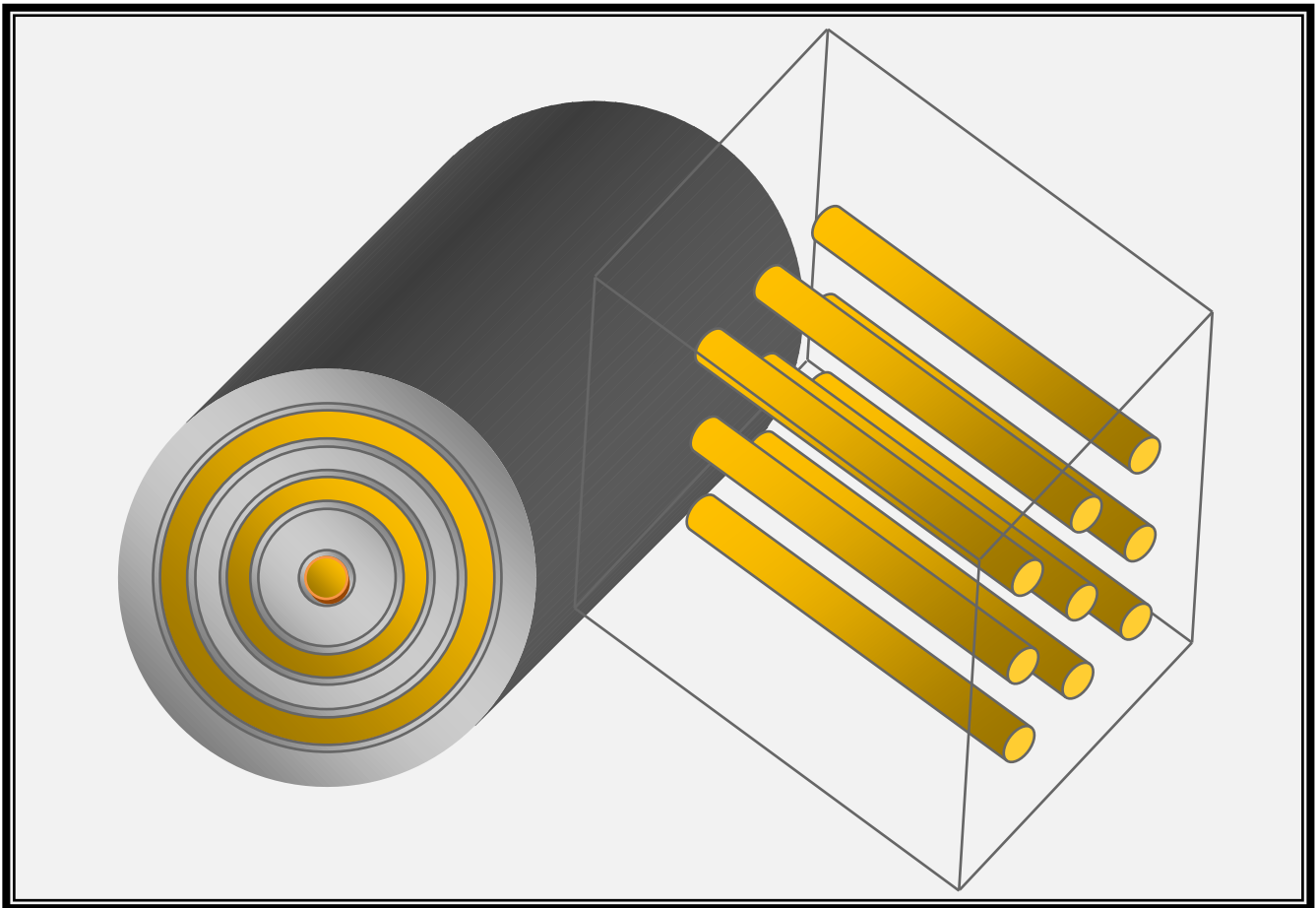




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ Δ.Π.Μ.Σ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ



ΘΕΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

***« ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΙΝΩΔΟΥΣ
ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ
ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ »***

ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: κ. ΑΙΜΙΛΙΟΣ ΣΙΔΕΡΙΑΔΗΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ 2018

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή – Περίληψη.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	6
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	6
1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	7
1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	11
1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ ΥΛΙΚΑ.....	12
1.4.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ.....	12
1.4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ.....	12
1.5 ΜΗΤΡΕΣ.....	14
1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ.....	17
1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ.....	17
1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ.....	18
1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ.....	18
1.6.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ.....	20
1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ.....	21
1.7.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ.....	21
1.7.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ.....	22
1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	24
1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	25
1.9.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ.....	25
1.9.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	25
1.9.3 ΙΝΕΣ ΥΑΛΟΥ.....	26
1.9.4 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ.....	29
1.9.5 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ.....	32
1.9.6 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ.....	34
1.9.7 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ.....	35
1.9.8 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS).....	36
1.9.9 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ.....	36
1.9.10 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ.....	37
1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	38
1.11 ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ – ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ.....	40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ.....	41
2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	41
2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ.....	41
2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ.....	47
2.1.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ.....	48
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	49
2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ T_g	49
2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	50
2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	51
2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ & ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ & ΤΗΣ ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ.....	56
3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΕΞΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ.....	56
3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ «ΚΥΤΤΑΡΟΥ»-ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ.....	56
3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ.....	63
3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ & ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙV: ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ & ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	80
4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ & ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ.....	80
4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ.....	82
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	94
5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	94
5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L	96
5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}	114
5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T	116
5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}	139
5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}	141
5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E_θ , ν_θ & G_θ	156
5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ & ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ & ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΔΩΝ & ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ.....	157
5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L	157
5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}	158
5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T	159
5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}	161
5.8.5 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}	161
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	164
6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ & ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.....	164
6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ.....	165
6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.....	170
6.4 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	177
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	182
7.1 ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ & ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	182
7.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	184
7.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	186
7.3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ.....	186
7.3.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ.....	187
7.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	192
7.4.1 ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....	192
7.4.2 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	194
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	195

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους εκείνους που με βοήθησαν και με στήριξαν καθ'όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, συμβάλλοντας στην επιτυχή ολοκλήρωσή της.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου διατριβής κ.Αιμίλιο Σιδερίδη, Επίκουρο Καθηγητή ΕΜΠ, για την επιστημονική του καθοδήγηση, την αμέριστη συμπαράσταση του αλλά και για όλες τις γνώσεις που έλαβα από τον ίδιο κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Ολόψυχες ευχαριστίες στην οικογένεια μου για την στήριξη, εμπιστοσύνη και κατανόηση που έδειξαν και συνεχίζουν να δείχνουν στις προσπάθειες μου.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την αμέριστη ευγνωμοσύνη και ένα μεγάλο ευχαριστώ για τη βοήθεια τους, είτε αυτή ήταν πνευματική ~ ψυχολογική, είτε εκπαιδευτική ~ γνωστική, στους συμφοιτητές και φίλους μου Μαντζαρούδη Βασίλειο, Τσίγκρο Νικόλαο και Κανελλόπουλο Ιωάννη, και ιδιαίτερα στον προϊστάμενό μου, στο απαιτητικό εργασιακό μου περιβάλλον κατά την ακαδημαϊκή περίοδο 2015-16, κ. Γάυρο Αθανάσιο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, αναπτύχθηκαν θεωρητικές εκφράσεις για την πρόβλεψη των ελαστικών σταθερών ενός ινώδους σύνθετου υλικού.

Για την ανάπτυξη του μοντέλου χρησιμοποιήθηκε η μορφή κατανομής των ινών στο σύνθετο υλικό και η έννοια της ενδιάμεσου φάσεως μεταξύ των ινών και της μήτρας. Αυτό το μοντέλο θεωρεί ότι το σύνθετο υλικό αποτελείται από έντεκα φάσεις. Η ενδιάμεση φάση είναι το τμήμα της πολυμερικής μήτρας που βρίσκεται γύρω από την επιφάνεια της ίνας. Στην παρούσα μελέτη θεωρούμε ότι η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής με συνεχώς μεταβαλλόμενες μηχανικές ιδιότητες.

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson του σύνθετου υλικού ελήφθη υπόψη νόμος μεταβολής ενδιάμεσου φάσεως.

Τα αποτελέσματα που εξήχθησαν συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες τιμές άλλων μοντέλων όπως επίσης και με πειραματικά δεδομένα.

ABSTRACT

Theoretical expressions for the prediction of the elastic constants in fiber-reinforced composites were developed. The distribution of the fibers in the matrix and also the concept of interphase between fibers and matrix was used for the development of the model. This model considers that the composite material consists of three different materials (fiber- matrix-interphase) which in total they form eleven phases. The latter is the part of the polymer matrix lying at the close vicinity of the fiber surface. In the present investigation it was assumed that the interphase is inhomogeneous in nature with continuously varying mechanical properties. A specific law of variation of its elastic modulus and Poisson ratio was taken into account in order to define the overall constants of the composite. The results obtained were compared with the respective values of other models as well as with experimental data. Finally, the longitudinal modulus of elasticity of the eleven-phase model was calculated by a computational analysis, via the use of finite element method and the obtained results were compared with the theoretical values and the experimental data.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

« ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ »

1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Για ένα σύστημα ο όρος «σύνθετο» σημαίνει ότι τούτο αποτελείται από δύο ή περισσότερα διακριτά μέρη. Από γενική άποψη, λοιπόν, ένα υλικό αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα διαφορετικά υλικά ή φάσεις, μπορεί να χαρακτηριστεί ως σύνθετο υλικό (composite material).

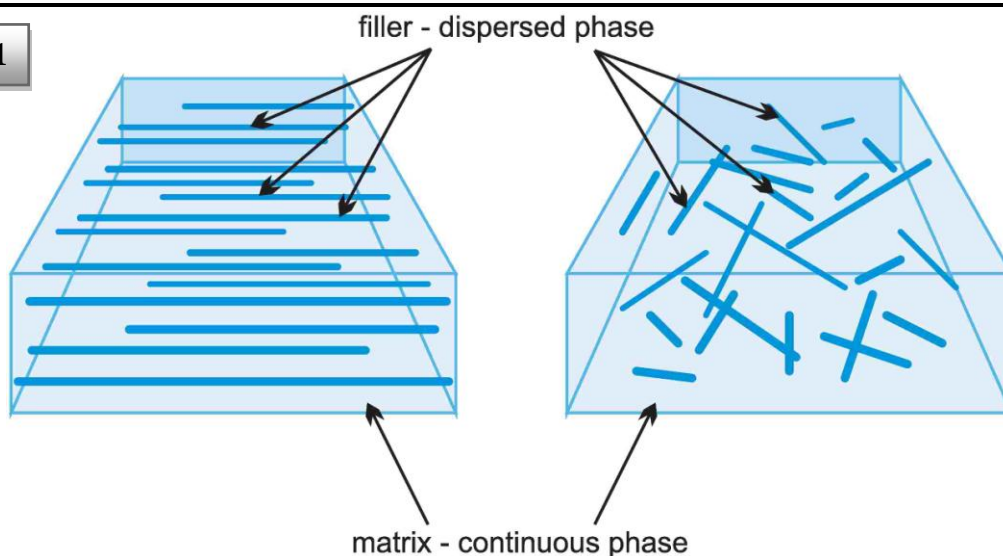
Ειδικότερα, ως σύνθετα αναγνωρίζονται εκείνα τα υλικά, τα οποία συντίθενται από επιμέρους υλικά με σημαντικά διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες μεταξύ τους, ενώ και το ίδιο το σύνθετο υλικό έχει επίσης σημαντικά διαφορετικές ιδιότητες από εκείνες των συστατικών του.

Για να καταταχθεί ένα υλικό στην κατηγορία των σύνθετων, θα ακολουθείται ο εξής κανόνας: Το υλικό πρέπει να προκύπτει ως συνδυασμός συστατικών μερών, στα οποία οι ιδιότητες του ενός από τα μέρη αυτά να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5πλάσιες) και η κατ'όγκο περιεκτικότητα του ενός να μην είναι πολύ μικρή (> 10%).

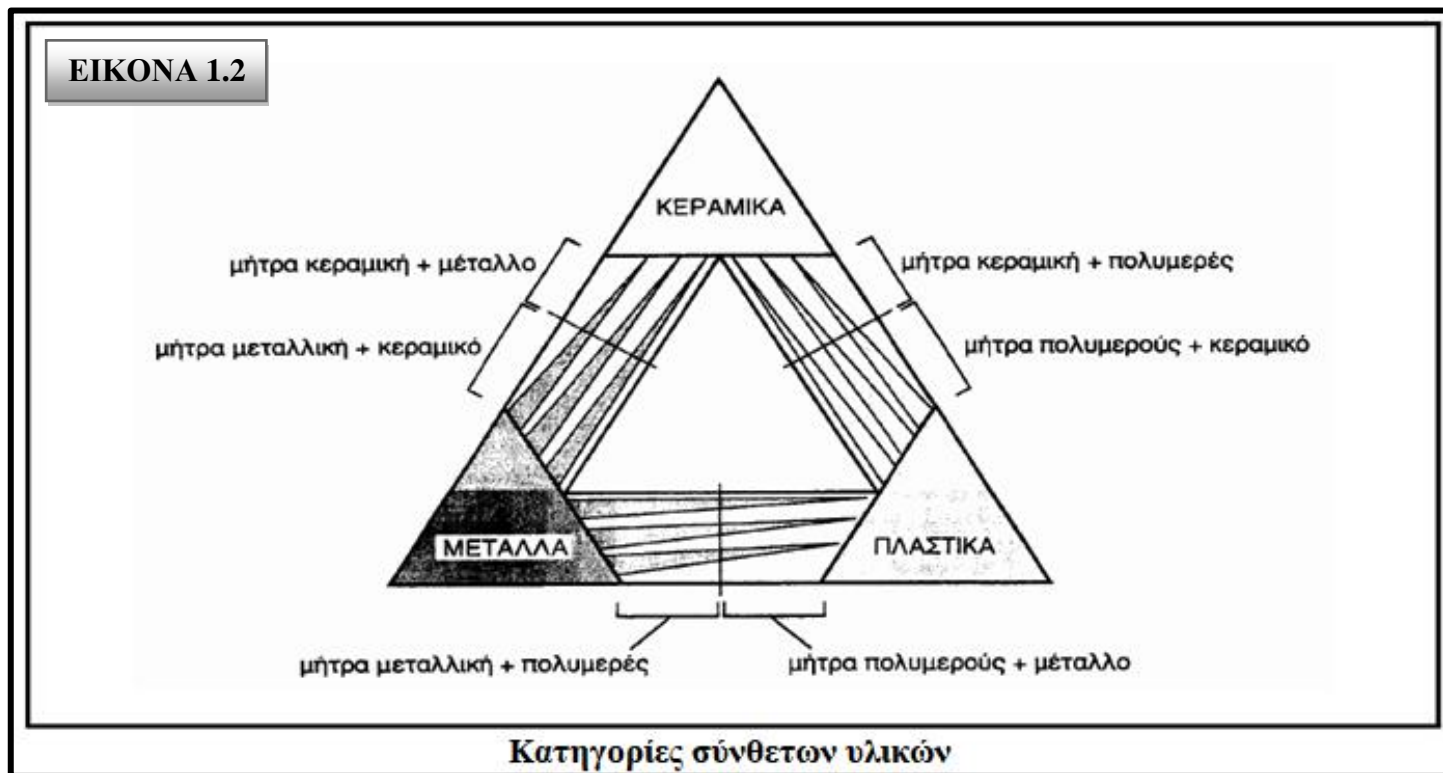
ΟΡΙΣΜΟΣ (Agarwal-1990): *Σύνθετα είναι τα υλικά, τα οποία μακροσκοπικά αποτελούνται από δύο ή περισσότερα χημικά ευδιάκριτα συστατικά μέρη που έχουν μια συγκεκριμένη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ τους.*

Το ένα από τα συστατικά μέρη, χαρακτηρίζεται ως συστατικό ενίσχυσης και προσδίδει στο σύνθετο βελτιωμένες μηχανικές, κυρίως, ιδιότητες. Το δεύτερο συστατικό καλείται μήτρα, είναι συνήθως χαμηλής πυκνότητας και η συμμετοχή του στο σύνθετο εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση των ιδιοτήτων της ενίσχυσης.

ΕΙΚΟΝΑ 1.1



Στην *Εικόνα 1.1* παρουσιάζεται ο συνδυασμός ανά δύο των βασικών οικογενειών υλικών (μεταλλικά, πολυμερικά και κεραμικά υλικά) και οι ομάδες συνθέτων που προκύπτουν.



1.2 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα σύνθετα υλικά χρησιμοποιούνται ευρύτατα από τον άνθρωπο από αρχαιοτάτων χρόνων. Υλικά που εύκολα βρίσκουμε στη φύση (ξύλο, πέτρα, πηλός, κόκκαλα) χρησιμοποιήθηκαν ευρύτατα από τον άνθρωπο, ο οποίος σύντομα έμαθε να βελτιώνει τις ιδιότητες τους ενισχύοντας τα υλικά αυτά με πρόσθετα συστατικά.

Για παράδειγμα, οι Αιγύπτιοι (5000 π.Χ.) χρησιμοποιούσαν την τεχνική της ενίσχυσης τούβλων με πλέγμα άχυρων, με αποτέλεσμα τη μείωση των τάσεων συστολής που αναπτύσσονταν κατά την ξήρανση του πηλού. Επίσης, παρατήρησαν ότι οι πλάκες από πολύστρωτες βέργες ξύλου, παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερη αντοχή από το φυσικό ξύλο έναντι στρέβλωσης που οφειλόταν στην απορρόφηση υγρασίας.

Στη Μεσοποταμία (1000 π.Χ.) εφαρμόστηκε η τεχνική του βερνικώματος των τούβλων και των πλακιδίων με σκοπό τον περιορισμό της επιφανειακής φθοράς, ενώ, κατά τους Ρωμαϊκούς χρόνους, η οδοποιία στηρίχθηκε στην ενίσχυση του οδοστρώματος με τρίμματα κεραμιδιών.

Η χρήση της σιδηρόβεργας για προεντεταμένο σκυρόδεμα, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές της σύγχρονης εποχής, δεν είναι παρά η μετεξέλιξη της τεχνικής της ανάμιξης γύψου με ζωικό τρίχωμα, η οποία ήταν μια πρακτική μέθοδος ενίσχυσης εύθραυστων υλικών κατασκευής στους αναπτυσσόμενους πολιτισμούς.

Το πρώτο συνθετικό υλικό βασισμένο σε μήτρα πλαστικού εμφανίστηκε τη δεκαετία του 1920 και επρόκειτο για μίγμα ινιδίων ξύλου με φαινολική φορμαλδεΐδη, γνωστό αργότερα ως βακελίτης προς τιμήν του Βέλγου επιστήμονα Leo Baekeland.

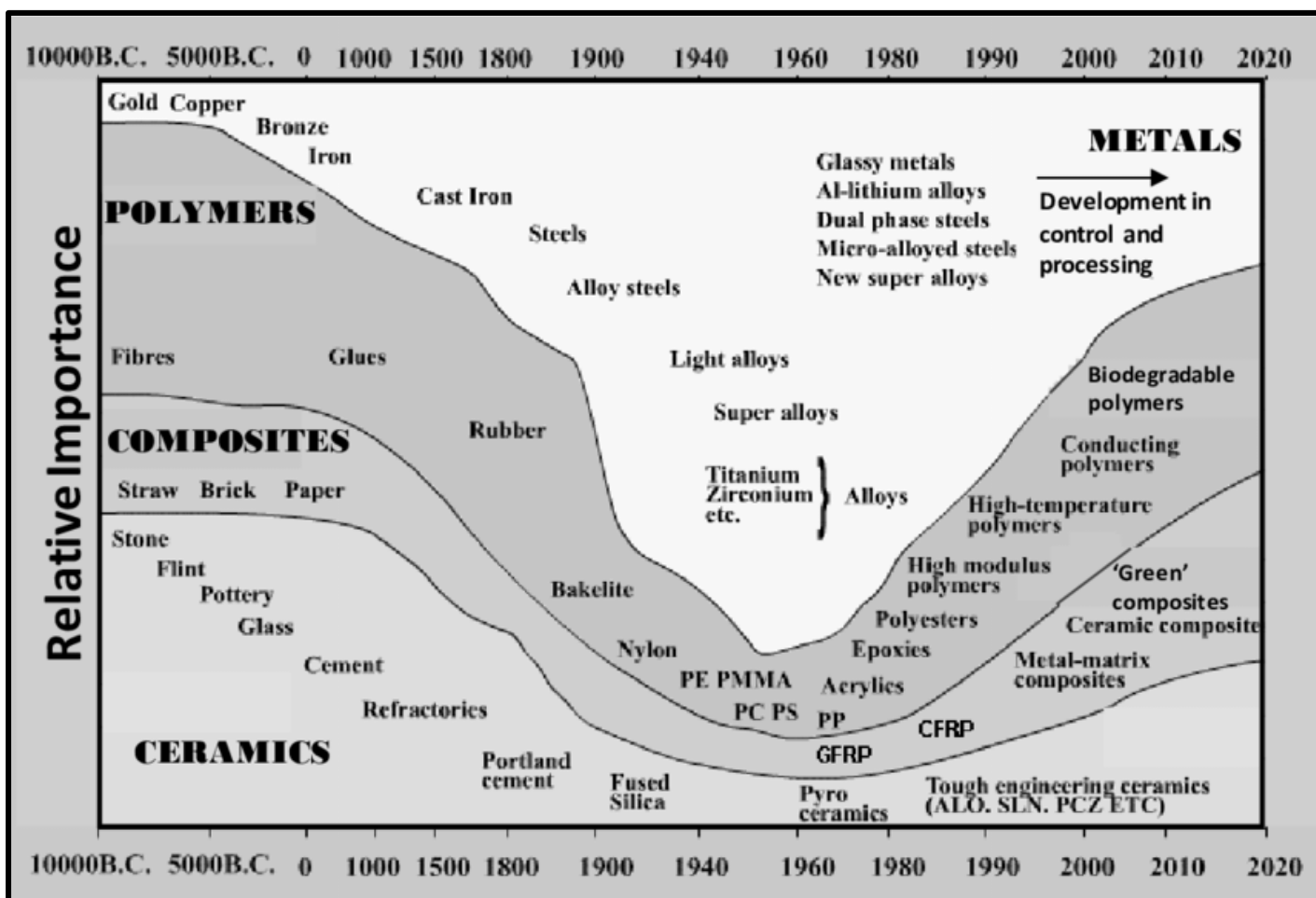
Η ανάπτυξη των σύνθετων υλικών με ενίσχυση ινών κατά την διάρκεια των τελευταίων 30 ετών υπήρξε ραγδαία και συνδυάστηκε με την προηγηθείσα ανάπτυξη των υψηλής αντοχής ινών γυαλιού και των υψηλής δυσκαμψίας ινών βορίου (1960) και την έντονη τάση της αεροδιαστημικής βιομηχανίας για μεγαλύτερη απόδοση με παράλληλη μείωση βάρους αεροσκαφών και διαστημοπλοίων.

Το 1964 διατέθηκαν στην αγορά, αρχικά σε μικρές ποσότητες, οι ίνες άνθρακα (carbon fibers), οι οποίες τελευταία αποτελούν τις ευρύτερα χρησιμοποιούμενες ενισχύσεις στις αεροδιαστημικές κατασκευαστικές εφαρμογές.

Το 1971 διατέθηκαν στο εμπόριο οι ίνες αραμιδίου, οι οποίες τώρα χρησιμοποιούνται ευρύτατα στα ελαστικά αυτοκινήτων, καθώς και σε αρκετές αεροδιαστημικές και ναυπηγικές κατασκευές.

Η ειδική αντοχή (λόγος αντοχής προς πυκνότητα) και η ειδική δυσκαμψία (λόγος δυσκαμψίας προς πυκνότητα) των ενισχυτικών ινών βαίνουν συνεχώς αυξανόμενες τα τελευταία 30 χρόνια, π.χ. η ειδική αντοχή και η ειδική δυσκαμψία των ινών γυαλιού, άνθρακα, αραμιδίου και βορίου έχουν φτάσει στο 10-14πλάσιο των αντίστοιχων τιμών του αλουμινίου (ελαφρό μέταλλο).

Στο παρακάτω σχεδιάγραμμα (Εικ. 1.3) παρουσιάζεται η σχετική σπουδαιότητα των τεσσάρων κατηγοριών των υλικών (κεραμικά, σύνθετα, πολυμερή και μέταλλα) στη μηχανική της μηχανολογίας και του πολιτικού μηχανικού ως συνάρτηση του χρόνου. Η κλίμακα του χρόνου είναι μη γραμμική (Πηγή: Ashby, 1987).



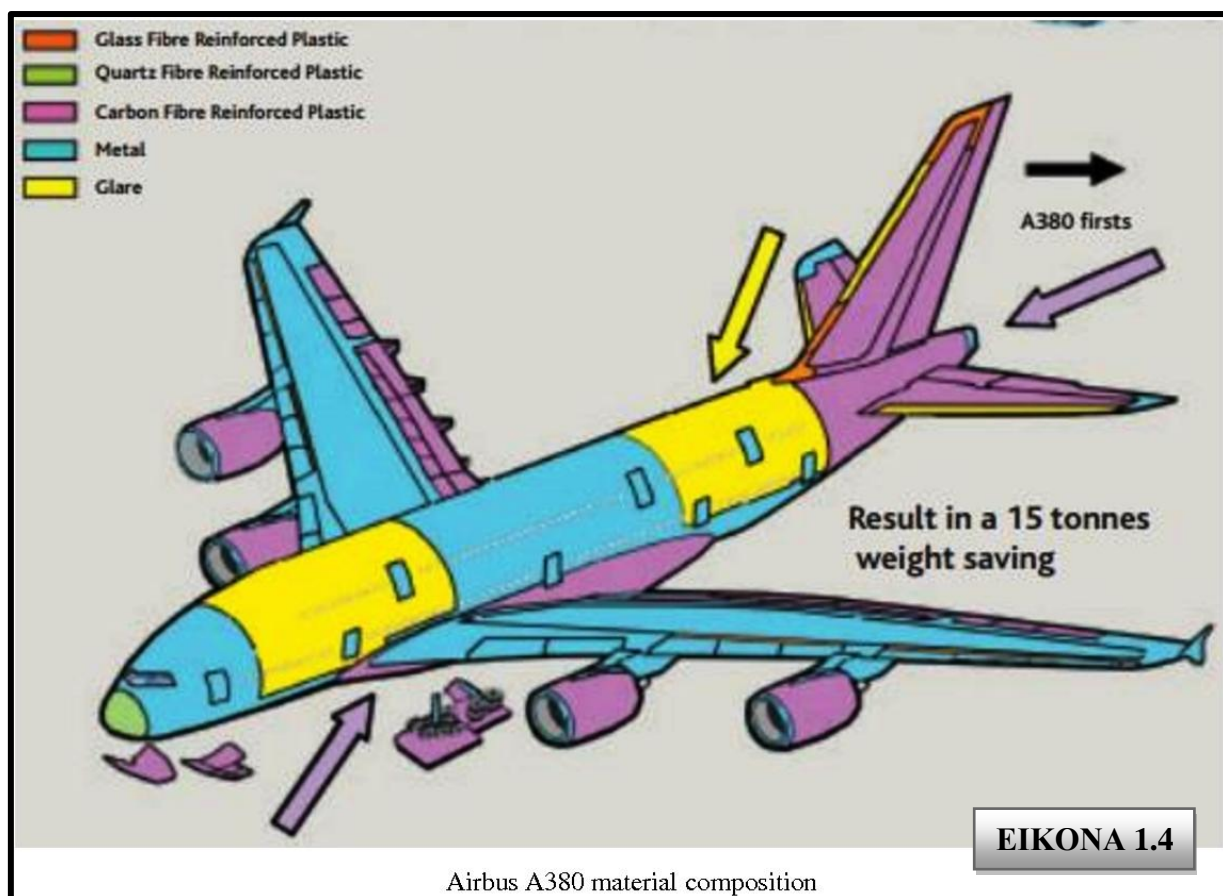
EIKONA 1.3

Τα σύνθετα υλικά καλύπτουν μεγάλο μέρος των εφαρμογών των νέων τεχνολογιών αιχμής στις κατασκευές και έχουν μεταβάλει σημαντικά τις ακολουθούμενες διαδικασίες σχεδίασης, παραγωγής, ελέγχου και συντήρησης.

Η μεγάλη ποικιλία ινών και ρητινών, καθώς και οι διάφορες μέθοδοι κατασκευής παρέχουν στο σχεδιαστή τη δυνατότητα να επιλέξει το πιο κατάλληλο σύστημα υλικών που καλύπτει τις απαιτήσεις του, σύστημα που έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και ιδιότητες, που πολλές φορές μπορεί να είναι και μοναδικά.

Το μικρό βάρος, η υψηλή αντοχή, η εξαιρετική αντοχή σε διάβρωση, η πολύ καλή συμπεριφορά σε κόπωση, σε κρούση και στη διάδοση ρωγμών, οι σχετικά εύκολες διαδικασίες παραγωγής και το μικρό κόστος συντήρησης είναι μερικοί από τους παράγοντες εκείνους που έχουν οδηγήσει τα σύνθετα υλικά στην πρώτη θέση μεταξύ των κατασκευαστικών υλικών για μεγάλο πλήθος εφαρμογών.

Μερικά μειονεκτήματα των συνθέτων υλικών, όπως τα υψηλά επίπεδα ερπυσμού, η μικρή αντίσταση σε μηχανική φθορά, η ιδιαίτερη και πολλές φορές ευαίσθητη συμπεριφορά σε δυσμενείς συνθήκες περιβάλλοντος (θαλάσσιο περιβάλλον, υψηλές θερμοκρασίες, χημικό περιβάλλον, κλπ) καθώς και το υψηλό αρχικό τους κόστος, βαθμιαία αντιμετωπίζονται πιο αποτελεσματικά μέσω της συνεχούς τεχνολογικής ανάπτυξης στην παραγωγή νέων και καλύτερων ινών, ρητινών και εξέλιξης των μεθόδων παραγωγής.



EIKONA 1.5



Volvo V40 Safety Cage

■ Plastic

■ Aluminium

■ Mild Steel / Forming Grades

■ High Strength Steel

■ Very High Strength Steel

■ Extra High Strength Steel

■ Ultra High Strength Steel

IFL Liner Matrix

Outer Layer

Thermoplastic Polyurethane - BASF

Core

Kevlar - DuPont

Inner Layer

Solef PVDF - Solvay



EIKONA 1.6

1.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια ραγδαία αύξηση στο ρυθμό αντικατάστασης παραδοσιακών υλικών από σύνθετα, σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές και κατασκευές. Αυτή η τάση αντικατάστασης μόνο τυχαία δε θα μπορούσε να θεωρηθεί, μιας και τα σύνθετα υλικά πλεονεκτούν έναντι των παραδοσιακών υλικών σε μια σειρά από παραμέτρους και ιδιότητες και κυρίως στο γεγονός ότι διαθέτουν συνήθως τις βέλτιστες ιδιότητες των υλικών που τα αποτελούν, αλλά και επιπλέον ιδιότητες που τα αρχικά υλικά δεν διαθέτουν.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των σύνθετων υλικών έναντι των παραδοσιακών, είναι οι άριστες μηχανικές ιδιότητες, αποτέλεσμα της από κοινού συνεισφοράς ινών και μήτρας στη βελτίωση της συνολικής μηχανικής συμπεριφοράς του σύνθετου. Καταλυτικό ρόλο σε αυτή τη πτυχή των συνθέτων, έπαιξε η δυνατότητα σχεδιασμού και κατασκευής ενός τέτοιου υλικού, σύμφωνα με τις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής για την οποία προορίζεται, έχοντας τις επιθυμητές ιδιότητες. Ο σχεδιασμός ενός σύνθετου είναι άλλο ένα σημαντικό πλεονέκτημα αυτών των υλικών, μιας και υπάρχει μια σειρά παραμέτρων, που εάν ληφθούν υπόψη, μπορούν να συμβάλλουν ουσιαστικά στις τέλειες ιδιότητες, αλλά και στη συμπεριφορά του σύνθετου. Η συμβατότητα για παράδειγμα, των αρχικών υλικών που θα επιλεγθούν να απαρτίσουν ένα σύνθετο είναι μείζονος σημασίας, όπως επίσης και ο τρόπος κατασκευής του.

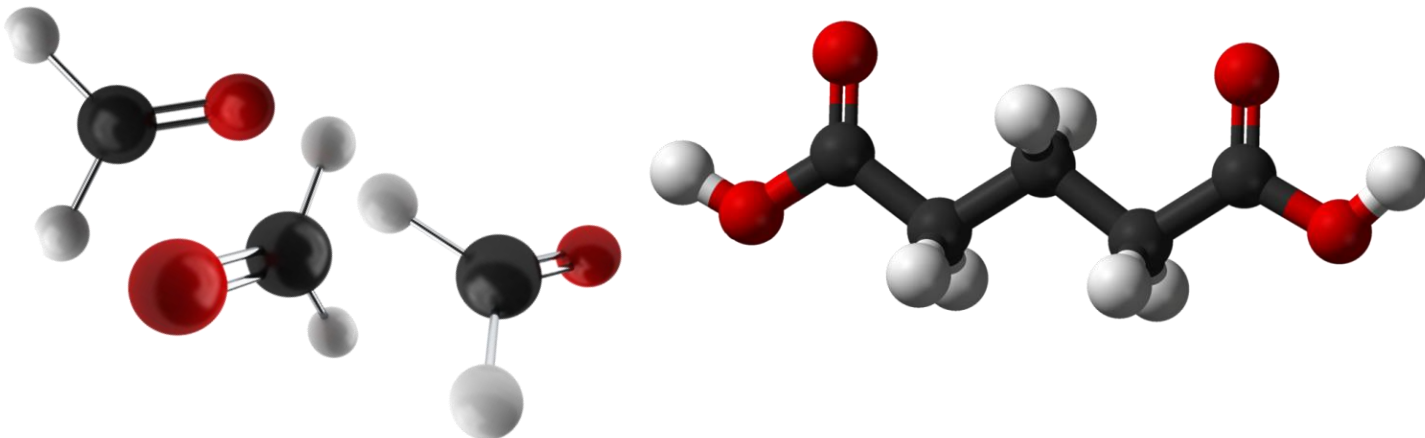
Ο σημαντικότερος λόγος που επιλέγονται τα σύνθετα υλικά σε διάφορες εφαρμογές, είναι οι «ειδικές ιδιότητες» (specific properties) που διαθέτουν, έναντι άλλων υλικών. Με τον όρο ειδική ιδιότητα, αναφερόμαστε στο λόγο μιας ιδιότητας του υλικού, προς την πυκνότητα του. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της ειδικής ιδιότητας, τόσο ελαφρύτερο είναι το υλικό, διαθέτοντας ταυτόχρονα υψηλότερη τιμή της συγκεκριμένης ιδιότητας. Αυτή η παράμετρος είναι ζωτικής σημασίας για τη χρήση των συνθέτων σαν δομικά στοιχεία, σε εφαρμογές όπου η ελάττωση του βάρους έχει σαν αντίκτυπο στην αποδοτικότερη λειτουργία τους, όπως επίσης και στη μείωση του κόστους. Αντικαθιστώντας μεταλλικά υλικά με σύνθετα σε κατασκευές, όπως οι άτρακτοι των αεροπλάνων, οι μειώσεις του βάρους μπορούν να φτάσουν αλλά και να υπερβούν ορισμένες το 50%.

Ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό των σύνθετων υλικών είναι τα μεγάλα φορτία που εξακολουθούν να αναλαμβάνουν, ακόμα και μετά από πιθανή αστοχία τους. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε σε στατικές δοκιμές σε ινώδη σύνθετα υλικά και οφείλεται στο γεγονός ότι ακόμα και μετά την αστοχία του σύνθετου, παρόλο που οι ίνες θραύονται, η τάση μεταβιβάζεται σε πολλαπλές κατευθύνσεις μέσα στη μάζα του υλικού και κυρίως σε άλλες ίνες οι οποίες δεν έχουν ακόμη αστοχήσει. Παρατηρήθηκε επίσης ότι τα ινώδη σύνθετα παρουσιάζουν μικρή ευαισθησία στην ύπαρξη εγκοπών, ενώ η διάδοση των ρωγμών είναι περιορισμένη. Κατασκευές από τέτοια σύνθετα υλικά, επέδειξαν μεγαλύτερη διάρκεια ζωής και αυξημένη αντοχή σε κόπωση, συγκριτικά με αυτή αντίστοιχων μεταλλικών κατασκευών. Κάποια άλλα πλεονεκτήματα των συνθέτων είναι η καταπληκτική αντίσταση τους στην ηλεκτροχημική διάβρωση, φαινόμενο ασυνήθιστο στα μεταλλικά υλικά. Η απόσβεση ταλαντώσεων που παρουσιάζουν κάποιοι τύποι σύνθετων (sandwich), μέσω της μεγάλης απορρόφησης ενέργειας είναι ένα χαρακτηριστικό τους γνώρισμα, όπως επίσης και η υψηλή αντοχή που επιδεικνύουν τα ινώδη σύνθετα σε κρουστικά φορτία υψηλής ενέργειας, με αποτέλεσμα τη διατήρηση της σταθερότητας των κατασκευών στις οποίες βρίσκουν εφαρμογή.

1.4 ΠΟΛΥΜΕΡΗ ΥΛΙΚΑ

1.4.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

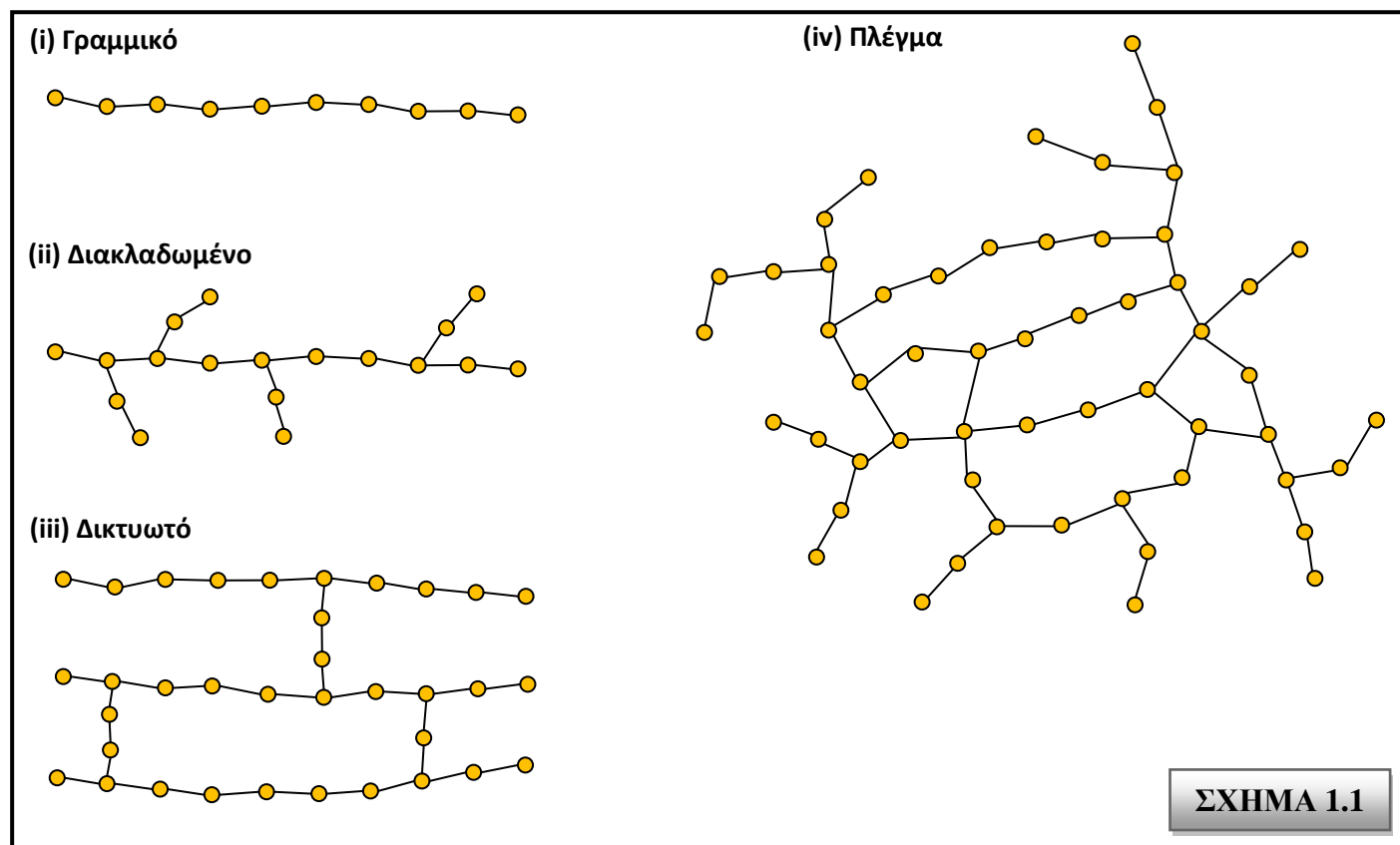
Πολυμερή ονομάζονται οι χημικές ενώσεις με μεγάλα μόρια, τα «μακρομόρια», που σχηματίζονται από τη σύνδεση πολλών μικρών μορίων. Τα πολυμερή προκύπτουν από την χημική αντίδραση των μονομερών που ονομάζεται πολυμερισμός.



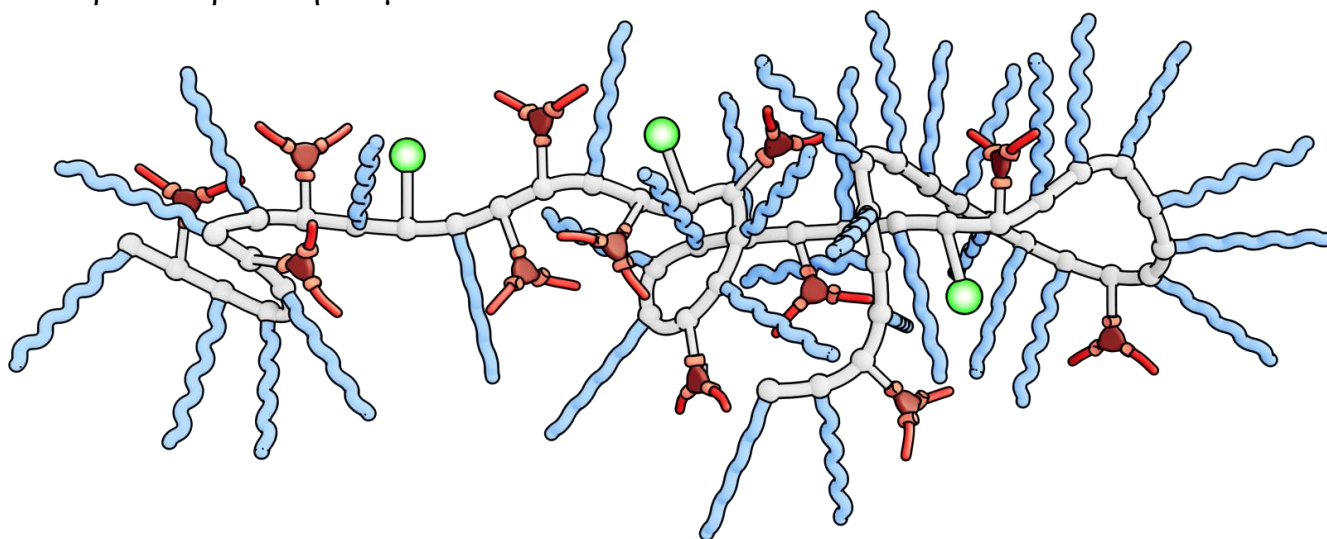
1.4.2 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΜΕΡΩΝ

Α. Με κριτήριο την αρχιτεκτονική της πολυμερικής αλυσίδας τους διακρίνονται σε:

- Γραμμικά
- Διακλαδωμένα
- Δικτυωτά ή διασταυρούμενα (crosslinked)
- Πλέγμα (network)

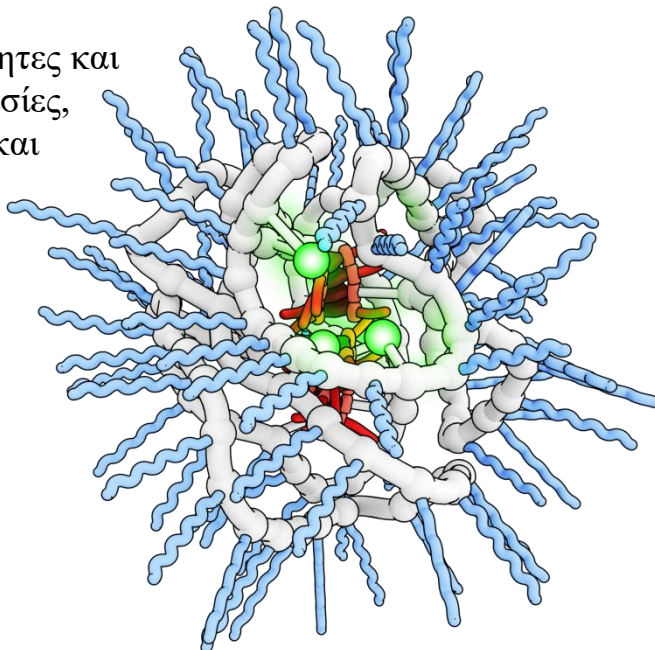


- B.** Με κριτήριο το είδος των ατόμων που συμμετέχουν στη δομή της κύριας αλυσίδας τους:
1. Ομοαλυσωτά / Ομοπολυμερή (homopolymers): Η αλυσίδα τους αποτελείται από ένα είδος ατόμων
 2. Ετεροαλυσωτά / Συμπολυμερή (copolymers): Η αλυσίδα τους αποτελείται από περισσότερα είδη ατόμων



- Γ.** Με κριτήριο την προέλευση και τη χημική τους σύσταση διακρίνονται σε:
1. Φυσικά: Λαμβάνονται απευθείας από τη φύση (μαλλί, μετάξι)
 2. Ημισυνθετικά: Προκύπτουν από χημικό μετασχηματισμό φυσικών προϊόντων (εβονίτης, νιτροκυτταρίνη, rayon, cellofan)
 3. Συνθετικά: Τα μονομερή που τα συνθέτουν, δεν υπάρχουν στη φύση (PVC, Nylon 6 και 6.6, Teflon).

- Δ.** Με κριτήριο τη χρήση τους διακρίνονται σε:
1. Ευρείας χρήσης: Παράγονται σε πολύ υψηλό ποσοστό, είναι φθηνά και έχουν ποικίλα πεδία εφαρμογών στην καθημερινή ζωή (πολυαιθυλένιο, πολυστυρένιο, PVC, ABS).
 2. Τεχνικά: Με μηχανικές ιδιότητες σημαντικά ανώτερες από εκείνες των πολυμερών ευρείας χρήσης, χρησιμοποιούνται δε, σε τμήματα μηχανών και κατασκευών σε αντικατάσταση μεταλλικών τμημάτων τους (πολυαμίδια(nylon), πολυανθρακικά (PC), εποξειδικές ρητίνες)
 3. Προηγμένα: Με εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες και μεγάλη σταθερότητα σε υψηλές θερμοκρασίες, παράγονται σε μικρές ποσότητες και προορίζονται για ειδικές εφαρμογές (Πολυαμίδια, πολύ (αιθεροκετόνη), πολύ (μεθακρυλικό μεθύλιο)).



1.5 ΜΗΤΡΕΣ

Ο ρόλος της μήτρας συνίσταται σε:

- Συγκράτηση των ινών μεταξύ τους.
- Προστασία των ινών από περιβαλλοντικές φθορές και προσβολές.
- Μεταβίβαση των μηχανικών τάσεων που ασκούνται συνολικά στο σύνθετο υλικό προς τις ίνες.
- Ανακοπή της διάδοσης των ρωγμών, που ξεκινούν από θραύση των ινών.

Για να ικανοποιεί το ρόλο, με τον οποίο είναι επιφορτισμένη η μήτρα, πρέπει να χαρακτηρίζεται από:

- Ολκιμότητα.
- Ανθεκτικότητα.
- Σχετική ευκαμψία.
- Σημείο τήξης μεγαλύτερο από τη μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας του συνθέτου υλικού.

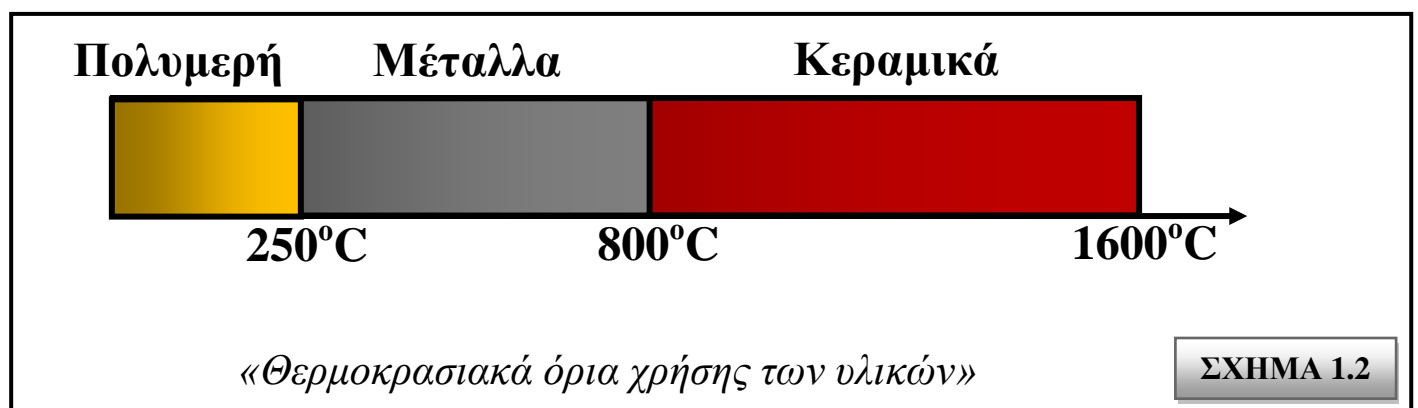
Οι ιδιότητες αυτές πρέπει επίσης να παρουσιάζουν «συμβατότητα» με τις αντίστοιχες ιδιότητες των ενισχυτικών ινών.

Συνήθως, το υλικό της μήτρας έχει χαμηλότερη πυκνότητα, αντοχή και δυσκαμψία από τις ίνες. Τέλος, για τη σωστή λειτουργία του συνθέτου υλικού, καθοριστικός παράγοντας είναι η καλή πρόσφυση ίνας – μήτρας.

Ανάλογα με το υλικό της μήτρας διακρίνουμε τις ακόλουθες ομάδες υλικών μήτρας για σύνθετα υλικά:

- Οργανικές.
- Μεταλλικές.
- Κεραμικές.

Η επιλογή κατάλληλης μήτρας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και το περιβάλλον χρήσης του συνθέτου. Μία γενική οδηγία αναφορικά με τα θερμοκρασιακά όρια για κάθε ομάδα υλικών παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.2.



Τα αντίστοιχα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται με τις ακόλουθες συντμήσεις:

- PMC: Polymer Matrix Composite
- MMC: Metal Matrix Composite
- CMC: Ceramic Matrix Composite

1.5.1 ΟΡΓΑΝΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε:

1. Θερμοπλαστικές:

Πρόκειται για πολυμερή με γραμμικές αλυσίδες. Παρουσιάζουν δομή, όπου οι μοριακές αλυσίδες διασυνδέονται με ασθενείς δυνάμεις Van der Waals, που λύνονται με την αύξηση της θερμοκρασίας με αντιστρεπτή όμως διαδικασία, καθιστώντας το υλικό μαλακότερο σε υψηλές θερμοκρασίες. Λόγω του χαμηλού τους κόστους, χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές ευρείας κατανάλωσης. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι μήτρες πολυαιθυλενίου (PE) και πολυστυρενίου (PS). Ως ενισχυτικά υλικά θερμοπλαστικών μητρών χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά (αμίαντος, μαρμαρυγίες, κ.α.), ώστε και το τελικό προϊόν να είναι χαμηλής τιμής.

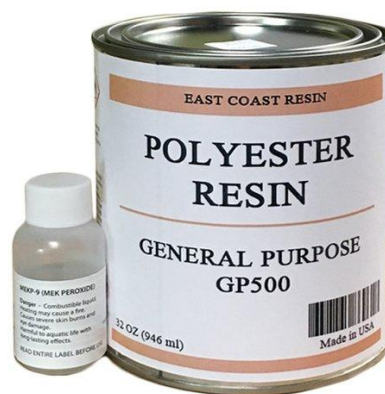
2. Θερμοσκληρυνόμενες:

Χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις όπου απαιτούνται καλύτερες μηχανικές ιδιότητες. Τα θερμοσκληρυνόμενα πολυμερή παρουσιάζουν τρισδιάστατη δομή πλέγματος από πρωτογενείς ισχυρούς δεσμούς μεταξύ των μοριακών αλυσίδων. Αύξηση της θερμοκρασίας αυξάνει το πλήθος των διαμοριακών δεσμών καθιστώντας τα υλικά αυτά σκληρότερα και ψαθυρότερα. Τέτοιες μήτρες είναι:

- **Πολυεστερικές ρητίνες** που ενισχύονται με ίνες γυαλιού.
- **Εποξυδικές ρητίνες** με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους 200 °C, καλύτερες μηχανικές ιδιότητες από τις προηγούμενες και χρήση στη αεροναυπηγική.
- **Φαινολικές ρητίνες**, οι οποίες έχουν χαμηλή πλαστικότητα και μέτριες μηχανικές ιδιότητες. Η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας τους φτάνει τους 400 °C.

3. Ελαστομερείς:

Είναι συνήθως γραμμικά πολυμερή με διακλαδισμένες αλυσίδες οι οποίες έχουν τυχαίο προσανατολισμό. Διαθέτουν μικρή δυσκαμψία με αποτέλεσμα όταν υποστούν μεγάλες παραμορφώσεις να επανέρχονται στο αρχικό τους σχήμα μετά την άρση του εξωτερικού φορτίου που τις προκάλεσε. Το φυσικό και συνθετικό καουτσούκ βρίσκει την κυριότερη εφαρμογή του στα λάστιχα των αυτοκινήτων. Το φυσικό καουτσούκ, το λάστιχο, δεν επανέρχεται πλήρως στο αρχικό του μήκος μετά την αποφόρτιση γιατί τα μακρομόρια έχουν υποστεί πλαστική παραμόρφωση. Για να αποφευχθεί η πλαστική παραμόρφωση γίνεται ο λεγόμενος βουλκανισμό, όπου το καουτσούκ θερμαίνεται με θείο. Η διαδικασία του βουλκανισμού έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία σταυροδεσμών (cross-link) μεταξύ των μορίων, οι οποίοι ενισχύουν τη δομή του ελαστικού. Με τον τρόπο αυτόν το ελαστομερές γίνεται σκληρότερο, ανθεκτικότερο, αποκτά αντίσταση στη διάβρωση από λάδια, όζον, οξέα και καθιστά λιγότερο ευαίσθητο στις θερμοκρασιακές μεταβολές. Όμως η διαδικασία του βουλκανισμού είναι μια πολυδάπανη και χρονοβόρα διαδικασία και για αυτό αναπτύχθηκαν τα ελαστομερή που διαθέτουν τις ιδιότητες του καουτσούκ και των οποίων είναι εύκολη η μορφοποίηση και αντίστοιχη εκείνης των θερμοπλαστικών.



1.5.2 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Μέταλλα, όπως το αλουμίνιο, το τιτάνιο και το νικέλιο, χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο ως υλικά μήτρας προσφέροντας σημαντικά πλεονεκτήματα. Για εφαρμογές υψηλών θεοκρασιών επιβάλλεται η χρήση μεταλλικών ή κεραμικών μητρών, αφού η μέγιστη επιτρεπτή θεοκρασία χρησιμοποίησης οργανικών μητρών είναι πολύ χαμηλή ($\approx 300\text{ }^{\circ}\text{C}$), ενώ οι ανθρακούχες μήτρες οξειδώνονται σε θεοκρασία μεγαλύτερη από $500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Σε σχέση με τις οργανικές μήτρες, οι μεταλλικές παρουσιάζουν πλεονεκτήματα, αλλά και μειονεκτήματα, τα σπουδαιότερα των οποίων φαίνονται παρακάτω.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ	ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ
<ul style="list-style-type: none">• Μεγαλύτερη ολκιμότητα και καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες.• Βελτίωση μηχανικών ιδιοτήτων του συνθέτου σε καταπονήσεις ασκούμενες σε διευθύνσεις διαφορετικές από αυτές του προσανατολισμού των ινών.• Βελτίωση της ακαμψίας και αύξηση του μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου.• Μείωση της ευαισθησίας του συνθέτου στην παρουσία διαλυτών και διεύρυνση των θεοκρασιακών ορίων χρήσης του συνθέτου.• Βελτίωση της θερμικής και ηλεκτρικής αγωγιμότητας του συνθέτου για ειδικές εφαρμογές.• Ευκολότερη σύνδεση τεμαχίων του συνθέτου υλικού (συγκόλληση, κόλληση).	<ul style="list-style-type: none">• Δημιουργία εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων στη διεπιφάνεια μετάλλου-ίνας συμβάλλουν στην αποκόλληση ινών από τη μήτρα που οδηγεί στη μικρορωγμάτωση και τη θραύση των ινών.• Μεγαλύτερη πυκνότητα και επομένως μεγαλύτερο βάρος της συνολικής κατασκευής.• Φαινόμενα διάλυσης ινών στη μήτρα, σε υψηλές θεοκρασίες (π.χ. διάλυση ινών SiO_2 σε μήτρα Al).• Ασυνέχεια της καμπύλης εφελκυσμού των συνθέτων υλικών στο όριο διαρροής της μήτρας.• Δύσκολη παραγωγή συνθέτου υλικού και μεγαλύτερο κόστος.

1.5.3 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Τα κεραμικά υλικά είναι σκληρά, δύστηκτα, μεγάλης στιβαρότητας και μεγάλης αντοχής στη διάβρωση και την χημική προσβολή.

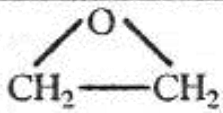
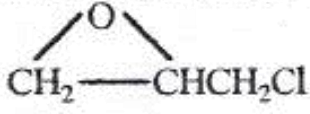
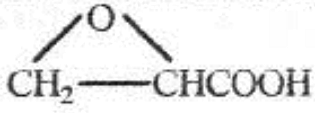
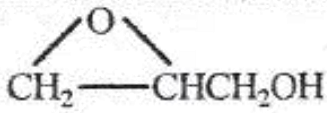
Στην περίπτωση της κεραμικής μήτρας, οι ίνες αποβλέπουν αφενός στη βελτίωση της αντοχής του κεραμικού στους θεοκρικούς αιφνιδιασμούς και αφετέρου στην αύξηση της μηχανικής του αντοχής. Η ολκιμότητα και το ποσοστό των ινών επιδρούν ευνοϊκά στη βελτίωση της αντοχής της μήτρας. Το σημαντικότερο πρόβλημα στη χρήση κεραμικών μητρών εντοπίζεται στη συνάφεια ινών – μήτρας και οφείλεται στη μεγάλη διαφορά μεταξύ των συντελεστών γραμμικής διαστολής της κεραμικής μήτρας και των συνήθων ενισχυτικών ινών. Μεγάλη εφαρμογή βρίσκουν, επίσης, οι μήτρες άνθρακα, ενώ ειδική περίπτωση κεραμικής μήτρας αποτελεί το τσιμέντο. Είναι γνωστές οι οικοδομικές κατασκευές τσιμέντου με ενίσχυση χάλυβα (οπλισμένο σκυρόδεμα), ινών αμιάντου (ελενίτ), ινών γυαλιού, καθώς επίσης και οι κατασκευές από γύψο με ενίσχυση ινών γυαλιού ή αμιάντου.

1.6 ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

1.6.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

Με τον όρο εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δύο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στην *Εικόνα 1.7* φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξείδιον του αιθυλενίου
	επιχλωροϋδρίνη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

ΕΙΚΟΝΑ 1.7

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση.

Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών, είναι η εύκολη επεξεργασία τους, η μηχανική αντοχή, η υψηλή χημική αντίσταση, το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δύο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε πάρα πολλές δε περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και εντελώς μόνες τους.

1.6.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΕΡΕΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες είναι άκαμπτα άμορφα στερεά που μοιάζουν με γυαλί (Εικ.1.8). Επίσης οι στερεές εποξειδικές ρητίνες περιέχουν σκληρή και αμετάβλητη αντίσταση τριβής και πολύ καλή χημική σύσταση. Τα σημαντικότερα **πλεονεκτήματα** των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σχέση με τις υγρές ρητίνες είναι η **εύκολη επεξεργασία** τους, η **μηχανική αντοχή**, η **υψηλή χημική αντίσταση** και το **άριστο κολλώδες**.



1.6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΓΡΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες (Εικ.1.9) παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα, καλή διαστατική σταθερότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών.
- Οι εποξειδικές ρητίνες, και τα μίγματά τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές), είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων) κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα τη μεγάλη ποικιλία σε εφαρμογές.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί.
- Υψηλές μηχανικές ιδιότητες, που οφείλονται στη μικρή συστολή τους με αποτέλεσμα τη μικρή παρουσία εσωτερικών τάσεων.
- Άριστη ηλεκτρική μόνωση.
- Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.

- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες, ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά, όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση, που εξαρτάται από το πρόσθετο που χρησιμοποιείται.
- Συνολικά οι περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δε γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.



ΕΙΚΟΝΑ 1.9

1.6.4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΙΣ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΕΣ ΡΗΤΙΝΕΣ

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

1. Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).

2. Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δόκιμα μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλειας στεγανότητας.

3. Στην κατασκευή τριχών για πινέλα

4. Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated resins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.

5. Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλάσσιας υφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσόμενων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.

6. Συστήματα εποξειδικών ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.

7. Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξειδικών ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλίων και σωλήνων, εργαλείων, μήτρων, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

8. Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetsome) δύο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρηνασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς.

- Οι ρητίνες αυτές προορίζονται για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς, αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, τσιμεντοκονιάματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α.
- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από τη διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.
- Για την υγρομόνωση πισινών και δεξαμενών.
- Για την υγρομόνωση υπογείων χώρων και παταριών, δαπέδων κ.λ.π

Μειονέκτημα των εποξειδικών ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστος. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται όμως από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.7 ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΑ

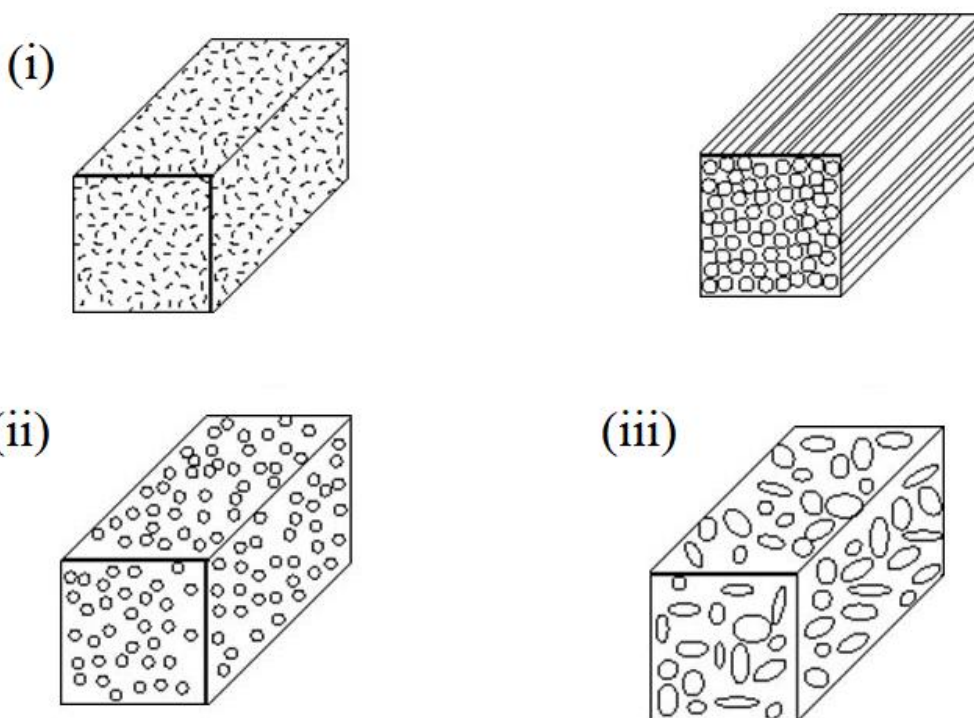
1.7.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα εγκλείσματα (ή ενισχυτικά υλικά) είναι **ανόργανα υλικά** που περικλείονται μέσα σε μία μήτρα και επιτελούν πολλές σημαντικές λειτουργίες. Κατά κύριο λόγο, οι επιθυμητές ιδιότητες επιτυγχάνονται επιλέγοντας τον κατάλληλο τύπο και υλικό ενίσχυσης. Έχουν επιφορτισθεί με το να φέρουν εις πέρας τις αυξημένες μηχανικές απαιτήσεις που χαρακτηρίζουν τα σύνθετα υλικά, μίας και είναι εκείνες που περιλαμβάνουν τα φορτία. Για αυτό και τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται έχουν μηχανικές ιδιότητες κατά πολύ ανώτερες σε σχέση με το υλικό που αποτελεί την μήτρα, προσδίδοντας στο σύνθετο υλικό αυξημένη αντοχή και μέτρο ελαστικότητας. Τα εγκλείσματα που χρησιμοποιούνται είναι πολλά και διαφέρουν ως προς το μέγεθος την γεωμετρία και τα φυσικά χαρακτηριστικά τους.

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες εγκλεισμάτων βάσει του σχήματός τους (Εικόνα 1.10):

- i. Εγκλείσματα σε μορφή **ιψών**.
- ii. Εγκλείσματα σε μορφή **κόκκων**.
- iii. Εγκλείσματα σε μορφή **νιφάδων**.

Τα εγκλείσματα έχουν αρκετά μικρές διαστάσεις της τάξης του «μίκρο».



EIKONA 1.10

1.7.2 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΟΞΕΙΔΙΚΩΝ ΡΗΤΙΝΩΝ

Η παρουσία των εγκλεισμάτων στις ρητίνες γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται.

Η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητά της σε έγκλεισμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

❖ Συστολή

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του σύνθετου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

❖ Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν τη αντοχή αυτή σε υγρασία. Τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά και επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στην στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του σύνθετου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

❖ Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των σύνθετων υλικών ανάλογα με την κατ'όγκο περιεκτικότητά τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος του σύνθετου υλικού.

❖ Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη με ινώδη υλικά και λιγότερο με κοκκώδη εγκλείσματα.

❖ Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ'όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση αυτή δεν είναι γραμμική.

❖ Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

❖ Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα εννοούμε την κατάσταση του σύνθετου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

❖ **Θερμική αγωγιμότητα**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών, αν και σε μεγάλες περιεκτικότητες αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστό αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

❖ **Αντοχή στη συμπίεση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

❖ **Συμπεριφορά στην κρούση**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που οικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δομικής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

❖ **Συμπεριφορά στην κάμψη**

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

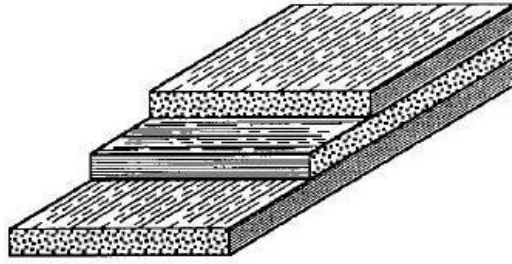
❖ **Σκληρότητα επιφάνειας-αντίσταση στην τριβή**

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του σύνθετου και την αντίσταση σε τριβή.

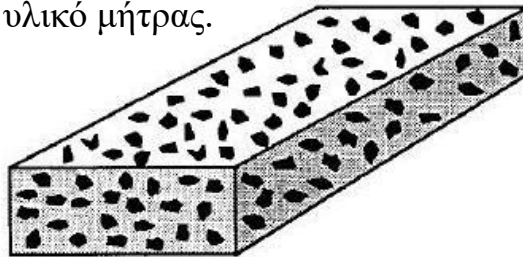
1.8 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλογα με τη μορφή του συστατικού ενίσχυσης, τα σύνθετα κατατάσσονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

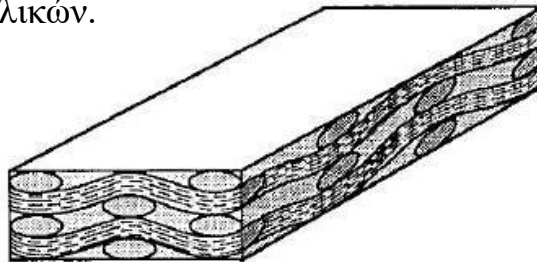
- **Ινώδη Σύνθετα (Fibrous Composites):** Με ενίσχυση ινών εμποτισμένων σε υλικό μήτρας.



- **Κοκκώδη Σύνθετα (Particulate Composites):** Με ενίσχυση σωματιδίων διασκορπισμένων στο υλικό μήτρας.



- **Στρωματικά Σύνθετα ή Πολύστρωτα (Πολυστρώματα) (Laminated Composites):** Με επάλληλες στρώσεις υλικών.



Τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται περαιτέρω ανάλογα με τον προσανατολισμό και τη διάταξη των ινών μέσα στη μήτρα. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή τα ινώδη σύνθετα διακρίνονται σε:

- **Μονοδιευθυντικά σύνθετα:** Οι ίνες έχουν όλες την ίδια διεύθυνση.
- **Πολυδιευθυντικά σύνθετα:** Οι ίνες έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί άμεσα σε ταξινόμηση των πολυδιευθυντικών σύνθετων στις ακόλουθες υποομάδες:

- Σύνθετα με ίνες τυχαίας διεύθυνσης.
- Σύνθετα με ίνες σε πλέξη ύφανσης.
- Σύνθετα με ίνες σε τρισσορθογώνια ύφανση.

Μία επιπλέον διάκριση των ινωδών σύνθετων στηρίζεται στο λόγο μήκους προς διάμετρο (l/d) των ινών, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως εξής:

- Συνεχείς ή μεγάλου μήκους ίνες (continuous fibers), όταν είναι $l/d > 100$.
- Ασυνεχείς ή βραχείες (κοντές) ίνες (discontinuous fibers), όταν είναι $l/d < 100$.
- Νηματίδια ή τριχίτες (whiskers), όταν $d < 1\mu\text{m}$ και $l = 100\mu\text{m}$ (πρόκειται για λεπτούς μονοκρυστάλλους κεραμικού υλικού).

1.9 ΙΝΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

1.9.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ

Αποτελεί ίσως τη σημαντικότερη κατηγορία σύνθετων υλικών, δεδομένης της ευρύτατης εξάπλωσης που αυτά γνωρίζουν σε πληθώρα εφαρμογών. Ο οπλισμός, ο οποίος είναι τοποθετημένος στη μήτρα με τη μορφή ινών (Εικ.1.10), αποτελείται εναλλακτικά από γυαλί (Glass), βόριο (Boron), άνθρακα (Carbon), γραφίτη (Graphite), αραμίδιο (Kevlar) ή και κάποιο μέταλλο, αντίθετα η μήτρα είναι συνήθως μια εποξειδική ρητίνη ή κάποιο άλλο πολυμερές, χωρίς να απαγορεύει την κατάταξη στην ίδια κατηγορία συνθέτων υλικών με μεταλλική μήτρα (π.χ αλουμινίου) και τη χρήση οπλισμού από ένα ή περισσότερα παραπάνω υλικά.

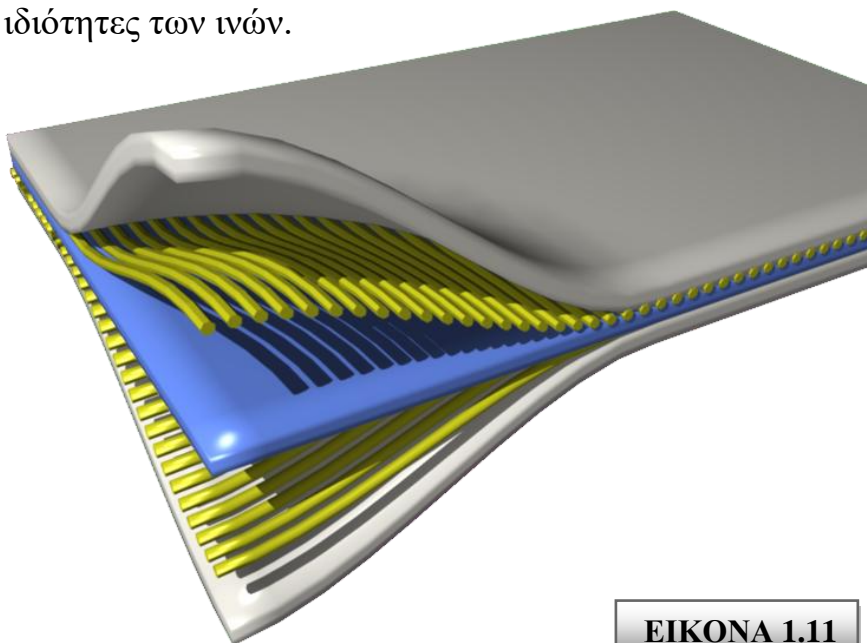
1.9.2 ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΔΩΝ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Τα ινώδη σύνθετα υλικά παρουσιάζουν γενικά πολύ καλή συμπεριφορά σε εφελκυσμό ειδικά κατά την περίπτωση που η διεύθυνση της τάσης ταυτίζεται με αυτή των ινών. Θα πρέπει βέβαια να σημειωθεί, πως για να παρουσιάζει το σύνθετο υλικό καλύτερες ιδιότητες από τη μήτρα, χρειάζεται η κατ'όγκο περιεκτικότητα των ινών U_f να ξεπερνά μια κρίσιμη ελάχιστη τιμή, γιατί διαφορετικά η εφαρμοζόμενη τάση αναλαμβάνεται από την όλκιμη μήτρα η οποία και παραμορφώνεται.

Η αντοχή τους σε θλίψη είναι μειωμένη κάτι που οφείλεται σε φαινόμενα κύρτωσης, αναδίπλωσης και λυγισμού των ινών (buckling effect) που προκαλούνται όταν ασκούνται θλιπτικά φορτία.

Σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε κόπωση, αυτή είναι δύσκολο να προβλεφθεί, αφού δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή ο κανόνας των μειγμάτων, αλλά απαιτούνται πειραματικές δοκιμές για κάθε συγκεκριμένο ινώδες υλικό. Ανάλογες δοκιμές έδειξαν πως την καλύτερη συμπεριφορά σε κόπωση παρουσιάζουν τα ινώδη υλικά αποτελούμενα από εποξειδική μήτρα και ίνες γραφίτη.

Τέλος σε ότι αφορά τη συμπεριφορά τους σε τριβή, αυτή εξαρτάται από το μήκος, τον προσανατολισμό και τις μηχανικές ιδιότητες των ινών.

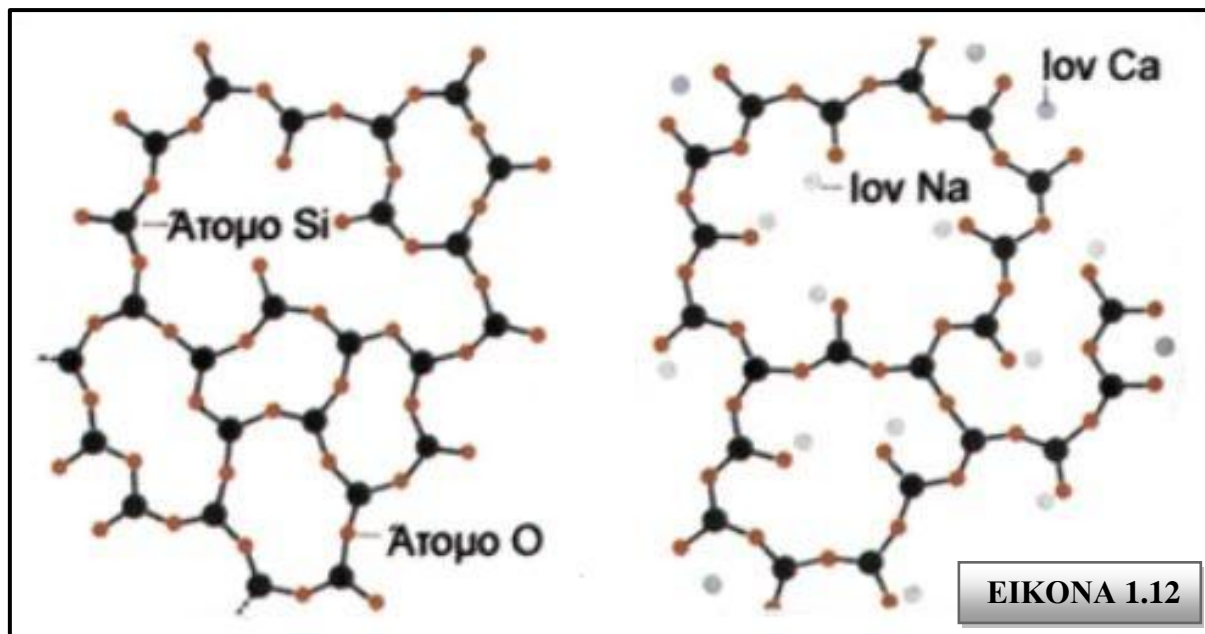


ΕΙΚΟΝΑ 1.11

1.9.3 ΙΝΕΣ ΥΑΛΟΥ

Οι ίνες υάλου (γυαλιού) χρησιμοποιήθηκαν στα σύνθετα πρώτης γενιάς (1940) και η χρήση τους συνεχίζεται επιτυχώς μέχρι σήμερα. Είναι από τους πλέον διαδεδομένους τύπους ενισχυτικών ινών στα σύνθετα πολυμερικής μήτρας. Η δομική τους βάση είναι τα οξείδια πυριτίου, ασβεστίου, βορίου, αλουμινίου κ.α.. Θεωρούνται από τα πιο φθηνά ενισχυτικά υλικά.

Χαρακτηριστική δομή του γυαλιού παρουσιάζεται στην *Εικόνα 1.12* παρακάτω.



Ανάλογα με τη χημική τους σύσταση οι ίνες γυαλιού χαρακτηρίζονται τύπου E,C και S των οποίων οι κύριες φυσικές και μηχανικές ιδιότητες παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα.

ΦΥΣΙΚΕΣ & ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΥΠΩΝ ΙΝΩΝ ΥΑΛΟΥ				
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΤΥΠΟΣ			
	E	C	S	SiO₂ καθαρή
Χημική σύσταση (%)				
SiO ₂	54	60	65	>99,5
Al ₂ O ₃	16	25	25	-
B ₂ O ₃	8	-	-	-
CaO	17	9	-	-
MgO	5	6	10	-
Μέτρο Ελαστικότητας (GPa)	75	80	84	72
Αντοχή σε εφελκυσμό (Mpa)	2100-3400	2500-4400	2800-4800	3500-8800
Πυκνότητα (g/cm ³)	2,54	2,50	2,48	2,20
Θερμοκρασία τήξης (°C)	900-1200	1400-1600	1400-1600	1720
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	550	650	650	750

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

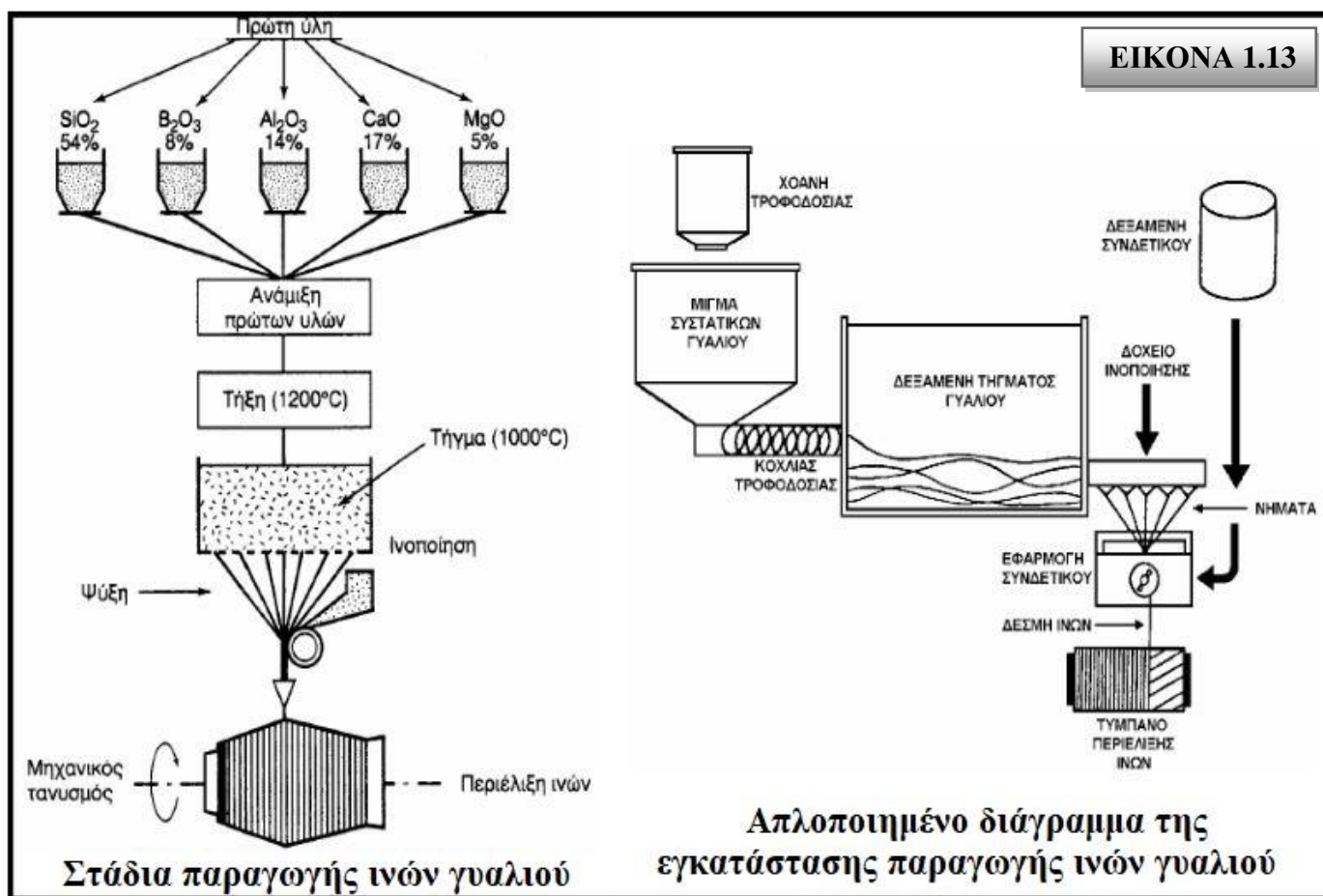
E- glass (E=electrical): Πρόκειται για τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα υαλονήματα με καλές ηλεκτρικές ιδιότητες, αντοχή, και δυσκαμψία, καθώς και πολύ καλή συμπεριφορά στην αλλαγή των καιρικών συνθηκών, αλλά με μέτρια αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια.

C-glass (C=corrosion): Υαλονήματα με υψηλή αντίσταση στη χημική διάβρωση, αλλά και με καλλίτερες μηχανικές ιδιότητες από τις ίνες τύπου E, από τις οποίες όμως είναι ακριβότερες.

S-glass (S=stiffness): Ακριβότερο υλικό από το E-glass, αλλά με υψηλότερη δυσκαμψία και θερμική αντοχή. Χρησιμοποιείται κυρίως στην αεροπορική βιομηχανία.

Όταν περιέχονται μεγάλα ποσοστά SiO_2 (>99.5%) παρατηρούνται αυξημένες τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων της ίνας και της μέγιστης θερμοκρασίας χρήσης του σύνθετου. Γι' αυτό το λόγο, σε ειδικές εφαρμογές όπου απαιτούνται υψηλές μηχανικές ιδιότητες κάτω από υψηλή θερμοκρασία χρησιμοποιούνται ίνες από 100% καθαρή πυριτία.

Τα βασικά πλεονεκτήματα των υαλονημάτων είναι το χαμηλό κόστος και η υψηλή αντοχή, ενώ στα κύρια μειονεκτήματα τους εντάσσονται το χαμηλό μέτρο ελαστικότητας και η μικρή αντοχή τους έναντι φθοράς εκτριβής (λύση της συνέχειας της επιφάνειάς τους). Εγχαράξεις και εκδορές δημιουργούν περιοχές συγκέντρωσης τάσεων στην επιφάνεια της ίνας, με αποτέλεσμα την ταχεία υποβάθμιση των μηχανικών τους ιδιοτήτων και της ικανότητας πρόσφυσης τους στη πολυμερική μήτρα.

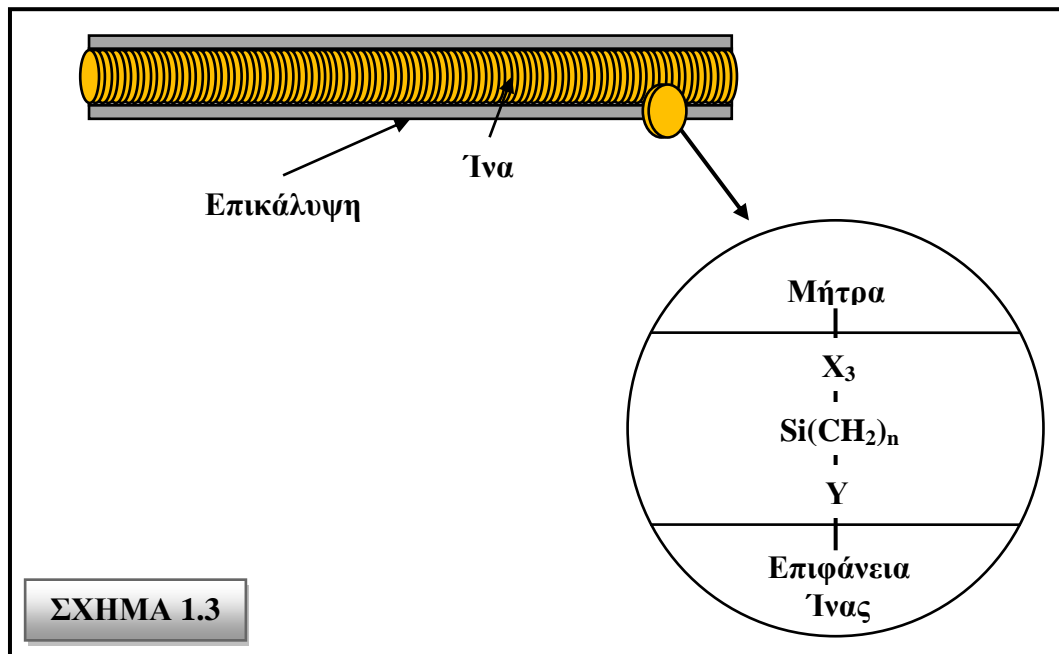


Η παραγωγή των ινών γυαλιού (Εικ.1.13) γίνεται με εκβολή τήγματος γυαλιού διαμέσου μήτρας με διάτρητο πυθμένα και περιλαμβάνει τις ακόλουθες φάσεις:

- Η πρώτη ύλη τοποθετείται σε δεξαμενή, όπου τήκεται.
- Το τήγμα τοποθετείται σε σειρά κυλινδρικών δοχείων με διάτρητο πυθμένα (διάμετρος οπών 1-2 mm).
- Το γυαλί ρέει μέσα από τις οπές του πυθμένα υπό την επίδραση της βαρύτητας.
- Οι παραγόμενες ίνες συγκεντρώνονται σε ένα σύνολο και τανύονται μηχανικά μέχρις ότου αποκτήσουν την κατάλληλη διάμετρο (1-15 μm) και ακολουθεί ελαφρός ψεκασμός τους με νερό (ψύξη).
- Ακολουθώς οι ίνες διέρχονται από ιμάντα που επιβάλλει σε αυτές προστατευτικό λιπαντικό συνδετικό υλικό (binder) ή ειδικά κολλοειδή πρόσθετα που δρουν ως προστατευτικές επικαλύψεις και συνεισφέρουν στην καλύτερη πρόσφυση ινών-μήτρας.
- Τέλος, οι ίνες περιτυλίγονται ανά δέσμες (stand ή end) των 204 νημάτων (τυπική τιμή) γύρω από τύμπανο, που περιστρέφεται με μεγάλη ταχύτητα (της τάξης των 50m/s).
- Οι ρόλοι υαλονήματος υφίστανται ξήρανση πριν υποβληθούν σε οποιαδήποτε περαιτέρω διεργασία μορφής.

Σημειώνονται οι ακόλουθες επιπρόσθετες παρατηρήσεις:

- Ο έλεγχος της διαμέτρου των ινών γίνεται με ρύθμιση της στάθμης τήγματος μέσα στη δεξαμενή, της πυκνότητας του, της διαμέτρου των οπών και της ταχύτητας περιστροφής του τυμπάνου.
- Κατά τη διάρκεια παραγωγής των ινών, πρέπει να αποφεύγεται η επαφή ινών μεταξύ τους, καθώς και με άλλα αντικείμενα, που μπορεί να προκαλέσουν επιφανειακές κακώσεις στην ίνα.
- Η αντοχή και η δυσκαμψία του γυαλιού προσδιορίζεται από την τρισδιάστατη δομή και διάταξη των συστατικών οξειδίων του. Λόγω αυτής της δομής τα υαλονήματα είναι ισότροπα υλικά και παρουσιάζουν γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Η συμμετοχή και των μεταλλικών οξειδίων στη σύνθεση των ινών μπορεί να επιφέρει αλλαγές στις φυσικοχημικές τους ιδιότητες.
- Τα χημικά πρόσθετα (sizes) διακρίνονται σε *προσωρινά* και *συμβατά*.
 - Τα *προσωρινά* πρόσθετα έχουν κύριο στόχο αφενός τη προστασία της ίνας έναντι μείωσης της αντοχής λόγω τριβής της με τις άλλες ίνες και αφετέρου τη σύνδεση των ινών μεταξύ τους στην περίπτωση που διαμορφωθούν σε πλέξη ύφανσης και ακόμη προσδίδουν στην ίνα αντιστατικές ιδιότητες. Συνήθως χρησιμοποιούνται αμυλέλαια, που διευκολύνουν αποτελεσματικά την πρόσφυση ίνας και ρητίνης εμποτισμού. Τα προσωρινά πρόσθετα απομακρύνονται εύκολα με θέρμανση των ινών σε κλιματιζόμενο περιβάλλον σε θερμοκρασία $> 340^{\circ}\text{C}$ για χρονικό διάστημα 15-20h.
 - Τα *συμβατά* πρόσθετα έχουν στόχο τη βελτίωση της αρχικής πρόσφυσης ρητίνης-γυαλιού και τη μείωση των δυσάρεστων επιπτώσεων της υγρασίας ή άλλων περιβαλλοντικών επιδράσεων. Πρόκειται περί οργανοπυριτικών ενώσεων τύπου $\text{X}_3\text{Si}(\text{CH}_2)_n\text{Y}$, όπου η Y ομάδα συμβατή προς την πολυμερική μήτρα, X η υδρολυόμενη ομάδα στο πυρίτιο και $n=0-3$ η δράση των οποίων περιγράφεται στο παρακάτω Σχήμα 1.3.



ΣΧΗΜΑ 1.3

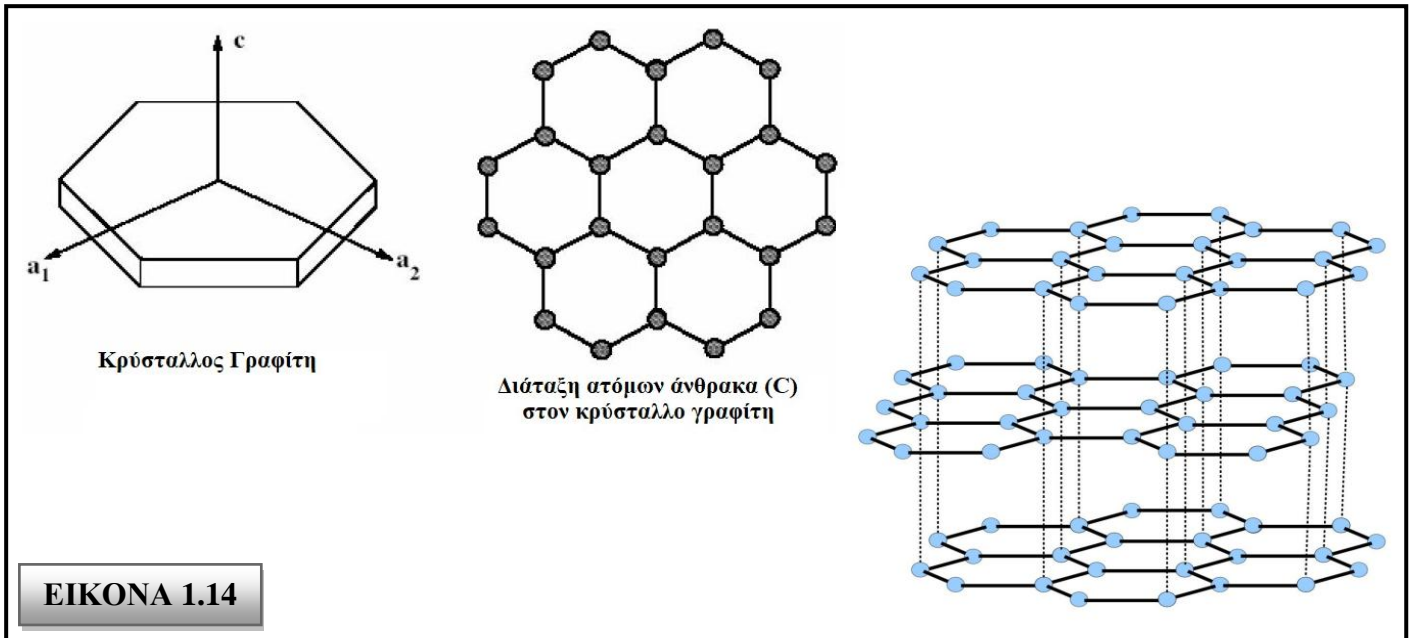
1.9.4 ΙΝΕΣ ΑΝΘΡΑΚΑ

Οι ίνες γραφίτη είναι η επικρατέστερη ενίσχυση υψηλής αντοχής και υψηλού μέτρου ελαστικότητας, η οποία χρησιμοποιείται για την παρασκευή υψηλών επιδόσεων σύνθετων υλικών ρητινικής μήτρας. Γενικά, όταν απαιτείται ο βέλτιστος συνδυασμός μηχανικής συμπεριφοράς και ελάττωσης βάρους, οι χρησιμοποιούμενες ίνες είναι, συνήθως, ίνες άνθρακα.

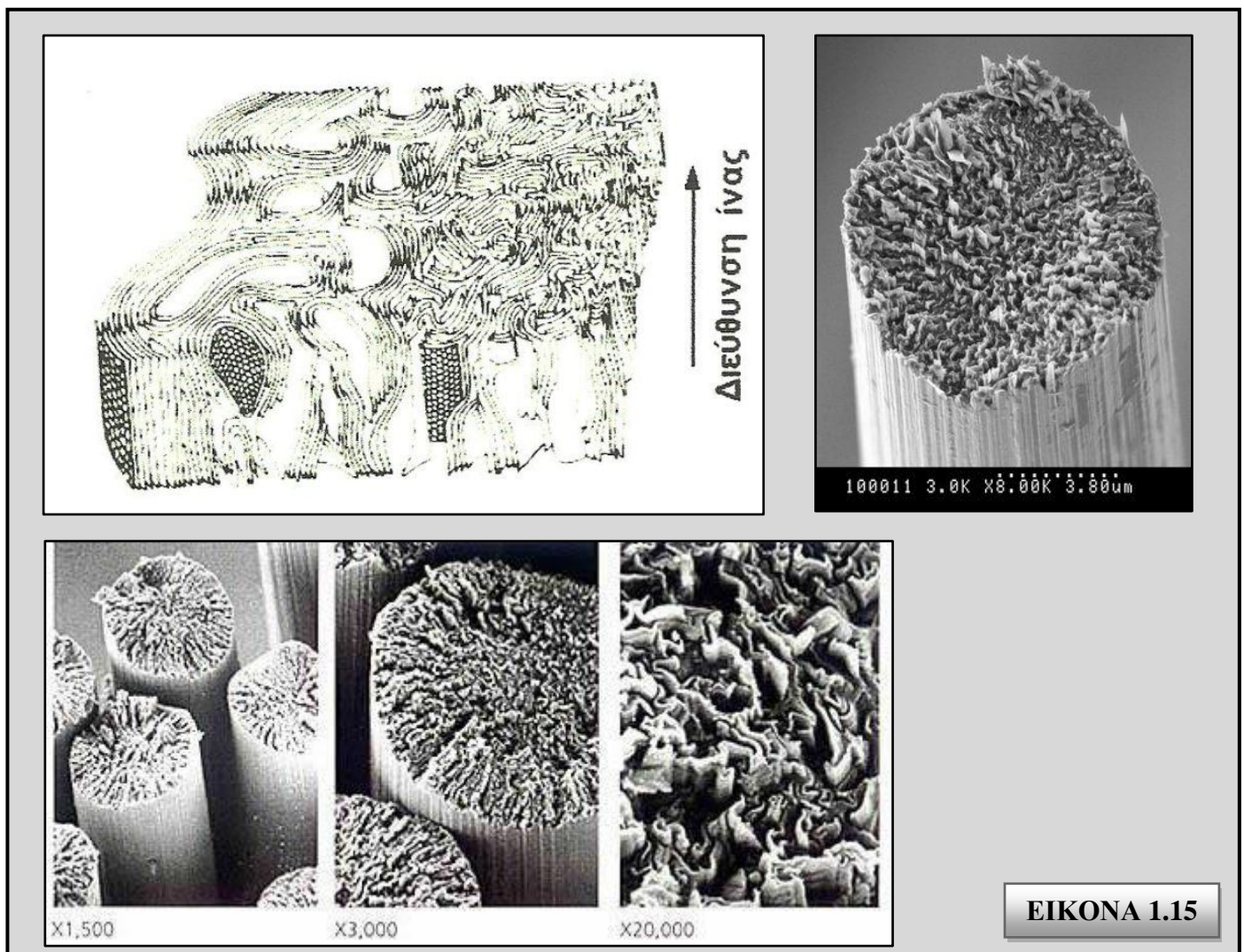
Επίσης, οι ίνες άνθρακα προτιμούνται όταν η θερμική διαστολή ενός υλικού πρέπει να συγκρατηθεί σε χαμηλό επίπεδο ή όταν απαιτείται συμβατότητα των χαρακτηριστικών διαστολής δύο συνενωμένων διαφορετικών υλικών.

Η υπεροχή αυτή των ανθρακονημάτων οφείλεται στη φύση του άνθρακα (ως στοιχείου) και τους ενδοατομικούς δεσμούς που σχηματίζει με άλλα άτομα άνθρακα. Ο γραφίτης αποτελείται από ανισότροπους πολυκρυσταλλίτες, των οποίων η ανισοτροπία εξαρτάται από τις συνθήκες παρασκευής τους.

Αποτέλεσμα του ισχυρού προσανατολισμού των κρυσταλλιτών παράλληλα στο διαμήκη άξονα των ανθρακονημάτων είναι η υψηλή στιβαρότητα και αντοχή σε θραύση και ο χαμηλός συντελεστής θερμικής διαστολής κατά τη διεύθυνση αυτή. Στη γραφιτική δομή τα άτομα C διατάσσονται πολύ πυκνά με τη μορφή εξαγωνικών επιπέδων όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

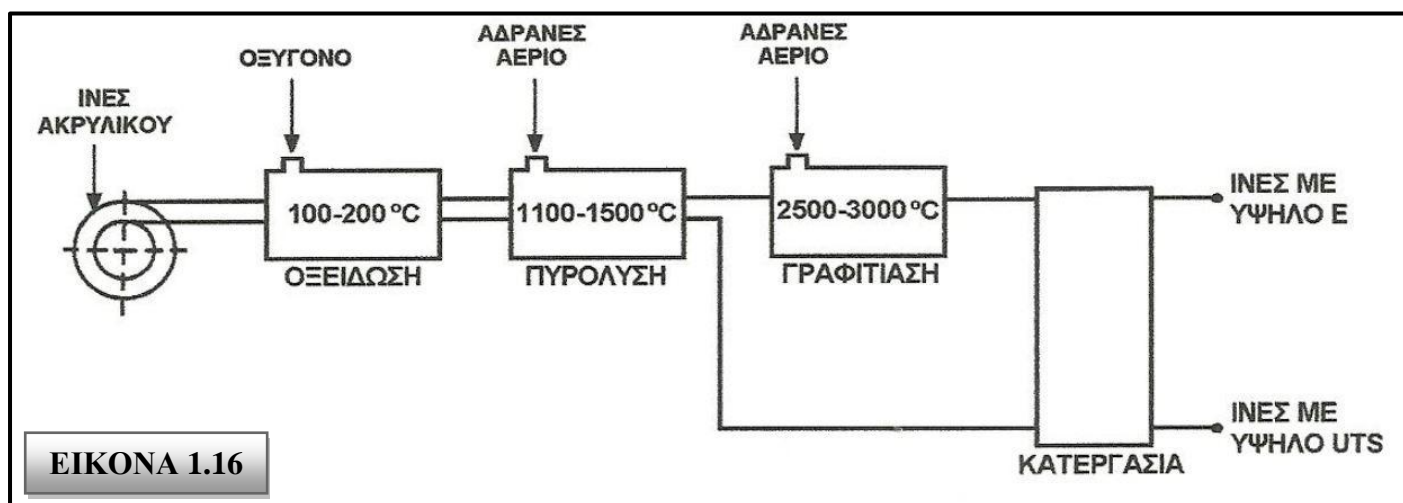


Ο ισχυρός δεσμός μεταξύ των ατόμων στις επίπεδες αυτές εξαγωνικές στρώσεις οδηγεί σε εξαιρετικά υψηλό μέτρο ελαστικότητας. Αντίθετα, ο ασθενής τύπου Van Der Waals δεσμός που υφίσταται μεταξύ γειτονικών στρώσεων, έχει ως αποτέλεσμα ένα χαμηλότερης τιμής μέτρο ελαστικότητας σε αυτή τη διεύθυνση. Τυπική δομή του ανθρακονήματος, όπως έχει ληφθεί από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο παρουσιάζεται στην *Εικόνα 1.15* που ακολουθεί.



Στην παραγωγή ανθρακονημάτων, ως πρώτη ύλη χρησιμοποιούνται πολυμερικές ίνες πολυακρυλονιτρίλιου (PAN), ίνες τεχνητής μέταξας (rayon) και πίσσα.

Η παραγωγή ινών γραφίτη (άνθρακα) από ίνες (PAN) πραγματοποιείται σε τρία στάδια:



- Οξείδωση των ινών PAN στον αέρα και σε χαμηλή θερμοκρασία (100-200°C), με ταυτόχρονη εφαρμογή τάσης, η οποία είναι απαραίτητη για την ευθυγράμμιση των αλυσίδων του πολυμερούς.
- Πυρόλυση, υπό τάση, σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα και σε θερμοκρασία 1100-1500 °C. Οι παραγόμενες ίνες στο στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλής αντοχής (high strength carbon fibers) και η αντοχή τους φτάνει τα 3000 MPa.
- Η θέρμανση σε ουδέτερη ή αναγωγική ατμόσφαιρα συνεχίζεται σε υψηλές θερμοκρασίες (2500-3500 °C), οπότε πραγματοποιείται γραφίτιωση, με ταυτόχρονη ανακρυστάλλωση, που οδηγεί σε ισχυρό προσανατολισμό των κρυσταλλιτών. Οι παραγόμενες ίνες σε αυτό το στάδιο χαρακτηρίζονται ως ίνες υψηλού μέτρου ελαστικότητας (high module carbon fibers) και έχουν μέτρο ελαστικότητας περίπου 400GPa, η δε διάμετρος τους είναι περίπου 10μm. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά ινών άνθρακα που έχουν παραχθεί σε δύο στάδια οξείδωση και πυρόλυση) και σε τρία στάδια (οξείδωση, πυρόλυση, θέρμανση σε υψηλή θερμοκρασία), αντίστοιχα.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΙΝΩΝ ΑΝΘΡΑΚΑ

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΗΣ ΑΝΤΟΧΗΣ	ΙΝΕΣ ΥΨΗΛΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ
Μέτρο Ελαστικότητας (Gpa)	180-230	350-420
Αντοχή σε εφελκυσμό (Mpa)	2500-3400	1900-2300
% περιεκτικότητα άνθρακα	95-98	99
Πυκνότητα (g/cm ³)	1,8	1,9
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	2000	2500

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2

Σημειώνουμε τα ακόλουθα:

- Σε οξειδωτική ατμόσφαιρα, η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης των ανθρακονημάτων περιορίζεται στους 500 °C και για τους δύο τύπους ινών. Κατά το σχεδιασμό του συνθέτου πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη και η μέγιστη θερμοκρασία χρήσης της μήτρας.

- Οι ιδιότητες των χρησιμοποιούμενων ανθρακονημάτων εξαρτώνται σημαντικά από την αρχιτεκτονική των ινών του PAN (μονοδιευθυντικές ίνες, δισδιάστατο πλέγμα, τρισδιάστατο πλέγμα). Ο τρόπος διεύθυνσης των ινών αυτών καθορίζει και το βαθμό ανισοτροπίας των ανθρακονημάτων που προκύπτουν και μπορεί να ποικίλλει από την πλήρη ισοτροπία ως την πλήρη ανισοτροπία.
- Η δυνατότητα επιλογής, από ένα μεγάλο εύρος τιμών της θερμοκρασίας κάθε σταδίου παραγωγής ανθρακονημάτων, δίνει την ευχέρεια παραγωγής ανθρακονημάτων διαφορετικού βαθμού γραφιτιάσης και διαφορετικών ιδιοτήτων (οι μηχανικές και φυσικές ιδιότητες, όπως η θερμική και η ηλεκτρική αγωγιμότητα, εξαρτώνται από το βαθμό γραφιτιάσης και το βαθμό ανισοτροπίας). Γενικά, όσο καλύτερα προσανατολισμένες είναι οι ίνες και όσο υψηλότερη περιεκτικότητα σε γραφίτη διαθέτουν τόσο καλύτερες μηχανικές ιδιότητες επιδεικνύουν.
- Τέλος το κόστος παραγωγής των ινών γραφίτη είναι δέκα φορές τουλάχιστον υψηλότερο από το κόστος παραγωγής των ινών γυαλιού.

1.9.5 ΙΝΕΣ ΠΟΛΥΜΕΡΟΥΣ

Οι πιο διαδεδομένες ίνες πολυμερούς είναι οι ίνες από Nylon, πολυαιθυλένιο και Kevlar. Τα νήματα Nylon και πολυεστέρα παράγονται με φυγοκεντρική περιδίνηση τήγματος, ενώ ακρυλικά και κυτταρινικά νήματα παρασκευάζονται με φυγοκεντρική περιδίνηση διαλύματος και συνακόλουθες τεχνικές καθίζησης ιζήματος. Η αντοχή τους δεν ξεπερνά τα 10Pa, ενώ το μέτρο ελαστικότητας πλησιάζει τα 1000 Pa. Παρόλο που από μηχανικής άποψης δεν κατατάσσονται στις ίνες υψηλής απόδοσης, εντούτοις το χαμηλό κόστος παραγωγής τους τις καθιστά δημοφιλείς στην αγορά.

Η πρώτη υψηλής απόδοσης οργανική ίνα αραμιδίου κατασκευάστηκε από την DuPont και έγινε γνωστή με την εμπορική ονομασία Kevlar και παράγεται σε τρεις τύπους:

- **Kevlar-29:** Με μέτρο ελαστικότητας 60 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6 GPa.
- **Kevlar-49:** Με μέτρο ελαστικότητας 120 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,6 GPa.
- **Kevlar-149:** Με μέτρο ελαστικότητας 180 GPa και αντοχή σε εφελκυσμό 3,4 GPa.

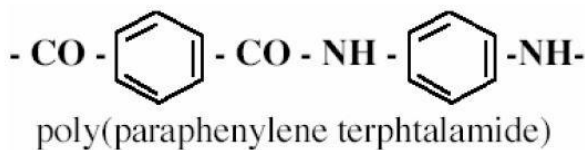
Η πυκνότητα και των τριών τύπων είναι ίδια ($1,45 \text{ g/cm}^3$), ενώ η διαφορετική ελαστικότητα οφείλεται στο γεγονός της βελτιωμένης ευθυγράμμισης των μοριακών αλυσίδων, που αυξάνει την δυσκαμψία στη διεύθυνση του άξονα της ίνας. Στον πίνακα που ακολουθεί παρατίθενται οι βασικές ιδιότητες των ινών Kevlar.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΝΩΝ KEVLAR		
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	Kevlar 29	Kevlar 49
Μέτρο Ελαστικότητας (Gpa)	60	130
Αντοχή σε εφελκυσμό (Mpa)	2700	3600
Επιμήκυνση θραύσης (%)	4,5	2
Πυκνότητα (g/cm^3)	1,45	1,45
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης ($^{\circ}\text{C}$)	200	200
Θερμοκρασία αστοχίας ($^{\circ}\text{C}$)	400	425

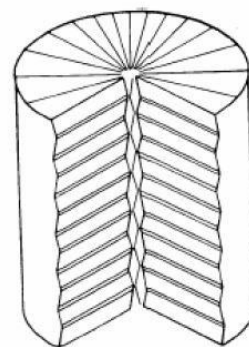
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3

Οι υψηλές τιμές των μηχανικών ιδιοτήτων του Kevlar οφείλονται στο γεγονός ότι οι πολυμερικές δομικές αλυσίδες του υλικού είναι αυτές καθ'αυτές πιο ισχυρές και συντάσσονται έτσι, ώστε να δημιουργούν ένα σταθερότερο πλέγμα, σε μορφή επίπεδης ταινίας όπως φαίνεται στην *Εικόνα 1.17*.

Ο κυλινδρικός φλοιός της ίνας περικλείει και συγκρατεί το υλικό του πυρήνα αποδίδοντας στο προϊόν ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις κατά την αξονική διεύθυνση, αλλά φτωγή συμπεριφορά κατά την εγκάρσια διεύθυνση. Επιπλέον, ενώ στην εφελκυστική καταπόνηση το υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά με παραμόρφωση έως και 2%, η μεγάλη του αδυναμία εμφανίζεται στη θλίψη, όπου σε 0,3% θλιπτική παραμόρφωση αναπτύσσεται πλαστικού τύπου αστοχία. Αξιοσημείωτο, όμως, είναι ότι η αστοχία αυτή δεν είναι καταστροφική, αλλά έχει τη μορφή πτυχώσεων (kink bands). Στην *Εικόνα 1.18* παρουσιάζεται η διαδικασία παραγωγής ινών πολυαμιδίου.



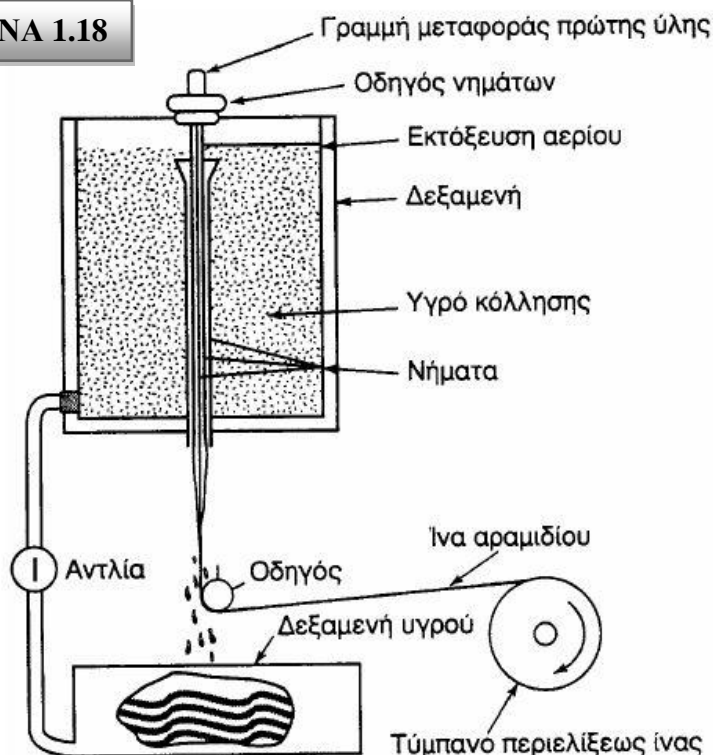
Τύπος αραμιδίου



Δομή ίνας Kevlar

ΕΙΚΟΝΑ 1.17

ΕΙΚΟΝΑ 1.18



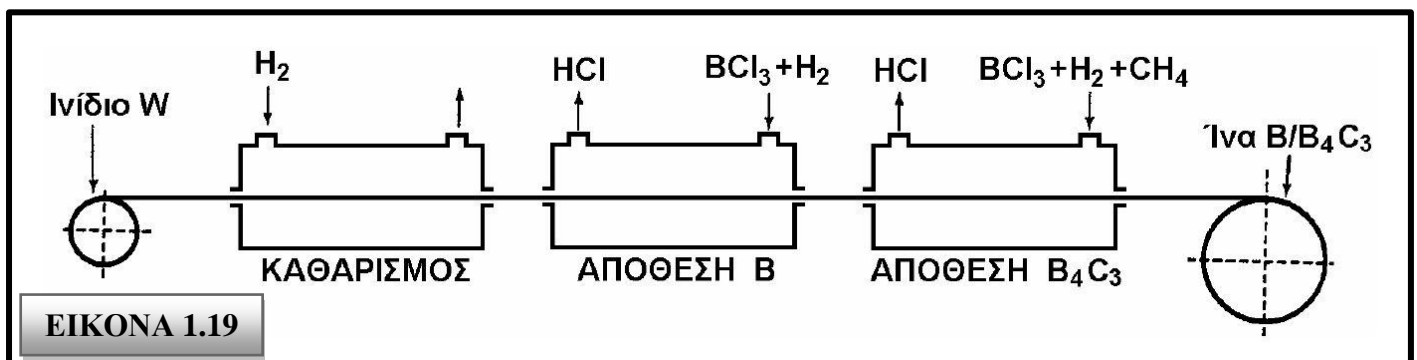
Μέθοδοι παραγωγής: Εκβολή (extrusion) ή περιδίνηση (spinning).
 Διαδικασία: Όξινο διάλυμα πολυμερούς υποβάλλεται σε εκβολή μέσω θερμαινόμενου καλουπιού που φέρει πολλές μικρές οπές για τη διευκόλυνση της εξαέρωσης του διαλύτη.
 Η αντοχή και η ακαμψία του προϊόντος βελτιώνονται με σύγχρονη επιβολή έκτασης (stretching).

1.9.6 ΜΕΤΑΛΛΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Διάφορα μέταλλα όπως το βόριο (B), το βηρύλλιο (Be) και το βολφράμιο (W) θα μπορούσαν να αποτελέσουν εξαιρετικά ενισχυτικά συνθέτων υλικών, αφού παρουσιάζουν υψηλή τιμή ακαμψίας σε σχέση με το ειδικό βάρος τους (ειδική ακαμψία). Το βόριο είναι το περισσότερο υποσχόμενο υλικό για την κατασκευή ινών ενίσχυση, ωστόσο οι τεχνικές παραγωγής μεταλλικών ινών ενίσχυσης εξακολουθούν να παραμένουν πολύ δαπανηρές. Σήμερα χρησιμοποιούνται δύο τεχνικές για την παραγωγή ινών βορίου:

(i) Αναγωγή από αλογονίδιο του βορίου

Αλογονίδιο του βορίου (συνήθως BCl_3) ανάγεται από υδρογόνο σε έναν κλειστό θάλαμο υψηλής θερμοκρασίας ($1100\text{ }^\circ\text{C}$) και αποτίθεται σε πολύ λεπτό νήμα βολφραμίου, διαμέτρου $10\text{-}15\text{ }\mu\text{m}$, όπως φαίνεται στην παρακάτω *Εικόνα 1.19*. Η διάμετρος των παραγόμενων ινών με αυτήν την τεχνική κυμαίνεται μεταξύ $100\text{-}200\text{ }\mu\text{m}$, ενώ οι ίνες παρουσιάζουν εξαιρετική δυσκαμψία και μηχανική αντοχή.



(ii) Απόθεση με τεχνική CVD

Το βόριο αποτίθεται σε νήμα άνθρακα ή βολφραμίου με την τεχνική της χημικής εναπόθεσης ατμών (CVD). Η τεχνική αυτή είναι η οικονομικότερη από την προηγούμενη, αλλά το προϊόν έχει χαμηλότερη μηχανική αντοχή.

Οι ίνες βορίου έχουν υψηλή μηχανική αντοχή ($E=300\text{-}420\text{ GPa}$, $UTS=3000\text{-}3700\text{ MPa}$), ενώ οι τιμές των ιδιοτήτων τους διατηρούνται σταθερές ως τους $500\text{ }^\circ\text{C}$. Για τη χρήση τους σε υψηλότερες θερμοκρασίες, θα πρέπει να χρησιμοποιείται προστατευτικό επίστρωμα καρβιδίου του πυριτίου (ίνες Borsic) ή νιτριδίου του βορίου. Τα επιστρώματα αυτά αποτρέπουν την αντίδραση του υλικού ενίσχυσης με αυτό της μήτρας, δεδομένου ότι σε υψηλές θερμοκρασίες, κυρίως σε σύνθετα με μεταλλική μήτρα τιτανίου ή αλουμινίου, ευνοούνται η διάχυση μέσω της διεπιφάνειας ίνας-μήτρας και οι αντιδράσεις σε στερεά κατάσταση που οδηγούν στο σχηματισμό εύθραυστων μεσομεταλλικών ενώσεων και εν συνεχεία σε αστοχία του σύνθετου υλικού.

1.9.7 ΚΕΡΑΜΙΚΕΣ ΙΝΕΣ

Οι κεραμικές ίνες χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές υψηλών θερμοκρασιών. Χαρακτηρίζονται από υψηλή αντοχή, στιβαρότητα και θερμική ευστάθεια. Οι συνηθέστερα χρησιμοποιούμενες κεραμικές ίνες είναι οι ίνες καρβιδίου και πυριτίου (SiC) και αλουμινίου (Al₂O₃), ενώ σπανιότερα συναντώνται και ίνες Si₃N₄, BeO, B₄C και ZrO₂.

Το καρβίδιο του πυριτίου (SiC) και αλούμινας (Al₂O₃), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ως ενισχυτικό υλικό είτε με τη μορφή ινών είτε με τη μορφή φυλλιδίων. Οι ίνες SiC παρουσιάζουν υψηλές τιμές αντοχής και ανώτερες μηχανικές ιδιότητες από τα φυλλίδια.

Οι μέθοδοι παραγωγής των εν λόγω ινών συνίστανται στις παρακάτω:

- i. Με χημική εναπόθεση ατμών (CVD) χλωριούχου σιλανίου σε ίνες άνθρακα. Οι παραγόμενες ίνες έχουν πυρήνα διαμέτρου 10-25 μm και εξωτερική διάμετρο 100-150μm.
- ii. Από πολυμερικές ίνες (Nicalon).
Θέρμανση σε κενό σε θερμοκρασία 850°C μετατρέπει την πολυμερική ίνα σε ανόργανο SiC, ενώ θέρμανση σε υψηλότερη θερμοκρασία (>1000°C) προκαλεί κρυστάλλωση σε β-SiC. Οι παραγόμενες ίνες έχουν διάμετρο 10-15μm.
- iii. Τριχίτες SiC από φλοιό ρυζιού.
Ο φλοιός του ρυζιού περιέχει ≈15% κ.β SiO₂.
Θέρμανση σε θερμοκρασία 700-900 °C οδηγεί σε υπόλειμμα SiO₂ και ελεύθερο άνθρακα.
Θέρμανση του υπολλείματος σε θερμοκρασία ≈1500 °C και σε περιβάλλον αζώτου ή αμμωνίας οδηγεί στο σχηματισμό SiC.
Οι παραγόμενοι τριχίτες έχουν διάμετρο ≈0,1-1μm και μήκος ≈50μm.

Παρακάτω παρουσιάζεται συγκριτικός πίνακας των ιδιοτήτων των ινών από κάθε μέθοδο.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΚΕΡΑΜΙΚΩΝ ΙΝΩΝ ΑΝΑ ΜΕΘΟΔΟ			
Ιδιότητα / Μέθοδος	CVD	Nicalon	Τριχίτες
Πυκνότητα, ρ (g/cm ³)	3,3	2,6	-
Αντοχή, UTS (Mpa)	3500	2000	7000
Μέτρο Ελαστικότητας, E (Gpa)	430	180	480
Διάμετρος ίνας, d (μm)	140	15	<1

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4

Γενικά οι μέθοδοι παρασκευής των κεραμικών ινών είναι ιδιαίτερα δαπανηρές.

Το SiC παρουσιάζει σταθερή μηχανική αντοχή ως τους 1400°C, ωστόσο η μέγιστη επιτρεπτή θερμοκρασία χρήσης του, περιορίζεται στους 900°C, λόγω της σημαντικής δραστηριότητας του πάνω από τη θερμοκρασία αυτή.

Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας (Al₂O₃) διαμέτρου 250μm έχουν εξαιρετικές μηχανικές ιδιότητες. Λόγω της ισχυρής φύσεως των χημικών δεσμών, η σταθερότητα των μηχανικών τους ιδιοτήτων διατηρείται ως τους 800°C. Οι μονοκρυσταλλικές ίνες αλουμίνας είναι εξαιρετικά ευαίσθητες έναντι επιφανειακής φθοράς που οδηγεί ταχύτατα σε αστοχία.

1.9.8 ΤΡΙΧΙΤΕΣ (WHISKERS)

Οι τριχίτες (ή νηματίδια) είναι νηματικοί μονοκρυστάλλοι που παράγονται με αποσύνθεση άλατος μετάλλου σε αναγωγική ατμόσφαιρα, κάτω από αυστηρά ελεγχόμενες συνθήκες θερμοκρασίας. Η διάμετρος τους είναι της τάξης του 1μm, ενώ το μήκος τους μπορεί να φθάσει τα μερικά χιλιοστά και παρουσιάζουν τις μηχανικές ιδιότητες ενός τέλειου κρυστάλλου. Οι εξωτερικές τους επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζουν ζώνες συγκέντρωσης τάσεων.

Οι ευρύτερα χρησιμοποιούμενοι τριχίτες είναι από αλουμίνα, γραφίτη, καρβίδιο του πυριτίου, βηρύλλια και νιτρίδιο του πυριτίου. Η παραγωγή τριχιτών σε βιομηχανική κλίμακα είναι δύσκολη.

Στον παρακάτω πίνακα γίνεται σύγκριση των ιδιοτήτων ινών – τριχιτών από SiC και Al₂O₃.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΙΝΩΝ-ΤΡΙΧΙΤΩΝ ΑΠΟ SiC & Al ₂ O ₃				
ΙΔΙΟΤΗΤΑ	SiC _{INA}	SiC _{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}	Al ₂ O ₃ _{INA}	Al ₂ O ₃ _{ΤΡΙΧΙΤΗΣ}
Μέτρο Ελαστικότητας (Gpa)	480	840	500	755
Αντοχή σε εφελκυσμό (Mpa)	2300	21000	2000	19500
Πυκνότητα (g/cm ³)	3,2	3,2	4,0	4,0
Μέγιστη θερμοκρασία χρήσης (°C)	900	1600	800	1300

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5

1.9.9 ΙΝΕΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΟΡΥΚΤΩΝ ΠΟΡΩΝ

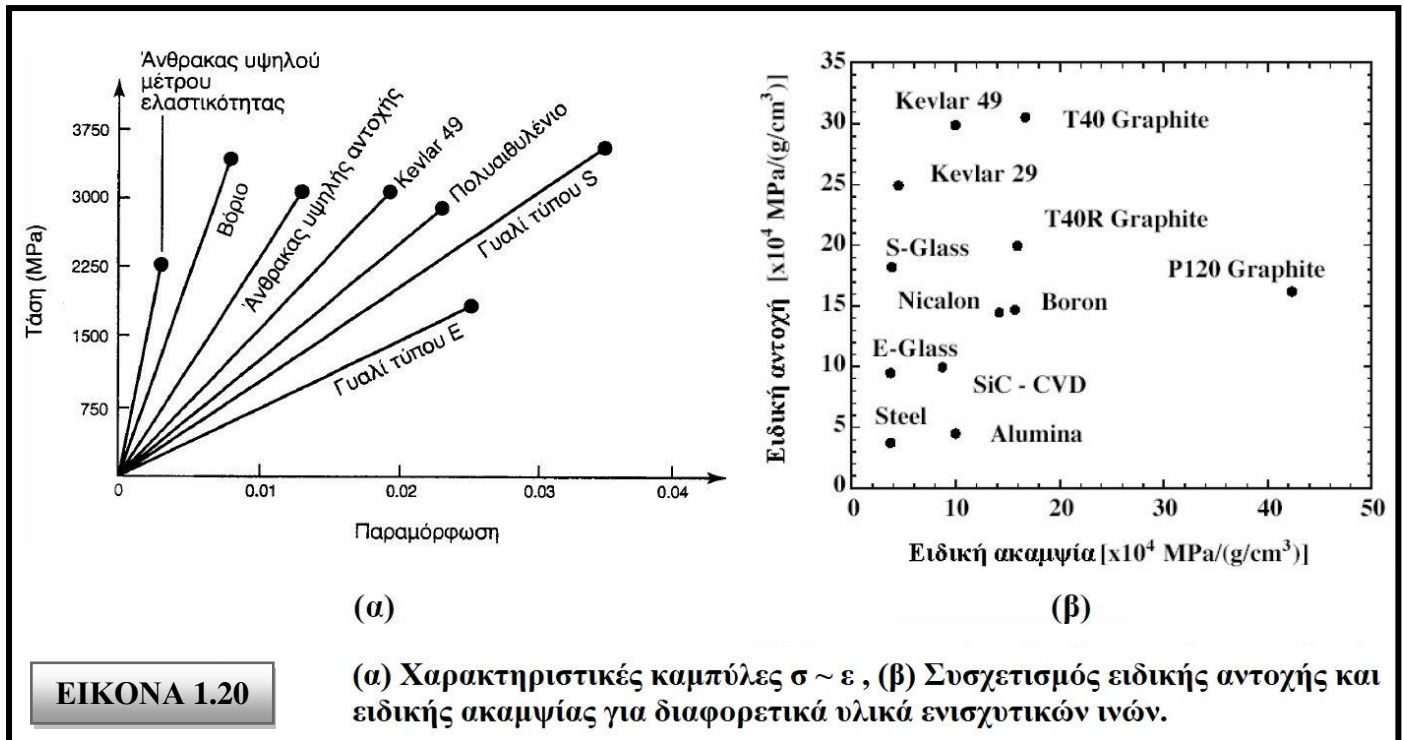
Αρκετά ορυκτά που βρίσκονται σε ινώδη ή φυλλώδη μορφή, μπορούν να αποτελέσουν φθινό ενισχυτικό υλικό, αλλά χαμηλών προδιαγραφών. Ευρύτερα χρησιμοποιούμενα τέτοια ορυκτά είναι ο αμιάντος και η μαρμαρυγία (mica).

Οι ίνες αμιάντου αποτελούνται από 500 περίπου στοιχειώδη ινίδια, διαμέτρου ≈10nm, και έχουν διάμετρο ≈2010μm και μήκος αρκετά cm. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέχρι θερμοκρασία 500°C, οπότε η μηχανική αντοχή του υλικού μειώνεται σημαντικά. Το μέτρο ελαστικότητας της ίνας είναι της τάξης των 160GPa, ενώ η μηχανική αντοχή μπορεί να φθάσει μέχρι 5500GPa. Ο αμιάντος λόγω του χαμηλού του κόστους χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Οι μαρμαρυγίες ανήκουν στην κατηγορία των φυλλοπυριτικών ορυκτών, χαρακτηρίζονται από τέλειο σχισμό και αποχωρίζονται εύκολα από το πέτρωμα με μορφή φυλλιδίων, τα οποία χρησιμοποιούνται ως συστατικό ενίσχυσης του σύνθετου υλικού. Η αντοχή σε εφελκυσμό μπορεί να φθάσει μέχρι 2500MPa (τέλεια φυλλίδια), ενώ λόγω ατελειών στις άκρες των φυλλιδίων, οι συνήθεις τιμές της αντοχής κυμαίνονται στην περιοχή 700-900MPa. Το μέτρο ελαστικότητας των μαρμαρυγιών είναι περίπου 250GPa και η πυκνότητα τους 2,8g/cm³.

1.9.10 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΩΝ ΙΝΩΝ

➤ Ως προς την ειδική αντοχή και ειδική ακαμψία



ΕΙΚΟΝΑ 1.20

(α) Χαρακτηριστικές καμπύλες $\sigma \sim \epsilon$, (β) Συσχετισμός ειδικής αντοχής και ειδικής ακαμψίας για διαφορετικά υλικά ενισχυτικών ινών.

➤ Ως προς την θερμική ευστάθεια

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΙΝΩΝ	
Τύπο	T_{max} (°C)
Spectra	150
Kevlar	250
Glass	800
SiC	1000
Alumina	1370
Carbon	2000*

*Παρουσία οξυγόνου: $T_{max} = 500$ °C

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.6

➤ Ως προς την παραμόρφωση θραύσης

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΘΡΑΥΣΗΣ ΙΝΩΝ	
Τύπο	Παραμόρφωση θραύσης (%)
Kevlar	3 ~ 4
Glass	2
Carbon	1
Ceramic	<1

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.7

1.10 ΚΟΚΚΩΔΗ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούνται από πολύ μικρά σωματίδια σε σχήμα κόκκου, κάποιου ισχυρού και ανθεκτικού υλικού, τα οποία είναι διεσπαρμένα μέσα στη μήτρα η οποία είναι από διαφορετικό υλικό. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή μη, όπως επίσης και η μήτρα. Τα κοκκώδη υλικά έχουν υποδεέστερες μηχανικές ιδιότητες σε σχέση με τα ινώδη, μιας και η συνεισφορά των σωματιδίων στη μηχανική συμπεριφορά του σύνθετου είναι μικρότερη από αυτή των ινών. Ένα σημαντικό γνώρισμα των κοκκωδών σύνθετων υλικών είναι η χαμηλή συνήθως πυκνότητα σε σωματίδια, πράγμα που προσδίδει αρκετές καλές ιδιότητες σε αυτά τα υλικά. Ως πρώτη ύλη στα κοκκώδη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν κάποια φυσικά ορυκτά όπως ο τάλκης (πυριτικό ορυκτό του μαγνησίου με χημικό τύπο $Mg_3Si_4O_{10}(OH)_2$), ενώ η διαδικασία μορφοποίησης αυτών των υλικών είναι σχετικά απλή και αυτοματοποιημένη, γεγονός που επιτρέπει την μαζική παραγωγή προϊόντων. Κοκκώδη υλικά χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές μη υψηλών απαιτήσεων όπως αντικείμενα καθημερινής χρήσης, εξαρτήματα αυτοκινήτων, και άλλα. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικής υφής ή μη και δύναται να συνδυασθούν με διάφορων τύπων μήτρες. Οι διάφοροι συνδυασμοί μήτρας/κόκκων που μπορούν να επιτευχθούν, αναφέρονται παρακάτω. Έτσι, από αυτήν την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς:

1. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Το μη οπλισμένο σκυρόδεμα αποτελεί το πιο κοινό παράδειγμα ενός τέτοιου υλικού. Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας «δεμένους» με ένα μείγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδεται στην ύπαρξη κόκκων πέτρας. Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως ο μαρμαρυγίας ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας.

2. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το εγκλείσμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με εγκλείσμα από το μέταλλο αυτό, υπό μορφή φλούδας. Σκοπός της παρασκευής τέτοιων σύνθετων υλικών είναι η δημιουργία ενός υλικού με βελτιωμένες μηχανικές ιδιότητες (αντοχή, μέτρο ελαστικότητας, όριο διαρροής), η αύξηση της ηλεκτρικής και θερμικής αγωγιμότητας καθώς και η μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και της φθοράς της μήτρας.

3. Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Ένα παράδειγμα υλικού αυτής της κατηγορίας είναι τα κράματα χαλκού ή χάλυβα που περιέχουν κόκκους μόλυβδου, η ύπαρξη των οποίων καθιστά τα παραπάνω υλικά κατεργάσιμα στις εργαλειομηχανές. Επίσης πολλά μέταλλα που έχουν πολύτιμες ιδιότητες αλλά είναι εύθραυστα σε θερμοκρασία περιβάλλοντος, όπως είναι το χρώμιο, το βολφράμιο και το μολυβδαίνιο, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα άλλων μετάλλων τα οποία παρουσιάζουν όλκιμη συμπεριφορά σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το σύνθετο υλικό που προκύπτει είναι όλκιμο στη θερμοκρασία αυτή και διαθέτει παράλληλα και κάποιες από τις ιδιότητες του εύθραυστου εγκλείσματος.

4. Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα υλικά που προκύπτουν ονομάζονται **κεραμομέταλλα**. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το έγκλεισμα. Το πρώτο είδος είναι **κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**, τα οποία χρησιμοποιούνται στην κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το δεύτερο είδος είναι τα **κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου μέσα σε μεταλλική μήτρα**. Έτσι, το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξείδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.α. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

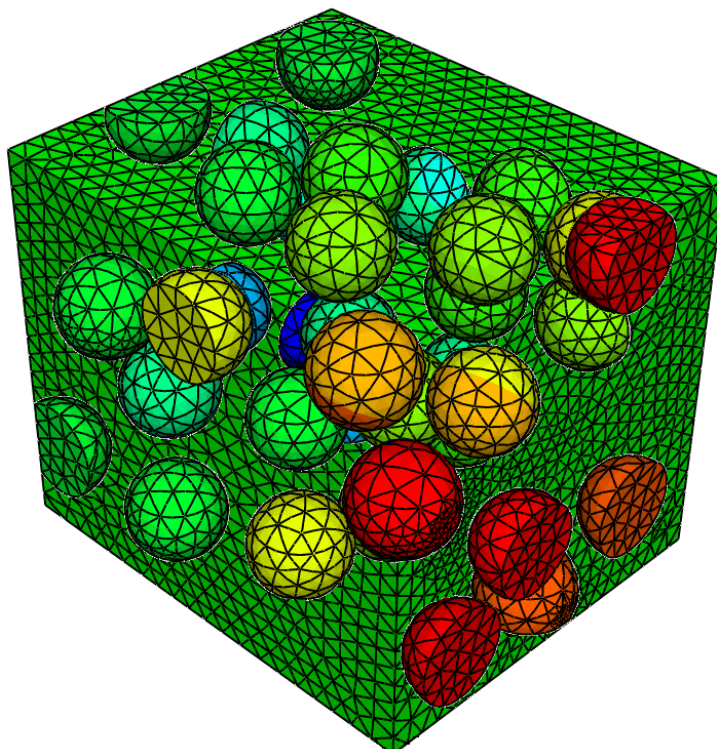
Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά δύναται να ταξινομηθούν και με κριτήριο το μέγεθος των κόκκων ως εξής:

1. Σύνθετα με ενίσχυση σωματιδίων μεγάλου μεγέθους.

Τα σωματίδια έχουν διάμετρο λίγων μm και περιέχονται σε ποσοστό μεγαλύτερο του 25%. Η συνήθης κατ'όγκο περιεκτικότητα κυμαίνεται ανάμεσα 60-90%.

2. Σύνθετα με ενίσχυση μικρών σωματιδίων σε διασπορά.

Τα εγκλείσματα, που συνήθως πρόκειται για οξείδια, περιέχονται στο σύνθετο σε συγκεντρώσεις μικρότερες του 15% κατ'όγκο. Η διάμετρος των σωματιδίων ποικίλει μεταξύ 0,01-0,1 μm . Η ισχυροποίηση της μήτρας επιτυγχάνεται με την παρεμπόδιση της μετάδοσης των διαταραχών εξαιτίας της ύπαρξης σωματιδίων.



ΕΙΚΟΝΑ 1.21

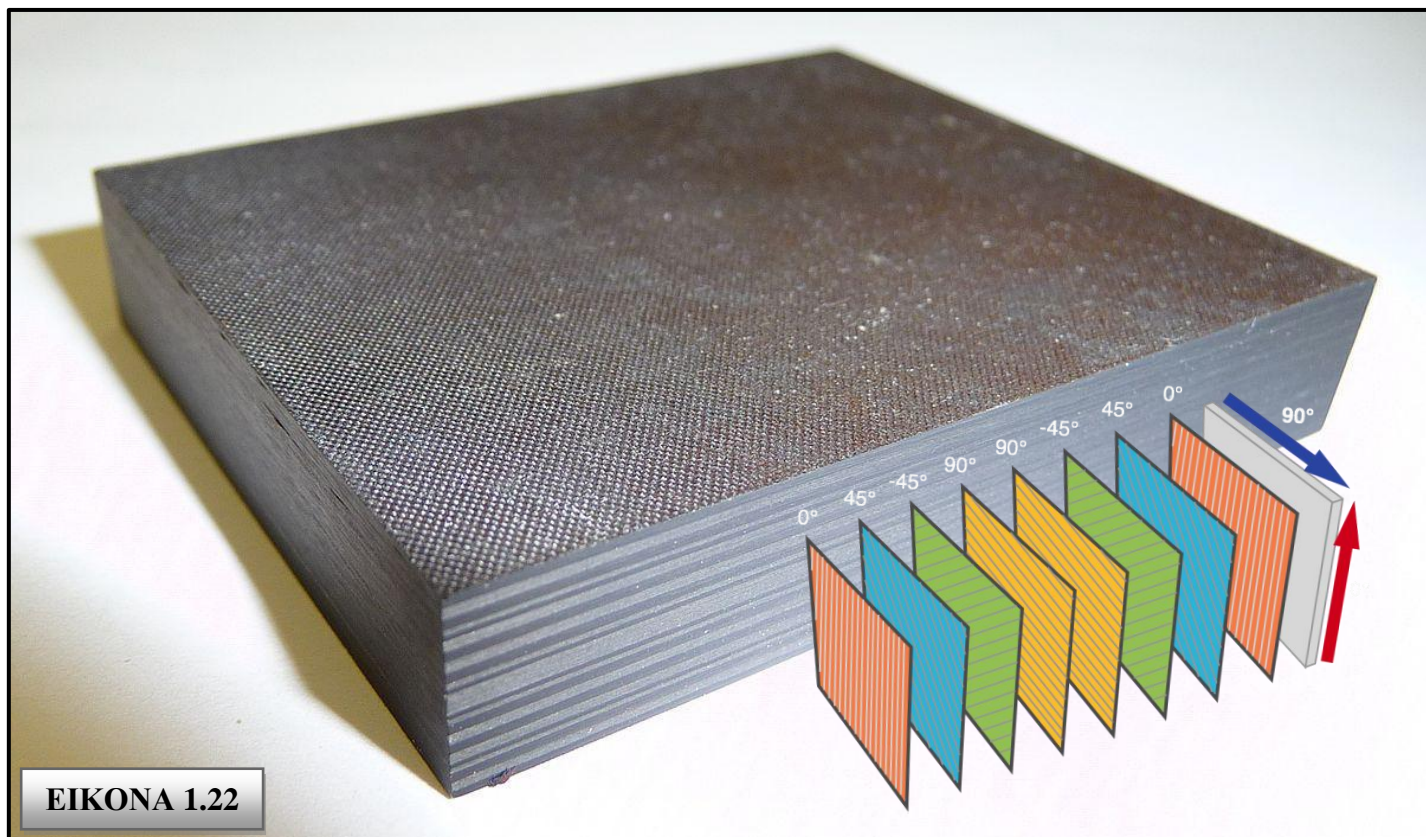
1.11 ΠΟΛΥΣΤΡΩΤΑ / ΣΤΡΩΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Τα πολύστρωτα (laminate) ή στρωματικά σύνθετα υλικά είναι μια κατηγορία σύνθετων υλικών στην οποία τα υλικά της μήτρας και της ενίσχυσης είναι υπό τη μορφή στρώσεων και φύλλων. Διάφορα υλικά μπορούν να συνδυασθούν ή και να αποτελέσουν τις στρώσεις (στρώματα ή φύλλα (ply)) που συνθέτουν τα πολύστρωτα σύνθετα υλικά. Τα σύνθετα αυτού του τύπου μπορεί να έχουν πολύ καλές ιδιότητες, όπως δυσκαμψία, αντοχή, αντίσταση στη διάβρωση και στη φθορά, ακουστική και θερμική μόνωση κ.α.

Οι επιμέρους στρώσεις αποτελούνται από ίνες υψηλής αντοχής και υψηλές τιμές μέτρου ελαστικότητας, «δεμένες» με ένα πολυμερές, μεταλλικό ή κεραμικό συνδετικό υλικό. Να πούμε εδώ ότι οι ίνες των στρώσεων μπορούν να είναι και διαφορετικά προσανατολισμένες (Εικ.1.22), πράγμα το οποίο βελτιώνει τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού σε πολλές διευθύνσεις. Ίνες που χρησιμοποιούνται συνήθως, περιλαμβάνουν γραφίτη, γυαλί, βόριο, και καρβίδιο του πυριτίου. Μερικά συνδετικά υλικά είναι εποξειδικές ρητίνες, οι πολυϊμίδες, το αλουμίνιο, το τιτάνιο και η αλουμίνα. Επίσης οι επιμέρους στρώσεις γενικά είναι ορθότροπες (δηλαδή, με κύριες ιδιότητες σε ορθογώνιες κατευθύνσεις) ή εγκάρσιως ισότροπες (με ισότροπες ιδιότητες στο εγκάρσιο επίπεδο). Ωστόσο οι επιμέρους στρώσεις μπορούν να παρουσιάζουν και ανισότροπες (με μεταβλητή κατεύθυνση των κύριων ιδιοτήτων), ορθότροπες, ή ημι-ισότροπες ιδιότητες. Τα ημι-ισοτροπικά ελάσματα εμφανίζουν ισότροπη (δηλαδή, ανεξάρτητη από την κατεύθυνση) απόκριση εντός του επιπέδου αλλά δεν περιορίζονται σε ισοτροπική (καμπτική) απόκριση εκτός αυτού.

Τα κυριότερα είδη των πολύστρωτων σύνθετων υλικών είναι:

1. τα διμέταλλα
2. τα επιμεταλλωμένα μέταλλα
3. η ύαλος ασφαλείας
4. τα υλικά με επίστρωση πλαστικού



ΕΙΚΟΝΑ 1.22

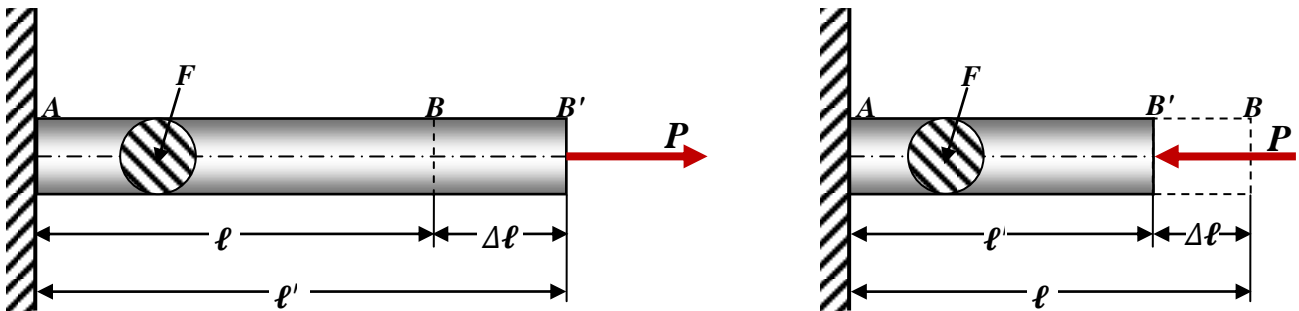
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

« ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ »

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1.1 ΣΥΝΤΟΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

❖ Νόμος του Hooke:



ΣΧΗΜΑ 2.1

Robert Hooke (1678) απέδειξε πειραματικά ότι υπάρχει σχέση μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Έστω η πρισματική αβαρής ράβδος AB , η οποία καταπονείται από αξονική εφελκυστική δύναμη P που ασκείται στο κέντρο βάρους B της διατομής του Σχήματος 2.1. Έστω επίσης F το εμβαδό της διατομής, το οποίο θεωρείται σταθερό σε ολόκληρο το μήκος l της ράβδου. Με την επενέργεια της εφελκυστικής δύναμης P η ράβδος θα επιμηκυνθεί κατά Δl και τελικά το σημείο B εφαρμογής της δύναμης, θα μετατοπιστεί δεξιότερα στη θέση B' οπότε το τελικό μήκος της ράβδου, θα γίνει l' .

Ο Hooke πειραματιζόμενος με τέτοιες πρισματικές ράβδους ποικίλων υλικών, υποβαλλόμενες σε μονοαξονικό εφελκυσμό εντός της περιοχής της ελαστικής συμπεριφοράς των υλικών, παρατήρησε ότι η επιμήκυνση Δl της ράβδου ήταν ανάλογη τόσο προς την εφελκύουσα δύναμη P , όσο και προς το αρχικό της μήκος l και αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού F της διατομής.

Η πλήρης μαθηματική διατύπωση του νόμου του Hooke είναι η παρακάτω:

$$\Delta l = \frac{P l}{E F} \quad (2.1.1)$$

Όπου $\Delta l = l' - l = (BB')$ είναι η παραμόρφωση της ράβδου που για τον εφελκυσμό καλείται επιμήκυνση ή μήκυνση ενώ για τη θλίψη επιβράχυνση ή βράχυνση (σε m, cm, mm κλπ).

P , είναι το αξονικό φορτίο (δύναμη) εφελκυσμού (σε N, t, κλπ).

F , είναι το εμβαδό της κάθετης διατομής στον άξονα της ράβδου (σε m^2 , cm^2 , κλπ).

E , είναι ο συντελεστής αναλογίας, που είναι η ελαστική σταθερά η οποία εξαρτάται από το είδος του υλικού. Η σταθερά αυτή ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young (σε N/m^2 , at, κλπ).

Ο νόμος αυτός επιβεβαιώθηκε στη συνέχεια από πολλούς ερευνητές, οι οποίοι πειραματίστηκαν σε μεγάλο πλήθος δοκιμίων και από διάφορα υλικά. Διαπιστώθηκε δε ότι αυτός ισχύει όχι μόνο για δοκίμια υποβαλλόμενα σε εφελκυσμό αλλά και θλίψη.

Με την παραδοχή ότι οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις σε μία τυχαία διατομή της ράβδου κατανέμονται ομοιόμορφα σε αυτήν (όπως συμβαίνει περίπου και στην πράξη) και αν αμελήσουμε το ίδιο βάρος της, η ορθή τάση σ είναι $\sigma = P/F$, η δε ανηγμένη παραμόρφωση ε από τη σχέση ορισμού της είναι $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$.

Οπότε λαμβάνοντας υπόψη τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, ο νόμος του Hooke γράφεται και με την εξής απλούστερη μορφή:

$$\boxed{\sigma = \varepsilon E} \quad (2.1.2)$$

Η ανωτέρω εξίσωση εκφρασμένη με λόγια, διατυπώνει συνοπτικά το νόμο του Hooke με τη παρακάτω φράση:

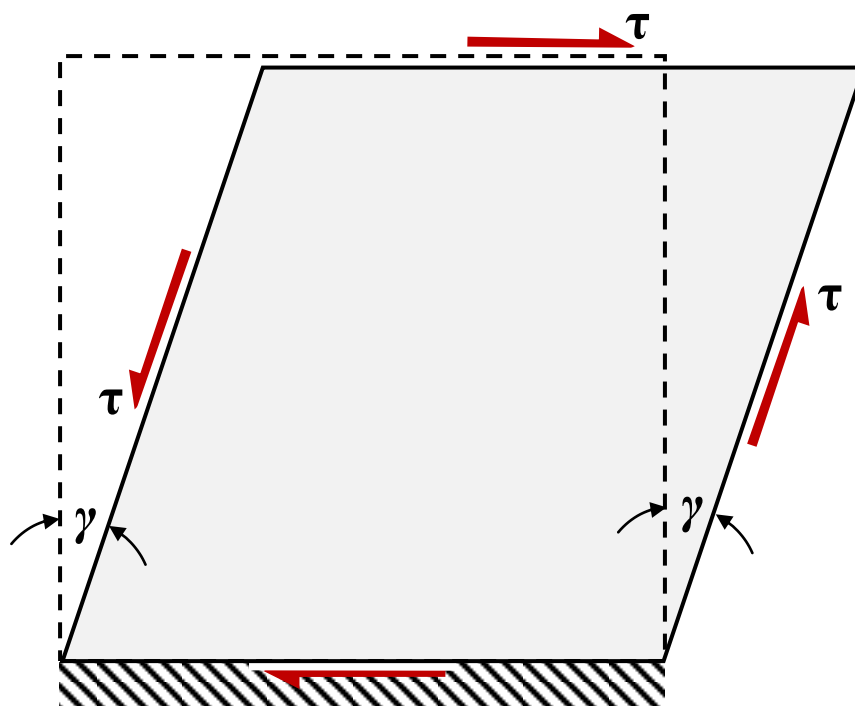
« Η τάση είναι ανάλογη προς την ανηγμένη παραμόρφωση.»

Το μέτρο ελαστικότητας E είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της τάσης και της ανηγμένης παραμόρφωσης, όπως προκύπτει από την ανωτέρω εξίσωση. Λύνοντας τη δε ως προς E έχουμε :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \quad (2.1.3)$$

Επειδή η ανηγμένη παραμόρφωση ε είναι αδιάστατο μέγεθος, το μέτρο ελαστικότητας E έχει μονάδες τάσης. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το E αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη σ , η οποία θα προκαλούσε ανηγμένη παραμόρφωση $\varepsilon = 1$, δηλαδή $\Delta\ell = \ell$ ή διαφορετικά, αντιπροσωπεύει την τάση εκείνη η οποία θα διπλασίαζε το αρχικό μήκος μιας ράβδου.

❖ Μέτρο Διάτμησης:



ΣΧΗΜΑ 2.2

Διαπιστώσαμε ότι ο νόμος του Hooke συνδέει τις ορθές τάσεις με την ανηγμένη παραμόρφωση στην ελαστική περιοχή, με την γραμμική σχέση $\sigma = \varepsilon E$. Αντίστοιχα ο νόμος του Hooke συνδέει τις διατμητικές τάσεις τ με τη γωνιακή παραμόρφωση γ με την ανάλογη γραμμική σχέση.

$$\tau = G\gamma, \text{ όπου } \gamma \text{ σε rad.} \quad (2.1.4)$$

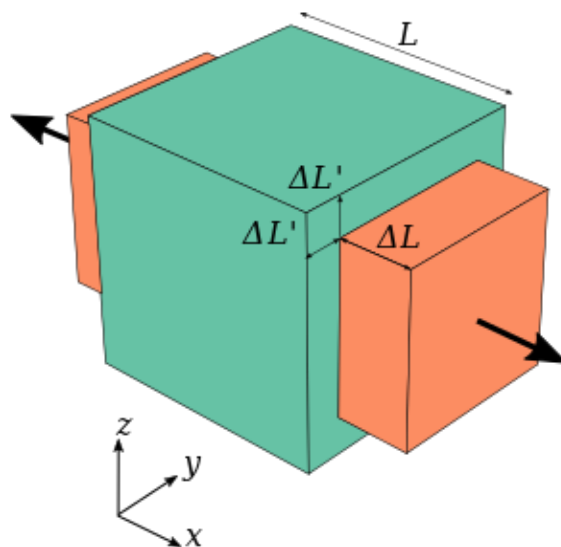
Το G είναι σταθερή ποσότητα που έχει διαστάσεις τάσης, όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση και χαρακτηρίζει τις μηχανικές ιδιότητες των διαφόρων υλικών. Είναι δε κάτι ανάλογο του μέτρου ελαστικότητας E και ονομάζεται μέτρο διάτμησης.

❖ Λόγος Poisson:

Όπως είναι γνωστό μία πρισματική ράβδος μήκους, με την επενέργεια εφελκυστικής δύναμης P παρουσιάζει μεταβολή και συγκεκριμένα αύξηση του ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων ϵ_y και ϵ_z κατά τους άξονες y και z αντίστοιχα, προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό ν , σταθερό για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **λόγος του Poisson** ή **συντελεστής εγκάρσιας παραμόρφωσης**. Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \quad (2.1.5)$$

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί, το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.1.5), δικαιολογείται. Ο λόγος Poisson είναι «καθαρός» αριθμός, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος ή ίσος από 0.5 και μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Για τα μέταλλα για παράδειγμα ισχύει ότι $0.25 \leq \nu \leq 0.35$. Ο λόγος Poisson παίρνει την μεγαλύτερή του τιμή για κάποιο υλικό, στο όριο ανάμεσα στην «ελαστική» και «πλαστική» περιοχή, όπου και σταματά να ισχύει ο νόμος του Hooke.



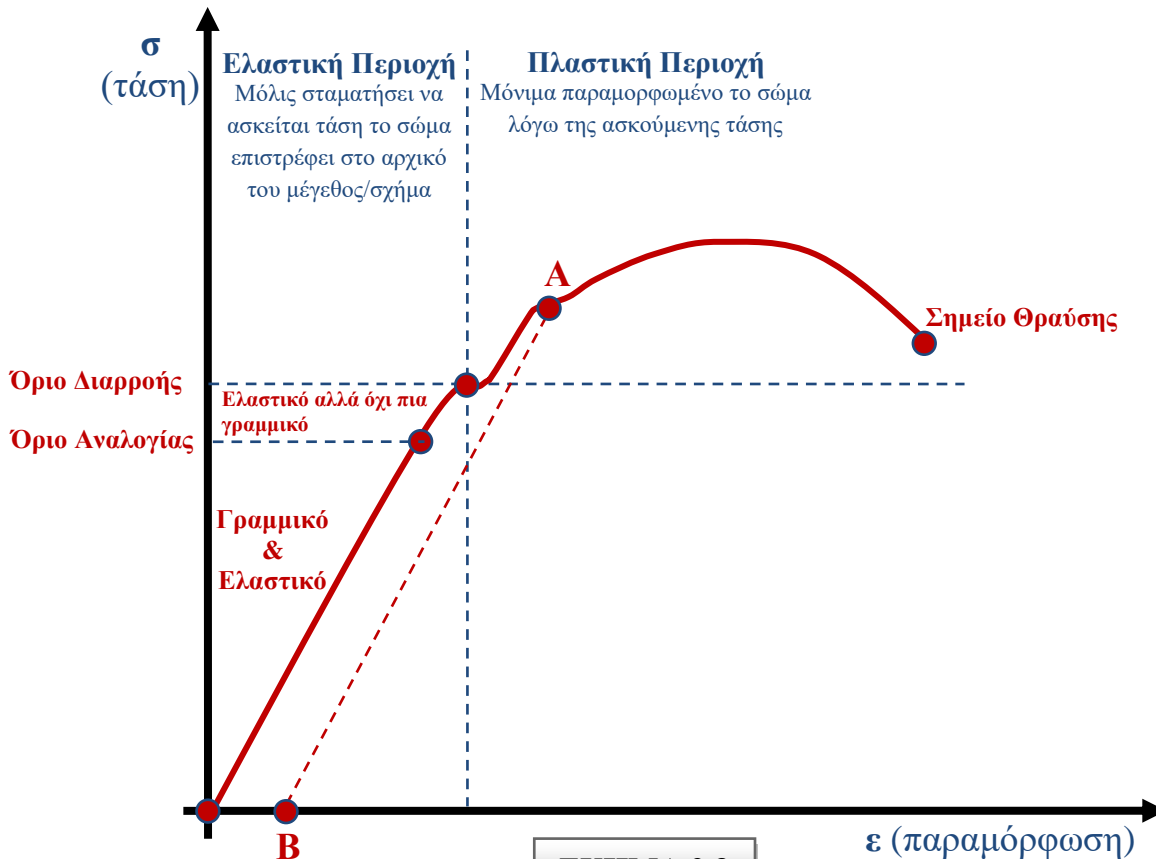
ΕΙΚΟΝΑ 2.1

Ομοιογενές υλικό: ονομάζεται εκείνο το υλικό που παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες σε όλα τα σημεία της μάζας του. Διαφορετικά λέγεται **ανομοιογενές**.

«Τελείως ελαστικό» σώμα: ονομάζεται το σώμα εκείνο, το οποίο επανέρχεται ακριβώς στο αρχικό του σχήμα και όγκο μετά την αποφόρτιση. Οι δε, προκαλούμενες παραμορφώσεις, ονομάζονται τότε «ελαστικές».

«Τελείως πλαστικό» σώμα: χαρακτηρίζεται το σώμα εκείνο, το οποίο παραμένει απολύτως στη παραμορφωμένη κατάσταση που έφτασε και μετά την αποφόρτιση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι το σώμα έχει υποστεί μόνιμη ή πλαστική παραμόρφωση.

Διάγραμμα Τάσεως – Παραμορφώσεως (σ-ε)



❖ Ανηγγμένη διόγκωση:

Κατά την καταπόνηση μιας ράβδου σε εφελκυσμό πριν από την επιβολή του εξωτερικού φορτίου, η ράβδος είχε μήκος ℓ (Σχήμα 2.1), εμβαδό διατομής F ανάλογο του τετραγώνου της διάστασης b , δηλαδή $F = \lambda b^2$ και όγκο $V = \ell F = \lambda \ell b^2$, όπου το λ είναι καθαρός αριθμός χαρακτηριστικός του είδους της διατομής.

Μετά την επιβολή του εφελκυστικού φορτίου και την επέλθουσα παραμόρφωση, το τελικό μήκος έστω ℓ' της ράβδου γίνεται:

$$\ell' = \ell + \Delta\ell = \ell(1 + \varepsilon) \quad (2.1.6)$$

Η τελική διάσταση της εγκάρσιας πλευράς της ράβδου, προκύπτει από τη σχέση ορισμού του λόγου Poisson ν και είναι:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = -\frac{b' - b}{\varepsilon b} \Rightarrow b' = b(1 - \nu\varepsilon) \quad (2.1.7)$$

Το τελικό εμβαδό F' της διατομής μετά την παραμόρφωση είναι:

$$V' = F' \ell' = \lambda \ell b^2 (1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)^2 = \lambda \ell b^2 (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\nu\varepsilon^2 + \varepsilon^2) \quad (2.1.8)$$

Επειδή το ε στην ελαστική περιοχή είναι πολύ μικρός αριθμός, χωρίς σημαντικό σφάλμα, μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους που περιέχουν ε^2 και ε^3 στην πιο πάνω εξίσωση, οπότε ο νέος όγκος είναι περίπου:

$$V' \approx \lambda b^2(1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) \quad (2.1.9)$$

Ονομάζουμε ανηγμένη μεταβολή όγκου θ (ή ανηγμένη διόγκωση) της ράβδου το πηλίκο:

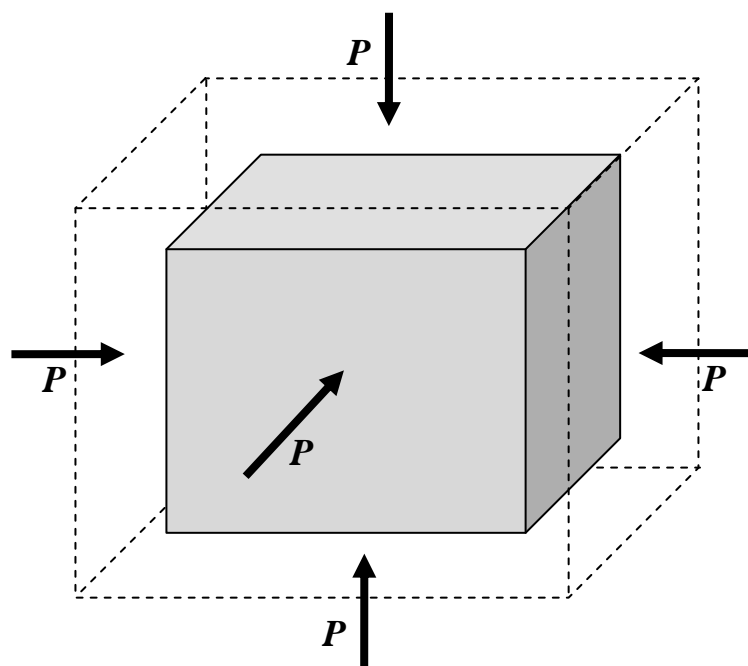
$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu) = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\nu) \quad (2.1.10)$$

Μέτρο Διόγκωσης:

Ονομάζουμε μέτρο διόγκωσης K ενός υλικού, το λόγο:

$$K = \frac{\sigma}{\theta} = \frac{P}{\Delta V/V} \quad (2.1.11)$$

Το K από τη σχέση ορισμού του προκύπτει ότι έχει μονάδες τάσης $[\text{N/m}^2]$. Είναι δηλαδή και αυτό μία ελαστική σταθερά, όπως το E και το G .



Μέτρο Διόγκωσης

$$K = \frac{\sigma}{\theta} = \frac{P/F}{\Delta V/V}$$

Τάση

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Ανοιγμένη Διόγκωση

$$\theta = \frac{\Delta V}{V}$$

P = Ασκούμενη Δύναμη

A = Επιφάνεια

ΔV = Μεταβολή Όγκου

V = Αρχικός Όγκος

« Παραμόρφωση όγκου λόγω ισοκαταναμημένης φόρτισης »

ΣΧΗΜΑ 2.4

2.1.2 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Οι δύο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους.

Η αλλαγή του όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές παραμορφώσεις. Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με διαφορετικές διαστάσεις των ακμών του.

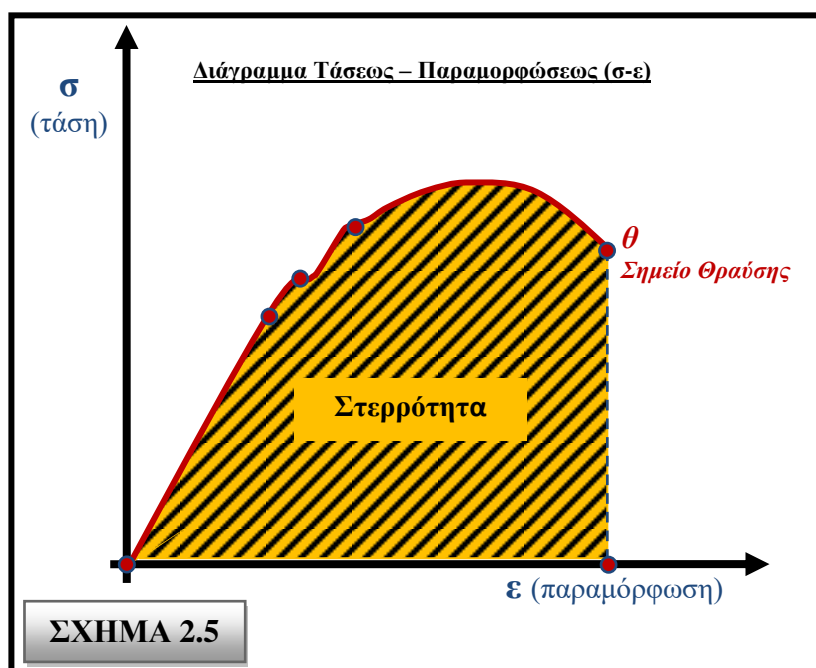
Η αλλαγή σχήματος ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

- A. Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).
- B. Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεών του, οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Αυτό βέβαια σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάζουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή του σχήματός του επιτυγχάνεται και από ορθές και από διατμητικές παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που επιτυγχάνεται από την επιβολή φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμόρφωσης, η οποία αποτελείται από δυο προσθετούς, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται *ενέργεια μεταβολής όγκου* και έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή σχήματος ή αλλιώς στρέβλωση του υλικού και καλείται *στροφική ενέργεια*. Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύθηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη $\sigma - \epsilon$ και τον άξονα των παραμορφώσεων (Σχήμα.2.5) παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης που έχει αποθηκευθεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φόρτισης του μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ (τυχαίο) και η αντίστοιχη παραμόρφωση ϵ (τυχαίο). Όταν το ζεύγος (σ, ϵ) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσης θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμόρφωσης καλείται **στερρότητα** του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.



ΣΧΗΜΑ 2.5

2.1.3 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΒΑΣΕΙ ΤΩΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Ανισότροπο τρικλινές μέσο: το μέσο το οποίο δεν παρουσιάζει συμμετρίες και έχει 21 ελαστικές σταθερές ανεξάρτητες.

Μονοκλινές μέσο: το μέσο αυτό έχει ένα επίπεδο συμμετρίας και κάθε διεύθυνση έχει ίδιες ιδιότητες με την συμμετρική της ως προς το επίπεδο αυτό. Αποδεικνύεται ότι το μέσο αυτό έχει 13 ελαστικές σταθερές.

Ορθότροπο μέσο: όταν το υλικό παρουσιάζει συνολικά δύο κάθετα επίπεδα συμμετρίας τότε λέγεται ορθότροπο. Το μέσο αυτό έχει 9 ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

Εγκαρσίως ισότροπο μέσο: μια ακόμα ανώτερη τάξη ελαστικής συμμετρίας από αυτή του ορθότροπου μέσου. Το μέσο σε αυτή την περίπτωση παρουσιάζει έναν άξονα συμμετρίας ως προς τις μηχανικές ιδιότητες. Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι 5.

Ισότροπο μέσο: τα μέσα στα οποία κάθε διεύθυνση είναι διεύθυνση υλικής συμμετρίας. Αρκούν μόνο 2 ελαστικές σταθερές για την περιγραφή του μέσου (το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος Poisson ν).

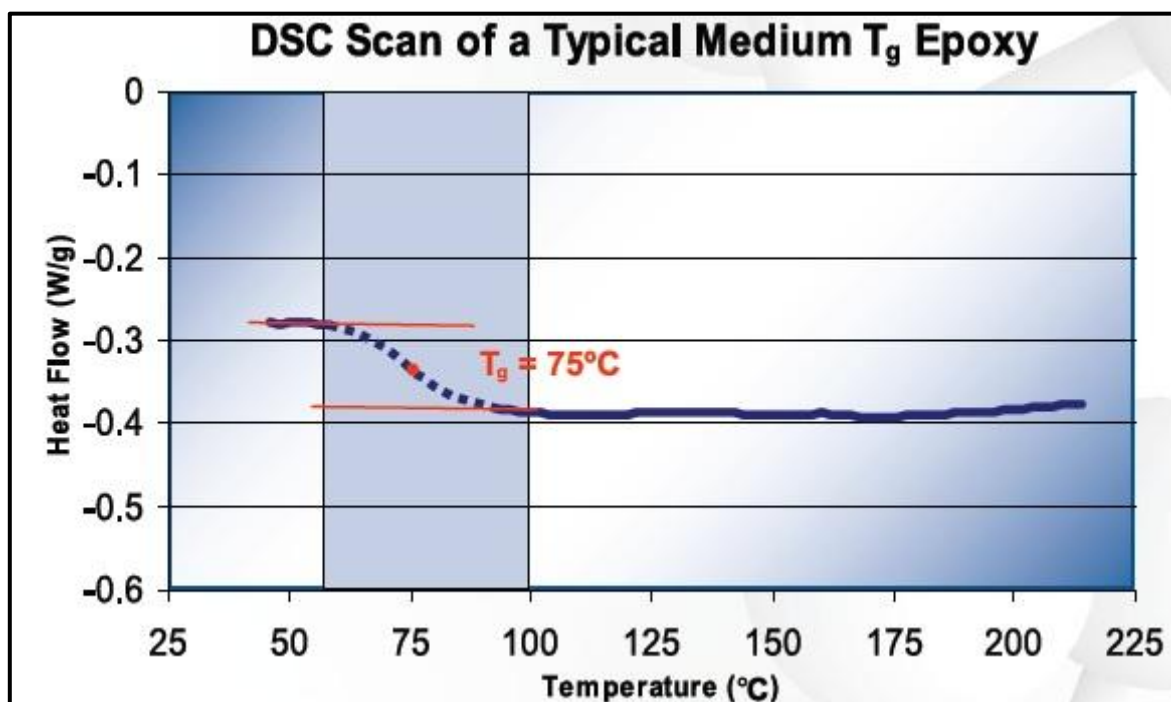
2.2 ΘΕΩΡΙΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΥΑΛΩΔΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ T_g

Η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g) είναι ένα εύρος θερμοκρασιών όπου ένα θερμοσκληρυνόμενο πολυμερές μεταβαίνει από τη σκληρή, στερεά και υαλώδη κατάσταση σε μία περισσότερο εύκαμπτη μαλακή, ελαστική.

Στην πραγματικότητα το (T_g) δεν είναι μία ξεκάθαρη θερμοδυναμική μετάβαση, αλλά ένα εύρος θερμοκρασιών στο οποίο αυξάνεται σημαντικά η κινητικότητα των πολυμερικών αλυσίδων. Η μέγιστη τιμή (T_g) καθορίζεται από τη χημική δομή της εποξειδικής ρητίνης, τον τύπο του σκληρυντή και το βαθμό της θερμικής κατεργασίας.

Δεδομένου ότι η θερμοκρασία υαλώδους μετάπτωσης (T_g), είναι ένα εύρος θερμοκρασιών και όχι μία συγκεκριμένη θερμοκρασία, είναι βολικό να ορίζουμε μία μέση τιμή της περιοχής που οριοθετείται από τις εφαπτόμενες στις δύο περιοχές της καμπύλης ροής της θερμότητας, όπου στην περίπτωση του εποξειδικού της παρακάτω καμπύλης είναι οι 75°C . (Εικόνα 2.2: Διάγραμμα DSC τυπικής μέσης θερμοκρασίας υαλώδους μετάπτωσης T_g εποξειδικής ρητίνης)



ΕΙΚΟΝΑ 2.2

Σημείωση: Η T_g μετριέται χρησιμοποιώντας το θερμικό αναλυτή Differential Scanning Calorimetry (DSC).

2.2.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των σύνθετων υλικών με πολυμερική μήτρα, είναι:

- i. η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των εγκλείσμάτων.
- ii. η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος.

Η προσρόφηση των πολυμερικών μακρομορίων από το έγκλεισμα, είναι η κύρια αιτία για την διαφορετική διαμόρφωση των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα σε σχέση με τη διαμόρφωση τους στη μήτρα γενικότερα. Η αλλαγή της κατάστασης των μακρομορίων γύρω από το έγκλεισμα, προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από τη μήτρα. Έτσι, καταλήγουμε ότι η παρουσία εγκλείσματος μέσα στην πολυμερική μήτρα δημιουργεί μία ατέλεια στο πολυμερικό δομικό δίκτυό της.

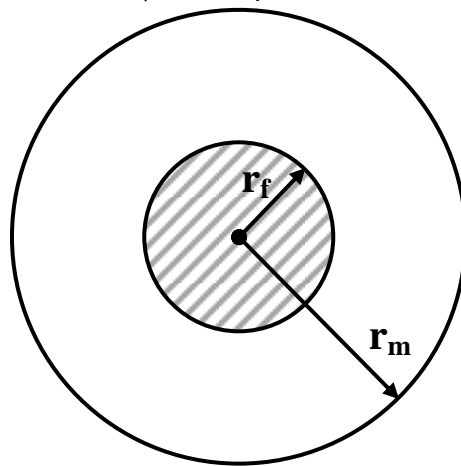
Ως γνωστόν οι ιδιότητες των πολυμερικών σύνθετων υλικών κατά την χαλάρωση, επηρεάζονται σημαντικά από την ύπαρξη της ενδιάμεσης φάσης [7]-[13]. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς αυτών των σύνθετων υλικών και η συλλογή πληροφοριών για την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδραση της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του σύνθετου συστήματος μας.

Ωστόσο, η δομή και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, σε σημαντικό βαθμό, από την μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε μία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Ως συνέπεια των παραπάνω, τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους προσδιορισμού της ενδιάμεσης φάσης είναι συχνά διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι ο προσδιορισμός της ενδιάμεσης φάσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g . Παρόλα αυτά, ενώ υπάρχουν αρκετές πειραματικές μέθοδοι για την εύρεση τιμών για την T_g , όπως η θερμιδομετρία, η διαστολομετρία, οι δυναμικές μετρήσεις κ.α., αυτές εξάγουν διαφορετικά αποτελέσματα μεταξύ τους [14],[15].

Λόγω της παραπάνω δυσκολίας, δημιουργήθηκε ένα χάσμα ανάμεσα στα ευρήματα διαφόρων ερευνητών για την επίδραση της κατ'όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, στην υαλώδη μεταβατική θερμοκρασία T_g [16]. Για παράδειγμα, αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα σε έγκλεισμα ενός σύνθετου υλικού, αυξάνεται και η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι ερευνητές βρήκαν ότι η θερμοκρασία υαλώδους μεταβάσεως T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος [17],[18],[19]. Τέλος υπήρχαν και ερευνητές που βρήκαν ότι οι τιμές της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g εξαρτώνται πολύ από την κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα [20].

Στην περίπτωση μετρήσεων με την μέθοδο της θερμιδομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στον προσδιορισμό των υαλώδων μεταβατικών θερμοκρασιών T_g , είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μάζα ή αλλιώς ειδική θερμότητα. Έχει παρατηρηθεί ότι, σε D.S.C. μετρήσεις που έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή, η εξάρτηση της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας από την ειδική θερμότητα H_f είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως των 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν για διαφορετικούς ρυθμούς θέρμανσης [21],[22],[23].

(Διφασικό μοντέλο)



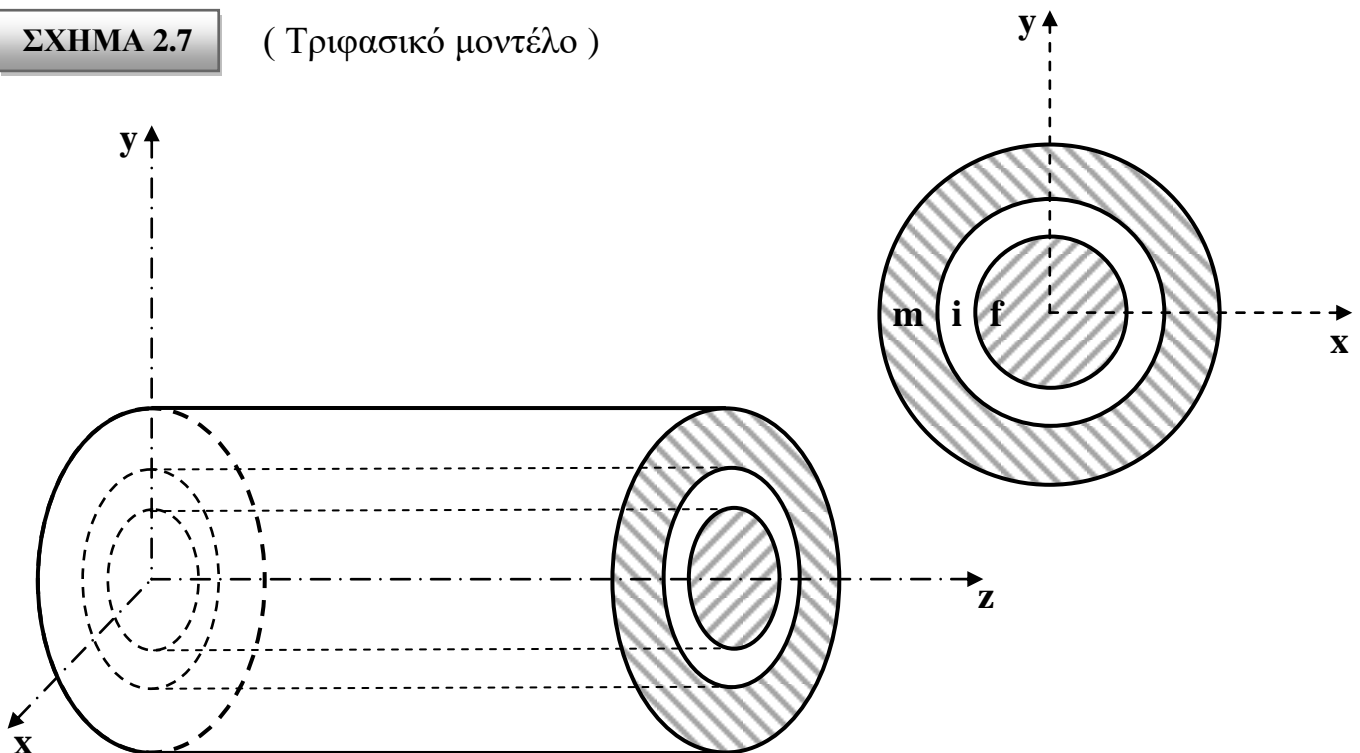
ΣΧΗΜΑ 2.6

2.2.3 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΧΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Πιο αναλυτικά παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εύρεσης του πάχους της ενδιάμεσης φάσης. Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ελέγχου κάνοντας χρήση του τριφασικού μοντέλου (Σχήμα 2.7), το οποίο προκύπτει ουσιαστικά από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 2.6) με την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης, και είναι το δομικό «κύτταρο» για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, το οποίο αποτελείται από μέσα προς τα έξω, από έγκλεισμα, ενδιάμεση φάση και μήτρα αντίστοιχα.

ΣΧΗΜΑ 2.7

(Τριφασικό μοντέλο)



Αν ορίσουμε ως r_f , r_i και r_m τις ακτίνες των περιοχών των φάσεων του παραπάνω μοντέλου, με τους δείκτες f , i , m να συμβολίζουν το έγκλεισμα, την ενδιάμεση φάση και την μήτρα αντίστοιχα, τότε οι αντίστοιχες κατ' όγκο περιεκτικότητες θα γράφονται ως:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}, U_i = \frac{r_i^2 - r_f^2}{r_m^2}, U_m = \frac{r_m^2 - r_i^2}{r_m^2} \quad (2.2.1)$$

Και επίσης ισχύει:

$$U_m = (1 - U_f - U_i) \quad (2.2.2)$$

Καθώς η κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων της μήτρας, τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα, επίσης αυξάνεται. Αυτό ισοδυναμεί με αύξηση της κατ'όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία σχέση ανάμεσα στο ΔC_p το οποίο εκφράζει την απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας στην υαλώδη μεταβατική περιοχή μιας ουσίας, και της κατ'όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης. Η σχέση αυτή για τα υλώδη υλικά εκφράζεται από τον παρακάτω τύπο [5],[26]:

$$\frac{(r_f + \Delta r)^2}{r_f^2} - 1 = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.3)$$

Όπου το Δr εκφράζει το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και η παράμετρος μ δίνεται βάσει από τον τύπο:

$$\mu = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (2.2.4)$$

Όπου ΔC_p^f είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα με έγκλεισμα, ενώ ΔC_p^0 είναι η απότομη μεταβολή της ειδικής θερμότητας για την πολυμερική μήτρα «σκέτη», χωρίς έγκλεισμα, στις αντίστοιχες υαλώδεις μεταβατικές θερμοκρασίες τους.

Η σχέση (2.2.3), αφού $r_f + \Delta r$ ισούται ουσιαστικά με r_i με την βοήθεια των σχέσεων (2.2.1), μπορεί να γραφτεί και σαν:

$$\frac{U_i}{U_f} = \frac{\mu U_f}{1 - U_f} \quad (2.2.5)$$

Η σχέση (2.2.5) μαζί με την (2.2.1) και την (2.2.2) εξάγουν την εξής σχέση:

$$cnt = \frac{r_f^2}{r_i^2} = \frac{U_f}{U_f + U_i} = \frac{1 - U_f}{1 - U_f(1 - \mu)} \quad (2.2.6)$$

Τέλος υπολογίζοντας με την βοήθεια των DSC (Differential Scanning Calorimetry) μετρήσεων, τα άλματα της ειδικής θερμότητας ΔC_p στην υαλώδη μετάβαση ενός ινώδους σύνθετου υλικού και του αντίστοιχου πολυμερούς του, από το οποίο είναι αποκλειστικά φτιαγμένη η μήτρα του σύνθετου υλικού, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα μ και άρα και το πάχος της ενδιάμεσης φάσης αφού μας είναι γνωστή η κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

2.2.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ & ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΧΟΥΣ & ΤΗΣ ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του ΕΜΠ έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και ιών υάλου. Παρακάτω θα περιγράψουμε μία από τις πειραματικές έρευνες [28],[29],[30] που έγιναν για την μέτρηση του πάχους και της κατ'όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης.

Στην συγκεκριμένη έρευνα χρησιμοποιήθηκαν ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης αποτελούμενα από μία εποξειδική μήτρα (Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A, συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη (Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο $1,2 \times 10^{-5}$ m και η κατ'όγκο περιεκτικότητά τους ήταν 0,65.

Η κατ'όγκο περιεκτικότητα των ιών γυαλιού προσδιορίστηκε με το συνήθη τρόπο, δηλαδή καίγοντας δείγματα του ινώδους σύνθετου υλικού και ζυγίζοντας το υπόλοιπο. Έτσι η κατά μάζα περιεκτικότητα του γυαλιού υπολογίστηκε 79,6% (+/- 0,28%). Με την χρήση του αποτελέσματος αυτού και των τιμών των ειδικών πυκνοτήτων του γυαλιού ($\rho_g = 2,55 \text{ gr/cm}^3$) και της εποξειδικής μήτρας ($\rho_c = 1,20 \text{ gr/cm}^3$), και κάνοντας και κάποιους εύκολους υπολογισμούς, υπολογίζεται ότι η κατ'όγκο περιεκτικότητα των ιών γυαλιού του πειράματος μας είναι 0,65.

Από την άλλη μεριά, δοκίμια με διάμετρο 0,004m και πάχους που ποικίλει από 0,001m μέχρι 0,0015m, φτιαγμένα είτε από ιώδες σύνθετο υλικό σε διάφορες κατ'όγκο περιεκτικότητες είτε φτιαγμένα από το υλικό της μήτρας υποβλήθηκαν σε δοκιμές DSC, με θερμικό αναλυτή στην περιοχή της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας τους, έτσι ώστε να προσδιορισθούν οι τιμές της ειδικής θερμότητάς τους.

Οι τιμές του παράγοντα μ (Σχέση 2.2.4) εξήχθηκαν από τις τιμές των αλμάτων των ειδικών θερμοτήτων της μήτρας ενισχυμένης με ίνες γυαλιού και της μη ενισχυμένης μήτρας, δηλαδή των ΔC_p^f και ΔC_p^0 αντίστοιχα, που υπολογίσθηκαν από τα $\Delta C_p = f(T)$ διαγράμματα σύμφωνα με το διάγραμμα της Εικόνας 2.3. Οι τιμές του μ που προσδιορίστηκαν από τα DSC τεστ, επέτρεψαν και την εκτίμηση του πάχους της ενδιάμεσης φάσης για κάθε σύνθετο υλικό (για κάθε διαφορετική κατ'όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα).

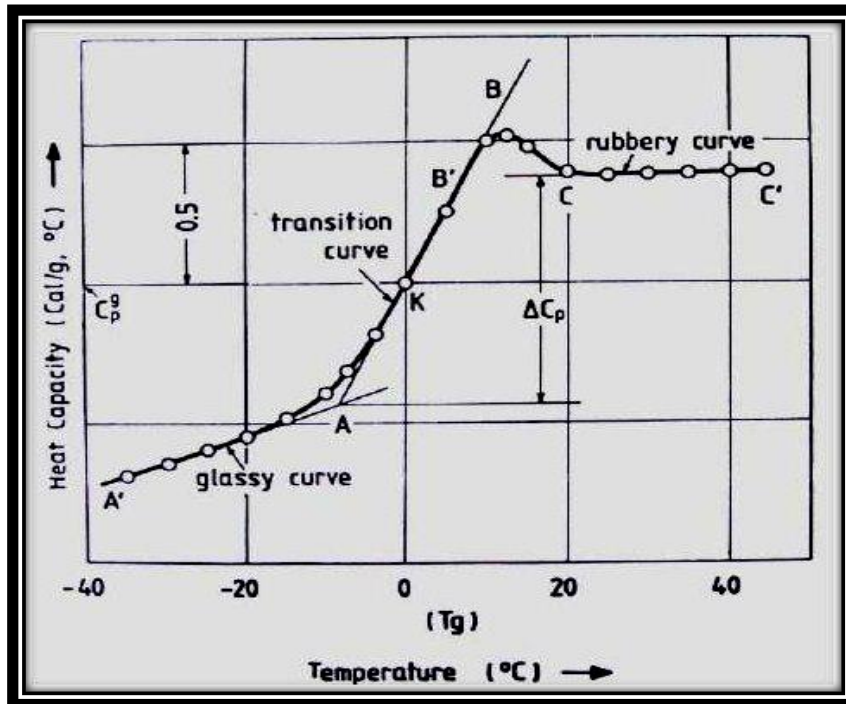
Έχει δειχθεί ότι για της μιας κατεύθυνσης ινώδη σύνθετα υλικά, υπάρχει μια παραβολική σχέση ανάμεσα στην κατ'όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και στην κατ'όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος.

Αυτή η σχέση είναι ως εξής:

$$U_i = CU_f^2 \quad (2.2.7)$$

Όπου με U_i και U_f συμβολίζουμε την κατ'όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης και του εγκλείσματος αντίστοιχα.

Η σταθερά C στην περίπτωση μας είναι ίση με 0,123.

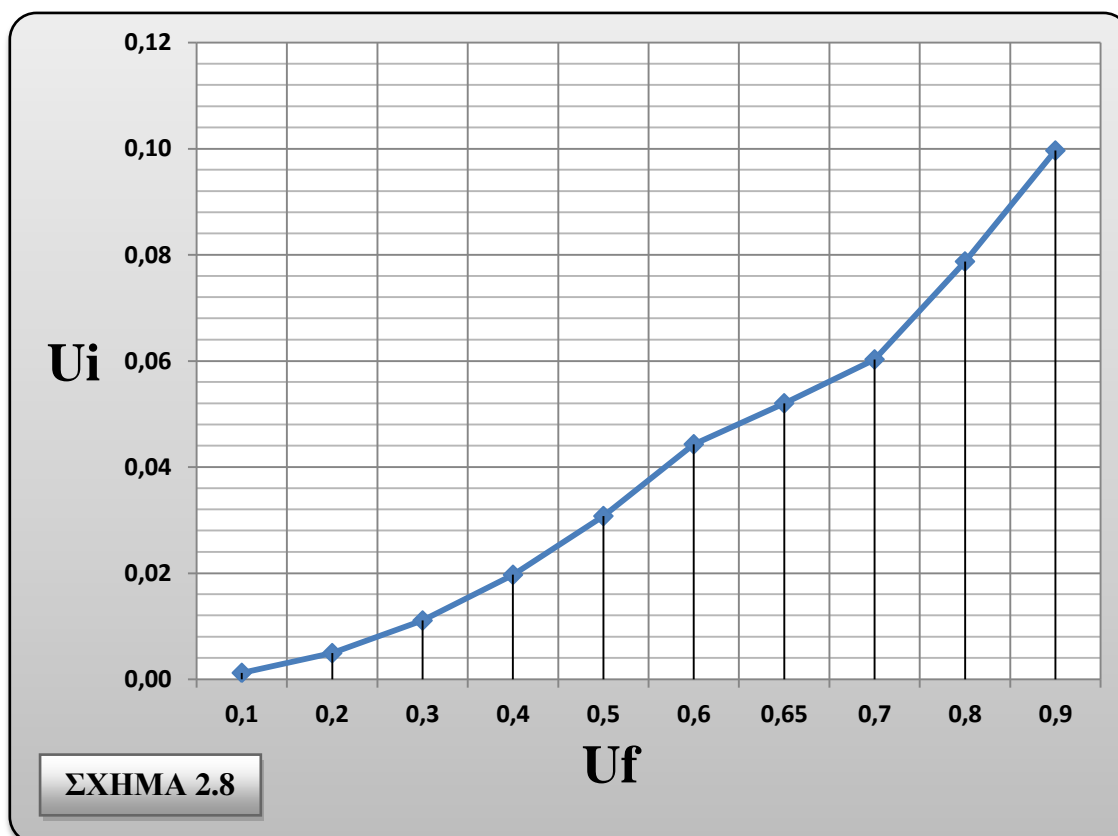


EIKONA 2.3

Να σημειώσουμε εδώ ότι ύστερα από τον υπολογισμό της σχέσης (2.2.7) και με την βοήθεια της σχέσης (2.2.3) εξάγεται ο παρακάτω πίνακας τιμών για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και παρατηρούμε από το ακόλουθο διάγραμμα (Σχήμα 2.8) ότι η μεταβολή της κατ'όγκο περιεκτικότητας της ενδιάμεσης φάσης συναρτήσει της κατ'όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος είναι περίπου παραβολική:

ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ		
U_f	U_i	r_i (μm)
0.10	0.0012	6.036
0.20	0.00492	6.073
0.30	0.01107	6.110
0.40	0.01968	6.146
0.50	0.03075	6.182
0.60	0.04428	6.217
0.65	0.052	6.235
0.70	0.06027	6.254
0.80	0.07872	6.288
0.90	0.09963	6.323

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

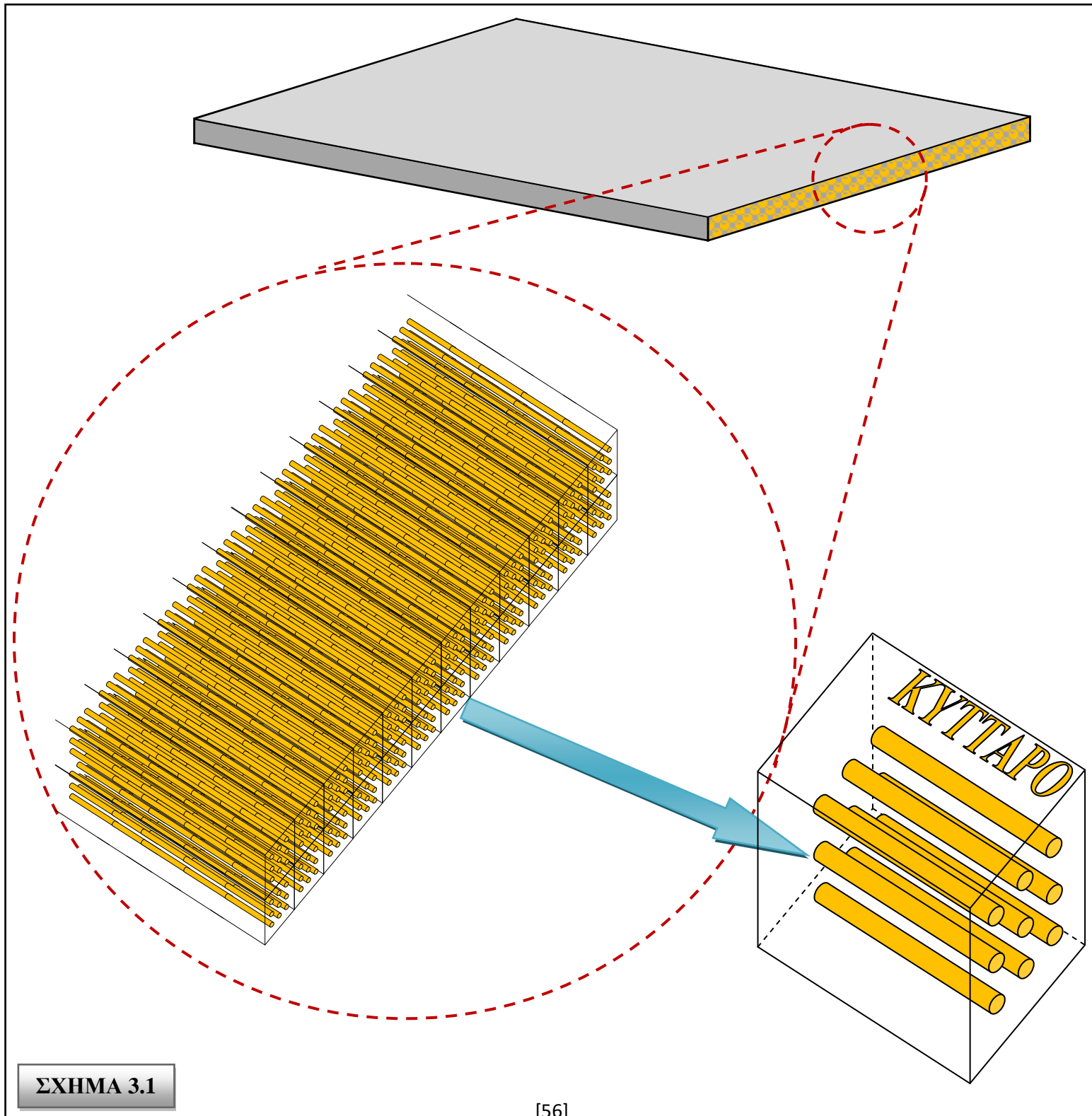


ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

« ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ »

3.1 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ ΕΞΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

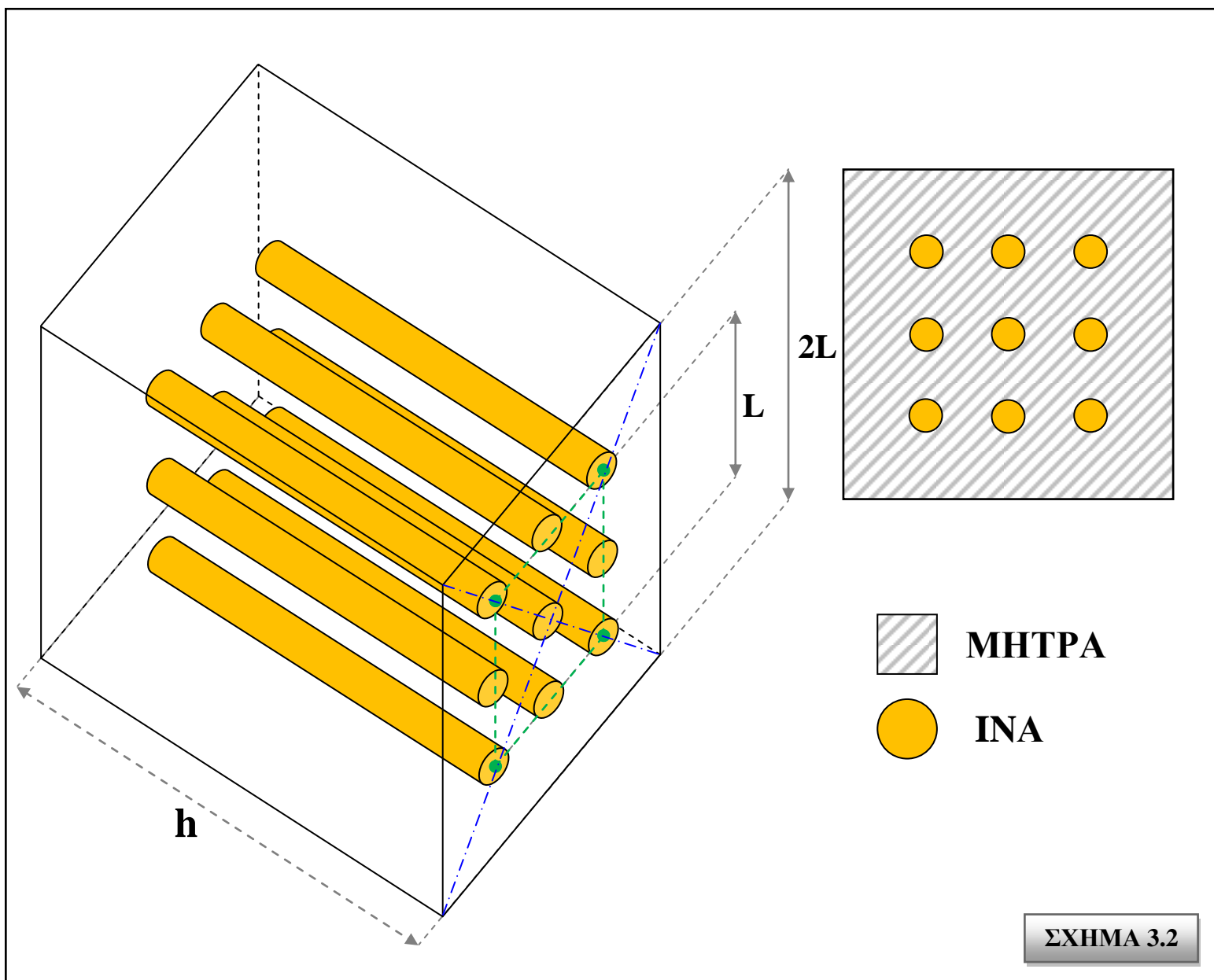
3.1.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ «ΚΥΤΤΑΡΟΥ» - ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΝΩΝ



ΣΧΗΜΑ 3.1

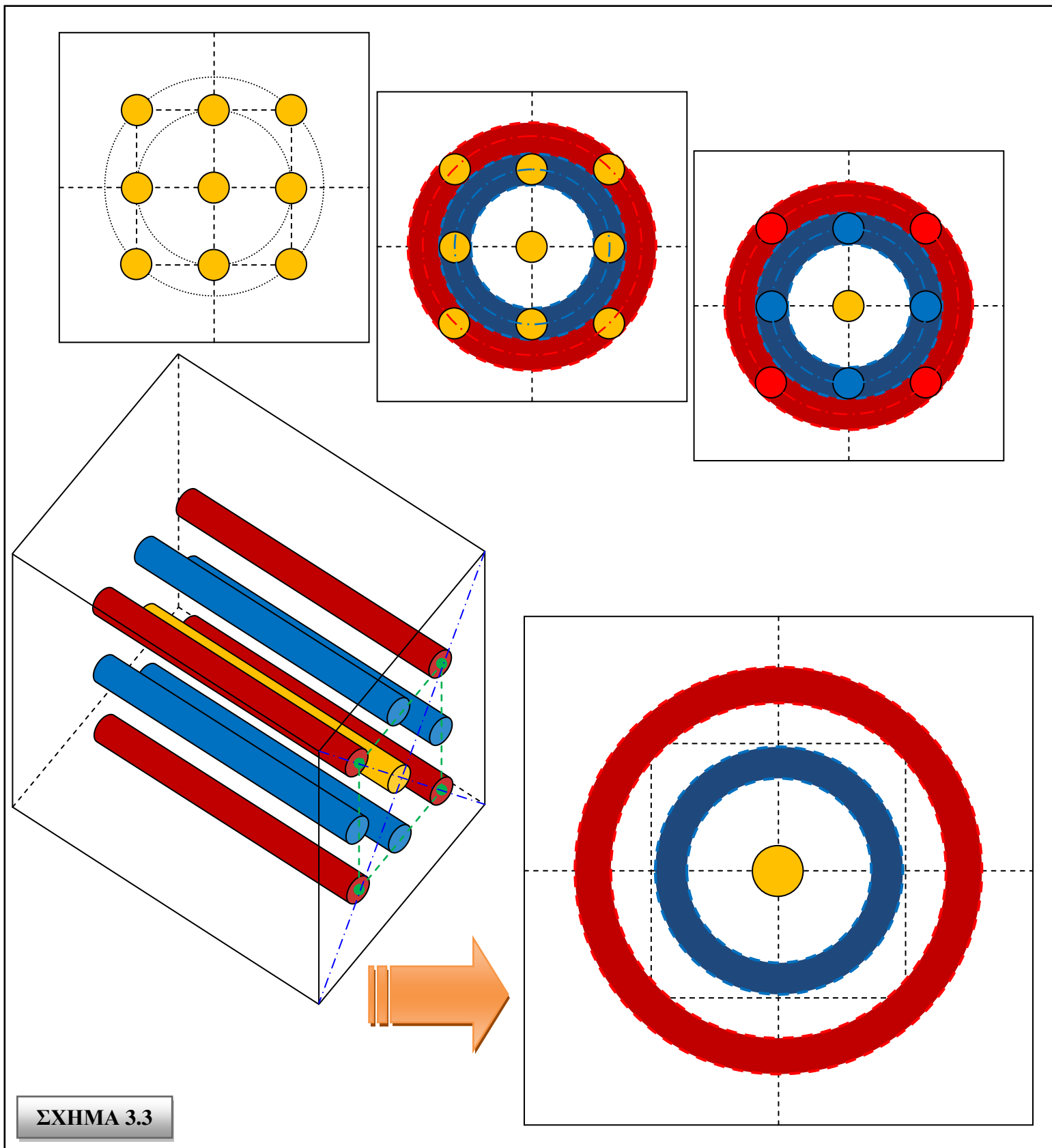
Σε αυτή την υποενότητα θα περιγράψουμε/παραστήσουμε τον τρόπο κατανομής των ινών υάλου (ινώδη εγκλείσματα) όπως αυτές περικλείονται μέσα στη μάζα της μήτρας ενός ινώδους σύνθετου υλικού, με σκοπό τον θεωρητικό προσδιορισμό των ακτινών του κυλινδρικού μοντέλου που θέλουμε να αντιστοιχίσουμε.

Θεωρούμε επομένως ότι τέσσερις (4) ίνες καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός τυχαίου τετραγωνικού πρίσματος ακμής L και πεπερασμένου μήκους h , τέσσερις (4) άλλες ίνες τα μέσα των πλευρών του και μία (1) το κέντρο βάρους του (Σχήμα 3.2). Το εν λόγω τετραγωνικό πρίσμα περικλείεται σε ένα δεύτερο μεγαλύτερο τετραγωνικό πρίσμα ακμής $2L$ και ίδιου μήκους h . Το τελικό αυτό πρίσμα επαναλαμβάνεται συμμετρικά σε όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού και το ορίζουμε ως το στοιχειώδες δομικό «κύτταρο» του υλικού (Σχήμα 3.1).



Το τμήμα μεταξύ των ινών και γύρω από αυτές (διαγραμμισμένη επιφάνεια Σχήμα 3.2) αποτελεί την μήτρα του σύνθετου υλικού.

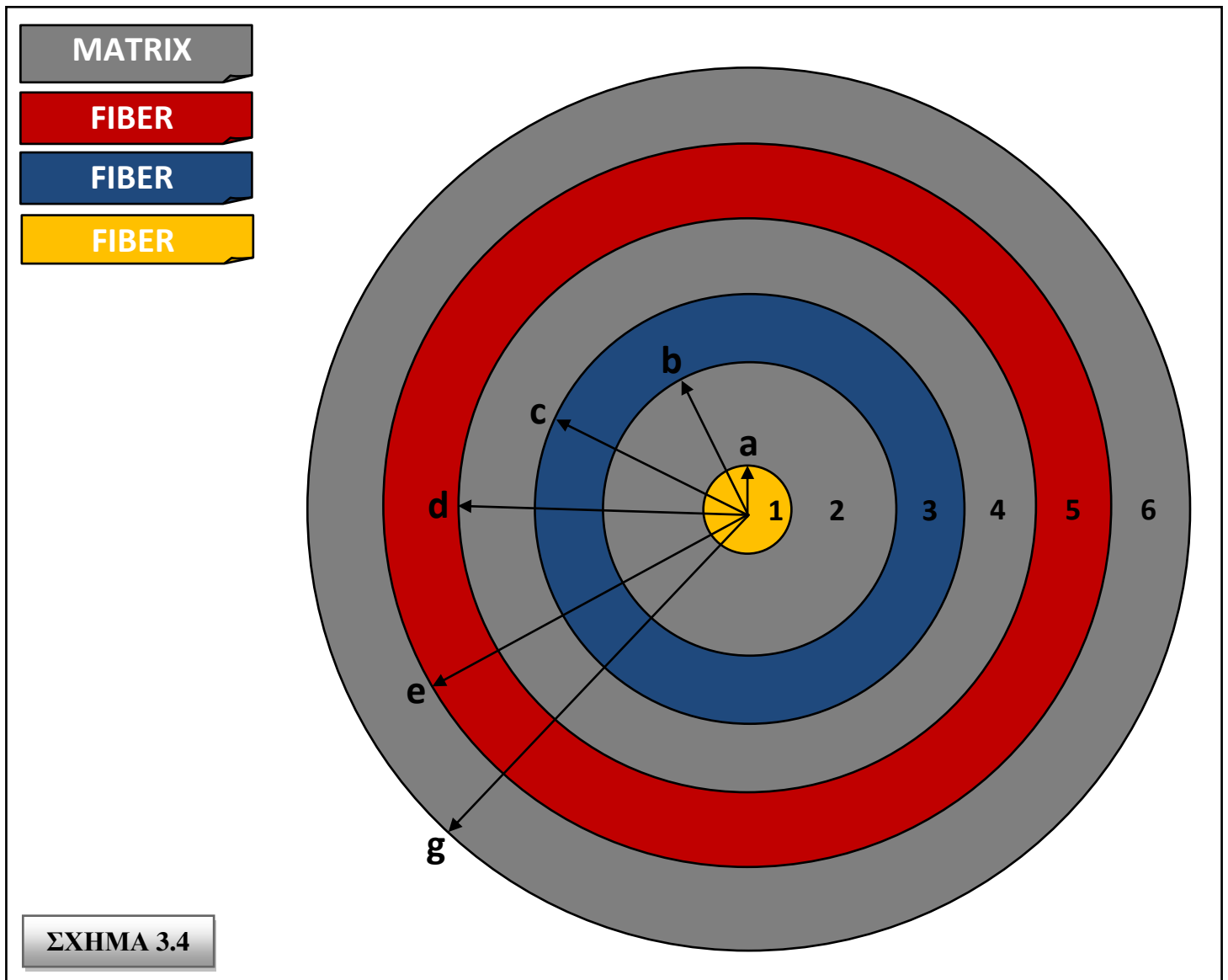
Το παραπάνω πρίσμα ακμής $2L$ θα το ανάγουμε σε ένα αντίστοιχα «ισοδύναμο» κυλινδρικό μοντέλο μήκους h , με σκοπό την εκμετάλλευση της κυλινδρικής συμμετρίας και των απλοποιήσεων που προκύπτουν λόγω αυτής σε ένα εξαφασικό μοντέλο.



ΣΧΗΜΑ 3.3

Το εξαφασικό μοντέλο θα αποτελείται από έξι ομόκεντρους κυλίνδρους ακτίνας a, b, c, d, e, g ($a < b < c < d < e < g$) (Σχήμα 3.4).

Στο εν λόγω μοντέλο ο κύλινδρος με ακτίνα a (κίτρινο χρώμα $\approx 1^{\text{η}}$ φάση), ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c (μπλε χρώμα $\approx 3^{\text{η}}$ φάση) και ο κυλινδρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα d και εξωτερική ακτίνα e (κόκκινο χρώμα $\approx 5^{\text{η}}$ φάση) αναλογούν στο σύνολο των ινών (f) του δομικού «κυττάρου». Αντίστοιχα, ο κυλινδρικός φλοιός, με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b ($4^{\text{η}}$ φάση), με εσωτερική ακτίνα c και εξωτερική ακτίνα d ($2^{\text{η}}$ φάση) και με εσωτερική ακτίνα e και εξωτερική ακτίνα g ($6^{\text{η}}$ φάση), αποτελούν το υλικό της μήτρας (m) (καφέ χρώμα) (Σχήμα 3.4).



Για ένα ινώδες σύνθετο υλικό, ξέρουμε την κατ'όγκο περιεκτικότητα των ινών του U_f , όπως επίσης και την ακτίνα των ινών του r_f . Για το πρίσμα ακμής $2L$ η U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των εννέα ινών του, προς τον όγκο ολόκληρου του πρίσματος, δηλαδή:

$$U_f = \frac{9\pi r_f^2 h}{(2L)^2 h} = \frac{9\pi r_f^2}{4L^2} \Rightarrow \boxed{L = r_f \sqrt{\frac{9\pi}{4U_f}}} \quad (3.1.1)$$

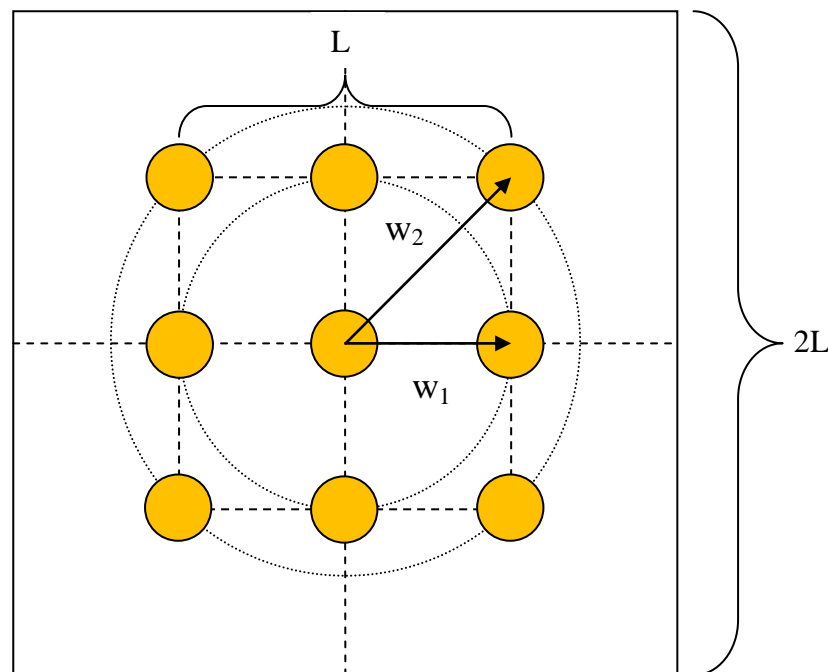
Επίσης ο όγκος του πρίσματος με ακμή $2L$ αντιπροσωπεύεται από τον όγκο του κυλίνδρου ακτίνας g στο κυλινδρικό μοντέλο. Επομένως θα έχουμε:

$$(2L)^2 h = \pi g^2 h \Rightarrow \boxed{g = 2L \sqrt{\frac{1}{\pi}}} \quad (3.1.2)$$

Η 1^η φάση αποτελείται από κυλινδρική ίνα που βρίσκεται στο κέντρο βάρους του πρίσματος. Οπότε θα ισχύει:

$$\boxed{a = r_f} \quad (3.1.3)$$

Για τον υπολογισμό των υπολοίπων ακτινών θεωρούμε το τετραγωνικό πρίσμα ακμής L



ΣΧΗΜΑ 3.5

Οι αποστάσεις του κεντρικού άξονα του τετραγωνικού πρίσματος από το κέντρο των ινών μίας εκ των ακμών του και μίας εκ των κορυφών, τις ονομάζουμε w_1 και w_2 , αντίστοιχα (Σχήμα 3.5). Συνεπώς, για το συγκεκριμένο μοντέλο και τις εν λόγω ακτίνες, θα ισχύει:

$$\boxed{w_1 = \frac{L}{2}} \quad (3.1.4)$$

$$w_2 = \sqrt{w_1^2 + w_1^2} = \sqrt{2w_1^2} \Rightarrow w_2 = w_1\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}L} \quad (3.1.5)$$

Επιπρόσθετα, θεωρούμε ότι οι κυλινδρικοί φλοιοί με ακτίνες b, c και d, e κατανέμονται ισοογκικά εκατέρωθεν των κυλινδρικών επιφανειών που ορίζουν οι ακτίνες w_1 και w_2 στο παρών εξαφασικό μοντέλο. Συνεπώς θα έχουμε:

Για τον κυλινδρικό φλοιό $b-c$:

$$\pi(c^2 - w_1^2)h = \pi(w_1^2 - b^2)h \Rightarrow \boxed{c^2 + b^2 = 2w_1^2} \quad (3.1.6)$$

Αλλά ο όγκος της 3^{ης} φάσης ισούται με τον όγκο των τεσσάρων ινών, επομένως:

$$\pi(c^2 - b^2)h = 4\pi r_f^2 h \Rightarrow \boxed{c^2 - b^2 = 4r_f^2} \quad (3.1.7)$$

Και για τον κυλινδρικό φλοιό $d-e$:

$$\pi(e^2 - w_2^2)h = \pi(w_2^2 - d^2)h \Rightarrow \boxed{e^2 + d^2 = 2w_2^2} \quad (3.1.8)$$

Και ομοίως ο όγκος της 5^{ης} φάσης ισούται με τον όγκο των τεσσάρων ινών, οπότε:

$$\pi(e^2 - d^2)h = 4\pi r_f^2 h \Rightarrow \boxed{e^2 - d^2 = 4r_f^2} \quad (3.1.9)$$

Από τα συστήματα των εξισώσεων (3.1.6) – (3.1.7) και (3.1.8) – (3.1.9) αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{cases} c^2 + b^2 = 2w_1^2 \\ c^2 - b^2 = 4r_f^2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} 2c^2 = 2w_1^2 + 4r_f^2 \\ 2b^2 = 2w_1^2 - 4r_f^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 = w_1^2 + 2r_f^2 \\ b^2 = w_1^2 - 2r_f^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{c = \sqrt{w_1^2 + 2r_f^2}} \\ \boxed{b = \sqrt{w_1^2 - 2r_f^2}} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

$$(3.1.11)$$

Και:

$$\begin{cases} e^2 + d^2 = 2w_2^2 \\ e^2 - d^2 = 4r_f^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \sqrt{w_2^2 + 2r_f^2} \\ d = \sqrt{w_2^2 - 2r_f^2} \end{cases} \quad (3.1.12)$$

$$(3.1.13)$$

Συνεπώς από (3.1.1) έως (3.1.13) προκύπτουν οι εξής ακτίνες του μοντέλου μας:

$$\left. \begin{aligned} a &= r_f \\ b &= \sqrt{w_1^2 - 2r_f^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2r_f^2} = \sqrt{\left(\frac{r_f}{2} \cdot \sqrt{\frac{9\pi}{4U_f}}\right)^2 - 2r_f^2} = \sqrt{\frac{r_f^2}{4} \cdot \frac{9\pi}{4U_f} - \frac{32r_f^2U_f}{16U_f}} \\ c &= \sqrt{w_1^2 + 2r_f^2} = \dots \\ d &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 - 2r_f^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r_f \sqrt{\frac{9\pi}{4U_f}}\right)^2 - 2r_f^2} = \sqrt{\frac{r_f^2}{2} \cdot \frac{9\pi}{4U_f} - 2r_f^2} = \frac{r_f}{2} \sqrt{\frac{9\pi}{2U_f} - \frac{16U_f}{2U_f}} \\ e &= \sqrt{w_2^2 + 2r_f^2} = \dots \\ g &= 2L\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 2r_f \sqrt{\frac{9\pi}{4U_f}} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = r_f \\ b = \frac{r_f}{4} \sqrt{\frac{9\pi - 32U_f}{U_f}} \\ c = \frac{r_f}{4} \sqrt{\frac{9\pi + 32U_f}{U_f}} \\ d = \frac{r_f}{2} \sqrt{\frac{9\pi - 16U_f}{2U_f}} \\ e = \frac{r_f}{2} \sqrt{\frac{9\pi + 16U_f}{2U_f}} \\ g = 3r_f \sqrt{\frac{1}{U_f}} \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

3.1.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Σε αυτή την υποενότητα θα ορίσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που διέπουν το κυλινδρικό εξαφασικό μοντέλο χωρίς ενδιάμεση φάση. Να επισημάνουμε ότι οι σχέσεις των γεωμετρικών περιορισμών δεν επηρεάζονται από τη θεώρηση ύπαρξης ενδιάμεσης φάσης, καθώς η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα και συνεπώς μέρος αυτής. Οπότε θα έχουμε:

$$\diamond a > 0 \Rightarrow \boxed{r_f > 0}$$

$$\begin{aligned} \diamond b > 0 &\Rightarrow \frac{r_f}{4} \sqrt{\frac{9\pi - 32U_f}{U_f}} > 0 \xrightarrow{r_f > 0} \sqrt{\frac{9\pi - 32U_f}{U_f}} > 0 \Rightarrow \frac{9\pi - 32U_f}{U_f} > 0 \Rightarrow 9\pi - 32U_f > 0 \\ &\Rightarrow 32U_f < 9\pi \Rightarrow \boxed{U_f < \frac{9\pi}{32} \approx 0,884} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond a < b &\Rightarrow r_f < \frac{r_f}{4} \sqrt{\frac{9\pi - 32U_f}{U_f}} \Rightarrow \sqrt{\frac{9\pi - 32U_f}{U_f}} > 4 \Rightarrow \frac{9\pi - 32U_f}{U_f} > 16 \Rightarrow 9\pi - 32U_f > 16U_f \\ &\Rightarrow 48U_f < 9\pi \Rightarrow \boxed{U_f < \frac{9\pi}{48} \approx 0,589} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond c < d &\Rightarrow \frac{r_f}{4} \sqrt{\frac{9\pi + 32U_f}{U_f}} < \frac{r_f}{2} \sqrt{\frac{9\pi - 16U_f}{2U_f}} \Rightarrow \frac{9\pi + 32U_f}{4U_f} < \\ &\frac{9\pi - 16U_f}{2U_f} \Rightarrow 9\pi + 32U_f < 18\pi - 32U_f \Rightarrow 64U_f < 9\pi \Rightarrow \boxed{U_f < \frac{9\pi}{64} \approx 0,442} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond e < g &\Rightarrow \frac{r_f}{2} \sqrt{\frac{9\pi + 16U_f}{2U_f}} < 3r_f \sqrt{\frac{1}{U_f}} \Rightarrow \sqrt{\frac{9\pi + 16U_f}{2U_f}} < 6 \sqrt{\frac{1}{U_f}} \Rightarrow \frac{9\pi + 16U_f}{2U_f} < 36 \frac{1}{U_f} \Rightarrow 9\pi + \\ &16U_f < 72 \Rightarrow 16U_f < 72 - 9\pi \Rightarrow \boxed{U_f < \frac{72 - 9\pi}{16} \approx 2,733} \end{aligned}$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη επιτρεπτή κατ'όγκο περιεκτικότητα σε ινώδες έγκλεισμα θα είναι:

$$\boxed{U_f < 0,442}$$

3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΚΤΙΝΩΝ & ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΩΝ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

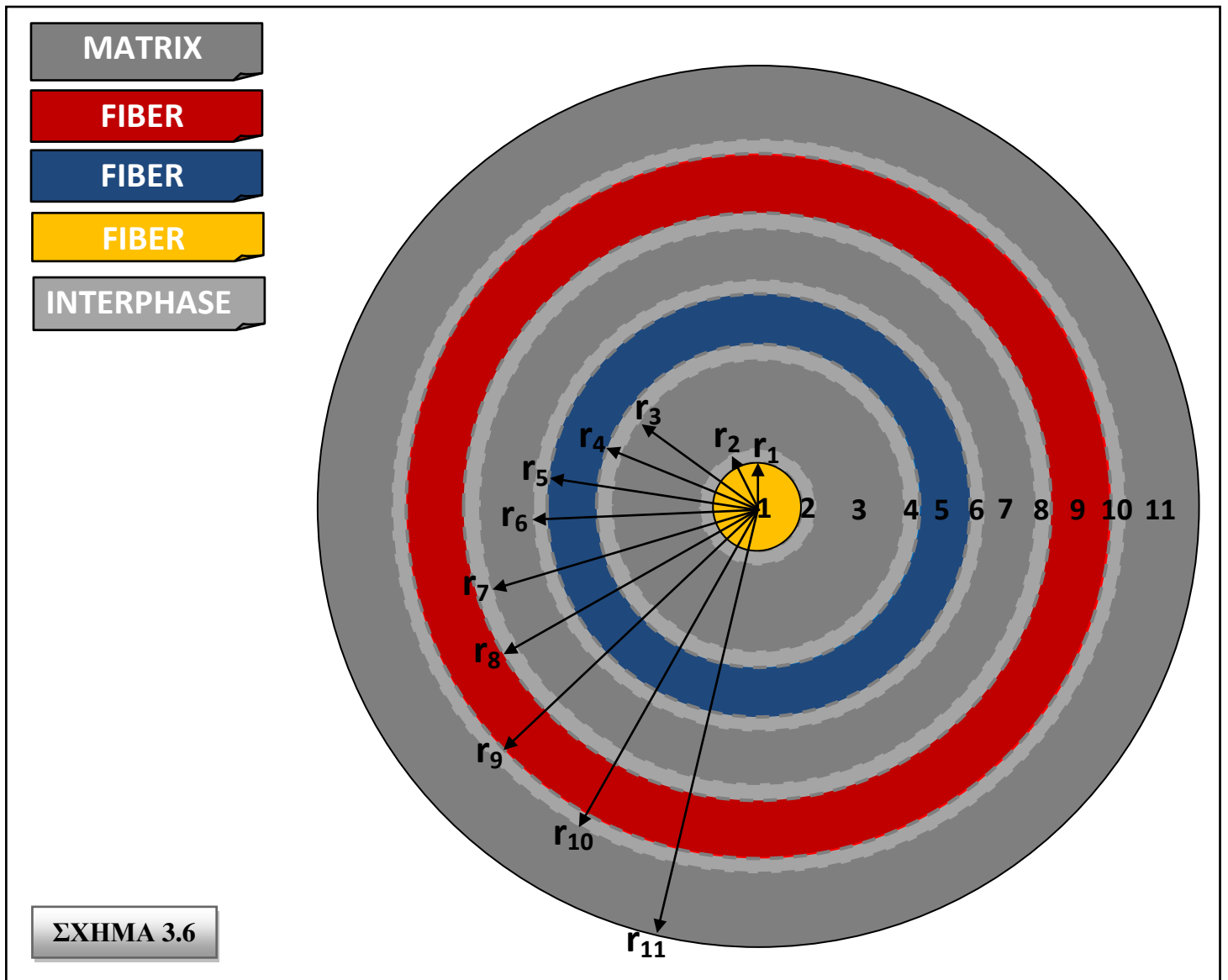
Η ανάπτυξη του ενδεκαφασικού κυλινδρικού μοντέλου γίνεται με την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης στο εξαφασικό μοντέλο το οποίο αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα. Η ενδιάμεση φάση σχηματίζει πέντε επιπλέον κυλινδρικούς φλοιούς γύρω από τις φάσεις των εγκλεισμάτων του εξαφασικού μοντέλου, συνεπώς συνολικά θα έχουμε έντεκα φάσεις αριθμώντας από μέσα προς τα έξω (Σχήμα 3.6):

- η 1^η φάση με ακτίνα r_1 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 2^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική ακτίνα r_2 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 3^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_2 και εξωτερική ακτίνα r_3 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή της μήτρας.
- η 4^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_3 και εξωτερική ακτίνα r_4 αντιπροσωπεύει την 2^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 5^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_4 και εξωτερική ακτίνα r_5 αντιπροσωπεύει τη 2^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 6^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_5 και εξωτερική ακτίνα r_6 αντιπροσωπεύει την 3^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 7^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_6 και εξωτερική ακτίνα r_7 αντιπροσωπεύει την 2^η περιοχή της μήτρας.
- η 8^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_7 και εξωτερική ακτίνα r_8 αντιπροσωπεύει την 4^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 9^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_8 και εξωτερική ακτίνα r_9 αντιπροσωπεύει τη 3^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 10^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_9 και εξωτερική ακτίνα r_{10} αντιπροσωπεύει την 5^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 11^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_{10} και εξωτερική ακτίνα r_{11} αντιπροσωπεύει την 3^η περιοχή της μήτρας.

Πρώτα πρέπει να προσδιορίσουμε τις ακτίνες $r_2, r_3, r_6, r_7, r_{10}$ των περιοχών της ενδιάμεσης φάσης, καθώς και την κατ'όγκο περιεκτικότητα της κάθε περιοχής.

Οι κατ'όγκο περιεκτικότητες συμβολίζονται με U με δείκτη κατ'αντιστοιχία της αριθμώσεως που έχουμε ορίζει στο ενδεκαφασικό μοντέλο για την κάθε φάση ξεχωριστά (Σχήμα 3.6). Δηλαδή:

- U_1 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 1^{ης} φάσης.
- U_2 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 2^{ης} φάσης.
- U_3 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 3^{ης} φάσης.



- U_4 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 4^{ης} φάσης.
- U_5 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 5^{ης} φάσης.
- U_6 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 6^{ης} φάσης.
- U_7 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 7^{ης} φάσης.
- U_8 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 8^{ης} φάσης.
- U_9 η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 9^{ης} φάσης.
- U_{10} η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 10^{ης} φάσης.
- U_{11} η κατ'όγκο περιεκτικότητα της 11^{ης} φάσης.

Οι συνολικές κατ'όγκο περιεκτικότητες της μήτρας, εγκλείσματος (ίνας) και ενδιάμεσης φάσης ορίζονται ως εξής:

$$U_m = U_3 + U_7 + U_{11} , \text{ όπου } U_m \text{ η συνολική κατ'όγκο περιεκτικότητα της μήτρας (matrix).}$$

$$U_f = U_1 + U_5 + U_9 , \text{ όπου } U_f \text{ η συνολική κατ'όγκο περιεκτικότητα της ίνας (fibre).}$$

$$U_i = U_2 + U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} , \text{ όπου } U_i \text{ η συνολική κατ'όγκο περιεκτικότητα της ενδιάμεσης φάσης (interphase).}$$

Επιπρόσθετα, συμβολίζουμε ως ακολούθως:

- $U_1 = U_{f,1}$
- $U_2 = U_{i,1}$
- $U_3 = U_{m,1}$
- $U_4 = U_{i,2}$
- $U_5 = U_{f,2}$
- $U_6 = U_{i,3}$
- $U_7 = U_{m,2}$
- $U_8 = U_{i,4}$
- $U_9 = U_{f,3}$
- $U_{10} = U_{i,5}$
- $U_{11} = U_{m,3}$

Εν συνεχεία, κάνουμε την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση είναι αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της σε κάθε κυλινδρικό φλοιό μήτρας. Επομένως, αφού γενικά ισχύει $U_m = 1 - U_f - U_i$, τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1}} &= \frac{U_{i,3} + U_{i,4}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,5}}{U_{m,3}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3} + U_{i,4} + U_{i,5}}{U_{m,1} + U_{m,2} + U_{m,3}} = \frac{U_i}{U_m} = \\ &= \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = \mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Θεωρώντας ότι $U_{i,1} = U_{i,2}$ και $U_{i,3} = U_{i,4}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2U_{i,1}}{U_{m,1}} = k &\Rightarrow U_{i,1} = \frac{kU_{m,1}}{2} \Rightarrow \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{k}{2} \cdot \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi r_{11}^2 h} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r_2^2 - r_1^2 = \frac{k}{2}(r_3^2 - r_2^2) \Rightarrow \frac{k}{2}r_2^2 + r_2^2 = \frac{k}{2}r_3^2 + r_1^2 \Rightarrow \frac{(k+2)r_2^2}{2} = \frac{kr_3^2 + 2r_1^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{kr_3^2 + 2r_1^2}{k+2}} \quad \dot{\eta} \quad r_2 = \sqrt{\frac{2kr_4^2 + 2(k+2)r_1^2}{(k+2)^2 - k^2}} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{2U_{i,2}}{U_{m,1}} = k &\Rightarrow U_{i,2} = \frac{k}{2} U_{m,1} \Rightarrow \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{k}{2} \cdot \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi r_{11}^2 h} \Rightarrow r_4^2 - r_3^2 = \frac{k}{2} r_3^2 - \frac{k}{2} r_2^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{k+2}{2} r_3^2 = \frac{2r_4^2 + kr_2^2}{2} \Rightarrow r_3 = \sqrt{\frac{kr_2^2 + 2r_4^2}{k+2}} \quad \dot{\eta} \quad r_3 = \sqrt{2 \frac{(k+2)r_4^2 + 2r_1^2}{(k+2)^2 - k^2}} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{2U_{i,3}}{U_{m,2}} = k &\Rightarrow U_{i,3} = \frac{k}{2} U_{m,2} \Rightarrow \frac{\pi(r_6^2 - r_5^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{k}{2} \cdot \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi r_{11}^2 h} \Rightarrow r_6^2 - r_5^2 = \frac{k}{2} r_7^2 - \frac{k}{2} r_6^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{k+2}{2} r_6^2 = \frac{kr_7^2 + 2r_5^2}{2} \Rightarrow r_6 = \sqrt{\frac{kr_7^2 + 2r_5^2}{k+2}} \quad \dot{\eta} \quad r_6 = \sqrt{\frac{2r_8^2 + 2\left(\frac{k+2}{k}\right)r_5^2}{\frac{(k+2)^2}{k} - k}} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{2U_{i,4}}{U_{m,2}} = k &\Rightarrow U_{i,4} = \frac{k}{2} U_{m,2} \Rightarrow \frac{\pi(r_8^2 - r_7^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{k}{2} \cdot \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi r_{11}^2 h} \Rightarrow r_8^2 - r_7^2 = \frac{k}{2} r_7^2 - \frac{k}{2} r_6^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{k+2}{2} r_7^2 = r_8^2 + \frac{k}{2} r_6^2 \Rightarrow r_7 = \sqrt{\frac{kr_6^2 + 2r_8^2}{k+2}} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,5}}{U_{m,3}} = k &\Rightarrow U_{i,5} = k U_{m,3} \Rightarrow \frac{\pi(r_{10}^2 - r_9^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = k \cdot \frac{\pi(r_{11}^2 - r_{10}^2)h}{\pi r_{11}^2 h} \Rightarrow r_{10}^2 - r_9^2 = k r_{11}^2 - k r_{10}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (k+1)r_{10}^2 = k r_{11}^2 + r_9^2 \Rightarrow r_{10} = \sqrt{\frac{k r_{11}^2 + r_9^2}{k+1}} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Εδώ να διευκρινίσουμε ότι οι υπόλοιπες ακτίνες $r_1, r_4, r_5, r_8, r_9, r_{11}$ του ενδεκαφασικού μοντέλου (με ενδιάμεση φάση) στην θεωρητική ανάπτυξη του, ταυτίζονται με τις αντίστοιχες ακτίνες του εξαφασικού μοντέλου (χωρίς ενδιάμεση φάση) a, b, c, d, e, g , δηλαδή $r_1=a$, $r_4=b$, $r_5=c$, $r_8=d$, $r_9=e$, $r_{11}=g$, καθώς όπως έχουμε παραδεχτεί προηγουμένως η ενδιάμεση φάση θεωρείται αλλοιωμένη μήτρα. Συνεπώς, πρώτον δεν αλλάζει η εξωτερική ακτίνα του εξαφασικού μοντέλου με την προσθήκη ενδιάμεσης φάσης, δηλαδή την μετατροπή του σε ενδεκαφασικό, και δεύτερον η εξωτερική και η εσωτερική ακτίνα του εγκλείσματος στο εξαφασικό μοντέλο παραμένουν όμοιες και στο ενδεκαφασικό μοντέλο, άρα δεν επηρεάζεται η κατ'όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα παρά μόνον η κατ'όγκο περιεκτικότητα της μήτρας.

Επειδή η τιμή του όγκου της ενδιάμεσης φάσης βγαίνει από πείραμα θερμικής αναλύσεως δυνάμεθα να κάνουμε την παρακάτω διερεύνηση με δεδομένο ότι η ισχύς του μοντέλου, δηλαδή μέχρι ποια κατ'όγκο περιεκτικότητα δίνει έγκυρες τιμές, πράγματα τα οποία είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

Για κάθε τιμή της κατ'όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα υπάρχει μια συγκεκριμένη τιμή της κατ'όγκο περιεκτικότητας σε ενδιάμεση φάση, και συγκεκριμένα η σχέση που συνδέει τις εν λόγω περιεκτικότητες θα θεωρήσουμε πως είναι μία παραβολή 3^{ου} βαθμού, ως εξής:

$$U_i = AU_f^3 + BU_f^2 + CU_f + D$$

Και ως δεδομένα ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $An U_f = 0$ τότε $U_i = 0$
- (ii) $An U_f = 1$ τότε $U_i = 0$
- (iii) $An U_f = 0,65$ τότε $U_i = 0,052$
- (iv) $An U_f = 0$ τότε $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0$

Συνεπώς, αφού $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 3AU_f^2 + 2BU_f + C$, τότε από τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} (i) \Rightarrow \boxed{D = 0} \\ (ii) \Rightarrow A + B + C + D = 0 \Rightarrow A + B + C = 0 \\ (iii) \Rightarrow 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B + 0,65 \cdot C = 0,052 \\ (iv) \Rightarrow \boxed{C = 0} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B = 0,052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = -\frac{32}{91}} \\ \boxed{B = \frac{32}{91}} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\boxed{U_{i(T_{11})} = -\frac{32}{91}U_f^3 + \frac{32}{91}U_f^2} \quad [\textit{Theoretical 11phase Basic Model} \sim \textit{T11 Model}] \quad (3.2.7)$$

Εν συνεχεία, για να βρούμε την παραβολική σχέση 3^{ου} βαθμού μεταξύ των κατ'όγκο περιεκτικότητων του εγκλείσματος και της ενδιάμεσης φάσης σε πραγματικές συνθήκες, θα πρέπει να ορίσουμε τον περιορισμό που θα ισχύει σε πραγματικές συνθήκες, δηλαδή ότι η κατ'όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα έχει μία μέγιστη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι η συνθήκη (ii) του *Θεωρητικού Μοντέλου* T_{II} δεν ισχύει στο *Πραγματικό Μοντέλο* καθώς η κατ'όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα δεν μπορεί να είναι ποτέ 100%, αφού τότε δε θα μιλάμε για ένα σύνθετο υλικό αλλά για ένα υλικό εξ'ολοκλήρου από εγκλείσμα (υλικό της ίνας). Επομένως θα πρέπει να εντοπίσουμε που παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το *Θεωρητικό Μοντέλο* (T_{II}). Δηλαδή:

$$\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0 \rightarrow U_{fmax}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = -\frac{96}{91}U_f^2 + \frac{96}{91}U_f = 0$$

Άρα επιλύοντας την εξίσωση 2^{ου} βαθμού προκύπτουν οι ρίζες της και επομένως και η τιμή U_f που παρουσιάζει μέγιστο η U_i . Δηλαδή:

$$U_{f_{1,2}} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \begin{cases} U_{f_1} = 0 \\ U_{f_2} = 2/3 \approx 0,667 \end{cases}$$

Συνεπώς, το U_i παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή $U_f = 0,667$.

Οπότε από (3.2.7) : $U_{i_{max}} = 0,052$

Άρα θεωρώντας

$$U_i = A'U_f^3 + B'U_f^2 + C'U_f + D'$$

Για το *πραγματικό μοντέλο* θα ισχύουν οι εξής συνθήκες/περιορισμοί:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } U_i = 0 \\ \text{(ii)} \quad \text{Αν } U_f = 2/3 \text{ τότε } U_i = 0,052 \\ \text{(iii)} \quad \text{Αν } U_f = 0,65 \text{ τότε } U_i = 0,052 \\ \text{(iv)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } \frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Rightarrow D' = 0 \\ \text{(ii)} \quad \Rightarrow \frac{8}{27}A' + \frac{4}{9}B' = 0,052 \\ \text{(iii)} \quad \Rightarrow 0,274625 \cdot A' + 0,4225 \cdot B' = 0,052 \\ \text{(iv)} \quad \Rightarrow C' = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

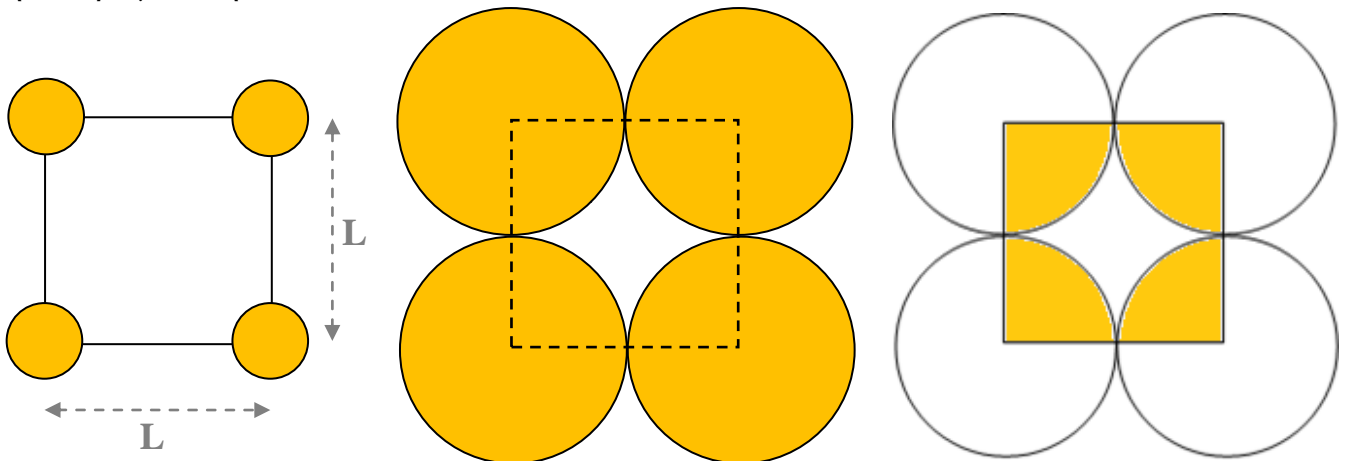
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{27}A' + \frac{4}{9}B' = 0,052 \\ 0,274625 \cdot A' + 0,4225 \cdot B' = 0,052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = -\frac{237}{650} \\ B' = \frac{4681}{13000} \end{cases}$$

Επομένως θα έχουμε:

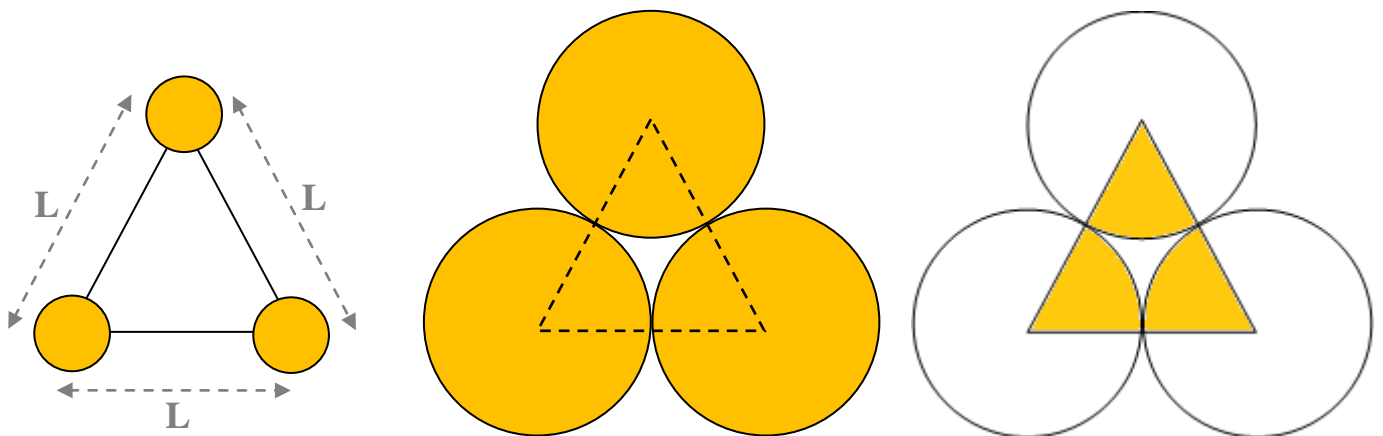
$$U_{i(R_{11})} = -\frac{237}{650}U_f^3 + \frac{4681}{13000}U_f^2 \quad [\text{Real 11phase Basic Model} \sim \mathbf{R11 Model}] \quad (3.2.8)$$

Όμως αυτή η τιμή ισχύει για το θεωρητικό μοντέλο όπου το έγκλεισμα (ίνα) δύναται να πάρει την τιμή $U_f = 1$. Στην πραγματικότητα όμως η μέγιστη τιμή του εγκλείσματος προκύπτει από τη θεωρούμενη διάταξη του κυττάρου. Έτσι έχουμε δύο βασικές διατάξεις:

(α) την τετραγωνική:



και (β) την τριγωνική:



Έτσι οι κατ'όγκον περιεκτικότητες για την τετραγωνική, την τριγωνική και την εξαγωνική διάταξη θα είναι αντίστοιχα:

$$(\alpha) U_f = \frac{1/4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot 4}{L^2} \xrightarrow{d=2r=L} \boxed{(U_f)_{max} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785}$$

$$(\beta) U_f = \frac{1/6 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot 3}{1/2 \cdot L \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}} = \frac{1/2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{1/2 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi d^2}{2\sqrt{3} \cdot L^2} \xrightarrow{d=L} \boxed{(U_f)_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907}$$

Συνεπώς, για τις παραπάνω γεωμετρικές διατάξεις και αλλάζοντας κάθε φορά μόνο τον έναν από τους τέσσερις περιορισμούς (αυτόν που αφορά το $(U_f)_{max}$ δηλαδή), θα έχουμε ως ακολούθως:

(i) Αν $U_f = 0$ τότε $U_i = 0$

(ii) Αν $U_f = ?$ τότε $U_i = 0$

(iii) Αν $U_f = 0,65$ τότε $U_i = 0,052$

(iv) Αν $U_f = 0$ τότε $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0$

Άρα ομοίως με τα προηγούμενα θα έχουμε:

$$U_i = AU_f^3 + BU_f^2 + CU_f + D$$

▪ Για το «θεωρητικό» τετραγωνικό μοντέλο θα ισχύουν οι εξής συνθήκες/περιορισμοί:

$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } U_i = 0 \\
 \text{(ii)} \quad \text{Αν } U_f = \pi/4 \approx 0,785 \text{ τότε } U_i = 0 \\
 \text{(iii)} \quad \text{Αν } U_f = 0,65 \text{ τότε } U_i = 0,052 \\
 \text{(iv)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } \frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array}} \right\} \rightarrow$$

Συνεπώς, αφού $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 3AU_f^2 + 2BU_f + C$, τότε από τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \Rightarrow \boxed{D = 0} \\
 \text{(ii)} \Rightarrow (0,785)^3 A + (0,785)^2 B + (0,785)C + D = 0 \\
 \text{(iii)} \Rightarrow 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B + 0,65 \cdot C = 0,052 \\
 \text{(iv)} \Rightarrow \boxed{C = 0}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array}} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0,785)^3 \cdot A + (0,785)^2 \cdot B = 0 \\ 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B = 0,052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = -\frac{320}{351}} \\ \boxed{B = \frac{1256}{1755}} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\boxed{U_{i(s)} = -\frac{320}{351} U_f^3 + \frac{1256}{1755} U_f^2} \quad [\text{Square Model}] \quad (3.2.9)$$

▪ Για το τριγωνικό μοντέλο θα ισχύουν οι εξής συνθήκες/περιορισμοί:

$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } U_i = 0 \\
 \text{(ii)} \quad \text{Αν } U_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,907 \text{ τότε } U_i = 0 \\
 \text{(iii)} \quad \text{Αν } U_f = 0,65 \text{ τότε } U_i = 0,052 \\
 \text{(iv)} \quad \text{Αν } U_f = 0 \text{ τότε } \frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array}} \right\} \rightarrow$$

Συνεπώς, αφού $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 3AU_f^2 + 2BU_f + C$, τότε από τα παραπάνω θα έχουμε:

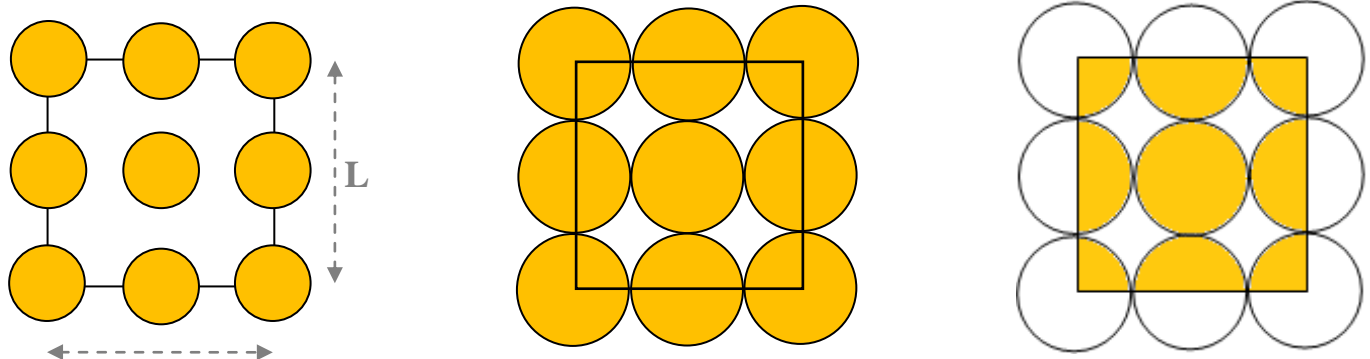
$$\begin{array}{l}
 \text{(i)} \Rightarrow \boxed{D = 0} \\
 \text{(ii)} \Rightarrow (0,907)^3 A + (0,907)^2 B + (0,907)C + D = 0 \\
 \text{(iii)} \Rightarrow 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B + 0,65 \cdot C = 0,052 \\
 \text{(iv)} \Rightarrow \boxed{C = 0}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array}} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0,907)^3 \cdot A + (0,907)^2 \cdot B = 0 \\ 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B = 0,052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = -\frac{1600}{3341}} \\ \boxed{B = \frac{7256}{16705}} \end{cases}$$

Επομένως:

$$\boxed{U_{i(T)} = -\frac{1600}{3341} U_f^3 + \frac{7256}{16705} U_f^2} \quad [\textit{Triangular Model}] \quad (3.2.10)$$

- Για το πλήρες τετραγωνικό μοντέλο (τετραγωνικό μοντέλο με ίνες στις πλευρές και στο κέντρο) θα ισχύουν τα εξής:



$$U_f = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4}}{L^2} = \frac{\pi d^2}{L^2} \stackrel{2d=L}{\implies} \boxed{(U_f)_{max} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785}$$

Οι συνθήκες/περιορισμοί θα είναι:

- (i) Αν $U_f = 0$ τότε $U_i = 0$
- (ii) Αν $U_f = \pi/4 \approx 0,785$ τότε $U_i = 0$
- (iii) Αν $U_f = 0,65$ τότε $U_i = 0,052$
- (iv) Αν $U_f = 0$ τότε $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 0$

Συνεπώς, αφού $\frac{\partial U_i}{\partial U_f} = 3AU_f^2 + 2BU_f + C$, τότε από τα παραπάνω θα έχουμε:

- (i) $\Rightarrow \boxed{D = 0}$
- (ii) $\Rightarrow (0,785)^3 A + (0,785)^2 B + (0,785)C + D = 0$
- (iii) $\Rightarrow 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B + 0,65 \cdot C = 0,052$
- (iv) $\Rightarrow \boxed{C = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0,785)^3 \cdot A + (0,785)^2 \cdot B = 0 \\ 0,274625 \cdot A + 0,4225 \cdot B = 0,052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = -\frac{320}{351}} \\ \boxed{B = \frac{1256}{1755}} \end{cases}$$

Επομένως:

$$U_{i(Full_Square)} = -\frac{320}{351}U_f^3 + \frac{1256}{1755}U_f^2 \quad [Full\ Square\ Model] \quad (3.2.12)$$

Παρακάτω σας παραθέτουμε το ίδιο συγκριτικό διάγραμμα των παραπάνω σχέσεων (3.2.9) έως (3.2.12), στα λογισμικά *Microsoft Office Excel 2007* και *MatLab 2011a*, αντίστοιχα.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΜΕ 11-ΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ



— Theoretical 11-Phase Cylindric Model

— Real 11-Phase Cylindric Model



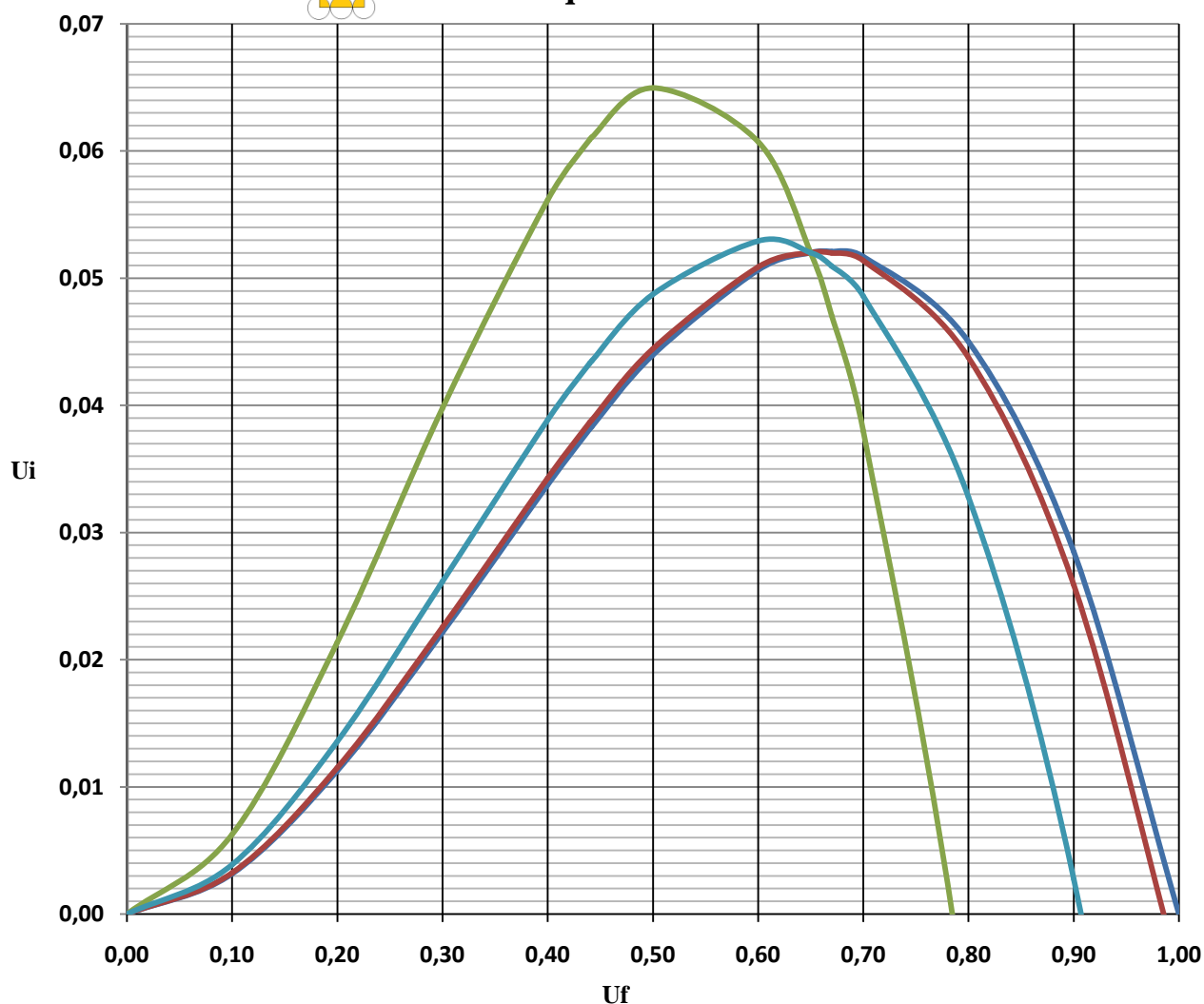
— Square Model

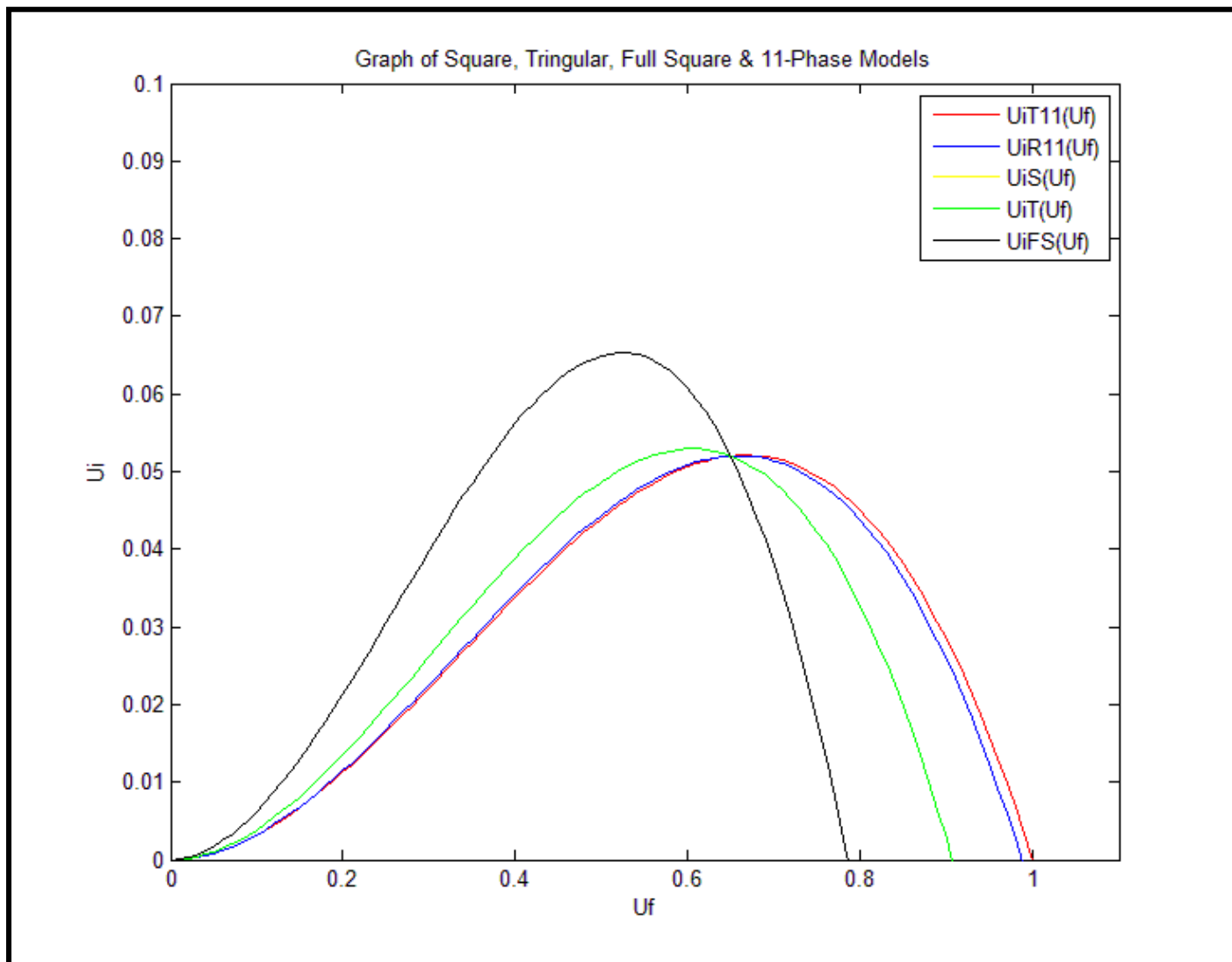


— Triangular Model



— Full Square Model





Τελικά από τα παραπάνω συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.1.14) έως (3.2.8) προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες:

Theoretical 11-phase Full Square Model $\approx T_{11_Full\ Square}$ Model												
U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)	r_8 (μm)	r_9 (μm)	r_{10} (μm)	r_{11} (μm)
0	0,00000	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,1	0,00193	6	6,047	23,740	23,752	26,612	26,621	34,638	34,646	36,665	36,721	56,921
0,2	0,00720	6	6,078	15,657	15,687	19,751	19,770	23,736	23,752	26,612	26,765	40,249
0,3	0,01503	6	6,092	11,787	11,835	16,854	16,876	18,745	18,765	22,274	22,553	32,863
0,4	0,02464	6	6,087	9,273	9,330	15,200	15,210	15,677	15,687	19,751	20,182	28,460
0,44	0,06089	6	6,164	8,402	8,520	14,717	14,718	14,736	14,737	19,004	20,049	27,136
0,442	0,02902	6	6,077	8,426	8,481	14,695	14,695	14,692	14,692	18,970	19,475	27,075
0,5	0,03525	6	6,056	7,386	7,432	14,115	14,094	13,530	13,508	18,068	18,685	25,456
0,6	0,04608	6	5,991	5,843	5,833	13,343	13,261	11,927	11,835	16,854	17,707	23,238
0,65	0,05133	6	5,938	5,159	5,087	13,034	12,903	11,275	11,124	16,363	17,366	22,326
0,67	0,05337	6	5,911	4,900	4,791	12,921	12,767	11,039	10,858	16,183	17,256	21,990
0,7	0,05635	6	5,864	4,527	4,345	12,763	12,566	10,712	10,477	15,930	17,118	21,514
0,8	0,06528	6	5,599	3,488	2,743	12,309	11,874	9,878	9,330	15,200	16,965	20,125
0,9	0,07209	6	-	-	-	11,945	10,782	9,788	8,329	14,607	17,863	18,974
1	0,07600	6	-	-	-	11,645	-	-	7,432	14,115	-	18,000

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

Real 11-phase Full Square Model $\approx R_{11_Full\ Square}$ Model												
U_f	U_i	r_1 (μm)	r_2 (μm)	r_3 (μm)	r_4 (μm)	r_5 (μm)	r_6 (μm)	r_7 (μm)	r_8 (μm)	r_9 (μm)	r_{10} (μm)	r_{11} (μm)
0	0,00000	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,1	0,00193	6	6,047	23,740	23,752	26,612	26,621	34,638	34,646	36,665	36,721	56,921
0,2	0,00720	6	6,078	15,657	15,687	19,751	19,770	23,736	23,752	26,612	26,765	40,249
0,3	0,01503	6	6,092	11,787	11,835	16,854	16,876	18,745	18,765	22,274	22,553	32,863
0,4	0,02464	6	6,087	9,273	9,330	15,200	15,210	15,677	15,687	19,751	20,182	28,460
0,44	0,02881	6	6,078	8,464	8,520	14,717	14,717	14,736	14,737	19,004	19,506	27,136
0,442	0,02902	6	6,077	8,426	8,481	14,695	14,695	14,692	14,692	18,970	19,475	27,075
0,5	0,03525	6	6,056	7,386	7,432	14,115	14,094	13,530	13,508	18,068	18,685	25,456
0,6	0,04608	6	5,991	5,843	5,833	13,343	13,261	11,927	11,835	16,854	17,707	23,238
0,65	0,05133	6	5,938	5,159	5,087	13,034	12,903	11,275	11,124	16,363	17,366	22,326
0,67	0,05337	6	5,911	4,900	4,791	12,921	12,767	11,039	10,858	16,183	17,256	21,990
0,7	0,05635	6	5,864	4,527	4,345	12,763	12,566	10,712	10,477	15,930	17,118	21,514
0,8	0,06528	6	5,599	3,488	2,743	12,309	11,874	9,878	9,330	15,200	16,965	20,125
0,9	0,07209	6	-	-	-	11,945	10,782	9,788	8,329	14,607	17,863	18,974
1	0,07600	6	-	-	-	11,645	-	-	7,432	14,115	-	18,000

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

Αφού υπολογίσαμε τις ακτίνες του ενδεκαφασικού κυλινδρικού μοντέλου, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις κατ'όγκο περιεκτικότητες των έντεκα φάσεων. Συνεπώς θα έχουμε:

$$U_1 = U_{f,1} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_2 = U_{i,1} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_3 = U_{m,1} = \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_3^2 - r_2^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_4 = U_{i,2} = \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_4^2 - r_3^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_5 = U_{f,2} = \frac{\pi(r_5^2 - r_4^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_5^2 - r_4^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_6 = U_{i,3} = \frac{\pi(r_6^2 - r_5^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_6^2 - r_5^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_7 = U_{m,2} = \frac{\pi(r_7^2 - r_6^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_7^2 - r_6^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_8 = U_{i,4} = \frac{\pi(r_8^2 - r_7^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_8^2 - r_7^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_9 = U_{f,3} = \frac{\pi(r_9^2 - r_8^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_9^2 - r_8^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_{10} = U_{i,5} = \frac{\pi(r_{10}^2 - r_9^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_{10}^2 - r_9^2)}{r_{11}^2}$$

$$U_{11} = U_{m,3} = \frac{\pi(r_{11}^2 - r_{10}^2)h}{\pi r_{11}^2 h} = \frac{(r_{11}^2 - r_{10}^2)}{r_{11}^2}$$

Και επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας με τις τιμές των κατ'όγκο περιεκτικοτήτων των έντεκα φάσεων για διάφορες τιμές της κατ'όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα:

ΚΑΤ'ΟΓΚΟ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΕΣ R_{II} ΜΟΝΤΕΛΟΥ											
U_f	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}
0,100	0,0111	0,0002	0,1627	0,0002	0,0444	0,0002	0,1516	0,0002	0,0444	0,0013	0,5838
0,200	0,0222	0,0006	0,1285	0,0006	0,0889	0,0005	0,1065	0,0005	0,0889	0,0051	0,5578
0,300	0,0333	0,0010	0,0943	0,0010	0,1333	0,0007	0,0617	0,0007	0,1333	0,0116	0,5290
0,400	0,0444	0,0013	0,0604	0,0013	0,1778	0,0004	0,0178	0,0004	0,1778	0,0213	0,4971
0,440	0,0489	0,0013	0,0471	0,0013	0,1956	0,0000	0,0008	0,0000	0,1956	0,0262	0,4833
0,442	0,0491	0,0013	0,0465	0,0013	0,1964	0,0000	0,0001	0,0000	0,1964	0,0265	0,4826

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

« ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ & ΛΟΓΟΙ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ »

4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ – ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ & ΛΟΓΩΝ POISSON ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΦΑΣΗΣ

Οι ιδιότητες του εγκλείσματος και της μήτρας καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ τους (ενδιάμεση φάση) επηρεάζουν τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος. Γενικά, το μέτρο ελαστικότητας E_i , το μέτρο διάτμησης G_i και ο λόγος Poisson ν_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο n βαθμού με μεταβλητή ακτίνα r . Δηλαδή, ως ακολούθως θα έχουμε:

$$E_i(r) = f(r), \quad G_i(r) = h(r) \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = Ar^n + Br^{n-1} + Cr^{n-2} + \dots, \quad G_i(r) = A'r^n + B'r^{n-1} + C'r^{n-2} + \dots$$

$$\text{και} \quad \nu_i(r) = A''r^n + B''r^{n-1} + C''r^{n-2} + \dots$$

όπου,

$$E_m \leq E_i(r) \leq E_f, \quad G_m \leq G_i(r) \leq G_f, \quad \nu_m \leq \nu_i(r) \leq \nu_f$$

όταν

$$r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}, \quad r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2}, \quad r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}, \quad r_{m,2} \leq r \leq r_{i,4}, \quad r_{f,3} \leq r \leq r_{fi,5}$$

για κάθε ενδιάμεση φάση.

Συνεπώς για το ενδεκαφασικό μοντέλο που έχουμε πέντε ενδιάμεσες φάσεις, οι οριακές συνθήκες θα είναι οι εξής:

- Για την 1^η ενδιάμεση φάση:
Στο $r = r_{f,1}$: $E_i(r) = \xi E_f, G_i(r) = \xi G_f$ και $\nu_i(r) = \xi \nu_f$
Στο $r = r_{i,1}$: $E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m$ και $\nu_i(r) = \nu_m$
- Για την 2^η ενδιάμεση φάση:
Στο $r = r_{m,1}$: $E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m$ και $\nu_i(r) = \nu_m$
Στο $r = r_{i,2}$: $E_i(r) = \xi E_f, G_i(r) = \xi G_f$ και $\nu_i(r) = \xi \nu_f$
- Για την 3^η ενδιάμεση φάση:
Στο $r = r_{f,2}$: $E_i(r) = \xi E_f, G_i(r) = \xi G_f$ και $\nu_i(r) = \xi \nu_f$
Στο $r = r_{i,3}$: $E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m$ και $\nu_i(r) = \nu_m$

- Για την 4^η ενδιάμεση φάση:
 Στο $r = r_{m,2} : E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m$ και $\nu_i(r) = \nu_m$
 Στο $r = r_{i,4} : E_i(r) = \xi E_f, G_i(r) = \xi G_f$ και $\nu_i(r) = \xi \nu_f$
- Για την 5^η ενδιάμεση φάση:
 Στο $r = r_{f,3} : E_i(r) = \xi E_f, G_i(r) = \xi G_f$ και $\nu_i(r) = \xi \nu_f$
 Στο $r = r_{i,5} : E_i(r) = E_m, G_i(r) = G_m$ και $\nu_i(r) = \nu_m$

Με m, f, i θα συμβολίζουμε αντίστοιχα τη μήτρα, το έγκλεισμα και την ενδιάμεση φάση.

Από τα παραπάνω δεχόμαστε ότι τα $E_i(r), G_i(r)$ και $\nu_i(r)$ της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με τη μήτρα είναι ίσα με E_m, G_m και ν_m αντίστοιχα (αφού η ενδιάμεση φάση είναι αλλοιωμένη μήτρα όπως θεωρήσαμε). Επίσης στο όριο της ενδιάμεσης φάσης με το έγκλεισμα η ενδιάμεση φάση αποτελεί τμήμα των E_f, G_f και ν_f αντίστοιχα, το οποίο εκφράζεται με το συντελεστή ξ . Όμως για να εκτιμήσουμε τη μέγιστη δυνατή επίδραση την ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι στο όριο αυτής με το έγκλεισμα το ξ είναι ίσο με το ένα ($\xi=1$, δηλαδή, τα $E_i(r), G_i(r)$ και $\nu_i(r)$ είναι ίσα με E_f, G_f και ν_f αντίστοιχα).

Σημείωση: οι μετρήσεις και οι υπολογισμοί για τις παρακάτω υποενότητες έγιναν με βάση τις τιμές της μελέτης για το τριφασικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση [27], [28], [29] και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΩΝ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ			
Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E [Gpa]	Μέτρο Διάτμησης G [Gpa]	Λόγος Poisson ν
Εποξική Ρητίνη	3,5	1,29	0,35
Ύαλος	72	30	0,20

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

4.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$, $G_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br \quad , \quad G_i(r) = A' + B'r \quad \text{και} \quad v_i(r) = A'' + B''r$$

με $r_{f,1} \leq r \leq r_{i,1}$, $r_{m,1} \leq r \leq r_{i,2}$, $r_{f,2} \leq r \leq r_{i,3}$, $r_{m,2} \leq r \leq r_{i,4}$ και $r_{f,3} \leq r \leq r_{i,5}$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω οριακές συνθήκες για τις πέντε ενδιάμεσες φάσεις προκύπτουν τα A, B, A', B', A'' και B'' . Έτσι έχουμε:

(i) Για την 1^η ενδιάμεση φάση:

$$\left. \begin{array}{l} \xi E_f = A + Br_{f,1} \\ E_m = A + Br_{i,1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(-)} \xi E_f - E_m = B(r_{f,1} - r_{i,1}) \Rightarrow B = \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} \\ \text{και} \quad A = \xi E_f - \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} \cdot r_{f,1} \end{array}$$

Ομοίως προκύπτουν και τα ακόλουθα:

$$A' = \xi G_f - \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} \cdot r_{f,1} \quad \text{και} \quad B' = \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

$$A'' = \xi v_f - \frac{\xi v_f - v_m}{r_{f,1} - r_{i,1}} \cdot r_{f,1} \quad \text{και} \quad B'' = \frac{\xi v_f - v_m}{r_{f,1} - r_{i,1}}$$

(ii) Για τη 2^η ενδιάμεση φάση:

$$\left. \begin{array}{l} \xi E_f = A + Br_{i,2} \\ E_m = A + Br_{m,1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(-)} \xi E_f - E_m = B(r_{i,2} - r_{m,1}) \Rightarrow B = \frac{\xi E_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} \\ \text{και} \quad A = \xi E_f - \frac{\xi E_f - E_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} \cdot r_{i,2} \end{array}$$

Ομοίως προκύπτουν και τα ακόλουθα:

$$A' = \xi G_f - \frac{\xi G_f - G_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} \cdot r_{i,2} \quad \text{και} \quad B' = \frac{\xi G_f - G_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

$$A'' = \xi v_f - \frac{\xi v_f - v_m}{r_{i,2} - r_{m,1}} \cdot r_{i,2} \quad \text{και} \quad B'' = \frac{\xi v_f - v_m}{r_{i,2} - r_{m,1}}$$

(iii) Για την 3^η ενδιάμεση φάση:

$$\left. \begin{array}{l} \xi E_f = A + Br_{f,2} \\ E_m = A + Br_{i,3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(-)} \xi E_f - E_m = B(r_{f,2} - r_{i,3}) \Rightarrow B = \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} \\ \text{και } A = \xi E_f - \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} \cdot r_{f,2} \end{array}$$

Ομοίως προκύπτουν και τα ακόλουθα:

$$A' = \xi G_f - \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} \cdot r_{f,2} \quad \text{και} \quad B' = \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

$$A'' = \xi v_f - \frac{\xi v_f - v_m}{r_{f,2} - r_{i,3}} \cdot r_{f,2} \quad \text{και} \quad B'' = \frac{\xi v_f - v_m}{r_{f,2} - r_{i,3}}$$

(iv) Για την 4^η ενδιάμεση φάση:

$$\left. \begin{array}{l} \xi E_f = A + Br_{i,4} \\ E_m = A + Br_{m,2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(-)} \xi E_f - E_m = B(r_{i,4} - r_{m,2}) \Rightarrow B = \frac{\xi E_f - E_m}{r_{i,4} - r_{m,2}} \\ \text{και } A = \xi E_f - \frac{\xi E_f - E_m}{r_{i,4} - r_{m,2}} \cdot r_{i,4} \end{array}$$

Ομοίως προκύπτουν και τα ακόλουθα:

$$A' = \xi G_f - \frac{\xi G_f - G_m}{r_{i,4} - r_{m,2}} \cdot r_{i,4} \quad \text{και} \quad B' = \frac{\xi G_f - G_m}{r_{i,4} - r_{m,2}}$$

$$A'' = \xi v_f - \frac{\xi v_f - v_m}{r_{i,4} - r_{m,2}} \cdot r_{i,4} \quad \text{και} \quad B'' = \frac{\xi v_f - v_m}{r_{i,4} - r_{m,2}}$$

(v) Για την 5^η ενδιάμεση φάση:

$$\left. \begin{array}{l} \xi E_f = A + Br_{f,3} \\ E_m = A + Br_{i,5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{(-)} \xi E_f - E_m = B(r_{f,3} - r_{i,5}) \Rightarrow B = \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,3} - r_{i,5}} \\ \text{και } A = \xi E_f - \frac{\xi E_f - E_m}{r_{f,3} - r_{i,5}} \cdot r_{f,3} \end{array}$$

Ομοίως προκύπτουν και τα ακόλουθα:

$$\boxed{A' = \xi G_f - \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,3} - r_{i,5}} \cdot r_{f,3}} \quad \text{και} \quad \boxed{B' = \frac{\xi G_f - G_m}{r_{f,3} - r_{i,5}}}$$

$$\boxed{A'' = \xi \nu_f - \frac{\xi \nu_f - \nu_m}{r_{f,3} - r_{i,5}} \cdot r_{f,3}} \quad \text{και} \quad \boxed{B'' = \frac{\xi \nu_f - \nu_m}{r_{f,3} - r_{i,5}}}$$

Επιπρόσθετα υπολογίζουμε τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας (E), του μέτρου διάτμησης (G) και του λόγου Poisson (ν) της κάθε ενδιάμεσης φάσης.

(i) Για την 1^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} E_i(r) dV = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (A + Br) 2\pi r h dr = \frac{1}{V} 2\pi h \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} (Ar + Br^2) dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{E}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{G}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} G_i(r) dV \Rightarrow \bar{G}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

$$\bar{\nu}_i = \frac{1}{V} \int_{r_{f,1}}^{r_{i,1}} \nu G_i(r) dV \Rightarrow \bar{\nu}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,1}}^{r_{i,1}}$$

(ii) Για τη 2^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \dots \Rightarrow \bar{E}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{G}_i = \dots \Rightarrow \bar{G}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

$$\bar{\nu}_i = \dots \Rightarrow \bar{\nu}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,1}}^{r_{i,2}}$$

(iii) Για την 3^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \dots \Rightarrow \bar{E}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{G}_i = \dots \Rightarrow \bar{G}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

$$\bar{v}_i = \dots \Rightarrow \bar{v}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,2}}^{r_{i,3}}$$

(iv) Για την 4^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \dots \Rightarrow \bar{E}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,2}}^{r_{i,4}}$$

$$\bar{G}_i = \dots \Rightarrow \bar{G}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,2}}^{r_{i,4}}$$

$$\bar{v}_i = \dots \Rightarrow \bar{v}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{m,2}}^{r_{i,4}}$$

(v) Για την 5^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \dots \Rightarrow \bar{E}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A \frac{r^2}{2} + B \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,3}}^{r_{i,5}}$$

$$\bar{G}_i = \dots \Rightarrow \bar{G}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A' \frac{r^2}{2} + B' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,3}}^{r_{i,5}}$$

$$\bar{v}_i = \dots \Rightarrow \bar{v}_i = \frac{1}{V} 2\pi h \left[A'' \frac{r^2}{2} + B'' \frac{r^3}{3} \right]_{r_{f,3}}^{r_{i,5}}$$

Επομένως από τα παραπάνω και αφού $r_1 = r_{f,1}$, $r_2 = r_{i,1}$, $r_3 = r_{m,1}$, $r_4 = r_{i,2}$, $r_5 = r_{f,2}$, $r_6 = r_{i,3}$, $r_7 = r_{m,2}$, $r_8 = r_{i,4}$, $r_9 = r_{f,3}$ και $r_{10} = r_{i,5}$, τότε έχουμε:

(i) Για την 1^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B}{3} (r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{B}{3} (r_2^3 - r_1^3) \right]}$$

$$\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B'}{3} (r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{B'}{3} (r_2^3 - r_1^3) \right]}$$

$$\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{i,1}^2 - r_{f,1}^2) + \frac{B''}{3} (r_{i,1}^3 - r_{f,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{B''}{3} (r_2^3 - r_1^3) \right]}$$

(ii) Για τη 2^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B}{3} (r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_4^2 - r_3^2) + \frac{B}{3} (r_4^3 - r_3^3) \right]}$$

$$\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B'}{3} (r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_4^2 - r_3^2) + \frac{B'}{3} (r_4^3 - r_3^3) \right]}$$

$$\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{i,2}^2 - r_{m,1}^2) + \frac{B''}{3} (r_{i,2}^3 - r_{m,1}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_4^2 - r_3^2) + \frac{B''}{3} (r_4^3 - r_3^3) \right]}$$

(iii) Για την 3^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B}{3} (r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_6^2 - r_5^2) + \frac{B}{3} (r_6^3 - r_5^3) \right]}$$

$$\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B'}{3} (r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_6^2 - r_5^2) + \frac{B'}{3} (r_6^3 - r_5^3) \right]}$$

$$\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{i,3}^2 - r_{f,2}^2) + \frac{B''}{3} (r_{i,3}^3 - r_{f,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_6^2 - r_5^2) + \frac{B''}{3} (r_6^3 - r_5^3) \right]}$$

(iv) Για την 4^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{i,4}^2 - r_{m,2}^2) + \frac{B}{3} (r_{i,4}^3 - r_{m,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_8^2 - r_7^2) + \frac{B}{3} (r_8^3 - r_7^3) \right]}$$

$$\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{i,4}^2 - r_{m,2}^2) + \frac{B'}{3} (r_{i,4}^3 - r_{m,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_8^2 - r_7^2) + \frac{B'}{3} (r_8^3 - r_7^3) \right]}$$

$$\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{i,4}^2 - r_{m,2}^2) + \frac{B''}{3} (r_{i,4}^3 - r_{m,2}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_8^2 - r_7^2) + \frac{B''}{3} (r_8^3 - r_7^3) \right]}$$

(v) Για την 5^η ενδιάμεση φάση:

$$\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{i,5}^2 - r_{f,3}^2) + \frac{B}{3} (r_{i,5}^3 - r_{f,3}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{E}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A}{2} (r_{10}^2 - r_9^2) + \frac{B}{3} (r_{10}^3 - r_9^3) \right]}$$

$$\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{i,5}^2 - r_{f,3}^2) + \frac{B'}{3} (r_{i,5}^3 - r_{f,3}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{G}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A'}{2} (r_{10}^2 - r_9^2) + \frac{B'}{3} (r_{10}^3 - r_9^3) \right]}$$

$$\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{i,5}^2 - r_{f,3}^2) + \frac{B''}{3} (r_{i,5}^3 - r_{f,3}^3) \right] \quad \text{ή} \quad \boxed{\bar{v}_i = \frac{2\pi h}{V} \left[\frac{A''}{2} (r_{10}^2 - r_9^2) + \frac{B''}{3} (r_{10}^3 - r_9^3) \right]}$$

Στους παρακάτω πίνακες παραθέτουμε ενδεικτικά τους μέσους όρους των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson για την 1^η ενδιάμεση φάση στο κυλινδρικό ενδεκαφασικό μοντέλο, στη γραμμική μεταβολή για διάφορες τιμές του ξ .

ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
Uf	$\xi=0,2$	$\xi=0,4$	$\xi=0,6$	$\xi=0,8$	$\xi=1$
0,100	8,9429	16,1335	23,3242	30,5148	37,7055
0,200	8,9382	16,1227	23,3071	30,4916	37,6760
0,300	8,9361	16,1178	23,2995	30,4811	37,6628
0,400	8,9370	16,1197	23,3025	30,4853	37,6681
0,440	8,9383	16,1228	23,3073	30,4918	37,6764
0,442	8,9384	16,1230	23,3076	30,4922	37,6769
0,500	8,9415	16,1303	23,3191	30,5079	37,6967
0,600	8,9514	16,1533	23,3552	30,5571	37,7590
0,650	8,9595	16,1720	23,3845	30,5970	37,8095
0,670	8,9635	16,1814	23,3992	30,6171	37,8349

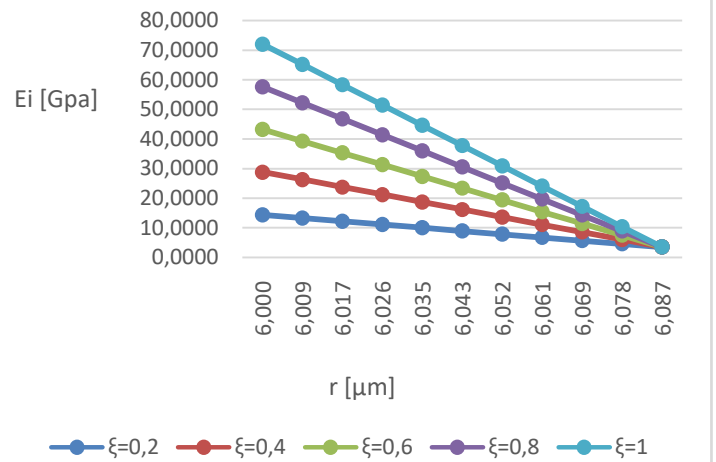
ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
Uf	$\xi=0,2$	$\xi=0,4$	$\xi=0,6$	$\xi=0,8$	$\xi=1$
0,100	3,6419	6,6380	9,6341	12,6302	15,6263
0,200	3,6399	6,6334	9,6270	12,6205	15,6140
0,300	3,6390	6,6314	9,6237	12,6161	15,6084
0,400	3,6394	6,6322	9,6250	12,6178	15,6107
0,440	3,6399	6,6335	9,6270	12,6206	15,6141
0,442	3,6400	6,6336	9,6272	12,6208	15,6144
0,500	3,6413	6,6367	9,6320	12,6273	15,6227
0,600	3,6456	6,6464	9,6472	12,6480	15,6488
0,650	3,6491	6,6543	9,6595	12,6647	15,6699
0,670	3,6508	6,6583	9,6657	12,6732	15,6806

ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
Uf	$\xi=0,2$	$\xi=0,4$	$\xi=0,6$	$\xi=0,8$	$\xi=1$
0,100	0,1952	0,2152	0,2351	0,2551	0,2751
0,200	0,1953	0,2153	0,2352	0,2552	0,2752
0,300	0,1954	0,2153	0,2353	0,2552	0,2752
0,400	0,1954	0,2153	0,2353	0,2552	0,2752
0,440	0,1953	0,2153	0,2352	0,2552	0,2752
0,442	0,1953	0,2153	0,2352	0,2552	0,2752
0,500	0,1952	0,2152	0,2352	0,2551	0,2751
0,600	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
0,650	0,1947	0,2148	0,2348	0,2548	0,2749
0,670	0,1946	0,2147	0,2347	0,2548	0,2748

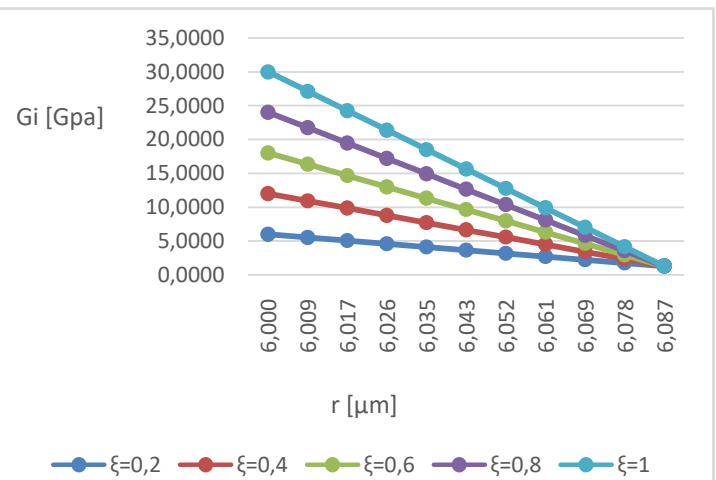
Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα παρουσιάζονται αναλυτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών και του λόγου Poisson συγκεκριμένα για την κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, $U_f = 0,4$, για κάθε μία από τις πέντε ενδιάμεσες φάσεις του ενδεκαφασικού μοντέλου στη γραμμική μεταβολή που μελετήσαμε.

Για την 1η Ενδιάμεση Φάση

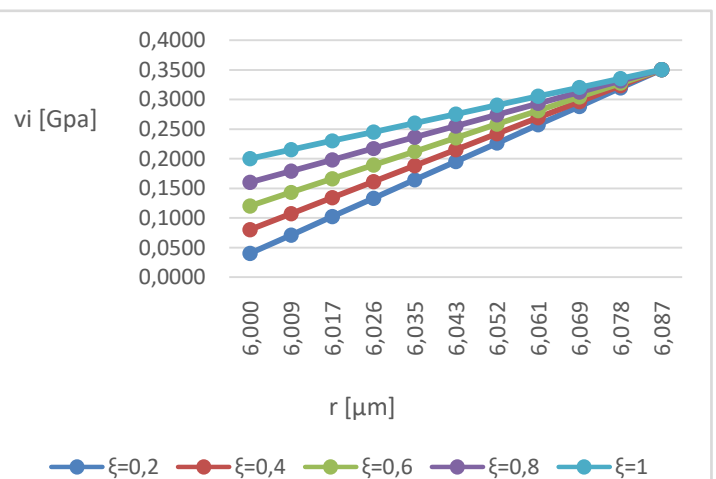
ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
6,000	14,4000	28,8000	43,2000	57,6000	72,0000
6,009	13,3100	26,2700	39,2300	52,1900	65,1500
6,017	12,2200	23,7400	35,2600	46,7800	58,3000
6,026	11,1300	21,2100	31,2900	41,3700	51,4500
6,035	10,0400	18,6800	27,3200	35,9600	44,6000
6,043	8,9500	16,1500	23,3500	30,5500	37,7500
6,052	7,8600	13,6200	19,3800	25,1400	30,9000
6,061	6,7700	11,0900	15,4100	19,7300	24,0500
6,069	5,6800	8,5600	11,4400	14,3200	17,2000
6,078	4,5900	6,0300	7,4700	8,9100	10,3500
6,087	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000



ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
6,000	6,0000	12,0000	18,0000	24,0000	30,0000
6,009	5,5290	10,9290	16,3290	21,7290	27,1290
6,017	5,0580	9,8580	14,6580	19,4580	24,2580
6,026	4,5870	8,7870	12,9870	17,1870	21,3870
6,035	4,1160	7,7160	11,3160	14,9160	18,5160
6,043	3,6450	6,6450	9,6450	12,6450	15,6450
6,052	3,1740	5,5740	7,9740	10,3740	12,7740
6,061	2,7030	4,5030	6,3030	8,1030	9,9030
6,069	2,2320	3,4320	4,6320	5,8320	7,0320
6,078	1,7610	2,3610	2,9610	3,5610	4,1610
6,087	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900

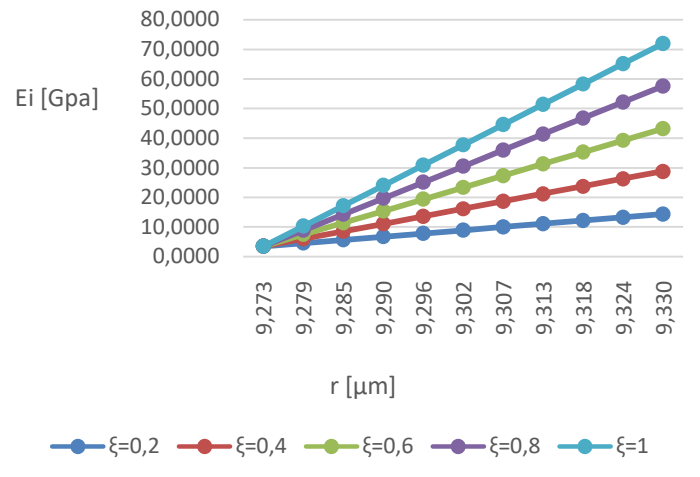


ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
6,000	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,2000
6,009	0,0710	0,1070	0,1430	0,1790	0,2150
6,017	0,1020	0,1340	0,1660	0,1980	0,2300
6,026	0,1330	0,1610	0,1890	0,2170	0,2450
6,035	0,1640	0,1880	0,2120	0,2360	0,2600
6,043	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
6,052	0,2260	0,2420	0,2580	0,2740	0,2900
6,061	0,2570	0,2690	0,2810	0,2930	0,3050
6,069	0,2880	0,2960	0,3040	0,3120	0,3200
6,078	0,3190	0,3230	0,3270	0,3310	0,3350
6,087	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500

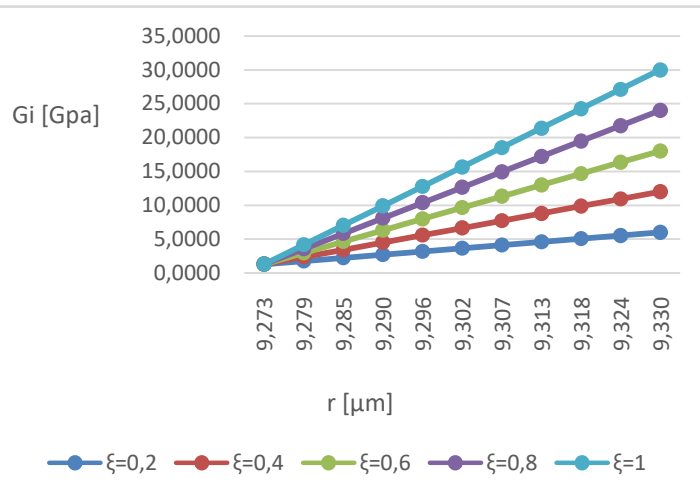


Για την 2η Ενδιάμεση Φάση

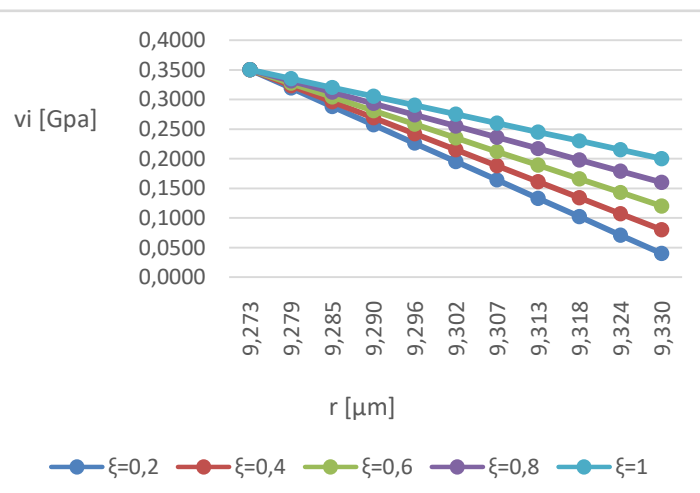
ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
9,273	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000
9,279	4,5900	6,0300	7,4700	8,9100	10,3500
9,285	5,6800	8,5600	11,4400	14,3200	17,2000
9,290	6,7700	11,0900	15,4100	19,7300	24,0500
9,296	7,8600	13,6200	19,3800	25,1400	30,9000
9,302	8,9500	16,1500	23,3500	30,5500	37,7500
9,307	10,0400	18,6800	27,3200	35,9600	44,6000
9,313	11,1300	21,2100	31,2900	41,3700	51,4500
9,318	12,2200	23,7400	35,2600	46,7800	58,3000
9,324	13,3100	26,2700	39,2300	52,1900	65,1500
9,330	14,4000	28,8000	43,2000	57,6000	72,0000



ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
9,273	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900
9,279	1,7610	2,3610	2,9610	3,5610	4,1610
9,285	2,2320	3,4320	4,6320	5,8320	7,0320
9,290	2,7030	4,5030	6,3030	8,1030	9,9030
9,296	3,1740	5,5740	7,9740	10,3740	12,7740
9,302	3,6450	6,6450	9,6450	12,6450	15,6450
9,307	4,1160	7,7160	11,3160	14,9160	18,5160
9,313	4,5870	8,7870	12,9870	17,1870	21,3870
9,318	5,0580	9,8580	14,6580	19,4580	24,2580
9,324	5,5290	10,9290	16,3290	21,7290	27,1290
9,330	6,0000	12,0000	18,0000	24,0000	30,0000

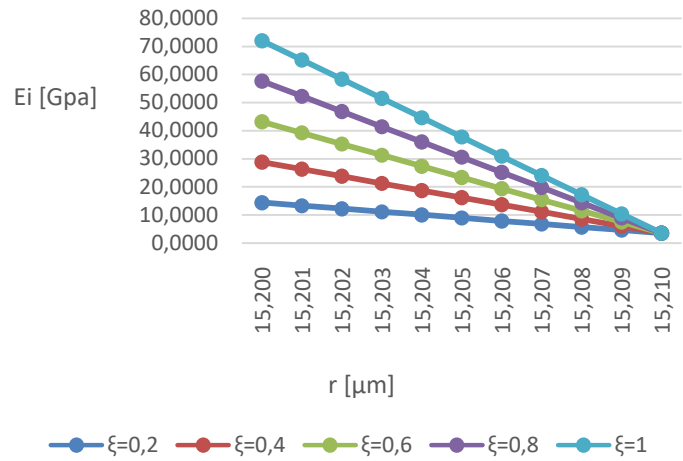


ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
9,273	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500
9,279	0,3190	0,3230	0,3270	0,3310	0,3350
9,285	0,2880	0,2960	0,3040	0,3120	0,3200
9,290	0,2570	0,2690	0,2810	0,2930	0,3050
9,296	0,2260	0,2420	0,2580	0,2740	0,2900
9,302	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
9,307	0,1640	0,1880	0,2120	0,2360	0,2600
9,313	0,1330	0,1610	0,1890	0,2170	0,2450
9,318	0,1020	0,1340	0,1660	0,1980	0,2300
9,324	0,0710	0,1070	0,1430	0,1790	0,2150
9,330	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,2000

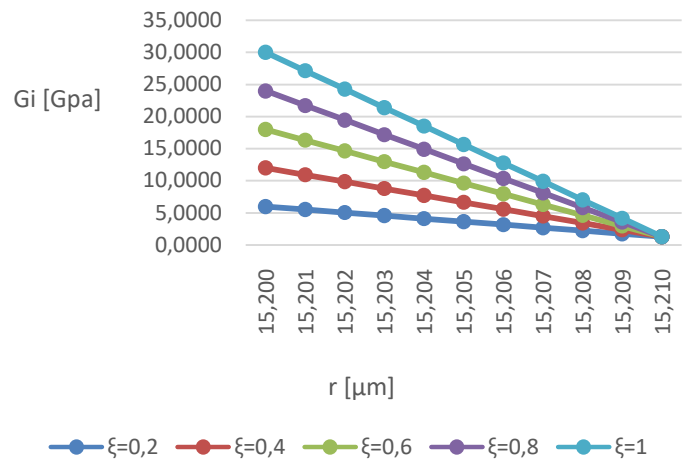


Για την 3η Ενδιάμεση Φάση

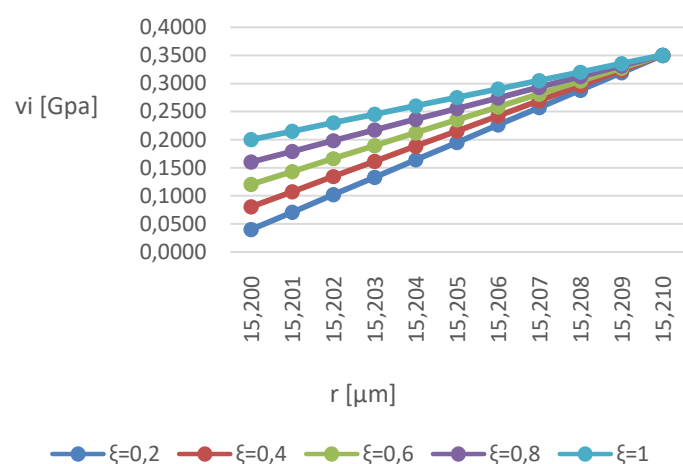
ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,200	14,4000	28,8000	43,2000	57,6000	72,0000
15,201	13,3100	26,2700	39,2300	52,1900	65,1500
15,202	12,2200	23,7400	35,2600	46,7800	58,3000
15,203	11,1300	21,2100	31,2900	41,3700	51,4500
15,204	10,0400	18,6800	27,3200	35,9600	44,6000
15,205	8,9500	16,1500	23,3500	30,5500	37,7500
15,206	7,8600	13,6200	19,3800	25,1400	30,9000
15,207	6,7700	11,0900	15,4100	19,7300	24,0500
15,208	5,6800	8,5600	11,4400	14,3200	17,2000
15,209	4,5900	6,0300	7,4700	8,9100	10,3500
15,210	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000



ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,200	6,0000	12,0000	18,0000	24,0000	30,0000
15,201	5,5290	10,9290	16,3290	21,7290	27,1290
15,202	5,0580	9,8580	14,6580	19,4580	24,2580
15,203	4,5870	8,7870	12,9870	17,1870	21,3870
15,204	4,1160	7,7160	11,3160	14,9160	18,5160
15,205	3,6450	6,6450	9,6450	12,6450	15,6450
15,206	3,1740	5,5740	7,9740	10,3740	12,7740
15,207	2,7030	4,5030	6,3030	8,1030	9,9030
15,208	2,2320	3,4320	4,6320	5,8320	7,0320
15,209	1,7610	2,3610	2,9610	3,5610	4,1610
15,210	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900

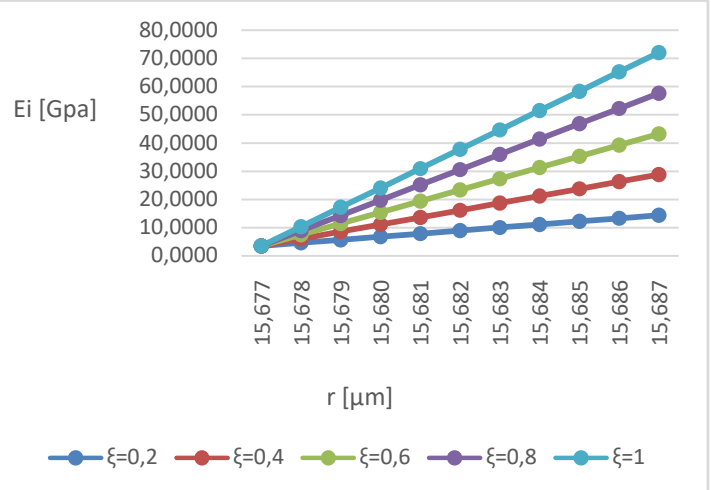


ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,200	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,2000
15,201	0,0710	0,1070	0,1430	0,1790	0,2150
15,202	0,1020	0,1340	0,1660	0,1980	0,2300
15,203	0,1330	0,1610	0,1890	0,2170	0,2450
15,204	0,1640	0,1880	0,2120	0,2360	0,2600
15,205	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
15,206	0,2260	0,2420	0,2580	0,2740	0,2900
15,207	0,2570	0,2690	0,2810	0,2930	0,3050
15,208	0,2880	0,2960	0,3040	0,3120	0,3200
15,209	0,3190	0,3230	0,3270	0,3310	0,3350
15,210	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500

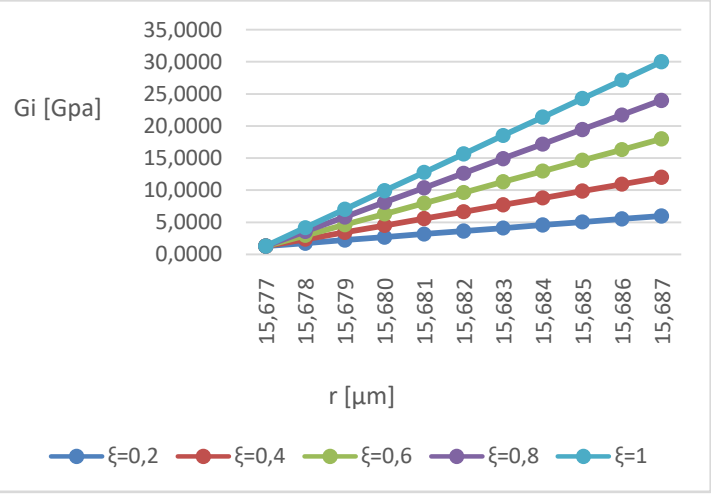


Για την 4η Ενδιάμεση Φάση

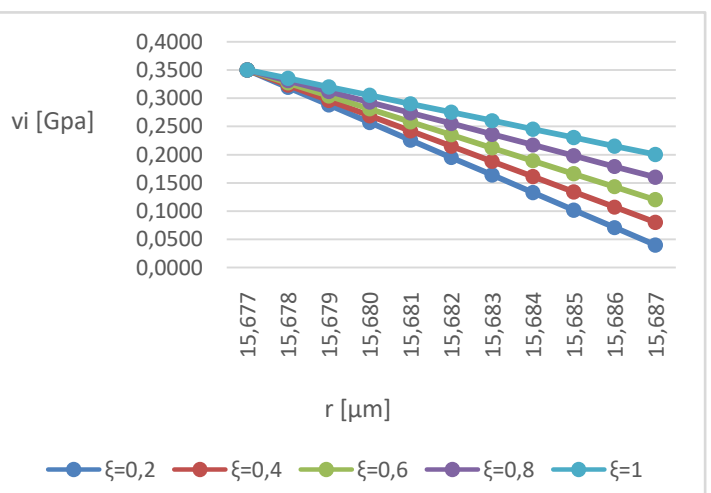
ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,677	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000
15,678	4,5900	6,0300	7,4700	8,9100	10,3500
15,679	5,6800	8,5600	11,4400	14,3200	17,2000
15,680	6,7700	11,0900	15,4100	19,7300	24,0500
15,681	7,8600	13,6200	19,3800	25,1400	30,9000
15,682	8,9500	16,1500	23,3500	30,5500	37,7500
15,683	10,0400	18,6800	27,3200	35,9600	44,6000
15,684	11,1300	21,2100	31,2900	41,3700	51,4500
15,685	12,2200	23,7400	35,2600	46,7800	58,3000
15,686	13,3100	26,2700	39,2300	52,1900	65,1500
15,687	14,4000	28,8000	43,2000	57,6000	72,0000



ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,677	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900
15,678	1,7610	2,3610	2,9610	3,5610	4,1610
15,679	2,2320	3,4320	4,6320	5,8320	7,0320
15,680	2,7030	4,5030	6,3030	8,1030	9,9030
15,681	3,1740	5,5740	7,9740	10,3740	12,7740
15,682	3,6450	6,6450	9,6450	12,6450	15,6450
15,683	4,1160	7,7160	11,3160	14,9160	18,5160
15,684	4,5870	8,7870	12,9870	17,1870	21,3870
15,685	5,0580	9,8580	14,6580	19,4580	24,2580
15,686	5,5290	10,9290	16,3290	21,7290	27,1290
15,687	6,0000	12,0000	18,0000	24,0000	30,0000

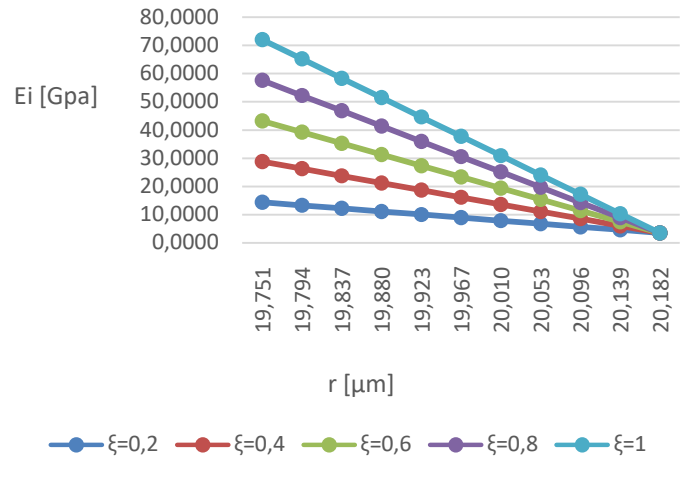


ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
15,677	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500
15,678	0,3190	0,3230	0,3270	0,3310	0,3350
15,679	0,2880	0,2960	0,3040	0,3120	0,3200
15,680	0,2570	0,2690	0,2810	0,2930	0,3050
15,681	0,2260	0,2420	0,2580	0,2740	0,2900
15,682	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
15,683	0,1640	0,1880	0,2120	0,2360	0,2600
15,684	0,1330	0,1610	0,1890	0,2170	0,2450
15,685	0,1020	0,1340	0,1660	0,1980	0,2300
15,686	0,0710	0,1070	0,1430	0,1790	0,2150
15,687	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,2000

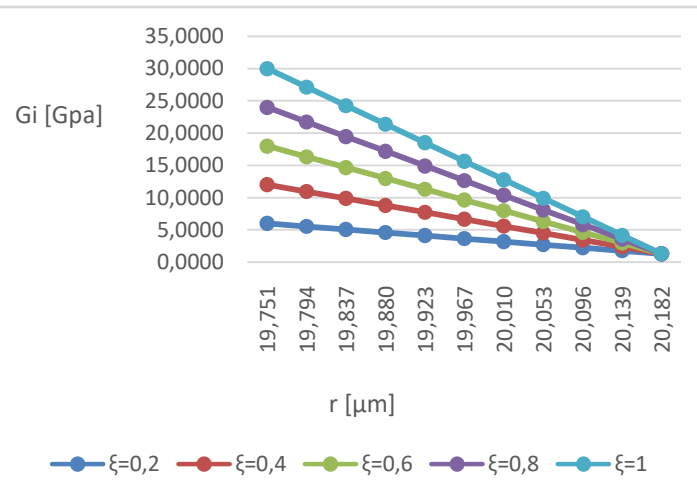


Για την 5η Ενδιάμεση Φάση

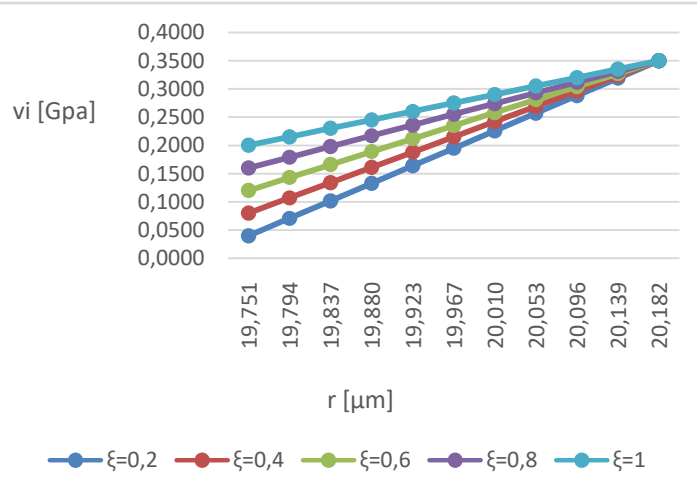
ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
19,751	14,4000	28,8000	43,2000	57,6000	72,0000
19,794	13,3100	26,2700	39,2300	52,1900	65,1500
19,837	12,2200	23,7400	35,2600	46,7800	58,3000
19,880	11,1300	21,2100	31,2900	41,3700	51,4500
19,923	10,0400	18,6800	27,3200	35,9600	44,6000
19,967	8,9500	16,1500	23,3500	30,5500	37,7500
20,010	7,8600	13,6200	19,3800	25,1400	30,9000
20,053	6,7700	11,0900	15,4100	19,7300	24,0500
20,096	5,6800	8,5600	11,4400	14,3200	17,2000
20,139	4,5900	6,0300	7,4700	8,9100	10,3500
20,182	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000	3,5000



ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G (Gpa)					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
19,751	6,0000	12,0000	18,0000	24,0000	30,0000
19,794	5,5290	10,9290	16,3290	21,7290	27,1290
19,837	5,0580	9,8580	14,6580	19,4580	24,2580
19,880	4,5870	8,7870	12,9870	17,1870	21,3870
19,923	4,1160	7,7160	11,3160	14,9160	18,5160
19,967	3,6450	6,6450	9,6450	12,6450	15,6450
20,010	3,1740	5,5740	7,9740	10,3740	12,7740
20,053	2,7030	4,5030	6,3030	8,1030	9,9030
20,096	2,2320	3,4320	4,6320	5,8320	7,0320
20,139	1,7610	2,3610	2,9610	3,5610	4,1610
20,182	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900	1,2900



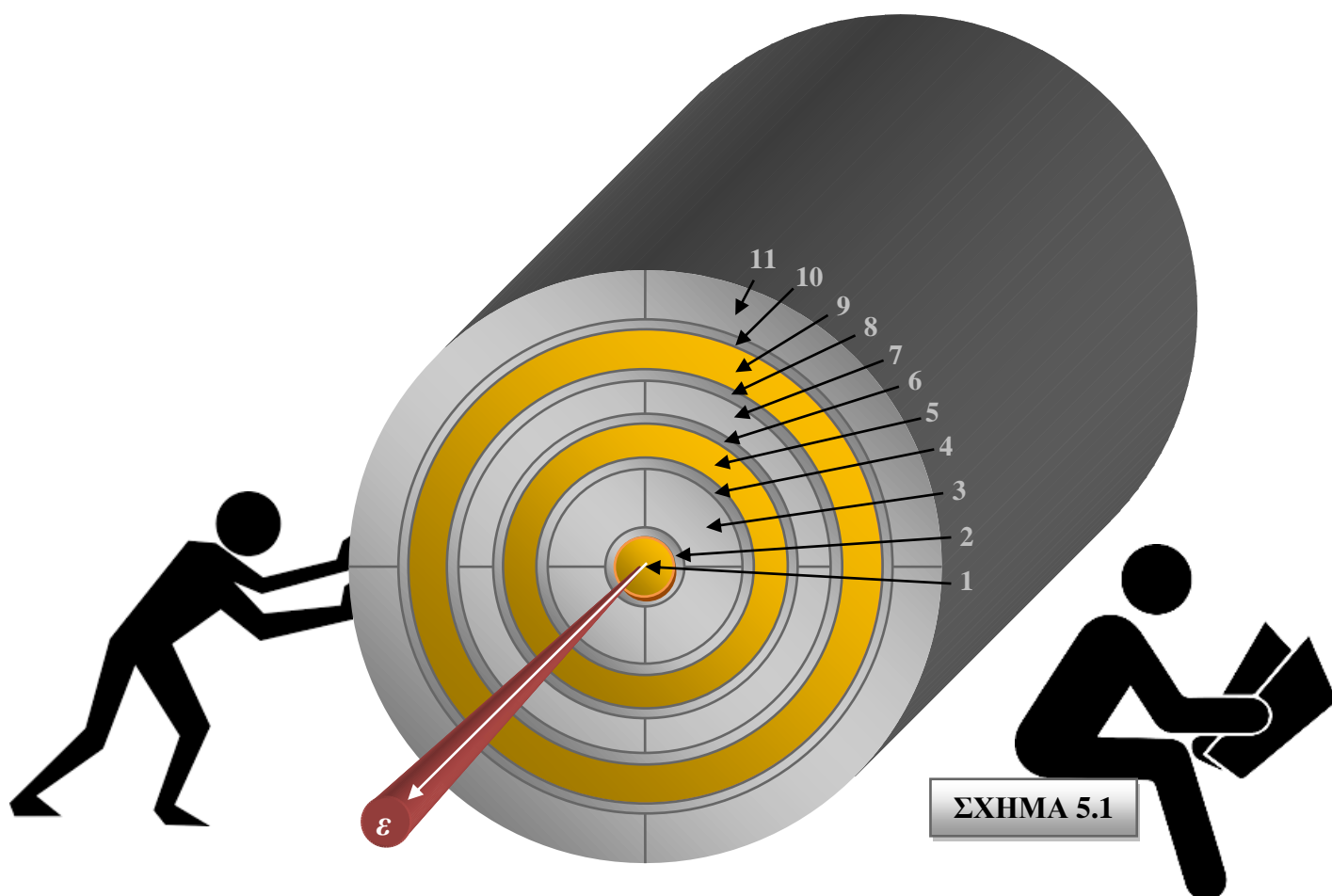
ΛΟΓΟΣ POISSON ν					
r(μm)	ξ=0,2	ξ=0,4	ξ=0,6	ξ=0,8	ξ=1
19,751	0,0400	0,0800	0,1200	0,1600	0,2000
19,794	0,0710	0,1070	0,1430	0,1790	0,2150
19,837	0,1020	0,1340	0,1660	0,1980	0,2300
19,880	0,1330	0,1610	0,1890	0,2170	0,2450
19,923	0,1640	0,1880	0,2120	0,2360	0,2600
19,967	0,1950	0,2150	0,2350	0,2550	0,2750
20,010	0,2260	0,2420	0,2580	0,2740	0,2900
20,053	0,2570	0,2690	0,2810	0,2930	0,3050
20,096	0,2880	0,2960	0,3040	0,3120	0,3200
20,139	0,3190	0,3230	0,3270	0,3310	0,3350
20,182	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500	0,3500



5.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Η θεωρητική ανάπτυξη του κυλινδρικού ενδεκαφασικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε για την παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εξής παραδοχές:

- i. Το έγκλεισμα αποτελείται από ίνες που έχουν τέλειο κυλινδρικό σχήμα.
- ii. Οι φάσεις του σύνθετου υλικού θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά.
- iii. Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές.
- iv. Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.



Να αναφέρουμε σε αυτό το σημείο ότι:

$Q_{f,1} = Q_1$ το «1» συμβολίζει την 1η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$Q_{i,1} = Q_2$ το «2» συμβολίζει την 2η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,1} = Q_3$ το «3» συμβολίζει την 3η φάση (περιοχή με μήτρα)

$Q_{i,2} = Q_4$ το «4» συμβολίζει την 4η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{f,2} = Q_5$ το «5» συμβολίζει την 5η φάση (περιοχή με έγκλεισμα)

$Q_{i,3} = Q_6$ το «6» συμβολίζει την 6η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,2} = Q_7$ το «7» συμβολίζει την 7η φάση (περιοχή με μήτρα)

$Q_{i,4} = Q_8$ το «8» συμβολίζει την 8η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{f,3} = Q_9$ το «9» συμβολίζει την 9η φάση (περιοχή με μήτρα)

$Q_{i,5} = Q_{10}$ το «10» συμβολίζει την 10η φάση (περιοχή ενδιάμεσης φάσης)

$Q_{m,3} = Q_{11}$ το «11» συμβολίζει την 11η φάση (περιοχή με μήτρα)

Όπου Q μπορεί να συμβολίζει είτε το μέτρο ελαστικότητας E , είτε το λόγο Poisson ν , είτε το μέτρο διατμήσεως G .

Στις ενότητες που θα ακολουθήσουν, θα εξάγουμε θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό, του διαμήκους και του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας, του διαμήκους και εγκάρσιου λόγου Poisson, του διαμήκους μέτρου διατμήσεως του σύνθετου υλικού με βάση το κυλινδρικό ενδεκαφασικό φασικό μοντέλο και με την βοήθεια της θεωρίας ελαστικότητας.

Στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγου Poisson ενός σύνθετου υλικού που δέχεται φόρτιση υπό γωνία σε συγκεκριμένη κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

5.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Θεωρούμε το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε (Ενότητα 5.1). Με τη χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω τώρα ότι ασκούμε εξωτερικά μία σταθερή αξονική παραμόρφωση ε , η οποία είναι η ίδια και για τις έντεκα φάσεις του υλικού (Σχήμα 5.1). Οπότε η ανάλυση έχει ως εξής:

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε την τασική συνάρτηση Φ που περιγράφει το πρόβλημά μας εκφρασμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η γενική μορφή της τασικής συνάρτησης είναι:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2d^3 \Phi}{rdr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr}$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4$$

όπου J_1, J_2, J_3 και J_4 είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις έντεκα φάσεις έχει τη δική της τασική συνάρτηση που τη χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.2.1)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.2.2)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.2.3)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.2.4)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.2.5)$$

$$\Phi_6 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \quad (5.2.6)$$

$$\Phi_7 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \quad (5.2.7)$$

$$\Phi_8 = M_1 \ln r + M_2 r^2 \ln r + M_3 r^2 + M_4 \quad (5.2.8)$$

$$\Phi_9 = N_1 \ln r + N_2 r^2 \ln r + N_3 r^2 + N_4 \quad (5.2.9)$$

$$\Phi_{10} = P_1 \ln r + P_2 r^2 \ln r + P_3 r^2 + P_4 \quad (5.2.10)$$

$$\Phi_{11} = R_1 \ln r + R_2 r^2 \ln r + R_3 r^2 + R_4 \quad (5.2.11)$$

ΤΑΣΕΙΣ

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \text{ και } \sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

Έτσι έχουμε:

$$\sigma_{r,1} = \frac{A_1}{r^2} + A_2(2 \ln r + 1) + 2A_3 \quad (5.2.12)$$

$$\sigma_{\theta,1} = -\frac{A_1}{r^2} + A_2(2 \ln r + 3) + 2A_3 \quad (5.2.13)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + B_2(2 \ln r + 1) + 2B_3 \quad (5.2.14)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + B_2(2 \ln r + 3) + 2B_3 \quad (5.2.15)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + C_2(2 \ln r + 1) + 2C_3 \quad (5.2.16)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + C_2(2 \ln r + 3) + 2C_3 \quad (5.2.17)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + D_2(2 \ln r + 1) + 2D_3 \quad (5.2.18)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + D_2(2 \ln r + 3) + 2D_3 \quad (5.2.19)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + F_2(2 \ln r + 1) + 2F_3 \quad (5.2.20)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + F_2(2 \ln r + 3) + 2F_3 \quad (5.2.21)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{H_1}{r^2} + H_2(2 \ln r + 1) + 2H_3 \quad (5.2.22)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{H_1}{r^2} + H_2(2 \ln r + 3) + 2H_3 \quad (5.2.23)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{K_1}{r^2} + K_2(2 \ln r + 1) + 2K_3 \quad (5.2.24)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{K_1}{r^2} + K_2(2 \ln r + 3) + 2K_3 \quad (5.2.25)$$

$$\sigma_{r,8} = \frac{M_1}{r^2} + M_2(2 \ln r + 1) + 2M_3 \quad (5.2.26)$$

$$\sigma_{\theta,8} = -\frac{M_1}{r^2} + M_2(2 \ln r + 3) + 2M_3 \quad (5.2.27)$$

$$\sigma_{r,9} = \frac{N_1}{r^2} + N_2(2 \ln r + 1) + 2N_3 \quad (5.2.28)$$

$$\sigma_{\theta,9} = -\frac{N_1}{r^2} + N_2(2 \ln r + 3) + 2N_3 \quad (5.2.29)$$

$$\sigma_{r,10} = \frac{P_1}{r^2} + P_2(2 \ln r + 1) + 2P_3 \quad (5.2.30)$$

$$\sigma_{\theta,10} = -\frac{P_1}{r^2} + P_2(2 \ln r + 3) + 2P_3 \quad (5.2.31)$$

$$\sigma_{r,11} = \frac{R_1}{r^2} + R_2(2 \ln r + 1) + 2R_3 \quad (5.2.32)$$

$$\sigma_{\theta,11} = -\frac{R_1}{r^2} + R_2(2 \ln r + 3) + 2R_3 \quad (5.2.33)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στη θέση $r=0$ θα πρέπει οι σταθερές A_1 και A_2 να ισούνται με το μηδέν. Δηλαδή, $A_1=A_2=0$. Επίσης μπορεί να δειχθεί εξισώνοντας τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για τη 2^η και 3^η φάση, για την 3^η και την 4^η, για την 4^η και την 5^η, για την 5^η και την 6^η, για την 6^η και την 7^η, για την 7^η και την 8^η, για την 9^η και την 10^η και για την 10^η και την 11^η, ότι $B_2=C_2= D_2=F_2= H_2=K_2= M_2=N_2= P_2=R_2=0$. Οπότε οι σχέσεις (5.2.12) έως (5.2.33) γίνονται:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.2.34)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.2.35)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.36)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.2.37)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.38)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.2.39)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.40)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.2.41)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.42)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.2.43)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.2.44)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.2.45)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.2.46)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.2.47)$$

$$\sigma_{r,8} = \frac{M_1}{r^2} + 2M_3 \quad (5.2.48)$$

$$\sigma_{\theta,8} = -\frac{M_1}{r^2} + 2M_3 \quad (5.2.49)$$

$$\sigma_{r,9} = \frac{N_1}{r^2} + 2N_3 \quad (5.2.50)$$

$$\sigma_{\theta,9} = -\frac{N_1}{r^2} + 2N_3 \quad (5.2.51)$$

$$\sigma_{r,10} = \frac{P_1}{r^2} + 2P_3 \quad (5.2.52)$$

$$\sigma_{\theta,10} = -\frac{P_1}{r^2} + 2P_3 \quad (5.2.53)$$

$$\sigma_{r,11} = \frac{R_1}{r^2} + 2R_3 \quad (5.2.54)$$

$$\sigma_{\theta,11} = -\frac{R_1}{r^2} + 2R_3 \quad (5.2.55)$$

Οι αξονικές τάσεις $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}, \sigma_{z,8}, \sigma_{z,9}, \sigma_{z,10}$ και $\sigma_{z,11}$ θα υπολογιστούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και τη συνθήκη:

$$\varepsilon_{z,1}, \varepsilon_{z,2}, \varepsilon_{z,3}, \varepsilon_{z,4}, \varepsilon_{z,5}, \varepsilon_{z,6}, \varepsilon_{z,7}, \varepsilon_{z,8}, \varepsilon_{z,9}, \varepsilon_{z,10}, \varepsilon_{z,11} = \varepsilon$$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = \varepsilon \quad (5.2.56)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = \varepsilon \quad (5.2.57)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = \varepsilon \quad (5.2.58)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = \varepsilon \quad (5.2.59)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5} [\sigma_{z,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})] = \varepsilon \quad (5.2.60)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6} [\sigma_{z,6} - \nu_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})] = \varepsilon \quad (5.2.61)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7} [\sigma_{z,7} - \nu_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})] = \varepsilon \quad (5.2.62)$$

$$\varepsilon_{z,8} = \frac{1}{E_8} [\sigma_{z,8} - \nu_8(\sigma_{r,8} + \sigma_{\theta,8})] = \varepsilon \quad (5.2.63)$$

$$\varepsilon_{z,9} = \frac{1}{E_9} [\sigma_{z,9} - \nu_9(\sigma_{r,9} + \sigma_{\theta,9})] = \varepsilon \quad (5.2.64)$$

$$\varepsilon_{z,10} = \frac{1}{E_{10}} [\sigma_{z,10} - \nu_{10}(\sigma_{r,10} + \sigma_{\theta,10})] = \varepsilon \quad (5.2.65)$$

$$\varepsilon_{z,11} = \frac{1}{E_{11}} [\sigma_{z,11} - \nu_{11}(\sigma_{r,11} + \sigma_{\theta,11})] = \varepsilon \quad (5.2.66)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.2.56) έως (5.2.66) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (5.2.34) έως (5.2.55) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = \varepsilon E_1 + 4\nu_1 A_3 \quad (5.2.67)$$

$$\sigma_{z,2} = \varepsilon E_2 + 4\nu_2 B_3 \quad (5.2.68)$$

$$\sigma_{z,3} = \varepsilon E_3 + 4\nu_3 C_3 \quad (5.2.69)$$

$$\sigma_{z,4} = \varepsilon E_4 + 4\nu_4 D_3 \quad (5.2.70)$$

$$\sigma_{z,5} = \varepsilon E_5 + 4\nu_5 F_3 \quad (5.2.71)$$

$$\sigma_{z,6} = \varepsilon E_6 + 4\nu_6 H_3 \quad (5.2.72)$$

$$\sigma_{z,7} = \varepsilon E_7 + 4\nu_7 K_3 \quad (5.2.73)$$

$$\sigma_{z,8} = \varepsilon E_8 + 4\nu_8 M_3 \quad (5.2.74)$$

$$\sigma_{z,9} = \varepsilon E_9 + 4\nu_9 N_3 \quad (5.2.75)$$

$$\sigma_{z,10} = \varepsilon E_{10} + 4\nu_{10} P_3 \quad (5.2.76)$$

$$\sigma_{z,11} = \varepsilon E_{11} + 4\nu_{11} R_3 \quad (5.2.77)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ

Οι ακτινικές μετατοπίσεις δίνονται από τις εξισώσεις:

$$u_{r,1} = \frac{r}{E_1} [2A_3(1 - \nu_1 + \nu_1^2) - E_1 \nu_1 \varepsilon] \quad (5.2.78)$$

$$u_{r,2} = \frac{r}{E_2} \left[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - \nu_2^2) - E_2 \nu_2 \varepsilon \right] \quad (5.2.79)$$

$$u_{r,3} = \frac{r}{E_3} \left[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - \nu_3^2) - E_3 \nu_3 \varepsilon \right] \quad (5.2.80)$$

$$u_{r,4} = \frac{r}{E_4} \left[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - \nu_4^2) - E_4 \nu_4 \varepsilon \right] \quad (5.2.81)$$

$$u_{r,5} = \frac{r}{E_5} \left[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - \nu_5^2) - E_5 \nu_5 \varepsilon \right] \quad (5.2.82)$$

$$u_{r,6} = \frac{r}{E_6} \left[-(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - \nu_6^2) - E_6 \nu_6 \varepsilon \right] \quad (5.2.83)$$

$$u_{r,7} = \frac{r}{E_7} \left[-(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - \nu_7^2) - E_7 \nu_7 \varepsilon \right] \quad (5.2.84)$$

$$u_{r,8} = \frac{r}{E_8} \left[-(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - \nu_8^2) - E_8 \nu_8 \varepsilon \right] \quad (5.2.85)$$

$$u_{r,9} = \frac{r}{E_9} \left[-(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - \nu_9^2) - E_9 \nu_9 \varepsilon \right] \quad (5.2.86)$$

$$u_{r,10} = \frac{r}{E_{10}} \left[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - \nu_{10}^2) - E_{10} \nu_{10} \varepsilon \right] \quad (5.2.87)$$

$$u_{r,11} = \frac{r}{E_{11}} \left[-(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - \nu_{11}^2) - E_{11} \nu_{11} \varepsilon \right] \quad (5.2.88)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι εκφράσεις για τις παραμορφώσεις ε_r και ε_θ των έντεκα φάσεων προκύπτουν από τις σχέσεις (5.2.78) έως (5.2.88) και τις παρακάτω σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \text{και} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,1} = \frac{[2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \varepsilon E_1 \nu_1]}{E_1} \right. \quad (5.2.89)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,1} = \frac{[2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - \varepsilon E_1 \nu_1]}{E_1} \right. \quad (5.2.90)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,1} = \varepsilon \right. \quad (5.2.91)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,2} = \frac{[(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \varepsilon E_2 \nu_2]}{E_2} \right. \quad (5.2.92)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,2} = \frac{[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - \varepsilon E_2 \nu_2]}{E_2} \right. \quad (5.2.93)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,2} = \varepsilon \right. \quad (5.2.94)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,3} = \frac{[(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \varepsilon E_3 \nu_3]}{E_3} \right. \quad (5.2.95)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,3} = \frac{[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - \varepsilon E_3 \nu_3]}{E_3} \right. \quad (5.2.96)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,3} = \varepsilon \right. \quad (5.2.97)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,4} = \frac{[(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - \varepsilon E_4 \nu_4]}{E_4} \right. \quad (5.2.98)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,4} = \frac{[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - \varepsilon E_4 \nu_4]}{E_4} \right. \quad (5.2.99)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,4} = \varepsilon \right. \quad (5.2.100)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,5} = \frac{[(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - \varepsilon E_5 \nu_5]}{E_5} \right. \quad (5.2.101)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,5} = \frac{[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - \varepsilon E_5 \nu_5]}{E_5} \right. \quad (5.2.102)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,5} = \varepsilon \right. \quad (5.2.103)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.78) και (5.2.79) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_2[2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2) - E_1\nu_1\varepsilon] \\ = E_1 \left[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - E_2\nu_2\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.115)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.79) και (5.2.80) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_3 \left[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) - E_2\nu_2\varepsilon \right] \\ = E_2 \left[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - E_3\nu_3\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.116)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.80) και (5.2.81) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_4 \left[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) - E_3\nu_3\varepsilon \right] \\ = E_3 \left[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - E_4\nu_4\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.117)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.81) και (5.2.82) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_5 \left[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) - E_4\nu_4\varepsilon \right] \\ = E_4 \left[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - E_5\nu_5\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.118)$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.82) και (5.2.83) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_6 \left[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) - E_5\nu_5\varepsilon \right] \\ = E_5 \left[-(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) - E_6\nu_6\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.119)$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.83) και (5.2.84) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_7 \left[-(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) - E_6\nu_6\varepsilon \right] \\ = E_6 \left[-(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) - E_7\nu_7\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.120)$$

Για $r = r_7$: $u_{r,7} = u_{r,8}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.84) και (5.2.85) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_8 \left[-(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) - E_7\nu_7\varepsilon \right] \\ = E_7 \left[-(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) - E_8\nu_8\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.121)$$

Για $r = r_8$: $u_{r,8} = u_{r,9}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.85) και (5.2.86) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_9 \left[-(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) - E_8\nu_8\varepsilon \right] \\ = E_8 \left[-(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) - E_9\nu_9\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.122)$$

Για $r = r_9$: $u_{r,9} = u_{r,10}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.86) και (5.2.87) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{10} \left[-(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) - E_9\nu_9\varepsilon \right] \\ = E_9 \left[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) - E_{10}\nu_{10}\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.123)$$

Για $r = r_{10}$: $u_{r,10} = u_{r,11}$ και άρα από τις σχέσεις (5.2.87) και (5.2.88) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{11} \left[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) - E_{10}\nu_{10}\varepsilon \right] \\ = E_{10} \left[-(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2) - E_{11}\nu_{11}\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.2.124)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιαμέση φάση και άρα θα έχουμε ότι $\xi=1$ και επομένως θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1: E_1 = E_2 \text{ και } v_1 = v_2 \quad (5.2.125)$$

$$\text{Για } r = r_2: E_2 = E_3 \text{ και } v_2 = v_3 \quad (5.2.126)$$

$$\text{Για } r = r_3: E_3 = E_4 \text{ και } v_3 = v_4 \quad (5.2.127)$$

$$\text{Για } r = r_4: E_4 = E_5 \text{ και } v_4 = v_5 \quad (5.2.128)$$

$$\text{Για } r = r_5: E_5 = E_6 \text{ και } v_5 = v_6 \quad (5.2.129)$$

$$\text{Για } r = r_6: E_6 = E_7 \text{ και } v_6 = v_7 \quad (5.2.130)$$

$$\text{Για } r = r_7: E_7 = E_8 \text{ και } v_7 = v_8 \quad (5.2.131)$$

$$\text{Για } r = r_8: E_8 = E_9 \text{ και } v_8 = v_9 \quad (5.2.132)$$

$$\text{Για } r = r_9: E_9 = E_{10} \text{ και } v_9 = v_{10} \quad (5.2.133)$$

$$\text{Για } r = r_{10}: E_{10} = E_{11} \text{ και } v_{10} = v_{11} \quad (5.2.134)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.2.115) έως (5.2.124) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.2.125) έως (5.2.134) θα έχουμε:

- Για $r = r_1: u_{r,1} = u_{r,2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2A_3(1 - v_1 - 2v_1^2) = -(1 + v_2) \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) \xrightarrow{v_1=v_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + v_2) \frac{B_1}{r_1^2} = 2(1 - v_2 - 2v_2^2)(B_3 - A_3)} \quad (5.2.135)$$

- Για $r = r_2: u_{r,2} = u_{r,3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + v_2) \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) = -(1 + v_3) \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3(1 - v_3 - 2v_3^2) \xrightarrow{v_2=v_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + v_3) \frac{B_1 - C_1}{r_2^2} = 2(1 - v_3 - 2v_3^2)(B_3 - C_3)} \quad (5.2.136)$$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_3: u_{r,3} = u_{r,4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) = -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \xrightarrow{\nu_3=\nu_4}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_4) \frac{C_1 - D_1}{r_3^2} = 2(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)(C_3 - D_3)}$ (5.2.137)

- $\Gamma\iota\alpha r = r_4: u_{r,4} = u_{r,5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) = -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \xrightarrow{\nu_4=\nu_5}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_5) \frac{D_1 - F_1}{r_4^2} = 2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)(D_3 - F_3)}$ (5.2.138)

- $\Gamma\iota\alpha r = r_5: u_{r,5} = u_{r,6} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) = -(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r_5^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \xrightarrow{\nu_5=\nu_6}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_6) \frac{F_1 - H_1}{r_5^2} = 2(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2)(F_3 - H_3)}$ (5.2.139)

- $\Gamma\iota\alpha r = r_6: u_{r,6} = u_{r,7} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r_6^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) = -(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r_6^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \xrightarrow{\nu_6=\nu_7}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_7) \frac{H_1 - K_1}{r_6^2} = 2(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)(H_3 - K_3)}$ (5.2.140)

- $\Gamma\iota\alpha r = r_7: u_{r,7} = u_{r,8} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r_7^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) = -(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r_7^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) \xrightarrow{\nu_7=\nu_8}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_8) \frac{K_1 - M_1}{r_7^2} = 2(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2)(K_3 - M_3)}$ (5.2.141)

- $\Gamma\iota\alpha r = r_8: u_{r,8} = u_{r,9} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r_8^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) = -(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r_8^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) \xrightarrow{\nu_8=\nu_9}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_9) \frac{M_1 - N_1}{r_8^2} = 2(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)(M_3 - N_3)}$ (5.2.142)

- Για $r = r_9$: $u_{r,9} = u_{r,10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r_9^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) = -(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r_9^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) \xrightarrow{\nu_9 = \nu_{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_{10}) \frac{N_1 - P_1}{r_9^2} = 2(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)(N_3 - P_3)} \quad (5.2.143)$$

- Για $r = r_{10}$: $u_{r,10} = u_{r,11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r_{10}^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) = -(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r_{10}^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2) \xrightarrow{\nu_{10} = \nu_{11}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_{11}) \frac{P_1 - R_1}{r_{10}^2} = 2(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)(P_3 - R_3)} \quad (5.2.144)$$

Οι εξισώσεις (5.2.104) έως (5.2.114) και (5.2.135) έως (5.2.144) αποτελούν **σύστημα 21 εξισώσεων με 21 αγνώστους**. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, H_1, H_3, K_1, K_3, M_1, M_3, N_1, N_3, P_1, P_3, R_1$ και R_3 . Οι τιμές των σταθερών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:

$$A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_3 = D_1 = D_3 = F_1 = F_3 = H_1 = H_3 = K_1 = K_3 = M_1 = M_3 = N_1 = N_3 = P_1 = P_3 = R_1 = R_3 = 0.$$

Οι τιμές των σταθερών μετά τη λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L και του διαμήκους λόγου Poisson ν_{LT} ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε παρακάτω, οι τιμές που θα βρούμε για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των έντεκα φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{V_c} E_L \varepsilon^2 dV_c \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) dV_6 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) dV_7 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_8} (\sigma_{r,8} \varepsilon_{r,8} + \sigma_{\theta,8} \varepsilon_{\theta,8} + \sigma_{z,8} \varepsilon_{z,8}) dV_8 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_9} (\sigma_{r,9} \varepsilon_{r,9} + \sigma_{\theta,9} \varepsilon_{\theta,9} + \sigma_{z,9} \varepsilon_{z,9}) dV_9 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_{10}} (\sigma_{r,10} \varepsilon_{r,10} + \sigma_{\theta,10} \varepsilon_{\theta,10} + \sigma_{z,10} \varepsilon_{z,10}) dV_{10} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_{11}} (\sigma_{r,11} \varepsilon_{r,11} + \sigma_{\theta,11} \varepsilon_{\theta,11} + \sigma_{z,11} \varepsilon_{z,11}) dV_{11} \tag{5.2.145}
\end{aligned}$$

Όπου, $dV = 2\pi r h dr$

Συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{V_c} E_L \varepsilon^2 dV_c \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_5}^{r_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_6}^{r_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_7}^{r_8} (\sigma_{r,8} \varepsilon_{r,8} + \sigma_{\theta,8} \varepsilon_{\theta,8} + \sigma_{z,8} \varepsilon_{z,8}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_8}^{r_9} (\sigma_{r,9} \varepsilon_{r,9} + \sigma_{\theta,9} \varepsilon_{\theta,9} + \sigma_{z,9} \varepsilon_{z,9}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_9}^{r_{10}} (\sigma_{r,10} \varepsilon_{r,10} + \sigma_{\theta,10} \varepsilon_{\theta,10} + \sigma_{z,10} \varepsilon_{z,10}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_{10}}^{r_{11}} (\sigma_{r,11} \varepsilon_{r,11} + \sigma_{\theta,11} \varepsilon_{\theta,11} + \sigma_{z,11} \varepsilon_{z,11}) 2\pi r h dr \tag{5.2.146}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.2.146) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.2.34) έως (5.2.55) και (5.2.67) έως (5.2.77), αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.2.89) έως (5.2.121), και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών

$A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, H_1, H_3, K_1, K_3, M_1, M_3, N_1, N_3, P_1, P_3, R_1$ και R_3 που προέκυψαν από τη λύση του συστήματος παραπάνω, απλοποιώντας θα προκύψει η σχέση:

$$\begin{aligned}
E_L \int_0^{r_{11}} r dr &= E_1 \int_0^{r_1} r dr + \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 \int_{r_2}^{r_3} r dr + \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 \int_{r_4}^{r_5} r dr \\
&+ \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr + E_7 \int_{r_6}^{r_7} r dr + \int_{r_7}^{r_8} r E_8(r) dr + E_9 \int_{r_8}^{r_9} r dr + \int_{r_9}^{r_{10}} r E_{10}(r) dr \\
&+ E_{11} \int_{r_{10}}^{r_{11}} r dr \tag{5.2.147}
\end{aligned}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

$$U_1 = \frac{r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_{11}^2}$$

$$U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_{11}^2}$$

$$U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_{11}^2}$$

$$U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_{11}^2}$$

$$U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_{11}^2}$$

$$U_8 = \frac{r_8^2 - r_7^2}{r_{11}^2}$$

$$U_9 = \frac{r_9^2 - r_8^2}{r_{11}^2}$$

$$U_{10} = \frac{r_{10}^2 - r_9^2}{r_{11}^2}$$

$$U_{11} = \frac{r_{11}^2 - r_{10}^2}{r_{11}^2}$$

Θα έχουμε:

$$E_L = E_1 U_1 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} r E_2(r) dr + E_3 U_3 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} r E_4(r) dr + E_5 U_5 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} r E_6(r) dr \\ + E_7 U_7 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} r E_8(r) dr + E_9 U_9 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} r E_{10}(r) dr + E_{11} U_{11} \quad (5.2.148)$$

Θεωρώντας όμως ότι οι συναρτήσεις $E_2(r), E_4(r), E_6(r), E_8(r)$ και $E_{10}(r)$ ακολουθούν τη γραμμική μεταβολή, όπως υποθέσαμε προηγουμένως, και εκτελώντας τις ολοκληρώσεις χρησιμοποιώντας τη γραμμική μεταβολή, θα έχουμε:

$$E_L = -\frac{E_1 r_1^2}{2} + \frac{E_9 r_{10}^2}{2} + \frac{E_1 r_2^2}{2} - \frac{E_1 r_1^3}{6(r_2 - r_1)} + \frac{E_3 r_1^3}{6(r_2 - r_1)} + \frac{E_1 r_1 r_2^2}{2(r_2 - r_1)} - \frac{E_3 r_1 r_2^2}{2(r_2 - r_1)} - \frac{E_1 r_2^3}{3(r_2 - r_1)} + \frac{E_3 r_2^3}{3(r_2 - r_1)} - \frac{E_3 r_2^2}{2} \\ + \frac{E_3 r_4^2}{2} - \frac{E_3 r_3^3}{6(r_4 - r_3)} + \frac{E_5 r_3^3}{6(r_4 - r_3)} + \frac{E_3 r_3 r_4^2}{2(r_4 - r_3)} - \frac{E_5 r_3 r_4^2}{2(r_4 - r_3)} - \frac{E_3 r_4^3}{3(r_4 - r_3)} + \frac{E_5 r_4^3}{3(r_4 - r_3)} - \frac{E_5 r_5^2}{2} \\ + \frac{E_5 r_6^2}{2} - \frac{E_5 r_5^3}{6(r_6 - r_5)} + \frac{E_7 r_5^3}{6(r_6 - r_5)} + \frac{E_5 r_5 r_6^2}{2(r_6 - r_5)} - \frac{E_7 r_5 r_6^2}{2(r_6 - r_5)} - \frac{E_5 r_6^3}{3(r_6 - r_5)} + \frac{E_7 r_6^3}{3(r_6 - r_5)} - \frac{E_7 r_7^2}{2} \\ + \frac{E_7 r_8^2}{2} - \frac{E_7 r_7^3}{6(r_8 - r_7)} + \frac{E_9 r_7^3}{6(r_8 - r_7)} + \frac{E_7 r_7 r_8^2}{2(r_8 - r_7)} - \frac{E_9 r_7 r_8^2}{2(r_8 - r_7)} - \frac{E_7 r_8^3}{3(r_8 - r_7)} + \frac{E_9 r_8^3}{3(r_8 - r_7)} \\ + \frac{E_{11} r_{10}^3}{3(r_{10} - r_9)} - \frac{E_9 r_{10}^3}{3(r_{10} - r_9)} - \frac{E_{11} r_9 r_{10}^2}{2(r_{10} - r_9)} + \frac{E_9 r_9 r_{10}^2}{2(r_{10} - r_9)} - \frac{E_9 r_9^2}{2} + \frac{E_{11} r_9^3}{6(r_{10} - r_9)} - \frac{E_9 r_9^3}{6(r_{10} - r_9)} + E_1 U_1 \\ + E_3 U_3 + E_5 U_5 + E_7 U_7 + E_9 U_9 + E_{11} U_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_L \\ = \frac{1}{6} \{ \mathbf{E}_m [6(U_{11} + U_3 + U_7) + r_{11}^2(-7U_1 - 2U_{10} - 2U_2 - 5\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} - 2U_4 \\ + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - 7U_5 - 2U_6 \\ - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6} - 2U_8 \\ + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8} - 7U_9 \\ - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9}\sqrt{U_1 + U_{10} + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9})] \\ + \mathbf{E}_f [(6 + 7r_{11}^2)U_1 + 5r_{11}^2\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} + 6(U_5 + U_9) + r_{11}^2(5U_{10} + 5U_2 + 5U_4 \\ - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + 7U_5 + 5U_6 \\ + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6} + 5U_8 \\ - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8} + 7U_9 \\ + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10}})] \} \\ (5.2.149)$$

5.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}

Ο διαμήκης λόγος Poisson του σύνθετου υλικού με βάση το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο ορίζεται ως:

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} \quad (5.3.1)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\begin{aligned} \nu_{LT} &= -\frac{1}{\varepsilon V_c} \int_{V_c} \varepsilon_r dV_c \\ &= -\frac{1}{\varepsilon V_c} \left[\int_{V_1} \varepsilon_{r,1} dV_1 + \int_{V_2} \varepsilon_{r,2} dV_2 + \int_{V_3} \varepsilon_{r,3} dV_3 + \int_{V_4} \varepsilon_{r,4} dV_4 + \int_{V_5} \varepsilon_{r,5} dV_5 \right. \\ &\quad + \int_{V_6} \varepsilon_{r,6} dV_6 + \int_{V_7} \varepsilon_{r,7} dV_7 + \int_{V_8} \varepsilon_{r,8} dV_8 + \int_{V_9} \varepsilon_{r,9} dV_9 + \int_{V_{10}} \varepsilon_{r,10} dV_{10} \\ &\quad \left. + \int_{V_{11}} \varepsilon_{r,11} dV_{11} \right] \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Όπου $V = \pi r^2 h$, δηλαδή $dV = 2\pi r h$ επομένως θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \nu_{LT} &= -\frac{1}{\varepsilon \pi h r_{11}^2} \left[\int_{r_5}^{r_1} 2\pi r h \varepsilon_{r,1} dr + \int_{r_6}^{r_2} 2\pi r h \varepsilon_{r,2} dr + \int_{r_7}^{r_3} 2\pi r h \varepsilon_{r,3} dr + \int_{r_8}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,4} dr \right. \\ &\quad + \int_{r_9}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,5} dr + \int_{r_{10}}^{r_5} 2\pi r h \varepsilon_{r,6} dr + \int_{r_6}^{r_2} 2\pi r h \varepsilon_{r,7} dr + \int_{r_7}^{r_3} 2\pi r h \varepsilon_{r,8} dr \\ &\quad \left. + \int_{r_8}^{r_4} 2\pi r h \varepsilon_{r,9} dr + \int_{r_9}^{r_5} 2\pi r h \varepsilon_{r,10} dr + \int_{r_{10}}^{r_6} 2\pi r h \varepsilon_{r,11} dr \right] \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Αν στην εξίσωση (5.3.3) αντικαταστήσουμε τις ακτινικές παραμορφώσεις από τις σχέσεις (5.2.89), (5.2.92), (5.2.95), (5.2.98), (5.2.101), (5.2.104), (5.2.107), (5.2.110), (5.2.113), (5.2.116) και (5.2.119), και ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας τη λύση του συστήματος 21x21 (σελ.109) εκτελώντας τις απαραίτητες απλοποιήσεις και ολοκληρώσεις γνωρίζοντας τις σχέσεις στη σελ.112 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
v_{LT} = & v_1 U_1 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} v_2(r) dr + v_3 U_3 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} v_4(r) dr + v_5 U_5 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} v_6(r) dr + v_7 U_7 \\
& + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} v_8(r) dr + v_9 U_9 + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} v_{10}(r) dr + v_{11} U_{11}
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

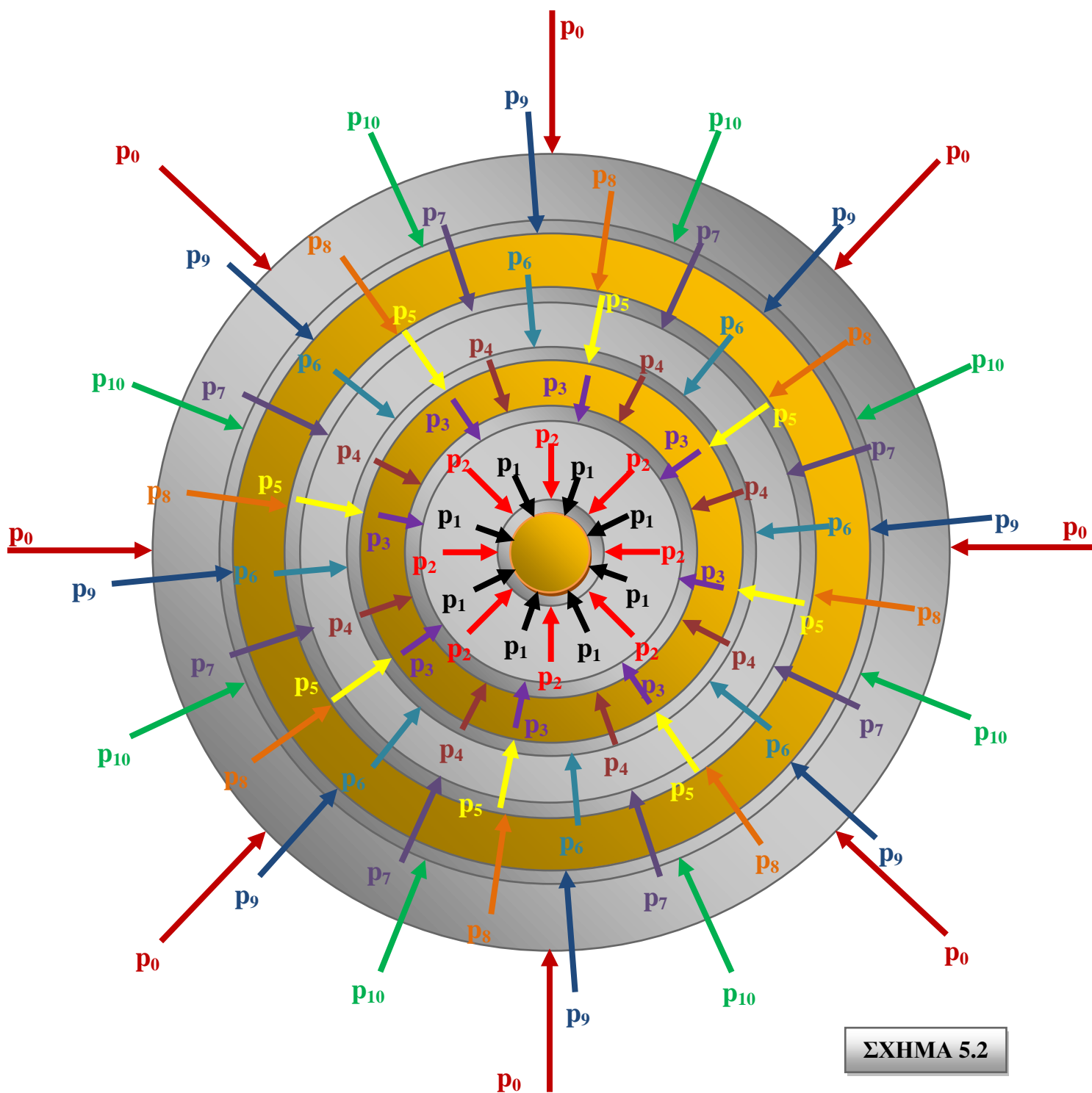
Θεωρώντας τώρα, όπως και προηγουμένως στον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_{LT} , ότι οι συναρτήσεις $v_2(r)$, $v_4(r)$, $v_6(r)$, $v_8(r)$ και $v_{10}(r)$ ακολουθούν τη γραμμική μεταβολή, εκτελώντας τις ολοκληρώσεις χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της γραμμικής μεταβολής, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow v_{LT} \\
& = \frac{1}{6} \{ \mathbf{v}_m [6(U_{11} + U_3 + U_7) + r_{11}^2 (-7U_1 - 2U_{10} - 2U_2 - 5\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} - 2U_4 \\
& + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} - 7U_5 - 2U_6 \\
& - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6} - 2U_8 \\
& + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8} - 7U_9 \\
& - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9}\sqrt{U_1 + U_{10} + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9}] \\
& + \mathbf{v}_f [(6 + 7r_{11}^2)U_1 + 5r_{11}^2\sqrt{U_1}\sqrt{U_1 + U_2} + 6(U_5 + U_9) + r_{11}^2(5U_{10} + 5U_2 + 5U_4 \\
& - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} + 7U_5 + 5U_6 \\
& + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6} + 5U_8 \\
& - 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8} + 7U_9 \\
& + 5\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9}\sqrt{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10}})] \} \\
& \tag{5.3.5}
\end{aligned}$$

5.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Θεωρούμε το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο όπως το περιγράψαμε (Ενότητα 5.1). Με τη χρήση αυτού του μοντέλου θα εξάγουμε έναν θεωρητικό τύπο για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας στο σύνθετο υλικό.

Έστω τώρα ότι στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας r_{11} ασκούμε ομοιόμορφη ακτινική πίεση p_0 . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ $10^{ns} - 11^{ns}$ φάσης στα σύνορά τους, θα ασκείται μία πίεση p_{10} . Αντίστοιχα, στα σύνορα $9^{ns} - 10^{ns}$, $8^{ns} - 9^{ns}$, $7^{ns} - 8^{ns}$, $6^{ns} - 7^{ns}$, $5^{ns} - 6^{ns}$, $4^{ns} - 5^{ns}$, $3^{ns} - 4^{ns}$, $2^{ns} - 3^{ns}$ και $1^{ns} - 2^{ns}$, θα ασκούνται πιέσεις $p_9, p_8, p_7, p_6, p_5, p_4, p_3, p_2, p_1$ αντίστοιχα (Σχήμα 5.2).



Οπότε η ανάλυση έχει ως εξής:

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η τασική συνάρτηση Airy (Φ) που περιγράφει το πρόβλημά μας και η λύση της είναι ίδιες με αυτές της ενότητας 5.2, οπότε θα έχουμε:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2d^3 \Phi}{rdr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr}$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι τύπου Euler της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi = J_1 \ln r + J_2 r^2 \ln r + J_3 r^2 + J_4$$

όπου J_1, J_2, J_3 και J_4 είναι σταθερές.

Η κάθε μία από τις έντεκα φάσεις (όπως και στην ενότητα 5.2) έχει τη δική της τασική συνάρτηση που τη χαρακτηρίζει και άρα θα έχουμε:

$$\Phi_1 = A_1 \ln r + A_2 r^2 \ln r + A_3 r^2 + A_4 \quad (5.4.1)$$

$$\Phi_2 = B_1 \ln r + B_2 r^2 \ln r + B_3 r^2 + B_4 \quad (5.4.2)$$

$$\Phi_3 = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \quad (5.4.3)$$

$$\Phi_4 = D_1 \ln r + D_2 r^2 \ln r + D_3 r^2 + D_4 \quad (5.4.4)$$

$$\Phi_5 = F_1 \ln r + F_2 r^2 \ln r + F_3 r^2 + F_4 \quad (5.4.5)$$

$$\Phi_6 = H_1 \ln r + H_2 r^2 \ln r + H_3 r^2 + H_4 \quad (5.4.6)$$

$$\Phi_7 = K_1 \ln r + K_2 r^2 \ln r + K_3 r^2 + K_4 \quad (5.4.7)$$

$$\Phi_8 = M_1 \ln r + M_2 r^2 \ln r + M_3 r^2 + M_4 \quad (5.4.8)$$

$$\Phi_9 = N_1 \ln r + N_2 r^2 \ln r + N_3 r^2 + N_4 \quad (5.4.9)$$

$$\Phi_{10} = P_1 \ln r + P_2 r^2 \ln r + P_3 r^2 + P_4 \quad (5.4.10)$$

$$\Phi_{11} = R_1 \ln r + R_2 r^2 \ln r + R_3 r^2 + R_4 \quad (5.4.11)$$

ΤΑΣΕΙΣ

Αφού η τασική συνάρτηση παραμένει ίδια με την ενότητα 5.2, τότε και οι τάσεις σ_r , σ_θ θα προκύπτουν ίδιες, οπότε θα είναι:

$$\sigma_{r,1} = 2A_3 \quad (5.4.12)$$

$$\sigma_{\theta,1} = 2A_3 \quad (5.4.13)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.14)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\frac{B_1}{r^2} + 2B_3 \quad (5.4.15)$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.16)$$

$$\sigma_{\theta,3} = -\frac{C_1}{r^2} + 2C_3 \quad (5.4.17)$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.18)$$

$$\sigma_{\theta,4} = -\frac{D_1}{r^2} + 2D_3 \quad (5.4.19)$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.20)$$

$$\sigma_{\theta,5} = -\frac{F_1}{r^2} + 2F_3 \quad (5.4.21)$$

$$\sigma_{r,6} = \frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.4.22)$$

$$\sigma_{\theta,6} = -\frac{H_1}{r^2} + 2H_3 \quad (5.4.23)$$

$$\sigma_{r,7} = \frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.4.24)$$

$$\sigma_{\theta,7} = -\frac{K_1}{r^2} + 2K_3 \quad (5.4.25)$$

$$\sigma_{r,8} = \frac{M_1}{r^2} + 2M_3 \quad (5.4.26)$$

$$\sigma_{\theta,8} = -\frac{M_1}{r^2} + 2M_3 \quad (5.4.27)$$

$$\sigma_{r,9} = \frac{N_1}{r^2} + 2N_3 \quad (5.4.28)$$

$$\sigma_{\theta,9} = -\frac{N_1}{r^2} + 2N_3 \quad (5.4.29)$$

$$\sigma_{r,10} = \frac{P_1}{r^2} + 2P_3 \quad (5.4.30)$$

$$\sigma_{\theta,10} = -\frac{P_1}{r^2} + 2P_3 \quad (5.4.31)$$

$$\sigma_{r,11} = \frac{R_1}{r^2} + 2R_3 \quad (5.4.32)$$

$$\sigma_{\theta,11} = -\frac{R_1}{r^2} + 2R_3 \quad (5.4.33)$$

Οι αξονικές τάσεις $\sigma_{z,1}, \sigma_{z,2}, \sigma_{z,3}, \sigma_{z,4}, \sigma_{z,5}, \sigma_{z,6}, \sigma_{z,7}, \sigma_{z,8}, \sigma_{z,9}, \sigma_{z,10}$ και $\sigma_{z,11}$ θα υπολογιστούν από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων και τη συνθήκη:

$$\varepsilon_{z,1}, \varepsilon_{z,2}, \varepsilon_{z,3}, \varepsilon_{z,4}, \varepsilon_{z,5}, \varepsilon_{z,6}, \varepsilon_{z,7}, \varepsilon_{z,8}, \varepsilon_{z,9}, \varepsilon_{z,10}, \varepsilon_{z,11} = 0$$

$$\varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = 0 \quad (5.4.34)$$

$$\varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = 0 \quad (5.4.35)$$

$$\varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = 0 \quad (5.4.36)$$

$$\varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = 0 \quad (5.4.37)$$

$$\varepsilon_{z,5} = \frac{1}{E_5} [\sigma_{z,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{\theta,5})] = 0 \quad (5.4.38)$$

$$\varepsilon_{z,6} = \frac{1}{E_6} [\sigma_{z,6} - \nu_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{\theta,6})] = 0 \quad (5.4.39)$$

$$\varepsilon_{z,7} = \frac{1}{E_7} [\sigma_{z,7} - \nu_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{\theta,7})] = 0 \quad (5.4.40)$$

$$\varepsilon_{z,8} = \frac{1}{E_8} [\sigma_{z,8} - \nu_8(\sigma_{r,8} + \sigma_{\theta,8})] = 0 \quad (5.4.41)$$

$$\varepsilon_{z,9} = \frac{1}{E_9} [\sigma_{z,9} - \nu_9(\sigma_{r,9} + \sigma_{\theta,9})] = 0 \quad (5.4.42)$$

$$\varepsilon_{z,10} = \frac{1}{E_{10}} [\sigma_{z,10} - \nu_{10}(\sigma_{r,10} + \sigma_{\theta,10})] = 0 \quad (5.4.43)$$

$$\varepsilon_{z,11} = \frac{1}{E_{11}} [\sigma_{z,11} - \nu_{11}(\sigma_{r,11} + \sigma_{\theta,11})] = 0 \quad (5.4.44)$$

Οι παραπάνω αξονικές παραμορφώσεις θεωρούμε ότι ισούνται με το μηδέν διότι το μήκος του κυλινδρικού μοντέλου είναι αναλογικά απείρως μεγαλύτερο σε σχέση με την επιμήκυνση που δέχεται ο άξονάς του.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (5.4.34) έως (5.4.44) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (5.4.12) έως (5.4.33) καταλήγουμε στις παρακάτω εκφράσεις για τις αξονικές τάσεις:

$$\sigma_{z,1} = 4\nu_1 A_3 \quad (5.4.45)$$

$$\sigma_{z,2} = 4\nu_2 B_3 \quad (5.4.46)$$

$$\sigma_{z,3} = 4\nu_3 C_3 \quad (5.4.47)$$

$$\sigma_{z,4} = 4\nu_4 D_3 \quad (5.4.48)$$

$$\sigma_{z,5} = 4\nu_5 F_3 \quad (5.4.49)$$

$$\sigma_{z,6} = 4\nu_6 H_3 \quad (5.4.50)$$

$$\sigma_{z,7} = 4\nu_7 K_3 \quad (5.4.51)$$

$$\sigma_{z,8} = 4\nu_8 M_3 \quad (5.4.52)$$

$$\sigma_{z,9} = 4\nu_9 N_3 \quad (5.4.53)$$

$$\sigma_{z,10} = 4\nu_{10} P_3 \quad (5.4.54)$$

$$\sigma_{z,11} = 4\nu_{11} R_3 \quad (5.4.55)$$

ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ

Γενικά ισχύει ότι:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta}$$

Λόγω όμως της κυλινδρικής συμμετρίας η γωνιακή μετατόπιση u_{θ} δεν εξαρτάται από το θ και άρα θα έχουμε:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \Rightarrow u_r = r\varepsilon_{\theta} \quad (5.4.56)$$

Συνεπώς για τις έντεκα φάσεις θα ισχύει:

$$u_{r,1} = r\varepsilon_{\theta,1} \quad (5.4.57)$$

$$u_{r,2} = r\varepsilon_{\theta,2} \quad (5.4.58)$$

$$u_{r,3} = r\varepsilon_{\theta,3} \quad (5.4.59)$$

$$u_{r,4} = r\varepsilon_{\theta,4} \quad (5.4.60)$$

$$u_{r,5} = r\varepsilon_{\theta,5} \quad (5.4.61)$$

$$u_{r,6} = r\varepsilon_{\theta,6} \quad (5.4.62)$$

$$u_{r,7} = r\varepsilon_{\theta,7} \quad (5.4.63)$$

$$u_{r,8} = r\varepsilon_{\theta,8} \quad (5.4.64)$$

$$u_{r,9} = r\varepsilon_{\theta,9} \quad (5.4.65)$$

$$u_{r,10} = r\varepsilon_{\theta,10} \quad (5.4.66)$$

$$u_{r,11} = r\varepsilon_{\theta,11} \quad (5.4.67)$$

Επίσης από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{\sigma_{\theta,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{z,1})}{E_1} \quad (5.4.68)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{\sigma_{\theta,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{z,2})}{E_2} \quad (5.4.69)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{\sigma_{\theta,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{z,3})}{E_3} \quad (5.4.70)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{\sigma_{\theta,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{z,4})}{E_4} \quad (5.4.71)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{\sigma_{\theta,5} - \nu_5(\sigma_{r,5} + \sigma_{z,5})}{E_5} \quad (5.4.72)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{\sigma_{\theta,6} - \nu_6(\sigma_{r,6} + \sigma_{z,6})}{E_6} \quad (5.4.73)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{\sigma_{\theta,7} - \nu_7(\sigma_{r,7} + \sigma_{z,7})}{E_7} \quad (5.4.74)$$

$$\varepsilon_{\theta,8} = \frac{\sigma_{\theta,8} - \nu_8(\sigma_{r,8} + \sigma_{z,8})}{E_8} \quad (5.4.75)$$

$$\varepsilon_{\theta,9} = \frac{\sigma_{\theta,9} - \nu_9(\sigma_{r,9} + \sigma_{z,9})}{E_9} \quad (5.4.76)$$

$$\varepsilon_{\theta,10} = \frac{\sigma_{\theta,10} - \nu_{10}(\sigma_{r,10} + \sigma_{z,10})}{E_{10}} \quad (5.4.77)$$

$$\varepsilon_{\theta,11} = \frac{\sigma_{\theta,11} - \nu_{11}(\sigma_{r,11} + \sigma_{z,11})}{E_{11}} \quad (5.4.78)$$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (5.4.68) έως (5.4.78), τις σχέσεις των τάσεων (5.4.12) έως (5.4.33) και (5.4.45) έως (5.4.55) θα προκύψουν:

$$\varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \quad (5.4.79)$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \frac{[-(1 + \nu_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)]}{E_2} \quad (5.4.80)$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \frac{[-(1 + \nu_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)]}{E_3} \quad (5.4.81)$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \frac{[-(1 + \nu_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)]}{E_4} \quad (5.4.82)$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \frac{[-(1 + \nu_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)]}{E_5} \quad (5.4.83)$$

$$\varepsilon_{\theta,6} = \frac{[-(1 + \nu_6)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2)]}{E_6} \quad (5.4.84)$$

$$\varepsilon_{\theta,7} = \frac{[-(1 + \nu_7)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)]}{E_7} \quad (5.4.85)$$

$$\varepsilon_{\theta,8} = \frac{[-(1 + \nu_8)\frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2)]}{E_8} \quad (5.4.86)$$

$$\varepsilon_{\theta,9} = \frac{[-(1 + \nu_9)\frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)]}{E_9} \quad (5.4.87)$$

$$\varepsilon_{\theta,10} = \frac{[-(1 + \nu_{10})\frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)]}{E_{10}} \quad (5.4.88)$$

$$\varepsilon_{\theta,11} = \frac{[-(1 + \nu_{11})\frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)]}{E_{11}} \quad (5.4.89)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.4.79) έως (5.4.89) στις σχέσεις (5.4.57) έως (5.4.67) θα έχουμε:

$$u_{r,1} = \frac{2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)r}{E_1} \quad (5.4.90)$$

$$u_{r,2} = \frac{[-(1 + \nu_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)]r}{E_2} \quad (5.4.91)$$

$$u_{r,3} = \frac{[-(1 + \nu_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)]r}{E_3} \quad (5.4.92)$$

$$u_{r,4} = \frac{[-(1 + \nu_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)]r}{E_4} \quad (5.4.93)$$

$$u_{r,5} = \frac{[-(1 + \nu_5)\frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)]r}{E_5} \quad (5.4.94)$$

$$u_{r,6} = \frac{[-(1 + \nu_6)\frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2)]r}{E_6} \quad (5.4.95)$$

$$u_{r,7} = \frac{[-(1 + \nu_7)\frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)]r}{E_7} \quad (5.4.96)$$

$$u_{r,8} = \frac{[-(1 + \nu_8)\frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2)]r}{E_8} \quad (5.4.97)$$

$$u_{r,9} = \frac{[-(1 + \nu_9)\frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)]r}{E_9} \quad (5.4.98)$$

$$u_{r,10} = \frac{[-(1 + \nu_{10})\frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)]r}{E_{10}} \quad (5.4.99)$$

$$u_{r,11} = \frac{[-(1 + \nu_{11})\frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)]r}{E_{11}} \quad (5.4.100)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι ακτινικές παραμορφώσεις θα εξαχθούν από το γενικό τύπο:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Και παραθέτοντας συγκεντρωτικά και τις ήδη υπολογισμένες αξονικές και γωνιακές παραμορφώσεις θα έχουμε:

$$\left\{ \varepsilon_{r,1} = \frac{2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \right. \quad (5.4.101)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,1} = \frac{2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \right. \quad (5.4.102)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,1} = \frac{1}{E_1} [\sigma_{z,1} - \nu_1(\sigma_{r,1} + \sigma_{\theta,1})] = 0 \right. \quad (5.4.103)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,2} = \frac{[(1 + \nu_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)]}{E_2} \right. \quad (5.4.104)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,2} = \frac{[-(1 + \nu_2)\frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)]}{E_2} \right. \quad (5.4.105)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,2} = \frac{1}{E_2} [\sigma_{z,2} - \nu_2(\sigma_{r,2} + \sigma_{\theta,2})] = 0 \right. \quad (5.4.106)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,3} = \frac{[(1 + \nu_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)]}{E_3} \right. \quad (5.4.107)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,3} = \frac{[-(1 + \nu_3)\frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)]}{E_3} \right. \quad (5.4.108)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,3} = \frac{1}{E_3} [\sigma_{z,3} - \nu_3(\sigma_{r,3} + \sigma_{\theta,3})] = 0 \right. \quad (5.4.109)$$

$$\left\{ \varepsilon_{r,4} = \frac{[(1 + \nu_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)]}{E_4} \right. \quad (5.4.110)$$

$$\left\{ \varepsilon_{\theta,4} = \frac{[-(1 + \nu_4)\frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)]}{E_4} \right. \quad (5.4.111)$$

$$\left\{ \varepsilon_{z,4} = \frac{1}{E_4} [\sigma_{z,4} - \nu_4(\sigma_{r,4} + \sigma_{\theta,4})] = 0 \right. \quad (5.4.112)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r,10} = \frac{[(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)]}{E_{10}} \end{array} \right. \quad (5.4.128)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta,10} = \frac{[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)]}{E_{10}} \end{array} \right. \quad (5.4.129)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{z,10} = \frac{1}{E_{10}} [\sigma_{z,10} - \nu_{10}(\sigma_{r,10} + \sigma_{\theta,10})] = 0 \end{array} \right. \quad (5.4.130)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r,11} = \frac{[(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)]}{E_{11}} \end{array} \right. \quad (5.4.131)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta,11} = \frac{[-(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)]}{E_{11}} \end{array} \right. \quad (5.4.132)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{z,11} = \frac{1}{E_{11}} [\sigma_{z,11} - \nu_{11}(\sigma_{r,11} + \sigma_{\theta,11})] = 0 \end{array} \right. \quad (5.4.133)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

$$\text{Για } r = r_1: \sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ 2A_3 = \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3 \quad (5.4.134)$$

$$\text{Για } r = r_2: \sigma_{r,2} = \sigma_{r,3} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3 = \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3 \quad (5.4.135)$$

$$\text{Για } r = r_3: \sigma_{r,3} = \sigma_{r,4} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3 = \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3 \quad (5.4.136)$$

$$\text{Για } r = r_4: \sigma_{r,4} = \sigma_{r,5} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3 = \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3 \quad (5.4.137)$$

$$\text{Για } r = r_5: \sigma_{r,5} = \sigma_{r,6} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3 = \frac{H_1}{r_5^2} + 2H_3 \quad (5.4.138)$$

$$\text{Για } r = r_6: \sigma_{r,6} = \sigma_{r,7} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{H_1}{r_6^2} + 2H_3 = \frac{K_1}{r_6^2} + 2K_3 \quad (5.4.139)$$

$$\text{Για } r = r_7: \sigma_{r,7} = \sigma_{r,8} \text{ και } \acute{\alpha}\rho\alpha \ \frac{K_1}{r_7^2} + 2K_3 = \frac{M_1}{r_7^2} + 2M_3 \quad (5.4.140)$$

$$\text{Για } r = r_8: \sigma_{r,8} = \sigma_{r,9} \text{ και άρα } \frac{M_1}{r_8^2} + 2M_3 = \frac{N_1}{r_8^2} + 2N_3 \quad (5.4.141)$$

$$\text{Για } r = r_9: \sigma_{r,9} = \sigma_{r,10} \text{ και άρα } \frac{N_1}{r_9^2} + 2N_3 = \frac{P_1}{r_9^2} + 2P_3 \quad (5.4.142)$$

$$\text{Για } r = r_{10}: \sigma_{r,10} = \sigma_{r,11} \text{ και άρα } \frac{P_1}{r_{10}^2} + 2P_3 = \frac{R_1}{r_{10}^2} + 2R_3 \quad (5.4.143)$$

$$\text{Για } r = r_{11}: \sigma_{r,11} = p_0 \text{ και άρα } \frac{R_1}{r_{11}^2} + 2R_3 = p_0 \Rightarrow R_3 = \frac{p_0}{2} - \frac{R_1}{2r_{11}^2} \quad (5.4.144)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.90) και (5.4.91) θα έχουμε:

$$E_2[2A_3(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)] = E_1 \left[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] \quad (5.4.145)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.91) και (5.4.92) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_3 \left[-(1 + \nu_2) \frac{B_1}{r^2} + 2B_3(1 - \nu_2 - 2\nu_2^2) \right] \\ = E_2 \left[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.146)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.92) και (5.4.93) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_4 \left[-(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) \right] \\ = E_3 \left[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.147)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.93) και (5.4.94) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_5 \left[-(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \right] \\ = E_4 \left[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.148)$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.94) και (5.4.95) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_6 \left[-(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \right] \\ = E_5 \left[-(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.149)$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.95) και (5.4.96) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_7 \left[-(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \right] \\ = E_6 \left[-(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.150)$$

Για $r = r_7$: $u_{r,7} = u_{r,8}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.96) και (5.4.97) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_8 \left[-(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \right] \\ = E_7 \left[-(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.151)$$

Για $r = r_8$: $u_{r,8} = u_{r,9}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.98) και (5.4.99) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_9 \left[-(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) \right] \\ = E_8 \left[-(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.152)$$

Για $r = r_9$: $u_{r,9} = u_{r,10}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.99) και (5.4.100) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{10} \left[-(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) \right] \\ = E_9 \left[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.153)$$

Για $r = r_{10}$: $u_{r,10} = u_{r,11}$ και άρα από τις σχέσεις (5.4.100) και (5.4.101) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{11} \left[-(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) \right] \\ = E_{10} \left[-(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2) \right] \end{aligned} \quad (5.4.154)$$

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η μήτρα αλλά και το έγκλεισμα επιδρούν τα μέγιστα στα σύνορα με την ενδιαμέση φάση και άρα θα έχουμε ότι $\xi=1$ και επομένως θα έχουμε τις επιπλέον συνοριακές συνθήκες:

$$\text{Για } r = r_1: E_1 = E_2 \text{ και } v_1 = v_2 \quad (5.4.155)$$

$$\text{Για } r = r_2: E_2 = E_3 \text{ και } v_2 = v_3 \quad (5.4.156)$$

$$\text{Για } r = r_3: E_3 = E_4 \text{ και } v_3 = v_4 \quad (5.4.157)$$

$$\text{Για } r = r_4: E_4 = E_5 \text{ και } v_4 = v_5 \quad (5.4.158)$$

$$\text{Για } r = r_5: E_5 = E_6 \text{ και } v_5 = v_6 \quad (5.4.159)$$

$$\text{Για } r = r_6: E_6 = E_7 \text{ και } v_6 = v_7 \quad (5.4.160)$$

$$\text{Για } r = r_7: E_7 = E_8 \text{ και } v_7 = v_8 \quad (5.4.161)$$

$$\text{Για } r = r_8: E_8 = E_9 \text{ και } v_8 = v_9 \quad (5.4.162)$$

$$\text{Για } r = r_9: E_9 = E_{10} \text{ και } v_9 = v_{10} \quad (5.4.163)$$

$$\text{Για } r = r_{10}: E_{10} = E_{11} \text{ και } v_{10} = v_{11} \quad (5.4.164)$$

Διαμορφώνοντας τώρα τις εξισώσεις (5.4.145) έως (5.4.154) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.4.155) έως (5.4.164) θα έχουμε:

- Για $r = r_1: u_{r,1} = u_{r,2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2A_3(1 - v_1 - 2v_1^2) = -(1 + v_2) \frac{B_1}{r_1^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) \xrightarrow{v_1=v_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + v_2) \frac{B_1}{r_1^2} = 2(1 - v_2 - 2v_2^2)(B_3 - A_3)} \quad (5.4.165)$$

- Για $r = r_2: u_{r,2} = u_{r,3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + v_2) \frac{B_1}{r_2^2} + 2B_3(1 - v_2 - 2v_2^2) = -(1 + v_3) \frac{C_1}{r_2^2} + 2C_3(1 - v_3 - 2v_3^2) \xrightarrow{v_2=v_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + v_3) \frac{B_1 - C_1}{r_2^2} = 2(1 - v_3 - 2v_3^2)(B_3 - C_3)} \quad (5.4.166)$$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_3: u_{r,3} = u_{r,4} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_3) \frac{C_1}{r_3^2} + 2C_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2) = -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r_3^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) \xrightarrow{\nu_3=\nu_4}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_4) \frac{C_1 - D_1}{r_3^2} = 2(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2)(C_3 - D_3)} \quad (5.4.167)$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_4: u_{r,4} = u_{r,5} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_4) \frac{D_1}{r_4^2} + 2D_3(1 - \nu_4 - 2\nu_4^2) = -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r_4^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) \xrightarrow{\nu_4=\nu_5}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_5) \frac{D_1 - F_1}{r_4^2} = 2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)(D_3 - F_3)} \quad (5.4.168)$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_5: u_{r,5} = u_{r,6} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_5) \frac{F_1}{r_5^2} + 2F_3(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2) = -(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r_5^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) \xrightarrow{\nu_5=\nu_6}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_6) \frac{F_1 - H_1}{r_5^2} = 2(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2)(F_3 - H_3)} \quad (5.4.169)$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_6: u_{r,6} = u_{r,7} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_6) \frac{H_1}{r_6^2} + 2H_3(1 - \nu_6 - 2\nu_6^2) = -(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r_6^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) \xrightarrow{\nu_6=\nu_7}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_7) \frac{H_1 - K_1}{r_6^2} = 2(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)(H_3 - K_3)} \quad (5.4.170)$

- $\Gamma\iota\alpha r = r_7: u_{r,7} = u_{r,8} \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(1 + \nu_7) \frac{K_1}{r_7^2} + 2K_3(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2) = -(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r_7^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) \xrightarrow{\nu_7=\nu_8}$
 $\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_8) \frac{K_1 - M_1}{r_7^2} = 2(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2)(K_3 - M_3)} \quad (5.4.171)$

- Για $r = r_8$: $u_{r,8} = u_{r,9} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + \nu_8) \frac{M_1}{r_8^2} + 2M_3(1 - \nu_8 - 2\nu_8^2) = -(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r_8^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) \xrightarrow{\nu_8=\nu_9}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_9) \frac{M_1 - N_1}{r_8^2} = 2(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)(M_3 - N_3)} \quad (5.4.172)$$

- Για $r = r_9$: $u_{r,9} = u_{r,10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + \nu_9) \frac{N_1}{r_9^2} + 2N_3(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2) = -(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r_9^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) \xrightarrow{\nu_9=\nu_{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_{10}) \frac{N_1 - P_1}{r_9^2} = 2(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2)(N_3 - P_3)} \quad (5.4.173)$$

- Για $r = r_{10}$: $u_{r,10} = u_{r,11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -(1 + \nu_{10}) \frac{P_1}{r_{10}^2} + 2P_3(1 - \nu_{10} - 2\nu_{10}^2) = -(1 + \nu_{11}) \frac{R_1}{r_{10}^2} + 2R_3(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2) \xrightarrow{\nu_{10}=\nu_{11}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + \nu_{11}) \frac{P_1 - R_1}{r_{10}^2} = 2(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)(P_3 - R_3)} \quad (5.4.174)$$

Οι εξισώσεις (5.4.134) έως (5.4.144) και (5.4.165) έως (5.4.174) αποτελούν **σύστημα 21 εξισώσεων με 21 αγνώστους**. Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, H_1, H_3, K_1, K_3, M_1, M_3, N_1, N_3, P_1, P_3, R_1$ και R_3 . Οι τιμές των σταθερών λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα είναι:

$$A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = H_3 = K_3 = M_3 = N_3 = P_3 = R_3 = -\frac{1}{2}p_0$$

και

$$B_1 = C_1 = D_1 = F_1 = H_1 = K_1 = M_1 = N_1 = P_1 = R_1 = 0$$

Οι τιμές των σταθερών μετά τη λύση του συστήματος ήταν αναμενόμενες και άκρως επιθυμητές γιατί έτσι απλουστεύεται αρκετά η εύρεση του θεωρητικού τύπου του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T και του εγκάρσιου λόγου Poisson ν_{TT} ενώ παράλληλα, όπως θα δούμε παρακάτω, οι τιμές που θα βρούμε για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας και λόγο Poisson συνεχίζουν να είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές.

Για τον υπολογισμό του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η **ενέργεια παραμόρφωσης** του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των έντεκα φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{V_c} \frac{p_0}{K_c} dV_c &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) dV_1 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) dV_2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) dV_3 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) dV_4 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) dV_5 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) dV_6 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) dV_7 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_8} (\sigma_{r,8} \varepsilon_{r,8} + \sigma_{\theta,8} \varepsilon_{\theta,8} + \sigma_{z,8} \varepsilon_{z,8}) dV_8 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_9} (\sigma_{r,9} \varepsilon_{r,9} + \sigma_{\theta,9} \varepsilon_{\theta,9} + \sigma_{z,9} \varepsilon_{z,9}) dV_9 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_{10}} (\sigma_{r,10} \varepsilon_{r,10} + \sigma_{\theta,10} \varepsilon_{\theta,10} + \sigma_{z,10} \varepsilon_{z,10}) dV_{10} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_{11}} (\sigma_{r,11} \varepsilon_{r,11} + \sigma_{\theta,11} \varepsilon_{\theta,11} + \sigma_{z,11} \varepsilon_{z,11}) dV_{11} \tag{5.4.175}
\end{aligned}$$

Όπου, $dV = 2\pi r h dr$ και K_c το μέτρο διόγκωσης

Συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{K_c} \int_{V_c} 2\pi r h dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{z,1} \varepsilon_{z,1}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{z,2} \varepsilon_{z,2}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{z,3} \varepsilon_{z,3}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{z,4} \varepsilon_{z,4}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{z,5} \varepsilon_{z,5}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_5}^{r_6} (\sigma_{r,6} \varepsilon_{r,6} + \sigma_{\theta,6} \varepsilon_{\theta,6} + \sigma_{z,6} \varepsilon_{z,6}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_6}^{r_7} (\sigma_{r,7} \varepsilon_{r,7} + \sigma_{\theta,7} \varepsilon_{\theta,7} + \sigma_{z,7} \varepsilon_{z,7}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_7}^{r_8} (\sigma_{r,8} \varepsilon_{r,8} + \sigma_{\theta,8} \varepsilon_{\theta,8} + \sigma_{z,8} \varepsilon_{z,8}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_8}^{r_9} (\sigma_{r,9} \varepsilon_{r,9} + \sigma_{\theta,9} \varepsilon_{\theta,9} + \sigma_{z,9} \varepsilon_{z,9}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_9}^{r_{10}} (\sigma_{r,10} \varepsilon_{r,10} + \sigma_{\theta,10} \varepsilon_{\theta,10} + \sigma_{z,10} \varepsilon_{z,10}) 2\pi r h dr \\
&+ \frac{1}{2} \int_{r_{10}}^{r_{11}} (\sigma_{r,11} \varepsilon_{r,11} + \sigma_{\theta,11} \varepsilon_{\theta,11} + \sigma_{z,11} \varepsilon_{z,11}) 2\pi r h dr
\end{aligned} \tag{5.4.176}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (5.4.176) τις εκφράσεις των τάσεων από τις σχέσεις (5.4.12) έως (5.4.33) και (5.4.45) έως (5.4.55), αλλά και των παραμορφώσεων από τις σχέσεις (5.4.101) έως (5.4.133), και αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών $A_3, B_1, B_3, C_1, C_3, D_1, D_3, F_1, F_3, H_1, H_3, K_1, K_3, M_1, M_3, N_1, N_3, P_1, P_3, R_1$ και R_3 που προέκυψαν από τη λύση του συστήματος παραπάνω, απλοποιώντας θα προκύψει η σχέση:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K_c} \int_0^{r_{11}} r dr &= \frac{2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \int_0^{r_1} r dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2]r}{E_2(r)} dr \\
&+ \frac{2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \int_{r_2}^{r_3} r dr + 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2]r}{E_4(r)} dr \\
&+ \frac{2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \int_{r_4}^{r_5} r dr + \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2]r}{E_6(r)} dr \\
&+ \frac{2(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \int_{r_6}^{r_7} r dr + \int_{r_7}^{r_8} \frac{[1 - \nu_8(r) - 2(\nu_8(r))^2]r}{E_8(r)} dr \\
&+ \frac{2(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)}{E_9} \int_{r_8}^{r_9} r dr + \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[1 - \nu_{10}(r) - 2(\nu_{10}(r))^2]r}{E_{10}(r)} dr \\
&+ \frac{2(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)}{E_{11}} \int_{r_{10}}^{r_{11}} r dr
\end{aligned} \tag{5.4.177}$$

Εκτελώντας τις ολοκληρώσεις και γνωρίζοντας ότι:

$$U_1 = \frac{r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_3 = \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_{11}^2}$$

$$U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_{11}^2}$$

$$U_5 = \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_{11}^2}$$

$$U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_{11}^2}$$

$$U_7 = \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_{11}^2}$$

$$U_8 = \frac{r_8^2 - r_7^2}{r_{11}^2}$$

$$U_9 = \frac{r_9^2 - r_8^2}{r_{11}^2}$$

$$U_{10} = \frac{r_{10}^2 - r_9^2}{r_{11}^2}$$

$$U_{11} = \frac{r_{11}^2 - r_{10}^2}{r_{11}^2}$$

Από (5.4.177) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_c} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_{11}} &= \frac{2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{r_1} + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2] r}{E_2(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_2}^{r_3} + 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2] r}{E_4(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_4}^{r_5} + 2 \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2] r}{E_6(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_6}^{r_7} + 2 \int_{r_7}^{r_8} \frac{[1 - \nu_8(r) - 2(\nu_8(r))^2] r}{E_8(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)}{E_9} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_8}^{r_9} + 2 \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[1 - \nu_{10}(r) - 2(\nu_{10}(r))^2] r}{E_{10}(r)} dr \\ &+ \frac{2(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)}{E_{11}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_{10}}^{r_{11}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{K_c} \frac{r_{11}^2}{2} &= \frac{2(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} \cdot \frac{r_1^2}{2} + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2] r}{E_2(r)} dr + \frac{2(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \\
&\cdot \left(\frac{r_3^2 - r_2^2}{2} \right) + 2 \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2] r}{E_4(r)} dr + \frac{2(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \\
&\cdot \left(\frac{r_5^2 - r_4^2}{2} \right) + 2 \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2] r}{E_6(r)} dr + \frac{2(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \\
&\cdot \left(\frac{r_7^2 - r_6^2}{2} \right) + 2 \int_{r_7}^{r_8} \frac{[1 - \nu_8(r) - 2(\nu_8(r))^2] r}{E_8(r)} dr + \frac{2(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)}{E_9} \\
&\cdot \left(\frac{r_9^2 - r_8^2}{2} \right) + 2 \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[1 - \nu_{10}(r) - 2(\nu_{10}(r))^2] r}{E_{10}(r)} dr + \frac{2(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)}{E_{11}} \\
&\cdot \left(\frac{r_{11}^2 - r_{10}^2}{2} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{2K_c} &= \frac{U_1(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2] r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \\
&+ \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2] r}{E_4(r)} dr + \frac{U_5(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \\
&+ \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2] r}{E_6(r)} dr + \frac{U_7(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \\
&+ \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} \frac{[1 - \nu_8(r) - 2(\nu_8(r))^2] r}{E_8(r)} dr + \frac{U_9(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)}{E_9} \\
&+ \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[1 - \nu_{10}(r) - 2(\nu_{10}(r))^2] r}{E_{10}(r)} dr + \frac{U_{11}(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)}{E_{11}} \quad (5.4.178)
\end{aligned}$$

Όμως το μέτρο διόγκωσης για το σύνθετο υλικό μας είναι ίσο με [28]:

$$K_c = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{1}{2 \left[\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} \right]} \quad (5.4.179)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας τη σχέση (5.4.179) στην (5.4.178) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - \frac{2\nu_{LT}^2}{E_L} = \\
 & = \frac{U_1(1 - \nu_1 - 2\nu_1^2)}{E_1} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[1 - \nu_2(r) - 2(\nu_2(r))^2] r}{E_2(r)} dr + \frac{U_3(1 - \nu_3 - 2\nu_3^2)}{E_3} \\
 & + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[1 - \nu_4(r) - 2(\nu_4(r))^2] r}{E_4(r)} dr + \frac{U_5(1 - \nu_5 - 2\nu_5^2)}{E_5} \\
 & + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[1 - \nu_6(r) - 2(\nu_6(r))^2] r}{E_6(r)} dr + \frac{U_7(1 - \nu_7 - 2\nu_7^2)}{E_7} \\
 & + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} \frac{[1 - \nu_8(r) - 2(\nu_8(r))^2] r}{E_8(r)} dr + \frac{U_9(1 - \nu_9 - 2\nu_9^2)}{E_9} \\
 & + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[1 - \nu_{10}(r) - 2(\nu_{10}(r))^2] r}{E_{10}(r)} dr \\
 & + \frac{U_{11}(1 - \nu_{11} - 2\nu_{11}^2)}{E_{11}}
 \end{aligned} \tag{5.4.180}$$

Η σχέση (5.4.180) μας δίνει το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας E_T . Οι συναρτήσεις $\nu_2(r), \nu_4(r), \nu_6(r), \nu_8(r)$ και $\nu_{10}(r)$ έχουμε υποθέσει ότι ακολουθούν τη γραμμική μεταβολή. Οι θεωρητικοί τύποι του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας E_L και του διαμήκους λόγου Poisson ν_{LT} έχουν υπολογιστεί προηγουμένως ενώ ο εγκάρσιος λόγος Poisson ν_{TT} θα υπολογιστεί στην επόμενη ενότητα.

5.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}

Τον εγκάρσιο λόγο Poisson ν_{TT} του σύνθετου υλικού θα τον υπολογίσουμε από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων με τη χρήση του ενδεκαφασικού κυλινδρικού μοντέλου με ενδιάμεση φάση, από τη σχέση:

$$\frac{1}{\nu_{TT}} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{U_6}{\nu_6(r)} + \frac{U_7}{\nu_7} + \frac{U_8}{\nu_8(r)} + \frac{U_9}{\nu_9} + \frac{U_{10}}{\nu_{10}(r)} + \frac{U_{11}}{\nu_{11}} \quad (5.5.1)$$

Επίσης:

$$U_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_{11}^2}$$

$$U_4 = \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_{11}^2}$$

$$U_6 = \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_{11}^2}$$

$$U_8 = \frac{r_8^2 - r_7^2}{r_{11}^2}$$

$$U_{10} = \frac{r_{10}^2 - r_9^2}{r_{11}^2}$$

Οπότε η σχέση (5.5.1) θα γίνει:

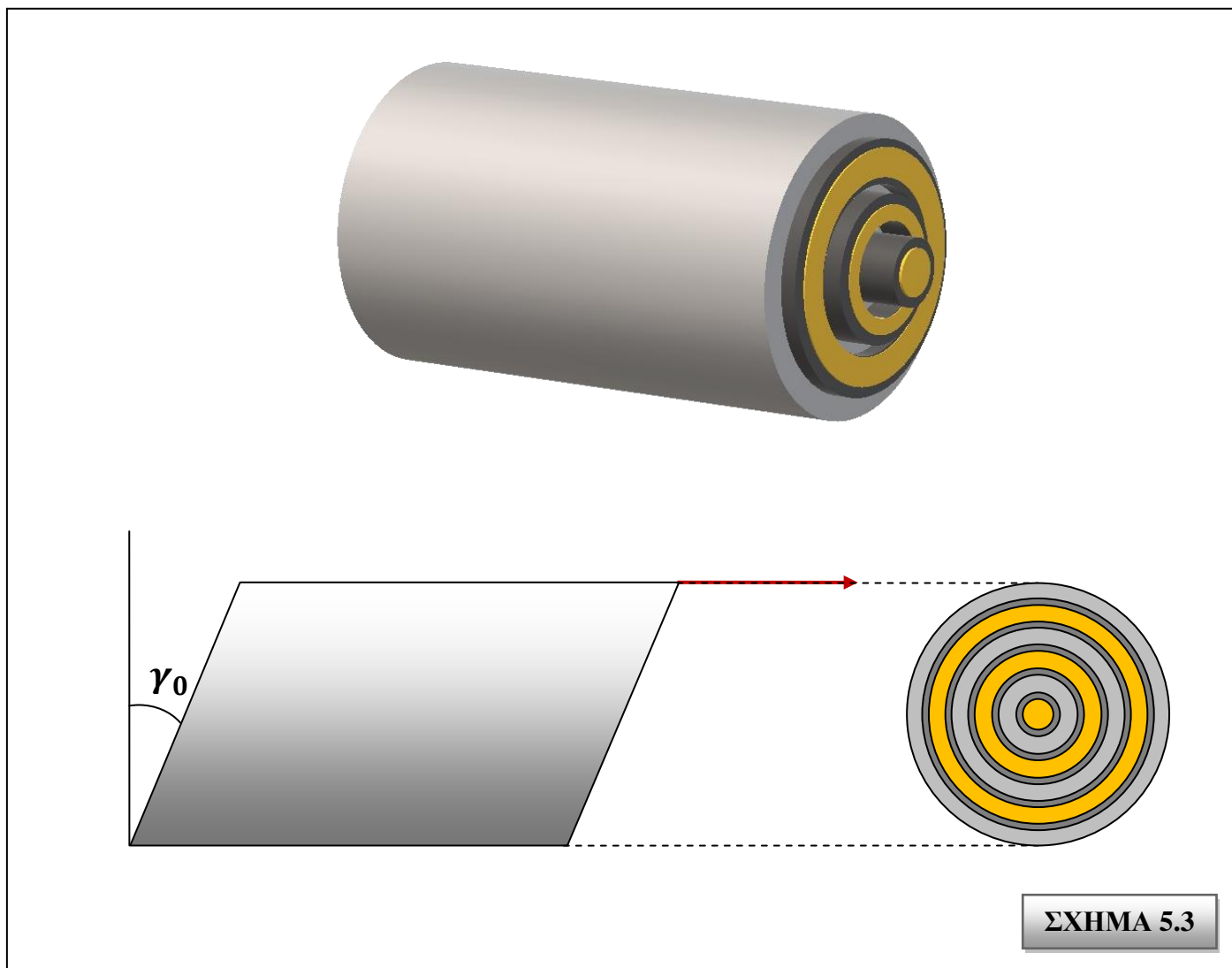
$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu_{TT}} = & \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_{11}^2} \cdot \frac{1}{\nu_2(r)} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_{11}^2} \cdot \frac{1}{\nu_4(r)} + \frac{U_5}{\nu_5} + \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_{11}^2} \cdot \frac{1}{\nu_6(r)} + \frac{U_7}{\nu_7} + \frac{r_8^2 - r_7^2}{r_{11}^2} \\ & \cdot \frac{1}{\nu_8(r)} + \frac{U_9}{\nu_9} + \frac{r_{10}^2 - r_9^2}{r_{11}^2} \cdot \frac{1}{\nu_{10}(r)} + \frac{U_{11}}{\nu_{11}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{1}{v_{TT}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{1}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{1}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} \\
&+ \frac{1}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} + \frac{1}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_8(r)} dr + \frac{U_9}{v_9} \\
&+ \frac{1}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{[(r+dr)^2 - r^2]}{v_{10}(r)} dr + \frac{U_{11}}{v_{11}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{1}{v_{TT}} &= \frac{U_1}{v_1} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{v_2(r)} dr + \frac{U_3}{v_3} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r}{v_4(r)} dr + \frac{U_5}{v_5} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_5}^{r_6} \frac{r}{v_6(r)} dr + \frac{U_7}{v_7} \\
&+ \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_7}^{r_8} \frac{r}{v_8(r)} dr + \frac{U_9}{v_9} + \frac{2}{r_{11}^2} \int_{r_9}^{r_{10}} \frac{r}{v_{10}(r)} dr + \frac{U_{11}}{v_{11}} \tag{5.5.2}
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $v_2(r), v_4(r), v_6(r), v_8(r)$ και $v_{10}(r)$ όπως και στις προηγούμενες ενότητες, θεωρούμε ότι ακολουθούν τη γραμμική μεταβολή.

5.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Θεωρούμε το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο με ενδιάμεση φάση και έστω ότι ασκούμε μια διάτμηση γ_0 (Σχήμα 5.3). Από τη θεωρία ελαστικότητας, οι μετατοπίσεις και οι τάσεις για το κυλινδρικό μοντέλο μας όταν υφίσταται διάτμηση γ_0 θα είναι [29]:



ΜΕΤΑΤΟΠΗΣΕΙΣ

$$u_{z,1} = \left(A_1 r + \frac{A_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.1)$$

$$u_{r,1} = A_3 z \cos \theta \quad (5.6.2)$$

$$u_{\theta,1} = -A_3 z \sin \theta \quad (5.6.3)$$

$$u_{z,2} = \left(B_1 r + \frac{B_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.4)$$

$$u_{r,2} = B_3 z \cos \theta \quad (5.6.5)$$

$$u_{\theta,2} = -B_3 z \sin \theta \quad (5.6.6)$$

$$u_{z,3} = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.7)$$

$$u_{r,3} = C_3 z \cos \theta \quad (5.6.8)$$

$$u_{\theta,3} = -C_3 z \sin \theta \quad (5.6.9)$$

$$u_{z,4} = \left(D_1 r + \frac{D_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.10)$$

$$u_{r,4} = D_3 z \cos \theta \quad (5.6.11)$$

$$u_{\theta,4} = -D_3 z \sin \theta \quad (5.6.12)$$

$$u_{z,5} = \left(F_1 r + \frac{F_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.13)$$

$$u_{r,5} = F_3 z \cos \theta \quad (5.6.14)$$

$$u_{\theta,5} = -F_3 z \sin \theta \quad (5.6.15)$$

$$u_{z,6} = \left(H_1 r + \frac{H_2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.6.16)$$

$$u_{r,6} = H_3 z \cos \theta \quad (5.6.17)$$

$$u_{\theta,6} = -H_3 z \sin \theta \quad (5.6.18)$$

$$u_{z,7} = \left(K_1 r + \frac{K_2}{r}\right) \cos \theta \quad (5.6.19)$$

$$u_{r,7} = K_3 z \cos \theta \quad (5.6.20)$$

$$u_{\theta,7} = -K_3 z \sin \theta \quad (5.6.21)$$

$$u_{z,8} = \left(M_1 r + \frac{M_2}{r}\right) \cos \theta \quad (5.6.22)$$

$$u_{r,8} = M_3 z \cos \theta \quad (5.6.23)$$

$$u_{\theta,8} = -M_3 z \sin \theta \quad (5.6.24)$$

$$u_{z,9} = \left(N_1 r + \frac{N_2}{r}\right) \cos \theta \quad (5.6.25)$$

$$u_{r,9} = N_3 z \cos \theta \quad (5.6.26)$$

$$u_{\theta,9} = -N_3 z \sin \theta \quad (5.6.27)$$

$$u_{z,10} = \left(P_1 r + \frac{P_2}{r}\right) \cos \theta \quad (5.6.28)$$

$$u_{r,10} = P_3 z \cos \theta \quad (5.6.29)$$

$$u_{\theta,10} = -P_3 z \sin \theta \quad (5.6.30)$$

$$u_{z,11} = \left(R_1 r + \frac{R_2}{r}\right) \cos \theta \quad (5.6.31)$$

$$u_{r,11} = R_3 z \cos \theta \quad (5.6.32)$$

$$u_{\theta,11} = -R_3 z \sin \theta \quad (5.6.33)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Οι παραμορφώσεις προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right],$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right], \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{r\theta,1} = 0, \quad \varepsilon_{rz,1} = \frac{1}{2} \left[A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,1} = -\frac{1}{2} \left[A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.34a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{z,2} = \varepsilon_{r\theta,2} = 0, \quad \varepsilon_{rz,2} = \frac{1}{2} \left[B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,2} = -\frac{1}{2} \left[B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.35a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,3} = \varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{z,3} = \varepsilon_{r\theta,3} = 0, \quad \varepsilon_{rz,3} = \frac{1}{2} \left[C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,3} = -\frac{1}{2} \left[C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.36a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,4} = \varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{z,4} = \varepsilon_{r\theta,4} = 0, \quad \varepsilon_{rz,4} = \frac{1}{2} \left[D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,4} = -\frac{1}{2} \left[D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.37a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,5} = \varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{z,5} = \varepsilon_{r\theta,5} = 0, \quad \varepsilon_{rz,5} = \frac{1}{2} \left[F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,5} = -\frac{1}{2} \left[F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.38a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,6} = \varepsilon_{\theta,6} = \varepsilon_{z,6} = \varepsilon_{r\theta,6} = 0, \quad \varepsilon_{rz,6} = \frac{1}{2} \left[H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,6} = -\frac{1}{2} \left[H_1 + H_3 + \frac{H_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.39a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,7} = \varepsilon_{\theta,7} = \varepsilon_{z,7} = \varepsilon_{r\theta,7} = 0, \quad \varepsilon_{rz,7} = \frac{1}{2} \left[K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,7} = -\frac{1}{2} \left[K_1 + K_3 + \frac{K_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.40a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,8} = \varepsilon_{\theta,8} = \varepsilon_{z,8} = \varepsilon_{r\theta,8} = 0, \quad \varepsilon_{rz,8} = \frac{1}{2} \left[M_1 + M_3 - \frac{M_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,8} = -\frac{1}{2} \left[M_1 + M_3 + \frac{M_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.41a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,9} = \varepsilon_{\theta,9} = \varepsilon_{z,9} = \varepsilon_{r\theta,9} = 0, \quad \varepsilon_{rz,9} = \frac{1}{2} \left[N_1 + N_3 - \frac{N_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,9} = -\frac{1}{2} \left[N_1 + N_3 + \frac{N_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.42a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,10} = \varepsilon_{\theta,10} = \varepsilon_{z,10} = \varepsilon_{r\theta,10} = 0, \quad \varepsilon_{rz,10} = \frac{1}{2} \left[P_1 + P_3 - \frac{P_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,10} = -\frac{1}{2} \left[P_1 + P_3 + \frac{P_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.43a, b, c)$$

$$\varepsilon_{r,11} = \varepsilon_{\theta,11} = \varepsilon_{z,11} = \varepsilon_{r\theta,11} = 0, \quad \varepsilon_{rz,11} = \frac{1}{2} \left[R_1 + R_3 - \frac{R_2}{r^2} \right] \cos \theta,$$

$$\varepsilon_{\theta z,11} = -\frac{1}{2} \left[R_1 + R_3 + \frac{R_2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (5.6.44a, b, c)$$

ΤΑΣΕΙΣ

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz} \quad , \quad \sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \quad , \quad \sigma_{\theta z} = 2G\varepsilon_{\theta z}$$

$$\sigma_{rz,1} = G_1 \left(A_1 + A_3 - \frac{A_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.45)$$

$$\sigma_{\theta z,1} = -G_1 \left(A_1 + A_3 + \frac{A_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.46)$$

$$\sigma_{rz,2} = G_2 \left(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.47)$$

$$\sigma_{\theta z,2} = -G_2 \left(B_1 + B_3 + \frac{B_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.48)$$

$$\sigma_{rz,3} = G_3 \left(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.49)$$

$$\sigma_{\theta z,3} = -G_3 \left(C_1 + C_3 + \frac{C_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.50)$$

$$\sigma_{rz,4} = G_4 \left(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.51)$$

$$\sigma_{\theta z,4} = -G_4 \left(D_1 + D_3 + \frac{D_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.52)$$

$$\sigma_{rz,5} = G_5 \left(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.53)$$

$$\sigma_{\theta z,5} = -G_5 \left(F_1 + F_3 + \frac{F_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.54)$$

$$\sigma_{rz,6} = G_6 \left(H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.55)$$

$$\sigma_{\theta z,6} = -G_6 \left(H_1 + H_3 + \frac{H_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.56)$$

$$\sigma_{rz,7} = G_7 \left(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.57)$$

$$\sigma_{\theta z,7} = -G_7 \left(K_1 + K_3 + \frac{K_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.58)$$

$$\sigma_{rz,8} = G_8 \left(M_1 + M_3 - \frac{M_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.59)$$

$$\sigma_{\theta z,8} = -G_8 \left(M_1 + M_3 + \frac{M_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.60)$$

$$\sigma_{rz,9} = G_9 \left(N_1 + N_3 - \frac{N_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.61)$$

$$\sigma_{\theta z,9} = -G_9 \left(N_1 + N_3 + \frac{N_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.62)$$

$$\sigma_{rz,10} = G_{10} \left(P_1 + P_3 - \frac{P_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.63)$$

$$\sigma_{\theta z,10} = -G_{10} \left(P_1 + P_3 + \frac{P_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.64)$$

$$\sigma_{rz,11} = G_{11} \left(R_1 + R_3 - \frac{R_2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.6.65)$$

$$\sigma_{\theta z,11} = -G_{11} \left(R_1 + R_3 + \frac{R_2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.6.66)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\sigma_{rr,i} = \sigma_{\theta\theta,i} = \sigma_{zz,i} = 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \quad (5.6.67)$$

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό των τάσεων στη θέση $r = 0$ θα πρέπει η σταθερά A_2 να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $A_2 = 0$.

Επίσης στο σύνορο της ενδέκατης φάσης, εκεί δηλαδή που επιδρά η διάτμηση γ_0 , η ακτινική μετατόπιση ισούται με $\gamma_0 z \cos \theta$. Άρα από τη σχέση (5.6.32) προκύπτει ότι:

$$R_3 z \cos \theta = \gamma_0 z \cos \theta \Rightarrow R_3 = \gamma_0 \quad (5.6.68)$$

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΑΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις είναι:

Για $r = r_1$: $\sigma_{rz,1} = \sigma_{rz,2}$ και άρα θα έχουμε

$$G_1(A_1 + A_3) = G_2\left(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_1^2}\right) \quad (5.6.69)$$

Για $r = r_2$: $\sigma_{rz,2} = \sigma_{rz,3}$ και άρα θα έχουμε

$$G_2\left(B_1 + B_3 - \frac{B_2}{r_2^2}\right) = G_3\left(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_2^2}\right) \quad (5.6.70)$$

Για $r = r_3$: $\sigma_{rz,3} = \sigma_{rz,4}$ και άρα θα έχουμε

$$G_3\left(C_1 + C_3 - \frac{C_2}{r_3^2}\right) = G_4\left(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_3^2}\right) \quad (5.6.71)$$

Για $r = r_4$: $\sigma_{rz,4} = \sigma_{rz,5}$ και άρα θα έχουμε

$$G_4\left(D_1 + D_3 - \frac{D_2}{r_4^2}\right) = G_5\left(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_4^2}\right) \quad (5.6.72)$$

Για $r = r_5$: $\sigma_{rz,5} = \sigma_{rz,6}$ και άρα θα έχουμε

$$G_5\left(F_1 + F_3 - \frac{F_2}{r_5^2}\right) = G_6\left(H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r_5^2}\right) \quad (5.6.73)$$

Για $r = r_6$: $\sigma_{rz,6} = \sigma_{rz,7}$ και άρα θα έχουμε

$$G_6\left(H_1 + H_3 - \frac{H_2}{r_6^2}\right) = G_7\left(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_6^2}\right) \quad (5.6.74)$$

Για $r = r_7$: $\sigma_{rz,7} = \sigma_{rz,8}$ και άρα θα έχουμε

$$G_7\left(K_1 + K_3 - \frac{K_2}{r_7^2}\right) = G_8\left(M_1 + M_3 - \frac{M_2}{r_7^2}\right) \quad (5.6.75)$$

Για $r = r_8$: $\sigma_{rz,8} = \sigma_{rz,9}$ και άρα θα έχουμε

$$G_8\left(M_1 + M_3 - \frac{M_2}{r_8^2}\right) = G_9\left(N_1 + N_3 - \frac{N_2}{r_8^2}\right) \quad (5.6.76)$$

Για $r = r_9$: $\sigma_{rz,9} = \sigma_{rz,10}$ και άρα θα έχουμε

$$G_9 \left(N_1 + N_3 - \frac{N_2}{r_9^2} \right) = G_{10} \left(P_1 + P_3 - \frac{P_2}{r_9^2} \right) \quad (5.6.77)$$

Για $r = r_{10}$: $\sigma_{rz,10} = \sigma_{rz,11}$ και άρα θα έχουμε

$$G_{10} \left(P_1 + P_3 - \frac{P_2}{r_{10}^2} \right) = G_{11} \left(R_1 + R_3 - \frac{R_2}{r_{10}^2} \right) \quad (5.6.78)$$

Όπου G_2, G_4, G_6, G_8 και G_{10} θεωρούμε τους μέσους όρους των συναρτήσεων $G_2(r), G_4(r), G_6(r), G_8(r)$ και $G_{10}(r)$ αντίστοιχα, θεωρώντας ότι ακολουθούν τη γραμμική μεταβολή με τη μέγιστη επίδραση της μήτρας και του εγκλείσματος στα σύνορα με την ενδιάμεση φάση.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Οι συνοριακές συνθήκες για τις μετατοπίσεις θα είναι:

Για $r = r_1$: $u_{r,1} = u_{r,2}$ και $u_{z,1} = u_{z,2}$ θα έχουμε

$$A_3 = B_3 \quad (5.6.79)$$

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{r_1^2} \quad (5.6.80)$$

Για $r = r_2$: $u_{r,2} = u_{r,3}$ και $u_{z,2} = u_{z,3}$ θα έχουμε

$$B_3 = C_3 \quad (5.6.81)$$

$$B_1 + \frac{B_2}{r_2^2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} \quad (5.6.82)$$

Για $r = r_3$: $u_{r,3} = u_{r,4}$ και $u_{z,3} = u_{z,4}$ θα έχουμε

$$C_3 = D_3 \quad (5.6.83)$$

$$C_1 + \frac{C_2}{r_3^2} = D_1 + \frac{D_2}{r_3^2} \quad (5.6.84)$$

Για $r = r_4$: $u_{r,4} = u_{r,5}$ και $u_{z,4} = u_{z,5}$ θα έχουμε

$$D_3 = F_3 \quad (5.6.85)$$

$$D_1 + \frac{D_2}{r_4^2} = F_1 + \frac{F_2}{r_4^2} \quad (5.6.86)$$

Για $r = r_5$: $u_{r,5} = u_{r,6}$ και $u_{z,5} = u_{z,6}$ θα έχουμε

$$F_3 = H_3 \quad (5.6.87)$$

$$F_1 + \frac{F_2}{r_5^2} = H_1 + \frac{H_2}{r_5^2} \quad (5.6.88)$$

Για $r = r_6$: $u_{r,6} = u_{r,7}$ και $u_{z,6} = u_{z,7}$ θα έχουμε

$$H_3 = K_3 \quad (5.6.89)$$

$$H_1 + \frac{H_2}{r_6^2} = K_1 + \frac{K_2}{r_6^2} \quad (5.6.90)$$

Για $r = r_7$: $u_{r,7} = u_{r,8}$ και $u_{z,7} = u_{z,8}$ θα έχουμε

$$K_3 = M_3 \quad (5.6.91)$$

$$K_1 + \frac{K_2}{r_7^2} = M_1 + \frac{M_2}{r_7^2} \quad (5.6.92)$$

Για $r = r_8$: $u_{r,8} = u_{r,9}$ και $u_{z,8} = u_{z,9}$ θα έχουμε

$$M_3 = N_3 \quad (5.6.93)$$

$$M_1 + \frac{M_2}{r_8^2} = N_1 + \frac{N_2}{r_8^2} \quad (5.6.94)$$

Για $r = r_9$: $u_{r,9} = u_{r,10}$ και $u_{z,9} = u_{z,10}$ θα έχουμε

$$N_3 = P_3 \quad (5.6.95)$$

$$N_1 + \frac{N_2}{r_9^2} = P_1 + \frac{P_2}{r_9^2} \quad (5.6.96)$$

Για $r = r_{10}$: $u_{r,10} = u_{r,11}$ και $u_{z,10} = u_{z,11}$ θα έχουμε

$$P_3 = R_3 \quad (5.6.97)$$

$$P_1 + \frac{P_2}{r_{10}^2} = R_1 + \frac{R_2}{r_{10}^2} \quad (5.6.98)$$

Για $r = r_{11}$: $u_{r,10} = u_{r,11}$ και $u_{z,10} = u_{z,11}$ θα έχουμε

$$R_3 = \gamma_0 \quad (5.6.99)$$

$$R_1 + \frac{R_2}{r_{11}^2} = 0 \quad (5.6.100)$$

Οι εξισώσεις (5.6.69) έως (5.6.100) αποτελούν ένα **σύστημα 30 εξισώσεων με 30 αγνώστους** του οποίου η λύση δίνει τις τιμές των σταθερών $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3, R_1, R_2$ και R_3 . Οι τιμές αυτές θα προκύψουν ως συνάρτηση των σταθερών μεγεθών $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, \gamma_0$ και των ακτίνων $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}$. Επειδή όμως με την αλλαγή της κατ'όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος αλλάζουν και οι τιμές των ακτίνων αλλά και των μέσων όρων των συναρτήσεων $G_2(r), G_4(r), G_6(r), G_8(r)$ και $G_{10}(r)$ προκύπτει ότι και οι σταθερές $A_1, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, F_1, F_2, F_3, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3, R_1, R_2$ και R_3 θα αλλάζουν επίσης. Αρχικά, εύκολα διαπιστώνουμε ότι: $A_3 = B_3 = C_3 = D_3 = F_3 = H_3 = K_3 = M_3 = N_3 = P_3 = R_3 = \gamma_0$.

Για τον υπολογισμό του διαμήκους μέτρου διατμήσεως G_{LT} του σύνθετου υλικού, θεωρούμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης και των έντεκα φάσεων από τις οποίες αποτελείται. Έτσι λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (5.6.67) έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{V_c} G_{LT} \gamma_0^2 dV_c \\
&= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1}) dV_1 + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2}) dV_2 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_3} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3}) dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_4} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4}) dV_4 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5}) dV_5 + \frac{1}{2} \int_{V_6} (\sigma_{rz,6} \gamma_{rz,6} + \sigma_{\theta z,6} \gamma_{\theta z,6}) dV_6 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_7} (\sigma_{rz,7} \gamma_{rz,7} + \sigma_{\theta z,7} \gamma_{\theta z,7}) dV_7 + \frac{1}{2} \int_{V_8} (\sigma_{rz,8} \gamma_{rz,8} + \sigma_{\theta z,8} \gamma_{\theta z,8}) dV_8 \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_9} (\sigma_{rz,9} \gamma_{rz,9} + \sigma_{\theta z,9} \gamma_{\theta z,9}) dV_9 + \frac{1}{2} \int_{V_{10}} (\sigma_{rz,10} \gamma_{rz,10} + \sigma_{\theta z,10} \gamma_{\theta z,10}) dV_{10} \\
&+ \frac{1}{2} \int_{V_{11}} (\sigma_{rz,11} \gamma_{rz,11} + \sigma_{\theta z,11} \gamma_{\theta z,11}) dV_{11} \tag{5.6.101}
\end{aligned}$$

Όπου $dV = 2\pi r h dr d\theta$

Επομένως θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{11}} G_{LT} \gamma_0^2 2\pi r h d r d \theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (\sigma_{rz,1} \gamma_{rz,1} + \sigma_{\theta z,1} \gamma_{\theta z,1}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} (\sigma_{rz,2} \gamma_{rz,2} + \sigma_{\theta z,2} \gamma_{\theta z,2}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_3} (\sigma_{rz,3} \gamma_{rz,3} + \sigma_{\theta z,3} \gamma_{\theta z,3}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_4} (\sigma_{rz,4} \gamma_{rz,4} + \sigma_{\theta z,4} \gamma_{\theta z,4}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_5} (\sigma_{rz,5} \gamma_{rz,5} + \sigma_{\theta z,5} \gamma_{\theta z,5}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_6} (\sigma_{rz,6} \gamma_{rz,6} + \sigma_{\theta z,6} \gamma_{\theta z,6}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_7} (\sigma_{rz,7} \gamma_{rz,7} + \sigma_{\theta z,7} \gamma_{\theta z,7}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_8} (\sigma_{rz,8} \gamma_{rz,8} + \sigma_{\theta z,8} \gamma_{\theta z,8}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_9} (\sigma_{rz,9} \gamma_{rz,9} + \sigma_{\theta z,9} \gamma_{\theta z,9}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{10}} (\sigma_{rz,10} \gamma_{rz,10} + \sigma_{\theta z,10} \gamma_{\theta z,10}) 2\pi r h d r d \theta \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{11}} (\sigma_{rz,11} \gamma_{rz,11} + \sigma_{\theta z,11} \gamma_{\theta z,11}) 2\pi r h d r d \theta
\end{aligned} \tag{5.6.102}$$

Όμως, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\gamma = \sigma/G$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (5.6.97) τις εκφράσεις των τάσεων σ_{rz} και $\sigma_{\theta z}$ από τις σχέσεις (5.6.45) έως (5.6.66) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{11}} G_{LT} \gamma_0^2 r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} [G_1 (A_1 + \gamma_0)^2 (\cos \theta)^2 + G_1 (A_1 + \gamma_0)^2 (\sin \theta)^2] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_2} \left[G_2 \left(B_1 + \gamma_0 - \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_2 \left(B_1 + \gamma_0 - \frac{B_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_3} \left[G_3 \left(C_1 + \gamma_0 - \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_3 \left(C_1 + \gamma_0 - \frac{C_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_4} \left[G_4 \left(D_1 + \gamma_0 - \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_4 \left(D_1 + \gamma_0 - \frac{D_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_5} \left[G_5 \left(F_1 + \gamma_0 - \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_5 \left(F_1 + \gamma_0 - \frac{F_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_6} \left[G_6 \left(H_1 + \gamma_0 - \frac{H_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_6 \left(H_1 + \gamma_0 - \frac{H_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_7} \left[G_7 \left(K_1 + \gamma_0 - \frac{K_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_7 \left(K_1 + \gamma_0 - \frac{K_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_8} \left[G_8 \left(M_1 + \gamma_0 - \frac{M_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_8 \left(M_1 + \gamma_0 - \frac{M_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_9} \left[G_9 \left(N_1 + \gamma_0 - \frac{N_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_9 \left(N_1 + \gamma_0 - \frac{N_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{10}} \left[G_{10} \left(P_1 + \gamma_0 - \frac{P_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_{10} \left(P_1 + \gamma_0 - \frac{P_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{11}} \left[G_{11} \left(R_1 + \gamma_0 - \frac{R_2}{r^2} \right)^2 (\cos \theta)^2 + G_{11} \left(R_1 + \gamma_0 - \frac{R_2}{r^2} \right)^2 (\sin \theta)^2 \right] r dr d\theta
\end{aligned} \tag{5.6.103}$$

Εκτελώντας τις διπλές ολοκληρώσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
G_{LT}\gamma_0^2 r_{11}^2 = & G_1 r_1^2 (A_1 + \gamma_0)^2 + G_2 (r_2^2 - r_1^2) \left[(B_1 + \gamma_0)^2 + \frac{B_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right] \\
& + G_3 (r_3^2 - r_2^2) \left[(C_1 + \gamma_0)^2 + \frac{C_2^2}{r_2^2 r_3^2} \right] + G_4 (r_4^2 - r_3^2) \left[(D_1 + \gamma_0)^2 + \frac{D_2^2}{r_3^2 r_4^2} \right] \\
& + G_5 (r_5^2 - r_4^2) \left[(F_1 + \gamma_0)^2 + \frac{F_2^2}{r_4^2 r_5^2} \right] + G_6 (r_6^2 - r_5^2) \left[(H_1 + \gamma_0)^2 + \frac{H_2^2}{r_5^2 r_6^2} \right] \\
& + G_7 (r_7^2 - r_6^2) \left[(K_1 + \gamma_0)^2 + \frac{K_2^2}{r_6^2 r_7^2} \right] + G_8 (r_8^2 - r_7^2) \left[(M_1 + \gamma_0)^2 + \frac{M_2^2}{r_7^2 r_8^2} \right] \\
& + G_9 (r_9^2 - r_8^2) \left[(N_1 + \gamma_0)^2 + \frac{N_2^2}{r_8^2 r_9^2} \right] + G_{10} (r_{10}^2 - r_9^2) \left[(P_1 + \gamma_0)^2 + \frac{P_2^2}{r_9^2 r_{10}^2} \right] \\
& + G_{11} (r_{11}^2 - r_{10}^2) \left[(R_1 + \gamma_0)^2 + \frac{R_2^2}{r_{10}^2 r_{11}^2} \right] \tag{5.6.104}
\end{aligned}$$

Τέλος διαιρούμε και τα δύο μέλη της σχέσης (5.6.102) με r_{11}^2 και γ_0 (το γ_0 απλοποιείται από όλες τις σταθερές $A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, F_1, F_2, H_1, H_2, K_1, K_2, M_1, M_2, N_1, N_2, P_1, P_2, R_1, R_2$ και προκύπτει η τελική έκφραση για το G_{LT} ως εξής:

$$\begin{aligned}
G_{LT} = & G_1 U_1 (A_1 + 1)^2 + G_2 U_2 \left[(B_1 + 1)^2 + \frac{B_2^2}{r_1^2 r_2^2} \right] + G_3 U_3 \left[(C_1 + 1)^2 + \frac{C_2^2}{r_2^2 r_3^2} \right] \\
& + G_4 U_4 \left[(D_1 + 1)^2 + \frac{D_2^2}{r_3^2 r_4^2} \right] + G_5 U_5 \left[(F_1 + 1)^2 + \frac{F_2^2}{r_4^2 r_5^2} \right] \\
& + G_6 U_6 \left[(H_1 + 1)^2 + \frac{H_2^2}{r_5^2 r_6^2} \right] + G_7 U_7 \left[(K_1 + 1)^2 + \frac{K_2^2}{r_6^2 r_7^2} \right] \\
& + G_8 U_8 \left[(M_1 + 1)^2 + \frac{M_2^2}{r_7^2 r_8^2} \right] + G_9 U_9 \left[(N_1 + 1)^2 + \frac{N_2^2}{r_8^2 r_9^2} \right] \\
& + G_{10} U_{10} \left[(P_1 + 1)^2 + \frac{P_2^2}{r_9^2 r_{10}^2} \right] + G_{11} U_{11} \left[(R_1 + 1)^2 + \frac{R_2^2}{r_{10}^2 r_{11}^2} \right] \tag{5.6.105}
\end{aligned}$$

Όπου:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{r_1^2}{r_{11}^2} & U_5 &= \frac{r_5^2 - r_4^2}{r_{11}^2} & U_9 &= \frac{r_9^2 - r_8^2}{r_{11}^2} \\
U_2 &= \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_{11}^2} & U_6 &= \frac{r_6^2 - r_5^2}{r_{11}^2} & U_{10} &= \frac{r_{10}^2 - r_9^2}{r_{11}^2} \\
U_3 &= \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_{11}^2} & U_7 &= \frac{r_7^2 - r_6^2}{r_{11}^2} & U_{11} &= \frac{r_{11}^2 - r_{10}^2}{r_{11}^2} \\
U_4 &= \frac{r_4^2 - r_3^2}{r_{11}^2} & U_8 &= \frac{r_8^2 - r_7^2}{r_{11}^2} & &
\end{aligned}$$

5.7 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ E_θ , ν_θ & G_θ

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιάσουμε τους θεωρητικούς τύπους για το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διατμήσεως και το λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης θ . Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας φορτίσεως με τη διεύθυνση των ινών. Οι σχέσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες [30]:

Για το μέτρο ελαστικότητας E_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{1}{E_L} (\cos \theta)^4 + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{E_T} (\sin \theta)^4 \quad (5.7.1)$$

Για το μέτρο διατμήσεως G_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\frac{1}{G_\theta} = 2 \left(\frac{2}{E_L} + \frac{2}{E_T} + \frac{4\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 + \frac{1}{G_{LT}} [(\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4] \quad (5.7.2)$$

Για το λόγο Poisson ν_θ υπό γωνία φόρτισης θ θα έχουμε:

$$\nu_\theta = E_\theta \left\{ \frac{\nu_{LT}}{E_L} [(\sin \theta)^4 + (\cos \theta)^4] - \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right) (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^2 \right\} \quad (5.7.3)$$

Στο επόμενο κεφάλαιο η εφαρμογή των εκφράσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω για τα E_θ , ν_θ και G_θ θα γίνει για κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 0.44 [6] και άρα και τα μεγέθη E_L , E_T , G_{LT} , ν_{LT} θα είναι υπολογισμένα στη συγκεκριμένη περιεκτικότητα.

5.8 ΜΟΝΤΕΛΑ & ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ & ΤΟΥΣ ΛΟΓΟΥΣ POISSON ΙΝΩΝΩΝ & ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στη συνέχεια παραθέτουμε θεωρητικές σχέσεις που έχουν εκφράσει διάφοροι ερευνητές για τον υπολογισμό του *διαμήκους μέτρου ελαστικότητας* E_L , του *διαμήκη λόγου Poisson* ν_L , του *εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας* E_T και του *διαμήκους μέτρου διάτμησης* G_{LT} . Να υπενθυμίσουμε ότι ο δείκτης f δηλώνει το *έγκλεισμα (filler/fiber)* ενώ ο δείκτης m δηλώνει τη *μήτρα (matrix)*.

5.8.1 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

➤ **Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:**

Οι παραπάνω ερευνητές θεώρησαν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης φάσης η οποία δημιουργείται ανάμεσα στη μήτρα και στο έγκλεισμα. Το μοντέλο τους είναι κυλινδρικό τριφασικό και η κατανομή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης φάσης στον παρακάτω τύπο επιλέχτηκε να είναι παραβολική.

$$\begin{aligned}
 E_L &= \\
 &= E_f U_f + E_m U_m + \frac{3(E_f + E_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\
 &+ \frac{8(E_f - E_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\
 &+ \frac{6 \left\{ E_f(1 - U_m) + E_m U_f - 2E_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \tag{5.8.1}
 \end{aligned}$$

Όπου λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

➤ **Νόμος των Φάσεων (Mixture Law):**

$$E_{LT} = E_f U_f + E_m U_m \quad (5.8.2)$$

➤ **Εξίσωση Ekvall [31]:**

$$E_L = E_f U_f + E'_m U_m \quad (5.8.3)$$

$$\text{Όπου: } E'_m = \frac{E_m}{1-2\nu_m^2}$$

5.8.2 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{LT}

➤ **Εξίσωση Θεοχάρη-Σιδερίδη-Παπανικολάου [27]:**

Οι παραπάνω ερευνητές θεωρώντας και πάλι το κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση και χρησιμοποιώντας την παραβολική μεταβολή, δείξαν ότι ισχύει η εξής σχέση:

$$\begin{aligned} \nu_L = & \\ = \nu_f U_f + \nu_m U_m + & \frac{3(\nu_f + \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{3}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}}(1 - U_m) + U_f(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{3}{2}}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ + & \frac{8(\nu_f - \nu_m)(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - U_m + U_f + [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{6 \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \\ + & \frac{6 \left\{ \nu_f(1 - U_m) + \nu_m U_f - 2\nu_m [U_f(1 - U_m)]^{\frac{1}{2}} \left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1 - U_m)^{\frac{1}{2}} - U_f^{\frac{1}{2}} \right]} \end{aligned} \quad (5.8.4)$$

Όπου λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

➤ **Νόμος των Φάσεων (Mixture Law):**

$$v_{LT} = v_f U_f + v_m U_m \quad (5.8.5)$$

➤ **Εξίσωση Rosen [32]:**

$$v_{LT} = \frac{U_f E_f L_1 + U_m E_m L_2 v_m}{U_f E_f L_3 + U_m E_m L_2} \quad (5.8.6)$$

Όπου:

$$L_1 = 2v_f(1 - v_m^2)U_f + v_m(1 + v_m)U_m$$

$$L_2 = U_f(1 - v_f - 2v_f^2)$$

$$L_3 = 2(1 - v_m^2)U_f + (1 + v_m)U_m$$

5.8.3 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

➤ **Εξίσωση Σιδερίδη [28]:**

Θεωρώντας την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης στο κυλινδρικό τριφασικό μοντέλο και έστω ότι $E_i(r)$ και $v_i(r)$ οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο Poisson της ενδιάμεσης φάσης αντίστοιχα με βάση την παραβολική μεταβολή, τότε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας του μοντέλου E_T είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1 - v_{TT}}{E_T} - \frac{2v_{LT}^2}{E_L} &= \frac{1}{E_f}(1 - v_f - 2v_f^2)U_f + \frac{1}{E_m}(1 - v_m - 2v_m^2)U_m \\ &+ \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b \frac{[1 - v_i(r) - 2v_i^2(r)]}{E_i(r)} r dr \end{aligned} \quad (5.8.7)$$

Όπου τα E_L και τα v_{LT} δίνονται από τις σχέσεις (5.8.1) και (5.8.4), όπου και εδώ λόγω της ενδιάμεσης φάσης: $U_m = 1 - U_f - U_i$

➤ **Εξίσωση Paul [33] ~ Νόμος των Φάσεων (Mixture Law):**

Η εξίσωση του Paul αποτελεί ένα ελάχιστο όριο (*Lower Bound*) για το E_T και είναι η εξής:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (5.8.8)$$

➤ **Εξίσωση Whitney-Riley [34]:**

$$E_T = \frac{2K_c(1 - \nu_T)E_L}{E_L + 4K_c\nu_L^2} \quad (5.8.9)$$

Όπου K_c το μέτρο διόγκωσης του σύνθετου υλικού και ισχύει η σχέση:

$$K_c = \frac{(k_f + G_m)k_m - (k_f - k_m)G_m U_f}{(k_f + G_m) - (k_f - k_m)U_f}$$

με

$$k_f = \frac{E_f}{(1 - \nu_f - 2\nu_f^2)}, k_m = \frac{E_m}{(1 - \nu_m - 2\nu_m^2)}$$

➤ **Εξίσωση Ekvall [35]:**

$$E_T = \frac{E_f E_m'}{U_f E_m' + U_m E_f (1 - \nu_m^2)} \quad (5.8.10)$$

Όπου: $E_m' = \frac{E_m}{1 - 2\nu_m^2}$

➤ **Βελτίωση κατά Halphin & Tsai [45]:**

Χρησιμοποιείται ο διορθωτικός όρος:

$$\eta = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi}$$

όπου ξ μία παράμετρος προσδιοριζόμενη από πειραματικά δεδομένα. Τότε το μέτρο E_T υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1 + \xi\eta U_f}{1 - \eta U_f} \quad (5.8.11)$$

Παρατηρήθηκε ότι για τιμή της παραμέτρου $\xi=2$ υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

➤ **Βελτιωμένη προσέγγιση κατά Tsai & Hahn [50]:**

Εισάγεται η παράμετρος διαχωρισμού τάσεων η_2 και με βάση αυτήν υπολογίζεται το μέτρο E_T από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{U_f + \eta_2 U_m} \left[\frac{U_f}{E_f} + \frac{\eta_2 U_m}{E_m} \right] \quad (5.8.12)$$

Παρατηρήθηκε ότι για την τιμή της παραμέτρου διαχωρισμού τάσεων $\eta_2 = 0.50$ υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

5.8.4 ΤΥΠΟΙ ΕΓΚΑΡΣΙΟΥ ΛΟΓΟΥ POISSON ν_{TT}

➤ **Εξίσωση Foye [51]:**

$$\nu_{TT} = \nu_f U_f + \nu_m U_m \left[\frac{1 + \nu_m - \nu_{LT} \left(\frac{E_m}{E_L} \right)}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{LT} \left(\frac{E_m}{E_L} \right)} \right] \quad (5.8.13)$$

5.8.5 ΤΥΠΟΙ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ ΜΕΤΡΟΥ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

➤ **Εξίσωση Σιδερίδη [29]:**

Θεωρείται από τον ερευνητή το τριφασικό μοντέλο με την ενδιάμεση φάση, όπου με $G_i(r)$ συμβολίζεται το διάμηκες μέτρο διατμήσεως της ενδιάμεσης φάσης το οποίο περιγράφεται με την παραβολική μεταβολή. Το διάμηκες μέτρο διατμήσεως G_{LT} θα είναι:

$$G_{LT} \gamma_0 = G_f (A + \gamma_0)^2 U_f + \frac{2U_f}{a^2} \int_a^b G_i(r) (D + \gamma_0)^2 r dr + G_m \left[(K + \gamma_0)^2 + \frac{K^2}{1 - U_m} \right] U_m \quad (5.8.14)$$

Όπου

$$A = D = \frac{(G_m - G_i)(c^2 - b^2)}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0, \quad K = \frac{(G_i - G_m)b^2}{(G_m + G_i)b^2 - (G_i - G_m)b^2} \gamma_0$$

και $U_m = 1 - U_f - U_i$

➤ **Νόμος των Φάσεων (Mixture Law):**

$$G_{LT} = \frac{G_f G_m}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (5.8.15)$$

➤ **Εξίσωση Hashin-Rosen [38]:**

Οι Hashin και Rosen έδωσαν μια έκφραση η οποία αποτελεί ένα κάτω όριο για το G_{LT} και είναι η εξής:

$$G_{LT} = G_m \frac{(1 + U_f)G_f + G_m U_m}{(1 + U_f)G_m + G_f U_m} \quad (5.8.16)$$

➤ **Εξίσωση Hashin [39]:**

Ο Hashin έδωσε επίσης μια έκφραση που αποτελεί ένα άνω όριο για το G_{LT} :

$$G_{LT} = G_f \frac{(1 + U_m)G_m + G_f U_f}{(1 + U_m)G_f + G_m U_f} \quad (5.8.17)$$

➤ **Εξίσωση Ekvall-Greszczuk [36],[37]:**

$$G_{LT} = \frac{G_m G_f}{G_f U_m + G_m U_f} \quad (5.8.18)$$

➤ **Βελτίωση κατά Halphin & Tsai [45]:**

Χρησιμοποιείται ο διορθωτικός όρος:

$$\eta = \frac{E_f/E_m - 1}{E_f/E_m + \xi}$$

όπου ξ μία παράμετρος προσδιοριζόμενη από πειραματικά δεδομένα. Τότε το μέτρο G_{LT} υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{G_{LT}}{G_m} = \frac{1 + \xi \eta U_f}{1 - \eta U_f} \quad (5.8.19)$$

Παρατηρήθηκε ότι για τιμή της παραμέτρου $\xi=2$ υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

➤ **Βελτιωμένη προσέγγιση κατά Tsai & Hahn [50]:**

Εισάγεται η παράμετρος διαχωρισμού τάσεων η_2 και με βάση αυτήν υπολογίζεται το μέτρο E_T από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{U_f + \eta_2 U_m} \left[\frac{U_f}{G_f} + \frac{\eta_2 U_m}{G_m} \right] \quad (5.8.20)$$

Παρατηρήθηκε ότι για την τιμή της παραμέτρου διαχωρισμού τάσεων $\eta_2 = 0.50$ υπάρχει πολύ καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

« ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ »

6.1 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΥΛΙΚΑ & ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson, μέσω των θεωρητικών σχέσεων που εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό «*MATLAB R2011a*». Στο υπολογιστικό φύλλο (*script*) του *MATLAB* δημιουργήσαμε έναν αλγόριθμο και έχοντας ως δεδομένα τις επιτρεπτές κατ' όγκο περιεκτικότητες U_f του εγκλείσματος, καθώς επίσης τις ελαστικές σταθερές των υλικών της εποξικής ρητίνης και του ινώδους υάλου, και με βάση αυτά υπολογίστηκαν οι υπόλοιποι τύποι με την χρήση συναρτήσεων. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και λόγων Poisson του σύνθετου υλικού, με βάση το κυλινδρικό ενδεκαφασικό μοντέλο, για κάθε διαφορετική περιεκτικότητα σε έγκλεισμα.

Οι υπολογισμοί των ορισμένων ολοκληρωμάτων, των συμβολικών/θεωρητικών σχέσεων των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson του προηγούμενου κεφαλαίου εκτελέστηκαν με το λογισμικό «*Wolfram Mathematica 9*».

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν τη μελέτη για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson από τους θεωρητικούς τύπους που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 5, είναι ινώδη σύνθετα υλικά μονής κατεύθυνσης. Τα υλικά αυτά αποτελούνται από μία εποξειδική μήτρα (Permaglass XE5/1, Permali Ltd., U.K) ενισχυμένη με συνεχείς ίνες γυαλιού τύπου-E. Το υλικό της μήτρας βασίστηκε σε διγλυκιδυλαιθέρα της δισφαινόλης A , συνδυασμένο με σκληρυντή από αρωματική αμίνη (Araldite My 750/HT972, Ciba-Geigy, U.K). Οι ίνες γυαλιού είχαν διάμετρο $1,2 \times 10^{-5} \text{m}$. Οι τιμές των ελαστικών σταθερών και των λόγων Poisson της μήτρας αλλά και των ινών γυαλιού που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον παρακάτω Πίνακα 6.1.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΛΙΚΩΝ ΜΗΤΡΑΣ & ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΟΣ 11-ΦΑΣΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ			
Υλικό	Μέτρο Ελαστικότητας E [Gpa]	Μέτρο Διάτμησης G [Gpa]	Λόγος Poisson ν
Εποξική Ρητίνη	3,5	1,29	0,35
Υαλος	72	30	0,20

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1

6.2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Σε αυτήν την ενότητα θα παραθέσουμε τις τιμές των ελαστικών σταθερών και λόγων Poisson για διάφορες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα, έτσι όπως υπολογίσθηκαν από την εφαρμογή των τύπων, τους οποίους εξαγάγαμε εμείς βάσει του ενδεκαφασικού κυλινδρικού μοντέλου μας. Επίσης θα παραθέσουμε τιμές που υπολογίσθηκαν από άλλους ερευνητές βάσει των δικών τους μοντέλων (Πίνακες 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 και 6.9), όπως επίσης και πειραματικές τιμές δεδομένων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία (Πίνακας 6.4).

Πιο συγκεκριμένα, στον **Πίνακα 6.2** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι τιμές των ελαστικών σταθερών, των λόγων Poisson, των κατ' όγκο περιεκτικότητων όλων των φάσεων καθώς και των ακτίνων τους, που υπολογίσθηκαν βάσει του κυλινδρικού ενδεκαφασικού μοντέλου. Να σημειώσουμε εδώ ότι στο **Πίνακα 6.2** παραθέτεται και το L που είναι το μήκος της πλευράς του εσωτερικού τετραγωνικού πρίσματος του δομικού «κυττάρου» μας, πριν το αναγάγουμε σε κυλινδρικό.

Στον **Πίνακα 6.3** παραθέτουμε τις τιμές του μέτρου ελαστικότητας, του μέτρου διατμήσεως και του λόγο Poisson, υπό γωνία φόρτισης θ (από 0° έως 90°), σε 0,44 κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα. Οι τιμές υπολογίσθηκαν από τους θεωρητικούς τύπους στην ενότητα 5.7 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τα πειραματικά αποτελέσματα για τα E_L , E_T , ν_{LT} και G_{LT} που περιλαμβάνονται στον **Πίνακα 6.4** έχουν αντληθεί από την πηγή [45] της βιβλιογραφίας.

ΠΛΗΡΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ					
[$R_{11_Full_Square}$ Model]					
Κατ'όγκο περιεκτικότητα εγκλείσματος U_f	10%	20%	30%	40%	44%
U_1	0,0111	0,0222	0,0333	0,0444	0,0489
U_2	0,0002	0,0006	0,0010	0,0013	0,0013
U_3	0,1627	0,1285	0,0943	0,0604	0,0471
U_4	0,0002	0,0006	0,0010	0,0013	0,0013
U_5	0,0444	0,0889	0,1333	0,1778	0,1956
U_6	0,0002	0,0005	0,0007	0,0004	0,0000
U_7	0,1516	0,1065	0,0617	0,0178	0,0008
U_8	0,0002	0,0005	0,0007	0,0004	0,0000
U_9	0,0444	0,0889	0,1333	0,1778	0,1956
U_{10}	0,0013	0,0051	0,0116	0,0213	0,0262
U_{11}	0,5838	0,5578	0,5290	0,4971	0,4833
L (μm)	50,445	35,670	29,124	25,223	24,049
r_1 (μm)	6	6	6	6	6
r_2 (μm)	6,047	6,078	6,092	6,087	6,078
r_3 (μm)	23,740	15,657	11,787	9,273	8,464
r_4 (μm)	23,752	15,687	11,835	9,330	8,520
r_5 (μm)	26,612	19,751	16,854	15,200	14,717
r_6 (μm)	26,621	19,770	16,876	15,210	14,717
r_7 (μm)	34,638	23,736	18,745	15,677	14,736
r_8 (μm)	34,646	23,752	18,765	15,687	14,737
r_9 (μm)	36,665	26,612	22,274	19,751	19,004
r_{10} (μm)	36,721	26,765	22,553	20,182	19,506
r_{11} (μm)	56,921	40,249	32,863	28,460	27,136
E_L [GPa]	10,335	17,169	23,972	30,775	33,497
ν_{LT}	0,334	0,317	0,300	0,281	0,274
ν_{TT}	0,327	0,308	0,293	0,280	0,276
E_T [GPa]	8,439	9,348	9,881	10,254	10,376
G_{LT} [GPa]	2,040	2,449	2,819	3,248	3,467

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.2

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ $E_\theta, \nu_\theta, G_\theta$			
θ (°)	E_θ [GPa]	ν_θ	G_θ [GPa]
0	33,497	0,274	3,467
5	31,788	0,295	3,521
10	27,682	0,345	3,685
15	23,028	0,398	3,969
20	18,975	0,441	4,383
25	15,840	0,468	4,930
30	13,545	0,481	5,585
35	11,914	0,481	6,264
40	10,787	0,470	6,803
45	10,043	0,448	7,013
50	9,592	0,418	6,803
55	9,373	0,378	6,264
60	9,338	0,332	5,585
65	9,444	0,279	4,930
70	9,647	0,224	4,383
75	9,898	0,171	3,969
80	10,138	0,126	3,685
85	10,312	0,096	3,521
90	10,376	0,085	3,467

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ				
κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα $U_f = 0,45$	E_L [Gpa]	E_T [Gpa]	ν_{LT}	G_{LT} [Gpa]
Πειραματικά Δεδομένα	38,6	8,27	0,26	4,14

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.4

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L [Gpa]

Uf κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	10%	20%	30%	40%	44%	50%
Θεοχάρης ~ Σιδερίδης ~ Παπανικολάου	10,380	17,310	24,300	31,350	34,900	38,450
Νόμος των Φάσεων (Mixture Law)	10,350	17,200	24,050	30,900	33,640	37,750
Ekvall	11,372	18,109	24,845	31,582	34,276	38,320
Επταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Βγόντζα	10,390	17,350	24,380	31,470	35,030	38,590
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο	10,335	17,169	23,972	30,775	33,497	-
Πειραματικά Δεδομένα	-	-	-	-	38,600	-
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Αποτελέσματα ANSYS Workbench 15	10,499	17,565	24,916	31,989	34,751	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.5**ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{LT}**

Uf κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	10%	20%	30%	40%	44%	50%
Θεοχάρης ~ Σιδερίδης ~ Παπανικολάου	0,335	0,320	0,304	0,289	0,281	0,273
Νόμος των Φάσεων (Mixture Law)	0,335	0,320	0,305	0,290	0,284	0,275
Rosen	0,331	0,314	0,297	0,281	0,275	0,266
Επταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Βγόντζα	0,335	0,320	0,304	0,289	0,281	0,273
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο	0,334	0,317	0,300	0,281	0,274	-
Πειραματικά Δεδομένα	-	-	-	-	0,260	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.6

ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T [Gpa]

Uf κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	10%	20%	30%	40%	44%	50%
Σιδερίδης	5,320	6,560	7,880	9,480	10,540	11,600
Νόμος των Φάσεων (Mixture Law)	3,868	4,322	4,898	5,650	6,020	6,680
Paul (Lower Bound)						
Whitney ~ Riley	5,130	6,080	6,980	8,020	8,665	9,310
Ekvall	5,822	6,485	7,317	8,394	8,920	-
Halpin ~ Tsai	4,497	5,703	7,192	9,076	9,977	11,540
Tsai ~ Hahn	4,232	5,125	6,240	7,670	8,361	9,930
Επταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Βγόντζα	5,330	6,580	7,920	9,590	10,705	11,820
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο	8,439	9,348	9,881	10,254	10,376	-
Πειραματικά Δεδομένα	-	-	-	-	8,270	-

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.7**ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{TT}**

Uf κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	10%	20%	30%	40%	44%
Foye	0,445	0,440	0,418	0,391	0,380
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο	0,327	0,308	0,293	0,280	0,276

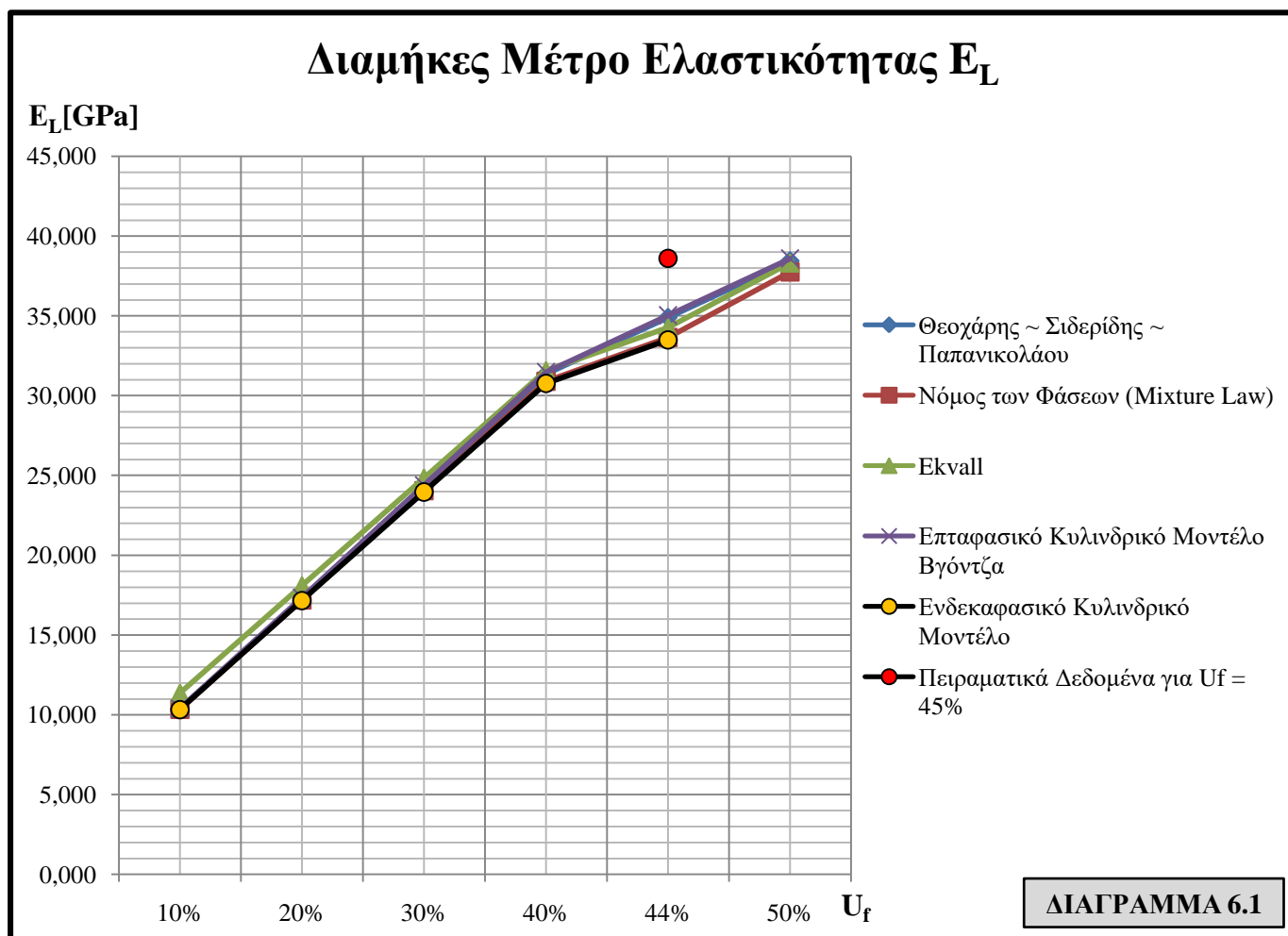
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.8**ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ G_{LT} [Gpa]**

Uf κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα	10%	20%	30%	40%	44%	50%
Σιδερίδης	1,570	1,900	2,330	2,910	3,325	3,740
Νόμος των Φάσεων (Mixture Law)	1,427	1,595	1,810	2,090	2,228	-
Ekvall ~ Greszczuk	1,427	1,595	1,810	2,090	2,228	2,490
Hashin ~ Rosen	1,551	1,870	2,270	2,786	3,037	3,500
Hashin	2,862	4,601	6,535	8,697	9,635	11,140
Halpin ~ Tsai	1,657	2,102	2,651	3,345	3,677	-
Βελτιωμένη προσέγγιση κατά Tsai ~ Hahn	1,562	1,894	2,311	2,847	3,107	-
Επταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Βγόντζα	2,170	2,720	3,260	3,820	4,165	4,510
Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο	2,040	2,449	2,819	3,248	3,467	-
Πειραματικά Δεδομένα	-	-	-	-	4,140	-

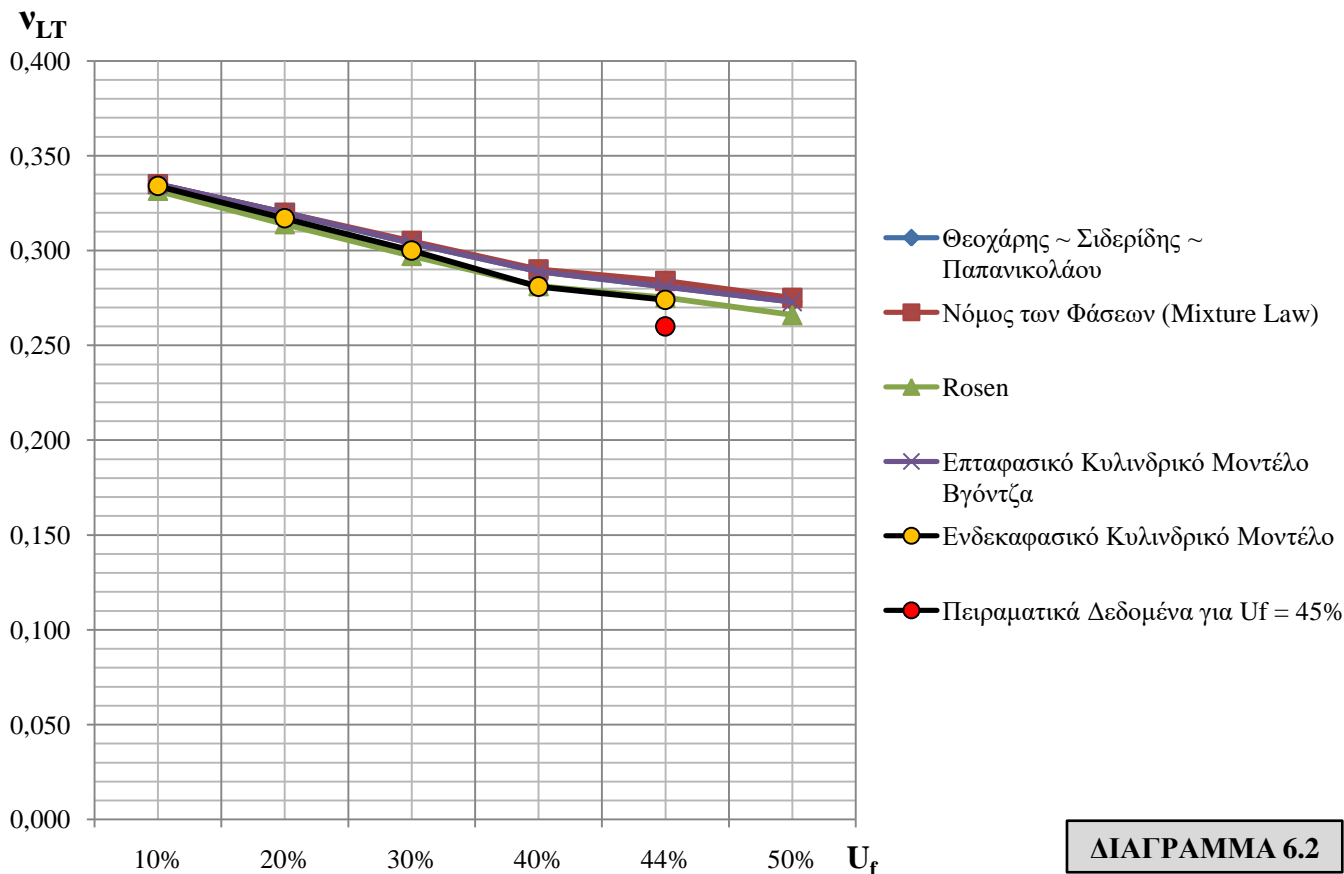
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.9

6.3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

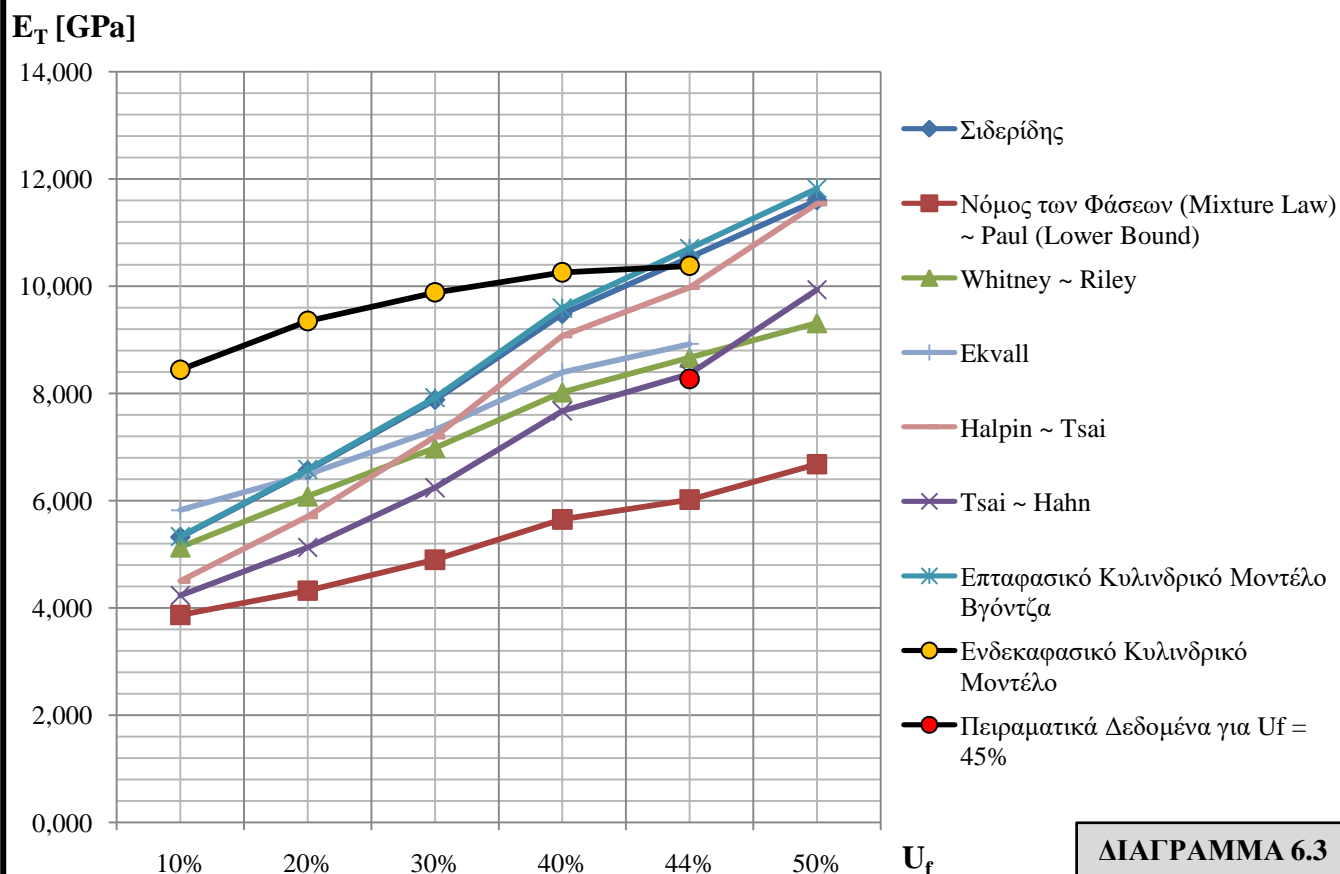
Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα με τις τιμές των διάφορων μοντέλων για τις ελαστικές σταθερές και τους λόγους Poisson. Κάθε μοντέλο απεικονίζεται με μία γραμμή διαφορετικού χρώματος. Οι πειραματικές τιμές απεικονίζονται με σημεία. Στο τέλος της ενότητας ακολουθούν, ένας συγκεντρωτικός πίνακας με τις τιμές που εξήχθησαν από το ενδεκαφασικό μας μοντέλο των $E_\theta, \nu_\theta, G_\theta$ και τις πειραματικές τιμές αυτών, και τα τρία διαγράμματα των $E_\theta, \nu_\theta, G_\theta$ για κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 44%, και οι πειραματικές τιμές αυτών. Τέλος μέσω των διαγραμμάτων, συγκρίνουμε τα μοντέλα μεταξύ τους αλλά και με τις πειραματικές τιμές πιο εύκολα και κατανοητά.



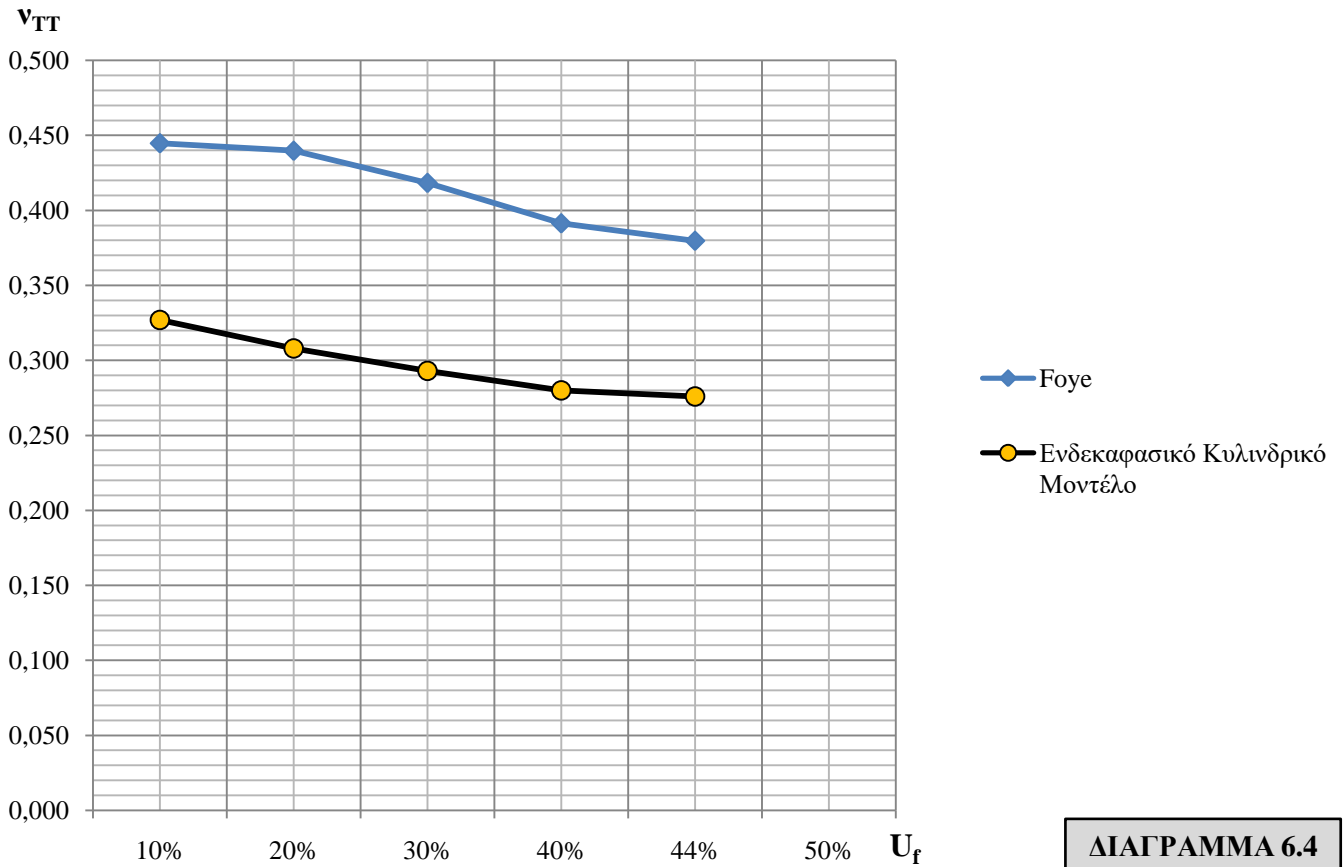
Διαμήκης Λόγος Poisson ν_{LT}



Εγκάρσιο Μέτρο Ελαστικότητας E_T

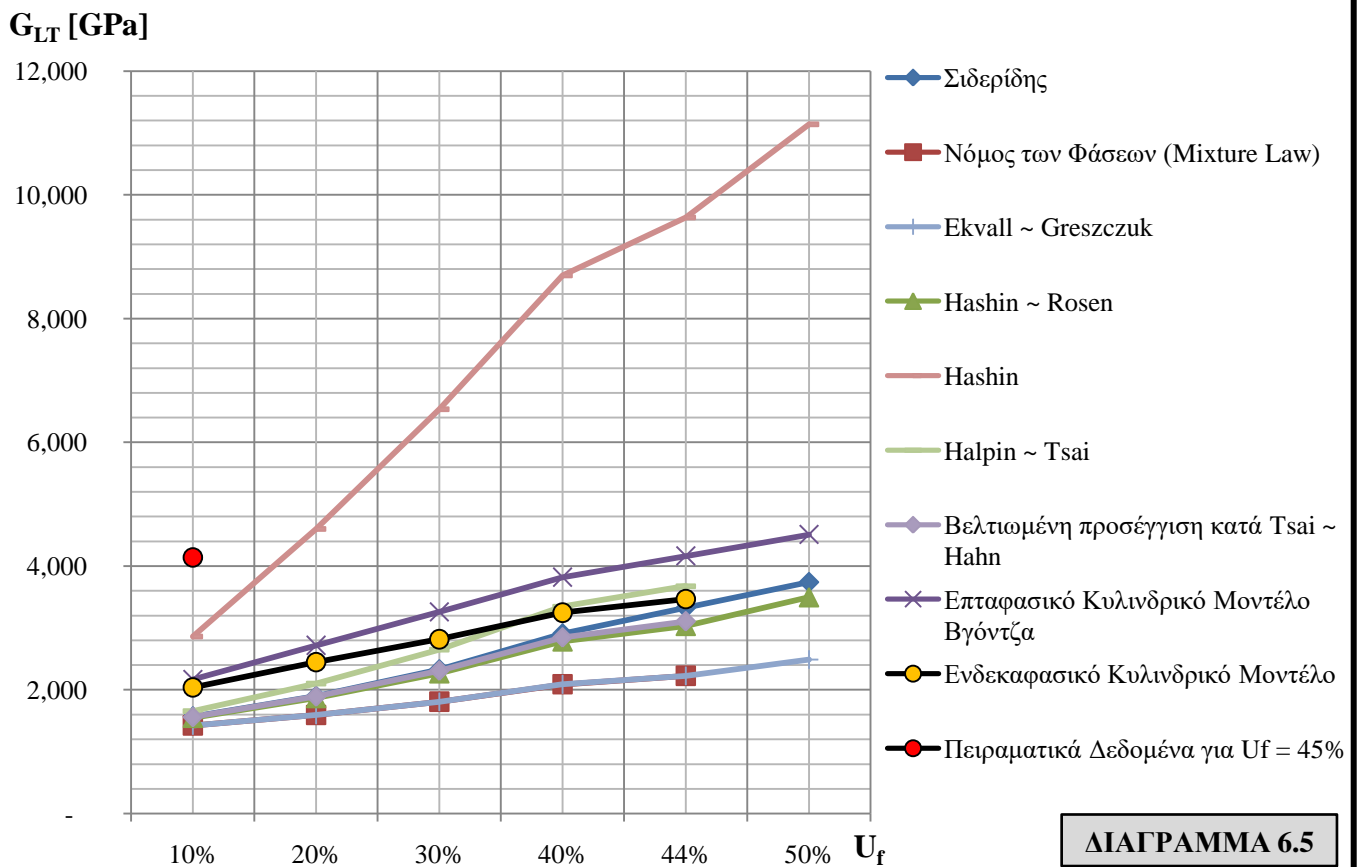


Εγκάρσιος Λόγος Poisson ν_{TT}



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.4

Διαμήκες Μέτρο Διάτμησης G_{LT}



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.5

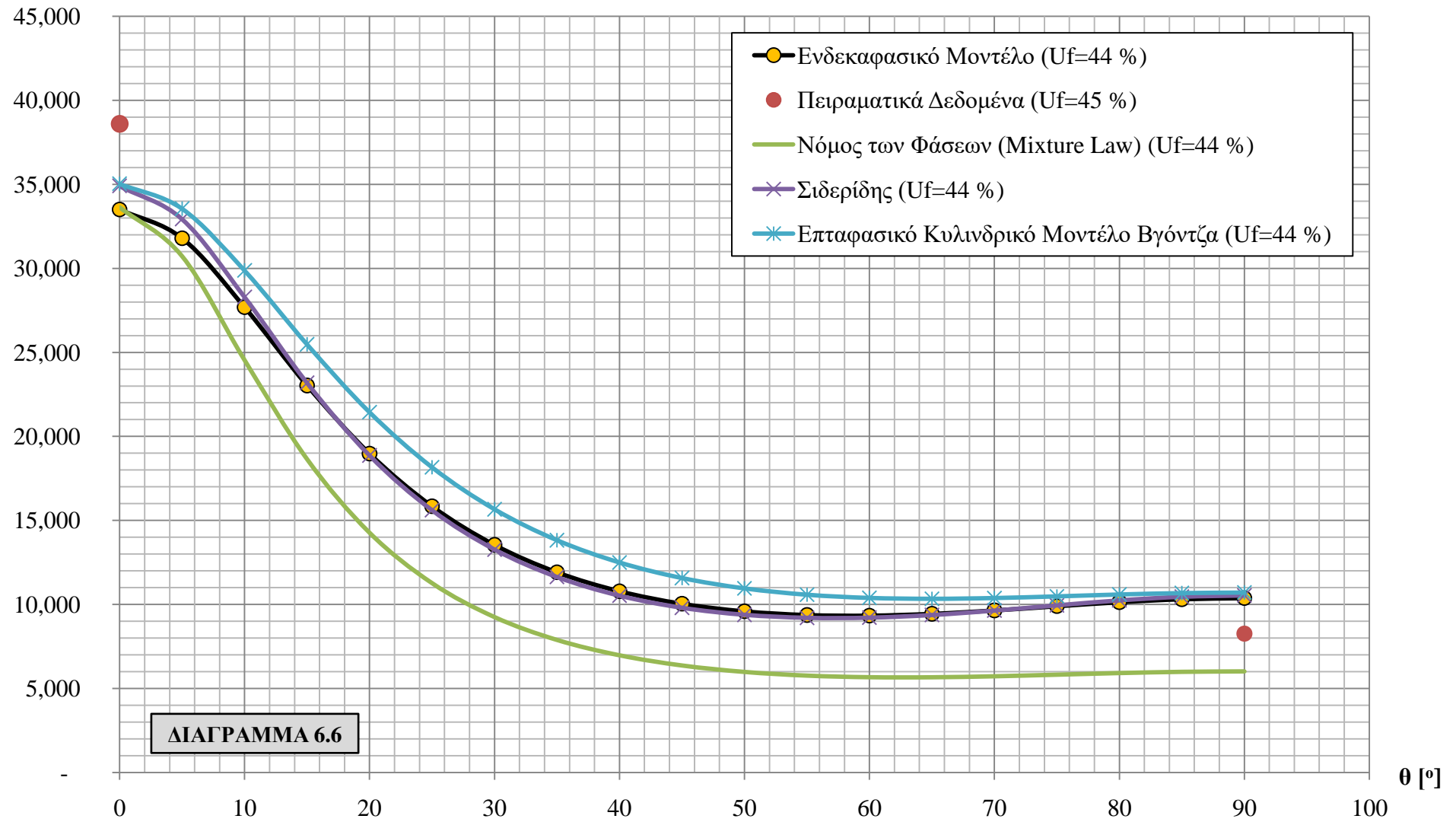
ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΧΕΣΕΩΝ E_{θ} , ν_{θ} , G_{θ}

θ ($^{\circ}$)	Ενδεκαφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο ($U_f=44\%$)			Πειραματικά Δεδομένα ($U_f=45\%$)			Νόμος των Φάσεων (Mixture Law) ($U_f=44\%$)			Σιδερίδης ($U_f=44\%$)			Επταφασικό Κυλινδρικό Μοντέλο Βγόντζα ($U_f=44\%$)		
	E_{θ} [GPa]	ν_{θ}	G_{θ} [GPa]	E_{θ} [GPa]	ν_{θ}	G_{θ} [GPa]	E_{θ} [GPa]	ν_{θ}	G_{θ} [GPa]	E_{θ} [GPa]	ν_{θ}	G_{θ} [GPa]	E_{θ} [GPa]	ν_{θ}	G_{θ} [GPa]
0	33,497	0,274	3,467	38,600	0,260	4,140	33,640	0,284	2,228	34,900	0,281	3,330	35,030	0,281	4,170
5	31,788	0,295	3,366	-	-	-	30,730	0,314	2,264	32,930	0,305	3,385	33,549	0,295	4,224
10	27,682	0,345	3,106	-	-	-	24,545	0,377	2,374	28,290	0,361	3,552	29,868	0,329	4,388
15	23,028	0,398	2,777	-	-	-	18,651	0,433	2,566	23,185	0,419	3,844	25,474	0,366	4,665
20	18,975	0,441	2,457	-	-	-	14,273	0,469	2,847	18,869	0,465	4,275	21,436	0,397	5,057
25	15,840	0,468	2,189	-	-	-	11,272	0,486	3,223	15,612	0,494	4,854	18,159	0,417	5,553
30	13,545	0,481	1,986	-	-	-	9,252	0,488	3,680	13,274	0,507	5,562	15,661	0,425	6,118
35	11,914	0,481	1,846	-	-	-	7,892	0,478	4,161	11,640	0,507	6,312	13,820	0,421	6,671
40	10,787	0,470	1,765	-	-	-	6,978	0,458	4,549	10,530	0,495	6,921	12,495	0,409	7,088
45	10,043	0,448	1,738	-	-	-	6,372	0,430	4,701	9,810	0,473	7,162	11,570	0,387	7,246
50	9,592	0,418	1,765	-	-	-	5,988	0,393	4,549	9,392	0,442	6,921	10,953	0,358	7,088
55	9,373	0,378	1,846	-	-	-	5,769	0,349	4,161	9,212	0,401	6,312	10,577	0,323	6,671
60	9,338	0,332	1,986	-	-	-	5,673	0,299	3,680	9,221	0,352	5,562	10,386	0,282	6,118
65	9,444	0,279	2,189	-	-	-	5,670	0,244	3,223	9,379	0,297	4,854	10,334	0,237	5,553
70	9,647	0,224	2,457	-	-	-	5,729	0,188	2,847	9,641	0,238	4,275	10,380	0,192	5,057
75	9,898	0,171	2,777	-	-	-	5,823	0,135	2,566	9,952	0,180	3,844	10,479	0,151	4,665
80	10,138	0,126	3,106	-	-	-	5,921	0,091	2,374	10,248	0,131	3,552	10,589	0,116	4,388
85	10,312	0,096	3,366	-	-	-	5,993	0,061	2,264	10,462	0,097	3,385	10,674	0,094	4,224
90	10,376	0,085	3,467	8,270	-	-	6,020	0,051	2,228	10,540	0,085	3,330	10,705	0,086	4,170

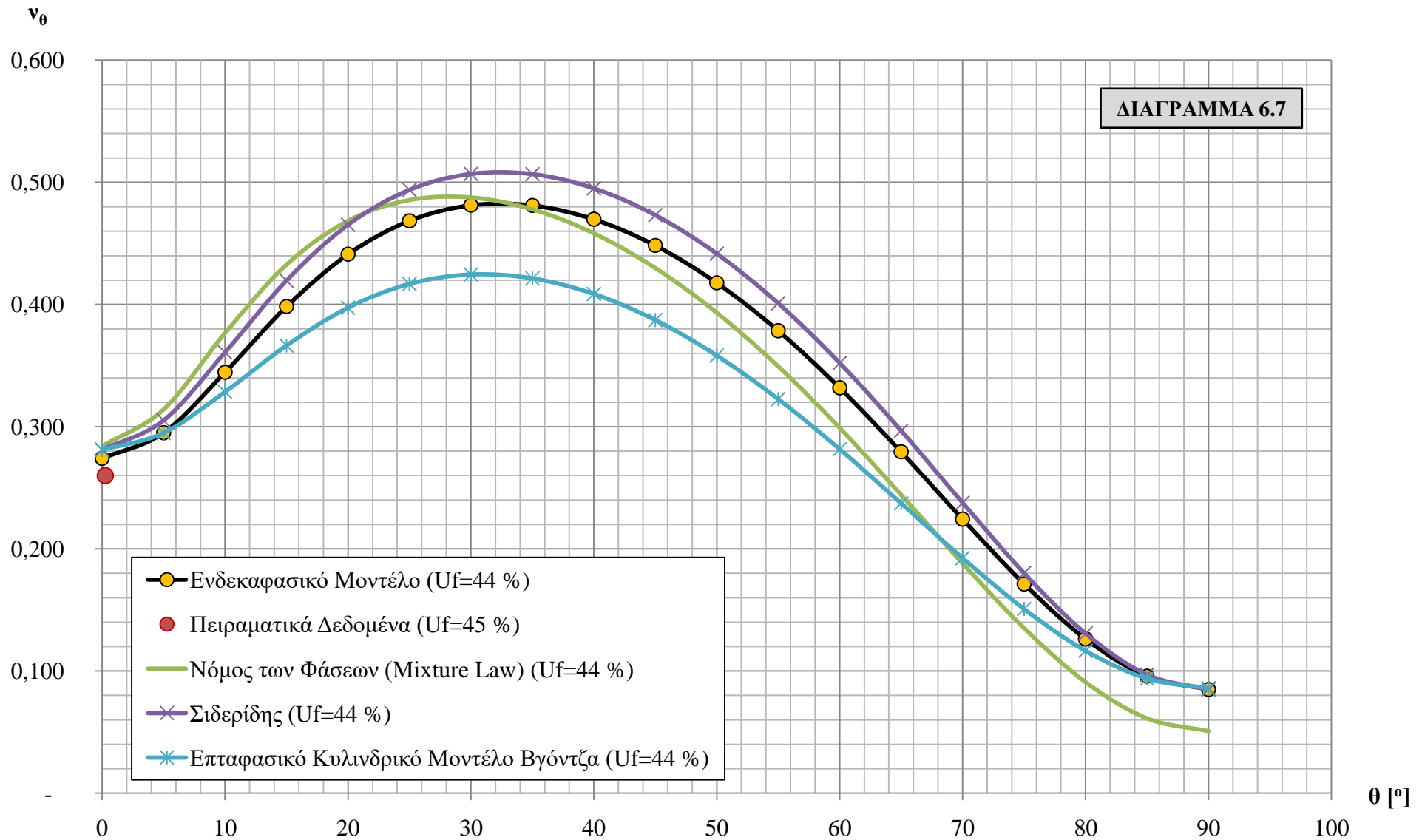
ΠΙΝΑΚΑΣ 6.3

Μέτρο Ελαστικότητας Υπό Γωνία Φόρτισης E_{θ}

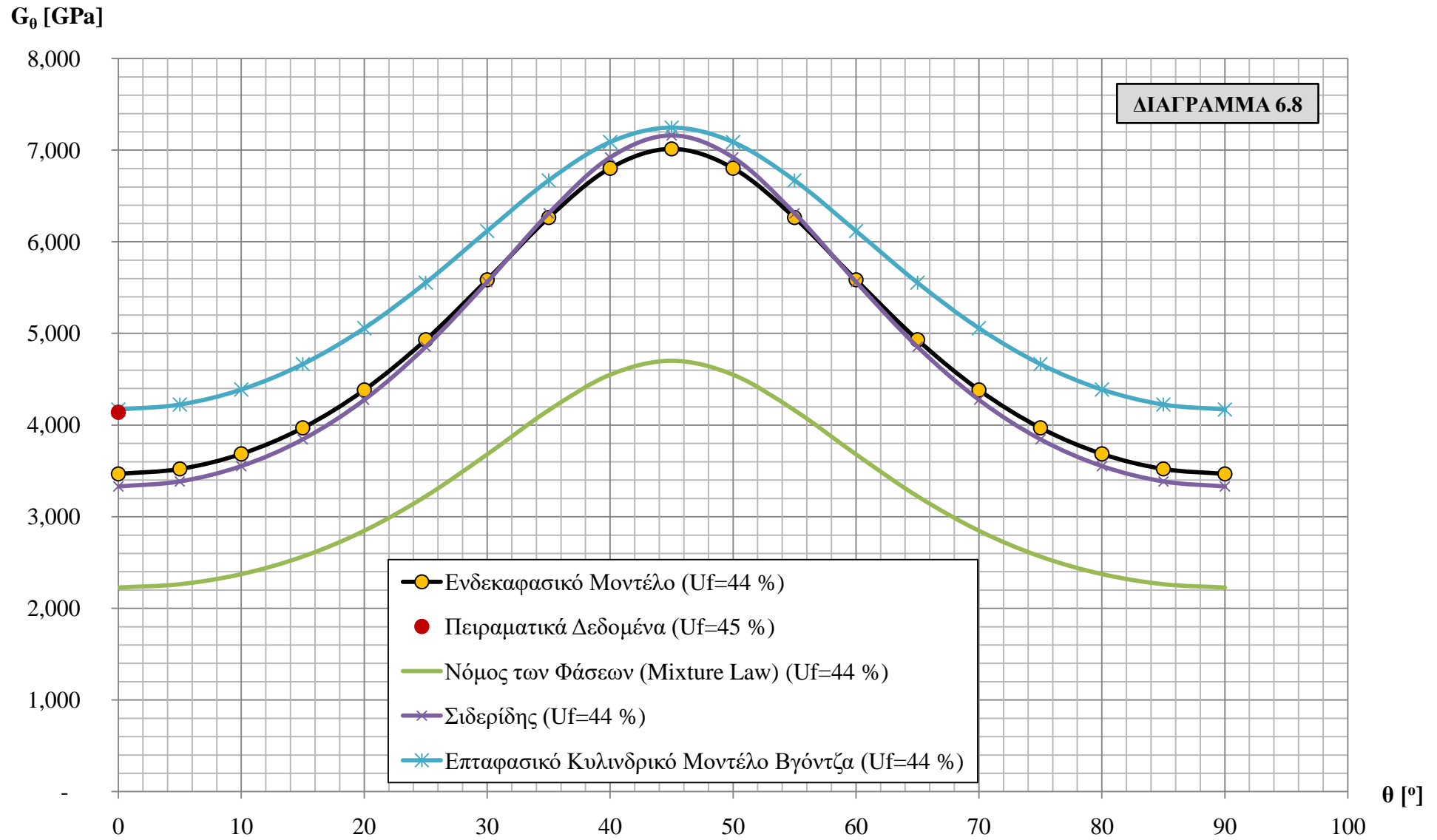
E_{θ} [GPa]



Λόγος Poisson Υπό Γωνία Φόρτισης ν_θ



Μέτρο Διάτμησης Υπό Γωνία Φόρτισης G_θ



6.4 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αρχικά να επισημάνουμε ότι η απόκλιση των τιμών των ελαστικών σταθερών αλλά και των λόγων Poisson, που εξήχθησαν από το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο μας, σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των ινών μέσα στη ρητίνη θεωρείται ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί, μικρορωγμές κλπ.).
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Το θεωρητικό μοντέλο μας προβλέπει τέλεια γεωμετρικά σχήματα (κυλινδρικές ίνες) ενώ στην πραγματικότητα δύναται να υπάρχουν μικρές ατέλειες στην επιφάνεια και ολίγον διαφορετικό μέγεθος ινών.
5. Η ευθυγράμμιση των ινών που είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί κατά την διάρκεια του υλικού των δοκιμίων, πράγμα το οποίο δημιουργεί αποκλίσεις.

Κατά τα άλλα παρατηρούμε ότι σε γενικά πλαίσια το μοντέλο μας ανταποκρίνεται αρκετά καλά στην πραγματικότητα και οι τιμές που εξήχθησαν από αυτό, προσεγγίζουν ιδανικά τα πειραματικά δεδομένα στις περισσότερες των περιπτώσεων. Πιο αναλυτικά έχουμε:

1. ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_L

Στο διάγραμμα 6.1 απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας (E_L) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο εν λόγω διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο, όπως επίσης και αυτά από τους ερευνητές Θεοχάρη~Σιδερίδη~Παπανικολάου [27], Ekvall [31], από το Νόμο των Φάσεων (Σχέση 5.8.2), από τον I.Βγόντζα [52] και από το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45].

Πιο αναλυτικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα των ινών το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα δε, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη~Σιδερίδη~Παπανικολάου [27] και τις θεωρητικές τιμές του επταφασικού μοντέλου του I.Βγόντζα [52], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι τα παραπάνω μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση, το δεύτερο (επταφασικό) και το τρίτο (το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο) λαμβάνουν υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση. Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων (Σχέση 5.8.2) και αυτές του Ekvall [31] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45], για συγκεκριμένη κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα (45%), συγκλίνει με την αντίστοιχη τιμή του προταθέντος μοντέλου (στην κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 44%).

II. ΔΙΑΜΗΚΗΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{LT}

Στο διάγραμμα 6.2 απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson (ν_{LT}) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο εν λόγω διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκους λόγου Poisson που προέκυψε από το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο, όπως επίσης και αυτά από τους ερευνητές Θεοχάρη~Σιδερίδη~Παπανικολάου [27], Rosen [32], από το Νόμο των Φάσεων (Σχέσεις 5.8.5), από τον I.Βγόντζα [52] και από το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45].

Πιο αναλυτικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα των ινών ο διαμήκης λόγος Poisson μειώνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα δε, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Θεοχάρη~Σιδερίδη~Παπανικολάου [27] και τις θεωρητικές τιμές του επταφασικού μοντέλου του I.Βγόντζα [52], συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο ότι τα παραπάνω μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση, το δεύτερο (επταφασικό) και το τρίτο (το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο) λαμβάνουν υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση. Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων (Σχέση 5.8.5) και αυτές του Rosen [32] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος παρατηρούμε ότι το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45], για συγκεκριμένη κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα (45%), συγκλίνει με την αντίστοιχη τιμή του προταθέντος μοντέλου (στην κατ' όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 44%).

III. ΕΓΚΑΡΣΙΟ ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ E_T

Στο διάγραμμα 6.3 απεικονίζεται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας (E_T) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο εν λόγω διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από τους ερευνητές Σιδερίδη [28], Paul (Lower Bound) [33] ~ Νόμος των Φάσεων (Mixture Law), Whitney~Riley [34], Ekvall [35], Tsai~Hahn [50], Halpin~Tsai [50], από τον I.Βγόντζα [52] και από το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45].

Πιο αναλυτικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα των ινών το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις, απλά με διαφορετικό ρυθμό.

Συγκεκριμένα δε, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη [28], των Halpin~Tsai [50] και του I.Βγόντζα [52] ενώ όλες ακολουθούν ανοδική πορεία δε συγκλίνουν ως επί το πλείστον με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου (παρά μόνο σε κατ' όγκο περιεκτικότητες σε έγκλεισμα μεγαλύτερες του 40%), συγκεκριμένα παρουσιάζονται σημαντικά μειωμένες. Επίσης, δε συγκλίνουν σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό με τις τιμές των ερευνητών Tsai~Hahn [50], Whitney~Riley [34] και Ekvall [35].

Οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη ελαχίστου ορίου του ερευνητή Paul (Lower Bound) [33] (ουσιαστικά είναι ο Νόμος των Φάσεων για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας) δε συγκλίνουν με τις τιμές κανενός από τα προαναφερθέντα μοντέλα, συγκεκριμένα παρουσιάζονται σημαντικά μειωμένες.

IV. ΕΓΚΑΡΣΙΟΣ ΛΟΓΟΣ POISSON ν_{TT}

Στο διάγραμμα 6.4 απεικονίζεται η μεταβολή του εγκάρσιου λόγου Poisson (ν_{TT}) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο εν λόγω διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκου λόγου Poisson που προέκυψε από το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο και αυτό από τον ερευνητή Foye [51].

Πιο αναλυτικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα των ινών ο εγκάρσιος λόγος Poisson μειώνεται και στις δύο περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα δε, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη του ερευνητή Foye [51] και οι τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου ακολουθούν αντίστοιχη κατανομή με διαφορετικό εύρος τιμών κατά τον άξονα των τιμών ν_{TT} , με άλλα λόγια οι τιμές του ερευνητή Foye είναι αυξημένες σε σχέση με το ενδεκαφασικό μοντέλο.

Το ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση είναι το γεγονός ότι οι τιμές του μοντέλου Foye ξεπερνούν την τιμή του λόγου Poisson της μήτρας ($\nu_m=0,35$), η οποία τιμή ισχύει για κατ'όγκο περιεκτικότητα $U_f=0\%$. Εδώ να σημειωθεί ότι ο εγκάρσιος λόγος Poisson του συνθέτου υλικού παρουσιάζεται ως η πλέον ιδιόμορφη ελαστική σταθερά, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις συνθέτων λαμβάνει ακόμη και αρνητικές τιμές, όπως αναφέρεται και από τον ερευνητή C.Herakovich [53].

V. ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ G_{LT}

Στο διάγραμμα 6.5 απεικονίζεται η μεταβολή του διαμήκου μέτρου διάτμησης (G_{LT}) συναρτήσει της κατ' όγκο περιεκτικότητας των ινών. Στο εν λόγω διάγραμμα φαίνονται η μεταβολή του διαμήκου μέτρου διατμήσεως που προέκυψε από το προταθέν ενδεκαφασικό μοντέλο, όπως επίσης και αυτά από τους ερευνητές Σιδερίδη [29], Ekvall~Greszczuk [36]~[37], Hashin~Rosen [38], Hashin [39], από το Νόμο των Φάσεων (Σχέση 5.8.12), Halpin~Tsai [50], Tsai~Hahn [50].

Πιο αναλυτικά, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η περιεκτικότητα των ινών το διάμηκες μέτρο διατμήσεως αυξάνεται σε όλες τις περιπτώσεις.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από την μελέτη των ερευνητών Σιδερίδη [29], Halpin~Tsai [50] και του I.Βγόντζα [52] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου. Αυτό δύναται να θεωρηθεί λογικό με δεδομένο όπως προαναφέρθηκε ότι τα παραπάνω μοντέλα έχουν προκύψει με τη θεώρηση της ενδιάμεσου φάσεως. Το πρώτο προκύπτει από το βασικό διφασικό μοντέλο προσθέτοντας την ενδιάμεση φάση ενώ το επταφασικό του Βγόντζα και το προταθέν ενδεκαφασικό, λαμβάνει υπόψη την επίδραση των γειτονικών ινών και την ενδιάμεση φάση.

Επίσης οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του Νόμου των Φάσεων (Σχέση 5.8.15) των Ekvall~Greszczuk [36],[37], Tsai~Hahn [50], Hashin~Rosen [38] συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος μοντέλου.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι η μελέτη του ερευνητή Hashin [39] αποκλίνει σημαντικά από όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

VI. ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ E_θ (ή E_x)

Στο διάγραμμα 6.6 απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E_θ του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας θ των ινών. Συγκεκριμένα φαίνονται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E_θ που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από το Νόμο των Φάσεων (Σχέσεις 5.8.2, 5.8.5, 5.8.15), από τα στοιχεία του ερευνητή Σιδερίδη, από τις θεωρητικές τιμές του επαφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα και από τα στοιχεία των πειραματικών δεδομένων [45].

Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό μειώνεται αρκετά στην αρχή και μέχρι τις 55° , εν συνεχεία σχεδόν σταθεροποιείται μέχρι τις 60° και μετά από λίγο αυξάνεται μέχρι τις 90° όπου εκεί λαμβάνει την τιμή του E_T .

Επιπρόσθετα, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη και τις θεωρητικές τιμές του επαφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα, συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου.

Οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από το Νόμο των Φάσεων ενώ αρχικά συγκλίνουν με όλες τις υπόλοιπες, σταδιακά αποκλίνουν μέχρι και την τελική τιμή που έχει απόκλιση περί τις τέσσερις μονάδες.

Η πειραματική τιμή στις 0° είναι αυξημένη κατά πέντε περίπου μονάδες με την αντίστοιχη θεωρητική του προταθέντος μοντέλου, ενώ αντίθετα η πειραματική τιμή στις 90° είναι μειωμένη κατά περίπου τρεις μονάδες σε σχέση με την αντίστοιχη θεωρητική της καμπύλης E_θ του προταθέντος μοντέλου. Λόγω έλλειψης περαιτέρω πειραματικών δεδομένων δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα, αλλά θεωρώντας ότι τα δύο σημεία των πειραματικών δεδομένων ενωθούν με μία αντίστοιχη καμπύλη, όπως αυτές των θεωρητικών μελετών θα λέγαμε ότι συγκλίνουν αρκετά οι τιμές τους.

VII. ΛΟΓΟΣ POISSON ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ ν_θ (ή ν_{xy})

Στο διάγραμμα 6.7 απεικονίζεται η μεταβολή του λόγου Poisson ν_θ του ινώδους υλικού συναρτήσει της γωνίας θ των ινών. Συγκεκριμένα φαίνονται η μεταβολή του λόγου Poisson ν_θ που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από το Νόμο των Φάσεων (Σχέσεις 5.8.2, 5.8.5, 5.8.15), από τα στοιχεία του ερευνητή Σιδερίδη, από τις θεωρητικές τιμές του επαφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα και από το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45].

Παρατηρούμε ότι το ν_θ αυξάνει από τις 0° που είναι η τιμή του διαμήκους λόγου Poisson μέχρι τις 30° - 35° όπου υπάρχει ένα μέγιστο και εν συνεχεία ελαττώνεται μέχρι τις 90° .

Επιπρόσθετα, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από το Νόμο των Φάσεων, τη μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη και τις θεωρητικές τιμές του επαφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα, συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου.

Η τιμή των πειραματικών δεδομένων στις 0° έχει μία απόκλιση της τάξης του 5% (μειωμένη) από τη θεωρητική αντίστοιχη τιμή του προταθέντος μοντέλου. Λόγω έλλειψης περαιτέρω πειραματικών δεδομένων δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα σε σύγκριση με τις θεωρητικές καμπύλες.

VIII. ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ ΥΠΟ ΓΩΝΙΑ ΦΟΡΤΙΣΗΣ G_θ (ή G_{xy})

Στο διάγραμμα 6.8 απεικονίζεται η μεταβολή του μέτρου διάτμησης G_θ συναρτήσει της γωνίας θ των ινών. Συγκεκριμένα φαίνονται η μεταβολή του μέτρου διατμήσεως G_θ που προέκυψε από το προταθέν μοντέλο, από το Νόμο των Φάσεων (Σχέσεις 5.8.2, 5.8.5, 5.8.15), από τα στοιχεία του ερευνητή Σιδερίδη, από τις θεωρητικές τιμές του επταφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα και από το στοιχείο των πειραματικών δεδομένων [45].

Παρατηρούμε ότι το μέτρο αυτό αυξάνεται από τις 0° μέχρι τις 45° όπου αποκτά μέγιστη τιμή και εν συνέχεια μειώνεται μέχρι τις 90° .

Επιπρόσθετα, διαπιστώνουμε ότι οι θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από τη μελέτη του ερευνητή Σιδερίδη και τις θεωρητικές τιμές του επταφασικού μοντέλου του Ι.Βγόντζα, συγκλίνουν με τις τιμές του προταθέντος ενδεκαφασικού μοντέλου.

Η καμπύλη των θεωρητικών τιμών που προκύπτουν από το Νόμο των Φάσεων, ενώ διαγράφει μία αντίστοιχη μεταβολή με όλες τις υπόλοιπες, είναι μετατοπισμένη προς τα κάτω.

Η τιμή των πειραματικών δεδομένων στις 0° έχει μία απόκλιση της τάξης του 19,4% (αυξημένη) από τη θεωρητική αντίστοιχη τιμή του προταθέντος μοντέλου, ενώ σχεδόν ταυτίζεται με την αντίστοιχη θεωρητική τιμή του μοντέλου του Ι.Βγόντζα. Λόγω έλλειψης περαιτέρω πειραματικών δεδομένων δεν μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα σε σύγκριση με τις θεωρητικές καμπύλες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

«ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΦΑΣΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ»

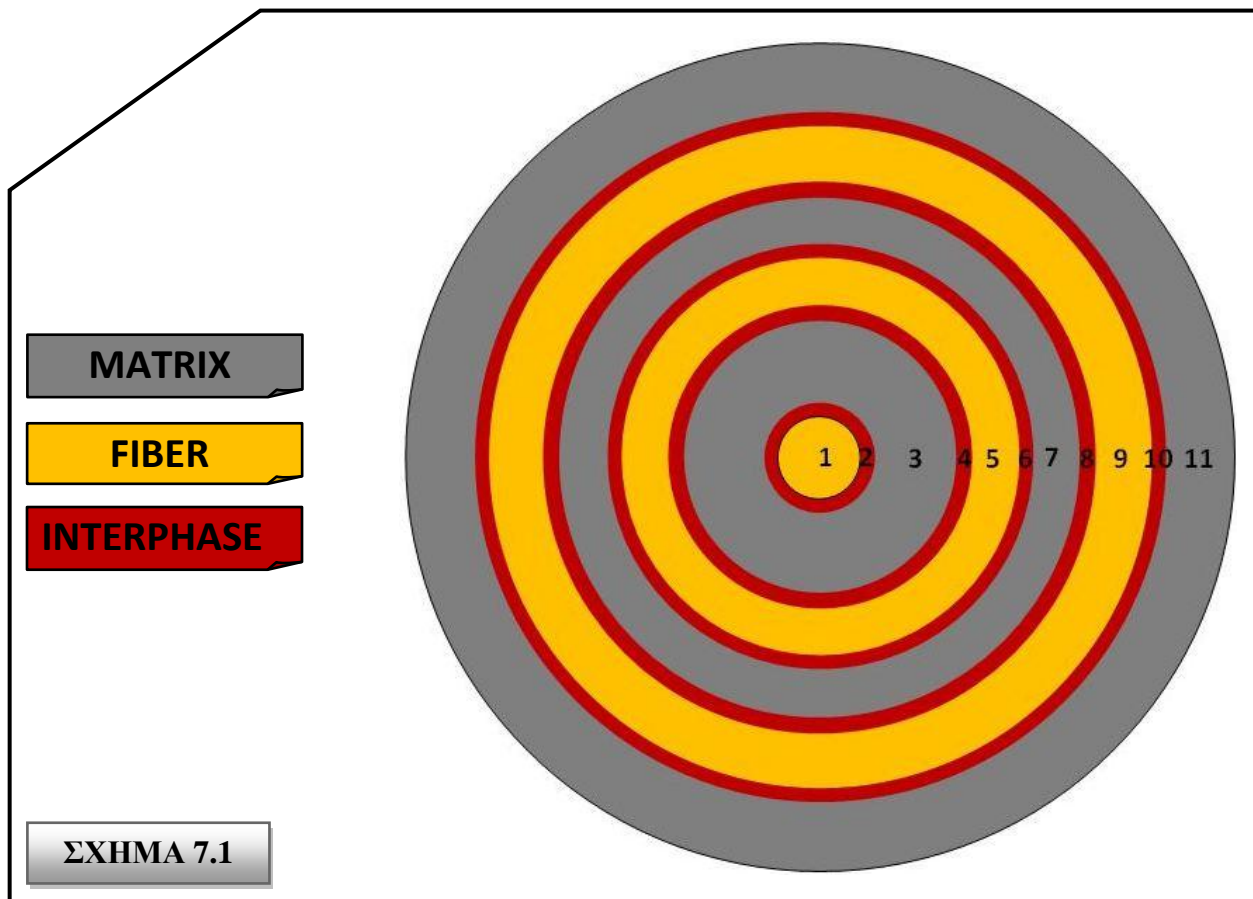
Στο παρόν κεφάλαιο, μελετώντας μακροσκοπικά το ενδεκαφασικό κυλινδρικό μοντέλο θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις μηχανικές ιδιότητες αυτού που αναλύσαμε θεωρητικά στα προηγούμενα κεφάλαια.

Θεωρώντας, όπως προηγουμένως, ότι οι έντεκα (11) φάσεις του μοντέλου μας είναι ισότροπες και ομογενείς, με διαφορετικές όμως μηχανικές ιδιότητες η καθεμία, θα προσεγγίσουμε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L .

7.1 ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ & ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

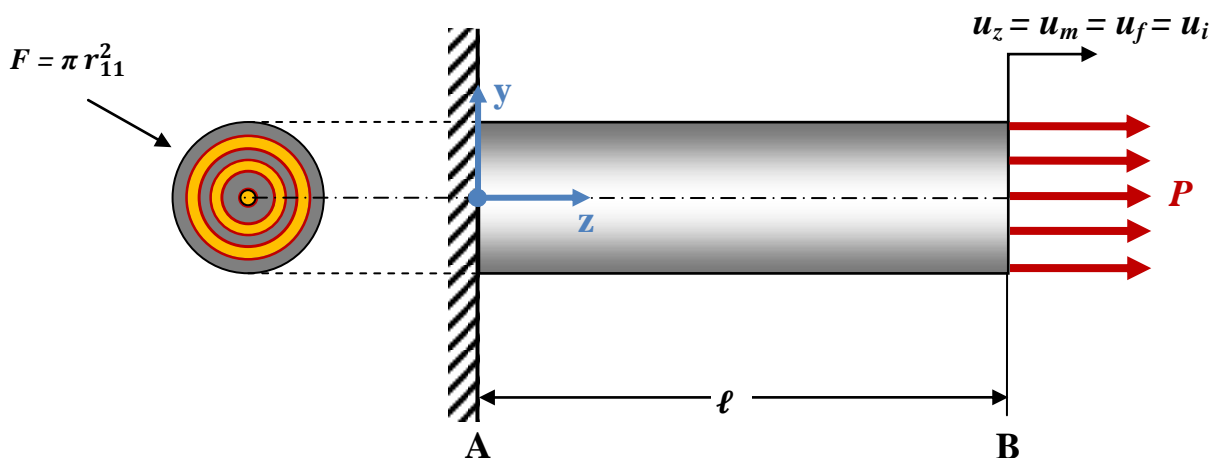
Αρχικά, να υπενθυμίσουμε το πώς απεικονίζονται ξεχωριστά οι φάσεις των διαφορετικών υλικών που απαρτίζουν το μοντέλο μας. Αυτές οι φάσεις, όπως παρουσιάστηκαν αναλυτικά στο κεφάλαιο 3, είναι έντεκα (11) ως εξής (Σχήμα 7.2):

- η 1^η φάση με ακτίνα r_1 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 2^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική ακτίνα r_2 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 3^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_2 και εξωτερική ακτίνα r_3 αντιπροσωπεύει την 1^η περιοχή της μήτρας.
- η 4^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_3 και εξωτερική ακτίνα r_4 αντιπροσωπεύει την 2^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 5^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_4 και εξωτερική ακτίνα r_5 αντιπροσωπεύει τη 2^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 6^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_5 και εξωτερική ακτίνα r_6 αντιπροσωπεύει την 3^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 7^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_6 και εξωτερική ακτίνα r_7 αντιπροσωπεύει την 2^η περιοχή της μήτρας.
- η 8^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_7 και εξωτερική ακτίνα r_8 αντιπροσωπεύει την 4^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 9^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_8 και εξωτερική ακτίνα r_9 αντιπροσωπεύει τη 3^η περιοχή του εγκλείσματος.
- η 10^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_9 και εξωτερική ακτίνα r_{10} αντιπροσωπεύει την 5^η περιοχή της ενδιάμεσης φάσης.
- η 11^η φάση με εσωτερική ακτίνα r_{10} και εξωτερική ακτίνα r_{11} αντιπροσωπεύει την 3^η περιοχή της μήτρας.



Οι ενδιάμεσες φάσεις (2,4,6,8,10) (κόκκινοι σωληνοειδείς κύλινδροι σχήματα 7.1, 7.2) θεωρούμε πως έχουν ελαστικές σταθερές τις μέσες τιμές αυτών που υπολογίσαμε στο κεφάλαιο 4 της παρούσης εργασίας.

Για την εύρεση του διαμήκου μέτρου ελαστικότητας E_L του εν λόγω μοντέλου, θεωρούμε ότι μακροσκοπικά είναι ένα ομογενές σώμα και οι οριακές συνθήκες του προβλήματος ορίζονται ως ακολούθως (Σχήμα 7.2):



ΣΧΗΜΑ 7.2

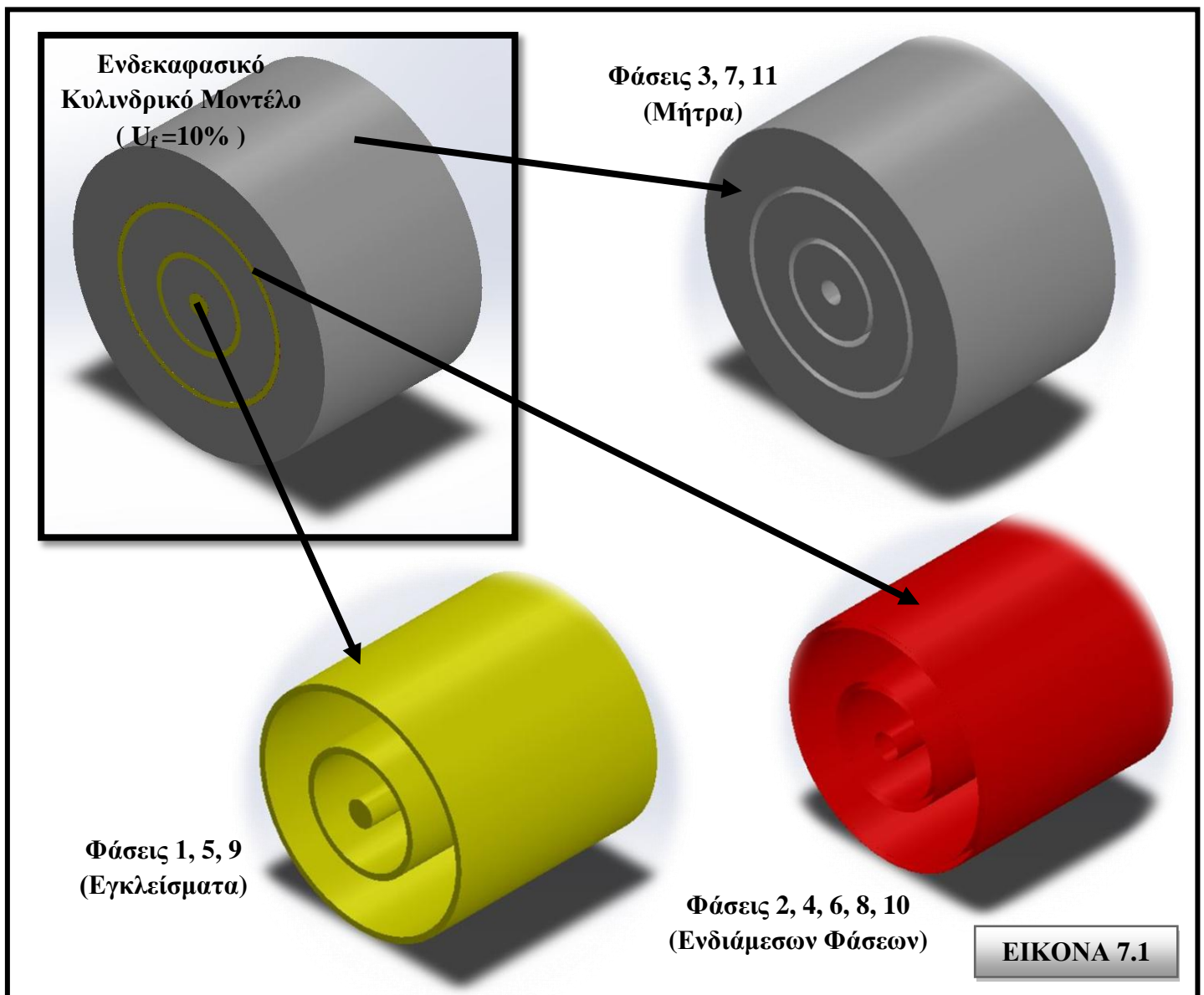
Όπου,

- P , η κατανεμημένη εφελκυστική φόρτιση.
- $u_z = u_m = u_f = u_i$, οι μετατοπίσεις στο σύνορο B της μήτρας, του εγκλείσματος και των ενδιάμεσων φάσεων, λόγω εφελκυσμού.
- F , η μέγιστη διατομή του κυλινδρικού μοντέλου (με ακτίνα r_{11}).

Σημείωση: η διαγραμμισμένη περιοχή (///) στο σύνορο A αποτελεί πάκτωση, δηλαδή οι βαθμοί ελευθερίας σε εκείνο το σύνορο είναι μηδενικοί.

7.2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Λόγω της πολυπλοκότητας του υλικού (πολλά διαφορετικά δομικά στοιχεία/φάσεις) και της γεωμετρίας του κυλινδρικού μοντέλου, αναπτύσσονται τρισδιάστατα τασικά πεδία, συνεπώς κρίνεται απαραίτητη η τρισδιάστατη σχεδίαση του μοντέλου για να εξάγουμε καλύτερα αποτελέσματα. Οπότε, σχεδιάσαμε τη γεωμετρία του ενδεκαφασικού μοντέλου στο σχεδιαστικό λογισμικό «*SOLIDWORKS 2017*» (Εικόνα 7.1).



Τη μοντελοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων την εφαρμόσαμε, χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό λογισμικό «*ANSYS Workbench R15.0*», του εμπορικού πακέτου λογισμικών «*ANSYS 15*», στο μοντέλο που σχεδιάσαμε στο *SOLIDWORKS 17*.

Η διακριτοποίηση του σύνθετου υλικού εκτελέστηκε με τη χρήση προκαθορισμένου τρισδιάστατου εξαεδρικού οκτάκομβου στοιχείου (**Hex8**) του *ANSYS Workbench R15.0*, το οποίο έχει ορθότροπες μηχανικές ιδιότητες και τρεις βαθμούς ελευθερίας μετατόπισης ανά κόμβο.

Γενικά για τη μοντελοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων παραθέτουμε κάποιες πρακτικές που βοηθούν στην ορθολογικότερη προσέγγιση των προβλημάτων:

- Προσπαθούμε να χρησιμοποιούμε όσο πιο μικρά μοντέλα μπορούμε, δηλαδή πιο λίγα στοιχεία με όσο πιο απλές συναρτήσεις σχήματος γίνεται. Δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το μέγεθος του στοιχείου για την ικανοποιητική προσέγγιση του πεδίου μετατοπίσεων του προβλήματός μας. Παρόλα αυτά, με προηγούμενη αποκτηθείσα εμπειρία του χρήστη, ή με τη βοήθεια επαναλαμβανόμενων δοκιμών επί του μοντέλου, είτε με προσομοίωση ή κατά προσέγγιση προσομοίωση της μορφής μιας αναλυτικής λύσης, μπορούμε να μαντέψουμε τη διακύμανση του πεδίου μετατοπίσεων που περιμένουμε να παρουσιαστεί στο μοντέλο μας.
- Σε συμμετρικά προβλήματα, μπορούμε να περιορίσουμε το χωρίο επίλυσης, θέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα επίπεδα συμμετρίας.
- Σε αξονοσυμμετρικά προβλήματα, αντίστοιχα με την παραπάνω σημείωση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν τομέα μόνο του χωρίου μας. Τα προβλήματα αυτά πρέπει να επιδεικνύουν συμμετρία και ως προς τη γεωμετρία και ως προς τη φόρτιση και τις οριακές συνθήκες.

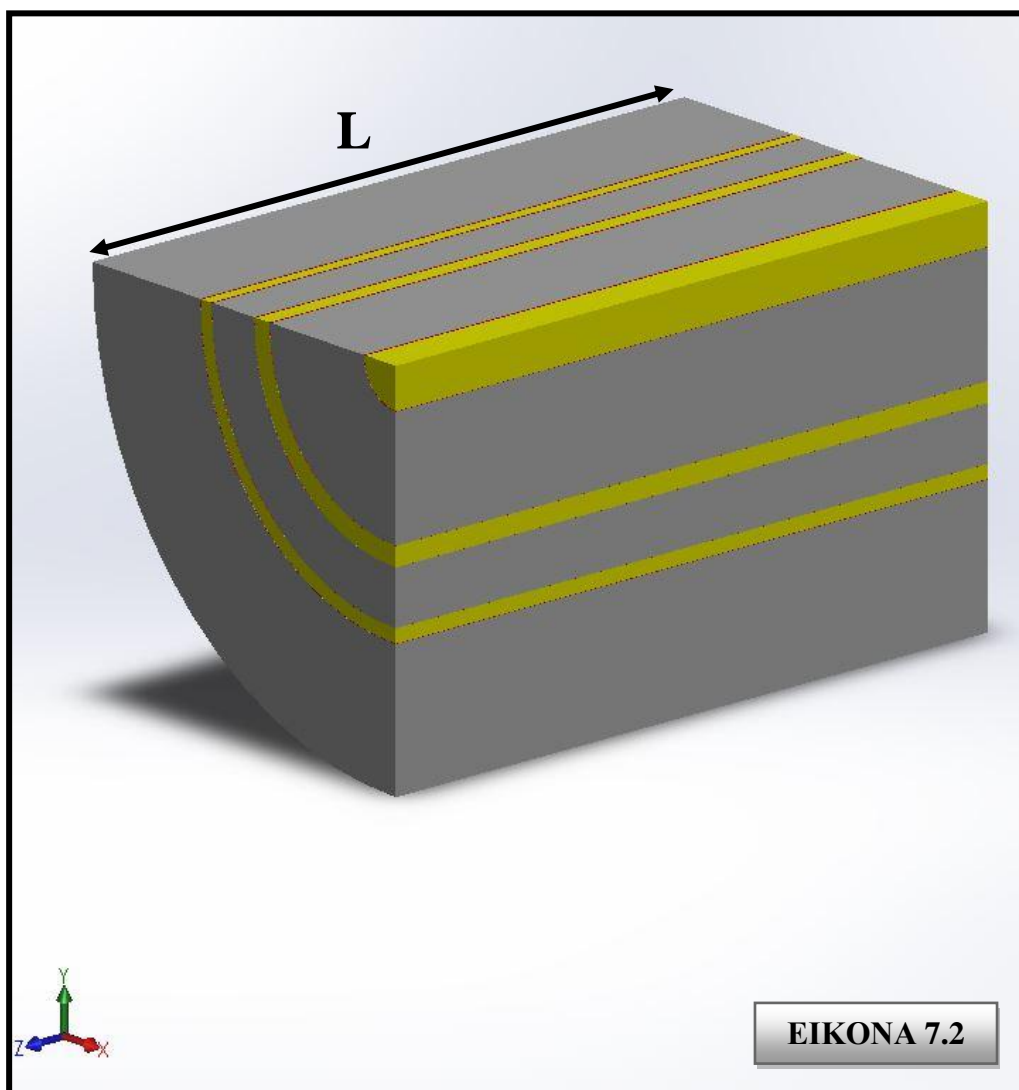
7.3 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Σκοπός της παρούσης ανάλυσης είναι να καταφέρουμε να εξάγουμε αποτελέσματα για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L του ενδεκαφασικού κυλινδρικού μοντέλου.

7.3.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΤΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ

Το ανωτέρω μοντέλο έχει συνολικό μήκος $L = 100mm$ και οι υπόλοιπες διαστάσεις (οι έντεκα ακτίνες των φάσεων, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}$ και r_{11}) αλλάζουν δυναμικά, με άλλα λόγια κυμαίνονται αναλόγως της κατ'όγκον περιεκτικότητας σε έγκλεισμα (U_f) συμφώνως του Πίνακα 6.2 του προηγούμενου κεφαλαίου (με την εξαίρεση ότι η διαστασιολόγησή τους είναι σε mm αντί σε μm). Συνεπώς, θα έχουμε συνολικά πέντε (5) «δοκίμια», ένα για καθεμία περίπτωση διαφορετικής κατ'όγκο περιεκτικότητας σε έγκλεισμα που μελετούμε (δηλαδή, για $U_f = 10\%, 20\%, 30\%, 40\%$ και 44%).

Η εν λόγω ανάλυση θα εκτελεστεί με τη μοντελοποίηση του ενός τεταρτημορίου του μοντέλου, για να επιτευχθεί μείωση του υπολογιστικού κόστους, καθώς το πρόβλημά μας εμπίπτει στην περίπτωση ενός αξονοσυμμετρικού προβλήματος ως προς τον άξονα zz' (δηλαδή κατά το διάμηκες του κυλινδρικού μας μοντέλου). Συνεπώς, το «δοκίμιό» μας, σχεδιασμένο στο *SOLIDWORKS 2017*, απεικονίζεται ως ακολούθως (Εικόνα 7.2):

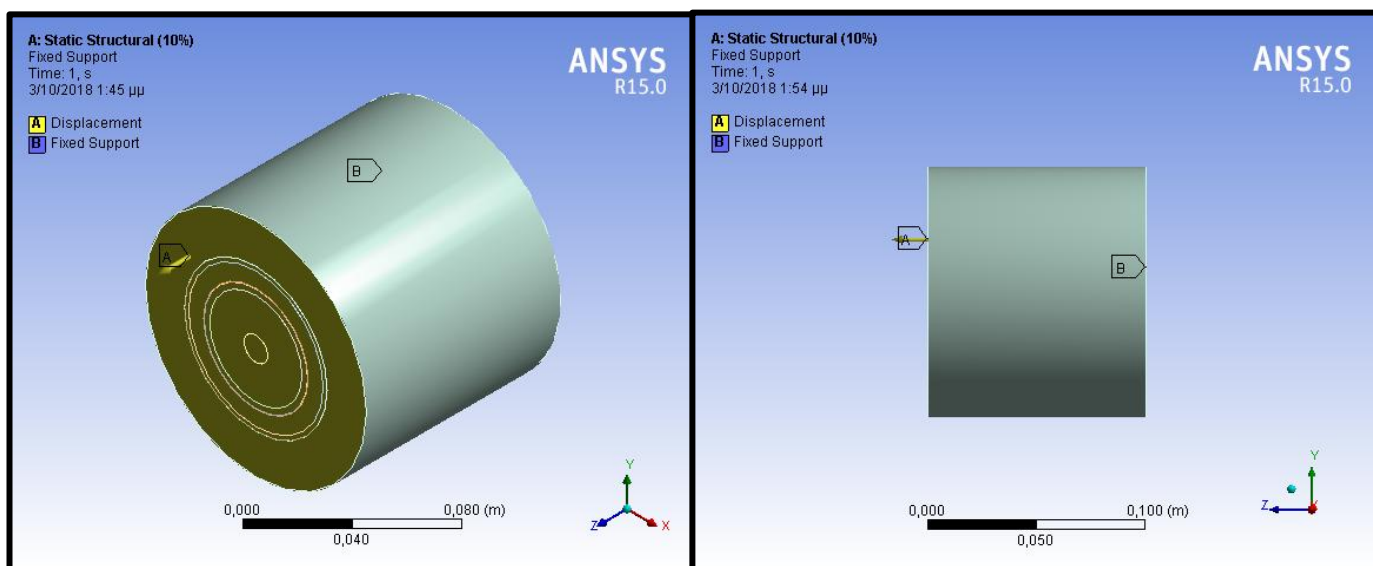
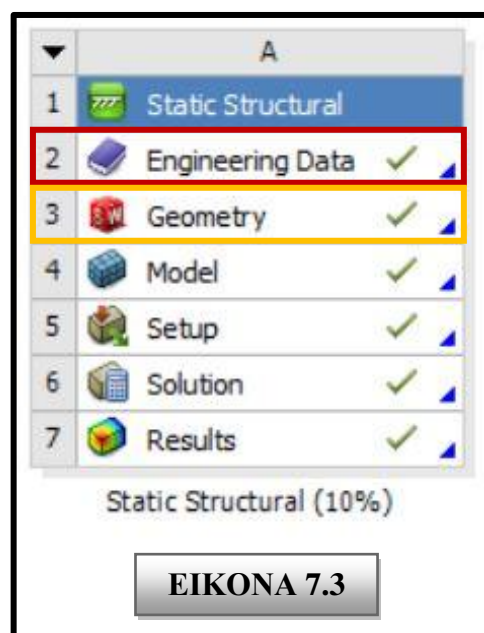


Κατόπιν του σχεδιασμού και της παραμετροποίησης των ακτινών των φάσεων κάθε ενός από τα πέντε μοντέλα ξεχωριστά, εισάγουμε τα μοντέλα στο *ANSYS Workbench R15.0* για την τελική μακροσκοπική ανάλυση των πέντε περιπτώσεων του στατικού μας προβλήματος και εν τέλει την επίλυση αυτού.

7.3.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το πρόβλημά μας, όπως περιγράφεται και στο Σχήμα 7.2, στο υπολογιστικό περιβάλλον του *ANSYS Workbench R15.0*, διατυπώνεται ως εξής:

- Εισάγουμε τα **δεδομένα των μηχανικών ιδιοτήτων** (*Engineering Data*) (Πίνακας 7.1) όλων των φάσεων των μοντέλων στη σχετική βιβλιοθήκη του *ANSYS Workbench* (Εικόνα 7.3). (Σημείωση: να υπενθυμίσουμε ότι για τις ενδιαμέσες φάσεις έχουν ληφθεί οι μέσες τιμές των αντίστοιχων μεγεθών)
- Εισάγουμε τη **γεωμετρία** (*Geometry*) που σχεδιάσαμε με τις διαστάσεις που προαναφέραμε ($L = 100\text{mm}$ ή $0,1\text{ m}$ και $r_{11} = r_{max}$) (Εικόνα 7.3 ~ 7.5).
- Στις πλευρές του μοντέλου μας εφαρμόζουμε αντίστοιχα, μία κατανεμημένη μετατόπιση (*Displacement*: $0,001\text{ mm}$ ή $1 \times 10^{-6}\text{ m}$) στην πλευρά *A* και μία πάκτωση/στήριξη (*Fixed Support*) στην πλευρά *B* (Εικόνα 7.4 ~ 7.5).



ΕΙΚΟΝΑ 7.4 : «Απεικόνιση της πλήρους γεωμετρίας του κυλινδρικού μοντέλου»

Engineering Data	Uf	E [Gpa]	v	G [Gpa]
Fiber Glass (1st, 5th, 9th Phases)		72	0,2	30
Matrix (3rd, 7th, 11th Phases)		3,5	0,35	1,29
1st Interphase (2nd Phase)	10%	37,7055	0,2751	15,6263
	20%	37,7529	0,2752	15,6140
	30%	37,7479	0,2752	15,6084
	40%	37,7513	0,2752	15,6107
	44%	37,7414	0,2752	15,6141
2nd Interphase (4th Phase)	10%	37,7529	0,2750	15,6462
	20%	37,7610	0,2750	15,6496
	30%	37,7729	0,2749	15,6546
	40%	37,7846	0,2749	15,6595
	44%	37,7872	0,2749	15,6606
3rd Interphase (6th Phase)	10%	37,7479	0,2750	15,6441
	20%	37,7443	0,2750	15,6426
	30%	37,7427	0,2750	15,6419
	40%	37,7462	0,2750	15,6434
	44%	37,7498	0,2750	15,6449
4th Interphase (8th Phase)	10%	37,7513	0,2750	15,6455
	20%	37,7540	0,2750	15,6467
	30%	37,7559	0,2750	15,6475
	40%	37,7536	0,2750	15,6465
	44%	37,7502	0,2750	15,6451
5th Interphase (10th Phase)	10%	37,7414	0,2750	15,6414
	20%	37,7171	0,2751	15,6312
	30%	37,6788	0,2752	15,6151
	40%	37,6265	0,2753	15,5933
	44%	37,6014	0,2753	15,5827

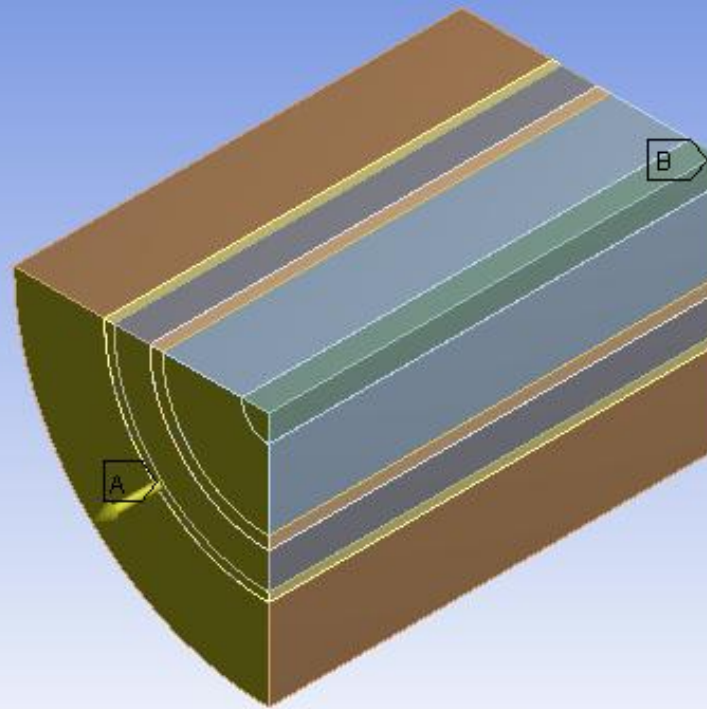
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1

B: Static Structural (10%) 1 quarter of cylindrical model

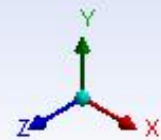
Fixed Support
Time: 1, s
3/10/2018 4:32 μμ

ANSYS
R15.0

- A** Displacement
- B** Fixed Support



0,000 0,060 (m)
0,030

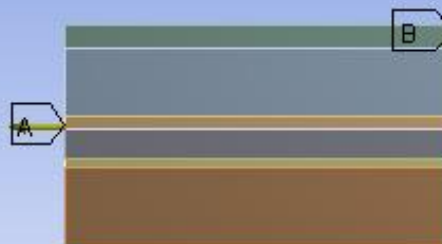


B: Static Structural (10%) 1 quarter of cylindrical model

Fixed Support
Time: 1, s
3/10/2018 4:33 μμ

ANSYS
R15.0

- A** Displacement
- B** Fixed Support

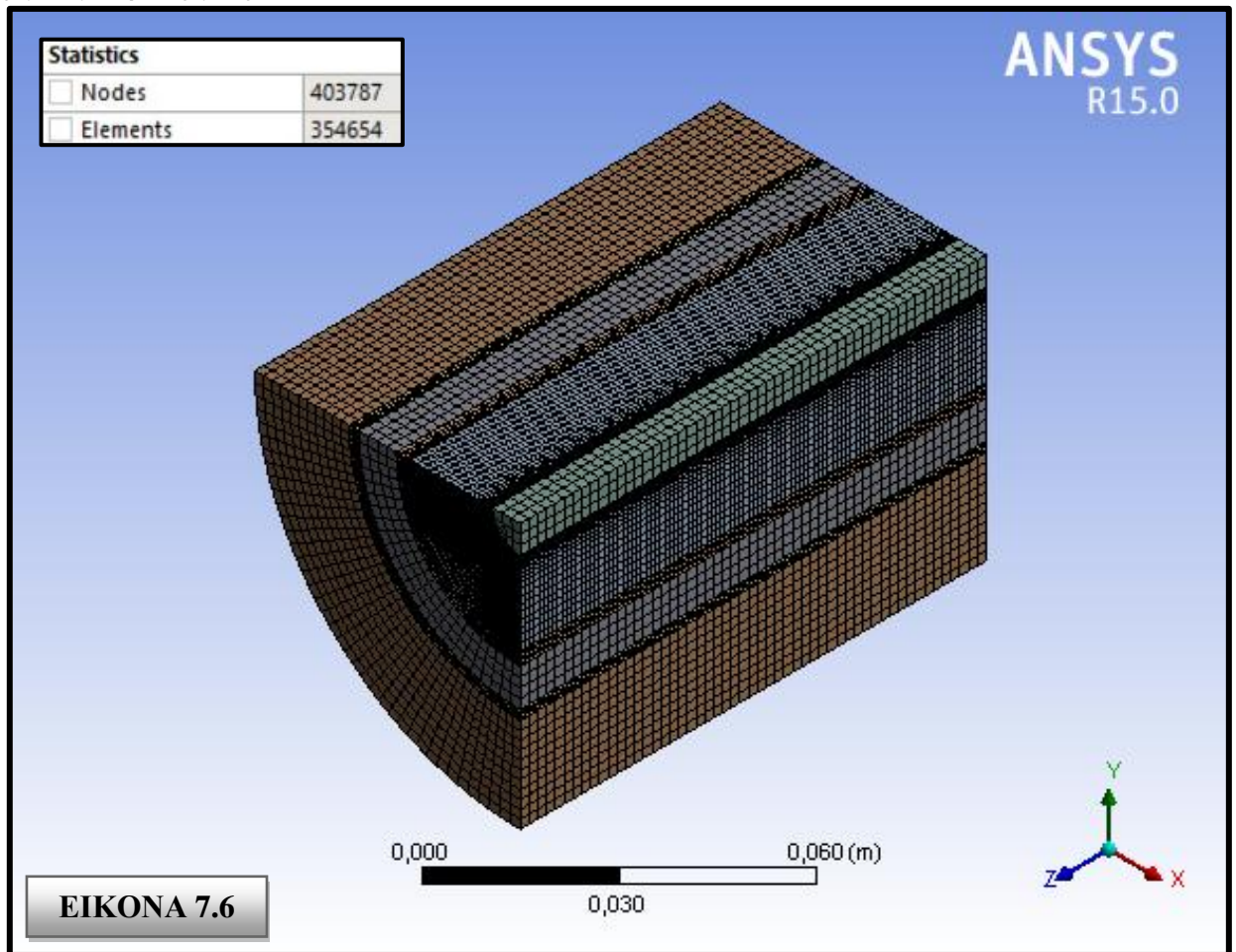


0,000 0,100 (m)
0,050

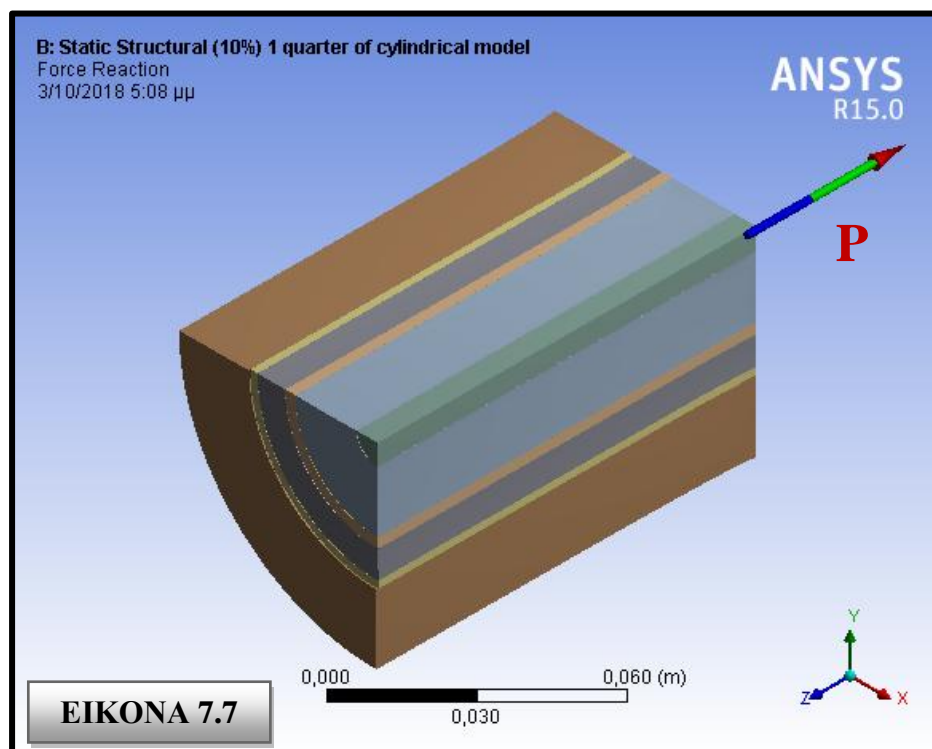


ΕΙΚΟΝΑ 7.5 : «Απεικόνιση ενός τεταρτημορίου της γεωμετρίας του κυλινδρικού μοντέλου»

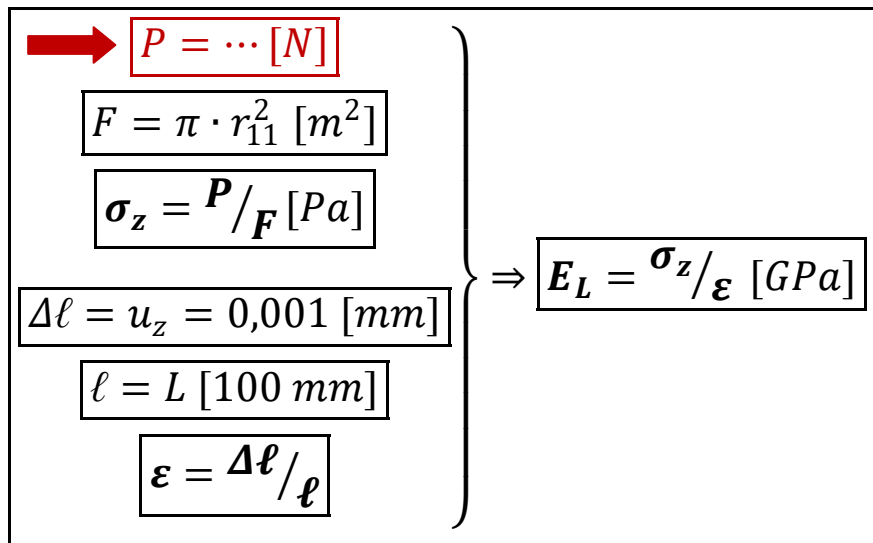
- Εν συνεχεία, εκτελούμε τη διαδικασία δημιουργίας του πλέγματος (*Mesh Generation*) της γεωμετρίας μας.



- Κατόπιν της επίλυσης του προβλήματος από τον επιλυτή (solver) του ANSYS Workbench R15.0, εξάγουμε το αξονικό φορτίο P (Δύναμη Αντίδρασης = *Force Reaction*) κατά τον άξονα z που αναπτύσσεται στην πλευρά της πάκτωσης (B) λόγω της καταναεμημένης μετατόπισης (*Displacement*) της πλευράς (A) (Εικόνα 7.7).



- Μέσω της τιμής του εν λόγω φορτίου (P) υπολογίζουμε με τη βοήθεια του *Νόμου του Hooke*, σχέσεις (2.1.1) έως (2.1.3), το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L , ως ακολούθως:



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΣΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ EXCEL		
DATA ($U_f = 10\%$)		
Reaction Force (P)	267,170	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,056921	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,002545	[m ²]
Stress (σ)	104.991,168	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100,000	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	10,499	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	10,335	[GPa]
Deviation	1,588	[%]

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2

Σημείωση: όλα τα παραπάνω στοιχεία αφορούν την πρώτη περίπτωση της μελέτης μας, δηλαδή αυτήν όπου το δοκίμιο έχει κατ'όγκο περιεκτικότητα σε έγκλεισμα 10%.

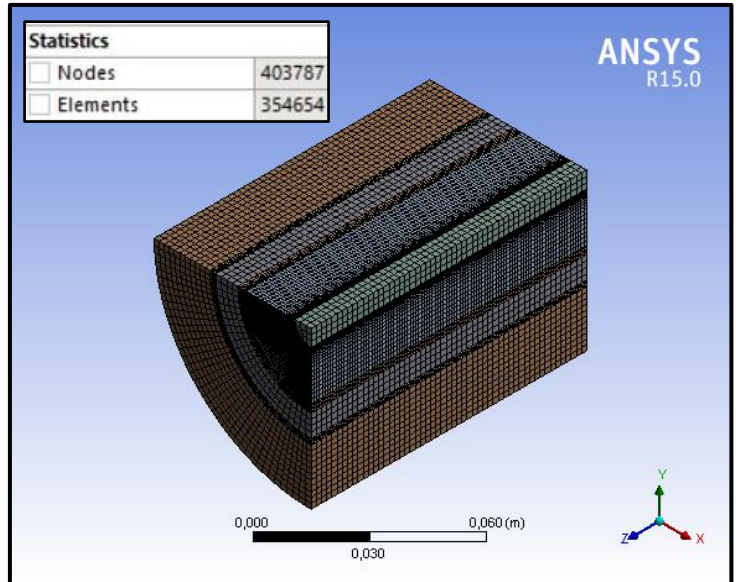
7.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

7.4.1 ΠΑΡΑΘΕΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

►► Κατ'όγκον Περιεκτικότητα σε Έγκλεισμα $U_f = 10\%$ ◀◀

$U_f = 10\%$		
DATA		
Reaction Force (P)	267,170	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,056921	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,002545	[m ²]
Stress (σ)	104.991,168	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100,000	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	10,499	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	10,335	[GPa]
Deviation	1,588	[%]

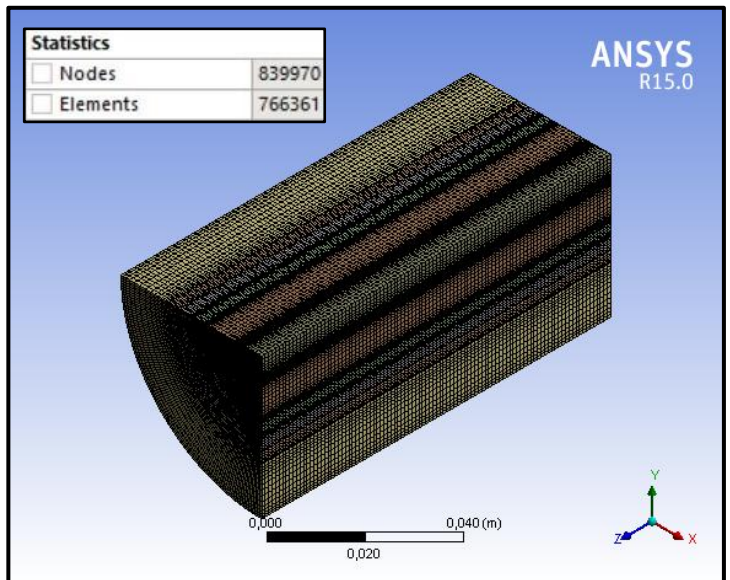
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3



►► Κατ'όγκον Περιεκτικότητα σε Έγκλεισμα $U_f = 20\%$ ◀◀

$U_f = 20\%$		
DATA		
Reaction Force (P)	223,450	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,040249	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,001272	[m ²]
Stress (σ)	175.622,554	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100,000	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	17,562	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	17,169	[GPa]
Deviation	2,290	[%]

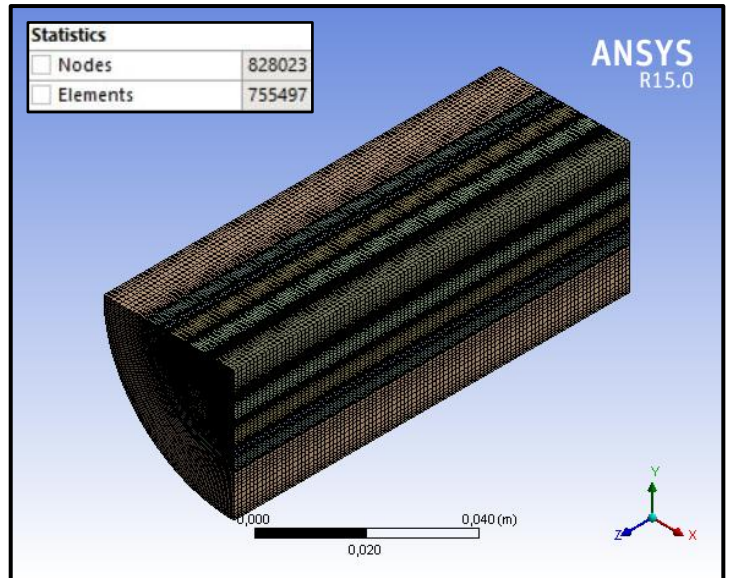
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4



►► Κατ'όγκον Περιεκτικότητα σε Έγκλεισμα $U_f = 30\%$ ◀◀

$U_f = 30\%$		
DATA		
Reaction Force (P)	211,330	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,032863	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,000848	[m ²]
Stress (σ)	249.147,686	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100,000	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	24,915	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	23,972	[GPa]
Deviation	3,933	[%]

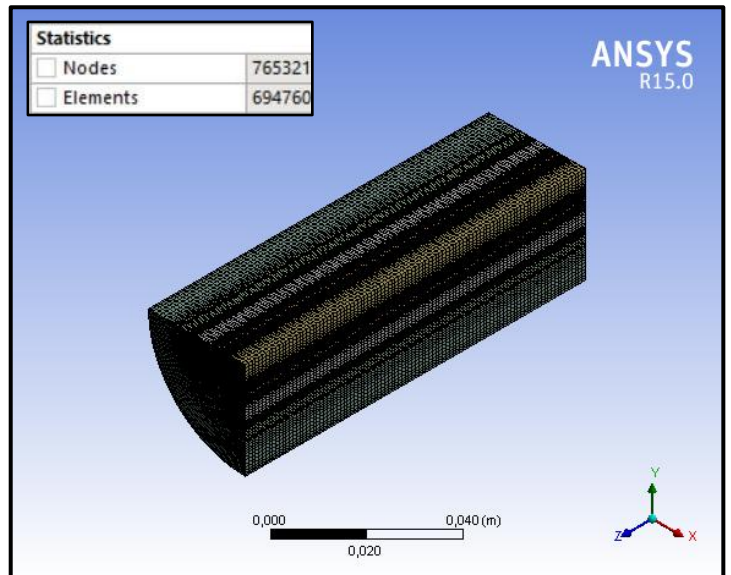
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.5



►► Κατ'όγκον Περιεκτικότητα σε Έγκλεισμα $U_f = 40\%$ ◀◀

$U_f = 40\%$		
DATA		
Reaction Force (P)	203,49	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,02846	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,00063615	[m ²]
Stress (σ)	319877,2833	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	31,98772833	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	30,775	[GPa]
Deviation	3,940628205	[%]

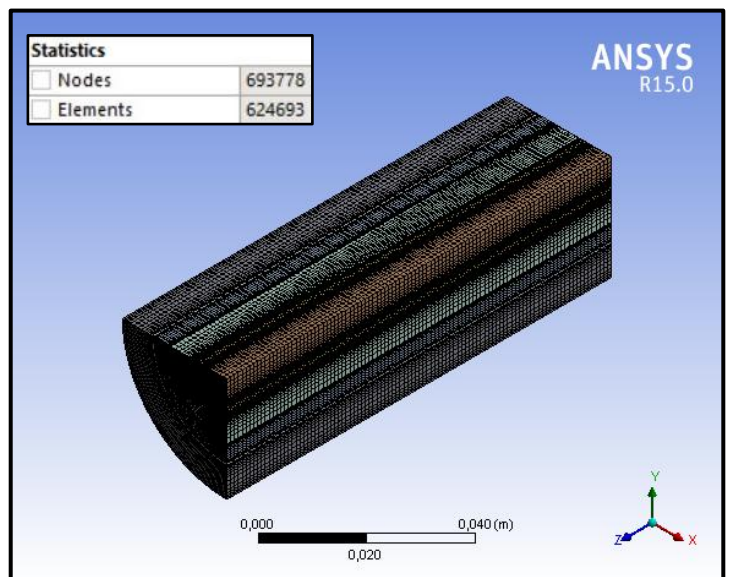
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.6



►► Κατ'όγκον Περιεκτικότητα σε Έγκλεισμα $U_f = 44\%$ ◀◀

$U_f = 44\%$		
DATA		
Reaction Force (P)	200,980	[N]
Maximum Radius (r_{11})	0,027136	[m]
Fixed Support Surface (F)	0,000578	[m ²]
Stress (σ)	347.513,195	[Pa]
Displacement (u)	0,001	[mm]
Length (L)	100,000	[mm]
Deformation (ϵ)	0,00001	-
E_L (ANSYS)	34,751	[GPa]
E_L (Theoretical 11-Phase Model)	33,497	[GPa]
Deviation	3,745	[%]

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.7



7.4.2 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ & ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως παρατηρούμε, από τα παραπάνω αποτελέσματα τα μέτρα ελαστικότητας E_L που υπολογίσαμε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, συγκλίνουν αρκετά με τα αντίστοιχα θεωρητικά, καθώς η απόκλιση κυμαίνεται από 1,6 % έως 3,9 %. Η απόκλιση αυτή μπορεί να οφείλεται σε πολλούς λόγους, όπως η γεωμετρία της μοντελοποίησης του δοκιμίου στο ANSYS Workbench, η κατανομή των πεπερασμένων στοιχείων του πλέγματος, η ακρίβεια της υπολογιστικής μεθόδου που χρησιμοποιεί ο επιλυτής του ANSYS Workbench κτλ. Τα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τις μηχανικές ιδιότητες των σύνθετων υλικών θεωρούν τις επιφάνειες των εγκλεισμάτων ως τέλει μαθηματικές επιφάνειες. Αυτό το γεγονός εισάγει υψηλές διατμητικές παραμορφώσεις στα σύνορα, που είναι κάτι το μη ρεαλιστικό.

Για να διορθώσουμε αυτή την μη ρεαλιστική κατάσταση παρουσιάστηκε σε αυτή την μελέτη ένα νέο μοντέλο, το οποίο έχει έντεκα φάσεις, πέντε από τις οποίες αντιπροσωπεύουν την ενδιάμεση φάση που αναπτύσσεται ως ένα λεπτό συνοριακό στρώμα μεταξύ των φάσεων της μήτρας και της ίνας κατά την διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας. Οι ιδιότητες αυτής της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται από τις ιδιότητες των φάσεων και την ποιότητα της πρόσφυσης μεταξύ αυτών. Αυτό το είδος της ενδιάμεσου φάσεως, έχει μεταβλητές ιδιότητες οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ των ιδιοτήτων της μήτρας και της ίνας.

Έχει παρατηρηθεί ότι η ενδιάμεση φάση η οποία δημιουργείται μεταξύ των ινών και της πολυμερικής μήτρας των σύνθετων υλικών ενισχυμένες με συνεχείς ίνες μονής διεύθυνσης επηρεάζει τις ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Σε αυτή την μελέτη εξήχθησαν πέντε σχέσεις, για το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας και διατμήσεως, για το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, για τον εγκάρσιο και διαμήκη λόγο Poisson.

Οι νέες αυτές σχέσεις δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν συγκρίνονται με τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα καθώς και με άλλες θεωρητικές σχέσεις της βιβλιογραφίας.

1. Theocaris P. S., Spathis G. D., Sideridis E.P., *Fibre Sci and Technology*, Vol.17, p.169 (1982) .
2. Theocaris P. S., Papanicolaou G. C. and Spathis G. D *Fibre Sci. and Technology*, Vol. 15, p.187(1981).
3. Papanicolaou G. C. Theocaris P. S. and Spathis G. D. *Colloid and Polymer Science*, Vol. 258, 11, p. 1231 (1980).
4. Papanikolaou G. C., Paipetis S. A. and Theocaris P. S. , *Colloid and Polymer Science*, Vol. 256, 7, p. 625(1978).
5. Theocaris P. S. and Papanikolaou G. C. , *Fibre Science and Technology*, Vol.12, 6, p.421(1979).
6. G. A. Papadopoulos, E. Sideridis, *Study of Orthotropic materials: The Interphase Model and the Crack Initiation.*, *Archive of Applied Mechanics* 66 (1995) 111-125
7. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, *J. Appl. Polym. Sci.*, 18, p. 1213 (1974).
8. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, *Adsorption of Polymer*, New York, (1974).
9. Yu.S. Lipatov, *Plaste Kautschuk*, 10, p. 738 (1973).
10. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, *Vysokomol, Soedin, B10*, p. 848 (1968).
11. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, *Vysokomol, Soedin*, 8, p. 592, (1966).
12. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, *J. Appl. Polym. Sci.*, 16, p. 2131 (1972).
13. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, *J. Appl. Polymer Sci.*, 20, p. 1787 (1976).
14. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, *Colloid and Polymer Sci.*, 257, 3, p. 239 (1979).
15. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, *Colloid and Polymer Sci.*, 258, 9, pp. 1044-1051 (1980).
16. R.F. Landel and T.L. Smith, *American Rocket Society Jnl.*, p. 599 (1961).
17. S. Turner, *Appl. Mat. Res.*, p. 10, (1965).
18. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, *J. Appl. Pol. Sci.*, 9, p. 2143 (1965).
19. C.A. Kumins and J. Roteman, *J. Pol. Sci.*, 1-A, p. 527 (1963).
20. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, *J. Appl. Pol. Sci.*, 21, p. 689 (1977).
21. S. Strella and P.F. Erhardt, *J. Appl. Pol. Sci.*, 13, p. 1373 (1969).
22. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 569 (1963).
23. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 1281 (1963).
24. Αιμ. Σιδερίδης, “Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιάμεσου φάσεως”, Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
25. Yu.S. Lipatov, *Physical Chemistry of Filled Polymers*, Originally published “*Khimiya*”(Moscow 1977). Translated from the Russian by R.J. Moseley, *International Polymer Science and Technology Monograph No. 2*.
26. Theocaris P. S., “The Interphase and its Influence on the Mechanical Properties of Composites,” *New developments in the Characterization of Polymers in the Solid State*, *Advances in Polymer Science*, H. H. Kausch & H.C. Zachmann Editors, Springer Verlag Publ.(1984); see also P. S. Theocaris, “On the Evaluation of Adhesion Between Phases in Fiber Composites,” *Colloid and Polymer Journal* (1984).
27. P.S. Theocaris, E.P. Sideridis, G.C Papanicolaou, “The Elastic Longitudinal Modulus and Poisson ’s Ratio of Fiber Composites” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol.

- 4, (October 1985).
28. E. Sideridis, "The Transverse Elastic Modulus of Fiber-Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 48, 243-255 (1993).
 29. E. Sideridis, "The In-Plane Shear Modulus of Fiber Reinforced Composites as Defined by the Concept of Interphase" *Composites Science and Technology* 31(1988) 35-53.
 30. E. Sideridis, "The Off-Axis Elastic Constants of Unidirectional Glass Fibre Composites Defined by the Concept of Interphase".
 31. Ekvall J.C. , "ASME" (1961).
 32. Rosen B.W. , "Composites" (1974).
 33. Paul, *Trans. Metallurgical Soc. AIME*, 21. 8, 36 (1960).
 34. J.M. Whitney and M.B. Riley, *AIAA J.* , 1537(1966).
 35. J.C Ekvall, "Structural Behaviour of Monofilament Composites", *Proc. AIAA 6th Structures and Materials Conf.* , AIAA, New York (1965).
 36. J.C. Ekvall, *ASME Paper No.63-WA-223* (1963).
 37. L.B Greszczuk, "Membrane Analysis Methods for Composites Structures", *Douglas Aircraft Co. Inc.* , SM-41543 (1962).
 38. Z. Hashin and B.W. Rosen, *J. Appl. Mech.* , *Trans. Asme*, 86 (1964), 223.
 39. Z. Hashin, *J. Mech. Phys. Solids*, 12 (1965), 119.
 40. Theocaris P.S. , "The Unfolding Model for the Representation of the Interphase Layer in Composites", *Proc. Nat. Acad. Athens*, Vol.59, No. II, pp.87-100 (1984)
 41. Sih G.C. , Hilton P.D. , Badalian R. , Schenberger P.S and Villareal G. , "Fractured Mechanics for Fibrous Composites, *ASTM STP 521* , pp. 98-132 (1973).
 42. Clements L.L and Moore R.L. , *Composites*, 1, p.93 (1978).
 43. Whitney J.M. and Riley M.B. , *AIAA Journal*, 4(9), p.1537 (1966).
 44. L.B. Greszczuk, "Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behaviour of Filamentary Composites", *SPI 21st Conference*, Chicago, IL, Sect. 5-B (1966).
 45. S.W. Tsai, *NASA CR-71* (1964).
 46. R.M. Orgrkiewicz and A.A.M. Sayigh, *J. Strain Analysis*, 6 (1971), 226.
 47. Z. Hashin, *Int. J. Solids Structures*, 6 (1970), 797.
 48. Π. Α. Βουθούνης, «Τεχνική Μηχανική», Αθήνα (1993).
 49. www.epotec.gr (Tg-Glass Transition Temperature for Epoxies).
 50. S.W. Tsai and H.T. Hahn, "Introduction to composite materials", *Technomic* , Lancaster, Pa (1985).
 51. Foye, R.L., "The transverse poisson's ratio of composites", *Journal of Composite Materials*, p.293-295, (1972).
 52. Βγόντζας Ιωάννης, Διπλωματική Εργασία: «Μελέτη των θερμοδυναμικών ελαστικών σταθερών ινών υλικών μέσω της θεωρίας ενδιάμεσου φάσεως», ΕΜΠ (2015).
 53. C. Herakovich, "Composite Laminates with Negative Through – Thickness Poisson's Ratios", *Journal of Composite Materials*, Vol.18, p.447-455, (1984).