S_R(\tilde{y}), \ x_N = f(\tilde{x}) - \epsilon\Big\}$$

δηλαδή την $\epsilon-$φλίδα του κυλίνδρου C_{R,ϵ_0}. Αρχικά θα δείξουμε ότι για όλα (σχεδόν) τα $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ η ακολουθία $(u^\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (ως προς n) στην συνάρτηση u^ϵ στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$. Πράγματι, κάνοντας χρήση του τύπου *coarea*, βλέπε [1], παίρνουμε ότι

$$\int_{-\epsilon_0}^0 \Big(\int_\Sigma |u^\epsilon_n(\tilde{x}) - u^\epsilon(\tilde{x})| d\mathcal{H}^{N-1}(x)\Big) d\epsilon \leq C \int_{C_{R,\epsilon_0}} |u_n - u| dx$$

και από την σχέση (3.27) προκύπτει το ζητούμενο. Τώρα έχω ένα σύνολο συναρτήσεων, τις $(u^\epsilon)_\epsilon$, που θα δείξω ότι συγκλίνει σε κάποια u^+, όταν το $\epsilon \to 0$, στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$. Για $\epsilon > \epsilon'$ στο $(0, \epsilon_0)$, μπορεί κανείς να δείξει ότι, υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από την f, τέτοια ώστε

$$\int_\Sigma |u^\epsilon_n - u^{\epsilon'}_n| dH^{N-1} \leq C \int_{C_{R,\epsilon,\epsilon'}} |Du_n| dx \tag{3.28}$$

όπου $C_{R,\epsilon,\epsilon'}(y) := \Big\{x \in \mathbb{R}^N : \ \tilde{x} \in S_R(\tilde{y}), \ f(\tilde{x}) - \epsilon < x_N < f(\tilde{x}) - \epsilon'\Big\}$. Όμως σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.2., η σχέση (3.27) συνεπάγεται την narrowly σύγκλιση των μέτρων $|Du_n|$ στο μέτρο $|Du|$ στον $\mathcal{M}^+(C_{R,\epsilon_0})$, και άρα από τις ιδιότητες της narrowly σύγκλισης, βλέπε !!!, παίρνουμε ότι

$$\int_{C_{R,\epsilon,\epsilon'}} |Du_n| \to \int_{C_{R,\epsilon,\epsilon'}} |Du|, \quad n \to \infty. \tag{3.29}$$

Από την σχέση (3.29) και παίρνοντας το όριο ως προς n στην (3.28), προκύπτει ότι σχεδόν για όλα τα $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$,

$$\int_{\Sigma} |u^{\epsilon} - u^{\epsilon'}| dH^{N-1} \leq C \int_{C_{R,\epsilon,\epsilon'}} |Du|. \tag{3.30}$$

Μπορώ να επιλέξω μια ακολουθία από $(\epsilon_n)_n \subseteq (0, \epsilon_0)$ (από αυτά που ισχύει η (3.30)), η οποία να συγκλίνει στο 0. Τότε από την (3.30) εύκολα βλέπει κανείς, ότι η ακολουθία $(u^{\epsilon_n})_n$ είναι $Caushy$ στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$ και άρα, λόγω της πληρότητας του χώρου $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$, συγκλίνει σε κάποια u^+ στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$. Μπορεί κανείς να δει, ότι η u^+ ικανοποιεί τις σχέσεις (3.25),(3.26).

Δεύτερο βήμα: Στο πρώτο βήμα ορίσαμε το ίχνος της u, εστιάζοντας στο χωρίο C_{R,ϵ_0}. Για να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα σε όλο το $\partial\Omega$, χρησιμοποιούμε ένα partision of unity ενός πεπερασμένου καλύμματος του $\partial\Omega$, έστω $(C_R(y_i))_{i=1,2,..,r}$, και τότε εύκολα δείχνω από τις σχέσεις (3.25) και (3.26), ότι υπάρχει ο ζητούμενος τελεστής γ_0 του θεωρήματος, για τον οποίο να ισχύουν

$$\int_{\partial\Omega} |\gamma_0(u)| d\mathcal{H}^{N-1} \leq C\Big(\int_{\Omega} |u| dx + \int_{\Omega} |Du|\Big) \tag{3.31}$$

και

$$\int_{\Omega} \phi Du = -\int_{\Omega} u div\phi dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall \phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N). \tag{3.32}$$

Ο τελεστής $\gamma_0(u) = u_i^+$ στο $\Sigma(y_i)$, $i = 1, 2, ..., r$ είναι καλά ορισμένος. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε δύο φορές την σχέση (3.26) για το σύνολο $C_{R,\epsilon_0}(y_i) \cap C_{R,\epsilon_0}(y_j)$, μία με ίχνος u_i^+ και μια με ίχνος u_j^+ στο $\Sigma(y_i) \cap \Sigma(y_j)$ και αφαιρέσουμε κατά μέλη, παίρνουμε ότι

$$\int_{\Sigma(y_i)\cap\Sigma(y_j)} (u_i^+ - u_j^+)\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1} = 0, \quad \forall \phi \in C^1_c((C_{R,\epsilon_0}(y_i) \cap C_{R,\epsilon_0}(y_j)) \cup (\Sigma(y_i) \cap \Sigma(y_j)), \mathbb{R}^N)$$

και άρα $u_i^+ = u_j^+$ στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma_i \cap \Sigma_j)$. Η συνέχεια και η γραμμικότητα του τελεστή γ_0 είναι άμεση συνέπεια των σχέσεων (3.31) και (3.32). ■

Παρατήρηση 3.2.1. Παρατηρούμε ότι μέσω του παραπάνω θεωρήματος, μπορούμε να βελτιώσουμε το Θεώρημα 3.1.3. ως εξής: Το ίχνος κάθε ομαλής προσέγγισης $v_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, της $u \in BV(\Omega)$, ταυτίζεται με το ίχνος της u στο $\partial\Omega$.

Απόδειξη. Διατηρώντας τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στο Θεώρημα 3.1.3., έχουμε ότι η ακολουθία $(v_{\delta,n} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με

$$v_{\delta,n} - u_n := \sum_{i=0}^{n} \Big(\rho_{\epsilon_i} * (u\phi_i) - u\phi_i\Big),$$

συγκλίνει στην $v_\delta - u$ με την έννοια της *norm* σύγκλισης, στον $BV(\Omega)$. Πράγματι, είναι άμεσο ότι η $(v_{\delta,n} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $v_\delta - u$ στον $L^1(\Omega)$. Αρκεί να δείξω ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)| = 0. \tag{3.33}$$

Αφού $|D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)| \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, είναι κανονικό και άρα

$$|D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|(\Omega) = \sup\Big\{|D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|(K) : K \subseteq \Omega \text{ συμπαγές}\Big\}.$$

Άρα για $\epsilon = 1/n$ υπάρχει K_ϵ συμπαγές υποσύνολο του Ω, τέτοιο ώστε

$$|D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|(\Omega) < 1/n + |D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|(K_\epsilon). \tag{3.34}$$

Τώρα για κάθε ένα ϵ από τα παραπάνω, υπάρχει J_ϵ πεπερασμένο σύνολο δεικτών τέτοιο ώστε: $K_\epsilon \subseteq \bigcup\limits_{i\in J_\epsilon} V_i$, με $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ να είναι το ανοιχτό κάλυμμα του Θεωρήματος 3.1.3.. Τότε για επαρκώς μεγάλο $n_0 \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι

$$|D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|(K_\epsilon) \leq |D(v_{\delta,n} - u_n - v_\delta + u)|\Big(\bigcup_{i\in J_\epsilon} V_i\Big) = 0, \quad \forall n \geq n_0$$

αφού $v_{\delta,n} = v_\delta$ και $u_n = u$ στο $\bigcup\limits_{i\in J_\epsilon} V_i$ για $n \geq n_0$. Επομένως παίρνοντας το όριο ως προς n στην (3.34), προκύπτει η (3.33).

Τότε λόγω της συνέχειας του τελεστή γ_0, παίρνουμε ότι

$$\gamma_0(v_{\delta,n} - u_n) \to \gamma_0(v_\delta - u) \tag{3.35}$$

στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$. Όμως $\gamma_0(v_{\delta,n} - u_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού $\phi_i \in C_c^\infty(V_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, και άρα από την (3.35) και την γραμμικότητα του γ_0, παίρνουμε ότι

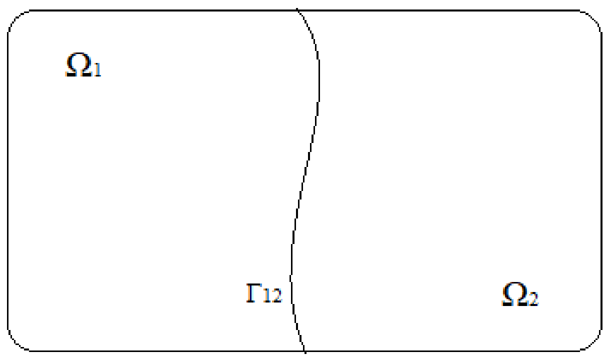
$$\gamma_0(v_\delta - u) = 0 \Rightarrow v_\delta|_{\partial\Omega} = \gamma_0(u)$$

στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$. ■

Πλέον είμαστε σε θέση να αποδείξουμε μια από τις σημαντικότερες, (ιδίως για τις εφαρμογές,) ιδιότητες των χώρων BV. Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει ότι οι συναρτήσεις που είναι τμηματικά ¨επαρκώς' ομαλές ανήκουν στον χώρο $BV(\Omega)$, ενώ μπορεί να μην ανήκουν στον χώρο $W^{1,1}(\Omega)$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι χαρακτηριστικές ή γενικότερα οι τμηματικά συνεχής. Θα δούμε ότι η ιδιότητα αυτή θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στο Κεφάλαιο 4, όταν θα αποδείξουμε ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα αποκατάστασης εικόνας στο μοντέλο $TV - TV^2$.

Πρόταση 3.2.1. Έστω δύο ξένα *Lipschitz* χωρία $\Omega_1,\ \Omega_2$ που περιέχονται σε ένα ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^N$, τέτοιο ώστε $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ και $\Gamma_{12} = \partial\Omega_{1,2} := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ με $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega_{1,2}) > 0$.

Σχήμα 2: Το χωρίο Ω.



Συμβολίζουμε με γ_1 και γ_2 τους τελεστές ίχνους από τους $BV(\Omega_1)$, $BV(\Omega_2)$ στους $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega_1)$ και $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega_2)$ αντίστοιχα. Έστω ακόμα $u_1 \in BV(\Omega_1)$ και $u_2 \in BV(\Omega_2)$. Ορίζουμε

$$u = \begin{cases} u_1, & \Omega_1 \\ u_2, & \Omega_2. \end{cases}$$

Τότε, $u \in BV(\Omega)$ και

$$Du = Du_1|_{\Omega_1} + Du_2|_{\Omega_2} + [u]\nu\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega_{1,2}}$$

όπου $[u] = \gamma_1(u_1) - \gamma_2(u_2)$ και $\nu(x)$ είναι το κάθετο, μοναδιαίο διάνυσμα στην θέση x του $\partial\Omega_{1,2}$, όταν το τελευταίο εννοείται σαν κομμάτι του $\partial\Omega_1$.

Απόδειξη. Για όλα τα $\phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\langle Du, \phi\rangle = -\langle u, \nabla\phi\rangle = -\int_\Omega u\nabla\phi dx = -\int_{\Omega_1} u_1\nabla\phi dx - \int_{\Omega_2} u_2\nabla\phi dx. \qquad (3.36)$$

Αφού $\phi \in C^1(\overline{\Omega}_1, \mathbb{R}^N) \cap C^1(\overline{\Omega}_2, \mathbb{R}^N)$, εφαρμόζουμε τον γενικευμένο τύπο *Green*, (3.32), στον $BV(\Omega_1)$ και $BV(\Omega_2)$, και παίρνουμε

$$\int_{\Omega_1} u_1 div\phi dx = -\int_{\Omega_1} \phi Du_1 + \int_{\partial\Omega_{1,2}} \gamma_1(u_1)\phi(-\nu) d\mathcal{H}^{N-1}$$

και

$$\int_{\Omega_2} u_2 div\phi dx = -\int_{\Omega_2} \phi Du_2 + \int_{\partial\Omega_{1,2}} \gamma_2(u_2)\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Τότε η (3.36) γίνεται

$$\langle Du, \phi\rangle = \int_{\Omega_1} \phi Du_1 + \int_{\Omega_2} \phi Du_2 + \int_{\partial\Omega_{1,2}} (\gamma_1(u_1) - \gamma_2(u_2))\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.37}$$

Υποθέτω τώρα ότι $\|\phi\|_\infty \leq 1$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1., σχέση (3.31), υπάρχουν σταθερές $C_1 > 0$ και $C_2 > 0$ που εξαρτώνται μόνο από τα Ω_1 και Ω_2 αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\Big|\int_{\partial\Omega_{1,2}} (\gamma_1(u_1) - \gamma_2(u_2))\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}\Big| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\partial\Omega_{1,2}} |\gamma_1(u_1) - \gamma_2(u_2)||\nu| d\mathcal{H}^{N-1}$$
$$\leq C_1\|u_1\|_{BV(\Omega_1)} + C_2\|u_2\|_{BV(\Omega_2)}.$$

Τότε από την (3.37) προκύπτει ότι

$$\|Du\| = \sup\Big\{\int_\Omega u\nabla\phi dx : \ \phi \in C_c^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \ \|\phi\|_\infty \leq 1\Big\}$$
$$\leq |Du_1|(\Omega_1) + |Du_2|(\Omega_2) + C_1\|u_1\|_{BV(\Omega_1)} + C_2\|u_2\|_{BV(\Omega_2)} < \infty,$$

και άρα $u \in BV(\Omega)$. Τώρα από την (3.37) παίρνουμε ότι

$$\langle Du, \phi\rangle = \int_\Omega \phi Du_1|_{\Omega_1} + \int_\Omega \phi Du_2|_{\Omega_2} + \int_{\partial\Omega} (\gamma_1(u_1) - \gamma_2(u_2))\phi\nu d\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega_{1,2}}, \quad \forall\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

και από την πυκνότητα του $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ στον $C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ αποδεικνύεται το ζητούμενο. ■

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να επεκτείνουμε μηδενικά μια $u \in BV(\Omega)$ σε όλο τον $\mathbb{R}^N$, κάτι που όπως είδαμε στην θεωρία χώρων *Sobolev*, ισχύει για τον χώρο $W_0^{1,p}(\Omega)$ και όχι για τον $W^{1,p}(\Omega)$. Το παρακάτω πόρισμα αποδεικνύει ακριβώς αυτήν την παρατήρηση.

Πόρισμα 3.2.1. Έστω $u \in BV(\Omega)$. Τότε η

$$v = \begin{cases} u, & \Omega \\ 0, & \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

ανήκει στον $BV(\mathbb{R}^N)$.

Απόδειξη. Επειδή το Ω είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{\Omega} \subset B(0,R)$. Ορίζουμε την συνάρτηση v_R ως εξής

$$v_R = \begin{cases} u, & \Omega \\ 0, & B(0,R) \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

και τότε για $\Omega_1 = \Omega$, $\Omega_2 = B(0,R)/\overline{\Omega}$, $u_1 = u$ και $u_2 = 0$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 3.2.1. και παίρνουμε ότι $v_R \in BV(B(0,R))$ και ισχύει ότι

$$Dv_R = Du|_{\Omega} + u^+ \nu \mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}.$$

Τώρα επεκτείνοντας μηδενικά την v_R σε όλο το $\mathbb{R}^N$, προκύπτει το ζητούμενο. ■

Συνδιάζοντας το θεώρημα ίχνους, Θεώρημα 3.2.1, και την ανισότητα Poincare-Wirtinger, Πρόταση 2.3.3.3., μπορούμε να εξάγουμε μια ανισότητα που θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στην απόδειξη ύπαρξης λύσης του προβλήματος επαναχρωματισμού εικόνας που θα συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 4.

Πρόταση 3.2.2. Έστω χωρίο Ω όπως στην Πρόταση 2.3.3.3..Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει η ανισότητα :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(|Du|(\Omega) + \|\gamma_0(u)\|_{L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)}\Big), \qquad \forall u \in BV(\Omega).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F(u) := \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_{\Omega} u(x)dx$ και κάνοντας χρήση της ανισότητας Poincare-Wirtinger, Πρόταση 2.3.3.3., παίρνουμε

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u - \mathcal{X}_{\Omega}F(u) + \mathcal{X}_{\Omega}F(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - \mathcal{X}_{\Omega}F(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{X}_{\Omega}F(u)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C_{p,N,\Omega}|Du|(\Omega) + \Big|\int_{\Omega} u(x)dx\Big|.$$

Από τον τύπο Green, Θεώρημα 3.2.1.(ii), για κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης ϕ προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $k > 0$ για την οποία

$$\Big|\int_{\Omega} u(x)dx\Big| \leq k\Big(|Du|(\Omega) + \|\gamma_0(u)\|_{L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)}\Big).$$

Συνδιάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις και παίρνοντας σταθερά $C > \max\{C_{p,N,\Omega}, k\}$ τελικά προκύπτει το ζητούμενο, δηλ.

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(|Du|(\Omega) + \|\gamma_0(u)\|_{L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)}\Big). \qquad \blacksquare$$

Γενικά γνωρίζουμε ότι αν ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$, με X, Y χώροι $Banach$, είναι συνεχής ως προς την $norm-$τοπολογία των δύο χώρων, τότε θα είναι συνεχής και ως προς την ασθενή τους τοπολογία, δηλ. ως προς τις $\sigma(X, X')$ και $\sigma(Y, Y')$ αντίστοιχα. Όμως καμία από τις ασθενείς τοπολογίες που ορίσαμε στον χώρο $BV(\Omega)$ δεν είναι η κλασσική $\sigma(BV(\Omega), BV'(\Omega))$, και επομένως δεν ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός για τον τελεστή ίχνους γ_0. Το "κενό" αυτό έρχεται να καλύψει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.2. Ο τελεστής ίχνους γ_0 του Θεωρήματος 3.2.1. είναι συνεχής από τον $BV(\Omega)$ με την ενδιάμεση σύγκλιση στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$ με την ισχυρή σύγκλιση.

Απόδειξη. Πρώτο βήμα: Έστω $u \in BV(\Omega)$. Χρησιμοποιώντας ισχυρισμούς παρόμοιους με του Θεωρήματος 3.2.1., μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Ω είναι κύλινδρος. Στην απόδειξη θα διατηρήσουμε τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 3.2.1.. Ορίζουμε το $Lipschitz$ χωρίο

$$\Omega_{\epsilon'} := \Big\{x \in \Omega : d(x, \mathbb{R}^d) > \epsilon'\Big\},$$

και θεωρούμε $\epsilon_0 = (0, \infty]$, $\epsilon = \epsilon' + t$ με $0 < t < \epsilon_0 - \epsilon'$. Τότε από την (3.30) έχουμε ότι

$$\int_\Sigma |u^{\epsilon'+t} - u^{\epsilon'}| dH^{N-1} \leq C \int_{C_{R,\epsilon'+t,\epsilon'}} |Du|,$$

και άρα σχεδόν για όλα τα $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$, $u^{\epsilon'+t} \to u^{\epsilon'}$, όταν $t \to 0$, στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma)$. Επίσης από το Θεώρημα 3.2.1. στον $BV(\Omega_{\epsilon'})$ παίρνουμε ότι $u^{\epsilon'+t} \to u^+_{\epsilon'}$, όταν $t \to 0$, στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Sigma_{\epsilon'})$. Επομένως για όλα σχεδόν τα $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$, $u^{\epsilon'}(x) = u^+_{\epsilon'}(x)$ για $\mathcal{H}^{N-1}-$κάθε x στο $\Sigma_{\epsilon'}$.

Δεύτερο βήμα: Έστω $u \in BV(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV(\Omega)$ με την ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει με έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στην u στον $BV(\Omega)$. Τότε από το πρώτο βήμα, σχεδόν για όλα τα $k \in \mathbb{R}^+$ ισχύει ότι

$$(3.38)\begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma_k} |Du| = 0, \\ (u_n - u)(x) = (u_n - u)^+(x) \text{ για } \mathcal{H}^{N-1}-\text{κάθε } x \text{ στο } \Sigma_k, \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\Sigma_k} |u_n - u| dH^{N-1} = 0, \end{cases}$$

όπου $(u_n-u)^+$ είναι το ίχνος στο Σ_k της u_n-u στον $BV(\Omega_k)$. Τότε για κάθε $k>0$ ορίζουμε την αντίστοιχη συνάτηση $u_{n,k}$ ως εξής

$$u_{n,k}=\begin{cases} u_n-u, & \Omega/\overline{\Omega}_k \\ 0, & \Omega_k. \end{cases}$$

Τότε από την Πρόταση 3.2.1. και το Πόρισμα 3.2.1. έχουμε ότι, για κάθε $k>0$, η $u_{n,k}\in BV(\Omega)$ και

$$Du_{n,k}=D(u_n-u)|_{\Omega/\overline{\Omega}_k}+(u_n-u)^+\nu_k\mathcal{H}^{N-1}|_{\Sigma_k},$$

όπου ν_k το μοναδιαίο κάθετο του Σ_k. Λόγω της $norm-$συνέχειας του τελεστή γ_0, Θεώρημα 3.2.1., παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}|\gamma_0(u_n-u)|d\mathcal{H}^{N-1}&=\int_{\partial\Omega}|\gamma_0(u_{n,k})|d\mathcal{H}^{N-1}\le C\|u_{n,k}\|_{BV(\Omega)}=\\ &=C\Big(\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|u_n-u|dx+|Du_{n,k}|(\Omega)\Big)\\ &\le C\Big(\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|u_n-u|dx+\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|D(u_n-u)|+\int_{\Sigma_k}|(u_n-u)^+|d\mathcal{H}^{N-1}\Big)=\\ &=C\Big(\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|u_n-u|dx+\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|D(u_n-u)|+\int_{\Sigma_k}|u_n-u|d\mathcal{H}^{N-1}\Big),\end{aligned}\tag{3.39}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από την δεύτερη εκτίμηση της (3.38). Από την ενδιάμεση σύγκλιση της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στην u στον $BV(\Omega)$, παίρνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|u_n-u|dx\le\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|u_n-u|dx=0,$$

και από την narrowly σύγκλιση της ακολουθίας $(|Du_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $|Du|$ στον $\mathcal{M}^+(\Omega)$, παίρνουμε ότι

$$\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|Du_n|\to\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|Du|,\quad n\to\infty.$$

Τότε από τις σχέσεις (3.38) και (3.39) προκύπτει ότι

$$\limsup_n\int_{\partial\Omega}|\gamma_0(u_n-u)|d\mathcal{H}^{N-1}\le 2C\int_{\Omega/\overline{\Omega}_k}|Du|.$$

και στέλνοντας το k στο 0, έχουμε το ζητούμενο, δηλ. ότι

$$\gamma_0(u_n)\to\gamma_0(u),\quad n\to\infty$$

στον $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\partial\Omega)$. ■

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τον χώρο $BV(\Omega)$ και αποδείξαμε κάποιες βασικές ιδιότητες του χώρου αυτού. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα γενικεύονται φυσιολογικά και στον χώρο

$$BV(\Omega,\mathbb{R}^l) := \Big\{u \in L^1(\Omega,\mathbb{R}^l) : \ Du \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^{lxd})\Big\},$$

όπου Du εννοείται με την έννοια των κατανομών. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τον χώρο $BV^2(\Omega)$, στον οποίο συχνά θα μας φανεί χρήσιμο να σκεφτόμαστε την ∇u σαν στοιχείο του χώρου $BV(\Omega,\mathbb{R}^l)$.

4 Μοντέλο πρώτης και δεύτερης τάξης μεταβολικής προσέγγισης προβλημάτων ανακατασκευής εικόνας $TV-TV^2$

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με τον πρώτης-δεύτερης τάξης ομαλοποιητή (TV-TV^2) μιας συνάρτησης $u \in BV^2(\Omega)$:

$$\alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega),$$

όπου οι ϕ_1, ϕ_2 είναι δύο κυρτές συναρτήσεις $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $\phi_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+$ με γραμμική συμπερηφορά στο άπειρο. Ακόμα, α, β είναι θετικοί παράμετροι ομαλοποίησης, που ισορροπούν τους δύο όρους. Το D^2u είναι γενικά ένα πεπερασμένο-$Radon$ μέτρο. Θα μελετήσουμε το επαγώμενο πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_{u\in BV^2(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2dx + \alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega)\Big] \tag{4.0}$$

το οποίο εισήχθει από τον K. Papafitsoros στο [7]. Κάτω από κάποιες ασθενής προϋποθέσεις, θα αποδείξουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα των λύσεων του (4.0), μέσω της μεθόδου χαλάρωσης που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 2.4., πάνω στο πνεύμα του [5]. Επίσης θα αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf_{u\in BV^2(\Omega)} \Big[\int_{\Omega\setminus D} (u-f)^2dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega)\Big],$$

το οποίο αναφέρεται σε προβλήματα επαναχρωματισμού εικόνας. Σε προβλήματα τέτοιου τύπου αναδεικνύεται ιδιαίτερα η δυναμική του συγκεκριμένου μοντέλου, καθώς πετυχαίνει συνδεσιμότητα πάνω σε μεγαλύτερα κενά σε σχέση με τα υπόλοιπα (πχ TGV).

4.1 Οι χώροι συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης δεύτερης τάξης $BV^2(\Omega)$

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε τον ορισμό και μερικές βασικές ιδιότητες του χώρου των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης δεύτερης τάξης. Ο χώρος αυτός πρωτομελετήθηκε από τον Demengel στο [3].

4.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 4.1.1.1. (Ορισμός χώρου συναρτήσεων φραγμένης κύμμανσης δεύτερης τάξης) Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό. Μια συνάρτηση $u \in W^{1,1}(\Omega)$ καλείται συνάρτηση φραγμένης κύμανσης δεύτερης τάξης ή αλλιώς $u \in BV^2(\Omega)$, αν και μόνο αν η κατά κατανομή δεύτερης τάξης παράγωγός της, D^2u, μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός $\mathbb{R}^{dxd}$ μέτρου *Radon*, το οποίο επίσης θα συμβολίζεται ως D^2u. Με άλλα λόγια

$$BV^2(\Omega) = \{u \in W^{1,1}(\Omega) : \nabla u \in BV(\Omega, \mathbb{R}^d)\}$$

Αντιλαμβανόμενος κανείς τον χώρο των μέτρων *Borel*, $M(\Omega, \mathbb{R}^{dxd})$, σαν τον δυϊκό του χώρου των τελικά μηδενικών συνεχών συναρτήσεων στο Ω, $C_0(\Omega, \mathbb{R}^{dxd})$, μπορεί με παρόμοιο τρόπο με το Θεώρημα 3.1.1., να δείξει ότι

$$u \in BV^2(\Omega) \iff TV^2(u) = sup\left\{ \int_\Omega u\, div^2\phi\, dx : \phi \in C_c^2(\Omega, \mathbb{R}^{dxd}), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} < +\infty$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $TV^2(\Omega) = |D^2u|(\Omega)$. Ο χώρος $BV^2(\Omega)$ εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|u\|_{BV^2(\Omega)} := \|u\|_{BV(\Omega)} + |D^2u|(\Omega)$$

είναι χώρος *Banach*. Αν το Ω είναι συνεκτικό με *Lipschitz* σύνορο μπορεί κανείς να δείξει ότι (βλέπε [3]) υπάρχουν σταθερές C_1 και C_2, που εξαρτώνται μόνο από το Ω, τέτοιες ώστε

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq C_1\|u\|_{L^1(\Omega)} + C_2|D^2u|(\Omega), \quad \forall u \in BV^2(\Omega). \tag{4.1}$$

Θεώρημα 4.1.1.1. Ο χώρος $BV^2(\Omega)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον χώρο $W^{1,1}(\Omega)$.

Απόδειξη. Θεωρώ φραγμένη ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $BV^2(\Omega)$. Τότε υπάρχει σταθερά $M > 0$ για την οποία ισχύει

$$\sup_n \|u_n\|_{BV^2(\Omega)} < M$$

και άρα

$$\sup_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} < M, \ \sup_n \|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)} < M, \ \sup_n |D^2u_n|(\Omega) < M.$$

Αφού $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,1}(\Omega)$ και $\sup_n \|u_n\|_{W^{1,1}(\Omega)} < M$, από το Θεώρημα 2.3.3.3. παίρνουμε ότι υπάρχουν $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ και $u \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$(u_n)_{n\in N_1} \to u, \quad \text{στον } L^1(\Omega).$$

Επίσης $(\nabla u_n)_{n\in N_1} \subseteq BV(\Omega, \mathbb{R}^d)$ και $\sup_{n\in N_1} \|\nabla u_n\|_{BV(\Omega, \mathbb{R}^d)} < M$. Άρα από Θεώρημα 3.1.5. υπάρχουν $N_2 \subseteq N_1$ και $g \in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$(\nabla u_n)_{n\in N_2} \to g, \quad \text{στον } L^1(\Omega).$$

Από την Παρατήρηση 2.1.1. προκύπτει ότι $u = g$ στον $L^1(\Omega)$ και άρα

$$(u_n)_{n\in N_2} \to u, \quad \text{στον} \;\; W^{1,1}(\Omega). \qquad \blacksquare$$

4.1.2 Συγκλίσεις στον χώρο $BV^2(\Omega)$

Όπως και στον $BV(\Omega)$ έτσι και στον $BV^2(\Omega)$ μπορούμε να ορίσουμε δύο ασθενέστερες μορφές σύγκλισης, τις οποίες επίσης ονομάζουμε ασθενή* και ενδιάμεση σύγκλιση. Αφού ορίσουμε τις συγκλίσεις αυτές, θα αποδείξουμε ένα θεώρημα συμπάγειας ανάλογο με το Θεώρημα 3.1.2..

Ορισμός 4.1.2.1.(Ορισμός ασθενούς* σύγκλισης στον BV^2) Έστω $u \in BV^2(\Omega)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$. Λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς* στην u, αν η $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$ και η $(\nabla u_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς* στο ∇u στον $BV(\Omega)$, δηλαδή αν

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^d)} = 0$$
$$\text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi D^2 u_n = \int_\Omega \phi D^2 u, \quad \forall \phi \in C_0(\Omega)$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο θεώρημα, Θεώρημα 4.1.1.1., μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα την παρακάτω ιδιότητα συμπάγειας

Θεώρημα 4.1.2.1.(Συμπάγεια στον BV^2) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό και φραγμένο με *Lipschitz* σύνορο και έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία του $BV^2(\Omega)$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς* σε κάποια u στον $BV^2(\Omega)$.

Απόδειξη . Από την συμπαγή εμφύτευση του $BV^2(\Omega)$ στον $W^{1,1}(\Omega)$, Θεώρημα 4.1.1.1., παίρνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μια συνάρτηση $u \in W^{1,1}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$u_{n_k} \to u, \text{ στον } W^{1,1}(\Omega),$$

και άρα

$$u_{n_k} \to u \text{ στον } L^1(\Omega) \qquad \text{και} \qquad \nabla u_{n_k} \to \nabla u \text{ στον } L^1(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Αφού η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία του $BV^2(\Omega)$ (άρα και κάθε υπακολουθία της), προκύπτει άμεσα ότι $\displaystyle\int_\Omega |D^2 u_{n_k}| < +\infty$. Βλέποντας τώρα την $(\nabla u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ σαν ακολουθία του $BV(\Omega,\mathbb{R}^d)$ και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.1.2., παίρνουμε ότι η $\nabla u \in BV(\Omega,\mathbb{R}^d)$ και ότι

$$\nabla u_{n_k} \to \nabla u$$

ασθενώς* στον $BV(\Omega,\mathbb{R}^d)$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $u \in BV^2(\Omega)$ και ότι η $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς* στην u στον $BV^2(\Omega)$. ■

Όπως και στον χώρο $BV(\Omega)$ έτσι και στον $BV^2(\Omega)$ ορίζουμε την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης.

Ορισμός 4.1.2.2.(Ενδιάμεση σύγκλιση στον BV^2). Έστω $u \in BV^2(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$. Λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_n$ συγκλίνει ενδιάμεσα στην u, αν η $(u_n)_n$ συγκλίνει στην u στον $L^1(\Omega)$ και η ακολουθία $(|D^2 u_n|(\Omega))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $|D^2 u|(\Omega)$, δηλ.

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} |D^2 u_n|(\Omega) = |D^2 u|(\Omega).$$

Κοιτάζοντας κανείς τον παραπάνω ορισμό της ενδιάμεσης σύγκλισης, παρατηρεί ότι δεν περιέχει άμεσα καμία συνθήκη για την πρώτης τάξης παράγωγο των στοιχείων της ακολουθίας $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αυτό καθιστά εύλογο το ερώτημα του κατά πόσον η ενδιάμεση σύγκλιση στον χώρο $BV^2(\Omega)$ συνεπάγεται την ασθενώς* σύγκλιση, όπως συμβαίνει στον χώρο $BV(\Omega)$. Το ερώτημα αυτό έρχεται να καλύψει το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.1.2.1.. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, φραγμένο και συνεκτικό με *Lipschitz* σύνορο. Έστω $u \in BV^2(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$ τέτοιες ώστε η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στην u με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV^2(\Omega)$. Τότε η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην u στον $W^{1,1}(\Omega)$.

Απόδειξη . Γνωρίζω ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στην u με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στον $BV^2(\Omega)$. Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι οι ακολουθίες $(\|u_n\|_{L^1(\Omega)})_n$ και $(|D^2 u_n|(\Omega))_n$ είναι φραγμένες. Πράγματι $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε,

$$\big|\|u_n\|_{L^1(\Omega)} - \|u\|_{L^1(\Omega)}\big| \le \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon, \quad \forall n \ge n_0$$

και άρα $\sup\limits_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \le \max(\|u_1\|, ..., \|u_{n_0-1}\|, \|u\| + \epsilon)$. Όμοια για την $(|D^2 u_n|(\Omega))_n$. Από τα παραπάνω λοιπόν σε συνδυασμό με την σχέση (4.1) παίρνει κανείς ότι

$\sup_n \|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^d)} < \infty$ και τελικά ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον $BV^2(\Omega)$. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 4.1.1.1., προκύπτει ότι υπάρχει $g \in W^{1,1}(\Omega)$ και υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - g\|_{W^{1,1}(\Omega)} = 0.$$

Όμως $u_{n_k} \to u$ στον $L^1(\Omega)$ και άρα $u = g$ σχεδόν παντού στο Ω. Αφού κάθε υπακολουθία της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $BV^2(\Omega)$, μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα και να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία αυτής που συγκλίνει στην u στον $W^{1,1}(\Omega)$. Αυτό αποδεθκνύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} = 0.$$

στον $W^{1,1}(\Omega)$. ■

Όπως και στον χώρο BV, οι συναρτήσεις του $BV^2(\Omega)$ προσεγγίζονται επίσης, ως προς την ενδιάμεση σύγκλιση, από ομαλές συναρτήσεις. Για την απόδειξη αυτού αρκεί κανείς να κινηθεί ανάλογα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3., σκεπτόμενος την ∇u σαν στοιχείο του $BV(\Omega, \mathbb{R}^l)$. Ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τους Demengel-Temam στο [3], που λέει το εξής:

Θεώρημα 4.1.2.2. Έστω $\phi : \mathbb{R}^{dxd} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση με γραμμική συμπεριφορά στο άπειρο. Τότε για κάθε $u \in BV^2(\Omega)$ υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\Omega) \cap W^{2,1}(\Omega)$, που συγκλίνει με την έννοια της ενδιάμεσης σύγκλισης στην u στον $BV^2(\Omega)$ και

$$\lim_{n\to\infty} \phi(D^2 u_n) = \phi(D^2 u)(\Omega).$$

Να σημειώσουμε ότι για κάθε $u \in W^{2,1}(\Omega)$, ο όρος $\phi(D^2u)(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega \phi(\nabla^2 u)dx$.

4.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης.

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων του προβλήματος ελαχιστοποίησης (4.0). Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοιχτό, φραγμένο, συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με *Lipschitz* σύνορο, ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα που έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής. Η ανάλυση γίνεται στον $\mathbb{R}^2$, όχι μόνο επειδή αναφερόμαστε σε εικόνες δύο διαστάσεων, αλλά γιατί σκοπεύουμε να κάνουμε χρήση της Πρότασης 2.3.3.3., η οποία δεν ισχύει για $d > 2$. Υποθέτουμε ότι $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής και $f \in L^2(\Omega)$.

Υποθέτουμε επίσης ότι $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, $\phi_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^+$ είναι κυρτές συναρτήσεις με γραμμική συμπεριφορά στο άπειρο και ικανοποιούν τις coersivity συνθήκες, δηλ. υπάρχουν θετικές σταθερές K_1, K_2 τέτοιες ώστε

$$K_1|x| \leq \phi_1(x) \leq K_2(1+|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$$K_1|x| \leq \phi_2(x) \leq K_2(1+|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Έτσι, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf_{u \in BV^2(\Omega)} H(u),$$

όπου

$$H(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega).$$

Παρατηρούμε ότι ο $BV^2(\Omega)$ είναι ο σωστός χώρος στον οποίο μπορεί κανείς να αποδείξει την ύπαρξη λύσης του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης. Πράγματι, αν κανείς προσπαθήσει να τοποθετήσει το παραπάνω πρόβλημα σε κάποιο χώρο $Sobolev$, θα κληθεί να ελαχιστοποιήσει το συναρτησιακό

$$F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta \int_\Omega \phi_2(\nabla^2 u)dx,$$

όπου τώρα $\nabla^2 u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Ο χώρος στον οποίο φαίνεται ότι πρέπει να οριστεί το συναρτησιακό F, είναι ο $W^{2,1}(\Omega)$. Όμως, επειδή ο χώρος αυτός δεν είναι αυτοπαθής (και άρα δεν έχουμε ασθενή συμπάγεια), δεν μπορεί να αποδειχθεί ύπαρξη των λύσεων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του F μέσω της κλασικής μεθόδου της θεωρίας μεταβολών. Πάραυτα, θα δείξουμε ότι υπάρχει σχέση μεταξύ των συναρτησιακών F και H. Μπορούμε φυσιολογικά να επεκτείνουμε το F στον $BV^2(\Omega)$ (θα συμβ. επίσης με F) ως εξής:

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx & \\ \qquad +\beta \int_\Omega \phi_2(\nabla^2 u)dx, & u \in W^{2,1}(\Omega) \\ \qquad +\infty, & u \in BV^2(\Omega) \backslash W^{2,1}(\Omega). \end{cases}$$

4.2.1 Ύπαρξη της λύσης

Τώρα το F είναι ορισμένο στον $BV^2(\Omega)$, στον οποίο, όπως είδαμε με το Θεώρημα 4.1.2.1., έχουμε την χρήσιμη ιδιότητα ασθενούς* συμπάγειας. Ακόμα όμως δεν μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη των λύσεων για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του F μέσω της κλασικής μεθόδου της θεωρίας μεταβολών, αφού, όπως θα δούμε από την επόμενη πρόταση, το F δεν είναι κάτω ημισυνεχές ως προς την ενδιάμεση τοπολογία του $BV^2(\Omega)$.

Θεώρημα 4.2.1.1. Θεωρούμε το συναρτησιακό F που ορίσαμε παραπάνω. Τότε το F δεν είναι κάτω ημισυνεχές ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ενδιάμεση σύγκλιση του $BV^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Επιλέγω $u \in BV^2(\Omega)\backslash W^{2,1}(\Omega)$ (για την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης βλέπε [3]). Τότε, από τον ορισμό του F, έχουμε ότι $F(u) = \infty$. Από το Θεώρημα 4.1.2.2., μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,1}(\Omega)$ η οποία να συγκλίνει ενδιάμεσα στην u στον $BV^2(\Omega)$ και άρα να συγκλίνει και ισχυρά στην u στον $W^{1,1}(\Omega)$, Λήμμα 4.1.2.1.. Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} < M, \quad \sup_n \|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^2)} < M, \quad \sup_n \|\nabla^2 u_n\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^4)} < M$$

δηλαδή οι ακολουθίες $(\|u_n\|_{L^1(\Omega)})_n$, $(\|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^2)})_n$, $(\|\nabla^2 u_n\|_{L^1(\Omega,\mathbb{R}^4)})_n$, είναι φραγμένες. Επίσης επειδή το Ω πληρεί όλες τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.3.3.(i), γνωρίζουμε ότι ο $W^{1,1}(\Omega)$ εμφυτεύεται στον $L^2(\Omega)$ ($p^* = 2$) και άρα η ακολουθία $(\|u_n\|_{L^2(\Omega)})_n$ είναι επίσης φραγμένη από το M. Από το γεγονός ότι ο T είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής, η $f \in L^2(\Omega)$, το Ω είναι φραγμένο και ϕ_1, ϕ_2 όπως ορίστηκαν στην εισαγωγή της ενότητας, προκύπτει ότι

$$F(u_n) = \frac{1}{2}\|Tu_n - f\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u_n)dx + \beta \int_\Omega \phi_2(\nabla^2 u_n)dx \leq$$

$$\leq \Big(\frac{1}{2}\|T\|\|u_n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2 + \alpha K_1 \int_\Omega (1 + |\nabla u_n|)dx + \beta K_2 \int_\Omega (1 + |\nabla^2 u_n|)dx <$$

$$< \Big(\frac{1}{2}\|T\|M + \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2 + \alpha K_1|\Omega| + \alpha K_1 M|\Omega| + \beta K_2|\Omega| + \beta K_2 M|\Omega| < +\infty.$$

Τότε

$$\liminf_n F(u_n) \leq \sup_n F(u_n) < +\infty$$

και άρα

$$F(u) > \liminf_n F(u_n)$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Κοιτάζοντας κανείς το παραπάνω θεώρημα, θα δει ότι ισχύει το ίδιο και για την τοπολογία που προκύπτει από την ασθενή* σύγκλιση, μιας και αφού η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που προέκυψε στην απόδειξη συγκλίνει ενδιάμεσα στην u, θα συγκλίνει και ασθενώς*.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το συναρτησιακό H που ορίστηκε παραπάνω είναι το κάτω ημισυνεχές envelope της F ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ασθενή* σύγκλιση του $BV^2(\Omega)$, δηλαδή

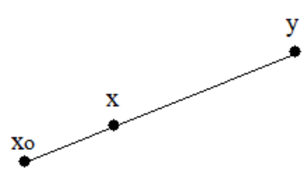
$$H = sc_{(BV^2(\Omega),w^*)}(F)$$

Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Αρχικά θα δείξουμε ότι το H είναι κάτω ημισυνεχές ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ασθενή* σύγκλιση. Για τον σκοπό αυτόν θα αποδείξουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.1.1.1. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ κυρτή με γραμμική συμπεριφορά στο άπειρο. Τότε η f είναι *Lipschitz*.

Απόδειξη.

Σχήμα 3: Επιλογή του τυχαίου σημείου y



Έστω $x, x_0 \in \mathbb{R}^2$ και επιλέγω $y \in \mathbb{R}^2$ όπως στο Σχήμα 3 , με $\|y - x_0\| > \|x - x_0\|$. Τότε

$$x = \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\|x - x_0\| + x_0 = \frac{\|x - x_0\|}{\|y - x_0\|}y + \Big(1 - \frac{\|x - x_0\|}{\|y - x_0\|}\Big)x_0,$$

και θέτοντας $t = \dfrac{\|x - x_0\|}{\|y - x_0\|}$ παίρνουμε ότι $x = ty + (1-t)x_0$, με $t < 1$. Επομένως αφού f κυρτή, έχουμε ότι

$$f(x) \leq tf(y) + (1-t)f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq t[f(y) - f(x_0)]$$
$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{\|y - x_0\|}.$$

Όμως αφού η f έχει γραμμική συμπεριφορά στο άπειρο, υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{\|y - x_0\|} \leq \frac{K(1 + \|y\|) - f(x_0)}{\|y - x_0\|} \leq \frac{K(1 + \|y - x_0\| + \|x_0\|) - f(x_0)}{\|y - x_0\|}$$
$$= K + \frac{K\|x_0\| + K - f(x_0)}{\|y - x_0\|}.$$

Στέλνοντας την $\|y\| \to \infty$ δείχνουμε τελικά ότι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\|x-x_0\|} \leq K.$$

Θεωρώντας τώρα $y \in \mathbb{R}^2$ αριστερά του x_0 τέτοιο ώστε $\|y-x\| > \|x-x_0\|$ και εκφράζοντας το x_0 σαν γραμμικό συνδιασμό των x, y :

$$x_0 = x - \frac{x-y}{\|x-y\|}\|x-x_0\|,$$

παίρνουμε αντίστοιχα με πριν ότι

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{\|x-x_0\|} \leq K.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή

$$|f(x)-f(x_0)| \leq K\|x-x_0\|, \qquad \forall x,\, x_0 \in \mathbb{R}^2. \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα 4.2.1.2. Το H είναι κάτω ημισυνεχές ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ασθενή* σύγκλιση του $BV^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in BV^2(\Omega), (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$ τέτοιες ώστε $u_n \to u$ ασθενώς* στον $BV^2(\Omega)$. Από τον ορισμό της ασθενούς* σύγκλισης παίρνουμε ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,1}(\Omega)$. Όμως από το Θεώρημα 2.3.3.3.(i), ο $W^{1,1}(\Omega)$ εμφυτεύεται στον $L^2(\Omega)$ και ισχύει

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\phi\|_{W^{1,1}(\Omega)}, \quad \forall \phi \in W^{1,1}(\Omega).$$

Για $\phi = u_n - u$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι,

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u_n - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \to 0, \text{ με } n \to \infty$$

και άρα $u_n \to u$ στον $L^2(\Omega)$. Αφού ο $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι συνεχής, έπεται άμεσα ότι η απεικόνιση $u \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (Tu-f)^2 dx$ είνα επίσης συνεχής και ισχύει από θεώρημα μεταφοράς ότι,

$$\begin{aligned} &u_n \to u, \text{ στον } L^2(\Omega) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_n - f)^2 dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2 dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Επειδή η συνάρτηση ϕ_1 είναι *Lipschitz*, βλέπε Λήμμα 4.1.1.1., παίρνουμε ότι

$$\Big|\int_\Omega \phi_1(\nabla u_n)dx - \int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx\Big| \leq \int_\Omega |\,\phi_1(\nabla u_n) - \phi_1(\nabla u)\,|dx \leq$$

$$\leq L \int_\Omega |\, \nabla u_n - \nabla u \,| dx = L \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^1(\Omega)}$$

και άρα

$$\int_\Omega \phi_1(\nabla u_n) dx \to \int_\Omega \phi_1(\nabla u) dx \tag{4.3}$$

αφού $\nabla u_n \to \nabla u$ στον $L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Από τον ορισμό της ασθενούς* σύγκλισης της u_n στην u στον $BV^2(\Omega)$ παίρνουμε ότι η ακολουθία $(D^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $D^2 u$ ασθενώς* στον $M(\Omega, \mathbb{R}^4)$ και κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.5., προκύπτει ότι

$$\phi_2(D^2 u)(\Omega) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \phi_2(D^2 u_n)(\Omega). \tag{4.4}$$

Από τις σχέσεις (4.2),(4.3) και (4.4) τελικά παίρνουμε ότι,

$$\lim_{n\to\infty} \inf H(u_n) = \lim_{n\to\infty} \inf \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_n - f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u_n) dx + \beta \phi_2(D^2 u_n)(\Omega)\Big] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu - f)^2 dx + \alpha \int_\Omega \phi_1(\nabla u) dx + \beta \phi_2(D^2 u)(\Omega) = H(u)$$

δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} \inf H(u_n) \geq H(u) \quad \blacksquare$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι προφανές ότι ισχύει και για την τοπολογία που επάγεται από την ενδιάμεση σύγκλιση στον $BV^2(\Omega)$.

Θεώρημα 4.2.1.3. Το συναρτησιακό H είναι το κάτω ημισυνεχές envelope της F ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ασθενή* σύγκλιση του $BV^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό των συναρτησιακών χαλάρωσης, όπως διατυπώνεται στην Πρόταση 2.4.1..

(i) Για την πρώτη συνθήκη του χαρακτηρισμού θεωρώ $u \in BV^2(\Omega)$ και ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$ τέτοια ώστε να συγκλίνει στο u ασθενώς* στον $BV^2(\Omega)$. Τότε από το Θεώρημα 4.2.1.2. και από το γεγονός ότι $H(v) \leq F(v),\ \forall v \in BV^2(\Omega)$ παίρνουμε ότι

$$H(u) \leq \lim_n \inf H(u_n) \leq \lim_n \inf F(u_n).$$

(ii) Για την δεύτερη συνθήκη του χαρακτηρισμού θεωρώ συνάρτηση $u \in BV^2(\Omega)$ και από το Θεώρημα 4.1.2.2. παίρνω ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{2,1}(\Omega)$ που συγκλίνει ενδιάμεσα, άρα και ασθενώς*, στην u στον $BV^2(\Omega)$. Από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \phi_2(D^2 u_n)(\Omega) = \phi_2(D^2 u)(\Omega).$$

Ακολουθώντας τώρα ακριβώς τα ίδια βήματα με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1.2., παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_n-f)^2dx+\alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u_n)dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2dx+\alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx, \quad \text{με} \;\; n\to\infty.$$

Από τα παραπάνω και από το γεγονός ότι $F(v)=H(v),\ \forall v\in W^{2,1}(\Omega)$ προκύπτει ότι

$$\lim_n F(u_n) = \lim_n \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_n-f)^2dx + \alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u_n)dx + \beta\phi_2(D^2u_n)(\Omega)\Big] = .$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2dx + \alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega) = H(u). \;\; \blacksquare$$

Όπως και το Θεώρημα 4.2.1.2. έτσι και το παραπάνω ισχύει και για τις δύο τοπολογίες που επάγονται από τις δύο συγκλίσεις που ορίσαμε στον χώρο $BV^2(\Omega)$,επομένως

$$H = sc_{(BV^2(\Omega),w^*)}(F) = sc_{(BV^2(\Omega),strict)}(F).$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα του κεφαλαίου, την ύπαρξη δηλαδή λύσης στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης (4.0). Για την απόδειξη αυτού θα χρησιμοποιήσουμε την κάτω ημισυνέχεια του H, σε συνδυασμό με την ασθενή* συμπάγεια του $BV^2(\Omega)$.

Θεώρημα 4.2.1.4. (Ύπαρξη λύσης του μοντέλου $TV-TV^2$). Έστω $\Omega, T, \phi_1, \phi_2$ να ικανοποιούν τις ιδιότητες που έχουμε προαναφέρει και έστω επίσης ότι $\alpha>0, \beta>0$ και $T(\mathcal{X}_\Omega)\neq 0$. Τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $\min\limits_{u\in BV^2} H(u)$, δηλαδή

$$\min_{u\in BV^2(\Omega)} \Big[\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu-f)^2dx + \alpha\int_\Omega \phi_1(\nabla u)dx + \beta\phi_2(D^2u)(\Omega)\Big]$$

έχει λύση $u^*\in BV^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq BV^2(\Omega)$ ακολουθία ελαχιστοποίησης για το (4.0),δηλ. $\lim\limits_{n\to\infty} H(u_n)=\inf H$. Τότε υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} H(u_n)<M$ και άρα έχουμε

$$\sup_n \frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_n-f)^2dx < M, \;\; \sup_n \int_\Omega \phi_1(\nabla u_n)dx < M, \;\; \sup_n \phi_2(D^2u_n)(\Omega) < M. \quad (4.6)$$

Οι εκτιμήσεις (4.6) μαζί με τις coerivity assumptions των ϕ_1, ϕ_2 μας δίνουν ότι

$$K_1|\nabla u_n| \le \phi_1(\nabla u_n) \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u_n|dx < \frac{M}{K_1}$$

και

$$K_2|D^2u_n| < \phi_2(D^2u_n) \Rightarrow |D^2u_n|(\Omega) < \frac{M}{K_2}$$

και άρα

$$\sup_n \int_\Omega |\nabla u_n|dx < \frac{M}{K_1} \qquad \text{και} \qquad \sup_n |D^2u_n|(\Omega) < \frac{M}{K_2} \tag{4.7}$$

Τώρα θα φράξουμε την ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(\Omega)$. Από την ανισότητα Poincare-Wirtinger, Πρόταση 2.3.2.2., υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^1(\Omega)} &= \Big\|u_n - \mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx + \mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx\Big\|_{L^1(\Omega)} \leq \\ &\leq C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|dx + \frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega u_n dx\Big| \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{C_1 M}{K_1} + \frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega u_n dx\Big|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για να φράξουμε την $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(\Omega)$, αρκεί να φράξουμε την ακολουθία $\Big(\int_\Omega u_n dx\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ ομοιόμορφα. Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.3.3.3. και της εκτίμησης (4.6), έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ότι

$$\begin{aligned}\Big\|T\Big(\mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx\Big)\Big\|_{L^2(\Omega)} &= \Big\|T\Big(\mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx\Big) - Tu_n + Tu_n - f + f\Big\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \Big\|T\Big(\mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx\Big) - Tu_n\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu_n - f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|T\|\Big\|u_n - \mathcal{X}_\Omega \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_n dx\Big\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu_n - f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|T\|C_1 \int_\Omega |\nabla u_n|dx + \sqrt{2M} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|T\|C_1 \frac{M}{K_1} + \sqrt{2M} + \|f\|_{L^2(\Omega)} := C^* > 0.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση $T(\mathcal{X}_\Omega) \neq 0$, παίρνουμε ότι

$$\frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega u_n dx\Big| \|T(\mathcal{X}_\Omega)\|_{L^2(\Omega)} \leq C^*$$

$$\Rightarrow \Big|\int_\Omega u_n dx\Big| \leq \frac{C^*|\Omega|}{\|T(\mathcal{X}_\Omega)\|_{L^2(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow \Big\| \int_\Omega u_n dx \Big\|_\infty < \infty.$$

Άρα η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega)$, και σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις (4.7) παίρνουμε οτι είναι φραγμένη και στον $BV^2(\Omega)$. Από το Θεώρημα 4.1.2.1. υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που συγκλίνει ασθενώς* σε κάποια u^* στον $BV^2(\Omega)$. Αφού το συναρτησιακό H είναι κάτω ημισυνεχές ως προς την τοπολογία που επάγεται από την ασθενή* σύγκλιση του $BV^2(\Omega)$, Θεώρημα 4.2.1.2, έπεται ότι

$$H(u^*) \leq \liminf_n H(u_{n_k}).$$

Όμως εξ' ορισμού των F, H ισχύει ότι $\inf F = \inf H$ και άρα

$$\inf F \leq H(u^*) \leq \liminf_n H(u_{n_k}) = \inf F$$

και τελικά από το Θεώρημα 2.4.2., αφού το H είναι το κάτω ημισυνεχές envelope της F (Θεώρημα 4.2.1.3.), προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή

$$u^* = \inf_{u\in BV^2(\Omega)} F(u) = \min_{u\in BV^2(\Omega)} H(u). \quad \blacksquare$$

Ας σημειώσουμε εδώ, ότι στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\alpha > 0$ προκειμένου να εξάγουμε ένα $L^1(\Omega)$ φράγμα της ακολουθίας $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία ελαχιστοποίησης που επιλέξαμε στην απόδειξη. Το φράγμα αυτό το χρησιμοποιήσαμε για να φράξουμε την $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^1(\Omega)$ και τελικά στον $BV^2(\Omega)$. Παρόλα αυτά ακόμα και στην περίπτωση που $\alpha = 0$, επίσης μπορούμε να φράξουμε την $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $L^2(\Omega)$ και άρα και στον $L^1(\Omega)$ αφού το Ω είναι φραγμένο, αρκεί ο T να ικανοποιεί μια συνθήκη της μορφής

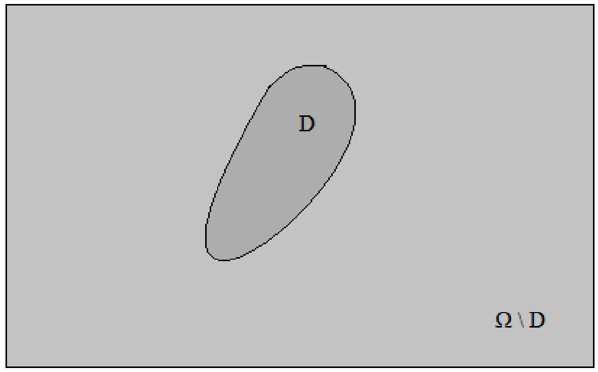
$$K\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Tu\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega)$$

για κάποια σταθερά $K > 0$, αφού τότε

$$K\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Tu_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Tu_n - f\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} + \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Μάλιστα κάνοντας χρήση της σχέσης (4.1), θα δείχναμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και στον $BV^2(\Omega)$. Αν όμως ο T δεν ικανοποιεί καμία συνθήκη της παραπάνω μορφής τότε δεν είναι ξεκάθαρο πως μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη. Πάραυτα, μπορούμε ακόμα να αποδείξουμε την ύπαρξη για $\alpha = 0$ (για την περίπτωση $\beta = 0$ βλέπε [5]), για τελεστές T που αντιστοιχούν σε προβλήματα image inpainting, δηλαδή προβολές σε υποσύνολα D του Ω. Η απόδειξη στην περίπτωση αυτή είναι πιο περίπλοκη και απαιτεί χρήση των θεωρημάτων ίχνους των χώρων BV.

Σχήμα 4: Αναχρωματισμός του χωρίου D



Θεώρημα 4.2.1.5. Αν $\beta > 0$, τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\inf_{u \in BV^2(\Omega)} \Big[\int_{\Omega \setminus D} (u-f)^2 dx + \beta \phi_2(D^2 u)(\Omega) \Big] \tag{4.9}$$

έχει λύση, όπου $D \subset\subset \Omega$ ανοιχτό, συνεκτικό σύνολο με *Lipschitz* σύνορο.

Απόδειξη. Έστω $G(u) := \displaystyle\int_{\Omega \setminus D} (u-f)^2 dx + \beta \phi_2(D^2 u)$ και έστω ακόμα $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq BV^2(\Omega)$ ακολουθία ελαχιστοποίησης για το (4.9), δηλ. $\lim\limits_{n \to \infty} G(u_n) = \inf G$. Τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} G(u_n) < M$ και άρα έχουμε

$$\sup_n \int_{\Omega \setminus D} (u_n - f)^2 dx < M, \qquad \sup_n \phi_2(D^2 u_n)(\Omega) < M. \tag{4.10}$$

Τότε από τις coercivity assumptions της ϕ_2 παίρνουμε ότι

$$K_2 |D^2 u_n| < \phi_2(|D^2 u_n|) \Rightarrow |D^2 u_n|(\Omega) < \frac{M}{K_2}$$

και άρα

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |D^2 u_n|(\Omega) < \infty. \tag{4.11}$$

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να φράξουμε τις ακολουθίες $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον $L^1(\Omega)$ και στον $L^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ αντίστοιχα. Μετά η απόδειξη μπορεί να ολοκληρωθεί κάνοντας απλά εφαρμογή της κλασσικής μεθόδου, ακριβώς όπως κάναμε στο Θεώρημα 4.2.1.4.. Από την σχέση (4.10) παίρνουμε ότι

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega \setminus D)} \leq \|u_n - f\|_{L^2(\Omega \setminus D)} + \|f\|_{L^2(\Omega \setminus D)} < \sqrt{M} + \|f\|_{L^2(\Omega \setminus D)} < \infty$$

και άρα ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $L^2(\Omega\backslash D)$. Αφού το Ω είναι φραγμένο, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και στον $L^1(\Omega\backslash D)$,δηλ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_{L^1(\Omega\backslash D)}<\infty. \tag{4.12}$$

Όμως από τις σχέσεις (4.1),(4.11) και (4.12),

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega\backslash D,\mathbb{R}^2)}<\infty \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}}|Du_n|(\Omega\backslash D)<\infty. \tag{4.13}$$

Ορίζουμε ως $u_n^{(1)}$ και $u_n^{(2)}$ τους περιορισμούς της u_n στα $\Omega\backslash D$ και D αντίστοιχα. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1. έχουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$

$$|Du_n|(\Omega)=|Du_n|(\Omega\backslash D)+|Du_n|(D)+\|(u_n^{(1)})^{\Omega\backslash D}-(u_n^{(2)})^{D}\|_{L^1(\vartheta D;\mathcal{H})}. \tag{4.14}$$

Αφού $u_n\in W^{1,1}(\Omega)$ έχουμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$

$$|Du_n|(\Omega)=\int_\Omega|\nabla u_n|dx=\int_{\Omega\backslash D}|\nabla u_n|dx+\int_D|\nabla u_n|dx=|Du_n|(\Omega\backslash D)+|Du_n|(D)$$

και άρα από την (4.14) έχουμε

$$\|(u_n^{(1)})^{\Omega\backslash D}\|_{L^1(\vartheta D;\mathcal{H})}=\|(u_n^{(2)})^{D}\|_{L^1(\vartheta D;\mathcal{H})}. \tag{4.15}$$

Επειδή ο $BV(\Omega\backslash D)$ εμφυτεύεται στον $L^1(\vartheta D;\mathcal{H})$, Θεώρημα 3.2.1., παίρνουμε ότι

$$\|(u_n^{(1)})^{\Omega\backslash D}\|_{L^1(\vartheta D;\mathcal{H})}\leq C_1\|u_n^{(1)}\|_{BV(\Omega\backslash D)}=C_1\|u_n\|_{BV(\Omega\backslash D)}=C_1\|u_n\|_{L^1(\Omega\backslash D)}+C_1|Du_n|(\Omega\backslash D)$$

και από τις σχέσεις (4.12),(4.13) και (4.15) προκύπτει ότι

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|(u_n^{(2)})^{D}\|_{L^1(\vartheta D;\mathcal{H})}<\infty. \tag{4.16}$$

Έστω τώρα ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη στον $L^1(D)$,δηλ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_{L^1(D)}=\infty.$$

Τότε με βάση την εκτίμηση (4.16) και την Πρόταση 3.2.2. θα πρέπει

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|Du_n|(D)=\infty,$$

δηλ., $\exists\, i_0\in\{1,2,...,d\}$ για το οποίο ισχύει

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big\|\frac{\vartheta u_n}{\vartheta x_{i_0}}\Big\|_{L^1(D)}=\infty. \tag{4.17}$$

Η σχέση (4.17) οδηγεί σε άτοπο. Πράγματι, χρησιμοποιώντας ξανά την Πρόταση 3.2.1., αυτήν τη φορά για την ∇u_n, παίρνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$|D^2 u_n|(\Omega) = |D^2 u_n|(\Omega \backslash D) + |D^2 u_n|(D) + \|(\nabla u_n^{(1)})^{\Omega \backslash D} - (\nabla u_n^{(2)})^D\|_{L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})}. \quad (4.18)$$

Όμως αφού $|D^2 u_n| \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ έχουμε ότι $|D^2 u_n|(\Omega) = |D^2 u_n|(\Omega \backslash D) + |D^2 u_n|(D)$ και άρα από την σχέση (4.18) παίρνουμε ότι

$$\|(\nabla u_n^{(1)})^{\Omega \backslash D}\|_{L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})} = \|(\nabla u_n^{(2)})^D\|_{L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})}. \quad (4.19)$$

Επειδή ο $BV(\Omega \backslash D, \mathbb{R}^d)$ εμφυτεύεται στον $L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})$, Θεώρημα 3.2.1., παίρνουμε ότι

$$\|(\nabla u_n^{(1)})^{\Omega \backslash D}\|_{L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})} \leq C_2 \|(\nabla u_n)^{(1)}\|_{BV(\Omega \backslash D, \mathbb{R}^d)} =$$

$$= C_2 \|\nabla u_n\|_{BV(\Omega \backslash D, \mathbb{R}^d)} = C_2 \|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega \backslash D, \mathbb{R}^d)} + C_2 |D^2 u_n|(\Omega \backslash D)$$

και από τις σχέσεις (4.11),(4.13) και (4.19) προκύπτει ότι

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(\nabla u_n^{(2)})^D\|_{L^1(\vartheta D, \mathbb{R}^d; \mathcal{H})} < \infty \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \Big(\frac{\vartheta u_n^{(2)}}{\vartheta x_{i_0}}\Big)^D \Big\|_{L^1(\vartheta D; \mathcal{H})} < \infty.$$

Αλλά ξανά από την Πρόταση 3.2.2. παίρνουμε

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Big| D\Big(\frac{\vartheta u_n}{\vartheta x_{i_0}}\Big) \Big|(D) = \infty$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει λόγω της (4.11). Επομένως $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^1(D)} < \infty$ και σε συνδυασμό με την (4.12) παίρνουμε τελικά ότι

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^1(\Omega)} < \infty. \quad (4.20)$$

Πλέον το φράγμα για την $(\nabla u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ προκύπτει εύκολα από τις σχέσεις (4.11) και (4.20), αφού λόγω της (4.1) ξέρουμε ότι

$$\|\nabla u_n\|_{L^1(\Omega, \mathbb{R}^d)} \leq C_3 \Big(|D^2 u_n|(\Omega) + \|u_n\|_{L^1(\Omega)} \Big). \ \blacksquare$$

4.2.2 Μοναδικότητα της λύσης

Τώρα θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος ελαχιστοποίησης (4.0). Η απόδειξη αυτή ακολουθεί την ίδια μεθοδολογία με την απόδειξη του αντίστοιχου προβλήματος πρώτης τάξης, βλέπε [5].

Θεώρημα 4.2.2.1. (Μοναδικότητα της λύσης). Αν $T(\mathcal{X}_\Omega) \neq 0$ και T αντιστρέψιμος ή ϕ_1 αυστηρά κυρτή, τότε η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (4.0) είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω u_1, u_2 σημεία ελαχιστοποίησης του (4.0). Αρχικά θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $x \mapsto |x|^p$, $p \geq 1$ είναι κυρτή. Πράγματι για $\lambda \in [0,1]$, q ο κρίσιμος εκθέτης,δηλ. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ και κάνοντας χρήση της ανισώτητας $Holder$ παίρνουμε,

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y| = (\lambda^{1/p}|x|)\lambda^{1/q} + [(1-\lambda)^{1/p}|y|](1-\lambda)^{1/q} \leq$$

$$\leq [\lambda|x|^p + (1-\lambda)|y|^p]^{1/p}(\lambda + 1 - \lambda)^{1/q} = [\lambda|x|^p + (1-\lambda)|y|^p]^{1/p}$$

$$\Rightarrow |\lambda x + (1-\lambda)y|^p \leq [\lambda|x|^p + (1-\lambda)|y|^p].$$

Πλέον είναι εύκολο να δείξουμε ότι η απεικόνιση $u \mapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (Tu - f)^2 dx$ είναι κυρτή. Πράγματι,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Big[T(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) - f\Big]^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\lambda T u_1 - \lambda f + (1-\lambda)Tu_2 - (1-\lambda)f\Big]^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[\lambda(Tu_1 - f)^2 + (1-\lambda)(Tu_2 - f)^2\Big] dx = \lambda\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_1 - f)^2 dx + (1-\lambda)\frac{1}{2}\int_\Omega (Tu_2 - f)^2 dx.$$

Τώρα κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.2.4. παίρνουμε ότι η ϕ_2 είναι κυρτή στον $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^{dxd})$. Από τα παραπάνω σε συνδυασμό με το ότι η ϕ_1 είναι κυρτή, προκύπτει άμεσα ότι το συναρτησιακό H είναι κυρτό στον $BV^2(\Omega)$. Για $Tu_1 \neq Tu_2$, από την 'αυστηρή' κυρτότητα του όρου πιστότητας παίρνουμε ότι

$$H(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2) < \frac{1}{2}H(u_1) + \frac{1}{2}H(u_2) = infH$$

που είναι άτοπο. Άρα $Tu_1 = Tu_2$. Αν ο T είναι αντιστρέψιμος έπαιται ότι $u_1 = u_2$. Έστω τώρα ότι ο T δεν είναι αντιστρέψιμος και η ϕ_1 είναι αυστηρά κυρτή. Τότε αν $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$

παίρνουμε την ίδια αντίφαση με πριν, επομένως $\nabla u_1 = \nabla u_2$. Τότε όμως αφού το Ω είναι συνεκτικό και από το γεγονός ότι $T(\mathcal{X}_\Omega) \neq 0$ παίρνουμε ότι,

$$u_1 = u_2 + c\mathcal{X}_\Omega \Rightarrow Tu_1 = Tu_2 + cT(\mathcal{X}_\Omega) \Rightarrow c = 0. \quad \blacksquare.$$

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του (4.0) γίνεται ιδιαίτερα δύσκολη στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε την L^1 νόρμα στον όρο πιστότητας, λόγω έλλειψης της αυστηρής κυρτότητας.

Αναφορές

[1] Attouch, Hedy, Buttazzo, Giuseppe, and Michaille, Gérard, Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization

[2] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, Functions of bounded variation and free discontinuity problems, Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[3] F. Demengel, Fonctions ‘a Hessien born´e, Annales de l’Institut Fourier 34 (1985), 155–190. (Cited on pages 29, 60, 61, and 64).

[4] L. C. Evans, Partial Differential Equations, second printing (American Math Society, 2010)

[5] L. Vese, A study in the BV space of a denoising-deblurring variational problem, Applied Mathematics and Optimization 44 (2001), no. 2, 131–161. (Cited on pages 33, 56, 67, 68, and 71).

[6] K.Papafitsoros, Novel higher order regularisation methods for image reconstruction, University of Cambridge, 2014.

[7] K. Papafitsoros and C.B. Schönlieb, A combined first and second order variational approach for image reconstruction, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 48, no. 2, 308-338, (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s10851-013-0445-4.