

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ
ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ
ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Πετρούλας Σταμούλη

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Βασίλειος Κοκκίνης

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018



Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Σταμούλη Πετρούλας

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Βασίλειος Κοκκίνης

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Κοκκίνης Βασίλειος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κολέτσος Ιωάννης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Συμβώνης Αντώνιος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2017-2018 στα πλαίσια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας των προπτυχιακών σπουδών της σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Ο επιβλέπων καθηγητής της διπλωματικής εργασίας ήταν ο Βασίλειος Κοκκίνης, στον οποίο οφείλω τις ευχαριστίες μου για την συνεχή στήριξη και την βοήθεια καθ'όλη την διάρκεια του έτους. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, καθώς και τους φίλους μου που με συμβουλεύουν και συμπαραστέκονται όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μελέτη και επίλυση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων αποτελεί ένα κεντρικό αντικείμενο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών καθώς τέτοιου είδους εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν προβλήματα των φυσικών, τεχνολογικών, βιοιατρικών, αλλά και των οικονομικών επιστημών. Τέτοιες εξισώσεις δεν είναι πάντα δυνατό να επιλυθούν με αναλυτικές μεθόδους και έτσι η λύση προσεγγίζεται με μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης.

Μία από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Στην εργασία αυτή αναλύεται και επιλύεται το πρόβλημα μίας εξίσωσης παραβολικού τύπου και συγκεκριμένα της εξίσωσης της θερμότητας. Χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων Galerkin για την διακριτοποίηση του χώρου, ενώ για την διακριτοποίηση του χρόνου χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι Backward Euler, Forward Euler και Crank-Nicolson. Η Forward Euler είναι ευσταθής υπό συνθήκες ενώ οι άλλες δύο μέθοδοι είναι απεριόριστα ευσταθείς. Οι μέθοδοι του Euler είναι 1^{ης} τάξης ως προς το χρονικό βήμα, ενώ η μέθοδος Crank – Nicolson 2^{ης} τάξης. Με χρήση του λογισμικού Freefem++ υπολογίστηκε η προσεγγιστική λύση για κάθε μία από τις παραπάνω μεθόδους. Τέλος παρατηρήθηκε ότι τα πειραματικά αποτελέσματα επαληθεύουν τα θεωρητικά.

ABSTRACT:

The study of partial differential equations is a significant part of applied mathematics. Such equations appear very often in mathematical models describing problems of physical, technological, bio-medical, and economic sciences. The difficulty of solving partial differential equations by analytical method leads to the need of approximating the solution a by numerical methods.

One of the most popular methods used to approximate solutions of partial differential equations is the finite element method. This thesis analyzes and solves a problem of a parabolic equation and in particular a heat equation. The Galerkin finite element method is used for space discretization, while Backward Euler, Forward Euler and Crank-Nicolson were used for time discretization. Forward Euler is stable only under conditions while the other two methods are unconditionally stable. Euler's methods are first order accurate in terms of the time step, while Crank-Nicolson method is second order. In this thesis , using Freefem ++ software, the approximate solution for each of the above methods was calculated. Finally, experimental results were verified theoretically.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ:

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	8
1.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ:	8
1.2 ΝΟΡΜΕΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ	11
1.3 ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ.....	12
1.4 ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ- ΧΩΡΟΙ HILBERT	13
1.5 L^2 -ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ.....	18
1.6 ΧΩΡΟΙ SOBOLEV	20
2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ	23
2.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ.....	23
2.2 . ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ DIRICHLET.	25
2.2.1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET ΜΕ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.....	25
2.2.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET ΜΕ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	27
3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ	30
3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ.....	30
3.2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ	32
3.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.	36
3.4 ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ	39
4. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟ	46
4.1. ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.....	46
4.2. ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	49
4.2.1. BACKWARD EULER	49
4.2.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ CRANK-NICOLSON.....	50
4.2.3. ΑΜΕΣΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER.....	52
5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	54
5.1. ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ GALERKIN ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	56
5.2. ΜΕΡΙΚΑ ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	62
5.2.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ BACKWARD EULER - GALERKIN	62
5.2.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ FORWARD EULER - GALERKIN	65
5.2.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRANK- NICOLSON- GALERKIN.....	66
6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++.....	68
6.1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ.....	68
6.2. ΟΙ ΕΝΤΟΛΕΣ ΣΤΟ FreeFem++.....	Error! Bookmark not defined.

6.3.	Η ΜΕΘΟΔΟΣ BACKWARD EULER-GALERKIN.....	71
6.3.1.	ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	71
6.3.2.	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ	73
6.4.	Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRANK-NICOLSON-GALERKIN	75
6.4.1.	ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	75
6.4.2.	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ	76
6.5.	Η ΜΕΘΟΔΟΣ FORWARD EULER-GALERKIN	78
6.5.1.	ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	78
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΚΩΔΙΚΑΣ FreeFem++	82
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	88

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ:

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Πραγματικός διανυσματικός χώρος (ή γραμμικός χώρος) X ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$. Δηλαδή ένα σύνολο X εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

$+$: $X \times X \rightarrow X$ (εσωτερική πράξη, πρόσθεση) και

\cdot : $\mathbb{R} \times X \rightarrow X$ (εξωτερική πράξη, βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (ΠΡΟΣΘΕΣΗ)

1. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in X.$

2. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in X.$

3. \exists στοιχείο 0_X του X , που ονομάζεται μηδενικό στοιχείο, ώστε

$$x + 0_X = 0_X + x = x \quad \forall x \in X.$$

4. $\forall x \in X$ υπάρχει στοιχείο $-x \in X$, που ονομάζεται αντίθετο του x , ώστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Συνέπειες:

Το 0_X είναι μοναδικό (Δηλαδή αν $y \in X$ τέτοιο ώστε $x + 0_X = x \implies y = 0_X$)

Το $-x$ είναι μοναδικό (Δηλαδή αν $x, y \in X$ τέτοιο ώστε $x + y = 0_X \implies y = -x$)

- (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΜΟΣ)

5. $\forall x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}. \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

6. $\forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R} (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

6. $\forall x \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

7. $\forall x \in X 1x = x$

Συνέπειες:

$$-0_X = 0_X$$

$$\forall x \in X 0 \cdot x = 0_X, 0 \in \mathbb{R}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda \cdot 0_X = 0_X$$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου καλούνται και διανύσματα

Παραδείγματα:

1. Ο $X=\{0_x\}$ είναι διανυσματικός χώρος αφού ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες.
2. Το \mathbb{R} είναι διανυσματικός χώρος με $+\ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cdot \ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

3. Έστω $C[a,b]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ με τις πράξεις:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) , x \in [a,b]$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x) , \quad x \in [a,b]$$

Το $C[a,b]$ αποτελεί ένα γραμμικό συναρτησιακό χώρο.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΥΠΟΧΩΡΟΣ

Έστω X διανυσματικός χώρος, ένα μη κενό $Y \subset X$ ονομάζεται διανυσματικός υπόχωρος του X αν ισχύουν:

$\forall x, y \in Y$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ είναι

$x + y \in Y$ και $\lambda x \in Y$.

Συνέπεια:

Αν ο Y είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου X , τότε:

ο Y με τον περιορισμό των πράξεων $+\ : X \times X \rightarrow X$ και $\cdot \ : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ στον $Y \times Y$ και $\mathbb{R} \times Y$ αντίστοιχα, οι οποίες βάσει του ορισμού παίρνουν τιμές στον Y (δηλαδή $+\ : Y \times Y \rightarrow Y$ και $\cdot \ : \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$) καθιστούν τον $(Y, +, \cdot)$ διανυσματικό χώρο, με μηδενικό στοιχείο το μηδενικό στοιχείο του X .

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ

Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Ένας γραμμικός συνδυασμός του X είναι ένα διάνυσμα (στοιχείο) της μορφής $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ όπου $x_i \in X$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΗΚΗ

Αν X γραμμικός χώρος και G ένα υποσύνολο του X ονομάζουμε γραμμική θήκη του G και συμβολίζουμε $\langle G \rangle$ τον μικρότερο γραμμικό υπόχωρο που περιέχει το G .

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Έστω X ένας γραμμικός χώρος.

- (i) Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ του X λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Δηλαδή $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, το σύνολο λέγεται γραμμικά εξαρτημένο.

- (ii) Ένα $A \subset X$, λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αλλιώς, λέγεται γραμμικά εξαρτημένο, δηλαδή αν έχει ένα γραμμικά εξαρτημένο πεπερασμένο υποσύνολο.

Τα στοιχεία $x \in X$ παράγουν τον χώρο X αν κάθε στοιχείο $x \in X$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή: $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$

ΒΑΣΗ ΤΟΥ X

Ένα υποσύνολο B του X καλείται βάση του X αν τα στοιχεία του B είναι ανεξάρτητα και παράγουν το X .

Ο χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης αν έχει μία πεπερασμένη βάση.

Παραδείγματα

1. Δυο διανύσματα του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνευθειακά και τρία διανύσματα του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν είναι συνεπίπεδα.
2. Σε κάθε διανυσματικό χώρο το $\{0\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο ενώ για $x \in X$ με $x \neq 0$ το $\{x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το \emptyset είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
3. Αν το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $B \subset A$ τότε και το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Έστω X και Y δύο διανυσματικοί χώροι. Ένας γραμμικός τελεστής T από το X στο Y είναι ένας μετασχηματισμός από το X στο Y , $T: X \rightarrow Y$, που $\forall x_1, x_2, x \in X$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$
- $T(\lambda x)=\lambda T(x)$

1.2 ΝΟΡΜΕΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΝΟΡΜΑΣ

Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια νόρμα στον X είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\|x\| \geq 0$ για κάθε $x \in X$.
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ για κάθε $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Η νόρμα σε ένα διανυσματικό χώρο είναι το ανάλογο της απόλυτης τιμής στο \mathbb{R} . Η θεμελιώδης ιδιότητα που περιέχεται στον ορισμό είναι ότι κάθε νόρμα ορίζει μια “απόσταση” μεταξύ των διανυσμάτων του χώρου. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε την απόσταση δύο στοιχείων x, y του X με την έκφραση: $\|x - y\|$. Αυτό σημαίνει ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει δομή μετρικού χώρου.

Παραδείγματα:

1. Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
2. Οι p -νόρμες στον \mathbb{R}^n . Για $1 \leq p < \infty$, $x = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Για $p = \infty$ ορίζουμε: $\|x\|_\infty = \max\{ |a_i| : i \in \mathbb{N} \}$

3. Στο $C[a, b]$ ορίζεται επίσης η νόρμα: $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
4. Στο $L^1(a, b)$, τον χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων σε απόλυτη τιμή, ορίζεται η νόρμα: $\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1:

Δύο νόρμες $\|\cdot\|_a$ και $\|\cdot\|_b$ είναι ισοδύναμες στο X εάν υπάρχουν θετικές σταθερές c και C ώστε : $c\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C\|x\|_b, \forall x \in X$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ Cauchy

Έστω X ένας χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$. Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στον χώρο X , συγκλίνει στο $x \in X$ (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$) αν:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x_k\| = 0$$

Μία ακολουθία $\{x_n\}$ στον χώρο X με νόρμα $\|\cdot\|$ καλείται ακολουθία Cauchy ή βασική αν:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|x_m - x_n\| = 0$$

Δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ να ισχύει:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΟΥ BANACH

Ένας χώρος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει η νόρμα. Δηλαδή αν κάθε ακολουθία Cauchy στον X , συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X .

1.3 ΦΡΑΓΜΕΝΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΦΡΑΓΜΕΝΟΣ (ΣΥΝΕΧΗΣ) ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ.

Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T: X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T θα λέγεται φραγμένος αν υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ να είναι :

$$\|T(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$$

ΝΟΡΜΑ ΤΕΛΕΣΤΗ

Για ένα φραγμένο τελεστή T από το X στο Y ορίζεται η νόρμα τελεστή του T με

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right) \quad \text{ή} \quad \|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|T(x)\|_Y \quad \text{και}$$

ισχύει η ανισότητα: $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X$

Ένας γραμμικός τελεστής από το X στο \mathbb{R} καλείται γραμμικό συναρτησιακό.

Ο ΧΩΡΟΣ $B(X, Y)$

Το σύνολο $B(X, Y)$ των γραμμικών φραγμένων τελεστών από το $(X, \|\cdot\|)$ στο $(Y, \|\cdot\|)$,

Δηλαδή $B(X, Y) = \{ T : X \rightarrow Y : T \text{ γραμμικός και φραγμένος} \}$. Ο $B(X, Y)$ είναι διανυσματικός χώρος.

ΔΥΙΚΟΣ Ή ΣΥΖΥΓΗΣ ΧΩΡΟΣ

Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυικός του X συμβολίζεται με X^* και είναι ο χώρος $B(X, \mathbb{R})$ των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών του X .

1.4 ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ- ΧΩΡΟΙ HILBERT

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Έστω E διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον E είναι μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in E$.
- (2) Αν $\langle x, x \rangle = 0$ τότε $x = 0$.
- (3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, για κάθε $x, y \in E$.
- (4) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Παρατηρείστε ότι από τις ιδιότητες (3) και (4) έχουμε ότι $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$ για κάθε $x, y, z \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Επίσης $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Στον $X = \mathbb{R}^n$ ορίζεται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$
2. Στο $X = C[a, b]$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο: $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$
3. Στο $C^1[a, b]$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο $(f, g)_1 = (f, g) + (f', g')$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ Cauchy–Schwartz.

Αν E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

ΠΡΟΤΑΣΗ ¹

Ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ σε ένα διανυσματικό χώρο E ορίζει μια νόρμα στον E από τη σχέση: $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in E$

Παρατήρηση. Η ανισότητα Cauchy–Schwartz διατυπώνεται τώρα ως εξής: Για κάθε $x, y \in E$ $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, x \in E$, η νόρμα στον E που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο. Τότε η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ¹

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε για κάθε $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δύο στοιχεία $x, y \in E$ λέγονται κάθετα ή ορθογώνια (συμβολικά $x \perp y$), όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Το x είναι ορθογώνιο σε ένα υποσύνολο S του X αν $\langle x, y \rangle = 0 \forall y \in S$.

Το 0 είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του E και είναι και το μοναδικό στοιχείο με την ιδιότητα αυτή.

¹ [3] Σ. Αργυρός Συναρτησιακή Ανάλυση Μάιος 2004 σ. 43

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in E$ ώστε $x \perp y$. Τότε:

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΟΥ HILBERT

Ένας χώρος Banach $(H, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Hilbert αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον H , δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον H ώστε:

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

(1) Ισοδύναμα ένας χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο που είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

(2) Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert είναι χώρος Hilbert.

Παραδείγματα χώρων Hilbert.

1. Ο \mathbb{R}^n με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ είναι ένας (πεπερασμένης διάστασης) χώρος Hilbert.

2. Ο χώρος $C[0,1]$ με εσωτερικό γινόμενο: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$

3. Ο χώρος $L^2(\Omega)$, όπου Ω είναι μία περιοχή του \mathbb{R}^n , είναι ο χώρος των «τάξεων» συναρτήσεων f , με $\int_{\Omega} f^2 dx < \infty$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dx$ και νόρμα $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$. Ο χώρος $L^2(\Omega)$ είναι ο μικρότερος πλήρης χώρος που περιέχει τις συναρτήσεις $f \in C(\Omega)$ με $\int_{\Omega} f^2 dx < \infty$. Κάθε «τάξη» συναρτήσεων του $L^2(\Omega)$

ορίζεται με την ιδιότητα ότι δύο συναρτήσεις αυτής της τάξης συμπίπτουν σχεδόν παντού. Δηλαδή παντού εκτός από ένα υποσύνολο του Ω .

ΠΡΟΤΑΣΗ:²

Έστω H χώρος Hilbert, F κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H και $x \in H \setminus F$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $x - y \perp F$.

² [3] Σ. Αργυρός Συναρτησιακή Ανάλυση Μάιος 2004 –σ.45

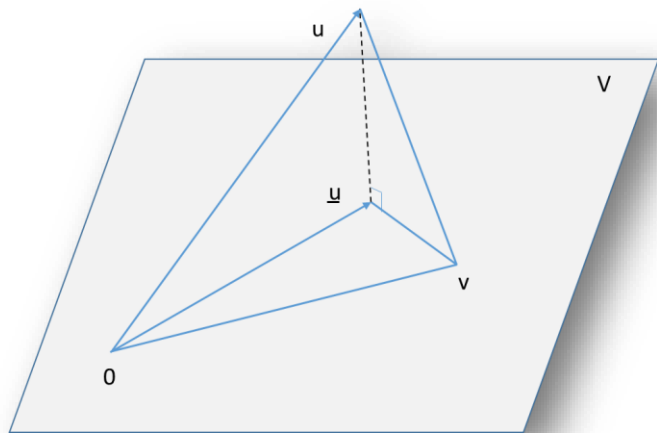
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 - ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΣΕ ΧΩΡΟ HILBERT.³

Έστω U ένας χώρος Hilbert και V ένας κλειστός υπόχωρος του U . Για κάθε $u \in U$ Υπάρχει ένα μοναδικό $\underline{u} \in V$ τέτοιο ώστε : $\langle u - \underline{u}, v \rangle = 0, v \in V$.

Η ισοδύναμη:

$$\|u - \underline{u}\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$$

Το \underline{u} καλείται προβολή του u στο V ή βέλτιστη προσέγγιση του u στο V .



ΘΕΩΡΗΜΑ: 1.3 Riesz

Έστω V ένας χώρος Hilbert. Για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F \in V^*$, υπάρχει ένα μοναδικό $u \in V$ τέτοιο ώστε : $F(v) = (u, v), v \in V$, και μάλιστα ισχύει:

$$\|F\| = \|u\|$$

ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟ

Έστω V ένας γραμμικός χώρος. Ένα διγραμμικό συναρτησιακό $B(\cdot, \cdot)$ στο V είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $V \times V$ και τιμές στο \mathbb{R} , με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v)$$

$$B(u, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 B(u, v_1) + \mu_2 B(u, v_2), \forall u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V \text{ και } \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Έστω V ένας χώρος Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_V$ και νόρμα $\|\cdot\|_V, B(\cdot, \cdot)$ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στο V και F ένα γραμμικό συναρτησιακό στο V . Το γενικό ακριβές πρόβλημα είναι:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Να βρεθεί } u \in V, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(u, v) = F(v), \forall v \in V \end{array} \right. \quad (1.1)$$

³ [1] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων – Πεπερασμένα στοιχεία και διαφορές Αθήνα 2003

Στη γενική μέθοδο Galerkin διαλέγουμε έναν προσεγγιστικό υπόχωρο V_n διάστασης n του V και θεωρούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό πρόβλημα:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Να βρεθεί } \bar{u}_n \in V_n, \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(\bar{u}_n, \varphi) = F(\varphi), \forall \varphi \in V_n \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Το \bar{u}_n λέγεται προσέγγιση Galerkin της ακριβούς λύση u . Διαλέγουμε μία βάση $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ του V_n και θέτουμε $\bar{u}_n = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j$

Τότε οι εξισώσεις (2) είναι ισοδύναμες με τις n εξισώσεις:

$$B(\bar{u}_n, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, n$$

ή

$$\sum_{j=1}^n c_j B(\varphi_j, \varphi_i) = F(\varphi_i) \quad i = 1, \dots, n$$

οι οποίες αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα:

$$\left| \begin{array}{l} Ac = b \\ \text{όπου} \\ A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i) \\ b = (b_i), \quad b_i = F(\varphi_i) \\ c = (c_j) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Έτσι η μέθοδος Galerkin ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος (1.3).

ΚΑΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ:

$$(\alpha) |B(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \cdot \|v\|_V, \quad u, v \in V \quad (\text{συνέχεια})$$

$$(\beta) B(v, v) \geq c_2 \|v\|_V^2, \quad v \in V \quad (V\text{-ελλειπτικότητα})$$

$$(\gamma) |F(v)| \leq c_3 \|v\|_V, \quad v \in V \quad (\text{συνέχεια})$$

όπου $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ και $c_3 \geq 0$ σταθερές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 :- LAX-MILGRAM (Υπαρξη και μοναδικότητα της ακριβούς λύσης)

Υπάρχει ένα μοναδικό $u \in V$ που ικανοποιεί την σχέση:

$$|B(u, v) = F(v), \forall v \in V$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.5: - GALERKIN⁴ (Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγιστικής λύσης)

Υπάρχει ένα μοναδικό $\bar{u}_n \in V_n$ που ικανοποιεί την (1.2)

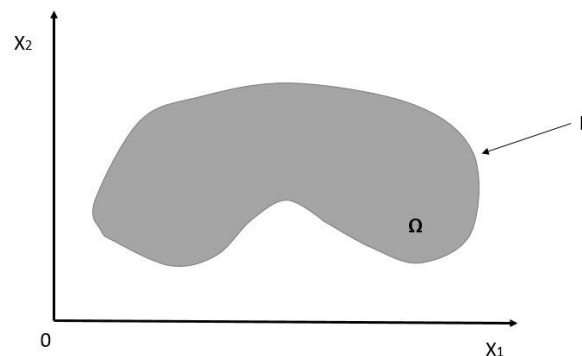
ΘΕΩΡΗΜΑ: 1.6 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ GALERKIN

Ισχύει η γενική εκτίμηση σφάλματος :

$$\|u - \bar{u}_n\|_V \leq \frac{c_1}{c_2} \|u - \underline{u}_n\|_V$$

όπου \bar{u}_n η προσέγγιση Galerkin και \underline{u}_n η βέλτιστη προσέγγιση της u στον χώρο V_n , δηλαδή, η προβολή της u στο V_n .

1.5 L²-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ



Έστω Ω μια ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^n , με σύνορο Γ . Συμβολίζουμε με $C^m(\Omega)$ το χώρο των συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους τάξης $\leq m$ στο Ω (δηλαδή μερικές παραγώγους, αν $n > 1$), και με $C^\infty(\Omega)$ το χώρο των συναρτήσεων με παραγώγους όλων των τάξεων στο Ω . Για $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ όπου α_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, η α -μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$ συμβολίζεται με:

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{όπου } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

⁴ [1] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων – Πεπερασμένα στοιχεία και διαφορές Αθήνα 2003

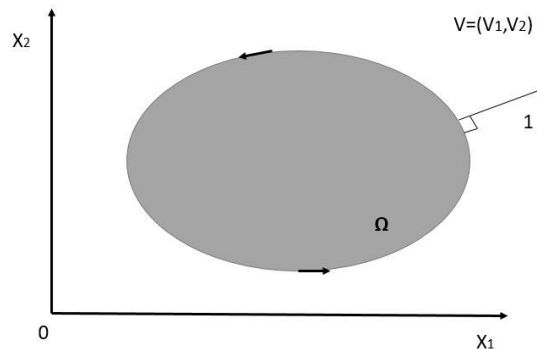
Ο φορέας μιας συνάρτησης f στο Ω είναι το κλειστό υποσύνολο S του Ω , όπου

$$S = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n καλείται συμπαγές. Μία συνάρτηση φ στο Ω καλείται συνάρτηση με συμπαγή φορέα, αν ο φορέας της είναι συμπαγής. Συμβολίζουμε με $D(\Omega)$ το χώρο των συναρτήσεων $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ με συμπαγή φορέα.

ΚΛΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ GREEN

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u v \nu_i \, d\gamma$$



για $i = 1, \dots, n$, που ισχύουν για $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, όπου $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Εδώ το $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ είναι το μοναδικό διάνυσμα, κάθετο στο Γ προς τα έξω. Αν το $\nu = 0$ στο Γ , τα παραπάνω ολοκληρώματα στο Γ προφανώς μηδενίζονται. Οι τύποι Green και η παρακάτω Πρόταση αιτιολογούν τον ακόλουθο ορισμό των L^2 - παραγώγων μιας συνάρτησης, ο οποίος γενικεύει τις κλασικές παραγώγους.

L^2 - ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση $g \in L^2(\Omega)$ είναι η α - L^2 - παράγωγος της συνάρτησης $f \in L^2(\Omega)$, αν ισχύει:

$$(g, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$$

για κάθε $\varphi \in D(\Omega)$ και γράφουμε τότε $g = \partial^\alpha f$.

Παράδειγμα:

Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$. Τότε για $\varphi \in D(\mathbb{R})$

$$(f', \varphi) = \int_a^b f' \varphi \, dx = f \varphi \Big|_a^b - \int_a^b \varphi' f \, dx$$

Όπου $[a, b]$ είναι κάποιο διάστημα που περιέχει τον φορέα της φ .

Άρα $(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \forall \varphi \in D$

1.6 ΧΩΡΟΙ SOBOLEV

ΟΡΙΣΜΟΣ ΧΩΡΟΥ SBOLEV

Ο χώρος Sobolev $H^m(\Omega)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $u \in L^2(\Omega)$ που έχουν L^2 - παραγώγους $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$, για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$$\text{με } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq m.$$

Στο $H^m(\Omega)$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο:

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx$$

και η αντίστοιχη νόρμα:

$$\|u\|_m = (u, u)_m^{\frac{1}{2}}.$$

Θέτουμε επίσης $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ π.χ. στο $H^1(\Omega)$ έχουμε για $n=2$:

$$\begin{aligned} (u, v)_1 &= \int_{\Omega} u v \, dx + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (u, v) + (\nabla u, \nabla v) \end{aligned}$$

και στο $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

$$(u, v)_0 = (u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx$$

στο $H^2(\Omega)$ έχουμε για $n=2$:

$$(u, v)_2 = (u, v)_1 + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} \, dx$$

Για $u \in H^1(\Omega)$, μπορεί να οριστεί η συνάρτηση ίχνος $u|_{\Gamma}$ στο σύνορο Γ . Αποδεικνύεται ότι ο τελεστής ίχνος $\text{Tr}(u) = u|_{\Gamma}$, από το $H^1(\Omega)$ στο $L^2(\Gamma)$, είναι φραγμένος (συνεχής)

$$\|u|_{\Gamma}\|_{0,\Gamma} \leq c \|u\|_1$$

Ορίζεται τότε ο χώρος Sobolev.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Ο υπόχωρος $D(\Omega)$ του $H_0^1(\Omega)$ είναι πυκνός στο $H_0^1(\Omega)$, με τη νόρμα $\|\cdot\|_1$.

Για $u \in H^2(\Omega)$, ορίζεται η κάθετη παράγωγος της u στο Γ με

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u|_{\Gamma} \cdot \nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma} \cdot \nu_i$$

όπου ν είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο Γ προς τα έξω.

Ο χώρος Sobolev $H_0^2(\Omega)$ ορίζεται τότε με: $H_0^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) | u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \Gamma\}$

Ο χώρος Sobolev $H_0^1(\Omega)$ είναι πλήρης υπόχωρος του H^1

Έστω Ω ένα διάστημα. Μία συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ ανήκει στον $H_0^1(\Omega)$ αν η u μηδενίζεται στα άκρα του Ω .

Οι χώροι Sobolev $H^m(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H_0^2(\Omega)$ κλπ είναι χώροι Hilbert.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ Poincaré:⁵

Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^d , τότε υπάρχει σταθερά $C=C(\Omega)$ τέτοια ώστε :

$$\|v\| \leq C \|\nabla v\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΙ ΤΥΠΟΙ GREEN

Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι Green με L^2 -παραγώγους:

1. Για $u, v \in H^1(\Omega)$ και για $i=1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} u v \nu_i \, dy$$

⁵ [7] Stig Larsson and Vidar Thomee Partial Differential Equations with Numerical Methods January 2003 –σ. 238

2. Για $u \in H^2, v \in H^1$

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\gamma$$

3. Για $u, v \in H^2$

$$\int_{\Omega} (u \cdot \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\gamma$$

4. Για $u \in H^4, v \in H^2$

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 u) \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v \, d\gamma - \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\gamma$$

όπου ο διαρμονικός τελεστής $\Delta^2 u$ ορίζεται π.χ. για $n=2$

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{2 \partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$

2. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

2.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Θα μελετήσουμε προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ως τυπικό παράδειγμα παίρνουμε το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) \text{ στο } \Omega \\ u = g(x) \text{ στο } \Gamma \end{cases}$$

όπου $x=(x_1, \dots, x_d)$ και το Ω είναι ένα φραγμένο χωρίου του \mathbb{R}^d με σύνορο Γ .

Ω : ένα φραγμένο φραγμένο χωρίο στον χώρο \mathbb{R}^n

με σύνορο Γ , $f=f(x)$, $g=g(x)$ δοθείσες συναρτήσεις.

Εκτός από τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet συναντάμε τις συνοριακές συνθήκες

Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$ στο Γ

ή τις συνοριακές συνθήκες Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x)u = g(x)$ στο Γ .

Γενικά μία γραμμική 2^{ης} τάξης ελλειπτική συνάρτηση είναι της μορφής:

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x) \quad (2.0)$$

όπου $A(x)=(a_{ij}(x))$ είναι ένας ομαλός και θετικά ορισμένος πίνακας.

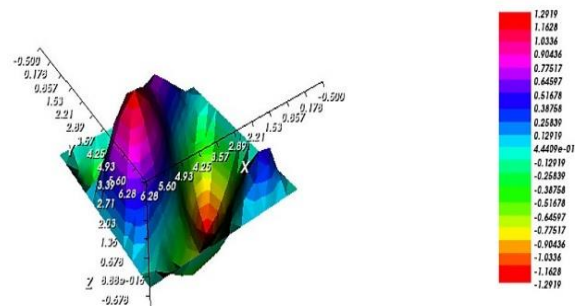
Χάριν απλότητας θα περιοριστούμε στην ειδική περίπτωση όπου $A(x)= \alpha(x)I$, όπου I ο ταυτοτικός πίνακας και α μία ομαλή συνάρτηση.

Επίσης μελετάμε χρονικά εξαρτώμενα προβλήματα:

Εξίσωση θερμότητας – παραβολικού τύπου:

Σε μία διάσταση: Ζητείται

$u : [0, L] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:



$u_t = \Delta u$, στο $[0, L] \times [0, +\infty)$

$u(0, t) = u(L, t) = 0$, για $t \geq 0$,

$u(x, 0) = g(x)$, στο $[0, L]$, με g μια συνεχή συνάρτηση.

ή σε κάποιο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, t)$$

Δεν θα μελετηθούν στην παρούσα εργασία εξισώσεις υπερβολικού τύπου όπως είναι η Εξίσωση κύματος:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t)$$

$t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ή σε κάποιο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Η σταθερή περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\nabla \cdot (a \nabla u) + b \nabla u + cu = f \text{ στο } \Omega \\ \text{με } u &= g \text{ στο } \Gamma \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο με ομαλό όριο Γ , και οι συντελεστές $a=a(x)$, $b=b(x)$, $c=c(x)$ ώστε: $a(x) \geq a_0 > 0$, $c(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ και f, g δοθείσες συναρτήσεις του Ω στο Γ .

Η ειδική περίπτωση όπου $a=1$, $b=0$, $c=0$, είναι η εξίσωση Poisson:

$$-\Delta u = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f$$

Όταν $f=0$ η εξίσωση αναφέρεται ως εξίσωση Laplace και η λύση της καλείται αρμονική εξίσωση.

Έστω v και w λύσεις των 2 προβλημάτων.

$\Delta v = 0$ στο Ω με $v=g$ στο Γ

$\Delta w = f$ στο Ω με $w=0$ στο Γ

Τότε $u=v+w$ είναι μία λύση της (2.0) του προβλήματος Dirichlet.

Πολλές φορές λύνουμε χωριστά την ομογενή εξίσωση με τις δοθέν συνοριακές συνθήκες, και τη μη ομογενή εξίσωση με χωρίς συνοριακές συνθήκες.

Μπορεί επίσης να μελετηθεί μία διαφορική εξίσωση με τις συνοριακές συνθήκες Robin , Dirichlet ή Neumann. Επιπλέον συνηθίζεται κάποιες φορές να χρησιμοποιείται συνδυασμός συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα να δίνονται οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet σε ένα μέρος του συνόρου και οι συνοριακές συνθήκες Neumann στο υπόλοιπο σύνορο.

Μία συνάρτηση $u \in v C^2(\bar{\Omega})$ που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και την συνοριακή συνθήκη της (2.0) ονομάζεται κλασική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών.

2.2. ΑΣΘΕΝΗΣ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ DIRICHLET.

2.2.1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET ΜΕ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\begin{aligned} Au = -\nabla(a\nabla u) + b\nabla u + cu = f \text{ στο } \Omega \\ \text{με } u = 0 \text{ στο } \Gamma \end{aligned} \quad (2.2)$$

Οι συντελεστές a, b και c είναι ομαλές συναρτήσεις στο $\bar{\Omega}$ που ικανοποιούν:

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) - \frac{1}{2} \nabla \cdot b(x) \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (2.3)$$

και f μία δοθείσα συνάρτηση.

Στην κλασική μορφή του προβλήματος αυτού αναζητούμε μία συνάρτηση $u \in C^2 = C^2(\Omega)$ που ικανοποιεί την (2.2)

Θα αναμορφοποιήσουμε την (2.2) στην ασθενή μορφή και θα αναζητήσουμε μία λύση στην κλάση H_0^1 .

Υποθέτοντας ότι το u είναι μία λύση στο C^2 , πολλαπλασιάζουμε την (2.2) με $v \in C_0^1$. Με χρήση του τύπου Green και δεδομένου ότι $v=0$ στο Γ προκύπτει ότι:

$$\int_{\Omega} fv \, dx = \int_{\Omega} Au \cdot v \, dx = \int_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + b\nabla u v + cuv) \, dx, \quad \forall v \in C_0^1$$

και εφόσον το C_0^1 είναι πυκνό στο H_0^1 έχουμε:

$$\int_{\Omega} fv \, dx = \int_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + b\nabla u v + cuv) \, dx, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (2.4)$$

Οπότε το ασθενές πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση $u \in H_0^1$ έτσι ώστε να ισχύει η (2.4)

Λόγω του θεωρήματος Lax-Milgram στο πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί μοναδική λύση για δοθέν $f \in L_2$. Η λύση αυτή είναι μία ασθενής λύση του (2.2).

Μία κλασική λύση είναι επίσης μία ασθενής λύση.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $u \in H_0^1$ είναι ασθενής λύση και ότι το u ικανοποιεί την (2.4). Εάν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $u \in C^2$, με χρήση των τύπων Green από την (2.4) έχουμε:

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} A u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (a \nabla u \nabla v + b \nabla u v + c u v) \, dx, \forall v \in H_0^1.$$

$$\int_{\Omega} (A u - f) v \, dx = 0$$

Αν $f \in C$ έχουμε $A u - f \in C$ και συνεπώς $A u(x) - f(x) = 0 \forall x \in \Omega$.

Επειδή $u \in H_0^1$, έχουμε επίσης ότι $u = 0$ στο Γ και επομένως το u αποτελεί κλασική λύση του (2.2). Άρα μία ασθενής λύση που είναι ομαλή είναι επίσης μία κλασική λύση.

Ωστόσο, ανάλογα με την f και το χωρίο Ω , μία ασθενή λύση μπορεί είτε να είναι αρκετά ομαλή είτε όχι ώστε να αποτελεί κλασική λύση. Η ασθενής μορφή αποτελεί μία επέκταση της κλασικής μορφής. Η ασθενής μορφή, έχει νόημα για κάθε $f \in L_2$. Η f μπορεί να είναι ασυνεχής, ωστόσο η κλασική μορφή προϋποθέτει η f να είναι συνεχής.

Εάν $f \in L_2$ και $u \in H^2 \cap H_0^1$, ικανοποιεί την (2.2), τότε λέμε ότι το u είναι ισχυρή λύση.

Προφανώς μία κλασική λύση είναι επίσης μία ισχυρή λύση και μία ισχυρή λύση είναι επίσης μία ασθενής λύση. Επιπλέον, μία ασθενής λύση που ανήκει στο H^2 είναι ισχυρή λύση.

Θα δείξουμε την ύπαρξη της ασθενούς λύσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1:⁶

Έστω η (2.3) με $f \in L_2$. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.2) έχει μοναδική ασθενή λύση. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $u \in H_0^1$ που ικανοποιεί την (2.4). Επιπλέον υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη της f ώστε να ισχύει:

$$\|u\|_1 \leq C \|f\|$$

⁶ [7] Stig Larsson and Vidar Thomee Partial Differential Equations with Numerical Methods January 2003 σ. 33- 34

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2: (ΑΡΧΗ DIRICHLET)

Έστω η εξίσωση (2.1) και έστω $b=0$, $f \in L_2$ και $u \in H_0^1$ η λύση της (2.4).
Θέτοντας

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha |\nabla u|^2 + cv^2) dx - \int_{\Omega} fv \, dx$$

τότε $F(u) \leq F(v) \forall u \in H_0^1$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $v=u$.

2.2.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET ΜΕ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\begin{aligned} Au=f \text{ στο } \Omega \text{ και } u=g \text{ στο } \Gamma & \quad (2.5) \\ \text{όπου } f \in L_2 \text{ και } g \in L_2(\Gamma). & \end{aligned}$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος αυτού ανάγεται στην εύρεση $u \in H^1$ με $\alpha(\cdot, \cdot)$ και $L(\cdot)$ με:

$$L(v) = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \text{και} \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \nabla v + b \nabla u v + cuv) dx$$

να ισχύει: $\alpha(u, v) = L(u)$, $\forall u \in H_0^1$, με $\gamma u = g$, $\gamma : H^1 \rightarrow L_2(\Gamma)$.

Για την ύπαρξη της λύσης, υποθέτουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση g στο Γ είναι το ίχνος μίας συνάρτησης $u_0 \in H^1$. Θέτοντας $w = u - u_0$, αναζητούμε $w \in H_0^1$ που ικανοποιεί την:

$$\alpha(w, v) = L(v) - a(u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1. \quad (2.6)$$

Το δεξί μέλος είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό και συνεπώς από το θεώρημα Lax- Milgram υπάρχει μοναδικό $w \in H_0^1$ που ικανοποιεί την (2.6).

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ NEUMANN

Έστω το πρόβλημα Neumann.

$$Au = -\nabla \cdot (a \nabla u) + cu = f \text{ στο } \Omega, \text{ με } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ στο } \Gamma \quad (2.7)$$

όπου $c(x) \geq c_0 > 0$ στο Ω και $f \in L_2$.

Για την ασθενή μορφή του (2.7), πολλαπλασιάζουμε την διαφορική εξίσωση (2.7) με $v \in C^1$, και ολοκληρώνουμε στο Ω χρησιμοποιώντας τον τύπο Green. Έτσι έχουμε:

$$\int_{\Omega} f v \, dx = \int_{\Omega} A u v \, dx = - \int_{\Gamma} a \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \cdot \nabla v + c u v) \, dx$$

Εφόσον $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ στο Γ ,

$$\int_{\Omega} (\alpha \nabla u \cdot \nabla v + c u v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \forall v \in C^1$$

Αντιστρόφως, εάν το $u \in C^2$ ικανοποιεί την (2.8), από τον τύπο του Green έχουμε:

$$\int_{\Omega} (A u - f) v \, dx + \int_{\Gamma} \alpha \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = 0, \forall v \in C^1 \quad (2.8)$$

Αν το v εκτείνεται μόνο στο C_0^1 , βλέπουμε ότι το u πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (2.7). Ως εκ τούτου, ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της (2.8) μηδενίζεται. Το v εκτείνεται επίσης στο Γ και έτσι βλέπουμε ότι το u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες της (2.7). Οδηγούμαστε έτσι στην ασθενή μορφή του (2.7): Να βρεθεί $u \in H^1$ ώστε :

$$\alpha(u, v) = L(v), \forall v \in H^1 \quad (2.9)$$

όπου

$$L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \text{και} \quad \alpha(u, v) = \int_{\Omega} (\alpha \nabla u \nabla v + c u v) \, dx$$

Εάν το u είναι κλασική λύση του (2.7), τότε ικανοποιεί την (2.9). Αντιστρόφως, αν το u ικανοποιεί την (2.9) και $u \in C^2$, τότε το u είναι μία κλασική λύση της (2.7).

Σύμφωνα με το θεώρημα αναπαράστασης Riesz έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα σχετικά με ύπαρξη, μοναδικότητα και την ευστάθεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3:

Έστω $f \in L_2$. Το πρόβλημα Neumann (2.7) έχει μοναδική ασθενή λύση. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $u \in H^1$ που ικανοποιεί την (2.9). Επιπλέον υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη της f ώστε να ισχύει:

$$\|u\|_1 \leq C \|f\|.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:2.4

Έστω Ω ένα ένα φραγμένο χωρίο στον \mathbb{R}^d με ομαλό ή πολυγωνικό σύνορο και έστω $k > d/2$. Τότε $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, και υπάρχει μία σταθερά $C=C(\Omega)$ ώστε:

$$\|v\|_C \leq C\|v\|_k, \quad \forall v \in H^k(\Omega).$$

Όπως προαναφέρθηκε, για κάθε $f \in L_2$ το πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H_0^1$. Αποδεικνύεται ότι αν το Γ είναι ομαλό ή αν το Γ είναι κυρτό πολύγωνο τότε η λύση $u \in H^2$. Επιπλέον υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη του f ώστε:

$$\|u\|_2 \leq C\|f\|.$$

Και εφόσον $f=Au$ το παραπάνω ισοδυναμεί με:

$$\|u\|_2 \leq C\|Au\|, \quad \forall u \in H^2 \cap H_0^1. \quad (2.10)$$

Εάν το σύνορο Γ είναι ομαλό, τότε η σχέση (2.10) μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

Για κάθε ακέραιο αριθμό $k \geq 0$ υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη του f ώστε εάν το u είναι η ασθενής λύση του (2.2) με $f \in H^k$, τότε $u \in H^{k+2} \cap H_0^1$ και

$$\|u\|_{k+2} \leq C\|f\|_k$$

Από την παραπάνω ανισότητα και το θεώρημα 2.4 προκύπτει ότι αν $k > d/2$ τότε το $u \in C^2$ και συνεπώς είναι επίσης μία κλασική λύση του προβλήματος.

3. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f \text{ στο } \Omega \\ \text{συνοριακές συνθήκες στο } \Gamma \end{array} \right.$$

Όπου Ω είναι μία περιοχή του \mathbb{R}^m με σύνορο Γ και Δ ένας διαφορικός τελεστής. Η αριθμητική επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία γίνεται σε τέσσερις φάσεις:

1# : Κάνουμε ένα μερισμό της περιοχής Ω σε ένα πεπερασμένο πλήθος απλών υποσυνόλων (π.χ. τρίγωνα ή τετράγωνα)

2# : Διαλέγουμε ένα χώρο συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης V_n , οι οποίες είναι συνήθως πολυώνυμα σε κάθε τμήμα του μερισμού Ω . Ο χώρος V_n μπορεί να είναι υπόχωρος του χώρου V στον οποίο βρίσκεται η ακριβής λύση του προβλήματος.

3# : Διαλέγουμε μία βάση $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ του χώρου V_n και προσεγγίζουμε την ακριβή λύση u με μία συνάρτηση της μορφής: $\bar{u}_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \in V_n$. Οι συναρτήσεις φ_j κατασκευάζονται έτσι ώστε να έχουν όσο το δυνατόν μικρότερο φορέα και προσδιορίζονται με ένα πεπερασμένο πλήθος παρεμβολικών συνθηκών τύπου Lagrange, Hermite ή άλλα, σε επίλεκτα σημεία του Ω .

4# : Χρησιμοποιούμε κάποια μέθοδο προσέγγισης των εξισώσεων του προβλήματος. Δηλαδή αντικαθιστούμε τις εξισώσεις με ένα πεπερασμένο πλήθος προσεγγιστικών αλγεβρικών εξισώσεων. Αν ο τελεστής Δ είναι γραμμικός, τότε αυτές οι εξισώσεις αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα $n \times n$, $Ac=b$, όπου ο πίνακας A περιέχει λίγα μη μηδενικά στοιχεία. Τυπικές μέθοδοι προσέγγισης είναι οι: Galerkin, Collocation, Ελαχίστων τετραγώνων, Rayleigh-Ritz.

Ο όρος πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιείται με κάποια ανακρίβεια στη σχετική βιβλιογραφία. Δηλαδή, συχνά με τον όρο πεπερασμένα στοιχεία εννοείται:

Το βασικό στοιχείο του μερισμού του Ω . (π.χ. το τρίγωνο) - Οι συναρτήσεις βάσεις φ_j του χώρου V_n . - Οι συναρτήσεις φ_j με τον φορέα τους και τις συνθήκες που τις προσδιορίζουν. - Η μέθοδος προσέγγισης. - Συνδυασμοί των παραπάνω.

ΓΕΝΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ GALERKIN ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Μερισμός του Ω

Επιλογή των συναρτήσεων
βάσης $\phi_i, i=1, \dots, n$

Προσέγγιση της
λύσης:

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j$$

Εξισώσεις Galerkin

$$B(\bar{u}, \phi_j) = (f, \phi_j)$$

Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $B(\phi_i, \phi_j)$ και (f, ϕ_i) $i=1, \dots, n$
αναλυτικά ή με μία αριθμητική μέθοδο.

Λύση του γραμμικού συστήματος

$$Ac=b$$

$$A(a_{ij}), a_{ij}=B(\phi_j, \phi_i)$$

$$b=(b_i), b_i=(f, \phi_i)$$

με μία αριθμητική μέθοδο.

3.2 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Θεωρούμε το ακόλουθο μονοδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει από το (2.1) με την ειδική περίπτωση όπου $b=0$:

$$(1) \begin{cases} Au := (au')' + cu = f \text{ στο } \Omega := (0,1) \\ \text{με } u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Όπου $a=a(x)$, $c=c(x)$ είναι ομαλές συναρτήσεις με $a(x) \geq a_0 > 0$ και $c(x) \geq 0$ στο $\bar{\Omega}$, $f \in L_2(\Omega)$.

Η ασθενής λύση αυτού του προβλήματος είναι να βρεθεί $u \in H_0^1$ ώστε:

$$a(u, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1 \quad (3.1) ,$$

όπου:

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (av'w' + cnw) dx \quad \text{και} \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Το παραπάνω πρόβλημα έχει μοναδική λύση $u \in H^2$ σύμφωνα με το θεώρημα Lax-Milgram.

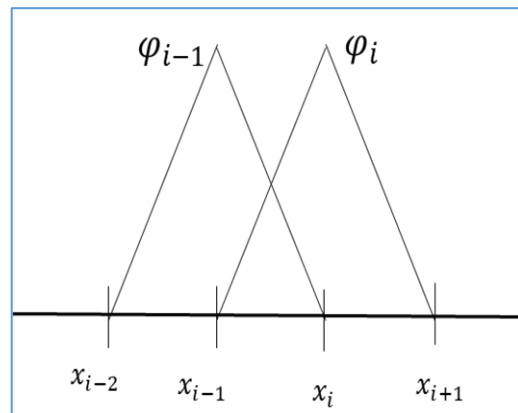
Έστω $0=x_0 < x_1 < \dots < x_M=1$ και έστω $h_j = x_j - x_{j-1}$, $K_j = [x_{j-1}, x_j]$, για $j=1, \dots, M$ και $h = \max_j h_j$.

Η διακριτή λύση θα βρίσκεται μέσα στον χώρο πεπερασμένης διάστασης των συναρτήσεων:

$$S_h = \{v \in C = C(\bar{\Omega}) : v \text{ γραμμικό σε κάθε } K_j, v(0) = v(1) = 0\}$$

Ισχύει ότι $S_h \subset H_0^1$. Επίσης οι συναρτήσεις βάσεις $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M-1} \subset S_h$

$$\text{με } \Phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$



είναι μία βάση του S_h και κάθε $v \in S_h$ μπορεί να γραφεί ως

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M-1} v_i \Phi_i(x), \quad \text{με } v_i = v(x_i)$$

Ψάχνουμε λύση $u_h \in S_h$ ώστε:

$$a(u_h, x) = (f, x), \quad \forall x \in S_h. \quad (3.2)$$

Με χρήση των συναρτήσεων βάσεων $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M-1}$ γράφουμε $u_h(x) = \sum_{j=1}^{M-1} U_j \Phi_j(x)$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (3.2) βρίσκουμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με:

$$\sum_{j=1}^{M-1} U_j a(\Phi_j, \Phi_i) = (f, \Phi_i), \quad \text{όπου } i = 1, \dots, M-1. \quad (3.3)$$

Αυτό το γραμμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή πινάκων:

$$AU = b \quad (3.4)$$

όπου $U = (U_i)$, $A = (a_{ij})$ ο πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ και διάνυσμα $b = (b_i)$ με στοιχεία $b_i = (f, \Phi_i)$. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Επειδή $V = (V_i)$ και $v(x) = \sum_{i=1}^{M-1} V_i \Phi_i(x)$, έχουμε:

$$V^T A V = \sum_{i,j=1}^{M-1} V_i a_{ij} V_j = a \left(\sum_{j=1}^{M-1} V_j \Phi_j, \sum_{i=1}^{M-1} V_i \Phi_i \right) = a(v, v) \geq a_0 \|v'\|^2$$

και συνεπώς η έκφραση $V^T A V = 0$, συνεπάγεται ότι η παράγωγος $v' = 0$ και άρα το v είναι σταθερά και μάλιστα $v = 0$ εφόσον $v(0) = 0$. Άρα και $V = 0$. Συνεπώς οι (3.4) και (3.2) έχουν μοναδική λύση, η οποία είναι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων. Ο πίνακας A είναι τριδιαγώνιος εφόσον $a_{ij} = 0$ όταν τα x_i και x_j δεν είναι γειτονικά, δηλαδή όταν $|i-j| \geq 2$.

Η ιδέα της αντικατάστασης του χώρου H_0^1 στην (3.1) από πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο αναφέρεται ως μέθοδος Galerkin. Συνεπώς η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων εδώ είναι η μέθοδος Galerkin που εφαρμόζεται στον χώρο των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Έστω η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση παρεμβολής $I_h v \in S_h$ μίας συνάρτησης $v \in C = C(\bar{\Omega})$ με $v(0) = v(1) = 0$ τέτοια ώστε:

$$I_h v(x_j) = v(x_j), j = 1, \dots, M - 1$$

Δεδομένου ότι $H_0^1 \subset C$ στον μονοδιάστατο χώρο, από την ανισότητα Sobolev η $I_h v$ ορίζεται για $v \in H_0^1$ (θεώρημα :2.4). Επίσης με

$\|v\|_{K_j} = \|v\|_{L_2(K_j)}$ και $|v|_{2,K_j} = |v|_{H^2(K_j)}$ έχουμε:

$$\|I_h v - v\|_{K_j} \leq Ch_j^2 |v|_{2,K_j} \quad (3.5)$$

$$\|(I_h v - v)'\|_{K_j} \leq Ch_j |v|_{2,K_j} \quad (3.6)$$

και συνεπώς:

$$\|I_h v - v\| = \left(\sum_{j=1}^M \|I_h v - v\|_{K_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^M C^2 h_j^4 |v|_{2,K_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2 \|v\|_2, \forall v \in H^2 \quad (3.7)$$

Ομοίως :

$$\|(I_h v - v)'\| \leq Ch \|v\|_2, v \in H^2 \quad (3.8)$$

Εφόσον ο $a(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον H_0^1 και η αντίστοιχη νόρμα είναι η νόρμα ενέργειας (energy norm)

$$\|v\|_a = a(v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (a(v')^2 + cv^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1:

Έστω u_h και u οι λύσεις των (3.2) και (3.1). Τότε:

$$\|u_h - u\|_a = \min_{x \in S_h} \|x - u\|_a \quad (3.9)$$

$$\text{και } \|u'_h - u'\| \leq Ch \|u\|_2 \quad (3.10)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Αφού $S_h \subset H_0^1$ θέτουμε $\phi = x \in S_h$ στην σχέση (3.1) και προκύπτει:

$$a(u_h - u, x) = 0, \forall x \in S_h. \quad (3.11)$$

Η σχέση αυτή υποδεικνύει ότι η λύση που βρέθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η ορθογώνια προβολή της ακριβούς λύσης u στο S_h με το εσωτερικό γινόμενο $a(\cdot, \cdot)$. Επίσης η λύση u_h είναι η βέλτιστη προσέγγιση της λύσης u στο S_h .

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.11), έχουμε $\forall \chi \in S_h$:

$$\|u_h - u\|_a^2 = a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, \chi - u) \leq \|u_h - u\|_a \|\chi - u\|_a.$$

από όπου προκύπτει η σχέση (3.9)

Από την υπόθεση έχουμε για C ανεξάρτητο του h :

$$\sqrt{\alpha_0} \|v'\| \leq \|v\|_a \leq C \|v'\|, v \in H_0^1$$

Το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι προφανές από την σχέση (3.5). Το δεύτερο μέλος προκύπτει από την σχέση: $\|v\| \leq \|v'\|$, εάν $v(0) = v(1) = 0$. (3.9)

Συνεπώς:

$$\|(u_h - u)'\| \leq C \|u_h - u\|_a \leq C \min_{x \in S_h} \|(x - u)'\|$$

Αντικαθιστώντας $x = I_h v$ και χρησιμοποιώντας την (3.8) έχουμε την (3.10)

■

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει την εκτίμηση σφάλματος στην L_2 νόρμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 3.2

Έστω u_h και u οι λύσεις των (3.1) και (3.2). Τότε:

$$\|u_h - u\| \leq Ch^2 \|u\|_2. \quad (3.11)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Χρησιμοποιούμε ένα δυικό συμβολισμό, βασισμένο στο δυικό πρόβλημα.

$$A\phi = e \text{ στο } \Omega, \text{ με } \phi(0) = \phi(1) = 0,$$

$$\text{όπου } e = u_h - u.$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος ισοδυναμεί με την εύρεση ενός $\phi \in H_0^1$.

ώστε :

$$a(w, \phi) = (w, e), \forall \phi \in H_0^1.$$

Όπου η συνάρτηση w τοποθετήθηκε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης διότι, η παραπάνω εξίσωση παίζει τον ρόλο του δυικού προβλήματος. Το γεγονός αυτό δεν προκαλεί κάποια αλλαγή καθώς το $a(\cdot, \cdot)$ είναι συμμετρικό. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση σφάλματος $\|u\|_2 \leq C\|f\|$ έχουμε:

$$\|\varphi\|_2 \leq C\|A\varphi\| = C\|e\|$$

Αντικαθιστώντας $w=e$ στην $a(w,\varphi)=(w,e)$, $\forall \varphi \in H_0^1$ και χρησιμοποιώντας τις (3.11) και (3.8) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \|e\|^2 = a(e, \varphi) &= a(e, \varphi - I_h \varphi) \leq C\|e'\| \|(\varphi - I_h \varphi)'\| \leq Ch\|e'\| \|\varphi\|_2 \\ &\leq Ch\|e'\| \|e\| \end{aligned}$$

Άρα:

$$\|e\|^2 \leq Ch\|e'\| \|e\| \Leftrightarrow \|e\| \leq Ch\|e'\|$$

Χρησιμοποιώντας την (3.10) έχουμε την απόδειξη της (3.11). ■

3.3 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

Ο ΤΡΙΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Ω .

Έστω τώρα ότι το Ω είναι ένα πολυγωνικό χωρίο στο \mathbb{R}^2 . Δηλαδή ένα χωρίο που το σύνορο του Γ είναι πολύγωνο.

Έστω το πρόβλημα:

$$Au := -\nabla \cdot (\alpha \nabla u) = f \text{ στο } \Omega, \text{ με } u=0 \text{ στο } \Gamma. \quad (3.12)$$

Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή $\alpha = \alpha(x)$ είναι ομαλή με $\alpha(x) \geq a_0 > 0$ στο $\bar{\Omega}$ και $f \in L_2$

Η ασθενής μορφή ανάγεται στην εύρεση $u \in H_0^1$ ώστε :

$$\alpha(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1 \quad (3.13)$$

όπου

$$\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \alpha \nabla v \cdot \nabla w \, dx \quad \text{και} \quad (f, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση στο H_0^1

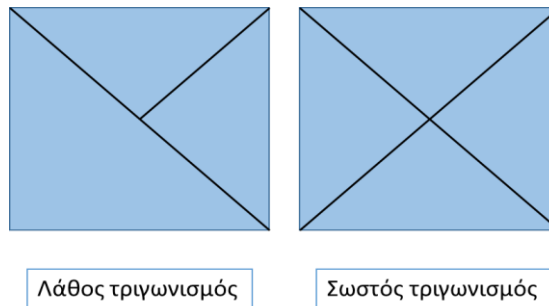
Επιπλέον αν το Ω είναι κυρτό τότε:

$$u \in H^2 \text{ και } \|u\|_2 \leq C\|f\|$$

Η προσέγγιση της (3.12) ακολουθεί ανάλογα βήματα με το δισδιάστατο πρόβλημα με μία επιπλέον διαδικασία, την διαίρεση του πολυγωνικού χωρίου Ω σε τρίγωνα. Ακριβέστερα, το $T_h = \{K\}$ είναι ένα σύνολο από κλειστά τρίγωνα K , δηλαδή ένας τριγωνισμός του Ω , τέτοιος ώστε :

$$\bar{\Omega} = \cup_{K \in T_h} K, \quad h_K = \text{diam}(K), \quad h = \max_{K \in T_h} h_K.$$

Οι κορυφές P , των τριγώνων $K \in T_h$, καλούνται κόμβοι του τριγωνισμού T_h . Απαιτούμε η τομή δύο οποιωνδήποτε τριγώνων του T_h είναι είτε κενό, είτε ένας κόμβος, είτε μια κοινή πλευρά. Επίσης κανένας κόμβος δεν τοποθετείται στο εσωτερικό μιας πλευράς τριγώνου $K \in T_h$.



Με τον τριγωνισμό T_h συνδέουμε το συναρτησιακό χώρο S_h που αποτελείται από συνεχείς, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στο T_h , που μηδενίζονται στο Γ , δηλαδή:

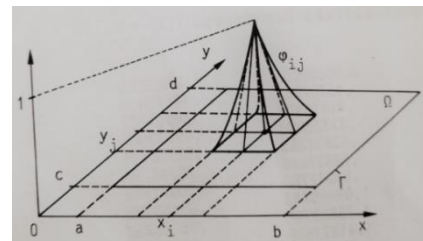
$$S_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v(x, y) = ax + by + \gamma \text{ στο } K \text{ για κάθε } K \in T_h, v = 0 \text{ στο } \Gamma\}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω υποθέσεις στο T_h επαληθεύουμε ότι $S_h \subset H_0^1$. Έστω το $\{P_i\}_{i=1}^{S_h}$ το σύνολο από τους εσωτερικούς κόμβους. Δηλαδή το σύνολο των κόμβων που δε βρίσκονται στο σύνορο Γ . Τότε μια συνάρτηση στον S_h καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στους κόμβους P_j . Το σύνολο των συναρτήσεων πυραμίδων $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h} \subset S_h$, που ορίζεται ως :

$$\Phi_i(P_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

αποτελεί μια βάση για τον S_h . Αν $u \in S_h$, τότε έχουμε:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M_h} v_i \Phi_i(x)$$



όπου τα $v_i = v(P_i)$ είναι οι τιμές της v στους κόμβους P_i . Επίσης το S_h είναι ένας πεπερασμένος διάστασης υπόχωρος του χώρου Hilbert H_0^1 .

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για την προσέγγιση του προβλήματος (3.12) είναι η εύρεση $u_h \in S_h$ τέτοιο ώστε :

$$\alpha(u_h, x) = (f, x), \forall x \in S_h \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας ως βάση την $\{\Phi_i\}_{i=1}^{M_h}$ γράφουμε $u_h(x) = \sum_{i=1}^{M_h} U_i \Phi_i(x)$ το οποίο εισάγουμε στην (3.14) με αποτέλεσμα ένα γραμμικό σύστημα από εξισώσεις για τον προσδιορισμό του U_j ,

$$\sum_{j=1}^{M_h} U_j a(\Phi_j, \Phi_i) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, M_h \quad (3.15)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται σε μορφή πινάκων ως $AU=b$, όπου $U = (U_i)$, $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i)$ (stiffness matrix), και $b = (b_i)$ το διάνυσμα με στοιχεία $b_i = (f, \Phi_i)$. Ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, έτσι ώστε η (3.15) και συνεπώς και η (3.14) να έχει μοναδική λύση στο S_h . Επιπλέον, ο πίνακας A είναι αραιός, δηλαδή πολλά από τα στοιχεία του είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει διότι όλα τα Φ_i μηδενίζονται εκτός από την ένωση των τριγώνων που περιέχουν τον κόμβο P_i . Δηλαδή $a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i) = 0$, εκτός εάν οι κόμβοι P_i και P_j είναι γειτονικοί.

Αυτή η ιδιότητα είναι σημαντική για την αποτελεσματική επίλυση του παραπάνω γραμμικού συστήματος. Τώρα τα πεπερασμένα στοιχεία είναι τα τρίγωνα $K \in T_h$ μαζί με τους περιορισμούς στο K των συναρτήσεων στον S_h .

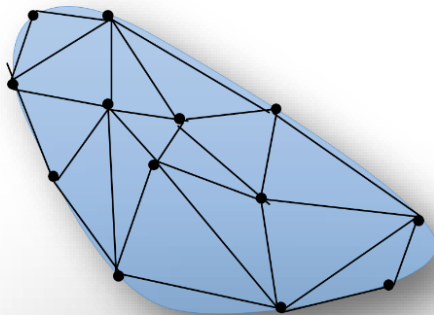
Γενικότερα, δοθέντος του τριγωνισμού T_h , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το S_h αποτελείται από συναρτήσεις που είναι πολυώνυμα βαθμού $r-1$ σε κάθε τρίγωνο $K \in T_h$, όπου r είναι ένας σταθερός ακέραιος ≥ 2 . Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια συνάρτηση καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων σε κάθε τρίγωνο K , που μπορεί να επιλεγεί με διαφορετικούς τρόπους.

Στην περίπτωση $r=3$, δηλαδή όταν το S_h αποτελείται από κατά τμήματα τετραγωνικές συναρτήσεις, αυτά τα σημεία μπορούν να ληφθούν να είναι οι κορυφές του T_h μαζί με τα μέσα των πλευρών των τριγώνων K στο T_h . Δηλαδή 6 σημεία για κάθε $K \in T_h$.

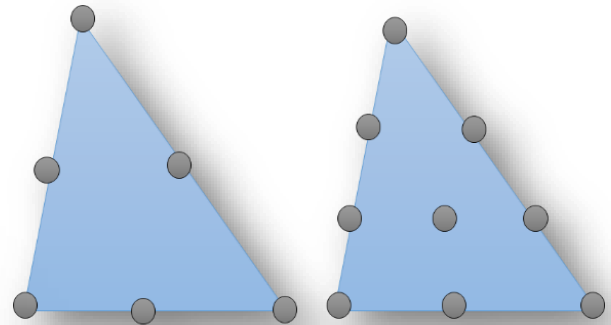
Όταν $r=4$, δηλαδή για κυβικές συναρτήσεις, παίρνουμε τις κορυφές κάθε τριγώνου K του T_h , δύο εσωτερικά σημεία σε κάθε ακμή του $K \in T_h$ και το βαρύκεντρο του $\forall K \in T_h$, χρησιμοποιώντας 10 σημεία για κάθε τρίγωνο $K \in T_h$. Σημειώνουμε πως ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, δευτέρου και τρίτου βαθμού καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές 6 και 10 συντελεστών.

Ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων S_h , έτσι όπως ορίστηκε είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του H_0^1 . Μια συνάρτηση βάσης $\Phi_j \in S_h$ μπορεί να σχετίζεται με κάθε έναν από τους κόμβους που περιγράφηκαν παραπάνω. Το πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων (3.14) και η ισοδύναμη διατύπωση του σε μορφή πινάκων παραμένει στην ίδια μορφή.

Αν το σύνορο Γ του Ω δεν είναι πολύγωνο αλλά μια ομαλή καμπύλη, τότε ο τριγωνισμός της παραπάνω μορφής δεν ταιριάζει στο Ω με ακρίβεια. Αν το Ω είναι κυρτό μπορούμε να επιλέξουμε τον τριγωνισμό με τέτοιον τρόπο ώστε η ένωση Ω_h των τριγώνων να προσεγγίζει το Ω επιλέγοντας συνοριακές κορυφές του Ω_h στο Γ . Η επιλογή αυτή πρέπει να γίνει έτσι ώστε το σύνολο $\Omega \setminus \Omega_h$ των σημείων του Ω που δεν καλύπτονται από τον τριγωνισμό να είναι της τάξης του $O(h^2)$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Ορίζοντας τις συναρτήσεις στον S_h να μηδενίζονται στο $\Omega \setminus \Omega_h$, μια λύση των πεπερασμένων στοιχείων u_h μπορεί να οριστεί όπως παραπάνω.



Ομαλό κυρτό χωρίο με τριγωνισμό



Τρίγωνα με 6 και 10 κόμβους.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν το S_h αποτελείται από συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις, δεν επηρεάζεται τίποτα από αυτή την επέκταση. Ωστόσο για τμηματικά πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού η κατάσταση δεν είναι ιδιαίτερα ευνοϊκή. Έχει επινοηθεί μεγάλο πλήθος τροποποιήσεων των μεθόδων έχουν για την προσέγγιση του συνόρου Γ .

Στη συνέχεια δεν θεωρούμε μόνο έναν τριγωνισμό T_h σε σχέση με τον συναρτησιακό χώρο S_h , αλλά μία οικογένεια τριγωνισμών $\{T_h\}_{0 < h < 1}$ και τον αντίστοιχο σχετικό χώρο πεπερασμένων στοιχείων $\{S_h\}_{0 < h < 1}$.

Ένα σημαντικό κομμάτι είναι να εκτιμήσουμε πόσο γρήγορα το σφάλμα $u_h - u$ τείνει στο μηδέν (ταχύτητα σύγκλισης) καθώς το h τείνει στο μηδέν.

3.4 ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω \widetilde{S}_h το σύνολο των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων στον τριγωνισμό T_h , όπου οι συναρτήσεις δεν μηδενίζονται αναγκαστικά στο Γ . Έστω ότι $\{P_j\}_{j=1}^{N_h}$ υποδηλώνει όλους τους κόμβους του T_h , συμπεριλαμβανομένου και αυτούς στο Γ για $M_h + 1 \leq j \leq N_h$ και $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_h}$ τις συναρτήσεις πυραμίδες.

Ορίζουμε τον τελεστή παρεμβολής $I_h: C(\bar{\Omega}) \rightarrow \widetilde{S}_h$ με

$$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \Phi_i(x), \text{ όπου } v_i = v(P_i) \quad (3.16)$$

Η παρεμβάουσα $I_h v$ συμφωνεί με την v στους κόμβους P_j , δηλαδή

$$(I_h v)(P_i) = v(P_i), \text{ για } i = 1, \dots, N_h$$

και αν η v μηδενίζεται στο Γ , τότε η $I_h v$ ανήκει στο χώρο πεπερασμένων στοιχείων S_h που παρουσιάστηκε παραπάνω. Ανάλογος ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην γενικότερη περίπτωση των κατά τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού $r-1$.

Στην περίπτωση των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων μπορούμε να αποδείξουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις τοπικού σφάλματος, με $|v|_K = \|v\|_{L_2(K)}$ και $|v|_{2,K} = \|v\|_{H^2(K)}$

$$\|I_h v - v\|_K \leq C_K h_K^2 |v|_{2,K}, \quad \forall K \in T_h \quad (3.17)$$

και

$$\|\nabla(I_h v - v)\|_K \leq C_K h_K |v|_{2,K}, \quad \forall K \in T_h \quad (3.18)$$

Οι αποδείξεις βασίζονται στο Λήμμα Bramble-Hilbert.⁷

Σε όλα τα παρακάτω επιβάλλουμε επιπλέον τον περιορισμό στην οικογένεια των τριγωνισμών $\{T_h\}_{0 < h < 1}$, ότι οι γωνίες όλων των τριγώνων K σε όλα τα μέλη της οικογένειας $\{T_h\}$ είναι κάτω φραγμένες, ανεξαρτήτως του h . Τότε είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι οι σταθερές C_K φράσσονται ομοιόμορφα. Έτσι έχουμε τις ολικές εκτιμήσεις σφάλματος:

$$\|I_h v - v\| = \left(\sum_K \|I_h v - v\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_K C_K^2 h_K^4 |v|_{2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2 \|v\|_2, \quad \forall v \in H^2 \quad (3.19)$$

και αντίστοιχα:

$$|I_h v - v|_1 \leq Ch \|v\|_2, \quad \forall v \in H^2 \quad (3.20)$$

Αν ο \widetilde{S}_h αποτελείται από κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού $r-1$, τα αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να εκφραστούν τοπικά από τις σχέσεις:

⁷ [7] Stig Larsson and Vidar Thomee, Partial Differential Equations with Numerical Methods, Springer, 2003

$$\|I_h v - v\|_K \leq C h_K^r |v|_{r,K} , \quad \|\nabla(I_h v - v)\|_K \leq C h_K^{r-1} |v|_{r,K} \quad (3.21)$$

και ολικά από τις σχέσεις:

$$\|I_h v - v\|_K \leq C h^r \|v\|_r , \quad |I_h v - v|_1 \leq C h^{r-1} \|v\|_r , \text{ για } v \in H^r \quad (3.22)$$

Σημειώνουμε ότι από τη στιγμή που φράσσουμε το h_K το h στις (3.19) και (3.22) , αυτά τα φράγματα δεν είναι αντιπροσωπευτικά αν η διαμέριση h_K του τριγωνισμού διαφέρει σημαντικά στον τριγωνισμό. Για παράδειγμα αν λεπτύνουμε τον τριγωνισμό υποδιαιρώντας κάποια τρίγωνα K , τότε το άθροισμα όλων των τριγώνων K στην σχέση (3.19) θα ελλαττωθεί. Ωστόσο το συνολικό φράγμα δεν θα αλλάξει αν το $h = \max_K h_K$ παραμείνει το ίδιο.

Παρατηρούμε η παρεμβάουσα $I_h v$ είναι καλά ορισμένη μόνο για συνεχείς συναρτήσεις v ,διότι χρησιμοποιεί τις τιμές του v στους κόμβους. Αφού οι συναρτήσεις στο H^2 είναι συνεχείς από την ανισότητα του Sobolev, η $I_h v$ είναι επίσης καλά ορισμένη για $v \in H^r$ με $r \geq 2$. Ωστόσο μια συνάρτηση στο H^1 δεν είναι αναγκαστικά συνεχής και συνεπώς οι τιμές της στους κόμβους δεν είναι καλά ορισμένες. Αν η v δεν είναι αρκετά ομαλή για να ανήκει στο H^r αλλά $v \in H^s$ για κάποιο s με $2 \leq s \leq r$ τότε αντί για την (3.22) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήσεις:

$$\|I_h v - v\|_K \leq C h^s \|v\|_s , \quad |I_h v - v|_1 \leq C h^{s-1} \|v\|_s , \forall v \in H^s \quad (3.23)$$

για $2 \leq s \leq r$. Έτσι η τάξη της προσέγγισης της $I_h v$ εξαρτάται από την ομαλότητα της συνάρτησης v .

Έστω η περίπτωση όπου το χωρίο Ω είναι κυρτό και το σύνορο του Γ είναι μια ομαλή καμπύλη και όχι πολύγωνο. Έστω Ω_h το πολυγωνικό χωρίο που καλύπτεται από τα τρίγωνα του T_h , όπως αναλύθηκε παραπάνω. Επίσης το χωρίο $\Omega \setminus \Omega_h$ έχει πλάτος της τάξης του $O(h^2)$. Αν $v=0$ στο Γ , τότε το σφάλμα παρεμβολής στο $\Omega \setminus \Omega_h$ ισούται με v , καθώς $I_h v = 0$ εκεί . Για ομαλές συναρτήσεις v οι οποίες μηδενίζονται στο Γ έχουμε ότι $v=O(h^2)$ στο $\Omega \setminus \Omega_h$. Συνεπώς η συνεισφορά του στο σφάλμα παρεμβολής είναι επίσης της ίδιας τάξης. Ακριβέστερα:

$$\|I_h v - v\|_{\Omega \setminus \Omega_h} = \|v\|_{\Omega \setminus \Omega_h} \leq C h^2 \|\nabla v\|_{\Omega \setminus \Omega_h} \leq C h^3 \|v\|_2 \quad (3.24)$$

Για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα ολοκληρώνουμε την ανισότητα :

$$\|w\|_{L^2(\gamma)}^2 \leq C \|w\|_{H^1(\Omega)}^2$$

σε μια οικογένεια καμπυλών γ παράλληλων στο σύνορο Γ καλύπτοντας το $\Omega \setminus \Omega_h$. Επειδή το πλάτος του $\Omega \setminus \Omega_h$ είναι της τάξης του $O(h^2)$ ισχύει ότι: $\|w\|_{\Omega \setminus \Omega_h} \leq C h \|w\|_1$ και $w = \nabla v$.

Η κλίση της v δεν είναι μηδέν στο Γ και έτσι δε χρειάζεται να είναι μικρή στο $\Omega \setminus \Omega_h$. Συνεπώς μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\|\nabla(I_h v - v)\|_{\Omega \setminus \Omega_h} = \|v\|_{\Omega \setminus \Omega_h} = \|\nabla v\|_{\Omega \setminus \Omega_h} \leq Ch \|v\|_2 \quad (3.25)$$

Έτσι, για $r = 2$, συμπεριλαμβανομένου και τις συνεισφορές από το $\Omega \setminus \Omega_h$ στην εκτίμηση σφάλματος της παρεμβολής, οι σχέσεις (3.19) και (3.20) εξακολουθούν να ισχύουν. Όμως, αν $r > 2$, οι εκτιμήσεις (3.24) και (3.25) είναι οι καλύτερες που μπορούμε να έχουμε. Συνεπώς η πρώτη ανισότητα της (3.22) ισχύει για $r = 2$ και 3, ενώ η δεύτερη ισχύει μόνο για $r = 2$.

Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗ

Η ορθογώνια προβολή $P_h = P_{S_h}$ του χώρου Hilbert L_2 πάνω στον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης S_h ορίζεται ως εξής:

$$(P_h v - v, x) = 0, \forall x \in S_h, v \in L_2. \quad (3.26)$$

Εφόσον $P_h v$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του v στο S_h με την L_2 -νόρμα, στην περίπτωση ενός πολυγωνικού χωρίου προκύπτει το εξής:

$$\|P_h v - v\| \leq \|I_h v - v\| \leq Ch^r \|v\|_r, \forall v \in H^r \cap H_0^1 \quad (3.27)$$

Ο συμβολισμός $H^r \cap H_0^1$ χρησιμοποιήθηκε για το χώρο των συναρτήσεων που ανήκουν στον H^r και μηδενίζονται στο σύνορο Γ .

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα της εκτίμησης του σφάλματος της προσέγγισης συνάρτησης u_h της λύσης u του προβλήματος Diriclet, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Εφόσον το διγραμμικό συναρτησιακό $a(\cdot, \cdot)$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του χώρου H_0^1 χρησιμοποιούμε την νόρμα ενέργειας (energy norm) που ορίζεται ως εξής:

$$\|v\|_a = a(v, v)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \alpha |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: 3.3

Έστω u_h και u οι λύσεις των προβλημάτων (3.13) και (3.14) αντίστοιχα. Τότε:

$$\|u_h - u\|_a = \min_{x \in S_h} \|x - u\|_a \quad (3.28)$$

και

$$|u_h - u|_1 \leq Ch \|u\|_2 \quad (3.29)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Εφόσον $S_h \subset H_0^1$, παίρνουμε $u = x \in S_h$ στην (3.13) και την αφαιρούμε από την (3.14) ώστε να προκύψει η σχέση:

$$a(u_h - u, x) = 0, \forall x \in S_h \quad (3.30)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η u_h είναι η ορθογώνια προβολή της u πάνω στο S_h με εσωτερικό γινόμενο $a(\cdot, \cdot)$. Βάση των υποθέσεων μας για το a έχουμε:

$$c|v|_1 \leq \|v\|_a \leq C|v|_1 \quad (3.31)$$

με C και c ανεξάρτητα του h ,

Συνεπώς από τη (3.28) προκύπτει ότι:

$$|u_h - u|_1 \leq C \min_{x \in S_h} \|x - u\|_1 \quad (3.32)$$

Παίρνοντας $x = I_h u$ και με χρήση του σφάλματος παρεμβολής στην (3.20) αποδεικνύεται η (3.29)

Η ισότητα (3.28) εξασφαλίζει ότι η u_h είναι η βέλτιστη προσέγγιση του u στον χώρο S_h με νόρμα ενέργειας $\|\cdot\|_a$. Η σχέση (3.32) δείχνει ότι υπάρχει βέλτιστη ή σχεδόν βέλτιστη προσέγγιση με την νόρμα Sobolev του χώρου H_0^1 .

Για την (3.29) είναι απαραίτητο το $u \in H^2$. Εάν το Ω είναι κυρτό είναι γνωστό ότι η ομαλότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $f \in L_2$ και ισχύει η σχέση:

$$\|u\|_2 \leq C \|f\| \quad (3.33)$$

Συνεπώς από την (3.32) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι :

$$|u_h - u|_1 \leq Ch \|f\| \quad (3.34)$$

όπου η σταθερά C είναι το γινόμενο των σταθερών των σχέσεων $\|u\|_2 \leq C \|f\|$ και (3.32).

■

Αν το Ω είναι μη κυρτό, τότε η λύση u θα έχει τόσα ανόμαλα σημεία στους κόμβους του συνόρου Γ ώστε η σχέση (3.33) δεν θα ισχύει. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την

χαμηλότερη τάξη σύγκλισης. Ωστόσο η σχέση (3.28) ισχύει ακόμα και σε αυτή την περίπτωση.

Στο επόμενο αποτέλεσμα παρουσιάζεται το σφάλμα στην L_2 νόρμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 3.4⁸

Έστω Ω κυρτό με u_h και u να είναι οι λύσεις των προβλημάτων (3.14) και (3.13) αντίστοιχα. Τότε:

$$\|u_h - u\| \leq Ch^2 \|u\|_2 \quad (3.35)$$

Τα δύο προηγούμενα θεωρήματα δίνουν την ίδια εκτίμηση σφάλματος για την u_h και την παρεμβάουσα $I_h u$, εκτός από το γεγονός ότι ενδεχομένως να διαφέρουν ως προς την σταθερά.

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ Ή ΠΡΟΒΟΛΗ RITZ

Έστω $R_h: H_0^1 \rightarrow S_h$ η ορθογώνια προβολή ώστε :

$$\alpha(R_h v - v, x) = 0, \quad \forall x \in S_h, v \in H_0^1 \quad (3.36)$$

Ο τελεστής R_h ονομάζεται ελλειπτική προβολή ή προβολή Ritz. Από την (3.30) προκύπτει ότι η λύση u_h με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων είναι η ελλειπτική προβολή της ακριβούς λύσης u του (3.13). Δηλαδή $u_h = R_h u$.

Οι προηγούμενες εκτιμήσεις της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την λύση μπορούν να εκφραστούν με χρήση του τελεστή R_h . Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα βοηθητικό για την μελέτη των παραβολικών προβλημάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε στην συνέχεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 3.5

Έστω Ω κυρτό. Τότε έχουμε για $s = 1, 2$

$$\|R_h v - v\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad |R_h v - v|_1 \leq Ch^{s-1} \|v\|_s, \quad \forall v \in H^s \cap H_0^1 \quad (3.37)$$

Η παραπάνω εκτίμηση επεκτείνεται και για πεπερασμένα στοιχεία μεγαλύτερης τάξης δηλαδή για $r > 2$. Στο θεώρημα 11 απλά χρησιμοποιούμε τη δεύτερη εκτίμηση του

⁸ [7] Stig Larsson and Vidar Thomee Partial Differential Equations with Numerical Methods January 2003 σ.64

σφάλματος παρεμβολής (3.22) αντί για την (3.20) μαζί για την περίπτωση όπου $s=2$ της (3.23). Οπότε βρίσκουμε για $2 \leq s \leq r$:

$$\|R_h v - v\| \leq Ch^s \|v\|_s, \quad |R_h u - u|_1 \leq Ch^{s-1} \|v\|_s, \quad \forall v \in H^s \cap H_0^1$$

Οι εκτιμήσεις αυτές δείχνουν μια μείωση της τάξης σύγκλισης $O(h^s)$ αν $u \in H^s$ με $s < r$. Η υπόθεση ομαλότητας $u \in H^r$ με $r > 2$ είναι κατά μη ρεαλιστική για τις λύσεις του ελλειπτικού προβλήματος σε πολυγωνικό χωρίο.

Για ένα χωρίο Ω με ομαλό σύνορο Γ η ομαλότητα δεν αποτελεί πρόβλημα αλλά χρειάζονται ειδικοί χειρισμοί του $\Omega \setminus \Omega_h$ ώστε να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια.

Εξαιτίας του ότι η ασθενής μορφή του διακριτού προβλήματος βασίζεται στο εσωτερικό γινόμενο του L_2 , η πιο φυσική εκτίμηση σφάλματος εκφράζεται στις νόρμες του L_2 . Έτσι αυτό αποτελεί μέτρο για το μέσο όρο των σφαλμάτων.

Επίσης έχει ενδιαφέρον η εκτίμηση των σφαλμάτων στην μέγιστη νόρμα (\max) η οποία εκφράζεται σε ομοιόμορφο φράγμα σφάλματος στο Ω . Πρώτα παρατηρούμε ότι το σφάλμα στην παρεμβάλουσα $I_h v$ που αναφέραμε προηγουμένως ικανοποιεί.

$$\|I_h v - v\|_{C(K)} \leq Ch_K^2 \|v\|_{C^2(K)}, \quad \forall K \in T_h$$

καθώς επίσης και στην περίπτωση ομαλού συνόρου Γ . Έτσι έχουμε:

$$\|v\|_{C(\Omega \setminus \Omega_h)} \leq Ch^2 \|v\|_{C^1}$$

και

$$\|I_h v - v\|_C \leq Ch^2 \|v\|_{C^2} \quad (3.38)$$

Με την επιπρόσθετη υπόθεση ότι η οικογένεια τριγωνισμών $\{T_h\}$ είναι σχεδόν ομοιόμορφη, δηλαδή

$$h_K \geq c_h \quad (3.39)$$

για κάποια θετική σταθερά c ανεξάρτητη του h , είναι δυνατό αλλά όχι εύκολο να δείξουμε ότι για το ελλειπτικό πρόβλημα ισχύει :

$$\|u_h - u\|_C \leq Ch^2 \log\left(\frac{1}{h}\right) \|u\|_{C^2}, \text{ για } h \text{ μικρό.}$$

Συγκρίνοντας με την εκτίμηση της L_2 νόρμας του θεωρήματος 11 έχουμε έναν επιπλέον παράγοντα, τον $\log(1/h)$, ο οποίος δεν υφίσταται στην εκτίμηση σφάλματος της παρεμβάλουσας. Μπορεί να δειχθεί ότι αυτός ο παράγοντας δεν μπορεί να αφαιρεθεί από την παραπάνω εκτίμηση.

4. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟ

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε την εξίσωση της θερμότητας στη μια διάσταση ως προς τον χώρο και θα κατασκευάσουμε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Η κατασκευή της μεθόδου θα γίνει σε δύο βήματα. Πρώτα, θα θεωρήσουμε ένα βοηθητικό πρόβλημα αρχικών τιμών που καλείται ημιδιακριτό πρόβλημα, όπου χρησιμοποιούμε μια μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση μόνο ως προς τον χώρο. Στη συνέχεια, η πλήρως διακριτή μέθοδος προκύπτει, αν διακριτοποιήσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια μέθοδο για προβλήματα αρχικών τιμών όπως είναι η άμεση μέθοδος του Euler ή η πεπλεγμένη μέθοδο του Euler ή η μέθοδος των Crank–Nicolson.

4.1. ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, δηλαδή ζητούμε μια συνάρτηση $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί:

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad x \in [0, L], t \in [0, T] \\u(0, t) &= u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T] \\u(x, 0) &= g(x), \quad x \in [0, L]\end{aligned}$$

όπου $L > 0$, $g \in C[0, L]$.

Έστω μια διαμέριση του $[0, L]$, με $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = L$, με βήμα $h = L/(N + 1)$, $N \geq 1$. Θεωρούμε τον χώρο συναρτήσεων $V = \{v \in C[0, L] : v \text{ είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, } v(0) = v(L) = 0\}$ που αποτελείται από τις συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι κατά τμήματα C^1 συνεχείς και μηδενίζονται στα άκρα του $[0, L]$. Επίσης, συμβολίζουμε με (\cdot, \cdot) το εσωτερικό γινόμενο :

$$(f, g) = \int_0^L f(x)g(x) dx,$$

και με $\|\cdot\|$ την αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα.

Για μία συνάρτηση $v \in V$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο και ως προς τα δύο μέλη της εξίσωσης, οπότε έχουμε την ακόλουθη ασθενή μορφή του προβλήματος. Ζητείται $u(\cdot, t), t \in [0, T]$, τέτοια ώστε:

$$(u_t(\cdot, t), v) + (u_x(\cdot, t), v') = 0, \forall v \in V, u(\cdot, 0) = g$$

Αν θεωρήσουμε τώρα έναν υπόχωρο V_h του V προκύπτει μια προσέγγιση $u_h(\cdot, t) \in V_h$, $t \in [0, T]$, της $u(\cdot, t)$ η οποία αποτελεί λύση ενός νέου προβλήματος, του λεγομένου ημιδιακριτού προβλήματος.

Ως V_h μπορούμε, παραδείγματος χάριν, να θεωρήσουμε τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων που είναι κατά τμήματα γραμμικά πολυώνυμα και μηδενίζονται στα άκρα του $[0, L]$, δηλαδή:

$$V_h = \{\chi \in C[0, L]: \chi|_{[x_j, x_{j+1}]} \in P_1, j = 0, \dots, N, \quad \chi(0) = \chi(L) = 0\}$$

Ορίζουμε τότε ως ημιδιακριτή λύση τη : $u_h(\cdot, t) \in V_h, t \in [0, T]$, τέτοια ώστε :

$$(u_{h,t}(\cdot, t), \chi) + (u_{h,x}(\cdot, t), \chi') = 0, \quad \forall \chi \in V_h, u_h(\cdot, 0) = g_h$$

όπου $g_h \in V_h$ μία προσέγγιση της g .

Στη συνέχεια, ως V_h θα θεωρήσουμε τον χώρο των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων όμως τα συμπεράσματα που έπονται επεκτείνονται ανάλογα και για άλλους υπόχωρους του V . Είδαμε, στη παράγραφο 3.2 , ότι οι συναρτήσεις $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ αποτελούν μία βάση του χώρου V_h . Οπότε, επειδή $u_h(\cdot, t) \in V_h$ υπάρχουν $a_j(t), t \in [0, T]$ τέτοια ώστε:

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \Phi_j(x), \quad x \in [0, L], t \in [0, T]$$

Τότε το παραπάνω πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a'_j(t) (\Phi_j, \chi) + \sum_{j=1}^N a_j(t) (\Phi'_j, \chi') = 0, \forall \chi \in V_h \\ a_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

όπου $g_h = \sum_{j=1}^N \gamma_j \Phi_j$. Στη συνέχεια επιλέγοντας ως $\chi = \Phi_i, i = 1, \dots, N$ λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a'_j(t) (\Phi_j, \Phi_i) + \sum_{j=1}^N a_j(t) (\Phi'_j, \Phi'_i) = 0, \forall i = 1, \dots, N \\ a_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται και ως πρόβλημα αρχικών τιμών για ένα γραμμικό σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$Ma'(t) + Sa(t) = 0, t \in [0, T], \quad \text{με } \alpha(0) = \Gamma,$$

όπου M και S είναι $N \times N$ πίνακες με στοιχεία $M_{i,j} = (\varphi_j, \varphi_i)$ και $S_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i)$, $i, j = 1, \dots, N$ αντίστοιχα, $a(t) = (a_1(t), \dots, a_N(t))^T$ και $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)^T$. Ο πίνακας M καλείται πίνακας μάζας (Mass matrix) και ο πίνακας S (Stiffness matrix) πίνακας ακαμψίας. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και οι δύο πίνακες M και S είναι συμμετρικοί. Επίσης, είναι και θετικά ορισμένοι, και συνεπώς ο M είναι αντιστρέψιμος. Οπότε το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων γράφεται:

$$a'(t) + M^{-1}Sa(t) = 0, \quad t \in [0, T], \text{ με } \alpha(0) = \Gamma,$$

το οποίο λύνεται μονοσήμαντα.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.1⁹

Έστω $u_h(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$, η λύση του ημιδιακριτού προβλήματος. Τότε :

$$\|u_h\| \leq \|g_h\|, \quad \forall t \in [0, T]$$

Θα θεωρήσουμε τώρα την προβολή $R_h: V \rightarrow V_h$ η οποία ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$((R_h v)', \chi') = (v', \chi'), \quad \forall \chi \in V_h$$

Η προβολή R_h καλείται ελλειπτική προβολή ή προβολή Ritz.

ΛΗΜΜΑ: 4.1⁹

Έστω $v \in C^2[0, L]$, $v(0) = v(L) = 0$. Η προβολή R_h ορίζεται μονοσήμαντα και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\|R_h v - v\| + h \|R_h v' - v'\| \leq Ch^2 \|v''\|$$

ΛΗΜΜΑ: 4.2⁹

Έστω $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ η λύση του αρχικού προβλήματος :

και $R_h u(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$, η ελλειπτική προβολή της u . Τότε υπάρχει σταθερά C , τέτοια ώστε:

⁹ [5] Μ. Πλεξουσάκης και Π. Χατζηπαντελίδης Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. σ. 106-107

$$\|R_h u(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| + \|(R_h u)_t(\cdot, t) - u_t(\cdot, t)\| \leq Ch^2, \quad t \in [0, T]$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.2⁹

Έστω $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ η λύση του αρχικού προβλήματος και u_h η λύση του ημιδιακριτού προβλήματος με $g_h = R_h g$. Τότε υπάρχει σταθερά C , ανεξάρτητη του h , τέτοια ώστε:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_h(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq Ch^2.$$

4.2. ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

4.2.1. BACKWARD EULER

Θα θεωρήσουμε τώρα ένα πλήρως διακριτό σχήμα, διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο το ημιδιακριτό σχήμα :

$$(u_{h,t}(\cdot, t), \chi) + (u_{h,x}(\cdot, t), \chi') = 0, \quad \forall \chi \in V_h, u_h(\cdot, 0) = g_h$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Για έναν φυσικό αριθμό $M \geq 1$, θέτουμε $k=T/M$ και $t^j = jk, j = 0, \dots, M$, μία διαμέριση του $[0, T]$.

Θεωρούμε τις προσεγγίσεις : $U^n \in V_h, n = 1, \dots, M$ τέτοιες ώστε:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \chi \right) + ((U^n)', \chi') = 0, \quad \forall \chi \in V_h, \quad U^0 = g_h$$

όπου $g_h \in V_h$ μία προσέγγιση της g . Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως:

$$(U^n, \chi) + k((U^n)', \chi') = (U^{n-1}, \chi), \quad \forall \chi \in V_h, \quad U^0 = g_h$$

Αν θεωρήσουμε ως βάση του V_h τις συναρτήσεις $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$, τότε οι προσεγγίσεις U^n της παραπάνω εξίσωσης γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των Φ_j ως εξής:

$$U^n(x) = \sum_{j=1}^N a_j^n \Phi_j(x), \quad x \in [0, L]$$

Επιλέγοντας τώρα $\chi = \Phi_i, i=1, \dots, N$ στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι οδηγούμαστε σε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$(M + kS)a^n = Ma^{n-1}$$

όπου M και S οι πίνακες μάζας και ακαμψίας αντίστοιχα, και $a^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_N^j)^T$,

$$j = 0, \dots, N$$

Ο πίνακας $M+kS$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και άρα αντιστρέφεται. Επομένως:

$$a^n = (M + kS)^{-1} M a^{n-1}$$

και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε αναδρομικά τα a^n και κατ' επέκταση την προσσέγγιση U^n της $u(\cdot, t^n)$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.3¹⁰

Έστω ότι οι $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$ οι προσεγγίσεις της πεπλεγμένης μεθόδου Euler.

Τότε:

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n\| \leq \|U^0\|$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.4¹⁰

Έστω $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ η λύση του αρχικού προβλήματος με $g \in C^2[0, L]$ και $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$, οι προσεγγίσεις της πεπλεγμένης μεθόδου Euler με $U^0 = R_h g$. Τότε υπάρχει σταθερά C , ανεξάρτητη των k και h , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n - u(\cdot, t^n)\| \leq C(k + h^2)$$

4.2.2. CRANK-NICOLSON

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα, διακριτοποιώντας και ως προς τον χρόνο το ημιδιακριτό σχήμα με την μέθοδο των Crank–Nicolson.

Θέτουμε και πάλι $k = T/M$ και $t^j = jk$, $j = 0, \dots, M$, μία διαμέριση του $[0, T]$.

Θεωρούμε τις προσεγγίσεις: $U^n \in V_h$, $n = 1, \dots, M$ τέτοιες ώστε:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \chi \right) + \left(\left(U^{n-\frac{1}{2}} \right)', \chi' \right) = 0, \quad \forall \chi \in V_h, \quad U^0 = g_h$$

όπου $g_h \in V_h$ μία προσέγγιση της g και $U^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U^n + U^{n-1})$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως:

¹⁰ [5] Μ. Πλεξουσάκης και Π. Χατζηπαντελίδης Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. σ. 109-110

$$(U^n, \chi) + \frac{k}{2}((U^n)', \chi') = (U^{n-1}, \chi) - k/2 ((U^{n-1})', \chi') \quad \forall \chi \in V_h, U^0 = g_h$$

Με ανάλογο τρόπο όπως και για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler στην προηγούμενη παράγραφο, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\left(M + \frac{k}{2}S\right) a^n = \left(M - \frac{k}{2}S\right) a^{n-1},$$

όπου M και S οι πίνακες μάζας και ακαμψίας, και $a^j = (a_1^j, \dots, a_N^j)^T$, $j = 0, \dots, N$

Ο πίνακας $M + \frac{k}{2}S$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και άρα αντιστρέφεται.

Επομένως:

$$a^n = \left(M + \frac{k}{2}S\right)^{-1} \left(M - \frac{k}{2}S\right) a^{n-1},$$

και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε αναδρομικά τα a^n και κατ' επέκταση την προσέγγιση U^n της $u(\cdot, t^n)$.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.5¹¹

Έστω ότι οι $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$, οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank – Nicolson.

Τότε: $\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n\| \leq \|U^0\|$.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.6¹¹

Έστω $u \in C^4([0, L] \times [0, T])$ η λύση του αρχικού προβλήματος, με $g \in C^2[0, L]$ και $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$, οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank- Nicolson με $U^0 = R_h g$. Τότε υπάρχει σταθερά C , ανεξάρτητη των k και h , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n - u(\cdot, t^n)\| \leq C(k^2 + h^2)$$

¹¹ [5] Μ. Πλεξουσάκης και Π. Χατζηπαντελίδης Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. σ.111-112

4.2.3. FORWARD EULER

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την άμεση μέθοδο του Euler για τη διακριτοποίηση ως προς τον χρόνο του ημιδιακριτού προβλήματος. Θέτουμε και πάλι $k = T/M$ και $t^j = jk, j = 0, \dots, M$, μία διαμέριση του $[0, T]$.

Θεωρούμε τις προσεγγίσεις: $U^n \in V_h, n = 1, \dots, M$ τέτοιες ώστε:

$$\left(\frac{U^n - U^{n-1}}{k}, \chi \right) + ((U^{n-1})', \chi') = 0, \quad \forall \chi \in V_h, \quad U^0 = g_h$$

όπου $g_h \in V_h$ μία προσέγγιση της g . Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως:

$$(U^n, \chi) = (U^{n-1}, \chi) - k((U^{n-1})', \chi') \quad \forall \chi \in V_h, \quad U^0 = g_h$$

Με ανάλογο τρόπο όπως και για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, η παραπάνω είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$Ma^n = (M - kS)a^{n-1}$$

όπου M και S οι πίνακες μάζας και ακαμψίας, και $a^j = (a_1^j, \dots, a_N^j)^T, j = 0, \dots, N$

Ο πίνακας M είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και άρα αντιστρέφεται. Επομένως:

$$a^n = M^{-1}(M - kS)a^{n-1}$$

και έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε αναδρομικά τα a^n και κατ' επέκταση την προσέγγιση U^n της $u(\cdot, t^n)$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Σε αυτό το σημείο και για να δείξουμε την ευστάθεια της μεθόδου, θα χρειαστεί να υποθέσουμε την ακόλουθη σχέση την οποία πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις του χώρου V_h . Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει σταθερά C_1 ανεξάρτητη του h , τέτοια ώστε:

$$\|\chi'\| \leq C_1 h^{-1} \|\chi\|, \quad \forall \chi \in V_h$$

Η ανισότητα αυτή καλείται αντίστροφη ανισότητα. Στην περίπτωση που V_h είναι οι συνεχείς κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις σε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό, η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.7¹²

Έστω ότι οι $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$, οι προσεγγίσεις της μεθόδου Forward Euler και ότι ο V_h ικανοποιεί την αντίστροφη ανισότητα. Τότε αν $\frac{k}{h^2} \leq \frac{2}{C_1^2}$, όπου C_1 η σταθερά της αντίστροφης ανισότητας έχουμε:

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n\| \leq \|U^0\|$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 4.8¹²

Έστω $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ η λύση του αρχικού προβλήματος με $g \in C^2[0, L]$ και $U^n \in V_h$, $n = 0, \dots, M$, οι προσεγγίσεις της μεθόδου Forward Euler με $U^0 = R_h g$ και ότι ο V_h ικανοποιεί την αντίστροφη ανισότητα. Τότε, αν $\frac{k}{h^2} \leq \frac{2}{C_1^2}$, όπου C_1 η σταθερά της αντίστροφης ανισότητας, υπάρχει σταθερά C , ανεξάρτητη των k και h , τέτοια ώστε

$$\max_{0 \leq n \leq M} \|U^n - u(\cdot, t^n)\| \leq C(k + h^2)$$

¹² [5] Μ. Πλεξουσάκης και Π. Χατζηπαντελίδης Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων. σ. 115-116

5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν προβλήματα παραβολικού τύπου. Δηλαδή χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα συνοριακών τιμών όπως το πρόβλημα διάχυσης θερμότητας. Θα ασχοληθούμε με προσεγγίσεις της λύσης του προβλήματος διάχυσης θερμότητας στο χώρο δύο διαστάσεων με την μέθοδο Galerkin. Για τη μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε κατάλληλες γραμμικές συναρτήσεις. Αυτή την φορά ωστόσο εκτός από την διακριτοποίηση του χώρου θα πρέπει να γίνει και διακριτοποίηση του χρόνου.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως για την προσέγγιση της λύσης θα πρέπει να γίνει διακριτοποίηση του χωρίου $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με πεπερασμένα στοιχεία (πυραμίδες). Έτσι παίρνουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα. Στην συνέχεια γίνεται διακριτοποίηση του χρόνου $T \subset \mathbb{R}_+$ με πεπερασμένες διαφορές. Έτσι έχουμε πλήρως διακριτά σχήματα.

Δίνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \text{ (εξίσωση θερμότητας)} \\ u(\cdot, 0) = v, & \text{στο } \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

Για την ασθενή μορφή, πολλαπλασιάζουμε με μία ομαλή συνάρτηση $\varphi = \varphi(x)$, η οποία μηδενίζεται στο σύνορο Γ . Ολοκληρώνουμε στο Ω και χρησιμοποιώντας τον τύπο Green παίρνουμε:

$$(u_t, \varphi) + a(u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1, t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.2)$$

Σημειώνουμε ότι:

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx, \quad (v, w) = \int_{\Omega} v w \, dx$$

Θέλουμε να βρούμε $u = u(x, t) \in H_0^1$ τέτοιο ώστε να μηδενίζεται στο σύνορο Γ , να ισχύει η (5.2) και να ισχύει:

$$u(\cdot, 0) = v, \quad \text{στο } \Omega. \quad (5.3)$$

Δεδομένου των παραπάνω συνθηκών για το u , παρατηρούμε ότι αν η λύση u είναι επαρκώς ομαλή συνάρτηση, τότε θα είναι επίσης λύση του προβλήματος (5.1).

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες την (5.2) έχουμε:

$$(u_t - \Delta u - f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1, t \in \mathbb{R}_+$$

ή $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_{\Omega} \rho(\cdot, t) \varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in H_0^1, \quad \text{όπου } \rho = u_t - \Delta u - f.$$

Το παραπάνω είναι εφικτό μόνο για $\rho=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.1

Έστω $u(t)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις (5.2) και (5.3), μηδενίζεται στο σύνορο Γ και είναι ομαλή για $t \geq 0$. Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε για $t \geq 0$ να ισχύει:

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t |u(s)|_1^2 ds \leq \|v\|^2 + C \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \quad (5.4)$$

και $|u(t)|_1^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \leq |v|_1^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \quad (5.5)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θέτοντας $\phi=u$ στην (5.2) παίρνουμε:

$$(u_t, u) + a(u, u) = (f, u), \text{ για } t > 0. \quad (5.6)$$

Εδώ $(u_t, u) = \int_{\Omega} u_t u \, dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u^2)_t \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2.$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Poincaré:

$$\|f\| \leq C|f|_1, \text{ για } f \in H_0^1.$$

και την ανισότητα: $2ab \leq a^2 + b^2$ έχουμε:

$$|(f, u)| \leq \|f\| \|u\| \leq C \|f\| |u|_1 \leq \frac{1}{2} |u|_1^2 + \frac{1}{2} C^2 \|f\|^2$$

και επειδή $a(u, u) = |u|_1^2$ από την (5.6) έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + |u|_1^2 \leq \frac{1}{2} |u|_1^2 + \frac{1}{2} C^2 \|f\|^2$$

ή αλλιώς

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 + |u|_1^2 \leq C'^2 \|f\|^2$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t προκύπτει:

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t |u(s)|_1^2 ds \leq \|v\|^2 + C \int_0^t \|f\|^2 ds \quad (5.4)$$

Για να αποδείξουμε την (5.5) θέτουμε $\phi=u_t$ στην (5.2). Έτσι προκύπτει:

$$\|u_t\|^2 + a(u, u_t) = (f, u_t) \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2$$

$$\text{ισχύει: } a(u, u_t) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla u|^2)_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_1^2$$

$$\text{και έτσι: } \|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} |u|_1^2 \leq \|f\|^2$$

Ολοκληρώνοντας από 0 έως t προκύπτει:

$$|u(t)|_1^2 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \leq |v|_1^2 + \int_0^t \|f(s)\|^2 ds \quad (5.5)$$

■

5.1. ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ GALERKIN ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του πραγματικού επιπέδου με ομαλό σύνορο Γ . Τότε έχουμε το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(\cdot, 0) = v, & \Omega \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\text{όπου: } u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ και } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \text{ με } x=(x_1, x_2)$$

Αρχικά θα προσεγγίσουμε την λύση $u(x,t)$ με την συνάρτηση $u_h(x,t)$ η οποία για σταθερό t , είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη γραμμική συνάρτηση του x πάνω σε έναν τριγωνισμό T_h του Ω όπου εξαρτάται από πεπερασμένο το πλήθος παραμέτρους.

Έστω $T_h = \{K\}$ ο τριγωνισμός του Ω όπως έχει οριστεί σε προηγούμενη ενότητα.

Έστω επίσης $\{P_j\}_{j=1}^{M_h}$ οι εσωτερικοί κόμβοι του τριγωνισμού T_h . Επίσης ορίζουμε με S_h τον χώρο των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$. Έστω επίσης $\{\Phi_j\}_{j=1}^{M_h}$ η κανονική βάση του S_h στους κόμβους $\{P_j\}_{j=1}^{M_h}$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του τελεστή παρεμβολής $I_h: C(\bar{\Omega}) \rightarrow \widetilde{S}_h$ και τις αντίστοιχες εκτιμήσεις σφάλματος για $r=2$.

Με σκοπό να ορίσουμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (5.7), πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση θερμότητας με μία ομαλή συνάρτηση $\phi(x)$, η οποία μηδενίζεται στο σύνορο Γ . Στη συνέχεια με ολοκλήρωση σε όλο το χωρίο Ω με την βοήθεια της εξίσωσης Green προκύπτει η ασθενής μορφή του προβλήματος:

$$(u_t, \phi) + a(u, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1, t > 0 \quad (5.8)$$

Συνεπώς το προσεγγιστικό πρόβλημα είναι να βρούμε συνάρτηση $u_h(t) = u(\cdot, t)$ να ανήκει στον χώρο S_h για κάθε t , έτσι ώστε:

$$\begin{cases} (u_{h,t}, \chi) + \alpha(u_h, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad t > 0 \\ u_h(0) = u_h, \end{cases} \quad (5.9)$$

όπου $u_h \in S_h$ είναι μια προσέγγιση της u . Έχουμε διακριτοποιήσει μόνο την χωρική μεταβλητή έχουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα. Αργότερα θα διακριτοποιήσουμε τον χρόνο ώστε να επιτύχουμε πλήρως διακριτά σχήματα.

Θεωρώντας την κανονική βάση $\{\Phi_j\}_{j=1}^{M_h}$ του S_h , το ημιδιακριτό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση συντελεστών $\alpha_j(t)$ της :

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) \Phi_j(x)$$

ώστε να ισχύει:

$$\sum_{j=1}^{M_h} \alpha'_j(t) (\Phi_j, \Phi_k) + \sum_{j=1}^{M_h} \alpha_j(t) (\Phi_j, \Phi_k) = (f(t), \Phi_k), \quad k = 1, \dots, M_h$$

και

$$\alpha_j(0) = \gamma_j, \quad j = 1, \dots, M_h$$

Δηλαδή με γ_j συμβολίζουμε τις κομβικές τιμές της αρχικής προσέγγισης u_h .

Έτσι με χρήση πινάκων έχουμε:

$$B\alpha'(t) + A\alpha(t) = b(t), \quad t > 0 \quad \text{με} \quad \alpha(0) = \gamma \quad (5.10)$$

όπου:

- $B = (B_{kj})$: ο πίνακας μάζας, διάστασης $M_h \times M_h$, με στοιχεία : (Φ_j, Φ_k)
- $A = (A_{kj})$: ο πίνακας ακαμψίας, διάστασης $M_h \times M_h$ με στοιχεία: $\alpha(\Phi_j, \Phi_k)$
- $b_k = (b_k)$: διάστασης $M_h \times 1$ με στοιχεία : (f, Φ_k)
- $\alpha(t) = (\alpha_j(t))$: Το διάνυσμα των αγνώστων διάστασης $M_h \times 1$
- $\gamma = (\gamma_j) = (\gamma_j(0)) = (\alpha_j(0))$: Το διάνυσμα αρχικής κατανομής για $t=0$

Όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος καθώς επίσης και ο πίνακας B αφού:

$$\sum_{k,j=1}^{M_h} \xi_j \xi_k (\Phi_j, \Phi_k) = \left\| \sum_{j=1}^{M_h} \xi_j \Phi_j \right\|^2 \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\xi=0$.

Επιπλέον ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και έτσι η εξίσωση (5.10) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\alpha'(t) + B^{-1}A\alpha(t) = B^{-1}b(t), \quad \text{για} \quad t > 0 \quad \text{με} \quad \alpha(0) = \gamma \quad \text{η οποία έχει μοναδική λύση για} \quad t > 0$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΟΥ ΗΜΙΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Έστω η εξίσωση (5.9). Αφού $u_h(t) \in S_h$, επιλέγουμε $\chi = u_h(t)$ στην εξίσωση αυτή και προκύπτει:

$$(u_{h,t}, u_h) + \alpha(u_h, u_h) = (f, u_h), \quad t > 0$$

$$\text{Δηλαδή: } \int_{\Omega} \frac{du_h(x,t)}{dt} u_h(x,t) dx + \int_{\Omega} \nabla u_h(x,t) u_h(x,t) dx = \int_{\Omega} f u_h(x,t) dx$$

Εφόσον ο πρώτος όρος ισούται με $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|u_h\|^2$ και ο δεύτερος είναι μη αρνητικός,

έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|u_h\|^2 &= \|u_h\| \frac{d}{dt} \|u_h\| \leq \|f\| \cdot \|u_h\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \|u_h\| &\leq \|f\| \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανίσωση από 0 έως $t > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u_h\| dt &\leq \int_0^t \|f\| dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|u_h\| - \|u_h(x, 0)\| &\leq \int_0^t \|f\| ds \end{aligned}$$

Θέτω $u_h(x, 0) = v_h$ και $\tau = t$.

Έτσι παίρνουμε την εκτίμηση ευστάθειας:

$$\|u_h(t)\| \leq \|v_h\| + \int_0^t \|f\| ds \quad (5.11)$$

Με σκοπό να γραφεί η εξίσωση (5.9) με την μορφή τελεστών εισάγουμε την διακριτή Λαπλασιανή Δ_h , την οποία ορίζουμε ως έναν τελεστή από το S_h στον εαυτό του ως εξής:

$$(-\Delta_h \psi, \chi) = \alpha(\psi, \chi), \quad \forall \psi, \chi \in S_h \quad (5.12)$$

Με χρήση του τύπου Green έχουμε: $\Delta_h \psi = \sum_{j=1}^{M_h} d_j \Phi_j$ που προκύπτει από :

$\sum_{j=1}^{M_h} d_j (\Phi_j, \Phi_k) = \alpha(\psi, \Phi_k)$, $k = 1, \dots, M_h$, αφού ο πίνακας του συστήματος είναι ο θετικά ορισμένος mass matrix που παρουσιάζεται παραπάνω. Ο τελεστής Δ_h είναι αυτοσυζυγής και $-\Delta_h$ είναι θετικά ορισμένο στο S_h με το L_2 - εσωτερικό γινόμενο. Έστω P_h η L_2 προβολή στον S_h . Τότε η εξίσωση (5.9) παίρνει την μορφή:

$$(u_{h,t} - \Delta_h u_h - P_h f, \chi) = 0, \forall \chi \in S_h$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.2

Έστω u_h και u οι λύσεις των προβλημάτων (5.9) και (5.7) αντίστοιχα. Τότε ισχύει:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^2 (\|v\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 ds), \quad t \geq 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Υπενθυμίζουμε τον τελεστή R_h που ονομάζεται ελλειπτική προβολή ή προβολή Ritz και την εκτίμηση σφάλματος:

$$\|R_h v - v\| + h |R_h v - v|_1 \leq Ch^s \|v\|_s, \quad s = 1, 2$$

Στην απόδειξη αυτή συγκρίνουμε την λύση του ημιδιακριτού προβλήματος με την ελλειπτική προβολή της ακριβούς λύσης. Έτσι έχουμε:

$$u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) = \theta + \rho$$

Ο όρος ρ φράσσεται εύκολα ως εξής:

$$\|\rho(t)\| \leq Ch^2 \|u(t)\|_2 = Ch^2 \left\| v + \int_0^t u_t ds \right\|_2 \leq Ch^2 (\|v\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 ds)$$

Για να βρούμε φράγμα για το θ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\theta_t, \chi) + \alpha(\theta, \chi) &= (u_{h,t}, \chi) + \alpha(u_h, \chi) - (R_h u_t, \chi) - \alpha(R_h u, \chi) = \\ &= (f, \chi) - (R_h u_t, \chi) - \alpha(u, \chi) = (u_t - R_h u_t, \chi), \text{ αφού } \alpha(R_h u, \chi) = \alpha(u, \chi) \end{aligned}$$

ή

$$(\theta_t, \chi) + \alpha(\theta, \chi) = -(\rho_t, \chi), \quad \forall \chi \in S_h \quad (5.13)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο τελεστής $R_h u_t = (R_h u)_t$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (5.11) για την ευστάθεια στην (5.13) έχουμε:

$$\|\theta(t)\| \leq \|\theta(0)\| + \int_0^t \|\rho_t\| ds$$

όπου:

$$\|\theta(0)\| = \|v_h - R_h v\| \leq \|v_h - v\| + \|R_h v - v\| \leq \|v_h - v\| + Ch^2 \|v\|_2$$

και

$$\|\rho_t\| = \|R_h u_t - u_t\| \leq Ch^2 \|u_t\|_2.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq \|v_h - v\| + Ch^2 (\|v\|_2 + \int_0^t \|u_t\|_2 ds), \quad t \geq 0$$

■

Από την απόδειξη του θεωρήματος αυτού βλέπουμε ότι η εκτίμηση σφάλματος του ημιδιακριτού παραβολικού προβλήματος αποτελεί συνέπεια της ευστάθειας του προβλήματος αυτού σε συνδυασμό με την εκτίμηση σφάλματος του ελλειπτικού προβλήματος και εκφράζεται ως $\rho = (R_h - I)u$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.3

Υπό τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.2 για $t \geq 0$ έχουμε:

$$|u_h(t) - u(t)|_1 \leq |v_h - v|_1 + Ch \left\{ \|v\|_2 + \|u(t)\|_2 + \left(\int_0^t \|u_t\|_1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Χρησιμοποιώντας την ελλειπτική προβολή γράφουμε το σφάλμα στην μορφή:

$$u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) = \theta + \rho.$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$|\rho(t)|_1 = |R_h u(t) - u(t)|_1 \leq Ch \|u(t)\|_2$$

Για να εκτιμήσουμε το $\nabla\theta$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση (5.13) και θέτουμε $\chi = \theta_t$.

Έτσι έχουμε:

$$\|\theta_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta|_1^2 = -(\rho_t, \theta_t) \leq \frac{1}{2} (\|\rho_t\|^2 + \|\theta_t\|^2)$$

έτσι ώστε:

$$\frac{d}{dt} |\theta|_1^2 \leq \|\rho_t\|^2,$$

ή

$$|\theta(t)|_1^2 \leq |\theta(0)|_1^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds \leq (|v_h - v|_1 + |R_h v - v|_1)^2 + \int_0^t \|\rho_t\|^2 ds$$

και αφού: $\alpha^2 + \beta^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$ και με την χρήση της ελλειπτικής προβολής

έχουμε:

$$|\theta(t)|_1 \leq |v_h - v|_1 + Ch \left\{ \|v\|_2 + \left(\int_0^t \|u_t\|_1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.14)$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Σημειώνεται ότι: αν $v_h = I_h$ ή $v_h = R_h v$, τότε $|v_h - v|_1 \leq Ch \|v\|_2$

Έτσι ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της ανισότητας του θεωρήματος φράσσεται από τον δεύτερο όρο.

Θεωρώντας $\theta = u_h - R_h u$ και επιλέγοντας $v_h = R_h v$ ώστε $\theta(0) = 0$ από την (5.14) έχουμε:

$$|\theta(t)|_1 \leq \left(\int_0^t \|\rho_t\|_2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2 \left(\int_0^t \|u_t\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

Συνεπώς το $\nabla\theta$ είναι της τάξης του $O(h^2)$, ενώ η κλίση του ολικού σφάλματος είναι της τάξης του $O(h)$ καθώς $h \rightarrow 0$. Άρα το ∇u_h είναι καλύτερη προσέγγιση από το $\nabla R_h u$ όσο είναι δυνατόν για το ∇u . Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται ως υπερσύγκλιση.

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.4

Έστω ότι $f = 0$ και έστω u_h , u οι λύσεις των (5.9) και (5.7) αντίστοιχα. Επιλέγουμε ως αρχική συνθήκη του (5.9) $v_h = R_h v$ τότε:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^2 t^{-1} \|v\|, \quad \text{για } t > 0$$

Το θεώρημα αυτό επεκτείνεται και σε πεπερασμένα στοιχεία υψηλότερης τάξης, υπό τις κατάλληλες υποθέσεις κανονικότητας της λύσης. Έτσι αν ο πεπερασμένος υπόχωρος είναι τέτοιος ώστε να ισχύει ότι:

$$\|R_h w - w\| \leq Ch^r \|w\|_r, \quad \forall w \in H^r \cap H_0^1 \quad (5.15)$$

Τότε έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.5

Έστω u_h και u οι λύσεις των (5.9) και (5.7) αντίστοιχα και έστω ότι ισχύει η σχέση (5.15). Τότε για κατάλληλα επιλεγμένο v_h έχουμε:

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq Ch^r \left(\|v\|_r + \int_0^t \|u_t\|_r ds \right), \quad t \geq 0$$

Από την σχέση (3.37) για $r > 2$ η εκτίμηση (5.15) ισχύει για κατά τμήματα πολυώνυμα βαθμού $r-1$. Ωστόσο η υπόθεση κανονικότητας ότι $w \in H^r \cap H_0^1$ είναι κατά κάποιο τρόπο μη ρεαλιστική για πολυγωνικά χωρία Ω .

5.2. ΜΕΡΙΚΑ ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή θα αναλυθούν μερικά πλήρως διακριτά σχήματα διακριτοποιώντας και τον χρόνο.

5.2.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ BACKWARD EULER - GALERKIN

Έστω S_h Type equation here.ο πεπερασμένος χώρος των συνεχών κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων όπως έχει οριστεί.

Έστω k το βήμα του χρόνου και $U^n \in S_h$ η προσέγγιση της $u(t)$ στο $t = t_n = nk$.

Η μέθοδος αυτή αντικαθιστά την παράγωγο του χρόνου στην εξίσωση (5.9) με ένα backward διαφορικό τελεστή:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t U^n &= k^{-1}(U^n - U^{n-1}) \\ (\bar{\partial}_t U^n, \chi) + a(U^n, \chi) &= (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, n \geq 1 \\ U^0 &= v_h. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Δοθέντος του U^{n-1} προσδιορίζουμε μέσω του διακριτού ελλειπτικού προβλήματος το U^n .

$$(U^n, \chi) + k a(U^n, \chi) = (U^{n-1} + k f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h.$$

Εκφράζουμε την U^n ως :

$$U^n(x) = \sum_{j=1}^{M_h} a_j^n \Phi_j(x) \text{ με χρήση της βάσης } \{\Phi_j\}_{j=1}^{M_h}$$

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται και σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$B a^n + k A a^n = B a^{n-1} + k b^n, \quad n \geq 1$$

όπου a^n είναι το διάνυσμα με στοιχεία a_j^n :

$$a^n = (B + kA)^{-1} B a^{n-1} + k(B + kA)^{-1} b^n, \quad n \geq 1, a^0 = \gamma$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ BACKWARD EULER- GALERKIN

Η μέθοδος Backward Euler είναι ευσταθής ανεξάρτητα από την σχέση μεταξύ των h και k . Επιλέγοντας $\chi = U^n$ στην (5.16) και αφού $a(U^n, U^n) \geq 0$, έχουμε:

$$(\bar{\partial}_t U^n, U^n) \leq \|f^n\| \cdot \|U^n\|, \quad \text{όπου } f^n = f(t_n)$$

ή

$$\|U^n\|^2 - (U^{n-1}, U^n) \leq k \|f^n\| \cdot \|U^n\|$$

και αφού: $(U^{n-1}, U^n) \leq \|U^{n-1}\| \|U^n\|$ έχουμε:

$$\|U^n\| \leq \|U^{n-1}\| + k \|f^n\|, \quad n \geq 1$$

οπότε προκύπτει:

$$\|U^n\| \leq \|U^0\| + k \sum_{j=1}^n \|f^j\| \quad (5.17)$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ:

ΘΕΩΡΗΜΑ: 5.6

Έστω U^n και u οι λύσεις των (5.16) και (5.7) αντίστοιχα. Επιλέγοντας κατάλληλο v_h ώστε να ισχύει: $\|v_h - v\| \leq Ch^2$ και $n \geq 0$. Τότε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ck \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$U^n - u(t_n) = (U^n - R_h u(t_n)) + (R_h u(t_n) - u(t_n)) = \theta^n + \rho^n.$$

και από εκτίμηση σφάλματος που χρησιμοποιήθηκε και στο θεώρημα 5.2:

$$\|R_h v - v\| + h|R_h v - v|_1 \leq Ch^s \|v\|_s, \quad s = 1, 2$$

προκύπτει ότι:

$$\|\rho^n\| \leq Ch^2 \|u(t_n)\|_2 \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\begin{aligned} (\theta_t, \chi) + \alpha(\theta, \chi) &= (u_{h,t}, \chi) + \alpha(u_h, \chi) - (R_h u_t, \chi) - \alpha(R_h u, \chi) = \\ &= (f, \chi) - (R_h u_t, \chi) - \alpha(u, \chi) = (u_t - R_h u_t, \chi) \text{ καταλήγουμε:} \end{aligned}$$

$$(\bar{\partial}_t \theta^n, \chi) + \alpha(\theta^n, \chi) = -(\omega^n, \chi) \quad (5.18)$$

όπου:

$$\omega^n = R_h \bar{\partial}_t u(t_n) - u_t(t_n) = (R_h - I) \bar{\partial}_t u(t_n) + (\bar{\partial}_t u(t_n) - u_t(t_n)) = \omega_1^n + \omega_2^n$$

Εφαρμόζοντας την (5.16) στην (5.17) παίρνουμε:

$$\|\theta^n\| \leq \|\theta^0\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| + k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\|$$

Έτσι μέσω των σχέσεων $u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u) = \theta + \rho$ και

$$\|v_h - v\| \leq Ch^2 \|v\|_2$$

που χρησιμοποιήθηκαν στο θεώρημα 5.2 λαμβάνουμε:

$$\|\theta^0\| = \|v_h - R_h v\| \leq \|v_h - v\| + \|v - R_h v\| \leq Ch^2 \|v\|_2$$

Επίσης ισχύει:

$$\omega_1^j = (R_h - I)k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t ds = k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)u_t ds$$

από όπου προκύπτει:

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_1^j\| \leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} Ch^2 \|u_t\|_2 ds = Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor:

$$\omega_2^j = k^{-1} (u(t_j) - u(t_{j-1})) - u_t(t_j) = -k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds$$

Έτσι:

$$k \sum_{j=1}^n \|\omega_2^j\| \leq \sum_{j=1}^n \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \leq k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις όλες μαζί ολοκληρώνουν την απόδειξη του θεωρήματος. ■

5.2.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ FORWARD EULER - GALERKIN

Αντικαθιστώντας τον backward διαφορικό τελεστή στην (5.16) με έναν forward διαφορικό τελεστή καταλήγουμε στην forward Euler-Galerkin μέθοδο.

$$\partial_t U^n = k^{-1}(U^{n+1} - U^n),$$

$$(\partial_t U^n, \chi) + a(U^n, \chi) = (f(t_n), \chi), \quad \forall \chi \in S_h, \quad n \geq 1. \quad (5.19)$$

$$U^0 = v_h.$$

Σε μορφή πινάκων μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$B\alpha^{n+1} = (B - kA)\alpha^n + kb^n, \quad \text{για } n \geq 0$$

Χρησιμοποιώντας την διακριτή Λαπλασιανή που ορίστηκε στην (5.12), η Forward Euler μέθοδος μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$U^{n+1} = (I + k\Delta_h)U^n + kP_h f(t_n), \quad n \geq 0, \quad U^0 = u_h \quad (5.20)$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ FORWARD EULER- GALERKIN

Η μέθοδος forward Euler-Galerkin δεν είναι ευσταθής, όπως η προηγούμενη μέθοδος, χωρίς την λήψη κάποιων προϋποθέσεων.

Ωστόσο, θεωρώντας για ευκολία την ομογενή εξίσωση μπορούμε να δείξουμε την ευστάθεια υπό την προϋπόθεση ότι η οικογένεια $\{S_h\}$ είναι τέτοια ώστε:

$$\lambda_{M_h, h} k \leq 2, \quad (5.21)$$

όπου το $\lambda_{M_h, h}$ είναι το μεγαλύτερο ιδιοδιάνυσμα της διακριτής Λαπλασιανής $-\Delta_h$.

Π.χ. αυτό ισχύει αν ο S_h ικανοποιεί την αντίστροφη ανισότητα :

$$\|\nabla \chi\| \leq Ch^{-1}\|\chi\| \quad \text{για } \chi \in S_h$$

και αν $k \leq \frac{2h^2}{C}$.

Έχουμε ότι η (5.20) είναι ευσταθής αν και μόνο αν :

$$\|(I + k\Delta_h)\chi\| \leq \|\chi\|, \quad \forall \chi \in S_h$$

και αφού ο $-\Delta_h$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, η παραπάνω σχέση ισχύει αν και μόνο αν όλα τα ιδιοδιανύσματα του $I + k\Delta_h$ ανήκουν στο διάστημα $[-1,1]$. Λόγω του ότι ο $-\Delta_h$ είναι θετικός η παραπάνω ισοδυναμία είναι ισοδύναμη με την : το μικρότερο ιδιοδιάνυσμα του $I + k\Delta_h$ να είναι ≥ -1 είτε το μεγαλύτερο ιδιοδιάνυσμα του $-\Delta_h$ να είναι $\leq \frac{2}{k}$. Έτσι καταλήγουμε στην σχέση (5.21)

Λόγω της μη συμμετρικής επιλογής στην διακριτοποίηση του χρόνου, η μέθοδος αυτή είναι πρώτης τάξης ακρίβειας ως προς τον χρόνο.

5.2.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRANK- NICOLSON- GALERKIN

Στη μέθοδο αυτή η ημιδιακριτή εξίσωση διακριτοποιείται συμμετρικά γύρω από το σημείο $t_{n-\frac{1}{2}} = \left(n - \frac{1}{2}\right)k$. Έτσι η μέθοδος αυτή είναι μέθοδος δεύτερης τάξης ακρίβειας ως προς τον χρόνο.

Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε $U^n \in S_h$, αναδρομικά ως εξής :

για $n \geq 1$

$$(\bar{\partial}_t U^n, \chi) + a\left(\frac{1}{2}(U^n + U^{n-1}), \chi\right) = \left(f\left(t_{n-\frac{1}{2}}\right), \chi\right), \quad \forall \chi \in S_h \quad (5.22)$$

$$U^0 = u_h$$

Χρησιμοποιώντας συμβολισμό πινάκων παίρνει την μορφή:

$$Ba^n + \frac{1}{2}kAa^n = Ba^{n-1} - \frac{1}{2}kAa^{n-1} + kb^{n-\frac{1}{2}}, \quad \text{για } n \geq 1$$

ή με $a^0 = \gamma$

$$a^n = \left(B + \frac{1}{2}kA\right)^{-1} \left(B - \frac{1}{2}kA\right) a^{n-1} + k\left(B + \frac{1}{2}kA\right)^{-1} b^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1.$$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΗΣ CRANK-NICOLSON - GALERKIN:

Η μέθοδος αυτή είναι επίσης ευσταθής χωρίς προϋποθέσεις, το οποίο αποδεικνύεται

θέτοντας $\chi = U^n + U^{n-1}$ στην (5.22) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Έτσι έχουμε:

$$k(\bar{\partial}_t U^n, U^n + U^{n-1}) = \|U^n\|^2 - \|U^{n-1}\|^2 = (\|U^n\| - \|U^{n-1}\|)(\|U^n\| + \|U^{n-1}\|)$$

Λόγω του ότι το $\alpha(U^n, U^n)$ είναι θετικό και απλοποιώντας τον όρο $\|U^n\| + \|U^{n-1}\|$ έχουμε:

$$\|U^n\| \leq \|U^{n-1}\| + k \left\| f^{n-\frac{1}{2}} \right\|, \quad \text{όπου: } f^{n-\frac{1}{2}} = f\left(t_{n-\frac{1}{2}}\right),$$

μετά από άθροιση:

$$\|U^n\| \leq \|v_h\| + k \sum_{j=1}^n \left\| f^{j-\frac{1}{2}} \right\|$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ:

Το παρακάτω θεώρημα που αποδεικνύεται παρόμοια με το θεώρημα 5.6 μας δίνει την εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου Crank- Nicolson.

ΘΕΩΡΗΜΑ : 5.7

Με U^n και u οι λύσεις των (5.22) και (5.7) αντίστοιχα και επιλέγοντας v_h ώστε να ισχύει η σχέση: $\|v_h - v\| \leq Ch^2 \|v\|_2$ του θεωρήματος 15 και $n \geq 0$ έχουμε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ck^2 \int_0^{t_n} (\|u_{ttt}\| + \|\Delta u_{tt}\|) ds.$$

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ FreeFem++

6.1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Το FreeFem++ είναι ένα λογισμικό που χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Η γλώσσα προγραμματισμού του FreeFem++ είναι ένας ιδιοματισμός της C++. Περιέχει πολλά εκπαιδευτικά παραδείγματα κατανόησης και εκμάθησης.¹³

Μερικά από τα χαρακτηριστικά του FreeFem++ είναι τα εξής:

- Περιγραφή του προβλήματος με την ασθενή του μοφή.
- Εύκολος ορισμός του χωρίου στο οποίο ορίζεται το πρόβλημα.
- Αυτόματη δημιουργία πλέγματος βασισμένη στον αλγόριθμο Delaunay-Voronoi.
- Ποικιλία τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων: Γραμμικά, τετραγωνικά και άλλα τύπου Lagrange, ασυνεχή P1, Raviart-Thomas...
- Πολλές μέθοδοι, άμεσες και επαναληπτικές επίλυσης γραμμικών συστημάτων και προβλημάτων ιδιοτιμών.
- Εργαλεία ορισμού ασυνεχών Galerkin πεπερασμένων στοιχείων.

Με την χρήση του λογισμικού αυτού θα λυθεί το παρακάτω πρόβλημα θερμότητας με την μέθοδο Galerkin για την διακριτοποίηση του χώρου και με τις μεθόδους Backward Euler, Crank-Nicolson και Forward Euler για την διακριτοποίηση του χρόνου.

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ στο } \Omega = [0,1] \times [-0.5,0.5], \quad T = [0,2.5] \\ u(x,y,t) = 0 \text{ στο } \partial\Omega \\ u(x,y,0) = g \text{ στο } \Omega \end{array} \right. \quad (6.1)$$

$$\text{με } g(t) = \frac{t^3}{10}, \quad f(x,y,t) = (g'(t) + 5\pi^2 g(t)) \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi y)$$

$$\text{και αρχική κατανομή } u(x,y,0) = g(0) \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi y)$$

Η ακριβής λύση του προβλήματος είναι :

¹³ [7] . Hecht FreeFem++ Third Edition, Version 3.56-2 <http://www.freefem.org/ff++>, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universite Pierre et Marie Curie, Paris

$$u(x, y, t) = g(t) \cdot \sin(2\pi x) \cdot \cos(\pi y)$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω εντολές του FreeFem++:

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ

Ο παρακάτω κώδικας δημιουργεί ένα πλέγμα $m \times n$ στο ορθογώνιο $[a,b] \times [c,d]$

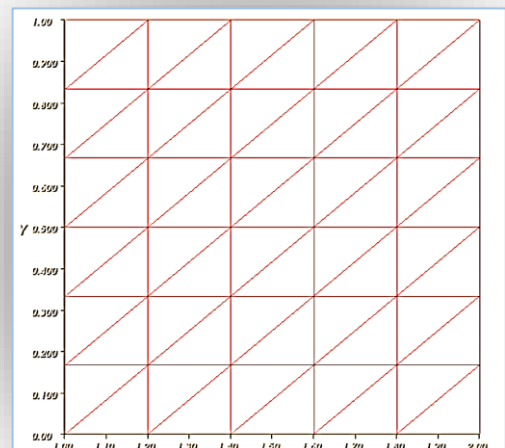
```
real x0=a, x1=b ;
```

```
real y0=c, y1=d ;
```

```
int n=n0, m=m0 ;
```

```
mesh Th = square (n,m,[x0+(x1-x0)*x, y0+(y1-y0)*y]);
```

Για παράδειγμα για το τετράγωνο $[1,2] \times [0,1]$ με παραμέτρους $m=5$, $n=6$.



ΧΩΡΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Ο χώρος των πεπερασμένων στοιχείων δημιουργήθηκε με την εντολή `fespace Vh(Th,P1)`. Το όρισμα `P1` αντιστοιχεί στην χρήση τμηματικά γραμμικών συνεχών συναρτήσεων βάσεων. Υπάρχουν πολλές ακόμα επιλογές όπως:

`P0` κατά τμήματα σταθερά (piecewise constant)

`P2` συνεχή κατά τμήματα 2^{ου} βαθμού (continuous piecewise quadratic)

`P3` συνεχή κατά τμήματα 3^{ου} βαθμού (continuous piecewise cubic)

`P4` συνεχή κατά τμήματα 4^{ου} βαθμού (continuous piecewise quartic)

Οι δυο προηγούμενες επιλογές χρειάζονται την εντολή: (need `load "Element_P4/ P3"`)

`P1dc` κατά τμήματα γραμμική ασυνεχής (piecewise linear discontinuous)

`P2dc` κατά τμήματα 2^{ου} βαθμού ασυνεχής (piecewise quadratic discontinuous)

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ X ΚΑΙ Y

Με την εντολή :

```
border OX(t=-0.5,1){x=t;y=0;}
```

```
border OY(t=-0.5,1){x=0;y=t;}
```

Ορίζουμε το εύρος των αξόνων x και y .

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

```
plot(cmm="Mesh",th,OX(1),OY(1),wait=0);
```

που δημιουργεί την γραφική παράσταση του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε.

```
plot(cmm="Initial conditions",u0,OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0);
```

που δημιουργεί την γραφική παράσταση των αρχικών συνθηκών.

```
plot(cmm="Approximate solution at time "+t,u,
```

```
OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0,value=1,aspectratio=1);
```

που δημιουργεί την γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσεις σε κάθε χρονικό βήμα.

ΕΚΤΥΠΩΣΗ

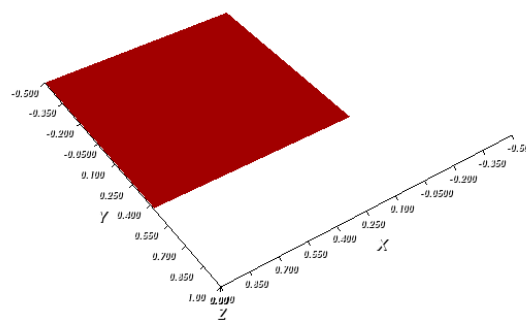
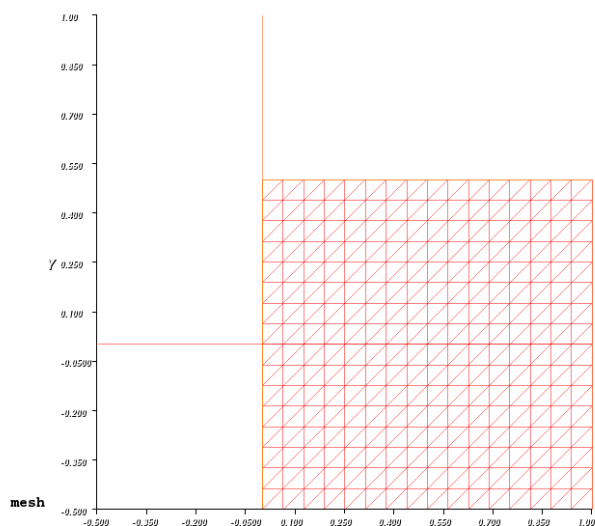
Για την εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η εντολή `cout`. Για παράδειγμα:

```
cout << "Using Crank-Nicolson " <<endl;
```

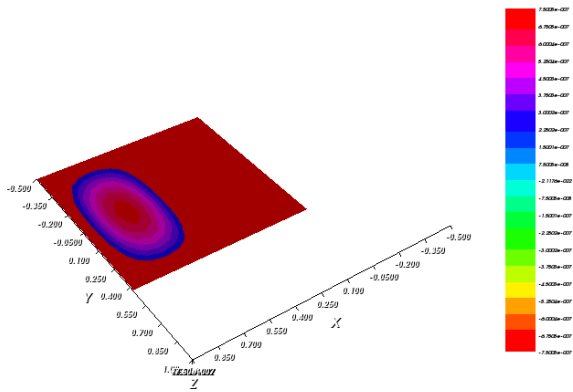
6.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ BACKWARD EULER-GALERKIN

6.2.1. ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

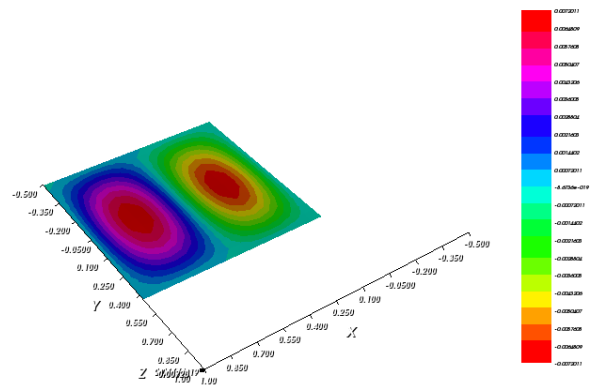
Με χρήση της μεθόδου backward Euler-Galerkin θα προσεγγίσουμε αριθμητικά την ακριβή λύση u του παραπάνω προβλήματος στο τετράγωνο χωρίο Ω όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Με k συμβολίζεται το βήμα του χρόνου, με h το βήμα για την διακριτοποίηση του χώρου και με $m \times m$ το μέγεθος του πλέγματος. Το πρόγραμμα που δημιουργήθηκε στο Freefem++ για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης με παραμέτρους $h=0.0625$ $k=0.00390625$, πλέγμα $m \times m=16 \times 16$ και τελικό χρόνο $T_f=2.5$ έδωσε τα παρακάτω γραφικά αποτελέσματα:



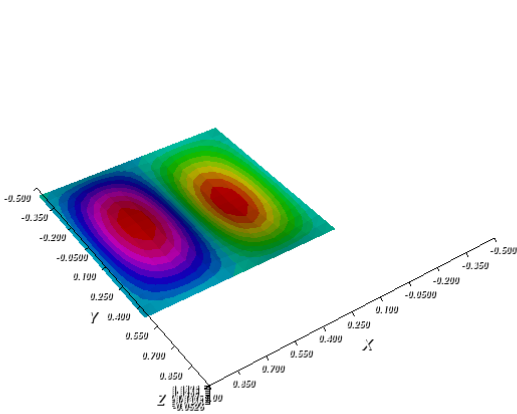
Initial condition $t=0$



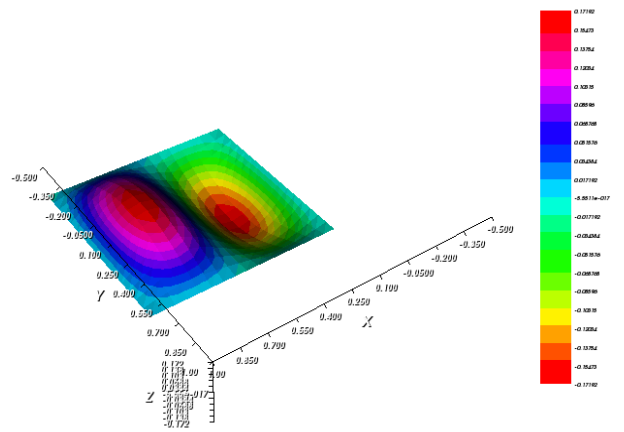
Approximated solution at time 0.0234375



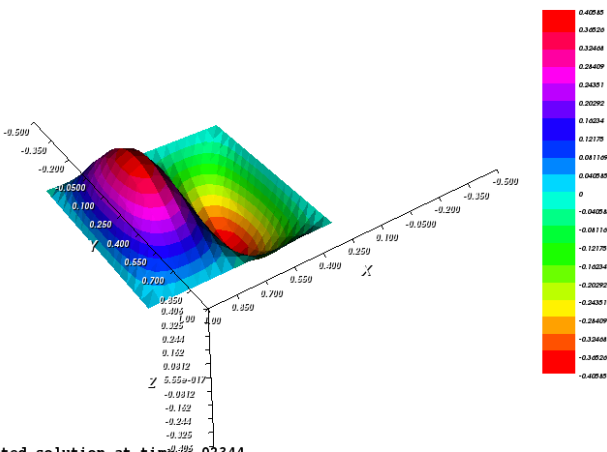
Approximated solution at time 0.527344



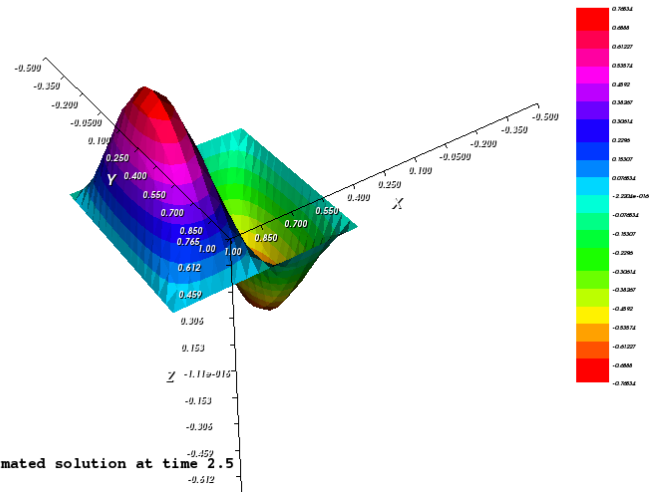
Approximated solution at time 1.02344



Approximated solution at time 1.51953



Approximated solution at time 2.02344



Approximated solution at time 2.5

6.2.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις εκτιμήσεις σφαλμάτων για διαφορετικές τιμές του χωρικού πλέγματος $m \times n$ και για τις τιμές των βημάτων k και h που φαίνονται.

Η εκτίμηση του σφάλματος έγινε με την L_2 νόρμα λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

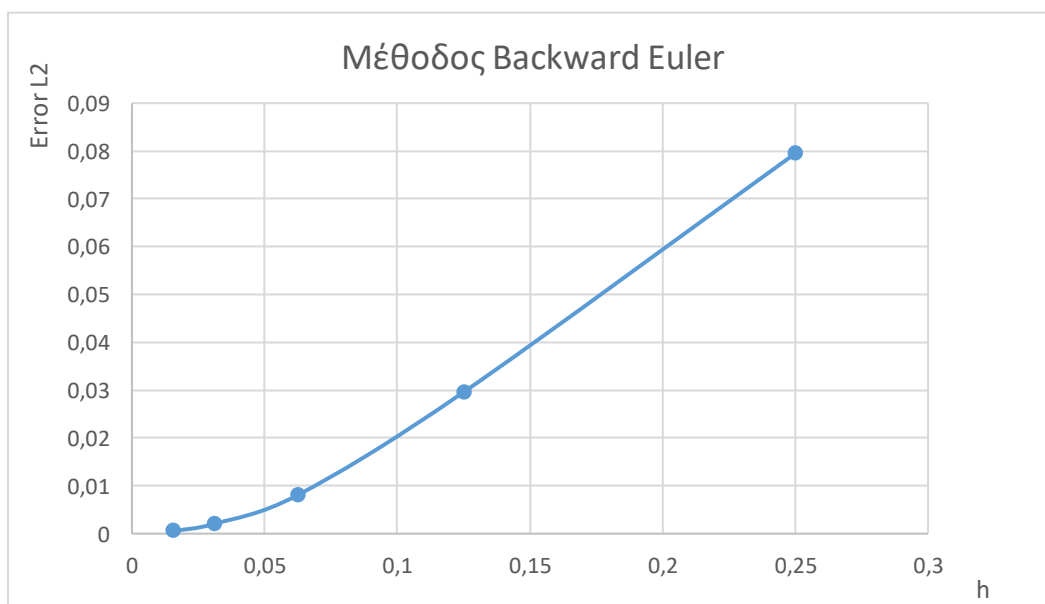
$$\|U_t - u_t\|_{L_2} = \left(\int_{-0.5}^{0.5} \int_0^1 |U_t - u_t|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Στον πίνακα αναγράφεται η μέγιστη τιμή της νόρμας για κάθε χρονική στιγμή.

k	h	σφάλμα $L^2(\Omega)$ για $T_f=2.5$	πλέγμα $m \times n$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	0.0794975	4x4
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	0.0292853	8x8
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$	0.00809454	16x16
$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{32}$	0.00207942	32x32
$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{64}$	0.000523688	64x64

Το σφάλμα υπολογίστηκε στον τελικό χρόνο.

Γραφική παράσταση του βήματος h συναρτήσει του σφάλματος στην L_2 νόρμα.



Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική. Αυτό είναι λογικό διότι σύμφωνα με την σχέση του θεωρήματος 5.6 έχουμε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ck \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds$$

για $k = h^2$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

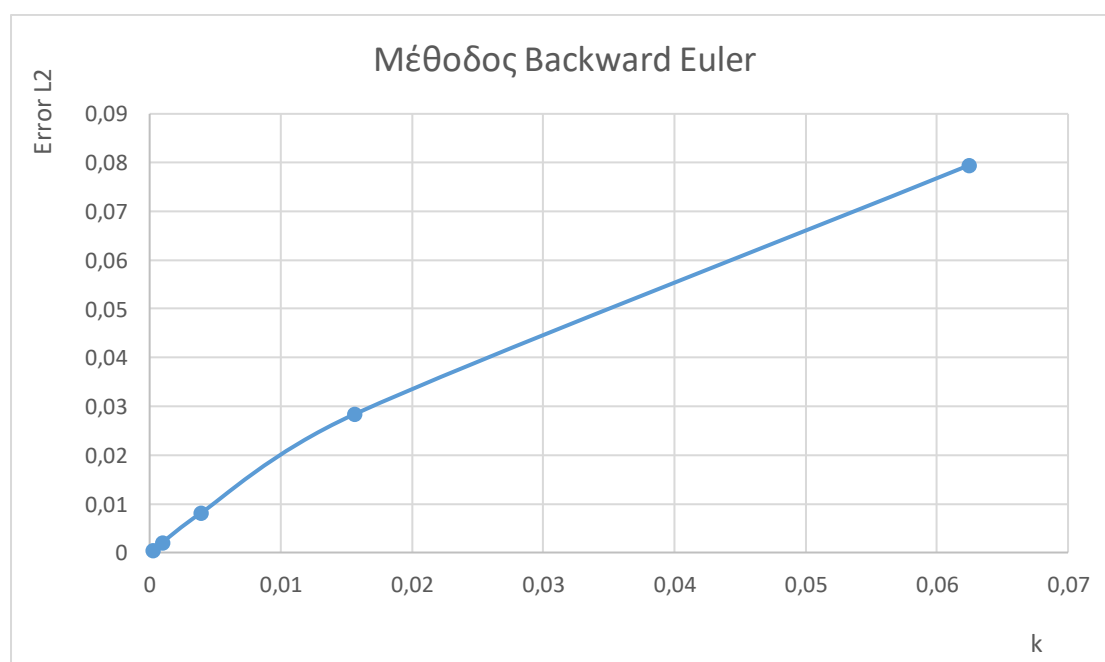
$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| &\leq Ch^2 \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right) \end{aligned}$$

Αναμένουμε λοιπόν, καθώς το h υποδιπλασιάζεται το σφάλμα να υποτετραπλασιάζεται διότι για $h/2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|U^n - u(t_n)\| &\leq C \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right) = \\ \|U^n - u(t_n)\| &\leq \frac{Ch^2}{4} \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right) \end{aligned}$$

Η τετραγωνική σύγκλιση επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα.

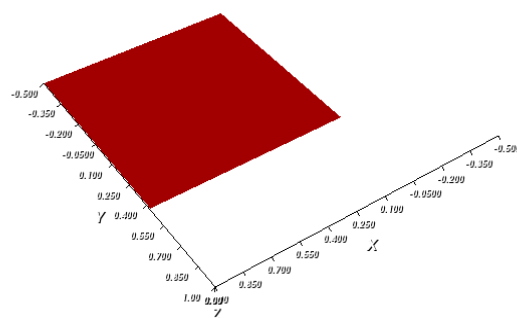
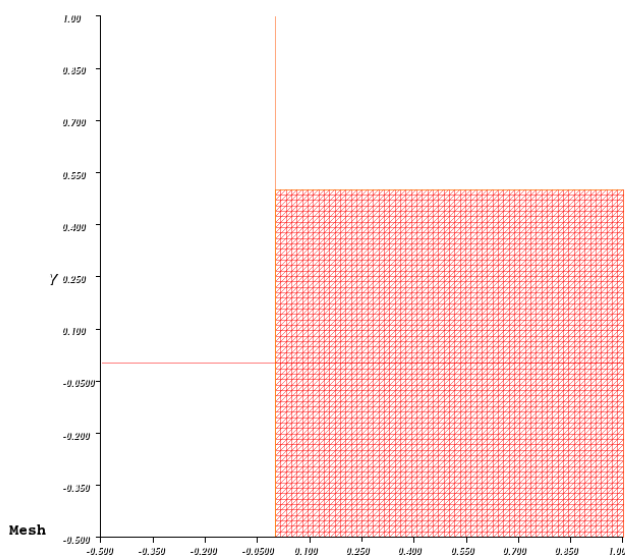
Στην περίπτωση που δημιουργήσουμε το γράφημα του σφάλματος στην L_2 νόρμα συναρτήσεως του βήματος χρόνου k αναμένουμε γραμμική συμπεριφορά όπως φαίνεται από το διάγραμμα:



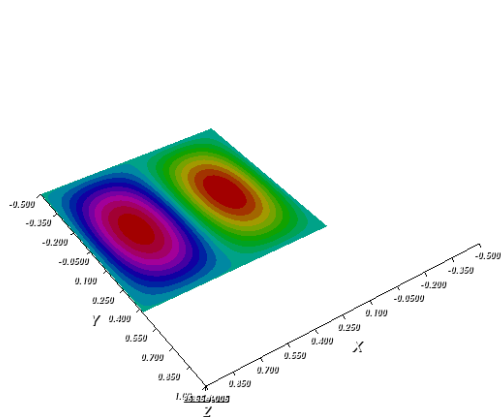
6.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRANK-NICOLSON-GALERKIN

6.3.1. ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

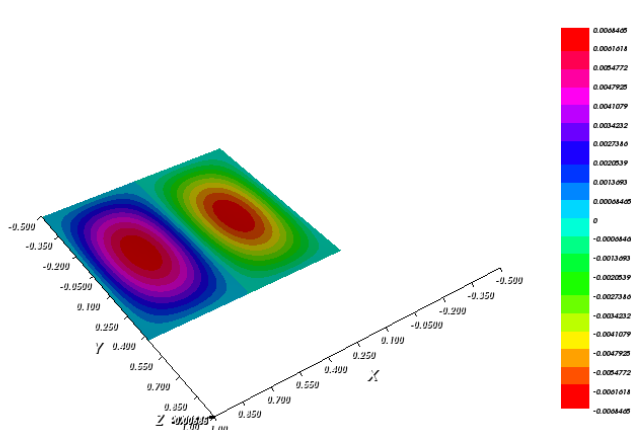
Με χρήση της μεθόδου Crank-Nicolson-Galerkin θα προσεγγίσουμε αριθμητικά την ακριβή λύση u του παραπάνω προβλήματος στο τετράγωνο χωρίο Ω όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Με k συμβολίζεται το βήμα του χρόνου, με h το βήμα για την διακριτοποίηση του χώρου και με $m \times m$ το μέγεθος του πλέγματος. Το πρόγραμμα που δημιουργήθηκε στο Freefem++ για την αριθμητική προσέγγιση της λύσης με παραμέτρους $h=k=0.015625$, πλέγμα $m \times m=64 \times 64$ και τελικό χρόνο $T_f=2.5$ έδωσε τα παρακάτω γραφικά αποτελέσματα:



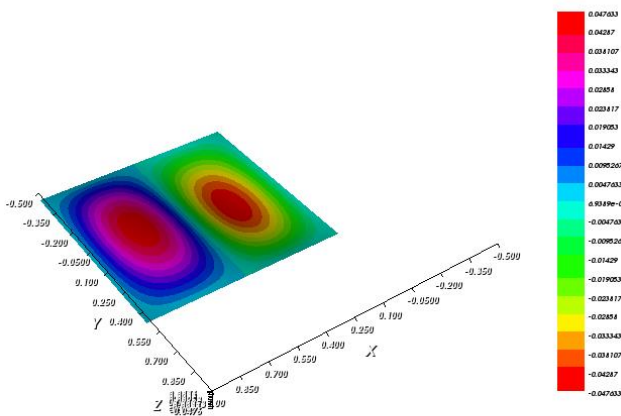
Initial conditions



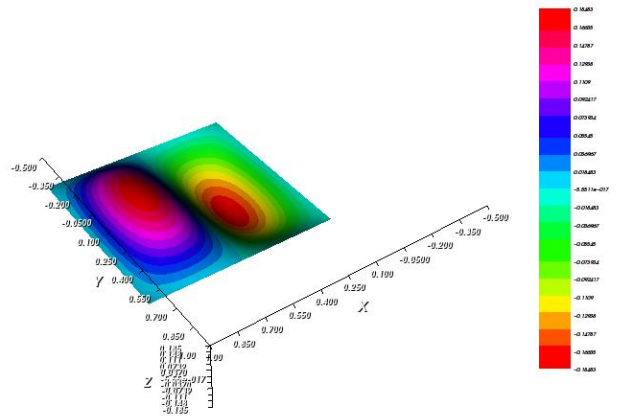
Approximate solution at time 0.109375



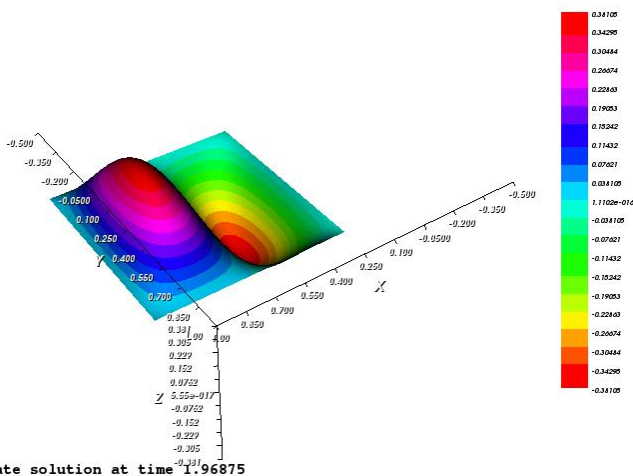
Approximate solution at time 0.515625



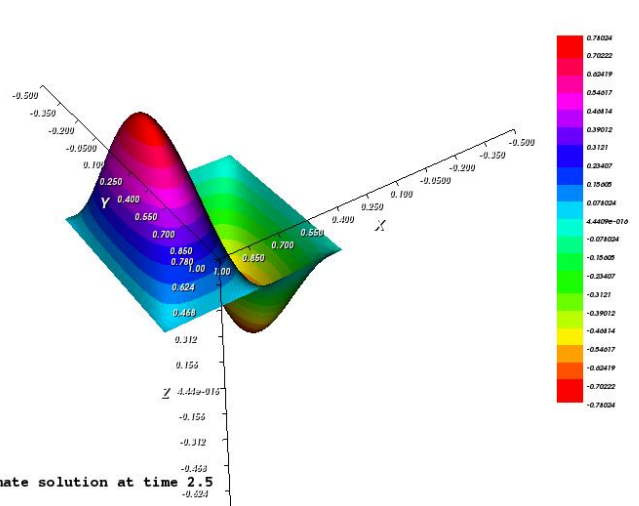
Approximate solution at time 0.984375



Approximate solution at time 1.54688



Approximate solution at time 1.96875



Approximate solution at time 2.5

6.3.2. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις εκτιμήσεις σφαλμάτων για διαφορετικές τιμές του χωρικού πλέγματος $m \times n$ και για τις τιμές των βημάτων k και h που φαίνονται.

Η εκτίμηση του σφάλματος έγινε με την L_2 νόρμα λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

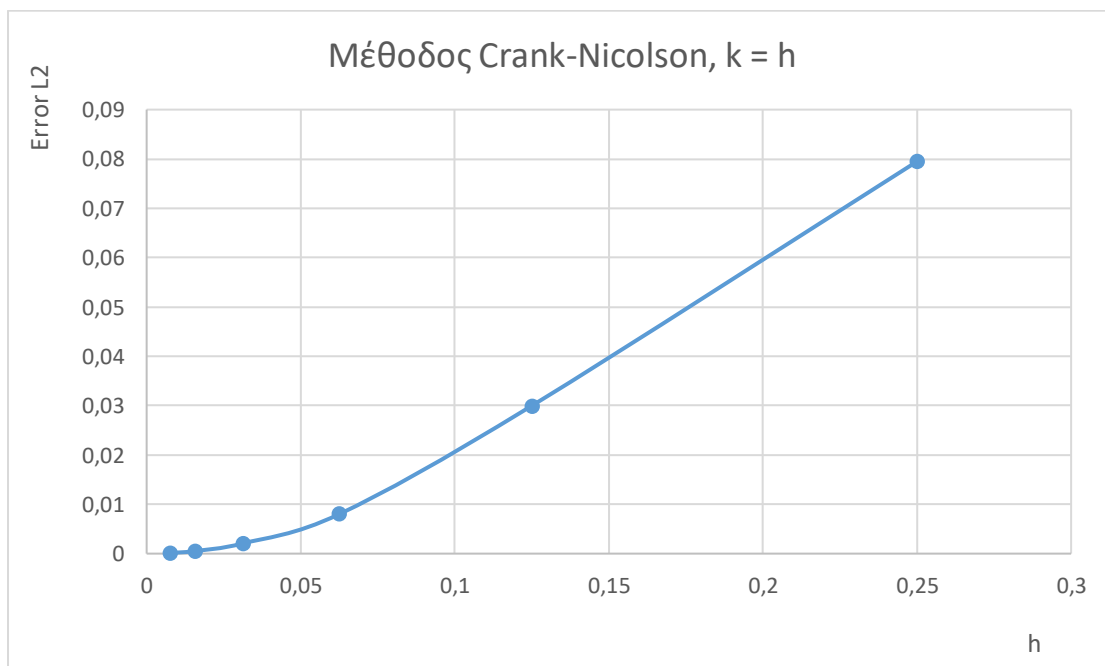
$$\|U_t - u_t\|_{L_2} = \left(\int_{-0.5}^{0.5} \int_0^1 |U_t - u_t|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

Στον πίνακα αναγράφεται η μέγιστη τιμή της νόρμας για κάθε χρονική στιγμή.

h=k	σφάλμα $L^2(\Omega)$ για $T_f=2.5$	πλέγμα $n \times n$
$\frac{1}{4}$	0.0794887	4x4
$\frac{1}{8}$	0.0292772	8x8
$\frac{1}{16}$	0.00809702	32x32
$\frac{1}{32}$	0.00207669	64x64
$\frac{1}{64}$	0.000522513	128x128
$\frac{1}{128}$	0.000130838	256x256

Το σφάλμα υπολογίστηκε στον τελικό χρόνο.

Γραφική παράσταση του βήματος h συναρτήσει του σφάλματος στην L_2 νόρμα.



Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική. Αυτό είναι λογικό διότι σύμφωνα με την σχέση του θεωρήματος 5.7 έχουμε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ck^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds$$

για $k = h$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + Ch^2 \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|U^n - u(t_n)\| \leq Ch^2 \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right)$$

Αναμένουμε λοιπόν, και σε αυτή την περίπτωση, καθώς το h υποδιπλασιάζεται το σφάλμα να υποτετραπλασιάζεται διότι για $h/2$ έχουμε:

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq C \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right) =$$

$$\|U^n - u(t_n)\| \leq \frac{Ch^2}{4} \left(\left(\|v\|_2 + \int_0^{t_n} \|u_t\|_2 ds \right) + \int_0^{t_n} \|u_{tt}\| ds \right)$$

Η τετραγωνική σύγκλιση επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα.

6.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ FORWARD EULER-GALERKIN

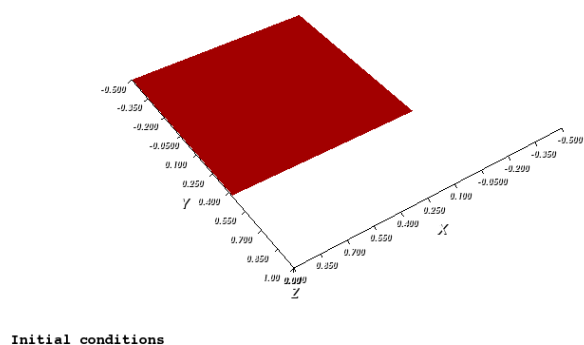
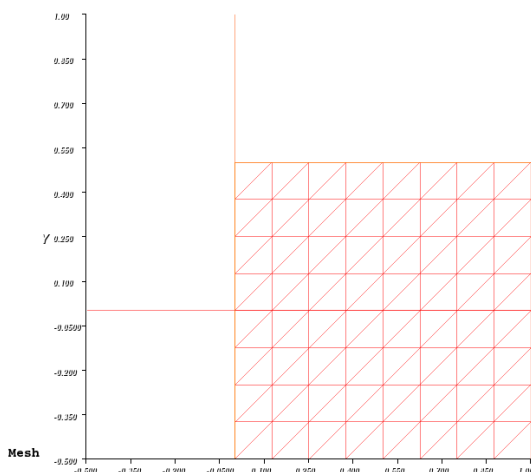
6.4.1. ΓΡΑΦΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

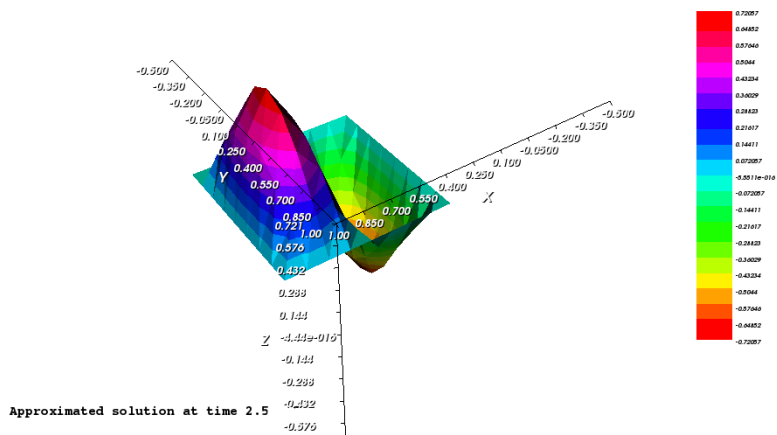
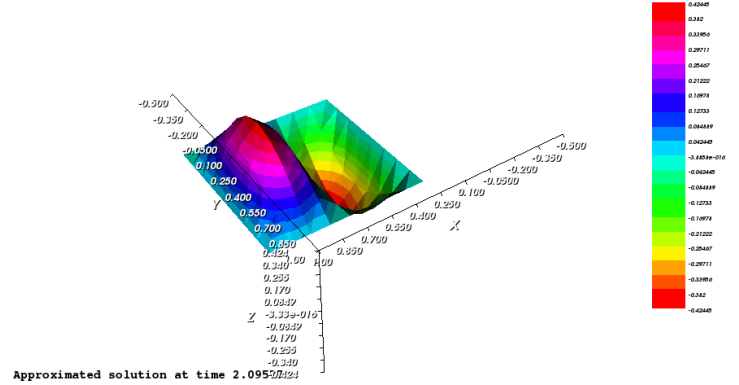
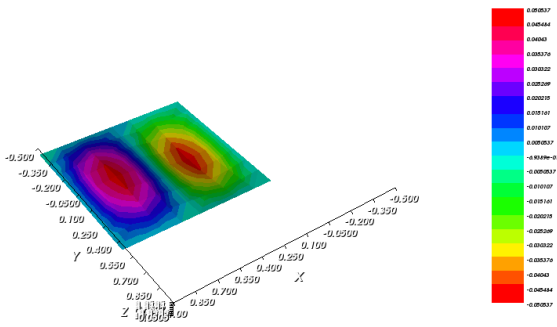
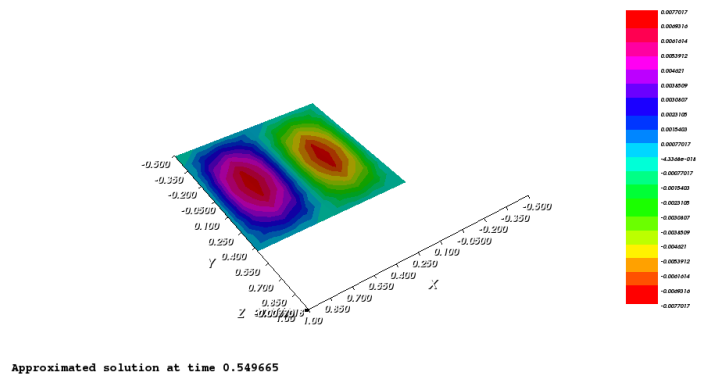
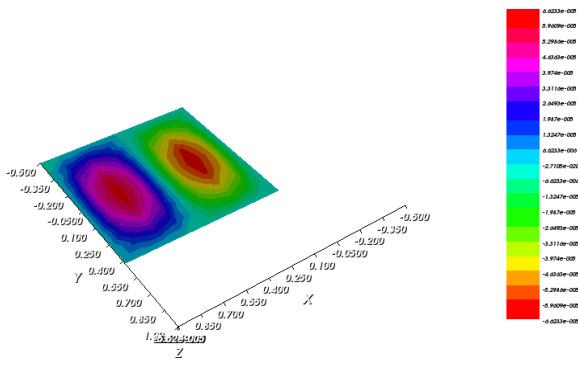
Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, η μέθοδος forward Euler-Galerkin δεν είναι ευσταθής χωρίς την λήψη κάποιων προϋποθέσεων.

Με k συμβολίζεται το βήμα του χρόνου, με h το βήμα για την διακριτοποίηση του χώρου και με $m \times m$ το μέγεθος του πλέγματος.

Παρατηρήθηκαν τα εξής:

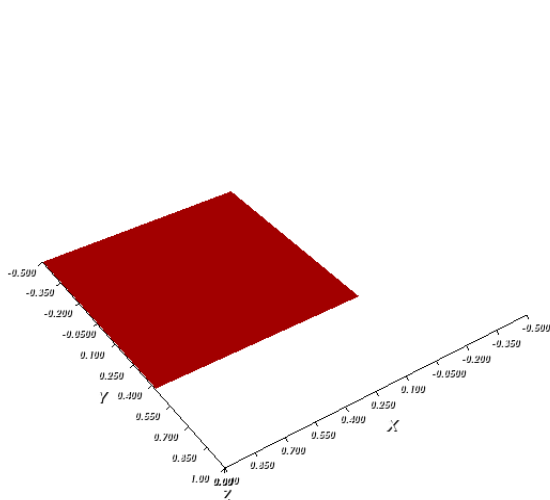
- 1) Για παραμέτρους $h=0.125$ και $k=\frac{1}{4096}$, πλέγμα $m \times m=8 \times 8$ και τελικό χρόνο $T_f=2.5$ η μέθοδος είναι ευσταθής και η λύση προσεγγίζεται αριθμητικά. Έτσι έχουμε τα παρακάτω γραφικά αποτελέσματα:



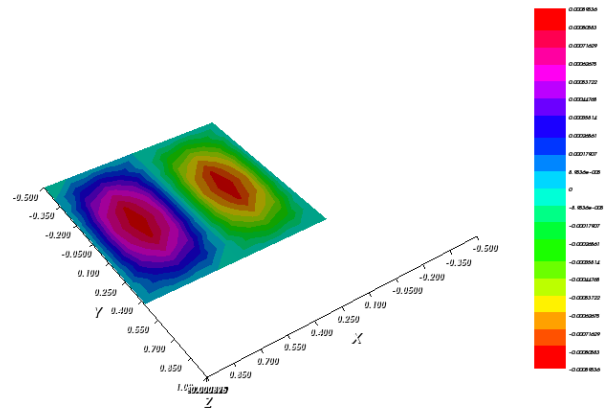


Με σφάλμα στην νόρμα $L_2 = 0.21684$

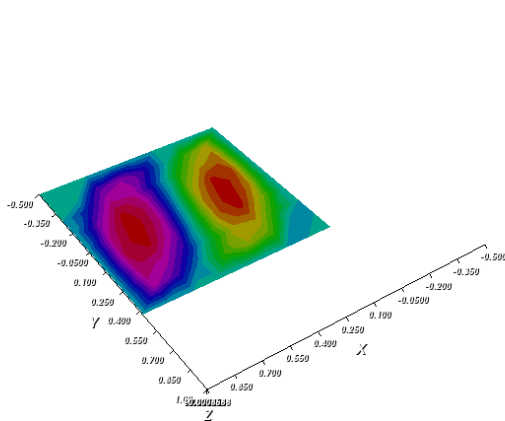
- 2) Για παραμέτρους $h=0.125=k$ και πλέγμα $m \times m = 8 \times 8$ και τελικό χρόνο $T_f = 2.5$ η μέθοδος είναι ασταθής και η λύση δεν προσεγγίζεται καθώς δεν ισχύει η $k \leq \frac{2h^2}{C}$ που αποτελεί συνθήκη ευστάθειας. Έτσι έχουμε τα παρακάτω γραφικά αποτελέσματα.



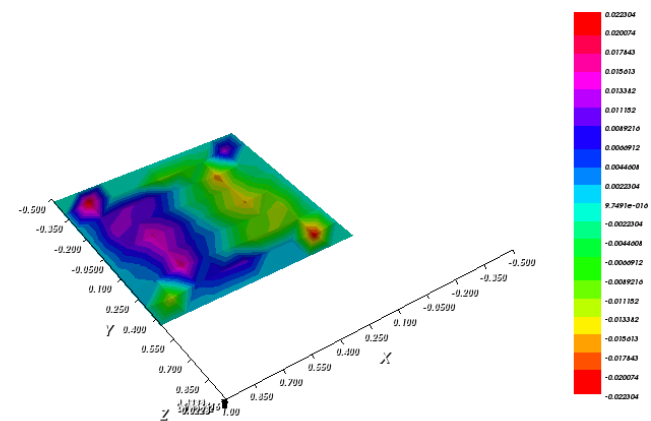
Initial conditions



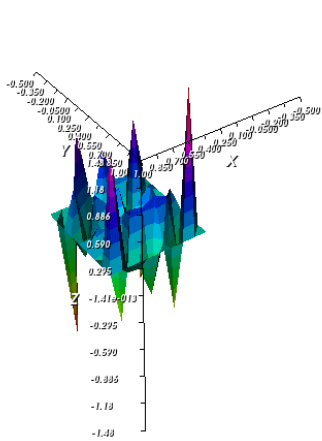
Approximated solution at time 0.25



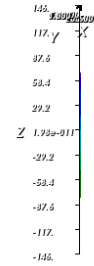
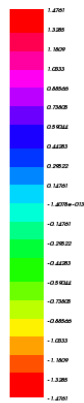
Approximated solution at time 0.375



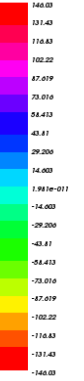
Approximated solution at time 0.5



Approximated solution at time 0.625



Approximated solution at time 0.75



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ:

- ✓ Επιβεβαιώσαμε την θεωρητική τάξη σύγκλισης των μεθόδων Backward Euler και Crank-Nicolson.
- ✓ Επιβεβαιώθηκε ότι η Forward Euler είναι ευσταθής μέθοδος υπό συνθήκες οι οποίες είναι πολύ περιοριστικές, πράγμα που καθιστά την μέθοδο σχεδόν άχρηστη για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

ΜΕΘΟΔΟΣ BACKWARD EULER:

```

verbosity=0;

func real g(real t){
    real s=-0.05*t^3;

return s;}

func real dgdt(real t){
    real s=-0.15*t^2;

return s;}

int factor=16;

int m=1*factor;// number of points

mesh th=square(m,m,[x,-.5+y]);

real h=1.0/m;// size of h

real dt=h^2;// size of dt

// Definition of the axis OX-OY

border OX(t=-0.5,1){x=t;y=0;}

border OY(t=-0.5,1){x=0;y=t;}

// plot initial mesh

plot(cmm="mesh",th,OX(1),OY(1),wait=0);

// Definition of the fespace

fespace Vh(th,P1);

Vh u,v;

Vh u0=g(0)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);// initial data

Vh fh1,fh0;// force terms at time levels t^{n+1} and t^n respectively

problem backwardeuler(u,v) =

int2d(th)( u*v + 1*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ))

- int2d(th)(u0*v - (1-1)*dt*(dx(u0)*dx(v)+dy(u0)*dy(v)))

- int2d(th)(dt*( 1*fh1+(1-1)*fh0 )*v )+on(1,2,3,4,u=0);

real t=0;// initial time

real tf=0.3;// final time
    
```

```

real errL2sq=0;// to hold errors
for(int n=0;n<tf/dt;n++)
    { fh0=(dgdt(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
      t=t+dt;
      fh1=(dgdt(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
      backwardeuler;
      Vh uexh=g(t)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
        //Error computing
      real locL2=(int2d(th)(((u-uexh)^2)))^(0.5);
      errL2sq=max(errL2sq,locL2);
      plot(cmm="Approximated solution at time "+t,u,
      OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0,value=1,aspectratio=1);
      u0=u;}
    //Errors in time
real errLiL2 = errL2sq;
cout << "Using Backward Euler " <<endl;
cout << "Errors at time T = " << tf<<" using dt=dh = " << dt << endl;
cout << "Errors : Linfty(L2) " << errLiL2 << endl;

```

ΜΕΘΟΔΟΣ CRANK-NICOLSON

```

verbosity=0;
func real g(real t){
    real s=-0.05*t^3;
return s;}
func real dgdt(real t){
    real s=-0.15*t^2;
return s;}
int factor=64;

```

```

int m=1*factor;// number of points
mesh th=square(m,m,[x,-.5+y]);
real h=1.0/m;// size of h
real dt=h;// size of dt
// Definition of the axis OX-OY
border OX(t=-0.5,1){x=t;y=0;}
border OY(t=-0.5,1){x=0;y=t;}
// plot initial mesh
plot(cmm="Mesh",th,OX(1),OY(1),wait=0);
// Definition of the fespace
fespace Vh(th,P1);
Vh u,v;
Vh u0=g(0)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);// initial data
Vh fh1,fh0;// force terms at time levels  $t^{n+1}$  and  $t^n$  respectively
// plot initial data
plot(cmm="Initial conditions",u0,OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0);
problem cranknicolson(u,v) =
int2d(th)( u*v + 0.5*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) )
- int2d(th)(u0*v - (1-0.5)*dt*(dx(u0)*dx(v)+dy(u0)*dy(v)))
- int2d(th)(dt*( 0.5*fh1+(1-0.5)*fh0 )*v )+on(1,2,3,4,u=0);//boundary conditions
real t=0;// initial time
real tf=2.5;// final time
real errL2sq=0;// to hold errors
for(int n=0;n<tf/dt;n++)
{ fh0=(dgdt(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
t=t+dt;
fh1=(dgdt(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
cranknicolson;
Vh uexh=g(t)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
//Error computing
real locL2=(int2d(th)((u-uexh)^2))^0.5);

```

```

    errL2sq=max(errL2sq,locL2);
    plot(cmm="Approximate solution at time "+t,u,
    OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0,value=1,aspectratio=1);
    u0=u;}
    //Errors in time
real errLiL2 = errL2sq;
cout << "Using Crank-Nicolson " <<endl;
cout << "Errors at time T = " << tf<<" using dt=dh = " << dt << endl;
cout << "Errors : error(L2) " << errLiL2 << endl;

```

ΜΕΘΟΔΟΣ FORWARD EULER

```

verbosity=0;
func real g(real t){
    real s=-0.05*t^3;
return s;}
func real dgdt(real t){
    real s=-0.15*t^2;
return s;}
int factor=8;
int m=1*factor;// number of points
mesh th=square(m,m,[x,-.5+y]);
real h=1.0/m;// size of h
real dt=6*h;// size of dt
border OX(t=-0.5,1){x=t;y=0;}
border OY(t=-0.5,1){x=0;y=t;}
// plot initial mesh

```

```

plot(th,OX(1),OY(1),wait=0);
fespace Vh(th,P1);
Vh u,v;

Vh u0=g(0)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);// initial data
Vh fh1,fh0;// force terms at time levels  $t^{n+1}$  and  $t^n$  respectively
plot(u0,OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0);
problem backwardeuler(u,v) =
int2d(th)( u*v + 1*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ))
- int2d(th)(u0*v - (1-1)*dt*(dx(u0)*dx(v)+dy(u0)*dy(v)))
- int2d(th)(dt*( 1*fh1+(1-1)*fh0 )*v )+on(1,2,3,4,u=0);
problem forwardeuler(u,v) =
int2d(th)( u*v + 0*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ))
- int2d(th)(u0*v - (1-0)*dt*(dx(u0)*dx(v)+dy(u0)*dy(v)))
- int2d(th)(dt*( 0*fh1+(1-0)*fh0 )*v )+on(1,2,3,4,u=0);
real t=0;// initial time
real tf=1.5;// final time
real errL2sq=0,errH1sq=0;// to hold errors
for(int n=0;n<tf/dt;n++)
{ fh0=(dgd(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
t=t+dt;
fh1=(dgd(t)+5*pi^2*g(t))*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
forwardeuler;
Vh uexh=g(t)*sin(2*pi*x)*cos(pi*y);
Vh dxuexh=2*pi*g(t)*cos(2*pi*x)*cos(pi*y);
Vh dyuexh=-pi*g(t)*sin(2*pi*x)*sin(pi*y);
//Error computing
real locL2=int2d(th)((u-uexh)^2)^(0.5);
real locH1=locL2+int2d(th)((dx(u)-dxuexh)^2)+int2d(th)((dy(u)-dyuexh)^2);
errL2sq=max(errL2sq,locL2);

```

```

plot(cmm="Approximated solution at time "+t,u,
OX(1),OY(1),fill=1,dim=3,wait=0,value=1,aspectratio=1);
u0=u;
}

cout<< h<< endl;
    cout<< dt<<endl;
    //Errors in time
real errLiL2 = errL2sq;
cout << "Using Forward Euler " <<endl;
cout << "Errors at time T = " << tf<<" using dt=dh = " << dt << endl;
cout << "Errors : Linfty(L2) " << errLiL2 << endl;

```


ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

1. Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων – Πεπερασμένα στοιχεία και διαφορές Αθήνα 2003
2. Σ. Αργυρός Πραγματική Ανάλυση Μάρτιος 2011
3. Σ. Αργυρός Συναρτησιακή Ανάλυση Μάιος 2004
4. Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Αθήνα 1994
5. Μ. Πλεξουσάκης και Π. Χατζηπαντελίδης Αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων
6. Γ. Δ. Ακρίβης Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων Λευκωσία 2005

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

7. Stig Larsson and Vidar Thomee, Partial Differential Equations with Numerical Methods, Springer, 2003
8. S. C. Brenner and L. R. Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods , second ed., Springer-Verlag, New York, 2002
9. Vidar Thomee, Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, Springer-Verlag, Berlin 1997
10. F. Hecht FreeFem++ Third Edition, Version 3.56-2 <http://www.freefem.org/ff++>, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris
11. Freefem++, 3d tools for PDE simulation F. Hecht with O. Pironneau, J. Morice Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris September 2009