ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ Μ. Κ. & Α. Ε.
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

Διπλωματική Εργασία

Μοντελοποίηση εύκαμπτου βραχίονα με εφαρμογή μηχανικής συνεχούς μέσου και πειραματική επαλήθευση

Νικόλαος Χαράλαμπος Χαιρόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής: Ε. Γ. Παπαδόπουλος

ΑΘΗΝΑ 2018

Περίληψη

Η ρομποτική είναι ο κλάδος της επιστήμης που αναπτύσει μηχανές ικανές να αντικαταστήσουν τον άνθρωπο στην εκτέλεση μιας εργασίας η οποία συνδυάζει φυσική δραστηριότητα με τη διαδικασία λήψης αποφάσεων. Ενας κλαδος της ρομποτικής είναι η μελέτη και η υλοποίηση αρθρωτών βραχιόνων οι οποίοι αποτελούνται από άκαμπτα μέρη. Αυτός ο τύπος βραχίονων είναι ο πλέον διαδεδομένος και συναντάται στη βιομηχανία, στη ρομποτική χειρουργική και σε άλλες εφαρμογές. Οσο αναπτύσεται η τεχνολογία προκύπτουν συνεχώς νέες ανάγκες οι οποίες δεν μπορούν να καλυφθούν απο τους συμβατικούς αρθρωτούς βραχίονες. Τις ανάγκες αυτές έρχονται να καλύψουν οι λεγόμενοι εύκαμπτοι βραχίονες οι οποίοι αποτελούνται από ένα συνεχές μέσο το οποίο αποτελείται απο υπερελαστατικό υλικό ώστε να μπορεί να αυξομοιώνει το μήκος του και να μπορεί να κάμπτεται σε πολύ μεγάλο βαθμό.

Η παρούσα εργασία μελετάει το παρακάτω υπερελαστικό σύστημα στο οποίο εφαρμόζονται πλαστικοί κυκλίκοί δίσκοι σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους οι οποίες έχουν οπές συνήθως στη περιφέρεια τους ώστε να περνούν απο μέσα τους τένοντες οι οποίοι είναι η κύρια επενέργηση στο ρομπότ. Οι τένοντες είναι νήματα μη εκτατά τυλιγμένα σε τύμπανα τα οποία είναι συνδεδεμένα με κινητήρες που περιστρέφονται και έτσι το νήμα μαζεύεται δημιουργώντας συμπίεση και ροπή στο βραχίονα. Ως δεύτερη επενέργηση σε αυτά τα ρομπότ χρησιμοποιούνται πνευματικοί σωλήνες. Οι πνευματικοί σωλήνες περνούν και αυτοί μέσα απο τις πλαστικές φλάτζες που περνούν και οι τένοντες και πολύ συχνά ανάλογα με το σχεδιασμό του καθε ρομπότ μπορεί να αποτελούν και τον υπερελαστικό κορμό του ρομπότ. Οι σωλήνες αυτοί είναι συνδεδεμένοι με συμπιεστή αέρος και όταν αυξάνεται η πίεση τους φουσκώνουν και αυξάνουν έτσι το μήκος τους με αποτέλεσμα να αυξάνεται και το μήκος του ρομπότ κα συγχρόνωνς να κάμπτεται ως αποτέλεσμα της ροπής που ασκείται απο τον αέρα λόγω της έκκεντρης ορθής δύναμης που ασκεί στην άκρη.

Στη παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται η παραδοχή ότι το ρομπότ είναι ένα συνεχές συμπαγές κυλινδρικό μέσο. Παρουσιάζονται δύο μοντέλα, το πρώτο από την κλασσική μηχανική όπου εκεί χρησιμοποιείται η κλασσική καταστατική εξίσωση που συνδέει την ροπή με την γωνία, και το δεύτερο από τη θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων.

Μέσω πειράματος με ρομπότ που υπάρχει στο εργαστήριο γίνεται η προσπάθεια για ανάλυση παραμέτρων έτσι ώστε να γίνει αναγωγή από το ρομπότ του εργαστηρίου. Αυτό αποτελείται από πλαστικές φλάτζες και έχει ως κορμό πνευματικούς σωλήνες και επομένως δεν είναι συμπαγές, όπως το θεωρητικό συμπαγές μοντέλο που παρουσιάζεται στη παρούσα εργασία. Για να επιτευχθεί αυτό γίνεται πείραμα με αντιστάθμιση της δύναμης της βαρύτητας και παρουσιάζεται μεθοδολογία αναγνώρισης των παραμέτρων.

Σημαντικό σε σώματα που έχουν μεγάλες εκτροπές είναι ότι αλλάζει το μέτρο ελαστικότητας και η δυσκαμψία του σώματος μετά την εκτροπή. Στη παρούσα εργασία προσδιορίζονται αυτές οι παράμετροι και αποδεικνύεται ότι όντως αλλάζουν και μάλιστα σε μεγάλο βαθμό.

Στη παρούσα εργασία γίνεται πείραμα με επίδραση της δύναμης της βαρύτητας έτσι ώστε να εξεταστεί εάν η μοντελοποίηση που έχει γίνει μπορεί να προβλέψει το που βρίσκεται η άκρη του ρομπότ ένω αυτό δέχεται και την δύναμη της βαρύτητας.

Abstract

Robotics is the branch of science that develops machines capable of replacing a person in performing a task that combines physical activity with decision-making. A branch of robotics is the study and implementation of articulated arms consisting of rigid parts. This type of arm is the most widespread and occurs in industry, robotic surgery and other applications. As technology evolves, new needs arise which can not be covered by conventional modular armchairs. These needs come to cover the so-called flexible arms which consist of a continuous through which it consists of hyperelastic material so that it can increase its length and can be flexed to a great extent.

This paper studies hyperelastic system in which plastic circular discs are fixed at a fixed distance, with holes usually at their periphery for the tendons to pass throughwhich are the main action on the robot. The tendons are inextensible yarns wrapped in drums which are connected to rotating motors and thus the yarn is gathered, creating compression and torque on the arm. As a second action on these robots pneumatic tubes are used. Pneumatic tubes also pass through plastic discs. These tubes are connected to an air compressor, and when air is pressurized through them, they inflate and increase their length, increasing the length of the robot as well as bending it as a result of the torque in the air due to the extreme right force it exerts aside.

In this diploma thesis it is assumed that the robot is a continuous solid cylindrical medium. Two models are employed, the first using classical mechanics in which the classical constitutive equation linking the torque to the angle is, and the second using the theory of large displacements.

In bodies with large deflections is that it changes the modulus of elasticity and the stiffness of the body after deflection are important. In the present work, these parameters are defined and it turns out that they actually change and even to a large extent.

In the present study an experiment is performed with the effect of gravity force so as to examine whether the modeling that has been made can predict the location of the robot's edge while it accepts the force of gravity.

Αφιερώνεται στους γονείς μου Γίωργο και Λία και στην αδελφή μου Σοφία

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Ευάγγελο Παπαδόπουλο, ο οποίος καθοδήγησε κάθε κομμάτι αυτής της εργασίας αλλά και να εκφράσω τον θαυμασμό μου απο την πλευρά ότι πάντα σε κάθε νέα ιδέα και σκέψή είχε την κατάλληλη κρίση, ώστε να βελτιώσει ή να απορρίψει αυτό που πρότεινα. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. ηλεκτρολόγο μηχανικό Παναγιώτη Βαρθολομαίο ο οποίος με τη σειρά του συνεπέβλεψε αυτή την εργασία, με μύησε στον κόσμο των εύκαμπτων βραχιόνων, δίνοντας μου το κατάλληλο υλικό και τροφή για σκέψη αλλά και πολύ μεγάλη βοήθεια στο πειραματικό μέρος αυτής της εργασίας. Πραγματικά ήταν τιμή μου να δουλεύω πάνω σε ένα τέτοιο ιδιαίτερο θέμα με αυτούς τους εξαιρετικούς επιστήμονες.Τα ερεθίσματα που πήρα θα τα κουβαλάω σε όλη μου την πορεία σαν μηχανολόγος μηχανικός. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος των μηχανολόγων μηχανικών ΕΜΠ Βασίλειο Σπιτά ο οποίος με τα εξαιρετικά ερεθίσματα που μου έδωσε συνέβαλε σημαντικά στη παρούσα εργασία και για τον ίδιο λόγο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Πολιτικών μηχανικών ΕΜΠ Χρήστο Γιούνη ο οποίος με τη σειρά του συνέβαλε σημαντικά στην εργασία αυτή με τις πολύ εύστοχες παρατηρήσεις του και με τις γνώσεις που μου μετέδωσε. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος ηλεκτρολόγων μηχανικών ΕΜΠ Κωσταντίο Τζαφέστα για την διάθεση του εύκαμτου βραχίονα για πειράματα.

Περιεχόμενα

Περίληψη **3**

Abstract **5**

Ευχαριστίες **8**

Περιεχόμενα **9**

Κατάλογος Σχημάτων **12**

Κατάλογος Πινάκων **15**

Εισαγωγή **18**

1.1 Σκοπός Εργασίας 18

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση 19

1.3 Δομή εργασίας 20

2 Θεωρία ελαστικότητας **21**

2.1 Green-lagrange παραμόρφωση 21

2.2 Θεωρία της απλής κάμψης 23

3 Μοντελοποίηση τένοντα και συστήματος ανταγωνιστών τενόντων-βραχίονα **25**

3.1 Εισαγωγή 25

3.2 Μοντελοποίηση τένοντα 27

3.3 Μοντελοποίηση συστήματος τένοντα-βραχίονα 30

3.4 Κατάστρωση εξισώσεων ισορροπίας 36

4 Μοντέλο κλασσικής μηχανικής με επενέργηση δύο ανταγωνιστών τενόντων **41**

4.1 Εισαγωγή 41

4.2 Θεωρία της καθαρής κάμψης 41

4.3 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σκοπό το προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ που επενεργείται από δύο ανταγωνιστές τένοντες. 42

4.4 Διαδικασία επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων 47

4.5 Συμπεράσματα-παρατηρήσεις 52

5 Μοντέλο μεγάλων μετατοπίσεων **53**

5.1 Εισαγωγή 53

5.2 Προσδιορισμός της διαφορικής εξίσωσης των μεγάλων μετατοπίσεων 53

5.3 Προσδιορισμός συστήματος διαφορικών εξισώσεων για την εύρεση του σχήματος του βραχίονα με επενέργηση δύο ανταγωνιστών τενόντων 61

5.4 Προσδιορισμός αρχικών συνθηκών και εύρεση του σχήματος του βραχίονα. 65

6 Προσομοιώσεις για διαφορετικά σενάρια συνθηκών βαρύτητας-τριβής **68**

6.1 Εισαγωγη 68

6.2 Μοντέλο μεγάλων μετατοπίσεων 81

7 Πειραματικό μέρος **98**

7.1 Εισαγωγή 98

7.2 Πρώτο πείραμα με έλλειψη βαρύτητας 100

7.3 Προσδιορισμός του εύρους του γινομένου EI 101

7.4 Προσδιορισμός του εύρους τιμών της παραμέτρου AE 102

7.5 Προσδιορισμός των παραμέτρων ΑΕ-ΕΙ μέσω πειράματος από επενέργηση ενός τένοντα χωρίς βαρύτητα. 103
7.6 Σχολιασμός του μοντέλου μεγάλων μετατοπίσεων και της κλασσικής μηχανικής 109
8 Πείραμα με επίδραση της δύναμης της βαρύτητας 110
8.1 Εισαγωγή 110
8.2 Παρουσίαση του πειράματος 110
9 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία 113
9.1 Συμπεράσματα 113
9.2 Μελλοντική Εργασία 113
10 Βιβλιογραφία 114
11 Παράρτημα Α 116
12 Παράρτημα Β 124

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2-1. Απεικόνιση 21
Σχήμα 3-1. Θεώρηση εύκαμπτου βραχίονα σαν συμπαγές κυλινδρικό μέσο. 25
Σχήμα 3-2. Μοντέλο βραχίονα με ισοδύναμη ροπή λόγω έκκεντρων φορτίσεων. 26
Σχήμα 3-3. Απειροστό στοιχείο τένοντα. 27
Σχήμα 3-4. Διαφορικό στοιχείο συστήματος τένοντες-βραχίονα. 30
Σχήμα 3-5. Ανάλυση Δύναμης αριστερού τένοντα εξ αριστερών. 31
Σχήμα 3-6. Ανάλυση δύναμης δεξιά τένοντα εξ αριστερών σε συνιστώσες. 32
Σχήμα 3-7. Ανάλυση εσωτερικής ορθής δύναμης εξ αριστερών. 32
Σχήμα 3-8. Ανάλυση διατμητικής τάσης εξ αριστερών σε συνιστώσες. 33
Σχήμα 3-9. Ανάλυση της ορθής δύναμης εκ δεξιών σε συνιστώσες. 34
Σχήμα 3-10. Ανάλυση δύναμης αριστερού τένοντα εξ αριστερών σε συνιστώσες. 34
Σχήμα 3-11. Ανάλυση δυνάμης δεξιά τένοντα εκ δεξιών σε συνιστώσες. 35
Σχήμα 3-12. Ανάλυση διατμητικής δύναμης εκ δεξιών σε συνιστώσες. 36
Σχήμα 4-1. Απειροστό τμήμα δοκού που καταπονείται από καθαρή κάμψη. 41
Σχήμα 4-2. Μετασχηματισμός από dx σε ds. 44
Σχήμα 4-3. Αντιδράσεις στήριξης. 48
Σχήμα 4-4. Βοηθητικό σχήμα για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων του κεντροβαρικού άξονα. 50
Σχήμα 4-5. Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. 52
Σχήμα 5-1. Μετατοπίσεις δύο διαδοχικών σημείων που απέχουν dx. 53
Σχήμα 5-2. Μετατόπιση ενός στοιχείου του κεντροβαρικού άξονα οριζόντια και κατακόρυφα. 56
Σχήμα 5-3. Μετατόπιση σημείου σε απόσταση z από τον κεντροβαρικό άξονα. 57
Σχήμα 5-4. Ανάλυση του διαφορικού εμβαδού. 60
Σχήμα 5-5. Αντιδράσεις στήριξης. 65
Σχήμα 5-6. Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. 67
Σχήμα 6--1. Βραχίονας σε φορτισμένη κατάσταση. 68
Σχήμα 6-2. Γωνία στροφής φ. 69
Σχήμα 6-3. Διάγραμμα επενεργούντος τένοντα T1. 70
Σχήμα 6-4. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα T2. 70
Σχήμα 6-5. Ορθή δύναμη N. 71
Σχήμα 6-6. Διατμητική δύναμη q. 71
Σχήμα 6-7. Εσωτερική ροπή M. 72
Σχήμα 6-8. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. 72
Σχήμα 6-9. Γωνία στροφής φ. 73
Σχήμα 6-10. Δύναμη επενεργούντος τένοντα T1. 74
Σχήμα 6-11. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα (δεν επενεργεί) T2. 74
Σχήμα 6-12. Ορθή δύναμη N. 75
Σχήμα 6-13. Διατμητική δύναμη q. 75
Σχήμα 6-14. Εσωτερική ροπή. 76
Σχήμα 6-15. Μορφή του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. 76

Σχήμα 6-16. Γωνία στροφής φ. 77
Σχήμα 6-17. Δύμαμη επενεργητή τένοντα T1. 78
Σχήμα 6-18. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα T2. 78
Σχήμα 6-19. Διατμητική δύναμη q. 79
Σχήμα 6-20. Ορθή δύναμη. 79
Σχήμα 6-21. Εσωτερική ροπή M. 80
Σχήμα 6-22. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. 80
Σχήμα 6-23. Μορφές κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα για τα τρία σενάρια. 81
Σχήμα 6-24. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. 82
Σχήμα 6-6-25. Γωνία στροφής φ. 82
Σχήμα 6-26. Εσωτερική ροπή M. 83
Σχήμα 6-27. Ορθή δύναμη N. 83
Σχήμα 6-28. Διατμητική δύναμη Q. 84
Σχήμα 6-29. Δύναμη αριστερού τένοντα T2 (δεν επενεργεί). 84
Σχήμα 6-30. Δύναμη δεξιά τένοντα T1 (επενεργεί). 85
Σχήμα 6-31. Συνάρτηση κατακόρυφων μετατοπίσεων U. 85
Σχήμα 6-32. Συνάρτηση οριζόντιων μετατοπίσεων W. 86
Σχήμα 6-33. Μορφή κεντροβαρικού άξονα βραχίονα. 87
Σχήμα 6-34. Γωνία στροφής φ. 87
Σχήμα 6-35. Εσωτερική ροπή M. 88
Σχήμα 6-36. Ορθή δύναμη N. 88
Σχήμα 6-37. Διατμητική δύναμη Q. 89
Σχήμα 6-38. Δύναμη αριστερού τένοντα (δεν επενεργεί). 89
Σχήμα 6-39. Δύναμη δεξιά τένοντα (επενεργεί). 90
Σχήμα 6-40. Συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης U. 90
Σχήμα 6-41. Συνάρτηση οριζόντιας μετατόπισης W. 91
Σχήμα 6-42. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. 92
Σχήμα 6-43. Εσωτερική ροπή M. 92
Σχήμα 6-44. Ορθή δύναμη N. 93
Σχήμα 6-45. Διατμητική δύναμη Q. 93
Σχήμα 6-46. Γωνία στροφής φ. 94
Σχήμα 6-47. Δύναμη αριστερού τένοντα (δεν επενεργεί). 94
Σχήμα 6-48. Δύναμη δεξιά τένοντα (επενεργεί). 95
Σχήμα 6-49. Συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης U. 95
Σχήμα 6-50. Συνάρτηση οριζόντια μετατόπισης W. 96
Σχήμα 6-51. Συγκριτικό διάγραμμα των δύο μεθόδων 96
Σχήμα 7-1. Αρχική μορφή ρομπότ. 98
Σχήμα 7-2. Σπείρες των πνευματικών σωλήνων. 99
Σχήμα 7-3. Τελική μορφή του ρομπότ ύστερα από τον διαχωρισμό των δύο τμημάτων. 100
Σχήμα 7-4. Απεικόνιση του ρομπότ με διακριτοποίηση από φλάτζες για εύρεση του EI. 102
Σχήμα 7-5. Αλγόριθμος για εύρεση των παραμέτρων AE και EI. 103
Σχήμα 7-6. Συντεταγμένες του άκρου του ρομπότ ανάλογα με την επενέργηση από τον τένοντα. 105

Σχήμα 7-7. ΑΕ παράμετρος που ελαχιστοποιεί την n ανάλογα με την δύναμη επενέργησης. 105
Σχήμα 7-8. ΕΙ παράμετρος που ελαχιστοποιεί τη n ανάλογα τη δύναμη επενέργησης. 106
Σχήμα 7-9. Καμπύλη προσαρμογής στην παράμετρο ΑΕ που ελαχιστοποιεί την n. 106
Σχήμα 7-10. Καμπύλη προσαρμογής για το ΕΙ που ελαχιστοποιεί την n. 107
Σχήμα 7-11. Διαφορά της θέσης του άκρου του ρομπότ μεταξύ του πειραματικού μοντέλου και του μοντέλου μεγάλων μετατοπίσεων. 108
Σχήμα 7-12. Πειραματικά και αντίστοιχα θεωρητικά δεδομένα για τη θέση του ρομπότ. 108
Σχήμα 8-1. Βραχίονας με επίδραση της βαρύτητας. 110
Σχήμα 8-2. Τροχιά του ελεύθερου άκρου συναρτήσει της δύναμης, (θεωρητική-πειραματική). 111
Σχήμα 8-3. Τροχιές (θεωρητική-πειραματική) 111
Σχήμα 8-4. Απόσταση αντίστοιχων σημείων (πειραματικό-θεωρητικό) για την ίδια δύναμη 112

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 7-1. Πίνακας με δύναμη και θέση του άκρου του ρομπότ. 103

Πίνακας Συμβόλων

N : ορθή εσωτερική δύναμη

q : διατμητική εσωτερική δύναμη

M : εσωτερική καμπτική ροπή

$d\varphi$: στροφική μετατόπιση διαφορικού στοιχείου βραχίονα και τένοντα

φ : στροφική μετατόπιση σχετικού συστήματος αναφοράς

s : μεταβλητή κατά μήκους βραχίονα στο σχετικό σύστημα αναφοράς

x : μεταβλητή μήκους βραχίονα στο απόλυτο σύστημα αναφοράς

ρ_o : κατανομή μάζας βραχίονα στην απαραμόρφωτη κατάσταση

$\rho(\mathrm{s})$: κατανομή μάζας βραχίονα στην παραμορφωμένη κατάσταση

u : κατακόρυφη μετατόπιση κάθε σημείου του βραχίονα σε απόστα x από τη βάση και απόσταση z από τον κεντροβαρικό άξονα

u_o : κατακόρυφη μετατόπιση κάθε σημείου του κεντροβαρικού του βραχίονα

w : οριζόντια μετατόπιση κάθε σημείου του βραχίονα σε απόστα x από τη βάση και απόσταση z από τον κεντροβαρικό άξονα

w_o : οριζόντια μετατόπιση κάθε σημείου του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα

R_{cs} :ακτίνα διατομής του βραχίονα

z :κάθετη απόσταση μια τυχαίας ίνας από τον κεντροβαρικό άξονα

A :εμβαδό διατομής του βραχίονα

E :μέτρο ελαστικότητας του βραχίονα

I :ροπή αδρανείας του βραχίονα

$r(\mathrm{s})$:ακτίνα καμπυλότητας του βραχίονα

$et-er$:σχετικό σύστημα αναφοράς βραχίονα

Εισαγωγή

1.1 Σκοπός Εργασίας

Οι εύκαμπτοι βραχίονες παρουσιάζουν μία ιδιαίτερα σύνθετη κινηματική και δυναμική. Εχουν γίνει πολλές προσπάθειες για να φτιαχτούν μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν το σχήμα που παίρνει ο βραχίονας στο χώρο ανάλογα με την επενέργηση που δέχεται. Ωστόσο τα μοντέλα που υπάρχουν είτε δεν είναι επαρκώς ακριβή είτε δεν είναι κατάλληλα για έλεγχο σε πραγματικό χρόνο. Σημαντικό είναι να είναι γνωστό το που βρίσκεται το ρομπότ σε σχέση με τον περιβάλλοντα χώρο. Η έλειψη αυτής της γνώσης μπορεί να οδηγήσει σε σύγκρουση του ρομπότ με τον περιβάλλοντα χώρο, με ανθρώπους και εργαλεία. Η εύρεση του σχήματος που παίρνει το ρομπότ στο χώρο είναι πολύ σημαντικό ζήτημα διότι έχει εφαρμογή στον τομέα της χειρουργικής. Συγκεκριμένα βραχίονες μικρού μεγέθους εισάγονται στο ανθρώπινο σώμα και εκτελούν χειρουργικές εργασίες. Οπως γίνεται κατανοητό υπάρχει ανάγκη για πολύ μεγάλη ακρίβεια. Επίσης τέτοιοι βραχίονες έχουν εισαχθεί στη βιομηχανία όπως στην συναρμολόγηση αυτοκινήτων που και εκεί πάλι υπάρχει αναγκαιότητα για πλήρη έλεγχο του σχήματος και της τροχιάς του ρομπότ.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία δίνεται λύση στο πρόβλημα εύρεσης του σχήματος του βραχίονα για το σκοπό αυτό ο βραχίονας θεωρείται ως ένας συνεχής συμπαγής κύλινδρος (πρόβολος) κατασκευασμένος από υπερελαστικό υλικό. Σε διαφορικό στοιχείο του βραχίονα εφαρμόζεται ισορροπία δυνάμεων και ροπών και μέσω της θεωρίας μεγάλων μετατοπίσεων γίνεται μια απεικόνιση η οποία περιγράφει το πως ένα διαφορικό στοιχείο του απαραμόρφωτου κατακόρυφου βραχίονα μετατοπίζεται και συμπιέζεται. Αν γίνει εφαρμογή για κάθε στοιχείο του απαραμόρφωτου βραχίονα, τότε μια απεικόνιση οδηγεί στο παραμορφωμένο επενεργούμενο βραχίονα. Πολύ σημαντικό είναι ότι το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων οδηγεί σε ένα μικρό σύστημα διαφορικών εξισώσεων σε αντίθεση με άλλες προσεγγίσεις όπου με την υπάρχουσα υπολογιστική ισχύ δεν μπορούν να γίνουν υπολογισμοί για έλεγχο σε πραγματικό χρόνο.

Στο πειραματικό μέρος της εργασίας θα εξεταστεί αν το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων μπορεί να προβλέψει το σχήμα του ρομπότ. Επίσης μέσω των πειραμάτων θα γίνει αναγνώριση παραμέτρων του ρομπότ έτσι ώστε η συμπαγής συνεχής θεώρηση να αντιστοιχεί στο πραγματικό πειραματικό μοντέλο το οποίο αποτελείται από πλαστικές φλάτζες και έχει ως κορμό τρεις πνευματικούς σωλήνες οι οποίοι σχηματίζουν μία έκκεντρη τριγωνική διάταξη.

Το μοντέλο που προκύπτει είναι κατάλληλο για έλεγχο. Από την ανάλυση προκύπτει ένα σύστημα οκτώ εξισώσεων με οκτώ αγνώστους. Η επίλυση του συστήματος οδηγεί στον προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ. Το πλεονέκτημα βρίσκεται στο ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων είναι μικρό και είναι κατάλληλο για έλεγχο σε πραγματικό χρόνο βασισμένο σε μοντέλο.

Ένα άλλο ζήτημα είναι ο σχεδιασμός του ρομπότ. Με τη μελέτη του βραχίονα που γίνεται από τη σκοπιά της μηχανικής στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, γίνεται δυνατό να προσδιοριστούν εσωτερικές τάσεις και ροπή έτσι ώστε να γίνονται πιο αποτελεσματικές κατασκευές από θέμα αντοχής

των υλικών αλλά και γίνεται δυνατό, εφόσον είναι γνωστές οι εσωτερικές τάσεις, να βρεθεί το όριο οποιασδήποτε εξωτερικής φόρτισης που μπορεί να δεχτεί το ρομπότ.

1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Υπάρχει πληθώρα βιβλιογραφίας η οποία αναφέρεται στους εύκαμπτους βραχίονες στην μοντελοποίηση τους, στην κινηματική ανάλυση, στην δυναμική και τον έλεγχο.

Οι Bryan A. Jones και ο Ian D. Walker [8] μοντελοποιούν το εύκαμτο ρομπότ ως ένα συνεχές σώμα σταθερής καμπυλότητας. Από αυτή τη θεώρηση δημιουργούν ένα κινηματικό μοντέλο και με τη μέθοδο D-H προκύπτει ο πίνακας μεταφοράς που περιγράφει τη θέση και τον προσανατολισμό του ελεύθερου άκρου του ρομπότ.

Ο Salisbury [7] έχει κάνει μια στατική ανάλυση στην οποία υποθέτει ότι το ρομπότ καμπυλώνεται με σταθερή καμπυλότητα. Προκύπτει ένα μοντέλο κινηματικής το οποίο αποτελείται από στροφικά και γραμικά ελαττήρια από τα οποία συγκροτείται ο βραχίονας. Οι τένοντες οι οποίοι αποτελούν την επενέργηση του ρομπότ, σε αυτή την ανάλυση μοντελοποιούνται ως γραμμικά ελατήρια.

Ο Webster [6] έχει εφαρμόσει τη μέθοδο Coserrat στα εύκαμπτα ρομπότ. Χρησιμοποιούνται γραμμικές καταστατικές εξισώσεις που συνδέουν την δύναμη και τη ροπή με την παραμόρφωση και αναπτύσονται μητρωικές εξισώσεις στατικής και δυναμικής με πολύ θετικά αποτελέσματα. Η παραδοχή βέβαια που κάνει ο Webster είναι ότι δεν υπάρχει αξονική παραμόρφωση όπως επίσης διατμητική παραμόρφωση. Με άλλα λόγια το μέτρο ελαστικότητας του ρομπότ που χρησιμοποιεί ο Webster στα πειράματα του είναι πολύ μεγάλο.

Η Festo έχει αναπτύξει ένα εύκαμπτο βραχίονα και χρησιμοποιεί την μέθοδο Lagrange για την δυναμική του ρομπότ αυτού.

Ο Eliodoro Carrera [11] έχει αναπτύξει μία μέθοδο αντίστροφης δυναμικής, η χαρακτηριστική εξίσωση της γωνίας-ροπής λαμβάνεται από τη σχέση Euler-Bernoulli και χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων με τη μέθοδο Lagrange για να προκύψουν οι δυναμικές εξισώσεις

Ο Zhang Ding-guo [12] και ο Zhou Sheng-Feng έχουν δημιουργήσει ένα διακριτό μοντέλο N βραχιόνων και N αρθρώσεων. Γίνεται η χρήση της μεθόδου του Kane για να παραχθούν εξισώσεις δυναμικής. Συγκεκριμένα κάθε βραχίονας (link) μοντελοποιείται ως μάζα και μεταξύ τους υπάρχει σύνδεση με γραμικό και στροφικό ελατήριο και υιοθετείται η προσέγγιση των υποθετικών τροπών.

Οι Luca Bascetta, Gianni Ferretti και Bruno Scaglioni [13] αναπτύσουν ένα δυναμικό μοντέλο ευέλικτων χειριστών κλειστής μορφής, βασισμένο στη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης των ευέλικτων ζεύξεων Newton-Euler και στην υιοθέτηση της χωρικής σηματοδοτήσεως διανύσματος. Το προτεινόμενο μοντέλο αντιπροσωπεύει δύο κύριες καινοτομίες σε σχέση με τις υπόλοιπες: επιτυγχάνεται σε κλειστή μορφή σε σχέση με τις αρθρώσεις και τις συντεταγμένες τροχιάς (συμπεριλαμβανομένων των τετραγωνικών ορίων ταχύτητας) και οι εξισώσεις κίνησης του συνόλου του χειριστή μπορούν να υπολογιστούν για οποιαδήποτε αυθαίρετο σχήμα των συνδέσμων και κάθε πιθανή καρδιακότητα σύνδεσης ξεκινώντας από την έξοδο πολλών εμπορικών κωδικών πεπερασμένων στοιχείων. Η διατύπωση των εξισώσεων κίνησης Newton-Euler από άποψη αρμονικών και ελαστικών μεταβλητών βελτιώνει σημαντικά τις επιδόσεις προσομοίωσης και καθιστά το μοντέλο κατάλληλο για έλεγχο σε πραγματικό χρόνο και ενεργή απόσβεση κραδασμών.

1.3 Δομή εργασίας

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται ο σκοπός και η βιβλιογραφική ανασκόπηση της διπλωματικής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται προαπαιτούμενες γνώσεις που πρέπει να έχει ο αναγνώστης έτσι ώστε να κατανοήσει τα επόμενα κεφάλαια.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται η μοντελοποίηση των δυνάμεων του τένοντα και εξάγεται μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πως μεταβάλλεται η εσωτερική τάση του τένοντα. Στο ίδιο κεφάλαιο θεωρείται ένα σύνθετο σώμα που αποτελείται από δύο ανταγωνιστές τένοντες και τον βραχίονα. Μοντελοποιούνται οι δυνάμεις σε ένα διαφορικό στοιχείο αυτού του σύνθετου σώματος και εκφράζονται οι εξισώσεις ισορροπίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία της απλής κάμψης και προκύπτει μοντέλο το οποίο χρησιμοποιεί την καταστατική εξίσωση της γωνίας ροπής από την κλασσική μηχανική με σκοπό τον προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων και δημιουργείται σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο έχει ως αποτέλεσμα το προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ το οποίο θα επενεργείται με ένα ζευγάρι ανταγωνιστών τενόντων.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται διαγράμματα των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στα συστήματα των διαφορικών εξισώσεων για την εύρεση του σχήματος του ρομπότ για σενάρια με έλλειψη βαρύτητας και τριβής, με έλλειψη βαρύτητας αλλά υπάρχουσα τριβή και υπάρχουσα βαρύτητα και τριβή.

Στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πείραμα με έλλειψη της επίδρασης της βαρύτητας με το οποίο θα εξεταστεί αν το μοντέλο της κλασσικής μηχανικής και το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων επαληθεύεται πειραματικά χρησιμοποιώντας ένα εύκαμπτο ρομπότ το οποίο βρίσκεται στο εργαστήριο. Προτείνεται μέθοδος για αναγνώριση παραμέτρων του ρομπότ AE και EI ώστε να γίνει αντιστοίχηση της θεώρησης που γίνεται στην παρούσα εργασία ότι δηλαδή το εύκαμπτο ρομπότ είναι ένα συμπαγές κυλινδρικό υπερελαστικό μέσω αλλά μπορεί να συμπεριφέρεται το ίδιο μηχανικά με οποιοδήποτε εύκαμπτο ρομπότ το οποίο δεν είναι απαραίτητα ένα συμπαγές κυλινδρικό μέσο.

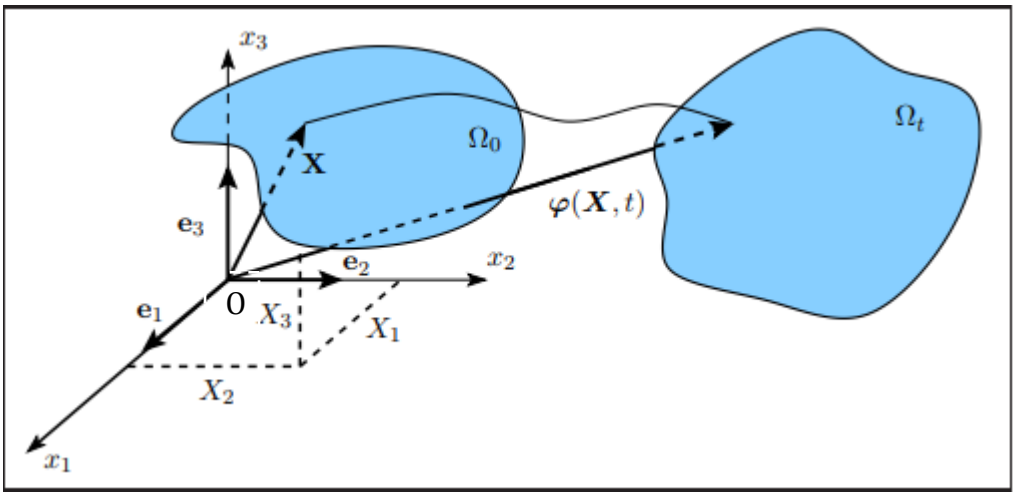
Στο όγδωο κεφάλαιο γίνεται πείραμα με επίδραση της βαρύτητας ώστε να διαπιστωθεί αν τα μοντέλα μπορούν να προσδιορίσουν το σχήμα του ρομπότ με επίδραση της βαρύτητας.

2 Θεωρία ελαστικότητας

2.1 Green-Lagrange Παραμόρφωση

Στη παρούσα εργασία μοντελοποιούνται εύκαμπτοι βραχίονες με μεγάλες παραμορφώσεις. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να δοθεί ο ορισμός της παραμόρφωσης για μεγάλες παραμορφώσεις.

Γίνεται θεώρηση ενός διαν σε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων $(x_{1,}x_{2,}x_3)=\mathbf{x}$ ορισμένο από ορθοκανονικά μοναδιαία διανύσματα $(e_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)$. Το σύστημα $(x_{1,}x_{2,}x_3)$ καλείται μερικό σύστημα συντεταγμένων. Οταν το σώμα βρίσκεται στην αρχική κατάσταση Ω_o τη χρονική στιγμή μηδέν τότε το σημείο με συντεταγμένες X αναλύεται ως $\mathrm{X}=\mathrm{X}_i e_i$. Μετά την επενέργηση δημιουργείται μία απεικόνηση η οποία οδηγεί από το Ω_o στο οποίο βρίσκεται το διάνυσμα X σε ένα μετασχηματισμό του X ο οποίος πλέον βρίσκεται στο χωρίο Ω_t και οδηγεί στο διάνυσμα $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{t})$.



Σχήμα 2-1. Απεικόνιση

Το πέδιο των μετατοπίσεων δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$u=\varphi(\mathrm{X})-\mathrm{X} \tag{2-1}$$

όπου u είναι το διάνυσμα μετατοπίσεων του σημείου X από το Ω_o στο Ω_t .

Ο τανυστής καλείται τανυστής κλίσης παραμόρφωσης:

$$F(\mathrm{X})=\nabla\varphi(\mathrm{X}) \tag{2-2}$$

Από συνδυασμό της (2-1) και της (2-2) προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$F(X)=I+\nabla u(X) \tag{2-3}$$

Όπου I μοναδιαίος πίνακας.

Έχοντας πλέον ορίσει τον τανυστή θεωρούμε ένα διαφορικό στοιχείο γραμμής για το οποίο στην αρχική του κατάσταση θα ισχύει ότι:

$$dS_o{}^2=d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}=dX_1{}^2+dX_2{}^2+dX_3{}^2 \tag{2-4}$$

Το μήκος της ίδιας γραμμής στην παραμορφωμένη της κατάσταση δίνεται από τον τύπο

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 \tag{2-5}$$

Ο τανυστής Cauchy-Green είναι τανυστής μεγάλος παραμορφώσεων

$$C = F^T F \tag{2-6}$$

Όπου F δίνεται από τη σχέση (2.2)

Η διαφορά των μέτρων των δύο δυανυσμάτων θέσης δίνεται ώς:

$$dS^2 - dS_o{}^2 = dX^T (2E) dX \tag{2-7}$$

οπου το E είναι ίσο με:

$$E = \frac{1}{2}(\mathrm{C} - I) \tag{2-8}$$

Από τις σχέσεις 2-3 και 2-6 προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) \tag{2-9}$$

Ο τανυστής E στην περίπτωση της μονοδιάστατης παραμόρφωσης που αναλύεται στη περίπτωση της διπλωματικής εργασίας μας χρησιμεύει σε ένα στοιχείο του και μάλιστα στο πρώτο της κυρίας διαγωνίου του το οποίο γίνεται αν θεωρηθεί ένα αρχικό διάνυσμα στην απαραμόρφωτη κατάσταση:

$$dS_o = dX_1 \tag{2-10}$$

όπου το dX_1 είναι συνιστώσα του διανύσματος:

$$d\mathbf{X} = (dX_1, 0, 0) \tag{2-11}$$

$$dS^2 - dS_o{}^2 = dS^2 - dX_1{}^2 = 2E_{11} dX_1{}^2 \tag{2-12}$$

‘όπου dS είναι το μήκος της παραμορφωμένης γραμμής

Και έτσι το E_{11} του τανυστή είναι:

$$E_{11} = \frac{1}{2}((\frac{ds}{dX_1})^2 - 1) \tag{2-13}$$

Από τη σχέση (2-13) προκύπτει ο ορισμός της παραμόρφωσης green-lagrange:

$$\varepsilon_{GL} = \frac{1}{2}(\frac{ds^2 - dx^2}{dx^2}) \tag{2-14}$$

όπου ο παραπάνω ορισμός αντιστοιχεί σε μεγάλες παραμορφώσεις για ένα διαφορικό στοιχείο βραχίονα που αρχικά έχει μήκος dx και μετά γίνεται ds.

Μία γραμικοποιημένη κατάσταση της παραμόρφωσης Green-Lagrange είναι ο ορισμός του engineering strain ο οποίος είναι για μικρές παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_{enj} = \frac{ds - dx}{dx} \tag{2-15}$$

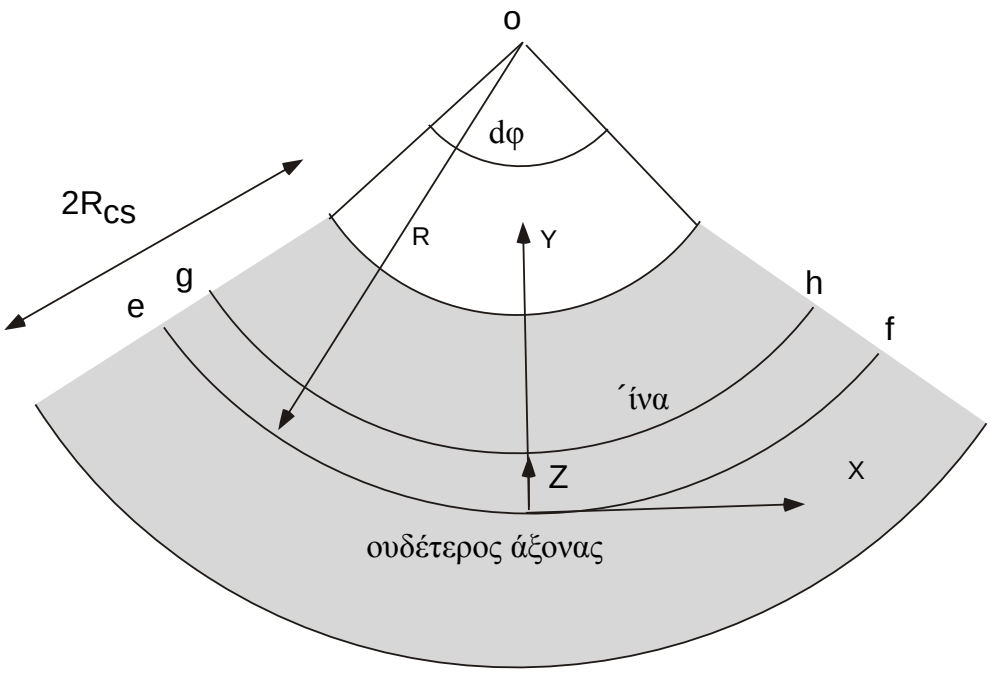
Στη παρούσα εργασία θα παραχθούν δύο μοντέλα. Το ένα θα βασίζεται στον ορισμό Green-Lagrange και το άλλο στον engineering. Ο πρώτος είναι για μεγάλες παραμορφώσεις ενώ ο δεύτερος για σώματα που δεν έχουν μεγάλη αξονική συμπίεση.

2.2 Θεωρία της απλής κάμψης

Η θεωρία της απλής κάμψης βασίζεται στη παραδοχή Bernouli. Η παραδοχή Bernouli εισάγει τους εξής περιορισμούς:

- Οι διατομές δεν παραμορφώνονται σημαντικά από την επιβολή των φορτίων
- Οι διατομές παραμένουν κάθετες στον κεντροβαρικό άξονα της διατομής
- Η διατμητική παραμόρφωση της διατομής αμελείται
- Η δοκός έχει μικρή αξονική παραμόρφωση.

Στο Σχήμα 2-2 φαίνεται ένα απειροστό τμήμα δοκού το οποίο καταπονείται από ένα ζεύγος ροπών M:



Σχήμα 2-2. Απειροστό τμήμα δοκού που καταπονείται από καθαρή κάμψη.

Με R συμβολίζεται η ακτίνα καμπυλότητας του ουδέτερου άξονα της δοκού και με z συμβολίζεται η απόσταση της ίνας gh από τον ουδέτερο άξονα ef.

Η παραμόρφωση ε μια τυχαίας ίνας gf σε απόσταση z από τον ουδέτερο άξονα ορίζεται ως:

$$\varepsilon = \frac{gh - ef}{ef} \tag{2-16}$$

Η σχέση (3-1) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} \tag{2-17}$$

όπου z και dφ απεικονίζονται στο σχήμα 2-2 .Με πράξεις η σχέση (2-17) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{z}{R} \tag{2-18}$$

Η σχέση ορθής τάσης σ στη διατομή της δοκού με την παραμόρφωση ορίζεται παρακάτω:

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \tag{2-19}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας της δοκού.

Η ροπή M σε μια διατομή ορίζεται με τον παρακάτω τύπο:

$$M = -\int_A z\sigma dA \tag{2-20}$$

Με αντικατάσταση της (2-19) στη (2-20) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$M = -\int_A zE\varepsilon dA \tag{2-21}$$

Με αντικατάσταση της (2-18) στην (2-21) προκύπτει:

$$M = -\frac{E}{R}\int_A z^2 dA \tag{2-22}$$

Η ροπή αδρανείας I μίας διατομής ορίζεται ως:

$$I = \int_A z^2 dA \tag{2-23}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας σε σχέση με το μήκος s του ουδετέρου άξονα της δοκού και της γωνίας εκτροπής φ ορίζεται από τη παρακάτω σχέση:

$$R = \frac{ds}{d\varphi} \tag{2-24}$$

Αν αντικατασταθούν στη (2-22) οι (2-23) και (2-24), Προκύπτει η καταστατική εξίσωση που συνδέει τη ροπή με τη γωνία:

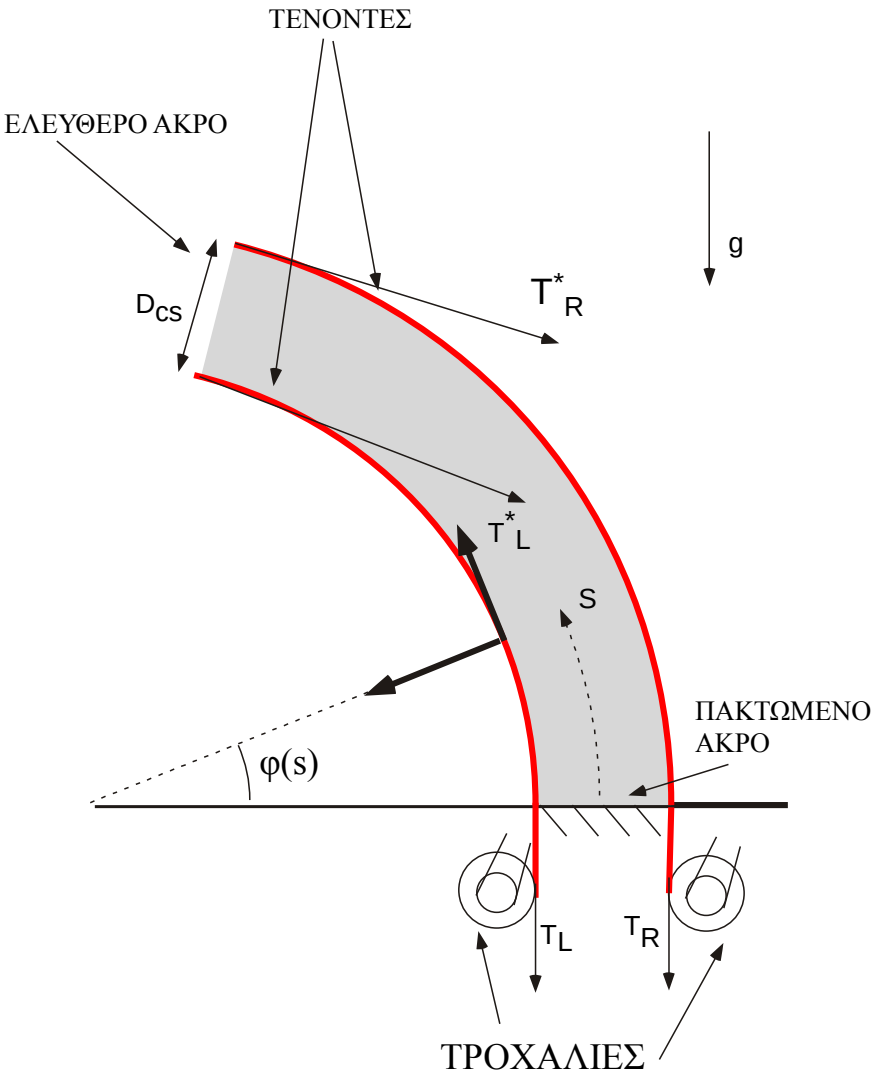
$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \tag{2-25}$$

3 Μοντελοποίηση τένοντα και συστήματος ανταγωνιστών τενόντων-βραχίονα

3.1 Εισαγωγή

Ο βραχίονας μοντελοποιείται ως ένας συμπαγής κύλινδρος από υπερελαστικό υλικό το οποίο επιτρέπει να πραγματοποιούνται μεγάλες εκτροπές. ο βραχίονας επενεργείται από δύο ανταγωνιστές τένοντες οι οποίοι περνούν μέσα από αυλάκια αντιδιαμετρικά του κυλίνδρου. Οι τένοντες είναι προσδεμένοι στην μία άκρη του βραχίονα και στο άλλο άκρο τους είναι τυλιγμένοι σε τύμπανα. Τα τύμπανα με τη σειρά τους είναι συνδεδεμένα με κινητήρες και όταν αυτοί περιστρέφονται δημιουργούν τάνυση στους τένοντες. Οι δυνάμεις από την τάνυση μεταφέρονται από την μία άκρη του τένοντα ως την άλλη όπου εκεί αν οι δυνάμεις των τενόντων είναι άνισες δημιουργείται ροπή από έκκεντρη φόρτιση και το ρομπότ κάμπτεται και μάλιστα σε πολύ μεγάλες γωνίες.

Στο Σχήμα 3-1 φαίνεται ο βραχίονας και οι δυνάμεις από τους τένοντες



Σχήμα 3-1. Θεώρηση εύκαμπτου βραχίονα σαν συμπαγές κυλινδρικό μέσο.

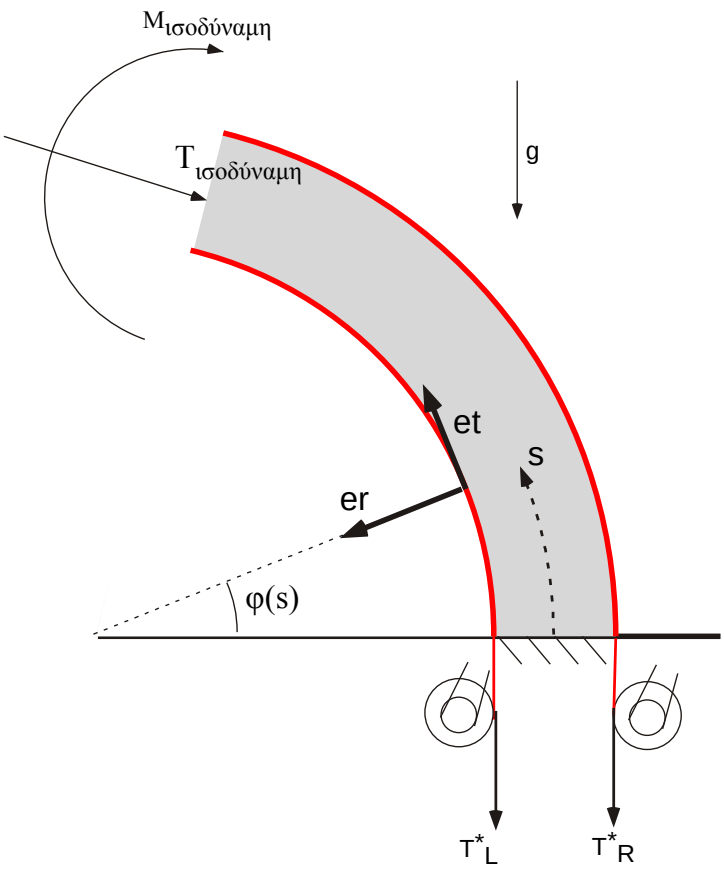
Ορίζεται ένα χωρόδετο σύστημα αναφοράς χ,y με αρχή Ο τη βάση του βραχίονα. Ο βραχίονας όμως εκτρέπεται σε κάθε σημείο και έτσι βολεύει να χρησιμοποιηθεί ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο θα κινείται πάνω στον παραμορφωμένο βραχίονα κατά την ακτινική και την εφαπτομενική διεύθυνσή οπότε ορίζεται το σύστημα $et - er$.Με s ορίζεται η κατά μήκος διάσταση του βραχίονα στην παραμορφωμένη κατάσταση.

Η δύναμη κατά μήκος του κάθε τένοντα δεν είναι σταθερή. Αυτό συμβαίνει διότι στο αυλάκι από το οποίο διέρχονται οι τένοντες δημιουργούνται δυνάμεις τριβής οι οποίες μειώνουν τη δύναμη που μεταφέρει ο τένοντας οπότε ισχύουν τα παρακάτω:

1) Η δύναμη που αρχικά έχει ο αριστερός τένοντας είναι T_{left} και λόγω της τριβής γίνεται T^*_{left} που έχει μικρότερη τιμή.

2) Η δύναμη που αρχικά έχει ο δεξιά τένοντας είναι T_{right} και λόγω τριβής γίνεται T^*_{right} η οποία είναι μικρότερη.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-1 η ακτίνα καμπυλότητας $r(s)$ είναι συνάρτηση του μήκους του ρομπότ και έτσι αλλάζει για κάθε σημείο του βραχίονα. Το ίδιο συμβαίνει και στην γωνία εκτροπής $\varphi(s)$. Το ισοδύναμο μοντέλο του βραχίονα μπορεί να δοθεί αν μεταφερθούν οι δύο δυνάμεις, που ασκούνται έκκεντρα στο ελεύθερο άκρο στο κέντρο της κυκλικής διατομής του βραχίονα. Οταν μια δύναμη μεταφέρεται δημιουργεί ροπή και αυτή η ροπή είναι υπεύθυνη για την κάμψη του βραχίονα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ισοδύναμο μοντέλο με τις δυνάμεις στο κέντρο και τη δημιουργηθήσα ροπή που προκύπτει από τη μεταφορά

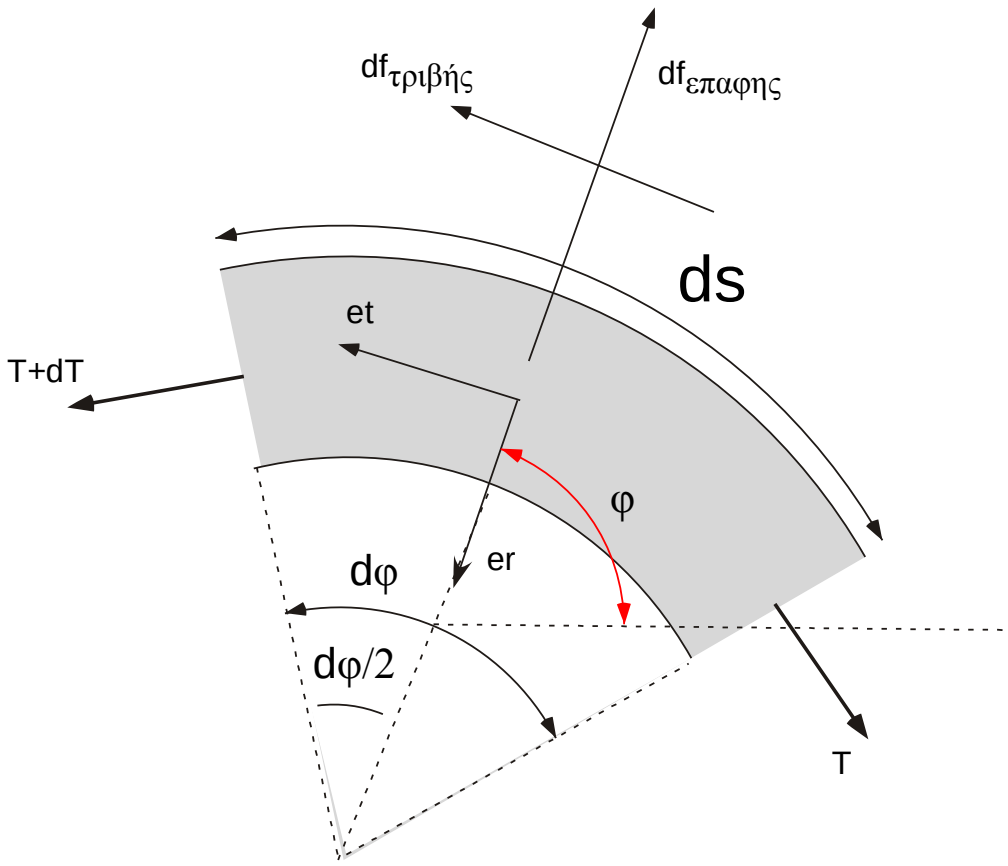


Σχήμα 3-2. Μοντέλο βραχίονα με ισοδύναμη ροπή λόγω έκκεντρων φορτίσεων.

3.2 Μοντελοποίηση τένοντα

Ο τένοντας είναι ένας εύκαμπτος φορέας ο οποίος μεταφέρει εφελκυστικό φορτίο και κανένα άλλο, δηλαδή δεν μπορεί να φέρει αντίσταση σε θλίψη, κάμψη, διάτμηση.Ο τένοντας είναι περασμένος μέσα από πολύ μικρής διατομής αυλάκι και προσδένεται στο άκρο του βραχίονα. Λόγω της επαφής του με τον βραχίονα ασκείται λόγω δράσης αντίδρασης πίεση επιφανείας (διατμητικό φορτίο) και τριβή ενώ εσωτερικά του τένοντα μεταφέρεται εφελκυστικό φορτίο.

Θεωρούμε απειροστό τμήμα του τένοντα, μήκους ds.βλέπε Σχ.3-3.



Σχήμα 3-3. Απειροστό στοιχείο τένοντα.

Στο σχήμα 3-3 βλέπουμε τις εξής δυνάμεις:

T : εσωτερικό εφελκυστικό φορτίο του τένοντα εκ δεξιών.

$\mathrm{T}+dT$: εσωτερικό εφελκυστικό φορτίο του τένοντα εξ αριστερών.

$df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma}$: κάθετη δύναμη λόγω επαφής του τένοντα με τον βραχίονα

$df_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma}$: δύναμη τριβής μεταξύ του τένοντα και του βραχίονα

φ : στροφική μετατόπιση του σχετικού συστήματος αναφοράς

$d\varphi$:στροδική παραμόρφωση του απειροστού τμήματος ds

Όπως φαίνεται το σύστημα αναφοράς et-er είναι ένα κινητό σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται ανάλογα με το μήκος του βραχίονα δηλαδή ανάλογα σε ποιο s βρισκόμαστε.

Όλη η ανάλυση γίνεται αν θεωρήσουμε στατική ισορροπία του απειροστού στοιχείου του τένοντα κατά την ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση.

Συνήθως τα εύκαμπτα ρομπότ φτιάχνονται από υλικά τα οποία ελαχιστοποιούν τις τριβές, για λόγους ελέγχου παρ' όλα αυτά για να μπορεί η μελέτη που παρουσιάζεται να εφαρμόζεται γενικά θεωρούμε δυνάμεις τριβής μεταξύ των επιφανειών. Επειδή το ρομπότ θα κινείται πολύ αργά θεωρούμε ότι η τριβή είναι τριβή ολίσθησης και κάνουμε την παραδοχή ότι αυτή η τριβή υπάρχει και στη στατική ισορροπία και όταν κινείται πολύ αργά, επομένως η δύναμη τριβής θα είναι ίση προς τον συντελεστή τριβής ολίσθησης επί την κάθετη δύναμη:

$$df_{\tau\rho\iota\beta\acute{\eta}\varsigma} = \mu_{o\lambda} df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} \tag{3-1}$$

Εφαρμόζοντας ισορροπία δυνάμεων κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση προκύπτει ότι:

$$(T + dT)\cos(\frac{d\varphi}{2}) - \mathrm{T}\cos(\frac{d\varphi}{2}) + \mu_{o\lambda} df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \tag{3-2}$$

Σε αυτό το σημείο μπορούν να γίνουν κάποιες απλοποιήσεις. Είναι γνωστό ότι όταν σε συνημίτονο υπάρχουν πολύ μικρές ποσότητες που τείνουν στο μηδέν όπως στη παραπάνω εξίσωση, τότε το συνημίτονο γίνεται ίσο με την μονάδα επομένως η (3-2) απλοποιείται στην παρακάτω:

$$(T + dT) - \mathrm{T} + \mu_{o\lambda} df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \tag{3-3}$$

Εφόσον ισχύ ότι:

$$\cos(\frac{d\varphi}{2}) = 1 \tag{3-4}$$

Από την εξίσωση (3-3 προκύπτει μια σχέση η οποία δείχνει την αναλογία του απειροστού της δύναμης του τένοντα με την κάθετη δύναμη επαφής:

$$dT = -\mu_{o\lambda} df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} \tag{3-5}$$

Αν εφαρμοστεί ισορροπία δυνάμεων κατά την ακτινική διεύθυνση προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$(T + dT)\sin(\frac{d\varphi}{2}) + \mathrm{T}\sin(\frac{d\varphi}{2}) - df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \tag{3-6}$$

Όταν μέσα στην ποσότητα του ημιτόνου υπάρχει ποσότητα που τείνει στο μηδέν τότε το ημίτονο ισούται με αυτήν τη ποσότητα, δηλαδή ισχύει ότι:

$$\sin(\frac{d\varphi}{2}) = \frac{d\varphi}{2} \tag{3-7}$$

Τότε η εξίσωση (3-6) γίνεται :

$$(T + dT)\frac{d\varphi}{2} + \mathrm{T}\frac{d\varphi}{2} - df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \tag{3-8}$$

Κάνοντας επιμεριστική ιδιότητα προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$T\frac{d\varphi}{2} + dT\frac{d\varphi}{2} + \mathrm{T}\frac{d\varphi}{2} - df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} = 0 \tag{3-9}$$

Ο δεύτερος όρος της (3-9) ισούται με μηδέν επειδή είναι διαφορικό δεύτερης τάξης ενώ οι υπόλοιποι όροι είναι πρώτης τάξης, οπότε ισχύει:

$$dT\frac{d\varphi}{2}=0 \tag{3-10}$$

Η (3-9) δίνει:

$$Td\varphi = df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma} \tag{3-11}$$

Οι (3-5) και (3-11) είναι οι τελικές διαφορικές σχέσεις από τις οποίες θα προκύψει η διαφορική εξίσωση με την οποία θα περιγράφεται πως μεταβάλλεται η εσωτερική δύναμη που μεταφέρει ο τένοντας.

Αν η (3-5) διαιρεθεί με ds προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{dT}{ds}=-\mu_{o\lambda}\frac{df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma}}{ds} \tag{3-12}$$

Η σχέση (3-12) περιγράφει το πως η εσωτερική δύναμη προέντασης του τένοντα μεταβάλλεται σε σχέση με την δύναμη της κάθετης δύναμης που ασκείται ως δράση αντίδραση μεταξύ του βραχίονα και του τένοντα.

Αν διαιρέσουμε με ds τη (3-11) προκύπτει:

$$T\frac{d\varphi}{ds}=\frac{df_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\acute{\eta}\varsigma}}{ds} \tag{3-13}$$

Ο συνδυασμός των (3-12) και (3-13) δίνει:

$$\frac{dT}{ds}=-\mu_{o\lambda}T\frac{d\varphi}{ds} \tag{3-14}$$

Στην παραπάνω εξίσωση μπρορούν να σχολιαστούν τα εξής:

1. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης τείνει στο μηδέν τότε η παράγωγος της εσωτερικής δύναμη είναι ίση με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι αν δεν υπάρχουν τριβές τότε η εσωτερική δύναμη που μεταφέρει ο τένοντας μένει σταθερή και άρα δεν έχουμε μείωση δύναμης λόγω τριβής.
2. Αν ο βραχίονας επενεργείται από δύο ανταγωνιστές τένοντες ίσης δύναμης, όπως είναι λογικό απλά θα συμπιέζεται αλλά οι έκκεντρες δυνάμεις θα δίνουν αντίθετες ροπές και οπότε ο βραχίονας δεν θα κάμπτεται. Αυτο σημαίνει ότι επειδή δεν θα μεταβάλλεται η γωνία όσο προχωράμε πάνω στο βραχίονα με το σχετικό σύστημα αναφοράς ή αλλιώς θα έχουμε ένα κατακόρυφο configuration του βραχίονα η παράγωγος της γωνίας θα είναι μηδέν και οπότε και η παράγωγος της δύναμης που μεταφέρει ο τένοντας είναι μηδέν και έτσι πάλι δεν υπάρχει πτώση της δύναμης

$$\frac{dT(s)}{ds}=-\mu_{o\lambda}T(s)\frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{3-15}$$

3. Η (3.15) εκφράζει το πως μεταβάλλεται η εσωτερική δύναμη που μεταφέρει ο τένοντας από το ένα άκρο του ως το άλλο (tip). Στο ελεύθερο άκρο του βραχίονα είναι προσδεμένος ο τένοντας ο οποίος ασκεί την μειωμένη λόγω τριβής εσωτερική δύναμη του και έτσι ο βραχίονας δέχεται μια έκκεντρη φόρτιση που του δημιουργεί ροπή κάμψης και συμπίεση.

Για ένα επίπεδο πρόβλημα με επενέργηση ανταγωνιστές τένοντες όπως περιγράφεται Σχήμα 3-1 που είναι και το αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας γράφονται οι δύο παρακάτω εξισώσεις οι

οποίες εκφράζουν το πως μεταβάλλεται η εσωτερική δύναμη που μεταφέρει ο αριστερός τένοντας και ο ανταγωνιστής του δεξιός

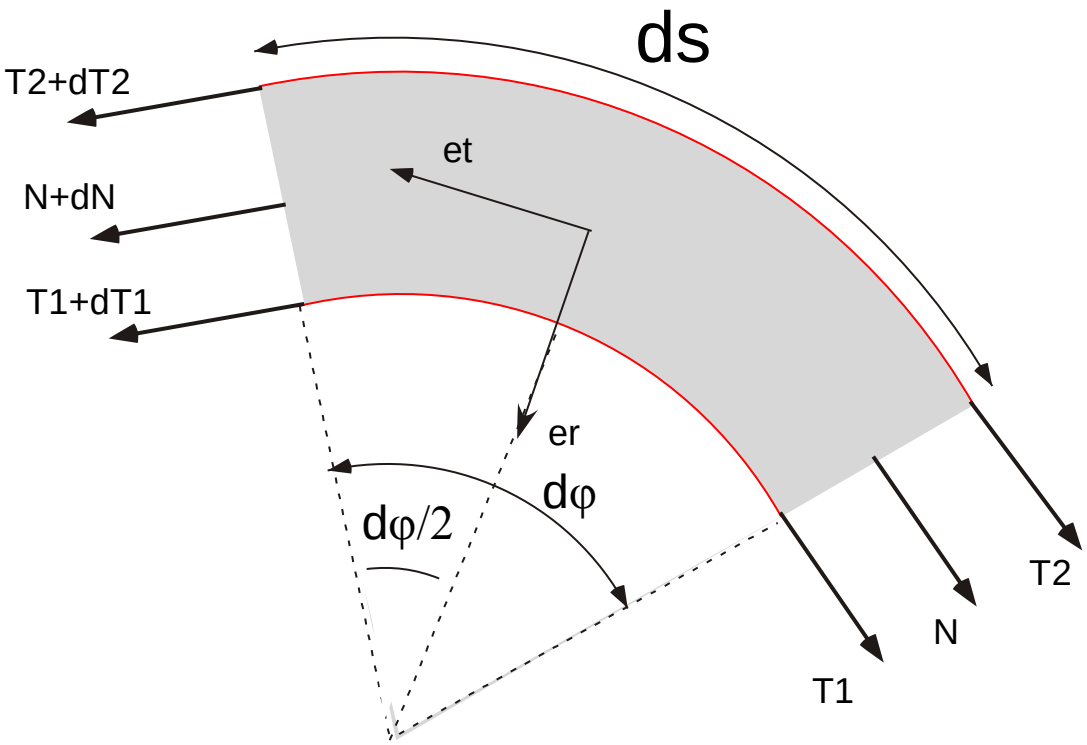
$$\frac{dT_1(s)}{ds} = -\mu_{o\lambda} T_1(s) \frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{3-16}$$

$$\frac{dT_2(s)}{ds} = -\mu_{o\lambda} T_2(s) \frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{3-17}$$

3.3 Μοντελοποίηση συστήματος τένοντα-βραχίονα

Για ευκολία θεωρήσουμε ένα σύστημα σωμάτων τένοντες-βραχίονας. Θεωρούμε ένα διαφορικό τέτοιο στοιχείο δηλαδή ένα κομμάτι απειροστού μήκους και κάνουμε μια τομή στο βραχίονα δεξιά και αριστερά του απειροστού στοιχείου έτσι ώστε να εμφανιστούν οι εσωτερικές τάσεις.

:



Σχήμα 3-4. Διαφορικό στοιχείο συστήματος τένοντες-βραχίονα.

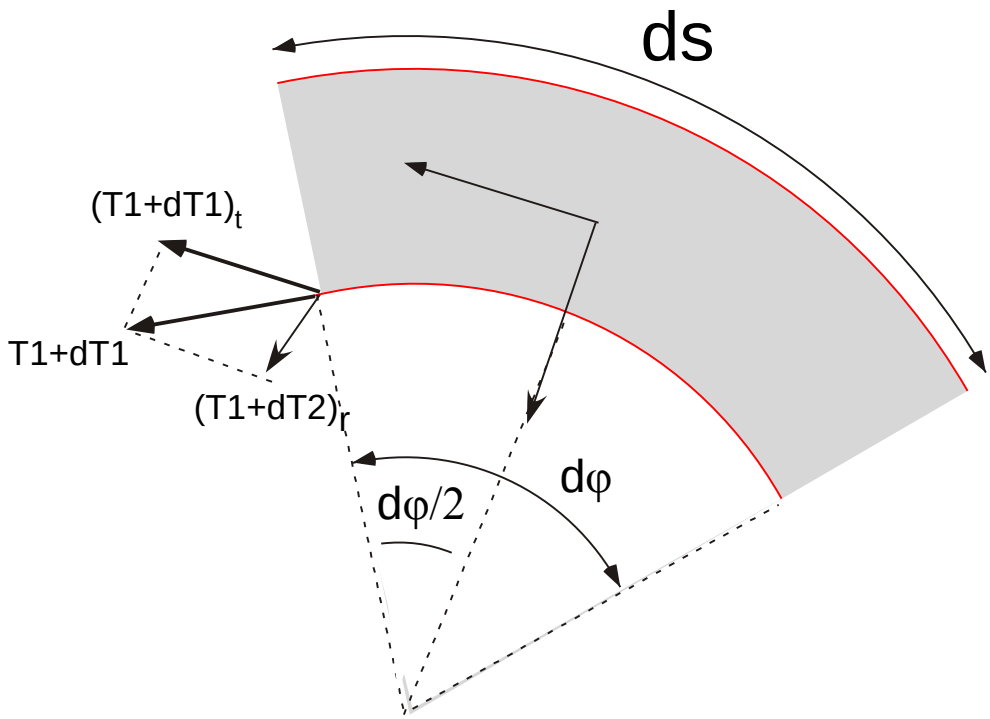
Περιγραφή του Σχήματος 3-4 :

1. Όπως φαίνεται το στοιχείο έχει απειροστό μήκος ds
2. T_1 (δύναμη που μεταφέρεται από τον αριστερό τένοντα)
3. T_2 (δύναμη που μεταφέρεται από τον δεξί τένοντα)
4. q (εσωτερική διατμητική τάση βραχίονα)
5. N (εσωτερική ορθή τάση βραχίονα)
6. M (εσωτερική καμπτική ροπή)
7. dW (απειροστή δύναμη βαρύτητας)

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3-4 στη διατομή Α βραχίονα εμφανίζονται οι εσωτερικές τάσεις ενώ στη διατομή Β εμφανίζονται οι τάσεις αυξημένες αλγεβρικά. Ειναι πολύ σημαντικό να τονιστεί ότι η προσαύξηση είναι αλγεβρική και έτσι οι τιμές για κάθε συνάρτηση μπορεί να αυξάνονται αν το διαφορικό είναι θετικό ή μπορεί να μειώνονται αν το διαφορικό είναι αρνητικό.

Για να προκύψουν διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το μοντέλο θεωρούμε στατική ισορροπία. Στη συνέχεια της ενότητας για κάθε δύναμη του Σχήματος 3-4 θα γίνει ξεχωριστή ανάλυση στο σχετικό frame, οπότε θα αναλυθεί κάθε δύναμη σε ακτινική και εφαπτομενική κατεύθυνση, και με την υπόθεση στατικής ισορροπίας θα προκύψουν διαφορικές σχέσεις.

Συγκεκριμένα για την δύναμη $T_1 + dT_1$ αφαιρούμε όλες τις άλλες δυνάμεις για απλοποίηση του Σχήματος 3-4 και προκύπτει το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται πως αναλύεται η δύναμη $T_1 + dT_1$ σε συνιστώσες ακτινική (r) και εφαπτομενική (t):



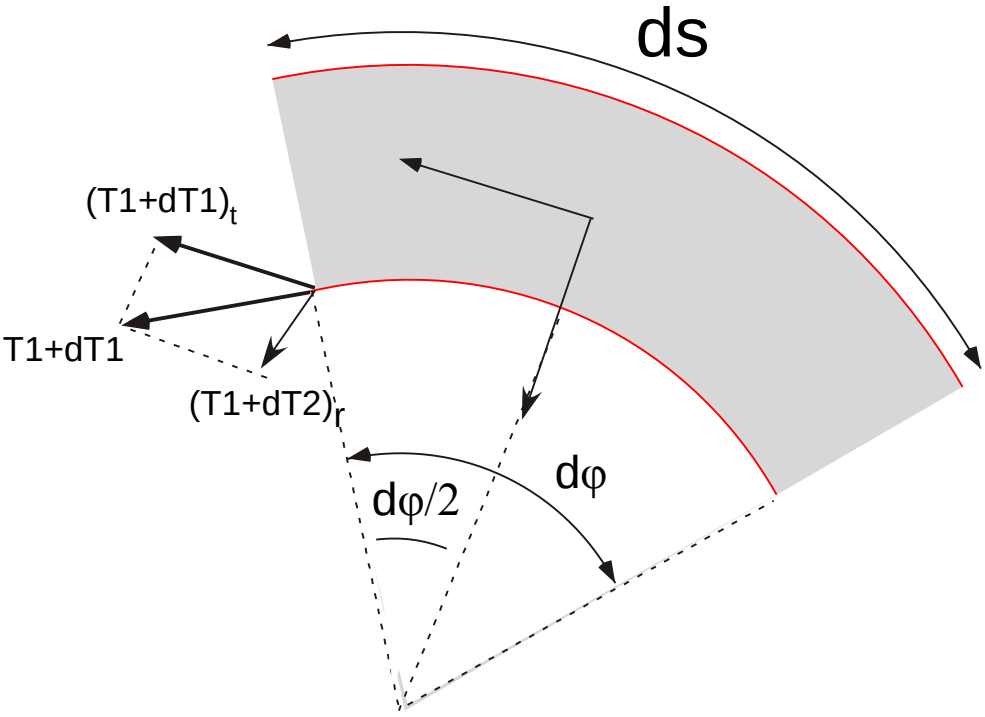
Σχήμα 3-5. Ανάλυση Δύναμης αριστερού τένοντα εξ αριστερών.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5 η δύναμη $T_1 + dT_1$ αναλύεται στο σύστημα συντεταγμένων et-er το οποίο είναι το ίδιο με σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 3-4 αλλά απλά μετατοπισμένο παράλληλα έτσι ώστε να διευκολύνει στην ανάλυση. Απο το σχήμα προκύπτουν οι δύο παρακάτω εξισώσεις ισορροπίας:

$$(T_1 + dT_1)_r = (T_1 + dT_1)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-18}$$

$$(T_1 + dT_1)_t = (T_1 + dT_1)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-19}$$

Με την ίδια λογική που αναλύεται η δύναμη του αριστερά τένοντα αναλύεται και του δεξιά δηλαδή πάλι στο Σχήμα 3-4 αφαιρούνται όλες οι δυνάμεις εκτός από την $T_2 + dT_2$ και έτσι προκύπτει το παρακάτω σχήμα στο οποίο η $T_2 + dT_2$ αναλύεται σε ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα.



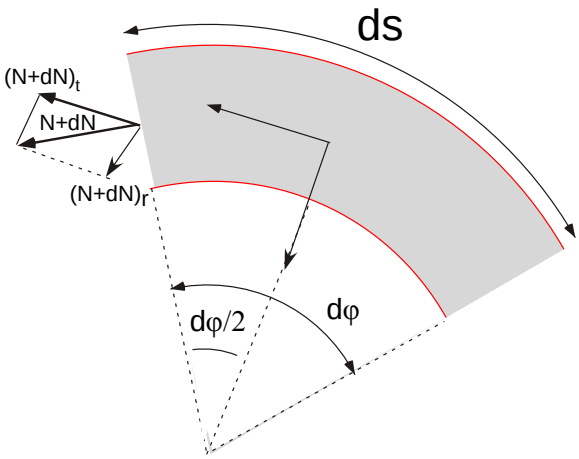
Σχήμα 3-6. Ανάλυση δύναμης δεξιά τένοντα εξ αριστερών σε συνιστώσες.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$(T_2 + dT_2)_r = (T_2 + dT_2)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-20}$$

$$(T_2 + dT_2)_t = (T_2 + dT_2)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-21}$$

Η ανάλυση της δύναμης $\mathrm{N} + dN$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



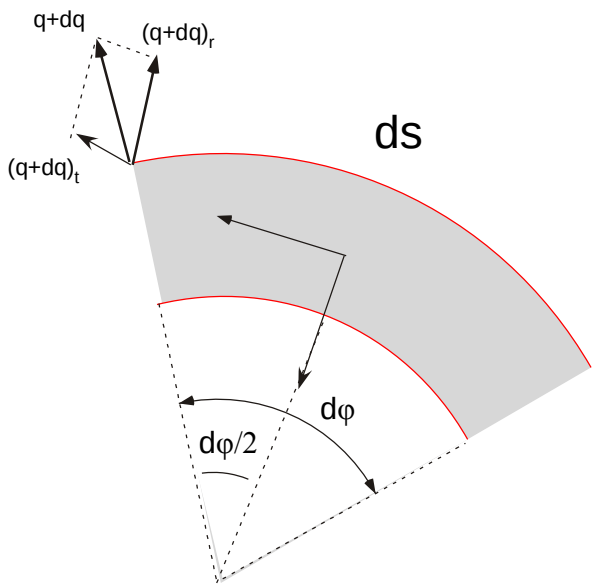
Σχήμα 3-7. Ανάλυση εσωτερικής ορθής δύναμης εξ αριστερών.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν πως αναλύεται η $\mathrm{N} + dN$ στην ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα αντίστοιχα:

$$(\mathrm{N}+dN)_r = (\mathrm{N}+dN)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-22}$$

$$(\mathrm{N}+dN)_t = (\mathrm{N}+dN)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-23}$$

Η διατμητική δύναμη $q+dq$ αναλύεται όπως φαίνεται το παρακάτω σχήμα:



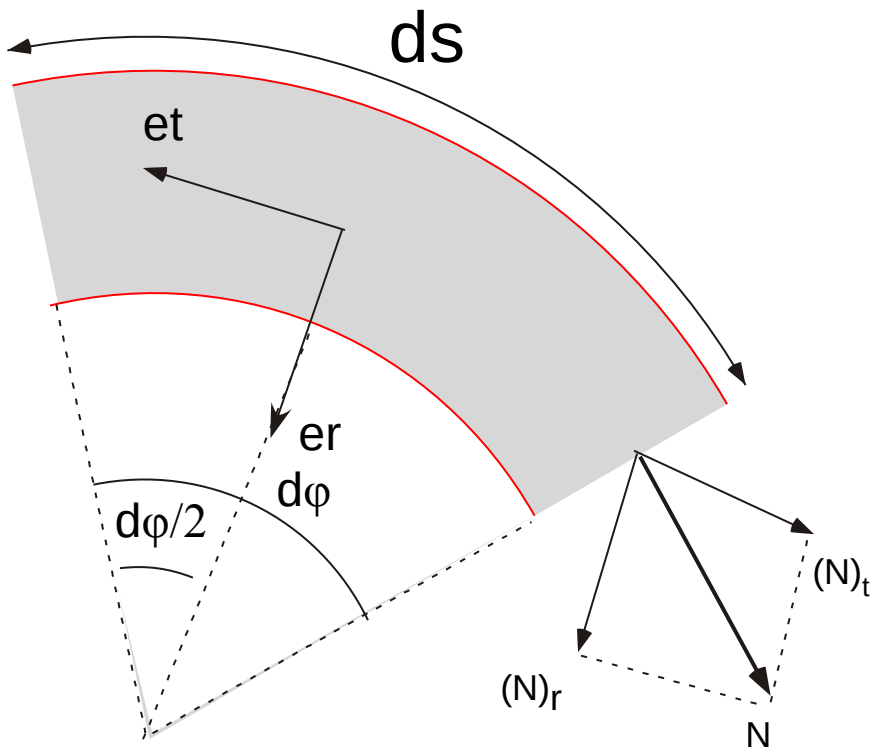
Σχήμα 3-8. Ανάλυση διατμητικής τάσης εξ αριστερών σε συνιστώσες.

Απο το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις που περιγράφουν την ανάλυση της δύναμης $(q+dq)$ σε συνιστώσες:

$$(q+dq)_r = \left(q+dq\right)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-24}$$

$$(q+dq)_t = -(q+dq)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-25}$$

Στη σχέση (3-25) παρατηρείται η ύπαρξη του αρνητικού προσίμου. Αυτο συμβαίνει διότι στο αρχικό σχήμα που φαίνονται όλες οι δυνάμεις που επιδρούν στο διαφορικό στοιχείο στο Σχήμα 3-4 το σύστημα αναφοράς έχει τον προσανατολισμό που φαίνεται ως θετικό έτσι στο Σχήμα 3-8 επειδή η εφαπτομενική συνιστώσα έχει την αντίθετη κατεύθυνση και για αυτό φαίνεται ο ημιάξονας et'. Η ανάλυση της ορθής δύναμης N σε συνιστώσες φαίνεται στο Σχήμα 3-9:



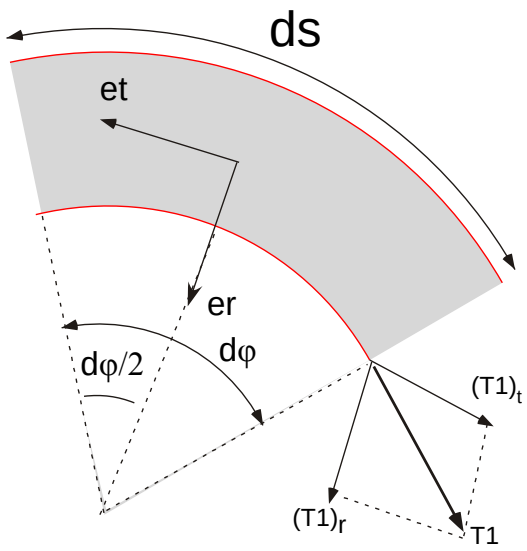
Σχήμα 3-9. Ανάλυση της ορθής δύναμης εκ δεξιών σε συνιστώσες.

Απο το σχήμα προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις που περιγράφουν το πως αναλύεται η ορθή δύναμη σε συνιστώσες:

$$(N)_r = (N)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-26}$$

$$(\mathrm{N})_t = -(N)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-27}$$

Η ανάλυση την δύναμης T_1 σε συνιστώσες περιγράφεται από το παρακάτω σχήμα:



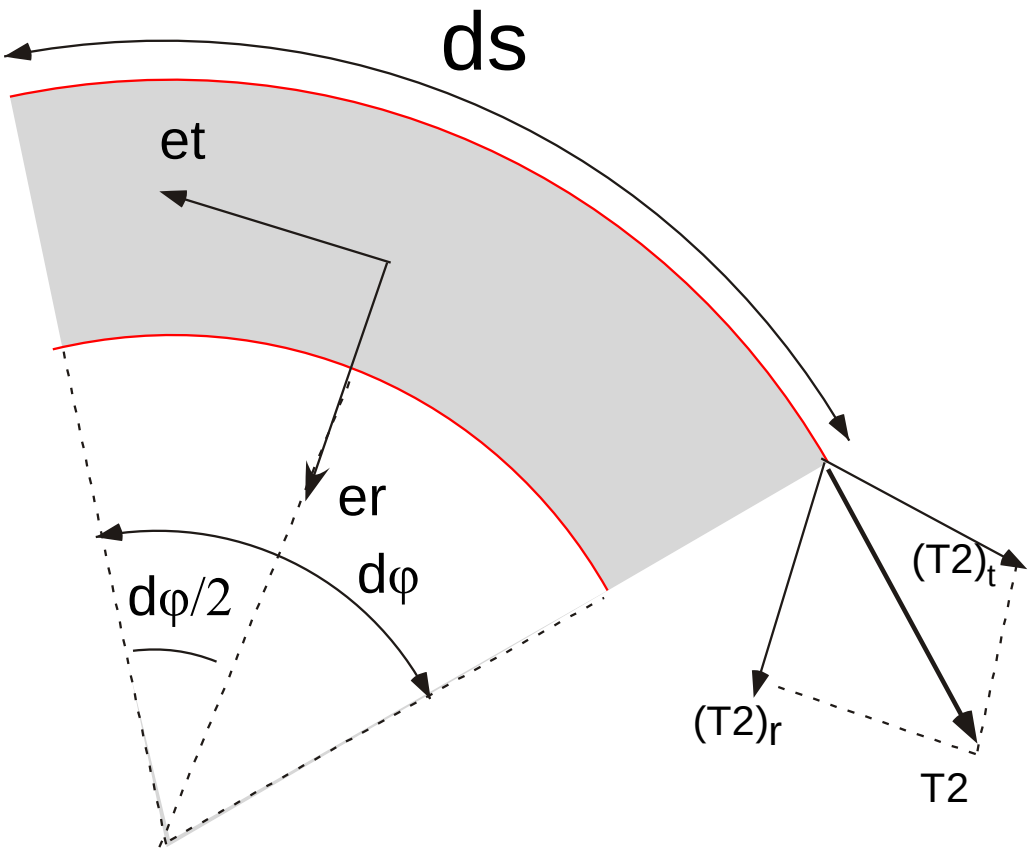
Σχήμα 3-10. Ανάλυση δύναμης αριστερού τένοντα εξ αριστερών σε συνιστώσες.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι εξισώσεις που περιγράφουν πως αναλύεται η δύναμη T_1:

$$(T_1)_r = (T_1)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-28}$$

$$(T_1)_t = -(T_1)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-29}$$

Η ανάλυση της δύναμης T_2 περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα:



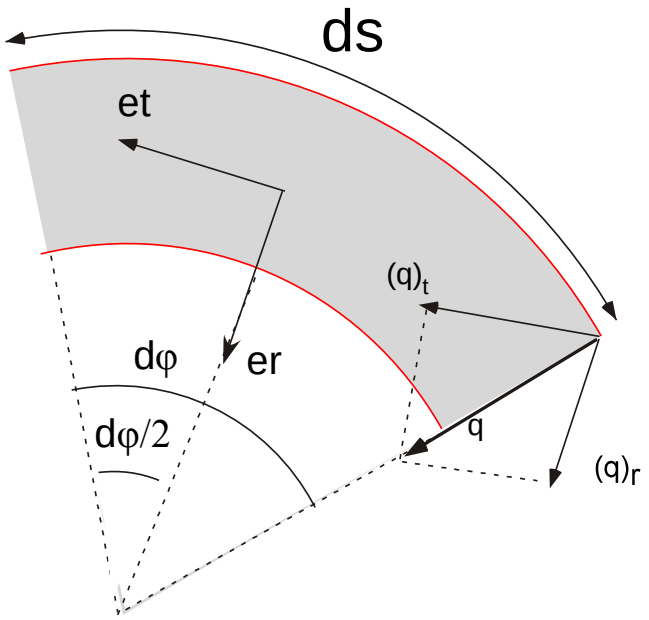
Σχήμα 3-11. Ανάλυση δυνάμης δεξιά τένοντα εκ δεξιών σε συνιστώσες.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν οι εξισώσεις που περιγράφουν πως αναλύεται η δύναμη T_1:

$$(T_2)_r = (T_2)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-30}$$

$$(T_2)_t = -(T_2)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-31}$$

Η διατμητική δύναμη Q αναλύεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3-12. Ανάλυση διατμητικής δύναμης εκ δεξιών σε συνιστώσες.

Από το παρακάτω σχήμα προκύπτουν οι δύο σχέσεις που περιγράφουν πως αναλύεται η διατμητική δύναμη σε συνιστώσες:

$$(q)_r = -(q)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-32}$$

$$(q)_t = -(q)\sin(\frac{d\varphi}{2}) \tag{3-33}$$

Εφόσον αναλύθηκαν η δυνάμεις το επόμενο βήμα είναι η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας των δυνάμεων σε ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση όπως και η κατάστρωση της εξίσωσης ισορροπίας των ροπών.

3.4 Κατάστρωση εξισώσεων ισορροπίας

Όλες οι δυνάμεις έχουν αναλυθεί σε συνιστώσες κατά την εφαπτομενική και ακτινική διεύθυνση. Θεωρούμε στατική ισορροπία στον βραχίονα και προκύπτουν δύο εξισώσεις δυνάμεων και μία ροπών.

Πριν όμως καταστρωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας πρέπει να αναλυθεί και η δύναμη της βαρύτητας του απειροστού στοιχείου που έχει θεωρηθεί. Συγκεκριμένα η δύναμη της βαρύτητας περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$dw = \rho g ds \tag{3-34}$$

όπου:

1. ρ : πυκνότητα μάζας βραχίονα ανά μονάδα μήκους βραχίονα
2. g :επιτάχυνση της βαρύτητας
3. ds : απειροστό στοιχείο τένοντα

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σχολιασθεί το ότι επειδή ο βραχίονας στη φορτισμένη κατάσταση συμπιέζεται δεν έχουμε μια ομοιόμορφη κατανομή μάζας όπως θα είχαμε αν ο βραχίονας ήταν

τελείως αφόρτιστος και έτσι δεν είχε καμία παραμόρφωση. Ετσι λοιπόν η κατανομή της μάζας είναι μία συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής του μήκους στη φορτισμένη κατάσταση του βραχίονα.

$$\rho = \rho(\mathrm{s}) \tag{3-35}$$

Η δύναμη της βαρύτητας στο χωρόδετο σύστημα αναφοράς X-Y το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-2 είναι:

$$d\mathbf{w}_{global} = \begin{bmatrix} -\rho g ds \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-36}$$

Για να αναχθεί η δύναμη της βαρύτητας στο σχετικό σύστημα αναφοράς δηλαδή να αναλυθεί σε μια εφαπτομενική και μία ακτινική συνιστώσα του συστήματος αναφοράς που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-4 και έτσι να καταστρωθούν εξισώσεις ισορροπίας πρέπει να θεωρηθεί ένα μητρώο περιστροφής το οποίο ανάλογα σε ποιο s (μήκος βραχίονα στο σχετικό σύστημα αναφοράς) αναφερόμαστε θα δίνει την αντίστοιχη γωνία φ(s), έτσι προκύπτει ότι:

$$d\mathbf{w}_{local} = \mathbf{R}(\varphi)\,\mathrm{d}\,\mathbf{w}_{global} \tag{3-37}$$

Όπου η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$d\mathbf{w}_{local} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho g ds \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-38}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι το βάρος του διαφορικού στοιχείου που απεικονίζεται στο Σχήμα 3-4 αναλύεται σε εφαπτομενική και ακτινική συνιστώσα σύμφωνα με τη παρακάτω σχέση:

$$d\mathbf{w}_{local} = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi)\rho g ds \\ +\sin(\varphi)\rho g ds \end{bmatrix} \tag{3-39}$$

Οπότε προκύπτει :

$$\begin{bmatrix} w_{\mathrm{tanget}} \\ w_{radial} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\varphi)\rho g ds \\ +\sin(\varphi)\rho g ds \end{bmatrix} \tag{3-40}$$

Εφόσον πλέον αναλύθηκε η δύναμη της βαρύτητας σε συνιστώσες το επόμενο βήμα είναι η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας.

Για την ακτινική κατεύθυνση προκύπτει η παρακάτω σχέση (σύμφωνα με το σχήμα 3-4):

$$(T_1 + dT_1)_r + (T_1)_r + (T_2 + dT_2)_r + (T_2)_r + (\mathrm{q} + \mathrm{dq})_r + (q)_r + (\mathrm{N} + \mathrm{dN})_r + (N)_r + dw_r = 0 \tag{3-41}$$

Η (3,41) με αντικατάσταση των (3.19),(3,28),(3-30),(3-20),(3-32),(3,24),(3-22),(3-26):

$$\begin{aligned} &(T_1 + dT_1)\sin(\frac{d\varphi}{2}) + (T_2 + dT_2)\sin(\frac{d\varphi}{2}) + (\mathrm{N} + dN)\sin(\frac{d\varphi}{2}) + \left(q + dq\right)\cos(\frac{d\varphi}{2}) \\ &+ N\sin(\frac{d\varphi}{2}) + \mathrm{T}_1\sin(\frac{d\varphi}{2}) + \mathrm{T}_2\sin(\frac{d\varphi}{2}) - q\cos(\frac{d\varphi}{2}) + \sin(\varphi)\rho g ds = 0 \end{aligned} \tag{3-42}$$

Όταν έχουμε πολύ μικρές ποσότητες μέσα σε συνάρτηση ημιτόνου και συνημιτόνου τότε προκύπτει ότι:

$$\cos(\frac{d\varphi}{2}) = 1 \tag{3-43}$$

$$\sin(\frac{d\varphi}{2}) = \frac{d\varphi}{2} \tag{3-44}$$

Η εξίσωση (3-42) γίνεται με τις παραπάνω τριγωνομετρικές απλοποιήσεις:

$$(T_1+dT_1)\frac{d\varphi}{2}+(T_2+dT_2)\frac{d\varphi}{2}+(\mathrm{N}+dN)\frac{d\varphi}{2}+\left(q+dq\right)$$
$$+N\frac{d\varphi}{2}+\mathrm{T}_1\frac{d\varphi}{2}+\mathrm{T}_2\frac{d\varphi}{2}-q+\sin(\varphi)\rho gds=0 \tag{3-45}$$

Με επιμεριστική ιδιότητα γίνονται οι πολλαπλασιασμοί και έτσι η παραπάνω σχέση γίνεται

$$T_1\frac{d\varphi}{2}+dT_1\frac{d\varphi}{2}+T_2\frac{d\varphi}{2}+dT_2\frac{d\varphi}{2}+N\frac{d\varphi}{2}+dN\frac{d\varphi}{2}+dq+N\frac{d\varphi}{2}$$
$$+\mathrm{T}_1\frac{d\varphi}{2}+\mathrm{T}_2\frac{d\varphi}{2}+\sin(\varphi)\rho gds=0 \tag{3-46}$$

Επειδή υπάρχει μια σχέση με διαφορικά πρώτης και δεύτερης τάξης επικρατούν αυτά της πρώτης τάξης και έτσι ισχύει ότι :

$$dT_1\frac{d\varphi}{2}=0 \tag{3-47}$$

$$dT_2\frac{d\varphi}{2}=0 \tag{3-48}$$

$$dN\frac{d\varphi}{2}=0 \tag{3-49}$$

Η εξίσωση (3-46) γίνεται με χρήση των (3-47) , (3-48), (3-49) :

$$T_1\frac{d\varphi}{2}+T_2\frac{d\varphi}{2}+\mathrm{N}\frac{d\varphi}{2}+dq+N\frac{d\varphi}{2}+T_1\frac{d\varphi}{2}+\mathrm{T}_2\frac{d\varphi}{2}+\sin(\varphi)\rho gds=0 \tag{3-50}$$

Τελικά η διαφορική διατμητική δύναμη dq περιγράφετε από την παρακάτω σχέση:

$$dq=-T_1d\varphi-T_2d\varphi-N\,\mathrm{d}\varphi-\sin(\varphi)\rho gds \tag{3-51}$$

Με όμοιο τρόπο που ακολουθήθηκε για την ακτινική διεύθυνση προκύπτει και η θεώρηση της ισορροπίας στην εφαπτομενική κατεύθυνση του σχετικού συστήματος αναφοράς και έτσι προκύπτει η παρακάτω εξίσωση (ο δείκτης t προκύπτει από το tangent) :

$$(T_1+dT_1)_t+(T_1)_t+(T_2+dT_2)_t+(T_2)_t+(\mathrm{q}+\mathrm{dq})_t+(q)_t+(\mathrm{N}+\mathrm{dN})_t+(N)_t+dw_t=0 \tag{3-52}$$

η σχέση (3-52) γίνεται σύμφωνα με τις (3-21), (3-19), (3-23), (3-25), (3-27), (3-29), (3-31)

$$(T_1+dT_1)\cos(\frac{d\varphi}{2})+(T_2+dT_2)\cos(\frac{d\varphi}{2})+(\mathrm{N}+dN)\cos(\frac{d\varphi}{2})-(q+dq)\sin(\frac{d\varphi}{2})$$
$$-N\cos(\frac{d\varphi}{2})-\mathrm{T}_1\cos(\frac{d\varphi}{2})-\mathrm{T}_2\cos(\frac{d\varphi}{2})-q\sin(\frac{d\varphi}{2})+d\,\mathrm{w}_t=0 \tag{3-53}$$

Επειδή και στη παραπάνω σχέση υπάρχουν ποσότητες μέσα σε ημίτονα και συνημίτονα γίνονται απλοποιήσεις σύμφωνα με τις σχέσεις (2-43) και (2-44):

$$(T_1+dT_1)+(T_2+dT_2)+(\mathrm{N}+dN)-(q+dq)\frac{d\varphi}{2}-N-T_1-T_2-q\frac{d\varphi}{2}+d\,\mathrm{w}_t=0 \tag{3-54}$$

η εξίσωση (3-54) γίνεται:

$$T_1+dT_1+T_2+dT_2+\mathrm{N}+dN-q\frac{d\varphi}{2}-N-\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2-q\frac{d\varphi}{2}+d\,\mathrm{w}_t=0 \tag{3-55}$$

Επειδή υπάρχουν διαφορικά δεύτερης τάξης ανάμεσα σε διαφορικά πρώτης τάξης τα διαφορικά δεύτερης τάξης ισούται με μηδέν οπότε ισχύει ότι:

$$dq\frac{d\varphi}{2}=0 \tag{3-56}$$

Η σχέση (3-55) γίνεται βάση της σχέσης (3-56):

$$T_1 + dT_1 + T_2 + dT_2 + \mathrm{N} + dN - q\frac{d\varphi}{2} - N - T_1 - T_2 - q\frac{d\varphi}{2} + d\,\mathrm{w}_t = 0 \qquad (3\text{-}57)$$

με πράξεις η σχέση (3-57) γίνεται:

$$dT_2 + dT_1 + dN - qd\varphi - \cos(\varphi)\rho g ds = 0 \qquad (3\text{-}58)$$

Οπότε προκύπτει η διαφορική σχέση που περιγράφει το dN :

$$dN = -dT_2 - dT_1 + qd\varphi + \cos(\varphi)\rho g ds \qquad (3\text{-}59)$$

Εφόσον έχει περιγραφεί η ισορροπία των δυνάμεων σειρά έχει η ισορροπία των ροπών ώστε να δημιουργηθεί μια διαφορική σχέση η οποία περιγράφει το πως μεταβάλλεται το διαφορικό στοιχείο της ροπής. Στο Σχήμα 3-4 μπορεί κάποιος να δει ότι το διαφορικό στοιχείο του βραχίονα είναι καμπυλομένο. Αυτή η καμπύλωση επειδή το διαφορικό στοιχείο είναι υπερβολικά μικρό μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα και έτσι μπορεί κάποιος να φτάσει στα εξής συμπεράσματα:

- Οι ορθές δυνάμεις $N, N + dN$ δεν δίνουν ροπή ως προς το κέντρο βάρους διότι το διαφορικό στοιχείο τείνει να είναι ευθεία και οπότε ως ολισθαίνον διάνυσμα η ορθή δύναμη περνά από το κέντρο βάρους
- Οι δυνάμεις από τους τένοντες δίνουν ροπή με μοχλοβραχίονα ίσο με την ακτίνα της διατομής του ρομπότ. Αυτό συμβαίνει διότι αν σκεφτεί κανείς ότι το καμπυλωμένο τμήμα του βραχίονα τείνει στην ευθεία τότε είναι λογικό οι ροπές να προκύπτουν από μοχλοβραχίονα την ακτίνα της διατομής (R_{CS})
- Οι ροπές που προκύπτουν από τις διατμητικές τάσεις αν θεωρηθεί πάλι ότι το καμπυλωμένο διαφορικό στοιχείο του βραχίονα τείνει στην ευθεία τότε ο μοχλοβραχίονας για τις διατμητικές δυνάμεις θα είναι $\frac{ds}{2}$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω εξίσωση ροπών:

$$(M + dM) - M - (q + dq)\frac{ds}{2} + q\frac{ds}{2} + (\mathrm{T}_1 + dT_1)R_{CS} - T_1 R_{CS} - (\mathrm{T}_2 + dT_2)R_{CS} + T_2 R_{CS} = 0 \qquad (3\text{-}60)$$

Με πράξεις Η 3.60 γίνεται:

$$dM - q\frac{ds}{2} - dq\frac{ds}{2} - q\frac{ds}{2} + dT_1 R_{CS} - dT_2 R_{CS} = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

Επειδή υπάρχει διαφορικό δεύτερης τάξης ανάμεσα σε διαφορικά πρώτης τάξης θα ισχύει:

$$dq\frac{ds}{2} = 0 \qquad (3\text{-}62)$$

Οπότε η σχέση (3-61) γίνεται :

$$dM = (\mathrm{dT}_2 - dT_1)\mathrm{R}_{CS} + qds \qquad (3\text{-}63)$$

Η παραπάνω διαφορική σχέση περιγράφει το πως μεταβάλλεται η εσωτερική ροπή σε συνάρτηση με τις δυνάμεις από τους ανταγωνιστές τένοντες και τη διατμητική δύναμη.

3.5 Συμπεράσματα

Η ανάλυση που έγινε οδηγεί σε ένα σύστημα διαφορικών σχέσεων το οποίο περιγράφει το πώς εξαρτώνται μεταξύ τους οι εσωτερικές τάσεις του βραχίονα.Η λογική ήταν ότι θεωρούμε απειροστό

τμήμα βραχίονα εμφανίζουμε τα εσωτερικά μεγέθη και στη συνέχεια θεωρούμε παραδοχή στατικής ισορροπίας. Απο την στατική ισορροπία προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές σχέσεις:

$$dM = (\mathrm{dT}_2 - dT_1)\,\mathrm{R}_{CS} + qds \tag{3-64}$$

$$dN = -dT_2 - dT_1 + qd\varphi + \cos(\varphi)\rho gds \tag{3-65}$$

$$dq = -T_1 d\varphi - T_2 d\varphi - N\,\mathrm{d}\varphi - \sin(\varphi)\rho gds \tag{3-66}$$

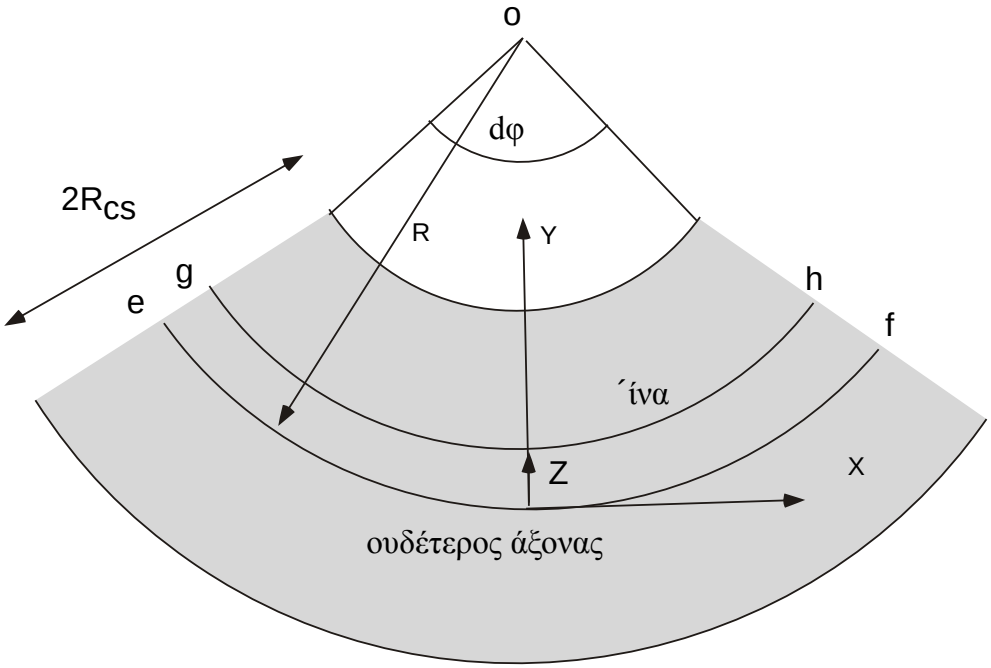
4 Μοντέλο κλασσικής μηχανικής με επενέργηση δύο ανταγωνιστών τενόντων

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα αναλυθεί η θεωρία της απλής κάμψης. Απο αυτή την ανάλυση θα προκύψει η σχέση που συνδέει τη γωνία κάμψης με τη ροπή. Ενα ερώτημα που προκύπτει από πολλούς που μελετούν την κάμψη δοκών είναι αν η κλασσική καταστατική εξίσωση της γωνίας κάμψης μπορεί να περιγράψει σώμα με μεγάλες εκτροπές όπως ο εύκαμπτος βραχίονας. Σε αυτό το κεφάλαιο απαντάται αυτό το ερώτημα. Θα δημιουργηθεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο θα περιγράφει το σχήμα του ρομπότ όταν δέχεται επενέργηση από τους δύο ανταγωνιστές τένοντες. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιηθεί η κλασσική καταστατική εξίσωση γωνίας-ροπής και στο επόμενο κεφάλαιο θα γίνει σύγκριση με το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων

4.2 Θεωρία της καθαρής κάμψης

Στο Σχήμα 4-1 φαίνεται ένα απειροστό τμήμα δοκού το οποίο καταπονείται από ένα ζεύγος ροπών M:



Σχήμα 4-1. Απειροστό τμήμα δοκού που καταπονείται από καθαρή κάμψη.

Με R συμβολίζεται η ακτίνα καμπυλότητας του ουδέτερου άξονα της δοκού και με z συμβολίζεται η απόσταση της ίνας gf από τον ουδέτερο άξονα ef.

Η παραμόρφωση ε μια τυχαίας ίνας gh σε απόσταση z από τον ουδέτερο άξονα ορίζεται ως:

$$\varepsilon = \frac{gh - ef}{ef} \tag{4-1}$$

Η (4-1) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\varphi - Rd\varphi}{Rd\varphi} \tag{4-2}$$

Μετά από πράξεις η σχέση (4-2) γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{z}{R} \tag{4-3}$$

Η σχέση ορθής τάσης σ στη διατομή της δοκού με την παραμόρφωση ορίζεται παρακάτω:

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \tag{4-4}$$

όπου με E ορίζεται το μέτρο ελαστικότητας της δοκού.

Η ροπή M σε μια διατομή ορίζεται με τον παρακάτω τύπο:

$$M = -\int_A z\sigma dA \tag{4-5}$$

Με αντικατάσταση της (4-4) στη (4-5) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$M = -\int_A zE\varepsilon dA \tag{4-6}$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (4-3) στην εξίσωση (4-6) προκύπτει:

$$M = -\frac{E}{R}\int_A z^2 dA \tag{4-7}$$

Η ροπή αδρανείας I μίας διατομής ορίζεται ως:

$$I = \int_A z^2 dA \tag{4-8}$$

Η ακτίνα καμπυλότητας σε σχέση με το μήκος s του ουδετέρου άξονα της δοκού και της γωνίας εκτροπής φ ορίζεται ως:

$$R = \frac{ds}{d\varphi} \tag{4-9}$$

Αν αντικατασταθούν στη (4-7) οι (4-8) και (4-9) προκύπτει η καταστατική εξίσωση που συνδέει τη ροπή με τη γωνία:

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{M}{EI} \tag{4-10}$$

4.3 Σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σκοπό το προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ που επενεργείται από δύο ανταγωνιστές τένοντες.

Στην προηγούμενη ενότητα προσδιορίστηκε η καταστατική εξίσωση της κλασσικής μηχανικής η οποία συνδέει τη γωνία εκτροπής του ρομπότ με την εσωτερική ροπή. Για μικρές εκτροπές αυτή η εξίσωση έχει ισχύ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Αυτή η εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί με για να παραχθεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων έτσι ώστε να προσδιορισθεί το σχήμα του ρομπότ. Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταστρώθηκαν τρεις διαφορικές σχέσεις οι οποίες προέκυψαν από ισορροπία δυνάμεων σε εφαπτομενική και ακτινική κατεύθυνση όπως και από ισορροπία ροπών στο σύστημα σωμάτων με ανταγωνιστές τένοντες-βραχίονας που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-4. Οι σχέσεις αυτές είναι:

(τονίζεται ότι οι σχέσεις αυτές είναι εκφρασμένες ως προς το σχετικό σύστημα αναφοράς και έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή την s , για αυτό έχουμε αστερίσκους για να δηλώσουν ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η s. Στη συνέχεια επειδή θα έχουμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την x (εκφράζει το

μήκος του βραχίονα στην απαραμπορφωτη κατακόρυφη κατάσταση) θα κρατήσουμε τα ιδια σύμβολα χωρίς αστερίσκο αλλά θα δηλώνουν συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο και ανεξάρτητη μεταβλητή το x που όμως εκφράζουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος αλλά απλά υπό διαφορετική ανεξάρτητη μεταβλητή)

$$dq^* = -T_1^* d\varphi - T_2^* d\varphi^* - T^* \mathrm{d}\varphi^* - \sin(\varphi^*)\rho^* g ds \tag{4-11}$$

$$dN^* = -dT_2^* - dT_1^* + q^* d\varphi^* + \cos(\varphi^*)\rho^* g ds \tag{4-12}$$

$$dM^* = (\mathrm{dT}_2^* - dT_1^*)\mathrm{R}_{CS} + q^* ds \tag{4-13}$$

q^* : εσωτερική διατμητική τάση του βραχίονα

N^* : εσωτερική ορθή τάση του βραχίονα

M^* : εσωτερική ροπή του βραχίονα

φ^* :γωνία εκτροπής κεντροβαρικού άξονα του διαφορικού στοιχείου του βραχίονα

ds :μήκος του απειροστού στοιχείου του βραχίονα στη παραμορφωμένη κατάσταση

ρ^* :πυκνότητα μάζας ανά μονάδα μήκους του διαφορικού στοιχείου του παραμορφωμένου βραχίονα

T_2^* :εσωτερική δύναμη τάνυσης του αριστερού τένοντα

T_1^* :εσωτερική δύναμη τάνυσης του δεξιά τένοντα

R_{CS} :ακτίνα διατομής του βραχίονα

g :επιτάχυνση της βαρύτητας

Επίσης ισχύει ότι για τον τένοντα 1 και τένοτντα 2 προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις που περιγράφουν το πως μεταβάλλεται η εσωτερική δύναμη που μεταφέρουν:

$$\frac{dT_1^*(s)}{ds} = -\mu_{o\lambda} T_1^*(s) \frac{d\varphi^*(s)}{ds} \tag{4-14}$$

$$\frac{dT_2^*(s)}{ds} = -\mu_{o\lambda} T_2^*(s) \frac{d\varphi^*(s)}{ds} \tag{4-15}$$

όπου με $\mu_{o\lambda}$ συμβολίζεται ο ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Στην προηγούμενη ενότητα αποδείχθηκε ότι η σχέση που συνδέει την εσωτερική ροπή με τη γωνία εκτροπής είναι:

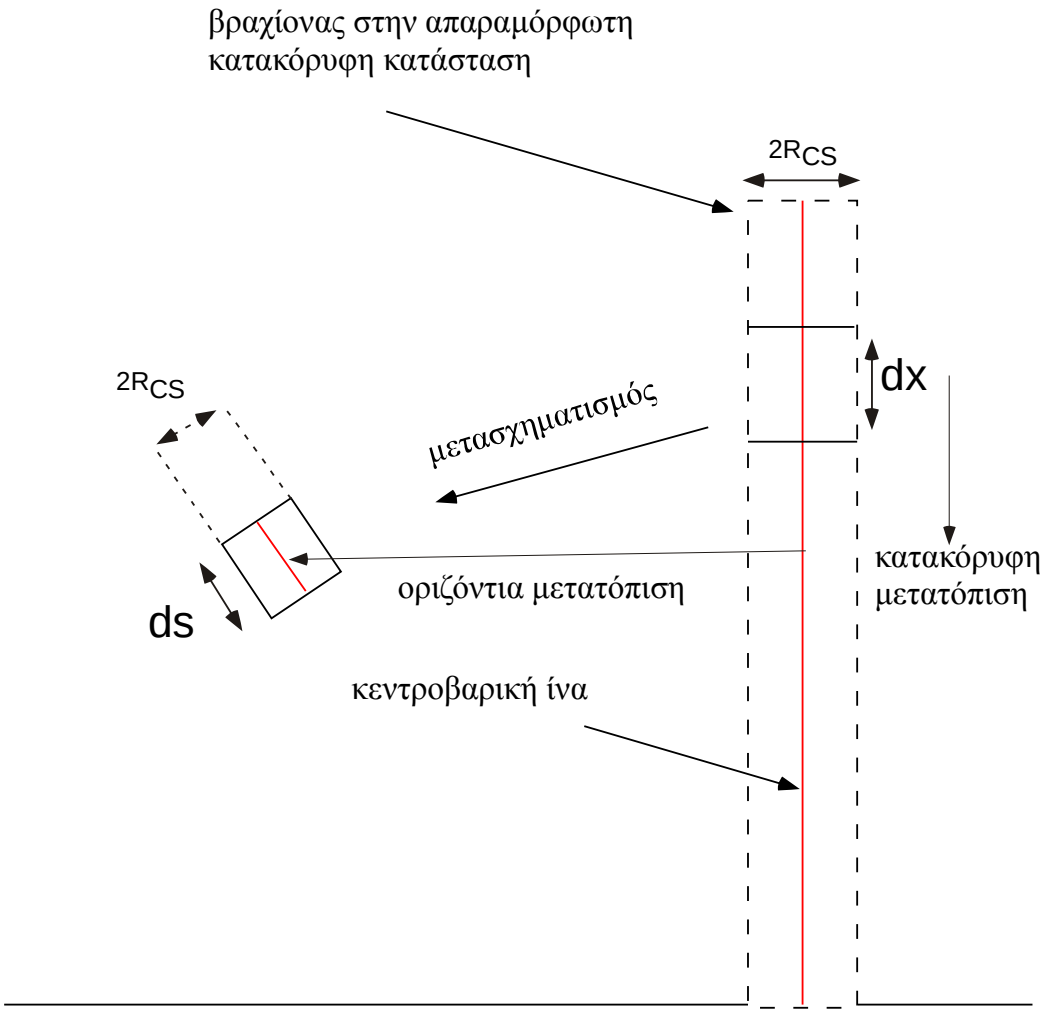
$$\frac{d\varphi^*(s)}{ds} = -\frac{M^*(s)}{EI} \tag{4-16}$$

Όπου με Ε συμβολίζεται το μέτρο ελαστικότητας του υλικού κα I είναι η επιφανειακή ροπή αδρανείας.

Υποθέτουμε ότι αρχικά και πριν επενεργήσουν οι τένοντες ο βραχίονας βρίσκεται σε μια απαραμόρφωτη κατάσταση και είναι κατακόρυφος. Οταν επενεργούν οι τένοντες ο βραχίονας αποκτά καμπύλωση στο επίπεδο και ένα διαφορικό στοιχείο του κεντροβαρικού άξονα του αρχικά απαραμόρφωτου βραχίονα με μήκος dx γίνεται ds το οποίο έχει μετατοπιστεί οριζόντια και κατακόρυφα αλλά επίσης έχει παραμορφωθεί. Υπάρχει μία απεικόνιση F τέτοια ώστε οδηγεί το dx που είναι στο χωρόδετο σύστημα αναφοράς σε ένα σχετικό σύστημα αναφοράς όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4-2 :

$$F : \mathrm{dx} \rightarrow ds \tag{4-17}$$

Η απεικόνιση παρουσιάζεται σχηματικά παρακάτω :



Σχήμα 4-2. Μετασχηματισμός από dx σε ds.

Η απεικόνιση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί αν χρησιμοποιηθεί η έννοια της παραμόρφωσης του διαφορικού στοιχείου της κεντροβαρικής ίνας του βραχίονα όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\varepsilon(\mathrm{x}) = \frac{ds - dx}{dx} \tag{4-18}$$

Όπως φαίνεται εισάγεται η έννοια της παραμόρφωσης ενός στοιχείου του βραχίονα με αρχική κεντροβαρική θέση x και αρχικό μήκος dx. Όπως είναι γνωστό από την θεωρία ελαστικότητας υπάρχει η εσωτερική ορθή τάση συνδέεται με την παραμόρφωση για την θέση x :

$$\sigma(\mathrm{x}) = \mathrm{E}\varepsilon(\mathrm{x}) \tag{4-19}$$

Γίνεται η παραδοχή ότι η αξονική παραμόρφωση υφίσταται λόγω της αξονικής δύναμης οπότε το φαινόμενο Poisson επηρεάζει ελάχιστα στην μεταβολή του μήκους της κεντροβαρικής ίνας. Η ορθή δύναμη N συνδέεται με την εσωτερική ορθή τάση σ με την ακόλουθη σχέση :

$$\sigma(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{N(x)}}{\mathrm{A}} \tag{4-20}$$

Με αντικατάσταση της (4-19) στην (4-20) προκύπτει :

$$\varepsilon(\mathrm{x}) = \frac{N(\mathrm{x})}{AE} \tag{4-21}$$

Και με αντικατάσταση της (4-18) στην (4-21) προκύπτει ότι:

$$\frac{ds-dx}{dx}=\frac{N(\mathrm{x})}{AE} \tag{4-22}$$

Αν η (4-22) επιλυθεί ως προς ds θα προκύψει η διαφορική σχέση F που οδηγεί ένα διαφορικό στοιχείο μήκους dx της κεντροβαρικής ίνας το οποίο βρίσκεται σε μια απαραμόρφωτη κατακόρυφη κατάσταση A σε ένα διαφορικό στοιχείο B μήκους ds που βρίσκεται σε μία παραμορφωμένη κατάσταση(βλέπε σχήμα 4.2):

$$ds=dx(1+\frac{N(\mathrm{x})}{AE}) \tag{4-23}$$

Η σχέση που συνδέει το s με το x είναι μία ολοκληρωματική σχέση:

$$s(x)=\int_0^x(1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi \tag{4-24}$$

Αν διαιρεθούν με ds οι εξισώσεις (4-11), (4-12), (4-13) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις οι οποίες είναι εκφρασμένες ως προς τηνανεξάρτητη μεταβλητή την s (για αυτό το λόγο είναι σημειωμένες με αστερίσκο)

$$\frac{dq^*}{ds}=-T_1^*\frac{d\varphi^*}{ds}-T_2^*\frac{d\varphi^*}{ds}-\mathrm{N}\frac{d\varphi^*}{ds}-\sin(\varphi^*)\rho^*g \tag{4-25}$$

$$\frac{dN^*}{ds}=-\frac{dT_2^*}{ds}-\frac{dT_1^*}{ds}+q^*\frac{d\varphi^*}{ds}+\cos(\varphi^*)\rho^*g \tag{4-26}$$

$$\frac{dM^*}{ds}=(\frac{dT_2^*}{ds}-\frac{dT_1^*}{ds})\mathrm{R}_{CS}+q^* \tag{4-27}$$

Για τις εξισώσεις των τενόντων αν αντικατασταθεί η εξίσωση (4-16) στην (4-14) και (4-15) ισχύει:

$$\frac{dT_1^*}{ds}=\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1^*\frac{\mathrm{M}^*}{\mathrm{EI}} \tag{4-28}$$

$$\frac{dT_2^*}{ds}=\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2^*\frac{\mathrm{M}^*}{\mathrm{EI}} \tag{4-29}$$

Με χρήση των εξισώσεων (4-16), (4-28) και (4-29) οι εξισώσεις (4-25), (4-26), (4-27) γίνονται αντίστοιχα:

$$\frac{dq^*}{ds}=T_1^*\frac{M^*}{EI}+T_2^*\frac{M^*}{EI}+N^*\frac{M^*}{EI}-\sin(\varphi^*)\rho^*g \tag{4-30}$$

$$\frac{dN^*}{ds}=-\mu_{o\lambda}T_2^*\frac{M^*}{EI}-\mu_{o\lambda}T_1^*\frac{M^*}{EI}-q^*\frac{M^*}{EI}+\cos(\varphi^*)\rho^*g \tag{4-31}$$

$$\frac{dM^*}{ds}=(\mu_{o\lambda}T_2^*\frac{M^*}{EI}-\mu_{o\lambda}T_1^*\frac{M^*}{EI})\mathrm{R}_{CS}+q^* \tag{4-32}$$

Για ένα διαφορικό στοιχείο dx του κεντροβαρικού άξονα το οποίο γίνεται ds και επομένως έχει συμπιεστεί, ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας οπότε θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση όπου στο αριστερό μέλος φαίνεται η μάζα του παραμορφωμένου στοιχείου και δεξιά του ιδίου στοιχείου στην απαραμόρφωτη κατάσταση:

$$\rho^*(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}=\rho_o dx \tag{4-33}$$

όπου $\rho^*(\mathrm{s})$ η συνάρτηση κατανομής μάζας ανά μονάδα μήκους και ρ_o η συνάρτηση κατανομής μάζας ανά μονάδα μήκους στην απαραμόρφωτη κατακόρυφη κατάσταση η οποία με καλή

προσέγγιση θεωρείται σταθερή διότι επιδρά η δύναμη της βαρύτητας και έτσι υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση αλλά θεωρείται αμεληταία.

η εξίσωση πυκνότητας μάζας $\rho^*(\mathrm{s})$ θα εκφραστεί πλέον με ανεξάρτητη μεταβλητή την x και έτσι θα αλλάξει ο τύπος της με χρήση της σχέσης (4-24) οπότε θα έχουμε ότι :

$$\rho^*(\mathrm{s}) = \rho^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi) = \rho(\mathrm{x}) \tag{4-34}$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (4-23), (4-33) και (4-34) δίνει:

$$\rho_0 = (1+\frac{N(\mathrm{x})}{AE})\rho(\mathrm{x}) \tag{4-35}$$

Στη παραπάνω εξίσωση φαίνεται η συνάρτηση μάζας ανά μονάδα μήκους $\rho(\mathrm{x})$ στην παραμορφωμένη κατάσταση με ανεξάρτητη όμως την μεταβλητή x και ρ_o η πυκνότητα μάζας στην κατακόρυφη απαραμόρφωτη κατάσταση.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να εκφραστούν οι συναρτήσεις του προβλήματος πλέον ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x του απαραμόρφωτου κατακόρυφου βραχίονα έτσι λοιπόν για τις εσωτερικές τάσεις $N^*, \mathrm{q}^*, \mathrm{M}^*$, τις δυνάμεις για τους τένοντες T_1^*, T_2^* και τη γωνία εκτροπής φ , αλλάζουμε μεταβλητή από $s \to x$ με χρήση της εξίσωσης (4-24):

$$\varphi^*(\mathrm{s}) = \varphi*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi) = \varphi(\mathrm{x}) \tag{4-36}$$

$$T_1^*(s) = T_1^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi) = T_1(\mathrm{x}) \tag{4-37}$$

$$T_2^*(s) = T_2^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi) = T_2(\mathrm{x}) \tag{4-38}$$

$$N^*(\mathrm{s}) = N^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi)) = N(\mathrm{x}) \tag{4-39}$$

$$q^*(\mathrm{s}) = q^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi)) = q(\mathrm{x}) \tag{4-40}$$

$$M^*(\mathrm{s}) = M^*(\int_0^x (1+\frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi)) = M(\mathrm{x}) \tag{4-41}$$

Πλέον οι συναρτήσεις εκφρασμένες ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x (για αυτό δεν υπάρχει πλέον αστερίσκος) επομένως αν θέσουμε στις εξισώσεις (4-16), (4-28), (4-29), (4-30), (4-31) και (4-32) $s \to x$ και αντικαταστήσουμε όπου ds το dx σύμφωνα με τη διαφορική σχέση που τα συνδέει (4-23) θα προκύψει το παρακάτω σύνολο εξισώσεων (θεωρείται Α=σταθερό):

$$\frac{d\varphi}{dx(1+\frac{N}{AE})} = -\frac{M}{EI} \tag{4-42}$$

$$\frac{dT_1}{dx(1+\frac{N}{AE})} = \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \tag{4-43}$$

$$\frac{dT_2}{dx(1+\frac{N}{AE})} = \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \tag{4-44}$$

$$\frac{dq}{dx(1+\frac{N}{AE})} = T_1\frac{M}{EI} + T_2\frac{M}{EI} + \mathrm{N}\frac{M}{EI} - \sin(\varphi)\rho g \tag{4-45}$$

$$\frac{dN}{dx(1+\frac{N}{AE})} = -\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} - \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} - q\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} + \cos(\varphi)\rho g \tag{4-46}$$

$$\frac{dM}{dx(1+\frac{N}{AE})} = (\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} - \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}})\mathrm{R}_{CS} + q \tag{4-47}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (4-42), (4-43), (4-44), (4-45), (4-46), (4-47) με το $dx(1+\frac{N}{AE})$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4-35) επιπρόσθετα στις σχέσεις (4-45) και (4-46) προκύπτει ότι:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}(1+\frac{N}{AE}) \tag{4-48}$$

$$\frac{dT_1}{dx} = \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}(1+\frac{N}{AE}) \tag{4-49}$$

$$\frac{dT_2}{dx} = \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}(1+\frac{N}{AE}) \tag{4-50}$$

$$\frac{dq}{dx} = T_1\frac{M}{EI}(1+\frac{N}{AE}) + T_2\frac{M}{EI}(1+\frac{N}{AE}) + \mathrm{N}\frac{M}{EI}(1+\frac{N}{AE}) - \sin(\varphi)\rho_o g \tag{4-51}$$

$$\frac{dN}{dx} = -\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}(1+\frac{N}{AE}) - \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}(1+\frac{N}{AE}) - q\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}(1+\frac{N}{AE}) + \cos(\varphi)\rho_o g \tag{4-52}$$

$$\frac{dM}{dx} = (\mu_{o\lambda}\mathrm{T}_2\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} - \mu_{o\lambda}\mathrm{T}_1\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}})\mathrm{R}_{CS}(1+\frac{N}{AE}) + q(1+\frac{N}{AE}) \tag{4-53}$$

Οι (4.48)-(4.53) αποτελούν σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης έξι σχέσεων με έξι αγνώστους $\varphi(\mathrm{x})$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $q(x)$, $N(x)$, $M(x)$.

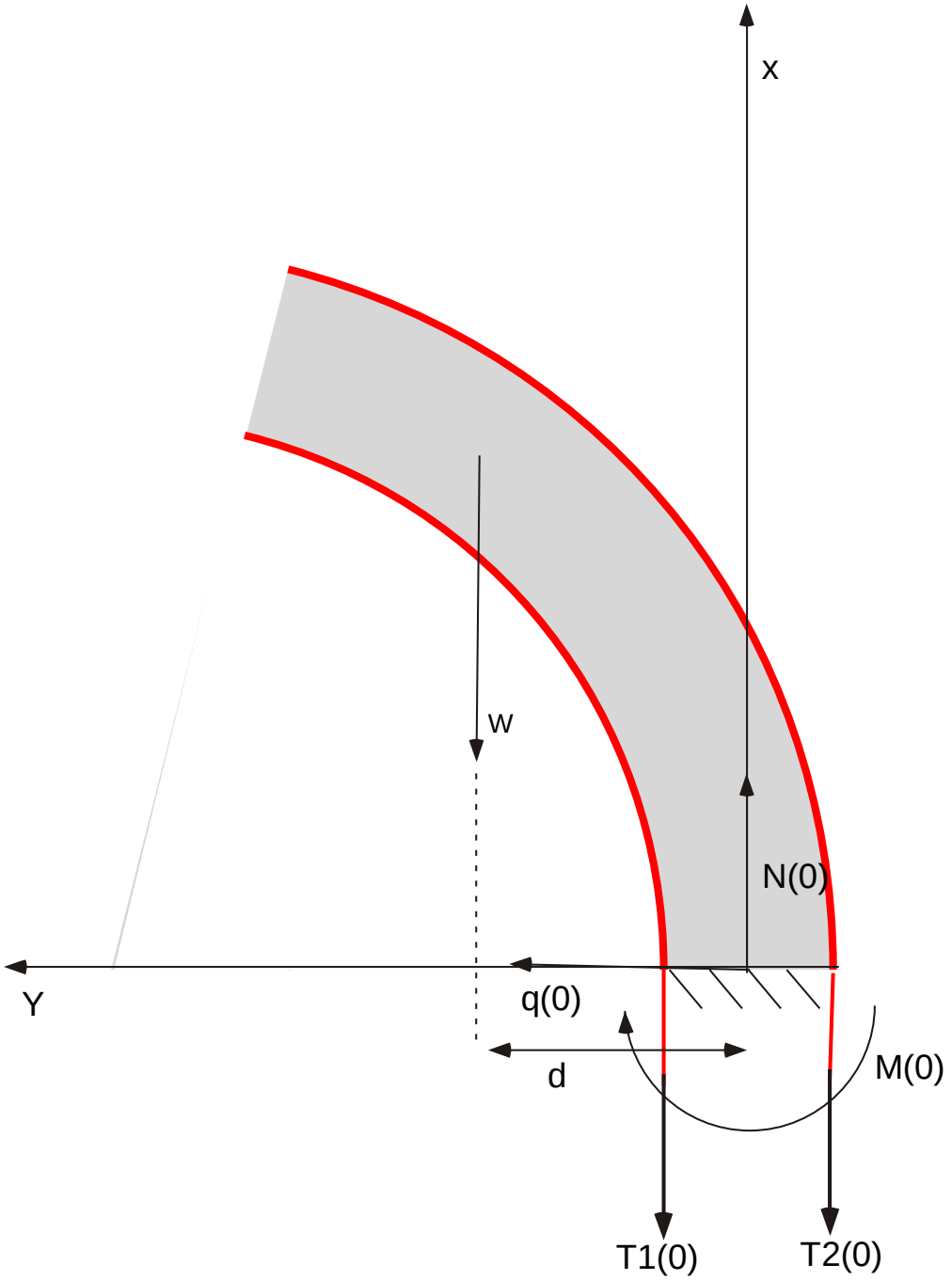
Η επίλυση του παραπάνω συστήματος απαιτεί τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών για τις παραπάνω συναρτήσεις. Επίσης τα άκρα επίλυσης είναι άλλη μια οριακή συνθήκη δηλαδή μέχρι ποιο x θα λυθεί το παραπάνω σύστημα εξισώσεων.

4.4 Διαδικασία επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

Στη προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων έξι σχέσεων με έξι αγνώστους με ανεξάρτητη μεταβλητή την x η οποία εκφράζει την θέση κάθε σημείου του κεντροβαρικού άξονα στη κατακόρυφη απαραμόρφωτη κατάσταση.

Για να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων πρέπει να οριστούν αρχικά τα άκρα ολοκλήρωσης του συστήματος. Τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι από το μηδέν μέχρι το μήκος του αφόρτιστου και επομένως απαραμόρφωτου βραχίονα. Εδώ απαντάται και η ερώτηση στο γιατί πρέπει είναι ανεξάρτητη η μεταβλητή x και όχι η s. Αν θεωρούταν ανεξάρτητη μεταβλητή η s δεν θα ήταν δυνατό να γνωρίζουμε τα άκρα ολοκλήρωσης αφού η ίδια η παραμόρφωση του κεντροβαρικού άξονα είναι άγνωστη και επομένως και το τελικό μήκος του κεντροβαρικού άξονα μετά την παραμόρφωση.

Στη συνέχεια πρέπει να οριστούν οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο βραχίονας σε μια φορτισμένη κατάσταση όπου έχει εκτραπεί και δέχεται τις δυνάμεις από την πάκτωση όπως και τη ροπή, τη δύναμη από τη βαρύτητα και τις δυνάμεις από τους ανταγωνιστές τένοντες.



Σχήμα 4-3. Αντιδράσεις στήριξης.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4-3 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις από την ισορροπία δυνάμεων και ροπών:

Στη x κατεύθυνση προκύπτει ότι:

$$\mathrm{N}_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}} = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) - W \tag{4-54}$$

Όπου $\mathrm{T}_1(0)$ είναι η αρχική τιμή που δέχεται ο αριστερός τένοντας πριν περάσει από το αυλάκι του βραχίονα και $\mathrm{T}_2(0)$ είναι η αρχική τιμή που δέχεται ο αριστερός τένοντας πριν περάσει από το αυλάκι του βραχίονα. Αυτές οι δύο τιμές θεωρούνται γνωστές και είναι οι είσοδοι στο σύστημα. Με W απεικονίζεται η δύναμη της βαρύτητας .

Στην y κατεύθυνση δεν υπάρχει κάποια δύναμη ώστε να εμφανιστεί δύναμη αντίδρασης στη πάκτωση και έτσι η δύναμη της πάκτωσης είναι:

$$F_{\Pi\Alpha\Kappa\Tau_y} = 0 \tag{4-55}$$

Η ροπή στην αντίδραση της πάκτωσης ισούται:

$$M_{\Pi\Alpha\Kappa\Tau} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} + d\,\mathrm{W} \tag{4-56}$$

Στη παραπάνω εξίσωση με dist απεικονίζεται η θέση του κέντρου βάρους του βραχίονα κατά την y διεύθυνση. Το πρόβλημα εδώ συναντάται στο γεγονός ότι δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων η μορφή του βραχίονα και έτσι δεν μπορεί να είναι γνωστή η μεταβλητή dist. Αυτό το πρόβλημα θα λυθεί επαναληπτικά. Θα δίνεται μία τυχαία τιμή στη μεταβλητή dist θα λύνεται το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, θα προσδιορίζεται το κέντρο βάρους του βραχίονα και θα βρίσκεται μια νέα τιμή για την dist μέχρις ότου να συγκλίνει.

Συγκεκριμένα η επίλυση του συστήματος θα γίνει ορίζοντας αρχικά τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες ισχύει ότι:

$$\varphi(0) = 0 \tag{4-57}$$

Η εξίσωση (4-57) ισχύει διότι ο βραχίονας στην βάση του είναι πακτωμένος και ως γνωστόν ισχύει αυτός ο κινηματικός περιορισμός για πακτωμένες δοκούς.

$$\mathrm{T}_1(0) = \Gamma\,\nu\omega\sigma\tau\acute{o} \tag{4-58}$$

$$\mathrm{T}_2(0) = \Gamma\,\nu\omega\sigma\tau\acute{o} \tag{4-59}$$

Οι αρχικές τιμές των τενόντων είναι δεδομένο στο πρόβλημα, δηλαδή τις θεωρούμε γνωστές.
Επίσης ισχύει η παρακάτω εξίσωση για την αρχική τιμή της διατμητικής δύναμης του βραχίονα:

$$q(0) = F_{\Pi\Alpha\Kappa\Tau_Y} = 0 \tag{4-60}$$

Για την ορθή δύναμη θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

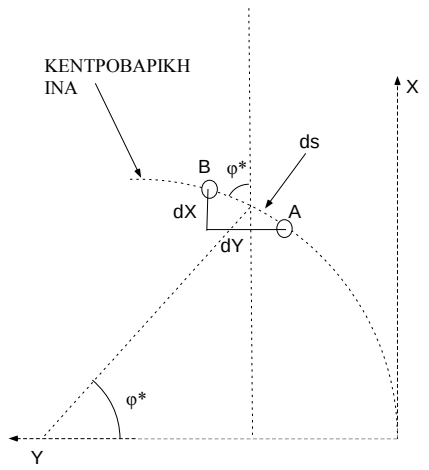
$$N(0) = \mathrm{N}_{\Pi\Alpha\Kappa\Tau} \tag{4-61}$$

Για την ροπή θα ισχύει η παρακάτω εξίσωση:

$$M(0) = M_{\Pi\Alpha\Kappa\Tau} \tag{4-62}$$

Όπως προαναφέρθηκε γίνεται υπόθεση για μια αρχική τιμή της μεταβλητής d για τον προσδιορισμό της ροπής που δίνεται από την δύναμη της βαρύτητας. Αφού με την υπόθεση λυθεί το σύστημα γίνεται η εύρεση του σχήματος του ρομπότ .

Το παρακάτω σχήμα παρουσιάζει το πως θα βρεθούν σε ένα καρτεσιανό σύστημα οι συντεταγμένες του κεντροβαρικού άξονα, ώστε να ευρεθεί στη συνέχεια το κέντρο βάρους του βραχίονα:



Σχήμα 4-4. Βοηθητικό σχήμα για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων του κεντροβαρικού άξονα.

Στο σχήμα 4-4 το τμήμα AB είναι ίσο με ds. Φαίνεται λοιπόν ότι το διαφορικό μήκος προβάλλεται σε X και Y διεύθυνση σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$dX = \cos(\varphi^*)\,\mathrm{ds} \tag{4-63}$$

$$dY = \sin(\varphi^*)\,\mathrm{ds} \tag{4-64}$$

Για τον προσδιορισμό των x συνιστωσών της θέσης του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα θα ισχύει η παρακάτω σχέση εκφρασμένη ως προς s που προκύπτει από ολοκλήρωση της (4-63).

$$X(\mathrm{s}) = \int_0^s \cos(\varphi^*(\xi))\,\mathrm{d}\,\xi \tag{4-65}$$

Όπου με φ^* η γωνία στροφής του βραχίονα συναρτήσει της μεταβλητής s.

Η (4-65) αν τεθεί όπου $s \to x$ και σύμφωνα με τη (4-23) γίνεται:

$$X(\mathrm{x}) = \int_0^x \cos(\varphi(\xi))(1 + \frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi \tag{4-66}$$

όπου με $\varphi(\mathrm{x})$ εκφράζεται η γωνία στροφής του βραχίονα πλέον με ανεξάρτητη μεταβλητή την μεταβλητή x.

Για τον προσδιορισμό των x συνιστωσών της θέσης του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα θα ισχύει η παρακάτω σχέση εκφρασμένη ως προς s που προκύπτει από ολοκλήρωση της (4-64).

$$\mathrm{Y}(\mathrm{x}) = \int_0^x \sin(\varphi^*(\xi))\,\mathrm{d}\,\xi \tag{4-67}$$

Όπου με φ^* η γωνία στροφής του βραχίονα συναρτήσει της μεταβλητής s. Η παραπάνω σχέση αν τεθεί όπου $s \to x$ και σύμφωνα με τη σχέση (4-23) θα γίνει:

$$X(\mathrm{x}) = \int_0^x \sin(\varphi(\xi))(1 + \frac{N(\xi)}{AE})\,\mathrm{d}\,\xi \tag{4-68}$$

όπου με $\varphi(\mathrm{x})$ εκφράζεται η γωνία στροφής του βραχίονα πλέον με ανεξάρτητη μεταβλητή την μεταβλητή x.

Ο προσδιορισμός της μεταβλητής d η οποία εκφράζει στο χωρόδετο σύστημα αναφοράς την συνιστώσα κατά y της θέσης του κέντρου βάρους θα προσδιοριστεί πλέον από την παρακάτω σχέση:

$$d = \frac{\int_0^L Y^*(\mathrm{s})\,\mathrm{dw}}{\int_0^L dw} \tag{4-69}$$

Όπου με $\mathrm{Y}^*(\mathrm{s})$ συμβολίζονται οι κατα y συνιστώσες θέσης του κέντροβαρικού άξονα στο χωρόδετο σύστημα αναφοράς ως προς τη μεταβλητή s, $\rho^*(\mathrm{s})$ η συνάρτηση μάζας ανά μονάδα μήκους στη παραμορφωμένη κατάσταση, L το τελικό μήκος του βραχίονα στη παραμορφωμένη κατάσταση, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και w το βάρος του βραχίονα. Αν το βάρος του βραχίονα αντικατασταθεί σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

Αν στη σχέση (4-69) τεθεί όπου $dw \to \rho^* gds$ και αντικατασταθεί όπου $s \to x$ και χρησιμοποιηθεί η σχέση (4-23) για τα διαφορικά θα προκύψει η παρακάτω σχέση:

$$d = \frac{\int_0^{L_o} Y(\mathrm{x})\rho(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(1+\frac{N(\mathrm{x})}{AE})\,\mathrm{dx}}{\int_0^{L_o} \rho(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(1+\frac{N(\mathrm{x})}{AE})\,\mathrm{dx}} \tag{4-70}$$

Με χρήση της σχέσης (3-35) για την κατανομή μάζας η παραπάνω σχέση γίνετε:

$$d = \frac{\int_0^{L_o} Y(\mathrm{x})\rho_o\,\mathrm{dx}}{\int_0^{L_o} \rho_o\,\mathrm{dx}} \tag{4-71}$$

με απλοποίηση της κατανομής μάζας ρ_o και υπολογισμού του ολοκληρώματος στον παρονομαστή έχουμε:

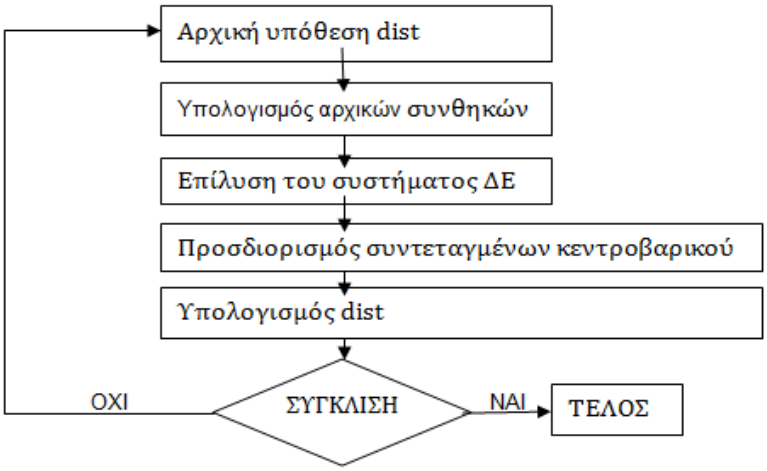
$$d = \frac{\int_0^{L_o} Y(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}}{L_o} \tag{4-72}$$

Όπου με L_o συμβολίζεται το μήκος του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα στην απαραμόρφωτη κατακόρυφη κατάσταση.

Παρουσιάζεται παρακάτω η διαδικασία επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων πιο συγκεντρωμένα:

1. Αρχικά γίνεται μια υπόθεση για την μεταβλητή d
2. Ορίζονται οι αρχικές συνθήκες βάσει των (4-57), (4-58), (4-59), (4-60), (4-61) και (4-62).
3. Επιλύεται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων.
4. Προσδιορίζονται οι συνιστώσες της θέσης κατά x και y κατεύθυνση του κεντροβαρικού άξονα στο χωρόδετο σύστημα αναφοράς .
5. Προσδιορίζεται η μεταβλητή d σύμφωνα με τη σχέση 4-72 και αν δεν συγκλίνει πάμε πάλι στο βήμα 1.

Το σχήμα 4-5 δείχνει την διαδικασία επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων (4.48)-(4-53)



Σχήμα 4-5. Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.

Με χρήση του αλγορίθμου του σχήματος 4-5 δίνεται η λύση δηλαδή προσδιορίζεται το σχήμα του βραχίονα και όπως θα φανεί στη συνέχεια αυτό επιτυγχάνεται με μεγάλη ακρίβεια.

4.5 Συμπεράσματα-παρατηρήσεις

Όπως παρατηρήθηκε ο ορισμός της παραμόρφωσης που χρησιμοποιείται είναι ο enjineering strain definition.

Ο παραπάνω ορισμός είναι κατάλληλος για μεγάλες εκτροπές αλλά δεν είναι κατάλληλος για να περιγράψει με ακρίβεια μεγάλες παραμορφώσεις διότι όπως εξηγήθηκε στην ενότητα 2 ο ορισμός αυτό είναι μια γραμμικοποιημένη εκδοχή του ορισμού Green-Lagrange.Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε βραχίονες που η κατασκευή τους είναι τέτοια ώστε να παραμορφώνονται πολύ δεν μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια το σχήμα του ρομπότ από τον παραπάνω ορισμό και για αυτό γίνεται η εισαγωγή άλλου ορισμού παραμόρφωσης στο επόμενο κεφάλαιο.

5 Μοντέλο μεγάλων μετατοπίσεων

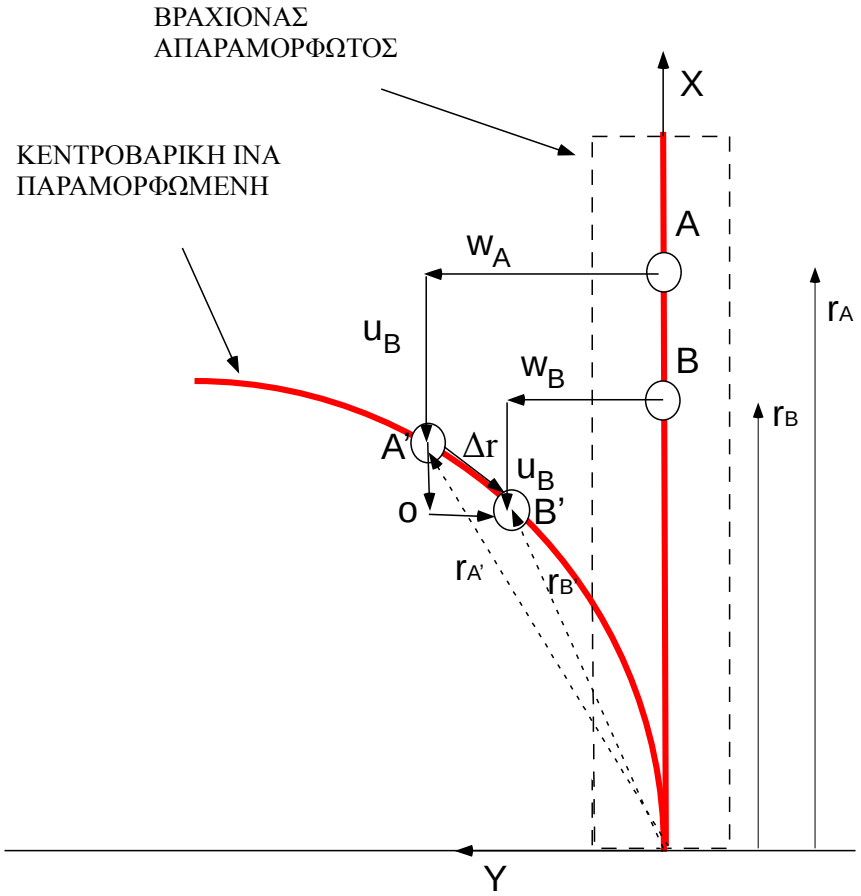
5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η μηχανική των μεγάλων μετατοπίσεων και θα χρησιμοποιηθεί η διαφορική εξίσωση των μεγάλων μετατοπίσεων η οποία θεωρείται ότι μπορεί να περιγράψει τις μεγάλες παραμορφώσεις ενός συνεχούς μέσου οι οποίες επηρεάζουν και την εκτροπή όπως συμβαίνει στον εύκαμπτος βραχίονα. Θα προκύψει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που θα έχει ως τελικό σκοπό τον προσδιορισμό του σχήματος του ρομπότ μετά από την επενέργηση δύο ανταγωνιστών τενόντων.

5.2 Προσδιορισμός της διαφορικής εξίσωσης των μεγάλων μετατοπίσεων

Η διαφορική εξίσωση των μεγάλων μετατοπίσεων χρησιμοποιείται σε συνεχή μέσα τα οποία δέχονται μεγάλες μετατοπίσεις. Ο εύκαμπτος βραχίονας είναι κατασκευσμένος έτσι ώστε να εκτρέπεται σε μεγάλο βαθμό από την αρχική του θέση και έτσι κάθε σημείο του έχει μεγάλες κατακόρυφες αλλά και οριζόντιες μετατοπίσεις.

Αρχικά παρουσιάζεται το Σχήμα 5-1 το οποίο παρουσιάζει την κατακόρυφη αρχική κατάσταση του κεντροβαρικού άξονα και την τελική κατάσταση του εκτρεπόμενου πλέον βραχίονα.



Σχήμα 5-1. Μετατοπίσεις δύο διαδοχικών σημείων που απέχουν dx.

Στο Σχήμα 5-1 φαίνονται δύο διαδοχικά σημεία στις θέσεις Α και Β του κεντροβαρικού άξονα τα οποία απέχουν απόσταση dx αρχικά μεταξύ τους. Υστερα από την επενέργηση ο βραχίονας εκτρέπεται και έτσι το σημείο Α μετατοπίζεται στη θέση A' και το σημείο Β στη θέση B'. Τα σημεία A' και B' ορίζουν ένα τόξο το οποίο έχει πλέον μήκος ds.

Η αρχική θέση του σημείου Α είναι:

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

Η τελική θέση του σημείου είναι

$$\mathbf{r}_{A'} = \begin{bmatrix} x_A + u_A \\ w_A \end{bmatrix} \tag{5-2}$$

Όπου με u_A απεικονίζεται η μετατόπιση του σημείου Α κατά τον x άξονα και w_A η μετατόπιση του σημείου Α κατά τον y άξονα.

Η αρχική θέση του σημείου Β είναι :

$$\mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5-3}$$

Η τελική θέση του σημείου είναι :

$$\mathbf{r}_{B'} = \begin{bmatrix} x_B + u_B \\ w_B \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

Όπου με u_B απεικονίζεται η μετατόπιση του σημείου Β κατά τον x άξονα και w_B η μετατόπιση του σημείου Β κατά τον y άξονα

Η διαφορά των δύο θέσεων A' και B' προκύπτει από το παρακάτω διάνυσμα :

$$\mathbf{\Delta r} = \mathbf{r}_{B'} - \mathbf{r}_{A'} \tag{5-5}$$

Με αντικατάσταση των (5-2) και (5-4) στη (5-5), προκύπτει ότι:

$$\mathbf{\Delta r} = \begin{bmatrix} x_B + u_B - x_A - u_A \\ w_B - w_A \end{bmatrix} \tag{5-6}$$

Ο ορισμός της παραγώγου μια συνάρτησης δίνει την παρακάτω σχέση:

$$f(\mathrm{x} + dx) \simeq f(\mathrm{x}) + \frac{\partial f}{dx} dx = f(\mathrm{x}) + df \tag{5-7}$$

Για τις συναρτήσεις οριζόντιας $u(x)$ και κατακόρυφης μετατόπισης $w(x)$ κάθε σημείου του κεντροβαρικού άξονα ισχύει ότι έχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή την x η οποία εκφράζει τη θέση κάθε σημείου του απαραμόρφωτου κατακόρυφου βραχίονα και οπότε ισχύει:

$$w = w(x) \tag{5-8}$$

$$u = u(x) \tag{5-9}$$

Έστω ότι για την μετατόπιση κατά τον άξονα x του σημείου Β ισχύει ότι

$$u_B = u(x_B) \tag{5-10}$$

Ισχύει επίσης ότι εφόσον τα δύο σημεία Α και Β απέχουν αρχικά dx

$$x_A - x_B = dx \tag{5-11}$$

Η παρακάτω σχέση εκφράζει τη μετατόπιση του σημείου Α κατά την x διεύθυνση:

$$u_A = u(x_A) \tag{5-12}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου από τη (5-7) με αντικατάσταση της (5-11) στην (5-12) ισχύει:

$$u_A = u(x_A) = u(x_B + dx) = u(x_B) + du = u_B + du \tag{5-13}$$

Οπότε προκύπτει ότι,

$$u_B - u_A = -du \tag{5-14}$$

Έστω ότι για την μετατόπιση κατά τον άξονα y του σημείου B ισχύει ότι

$$w_B = w(x_B) \tag{5-15}$$

Η παρακάτω σχέση εκφράζει τη μετατόπιση του σημείου A κατά την y διεύθυνση:

$$w_A = w(x_A) \tag{5-16}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου από τη (5-7) και αντικατάσταση από την σχέση (5-11) στην (5-16) ισχύει:

$$w_A = w(x_A) = w(x_B + dx) = w(x_B) + dw = w_B + dw \tag{5-17}$$

Οπότε προκύπτει ότι,

$$w_B - w_A = -dw \tag{5-18}$$

Η εξίσωση (5-6) με αντικατάσταση των (5-11), (5-14) και (5-18) γίνεται:

$$\mathbf{\Delta r} = \begin{bmatrix} -du - dx \\ -dw \end{bmatrix} \tag{5-19}$$

Επίσης ισχύει:

$$\|\Delta r\| = ds \tag{5-20}$$

Στο Σχήμα 5-1 εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A'OB'$ προκύπτει ότι:

$$ds^2 = (-du - dx)^2 + (-dw)^2 \tag{5-21}$$

Αν διαιρεθεί η σχέση (5-21) με dx^2 θα προκύψει:

$$(\frac{ds}{dx})^2 = (\frac{du}{dx} + 1)^2 + (\frac{dw}{dx})^2 \tag{5-22}$$

Αν εφαρμοστεί η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας στα δύο μέλη της εξίσωσης (5-22) έχουμε ότι:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{(\frac{du}{dx} + 1)^2 + (\frac{dw}{dx})^2} \tag{5-23}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5-23 με dx προκύπτει η παρακάτω σχέση η οποία συνδέει το μήκος του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα s όταν αυτός έχει εκτραπεί σε σχέση με τις συναρτήσεις μετατοπίσεων

$$ds = +\sqrt{(\frac{du}{dx} + 1)^2 + (\frac{dw}{dx})^2}\, dx \tag{5-24}$$

Από την εξίσωση (5-24) φαίνεται ότι κρατάμε μόνο το θετικό πρόσιμο διότι αλλιώς το διαφορικό ds θα έπαιρνε αρνητικές τιμές,κάτι το οποίο είναι άτοπο.

Η (5-24) με ολοκλήρωση δίνει το μήκος s του παραμορφωμένου κεντροβαρικού άξονα συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής x του απαραμόρφωτου κατακόρυφου βραχίονα:

$$s(x)=\int_0^x\sqrt{(\frac{du}{d\xi}+1)^2+(\frac{dw}{d\xi})^2}\,d\xi \tag{5-25}$$

Από το Σχήμα 5-1 και το τρίγωνο $A^{'}OB^{'}$ προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\tan(\varphi)=\frac{-dw}{-(du+dx)} \tag{5-26}$$

Η (5-26) γράφεται και ως:

$$\tan(\varphi)=\frac{\frac{dw}{dx}}{\frac{du}{dx}+1} \tag{5-27}$$

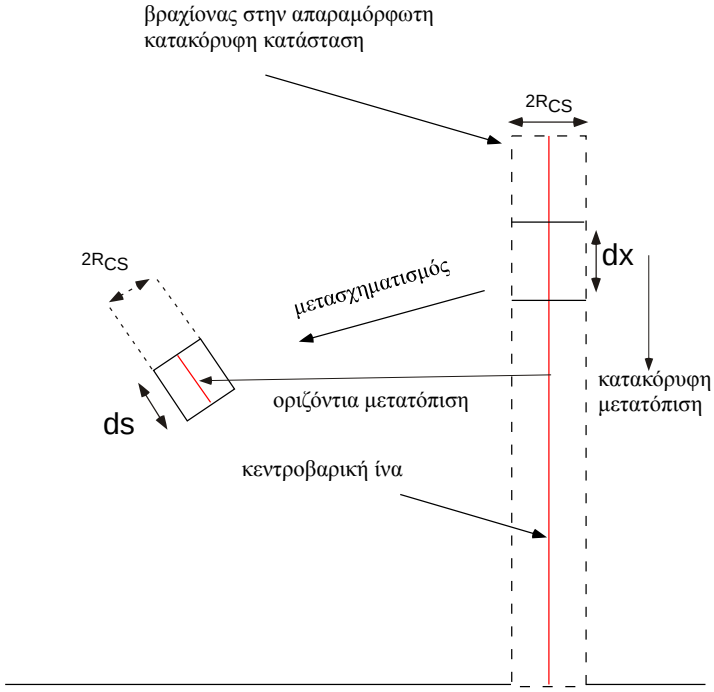
Η (5-27) είναι μια διαφορική εξίσωση που συνδέει την οριζόντια μετατόπιση $w(x)$ με την κατακόρυφη μετατόπιση $u(x)$ και την γωνία εκτροπής του παραμορφωμένου διαφορικού στοιχείου φ(x):

$$\frac{dw}{dx}=\tan(\varphi)(\frac{du}{dx}+1) \tag{5-28}$$

Ορίζεται η παρακάτω εξίσωση παραμόρφωσης για μια τυχαία ίνα του βραχίονα η οποία απέχει απόσταση z από το κεντροβαρικό άξονα σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό παραμόρφωσης γνωστό και ως Green-Lagrange:

$$\varepsilon(\mathrm{x})=\frac{1}{2}\frac{ds^2-dx^2}{dx^2} \tag{5-29}$$

Στη σχέση (5-29) με ds απεικονίζεται το μήκος ενός διαφορικού στοιχείου του βραχίονα το οποίο έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα και οριζόντια. Το στοιχείο αρχικά είχε μήκος dx όπως φαίνεται στο Σχήμα 5-2:

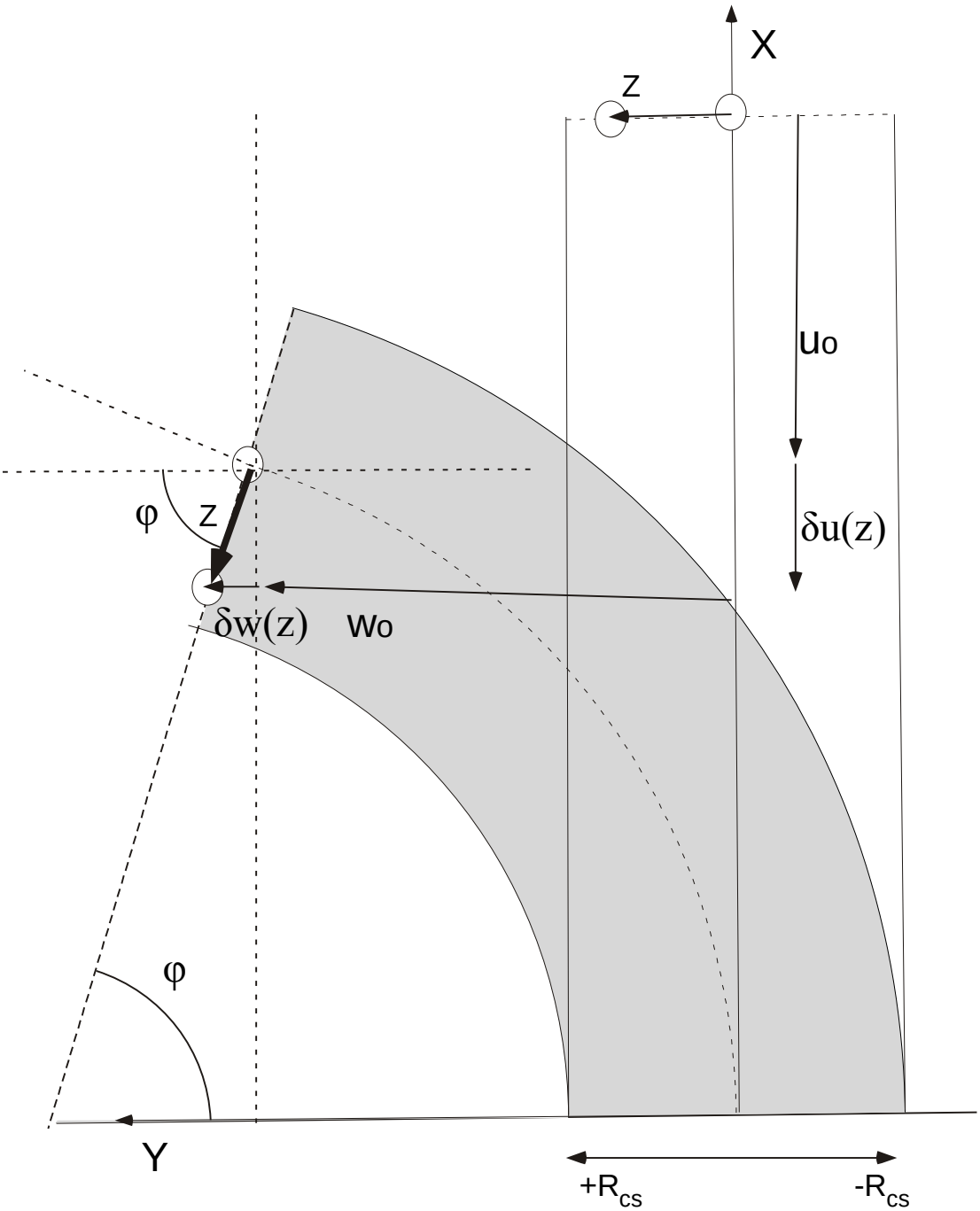


Σχήμα 5-2. Μετατόπιση ενός στοιχείου του κεντροβαρικού άξονα οριζόντια και κατακόρυφα.

Αν συνδυαστούν οι σχέσεις (5-23) και (5-29) προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση η οποία εκφράζει την παραμόρφωση μιας ίνας του βραχίονα σε απόσταση z από τον κεντροβαρικό άξονα συναρτήσει των μετατοπίσεων $u(x,z)$ κατά την κατεύθυνση x και $w(x,z)$ κατά την κατεύθυνση y:

$$\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{z}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{5-30}$$

Η μετατόπιση ενός σημείου μια τυχαίας ίνας σε απόσταση z από το αντίστοιχο σημείο του κεντροβαρικού άξονα μπορεί να συνδεθεί με κάποιες σχέσεις. Στο Σχήμα 5-3 θα φανούν ποιες είναι οι σχέσεις αυτές γεωμετρικά και θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.



Σχήμα 5-3. Μετατόπιση σημείου σε απόσταση z από τον κεντροβαρικό άξονα.

Στο Σχήμα 5-3 τα σύμβολα έχουν την εξής επεξήγηση:

z : απόσταση σημείου τυχαίας ίνας από το αντίστοιχο του κεντροβαρικού

$u_o(x)$: η μετατόπιση ενός σημείου του κεντροβαρικού κατά χ κατεύθυνση

$w_o(x)$: η μετατόπιση ενός σημείου του κεντροβαρικού κατά y κατεύθυνση

$\delta u(x,z)$: επιπρόσθετη μετατόπιση κατά χ του σημείου σε απόσταση z από κεντροβαρικό σημείο

$\delta w(x,z)$: επιπρόσθετη μετατόπιση κατά y του σημείου σε απόσταση z από κεντροβαρικό σημείο

R_{cs} : ακτίνα διατομής του βραχίονα.

Από το Σχήμα 5-3 προκύπτει η παρακάτω σχέση που συνδέει η μετατόπιση ενός τυχαίου σημείου σε απόσταση z από το αντίστοιχο του κεντροβαρικού:

$$\begin{bmatrix} u(x,z) \\ w(x,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_o(x) \\ w_o(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta u(\mathrm{x},z) \\ \delta w(\mathrm{x},z) \end{bmatrix} \tag{5-31}$$

όπου:

$w(x)$: μετατόπιση κατά y , σημείου σε απόσταση z από κεντροβαρικό σημείο

$u(x)$: μετατόπιση κατά x, σημείου σε απόσταση z από κεντροβαρικό σημείο

Σύμφωνα με το σχήμα 5-3, η σχέση που συνδέει την $\delta u(z)$ με την απόσταση z και την γωνία εκτροπής φ είναι:

$$\delta u(z) = -z\sin(\varphi(x)) \tag{5-32}$$

Η σχέση που συνδέει την $\delta w(z)$ με την απόσταση z και τη γωνία εκτροπής φ Βάσει του σχήματος 5-3 είναι:

$$\delta w(z) = z\sin(\varphi(x)) \tag{5-33}$$

Με αντικατάσταση των (5-32) και (5-33) στην (5-31) προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} u(x,z) \\ w(x,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_o(x) \\ w_o(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z\sin(\varphi(x)) \\ +z\cos(\varphi(x)) \end{bmatrix} \tag{5-34}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (5-34) ως προς χ προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{u}(x,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{w}(x,z)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{du_o(x)}{dx} \\ \dfrac{dw_o(x)}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z\cos(\varphi(x))\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \\ -z\sin(\varphi(x))\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \end{bmatrix} \tag{5-35}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5-35) στην (5-30) προκύπτει:

$$\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{z}) = u'_o(x) - z\cos(\theta(\mathrm{x}))\theta'(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}(u'_o(x) - z\cos(\theta(\mathrm{x}))\theta'(\mathrm{x}))^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{w}'_o(x) - z\sin(\theta(\mathrm{x}))\theta'(\mathrm{x}))^2 \tag{5-36}$$

Η σχέση (5-36) εκφράζει την παραμόρφωση για κάθε διαφορικό στοιχείο κάθε ίνας του βραχίονα συναρτήσει των μετατοπίσεων του αντίστοιχου σημείου του κεντροβαρικού άξονα κατά x και y κατεύθυνση αντίστοιχα $u_o(x)$ και $w_o(x)$.

Για την κεντροβαρική ίνα όπου ισχύει :

$$z = 0 \tag{5-37}$$

Προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\sigma(\mathrm{x}) = E\varepsilon(\mathrm{x},0) \tag{5-38}$$

Για την κατανόηση της παραπάνω σχέσης πρέπει να αναφερθεί ότι ο κεντροβαρικός άξονας και συγκεκριμένα κάθε διαφορικό στοιχείο του αποτελεί και από ένα γραμμικό ελατήριο μήκους dx. Η παραμόρφωση κάθε τέτοιου ελατηρίου συνδέεται με την σχέση (4-38) όπου σ(x) είναι η ορθή τάση της διατομής και Ε το μέτρο ελαστικότητας.

Για την ορθή τάση σε μια διατομή ισχύει η παρακάτω σχέση που την συνδέει με την ορθή δύναμη N μέσω του εμβαδού της διατομής Α.

$$\sigma(\mathrm{x}) = \frac{N(\mathrm{x})}{A} \tag{5-39}$$

Ο συνδυασμός των (5-38) και (5-39) δίνει τη παρακάτω σχέση:

$$\frac{N(x)}{AE} = \varepsilon(\mathrm{x},0) \tag{5-40}$$

Για την ε(x, 0) προκύπτει η παρακάτω σχέση αν τεθεί όπου z=0 στην (5-36):

$$\varepsilon(\mathrm{x},0) = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_o}{dx}\right)^2 \tag{5-41}$$

Ο συνδυασμός των (5-40) και (5-41) δίνει:

$$\frac{N(\mathrm{x})}{AE} = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_o}{dx}\right)^2 \tag{5-42}$$

όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής , E το μέτρο ελαστικότητας $u_o(x)$ η μετατόπιση κάθε σημείου του κεντροβαρικού άξονα κατά x και $w_o(x)$ η μετατόπιση κάθε σημείου του κεντροβαρικού άξονα ως προς y κατεύθυνση.

Με αντικατάσταση της (5-28) στην (5-42) προκύπτει:

$$\frac{N(\mathrm{x})}{AE} = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\tan(\varphi)^2\left(\frac{du}{dx}+1\right)^2 \tag{5-43}$$

Η ροπή σε μια διατομή προσδιορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$M(x) = -\int_A \sigma(\mathrm{x},\mathrm{z})zdA \tag{5-44}$$

Όπου σ η ορθή τάση στη διατομή και z η απόσταση από τον κεντροβαρικό άξονα.

Η σχέση ορθής τάσης σ(x, z) παραμόρφωσης ε(x, z) για κάθε ίνα του βραχίονα προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma(\mathrm{x},\mathrm{z}) = \mathrm{E}\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{z}) \tag{5-45}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5-45) στην (5-44) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

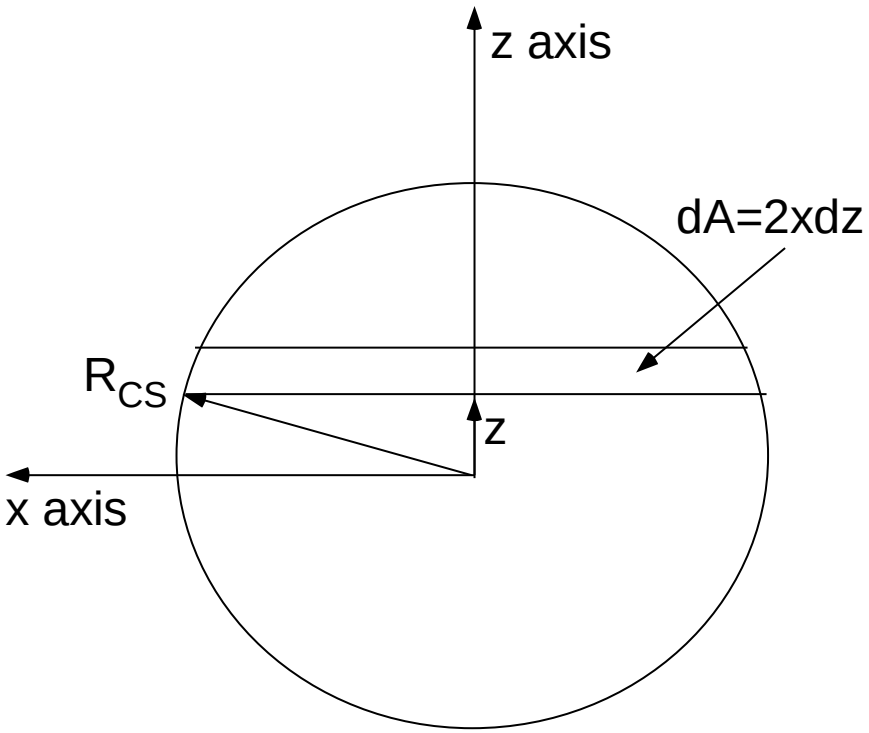
$$\mathrm{M}(\mathrm{x}) = \int_A E\varepsilon(\mathrm{x},\mathrm{z})zdA \tag{5-46}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5-36) στην (5-46) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$M = \mathrm{E}\int_{\mathrm{A}} \mathrm{z}\left((u'_o(x) - z\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x}) + \frac{1}{2}(u'_o(x) - z\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x}))^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{w}'_o(x) - z\sin(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x}))^2\right)dA \tag{5-47}$$

Η ολοκλήρωση της (5-47) θα δώσει την εξίσωση που συνδέει την γωνία εκτροπής με τη ροπή. το διαφορικό dA αναλύεται σύμφωνα με Καρτεσιανές συντεταγμένες πάνω στη διατομή διότι όπως

φαίνεται η (5-47) έχει ως μεταβλητή την απόσταση από τον κεντροβαρικό άξονα z και έτσι αν χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες δεν θα διευκολύνεται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος. Στο Σχήμα 5-3 αναλύεται το διαφορικό dA:



Σχήμα 5-4. Ανάλυση του διαφορικού εμβαδού.

Σύμφωνα με το Σχήμα 5-4 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$x^2 = R^2 + z^2 \tag{5-48}$$

Το R εκφράζει την ακτίνα της διατομής.

Με επίλυση της (5-48) ως προς x προκύπτει :

$$x = \sqrt{R^2 - z^2} > 0 \tag{5-49}$$

Το διαφορικό εμβαδό dA προκύπτει σύμφωνα με το Σχήμα (5-4) Από τη παρακάτω σχέση:

$$dA = 2xdz \tag{5-50}$$

Αντικαθιστώντας τη (5-48) στην (5-49) προκύπτει ότι:

$$dA = 2\sqrt{R^2 - z^2}dz \tag{5-51}$$

Στη (5-47) η ολοκληρωτέα συνάρτηση αποτελείται είναι ένα άθροισμα,Αυτό το αναλύουμε σε επιμέρους ολοκληρώματα ως άθροισμα ολοκληρωμάτων και αντικαθίσταται η (5-51) για το διαφορικό. Για κάθε ένα από αυτά τα ολοκληρώματα, αν η της μεταβλητής z είναι περιττή, τότε σύμφωνα θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού το ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν για συμμετρικά όρια ολοκλήρωσης $(-\mathrm{R}, +\mathrm{R})$.

Θα ισχύει λοιπόν:

$$\int_{-R}^{+R} \mathrm{z}\, u'_o(x) 2\sqrt{R^2 - z^2}dz = 0 \tag{5-52}$$

$$\int_{-R}^{+R} z\frac{1}{2}u'^{2}_{o}(x)2\sqrt{R^2-z^2}dz=0 \tag{5-53}$$

$$\int_{-R}^{+R} z\frac{1}{2}(u'_o z\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x}))^2 2\sqrt{R^2-z^2}dz=0 \tag{5-54}$$

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{2}zw'^{2}_{o}(x)2\sqrt{R^2-z^2}dz=0 \tag{5-55}$$

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{2}\mathrm{z}(\mathrm{w}'_o\, z\sin(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x}))^2 2\sqrt{R^2-z^2}dz=0 \tag{5-56}$$

Για τα ολοκληρώματα που έχουν άρτια δύναμη του z ισχύει:

$$\int_A -Ez^2\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x})2\sqrt{R^2-z^2}dz=-\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{EI} \tag{5-57}$$

$$\int_A -Ez^2u'_o\cos(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x})2\sqrt{R^2-z^2}dz=-\cos(\varphi(\mathrm{x}))u'_o\varphi'(\mathrm{x})\,\mathrm{EI} \tag{5-58}$$

$$\int_{-R}^{+R} -w'_o z^2\sin(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x})2\sqrt{R^2-z^2}dz=-w'_o\sin(\varphi(\mathrm{x}))\varphi'(\mathrm{x})EI \tag{5-59}$$

Από τις (5-52), (5-53), (5-54), (5-55), (5-56), (5-57), (5-58), (5-59) με αντικατάσταση στην εξίσωση (5-47) προκύπτει (βλέπουμε παρακάτω παραγώγους αυτές είναι ως προς x):

$$\frac{M}{EI}=-\varphi'\cos(\varphi)-u'_o\varphi'\cos(\varphi)-\varphi'\,\mathrm{w}'_o\sin(\varphi) \tag{5-60}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5-28) στην (5-60) προκύπτει:

$$\frac{M}{EI}=-\varphi'\cos(\varphi)-u'_o\varphi'\cos(\varphi)-\varphi'\tan(\varphi)(\mathrm{u}'_o+1)\sin(\varphi) \tag{5-61}$$

Η σχέση (4-61) αποτελεί την σχέση ροπής M γωνίας εκτροπής φ, με τις μετατοπίσεις του κεντροβαρικού άξονα κατά x , u_o και κατά y, w_o .

5.3 Προσδιορισμός συστήματος διαφορικών εξισώσεων για την εύρεση του σχήματος του βραχίονα με επενέργηση δύο ανταγωνιστών τενόντων

Στο δεύτερο κεφάλαιο προσδιορίστηκαν οι εξισώσεις ισορροπίας στο σχετικό σύστημα αναφοράς κατά την εφαπτομενική και την ακτινική κατεύθυνση, οι εξισώσεις αυτές είναι:

$$dq=-T_1d\varphi-T_2d\varphi-\mathrm{N}d\varphi-\sin(\varphi)\rho gds \tag{5-62}$$

$$dN=-dT_2-dT_1+qd\varphi+\cos(\varphi)\rho gds \tag{5-63}$$

$$dM=(\mathrm{dT}_2-dT_1)\mathrm{R}_{CS}+qds \tag{5-64}$$

$$\frac{dT_1(s)}{ds}=-\mu_{o\lambda}T_1(s)\frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{5-65}$$

$$\frac{dT_2(s)}{ds}=-\mu_{o\lambda}T_2(s)\frac{d\varphi(s)}{ds} \tag{5-66}$$

Όπου q είναι η διατμητική τάση N η ορθή τάση φ η γωνία εκτροπής του βραχίονα ρ η συνάρτηση κατανομής μάζας ανά μονάδα μήκους του βραχίονα M η εσωτερική ροπή g η επιτάχυνση της βαρύτητας R η ακτίνα της διατομής του βραχίονα, T_1 η δύναμη τάνυσης του αριστερού τένοντα , T_2 η δύναμη τάνυσης του δεξιά τένοντα και $\mu_{o\lambda}$ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης.

Όλες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι εκφρασμένες στο σχετικό σύστημα αναφοράς και έχουν ως ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος του παραμορφωμένου βραχίονα s .

Γίνεται αλλαγή μεταβλητής στις (5-62) έως (5-66) και τεθεί όπου $s \to x$ και χρησιμοποιηθεί η διαφορική σχέση (5-24) που συνδέει το ds με το dx πλέον οι εξισώσεις θα είναι εκφρασμένες ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x του απαραμόρφωτου κατακόρυφου βραχίονα οπότε το σετ των εξισώσεων γίνεται:

$$dq = -T_1 d\varphi - T_2 d\varphi - \mathrm{N} d\varphi - \sin(\varphi)\rho g\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2}\,dx \tag{5-67}$$

$$dN = -dT_2 - dT_1 + q d\varphi + \cos(\varphi)\rho g\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2}\,dx \tag{5-68}$$

$$dM = (\mathrm{dT}_2 - dT_1)\mathrm{R}_{CS} + q\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2}\,dx \tag{5-69}$$

$$\frac{dT_1}{dx} = -\mu_{o\lambda} T_1 \frac{d\varphi}{dx} \tag{5-70}$$

$$\frac{dT_2}{dx} = -\mu_{o\lambda} T_2 \frac{d\varphi}{dx} \tag{5-71}$$

οι εξισώσεις (5-67), (5-68), (5-69) διαιρούνται με dx προκύπτει :

$$\frac{dq}{dx} = -T_1\frac{d\varphi}{dx} - T_2\frac{d\varphi}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\varphi}{dx} - \sin(\varphi)\rho g\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2} \tag{5-72}$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} + \cos(\varphi)\rho g\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2} \tag{5-73}$$

$$\frac{dM}{dx} = (\frac{\mathrm{dT}_2}{dx} - \frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{dx}})\mathrm{R}_{CS} + q\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2} \tag{5-74}$$

Αν θεωρηθεί ένα διαφορικό στοιχείο είναι γνωστό ότι η μάζα του διατηρείται πριν και μετά την παραμόρφωση που δέχεται και έτσι θα ισχύει ότι :

$$\rho(s)ds = \rho_o dx \tag{5-75}$$

Όπου ρ η συνάρτηση κατανομής μάζας ανά μονάδα μήκους στην παραμορφωμένη κατάσταση και ρ_o η συνάρτηση κατανομής μάζας ανά μονάδα μήκους στην απαραμόρφωτη κατάσταση.

Αν στη (5-75) αντικατασταθεί η (5-24) ώστε να τεθεί $s \to x$ προκύπτει:

$$\rho_o dx = \rho(x)\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2}\,dx \tag{5-76}$$

Με απλοποίηση η (5-76) γίνεται:

$$\rho_o = \rho(x)\sqrt{(\frac{du_o}{dx}+1)^2 + (\frac{dw_o}{dx})^2} \tag{5-77}$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (5-77) στην (5-72) και (5-73) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{dq}{dx} = -T_1\frac{d\varphi}{dx} - T_2\frac{d\varphi}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\varphi}{dx} - \sin(\varphi)\rho_o g \tag{5-78}$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} + \cos(\varphi)\rho g \tag{5-79}$$

Στη (5-74) αντικαθίσταται η (5-28) προκύπτε ότι:

$$\frac{dM}{dx} = (\frac{\mathrm{dT_2}}{dx} - \frac{\mathrm{dT_1}}{\mathrm{dx}})\mathrm{R}_{CS} + q\left|1 + \frac{du_o}{dx}\right|\sqrt{1+\tan^2(\varphi)} \tag{5-80}$$

Το σετ των (5-81) (5-82) (5-83) (5-84) (5-85) (5-86) (5-87) (5-88) δίνει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων το οποίο βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή και η επίλυση του δίνει το σχήμα του βραχίονα.

$$\frac{dw_o}{dx} = \tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx} + 1) \tag{5-81}$$

$$\frac{N(\mathrm{x})}{AE} = \frac{du_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\tan(\varphi)^2\left(\frac{du}{dx}+1\right)^2 \tag{5-82}$$

$$\frac{M}{EI} = -\varphi^{'}\cos(\varphi) - u_o^{'}\varphi^{'}\cos(\varphi) - \varphi^{'}\tan(\varphi)(\mathrm{u}_o^{'}+1)\sin(\varphi) \tag{5-83}$$

$$\frac{dT_1}{dx} = -\mu_{o\lambda}T_1\frac{d\varphi}{dx} \tag{5-84}$$

$$\frac{dT_2}{dx} = -\mu_{o\lambda}T_2\frac{d\varphi}{dx} \tag{5-85}$$

$$\frac{dq}{dx} = -T_1\frac{d\varphi}{dx} - T_2\frac{d\varphi}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\varphi}{dx} - \sin(\varphi)\rho_o g \tag{5-86}$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} + \cos(\varphi)\rho g \tag{5-87}$$

$$\frac{dM}{dx} = (\frac{\mathrm{dT_2}}{dx} - \frac{\mathrm{dT_1}}{\mathrm{dx}})\mathrm{R}_{CS} + q\left|1 + \frac{du_o}{dx}\right|\sqrt{1+\tan^2(\varphi)} \tag{5-88}$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος απαιτεί μία διαδικασία η οποία θα φέρει το σύστημα στην μορφή:

$$\mathrm{X}^{'} = AX + BU \tag{5-89}$$

Όπου:

$$X = \begin{bmatrix} N & q & M & u_o & T_1 & T_2 & \varphi & w_o \end{bmatrix}^T \tag{5-90}$$

και U η δύναμη της βαρύτητας σε διανυσματική μορφή.

Αρχικά θέτουμε στην εξίσωση (5-43):

$$\lambda = \frac{du_o}{dx} \tag{5-91}$$

Έτσι προκύπτει μία αλγεβρική εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ

$$\frac{N(\mathrm{x})}{AE} - (\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}\tan(\varphi)^2(\lambda+1)^2) = 0 \tag{5-92}$$

Με πράξεις και αναγωγή ομοίων όρων, το τριώνυμο ως προς λ παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{5-93}$$

Οι συντελεστές λαμβάνουν τις παρακάτω τιμές:

$$a = \frac{\tan^2(\varphi)}{2} + \frac{1}{2} \tag{5-94}$$

$$b = \tan^2(\varphi) + 1 \tag{5-95}$$

$$c = \frac{\tan^2(\varphi)}{2} - \frac{\mathrm{N}L}{AE} \tag{5-96}$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\tan^2(\varphi)+1)^2 - 4(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}+\frac{1}{2})(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}-\frac{\mathrm{N}L}{AE}) \quad (5\text{-}97)$$

Απαιτείται η διακρίνουσα να είναι θετική και έτσι προκύπτουν δύο άνισες λύσεις:

$$\lambda_1 = -\frac{-[\tan^2(\varphi)+((\tan^2(\varphi))+1)^2-(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}-\frac{\mathrm{N}L}{AE})(2\tan^2(\varphi)+2))^{\frac{1}{2}}+1]}{\tan^2(\varphi)+1} \quad (5\text{-}98)$$

$$\lambda_2 = -\frac{-[\tan^2(\varphi)-((\tan^2(\varphi))+1)^2-(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}-\frac{\mathrm{N}L}{AE})(2\tan^2(\varphi)+2))^{\frac{1}{2}}+1]}{\tan^2(\varphi)+1} \quad (5\text{-}99)$$

Στο σημείο αυτό εύλογο είναι το ερώτημα ποια από τις δύο λύσεις της διακρίνουσας θα γίνει δεχτή ως σωστή. Η απάντηση είναι η εξής:

Αν ο βραχίονας εκτρέπεται στις μοίρες που αναγράφονται στην (5-100) τότε δεκτή γίνεται η λύση από την εξίσωση (5-98) και έτσι λοιπόν θα ισχύει:

$$\frac{du_o}{dx} = -\frac{-[\tan^2(\varphi)-((\tan^2(\varphi))+1)^2-(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}-\frac{\mathrm{N}L}{AE})(2\tan^2(\varphi)+2))^{\frac{1}{2}}+1]}{\tan^2(\varphi)+1}, \varphi \in (270, 90^o) \quad (5\text{-}100)$$

Τώρα λοιπόν με διαδοχικές αντικαταστάσει από το Symbolic Toolbox στο Matlab το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων είναι δυνατό να έρθει στη μορφή της (5-89). Οι αντικαταστάσεις γίνονται με την παρακάτω σειρά:

$$\frac{du_o}{dx} = -\frac{-[\tan^2(\varphi)+((\tan^2(\varphi))+1)^2-(\frac{\tan^2(\varphi)}{2}-\frac{\mathrm{N}L}{AE})(2\tan^2(\varphi)+2))^{\frac{1}{2}}+1]}{\tan^2(\varphi)+1}, \varphi \in (270^o, 90^o) \quad (5\text{-}101)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}\left(\cos(\varphi)+\frac{du_o}{dx}\cos(\varphi)+\tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx}+1)\sin(\varphi)\right) \quad (5\text{-}102)$$

$$\frac{dT_1}{dx} = -\mu_{o\lambda}T_1\frac{d\varphi}{dx} \quad (5\text{-}103)$$

$$\frac{dT_2}{dx} = -\mu_{o\lambda}T_2\frac{d\varphi}{dx} \quad (5\text{-}104)$$

$$\frac{dq}{dx} = -T_1\frac{d\varphi}{dx} - T_2\frac{d\varphi}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\varphi}{dx} - \sin(\varphi)\rho_o g \quad (5\text{-}105)$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} + \cos(\varphi)\rho g \quad (5\text{-}106)$$

$$\frac{dM}{dx} = (\frac{\mathrm{dT_2}}{dx} - \frac{\mathrm{dT_1}}{\mathrm{dx}})\mathrm{R}_{CS} + q\left|1+\frac{du_o}{dx}\right|\sqrt{1+\tan^2(\varphi)} \quad (5\text{-}107)$$

$$\frac{dw_o}{dx} = \tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx}+1) \quad (5\text{-}108)$$

Αν η εκτροπή του βραχίονα είναι μεταξύ των μοιρών που αναγράφονται στην (5-109) τότε χρησιμοποιείται το σύστημα που προκύπτει από διαδοχικές αντικαταστάσεις όπως φαίνεται από τις (5-109)-(5-116)

$$\frac{du_o}{dx} = -\frac{-[\tan^2(\varphi) + ((\tan^2(\varphi)) + 1)^2 - (\frac{\tan^2(\varphi)}{2} - \frac{NL}{AE})(2\tan^2(\varphi) + 2))^{\frac{1}{2}} + 1]}{\tan^2(\varphi) + 1}, \varphi \in (90^o, 270^o) \quad (5\text{-}109)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{EI}\left(\cos(\varphi) + \frac{du_o}{dx}\cos(\varphi) + \tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx} + 1)\sin(\varphi)\right) \quad (5\text{-}110)$$

$$\frac{dT_1}{dx} = -\mu_{o\lambda} T_1 \frac{d\varphi}{dx} \quad (5\text{-}111)$$

$$\frac{dT_2}{dx} = -\mu_{o\lambda} T_2 \frac{d\varphi}{dx} \quad (5\text{-}112)$$

$$\frac{dq}{dx} = -T_1 \frac{d\varphi}{dx} - T_2 \frac{d\varphi}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\varphi}{dx} - \sin(\varphi)\rho_o g \quad (5\text{-}113)$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{dT_2}{dx} - \frac{dT_1}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} + \cos(\varphi)\rho g \quad (5\text{-}114)$$

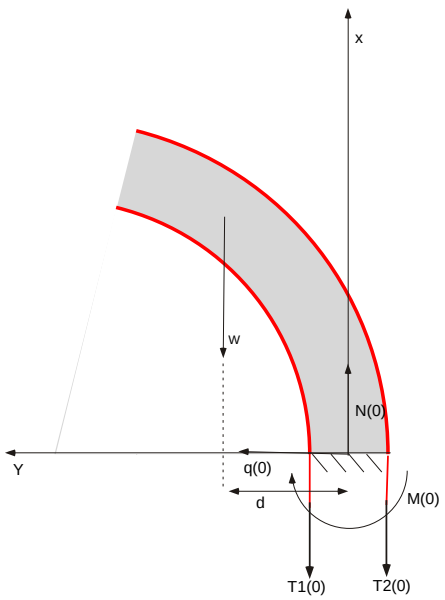
$$\frac{dM}{dx} = (\frac{\mathrm{dT}_2}{dx} - \frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{dx}})\mathrm{R}_{CS} + q\left|1 + \frac{du_o}{dx}\right|\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)} \quad (5\text{-}115)$$

$$\frac{dw_o}{dx} = \tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx} + 1) \quad (5\text{-}116)$$

Το σύνηθες σε μια εκτροπή είναι ότι ένα τμήμα του βραχίονα θα βρίσκεται στην μια περιοχή και το υπόλοιπο στην άλλη.Τότε πρέπει να βρούμε μέχρι πιο σημείο έχει εκτραπεί το τμήμα του βραχίονα στην μία περιοχή και να βάλουμε στο δεύτερο σύστημα ως αρχικές συνθήκες τις τελικές συνθήκες του πρώτου συστήματος.

5.4 Προσδιορισμός αρχικών συνθηκών και εύρεση του σχήματος του βραχίονα.

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος μπορούν να προσδιοριστούν από το Σχήμα 5-5 στο οποίο παρουσιάζεται ο βραχίονας, οι δυνάμεις στήριξης (πάκτωση) οι οποίες είναι η ορθή δύναμη, η διατμητική δύναμη, και η καμπτική ροπή.



Σχήμα 5-5. Αντιδράσεις στήριξης.

Έφόσον η στήριξη είναι πάκτωση αμέσως γίνεται αντιληπτό ότι εκεί οι οριακές συνθήκες είναι:

$$u_o(0) = 0 \tag{5-117}$$

$$w_o(0) = 0 \tag{5-118}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{5-119}$$

Επίσης ισχύει ότι για τη δύναμη της πάκτωσης κατά την x κατεύθυνση έχουμε ότι:

$$N(0) = \mathrm{N}_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}} = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) - W \tag{5-120}$$

Όπου $\mathrm{T}_1(0), \mathrm{T}_2(0)$, οι δυνάμεις των τενόντων πριν περάσουν από τα αυλάκια, θεωρούνται γνωστές και είναι είσοδοι για το σύστημα ενώ με W απεικονίζεται η δύναμη της βαρύτητας.

Για την δύναμη της πάκτωσης κατά την y κατεύθυνση προκύπτει ότι

$$q(0) = F_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}_y} = 0 \tag{5-121}$$

Για την ροπή της πάκτωσης ισχύει :

$$M_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} + d\,\mathrm{W} \tag{5-122}$$

Όπου d όπως φαίνεται στο Σχήμα (4-5) είναι η y συνιστώσα της θέσης του κέντρου βάρους του βραχίονα. Η τιμή της d είναι άγνωστη και ο αλγόριθμος επιλύεται επαναληπτικά μέχρι η d να συγκλίνει σε κάποια τιμή, Η τιμή της d προσδιορίζεται απο τον παρακάτω τύπο:

$$d = \frac{\int_0^L \mathrm{Y}(s)dw}{\int_o^L dw} \tag{5-123}$$

Όπως φαίνεται εδώ, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η s και άκρο ολοκλήρωσης το άγνωστο μήκος του παραμορφωμένου κεντροβαρικού άξονα L. Με Y(s) συμβολίζεται η y συνιστώσα θέσης των σημείων του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα. Το διαφορικό βάρος dw ενός απειροστού σημείου του βραχίονα αναλύεται ως:

$$dw = \rho(\mathrm{s})\,\mathrm{g}\,\mathrm{ds} \tag{5-124}$$

Με αντικατάσταση της (5-124) στην σχέση (5-123) προκύπτει ότι:

$$d = \frac{\int_0^L \mathrm{Y}(s)\rho g ds}{\int_o^L \rho g ds} \tag{5-125}$$

Αν όπου s τεθεί x στην (5-125) βάσει της σχέσης (5-24) και (5-25) η μεταβλητή d παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$d = \frac{\int_0^{L_O} \mathrm{Y}(x)\rho(x)g\sqrt{(\frac{du}{dx}+1)^2 + (\frac{dw}{dx})^2}\,dx}{\int_0^{L_O} \rho(x)g\sqrt{(\frac{du}{dx}+1)^2 + (\frac{dw}{dx})^2}\,dx} \tag{5-126}$$

Σύμφωνα με τη (5-77) η (5-126) απλοποιείται στην ως:

$$d = \frac{\int_0^{L_O} \mathrm{Y}(x)\rho_o g dx}{\int_0^{L_O} \rho_o g dx} = \frac{\int_0^{L_O} \mathrm{Y}(x) dx}{L_O} \tag{5-127}$$

Όπου L_O το μήκος του απαραμόρφωτου βραχίονα.

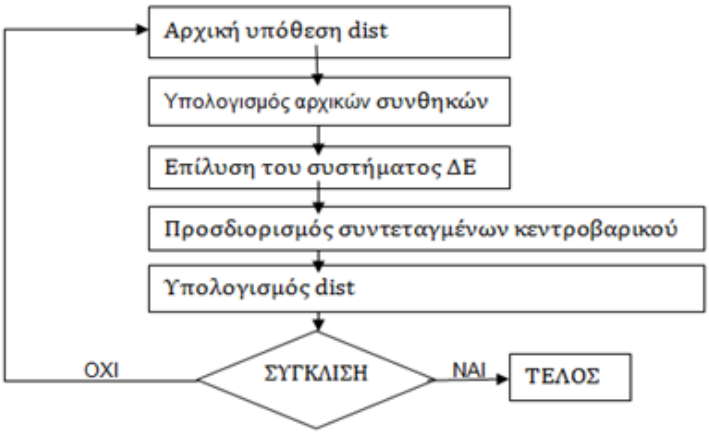
Οι x συνιστώσες $\mathrm{X}(\mathrm{x})$ των σημείων του κεντροβαρικού άξονα είναι:

$$X(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \mathrm{u}_o(x) \tag{5-128}$$

Οι y συνιστώσες $\mathrm{Y}(\mathrm{x})$ των σημείων του κεντροβαρικού άξονα είναι:

$$Y(\mathrm{x}) = \mathrm{w}_o(x) \tag{5-129}$$

Ετσι λοιπόν η μεταβλητή d υπολογίζεται αφού βρεθούν οι y συνιστώσες θέσης των σημείων του κεντροβαρικού άξονα. Παρακάτω φαίνεται ένα διάγραμμα που δείχνει το πως γίνεται η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.



Σχήμα 5-6. Αλγόριθμος επίλυσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.

Οπως φαίνεται από το Σχήμα 5-6 αρχικά γίνεται μια υπόθεση για την τιμή d, ύστερα υπολογίζονται οι αρχικές συνθήκες και προσδιορίζεται και η αρχική συνθήκη της ροπής μέσω της d. Γίνεται η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων και από εκεί προσδιορίζεται το σχήμα του κεντροβαρικού άξονα και έτσι και οι y συνιστώσες θέσης των σημείων του κεντροβαρικού άξονα και εν συνεχεία η μεταβλητή d. Αυτή η διαδικασία γίνεται μέχρι ο αλγόριθμος να συγκλίνει και να προσδιοριστεί η σωστή τιμή του d.

5.5 Συμπεράσματα

Το μοντέλο των μεγάλων παραμορφώσεων είναι ιδανικό για σώματα φτιαγμένα από υπερελαστικό υλικό τα οποία δέχονται μεγάλες παραμορφώσεις.Καθε απειροστό κομμάτι ίνας του ρομπότ που αρχικά ήταν απαραμόρφωτο μετά την επενέργηση παραμορφώνεται αξονικά και μετατοπίζεται οριζόντια και κατακόρυφα.Η γωνιακή εκτροπή εξαρτάται και από την παραμόρφωση και έτσι σε σχέση με το Bernulli μοντέλο η εκτροπή τροφοδοτείται από μεγάλες παραμορφώσεις με συνέπεια να δίνεται αποτέλεσμα το οποίο με πολύ μεγάλη ακρίβεια περιγράφει το σχήμα του βραχίονα

6 Προσομοιώσεις για διαφορετικά σενάρια συνθηκών βαρύτητας-τριβής

6.1 Εισαγωγη

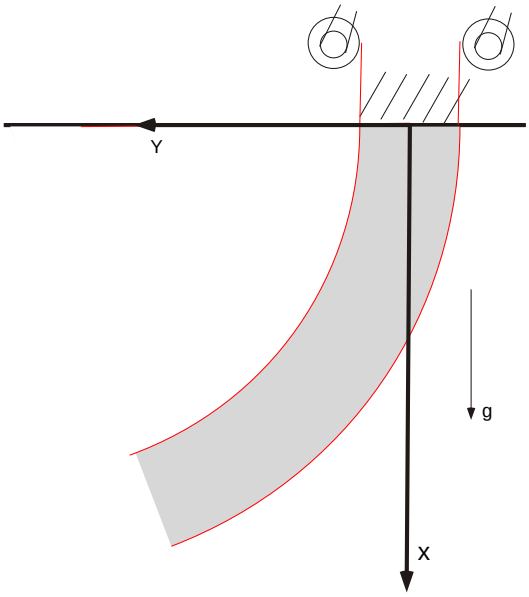
Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει ξεχωριστά για κάθε ένα από τα δύο μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν ανάλυση των συναρτήσεων που περιέχουν τα συστήματα των διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα θα παρουσιαστούν γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων τόσο για το Μοντέλο κλασσικής μηχανικής όσο και για το μοντέλο μεγάλων μετατοπίσεων. Οι γραφικές παραστάσεις θα παρουσιαστούν για διαφορετικά σενάρια όπως χωρίς τριβή και χωρίς βαρύτητα με τριβή αλλά χωρίς βαρύτητα και τέλος με τριβή και με βαρύτητα.

6.2 Σενάρια επενέργησης για το μοντέλο των μικρών παραμορφώσεων

Θεωρούμε τον βραχίονα του εργαστηρίου που χρησιμοποιήθηκε για προσομοίωση. Ο βραχίονας έχει μήκος 0.15 μέτρα, ακτίνα διατομής 0.03 μέτρα, μάζα 0.140 κιλά και συντελεστή τριβής ολίσθισης μεταξύ τένοντα και βραχίονα 0.1. Η επενέργηση που γίνεται στο βραχίονα είναι από έναν τένοντα και ίσούται με 8 N. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων δίνεται από τις εξισ

6.2.1 Δύναμη από τον τένοντα χωρις βαρύτητα και χωρίς τριβή

Αρχικά ας θεωρηθεί ότι ο βραχίονας κρέμεται από μία πάκτωση αλλά δεν ασκείται αρχικά δύναμη της βαρύτητας και ούτε υπάρχει τριβή μεταξύ των τενόντων και του βραχίονα. Το Σχήμα 6-1 παρουσιάζει το βραχίονα σε μία κατάσταση μετά την επενέργηση από τον τένοντα:



Σχήμα 6--1. Βραχίονας σε φορτισμένη κατάσταση.

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-1}$$

$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) = -8N \tag{6-2}$$

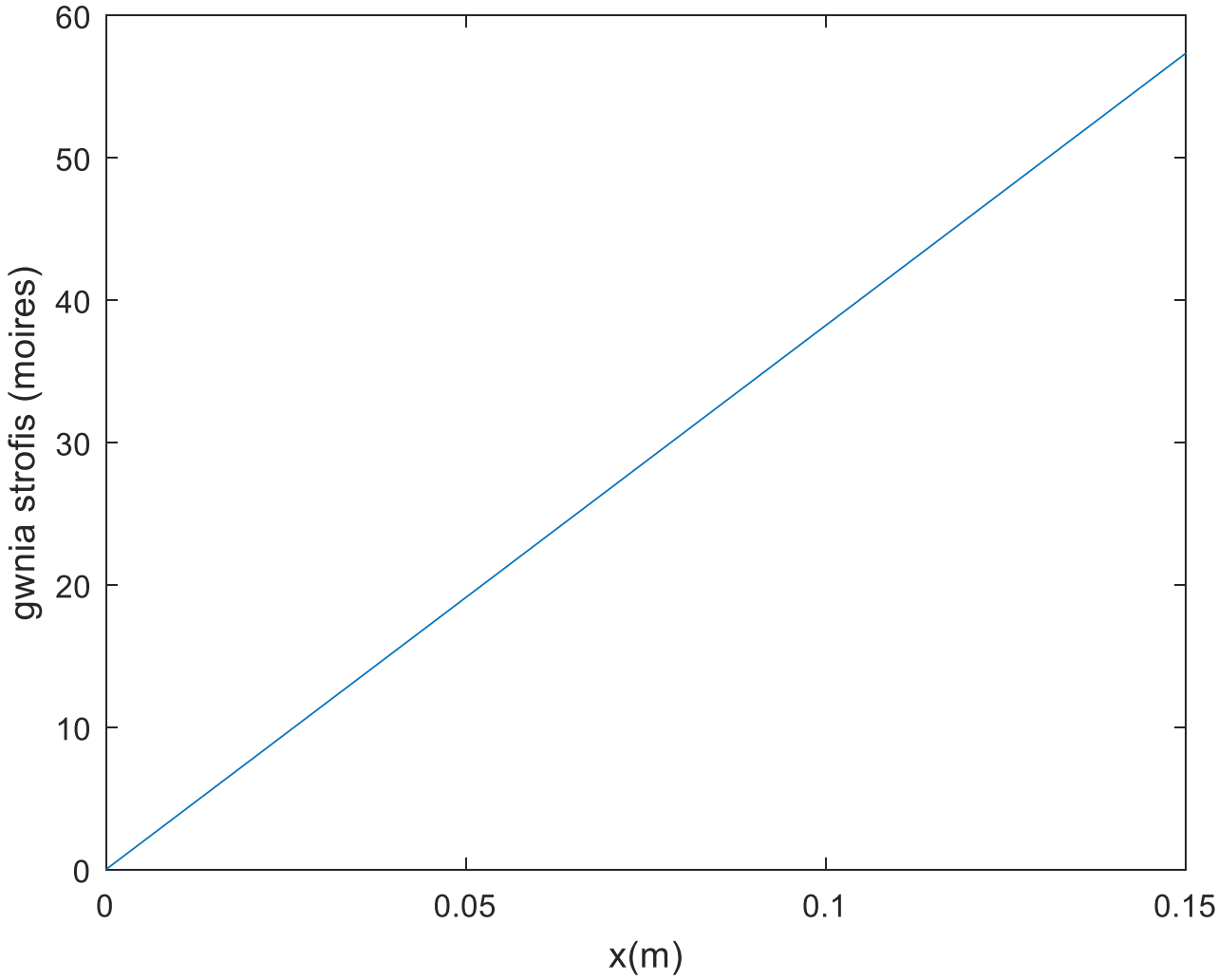
$$M_{\Pi\mathrm{AKT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} = -0.24Nm \tag{6-3}$$

$$q(0) = 0N \tag{6-4}$$

$$T_1(0) = 8N \tag{6-5}$$

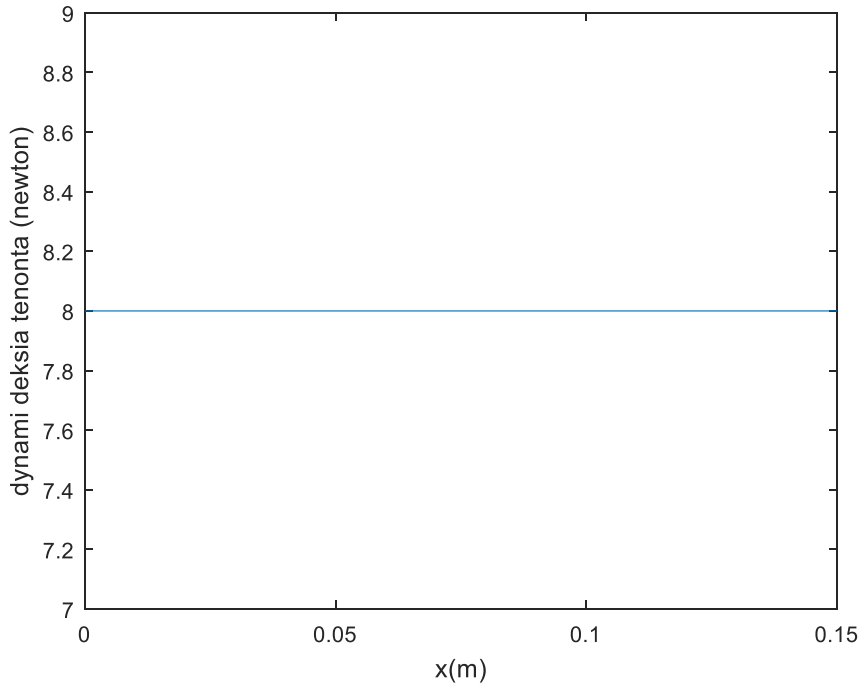
$$T_2(0) = 0 \tag{6-6}$$

θα ακολοθήσει το διάγραμμα της γωνίας στροφής του βραχίονα σε σχέση με κάθε σημείου του αρχικά κατακόρυφου απαραμόρφωτου βραχίονα, δηλαδή θα δούμε πόσο έχει στραφεί ουσιαστικά κάθε διατομή:



Σχήμα 6-2. Γωνία στροφής φ.

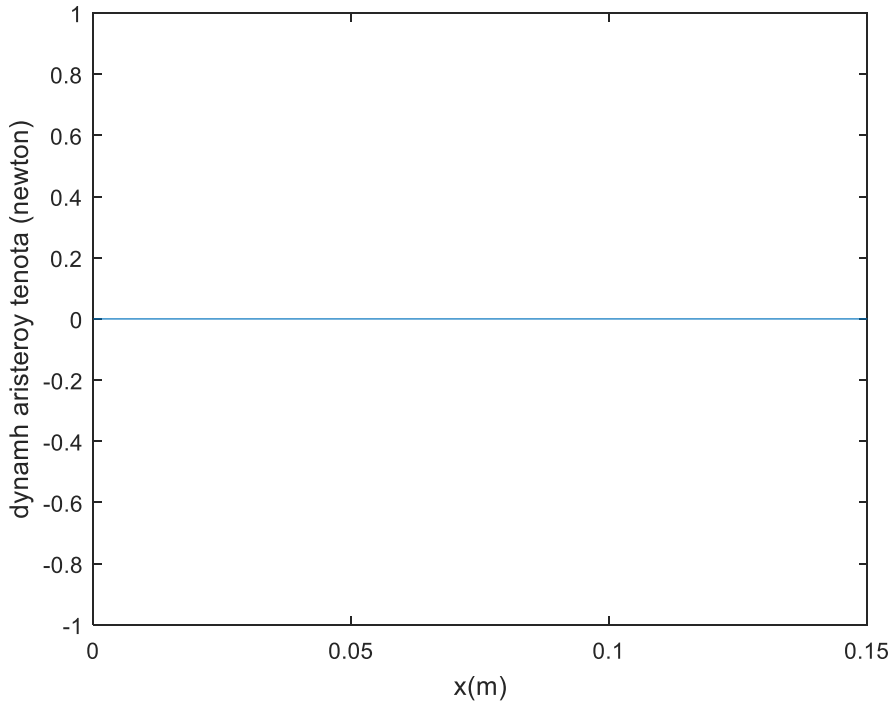
Όπως φαίνεται Από το Σχήμα 6-2 το τελικό σημείο δράσης έχει στραφεί περίπου 55 μοίρες σε σχέση με την αρχική κατακόρυφή του κατάσταση.



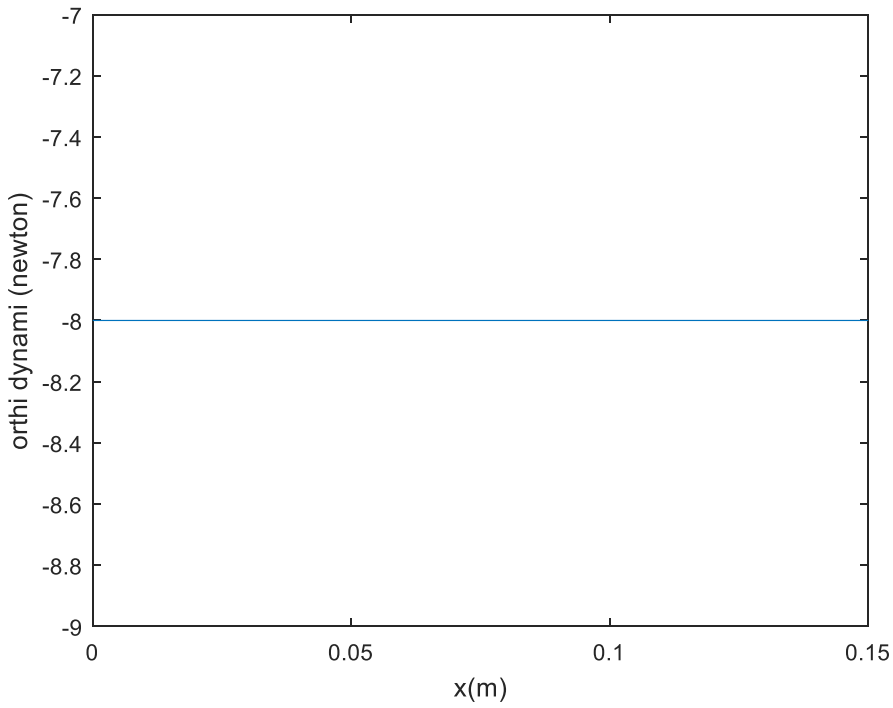
Σχήμα 6-3. Διάγραμμα επενεργούντος τένοντα Τ1.

Όπως φαίνεται ο τένοντας διατηρεί σταθερή τιμή ως προς τη δύναμη του διότι θεωρούμε ότι δεν υπάρχει τριβή σε αυτό το σενάριο επενέργησης ώστε να έχουμε πτώση δύναμης.

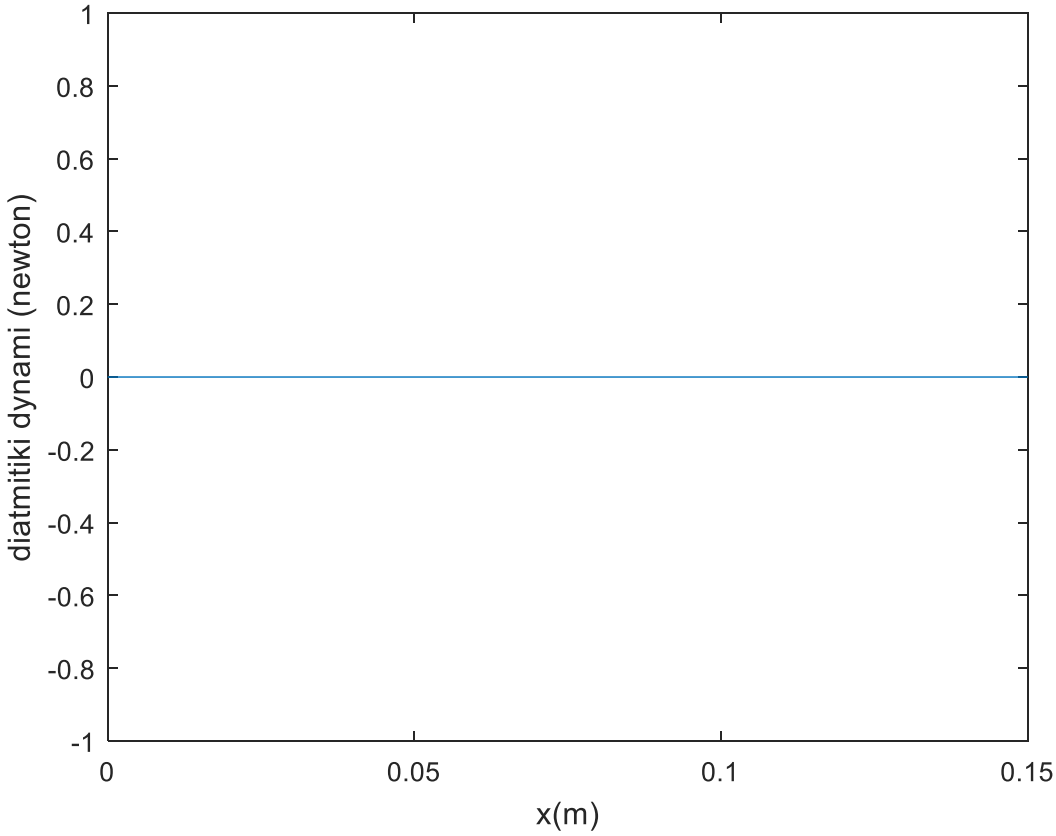
Στο σχήμα 6-4 παρουσιάζεται η δύναμη του ανταγωνιστή τένοντα που βρίσκεται αντιδιαμετρικά. Αυτό ο τένοντας δεν ασκεί κάποια δύναμη και έτσι η τιμή του είναι μηδέν:



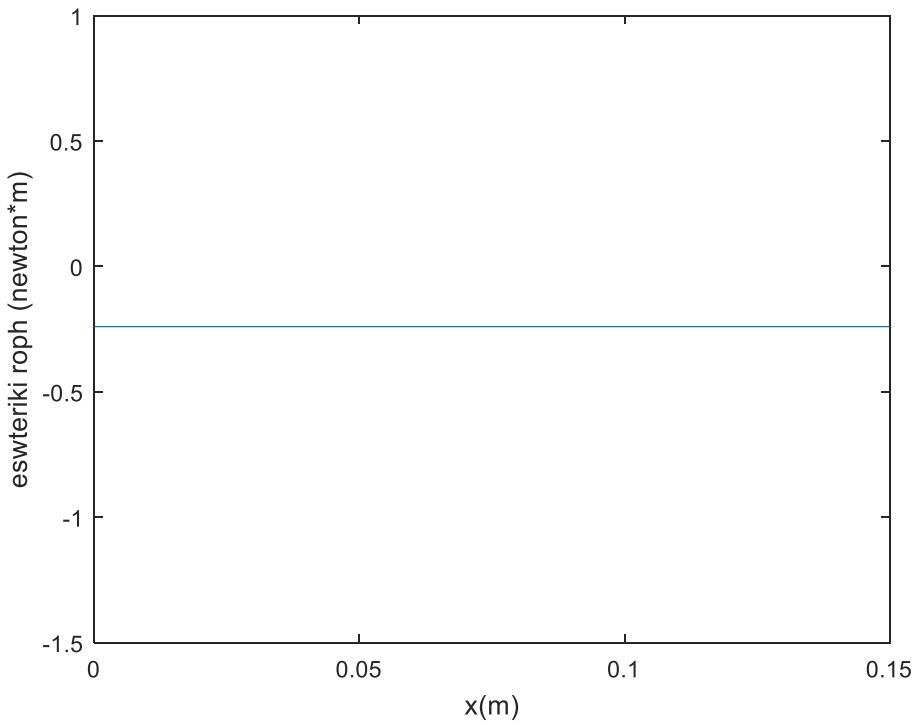
Σχήμα 6-4. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα Τ2.



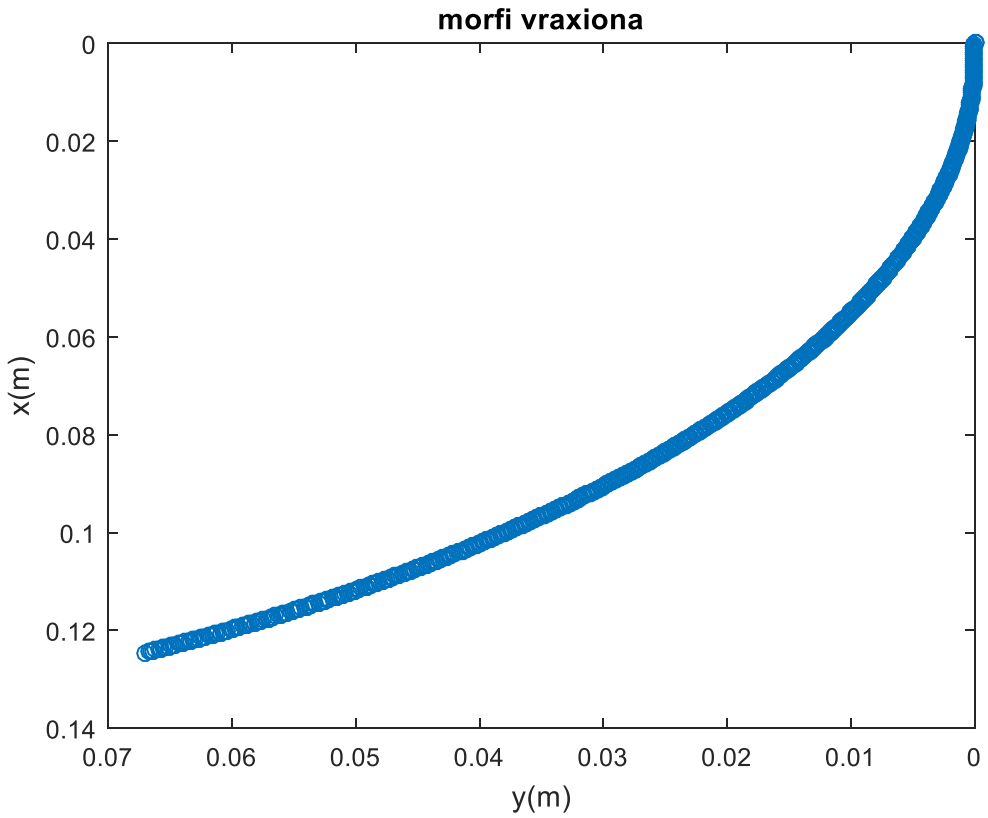
Σχήμα 6-5. Ορθή δύναμη N.



Σχήμα 6-6. Διατμητική δύναμη q.



Σχήμα 6-7. Εσωτερική ροπή Μ.



Σχήμα 6-8. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα.

6.2.2 Επενέργηση με τένοντα και τριβή

Το δεύτερο σενάριο επενέργησης προσθέτει και τον συντελεστή τριβής και οπότε θεωρούμε ότι υπάρχει τριβή μεταξύ του τένοντα και του βραχίονα,η βαρύτητα δεν επιδρά.Οι οριακές συνθήκες είναι οι εξής:

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-7}$$

$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) = -8N \tag{6-8}$$

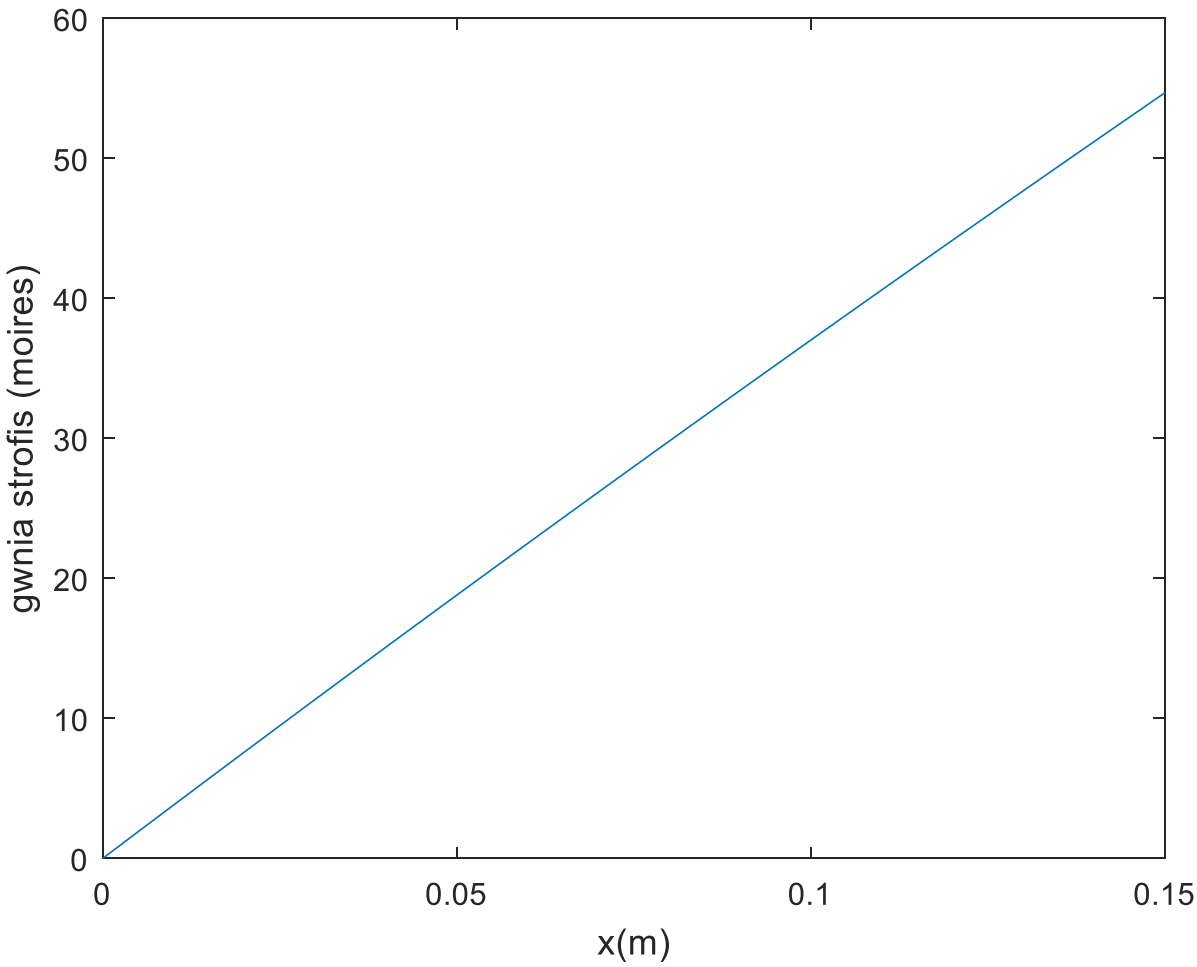
$$M_{\Pi\mathrm{AKT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} = -0.24Nm \tag{6-9}$$

$$q(0) = 0N \tag{6-10}$$

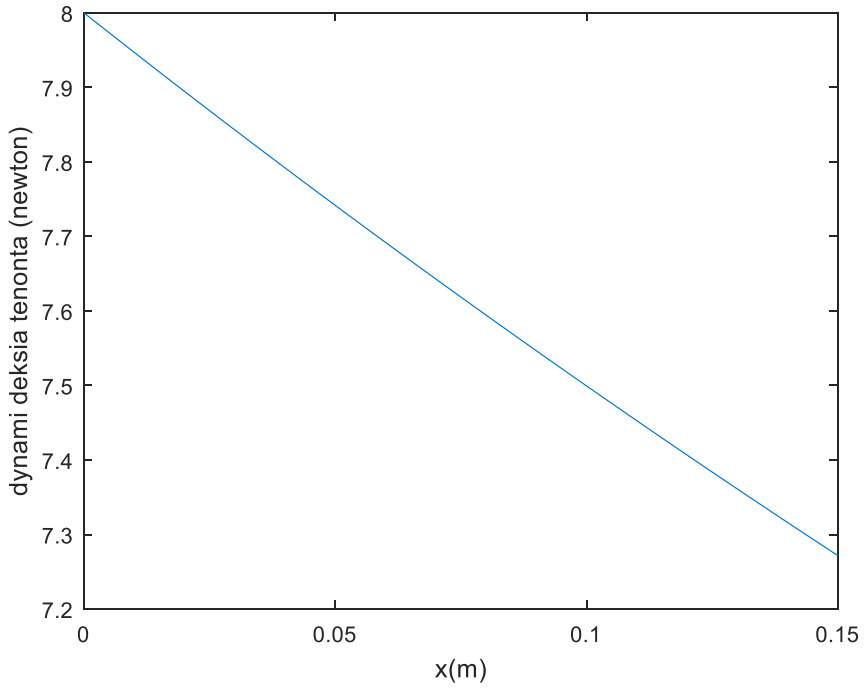
$$T_1(0) = 8N \tag{6-11}$$

$$T_2(0) = 0 \tag{6-12}$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα παρουσιάζονται παρακάτω:

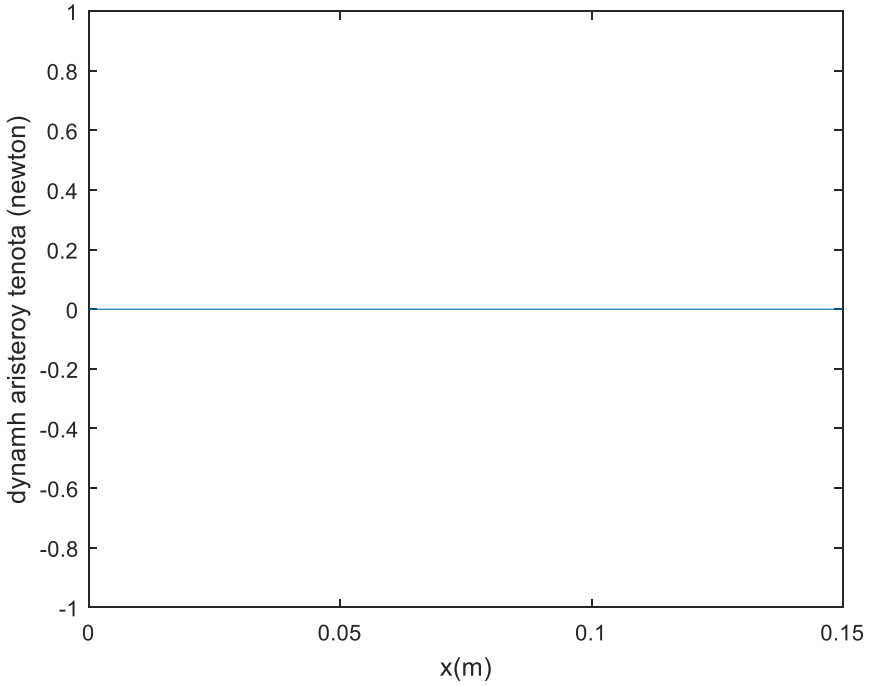


Σχήμα 6-9. Γωνία στροφής φ.

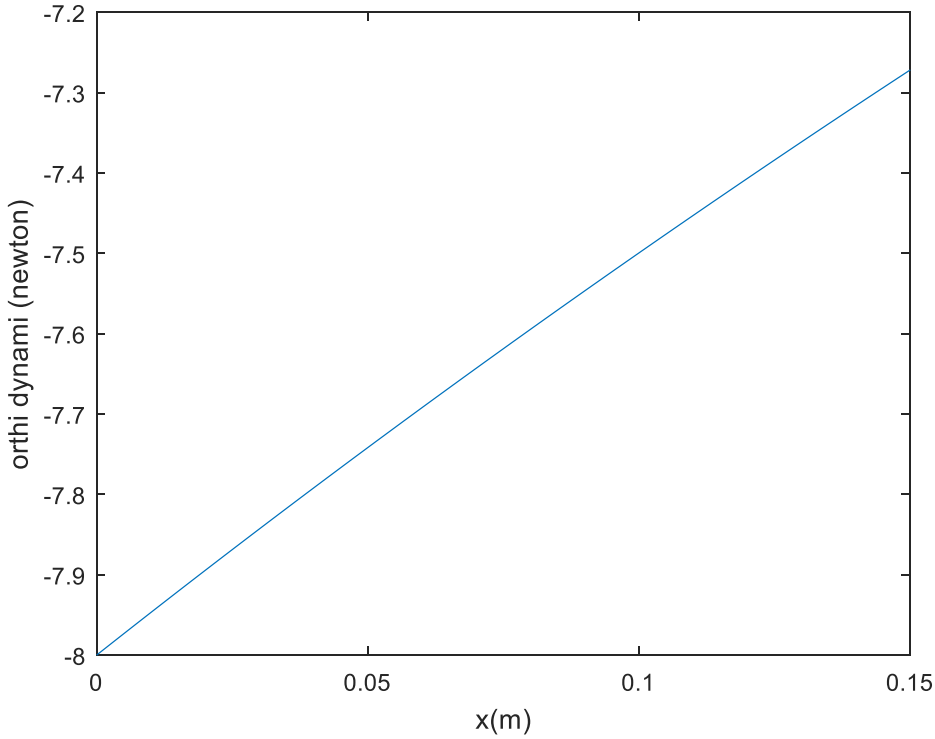


Σχήμα 6-10. Δύναμη επενεργούντος τένοντα Τ1.

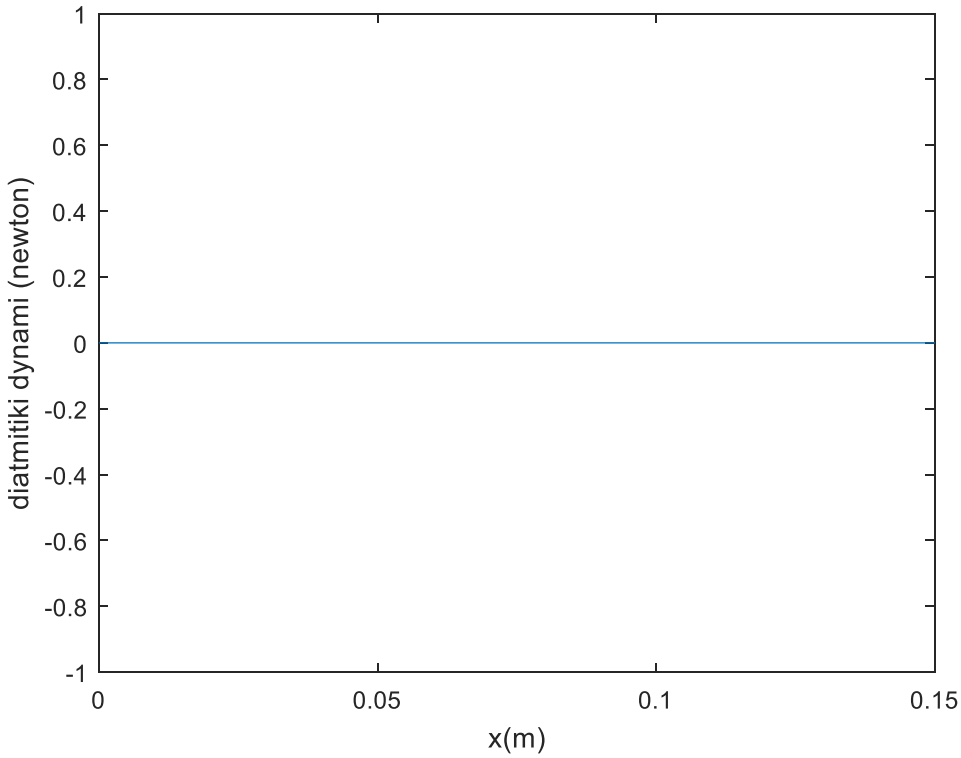
Ο ανταγωνιστής τένοντας σε αυτή την περίπτωση θα είναι πάλι μηδέν όπως φαίνεται στο σχήμα 6-11:



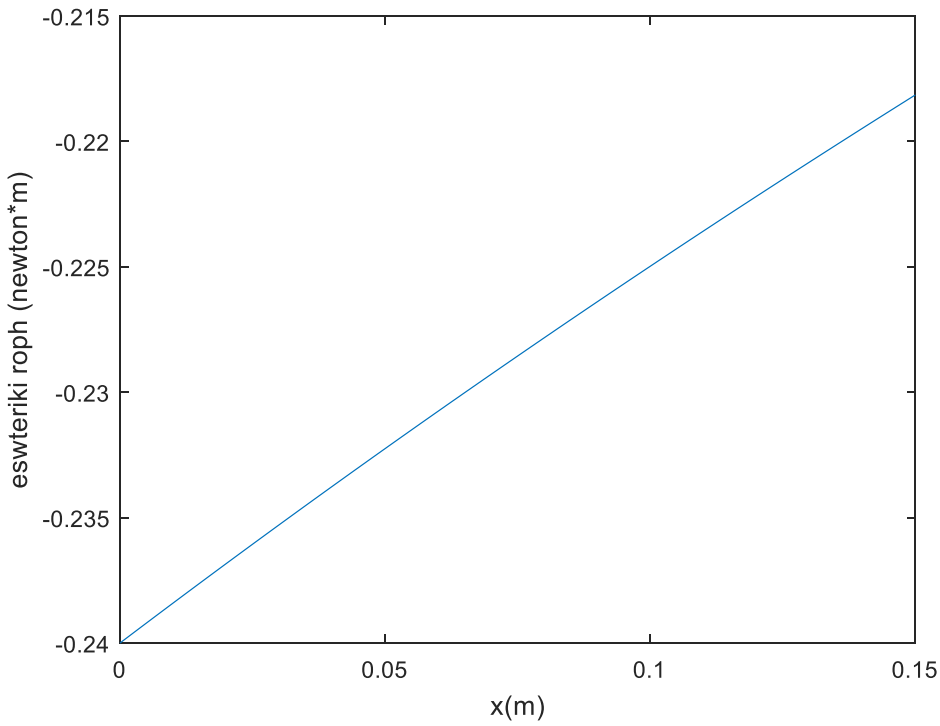
Σχήμα 6-11. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα (δεν επενεργεί) Τ2.



Σχήμα 6-12. Ορθή δύναμη N.

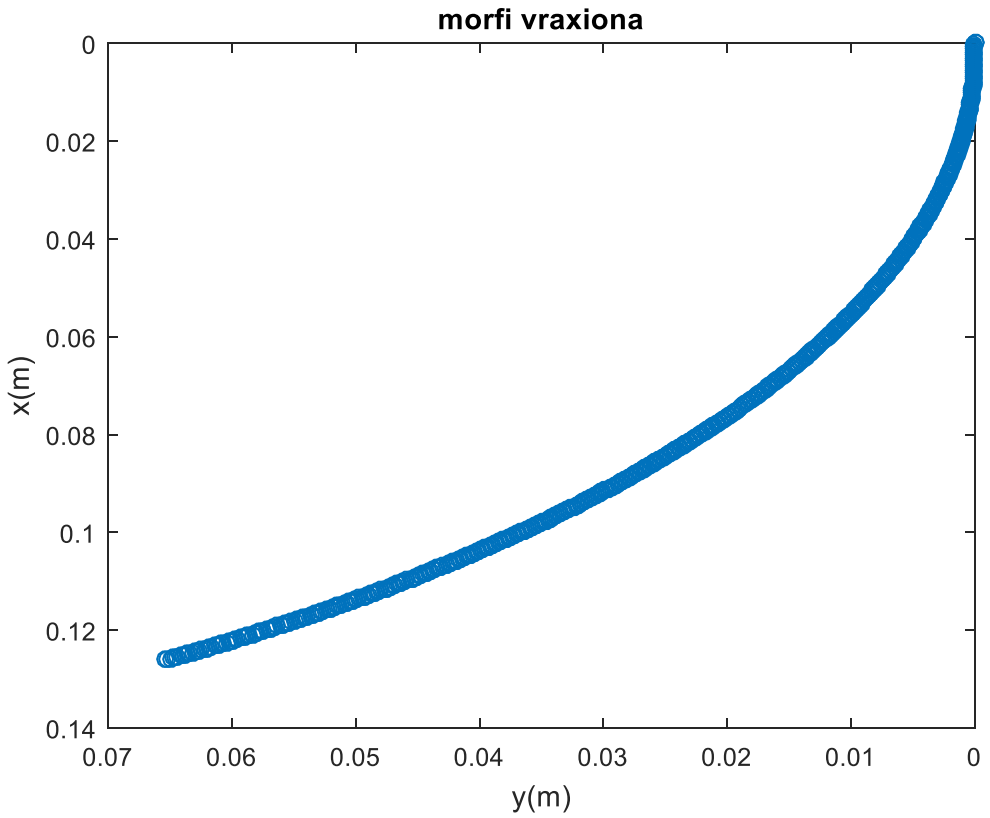


Σχήμα 6-13. Διατμητική δύναμη q.



Σχήμα 6-14. Εσωτερική ροπή.

Η μορφή του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 6-15. Μορφή του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα.

6.2.3 Επενέργηση με τένοντα, τριβή και βαρύτητα

Πλέον εφόσον εχουν τελειώσει τα δύο πρώτα σενάρια επενέργησης προσθέτουμε και την δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στον βραχίονα. παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα με τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-13}$$

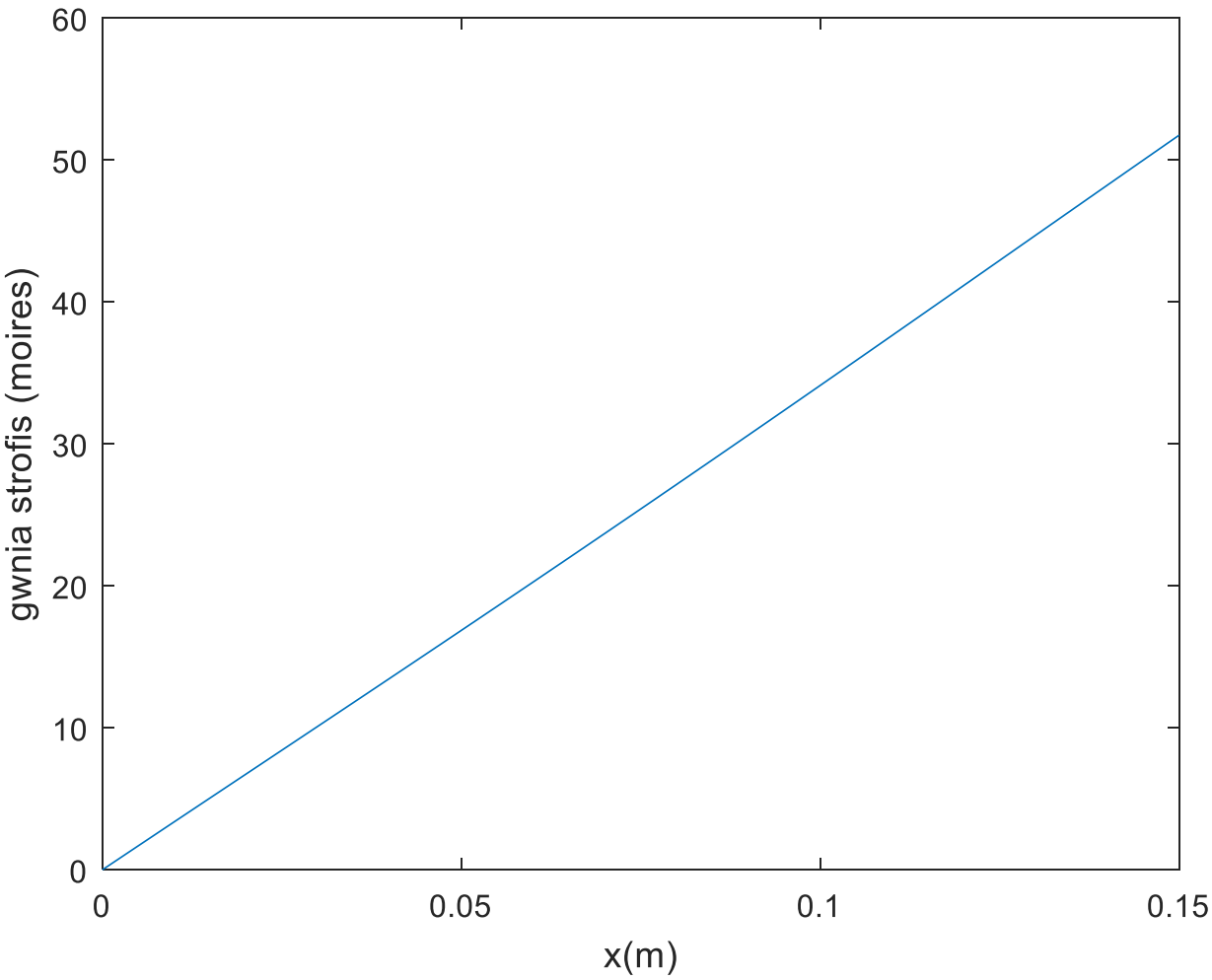
$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) + \mathrm{W} = -6.62 \tag{6-14}$$

$$M_{\Pi\mathrm{AKT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} + dW = -0.212\,Nm \tag{6-15}$$

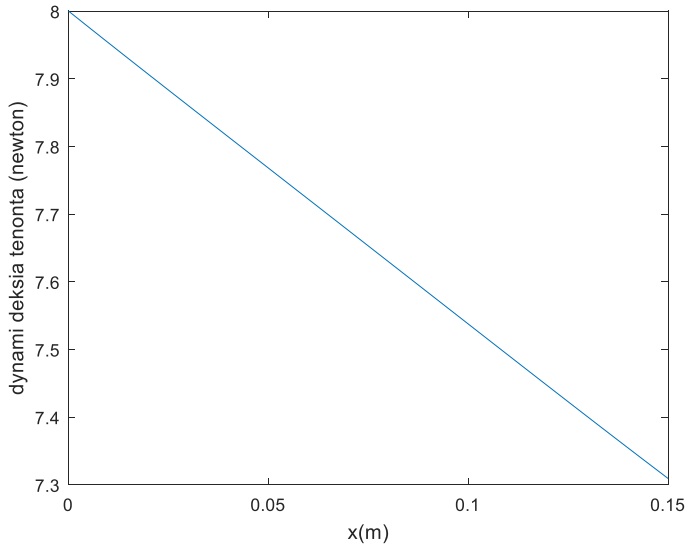
$$q(0) = 0N \tag{6-16}$$

$$T_1(0) = 8N \tag{6-17}$$

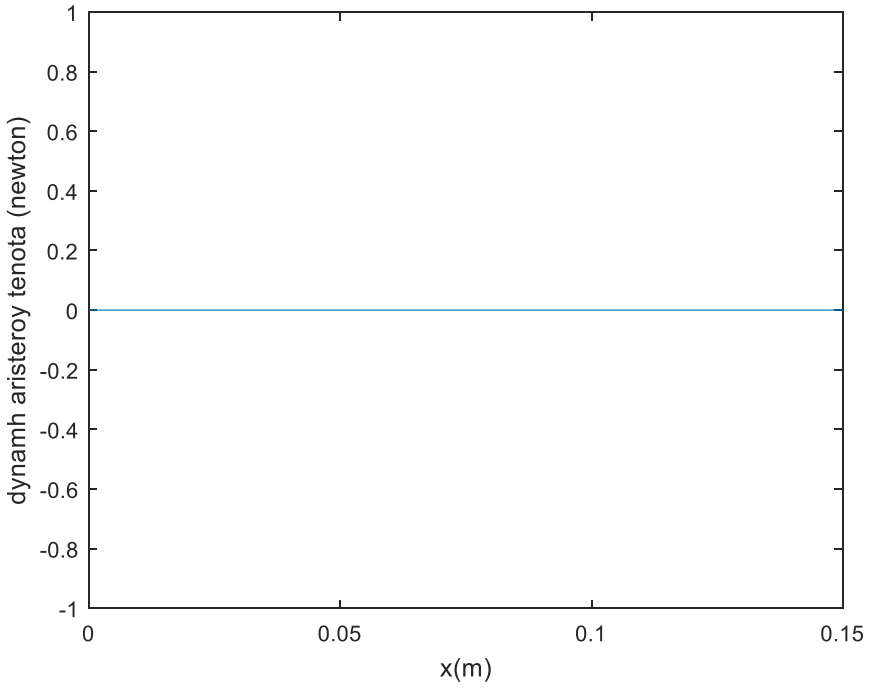
$$T_2(0) = 0 \tag{6-18}$$



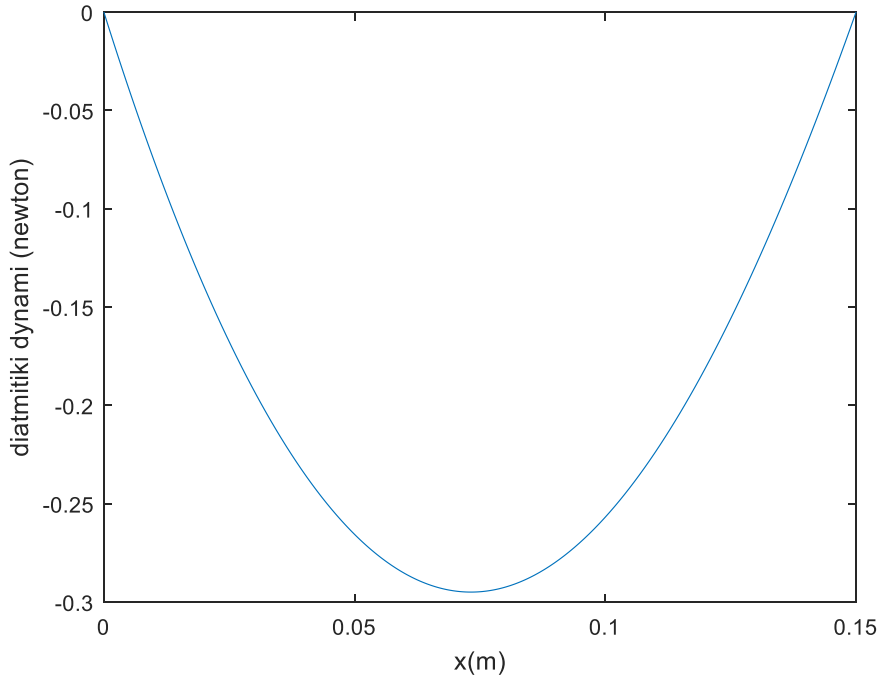
Σχήμα 6-16. Γωνία στροφής φ.



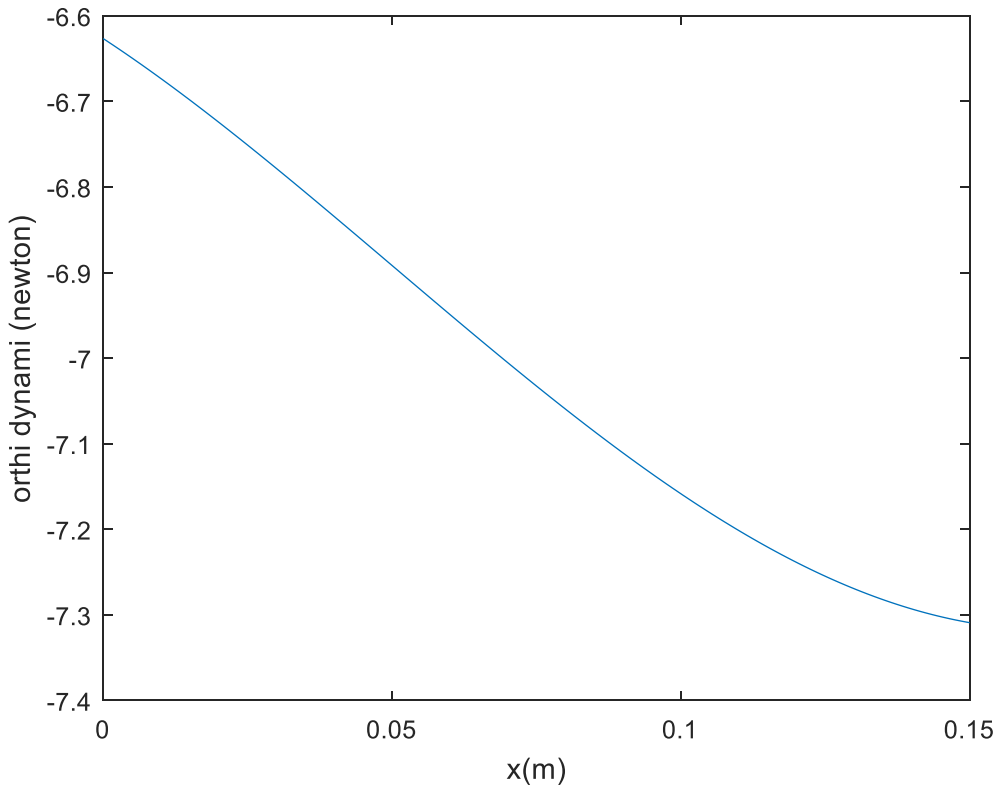
Σχήμα 6-17. Δύμαμη επενεργητή τένοντα Τ1.



Σχήμα 6-18. Δύναμη ανταγωνιστή τένοντα Τ2.

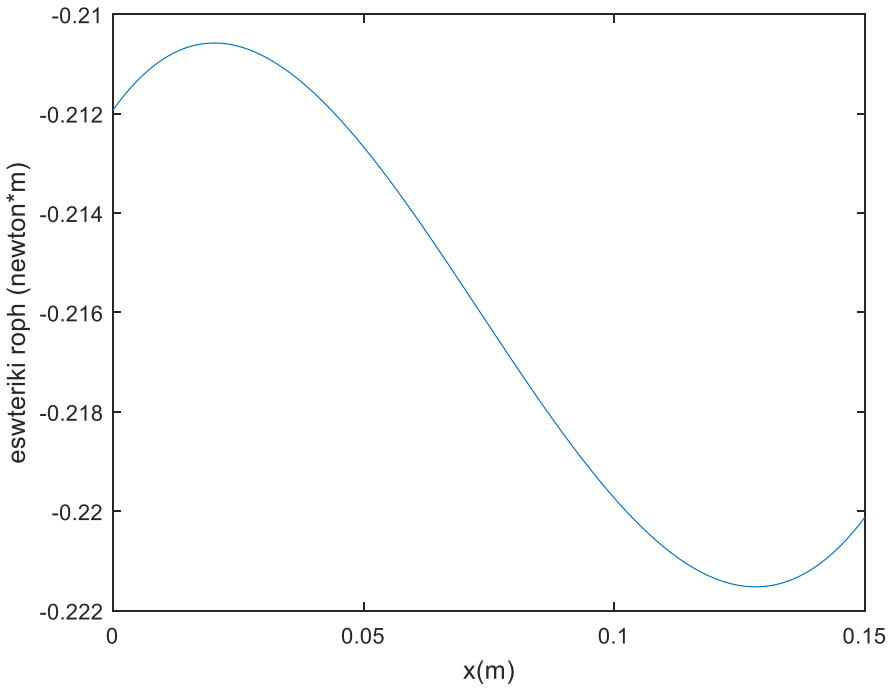


Σχήμα 6-19. Διατμητική δύναμη q.



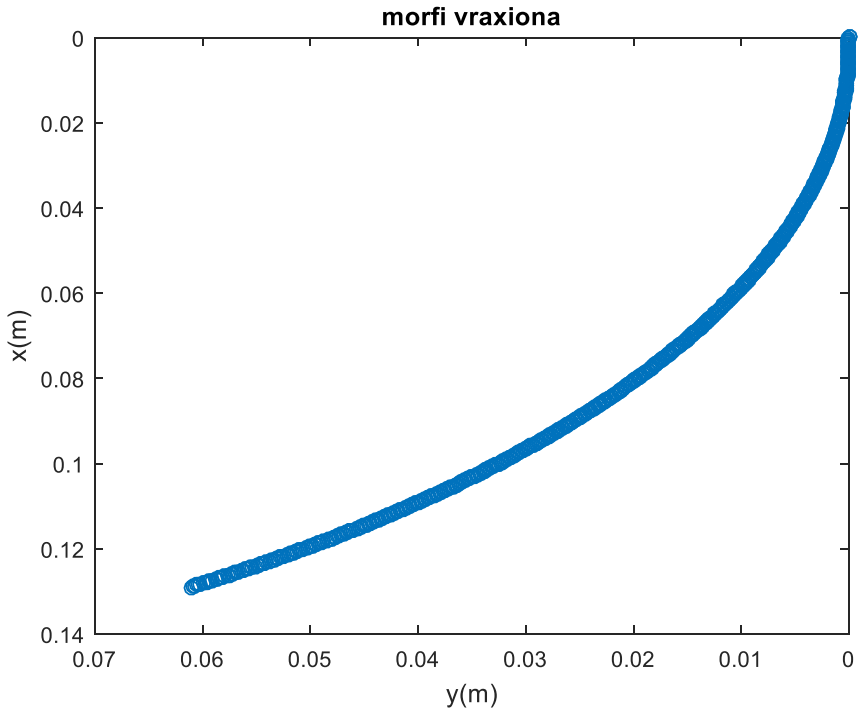
Σχήμα 6-20. Ορθή δύναμη.

Η εσωτερική ροπή παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 6-21. Εσωτερική ροπή Μ.

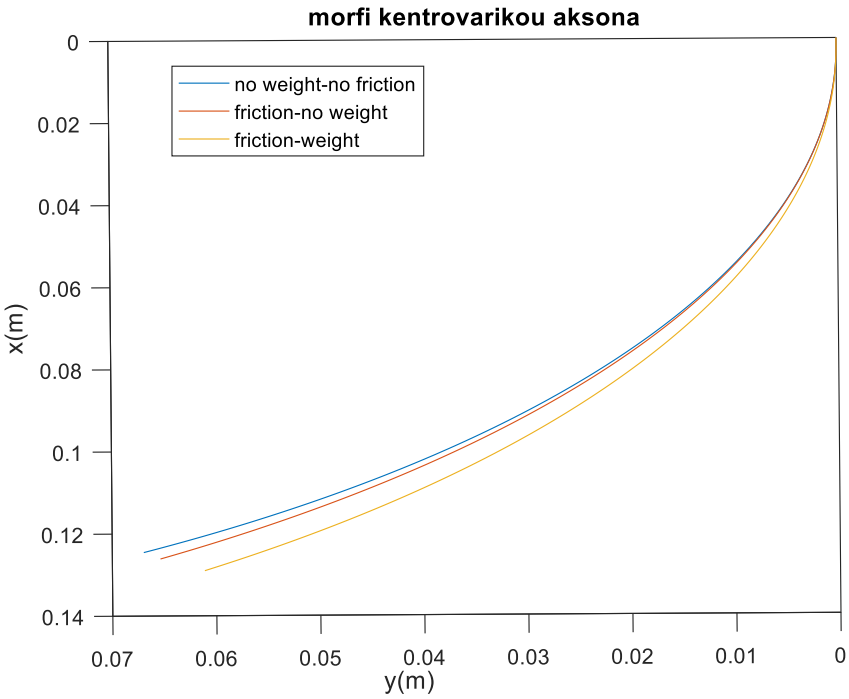
Η μορφή του κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα παρουσιάζεται παρακάτω:



Σχήμα 6-22. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα.

Σε κοινο διάγραμμα παρουσιάζονται οι μορφές των κεντροβαρικών αξόνων για τα τρία σενάρια που παρουσιάσθηκαν. Αυτο που πατατηρείται είναι ότι με εισαγωγή της βαρύτητας ο βραχίονας δεν

μπορεί να εκτραπεί όσο χωρίς τη βαρύτητα. Επίσης η δύναμη τριβής δίνει μια πτώση δύναμης και άρα ροπής και έτσι στρέφεται δυσκολότερα σε περίπτωση ύπαρξης τριβής σε σχέση με το να μην υπήρχε.



Σχήμα 6-23. Μορφές κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα για τα τρία σενάρια.

6.3 Μοντέλο μεγάλων παραμορφώσεων

Για τον ίδιο βραχίονα που παρουσιάστηκε στην ενότητα 6.1 εξάγωνται προσομοιώσεις για το μοντέλο των μεγάλων παραμρφώσεων.Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που επιλύεται είναι από τις (6-81)-(6-88).

6.3.1 Επενέργηση τένοντα χωρίς τριβή και βαρύτητα

Παρουσιάζονται τα διαγράμματα των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του μοντέλου των μεγάλων παραμορφώσεων για σενάριο έλειψης τριβής και βαρύτητας :

$$w(0) = 0 \tag{6-19}$$

$$u(0) = 0 \tag{6-20}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-21}$$

$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) = -8 \tag{6-22}$$

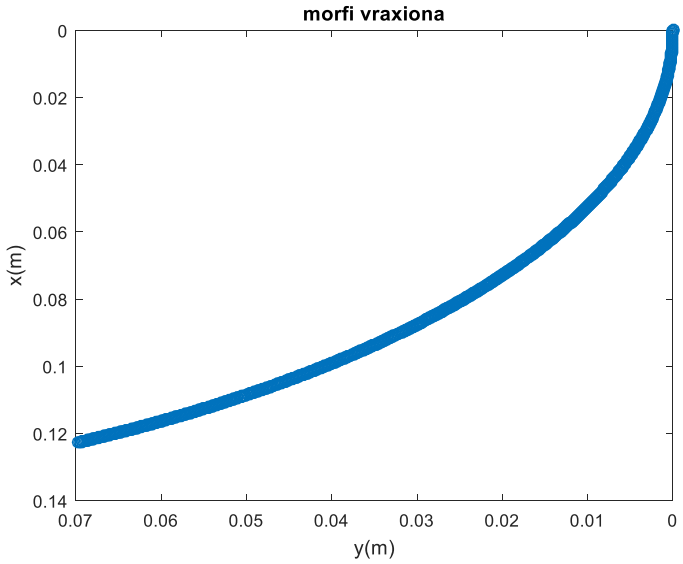
Error! Objects cannot be created from editing field codes.

(6-23)

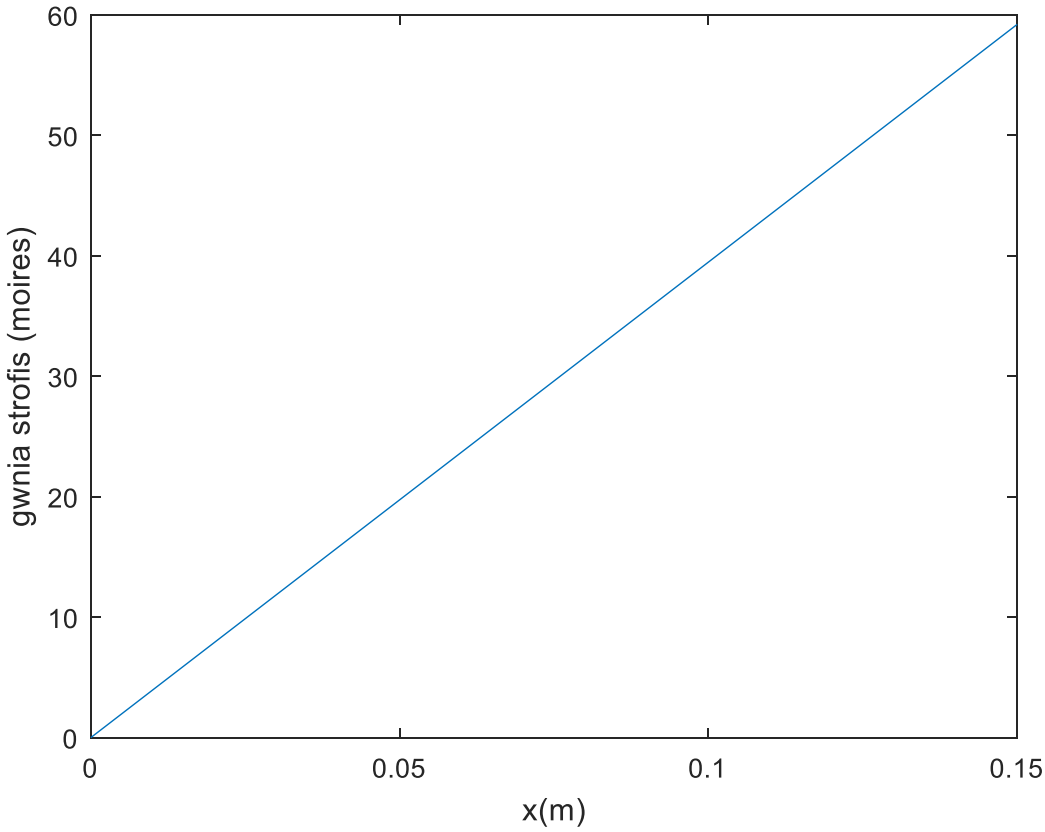
$$q(0) = 0N \tag{6-24}$$

$$T_1(0) = 8N \tag{6-25}$$

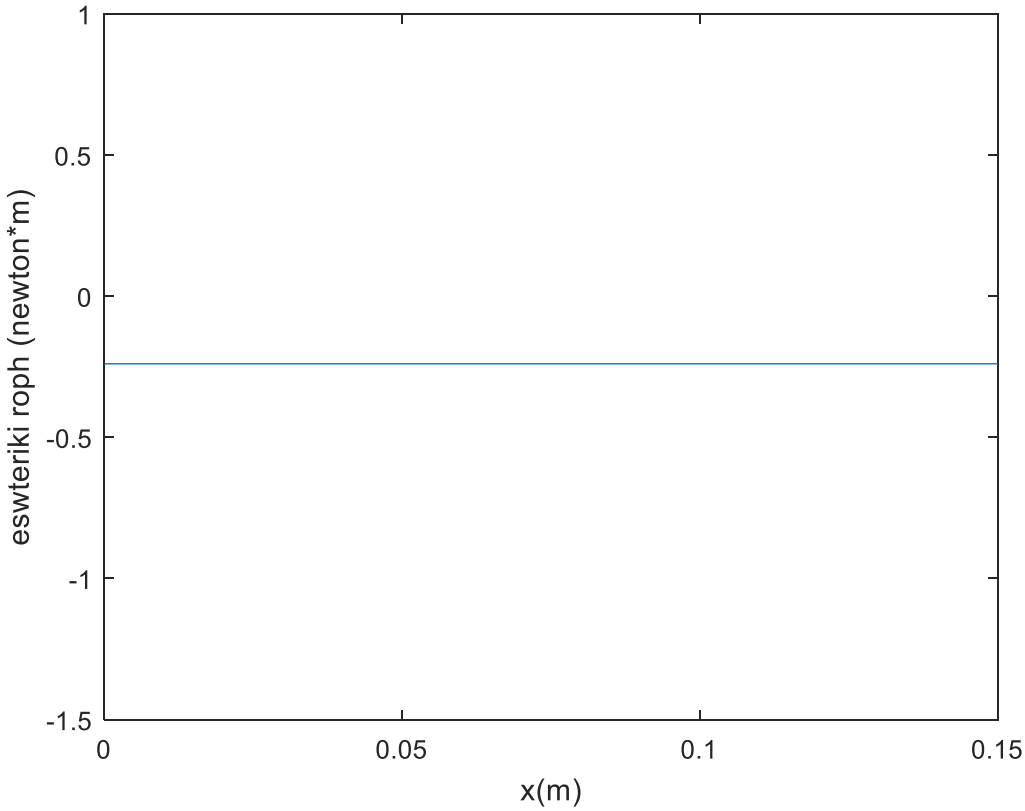
$$T_2(0) = 0 \tag{6-26}$$



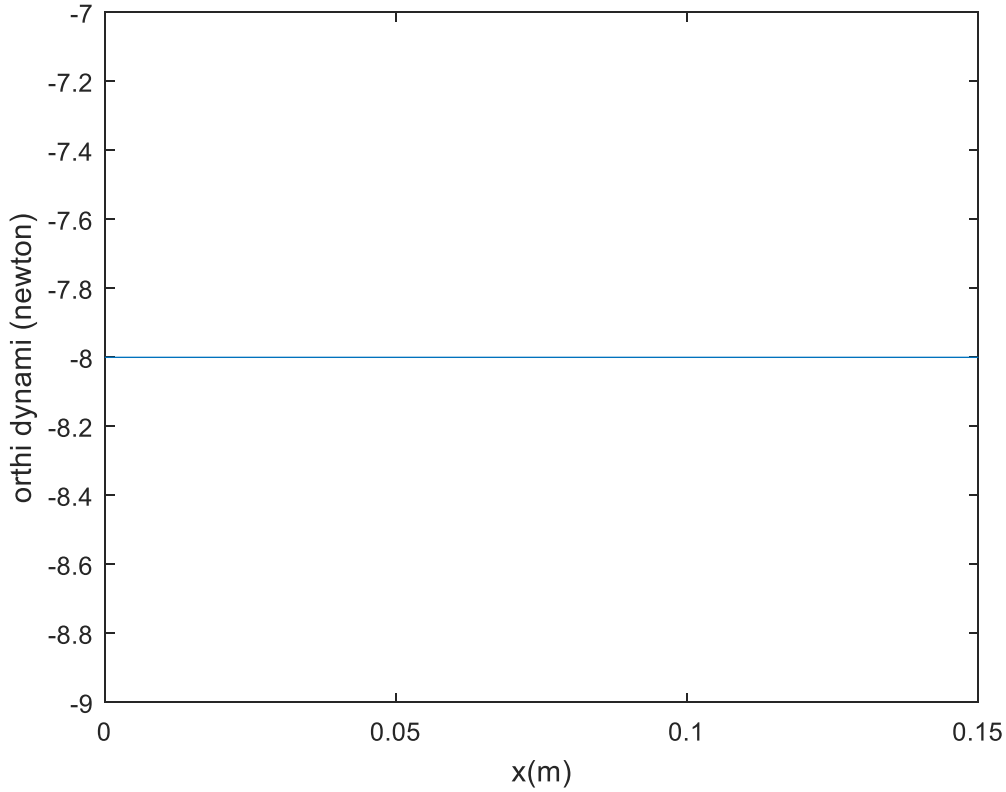
Σχήμα 6-24. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα.



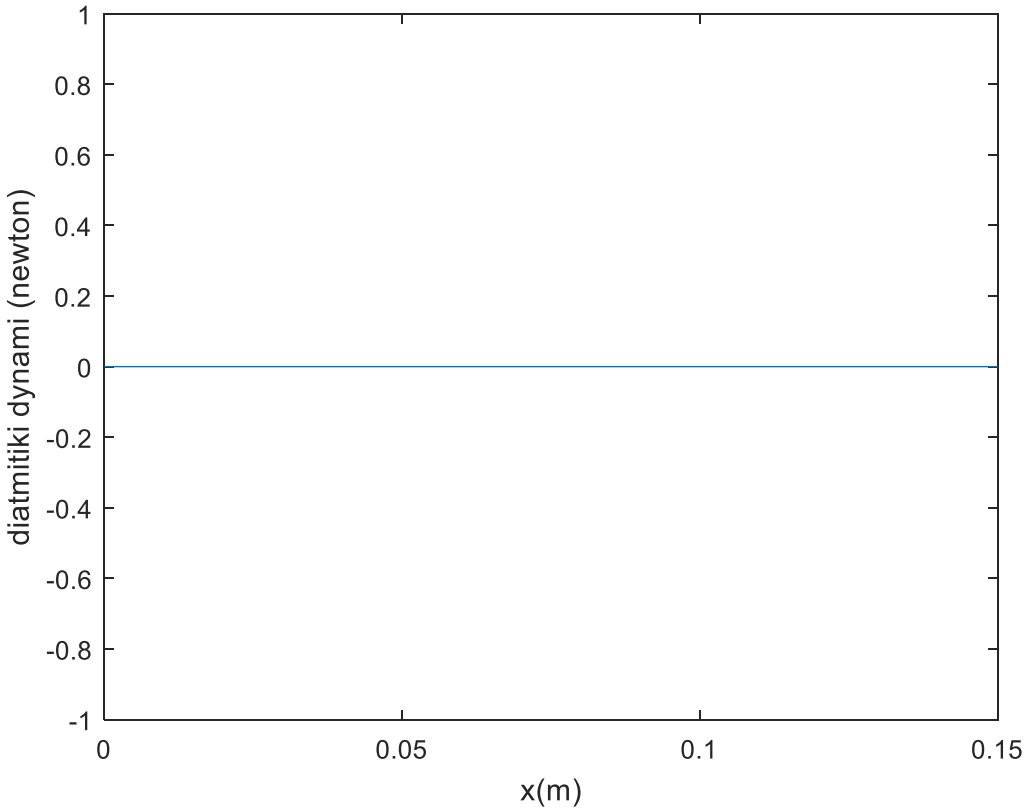
Σχήμα 6-6-25. Γωνία στροφής φ.



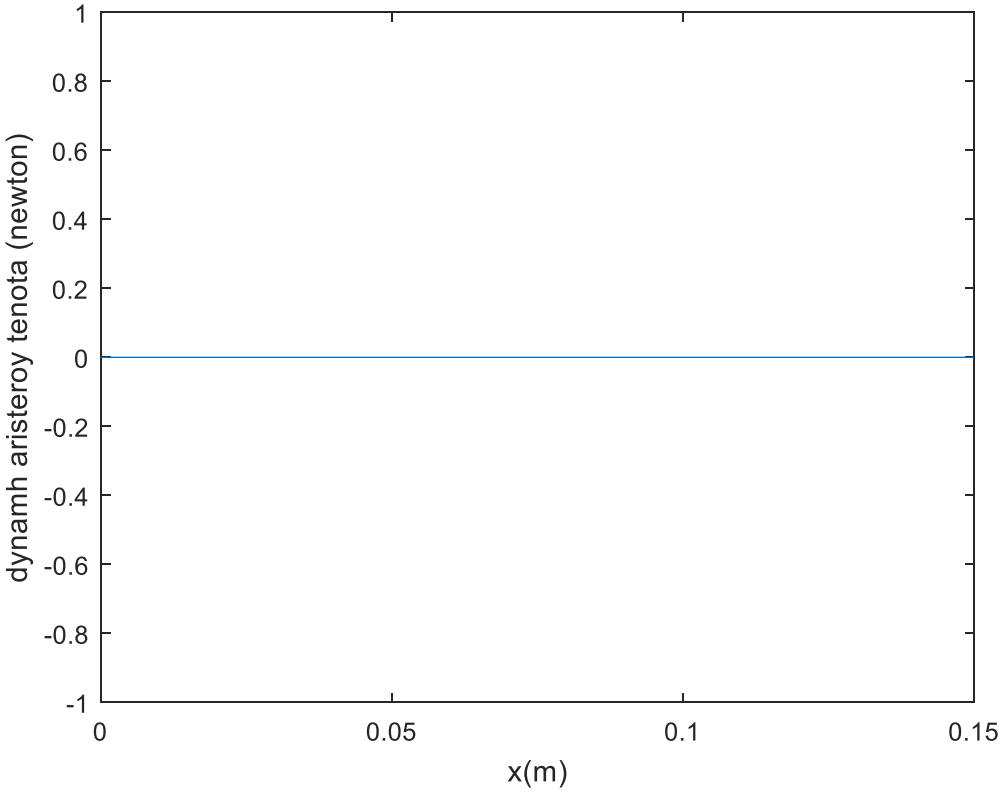
Σχήμα 6-26. Εσωτερική ροπή Μ.



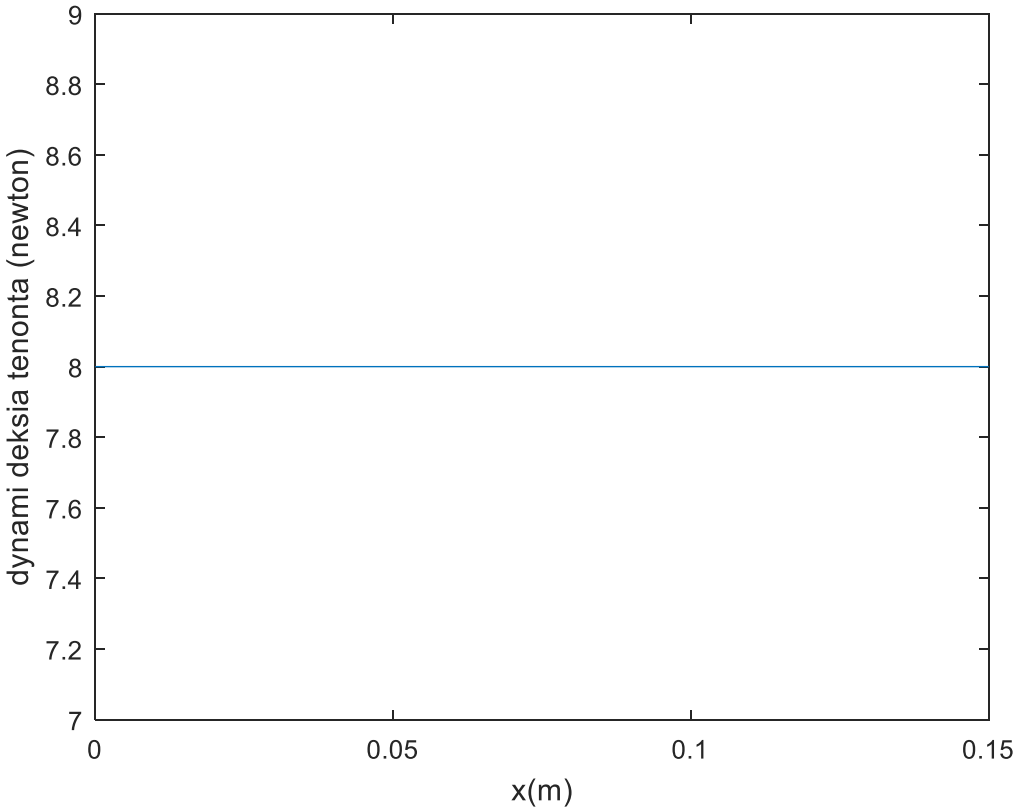
Σχήμα 6-27. Ορθή δύναμη Ν.



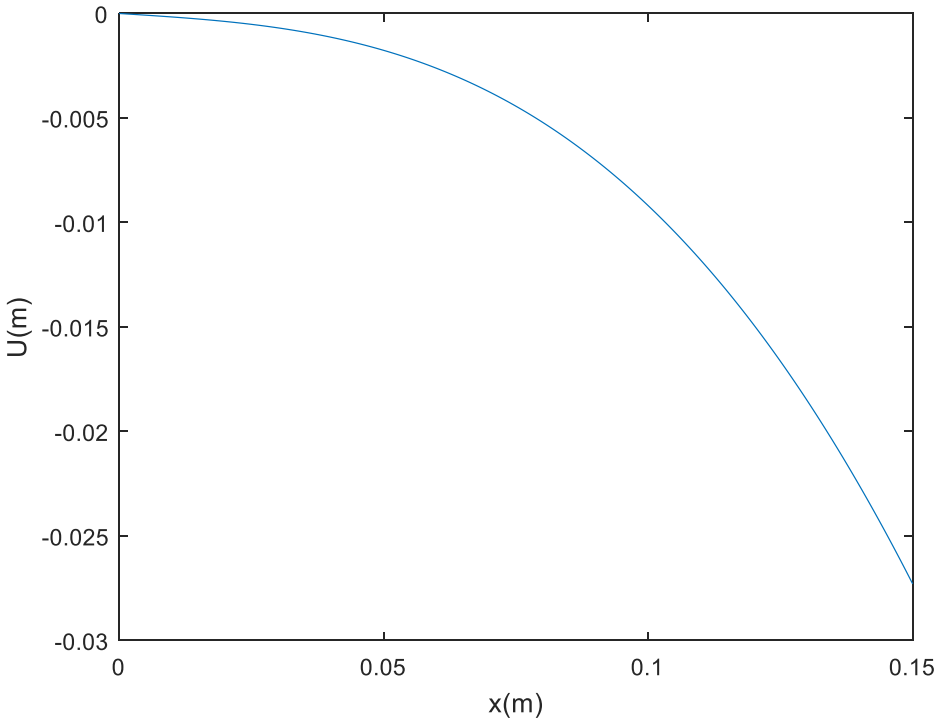
Σχήμα 6-28. Διατμητική δύναμη Q.



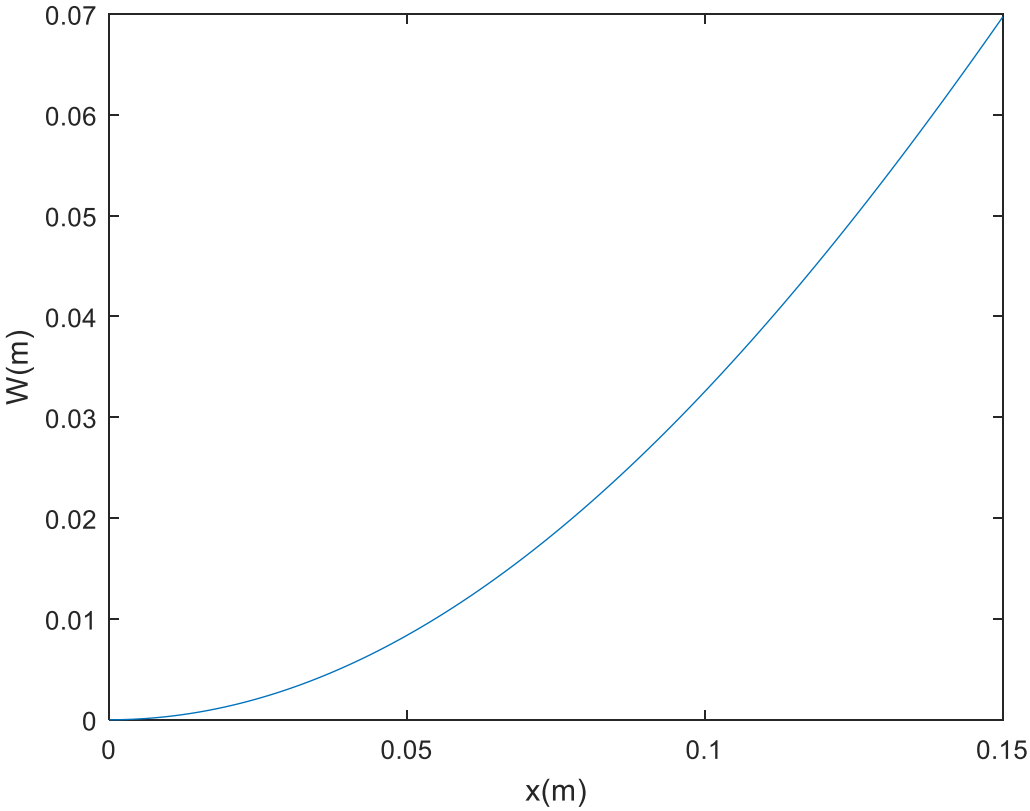
Σχήμα 6-29. Δύναμη αριστερού τένοντα T2 (δεν επενεργεί).



Σχήμα 6-30. Δύναμη δεξιά τένοντα T1 (επενεργεί).



Σχήμα 6-31. Συνάρτηση κατακόρυφων μετατοπίσεων U.



Σχήμα 6-32. Συνάρτηση οριζόντιων μετατοπίσεων W.

6.3.2 Επενέργηση με τένοντα με ύπαρξη τριβής χωρίς βαρύτητα

Το δεύτερο σενάριο επενέργησης προσθέτει και τον συντελεστή τριβής και οπότε θεωρούμε ότι υπάρχει τριβή μεταξύ του τένοντα και του βραχίονα . Τα αντίστοιχα διαγράμματα παρουσιάζονται παρακάτω αφού πρώτα παρουσιασθούν οι αρχικές συνθήκες:

$$w(0) = 0 \tag{6-27}$$

$$u(0) = 0 \tag{6-28}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-29}$$

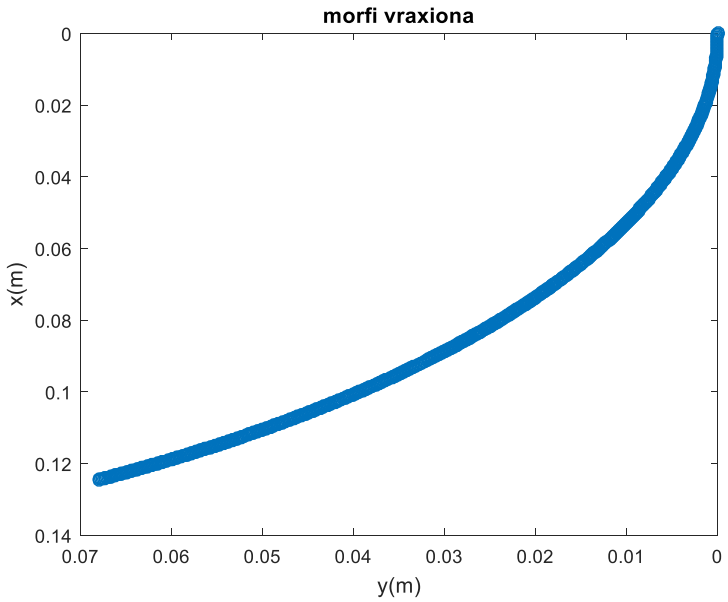
$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) = -8 \tag{6-30}$$

$$M_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} = -0.24Nm \tag{6-31}$$

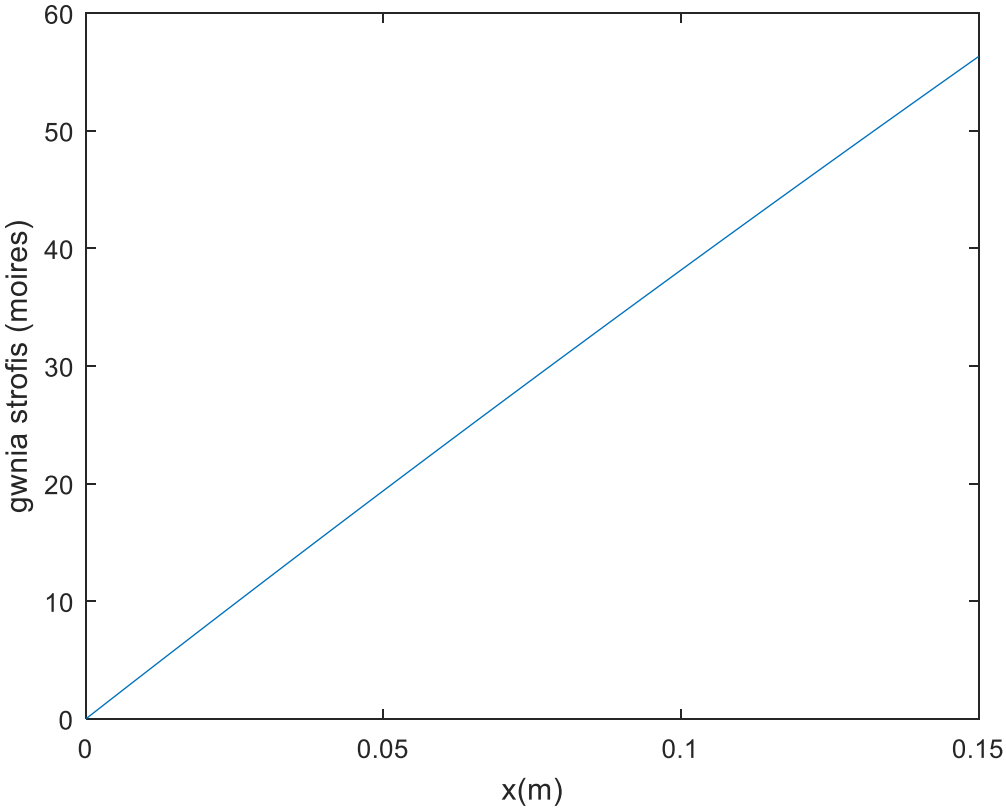
$$q(0) = 0N \tag{6-32}$$

$$T_1(0) = 8N \tag{6-33}$$

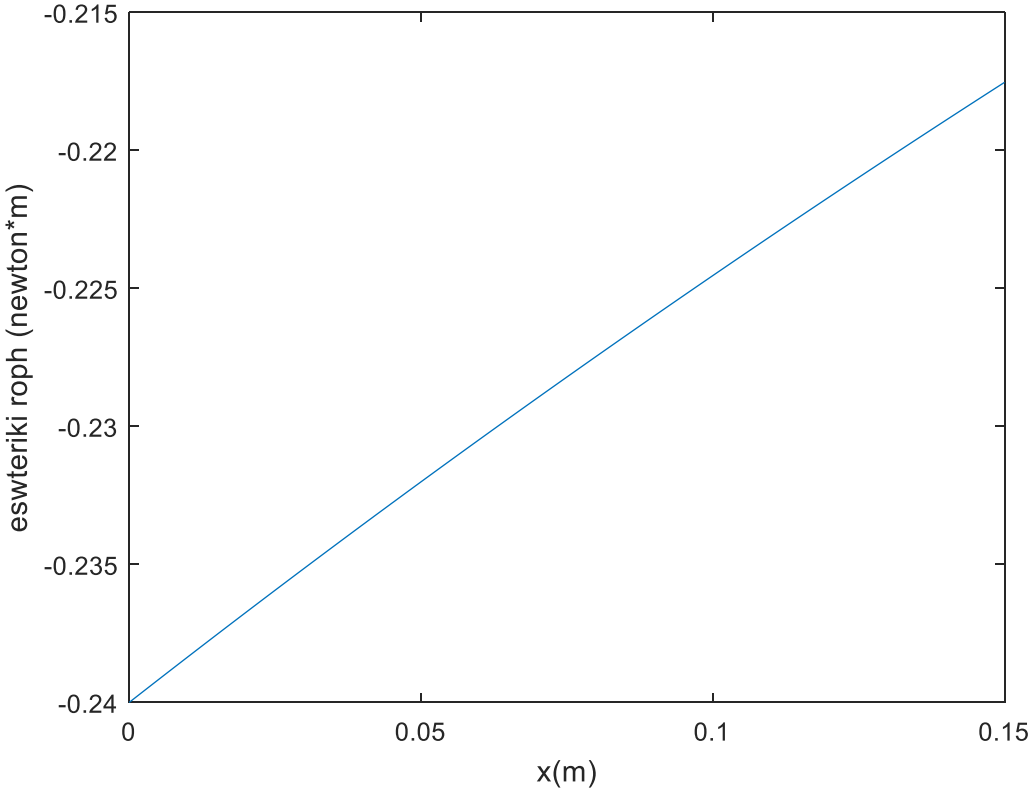
$$T_2(0) = 0 \tag{6-34}$$



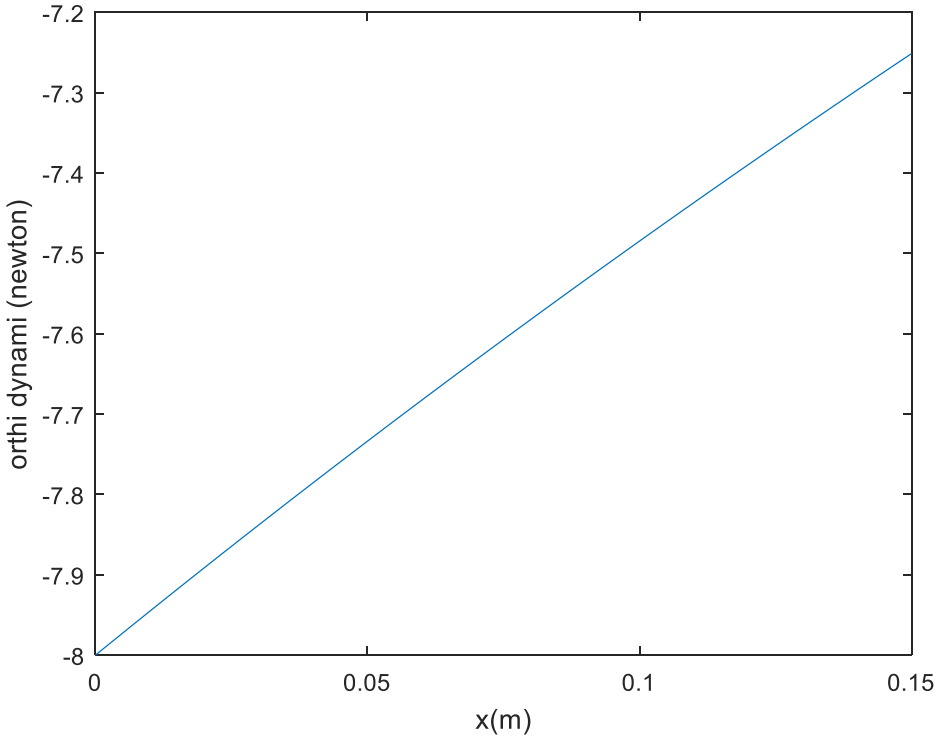
Σχήμα 6-33. Μορφή κεντροβαρικού άξονα βραχίονα.



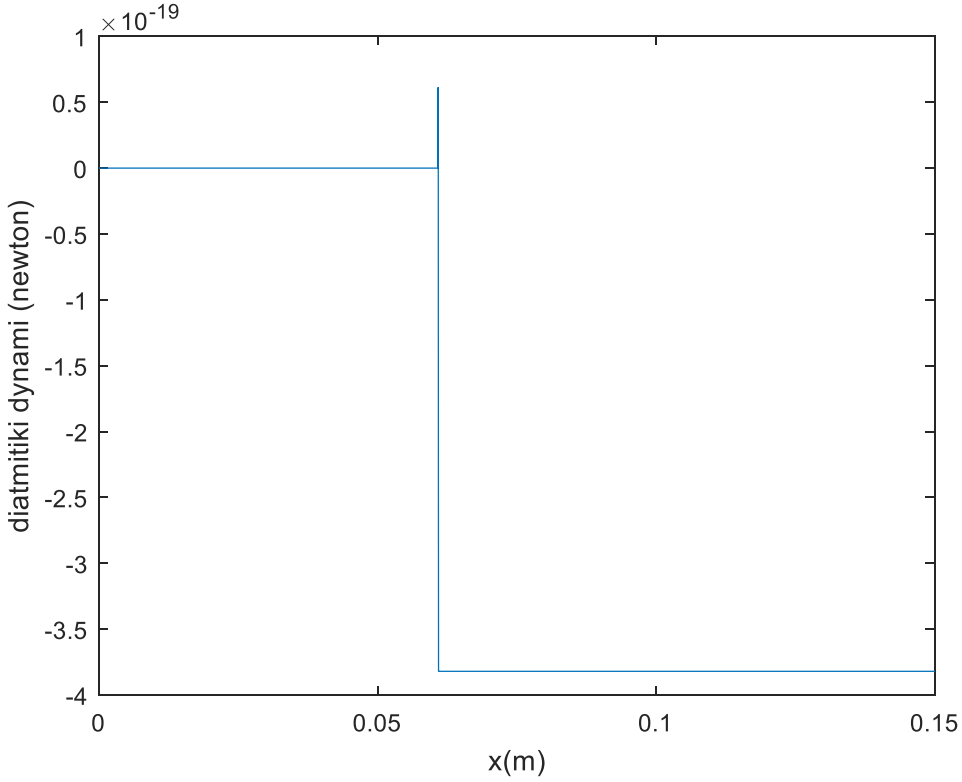
Σχήμα 6-34. Γωνία στροφής φ.



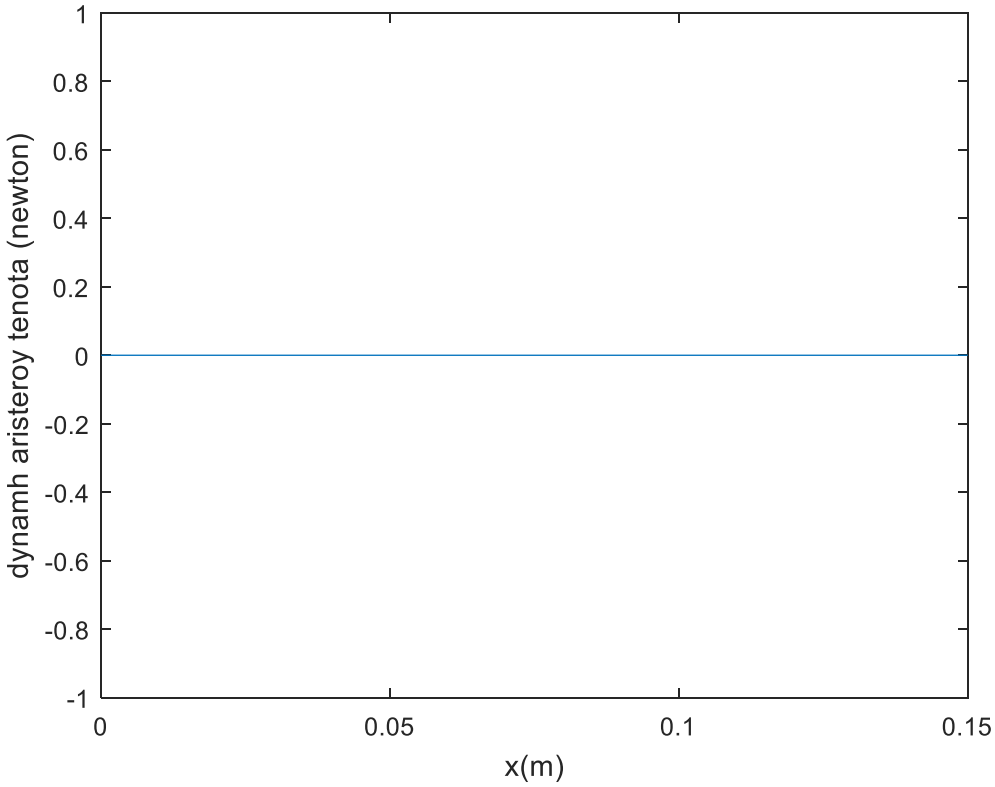
Σχήμα 6-35. Εσωτερική ροπή Μ.



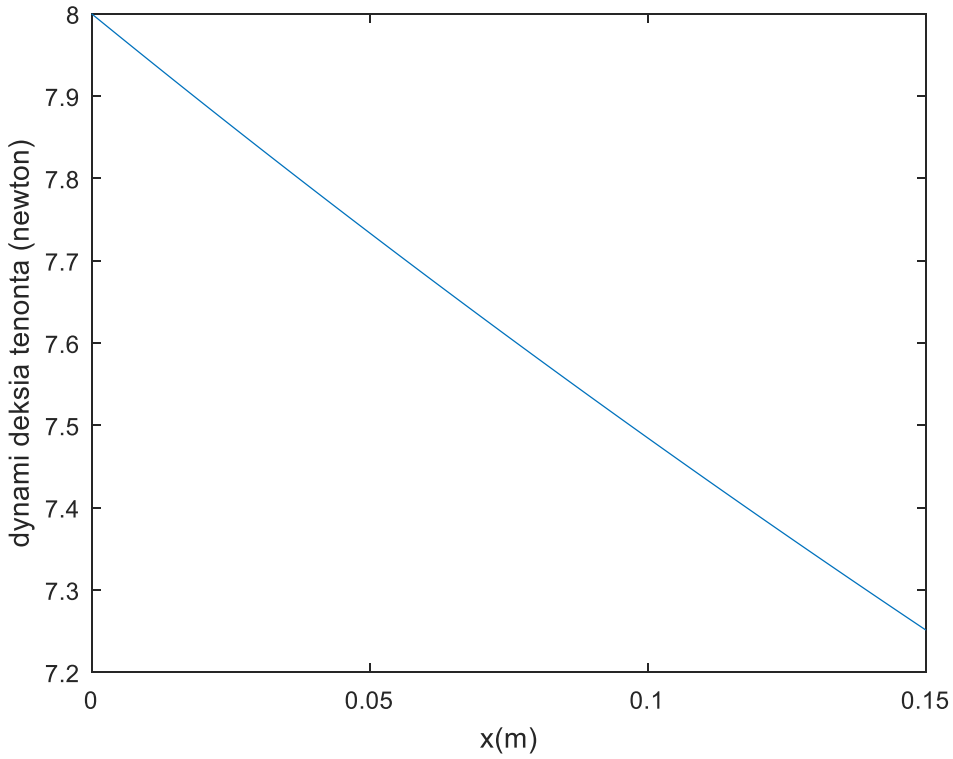
Σχήμα 6-36. Ορθή δύναμη Ν.



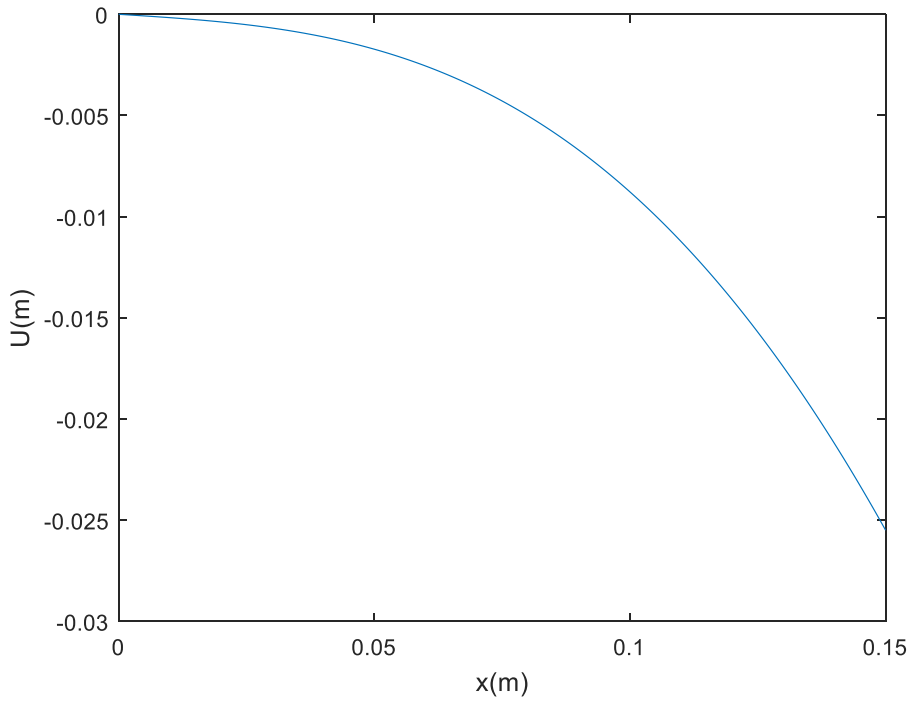
Σχήμα 6-37. Διατμητική δύναμη Q.



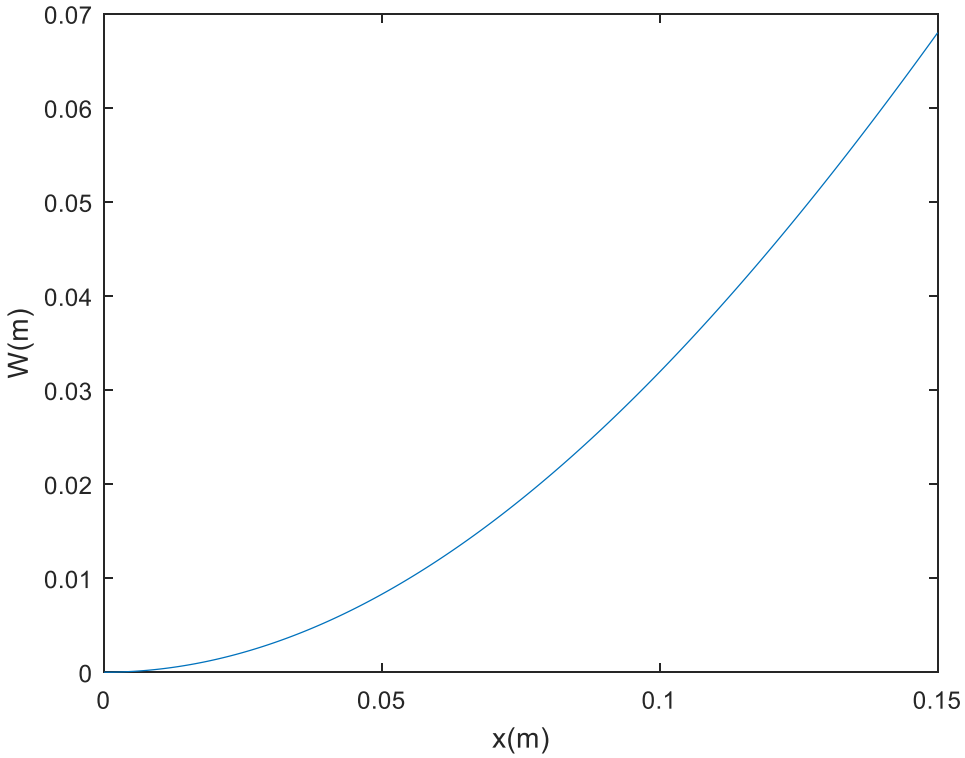
Σχήμα 6-38. Δύναμη αριστερού τένοντα (δεν επενεργεί).



Σχήμα 6-39. Δύναμη δεξιά τένοντα (επενεργεί).



Σχήμα 6-40. Συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης U.



Σχήμα 6-41. Συνάρτηση οριζόντιας μετατόπισης W.

6.3.3 Επενέργηση με τένοντα με ύπαρξη τριβής και βαρύτητας

Πλέον εφόσον εχουν τελειώσει τα δύο πρώτα σενάρια επενέργησης προσθέτουμε και την δύναμη της βαρύτητας που ασκείται στον βραχίονα. παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα αφού αρχικά παρουσιασθούν οι αρχικές συνθήκες:

$$u(0) = 0 \tag{6-35}$$

$$w(0) = 0 \tag{6-36}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{6-37}$$

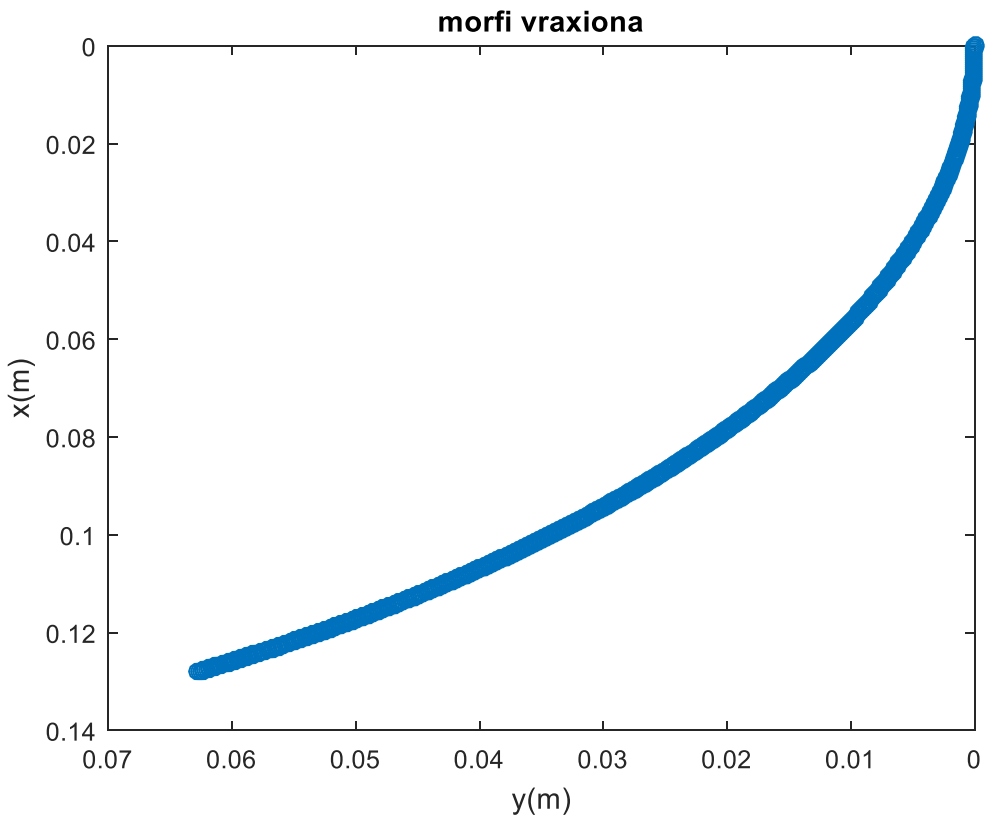
$$N(0) = -T_1(0) - \mathrm{T}_2(0) + \mathrm{W} = -6.62 \tag{6-38}$$

$$M_{\Pi\Lambda\mathrm{KT}} = -(T_1(0) - T_2(0))\,\mathrm{R}_{CS} + dW = -0.212\,Nm \tag{6-39}$$

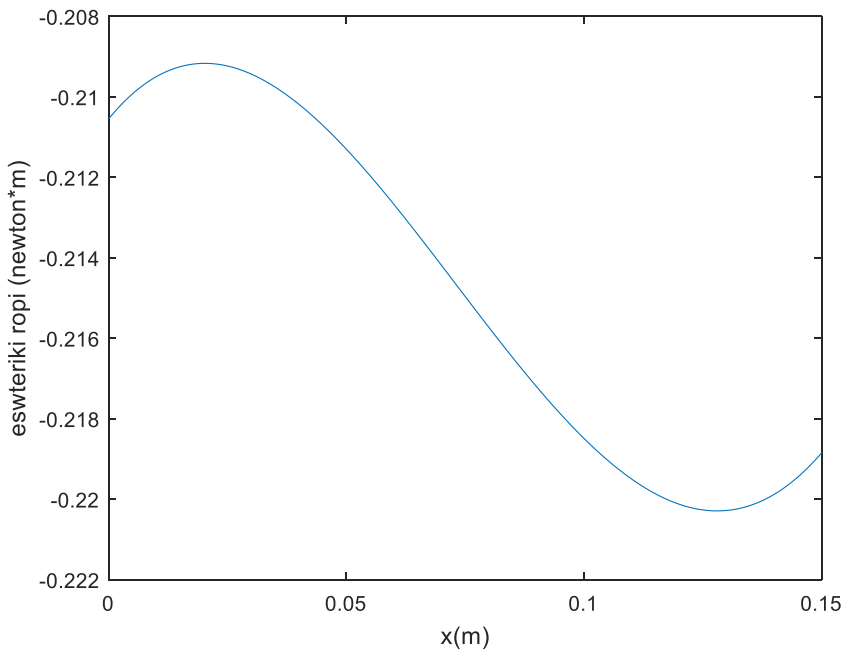
$$q(0) = 0N \tag{6-40}$$

$$T_1(0) = 8N \tag{6-41}$$

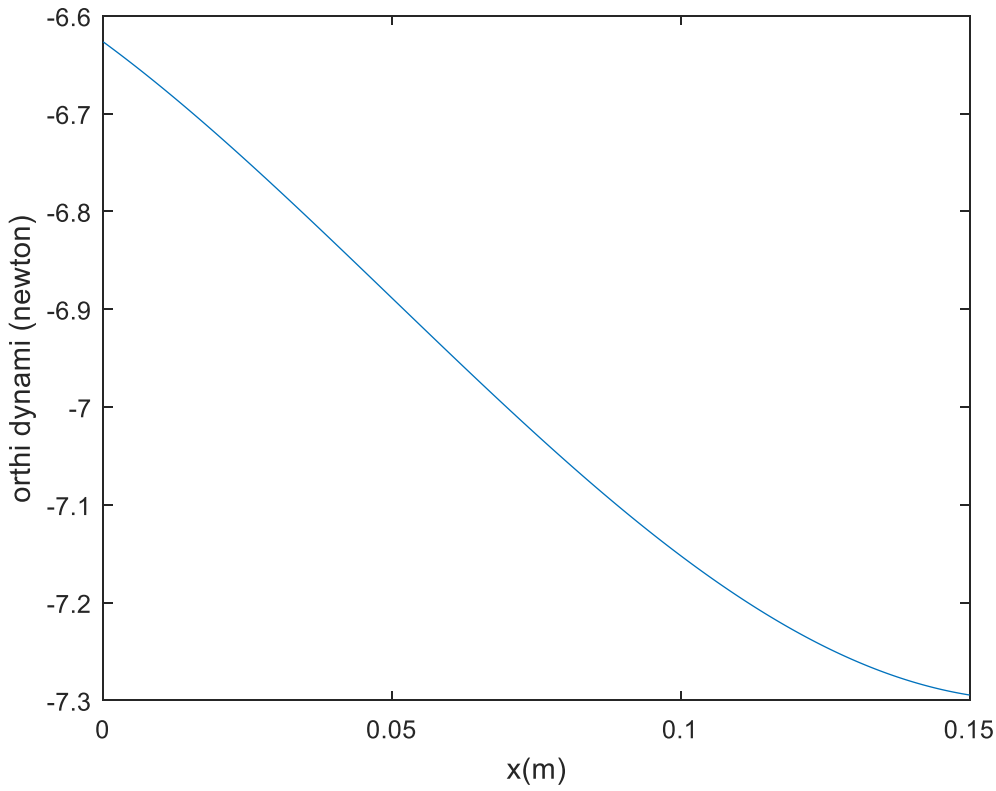
$$T_2(0) = 0 \tag{6-42}$$



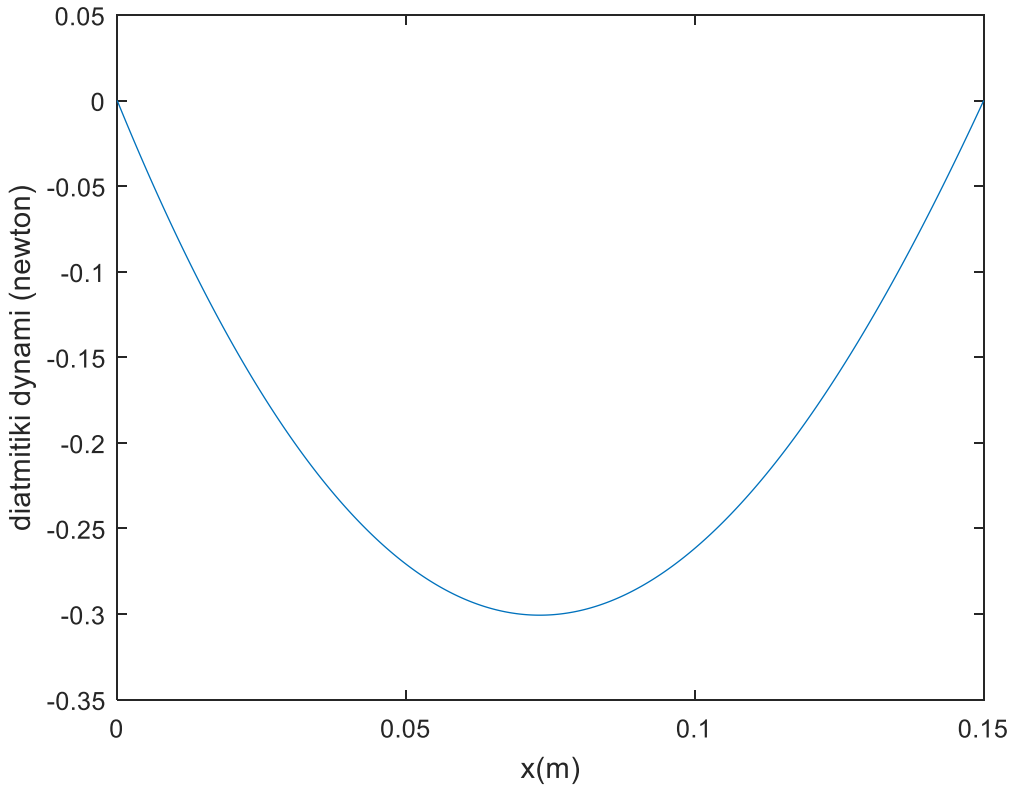
Σχήμα 6-42. Μορφή κεντροβαρικού άξονα του βραχίονα.



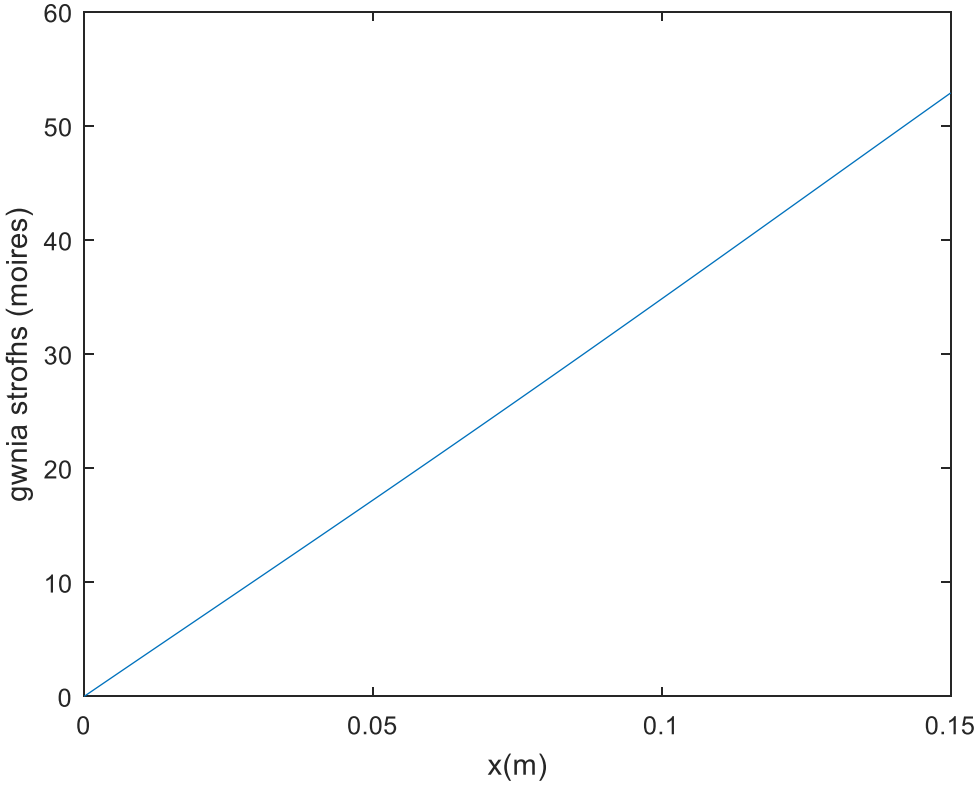
Σχήμα 6-43. Εσωτερική ροπή Μ.



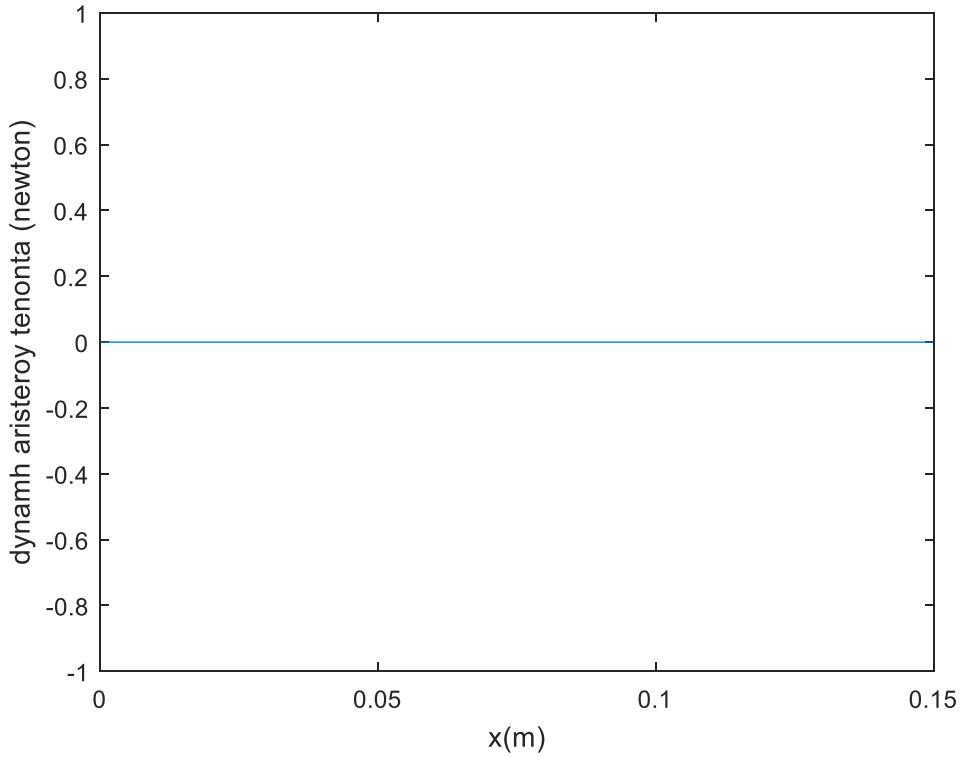
Σχήμα 6-44. Ορθή δύναμη N.



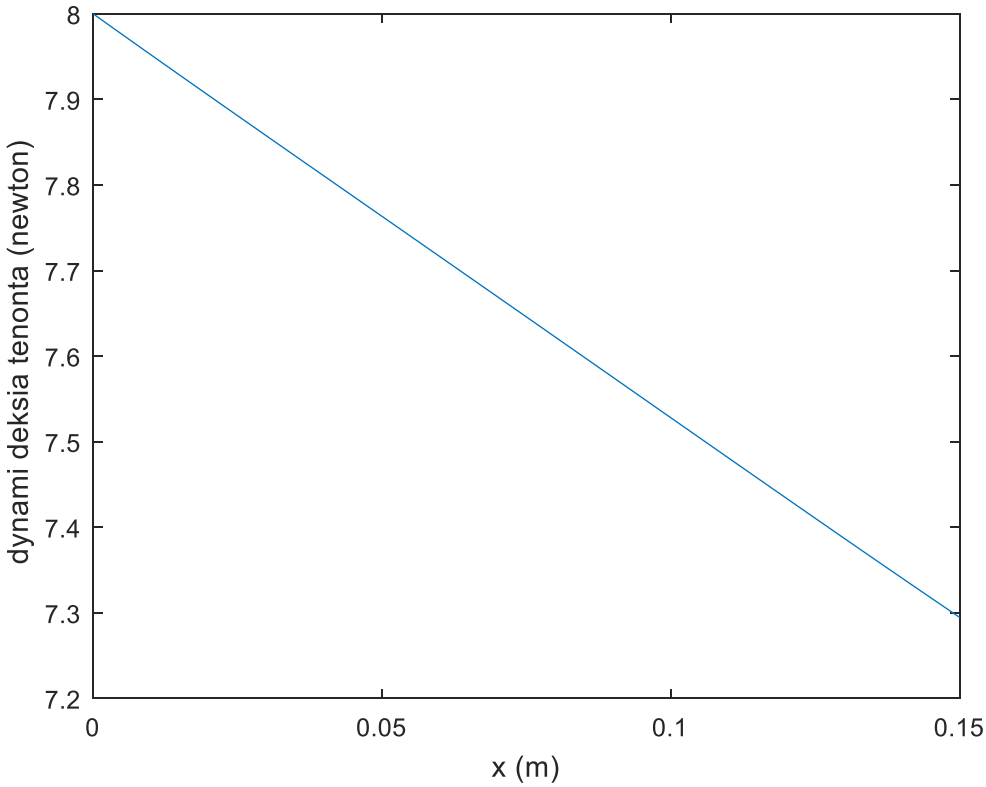
Σχήμα 6-45. Διατμητική δύναμη Q.



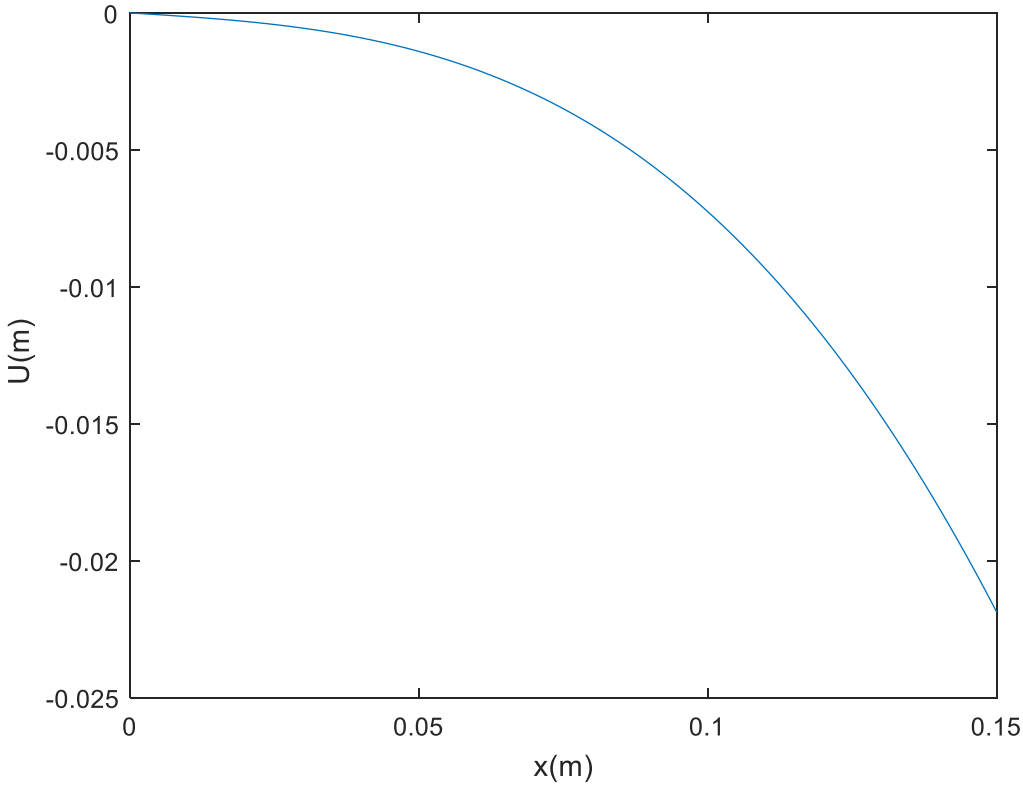
Σχήμα 6-46. Γωνία στροφής φ.



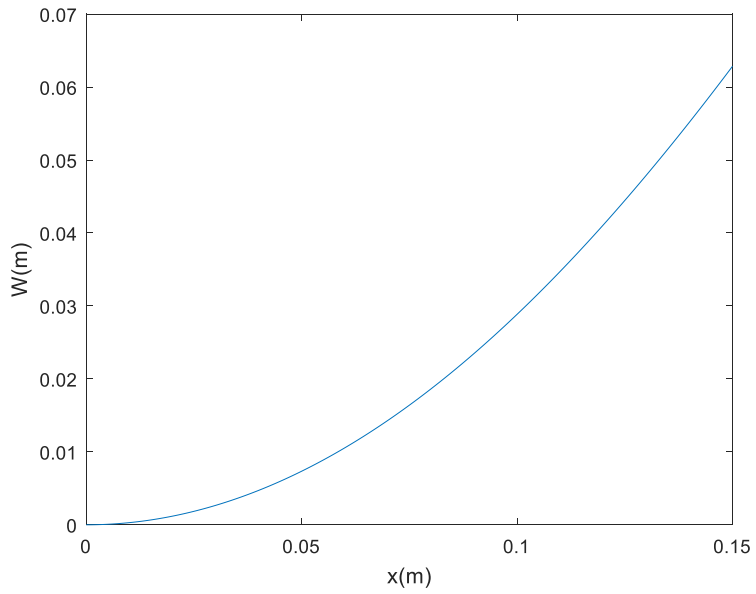
Σχήμα 6-47. Δύναμη αριστερού τένοντα (δεν επενεργεί).



Σχήμα 6-48. Δύναμη δεξιά τένοντα (επενεργεί).

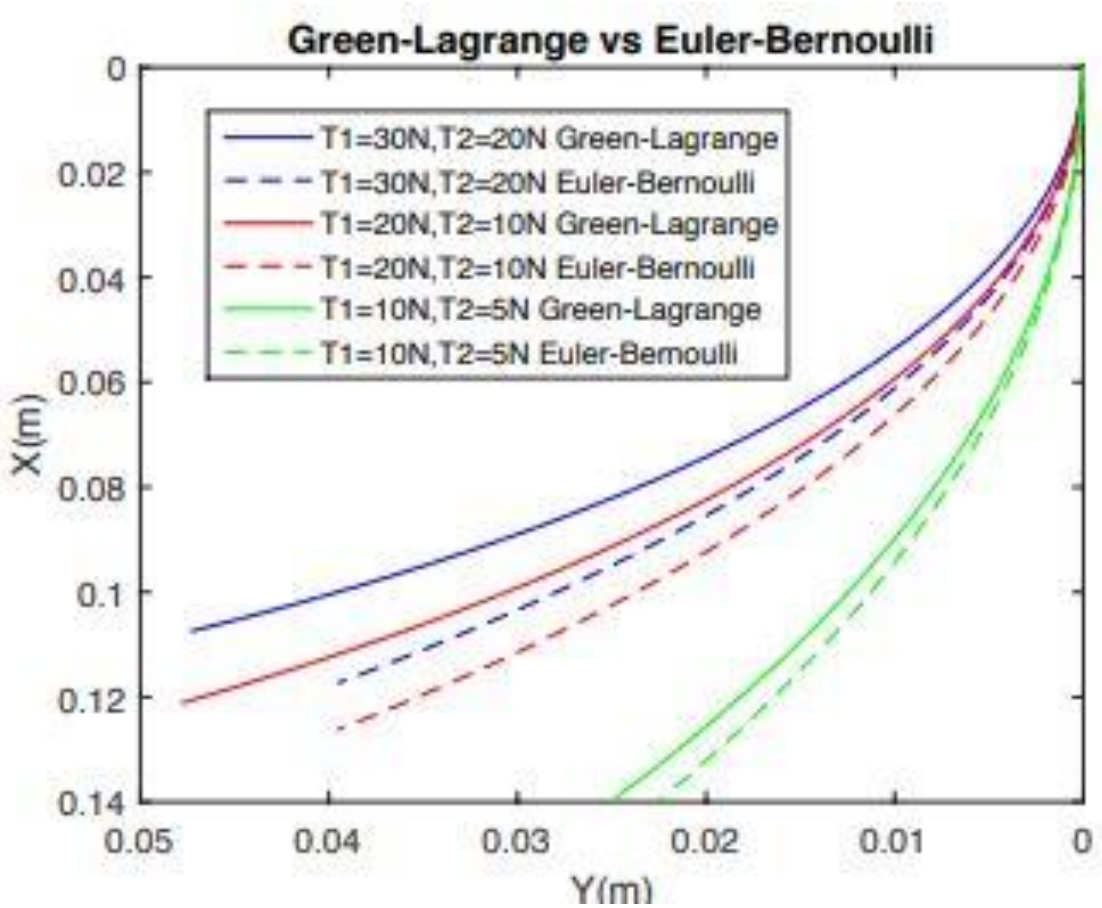


Σχήμα 6-49. Συνάρτηση κατακόρυφης μετατόπισης U.



Σχήμα 6-50. Συνάρτηση οριζόντια μετατόπισης W.

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα συγκεντρωτικό διάγραμμα όπου γίνεται σύγκριση μεταξύ των δύο μεθόδων (Green-Lagrange)-(Euler-Bernoulli) στο κατά πόσο διαφέρει η μορφή του βραχίονα σε διαφορετικά σενάρια επενέργησης.Πρέπει να σημειωθεί ότι χρσιμοποιείται βραχίονας με μικρότερο μέτρο ελαστικότητας σε συμπίεση ώστε να φαίνεται η διαφοροποίηση των δύο μεθόδων



Σχήμα 6-51. Συγκριτικό διάγραμμα των δύο μεθόδων

Όπως γίνεται εμφανές υπάρχει διαφοροποίηση στην μορφή των βραχιόνων. Οσο μεγαλώνει η δύναμη επενέργησης τόσο οι καμπύλες διαφοροποιούνται.

6.4 Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι όταν υπάρχει τριβή οι δυνάμεις των τενόντων δεν είναι πια σταθερές.

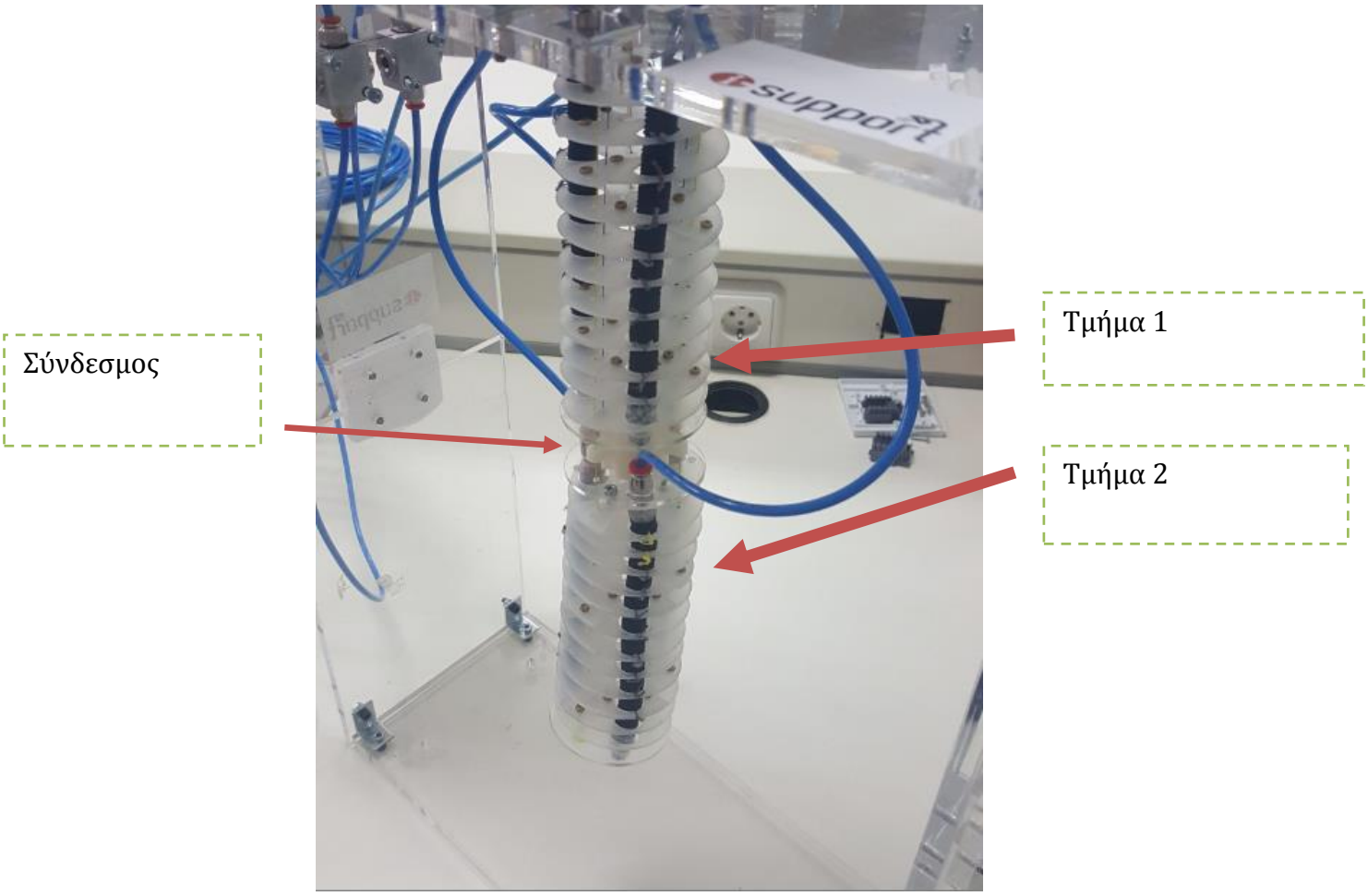
Επίσης όταν δεν υπάρχει βαρύτητα το ρομπότ έχει σταθερή εσωτερική ροπή και άρα έχει σταθερή καμπυλότητα.Αρα σε μια διαστημική εφαρμογή ισχύει η παραδοχή σταθερής καμπυλότητας και άρα η κινηματική σταθερής καμπυλότητας.Από το διάγραμμα 6-51 φαίνεται ότι τα δύο μοντέλα διαφέρουν διότι το Bernulli χρησιμοποιεί μια γραμμικοποιημένη εκδοχή του Green-Langrange και έτσι για υπερελαστικά υλικά το Green-Langrange υπερτερεί του Bernulli.

7 Πειραματικά αποτελέσματα

7.1 Εισαγωγή

Το θεωρητικό μέρος για διαπιστωθεί αν ευσταθεί, θα πρέπει να συνοδεύεται από πειραματική επαλήθευση. Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν δύο μοντέλα που περιγράφουν το σχήμα του ρομπότ, ένα από τη κλασσική μηχανική και ένα από τη θεωρία των μεγάλων μετατοπίσεων. Στο πειραματικό μέρος της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκε ένα εύκαμπτο ρομπότ το οποίο αποτελείται από πλαστικές φλάτζες (φέτες) σε ελεικοειδές σχήμα οι οποίες περιφεριακά έχουν οπές ώστε να περνούν τρεις τένοντες. Επίσης έχουν τρεις μεγαλύτερες οπές ώστε να περνούν τρεις πνευματικοί σωλήνες οι οποίοι αποτελούν και τον κορμό του ρομπότ διότι προσδίδουν τις ιδιότητες στροφικού και γραμμικού ελατηρίου.

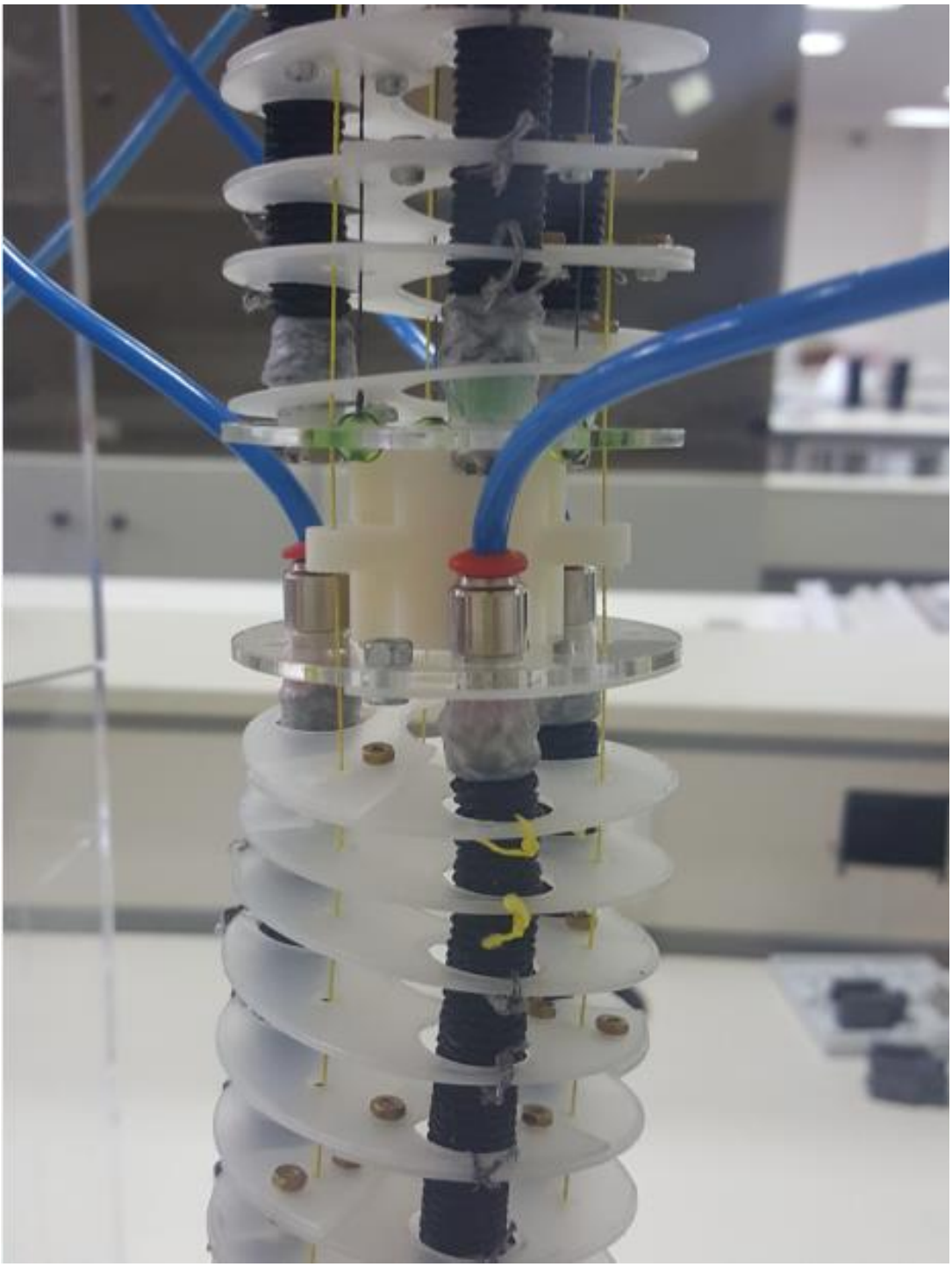
Αρχικά το ρομπότ αποτελούνταν από δύο τέτοια τμήματα δηλαδή είχε συνολικά έξι τένοντες και έξι πνευματικούς σωλήνες όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-1:



Σχήμα 7-1. Αρχική μορφή ρομπότ.

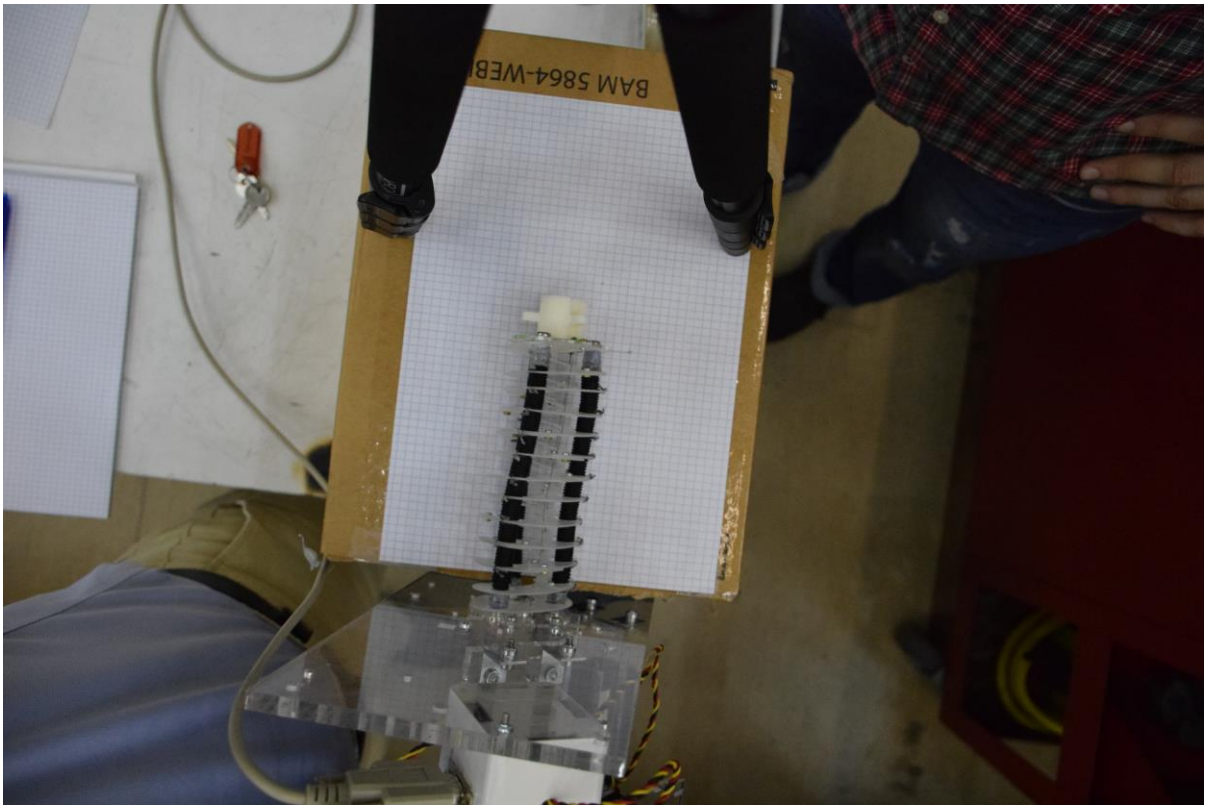
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-1 αρχικά το ρομπότ αποτελούταν από δύο τμήματα ενωμένα με ένα πλαστικό σύνδεσμο. Οι αδιάφανεις φλάτζες αποτελούν ένα ελικοειδές συνεχές μέσο ενώ οι μαύροι

σωλήνες είναι πνευματικοί . Αν εστιάσουμε περισσότερο στη φωτογραφία και κάνουμε μεγέθυνση βλ, Σχήμα 7-2 θα δούμε ότι οι πνευματικοί σωλήνες αποτελούνται από ‘σπειρες’ :



Σχήμα 7-2. Σπείρες των πνευματικών σωλήνων.

Για τις ανάγκες του πειράματος έγινε αποσύμπλεξη των δύο τμημάτων του ρομπότ και κρατήθηκε μόνο το πρώτο τμήμα, βλ. Σχήμα 7-3 το οποίο είναι πακτωμένο στη βάση.Στο Σχήμα 7-3 παρουσιάζεται η τελική μορφή του ρομπότ ύστερα από τον διαχωρισμό των δύο τμημάτων.



Σχήμα 7-3. Τελική μορφή του ρομπότ ύστερα από τον διαχωρισμό των δύο τμημάτων.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-3 στην άκρη του ρομπότ έχει μείνει ο πλαστικός σύνδεσμος ο οποίος συνδέει τα δύο τμήματα του ρομπότ αλλά δεν συμπεριλαμβάνεται στο μήκος του ρομπότ για τα πειράματα διότι αποτελείται από άλλο υλικό και έχει άλλη μορφή συνεπώς δεν αποτελεί επέκταση του ρομπότ.

Στο πειραματικό μέρος, έγιναν δύο πειράματα το πρώτο χωρίς βαρύτητας και οπότε το ρομπότ ακουμπά σε μία βάση και το δεύτερο με βαρύτητα και έτσι το ρομπότ αιωρείται και έχει κατακόρυφη μορφή.

7.2 Πρώτο πείραμα με έλλειψη βαρύτητας

Αρχικά έγινε πείραμα χωρίς τη βαρύτητα, το ρομπότ στηριζόταν σε μία βάση ώστε να εξισορροπείται η δύναμη της βαρύτητας από τη κάθετη αντίδραση της βάσης ενώ η επενέργηση δίνεται μόνο από έναν τένοντα. Ιδιαίτερη προσοχή έπρεπε να δοθεί στη τοποθέτηση της πάκτωσης από πλεξιγκλάς του ρομπότ στη μέγγενη στήριξης ώστε η κίνηση από τον τένοντα να είναι παράλληλη με την βάση στήριξης του ρομπότ.Το ρομπότ αφού ασκηθεί η επενέργηση κινείται στην επίπεδη βάση και αποτελεί μια επίπεδη καμπύλη, όπως φαίνεται στο σχήμα 7-4

Η επενέργηση γίνεται με ένα δυναμόμετρο το οποίο προσδένεται στον τένοντα και έτσι όταν τραβάμε τον τένοντα με το δυναμόμετρο διαβάζουμε τη δύναμη της επενέργησης. Με το δυναμόμετρο ασκήσαμε δυνάμεις με εύρος από 0-24 N.

Ένας λόγος για τον οποίο αρχικά επιλέχτηκε να γίνει πείραμα με έλειψη της βαρύτητας είναι για να μπορέσει να προσδιορισθεί το γινόμενο (AE) και (EI). Αυτα τα δύο γινόμενα γενικα είναι συναρτήσεις της καμπυλότητας σε κάθε σημείο του:

$$EI = EI(\mathrm{x},\mathrm{k}) \tag{7-1}$$

$$\mathrm{AE} = \mathrm{AE}(\mathrm{x},\mathrm{k}) \tag{7-2}$$

Συνοπτικά για να γίνει πιο κατανοητό οι παράμετροι-γινόμενα εξαρτώνται από τη καμπυλότητα σε κάθε σημείο x του απαραμόρφωτου βραχίονα.Το να βρεθούν αναλυτικές σχέσεις που περιγράφουν αυτά τα γινόμενα είναι πρακτικά πολύ δύσκολο .θεωρούμε όμως ότι η καμπυλότητα εξαρτάται από τη δύναμη επενεργησης και έτσι οι (7-1) και (7-2) μετατρέπονται στις (7-3) και (7-4) αντίστοιχα.

Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε είναι να βρεθούν ισοδύναμα γινόμενα που θα προσεγγίζουν όσο καλύτερα γίνεται ανάλογα με την επενέργηση τις δύο αυτές συναρτήσεις. Δηλαδή τα AE και EI είναι συνάρτηση του x και της δύναμης του τένοντα.

$$EI(\mathrm{x},\kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda\acute{o}\tau\eta\tau\alpha) \rightarrow EI(\mathrm{x},\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta) \rightarrow (EI)_{\iota\sigma} \tag{7-3}$$

$$\mathrm{AE}(\mathrm{x},\kappa\alpha\mu\pi\upsilon\lambda\acute{o}\tau\eta\tau\alpha) \rightarrow \mathrm{AE}(\mathrm{x},\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\eta) \rightarrow (\mathrm{AE})_{\iota\sigma} \tag{7-4}$$

7.3 Προσδιορισμός του εύρους του γινομένου EI

Ο προσδιορισμός του ισοδύναμου EI απαιτεί ιδιαίτερη επεξεργασία. Σκοπός είναι πειραματικά να βρούμε περίπου που βρίσκεται η τιμή του EI ώστε στην συνέχεια ένας αλγόριθμος trial and error να ψάχνει τη βέλτιστη τιμή του EI έτσι ώστε το μέτρο της διαφοράς μεταξύ της θεσης του ελεύθερου άκρου από το πείραμα και της θέσης του ελεύθερου άκρου από το μαθηματικό μοντέλο να ελαχιστοποιείται.

Αρχικά παρουσιάζεται η εξίσωση που συνδέει τη γωνία στροφής με την ροπή και τις μετατοπίσεις από το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων:

$$\frac{M}{EI} = -\frac{d\varphi}{dx}\cos(\varphi) - \frac{du_o}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\cos(\varphi) - \frac{d\varphi}{dx}\tan(\varphi)(\frac{du_o}{dx}+1)\sin(\varphi) \tag{7-5}$$

Η (8-5) αποτελεί την σχέση ροπής M γωνίας εκτροπής φ με τις μετατοπίσεις του κεντροβαρικού άξονα κατά x κατεύθυνση , u_o και κατά y κατεύθυνση, w_o .

Αν διακριτοποιηθεί αυτή η εξίσωση με βήμα Δx όπου Δx η απόσταση κάθε φλάτζας στην απαραμόρφωτη κατάσταση, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{M_\iota}{(EI)_i} = -\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta x}\cos(\varphi_i) - \frac{(\Delta u_o)_i}{\Delta x}\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta x}\cos(\varphi_i) - \frac{\Delta\varphi_i}{\Delta x}\tan(\varphi_i)(\frac{(\Delta u_o)_i}{\Delta x}+1)\sin(\varphi_i) \tag{7-6}$$

Αυτή με διακριτοποίηση για κάθε φλάτζα γίνεται

$$\frac{M_i}{(EI)_i} = -\frac{\varphi_{\iota+1}-\varphi_\iota}{\Delta x}\cos(\varphi_i) - \frac{u_{o_{i+1}}-u_{o_i}}{\Delta x}\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta x}\cos(\varphi_i) - \frac{\varphi_{\iota+1}-\varphi_\iota}{\Delta x}\tan(\varphi_i)(\frac{u_{o_{i+1}}-u_{o_i}}{\Delta x}+1)\sin(\varphi_i) \tag{7-7}$$

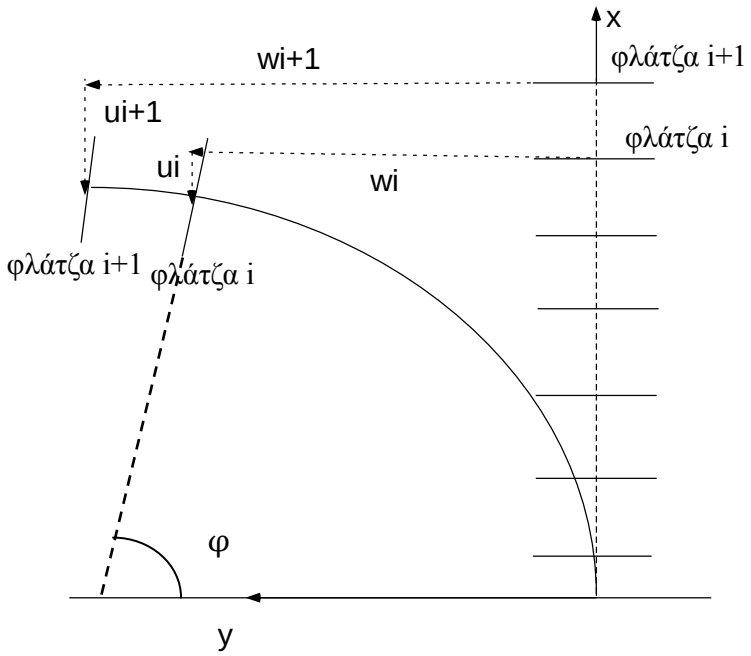
Όταν γίνεται επενέργηση χωρίς βαρύτητα η εσωτερική ροπή θα ισούται με:

$$M_i = TR \tag{7-8}$$

που T η δύναμη από τον τένοντα και R η ακτίνα της διατομής του βραχίονα.

Αν εφαρμοστεί επενέργηση έστω T και για κάθε φλάντζα μετρηθούν οι μετατοπίσεις του κέντρου βάρους κατακόρυφα και οριζόντια, όπως και οι γωνίες στροφής θα προκύψουν από την (7-6) με επίλυση ως προς $(\mathrm{EI})_i$ τιμές για το EI. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε περίπου την περιοχή τιμώ του EI για συγκεκριμένη επενέργηση. Αυτό το εύρος θα φανεί πολύ χρήσιμο στη

συνέχεια. Τραβήχτηκαν φωτογραφίες οι οποίες απεικόνιζαν την παραμορφωμένη κατάσταση του ρομπότ όταν με το δυναμόμετρο ασκούσαμε δύναμη όταν με αυτό τανύαμε τον τένοντα. Με καταγραφή της δύναμης χρήση της (7-8) μετριέται η σταθερή ροπή. Απο τις φωτογραφίες μετριήθηκαν οι μετατοπίσεις u_o, w_o καθώς και η γωνία στροφής φ ενώ με χρήση της 7-6 προσδιορίζεται κάθε $(\mathrm{EI})_i$. Στο Σχήμα 7-4 φαίνεται η διαδικασία για μια τυχαία φλάτζα και ομοίως το ίδιο έγινε για κάθε φλάτζα από τις φωτογραφίες που τραβήχτηκαν:



Σχήμα 7-4. Απεικόνιση του ρομπότ με διακριτοποίηση από φλάτζες για εύρεση του EI.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 7-4 για παράδειγμα η φλάτζα i και i+1 μετατοπίζονται και στρέφονται. Οι μετατοπίσεις και οι στροφές μετρήθηκαν από τίς φωτογραφίες και αντικαταστάθηκαν στη (7-7) με αποτέλεσμα για κάθε επενέργηση με εύρος 0-24 N να βρεθεί ένα εύρος για το EI από 0. 006 έως 0. 07 $\mathrm{N}m^2$.

$$0.003 < EI < 0.07 Nm^2 \tag{7-9}$$

Από την ανίσωση 8-9 δημιουργούνται όρια για το EI.

Στο παράρτημα Β παρουσιάζονται φωτογραφίες του ρομπότ από το πείραμα που έγινε το οποίο δείχνει την μετατόπιση κάθε φλάτζας όπως παρουσιάζεται και στο Σχήμα 7-4.

7.4 Προσδιορισμός του εύρους τιμών της παραμέτρου AE

Το εύρος της παραμέτρου AE θα βρεθεί με έναν πιο εμπειρικό-πρακτικό τρόπο.

Αν γίνει η υπόθεση ότι ο βραχίονας είναι μία συμπαγής δοκός η οποία έχει ακτίνα διατομής:

$$R_{CS} = 0.03m \tag{7-10}$$

Το υλικό του βραχίονα είναι από silicone-rubber πολυμερές με μέτρο ελαστικότητας :

$$0.02GPa = 2*10^7 Pa \tag{7-11}$$

Και αυτή η τιμή πρέπει να τονιστεί ότι είναι η πιο . Υπάρχουν και τύποι του ίδιου υλικού με τάξεις μεγέθους κάτω από την τιμή που δίνεται στην εξίσωση (7-11)

Αυτό θα έδινε για το AE μία τιμή:

$$AE = \pi R^2_{CS} 2*10^7 = 6\pi 0.03^2 10^7 = 6\pi 10^3 \mathrm{N} \quad (7\text{-}12)$$

Με αυτό τον τρόπο πορσδιορίστηκε το εύρος μέσα στο οποίο βρίσκεται το AE

$$0 < AE < 18850 Newton \quad (7\text{-}13)$$

7.5 Προσδιορισμός των παραμέτρων AE-EI μέσω πειράματος από επενέργηση ενός τένοντα χωρίς βαρύτητα.

Αρχικά το πρώτο βήμα του πειράματος είναι να δημιουργηθεί ένας πίνακας με τρεις στήλες, η πρώτη στήλη θα περιέχει την δύναμη επενέργησης και οι άλλες δύο τις συντεταγμένες x και y της άκρης του ρομπότ. Στη συνέχεια θα δημιουργηθεί ένας αλγόριθμος ο οποίος θα αποτελείται από δύο δομές for που θα τρέχουν στα εύρη για το AE και το EI που βρήκαμε πειραματικά και μέσα σε αυτές θα υπάρχει το κριτήριο να ελαχιστοποιείται η απόσταση μεταξύ του πειραματικού και του θεωρητικού σημείου (νόρμα). ο κώδικας παρουσιάζεται παρακάτω σε απλοποιημένη μορφή ψευδωκώδικα:

```
TENDON_FORCE<-INPUT
For(EI)=0.006:0.07
  FOR(AE)=0:18850
        IF MINIMIZE(NORM)
                BREAK
        END
   END
END
```

Η μαθηματική έκφραση της νόρμας n ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς των διανυμάτων θέσης του $r_{\exp}$ που είναι το πειραματικό και του r_{sim} που είναι το θεωρητικό:

$$n = \left| \overrightarrow{r_{\exp}} - \overrightarrow{r_{sim}} \right| \quad (7\text{-}14)$$

Σχήμα 7-5. Αλγόριθμος για εύρεση των παραμέτρων AE και EI.

Μέσω του αλγορίθμου από το Σχήμα (7-5) προσδιορίζεται για κάθε επενέργηση μια τιμή για το AE και μια τιμή για το EI που περιγράφουν την μηχαμική συμπεριφορά του βραχίονα.Με λίγα λόγια ανάγουμε τον βραχίονα σε ένα στροφικό και ένα γραμμικό ελατήριο των οποίων οι σταθερές αλλάζουν με την επενέργηση.

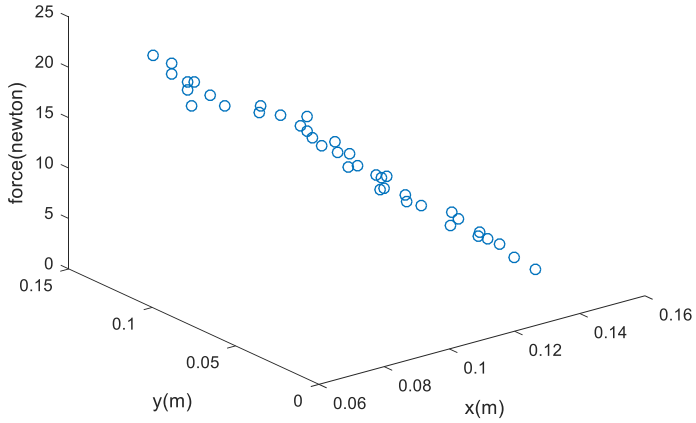
Έγιναν πολλές επενεργήσεις και έτσι παρουσιάζεται ο πίνακας 7-1 που θα περιέχει στη πρώτη στήλη την δύναμη ενώ δεύτερη και τη τρίτη το που βρίσκεται η θέση του ρομπότ.

Πίνακας 7-1. Πίνακας με δύναμη και θέση του άκρου του ρομπότ.

Δύναμη(N)	x συντέτ. (m)	y συντέτ. (m)
1. 962	0. 14150275	0. 02981786
2. 943	0. 13846154	0. 0360989
1. 962	0. 141565	0. 02981786
3. 924	0. 13712637	0. 04285055
4. 16925	0. 13607143	0. 04730769
4. 905	0. 13434066	0. 04879121

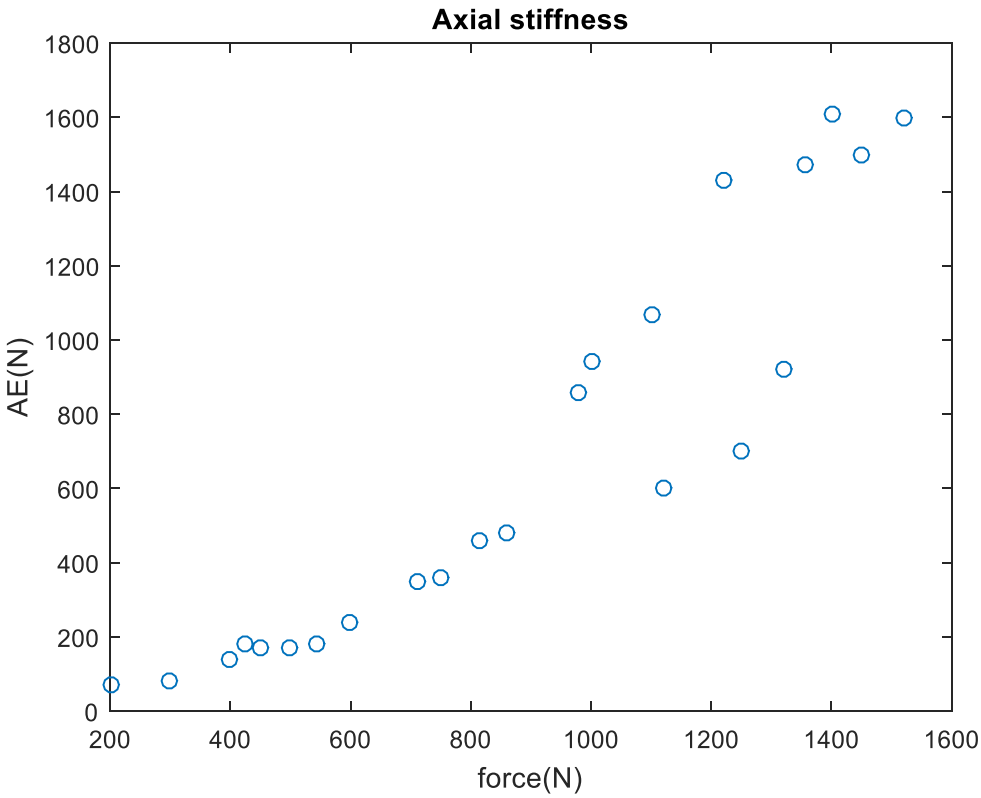
5. 886	0. 13112473	0. 05575797
6. 9651	0. 12502747	0. 06548736
7. 3575	0. 12248159	0. 06974258
7. 99515	0. 12197802	0. 06972527
8. 4366	0. 11752747	0. 07557692
8. 6328	0. 11785714	0. 07434066
9. 6138	0. 11950549	0. 07574176
9. 5157	0. 11839286	0. 07697802
6. 3765	0. 13063187	0. 05876374
4. 4145	0. 13434066	0. 04936813
5. 34645	0. 1293956	0. 05711538
9. 81	0. 11703297	0. 07722527
10. 791	0. 11126374	0. 08241758
10. 9872	0. 11291209	0. 07994505
12. 2625	0. 10879121	0. 08406593
11. 9682	0. 11208791	0. 08324176
12. 9492	0. 10549451	0. 08736264
13. 29255	0. 10879121	0. 08571429
13. 734	0. 10384615	0. 08983516
14. 2245	0. 10384615	0. 09313187
14. 9112	0. 10137363	0. 09230769
15. 4017	0. 10467033	0. 09478022
16. 1865	0. 09725275	0. 0956044
16. 5789	0. 09230769	0. 0989011
17. 2656	0. 09230769	0. 09807692
17. 60895	0. 08406593	0. 10384615
18. 8352	0. 08076923	0. 10549451
18. 1485	0. 07541209	0. 10631868
19. 8162	0. 07417582	0. 10631868
23. 8383	0. 06494505	0. 10879121
20. 3067	0. 07666978	0. 10714286
20. 601	0. 07449808	0. 10714286
22. 563	0. 0706261	0. 10901703
21. 4839	0. 07072912	0. 10960137

Τα σημεία του πίνακα 7-1 φαίνονται στο Σχήμα 7-6

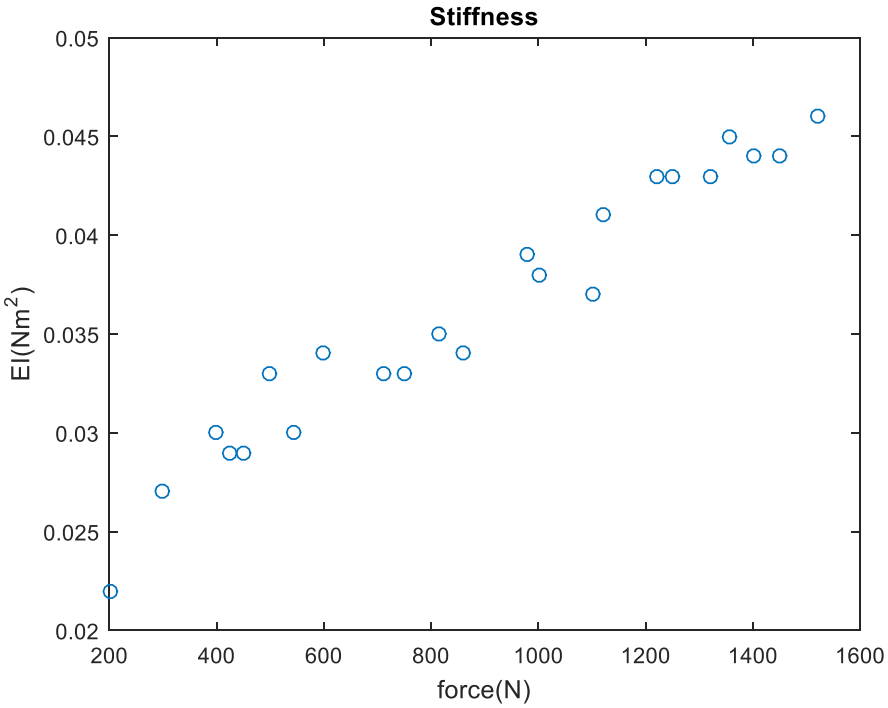


Σχήμα 7-6. Συντεταγμένες του άκρου του ρομπότ ανάλογα με την επενέργηση από τον τένοντα.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 7-5 ώστε να ελαχιστοποιείται η νόρμα της απόστασης του πειραματικού σημείου και του σημείου που προκύπτει από το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα για τις τιμές του AE και του EI που κατά ζεύγη για την ίδια δύναμη ελαχιστοποιούν τη νόρμα (απόσταση μεταξύ θεωρητικού και πειραματικού σημείου):

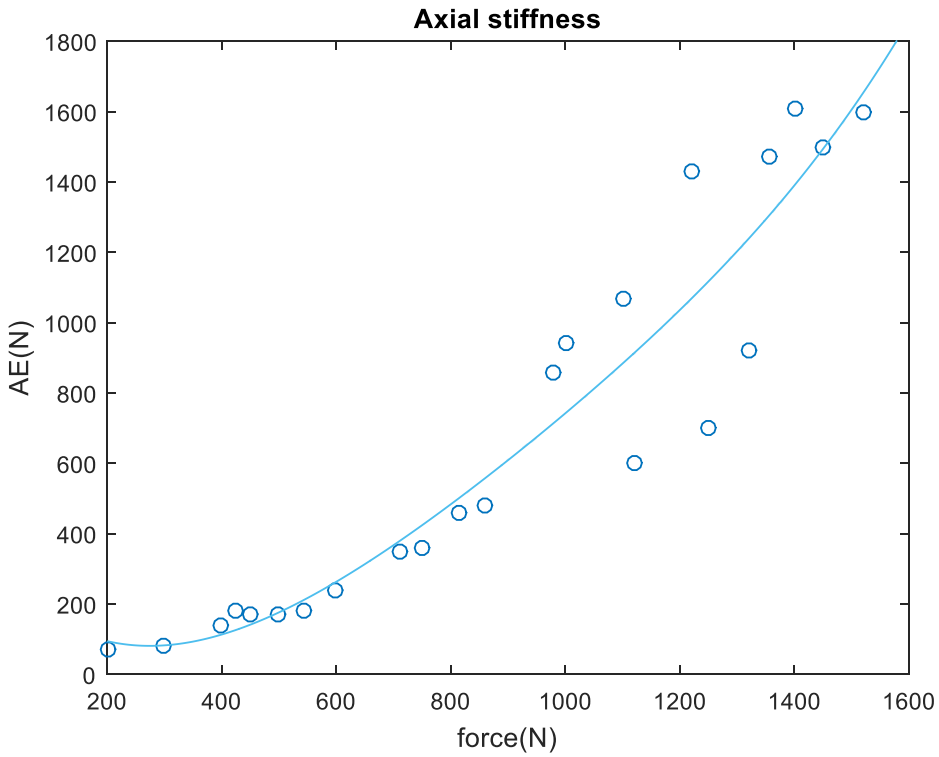


Σχήμα 7-7. AE παράμετρος που ελαχιστοποιεί την n ανάλογα με την δύναμη επενέργησης.



Σχήμα 7-8. EI παράμετρος που ελαχιστοποιεί τη n ανάλογα τη δύναμη επενέργησης.

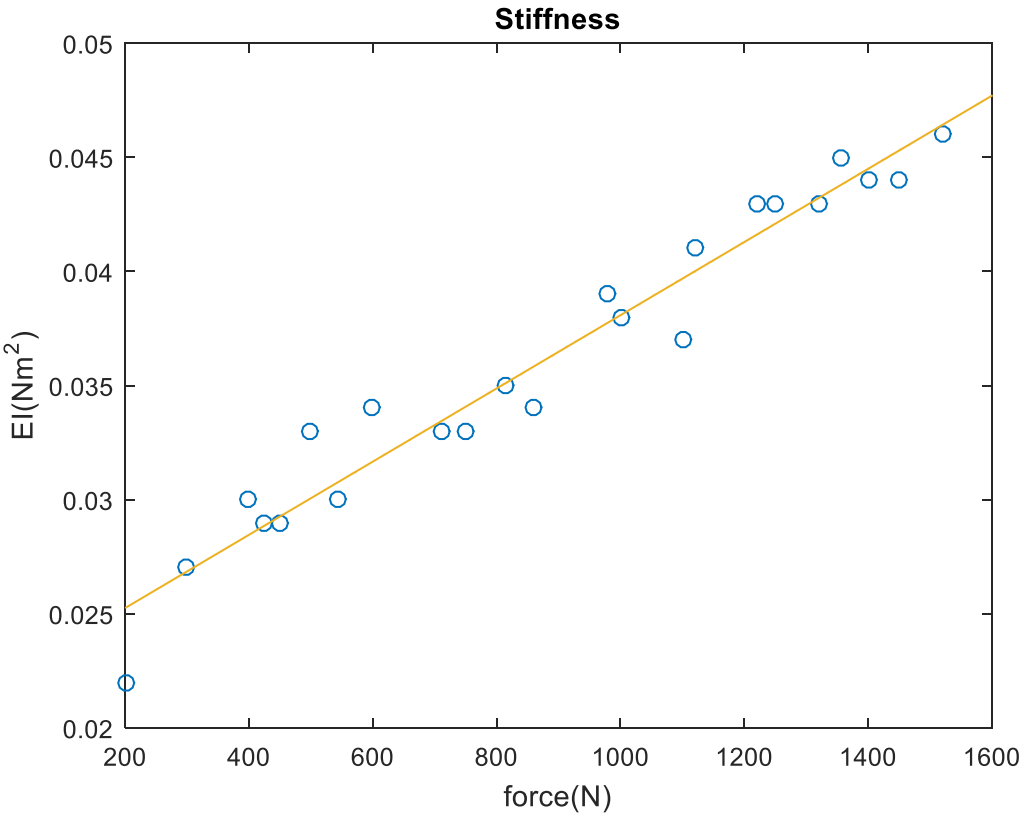
Όπως φαίνεται μπορούν να προσαρμοστούν καμπύλες στα παραπάνω Σχήματα 7-7, 7-8 και έτσι με χρήση του εργαλείου του matlab παρουσιάζονται οι καμπύλες προσαρμογής στα πειραματικά δεδομένα:



Σχήμα 7-9. Καμπύλη προσαρμογής στην παράμετρο AE που ελαχιστοποιεί την n.

Όπως φαίνεται η εξίσωση ανάλογα με την δύναμη επενέργησης T για την παράμετρο AE προκύπτει:

$$AE(\mathrm{T}) = 0.0026T^5 - 0.17T^4 + 3.5T^3 - 20T^2 + 81T - 42 \tag{7-15}$$



Σχήμα 7-10. Καμπύλη προσαρμογής για το EI που ελαχιστοποιεί την n.

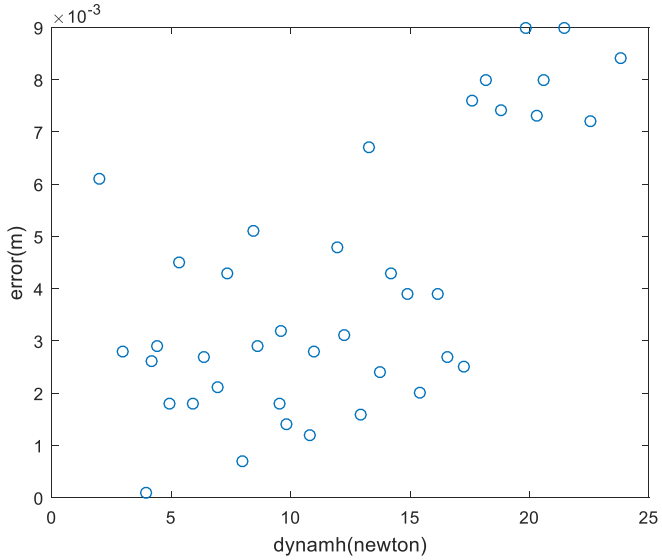
Για την παράμετρο EI προκύπτει η παρακάτω εξίσωση που κατασκευάζεται από προσαρμογή στα δεδομένα που ελαχιστοποιούν την νόρμα:

$$EI(T) = 0.0013T + 0.025 \tag{7-16}$$

Όπου με T συμβολίζεται η δύναμη επενέργησης από τον τένοντα.

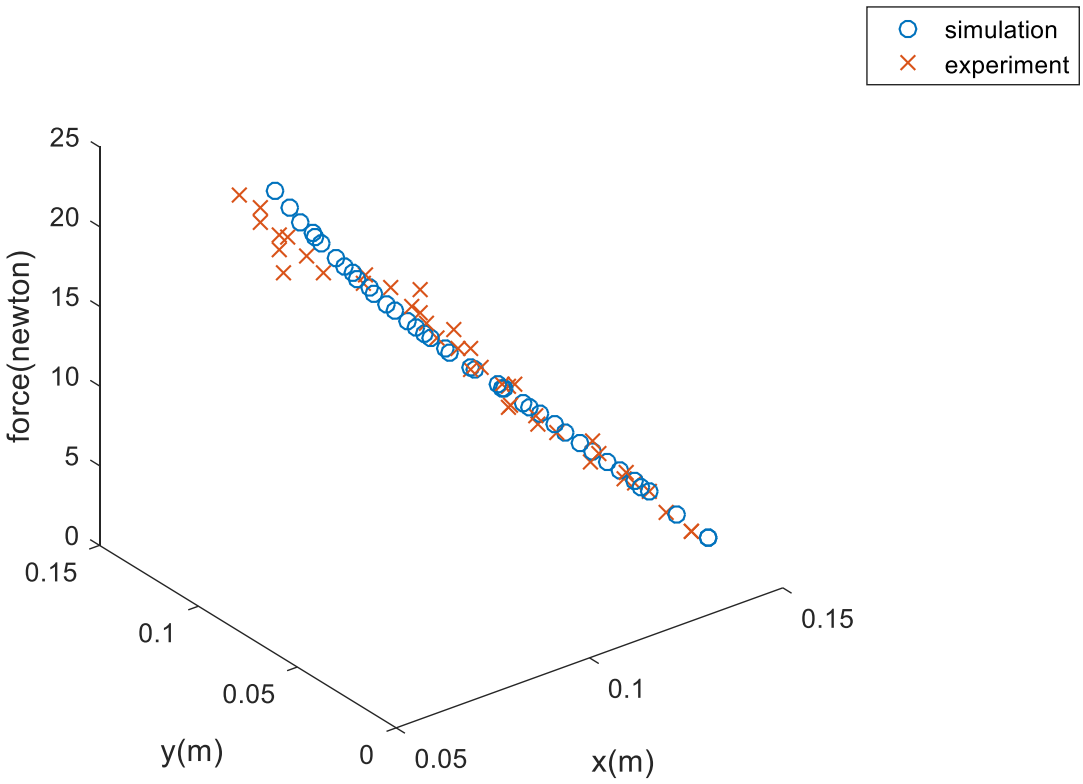
Στα σχήματα 7-9 και 7-10 παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η δύναμη και άρα αυξάνεται η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του βραχίονα ο βραχίονας γίνεται όλο και πιο δύσκαμπτος τόσο κατά την αξονική παραμόρφωση όσο και κατά τη στροφική του ελαστικότητα. Αυτό όπως φαίνεται συμβαίνει σταδιακά διότι όπως φαίνεται στο Σχήμα 7-2 οι πνευματικοί σωλήνες που είναι ο κορμός του βραχίονα αποτελούνται από 'σπείρες'. Όσο παραμορφώνεται ο βραχίονας λόγω αύξησης της δύναμης επενέργησης όλο και περισσότερο τόσο οι σπείρες σταδιακά ακουμπούν η μία στην άλλη έτσι ώστε κατά την αξονική κατεύθυνση ο βραχίονας να γίνεται όλο και πιο δύσκαμπτος. Επίσης αυτό οδηγεί και στο ότι η ικανότητα στροφής του βραχίονα γίνεται πιο χαμηλή διότι η στροφική δυσκαμψία αυξάνεται και αυτή σταδιακά λόγω του ότι όπως προαναφέρθηκε οι σπείρες ακουμπούν μεταξύ τους. Ετσι μπορεί να εξηγηθεί το γιατί οι δύο συναρτήσεις παρεμβολής των Σχημάτων 7-9 και 7-10 είναι συναρτήσεις οι οποίες αυξάνουν το μέγεθός τους όταν αυξάνεται η δύναμη επενέργησης στο εύρο που εργαστήκαμε με το συγκεκριμένο ρομπότ. Παρακάτω παρουσιάζεται το Σχήμα 7-11 που εκφράζει το σφάλμα (νόρμα) της θέσης του άκρου του ρομπότ μεταξύ του πειραματικού μοντέλου και του

μοντέλου μεγάλων μετατοπίσεων ανάλογα με την επενέργηση που δέχεται το ρομπότ από έναν τένοντα



Σχήμα 7-11. Διαφορά της θέσης του άκρου του ρομπότ μεταξύ του πειραματικού μοντέλου και του μοντέλου μεγάλων μετατοπίσεων.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα της θέσης του άκρου του ρομπότ όπως και τα θεωρητικά από το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων για την αντίστοιχη επενέργηση .



Σχήμα 7-12. Πειραματικά και αντίστοιχα θεωρητικά δεδομένα για τη θέση του ρομπότ.

7.6 Σχολιασμός του μοντέλου μεγάλων μετατοπίσεων και της κλασσικής μηχανικής

Σε αυτό το κεφάλαιο εργαστήκαμε με το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων. Γίνεται η θεώρηση η οποία ισχύει και στη πράξη ότι το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων προσεγγίζει καλύτερα ένα σύστημα που δέχεται μεγάλες παραμορφώσεις. Βέβαια το τι ορίζεται ως μεγάλη παραμόρφωση δεν είναι ακόμα σαφές στην επιστημονική κοινότητα και έτσι αυτό που προτείνεται είναι να δοκιμάζεται ένα μοντέλο και προβλέπει ικανοποιητικά το πείραμα τότε ενδείκνυται για χρήση. Ετσι και το μοντέλο της κλασσικής μηχανικής οδηγεί στα ακριβώς ίδια αποτελέσματα με το μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων για την επενέργηση που δέχεται ο τένοτας και το συγκεκριμένο ρομπότ (διάμετρος, μήκος, υλικό). Παρατηρείται ότι αυτά τα δύο μοντέλα διαφοροποιούνται για μεγαλύτερες επενεργήσεις με θεωρητική υπεροχή του μοντέλου των μεγάλων μετατοπίσεων που εξ ορισμού περιγράφει μεγάλες παραμορφώσεις. Το συμπέρασμα όμως για το συγκεκριμένο ρομπότ είναι ότι προκύπτουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με ελάχιστες αποκλίσεις .

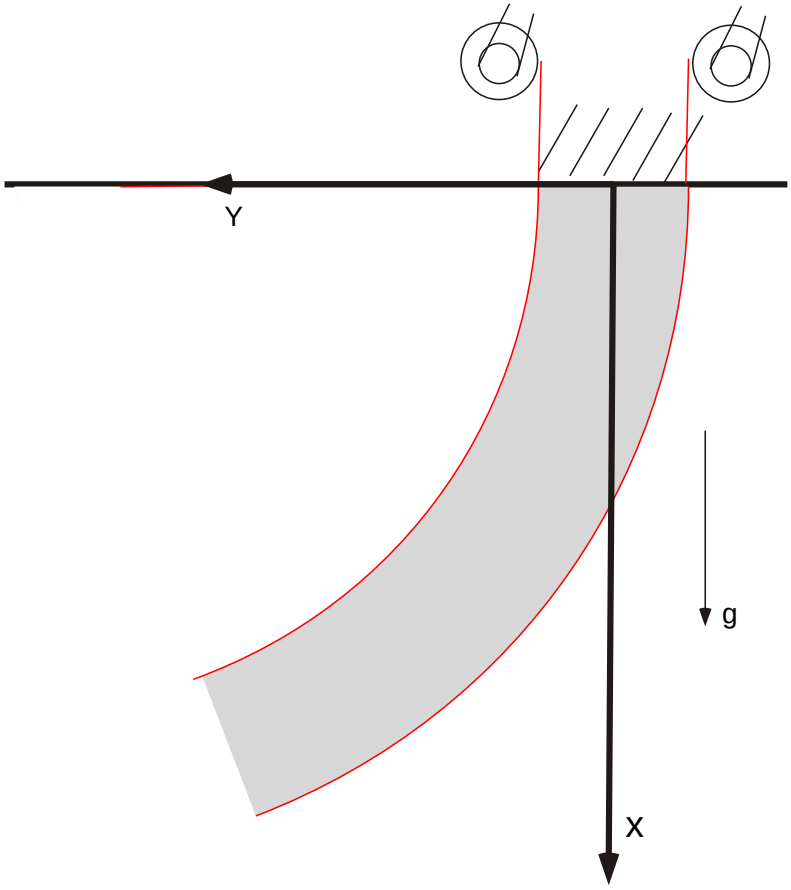
8 Πείραμα με επίδραση της δύναμης της βαρύτητας

8.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσδιορίσαμε τις περιοχές λειτουργίας του ρομπότ για τις τιμές του EI και του AE ανάλογα με την επενέργηση που δεχόταν το ρομπότ από ένα τένοντα χωρίς την επίδραση της βαρύτητας. Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγεται και η δύναμη της βαρύτητας ενώ πάλι η επενέργηση γίνεται από έναν τένοντα. Γίνεται η παραδοχή ότι η βαρύτητα δεν αλλάζει σημαντικά τις περιοχές λειτουργίας (βλέπε Πίνακα 5-2) του μοντέλου των μεγάλων μετατοπίσεων το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και για το πείραμα

8.2 Παρουσίαση του πειράματος

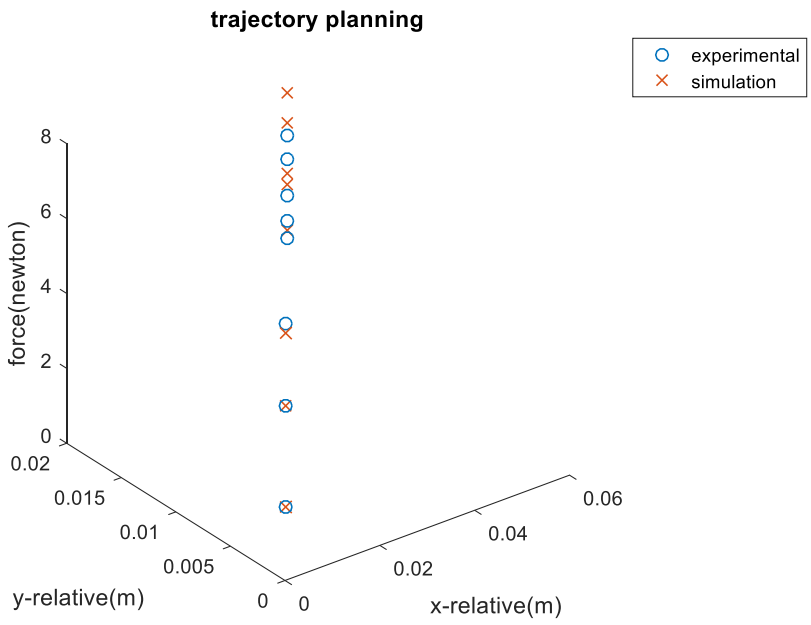
Πλέον το ρομπότ βρίσκεται σε κατακόρυφη κατάσταση και έτσι επιδρά η βαρύτητα αφού δεν υπάρχει βάση στήριξης όπως στο προηγούμενο πείραμα. Τοποθετείται ένας αισθητήρας θέσης στο ρομπότ ο οποίος είναι συνδεδεμένος με το λειτουργικό σύστημα ROS και μέσω αυτού μπορούμε να έχουμε σε πραγματικό χρόνο δεδομένα για το που βρίσκεται η άκρη του ρομπότ. Με ένα δυναμόμετρο το οποίο είναι συνδεδεμένο με έναν τένοντα γίνεται επενέργηση για δυνάμεις από 0-8 N. Στο Σχήμα 8-1 φαίνεται η διάταξη του ρομπό:



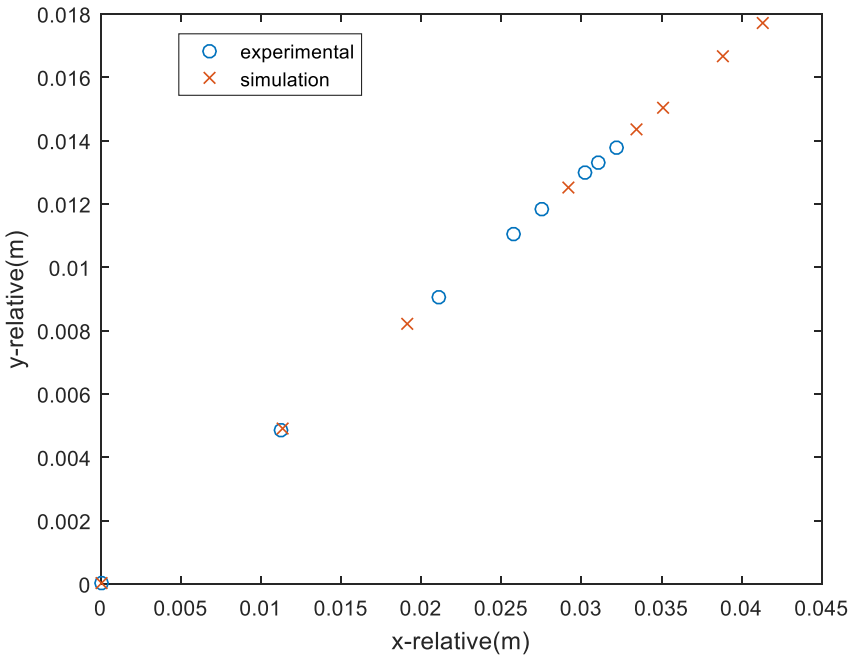
Σχήμα 8-1. Βραχίονας με επίδραση της βαρύτητας.

Οι δυνάμεις δίνονται με αύξουσα σειρά και έτσι σχεδιάζεται μια τροχιά στο επίπεδο εφόσον η καμπύλη είναι επίπεδη. Παρακάτω παρουσιάζονται διαγράμματα τα οποία συγκρίνουν την τροχιά που δημιουργείται στην πραγματικότητα σε σχέση με την τροχιά που δημιουργείται από το θεωρητικό μοντέλο των μεγάλων μετατοπίσεων.

Αρχικά φαίνονται οι δύο τροχιές (πειραματική-θεωρητική) συναρτήσει της αντίστοιχης δύναμης:



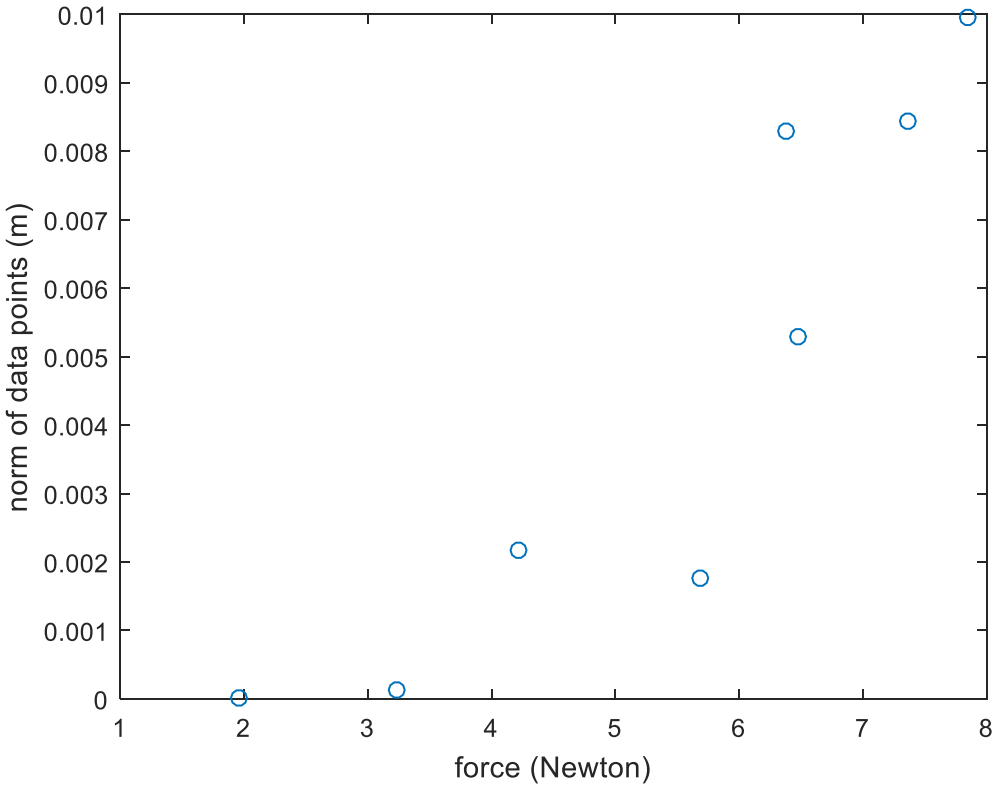
Σχήμα 8-2. Τροχιά του ελεύθερου άκρου συναρτήσει της δύναμης, (θεωρητική-πειραματική).



Σχήμα 8-3. Τροχιές (θεωρητική-πειραματική)

Οι συντεταγμένες που παρουσιάζονται δεν είναι πραγματικές, οι δύο καμπύλες έχουν αναχθεί σε ένα ιδεατό-κοινό σύστημα αναφοράς με σκοπό μόνο τη σύγκρισή τους και όχι την εξαγωγή της πληροφορίας του που είναι το ελεύθερο άκρο.

Στο Σχήμα 8-4 παρουσιάζεται η απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων σημείων πειραματικό-θεωρητικό της τροχιάς:



Σχήμα 8-4. Απόσταση αντίστοιχων σημείων (πειραματικό-θεωρητικό) για την ίδια δύναμη

9 Συμπεράσματα και Μελλοντική Εργασία

9.1 Συμπεράσματα

Στη παρούσα διπλωματική ο βραχίονας θεωρείται ως ένα συμπαγές κυλινδρικό μέσω σταθερής διατομής. Η επενέργηση έγινε με ένα ζεύγος ανταγωνιστών τενόντων. Η βασική ιδέα ήταν ότι με κατάλληλη αναγωγή παραμέτρων μπορεί να προσομοιωθεί η μηχανική ενός βραχίονα ο οποίος δεν είναι ούτε απαραίτητα συμπαγής όπως φάνηκε από το ρομπότ του εργαστηρίου αλλά ούτε επίσης έχει συμπαγή διατομή. Παρουσιάσθηκαν δύο μοντέλα το ένα μικρών και το άλλο μεγάλων παραμορφώσεων. Και τα δύο μοντέλα συγκλίνουν στην ίδια λύση για το συγκεκριμένο ρομπότ με επιτυχία αφού και τα δύο προβλέπουν με η χωρίς βαρύτητα το που βρίσκεται το ελεύθερο άκρο του ρομπότ με ακρίβεια κάτω του εκατοστού. Πρέπει να σημειωθεί ότι αν γινόταν εφαρμογή σε ένα άλλο ρομπότ το οποίο αποτελείται από άλλο υλικό το οποίο συμπιέζεται πολύ περισσότερο τότε το μοντέλο των μεγάλων παραμορφώσεων περιγράφει καλύτερα την μηχανική συμπεριφορά του ρομπότ. Πολύ βασικό συμπέρασμα που προκύπτει είναι το ότι οι ισοδύναμες σταθερές γραμμικού και στροφικού ελαττηρίου του ρομπότ αλλάζουν με την δύναμη επενέργησης και μάλιστα αυξάνονται όσο αυξάνεται η επενέργηση μέχρι να έρθουν σε επαφή όλες οι σπείρες μεταξύ τους ώπου έκει έχουμε ένα άκαμπτο σώμα μέγιστης γραμμικής και στροφικής δυσκαμψίας

9.2 Μελλοντική Εργασία

Η μελοντική εργασία περιλαμβάνει τρία στάδια. Το πρώτο στάδιο είναι η ανάλυση των μεγάλων μετατοπίσεων από δύο διαστάσεις και επίπεδο πρόβλημα σε τρεις διαστάσεις και έτσι να προβλέπει που βρίσκεται το ελεύθερο άκρο του ρομπότ στο χώρο.

Ως δεύτερο στάδιο είναι η εισαγωγή των πνευματικών σωλήνων στο πρόβλημα του χώρου πλέον, διότι αν έχει γίνει η ανάλυση του πρώτου σταδίου ύστερα η εισαγωγή της οποιαδήποτε επενέργησης είναι απλούστερη εργασία. Ετσι θα υπάρχει μια ανάλυση μέσω μηχανικής συνεχούς μέσου η οποία με ακρίβεια προβλέπει που βρίσκεται το ελεύθερο άκρο του βραχίονα στο χώρο και με τα δύο είδη επενεργήσεων.

Το τρίτο στάδιο είναι να γίνει η δυναμική μέσω της θεωρίας της δυναμικής συνεχούς μέσου για εύκαμπτες δοκούς. Αυτό θα μπορέσει πλέον να προβλέπει ανάλογα με τις επενεργήσεις , οι οποίες θα συμβαίνουν γρήγορα, τις επιταχύνσεις που θα υφίσταται ο βραχίονας. Αρχικά θα πρέπει να γίνει για το επίπεδο πρόβλημα οπου θα χρησιμοποιηθούν εξισώσεις από την ανάλυση των μεγάλων μετατοπίσεων αλλά πλέον θα υπάρχουν και μερικές διαφορικές εξισώσεις διότι εισάγεται και η έννοια του χρόνου. Στη συνέχεια θα πρέπει να γίνει δυναμική του συνεχούς μέσου και στις τρεις διαστάσεις ώστε πλέον να υπάρχει μια ολοκληρωμένη ανάλυση για το πώς συμπεριφέρονται μηχανικά και δυναμικά οι εύκαμπτοι βραχίονες.

10 Βιβλιογραφία

[1] Χρυσάκης, Α. , ”Στατική, ”Αθήνα, 1999.

[2] Βουθούνης. Α. , ”Μηχανική Παραμορφώσιμου στερεού 1, ”Αθήνα. 2002.

[3] Βαδαλούκα, Β. Γ. και Παπαδόπουλος, Γ. Α. , ”ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ-ΑΝΤΟΧΗ, »Αθήνα, 2009.

[4] Τσαμασφύρου, Γ. , ”Μηχανική Παραμορφώσιμου Σώματος 1 και 2, ”Αθήνα. 1991.

[5] Jones, B. and Webster, R. , ” Design and Kinematic Modeling of Constant Curvature Continuum Robots: A Review, ” The International Journal of Robotics Research OnlineFirst, June 10 2010

[6] Walker, Ian D. and Jones, Bryan A. , ” Kinematics for Multisection Continuum Robots, ” IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, VOL. 22, NO. 1, February 22 2006.

[7] Carlson, Christopher R. , Camarillo, David B. , Salisbury, J Kenneth. and Zinn, Michael R. , ” Mechanics Modeling of Tendon-Driven Continuum Manipulators, ” IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, VOL. 24 , NO. 6, , December 6 2008.

[8] Caleb Rucker, D. and Webster, Robert J. , ” Statics and Dynamics of Continuum Robots With General Tendon Routing and External Loading, ” IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS, VOL. 27, NO. 6, December 2011

[9] Katsikadelis, J. T. and Tsiatas, G. C. , ” Large deflection analysis of beams with variable stiffness, ” Springer-Verlag 2003, August 7 2003

[10] Borghesan, G. , Melchiorri, C. and Palli, G. , ” Friction and Visco-Elasticity Effects in Tendon-based Transmission Systems, ” IEEE International Conference on Robotics and Automation, May 3-8, 2010, Anchorage, Alaska, USA

[11] Elidoro Carrera, Miguel A. Serna, ”Inverse dynamics for flexible robots, ”Mathematics and Combuters in simulation, Volume 41, issues5-6, Pages 485-508, August 1996

[12] Zhang Ding –Guo, Zhou Sheng-feng, ”dynamic analysis of flexible- link and flexible-joint robots, ”Applied Mathematics and Mechanics , Volume 27 Issue 5, pp 695-704, May 2006

[13] Luca Bascetta, Gianni Ferretti, Bruno Scaglioni, ”closed form Newton- Euler dynamic model of flexible manipulators, ”Volume 35, issue 5, published online, November 17 2015

11 Παράρτημα Α

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται ενδεικτικά οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

```
clear all
RV=0. 05   ;   %aktina vraxiona (kataskeyastiko)
Lo=0. 2     ;
MAZA=2    ;   %maza vraxiona
d=MAZA/Lo  ;   %kg/m,  maza ana monada mhkous toy vraxiona
g=9. 81    ;   %epitaxysnh ths varythtas
E=10^(5)   ;   %METRO ELASTIKOTHTAS
I=pi*(RV^4/4);   %ROPH ADRANEIAS kyklikoy diskou (h diatomh einai kyklikos
diskos)
TO=50;
T1=30;        %SE NEWTON (TO INPUT) (TO METRO THS)
m=0. 2;       %syntelesths statikhs trivhs
W=MAZA*g   ;   %varos vraxiona
A=pi*RV^2  ;   %emvado diatomhs vraxiona
d=0; % arxikh ypothesh
for  l=1:10
if (TO>T1||TO==T1)
M_ARXIKH=-((TO-T1)*RV+(abs((d)))*W);%(arnhtikh)  %initialization  (an doyme
to sxetiko frame fainetai oti einai <0
a=1;
end
if (TO<T1)
M_ARXIKH=((T1-TO)*RV+(abs(d))*W);
a=-1;% (thetikh)  %initialization  (an doyme to sxetiko frame fainetai oti
einai >0
end
ORTHH_ARXIKH=-(TO+W+T1);
s=@(f, x) [-
(x(5)/(E*I))*((x(4)/(A*E)+1));a*m*x(2)*(x(5)/(E*I))*((x(4)/(A*E)+1));(+x(4)
+x(2)+x(6))*(x(5)/(E*I))*(x(4)/(A*E)+1)-(sin(x(1))*d*g);(-a*m*(x(2)+x(6))-
x(3))*(x(5)/(E*I))*(x(4)/(A*E)+1)+(cos(x(1))*d*g);(-a*RV*m*(+x(2)-
x(6))*(x(5)/(E*I))+x(3))*((x(4)/(A*E)+1));a*m*x(6)*(x(5)/(E*I))*(x(4)/(A*E)
+1)];
anw_orio=Lo; %panw orio epilyshs diaforikwn
katw_orio=0;  %katw orio epilyshs diaforikwn
  %initialization
   options=odeset('MaxStep', 0. 2*1e-4);
[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [0, TO, 0, ORTHH_ARXIKH,
M_ARXIKH, T1], options);%energopoioyme thn ode45 me tis arxikes synthhkes

plhthos=size(xa);
n=plhthos(1);     %plhthos orwn
number=n-1;%arithmos diasthmatwn gia oloklhrwsh
b=Lo;a=0;
bhma=(b-0)/number;
f=xa(:, 1);T11=xa(:, 2);Q=xa(:, 3);N=xa(:, 4);M=xa(:, 5);T22=xa(:, 6);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ypologismos (X, Y)
fx=zeros(n, 1);
Ix=zeros(n, 1);
sumx=zeros(n, 1);
for i=1:n
fx(i)=sin(f(i))*(N(i)/(A*E)+1);
end;
for i=2:n;
```

```
  sumx(i)=sumx(i-1, 1)+fx(i, 1);
end;
steliko=0;
for i=2:n;
  steliko=steliko+bhma;
  Ix(i+1, 1)=(steliko-0)/(2*(i-1))*(fx(1, 1)+fx(i, 1)+2*sumx(i-1, 1));
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% prosdiorismos toy Y
fy=zeros(n, 1);
Iy=zeros(n, 1);
sumy=zeros(n, 1);
for i=1:n
fy(i)=cos(f(i))*(N(i)/(A*E)+1);
end;
for i=2:n;
  sumy(i)=sumy(i-1, 1)+fy(i, 1);
end;


steliko=0;
for i=2:n;
  steliko=steliko+bhma;
  Iy(i+1, 1)=((steliko-0)/(2*(i-1))*(fy(1, 1)+fy(i, 1)+2*sumy(i-1, 1)));

end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% prosdiorismos ths ekentrothtas
sum1=0;
b=Lo;a=0;
bhma=(b-a)/number;

for i=2:n-1;
sum1=sum1+Ix(i);
end
e(l)=(((b-0)/(2*number))*(Ix(1)+Ix(n)+2*sum1))/Lo;
d=e(l);
end
A=(T11(n)+T22(n));     %(EPALHTHEYSH)
B=sqrt(Q(n)^2+N(n)^2);
figure
plot(Ix, Iy, 'O')            %Ix=X   Iy=Y
title('elastikh grammh')
```

Code 2

```
clear all ;
clc;

%initialization

%kataskeuastikes parametroi
global a E I m R g ro ;
MAZA=2;
L=0. 15;
R=0. 03;

I=pi*(R^4/4);
m=0;
ro=MAZA/L;
g=0;
A=pi*R^2;
W=MAZA*g;

%INPUTS
T1=0;
TO=1570*9. 81/1000;
xreal=0. 101373626
yreal=0. 092307692
A=0. 0026*TO^5-0. 17*TO^4+3. 5*TO^3-20*TO^2+81*TO-42
I=0. 0013*TO+0. 025
E=1;
d=0;
xo=0. 136071429
yo=0. 047307692


for v=1:10
%ARXIKES SYNTHHKES (INITIALIZATION)
%if (TO>T1||TO==T1)
M_ARXIKH=-(((TO-T1)*R+abs(d)*W));
a=1;

ORTHH_ARXIKH=-(TO+T1+W);
s=@(f, x) [x(6)/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));-(x(6)*m*x(2))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 +
1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) +
1))/(tan(x(1))^2 + 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 -
((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 +
2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1)));-
(x(6)*m*x(3))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));g*ro*cos(x(1)) + (x(6)*(x(5) + m*(x(2) +
x(3))))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));- g*ro*sin(x(1)) - (x(6)*(x(4) + x(2) +
x(3)))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
```

```
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));x(5)*abs((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) -
1)*(tan(x(1))^2 + 1)^(1/2) + (x(6)*R*m*(x(2) -
x(3)))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));-(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1);-
tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1);1;];

anw_orio=L;  %panw orio epilyshs diaforikwn
katw_orio=0;  %katw orio epilyshs diaforikwn
        %initialization;
        options=odeset('MaxStep', 1e-4);
[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [0, TO, T1, ORTHH_ARXIKH, 0,
M_ARXIKH, 0, 0, 0], options) ;
%[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [1. 7, 73. 0408591486200, 0 -73.
0410667338315, 3. 92416662661111, -3. 39735696348321, -0. 0857095951417885,
0. 0897940791191198, 0. 160000000000000], options)
n=size(xa);
KOMVOI=n(1);

for i=1:KOMVOI;
  w(i)=xa(i, 8);
end


sum=0;
NUMBER=KOMVOI-1; %ARITHMOS DIASTHMATWN OLOKLHRWSHS
for i=2:KOMVOI-1;
  sum=sum+w(i);
end;
 d= ((L-0)/(2*NUMBER))*(0+w(KOMVOI)+2*sum)/L;
 e(v)=d;
end;

for i=1:KOMVOI
  u(i)=xa(i, 7);
  w(i)=xa(i, 8);

  x(i)=xa(i, 9)-abs(u(i));
  y(i)=w(i);
end

xsynt=x(KOMVOI)
ysynt=y(KOMVOI)
norma=sqrt((xsynt-xo)^2+(ysynt-yo)^2)

dynamhakro=xa(i, 2)+xa(i, 3)
eswterikhdynamhakro=xa(i, 4
```

code3

```
clear all;
syms NL A E u f m t1 t2 QL ro g ML E I XU R

PARAMETER=u^2*tan(f)^2*0. 5+u*tan(f)^2+tan(f)^2*0. 5+0. 5*u^2+u-NL/(A*E);
%GIA Z=0 MILAME GIA KENTROVARIKO STHN PANW EKSISWSH
collect(PARAMETER, u)

b= (tan(f)^2 + 1)
a=(tan(f)^2/2 + 1/2)
c=tan(f)^2/2 - NL/(A*E)
diakrinousa=b^2-4*a*c

x1=(-b+sqrt(diakrinousa))/(2*a)  %DIALEGOYME AYTH
x2=(-b-sqrt(diakrinousa))/(2*a)  %  <0


XU=-(tan(f)^2 - ((tan(f)^2 + 1)^2 - (tan(f)^2/2 - NL/(A*E))*(2*tan(f)^2 +
2))^(1/2) + 1)/(tan(f)^2 + 1)
%XU=-(tan(f)^2 + ((tan(f)^2 + 1)^2 - (tan(f)^2/2 - NL/(A*E))*(2*tan(f)^2 +
2))^(1/2) + 1)/(tan(f)^2 + 1)
%XF=-ML/(2*E*I)*(cos(f)+cos(f)*XU-tan(f)*(XU+1)*sin(f))^(-
1)%edwwwwwwwwwwwww
XF=-ML/(E*I)*(cos(f)+cos(f)*XU+tan(f)*(XU+1)*sin(f))^(-1)%swsto


XT1=-m*t1*XF
XT2=-m*t2*XF
XN=(+m*(t1+t2)+QL)*XF+cos(f)*ro*g
XQ=-(NL+t1+t2)*XF-sin(f)*ro*g
XM=[R*m*(t1-t2)*XF+QL*abs(1+XU)*sqrt(1+tan(f)^2)]

XW=tan(f)*(XU+1)
```

Code 4

```
clear all ;
clc;

%initialization

%kataskeuastikes parametroi
global a E I m R g ro ;
MAZA=0. 140;
L=0. 15;
R=0. 03;
E=1;
I=0. 052;
m=0;
ro=MAZA/L;
g=0;
A=2300;
W=MAZA*g;

T1=0;
T=1850*9. 81/1000;
xreal=0. 075412088
yreal=0. 106318681
```

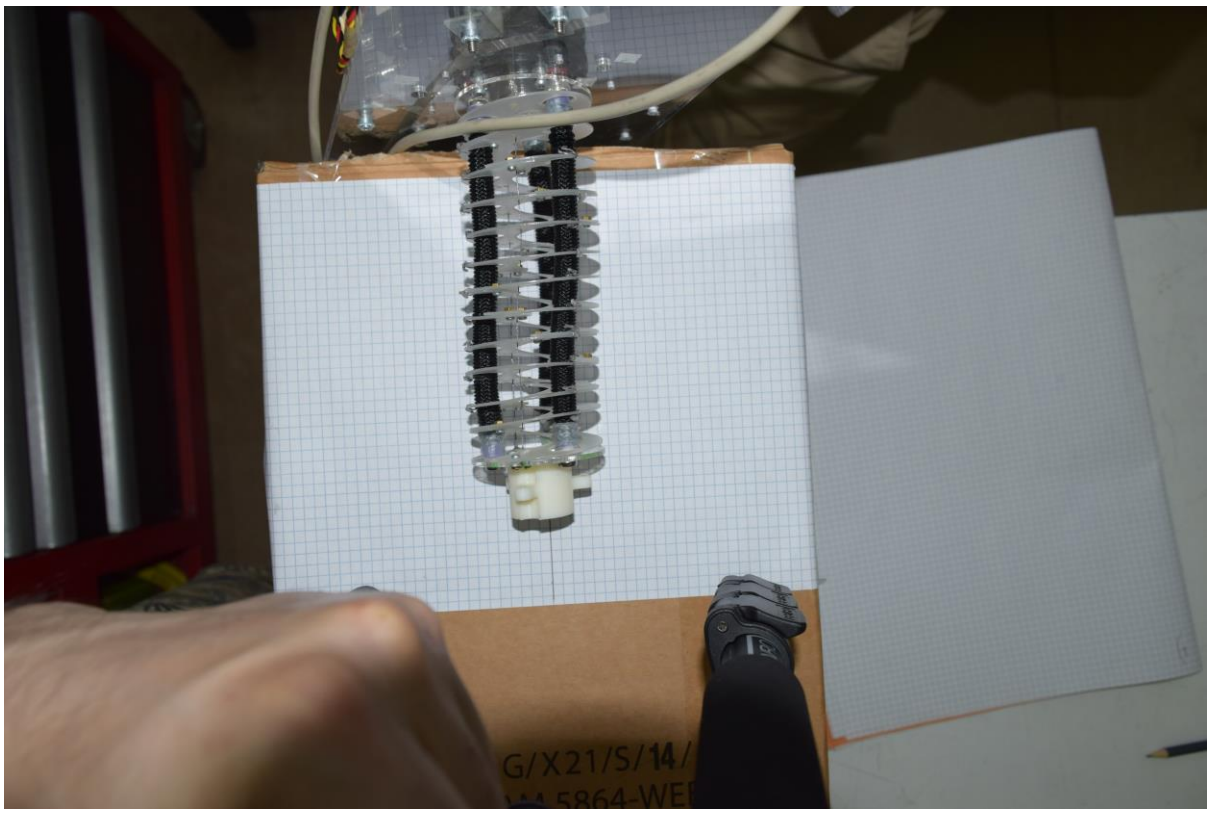
```
A=0. 0026*T^5-0. 17*T^4+3. 5*T^3-20*T^2+81*T-42
%I=0. 0013*T+0. 025
I=2. 1*10^(-7)*T^4-8. 8*10^(-6)*T^3+7. 6*10^(-5)*T^2+0. 0018*T+0. 021
E=1;
d=0;
for v=1:1;
%ARXIKES SYNTHHKES (INITIALIZATION)
%if (T>T1||T==T1)
M_ARXIKH=-(((T-T1)*R+abs(d)*W));
a=1;

ORTHH_ARXIKH=-(T+T1+W);

s=@(f, x) [x(6)/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));-(x(6)*m*x(2))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 +
1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) +
1))/(tan(x(1))^2 + 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 -
((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 +
2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1)));-
(x(6)*m*x(3))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));g*ro*cos(x(1)) + (x(6)*(x(5) + m*(x(2) +
x(3))))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));- g*ro*sin(x(1)) - (x(6)*(x(4) + x(2) +
x(3)))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1)));(x(5)*abs((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2
- x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) -
1)*(tan(x(1))^2 + 1)^(1/2) + (x(6)*R*m*(x(2) -
x(3)))/(E*I*((cos(x(1))*(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1) - cos(x(1)) + sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2
- (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2
+ 1) - 1))));-(tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1);-
tan(x(1))*((tan(x(1))^2 - ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1);1;];
anw_orio=L;  %panw orio epilyshs diaforikwn
katw_orio=0;  %katw orio epilyshs diaforikwn
        %initialization;
        options=odeset('MaxStep', 1e-4);
[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [0, T, T1, ORTHH_ARXIKH, 0,
M_ARXIKH, 0, 0, 0], options);
%[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [[[[[[1. 59 40 0 -40 -1.
20000000000000 -0. 0216452161065434 0. 0374645761339145 0.
0591452139428627]]]]]], options)
n=size(xa);
KOMVOI=n(1);
f=xa(:, 1);
for i=1:KOMVOI;
  w(i)=xa(i, 8);
```

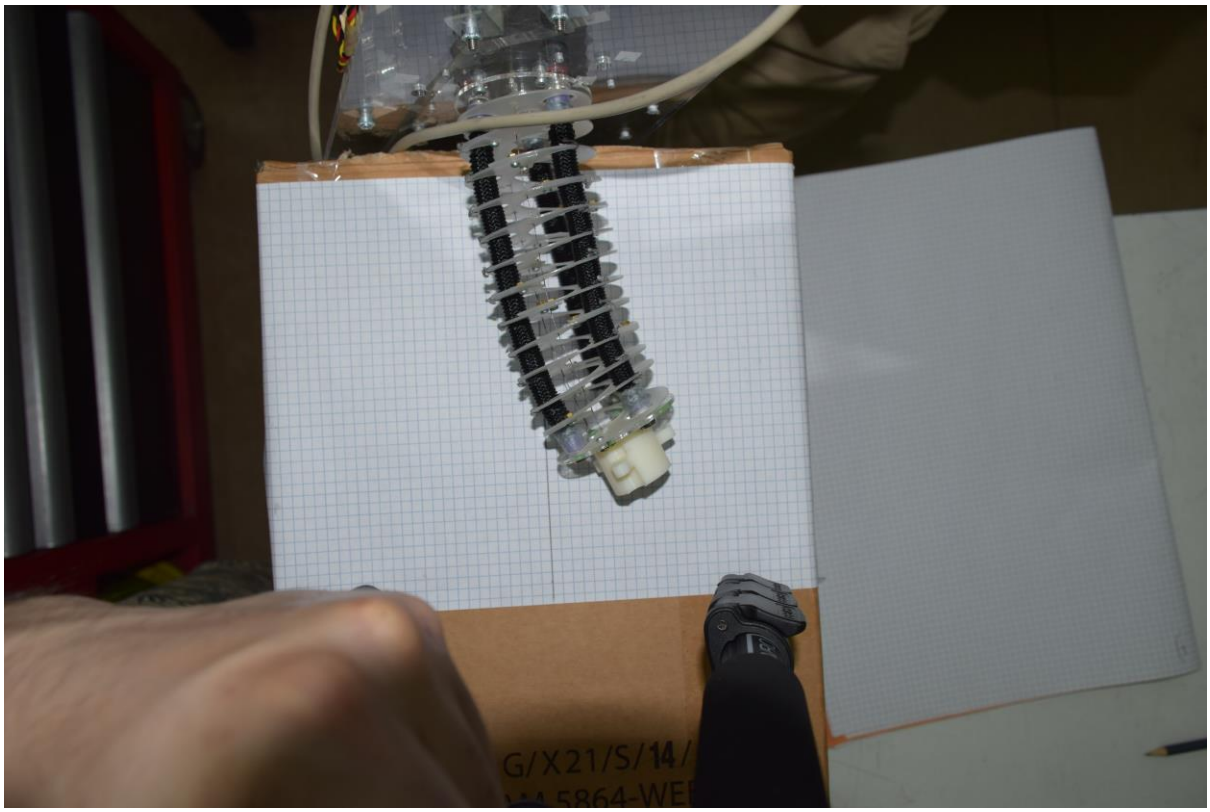
```
end


sum=0;
NUMBER=KOMVOI-1; %ARITHMOS DIASTHMATWN OLOKLHRWSHS
for i=2:KOMVOI-1;
  sum=sum+w(i);
end;
 d= ((L-0)/(2*NUMBER))*(0+w(KOMVOI)+2*sum)/L;
 e(v)=d;
end;

for i=1:KOMVOI
  u(i)=xa(i, 7);
  w(i)=xa(i, 8);

  x(i)=xa(i, 9)-abs(u(i));
  y(i)=w(i);
end
error1=sqrt((y(i)-yreal)^2+(x(i)-xreal)^2);


for i=1:KOMVOI;
  if (f(i)>1. 57);
    counter=i;
    break;
  end
end
aa=xa(counter, 1)+0. 005;bb=xa(counter, 2);cc=xa(counter, 3);dd=xa(counter,
4);ee=xa(counter, 5);ff=xa(counter, 6);gg=xa(counter, 7);h=xa(counter,
8);ii=xa(counter, 9);
d=0;
for v=1:1
%ARXIKES SYNTHHKES (INITIALIZATION)
%if (T>T1||T==T1)
M_ARXIKH=-(((T-T1)*R+abs(d)*W));
a=1;
ORTHH_ARXIKH=-(T+T1+W);
s=@(f, x)[x(6)/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 +
1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) +
1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 +
((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 +
2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2 + 1)));-
(x(6)*m*x(2))/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 +
1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) +
1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 +
((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 +
2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2 + 1)));-
(x(6)*m*x(3))/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 +
1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) +
1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 +
((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 +
2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2 + 1)));g*ro*cos(x(1)) + (x(6)*(x(5) + m*(x(2)
+ x(3))))/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 +
1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1)));- g*ro*sin(x(1)) - (x(6)*(x(4) + x(2) +
x(3)))/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 +
```

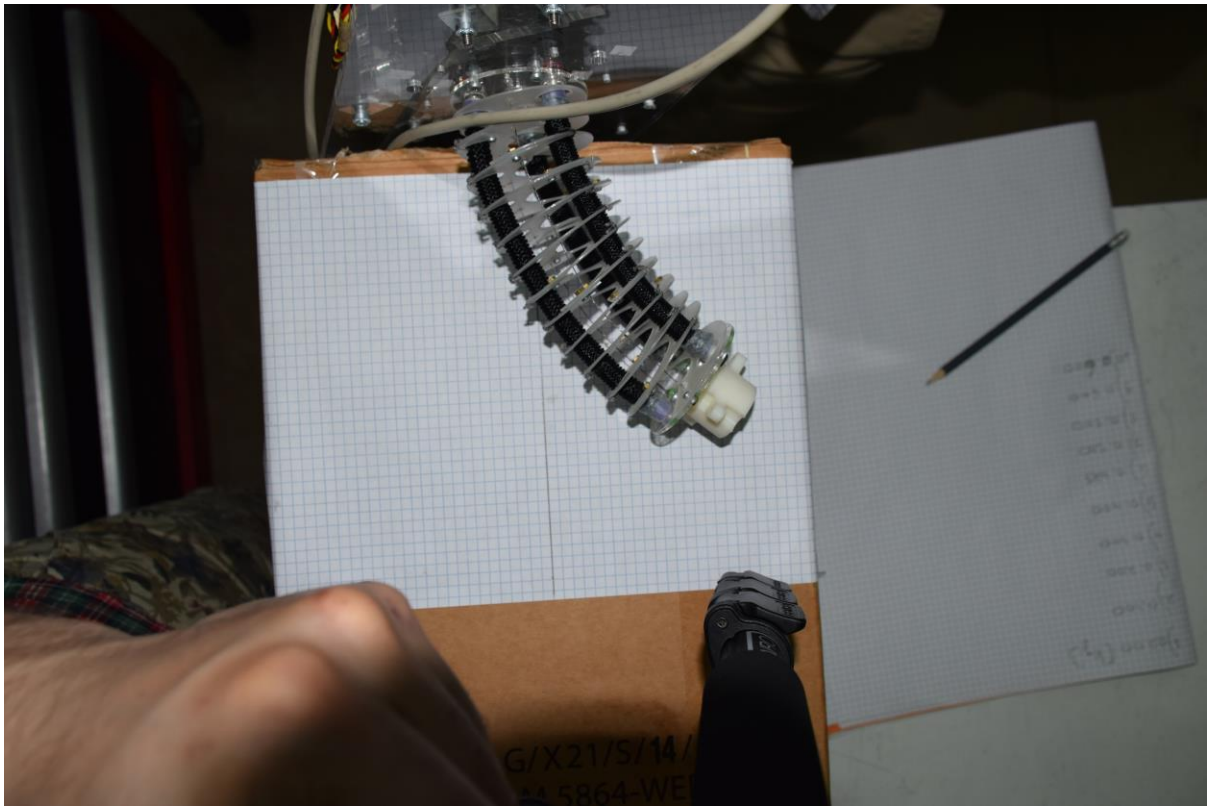
```
1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1)));x(5)*abs((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) -
1)*(tan(x(1))^2 + 1)^(1/2) + (x(6)*R*m*(x(2) -
x(3)))/(E*I*(sin(x(1))*tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 +
1) - 1) - cos(x(1)) + (cos(x(1))*(tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 -
(tan(x(1))^2/2 - x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1))/(tan(x(1))^2
+ 1)));-(tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1);-
tan(x(1))*((tan(x(1))^2 + ((tan(x(1))^2 + 1)^2 - (tan(x(1))^2/2 -
x(4)/(A*E))*(2*tan(x(1))^2 + 2))^(1/2) + 1)/(tan(x(1))^2 + 1) - 1);1;];
anw_orio=L;  %panw orio epilyshs diaforikwn
katw_orio=ii;  %katw orio epilyshs diaforikwn
        %initialization;
        options=odeset('MaxStep', 1e-5);
%[rad, xa]=ode45(s, [katw_orio, anw_orio], [1. 7, T, T1, ORTHH_ARXIKH, 0,
M_ARXIKH, 0, 0, 0], options) ;
[rad, xa]=ode15s(s, [katw_orio, anw_orio], [aa, bb, cc, dd, ee, ff, gg, h,
ii], options);
n=size(xa);
KOMVOI=n(1);

for i=1:KOMVOI;
  w(i)=xa(i, 8);
end


sum=0;
NUMBER=KOMVOI-1; %ARITHMOS DIASTHMATWN OLOKLHRWSHS
for i=2:KOMVOI-1;
  sum=sum+w(i);
end;
 d= ((L-0)/(2*NUMBER))*(0+w(KOMVOI)+2*sum)/L;
 e(v)=d;
end;

for i=1:KOMVOI
  u(i)=xa(i, 7);
  w(i)=xa(i, 8);
  x(i)=xa(i, 9)-abs(u(i));
  y(i)=w(i);
end
%error10=sqrt((y(i)-yreal)^2+(x(i)-xreal)^2)
error2=sqrt((y(i)-yreal)^2+(x(i)-xreal)^2)
```

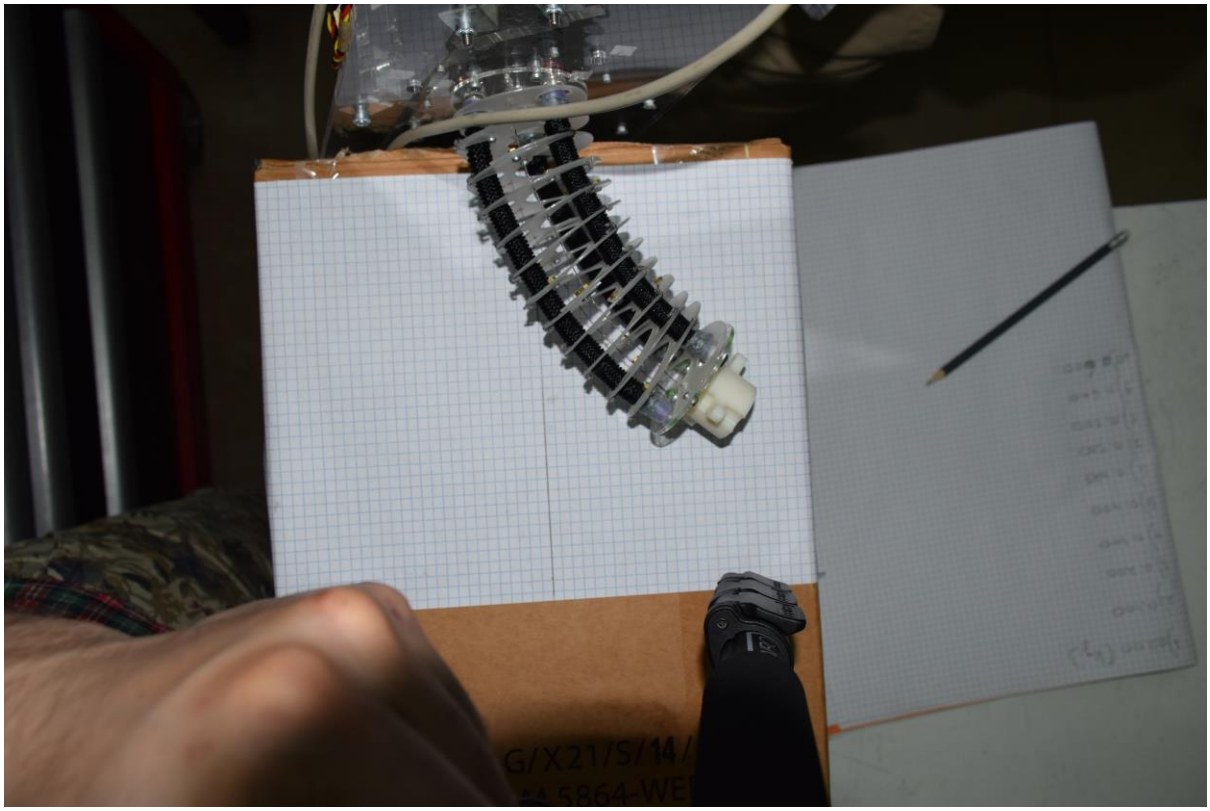
12 Παράρτημα Β

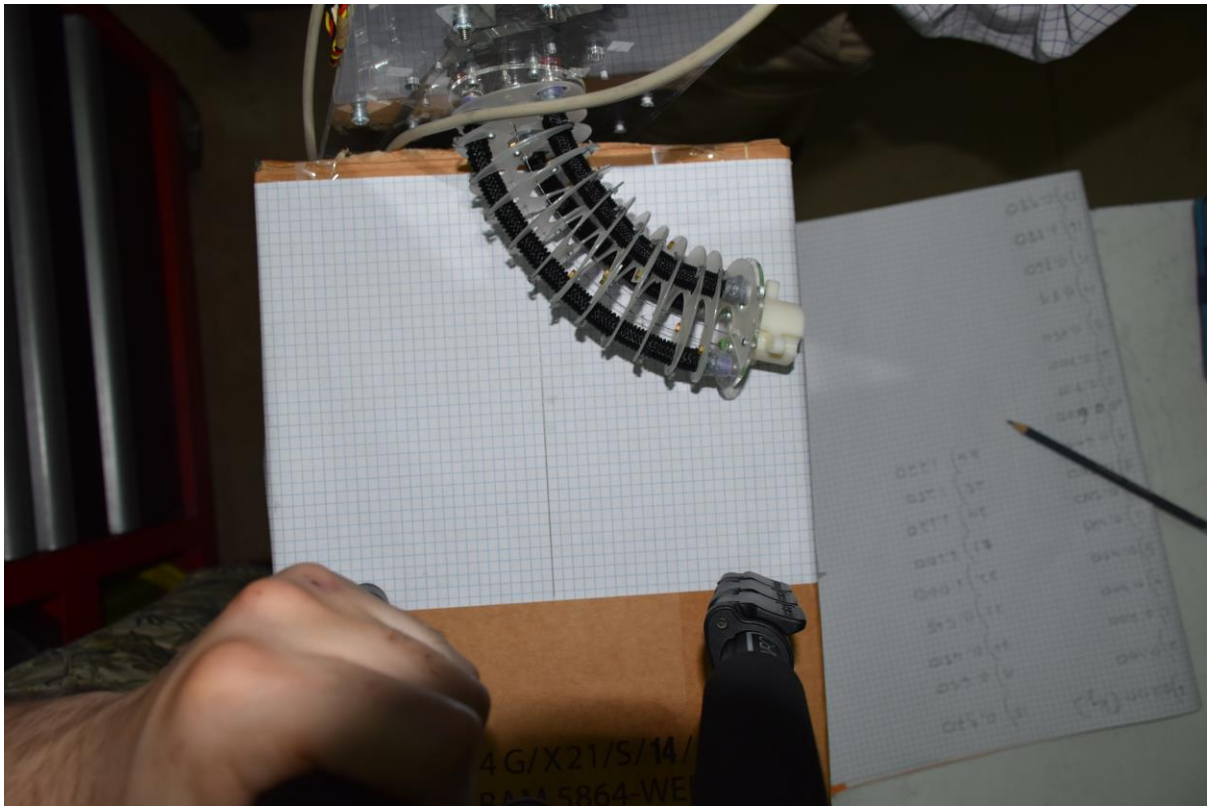
Σε αυτό το παράρτημα παρουσιάζονται ενδεικτικά καποιες φωτογραφίες από το πείραμα με την έλειψη της βαρύτητας. Αρχικά παρουσιάζεται η απαραμόρφωτη κατάσταση και στη συνέχεια παραμορφωμένες καταστάσεις για διάφορες επενεργήσεις.

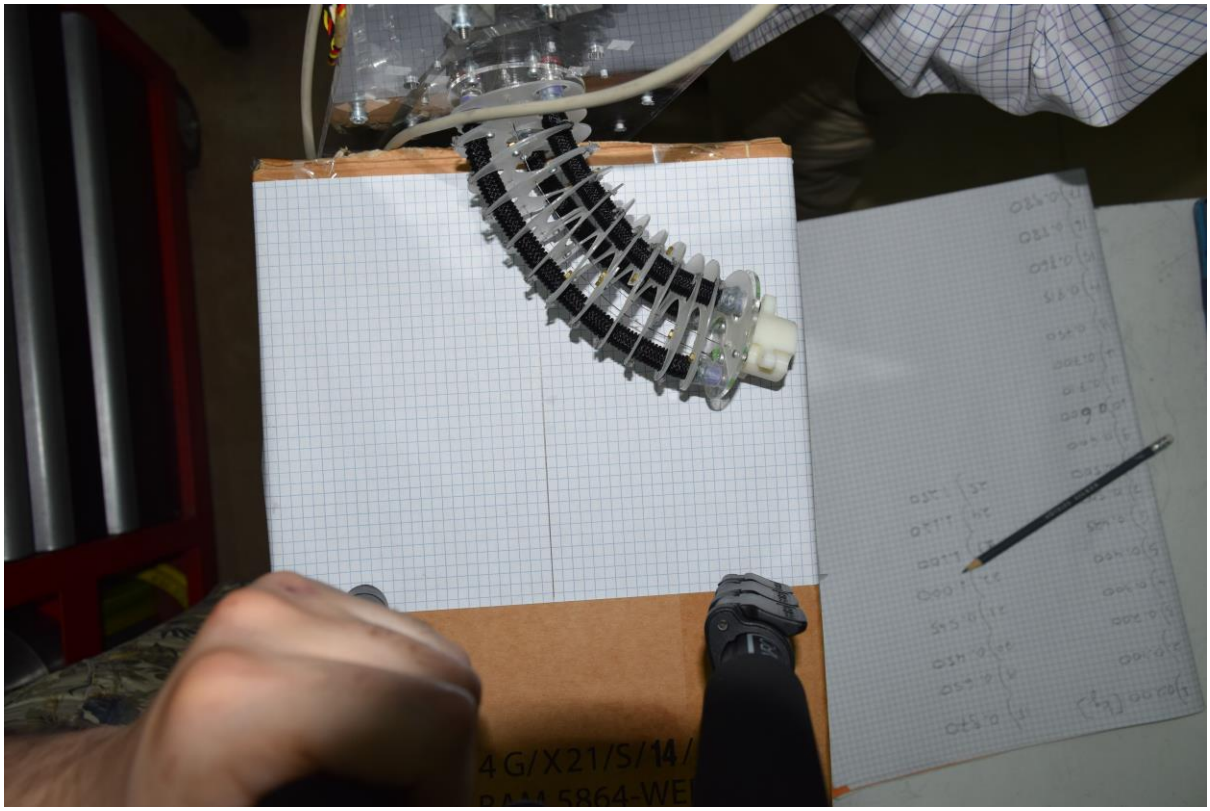


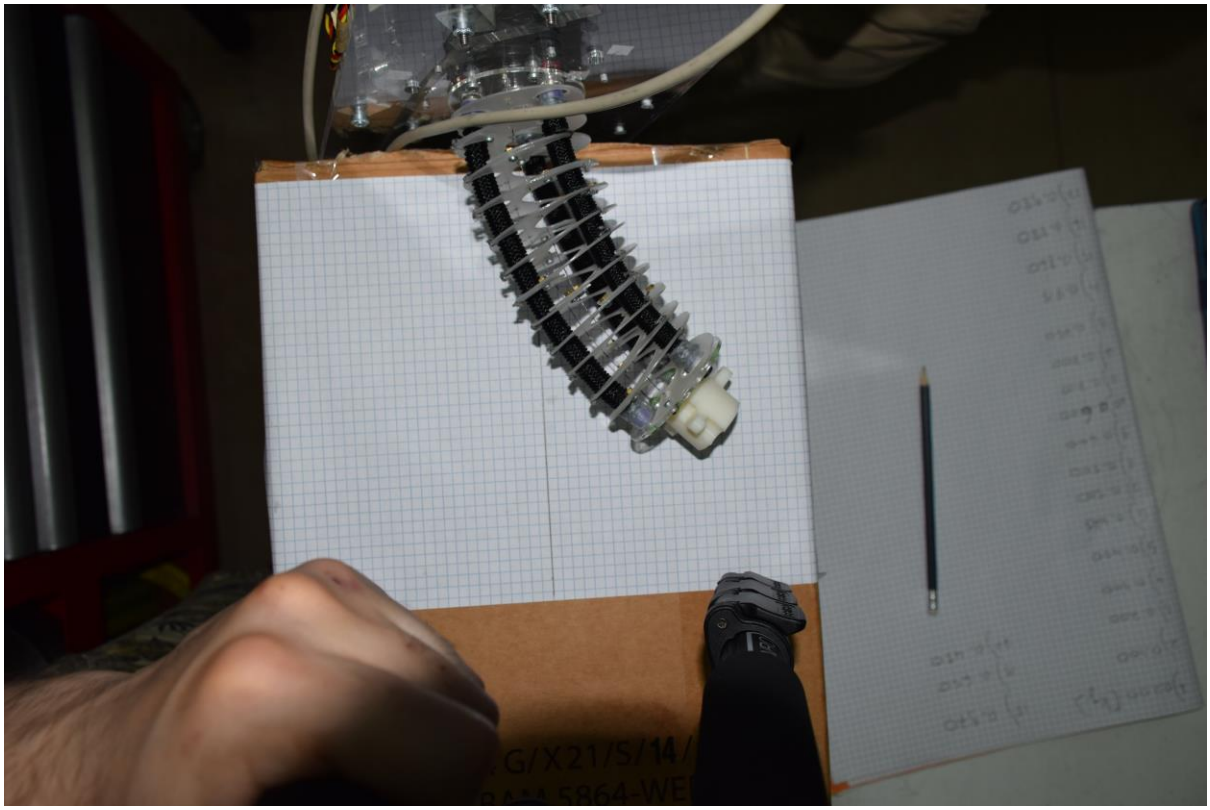

G/X21/S/14/


G/X21/S/14/


G/X21/S/14/


4 G/X21/S/14/


4 G/X21/S/14/


G/X21/S/14/